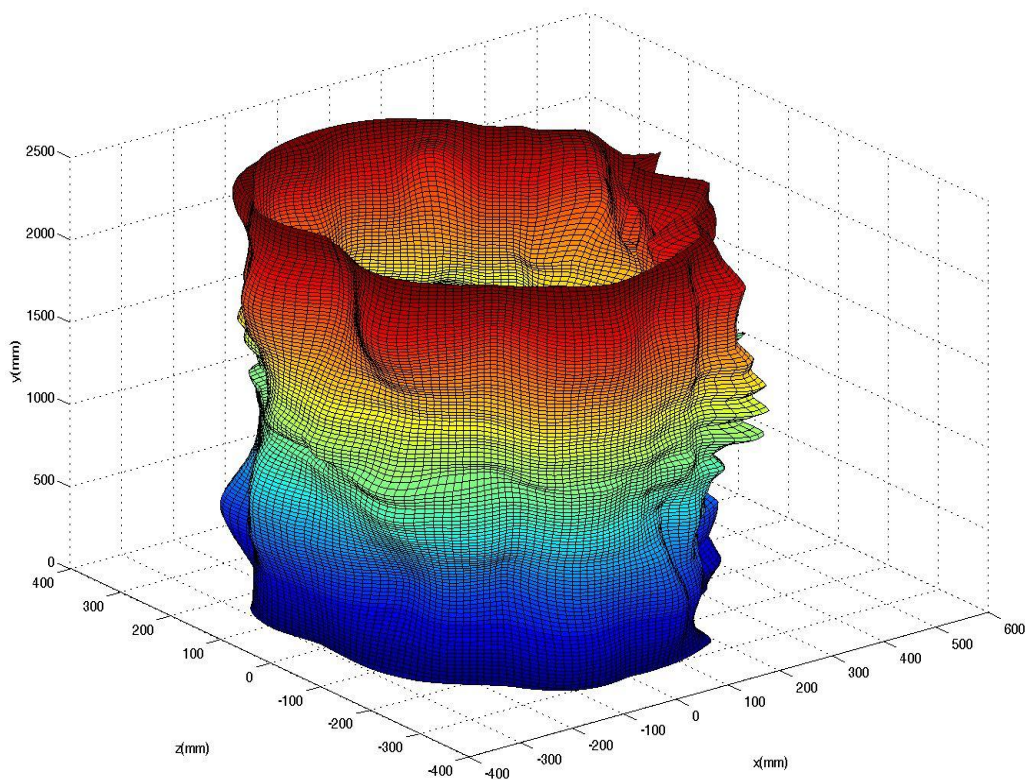




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ
ΚΕΛΥΦΩΝ ΜΕ ΤΥΧΑΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ



ΒΡΥΖΙΔΗΣ ΙΣΑΑΚ

Επιβλέπων : κ. Βησσαρίων Παπαδόπουλος , Επικ. Καθ. Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2012

Αφιερώνεται στην μητέρα μου.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.
2. Θεωρία στοχαστικών διαδικασιών.
 - 2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο.
 - 2.1.1 Τυχαία πεδία και τυχαίες μεταβλητές.
 - 2.1.2 Συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος.
 - 2.1.3 Φιλτράρισμα και εξομάλυνση φάσματος ισχύος.
 - 2.2 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης (Spectral Representation).
 - 2.2.1 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 1D-1V (μη ομογενές).
 - 2.2.2 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 2D-1V για ομογενή πεδία.
 - 2.2.3 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 2D-1V για μη ομογενή πεδία.
3. Μέθοδοι εκτίμησης εξελικτικών φασμάτων ισχύος.
 - 3.1 Μετασχηματισμός Short-time Fourier (Short-time Fourier transform STFT).
 - 3.2 Αρμονικός μετασχηματισμός wavelet (harmonic wavelet transform).
 - 3.3 Μετασχηματισμός Winger Ville (Winger-Ville transform).
4. Μέθοδος separation (Method of separation).
 - 4.1 Διαχωρίσιμα φάσματα ισχύος.
 - 4.2 Μη διαχωρίσιμα φάσματα ισχύος.
5. Υπολογισμός Περιοδογραφήματος –Μέθοδος Τραπεζίου.
 - 5.1 Υπολογισμός περιοδογραφήματος.
 - 5.2 Ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου.
6. Μελέτη ευσταθείας Κελυφών με τυχαίες αρχικές ατέλειες
 - 6.1 Εισαγωγή .
 - 6.2 Προσομοίωση ατελειών με χρήση πιθανοτικών μεθόδων (probabilistic approach)
 - 6.2.1 Γενικά – Ιστορική αναδρομή
 - 6.2.2 Προσομοίωση με χρήση σειρών Fourier
 - 6.3 Προσομοίωση ατελειών με χρήση στοχαστικών πεδίων (stochastic approach)
 - 6.3.1 Πειραματικά δεδομένα
 - 6.3.2 Φάσμα ισχύος για αρχικές γεωμετρικές ατέλειες
 - 6.3.3 Δημιουργία δειγματοσυναρτήσεων και επιλογή δικτύου
 - 6.4 Αποτελέσματα
 - 6.4.1 Αποτελέσματα φορέων με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που προκύπτουν από την μέθοδο φασματικής απεικόνισης
 - 6.4.2 Αποτελέσματα τέλειων φορέων και φορέων με αρχική γεωμετρική ατέλεια με βάση την πρώτη ιδιομορφή
7. Συμπεράσματα και περαιτέρω έρευνα.

Παράρτημα Α: Στοιχεία προγραμματιστικά του ABAQUS.



1.Εισαγωγή

Αντικείμενο της συγκεκριμένης μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας αποτελεί η στοχαστική ανάλυση ευστάθειας κυλινδρικών κελυφών με τυχαίες γεωμετρικές ατέλειες. Η αστοχία των κελυφωτών αυτών κατασκευών οφείλεται κατά κύριο λόγο στο φαινόμενο του λυγισμού, το οποίο επηρεάζεται από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, οι οποίες εμφανίζονται κατά την διάρκεια την κατασκευής τους. Έτσι, η μελέτη αυτών των κατασκευών συγκέντρωσε αναπόφευκτα το ενδιαφέρον πολλών μελετητών στο παρελθόν. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, παρατηρήθηκε μεγάλη διασπορά στις τιμές των φορτίων λυγισμού των κελυφών που λαμβάνονται από τις πειραματικές διαδικασίες. Ακόμη, έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές των προσδιοριστικών προβλέψεων των τιμών των φορτίων και των αντίστοιχων πειραματικών αποτελεσμάτων.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για την βελτίωση του υπολογισμού του φορτίου λυγισμού, χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες όσο το δυνατόν ρεαλιστικότερα στην ανάλυση 2^{ας} τάξεως των κελυφών. Επομένως, για να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά τη συμφωνία των υπολογισμών με τα πειραματικώς προσδιορισμένα φορτία λυγισμού, θα μπορούσαν να μετρηθούν οι αρχικές ατέλειες του συγκεκριμένου κελύφους που εξετάζεται και να εισαχθούν στην ανάλυση. Όμως αυτό δεν είναι ορθό, καθώς είναι γνωστό ότι το σχήμα των ατελειών επηρεάζεται από τη διαδικασία της κατασκευής και ότι ακόμη και τα κελύφη που προκύπτουν από την ίδια διαδικασία κατασκευής παρουσιάζουν συνήθως γεωμετρικές ατέλειες διαφορετικής μορφής.

Γίνεται κατανοητό λοιπόν από τα παραπάνω ότι μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση του θέματος των ατελειών μπορεί να επιτευχθεί με τη στοχαστική προσομοίωση της γεωμετρίας του κελύφους. Η ανάλυση λυγισμού που βασίζεται σ' αυτή την τεχνική επιτρέπει την ασφαλή πρόβλεψη των φορτίων λυγισμού κελυφών που έχουν παραχθεί από διάφορες κατασκευαστικές διαδικασίες καθώς και την πρόβλεψη της παρατηρηθείσας διασποράς των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Γενικά η στοχαστική ανάλυση λαμβάνει υπόψη τα ενδογενή χαρακτηριστικά τυχαιότητας που εμφανίζονται σε όλους τους τύπους των κατασκευών, δηλαδή την αβεβαιότητα στις τιμές των διαφόρων παραμέτρων (μέτρο ελαστικότητας, διατομή, φορτία ανέμου και σεισμού, ατελής γεωμετρία) που υπεισέρχονται στην στατική και δυναμική ανάλυση τους. Επίσης εξετάζει την επίδραση των αβεβαιοτήτων αυτών στην απόκριση των κατασκευών.

Για την ποσοτικοποίηση της τυχαιότητας στις τιμές των παραμέτρων χρησιμοποιείται η μαθηματική θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών (πεδίων). Θεωρείται, δηλαδή ότι η διακύμανση μιας παραμέτρου, π.χ. του μέτρου ελαστικότητας, περιγράφεται από μια συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών (στοχαστική διαδικασία ή πεδίο). Ο αριθμός των μεταβλητών εξαρτάται από το είδος του προβλήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω για την περιγραφή της διακύμανσης των παραμέτρων μιας κατασκευής χρησιμοποιείται μία στοχαστική διαδικασία για μονοδιάστατο πρόβλημα ή ένα στοχαστικό πεδίο για δισδιάστατο ή τρισδιάστατο πρόβλημα. Συνεπώς, πολύ σημαντική είναι η απεικόνιση της στοχαστικής διαδικασίας ή του πεδίου. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι που μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- i) Μέθοδοι σημειακής διακεκριμενοποίησης. Για παράδειγμα σε αυτήν την κατηγορία περιλαμβάνονται η μέθοδος του κεντρικού σημείου (midpoint method), η μέθοδος του κομβικού σημείου (nodal point method), η μέθοδος του

σημείου ολοκλήρωσης (integration point method), η μέθοδος του τοπικού μέσου όρου (local averaging method) κ.α.

- ii) Μέθοδοι αναπτύγματος σε σειρά. Εδώ περιλαμβάνονται το ανάπτυγμα Karhunen-Loeve, το ανάπτυγμα ομογενούς χάους (homogenous chaos expansion method), η μέθοδος της διαταραχής (perturbation method) κ.α.
- iii) Μέθοδος φασματικής απεικόνισης (spectral representation method), η οποία αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2.

Ακόμη, στο κεφάλαιο 2 αναφέρονται όλα τα απαραίτητα θεωρητικά στοιχεία για τις στοχαστικές διαδικασίες και πεδία.

Στο κεφάλαιο 3 αναπτύσσονται και συγκρίνονται τρεις μέθοδοι εκτίμησης εξελικτικών φασμάτων ισχύος: i) Μετασχηματισμός Short-time Fourier (Short-time Fourier transform STFT) ii) Αρμονικός Μετασχηματισμός wavelet (harmonic wavelet transform) iii) Μετασχηματισμός Winger-Ville (Winger-Ville transform).

Στο κεφάλαιο 4 αναπτύσσεται η μέθοδος separation για διαχωρίσιμα και μη διαχωρίσιμα πεδία. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία για την εκτίμηση των στοχαστικών φασμάτων ισχύος για τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Ακόμη, στο κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνεται η σύγκριση της μεθόδου αυτής με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα εξής:

- i) Ο τρόπος υπολογισμού του περιοδογραφήματος και ένα διάγραμμα ροής για τον προγραμματισμό του.
- ii) Η αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου μαζί με ένα διάγραμμα ροής για τον προγραμματισμό της.

Στο κεφάλαιο 6 αναπτύσσεται η μελέτη ευστάθειας των κελυφών με τυχαίες αρχικές ατέλειες. Αρχικά, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή των πιθανοτικών μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν για την προσομοίωση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών (probabilistic approach). Στην συνέχεια αναπτύσσεται η χρήση στοχαστικών πεδίων μέσα από την πορεία της συγκεκριμένης εργασίας. Η πορεία είναι οι εξής: υπολογισμός των φασμάτων ισχύος για αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, δημιουργία δειγματοσυναρτήσεων και επιλογή δικτύου και επίλυση φορέων με τυχαία αρχική ατελή γεωμετρία. Τέλος έγιναν αναλύσεις όπου στη μία περίπτωση θεωρούμε ότι ο κύλινδρος δεν έχει καμία αρχική ατέλεια (τέλειος φορέας) και στην άλλη όπου εισάγουμε μια αρχική γεωμετρική ατέλεια με βάση την πρώτη ιδιομορφή.

Στο κεφάλαιο 7 καταγράφονται συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα και στοιχεία περαιτέρω έρευνας.

Τέλος, η εργασία αυτή περιλαμβάνει και ένα παράρτημα, στο οποίο αναφέρεται σε χρήσιμα στοιχεία προγραμματιστικά στο ABAQUS.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Το παρόν κεφάλαιο αναφέρεται στο απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο που είναι σχετικό με την παρούσα μελέτη. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις μεθόδους απεικόνισης των στοχαστικών διαδικασιών (πεδίων) και σε βασικές μαθηματικές έννοιες.

2.1 Μαθηματικό υπόβαθρο

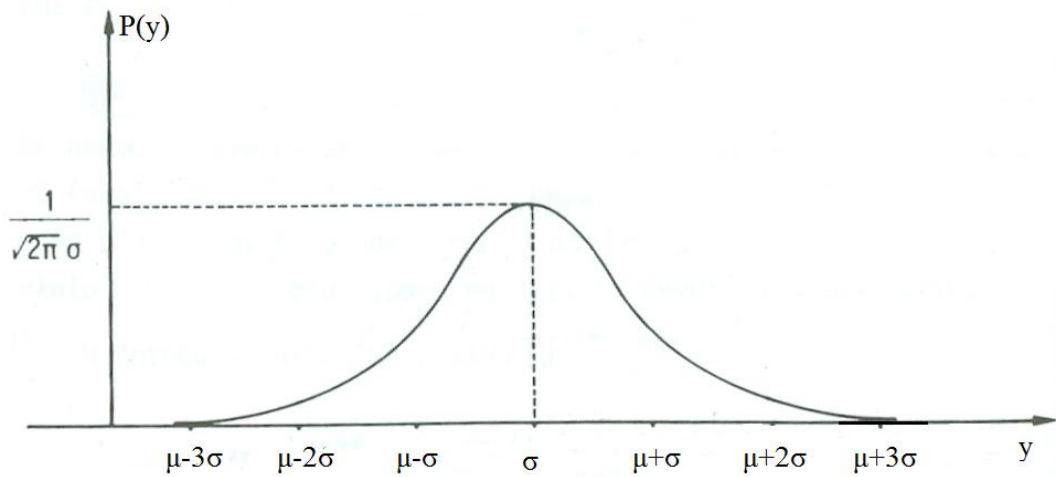
2.1.1 Τυχαία πεδία και τυχαίες μεταβλητές

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Y είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό y υπάρχει η πιθανότητα $P[Y < y]$, της οποίας η διανομή δίνεται από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π). Μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss), αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(y)$ είναι της μορφής:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2\right\} \equiv N(y|\mu, \sigma^2), y \in \mathfrak{R} \quad (2.15)$$

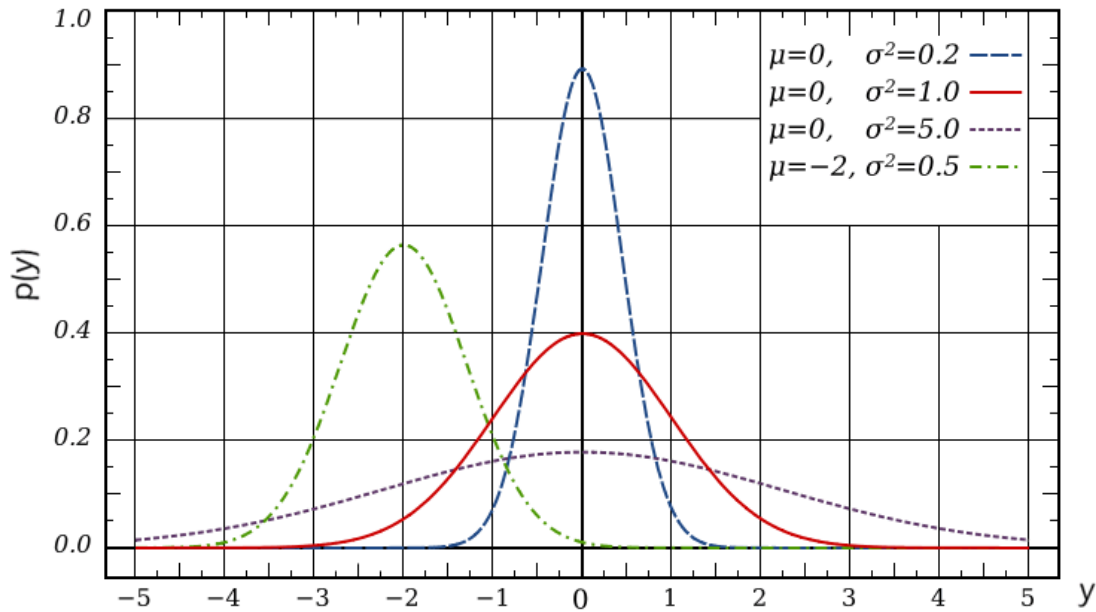
όπου μ και σ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντίστοιχα. Άρα μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή μπορεί πλήρως να προσδιοριστεί από τις δυο πρώτες στιγμές.

Είναι προφανές ότι η σ.π.π (2.15) έχει κορυφή το σημείο $y=\mu$ και είναι συμμετρική ως προς τον άξονα διερχόμενο από το μ . Επίσης στο διάστημα $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ περιέχονται όλες σχεδόν οι "πιθανές" τιμές της τυχαίας μεταβλητής Y . Συγκεκριμένα $P(|Y - \mu| > 3\sigma) \approx 0,003$. (βλέπε σχήμα 2.1.3)



Σχήμα 2.1.3 : Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Σχήμα που παρουσιάζει τις κυριότερες ιδιότητες της κατανομής Gauss.

Η παράμετρος μ καθορίζει τη θέση της κατανομής πάνω στον άξονα των y , γι' αυτό και ονομάζεται παράμετρος θέσης, ενώ η παράμετρος σ καθορίζει το πόσο απλώνεται η κατανομή πάνω στον άξονα y , παράμετρος μεταβλητότητας. Μερικά παραδείγματα για διαφορετικά μ και σ φαίνονται στο σχήμα 2.1.4.



Σχήμα 2.1.4: Σχήμα που αποτυπώνει την επιρροή της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Μια στοχαστική διαδικασία $f(x)$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που μπορεί να προσδιοριστεί στατιστικά. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και αν είναι γνωστή η αρχική συνθήκη της διαδικασίας, υπάρχουν πολλά μονοπάτια κάποια από τα οποία είναι πιο πιθανά και άλλα λιγότερο. Όταν μια δειγματοσυνάρτηση είναι συνάρτηση του χώρου, τότε οι στοχαστικές διαδικασίες ονομάζονται και τυχαία πεδία. Οι στοχαστικές ιδιότητες ενός τυχαίου πεδίου περιγράφεται από τις ροπογεννήτριες:

- Πρώτης τάξεως-μέση τιμή: $\mu_f(t) = E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot p(f, x) df$ (2.16α)

- Δεύτερης τάξεως-μέση τετραγωνική τιμή: $E[f^2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot p(f, x) df$ (2.16β)

- Διακύμανση: $\sigma_f^2 = E[\{f(x) - \mu_f(x)\}^2] = E[f^2(x)] - \mu_f^2(x)$ (2.16γ)

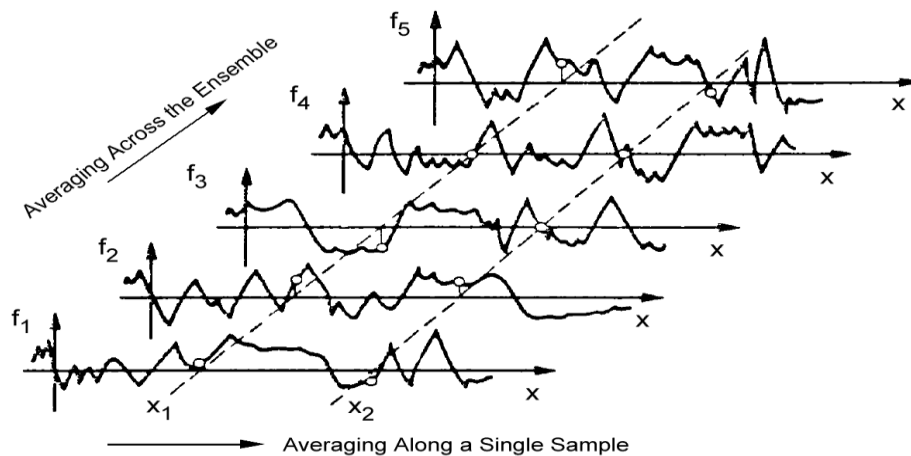
- Αυτοσυσχετισμού: $R_{ff}(x_1, x_2) = E[f_1 \cdot f_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 f_2 \cdot p^*(f_1, x_1; f_2, x_2)$ (2.16δ)

όπου p και p^* είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πρώτης και δεύτερης τάξεως. Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης σ_f^2 ονομάζεται τυπική απόκλιση.

Για να περιγράψει κανείς πλήρως ένα τυχαίο πεδίο, απαιτούνται όλες οι ροπογεννήτριες (σχέσεις (2.16)). Όμως η πιο σημαντική στοχαστική πληροφορία βρίσκεται στην μέση τιμή και στην συνάρτηση αυτοσυσχετισμού ή στην αυτοδιακύμανση. Αν η δομή της πιθανότητας της $f(x)$ εξαρτάται μόνο από τις δυο πρώτες ροπογεννήτριες, τότε όλες οι μεγαλύτερες ροπογεννήτριες μπορούν να υπολογισθούν από την μέση τιμή και τη διακύμανση ή τη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού. Το τυχαίο πεδίο τότε ακολουθεί κατανομή Gauss, μια υπόθεση που είναι μια λογική απλούστευση για πρακτικές εφαρμογές.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να καθοριστούν οι ροπογεννήτριες ενός τυχαίου πεδίου από πειραματικά δεδομένα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας μεγάλος αριθμός n από διαφορετικές δειγματοσυναρτήσεις $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ (στην αγγλική βιβλιογραφία αναφέρονται και ως σήματα (signals)), εκπροσωπούν το τυχαίο πεδίο $f(x)$, το οποίο θεωρητικά αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό δειγματοσυναρτήσεων. Έτσι οι μέσοι όροι για τις ροπογεννήτριες προσδιορίζονται από την μέτρηση των τιμών των $f_i(x)$ σε κάθε θέση x και

παίρνοντας τον μέσο όρο τους σε αυτή τη θέση x . Όμοια για όλο το διάστημα (βλέπε σχήμα 2.1.5).



Σχήμα 2.1.5: Στο σχήμα αυτό βλέπουμε το σύνολο των μέσων όρων κατά μήκος μερικών δειγματοσυναρτήσεων και το μέσο όρο κατά μήκος ενός σήματος στην υπόθεση της εργοδικότητας (ergodicity).

Ένα τυχαίο πεδίο $f(x)$ είναι ομογενές, εάν η πλήρη δομή της πιθανότητας που το περιγράφει είναι ανεξάρτητη από κάθε αλλαγή στην παράμετρο x . Αντίστοιχα, η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται στάσιμη. Εάν αυτό δεν ισχύει τότε το τυχαίο πεδίο ονομάζεται εξελικτικό (evolutionary). Αν ισχύει η ομοιογένεια (ή στασιμότητα) συνεπάγεται ότι οι ροπογεννήτριες είναι ανεξάρτητες της θέσης x . Ένα τυχαίο πεδίο ονομάζεται εργοδικό όταν μαζί με την ομοιογένεια ισχύει ότι οι μέσοι όροι που ελήφθησαν κατά μήκος κάθε δειγματοσυνάρτησης $f_i(x)$ είναι ίδιοι με τον μέσο όρο του συνόλου. Άρα, στην περίπτωση της εργοδικότητας, ο μέσος όρος και η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μπορούν να εκτιμηθούν επαρκώς από μια δειγματοσυνάρτηση.

2.1.2 Φάσματα ισχύος (συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος)

Αρχικά θα ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία: Κάθε συνάρτηση, μιας ή περισσότερων μεταβλητών, της οποίας οι τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές, ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Η διαφορά των στοχαστικών διαδικασιών από τις γνωστές από τα μαθηματικά συναρτήσεις οφείλεται στο ότι οι πρώτες αποτελούνται από ένα σύνολο δειγματοσυναρτήσεων και δεν παριστάνουν μονοσήμαντες απεικονίσεις. Παραδείγματα τυπικών στοχαστικών διαδικασιών είναι η διατομή ενός δομικού στοιχείου, η φόρτιση μιας κατασκευής, η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, οι τοπικές και καθολικές ατέλειες ενός μέλους κ.α. Οι στοχαστικές διαδικασίες, όπως οι μεμονωμένες τυχαίες μεταβλητές, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Η στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από την μέση τιμή στοχαστικής διαδικασίας και από την συνάρτηση αυτοσυσχετισμού (autocorrelation function).

- Μέση τιμή στοχαστικής διαδικασίας: Η μέση τιμή μιας στοχαστικής διαδικασίας $f(x)$ ορίζεται από την γνωστή σχέση :

$$m(x) = E[f(x)] \quad (2.1)$$

- Συνάρτηση αυτοσυσχετισμού (autocorrelation function): Η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μιας στοχαστικής διαδικασίας $f(x)$ ορίζεται ως:

$$R_{xx}(x_1, x_2) = E[f(x_1)f(x_2)] \quad (2.2)$$

Αποτελεί ,δηλαδή, την μέση τιμή του γινομένου των τιμών της στοχαστικής διαδικασίας σε δυο διαφορετικά σημεία του άξονα των x . Αν $x_1=x_2=x$ η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μας δίνει την μέση τετραγωνική τιμή της στοχαστικής διαδικασίας στην θέση x και γράφεται:

$$R_{xx}(x, x) = E[f^2(x)] \quad (2.3)$$

Οι στοχαστικές διαδικασίες που ακολουθούν την κανονική κατανομή (διαδικασίες Gauss) περιγράφονται πλήρως από την μέση τιμή και την συνάρτηση αυτοσυσχετισμού τους. Έχουν επίσης μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα ότι μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα μιας διαδικασίας με μηδενική μέση τιμή (zero mean) και της συνάρτησης μέσης τιμής.

-Στάσιμες (stationary) στοχαστικές διαδικασίες: Η σπουδαιότερη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών είναι στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες. Ως στάσιμες ,ορίζονται οι στοχαστικές διαδικασίες για τις οποίες η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας που τις περιγράφει δεν αλλάζει με τον χρόνο ή την θέση .Επομένως ,τόσο η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλιση τους είναι ανεξάρτητες από την μεταβλητή θέσης x :

$$E[f(x)] = m(x) = m \quad (2.4)$$

$$\sigma(x) = \sigma \quad (2.5)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας εξαρτάται, όπως είναι αναμενόμενο, μόνο από την απόσταση δύο σημείων στον άξονα των x , επομένως:

$$R_{xx}(x_1, x_2) = R_{xx}(x_2 - x_1) = R_{xx}(\tau) \quad (2.6)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης των τιμών $f(x)$ και $f(x+\tau)$ της στοχαστικής διαδικασίας δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E\{[f(x) - m][f(x + \tau) - m]\}}{\sigma^2} \\ &= \frac{E[f(x)f(x + \tau)] - mE[f(x + \tau)] - mE[f(x)] + m^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{R_{xx}(\tau) - m^2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Από την σχέση (2.7) προκύπτει ότι $R_{xx}(\tau) = \sigma^2 \rho + m^2$ και αφού οι τιμές του ρ κυμαίνονται από το -1 στο +1, ισχύει η ανισότητα:

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_{xx}(\tau) \leq \sigma^2 + m^2 \quad (2.8)$$

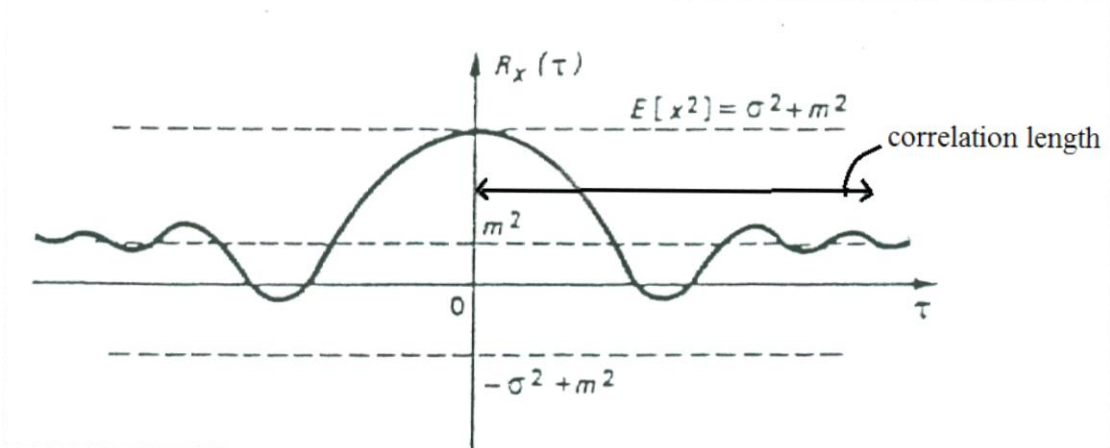
Για αποστάσεις $\tau \rightarrow \infty$ αναμένεται να μην υπάρχει καμία σχέση μεταξύ των τιμών $f(x)$ και $f(x+\tau)$ της στοχαστικής διαδικασίας και επομένως ο συντελεστής συσχέτισης ρ μεταξύ αυτών των τιμών θα τείνει στο μηδέν. Από την εξίσωση (2.7) παίρνουμε τώρα:

$$R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow m^2 \quad (2.9)$$

Τέλος, εφόσον η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού μιας στάσιμης διαδικασίας εξαρτάται μόνο από την απόσταση των δύο σημείων, θα ισχύει:

$$R_{xx}(\tau) = E[f(x)f(x+\tau)] = E[f(x)f(x-\tau)] = R_{xx}(-\tau) \quad (2.10)$$

Οι ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχετισμού μιας στάσιμης διαδικασίας που περιγράφονται από τις σχέσεις (2.8), (2.9) και (2.10) παρουσιάζονται στο παρακάτω τυπικό γράφημα.



Σχήμα 2.1.1: Συνάρτηση αυτοσυσχετισμού $R_{xx}(\tau)$

Το μήκος αυτοσυσχετισμού (correlation length) είναι το μήκος πέρα του οποίου η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού παίρνει τιμές κοντά στο τετράγωνο της μέσης τιμής, δηλαδή το μήκος πέρα του οποίου οι τιμές είναι ασυσχέτιστες.

-Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων – Συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος: Η ανάλυση Fourier είναι θεμελιώδης στην εφαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών αφού το σύνολο των ιδιοτήτων μιας στοχαστικής διαδικασίας μπορεί με την χρήση ανάλυσης Fourier να διατυπωθεί απλούστερα και κομψότερα στο πεδίο των συχνοτήτων. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχετισμού $R_{xx}(\tau)$ μιας στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας μας δίνει την συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος $S_{xx}(\omega)$ (power spectral density function) της στοχαστικής διαδικασίας:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.11)$$

όπου τ υποδηλώνει το μήκος συσχέτισης μεταξύ δυο τυχαίων σημείων x_1 και x_2 του τυχαίου πεδίου $f(x)$ και i τον φανταστικό αριθμό.

Η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, δίνει την συνάρτηση αυτοσυσχετισμού:

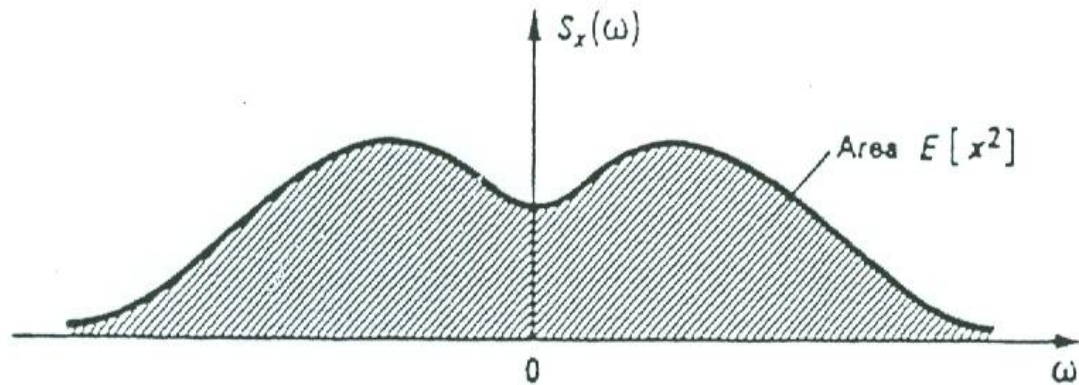
$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.12)$$

Οι σχέσεις (2.11) και (2.12) αποτελούν το ζεύγος μετασχηματισμών Wiener- Khinchine (σημείωση: οι Wiener- Khinchine θεμελίωσαν την ανάλυση των στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών με την χρήση των δύο παραπάνω συναρτήσεων).

Η πιο σπουδαία ιδιότητα της συνάρτησης πυκνότητας φασματικής ισχύος προκύπτει αν στην εξίσωση (2.12) θέσουμε $\tau=0$:

$$R_{xx}(0) = E[f^2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.13)$$

Συνεπώς, από την σχέση (2.13) συμπεραίνουμε ότι η μέση τετραγωνική τιμή της στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας $f(x)$ ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $S_{xx}(\omega)$ και τον άξονα των συχνοτήτων ω . Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.1.2: Η επιφάνεια κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας φασματικής ισχύος ισούται με $E[f^2(x)]$.

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα προκύπτει για τις στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες μηδενικής μέσης τιμής (zero mean). Σε αυτές τις στοχαστικές διαδικασίες επειδή έχουμε μέση τιμή $m=0$ και $\sigma^2=E[f^2(x)]-m^2$, η μέση τετραγωνική τιμή ταυτίζεται με την διακύμανση τους και η σχέση (2.13) γίνεται:

$$R_{xx}(0) = E[f^2(x)] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.14)$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση το φάσμα ισχύος μπορεί να ερμηνευτεί ως η διανομή του μέσου τετράγωνου των τιμών των $f(x)$ πάνω στον άξονα των συχνοτήτων.

Η φυσικής σημασία της συνάρτησης πυκνότητας φασματικής ισχύος είναι οι εξής: Οι τιμές της συνάρτησης αυτής αντιστοιχούν στην συνεισφορά της κάθε συχνότητας ω ή του κάθε κυματικού αριθμού k στην συνολική διακύμανση της στοχαστικής διαδικασίας.

Η $S_{xx}(\omega)$ ονομάζεται και αλλιώς ως φάσμα ισχύος (power spectrum). Τέλος θα αναφερθούμε σε δυο ακόμα σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης αυτής: α) είναι πραγματική και β) συνήθως συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα (όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1.2), γι' αυτό τον λόγο χαρακτηρίζεται ως συνάρτηση δύο πλευρών (two sided).

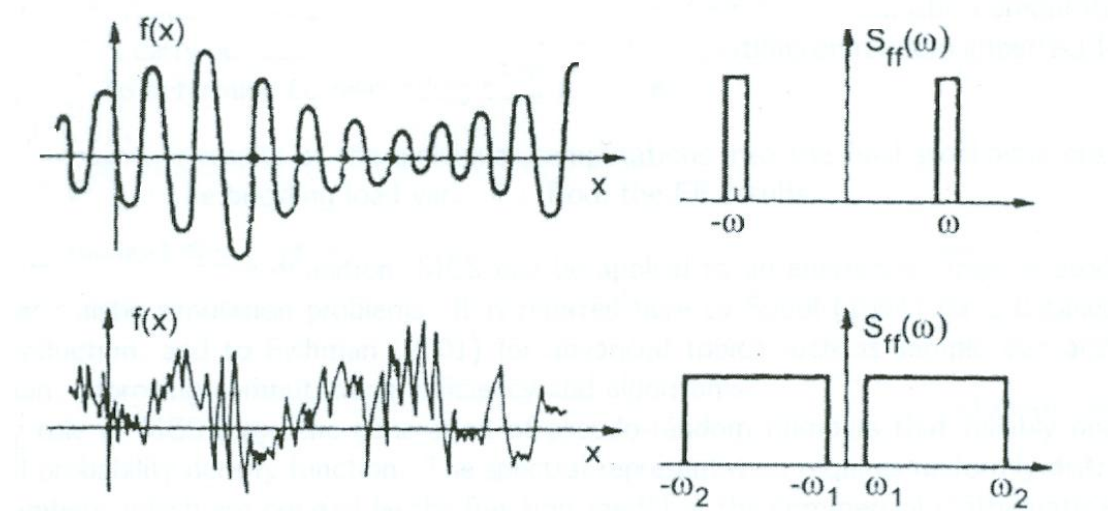
Ανακεφαλαιώνοντας, το φάσμα ισχύος (power spectrum) έχει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες:

- ❖ Είναι πραγματική και συμμετρική συνάρτηση: $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$. Για λόγους απλότητας και σαφήνειας μόνο η μίση συνάρτηση που αντιστοιχεί στον θετικό άξονα ω θα παρουσιάζεται παρακάτω.
- ❖ Παίρνει μη αρνητικές τιμές $S_{xx}(\omega) \geq 0$. Άρα το φάσμα μπορεί να ερμηνευτεί φυσικά σαν ενεργειακή πυκνότητα.
- ❖ Αν $E[f^2(x)] < \infty$, η συνάρτηση τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από ότι το $\frac{1}{\omega}$ όταν $\omega \rightarrow \pm\infty$. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ένα άνω όριο στον άξονα των συχνοτήτων πέρα του οποίου το φάσμα γίνεται αμελητέα μικρό.

2.1.3 Φιλτράρισμα και εξομάλυνση φάσματος ισχύος

Για λογούς πληρότητας αναφέρονται τρία χρήσιμα χαρακτηριστικά των στοχαστικών διαδικασιών:

- ❖ Μια διαδικασία στενής ζώνης (*Narrow-band process*) χαρακτηρίζεται από ένα φάσμα ισχύος το οποίο καταλαμβάνει μόνο ένα στενό εύρος από συχνότητες, δηλαδή το φάσμα μας σβήνει πολύ γρήγορα. Αντίθετα, στις ευρείες διαδικασίες (*broad-band processes*) τα γειτονικά σημεία συσχετίζονται και οδηγεί σε φάσματα ισχύος που περιλαμβάνουν περισσότερες συχνότητες (βλέπε σχήμα 2.1.6). Παράδειγμα διαδικασία στενής ζώνης είναι το φάσμα ισχύος για τις ατέλειες φορέων, ενώ ευρείας διαδικασίας είναι στο σεισμικό φάσμα ισχύος.



Σχήμα 2.1.6: Στο σχήμα αυτό φαίνεται η διαφορά μεταξύ διαδικασίας στενής ζώνης (*Narrow-band process*) και ευρείας διαδικασίας (*broad-band processes*).

- ❖ Το φασματικό φιλτράρισμα (*spectral filtering*) στην απλή μορφή του αναφέρεται στην αμέλεια κομματιού των συχνοτήτων του φάσματος ισχύος $S_{ff}(\omega)$. Το φασματικό φίλτρο είναι ένα παράθυρο που μας επιτρέπει να βλέπουμε μόνο ορισμένες συχνότητες και για να κρύβουμε τις υπόλοιπες. Χρειάζεται προσοχή το γεγονός ότι όταν το φιλτραρισμένο φάσμα ισχύος χρησιμοποιείται στην μέθοδο φασματικής απεικόνισης για την παραγωγή σημάτων (*signals*), τότε αυτά στερούνται την πληροφορία από τις φιλτραρισμένες συχνότητες.
- ❖ Φασματική εξομάλυνση (*spectral smoothing*): στην απλούστερη μορφή του αναφέρεται στη μέση τιμή παρακείμενων τιμών σε ένα εκτιμώμενο φάσμα ισχύος. Μπορούμε ξανά να το φανταστούμε ως ένα παράθυρο όπου μας επιτρέπει να δούμε μόνο ένα μικρό άνοιγμα του φάσματος ισχύος. Όσο το παράθυρο μετακινείται με μικρά βήματα κατά μήκος του άξονα των συχνοτήτων, ο μέσος όρος των ορατών τιμών λαμβάνεται συμφωνά με την σχέση:

$$\hat{S}_{ff}(\omega_{\kappa}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \tilde{S}_{ff}(\omega_{\kappa+m}) \quad (2.17)$$

όπου ω_k υποδηλώνει τα σημεία στα οποία είναι διακριτοποιημένος ο άξονας των συχνοτήτων, \hat{S}_{ff} και \tilde{S}_{ff} αναφέρονται στο αρχικό και στο εξομαλυμένο εκτιμώμενο φάσμα ισχύος σε κάθε θέση ω_k , αντίστοιχα. Η φασματική εξομάλυνση χρησιμοποιείται ώστε στο εκτιμώμενο φάσμα ισχύος να αποφευχθούν οι απότομες διακυμάνσεις στις τιμές του, δηλαδή να γίνει πιο ομαλή (smooth) η καμπύλη του φάσματος.

2.2 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης (Spectral Representation).

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι προσομοίωσης ενός στοχαστικού πεδίου, αλλά θα αναφερθούμε στην μέθοδο φασματικής απεικόνισης που παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- η ακρίβεια της είναι εντελώς ανεξάρτητη από το δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων που επιλέγεται, αφού η διαδικασία παραγωγής του στοχαστικού δεν έχει καμία σχέση με αυτό.
- ο κύριος λόγος που η μέθοδος είναι σημαντική είναι ότι το μόνο δεδομένο που απαιτεί για να λειτουργήσει είναι η συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος S_{ff} του πεδίου.

2.2.1 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 1D-1V (μη ομογενές)

Αν γνωρίζουμε το φάσμα ισχύος $S(\omega, x)$ ενός τυχαίου πεδίου, τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε τυχαία δείγματα με την μέθοδο της φασματικής απεικόνισης. Η εξίσωση που δίνει την δειγματοσυνάρτηση για 1D-1V (1 Dimensional -1 Variable) είναι:

$$f^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos(\omega_n x + \phi_n^{(i)}) \quad (2.18)$$

$$\text{με} \quad A_n = \sqrt{2 \cdot S(\omega_n, x) \cdot \Delta\omega} \quad (2.19\alpha)$$

$$\omega_n = n \cdot \Delta\omega \quad (2.19\beta)$$

$$\Delta\omega = \omega_{up} / N \quad (2.19\gamma)$$

$$A_0 = 0 \quad \text{ή} \quad S(\omega_o = 0, x) = 0 \quad (2.19\delta)$$

όπου $i = 0, 1, 2, \dots, m$ και $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Στην εξίσωση (2.19γ), το ω_{up} ονομάζεται "συχνότητα αποκοπής" παριστάνει ένα άνω φίλτρο στην συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος πέρα από το οποίο αυτή μπορεί να θεωρηθεί μηδενική λόγω των αμελητέων τιμών που λαμβάνει. Το N υποδηλώνει σε πόσα κομμάτια θα χωρίσουμε τον άξονα των συχνοτήτων και το $\phi_n^{(i)}$ αναφέρεται στις N ανεξάρτητες τυχαίες γωνίες φάσεις που κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ για μια δειγματοσυνάρτηση (αυτές γεννιούνται από μια γενέτειρα τυχαίων αριθμών). Για να δημιουργήσουμε άλλη δειγματοσυνάρτηση αλλάζουμε τις γωνίες φάσεις.

Σημαντικά στοιχεία για την μέθοδο φασματικής απεικόνισης:

- Συνήθως για την εκτίμηση της "συχνότητας αποκοπής" ω_{up} χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$\int_0^{\omega_{up}} S_{f_o f_o}(\omega) d\omega = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} S_{f_o f_o}(\omega) d\omega \quad (2.20)$$

όπου το ε είναι ένας αριθμός πολύ μικρότερος από την μονάδα π.χ. $\varepsilon=0.01, 0.001$. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε γραφικά και να ελέγξουμε την ισχύ της σχέσης (2.20) .

- Η προσομοίωση της στοχαστικής διαδικασίας που δίνεται από την σχέση (2.18) είναι περιοδική με περίοδο T_o :

$$T_o = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (2.21)$$

απ' όπου συμπεραίνεται ότι όσο μικρότερο είναι το $\Delta\omega$ ή ισοδύναμα όσο μεγαλύτερο είναι το N για μια δεδομένη συχνότητα ω_{up} , τόσο μεγαλύτερη θα είναι η περίοδος της διαδικασίας προσομοίωσης.

- Ακόμη , πρέπει να σημειωθεί ότι ,κατά την γέννηση των δειγματοσυναρτήσεων ,το βήμα Δt που χωρίζει τις παραγόμενες τιμές τους πρέπει να υπακούει στην συνθήκη:

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_{up}} \quad (2.22)$$

Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη προκειμένου να αποφευχθεί το φαινόμενο των επικαλύψεων (aliasing).

2.2.2 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 2D-1V για ομογενή πεδία

Η σειρά συνημιτόνων που χρησιμοποιείται για την απεικόνιση ενός 2D-1V ομογενούς στοχαστικού πεδίου είναι :

$$f^{(i)}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[A_{n_1 n_2}^{(1)} \cdot \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(1)(i)}) + A_{n_1 n_2}^{(2)} \cdot \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(2)(i)}) \right] \quad (2.23)$$

,όπου $\phi_{n_1 n_2}^{(j)(i)}$ ($j=1,2$) είναι οι τυχαίες γωνίες φάσεις που κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ για την (i) προσομοίωση. Τα $A_{n_1 n_2}^{(1)}, A_{n_1 n_2}^{(2)}$ ορίζονται ως εξής:

$$A_{n_1 n_2}^{(1)} = \sqrt{2S_{f_o f_o}(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (2.24a)$$

$$A_{n_1 n_2}^{(2)} = \sqrt{2S_{f_o f_o}(\kappa_{1n_1}, -\kappa_{2n_2}) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (2.24b)$$

,όπου

$$\kappa_{1n_1} = n_1 \Delta\kappa_1, \quad \kappa_{2n_2} = n_2 \Delta\kappa_2, \quad (2.25)$$

$$\Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1}, \quad \Delta\kappa_2 = \frac{\kappa_{2u}}{N_2} \quad (2.26)$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (2.27)$$

Ακόμη, N_j , $j=1,2$ είναι ο αριθμός των τμημάτων στα οποία χωρίζουμε το φάσμα και κ_{ju} , $j=1,2$ είναι οι κυματικοί αριθμοί αποκοπής οι οποίοι ορίζουν την ενεργή περιοχή του φάσματος ισχύος S_{fofo} του στοχαστικού πεδίου. Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος, και για μαθηματικούς αλλά και για φυσικούς λόγους, υποθέτουμε ότι είναι μηδέν έξω από την περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες:

$$-k_{1u} \leq k_1 \leq k_{1u} \quad \text{και} \quad -k_{2u} \leq k_2 \leq k_{2u} \quad (2.28)$$

2.2.3 Μέθοδος φασματικής απεικόνισης για 2D-1V για μη ομογενή πεδία

Για την απεικόνιση 2D-1V μη ομογενών πεδίων στοχαστικών πεδίων, η σειρά συνημιτόνων της σχέσης (2.23) γίνεται:

$$f^{(i)}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [A_{n_1 n_2}^{(1)} \cdot \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(1)(i)}) + A_{n_1 n_2}^{(2)} \cdot \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \phi_{n_1 n_2}^{(2)(i)})] \quad (2.29)$$

,όπου τα $A_{n_1 n_2}^{(1)}, A_{n_1 n_2}^{(2)}$ είναι τώρα συναρτήσεις όχι μόνο των κυματικών αριθμών αλλά και των θέσεων x_1 και x_2 :

$$A_{n_1 n_2}^{(1)} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}, x_1, x_2) \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2} \quad (2.24a)$$

$$A_{n_1 n_2}^{(2)} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(\kappa_{1n_1}, -\kappa_{2n_2}, x_1, x_2) \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2} \quad (2.24b)$$

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΩΝ ΦΑΣΜΑΤΩΝ ΙΣΧΥΟΣ

Υπενθυμίζεται ότι ένα φάσμα ισχύος είναι εξελικτικό (evolutionary), εάν η πλήρη δομή της πιθανότητας που το περιγράφει εξαρτάται από την παράμετρο θέσης x .

Η εκτίμηση του ομογενούς φάσματος ισχύος με ανάλυση Fourier ονομάζεται περιοδογράφημα (periodogram), η οποία μπορεί να ληφθεί από ένα σύνολο δειγματοσυναρτήσεων $f^{(i)}(x)$ από την σχέση:

$$\tilde{S}_n(\omega) = E \left[\frac{1}{2\pi L} \left| \int_0^L f^{(i)}(x) \cdot w(x - \frac{L}{2}) \cdot e^{-i\omega x} dx \right|^2 \right] \quad (3.1)$$

με L ολόκληρο το μήκος της δειγματοσυνάρτησης (το μήκος L στο κεφάλαιο 2 αναφέρεται ως T_0 και δίνεται από την σχέση (2.21)) και το παράθυρο w κεντραρισμένο στο $x=L/2$. Γενικά, στα εξελικτικά φάσματα ισχύος (evolutionary power spectrum) το περιοδογράφημα μπορεί να προβλέψει σωστά την διανομή ενέργειας στον άξονα των συχνοτήτων, όχι όμως και στον άξονα του χώρου, καθώς ο μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης (3.1) αναφέρεται σε όλο το μήκος L . Για να διαφυλαχτεί η πληροφορία στον άξονα του χώρου πρέπει τα δείγματα $f^{(i)}(x)$ να μετατρέπονται σε εξελικτικά φάσματα. Αυτό πετυχαίνεται με διάφορες μεθόδους που παρουσιάζονται παρακάτω.

3.1 Μετασχηματισμός Short-time Fourier (Short-time Fourier transform STFT).

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να εστιάσουμε σε μια διακριτή περιοχή γύρω από τη θέση $x=x_j$, στην οποία θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της και θα παραμερίσουμε προσωρινά πληροφορία στον άξονα του χώρου που βρίσκεται αρκετά μακριά από το x . Ουσιαστικά δημιουργούμε ένα παράθυρο όπου βλέπουμε την δειγματοσυνάρτηση μέσα από αυτό και ξεχνάμε ότι υπάρχει έξω από αυτό. Αυτό το πετυχαίνουμε πολλαπλασιάζοντας τα δείγματα μας με το παράθυρο $w(x-x_j)$ πεπερασμένου πλάτους T κεντραρισμένου γύρω από την θέση x_j που μας ενδιαφέρει. Το παράθυρο αυτό το μετακινούμε κατά μήκος του άξονα του χώρου, συνήθως σε N ίσες διαχωρίσιμες θέσεις $x = x_j$, όπου $j=1, \dots, N$. Μετά εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Fourier για κάθε θέση x_j . Με αυτό τον τρόπο είναι σαν να δημιουργούμε πολλά περιοδογραφήματα που το καθένα αναφέρεται σε κάθε θέση x_j . Οι συνιστώσες $\tilde{S}_j(\omega, x)$ για κάθε θέση x_j δίνεται από την σχέση:

$$\tilde{S}_j(\omega, x) = E \left[\frac{1}{2\pi T} \cdot \left| \int_{x_j-T/2}^{x_j+T/2} f^{(i)}(x) \cdot w(x - x_j) \cdot e^{-i\omega x} dx \right|^2 \right] \quad (3.2)$$

Το ολοκληρωμένο εξελικτικό εκτιμώμενο φάσμα, που ονομάζεται και φασματογράφημα, μπορεί να προκύψει συνδυάζοντας όλες τις συνιστώσες $j=1, 2, \dots, N$.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι η αδυναμία να προβλέψει σωστά την κατανομή στον άξονα των συχνοτήτων και στον άξονα του χώρου ταυτόχρονα, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας. Γενικά από τις παρατηρήσεις του Heisenberg's στην κβαντομηχανική, η αρχή της αβεβαιότητας αποδείχθηκε ότι είναι μια γενική ιδιότητα της ανάλυσης Fourier. Συγκεκριμένα, αναφέρεται ότι οι δυο συνιστώσες του μετασχηματισμού Fourier δεν μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως την ίδια στιγμή. Δηλαδή, αν η ακρίβεια στον χώρο αυξάνεται μειώνοντας το πλάτος του παραθύρου T , η εκτίμηση της συχνότητας επιδεινώνεται. Αντίθετα, αν αυξήσουμε το πλάτος του παραθύρου T τότε η ακρίβεια στον άξονα των συχνοτήτων αυξάνεται και μειώνεται στον άξονα του χώρου. Συμπερασματικά, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, πρέπει να υπάρχει ένας συμβιβασμός στο πλάτος του παραθύρου

ώστε να υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια στον άξονα του χώρου χωρίς να διαστρεβλώνεται η πληροφορία στον άξονα των συχνοτήτων.

Η συνάρτηση του παράθυρου που έχει ορθογώνια μορφή είναι:

$$w(x) = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq x \leq T/2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.3)$$

Σε περίπτωση που θέλουμε να μειώσουμε την επιρροή της αρχής της αβεβαιότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη πιο αναλυτική συνάρτηση για το παράθυρο w , σαν αυτή που πρότεινε ο Hamming :

$$w(x) = \begin{cases} 0.53836 - 0.46164 \cos\left(\frac{2\pi(x+\frac{T}{2})}{T}\right) & -T/2 \leq x \leq T/2 \\ 0 & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (3.4)$$

Παρατήρηση: Γενικά χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς στην αρχή και στο τέλος του παραθύρου μειώνονται τα επίπεδα του σήματος ,οδηγώντας σε απώλεια ενέργειας (window-processing loss) .Η επιρροή του φαινομένου αυτού μπορεί να μειωθεί αφήνοντας διαδοχικά παράθυρα να συμπίπτουν σε κάποιο μέρος τους.

Ο κώδικας που κατασκευάζεται για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο πρέπει να υποβληθεί σε έλεγχο σύμφωνα με ένα κλασικό πρόβλημα. Λαμβάνουμε το ομοιόμορφο Kanai-Tajimi φάσμα ισχύος και παράγουμε δειγματοσυναρτήσεις με την μέθοδο της φασματικής απεικόνισης (κεφάλαιο 2 παράγραφος 2.2).Το φάσμα αυτό ορίζεται από την σχέση:

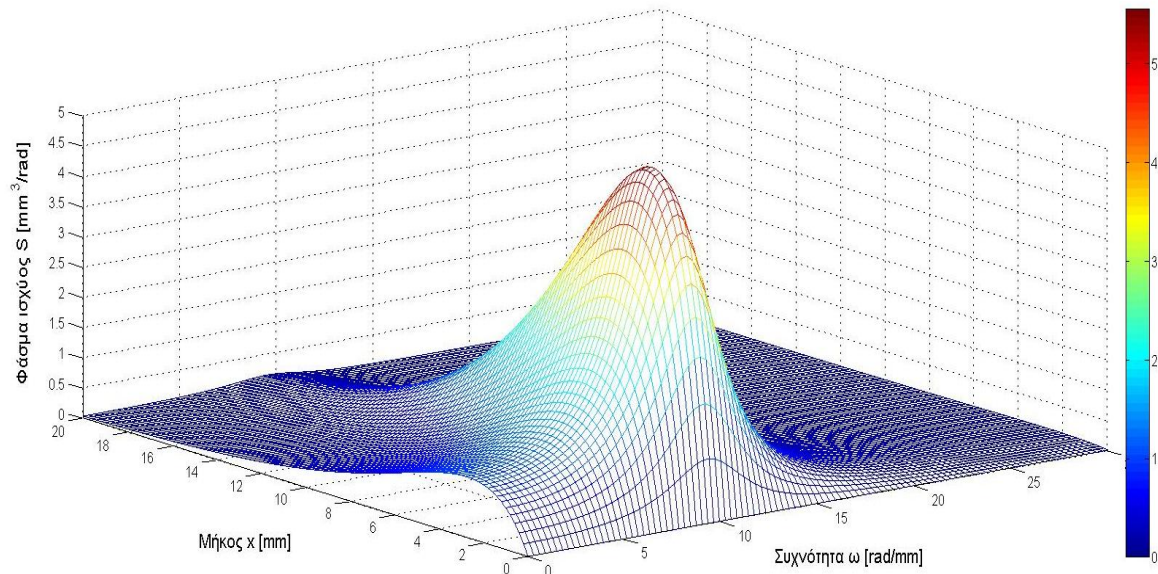
$$S(\omega) = \frac{1 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]} \quad (3.5)$$

$$g(x) = \frac{e^{-0.25x} - e^{-0.5x}}{0.25} \quad (3.6)$$

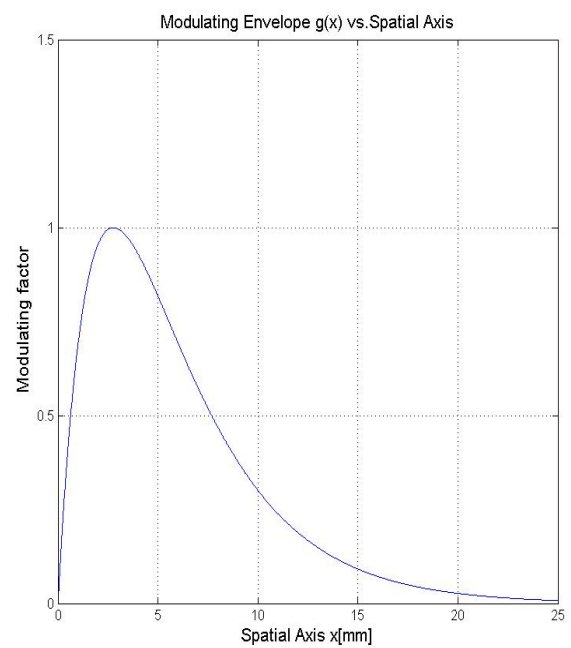
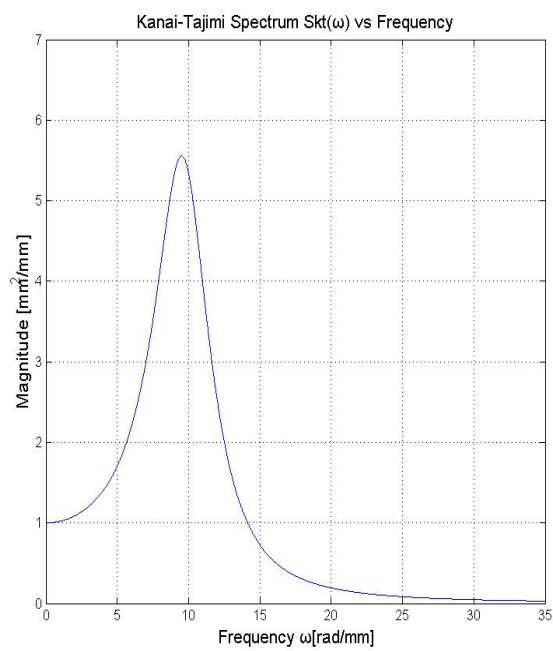
Οι παράμετροι $\omega_0=10$ rad/mm και $\zeta=0.24$ αντιπροσωπεύουν την φυσική συχνότητα και τον λόγο απόσβεσης, αντίστοιχα.

Παρακάτω παρουσιάζεται το ακριβές γράφημα του φάσματος Kanai-Tajimi(σχήμα 3.1) που είναι η απεικόνιση της εξίσωσης $S(\omega,x)=S(\omega) \cdot g(x)$,όπου $S(\omega)$ και $g(x)$ από τις εξισώσεις (3.5) και (3.6).Επίσης παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της εξίσωσης 3.5 και της εξίσωσης 3.6 στο σχήμα(3.2). Δημιουργώντας 5.000 δειγματοσυναρτήσεις και εφαρμόζοντας την STFT για διάφορα πλάτη παραθύρων T παίρνουμε εκτιμήσεις του φάσματος. Πρώτα πήραμε πολύ μικρό πλάτος $T=L/50$ (σχήμα3.3),μετά $T=L/10$ (σχήμα3.4) και για την ακραία περίπτωση το $T \approx L$ (σχήμα 3.4). Από τα τρία τελευταία σχήματα φαίνεται ξεκάθαρα ποσό σημαντικό είναι να επιλέξουμε το σωστό πλάτος παραθύρου.

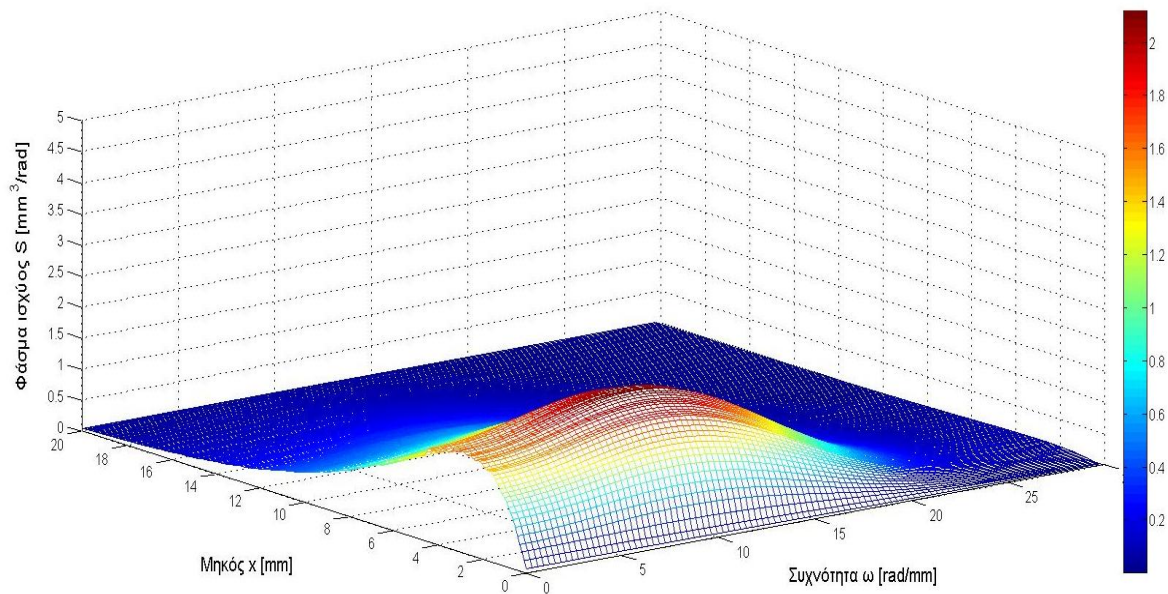
Ακόμη, στο σχήμα 3.6 βλέπουμε την περίπτωση που χρησιμοποιούμε στην μέθοδο παράθυρα μη επικαλυπτόμενα ,αλλά σε επαφή. Το παράθυρο έχει κεντραριστεί σε 16 θέσεις x_j που έχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Βλέπουμε λοιπόν πως επηρεάζεται η ομαλότητα της καμπύλης από αυτό.



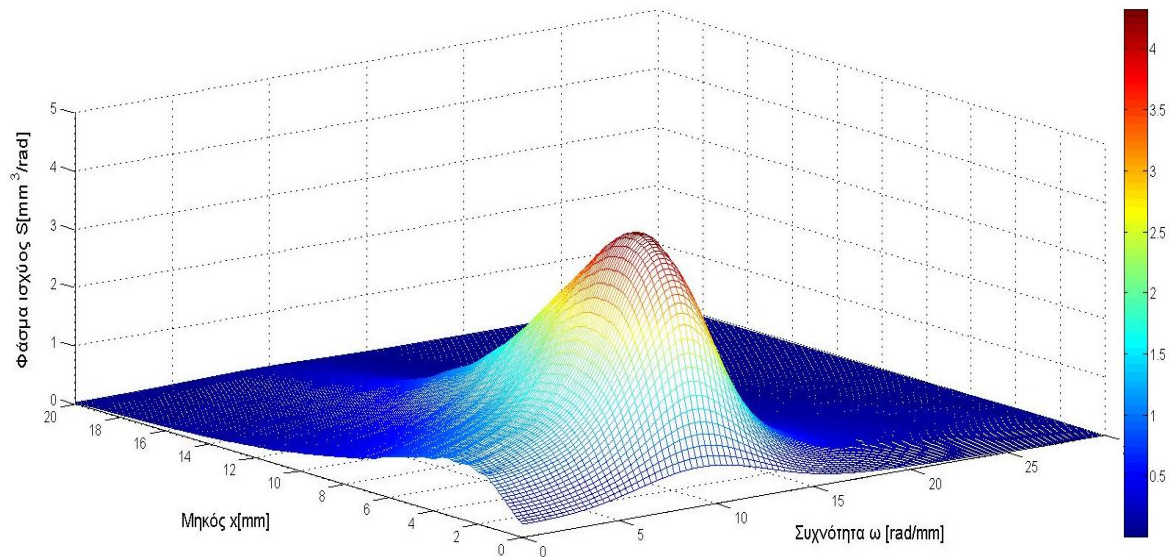
Σχήμα 3.1 : Ακριβές φάσμα Kanai-Tajimi. Με βάση αυτό γίνονται οι συγκρίσεις παρακάτω.



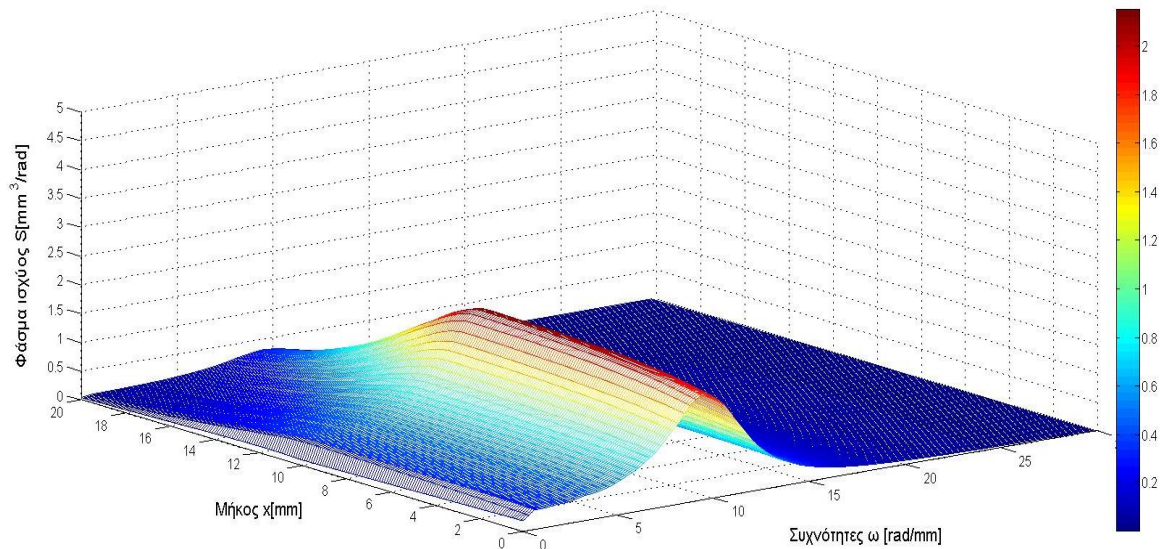
Σχήμα 3.2 : Γραφική παράσταση εξισώσεων (3.5) και (3.6)



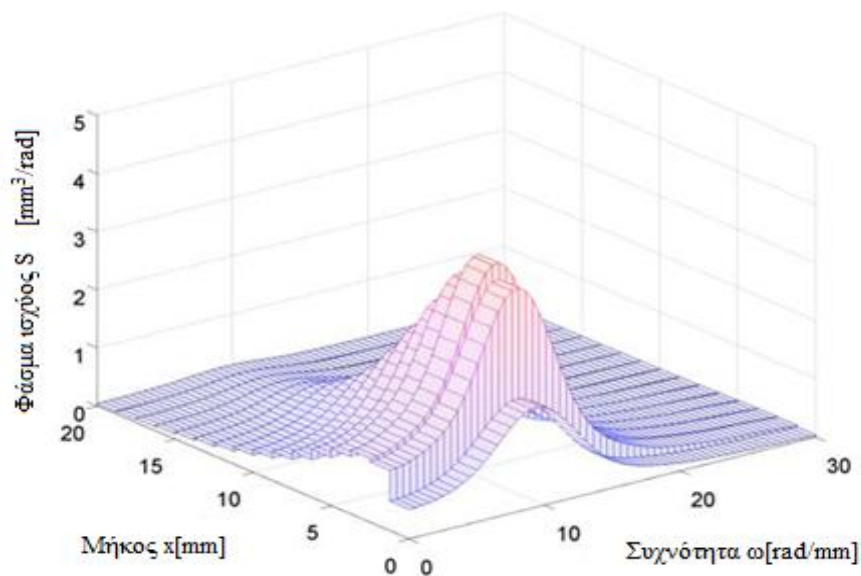
Σχήμα3.3: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με STFT για πλάτος παραθύρου $T=L/50$, δηλαδή πολύ μικρό. Βλέπουμε σε αυτό σχήμα αυτό που γράφτηκε στην αρχή για την μέθοδο, για αρκετά μικρό παράθυρο έχουμε κακή εκτίμηση στον άξονα των συχνοτήτων.



Σχήμα3.4: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με STFT για πλάτος παραθύρου $T=L/10$. Βλέπουμε σε αυτό σχήμα ότι υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια και στους δυο άξονες. Παρατηρούμε όμως ότι υπάρχει απόκλιση στις μέγιστες τιμές, εδώ γύρω στο 4.5 ενώ στο ακριβές γύρω στο 5.5. Δεν μας πειράζει αυτό, καθώς η μέθοδος χρησιμοποιείται για μια αρχική εκτίμηση.



Σχήμα3.5: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με STFT για πλάτος παραθύρου $T \approx L$, δηλαδή πολύ μεγάλο. Βλέπουμε σε αυτό σχήμα αυτό που γράφτηκε στην αρχή για την μέθοδο, για αρκετά μεγάλο παράθυρο έχουμε κακή εκτίμηση στον άξονα του χώρου.



Σχήμα3.6: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με STFT με μη επικαλυπτόμενα παράθυρα. Βλέπουμε ότι η καμπύλη γίνεται περισσότερο απότομη και λιγότερο ομαλή.

Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα 3.3 και 3.5 παίρνουν την μορφή των γραφημάτων του σχήματος 3.2. Έτσι επιβεβαιώνεται αυτό που αναφέρθηκε προηγουμένως μικρό παράθυρο καλή εκτίμηση της διανομής της ενέργειας στον άξονα του χρόνου και μεγάλο παράθυρο στον άξονα των συχνοτήτων.

3.2 Αρμονικός Μετασχηματισμός wavelet (harmonic wavelet transform).

Μια νέα προσέγγιση στην εκτίμηση φασμάτων ισχύος είναι η θεωρία wavelet, η οποία αναπτύχθηκε από τον Newland για την κοινή εκπροσώπηση χώρου και συχνοτήτων ενός εξελικτικού φάσματος ισχύος. Χρησιμοποιούμε και εδώ την έννοια του παραθύρου στον χώρο, το οποίο όπως και στην απεικόνιση των γενικευμένων αρμονικών wavelet συναρτήσεων δίνεται από την σχέση:

$$w_{m,n}\left(x - \frac{k}{n-m}\right) = \frac{e^{\ln 2\pi\left(x - \frac{k}{n-m}\right)} - e^{\ln 2\pi\left(x - \frac{k}{n-m}\right)}}{I 2\pi(n-m)\left(n - \frac{k}{n-m}\right)} \quad (3.7)$$

όπου η κλίμακα των συχνοτήτων (m, n) επιλέγονται έτσι ώστε να δημιουργούν ζώνες συχνοτήτων, τις οποίες και εδώ μπορούμε να τις φανταστούμε σαν παράθυρα, που βρίσκονται σε επαφή και όχι επικαλυπτόμενες μεταξύ τους. Το k και το ζεύγος (m, n) ορίζουν την ζώνη στον χώρο και στις συχνότητες, αντίστοιχα., που χωρίζουμε το φάσμα ισχύος.

Γενικά η wavelet μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα σύνολο από συναρτήσεις (σχέση (3.7)) "παράθυρα" που στην συνέχεια τα ενώνουμε μεταξύ τους. Όταν έχουμε σαν δεδομένα ένα σύνολο δειγμάτων $f^{(i)}(x)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές wavelet από την σχέση:

$$a_{(m,n),k}^{(i)} = (n-m) \int_0^L f^{(i)}(x) \cdot w^*\left(x - \frac{k}{n-m}\right) dx \quad (3.8)$$

όπου (*) δηλώνει πολύπλοκη σύζευξη. Με αυτό τον τρόπο έχουμε για μια συγκεκριμένη ζώνη (m, n) και διαφορετικές θέσεις $(x - k/(n-m))$ τους συντελεστές $a_{(m,n),k}^{(i)}$ για κάθε δειγματοσυνάρτηση $f^{(i)}(x)$.

Στη συνέχεια, βασιζόμαστε στην δουλειά του Σπανού και των συνεργατών του, η οποία απόδειξε ότι μια εκτίμηση ενός εξελικτικού φάσματος μπορεί να προέλθει από τους συντελεστές wavelet ως εξής:

$$\tilde{S}_{(m,n),k} = \frac{4E \left[\left| a_{(m,n),k}^{(i)} \right|^2 \right]}{n-m} \quad (3.9)$$

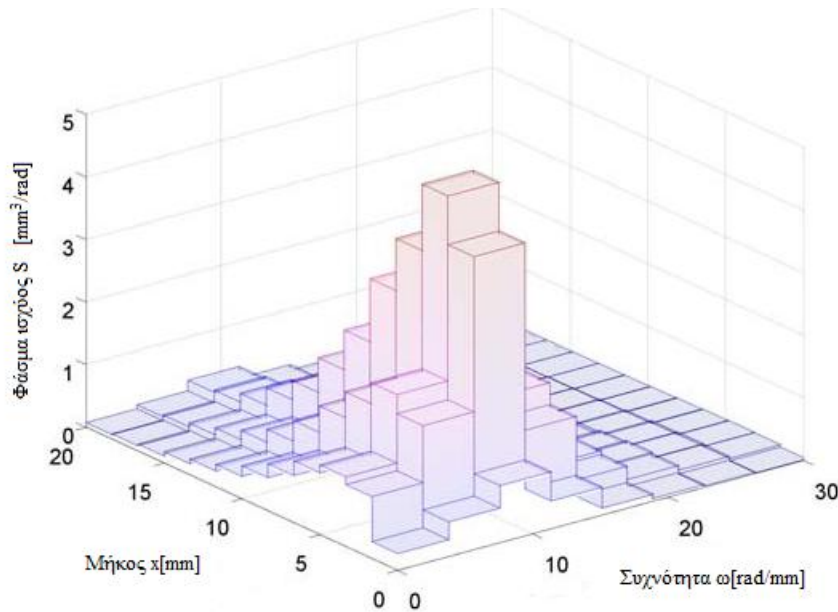
Με την σχέση (3.9) εκτιμάται η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας στις διακριτές περιοχές :

$$\frac{m2\pi}{L} \leq \omega < \frac{n2\pi}{L} \quad \text{και} \quad \frac{kL}{n-m} \leq x < \frac{(k+1)L}{n-m} \quad (3.10)$$

όπου $k=0, \dots, (n-m-1)$ προσδιορίζει το ζεύγος τιμών μεταξύ του άξονα του χώρου και των συχνοτήτων.

Ανάλογα με την ανάλυση Fourier, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας και της αλληλεξάρτησης της συχνότητας με τον χώρο, υπάρχει περιορισμός στον ταυτόχρονο εντοπισμό τους. Συγκεκριμένα, αν οι διαφορές στην κλίμακα (m, n) είναι μικρές έχουμε καλή ακρίβεια στον άξονα των συχνοτήτων, ενώ μεγάλες διαφορές στην κλίμακα (m, n) παίρνουμε ικανοποιητικότερη λύση για τον άξονα του χώρου.

Παράδειγμα της μεθόδου Wavelet παρουσιάζεται στο γράφημα (3.7), όπου φαίνεται μια λογική εκπροσώπηση του χώρου και των συχνοτήτων ταυτόχρονα. Παρουσιάζει όμως έντονες διακυμάνσεις με αποτέλεσμα η καμπύλη να είναι απότομη.



Σχήμα 3.7: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με την μέθοδο wavelet.

3.3 Μετασχηματισμός Winger-Ville (Winger-Ville transform).

Μια ποιοτικά διαφορετική προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τον Winger-Ville ,στην οποία μια εκτίμηση του εξελικτικού φάσματος ισχύος για μια σειρά δειγματοσυναρτήσεων $f^{(i)}(x)$ δίνεται από την σχέση:

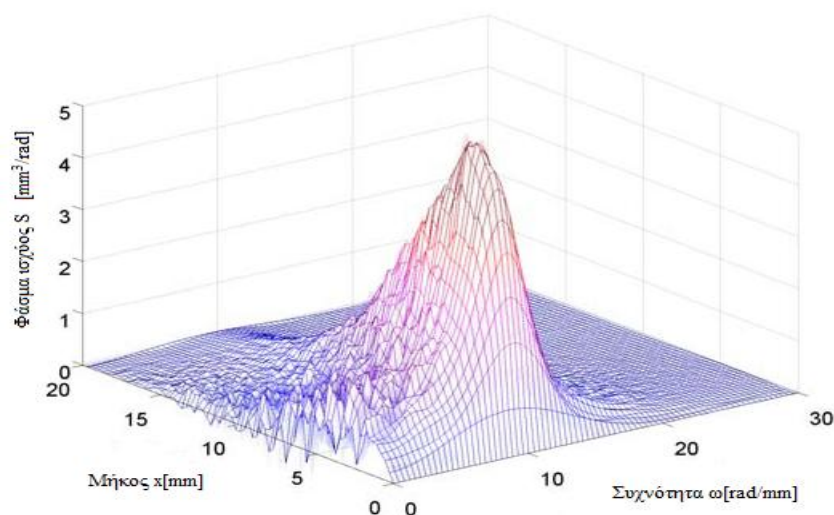
$$S(\omega, x) = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^L f^{(i)} \left(x + \frac{\tau}{2} \right) \cdot f^{(i)} \left(x - \frac{\tau}{2} \right) \cdot e^{-I\omega\tau} d\tau \right] \quad (3.11)$$

όπου τ είναι μια παράμετρος που μετακινείται. Η εξίσωση (3.11) μπορεί να ερμηνευτεί ως μετασχηματισμός Fourier μιας εκτίμησης της συνάρτησης αυτοσυσχετισμού ,που ορίζεται ως:

$$R(x, \tau) = E \left[f^{(i)} \left(x + \frac{\tau}{2} \right) \cdot f^{(i)} \left(x - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (3.12)$$

και έτσι παρέχεται μια εκτίμηση του φάσματος ισχύος βασισμένη στο Wiener- Khintchine θεώρημα.

Μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η ακριβής εκπροσώπηση των περιθωριακών φασματικών πυκνοτήτων ⁽¹⁾, που μας δείχνουν κατά πόσο έχουμε ακριβή εντοπισμό του χώρου και των συχνοτήτων. Όμως βασικά μειονεκτήματα της μεθόδου είναι ο μεγάλος αριθμός ταλαντώσεων στις τιμές του εκτιμώμενου φάσματος (δεν είναι ομαλή η καμπύλη) και το γεγονός ότι με την μέθοδο αυτή το φάσμα παίρνει αρνητικές τιμές. Το τελευταίο έρχεται σε αντίθεση με τον μαθηματικό ορισμό του φάσματος ισχύος και με την φυσική ερμηνεία της ενέργειας. Παρακάτω παρουσιάζεται το γράφημα (3.8) που είναι η εκτίμηση του φάσματος Kanai-Tajimi με την μέθοδο Winger-Ville για 10.000 δείγματα.



Σχήμα 3.8: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με την μέθοδο Winger-Ville.

Σημείωση: (1) Υπενθυμίζουμε ποιες είναι οι περιθωριακές φασματικές πυκνότητες:

$$E[|f(x)|^2] = 2 \int_0^\infty S(\omega, x) d\omega \quad (3.13) \quad \& \quad E[|F(\omega)|^2] = \int_0^L S(\omega, x) dx \quad (3.14)$$

Η πρώτη μας δείχνει την στοιχειώδη ενέργεια ή την στιγμιαία ισχύ στο χώρο και η δεύτερη μας δείχνει την στοιχειώδη ενέργεια στον άξονα των συχνοτήτων.

4. Μέθοδος separation (Method of separation).

Μια διαφορετική μέθοδος για την εκτίμηση διαχωρίσιμων φασμάτων ισχύος (*separable power spectrum*) παρουσιάζεται παρακάτω. Κάνοντας μια παρένθεση αναφέρουμε ότι ένα φάσμα ισχύος $S(\omega, x)$ είναι διαχωρίσιμο όταν μπορεί να αναλυθεί σε ένα ομογενές φάσμα $S(\omega)$ και σε μια συνάρτηση του χώρου $g(x)$, δηλαδή να ισχύει η σχέση:

$$S(\omega, x) = S(\omega) \cdot g(x) \quad (4.1)$$

Αν δεν ισχύει η σχέση τότε το φάσμα ισχύος είναι μη διαχωρίσιμο (*non-separable*). Η μέθοδος separation σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει την πρόκληση να υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια στον άξονα του χρόνου και των συχνοτήτων ταυτόχρονα. Αυτό είναι αρκετό σημαντικό για την ακριβή εκτίμηση εξελικτικών φασμάτων ισχύος από ισχυρά στενού εύρους τυχαία πεδία. Στον παρελθόν (διπλωματική εργασία Dominik Shillinger) μελετήθηκαν με την μέθοδο αυτή τυχαία πεδία ατελειών σε φορείς, τα οποία είναι στενού εύρους. Παρακάτω θα εφαρμοσθεί η μέθοδος για την εκτίμηση σεισμικών φασμάτων ισχύος που είναι μεγάλου εύρους (broad-band).

4.1 Διαχωρίσιμα φάσματα ισχύος

Η συγκεκριμένη αντιμετώπιση των φασμάτων ισχύος υποθέτει ότι το σύνολο των δειγματοσυναρτήσεων $f^{(i)}(x)$ εκπροσωπούν ένα διαχωρίσιμο ή τουλάχιστον περίπου διαχωρίσιμο τυχαίο πεδίο. Το ουσιώδες πλεονέκτημα της υπόθεσης αυτής στην παρούσα μελέτη είναι το σπάσιμο των συνδυασμένων εκτιμώμενων φασμάτων ισχύος σε δυο μέρη, το ένα είναι οι συχνότητες και το άλλο ο χώρος, τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν χωριστά. Ο ορισμός του φασματικού διαχωρισμού, εξίσωση (4.1), επιτρέπει κάθε συστατικό να επιλέγεται αυθαίρετα από ένα σύνολο ζευγών $[S'; g']$ τα οποία προέρχονται από τα αρχικά συστατικά $[S; g]$:

$$S'(\omega) = \lambda \cdot S(\omega) \quad (4.2\alpha)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot g(x) \quad (4.2\beta)$$

όπου λ είναι ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Οι σχέσεις (4.2) αποτελούν σύνολα γεωμετρικά ανάλογων συναρτήσεων, των οποίων το ενεργειακό περιεχόμενο, δηλαδή η περιοχή κάτω από την καμπύλη, ποικίλλει λόγω του λ , ενώ η διανομή της ενεργείας πάνω στον άξονα των συχνοτήτων και του χώρου, δηλαδή το σχήμα της καμπύλης, παραμένει ίδια. Το αποτέλεσμα των εξισώσεων (4.2) αποδίδει συνήθως το σωστό εξελικτικό φάσμα $S(\omega, x)$.

Στη μέθοδο separation, η συνιστώσα του φάσματος, εξίσωση (4.2α), επιλέγεται όπως στο ομογενές Fourier φάσμα ισχύος:

$$S_h(\omega) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L S(\omega, x) dx = \lambda_h \cdot S(\omega) \quad (4.3)$$

όπου το περιεχόμενο των συχνοτήτων του εξελικτικού φάσματος $S(\omega, x)$ υπολογίζεται στο μήκος L του σήματος. Η αντίστοιχη $g_h(x)$ μπορεί να λαμβάνεται από την εξίσωση (4.2β) με συντελεστή

$$\lambda_h = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L g(x) dx \quad (4.4)$$

Επομένως το εξελικτικό φάσμα $S(\omega, x)$ στη μέθοδο separation μπορεί να αποσυντίθεται σε

$$S(\omega, x) = S_h(\omega) \cdot g_h(x) \quad (4.5)$$

Μια εκτίμηση $\tilde{S}_h(\omega)$ του ομογενούς Fourier φάσματος ισχύος της εξίσωσης (4.5) μπορεί να ληφθεί από την εξίσωση (3.1), όπου το περιεχόμενο των συχνοτήτων υπολογίζεται από τον μετασχηματισμό Fourier στο μήκος L των διαχωρίσιμων δειγματοσυναρτήσεων. Αυτό ανταποκρίνεται στον ορισμό του $S_h(\omega)$ της εξίσωσης (4.3). Επιπλέον, μια εκτίμηση $\tilde{g}_h(x)$ της συνάρτησης του χώρου μπορεί να ληφθεί από τον μέσο όρο των τετραγώνων των δειγματοσυναρτήσεων $f^{(i)}(x)$. Από την σχέση (3.13) έχουμε:

$$E[f(x)^2] = 2 \int_0^\infty S_h(\omega) \cdot g_h(x) d\omega = g_h(x) \cdot 2 \int_0^\infty S_h(\omega) d\omega \quad (4.6)$$

Η εκτίμηση $\tilde{g}_h(x)$ μπορεί να υπολογισθεί αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.6) το αναλυτικό ομογενές φάσμα $S_h(\omega)$ και τον μέσο όρο των τετραγώνων $E[f(x)^2]$ με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις :

$$\tilde{g}_h(x) = \frac{E[f^{(i)}(x)^2]}{2 \int_0^\infty \tilde{S}_h(\omega) d\omega} \quad (4.7)$$

Η τελική εκτίμηση του φάσματος μπορεί να υπολογισθεί αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.5) το εκτιμώμενο $\tilde{S}_h(\omega)$ από την εξίσωση (3.1) και την $\tilde{g}_h(x)$ από την εξίσωση (4.7). Άρα θα έχουμε:

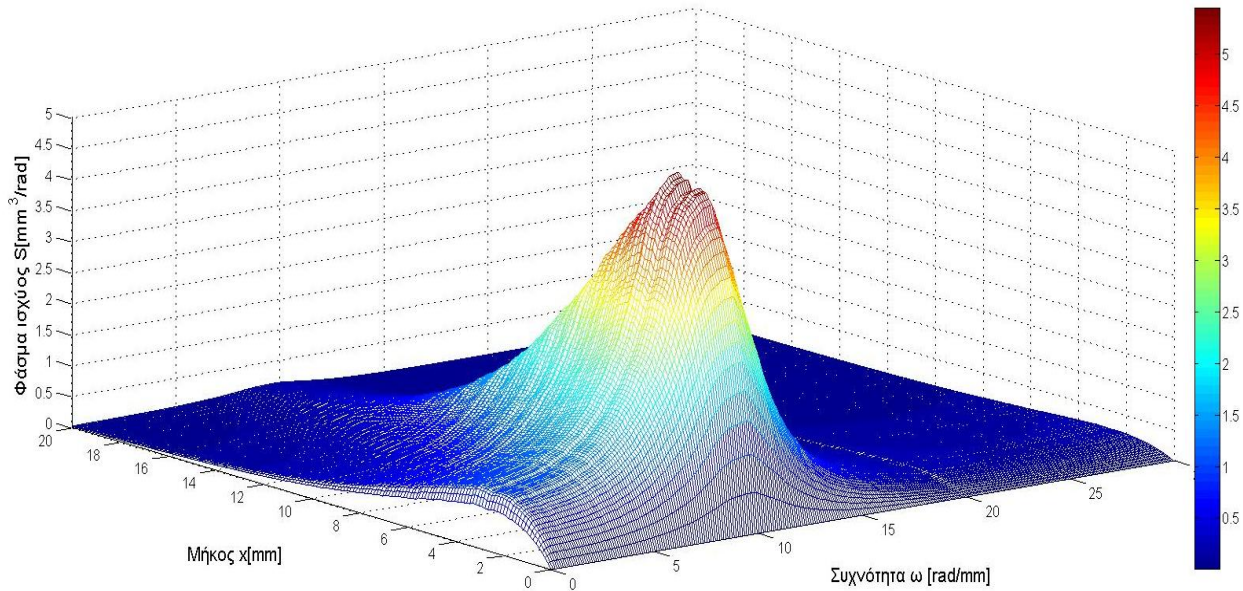
$$\tilde{S}(\omega, x) = E[f^{(i)}(x)^2] \cdot \frac{\tilde{S}_h(\omega)}{2 \int_0^\infty \tilde{S}_h(\omega) d\omega} \quad (4.8)$$

Ο συντελεστής $1/2$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.8) είναι απαραίτητος, καθώς λαμβάνουμε υπόψη μόνο την μια πλευρά του συμμετρικού αμφίπλευρου φάσματος ισχύος. Στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.8) έχουμε ένα κλάσμα που ο αριθμητής του είναι η εκτίμηση $\tilde{S}_h(\omega)$, που κανονικοποιείται από τον παρονομαστή που έχει σταθερή τιμή και συμβολίζει όλο το ενεργειακό περιεχόμενο, δηλαδή το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\tilde{S}_h(\omega)$. Αυτό μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχτεί ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.8) ως προς τον άξονα των συχνοτήτων:

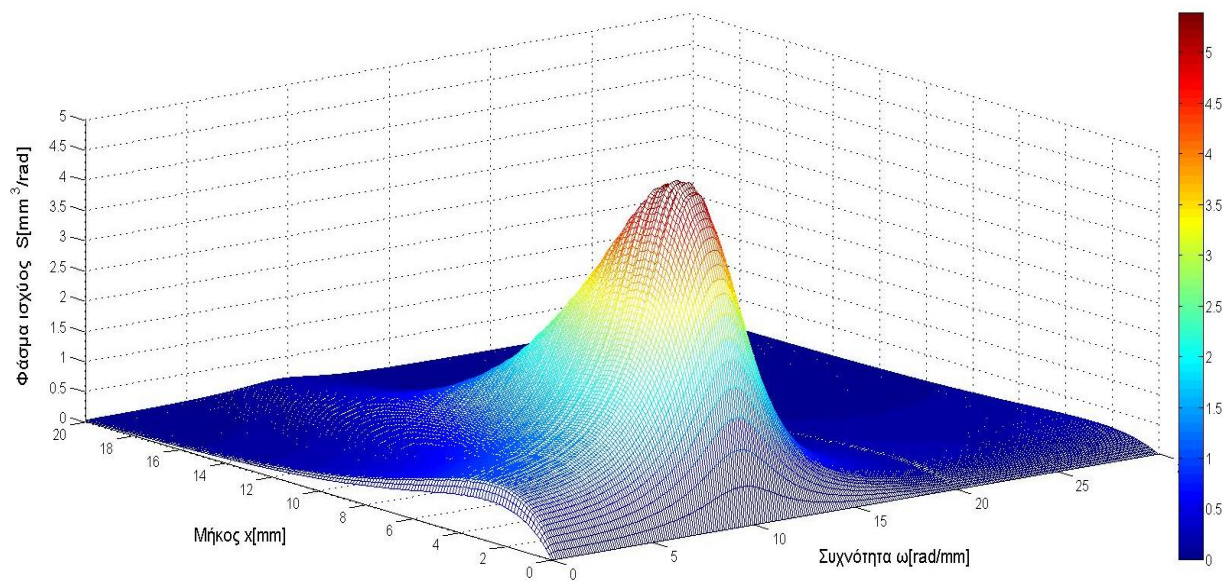
$$\int_0^\infty \frac{\tilde{S}_h(\omega)}{\int_0^\infty \tilde{S}_h(\omega)} d\omega = 1 \quad (4.9)$$

Ακόμη, το δεξιό μέρος της εξίσωσης (4.8) περιλαμβάνει τον μέσο όρο των τετραγώνων των δειγμάτων $f^{(i)}(x)$, το οποίο δίνεται από την εξίσωση (3.13), αποτελεί εκτίμηση της στοιχειώδους ενεργείας στον χώρο. Άρα η εξίσωση (4.8) μπορεί να ερμηνευτεί σε κάθε θέση x ως η διανομή του μέσου όρου των τετραγώνων στον άξονα των συχνοτήτων ενός κανονικοποιημένου φάσματος ισχύος.

Η μέθοδος separation ελέγχεται με το φάσμα ισχύος Kanai-Tajimi. Την εφαρμόζουμε για δυο περιπτώσεις: για 10.000 (σχήμα 4.1) και 60.000 (σχήμα 4.2) δειγματοσυναρτήσεις. Βλέπουμε ότι αυτή η μέθοδος είναι πιο ακριβής από τις υπόλοιπες που αναπτύχθηκαν παραπάνω, καθώς εκτιμάει με μεγάλη ακρίβεια τις μέγιστες τιμές και την διανομή της ενεργείας στους δυο άξονες.



Σχήμα 4.1: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με την μέθοδο separation για 10.000 δειγματοσυναρτήσεις.



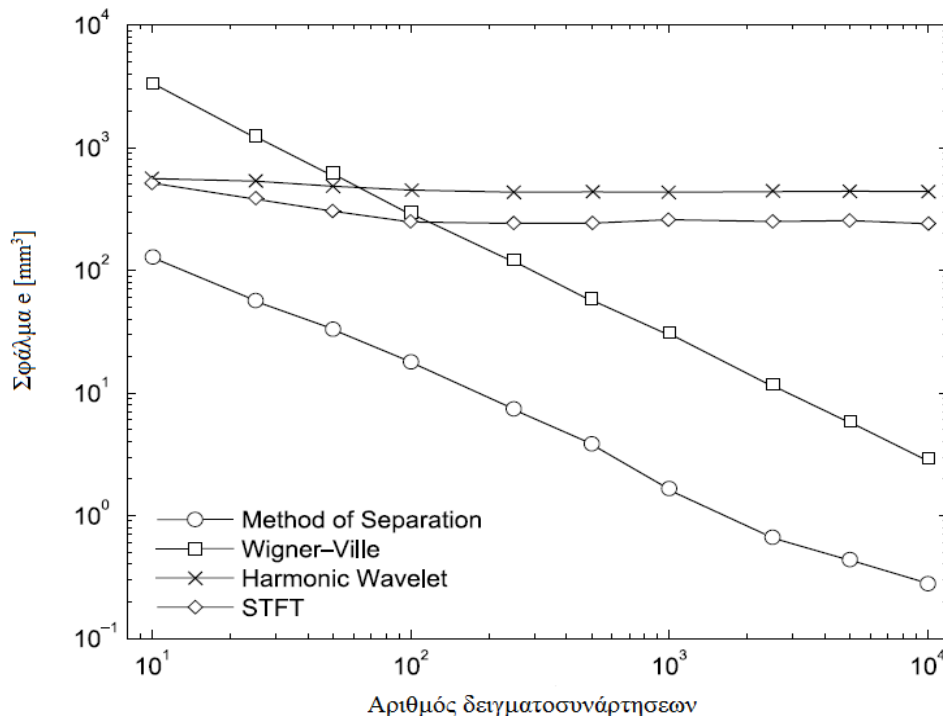
Σχήμα 4.2: Εκτίμηση φάσματος Kanai-Tajimi με την μέθοδο separation για 60.000 δειγματοσυναρτήσεις.

Συμπεράσματα:

- ❖ Παρατηρούμε λοιπόν ότι η μέθοδος separation εκτιμά καλύτερα τις κλίσεις του φάσματος και τις μέγιστες τιμές σε σύγκριση με την STFT και τον wavelet μετασχηματισμό. Επίσης σε σύγκριση με την Winger-Ville για τον ίδιο αριθμό δειγματοσυναρτήσεων (βλέπε σχήμα 4.1 και 3.7) παρατηρούμε ότι υπολογίζουν και οι δύο με μεγάλη ακρίβεια τις μέγιστες τιμές, όμως η Winger-Ville οδηγεί σε ένα φάσμα με απότομες διακυμάνσεις και η μέθοδος separation σε πιο ομαλή (smooth) καμπύλη. Ακόμη, από τα δυο σχήματα 4.1 και 4.2 βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των δειγματοσυναρτήσεων τόσο πιο ομαλή γίνεται η καμπύλη.
- ❖ Σημαντικό είναι και το θέμα της σύγκλισης, δηλαδή πόσες δειγματοσυναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε ώστε να έχουμε ικανοποιητική ακρίβεια. Κατά τον Monte-Carlo η στοχαστική σύγκλιση ελέγχεται από το τετράγωνο της διαφοράς μεταξύ του ακριβούς S_{ex} φάσματος Kanai-Tajimi και του εκτιμουμένου \tilde{S}_m , την οποία ολοκληρώνουμε στους άξονες του χώρου και των συχνοτήτων:

$$e(m) = \int_0^L \int_0^\infty (S_{ex} - \tilde{S}_m)^2 dx d\omega \quad (4.10)$$

Το σφάλμα e της εξίσωσης (4.10) που εξαρτάται από τον αριθμό m των δειγμάτων $f^{(i)}(x)$, $i=1, \dots, m$ που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του \tilde{S}_m , απεικονίζεται στο σχήμα 4.3 για κάθε μέθοδο που αναπτύχθηκε παραπάνω. Παρατηρούμε ότι η STFT και η wavelet δεν συγκλίνουν σε ένα ικανοποιητικό σφάλμα λόγω της αρχής της αβεβαιότητας, ενώ η separation και η Winger-Ville έχουν μονοτονική σύγκλιση με την πρώτη να είναι ταχύτερη. Άρα από όλες τις απόψεις η μέθοδος separation υπερτερεί σε σχέση με τις υπόλοιπες.



Σχήμα 4.3: Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται το σφάλμα συναρτήσεων των αριθμό των δειγματοσυναρτήσεων για κάθε μέθοδο.

4.2 Μη διαχωρίσιμα φάσματα ισχύος

Ένας περιορισμός της μεθόδου separation είναι ότι σε γενικά φάσματα ισχύος δεν ισχύει η υπόθεση του διαχωρισμού(non-separable). Έτσι σε ένα μη διαχωρίσιμο φάσμα ισχύος η μέθοδος δεν εκτιμά σωστά την διανομή της ενέργειας στον άξονα των συχνοτήτων και δεν γίνεται σωστή εκτίμηση του φάσματος. Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί αν ο τομέας συχνότητα και χώρου ξεχωριστά σε μικρότερα τμήματα όπου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μέσα σε αυτά ισχύει η διαχωρισσιμότητα. Άρα χρησιμοποιώντας μια ασθενέστερη υπόθεση της αρχικής, σπάμε ένα μη διαχωρίσιμο φάσμα σε επιμέρους φάσματα όπου εφαρμόζεται η μέθοδος με ικανοποιητική ακρίβεια. Στη συνέχεια, πρέπει να εκτιμήσουμε το φάσμα σε όλο τον τομέα με μια άλλη μέθοδο, όπως είναι η STFT και στην συνέχεια να αποφασίσουμε πως θα χωρίσουμε τους άξονες των συχνοτήτων και του χώρου. Τέλος, έχοντας εφαρμόσει την μέθοδο separation σε όλο σε κάθε τμήμα υπολογίζουμε τα αντίστοιχα υπό-φάσματα, τα οποία συναρμολογούμε και προκύπτει το τελικό εκτιμώμενο φάσμα σε όλο τον τομέα.

Για να οριστούν οι ορθογώνιες και μη επικαλυπτόμενες υπό-περιοχές ορίζουμε αντίστοιχα ζεύγη στον άξονα του χώρου $[x_r, x_{r+1}]$ και στον άξονα των συχνοτήτων $[\omega_s, \omega_{s+1}]$. Από την μια πλευρά, αυτό μας οδηγεί σε p διαχωρίσιμα επιμέρους φάσματα τα οποία μπορούν να ευθυγραμμιστούν στον άξονα του χώρου σε διαδοχικά τμήματα $[x_r, x_{r+1}]$, $r=1, \dots, p$. Ο διαχωρισμός στον άξονα του χώρου γίνεται αρκετά εύκολα, με τον διαχωρισμό του συνόλου των δειγματοσυναρτήσεων $f^{(i)}(x)$ στα χωρικά τμήματα $[x_r, x_{r+1}]$. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο σε p διαχωρίσιμα τμήματα. Από την άλλη πλευρά, αυτό μας οδηγεί σε q διαχωρίσιμα επιμέρους φάσματα ευθυγραμμισμένα στον άξονα των συχνοτήτων σε διαδοχικά τμήματα $[\omega_s, \omega_{s+1}]$, $s=1, \dots, q$. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει η μέθοδος separation να τροποποιηθεί, καθώς η εκτίμηση της $\tilde{g}_h(x)^s$ στα q τμήματα των συχνοτήτων απαιτεί την αφαίρεση των συχνοτήτων από τις $f^{(i)}(x)$ που δεν συμβάλουν στο διάστημα $[\omega_s, \omega_{s+1}]$. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\tilde{g}_h(x)^s = \frac{E \left[\left| \phi \left[f^{(i)}(x) \right]_{\omega_s}^{\omega_{s+1}} \right|^2 \right]}{2 \int_{\omega_s}^{\omega_{s+1}} S(\omega) d\omega} \quad (4.11)$$

όπου $\phi \left[\right]_{\omega_s}^{\omega_{s+1}}$ σημαίνει μια διαδικασία φίλτρου των συναρτήσεων $f^{(i)}(x)$ στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν.

Για να ελέγξουμε την μέθοδο σε μη διαχωρίσιμα πεδία χρησιμοποιούμε το εξής φάσμα ισχύος:

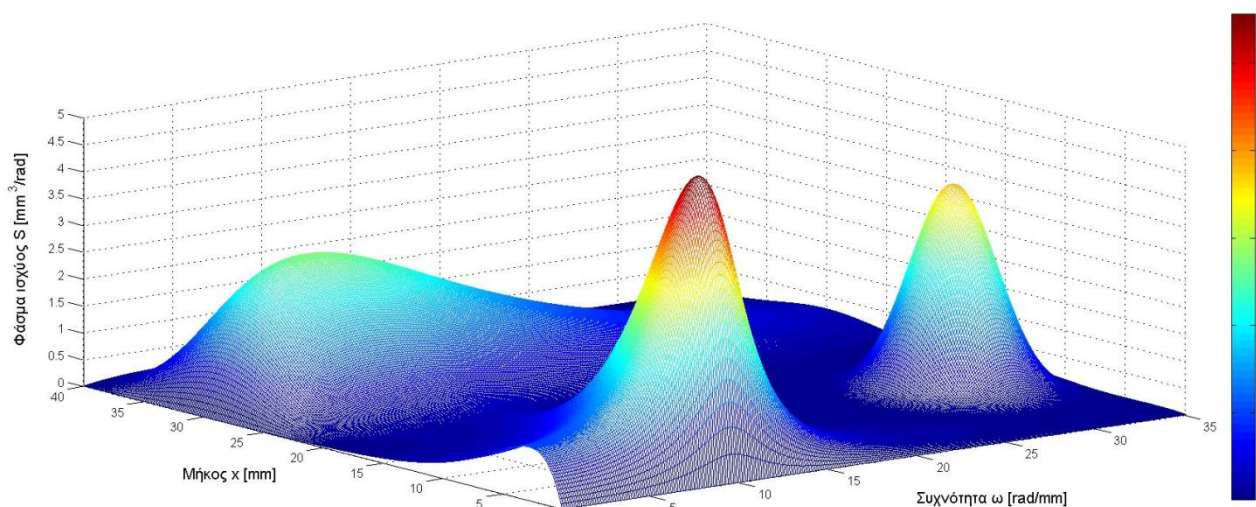
$$S(\omega, x) = \sum_{i=1}^3 S_i(\omega) \cdot g_i(x) \quad (4.12)$$

όπου το πρώτο συστατικό είναι το φάσμα ισχύος του Kanai-Tajimi που δίνεται από τις σχέσεις (3.5) και (3.6). Το δεύτερο και το τρίτο συστατικό δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$S_2(\omega) = \frac{e^{-0.15(-\omega+30)^2}}{0.26} \quad \text{και} \quad g_2(x) = e^{-0.08(-x+12)^2} \quad (4.13)$$

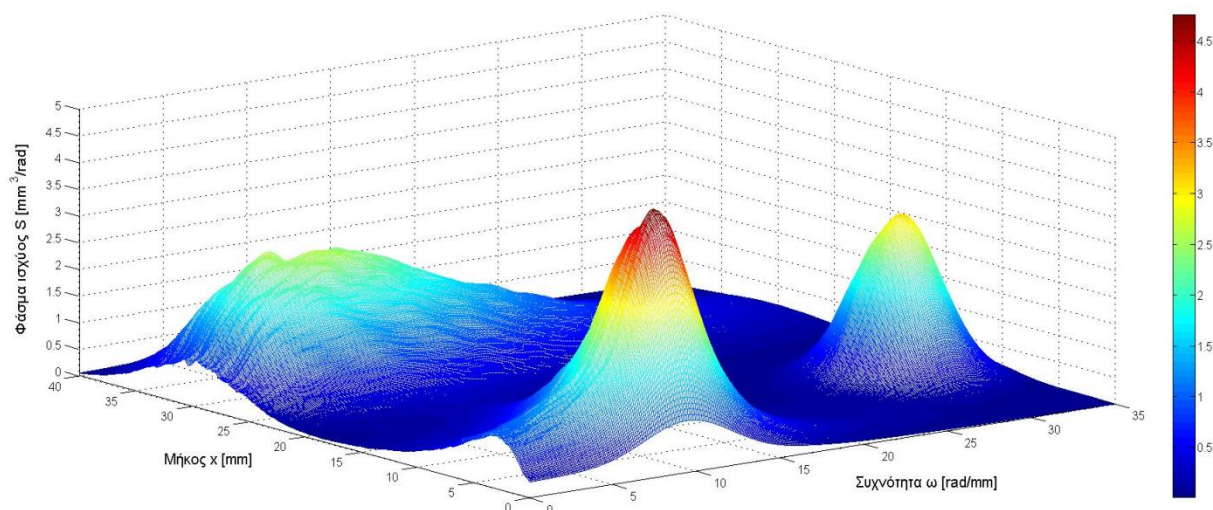
$$S_3(\omega) = \frac{e^{-0.1\omega} - e^{-0.25\omega}}{0.12} \quad \text{και} \quad g_3(x) = e^{-0.03(-x+30)^2} \quad (4.13)$$

Το ακριβές φάσμα ισχύος για την μη διαχωρίσιμη περίπτωση παρουσιάζεται στο σχήμα (4.4)



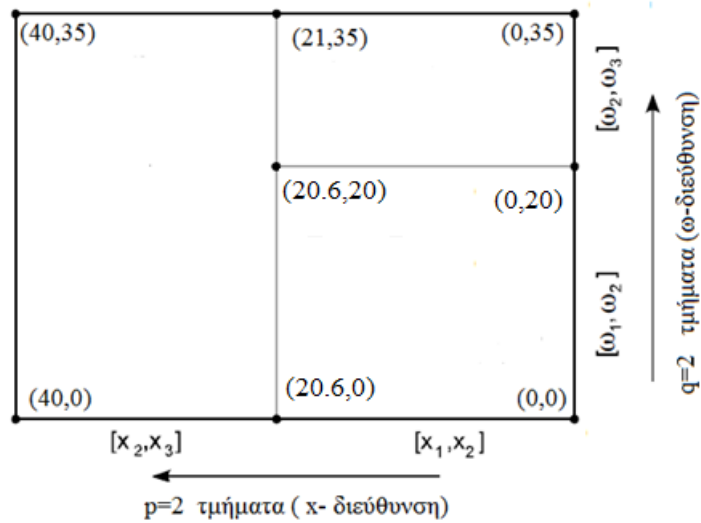
Σχήμα4.4: Ακριβές φάσμα με το οποίο θα συγκρίνουμε την μέθοδο separation.

Αρχικά εκτιμούμε το φάσμα με την μέθοδο STFT και για 1.000 δειγματοσυναρτήσεις. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.5.

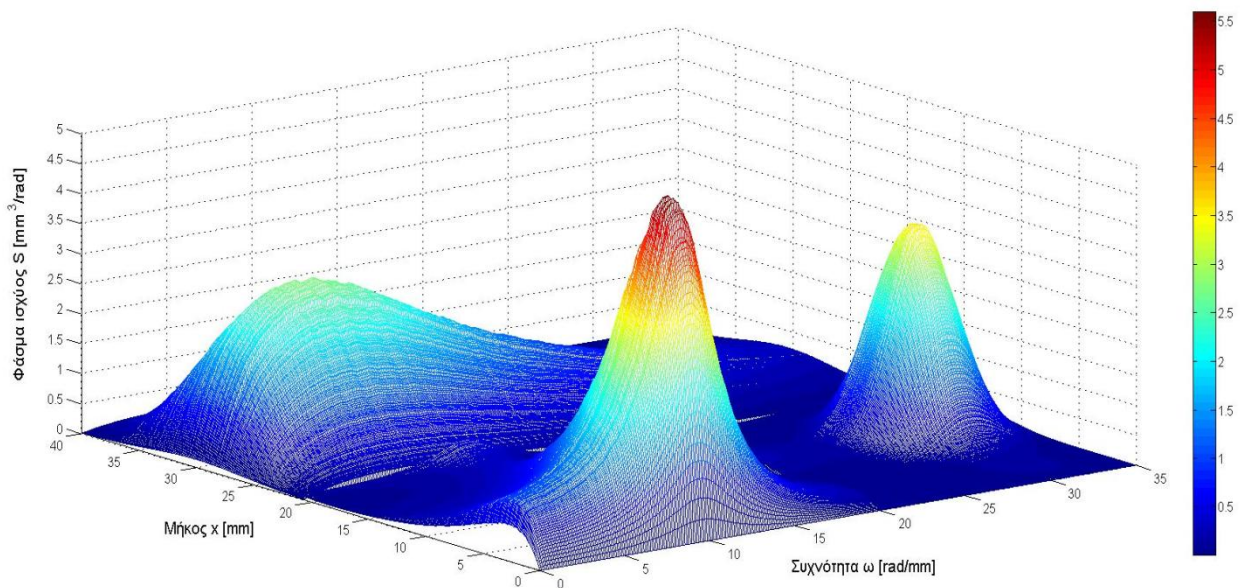


Σχήμα4.5: Εκτίμηση με την μέθοδο STFT. Σε αυτό το σχήμα φαίνεται το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου να εφαρμόζεται σε όλο το χωρίο.

Τον τομέα θα τον χωρίσουμε στα εξής τμήματα σχήμα 4.6 ,όπου θα εφαρμόσουμε την μέθοδο separation σε καθένα από αυτό. Μετά θα ενώσουμε τα γραφήματα και θα πάρουμε το σχήμα 4.7.Χρησιμοποιήσαμε 15.000 δειγματοσυναρτήσεις.



Σχήμα4.6: Τα τμήματα που χωρίζουμε τους άξονες.



Σχήμα4.7: Με την μέθοδο separation εκτίμηση του μη διαχωρίσιμου πεδίου για 15000 δειγματοσυναρτήσεις.

5. Υπολογισμός Περιοδογραφήματος –Μέθοδος Τραπεζίου.

5.1 Υπολογισμός Περιοδογραφήματος.

Η σχέση που μας δίνει το περιοδογράφημα είναι η (3.1). Υπολογίζουμε για κάθε δειγματοσυνάρτηση το περιοδογράφημα και παίρνουμε τον μέσο όρο. Άρα για ένα δείγμα έχουμε:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx \right|^2 \quad (5.1)$$

όπου $||$ δηλώνει μέτρο μιγαδικού αριθμού. Ακόμη, από τα μαθηματικά γνωρίζουμε ότι :

$e^{-i\omega x} = \cos(\omega \cdot x) - i \cdot \sin(\omega \cdot x)$.Αντικαθιστώντας, την τελευταία σχέση στην (5.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f(x) \cdot e^{-i\omega x} dx \right|^2 = \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f(x) \cdot (\cos(\omega \cdot x) - i \cdot \sin(\omega \cdot x)) dx \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi L_x} \left| \int_0^{L_x} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot x) dx - \left(\int_0^{L_x} f(x) \cdot \sin(\omega \cdot x) dx \right) \cdot i \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi L_x} |A(\omega) - i \cdot B(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Στην τελευταία σχέση (4.16) έχουμε:

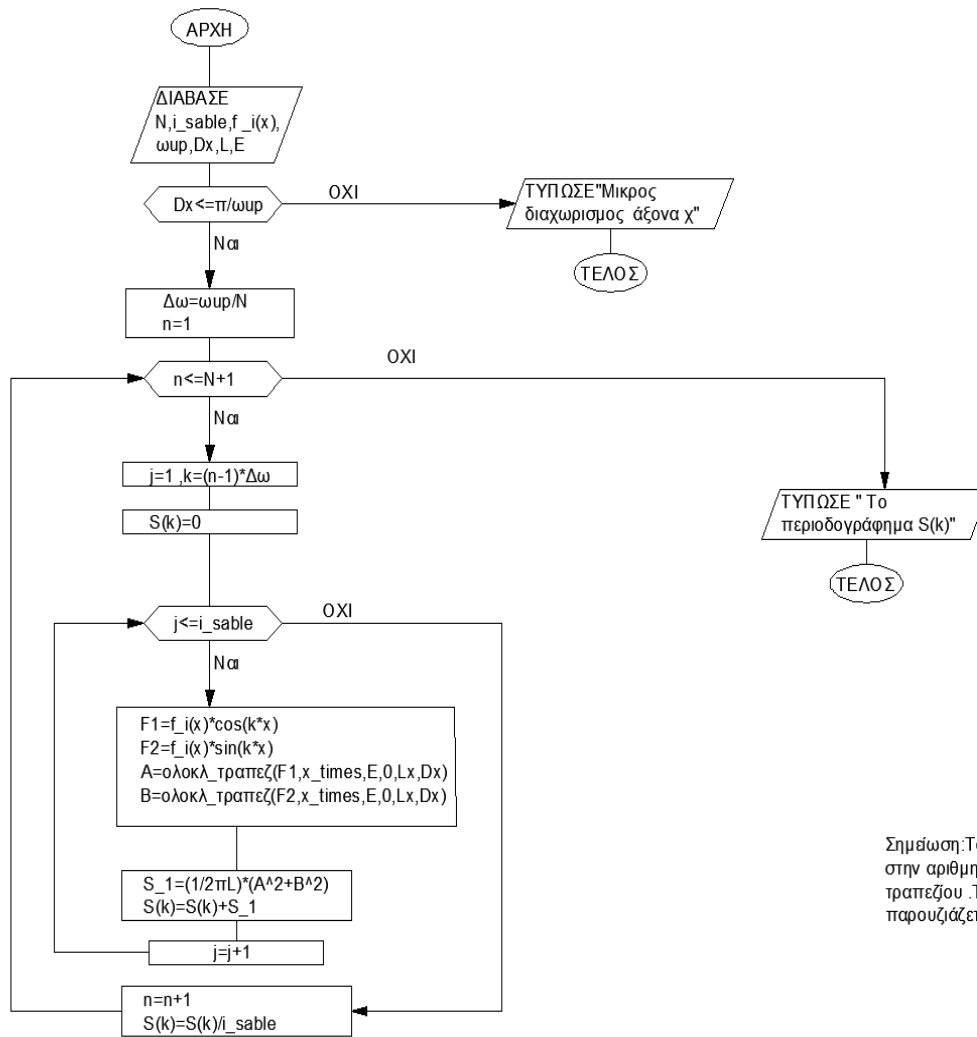
$$A(\omega) = \int_0^{L_x} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot x) dx \quad (5.3 \alpha)$$

$$B(\omega) = \int_0^{L_x} f(x) \cdot \sin(\omega \cdot x) dx \quad (5.3 \beta)$$

Άρα οι τιμές του περιοδογραφήματος για κάθε θέση ω ενός δείγματος ,λαμβάνοντας υπόψη της παραπάνω σχέσεις , δίνεται από την σχέση:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi L_x} (A^2(\omega) + B^2(\omega)) \quad (5.4)$$

Παρακάτω στο σχήμα 5.1 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ροής για τον προγραμματισμό του υπολογισμού του περιοδογραφήματος. Θεωρούμε σαν δεδομένα τις δειγματοσυναρτήσεις, το μήκος L , το Δx , το ω_{up} , τον αριθμό N των τμημάτων που θα χωρίσουμε τον άξονα των συχνοτήτων και την επιθυμητή ακρίβεια E στην ολοκλήρωση.

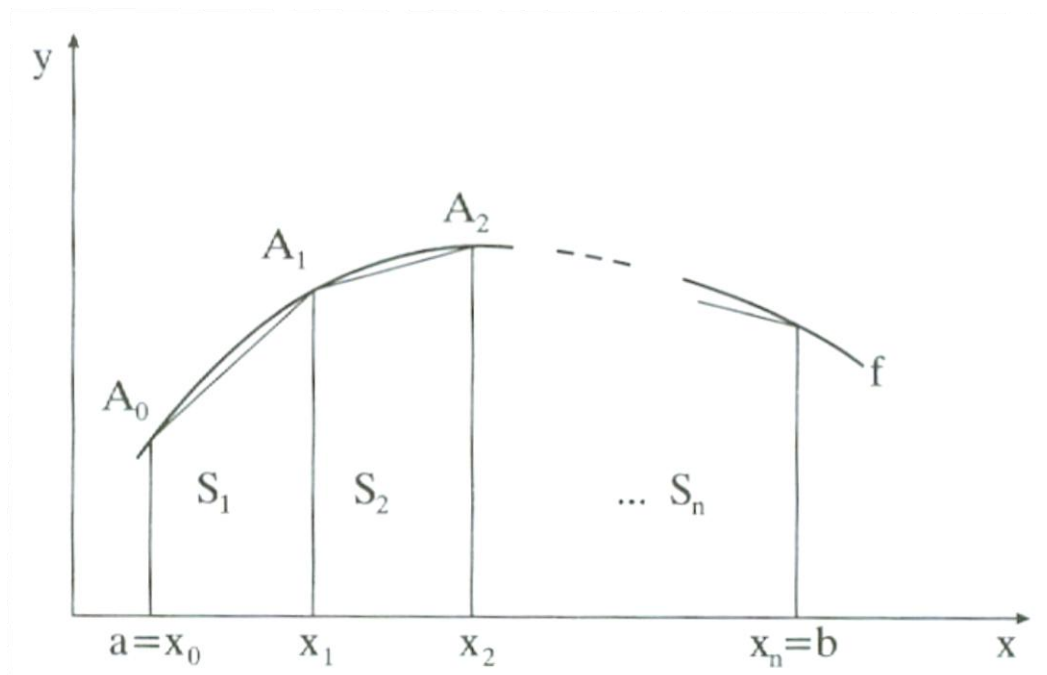


Σχήμα 5.1: Διάγραμμα ροής για τον υπολογισμό του περιοδογραφήματος.

5.2 Ολοκλήρωση με την μέθοδο του τραπεζίου.

Τα ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται αναλυτικά αλλά με αριθμητικές μεθόδους για λόγους μείωσης του υπολογιστικού κόστους. Παρακάτω αναπτύσσεται η μέθοδος του τραπεζίου καθώς αυτή είναι που χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της διπλωματικής εργασίας.

Έστω ότι έχουμε την καμπύλη $y=f(x)$. Στον κανόνα του τραπεζίου η καμπύλη προσεγγίζεται με τεθλασμένη γραμμή (σχήμα 5.2). Το εμβαδόν του πολυγώνου $aA_0 \dots bA_n$ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τραπεζίων S_1, S_2, \dots, S_n .



Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση του τύπου του τραπεζίου.

Επειδή $S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} h$, $S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} h$, κ.λπ. θα είναι :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \Rightarrow$$

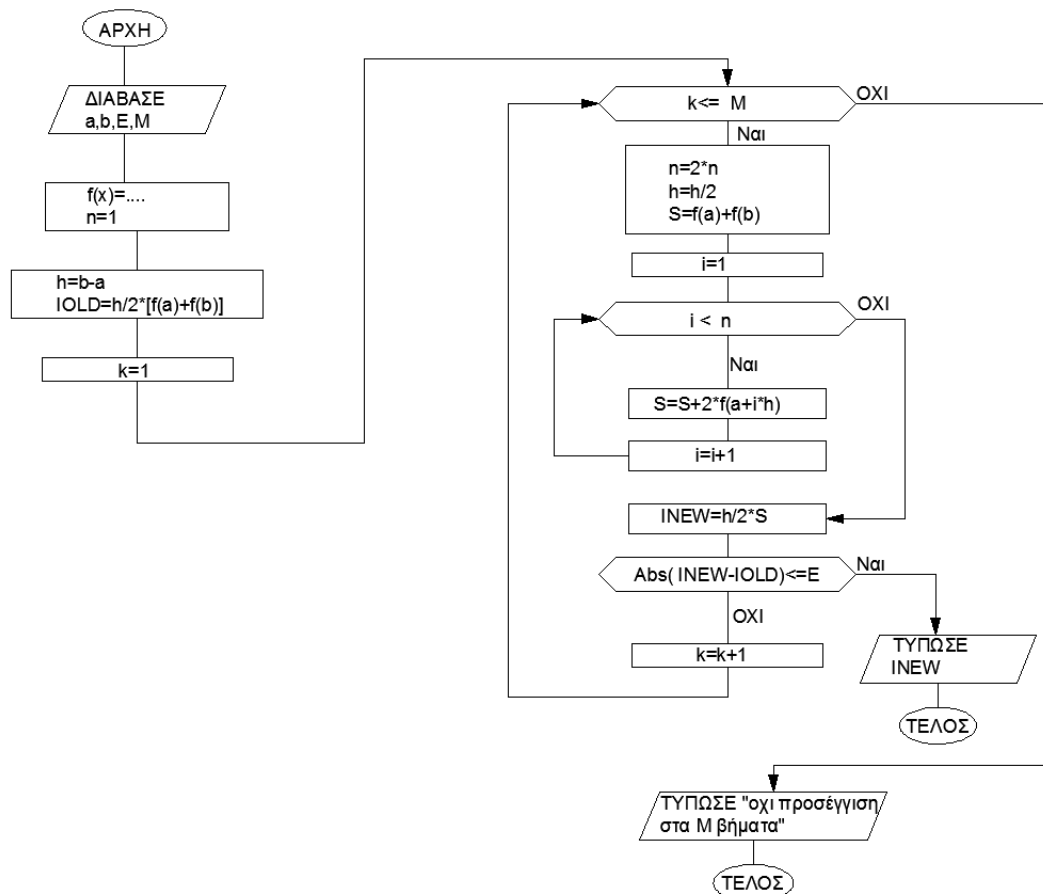
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (5.5)$$

Αυτός είναι ο σύνθετός τύπος του τραπεζίου. Η απλούστερη μορφή αυτού, που λέγεται απλός κανόνας του τραπεζίου, είναι:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_a + y_b}{2} h \quad (5.6)$$

Σίγουρα είναι μια μέθοδος ολοκλήρωσης που δίνει καλύτερη προσέγγιση από τον κανόνα του Ορθογωνίου αφού αντικαθιστάμε τη κλιμακωτή γραμμή από μια τεθλασμένη. Όμως, η ακρίβεια στην ολοκλήρωση εξαρτάται από τον αριθμό n που διαχωρίζουμε τον συνολικό εμβαδόν.

Για να πετύχουμε μια καλή προσέγγιση ενός ολοκληρώματος, δημιουργούμε μια συγκλίνουσα προς το ολοκλήρωμα *ακολουθία προσεγγίσεων*. Αρχικά επιλέγουμε προσέγγιση με τον απλό τύπο του τραpezίου, σχέση (5.5), έχοντας διαμέριση με ένα διάστημα ($n=1$). Στην συνέχεια αυξάνουμε το πλήθος διαστημάτων ($n_{\text{new}}=n_{\text{old}}+1$ ή $n_{\text{new}}=2 \cdot n_{\text{old}}$) και χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του τραpezίου, σχέση (5.6), υπολογίζουμε μια νέα προσέγγιση. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρεθούν δυο διαδοχικές προσεγγίσεις σε απόσταση "πολύ" μικρή μεταξύ τους ή να υπολογισθούν το πολύ M προσεγγίσεις (για δεδομένο ακέραιο αριθμό). Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ροής (σχήμα 5.3) για την ολοκλήρωση με τον τύπο του τραpezίου. Σε αυτό υπολογίζεται για M προσεγγίσεις την τιμή του ολοκληρώματος και αν έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση E τότε εμφανίζει την τιμή της ολοκλήρωσης. Διαφορετικά εμφανίζει "όχι προσέγγιση στα M βήματα".

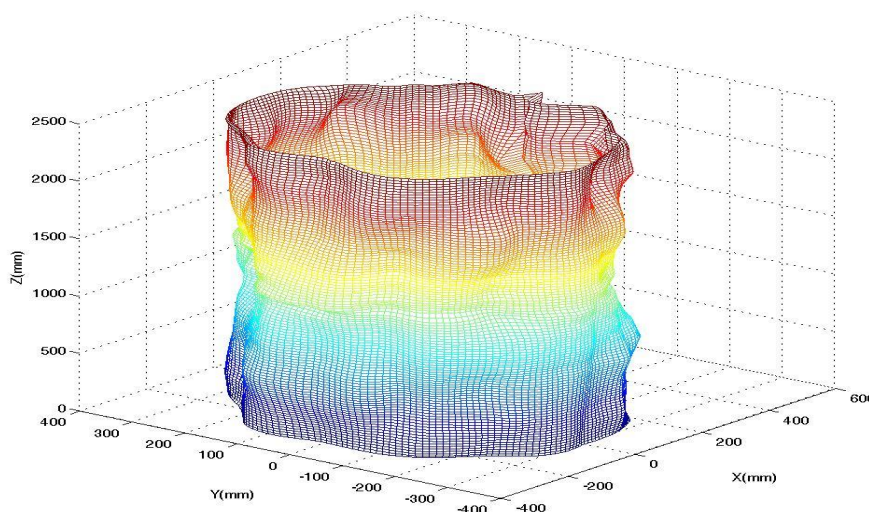


Σχήμα 5.3: Διάγραμμα ροής για αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο του ορθογωνίου. Υποπρόγραμμα ολοκλήρωση _τραpezίου .

6 . Μελέτη ευσταθείας Κελυφών με τυχαίες αρχικές ατέλειες

6.1 Εισαγωγή

Η αστοχία των κελυφωτών κατασκευών οφείλεται κατά κύριο λόγο στο φαινόμενο του λυγισμού . Η λυγισμική συμπεριφορά αυτών των κατασκευών επηρεάζεται από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες ,οι οποίες εμφανίζονται κατά την διάρκεια την κατασκευής τους (σχήμα 6.1) . Συνεπώς, η μελέτη αυτών των κατασκευών συγκέντρωσε αναπόφευκτα το ενδιαφέρον πολλών μελετητών στο παρελθόν. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης, παρατηρήθηκε μεγάλη διασπορά στις τιμές των φορτίων λυγισμού των κελυφών που λαμβάνονται από τις πειραματικές διαδικασίες. Ακόμη, έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές των προσδιοριστικών προβλέψεων των τιμών των φορτίων και των αντίστοιχων πειραματικών αποτελεσμάτων.



Σημια6.1: Κυλινδρικό Κέλυφος με Γεωμετρικές ατέλειες

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για την βελτίωση του υπολογισμού του φορτίου λυγισμού, χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες όσο το δυνατόν ρεαλιστικότερα στην ανάλυση 2^{ης} τάξεως των κελυφών. Επομένως, για να επιτύχουμε καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά τη συμφωνία των υπολογισμών με τα πειραματικώς προσδιορισμένα φορτία λυγισμού, θα μπορούσαν να μετρηθούν οι αρχικές ατέλειες του συγκεκριμένου κελύφους που εξετάζεται και να εισαχθούν στην ανάλυση. Όμως αυτό δεν είναι ορθό, καθώς είναι γνωστό ότι το σχήμα των ατελειών επηρεάζεται από τη διαδικασία της κατασκευής και ότι ακόμη και τα κελύφη που προκύπτουν από την ίδια διαδικασία κατασκευής παρουσιάζουν συνήθως γεωμετρικές ατέλειες διαφορετικής μορφής.

Γίνεται κατανοητό λοιπόν από τα παραπάνω ότι μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση του θέματος των ατελειών μπορεί να επιτευχθεί με τη στοχαστική προσομοίωση της γεωμετρίας του κελύφους. Η ανάλυση λυγισμού που βασίζεται σ' αυτή την τεχνική επιτρέπει την ασφαλή πρόβλεψη των φορτίων λυγισμού κελυφών που έχουν παραχθεί από διάφορες κατασκευαστικές διαδικασίες καθώς και την πρόβλεψη της παρατηρηθείσας διασποράς των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Γι' αυτό τον σκοπό έχουν αναπτυχθεί διαφορές μέθοδοι προκειμένου να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα στη γεωμετρία του κελύφους. Πρόσφατες μέθοδοι χρησιμοποιούν την ανάλυση σε σειρά Fourier των μετρημένων αρχικών ατελειών θεωρώντας τους συντελεστές της σειράς ως τυχαίες μεταβλητές (probabilistic approach). Η ιδέα της χρήσης δισδιάστατων σειρών

Fourier με τυχαίους συντελεστές προέκυψε μέσα από την αναλυτική επίλυση του προβλήματος ευστάθειας κυλινδρικών κελυφών που οδηγεί στην αναπαράσταση των μορφών λυγισμού από σειρές αυτής της μορφής. Οι πιθανοτικές αυτές μέθοδοι έχουν ως κοινό σημείο ότι προσδιορίζουν το οριακό φορτίο αναλυτικά ή ημι-αναλυτικά. Νεότερες έρευνες χρησιμοποιούν την θεωρία στοχαστικών πεδίων (stochastic approach) για την προσομοίωση των ατελειών σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του προβλήματος ευστάθειας. Παρότι οι μέθοδοι αυτές έχουν εκ φύσεως ευρύτερο πεδίο εφαρμογής από τις προηγούμενες, η έλλειψη δεδομένων σε πολλές από τις αναλύσεις οδήγησε σε υποθέσεις για τα πιθανοτικά χαρακτηριστικά (κατανομή κλπ.) των ατελειών, γεγονός που περιορίζει την πρακτική σημασία των αποτελεσμάτων. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιήθηκαν πειραματικές μετρήσεις για την παραγωγή των φασμάτων ισχύος. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε αυτές τις δυο κατηγορίες δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην δεύτερη η οποία χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση μας .

Σημείωση:

Η ποιότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν βάσει της πιθανοτικής και της στοχαστικής θεώρησης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ύπαρξη δεδομένων (πειραματικών μετρήσεων) που πιστοποιούν τις υποθέσεις που έγιναν για τα πιθανοτικά χαρακτηριστικά (κατανομή, δομή συσχέτισης) των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με το θέμα αυτό τις τελευταίες δεκαετίες . Το αποτέλεσμα των ερευνών οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η διασπορά δεν παραμένει χωρικά σταθερή και επομένως το στοχαστικό πεδίο που περιγράφει τις γεωμετρικές ατέλειες δεν μπορεί να θεωρηθεί ομογενές. Τα ιστογράμματα των φορτίων λυγισμού που χαράχθηκαν, δείχνουν επίσης ότι η πυκνότητα πιθανότητας τους παρουσιάζει μεγάλη λοξότητα (highly skewed) και άρα τα φορτία λυγισμού ακολουθούν μη Γκαουσιανή κατανομή. Όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν τη σημασία των τραπεζών δεδομένων για την αποφυγή λανθασμένων παραδοχών και επομένως για την πιο ρεαλιστική προσομοίωση των αρχικών ατελειών.

6.2 Προσομοίωση ατελειών με χρήση πιθανοτικών μεθόδων (probabilistic approach)

6.2.1 Γενικά- Ιστορική αναδρομή

Στη παράγραφο αυτή εξετάζουμε την προσομοίωση των γεωμετρικών ατελειών κυλινδρικών κελυφών με τη χρήση τυχαίων μεταβλητών. Η διερεύνηση της επιρροής των αρχικών ατελειών στο φαινόμενο του λυγισμού γίνεται θεωρώντας την κατάσταση της κατασκευής ως συνάρτηση διαφόρων τυχαίων μεταβλητών $M(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Η συνθήκη:

$$M(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (6.1)$$

Εκφράζει την ενδιάμεση θέση μεταξύ μιας ασφαλούς κατάστασης ($M > 0$) και μιας κατάστασης αστοχίας ($M \leq 0$) της κατασκευής. Η πιθανότητα αστοχίας ορίζεται ως εξής:

$$p_f = \int \dots \int_{M(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (6.2)$$

, όπου $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n .

Ο Bolotin ανέλυσε έναν κύλινδρο με ασύμμετρη ατέλεια τυχαίου εύρους δεχόμενος ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή. Υποθέτοντας ότι όλες οι άλλες παράμετροι του προβλήματος είναι προσδιοριστικές, υπολόγισε την πιθανότητα αστοχίας με χρήση της εξίσωσης (6.2) . Υπολόγισε επίσης την μέση τιμή και την διασπορά του φορτίου λυγισμού ως συνάρτηση των στοχαστικών χαρακτηριστικών του προσομοιώματος των αρχικών ατελειών.

Παρόμοιες μελέτες έγιναν από τους Thompson, Roorda και Hansen για διαφορετικές μορφές ατελειών και διαφορετικά πιθανοτικά μοντέλα του τυχαίου μεγέθους τους. Τα αποτελέσματα επαλήθευσαν ποιοτικά ορισμένες πειραματικές διαπιστώσεις, όπως την αύξηση της διασποράς του φορτίου λυγισμού με μείωση του μέσου μεγέθους των ατελειών, αλλά δεν ήταν δυνατό να επεκταθούν σε συνθετότερα προσομοιώματα ατελειών που συναντώνται σε πραγματικά κελύφη.

Ο Hansen επικέντρωσε την έρευνα του στη μελέτη της επιρροής αξονοσυμμετρικών και ασύμμετρων ατελειών σε κυλινδρικά κελύφη με λυγηρότητα R/t που κυμαίνεται μεταξύ των ορίων $20 < R/t < 4000$, χρησιμοποιώντας τυχαίες μεταβλητές Gauss μηδενικής μέσης τιμής για την προσομοίωση των ατελειών. (Διευκρινίζεται ότι R είναι η ακτίνα του κυλίνδρου και t το πάχος των τοιχωμάτων του).

Σε όλες τις περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν, τα πιθανοτικά χαρακτηριστικά των ατελειών (μέση τιμή, τυπική απόκλιση) προέκυπταν από υποθέσεις και δεν είχαν επιχειρηθεί συγκρίσεις με δεδομένα από μετρήσεις σε πραγματικές κατασκευές ή σε πειραματικές διατάξεις εργαστηρίων. Οι Arbocz και Elishakoff με τους συνεργάτες τους ήταν οι πρώτοι που ανέπτυξαν μια μέθοδο για τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής των φορτίων ελαστικού λυγισμού στην περίπτωση τυχαίων αρχικών ατελειών. Φρόντισαν μάλιστα ώστε οι πιθανοτικές ιδιότητες του προσομοιώματος των ατελειών να είναι ίδιες με τις αντίστοιχες των ατελειών που μετρήθηκαν σε ομάδες όμοια κατασκευασμένων κυλινδρικών κελυφών. Με ένα πλήθος εφαρμογών, αποδείχθηκε η δυνατότητα σύνδεσης της κατασκευαστικής διαδικασίας με τον υπολογισμό του φορτίου λυγισμού και τη μελέτη της ευαισθησίας των κελυφών στις αρχικές ατέλειες.

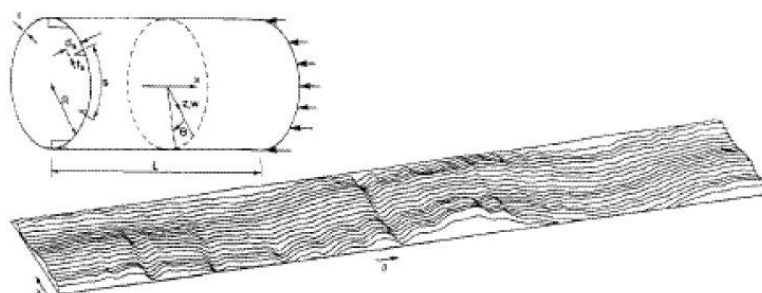
Κινούμενοι μέσα στα ίδια πλαίσια, οι Chryssanthopoulos και Roggi παρουσίασαν μια μεθοδολογία για την παραγωγή χαρακτηριστικών μορφών ατελειών, βασισμένοι και πάλι σε μετρήσεις. Αυτές οι χαρακτηριστικές μορφές χρησιμοποιήθηκαν για την επιλογή των σχημάτων των ατελειών σε προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων, γεγονός που αποτελεί το σημαντικό βήμα για τον προσδιορισμό της λυγισμικής αντοχής με αριθμητικές μεθόδους.

6.2.2 Προσομοίωση με χρήση σειρών Fourier

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η προσομοίωση των αρχικών ατελειών γίνεται συχνά με χρήση σειρών Fourier όπως η παρακάτω :

$$w_o(x, \theta) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=0}^{n_1} \xi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin(n\theta + \phi_{mn}) \quad (6.3)$$

, όπου $0 \leq x \leq L$ και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, x είναι η συντεταγμένη καθ' ύψος του κυλίνδρου και θ η γωνιακή συντεταγμένη κατά μήκος της περιφέρειάς του. Οι αντίστοιχοι κυματικοί αριθμοί είναι οι m, n . Μέσω της σειράς (6.3) κάθε ατέλεια περιγράφεται από ένα σύνολο ευρών ξ_{mn} και γωνιών φάσης ϕ_{mn} για τα οποία ισχύει $\xi_{mn} \geq 0$ και $-\pi \leq \phi_{mn} \leq \pi$.



Σχημα6.2 Τυπική μορφή γεωμετρικών ατελειών κυλινδρικού κελύφους σε ανάπτυγμα

Από το σχήμα 6.2 γίνεται επίσης φανερό ότι κυριαρχούν οι ατέλειες με κυματοειδή μορφή κατά μήκος της περιφέρειας του κυλίνδρου. Το γεγονός αυτό, βασισμένο σε μία μόνο μέτρηση, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί τυχαίο. Ωστόσο, το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από τη στατιστική ανάλυση των ατελειών ενός σημαντικού δείγματος κυλινδρικών κελυφών που έχουν κατασκευαστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Για την πραγματοποίηση αυτής της στατιστικής ανάλυσης, κάθε εύρος ξ_{mn} και κάθε γωνία φάσης φ_{mn} της εξίσωσης (6.3) θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Έτσι το μέγεθος $w_0(x, \theta)$ της σχέσης (6.3) είναι μια τυχαία διαδικασία που περιγράφεται από τις τυχαίες μεταβλητές ξ_{mn} και φ_{mn} και από τις προσδιοριστικές μεταβλητές x και θ .

6.3 Προσομοίωση ατελειών με χρήση στοχαστικών πεδίων (stochastic approach)

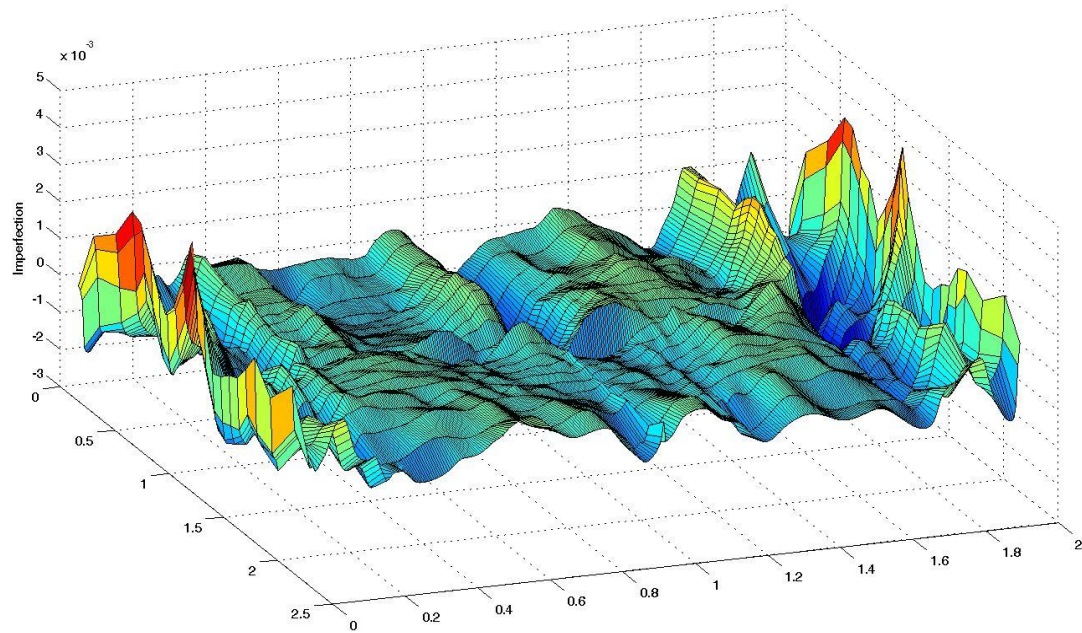
Η μέθοδος προσομοίωσης των ατελειών με χρήση στοχαστικών πεδίων είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία. Επομένως θα ήταν χρήσιμο να εξηγηθούν τα στάδια αυτής της μεθόδου με βάση τα βήματα που ακολουθηθήκαν στην παρούσα εργασία.

Συνοπτικά αναφέρονται τα βήματα:

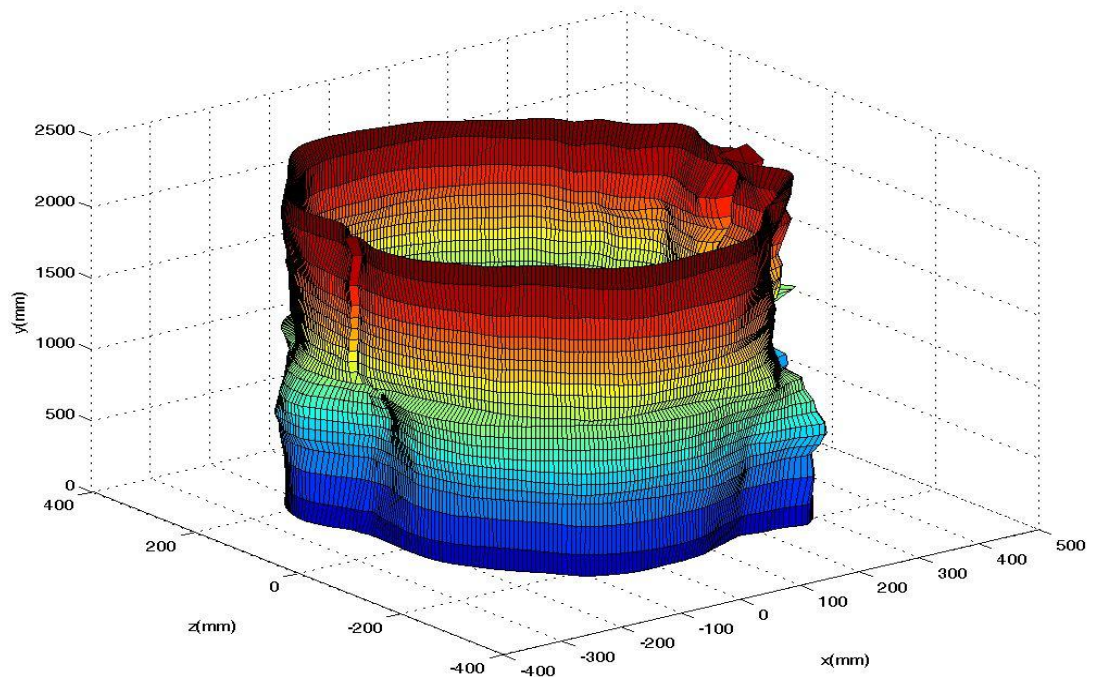
- ❖ Επεξεργασία των πειραματικών μετρήσεων των γεωμετρικών ατελειών.
- ❖ Χρήση της μεθόδου separation (κεφ.4) προκειμένου να παραχθούν τα φάσματα ισχύος που αναφέρονται στις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.
- ❖ Στην συνέχεια με την χρήση της μεθόδου φασματικής απεικόνισης για 2D-1V μη ομογενή πεδία παράγονται δειγματοσυναρτήσεις, δηλαδή κύλινδροι που έχουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Αυτοί οι κύλινδροι είναι που χρησιμοποιήθηκαν στις αναλύσεις.
- ❖ Επόμενο στάδιο η επιλογή δικτύου πεπερασμένων στοιχείων. Γενικά όσο πιο πυκνό είναι το δίκτυο τόσο πιο ακριβές είναι το φορτίο κατάρρευσης που προκύπτει από την ανάλυση. Όμως πολύ πυκνό δίκτυο οδηγεί σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος χωρίς σημαντική βελτίωση στην ακρίβεια υπολογισμού του φορτίου κατάρρευσης. Για αυτό τον λόγο για έναν κύλινδρο με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με διαφορετικά δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων ώστε να επιλεγεί το κατάλληλο δίκτυο (mesh convergence).
- ❖ Στην συνέχεια για 50 κύλινδρους πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις για διαφορετικές περιπτώσεις φορτίσης:
 - Μόνο αξονικό φορτίο
 - Μόνο πλευρική πίεση
 - Αξονικό φορτίο και πλευρική πίεση με λόγους 5 , 2.5 , 1.75 , 1.25
 Έτσι προκύπτει το στοχαστικό διάγραμμα αλληλεπίδρασης.
- ❖ Τέλος τα αποτελέσματα από τους ατελείς φορείς συγκρίνονται με τα αντίστοιχα μεγέθη του τέλειου φορέα.

6.3.1 Πειραματικά δεδομένα

Τα πειραματικά δεδομένα επιλέχθηκαν από ένα σύνολο πειραματικών ομάδων με διαφορετικές τιμές D/t . Οι μετρήσεις που επιλέχθηκαν είναι από τα πειράματα 12A-3 και χρησιμοποιήθηκαν ως δειγματοσυναρτήσεις για την παραγωγή των φασμάτων ισχύος. Η μορφή των μετρημένων γεωμετρικών ατελειών για έναν κύλινδρο (π.χ. του πειράματος 12A-3-1) φαίνεται στο σχήμα 6.2α και 6.2β.



Σχήμα 6.2α Μορφή αρχικών γεωμετρικών ατελειών σε ανάπτυγμα



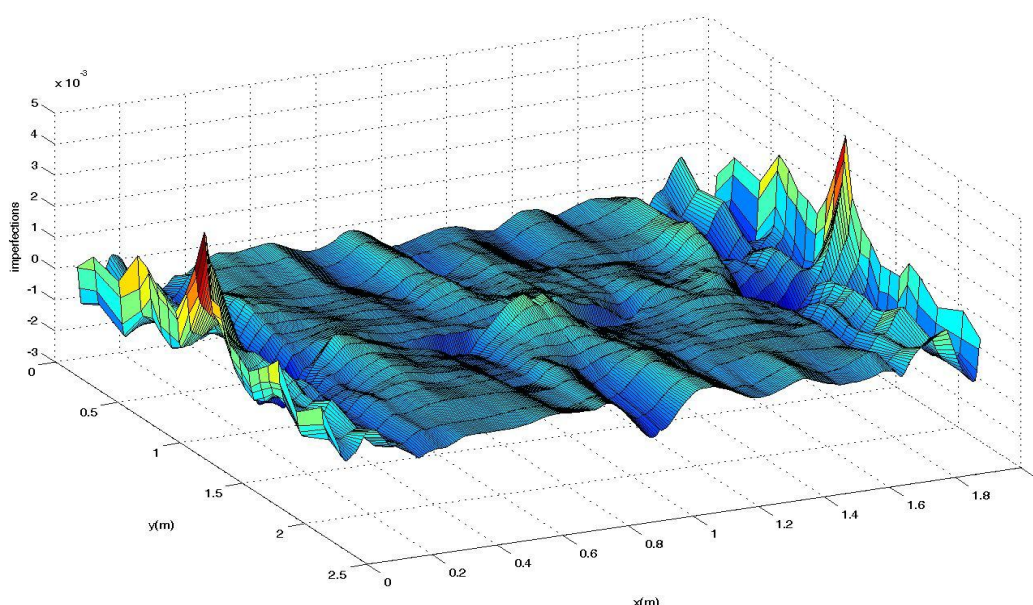
Σχήμα 6.2β Μορφή κυλίνδρου πειράματος 12A-3-1 με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.

Ακόμη, από προηγούμενες έρευνες έχει παρατηρηθεί ότι από την στατιστική ανάλυση των μετρημένων ατελειών αποδεικνύεται ότι η υπόθεση της κανονικότητας είναι σύμφωνη με τα πειραματικά δεδομένα. Έτσι, η ατελής γεωμετρία αναπαριστάται μέσω της διακύμανσης της ακτίνας της κατασκευής η οποία μπορεί να απεικονιστεί από ένα 2D-1V μη ομογενές Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο:

$$r(x, y) = R + a_0(x, y) + f_1(x, y) \quad (6.4)$$

, όπου $r(x, y)$ είναι η διακυμαινόμενη αρχική ακτίνα σε κάθε σημείο της κατασκευής, R είναι η ακτίνα του τέλει κυλίνδρου, $a_0(x, y)$ είναι ο μέσος όρος των ατελειών και $f_1(x, y)$ είναι το μη ομογενές Γκαουσιανό στοχαστικό πεδίο με μηδενική μέση τιμή.

Επιπλέον, πρέπει να σημειωθεί ότι υποθέτουμε ότι τα πεδία των αρχικών γεωμετρικών ατελειών έχουν μηδενική μέση τιμή. Άρα από τις δειγματοσυναρτήσεις που θα χρησιμοποιηθούν πρέπει να αφαιρέσουμε τον μέσο όρο των ατελειών σε κάθε θέση (σχήμα6.3) από κάθε πείραμα.



Σχήμα6.3 Ο μέσος όρος των αρχικών γεωμετρικών ατελειών από τα έξι πειράματα σε κάθε θέση

Τα πειραματικά δεδομένα (πάχος, μέτρο ελαστικότητας και όριο διαρροής) φαίνονται στο πίνακα 6.1. Ο μέσος όρων αυτών χρησιμοποιήθηκε στην ανάλυση.

Πείραμα	D/t	t(mm)	L(mm)	περιμετρική κατεύθυνση		Διαμήκης κατεύθυνση	
				F_{ys} (Kpa)	E (kpa)	F_{ys} (Kpa)	E (kpa)
12A-3-1	96	6.5532	2413	2.64E+05	2.10E+08	2.69E+05	1.99E+08
12A-3-2	96	6.5024	2413	2.64E+05	2.10E+08	2.69E+05	1.99E+08
12A-3-3	96	6.4262	2413	2.56E+05	2.05E+08	2.66E+05	2.04E+08
12A-3-4	96	6.5024	2413	2.56E+05	2.05E+08	2.66E+05	2.04E+08
12A-3-5	96	6.477	2413	2.81E+05	2.05E+08	2.81E+05	2.02E+08
12A-3-6	96	6.5278	2413	2.81E+05	2.05E+08	2.81E+05	2.02E+08
Average		6.498167		E(Kpa)	2.0417E+08		
				F_{ys} (Kpa)	2.6950E+05		

Πίνακας6.1

6.3.2 Φάσμα ισχύος για αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.

Γενικά από προηγούμενες έρευνες έχει αποδειχθεί ότι το πεδίο των ατελειών κατά την διαμήκη και την περιμετρική κατεύθυνση είναι διαχωρίσιμο. Ακόμη θεωρούμε ότι το εξελικτικό φάσμα ισχύος είναι επίσης διαχωρίσιμο ως προς τις στις δυο διευθύνσεις του κυλίνδρου :

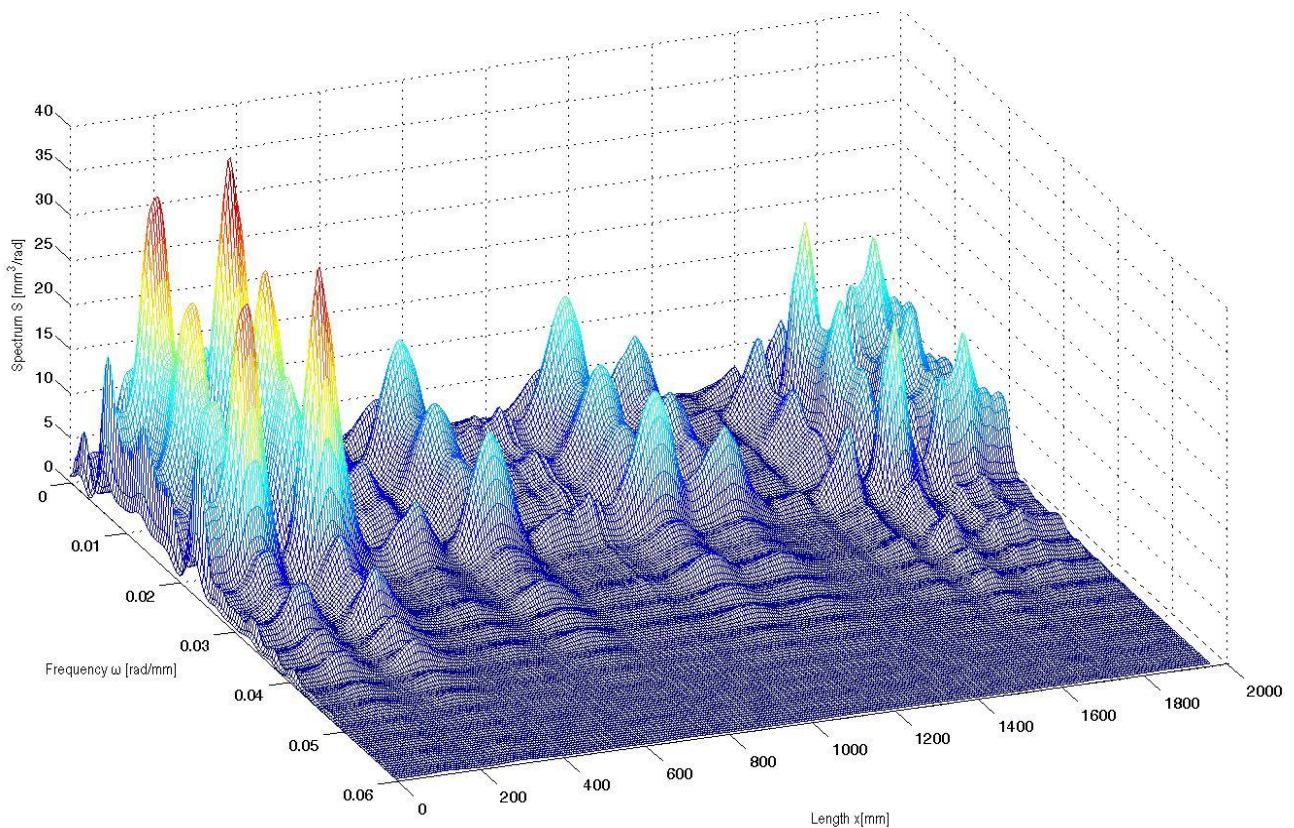
$$S^E(k_1, k_2, x_1, x_2) = S_1^E(k_1, x_1) \cdot S_2^E(k_2, x_2) \quad (6.5)$$

, όπου $S_1^E(k_1, x_1)$ και $S_2^E(k_2, x_2)$ είναι δυο ανεξάρτητα 1D φάσματα για την διαμήκη και την περιμετρική κατεύθυνση ,αντίστοιχα.

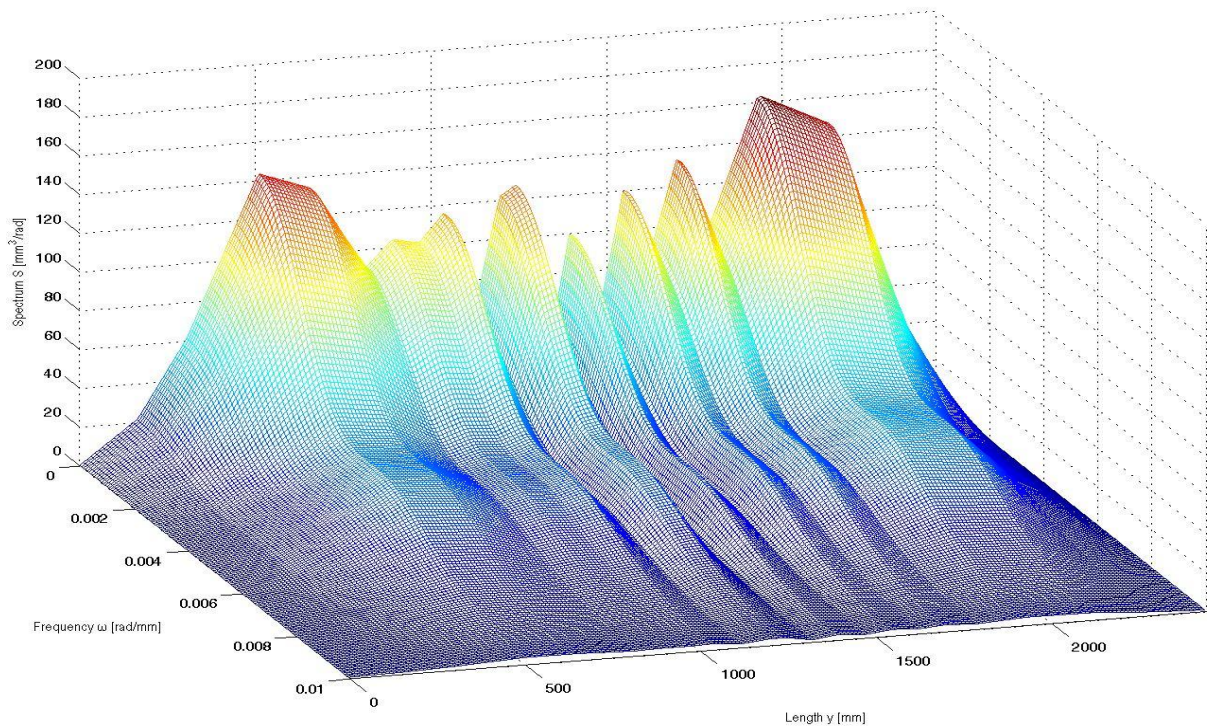
Ουσιαστικά με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε να διαχωρίσουμε το φάσμα ισχύος σε δύο τμήματα τα οποία είναι διαχωρίσιμα και στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος separation. Άρα, θα προκύψουν δυο φάσματα ένα για κάθε κατεύθυνση από το γινόμενο των οποίων θα προκύπτει το εξελικτικό φάσμα ισχύος των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή των φασμάτων ισχύος αναπτύχθηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.1 .

Οι δειγματοσυναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε κατεύθυνση είναι για την διαμήκη οι τιμές των μετρούμενων ατελειών στη θέση για $x=0$ (δηλαδή στις μηδέν μοίρες) και για την περιμετρική οι τιμές που αναφέρονται στην στάθμη $y=0.1651$ (δηλαδή στην κατώτερη στάθμη για την οποία υπήρχαν πειραματικά δεδομένα).

Τα φάσματα που προκύπτουν για την περιμετρική και διαμήκη διεύθυνση φαίνονται στο σχήμα 6.4 και σχήμα 6.5 αντίστοιχα



Σχήμα 6.4 Εξελικτικό φάσμα ισχύος για την περιμετρική διεύθυνση

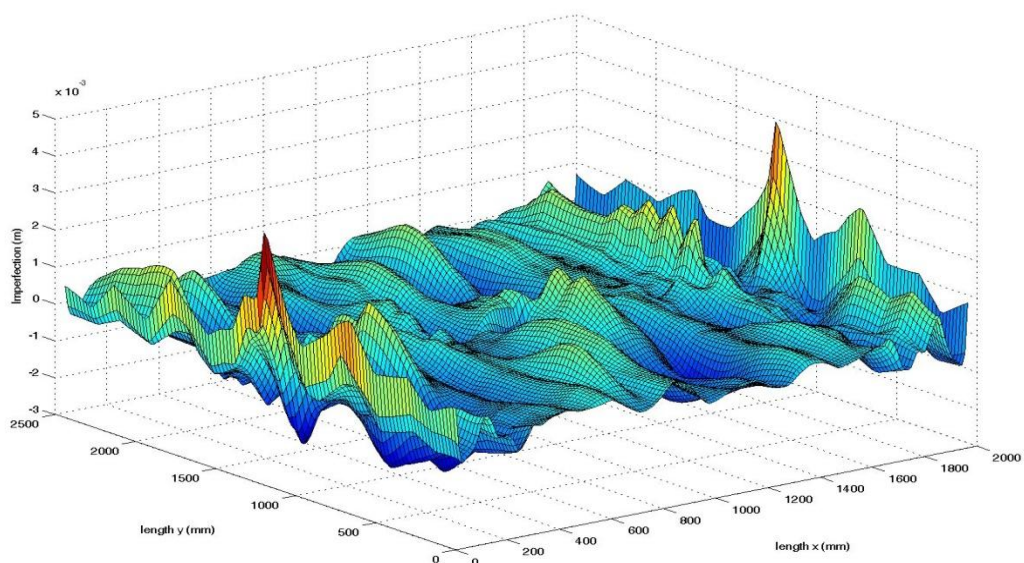


Σχήμα 6.5 Εξελικτικό φάσμα ισχύος για την διαμήκη διεύθυνση

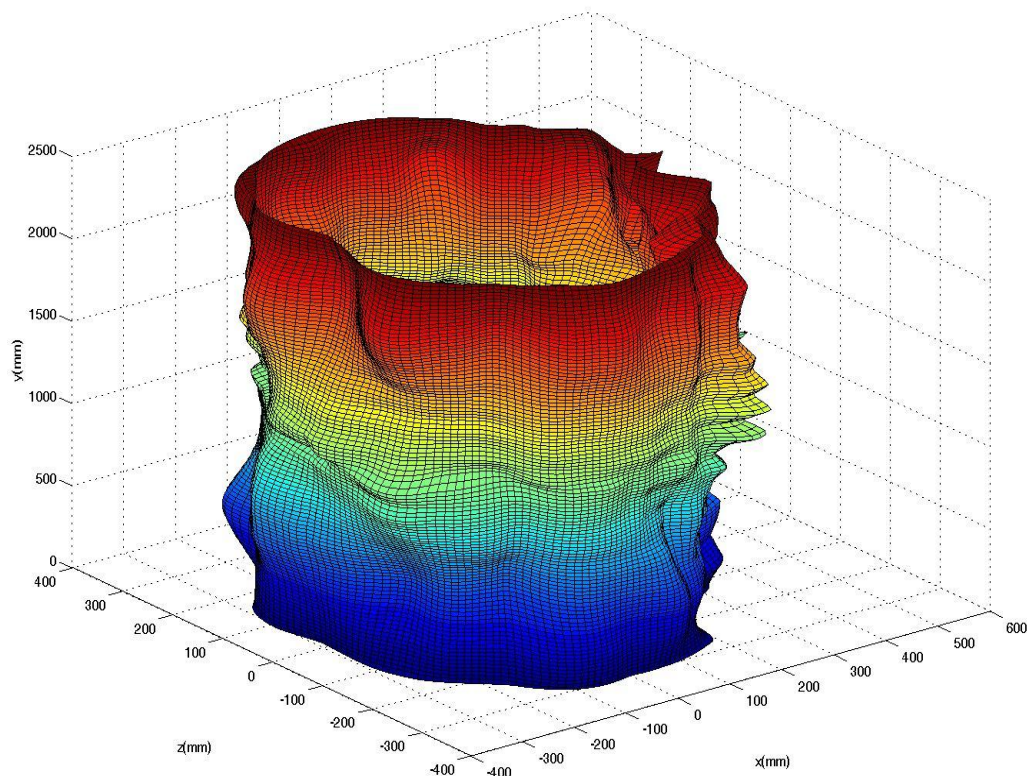
Από τα σχήματα 6.4 και 6.5 εξάγεται το συμπέρασμα ότι τα πεδία και κατά τις δυο διευθύνσεις είναι μη ομογενή, δηλαδή η πλήρης δομή της πιθανότητας που τα περιγράφει δεν είναι ανεξάρτητη από κάθε αλλαγή της χωρικής παραμέτρου.

6.3.3 Δημιουργία δειγματοσυναρτήσεων και επιλογή δικτύου.

Το επόμενο βήμα είναι να δημιουργηθούν δειγματοσυναρτήσεις με την μέθοδο φασματικής απεικόνισης. Επειδή το πεδίο είναι 2D-1V μη ομογενές χρησιμοποιούνται οι σχέσεις του κεφαλαίου 2.2.2. Από αυτές προκύπτει η ποσότητα $f_1(x, y)$ της σχέσης 6.4 από την οποία τελικά προκύπτει η ατελής γεωμετρία. Στα σχήματα 6.6α και 6.6β παρουσιάζεται το ανάπτυγμα των ατελειών και ένας κύλινδρος με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες αντίστοιχα.

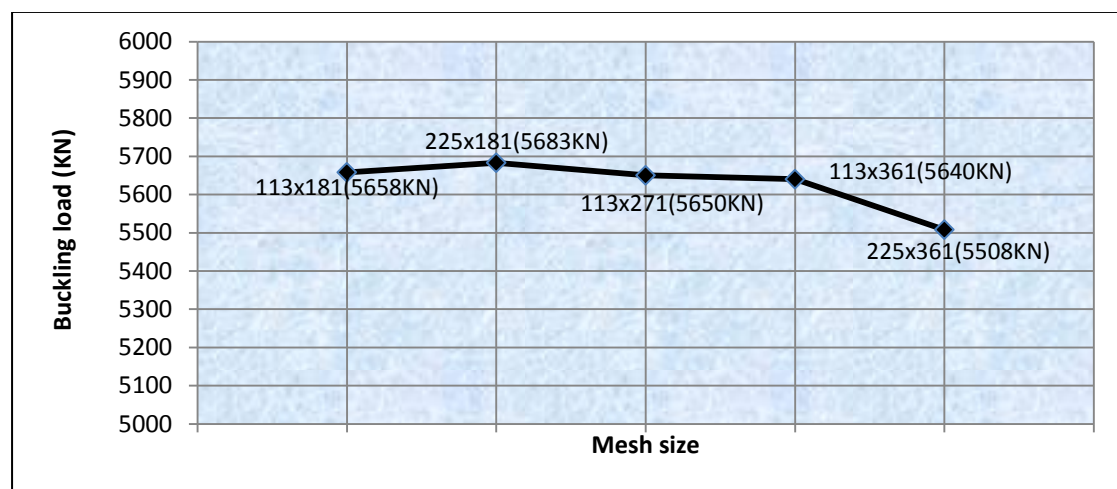


Σχήμα 6.6α ανάπτυγμα αρχικών γεωμετρικών ατελειών που προκύπτουν από την μέθοδο φασματικής απεικόνισης



Σχήμα 6.6β Κύλινδρος με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες οι οποίες προέκυψαν από την μέθοδο της φασματικής απεικόνισης

Το επόμενο στάδιο όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι η επιλογή του κατάλληλου δικτύου πεπερασμένων στοιχείων ώστε να υπάρξει και ικανοποιητική ακρίβεια αλλά και μειωμένο υπολογιστικό κόστος. Έτσι, για έναν συγκεκριμένο κύλινδρο με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που προκύπτουν από την μέθοδο φασματικής απεικόνισης, για πέντε διαφορετικά δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων (113x181, 225x181, 113x271, 113x361, 225x361) και για αξονικό φορτίο μόνο, προέκυψαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στο σχήμα 6.7.



Σχήμα 6.7 : Διάγραμμα φορτίων κατάρρευσης για διαφορετικά δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων

Στο παρακάτω πίνακα 6.2 φαίνονται για τις διάφορες αναλύσεις που έγιναν τα φορτία κατάρρευσης καθώς και ο χρόνος της κάθε ανάλυσης. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στα φορτία κατάρρευσης (διαφορές της τάξης του 2.5%) ,όμως υπάρχουν σημαντικές διαφορές στο υπολογιστικό κόστος. Για παράδειγμα για μια ανάλυση με δίκτυο 113x181 απαιτείται 1.11 ώρες ενώ με δίκτυο 225x361 απαιτείται 5.76 ώρες. Συνεπώς, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί το αραιότερο δίκτυο καθώς τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται σημαντικά και το υπολογιστικό κέρδος είναι μεγάλο.

Δίκτυο πεπερασμένων	φορτίο κατάρρευσης (KN)	υπολογιστικός χρόνος (min)	υπολογιστικός χρόνος (hours)
113x181	5658	66.32	1.11
225x181	5683	157.01	2.62
113x271	5650	106.46	1.77
113x361	5640	137.01	2.28
225x361	5508	345.77	5.76

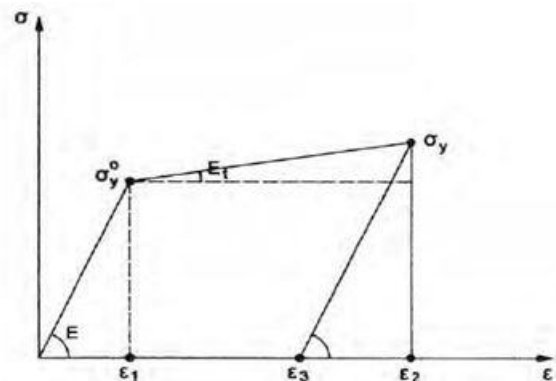
Πίνακας 6.2

6.4 Αποτελέσματα

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για 50 κυλίνδρους με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις για διάφορες περιπτώσεις φόρτισης: μόνο αξονικό φορτίο, μόνο πλευρική πίεση και αξονικό φορτίο με πλευρική πίεση με λόγους 5 , 2.5 , 1.75 , 1.25. Στην συνέχεια έγιναν αναλύσεις με την τέλεια γεωμετρία καθώς και αναλύσεις όπου εισάγεται γεωμετρική ατέλεια με βάση την πρώτη ιδιομορφή που προκύπτει από την γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού στην περίπτωση της μόνο πλευρικής πίεσης. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων.

Στοιχεία ανάλυσης:

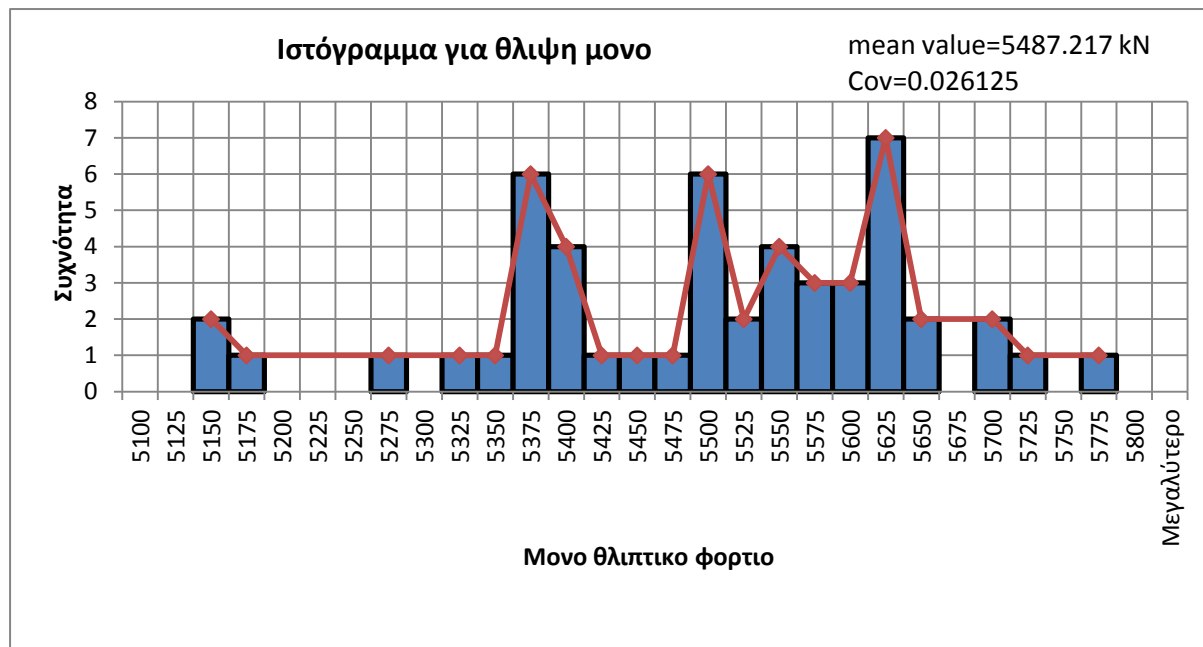
- μέτρο ελαστικότητας $E = 2.0417E+08$ Kpa ,
- όριο διαρροής $F_y = 2.695E+05$ Kpa
- μέσο πάχος $t = 6.49$ mm.
- Μήκος: $L = 95$ inches= $95 * 0.0254$ m = 2.413 m
- Διάμετρος τέλειου φορέα: $D/t = 96$ Άρα ακτίνα $R = 48 * t / 1000 = 0.311$ m.
- Υλικό:
 - $E_t = 0.1 * E$ (παραδοχή)
 - $\nu = 0.3$
 - $\sigma_y^o = F_y = 2.695E+05$ Kpa
 - $\sigma_y = 1.04508E+07$ Kpa
 - $\varepsilon_3 = 0.448812$



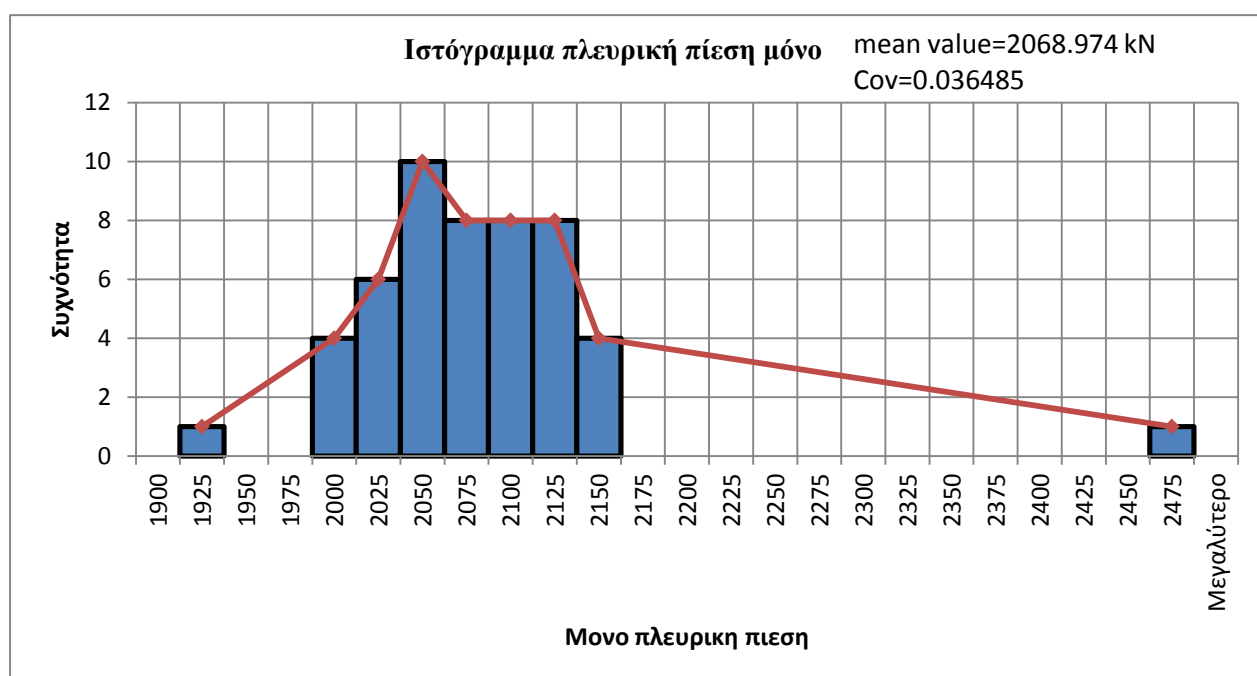
Τα στοιχεία της ανάλυσης αναπτύσσονται αναλυτικότερα στο παράρτημα Α.

6.4.1 Αποτελέσματα φορέων με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που προκύπτουν από την μέθοδο φασματικής απεικόνισης

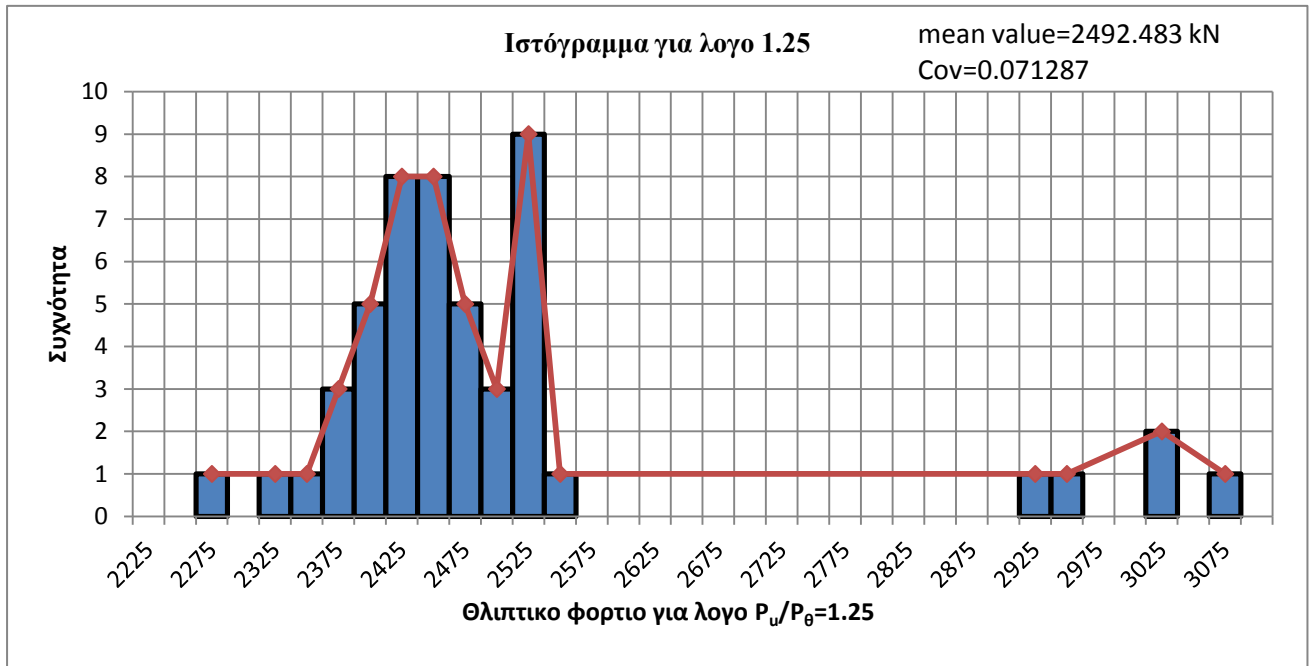
Στα σχήματα 6.8α,β,γ,δ,ε,ζ παρουσιάζονται τα ιστογράμματα των διαφορετικών περιπτώσεων φόρτισης, η μέση τιμή των τιμών των φορτίων κατάρρευσης καθώς και ο συντελεστής διασποράς (coefficient of variation - Cov).



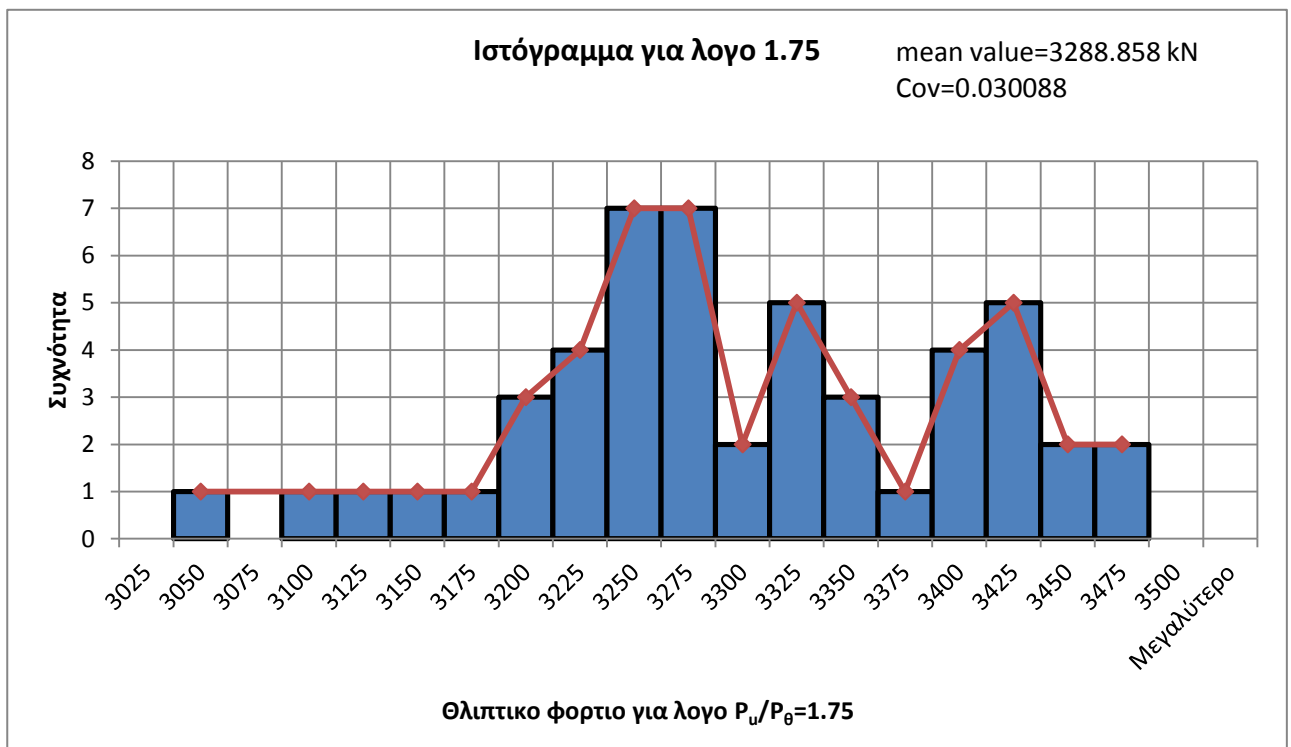
Σχήμα 6.8 α : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για αξονικό φορτίο μόνο



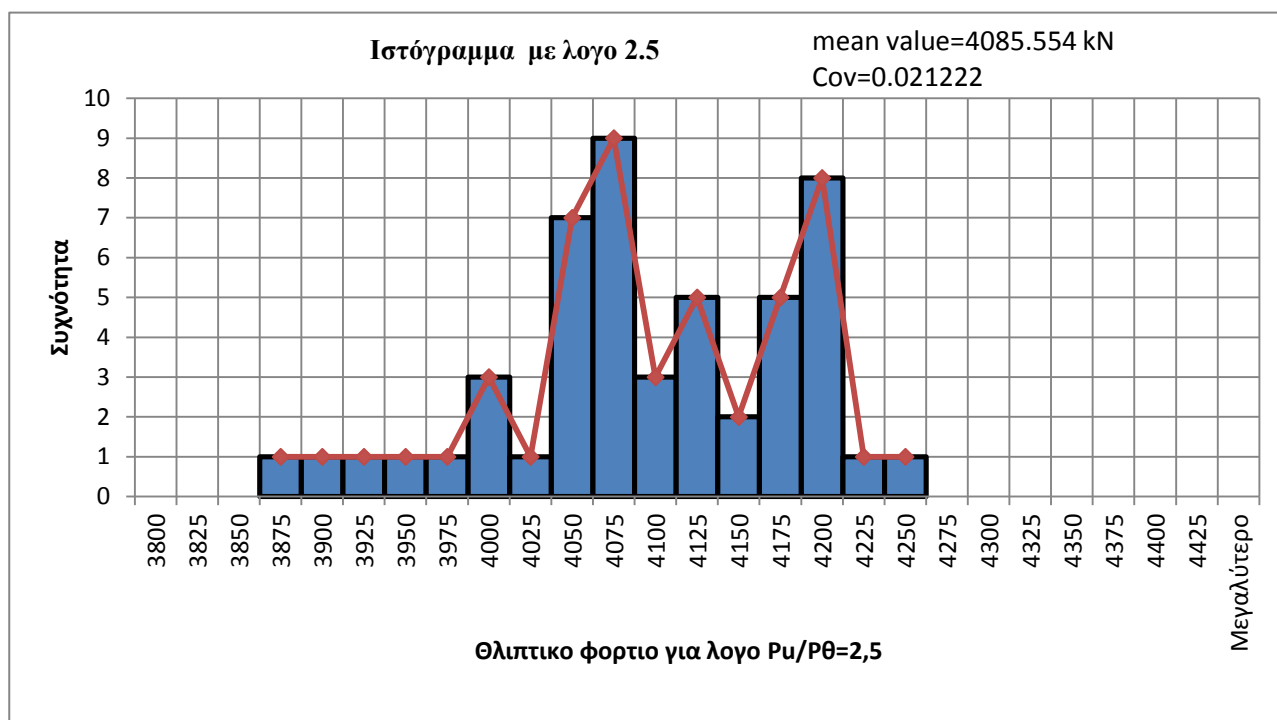
Σχήμα 6.8 β : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για πλευρική πίεση μόνο



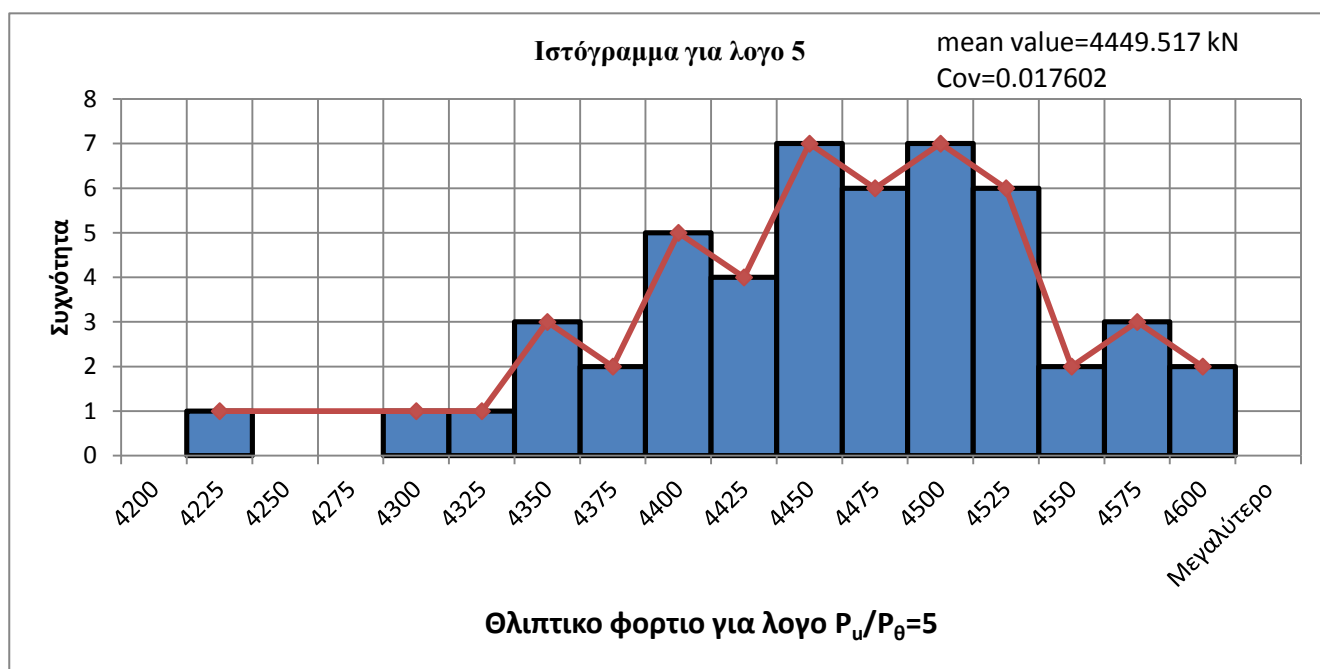
Σχήμα 6.8γ : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για λόγο αξονικού φορτίου/πλευρικής πίεσης 1.25



Σχήμα 6.8 δ : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για λόγο αξονικού φορτίου/πλευρικής πίεσης 1.75



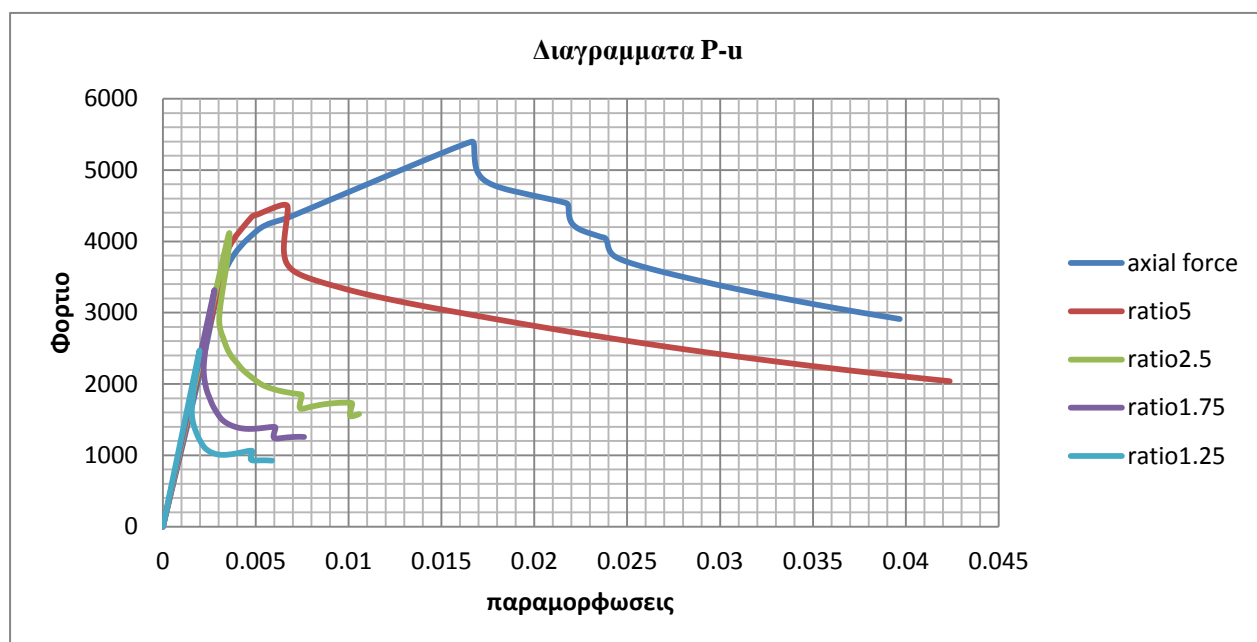
Σχήμα6.8 ε : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για λόγο αξονικού φορτίου/πλευρικής πίεσης 2.5



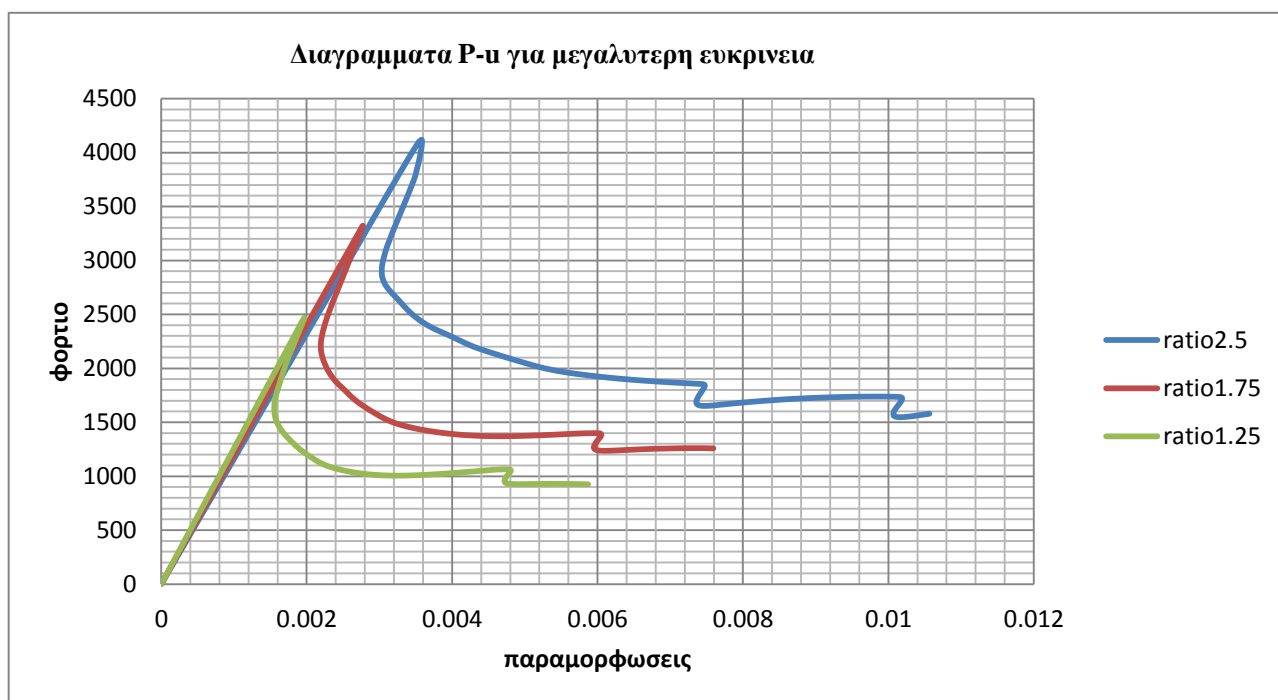
Σχήμα6.8 ζ : Αποτελέσματα των 50 Αναλύσεων για λόγο αξονικού φορτίου/πλευρικής πίεσης 5

Αυτό που παρατηρείται από τα ιστογράμματα είναι ότι για την ίδια περίπτωση φόρτισης τα αποτελέσματα έχουν αποκλίσεις λόγω των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Μάλιστα στην περίπτωση με λόγο 1.25 ο συντελεστής διασποράς φτάνει το 7,13%. Έτσι αποδεικνύεται ακόμα μια φορά η σημασία των αρχικών γεωμετρικών ατελειών στην ανάλυση των συγκεκριμένων κατασκευών.

Στο σχήμα 6.9α παρουσιάζονται τα διαγράμματα φορτίου μετατόπισης για έναν συγκεκριμένο κύλινδρο με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και για διαφόρους συνδυασμούς φορτίσεων. Στο σχήμα 6.9β παρουσιάζονται οι τρεις περιπτώσεις (για λόγο 2.5, 1.75, 1.25) για λόγους ευκρίνειας.



Σχήμα 6.9α: Διαγράμματα P-u για έναν συγκεκριμένο κύλινδρο και διαφορετικές περιπτώσεις φόρτισης

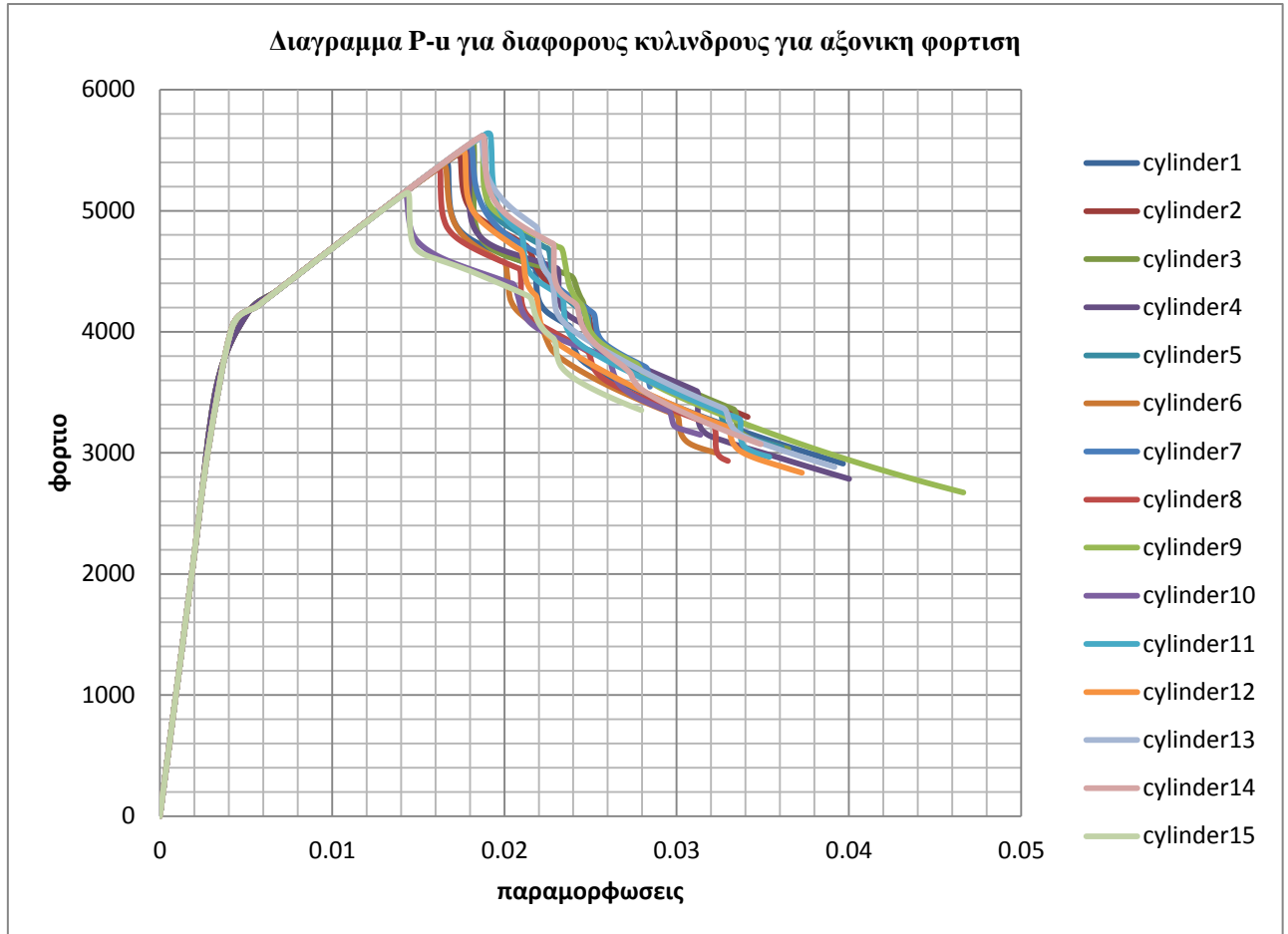


Σχήμα 6.9β : Διαγράμματα P-u των λόγων 2.5, 1.75 και 1.25 για μεγαλύτερη ευκρίνεια

Αυτό που παρατηρείται από αυτά τα δυο σχήματα είναι ότι για μεγάλα θλιπτικά φορτία και μικρή πλευρική πίεση η μορφή της καμπύλης φορτίου μετατόπισης είναι διαφορετική από ότι στις περιπτώσεις με μεγάλη πλευρική πίεση. Ακόμα, παρατηρείται ότι με την αύξηση της

πλευρικής πίεσης η αντοχή σε θλίψη μειώνεται (αυτό φαίνεται καθαρά και από τα ιστογράμματα).

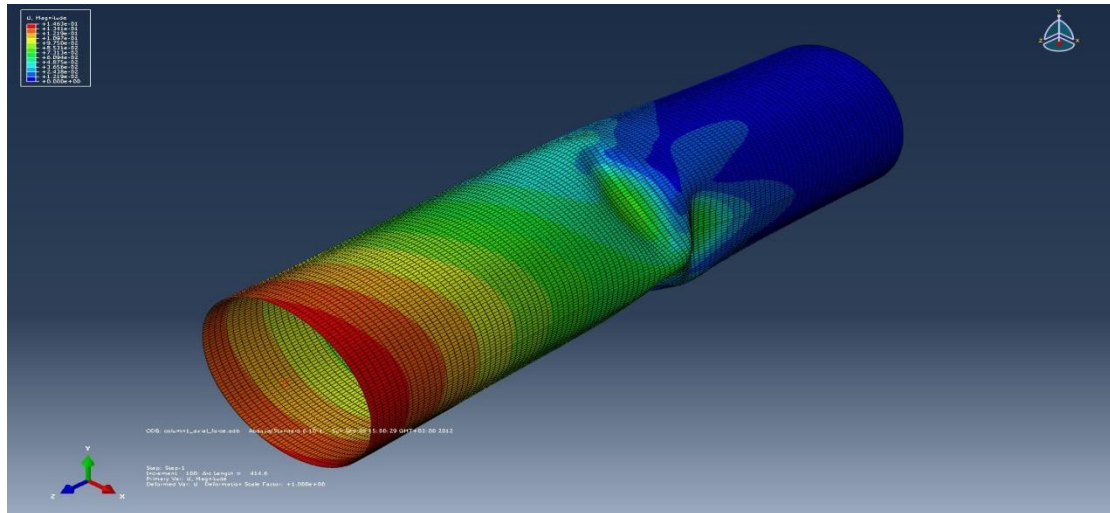
Στο σχήμα 6.10 παρουσιάζονται διάφορα διαγράμματα P-u για ένα είδος φόρτισης (μόνο θλίψης) και για διάφορους κυλίνδρους.



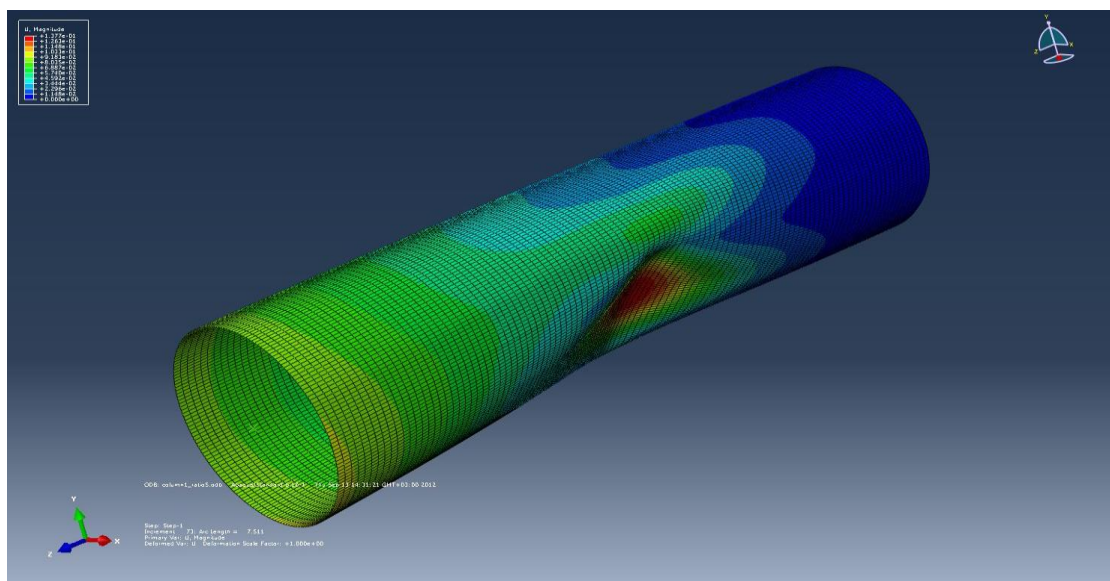
Σχήμα 6.10 : Διαγράμματα P-u για ένα είδος φόρτισης και διαφορετικούς κυλίνδρους

Παραμορφώσεις :

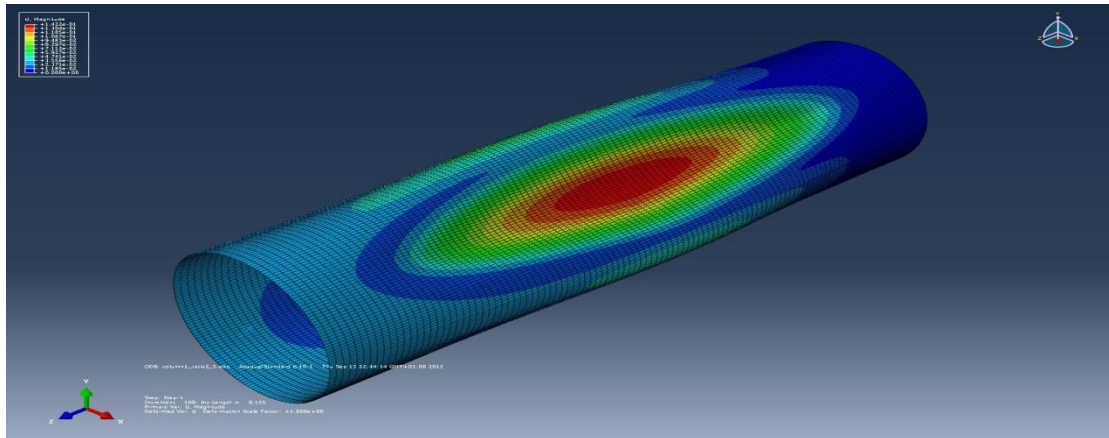
Στα σχήματα 6.11α,β,γ,δ,ε,ζ παρουσιάζονται οι μορφές αστοχίας ενός κυλίνδρου για κάθε μια περίπτωση που αναφέρθηκε παραπάνω.



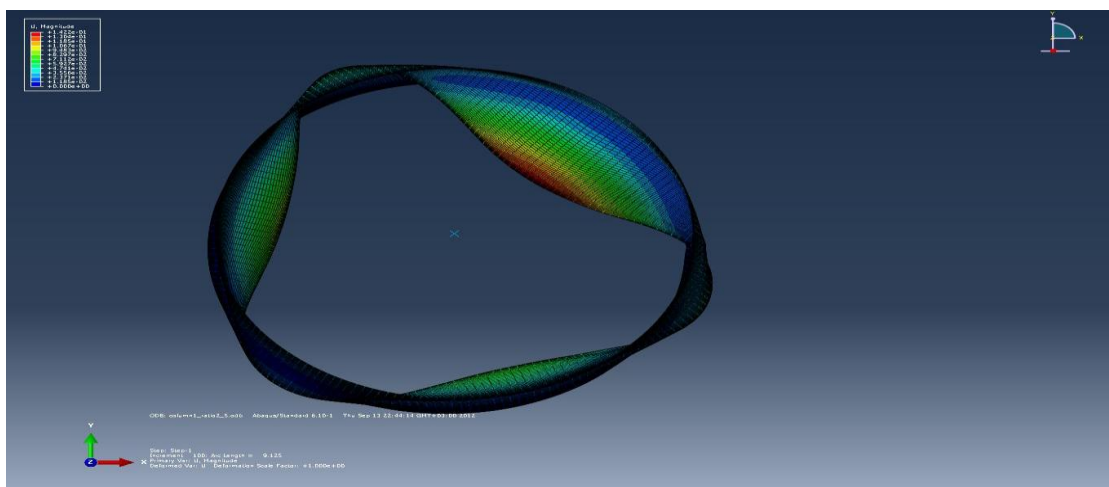
Σχήμα6.11α :Παραμόρφωση για αξονική φόρτιση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.



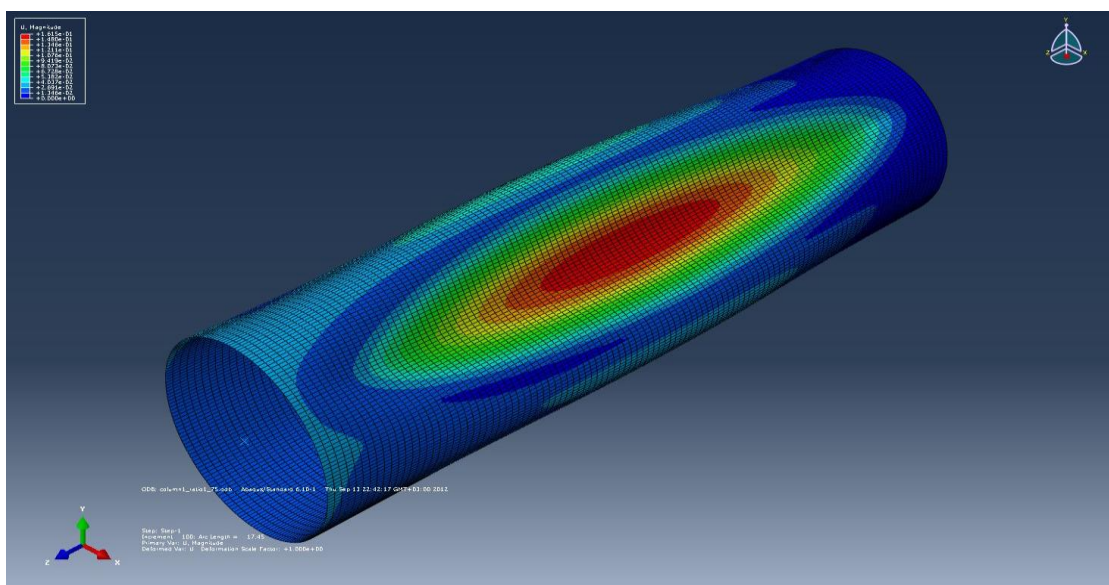
Σχήμα6.11β :Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης-πλευρικής πίεσης 5.



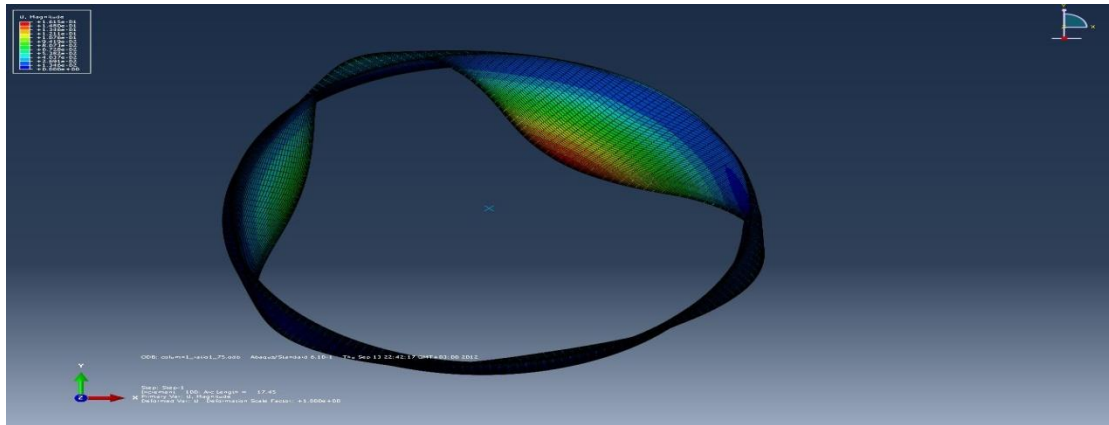
Σχήμα6.11γ₁: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 2.5 (σε τρισδιάστατη προβολή)



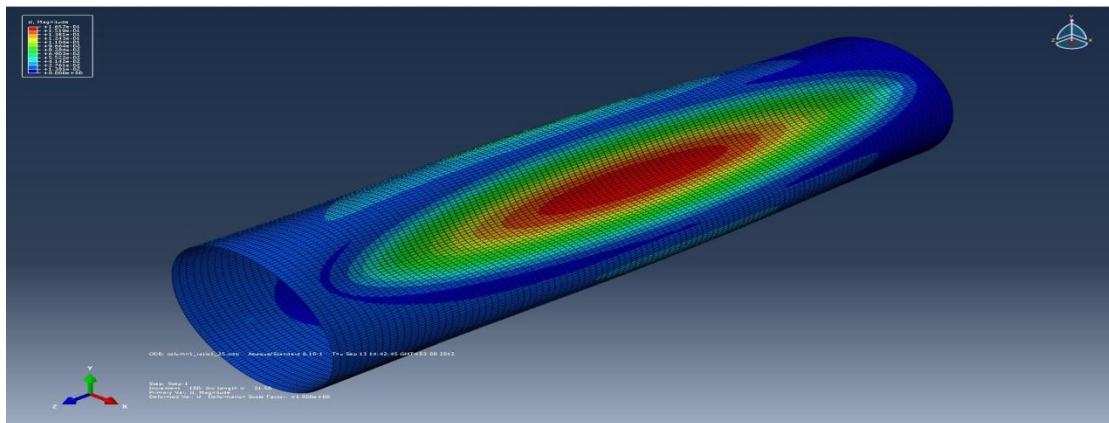
Σχήμα6.11γ₂: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 2.5 (σε προβολή xy)



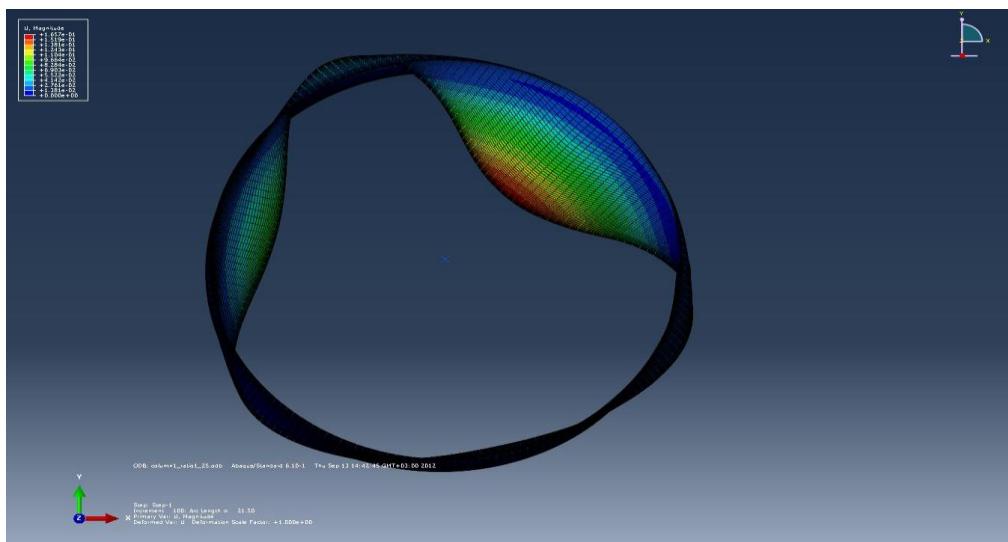
Σχήμα6.11δ₁: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 1.75 (τρειςδιάστατη προβολή)



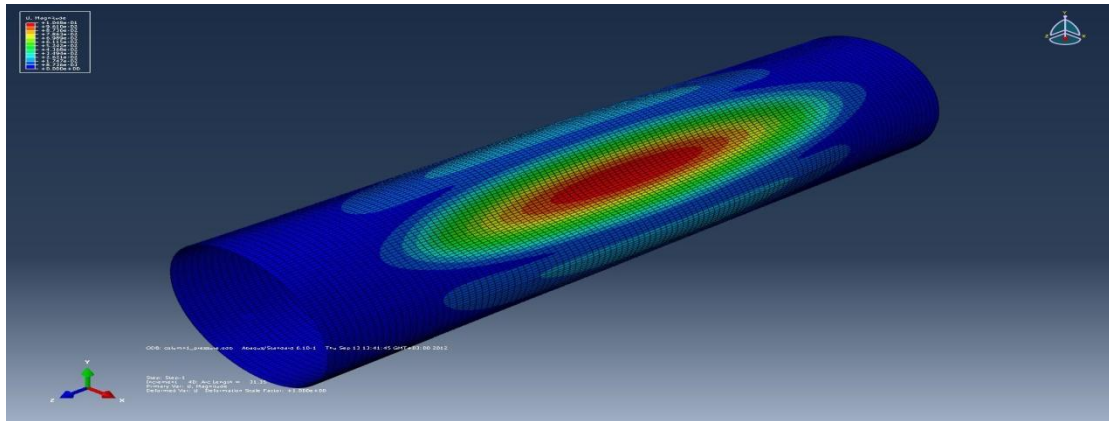
Σχήμα6.11δ₂: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 1.75(σε προβολή xy)



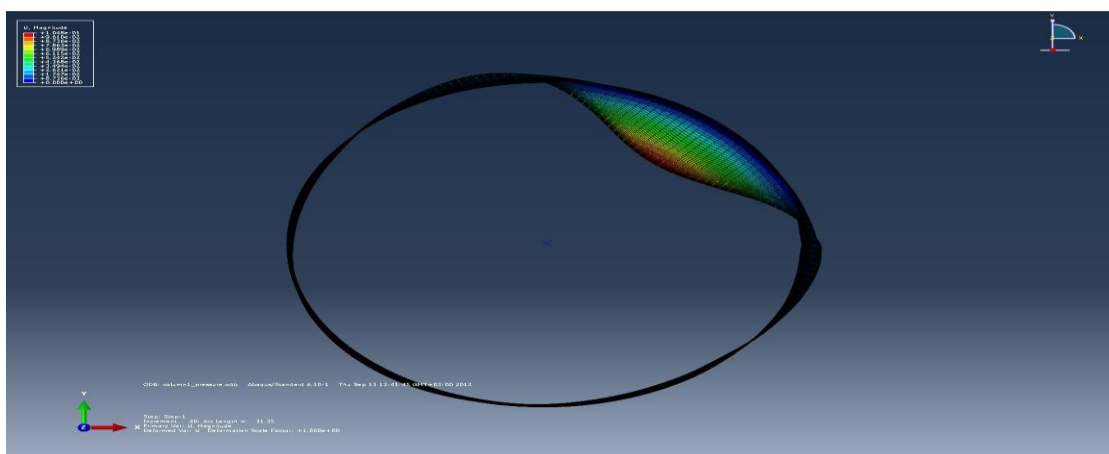
Σχήμα6.11ε₁: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 1.25 (τριδιάστατη προβολή)



Σχήμα6.11ε₂: Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για λόγο αξονικής φόρτισης- πλευρικής πίεσης 1.25(σε προβολή xy)



Σχήμα 6.11ζ₁ : Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για - πλευρική πίεση μόνο (τρισδιάστατη προβολή)



Σχήμα 6.11ζ₂ : Παραμόρφωση κυλίνδρου με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες για πλευρική πίεσης μόνο (σε προβολή xy)

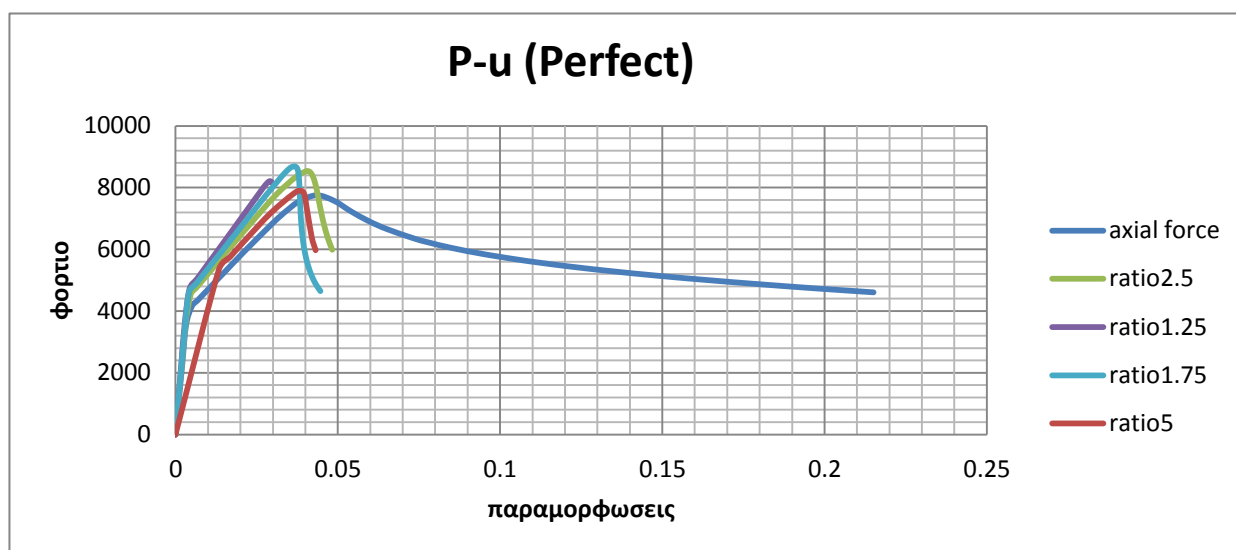
Αυτό που παρατηρείται σε αυτά τα σχήματα είναι ότι για μεγάλα θλιπτικά φορτία η μορφή των παραμορφώσεων είναι διαφορετική από ότι στην περίπτωση μεγάλης πλευρικής πίεσης. Από τα σχήματα 6.11 $\gamma_2, \delta_2, \epsilon_2, \zeta_2$ παρατηρείται ότι για τον λόγο 2.5 υπάρχουν τρία εξογκώματα, για τον λόγο 1.75 και 1.25 δυο και για την πλευρική πίεση ένα. Έτσι από αυτό φαίνεται η πολυπλοκότητα του φαινομένου για διάφορους λόγους θλίψης-πλευρικής πίεσης. Ακόμη, παρατηρείται ότι η μορφή του λυγισμού που εμφανίζεται είναι τοπικός λυγισμός σε όλες τις περιπτώσεις φόρτισης. Αυτό αποδεικνύει την σημασία των αρχικών τοπικών γεωμετρικών ατελειών στην ανάλυση μας, η παρουσία των οποίων θεωρείται υπαίτια για αυτές τις μορφές αστοχίας.

6.4.2 Αποτελέσματα τέλειων φορέων και φορέων με αρχική γεωμετρική ατέλεια με βάση την πρώτη ιδιομορφή.

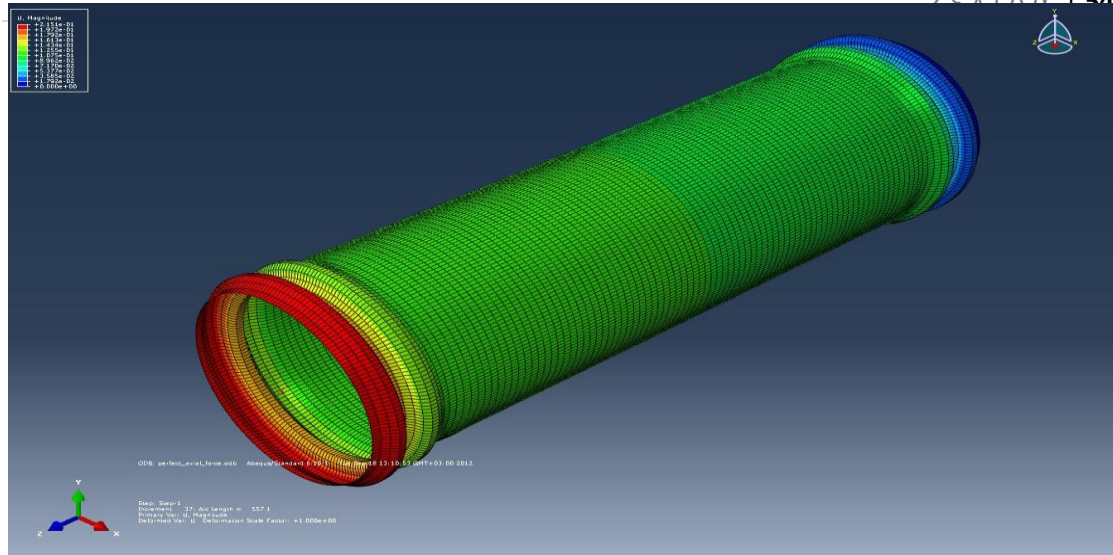
Στο πίνακα 6.3 φαίνονται τα φορτία κατάρρευσης και η αντίστοιχη πλευρική πίεση στην περίπτωση που ο φορέας που αναλύουμε είναι τέλειος δηλαδή χωρίς γεωμετρικές ατέλειες. Παρατηρείται ότι το θλιπτικό φορτίο είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό που υπολογίστηκε προηγουμένως με την χρήση των στοχαστικών πεδίων. Ακόμη, με την αύξηση της πλευρικής πίεσης δεν έχουμε μείωση του θλιπτικού φορτίου αλλά αύξηση πράγμα το οποίο αποτελεί παράδοξο. Αυτού του είδους οι κατασκευές όπως αποδείχθηκε από την παραπάνω διερεύνηση αλλά όπως έχει αποδειχθεί και από πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζουν μείωση του φορτίου κατάρρευσης με πλευρική πίεση από έξω προς τα μέσα. Επιπλέον, έχει παρατηρηθεί από πειραματικές μετρήσεις ότι η πλευρική πίεση από μέσα προς τα έξω λειτουργεί ευεργετικά (συμβαίνει το αντίθετο στον τέλειο φορέα), ενώ η αντοχή μόνο σε θλιπτικό φορτίο είναι μεγαλύτερη από την αντοχή μόνο σε πλευρική πίεση. Στην περίπτωση, όμως, του τέλειου φορέα συμβαίνει το αντίθετο και μάλιστα στην περίπτωση της πλευρικής πίεσης το φορτίο είναι πολύ μεγαλύτερο και η παραμόρφωση δεν είναι συμβατή με την πραγματικότητα. Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι δεν γίνεται να αμελήσουμε την παρουσία αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα P-u για τον τέλειο φορέα και για τις διάφορες περιπτώσεις φόρτισης (σχήμα 6.12) καθώς και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις (σχήματα 6.13α,β,γ,δ,ε)

Πίνακας 6.3

	Φορτίο κατάρρευσης P_u (KN)	Αντίστοιχη πλευρική πίεση(Kpa)
Μόνο αξονικό	7747.69	0.00
λόγος 5	7873.60	1574.72
λόγος 2.5	8535.58	3414.23
λόγος 1.75	8684.92	4962.81
λόγος 1.25	8205.93	6564.74
Μονο πλευρική πίεση	0.00	42120.80

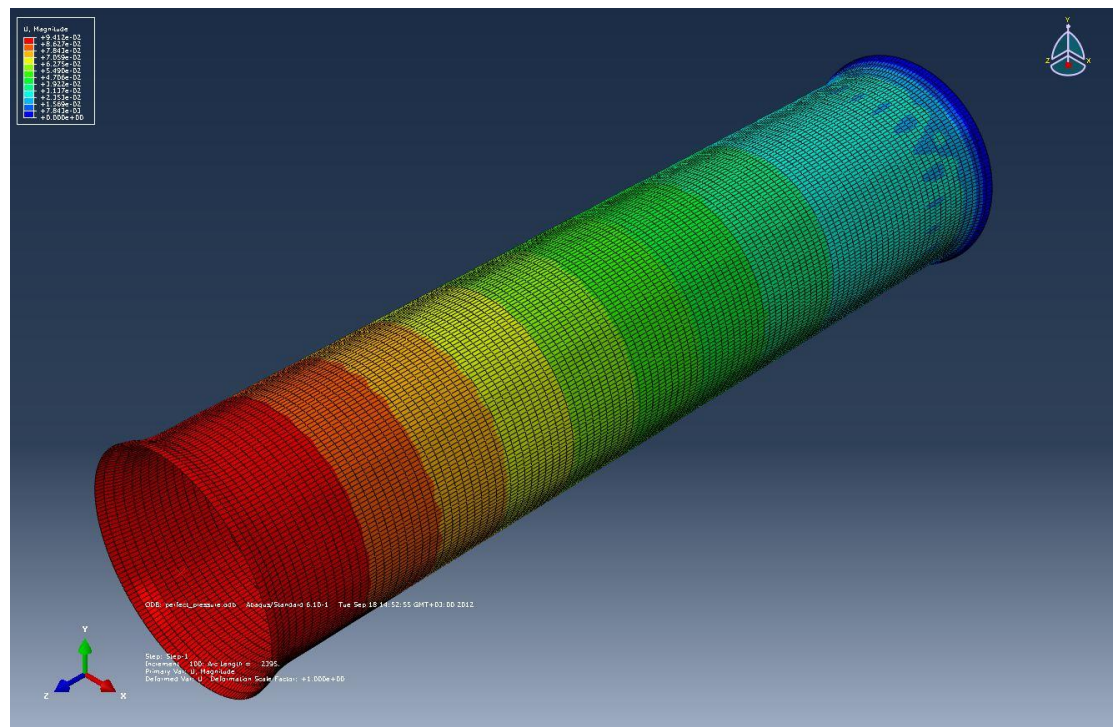


Σχήμα 6.12 : Καμπύλες φορτίου μετατόπισης τέλειου φορέα για τις διάφορες περιπτώσεις φόρτισης



Σχήμα 6.13α : Παραμόρφωση τέλειου φορέα για θλιπτικό φορτίο μόνο

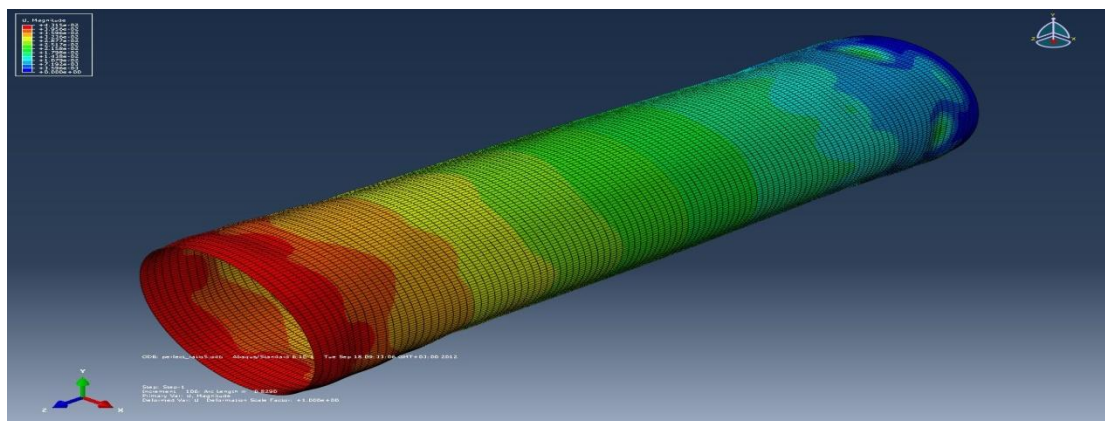
Αυτό που παρατηρείται είναι ότι η παραμόρφωση είναι συγκεντρωμένη στα άκρα πράγμα το οποίο είναι αντίθετο με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την στοχαστική ανάλυση.



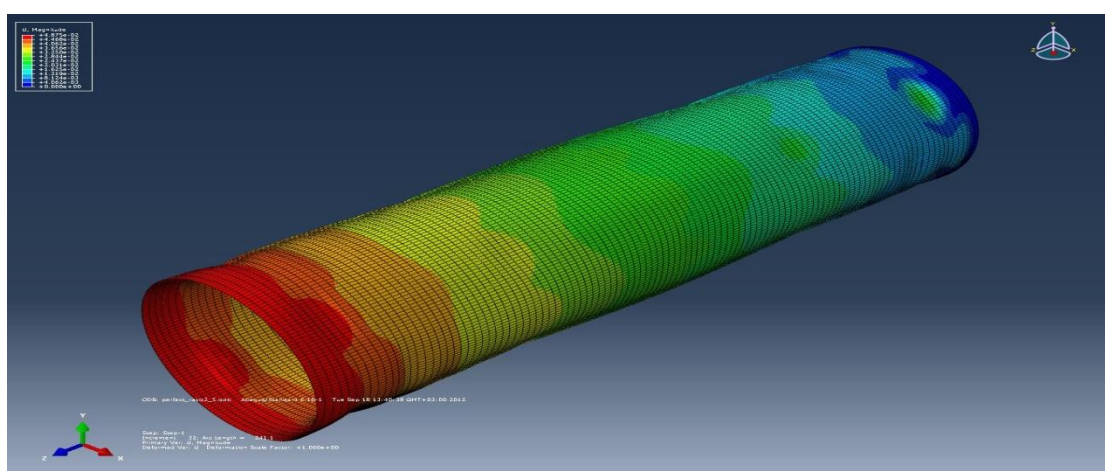
Σχήμα 6.13β : Παραμόρφωση τέλειου φορέα για πλευρική πίεση μόνο

Ο τέλειος φορέας χωρίς καμία γεωμετρική ατέλεια και με μόνο πλευρική πίεση φαίνεται να μην αστοχεί ποτέ. Επομένως, η αριθμητική τιμή δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα καθώς πάντοτε στην φύση υπάρχει μια μικρή ατέλεια που οδηγεί σε κάποια μορφή λυγισμού.

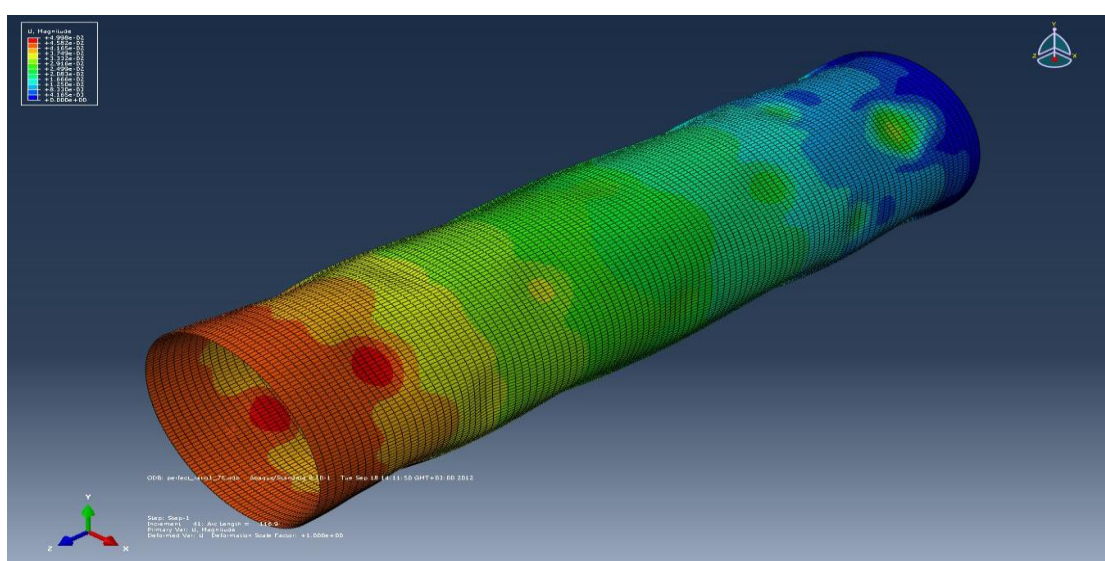
Από τα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος για τους λόγους 5,2.5 και 1.75 αστοχεί τοπικά κοντά στα άκρα και η μορφή της παραμόρφωσης δεν έχει καμία σχέση με την μορφή που προκύπτει από την στοχαστική ανάλυση.



Σχήμα 6.13γ : Παραμόρφωση τέλειου φορέα για λόγο αξονικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 5

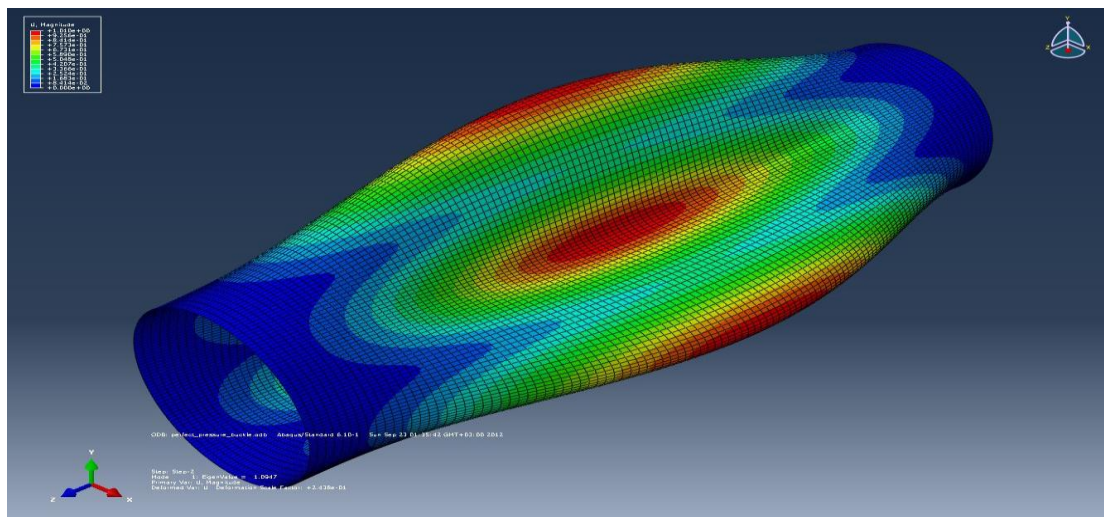


Σχήμα 6.13δ : Παραμόρφωση τέλειου φορέα για λόγο αξονικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 2.5

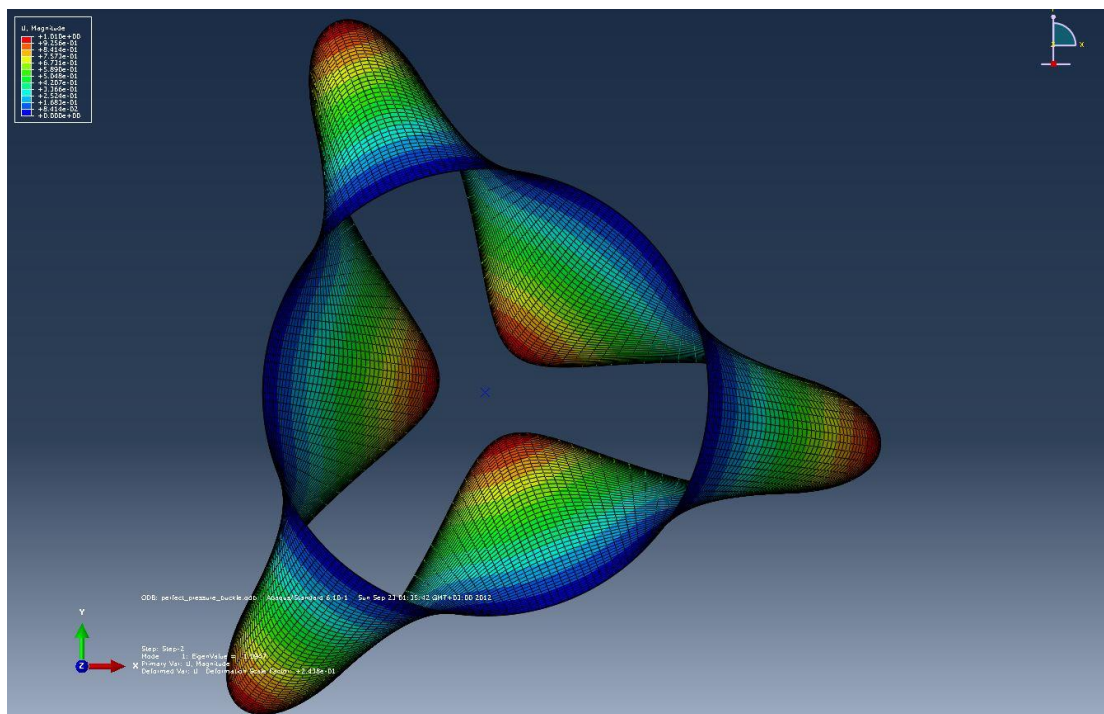


Σχήμα 6.13ε: Παραμόρφωση τέλειου φορέα για λόγο αξονικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 1.75

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, πραγματοποιήθηκαν και άλλες τρεις αναλύσεις με θλιπτικό φορτίο μόνο, με πλευρική πίεση μόνο καθώς και με λόγο θλιπτικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 2.5, όπου εισάγεται αρχική γεωμετρική ατέλεια ένα ποσοστό της πρώτης ιδιομορφής που προκύπτει από την ανάλυση γραμμικού λυγισμού για πλευρική πίεση μόνο (scale= 0.000005). Η πρώτη ιδιομορφή παρουσιάζεται στα σχήματα 6.14α,β ,ενώ τα αποτελέσματα των αναλύσεων στα σχήματα 6.15α,β,γ. Η μορφή της πρώτης ιδιομορφής είναι οβαλοειδές.

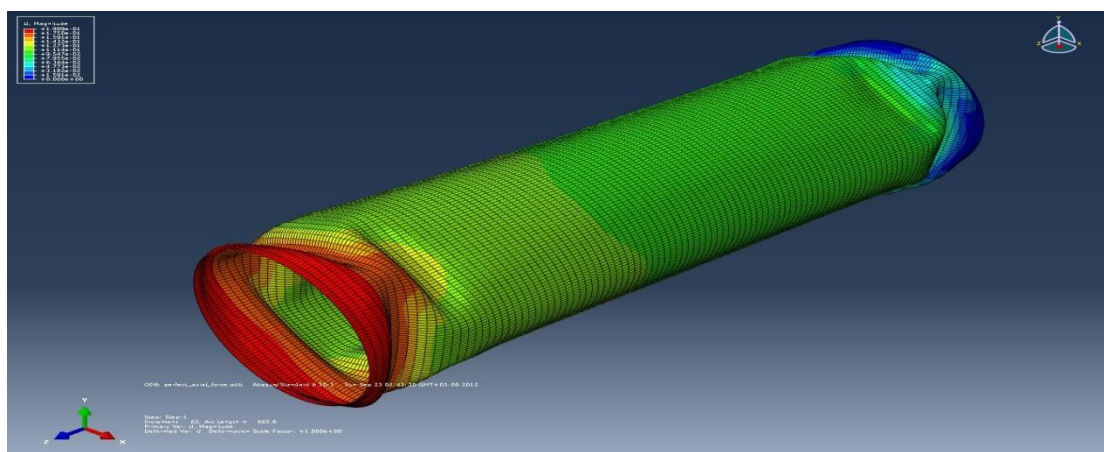


Σχήμα6.14 α : Μορφή πρώτης ιδιομορφής λυγισμού για την περίπτωση πλευρική πίεσης μόνο(τρισδιάστατη προβολή)

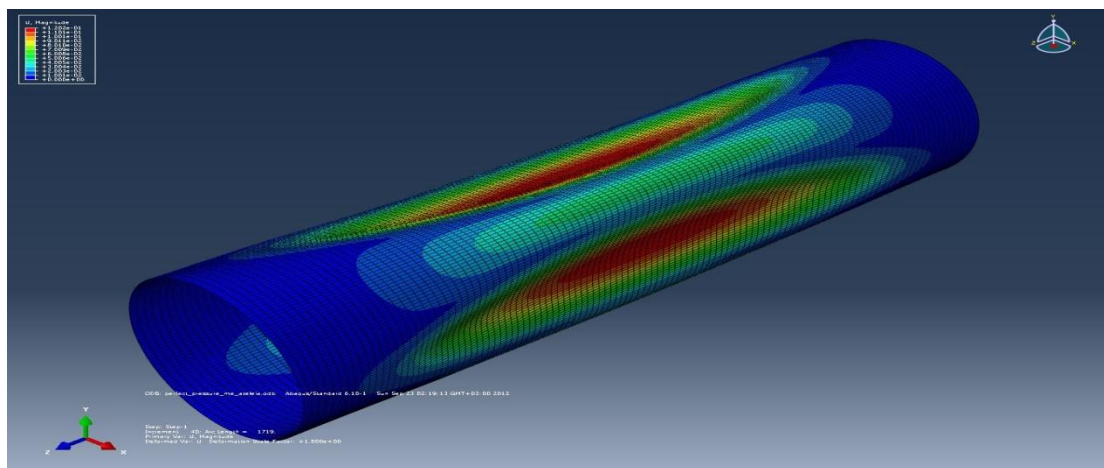


Σχήμα6.14 β: Μορφή πρώτης ιδιομορφής λυγισμού για την περίπτωση πλευρική πίεσης μόνο (xy προβολή)

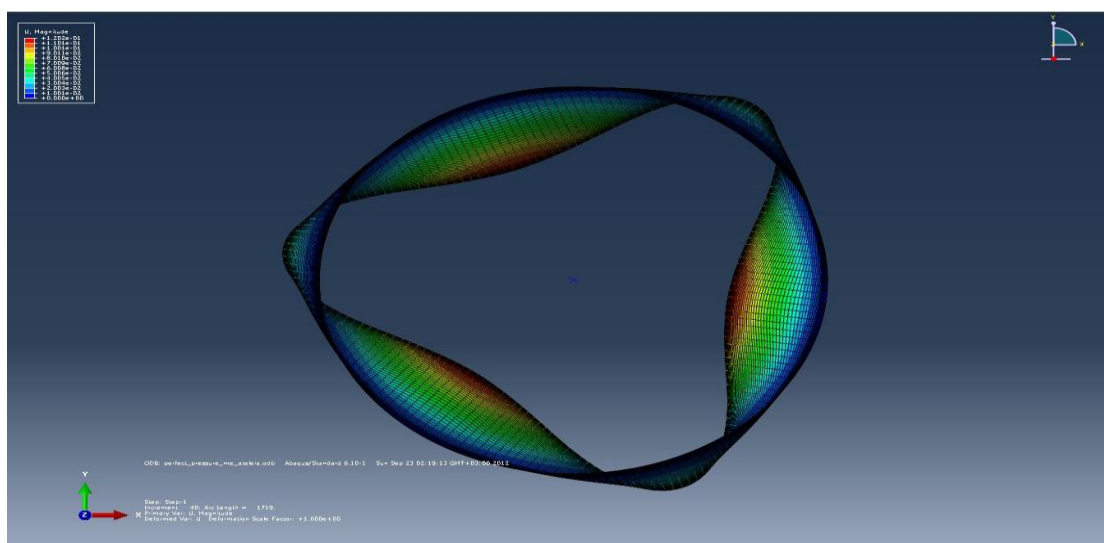
Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των αναλύσεων για τις τρεις περιπτώσεις



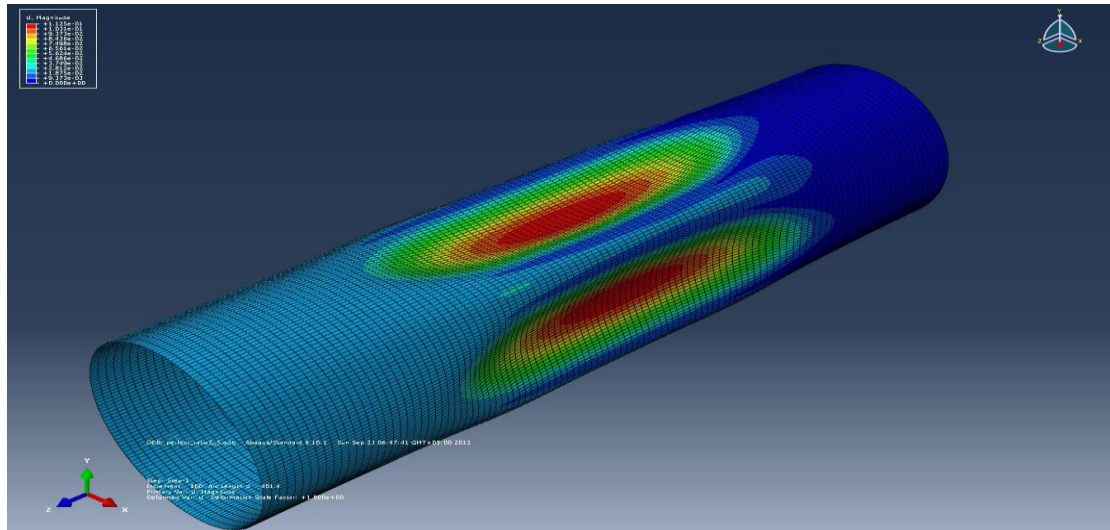
Σχήμα 6.15 α: Παραμορφώσεις κυλίνδρου για θλίψη μόνο με γεωμετρική ατέλεια βάση την πρώτη ιδιομορφή



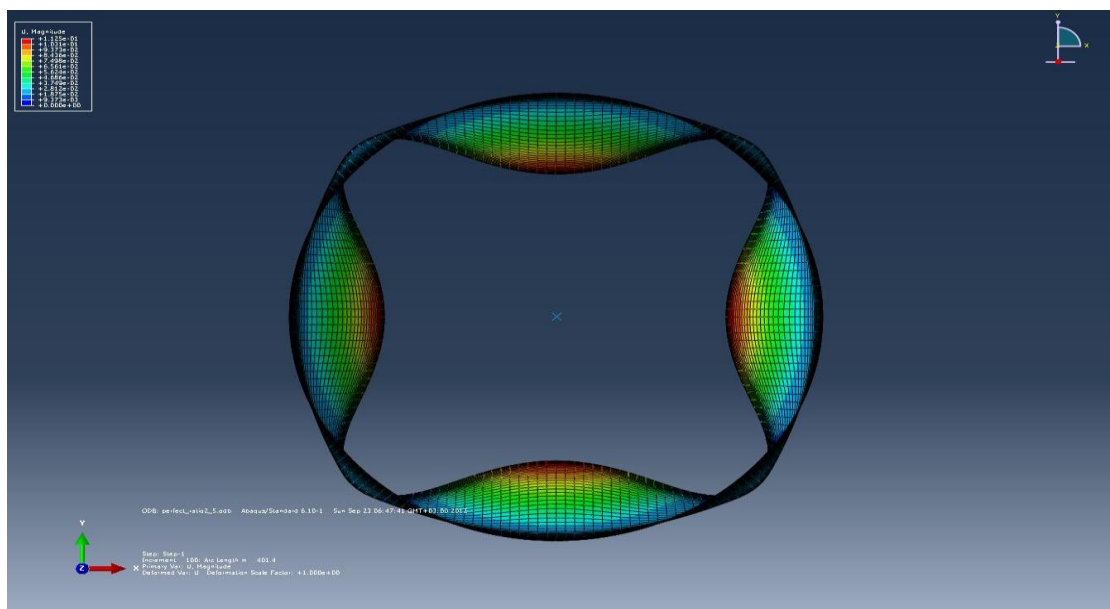
Σχήμα 6.15 β₁: Παραμορφώσεις κυλίνδρου για πλευρική πίεση μόνο με γεωμετρική ατέλεια βάση την πρώτη ιδιομορφή (τρισδιάστατη προβολή).



Σχήμα 6.15 β₂: Παραμορφώσεις κυλίνδρου για πλευρική πίεση μόνο με γεωμετρική ατέλεια βάση την πρώτη ιδιομορφή (xy προβολή).



Σχήμα 6.15 γ₁: Παραμορφώσεις κυλίνδρου για λόγο θλιπτικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 2.5 με γεωμετρική ατέλεια βάσει την πρώτη ιδιομορφή (τρισεδιάστατη προβολή).



Σχήμα 6.15 γ₂: Παραμορφώσεις κυλίνδρου για λόγο θλιπτικού φορτίου και πλευρικής πίεσης 2.5 με γεωμετρική ατέλεια βάσει την πρώτη ιδιομορφή (xy προβολή).

Οι τιμές των φορτίων κατάρρευσης για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις (κύλινδρος με αρχική γεωμετρική ατέλεια με βάση την πρώτη ιδιομορφή που προκύπτει από την γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού) είναι:

- μόνο αξονικό φορτίο : $P_u = 7751.28 \text{ KN}$
- με λόγο 2.5 : $P_u = 5110,46 \text{ KN}$
- μόνο πλευρική πίεση : $\text{pressure} = 2257.53 \text{ Kpa}$

Τέλος στο σχήμα 6.16 παρουσιάζονται το στοχαστικό διάγραμμα αλληλεπίδρασης (μπλε γραμμή) καθώς και οι αντίστοιχες μέγιστες και ελάχιστες τιμές (διακεκομμένες) και το διάγραμμα αλληλεπίδρασης του φορέα με αρχική γεωμετρική ατέλεια την πρώτη ιδιομορφή (πράσινη γραμμή). Οι αντίστοιχες τιμές των διαγραμμάτων φαίνονται στον πίνακα 6.4 και 6.5.

		Stochastic		Perfect		cylinder with imperfection of the shape of the first eigenmode	
Σημεία		Pu	pressure	Pu	pressure	Pu	pressure
1	axial only	5487.217	0	7747.49	0	7751.28	0
2	ratio5	4449.114	889.8228	7873.6	1574.72		
3	ratio2.5	4085.554	1634.222	8603.22	3441.288	5110.46	2044.184
4	ratio1.75	3288.858	1879.348	8684.92	4962.811		
5	ratio1.25	2492.83	1994.264	8205.93	6564.744		
6	pressure	0	2068.974			0	2257.53

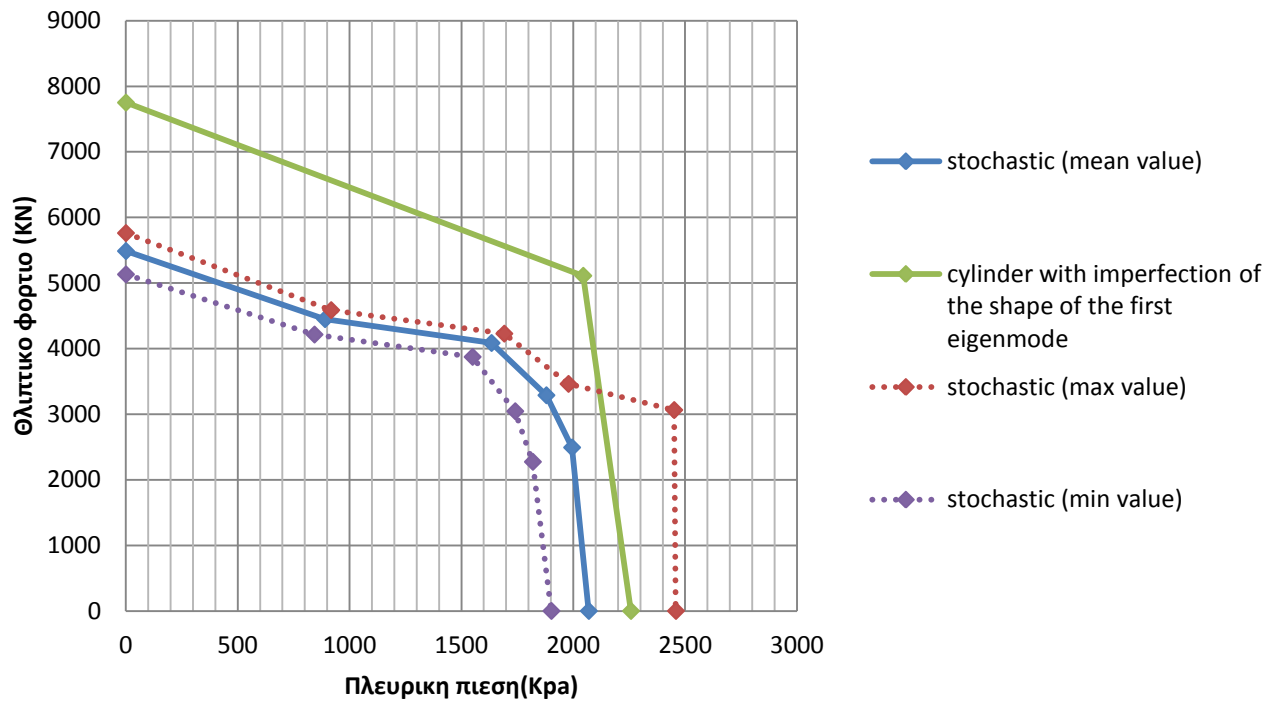
Πίνακας 6.4

	Stochastic			
	max value		min value	
	Pu	pressure	Pu	pressure
axial only	5761.62	0	5131.89	0
ratio5	4586.67	917.334	4214.33	842.866
ratio2.5	4228.18	1691.272	3873.74	1549.496
ratio1.75	3461.86	1978.206	3045.23	1740.131
ratio1.25	3063.37	2450.696	2273.69	1818.952
pressure	0	2458.385	0	1901.755

Πίνακας 6.5

Από το σχήμα 6.16 εξάγεται το εξής βασικό συμπέρασμα ότι είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι ατέλειες με βάση την στοχαστική προσομοίωση καθώς τα αποτελέσματα είναι κατά της ασφάλειας (κυρίως για μεγάλα θλιπτικά φορτία). Ακόμη, από τις διακεκομμένες γραμμές (κόκκινη μέγιστη τιμή που εμφανίστηκε και μωβ ελάχιστη) παρατηρούμε ότι η διασπορά για μεγάλη πλευρική πίεση είναι μεγάλη

Διαγράμματα αλληλεπίδρασης



Σχήμα 6.16 : Διαγράμματα αλληλεπίδρασης

7. Συμπεράσματα και θέματα για Περαιτέρω έρευνα.

Συμπεράσματα:

- ❖ Από τις αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν σε πενήντα κυλίνδρους με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες παρατηρήθηκε σημαντική μείωση του μέσου θλιπτικού φορτίου αντοχής με την παρουσία πλευρικής πίεσης. Ακόμη, η αντοχή σε θλιπτικό φορτίο είναι μεγαλύτερη από την αντοχή σε πλευρική πίεση. Αυτά τα συμπεράσματα είναι συμβατά με τις πειραματικές μετρήσεις
- ❖ Από τα ιστογράμματα που παρουσιάζονται στα σχήματα 6.8 παρατηρείται ότι υπάρχει μεγάλη διασπορά των αποτελεσμάτων για κάθε περίπτωση φόρτισης. Για παράδειγμα στην περίπτωση μόνο αξονικής φόρτισης εμφανίζονται κάποιοι κύλινδροι να αστοχούν για περίπου 5150KN και κάποιοι με 5775 KN . Αυτή η διαφορά οφείλεται στις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, οι οποίες δημιουργούνται στο στάδιο της κατασκευής. Στην περίπτωση του λόγου θλιπτικού φορτίου-πλευρικής πίεσης 1.25 ο συντελεστής διασποράς φτάνει την τιμή $Cov=0.071$. Συνεπώς οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν αρκεί να πραγματοποιηθεί μια ανάλυση με ένα κύλινδρο στο οποίο θα λάβουμε υπόψη τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, καθώς μπορεί η μια αυτή περίπτωση να οδηγήσει σε υποδιαστασιολόγηση ή υπερδιαστασιολόγηση.
- ❖ Στην συνέχεια έγιναν αναλύσεις με βάση τον τέλειο φορέα στις όποιες παρατηρείται ότι φορέας χωρίς καμία γεωμετρική ατέλεια και με μόνο πλευρική πίεση φαίνεται να μην αστοχεί ποτέ. Επομένως, η αριθμητική τιμή δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα καθώς πάντοτε στην φύση υπάρχει μια μικρή ατέλεια που οδηγεί σε κάποια μορφή λυγισμού.
- ❖ Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση του τέλειου φορέα, εισάγοντας ως αρχική γεωμετρική ατέλεια την πρώτη ιδιομορφή, προκύπτει ότι οδηγούμαστε σε μεγαλύτερα φορτία κατάρρευσης από αυτά της στοχαστικής ανάλυσης πράγμα το οποίο είναι κατά της ασφαλείας. Ακόμη η μορφή της αστοχίας δεν είναι ίδια για τις δυο περιπτώσεις και κυρίως για την περίπτωση της θλίψης μόνο που στη μεν στοχαστική ανάλυση εμφανίζεται τοπικός λυγισμός περίπου στην μέση ενώ στην άλλη εμφανίζεται και στα δύο άκρα. Αυτό σημαίνει ότι είναι αναγκαίο να λάβουμε υπόψη τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες με έναν πιο ακριβή τρόπο, αυτόν της στοχαστικής προσομοίωσης.
- ❖ Από το διάγραμμα αλληλεπίδρασης παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές του πλευρικού φορτίου, η διασπορά των οριακών φορτίων είναι μεγάλη. Επομένως, η παρουσία αρχικών γεωμετρικών ατελειών επηρεάζουν αρκετά στην περίπτωση της πλευρικής φόρτισης.
- ❖ Τέλος, η μορφή της καμπύλης φορτίου μετατόπισης για έναν κύλινδρο με αρχικές γεωμετρικές ατέλειες με βάση την στοχαστική ανάλυση είναι διαφορετική για μεγάλα θλιπτικά φορτία και μικρή πλευρική πίεση από ότι με μεγάλη πλευρική μέση. Το ίδιο παρατηρείται και στην μορφή αστοχίας.

Περαιτέρω έρευνα:

- ❖ Στην συγκεκριμένη διπλωματική έγινε προσομοίωση μόνο των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Όμως έχει αποδειχθεί ότι τα συγκεκριμένα κελύφη είναι ευαίσθητα και στο μεταβλητό πάχος που δημιουργείται στο στάδιο της κατασκευής. Έτσι, θα πρέπει να εισάγουμε και αυτήν την παράμετρο στην ανάλυση με την βοήθεια της στοχαστικής μεθόδου. Γι αυτό το θέμα υπάρχουν και διαθέσιμες πειραματικές μετρήσεις του πάχους ώστε να προκύψουν τα αντίστοιχα φάσματα ισχύος.
- ❖ Σε κάθε σημείο έγιναν 50 αναλύσεις, όμως προκειμένου να θεωρήσουμε ότι η αντοχή στη συγκεκριμένη θέση ακολουθεί κάποια στατιστική κατανομή χρειάζεται να γίνουν και άλλες αναλύσεις. Αυτό είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας.
- ❖ Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των φασμάτων ήταν από την τιμές των ατελειών στην θέση για $x=0$ και στην θέση $y=0.1651$. Έτσι χρειάζεται με κάποιον τρόπο να λάβουμε και τα υπόλοιπα πειραματικά δεδομένα υπόψη.
- ❖ Τέλος, στην φύση κατά κύριο λόγο η πλευρική πίεση είναι σταθερή (π.χ. ένας υποθαλάσσιος σωλήνας). Έτσι χρειάζεται διερεύνηση και το συγκεκριμένο θέμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ABAQUS

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ABAQUS

Στο παρόν παράρτημα αναφέρονται κάποια βασικά προγραμματιστικά στοιχεία του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS. Συγκεκριμένα επεξηγείται η εντολή *PLASTIC, η εντολή *IMPERFECTION και η εντολή της Matlab που καλεί το ABAQUS και τρέχει την ανάλυση στο παρασκήνιο.

❖ Εντολή *PLASTIC

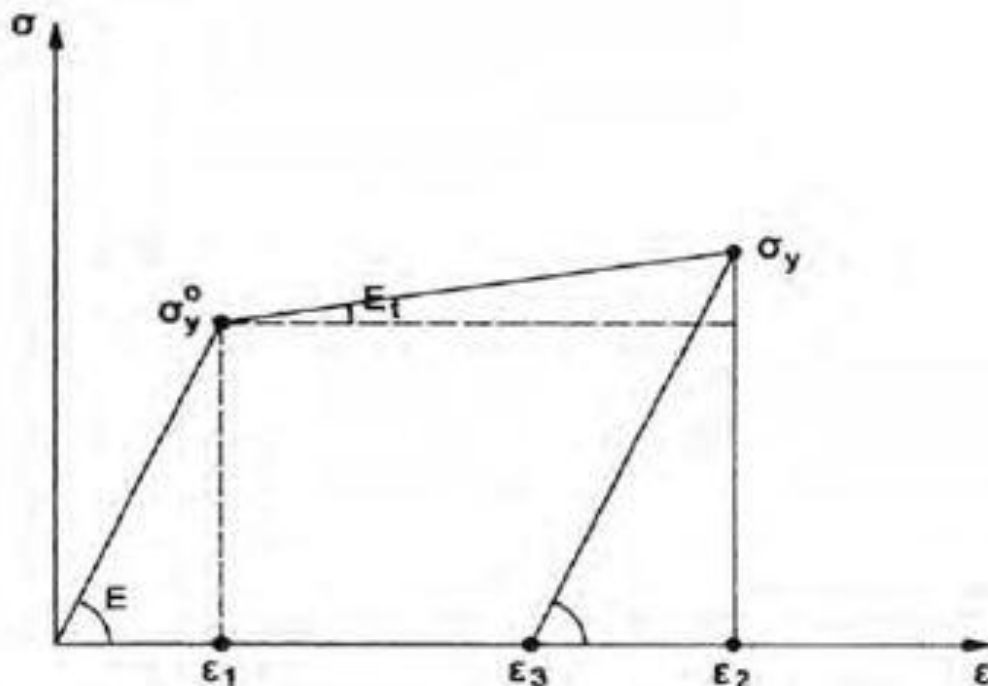
Η εντολή αυτή χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της καμπύλης τάσεως-πλαστικής ανηγμένης παραμορφώσεως για ισότροπα υλικά που συμπεριφέρονται ως ελαστοπλαστικά. Τα ελαστικό μέρος της καμπύλης τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης περιγράφεται με την εντολή ELASTIC, η οποία προηγείται της εντολής PLASTIC, και στην οποία ορίζονται το μέτρο Ελαστικότητας και ο λόγος Poisson.

Η καμπύλη τάσης-ανηγμένης πλαστικής παραμόρφωσης δίνεται με ζεύγη συντεταγμένων. Το πρώτο ζεύγος αντιστοιχεί πάντοτε στις συντεταγμένες σ_y^0 , 0.0, όπου σ_y^0 είναι η αρχική τάση διαρροής του υλικού. Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα σχετικά με την εν λόγω καμπύλη.

Έστω το υλικό του σχήματος 3.1 για το οποίο δίδεται μέτρο Ελαστικότητας $E=21000\text{KN/cm}^2$ στην ελαστική περιοχή και το οποίο υλικό έχει αρχική τάση διαρροής $\sigma_y^0=35\text{KN/cm}^2$.

Υποθέτουμε ότι το μέτρο Ελαστικότητας στην πλαστική περιοχή είναι 10% του Ε. Αρα, $E_t=0.1E=2100\text{KN/cm}^2$.

Με βάση το σχήμα Α1 όπου φαίνεται η καμπύλη τάσης-ανηγμένης πλαστικής παραμόρφωσης υπολογίζουμε τα μεγέθη ϵ_3 και σ_y .



Σχήμα Α1: καμπύλη τάσης-ανηγμένης πλαστικής παραμόρφωσης

Ακόμη θεωρούμε πάντα προσεγγιστικά $\varepsilon_2 = 0.5$. (Ούτως ή άλλως δεν θα φτάσουμε ποτέ αυτή τη τιμή).
Έχουμε:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_y^0}{E} = \frac{35}{21000} = 0.001666$$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_y^0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = E_t \Rightarrow \sigma_y = E_t(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \sigma_y^0 = 1081.50 \text{ KN} / \text{cm}^2$$

$$\text{Ακόμη, } \varepsilon_3 = \varepsilon_2 - \frac{\sigma_y}{E} = 0.4485$$

Τέλος η εντολή *PLASTIC συντάσσεται με τις εξής παραμέτρους:

*PLASTIC

σ_y^0 , 0.0

σ_y , ε_3

Η εντολή αυτή καλό είναι να εισάγεται στο file.inp μετά από την εντολή *ELASTIC γιατί ενδέχεται να μην υποστηρίζεται από το γραφικό περιβάλλον του Abaqus (.CAE) .

❖ Εντολή *IMPERFECTION

Η εντολή αυτή χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να εισάγουμε την πρώτη ιδιομορφή ως αρχική ατέλεια του φορέα. Η συγκεκριμένη εντολή δεν υποστηρίζεται από το γραφικό περιβάλλον του ABAQUS. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει η εντολή στο file.inp, όταν θα εισάγουμε το συγκεκριμένο αρχείο στο ABAQUS προκειμένου να κάνουμε την ανάλυση τότε θα βγαίνει το μήνυμα:

WARNING: The following keywords/parameters are not yet supported by the input file reader:

*IMPERFECTION

*PREPRINT

Αυτό συμβαίνει επειδή η εντολή δεν υποστηρίζεται από το γραφικό περιβάλλον (.CAE). Η λύση είναι να τρέξουμε το συγκεκριμένο αρχείο στο παρασκήνιο, δηλαδή να καλέσουμε το ABAQUS από την Matlab ή από την Fortran . Τότε η ανάλυση θα εκτελεστεί κανονικά.

Επίσης είναι σημαντικό ότι για να διαβάσει το αρχείο που περιέχει την εντολή *IMPERFECTION την μορφή της πρώτης ιδιομορφής χρειάζεται να δημιουργηθεί ένα αρχείο με την μορφή .fil από την προηγούμενη ανάλυση. Αυτό δημιουργείται με την εντολή (η οποία επίσης δεν αναγνωρίζεται από το γραφικό περιβάλλον γι' αυτό πρέπει να την εισάγουμε στο file.inp και να τρέξουμε την ανάλυση στο παρασκήνιο) :

*NODE FILE, GLOBAL=YES, LAST MODE=*n*

U

Συνεπώς, χρειάζεται να γίνουν δυο αναλύσεις μια γραμμικού λυγισμού προκειμένου να υπολογιστούν οι ιδιομορφές και να αποθηκεύεται η μορφή τους σε ένα αρχείο της μορφής .fil και μια άλλη στην οποία θα έχουμε εισάγει την πρώτη ιδιομορφή ως αρχική γεωμετρική ατέλεια και στην συνέχεια θα εκτελείται μη γραμμική ανάλυση. Η μορφή αυτών των αρχείων .inp πρέπει να είναι :

➤ Πρώτη Ανάλυση

*HEADING

Initial analysis run to write the buckling modes to the results file

*NODE

Data lines to define initial “perfect” geometry

...

**

*STEP

*BUCKLE

Data lines to define the number of buckling eigenmodes

*CLOAD and/or *DLOAD and/or *DSLOAD and/or *TEMPERATURE

Data lines to specify the reference load,

*NODE FILE, GLOBAL=YES, LAST MODE=n

U

*END STEP

➤ Δεύτερη Ανάλυση

*HEADING

Second analysis run to define the imperfection and perform the postbuckling analysis

*NODE

Data lines to define initial “perfect” geometry

...

*IMPERFECTION, FILE=results_file, STEP=step

Data lines specifying the mode number and its associated scale factor

...

**

*STEP, NLGEOM

*STATIC, RIKS

Data line to define incrementation and stopping criteria

*CLOAD and/or *DLOAD and/or *DSLOAD and/or *TEMPERATURE

Data lines to specify reference loading,

*END STEP

Παρακάτω επεξηγείται αναλυτικότερα η εντολή *IMPERFECTION:

*IMPERFECTION, FILE=static1, STEP=<step>

1,<scale-factor>

Συγκεκριμένα:

- ❖ Στην θέση του static 1 γράφουμε το όνομα του αρχείου που έχει τη μορφή .fil
- ❖ Στην θέση του <step> γράφουμε το αριθμό της ανάλυσης στην οποία θα εισάγουμε την πρώτη ιδιομορφή ως αρχική ατέλεια.
- ❖ Στην θέση του <scale-factor> βάζουμε την τιμή που ορίζει το μέγεθος της ατέλειας.

❖ Εντολή κλήσης του ABAQUS από την Matlab

Η εντολή αυτή είναι η εξής:

```
status=dos('abq6101 job=column1_ratio0_5.inp interactive ')
```

Συγκεκριμένα:

- Η εντολή περιέχει την παράμετρο **abq6101**. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν την έκδοση του ABAQUS. Η έκδοση που χρησιμοποιήθηκε στην συγκεκριμένη διπλωματική είναι η Abaqus 6.10-1 . Αν η έκδοση που χρησιμοποιείται είναι η Abaqus 6.6-1 τότε πρέπει να γράφει **abq661**.
- Ο όρος **column1_ratio0_5.inp** ορίζει το αρχείο file.inp το οποίο θα αποτελέσει το αρχείο εισόδου για την ανάλυση.
- Η εντολή **interactive** σημαίνει ότι αν δεν τελειώσει πρώτα η ανάλυση δεν θα εκτελεστεί η επόμενη εντολή της matlab. Με αυτό τον τρόπο με ένα αρχείο script της matlab που θα περιλαμβάνει πολλές εντολές που θα καλούν το ABAQUS μπορούν να γίνουν πολλές αναλύσεις η μια μετά την άλλη.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Κοκολάκης Γ. & Ι. Σπηλιώτης. "Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική".(Αθήνα 1999)
2. Dominik Schillinger. Διπλωματική εργασία :*"Stochastic FEM Based Stability Analysis of I-Sections With Random Imperfections "*.(2008)
3. Γ.Γεωργίου & Χ.Ξενοφόντος *"Εισαγωγή στη MATLAB"*.(Λευκωσία 2007).
4. Γ.Σ.Στεφάνου & Μ. Παπαδρακάκης Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος : *"Στοχαστικά Πεπερασμένα Στοιχεία"*.(Αθήνα 2007).
5. Dominik Schillinger & Βησσαρίων Παπαδόπουλος. Δημοσίευση: *"Accurate Estimation of Enolutionary Power Spectra for Strongly Narrow-Band Random Fields"*.(2008)
6. Μ. Shinozuka & G.Deodatis.Δημοσίευση:*"Simulation of stochastic processes by spectral representation"*.(1991)
7. Γεώργιος Σ.Σοφιανός & Ευάγγελος Θ.Τυχόπουλος. *"Αριθμητική Ανάλυση"*.(Αθήνα 2005)
8. Δημ.Κυτάγιας & Λαζ. Βρυζίδης. *"Αριθμητική Ανάλυση-αλγοριθμική προσέγγιση"*.(Αθήνα 1989)
9. V.V. Bolotin, Statistical Methods in Structural Mechanics, Holden-Day, San Francisco (1969).
10. J.M.T. Thompson, Towards a general statistical theory of imperfection sensitivity in elastic post-buckling, J. of the Mechanics and Physics of Solids 15, 413-417 (1967).
11. J. Roorda, J.S. Hansen, Random buckling behavior in axially loaded cylindrical shells with axisymmetric imperfections, J. of Spacecraft and Rockets 9, 88-91 (1972).
12. J.S. Hansen, General random imperfections in the buckling of axially loaded cylindrical shells, AIAA Journal 15, 1250-1256 (1977).
13. I. Elishakoff, J. Arbocz, Reliability of axially compressed cylindrical shells with general non-symmetric imperfections, J. of Applied Mechanics (ASME) 52, 122-128 (1985).
14. M.K. Chryssanthopoulos, C. Poggi, Stochastic Imperfection Modeling in Shell Buckling Studies, Thin-Walled Structures 23, 179-200 (1995).
15. Γ. Στεφάνου, "Στοχαστική ανάλυση κελυφών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων", Διδακτορική διατριβή.

16. Βησσαρίων Παπαδόπουλος & Μ, Παπαδρακάκης. Δημοσίευση : "*The effect of material and thickness variability on the buckling load of shells with random initial imperfection*".(2005).
17. Δρ. Λεμονή Ψαρράς (Επιστημονικός συνεργάτης ΕΜΠ) . Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος Μη Γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία : "*Χειρισμός Προγραμματιστικά του ABAQUS σε Γραμμικά και μη Γραμμικά Προβλήματα*".(2008)
18. CBI Industries, Inc. Research Laboratory Plainfield, IL 60544 : Collapse Tests of Fabricated Cylinders Under Combined Axial Compression and External Pressure.(February 1984)