



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

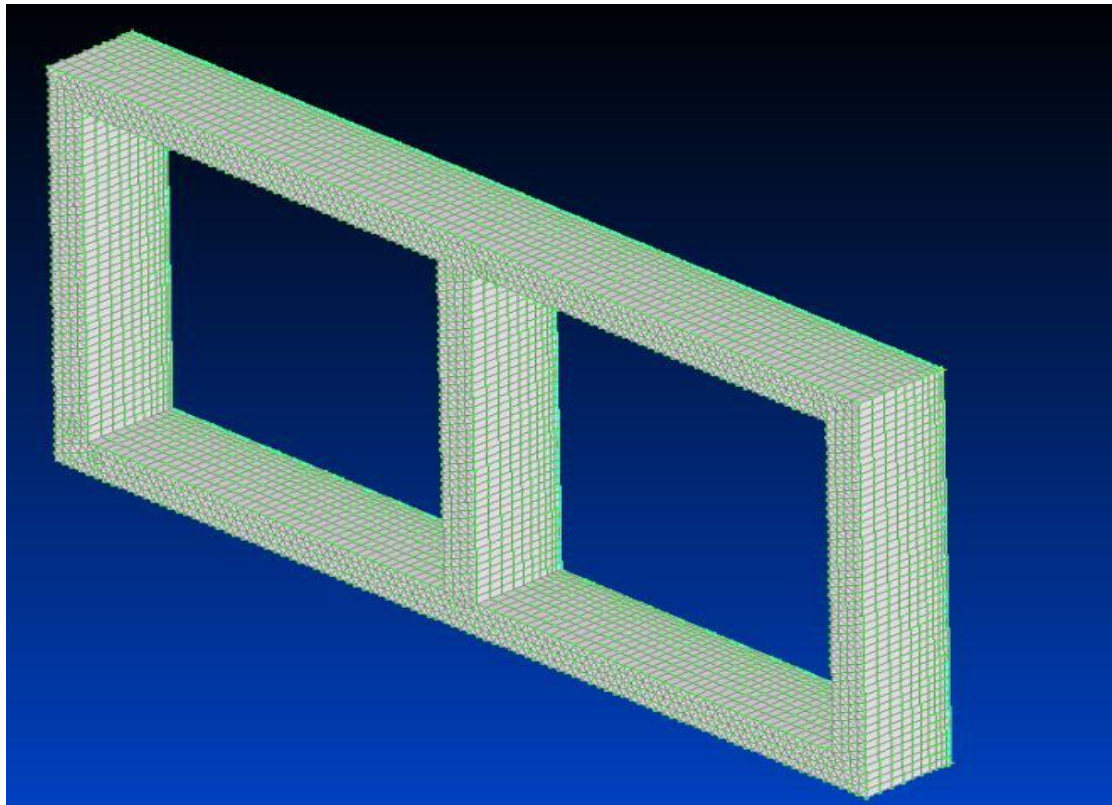
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

## ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΝ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

### ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΟΥΔΑΤΣΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ



ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΙΠΗΡΑΣ Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2012

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται η ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων με εφαρμογή σε ράβδους από αλουμίνιο. Η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε την περίοδο Σεπτέμβριος 2011-Ιούλιος 2012 κατά το ένατο και δέκατο εξάμηνο των προπτυχιακών σπουδών μου.

Η δομή της ύλης έχει ως εξής:

- Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικότερα στοιχεία της θεωρίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων. Η παρουσίαση των ανωτέρω στοιχείων είναι απαραίτητη προκειμένου να είναι διαθέσιμο το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη των βασικών θεωριών της στρέψης.
- Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφεται η ιστορική εξέλιξη των θεωριών που έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να μελετηθεί το πρόβλημα της στρέψης και παρουσιάζεται ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας.
- Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (ή αλλιώς «κλασσικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης) καθώς και η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης ως μερική περίπτωση της προηγούμενης και παρουσιάζεται το σύνολο των μαθηματικών σχέσεων που τις διέπουν.
- Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναλύεται η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων ή αλλιώς «διευρυμένη» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, αποσαφηνίζονται οι βασικές παραδοχές, οι διαφορές με την «κλασσική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης και μορφώνεται το σύνολο των μαθηματικών σχέσεων που τις διέπουν.
- Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία υπολογισμού των γεωμετρικών σταθερών των διατομών μέσω προγραμμάτων H/Y με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.
- Στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο εξετάζονται διάφορα αριθμητικά παραδείγματα, που αφορούν τη μελέτη ποικίλων ράβδων κλειστής διατομής κάτω από στρεπτικές καταπονήσεις. Συγκρίνονται αποτελέσματα τασικών και κινηματικών μεγεθών από εμπορικό λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων-FEM (Nastran-τρειςδιάστατη θεωρία ελαστικότητας και θεωρία κελυφών) με τα αντίστοιχα συνοριακών στοιχείων-BEM (θεωρία δοκού). Τέλος, πραγματοποιείται σύγκριση των 3 βασικών θεωριών στρέψης και παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα για κάθε παράδειγμα.
- Στο 7<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφία στην οποία βασίστηκε η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους επιβλέποντες της διπλωματικής μου κ. Σαπουντζάκη Ευάγγελο (Αναπληρωτή καθηγητή τους Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών) και κ. Τσίπηρα Βασίλειο (Υποψήφιο διδάκτορα) για το χρήσιμο βιβλιογραφικό υλικό, για την καθοδήγηση, την συνεχή επίλυση αποριών μα κυρίως για το ενδιαφέρον και την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου τους γονείς μου για την συνεχή υποστήριξη και βοήθεια όλα αυτά τα χρόνια που μου έδωσαν τη δυνατότητα να πετύχω τους στόχους μου και να φθάσω στο σημείο που είμαι εδώ σήμερα. Τέλος οφείλω να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους μου Μαυράκη Αλέξανδρο, Μαλτέζο Φώτη, Ζέρβα Μανώλη και Αργυρίδη Αμαλία για την υποστήριξη και την βοήθεια στις δύσκολες στιγμές.

Μουδάτσος Εμμανουήλ  
Αθήνα, Ιούλιος 2012

# **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ**

### **ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ .....σελ1-7**

1.1 Βασικοί ορισμοί.....σελ 2

1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα.....σελ 3

1.2.1 Τάσεις.....σελ 3

1.2.2 Μετατοπίσεις-Παραμορφώσεις .....σελ 4

1.2.3 Καταστατικές εξισώσεις-Παραδοχές  
Γραμμικής Ελαστικότητας .....σελ 6

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΙΣΑΓΩΓΗ- ΙΣΤΟΡΙΚΗ**

### **ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ**

### **ΣΤΡΕΨΗΣ.....σελ8-13**

2.1 Βασικές έννοιες.....σελ 9

2.2 Ιστορική αναδρομή.....σελ10

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ**

### **ΡΑΒΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ**

### **ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ**

### **ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ.....σελ14-35**

3.1 Βασικές έννοιες.....σελ15

3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις .....σελ20

3.3 Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές  
συνθήκες.....σελ27

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ**  
**ΡΑΒΔΟΥ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ**  
**ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ**

**ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ.....σελ36-49**

4.1 Βασικές έννοιες.....σελ37

4.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....σελ38

4.3 Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές  
εξισώσεις ισορροπίας.....σελ42

4.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας,  
συνοριακές συνθήκες.....σελ42

4.5 Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης,  
δευτερογενείς διατμητικές τάσεις.....σελ46

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**  
**ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ.....σελ50-55**

5.1 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών  
σταθερών  $I_p, C_s$  με συνοριακή ολοκλήρωση.....σελ51

5.2 Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού  
διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$  με πεδιακή  
ολοκλήρωση.....σελ54

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ-**  
**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ...σελ56-142**

6.1 Εισαγωγή.....σελ57

6.2 Επιλογή υλικού-Χαρακτηριστικά αλουμινίου...σελ58

6.2.1 Κανονιστικές τιμές.....	σελ58
6.2.2 Χαρακτηριστικά του αλουμινίου.....	σελ58
6.3 Αριθμητική εφαρμογή 1.....	σελ60
6.4 Αριθμητική εφαρμογή 2.....	σελ82
6.4.1 Γεωμετρικές σταθερές.....	σελ86
6.4.2 Κινηματικά μεγέθη.....	σελ86
6.4.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία....	σελ86
6.4.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ87
6.4.2.3 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία....	σελ88
6.4.3 Τασικά μεγέθη.....	σελ90
6.4.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία....	σελ91
6.4.3.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ91
6.4.3.3 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία....	σελ93
6.4.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης.....	σελ95
6.5 Αριθμητική εφαρμογή 3.....	σελ99
6.5.1 Κινηματικά μεγέθη (πρόβολος)	
6.5.1.1.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....	σελ100

6.5.1.1.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ101
6.5.1.2 Τασικά μεγέθη (πρόβολος).....	σελ103
6.5.1.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....	σελ103
6.5.1.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ104
6.5.1.3 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης (πρόβολος).....	σελ106
6.5.2.1 Κινηματικά μεγέθη (αμφίπακτη).....	σελ109
6.5.2.1.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....	σελ109
6.5.2.1.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ110
6.5.2.2 Τασικά μεγέθη.....	σελ111
6.5.2.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....	σελ111
6.5.2.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....	σελ113
6.5.2.3 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης.....	σελ115
6.6 Αριθμητική εφαρμογή 4.....	σελ118
6.6.1 Γεωμετρικές σταθερές.....	σελ119

6.6.2 Κινηματικά μεγέθη.....σελ	120
6.6.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....σελ	120
6.6.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....σελ	121
6.6.3 Τασικά μεγέθη.....σελ	123
6.6.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....σελ	123
6.6.3.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία.....σελ	125
6.6.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης.....σελ	128
6.7 Αριθμητική εφαρμογή 5.....σελ	131
6.7.1 Γεωμετρικές σταθερές.....σελ	132
6.7.2 Κινηματικά μεγέθη.....σελ	132
6.7.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....σελ	132
6.7.2.2 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία.....σελ	133
6.7.3 Τασικά μεγέθη.....σελ	135
6.7.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία.....σελ	135

6.7.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών  
στρέψης.....σελ139

6.8 Βασικά συμπεράσματα.....σελ 143

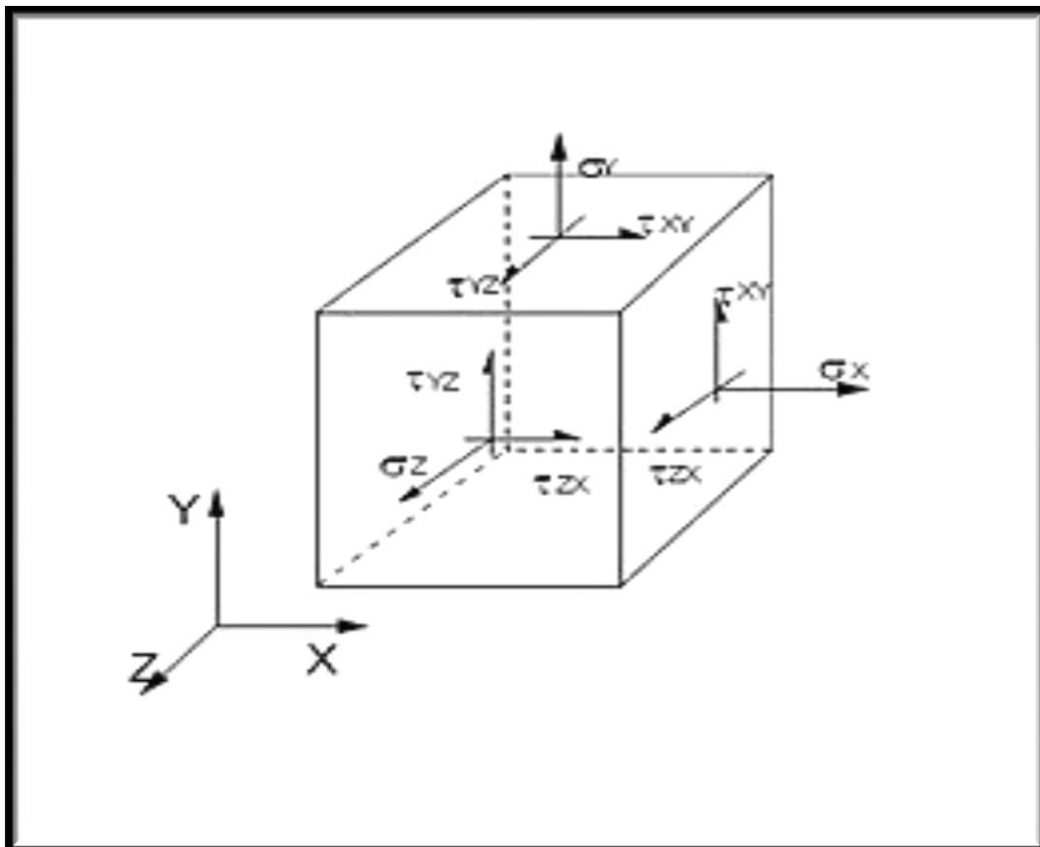
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7:**

Βιβλιογραφία.....σελ148-151



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



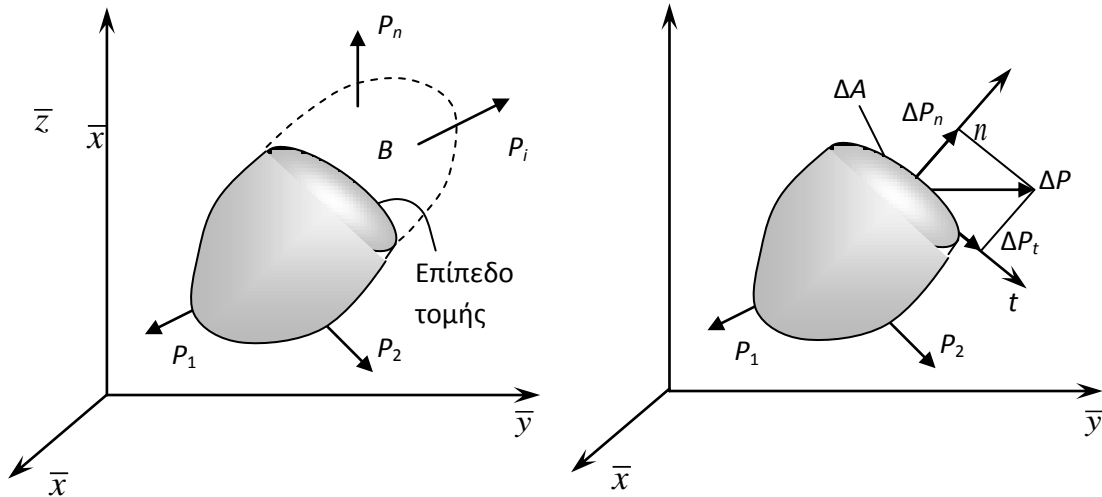
## 1.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε το στερεό παραμορφώσιμο σώμα, με δομή χωρίς ασυνέχειες του σχήματος (1.1), επί του οποίου επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις (καθολικές – επιφανειακές). Αποκόπτοντας και απομονώνοντας το αριστερό τμήμα, εμφανίζεται στην επιφάνεια της επίπεδης τομής μια συνισταμένη εσωτερική δύναμη  $\Delta F$ , η οποία είναι ισοπολική των δυνάμεων του δεξιού τμήματος. Συμβολίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας τομής ως  $A$ , ορίζουμε ως τάση  $\sigma$  το όριο του λόγου

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1)$$

όπου

$\Delta A$  : ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας που τείνει να μηδενιστεί



**Σχήμα 1.1** Επίπεδη τομή σε ελαστικό σώμα.

Στη γενική περίπτωση, όπου η δύναμη  $\Delta P$  έχει τυχαία διεύθυνση, ορίζουμε το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{n}$ , οπότε αναλύοντας το διάνυσμα της δύναμης σε μια συνιστώσα παράλληλη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_n$ ) και μια συνιστώσα κάθετη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_t$ ) και άρα συνεπίπεδη στην επιφάνεια  $A$ , εξάγουμε τους παρακάτω ορισμούς :

Ορθή Τάση : 
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \quad (1.2.a)$$

Διατμητική Τάση : 
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \quad (1.2.β)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τη διάτμηση ως εξής :

**Διάτμηση είναι το εντατικό αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις σε συνδυασμό με τις ορθές τάσεις αποκαθιστούν την ισορροπία για κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός**

στερεού σώματος, ενώ ταυτόχρονα είναι υπαίτιες για εσωτερικές παραμορφώσεις, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα μηχανισμό μεταβίβασης της εξωτερικής καταπόνησης του σώματος (καθολικές – επιφανειακές δυνάμεις) στο εσωτερικό του.

Είναι λοιπόν προφανές ότι κατά τον σχεδιασμό των έργων πολιτικού μηχανικού είναι απαραίτητος ο ακριβέστερος, όσο το δυνατόν, υπολογισμός των εσωτερικών εντατικών μεγεθών (ορθές και διατμητικές τάσεις), καθώς και των προκαλούμενων παραμορφώσεων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η **Θεωρία της Ελαστικότητας**. Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις όποιες παραδοχές κάνει για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως **δεδομένα την γεωμετρία**, τις **συνθήκες στήριξης**, την **εξωτερική φόρτιση** και τις **μηχανικές ιδιότητες του υλικού** μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων, των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο του.

## 1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα

Για τον υπολογισμό των τάσεων και των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων χρησιμοποιείται η θεωρία της ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο.

### 1.2.1 Τάσεις

Για τον καθορισμό της έννοιας της τάσεως στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, μορφής κύβου με απειροστές διαστάσεις ( $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$ ), οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  (βλ. σχήμα 1.1). Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκούνται δυνάμεις οι οποίες εάν διαιρεθούν με την επιφάνεια και αναλυθούν σε συνιστώσες παράλληλες στους άξονες  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες των τάσεων σε μητρική μορφή

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} & \tau_{\bar{x}\bar{y}} & \tau_{\bar{x}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{y}\bar{x}} & \sigma_{\bar{y}\bar{y}} & \tau_{\bar{y}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}\bar{x}} & \tau_{\bar{z}\bar{y}} & \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (1.2.1.1)$$

όπου

$\sigma_{ii}$  ( $i = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ) : οι ορθές τάσεις

$\tau_{ij}$  ( $i, j = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ) : οι διατμητικές τάσεις

- Οι δείκτες  $i, j$  στον συμβολισμό  $\tau_{ij}$  δηλώνουν αντίστοιχα τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο και τη διεύθυνση του διανύσματος της συνιστώσας των τάσεων.
- Ορίζουμε ως θετικές ορθές τάσεις τις εφελκυστικές και ως αρνητικές τις θλιπτικές. Όσον αφορά τις διατμητικές, θεωρούμε ότι αυτές είναι θετικές εάν έχουν την φορά των θετικών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος, εφόσον η αντίστοιχη θετική ορθή τάση έχει κι αυτή φορά θετικού άξονα.

Το παραπάνω μητρώο αποτελεί ένα συμμετρικό τανυστή 2ας τάξεως και την μεταβολή των τάσεων την εκφράζουμε με το ανάπτυγμα Taylor διατηρώντας τους 2 πρώτους όρους. Εφαρμόζοντας στον στοιχειώδη κύβο τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τις τρεις διευθύνσεις  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Διεύθυνση } \bar{x} : \frac{\partial \sigma_{\bar{x}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{x}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + p_{\bar{x}} = 0 \quad (1.2.1.2\alpha)$$

$$\text{Διεύθυνση } \bar{y} : \frac{\partial \sigma_{\bar{y}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + p_{\bar{y}} = 0 \quad (1.2.1.2\beta)$$

$$\text{Διεύθυνση } \bar{z} : \frac{\partial \sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + p_{\bar{z}} = 0 \quad (1.2.1.2\gamma)$$

όπου

$p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}, p_{\bar{z}}$  : οι συνιστώσες του διανύσματος της δύναμης πεδίου ανά μονάδα όγκου

Και σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = \tau_{\bar{y}\bar{x}}, \tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{\bar{z}\bar{y}}, \tau_{\bar{z}\bar{x}} = \tau_{\bar{x}\bar{z}}$$

Τέλος οι σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων που δρουν σε ένα σημείο  $O$  και του διανύσματος τάσης  $\sigma_n$  που δρα σε επίπεδο τυχούσας διεύθυνσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα  $\vec{n}$  που διέρχεται από το  $O$  είναι:

$$\tau_{\bar{x}n} = \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \tau_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \tau_{\bar{x}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (1.2.1.3\alpha)$$

$$\tau_{\bar{y}n} = \tau_{\bar{y}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \tau_{\bar{y}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (1.2.1.3\beta)$$

$$\tau_{\bar{z}n} = \tau_{\bar{z}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \tau_{\bar{z}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (1.2.1.3\gamma)$$

Η παραπάνω σχέση (1.2.1.3α), όπως θα δούμε παρακάτω (3<sup>ο</sup>-4<sup>ο</sup> κεφάλαιο ) χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις συνοριακές συνθήκες στις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων που θα διατυπωθούν. Παρομοίως, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τη διαμήκη διεύθυνση της ράβδου (εξ. (1.2.1.2α)) χρησιμεύει στον υπολογισμό των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.

## 2.2.2 Μετατοπίσεις – Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό σώμα στηρίζεται έτσι ώστε να εμποδίζονται οι μετακινήσεις στερεού σώματος, υπό την επενέργεια εξωτερικών φορτίσεων το σώμα παραμορφώνεται και επομένως κάθε υλικό σημείο του θα υφίσταται μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις αυτές περιγράφονται από το λεγόμενο **πεδίο μετατοπίσεων**, δηλαδή συναρτήσεις της θέσης του σημείου  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  που εκφράζουν τις μετατοπίσεις κατά τις τρεις διευθύνσεις  $\bar{x}, \bar{y}$  και  $\bar{z}$

$$\text{Μετατόπιση κατά } \bar{x} : u_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (1.2.2.1\alpha)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } \bar{y} : u_{\bar{y}} = u_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (1.2.2.1\beta)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } \bar{z} : u_{\bar{z}} = u_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (1.2.2.1\gamma)$$

Για να συσχετίσουμε τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις θεωρούμε πάλι τον στοιχειώδη κύβο, διαστάσεων  $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$ . Στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας υιοθετούμε την **παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων** (γεωμετρικά γραμμική ανάλυση). Έτσι ορίζουμε τις ορθές παραμορφώσεις ως τον λόγο μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος αγνοώντας παράλληλα όλους τους μη γραμμικούς όρους που προκύπτουν. Π.χ. κατά τη διεύθυνση  $\bar{x}$  θα είναι

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\Delta d\bar{x}}{d\bar{x}} \quad (1.2.2.2)$$

Όπως και με τις συνιστώσες των τάσεων, έτσι κι εδώ εκφράζουμε τη μεταβολή των τιμών των μετατοπίσεων από σημείο σε σημείο με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor  $\left( \Delta d\bar{x} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right)$ . Άρα τελικά προκύπτει

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} \quad (1.2.2.3\alpha)$$

$$\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \quad (1.2.2.3\beta)$$

$$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \quad (1.2.2.3\gamma)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την στροφή των αρχικά κάθετων εδρών του κύβου. Ορίζουμε τις διατμητικές παραμορφώσεις

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} = \gamma_{\bar{y}\bar{x}} \quad (1.2.2.3\delta)$$

$$\gamma_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{z}} = \gamma_{\bar{z}\bar{y}} \quad (1.2.2.3\epsilon)$$

$$\gamma_{\bar{z}\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \quad (1.2.2.3\sigma\tau)$$

Όμοια λοιπόν με τις τάσεις, ορίζεται ο συμμετρικός τανυστής 2<sup>ης</sup> τάξης, ο οποίος καθορίζει πλήρως την παραμόρφωση που υφίσταται το σώμα σ' ένα υλικό του σημείο με συντεταγμένες  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{z}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{x}\bar{y}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{y}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{y}\bar{z}} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{z}\bar{x}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{z}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (1.2.2.4)$$

### 2.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας

Με όσα έχουν αναφερθεί συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης ελαστικότητας προσδιορίζεται από 15 αγνώστους :

**Έξι συνιστώσες τάσεων**

**Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων**

**Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων**

Όμως μέχρι τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο 9 εξισώσεις :

**Τρεις εξισώσεις ισορροπίας**

**Έξι εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων**

Επομένως το πρόβλημα είναι 6 φορές αόριστο. Στη θεωρία της ελαστικότητας αίρεται αυτή η αοριστία με την εισαγωγή σχέσεων που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις**. Στην ουσία εκφράζουν τις μηχανικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό.

**Στο εξής θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές :**

- Το υλικό είναι **ομοιογενές**, δηλαδή οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε σημείο του υλικού.
- Το υλικό είναι **ισότροπο**, δηλαδή οι ιδιότητες ενός σημείου του υλικού παραμένουν ίδιες, ανεξαρτήτως της διεύθυνσης την οποία εξετάζουμε.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό**. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα των τάσεων είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών των παραμορφώσεων. Επίσης με τον μηδενισμό των επιβαλλόμενων τάσεων το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.2.3.1)$$

όπου ισχύει η σύμβαση πρόσθεσης των δεικτών

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι καταστατικές εξισώσεις αποδεικνύεται ότι λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}}) \right] \quad (1.2.3.2\alpha)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} + \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}) \right] \quad (1.2.3.2\beta)$$

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}) \right] \quad (1.2.3.2\gamma)$$

$$\tau_{\overline{xy}} = G \cdot \gamma_{\overline{xy}} \quad (1.2.3.2.\delta)$$

$$\tau_{\overline{yz}} = G \cdot \gamma_{\overline{yz}}$$

(1.2.3.2.ε)

$$\tau_{\overline{zx}} = G \cdot \gamma_{\overline{zx}} \quad (1.2.3.2.\sigma\tau)$$

ή

$$\varepsilon_{\overline{xx}} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{\overline{xx}} - \nu \cdot (\sigma_{\overline{yy}} + \sigma_{\overline{zz}})]$$

(1.2.3.3.α)

$$\varepsilon_{\overline{yy}} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{\overline{yy}} - \nu \cdot (\sigma_{\overline{zz}} + \sigma_{\overline{xx}})]$$

(1.2.3.3.β)

$$\varepsilon_{\overline{zz}} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{\overline{zz}} - \nu \cdot (\sigma_{\overline{xx}} + \sigma_{\overline{yy}})] \quad (1.2.3.3.\gamma)$$

$$\gamma_{\overline{xy}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\overline{xy}} \quad (1.2.3.3.\delta)$$

$$\gamma_{\overline{yz}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\overline{yz}} \quad (1.2.3.3.\varepsilon)$$

$$\gamma_{\overline{zx}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\overline{zx}}$$

(1.2.3.3.σ\tau)

όπου

E : μέτρο ελαστικότητας

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} : \text{μέτρο διάτμησης}$$

ν : λόγος Poisson (0 &lt; ν &lt; 0,5)

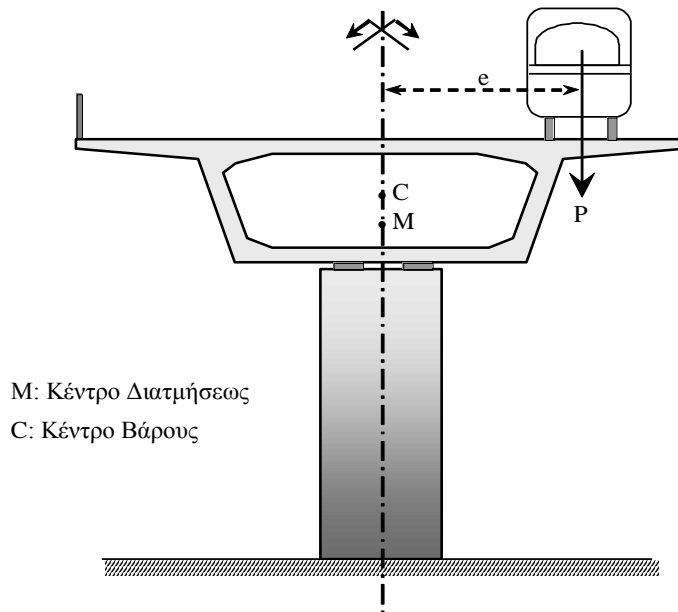




## Εισαγωγή-Ιστορική αναδρομή

### 2.1 Βασικές Έννοιες

**Στρέψη** ράβδου ονομάζεται η εντατική κατάσταση κατά την οποία ένα ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε μια διατομή έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου και το διάνυσμα της ροπής  $M_t$  να έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Η στρεπτική καταπόνηση, στους ραβδόμορφους φορείς, εμφανίζεται όταν η διεύθυνση του διανύσματος της εξωτερικής φόρτισης δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της (βλ. σχήμα 3.1.1). Η στρέψη είναι μια μορφή διατμητικής καταπόνησης. Το εντατικό αποτέλεσμα αυτής είναι η ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στο επίπεδο των διατομών προκαλώντας τη στρέβλωσή τους.



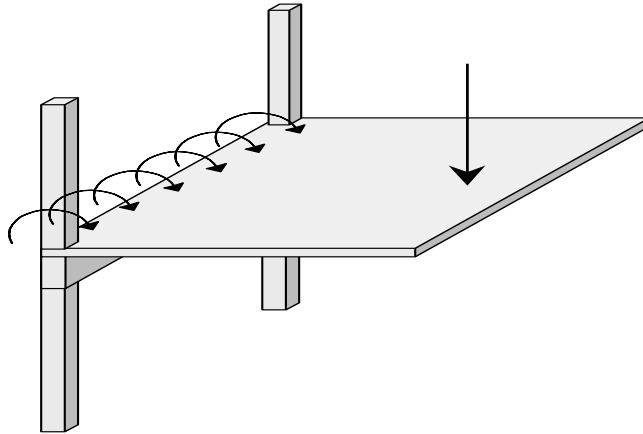
M: Κέντρο Διατμήσεως  
C: Κέντρο Βάρους

**Σχήμα 2.1.1** Ράβδος υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διατμήσεως φόρτιση.

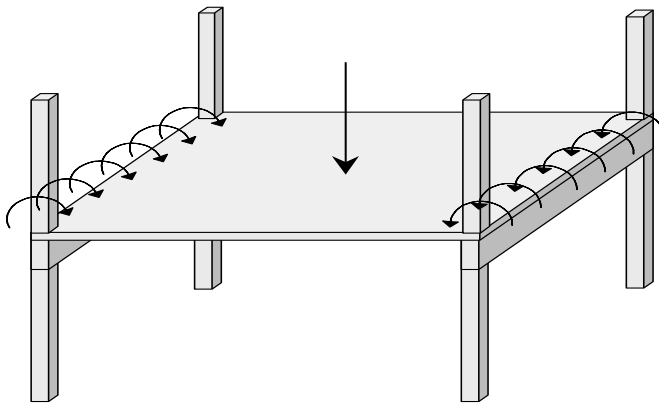
Διακρίνονται δυο κατηγορίες στρεπτικής έντασης :

- **Η άμεση στρέψη**, η οποία είναι απαραίτητη για τη στατική ισορροπία του φορέα. Ένα παράδειγμα άμεσης στρεπτικής έντασης παρουσιάζεται στο σχήμα (3.1.2), όπου παρατηρούμε ότι οι αναπτυσσόμενες στρεπτικές ροπές είναι απαραίτητες για την στατική ισορροπία του προβόλου. Στην περίπτωση που δεν υπήρχε στρεπτική πάκτωση ο φορέας θα ήταν μηχανισμός.
- **Η έμμεση στρέψη**, η οποία δεν είναι απαραίτητη για την στατική ισορροπία του φορέα, αλλά αναπτύσσεται από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων. Οφείλεται δηλαδή στην παρεμπόδιση της γωνιακής παραμόρφωσης άλλων φορέων, οι οποίοι όμως μπορούν να ισορροπούν και χωρίς τις αναπτυσσόμενες στρεπτικές ροπές. Παράδειγμα έμμεσης στρέψης αποτελεί μια ακραία δοκός, μορφής πλακοδοκού. Η κάμψη της μονολιθικά

συνδεδεμένης πλάκας μεταφράζεται σε στρεπτική καταπόνηση της δοκού (βλ. σχήμα 3.1.3). Εάν ένα στοιχείο από οπλισμένο σκυρόδεμα που καταπονείται σε έμμεση στρέψη ρηγματωθεί, τότε η δυστρεψία του μειώνεται σημαντικά. Η μείωση της δυστρεψίας γίνεται πιο έντονη λόγω των φαινομένων του ερπυσμού και της συστολής ξηράνσεως. Στο παράδειγμα του σχήματος (3.1.3), η μείωση της δυστρεψίας των δοκών των δυο πλαισίων συνεπάγεται την ανακατανομή της έντασης, δηλαδή τη μείωση της στρεπτικής έντασης των δοκών και την ταυτόχρονη αύξηση της καμπτικής έντασης της πλάκας.



**Σχήμα 2.1.2** Δοκός υποβαλλόμενη σε έμμεση στρέψη



**Σχήμα 2.1.3** Δοκός υποβαλλόμενη σε έμμεση στρέψη

## 2.2 Ιστορική αναδρομή

Η στρέψη αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα στην ανάλυση των κατασκευών και για το λόγο αυτό καθίσταται αναγκαία και χρήσιμη η διερεύνηση των προβλημάτων που σχετίζονται με αυτή. Το πρόβλημα της στρέψης αποτελεί αντικείμενο μελέτης για ερευνητές και μηχανικούς για πολλές δεκαετίες καθώς δεν εμφανίζεται μόνο στον κλάδο του πολιτικού μηχανικού αλλά και σε διάφορους άλλους κλάδους όπως η αεροναυπηγική, η μηχανολογία και η μηχανική πλοίων. Οι

απαρχές της θεωρίας της στρέψης τοποθετούνται στο 1784 όπου τότε πρώτος ο Coulomb μελέτησε την απλούστερη περίπτωση ράβδου με κυκλική ή δακτυλιοειδή διατομή και προέκυψε η τεχνική θεωρία στρέψης η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι οι διατομές της ράβδου στρέφονται σαν επίπεδοι στερεοί δίσκοι. Η θεωρία αυτή, όμως, όπως διαπιστώθηκε αργότερα, αδυνατεί να εφαρμοστεί αξιόπιστα σε ράβδους τυχούσας διατομής.

Καθώς το πρόβλημα παρέμενε για ράβδους τυχούσας διατομής, το 1855 ο St.Venant στηριζόμενος στη θεωρία του Coulomb και κάνοντας τις κατάλληλες τροποποιήσεις κατάφερε να επιλύσει ορθά ράβδους τυχούσας διατομής. Ο St.Venant μελέτησε ευθύγραμμες πρισματικές ράβδους στις οποίες επιβάλλονταν ίσες και αντίθετες στρεπτικές ροπές στα άκρα και οι οποίες διέπονταν από τη (γεωμετρικά) γραμμική θεωρία ελαστικότητας. Η θεωρία του προέβλεπε ότι η διατομή ράβδου υποβαλλόμενης σε στρέψη δεν παραμένει επίπεδη αλλά στρεβλώνει. Η θεωρία είναι γνωστή ως θεωρία ομοιόμορφης στρέψης και ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται λόγω συντοκικών συνθηκών ή άλλων κατασκευαστικών περιορισμών και ότι η επιβαλλόμενη στρεπτική φόρτιση παραμένει σταθερή κατά μήκος της ράβδου.

Στην περίπτωση κατά την οποία η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω συντοκικών στήριξης ή υπάρχει μεταβολή της στρεπτικής έντασης τότε η στρέψη παύει να είναι ομοιόμορφη, χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη και αναπτύσσονται ορθές και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω των οποίων αναπτύσσονται το δίρροπο στρέβλωσης ( $M_w$ ) και η δευτερογενής στρεπτική ροπή ( $M_{ts}$ ) αντίστοιχα. Η θεωρία αυτή είναι γνωστή ως θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Οι συνέπειες από την παρεμπόδιση της στρέβλωσης έγιναν πρώτα αντιληπτές από τον Marguerre (1940).

Το 1963 ο Vlasov μελετώντας ανοικτές λεπτότοιχες διατομές υπό ανομοιόμορφη στρέψη απέδειξε ότι η στρέβλωση της διατομής είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στροφής κατά μήκος της ράβδου  $\theta'_x$ . Η απόδειξη αυτή βασίστηκε στη θεμελιώδη υπόθεση του ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις κατά μήκος της μέσης γραμμής των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη (λεπτότοιχη) διατομή είναι μηδενικές. Με τη θεώρηση αυτή, όμως, στην καθολική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου λαμβάνονταν υπόψη μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις ενώ οι δευτερογενείς υπολογίζονταν μετά την επίλυσή της με αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων η οποία είναι σημαντική τουλάχιστον στην περίπτωση ράβδων κλειστής διατομής (Mokos and Sapountzakis (2011) και Murin and Kutis (2008)). Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η επιρροή αυτή υιοθετείται ένα νέο κινηματικό μέγεθος για να εκφράσει το μέγεθος της

στρέβλωσης (πρωτογενής συστροφή  $(\theta_x^P)'$  ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης  $\eta_x$ , το οποίο δεν είναι ανάλογο με τη συστροφή  $\theta'_x$ . Η θεωρία αυτή παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko (Murin and Kutis 2008, Roik and Sedlacek 1966, Rubin 2005) και παραβιάζει, επομένως, και αυτή την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου κατά τη διαμήκη διεύθυνση και την αντίστοιχη συντοκική συνθήκη εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Κατά αυτό τον τρόπο προέκυψε η ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με τη χρήση ενός στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$  ο οποίος στην περίπτωση διπλά συμμετρικών διατομών, όπου αποδεικνύεται ότι στρεπτικές και καμπτικές καταπονήσεις αποζευγνύονται (Slivker 2007, Laudiero and Savoia 1990),

υπολογίζεται αριθμητικά στις εργασίες των Sapountzakis and Mokos (2009) με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων και του Kraus (2007) με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

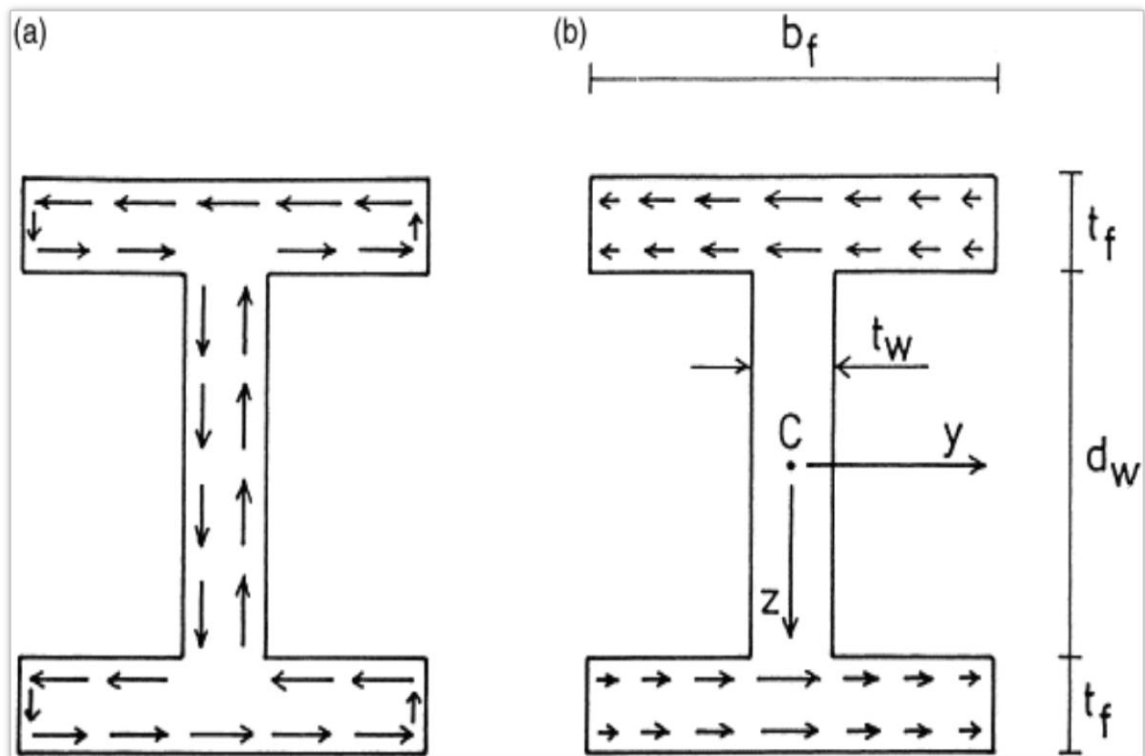
Μελετώντας την υπάρχουσα διεθνή βιβλιογραφία, διαπιστώνεται ότι **το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων δεν έχει μελετηθεί τόσο όσο το πρόβλημα της «κλασικής» ανομοιόμορφης στρέψης**. Το 1961 ο Heilig παρουσίασε μια θεωρητική διατύπωση του προβλήματος ενώ το 1966 οι Roik and Sedlacek έδωσαν αναλυτική λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Δυνάμεων. Ο Rubin (2005) βασιζόμενος στη μεθοδολογία των Roik and Sedlacek διατύπωσε Εξίσωση Τριών Σημείων για την επίλυση συνεχών δοκών με ενδιάμεσες στηρίξεις, κατανεμημένες ή συγκεντρωμένες φορτίσεις. Το 2001 οι Roberts and Al-Ubaidi έλυσαν αναλυτικά το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ως αγνώστους την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρεπτική γωνία στροφής και επιβεβαίωσαν πειραματικά τη μεθοδό τους σε FRP ράβδους διατομής διπλού ταυ. Οι Park (1997), Emme Erkmen and Mohareb (2006), Laudiero and Savoia (1990) χρησιμοποίησαν τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ενώ οι Sapountzakis and Mokos (2009) τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων για επίλυση στατικών προβλημάτων. Ο Tralli (1986) διατύπωσε υβριδική μεθοδολογία Πεπερασμένων Στοιχείων για στατική ανάλυση ράβδων, ενώ οι Kollar (2001), Kim and Kim (2005) εφάρμοσαν προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων ελεύθερων ταλαντώσεων ράβδου. Τέλος πολλοί ερευνητές διερευνούσαν προβλήματα λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων αλλά χωρίς να εισάγουν στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης όπως οι El Fatmi (2007), Back and Will (1998), Chen and Blandford (1989), Gendy (1992), Hu (1996), Cortinez and Piovan (2002), Machado and Cortinez (2007), Vo and Lee (2009), Simo and Vu-Quoc (1991), Gruttmann (2000) κλπ. Όπως θα διαπιστώσουμε στα παραδείγματα του 6<sup>ου</sup> κεφαλαίου προκύπτει σημαντικό σφάλμα στον υπολογισμό μέγιστων τασικών μεγεθών σε περίπτωση που δεν εισάγουμε έναν κατάλληλο στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή στη δευτερογενή στρεπτική αντίσταση(Its).

**Σκοπός** της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετήσει και να **αναδείξει την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων**, μέσω της εφαρμογής και της σύγκρισης των αποτελεσμάτων της ομοιόμορφης, της ‘κλασικής’ και της ‘διευρυμένης’ θεωρίας, **σε ράβδους κλειστής διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος** υποβαλλόμενες σε διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών και συνθηκών φόρτισης. Μελετώνται ράβδοι κλειστής διατομής καθώς πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική σε αυτές. Η ανάλυση περιορίζεται σε διατομές διπλής συμμετρίας καθώς σε αυτήν την περίπτωση αποζηυγνύεται το στρεπτικό με το καμπτοδιατμητικό πρόβλημα. Οι υπολογισμοί θα πραγματοποιηθούν με τη μέθοδο της ραβδοστατικής ανάλυσης και τα αποτελέσματα που θα εξαχθούν θα συγκριθούν με αυτά της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας και θεωρίας κελυφών. Επιδιώκουμε επίσης να αναδείξουμε την αξιοπιστία της μεθόδου της ραβδοστατικής που έχει μεγάλη πρακτική αξία στην ανάλυση φορέων Πολιτικού Μηχανικού. Ο υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών για κάθε διατομή θα πραγματοποιηθεί με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων η οποία αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο και αξιόπιστο εργαλείο στην ανάλυση διατομών τυχόντος σχήματος. Η επίλυση των ράβδων που μελετήθηκαν πραγματοποιείται με τη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης που ανήκει στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων. Τα **συμπεράσματά**

που θα προκύψουν θα βασίζονται όχι μόνο στη σύγκριση κινηματικών και εντατικών μεγεθών αλλά κυρίως στη σύγκριση των τασικών μεγεθών.

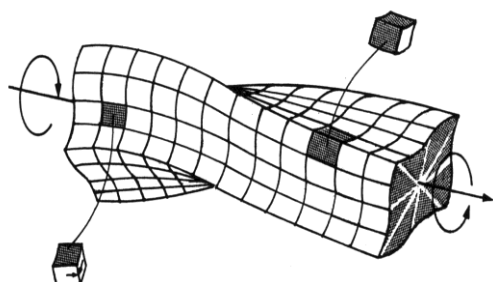
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

### ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



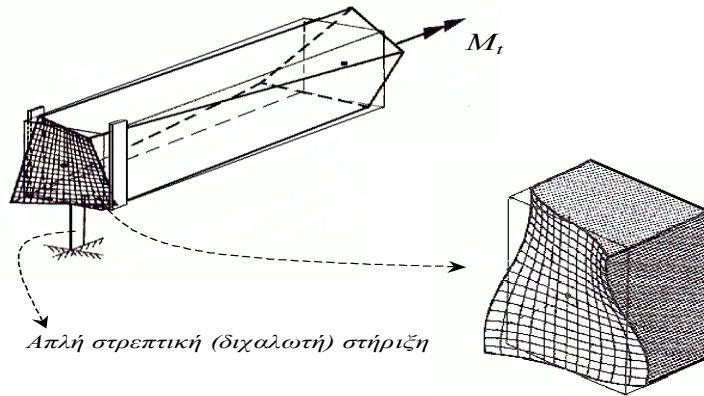
### 3.1 Βασικές Έννοιες

Η ανάπτυξη της θεωρίας της στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση της ράβδου με κυκλική διατομή, στηριζόμενος στην παραδοχή ότι επίπεδες διατομές στην απαραμόρφωτη κατάσταση παραμένουν επίπεδες και κατά τη παραμορφωμένη κατάσταση. Η προκύπτουσα θεωρία είναι η λεγόμενη Τεχνική Θεωρία Στρέψης σύμφωνα με την οποία η στρεπτική στιβαρότητα είναι ανάλογη της πολικής ροπής αδράνειας της διατομής  $I_p$ . Η παραδοχή αυτή όμως ισχύει μόνο για την περίπτωση **κυκλικών και κυκλικών δακτυλιοειδών** διατομών. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο απέτυχαν οι μετέπειτα προσπάθειες εφαρμογής της θεωρίας σε ράβδους τυχούσας διατομής. Τελικά η λύση στο πρόβλημα της στρέψης ραβδόμορφων στοιχείων τυχούσας διατομής δόθηκε από το Γάλλο μηχανικό St. Venant (1855) ο οποίος βασιζόμενος στην αντίστοιχη θεωρία Coulomb εισήγαγε ορισμένες τροποποιήσεις και απέδειξε ότι **όταν μια ράβδος μη κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη, μια εγκάρσια διατομή η οποία ήταν επίπεδη πριν από τη στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη**. Η διατομή αυτή υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης υπόκειται σε **στρέβλωση** (βλ. σχήμα 3.1.1) ενώ η στρεπτική στιβαρότητα είναι ανάλογη της λεγόμενης στρεπτικής σταθεράς κατά St. Venant  $I_t$  (πρωτογενής στρεπτική σταθερά).



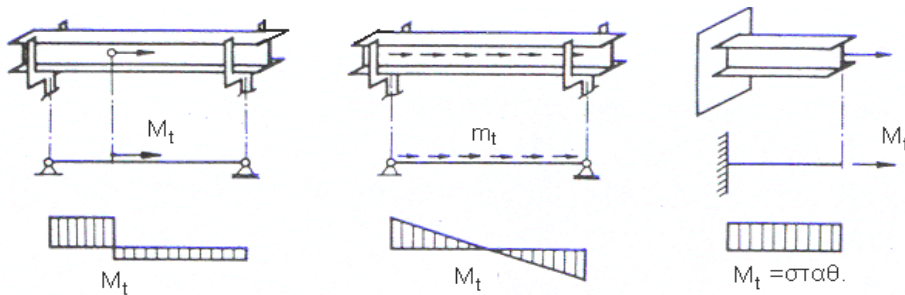
**Σχήμα 3.1.1** Στρέβλωση διατομών λόγω στρέψης

Σύμφωνα με τη θεωρία του Saint Venant η στρέβλωση των διατομών, λόγω της στρεπτικής έντασης, μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεμπόδιστα (βλ. σχήμα 3.1.2) και στην περίπτωση αυτή το είδος της στρέψης ονομάζεται **ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη Saint Venant**. Στην ομοιόμορφη στρέψη όλες οι διατομές της ράβδου αναπτύσσουν την ίδια στρέβλωση με αποτέλεσμα να υφίστανται μόνο διαμήκεις μετατοπίσεις χωρίς να αναπτύσσονται ορθές παραμορφώσεις. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην δημιουργούνται διαμήκεις ορθές τάσεις. Η επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται εξολοκλήρου από μια κλειστή ροή (ροή Bredt) στρεπτικών διατμητικών τάσεων που καλούνται **διατμητικές τάσεις Saint Venant** (πρωτογενείς διατμητικές τάσεις).



**Σχήμα 3.1.2** Ομοιόμορφη στρέψη κατά Saint-Venant, όπου η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται.

Εν γένει η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν επαρκεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις η στρέβλωση των διατομών οι οποίες υπόκεινται σε στρέψη **παρεμποδίζεται** είτε λόγω **συνθηκών στήριξης** (π.χ. πάκτωση στην ακραία διατομή), είτε λόγω **συνθηκών φόρτισης** (μεταβολή δηλαδή της στρεπτικής ροπής κατά μήκος της ράβδου όπως στις περιπτώσεις π.χ. συγκεντρωμένου ή κατανεμημένου στρεπτικού φορτίου).



**Σχήμα 3.1.3** Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης

Στη περίπτωση αυτή η στρέβλωση παύει να είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου (βλ. σχήμα 3.1.3) και η στρέψη ονομάζεται **ανομοιόμορφη**. Συνεπώς αναπτύσσονται ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες της μεταβολής της στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου ενώ εν γένει μεταβάλλονται και αυτές κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Το φαινόμενο ανάπτυξης ορθών τάσεων γίνεται πιο έντονο κοντά στις θέσεις όπου παρεμποδίζεται η στρέβλωση και «αποσβέννυται» όσο απομακρυνόμαστε από αυτές. Λόγω της μεταβολής των ορθών τάσεων θα αναπτυχθούν, για λόγους ισορροπίας πρόσθετες διατμητικές τάσεις κατά τη διαμήκη διεύθυνση και άρα, σύμφωνα με το θεώρημα **Cauchy** ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), και επάνω στο επίπεδο της διατομής. Οι διατμητικές αυτές τάσεις ονομάζονται **τάσεις στρέβλωσης**. Συνεπώς στην ανομοιόμορφη στρέψη η στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται κατά ένα ποσοστό από την κλειστή ροή των διατμητικών τάσεων Saint Venant (**πρωτογενείς διατμητικές τάσεις  $\tau_p$** ) και κατά το υπόλοιπο ποσοστό από τις στρεπτικές διατμητικές τάσεις στρέβλωσης (**δευτερογενείς διατμητικές τάσεις  $\tau_s$** ), οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο της διατομής. Επομένως για την ολική στρεπτική ροπή  $M_t$  που ασκείται σε μια διατομή ισχύει

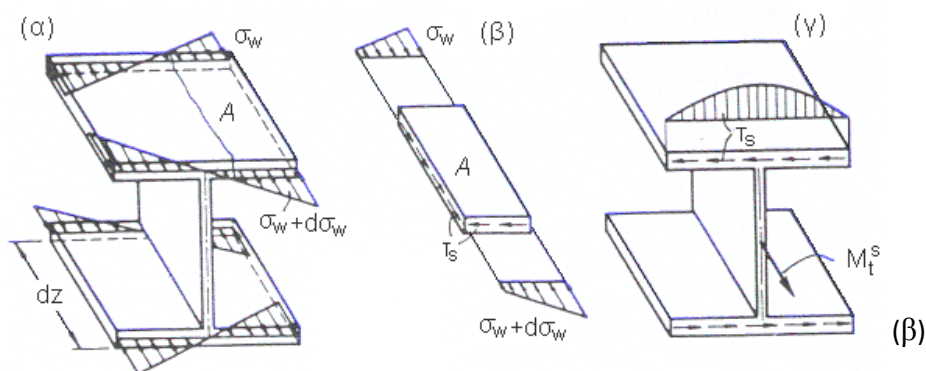


$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (3.1.1)$$

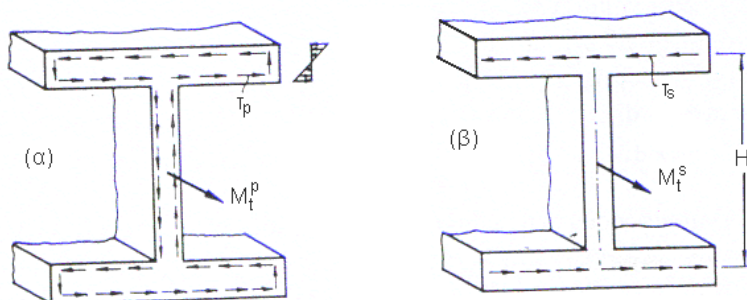
όπου

$M_t^P$  : είναι η πρωτογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων Saint Venant ( $\tau_p$ )

$M_t^S$  : είναι η δευτερογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων στρέβλωσης ( $\tau_s$ )

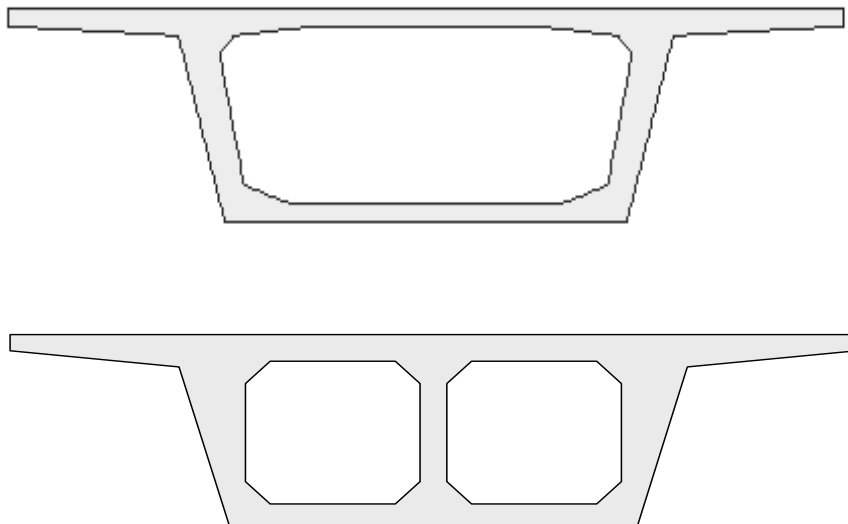


**Σχήμα 3.1.4** Ορθές (α) και διατμητικές (β) τάσεις, λόγω στρέβλωσης

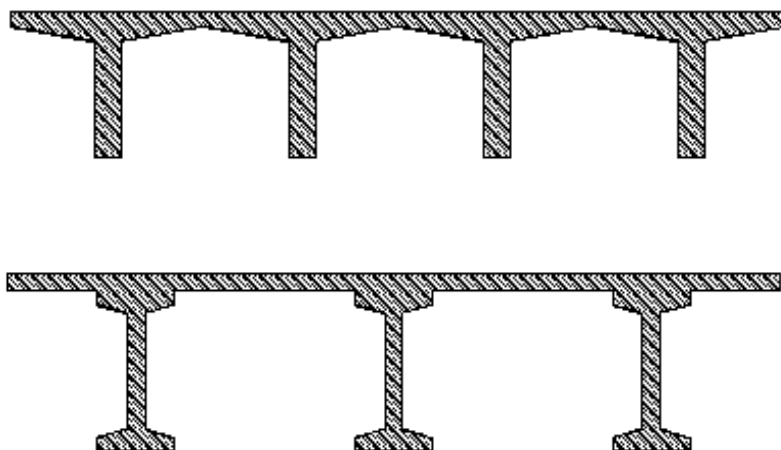


**Σχήμα 3.1.5** Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων

Τα ποσοστά της συνολικής στρεπτικής ροπής που αναλαμβάνονται αντίστοιχα από τις πρωτογενείς και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις καθορίζονται από τη γεωμετρία και το υλικό της διατομής. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζονται από την στρεπτική αντίσταση και την αντίσταση στρέβλωσης του ραβδόμορφου στοιχείου.



**Σχήμα 3.1.6** Διατομή απλού (α) και πολλαπλού (β) κιβωτίου φορέα τεχνικών έργων με μεγάλη στρεπτική αντίσταση



**Σχήμα 3.1.17** Διατομές φορέων μορφής πλακοδοκού με μικρή στρεπτική αντίσταση και έντονη στρέβλωση

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι εκτός από την ‘κλασική’ θεωρία έχει αναπτυχθεί και η ‘διευρυμένη’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης στην οποία λαμβάνονται υπόψη οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στην καθολική ισορροπία της ράβδου ενώ στην ‘κλασική’ θεωρία αμελούνται. Η διευρυμένη θεωρία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως ως γενική περίπτωση και η ανεμπόδιστη στρέψη Saint Venant ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Πρώτα όμως θα περιγραφούν οι βασικές παραδοχές των δύο θεωριών.

### Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψεως:

1. *Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.*  
Στους καμπύλους φορείς η κάμψη και η στρέψη είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με γεωμετρικές σχέσεις (Becker 1965, Vlassov 1964-1965, Dabrowski 1968).
2. *Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ( $\gamma_{yz} = 0$ ).*
3. *Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή. Με την παραδοχή αυτή το σχήμα της διατομής της ράβδου είναι ανεξάρτητο της διαμήκους συντεταγμένης.*  
Στη στρέψη ράβδων, όπου το σχήμα των διατομών τους μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους, αναφέρονται οι Lee and Szabo (1967).
4. *Η ράβδος υπόκειται μόνο σε περιστροφή περί τον επιμήκη άξονά της, όπου ο άξονας στροφής μπορεί να τοποθετείται ελεύθερα. Μετατοπίσεις κάθετες στον άξονα της ράβδου (εκτροπή) δεν υπάρχουν.*  
Στη στρέψη ράβδων όπου επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας στροφής διαφορετικός από αυτόν που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης των διατομών αναφέρεται ο Roik (1978). Η κάμψη της ράβδου με την παραδοχή αυτή θεωρείται ανεξάρτητη καταπόνηση. Τούτο δεν ισχύει όμως και στην περίπτωση που η ράβδος υπολογίζεται με θεωρία δευτέρας τάξεως. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Roik, Carl and Linder (1972).
5. *Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του. Η παραδοχή αυτή είναι συνεπής με τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων που υιοθετείται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας (βλ. Κεφάλαιο 2).*  
Στη στρεπτική καταπόνηση με μεγάλες στροφές αναφέρονται οι Kreuzinger (1969), Klöppel and Bilstein (1972).
6. *Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Η ομοιογένεια εξασφαλίζει την ομοιομορφία των ιδιοτήτων του υλικού από σημείο σε σημείο, ενώ η ισοτροπία αφορά την ομοιομορφία των ιδιοτήτων κατά τις διάφορες διευθύνσεις.*
7. *Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.*

Ειδικά για την **ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη Saint Venant** ισχύει η πρόσθετη παραδοχή:

8. *Οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται και είναι ίδιες για κάθε διατομή και ανεξάρτητες από τις διαμήκεις συντεταγμένες.*  
Με την παραδοχή αυτή επιβάλλεται περιορισμός, τόσο στις συνθήκες στήριξης της ράβδου (διχαλωτή στήριξη όπως στο σχήμα 3.1.5) όσο και στη φόρτιση της, η οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε η στρεπτική ροπή  $M_t$  να είναι σταθερή σε κάθε διατομή της ράβδου.

Η τελευταία παραδοχή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η **θεωρία ομοιόμορφης**

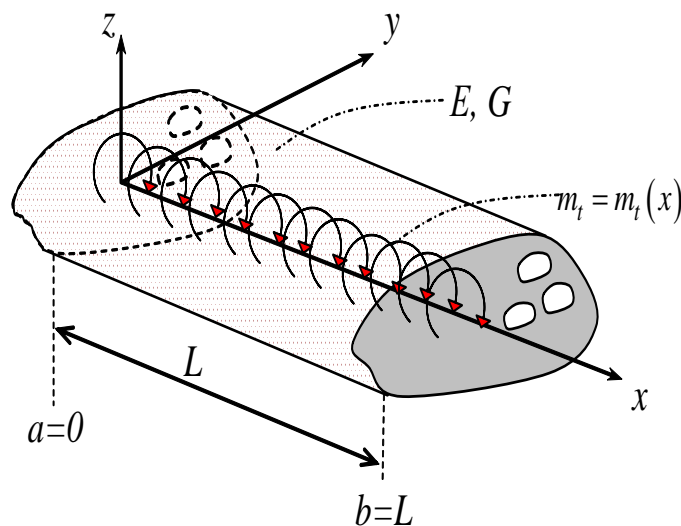
στρέψης ισχύει επακριβώς σε ελάχιστες περιπτώσεις και για αυτό κρίνεται αναγκαία η ανάλυση της θεωρίας ανομοιομορφης στρέψης.

### 3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

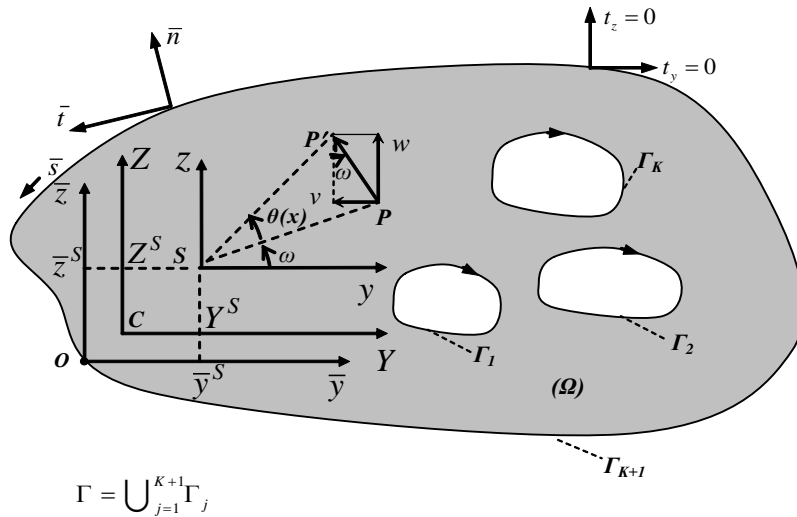
Θεωρούμε ράβδο τυχούσας διατομής, η οποία υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση  $m_t = m_t(x)$  περί τον επιμήκη άξονα της  $x$  (βλ. σχήμα 3.2.1α). Αποτέλεσμα της στρεπτικής αυτής καταπόνησης είναι η στροφή της διατομής της ράβδου ως προς το κέντρο διατμήσεως  $S$  κατά γωνία  $\theta_x(x)$ . Το κέντρο διατμήσεως  $S$  ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής της διατομής της ράβδου εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής. Στα επόμενα θεωρούμε ότι στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άλλος άξονας συστροφής.

Το κέντρο διατμήσεως  $S$  είναι το σημείο στο επίπεδο της διατομής, για το οποίο η ροπή των διατμητικών τάσεων λόγω τέμνουσας έχει μηδενική τιμή. Η θέση του κέντρου διατμήσεως είναι ανεξάρτητη του μεγέθους και του είδους της εξωτερικής φορτίσεως, αλλά εξαρτάται μόνο από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής. Στην περίπτωση κατά την οποία η διατομή έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως  $S$  βρίσκεται πάνω σε αυτόν, ενώ αν η διατομή έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κέντρο διατμήσεως ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο.

Λόγω της προαναφερθείσης στροφής της διατομής ως προς το κέντρο διατμήσεως  $S$  κατά γωνία  $\theta_x(x)$  για τυχόν σημείο  $P$  της διατομής προκύπτουν μετατοπίσεις  $v$  και  $w$  κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  αντίστοιχα, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις (βλ. παραδοχές 2, 3, 5)



(α)



$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{K+1} \Gamma_j$$

(β)

**Σχήμα 3.2.1** Ράβδος τυχούσας διατομής υποβαλλόμενη σε στρεπτική ροπή  $M_t$

$$v(x, y, z) = -(PP') \sin \omega = -(MP) \theta_x(x) \sin \omega = -z \theta_x(x) \quad (3.2.2)$$

$$w(x, y, z) = (PP') \cos \omega = (MP) \theta_x(x) \cos \omega = y \theta_x(x) \quad (3.2.3)$$

ενώ για τη μετατόπιση  $u$  που αποτελεί τη στρέβλωση της διατομής θεωρούμε ότι ισχύει (βλ. παραδοχή 7)

$$u(x, y, z) = \theta'_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.4)$$

όπου  $\theta'_x(x) = d\theta_x / dx$  είναι η σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου ανηγμένη στη μονάδα μήκους και  $\phi_S(y, z)$  είναι η συνάρτηση στρεβλώσεως ως προς το κέντρο διατομής  $S$ , η οποία χαρακτηρίζεται και ως κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως. Ο δείκτης  $S$  δείχνει ότι η στρέβλωση αναφέρεται στον άξονα στροφής  $S$ . Η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_S$  εκφράζει τη στρέβλωση  $u$  που προκύπτει για μοναδιαία σχετική γωνία στροφής ( $\theta'_x(x) = 1$ ). Σύμφωνα με την παραδοχή που εκφράζει η σχέση (3.2.4), η συνάρτηση στρεβλώσεως εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης  $x$ .

Σύμφωνα με την ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη *Saint Venant*, η σχετική γωνία στροφής θα πρέπει να είναι σταθερή ( $\theta'_x = c$ ), ενώ σύμφωνα με την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, η σχετική γωνία στροφής είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης  $x$  ( $\theta'_x = \theta'_x(x)$ ).

Με τη βοήθεια των μετατοπίσεων που δίδονται από τις προηγούμενες σχέσεις και εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων και τάσεων - παραμορφώσεων της θεωρίας ελαστικότητας από το Κεφάλαιο 2 (βλ. σχέσεις (2.2.2.3α), (2.2.2.3β), (2.2.2.3γ), (2.2.2.3δ), (2.2.2.3ε), (2.2.2.3στ), (2.2.3.2α), (2.2.3.2β),

(2.2.3.2γ), (2.2.3.2δ), (2.2.3.2ε), (2.2.3.2στ)) λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεως ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2.5\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.5\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (3.2.5\delta)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.5\epsilon)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (3.2.5\sigma\tau)$$

και τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως ως

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = E^* \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] = E^{**} \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\beta)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = E^{**} \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\gamma)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (3.2.6\delta)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.6\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (3.2.6\sigma\tau)$$

όπου  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$ ,  $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$  με E,G,ν το μέτρο ελαστικότητας,

το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson. Οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας ενώ οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  (που δεν παράγουν έργο αφού οι ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των αγνώστων κινηματικών μεγεθών. Στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson. Επιπλέον, το  $E^*$  αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που  $\nu=0$ . Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία

λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$ . Οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Στην ειδική περίπτωση της ανεμπόδιστης ομοιόμορφης στρέψεως *Saint Venant* ( $\theta'_x = \text{σταθερή}$ ), οι σχέσεις (3.2.5α) και (3.2.6α) δίδουν, αντίστοιχα

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad (3.2.7\alpha)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (3.2.7\beta)$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες των τανυστών παραμορφώσεως και τάσεως είναι ταυτόσημες με αυτές της ανομοιόμορφης στρέψεως με δυνάμεις στρεβλώσεως.

Στη συνέχεια αν αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας, που έχουμε ήδη παραθέσει, λαμβάνουμε

$$G \cdot \theta''_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) = 0 \quad (3.2.8\alpha)$$

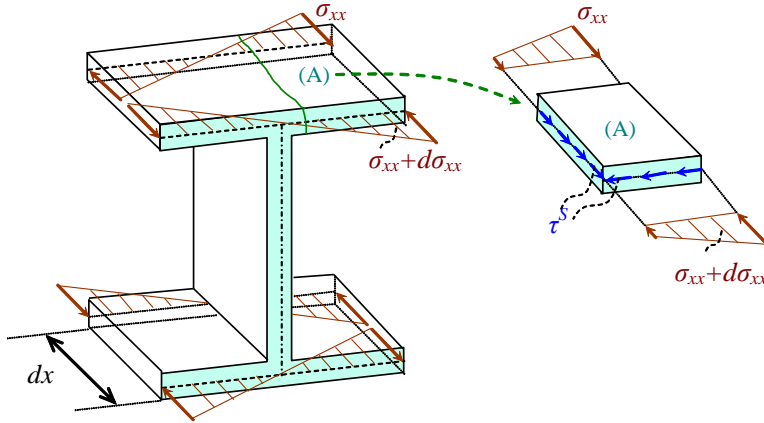
$$G \cdot \theta''_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) = 0 \quad (3.2.8\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} [E \cdot \theta''_x(x) \cdot \phi_S] = 0 \quad (3.2.8\gamma)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δεν ικανοποιούνται καθώς τοπικά εξασφαλίζεται η ισορροπία μόνο κατά τον άξονα  $x$  και μόνο στην περίπτωση της ομοιόμορφης, όπου η σχετική γωνία στροφής παραμένει σταθερή  $\theta''_x(x) = 0$ , ικανοποιούνται. Από τη σχέση (3.2.8γ) προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \phi_S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial z^2} = - \frac{E \cdot \theta'''_x(x)}{G \cdot \theta'_x(x)} \cdot \phi_S \quad (3.2.9)$$

Στη σχέση (3.2.9) το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών  $y, z$ , εφόσον  $\phi_S = \phi_S(y, z)$ , ενώ το δεξιό μέλος είναι συνάρτηση και της μεταβλητής  $x$ . Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος αναλύουμε τις διατμητικές τάσεις σε **πρωτογενείς**  $\tau^P$  και **δευτερογενείς**  $\tau^S$ . Οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις και οι ορθές τάσεις από στρέβλωση προκύπτουν από τις παραμορφώσεις (πρωτογενείς), ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από την ανάγκη ισορροπίας των διαμήκων ορθών τάσεων στρεβλώσεως  $\sigma_{xx}$ .



**Σχήμα 3.2.2** Ορθές και διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης

Η στοιχειώδης μεταβολή  $d\sigma_{xx}^w$  των ορθών τάσεων από στρέβλωση μπορεί να εξισορροπηθεί μόνο από διατμητικές τάσεις κατά μήκος της τομής A και οι οποίες με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy οδηγούν στην ανάπτυξη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων  $\tau^S$  στο επίπεδο της διατομής (βλ. σχήμα 3.2.2).

Άρα έχουμε

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \quad (3.2.10\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \quad (3.2.10\beta)$$

και ισχύουν οι σχέσεις

$$\tau_{xy}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) \quad \tau_{xy}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.11\alpha-\beta)$$

$$\tau_{xz}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \quad \tau_{xz}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.12\alpha-\beta)$$

$$\sigma_{xx}^w = E \cdot \theta''_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.13)$$

όπου τις συναρτήσεις  $\phi_S^P(y, z)$  και  $\phi_S^S(x, y, z)$  ονομάζουμε πρωτογενή και δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.10) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (3.2.14)$$

Για την ικανοποίηση της σχέσης απαιτούμε



$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (3.2.15)$$

και

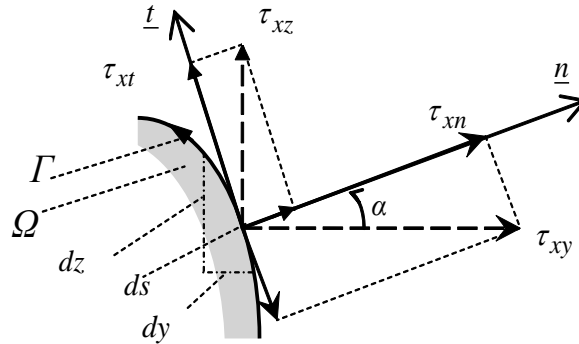
$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} = 0 \quad (3.2.16)$$

όπου με αντικατάσταση προκύπτει

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \quad (3.2.18)$$

Για τη μόρφωση των **συνοριακών συνθηκών** της πρωτογενούς και της δευτερογενούς κύριας συνάρτησης στρεβλώσεως παρατηρούμε τις διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής. Εξετάζοντας τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dydz$  στο σχήμα λαμβάνουμε



**Σχήμα 3.2.3** Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \quad (3.2.19)$$

$$\tau_{xt} = -\tau_{xy} \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_y \quad (3.2.20)$$

όπου  $n_y = \cos(y, n) = \cos \alpha = \frac{dy}{dn} = \frac{dz}{ds}$  και  $n_z = \sin(z, n) = \sin \alpha = \frac{dz}{dn} = -\frac{dy}{ds}$

και με αντικατάσταση προκύπτει

$$\tau_{xn}^P = \tau_{xy}^P \cdot n_y + \tau_{xz}^P \cdot n_z \quad \tau_{xt}^P = -\tau_{xy}^P \cdot n_z + \tau_{xz}^P \cdot n_y \quad (3.2.21\alpha-\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = \tau_{xy}^S \cdot n_y + \tau_{xz}^S \cdot n_z \quad \tau_{xt}^S = -\tau_{xy}^S \cdot n_z + \tau_{xz}^S \cdot n_y \quad (3.2.22\alpha-\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (3.2.11, 3.2.12) στις σχέσεις (3.2.21, 3.2.22) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) \quad (3.2.23\alpha)$$

$$\tau_{xt}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y \cdot n_y + z \cdot n_z \right) \quad (3.2.23\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \quad (3.2.23\gamma)$$

$$\tau_{xt}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (3.2.23\delta)$$

Επειδή η ράβδος είναι αφόρτιστη κατά τη διαμήκη κατεύθυνση στην παράπλευρη επιφάνεια της πρέπει για λόγους ισορροπίας οι κάθετες διατμητικές τάσεις στο σύνορο της να μηδενίζονται.

Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τη συνοριακή αυτή συνθήκη απαιτούμε

$$\tau_{xn}^P = 0 \quad \tau_{xn}^S = 0 \quad (3.2.24\alpha-\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.23α, 3.2.23γ) στις σχέσεις (3.2.24α-β) και λαμβάνοντας υπόψη ότι εν γένει  $G\theta'_x \neq 0$ , η συνοριακή συνθήκη της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως δίδεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad (3.2.25)$$

και η συνοριακή συνθήκη της δευτερογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad (3.2.26)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς  $\phi_S^P(y, z)$  και δευτερογενούς  $\phi_S^S(x, y, z)$  κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως απαιτείται η λύση των πιο κάτω προβλημάτων :

#### 1. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Laplace

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \text{ στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (3.2.27\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.2.27\beta)$$

2. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x'''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \quad \text{στο εσωτερικό του } \Omega \quad (3.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.2.28\beta)$$

Άρα με βάση τα προηγούμενα το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου διαμορφώνεται τελικά ως

$$u = \theta_x'(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (3.2.33\alpha)$$

$$v = -z \theta_x(x) \quad (3.2.33\beta)$$

$$w = y \theta_x(x) \quad (3.2.33\gamma)$$

### 3.3 Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Η προκύπτουσα στρεπτική ροπή, με ολοκλήρωση στο επίπεδο της διατομής λαμβάνεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) d\Omega \quad (3.3.1)$$

Προσθαφαιρώντας τους όρους  $\partial \phi_S^P / \partial y$  και  $\partial \phi_S^P / \partial z$  η σχέση (3.3.1) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \right] d\Omega$$

ή

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega$$

και διασπώντας τις τάσεις σε πρωτογενείς και δευτερογενείς (βλ. σχήμα 3.3.1)

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.3.2)$$

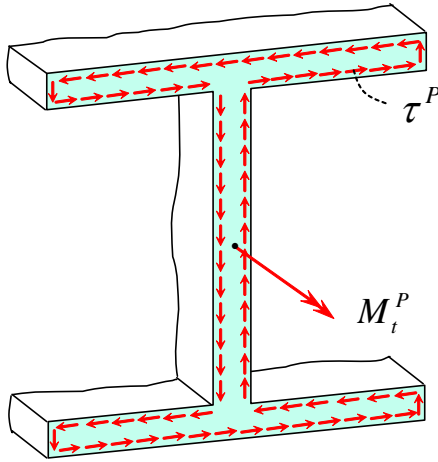
Έτσι, στην ανομοιόμορφη στρέψη σε κάθε διατομή της ράβδου ισχύει η σχέση

$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (3.3.3)$$

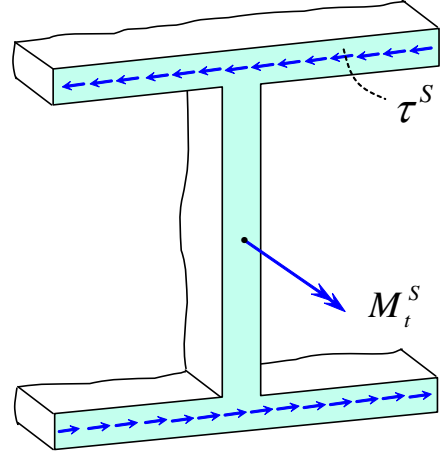
όπου έχει τεθεί

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.3.4\alpha)$$

$$M_t^S = \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.3.4\beta)$$



(α)



(β)

**Σχήμα 3.3.1** Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διαμηθικών τάσεων και προκύπτουσες στρεπτικές ροπές

Προκειμένου να υπολογισθεί το πρωτογενές τμήμα  $M_t^P$  της στρεπτικής ροπής, η σχέση (3.3.4α) γράφεται ως

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left( \tau_{xy}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \left( -\tau_{xy}^P \cdot z + \tau_{xz}^P \cdot y \right) \right] d\Omega \quad (3.3.5)$$

και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss – Green και των σχέσεων (3.2.11α), (3.2.12α), (3.2.27α) και (3.2.24α) λαμβάνουμε

$$M_t^P = -G \cdot I_t \cdot \theta'_x(x) \quad (3.3.6)$$

όπου έχει τεθεί

$$I_t = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.3.7)$$

Το μέγεθος  $I_t$  ονομάζεται στρεπτική ροπή αδράνειας κατά *Saint-Venant* ή **στρεπτική σταθερά**. Η ποσότητα  $GI_t$  ονομάζεται **στρεπτική αντίσταση** της διατομής.

Ομοίως, από τη σχέση (3.3.4β) και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss – Green και των σχέσεων (3.2.11β), (3.2.12β), (3.2.27β) και (3.2.24β) λαμβάνουμε

$$M_t^S = -E \cdot C_S \cdot \theta_x''(x) \quad (3.3.8)$$

όπου έχει τεθεί

$$C_S = \int_{\Omega} \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (3.3.9)$$

Το μέγεθος  $C_S$  ονομάζεται **σταθερά στρεβλώσεως**. Η ποσότητα  $EC_S$  ονομάζεται **αντίσταση στρεβλώσεως** της διατομής. Η στρεπτική σταθερά είναι ανεξάρτητη της θέσεως του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η σταθερά στρεβλώσεως αναφέρεται στο κέντρο συστροφής  $S$ .

Η μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια της **ενεργειακής μεθόδου**. Έτσι, είναι γνωστό ότι η συνολική δυναμική ενέργεια ή συνολικό δυναμικό  $\Pi_{o\lambda}$  οιοδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των εσωτερικών δυνάμεων (ελαστική ενέργεια παραμορφώσεως)  $\Pi_{\varepsilon\sigma}$  και του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων  $\Pi_{\varepsilon\xi}$ , δηλαδή

$$\Pi_{o\lambda} = \Pi_{\varepsilon\sigma} + \Pi_{\varepsilon\xi} \quad (3.3.10)$$

Ως δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού συστήματος, που βρίσκεται σε κατάσταση παραμορφώσεως, ορίζεται το έργο που εκτελείται από όλες τις δυνάμεις (εσωτερικές και εξωτερικές), αν το σύστημα μετακινηθεί από την προαναφερθείσα κατάσταση σε άλλη προηγηθείσα (που λαμβάνεται ως αφετηρία) και η οποία συνήθως είναι η αρχική αφόρτιστη κατάσταση. Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως που έχει αποταμιευθεί στο σύστημα, δηλαδή με το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, και αυτό διότι αν το σύστημα αποφορτιστεί το έργο που θα αποδοθεί ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως. Το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( \tau_{xy}^P \right)^2 + \left( \tau_{xz}^P \right)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \left( \sigma_{xx}^w \right)^2 d\Omega \quad (3.3.11)$$

Στο δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων της σχέσεως (3.3.11) έχουν ληφθεί υπόψη οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις και **έχουν αγνοηθεί οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις**, γεγονός που όπως έχει προαναφερθεί αποτελεί τη βασική διαφορά μεταξύ «κλασικής» και «διευρυμένης» θεωρίας. Στην «κλασική» θεωρία οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις δεν επηρεάζουν την καθολική ισορροπία της ράβδου. Ωστόσο δεν θεωρούνται μηδενικές και υπολογίζονται a posteriori μέσω των σχέσεων (3.2.11β), (3.2.12β). Η παράλειψη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως αντιστοιχεί στην παράλειψη των διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία κάμψεως ράβδων κατά Euler-Bernoulli.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή τάσεως από τις σχέσεις (3.2.11α), (3.2.12α) και (3.2.13) στη σχέση (3.3.11), το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ G^2 \theta_x'^2 \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)^2 + G^2 \theta_x'^2 \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2E} \int_{\Omega} E^2 \theta_x''^2 (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.3.12)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις  $\theta_x'$  και  $\theta_x''$  είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες  $y, z$  και μετά τις σχετικές πράξεις, η σχέση (3.3.12) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon\sigma} = & \frac{1}{2} G \cdot \theta_x'^2 \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{1}{2} E \cdot \theta_x''^2 \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} G \cdot \theta_x' \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss – Green μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \quad (3.3.14\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \quad (3.3.14\beta)$$

ή μετά τις σχετικές πράξεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \quad (3.3.15\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \quad (3.3.15\beta)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (3.3.15α), (3.3.15β) κατά μέλη και μετά τις σχετικές πράξεις εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = \\ & = - \int_{\Omega} \phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^P d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) ds \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.2.27α-β), η εξίσωση (3.3.16) γράφεται ως

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (3.3.17)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3.7), (3.3.9), (3.3.13) και (3.3.17) το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 \quad (3.3.18)$$

Το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση  $m_t$  δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{\varepsilon\xi} = -m_t \cdot \theta_x \quad (3.3.19)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι χαρακτηριστικό της δυναμικής ενέργειας κάθε εξωτερικής φόρτισης, μια και σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν κάθε εξωτερικό φορτίο εκτελεί αρνητικό έργο, καθώς το σύστημα μετακινείται από την κατάσταση παραμορφώσεως στην αφόρτιστη κατάσταση.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το συνολικό δυναμικό  $\Pi_{o\lambda}$  στοιχείου ράβδου μοναδιαίου μήκους με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3.18) και (3.3.19) θα δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{o\lambda} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 - m_t \cdot \theta_x \quad (3.3.20)$$

και για τη συνολική ράβδο μήκους  $L$  από τη σχέση

$$\Pi_{ολ} = \int_0^L \left( \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x'' - m_t \cdot \theta_x \right) dx \quad (3.3.21)$$

Για τη μόνωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου θα εφαρμόσουμε ένα ενεργειακό κριτήριο, γνωστό ως **αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας**, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: *Μεταξύ όλων των κινηματικά συμβιβαστών θέσεων ενός συντηρητικού συστήματος, εκείνες που ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας δίδουν στάσιμη τιμή της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως προς μικρές και κινηματικά συμβιβαστές μεταβολές των μετατοπίσεων του.* Η αρχή αυτή, που ισχύει και αν ακόμη η σχέση φόρτισης – παραμόρφωσης είναι μη γραμμική, εκφράζεται από την εξίσωση

$$\delta(\Pi_{εσ}) + \delta(\Pi_{εξ}) = 0 \quad (3.3.22)$$

όπου  $\delta$  είναι τελεστής που συμβολίζει (απειροστή) μεταβολή της ποσότητας επί της οποίας εφαρμόζεται λόγω δυνατής μετατοπίσεως. Εάν η στάσιμη τιμή είναι ένα τοπικό ελάχιστο, τότε η κατάσταση της ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθής και η σχέση (3.3.22) εκφράζει **την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας**, την οποία και θα εφαρμόσουμε για να μορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Η αναγκαία συνθήκη ακρότατου της σχέσεως (3.3.22) οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας *Euler-Lagrange*, οι οποίες διέπουν την ισορροπία ελαστικού συστήματος στην παραμορφωμένη κατάσταση. Σύμφωνα λοιπόν με τις εξισώσεις αυτές, συναρτησιακό της μορφής  $\Pi_{ολ} = \Pi_{ολ}(x, \theta_x, \theta_x', \theta_x'')$  παρουσιάζει ακρότατο (εδώ ελάχιστο), όταν ο πυρήνας του ολοκληρώματος της σχέσεως (3.3.21), τον οποίο ονομάζουμε  $F$ , ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \theta_x'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \theta_x''} = 0 \quad (3.3.23)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.3.20) στη σχέση (3.3.23) προκύπτει η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ισορροπίας της ράβδου λόγω ανομοιόμορφης στρέψεως ως

$$m_t = -G \cdot I_t \cdot \theta_x'' + E \cdot C_S \cdot \theta_x'''' \quad (3.3.24)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.3.24) προκύπτει ότι

$$M_t = G I_t \theta_x' - E C_S \theta_x''' \quad (3.3.25)$$

Η σχέση (3.3.25) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη.

Στη συνέχεια, σε αναλογία με τις καμπτικές ροπές  $M_y$ ,  $M_z$  ορίζουμε ένα νέο



στατικό μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε **δίρροπο στρεβλώσεως** και το οποίο δίδεται από τη σχέση

$$M_w = - \int_{\Omega} \phi_S^P \sigma_{xx}^w d\Omega \quad (3.3.26)$$

Η ανάγκη θεώρησης του νέου εντατικού μεγέθους προκύπτει από το γεγονός ότι  $M_y = M_z = N = 0$  αλλά ορθές τάσεις υπάρχουν στη διατομή, οπότε αν δεν θεωρηθεί κάποιο νέο μέγεθος, η ελαστική ενέργεια που οφείλεται στις ορθές τάσεις  $\sigma_{xx}$ , θα αγνοηθεί. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής συνιστώσας τάσεως  $\sigma_{xx}^w$  από τη σχέση (3.2.13) στη σχέση (3.3.26), η τελευταία γράφεται ως

$$M_w = -E\theta_x'' \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.3.27)$$

ή με τη βοήθεια της σχέσεως (3.3.9)

$$M_w = -EC_S \theta_x'' \quad (3.3.28)$$

και επομένως η σχέση (3.2.13) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\sigma_{xx}^w = - \frac{M_w}{C_S} \phi_S^P \quad (3.3.29)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3.28) και (3.3.8) προκύπτει η σχέση που συσχετίζει τη δευτερογενή στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρεβλώσεως ως

$$\frac{dM_w}{dx} = M_t^S \quad (3.3.30)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της σχέσης (3.3.24) εξαρτάται αφενός από τη στρεπτική φόρτιση της ράβδου και αφετέρου από τις στρεπτικές συνθήκες στήριξης της στο σύνορο ή και στο εσωτερικό της. Οι πλέον **γενικές γραμμικές συνοριακές στρεπτικές συνθήκες** στα άκρα της ράβδου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$a_1 \theta_x + a_2 M_t = a_3 \quad (3.3.31\alpha)$$

$$\beta_1 \theta_x' + \beta_2 M_w = \beta_3 \quad (3.3.31\beta)$$

Θέτοντας τις κατάλληλες τιμές στις μεταβλητές  $a_i, \beta_i$  μπορούμε να λάβουμε όλα τα είδη συνοριακών συνθηκών όπως πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη. Έτσι για πάκτωση και στα δύο άκρα θέτουμε  $a_1=1, a_2=0, a_3=0, \beta_1=1, \beta_2=0, \beta_3=0$ , για διχαλωτές στηρίξεις  $a_1=1, a_2=0, a_3=0, \beta_1=0, \beta_2=1, \beta_3=0$ , για ελεύθερο άκρο  $a_1=0, a_2=1, a_3=0, \beta_1=0, \beta_2=1, \beta_3=0$ .

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα για τον υπολογισμό της γωνίας στροφής  $\theta_x(x)$  και των παραγώγων της, που απαιτούνται για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων τάσεων στη διατομή της ράβδου στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψεως απαιτείται η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τη εξίσωση (3.3.24) στο εσωτερικό της ράβδου υποκειμένη στις συνοριακές συνθήκες (3.3.31) στα άκρα της ράβδου  $x=0, L$ . Στην περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψεως (*Saint-Venant*) η σχετική γωνία στροφής είναι σταθερή ( $\theta'_x(x) = c$ ), οπότε θα έχουμε

$$\theta''_x = \theta'''_x = \theta''''_x = 0 \quad (3.3.32)$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τετάρτης τάξεως γράφεται ως

$$m_t = 0 \quad (3.3.33)$$

και η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως (βλ. σχέση 3.3.25) γράφεται ως

$$M_t = \text{σταθερή} \quad (3.3.34)$$

Η εξίσωση ισορροπίας της ράβδου προκύπτει από τις σχέσεις (3.3.25) και (3.3.32) ως

$$M_t = G \cdot I_t \cdot \theta'_x \quad (3.3.35)$$

Ενώ η γωνία στροφής και η σχετική γωνία στροφής δίνονται ως

$$\theta_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} x \quad (3.3.36\alpha)$$

$$\theta'_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} \quad (3.3.36\beta)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την επίλυση προβλημάτων ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων προτιμάται η διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης, παρά η διαφορική εξίσωση 3<sup>ης</sup> τάξης για το λόγο ότι η πρώτη είναι **ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών**.

Τέλος, ορίζεται το μέγεθος  $\varepsilon$  που καλείται **Συντελεστής Στρεπτικής Αποσβέσεως** σύμφωνα με τη σχέση

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{GI_t}{EC_S}} \quad (3.3.37)$$

Ο συντελεστής αυτός μας δίνει μια ποιοτική εικόνα για το αν η αναπτυσσόμενη στρέψη στη ράβδο χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη. Μικρές τιμές του  $\varepsilon$  υποδεικνύουν κυρίως ανομοιόμορφη στρέψη ενώ μεγάλες τιμές υποδεικνύουν ότι αναπτύσσεται κυρίως ομοιόμορφη στρέψη. Είναι εμφανές το γεγονός ότι όσο πιο μεγάλη είναι η ράβδος ή η στρεπτική αντίσταση τόσο η αναπτυσσόμενη στρέψη στη ράβδο τείνει να χαρακτηριστεί ως ομοιόμορφη, ενώ αντίθετα όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση στρέβλωσης τόσο η αναπτυσσόμενη στρέψη στη ράβδο τείνει να χαρακτηριστεί ως ανομοιόμορφη. Γενικότερα, μια καλή ερμηνεία, σύμφωνα με τους Ramm and Hofmann (1995) για τις τιμές του  $\varepsilon$  είναι η εξής:

- για  $\varepsilon \leq 1$  αναπτύσσονται κυρίως δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέψη)
- για  $1 < \varepsilon \leq 15$  αναπτύσσονται πρωτογενείς, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

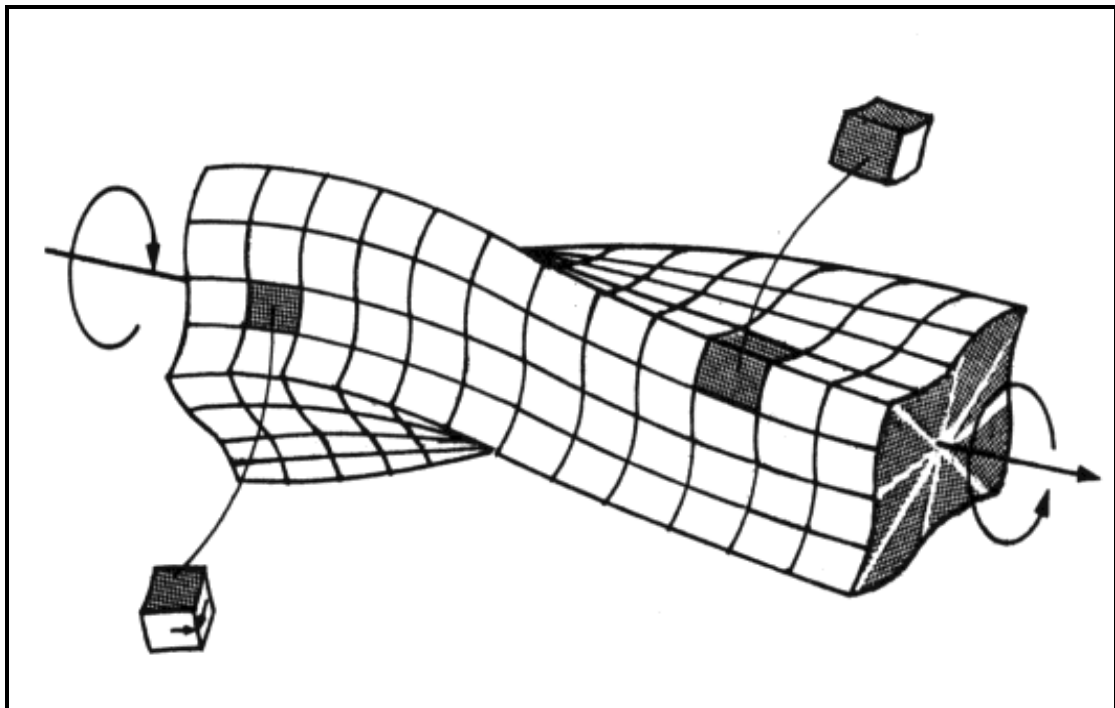
και ορθές τάσεις από στρέβλωση κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέψη)

- για  $\varepsilon > 15$  αναπτύσσονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις κατά μήκος της ράβδου (ομοιόμορφη στρέψη)

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ο **συντελεστής  $\varepsilon$  ερμηνεύει την ανομοιομορφία της στρέψης κατά μήκος της δοκού**. Οι μέγιστες τιμές εντατικών και τασικών μεγεθών ανομοιόμορφης στρέψης σε ορισμένες περιπτώσεις είναι ανεξάρτητες του συντελεστή  $\varepsilon$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΟΥ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



## 4.1 Βασικές έννοιες

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η ομοιόμορφη στρέψη απαιτεί σταθερή τιμή της στρεπτικής ροπής σε όλο το μήκος της ράβδου αλλά και την ελεύθερη ανάπτυξη της στρέβλωσης χωρίς αυτή να παρεμποδίζεται. Επίσης, αναλύσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, η οποία εφαρμόζεται σε περίπτωση τυχούσας φόρτισης ή συνοριακών συνθηκών, και στην οποία εκτός από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις St.Venant αναπτύσσονται ορθές και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω ανομοιόμορφης στρέβλωσης. Στην «κλασική» θεωρία η στρέβλωση θεωρείται ανάλογη της συστροφής  $\theta'_x$ . Με τη θεώρηση αυτή, στην καθολική ισορροπία της ράβδου λαμβάνονται υπόψη μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές υπολογίζονται μετά την επίλυσή της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψη με την υιοθέτηση ενός νέου κινηματικού μεγέθους (πρωτογενής συστροφή  $(\theta'_x)^P$  ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης  $\eta_x$ ) το οποίο δεν είναι ανάλογο με τη σχετική γωνία στροφής. Επισημαίνεται ότι στη σύγχρονη βιβλιογραφία υποδεικνύεται ότι η **επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική ιδίως σε ράβδους κλειστών διατομών** (Rubin 2005, Murin and Kutis 2008, Sapountzakis and Mokos 2011) όπου λόγω γεωμετρίας οι διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές και στο Κεφάλαιο 6 θα εξεταστούν αριθμητικά οι επιρροές αυτές.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων διατομής διπλά συμμετρικής με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (‘διευρυμένη’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης). Και αυτή η θεωρία διέπεται από κάποιες βασικές παραδοχές μερικές εκ των οποίων ταυτίζονται με αυτές της ‘κλασικής’ θεωρίας.

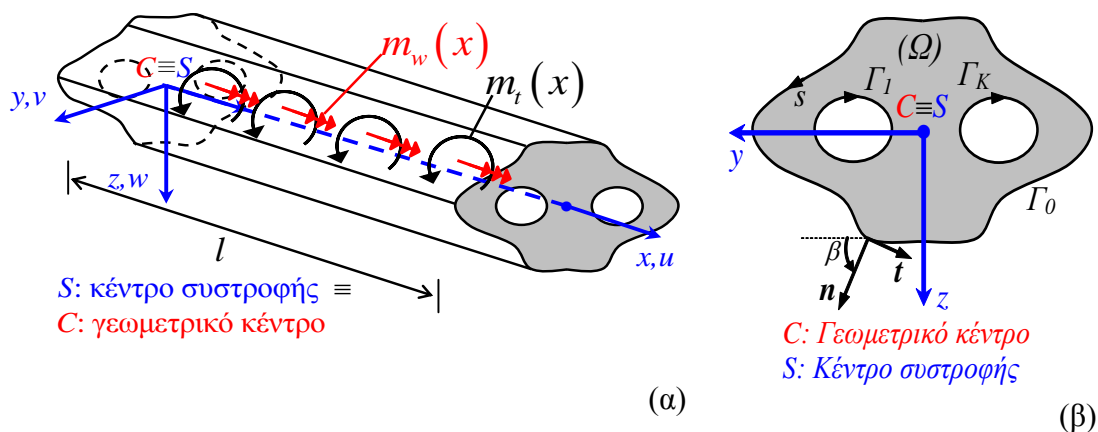
### **Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων:**

1. *Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.*
2. *Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται. Στην πραγματικότητα, παρά το γεγονός ότι η παραδοχή αυτή γενικώς μπορεί να ικανοποιείται, είναι ενδεχόμενο για την πραγμάτωσή της να απαιτείται και η τοποθέτηση εγκάρσιων διαφραγμάτων σε κάποιες λογικές αποστάσεις κατά μήκος της δοκού, τα οποία, λόγω της περιορισμένης στιβαρότητας εγκάρσια προς το επίπεδό τους, δεν επηρεάζουν την παραμορφωσιμότητα των διαμήκων ινών της δοκού, δηλαδή την στρέβλωσή της.*
3. *Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.*
4. *Η διατομή της ράβδου είναι διπλά συμμετρική. Στην περίπτωση όπου η διατομή έχει έναν ή κανέναν άξονα συμμετρίας, η στρεπτική και καμπτοδιατμητική καταπόνηση είναι συζευγμένες και πρέπει να μελετηθούν μαζί (Slivker 2007, Kim and Kim 2005). Όταν η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, τότε η στρεπτική καταπόνηση μπορεί να μελετηθεί αυτόνομα (Slivker 2007, Laudiero and Savoia 1990, Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009).*

5. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας περιστροφής. Ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής.
6. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.
7. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Η ομοιογένεια εξασφαλίζει την ομοιομορφία των ιδιοτήτων του υλικού από σημείο σε σημείο, ενώ η ισοτροπία αφορά την ομοιομορφία των ιδιοτήτων κατά τις διάφορες διευθύνσεις.
8. Η στρέβλωση των διατομών είναι ανάλογη της πρωτογενούς σχετικής γωνίας στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (ή ανεξάρτητης παράμετρου στρέβλωσης) και όχι της συνολικής σχετικής γωνίας στροφής όπως ίσχυε στην 'κλασική' θεωρία με αποτέλεσμα η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων να μπορεί να ληφθεί υπόψη στην καθολική ισορροπία της ράβδου.
9. Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

## 4.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο (βλ. παραδοχές 1,3) τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής (βλ. παραδοχή 4) η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένες η κατανεμημένες στρεπτικές ροπές  $m_t = m_t(x)$  και δίρροπα στρέβλωσης  $m_w = m_w(x)$  περί το διαμήκη άξονά της  $x$  (Σχ.4.2.1α). Ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα κέντρα συστροφής  $S$  των διατομών. Τα σημεία  $S$  ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα  $C$  εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής (βλ. Σχ.4.2.1β και παραδοχή 5).



**Σχήμα 4.2.1** Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος που καταλαμβάνει το δισδιάστατο χωρίο  $\Omega$  (β).

Με βάση τις παραδοχές 2&6 οι εγκάρσιες μετατοπίσεις  $v$ ,  $w$  κατά τους άξονες  $y$ ,  $z$  αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3) ως

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (4.2.1)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (4.2.2)$$

Όπου  $\theta_x$  η συνολική γωνία στροφής. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων η διαμήκης μετατόπιση θεωρείται ότι δίνεται από τη σχέση ( βλ. παραδοχή 8)

$$u(x, y, z) = \eta_x(x)\phi_S^P(y, z) \quad (4.2.3)$$

Όπου  $\eta_x$  είναι η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης και  $\phi_S^P$  είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο  $S$ . Η παράμετρος  $\eta_x$  είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης και περιγράφει το μέγεθος της στρέβλωσης σε μια διατομή ενώ καλείται και ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης (Wunderlich 1986). Χαρακτηρίζεται ως ανεξάρτητη διότι δεν ισχύει  $\eta_x = \theta'_x$  όπως στην ‘κλασική’ θεωρία ενώ η φυσική της σημασία αναδεικνύεται από την εναλλακτική διατύπωση με την οποία μπορεί να περιγράψει η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Σύμφωνα με αυτή, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου και η γωνία στροφής διασπώνται σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος [Mokos and Sapountzakis 2011].

$$u = u^P + u^S \quad (4.2.4\alpha)$$

$$v = v^P + v^S \quad (4.2.4\beta)$$

$$w = w^P + w^S \quad (4.2.4\gamma)$$

$$\theta_x = \theta_x^P + \theta_x^S \quad (4.2.4\delta)$$

όπου το πρωτογενές δίνεται ως

$$u^P(x, y, z) = (\theta_x^P)' \phi_S^P(y, z) \quad (4.2.5\alpha)$$

$$v^P(x, y, z) = -z\theta_x^P(x) \quad (4.2.5\beta)$$

$$w^P(x, y, z) = y\theta_x^P(x) \quad (4.2.5\gamma)$$

ενώ το δευτερογενές δίνεται ως

$$u^S(x, y, z) = 0 \quad (4.2.6\alpha)$$

$$v^S(x, y, z) = -z\theta_x^S(x)$$

(4.2.6β)

$$w^S(x, y, z) = y\theta_x^S(x) \quad (4.2.6\gamma)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\eta_x = (\theta_x^P)' \quad (4.2.7)$$

Στα επόμενα παρουσιάζεται αναλυτικά η διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (4.2.4-6) θέτοντας  $\theta_x^S = \theta_x - \theta_x^P$

Από τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας (βλ. Κεφάλαιο 2 –σχέσεις (2.2.2.3)) οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις δίνονται συναρτήσει των μετατοπίσεων ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.2.8\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.2.8\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.4-6) στις (4.2.8) προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.9\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (4.2.9\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (4.2.9\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = (\theta_x^P)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \theta_x' z \quad (4.2.9\delta)$$

$$\gamma_{xz} = (\theta_x^P)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \theta_x' y \quad (4.2.9\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (4.2.9\zeta)$$

και διαχωρίζοντας πρωτογενές και δευτερογενές μέρος οι σχέσεις (4.2.9δ) και (4.2.9ε) γράφονται ως

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.10\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.10\beta)$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.2.4δ)

$$(\theta_x^P)' - \theta_x' = -(\theta_x^S)' \quad (4.2.11)$$



Ο υπολογισμός των τάσεων βασίζεται στον καταστατικό νόμο του Hooke (βλ. παραδοχή 7) ο οποίος συσχετίζει γραμμικά τον ταυστή παραμορφώσεως με τον ταυστή τάσεως. Έτσι υποθέτοντας ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό (βλ. παραδοχή 7) οι συνιστώσες του ταυστή τάσεως δίνονται ως

$$\sigma_{xx} = E^* (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = E^{**} (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\beta)$$

$$\sigma_{zz} = E^{**} (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\gamma)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.12\delta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.12\epsilon)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (4.2.12\zeta)$$

όπου  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$ ,  $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$  με E,G,ν το μέτρο

ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson. Οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις

ισορροπίας ενώ οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  (που δεν παράγουν έργο αφού οι ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των αγνώστων κινηματικών μεγεθών. Στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και

αφετέρου ισχύει στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson. Επιπλέον, το  $E^*$  αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που  $\nu=0$ . Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E. \text{ Οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη}$$

διατύπωση θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Άρα οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυστή τάσεων είναι

$$\sigma_{xx} = E (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.13\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.13\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.13\gamma)$$

### 4.3 Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης υπολογίζονται από την επίλυση του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί στην ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. Κεφάλαιο 3)

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.3.1\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.3.1\beta)$$

και απαιτώντας παράλληλα να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad (4.3.2)$$

Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αποτελούν αυτοϊσορροπούμενη κατανομή τάσεων σε επίπεδο υλικού σημείου (βλ. σχέση (4.3.1)) και ότι η στρεπτική ένταση δεν οδηγεί σε αξονική καταπόνηση (βλ. σχέση (4.3.2)). Όμως αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις που δίνουν τις τάσεις στην διαφορική εξίσωση ισορροπίας και στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη σε επίπεδο υλικού σημείου παρατηρούμε ότι δεν επαληθεύονται εξαιτίας της κακής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.3.3\alpha)$$

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = t_x \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.3.3\beta)$$

Το στοιχείο αυτό είναι ανάλογο με τη θεωρία Timoshenko καμπτόμενων ράβδων που παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα με αποτέλεσμα να πρέπει να εισαχθεί και εδώ ένας στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης ο υπολογισμός του οποίου θα γίνει στα επόμενα.

### 4.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Όπως και στην ‘κλασική’ θεωρία λαμβάνονται και εδώ τα παρακάτω εντατικά μεγέθη (βλ. σχέσεις (3.3.4),(3.3.26))

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (4.4.1\alpha)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left( \tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.4.1\beta)$$

$$M_w = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (4.4.1\gamma)$$

Και αντικαθιστώντας σε αυτά τις σχέσεις (4.2.13) προκύπτει

$$M_t^P = GI_t^P \theta'_x \quad (4.4.2\alpha)$$

$$M_t^S = -GI_t^S \left( (\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \quad (4.4.2\beta)$$

$$M_w = -EC_S (\theta_x^P)'' \quad (4.4.2\gamma)$$

Όπου οι γεωμετρικές σταθερές δίνονται ως

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.4.3\alpha)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (4.4.3\beta)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (4.4.3\gamma)$$

Όπου σταθερά  $I_t^P$  είναι ίδια με αυτή του Κεφαλαίου 3 (βλ. σχέση (3.3.7)).

Παρατηρούμε ότι **στη δευτερογενή στρεπτική σταθερά  $I_t^S$  έχει εισαχθεί ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης  $k_x$**  προκειμένου να διορθωθεί η κακή κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Στα παραδείγματα που παρατίθενται στο κεφάλαιο 6 συγκρίνονται τα αποτελέσματα που παίρνουμε αν λάβουμε υπόψη με αυτά που εξάγουμε αν δεν λάβουμε υπόψη μας τον παραπάνω διορθωτικό συντελεστή  $k_x$ , δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ . Ενώ αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$I_t^S = k_x (I_P - I_t^P) \quad (4.4.4)$$

Αν στην Αρχή Δυνατών Έργων λάβουμε υπόψη τις μεταβολές της στρεπτικής στροφής και της πρωτογενούς συστροφής προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν την ισορροπία των στρεβλωτικών και στρεπτικών δυνάμεων στα άκρα της ράβδου ως

$$-\frac{dM_t^P}{dx} - \frac{dM_t^S}{dx} = m_t(x)$$

(4.4.5α)

$$\frac{dM_w}{dx} - M_t^S = -m_w(x) \quad (4.4.5\beta)$$

$$(M_t^P + M_t^S - \bar{M}_t) \delta\theta_x = 0 \quad (4.4.6\alpha)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta(\theta_x^P)' = 0 \quad (4.4.6\beta)$$

Όπου  $m_t$ ,  $m_w$  είναι εξωτερικές δράσεις και ορίζονται ως

$$m_t(x) = \int_{\Gamma} [t_y(-z) + t_z y] ds \quad (4.4.7\alpha)$$

$$m_w(x) = - \int_{\Gamma} t_x \phi_S^P ds \quad (4.4.7\beta)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (4.4.6) τα μεγέθη  $\bar{M}_w$  και  $\bar{M}_t$  αποτελούν εξωτερικές δράσεις και ορίζονται στα άκρα της ράβδου ως

$$(\bar{M}_t)_{x=0} = - \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (\bar{M}_t)_{x=l} = \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (4.4.8\alpha-\beta)$$

$$(\bar{M}_w)_{x=0} = \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (\bar{M}_w)_{x=l} = - \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (4.4.8\gamma-\delta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (4.4.2) στις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε τις κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στρεβλωτικών και στρεπτικών δυνάμεων

$$-G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' + GI_t^S (\theta_x^P)'' = m_t \quad (4.4.9\alpha)$$

$$-EC_S (\theta_x^P)''' + GI_t^S \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) = -m_w \quad (4.4.9\beta)$$

Για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 (\theta_x^P)' = \beta_3 \quad (4.4.10\alpha-$$

β)

όπου

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S) \theta_x' - GI_t^S (\theta_x^P)' \quad (4.4.11)$$

Στις εκφράσεις των συνοριακών συνθηκών μπορούμε, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στους συντελεστές  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , να περιγράψουμε κάθε είδος συνοριακών συνθηκών (βλ. Κεφάλαιο 3).

Στην περίπτωση που θέλουμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις ως προς τους αγνώστους  $\eta_x$  και  $\theta_x$  χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.2.7) μορφώνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S\eta_x' = m_t \quad (4.4.12\alpha)$$

$$-EC_S\eta_x'' + GI_t^S(\eta_x - \theta_x') = -m_w \quad (4.4.12\beta)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (4.4.13\alpha,\beta)$$

όπου

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S\eta_x \quad (4.4.14)$$

Προκειμένου να υπάρξει ποιοτική σύγκριση με την ‘κλασική’ θεωρία θα διατυπώσουμε το πρόβλημα ως προς τη στροφή  $\theta_x$ . Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.4.9) προκύπτει

$$\frac{EC_S}{\kappa}\theta_x''' - GI_t^P\theta_x'' = m_t - \frac{EC_S}{GI_t^P}\frac{1-\kappa}{\kappa}m_t' + m_w' \quad (4.4.15)$$

που είναι η κυρίαρχη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξεως όπου  $\kappa$  βοηθητική σταθερά

$$\kappa = \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} \quad (4.4.16)$$

και οι συνοριακές συνθήκες των σχέσεων (4.4.10) ισχύουν αν τεθεί

$$M_t = GI_t^P\theta_x' - \frac{EC_S}{\kappa}\theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P}\frac{1-\kappa}{\kappa}m_t' + m_w \quad (4.4.17)$$

$$M_w = -\frac{EC_S}{\kappa}\theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P}\frac{1-\kappa}{\kappa}m_t \quad (4.4.18)$$

$$(\theta_x^P)' = \theta_x' + \frac{EC_S}{\kappa GI_t^P}\frac{1-\kappa}{\kappa}\theta_x'' + \frac{EC_S}{(GI_t^P)^2}\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^2 m_t' - \frac{1}{GI_t^P}\frac{1-\kappa}{\kappa}m_w \quad (4.4.19)$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για όλο το μήκος της ράβδου.

Με αυτό τον τρόπο δεν αμελείται πλέον η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην εξίσωση ισοροπίας. Αν θέλουμε να τις αγνοήσουμε, θέτοντας  $k=1$  στη σχέση (4.4.15) επανερχόμαστε στην εξίσωση ισοροπίας της ‘κλασικής’ θεωρίας ενώ στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (βλ. σχέσεις (4.4.12-13)) θέτουμε  $k_x = \infty$  στην έκφραση του  $I_t^S$ . Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6 η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική στον υπολογισμό μέγιστων τιμών τασικών μεγεθών στις κλειστές διατομές, γεγονός που είναι εμφανές μέσα από τις συγκρίσεις που πραγματοποιούνται κυρίως σε επίπεδο τάσεων και ενατικών μεγεθών μεταξύ της κλασικής θεωρίας και της διευρυμένης θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων.

## 4.5 Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

Ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$  προκύπτει από την εξίσωση της ακριβής έκφρασης της ελαστικής ενέργειας με την αντίστοιχη προσεγγιστική (Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009). Για την εύρεση της ακριβούς έκφρασης θα πρέπει να προσδιοριστεί ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων η οποία να μην παραβιάζει την διαφορική εξίσωση ισοροπίας και την συνοριακή συνθήκη των σχέσεων (4.3.3α-β). Έτσι στις σχέσεις (4.2.13) θα τροποποιήσουμε τις εκφράσεις των δευτερογενών διατμητικών τάσεων ως:

$$\sigma_{xx} = E(\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.5.1\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.5.1\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.5.1\gamma)$$

Όπου  $\phi_S^S$  είναι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης η οποία θα προσδιοριστεί με την εφαρμογή των εξισώσεων (4.3.3). Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις περιλαμβάνουν παραγώγους της  $\phi_S^S$  και θα προκύψουν εάν θεωρήσουμε το παρακάτω πεδίο μετατοπίσεων

$$u(x, y, z) = (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) + \left[ - \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{GC_S} \right] \left[ \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \right] \quad (4.5.2\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (4.5.2\beta)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (4.5.2\gamma)$$

και έπειτα προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις και από αυτές τις τάσεις.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις των τάσεων (4.5.1) στις σχέσεις (4.3.3) και λαμβάνοντας υπόψη την καθολική εξίσωση ισορροπίας (4.4.9β) προκύπτει πρόβλημα συνοριακών τιμών της  $\phi_S^S$  ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (4.5.3\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = - \frac{t_x C_S}{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) I_t^S + m_w} \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.5.3\beta)$$

Και για να υπολογιστεί διορθωτικός συντελεστής που να μην εξαρτάται από την φόρτιση θέτουμε  $t_x = 0$  και  $m_w = 0$  στις σχέσεις (4.5.1β-γ). Έτσι ορίζεται δισδιάστατη  $\phi_S^S$  και προκύπτει το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (4.5.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.5.4\beta)$$

Με ταυτόχρονη απαίτηση να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (4.5.5)$$

Οι εκφράσεις των διατμητικών τάσεων απλοποιούνται ως

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right]}_{\text{δευτερογενείς}} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (4.5.6\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right]}_{\text{δευτερογενείς}} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (4.5.6\beta)$$

Η ελαστική ενέργεια λόγω διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου δίνεται ως

$$U = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xy}^{S2} + 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + \tau_{xz}^{P2} + \tau_{xz}^{S2} + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S}{2G} d\Omega \quad (4.5.7\alpha)$$

$$\text{ή } U = U_P + U_S + U_{PS} \quad (4.5.7\beta)$$

όπου

$$U_P = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xz}^{P2}}{2G} d\Omega \quad U_S = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{S2} + \tau_{xz}^{S2}}{2G} d\Omega \quad (4.5.8\alpha,\beta)$$

$$U_{PS} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left( 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S \right) d\Omega \quad (4.5.8\gamma)$$

Η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης θα δοθεί από τις σχέσεις (4.2.13β-γ) ενώ η ακριβής έκφραση από τις σχέσεις (4.5.6.α-β). Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι  $U_{PS}=0$  αλλά και ότι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις είναι η ίδια. Άρα

$$U_{approx.} = U_{exact} \Rightarrow U_{approx.,S} = U_{exact,S} \quad (4.5.9)$$

Η μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. σχέση (4.2.13β-γ)) διαμορφώνεται με τη σχέση (4.4.2β) ως

$$\tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \quad (4.5.10\alpha,\beta)$$

ενώ για την ακριβή κατανομή (βλ. σχέση (4.5.6α-β)) ισχύει

$$\tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (4.5.11\alpha,\beta)$$

Έτσι με την αντικατάσταση της προσεγγιστικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στη σχέση (4.5.8β) προκύπτει (Kraus 2007)

$$U_{approx.,S} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \xrightarrow{(4.4.3\beta)} \quad (4.5.12)$$

$$U_{approx.,S} = \frac{1}{2G} \frac{(M_t^S)^2}{I_t^S}$$

ενώ με την αντικατάσταση της ακριβούς κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων προκύπτει:

$$U_{exact,S} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \rightarrow U_{exact,S} = \frac{1}{2G} \left( \frac{M_t^S}{C_S} \right)^2 I_{\phi} \quad (4.5.13)$$

όπου

$$I_{\phi} = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (4.5.14)$$

ή



$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (4.5.15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.5.12-13) στη σχέση (4.5.9) προκύπτει

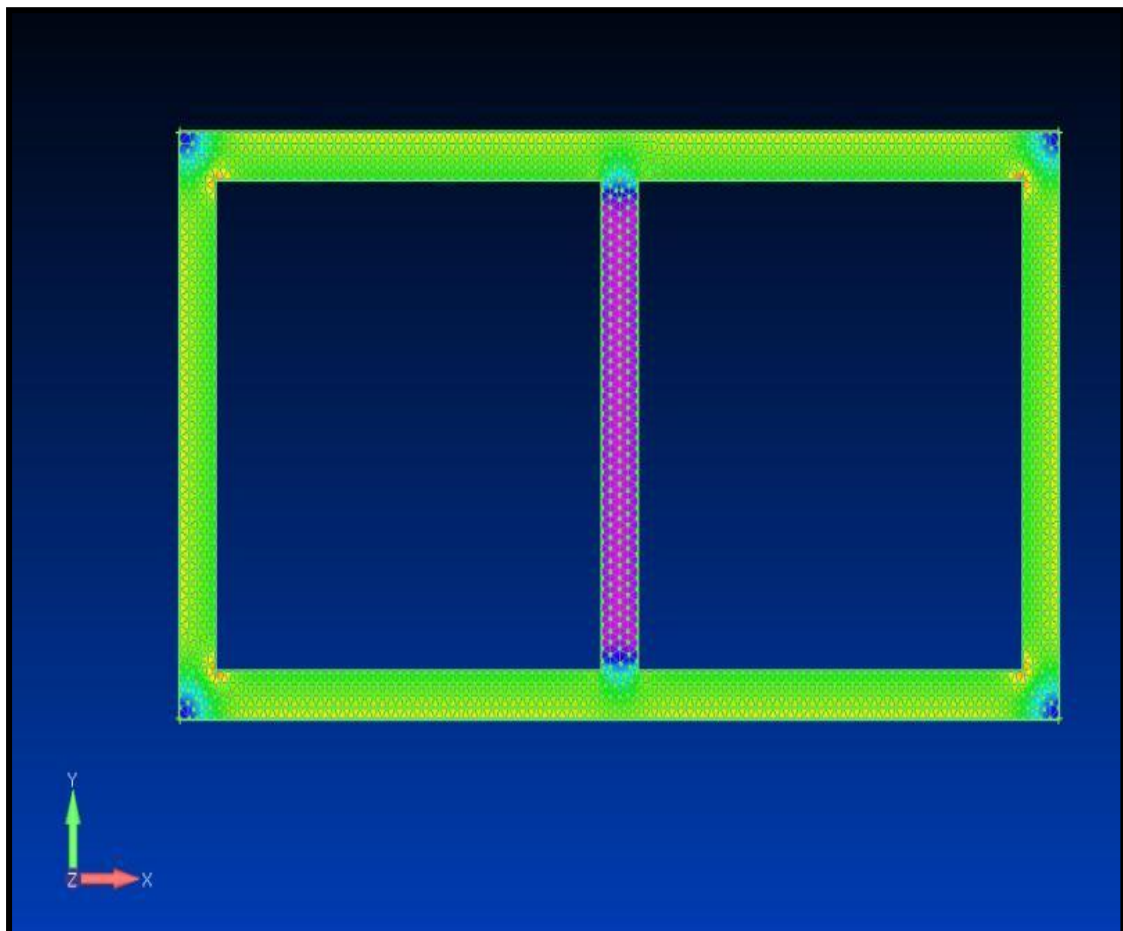
$$I_t^S = \frac{C_S^2}{I_{\phi}} \quad (4.5.16)$$

Και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.5.16) και (4.4.4) προκύπτει η σχέση υπολογισμού του **στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης** ως

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (4.5.17)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ



## 5.1 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $I_P, I_t^P, I_t^S, C_S$ με συνοριακή ολοκλήρωση

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ο υπολογισμός των αγνώστων του προβλήματος προϋποθέτει ότι έχουν προσδιοριστεί όλες οι γεωμετρικές σταθερές που υπεισέρχονται στις διάφορες εξισώσεις. Οι βασικές από αυτές τις γεωμετρικές σταθερές είναι η πολική ροπή αδρανείας  $I_P$ , η πρωτογενής στρεπτική σταθερά  $I_{tP}$ , η δευτερογενής στρεπτική σταθερά  $I_{tS}$  και η σταθερά στρέβλωσης  $C_S$  για τις οποίες έχουν δοθεί οι σχέσεις υπολογισμού τους (βλ. σχέσεις (4.4.3α-β-γ)) και είναι οι εξής:

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.1.1)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (5.1.2)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (5.1.3)$$

$$I_P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 \right) d\Omega \quad (5.1.4)$$

$$k_x = \frac{C_S^2}{\left( I_P - I_t^P \right) I_{\phi}} \quad (5.1.5)$$

Όπου

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (5.1.6)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όμως έχουν τη μορφή διπλού ολοκληρώματος στο χωρίο  $\Omega$  και προκειμένου να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα της επίλυσης με συνοριακή ολοκλήρωση (για τις σχέσεις (5.1.1-4) θα γίνει συνοριακή ολοκλήρωση ενώ για τις σχέσεις (5.1.5-6) θα γίνει πεδιακή ολοκλήρωση (στο Κεφάλαιο 5.2) επιδιώκουμε να μετατρέψουμε τα πεδιακά ολοκληρώματα σε συνοριακά και με τη βοήθεια του **θεωρήματος απόκλισης Gauss** (Κατσιαδέλης, 1999) προσδιορίζονται ως εξής:

$$I_P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial (y^3)}{\partial y} + \frac{\partial (z^3)}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left( y^3 n_y + z^3 n_z \right) ds \quad (5.1.7)$$

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (yz^2 - z\phi_S^P)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2z + y\phi_S^P)}{\partial z} \right] d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_t^P = \int_{\Gamma} \left[ \left( yz^2 - z\phi_S^P \right) n_y + \left( y^2z + y\phi_S^P \right) n_z \right] ds \quad (5.1.8)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^S - \phi_S^S \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = - \int_{\Gamma} \phi_S^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (5.1.9)$$

όπου  $\phi_S^S$  η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης (βλ. σχέσεις (4.5.4)) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.1.11)$$

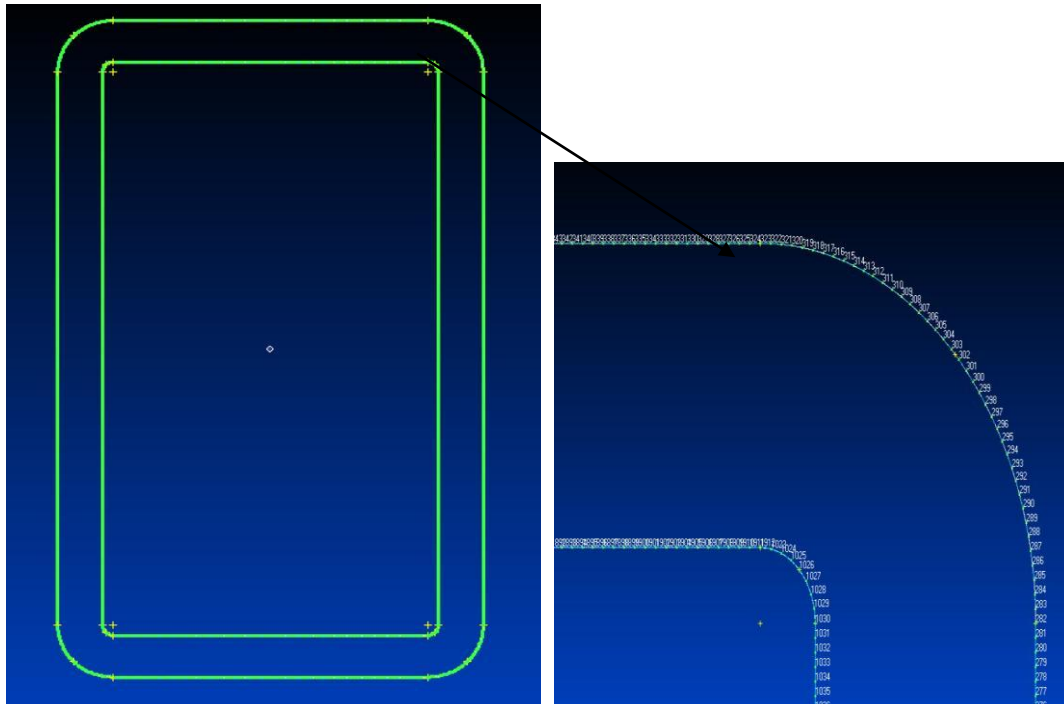
Και για το  $I_t^S$  αν κάνουμε χρήση της σχέσης (4.3.1α) από τη σχέση (5.1.2) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} ds \quad (5.1.12)$$

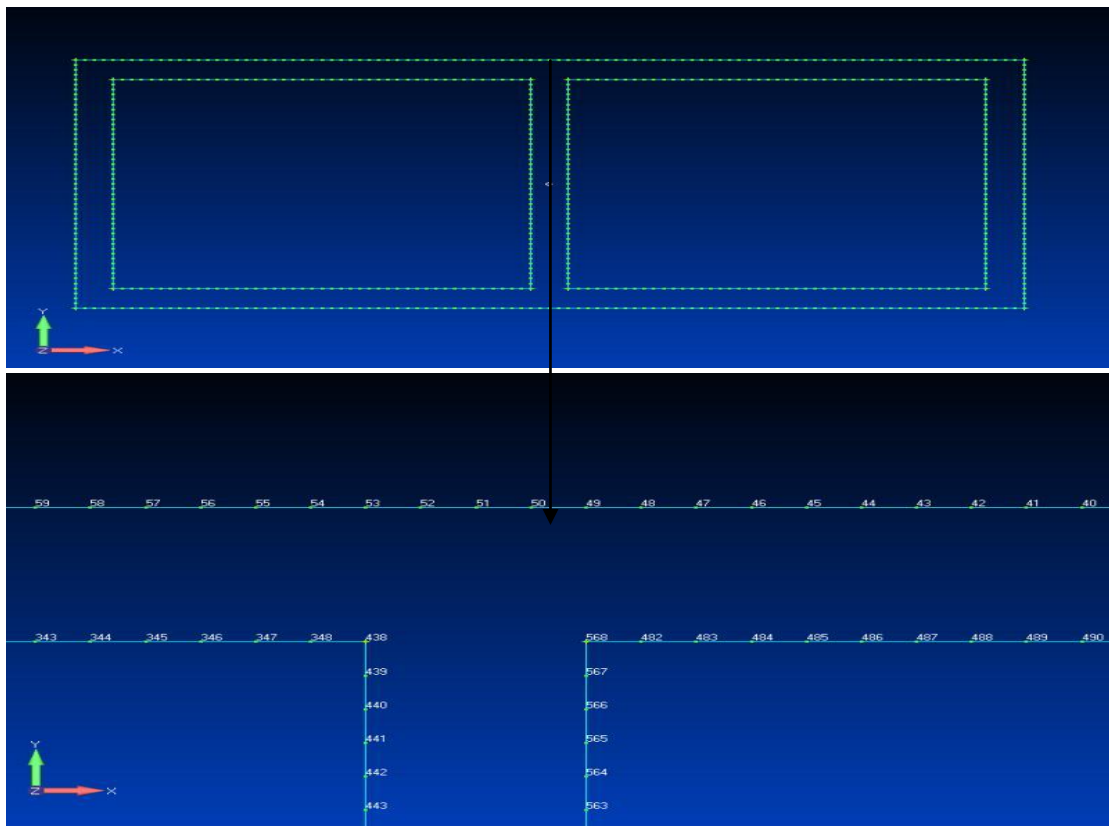
Ενώ αν κάνουμε χρήση της σχέσης (4.3.1β) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P (zn_y - yn_z) ds \quad (5.1.13)$$

Στη συνέχεια θα διακριτοποιηθεί το σύνορο της διατομής σε σταθερά συνοριακά στοιχεία και θα εφαρμοστούν οι τυπικοί κανόνες ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στα επόμενα σχήματα φαίνονται μερικές περιπτώσεις συνοριακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran. Αξίζει να αναφερθεί ότι 400-500 συνοριακά στοιχεία επαρκούν για τον ακριβή υπολογισμό των προαναφερθεισών γεωμετρικών σταθερών των διατομών που εξετάστηκαν.



**Σχήμα 5.1.1** Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 100x60x6.3 με 1912 συνοριακά στοιχεία



**Σχήμα 5.1.2** Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή δικύβελου κιβωτίου 1000x500x40 με 644 συνοριακά στοιχεία

## 5.2 Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης $k_x$ με πεδιακή ολοκλήρωση

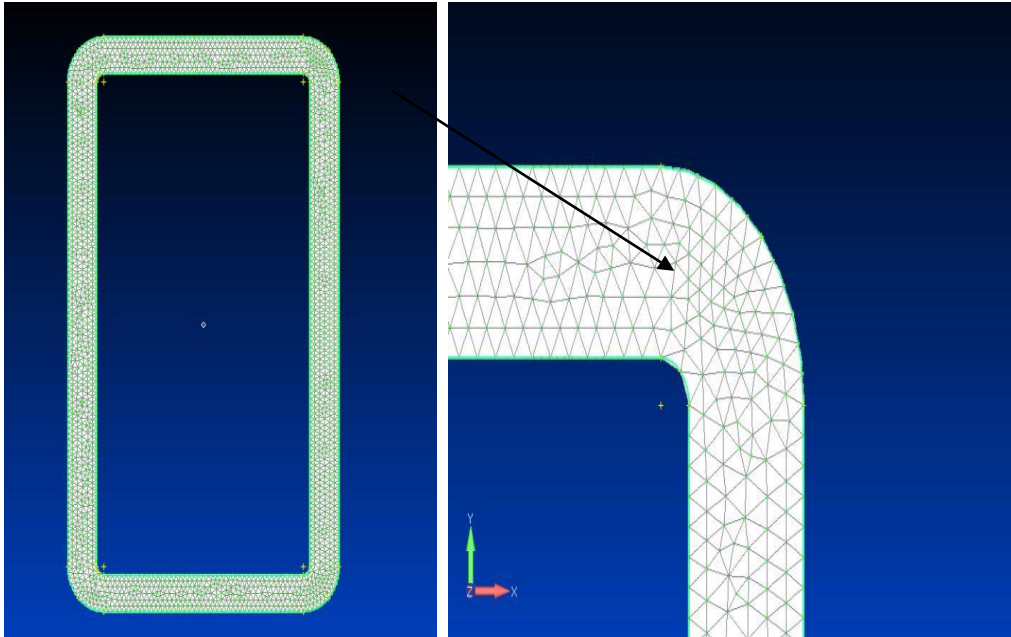
Όπως προέκυψε από το Κεφάλαιο 4 (βλ. σχέσεις (4.5.15), (4.5.17)) ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης δίνεται από τη σχέση

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_\phi} \quad (5.2.1)$$

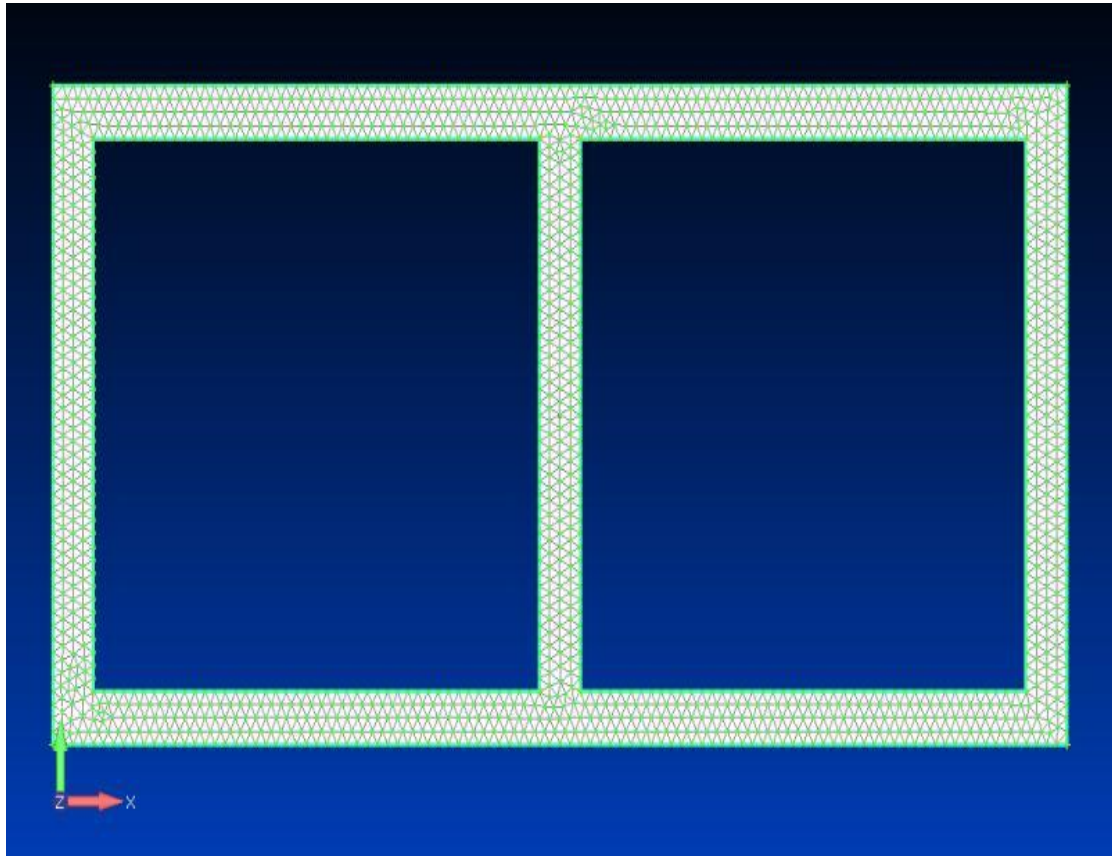
όπου

$$I_\phi = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (5.2.2)$$

Η σχέση υπολογισμού του  $k_x$  και του  $I_\phi$ , όμως, δεν είναι δυνατό να μετατραπεί σε συνοριακό ολοκλήρωμα και εξαιτίας του στοιχείου αυτού απαιτείται ο υπολογισμός πεδιακού (διπλού) ολοκληρώματος. Στην παρούσα εργασία, ο υπολογισμός αυτός πραγματοποιείται με διακριτοποίηση του χωρίου της διατομής σε επιφανειακά (τριγωνικά) στοιχεία και η εφαρμογή τυπικών κανόνων ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στα επόμενα σχήματα φαίνονται μερικές περιπτώσεις πεδιακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran. Αξίζει να αναφερθεί ότι 200-300 επιφανειακά στοιχεία επαρκούν για τον ακριβή υπολογισμό των προαναφερθεισών γεωμετρικών σταθερών των διατομών που εξετάστηκαν.



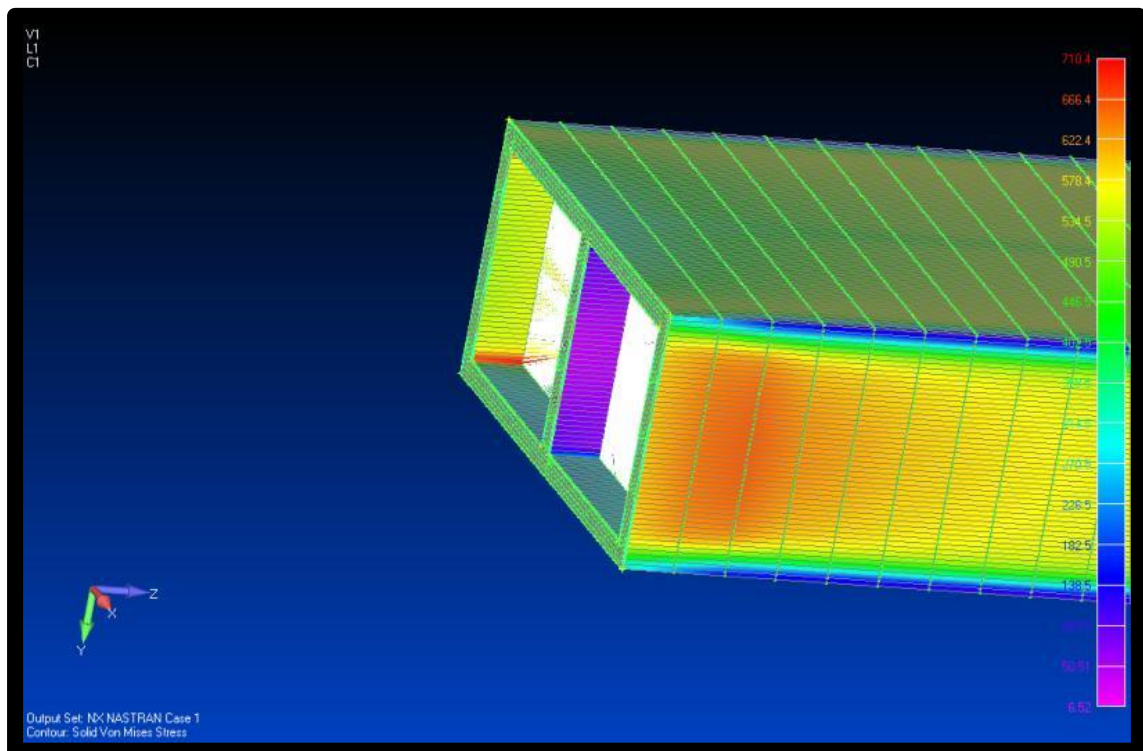
**Σχήμα 5.2.1** Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 100x60x6.3 με 3706 πεδιακά στοιχεία..



*Σχήμα 5.2.2* Πεδιακή διακριτοποίηση σε δικύψελο κιβώτιο με 3280 πεδιακά στοιχεία.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6<sup>ο</sup>

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ





## 6.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο με τη χρήση έτοιμων προγραμμάτων σε Η/Υ εκτελέσαμε πλήθος αναλύσεων (διάφορες διατομές και στατικά συστήματα ραβδωτών στοιχείων) με σκοπό να εξάγουμε γεωμετρικές σταθερές, κινηματικά μεγέθη, εντατικά μεγέθη και κυρίως τασικά μεγέθη. Τα προγράμματα Η/Υ που χρησιμοποιήσαμε ήταν τα προγράμματα συνοριακών στοιχείων που συντάχθηκαν από τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Β. Τσίπηρα (ραβδοστατική) καθώς και το εμπορικό πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran (τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας ή θεωρία κελυφών).

Στην βιβλιογραφία καθώς και στους κανονισμούς έργων Πολιτικού Μηχανικού (όπως στους EC2, EC3 που διέπουν τις κατασκευές από σκυρόδεμα και χάλυβα, αντίστοιχα), προτείνεται για τις μεν ανοικτές διατομές η ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης και για τις μεν κλειστές διατομές να αγνοούνται τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης προς απλοποίηση. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία (Murin and Kutis 2008, Rubin 2005, Mokos and Sapountzakis 2011, Γεωργίου 2012) έχει καταδειχτεί ότι η σύσταση αυτή είναι εύλογη για τις ανοικτές διατομές και δεν είναι απαραίτητη η εφαρμογή της θεωρίας της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μιας και η ‘κλασική’ θεωρία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η συγκεκριμένη επιρροή σε ράβδους κλειστής διατομής. Εξάλλου και στον EC9 (που διέπει κατασκευές από αλουμίνιο) απουσιάζει η προαναφερθείσα απλοποιητική παραδοχή. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε τι ακριβώς συμβαίνει με ράβδους κλειστής διατομής από αλουμίνιο, τι διαφοροποιήσεις έχουμε ανάλογα με την θεωρία που εφαρμόζουμε και ποια εν τέλει είναι η προσφορότερη θεωρία για την μελέτη των ράβδων αυτών υπό στρεπτική καταπόνηση.

Στα παραδείγματα που παρατίθενται στη συνέχεια του κεφαλαίου συγκρίνονται τα αποτελέσματα (γεωμετρικές σταθερές, κινηματικά μεγέθη, εντατικά μεγέθη, τάσεις) που παίρνουμε από τη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (ραβδοστατική, Μέθοδος Αναλογικής Εξίσωσης και Συνοριακών Στοιχείων) με τα αποτελέσματα που εξάγουμε από τη θεωρία τρισδιάστατης ελαστικότητας και θεωρία κελυφών σε διπλά συμμετρικές κλειστές συμπαγείς και απλής ή πολλαπλής συνοχής κοίλες διατομές (χρήση εμπορικού λογισμικού, Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων). Σκοπός μας είναι να δούμε κατά πόσο συμφωνούν τα αποτελέσματα αυτά έτσι ώστε να αποφανθούμε για την αξιοπιστία των αναλύσεών μας με τη θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (ραβδοστατική).

Παράλληλα, σε κάθε παράδειγμα, αφότου εξακριβωθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων, γίνεται σύγκριση μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης (ομοιόμορφης, «κλασικής» ανομοιόμορφης, ανομοιόμορφης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων). Επιπλέον, εξετάζεται κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα της «διευρυμένης» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης αν αγνοηθεί ο διορθωτικός στρεπτικός συντελεστής (4.5.17) ( $k_x=1$ ).

Τέλος, σε κάθε παράδειγμα που εξετάζουμε θα μελετηθεί πως επηρεάζει το φαινόμενο του “distortion” (παραμόρφωσης στο επίπεδο της διατομής) τα κινηματικά και κυρίως τα τασικά μεγέθη. Η μελέτη του φαινομένου αυτού θα εξετασθεί με κατάλληλα προσομοιώματα στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων μιας και η θεωρία δοκού δεν μπορεί να το εξετάσει με τον τρόπο που έχει μορφωθεί (βλ. παραδοχή 2 κεφ 4.1).

## 6.2 Επιλογή υλικού – Χαρακτηριστικά Αλουμινίου.

### 6.2.1 Κανονιστικές τιμές

Το υλικό που έχουμε θεωρήσει σε όλες τις περιπτώσεις είναι αλουμίνιο με τα εξής χαρακτηριστικά:

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 70\ 000\ \text{MPa}$
Μέτρο Διάτμησης	$G = 27\ 000\ \text{MPa}$
Λόγος Poisson	$\nu = 0.30$
Συντελεστής θερμικής διαστολής	$\alpha = 23 \times 10^{-6}\ \text{per } ^\circ\text{C}$
Πυκνότητα	$P = 2700\ \text{kg/m}^3$

Πίνακας 6.2 1 Σχεδιαστικές τιμές των συντελεστών του αλουμινίου

Κράμα	$f_{0.2}$	$F_u$
EN AW-6082 T6	260 MPa	310 MPa
EN AW-5083 H24	250 MPa	340 MPa

Πίνακας 6.2 2 Αντοχή κραμάτων αλουμινίου.

Συντελεστής ασφαλείας για τα μέλη $\gamma_{M1} =$	1,10
Συντελεστής ασφαλείας για τα μέλη $\gamma_{M2} =$	1,25
Μερικός συντελεστής ασφαλείας για συγκολλητές ενώσεις $\gamma_{Mw} =$	1,25
Μερικός συντελεστής ασφαλείας για σχεδιασμό έναντι πυρκαγιάς $\gamma_{M,fi} =$	1,00

Πίνακας 6.2 3 Συντελεστές ασφαλείας για τα μέλη

### 6.2.2 Χαρακτηριστικά του αλουμινίου

Οι σπουδαστές πολιτικοί μηχανικοί πιστεύουν ότι οι περισσότερες κατασκευές κτίζονται μόνο από χάλυβα ή σκυρόδεμα ή από συνδυασμό των δύο αυτών υλικών (σύμμικτες κατασκευές, προεντεταμένο ή οπλισμένο σκυρόδεμα). Οι δομικές εφαρμογές του αλουμινίου δεν αναφέρονται συνήθως στα προπτυχιακά μαθήματα σχεδόν καμίας σχολής Πολιτικών Μηχανικών στον κόσμο. Ήδη πάνω από 3 δισεκατομμύρια κιλά από αλουμίνιο χρησιμοποιούνται για κτίρια και κατασκευαστικές εφαρμογές κάθε χρόνο στις Η.Π.Α (The aluminium Design Manual 2005). Τα βασικά χαρακτηριστικά του αλουμινίου είναι τα εξής:

- Το αλουμίνιο είναι πιο οικονομικά ανταγωνιστικό τώρα από ότι κάθε άλλη στιγμή στο παρελθόν. Εξαιτίας των βελτιώσεων στον τρόπο παραγωγής

καθώς και του διεθνή ανταγωνισμού, οι τιμές του αλουμινίου έχουν φτάσει σε ιστορικά χαμηλά επίπεδα, ανταγωνιζόμενο πολύ καλά το χάλυβα με τα υψηλά κόστη και τις ελλείψεις σε προσφορά. Επειδή το αλουμίνιο ζυγίζει το ένα τρίτο του χάλυβα και δε χρειάζεται επικάλυψη για διάβρωση ή άλλες επιστρώσεις καταλήγουμε ότι μια κατασκευή από αλουμίνιο μπορεί να κοστίσει λιγότερο από μια κατασκευή από χάλυβα στην πραγματικότητα.

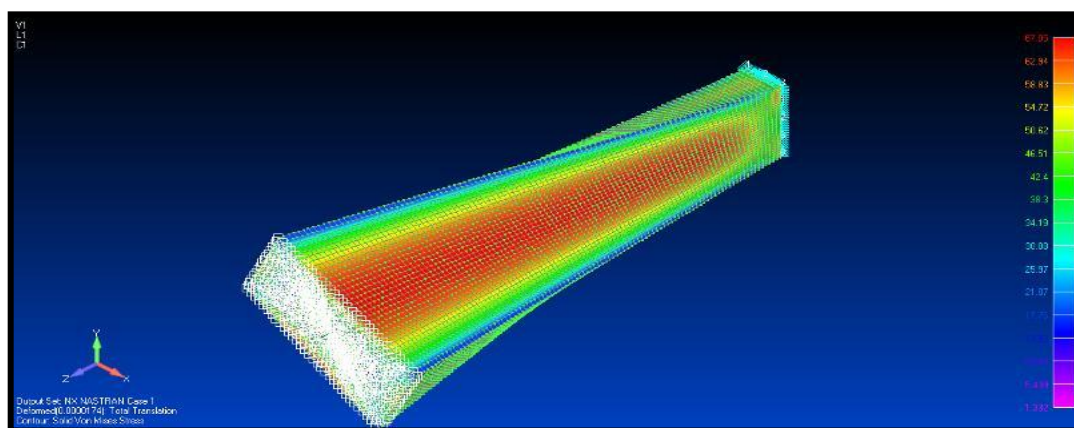
- Το αλουμίνιο είναι ανθεκτικό στη διάβρωση. Ακόμα και σε περιβάλλοντα επεξεργασίας λυμάτων ή θαλάσσια το αλουμίνιο δεν χρειάζεται προστατευτικές επιστρώσεις καθώς το οξείδιο του αργιλίου που σχηματίζεται αμέσως είναι ιδιαίτερα ανθεκτικό και σταματάει περαιτέρω οξείδωση.
- Το αλουμίνιο είναι οικολογικό υλικό. Είναι 100% ανακυκλώσιμο σημειώνοντας πως το ανακυκλωμένο αλουμίνιο απαιτεί μόνο το 5% της ενέργειας σε σχέση την εξόρυξη νέου μεταλλεύματος για την παράγωγή αλουμινίου.  
Σήμερα τα ευρέως διαδεδομένα προϊόντα από αλουμίνιο που τυπικά χρησιμοποιούνται στον κατασκευαστικό τομέα περιέχουν από 80% έως 85% ανακυκλωμένο υλικό . Επιπλέον, το μικρό βάρος του αλουμινίου μειώνει την ενέργεια που καταναλώνεται κατά την χρήση φορητών (π.χ. σκαλωσιές) και κινητών κατασκευών όπως οι κινητές γέφυρες και τέλος η υψηλή ανακλαστικότητα του μειώνει την αύξηση της θερμοκρασίας σε κτίρια στα θερμά κλίματα.
- Ένα ακόμα πλεονέκτημα του αλουμινίου είναι ότι είναι συγκολλησιμο. Με τις προόδους που έχουν γίνει στις συγκολλήσεις, μια αξιόπιστη συγκόλληση αλουμινίου γίνεται τόσο εύκολα όσο του χάλυβα.
- Τέλος πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του αλουμινίου είναι ότι είναι εύκολα κατεργάσιμο. Συγκριτικά με τα άλλα υλικά που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές, το αλουμίνιο είναι το πιο εύκολο και το πιο οικονομικό στη διαδικασία της διέλασης. Κλασσικές διατομές όπως I, Ταυ, Z, κυκλικές, ορθογώνιες, τετραγωνικές είναι άμεσα διαθέσιμες όπως και τα προσαρμοσμένα σχήματα διατομών με το επιπλέον κόστος του καλουπιού. Παράλληλα, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει και μεγάλη ποικιλία διατομών που μπορούν να επιλεγούν από το μηχανικό, γεγονός που δίνει πληθώρα σχεδιαστικών λύσεων.

## 6.3 Αριθμητική εφαρμογή 1

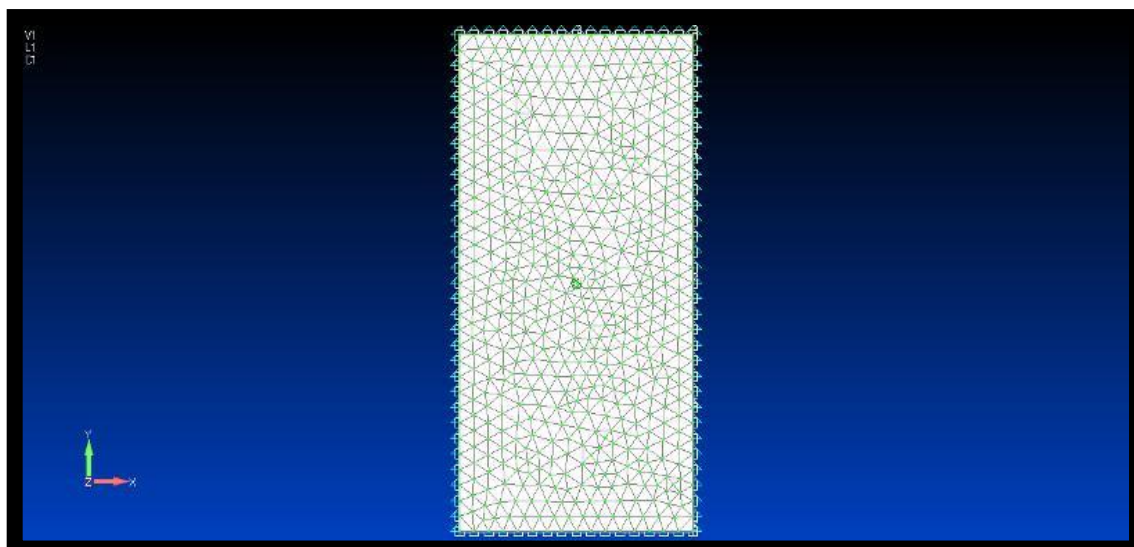
Στην θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων γίνεται η αντικατάσταση του λόγου  $E^*$   $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  με το μέτρο ελαστικότητας  $E$ . Η παραδοχή αυτή ισχύει επακριβώς για συντελεστή Poisson  $\nu=0$ .

Στο παράδειγμα που παραθέτουμε επιδιώκουμε να δούμε πώς επηρεάζει η διαφοροποίηση του λόγου Poisson  $\nu$  τις τιμές και την κατανομή των κινηματικών, εντατικών και τασικών μεγεθών σε ράβδους διαφόρων μηκών ( $L=0,1m$   $0,5m$   $1m$   $4m$   $6m$   $10m$ ) με στατικό σύστημα προβόλου σε πρισματικές ράβδους διαφόρων μηκών συμπαγούς ορθογωνικής διατομής από αλουμίνιο υποβαλλόμενες σε στρεπτική ροπή στο άκρο  $M=10KNm$ . Σκοπός είναι να δούμε αν η προαναφερθείσα παραδοχή είναι εύλογη ή οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα στα μεγέθη που εξετάζουμε. Για αυτό το λόγο ακολουθούμε τα εξής βήματα:

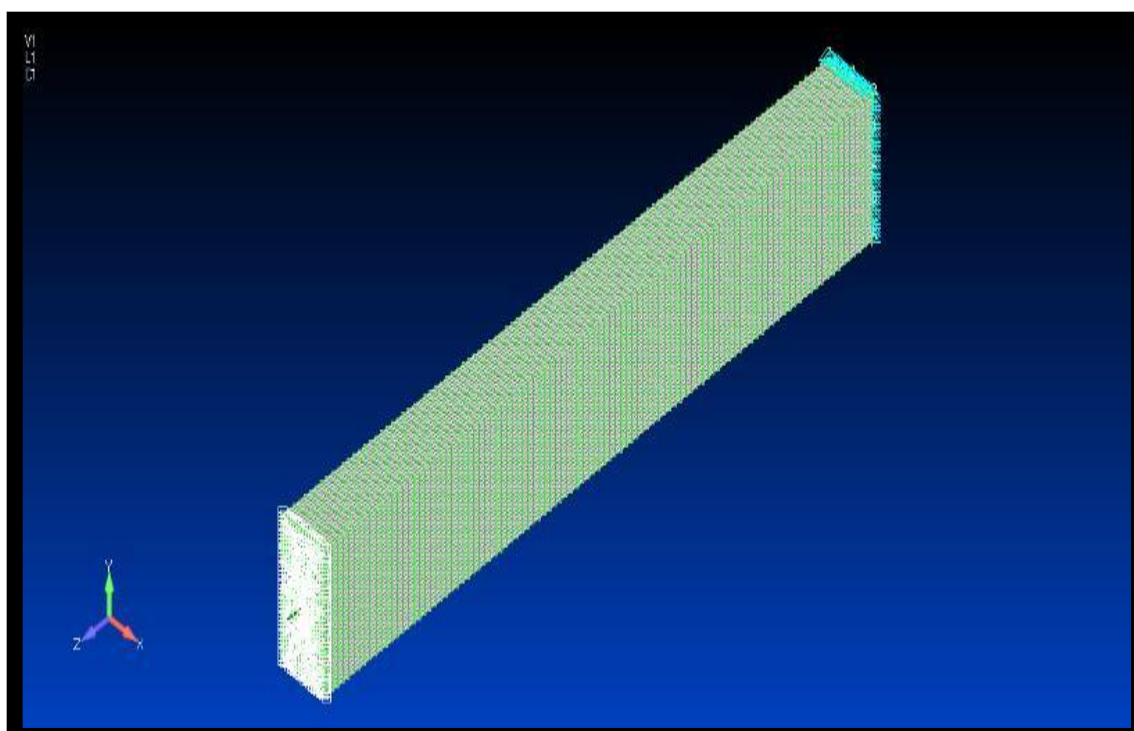
1. Στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran εξάγουμε κινηματικά μεγέθη και τασικά μεγέθη για την περίπτωση όπου αφενός μεν  $\nu=0.30$  δηλαδή  $E = 70\ 000$  MPa και  $G = 27\ 000$  MPa που αντιστοιχεί στο αλουμίνιο και αφετέρου δε  $\nu=0.00$  δηλαδή  $E = 70\ 000$  MPa και  $G = 35\ 000$  MPa. Παράλληλα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων του κ.Τσίπηρα. Στο τέλος συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που εξάγουμε από τα δύο προγράμματα για να δούμε ποσοτικά αν και κατά πόσο υπάρχει συμφωνία.
2. Στο πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων κ.Τσίπηρα (ραβδοστατική) εξάγουμε κινηματικά και εντατικά μεγέθη για την περίπτωση όπου αφενός μεν  $\nu=0.30$  δηλαδή  $E = 70\ 000$  MPa και  $G = 27\ 000$  MPa που αντιστοιχεί στο Αλουμίνιο και αφετέρου δε  $\nu=0.00$  δηλαδή  $E = 70\ 000$  MPa και  $G = 35\ 000$  MPa. Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που μας δίνουν οι αναλύσεις αυτές και καταγράφουμε τις διαφορές.



Εικόνα 6.3.1 Επίλυση ράβδου ορθογωνικής διατομής με εμπορικό λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων



Εικόνα 6.3.2 Διατομή ελέγχου 0,80m – 1,60m



Εικόνα 6.3.3 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

## 1<sup>η</sup> Ανάλυση

Στον πίνακα που παραθέτουμε παρακάτω εμφανίζονται η στρεπτική σταθερά  $I_t$  καθώς και η σταθερά στρέβλωσης  $C_s$ , οι οποίες υπαισέρχονται στη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Πραγματοποιείται σύγκριση μεταξύ των τιμών που μας δίνει το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran καθώς και των τιμών που μας δίνει το πρόγραμμα συνοριακών στοιχείων του κ Τσίππηρα.

### Γεωμετρικές Σταθερές

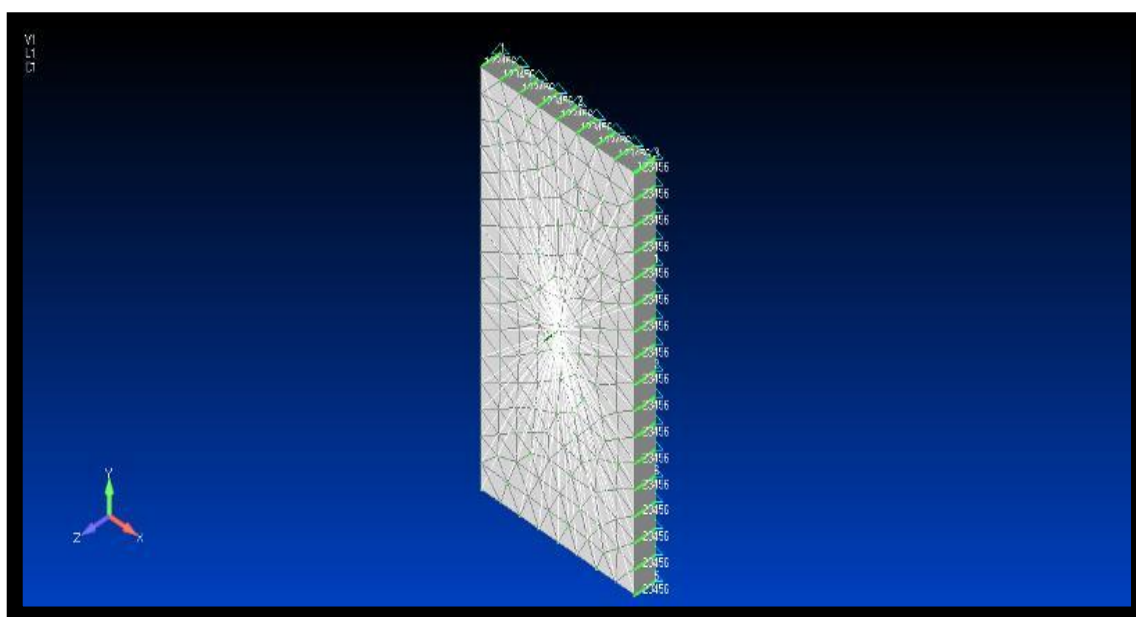
Geometric Constants	BEM	FEM	Difference
$I_t [m^4] =$	0,18753	0,18793	<b>0,21%</b>
$C_s [m^6] =$	0,00534	0,00533	<b>0,15%</b>

Πίνακας 6.3.1 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τόσο στην στρεπτική σταθερά  $I_t$  όσο και στην στρεβλωτική σταθερά  $C_s$ . Αντιλαμβανόμαστε ότι εξαιτίας του γεγονότος ότι οι δύο τρόποι ανάλυσης, καταλήγουν σε αποτελέσματα με αμελητέα απόκλιση, επικυρώνεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Επομένως, για την συμπαγή ορθογωνική διατομή (0,80m)x(1,60m) η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων που έχουμε χρησιμοποιήσει αποτελεί ένα ακριβές και αξιόπιστο εργαλείο για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών.

### Κινηματικά μεγέθη και Τάσεις

Δοκός  $L=0.10m$



Εικόνα 6.3.4 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

<b>Δοκός L=0,1m</b>			
Nastran		STMDE	
	$\theta\chi$		$\theta\chi$
$\nu = 0,30$	1,14E-007	$\nu = 0,30$	1,27E-007
$\nu = 0,00$	8,92E-008	$\nu = 0,00$	9,81E-008
	rad		rad
Comparisons			
Nastran-STDME*	<b>Differences</b>		
<b><math>\nu = 0,30</math></b>	<b>10,16%</b>		
<b><math>\nu = 0,00</math></b>	<b>9,14%</b>		
Nastran ( $\nu=0,00-0,30$ )	STDME ( $\nu=0,00-0,30$ )		
21,78%	22,65%		

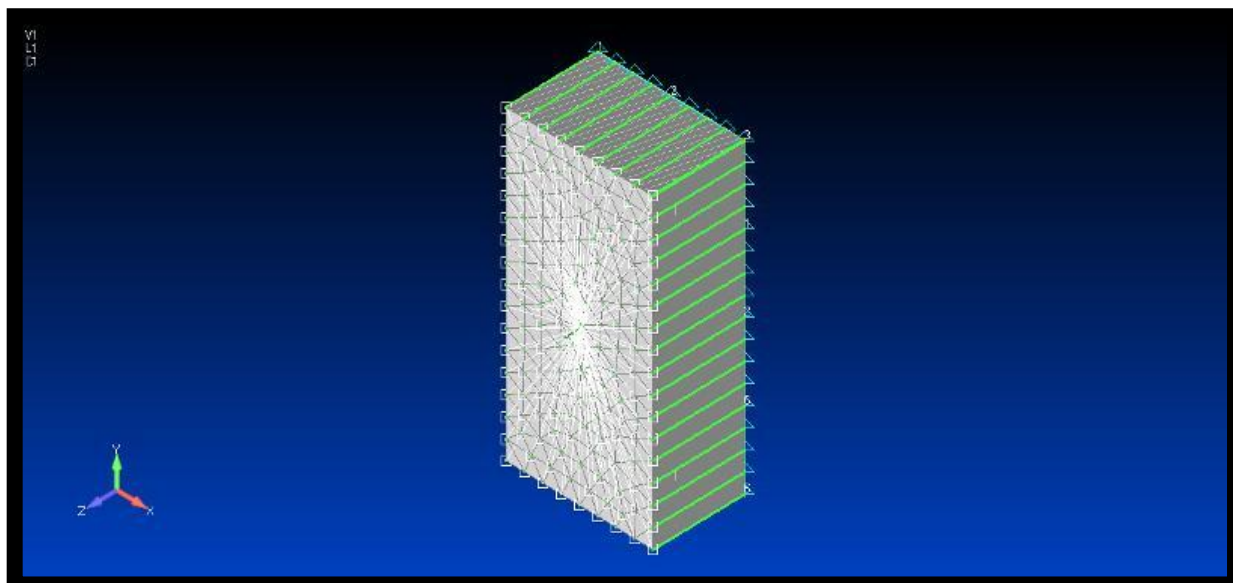
Πίνακας 6.3.2 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M για τη γωνία στροφής

\*STDME(secondary torsional deformation effect-επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων)

Στην πραγματικότητα πρόκειται για δίσκο με διαστάσεις 10cm x 80cm x 160 cm .Έχουμε ενδιαφέρον στην επιρροή μόνο των κινηματικών μεγεθών στην περίπτωση αυτή ,διότι είναι αναμενόμενο να βγάλουμε αρκετά μεγάλες αποκλίσεις, μιας και ο δίσκος δεν μπορεί να μελετηθεί ως ραβδωτός φορέας.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta\chi$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 10,16 % και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της τάξης του 9,14% με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της γωνίας (σε rad).
- Όσον αφορά τώρα την επιρροή της αλλαγής του  $\nu$  (και κατ' επέκταση του Μέτρου Διάτμησης G στα κινηματικά μεγέθη), παρατηρούμε ότι τόσο το Nastran όσο και η STDME δίνουν μια διαφορά της τάξης του 21,78%-22,65% αντίστοιχα μεταξύ της τιμής της μέγιστης γωνίας στροφής της διατομής για  $\nu=0,00$  και  $\nu=0,30$ . Στο επόμενο παράδειγμα θα σχολιάσουμε τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αλλαγή.

## Δοκός L=0.50m



Εικόνα 6.3.5 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

<b>Δοκός L=0,5m</b>			
Nastran		STMDE	
	$\Theta_x$		$\theta_x$
$\nu = 0,30$	7,05E-007	$\nu = 0,30$	7,27E-007
$\nu = 0,00$	5,65E-007	$\nu = 0,00$	5,75E-007
	rad		rad
Comparisons			
Nastran-STDME	<b>Differences</b>		
<b><math>\nu = 0,30</math></b>	<b>3,06%</b>		
<b><math>\nu = 0,00</math></b>	<b>1,67%</b>		
Nastran ( $\nu=0,00-0,30$ )		STDME ( $\nu=0,00-0,30$ )	
19,81%		20,95%	

Πίνακας 6.3.3 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

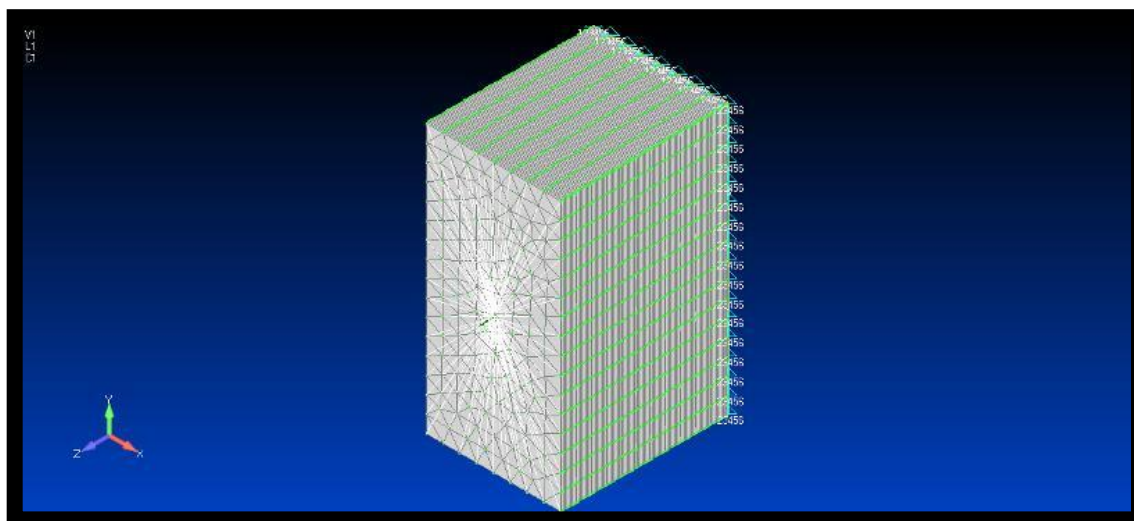
Στην πραγματικότητα πρόκειται για δίσκο με διαστάσεις 50cm x 80cm x 160 cm .Έχουμε ενδιαφέρον στην επιρροή μόνο των κινηματικών μεγεθών στην



περίπτωση αυτή ,διότι είναι αναμενόμενο να βγάλουμε αρκετά μεγάλες αποκλίσεις, μιας και ο δίσκος δεν μπορεί να μελετηθεί ως ραβδωτός φορέας.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta\chi$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 3,06 % και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,67% με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της γωνίας (σε rad). Με την αύξηση του μήκους της δοκού παρατηρούμε ότι η απόκλιση μειώθηκε αισθητά το οποίο σίγουρα οφείλεται στο ότι η δοκός πλησιάζει να γίνει ραβδωτός φορέας.
- Όσον αφορά τώρα την επιρροή της αλλαγής του  $\nu$  (και κατ' επέκταση του Μέτρου Διάτμησης  $G$  στα κινηματικά μεγέθη), παρατηρούμε ότι τόσο το Nastran όσο και η STDME δίνουν μια διαφορά της τάξης του 19,81%-20,95% αντίστοιχα μεταξύ της τιμής της μέγιστης γωνίας στροφής της διατομής για  $\nu=0,00$  και  $\nu=0,30$ . Στο επόμενο παράδειγμα θα σχολιάσουμε τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αλλαγή.

### Δοκός $L=1.00m$



Εικόνα 6.3.6 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

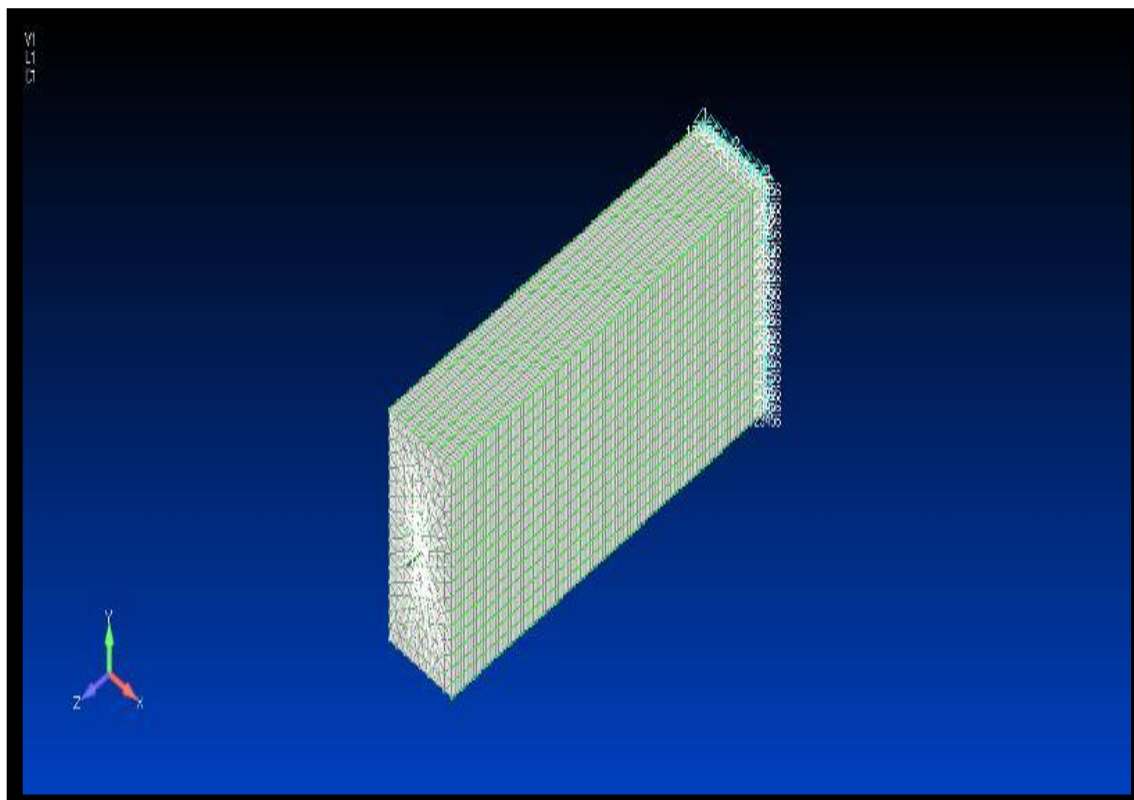
<b>Δοκός L=1m</b>			
Nastran		STMDE	
	$\theta\chi$		$\theta\chi$
$\nu = 0,30$	1,64E-006	$\nu = 0,30$	1,66E-006
$\nu = 0,00$	1,30E-006	$\nu = 0,00$	1,31E-006
	rad		rad
Comparisons			
Nastran-STDME	<b>Differences</b>		
<b><math>\nu = 0,30</math></b>	<b>1,43%</b>		
<b><math>\nu = 0,00</math></b>	<b>0,77%</b>		
Nastran ( $\nu=0,00-0,30$ )	STDME ( $\nu=0,00-0,30$ )		
20,69%	21,21%		

Πίνακας 6.3.4 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

Στην πραγματικότητα πρόκειται για χθαμαλό πρόβολο με διαστάσεις 100cm x 80cm x 160 cm .Έχουμε ενδιαφέρον στην επιρροή μόνο των κινηματικών μεγεθών στην περίπτωση αυτή ,διότι είναι αναμενόμενο να βγάλουμε αρκετά μεγάλες αποκλίσεις, μιας και ο χθαμαλός πρόβολος δεν μπορεί να μελετηθεί ως ραβδωτός φορέας.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta\chi$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ.Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,43 % και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της τάξης του 0,77% με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της γωνίας (σε rad).Με την αύξηση του μήκους της δοκού παρατηρούμε ότι η απόκλιση μειώθηκε αισθητά το οποίο σίγουρα οφείλεται στο ότι η δοκός πλησιάζει να γίνει ραβδωτός φορέας.
- Όσον αφορά τώρα την επιρροή της αλλαγής του  $\nu$  (και κατ' επέκταση του Μέτρου Διάτμησης G στα κινηματικά μεγέθη), παρατηρούμε ότι τόσο το Nastran όσο και η STDME δίνουν μια διαφορά της τάξης του 20,69,81%-21,21% αντίστοιχα μεταξύ της τιμής της μέγιστης γωνίας στροφής της διατομής για  $\nu=0,00$  και  $\nu=0,30$ . Στο επόμενο παράδειγμα θα σχολιάσουμε τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αλλαγή.

## Δοκός L=4.00m



Εικόνα 6.3.7 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

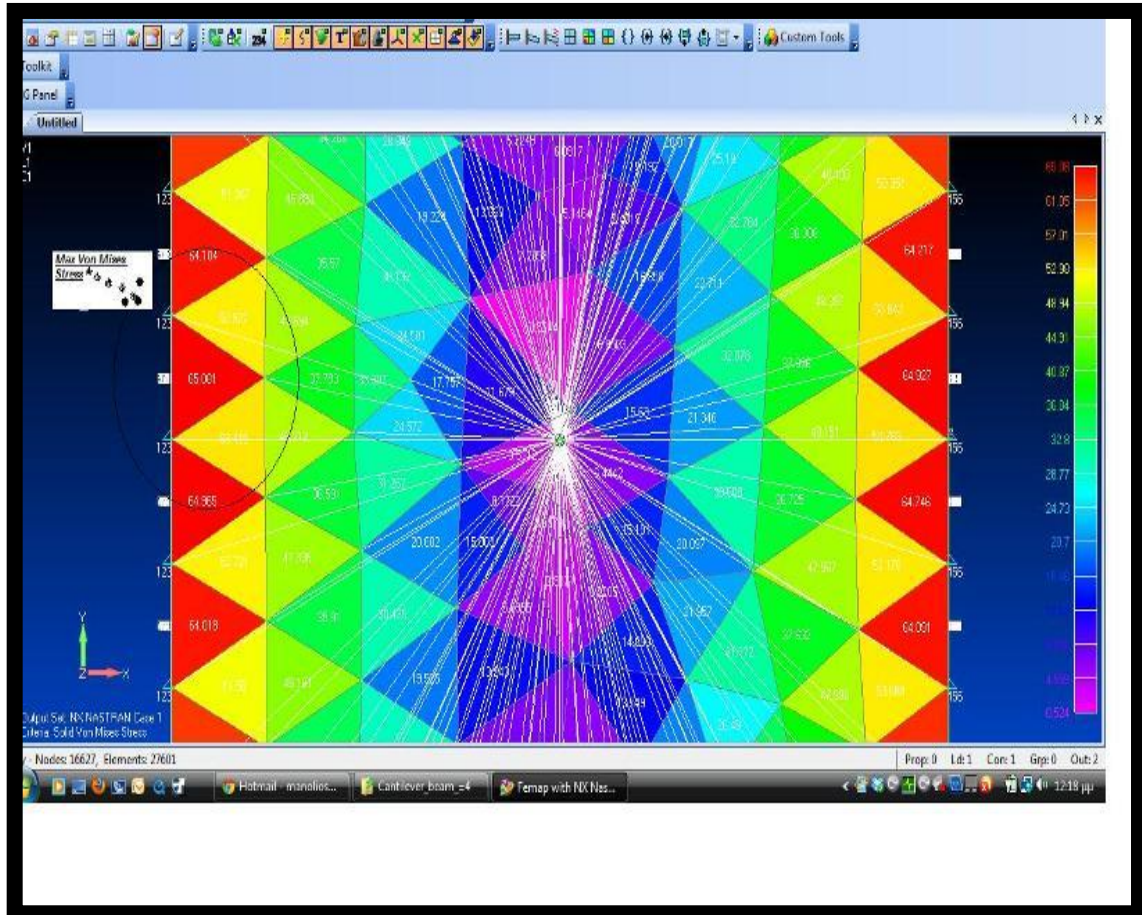
<b>Δοκός L=4m</b>			
Nastran		STMDE	
	$\theta_x$		$\theta_x$
$\nu = 0,30$	7,49E-006	$\nu = 0,30$	7,58E-006
$\nu = 0,00$	5,80-E-006	$\nu = 0,00$	5,87E-006
	rad		rad
Comparisons			
Nastran-STDME	<b>Differences</b>		
$\nu = 0,30$	<b>1,13%</b>		
$\nu = 0,00$	<b>1,21%</b>		
Nastran ( $\nu=0.00-0.30$ )	STDME ( $\nu=0.00-0.30$ )		
22,52%	22,46%		

Πίνακας 6.3.5 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta_x$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπρη) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,13 % και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της

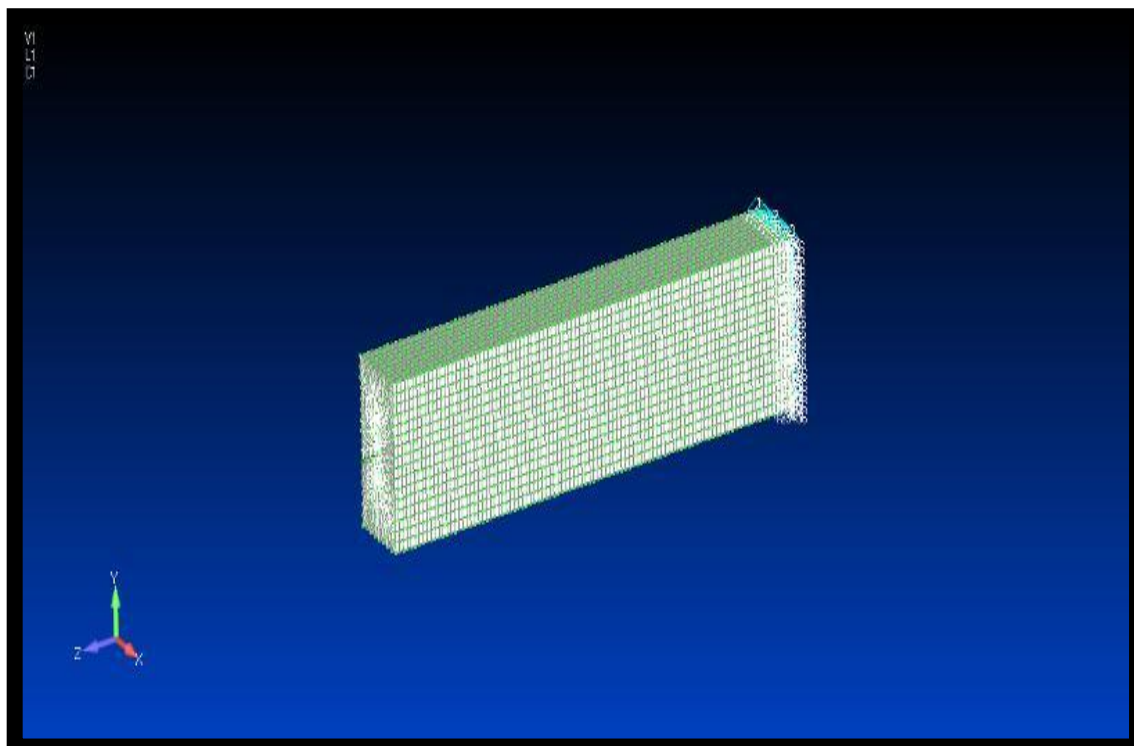


% με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της τάσης (σε Μpa). Παράλληλα, η μέγιστη τάση εμφανίζεται και στις δύο αναλύσεις στην ίδια περιοχή της διατομής.



Εικόνα 6.3.9 Παραμορφωμένη Περιοχή εμφάνισης της μέγιστης τάσης Von Mises.

## Δοκός L=6.00m



Εικόνα 6.3.10 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

<b>Δοκός L=6m</b>			
Nastran		STMDE	
	$\theta_x$		$\theta_x$
$\nu = 0,30$	1,14E-005	$\nu = 0,30$	1,15E-005
$\nu = 0,00$	8,81E-006	$\nu = 0,00$	8,92E-006
	Rad		rad
Comparisons			
Nastran-STDME	<b>Differences</b>		
<b><math>\nu = 0,30</math></b>	<b>1,12%</b>		
<b><math>\nu = 0,00</math></b>	<b>1,27%</b>		
Nastran ( $\nu=0.00-0.30$ )	STDME ( $\nu=0.00-0.30$ )		
22,71%	22,59%		

Πίνακας 6.3.7 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,12 % και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,27% με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της γωνίας (σε rad). Η απόκλιση αυτή στα κινηματικά μεγέθη του συγκεκριμένου ραβδωτού φορέα είναι αμελητέα και για τις δύο περιπτώσεις του  $\nu$ .
- Όσον αφορά τώρα την επιρροή της αλλαγής του  $\nu$  (και κατ' επέκταση του Μέτρου Διάτμησης  $G$  στα κινηματικά μεγέθη), παρατηρούμε ότι τόσο το Nastran όσο και η STDME δίνουν μια διαφορά της τάξης του 22,71%-22,59 % αντίστοιχα μεταξύ της τιμής της μέγιστης στροφής της διατομής για  $\nu=0,00$  και  $\nu=0,30$ . Στο επόμενο παράδειγμα θα σχολιάσουμε τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αλλαγή.

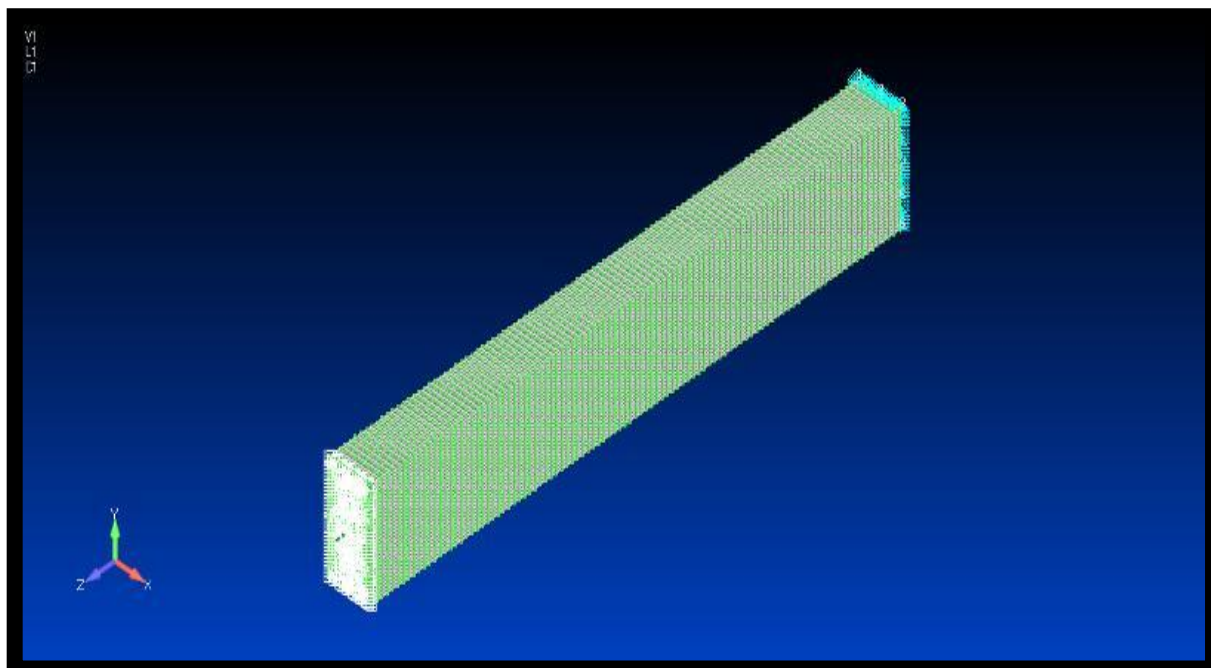
<b>Stresses</b>					
Nastran			STMDE		
<b>Von Mises Stress</b>			<b>Von Mises Stress</b>	<b>Position of maximum stress</b>	
$\nu = 0,30$	65,0827		$\nu = 0,30$	68,0933	Y= 0,40
$\nu = 0,00$	65,0857			Mpa	Z= 0,0250
Comparisons	Mpa		$\nu = 0,00$	68,0934	Y= 0,40
				Mpa	Z= 0,0250
Nastran-STDME	<b>Differences</b>				m
$\nu = 0,30$	<b>4,42%</b>				
$\nu = 0,00$	<b>4,42%</b>				

Πίνακας 6.3.8 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

- Συγκρίνοντας την τιμή των μέγιστων τάσεων Von Mises μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι τόσο για  $\nu=0.30$  όσο και για  $\nu=0,00$  η διαφορά είναι της τάξης του 4,42 % με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της τάσης (σε Mpa). Παράλληλα, η μέγιστη τάση εμφανίζεται και στις δύο αναλύσεις στην ίδια περιοχή της διατομής.



## Δοκός $L=10.00m$



Εικόνα 6.3.11 Γεωμετρία δοκού-Φόρτιση-Στήριξη

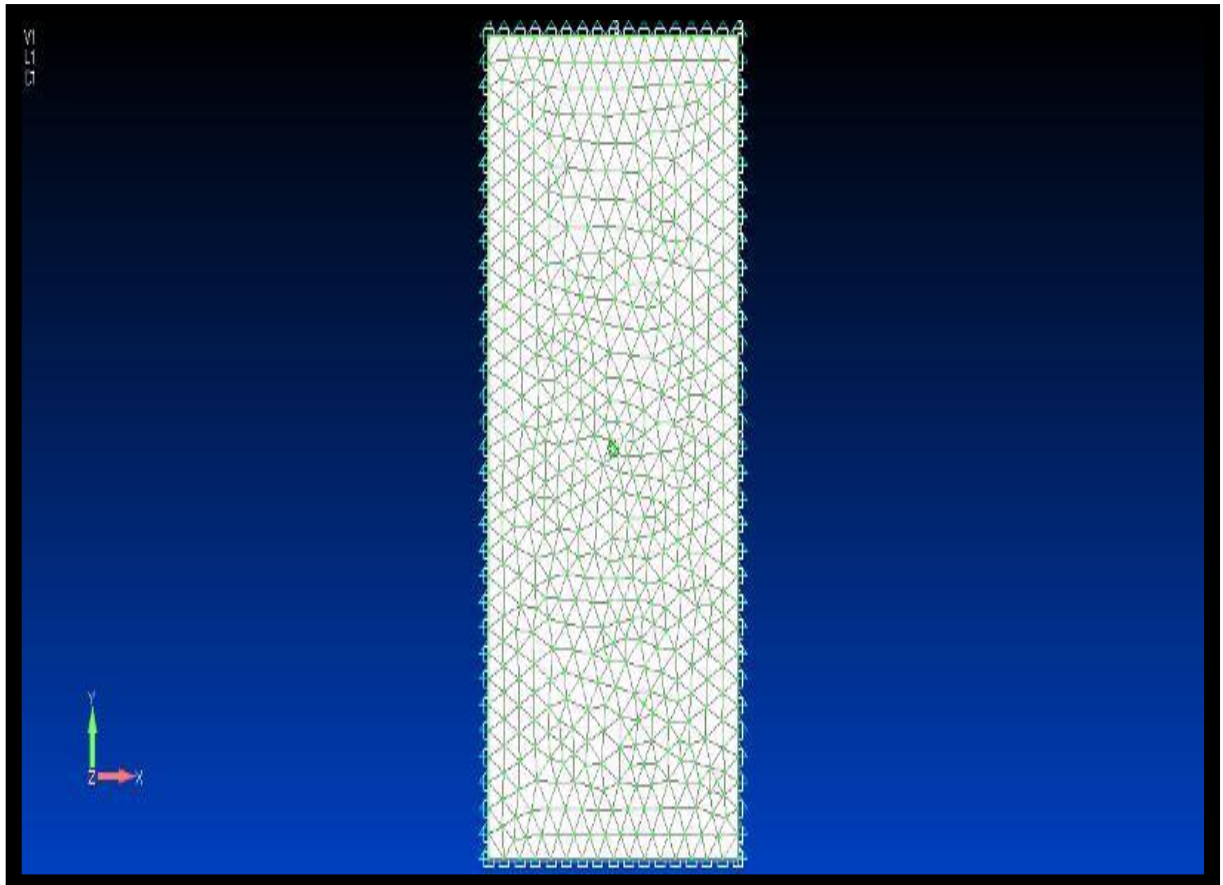
### *Ιδιαιτερότητα Παραδείγματος*

Είναι γενικότερα γνωστό από την εμπειρία μας και από την βιβλιογραφία κατά την διακριτοποίηση ενός φορέα με πεπερασμένα στοιχεία ότι τα αποτελέσματα που εξάγουμε επηρεάζονται και εξαρτώνται από το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην εκάστοτε ανάλυση. Για να λάβουμε υπόψη μας την παραπάνω παρατήρηση διακριτοποιήσαμε την δοκό των 10 m με μια τάξης μεγέθους μεγαλύτερο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων από ότι κάναμε στις προηγούμενες αναλύσεις.

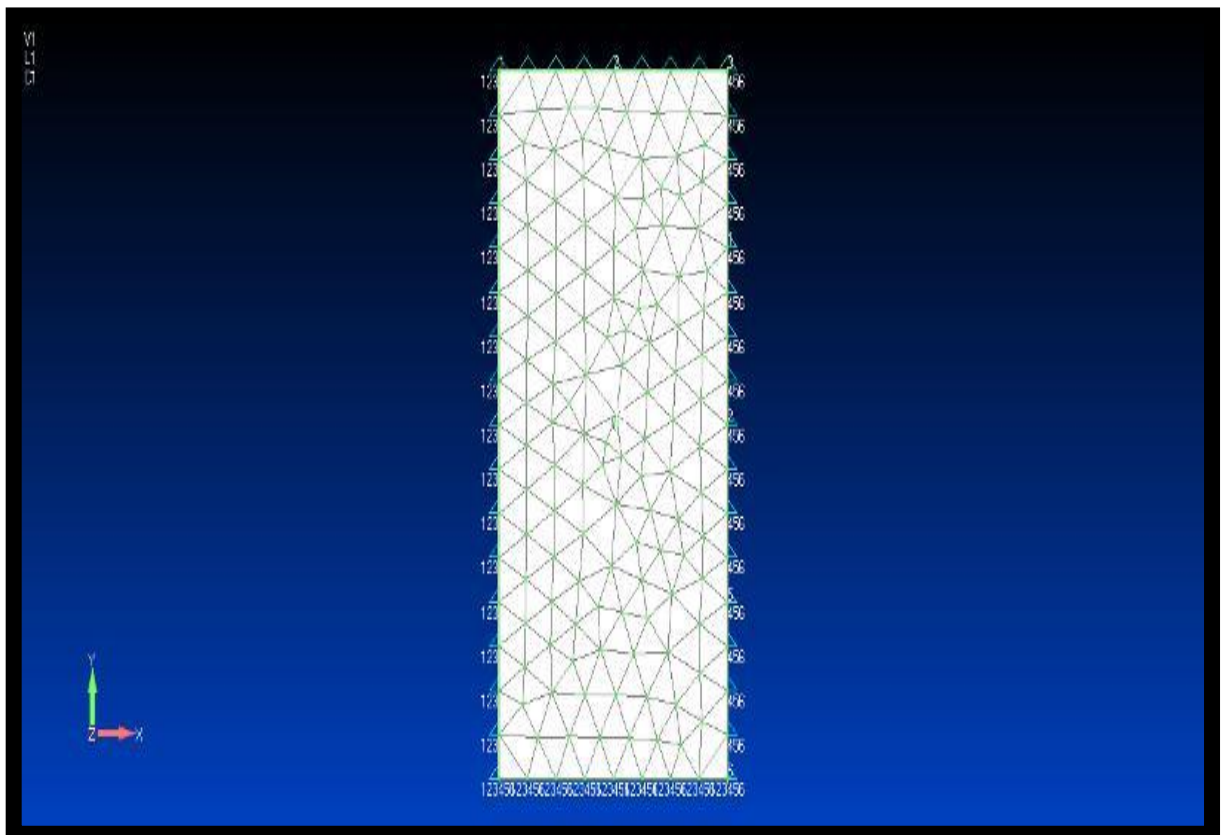
Παρακάτω έχουμε τις εικόνες από το Πρόγραμμα Nastran που μας δείχνουν αφενός μεν ποιοτικά πως φαίνεται αυτή η αλλαγή αφετέρου δε ποσοτικά τη διαφορά στο πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνται για να διακριτοποιήσουν την διατομή.

Επομένως , αν διακριτοποιούσαμε όπως τις προηγούμενες περιπτώσεις θα είχαμε μια διατομή με 276 πεπερασμένα στοιχεία και 163 κόμβους , τα οποία θα μας έδιναν 27600 πεπερασμένα στοιχεία στο σύνολο του φορέα , ενώ τώρα έχουμε μια διατομή με 1108 πεπερασμένα στοιχεία και 603 κόμβους, τα οποία μας δίνουν 110801 πεπερασμένα στοιχεία στο σύνολο του φορέα.





Εικόνα 6.3.12 1108 Element- 603 nodes



Εικόνα 6.3.13 276 Elements – 163 nodes

<b>Δοκός L=10m</b>			
<b>Nastran</b>		STMDE	
	$\theta\chi$		$\theta\chi$
$\nu = 0,30$	1,94E-005	$\nu = 0,30$	1,94E-005
$\nu = 0,00$	1,50E-005	$\nu = 0,00$	1,50E-005
	rad		rad
Comparisons			
Nastran- STDME	<b>Differences</b>		
<b><math>\nu = 0,30</math></b>	<b>0,02%</b>		
<b><math>\nu = 0,00</math></b>	<b>0,22%</b>		
Nastran ( $\nu=0.00-0.30$ )	STDME ( $\nu=0.00-0.30$ )		
22,86%	22,70%		

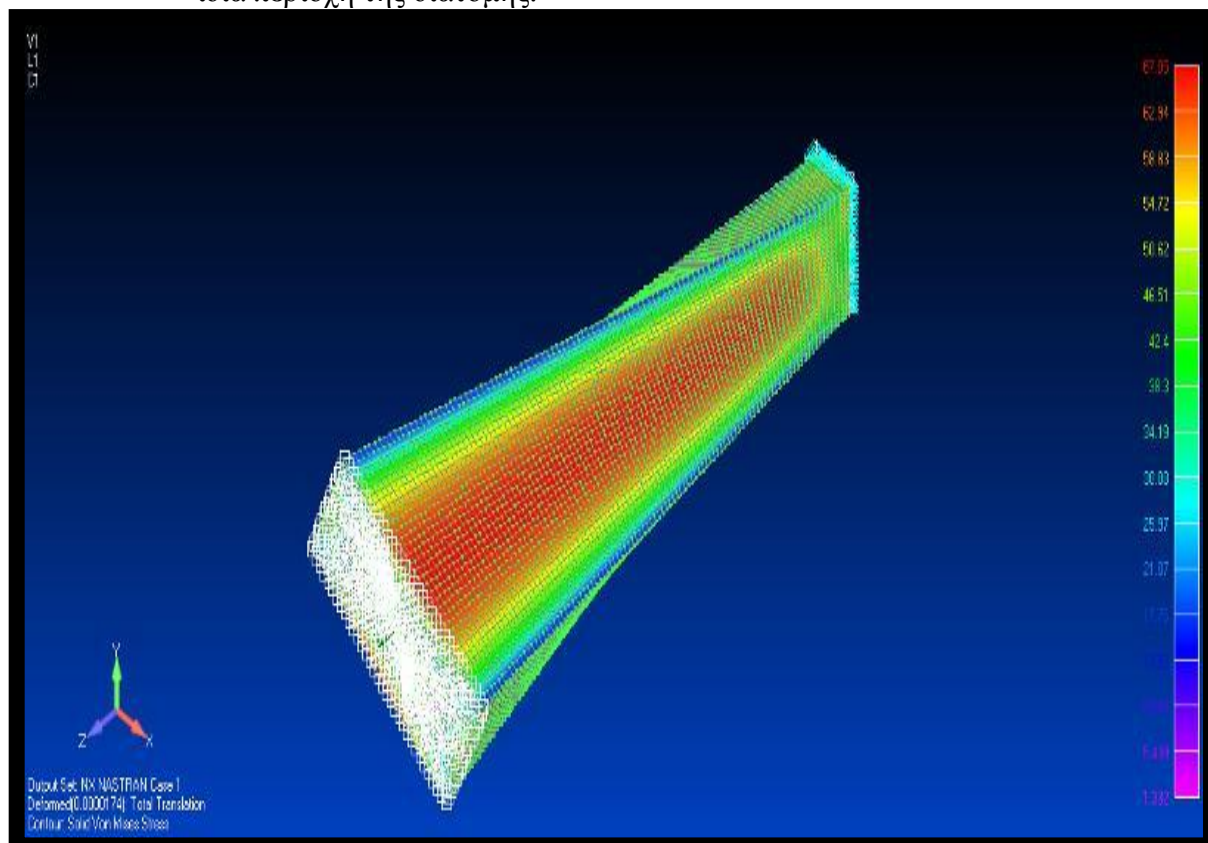
Πίνακας 6.3.9 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

- Συγκρίνοντας την τιμή της  $\theta\chi$  μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι για  $\nu=0.30$  η διαφορά είναι της τάξης του 0,02% και για  $\nu=0.00$  η διαφορά είναι της τάξης του 0,22%(!) με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της γωνίας (σε rad). Η απόκλιση αυτή στα κινηματικά μεγέθη του συγκεκριμένου ραβδωτού φορέα είναι εξαιρετικά αμελητέα και για τις δύο περιπτώσεις του  $\nu$ .
- Όσον αφορά τώρα την επιρροή της αλλαγής του  $\nu$  (και κατ' επέκτασιν του Μέτρου Διάτμησης G στα κινηματικά μεγέθη), παρατηρούμε ότι τόσο το Nastran όσο και η STDME δίνουν μια διαφορά της τάξης του 22,68%-22,70% αντίστοιχα μεταξύ της τιμής της μέγιστης στροφής της διατομής για  $\nu=0,00$  και  $\nu=0,30$ . Στο επόμενο παράδειγμα θα σχολιάσουμε τους λόγους στους οποίους οφείλεται αυτή η αλλαγή.
- Παρατηρούμε ότι αυξανομένης της διακριτοποίησης στο Nastran, δηλαδή χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων, τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη που παίρνουμε από την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία και από την επίλυση με συνοριακά στοιχεία πρακτικά ταυτίζονται. Επομένως, εδώ αξίζει να τονίσουμε τον μεγάλο ρόλο που έχει η σωστή επιλογή του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων με τα οποία πραγματοποιείται η διακριτοποίηση της διατομής. Αυτά δεν πρέπει να είναι ούτε «λίγα» διότι θα μας οδηγήσουν σε πτωχή ακρίβεια αποτελεσμάτων αλλά ούτε και «πολλά» διότι για μία απλή ανάλυση ο χρόνος που θα χρειαστούμε θα είναι δυσανάλογα μεγάλος.

<b>Stresses</b>					
Nastran				STMDE	
<b>Von Mises Stress</b>				<b>Von Mises Stress</b>	<b>Position of maximum stress</b>
$\nu = 0,30$	67,2273		$\nu = 0,30$	68,0935	Y= 0,40
$\nu = 0,00$	67,2273			Mpa	Z= 0,0250
Comparisons	Mpa		$\nu = 0,00$	68,0935	Y= 0,40
				Mpa	Z= 0,0250
Nastran-STDME	<b>Differences</b>				m
$\nu = 0,30$	<b>1,27%</b>				
$\nu = 0,00$	<b>1,27%</b>				

Πίνακας 6.3.10 Σύγκριση μεταξύ B.E.M.-F.E.M.

- Συγκρίνοντας την τιμή των μέγιστων τάσεων Von Mises μεταξύ των δύο αναλύσεων (στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία και στο Πρόγραμμα Torselind\_constants του κ. Τσίπηρα) παρατηρούμε ότι τόσο για  $\nu=0.30$  όσο και για  $\nu=0,00$  η διαφορά είναι της τάξης του 1,27 % με το Nastran να δίνει χαμηλότερες τιμές της τάσης (σε Mpa). Παράλληλα, η μέγιστη τάση εμφανίζεται και στις δύο αναλύσεις στην ίδια περιοχή της διατομής.



Εικόνα 6.3.14 Προφίλ Μέγιστων Τάσεων στην παραμορφωμένη δοκό

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 1<sup>ης</sup> ΑΝΑΛΥΣΗΣ:

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια σημαντικά συμπεράσματα τα οποία αφορούν όλες τις δοκούς :

- Τόσο στην ανάλυση στο Nastran με πεπερασμένα στοιχεία όσο και στην ανάλυση στο Torselind για τον φορέα του προβόλου για την συμπαγή ορθογωνική διατομή η τιμή της μέγιστης  $\theta$  παρουσιάζει μια απόκλιση της τάξης του 22 με 23% μεταξύ των αναλύσεων με  $\nu=0.30$  και  $\nu=0,00$ , όπου οι αναλύσεις με  $\nu=0.30$  μας δίνουν μεγαλύτερη  $\theta$  .
- Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι για τους φορείς με λόγο  $h/l < 0.8$  και κάτω οι αποκλίσεις που παίρνουμε στον υπολογισμό των μέγιστων κινηματικών μεγέθων μεταξύ του Nastran και του Torselind είναι αμελητέες. Επομένως , συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων που χρησιμοποιούμε εμφανίζει εξαιρετική ακρίβεια στον υπολογισμό των κινηματικών μεγεθών για την περίπτωση που αναφέραμε.
- Όσον αφορά τις μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζεται μια μικρή απόκλιση της τάξης του 4,5% μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων, με το Nastran να εκτιμάει μικρότερες τάσεις από ότι η δική μας θεωρία. Παρατηρούμε επίσης , ότι η μέγιστη τιμή των παραπάνω τάσεων εμφανίζεται και στις δύο μεθόδους στην ίδια περιοχή.
- ***Η διαφοροποίηση του λόγου Poisson στις αναλύσεις δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα των μεγίστων τάσεων Von Mises στις συγκεκριμένες δοκούς που εξετάσαμε.*** Επομένως , το συμπέρασμά μας από αυτήν την παρατήρηση είναι ότι ο λόγος Poisson (ο οποίος τίθεται ίσος με το 0 για την εξαγωγή των εξισώσεων των τάσεων και μετέπειτα των εντατικών μεγεθών) δεν επηρεάζει τα μέγιστα των τάσεων Von Mises.
- Τέλος , είναι πολύ σημαντικό να αναφερθεί ότι αυξανόμενων των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για να διακριτοποιήσουν την διατομή μας και κατ επέκταση τον φορέα μας , παρατηρήθηκε εξαιρετική σύγκλιση τόσο μεταξύ των μέγιστων κινηματικών μεγεθών (της τάξης του 0,02%-0,22%) όσο και των μεγίστων τάσεων Von Mises όπου πλέον η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων ήταν αμελητέα (1,27%).
- Συμπερασματικά, καταλήγουμε ότι για τον φορέα πρόβολο για την συμπαγή ορθογωνική διατομή με στρεπτικό φορτίο 10KNm στο άκρο , τα μέγιστα κινηματικά μεγέθη συγκλίνουν μεταξύ των δύο μεθόδων για λόγο  $h/l \leq 0,80$  και οι μέγιστες τάσεις Von Mises συγκλίνουν μεταξύ των δύο μεθόδων για λόγο  $h/l \leq 0,2$ .

### 2<sup>η</sup> Ανάλυση

*Στους πίνακες 6.3.1-6 παρουσιάζονται χαρακτηριστικά μέγιστα κινηματικά και εντατικά μεγέθη ράβδων ορθογωνικής διατομής διάφορων μηκών (L=0,1m 0,5m 1m 4m 6m 10m).*

<b>L=0,10m</b>					
<b>v= 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	1,27E-007	max thx =	9,81E-008	22,65%	(rad)
X=	1,00E-001	X=	1,00E-001		(m)
max thxdiff =	1,27E-006	max thxdiff =	9,87E-007	22,55%	(rad/m)
X=	1,00E-001	X=	1,00E-001		(m)
max nx =	4,77E-008	max nx =	4,74E-008	0,59%	(rad/m)
X=	1,00E-001	X=	1,00E-001		(m)
max nxdiff =	9,57E-007	max nxdiff =	9,53E-007	0,47%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	6,45E+000	max MtP =	6,48E+000	0,39%	(kNm)
X=	1,00E-001	X=	1,00E-001		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	1,50E-003	X=	1,00E-003		(m)
max Mw =	3,58E-001	max Mw =	3,56E-001	0,47%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.11 L=0.01m

<b>L=0,50m</b>					
<b>v= 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	7,27E-007	max thx =	5,75E-007	20,95%	(rad)
X=	5,00E-001	X=	5,00E-001		(m)
max thxdiff =	1,55E-006	max thxdiff =	1,23E-006	20,31%	(rad/m)
X=	5,00E-001	X=	5,00E-001		(m)
max nx =	8,01E-007	max nx =	7,26E-007	9,31%	(rad/m)
X=	5,00E-001	X=	5,00E-001		(m)
max nxdiff =	3,52E-006	max nxdiff =	3,28E-006	6,92%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	7,84E+000	max MtP =	8,10E+000	3,30%	(kNm)
X=	5,00E-001	X=	5,00E-001		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	5,00E-003	X=	2,30E-001		(m)
max Mw =	1,32E+000	max Mw =	1,23E+000	6,92%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.12 L=0.50m

<b>L=1,00m</b>					
<b>v = 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	1,66E-006	max thx =	1,31E-006	21,21%	(rad)
X=	1,00E+000	X=	1,00E+000		(m)
max thxdiff =	1,82E-006	max thxdiff =	1,44E-006	21,15%	(rad/m)
X=	1,00E+000	X=	1,00E+000		(m)
max nx =	1,55E-006	max nx =	1,28E-006	17,36%	(rad/m)
X=	1,00E+000	X=	1,00E+000		(m)
max nxdiff =	4,28E-006	max nxdiff =	3,80E-006	11,21%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	9,22E+000	max MtP =	9,42E+000	2,21%	(kNm)
X=	1,00E+000	X=	1,00E+000		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	6,45E-001	X=	2,05E-001		(m)
max Mw =	1,60E+000	max Mw =	1,42E+000	11,21%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.13 L=1.00m

<b>L=4,00m</b>					
<b>v = 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	7,58E-006	max thx =	5,87E-006	22,46%	(rad)
X=	4,00E+000	X=	4,00E+000		(m)
max thxdiff =	1,97E-006	max thxdiff =	1,52E-006	22,85%	(rad/m)
X=	4,00E+000	X=	4,00E+000		(m)
max nx =	1,97E-006	max nx =	1,52E-006	22,84%	(rad/m)
X=	4,00E+000	X=	4,00E+000		(m)
max nxdiff =	4,38E-006	max nxdiff =	3,85E-006	12,17%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	1,00E+001	max MtP =	1,00E+001	0,01%	(kNm)
X=	4,00E+000	X=	4,00E+000		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	7,60E-001	X=	6,60E-001		(m)
max Mw =	1,64E+000	max Mw =	1,44E+000	12,17%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.14 L=4.00m

<b>L=6,00m</b>					
<b>v= 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	1,15E-005	max thx =	8,92E-006	22,59%	(rad)
X=	6,00E+000	X=	6,00E+000		(m)
max thxdiff =	1,97E-006	max thxdiff =	1,52E-006	22,86%	(rad/m)
X=	6,00E+000	X=	6,00E+000		(m)
max nx =	1,97E-006	max nx =	1,52E-006	22,86%	(rad/m)
X=	6,00E+000	X=	6,00E+000		(m)
max nxdiff =	4,38E-006	max nxdiff =	3,85E-006	12,16%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	1,00E+001	max MtP =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	6,00E+000	X=	6,00E+000		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	9,30E-001	X=	1,23E+000		(m)
max Mw =	1,64E+000	max Mw =	1,44E+000	12,16%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.15 L=6.00m

<b>L=10,00m</b>					
<b>v= 0,30</b>		<b>v = 0</b>		Comparison v=0,30/v=0	
max thx =	1,94E-005	max thx =	1,50E-005	22,70%	(rad)
X=	1,00E+001	X=	1,00E+001		(m)
max thxdiff =	1,97E-006	max thxdiff =	1,52E-006	22,86%	(rad/m)
X=	1,00E+001	X=	1,00E+001		(m)
max nx =	1,97E-006	max nx =	1,52E-006	22,86%	(rad/m)
X=	1,00E+001	X=	1,00E+001		(m)
max nxdiff =	4,39E-006	max nxdiff =	3,85E-006	12,16%	(rad/m)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max gammax =	1,26E-006	max gammax =	9,70E-007	22,86%	
max MtP =	1,00E+001	max MtP =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	1,00E+001	X=	1,00E+001		(m)
max MtS =	3,63E+000	max MtS =	3,63E+000	0,00%	(kNm)
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)
max Mt =	1,00E+001	max Mt =	1,00E+001	0,00%	(kNm)
X=	1,75E+000	X=	1,05E+000		(m)
max Mw =	1,64E+000	max Mw =	1,44E+000	12,16%	(KNm <sup>2</sup> )
X=	0,00E+000	X=	0,00E+000		(m)

Πίνακας 6.3.16 L=10.00m

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2<sup>ης</sup> ΑΝΑΛΥΣΗΣ:

Όσον αφορά το πρώτο μέρος αναλύσεων που πραγματοποιήθηκε με το πρόγραμμα Torselind-const:

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια σημαντικά συμπεράσματα τα οποία αφορούν όλες τις δοκούς :

- Η τιμή της μέγιστης γωνίας συστροφής παρουσιάζει μια απόκλιση της τάξης του 20,95% με 22,70%.
- Η μέγιστη τιμή της παραγώγου της γωνίας συστροφής παρουσιάζει μια απόκλιση της τάξης του 20,31% με 22,86%.
- Η μέγιστη τιμή της πρωτογενούς γωνίας συστροφής μας δίνει αποκλίσεις που διαφοροποιούνται ανάλογα με τη δοκό και κυμαίνονται από 0,59% έως 22,86% αυξανόμενου του μήκους της δοκού.
- Η μέγιστη τιμή της παραγώγου της πρωτογενούς γωνίας συστροφής παρουσιάζει αποκλίσεις οι οποίες όμως ξανά εξαρτώνται ανάλογα με τη δοκό και συγκλίνουν καθώς το μήκος της δοκού γίνεται μεγαλύτερο στο 12,17% όπως στο προαναφερθέν συμπέρασμα.
- Το  $\gamma$  που εκφράζει την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (ΔΣΠ) έχει σταθερή απόκλιση σε κάθε δοκό 22,86% γεγονός που δείχνει ότι δεν εξαρτάται καθόλου από το μήκος της δοκού.
- Το  $MaxM_{tr}$  (Πρωτογενής ροπή) για πολύ κοντές δοκούς  $\leq 1m$  δηλαδή της τάξης του ύψους τη διατομής παρουσιάζουν μικρές διαφοροποιήσεις στις τιμές του που κυμαίνονται από 0,39-3,30%. Για δοκούς μεγαλύτερες των 4m δηλαδή περίπου 5 φορές του ύψους της, η  $M_{tr}$  δεν παρουσιάζει αποκλίσεις.
- Το  $MaxM_{tS}$  (Δευτερογενής ροπή) ανεξαρτήτως δοκού και ανεξαρτήτως λόγου Poisson παραμένει το ίδιο.
- Η  $Max M_t$  (Πρωτογενής ροπή) προφανώς και δεν αλλάζει αφού εκφράζει την ισορροπία της διατομής έναντι της στρεπτικής ροπής που την καταπονεί Η κατανομής της μέσα στη δοκό ανάμεσα στο  $\nu=0.30$  και  $\nu=0.00$  παραμένει σταθερή. Το ίδιο θα έβγαζε και η Θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης και της κλασσικής ανομοιόμορφης στρέψης για αυτό το εντατικό μέγεθος.
- Η  $Max M_w$  (δίρροπο στρέβλωσης ) αλλάζει συναρτήσει του λόγου Poisson και η επιρροή αυτή αυξάνεται όσο αυξάνεται και το μήκος της δοκού. Η διακύμανση αυξανόμενου του μήκους της δοκού κυμαίνεται από 0,47% έως 12,17% όπου και σταθεροποιείται στο τέλος για τις τρεις τελευταίες δοκούς.

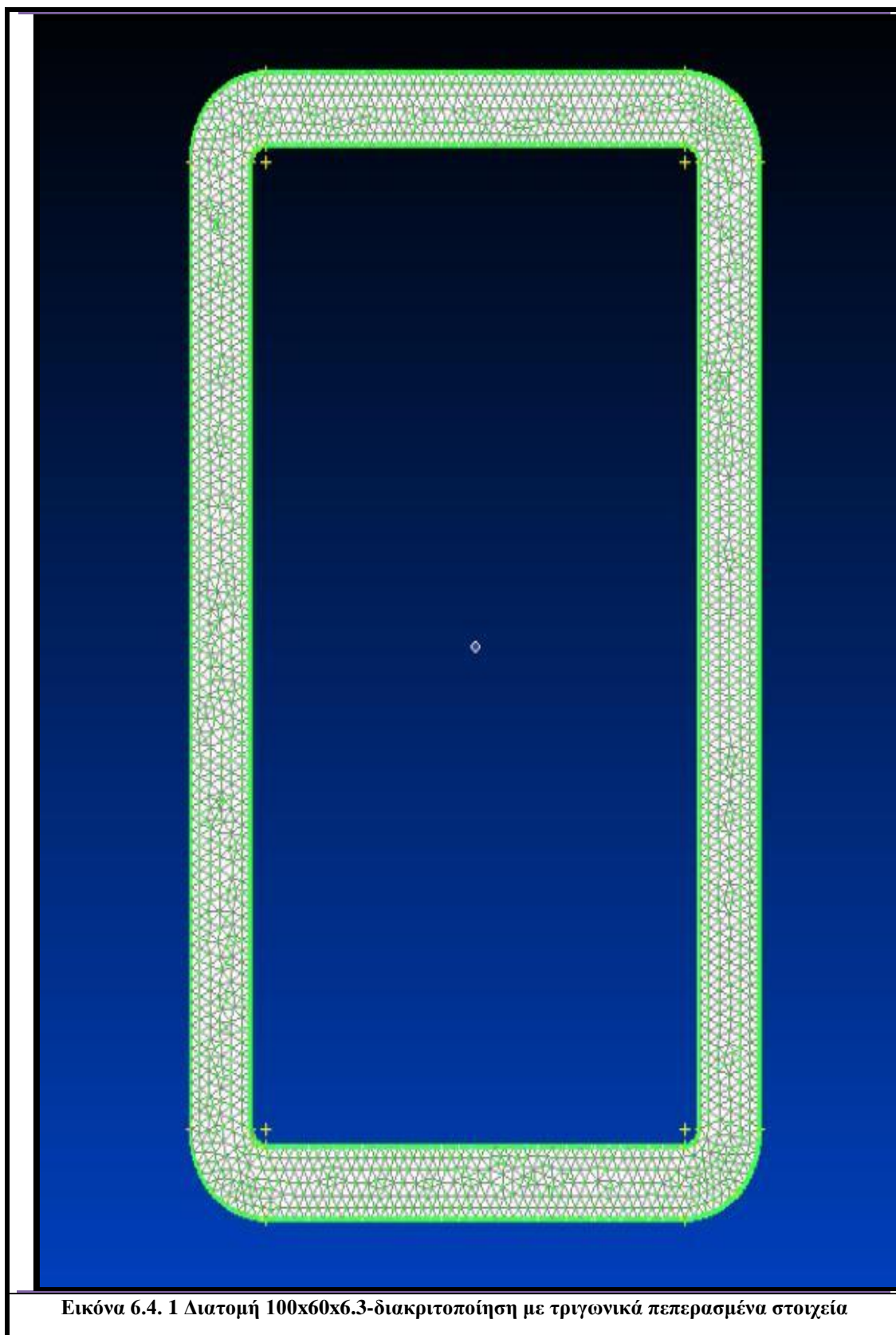


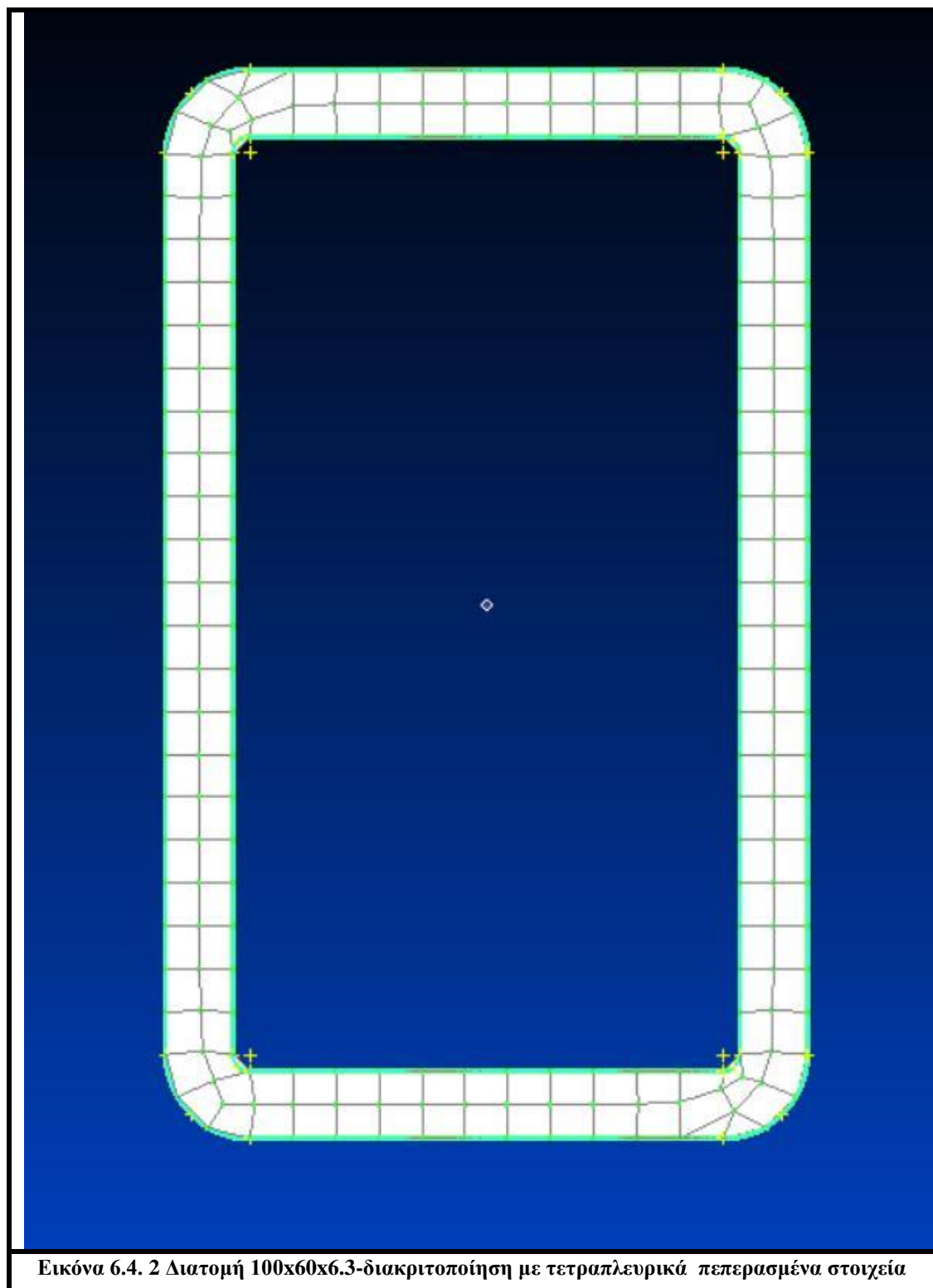
### ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

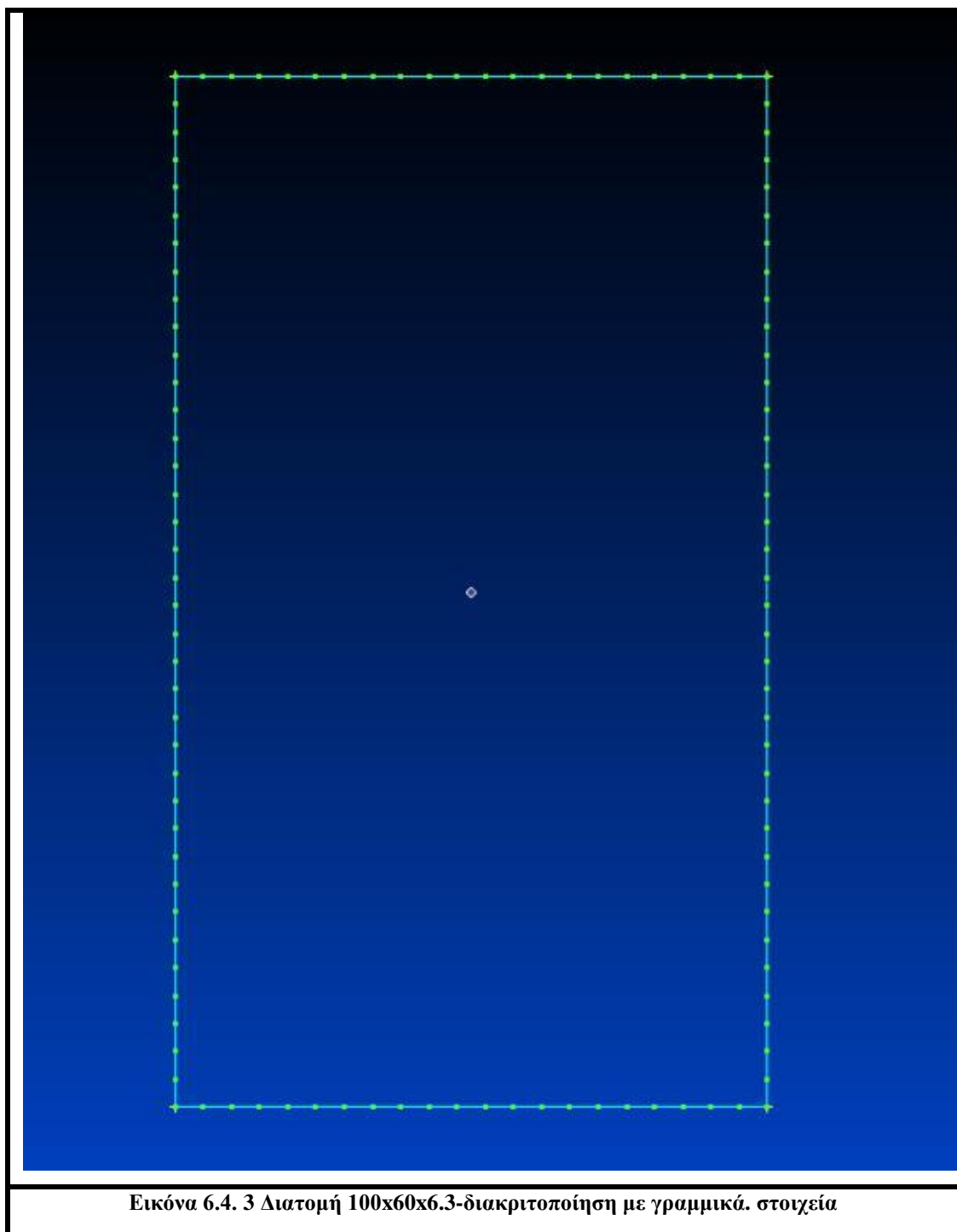
1. Τα παραπάνω αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη είναι αναμενόμενα διότι η  $v=0.30$  μας οδηγεί σε χαμηλότερο μέτρο διάτμησης και άρα **μικρότερη στρεπτική αντίσταση**. Επομένως η διαφορά αυτή της τάξης του 20% οφείλεται στο ότι η **διατομή με  $v=0.30$  είναι πιο εύστρεπτη** από την διατομή με  $v=0.00$  επειδή κατά την ανάλυση έχουν μικρότερο και μεγαλύτερο αντίστοιχα μέτρο διάτμησης.
2. Οι αποκλίσεις που εμφανίζονται για διάφορα μήκη δοκού ήτοι 0,10 m 0,40 m και 1,00 m δεν μας αφορούν άμεσα αφού τα μήκη αυτά αναφέρονται σε φορείς οι οποίοι δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως ραβδωτοί φορείς λόγω των διαστάσεών τους και παρουσιάζουν έντονες διακυμάνσεις σε σχέση με τις επόμενες ράβδους σε κάποια κινηματικά μεγέθη. Εντούτοις, κρατάμε τα αριθμητικά αποτελέσματα διότι μας φαίνονται αρκετά χρήσιμα για τη μελέτη του φαινομένου της επιρροής των ΔΣΠ και σε αυτούς τους φορείς. Μεγάλο ενδιαφέρον έχει η ελάχιστη επιρροή της αλλαγής του λόγου Poisson και κατ' επέκταση του Μέτρου διάτμησης στα εντατικά μεγέθη των δοκών.
3. Στους ραβδωτούς φορείς οι μέγιστες τιμές των  $M_{tp}$  ,  $M_{ts}$  και  $M_t$  παραμένουν ως έχουν ανεξάρτητα από την αλλαγή της παραπάνω παραμέτρου διότι αφενός μεν το  $M_t$  εκφράζει την ισορροπία του φορέα και έχουμε ισοστατικό σύστημα αφετέρου δε τα  $M_{tp}$  και  $M_{ts}$  είναι ανάλογα με το Μέτρο Διάτμησης  $G$  και την πρωτογενή γωνία συστροφής. Εντούτοις, το δίρροπο στρεβλώσεως παρουσιάζει κάποιες αποκλίσεις στην μέγιστη τιμή του μεταξύ των δύο αυτών αναλύσεων διότι εξαρτάται από το μέτρο Ελαστικότητας  $E$  που παραμένει σταθερό στις δύο αναλύσεις και την δεύτερη παράγωγο της πρωτογενούς γωνίας συστροφής που μεταβάλλεται στις δύο αναλύσεις.

## 6.4 Αριθμητική εφαρμογή 2

Στην 2<sup>η</sup> αριθμητική μας εφαρμογή ασχοληθήκαμε με την κοίλη ορθογωνική διατομή 100x60x6.3 (mm) από αλουμίνιο. Το στατικό σύστημα μας είναι πρόβολος με μήκος 5m και η στρεπτική ροπή που τοποθετήσαμε είναι  $M= 10$  kNm στο άκρο του προβόλου. Το λογισμικό σε H/Y που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση της δοκού μας ήταν το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran , όπου διακριτοποιήσαμε την διατομή μας με τριγωνικά στοιχεία (trig) καθώς και τετραπλευρικά στοιχεία (quads) και τη δοκό μας με πενταεδρικά και εξαεδρικά αντίστοιχα. Παράλληλα, χρησιμοποιήθηκαν γραμμικά και κελυφωτά στοιχεία για τη διακριτοποίηση της διατομής και της δοκού αντίστοιχα. Επιλέχτηκε η συγκεκριμένη διαδικασία μιας και η ιδιαίτερη γεωμετρία ενός ραβδόμορφου φορέα καθιστά ελκυστική τη διακριτοποίηση μιας διατομής και στη συνέχεια τη μόρφωση τρισδιάστατων στοιχείων μέσω της διαδικασίας του “extrude”.







## 6.4.1 Γεωμετρικές Σταθερές

Geometric Constants	BEM	FEM	Difference
<b>It</b> [ $m^4$ ]=	2,25010E-06	2,26269E-06	<b>0,56%</b>
<b>Cs</b> [ $m^6$ ]=	8,01345E-11	8,03920E-11	<b>0,32%</b>

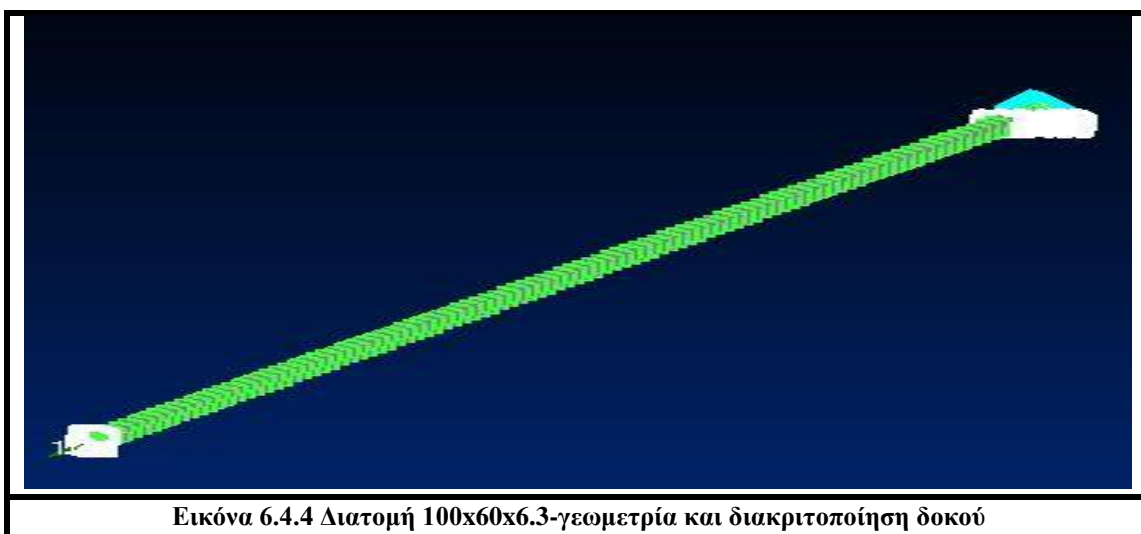
Πίνακας 6.4.1 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM-Γεωμετρικές Σταθερές

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τόσο στην στρεπτική σταθερά (πρωτογενή στρεπτική σταθερά αφού το Nastran δεν μπορεί να υπολογίσει δευτερογενή στρεπτική σταθερά)It όσο και στην σταθερά στρέβλωσης Cs. Αντιλαμβανόμαστε ότι εξαιτίας του γεγονότος ότι οι δύο τρόποι ανάλυσης, καταλήγουν σε αποτελέσματα με αμελητέα απόκλιση, επικυρώνεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Επομένως, για την κοίλη ορθογωνική διατομή 100x60x6.3 η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων που έχουμε χρησιμοποιήσει αποτελεί ένα ακριβές και αξιόπιστο εργαλείο για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.

## 6.4.2 Κινηματικά μεγέθη

### 6.4.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.4.4) για δοκό με ένα διάφραγμα\*(βλέπε κεφ 4.1 παραδοχή 2) μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 50 διαφράγματα τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



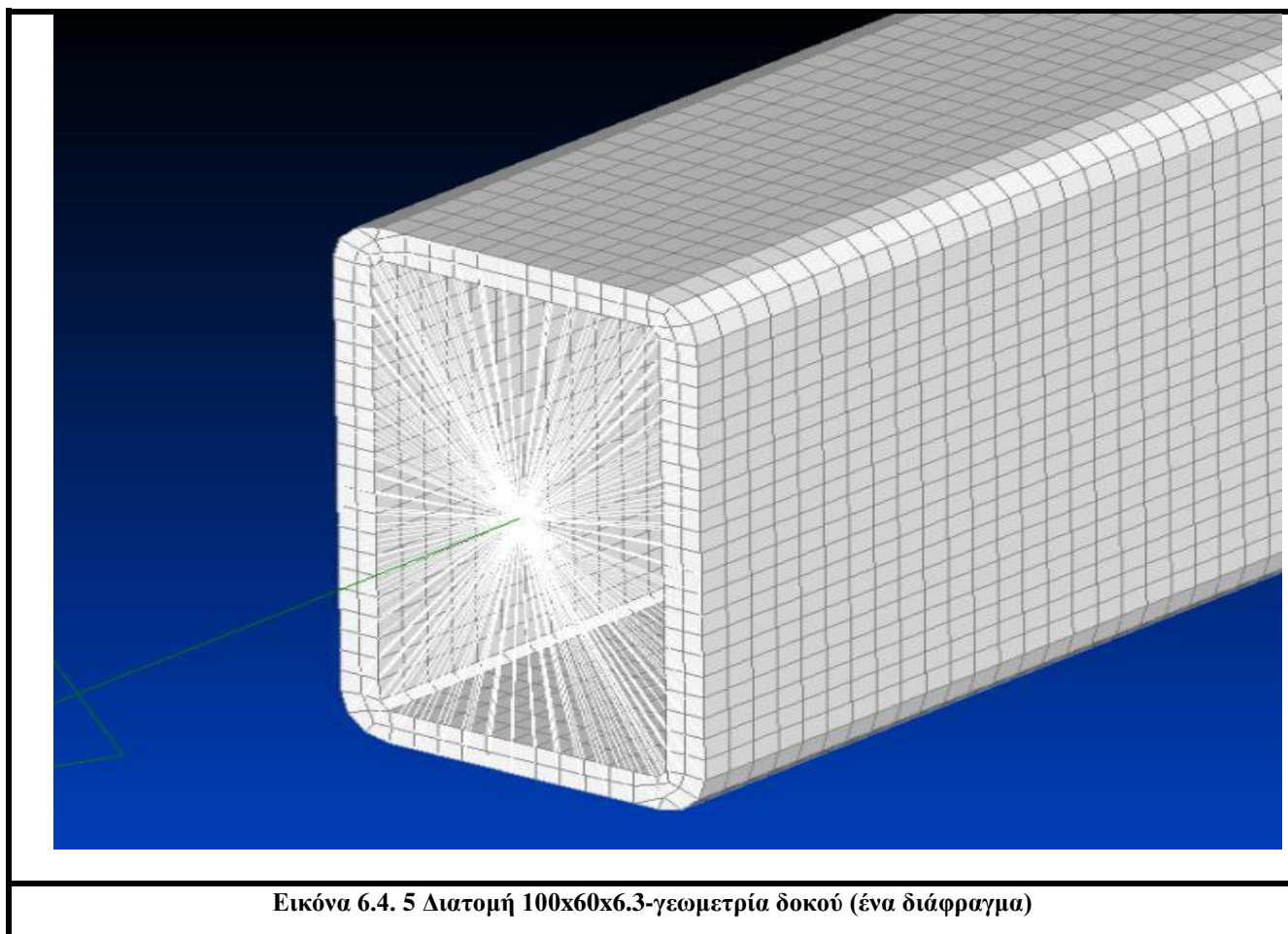
Εικόνα 6.4.4 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία και διακριτοποίηση δοκού

<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 50		BEM	trig no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	<b>Difference</b>	$\theta\chi$	$\theta\chi$	<b>Difference</b>
8,226E-01	8,218E-01	<b>0,10%</b>	8,226E-01	8,220E-01	<b>0,07%</b>
rad	rad		rad	rad	

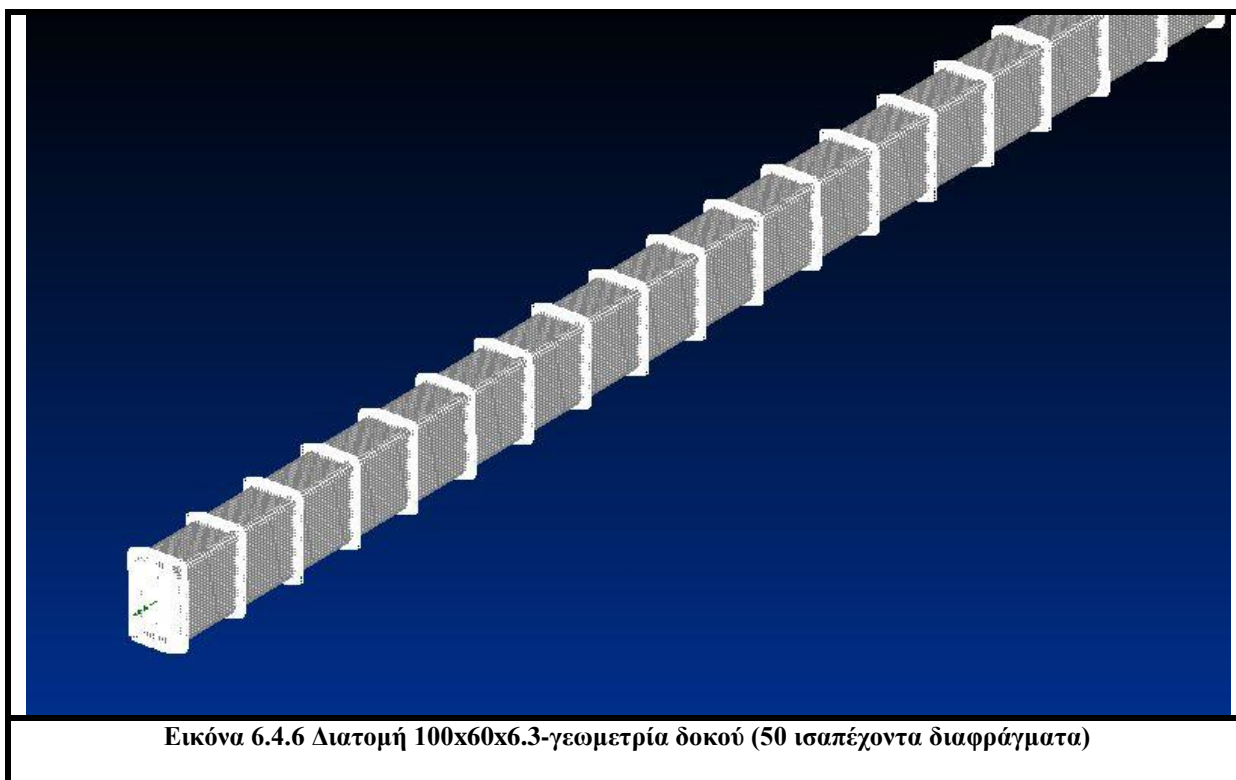
Πίνακας 6.4.2 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

### 6.4.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τετραπλευρικά για την δοκό του σχήματος (6.4.5-6.4.6) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο, για δοκό με 10 διαφράγματα και για δοκό με 50 διαφράγματα σε ισαπέχουσες αποστάσεις.



Εικόνα 6.4. 5 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία δοκού (ένα διάφραγμα)



Εικόνα 6.4.6 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία δοκού (50 ισαπέχοντα διαφράγματα)

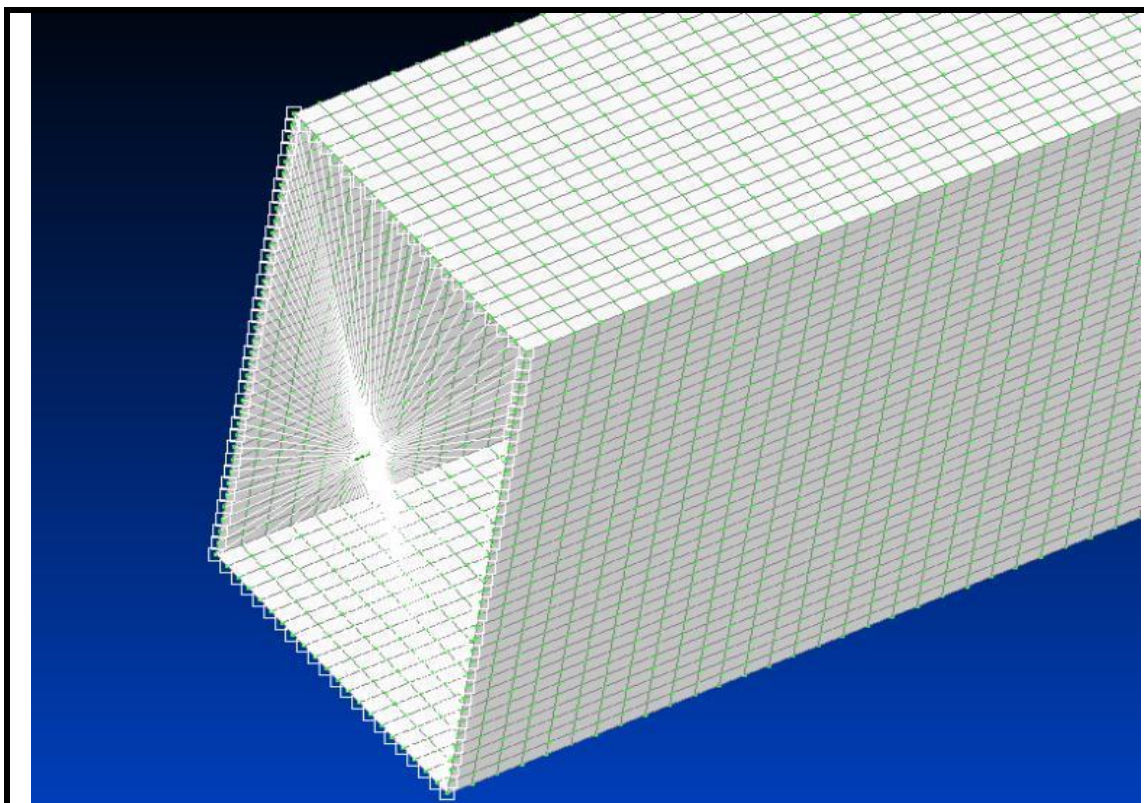
<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	<b>quads multi diafragms 10</b>		BEM	<b>quads no diafragms</b>	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference
8,226E-01	8,196E-01	0,36%	8,226E-01	8,196E-01	0,36%
rad	rad		rad	rad	
BEM	FEM				
BEM	<b>quads multi diafragms 50</b>				
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference			
8,226E-01	8,195E-01	0,37%			
rad	rad				

Πίνακας 6.4.3 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

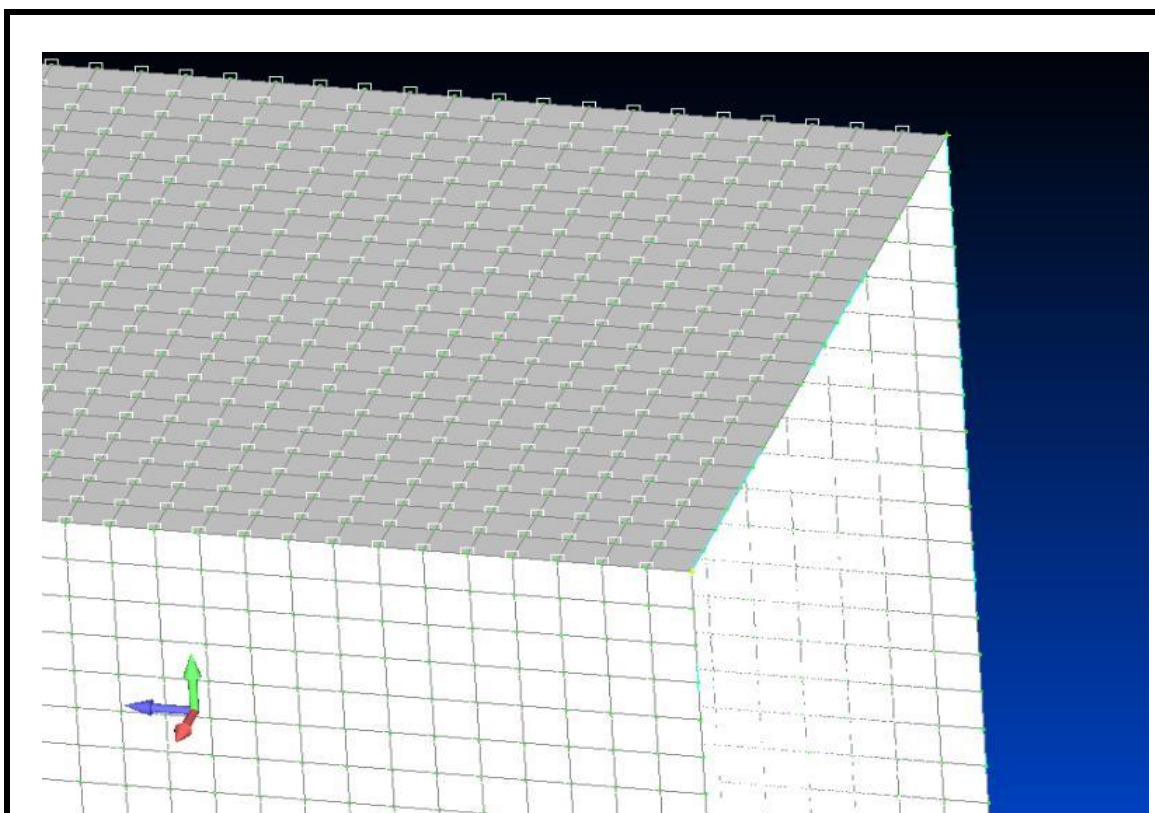
### 6.4.2.3 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία

Τέλος, έγινε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία κελύφους για την δοκό του σχήματος (6.4.7-6.4.8) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 2000 διαφράγματα όσα και τα κατά μήκος στοιχεία της δοκού μας.





Εικόνα 6.4.7 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία δοκού (1 διάφραγμα)



Εικόνα 6.4.8 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία δοκού (2000 διαφράγματα)

<b>Shell</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 2000		BEM	quads no diafragms	
θχ	θχ	Difference	θχ	θχ	Difference
8,226E-01	8,496E-01	3,18%	8,226E-01	8,463E-01	2,80%
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.4.4 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα κινηματικά μεγέθη:

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (στοιχεία δοκού), παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας, κελυφωτά στοιχεία) όσον αφορά τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη, γεγονός που καταδεικνύει την ακρίβεια και την αξιοπιστία της θεωρίας δοκού που χρησιμοποιήθηκε.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 0,07%-0,10% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 0,36%-0,37% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με κελυφωτά στοιχεία εμφανίζει 2,80%-3,18% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μικρότερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν (ελάχιστα) μεγαλύτερες στροφές σε σχέση με τους φορείς που είχαν μόνο ένα διάφραγμα στο άκρο τους.
- Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση περισσότερο συμφωνούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία σε σχέση με τα αντίστοιχα των κελυφωτών.

### 6.4.3 Τασικά μεγέθη

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τα αποτελέσματα που εξάγουμε από την ανάλυση με τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία μιας και η διακριτοποίηση που έγινε με αυτά θεωρείται πιο αξιόπιστη σε σχέση με τα άλλα είδη για τη συγκεκριμένη διατομή. Παρά ταύτα θα παρουσιάσουμε και τα αποτελέσματα

από τις αναλύσεις όλων των τύπων πεπερασμένων στοιχείων και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που πραγματοποιήθηκαν στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων.

### 6.4.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

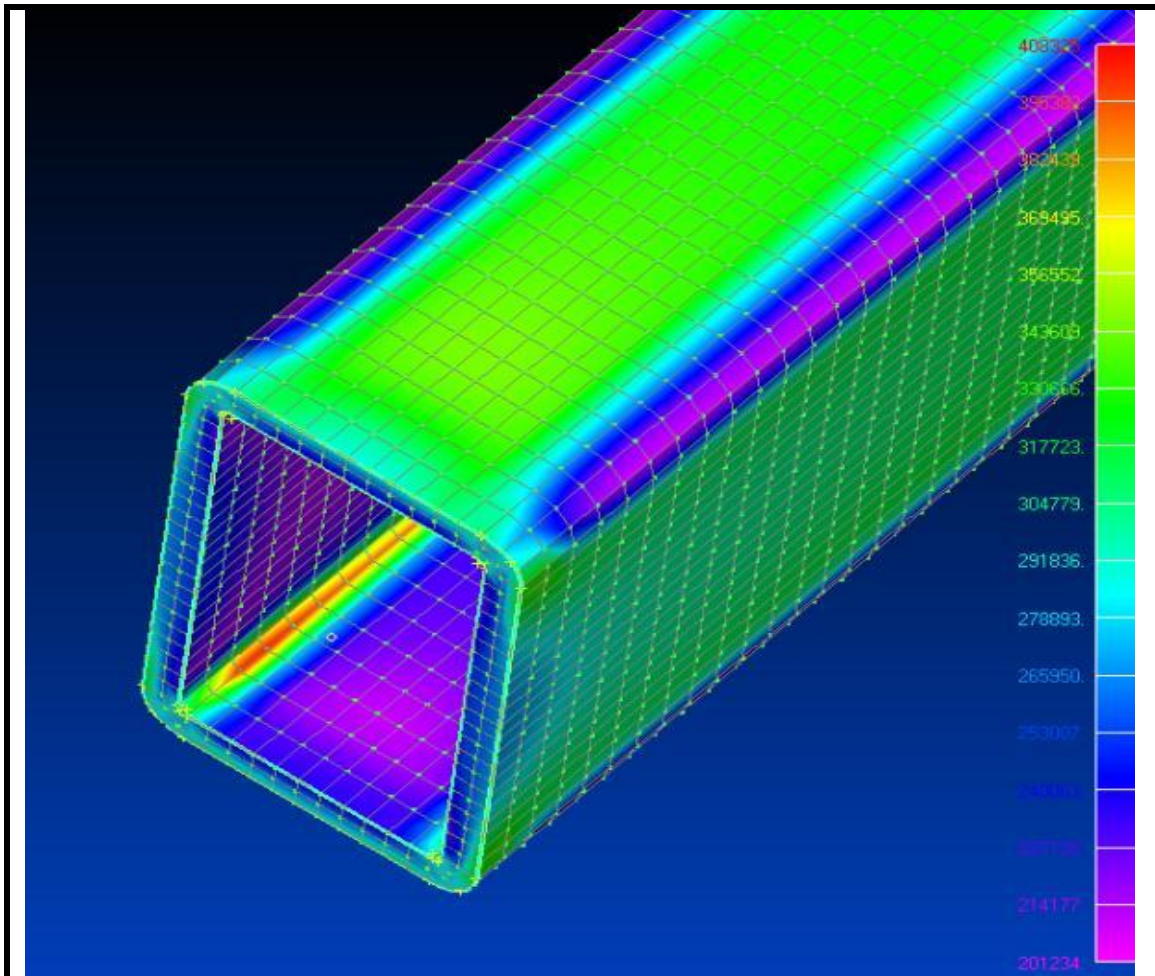
<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 50		BEM	trig no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference
4,010E+05	4,364E+05	8,12%	4,010E+05	4,346E+05	7,73%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	

Πίνακας 6.4.5 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

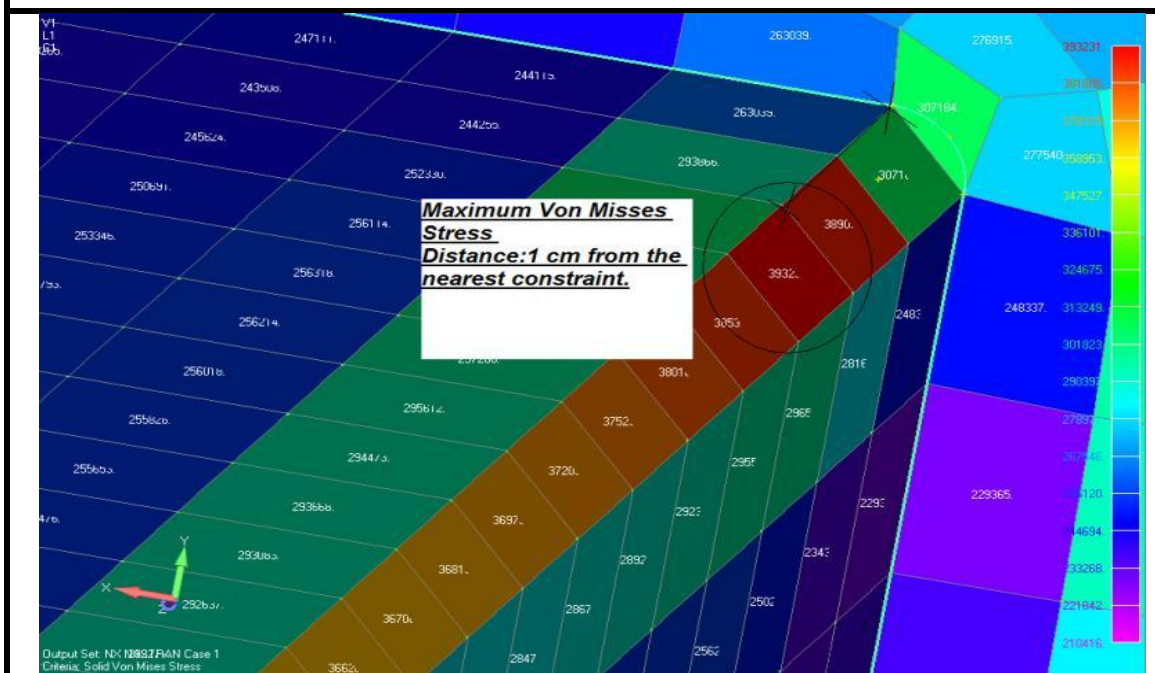
### 6.4.3.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 10		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference
4,010E+05	3,932E+05	1,97%	4,010E+05	3,933E+05	1,97%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b>Location</b>	<b>Location</b>		<b>Location</b>	<b>Location</b>	
Y= -0,0004486	Y= -0,02370		Y= -0,0004486	Y= -0,02370	
Z= 0,05000	Z= 0,0437		Z= 0,05000	Z= 0,0437	
X=0,00000	X=0,10000		X=0,00000	X=0,10000	
m	m		m	m	
BEM	FEM				
BEM	quads multi diafragms 50				
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference			
4,010E+05	4,005E+05	0,11%			
Mpa	Mpa				
<b>Location</b>	<b>Location</b>				
Y= -0,0004486	Y= -0,02370				
Z= 0,05000	Z= 0,0437				
X=0,00000	X=0,10000				
m	m				

Πίνακας 6.4.6 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Εικόνα 6.4.9 Διατομή 100x60x6.3-Μέγιστες Τάσεις Von Mises-Τετραπλευρικά



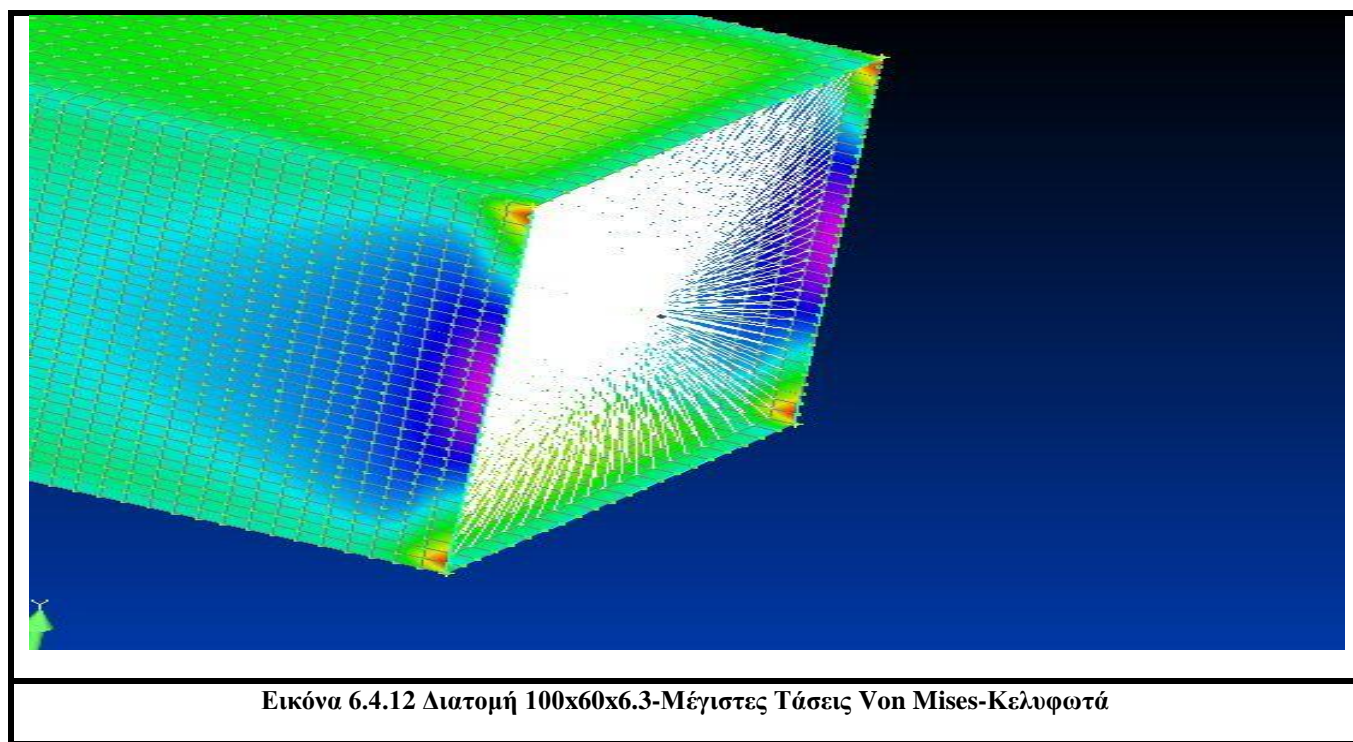
Εικόνα 6.4.10 Διατομή 100x60x6.3-Μέγιστες Τάσεις Von Mises-Τετραπλευρικά



### 6.4.3.3 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία

BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 50		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference
<b>4,010E+05</b>	<b>4,677E+05</b>	14,27%	4,010E+05	3,879E+05	3,38%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b>Location</b>	<b>Location</b>		<b>Location</b>	<b>Location</b>	
Y= -0,0004486	Y= -0,0300		Y= -0,0004486	Y= -0,0300	
Z= 0,05000	Z= 0,05000		Z= 0,05000	Z= 0,05000	
X=0,00000	X=0,00000		X=0,00000	X=0,00000	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.4.7 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα τασικά μεγέθη (Von Mises):

- Κυρίως για τα τετραπλευρικά στοιχεία (όπου η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με καλύτερες αναλογίες σε σχέση με τους άλλους δύο τύπους στοιχείων) παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση με τα αποτελέσματα που εξάγουμε με τα προγράμματα των συνοριακών στοιχείων.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 7,73%-8,12% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μεγαλύτερες τάσεις Von Mises.

- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 0,11%-1,97% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- Η διακριτοποίηση με κελυφωτά στοιχεία παρουσιάζει αρκετά μεγάλες αποκλίσεις και από τα συνοριακά αλλά και από τους άλλους δύο τύπους πεπερασμένων στοιχείων, για αυτό και στο πλαίσιο της εργασίας αυτής δεν θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα των κελυφωτών στοιχείων.
- **Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν μεγαλύτερες μέγιστες τάσεις σε σχέση με τους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα. Στους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα παρουσιάζεται το φαινόμενο του *distortion*** (δηλαδή της εντός επιπέδου παραμόρφωσης των διατομών της ράβδου), για το οποίο επιχειρείται να δοθεί ποιοτική εξήγηση στο τέλος του 6<sup>ου</sup> κεφαλαίου σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο επιδρά το φαινόμενο αυτό στις διατομές.
- Στα τετραπλευρικά στοιχεία παρατηρούμε ότι η ανάλυση με τα πολλά διαφράγματα έδωσε αποτελέσματα πρακτικώς τα ίδια με την θεωρία δοκού το οποίο καταδεικνύει και την αξιοπιστία της τελευταίας. Στη θεωρία δοκού είναι βασική παραδοχή ότι δεν υπάρχει το φαινόμενο του *distortion* και επομένως ήταν λογικό να πλησιάσουμε στα αποτελέσματα της θεωρίας δοκού βάζοντας παντού διαφράγματα.
- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται για τη μεν θεωρία δοκού στην διατομή της πάκτωσης στο σύνορο σε περιοχή κοντά στο σημείο όπου έχουμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και για τη δε θεωρία της τρισδιάστατης ελαστικότητας στη διατομή που απέχει 1cm από την πάκτωση στη θέση όπου έχουμε μέγιστες ορθές τάσεις (εικόνα 6.4.11). Αξίζει να σημειωθεί ότι στη θέση που εμφανίζεται το μέγιστο της τρισδιάστατης ελαστικότητας η θεωρία δοκού δίδει παραπλήσια αποτελέσματα τα οποία είναι ελαφρώς μικρότερα από τα μέγιστα.

### 6.4.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης

Για την διατομή 100x60x6.3 από αλουμίνιο για το στατικό σύστημα του προβόλου με στρεπτική ροπή 10 kNm στο άκρο του αποδείξαμε προηγουμένως ότι η **θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα**. Η προαναφερθείσα θεωρία χρησιμοποιεί το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (εξίσωση 4.5.17) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη κατά μήκος της ράβδου. Τίθεται το ερώτημα **κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα** αν αγνοηθεί αυτός ο διορθωτικός συντελεστής (δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ ), ή αν χρησιμοποιούσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή την θεωρία ομοιόμορφης στρέψης για την επίλυση του ίδιου προβλήματος. **Επισημαίνεται ότι με βάση τον EC3 τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης επιτρέπεται να αγνοούνται απλοποιητικά σε χαλύβδινες ράβδους κλειστής κοίλης διατομής**. Επιπλέον, **το ίδιο ισχύει και με βάση τον EC9 σε ράβδους κλειστής κοίλης διατομής από αλουμίνιο εάν αυτές δεν είναι ευαίσθητες σε στρέβλωση**. Εντούτοις δεν δίνονται διευκρινιστικές οδηγίες σχετικά με ποιο σχήμα διατομής είναι μη ευαίσθητο σε στρέβλωση.

Kinematic Magnitude	STDME	STDME $K_x=1$	Differences	Units
max thx	8,23E-001	8,22E-001	0,06%	rad
max nx	1,65E-001	1,65E-001	0,00%	rad/m
max thx_diff	1,65E-001	1,65E-001	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max thx	8,23E-001	8,21E-001	0,19%	rad
max nx	1,65E-001			rad/m
max thx_diff	1,65E-001	1,68E-001	1,96%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Uniform	Differences	
max thx	8,23E-001	8,23E-001	0,05%	rad
max nx	1,65E-001			rad/m
max thx_diff	1,65E-001	1,65E-001	0,00%	rad/m

Πίνακας 6.4.8 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Κινηματικά μεγέθη

Moment	STDME	STDME Kx=1	Differences	Units
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	7,10E-001	3,03E+000	326,07%	kNm
max Mw	2,61E-002	5,72E-002	118,99%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	7,10E-001	1,00E+001	1308,16%	kNm
max Mw	2,61E-002	1,20E-001	360,16%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Uniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	7,10E-001	0,00E+000	-	kNm
max Mw	2,61E-002	0,00E+000	-	kNm <sup>2</sup>

Πίνακας 6.4.9 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Εντατικά μεγέθη

Stresses	STDME	STDME Kx=1	Differences	
MaxS-VonMises	4,01E+005	6,61E+005	64,76%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	1,53E+005	3,35E+005	118,99%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	2,32E+005	3,81E+005	64,76%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,74E+005	1,31E+005	24,92%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	5,93E+004	2,53E+005	326,07%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
MaxS-VonMises	4,01E+005	1,45E+006	260,56%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	1,53E+005	7,04E+005	360,16%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	2,32E+005	8,35E+005	260,55%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,74E+005	4,32E+001	99,98%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	5,93E+004	8,35E+005	1308,16%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Uniform	Differences	
MaxS-VonMises	4,01E+005	3,25E+005	19,06%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	1,53E+005	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	2,32E+005	1,87E+005	19,06%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,74E+005	1,87E+005	7,64%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	5,93E+004	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>

Πίνακας 6.4.10 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Τασικά μεγέθη



Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα :

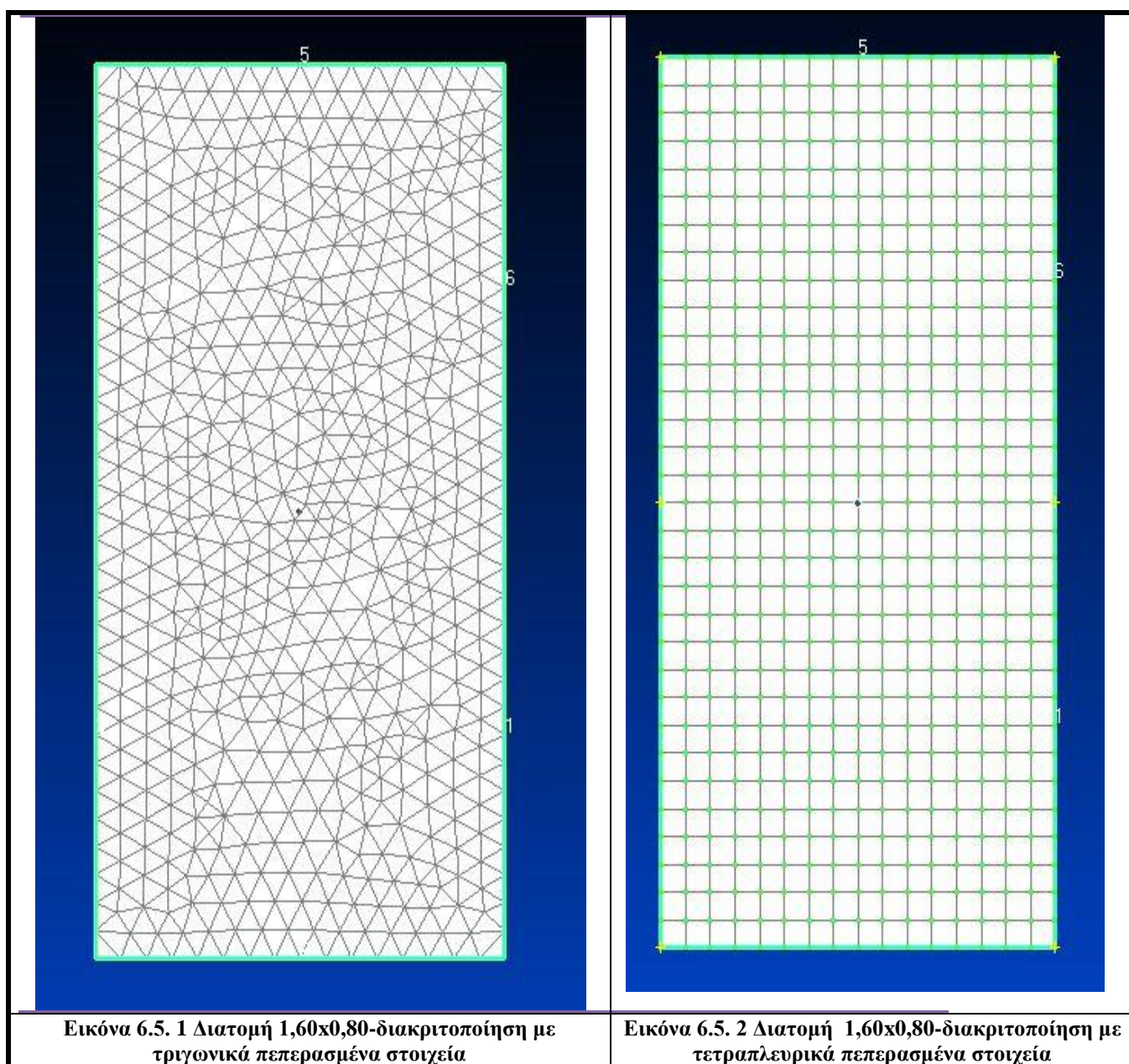
- Καθίσταται εμφανές το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα. Πιο αναλυτικά, στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή φαίνεται να είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και στα τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές. Στα εντατικά μεγέθη η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης μας δίνει πιο δυσμενή αποτελέσματα όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις ορθές, διατμητικές και Von Mises τάσεις στο σύνορο. Επομένως, **κρίνεται αναγκαία η συμπερίληψη του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης** στη διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης. Επισημαίνεται ότι πλήθος ερευνητών δε λαμβάνουν υπόψη το συγκεκριμένο συντελεστή. Επιπλέον, από την καλή συμφωνία της διευρυμένης θεωρίας ανομοιομορφης στρέψης με την τρισδιάστατη ελαστικότητα προκύπτει ότι η μεθοδολογία υπολογισμού που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης δίδει αξιόπιστα αποτελέσματα.
- Τα αποτελέσματα από την ‘κλασική’ θεωρία της ανομοιομορφης στρέψης παρουσιάζουν υψηλές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτά της ‘διευρυμένης θεωρίας( ΔΣΠ ή STDME-Secondary Torsional Deformation Moment Effect). Πιο συγκεκριμένα στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν ιδιαίτερα υψηλές τιμές. Τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο η ‘κλασική’ θεωρία προβλέπει πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της ‘κλασικής’ θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές.
- Η ομοιομορφη στρέψη φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη εναλλακτική θεωρία για την μελέτη του παραπάνω φαινομένου σε επίπεδο τάσεων Von Mises, μιας και εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις (της τάξης του 19,06 %) σε αντίθεση με την κλασική ανομοιομορφη στρέψη που εμφανίζει ( της τάξης του 260,56%). Εντούτοις, η θεωρία της ομοιομορφης στρέψης προβλέπει τάσεις μικρότερες από αυτές που προέκυψαν στις αναλύσεις με τρισδιάστατα και κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία. Παράλληλα, το παραπάνω σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιομορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών τάσεων αλλά ούτε εντατικών μεγεθών όπως η δευτερογενής στρεπτική ροπή ή το δίρροπο στρέβλωσης, την καθιστά ανεπαρκής για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.
- Τα φαινόμενα ανομοιομορφης στρέψης και ΔΣΠ παίζουν σημαντικό ρόλο σε ράβδους λεπτότοιχης κοίλης ορθογωνικής διατομής, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά στον υπολογισμό μέγιστων τασικών μεγεθών.

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι για την μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές με το στατικό σύστημα του προβόλου η πιο πρόσφορη θεωρία είναι εκείνη της ανομοιομορφης στρέψης με την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών

παραμορφώσεων. Η «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει πολύ υψηλές μη ρεαλιστικές τιμές μέγιστων τασικών μεγεθών. Η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης δίδει σχετικά κοντινά αποτελέσματα με αυτά της τρισδιάστατης ελαστικότητας και της θεωρίας κελυφών, εντούτοις υποεκτιμά τα μέγιστα τασικών μεγεθών (σε αντίθεση με τη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης). Το γεγονός αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ιδίως σε κατασκευές από αλουμίνιο που υπόκεινται σε κόπωση.

## 6.5 Αριθμητική εφαρμογή 3

Στην 3<sup>η</sup> αριθμητική μας εφαρμογή ασχοληθήκαμε με τη συμπαγή ορθογωνική διατομή (1,60m)x(0,80m) από αλουμίνιο. Το πρώτο στατικό σύστημα μας είναι πρόβολος με μήκος 10m και η στρεπτική ροπή που τοποθετήσαμε είναι  $M= 10 \text{ kNm}$  στο άκρο του προβόλου και το δεύτερο στατικό σύστημα μας είναι η αμφίπακτη με μήκος 10m και στρεπτική ροπή  $M = 10 \text{ kNm}$  στο μέσο της δοκού. Το λογισμικό σε H/Y που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση της δοκού μας ήταν το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran , όπου διακριτοποιήσαμε την διατομή μας με τριγωνικά στοιχεία (trig) καθώς και τετραπλευρικά στοιχεία (quads) και τη δοκό μας με πενταεδρικά και εξαεδρικά αντίστοιχα. Επιλέχτηκε η συγκεκριμένη διαδικασία μιας και η ιδιαίτερη γεωμετρία ενός ραβδόμορφου φορέα καθιστά ελκυστική τη διακριτοποίηση μιας διατομής και στη συνέχεια τη μόρφωση τρισδιάστατων στοιχείων μέσω της διαδικασίας του “extrude”.



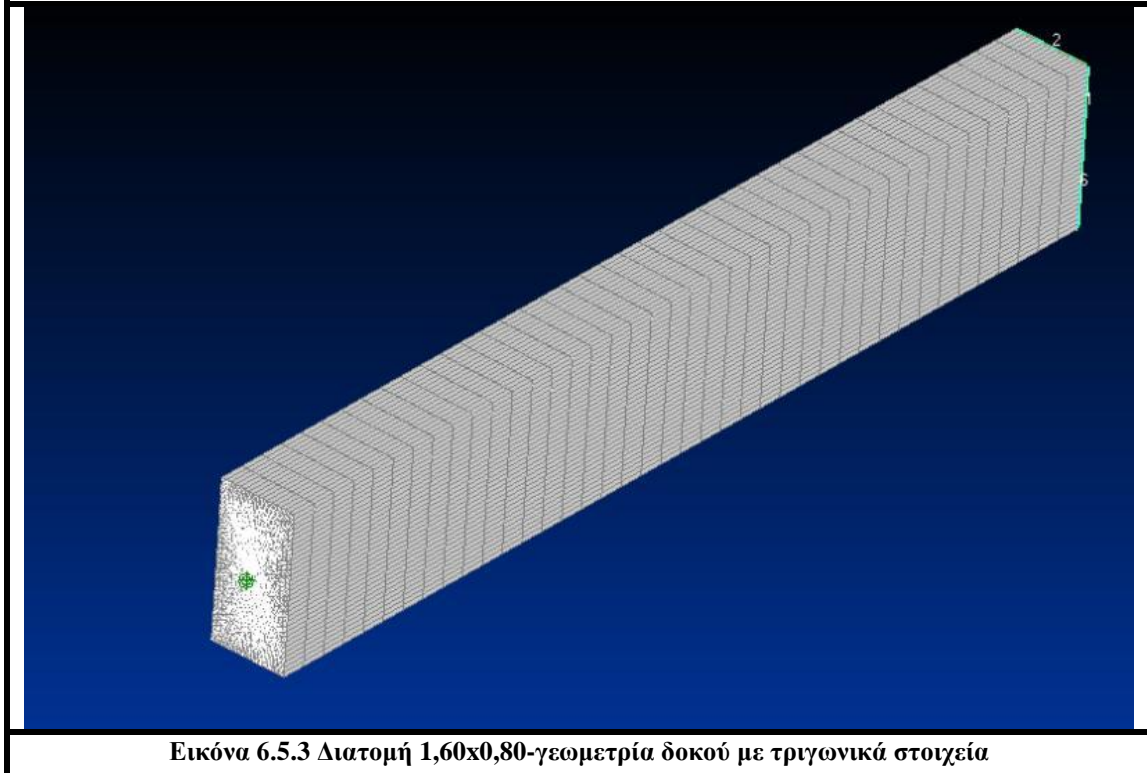
Εικόνα 6.5. 1 Διατομή 1,60x0,80-διακριτοποίηση με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία

Εικόνα 6.5. 2 Διατομή 1,60x0,80-διακριτοποίηση με τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία

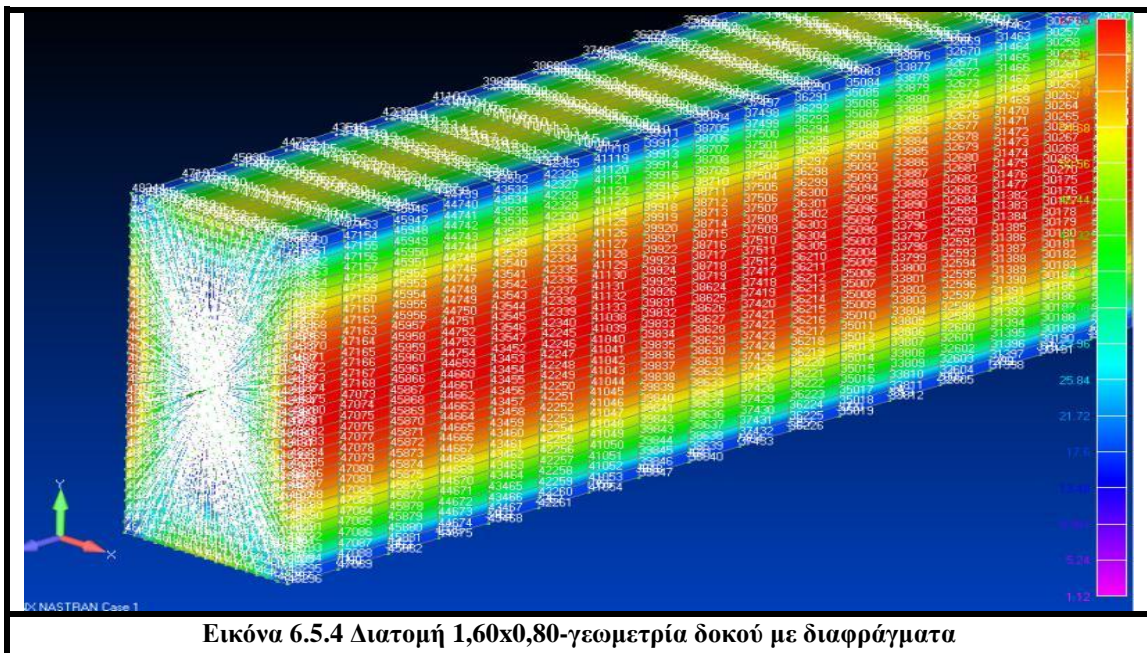
## 6.5.1 Κινηματικά μεγέθη (πρόβολος)

### 6.5.1.1.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.5.3) για δοκό με ένα διάφραγμα\*(βλέπε κεφ 4.1 παραδοχή 2) μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 40 διαφράγματα.



Εικόνα 6.5.3 Διατομή 1,60x0,80-γεωμετρία δοκού με τριγωνικά στοιχεία



Εικόνα 6.5.4 Διατομή 1,60x0,80-γεωμετρία δοκού με διαφράγματα

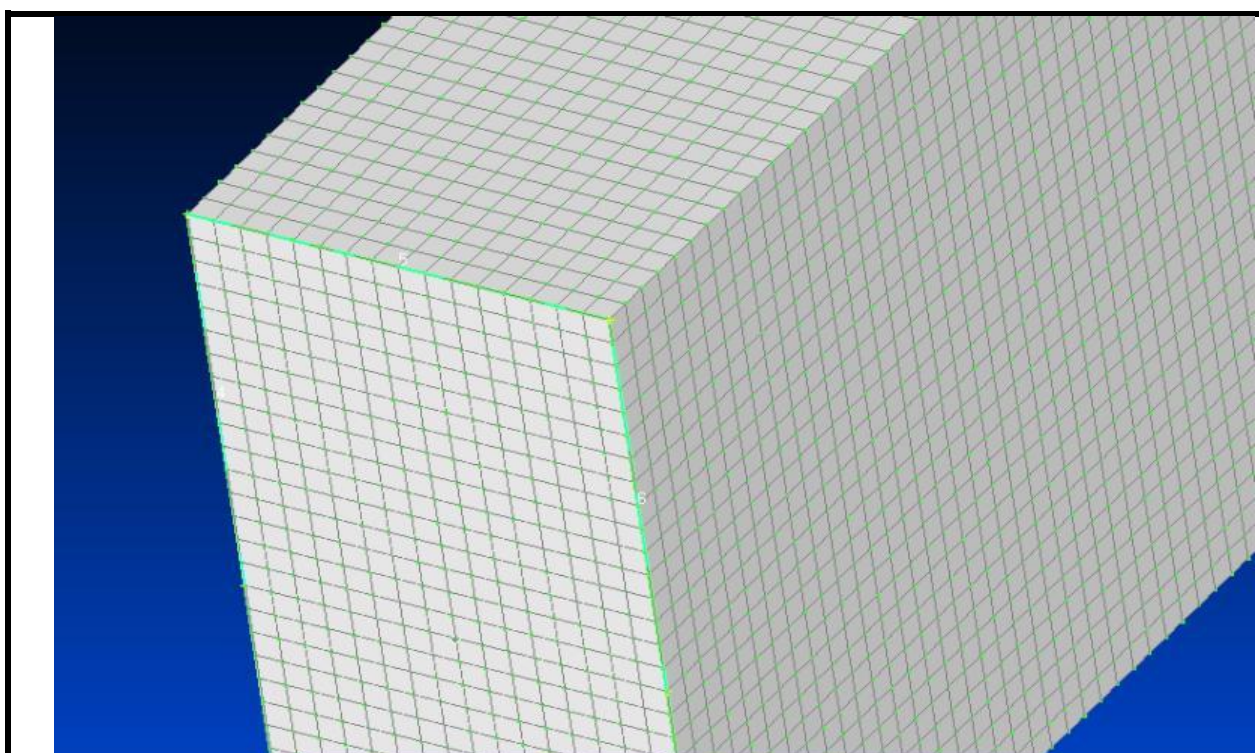


<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 40		BEM	trig no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences
1,943E-05	1,931E-05	0,60%	1,943E-05	1,942E-05	0,02%
Rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.5.1 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τριγωνικά

### 6.5.1.1.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τετραπλευρικά για την δοκό του σχήματος (6.5.5) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 10 διαφράγματα.



Εικόνα 6.5.5 Διατομή 1,60x0,80-γεωμετρία δοκού με τετραπλευρικά στοιχεία

<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 10		BEM	quads no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences
1,943E-05	1,941E-05	0,07%	1,943E-05	1,942E-05	0,06%
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.5.2 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τετραπλευρικά

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα κινηματικά μεγέθη:

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (θεωρία δοκού), παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων(θεωρία τρισδιάστατης ελαστικότητας) όσον αφορά τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη, γεγονός που καταδεικνύει την ακρίβεια και την αξιοπιστία της θεωρίας δοκού που χρησιμοποιήθηκε.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 0,02%-0,60% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 0,06%-0,07% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν (ελάχιστα) μεγαλύτερες στροφές σε σχέση με τους φορείς που είχαν μόνο ένα διάφραγμα στο άκρο τους.
- Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη διακριτοποιώντας την διατομή είτε με τριγωνικά είτε με τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία.

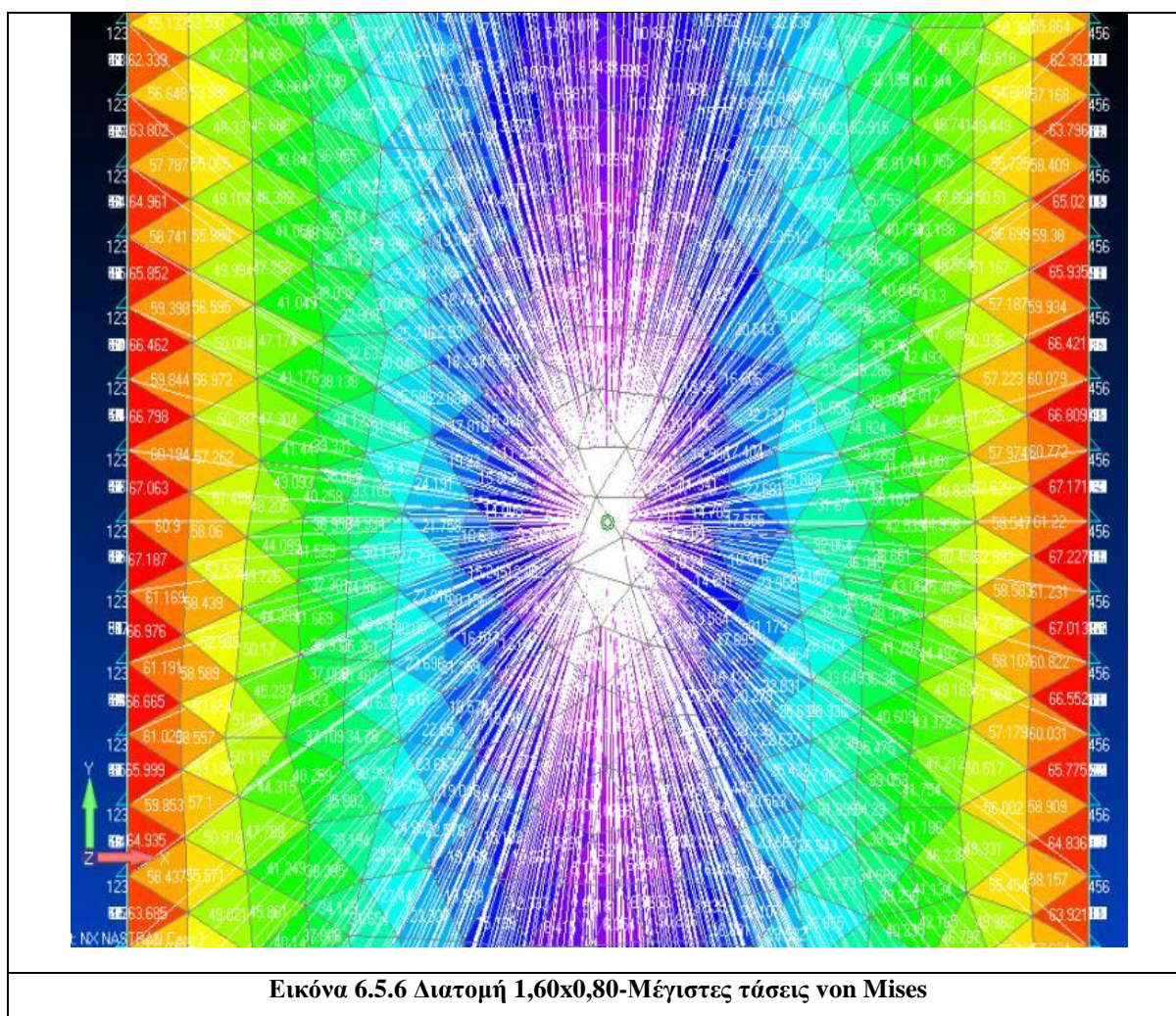
### 6.5.1.2 Τασικά μεγέθη (πρόβολος)

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα αποτελέσματα που εξάγουμε από την ανάλυση με τριγωνικά και τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις όλων των τύπων πεπερασμένων στοιχείων και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που πραγματοποιήθηκαν στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων.

#### 6.5.1.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

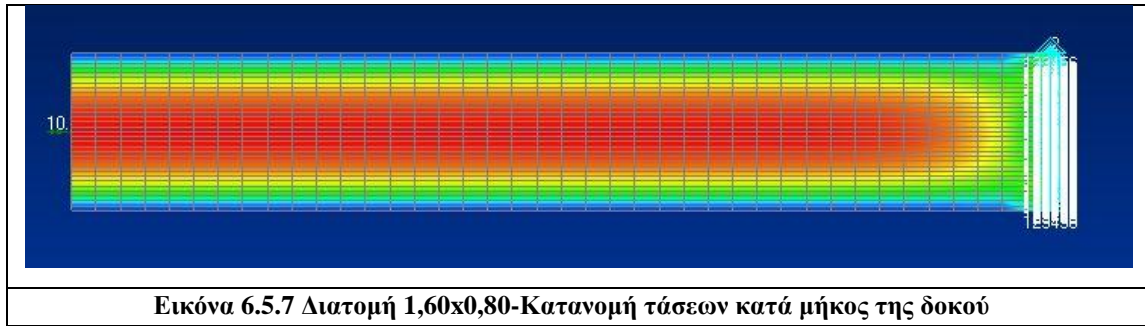
<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 40		BEM	trig no diafragms	
maxS- VonMises	maxS- VonMises	Differences	maxS- VonMises	maxS- VonMises	Differences
6,809E+01	6,723E+01	1,29%	6,809E+01	6,723E+01	1,29%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	

Πίνακας 6.5.3 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Εικόνα 6.5.6 Διατομή 1,60x0,80-Μέγιστες τάσεις von Mises



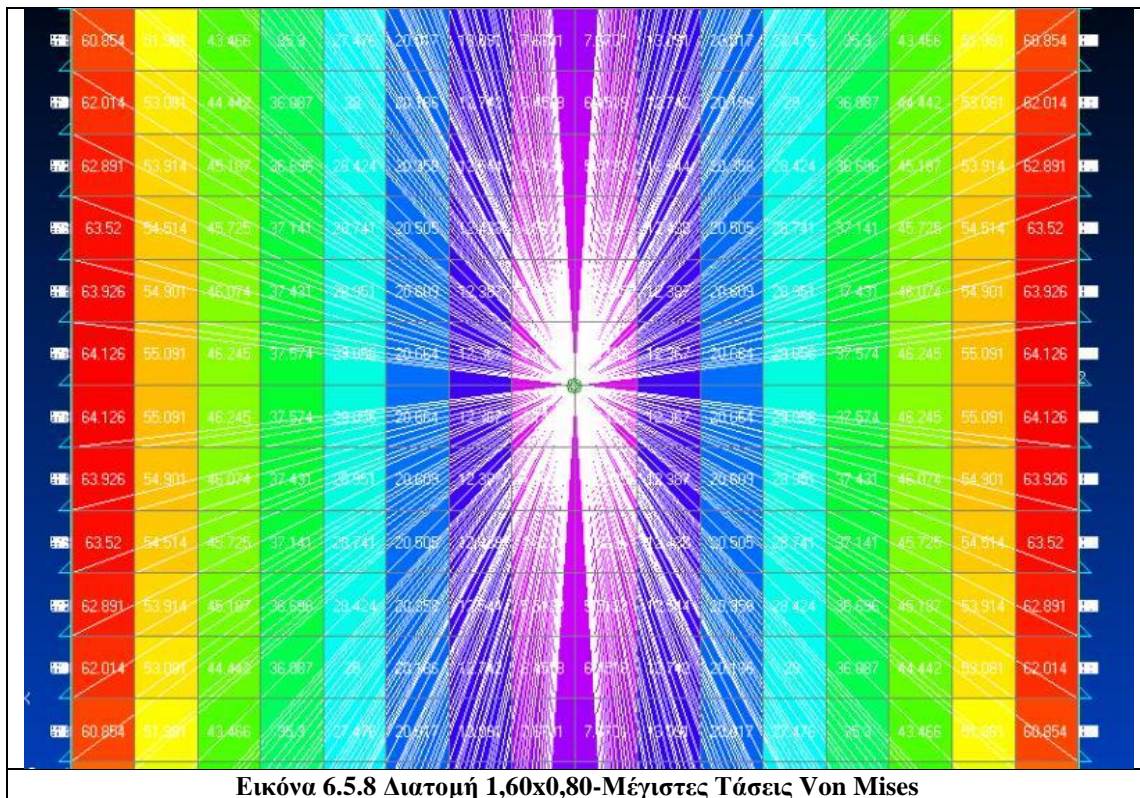


Εικόνα 6.5.7 Διατομή 1,60x0,80-Κατανομή τάσεων κατά μήκος της δοκού

### 6.5.1.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

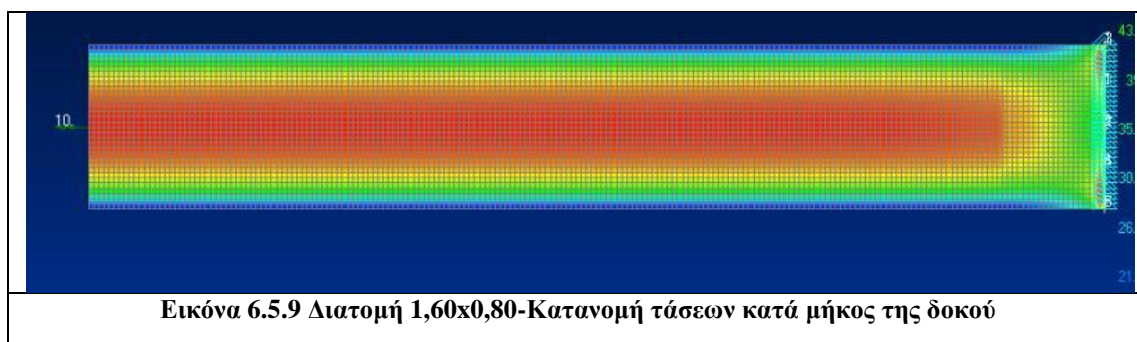
<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 10		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
6,809E+01	6,413E+01	6,19%	6,809E+01	6,413E+01	6,19%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	

Πίνακας 6.5.4 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Εικόνα 6.5.8 Διατομή 1,60x0,80-Μέγιστες Τάσεις Von Mises





Εικόνα 6.5.9 Διατομή 1,60x0,80-Κατανομή τάσεων κατά μήκος της δοκού

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα τασικά μεγέθη (Von Mises):

- Και για τους δύο τύπους πεπερασμένων στοιχείων παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση με τα αποτελέσματα που εξάγουμε με τα προγράμματα των συνοριακών στοιχείων.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 1,29% απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 6,19% απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- *Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν τις ίδιες μέγιστες τάσεις με τους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα. Επομένως στις συμπαγείς κλειστές ορθογωνικές διατομές( και σε επόμενο παράδειγμα θα γενικευτεί αυτή η διαπίστωση για τις συμπαγείς κλειστές διατομές) δεν παρουσιάζεται το φαινόμενο του *distortion*.*
- Στα τριγωνικά στοιχεία παρατηρούμε ότι η ανάλυση έδωσε αποτελέσματα πρακτικώς τα ίδια με την θεωρία δοκού το οποίο καταδεικνύει και την αξιοπιστία της τελευταίας. Στη θεωρία δοκού είναι βασική παραδοχή ότι δεν υπάρχει το φαινόμενο του *distortion* και επομένως ήταν λογικό να πλησιάσουμε στα αποτελέσματα της θεωρίας δοκού με βάση τα ανωτέρω συμπεράσματα.
- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται για τη μεν θεωρία δοκού στην διατομή του άκρου στο σύνορο σε περιοχή κοντά στο σημείο όπου έχουμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και για τη δε θεωρία της τρισδιάστατης ελαστικότητας στη διατομή του άκρου σχεδόν στη θέση όπου έχουμε μέγιστες διατμητικές τάσεις (εικόνα 6.5.8).

### 6.5.1.3 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης (πρόβολος)

Για την κλειστή ορθογωνική διατομή από αλουμίνιο για το στατικό σύστημα του προβόλου με στρεπτική ροπή 10 kNm στο άκρο του αποδείξαμε προηγουμένως ότι η **θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα**. Η προαναφερθείσα θεωρία χρησιμοποιεί το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (εξίσωση 4.5.17) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη κατά μήκος της ράβδου. Τίθεται το ερώτημα **κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα** αν αγνοηθεί αυτός ο διορθωτικός συντελεστής (δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ ), ή αν χρησιμοποιούσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή την θεωρία ομοιόμορφης στρέψης για την επίλυση του ίδιου προβλήματος.

Kinematic Magnitude	STDME	STDME $K_x=1$	Differences	Units
max thx	1,94E-005	1,94E-005	0,19%	rad
max nx	1,97E-006	1,97E-006	0,00%	rad/m
max thx_diff	1,97E-006	1,97E-006	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max thx	1,94E-005	1,92E-005	1,10%	rad
max nx	1,97E-006	-	-	rad/m
max thx_diff	1,97E-006	1,97E-006	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Uniform	Differences	
max thx	1,94E-005	1,97E-005	1,67%	rad
max nx	1,97E-006	-	-	rad/m
max thx_diff	1,97E-006	1,97E-006	0,00%	rad/m

Πίνακας 6.5.6 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Κινηματικά μεγέθη

Moment	STDME	STDME Kx=1	Differences	Units
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	3,63E+000	4,51E+000	23,98%	kNm
max Mw	1,64E+000	1,82E+000	11,36%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	3,63E+000	1,00E+001	175,15%	kNm
max Mw	1,64E+000	2,72E+000	66,03%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Uniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	3,63E+000	0,00E+000	-	kNm
max Mw	1,64E+000	0,00E+000	-	kNm <sup>2</sup>

Πίνακας 6.5.7 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Εντατικά μεγέθη

Stresses	STDME	STDME Kx=1	Differences	
MaxS-VonMises	6,08E+001	6,42E+001	5,54%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	5,15E+001	5,54E+001	7,50%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,51E+001	3,71E+001	5,58%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	2,50E+001	2,18E+001	12,95%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,51E+001	2,14E+001	42,00%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
MaxS-VonMises	6,08E+001	8,57E+001	40,87%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	5,15E+001	8,55E+001	66,03%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,51E+001	4,15E+001	18,10%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	2,50E+001	4,79E-009	100,00%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,51E+001	4,15E+001	175,15%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Uniform	Differences	
MaxS-VonMises	6,08E+001	6,81E+001	11,97%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	5,15E+001	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,51E+001	3,93E+001	12,01%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	2,50E+001	3,93E+001	57,09%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,51E+001	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>

Πίνακας 6.5.8 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Τασικά μεγέθη

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα (Τα τασικά μεγέθη έχουν υπολογιστεί και αναφέρονται στη θέση της άκτωσης):

- Καθίσταται εμφανές το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα. Πιο αναλυτικά, στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή

φαίνεται να είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και στα τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν σημαντικές τιμές. Στα εντατικά μεγέθη η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης δίνει πιο δυσμενή (συντηρητικά) αποτελέσματα όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις ορθές διατμητικές και Von Mises τάσεις στο σύνορο. Εντούτοις, αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά στις μέγιστες τάσεις Von Mises δεν είναι μεγάλη (5,54%). Πάντως, κρίνεται αναγκαίος ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης.

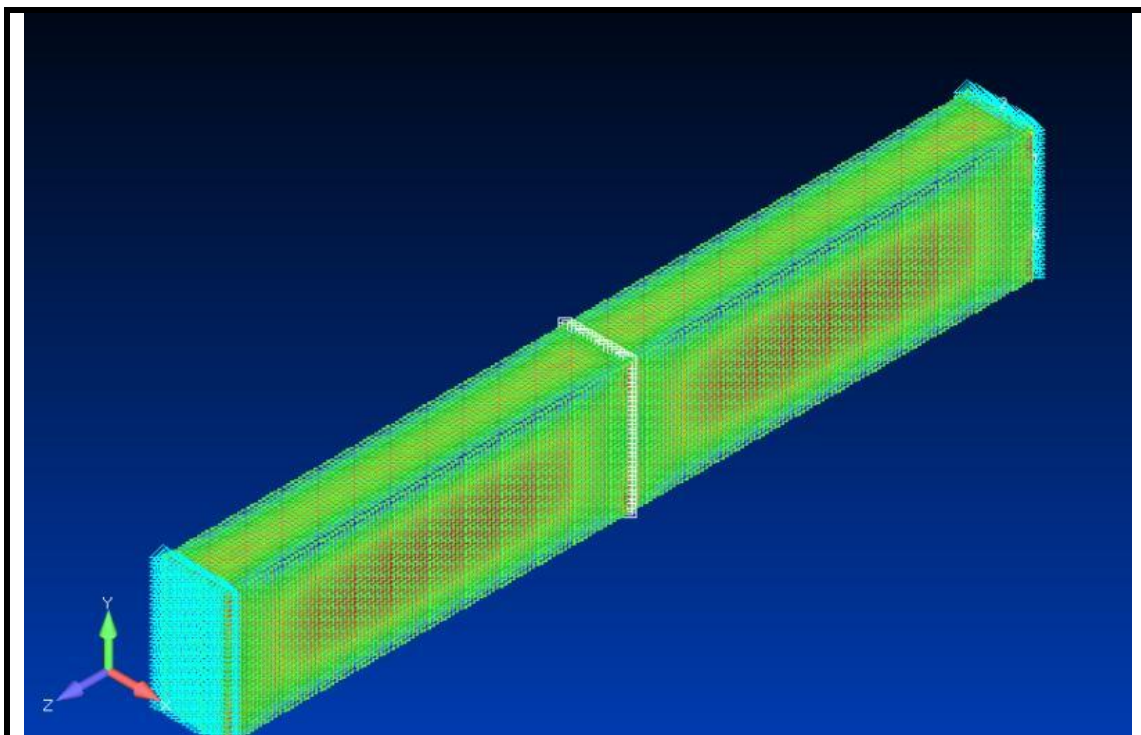
- Τα αποτελέσματα της ‘κλασικής’ θεωρίας της ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζουν υψηλές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτά της ‘διευρυμένης’ θεωρίας (με επιρροή ΔΣΠ ή STDME-Secondary Torsional Deformation Moment Effect). Πιο συγκεκριμένα στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν ιδιαίτερα υψηλές τιμές. Τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο η ‘κλασική’ θεωρία προβλέπει πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της ‘κλασικής’ θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές.
- Η ομοιόμορφη στρέψη φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη εναλλακτική θεωρία για την μελέτη του παραπάνω φαινομένου σε επίπεδο τάσεων Von Mises, μιας και εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις (της τάξης του 11,97%) σε αντίθεση με την κλασική ανομοιόμορφη στρέψη που εμφανίζει (της τάξης του 40,87%). Όμως το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών τάσεων αλλά ούτε εντατικών μεγεθών όπως η δευτερογενής στρεπτική ροπή ή το δίρροπο στρέβλωσης, την καθιστά ανεπαρκή για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι για την μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε συμπαγείς κλειστές ορθογωνικές διατομές με το στατικό σύστημα του προβόλου η πιο πρόσφορη θεωρία είναι εκείνη της ανομοιόμορφης στρέψης με την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Η «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει πολύ υψηλές μη ρεαλιστικές τιμές μέγιστων τασικών μεγεθών. Η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης δίδει σχετικά κοντινά αποτελέσματα με αυτά της τρισδιάστατης ελαστικότητας.

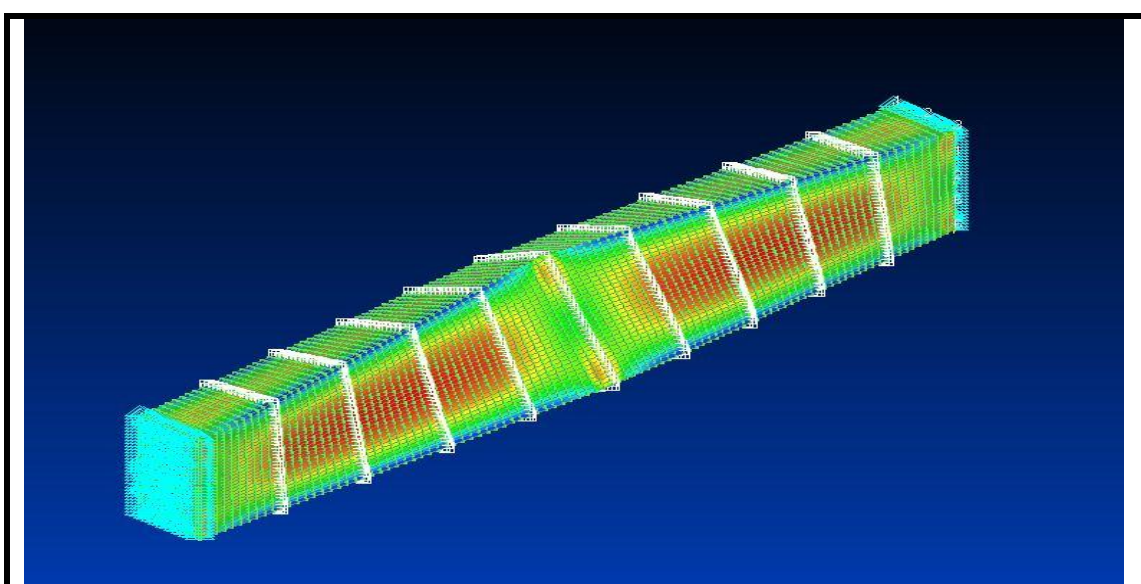
## 6.5.2.1 Κινηματικά μεγέθη (αμφίπακτη)

### 6.5.2.1.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.5.10,6.5.11) για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στο μέσον όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 10 διαφράγματα.



Εικόνα 6.5.10 Διατομή 1,60x0,80-γεωμετρία δοκού με τριγωνικά στοιχεία



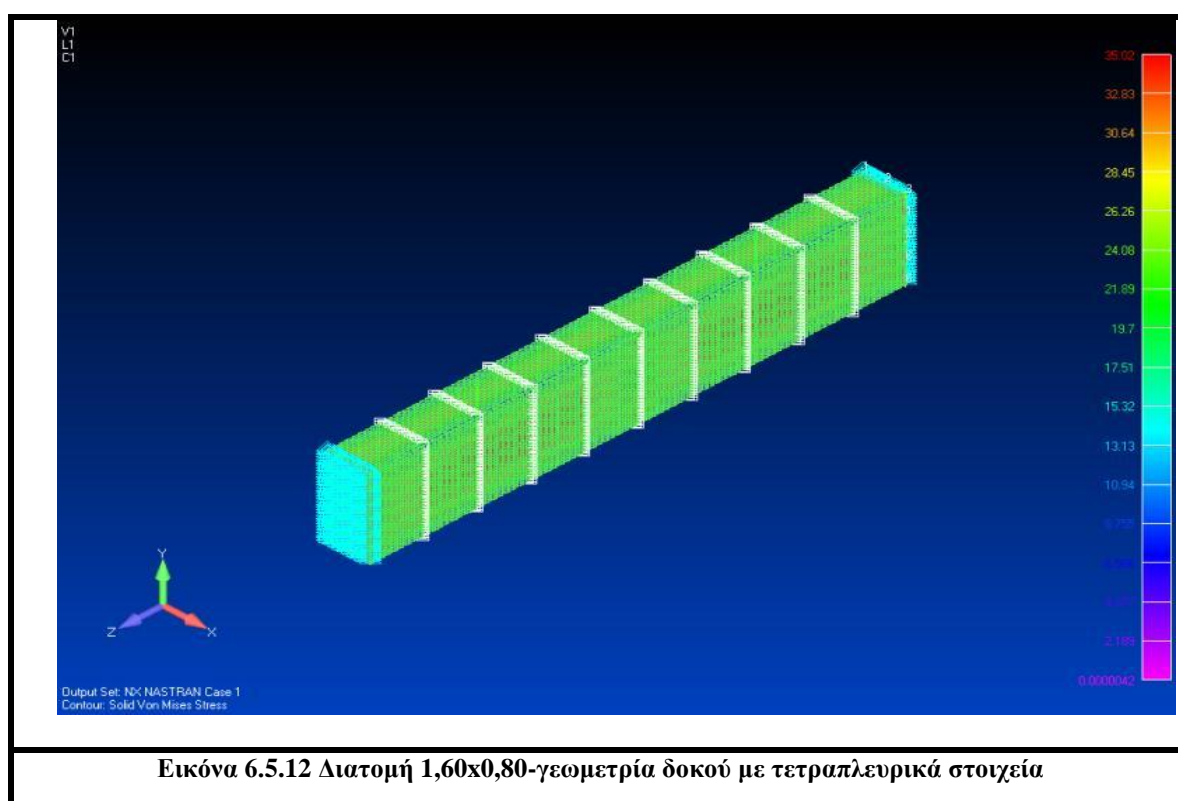
Εικόνα 6.5.11 Διατομή 1,60x0,80-παραμορφωμένη εικόνα

<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 10		BEM	trig no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences
4,613E-06	4,61E-06	0,11%	4,613E-06	4,559E-06	1,17%
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.5.8 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τριγωνικά

### 6.5.2.1.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τετραπλευρικά για την δοκό του σχήματος (6.5.12) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 10 διαφράγματα.



Εικόνα 6.5.12 Διατομή 1,60x0,80-γεωμετρία δοκού με τετραπλευρικά στοιχεία

BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 10		BEM	quads no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences
4,614E-06	4,607E-06	0,13%	4,613E-06	4,609E-06	0,10%
BEM	FEM		BEM	FEM	
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.5.9 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τετραπλευρικά

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα κινηματικά μεγέθη:

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, (στοιχεία δοκού), παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας)όσον όσον αφορά τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη, γεγονός που καταδεικνύει την ακρίβεια και την αξιοπιστία της θεωρίας δοκού που χρησιμοποιήθηκε.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 0,11%-1,17% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 0,10%-0,13% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν (ελάχιστα) μικρότερες στροφές σε σχέση με τους φορείς που είχαν μόνο ένα διάφραγμα στο μέσον τους.
- Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση παίρνουμε σχεδόν τα ίδια αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη διακριτοποιώντας τη διατομή είτε με τριγωνικά είτε με τετραπλευρικά στοιχεία.

### 6.5.2.2 Τασικά μεγέθη

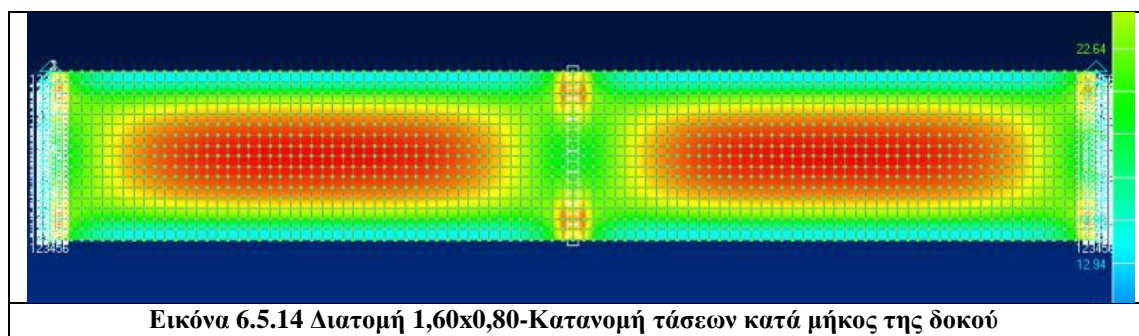
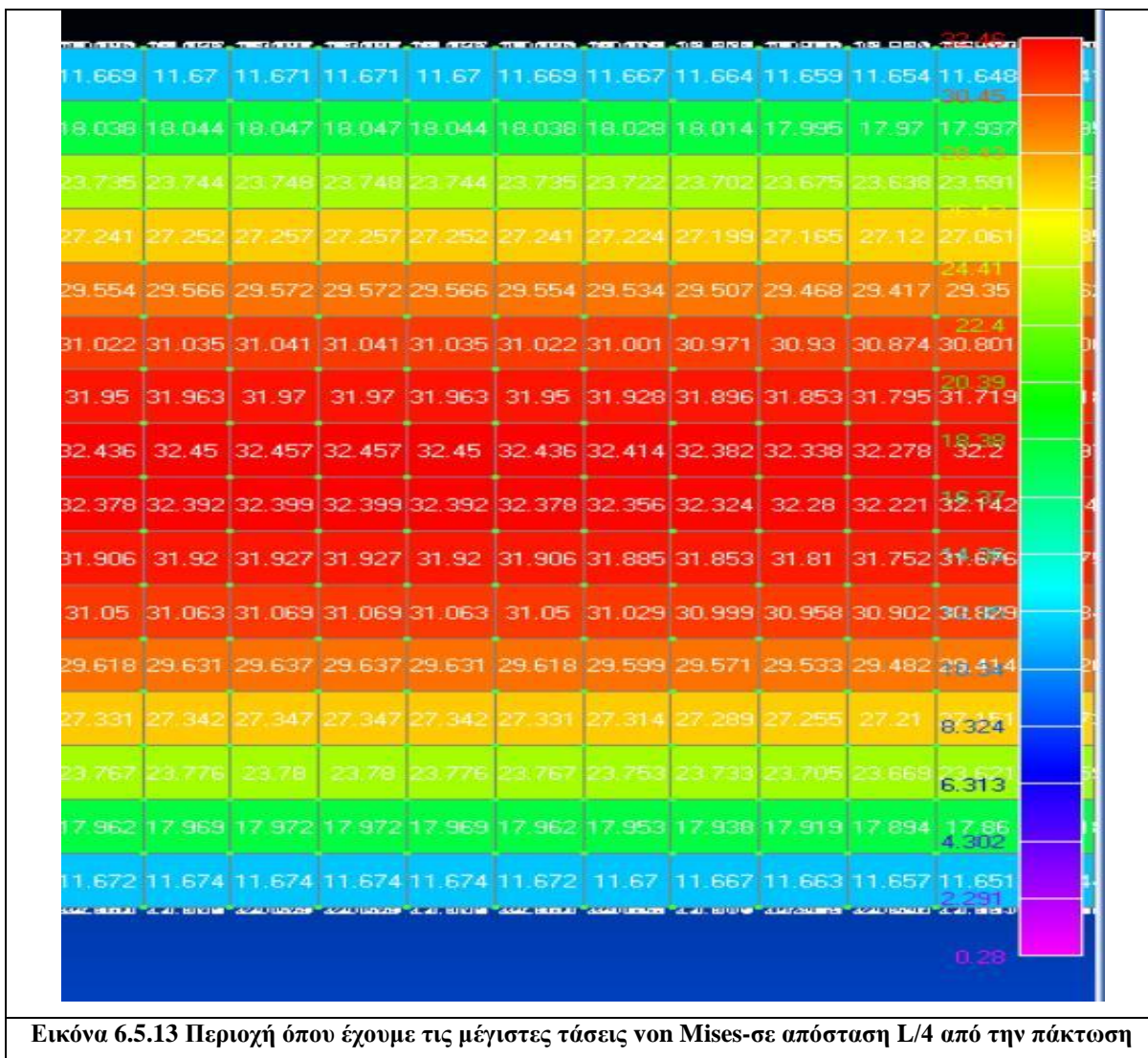
Στο υποκεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα αποτελέσματα που εξάγουμε από την ανάλυση με τριγωνικά (6.5.13,6.5.14) και τετραπλευρικά (6.5.15,6.5.16) πεπερασμένα στοιχεία και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις όλων των τύπων πεπερασμένων στοιχείων και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που πραγματοποιήθηκαν στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων.

#### 6.5.2.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 10		BEM	trig no diafragms	
maxS- VonMises	maxS- VonMises	Differences	maxS- VonMises	maxS- VonMises	Differences
3,04E+01	3,30E+01	7,86%	3,04E+01	3,25E+01	6,31%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	

Πίνακας 6.5.10 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



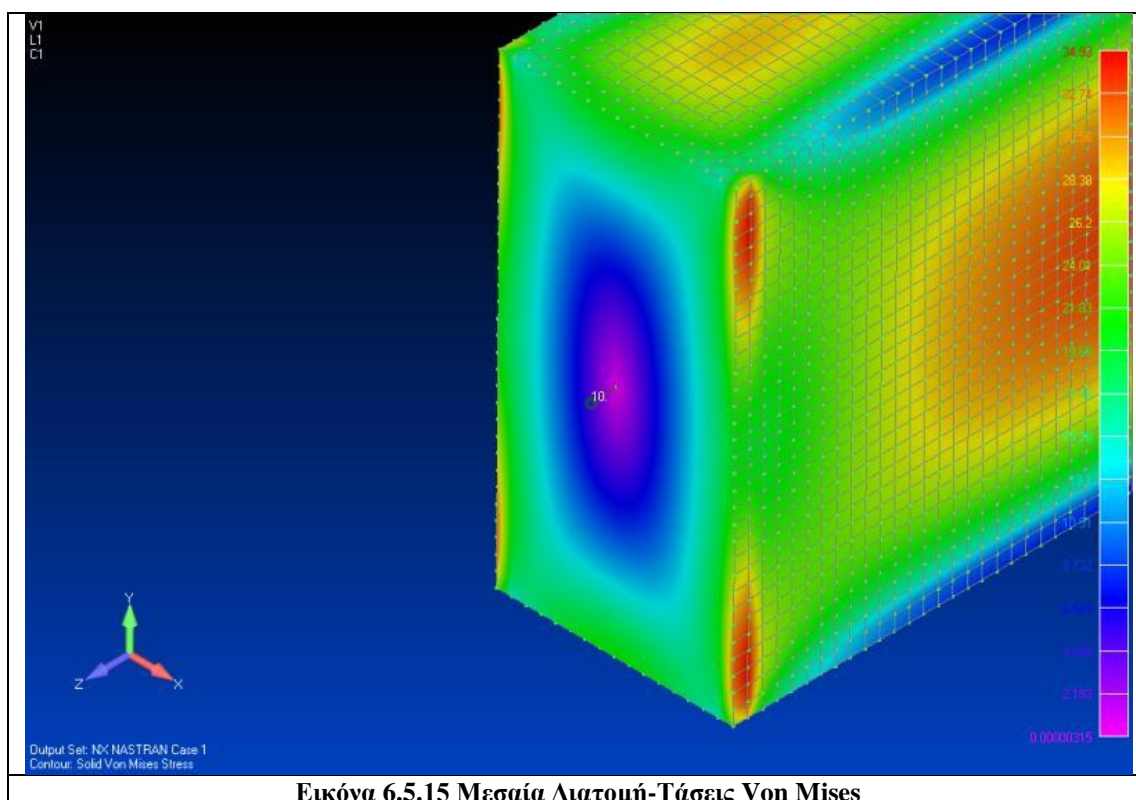




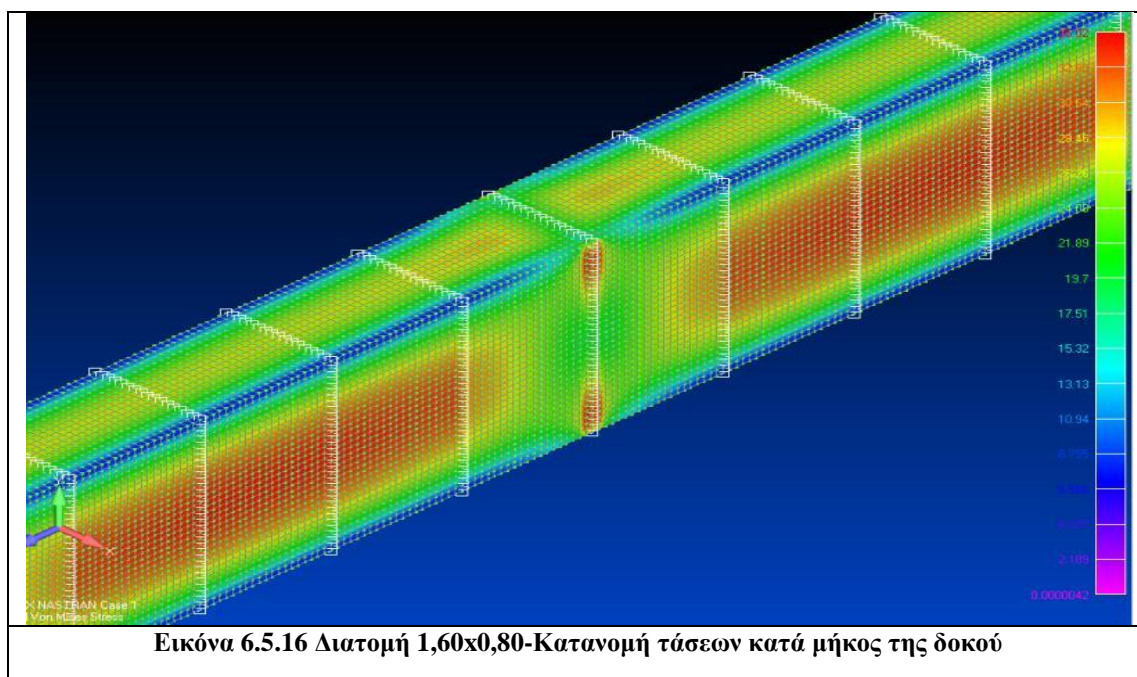
### 6.5.2.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 10		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
3,04E+01	3,19E+01	4,78%	3,04E+01	3,20E+01	4,90%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	

Πίνακας 6.5.11 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Εικόνα 6.5.15 Μεσαία Διατομή-Τάσεις Von Mises



Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα τασικά μεγέθη (Von Mises):

- Και για τους δύο τύπους πεπερασμένων στοιχείων παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση με τα αποτελέσματα που εξάγουμε με τα προγράμματα των συνοριακών στοιχείων.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 6,31-7,86% απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μεγαλύτερες τάσεις Von Mises.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 4,90%-4,78% απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μεγαλύτερες τάσεις Von Mises.
- **Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν σχεδόν τις ίδιες μέγιστες τάσεις με τους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα. Επομένως στις συμπαγείς κλειστές ορθογωνικές διατομές δεν παρουσιάζεται το φαινόμενο του *distortion*.**
- Στα τετραπλευρικά πεπερασμένα στοιχεία παρατηρούμε ότι η ανάλυση έδωσε αποτελέσματα πρακτικώς τα ίδια με την θεωρία δοκού το οποίο καταδεικνύει και την αξιοπιστία της τελευταίας.. Στη θεωρία δοκού είναι βασική παραδοχή ότι δεν υπάρχει το φαινόμενο του *distortion* και επομένως ήταν λογικό να πλησιάσουμε στα αποτελέσματα της θεωρίας δοκού με βάση τα ανωτέρω συμπεράσματα.
- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται για τη μεν θεωρία δοκού στην διατομή που απέχει  $L/4$  (2,5m από την πάκτωση) στο σύνορο σε περιοχή όπου έχουμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και για τη δε θεωρία της τρισδιάστατης ελαστικότητας στην ίδια διατομή σχεδόν στη θέση όπου έχουμε μέγιστες διατμητικές τάσεις (εικόνα 6.5.13-6.5.15-6.5.16).

### 6.5.2.3 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης

Για την κλειστή ορθογωνική διατομή από αλουμίνιο για το στατικό σύστημα της αμφιάκτου με στρεπτική ροπή 10 kNm στο μέσον της αποδείξαμε προηγουμένως ότι η **θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα**. Η προαναφερθείσα θεωρία χρησιμοποιεί το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (εξίσωση 4.5.17) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη κατά μήκος της ράβδου. Τίθεται το ερώτημα **κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα** αν αγνοηθεί αυτός ο διορθωτικός συντελεστής (δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ ), ή αν χρησιμοποιούσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή την θεωρία ομοιόμορφης στρέψης για την επίλυση του ίδιου προβλήματος.

Kinematic Magnitude	STDME	STDME $K_x=1$	Differences	Units
max thx	4,61E-006	4,58E-006	0,80%	rad
max nx	9,80E-007	9,83E-007	0,37%	rad/m
max thx_diff	9,85E-007	9,86E-007	0,10%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max thx	4,61E-006	4,40E-006	4,65%	rad
max nx	9,80E-007	-	-	rad/m
max thx_diff	9,85E-007	9,86E-007	0,10%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Uniform	Differences	
max thx	4,61E-006	4,76E-006	3,11%	rad
max nx	9,80E-007	-	-	rad/m
max thx_diff	9,85E-007	9,87E-007	0,28%	rad/m

Πίνακας 6.5.12 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Κινηματικά μεγέθη

Moment	STDME	STDME K <sub>x</sub> =1	Differences	Units
max MtP	4,99E+000	4,99E+000	0,10%	kNm
max MtS	1,82E+000	2,25E+000	23,98%	kNm
max Mw	8,19E-001	9,12E-001	11,36%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max MtP	4,99E+000	5,00E+000	0,26%	kNm
max MtS	1,82E+000	5,00E+000	175,15%	kNm
max Mw	8,19E-001	1,36E+000	66,03%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Uniform	Differences	
max MtP	4,99E+000	5,00E+000	0,28%	kNm
max MtS	1,82E+000	0,00E+000	-	kNm
max Mw	8,19E-001	0,00E+000	-	kNm <sup>2</sup>

Πίνακας 6.5.7 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Εντατικά μεγέθη

Stresses	STDME	STDME K <sub>x</sub> =1	Differences	
MaxS-VonMises	3,04E+001	3,12E+001	2,48%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,58E+001	2,87E+001	11,36%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	1,75E+001	1,80E+001	2,48%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,25E+001	1,08E+001	13,69%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	7,53E+000	9,34E+000	23,98%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
MaxS-VonMises	3,04E+001	4,28E+001	40,87%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,58E+001	4,28E+001	66,03%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	1,75E+001	2,07E+001	18,10%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,25E+001	2,40E-009	100,00%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	7,53E+000	2,07E+001	175,15%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Uniform	Differences	
MaxS-VonMises	3,04E+001	3,40E+001	11,97%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,58E+001	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	1,75E+001	1,97E+001	12,01%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	1,25E+001	1,97E+001	57,09%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	7,53E+000	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>

Πίνακας 6.5.8 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Τασικά μεγέθη

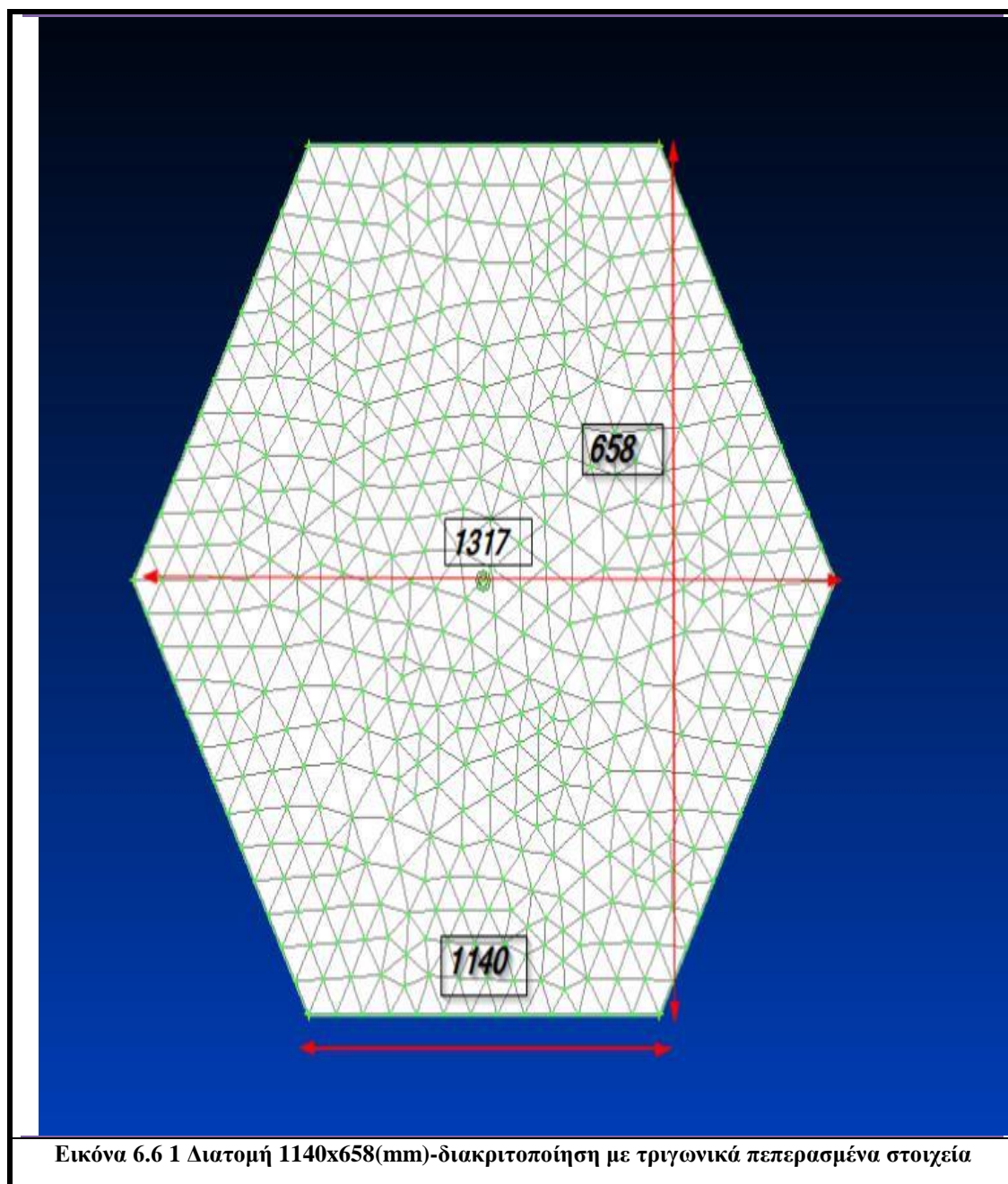
Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα (Τα τασικά μεγέθη έχουν υπολογιστεί και αναφέρονται στη θέση που απέχει  $L/4 = 2,5\text{m}$  από την πάκτωση):

- Στο παραπάνω παράδειγμα το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα δεν είναι σημαντικό. Πιο αναλυτικά, στα κινηματικά μεγέθη το σφάλμα είναι αμελητέο, εντούτοις στα εντατικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν σημαντικές τιμές και η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης μας δίνει πιο δυσμενή αποτελέσματα. Αξίζει να τονισθεί ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα οι διατμητικές και Von Mises τάσεις στο σύνορο εμφανίζουν σχετικά μικρή απόκλιση (2,48%) καθώς και η απόκλιση στις ορθές τάσεις δεν είναι μεγάλη (11,36%).
- Τα αποτελέσματα από την ‘κλασική’ θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζουν υψηλές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτά της ‘διευρυμένης’ θεωρίας (ΔΣΠ ή STDME-Secondary Torsional Deformation Moment Effect). Πιο συγκεκριμένα στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή είναι μικρή (4,65%), ενώ αντίθετα στα εντατικά και τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν ιδιαίτερα υψηλές τιμές. Τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο η ‘κλασική’ θεωρία προβλέπει πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της ‘κλασικής’ θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές.
- Η ομοιόμορφη στρέψη φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη εναλλακτική θεωρία για την μελέτη του παραπάνω φαινομένου σε επίπεδο τάσεων Von Mises, μιας και εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις (της τάξης του 11,97%, όπως ακριβώς και στο παράδειγμα με τον πρόβολο) σε αντίθεση με την κλασική ανομοιόμορφη στρέψη που εμφανίζει ( της τάξης του 40,87%, όπως ακριβώς στο παράδειγμα με τον πρόβολο). Όμως το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών τάσεων αλλά ούτε εντατικών μεγεθών όπως η δευτερογενής στρεπτική ροπή ή το δίρροπο στρέβλωσης, την καθιστά ανεπαρκής για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι για την μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε συμπαγείς κλειστές ορθογωνικές διατομές με το στατικό σύστημα της αμφιάκτου η πιο πρόσφορη θεωρία είναι εκείνη της ανομοιόμορφης στρέψης με την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Η «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει πολύ υψηλές μη ρεαλιστικές τιμές μέγιστων τασικών μεγεθών. Η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης δίδει σχετικά κοντινά αποτελέσματα σε αυτά της τριδιάστατης ελαστικότητας.

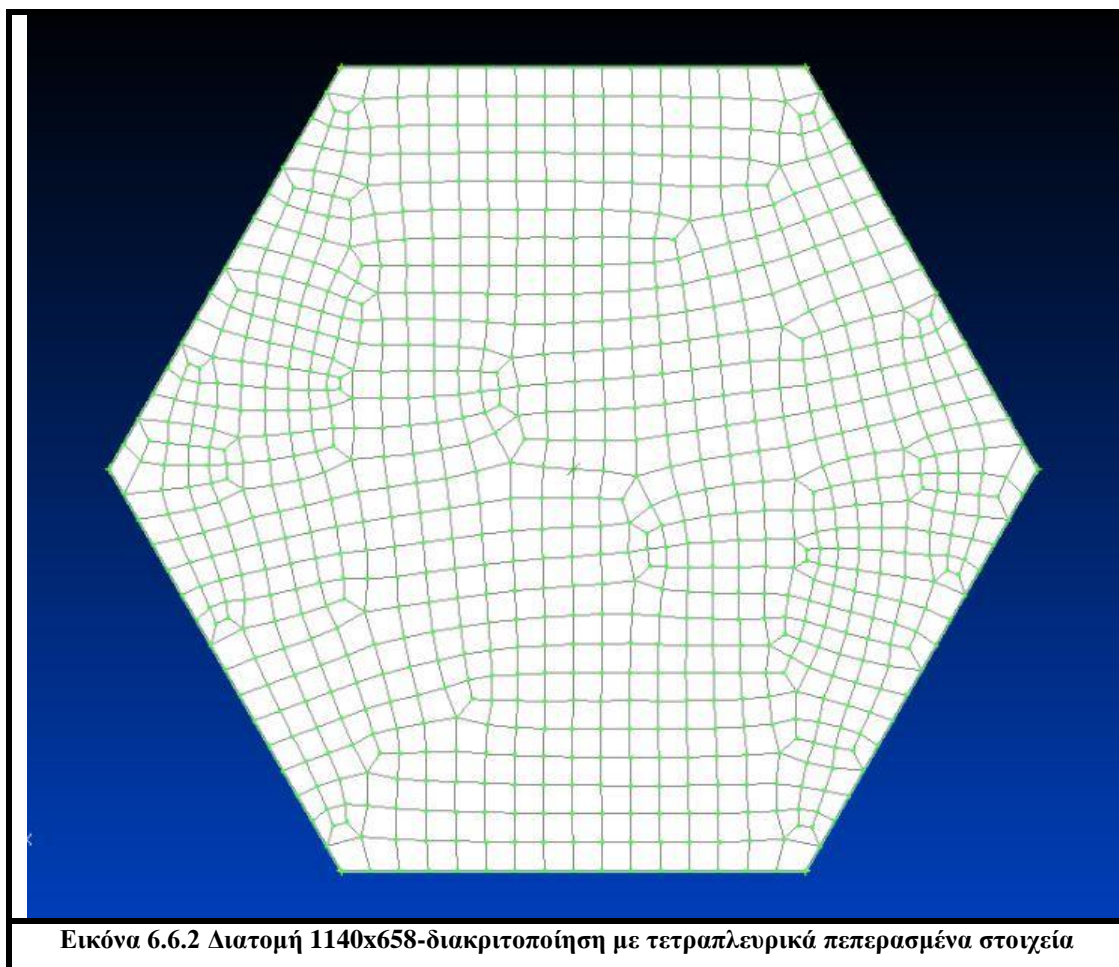
## 6.6 Αριθμητική εφαρμογή 4

Στην 4<sup>η</sup> αριθμητική μας εφαρμογή ασχοληθήκαμε με την συμπαγή εξαγωνική διατομή 1140x658 (mm) από αλουμίνιο (εικόνα 6.61,6.6.2). Το στατικό σύστημα μας είναι πρόβολος με μήκος 10m και η στρεπτική ροπή που τοποθετήσαμε είναι  $M= 10$  kNm στο άκρο του προβόλου. Το λογισμικό σε H/Y που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση της δοκού μας ήταν το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran , όπου διακριτοποιήσαμε την διατομή μας με τριγωνικά (trig) και τετραπλευρικά (quads) πεπερασμένα στοιχεία.



Εικόνα 6.6 1 Διατομή 1140x658(mm)-διακριτοποίηση με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία





### 6.6.1 Γεωμετρικές Σταθερές

Geometric Constants	BEM	FEM	Difference
<b>It</b> [ $m^4$ ]=	1,946E-001	1,947E-001	<b>0,07%</b>
<b>Cs</b> [ $m^6$ ]=	2,771E-005	2,776E-005	<b>0,16%</b>

Πίνακας 6.6.1 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

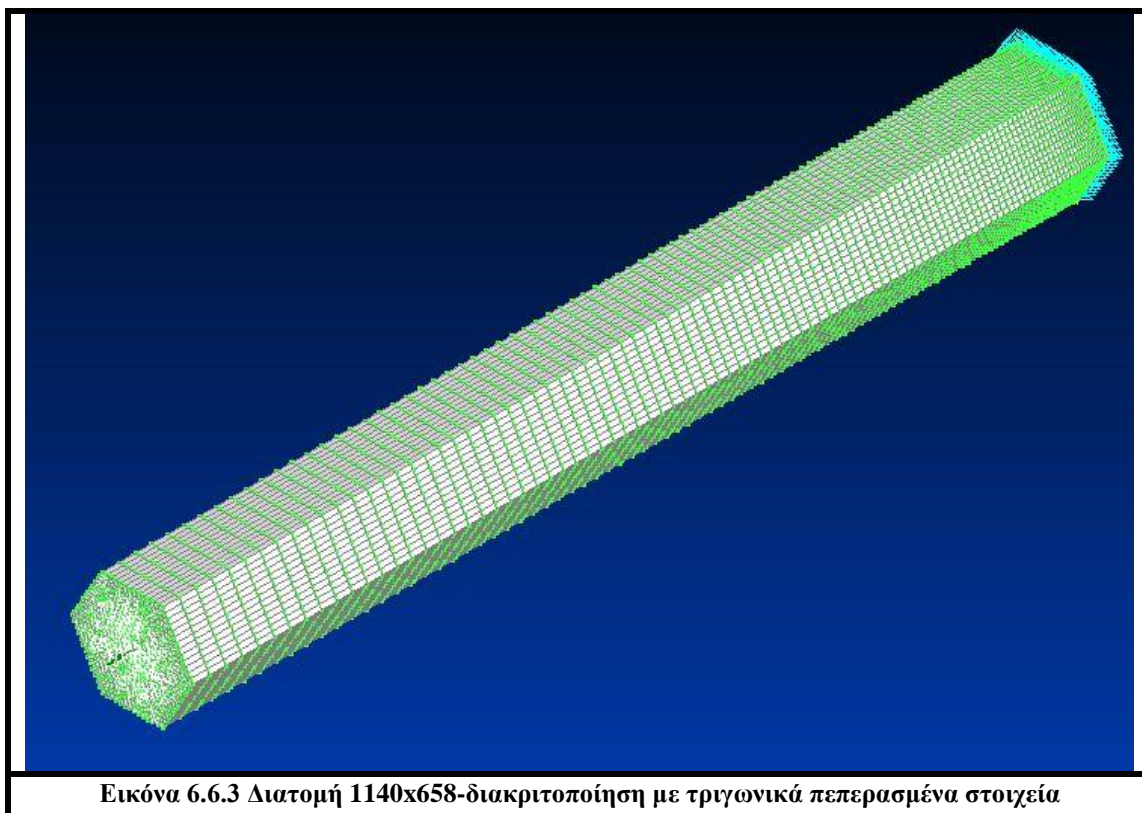
Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τόσο στην στρεπτική σταθερά It όσο και στην σταθερά στρέβλωσης Cs. Αξίζει να σημειωθεί, ότι το Nastran δεν έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει την δευτερογενή στρεπτική σταθερά. Αντιλαμβανόμαστε ότι εξαιτίας του γεγονότος ότι οι δύο τρόποι ανάλυσης, καταλήγουν σε αποτελέσματα με αμελητέα απόκλιση, επικυρώνεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Επομένως, για την κλειστή εξαγωνική διατομή 1140x658 η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων που

έχουμε χρησιμοποιήσει αποτελεί ένα ακριβές και αξιόπιστο εργαλείο για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.

## 6.6.2 Κινηματικά μεγέθη

### 6.6.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.6.3) για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 100 διαφράγματα τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



Εικόνα 6.6.3 Διατομή 1140x658-διακριτοποίηση με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία

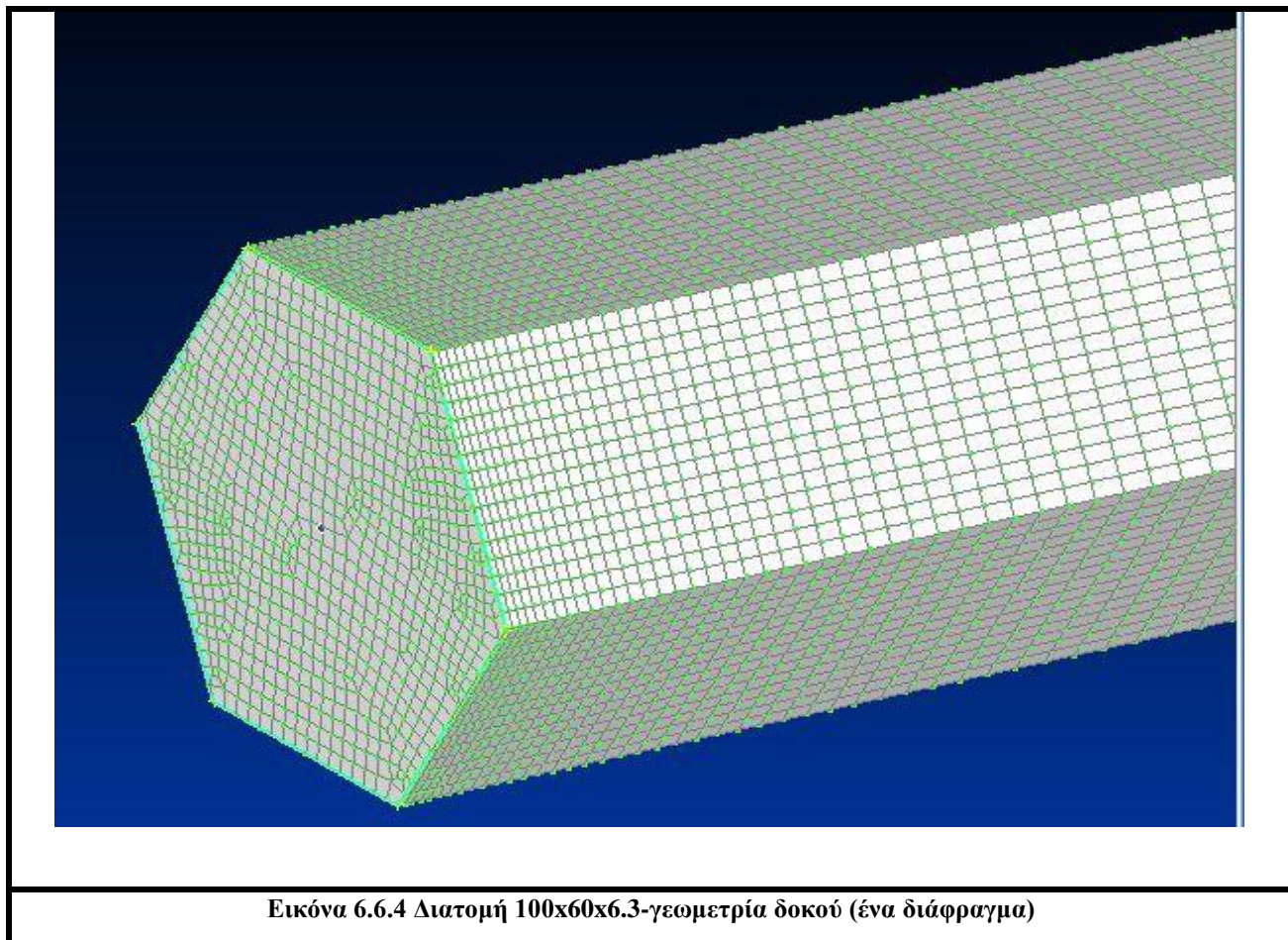
<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 100		BEM	trig no diafragms	
$\theta_x$	$\theta_x$	Differences	$\theta_x$	$\theta_x$	Differences
1,903E-05	1,897E-05	0,31%	1,903E-05	1,897E-05	0,30%
rad	Rad		rad	rad	

Πίνακας 6.6.2 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



### 6.4.2.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία εξαγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.6.4) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο, για δοκό με ένα διάφραγμα και για δοκό με 100 διαφράγματα τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



Εικόνα 6.6.4 Διατομή 100x60x6.3-γεωμετρία δοκού (ένα διάφραγμα)

<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diaphragms 100		BEM	quads no diaphragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Differences
1,903E-05	1,901E-05	0,11%	1,903E-05	1,901E-05	0,11%
<b>Quads</b>					

Πίνακας 6.6.3 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα κινηματικά μεγέθη:

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (στοιχεία δοκού), παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας)όσον αφορά τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 0,30%-0,31% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 0,11% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού.
- Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν (ελάχιστα) μεγαλύτερες στροφές σε σχέση με τους φορείς που είχαν μόνο ένα διάφραγμα στο άκρο τους.
- Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση συμφωνούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία.

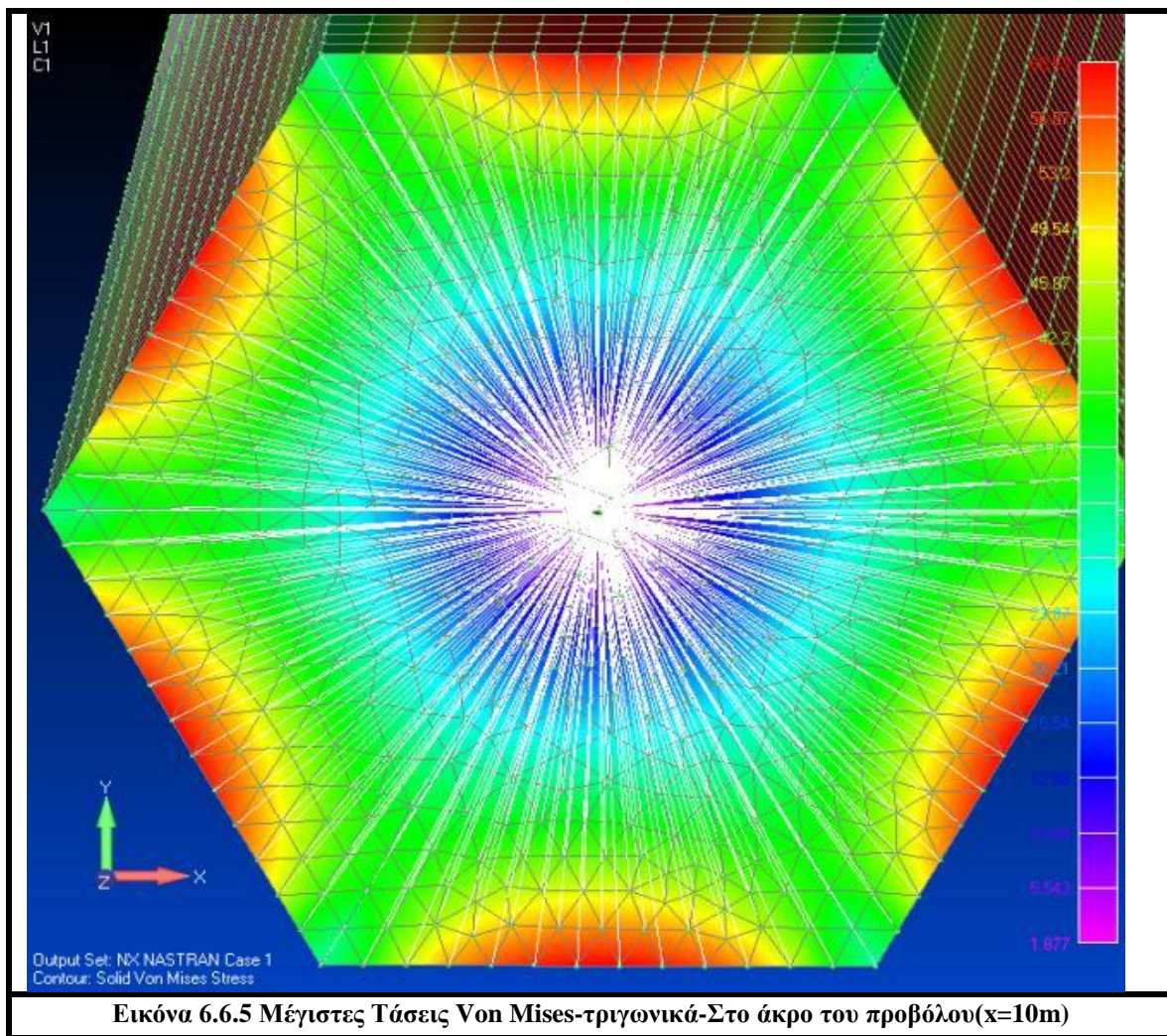
### 6.4.3 Τασικά μεγέθη

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις όλων των τύπων πεπερασμένων στοιχείων και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που πραγματοποιήθηκαν στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων.

#### 6.4.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

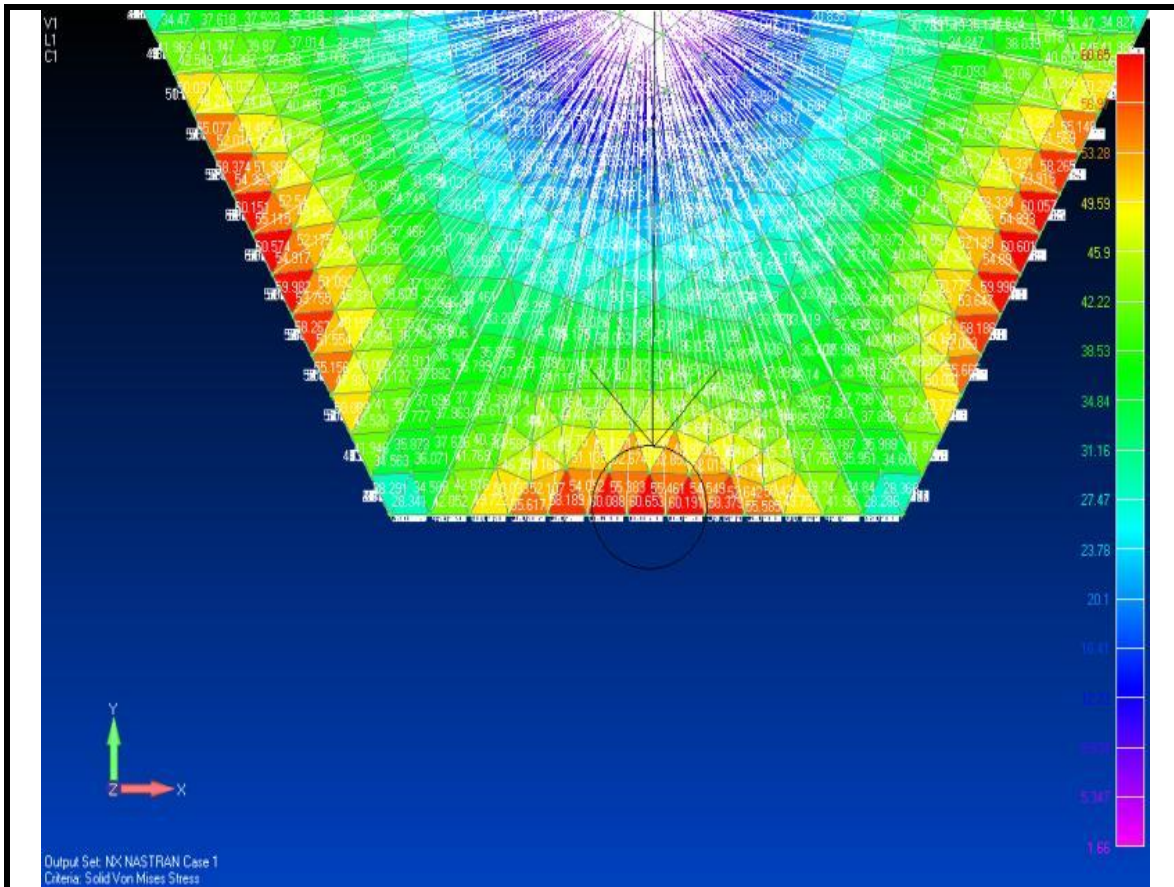
TRIG	Location X=10				
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 100		BEM	trig no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
6,21E+001	6,07E+01	<b>2,33%</b>	6,21E+001	6,07E+01	<b>2,33%</b>
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
Location	Locantion		Location	Location	
X=10	X=10		X=10	X=10	
Y= 4,99135E-03	Y= 0,00000		Y= 4,99135E-03	Y= 0	
Z= -5,70000E-01	Z= -5,70000E-01		Z= -5,70000E-01	Z= -5,70000E-01	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.6.4 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM στο άκρο του προβόλου

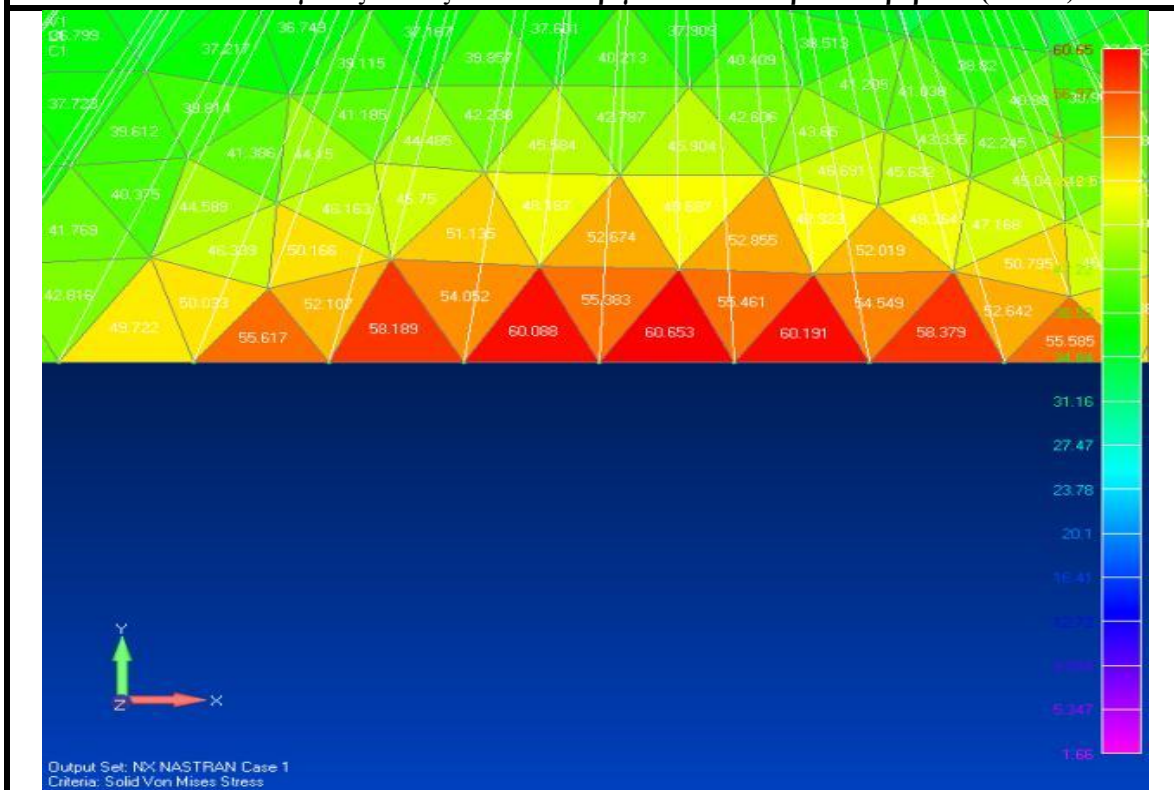


Εικόνα 6.6.5 Μέγιστες Τάσεις Von Mises-τριγωνικά-Στο άκρο του προβόλου(x=10m)





**Εικόνα 6.6.6 Μέγιστες Τάσεις Von Mises-τριγωνικά-Στο άκρο του προβόλου(x=10m)**



**Εικόνα 6.6.7 Μέγιστες Τάσεις Von Mises-τριγωνικά-Στο άκρο του προβόλου(x=10m)**

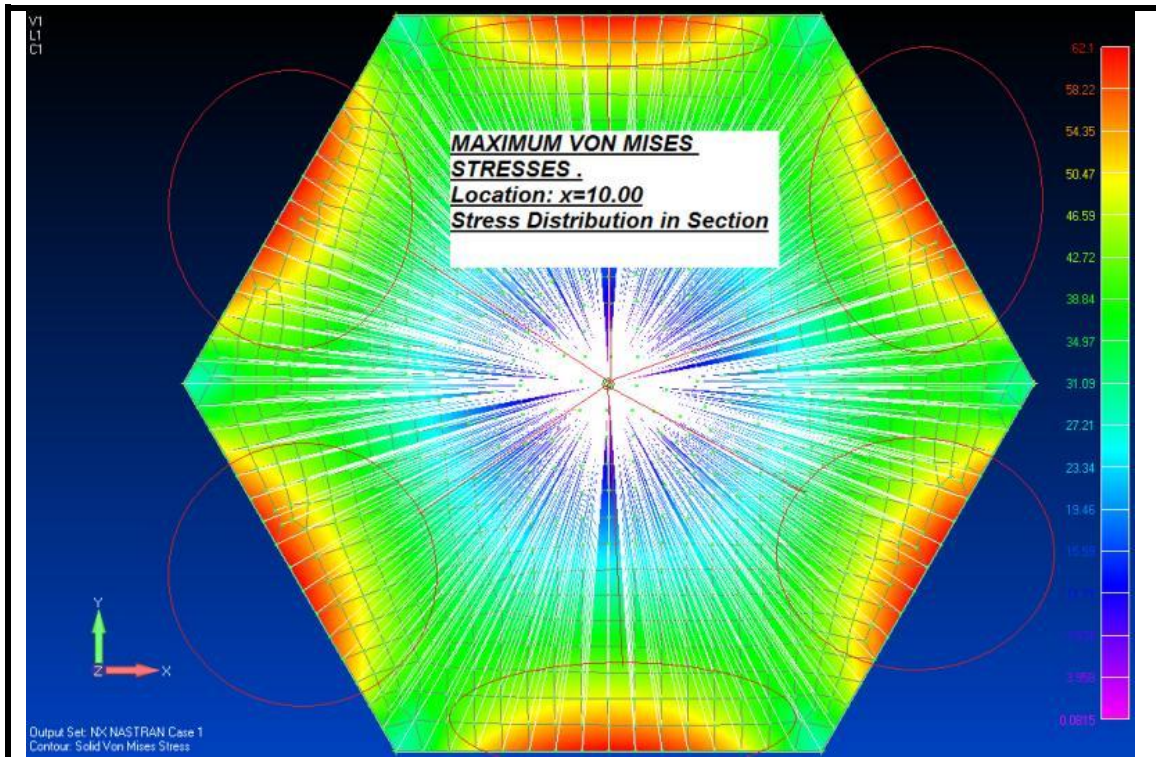
<b>TRIG</b>	<b>Location X=0</b>				
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 100		BEM	trig no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
5,87E+001	5,21E+01	<b>12,63%</b>	5,87E+001	5,21E+01	<b>12,63%</b>
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
Location	Location		Location	Location	
X=0	X=0		X=0	X=0	
Y= 2,04645E-01	Y= 4,3846E-01		Y= 2,04645E-01	Y= 4,3846E-01	
Z= 5,70000E-01	Z= 4,0538E-01		Z= 5,70000E-01	Z= 4,0538E-01	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.6.5 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM στην θέση της πάκτωσης

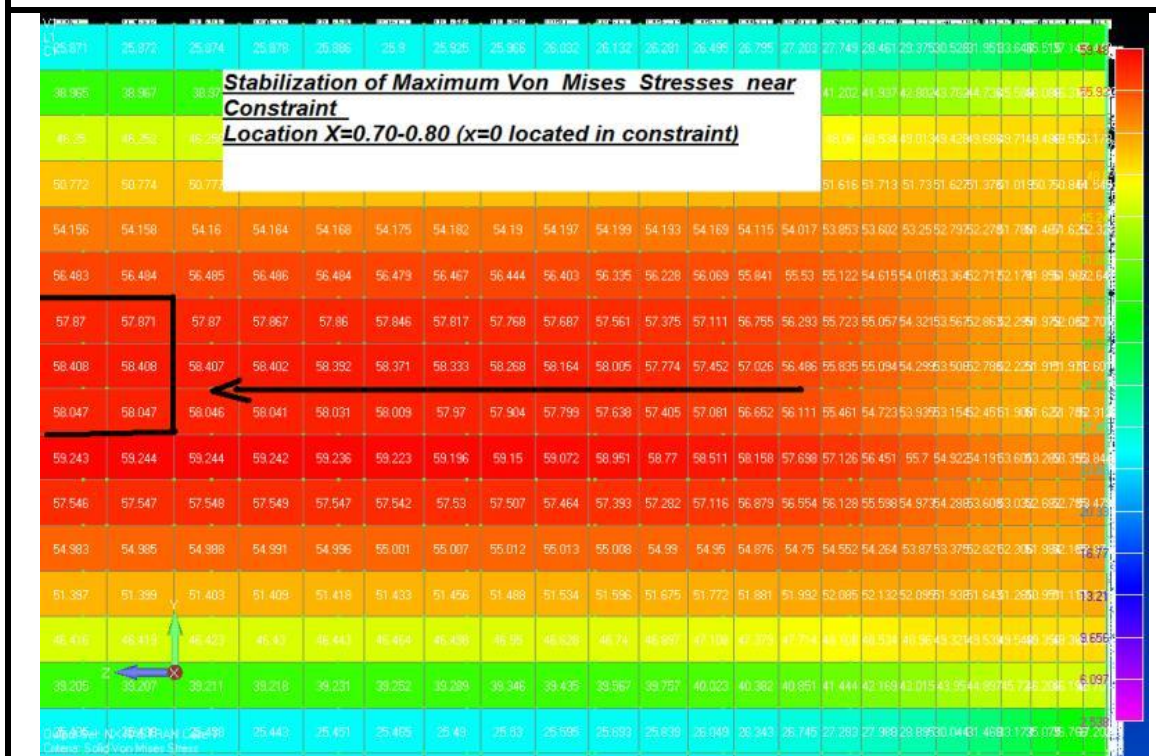
### 6.4.3.2 Ανάλυση με τετραπλευρικά στοιχεία

<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 100		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
6,21E+001	5,95E+01	<b>4,35%</b>	6,21E+001	5,95E+001	<b>4,35%</b>
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b>Location</b>	<b>Location</b>		<b>Location</b>	<b>Location</b>	
X=10	X=10		X=10	X=10	
Y= 4,99135E-03	Y= 2,4043E-01		Y= 4,99135E-03	Y= 2,4043E-01	
Z= -5,70000E-01	Z= -4,183E-01		Z= -5,70000E-01	Z= -4,183E-01	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.6.6 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM στο άκρο του προβόλου



Εικόνα 6.6.8 Μέγιστες Τάσεις Von Mises-τετραπλευρικά-Στο άκρο του προβόλου( $x=10m$ )



Εικόνα 6.6.9 Μέγιστες Τάσεις Von Mises-τετραπλευρικά-Κοντά στην πάκτωση



<b>Quads</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	quads multi diafragms 100		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences	maxS-VonMises	maxS-VonMises	Differences
5,87E+001	5,38E+001	<b>9,07%</b>	5,87E+001	5,38E+001	<b>9,07%</b>
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b>Location</b>	<b>Location</b>		<b>Location</b>	<b>Location</b>	
X=0	X=0		X=0	X=0	
Y= 2,04645E-01	Y =1,7613E-01		Y= 2,04645E-01	Y =1,7613E-01	
Z= 5,70000E-01	Z= 5,5569E-01		Z= 5,70000E-01	Z= 5,5569E-01	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.6.7 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM στη θέση της πάκτωσης

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα τασικά μεγέθη (Von Mises):

- Και για τους δύο τύπους πεπερασμένων στοιχείων παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση με τα αποτελέσματα που εξάγουμε με τα προγράμματα των συνοριακών στοιχείων.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 2,33% (για το άκρο του προβόλου) και 12,63% (για τη θέση της πάκτωσης) απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- Η διακριτοποίηση με τετραπλευρικά στοιχεία εμφανίζει 4,35% (για το άκρο του προβόλου) και 9,07% (για τη θέση της πάκτωσης) απόκλιση σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- *Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν τις ίδιες μέγιστες τάσεις με τους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα. Επομένως στις συμπαγείς κλειστές εξαγωνικές διατομές δεν επηρεάζει το φαινόμενο του *distortion*.*
- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται για τη μεν θεωρία δοκού στην διατομή του άκρου στο σύνορο σε περιοχή όπου έχουμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και για τη δε θεωρία της τρισδιάστατης ελαστικότητας στη διατομή του άκρου σχεδόν στη θέση όπου έχουμε μέγιστες διατμητικές τάσεις (εικόνα 6.6.8).
- Στη διατομή της πάκτωσης σύμφωνα με τη θεωρία δοκού οι μέγιστες τάσεις εμφανίζονται στην θέση όπου μεγιστοποιούνται οι ορθές τάσεις.

### 6.6.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης

Για την διατομή 1140x658 (mm) από αλουμίνιο για το στατικό σύστημα του προβόλου με στρεπτική ροπή 10 kNm στο άκρο του αποδείξαμε προηγουμένως ότι η **θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα**. Η προαναφερθείσα θεωρία χρησιμοποιεί το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (εξίσωση 4.5.17) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη κατά μήκος της ράβδου. Τίθεται το ερώτημα **κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα** αν αγνοηθεί αυτός ο διορθωτικός συντελεστής (δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ ), ή αν χρησιμοποιούσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή την θεωρία ομοιόμορφης στρέψης για την επίλυση του ίδιου προβλήματος.

Kinematic Magnitude	STDME	STDME $K_x=1$	Differences	Units
max thx	1,90E-005	1,90E-005	0,01%	rad
max nx	1,90E-006	1,90E-006	0,00%	rad/m
max thx_diff	1,90E-006	1,90E-006	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max thx	1,90E-005	1,90E-005	0,21%	rad
max nx	1,90E-006	1,94E-006	1,97%	rad/m
max thx_diff	1,90E-006	-	-	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Uniform	Differences	
max thx	1,90E-005	1,90E-005	0,03%	rad
max nx	1,90E-006	-	-	rad/m
max thx_diff	1,90E-006	1,90E-006	0,00%	rad/m

Πίνακας 6.6.8 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Κινηματικά μεγέθη



Moment	STDME	STDME Kx=1	Differences	Units
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	2,66E-001	4,35E-001	63,18%	kNm
max Mw	3,16E-002	4,06E-002	28,34%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	3,03E+000	1,00E+001	230,58%	kNm
max Mw	5,72E-002	2,40E-001	320,22%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Uniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	3,03E+000	0,00E+000	-	kNm
max Mw	5,72E-002	0,00E+000	-	kNm <sup>2</sup>

Πίνακας 6.6.9 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Εντατικά μεγέθη

Stresses	STDME	STDME Kx=1	Differences	
MaxS-VonMises	5,87E+001	6,39E+001	8,74%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,13E+001	2,74E+001	28,34%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,16E+001	3,34E+001	5,68%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,49E+001	3,43E+001	1,73%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	6,58E+000	1,07E+001	63,18%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
MaxS-VonMises	5,87E+001	4,27E+002	627,76%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,13E+001	1,62E+002	660,40%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,16E+001	2,47E+002	680,65%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,49E+001	7,88E-003	99,98%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	6,58E+000	2,47E+002	3652,27%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Uniform	Differences	
MaxS-VonMises	5,87E+001	6,21E+001	5,68%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	2,13E+001	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	3,16E+001	3,58E+001	13,37%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,49E+001	3,58E+001	2,74%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	6,58E+000	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>

Πίνακας 6.6.10 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Τασικά μεγέθη

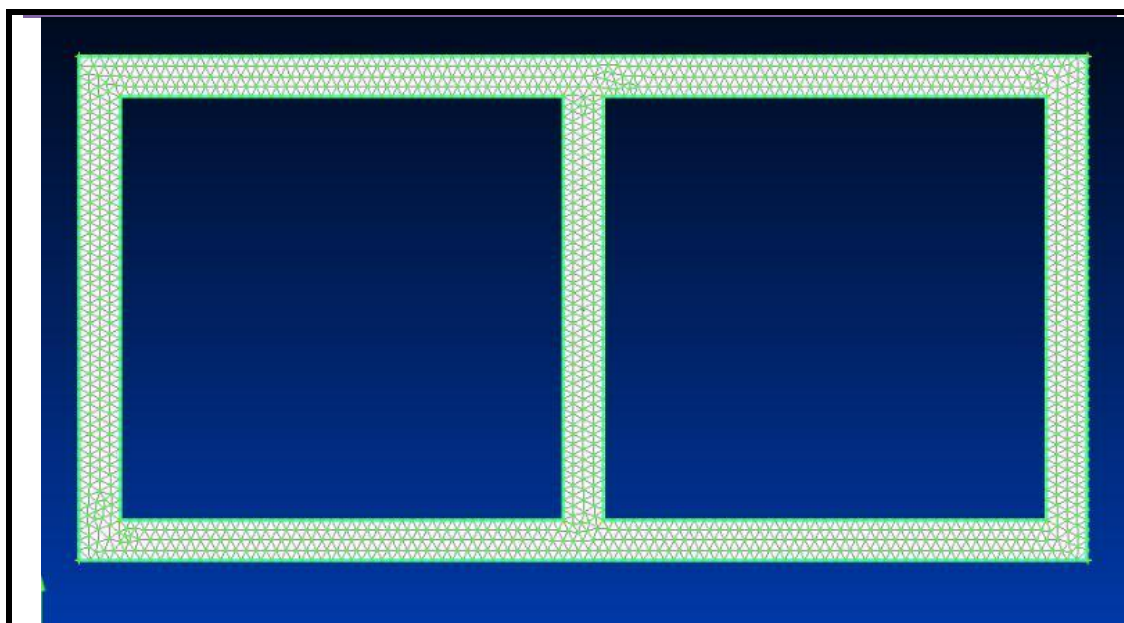
Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα :

- Καθίσταται εμφανές το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα. Πιο αναλυτικά, στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή φαίνεται να είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές. Στα εντατικά μεγέθη η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης μας δίνει πιο δυσμενή αποτελέσματα όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις ορθές, διατμητικές και Von Mises τάσεις στο σύνορο. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μέγιστες διατμητικές και οι τάσεις Von Mises έχουν μικρές αποκλίσεις (8,74% και 5,68%) αντίστοιχα. Παρά ταύτα, κρίνεται αναγκαίος ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης.
- Τα αποτελέσματα από την 'κλασική' θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης παρουσιάζουν υψηλές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτά της 'διευρυμένης θεωρίας' (STDME-Secondary Torsional Deformation Moment Effect). Πιο συγκεκριμένα στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν ιδιαίτερα υψηλές τιμές. Τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο η 'κλασική' θεωρία προβλέπει πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της 'κλασικής' θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος στρέψης σε συμπαγείς κλειστές εξαγωνικές διατομές.
- Η ανομοιόμορφη στρέψη φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη εναλλακτική θεωρία για την μελέτη του παραπάνω φαινομένου σε επίπεδο τάσεων Von Mises, μιας και εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις (της τάξης του 5,68%) σε αντίθεση με την κλασική ανομοιόμορφη στρέψη που εμφανίζει ( της τάξης του 627,76%). Εντούτοις, το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών τάσεων αλλά ούτε εντατικών μεγεθών όπως η δευτερογενής στρεπτική ροπή ή το δίρροπο στρέβλωσης, την καθιστά ανεπαρκής για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.

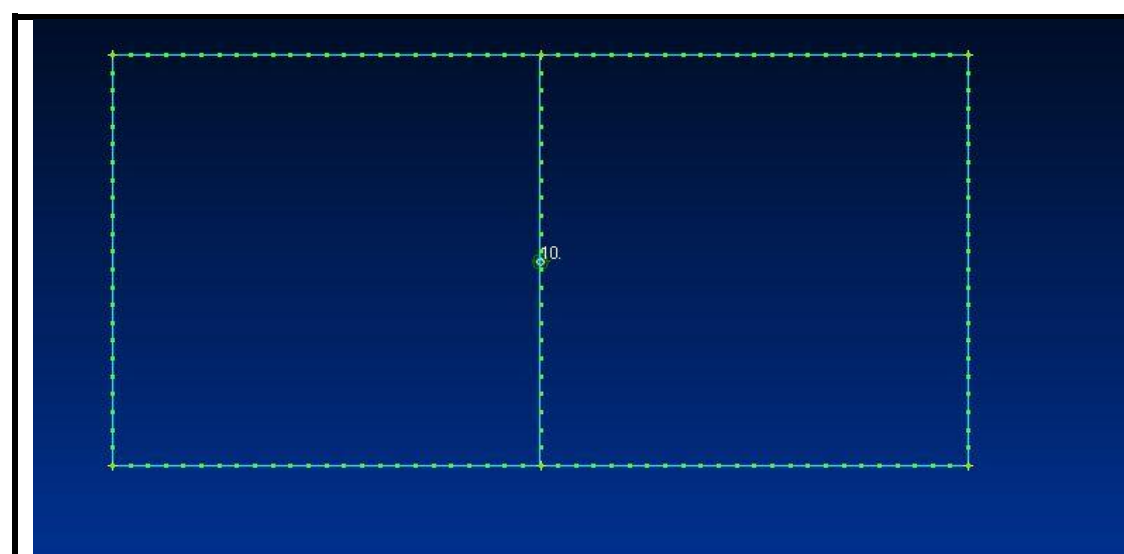
Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι για την μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές με το στατικό σύστημα του προβόλου η πιο πρόσφορη θεωρία είναι εκείνη της ανομοιόμορφης στρέψης με την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Η «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει πολύ υψηλές μη ρεαλιστικές τιμές μέγιστων τασικών μεγεθών. Η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης δίδει σχετικά κοντινά αποτελέσματα σε αυτά της τρισδιάστατης ελαστικότητας.

## 6.7 Αριθμητική εφαρμογή 5

Στην 5<sup>η</sup> αριθμητική μας εφαρμογή ασχοληθήκαμε με το δικύψελο κιβώτιο 1000x500x40 (mm) από αλουμίνιο. Το στατικό σύστημα μας είναι πρόβολος με μήκος 10m και η στρεπτική ροπή που τοποθετήσαμε είναι  $M= 10 \text{ kNm}$  στο άκρο του προβόλου. Το λογισμικό σε H/Y που χρησιμοποιήσαμε για την ανάλυση της δοκού μας ήταν το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Nastran , όπου διακριτοποιήσαμε την διατομή μας με τριγωνικά στοιχεία (trig) και γραμμικά και τη δοκό μας με πενταεδρικά και κελυφωτά στοιχεία αντίστοιχα. Επιλέχτηκε η συγκεκριμένη διαδικασία μιας και η ιδιαίτερη γεωμετρία ενός ραβδόμορφου φορέα καθιστά ελκυστική τη διακριτοποίηση μιας διατομής και στη συνέχεια τη μόρφωση τρισδιάστατων στοιχείων μέσω της διαδικασίας του “extrude”.



Εικόνα 6.7. 1 Διατομή 1000x500x40 (mm) -διακριτοποίηση με τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία



Εικόνα 6.7. 2 Διατομή 1000x500x40 (mm) -διακριτοποίηση με γραμμικά στοιχεία

## 6.7.1 Γεωμετρικές Σταθερές

Geometric Constants	BEM	FEM	Difference
<b>It</b> [ $m^4$ ]=	1,14E-002	1,13E-02	0,97%
<b>Cs</b> [ $m^6$ ]=	6,38E-005	6,29E-05	1,40%

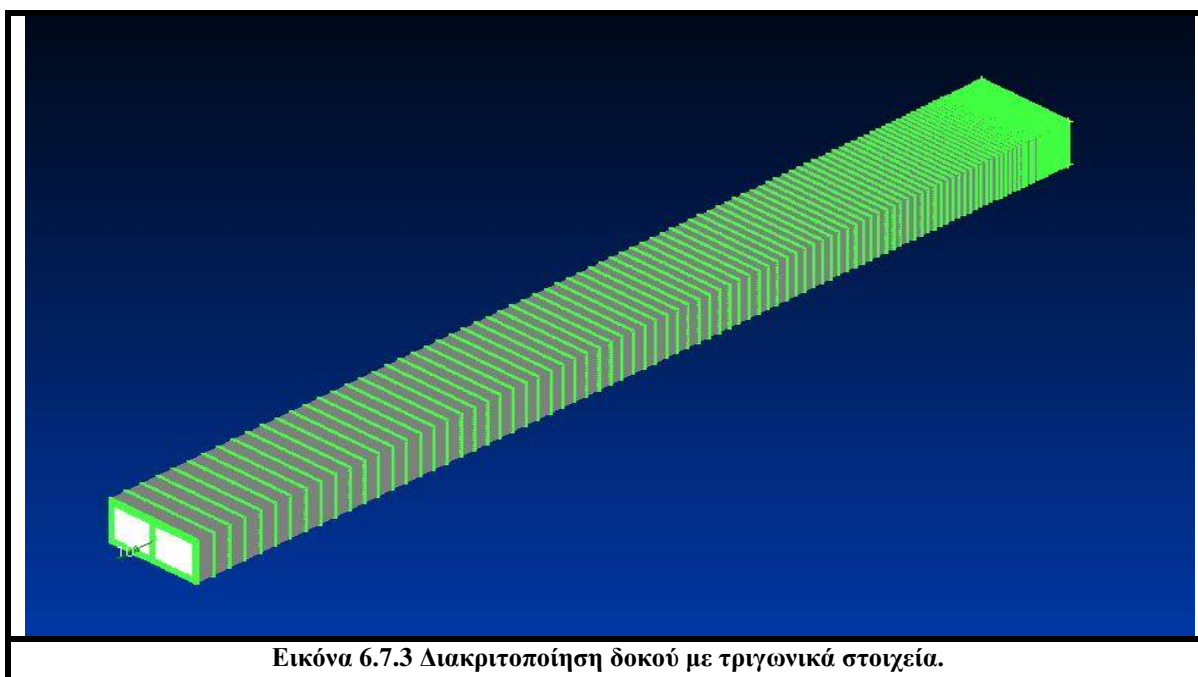
Πίνακας 6.7.1 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM-Γεωμετρικές Σταθερές

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τόσο στην στρεπτική σταθερά It όσο και στην σταθερά στρέβλωσης Cs. Αξίζει να σημειωθεί ότι το Nastran δεν έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει δευτερογενής στρεπτική σταθερά. Αντιλαμβανόμεστε ότι εξαιτίας του γεγονότος ότι οι δύο τρόποι ανάλυσης, καταλήγουν σε αποτελέσματα με αμελητέα απόκλιση, επικυρώνεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Επομένως, για την κοίλη ορθογωνική διατομή 1000x500x40 η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων που έχουμε χρησιμοποιήσει αποτελεί ένα ακριβές και αξιόπιστο εργαλείο για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών στο πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.

## 6.7.2 Κινηματικά μεγέθη

### 6.7.2.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

Πραγματοποιήθηκε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά για την δοκό του σχήματος (6.7.3) για δοκό με ένα διάφραγμα\*(βλέπε κεφ 4.1 παραδοχή 2) μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 100 διαφράγματα.



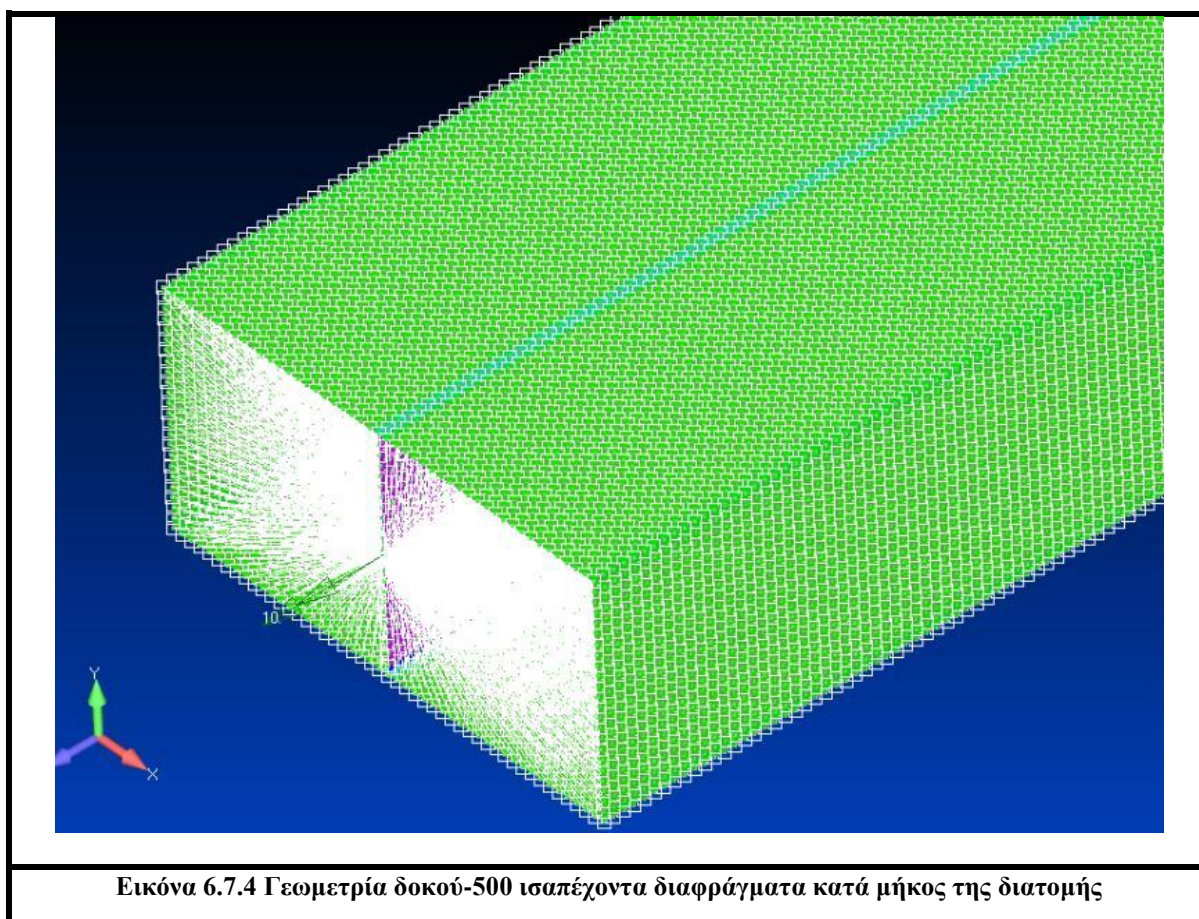
Εικόνα 6.7.3 Διακριτοποίηση δοκού με τριγωνικά στοιχεία.

<b>TRIG</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 100		BEM	trig no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference
3,26E-04	3,24E-04	0,47%	3,26E-04	3,25E-04	0,18%
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.7.2 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τριγωνικά στοιχεία

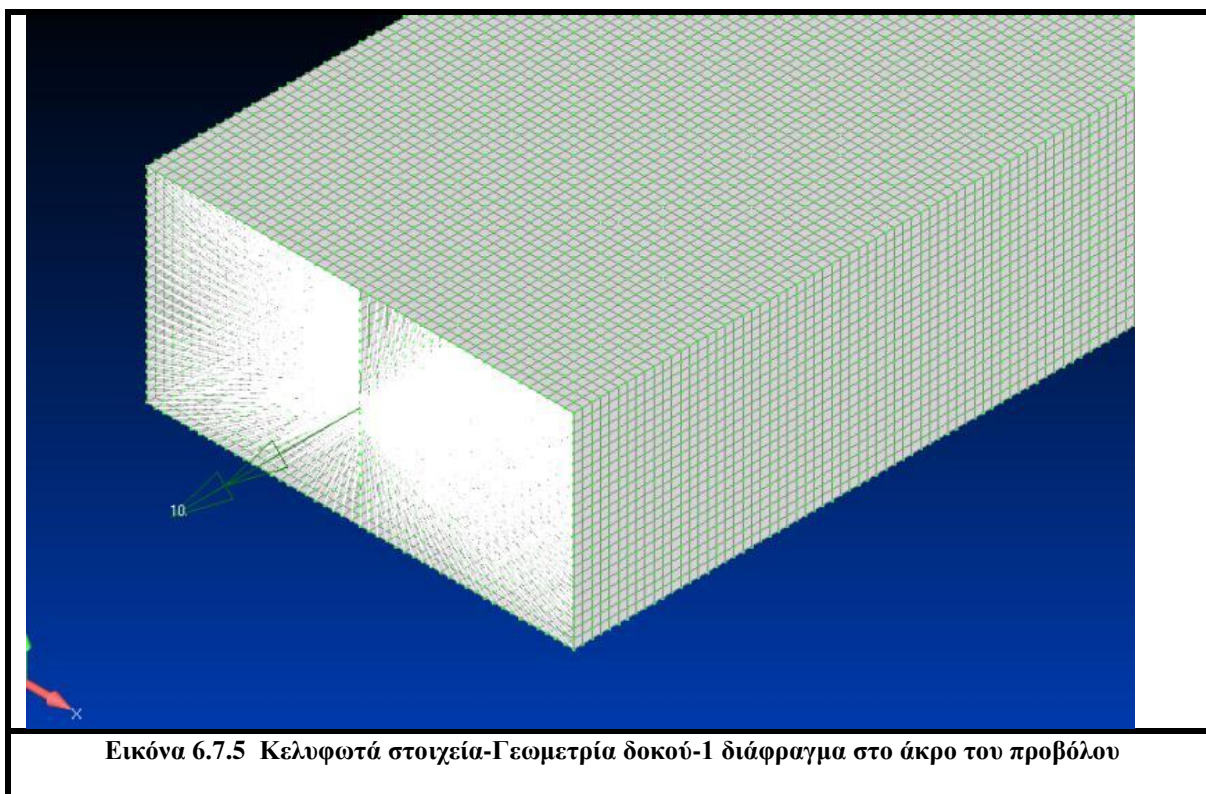
### 6.7.2.2 Ανάλυση με κελυφωτά στοιχεία

Τέλος, έγινε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία κελύφους για την δοκό του σχήματος (6.7.4-6.7.5) , για δοκό με ένα διάφραγμα μόνο στην άκρη όπου ασκείται το φορτίο και για δοκό με 500 διαφράγματα τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



Εικόνα 6.7.4 Γεωμετρία δοκού-500 ισαπέχοντα διαφράγματα κατά μήκος της διατομής





<b>Shell</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	shell multi diafragms 500		BEM	quads no diafragms	
$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference	$\theta\chi$	$\theta\chi$	Difference
3,26E-04	3,34E-04	2,50%	3,26E-04	3,35E-04	2,72%
rad	rad		rad	rad	

Πίνακας 6.7.3 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM κελυφωτά στοιχεία

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα κινηματικά μεγέθη:

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις των φορέων μας, δηλαδή επίλυση καταλλήλων προβλημάτων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (στοιχεία δοκού), παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας, κελυφωτά στοιχεία) όσον αφορά τα αποτελέσματα στα κινηματικά μεγέθη, γεγονός που καταδεικνύει την ακρίβεια και την αξιοπιστία της θεωρίας δοκού που χρησιμοποιήθηκε.
- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 0,18%-0,470% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μεγαλύτερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.
- Η διακριτοποίηση με κελυφωτά στοιχεία εμφανίζει 2,50%-2,72% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας

δοκού με την πρώτη να εκτιμάει ελάχιστα μικρότερη στρεπτική στιβαρότητα σε σχέση με τη δεύτερη.

- Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν (ελάχιστα) μικρότερες στροφές σε σχέση με τους φορείς που είχαν μόνο ένα διάφραγμα στο άκρο τους.
- Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση συμφωνούν τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τριγωνικά και κελυφωτά.

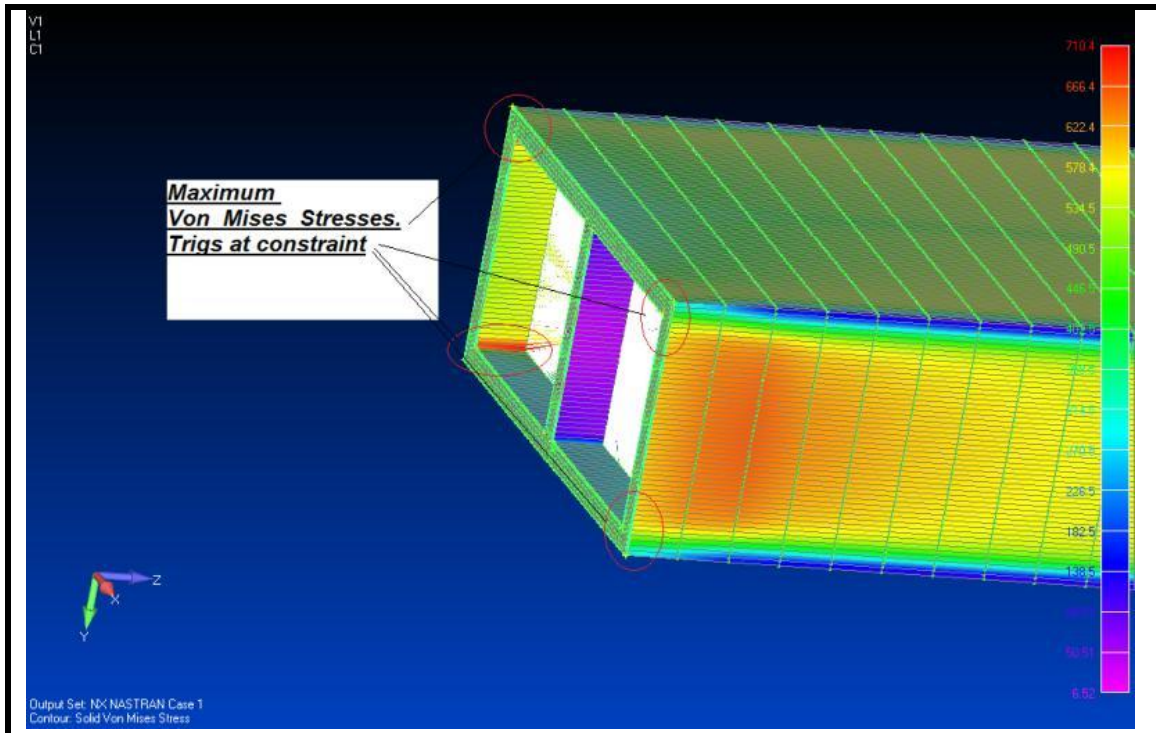
### 6.7.3 Τασικά μεγέθη

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τις αναλύσεις όλων των τύπων πεπερασμένων στοιχείων και θα τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες που πραγματοποιήθηκαν στα προγράμματα συνοριακών στοιχείων.

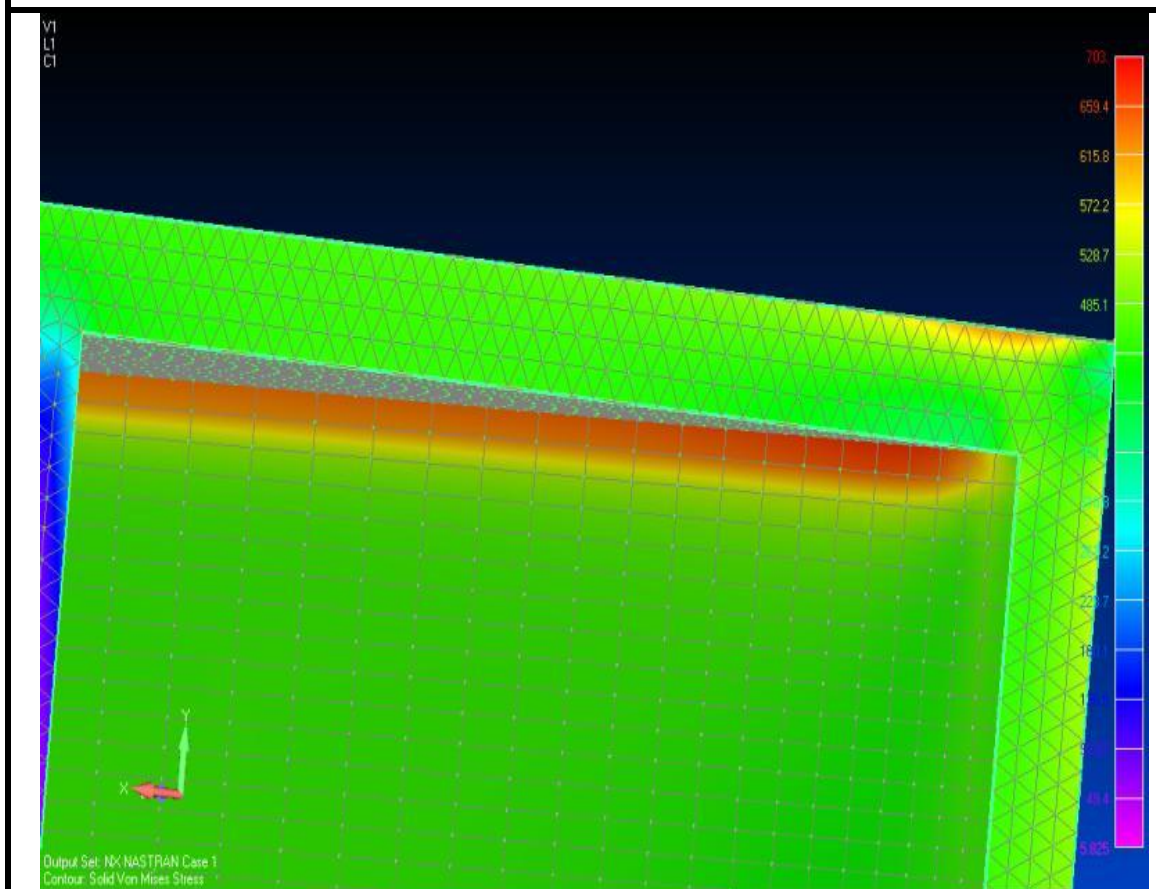
#### 6.7.3.1 Ανάλυση με τριγωνικά στοιχεία

<b><i>TRIG</i></b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	trig multi diafragms 100		BEM	trig no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference	maxS-VonMises	maxS- VonMises	Difference
8,88E+02	9,32E+02	4,71%	8,88E+02	8,40E+02	5,76%
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b><i>Location</i></b>	<b><i>Location</i></b>		<b><i>Location</i></b>	<b><i>Location</i></b>	
Y= 0,46000m	Y= 0,46000m		Y= 0,46000m	Y= 0,46000m	
Z= 0,20625m	Z= 0,23000m		Z= 0,20625m	Z= 0,23000m	
X=0,00000m	X=0,10000m		X=0,00000m	X=0,16000m	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.7.4 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM τριγωνικά



Εικόνα 6.7.6 Διατομή 1000x500x40-Μέγιστες Τάσεις Von Mises-Τριγωνικά

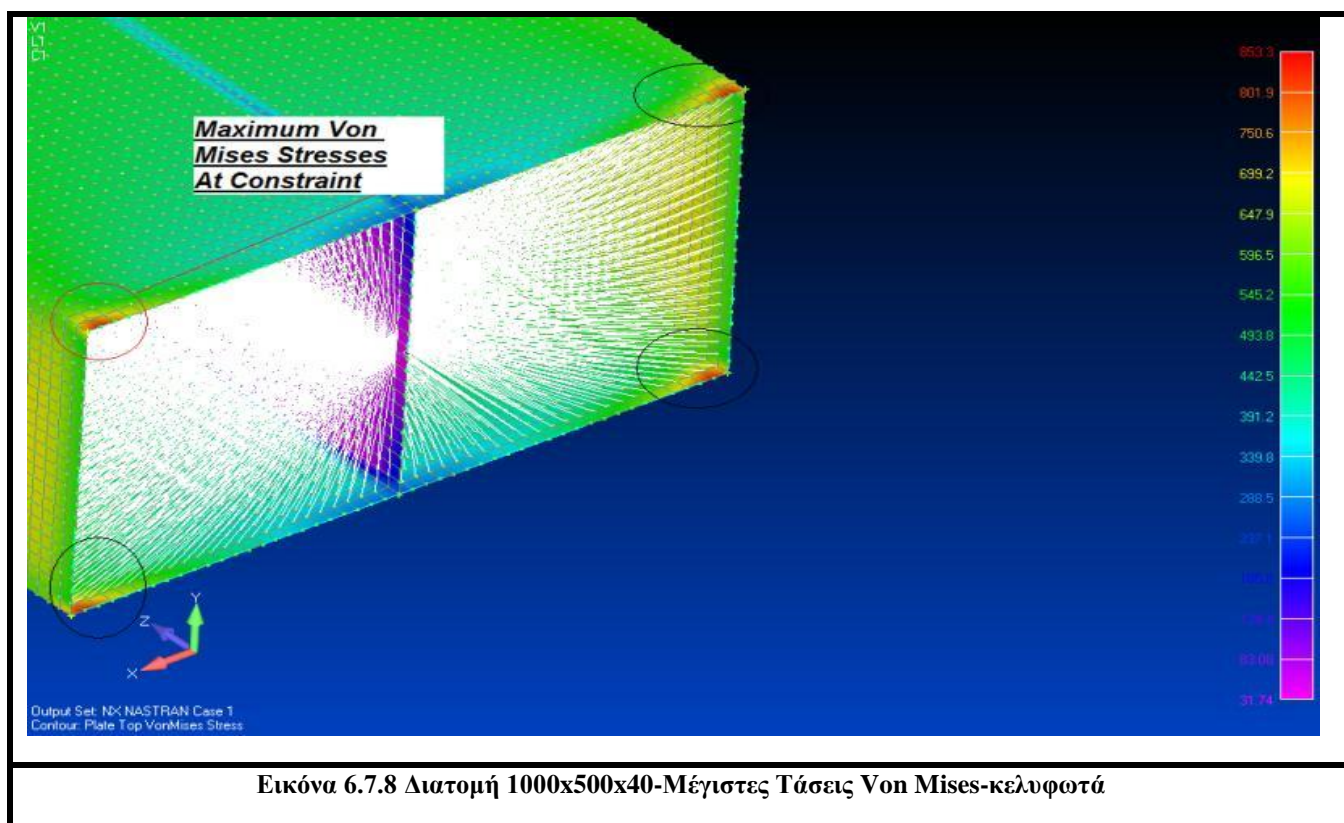


Εικόνα 6.7.7 Διατομή 1000x500x40-Μέγιστες Τάσεις Von Mises-Τριγωνικά



<b>Shell</b>					
BEM	FEM		BEM	FEM	
BEM	shell multi diafragms 500		BEM	quads no diafragms	
maxS-VonMises	maxS-VonMises	Difference	maxS-VonMises	maxS- VonMises	Difference
8,88E+02	9,21E+02	<b>3,56%</b>	8,88E+02	7,58E+02	<b>17,12%</b>
Mpa	Mpa		Mpa	Mpa	
<b>Location</b>		<b>Location</b>		<b>Location</b>	
Y= 0,46000m	Y= 0,46000m		Y= 0,46000m	Y= 0,46000m	
Z= 0,20625m	Z= 0,23000m		Z= 0,48000m	Z= 0,21000m	
X=0,00000m	X=0,00000m		X=0,00000m	X=0,00000m	
m	m		m	m	

Πίνακας 6.7.5 Σύγκριση μεταξύ BEM-FEM



Εικόνα 6.7.8 Διατομή 1000x500x40-Μέγιστες Τάσεις Von Mises-κευφοτά

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για τα τασικά μεγέθη (Von Mises):

- Κυρίως για τα τριγωνικά στοιχεία (όπου η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με καλύτερες αναλογίες σε σχέση με τους άλλους δύο τύπους στοιχείων) παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση με

τα αποτελέσματα που εξάγουμε με τα προγράμματα των συνοριακών στοιχείων.

- Η διακριτοποίηση με τριγωνικά στοιχεία εμφανίζει 4,71%-5,76% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μεγαλύτερες τάσεις Von Mises.
- Η διακριτοποίηση με κελυφωτά στοιχεία εμφανίζει 17,12%-3,56% αποκλίσεις σε σχέση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων της θεωρίας δοκού με την πρώτη να εκτιμάει μικρότερες τάσεις Von Mises.
- ***Οι φορείς που είχαν διαφράγματα παρουσιάζουν μεγαλύτερες μέγιστες τάσεις σε σχέση με τους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα. Στους φορείς που δεν είχαν διαφράγματα παρουσιάζεται το φαινόμενο του *distortion**** (δηλαδή της εντός επιπέδου παραμόρφωσης των διατομών της ράβδου), για το οποίο επιχειρείται να δοθεί ποιοτική εξήγηση στο τέλος του 6<sup>ου</sup> κεφαλαίου σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο επιδρά το φαινόμενο αυτό στις διατομές.
- Στα τριγωνικά στοιχεία καθώς και στα κελυφωτά στοιχεία παρατηρούμε ότι η ανάλυση με τα πολλά διαφράγματα έδωσε αποτελέσματα πρακτικώς τα ίδια με την θεωρία δοκού το οποίο καταδεικνύει και την αξιοπιστία της τελευταίας. Στη θεωρία δοκού είναι βασική παραδοχή ότι δεν υπάρχει το φαινόμενο του *distortion* και επομένως ήταν λογικό να πλησιάσουμε στα αποτελέσματα της θεωρίας δοκού βάζοντας παντού διαφράγματα.
- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται για τη μεν θεωρία δοκού στην διατομή της πάκτωσης στο σύνορο σε περιοχή κοντά στο σημείο όπου έχουμε τις διατμητικές τάσεις και για τη δε θεωρία της τρισδιάστατης ελαστικότητας στη διατομή της πάκτωσης στη θέση όπου έχουμε και εδώ τις μέγιστες διατμητικές τάσεις (εικόνα 6.7.5-6.7.7-6.7.8).

### 6.7.4 Συγκρίσεις μεταξύ των 3 βασικών θεωριών στρέψης

Για την διατομή 1000x500x40 από αλουμίνιο για το στατικό σύστημα του προβόλου με στρεπτική ροπή 10 kNm στο άκρο του αποδείξαμε προηγουμένως ότι η **θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα**. Η προαναφερθείσα θεωρία χρησιμοποιεί το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης (εξίσωση 4.5.17) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη κατά μήκος της ράβδου. Τίθεται το ερώτημα **κατά πόσο διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα** αν αγνοηθεί αυτός ο διορθωτικός συντελεστής (δηλαδή τεθεί  $k_x=1$ ), ή αν χρησιμοποιούσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή την θεωρία ομοιόμορφης στρέψης για την επίλυση του ίδιου προβλήματος. **Επισημαίνεται ότι με βάση τον EC3 τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης επιτρέπεται να αγνοούνται απλοποιητικά σε χαλύβδινες ράβδους κλειστής κοίλης διατομής**. Επιπλέον, **το ίδιο ισχύει και με βάση τον EC9 σε ράβδους κλειστής κοίλης διατομής από αλουμίνιο εάν αυτές δεν είναι ευαίσθητες σε στρέβλωση**. **Εντούτοις δεν δίνονται διευκρινιστικές οδηγίες σχετικά με ποιο σχήμα διατομής είναι μη ευαίσθητο σε στρέβλωση**.

Kinematic Magnitude	STDME	STDME $K_x=1$	Differences	Units
max thx	3,26E-004	3,24E-004	0,39%	rad
max nx	3,27E-005	3,27E-005	0,00%	rad/m
max thx_diff	3,27E-005	3,27E-005	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max thx	3,26E-004	3,23E-004	0,82%	rad
max nx	3,27E-005	-	-	rad/m
max thx_diff	3,27E-005	3,27E-005	0,00%	rad/m
Kinematic Magnitude	STDME	Uniform	Differences	
max thx	3,26E-004	3,27E-004	0,39%	rad
max nx	3,27E-005	-	-	rad/m
max thx_diff	3,27E-005	3,27E-005	0,00%	rad/m

Πίνακας 6.7.6 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Κινηματικά μεγέθη

Moment	STDME	STDME Kx=1	Differences	Units
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	1,05E+000	4,16E+000	294,40%	kNm
max Mw	3,90E-001	7,76E-001	99,04%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	1,05E+000	1,00E+001	848,44%	kNm
max Mw	3,90E-001	1,21E+000	209,95%	kNm <sup>2</sup>
Moment	STDME	Uniform	Differences	
max MtP	1,00E+001	1,00E+001	0,00%	kNm
max MtS	1,05E+000	0,00E+000	-	kNm
max Mw	3,90E-001	0,00E+000	-	kNm <sup>2</sup>

Πίνακας 6.7.7 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Εντατικά μεγέθη

Stresses	STDME	STDME Kx=1	Differences	
MaxS-VonMises	8,88E+002	1,26E+003	41,47%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	3,00E+002	5,97E+002	99,04%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	4,97E+002	7,04E+002	41,77%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,89E+000	2,54E+002	6430,12%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,31E+002	5,17E+002	294,40%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Classic Nonuniform	Differences	
MaxS-VonMises	8,88E+002	2,16E+003	142,75%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	3,00E+002	9,30E+002	209,95%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	4,97E+002	1,24E+003	150,60%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,89E+000	6,10E-008	100,00%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,31E+002	1,24E+003	848,44%	KN/m <sup>2</sup>
Stresses	STDME	Uniform	Differences	
MaxS-VonMises	8,88E+002	7,52E+002	15,26%	KN/m <sup>2</sup>
max Sxx =	3,00E+002	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>
maxSxn=	4,97E+002	4,34E+002	12,51%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnP=	3,89E+000	4,34E+002	11078,63%	KN/m <sup>2</sup>
maxSxnS=	1,31E+002	0,00E+000	-	KN/m <sup>2</sup>

Πίνακας 6.7.8 Σύγκριση μεταξύ θεωριών ανομοιόμορφης στρέψης-Τασικά μεγέθη

Με βάση τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα :

- Καθίσταται εμφανές το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά το στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα. Πιο αναλυτικά, στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή φαίνεται να είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και στα τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές. Στα εντατικά μεγέθη η αγνόηση του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης μας δίνει πιο δυσμενή αποτελέσματα όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις ορθές, διατμητικές και Von Mises τάσεις στο σύνορο. Επομένως, **κρίνεται αναγκαία η συμπερίληψη του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης** στη διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης. Επισημαίνεται ότι πλήθος ερευνητών δε λαμβάνουν υπόψη το συγκεκριμένο συντελεστή. Επιπλέον, από την καλή συμφωνία της διευρυμένης θεωρίας ανομοιομορφης στρέψης με την τρισδιάστατη ελαστικότητα προκύπτει ότι η μεθοδολογία υπολογισμού που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης δίδει αξιόπιστα αποτελέσματα.
- Τα αποτελέσματα από την ‘κλασική’ θεωρία της ανομοιομορφης στρέψης παρουσιάζουν υψηλές διαφοροποιήσεις σε σχέση με αυτά της ‘διευρυμένης’ θεωρίας( ΔΣΠ ή STDME-Secondary Torsional Deformation Moment Effect). Πιο συγκεκριμένα στα κινηματικά μεγέθη η διαφορά αυτή είναι αμελητέα, ενώ αντίθετα στα εντατικά και τασικά μεγέθη οι διαφορές λαμβάνουν ιδιαίτερα υψηλές τιμές. Τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο η ‘κλασική’ θεωρία προβλέπει πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της ‘κλασικής’ θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος στρέψης σε κοίλες κλειστές ορθογωνικές διατομές.
- Η ομοιομορφη στρέψη φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη εναλλακτική θεωρία για την μελέτη του παραπάνω φαινομένου σε επίπεδο τάσεων Von Mises, μιας και εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις (της τάξης του 15,26 %) σε αντίθεση με την κλασική ανομοιομορφη στρέψη που εμφανίζει ( της τάξης του 142,75%). Εντούτοις, η θεωρία της ομοιομορφης στρέψης προβλέπει τάσεις μικρότερες από αυτές που προέκυψαν στις αναλύσεις με τρισδιάστατα και κελυφωτά πεπερασμένα στοιχεία. Παράλληλα, το παραπάνω σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιομορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών τάσεων αλλά ούτε εντατικών μεγεθών όπως η δευτερογενής στρεπτική ροπή ή το δίρροπο στρέβλωσης, την καθιστά ανεπαρκής για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος.
- Τα φαινόμενα ανομοιομορφης στρέψης και ΔΣΠ παίζουν σημαντικό ρόλο σε ράβδους λεπτότοιχου δικύψελου κιβωτίου, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά στον υπολογισμό μέγιστων τασικών μεγεθών.

Από τα παραπάνω προκύπτει εύλογα το συμπέρασμα ότι για την μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε λεπτότοιχα δικύψελα κιβώτια με το στατικό σύστημα του προβόλου η πιο πρόσφορη θεωρία είναι εκείνη της ανομοιομορφης στρέψης με την επιρροή δευτερογενών στρεπτικών

παραμορφώσεων. Η «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης προβλέπει πολύ υψηλές μη ρεαλιστικές τιμές μέγιστων τασικών μεγεθών. Η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης δίδει σχετικά κοντινά αποτελέσματα σε αυτά της τρισδιάστατης ελαστικότητας και της θεωρίας κελυφών, εντούτοις υποεκτιμά τα μέγιστα τασικών μεγεθών (σε αντίθεση με τη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης). Το γεγονός αυτό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ιδίως σε κατασκευές από αλουμίνιο που υπόκεινται σε κόπωση.

## 6.8 Βασικά συμπεράσματα

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας αυτής θα συνοψίσουμε τα σημαντικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη των προαναφερθέντων αριθμητικών εφαρμογών και θα δώσουμε ποιοτική εξήγηση για την επίδραση του φαινομένου του «distortion» στις κοίλες διατομές:

1. Σε όλες τις αριθμητικές εφαρμογές που παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν παραπάνω, η θεωρία δοκού έδωσε αποτελέσματα παραπλήσια με αυτά που εξήχθησαν από το εμπορικό λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων Nastran. Είχαμε εξαιρετική σύγκλιση στις γεωμετρικές σταθερές, στα κινηματικά μεγέθη, καθώς και ικανοποιητική σύγκλιση σε επίπεδο τάσεων. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι **η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων είναι μια ακριβής και αξιόπιστη μέθοδος.**
2. Στις **κοίλες διατομές** που εξετάσαμε, παρατηρήσαμε ότι οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται στη διατομή της πάκτωσης, όπου έχουν την μεγαλύτερη επιρροή τους τα φαινόμενα της ανομοιόμορφης στρέψης. **Το φαινόμενο του «distortion»**, όπως προκύπτει από όλες τις αναλύσεις που πραγματοποιήσαμε στις κοίλες διατομές, **απαλώνει τις τάσεις κοντά στην πάκτωση** και κατά συνέπεια τις μέγιστες τάσεις που ασκούνται στη δοκό.
3. Στις συμπαγείς κλειστές διατομές που εξετάσαμε, παρατηρήσαμε ότι οι μέγιστες τάσεις Von Mises δεν εμφανίζονται στη διατομή της πάκτωσης όπως προηγουμένως, αλλά σε περιοχή μακριά από την πάκτωση. Επομένως, η ομοιόμορφη στρέψη σε επίπεδο δοκού (global) είναι σε θέση να περιγράψει με ικανοποιητική ακρίβεια τις μέγιστες τάσεις που ασκούνται για αυτού του είδους τις διατομές. Εντούτοις, το γεγονός ότι η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη ορθών (δίρροπο στρέβλωσης) και δευτερογενών (δευτερογενής στρεπτική ροπή) τάσεων, την καθιστά ανεπαρκή για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος. Τέλος, το φαινόμενο του «distortion» φαίνεται ότι δεν έπαιξε ρόλο στην διαμόρφωση των μεγίστων τάσεων Von Mises.
4. Η τιμή του λόγου Poisson δεν επηρεάζει ούτε τις μέγιστες τιμές των τασικών μεγεθών ούτε την κατανομή αυτών κατά μήκος της δοκού. Επομένως, είναι εύλογη η παραδοχή της θεωρίας δοκού που θεωρεί το συντελεστή Poisson ίσο με το μηδέν.
5. Σε όλες τις διατομές που εξετάσαμε τονίσαμε ότι τόσο στα εντατικά μεγέθη όσο και στα τασικά μεγέθη στο σύνορο, η 'κλασική' θεωρία σε σχέση με τη 'διευρυμένη' προβλέπει εξαιρετικά πιο μεγάλες τιμές. Επομένως καθίσταται εμφανές ότι η χρήση της 'κλασικής' θεωρίας δεν προτείνεται για την επίλυση του προβλήματος της στρέψης σε κλειστές κοίλες ή συμπαγείς διατομές. Τέλος, αξίζει να τονίσουμε ότι η θεωρία της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι η πιο κατάλληλη θεωρία δοκού για τη μελέτη του προβλήματος της στρέψης σε κλειστές κοίλες ή συμπαγείς διατομές.

**Ποιοτική ερμηνεία της μείωσης των τάσεων λόγω του φαινομένου του distortion:**

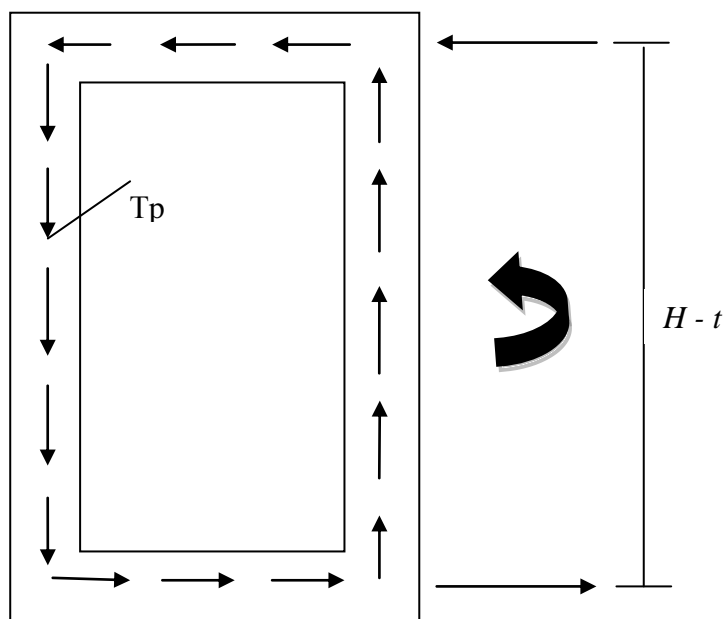
Έστω η κοίλη ορθογωνική διατομή του σχήματος 6.8.1. Σε περιοχή κοντά στη θέση της πάκτωσης  $dx$  και καθώς πλησιάζουμε προς αυτήν η επιρροή των δευτερογενών φαινομένων αυξάνεται, ενώ αντίστοιχα ενώ απομακρυνόμαστε από την πάκτωση η επιρροή των φαινομένων αυτών μειώνεται. Ακριβώς το ανάποδο συμβαίνει για τα πρωτογενή φαινόμενα. Η ροή των πρωτογενών διατμητικών τάσεων στη διατομή φαίνεται στο σχήμα 6.8.1 Η αντίστοιχη ροή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων φαίνεται στο σχήμα 6.8.2. Παρατηρούμε ότι με την επαλληλία των δύο μηχανισμών αυτών οι διατμητικές τάσεις στο πάνω μέρος της διατομής (μικρή πλευρά) αυξάνονται καθώς κατευθυνόμαστε προς τη θέση της πάκτωσης, ενώ αντίθετα οι διατμητικές τάσεις στον κορμό της διατομής μειώνονται. (Από τα αριθμητικά παραδείγματα προέκυψε ότι οι διατμητικές τάσεις στις μικρές πλευρές αυξάνονται. Αντίθετα στον κορμό, εξαιτίας του ότι οι πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις δρουν αντίθετα, οι συνολικές διατμητικές τάσεις μειώνονται).

Εξετάζοντας την ισορροπία των τάσεων που προκύπτουν από την επαλληλία των δύο μηχανισμών στην περιοχή  $dx$  κοντά στην πάκτωση, προκύπτει το σχήμα 6.8.3. Με βάση τα ανωτέρω, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι οριζόντιες διατμητικές τάσεις στην πάκτωση είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες στη διατομή  $dx$ , ενώ αντίθετα οι κατακόρυφες διατμητικές τάσεις είναι μικρότερες στην θέση της πάκτωσης από τις αντίστοιχες της διατομής  $dx$ .

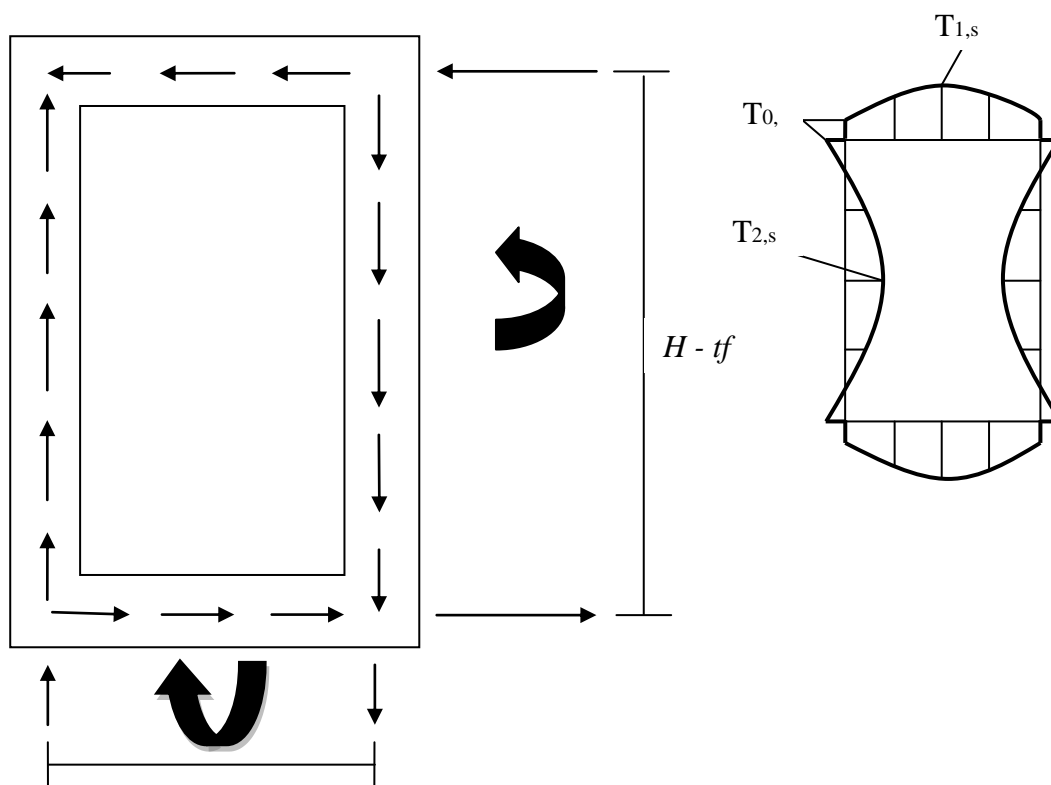
Η παραπάνω κατανομή των τάσεων δημιουργεί μια αυτεντατική κατάσταση όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 6.8.4. Η κατάσταση αυτή εκφράζει το φαινόμενο του distortion κατά μήκος της λωρίδας  $dx$ . Από την επαλληλία των δύο δυνάμεων στα άκρα προκύπτουν οι συνισταμένες δυνάμεις όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 6.8.5.

Απομονώνουμε τον κορμό της διατομής και θεωρούμε ότι αυτός συμπεριφέρεται ως ραβδωτό στοιχείο κατά μήκος της δοκού. Η καταπόνησή του κορμού προκύπτει από την κατανομή της δύναμης στο άκρο του, η οποία είναι κατανεμημένη με μέγιστη τιμή στη θέση της πάκτωσης, φθίνει καθώς προχωράμε από την πάκτωση προς το άκρο και πρακτικά μηδενίζεται σε περιοχή μακριά από την διατομή της πάκτωσης. Υπολογίζοντας τα εντατικά μεγέθη που προκύπτουν από αυτήν την καταπόνηση (Ροπές κάμψης και τέμνουσες δυνάμεις) εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί ότι η φορά της τέμνουσας είναι τέτοια που απαλύνει τις τάσεις στις μικρότερες πλευρές και αυξάνει κάπως τις τάσεις στις μεγαλύτερες. Επομένως το φαινόμενο του distortion δρα ανακουφιστικά στη δοκό, και πιο συγκεκριμένα δρα αντίθετα από τις ορθές και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις του διρρόπου στρέβλωσης και της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής, αντίστοιχα.

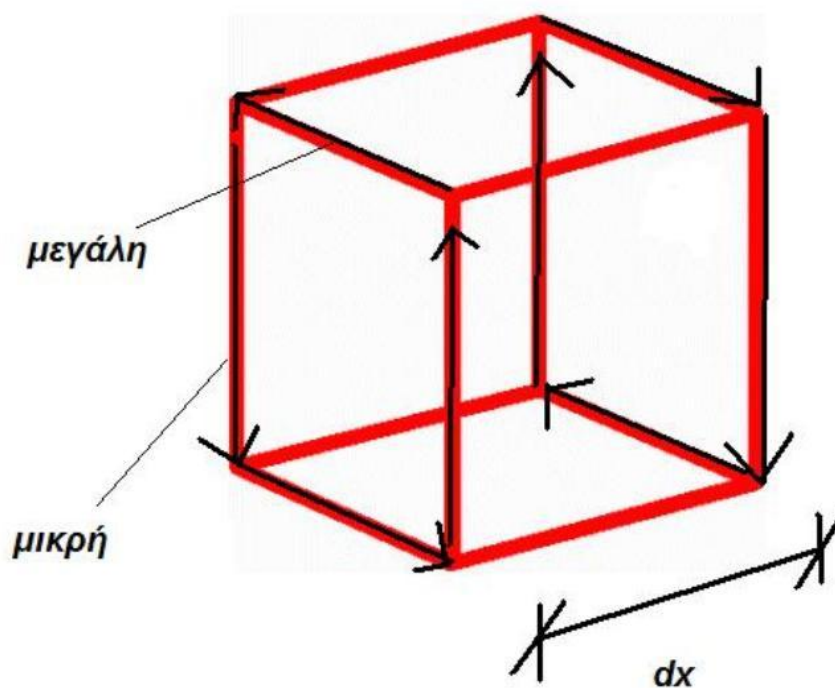




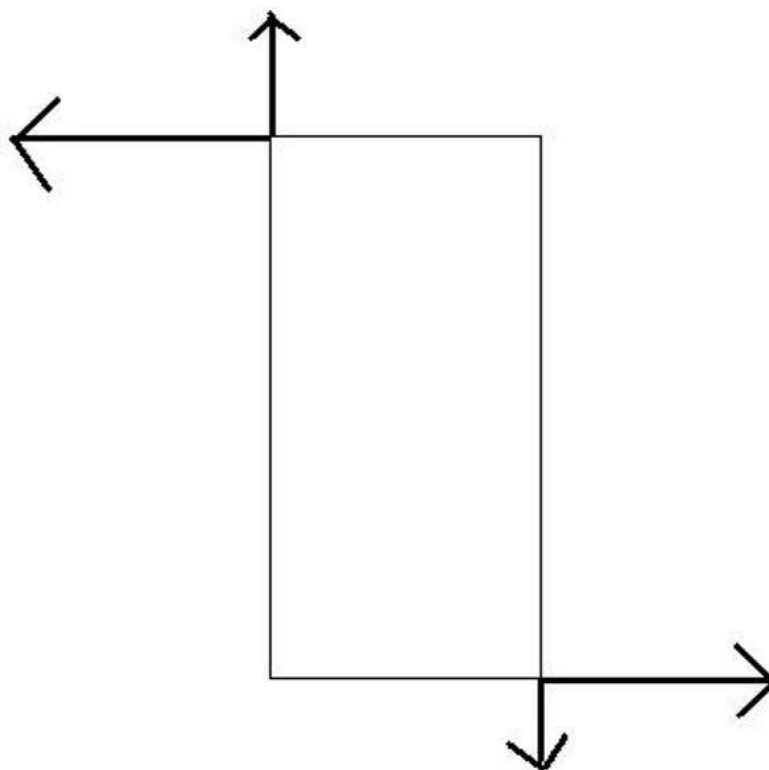
Σχήμα 6.8.1 Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις με την κατανομή τους και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες



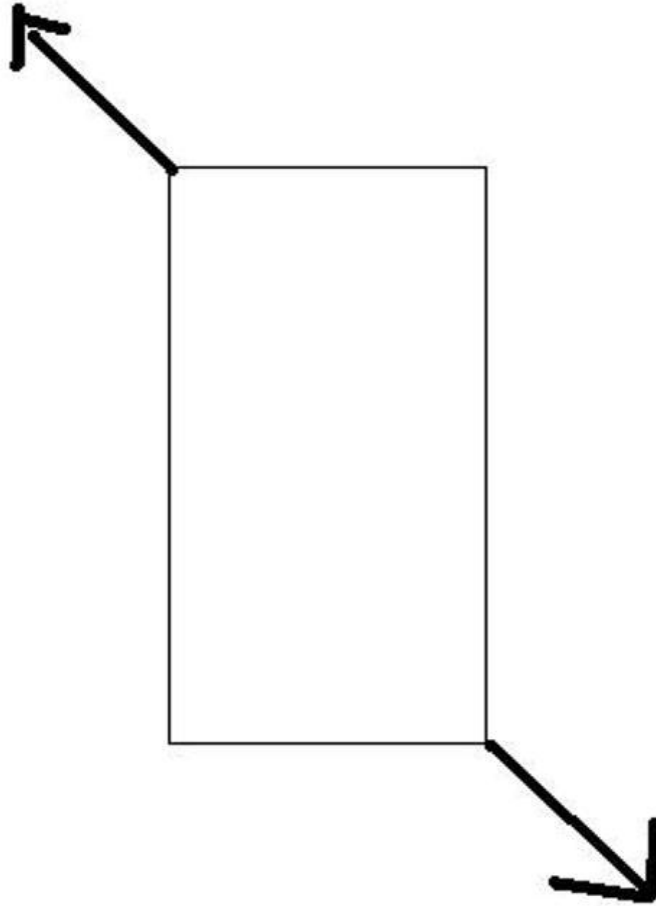
Σχήμα 6.8.2 Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις με την κατανομή τους και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες



Σχήμα 6.8.3 Ισορροπία μεταξύ των συνολικών διατμητικών τάσεων των δύο διατομών μελέτης



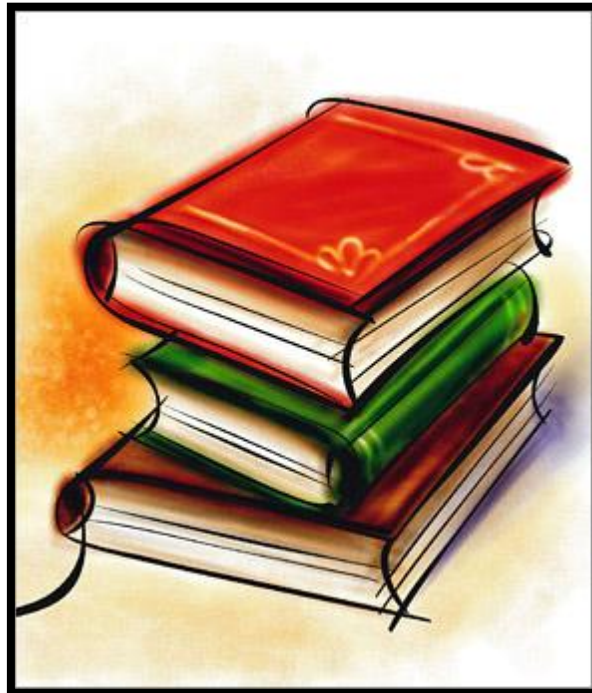
Σχήμα 6.8.4 Αντεντατική κατάσταση στη διατομή κατά μήκος του  $dx$



*Σχήμα 6.8.5 Συνισταμένες δυνάμεις στα εκατέρωθεν άκρα της διατομής κατά μήκος του  $dx$*

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

**Κατσιαδέλης, Ι.Θ.** (1999), “Συνοριακά Στοιχεία στην επιστήμη του μηχανικού – Θεωρία & Εφαρμογές”, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

**Παπαδρακάκης Μ.** (2001) , “Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων”, Παπασωτηρίου, Αθήνα.

**Σαπουντζάκης Ε.Ι.** (2005) “Θεωρία πλακών”, ΕΜΠ, Αθήνα.

**Σταυρίδης Λεωνίδας Θ.**(2006) “Στατική των δομικών φορέων-Μέρος Β”, Κλειδάριθμος , Αθήνα.

**Armenakas A.E.** (2006). “*Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*”, Taylor & Francis Group, New York.

**Back, S.Y. and Will, K.M.** (1998). “A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1173-1191.

**Becker, G.** (1965). “Ein Beitrag zur statischen Berechnung Beliebiger Gelagerter Ebener Gekrümmter Stäbe Mit Einfachsymmetrischen Dünnwandigen Offenen Profilen von in der Stabachse Veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion”, *Der Stahlbau* 34, H.11, 334-346 und H.12, S.368-377.

**Chen, H. and Blandford, G.E.** (1989). “A C0 finite element formulation for thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2239-2255.

**Cortinez, V.H. and Piovani, M.T.** (2002). “Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, 258, 701-723.

**Coulomb, C.A.** (1784). “Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l’elasticite des files de metal”, *Mem. De l’Acad. Roy. Des Sci.*, 229-269.

**Dabrowski, R.** (1968). “*Gekrümmte dünnwandige Träger, Theorie und Berechnung*”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

**El Fatmi, R.** (2007). “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5912-5929.

**Emre Erkmen, R. and Mohareb, M.** (2006). “Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 44, 1096-1108.

**Gendy, A.S., Saleeb, A.F. and Chang, T.Y.P.** (1992). “Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis”, *Computers & Structures*, 42, 531-550.

**Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W.** (2000). “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 1675-1702

**Heilig, R.** (1961a). “Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform”, *Der Stahlbau*, 30, H.11, 333-349.

- Heilig, R.** (1961b). “Der Schubverformzugseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil”, *Der Stahlbau*, 30, H.4, 97.
- Hu, Y., Jin, X. and Chen, B.** (1996). “A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections”, *Computers & Structures*, 61, 897-908.
- Kim, N.-I. and Kim, M.-Y.** (2005). “Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 43, 701–734.
- Klöppel, K. und Bilstein, W.** (1972). “Stark tordierte, eigenspannungsbehaftete Stäbe mit dünnwandigen, offenen einfachsymmetrischen Querschnitten”, *Der Stahlbau*, 41, H.5, S.135-142.
- Kollár, L.P.** (2001). “Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7543-7558.
- Kraus, M.** (2007). “Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile”, Festschrift Rolf Kindmann, Shaker Verlag, Aachen, 81-98.
- Kreuzinger, H.** (1969). “Der Einfluss eines nichtlinearen Anteils des Drehwiderstandes auf das Gleichgewichts- und Stabilitätsverhalten von geraden dünnwandigen Stäben”, Diss. TH, München.
- Laudiero, F. and Savoia, M.** (1990). “Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section”, *Thin-Walled Structures*, 10(2), 87-119.
- Lee, G.C. and Szabo, B.A.** (1967). “Torsional response of tapered I-Girders”, *J. Struc. Div.*, ASCE vol. 93, No. St5, 233-252.
- Machado, S.P. and Cortínez, V.H.** (2007). “Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations”, *Engineering Structures*, 29, 372-382.
- Marguerre, K.** (1940). “Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten”, *Der Bauingenieur*, 21, S.317-322.
- Murín, J. and Kutis, V.** (2008). “An Effective Finite Element for Torsion of Constant Cross-Sections Including Warping With Secondary Torsion Moment Deformation Effect”, *Engineering Structures* 30, 2716-2723.
- Park, S., Fujii, D. & Fujitani, Y.** (1997). “A finite element analysis of discontinuous thin-walled beams considering nonuniform shear warping deformation”, *Computers & Structures*, 65, 17-27.
- Ramm, E. und Hofmann, T.J.**, (1995). “*Stabtragwerke*”, Der Ingenieurbau: Grundwissen–Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin
- Roberts T.M. and Al-Ubaidi, H.** (2001). “Influence of shear deformation on restrained torsional warping of pultruded FRP bars of open cross section”, *Thin-Walled Structures*, 39, 395–414.
- Roik, K. und Sedlacek, G.** (1966). “Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen–Analogiebetrachtung zur

Berechnung des querbelasteten Zugstabes”, *Der Stahlbau*, 35 H.2, 43–52 and H.5, 160.

**Roik, K.H.** (1978). “*Vorlesungen über Stahlbau (Grundlagen)*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf

**Roik, K.H., Carl, J. und Linder, J.** (1972). “*Biegetorsionsprobleme gerade dünnwandiger Stäbe*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.

**Rubin, H.** (2005). “Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern Mit Konstantem Querschnitt Unter Berücksichtigung Sekundärer Schubverformungen”, *Stahlbau* 74, 826-842.

**Rubin H.** (2007). “*Torsions-Querschnittswerte für rechteckige Hohlprofile nach EN 10210-2:2006 und EN 10219-2:2006*”, *Stahlbau*, Vol. 76, 2007, pp. 21–33.

**Saint-Venant, B.** (1855). “*Memoire sur la torsion des prismes*”, *Memoires des Savants Etrangers*, 14, 233-560.

**Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2009). “Secondary Torsional Moment Deformation Effect by BEM”, *Proceedings of the 10th international conference of Advances in Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, 81-88.

**Simo, J.C. and Vu-Quoc, L.** (1991). “A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 27, 371-393.

**Slivker, V.** (2007). “*Mechanics of Structural Elements*”, Springer-Verlag, Berlin.

**Timoshenko, S. and Gere, J. M.** (1961). “*Theory of Elastic Stability*”, McGraw-Hill Book Company, London.

**Timoshenko, S. and Goodier, J.** (1951). “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill Book Comp, New York, Toronto, London.

**Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.** (1984). “*Theory of Elasticity*”, 3rd edn, McGraw-Hill, New York.

**Tralli, A.** (1986). “A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams”, *Computers and Structures*, 22, 649-658.

**Vlasov, V.** (1963). “*Thin-walled elastic beams*”, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.

**Vlassov, W.S.** (1964). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 1, Berlin.

**Vlassov, W.S.** (1965). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 2, Berlin.

**Vo, T.P. and Lee, J.** (2009). “Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, 631-641.

**Wunderlich W., Obrecht, H. and Schroedter, V.** (1986). “Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 671-695.