Χτίσιμο του Standard Model και β function

Αθανασία Ξαγκώνη

27 Ιουλίου 2012

Αφιερωμένο στους γονείς μου και την Μένια, γιατί είναι μοναδικοί

Περιεχόμενα

Το παρόν έργο είναι χωρισμένο σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος επιχειρείται μια αναλυτική παρουσίαση των βασικών αρχών που θεμελίωσαν την σύγχρονη φυσική. Η περιγραφή αυτή ξεκινά με εξιστόρηση της κατάστασης στο χώρο της φυσικής από τη δεκαετία του ΄30 και συνεχίζει μέχρι να ολοκληρωθεί η σύγχρονη εικόνα για την σωματιδιακή φυσική, δηλαδή το Standard Model το οποίο φαίνεται να υπακούει τελικά η Φυσική Υψηλών Ενεργειών.
Το δεύτερο μέρος του παρόντος είναι αφιερωμένο στη μελέτη της μεθόδου της επανακανονικοποίησης με τελικό στόχο την είσοδο της συνάρτησης βήτα, με διεξοδική εφαρμογή της αποκτηθείσας γνώσης στην κβαντική ηλεκτροδυναμική και για την δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

This diploma thesis is separated in two parts. The objective of the first part is the descriptive exhibition of the disciplines that found the nowadays status of physics, as well as the way Standard Model, our modern picture of High Energy Physics was introduced. Then the second part is dedicated to the study of the fundamental method of renormalization. Our final purpose is the introduction among our mathematical tools of β function, which has a deep physical meaning.

Κεφάλαιο 1

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 Κβαντομηχανική

Οι καταστάσεις φυσικών συστημάτων παριστάνονται στην κβαντομηχανική με διανύσματα του χώρου Hilbert, ενώ τα φυσικά μεγέθη παριστάνονται με τελεστές. Οι προτάσεις αυτές αποτελούν βασικά ερμηνευτικά αξιώματα της κβαντομηχανικής, τα οποία αξίζει να δούμε σε περισσότερη λεπτομέρεια.
Η κβαντομηχανική βασίζεται στις ακόλουθες θεμελιώδεις αντιστοιχίες ανάμεσα σε μαθηματικά και φυσικά μεγέθη:

- Η **κατάσταση** ενός φυσικού συστήματος παριστάνεται από ένα διάνυσμα ψ του χώρου Hilbert. Τα διανύσματα $|\psi\rangle$ και $\lambda|\psi\rangle$, όπου λ μιγαδικός αριθμός, παριστάνουν την ίδια κατάσταση, επομένως είναι ακριβέστερο να πούμε ότι η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος παριστάνεται από μια δέσμη διανυσμάτων του χώρου Hilbert. Από τα μέλη της δέσμης αυτής συνήθως επιλέγουμε το διάνυσμα εκείνο το οποίο είναι κανονικοποιημένο στη μονάδα, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, έτσι ώστε να διευκολύνεται ο υπολογισμός πιθανοτήτων όπως θα δούμε παρακάτω.

- Οι **παρατηρίσιμες φυσικές ποσότητες** παριστάνονται από ερμιτιανούς τελεστές του χώρου Hilbert, οι οποίοι αφού είναι ερμιτιανοί έχουν πραγματικές ιδιοτιμές, ενώ τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα κάθε τέτοιου τελεστή σχηματίζουν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο χώρο Hilbert, το οποίο μπορεί να χρησιμεύσει ως βάση για την ανάπτυξη οποιουδήποτε διανύσματος του χώρου Hilbert.

Πέραν της αναγκαιότητας διατήρησης του αναλλοίωτου των μετασχηματισμών του Lorentz, η κβαντομηχανική θεωρία υπαγορεύεται από τις παρακάτω αρχές. Εξαιτίας της σπουδαιότητας τους θα αναφερθούν πρώτες.

1. Για ένα δομένο φυσικό σύστημα υπάρχει εξίσωση κατάστασης Φ που συνοψίζει όλες τις γνωστές παραμέτρους του συστήματος. Στην αρχική μας θεώρηση του ενός σχε-

τικιστικού σωματιδίου, αντιμετωπίζουμε την κυματοσυνάρτηση $\psi(q_i \cdots, s_i \cdots, t)$ ως συμφωνη αναπαράσταση συνάρτησης κατάστασης. Η κυματοσυνάρτηση αυτή δεν έχει άμεσο φυσικό περιεχόμενο· ωστόσο,

$$|\psi(q_1 \cdots q_n, s_1 \cdots s_n, t)|^2 \geqslant 0$$

ερμηνεύεται ως την **πιθανότητα** το σύστημα να έχει τιμές $(q_1 \cdots s_n)$ για δεδομένο χρόνο t. Επομένως αυτή η πιθανότητα απαιτεί να είναι το άθροισμα όλων των συνεισφορών για το $|\psi|^2$ και για όλες τις τιμές των $q_1 \cdots s_n$ σε δεδομένη χρονική στιγμή t, πεπερασμένο για όλες τις φυσικά αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις ψ.

2. Ένα φυσικό σύστημα είναι μια ιδιοκατάσταση του τελεστή Ω εάν

$$\Omega\Phi_n \equiv \omega_n \Phi_n \tag{1.1}$$

όπου Φ_n είναι η n-ωστή ιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή ω_n. Για ένα ερμιτιανό τελεστή, ω_n είναι πραγματικός. Μια σύμφωνη αναπαράσταση της (1.1) είναι

$$\Omega(q, s, t)\psi_n(q, s, t) \equiv \omega_n \psi_n(q, s, t).$$

3. Κατά την ανάπτυξη μπορούν να γραφούν καταστάσεις, οι οπο ίες για μια τυχαία κυματοσυνάρτηση ή συνάρτηση κατάστασης για ένα φυσικό σύστημα μπορούν τελικά να επεκταθούν σε ένα πλήρες κανονικοποιημένο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων ψ_n ενός πλήρους συστήματος αντιμετατιθέμενων τελεστών (Ω_n). Γράφουμε επομένως,

$$\psi \equiv \sum a_n \psi_n$$

ενώ η κανονικοποίηση δίνεται

$$\sum \int (dq_1 \cdots)\psi_n^*(q_i \cdots, s \cdots, t)\psi_m(q_i \cdots, s \cdots, t) \equiv \delta_{nm}$$

ενώ το $|a_n|^2$ αντιστοιχεί στη πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην n-ωστή ιδιοκατάσταση.

4. Το αποτέλεσμα της μέτρησης μιας φυσικής ποσότητας μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις ιδιοτιμές της. Συγκεκριμένα για ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi \equiv \sum a_n \psi_n,$$

με

$$\Omega\psi_n \equiv \omega_n \psi_n,$$

μέτρηση της ποσότητας Ω δίνει σαν αποτέλεσμα την ιδιοτιμή ω_n με πιθανότητα $|a_n|^2$. Συνεπώς η μέση τιμή της ποσότητας Ω σε ταυτόσιμα συστήματα δίνεται ως

$$\langle\Omega\rangle_\psi \equiv \sum \int (dq_1 \cdots) \psi_n^*(q_i \cdots, s \cdots, t) \Omega \psi_m(q_i \cdots, s \cdots, t) \equiv \sum |a_n|^2 \omega_n$$

5. Η χρονική εξέλιξη του φυσικού συστήματος εκφράζεται μέσω της εξίσωσης Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv H\psi \tag{1.2}$$

και όπου η χαμιλτονιανή H είναι γραμμικός ερμιτιανός τελεστής. Ταυτόχρονα δεν εμφανίζει χρονική εξάρτηση αφού είναι

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$$

και επομένως οι ιδιοτιμές του είναι πιθανές στάσιμες καταστάσεις του συστήματος. Η αρχή της υπέρθεσης άλλωστε εδώ προκύπτει από την γραμμικότητα του H ενώ η διατήρηση της πιθανότητας έχει ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \sum \int \psi^* \psi (dq_1 \cdots) \equiv \frac{i}{\hbar} \sum \int (dq_1 \cdots) [(H\psi)^* \psi - \psi^* (H\psi)] \equiv 0 \tag{1.3}$$

Σημειώνουμε ότι η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrodinger, ακολουθεί τη μαθηματική δομή εξισώσεων ιδιοτιμών και έχουν ως πρότυπο τους τις εξισώσεις ιδιοτιμών για μήτρες

$$AX = \alpha X,$$

όπου το ζητούμενο στην ουσία είναι το ίδιο. Η δράση της μήτρας δίνει την απλούστερη μορφή: τα αφήνει παράλληλα με τον εαυτό τους αφού τα πολλαπλασιάζει απλώς με έναν αριθμό, την ιδιοτιμή α.

1.2 Μη σχετικιστικές εξισώσεις - Εξίσωση Schroedinger

Το απλούστερο φυσικό σύστημα αποτελείται από ένα απομονωμένο ελεύθερο σωματίδιο, για το οποίο η μη σχετικιστική χαμιλτονιανή είναι:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1.4}$$

Η μετάβαση στη κβαντομηχανική γίνεται με τους τελεστές

$$\begin{aligned} \hat{H} &\to i\frac{\partial}{\partial t} \\ \hat{p} &\to -i\nabla \end{aligned} \tag{1.5}$$

και επομένως οδηγούμαστε στην μη σχετικιστική εξίσωση Schrodinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t}=\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi(\vec{x},t) \tag{1.6}$$

Προχωρώντας συναντάται η ποσότητα $\rho=|\psi|^2$, η οποία ερμηνεύεται ως πυκνότητα πιθανότητας και $|\psi|^2dx$ η πιθανότητα εύρεσης ενός σωματιδίου σε στοιχείο όγκου d^3x. Η αναγκαιότητα μελέτης κινούμενων σωματιδίων, οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της πυκνότητας ροής ή αλλιώς ρεύμα πιθανότητας j μιας δέσμης σωματιδίων. Από την παραδοχή της διατήρησης της πιθανότητας και το Θεώρημα Gauss είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho dV=\int_S\vec{j}\hat{n}dS=\int\vec{\nabla}\vec{j}dV \tag{1.7}$$

Ο πρώτος και τελευταίος όρος της εξίσωσης (1.7) δίνουν την εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\vec{\nabla}\vec{j}=0 \tag{1.8}$$

Προσδιορίζουμε επομένως το ρεύμα πιθανότητας j, αφού τόσο η ψ όσο και η μιγαδική συζυγής της ικανοποιούν την εξίσωση Schrodinger:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\nabla^2\psi+i\frac{\partial}{\partial t}\psi=0 \quad &\text{ή} \quad \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi+i\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi=0\\ \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*-i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=0 \quad &\text{ή} \quad \frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^*-i\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*=0\end{aligned} \tag{1.9}$$

Αφαιρώντας τη δεύτερη από τη πρώτη:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*)+i(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi+\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*)=0\\ \frac{1}{2m}\nabla(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+i\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*)=0\\ \nabla\big[-\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\big]+\frac{\partial}{\partial t(\psi\psi^*)}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι $\rho=|\psi|^2$, ενώ το ρεύμα πιθανότητας είναι $j=-\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$.

1.3 Σχετικιστικές Εξισώσεις - Εξίσωση Klein-Gordon

Η εξαγωγή του σχετικιστικού αναλόγου, της εξίσωσης Klein-Gordon, θα γίνει αντίστοιχα παίρνοντας τη σχετικιστική σχέση ενέργειας - ορμής, για ελεύθερο σωματίδιο χωρίς spin και άρα βαθμωτό σωματίδιο. Είναι:

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \tag{1.11}$$

όμοια αντικαθιστώντας με τους αντίστοιχους κβαντομηχανικούς τελεστές: $\hat{E} = \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t}, \hat{p} = -i\nabla$ δρούμε πάνω στη κυματοσυνάρτηση $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{H}^2\varphi &= (\hat{p}^2 + m^2)\varphi \\ (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)\varphi + m^2\varphi &= 0 \\ (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\varphi &= 0, \quad \text{Klein-Gordon} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Τα παραπάνω φυσικά είναι απαραίτητα για την περιγραφή σωματιδίων που κινούνται σε σχετικιστικές ταχύτητες•. Μια θεωρία που προσπαθεί να περιγράψει τα στοιχεία της ύλης θα πρέπει να υπακούει τόσο στην ειδική σχετικότητα όσο και στην κβαντική θεωρία.
Αντίστοιχα, θα δοθούν και τα ρεύματα πιθανότητας, πολλαπλασιάζοντας την Klein- Gordon με $-i\varphi^*$ και τη συζυγή της με $i\varphi$ και προσθέτοντας:

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\varphi + m^2\varphi = 0 \to -i\varphi^*\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\varphi - im^2\varphi^*\varphi &= 0 \\ \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\varphi^* + m^2\varphi^* = 0 \to -i\varphi\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\Big)\varphi^* + im^2\varphi\varphi^* &= 0 \\ -i\Big(\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^*\Big) + i(\varphi^*\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\varphi^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\Big[i\Big(\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\Big)\Big] + \vec{\nabla}[-i(\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*)] &= 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Προέκυψε δηλαδή η εξίσωση συνέχειας. Γράφοντας αυτή σε σχετικιστικό συμβολισμό, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \big[\frac{\partial}{\partial t}\big(i\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi\big) + \vec{\nabla}(-i\varphi^*\vec{\nabla}\varphi)\big] - \big[\frac{\partial}{\partial t}\big(i\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\big)\vec{\nabla}(-i\varphi\vec{\nabla}\varphi^*)\big] &= 0 \\ \partial_\mu\big(i\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi, -i\varphi^*\vec{\nabla}\varphi\big) - \partial_\mu\big(i\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*, -i\varphi\vec{\nabla}\varphi^*\big) &= 0 \\ \partial_\mu(i\varphi^*\partial^\mu\varphi) - \partial_\mu(i\varphi\partial^\mu\varphi^*) &= 0 \\ \partial_\mu[i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)] &= 0 \\ \partial_\mu j^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

όπου $j^\mu = (\rho, \vec{j}) = i(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)$.
Στα παραπάνω φαίνεται έχει χρησιμοποιηθεί ο κατάλληλος συμβολισμός που καταδεικνύει την Lorentz αναλλοιώτητα των φυσικών νόμων που περιγράφουμε (βλ. και Παράρτημα Α). Η περιγραφή των φυσικών νόμων σε πλαίσιο ειδικής σχετικότητας προυποθέτει ότι όλοι έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα Lorentz, δηλαδή σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς το οποίο έχει μια ομοιόμορφη σχετική ταχύτητα. Μια ταυτόσημη ίσως ερμηνεία των παραπάνω είναι ότι στην ειδική σχετικότητα επιπλέον η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα συστήματα

Lorentz.
Η εφαρμογή στην Klein-Gordon:

$$\varphi = Ne^{i\vec{p}\vec{x}-iEt} = Ne^{-p\cdot x} \tag{1.15}$$

και έτσι λοιπόν το ρεύμα j :

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2 \equiv (\rho, \vec{j}) \equiv (2|N|^2 E, 2|N|^2)\vec{p}) \tag{1.16}$$

αντικαθιστώντας τη παραπάνω λύση Εξ. (1.15) προκύπτει:

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \tag{1.17}$$

δηλαδή το σωμάτιο τυγχάνει και αρνητικών ενεργειών. Συγκεκριμένα, για κάθε θετική ενέργεια προκύπτει και αντίστοιχη αρνητική ενέργεια, γεγονός που συνέκλειvε στην τάση του συστήματος να προχωρά σε όλο και χαμηλότερες ενέργειες, με το ηλεκτρόνιο να ακτινοβολεί συνεχώς ενέργεια. Ταυτόχρονα, η πυκνότητα πιθανότητας ρ εξαρτάται από την ενέργεια Ε, και επομένως προκύπτει και αρνητική πυκνότητα πιθνατότητας. Η αρνητική πυκνότητα πιθανότητας έχει προκύψει από τη δεύτερη τάξης χρονική παράγωγος της Klein-Gordon. Τελικά η Klein-Gordon μέσω κατάλληλης μεθόδου (δεύτερη κβάντωση) θα αποδειχθεί χρήσιμη για τη περιγραφή σχετικιστικών σωματιδίων. Ουσιαστικά, η τεχνική είναι να επικαλεστούμε γραμμικότητα όπως έγινε και με την Schrodinger, με ταυτόχρονο σεβασμό στο Lorentz αναλλοίωτο.

1.4 Εξίσωση Dirac

Με βάση τα προηγούμενα, η εξίσωση πρέπει αν είναι γραμμική στο $\frac{\partial}{\partial t}$ και για να είναι συναλλοίωτη γραμμική και στο ∇ . Συνεπώς στη γενική μορφή:

$$\left[i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \alpha\right]\psi(x) = 0 \tag{1.18}$$

Άρα η ψ πρέπει να ικανοποιεί την Klein-Gordon :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m^2\right]\psi(x) = 0 \tag{1.19}$$

Ξεκινώντας από τη γενική μορφή, παρατηρούμε ότι ισχύει: $u^2 + v^2 = (-iu - v)(iu - v)$. Άρα η γενική εξίσωση (1.18) θα γραφεί:

$$\Big(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \alpha\Big)\Big(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \alpha\Big)\psi(x) = 0 \tag{1.20}$$

Υπολογίζοντας, με βάση την ιδιότητα της μεταθετικότητας των παραγώγων $\partial_\mu, \partial_\nu$, δηλαδή $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ και διατηρώντας την σειρά των συντελεστών γ^μ, γ^ν προκύπτει:

$$\Big[\frac{1}{2}\Big(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)\Big(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big) + \frac{1}{2}\Big(i\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)\Big(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big) + i\alpha\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\alpha\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \alpha^2\Big]\psi = 0$$

$$\Big[\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + \alpha^2\Big]\psi(x) = 0$$

$$\Big[\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + \alpha^2\Big]\psi(x) = 0 \tag{1.21}$$

Η απαίτηση είναι απλή, πρέπει για να είναι ίδια με την Εξ. (1.19) να είναι:

$$\alpha^2 = m^2 \quad \text{και ο αντιμεταθέτης} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{1.22}$$

Η παραπάνω ικανοποιείται για 4×4 πίνακες Dirac. Μια συγκεκριμένη επιλογή πινάκων Dirac είναι:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}^j \\ -\boldsymbol{\sigma}^j & 0 \end{pmatrix}, j = 1, 2, 3 \tag{1.23}$$

και κάθε επιμέρους όρος είναι 2×2 πίνακες. Και σ οι πίνακες του Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κάποιες σημαντικές ιδιότητες των γ πινάκων δίνονται ακολούθως:

$$(\gamma^0)\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = I, \quad (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j, \quad (\gamma^j)^2 = -\mathbf{1}, \quad j = 1, 2, 3$$

η ύπαρξη πινάκων Pauli είναι εξαίχουσας σημασίας, καθώς δίνουν την δυνατότητα περιγραφής ελεύθερου σωματιδίου με spin-$\frac{1}{2}$. Επιπλέον η επιλογή αυτή των πινάκων δεν είναι μοναδική. Ισοδύναμες αναπαραστάσεις των πινάκων Pauli προκύπτουν από το μετασχηματισμό των γ^μ με έναν τυχαίο αποκλίνοντα πίνακα S:

$$\gamma'^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S$$

Η τελική μορφή που έθεσε αξιωματικά ο Dirac είναι:

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi(x) = 0, \quad \text{εξίσωση Dirac} \tag{1.24}$$

και $\psi(x)$ το πεδίο 4-συνιστωσών γνωστό και ως σπίνορας Dirac:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

Άλλη εξίσου γνωστή μορφή της εξίσωσης του Dirac προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την με γ^0. Θα είναι:

$$
\begin{aligned}
[i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - m]\psi(x) &= 0 \\
[i(\gamma^0)^2\partial_0 + i\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - \gamma^0 m]\psi(x) &= 0 \\
i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) &= [-i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m]\psi(x), \quad \text{εξίσωση Dirac}
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

όπου α και β ερμιτιανοί πίνακες: $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

1.4.1 Ερμηνεία της εξίσωσης Dirac

Στο μεταξύ φάνηκε ότι ο δυισμός στην εξίσωση Dirac είναι προφανές και παγκόσμιο χαρακτηριστικό της κβαντικής θεωρίας πεδίου:
Η κυματοσυνάρτηση μπορεί να είναι είτε συμμετρική είτε αντισυμμετρική κατά την ανταλλαγή δύο σωματιδίων. Τι τελικά θα είναι η κάθε κυματοσυνάρτηση, αποτέλεσε ερώτημα για τον διαχωρισμό των σωματιδίων σε μπόζόνια, για τα οποία η κυματοσυνάρτηση είναι άρτια και φερμιόνια, για τα οποία προκύπτει περιττή κυματοσυνάρτηση. Είναι εμπειρικά διαπιστευμένο ότι σωματίδια με ακέραιο σπίν είναι μποζόνια ενώ σωματίδια με ημιακέραιο σπίν είναι φερμιόνια. Ένα από τα κύρια επιτεύγματα της κβαντικής θεωρίας πεδίου ήταν η θαυμαστή απόδειξη αυτής της σύνδεσης ¨σπίν και στατιστικής¨.

$$
\begin{pmatrix} \text{Bosons(integer spin): symmetric wave function}\psi(1,2) \\ \text{Fermions ((1/2)- integer spin): antisymmetric wave function}\psi(1,2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi(2,1) \\ -\psi(2,1) \end{pmatrix}
$$

Έχουμε δηλαδή βρεί την εξίσωση και απομένει να δούμε εαν τα αποτελέσματα μας έχουν τελικά την απαιτούμενη συνοχή και την ζητούμενη φυσική ερμηνεία. Για το σκοπό αυτό, θα υπολογιστούν τα αντίστοιχα ρεύματα. Χρησιμοποιώντας το συζυγή σπίνορα Dirac: $\psi^+ = (\psi^*)^T = (\psi_1{}^*\psi_2{}^*\psi_3{}^*\psi_4{}^*)$, ικανοποιεί την Dirac. Επίσης γίνεται χρήση της $(AB)^+ = B^+A^+$. Άρα η Dirac και η συζυγής της :

$$
\begin{aligned}
i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^j\partial_j\psi - m\psi = 0, \quad j = 1,2,3 \\
-i(\partial_0\psi^+)\gamma^0 - i(\partial_j\psi^+)(-\gamma^j) - m\psi^+ = 0
\end{aligned} \tag{1.26}
$$

έχει χαθεί, όμως η συναλλοίωτητα στην συζυγή παράσταση της Dirac. Για να γίνει συναλλοίωτη, θα πρέπει να παραμείνει ο πρώτος όρος με το πρόσημο που έχει, ενώ στο δεύτερο όρο θα πρέπει να μεταβληθεί το πρόσημο των γ πινάκων. Όμως είναι:

$$
\gamma^0\gamma^j = -\gamma^j\gamma^0 \tag{1.27}
$$

Πολλαπλασιάζοντας τη συζυτή Dirac με γ^0 από δεξιά, γίνεται:

$$\begin{aligned}-i\partial_0\psi^+\gamma^0\gamma^0 - i\partial_j\psi^+(-\gamma^j\gamma^0) - m\psi^+\gamma^0 = 0\\ -i\partial_0\psi^+\gamma^0\gamma^0 - i\partial_j\psi^+(\gamma^0\gamma^j) - m\psi^+\gamma^0 = 0\end{aligned} \tag{1.28}$$

Η Dirac έχει έρθει σε συναλλοίωτη μορφή αλλά δεν ικανοποιείται πλέον από τον ψ^+ σπίνορα. Ταυτόχρονα όμως έχει εισαχθεί ένας νέος σπίνορας, ο οποίος συμβολίζεται με $\bar{\psi}$ και είναι:

$$\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 \tag{1.29}$$

Η συζυγής Dirac είναι πλέον:

$$i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{1.30}$$

Για την εύρεση των ρευμάτων, θα πολλαπλασιαστεί η Dirac από αριστερά με $\bar{\psi}$ και τη συζυγή της από δεξιά με ψ.

$$\begin{aligned}i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi = 0\\ i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0\end{aligned}$$

προσθέτοντας κατά μέλη:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = 0\\ \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0\end{aligned} \tag{1.31}$$

και η οποία αποτελεί την εξίσωση συνέχειας, με αντίστοιχο ρεύμα πιθανότητας:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\rho, \boldsymbol{\psi}) = (\bar{\psi}\gamma^0\psi, \bar{\psi}\gamma^j\psi), \quad j = 1,2,3$$

Η ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα ερμηνεία του ρεύματος πιθανότητας για την εξίσωση Dirac έχει :

$$\begin{aligned}\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^+\psi\\ \rho = (\psi_1{}^*\psi_2{}^*\psi_3{}^*\psi_4{}^*)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}\\ \rho = \sum_{i=1}^{4}|\psi|^2\end{aligned}$$

Δηλαδή πλεόν η πυκνότητα πιθανότητας είναι πλεόν θετικά ορισμένη.
Μεταφερόμενοι στο χώρο των ορμών θα καταλήξουμε στην αναγκαιότητα εισαγωγής των

αντισωματιδίων. Συγκεκριμένα, η Dirac θέτοντας σε ισχύ τον μετασχηματισμό $i\partial_\mu \to p_\mu$ θα γραφεί:

$$[\gamma^\mu p_\mu - m]\psi(x) = 0 \tag{1.32}$$

Για σωματίδιο Dirac σε ηρεμία, $p_\mu = (E, 0, 0, 0)$, είναι:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 p_0 \psi - m\psi &= 0 \\
\gamma^0\gamma^0 p_0 \psi &= m\gamma^0\psi \\
p_0\psi &= m\gamma^0\psi \\
E\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} &= m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\
E\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= m\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\
E\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} &= -m\begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Δηλαδή, υπάρχουν δύο λύσεις θετικής ενέργειας E=m και άλλες δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας E=-m. Κάνοντας τη γενίκευση και γράφοντας την Dirac ως $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$, όπου $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ και $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{gathered}
[\gamma^\mu p_\mu - m]\psi = 0 \\
(\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p} - m)\psi = 0 \\
\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{p} - m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_b \end{pmatrix} = 0 \\
\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} & mI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \\
(E - m)\psi_A = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\psi_B \\
(E + m)\psi_B = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\psi_A
\end{gathered}$$

Επομένως, για σωματίδιο σε ηρεμία $\boldsymbol{p} = 0$, καταλήγει κανείς στην περίπτωση της προηγούμενης εξίσωσης (βλ. Εξ. (1.33)). Για $\boldsymbol{p} \neq 0$, όμως η λύση ως προς ψ_B είναι:

$$\begin{aligned}\psi_B &= \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\psi_A \\ (E-m)\psi_A &= \boldsymbol{\sigma p}\frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\psi_A \\ (E-m)(E+m)\psi_A &= (\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{\sigma p})\psi_A\end{aligned}$$

Όμως γενικά ισχύει: $(\boldsymbol{\sigma\alpha})(\boldsymbol{\sigma\beta}) = \boldsymbol{\alpha\beta} I + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})$ οπότε θα είναι: $(\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{\sigma p}) = \boldsymbol{p}^2 I$ και άρα:

$$\begin{aligned}(E^2 - m^2)\psi_A &= \boldsymbol{p}^2\psi_B \\ E &= \pm\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Ο Dirac επικαλούμενος την απαγορευτική αρχή του Pauli (η οποία λεεί οτι δύο ηλεκτρόνια δεν μπορούν να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση), προσπάθησε να εξηγήσει γιατί τα ηλεκτρόνια που παρατηρούμε δεσμεύονται στις θετικές ενεργειακές καταστάσεις. Ο Dirac πρότεινε λοιπόν την εξής εξήγηση: υποστήριξε οτι οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι γεμάτες από 'θάλασσα' ηλεκτρονίων. Επειδή ακριβώς αυτή η θάλασσα είναι συνεχώς εκεί, και είναι απόλυτα ομοιόμορφη δεν ασκεί καμία δύναμη στα γειτονικά άτομα και ηλεκτρόνια και επομένως δεν γίνεται αισθητή. Κανένα φερμιόνιο δεν μπορεί να μεταπηδήσει σε αυτή τη θάλασσα κατειλημμένων αρνητικών καταστάσεων, επειδή η ίδια η απαγορευτική αρχή του Pauli το εμποδίζει. Από την άλλη πλευρά, η θάλασσα κατειλημμένων καταστάσων του Dirac, είναι το κενό της θεωρίας μας. Είναι η βασική μας κατάσταση. Τι συμβαίνει λοιπόν όταν προσφέρουμε σε ένα από τα ηλεκτρόνια της θάλασσσας αρκετή ενέργεια ώστε να καταλήξει σε μια από τις θετικές ενεργειακές καταστάσεις; Η απουσία του ηλεκτρονίου αυτού ερμηνεύεται σαν καθαρό θετικό φορτίο σε εκείνη την θέση και επομένως η απουσία της αρνητικής δύναμης θα εμφανιζόταν σαν θετική ενέργεια. Επομένως η οπή μέσα στη θάλασσα αρνητικών ηλεκτρονίων θα εμφανιζόταν σαν συνηθισμένο σωματίδιο με θετική ενέργεια και θετικό φορτίο. Η οπή αυτή μπορεί να οδηγήσει στην κατάληψη της από ένα φερμιόνιο θετικής ενέργειας E, οδηγώντας ταυτόχρονα στην απελευθέρωση ενέργειας ίσης με 2E.

Τελικά η εξίσωση Dirac έπαψε να είναι μονοσωματιδιακή εξίσωση, καθώς πλέον περιγράφει στις τέσσερις συνιστώσες του σπίνορα και το σωματίδιο αλλά και το αντισωματίδιο του. Η μόνη συνεπής προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε το σπίνορα ψ ως ένα πεδίο, όπου το μέτρο $|\psi|^2$ θα μας δίνει το πλήθος των σωματιδίων και αντισωματιδίων σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Ακόμη το πεδίο αυτό πρέπει να είναι ένα κβαντικό πεδίο και ως τέτοιο θα πρέπει να αντιμετωπιστεί. Μάλιστα, αρχικά ο Dirac πίστευε ότι τα αντισωματίδια αυτά ήταν τα ποζιτρόνια.

Τελικά, η ένωση σχετικότητας και κβαντικής μηχανικής έφερε κάποια επιμέρους στοιχεία, που κανένα χωριστά δεν μπορεί να εξασφαλίσει: την ύπαρξη αντισωματιδίων, μια απόδειξη της απαγορευτικής αρχής του Pauli (το οποίο σε μη σχετικιστική κβαντομηχανική αποτελεί ειδική συνθήκη), και το γνωστό TCPθεώρημα. Επομένως η συγκεκριμένη ιδιότητα αποτελεί χαρακτηριστικό του μηχανικού μας συστήματος και όχι του σωματιδιακού μοντέλου που χρησιμοποιούμε.

1.4.2 Λύσεις της εξίσωσης Dirac

Η εξίσωση Dirac από την εξίσωση (1.35) είχε ως εξής:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [-i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m]\psi(x) \tag{1.35}$$

Αμέσως αναγνωρίζεται μια εξίσωση ιδιοτιμών όπου η Hamiltonian του Dirac είναι:

$$H_D = -i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m \tag{1.36}$$

Η προσπάθεια εύρεσης λύσεων για ελεύθερα σωμάτια ακολουθεί το ίδιο σκεπτικό. Γράφουμε το σπίνορα Dirac ως εξής:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u(p) \cdot (\text{επίπεδο κύμα}) \\ \psi(x) &= u(p)e^{-ipx} \end{aligned} \tag{1.37}$$

με το $u(p)$ να είναι και αυτός σπίνορας τεσσάρων συνιστωσών, όπως ακριβώς και η $\psi(x)$. Οι λύσεις του $u(p)$ προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης ιδιοτιμών της ενέργειας. Δηλαδή:

$$H_D u = Eu \tag{1.38}$$

όπου η Hamiltonian παίρνει μια από τις προηγούμενες μορφές (βλ. Εξ.(1.36)). Άρα η εξίσωση Dirac μπορεί να γραφεί σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{aligned} (-i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla} + \beta m)u(p) &= Eu(p) \\ (1.25) \Rightarrow (\boldsymbol{\gamma p} + m\boldsymbol{I})u(p) &= E\gamma^0 u(p) \\ (1.31) \Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) &= 0 \end{aligned} \tag{1.39}$$

Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις των παραπάνω, δύο με θετική ενέργεια (σωματίδια) και δύο με αρνητική ενέργεια (αντισωματίδια). Αντίστοιχα υπάρχουν και δύο αναπαραστάσεις για τους πίνακες γ. Η standard αναπαράσταση (καθιερωμένη) ή αναπαράσταση Dirac - Pauli και η αναπαράσταση Weyl ή chiral (ιδιόστροφη).
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις περισσότερο διαδεδομένες αναπαραστάσεις των πινάκων Dirac αλλά ταυτόχρονα θα δούμε πως προκύπτουν σημαντικές θεωρήσεις της σωματιδιακής φυσικής, ανάλογη της επιλογής πίνακα γ.

1.5 Αναπαράσταση Dirac - Pauli (Καθιερωμένη)

Σε αυτή την αναπαράσταση είναι:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

και αντίστοιχα σχηματίζεται:

$$\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

με τον γ^0 να είναι διαγώνιος.
Η περιγραφή αυτή είναι ιδιαίτερα βολική για περιγραφή σωματιδίων σε ηρεμία. Πράγματι, για σωματίδια σε ηρεμία ($\boldsymbol{p} = 0$) η εξίσωση ιδιοτιμών της Hamiltonian είναι:

$$\begin{gathered} mIu(p) = E\gamma^0 u(p) \\ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} u(p) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} u(p) \end{gathered} \tag{1.42}$$

με δύο σπίνορες θετικής και δύο σπίνορες αρνητικής ενέργειας. Οι ακόλουθοι:

$$u_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E > 0 \tag{1.43}$$

$$u_3(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E < 0 \tag{1.44}$$

Έστω λοιπόν ένας τυχαίος σπίνορας Dirac σε ηρεμία. Θα γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{gathered} \psi(t) = \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{-iEt} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}\right] e^{iEt} \\ \psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt} + \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} e^{iEt} \end{gathered} \tag{1.45}$$

με φ και χ σπίνορες δύο συνιστωσών.
Έστω τώρα σωματίδια τα οποία δεν βρίσκονται σε ηρεμία και $\boldsymbol{p} \neq 0$. Η (1.45) θα γραφεί:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Από την εξίσωση ιδιοτιμών για την ενέργεια είναι λοιπόν:

$$(\boldsymbol{\gamma p} + m)\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E\gamma^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{p} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ -\boldsymbol{\sigma p} & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\varphi \\ -E\chi \end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{matrix} m\varphi + \boldsymbol{\sigma p}\chi = E\varphi \\ -\boldsymbol{\sigma p}\varphi + m\chi = -E\chi \end{matrix}\right\}$$
$$\varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E-m}\chi, \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\varphi \tag{1.47}$$

Αφού πρόκειται και πάλι για δύο λύσεις θετικής και δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας, θα είναι ομοίως:

$$\varphi = \varphi^{(s)}, \quad \chi = \chi^{(s)}$$

με $s = 1, 2$:

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και αντίστοιχα:

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

οπότε τελικά ο σπίνορας u θα πάρει τη μορφή:

$$u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1,2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E+m}\varphi^{(1,2)} \end{pmatrix}, u^{(3,4)} = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{E-m}\chi^{(1,2)} \\ \\ \chi^{(1,2)} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

Αναλύοντας τον παράγοντα $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}$, ισχύει:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$$
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_3$$
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix}, u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{pmatrix}, \quad E > 0$$

$$u^{(3)} = N' \begin{pmatrix} \frac{-p_3}{-E+m} \\ \frac{-(p_1+ip_2)}{-E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(4)} = N' \begin{pmatrix} \frac{-(p_1-ip_2)}{-E+m} \\ \frac{p_3}{-E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E < 0$$

όπου N, N' παράγοντες κανονικοποίησης. Πρέπει:

$$\begin{aligned} u^{(r)+}u^{(s)} &= 2E\delta_{rs}, \quad r,s = 1,2 \\ u^{(r)+}u^{(s)} &= -2E\delta_{rs}, \quad r,s = 3,4 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Η πρώτη εξάγει:

$$\begin{aligned} u^{(1)+}u^{(1)} &= 2E \\ N^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_1-ip_2}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix} &= 2E \\ 1 + \frac{{p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2}{(E+m)^2} &= \frac{2E}{N^2} \\ \frac{E^2 + m^2 + 2Em + p^2}{(N)^2} & \\ \frac{2E^2 + 2Em}{(E+m)^2} &= \frac{2E}{N^2} \\ N &= \sqrt{E+m} \end{aligned}$$

ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τη δεύτερη από τις (1.49), είναι:

$$N = \sqrt{E+m}, \quad N' = \sqrt{-E+m} \tag{1.50}$$

Ένας σπίνορας Dirac θα έχει επομένως τη μορφή:

$$\psi(x) = \sqrt{E+m}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{pmatrix}\right] e^{-ipx}$$
$$+\sqrt{-E+m}\left[\begin{pmatrix} \frac{-p_3}{-E+m} \\ \frac{-(p_1+ip_2)}{-E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-(p_1-ip_2)}{-E+m} \\ \frac{p_3}{-E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{ipx} \tag{1.51}$$

Η γραφή αυτή αποτελεί τη λύση της εξίσωσης Dirac σύμφωνα με την αναπαράσταση των Dirac - Pauli.

1.5.1 Helicity

Η παραπάνω διαδικασία αποκάλυψε άλλη μια σημαντική συμβολή του συμβολισμού Dirac. Από τους υπολογισμούς προέκυψε αβίαστα ο διπλός εκφυλισμός της ενέργειας. Συγκεκριμένα, για κάθε τιμή της έχουμε δύο λύσεις για σωματίδια και δύο λύσεις για αντισωματίδια. Εδώ προκύπτει και η ανάγκη εισαγωγής μιας νέας έννοιας, της ελικότητας (helicity). Το μέγεθος αυτό μετατίθεται με τους τελεστές της Hamiltonian και της ορμής. Οι ιδιοτιμές που θα προκύψουν θα μπορέσουν να διαχωρίσουν τις εκφυλισμένες καταστάσεις.

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \tag{1.52}$$

Η φυσική σημασία της ελικότητας, είναι η προβολή του spin στην κατεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου.
Ο τελεστής θα οριστεί ως ακολούθως:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

Η σύνδεση με την ελίκωση είναι προφανής. Ο τελεστής μετατίθεται με την Hamiltonian:

$$\left[H, \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}\right] = \left[\boldsymbol{\gamma p} + m, \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}\right]$$
$$\left[H, \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}\right] = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ -\boldsymbol{\sigma p} & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ -\boldsymbol{\sigma p} & m \end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται επίσης:

$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ -\boldsymbol{\sigma p} & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma p \sigma}\cdot\hat{p} \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma p \sigma}\cdot\hat{p} & \frac{1}{2}m\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}$$

και επίσης:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ -\boldsymbol{\sigma p} & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma p \sigma}\cdot\hat{p} \\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma p \sigma}\cdot\hat{p} & \frac{1}{2}m\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, τελικά οι τελεστές μετατίθεται:

$$\left[H, \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}\right] = 0 \tag{1.54}$$

και με ακριβώς όμοιο τρόπο:

$$\left[\boldsymbol{p}, \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}\right] = 0 \tag{1.55}$$

Συνεπώς ο τελεστής $\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{p}$ είναι ο ζητούμενος τελεστής. Είναι αναγκαία, λοιπόν η σύμβαση επιλογής του $\boldsymbol{p}$ κατά μήκος του άξονα z (αντίστοιχα στην κβαντική μηχανική, ισχύει η ίδια σύμβαση για το spin).

Έτσι για $\boldsymbol{p} = (0,0,p)$ και για $\varphi^{(1,2)}, \chi^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ θα είναι:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

Δηλαδή, οι ιδιοτιμές της ελίκωσης $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ αντιστοιχούν σε προβολή του spin παράλληλα με την κατεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου $\left(\frac{1}{2}\right)$ ή αντιπαράλληλα $\left(-\frac{1}{2}\right)$ και άρθηκε ο ενεργειακός εκφυλισμός. Επιπλέον οι καταστάσεις θετικής ελίκωσης ορίζονται ως 'δεξιόστροφεσ' και οι καταστάσεις αρνητικής ελίκωσης ως 'αριστερόστροφεσ'.

1.6 Αναπαράσταση Weyl (Chiral)

Σε αυτήν την αναπαράσταση θα είναι:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{1.58}$$

και αντίστοιχα οι γ πίνακες είναι:

$$\boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

Σε αντίθεση με την αναπαράσταση Dirac - Pauli, η αναπαράσταση αυτή έχει διαγώνιο πίνακα τον γ^5 οπότε αυτός και ενδείκνυται για την περιγραφή των καταστάσεων διαφορετικής ελίκωσης.
Ορίζεται ο σπίνορας:

$$u = \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

Η εξίσωση Dirac θα γίνει:

$$(\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p} - m)\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}E - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix}$$

Ή διαφορετικά:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma p} \\ \boldsymbol{\sigma p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & E \\ E & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\sigma p} u_L = -m u_R + E u_L \\ \boldsymbol{\sigma p} u_R = E u_R - m u_L \end{Bmatrix}$$

Στο όριο $m = 0$, το οποίο ισχύει για τα νετρίνα , είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma p} u_L &= -E u_L \\ \boldsymbol{\sigma p} u_R &= E u_R \end{aligned} \tag{1.61}$$

Η σχέση ενέργειας - ορμής όμως γίνεται, για m=0 :

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 \tag{1.62}$$

Άρα:

$$E = \pm|\boldsymbol{p}| \tag{1.63}$$

Δηλαδή μια λύση θετικής και μια λύση αρνητικής ενέργειας.
Η λύση θετικής ενέργειας δίνει:

$$\boldsymbol{\sigma p} u_R = |\boldsymbol{p}| u_R \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} u_R = \frac{1}{2} u_R$$

Αντίστοιχα από τη δεύτερη εξίσωση:

$$\boldsymbol{\sigma p} u_L = -|\boldsymbol{p}| u_L \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} u_L = -\frac{1}{2} u_L$$

Η ερμηνεία των παραπάνω είναι προφανής (βλ. και Εξ. (1.56), (1.57)). Ο u_R περιγράφει δεξιόστροφα σωματίδια $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ και ο u_L αριστερόστροφα σωματίδια $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$
Η λύση της αρνητικής ενέργειας $E = -|\boldsymbol{p}|$ δίνει:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} u_R = -\frac{1}{2} u_R \tag{1.64}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p} u_L = -\frac{1}{2} u_L \tag{1.65}$$

Άρα, εδώ ο u_R περιγράφει αριστερόστροφα αντισωματίδια $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$ και ο u_L δεξιόστροφα αντισωματίδια $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$.
Τελικά για να προβληθεί για παράδειγμα την αριστερόστροφη συνιστώσα u_L ενός σπίνορα Dirac u, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I - \gamma^5)$$

Πράγματι είναι:

$$\frac{1}{2}(I - \gamma^5)u = \frac{1}{2}(I - \gamma^5)\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_L \end{pmatrix}$$

Όρίζονται επομένως οι προβολικοί τελεστές, οι οποίοι δίνουν την αριστερόστροφη ή δεξιόστροφη συνιστώσα για κάθε σπίνορα, ως εξής:

$$P_L = \frac{1}{2}(I - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_L \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

$$P_R = \frac{1}{2}(I + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R u = \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

Επιπλέον για τους προβολικούς τελεστές ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$P_L{}^2 = P_L, \quad P_R{}^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L + P_R = I \tag{1.68}$$

Από την άλλη, ένας όρος μάζας αναμειγνύει τις δεξιόστροφες και τις αριστερόστροφες συνιστώσες ενός σπίνορα Dirac ($\psi_R = P_R\psi, \psi_L = P_L\psi$). Επομένως τα παραπάνω περιγράφουν επαρκώς τα νετρίνα, ενώ για τη περίπτωση των μαζών ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί σε επόμενες παραγράφους. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο περιγραφές είναι απολύτως ισοδύναμες. Υπάρχει δυνατότητα μετάβασης από την μια περιγραφή στην άλλη:

$$\gamma_{DP}{}^{\mu} = U^{-1}\gamma_W{}^{\mu}U$$

όπου ο πίνακας U είναι:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

1.7 Εικόνα Feynman - Stuckelberg

Έχουμε δεί, ότι οι δύο πρώτες λύσεις της Dirac δίνονται:

$$\psi^{(1,2)} = u^{(1,2)}(\boldsymbol{p})e^{-px} \tag{1.69}$$

Αυτές οι εξισώσεις αφορούν την περιγραφή ελεύθερου e^- με ενέργεια $E > 0$ και ορμή $\boldsymbol{p}$. Αντίστοιχα γράφονται και οι άλλες δύο•λύσεις αρνητικής ενέργειας:

$$\psi^{(3,4)} = u^{(3,4)}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} \tag{1.70}$$

Περιγράφουν το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου, δηλαδή το ποζιτρόνιο. Η εικόνα Feynman - Stuckelberg λέει:

$$\left(\begin{array}{c} \text{σωματίδια με E<0 που} \\ \text{διαδίδονται πίσω στο χρόνο} \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c} \text{αντισωματίδια με E>0 που} \\ \text{διαδίδονται μπροστά στο χρόνο} \end{array} \right)$$

αφού είναι άλλωστε:

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

Έτσι κάθε εισερχόμενο σωματίδιο αντιστοιχίζεται στο εξερχόμενο αντισωματίδιο του, δηλαδή σωματίδιο με αντίθετο τετράνυσμα ορμής και αντίθετο φορτίο. Αντίστοιχα τα εξερχόμενα σωματίδια ισοδυναμούν με εισερχόμενα αντισωματίδια. Ανάλογα ισχύει και η αντιστροφή του spin ενός σωματιδίου. Αντιθέτως η ελίκωση δεν παρατηρείται αντιστροφή αφού εξαρτάται από το spin αλλά και από την ορμή του σωματιδίου, άρα παραμένει αμετάβλητη.

1.8 εικόνα Feynman - Stuckelberg

Κρίνεται λοιπόν απαραίτητο να υιοθετήσουμε έναν κάπως πιο βολικό συμβολισμό για να μπορέσουμε να περιγράψουμε και να ξεχωρίσουμε τα σωματίδια από τα αντισωματίδια. Η εικόνα Feynman - Stuckelberg μας λέει το εξής: ένα ποζιτρόνιο ενέργειας Ε και ορμής $\boldsymbol{p}$ περιγράφεται από μια από τις λύσεις που βρήκαμε για -Ε, -$\boldsymbol{p}$ οπότε υιοθετούμε το συμβολισμό:

$$u^{(3,4)}(-\boldsymbol{p})e^{-i(-p)x} \equiv v^{(2,1)}(\boldsymbol{p})e^{ipx} \tag{1.71}$$

Επίσης από την εξίσωση Dirac για τους σπίνορες u παίρνουμε:

$$(p^\mu\gamma_\mu - m)u(\boldsymbol{p}) = 0$$
$$(-p^\mu\gamma_\mu - m)u(-\boldsymbol{p}) = 0$$

και προκύπτει η Dirac για τους σπίνορες v:

$$(p^\mu\gamma_\mu + m)v(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{1.72}$$

1.9 Ηλεκτρομαγνητισμός μέσα από σχετικιστικό πλαίσιο περιγραφής

Τα ακόλουθα αποτελούν μια εφαρμογή της εξίσωσης Dirac. Η αναγκαιότητα που προκύπτει είναι η εισαγωγή ενός δυναμικού μέσα στο οποίο κινούνται τα σωματίδια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περιγραφή της κίνησης ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στο μη σχετικιστικό όριο. Έστω λοιπόν το εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$.
Η αρχικά ελεύθερη Hamiltonian του Dirac αρχικά τροποποιείται ώστε να συμπεριλάβει την ελάχιστη ζεύξη με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Δηλαδή:

$$p_\mu \to p_\mu - qA_\mu \quad \text{ή} \quad i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu \tag{1.73}$$

και τελικά η Hamiltonian γίνεται:

$$\begin{aligned} H_D = \boldsymbol{\alpha p} + \beta m \to \boldsymbol{\alpha (p} - q\boldsymbol{A}) + \beta m + qA^0 \\ H_D = \boldsymbol{\alpha \pi} + \beta m + qA^0 \end{aligned} \tag{1.74}$$

όπου θέσαμε:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} \tag{1.75}$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση Dirac - Pauli και θέτοντας όπως είπαμε $u = (\varphi\chi)^T$ και λύνοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών της ενέργειας:

$$H_D \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.76}$$

(βλ. §1.5)

$$H_D = \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma\pi} \\ \boldsymbol{\sigma\pi} & -m \end{pmatrix} - eA^0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - eA^0 & \boldsymbol{\sigma\pi} \\ \boldsymbol{\sigma\pi} & -m - eA^0 \end{pmatrix}$$

οπότε η 1.76 γίνεται:

$$\begin{pmatrix} m - eA^0 & \boldsymbol{\sigma\pi} \\ \boldsymbol{\sigma\pi} & -m - eA^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.77}$$

με τελική λύση:

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{E + m + eA^0} \varphi \tag{1.78}$$

Αντικαθιστώντας σε μια από τις δύο ως προς φ:

$$(m - eA^0)\varphi + \boldsymbol{\sigma\pi} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{E + m + eA^0} \varphi = E\varphi \tag{1.79}$$

Στο σχετικιστικό όριο αναμένεται σύμφωνα με την εξίσωση (1.46) να μηδενίζεται ο όρος ως προς χ. Στο μη σχετικιστικό όριο η ενέργεια γράφεται στη μορφή:

$$E = m + K$$

και στο μη σχετικιστικό όριο η ενέργεια ηρεμίας υπερτερεί κατά πολυ των υπολοίπων παραγόντων:

$$2m \gg K + eA^0$$

και τελικά:

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{2m}\varphi = (E - m)\varphi \tag{1.80}$$

ισχυεί επιπλεόν:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}) \tag{1.81}$$

και αντικαθιστώντας υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) = e(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{p}) \quad \text{με τελεστική αναπαράσταση} \\ \pi \times \pi = -ie(\nabla \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \nabla) = -ie(\nabla \times \boldsymbol{A}) = -ie\boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{1.82}$$

οπότε η (1.79) δίνει:

$$\Big[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2 + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} - eA^0\Big]\varphi = (E - m)\varphi \tag{1.83}$$

1.10 Εξισώσεις Maxwell

Είναι καιρός λοιπόν να εξεταστούν και σωματίδια με spin 1. Τέτοια για παράδειγμα είναι τα φωτόνια τα οποία περιγράφονται καλά από τις εξισώσεις Maxwell.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0 \quad \text{Νόμος Faraday} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \quad \text{Νόμος Gauss} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \quad \text{Νόμος Ampere} \end{aligned} \tag{1.84}$$

Στο σχετικιστικό πλαίσιο οι εξισώσεις Maxwell πρέπει να είναι Lorentz αναλλοίωτες. Συνεπώς όμοια με την περιγράφή για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, θεωρούμε το τετράνυσμα του δυναμικού:

$$A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$$

και οι αντίστοιχες περιγραφές για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{1.85}$$

και οι ομογενείς εξισώσεις Maxwell γράφονται:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \nabla \times \Big(- \nabla A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \end{aligned}$$

Τα δεξιά μέλη των εξισώσεων για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή του πεδίου:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{1.86}$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i \\ F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = \varepsilon_{ijk} B^k \end{aligned}$$

μια είναι:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

ενώ

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} F^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.88}$$

Στη συνέχεια αναφορικά με τις μη ομογενείς εξισώσεις Maxwell. Όμοια αυτές περιέχονται στη σχετικιστικά αναλλοίωτη έκφραση:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

όπου

$$j^\nu = (\rho, \boldsymbol{j})$$

όπου τελικά οι εξισώσεις Maxwell συνοψίστηκαν με σχετικιστικά αναλλοίωτο τρόπο στις εξής δύο:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{1.89}$$

Παρατηρείται ταυτόχρονα και το εξής: Η πρώτη εκ των δύο εξισώσεων σεε σχετικιστικά αναλλοίωτη μορφή έχει ρητή αναφορά στο δυναμικό A^μ. Η εξάρτηση όμως αυτή μπορεί να απαληφθεί, με διατηρούμενη ταυτόχρονα την αναλλοιώτητα. Πράγματι από την τελευταία μπορούμε να εξάγουμε την ισοδύναμη της:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{1.90}$$

Στην συνέχεια ορίζουμε τον δυαδικό τανυστή:

$$\tilde{F^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.91}$$

παρατηρούμε πως ισχύει:

$$\partial_\mu \tilde{F^{\mu\nu}} = 0$$

και καταλήγουμε να γράφουμε τις εξισώσεις Maxwell σε σχετικιστικά αναλλοίωτη μορφή και χωρίς την έκφραση πεδίου, ως:

$$\partial_\mu \tilde{F^{\mu\nu}} = 0$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{1.92}$$

και τελικά επαληθεύεται για μια ακόμη φορά η διατήρηση του ρεύματος:

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \tag{1.93}$$

1.11 Βαθμίδα Lorentz

Ακολούθως, πραγματοποιείται μια εισαγωγή στον μετασχηματισμό βαθμίδας. Έστω:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi, \tag{1.94}$$

όπου χ μια αυθαίρετη συνάρτηση του x. Ο τανυστής του πεδίου (άρα και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο) παραμένει αναλλοίωτος κάτω από αυτό το μετασχηματισμό. Πράγματι οι διορθώσεις για το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}$$

Αντικαθιστώντας τον τανυστή προκύπτει η σχετικιστικά αναλλοίωτη εξίσωση για το πεδίο από (1.86):

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= j^\nu \\ \partial_\nu\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) &= j^\mu \end{aligned} \tag{1.95}$$

Κάνοντας χρήση της ελευθερίας επιλογής που μας δίνει η συνάρτηση χ στους μετασχηματισμούς βαθμίδας, διαλέγουμε τη χ τέτοια ώστε το A^μ να ικανοποιεί τη συνθήκη βαθμίδας Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{1.96}$$

οπότε η εξίσωση για το πεδίο γίνεται από Εξ. (1.95), (1.96):

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = j^\mu$$

Επομένως στη βαθμίδα Lorentz οι εξισώσεις Maxwell θα γίνουν:

$$\begin{aligned} \partial_\nu\partial^\nu A^\mu &= j^\mu \\ \text{για} \quad \partial_\mu A^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{1.97}$$

Ταυτόχρονα, συνεχίζει να υπάρχει η δυνατότητα του μετασχηματισμού βαθμίδας:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

με σεβασμό ομως στην συνθήκη Lorentz της (1.96) και από (1.94), γίνεται τελικά:

$$\partial_\mu\partial^\mu \Lambda = 0 \tag{1.98}$$

Επομένως η συνθήκη Lorentz εξακολουθεί να ικανοποιείται. Συνοψίζοντας:

$$\begin{aligned} \partial_\nu\partial^\nu A^\mu &= j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \\ \partial_\mu\partial^\mu \Lambda &= 0 \end{aligned} \tag{1.99}$$

1.11.1 Βαθμίδα Coulomb

Στο κενό η εξίσωση για το πεδίο A^μ, θα γίνει:

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = 0 \tag{1.100}$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης κατά τα γνωστά θα είναι:

$$A^\mu = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p})e^{-ipx} \tag{1.101}$$

Το τετράνυσμα $\Pi^\mu(\boldsymbol{p})$ ονομάζεται διάνυσμα πόλωσης του φωτονίου.
Προχωρώντας λίγο παρακάτω, αν αντικατασταθεί η λύση αυτή στη βαθμίδα Lorentz, θα είναι:

$$p_\mu \varepsilon^\mu = 0 \tag{1.102}$$

Η συνθήκη αυτή όμως περιορίζει τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών του Π^μ σε τρείς.
Πέρα όμως από την επιβολή της συνθήκης Lorentz, επιλέγουμε μια συνάρτηση Λ, όπως:

$$\Lambda = i\lambda e^{-ipx} \tag{1.103}$$

συνεπώς τότε ο μετασχηματισμός βαθμίδας, έχει ως εξής:

$$\varepsilon^\mu \to \varepsilon'^\mu = \Pi^\mu + \lambda p^\mu \tag{1.104}$$

Συνεχίζοντας την αντίστροφη διαδικασία με πριν και όπως επισημάνθηκε στην εξίσωση (1.102), επιλέγουμε:

$$\varepsilon^0 = 0$$

οπότε τελικά η συνθήκη Lorentz γράφεται αλλίως :

$$(1.102) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{p} = 0 \tag{1.105}$$

Οδηγηθήκαμε επομένως στον ορισμό της βαθμίδας Coulomb (βαθμίδα ακτινοβολίας).

$$\begin{aligned} A^0 &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= 0 \end{aligned} \tag{1.106}$$

Τελικά από τις Εξ. (1.102) και (1.105) θα υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητα διανύσματα πόλωσης τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα της ορμής $\boldsymbol{p}$ του φωτονίου.
Άρα έχει περιγραφεί με επιτυχία ένα ελεύθερο φωτόνιο, ορμής $\boldsymbol{p}$ και με διάνυσμα πόλωσης $\boldsymbol{e}^{(1,2)}$ και τέλος συνδέεται με ένα σωματίδιο με spin 1.

1.12 Μονάδες

Όπως κάθε κεφάλαιο που σέβεται τον εαυτό του έτσι και εδώ θα αφιερώσουμε μερικές γραμμές για αναφορά στο σύστημα μονάδων. Οι ατομικοί φυσικοί εισήγαγαν το ηλεκτρονιοβόλτ (eV), δηλαδή την ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν επιταχύνεται μέσα από μια διαφορά δυναμικού του 1 Volt: 1 eV= 1.6 $\times$ 10^{-19} Joules. Οι ορμή έχει μονάδες eV/c, και η μάζα μετριέται σε eV/c^2. Στη πραγματικότητα στη φυσική υψηλών ενεργείων γίνεται η εξής απλοποίηση: θέτουμε c=$\hbar$=1. Ενσωματώνονται συνεπώς στο τέλος τα c και $\hbar$ σαν μονάδες. Διαφορετικά λέμε ότι ο χρόνος μετριέται σε εκατοστά και η μάζα και η ενέργεια σε αντίστροφα εκατοστά. Οι μονάδες χρόνου είναι ο χρόνος που χρειάζεται το φώς να ταξιδέψει 1 εκατοστό

και η μονάδα ενέργειας είναι η ενέργεια ενός φωτονίου του οποίου το μήκος κύματος είναι 2π εκατοστά.
Οι μονάδες μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου μπορεί να δοθεί με τις ακόλουθες μορφές:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}(\mathrm{SI})$$

με το ηλεκτρικό φορτίο να μετριέται σε Coulomb. Πιο σύγχρονες εργασίες, οι οποίες βασίζονται στο Gaussian σύστημα, μετρούν το φορτίο σε ηλεκτροστατικές μονάδες (esu), και επομένως ο νόμος Coulomb γράφεται

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}(\mathrm{G})$$

Στο πεδίο όμως των στοιχειωδών σωματιδίων προτιμάται το σύστημα των Heaviside - Lorentz, με τον νόμο Coulomb να παίρνει τη μορφή

$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\ (\mathrm{HL})$$

Μια καλή αίσθηση της φυσικής μας δίνει η έκφραση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια της σταθεράς λεπτής υφής, ως

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

ή όταν μετράται το φορτίο σε μονάδες των Heaviside - Lorentz και θέτοντας $c = \hbar = 1$, γράφεται

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Με τη σταθερά λεπτής υφής θα ασχοληθούμε εκτενέστερα παρακάτω.

Κεφάλαιο 2

GAUGE THEORIES

Ασφαλής επέκταση της QED θεωρήθηκε η κβαντική θεωρία πεδίου, η οποία επιτρέπει πλέον τους υπολογισμούς των αλληλεπιδράσεων κουαρκ καθώς και λεπτονίων. Σαν πλέον σύγχρονη φαίνεται η επέκταση αυτών των θεωρίαν σε gauge θεωρίες. Η ασθενής και ισχυρή αλληλεπίδραση, μπορούν πλεόν να περιγραφούν από gauge θεωρίες, την ενωποιημένη ηλεκτρασθενής θεωρία και την κβαντική χρωμοδυναμική. Πρόκειται για θεωρίες επανακανονικοποιήσιμες, για τις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

2.1 Φορμαλισμός Lagrange κλασσικής μηχανικής

Οι θεωρίες που περιγράφουν την φύση είναι οι θεωρίες βαθμίδας. Η σύνδεση μεταξύ συμμετριών και νόμων διατήρησης μπορεί καλύτερα να συζητηθεί στο πλαίσιο του Lagrange φορμαλισμού. Σύμφωνα με το δευτερο νόμο του Νεύτωνα η κίνηση σωματιδίου μάζας m, πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη F περιγράφεται ως:

$$F = ma,$$

όπου **a** είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου.
Αν η δύναμη είναι επιπλέον διατηρητική $F = -\nabla U$ τότε μπορεί να περιγραφεί ως η βαθμίδα ενός βαθμωτού δυναμικού και τότε ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$m\frac{dv}{dt} = -\nabla U. \tag{2.1}$$

Μια εναλλακτική γραφή, της κλασσικής μηχανικής, αποτελεί η εξίσωση Lagrange:

$$L = T - V \tag{2.2}$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.3}$$

Η Lagrange είναι συνάρτηση των συντεταγμένων q_i (έστω, $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) και των χρονικών τους παραγώγων $\dot{q}_i(\dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z)$. Στο Lagrangian φορμαλισμό ο νόμος της κίνησης περιγράφεται με την εξίσωσηEuler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{2.4}$$

Ορίζουμε τη δράση ενός συστήματος:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \tag{2.5}$$

Η αρχή ελάχιστης δράσης υπαγορεύει ότι από όλους τις δυνατές διαδρομές το σωματίδιο θα επιλέξει εκείνη για την οποία ελαχιστοποιείται η δράση. Χρήσιμη είναι η ακόλουθη μελέτη μιας μικρής μεταβολής στη διαδρομή του σωματιδίου:

$$q(t) \to q'(t) = q(t) + \delta q(t) \tag{2.6}$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2.7}$$

Ο υπολογισμός έχει ως εξής:

$$S \to S' = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\Big(\frac{d}{dt}(q + \delta q)\Big)^2 \tag{2.8}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{m}{2}\dot{q}^2 + m\dot{q}\delta\dot{q} - [V(q) + \delta q V'(q)]\Big)dt + O(\delta q^2) \tag{2.9}$$

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}\delta\dot{q} - \delta q V'(q) dt \tag{2.10}$$

$$S' = S + \delta S \tag{2.11}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{q}\delta\dot{q} - \delta q V'(q) dt \tag{2.12}$$

Με την εφαρμογη των συνοριακών συνθηκών:

$$\int_{t_1}^{t_2}(m\dot{q}\delta\dot{q})dt = m\dot{q}\delta q|_{t_1}{}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\delta q\ddot{q}dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\delta q\ddot{q}dt \tag{2.13}$$

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2}[m\delta q\ddot{q} + \delta qV'(q)]dt = 0 \tag{2.14}$$

$$m\ddot{q} = -V'(q). \tag{2.15}$$

που είναι η ίδια περιγραφή με το νόμο του Νεύτωνα. Απαλοίφεται επομένως σταδιακά η αξιωματική περιγραφή της κίνησης μέσω των δυνάμεων και οριστικοποιείται η περιγραφή μέσω των δυναμικών αλληλεπίδρασης. Αυτό θα συμβάλλει περαιτέρω στην εισαγωγή της έννοιας του πεδίου.

2.1.1 Εξισώσεις Euler - Lagrange

Ένα σωματίδιο, από τη φύση του, είναι μια εντοπισμένη οντότητα· αντικείμενο της κλασσικής μηχανικής είναι ο υπολογισμός της θέσης συναρτήσει του χρόνου: x(t), y(t), z(t). Ένα πεδίο, από την άλλη πλευρά, εντοπίζεται σε μια περιοχή του χώρου· στη θεωρία πεδίου το κύριο ενδιαφέρον στρέφεται ως προς τον υπολογισμό ενός ή περισσοτέρων συναρτήσεων θέσης και χρόνου: $\phi_i(x^\mu)$. Θεωρώντας επομένως ότι ο φορμαλισμός για τη Lagrangian επεκτείνεται ανάλογα σε ένα συνεχές σύστημα συντεταγμένων με συνεχώς παραγωγίσιμες συντεταγμένες, συνεπάγεται για τη Lagrange (τυπικά Lagrangian πυκνότητα) $\mathfrak{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ (βλ. Εξ.(2.4)):

$$\partial_\mu\phi_i \equiv \frac{\partial\phi_i}{\partial x^\mu} \tag{2.16}$$

Η αριστερή πλευρά της Εξ. (2.4) περιελάμβανε μόνο χρονικές παραγώγους· επομένως μια σχετικιστική θεωρία πρέπει να αντιμετωπίζει όμοια τις χωρικές και χρονικές παραγώγους με ίσους όρους ' και τελικά οι εξισώσεις Euler-Lagrange γενικεύονται:

$$\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\Big) = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_i}. \tag{2.17}$$

Η δράση θα έχει ως εξής (για τους ακόλουθους υπολογισμούς χρησιμοποιείται μια συνιστώσα πεδίου):

$$S = \int \mathfrak{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu)d^4x \tag{2.18}$$

Εφαρμόζουμε ξανά την αρχή των μεταβολών για τα x και φ:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{2.19}$$

$$\varphi(x^\mu) \to \varphi'(x^\mu) = \varphi(x^\mu) + \delta\varphi(x^\mu) \tag{2.20}$$

και η μεταβολή στη δράση:

$$\delta S = \int \mathfrak{L}(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu)d^4x' - \int \mathfrak{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu)d^4x \tag{2.21}$$

και $d^4x' = J(\frac{x'}{x})d^4x$, με $J(\frac{x'}{x})$ την Jacobian του μετασχηματισμού. Εδώ λοιπόν θα είναι:

$$J\Big(\frac{x'}{x}\Big) = det\Big(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\Big) = det({\delta_\lambda}^\mu + \partial_\lambda\delta x^\mu) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) \tag{2.22}$$

Άρα η μεταβολή στη δράση είναι:

$$\delta S = \int \mathfrak{L}(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu)\Big(\partial_\mu(\delta x^\mu)\Big)d^4x - \int \mathfrak{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi, x^\mu)d^4x \tag{2.23}$$

$$\delta S = \int \Big(L' - L' + L(\varphi', \partial_\mu\varphi', x'^\mu)\partial_\mu(\delta x^\mu)\Big)d^4x \tag{2.24}$$

και

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial(\partial\varphi)}\delta(\partial\varphi) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{2.25}$$

ενώ όπως φαίνεται από την (2.77), (2.20) θα είναι $\delta(\partial_\mu\varphi) = \partial_\mu\delta\varphi$. Οπότε:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} + L\partial_\mu(L\delta x^\mu)\right)d^4x \tag{2.26}$$

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) + \partial_\mu(L\delta x^\mu)\right)d^4x \tag{2.27}$$

Ο τρίτος όρος αποτελεί τέλειο διαφορικό. Ταυτόχρονα μπορούμε να γράψουμε και τον δεύτερο όρο σας τέλειο διαφορικό με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) = \partial_\mu\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\delta\varphi)\right] - \left[\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\delta\varphi \tag{2.28}$$

Άρα η (2.27) γίνεται:

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi - \Big[\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Big]\delta\varphi + \partial_\mu\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial\varphi)}(\delta\varphi)\Big] + \partial_\mu(L\delta x^\mu)\right)d^4x$$

$$\delta S = \int_R \left(\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\varphi} - \left[\partial_\mu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right]\right)\delta\varphi\right)d^4x + \int_R \partial_\mu\left(\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\delta\varphi)\right] + (\mathfrak{L}\delta x^\mu)\right)d^4x.$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια του Θεωρήματος Gauss ώς εξής:

$$\delta S = \int_R \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi \right) d^4x + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi + \mathfrak{L} \delta x^\mu \right] d\sigma_\mu \tag{2.29}$$

Θέτοντας σε ισχύ και εδώ τις συνοριακές συνθήκες:

$$\delta\varphi = 0, \delta x^\mu = 0 \tag{2.30}$$

και επομένως μηδενίζεται ο δεύτερος όρος.
Αλλά από την αρχή της ελάχιστης δράσης μηδενίζεται και ο πρώτος όρος. Συνεπώς:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0 \tag{2.31}$$

έχει προκύψει η περίφημη εξίσωση Euler-Lagrange και περιγράφει το πεδίο φ. Ο υπολογισμός της εξίσωσης Euler-Lagrange για κάθε Lagrangian αποτελεί μια ακόμα επαλήθευση.

2.1.2 Πραγματικό πεδίο - Εξαγωγή της Klein-Gordon

Παίρνοντας ως Lagrangian την:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \tag{2.32}$$

δίνει:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m^2\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial(\partial \varphi)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha)} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right) = \frac{1}{2}\Big(g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi {\delta_\mu}^\alpha + g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi {\delta_\nu}^\alpha \Big)$$

και τελικά

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \tag{2.33}$$

γνωστή και ως Klein-Gordon.

2.1.3 Μιγαδικό πεδίο - Εξαγωγή της Dirac

Σε αυτή την περίπτωση η υπό εξέταση Lagrangian είναι:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi = -i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.34}$$

και επομένως η Euler-Lagrange θα έχει:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\psi}} = -m\psi, \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = -i\gamma^\mu \psi, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi}, \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu$$

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\psi = 0, i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

Οι τελευταίες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις Dirac για τα πεδία $\psi, \bar{\psi}$.
Η L στη σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου, όπως ορίστηκε, λαμβάνεται αξιωματικά. Η Λαγκρατζιανή για ένα συγκεκριμένο σύστημα είναι μοναδική· ο πολλαπλασιασμός της Λαγκρατζιανής με μια σταθερά ή η πρόσθεση σάυτή μιας απόκλισης, $\partial_\mu M^\mu$, όπου M^μ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση της ϕ_i και $\partial_\mu\phi_i$. Οι όροι αυτοί θα απαλειφθούν κατά την εφαρμογή της Euler-Lagrange, όπως άλλωστε θα φανεί και στη συνέχεια.

2.1.4 Εξισώσεις Maxwell

Αξιοσημείωτο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξαγωγή των εξισώσεων Maxwell με την παραπάνω θεωρία. Η Lagrangian για αυτή τη περίπτωση:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{2.35}$$

και με $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Ακολουθούν οι υπολογισμοί:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} = -\frac{\partial}{\partial A_\nu}g^{\mu\rho}j_\mu A_\rho = -g^{\mu\rho}j_\mu\delta_\rho{}^\nu = -j^\nu \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\Big[(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma)\Big] = \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma a_\rho)(g^{\rho\beta}g^{\sigma\alpha}\partial_\beta A_\alpha - g^{\sigma\alpha}g^{\rho\beta}\partial_\alpha A_\beta) = \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}g^{\sigma\alpha}g^{\rho\beta}(\partial_\rho A_\sigma\partial_\beta A_\alpha - \partial_\rho A_\sigma\partial_\alpha A_\beta - \partial_\sigma A_\rho\partial_\beta A_\alpha + \partial_\sigma A_\rho\partial_\alpha A_\beta) = \\
&= -\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}g^{\rho\beta}(\delta_\rho{}^\mu\delta_\sigma{}^\nu\partial_\beta A_\alpha - \delta_\rho{}^\mu\delta_\sigma{}^\nu\partial_\alpha A_\beta - \delta_\rho{}^\nu\delta_\sigma{}^\mu\partial_beta A_\alpha + \delta_\rho{}^\nu\delta_\sigma{}^\mu\partial_\alpha A_\beta) = \\
&= -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Άρα

$$-j^\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{2.38}$$

που αφορά τις μη ομογενείς εξισώσεις Maxwell. Στη συνέχεια της αναφοράς αυτής θα ακολουθήσουν επιπλέον στοιχεία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

2.2 Θεώρημα Noether

Η σύνδεση μεταξύ συμμετρίας και νόμων διατήρησης επιτυγχάνεται μέσω του Θεωρήματος Noether. **Μιλώντας για συμμετρίες εδώ εννοούμε τη διατήρηση της ποσότητας της δράσης αναλλοίωτης κάτω από μετασχηματισμούς των συντεταγμένων του χωρόχρονου x^μ και του πεδίου φ** . Γενικότερα η ύπαρξη συμμετρίας σχετίζεται με τη διατήρηση ορισμένων ποσοτήτων όπως π.χ. ενέργειας, ορμής και στροφορμής. Επισημαίνουμε ακόμη ότι όλα τα ακόλουθα αφορμόνται από την αρχή των μεταβολών, η οποία σε αυτή την περίπτωση θα καταδείξει την δυνατή ύπαρξη κάποιας συμμετρίας.
Ξεκινώντας και πάλι με τις μεταβολές των x και φ:

$$x^\mu \to {x'}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x) \\ \varphi(x') \to \varphi'(x') = \varphi(x') + \delta\varphi(x') \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ουσιαστικά η τελευταία μετατροπή πρέπει να γενικευτεί στην ακόλουθη:

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(x') + \Delta\varphi(x) \tag{2.41}$$

και ισχύει:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x) = \varphi'(x') - \varphi(x') - \varphi(x) \Rightarrow \\ \Delta\varphi(x) = \delta\varphi + (\partial_\mu\varphi)\delta x^\mu \Rightarrow \\ \Delta\varphi(x) = \delta\varphi + (\delta\varphi)\delta x^\mu \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ισχύει συνεπώς ότι η δράση δεν μεταβλήθηκε.
Στη συνέχεια εξετάζονται οι ιδιότητες του χώρου αναφοράς R. Συγκεκριμένα δεν απαιτούμε μηδενισμό των μεταβολών $\delta\varphi = 0, \delta x^\mu = 0$ στο σύνορο και επομένως από την (2.29):

$$\begin{aligned} &\delta S = \int_R \left(\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \delta\varphi \right) d^4x + \int_{\partial R} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi + L\delta x^\mu \right] d\sigma_\mu \Rightarrow \\ &\delta S = \int_R \left[\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \delta\varphi \right] d^4x + \\ &\int_{\partial R} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} [\delta\varphi + (\partial_\nu\varphi)\delta x^\nu] - \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)} (\partial_\nu\varphi) - L{\delta_\nu}^\mu \right] \delta x^\nu \right] d\sigma_\mu \end{aligned} \tag{2.43}$$

Στην τελευταία έχει προσθαφαιρεθεί ο όρος $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\nu\varphi)\delta x^\nu$.
Ο πρώτος όρος που βρίσκεται στην αγκύλη στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, όπως παρατηρούμε,

εκφράζει την ολική μεταβολή $\Delta\varphi$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Ορίζεται στη συνέχεια ο τανυστής ενέργειας -ορμής:

$$\theta_\nu{}^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(\partial_\nu \varphi) - L\delta_\nu{}^\mu \tag{2.44}$$

Συνεπώς η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S = \int_R \Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\Big)\delta\varphi\Big] d^4x + \int_{\partial R}\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\Delta\varphi - \theta_\nu{}^\mu \delta x^\nu\Big] d\sigma_\mu \tag{2.45}$$

Υποθέτοντας ότι η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών των x^μ και φ. Επίσης υποθέτοντας πως το πεδίο φ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, το πρώτο ολοκλήρωμα της (2.45) μηδενίζεται. Η απαίτηση του μηδενισμού της δράσης οδηγεί για τις απειροστές μεταβολές:

$$\int_{\partial R}\Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\Delta\varphi - \theta_\nu{}^\mu \delta x^\nu\Big] d\sigma_\mu = 0$$

και επειδή ακριβώς οι παράμετροι $\delta\omega^\nu$ είναι τυχαίες, θα ισχύει:

$$\int_{\partial R} J_\nu{}^\mu d\sigma_\mu = 0 \tag{2.46}$$

όπου το διατηρούμενο ρεύμα Noether θα είναι:

$$J_\mu{}^\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\Phi_\nu - \theta_\kappa{}^\mu X_\nu{}^\kappa \tag{2.47}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Gauss για τη περιοχή R:

$$(2.46) \Rightarrow \int_R \partial_\mu J_\nu{}^\mu d^4x = 0$$

$$\partial_\mu J_\nu{}^\mu = 0 \tag{2.48}$$

Επομένως ξεκινώντας από την απαίτηση για την αναλλοιώτητα της δράσης κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς $\delta\omega$ και ενισχύοντας ταυτόχρονα την ισχύ του αρχής αυτής, αποδείχθηκε τελικά η ύπαρξη ενός διατηρούμενου ρεύματος $J_\nu{}^\mu$. Επομένως έχουμε την επικράτηση του σχήματος:

$$\Big(\text{ πεδίο } \varphi \text{ ικανοποίηση της E. - L. }\Big) \equiv \Big(\text{ ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος }\Big)$$

Θεωρώντας, στη συνέχεια, σταθερό χρόνο γεννιέται ένα διατηρούμενο στο χώρο φορτίο που αντιστοιχεί στην J^0 συνιστώσα του ρεύματος.

$$Q_\nu = \int_V \partial_\nu{}^0 d^3x \tag{2.49}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει προκύψει ως ολοκλήρωση στο χώρο V της Εξ. (2.48):

$$\int_V \partial_\mu {J_\nu}^\mu d^3x = 0$$

$$\int_V \partial_0 {J_\nu}^0 d^3x + \int_V \partial_i {J_\nu}^i d^3x = 0 \tag{2.50}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stokes ξανά στο δεύτερο μέλος της Εξ. (2.50) προκύπτει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα. Το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται παίρνοντας την επιφάνεια ολοκλήρωσης πολύ μακριά. Άρα:

$$\partial_0 {J_\nu}^0 d^3x = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_V {J_\nu}^0 d^3x = \frac{d}{dt} Q_\nu = 0 \tag{2.51}$$

επομένως έχει προκύψει ένα διατηρούμενο φορτίο. Αυτό είναι και το **Θεώρημα της Noether**. Συγκεντρωτικά:

$$\boxed{\partial_\mu {J_\nu}^\mu = 0, \quad \frac{d}{dt} Q_\nu = 0} \tag{2.52}$$

Οι εφαρμογές του Θεωρήματος είναι πολλές στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων.

2.2.1 Μελέτη του Θ. Noether για τη συμμετρία μετατόπισης στο χώρο - διατήρηση ενέργειας και ορμής

Θεωρώντας αναλλοίωτη τη δράση κάτω από μετατοπίσεις στο χώρο και στο χρόνο, θα ισχύει:

$$\Delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \Delta\varphi = 0 \Rightarrow (;;) \Rightarrow {X_\nu}^\mu = {\delta_\nu}^\mu, \Phi_\mu = 0 \tag{2.53}$$

Επομένως το διατηρούμενο ρεύμα θα είναι από την (Εξ. (2.47)):

$${J_\nu}^\mu = -{\theta_\nu}^\mu \tag{2.54}$$

και από την Εξ.(2.51)ο αντίστοιχος νόμος διατήρησης Noether έχει:

$$\frac{d}{dt}\int_V {\theta_\nu}^0 d^3x = 0 \tag{2.55}$$

Η ποσότητα όμως $P_\nu = \int_V {\theta_\nu}^0 d^3x$ ονομάζεται τετραορμή του πεδίου ϕ, όπως θα αποδειχθεί. Ο τανυστής ενέργειας - ορμής επομένως είναι:

$$\int {\theta_0}^0 d^3x = \int \Big[\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\varphi)}(\partial_0\varphi) - L\Big] d^3x = \int \Big[\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L\Big] d^3x \tag{2.56}$$

Όμως η σύνδεση της Hamiltonian και της Lagrangian έχει:

$$\boxed{H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L} \tag{2.57}$$

και επομένως το ολοκλήρωμα της (2.56) δεν είναι τίποτε άλλο από την έκφραση της Hamiltonian και επομένως έκφραση της ενέργειας του πεδίου φ. Επομένως για τη περίπτωση των πεδίων, η ποσότητα $\partial\varphi\partial x^\mu$ είναι ένα τετράνυσμα κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz ακριβώς όπως και η τετραορμή. Επομένως, έστω ένα σύστημα του οποίου η Lagrangian και συνεπώς και η δράση δεν εξαρτάται από το x^μ, τότε θα έχουμε διατήρηση της ενέργειας και της ορμής.
Έστω για παράδειγμα η Lagrangian του πεδίου Klein-Gordon. Δίνεται:

$$L_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2.58}$$

Άρα ο τανυστής ενέργειας - ορμής, όπως φαίνεται και από την (2.44):

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}L \tag{2.59}$$

Ο τανυστής ενέργειας - ορμής που έχει επιλεγεί είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των μ, ν. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να προσθέσουμε έναν όρο:

$$\partial_\mu f^{\lambda\mu\nu}, \quad \text{όπου} \quad f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu} \quad \text{ή} \quad \partial_\mu\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{2.60}$$

οπότε μπορούμε πια να ορίσουμε την ποσότητα:

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \tag{2.61}$$

η ποσότητα αυτή ονομάζεται **κανονικός τελεστής ενέργειας - ορμής**.

2.2.2 Μελέτη Θ. Noether για τη συμμετρία ως προς τις στροφές στο χώρο - διατήρηση στροφορμής

Μια επιπλεόν εφαρμογή του νόμου Noether έγκειται στην περίπτωση που η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από στροφές στο χώρο. Με βάση το αναλλοίωτο της δράσης:

$$\delta x^i = \varepsilon^{ij}x^j, \quad \varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}, \quad i, j, = 1, 2, 3 \tag{2.62}$$

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.63}$$

Όπως γίνεται φανερό από την Εξ. (2.62) οι μετατοπίσεις στο χώρο και στο χρόνο είναι υποομάδα της ομάδας Lorentz, γενικεύοντας επομένως:

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon_{\nu}{}^{\mu} x^{\nu}, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \tag{2.64}$$

Και επομένως οι μετασχηματισμοί παίρνουν τη μορφή:

$$\delta x^{\mu} = X_{\rho\sigma}{}^{\mu} \varepsilon^{\rho\sigma}, X_{\rho\sigma}{}^{\mu} = \frac{1}{2}(\delta_{\rho}{}^{\mu} x_{\sigma} - \delta_{\sigma}{}^{\mu} x_{\rho}), \Delta\varphi = 0 \tag{2.65}$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τον τύπο για το διατηρούμενο ρεύμα Noether (έχοντας χρησιμοποιήσει τον κανονικό τανυστή ενέργειας - ορμής και όχι τον τανυστή που αναφέρεται στον τύπο) θα ισχύει (2.54) , (2.61):

$$J^{\mu\rho\sigma} = -T_{\kappa}{}^{\mu} X^{\kappa\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(T^{\mu\rho} x^{\sigma} - T^{\mu\sigma} x^{\rho}) \tag{2.66}$$

Η διατήρηση του ρεύματος φαίνεται από:

$$\partial_{\mu} J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\Big((\partial_{\mu} T^{\mu\rho}) x^{\sigma} + T^{\mu\rho} \delta_{\mu}{}^{\sigma} - (\partial_{\mu} T^{\mu\sigma}) x^{\rho} - T^{\mu\sigma} \delta_{\mu}{}^{\rho}\Big) \tag{2.67}$$

Αλλά $\partial_{\mu} T^{\mu\rho} = \partial_{\mu} T^{\mu\sigma} = 0$ από υπολογισμούς σύμφωνα με τιην (2.61) και επομένως:

$$\partial_{\mu} J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(T^{\sigma\rho} - T^{\rho\sigma}) = 0 \tag{2.68}$$

Τελικά, το διατηρούμενο φορτίο είναι:

$$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\mu}) d^3x \tag{2.69}$$

Το στοιχείο για $\mu = 0$ είναι η στροφορμή του συστήματος. Δηλαδή, σύμφωνα με το Θ. Noether:

$$\frac{d}{dt} M^{\mu\nu} = 0 \tag{2.70}$$

Συγκε•ντρωτικά θα λέγαμε ότι η απαίτηση αναλλοιώτητας της Lagrange και στη συνέχεια η διατήρηση της δράσης κάτω από στροφές στο χώρο, μας οδήγησε με τη βοήθεια του Θεωρήματος της Noether στην διατήρηση ρεύματος και διατήρηση φορτίου για το σύστημά μας. Η στροφορμή θα είναι μια διατηρούμενη ποσότητα. Άλλωστε η διατήρηση της στροφορμής επέβαλλε τη χρήση του κανονικού τανυστή ενέργειας - ορμής (βλ. Εξ. (2.66)), δηλαδή τη συμμετροποίηση του τανυστή μας.

2.3 Ολικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας

Κάνουμε λοιπόν μια μικρή παράκαμψη για να εξηγηθούν οι ολικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας και μέσα από αυτούς να αναδειχθεί η αξία των τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας. Μέχρι τώρα οι συμμετρίες που έχουμε συναντήσει είναι η συμμετρία ως προς τις στροφές και η συμμετρία ως προς τη μετατόπιση σε χώρο Minkowski. Οι αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες υπήρξαν η στροφορμή και η ενέργεια - ορμή.
Η φυσική απαιτεί και την ύπαρξη μιας επιπρόσθετης διατηρούμενης ποσότητας. Η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου κρύβει μια επιπρόσθετη συμμετρία. Η ζητούμενη συμμετρία επιβάλλει με την σειρά της την μεταβολή του πεδίου Φ_μ, αφού όλες οι πιθανές περιπτώσεις σχετικές με το ${X_\nu}^\mu$ έχουν ήδη εξεταστεί. Άμεσα διερευνάται η ύπαρξη περισσοτέρων του ενός βαθμωτών πεδίων. Η πρώτη περίπτωση, των δύο βαθμωτών πεδίων συνεπάγεται τη μελέτη ενός μιγαδικού πεδίου ϕ. Αυτό το πεδίο περιγράφεται από την Lagrangian Klein-Gordon, η οποία εξετάστηκε παραπάνω (βλ. Εξ.(2.58)). Ισχύει:

$$L = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^* \tag{2.71}$$

απ΄ όπου προκύπτει η Klein-Gordon για τα δύο πεδία:

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0, \qquad \partial_\mu\partial^\mu\varphi^* + m^2\varphi^* = 0 \tag{2.72}$$

Ψάχνουμε μια συμμετρία της Lagrangian και η οποία θα συνδέεται μέσω του Θεώρηματος της Noether με τη διατήρηση του (ηλεκτρικού) φορτίου. Παρατηρώντας τη Lagrangian, διαπιστώνεται ότι αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό:

$$\varphi \to \varphi' = e^{-i\alpha}\varphi, \qquad \varphi^* \to {\varphi'}^* = e^{i\alpha}\varphi^* \tag{2.73}$$

όπου α είναι μια πραγματική αυθαίρετη σταθερά [1] . Πράγματι είναι:

$$L \to L' = e^{-i\alpha}(\partial_\mu\varphi)e^{i\alpha}(\partial^\mu\varphi^*) - m^2e^{-i\alpha}\varphi e^{i\alpha}\varphi^* = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^* = L$$

Παρατηρούμε οτι ο μετασχηματισμός πρώτου είδους, όπως ορίστηκε δεν εξαρτάται από το χωρόχρονο. Συνεπώς και το ζητούμενο, είναι να βρεθεί μια 'εσωτερική συμμετρία'. Είναι:

$$\Phi = -i\varphi, \qquad \Phi^* = i\varphi^*, \qquad X = 0. \tag{2.76}$$

[1] Αξίζει σε αυτό το σημείο να αναφερθούμε στους μετασχηματισμούς αυτούς, γνωστούς ως μετασχηματισμοί πρώτου είδους ή gauge μετασχηματισμοί (μετασχηματισμοί φάσης ουσιαστικά). Θεωρώντας απειροστές μεταβολές $e^{i\alpha} \approx 1 + i\alpha$:

$$\delta\varphi = -i\alpha\varphi, \qquad \delta\varphi^* = i\alpha\varphi^* \tag{2.74}$$

και συνεπώς:

$$\delta(\partial_\mu\varphi) = -i\alpha\partial_\mu\varphi, \delta(\partial_\mu\varphi^*) = -i\alpha\partial_\mu\varphi^* \tag{2.75}$$

Εφαρμόζοντας το Θ. Noether (Εξ. (2.47)) παίρνουμε το διατηρούμενο ρεύμα:

$$J^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}(-i\varphi) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\varphi^*)} i\varphi^* \tag{2.77}$$

Αντικαθιστώντας τη Lagrangian:

$$J^{\mu} = -i\varphi\partial^{\mu}\varphi^* + i\varphi^*\partial^{\mu}\varphi = i(\varphi^*\partial^{\mu}\varphi - \varphi\partial^{\mu}\varphi^*) \tag{2.78}$$

Η διατήρηση του ρεύματος αποδεικνύεται θεωρώντας δύο Klein-Gordon και τις οποίες θα ικανοποιούν τα πεδία. Ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}J^{\mu} &= i(\partial_{\mu}\varphi^*\partial^{\mu}\varphi + \varphi^*\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi - \partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi^* - \varphi\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi^*) \\ \partial_{\mu}J^{\mu} &= i(\varphi^*\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi - \varphi\partial_{\mu}\partial^{\mu}\varphi^*) = i(-\varphi^* m^2\varphi + \varphi m^2\varphi^*) = 0 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Τελικά, η διατηρούμενη ποσότητα δίνεται:

$$Q = \int J^0 dV = i\int \left(\varphi^*\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right) \tag{2.80}$$

Η ποσότητα αυτή είναι το διατηρούμενο ηλεκτρικό φορτίο, όπως αναφέρεται και στην αρχή της παραγράφου. Πρόκειται για ποσότητα που δεν είναι κβαντωμένη (δεν περιέχει τη σταθερά του Plank $\hbar$. Επίσης ο παραπάνω ορισμός αποδεικνύει οτι πρόκειται για ποσότητα που δεν εξαρτάται από το χρόνο (δηλαδή $\frac{dQ}{dt} = 0$).

2.3.1 Εισαγωγή της ομάδας U(1)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποκτά η εισαγωγή ομάδων συμμετρίας. Συγκεκριμένα, η Lagrangian θα είναι (βλ. Εξ.(2.71)) για δύο βαθμωτά πεδία φ_1, φ_2

$$L = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi_1\partial^{\mu}\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi_2\partial^{\mu}\varphi_2 - \frac{1}{2}m^2({\varphi_1}^2 + {\varphi_2}^2) \tag{2.81}$$

Ανάλογα, θεωρούμε τα δύο πεδία ως στοιχεία ενός διανυσματικού πεδίου φ μέσα σε χώρο με διανύσματα βάσης i και j:

$$\varphi = i\varphi_1 + j\varphi_2 \tag{2.82}$$

Επομένως, η Lagrangian ξαναγράφεται ως εξής:

$$L = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\boldsymbol{\varphi}\partial^{\mu}\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}m^2\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} \tag{2.83}$$

Οι μετασχηματισμοί ξαναγράφονται επίσης:

$$\begin{aligned} \varphi \to \varphi' = {\varphi_1}' + i{\varphi_2}' = e^{-i\alpha}(\varphi_1 + i\varphi_2) \\ \varphi^* \to {\varphi'}^* = {\varphi_1}' - i{\varphi_2}' = e^{i\alpha}(\varphi_1 - i\varphi_2) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Τελικά προκύπτει:

$$\varphi_1{}' = \varphi_1 cos\alpha + \varphi_2 sin\alpha \tag{2.85}$$
$$\varphi_2{}' = -\varphi_1 sin\alpha + \varphi_2 cos\alpha \tag{2.86}$$

Με τη μορφή πινάκων επομένως:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1{}' \\ \varphi_2{}' \end{pmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός πρώτου είδους αποτελεί μια στροφή κατά α στον εσωτερικό δυσδιάστατο χώρο του πεδίου φ. Οι στροφές αυτές αποτελούν στοιχεία της ομάδας SO(2). Επιπλέον, όμως ο πίνακας του μετασχηματισμού είναι Unitary:

$$U\dagger U = 1 \rightarrow \tag{2.87}$$

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόκειται επομένως για την ομάδα U(1) [2]. Ισχύει $SO(2) \sim U(1)$. Τελικά, η Lagrangian έχει U(1) συμμετρία και περισσότερη έμφαση θα δωθεί σε επόμενη ενότητα.

2.3.2 Τοπικές θεωρίες βαθμίδας

Συνεπώς, όπως ακριβώς υπαγορεύει το Θ. Noether, ήταν η εύρεση μιας διατηρούμενης ποσότητας Q η οποία πρόκυψε από το αναλλοίωτο της Lagrangian (αναλλοίωτο δράσης) κάτω από τους μετασχηματισμούς U(1). Η έννοια όμως της εσωτερικής συμμετρίας, που εισήχθει, αναιρεί το χωροχρονικό αναλλοίωτο της θεωρίας μας. Παίρνοντας το α ως σταθερά και ανεξάρτητο του χωρόχρονου, προκύπτει άμεσο πλήγμα της θεωρίας της Σχετικότητας. Θεωρώντας, συνεπώς το α ως χωροχρονικά εξαρτόμενη, επανεξετάζουμε: (Ο επόμενος μετασχηματισμός που θα εισαχθεί, ονομάζεται τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας (μετασχηματισμός δευτέρου είδους))

2.3.3 Εξίσωση Klein-Gordon

Όμοια με πριν (βλ. Εξ. (2.73)):

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha}\varphi \tag{2.88}$$

Για πολύ μικρές μεταβολές του α ισχύει:

$$\delta\varphi = -i\alpha\varphi \tag{2.89}$$

$$\partial_\mu\varphi \rightarrow \partial_\mu\varphi - i\alpha\partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\alpha)\varphi \tag{2.90}$$
$$\delta\partial_\mu\varphi = -i\alpha\partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\alpha)\varphi \tag{2.91}$$

[2] βλ. Παράρτημα A

Όμοια για το συζυγές:

$$\delta\varphi^* = i\alpha\varphi^*, \qquad \delta\partial_\mu\varphi^* = i\alpha\partial_\mu\varphi^* + i(\partial_\mu\alpha)\varphi^* \tag{2.92}$$

Παρατηρώντας τις παραγώγους για τα δύο πεδία, προκύπτει οτι η παράγωγος της φ δεν μετασχηματίζεται ακριβώς όπως η φ, δηλαδή δεν πρόκειται για συναλλοίωτο μετασχηματισμό. Αλλά επιπλεόν θα προκύψει μια άλλη σημαντική πληροφορία. Εξαιτίας των όρων που πρόεκυψαν από τη παραγώγηση του α η Lagrangian δεν παραμένει πια αναλλοίωτη. Αποδεικνύεται:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^*)\\
\delta L &= \delta(\partial_\mu\varphi)\partial^\mu\varphi^* + \partial_\mu\varphi\delta(\partial^\mu\varphi^*) - m^2\delta(\varphi\varphi^*)\\
\delta L &= [-i\alpha\partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\alpha)\varphi]\partial^\mu\varphi^* + \partial_\mu\varphi[i\alpha\partial^\mu\varphi^* + i(\partial^\mu\alpha)\varphi^*] - m^2\cdot 0\\
\delta L &= (\partial_\mu\alpha)(-i\varphi\partial^\mu\varphi^* + i\varphi^*\partial^\mu\varphi)\\
\delta L &= (\partial_\mu\alpha)J^\mu
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Δοκιμάζοντας να επανέλθει η Lagrangian στην αναλλοίωτη μορφή θα προστεθεί ο όρος:

$$L_1 = -eJ^\mu A_\mu = -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu \tag{2.94}$$

Ήταν επομένως αναγκαία η εισαγωγή του τετραδιανύσματος: A_μ, το οποίο αποκτά σύζευξη με το διατηρούμενο ρεύμα. Η ποσότητα e έχει προστεθεί ώστε η ποσότητα eA_μ να αποκτά μονάδες ίδιες με αυτές του $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Στη συνέχεια, εξετάζεται επομένως ο μετασχηματισμός του A_μ. Εφόσον το A_μ θα αναιρεί τον όρο στο δL , θα είναι:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{2.95}$$

Άρα η μεταβολή στην L_1 θα είναι:

$$\begin{aligned}
\delta L_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu)\\
\delta L_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu(\partial_\mu\alpha)
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Ενώ, η μεταβολή στην ολική Lagrangian θα είναι:

$$\delta\mathfrak{L} = \delta\mathfrak{L} + \delta\mathfrak{L}_1 = (\partial_\mu\alpha)J^\mu - e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu(\partial_\mu\alpha) = -e(\delta J^\mu)A_\mu \tag{2.97}$$

Η εξάλειψη όμως του ζητούμενου όρου, οδήγησε ταυτόχρονα στη δημιουργία ενός επιπρόσθετου, ο οποίος με τη σειρά του θα εξαλειφθεί με τη πρόσθεση ενός νέου, ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\delta J^\mu &= i\delta(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) = i[(\delta\varphi^*)\partial^\mu\varphi + \varphi^*(\delta\partial^\mu\varphi) - (\delta\varphi)\partial^\mu\varphi^* - \varphi(\delta\partial^\mu\varphi^*)]\\
\delta J^\mu &= i[(i\alpha\varphi^*)\partial^\mu\varphi + \varphi^*[-i\alpha\partial^\mu\varphi - i(\partial^\mu\alpha)\varphi] - (-i\alpha\varphi)\partial^\mu\varphi^* - \varphi[i\alpha\partial^\mu\varphi^* + i(\partial^\mu\alpha)\varphi^*]]\\
\delta J^\mu &= 2\varphi\varphi^*(\partial^\mu\alpha)
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Άρα:

$$\delta L = -2eA_\mu(\partial^\mu \alpha)\varphi\varphi^* \tag{2.99}$$

Για να εξαλειφθεί αυτός ο όρος θα πρέπει να προστεθεί στη Lagrangian ο ακόλουθος όρος:

$$L_2 = e^2(A_\mu)^2\varphi^*\varphi = e^2A_\mu A^\mu \varphi^*\varphi \tag{2.100}$$

Η μεταβολή του όρου αυτού υπολογίζεται:

$$\delta L_2 = 2e^2A_\mu \delta A^\mu \varphi^*\varphi = 2eA_\mu(\partial^\mu\alpha)\varphi^*\varphi \tag{2.101}$$

Από τις εξισώσεις (2.99), (2.101):

$$\delta L_{tot} = \delta L + \delta L_1 + \delta L_2 = 0 \tag{2.102}$$

Αλλά και η ολική Lagrangian $L_{tot} = L + L_1 + L_2$ είναι πλέον αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς U(1) μετασχηματισμούς βαθμίδας. Συνοπτικά, η αναλλοίωτητα αυτή επιτεύχθηκε με την προσθήκη ενός νέου πεδίου A_μ, το οποίο συζευγνύεται με το ρεύμα J^μ του μιγαδικού πεδίου φ. Προκύπτει αβίαστα λοιπόν ότι πρέπει να υπάρχει και ένας όρος που θα αναφέρεται στο πεδίο A_μ αποκλειστικά. Ο όρος αυτός φαίνεται να είναι και ο κινητικός όρος γαι το πεδίο A_μ. Ακολουθώντας την ίδια στρατηγική και με βάση την αναλλοίωτητα της (2.102), πρέπει ο νέος όρος που θα προστεθεί να αφήνει την Lagrangian αναλλοίωτη. Ορίζουμε επομένως (εκμεταλλευόμενοι ιδιότητες του διανυσματικού λογισμού) την τετραδιάστατη απόκλιση:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.103}$$

Πράγματι, παρατηρείται η αναλλοίωτητα του όρου:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu\big(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha\big) - \partial_\nu\big(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\big) = F_{\mu\nu} \tag{2.104}$$

Ο νέος όρος που θα προστεθεί είναι:

$$L_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.105}$$

Ξαναγράφουμε επομένως την (2.102):

$$L_{tot} = L + L_1 + L_2 + L_3 \qquad \acute{\eta}$$

$$L_{tot} = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) - ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*)A_\mu + e^2A_\mu A^\mu\varphi^*\varphi - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.106}$$

Αναδιατάσσοντας επομένως τους όρους:

$$
\begin{aligned}
L_{tot} &= [(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi] \cdot [(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^*] - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad \text{ή} \\
L_{tot} &= (D_\mu\varphi)(D^\mu\varphi^*) - m^2\varphi^*\varphi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (2.107)
\end{aligned}
$$

Συγκρίνοντας την (2.71) με την (2.107) παρατηρείται πως πέραν του κινητικού όρου για το πεδίο A_μ που έχει προστεθεί, έχει αντικατασταθεί επιπρόσθετα και η παράγωγος ∂_μ με την αντίστοιχη συναλλοίωτη [3] παράγωγο $\mathfrak{D}_\mu$ όπου:

$$\mathfrak{D}_\mu\varphi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi \qquad (2.110)$$

2.3.4 Εισαγωγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Η παραπάνω διαδικασία αποκάλυψε σταδιακά την εισαγωγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Περαιτέρω απόδειξη αποτελούν τα ακόλουθα. Θεωρούμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{L}_{tot}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}_{tot}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= 0 \\
ie\varphi(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* - (\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi ie\varphi^* - \partial_\nu F^{\mu\nu} \\
\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\varphi^*\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\varphi^*) + 2e^2A^\mu\varphi^*\varphi \\
\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\varphi^*\mathfrak{D}^\mu\varphi - \varphi\mathfrak{D}^\mu\varphi^*) \\
\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -e\mathfrak{J}^\mu \qquad (2.111)
\end{aligned}
$$

όπου $\mathfrak{J}^\mu$ είναι το αντίστοιχο συναλλοίωτο ρεύμα

$$\mathfrak{J}^\mu = -i(\varphi^*\mathfrak{D}^\mu\varphi - \varphi\mathfrak{D}^\mu\varphi^*) \qquad (2.112)$$

[3] Η συναλλοίωτη παράγωγος αποδεικνύεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\delta(\mathfrak{D}_\mu\varphi) &= \delta(\partial_\mu\varphi) + ie(\delta A_\mu)\varphi + ieA_\mu(\delta\varphi) \qquad \text{ή} \\
\delta(\mathfrak{D}_\mu\varphi) &= -i\alpha\partial_\mu\varphi - i(\partial_\mu\alpha)\varphi + ie\frac{1}{e}(\partial_\mu\alpha)\varphi - ieA_\mu i\alpha\varphi \qquad \text{ή} \\
\delta(\mathfrak{D}_\mu\varphi) &= -i\alpha(\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi \qquad \text{ή} \\
\delta(\mathfrak{D}_\mu\varphi) &= -i\alpha(\mathfrak{D}_\mu\varphi) \qquad (2.108)
\end{aligned}
$$

δηλαδή μετασχηματίζεται όπως ακριβώς η (2.89). Για τη συναλλοίωτη παράγωγο του φ^*:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{D}^\mu\varphi^* &= (\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* \\
\delta(D^\mu\varphi^*) &= i\alpha(\mathfrak{D}^\mu\varphi^*) \qquad (2.109)
\end{aligned}
$$

και έχει οριστεί και η συναλλοίωτη παράγωγος του φ^*

και το αντίστοιχο συναλλοίωτο ρεύμα:

$$Q = \int \mathfrak{J}^0 dV = -i \int (\varphi^* \mathfrak{D}^0 \varphi - \varphi \mathfrak{D}^0 \varphi^*) dV \tag{2.113}$$

Έχουμε επομένως τις μη ομογενείς εξισώσεις Maxwell.
Ο τανυστής $F^{\mu\nu}$ που εισήχθει με την (2.103) είναι ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A_μ, αλληλεπιδρά με το ρεύμα J^μ, με ένταση e, δηλαδή το φορτίο του πεδίου φ. Σημειώνεται, πως (2.107) δεν υποδεικνύει όρο μάζας για το πεδίο A_μ. Γνωρίζουμε, πως ο φορεάς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, το φωτόνιο, είναι άμαζο.
Επιβεβαιώνεται άμεσα πως η Lagrangian (2.107) και η απαίτηση για αναλλοίωτο δίνουν άμαζα πεδία βαθμίδας. Έστω όρος μάζας:

$$\mathfrak{L}_4 = \frac{1}{2} {m_A}^2 A_\mu A^\mu \tag{2.114}$$

Σύμφωνα με τους U(1) μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\mathfrak{L}_4 \to \mathfrak{L'}_4 = \frac{1}{2} {m_A}^2 \big(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha\big)\big(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \alpha\big) \tag{2.115}$$

$$\mathfrak{L'}_4 = \frac{1}{2} {m_A}^2 A_\mu A^\mu + \frac{{m_A}^2}{e^2} A_\mu \partial^\mu \alpha + \frac{1}{e^2}\partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha \neq \mathfrak{L}_4 \tag{2.116}$$

Κάθε όρος μάζας για το A_μ πεδίο βαθμίδας, απορρίπτεται. Από την αναγκαιότητα αυτή θα αναδυθεί ο μηχανισμός Higgs που θα συζητηθεί σε άλλη παράγραφο.

2.3.5 Εξίσωση Dirac

Στη συνέχεια εξετάζοντας την περίπτωση των φερμιονίων και της αλληλεπίδρασης φερμιονίων με τα φωτόνια, πρέπει να εισάγουμε τη Lagrange του Dirac:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.117}$$

και αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς U(1) μετασχηματισμούς.

$$\begin{aligned} \delta\psi = -i\alpha\psi, &\qquad \delta\bar{\psi} = i\alpha\bar{\psi} \\ \delta(\partial_\mu \psi) = -i\alpha\partial_\mu\psi - i(\partial_\mu\alpha)\psi, &\qquad \delta(\partial_\mu\bar{\psi}) = i\alpha\partial_\mu\bar{\psi} + i(\partial_\mu\alpha)\bar{\psi} \\ &\qquad \delta\mathfrak{L} = (\partial_\mu\alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{2.118}$$

Επίσης από το Θεώρημα Noether, το διατηρούμενο ρεύμα είναι:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}(-i\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.119}$$

και το αντίστοιχο διατηρούμενο φορτίο:

$$Q = \int \bar{\psi}\gamma^0 \psi dV = \int \psi \dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi dV = \int \psi \dagger \psi dV \tag{2.120}$$

Όμοια με πριν (βλ. Εξ.(2.112)):

$$\delta\mathfrak{L} = (\partial_\mu \alpha) J^\mu \tag{2.121}$$

Για την ακύρωση του όρου που έχει προκύψει από την παραγώγιση του α θα προστεθεί ο ακόλουθος όρος:

$$\mathfrak{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \tag{2.122}$$

Άρα η Lagrangian θα πάρει τη μορφή:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + -eJ^\mu A_\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \tag{2.123}$$

όπου το gauge πεδίο A_μ μετασχηματίζεται:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \qquad ή \qquad \delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$$

Η συνολική μεταβολή στη Lagrange είναι:

$$\delta\mathfrak{L} + \delta\mathfrak{L}_1 = (\partial_\mu \alpha) J^\mu - (\partial_\mu \alpha) J^\mu - e(\delta J^\mu) A_\mu = -e(\delta J^\mu) A_\mu \tag{2.124}$$

Ισχύει όμως:

$$\begin{aligned} \delta J^\mu &= (\delta\bar{\psi})\gamma^\mu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu (\delta\psi) \\ \delta J^\mu &= i\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu i\alpha\psi = 0 \end{aligned} \tag{2.125}$$

Ο κινητικός όρος θα προστεθεί και πάλι:

$$\mathfrak{L}_2 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.126}$$

συνεπώς, η ολική Lagrangian είναι:

$$\mathfrak{L}_{tot} = i\bar{\psi}\gamma^\mu (\mathfrak{D}_\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.127}$$

με τη συναλλοίωτη παράγωγο να δίνεται από την (2.110). Επομένως περιγράφεται η αλληλεπίδραση ηλεκτρικά φορτισμένων φερμιονίων με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η απαίτηση για την αναλλοιώτητα του τοπικού μετασχηματισμού, η οποία εφαρμόζεται στην ελεύθερη Lagrangian του Dirac, αναπαράγει όλη την ηλεκτροδυναμική και προσδιορίζει επιπρόσθετα το ρεύμα που παράγεται από τα σωματίδια Dirac.

Σημείωση: Η θεωρία που αναπτύχθηκε κρύβει τα εξής: η διαφορά μεταξύ ολικού και τοπικού gauge μετασχηματισμού ανακύπτει όταν υπολογίζουμε παραγώγους των πεδίων [εξ. (2.118)]:

$$\partial_\mu \psi \to e^{-i\lambda}\Big[\partial_\mu - i(\partial_\mu \lambda)\Big]\psi, \tag{2.128}$$

όπου $\lambda(x) \equiv -\alpha(x)$ οι πολλαπλασιαστές Lagrange. Δηλαδή αντί για ένα απλό παράγοντα φάσης, διαλέγουμε έναν επιπλέον όρο λαμβάνοντας υπόψη και το $\partial_\mu \lambda$. Η αντικατάσταση του ∂_μ από το $\mathfrak{D}_\mu$, επομένως είναι μια απλή τεχνική για να μετατρέπουμε μια ολική αναλλοίωτη Lagrangian σε μια τοπικά αναλλοίωτη· το οποίο καλείται ελάχιστη σύζευξη [βλ. εξ. (2.123)]. Αλλά η συναλλοίωτη παράγωγος εισάγει ένα νέο διανυσματικό πεδίο (A_μ), το οποίο απαιτεί τη δική του ελεύθερη Lagrangian· επομένως, με σκοπό τη διατήρηση της τοπικής αναλλοιώτητας, το gauge πεδίο πρέπει να είναι άμαζο. Αυτό οδηγεί στη τελική έκφραση (2.127)· πρόκειται δηλαδή για τη Λαγκρατζιανή της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής - πεδία Dirac (ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια) να αλληλεπιδρούν με πεδία Maxwell (φωτόνια). Η ιδέα της τοπικής αναλλοιώτητας ξεκίνησε με την εργασία του Hermann Weyl το 1919. Ωστόσο, η ισχύ της δεν ήταν γνωστή μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ′70. Συγκεκριμένα, ο ολικός μετασχηματισμός φάσης (2.88) μπορεί να θεωρηθεί σαν πολλαπλασιασμός του ψ με ένα μοναδιαίο 1×1 διάνυσμα:

$$\psi \to U\psi, \tag{2.129}$$

όπου [4]

$$U^\dagger U = 1$$

2.4 Μη αβελιανές τοπικές συμμετρίες βαθμίδας

[5] Στη σύγχρονη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων υπάρχουν πολλές ομάδες συμμετρίας. Ωστόσο, η επέκταση της μη-Αβελιανής Gauge θεωρίας σε υψηλότερης τάξης ομάδες συμμετρίας ήρθε με την εργασία των Yang-Mills. Η θεωρία των Yang-Mills είχε σαν σκοπό να επεκτείνει την αναλλοιώτητα της θεωρίας Heisenberg στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Η μικρή διαφορά μάζας μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου, $1.29 MeV/c^2$, θα ανταποκρινόταν στο σπάσιμο συμμετρίας των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Για να ανταποκρινόταν η θεωρία έπρεπε να βρεθεί μια άμαζη ισοτριπλέτα για τα διανυσματικά (σπιν 1) σωματίδια. Τελικά η μη-Αβελιανή Gauge θεωρία έκανε την εμφάνιση της, μέσω της χρωμοδυναμικής θεωρίας (SU(3)) και των

[4] βλ. Παράρτημα Α

[5] Παρότι η θεωρία των Yang-Mills είναι εμπνευσμένη από την ίδια ιδέα με τη θεωρία του Weyl (δηλαδή: μια ολική αναλλοιώτητα θα έχει ισχύ και τοπικά), η εφαρμογή της επέδειξε αυτή τη φορά ιδιαίτερη σημασία στα εξής: (1) στο τοπικό μετασχηματισμό για τα πεδία gauge, και (2) την έκφραση του $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ με όρους του A^μ. Και οι δύο όροι προκύπτουν από το γεγονός ότι η ομάδα συμμετρίας στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι μη-Αβελιανή (2×2 πίνακες δεν αντιμετίθενται, ενώ οι 1×1 μπορούν). Για να τονίσουμε τη διαφορά, αναφερόμαστε στην υπόθεση Weyl σαν Αβελιανή Gauge θεωρία, και στην Yang-Mills σαν μη-Αβελιανή Gauge θεωρία.

αντίστοιχων συμμετριών στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις αλλά και με την συμμετρία ισοσπίν - υπερφορτίου στις ασθενής αλληλεπιδράσεις.
Η ενότητα αυτή αποτελεί εισαγωγή στη γενίκευση της μεθολογίας που ακολουθείται στη θεωρία ομάδων.
Έστω, λοιπόν η Lagrangian αναλλοίωτη κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \tag{2.130}$$

Για να παραμείνει αναλλοίωτη η Lagrangian εισάγουμε ένα κατάλληλο πεδίο A_μ και σύμφωνα με την τελευταία παρατήρηση, η συναλλοίωτη παράγωγος αντικαθίστα την πρώτερη παράγωγο

$$\partial^\mu \psi \rightarrow \mathfrak{D}^\mu \psi = (\partial^\mu - igA^\mu)\psi \tag{2.131}$$

με g η αντίστοιχη σταθερά ζεύξης. Η Lagrangian παραμένει αναλλοίωτη όταν η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται κάτω από την ομάδα αυτή, ακριβώς όπως και η ψ. Δηλαδή:

$$\mathfrak{D}^\mu \psi \rightarrow \mathfrak{D}'^\mu \psi' = U(\mathfrak{D}^\mu \psi) \tag{2.132}$$

Το πεδίο A^μ μετασχηματίζεται:

$$\begin{aligned}
(\partial^\mu - igA'^\mu)\psi' &= U(\partial^\mu - igA^\mu)\psi \\
(\partial^\mu - igA'^\mu)U\psi &= U(\partial^\mu - igA^\mu)\psi \\
\partial^\mu(U\psi) - igA'^\mu U\psi &= U\partial^\mu\psi - igUA^\mu\psi \\
-igA'^\mu U\psi &= U\partial^\mu\psi - [(\partial^\mu)\psi + U\partial^\mu\psi] - igUA^\mu\psi \\
-igA'^\mu U\psi U^{-1} &= -(\partial^\mu U)\psi U^{-1} - igUA^\mu\psi U^{-1} \\
-igA'^\mu UU^{-1} &= -(\partial^\mu U)U^{-1} - igUA^\mu U^{-1} \\
A'^\mu &= \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} + UA^\mu U^{-1}
\end{aligned} \tag{2.133}$$

2.4.1 Τοπική SU(2) συμμετρία βαθμίδας

Μια άμεση γενίκευση σε ομάδα μεγαλύτερης συμμετρίας (μεγαλύτερου βαθμού) αποτελεί η θεώρηση στροφών στον τρισδιάστατο εσωτερικό χώρο. Τότε το πεδίο έχει τρείς συνιστώσες. Πρόκειται επομένως για πεδίο που έχει τρείς συνιστώσες:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{2.134}$$

Επομένως η απαίτηση για αναλλοίωτητα κάτω από το μετασχηματισμό, έχει ως εξής (π.χ. στροφή z άξονα):

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{2.135}$$

Πρόκειται για την ομάδα SO(3), ή την ισομορφική της SU(2). Ο πίνακας μετασχηματισμού της ομάδας αυτής θα δίνεται [6]:

$$U = e^{i\frac{\tau_i}{2}\theta_i(x)}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.136}$$

Θεωρώντας απειροστές παραμέτρους:

$$U = \mathrm{I} + i\frac{\tau_i}{2}\theta_i(x), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.137}$$

Από την εξίσωση (2.135):

$$\varphi \to \varphi' = \left[I + i\frac{\tau_i}{2}\theta_i(x)\right]\varphi = \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\varphi \tag{2.138}$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος θα γραφεί:

$$\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu - ig_2\frac{\tau_i}{2}W_\mu{}^i = \partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu \tag{2.139}$$

Τα τρεία πεδία βαθμίδας ανταποκρίνονται στους τρεις γεννήτορες της ομάδας. Η συναλλοίωτη παράγωγος θα μετασχηματίζεται όπως ακριβώς και το φ:

$$\mathfrak{D}_\mu\varphi \to \mathfrak{D}'_\mu\varphi' = U\mathfrak{D}_\mu\varphi \tag{2.140}$$

$$D'_\mu\varphi' = (\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W'}_\mu)(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau})\varphi \tag{2.141}$$

[6]βλ. Παράρτημα Α, Εξ. (75)

για $\boldsymbol{W'}_\mu = \boldsymbol{W}_\mu + \delta\boldsymbol{W}_\mu$ και παίρνοντας ότι: $(\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}) = 0$ αφού πρόκειται για απειροστές παραμέτρους, τότε η Εξ. (2.140) μετασχηματίζεται:

$$\mathfrak{D}'_\mu\varphi' = [\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}(\boldsymbol{W}_\mu + \delta\boldsymbol{W}_\mu)]\big(1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}\big)\varphi$$
$$\mathfrak{D}'_\mu\varphi' = \big[\partial_\mu\frac{i}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{W}_\mu - \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta\tau})\big]\varphi + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}(\partial_\mu\varphi)$$
$$U\mathfrak{D}_\mu\varphi = \big(1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}\big)\big(\partial_\mu - ig_2\frac{\tau}{2}\boldsymbol{W}_\mu\big)\varphi$$
$$U\mathfrak{D}_\mu\varphi = \big[\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}\partial_\mu + \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)\big]\varphi$$
$$\mathfrak{D}'_\mu\varphi' = U\mathfrak{D}_\mu\varphi$$
$$\big[\partial_\mu + \frac{i}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{W}_\mu + \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})\big]\varphi + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}(\partial_\mu\varphi)$$
$$= \big[\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta\tau}\partial_\mu + \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)\big]\varphi$$
$$\frac{i}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{W}_\mu + \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}) = \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)$$
$$-ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\delta\boldsymbol{W}_\mu = \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu) - \frac{i}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - \frac{g_2}{4}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})$$
$$\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{W}_\mu = \frac{1}{g_2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} + \frac{i}{2}[(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu) - (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})]$$

Ισχύει:

$$(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + i\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{2.142}$$

και συνεπώς:

$$(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu) = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{W}_\mu + i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{W}_\mu) \tag{2.143}$$

$$-(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}) = -\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{\theta})$$
$$-(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau}) = -\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{W}_\mu) + i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{W}_\mu) \tag{2.144}$$

Άρα η (;;) γίνεται:

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{W}_\mu = \frac{1}{g_2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} + \frac{i}{2}[2i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{W}_\mu)]$$
$$\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{W}_\mu = \boldsymbol{\tau}\big[\frac{1}{g_2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta}) - (\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{W}_\mu)\big] \tag{2.145}$$

Άρα ο μετασχηματισμός για τα τρία πεδία έχει:

$$\boldsymbol{W}_\mu \to \boldsymbol{W'}_\mu = \boldsymbol{W}_\mu + \frac{1}{g_2}(\partial_\mu\boldsymbol{\theta}) - (\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{W}_\mu) \tag{2.146}$$

και σε διανυσματική μορφή:

$$W_\mu{}^i \to W'_\mu{}^i + W_\mu{}^i + \frac{1}{g_2}(\partial_\mu \theta_i) - \varepsilon_{ijk}\theta_j W_\mu{}^k \tag{2.147}$$

Παρατηρείται ότι διαφορετικός νόμος μετασχηματισμού κλίθηκε προηγουμένως από τη συμμετρία ενγΥ(1) για τη περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου από ότι απαιτεί η SU(2) για τα τρία πεδία (βλ. Εξ. (2.95)). Η διαφορά εντοπίζεται πιο συγκεκριμένα στον όρο $-\varepsilon_{ijk}\theta_j W_\mu{}^k$ και ο οποίος εμπεριέχει τη Μη Αβελιανότητα της SU(2).
Απομένει επομένως η εύρεση της Lagrangian και επομένως η εύρεση του κινητικού όρου. Έχοντας σαν κλασσικό παράδειγμα την αντιμετώπιση της U(1) για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, απομένει να αναλογιστούμε τα εξής:

$$\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{2.148}$$

Παρατηρείται επομένως το εξής:

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] = [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]) \tag{2.149}$$

Εάν το πεδίο βαθμίδας οριστεί:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{2.150}$$

ϑα είναι αντίστοιχα:

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] = -igG_{\mu\nu} \tag{2.151}$$

Για την U(1) Αβελιανή συμμετρία, ϑα είναι:

$$[A_\mu, A_\nu] = 0 \tag{2.152}$$

Συνεπώς προκύπτει ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (G ≡ F):

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] = \big[\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu, \partial_\nu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu\big] \tag{2.153}$$

$$= -ig_2\big(\partial_\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu - ig_2\big[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu, \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu\big]\big) \tag{2.154}$$

Είναι:

$$\begin{gathered}
\big[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu, \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu\big] = \frac{1}{4}[(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\nu) - (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\nu)(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}_\mu)] \\
\big[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu, \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu\big] = \frac{1}{4}[\boldsymbol{W}_\mu\cdot\boldsymbol{W}_\nu + i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{W}_\nu) - \boldsymbol{W}_\nu\cdot\boldsymbol{W}_\mu - i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{W}_\nu\times\boldsymbol{W}_\mu)] \\
\big[\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu, \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\nu\big] = i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}(\boldsymbol{W}_\mu\times\boldsymbol{W}_\nu)
\end{gathered} \tag{2.155}$$

Τελικά:

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] = -ig_2 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}[\partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu + g_2(\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu)] \tag{2.156}$$

και για τον αντίστοιχο τανυστή, θα είναι:

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{W}_\mu + g_2(\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu) \tag{2.157}$$

και σε διανυσματική μορφή:

$$W_{\mu\nu}{}^i = \partial_\mu W_\nu{}^i - \partial_\nu W_\mu{}^i + g_2 \varepsilon_{ijk} W_\mu{}^j W_\nu{}^k \tag{2.158}$$

Γενικά, θα έχουμε δεδομένου του μετασχηματισμού (2.130):

$$\varphi \to U\varphi, \qquad \mathfrak{D}_\mu \varphi \to U\mathfrak{D}_\mu U^{-1} U\varphi \tag{2.159}$$

Άρα, θα ισχύει:

$$\mathfrak{D}_\mu \to U\mathfrak{D}_\mu U^{-1} \tag{2.160}$$

Αντίστοιχα, λοιπόν:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] &\to U[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu]U^{-1} \\ -igG_{\mu\nu} &\to -igUG_{\mu\nu}U^{-1} \end{aligned} \tag{2.161}$$

Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού θα έχουμε:

$$UF_{\mu\nu}U^{-1} = F_{\mu\nu} \tag{2.162}$$

Οπότε βλέπουμε πώς ο όρος αυτός παραμένει αναλλοίωτος κάτω από την U(1) συμμετρία. Άρα ο κινητικός όρος είναι:

$$\frac{-1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.163}$$

ο οποίος είδαμε ήδη ότι είναι αναλλοίωτος στην συγκεκριμένη βαθμίδα.

Στην περίπτωση της SU(2) συμμετρίας ο όρος που παραμένει αναλλοίωτος είναι:

$$-\frac{1}{4} Tr(W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} W^{\mu\nu,i} W_{\mu\nu}{}^i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.164}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} Tr(W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) \to -\frac{1}{4} Tr(UW^{\mu\nu}U^{-1}UW_{\mu\nu}U^{-1}) &= -\frac{1}{4} Tr(UW^{\mu\nu}W_{\mu\nu}U^{-1}) \\ = -\frac{1}{4} Tr(U^{-1}UW^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{4} Tr(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{2.165}$$

αποτελεί τον κινητικό όρο που πρέπει να προστεθεί στην Lagrangian για την επίτευξη της SU(2) συμμετρίας.
Επομένως, μπορούμε πλέον να περιγράψουμε αλληλεπιδράσεις μποζονίων με τα πεδία κάτω από την SU(2) συμμετρία, με την Lagrangian να έχει ως εξής:

$$\mathfrak{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\mathfrak{D}_\mu \boldsymbol{\varphi})(\mathfrak{D}^\mu \boldsymbol{\varphi})\dagger - \frac{m^2}{2}\boldsymbol{\varphi}\dagger\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \tag{2.166}$$

Αντίστοιχα, η περιγραφή αλληλεπιδράσεων φερμιονίων με τα τρία πεδία κάτω από την SU(2) συμμετρία:

$$\mathfrak{L}_D = i\bar{\boldsymbol{\psi}}\gamma^\mu(\mathfrak{D}_\mu \boldsymbol{\psi}) - m\bar{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \tag{2.167}$$

2.4.2 Μη Αβελιανότητα πεδίων

Μια σημαντική εφαρμογή της μη Αβελιανότητας της $SU(2)$ ομάδας μετασχηματισμών είναι ότι μπορούν τα ίδια να αποτελέσουν πηγή του εαυτού τους, όπως θα φανεί ακολούθως. Ας πάρουμε για το σκοπό αυτό τη Lagrangian Klein - Gordon. Οι εξισώσεις κίνησεης για τα πεδία ${W^i}_{\mu\nu}$ θα προκύψουν παίρνοντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange για τα πεδία μας. Είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial {W^i}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu {W^i}_\mu)} = 0 \tag{2.168}$$

Ουσιαστικά παραγωγίζεται μόνον ο κινητικός όρος αφού οι άλλοι δίνουν μηδέν. Κάνοντας μια ανάλυση των όρων:

$$W^{i\mu\nu}{W^i}_{\mu\nu} = (\partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu}$$

$$W^{i\mu\nu}{W^i}_{\mu\nu} = \partial_\mu {W_\nu}^i(\partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu} + g_2\varepsilon_{ijk}W^{j\mu}W^{k\nu}) - \partial_\nu {W_\mu}^i(\partial^\mu W^{i\nu} - \partial^\nu W^{i\mu} + g_2\varepsilon_{ijk}W^{j\mu}W$$

Έτσι οι E - L μας δίνουν τελικά:

$$\begin{aligned} \partial^\nu {W^i}_{\mu\nu} + g_2\varepsilon_{ijk}W^{j\nu}{W^k}_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial^\nu {W^i}_{\mu\nu} &= -g_2\varepsilon_{ijk}W^{j\nu}{W^k}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.169}$$

Καταλήξαμε σε πολύ σημαντικά συμπεράσματα: Αυτή η εξίσωση είναι αντίστοιχη των εξισώσεων Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό. Εκεί μπορούμε να θυμηθούμε πως είχαμε βρεί:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.170}$$

το οποίο μας έδωσε:

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}E - \nabla \times B = 0 \tag{2.171}$$

του οποίου η φυσική ερμηνεία είναι ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο απουσία ύλης δεν λειτουργεί ως πηγή του εαυτού του. Αντιθέτως το $W_{\mu\nu}$ μπορεί να ενεργήσει ως πηγή για τον εαυτό του. Αυτό το γεγονός αντικατοπτρίζει τη μη Αβελιανότητα της θεωρίας μας.

2.4.3 Έλλειψη όρων μάζας

Στην διάρκεια αυτής της υποενότητας θα εξετάσουμε την τελευταία παράμετρο της Lagrangian τους όρους μάζας. Συγκεκριμένα ένας όρος της μορφής:

$$L_m = m^2 W_\mu W^\mu \tag{2.172}$$

θα ήταν αναμενόμενος. Έχει ήδη αποδειχθεί όμως ότι ένας τέτοιος όρος δεν παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τους $SU(2)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας. Απορρίπτεται λοιπόν ένας όρος μάζας. Υπάρχει ωστόσο ακόμα η δυνατότητα να επιβάλλουμε ad hoc όρους μάζας, χωρίς ωστόσο να μπορέι να αποφευχθεί η διαδικασία της **επακανονικοποίησης** σε αυτή τη περίπτωση. Η μόνη συνεπής θεώρηση ισχύει μέσω του μηχανισμού **Higgs** στη παραπάνω θεωρία.

2.4.4 Η SU(3) τοπική συμμετρία βαθμίδας

Επεκτείνοντας, εξέχοντος ενδιαφέροντος θεωρείται και η ανάπτυξη της SU(3) συμμετρίας. Η SU(3) έχει οχτώ γεννήτορες ($n^2 - 1 = 8$) και οχτώ πεδία βαθμίδας. Ο πίνακας μετασχηματισμού θα είναι ο ακόλουθος:

$$U = e^{i\frac{\lambda_\alpha}{2}\varepsilon_\alpha(x)} \tag{2.173}$$

όπου $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$. Οι γεννήτορες της ομάδας $\frac{\lambda_\alpha}{2}$, ικανοποιούν την άλγεβρα:

$$[\frac{\lambda_\alpha}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i f_{\alpha bc} \frac{\lambda_c}{2} \tag{2.174}$$

όπου οι σταθερές δομής είναι:

$$f_{123} = 1, \qquad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad f_{147} = f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2}$$
$$\text{και όλοι οι υπόλοιποι μηδέν} \tag{2.175}$$

Αντίστοιχα οι γεννήτορες $\frac{\lambda_\alpha}{2}$ είναι οι 3×3 ερμιτιανοί πίνακες:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.176}$$

Το πεδίο ψ θα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\psi \to \psi' = U\psi = e^{i\frac{\lambda_\alpha}{2}\varepsilon_\alpha(x)}\psi \tag{2.177}$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος:

$$\partial_\mu \to \mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu - ig_3\frac{\lambda_\alpha}{2}G_\mu{}^\alpha \tag{2.178}$$

με $G_\mu{}^\alpha$ τα οχτώ πεδία βαθμίδας και ο νόμος μετασχηματισμού:

$$G_\mu{}^\alpha \to G'_\mu{}^\alpha = G_\mu{}^\alpha + \frac{1}{g_3}\partial_\mu\varepsilon_\alpha - \mathfrak{f}_{\alpha bc}\varepsilon_b G_\mu{}^c \tag{2.179}$$

Ο τανυστής των πεδίων θα ορίζεται ομοίως:

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] = -ig_3\frac{\lambda_\alpha}{2}G_{\mu\nu}{}^\alpha \tag{2.180}$$

όπου

$$G_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu G_\nu{}^\alpha \partial_\nu G_\mu{}^\alpha + g_3\mathfrak{f}_{\alpha bc}G_\mu{}^b G_\nu{}^c \tag{2.181}$$

και τέλος ο κινητικός όρος που θα προστεθεί:

$$\mathfrak{L}_{kin} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}{}^\alpha G^{\alpha\mu\nu} \tag{2.182}$$

(όρος μάζας δεν υπάρχει).

Κεφάλαιο 3

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΟΥ

3.1 Πραγματικό πεδίο Klein-Gordon

Η περιγραφή βαθμωτών σωματιδίων αποτελούσε ακόμη πρόβλημα. Το σκεπτικό που ακολουθήθηκε και πετυχε μεγάλης αποδοσχής ήταν η θεώρηση του $\varphi(x)$ κυματοσυνάρτηση περιγράφει πεδίο και όχι σωματίδιο. Το $\varphi(x)$ θα είναι σίγουρα κβαντικό πεδίο, αφού η Klein - Gordon δεν έχει αντίκρυσμα στην κλασσική φυσική. Ωστόσο ο αρχικός χειρισμός θα αφορά το κλασσικό πεδίο $\varphi(x)$. Συνεπώς, ξεκινώντας από την Klein - Gordon (αυτή τη φορά θεωρώντας το $\varphi(x)$ ως βαθμωτό πεδίο όμως):

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\varphi = 0 \tag{3.1}$$

Από τον τανυστή ενέργειας - τάσης, θα βρεθεί η ενέργεια του $\varphi(x)$:

$$H = \int \theta^{00} d^3x = \frac{1}{2}\int [(\partial_0\varphi)^2 + (\nabla\varphi)^2 + (m\varphi)^2] d^3x > 0 \tag{3.2}$$

Αν αντίστοιχα, το $\varphi(x)$ αντιστοιχεί σε μιγαδικό βαθμωτό πεδίο:

$$H = \frac{1}{2}\int [(\partial_0\varphi)(\partial_0\varphi^*) + (\nabla\varphi)(\nabla\varphi^*) + m^2\varphi^*\varphi] d^3x > 0 \tag{3.3}$$

Οπότε θεωρώντας αρνητικές ενέργειες και το φ να εκφράζει πεδίο, το πρόβλημα έχει λυθεί. Στη συνέχεια, θα πρέπει να ερμηνευτούν και οι θετικά ορισμένες ενέργειες του πεδίου καθώς επίσης πώς αυτές συνδέονται με τις ενέργειες των μονοσωματιδιακών καταστάσεων, που εμηνεύτηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο. Εδώ λοιπόν φαίνεται η αναγκαίοτητα ερμήνευσης του $\varphi(x)$ ως κβαντικό πεδίο. Άρα το πεδίο, θα είναι πλέον ερμιτιανός τελεστής.

$$\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x) \tag{3.4}$$

Αναπτύσσσοντας τον τελεστή αυτό κατά Fourier είναι:

$$\hat{\varphi(x)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[\hat{\alpha}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \hat{\alpha}^+(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.5}$$

όπου $\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ και $\hat{\alpha}(k), \hat{\alpha}^+(k)$ είναι επίσης τελεστές. Τέλος ο παράγοντας έξω από την αγκύλη είναι το Lorentz αναλλοίωτο στοιχείο του χώρου των φάσεων. Συνεπώς το αναλλοίωτο στοιχείο του χώρου των φάσεων, ενέργειας k_0 θα είναι:

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0) = \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta({k_0}^2 - {\omega_k}^2)\theta(k_0) = \tag{3.6}$$

$$= \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta[(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)]\theta(k_0) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]\theta(k_0) = \tag{3.8}$$

$$= \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\frac{dk_0}{2k_0}\delta(k_0 - \omega_k) = \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \tag{3.9}$$

3.1.1 Σχέσεις μετάθεσης για τον τελεστη $\hat{\varphi}$

Από τις σχέσεις μετάθεσης του Heisenberg, είναι γνωστό ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις, για τους τελεστές της κβαντομηχανικής:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.10}$$

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{3.11}$$

Στη θεωρία πεδίου όμως, το πεδίο $\varphi(x) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ θα παίξει ένα ρόλο ανάλογο της θέσης. Συνεπώς το $\varphi(x)$ θα περιλαμβάνει ένα σύστημα άπειρων βαθμών ελευθερίας, καθώς για κάθε χρονική στιγμή t το φ θα έχει από μια ανεξάρτητη τιμή σε κάθε σημείο του χώρου.
Το συνεχές του πεδίου φ, θα προσεγγιστεί χωρίζοντας το χώρο σε κελιά στοιχειώδη όγκου δV_r, ενώ $\varphi_r(t)$ ενώ έστω $\varphi_r(t)$ η μέση τιμή του πεδίου στο κελί r τη χρονική στιγμή t. Είναι αναγκαία επίσης, η αναφορά του ορισμού της ορμής στην κλασσική φυσική, αντίστοιχα θα είναι:

$$p_r(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_r(t)} = \delta V_r \pi_r(t) \tag{3.12}$$

Όπου $\pi(x)$ η κανονική τετραορμή του πεδίου, η οποία ορίζεται:

$$\pi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)} \tag{3.13}$$

τελικά οι αντίστοιχες σχέσεις μετάθεσης είναι:

$$[\varphi_r(t), p_s(t)] = i\delta_{rs} \tag{3.14}$$

$$[\varphi_r(t), \varphi_s(t)] = [p_r(t), p_s(t)] = 0 \tag{3.15}$$

αντικαθιστώντας την ορμή p με την κανονική ορμή π θα είναι:

$$\begin{aligned}[\varphi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x'},t)] =& i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ [\varphi(\boldsymbol{x},t),\varphi(\boldsymbol{x'},t)] =& [\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x'},t)] = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

Οι παραπάνω γενικεύονται και για διαφορετικούς χρόνους. Έτσι η μέτρηση του πεδίου φ σε δύο διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου $x=(\boldsymbol{x},t)$και $x'=(\boldsymbol{x'},t')$, με την προϋπόθεση ότι $(x-x')^2<0 \quad$ ή $\quad (t-t')^2<(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})^2$, τότε θα ισχύει:

$$[\varphi(x),\varphi'(x)]=0 \tag{3.17}$$

3.1.2 Σύνδεση spin-στατιστικής

Αρχικά, αναγκαστήκαμε να εγκαταλείψουμε την Klein - Gordon καθώς είχαμε πρόβλημα με τις αρνητικές ενέργειες και πυκνότητες πιθανότητας. Με τη θεώρηση όμως του φ ως κβαντικού πεδίου - τελεστή, το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών επιλύθηκε και όλα φαίνεται πλέον να αποκτούν πλήρες και καθαρό φυσικό νόημα. Η Klein - Gordon δημιουργήθηκε ακριβώς για να περιγραφούν σωματίδια με spin μηδέν. Επομένως απομένει να αποδείξουμε πώς η Klein - Gordon με την χρήση του τελεστικού πεδίου, όντως περιγράφει σωματίδια (και τα οποία αποτελούν τα κβάντα του πε•διου φ), τα οποία ακολουθούν τη στατιστική Bose - Einstein και επομένως ονομάζονται μποζόνια. Από τις σχέσεις μετάθεσης που έχουν ήδη υπολογιστεί και εφόσον η κατάσταση $\alpha^+(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})$ θα μας δώσει την κατάσταση $|n(\boldsymbol{k})+1\rangle$ και επομένως θα ισχύει:

$$\alpha^+(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle = c_+(n(\boldsymbol{k}))|n(\boldsymbol{k})+1\rangle \tag{3.18}$$

ή αναλυτικότερα:

$$\alpha^+(\boldsymbol{k}_i)|n(\boldsymbol{k}_1),n(\boldsymbol{k}_2),\ldots,n(\boldsymbol{k}_i),\ldots\rangle = c_+(n(\boldsymbol{k}_i))|n(\boldsymbol{k}_1),n(\boldsymbol{k}_2),\ldots,n(\boldsymbol{k}_i)+1,\ldots\rangle$$

όπου $c_+(n(\boldsymbol{k}))$ κατάλληλος συντελεστής έτσι ώστε οι καταστάσεις να είναι κανονικοποιημένες. Οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned}|c_+(n(\boldsymbol{k}))|^2\langle n(\boldsymbol{k})+1|n(\boldsymbol{k})+1\rangle &= \langle n(\boldsymbol{k})|\alpha(\boldsymbol{k})\alpha^+(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle \\ &= (2\pi)^3 2\omega_k[n(\boldsymbol{k})+1]\langle n(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle \\ |c_+(n(\boldsymbol{k}))|^2 &= (2\pi)^3 2\omega_k[n(\boldsymbol{k})+1]\end{aligned} \tag{3.19}$$

Με την ίδια λογική ορίζουμε και το τελεστή $c_-(n(\boldsymbol{k}))$ ώστε:

$$\alpha(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle = c_-(n(\boldsymbol{k}))|n(\boldsymbol{k})-1\rangle \tag{3.20}$$

και

$$\begin{aligned}|c_-(n(\boldsymbol{k}))|^2\langle n(\boldsymbol{k})-1|n(\boldsymbol{k})-1\rangle &= \langle n(\boldsymbol{k})|\alpha^+(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle \\ &= (2\pi)^3 2\omega_k n(\boldsymbol{k})\langle n(\boldsymbol{k})|n(\boldsymbol{k})\rangle \\ |c_-(n(\boldsymbol{k}))|^2 &= (2\pi)^3 2\omega_k n(\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{3.21}$$

οπότε συνολικά έχουμε:

$$\alpha(\boldsymbol{k}_i)|n(\boldsymbol{k}_1), n(\boldsymbol{k}_2), \ldots, n(\boldsymbol{k}_i), \ldots\rangle$$
$$\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k n(\boldsymbol{k}_i)}|n(\boldsymbol{k}_1), n(\boldsymbol{k}_2), \ldots, n(\boldsymbol{k}_i)+1, \ldots\rangle$$

και

$$\alpha^+(\boldsymbol{k}_i)|n(\boldsymbol{k}_1), n(\boldsymbol{k}_2), \ldots, n(\boldsymbol{k}_i), \ldots\rangle \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k [n(\boldsymbol{k}_i)+1]}|n(\boldsymbol{k}_1), n(\boldsymbol{k}_2), \ldots, n(\boldsymbol{k}_i)+1, \ldots\rangle$$

Η κατάσταση κενού όπως ορίσαμε και πιο πάνω δεν περιέχει κανένα σωματίδιο καμίας ορμής, οπότε λοιπόν μπορούμε να γράψουμε:

$$|0\rangle = |0, 0, \ldots\rangle \tag{3.22}$$

Μια τυχαία κατάσταση η οποία περιέχει $n(\boldsymbol{k}_1)$ σωματίδια ορμής $\boldsymbol{k}_1$, $n(\boldsymbol{k}_2)$ σωματίδια ορμής $\boldsymbol{k}_2$, κτλ και μπορεί να γραφεί:

$$|n(\boldsymbol{k}_1), n(\boldsymbol{k}_2), \ldots, \rangle = \prod_i \Big[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k [n(\boldsymbol{k}_i)+1]}}[\alpha^+(\boldsymbol{k}_i)]^{n(\boldsymbol{k}_i)}\Big]|0\rangle \tag{3.23}$$

Όπως μπορούμε να δούμε δεν υπάρχει περιορισμός για το $n(\boldsymbol{k})$. Επομένως μπορεί να υπάρχουν όσα σωματίδια θέλουμε με την ίδια ορμή και επομένως τα σωματίδια που περιγράφει η Klein - Gordon είναι μποζόνια. Ένας άλλος τρόπος που μπορούμε να διατυπώσουμε το παραπάνω είναι ότι η κατάσταση δύο βαθμωτών σωματιδίων παραμένει αναλλοίωτη με την εναλλαγή τους.

3.1.3 Σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές $\boldsymbol{\alpha(k), \alpha\dagger(k)}$

Σχέσεις μετάθεσης ακολουθούν και οι τελεστές $\boldsymbol{\alpha(k), \alpha\dagger(k)}$, που αποκαλύφθηκαν με το ανάπτυγμα Fourier του πεδίου φ

3.2 Μιγαδικό πεδίο Klein - Gordon

Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon περιγράφει ένα πεδίο με ηλεκτρικό φορτίο. Η περιγραφή του πεδίου αυτού προυποθέτει την κβάντωσή του. Πρόκειται για πεδίο μη ερμιτειανό, άρα θα περιγράφεται με δύο διαφορετικούς τελεστές α και β^+:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[\alpha(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b^+(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.24}$$

$$\varphi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}[b(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \alpha^+(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.25}$$

Άρα οι εξισώσεις (3.16) είναι πλέον:

$$[\alpha(\boldsymbol{k}), \alpha^{+}(\boldsymbol{k'})] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) \tag{3.26}$$

$$[b(\boldsymbol{k}), b^{+}(\boldsymbol{k'})] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) \tag{3.27}$$

Οι παραπάνω τελεστές είναι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας. Θα αφήσουμε τους τελεστές αυτούς να δράσουν πάνω στο φορτίο και στην Hamiltonian.

$$Q = i \int \varphi^{+} \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\varphi^{+}\varphi d^3x \tag{3.28}$$

και με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.24):

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}(-ik_0)[\alpha(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - b^{+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.29}$$

Άρα:

$$\varphi^{+}\frac{\partial}{\partial t}\varphi =$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)^2}(-ik_0)[b(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^{+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \times [\alpha(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - b^{+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}]$$

$$\begin{aligned}\varphi^{+}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\varphi\Big) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)^2}(-ik_0)[b(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k})e^{-2ikx} - b(\boldsymbol{k})b^{+}(\boldsymbol{k}) \\ +\alpha^{+}(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k}) - \alpha^{+}(\boldsymbol{k})b^{+}(\boldsymbol{k})e^{2ikx}]\end{aligned} \tag{3.30}$$

όμοια και για τον δεύτερο όρο:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{+}\Big)\varphi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)^2} \quad (-ik_0)[b(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k})e^{-2ikx} + b(\boldsymbol{k})b^{+}$$
$$(\boldsymbol{k}) - \alpha^{+}(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k}) - \alpha^{+}(\boldsymbol{k})b^{+}(\boldsymbol{k})e^{2ikx}] \tag{3.31}$$

και τελικά αντικαθιστώντας στην έκφραση του φροτίου (με $\omega_k = k_0$):

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)}[\alpha^{+}(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k}) - b^{+}(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})] \tag{3.32}$$

Επιπλέον η Hamiltonian είναι

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)}\omega_k[\alpha^{+}(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k}) + b^{+}(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})] \tag{3.33}$$

Συνεπώς τα α, α^+ και b, b^+ μπορούν να ερμηνευτούν ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας σωματιδίων και αντισωματιδίων, τα οποία έχουν αντίθετο φορτίο αλλά ίδια μάζα. Συνεπώς, ορίζοντας τους αριθμητικούς τελεστές σωματιδίων και αντισωματιδίων:

$$N_\alpha(\boldsymbol{k}) = \alpha^+(\boldsymbol{k})\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{3.34}$$

$$N_b = b^+(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k}) \tag{3.35}$$

Οι εκφράσεις επομένως για το φορτίο και την ενέργεια θα γίνουν:

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)}[N_\alpha(\boldsymbol{k}) - N_b(\boldsymbol{k})] \tag{3.36}$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)}\omega_k[N_\alpha(\boldsymbol{k}) + N_b(\boldsymbol{k})] \tag{3.37}$$

οπότε και η ενέργεια είναι πάντοτε θετικά ορισμένη.

3.3 Πεδίο Dirac

Η διαδικασία που θα περιγραφεί για το κβαντικό ανάλογο του πεδίου Dirac είναι όμοια με εκείνη που εφαρμόστηκε κατά την κβάντωση του πεδίου Klein - Gordon. Θυμίζουμε ότι το πρόβλημα της Dirac ήταν η αδυναμία περιγραφής μονοσωματιδιακών καταστάσεων. Η Lagrangian από την οποία προκύπτει η εξίσωση Dirac είναι:

$$\mathfrak{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{3.38}$$

Από αυτήν, θα έχουμε για την κανονική ορμή του πεδίου:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^+\gamma^0\gamma^0 = i\psi^+(x) \tag{3.39}$$

Η ενέργεια λοιπόν, θα δίνει:

$$H = \pi\dot{\psi} - \mathfrak{L} = i\psi^+\partial_0\psi - i\psi^+\gamma^0(\gamma^0\partial_0 + \gamma^{(i)}\partial_{(i)})\psi - m\psi^+\gamma^0\psi$$

$$H = \psi^+\gamma^0(-i\gamma^{(i)}\partial_{(i)} + m)\psi \tag{3.40}$$

Από την εξίσωση Dirac προκύπτει λοιπόν:

$$(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi = i\gamma^0\partial_0\psi \tag{3.41}$$

Άρα

$$H = \psi^+\gamma^0 i\gamma^0\partial_0\psi \tag{3.42}$$

$$H = \psi^+ i\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{3.43}$$

Η έκφραση για την ενέργεια δείχνει πως λύσεις αρνητικής ενέργειας θα έχουν αρνητική συνεισφορά στη Hamiltonian και η ενέργεια ή αλλιώς δεν είναι θετικά ορισμένη. Επομένως θα πρέπει να προχωρήσουμε σε κβάντωση για να πάρουμε θετικές τιμές για την ενέργεια (αντίστοιχα στην KG η ενέργεια ήταν θετική μόνο με την θεώρηση του φ ως πεδίου). Εδώ καταδεικνύεται και ο αμιγώς κβαντικός χαρακτήρας της Dirac. Με βάση τα προηγούμενα συνεχίζουμε και θεωρούμε το πεδίο Dirac ως κβαντικό τελεστή. Θα είναι λοιπόν συναρτήσει των επίπεδων λύσεων της Dirac:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}[\alpha_s(\boldsymbol{k})u^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + b_s{}^+(\boldsymbol{k})v^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.44}$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}[\alpha_s{}^+(\boldsymbol{k})\bar{u}^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{ikx} + b_s(\boldsymbol{k})\bar{v}^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}] \tag{3.45}$$

όπου εδώ $u^{(1,2)}$ και $v^{(1,2)}$ οι σπινοριακές λύσεις της Dirac θετικής και αρνητικής ενέργειας. Έπιπλέον α, b^+ οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για τις θετικές και αρνητικές αντίστοιχα λύσεις της ενέργειας. Έχουμε πάρει τους τελεστές διαφορετικούς προβλέποντας και την μη ερμιτειανή (δηλαδή φορτισμένη) περίπτωση. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην Hamiltonian έχουμε:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}(-ik_0)[\alpha_s(\boldsymbol{k})u^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - b_s{}^+(\boldsymbol{k})v^{(s)}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.46}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\psi^+ i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{s=1,2}[\alpha_s{}^+(\boldsymbol{k})u^{+(s)}(\boldsymbol{k})e^{ikx} + b_s(\boldsymbol{k})v^{+(s)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx}]\\ \times\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{m}{k'_0}\sum_{s=1,2}(-ik'_0)[\alpha_{s'}(\boldsymbol{k'})u^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{-ik'x} - b_{s'}{}^+(\boldsymbol{k'})v^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{ik'x}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{s,s'=1,2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{k_0k'_0}k'_0[\alpha_s{}^+(\boldsymbol{k})\alpha_{s'}{}^+(\boldsymbol{k'})u^{+(s)}(\boldsymbol{k})u^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{i(k-k')x}\\ \alpha_s{}^+(\boldsymbol{k})b_{s'}{}^+(\boldsymbol{k'})u^{+(s)}(\boldsymbol{k})v^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{i(k+k')x}\\ b_s(\boldsymbol{k})\alpha_{s'}(\boldsymbol{k'})v^{+(s)}(\boldsymbol{k})u^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{-i(k+k')x}\\ -b_s(\boldsymbol{k})b_{s'}{}^+(\boldsymbol{k'})v^{+(s)}(\boldsymbol{k})v^{(s')}(\boldsymbol{k'})e^{-i(k-k')x}]\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες κανονικοποίησης μεταξύ των σπινοριακών λύσεων:

$$u^{(s)+}(p)u^{(s')}(p) = v^{(s)+}(p)v^{(s')}(p) = \frac{E}{m}\delta_{ss'}, \quad u^{(s)+}(p)v^{(s')}(p) = 0 \tag{3.47}$$

Θα έχουμε τελικά:

$$H = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}k_0 \sum_s [{\alpha_s}^+(\boldsymbol{k})\alpha_s(\boldsymbol{k}) - b_s(\boldsymbol{k}){b_s}^+(\boldsymbol{k})] \tag{3.48}$$

Παρακάτω ακολουθή η θεώρηση των σχέσεων μετάθεσης. Σύμφωνα με την θεώρηση των σχέσεων μετάθεσης που είχαμε θεωρήση στην Klein- Gordon προέκυψε η στατιστική Bose - Einstein για τα σωματίδια μας. Η ανάλυση μας και να παραμείνει η ενέργεια θετικά ορισμένη θα μας οδηγήσει στις ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \{\alpha_s(\boldsymbol{k}), {\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k'})\} = \{b_s(\boldsymbol{k}), {b_{s'}}^+(\boldsymbol{k'})\} = (2\pi)^3\frac{k_0}{m}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\delta_{ss'} \\ \{\alpha_s(\boldsymbol{k}), \alpha_s(\boldsymbol{k'})\} = \{{\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}), {\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k'})\} = 0 \\ \{b_s(\boldsymbol{k}), b_s(\boldsymbol{k'})\} = \{{b_s}^+(\boldsymbol{k}), {b_{s'}}^+(\boldsymbol{k'})\} \end{aligned} \tag{3.49}$$

Έτσι για την παραπάνω Hamiltonian θα έχουμε, παίρνοντας κανονική διάταξη τελεστών (χρησιμοποιώντας τη σχέση αντιμετάθεσης για τα b):

$$H = \int \psi^+ i\frac{\partial}{\partial t}\psi d^3x = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}k_0 \sum_s [{\alpha_s}^+(\boldsymbol{k})\alpha_s(\boldsymbol{k}) + {b_s}^+(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k})]$$

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}k_0 \sum_s [N_s(\boldsymbol{k}) - \bar{N}_s(\boldsymbol{k})) \tag{3.50}$$

Όπου βλέπουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι θετικά ορισμένη. Επιλύθηκε λοιπόν έτσι με τον ορισμό σχέσεων αντιμετάθεσης το πρόβλημα θετικά ορισμένης ενέργειας. Για το ολικό διατηρούμενο φορτίο τώρα θα έχουμε:

$$Q = \int d^3x\psi^+(x)\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}k_0 \sum_s [N_s(\boldsymbol{k}) - \bar{N}_s(\boldsymbol{k})] \tag{3.51}$$

Όπου εδώ είναι πια φανερή η αναλογία με τις προηγούμενες αναλύσεις μας για την εξίσωση Klein - Gordon. Εδώ λοιπόν έχουμε τους δύο αριθμητικούς τελεστές $N_s(\boldsymbol{k})$ για τα σωματίδια και $\bar{N}_s(\boldsymbol{k})$ για τα αντισωματίδια, αντίστοιχα με τους τελεστές α^+ και b^+ δημιουργίας σωματιδίων και αντισωματιδίων. Η αντιστοιχία είναι πλέον πλήρης.

3.3.1 σύνδεση spin - στατιστικής

Ας πάμε να κάνπυμε όπως και προηγουμένως την αντιστοιχία spin και στατιστικής. Δηλαδή να βρούμε τι είδους σωματίδια περιγράφει η εξίσωση μας. Για παράδειγμα από τις σχέσεις αντιμετάθεσης που βρήκαμε έχουμε:

$$\begin{aligned} \{{\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}), {\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k})\} = 0 \\ {\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}), {\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k'}) = 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$${\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}) \cdot {\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k'}) = -{\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k'}) \cdot {\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}) \tag{3.53}$$

Η δράση πάνω στη κατάσταση κενού:

$$\begin{aligned} {\alpha_s}^+(\boldsymbol{k}){\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k})|0\rangle &= -{\alpha_{s'}}^+(\boldsymbol{k}){\alpha_s}^+(\boldsymbol{k})|0\rangle \\ |1(\boldsymbol{k},s),1(\boldsymbol{k'},s')\rangle &= -|1(\boldsymbol{k'},s',1(\boldsymbol{k},s)\rangle \end{aligned} \tag{3.54}$$

Δηλαδή η κυματοσυνάρτηση δύο σωματιδίων είναι αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή τους. Παρήχθει δηλαδή η απαγορευτική αρχή του Pauli. Έχει προκύψει ως άμεση συνέπεια των σχέσεων αντιμετάθεσης που θέσαμε και της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Έτσι λοιπόν η εξίσωση Dirac περιγράφει φερμιόνια.

3.4 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Τα θεμελιώδη πεδία της φύσης θεωρούμε πως είναι τα βαθμωτά πεδία, με ημιακέραιο σπιν (λεπτόνια και quark) και τα διανυσματικά πεδία βαθμίδας (ασθενή, ηλεκτρομαγνητικά και ι-σχυρά), με σπιν ακέραιο αριθμό. Ειδικότερα τα τελευταία προκύπτουν από την αναπαίτηση για αναλλοιώτητα της Lagrange κάτω από τους απαιτούμενους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ασχολούμαστε επομένως με την κβάντωση πεδίων βαθμίδας και με την κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως υπαγορεύει η κβαντική ηλεκτροδυναμική θεωρία (QED) . Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι άμαζο και έχει δύο βαθμούς ελευθερίας. Η συναλλοίωτη περιγραφή του είδαμε πως απαιτεί την έκφραση του με•σω του τετρανύσματος A_μ. Συνεπώς, προκύπτουν δύο περιπτώσεις. εκφράζοντας την κβάντωση του πεδίου μέσω των δύο συνιστωσών, θεωρώντας αυτές ως φυσικές ποσότητες, χάνουμε σε συναλλοιώτητα. Αν όμως προχωρήσουμε στην κβάντωση με διατήρηση της συναλλοίωτης περιγραφής, θα μείνουμε με δύο άχρηστες συνιστώσες. Στην συνέχεια θα φανεί ο υπολογισμός και για τς δύο περιπτώσεις. Ο αντισυμμετρικός τανυστής $F^{\mu\nu}$ είδαμε πως γράφεται:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.55}$$

Με Lagrangian:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.56}$$

Οι ομογενείς εξισώσεις Maxwell ικανοποιούνται αυτόματα. Για τις άλλες δύο μη ομογενείς θα ισχύει:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.57}$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την αρχή των μεταβολών.

Όπου το A_μ θεωρείται το δυναμικό πεδίο, Για δοσμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το A_μ δεν είναι μοναδικό. Όπως είδαμε ο μετασχηματισμός:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \tag{3.58}$$

αφήνει αναλλοίωτο το τανυστή $F_\mu \nu$. Διαλέγοντας τώρα κατάλληλο $\alpha(x)$ ώστε:

$$\partial_\mu \partial^\mu \alpha(x) = -\partial_\mu A^\mu \tag{3.59}$$

θα προκύψει όπως έχουμε ήδη δεί: $\partial_\mu A'^\mu = 0$ και προκύπτει η συνθήκη (συνθήκη Lorentz):

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.60}$$

Ένα διανυσματικό δυναμικό το οποίο ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη λέμε ότι ανήκει στη βαθμίδα Lorentz (ή συναλλοίωτη βαθμίδα). Όπως είναι φανερό, με τη συνθήκη αυτή έχουμε καταφέρει να μειώσουμε τον αριθμό των ανεξάρτητων συνιστωσών του A_μ από τέσσερις σε τρείς. Όμως και πάλι το A_μ δεν είναι μοναδικό. Την ίδια συνθήκη ικανοποιεί και το A'_μ εφόσον $\partial_\mu \partial^\mu \alpha(x) = 0$. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε το $\alpha(x)$ να ικανοποιέι την:

$$\partial_0 \alpha(x) = -\varphi \tag{3.61}$$

Τότε έχουμε $\varphi' = 0$ και έτσι προκύπτει $\nabla \boldsymbol{A'} = 0$. Τα δυναμικά που υπακουούν σε αυτήν την συνθήκη:

$$\varphi = 0, \quad \nabla \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.62}$$

λέμε ότι αυτά ακριβώς ανήκουν στην βαθμίδα Coulomb. Παρατηρούμε λοιπόν τώρα πως στη βαθμίδα αυτή, έχουν μείνει μονάχα δύο ανεξάρτητες συνιστώσες για το A_μ. Αυτό είναι και το φυσικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

3.4.1 βαθμίδα Coulomb

Όπως είπαμε και πιο πάνω:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A \mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$$

θα είναι επομένως για την κανονική ορμή:

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \tag{3.63}$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0 = E^i \tag{3.64}$$

Μπορούμε λοιπόν τώρα να δεχθούμε τις σχέσεις μετάθεσης ίσου χρόνου όπως και πιο πρίν για τα μποζονικά πεδία και έτσι θα έχουμε:

$$[A^i(\boldsymbol{x}, t), A^j(\boldsymbol{x'}, t)] = [\pi^i(\boldsymbol{x}, t), \pi^j(\boldsymbol{x'}, t)] = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{3.65}$$

Αν πάμε όμωβς τώρα να πάρουμε τις αντίστοιχες σχέσεις μετάθεσης και για τα π^i και A^i, θα έχουμε (αφού $A_i = -A^i$):

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{t})] = -[A^i(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{3.66}$$

Αυτές όμως οι σχέσεις μετάθεσης δεν είναι συμβατές με τη συνθήκη της βαθμίδας Coulomb. Πράγματι αυτό γίνεται φανερό εάν δεχτούμε:

$$\nabla\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.67}$$

τότε από τις παραπάνω σχέσεις μετάθεσης, εφαρμόζοντας τον τελεστή της απόκλισης και για τα δύο μέλη:

$$[\nabla\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},t)] = i\partial^i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \neq 0 \tag{3.68}$$

Για να ικανοποιούν λοιπόν οι σχέσεις αυτές την συνθήκη Lorentz θα αντικατασταθεί το δ_{ij} με έναν τανυστή δεύτερης τάξης Δ_{ij}, τον οποίο θα υπολογίσουμε ακολούθως.
Γράφουμε επομένως την συνάρτηση δ στην ολοκληρωτική της μορφή:

$$\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})} \tag{3.69}$$

Γράφοντας επομένως ξανά τις παραπάνω σχέσεις μετάθεσης, θα είναι:

$$[A^i(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},t)] = -i\Delta^{ij}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})} \tag{3.70}$$

και παίρνοντας την απόκλιση:

$$[\nabla\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{t})] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\Big(\sum_i k_i\Delta^{ij}\Big)\exp^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})} \tag{3.71}$$

Συνεπώς έχουμε ανάγει το πρόβλημα μας στον μηδενισμό του παραπάνω όρου. Ο μόνος τρόπος να συμβεί αυτό είναι αν δεχτούμε:

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2} \tag{3.72}$$

και οι τελικές σχέσεις μετάθεσης θα είναι:

$$\begin{aligned}[A^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{x'},t)] &= [\pi^i(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},t)] = 0\\ [A^i(\boldsymbol{x},t),\pi^j(\boldsymbol{x'},t)] &= i\Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}\Big)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\end{aligned} \tag{3.73}$$

Όπως και πρίν δουλέψαμε με την Dirac και την KG, θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τα σωματίδια της θεωρίας μας (τα φωτόνια), μέσα από τις λύσεις της Hamiltonian.
Ξεκινώντας γράφουμε την εξίσωση Maxwell με τη βοήθεια της συνθήκης Lorentz:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = 0 \tag{3.74}$$

Επιβάλλοντας και τη συνθήκη Coulomb θα πάρουμε:

$$\partial^\mu \partial_\mu \boldsymbol{A} = 0 \tag{3.75}$$

που αυτή είναι ακριβώς η KG για άμαζο πεδίο. Γράφουμε τη λύση της αντίστοιχα συναρτήσει των θεμελιωδών λύσεων $e^{\pm ikx}$, ενώ οι συντελεστές θα είναι διανύσματα (διάνυσμα πόλωσης) $\boldsymbol{\epsilon^\lambda(k)}$. θα έχουμε λοιπόν σε πλήρη αναλογία με την περίπτωση του πεδίου KG:

$$\boldsymbol{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} \boldsymbol{\epsilon}^\lambda(\boldsymbol{k})[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.76}$$

Έχουμε:

$$k^2 = 0, \quad k_0 = |\boldsymbol{k}| \tag{3.77}$$

Εφαρμογή της συνθήκης Coulomb και πάλι θα μας δώσει:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{A} &= 0 \\ -i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Συνεπώς το λ θα μπορεί να πάρει μονάχα δύο τιμές. Η παραπάνω συνθήκη επίσης δείχνει πως για μια δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης $\hat{k} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$, τα $\boldsymbol{\epsilon}^\lambda(\boldsymbol{k})$ θα είναι κάθετα σε αυτήν. Επιπλέον μπορούμε να διαλέξουμε τα διανύσματα αυτά να είναι ακόμα και ορθογώνια μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\epsilon}^\lambda(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{\lambda'}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{3.79}$$

Αντίστοιχα λοιπόν με το πεδίο Klein - Gordon θα βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές $\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$ και $\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})$. Έτσι λοιπόν αντιστρέφοντας τα αναπτύγματα για το πεδίο A_μ και την ορμή του λύνοντας ως προς τους δύο αυτούς τελεστές θα βρούμε τελικώς τις αντίστοιχες σχέσεις μετάθεσης:

$$\begin{aligned} [\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}), \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k'})] &= 2k_0(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \\ [\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}), \alpha^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})] &= [\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k}), \alpha^{(\lambda')+}(\boldsymbol{k'})] = 0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Υπάρχει δηλαδή απόλυτη αντιστοιχία με την περίπτωση του πεδίου Klein - Gordon. Έτσι και εδώ λοιπόν οι δύο αυτοί τελεστές είναι αντίστοιχα τελεστές καταστροφής και δημιουργίας των κβάντων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή φωτονίων. Για να φανεί ακόμη πιο καθαρά γράφουμε τις εκφράσεις της ενέργειας. Για την Hamiltonian λοιπόν θα έχουμε:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) = \frac{1}{2}\int d^3x(\dot{\boldsymbol{A}}^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2) \tag{3.81}$$

αυτό ισχύει αφού στην βαθμίδα ακτινοβολίας είναι $\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}}$. Θα πρέπει λοιπόν τώρα να πάμε και να υπολογίσουμε το $(\nabla \times \boldsymbol{A})^2$. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} &= \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\ (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}\partial_j A_k \partial_m A_n \\ (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 &= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\partial_j A_k \partial_m A_n \\ (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 &= (\partial_j A_k)(\partial_j A_k) - (\partial_j A_k)(\partial_k A_j) \end{aligned} \tag{3.82}$$

Υπολογίζοντας τώρα το δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned} (\partial_j A_k)(\partial_k A_j) &= \partial_j(A_k \partial_k A_j) - A_k(\partial_j \partial_k A_j) \\ (\partial_j A_k)(\partial_k A_j) &= \partial_j(A_k \partial_k A_j) - A_k \partial_k(\nabla \boldsymbol{A}) \\ (\partial_j A_k)(\partial_k A_j) &= \partial_j(A_k \partial_k A_j) \end{aligned} \tag{3.83}$$

Το τελευταίο βήμα βρίσκει ισχύ λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας. Επομένως μπορούμε να γράψουμε τον όρο αυτό σαν ολικό διαφορικό. Όμως παίρνοντας το ολοκλήρωμα για την ενέργεια, ο όρος αυτός εξαφανίζεται. Επιστρέφουμε λοιπόν στην Εξ. (3.82):

$$(\partial_j A_k)(\partial_j A_k) = \partial_j(A_k \partial_j A_k) - A_k(\partial_j \partial_j A_k) \tag{3.84}$$

Πάλι εδώ εμφανίζεται επομένως ένα ολικό διαφορικό. Όπως και το προηγούμενο όμως μπορούμε να το εξαφανίσουμε κατά την ολοκλήρωση, εκμεταλλευομένοι το θεώρημα Gauss και παίρνοντας επιφάνεια ολοκλήρωσης στο άπειρο. Τελικά:

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})^2 = -\boldsymbol{A}\nabla^2\boldsymbol{A} \tag{3.85}$$

Συνεπώς η Hamiltonian για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο γίνεται:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x(\dot{\boldsymbol{A}}^2 - \boldsymbol{A}\nabla^2\boldsymbol{A}) \tag{3.86}$$

Αντικαθιστώντας και την έκφραση του πεδίου στην τελευταία:

$$\dot{\boldsymbol{A}}^2 = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda,\lambda'} \varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\varepsilon^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})(-ik_0)$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}^2 = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4k_0 k'_0} \sum_{\lambda,\lambda'} \varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\varepsilon^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})(-ik_0)(-ik'_0)[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})e^{-i(k+k')x} - \alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda')+}(\boldsymbol{k}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}^2 = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4(k_0)^2} \sum_{\lambda=1,2} [\varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})]^2 (k_0)^2 \big[[\alpha^{(}$$

Ομοίως για τον άλλο όρο:

$$\nabla \boldsymbol{A} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})(i\boldsymbol{k})[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$$

(3.87)

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4(k_0)^2} \sum_{\lambda=1,2} \varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})|(\boldsymbol{k})|^2[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{A}\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 2k_0 2k'_0} \sum_{\lambda,\lambda'} \varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\varepsilon^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})|\boldsymbol{k'}|^2[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}][\alpha^{(\lambda')}(\boldsymbol{k'})e^{-}$$

$$\boldsymbol{A}\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4(k_0)^2} \sum_{\lambda=1,2} [\varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})]^2 |\boldsymbol{k}|^2 \big[[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})]^2 e^{-2ikx} + \alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k}) + \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}$$

και η Hamiltonian θα είναι:

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4(k_0)^2} \sum_{\lambda=1,2} [\varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})]^2 \Big[-(k_0)^2 \big[[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})]^2 e^{-2ikx} - \alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k}) - \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}$$

αλλά

$$k_0 = |\boldsymbol{k}| \tag{3.88}$$

και η συνθήκη για τα διανύσματα πόλωσης είναι

$$\varepsilon^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \cdot \varepsilon^{(\lambda')}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{3.89}$$

οπότε η Hamiltonian θα είναι τελικώς:

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \sum_{\lambda=1,2} [\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k}) + \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})] \tag{3.90}$$

και αφαιρώντας την ενέργεια του κενού:

$$H = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 [\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k}) \alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})] \tag{3.91}$$

ορίζεται επομένως ο αριθμητικός τελεστής σωματιδίων (φωτονίων), ο οποίος όπως φαίνεται είναι πάντα θετικά ορισμένος, άρα θετικά ορισμένη θα είναι και η ενέργεια του πεδίου. Δηλαδή:

$$H = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 N^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \tag{3.92}$$

ο $N^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})$ δίνει την αριθμητική πυκνότητα φωτονίων ορμής $\boldsymbol{k}$ και στις κατευθλυνσεις πόλωσης $\lambda = 1, 2$. Έχουμε λοιπόν σχηματίζει μια κβαντική ηλεκτροδυναμική θεωρία. Έχουμε καταφέρει να επιτύχουμε κβάντωση μόνο σε 2 από τις 4 συνιστώσες του A_μ , οι οποίες αντιστοιχούν στους 2 βαθμούς ελευθερίας του άμαζου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η συνθήκη Coulomb όμως που επιβάλλαμε καταστρέφει το συναλλοίωτο. Η συνθήκη Lorentz που θα εξεταστεί στη συνέχεια διατηρεί τη συναλλοιώτητα.

3.5 βαθμίδα Lorentz

Αρχικά όλα τα παραπάνω πρέπει να περιγραφούν με συναλλοίωτο τρόπο. Πρώτο μας μέλημα λοιπόν είναι να γράψουμε τις σχέσεις μετάθεσης ίσου χρόνου με συναλλοίωτο τρόπο. Εισάγοντας στις σχέσεις μας τη μετρική Minkowski, θα έχουμε τις σχέσεις μικροαιτιότητας:

$$[A_\mu(\boldsymbol{x}, t), \pi_\nu(\boldsymbol{x'}, t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{3.93}$$

$$[A_\mu(\boldsymbol{x}, t), A_\nu(\boldsymbol{x'}, t)] = [\pi_\mu(\boldsymbol{x}, t), \pi_\nu(\boldsymbol{x'}, t)] = 0 \tag{3.94}$$

όπου η τετραορμή του πεδίου βαθμίδας είναι:

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} \tag{3.95}$$

Όμως όπως είδαμε και πριν είναι:

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0 \tag{3.96}$$

και επομένως η πρώτη σχέση μετάθεσης για το A_0 δεν ικανοποιείται. Ταυτόχρονα ο μεταθέτης του με το π^0 είναι μηδενικός και άρα το A_0 δεν θα είναι πλέον μια δυναμική μεταβλητή - τελεστής και έτσι έχουμε τη συναλλοιώτητα.

Προκύπτει επομένως η ανάγκη εύρεσης μιας καινούργιας Lagrange και η οποία θα δίνει μη μηδενική τιμή για το π^0. Για να ικανοποιούνται και οι εξισώσεις Maxwell θα χρησιμοποιήσουμε την Lagrangian Maxwell και επιπλέον μια συναλλοίωτη συνθήκη: τη συνθήκη Lorentz. Πράγματι:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{3.97}$$

Τότε:

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0 \tag{3.98}$$

Παίρνοντας τώρα τις εξισώσεις Euler - Lagrange για το πεδίο A_μ, θα έχουμε:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0 \tag{3.99}$$

Οι οποίες είναι οι Euler-Lagrange.
Ο όρος που προστέθηκε ονομάζεται 'όρος καθορισμού βαθμίδασ' και γενικά η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μεταχείριση μη Αβελιανών θεωρίων βαθμίδας (η U(1) που μελετάμε είναι Αβελιανή). Σε αυτό το σημείο υπολογίζουμε ξανά τη π^0 και θα έχουμε λόγω βαθμίδας Lorentz:

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = -\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.100}$$

Το αποτέλεσμα του υπολογισμού υπερτονίζει ότι δεν μπορεί να θεωρηθεί ως μια τελεστική εξίσωση και πάντα κάτω από τη συνθήκη Lorentz αλλά πρέπει να υπάρχει μια πιο ασθενή απαίτηση. Απαιτούμε επομένως για φυσικές καταστάσεις μόνο, έστω $|\psi\rangle$, ο τελεστής $\partial_\mu A^\mu$ να έχει μηδενική αναμενόμενη τιμή. Αυτό σημαίνει:

$$\langle\psi|\partial_\mu A^\mu|\psi\rangle = 0, quad\text{μόνο σε φυσικές καταστάσεις} \tag{3.101}$$

Γράφουμε τις λύσεις των εξισώσεων Maxwell σε μορφή επίπεδων κυμάτων. Θα έχουμε:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} {\varepsilon_\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}] \tag{3.102}$$

και στην τελευταία εξίσωση εμφανίζονται τέσσερα διανύσματα πόλωσης. Κανονικοποιώντας αυτές τις τέσσερις καταστάσεις (θεωρώντας το ${\varepsilon_\mu}^{(0)}(\boldsymbol{k})$ χρονοειδές και τα υπόλοιπα χωροειδή), θα είναι:

$${\varepsilon_\mu}^{(\lambda)}{\varepsilon_\mu}^{(\lambda')\mu} = {\varepsilon_\mu}^{(\lambda)}g^{\mu\nu}{\varepsilon_\nu}^{(\lambda')} = {\varepsilon_0}^{(\lambda)}{\varepsilon_0}^{(\lambda')} - {\varepsilon_1}^{(\lambda)}{\varepsilon_1}^{(\lambda')} - {\varepsilon_2}^{(\lambda)}{\varepsilon_2}^{(\lambda')} - {\varepsilon_3}^{(\lambda)}{\varepsilon_3}^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φωτόνιο με τετραορμή:

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 & \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

και επομένως για τις καταστάσεις πόλωσης θα είναι:

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου θα ισχύει:

$$k \cdot \varepsilon^{(1,2)} = 0 \tag{3.104}$$

Φωτόνια με πόλωση ε^0 ονομάζονται 'βαθμωτά' ή 'χρονοειδή', αυτά με πόλωση ε^3 λέγονται 'διαμήκη', ενώ τα ε^1 και ε^2 είναι τα γνωστά μας 'εγκάρσια'. Τα χρονοειδή και διαμήκη φωτόνια είναι προφανώς και τα μη φυσικά. Τώρα θα προσπαθήσουμε όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, να βρούμε σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές α και α^+. Από τη Lagrangian που έχουμε θεωρήσει, παίρνουμε για την κανονική ορμή:

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{\mu 0} - g^{\mu 0}\partial_n u A^\nu \tag{3.105}$$

Αυτό δηλαδή σημαίνει:

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \boldsymbol{A}, \quad \pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i \tag{3.106}$$

Με βάση αυτά, θα έχουμε για τις σχέσεις μετάθεσης ίσου χρόνου:

$$[\dot{A}_\mu(\boldsymbol{x}, t), A_\nu(\boldsymbol{x'}, t)] = i g_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{3.107}$$

Από την έκφραση που έχουμε δεχτεί για το πεδίο A_μ , θα έχουμε:

$$\dot{A}_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} {\varepsilon_\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})(-ik_0)[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})e^{-ikx} - \alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})e^{ikx}]$$

Αντικαθιστώντας τώρα αυτά στην έκφραση του μεταθέτη:

$$[\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}), \alpha^{(\lambda')+}(\boldsymbol{k'})] = -g^{\lambda\lambda'} 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) \tag{3.108}$$

Όλοι οι υπόλοιποι μεταθέτες μηδενίζονται. Κατά τα γνωστά μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους παραπάνω τελεστές, ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων όπως έχουμε προαναφέρει. Η αντίστοιχη ερμηνεία στις χρονοειδείς συνιστώσες εμφανίζει προβλήματα. Πράγματι εφόσον για την μετρική Minkowski ισχύει:

$$g^{00} = 1 \tag{3.109}$$

τότε για τους χρονοειδείς τελεστές θα έχουμε:

$$[\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k}), \alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k'})] = -2k_0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'}) \tag{3.110}$$

Οι υπόλοιποι τελεστές δεν εμφανίζουν πρόβλημα γιατί τα στοιχεία της μετρικής ήταν όλα -1. Εδώ όμως ο μεταθέτης μας γίνεται αρνητικός.
Για παράδειγμα θεωρώντας την κατάσταση για ένα μόνο βαθμωτό φωτόνιο, θα έχουμε την δράση του τελεστή δημιουργίας στην κατάσταση κενού:

$$|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} e^{ikx} \alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k})|0\rangle \tag{3.111}$$

Παίρνοντας τη νόρμα:

$$\langle 1|1\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} e^{i(k-k')x} \langle 0|\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k})|0\rangle$$

Όμως όπως έχουμε από το μεταθέτη των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας:

$$\langle 0|\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k})\alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k})|0\rangle = \langle 0| - 2k_0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) + \alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k})|0\rangle$$

Από τη συνθήκη που έχουμε δεχτεί για τη βασική κατάσταση, ώστε να μην υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές:

$$\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{3.112}$$

Πάιρνουμε τελικώς:

$$\langle 1|1\rangle = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'_0} e^{i(k-k')x} 2k_0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\langle 0|0\rangle$$

$$\langle 1|1\rangle = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \langle 0|0\rangle \tag{3.113}$$

βλέπουμε δηλαδή ότι η κατάσταση αυτή έχει αρνητική νόρμα. Το πρόβλημα όπως φαίνεται προέρχεται από αρνητικό πρόσημο του μεταθέτη των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας. Παρατηρούμε όμως πως και ο υπολογισμός της ενέργειας εμφανίζει προβλήματα. Πράγματι:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 \Big\{ \sum_{\lambda=1,2,3} [\alpha^{(\lambda)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})] - \alpha^{(0)+}(\boldsymbol{k})\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k}) \Big\} \tag{3.114}$$

Δηλαδή παίρνουμε αρνητική συνεισφορά στην ενέργεια από τα βαθμωτά φωτόνια. Θα αναγκαστούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή αριθμητικής πυκνότητας των φωτονίων. Συγκεκριμένα ο τελεστής αριθμητικής πυκνότητας φωτονίων για την χροονοειδή περίπτωση έχει αρνητικό πρόσημο.

3.6 Ολοκληρώματα διαδρομής

Ολοκληρώνοντας αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε τον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής, που ουσιαστικά αποτελεί τα μαθηματικά της κβαντικής θεωρίας πεδίου. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πείραμα διπλής σχισμής. Έστω το ηλεκτρόνιο προερχόμενο από την πηγή S και στο δρόμο του προς τον ανιχνευτή O μέσα σε χρόνο T περνά από μέσα από οθόνη A, η οποία είναι εφοδιασμένη με δύο σχισμές A_1 και A_2. Το πλάτος ανίχνευσης του ηλεκτρονίου στον ανιχνευτή O δίνεται σύμφωνα με την κβαντική μηχανική από την υπέρθεση των πλατών των δύο αυτών δρόμων, δηλαδή $S \to A_1 \to O$ και $S \to A_2 \to O$. Αν συνεχίσουμε δημιουργώντας σχισμές στην οθόνη, ο υπολογισμός με βάση την αρχή της υπέρθεσης θα είναι το άθροισμα των πλατών πιθανότητας για τις τρείς αυτές περιπτώσεις. Επαγωγικά λοιπόν, το ζητούμενο πλάτος δίνεται:

$$A(\text{ανίχνευση στο O σε χρόνο T}) = \sum_i A(S \to A_i \to O)$$

3.7 Διαγράμματα Feynmann

Υπάρχει μια γενική αρχή στη σωματιδιακή φυσική, η οποία φέρει το όνομα διασταυρούμενη συμμετρία (crossing symmetry). Υποθέστε για παράδειγμα μια αντίδραση της μορφής

$$A + B \to C + D.$$

Οποιοδήποτε από αυτά τα σωματίδια μπορεί να μεταφερθεί στην άλλη πλευρά της αντίδρασης, δεδομένου ότι κατ΄ επέκταση μετατρέπεται στο αντισωματίδιο του. Επομένως και η προκύπτουσα συνάρτηση να είναι επίσης δυνατή. Άρα,

$$A \to \overline{B} + C + D$$

$$A + \overline{C} \to \overline{B} + D$$
$$\overline{C} + \overline{D} \to \overline{A} + \overline{B}$$

Επιπλεόν και η αντίστροφη συνάρτηση επίσης είναι εφικτή $C + D \to A + B$, το οποίο πρακτικά διαφοροποιείται βάσει της αρχής διατήρησης αντιδρώντων-προϊόντων. Πράγματι, όπως θα δούμε, οι υπολογισμοί που μεσολαβούν σε αυτές τις αντιδράσεις είναι ταυτόσημοι. Μπορούμε άλλωστε να τους θεωρήσουμε σαν διαφορετική δήλωση της ίδιας θεμελιώδους διαδικασίας. Υπάρχει όμως μια βασική αδυναμία που υποθάλπτεται. Η διατήρηση της ενέργειας μπορεί να ασκεί βέτο στην πραματοποίηση της αντίδρασης, που μπορεί να είναι επιτρεπτή ως προς τις υπόλοιπες παραμέτρους. Μπορούμε επίσης να δηλώσουμε ότι η διασταυρούμενη (ή αντίστροφη) αντίδραση μπορεί να είναι δυναμικά επιτρεπτή, αλλά μπορεί να μην είναι κινηματικά επιτρεπτή.

Κεφάλαιο 4

ΜΕΓΑΛΟΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

4.1 Ανάγκη ενοποίησης

Force	**Strength**	**Theory**	**Mediator**
Strong	10	*Chromodynamics*	*Gluon*
Electromagnetic	10^{-2}	*Electrodynamics*	*Photon*
Weak	10^{-13}	*Flavordynamics*	*WandZ*
Gravitational	10^{-42}	*Geometrodynamics*	*Graviton*

Οι δυνάμεις υπακούουν σε μια εκθετική μορφή όπως

$$e^{-(r/\alpha)}/r^2,$$

όπου το α είναι το εύρος. Για τη δύναμη Coulomb και για το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Newton το εύρος είναι, $\alpha= \infty$, ενώ για την ισχυρή δύναμη το α είναι περίπου 10^{-13} cm (1fermi). Η σταθερά λεπτή υφής, αποτελεί σημαντική έννοια της κβαντικής θεωρίας πέδίου. Αποτελεί ουσιαστικά αδιάστατο μέτρο της ισχύς της δύναμης. Επομένως, συγκρίνουμε την ενέργεια κατά την αλληλεπίδραση δύο ηλεκτρονίων με την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου.

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{(\hbar/mc)}/mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

Η σταθερά λεπτής υφής από την άλλη, εξαρτάται από το φορτίο. Συγκρίνουμε, για παράδειγμα, την ενεργό διατομή της σκέδασης Thomson φωτονίων από ηλεκτρόνια με την σκέδαση Rutherford. Η ενεργός διατομή για φωτόνια μεγάλου μήκους κύματος, δίνεται ώς:

$$\sigma_{TH} = \frac{8\pi}{3}(\frac{\alpha}{m_e})^2 = \frac{2}{3}\alpha^2(4\pi {R_e}^2),$$

όπου το R_e είναι το μήκος κύματος Compton. Φυσικά, αυτή η τιμή της ενεργού διατομής μπορεί να προκύψει και από την κλασσική φυσική. Από την άλλη, η διαφορική ενεργός διατομή Rutherford ηλεκτρονίου από πυρήνα φορτίου Ze, δίνεται:

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Ο συντελεστής α δίνει την πιθανότητα απορρόφησης ή αποβολής ενός φωτονίου. Στα διαγράμματα Feynman, κάθε απορρόφηση ή αποβολή φωτονίου από ένα φορτίο e χωριστά, δίνεται από ένα συντελεστή e ή $\sqrt{\alpha}$ και που ταυτόχρονα αναπαριστά το πλάτος πιθανότητας για τη συγκεκριμένη αλληλεπίδραση.

Αντίστοιχα μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι το χρώμα των κουάρκ αποτελεί το αντίστοιχο φορτίο των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Τα γκλουόνια αναπαριστώντας τα φωτόνια των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, χαρακτηρίζονται με τη σειρά τους από τη σταθερά αλληλεπίδρασης a_s. Η a_s είναι όμοια το τετράγωνο του φορτίου που φέρει το χρώμα, διαιρεμένο με 4π. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της καμπύλης της σταθεράς a_s για ισχυρές αλληλεπιδράσεις αποτελεί και σημείο αναφοράς για τη χρήση θεωρίας διαταραχών.

Χρειαζόταν επομένως μια εξίσωση, η οποία θα μπορούσε να περιλάβει και την περιγραφή υψηλά σχετικιστικών σωματιδίων. Στις αρχές της δεκαετίας του 1930 έκανε την εμφάνιση της μια νέα θεωρία. Η κβαντική ηλεκτροδυναμική (Quantum Electrodynamics ή QED, στο εξής) αναπτύχθηκε ώστε να περιλάβει τις αλληλεπιδράσεις φωτονίων και ηλεκτρονίων. Η ιδέα του Maxwell για ενοποίηση ηλεκτρισμού και μαγνητισμού, σηματοδότησε την απαρχή μιας νέας πορείας για την φυσική. Με τη σειρά του και ο Einstein προσπάθησε να ενώσει τη δύναμη της βαρύτητας με την ηλεκτροδυναμική σε μια *ενοποιημένη θεωρία πεδίου*. Η προσπάθεια δεν απέδωσε καρπούς, ωστόσο οδήγησε τους Glashow, Weinberg και Salam στην διατύπωση της θεωρία τους για ενοποίηση των ασθενών δυνάμεων με τις ηλεκτρομαγνητικές. Η θεωρία τους ξεκινά με τέσσερις άμαζους διαδότες αλλά καθώς προχωρά τρείς από αυτούς απαιτούν μάζα (τα W και το Z), μέσω του μηχανισμού Higgs και ένα παραμένει άμαζο, το φωτόνιο.

Στις αρχές της δεκαετίας του εβδομήντα έγινε το επόμενο μεγάλο βήμα ένωσης της ισχυρής δύναμης (με βάση την αρχή της χρωμοδυναμικής) με την ηλεκτρασθενή δύναμη (όπως αυτήν την διαμόρφωσαν οι GWS). Έκτοτε, έχουν γίνει πολλές εργασίες, προτείνοντας θεωρίες μεγαλοενοποίησης.

Παρατηρήθηκε επίσης, ήδη από αρκετα νωρίς, ότι μια θεωρία βαθμίδας περιγράφεται πλήρως από ομάδες και τις αναπαραστάσεις τους. Γνωρίζουμε, ότι το Standard Model έχει τις ακόλουθες ομάδες: $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Η ιδέα λοιπόν που βρίσκεται πίσω από τις μεγαλοενοποιημένες θεωρίες είναι ότι υπάρχει μια ομάδα μεγαλύτερη από αυτή του Standard Model. Δηλαδή:

$$G \supset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \tag{4.1}$$

όπου οι δείκτες αναφέρονται στα φορτία τα οποία γεννούνται μέσα από την απαίτηση αναλλοίωτου κάτω από τις αντίστοιχες ομάδες μετασχηματισμών, σε συμφωνία με το Θ. Noether. Το φορτίο αποτελεί διατηρούμενη ποσότητα. Ταυτόχρονα, το φορτίο πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μια σταθερά ζεύξης που φανερώνει την ένταση των αλληλεπιδράσεων των πεδίων βαθμίδας με τα αντίστοιχα σωματίδια που έχουμε εισάγει. Έτσι η ενοποίηση της ηλεκτρασθενούς θεωρίας με την ασθενή δύναμη, δηλαδή το γινόμενο $SU(2)_L \times U(1)_Y$ και κατά συνέπεια η ενοποίηση των δύο σταθερών ζεύξης σε μια σταθερά, στο φορτίο των ηλεκτρασθενών δυνάμεων και η περιγραφή της στο πλαίσιο του Καθιερωμένου Προτύπου είναι δουλεία των Weinberg - Salam .

Η πλεον σύγχρονη μορφή του Standard Model που τυχαίνει πειραματικής επιβεβαίωσης α-κολουθεί παρακάτω. Όλη η ύλη αποτελείται από τρεία είδη στοιχειωδών σωματιδίων: τα λεπτόνια, τα κουαρκ και τους φορείς. Υπάρχουν έξι λεπτόνια, τα οποία ταξινομούνται σύμφω-να με το φορτίο τους (Q) και τους τρεις λεπτονικούς τους αριθμούς. Υπακουούν επομένως στο κανόνα των τρειών οικογενειών (ή γεννεών).

l	Q	L_e	l_μ	L_τ
e	-1	1	0	0
ν_e	0	1	0	0
μ	-1	0	1	0
ν_μ	0	0	1	0
τ	-1	0	0	1
ν_τ	0	0	0	1

Υπάρχουν επίσης έξι αντιλεπτόνια, με όλα τα πρόσημα ανεστραμμένα. Συνεπώς υπάρχουν 12 λεπτόνια. Τα φερμιόνια της θεωρίας μπορούν να ενταχθούν στο ακόλουθο χωρισμό τρειών γεννεών:

$$\text{fermions} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1\eta \text{ γεννεά} \rightarrow \cdot \begin{cases} \text{leptons} \rightarrow (e, \nu_e) \cdot \\ \text{quarks} \rightarrow \text{(u, d)}. \end{cases} \\ 2\eta \text{ γεννεά} \rightarrow \cdot \begin{cases} \text{leptons} \rightarrow (\mu,\, \nu_\mu) \cdot \\ \text{quarks} \rightarrow \text{(c, s)}. \end{cases} \\ 3\eta \text{ γεννεά} \rightarrow . \begin{cases} \text{leptons} \rightarrow (\tau, \nu_\tau) \cdot \\ \text{quarks} \rightarrow \text{(t,b)}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.2}$$

Η θεωρία περιλαμβάνει (βλ. Εισαγωγή) τα ακόλουθα μποζόνια:

$$\text{bosons} \quad \rightarrow \quad (\text{φωτόνιο } \gamma, W^+, Z^0, W^-, \text{ 8 gluons, higgs σωμάτιο })$$

Όμοια υπάρχουν έξι γεύσεις των κουαρκ , τα οποία κατηγοριοποιούνται σύμφωνα με το φορτίο, τη παραξενία(S), γοητεία (C), ομορφιά (B) και αλήθεια (T). Τα κουάρκ υπακούουν επίσης το κανόνα των τριών γενιών.

q	Q	D	U	S	C	B	T
d	$-\frac{1}{3}$	-1	0	0	0	0	0
u	$\frac{2}{3}$	0	1	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	0	0
b	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	0
τ	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	1

Πάλι όλα τα πρόσημα είναι ανεστραμμένα στο πίνακα των αντικουάρκ. Στο μεταξύ, κάθε κουάρκ και αντικουάρκ υπάρχει σε τρία χρώματα, οπότε υπάρχουν συνολικά 36.
Τέλος, κάθε αλληλεπίδραση φέρει τους φορείς της: το φωτόνιο για την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, τα δύο W και το ένα Z για την ασθενή δύναμη, το γκραβιτόνιο για την βαρύτητα και η ισχυρή δύναμη με το γκλουόνιο.

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας με το πολύ σημαντικό αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας βαθμίδας.

4.2 Αυθόρμητο σπάσιμο εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας και Θεώρημα Goldstone

Στην περίπτωση αυτή η Lagrangian του συστήματος μας θα είναι:

$$L = T - V = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)^* - [\mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2] \tag{4.3}$$

όπου εδώ ο όρος του λ , είναι ένας όρος αλληλεπίδρασης του πεδίου με τον εαυτό του. Όπως φαίνεται εύκολα, η Lagrangian αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από $U(1)$ ολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, δηλαδή κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής:

$$\varphi \to \varphi' = \exp^{i\alpha} \varphi, \quad (\alpha = \text{σταθερά}) \tag{4.4}$$

Ψάχνουμε να βρούμε τη βασική κατάσταση της θεωρίας μας (κενό). Προς τούτο, δεν έχουμε παρά να παραγωγίσουμε τη δυναμική ενέργεια και να βρούμε την ελάχιστη τιμή της. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi^* (\mu^2 + 2\lambda \varphi^* \varphi) \tag{4.5}$$

Εδώ λοιπόν θα πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Εάν θεωρήσουμε $\mu^2 > 0, \lambda > 0$, τότε έχουμε ελάχιστο για $\varphi^* = \varphi = 0$. Εάν όμως πάρουμε την περίπτωση όπου $\mu^2 < 0, \lambda > 0$, τότε παίρνουμε ένα τοπικό μέγιστο για $\varphi = 0$ και ελάχιστο για:

$$|\varphi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \upsilon^2 \quad \text{ή για} \quad |\varphi| = \upsilon \tag{4.6}$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου όπου το φ θεωρείται ως τελεστής, η συνθήκη αυτή αναφέρεται ως αναμενόμενη τιμή του φ ως προς το κενό, και είναι:

$$|\langle 0|\varphi|0\rangle|^2 = \upsilon^2 \tag{4.7}$$

Το δυναμικό V φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, συναρτήσει των δύο εσωτερικών βαθμωτών φ_1 και φ_2 (είναι $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$). Τα ελάχιστα του V βρίσκονται κατά μήκος του κύκλου $|\varphi| = \upsilon$. Αυτό είναι και το σύνολο των κενών της θεωρίας μας. Η κάθε μία κατάσταση κενού προκύπτει από τις υπόλοιπες μέσω περιστροφών.
Τα φυσικά πεδία τα οποία αντιστοιχούν σε διηγηρμένες καταστάσεις γύρω από το κενό, πραγματοποιούνται εφαρμόζοντας μικρές διαταραχές γύρω από αυτό, δηλαδή γύρω από το $|\varphi| = \upsilon$ και όχι γύρω από το $\varphi = 0$. Μπορούμε λοιπόν στην συνέχεια να δουλέψουμε με πολικές συντεταγμένες:

$$\varphi(x) = \rho(x) \tag{4.8}$$

όπου αυτό που έχουμε κάνει είναι να εκφράσουμε το μιγαδικό πεδίο συναρτήσει των δύο βαθμωτών πεδίων $\rho(x), \theta(x)$. Αυτό που έχουμε τώρα να κάνουμε είναι να επιλέξουμε μία από τις καταστάσεις κενού για τη θεωρία μας και πάνω σε αυτή να εκτελέσουμε τις κβαντικές μας διεγέρσεις. Επιλέγουμε λοιπόν ως το κενό:

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \upsilon \tag{4.9}$$

όπου υ είναι πραγματικός αριθμός. Τότε θα έχουμε:

$$\langle 0|\rho|0\rangle = \upsilon, \quad \langle 0|\theta|0\rangle = 0 \tag{4.10}$$

και έτσι με την εκλογή αυτή του κενού της θεωρίας μας, έχουμε σπάσει ουσιαστικά τη συμμετρία της βασικής κατάστασης στη Lagrangian. Η εκλογή του κενού μέσα από το δυνατό σύνολο κενών είναι το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Τώρα λοιπόν μπορούμε να μιλήσουμε και για τα φυσικά πεδία της θεωρίας μας. Αυτά όπως αναφέραμε πιο πάνω θα είναι διεγέρσεις γύρω από το κενό. Γράφουμε λοιπόν:

$$\varphi(x) = [\rho'(x) + \upsilon]e^{i\theta(x)} \tag{4.11}$$

Όπου τώρα, τα φυσικά πεδία μας ρ' και θ έχουνε και τα δύο μηδενικές αναμενόμενες τιμές ως προς το κενό. Είναι δηλαδή:

$$\langle 0|\rho'|0\rangle = 0, \langle 0|\theta|0\rangle = 0 \tag{4.12}$$

Ας πάμε λοιπόν τώρα να γράψουμε τη Lagrange συναρτήσει των πεδίων αυτών. Για τον κινητικό όρο T θα είναι:

$$\begin{aligned} T = (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)^* = (\partial_\mu[\rho'(x)+\upsilon]e^{i\theta(x)})(\partial^\mu[\rho'(x)+\upsilon]e^{i\theta(x)}) \\ T = [\partial_\mu\rho' + i(\rho'+\upsilon)\partial_\mu\theta][\partial^\mu\rho' - i(\rho'+\upsilon)\partial^\mu\theta] \\ T = \partial_\mu\rho'\partial^\mu\rho' + (\rho'+\upsilon)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta \end{aligned} \tag{4.13}$$

Όσον αφορά το δυναμικό όρο της Lagrange V, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} V = \mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 = \mu^2(\rho'+\upsilon)^2 + \lambda(\rho'+\upsilon)^4 \\ V = -2\lambda\upsilon^2(\rho'+\upsilon)^2 + \lambda(\rho'+\upsilon)^4 \\ V = -2\lambda\upsilon^2({\rho'}^2 + \upsilon^2 + 2\upsilon\rho') + \lambda({\rho'}^4 + 4{\rho'}^3\upsilon + 6{\rho'}^2\upsilon^2 + 4\rho'\upsilon^3 + \upsilon^4) \\ V = \lambda{\rho'}^4 + 4\lambda{\rho'}^3\upsilon + 4\lambda{\rho'}^2\upsilon^2 - \lambda\upsilon^4 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Άρα η νέα Lagrangian, μετά την επιβολή της διαταραχής θα γίνει τελικά:

$$\begin{aligned} L = T - V = \partial_\mu\rho'\partial^\mu\rho' + (\rho'+\upsilon)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - (4\lambda\upsilon^2){\rho'}^2 - \lambda{\rho'}^4 - 4\lambda{\rho'}^3\upsilon + \lambda\upsilon^4 \\ L = [\partial_\mu\rho'\partial^\mu\rho' - (4\lambda\upsilon^2){\rho'}^2] + [\upsilon^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta] + ({\rho'}^2 + 2\upsilon\rho')\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \lambda{\rho'}^4 - 4\lambda{\rho'}^3\upsilon + \lambda\upsilon^4 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Η ανάλυση των όρων της Lagrangian θα αναδείξει σημαντικά συμπεράσματα. Μέσα στην πρώτη αγκίλη περιέχονται οι κινητικοί όροι και οι όροι μάζας (τετράγωνο μάζας). Αντιθέτως το πεδίο θ εμφανίζει κινητικό όρο αλλά απουσιάζει όρος μάζας. Έτσι το πεδίο θ είναι άμαζο. Οι υπόλοιποι όροι είναι όροι μάζας αλληλεπίδρασης του πεδίο ρ' και θ μεταξύ τους αλλά και όροι τρίτης και τέταρτης αλληλεπίδρασης του ρ' με τον εαυτό του. Τέλος στη τελευταία εξίσωση εμφανίζεται και μια σταθερά. Τα αποτελέσματα μας, δείχνουν πώς έχουμε σπάσει την $U(1)$ συμμετρία. Τα δύο μαζικά μποζόνια, δηλαδή τα ρ και θ έχουν •δωσει τη θέση τους σε ένα ρ' και ένα άμαζο πεδίο θ. Έχουμε δηλαδή:

πριν το αυθόρμητο σπάσιμο :2 μαζικά πεδία

μετά το αυθόρμητο σπάσιμο :1 μαζικό ($m_{\rho'} = \sqrt{8\lambda v^2}$) και 1 άμαζο $m_\theta = 0$

Μπορούμε να αποδώσουμε στα αποτελέσματα μας και περισσότερη φυσική υπόσταση αναφερόμενοι στο σχήμα του δυναμικού, θεωρώντας πως διεγέρσεις κατά την ακτινική διεύθυνση (ρ') όπου το δυναμικό παρουσιάζει καμπυλότητα, οδηγεί στην ανάπτυξη δυνάμεων επαναφοράς οι οποίες κοστίζουν σε ενέργεια, η οποία με τη σειρά της σημαίνει μη μηδενική μάζα για το πεδίο ρ'. Αντίθετα διεγέρσεις κατά τη γωνιακή διεύθυνση όπου το δυναμικό παραμένει σταθερό, δεν κοστίζουν σε ενέργεια στο σύστημα. Για αυτό το λόγο το πεδίο θ δεν απαιτεί να έχει μάζα. **Το σωματίδιο λοιπόν θ είναι γνωστό ως μποζόνιο Goldstone.** Τέλος σημαντικό σημείο της όλης διαδικασίας είναι ότι το φαινόμενο αυτό αποκτά γενική ισχύ. **Το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας δηλαδή οδηγεί στην ύπαρξη ενός άμαζου σωματιδίου, του μποζονίου Goldstone.**

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε πως στα ίδια ακριβώς αποτελέσματα θα είχαμε καταλήξει, εαν είχαμε χρησιμοποιήσει για την περιγραφή της διαδικασίας όχι την πολική μορφή αλλά τα φυσικά πεδία μας ήταν τα εξής:

$$\varphi = v + \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{4.16}$$

όπου

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi_2|0\rangle = 0 \tag{4.17}$$

οπότε παίρνουμε το πρώτο μαζικό ($m_1 = \sqrt{4\lambda v^2}$) και το δεύτερο άμαζο ($m_2 = 0$).

4.3 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής U(1) συμμετρίας βαθμίδας, μηχανισμός Higgs

Ας προχωρήσουμε τώρα λίγο παρακάτω και ας δούμε τι συμβαίνει στη περίπτωση αυθόρμητου σπασίματος μιας τοπικής συμμετρίας βαθμίδας. Σε αναλογία με την παραπάνω περίπτωση ας θεωρήσουμε και εδώ τοπική U(1) συμμετρία βαθμίδας. Τότε η Lagrangian θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς:

$$\varphi \to \varphi' = e^{i\alpha(x)}\varphi \tag{4.18}$$

Επίσης, με βάση τα όσα έχουνε λεχθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, η Lagrangian θα έχει για την επίτευξη του αναλλοίωτου τη μορφή:

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* - [\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{4.19}$$

Πάλι θα πρέπει να προσδιορίσουμε το κενό της θεωρίας μας. Βρίσκουμε το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας (ο τρίτος όρος στη Lagrangian είναι απλά κιντηικός όρος για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο). Όπως και προηγουμένως θα είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi^*(\mu^2 + 2\lambda\varphi^*\varphi) \tag{4.20}$$

Και για $\mu^2 > 0$ παίρνουμε την τετριμμένη θεωρία ενός φορτισμένου βαθμωτού σωματιδίου μάζας μ και φορτίου e, που αλληλεπιδρά με το άμαζο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η ενδιαφέρουσα όμως φυσική θα προκύψει εάν θεωρήσουμε $\mu^2 < 0$. Τότε σε αντιστοιχία με τα όσα έχουμε πει παραπάνω θα πάρουμε το κενό της θεωρίας μας στην περιοχή:

$$|\varphi| = \frac{\upsilon}{\sqrt{2}} = \Big(- \frac{\mu^2}{2\lambda}\Big)^{1/2} \tag{4.21}$$

Δηλαδή:

$$\langle 0|\varphi|0\rangle = \frac{\upsilon}{\sqrt{2}} \tag{4.22}$$

Θεωρούμε τώρα το πεδίο φ στη μορφή:

$$\varphi = \frac{\varphi'_1 + i\varphi'_2}{\sqrt{2}} \tag{4.23}$$

Ενώ μεταφερόμενοι στα φυσικά πεδία και εκτελώντας το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, διαλέγοντας δηλαδή ένα από τα πολλά κενά για τη θεωρία μας και εκτελώντας διεγέρσεις γύρω από αυτό, θα έχουμε:

$$\varphi = \frac{\upsilon + \varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{4.24}$$

όπου

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi_2|0\rangle = 0 \tag{4.25}$$

Η Lagrangian λοιπόν, θα γίνει συναρτήσει των φυσικών πεδίων:

$$L = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* - [\mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{4.26}$$

Αναλύοντας κάθε όρο ξεχωριστά, θα έχουμε, ξεκινώντας από τον κινητικό όρο της Lagrangian:

$$T = (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi(\partial^\mu - ieA^\mu)\varphi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{4.27}$$

Ο δεύτερος όρος παραμένει ως έχει.
Για τον πρώτο όρο έχουμε:

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\Big(\frac{\upsilon+\varphi_1+i\varphi_2}{\sqrt{2}}\Big)(\partial_\mu - ieA^\mu)\Big(\frac{\upsilon+\varphi_1-i\varphi_2}{\sqrt{2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[[(\partial_\mu\varphi_1 - e\varphi_2 A_\mu) + i(\partial_\mu\varphi_2 + e\varphi_1 A_\mu + e\upsilon A_\mu)] \times [(\partial^\mu\varphi_1 - e\varphi_2 A^\mu) - i(\partial^\mu\varphi_2 + e\varphi_1 A^\mu + e\upsilon A^\mu)] = \Big] \tag{4.28}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\partial_\mu\varphi_1 - e\varphi_2 A_\mu)^2 + (\partial_\mu\varphi_2 + e\varphi_1 A_\mu + e\upsilon A_\mu)^2] = \tag{4.29}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 + \frac{1}{2}e^2\upsilon^2 A_\mu A^\mu + e\upsilon(\partial^\mu\varphi_2)A_\mu \tag{4.30}$$

$$+\frac{1}{2}[(e\varphi_2 A_\mu)^2 + (e\varphi_1 A_\mu)^2] + e^2\upsilon\varphi_1(A_\mu)^2 - e(\partial_\mu\varphi_1)\varphi_2 A^\mu + e(\partial_\mu\varphi_2)\varphi_1 A^m u \tag{4.31}$$

Γράφοντας τους όρους της δυναμικής ενέργειας:

$$V = \mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 = -\lambda\upsilon^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \tag{4.32}$$

Είναι:

$$\varphi^*\varphi = \Big(\frac{\upsilon+\varphi_1-i\varphi_2}{\sqrt{2}}\Big)\Big(\frac{\upsilon+\varphi_1+i\varphi_2}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}[(\upsilon+\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2]$$

$$\frac{1}{2}[\upsilon^2 + (\varphi)^2 + 2\upsilon\varphi_1 + (\varphi_2)^2] \tag{4.33}$$

$$(\varphi^*\varphi)^2 = \frac{1}{4}[\upsilon^4 + (\varphi_1)^4 + 4\upsilon^2(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^4 + 2\upsilon^2(\varphi_1)^2 + 4\upsilon^3\varphi_1 + 2\upsilon^2(\varphi_2)^2 \tag{4.34}$$

$$4\upsilon(\varphi_1)^3 + 2(\varphi_1)^2(\varphi_2)^2 + 4\upsilon\varphi_1(\varphi_2)^2] \tag{4.35}$$

$$-\lambda\upsilon^2\varphi^*\varphi = -\lambda\Big[\frac{1}{2}\upsilon^4 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_1)^2 + \upsilon^3\varphi_1 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_2)^2\Big] \tag{4.36}$$

$$\lambda(\varphi^*\varphi)^2 = \lambda\Big[\frac{\upsilon^4}{4} + \frac{1}{4}(\varphi_1)^4 + \frac{6}{4}\upsilon^2(\varphi_1)^2 + \frac{1}{4}(\varphi_2)^4 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_2)^2 + \upsilon^3\varphi_1 + \upsilon(\varphi_1)^3 \tag{4.37}$$

$$+\frac{1}{2}(\varphi_1)^2(\varphi_2)^2 + \upsilon\varphi_1(\varphi_2)^2\Big] \tag{4.38}$$

Οπότε:

$$V = -\lambda\Big[\frac{1}{2}\upsilon^4 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_1)^2 + \upsilon^3\varphi_1 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_2)^2\Big]$$
$$+\lambda\Big[\frac{\upsilon^4}{4} + \frac{1}{4}(\varphi_1)^4 + \frac{6}{4}\upsilon^2(\varphi_1)^2 + \frac{1}{4}(\varphi_2)^4 + \frac{1}{2}\upsilon^2(\varphi_2)^2 + \upsilon^3\varphi_1$$
$$\upsilon(\varphi_1)^3 + \frac{1}{2}(\varphi_1)^2(\varphi_2)^2 + \upsilon\varphi_1(\varphi_2)^2\Big]$$
$$V = \frac{\lambda}{4}(\varphi_1)^4 + \frac{\lambda}{4}(\varphi_2)^4 + \lambda\upsilon(\varphi_1)^3 + \lambda\upsilon^2(\varphi_1)^2 + \frac{\lambda}{2}(\varphi_1)^2(\varphi_2)^2 + \lambda\upsilon\varphi_1(\varphi_2)^2 - \lambda\frac{\upsilon^4}{4} \tag{4.39}$$

Έτσι λοιπόν η Lagrangian συναρτήσει των φυσικών πεδίων θα γράφεται:

$$L = \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - \lambda\upsilon^2(\varphi_1)^2\Big] - \Big[\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^2\upsilon^2 A_\mu A^\mu\Big]$$
$$e\upsilon(\partial^\mu\varphi_2)A_\mu \tag{4.40}$$
$$+\Big[\frac{1}{2}[(e\varphi_2 A_\mu)^2 + (e\varphi_1 A_\mu)^2] + e^2\upsilon\varphi_1(A_\mu)^2 - e(\partial_\mu\varphi_1)\varphi_2 A^\mu \tag{4.41}$$
$$+e(\partial_\mu\varphi_2)\varphi_1 A^\mu\Big] \tag{4.42}$$
$$-\Big[\frac{\lambda}{4}(\varphi_1)^4 + \frac{\lambda}{4}(\varphi_2)^4 + \lambda\upsilon(\varphi_1)^3 + \frac{\lambda}{2}(\varphi_1)^2(\varphi_2)^2 + \lambda\upsilon\varphi_1(\varphi_2)^2\Big] \tag{4.43}$$
$$+\lambda\frac{\upsilon^4}{4} \tag{4.44}$$

Σε αυτό το σημείο απαιτείται μια ανάλυση των όρων που μας προέκυψαν. Αρχικά έχουμε δύο κινητικούς όρους για τα δύο φυσικά πεδία μας φ_1 και φ_2. Αυτοί φαίνονται στην πρώτη αγκύλη. Σε αυτήν υπάρχει επίσης ένας όρος μάζας για το πεδίο φ_1. Συγκεκριμένα: $m^2 = 2\lambda\upsilon^2$. Το πεδίο φ_2 παραμένει άμαζο (μποζόνιο Goldstone). Στη δεύτερη αγκύλη έχουμε αναφορά στο πεδίο A_μ. Εκεί υπάρχει ένας κινητικός όρος για το πεδίο αυτό καθώς και ένας όρος μάζας. Η μάζα του πεδίου A_μ είναι: ${m_A}^2 = e^2\upsilon^2$. Ο ακριβώς επόμενος όρος είναι ένας όρος μίξης των πεδίων A_μ και φ_2, ένας τέτοιος όρος όμως είναι γενικά ανεπιθύμητος. Αυτό το γεγονός κάνει το φ_2 πλέον να μην συμπεριφέρεται ως ένα φυσικό πεδίο. Οι επόμενοι όροι που εφανίζονται είναι όροι αλληλεπίδρασης των πεδίων μεταξύ τους και με τον εαυτό τους, δεύτερης, τρίτης και τέταρτης τάξης. Τέλος εμφανίζεται και μια σταθερά.
Γυρνώντας λοιπόν τώρα στον ανεπιθύμητο όρο μίξης, σκεφτόμαστε εάν θα μπορούσαμε με κάποιο τρόπο να τον εξαφανίσουμε. Η διαδικασία επιτυγχάνεται μέσω του μετασχηματισμού βαθμίδας. Είναι δηλαδή:

$$\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi \tag{4.45}$$

που για απειροστούς μετασχηματισμούς ισχύει:

$$\varphi \to (1 + i\alpha)\varphi \tag{4.46}$$

Επίσης όπως ορίσαμε παραπάνω:

$$\varphi = \frac{\upsilon + \varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{4.47}$$

Οπότε

$$\frac{\upsilon + \varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \to (1+i\alpha)\frac{\upsilon + \varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{gathered}\varphi_1 \to \varphi_1 - \alpha\varphi_2 \\ \varphi_2 \to \varphi_2 + \alpha\varphi_1 + \alpha\upsilon\end{gathered} \tag{4.48}$$

Όπως φαίνεται από εδώ το πεδίο φ_2 ακολουθεί έναν μη ομογενή μετασχηματισμό. Ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί και σε περιστροφή αλλά και σε μετατόπιση στον εσωτερικό χώρο φ_1, φ_2. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να το εξαφανίσουμε. Θεωρούμε λοιπόν και πάλι ότι υπάρχει ένα κατάλληλο α το οποίο μπορούμε να διαλέξουμε έτσι ώστε να επιτύχουμε $\varphi_2 = 0$. Τότε λοιπόν λέμε ότι δουλεύουμε στη φυσική ή μοναδιακή βάθμίδα όπου το όνομα προκύπτει λόγω εμφάνισης στη βαθμίδα αυτή μόνο φυσικών πεδίων. Στη φυσική βαθμίδα λοιπόν η Lagrangian γράφεται:

$$L = \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 - \lambda\upsilon^2(\varphi_1)^2\Big] - \Big[\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}e^2\upsilon^2 A_\mu A^\mu\Big] \tag{4.49}$$

$$+\Big[\frac{1}{2}(e\varphi_1 A_\mu)^2 + e^2\upsilon\varphi_1(A_\mu)^2\Big] - \Big[\frac{\lambda}{4}(\varphi_1)^4 + \lambda\upsilon(\varphi_1)^3\Big] + \lambda\frac{\upsilon^4}{4} \tag{4.50}$$

Η Lagrangian αυτή περιέχει πλέον δύο φυσικά πεδία. Ένα πεδίο βαθμίδας A_μ και ένα βαθμωτό πεδίο φ_1. Πλέον και τα δύο πεδία μας έχουν αποκτήσει μάζα.
Με τη μεταφορά λοιπόν στη μοναδιακή βαθμίδα, το ανεπιθύμητο βαθμωτό πεδίο (μποζόνιο Goldstone) φ_2, έχει εξαφανιστεί και στη θέση του **το πεδίο βαθμίδας της τοπικής συμμετρίας βαθμίδας (εδώ φωτόνιο) έχει αποκτήσει μάζα. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως μηχανισμός Higgs**. Αξίζει εδώ επίσης να σημειώσουμε πως ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος έχει διατηρηθεί. Αρχικά είχαμε 1 βαθμό ελευθερίας για κάθε μαζικό βαθμωτό σωματίδιο και 2 για το άμαζο φωτόνιο. Σύνολο 4 βαθμοί ελευθερίας. Μετά το σπάσιμο έχουμε 1 βαθμό για το ένα μαζικό βαθμωτό πεδίο μας (φ_2) και 3 βαθμούς για το μαζικό φωτόνιο (2 εγκάρσιες και 1 διαμήκης). Σύνολο 4 βαθμοί ελευθερίας. Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε πως το πεδίο φ_2 το οποίο εισαγάμε ως διαταραχή στην κατάσταση κενού την οποία επιλέξαμε για το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, ονομάζεται σωματίδιο Higgs.

4.4 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής SU(2) συμμετρίας βαθμίδας

Ας εφαρμόσουμε τώρα το αυθόρμητο σπάσιμο και το μηχανισμό Higgs σε μια μεγαλύτερη τοπική συμμετρία βαθμίδας. Έστω λοιπόν ότι η Lagrangian μας είναι αναλλοίωτη κάτω από την τοπική $SU(2) \approx O(3)$ συμμετρία βαθμίδας. Στη περίπτωση της $O(3)$ συμμετρίας μπορούμε να εργαστούμε όπως και πρίν με ένα πεδίο τριών συνιστωσών. Συγκεκριμένα:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Στη περίπτωση τώρα της υπάρξεως της ισοδύναμης τοπικής συμμετρίας με την παραπάνω, δηλαδή $SU(2)$ μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάλυση χρησιμοποιώντας για το φ την εξής μορφή:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \begin{cases} \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)\cdot \\ \Phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 + i\varphi_4). \end{cases} \tag{4.52}$$

Η $SU(2)$ τοπικά αναλλοίωτη Lagrangian θα είναι:

$$L = (D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^+ - [\mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2] - \frac{1}{4}\boldsymbol{W}^{\mu\nu}\boldsymbol{W}_{\mu\nu} \tag{4.53}$$

Όπου όπως έχουμε βρεί σε προηγούμενη παράγραφο:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2\frac{\tau_i}{2}{W_\mu}^i = \partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu \tag{4.54}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{W}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{W}_\mu + g_2(\boldsymbol{W}_\mu \times \boldsymbol{W}_\nu) \tag{4.55}$$

Κατά τα γνωστά, ψάχνουμε το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας για να βρούμε το κενό της θεωρίας μας. Είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial\Phi} = \Phi^+(\mu^2 + 2\lambda\Phi^+\Phi) \tag{4.56}$$

Όπως και πριν διαλέγουμε την περίπτωση όπου $\mu^2 < 0$ και τότε είναι:

$$\begin{aligned} \Phi^+\Phi = \frac{\upsilon^2}{2} &= -\frac{\mu^2}{2\lambda} \\ \langle 0|\Phi|0\rangle &= \frac{\upsilon}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.57}$$

που ισχύει για το κενό της θεωρίας μας.
Προχωρούμε στο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας μας. Πρέπει να διαλέξουμε σε ποιά από τις τέσσερις συνιστώσες του πεδίου Φ θα δώσουμε αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό. Μια πιθανή εκλογή είναι να πάρει την αναμενόμενη τιμή η τρίτη του συνιστώσα. Οπότε και οι αναμενόμενες τιμές ως προς το κενό των συνιστωσών του Φ θα είναι:

$$\langle 0|\varphi_1|0\rangle = \langle 0|\varphi_2|0\rangle = \langle 0|\varphi_4|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\varphi_3|0\rangle = \upsilon \tag{4.58}$$

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\langle 0|\Phi|0\rangle \equiv= \Phi_0 = \begin{pmatrix} \langle 0|\Phi^+|0\rangle \\ \langle 0|\Phi^0|0\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

Η συμμετρία έχει σπάσει στη βασική κατάσταση της θεωρίας μας. Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για τα φυσικά πεδία της θεωρίας. Τα πεδία αυτά δεν είναι άλλα, από τα πεδία που προκύπτουν από τις κβαντικές διεγέρσεις της βασικής κατάστασης του κενού.
Για τη διέγερση ισχύει:

$$\Phi' = \Phi_0 + \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \upsilon + \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

Τα τέσσερα αυτά πεδία αναπτυσσόμενα μέσα στη Lagrangian εμφανίζουν όρους σύζευξης των παραγώγων τους με τους όρους των πεδίων βαθμίδας. Επιπλεόν πρόβλημα αποτελεί το ότι παραμένουν άμαζα βαθμωτά σωματίδια. Συνεπώς, αποφαινόμαστε ότι στα πεδία αυτά πρέπει να αποδωθεί η ιδιότητα των would-be Goldstone bosons. Διαλέγουμε στην συνέχεια έναν κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας και έπειτα δουλεύουμε στην μοναδιακή βαθμίδα, όπου εκεί θα εμφανιστούν μόνο τα επιθυμητά φυσικά πεδία. Μετά το μετασχηματισμό επομένως θα ισχύει:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4 \to 0, \quad \varphi_3 \to h(x) \tag{4.61}$$

Εξαφανίστηκαν επομένως όλα τα would-be Goldstone bosons και έμεινε μονάχα το πεδίο Higgs. Γράφοντας τώρα ξανά τη διαταραχή γύρω από τη μοναδιακή βαθμίδα είναι τελικά:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

Η Lagrangian στη βασική αυτή κατάσταση θα είναι:

$$L = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^+ - [\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2] - \frac{1}{4} \boldsymbol{W}^{\mu\nu} \boldsymbol{W}_{\mu\nu} \tag{4.63}$$

Εφαρμόζοντας τη διαταραχή θα έχουμε για κάθε όρο χωριστά:

$$(D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^+ = \left[\left(\partial_\mu - i g_2 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \boldsymbol{W}_\mu \right) \Phi \right] \left[\left(\partial^\mu - i g_2 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \boldsymbol{W}^\mu \right) \Phi \right]^+ \tag{4.64}$$

όπου εδώ:

$$\boldsymbol{\tau W}_\mu = \tau^1 {W_\mu}^1 + \tau^2 {W_\mu}^2 + \tau^3 {W_\mu}^3$$

$$\boldsymbol{\tau W}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {W_\mu}^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} {W_\mu}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {W_\mu}^3$$

$$\boldsymbol{\tau W}_\mu = \begin{pmatrix} {W_\mu}^3 & {W_\mu}^1 - i{W_\mu}^2 \\ {W_\mu}^1 + i{W_\mu}^2 & -{W_\mu}^3 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Και έτσι ο επιπλέον όρος στη Lagrangian θα γίνει:

$$D_\mu\Phi = \Big(\partial_\mu - ig_2\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{W}_\mu\Big)\Phi = \left[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - i\frac{g_2}{2}\begin{pmatrix} {W_\mu}^3 & {W_\mu}^1 - i{W_\mu}^2 \\ {W_\mu}^1 + i{W_\mu}^2 & -{W_\mu}^3 \end{pmatrix}\right]\Phi$$
$$D_\mu\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \partial_\mu - i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3 & -i\frac{g_2}{2}({W_\mu}^1 - i{W_\mu}^2) \\ -i\frac{g_2}{2}({W_\mu}^1 + i{W_\mu}^2) & \partial_\mu + i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix}$$
$$D_\mu\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\frac{g_2}{2}({W_\mu}^1 - i{W_\mu}^2)(\upsilon + h) \\ \partial_\mu h + i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3(\upsilon + h) \end{pmatrix}$$
$$D_\mu\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{g_2}{2}{W_\mu}^2(\upsilon + h) - i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^1(\upsilon + h) \\ \partial_\mu h + i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3(\upsilon + h) \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

Έτσι αντίστοιχα θα έχουμε:

$$(D_\mu\Phi)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{g_2}{2}W^{2\mu}(\upsilon + h) + i\frac{g_2}{2}W^{1\mu}(\upsilon + h) & \partial^\mu h - i\frac{g_2}{2}W^{3\mu}(\upsilon + h) \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

Ο κινητικός όρος θα γίνει:

$$(D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^+ \tag{4.68}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{g_2}{2}{W_\mu}^2(\upsilon + h) - \frac{g_2}{2}{W_\mu}^1(\upsilon + h)\Big]\Big[-\frac{g_2}{2}W^{2\mu}(\upsilon + h) + \frac{g_2}{2}W^{1\mu}(\upsilon + h)\Big] \tag{4.69}$$
$$+\Big[\partial_\mu h + i\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3(\upsilon + h)\Big]\Big[\partial^\mu h - i\frac{g_2}{2}W^{3\mu}(\upsilon + h)\Big] \tag{4.70}$$
$$(D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^+ \tag{4.71}$$
$$\frac{1}{2}\Big[\frac{g_2}{2}{W_\mu}^2(\upsilon + h)\Big]^2 + \Big[\frac{g_2}{2}{W_\mu}^1(\upsilon + h)\Big]^2 + (\partial_\mu h)^2 + \Big[\frac{g_2}{2}{W_\mu}^3(\upsilon + h)\Big]^2 \tag{4.72}$$
$$(D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^+ \tag{4.73}$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{(g_2)^2\upsilon^2}{8}[({W_\mu}^1)^2 + ({W_\mu}^2)^2 + ({W_\mu}^3)^2] \tag{4.74}$$
$$+\frac{(g_2)^2\upsilon^2}{8}(2\upsilon h + h^2)[({W_\mu}^1)^2 + ({W_\mu}^2)^2 + ({W_\mu}^3)^2] \tag{4.75}$$

Όπου εδώ διακρίνουμε έναν κινητικό όρο για το πεδίο Higgs και τρείς όρους μάζας για τα τρεία πεδία βαθμίδας. Υπάρχουν τέλος και διάφοροι όροι αλληλεπίδρασης των πεδίων βαθμίδας με το σωματίδιο Higgs. Προχωρώντας τώρα παρακάτω, το υπόλοιπο σκέλος της κινητικής ενέργειας στη Lagrangian, ο κινητικός όρος για τα πεδία βαθμίδας, παραμένει ανεπηρέαστος.
Για τη δυναμική ενέργεια θα ισχύει:

$$V = \mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 = -\lambda\upsilon^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 \tag{4.76}$$
$$V = \frac{\lambda}{4}h^4 + \lambda\upsilon h^3 + \lambda\upsilon^2h^2 - \lambda\frac{\upsilon^4}{4} \tag{4.77}$$

Γράφοντας όλους τους όρους επομένως στη φυσική βάση θα είναι:

$$L = T - V = \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{4}\boldsymbol{W} \tag{4.78}$$

$$+\Big[\frac{(g_2)^2\upsilon^2}{8}[(W_\mu{}^1)^2 + (W_\mu{}^2)^2 + (W_\mu{}^3)^2] - \lambda\upsilon^2 h^2\Big] + \frac{(g_2)^2}{8}(2\upsilon h + h^2)[(W_\mu{}^1)^2 + (W_\mu{}^2)^2 + (W_\mu{}^3)^2] + \frac{\lambda}{4}h^4 + \lambda\upsilon \tag{4.79}$$

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα της περιγραφής της Lagrangian ισχύει για τη πρώτη αγκύλη, ότι υπάρχουν τέσσερις κινητικοί όροι των πεδίων. Στη δεύτερη αγκύλη υπάρχουν οι τέσσερις όροι μάζαας για τα τρία πεδία βαθμίδας και το σωματίδιο Higgs. Τέλος υπάρχουν και οι όροι αλληλεπίδρασης των πεδίων τρίτης και τέταρτης τάξης καθώς και μια σταθερά. Οι μάζες των πεδίων που βρέθηκαν είναι:

$$M_{W^1} = M_{W^2} = M_{W^3} = \frac{\upsilon g_2}{2}, \quad m_h = \sqrt{2\lambda}\upsilon \tag{4.80}$$

Έχουμε λοιπόν παρουσιάσει το αυρθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Μένει να δούμε πώς θα ενσωματώσουμε το μηχανισμό αυτό στη θεωρία του Καθιερωμένου Προτύπου.

4.5 Μοντέλο Weinberg - Salam $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Αρχικά, θα μας απασχολήσει η περιγραφή των φερμιονίων. Η Lagrangian του Dirac είναι:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{4.81}$$

Θεωρώντας μηδενική μάζα:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi \tag{4.82}$$

Επίσης, γράφουμε:

$$\psi_L = \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\psi, \qquad \psi_R = \Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big)\psi \tag{4.83}$$

και τελικά η Εξ.(4.81) για φερμιόνια:

$$\begin{aligned} &L = i\overline{\psi_L + \psi_R}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}(\psi_L + \psi_R) \Rightarrow \\ &L = i\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L + i\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R + i\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L \Rightarrow \\ &L = i\bar{\psi}_R\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L \end{aligned} \tag{4.84}$$

αφού:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R &= \left[\overline{\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\psi}\right]\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big)\psi \Rightarrow \\ &= \bar{\psi}\Big(\overline{\frac{1-\gamma_5}{2}}\Big)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big)\psi \Rightarrow \\ &= \bar{\psi}\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big)\psi \end{aligned} \tag{4.85}$$

και

$$\Big\{\frac{1-\gamma_5}{2}, \gamma^{\mu}\Big\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\gamma^{\mu} = -\gamma^{\mu}\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big) \tag{4.86}$$

και τελικά η Εξ.(4.85) γίνεται:

$$\overline{\psi_L}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R = -\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big)\psi = 0 \tag{4.87}$$

αφού

$$\Big(\frac{1-\gamma_5}{2}\Big)\Big(\frac{1+\gamma_5}{2}\Big) = 0$$

Ανάλογα θα πάρουμε:

$$\overline{\psi_R}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L = 0 \tag{4.88}$$

Έτσι η Lagrangian (βλ. Εξ.(4.85)) θα γίνει:

$$L = i\overline{\psi_R}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R + i\overline{\psi_L}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L \tag{4.89}$$

4.5.1 Αναπαραστάσεις των σωματιδίων και απόδοση φορτίων

Ας πάμε να περιγράψουμε τα σωματίδια με την βοήθεια των σπινόρων. Αρχικά εισάγουμε τα άμαζα νετρίνα. Από την Εξ.(4.81) ο όρος μάζας μπορεί να γραφεί:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi_R}\psi_L + \bar{\psi_L}\psi_R) \tag{4.90}$$

Συνεπώς για να προκύπτει μηδενικός όρος μάζας για τα νετρίνα θα πρέπει να απαιτήσουμε να έχουν μόνο μια συνιστώσα. Απαιτούμε επομένως να έχουν μόνο την αριστερόστροφη συνιστώσα και μηδενική δεξιόστροφη.
Άρα η Lagrangian για τα νετρίνα, θα γραφεί:

$$L_{leptons} = i\overline{e_R}\gamma^\mu\partial_\mu e_R + i\overline{e_L}\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL} + i\overline{\mu_R}\gamma^\mu\partial_\mu\mu_R + \tag{4.91}$$

$$i\overline{\mu_L}\gamma^\mu\partial_\mu\mu_L + i\overline{\nu_{\mu L}}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{\mu L} + i\overline{\tau_R}\gamma^\mu\partial_\mu\tau_R + i\overline{\tau_L}\gamma^\mu\partial_\mu\tau_L + i\overline{\nu_{\tau L}}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{\tau L} \tag{4.92}$$

Για λόγους απλότητας θα υπολογιστούν μόνο οι τρείς πρώτοι όροι, που αφορούν τα στοιχεία της πρώτης οικογένειας. Συνεπώς:

$$L_{leptons,gen1} = i\overline{e_R}\gamma^\mu\partial_\mu e_R + i\overline{e_L}\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\overline{\nu_{eL}}\gamma^\mu\partial_\mu\nu_{eL} \tag{4.93}$$

Θα σχηματιστεί ακολούθως μια περιγραφή, που θα διαγράφει την συμμετρία που κατέχει αυτή η Lagrangian. Θα πρέπει τα σωματίδια να υπακούουν σε συμμετρίες στροφής μέσα στο χωρόχρονο και απευθείας γράφεται ο ακόλουθος isospinor:

$$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \overline{l_L} = \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{e_L} \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

Στη παραπάνω διπλέττα που σχηματίστηκε, αποδίδεται ένα μη-Αβελιανό φορτίο $I_W = \frac{1}{2}$, όπου αυτό ακριβώς είναι το ασθενές isospin (σε αντιστοιχία με το ισχυρό isospin του πρωτονίου και του νετρονίου). Για τις τρίτες συνιστώσες των δύο στοιχείων της (4.94), θα είναι για το νετρίνο: ${I_W}^3 = \frac{1}{2}$ και για το ηλεκτρόνιο ${I_W}^3 = -\frac{1}{2}$.
Αντίστοιχα, η δεξιόστροφη συνιστώσα του ηλεκτρονίου θα σχηματίζει την singlet κατάσταση:

$$l_R = e_R, \quad \overline{l_R} = \overline{e_R} \tag{4.95}$$

αφού η δεξιόστροφη συνιστώσα νετρίνου αποκλείστηκε. Το αντίστοιχο ασθενές isospin $I_W = {I_W}^3 = 0$. Έτσι η Lagrangian μπορεί να γραφεί:

$$L_{gen1,leptons} = i\overline{l_R}\gamma^\mu\partial_\mu l_R + i\overline{l_L}\gamma^\mu\partial_\mu l_L \tag{4.96}$$

Ακολούθως φαίνεται η αναλλοιώτητα της Lagrangian κάτω από SU(2) μετασχηματισμούς. Οι μετασχηματισμοί θα έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} l_L &\rightarrow e^{-i\alpha\frac{\tau}{2}} l_L \\ l_R &\rightarrow l_R \end{aligned} \tag{4.97}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\alpha\frac{\tau}{2}} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.98}$$

Τέλος, το φορτίο συνδέεται με το ασθενές isospin, ως ακολούθως:

$$l_L : Q = {I_W}^3 - \frac{1}{2}, \quad l_R : Q = {I_W}^3 - 1 \tag{4.99}$$

αφού γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρόνιο έχει φορτίο -1 και το νετρίνο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Τώρα τα παραπάνω πρέπει να εκφραστούν σαν συμμετρία βαθμίδας (βλ. §2.3 Εσωτερικές Εκτεταμένες συμμετρίες) Αυτό σημαίνει πως πρέπει το α να εξαρτάται από το χωρόχρονο. Έτσι θα προκύψουν τρία άμαζα πεδία βαθμίδας. Προσοχή όμως! Το φωτόνιο δεν μπορεί να είναι ένα από αυτά. Θα πρέπει αντιθέτως, η δεξιόστροφη συνιστώσα του ηλεκτρονίου να αλληλεπιδρά με τα πεδία βαθμίδας μας (ως singlet) και άρα και με το φωτόνιο. Τελικά, θα πρέπει να υπάρχει και μια ακόμη συμμετρία που θα υπακούει η Lagrangian της εξίσωσης (4.91). Ο απλούστερος μετασχηματισμός που δοκιμάζεται αρχικά είναι ενας U(1) μετασχηματισμός της δεξιόστροφης συνιστώσας του ηλεκτρονίου. Πράγματι η Lagrangian παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό:

$$e_R \rightarrow e^{i\beta} e_R \tag{4.100}$$

Τότε όμως οι σπίνορες μας πρέπει να τροποποιηθούν ως:

$$U(1) : \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{in\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

Δηλαδή θα πρέπει στους αριστερόστροφους σπίνορες της Εξ. (4.98) να προστεθεί η φάση $e^{i\beta}$, που ταυτόχρονα όμως θα διαφοροποιεί τη φάση της δεξιόστροφης συνιστώσας. Για το καθορισμό του n παρατηρούμε ότι η U(1) συμμετρία θα μας δώσει ένα διατηρούμενο φορτίο. Το νετρίνο και η αριστερόστροφη συνιστώσα του ηλεκτρονίου παίρνουν διαφορετικές τιμές - άρα το πεδίο βαθμίδας της θεωρίας Weinberg - Salam διαφοροποιείται από το ηλεκτρομαγνητικό. Ο Weinberg πρότεινε τον ορισμό του ασθενούς υπερφορτίου:

$$Q = {I_W}^3 + \frac{Y_W}{2} \tag{4.102}$$

Από τη σύγκριση με τις εξισώσεις (4.99) είναι:

$$l_L : Y_W = -1, \quad l_R : Y_W = -2 \tag{4.103}$$

Άρα και οι σπίνορες θα μετασχηματίζονται επομένως ως:

$$U(1) : \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

Ενώ η Lagrangian είναι αναλλοίωτη κάτω από $SU(2)_L \times U(1)_Y$ μετασχηματισμούς. Αυτό που απομένει είναι να μετατραπεί η συμμετρία αυτή σε συμμετρία βαθμίδας.
Σε αυτό το σημείο θα προσθέσουμε και τα quarks. Πάλι, η Lagrangian για τα φερμιόνια (βλ. Εξ. (4.82)):

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{4.105}$$

(όμοια με την Lagrangian των νετρίνων)

$$\begin{aligned} L^{quarks} = & i\overline{u_R}\gamma^\mu\partial_\mu u_R + i\overline{u_L}\gamma^\mu\partial_\mu u_L + i\overline{d_R}\gamma^\mu\partial_\mu d_R + i\overline{d_L}\gamma^\mu\partial_\mu d_L + \\ & + i\overline{c_R}\gamma^\mu\partial_\mu c_R + i\overline{c_L}\gamma^\mu\partial_\mu c_L + i\overline{s_R}\gamma^\mu\partial_\mu s_R + i\overline{s_L}\gamma^\mu\partial_\mu s_L + \\ & i\overline{t_R}\gamma^\mu\partial_\mu t_R + i\overline{t_L}\gamma^\mu\partial_\mu t_L + i\overline{b_R}\gamma^\mu\partial_\mu b_R + i\overline{b_L}\gamma^\mu\partial_\mu b_L \end{aligned} \tag{4.106}$$

Για την απλοποίηση των υπολογισμών θα αναφερόμαστε μόνο στη πρώτη γενεά:

$$L^{gen1,quarks} = i\overline{u_R}\gamma^\mu\partial_\mu u_R + i\overline{u_L}\gamma^\mu\partial_\mu u_L + i\overline{d_R}\gamma^\mu\partial_\mu d_R + i\overline{d_L}\gamma^\mu\partial_\mu d_L$$

Επίσης, οι αριστερόστροφες συνιστώσες των quarks συμπεριφέρονται ως διπλέττες κάτω από την συμμετρία $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ενώ οι δεξιόστροφες συνιστώσες ως singlet. Επιπλέον, με τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς βρίσκουμε και τα φορτία.

Σωματίδιο	Σπίνορας	I_W	${I_W}^3$	Y_W	Q
$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_L \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}$	l_L	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
e_R, μ_R , τ_R	l_R	0	0	-2	-1
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	Q_L	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
u_R , c_R , t_R	U_R	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
d_R , s_R, b_R	D_R	0	0	- $\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Η ολική Lagrangian της θεωρίας των Weinberg-Salam περιέχει όλα τα παραπάνω σωμάτια και επομένως θα είναι αναλλοίωτη κάτω από $SU(2)_L \times U(1)_Y$ τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αρχικά θέλοντας να μετατρέψουμε την SU(2) σε τοπική συμμετρία βαθμίδας, αντικαθιστούμε την παράγωγο με την αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγο (εξάρτηση του $\boldsymbol{\alpha}$ από τον χωρόχρονο).

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} \tag{4.107}$$

Όπως όμως φάνηκε και παραπάνω, η συναλλοίωτη παράγωγος θα αναφέρεται μόνο με στις αλληλεπιδράσεις με τις διπλέττες των σωματιδίων και όχι σε εκείνες των μονών καταστάσεων, αφού όπως είδαμε αυτές ανήκουν στην αναπαράσταση U(1). Άρα:

$$D_\mu l_L = \partial_\mu l_L - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu}\boldsymbol{l_L} D_\mu Q_L = \partial_\mu Q_L - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} Q_L$$

Στη συνέχεια μετατρέπουμε την $U(1)$ συμμετρία σε συμμετρία βαθμίδας. Επομένως, η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου βαθμίδας της $U(1)$ θα είναι:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu \tag{4.108}$$

και άρα το ασθενές υπερφορτίο έχει ήδη εισαχθεί.
Μετά τη αντικατάσταση των παραγώγων από τις συναλλοίωτες παραγώγους στη Lagrangian, στη συνέχεια γράφουμε τους κινητικούς όρους των εξισώσεων μας.
Η προσπάθεια για να γράψουμε συνοπτικά τη Lagrangian είναι:

$$L = L^{kin} + L_{\text{ύλης}} \tag{4.109}$$

Για τα τέσσερα πεδία βαθμίδας που έχουν εισαχθεί, η Lagrangian θα είναι (θα είναι της μορφής βλ. Εξ.(2.105)):

$$L^{kin} = -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\epsilon^{abc}A_\mu A_\nu)^2\right] - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \tag{4.110}$$

Οι αντίστοιχοι όροι μάζας της Lagrangian απορρίπτονται, λόγω της απαίτησης για αναλλοίωτο κάτω από τους προαναφερθέντες μετασχηματισμούς βαθμίδας.

$$\begin{aligned}
L_{\text{ύλη}} &= \sum_{\mathfrak{f}} i\bar{\mathfrak{f}}\gamma^\mu D_\mu \mathfrak{f} = \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big[i\overline{l_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu\Big)l_L + i\overline{l_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu\Big)l_R \\
&\quad + i\overline{Q_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu\Big)Q_L \\
&\quad + i\overline{U_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu\Big)U_R + i\overline{D_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - ig\frac{Y_W}{2}B_\mu\Big)D_R\Big] \Rightarrow \\
{L_{\text{ύλη}}}^{kin} &= \sum_{i=1}^{3}\Big[i\overline{l_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} - ig\frac{g}{2}B_\mu\Big)l_L + i\overline{l_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}B_\mu\Big)l_R \\
&\quad + i\overline{Q_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A_\mu} - i\frac{g}{6}B_\mu\Big)Q_L \\
&\quad + i\overline{U_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - ig\frac{2}{3}B_\mu\Big)U_R + i\overline{D_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{3}B_\mu\Big)D_R\Big]
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Τέλος, ελέγχουμε την ύπαρξη όρων μάζας της μορφής $m^2A^\mu A_\mu$. Όπως, προαναφέρθηκε όμως ένας τέτοιος όρος δεν παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η θεωρία λοιπόν των Weinberg - Salam αφορά άμαζα πεδία, δηλαδή άμαζα μποζόνια.

Από την άλλη πλευρά, τα φερμιόνια απαιτούν μάζα. Συγκεκριμένα, στην αρχή της παραγράφου είχαμε δεχθεί μηδενική μάζα (m=o). Αυτό θα αποτελεί και τη περιγραφή του φωτονίου. Αν προσπαθήσουμε να προσθέσουμε όρους μάζας για τα λεπτόνια και τα quarks της παραπάνω μορφής, τότε η εξίσωση Dirac:

$$m^2\bar{\mathfrak{f}}\mathfrak{f} = m^2(\overline{\mathfrak{f}_L}\mathfrak{f}_R + \overline{\mathfrak{f}_R}\mathfrak{f}_L) \tag{4.112}$$

Στην SU(2) όμως οι δεξιόστροφες και αριστερόστροφες συνιστώσεις των φερμιονίων έχουν διαφορετικές αναπαραστάσεις, παραβιάζοντας έτσι αυτή τη συμμετρία. Επομένως, δεν μπορεί να προβλεφθεί όρος μάζας για τα σωματίδια μας. (Λύση: Ο μηχανισμός Higgs).

4.6 Φερμιονικά Ρεύματα

Ξεκινάμε την μελέτη των κινητικών όρων της ύλης και από την Εξ. (;;) έχουμε (μελετάμε πάντα για διευκόλυνση μας την πρώτη γενεά σωματιδίων με τα ίδια ισχύοντα δεδομένα και για τις υπόλοιπες):

$$\begin{aligned} {L_{matter}}^{kin} = i\overline{l_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} + i\frac{g'}{2}B_\mu\Big)l_L + i\overline{l_R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)l_R \\ i\overline{Q_L}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} - i\frac{g'}{6}B_\mu\Big)Q_L + i\overline{U_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - i\frac{2g'}{3}B_\mu\Big)U_R \\ +i\overline{D_R}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu + i\frac{g'}{3}B_\mu\Big)D_R \end{aligned} \tag{4.113}$$

Όσοι όροι από τους παραπάνω περιέχουν την παράγωγο ∂_μ είναι οι κινητικοί όροι της Lagrangian. Δηλαδή, συνοπτικότερα:

$$\begin{aligned} L_0 = i\overline{l_L}\gamma^\mu\partial_\mu l_L + i\overline{l_R}\gamma^\mu\partial_\mu l_R + i\overline{Q_L}\gamma^\mu\partial_\mu Q_L + i\overline{U_R}\gamma^\mu\partial_\mu U_R + i\overline{D_R}\gamma^\mu\partial_\mu D_R \quad \text{ή} \\ L_0 = i\bar{l}\gamma^\mu\partial_\mu l + i\bar{q}\gamma^\mu\partial_\mu q, \quad \text{όπου } l \equiv e,\nu, \quad q \equiv u,d \end{aligned} \tag{4.114}$$

Οι υπόλοιποι όροι της Εξ.(4.113) είναι η εξίσωση ρεύματος για την Lagrange και πιο συγκεκριμένα θα φανεί ως εξής:

$$L_{currents} = i\overline{l_L}\gamma^\mu\Big(-i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} + i\frac{g'}{2}B_\mu\Big)l_L + i\overline{l_R}\gamma^\mu(ig'B_\mu)l_R$$
$$i\overline{Q_L}\gamma^\mu\Big(-i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} - i\frac{g'}{6}B_\mu\Big)Q_L + i\overline{U_R}\gamma^\mu\Big(-i\frac{2g'}{3}B_\mu\Big)U_R + i\overline{D_R}\gamma^\mu\Big(i\frac{g'}{3}B_\mu\Big)D_R$$
$$L_{currents} = \overline{l_L}\gamma^\mu\Big(\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} - \frac{g'}{2}B_\mu\Big)l_L - \overline{l_R}\gamma^\mu g'B_\mu l_R +$$
$$\overline{Q_L}\gamma^\mu\Big(\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} + \frac{g'}{6}B_\mu\Big)Q_L + \overline{U_R}\gamma^\mu\frac{2g}{3}B_\mu U_R - \overline{D_R}\gamma^\mu\frac{g'}{3}B_\mu D_R$$
$$L_{currents} = g\Big[\frac{1}{2}\overline{l_L}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau A_\mu}l_L + \frac{1}{2}\overline{Q_L}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau A_\mu}Q_L\Big] +$$
$$\frac{g'}{2}\Big[-\overline{l_L}\gamma^\mu l_L + \frac{1}{3}\overline{Q_L}\gamma^\mu Q_L - 2\overline{l_R}\gamma^\mu l_R + \frac{4}{3}\overline{U_R}\gamma^\mu U_R - \frac{2}{3}\overline{D_R}\gamma^\mu D_R\Big]B_\mu$$

Αναπτύσσοντας τον πρώτο από τους παραπάνω όρους, βλέπουμε:

$$\boldsymbol{\tau A_\mu} = \tau^1 {A_\mu}^1 + \tau^2 {A_\mu}^2 + \tau^3 {A_\mu}^3$$
$$\boldsymbol{\tau A_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}{A_\mu}^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}{A_\mu}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{A_\mu}^3$$
$$\boldsymbol{\tau A_\mu} = \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & {A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2 \\ {A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2 & -{A_\mu}^3 \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

δηλαδή ο πρώτος όρος θα είναι:

$$\frac{1}{2}\overline{l_L}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau A_\mu}l_L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & {A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2 \\ {A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2 & -{A_\mu}^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} \nu_L{A_\mu}^3 + e_L({A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2) \\ \nu_L({A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2 - e_L{A_\mu}^3) \end{pmatrix} \tag{4.116}$$
$$= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L){A_\mu}^3 + \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L){A_\mu}^1 - \frac{i}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L){A_\mu}^2 \tag{4.117}$$

Και τελικά ο πρώτος όρος:

$${L_{currents}}^1 = g\Big[\frac{1}{2}\bar{l}_L\gamma^\mu\boldsymbol{\tau A_\mu}l_L + \frac{1}{2}\overline{Q_L}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau A_\mu}Q_L\Big]$$
$$= g\Big[\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L){A_\mu}^3 \tag{4.118}$$
$$+\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L){A_\mu}^1 \tag{4.119}$$
$$-\frac{i}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L - \bar{d}_L\gamma^\mu u_L){A_\mu}^2\Big] \tag{4.120}$$

Αντίστοιχα ο δεύτερος όρος θα είναι:

$$\begin{aligned} {L_{currents}}^2 &= \frac{g'}{2}\Big[-\bar{l}_L\gamma^\mu l_L + \frac{1}{3}\overline{Q_L}\gamma^\mu Q_L - 2\bar{l}_R\gamma^\mu l_R + \frac{4}{3}\overline{U_R}\gamma^\mu U_R - \frac{2}{3}\overline{D_R}\gamma^\mu D_R\Big]B_\mu \\ &= \frac{g'}{2}\Big[-\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \frac{1}{3}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \frac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\mu d_L - 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R\Big]B_\mu \end{aligned} \tag{4.121}$$

Άρα όπως φαίνεται:

$$L'_{ulhs1}{}^{kin} = L_0 + L_{currents} = L_0 + ({L_{currents}}^1 + {L_{currents}}^2) \tag{4.122}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις θυμίζουν άμεσα τα ρεύματα Dirac και αναμένεται να έχουν την μορφή:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.123}$$

Δηλαδή οι όροι μέσα στις παρενθέσεις είναι τα ρεύματα Dirac. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε περίπτωση έχουμε τα ρεύματα φερμιονίων τα οποία αλληλεπιδρούν με τα πεδία βαθμίδας μας με ένταση ανάλογη των σταθερών ζεύξης. Ορίζουμε επομένως, τα φερμιονικά ρεύματα τα αντίστοιχα με τα πεδία βαθμίδας, ως εξής:

$$J^{1\mu} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}\gamma^\mu e_L + \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L) \tag{4.124}$$

$$J^{2\mu} = \frac{-i}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L - \bar{d}_L\gamma^\mu u_L \tag{4.125}$$

$$J^{3\mu} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L \tag{4.126}$$

$$J^{Y\mu} = -\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \frac{1}{3}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \frac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\mu d_L - 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R$$

Γράφουμε τη Lagrangian στην ακόλουθη μορφή επομένως:

$$L_{currents} = (gJ^{1\mu}{A_\mu}^1 + gJ^{2\mu}{A_\mu}^2) + (gJ^{3\mu}{A_\mu}^3 + \frac{g'}{2}J^{Y\mu}B_\mu) \tag{4.127}$$

Για τη συνέχεια θα μας απασχολήσει ο πρώτος όρος. Ορίζουμε τα φορτισμένα ρεύματα $J^{+\mu}, J^{-\mu}$ ως εξής:

$$J^{+\mu} = J^{1\mu} + iJ^{2\mu} \tag{4.128}$$

$$J^{-\mu} = J^{1\mu} - iJ^{2\mu} \tag{4.129}$$

Αντικαθιστώντας θα πάρουμε:

$$J^{+\mu} = (\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \tag{4.130}$$

$$J^{-\mu} = (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L) \tag{4.131}$$

Και στην συνέχεια ακολουθούμε αντίθετη πορεία. Εκφράζουμε τον όρο συναρτήσει των φορτισμένων ρευμάτων:

$$J^{1\mu} = \frac{1}{2}(J^{-\mu} + J^{+\mu}) \tag{4.132}$$

$$J^{2\mu} = \frac{i}{2}(J^{-\mu} - J^{+\mu}) \tag{4.133}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} g(J^{1\mu} {A_\mu}^1 + J^{2\mu} {A_\mu}^2) &= \frac{g}{\sqrt{2}}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}(J^{-\mu} + J^{+\mu}){A_\mu}^1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(J^{-\mu} - J^{+\mu}){A_\mu}^2\Big] \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}\Big[J^{+\mu}\Big(\frac{{A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2}{\sqrt{2}}\Big) + J^{-\mu}\Big(\frac{{A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2}{\sqrt{2}}\Big)\Big] \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}[J^{+\mu}{W_\mu}^+ + J^{-\mu}{W_\mu}^-] \end{aligned} \tag{4.134}$$

όπου εδώ έχουμε ορίσει τα νέα πεδία βαθμίδας:

$${W_\mu}^+ = \frac{{A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2}{\sqrt{2}} \tag{4.135}$$

$${W_\mu}^- = \frac{{A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2}{\sqrt{2}} \tag{4.136}$$

Έτσι έχουμε πάρει το κομμάτι της Lagrangian για τις λεγόμενες αλληλεπιδράσεις φορτισμένων ρευμάτων:

$${L_{\text{ρεύματα}}}^{\text{φορτισμένα}} = g(J^{1\mu}{A_\mu}^1 + J^{2\mu}{A_\mu}^2) \tag{4.137}$$

$$L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}[J^{+\mu}{W_\mu}^+ + J^{-\mu}{W_\mu}^-] \tag{4.138}$$

Ταυτόχρονα παραμένει το κομμάτι που αναφέρεται στις ουδέτερες αλληλεπιδράσεις:

$${L_{\text{ρεύματα}}}^{textrmoud'etera} = gJ^{3\mu}{A_\mu}^3 + \frac{g'}{2}J^{Y\mu}B_\mu \tag{4.139}$$

Η ανάλυση του κομματιού αυτού της Lagrange θα ακολουθήσει. Συνοπτικά, η Lagrangian θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} L = {L_{gauge}}^{kin} + {L_{\text{ύλης}}}^{kin} &= {L_{gauge}}^{kin} + L_0 + L_{currents} \\ &= {L_{gauge}}^{kin} + L_0 + {L_{\text{ρεύματα}}}^{\text{φορτισμένα}} + {L_{\text{ρεύματα}}}^{\text{ουδέτερα}} \end{aligned}$$

Δηλαδή είναι αυτή η Lagrange που όπως προαναφέρθηκε αποτυγχάνει να αποδόσει μάζες στα φερμιόνια και στα πεδία βαθμίδας.

4.7 Μηχανισμός Higgs

Ξεκινάμε ξανά από Lagrangian αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(2) \times U(1)$ η οποία περιγράφει εν γένει άμαζα πεδία. Όπως φαίνεται η Εξ. (4.110) περιλαμβάνει τέσσερα πεδία. Θεωρώντας πως το ένα από αυτά αντιστοιχεί στο φωτόνιο, τα εναπομείναντα πεδία θα είναι φορείς της ασθενής αλληλεπίδρασης.
Όπως ακριβώς και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα ορίσουμε ένα νέο βαθμωτό πεδίο, το πεδίο Higgs, ως ακολούθως:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 + i\varphi_4) \end{pmatrix} \tag{4.140}$$

Γυρίζουμε επομένως στην απόδοση κβαντικών αριθμών ασθενούς ισοτοπικού spin και υπερφορτίου στη διπλέττα.

$$Q = {I_W}^3 + \frac{Y_W}{2} \tag{4.141}$$

Το σωματίδιο Higgs θέλουμε να είναι ηλεκτρικό ουδέτερο, άρα:

$$I_W = \frac{1}{2}, \quad {I_W}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y = 1 \tag{4.142}$$

Το μόνο που απομένει είναι η απόδοση αναμενόμενης τιμής στο κενό, όπου το Higgs θα παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερο.
Τελικά, η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου Higgs θα έχει:

$$D_\mu \Phi = \Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} - i\frac{g'}{2}B_\mu\Big)\Phi \tag{4.143}$$

Δηλαδή στην Lagrangian που έχει καταγραφεί παραπάνω θα πρέπει να προστεθεί και ένας κινητικός όρος για το νέο πεδίο που εισήχθει:

$${L_\Phi}^{kin} = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi)^+ \tag{4.144}$$

Επιπλεόν θα προστεθεί και ένας όρος δυναμικής ενέργειας αντίστοιχος με εκείνους του προηγούμενου κεφαλαίου:

$${L_\Phi}^{dyn} = \mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 \tag{4.145}$$

Τέλος πέρα από την αλληλεπίδραση με τον εαυτό του και με τα πεδία βαθμίδας, το σωματίδιο higgs θα πρέπει να αλληλεπιδρά και μετα υπόλοιπα σωματίδια της θεωρίας μας, τα λεπτόνια κια τα quarks. Συνεπώς θα υπάρχει και ένας όρος στη Lagrangian της μορφής:

$$L_{Yukawa} = \sum_{i,j=1}^{3} ({f_l}^{(ij)} {\bar{l_L}}^{(i)} \Phi {l_R}^{(j)} + {f_u}^{(ij)} {\bar{Q_L}}^{(i)} \tilde{\Phi} {U_R}^{(j)} + {f_d}^{(ij)} {\bar{Q_L}}^{(i)} \Phi {D_R}^{(j)}) + \text{h. c.} \tag{4.146}$$

Οι συντελεστές ${f_l}^{(ij)}, {f_u}^{(ij)}$, κτλ. δίνουν την ισχύ της αλληλεπίδρασης του πεδίου higgs με τα αντίστοιχα κάθε φορά φερμιόνια. Ο συμβολισμός h.c. σημαίνει πως θεωρούμε το μιγαδικό συζυγές της παράστασης που προηγήθηκε.
Τελικά η Εξ. (;;) διαμορφώνεται ως εξής:

$$L = {L_{gauge}}^{kin} + {L_{\acute{\upsilon}\lambda\eta\varsigma}}^{kin} + ({L_\Phi}^{kin} - {L_\Phi}^{dyn} + L_{Yukawa}) \tag{4.147}$$

Κατά τα γνωστά πλέον, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, να επιλέξουμε την κατάσταση κενού της θεωρίας (αυθόρμητο σπάσιμο) και έπειτα βρίσκουμε τα φυσικά πεδία της θεωρίας, εκτελώντας κβαντικές διεγέρσεις γύρω από την κατάσταση αυτή του κενού.
Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} {L_\Phi}^{dyn} = V &= \mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 \\ \frac{\partial V}{\partial \Phi} &= \Phi^+(\mu^2 + 2\lambda\Phi^+\Phi) = 0 \\ \Phi^+\Phi &= \frac{\upsilon^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \\ \langle 0|\Phi|0\rangle &= \frac{\upsilon}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.148}$$

Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε ποιο θα είναι το κενό της θεωρίας μας. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως θέλουμε το σωματίδιο higgs να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο και για να γίνει αυτό, βάση των κβαντικών αριθμών που του έχουνε αποδοθεί, θα πρέπει να δώσουμε αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό στην τρίτη του συνιστώσα. Δηλαδή η βασική κατάσταση που επιλέγουμε θα είναι:

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = \langle 0|\phi_2|0\rangle = \langle 0|\phi_4|0\rangle = 0, \langle 0|\phi_3|0\rangle = \upsilon\langle 0|\Phi|0\rangle \equiv \Phi_0 = \begin{pmatrix} \langle 0|\Phi^+|0\rangle \\ \langle 0|\Phi^0|0\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας τη πρώτη φάση, η $SU(2) \times U(1)$ συμμετρία της Lagrange στη βασική της κατάσταση έχει σπάσει. Τα φυσικά πεδία της θεωρίας μας θα προκύψουν από ανάπτυξη γύρω από το κενό αυτό που έχουμε επιλέξει. Ορίζοντας τα πεδία, ${\phi_1}', {\phi_2}', {\phi_3}', {\phi_4}'$, διαταρακτικά των αντίστοιχων $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$,θα έχουμε:

$$\Phi_0 + \Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} {\phi_1}' + i{\phi_2}' \\ \upsilon + {\phi_3}' + i{\phi_4}' \end{pmatrix} \tag{4.149}$$

Ακολουθώντας τη συλλογιστική πορεία του προηγούμενου κεφαλαίου, βλέπουμε πως από τα τέσσερα βαθμωτά πεδία που εισήχθησαν ως διαταραχές γύρω από τη κατάσταση κενού, τα τρία από αυτά θα είναι would-be Goldstone bosons, και το τελευταίο από αυτά θα αποκτήσει μάζα. Εκτελώντας λοιπόν τον κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας, αφού άλλωστε δουλεύουμε τοπικά, μεταφερόμαστε στη μοναδιακή βαθμίδα όπου εκεί θα είναι:

$$\phi_1, \phi_2, \phi_4 \to 0, \quad \phi_3 \to h(x) \tag{4.150}$$

Επομένως, εξαφανίστηκαν όλα τα would-be Goldstone bosons και έμεινε μόνο ένα πεδίο, το πεδίο Higgs. Γράφουμε επομένως ξανά την διαταραχή γύρω από το κενό στη μοναδιακή βαθμίδα:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix} \tag{4.151}$$

Όλοι οι όροι της Lagrangian θα παραμείνουν ίδιοι, εκτός από αυτούς που αναφέρονται στο higgs.
Για τον κινητικό όρο θα ισχύει:

$$D_\mu \Phi = \Big(\partial_\mu - i\frac{g}{2}\boldsymbol{\tau A_\mu} - i\frac{g'}{2}B_\mu\Big)\Phi \tag{4.152}$$

Ισχύει όμως για τα παραπάνω:

$$\boldsymbol{\tau A_\mu} = \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & {A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2 \\ {A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2 & -{A_\mu}^3 \end{pmatrix} \tag{4.153}$$

Άρα:

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg[\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu \end{pmatrix} - i\frac{g}{2}\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & {A_\mu}^1 - i{A_\mu}^2 \\ {A_\mu}^1 + i{A_\mu}^2 & -{A_\mu}^3 \end{pmatrix} - i\frac{g'}{2}\begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \partial_\mu - i\Big(\frac{g}{2}{A_\mu}^3\Big) & -\frac{g}{2}({A_\mu}^2 + i{A_\mu}^1) \\ \frac{g}{2}({A_\mu}^2 - i{A_\mu}^1) & \partial_\mu + i\Big(\frac{g}{2}{A_\mu}^3 - \frac{g'}{2}B_\mu\Big) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix}$$

$$D_\mu \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{g}{2}[{A_\mu}^2(\upsilon + h) + i{A_\mu}^1(\upsilon + h)] \\ \partial_\mu h + i\frac{1}{2}(g{A_\mu}^3 - g'B_\mu)(\upsilon + h) \end{pmatrix}$$

Όμοια θα είναι:

$$(D^\mu \Phi)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{g}{2}[A^{2\mu}(\upsilon + h) - A^{1\mu}(\upsilon + h)]\partial^\mu h - i\frac{1}{2}(gA^{3\mu} - g'B_\mu)(\upsilon + h)\Big) \tag{4.154}$$

και ο κινητικός όρος της Lagrangian:

$$
\begin{aligned}
L_\Phi{}^{kin} &= (D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^+ = \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\frac{g^2}{4}[A_\mu{}^2(\upsilon+h)+iA_\mu{}^1(\upsilon+h)][A^{2\mu}(\upsilon+h)-iA^{1\mu}(\upsilon+h)] \\
&\qquad + [\partial_\mu h + i\frac{1}{2}(gA_\mu{}^3 - g'B_\mu)(\upsilon+h)][\partial^\mu h - i\frac{1}{2}(gA^{3\mu} - g'B^\mu)(\upsilon+h)]\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{g^2}{4}[(A_\mu{}^2(\upsilon+h))^2 + (A_\mu{}^1(\upsilon+h))^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}[(gA_\mu{}^3 - g'B_\mu)(\upsilon+h)]^2 \quad \text{ή} \\
L_\Phi{}^{kin} =& \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}\frac{g^2\upsilon^2}{4}[(A_\mu{}^2)^2 + (A_\mu{}^1)^2] + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{4}[g^2(A_\mu{}^3)^2 - gg'A_\mu{}^3B^\mu - gg'B_\mu A^{3\mu} + g'^2(B_\mu)^2] \\
&\qquad + \frac{g^2}{8}[(A_\mu{}^2)^2 + (A_\mu{}^1)^2](2\upsilon h + h^2) + \frac{1}{8}(gA_\mu{}^3 - g'B_\mu)^2(2\upsilon h + h^2)
\end{aligned}
\tag{4.155}
$$

Στην τελευταία εξίσωση παρατηρούμε λοιπόν, πως ο πρώτος όρος είναι ένας κινητικός όρος για το πεδίο higgs. Μας δίνει δηλαδή την κινητική ενέργεια του σωματιδίου. Ακολουθούν οι δύο όροι μάζας για τα πεδία $A_\mu{}^1$ και $A_\mu{}^2$. Όπως φαίνεται οι μάζες των δύο αυτών πεδίων θα είναι ίδιες και ίσες με:

$$M_{A_1} = M_{A_2} = \frac{g\upsilon}{2} \tag{4.156}$$

Όσον αφορά τους επόμενους όρους, παρατηρούμε πως μέσα στην αγκύλη υπάρχουν όροι μάζας για τα άλλα δύο πεδία βαθμίδας. Θα είναι λοιπόν:

$$M_{A_1} = M_{A_2} = M_{A_3} = \frac{g\upsilon}{2}, \quad M_B = \frac{g'\upsilon}{2} \tag{4.157}$$

Επιπλεόν όμως παρατηρείται ότι το A^3 δεν εμφανίζεται μόνο του, σε αντίθεση με τα πεδία που μας έδωσε η SU(2), αλλά παρατηρείται μίξη με το πεδίο βαθμίδας της U(1) συμμετρίας.

Όσον αφορά τους εναπομείναντες όρους της Lagrangian, αυτοί αποτελούν όρους αλληλεπίδρασης των πεδίων τρίτης και τέταρτης τάξης.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητη και η περιγραφή του δυναμικού όρου του πεδίου Higgs. Συγκεκριμένα:

$$
\begin{aligned}
L_\Phi{}^{dyn} = V = \mu^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 = -\lambda\upsilon^2\varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2 \Rightarrow \\
L_\Phi{}^{dyn} = \frac{\lambda}{4}h^4 + \lambda\upsilon h^3 + \lambda\upsilon^2h^2 - \lambda\frac{\upsilon^4}{4}
\end{aligned}
\tag{4.158}
$$

Έχει μεταξύ άλλων υπολογιστεί και η μάζα του σωματιδίου Higgs ($m_{Higgs} = \sqrt{2\lambda}\upsilon$) . Οι υπόλοιποι όροι αφορούν όρους αυτοαλληλεπίδρασης τρίτης και τέταρτης τάξης, καθώς και μία σταθερά.

Συνοψίζοντας τα μέχρι στιγμής δεδομένα, γράφουμε τη Lagrangian που έχει προκύψει από το σπάσιμο των $SU(2)_L \times U(1)_Y$ συμμετριών:

$$\begin{aligned} L &= L_{gauge}{}^{kin} + L_{\text{ύλης}}{}^{kin} + L_\Phi \\ &= L_{gauge}{}^{kin} + L_{fermions}{}^{kin} + L_{currents} + L_\Phi{}^{kin} - L_\Phi{}^{dyn} + L_{Yukawa} \\ &= L_{gauge}{}^{kin} + L_{fermions}{}^{kin} + L_\Phi{}^{kin} + L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{φορτισμένα}} + L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{ουδέτερα}} - L_\Phi{}^{dyn} + L_{Yukawa} \end{aligned} \tag{4.159}$$

4.7.1 Αλληλεπιδράσεις φορτισμένων ρευμάτων και απόδοση μάζας στα W μποζόνια

Οι αλληλεπιδράσεις των φορτισμένων ρευμάτων είναι:

$$L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{φορτισμένα}} = g(J^{1\mu}A_\mu{}^1 + J^{2\mu}A_\mu{}^2) = \frac{g}{\sqrt{2}}[J^{+\mu}W_\mu{}^+ + J^{-\mu}W_\mu{}^-] \tag{4.160}$$

Όπου τα φυσικά πεδία $A_\mu{}^1$ και $A_\mu{}^2$ περιγράφουν εδώ τα $W^\pm$ μποζόνια. Η μάζα των $W^\pm$ μποζονίων θα υπολογιστεί αντίστοιχα μέσω της $L_\Phi{}^{kin}$ και αντικαθιστώντας και πάλι τα $A_\mu{}^1$ και $A_\mu{}^2$ πεδία με τα $W^\pm$. Από το κινητικό κομμάτι της Lagrangian μας απασχολεί ο όρος:

$$\frac{1}{2}\frac{g^2\upsilon^2}{4}\left[(A_\mu{}^2)^2 + (A_\mu{}^1)^2\right] \tag{4.161}$$

και συγκεκριμένα προκύπτει:

$$\left(\frac{A_\mu{}^1 - iA_\mu{}^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{A^{1\mu} + iA^{2\mu}}{\sqrt{2}}\right) = (A_\mu{}^1)^2 + (A_\mu{}^2)^2 = W_\mu{}^+ W^{-\mu} \tag{4.162}$$

άρα στη Lagrangian θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}\frac{g^2\upsilon^2}{4}W_\mu{}^+ W^{-\mu} \tag{4.163}$$

ή διαφορετικά:

$$M_{W^\pm} = \frac{g\upsilon}{2} \tag{4.164}$$

Μπορούμε επομένως τώρα να γράψουμε την Lagrangian φορτισμένων ρευμάτων συμπεριλαμβάνοντας και τις τρείς γενειές:

$$\begin{aligned} L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{φορτισμένα}} = \frac{g}{\sqrt{2}}[&(\bar{\nu_L}\gamma^\mu e_L + \bar{u_L}\gamma^\mu d_L + \bar{c_L}\gamma^\mu s_L + \bar{\tau_L}\gamma^\mu b_L)W_\mu{}^+ \\ &(\bar{e_L}\gamma^\mu \nu_L + \bar{d_L}\gamma^\mu u_L + \bar{s_L}\gamma^\mu c_L + \bar{b_L}\gamma^\mu \tau_L)W_\mu{}^-] \end{aligned} \tag{4.165}$$

4.7.2 Αλληλεπιδράσεις ουδετέρων ρευμάτων και μάζα Z μποζονίου

Αντίστοιχα θα μας απασχολήσει το κομμάτι της Lagrange των φερμιονικών ρευμάτων και ουδετέρων αλληλεπιδράσεων. Τα αντίστοιχα πεδία βαθμίδας είναι τα ${A_\mu}^3$ και B_μ . Η μορφή των αλληλεπιδράσεων αυτών είναι ήδη γνωστή:

$$L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{ουδέτερα}} = gJ^{3\mu}{A_\mu}^3 + \frac{g'}{2}J^{Y\mu}B_\mu \tag{4.166}$$

Σε αυτούς τους όρους θα αναφέρονται και οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Ο τρίτος όρος της εξίσωσης (4.155) δίνει:

$$\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{4}[g^2({A_\mu}^3)^2 - gg'{A_\mu}^3B^\mu - gg'B_\mu A^{3\mu} + {g'}^2(B_\mu)^2] \tag{4.167}$$

Η μίξη πεδίων που παρατηρείται θα δώσει το φωτόνιο.
Συγκεκριμένα, αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας μαζών δεν θα είναι διαγώνιος, αλλά θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\upsilon^2}{8}\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & {g'}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{4.168}$$

Καταλήγουμε πώς για να μιλάμε για φυσικά πεδία και για μάζες των πεδίων αυτών, ο παραπάνω πίνακας πρέπει να διαγωνοποιηθεί:

$$\frac{\upsilon^2}{8}\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 & B_\mu \end{pmatrix}UU^{-1}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & {g'}^2 \end{pmatrix}UU^{-1}\begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{4.169}$$

όπου U, U^{-1} είναι οι unitary πίνακες στροφών:

$$U = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, UU^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{4.170}$$

Εκτελώντας πράξεις:

$$U^{-1}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & {g'}^2 \end{pmatrix}U = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & {g'}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \tag{4.171}$$

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2cos\theta + gg'sin\theta & -gg'cos\theta + g^2sin\theta \\ -{g'}^2sin\theta - gg'cos\theta & -gg'sin\theta + {g'}^2cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} (gcos\theta + g'sin\theta)^2 & (gsin\theta - g'cos\theta)(gcos\theta + g'sin\theta) \\ (gsin\theta - g'cos\theta)(gcos\theta + g'sin\theta) & (gsin\theta - g'cos\theta)^2 \end{pmatrix} \tag{4.172}$$

Από την απαίτηση για διαγωνοποίηση του πίνακα μαζών θα είναι:

$$\begin{aligned} (gsin\theta - g'cos\theta)(gcos\theta + g'sin\theta) = 0 \\ gsin\theta = g'cos\theta \end{aligned} \tag{4.173}$$

Καταλήγει επομένως ο πίνακας μαζών να παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.174}$$

Ο πίνακας αυτός αποδεικνύει περίτρανα την μαθηματική περιγραφή του φωτονίου και στο πλαίσιο της περιγραφής στη φυσική βάση των πεδίων. Συγκεκριμένα το κάτω διαγώνιο στοιχείο του πίνακα των μαζών είναι μηδέν.
Υπολογίζουμε τώρα το φωτόνιο και το Z_μ πεδίο βαθμίδας:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 cos\theta - B_\mu sin\theta \\ {A_\mu}^3 sin\theta + B_\mu cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Z_\mu = {A_\mu}^3 cos\theta - B_\mu sin\theta \\ A_\mu = {A_\mu}^3 sin\theta + B_\mu cos\theta \end{aligned} \tag{4.175}$$

Ενώ ο όρος μάζας για το πεδίο Z_μ ευρίσκεται:

$$\frac{\upsilon^2}{8} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} (Z_\mu A_\mu) \begin{pmatrix} \frac{g}{cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \frac{\upsilon^2 g^2}{8} \frac{1}{cos^2\theta} (Z_\mu)^2 \tag{4.176}$$

και συνεπώς:

$$M_Z = \frac{\upsilon g}{2cos\theta} \tag{4.177}$$

Ξαναγράφοντας τη Lagrange (4.166) των ουδετέρων ρευμάτων ακολουθώντας τα τελευταία αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} {L_{\text{ρεύματα}}}^{\text{φορτισμένα}} = gJ^{3\mu}{A_\mu}^3 + \frac{g'}{2}J^{Y\mu}B_\mu = \begin{pmatrix} gJ^{3\mu} & \frac{g'}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ {L_{\text{ρεύματα}}}^{\text{φορτισμένα}} = \begin{pmatrix} gJ^{3\mu} & \frac{g'}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} UU^{-1} \begin{pmatrix} {A_\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.178}$$

Είναι:

$$\begin{pmatrix} gJ^{3\mu} & \frac{g'}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} gJ^{3\mu} & \frac{g'}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \tag{4.179}$$

$$= \begin{pmatrix} g\cos\theta J^{3\mu} - \frac{g'\sin\theta}{2}J^{Y\mu} & g\sin\theta J^{3\mu} + \frac{g'\cos\theta}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} \tag{4.180}$$

αντικαθιστώντας για $g' = g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$:

$$\begin{pmatrix} gJ^{3\mu} & \frac{g'}{2}J^{Y\mu} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} g\cos\theta J^{3\mu} - \frac{g\sin^2\theta}{2\cos\theta}J^{Y\mu} & g\sin\theta\Big(J^{3\mu} + \frac{1}{2}J^{Y\mu}\Big) \end{pmatrix} \tag{4.181}$$

Άρα για τα ουδέτερα ρεύματα:

$$L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{φορτισμένα}} = \begin{pmatrix} g\cos\theta J^{3\mu} - \frac{g\sin^2\theta}{2\cos\theta}J^{Y\mu} & gsin\theta\Big(J^{3\mu} + \frac{1}{2}J^{Y\mu}\Big) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

$$L_{\text{ρεύματα}}{}^{\text{φορτισμένα}} = \left(g\cos\theta J^{3\mu} - \frac{g\sin^2\theta}{2cos\theta}J^{Y\mu}\right)Z_\mu + g\sin\theta\Big(J^{3\mu} + \frac{1}{2}J^{Y\mu}\Big)A_\mu \tag{4.182}$$

Ο δεύτερος όρος των ρευμάτων περιγράφει αλληλεπίδραση του φερμιονικού ρεύματος με το φωτόνιο, με σταθερά ζεύξης (το φορτίο) που βρίσκεται στην αρχή. Περιγράφηκαν επομένως με επιτυχία οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Συνεπώς θα ισχύει:

$$g\sin\theta = g'\cos\theta = e \tag{4.183}$$

Και στην συνέχεια λέμε ότι το αντίστοιχο ρεύμα είναι:

$$J^{em,\mu} = J^{3\mu} + \frac{1}{2}J^{Y\mu} \tag{4.184}$$

Αλλίως, αντικαθιστώντας με τις αντίστοιχες εκφράσεις:

$$\begin{aligned} J^{em,\mu} =& \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L) \qquad (4.185)\\ & \frac{1}{2}(-\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \frac{1}{3}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \frac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\mu d_L - 2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R \\ & \frac{4}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R) \\ J^{em,\mu} =& -\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \frac{2}{3}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \frac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\mu d_L - \bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{2}{3}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R - \frac{1}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R \qquad (4.186)\\ J^{em,\mu} =& (-1)\bar{e}\gamma^\mu e + \frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \left(-\frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d\right) \end{aligned}$$

Οπότε τελικά βλέπουμε πώς ο όρος αυτός καταφέρνει να πάρει την μορφή:

$$\begin{aligned} L^{em} &= \sum_f eQ_f(\bar{f}_L\gamma^\mu f_L + \bar{f}_R\gamma^\mu f_R)A_\mu \\ L^{em} &= \sum_f eQ_f\bar{f}\gamma^\mu f A_\mu \end{aligned} \tag{4.187}$$

για f φερμιόνιο και Q τον κβαντικό αριθμό του ηλεκτρικού φορτίου.
Θα γράψουμε πάλι τον πρώτο όρο, ο οποίος θα μας δώσει τα ουδέτερα ρεύματα. Θα εκφραστεί με ευκολία, συναρτήσει του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος:

$$J^{Y\mu} = 2J^{em,\mu} - 2J^{3\mu} \tag{4.188}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\left(g\cos\theta J^{3\mu} - \frac{g\sin^2\theta}{\cos\theta}J^{em,\mu} + \frac{g\sin^2\theta}{\cos\theta}J^{3\mu}\right)Z_\mu = \frac{g}{\cos\theta}(J^{3\mu} - \sin^2\theta J^{em,\mu})Z_\mu$$

Τελικά το ουδέτερο ρεύμα είναι:

$$J^{0,\mu} = J^{3\mu} - \sin^2\theta J^{em,\mu} \tag{4.189}$$

Αντικαθιστώντας τα $J^{3\mu}$ και $J^{em,\mu}$ θα έχουμε για τα ουδέτερα ρεύματα:

$$\begin{aligned} J^{0,\mu} = \frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L + \Big[-\frac{1}{2} - (-1)\sin^2\theta\Big]\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \Big[\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta\Big]\bar{u}_L\gamma^\mu u_L \\ \Big[-1 - \Big(-\frac{1}{3}\Big)\sin^2\theta\Big]\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + (-1)\sin^2\theta\bar{e}_R\gamma^\mu e_R \\ \frac{2}{3}\sin^2\theta\bar{u}_R\gamma^\mu u_R + \Big(-\frac{1}{3}\sin^2\theta\bar{d}_R\gamma^\mu d_R\Big) \end{aligned}$$

Οπότε συγκρίνοντας και στη συνέχεια ομαδοποιώντας τους όρους, παίρνουμε ένα γενικό τύπο για κάθε φερμιόνιο f:

$$J^{0,\mu} = ({I_W}_f{}^3 - Q_f\sin^2\theta)(\overline{f_L}\gamma^\mu f_L + \overline{f_R}\gamma^\mu f_R) \tag{4.190}$$

Τελικά γράφουμε για τα ουδέτερα ρεύματα:

$$L^{nc} = \sum_f \frac{g}{\cos\theta}({I_W}_f{}^3 - Q_f\sin^2\theta)(\overline{f_L}\gamma^\mu f_L + \overline{f_R}\gamma^\mu f_R)Z_\mu \tag{4.191}$$

4.7.3 Μάζες φερμιονίων από Yukawa όρους

Όπως προαναφερθηκε το κομμάτι της Lagrange το οποίο περιέχει όρους αλληλεπίδρασης με τα φερμίονια της θεωρίας μας αποτελεί περιγραφή του δυναμικού Yukawa. Έχουμε ήδη εμφανίσει τους όρους Yukawa, στην εξίσωση (4.192).

$$L_{Yukawa} = \sum_{i,j=1}^{3}({f_l}^{(ij)}\bar{l_L}^{(i)}\Phi {l_R}^{(j)} + {f_u}^{(ij)}\bar{Q_L}^{(i)}\tilde{\Phi}{U_R}^{(j)} + {f_d}^{(ij)}\bar{Q_L}^{(i)}\Phi {D_R}^{(j)}) + \text{h. c.} \tag{4.192}$$

Αρχικά, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μάζα στα λεπτόνια. Επιπλεόν για λόγους απλούστευσης υπολογίζουμε μόνο για την πρώτη οικογένεια σωματιδίων. Θα έχουμε επομένως για τον όρο αλληλεπίδρασης του Higgs με τα ηλεκτρόνια και τα νετρίνα:

$$f_l{}^{(11)}\overline{l_L}^{(1)}\Phi l_R{}^{(1)} + f_l{}^{(11)}\overline{l_R}^{(1)}\overline{\Phi} l_L{}^{(1)} \tag{4.193}$$

$$= f_l{}^{(11)} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{e_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} e_R + f_l{}^{(11)}\overline{e_R} \begin{pmatrix} \overline{\varphi^+} & \overline{\varphi^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \tag{4.194}$$

Μετά το αυθόρμητο σπάσιμο και αφού αναπτύξουμε γύρω από το κενό και μεταφερθούμε στη μοναδιακή βαθμίδα, θα είναι:

$$\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix} \tag{4.195}$$

αντικαθιστώντας αντίστοιχα στη Lagrange:

$$L_{Yukawa}{}^{leptons,g1} = \frac{f_l{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}} \Big[\begin{pmatrix} \overline{\nu_L} & \overline{e_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h \end{pmatrix} e_R + \overline{e_R} \begin{pmatrix} 0 & \upsilon + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \Big]$$

$$L_{Yukawa}{}^{leptons,g1} = \frac{f_l{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}} (\upsilon + h)(\overline{e_L} e_R + \overline{e_R} e_L)$$

$$L_{Yukawa}{}^{leptons,g1} = \frac{f_l{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}} \bar{e}e + \frac{f_l{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}} h\bar{e}e \tag{4.196}$$

Η παραπάνω παράσταση περιέχει λοιπόν έναν όρο αλληλεπίδρασης αλλά και έναν όρο μάζας. Υπενθυμίζεται ότι ο όρος μάζας στην εξίσωση Dirac έχει τη μορφή $m\overline{\psi}\psi$.
Συνεπώς θα ισχύει:

$$m_e \bar{e}e = \frac{f_l{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}} \bar{e}e$$

$$m_e = \frac{f_l{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}} \tag{4.197}$$

Αλλά και για τον όρο αλληλεπίδρασης με το πεδίο Higgs ισχύει τελικά:

$$\frac{f_l{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}} h\bar{e}e = \frac{m_e}{\upsilon} h\bar{e}e \tag{4.198}$$

Δηλαδή η ισχύς της αλληλεπίδρασης των φερμιονίων με το πεδίο Higgs είναι ανάλογη της μάζας των φερμιονίων. Επομένως όσο βαρύτερο είναι το σωματίδιο τόσο πιο έντονα αλληλεπιδρά μαζί του το Higgs.

Τέλος, τονίζεται ότι η Εξ. (4.196) εκφράζει άμαζο νετρίνο. Το Higgs δεν αλληλεπιδρά με το νετρίνο και επομένως αυτό δεν αποκτά μάζα, αφού το αντίστοιχο στοιχείο πίνακα είναι μηδενικό.
Αντίστοιχα, θα υπολογίσουμε τη μάζα για τα quark της πρώτης οικόγενειας. Με την εξής σημαντική διαφοροποίηση: η παραπάνω διαδικασία θα αφήσει τα u, c, t quarks άμαζα, δίνοντας όμως μάζα στα d, s και b. Τα πρώτα θα χτυπήσουν πάνω στο 0 της διπλέττας κατά το αυθόρμητο σπάσιμο.
Επομένως, θα κατασκευάσουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό που θα περιγράφει επακριβώς τις μάζες των quarks χωρίς να τις μηδενίζει:

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^* = \begin{pmatrix} (\varphi^0)^* \\ -(\varphi^+)^* \end{pmatrix} \tag{4.199}$$

Τελικά ο όρος της Lagrangian για την αλληλεπίδραση Yukawa και για τα quarks της πρώτης γενειάς, είναι:

$$L_{Yukawa}{}^{quarks,g1} = f_u{}^{(1,1)}\overline{Q_L}^{(1)}\tilde{\Phi}U_R{}^{(1)} + f_d{}^{(1,1)}\overline{Q_L}^{(1)}\Phi D_R{}^{(1)} + f_u{}^{(1,1)}\overline{U_R}^{(1)}\overline{\tilde{\Phi}}Q_L{}^{(1)} + f_d{}^{(1,1)}\overline{D_R}^{(1)}\overline{\Phi}Q_L{}^{(1)} \tag{4.200}$$

Ξανά σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε το αυθόρμητο σπάσιμο, το Φ θα δοθεί ακριβώς όπως και στην Εξ. (4.151). Το μετασχηματισμένο όμως Higgs $\tilde{\Phi}$, θα είναι:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \upsilon + h(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.201}$$

αντικαθιστώντας στην Lagrangian:

$$\begin{aligned}
L_{Yukawa}{}^{\text{quarks},g1} = \frac{f_u{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}\Big[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \upsilon + h \\ 0 \end{pmatrix}u_R + \bar{u}_R\begin{pmatrix} \upsilon + h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\Big] + \\
\frac{f_d{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}\Big[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h \end{pmatrix}d_R + \bar{d}_R\begin{pmatrix} 0 & \upsilon + h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\Big] \\
L_{Yukawa}{}^{quarks,g1} = \frac{f_d{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}(\upsilon + h)(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \frac{f_d{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}(\upsilon + h)(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \\
L_{Yukawa}{}^{quarks,g1} = \frac{f_d{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}}\bar{u}u + \frac{f_d{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}h\bar{u}u + \frac{f_d{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}}\bar{d}d + \frac{f_d{}^{(1,1)}}{\sqrt{2}}h\bar{d}d \\
L_{Yukawa}{}^{quarks,g1} = m_u\bar{u}u + \frac{m_u}{\upsilon}h\bar{u}u + m_d\bar{d}d + \frac{m_d}{\upsilon}h\bar{d}d
\end{aligned} \tag{4.202}$$

Έτσι λοιπόν δώσαμε όρους μάζας και στα quarks μέσω της αλληλεπίδρασης τους με το higgs. Συγκεκριμένα:

$$m_u = \frac{f_u{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \qquad m_d = \frac{f_d{}^{(1,1)}\upsilon}{\sqrt{2}} \tag{4.203}$$

Η ολική Lagrange για τις αλληλεπιδράσεις Yukawa είναι:

$$L_{Yukawa} = m_e\bar{e}e + m_\mu\bar{\mu}\mu + m_\tau\bar{\tau}\tau + m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d + m_c\bar{c}c + m_s\bar{s}s + m_t\bar{t}t \tag{4.204}$$

$$+m_b\bar{b}b + \frac{m_e}{\upsilon}h\bar{e}e + \frac{m_\mu}{\upsilon}h\bar{\mu}\mu + \frac{m_\tau}{\upsilon}h\bar{\tau}\tau + \frac{m_u}{\upsilon}h\bar{u}u + \frac{m_d}{\upsilon}h\bar{d}d$$

$$+\frac{m_c}{\upsilon}h\bar{c}c + \frac{m_s}{\upsilon}h\bar{s}s + \frac{m_t}{\upsilon}h\bar{t}t + \frac{m_b}{\upsilon}h\bar{b}b \tag{4.205}$$

όπου

$$m_e = \frac{{f_l}^{(11)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{{f_u}^{(11)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_d = \frac{{f_d}^{(11)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \tag{4.206}$$

$$m_\mu = \frac{{f_l}^{(22)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_c = \frac{{f_u}^{(22)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_s = \frac{{f_d}^{(22)}\upsilon}{\sqrt{2}},$$

$$m_\tau = \frac{{f_l}^{(33)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_t = \frac{{f_u}^{(33)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \quad m_b = \frac{{f_d}^{(33)}\upsilon}{\sqrt{2}}$$

Με προσεκτική παρατήρηση των παραπάνω δοσμένων υπολογισμών, παρατηρούμε ότι οι σταθερές ${f_\alpha}^{ii}$ αποτελούν αυθαίρετες σταθερές, οπότε δεν μπορούν να επαληθευτούν άμεσα.

4.7.4 Μάζες quark, ουδέτερα και φορτισμένα ρεύματα στη φυσική βάση, πίνακας CKM, γωνία Cabibo

Αλλά επανερχόαμστε τώρα στο ζήτημα του όρου των αλληλεπιδράσεων Yukawa. Το ζήτημα που έχει προκύψει σχετικά με τις σταθερές απαιτεί μια άμεση αντιμετώπιση.
Αρχικά θα γράψουμε θα πάμε πίσω στη περιγραφή των αποτελεσμάτων μας μέσω του πίνακα μαζών των φερμιονίων. Θα έχουμε γαι τις μάζες των quarks:

$$L_{masses}{}^{quarks} = m_u\bar{u}_Lu_R + m_d\bar{d}_Ld_R + m_c\bar{c}_Lc_R + m_s\bar{s}_Ls_R + m_t\bar{t}_Lt_R + m_b\bar{b}_Lb_R + h.c.$$

$$L_{masses}{}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} + h.c.$$

$$L_{masses}{}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} M_U + \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} \tag{4.207}$$

$$+ \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} M_D \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες μαζών θα έχουν τη μορφή που φαίνεται στην Εξ. (4.207). Οι πίνακες μαζών λοιπόν αναμένεται να είναι διαγώνιοι και επομένως οι καταστάσεις u, c, t, d, s, b θα είναι ιδιοκαταστάσεις της μάζας. Όπως θα φανεί ακολούθως το πρόβλημα έχει προκύψει από τη θεώρηση των ίδιων ιδιοκαταστάσεων κατά τον υπολογισμό των όρων Yukawa.
Πίσω στα αποτελέσματα μας είχαμε για τα ουδέτερα ρεύματα από την εξίσωση (4.208):

$$L^{em} = \sum_f eQ_f(\overline{f_L}\gamma^\mu f_L + \overline{f_R}\gamma^\mu f_R)A_\mu \tag{4.208}$$

και

$$L^{nc} = \sum_f \frac{g}{\cos\theta}({I_W}_f{}^3 - Q_f \sin^2\theta)(\overline{f_L}\gamma^\mu f_L + \overline{f_R}\gamma^\mu f_R)Z_\mu \tag{4.209}$$

ενώ για τα φορτισμένα ρεύματα (επέκταση της Εξ.(;;) για τις τρείς γενεές):

$$L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}[(\bar{u}_L\gamma^\mu d_L + \bar{c}_L\gamma^\mu s_L + \bar{t}_L\gamma^\mu b_L){W_\mu}^+ + (\bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{s}_L\gamma^\mu c_L + \bar{b}_L\gamma^\mu t_L){W_\mu}^-] \tag{4.210}$$

Μια σύγκριση των παραπάνω με την Εξ. (4.207) δείχνει ότι οι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα μαζών φαίνονται να είναι ίδιες με τις ιδιοκαταστάσεις των ασθενών ρευμάτων. Το πείραμα όμως καταρρίπτει την θεώρηση κοινών ιδιοκαταστάσεων. Συνεπώς, ο πίνακας μαζών που φαίενται στην Εξ. (4.207) δεν είναι διαγώνιος και επομένως μας απομένει να τον περιγράψουμε στη 'φυσική βάση'. Συγκεκριμένα είχαμε βρεί (βλ. Εξ. (4.206)):

$$ {M_\alpha}^{i,j} = \frac{{f_\alpha}^{(ij)}\upsilon}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha = l, U, D \quad \text{και} \quad i,j = 1,2,3 \tag{4.211}$$

Μια προσεκτική διαχείρηση των συμβολισμών θα είναι η εξής:

$$ {L_{masses}}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} & \bar{t}_{0L} \end{pmatrix} M_{0U} \begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0R} \\ t_{0R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} & \bar{b}_{0L} \end{pmatrix} M_{0D} \begin{pmatrix} d_{0R} \\ s_{0R} \\ b_{0R} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τους κατάλληλους unitary πίνακες L_D, L_U, R_D, R_U τέτοιοι ώστε:

$$ {L_{masses}}^{quarks} \to \begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} & \bar{t}_{0L} \end{pmatrix} L_U {L_U}^{-1} M_{0U} R_U {R_U}^{-1} \begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0R} \\ t_{0R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} & \bar{b}_{0L} \end{pmatrix} L_D {L_D}^{-1} M_{0D} R_D R_L$$

και απαιτούμε να ισχύει φυσικά:

$$ {L_U}^{-1} M_{0U} R_U = M_U, \qquad {L_D}^{-1} M_{0D} R_D = M_D \tag{4.212}$$

Με M_U και M_D τους διαγωνοποιημένους πίνακες μαζών. Απαιτούμε επίσης οι αντίστοιχες καταστάσεις να ανταποκρίνονται στις ιδιοκαταστάσεις μάζας:

$$L_U{}^{-1}\begin{pmatrix} u_{0L} \\ c_{0L} \\ t_{0L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad R_U{}^{-1}\begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0R} \\ t_{0R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}$$

$$L_D{}^{-1}\begin{pmatrix} d_{0L} \\ s_{0L} \\ b_{0L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad R_D{}^{-1}\begin{pmatrix} d_{0R} \\ s_{0R} \\ b_{0R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \tag{4.213}$$

και τελικά στη φυσική βάση θα έχουμε:

$$L_{masses}{}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} + h.c.$$

$$L_{masses}{}^{quarks} = \sum_q m_q \bar{q}_L q_R + h.c. = \sum_q m_q \bar{q} q \tag{4.214}$$

Επομένως θα επιχειρήσουμε να εξετάσουμε εαν αλλάζουν το ηλεκτρομαγνητικό , το ουδέτερο και τα φορτισμένα ρεύματα με αυτή τη νέα μας περιγραφή.
Ξεκινάμε από το ηλεκτρομαγνητικό και το ουδέτερο:

$$\overline{f_L}\gamma^\mu f_L + \overline{f_R}\gamma^\mu f_R \tag{4.215}$$

Για τις τρείς γενεές θα είναι:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} & \bar{t}_{0L} \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} u_{0L} \\ c_{0L} \\ t_{0L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{u}_{0R} & \bar{c}_{0R} & \bar{t}_{0R} \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0R} \\ t_{0R} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} & \bar{b}_{0L} \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} d_{0L} \\ s_{0L} \\ b_{0L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0R} & \bar{s}_{0R} & \bar{b}_{0R} \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} d_{0R} \\ s_{0R} \\ b_{0R} \end{pmatrix}$$

Στη φυσική βάση χρησιμοποιούμε τους unitary πίνακες:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} L_U{}^{-1}\gamma^\mu L_U\begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{u}_R & \bar{c}_R & \bar{t}_R \end{pmatrix} R_U{}^{-1}\gamma^\mu R_U\begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} L_D{}^{-1}\gamma^\mu L_D\begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_R & \bar{s}_R & \bar{b}_R \end{pmatrix} R_D{}^{-1}\gamma^\mu R_D\begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}$$

και τελικά εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες unitary πινάκων:

$$L^{nc} = \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{u}_R & \bar{c}_R & \bar{t}_R \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_R & \bar{s}_R & \bar{b}_R \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}$$

Δηλαδή τα ουδέτερα ρεύματα είναι διαγώνια ως προς τις ιδιοκαταστάσεις μάζας και τις ασθενείς ιδιοκαταστάσεις ταυτόχρονα. Επομένως μπορούμε να μεταφερθούμε από τη μια βάση στην άλλη αφήνοντας τους πίνακες αναλλοίωτους.
Αντίθετα τα φορτισμένα ρεύματα δεν παραμένουν αναλλοίωτα κατά την αλλαγή βάσης:

$$L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}[(\bar{u}_{0L}\gamma^\mu d_{0L} + \bar{c}_{0L}\gamma^\mu s_{0L} + \bar{t}_{0L}\gamma^\mu b_{0L}){W_\mu}^+ + (\bar{d}_{0L}\gamma^\mu u_{0L} + \bar{s}_{0L}\gamma^\mu c_{0L} + \bar{b}_{0L}\gamma^\mu t_{0L}){W_\mu}^-]$$

$$L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} & \bar{t}_{0L} \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{0L} \\ s_{0L} \\ b_{0L} \end{pmatrix} {W_\mu}^+ + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} & \bar{b}_{0L} \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_{0L} \\ c_{0L} \\ t_{0L} \end{pmatrix} {W_\mu}^- \right] \tag{4.216}$$

και στη φυσική βάση γράφονται:

$$L'^{cc} = \frac{q}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu {L_U}^{-1} L_D \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} {W_\mu}^+ + \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu {L_D}^{-1} L_U \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} {W_\mu}^- \right]$$

με:

$$ {L_U}^{-1} L_D = ({L_D}^{-1} L_U)^{-1} = V_{CKM} \tag{4.217}$$

και:

$$V_{CKM}{V_{CKM}}^+ = I, \quad |\det V_{CKM}|^2 = 1 \tag{4.218}$$

Επομένως ο μη διαγώνιος πίνακας για τα φορτισμένα ρεύματα αποτελεί ένδειξη μίξης των οικογενειών των φερμιονίων.
Δηλαδή, οι καταστάσεις πλέον των quark δεν είναι σταθερές αλλά μπορούν να υπάρξουν μεταβάσεις από τη μια οικογένεια στην άλλη.
Προσπαθούμε να υπολογίσουμε τον νέο αυτό πίνακα και θα είναι αντίστοιχα με τις δυνατές μίξεις των quark:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{4.219}$$

Ο πίνακας φέρει 9 πραγματικές παραμέτρους.
Γενικά, για θεωρία N_G γενεών ο πίνακας φέρει $2{N_G}^2$ παραμέτρους. Από τον περιορισμό που θέσαμε στην εξίσωση (4.218) οι παράμετροι μειώνονται στις ${N_G}^2$. Αντίστοιχα απορροφούμε και τις $(2N_G - 1)$ ορίζοντας κατάλληλα τις φάσεις των καταστάσεων των quarks. Οπότε θα είναι:

$$ {N_G}^2 - (2N_G - 1) = (N_G - 1)^2 \tag{4.220} $$

Η θεωρία μας απαιτεί συνεπώς 3 πραγματικές παραμέτρους και μια από αυτές θα είναι μια σχετική φάση. Οι υπολογισμοί των Cabibo - Kobayashi - Maskawa είναι οι ακόλουθοι:

$$ V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{4.221} $$

όπου $c_i = \cos\theta_i, s_i = \sin\theta_i, i = 1, 2, 3$.
Η μελέτη των ασθενών αλληλεπιδράσεων έχει δώσει τις ακόλουθες τιμές:

$$ \begin{pmatrix} 0.9745 - 0.9757 & 0.219 - 0.224 & 0.002 - 0.005 \\ 0.218 - 0.224 & 0.9736 - 0.9750 & 0.036 - 0.046 \\ 0.004 - 0.014 & 0.0.34 - 0.046 & 0.9989 - 0.9993 \end{pmatrix} $$

Σύμφωνα με τα παραπάνω τελικά, τα φορτισμένα ρεύματα στη φυσική βάση θα γίνουν:

$$ {L'}^{cc} = \frac{q}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L & \bar{t}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} {W_\mu}^+ + \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L & \bar{b}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu {V_{CKM}}^{-1} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} {W_\mu}^- \right] $$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να επιλυθούν σε βάση διάφορη της φυσικής βάσης. Ως παράδειγμα επίσης θα επιλύσουμε για τη περίπτωση δύο γενεών quarks. Οι πίνακες μαζών είναι:

$$ \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix} \to M_{0D} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \to M_{0U} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n & n' \end{pmatrix} $$

Οπότε η Lagrangian θα γράφεται:

$$ {L_{masses}}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} \end{pmatrix} M_{0U} \begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} \end{pmatrix} M_{0D} \begin{pmatrix} d_{0R} \\ s_{0L} \end{pmatrix} + h.c. $$

Οπότε ορίζοντας τους κατάλληλους πίνακες έχουμε:

$$ U_U = \begin{pmatrix} \cos\theta_U & \sin\theta_U \\ -\sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix}, \quad U_D = \begin{pmatrix} \cos\theta_D & \sin\theta_D \\ -\sin\theta_D & \cos\theta_D \end{pmatrix} {U_U}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_U & -\sin\theta_U \\ \sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix}, \quad U_D $$

και η διαγωνοποίηση για τη Lagrange θα έχει ως εξής:

$$L_{masses}{}^{quarks} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{0L} & \bar{c}_{0L} \end{pmatrix} U_U{}^{-1} U_U M_{0U} U_U{}^{-1} U_U \begin{pmatrix} u_{0R} \\ c_{0L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{d}_{0L} & \bar{s}_{0L} \end{pmatrix} U_D{}^{-1} U_D M_{0D} U_D{}^{-1} U_D \begin{pmatrix} d_{0R} \\ s_{0L} \end{pmatrix}$$

ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} U_U M_{0U} U_U{}^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_U & \sin\theta_U \\ -\sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_U & -\sin\theta_U \\ \sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m\sin\theta_U & m\cos\theta_U + m'\sin\theta_U \\ m\cos\theta_U & -m\sin\theta_U + m'\cos\theta_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_U & -\sin\theta_U \\ \sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2ms_\theta c_\theta + m' s_\theta{}^2 & -ms_\theta{}^2 + mc_\theta{}^2 + m' s_\theta c_\theta \\ mc_\theta{}^2 - ms_\theta{}^2 + m' s_\theta c_\theta & -2ms_\theta c_\theta + m' c_\theta{}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.222)$$

Όπου ξανά $c_i = \cos\theta_i, s_i = \sin\theta_i, i = 1, 2, 3$. Η επίλυση των παραπάνω θα δώσει:

$$\begin{aligned} mc_\theta{}^2 - ms_\theta{}^2 + m' s_\theta c_\theta &= 0 \\ m\cos 2\theta_U + \frac{1}{2} m' \sin 2\theta_U &= 0 \quad (4.223) \\ \tan 2\theta &= \frac{2m}{m'} \quad (4.224) \end{aligned}$$

Και τελικά έχουμε ορίσει την γωνία θ_U. Αντιστοίχως θα έχουν και οι υπολογισμοί του πίνακα M_{0D}. Επομένως η συνάρτηση που μας δίνει το πλήθος των γεννητόρων για τη θεωρία μας Εξ. (4.220) δίνει $(N_G - 1)^2 = 1$ και αφού $\theta_U \equiv \theta_D \equiv \theta$. Η παράμετρος αυτή είναι η γωνία μίξης Cabibo.

Για να είναι πλήρης η θεωρία μας, πρέπει να εξετάσουμε και τα ρεύματα. Τα ουδέτερα ρεύματα παραμένουν αναλλοίωτα, ενώ τα φορτισμένα ρεύματα είναι:

$$(4.216) \Rightarrow L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \Big[\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu U_{Cabibo} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} W_\mu{}^+ + \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu U_{Cabibo}{}^{-1} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} W_\mu{}^- \Big] \quad (4.225)$$

Αφού χρειαζόμαστε μόνο μια παράμετρο, τη γωνία Cabibo, είναι εύκολος ο υπολογισμός. Οπότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu U_{Cabibo} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{c}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_R \cos\theta + s_R \sin\theta \\ -d_R \sin\theta + s_R \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \bar{u}_L \gamma^\mu d_R \cos\theta + \bar{u}_L \gamma^\mu s_R \sin\theta - \bar{c}_L \gamma^\mu d_R \sin\theta + \bar{c}_L \gamma^\mu s_R \cos\theta \\
\begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu {U_{Cabibo}}^{-1} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{d}_L & \bar{s}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} u_R \cos\theta - c_R \sin\theta \\ u_R \sin\theta + c_R \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \bar{d}_L \gamma^\mu u_R \cos\theta + \bar{d}_L \gamma^\mu c_R \sin\theta - \bar{s}_L \gamma^\mu u_R \sin\theta + \bar{s}_L \gamma^\mu c_R \cos\theta
\end{aligned} \tag{4.226}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
L^{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \Big[& (\bar{u}_L \gamma^\mu d_R \cos\theta + \bar{u}_L \gamma^\mu s_R \sin\theta - \bar{c}_L \gamma^\mu d_R \sin\theta + \bar{c}_L \gamma^\mu s_R \cos\theta) {W_\mu}^+ \\
& + (\bar{d}_L \gamma^\mu u_R \cos\theta + \bar{d}_L \gamma^\mu c_R \sin\theta - \bar{s}_L \gamma^\mu u_R \sin\theta + \bar{s}_L \gamma^\mu c_R \cos\theta) {W_\mu}^- \Big]
\end{aligned} \tag{4.227}$$

Όμοια ισχύει η ανάλυση και για τις υπόλοιπες γενεές quarks. Από τη σύγκριση της εξίσωσης (4.225) και της (4.227), προκύπτει ότι οι αρχικοί όροι έχουν διαφοροποιηθεί κατά $\cos\theta$ και $\sin\theta$ παράγοντες. Η φυσική έννοια που κρίβεται είναι ότι ένα διαδιδόμενο quark μπορεί να μετατραπεί σε ένα άλλο. Για παράδειγμα ένα u quark μπορεί να μετατραπεί σε ένα s quark κοκ με πιθανότητα ανάλογη του cos ή του sin της γωνίας Cabibo. Πειραματικά η γωνία Cabibo έχει προσδιοριστεί ως $\theta \approx 13$.

4.8 Οι SU(3) όροι της Lagrangian

Συμπερασματικά , τα σωματίδια υπακούουν και σε μια άλλη τρίτη συμμετρία, την SU(3), δηλαδή τη συμμετρία χρώματος. Και αυτό φαίνεται από τον τρόπο που έχει θεμελιωθεί μέχρι στιγμής, η θεωρία μας.
Για να είναι επομένως αναλλοίωτη η Lagrangian μας κάτω από τους SU(3) μετασχηματισμούς, θα πρέπει να προσθέσουμε 8 πεδία βαθμίδας, τα gluons ${G_\mu}^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 8$. Η συναλλοίωτη παράγωγος της θα γίνει:

$$D_\mu \Psi = \Big(\partial_\mu - i g_3 \frac{\lambda_\alpha}{2} {G_\mu}^\alpha \Big) \Psi \tag{4.228}$$

όπου g_3 η σταθερά ζεύξης των ισχυρών αλληλεπιδράσεων.
Με τα 8 πεδία βαθμίδας να υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού (βλ. Παράρτημα Α):

$$G_\mu{}'^\alpha = G_\mu{}^\alpha + \frac{1}{g_3}\partial_\mu\theta^\alpha - \mathfrak{f}_{\alpha bc}\theta^b G_\mu{}^c \quad \text{βλ. και Εξ.(2.179)} \tag{4.229}$$

όπου $\mathfrak{f}_{\alpha bc}$ οι σταθερές δομής της ομάδας (βλ. Παράρτημα Α και Εξ. (74)).
Παραμένει ωστόσο να τονιστεί ότι η SU(3) είναι **ακριβής συμμετρία της φύσης** και επομένως δεν απαιτείται αυθόρμητο σπάσιμο. Τα gluons παραμένουν άμαζα. Η Lagrangian της ισχυρής αλληλεπίδρασης, έχει ως:

$$L^{strong} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}{}^\alpha G^{\mu nu,alpha} + \sum_{\mathfrak{f}} i\overline{f}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - ig_3\lambda_\alpha 2G_\mu{}^\alpha\Big)\mathfrak{f} \tag{4.230}$$

και αυτή είναι που θα πρέπει να προστεθεί στην ολική Lagrange της αντίστοιχης αλληλεπίδρασης.

Κεφάλαιο 5

$\beta(G)$ function

Η σχέση για το ηλεκτρικό φορτίο είναι:

$$Q = {I_W}^3 + \frac{Y_W}{2} \tag{5.1}$$

	Σωματίδιο	Σπίνορας	I_W	${I_W}^3$	Y_W	Q
Αριστερόστροφα Λεπτόνια	$\begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	l_L	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Δεξιόστροφα Λεπτόνια	e_R μ_R τ_R	l_R	0	0	-2	-1
Αριστερόστροφα quark	$\begin{pmatrix} {u_L}^R \\ {d_L}^R \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {u_L}^G \\ {d_L}^G \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {u_L}^B \\ {d_L}^B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {c_L}^R \\ {s_L}^R \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {c_L}^G \\ {s_L}^G \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {c_L}^B \\ {s_L}^B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {t_L}^R \\ {b_L}^R \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {t_L}^G \\ {b_L}^G \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} {t_L}^B \\ {b_L}^B \end{pmatrix}$	Q_L	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
Δεξιόστροφα quark	${u_R}^R$, ${u_R}^G$, ${u_R}^B$ ${d_R}^R$, ${d_R}^G$, ${d_R}^B$ ${c_R}^R$, ${c_R}^G$, ${c_R}^B$ ${s_R}^R$, ${s_R}^G$, ${s_R}^B$ ${t_R}^R$, ${t_R}^G$, ${t_R}^B$ ${b_R}^R$, ${b_R}^G$, ${b_R}^B$	U_R U_R	0 0	0 0	4/3 -2/3 4/3 -2/3 4/3 -2/3	2/3 -1/3 2/3 -1/3 2/3 -1/3

Σωματίδιο	Σπίνορας
$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$	.

Θεωρώντας ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις συνδέονται σε μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία (GUT) και με μια σταθερά συζεύξης g_G, υπό την οποία όλες οι υπόλοιπες σταθερές συζεύξης g_i (αντίστοιχα με τα υποσύνολα G_i από τα οποία απαρτίζεται το G) συνδέονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και για κάθε συγκεκριμένο σύνολο G.
Η σύνδεση των σταθερών ζεύξης μπορεί να φανεί και από τη β function.

Κατά τη διαδικασία της διαστατικής ομαλοποίησης (αλλά και στις υπόλοιπες μεθόδους επανακανονικοποίησης) εισήχθηκε μια αυθαίρετη σταθερά μ , η οποία έχει διαστάσεις μάζας (στη περίπτωση της διαστατικής ομαλοποίησης). Άμεσο επακόλουθο ήταν να εξετάσουμε κατά πόσο εξαρτόνται τα αποτελέσματα μας από την επιλογή της σταθεράς αυτής. Θα δούμε τελικά ότι τόσο η μάζα όσο και το φορτίο παραμένουν αναλλοίωτα και είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε την ομάδα επανακανονικοποίησης.

Εν αρχή, ήταν ο Wilson και η ιδέα του, ότι όλες οι παράμετροι μιας συγκεκριμένης επανακονικοποιήσιμης θεωρίας πεδίου μπορούν να θεωρηθούν ως ποσότητες εξαρτώμενες από την κλίμακα αναφοράς. Αυτή η εξάρτηση τάξης μπορεί να περιγραφεί και να υπολογιστεί κάθε φορά από απλές διαφορικές εξισώσεις, οι γνωστές εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης. Οι λύσεις τους μπορούν να οδηγήσουν σε προβλέψεις φυσικής καινούργιου τύπου: προβλέψεις οι οποίες κα•τω από συγκεκριμένες συνθήκες, οι συναρτήσεις συσχέτισης κβαντικού πεδίου εμφανίζουν ασυνήθιστους αλλά υπολογίσιμους νόμους κλίμακος σαν συνάρτηση των συντεταγμένων. Η βασική ιδέα του Wilson περιγράφει την χαρακτηριστικά πολύ μικρή διόρθωση των κβαντικών διορθώσεων σε μια θεωρία και καθώς πλησιάζουμε σε όλο και μικρότερες αποστάσεις.

Για πρώτης τάξης διόρθωση, η β function δίνεται ως:

$$\beta_{g_1} = (16\pi^2)^{-1} {g_1}^3 \Big[\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1)\Big] \tag{5.2}$$

όπου R είναι η αναπαράσταση για φερμιόνια και S για μποζόνια που ακολουθεί η G ομάδα. Η σταθερά σύζευξης που σχετίζεται με την ομάδα G_1 είναι η g_1. Θυμίζουμε ότι C είναι ο Clebsch-Gordan συντελεστής του G
Σκεπτόμενοι ότι οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι για τις τρείς γενεές, θα υπάρχει απλά πολλαπλασιασμός με n_{gen}. Η $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, θα εξεταστεί πρώτη αφού διαπιστώνουμε ότι αποτελεί την απλούστερη των περιπτώσεων. Η β συνάρτηση της $SU(3)$ λοιπόν, για την πρώτη διόρθωση θα είναι:

$$(5.2) \Rightarrow \beta_{g_3} = (16\pi^2)^{-1} {g_3}^3 \Big[\frac{2}{3}T(R_3)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_3)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_3)\Big]$$

$$\beta_{g_3} = \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\left[\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\Big)\right]\cdot n_{gen} - \frac{11}{3}\cdot 3\Big\} \tag{5.3}$$

- Ισχύει ότι $T(R) = \frac{1}{2}$ για όλες τις τριπλέττες.
- Για SU(n) ομάδα, ισχύει $C_2(G_n) = n\boldsymbol{I}$. Άρα εδώ είναι $C_2(G_3) = 3$ (όπου G_n είναι συμβολισμός σύμφωνος με την εταξινόμηση Cartan).
- Η διπλέττα του Higgs δεν ανήκει στην SU(3) οπότε ο όρος $\frac{1}{3}T(S_1)d(S_2)$ μηδενίζεται και συνεπώς η β συνάρτηση της $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ δεν επιδέχεται μποζόνια.
- Τα αριστερόστροφα quark μπορούν να εμφανίζονται με τρεία χρώματα, άρα οι διπλέττες των αριστερόστροφων quark ανήκουν στην ομάδα SU(3)
- Το ίδιο ισχύει και για τις singlet καταστάσεις των δεξιόστροφων quark.
- Τα αριστερόστροφα quark σχηματίζουν doublets, άρα για την SU(2) η ζητούμενη διάσταση είναι δύο. SU(3).
- τα δεξιόστροφα quark είναι singlet καταστάσεις και επομένως πολλαπλασιάζουμε με την μονάδα.

Με το ίδιο σκεπτικό, υπολογίζουμε την β συνάρτηση για την $SU(2) \times U(1)$ και την U(1).

$$
\begin{aligned}
(5.2) \Rightarrow \beta_{g_2} &= (16\pi^2)^{-1}{g_2}^3\Big[\frac{2}{3}T(R_2)d(R_1) + \frac{1}{3}T(S_2)d(S_1) - \frac{11}{3}C_2(G_2)\Big] \\
\beta_{g_2} &= (16\pi^2)^{-1}{g_2}^3\Big[\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 1\Big)n_{gen} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 n_H - \frac{11}{3}\cdot 2\Big] \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Τα ακόλουθα, διευκολύνουν την κατανόηση:

- Ισχύει και εδώ ότι $T(R_2) \equiv T(S_2) = \frac{1}{2}$.
- Για τον συντελεστή Casimir είναι $C_2(G_2) = 2$.
- Ο εντοπισμός για διπλέττες σωματιδίων είναι εύκολος, αφού είναι γνωστό ότι είναι εκείνες των αριστερόστροφων quarks και των αριστερόστροφων λεπτονίων.
- Εδώ συναντάμε και την μόνη (άρα $d(S_2) = 1$) διπλέττα των μποζονίων Higgs οπότε υπάρχει και ο αντίστοιχος όρος.

Τέλος για την U(1), υπολογίζοντας την β συνάρτηση και μόνο για την πρώτη διόρθωση έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(5.2) \Rightarrow \beta_{g_1} &= (16\pi^2)^{-1}{g_1}^3\Big[\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1)\Big] \\
\beta_{g_1} &= (16\pi^2)^{-1}{g_1}^3\Big[\Big\{\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2\cdot 6 + \frac{2}{3}\Big(\frac{4}{3}\Big)^2\cdot 3 + \frac{2}{3}\Big(\frac{-2}{3}\Big)^2\cdot 3 + \frac{2}{3}(-1)^2\cdot 2\frac{2}{3}(-2)^2\Big\}n_{gen} \\
&\quad + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot 2\cdot n_H\Big] \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

- Εδώ ο τελεστής Casimir[1]

- Επιπλέον ο συντελεστής $T(R)$ είναι το τετράγωνο του υπερφορτίου (βλ Πίνακα 1).

- Όλα τα αριστερόστροφα quark έχουν το ίδιο υπερφορτίο, άρα και συντελεστή $T(R)$. Παρόμοια και οι doublets και singlets των λεπτονίων.

- Παρατηρούμε διαφοροποίηση για τα δεξιόστροφα quark αφού και οι τρείς γενεές των u, c και t (αλλά και τα d, s και b) έχουν το ίδιο υπερφορτίο.

Για δεύτερης τάξης διόρθωση:

$$\begin{aligned}\beta_{g_1} = (16\pi^2)^{-1}{g_1}^3\Big[\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1)\Big] \\ + (16\pi^2)^{-2}{g_1}^5\Big\{\Big[\frac{10}{3}C_2(G_1) + 2C_2(R_1) + 2C_2(R_1)\Big]T(R_1)d(R_2) \\ + \Big[\frac{2}{3}C_2(G_1) + 4C_2(S_1)\Big]T(S_1)d(S_2) - \frac{34}{3}[C_2(G_1)]^2\Big\} \\ + (16\pi^2)^{-2}{g_1}^3{g_2}^2[2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) + 4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)]\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.1 Επανακανονικοποίηση στη QED

Ένα σοβαρό σημείο: για να παραμείνει το φορτίο του e αδιάστατο σε n διαστάσεις θα πρέπει να ισχύσει ο μετασχηματισμός: $e \to e(\mu^2)^{\frac{n}{2}-2}$. Παίρνουμε για παράδειγμα για $n = 4$, το e δεν έχει μονάδες: (με δεδομένα $[L]$=4 , $[\partial_\mu] = [p_\mu]$=1)

$$\bar{\Psi}\partial_\mu\gamma^\mu\Psi \to 4 = 2[\Psi] + 1 \to [\Psi] = \frac{3}{2} \tag{5.7}$$

$$[F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] = 4 \to [F_{\mu\nu}] = 2 \to F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to [A^\mu] = 1 \tag{5.8}$$

$$e\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \to [e] = 0 \tag{5.9}$$

[1] **Από τα στοιχεία μιας ημιαπλής Lie άλγεβρας βαθμού λ, μπορεί κανείς να κατασκευάσει λ μη γραμμικούς αναλλοίωτους τελεστές, οι οποίοι είναι γνωστοί ως τελεστές Casimir και αντιμετατίθεται με κάθε στοιχείο της άλγεβρας.**

Για n τυχαίο είναι $[L = n]$ ϑα είναι:

$$n = 2[\Psi] + 1 \rightarrow [\Psi] = \frac{n-1}{2} \tag{5.10}$$

$$[F_{\mu\nu}] = \frac{n}{2} \rightarrow 1 + [A] = \frac{n}{2} \rightarrow [A] = \frac{n-2}{2} \tag{5.11}$$

$$e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu \rightarrow n = [e] + 2\frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2} \rightarrow n = [e] + n - 1 + \frac{n-2}{2} \rightarrow [e] = \frac{n-4}{2} = \frac{n}{2} - 2 \tag{5.12}$$

Το μ^2 είναι μια αυθαίρετη μάζα. Αλλά ακριβώς η ανεξαρτησία των φυσικών αποτελεσμάτων από τη μάζα αυτή δίνει την ομάδα ανακανονικοποίησης. Άλλωστε η ομάδα αυτή είναι αντίστοιχη με το όριο Λ^2.

5.2 Υπολογισμός της beta function στην QED

Για τη δεύτερη τάξη της ϑεωρίας διαταραχών προκύπτουν τρεία κύρια τοπολογικά διαγράμματα, τα οποία έχουν ειδική σημασία και ονομασία: διαμόρφωση ρεύματος, διαδότης ηλεκτρονίου και πόλωση κενού. Από τα διαγράμματα Feynmann ο υπολογισμός του αναλλοίωτου πλάτους δίνεται:

$$-\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\Big[\frac{i}{\not k - m}(-i\gamma_\nu e)\frac{i}{\not q - \not k - m}(-i\gamma_\mu e)\Big]$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i\gamma_\nu e)\frac{i}{\not p - \not k - m}(-i\gamma_\mu e)\frac{i}{\not p - \not k - \not q - m}(-i\gamma^\nu e)\frac{-i}{k^2}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-i\gamma_\mu e)\frac{i}{\not p - \not k - m}(-i\gamma^\mu e)\frac{-i}{k^2}$$

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του διαδότη ηλεκτρονίου, για να βρούμε τον πλήρη διαδότη χρησιμοποιούμε τη προσέγγιση αλυσίδας με 1PI διαγράμματα.

$$iS_F(p) = iS_F{}^0(p) + iS_F{}^0(p)(-i\Sigma(p))i\Sigma_F{}^0(p) + \dots$$
$$= \frac{i}{\not p - m_0 - \Sigma(p)}$$

Ο διαδότης του φωτονίου είναι:

$$\int \frac{d^nq}{(2\pi)^n} Tr\Big[-ie\gamma^\mu \frac{i}{\not q - m}(-ie\gamma^\nu)\frac{i}{\not q - \not p - m}\Big](-1) \tag{5.13}$$

$$= e^2 \int \frac{d^nq}{(2\pi)^n} Tr\frac{[\gamma^\mu(\not q + m)\gamma^\nu(\not q - \not p + m)]}{(q^2 - m^2)((p-q)^2 - m^2)}(-1) \tag{5.14}$$

σημειώνουμε ότι το -1 οφείλεται στο φερμιονικό βρόγχο και τελικά προκύπτει:

$$i\mathfrak{W} = -\frac{2}{3}\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}e^2[p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu] + e^2 F_A \tag{5.15}$$

Έχει προκύψει επομένως ένας επαναορισμός του διαδότη του φωτονίου. Δηλαδή: $A_\mu \rightarrow (1 - \frac{2}{\varepsilon}\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2} + e^2 F_A)^{\frac{1}{2}} A_\mu$. Η τελευταία μπορεί να γραφεί και ως:

$$A_{\mu_R} = (1 - \frac{2}{\varepsilon}\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2} + e^2 F_A)^{\frac{1}{2}} A_\mu \equiv (1 + \frac{C}{\varepsilon}e^2)^{\frac{1}{2}} A_\mu \tag{5.16}$$

Οπότε ο όρος

$$\begin{aligned}
-ie[1 + \frac{2}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2} + e^2 F_e]\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi \\
= -ie\Big(1 + \frac{De^2}{\varepsilon}\Big)\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi \\
= -ie\Big(1 + \frac{De^2}{\varepsilon}\Big)\Big(1 + \frac{Ae^2}{\varepsilon}\Big)\Big(1 - \frac{Ce^2}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}\bar{\Psi}_R\gamma^\mu A_{\mu_R}\Psi_R \\
= -ie\Big(1 + \frac{D + A - \frac{1}{2}C}{\varepsilon}e^2\Big)\bar{\Psi}_R\gamma^\mu A_{\mu_R}\Psi_R
\end{aligned} \tag{5.17}$$

έχοντας ορίσει τελικά:

$$e_R = e\Big(1 + \frac{D + A - \frac{1}{2}C}{\varepsilon}e^2\Big) \tag{5.18}$$

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

$\Psi = \Big(1 + \frac{Ae^2}{\varepsilon}\Big)\Psi_R$
$A_\mu = \Big(1 - \frac{Ce^2}{\varepsilon}\Big)A_{\mu_R}$
$m = \Big(1 - \frac{A+B}{\varepsilon}e^2\Big)m_R = \frac{1+\frac{B}{\varepsilon}e^2}{1+\frac{Ae^2}{\varepsilon}}m_R$
$e = \Big(1 - \frac{D+A-\frac{1}{2}C}{\varepsilon}e^2\Big)e_R = \frac{1-\frac{De^2}{\varepsilon}}{\Big(1+\frac{Ae^2}{\varepsilon}\Big)\Big(1\frac{Ce^2}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}}e_R$

Είναι:

$$Z_\Psi = 1 - \frac{{e_R}^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \tag{5.19}$$

$$Z_A = 1 - \frac{4}{3}\frac{{e_R}^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \tag{5.20}$$

$$m = m_R\Big(1 - \frac{3}{16}\frac{{e_R}^2}{\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\Big) \tag{5.21}$$

$$
{e_\mu}^{(n-4)\frac{1}{2}} = \Big(1 + \frac{2}{3}\frac{{e_R}^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\Big)e_R \tag{5.22}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
\beta(g_R) &= -2\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3} - e_R\frac{2}{3}3{e_R}^2\Big)\frac{1}{16\pi^2} = \\
&= -\Big(-\frac{4}{3}\Big)\frac{{e_R}^2}{16\pi^2} = \frac{4}{3}\frac{{e_R}^2}{16\pi^2}
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

5.3 Ομάδα Ανακανονικοποίησης - Απόδειξη της β function

Σε αυτό το σημείο εισάγεται η έννοια της γενικευμένης συνάρτησης Green $G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ ή $G^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ στον χώρο των ορμών και των 1-Particle Irreducible (1PI) διαγραμμάτων. Η Green περιγράφει διαδικασίες αλληλεπίδρασης οποιασδήποτε τάξης. Τα 1PI διαγράμματα είναι εκείνα τα οποία δεν μπορούμε να χωρίσουμε σε δύο ανεξάρτητα διαγράμματα κόβοντας μια εσωτερική γραμμή. Μπορούμε να ορίσουμε την 1PI γενικευμένη συνάρτηση Green, $\Gamma^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ την οποία βρίσκουμε αφαιρώντας τα μη 1PI διαγράμματα από την $G^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)$ καθώς και τους διαδότες από τις εξωτερικές γραμμές, δηλαδή μαθηματικά διατυπωμένο είναι:

$$
G^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) = \prod_{i=1}^{n}\Delta(p_i)\Gamma^{(n)}(p_1,\ldots,p_n) \tag{5.24}
$$

όπου $\Delta(p_i)$ ο διαδότης του πεδίου. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το πεπερασμένο μέρος των σταθερών κανονικοποίησης και στα πλαίσια ορισμένων παραδοχών, οι οποίες ορίζουν το σχήμα επανακανονικοποίησης. Γράφοντας αναλυτικά τις εξαρτήσεις των Γ είναι:

$$
{\Gamma_R}^{(n)}(\boldsymbol{p}, g_R, m_R, \mu) = \lim_{n\to 4}\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(\boldsymbol{p}, g_R({g_\mu}^{(4-n)\rho}, n), m{Z_m}^{-1}({g_\mu}^{(4-n)\rho}, n), \mu, n) \tag{5.25}
$$

$$
{\Gamma_R}^{(n)}(\boldsymbol{p}, g_R, m_R, \mu) = \lim_{n\to 4} Z^{\frac{n}{2}}({g_\mu}^{(4-n)\rho}, n)\Gamma^{(n)}(\boldsymbol{p}, g, m, n) \tag{5.26}
$$

όπου με Z_i είναι οι σταθερές κανονικοποίησης και επομένως προσδιορίζονται σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών. Έχουμε δηλαδή χρησιμοποιήσει οτι η ανακανονικοποίηση είναι ανεξάρτητη από τη μάζα. Άρα οι απειρίες μας δεν εξαρτώνται από τη μάζα και η μόνη απειρία μάζας που εμφανίζεται είναι στην $m_R = m(1 + \text{άπειρα})$.
Η (5.26) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$
{\Gamma_R}^{(n)}(\boldsymbol{p}, g_R, m_R, \mu)Z^{-\frac{n}{2}} = \Gamma^{(n)}(p, g, m, n) \tag{5.27}
$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα οτι δεν εμφανίζεται καμία εξάρτηση από τη μάζα.
Παραγωγίζουμε την Εξ. (5.25) με $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$:

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R}+\mu\frac{\partial {Z_m}^{-1}}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial {Z_m}^{-1}}\Big]\tilde{\Gamma}_R^{(n)} = \frac{n}{2}Z^{\frac{n}{2}-1}\frac{\partial Z}{\partial\mu}\Gamma^{(n)}(p,g,m,n) \Rightarrow \tag{5.28}$$

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R}-\frac{1}{{Z_m}^2}\mu\frac{\partial Z_m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\frac{m_R}{m}}\Big]\tilde{\Gamma}_R^{(n)} = \frac{n}{2}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\mu}Z^{\frac{n}{2}}\Gamma^{(n)}(p,g,m,n) \Rightarrow \tag{5.29}$$

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_R}-\frac{m}{Z_m}\mu\frac{\partial \ln Z_m}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}\Big]\tilde{\Gamma}_R^{(n)} = \frac{n}{2}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\mu}\tilde{\Gamma}_R^{(n)} \Rightarrow \tag{5.30}$$

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\tilde{\beta}(g_R)\frac{\partial}{\partial\mu}-m_R\tilde{\gamma}_m(g_R)\frac{\partial}{\partial m_R}-\frac{n}{2}\tilde{\gamma}(g_R)\Big]\tilde{\Gamma}_R^{(n)}=0 \tag{5.31}$$

όπου

$$\tilde{\beta}(g_R)\equiv\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g_R \tag{5.32}$$

$$\tilde{\gamma}_m(g_R)\equiv\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m \tag{5.33}$$

$$\equiv\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z \tag{5.34}$$

Οι $\beta(g_R),\gamma_m(g_R)$ και $\gamma(g_R)$ λαμβάνονται ως όρια του $n\to 4$. Πρόκειται για πεπερασμένες ποσότητες, αφού εμφανίζονται από κατασκευής σε κανονικοποιημένα μεγέθη.
Στη διαστατική ομαλοποίηση είναι:

$$g{\mu}^{(4-\nu)\rho}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha_\nu(g_R)}{\varepsilon^\nu}+g_R \tag{5.35}$$

$$m_B=m_R+m_R\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(g_R)}{\varepsilon^\nu} \tag{5.36}$$

$$Z=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu(g_R)}{\varepsilon^\nu} \tag{5.37}$$

Τονίζεται ότι οι $g_\mu{}^{(4-\nu)\cdot\rho}, m_B, Z$ είναι οι ανακανονικοποιημένες ποσότητες $(g_R, m_R, 1)$ και οι πόλοι χρειάζονται για να απαλειφούν οι πόλοι των διαγραμμάτων Feynman. Μια διαδικασία που αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία και ως 'ελάχιστη αφαίρεση'.
Αποδεικνύεται ότι (για τις περιπτώσεις που υπάρχει εξάρτηση μόνο από τον απλό πόλο):

$$\beta(g_R) = -2\big(\alpha_1 - g_R\frac{\partial\alpha_1}{\partial g_R}\big)\cdot\rho \tag{5.38}$$

$$\gamma(g_R) = -2g_R\frac{\partial c_1}{\partial g_R}\cdot\rho \tag{5.39}$$

$$\gamma_\mu(g_R) = -2\frac{g_R}{m_R}\frac{\partial b_1}{\partial g_R}\cdot\rho \tag{5.40}$$

5.3.1 Ορισμός β κατά t' Hooft

Γενικά η συνάρτηση β μπορεί να οριστεί και ως (ορισμός κατά t' Hooft):

$$\beta(e) \equiv \mu\frac{\partial e}{\partial\mu} = -\varepsilon e\Big(1+\frac{e^2}{24\pi^2\varepsilon}\Big)\Big(1+\frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}\Big)^{-1} = -\varepsilon e\Big(1-\frac{e^2}{6\pi^2\varepsilon}+O(e^4)\Big) \to \frac{e^3}{6\pi^2} \quad \text{για} \quad \varepsilon\to 0 \tag{5.41}$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής της ομάδας επανακανονικοποίησης δίνεται εύκολα ως εξής:

$$\mu\frac{\partial e^2}{\partial\mu} = \frac{(e^2)^2}{6\pi^2} \tag{5.42}$$

άρα

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1-\frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2}\ln\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{5.43}$$

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1-\frac{2\alpha(\mu_0)}{3\pi}\ln\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{5.44}$$

Η συνάρτηση $\alpha(\mu)$ ονομάζεται running coupling constant και μετρά ουσιαστικά στο πλαίσιο αναφοράς για την QED την ένταση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης . Συγκεκριμένα η $\alpha(\mu)$ δείχνει πώς μεταβάλλεται η σταθερά ζεύξης με την ενέργεια. Στον ηλεκτρομαγνητισμό η σταθερά ζεύξης αυξάνεται με την ενέργεια (φαινόμενο screening). Για παράδειγμα, έχει μετρηθεί και πειραματικά ότι για ενέργειας της κλίμακας των 91 GeV είναι $\alpha(91GeV) \simeq \frac{1}{128}$.

Γενικά, η πιο συνηθισμένη επιλογή για σταθερές σύζευξης είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q) &= \frac{g_3{}^2(Q)}{4\pi}, \\ g(Q) &= g_2(Q), \\ g'(Q) &= \frac{1}{C}g_1(Q) \end{aligned} \tag{5.45}$$

όπου με Q έχουμε συμβολίσει την στάθμη της ορμής στην οποία αναφερόμαστε. Παρακάτω θα δούμε πιθανή συσχέτιση τους για TeV ορμή που απαιτούν οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες. Γνωρίζουμε επιπλεόν ότι ισχύει:

$$\frac{g_1}{g_2} = \tan\theta_W \tag{5.46}$$

όπου θ_W είναι η γωνία Weinberg.

$$\frac{1}{C}\frac{g_1(Q)}{g_2(Q)} = \tan\theta_W(Q) \tag{5.47}$$

Ωστόσο μια συνάρτηση της ορμής Q από τις σταθερές σύζευξης έχει ήδη προβλεφθεί. Ορίζοντας ως τρέχουσα σταθερά σύζευξης: $\alpha(Q^2) \equiv \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$

$$\tag{5.48}$$

.1 Lorentz αναλλοίωτο

Ένας Lorentz μετασχηματισμός σχετίζει τις συντεταγμένες δύο συστημάτων αναφοράς. Ας θεωρήσουμε δύο γεγονότα στο χωρόχρονο (t, x, y, z) και $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$. Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε της έννοια της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στο χώρο, σε αυτή του χωρόχρονου, έστω ds. Θέλουμε η ποσότητα αυτή να είναι αναλλοίωτη για συστήματα Lorentz. Για να είναι αυτή αναλλοίωτη για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές (δηλαδή σε όλα τα συστήματα Lorentz), θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Το βασικό αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς Lorentz, είναι η ποσότητα $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$.
Το στοιχειώδες αναλλοίωτο δημιουργείται μέσω της άθροισης του γινομένου των ίδιων πάνω και κάτω δεικτών. Δηλαδή:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{49}$$

Ένα τετράνυσμα όπως το x^μ καλείται ανταλλοίωτο διάνυσμα, ενώ το x_μ καλείται συναλλοίωτο διάνυσμα. Το εσωτερικό γινόμενο ενός ανταλλοίωτου και ενός συναλλοίωτου ανύσματος, είναι αναλλοίωτο. Εισάγεται επίσης η σύμβαση της άθροισης σύμφωνα με την οποία εάν ένας δείκτης εμφανιστεί μια φορά πάνω και μια κάτω, τότε προκύπτει άθροιση, δηλαδή $\sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu \rightarrow A^\mu A_\mu$. Επιπλέον η σχέση ενός συναλλοίωτου και ενός ανταλλοίωτου διανύσματος δίνεται εισάγοντας το μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Συνεπώς: $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = g_{\mu0}x^0 + g_{\mu1}x^1 + g_{\mu2}x^2 + g_{\mu3}x^3$. Οπότε το εσωτερικό γινόμενο δύο τετρανυσμάτων γράφεται:

$$AB = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu}A^\nu B_\mu = g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu \tag{51}$$

Η μετρική $g_{\mu\nu}$ αυτή, έχει τις ίδιες ακριβώς τιμές με τη μετρική σε χωρόχρονο Minkowski. Γενικά η μετρική μας παρέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Στα πλαίσια της ειδικής σχετικότητας η μετρική φαίνεται να έχει ένα παθητικό ρόλο. Για την γενική σχετικότητα όμως, η μετρική εξαρτάται από την ύλη που υπάρχει μέσα στο χωρόχρονο.

Τέλος θα οριστεί και ο τετραδιάστατος διαφορικός τελεστής.

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\big) = \big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\big) \tag{52}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu}\partial_\mu = \big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\big) \tag{53}$$

τα παραπάνω δίνουν τον Lorentz αναλλοίωτο δεύτερης τάξης διαφορικό τελεστή:

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad \text{D ' Alembertian τελεστής} \tag{54}$$

Ορίζουμε το τετράνυσμα ενέργειας - ορμής ενός σωματιδίου:

$$p^\mu = \big(\frac{E}{c}, \vec{p}\big), \quad p_\mu = \big(\frac{E}{c}, -\vec{p}\big) \tag{55}$$

Το Lorentz αναλλοίωτο προκύπτει συνεπώς:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\vec{p} = m^2 c^2 \tag{56}$$

Στο χωρόχρονο το στοιχειώδες μήκος δεν είναι θετικά ορισμένο. Συνεπώς:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \tag{57}$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct - x, -y, -z) = (ct, -\vec{r}) \tag{58}$$

.1 Η συνάρτηση δ του Dirac

Η συνάρτηση δ του Dirac ορίζεται με τις σχέσεις:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{για} \quad x \neq 0 \tag{59}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = 1 \tag{60}$$

όπου ϵ μικρός θετικός αριθμός. Οι σχέσεις αυτές σημαίνουν ότι η συνάρτηση δ μηδενίζεται παντού, εκτός από τη θέση $x = 0$, όπου παίρνει μια πολύ μεγάλη τιμή, τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα της ως προς x να δίνει μονάδα. Πρόκειται δηλαδή για μια πολύ 'στενή' και πολύ 'ψηλή' συνάρτηση.
Ένας ισοδύναμος ορισμός της συνάρτησης δ δίνεται από τη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{61}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η συνάρτηση δ έχει την ιδιότητα να 'σκοτώνει' το ολοκλήρωμα, αφήνοντας ως αποτέλεσμα την τιμή της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης f στη θέση x =0, στην οποία 'εδρεύει' η συνάρτηση δ. Αν η συνάρτηση δ 'εδρεύει' στη θέση α, ισοδύναμα έχουμε:

$$f(x)\delta(x-\alpha)dx = f(\alpha) \tag{62}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης δ, μπορεί κάποιος να αποδείξει διάφορες ιδιότητες της, όπως:

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{63}$$

$$x\delta(x) = 0 \tag{64}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x) \tag{65}$$

Επίσης μπορεί να δεί κάποιος ότι η συνάρτηση δ μπορεί να παρασταθεί χρησιμοποιώντας ένα σύνολο αναλυτικών συναρτήσεων $\phi_n(x)$, τέτοιων ώστε να ισχύει:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \tag{66}$$

Μια αυτού του είδους αναπαράσταση της δ - συνάρτησης είναι η ακόλουθη:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} \tag{67}$$

Άλλες εκφράσεις της συνάρτησης δ είναι οι ακόλουθες:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \tag{68}$$

$$\delta(x) = \lim_{b\to 0} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{b^2}} \tag{69}$$

.2 Θεωρία Ομάδων

Έστω σύνολο ορισμένων στοιχείων και έχει οριστεί μια πράξη σύνθεσης αυτών (π.χ. πολλαπλασιασμός). Το σύνολο αύτο αποτελεί ομάδα όταν:

- Το στοιχείο AB ανήκει επίσης στο σύνολο, για κάθε A και B
- Το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πράξη σύνθεσης
- Υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο
- Υπάρχει για κάθε στοιχείο το αντίγραφό του

Περισσότερα για την ομάδα U(1) που εισήχθει. Αυτή αποτελεί το σύνολο όλων των παραγόντων φάσης $U(\theta) = e^{i\theta}$. Παίρνοντας, για δύο στοιχεία $U(\theta_1), U(\theta_2)$ της ομάδας και με πράξη σύνθεσης των πολλαπλασιασμό, τότε:

- $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_1 + \theta_2) \in U(1)$
- $I = U(0)$
- $U^{-1}(\theta) = U(-\theta)$
- $U(\theta_1)[U(\theta_2)U(\theta_3)] = [U(\theta_1)U(\theta_2)]U(\theta_3)$

Επειδή η παράμετρος από την οποία εξαρτώνται όλα τα στοιχεία της ομάδας είναι η θ και η οποία παίρνει συνεχείς τιμές $0 \leq \theta \leq 2\pi$ άρα πρόκειται για μια συνεχή ομάδα. Επιπλέον, ισχύει για την ομάδα $U(1)$:

- τα στοιχεία της είναι διαφορίσιμες ποσότητες, αφού $dU = iUd\theta$
- πρόκειται για Αβελιανή ομάδα, αφού τα στοιχεία της μετατίθενται. Δηλαδή, ισχύει $U(\theta_1)U(\theta_2) = U(\theta_2)U(\theta_1)$
- Η ομάδα U(1) είναι η πιο απλή περίπτωση ομάδας Lie. Η όμάδα Lie ορίζεται ως μια ομάδα της οποίας τα στοιχεία είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των παραμέτρων τους. Δηλαδή, ισχύει: $A(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = e^{i\sum_{\alpha=1}{}^{n}\theta_\alpha F_\alpha}$, όπου θ_α οι παράμετροι της ομάδας και F_α οι γεννήτορες της ομάδας, καθώς γεννούν τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Ο αριθμός n αποτελεί την διάσταση της ομάδας. Θεωρώντας απειροστές παραμέτρους, τα στοιχεία της ομάδας μπορούν να γραφούν:

$$A = I + i\sum_{\alpha=1}^{n}\theta_\alpha F_\alpha \tag{70}$$

Ισχύει ότι όταν κάποιοι μετασχηματισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς συμμετρίας ενός φυσικού συστήματος όπως φαίνεται για την 70, τότε τα αντίστοιχα στοιχεία της ομάδας των μετασχηματισμών αυτών A είναι μοναδιακοί (unitary) τελεστές:

$$A\dagger = A^{-1} \qquad \text{ή} \qquad AA\dagger = I \tag{71}$$

Οι αντίστοιχοι γεννήτορες της ομάδας , είναι ερμιτιανοί τελεστές:

$$F\dagger_\alpha = F_\alpha \tag{72}$$

Ταυτόχρονα, αποτελούν τις σταθερές της κίνησης, δηλαδή μετατίθενται με την Hamiltonian του συστήματος:

$$[F_\alpha, H] = 0 \tag{73}$$

Οι γεννήτορες όμως δεν μετατίθενται μεταξύ τους:

$$[F_\alpha, F_b] = i\mathfrak{f}_{\alpha bc} F_c \tag{74}$$

Οι αριθμοί $\mathfrak{f}_{\alpha bc}$ ονομάζονται σταθερές δομής της ομάδας. Αυτή είναι και η άλγεβρα της ομάδας. Έστω ότι k από τους γεννήτορες μετατίθενται μεταξύ τους. Τότε k είναι ο βαθμός της ομάδας. Αυτό σημαίνει ότι οι γεννήτορες διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα με την Hamiltonian και έχουν ένα κοινό σύστημα ιδιοκαταστάσεων.
Περισσότερα για τη φυσική σημασία της ομάδας U(1). Αναφέρεται στον εσωτερικό χώρο των σωματιδίων. Η απαίτηση τοπικής ισχύος της συμμετρίας αυτής γεννά ένα πεδίο βαθμίδας έστω B_μ, το οποίο συνδέεται με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ομάδων συμμετρίας ευρέως γνωστό στο πεδίο της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων αποτελεί και η ομάδα περιστροφών. Θεωρείται γνωστό ότι περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ εκφράζεται από το μοναδιαίο τελεστή:

$$R(\theta) = e^{-i\theta \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}} \tag{75}$$

Η συμμετρία ως προς τις περιστροφές, δίνει διατήρηση της στροφορμής $\boldsymbol{J}$. Αυτό όμως σημαίνει πως η στροφορμή μετατίθεται με την Hamiltonian του συστήματος:

$$[H, \boldsymbol{J}] = 0 \tag{76}$$

Οι τελεστές της στροφορμής επομένως αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας. Επιπλέον, εδώ ισχύει $R(\theta_1)R(\theta_2) \neq R(\theta_2)R(\theta_1)$, οπότε προκειται για Μη Αβελιανή ομάδα.
Στη χαμηλότερη αναπαράσταση της ομάδας οι γεννήτορες της γράφονται:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \qquad \text{ή} \qquad J_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{77}$$

Όπου τ_i οι πίνακες Pauli. Οπότε οι γεννήτορες αυτοί μας δίνουν τους unitary πίνακες μετασχηματισμού:

$$R(\theta) = e^{-i\theta \frac{\tau_i}{2}} \tag{78}$$

οι οποίοι είναι οι 2×2 πίνακες. Το σύνολο των 2×2 πινάκων αποτελεί την U(2) ομάδα. Όμως για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει:

$$det(e^A) = e^{TrA} \tag{79}$$

Και επειδή οι πίνακες Pauli έχουν ίχνος μηδέν τότε οι πίνακες της ομάδας των περιστροφών έχουν ορίζουσα μονάδα. Αποτελούν επομένως μια υποομάδα της U(2), η οποία ονομάζεται special unitary 2×2 group και συμβολίζεται ως SU(2). Η αλγεβρα της ομάδας αυτής, όπως φάνηκε είναι η άλγεβρα των πινάκων Pauli:

$$[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2} \tag{80}$$

Πρόκειται για ομάδα που κανείς από τους τρείς γεννήτορες της ομάδας δε μετατίθεται με τον άλλο, οπότε ο βαθμός της ομάδας είναι 1. Συνεπώς μόνο ένας από (π.χ. ο J_z) θα μετατίθεται με την Hamiltonian.
Ακολούθως, θα οριστούν οι ορθογώνιες (orthogonal) ομάδες O(n), οι οποίες είναι ομάδες περιστροφών σε n-διάστατους ευκλείδειους χώρους και αφήνουν αναλλοίωτο το μέτρο $({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)$. Οι ομάδες αυτές παριστάνονται από ορθογώνιους πίνακες $R^T = R^{-1}$. Έαν επιπλέον ισχύει $detR = 1$ τότε πρόκειται για την ομάδα SO(n). Ο αριθμός των παραμέτρων και των γεννητόρων της ομάδας αυτής είναι $\frac{n(n-1)}{2}$. Η απλούστερη γίνεται σε έναν δισδιάστατο χώρο και συνεπώς αποτελεί στοιχείο της ομάδας SO(2). Άρα υπάρχει μόνο μια παράμετρος, η γωνία θ της περιστροφής. Τα στοιχεία της ομάδας αυτής:

$$R = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{81}$$

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2, η ομάδα U(1) με έναν παράγοντα φάσης είναι ανάλογη με την ομάδα SO(2). Προχωρώντας παραπέρα, η ομάδα που περιγράφει στροφές σε τρείς διαστάσεις και αφήνει το μέτρο $({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)$ θα έχει στοιχεία, π.χ. για περιστροφή στον z άξονα:

$$R = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{82}$$

πρόκειται επομένως για την ομάδα SO(3), με τρείς γεννήτορες και τρείς απειροστές παραμέτρους. Η ομάδα αυτή μόνο για απειροστές παραμέτρους (δηλαδή μόνο τοπικά) ταυτίζεται με την SU(2). Δηλαδή $SU(2) \approx SO(3)$.

.1 Θεωρήματα gamma πινάκων

Γενικά έστω δύο πίνακες και α ένας οποιοσδήποτε αριθμός, τότε:

$$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$$

$$Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$$

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$$

Συνεχίζοντας ορίζουμε την μετρική και τις σχέσεις μετάθεσης για τους γ πίνακες. Από εδώ και πέρα με α, b θα συμβολίζουμε ένα οποιοδήποτε τετράνυσμα, ενώ με α την ποσότητα: $\alpha = \alpha_\mu \gamma^\mu$. Έχουμε λοιπόν:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

$$\not{\alpha} \not{b} + \not{b} \not{\alpha} = 2\alpha\dot{b}$$

Από όπου παίρνουμε:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu \not{\alpha} \gamma^\mu = -2 \not{\alpha}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}, \quad \gamma_\mu \not{\alpha} \not{b} \gamma^\mu = \alpha \cdot b$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu, \quad \gamma_\mu \not{\alpha} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{\alpha}$$

Συνεχίζοντας με τα θεωρήματα ιχνώβ με βάση τα παραπάνω, θα έχουμε:

$$Tr(\text{μονός αριθμός } \gamma \text{ πινάκων}) = 0$$

$$Tr(\mathbf{1}) = 4$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, Tr(\not{\alpha} \not{b}) = 4\alpha \cdot b$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda})$$

$$Tr(\not{\alpha} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4(\alpha \cdot bc \cdot d - \alpha \cdot cb \cdot d + \alpha \cdot db \cdot c)$$

.1 Γλωσσάρι Διαστατικής Ανακανονικοποίησης

$$\int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2+M^2+2l\cdot p)^A} = \frac{\Gamma(A-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(M^2-p^2)^{A-\omega}} \tag{83}$$

$$\int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2+M^2+2l\cdot p)^A} = \frac{\Gamma(A-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(M^2-p^2)^{A-\omega}} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2+M^2+2l\cdot p)^A} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \\ \times\Big[p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(A-\omega)}{(M^2-p^2)^{A-\omega}} &+ \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A-1-omega)}{(M^2-p^2)^{A-1-\omega}}\Big] \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu l_\rho}{(l^2+M^2+2l\cdot p)^A} = \frac{-1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \Big[p_\mu p_\nu p_\rho \frac{\Gamma(A-\omega)}{(M^2-p^2)^{A-\omega}} \\ +\frac{1}{2}(\delta_{\mu\rho}p_\nu + \delta_{\nu\rho}p_\mu + \delta_{\mu\nu}p_\rho) \frac{\Gamma(A-1-omega)}{(M^2-p^2)^{A-1-\omega}}\Big] \end{aligned} \tag{86}$$

$$\int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu l_\rho l_\sigma}{(l^2+M^2+2l\cdot p)^A} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \Big[p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \frac{\Gamma(A-\omega)}{(M^2-p^2)^{A-\omega}}$$

$$+\frac{1}{2}[\delta_{\mu\nu}p_\rho p_\sigma + \delta_{\nu\sigma}p_\mu p_\rho + \delta_{\rho\sigma}p_\mu p_\nu + \delta_{\mu\rho}p_\nu p_\sigma \tag{87}$$

$$+\delta_{\nu\rho}p_\mu p_\sigma + \delta_{\mu\sigma}p_\rho p_\nu] \frac{\Gamma(A-1-omega)}{(M^2-p^2)^{A-1-\omega}} \tag{88}$$

$$+\frac{1}{4}[\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}] \frac{\Gamma(A-2-omega)}{(M^2-p^2)^{A-2-\omega}} \tag{89}$$

Με την ολοκλήρωση του παρόντος θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους στάθηκαν δίπλα μου κατά τη διάρκεια όλης αυτής της προσπάθειας.
Τον Καθηγητή μου Νικόλαο Τράκα για την καθοδήγηση, τις συμβουλές του και την ηθική παρότρυνση. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, τους Καθηγητές Κωνσταντίνο Αναγνωστόπουλο και τον Καθηγητή Κωνσταντίνο Φαράκο για τις σημαντικές συμβουλές, τη συμπαράσταση και την άμεση ανταπόκριση. Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει επάξια σε όλο το διδακτικό και πάνω από όλα ερευνητικό δυναμικό του Κτιρίου Φυσικής για την διαρκή και αμέριστη ηθική τόνωση σε ευχάριστες κια δυσάρεστες στιγμές. Τέλος, αισθάνομαι επίσης την ανάγκη να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ προς τους καθηγητές του Τομέα Μαθηματικών που με ενέπνευσαν από την αρχή της φοίτησης μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
Τέλος να αναφέρω πώς το παρόν πόνημα είναι αφιερωμένο εξ΄ ολοκλήρου στην οικογένεια μου, η οποία πάντα με περιέβαλε με αγάπη, στηρίζει την κάθε μου προσπάθεια και χωρίς την δική τους ανιδιοτελή και ανυπολόγιστη υποστήριξη τους δεν θα είχα την ευκαιρία να προχωρήσω και να περατώσω τις σπουδές μου στο σύνολο τους.

.2 References

1. J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge, 1984
2. F. Hazel, A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, 1984
3. M. E. Peskin, D. V. Schroder, *An Introduction to Quantum Field Theory* , Perseus Books, 1995
4. I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, Taylor and Francis Group, 1975
5. D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley - VCH, 1991
6. J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, 1988
7. P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Westview, 1985
8. Ν. Τράκας, *Σημειώσεις του Μεταπτυχιακού Μαθήματος Στοιχειώδη Σωμάτια*, Αθήνα, 2011
9. Γ. Ζουπάνος, *Σημειώσεις του Προπτυχιακού Μαθήματος Θεωρητική Φυσική*, Αθήνα, 2011
10. Σ. Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης
11. G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics B44 (1972) 189 - 213
12. G. 't Hooft, *Dimensional Regularization and the Renormalization Group*, Nuclear Physics B61 (1973) 455- 468
13. J.C. Collins, A.J. Macfarlane, New Methods for the Renormalization Group, Physical Review ὅλ. 10 (1974) 1201-1212