Μη γραμμική δυναμική ανάλυση πυλώνων ανεμογεννητριών υπό φορτία ανέμου

Γεράσιμος Δ. Παναγιωτακόπουλος

24 Ιουλίου 2012

στον παππού μου Γεράσιμο Δ. Παναγιωτακόπουλο

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώθηκε υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του κ. Ε. Σαπουντζάκη, Καθηγητή του Τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου καθώς και του Ι. Δίκαρου, Υποψήφιου Διδάκτορα της σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου. Αισθάνομαι την υποχρέωση να εκφράσω σε αμφότερους τις θερμές ευχαριστίες μου για τη συνεχή επιστημονική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν, καθώς και για τις εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις καθ' όλη τη διάρκεια εκπονήσεως της παρούσας εργασίας.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τον κ. Χ. Γαντέ, Καθηγητή του Τομέα Μεταλλικών Κατασκευών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου καθώς και την κα. Κ. Κουλάτσου, για την πολύτιμη επιστημονική βοήθεια που μου παρείχαν κατά την ανάλυση των φορτίων ανέμου, καθώς και τον κ. Η. Γκιμούση, για την παροχή του προγράμματος "Artificial Wind".

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δικούς μου ανθρώπους, τους γονείς μου, την Α. Παναγιωτακοπούλου, τη Σ. Τζαβίδη και τον Μ. Χουρδάκη, που ο καθένας τους συνέβαλε με το δικό του ξεχωριστό τρόπο στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στοιχεία Ανεμογεννητριών

Τις τελευταίες δεκαετίες τόσο οι απλοί πολίτες όσο και οι επιστήμονες έχουν αρχίσει να σκέφτονται σοβαρά τις επιπτώσεις της χρήσης συμβατικών μορφών ενέργειας και μόνον για την κάλυψη των αναγκών της κοινωνίας. Έχει γίνει πλέον φανερό ότι η χρήση παραδοσιακών πηγών ενέργειας όπως το πετρέλαιο, το κάρβουνο, ο άνθρακας και η πυρηνική ενέργεια δημιουργούν σοβαρές επιπτώσεις στο περιβάλλον λόγω της αποδέσμευσης επιβλαβών ρύπων. Ακόμα, σημαντικό μειονέκτημα αποτελεί το κόστος των παραδοσιακών μορφών ενέργειας που συνεχώς ανεβαίνει καθώς και το γεγονός ότι αυτές δεν είναι ανεξάντλητες. Έτσι, από το 1970, μετά τις συνεχείς πετρελαϊκές κρίσεις που οδήγησαν σε τεράστια αύξηση της τιμής του πετρελαίου ανακινήθηκε το ενδιαφέρον για τις εναλλακτικές μορφές ενέργειας.

Μια από τις πλέον αναπτυσσόμενες και υποσχόμενες ήπιες μορφές ενέργειας αποτελεί η αιολική ενέργεια. Γενικά αιολική ονομάζεται η ενέργεια που παράγεται από την εκμετάλλευση του πνέοντος ανέμου. Η αρχαιότερη μορφή εκμετάλλευσης της αιολικής ενέργειας ήταν τα ιστία (πανιά) των πρώτων ιστιοφόρων πλοίων και πολύ αργότερα οι ανεμόμυλοι στην ξηρά. Ο ανεμόμυλος είναι αιολική μηχανή και χρησιμοποιήθηκε για την άλεση των δημητριακών και την άντληση νερού. Ανεμόμυλοι κατακόρυφου άξονα περιστροφής άρχισαν να κτίζονται γύρω στο 700 π.Χ. στη Μεσοποταμία και την Κίνα. Αυτούς τους ανεμόμυλους έφεραν στην Ευρώπη καταρχήν οι Σταυροφόροι, μετά την Α' Σταυροφορία και αργότερα οι εξερευνητές της Κίνας. Γνώρισαν εξάπλωση στην Ιβηρική και τη Νότια Ευρώπη.

Η μετατροπή των ανεμόμυλων σε ανεμογεννήτριες έγινε με σκοπό την παραγωγή ηλεκτρικού ρεύματος καθώς αυτό έμπαινε στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Ο ανεμόμυλος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά ως ανεμογεννήτρια το 1890 όταν εγκαταστάθηκε πάνω σε χαλύβδινο πύργο ο ανεμόμυλος του P. La Cour (σχήμα 1.1) στη Δανία, με ισχία με σχισμές και διπλά πτερύγια αυτόματης μετάπτωσης προς τη διεύθυνση του ανέμου. Μετά τον Α' Παγκόσμιο πόλεμο, έγιναν πειράματα με ανεμόμυλους που είχαν ισχία αεροτομής, δηλαδή όμοια με πτερύγια αεροπορικής έλικας. Το 1931 μια τέτοια ανεμογεννήτρια εγκαταστάθηκε στην Κρι-

μαία και η παραγόμενη ηλεκτρική ισχύς διοχετευόταν στο τμήμα χαμηλής τάσης του τοπικού δικτύου. Πραγματικές ανεμογεννήτριες με δύο πτερύγια λειτούργησαν στις ΗΠΑ κατά τη δεκαετία του 1940, στην Αγγλία στη δεκαετία του 1950, καθώς και στη Γαλλία. Η πιο πετυχημένη ανεμογεννήτρια αναπτύχθηκε στη Δανία από τον J. Juul με τρία πτερύγια αλληλοσυνδεόμενα μεταξύ τους και με έναν πρόβολο στο μπροστινό μέρος του άξονα περιστροφής. Στην Ολλανδία εκτελέστηκαν πειράματα από τον F. G. Pigeaud με αντικείμενο τη μετασκευή των παλαιών ανεμόμυλων άλεσης δημητριακών, έτσι ώστε η πλεονάζουσα ενέργεια να χρησιμοποιείται για ηλεκτροπαραγωγή. Μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο πολλοί περίμεναν ότι η αιολική ενέργεια θα συνέβαλλε σημαντικά στην παραγωγή ηλεκτρισμού, αλλά οι προσπάθειες ανάπτυξης ανεμογεννητριών ατόνησαν μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1970.

Σχήμα 1.1: Η πρώτη ανεμογεννήτρια (Poul La Cour)

Οι προσπάθειες αυτές ξανάρχισαν πιο έντονες μετά την πρώτη πετρελαϊκή κρίση (1973) και στηρίχθηκαν κατά μεγάλο μέρος στη σύγχρονη αεροδιαστημική τεχνολογία. Έτσι αναπτύχθηκαν διάφοροι τύποι ανεμογεννητριών και στις αρχές της δεκαετίας του 1980 διατίθενται στο εμπόριο συγκροτήματα μικρής ισχύος (μέχρι 20-25 kW) ενώ είχαν κατασκευαστεί και ανεμογεννήτριες μεγαλύτερης ισχύος (3-4 MW).

Οι ανεμογεννήτριες μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με τον προσανατολισμό των αξόνων τους σε σχέση με τη ροή του ανέμου σε:

- Οριζόντιου άξονα, στις οποίες ο άξονας περιστροφής του δρομέα είναι παράλληλος προς την κατεύθυνση του ανέμου.

- Οριζόντιου άξονα, στις οποίες ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος προς την επιφάνεια της γης αλλά κάθετος στην κατεύθυνση της ροής του ανέμου.

- Κατακόρυφου άξονα, στις οποίες ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος στην επιφάνεια της γης και στη ροή του ανέμου.

Ο περιστρεφόμενος μηχανισμός ανεμογεννητριών οριζόντιου άξονα που καλείται δρομέας μπορεί να έχει από ένα πτερύγιο (μονόπτερος, π.χ. σχήμα 1.2) μέχρι 30 ή και περισσότερα (πολύπτερος). Σε σχέση με τη θέση του δρομέα ως προς τον πυλώνα στήριξης και τη διεύθυνση του ανέμου, οι ανεμογεννήτριες αυτού του τύπου μπορούν να έχουν το δρομέα μπροστά από τον πύργο (ανάντη) ή πίσω (κατάντη).

Σχήμα 1.2: Monopteros

Οι ανεμογεννήτριες κατακόρυφου άξονα είναι κατασκευαστικά απλούστερες γιατί δεν απαιτούν πτερύγιο ή σύστημα αυτοματισμού για τον προσανατολισμό του δρομέα στη διεύθυνση πνοής του ανέμου και επειδή το σύστημα μετατροπής της μηχανικής ενέργειας του δρομέα σε άλλη μορφή ενέργειας βρίσκεται στο έδαφος, στη βάση της ανεμογεννήτριας. Συνεπώς τα έξοδα αυτοματισμού, συντήρησης ή επισκευής είναι σαφώς μικρότερα σε σύγκριση με την ανεμογεννήτρια οριζόντιου άξονα περιστροφής. Παρ' όλα αυτά, οι τελευταίες έχουν επικρατήσει, μιας και η

απόδοσή τους είναι σημαντικά υψηλότερη. (Ενδεικτικά αναφέρεται ότι οι ανεμογεννήτριες τύπου "savonius" (σχήμα 1.4) δεν ξεπερνούν το 15% σε απόδοση, ενώ μια καλή μικρή ανεμογεννήτρια οριζόντιου άξονα (σχήμα 1.5) έχει μέση απόδοση 30% – 40%.

Σχήμα 1.3: Ανεμογεννήτρια κατακόρυφου άξονα τύπου Darrieus [29]

Κλείνοντας, αν λάβει κανείς υπ' όψη του ότι ενώ σήμερα η αιολική ενέργεια καλύπτει περίπου το 5.3% της κατανάλωσης ηλεκτρισμού στην Ε.Ε., η Ευρωπαϊκή Ένωση Αιολικής Ενέργειας υποστηρίζει ότι μέχρι το 2020 το ποσοστό αυτό είναι δυνατόν να φτάσει ακόμα και στο 18.4%, είναι φανερό ότι ανοίγεται ένας νέος δρόμος για την ανάπτυξη αιολικών πάρκων. Η Ε.Ε. επιθυμεί μελλοντικά να επιτευχθούν τέτοια ποσοστά δίνοντας επιδοτήσεις και μάλιστα τα ευρωπαϊκά κράτη δεσμεύονται να πλησιάσουν τα παραπάνω ποσοστά στα χρόνια που έρχονται. Είναι λογικό λοιπόν στην προσπάθεια να εκμεταλλευθεί μεγαλύτερο ποσό ενέργειας, να δημιουργούνται ανάγκες για μεγαλύτερα πτερύγια, τα οποία με τη σειρά τους απαιτούν μεγαλύτερο υψόμετρο. Ωστόσο η αύξηση του απαραίτητου υψομέτρου αναμένεται να οδηγεί σε αρκετά υψηλούς και λυγηρούς πυλώνες. Το γεγονός αυτό σε σχέση με το ότι ο ηλεκτρομηχανολογικός εξοπλισμός που θα πρέπει να υποστηρίζεται

Σχήμα 1.4: Ανεμογεννήτρια κατακόρυφου άξονα περιστροφής τύπου Savonius ενσωματωμένη στην οροφή κτηρίου [29]

Σχήμα 1.5: Ανεμογεννήτρια οριζόντιου άξονα [29]

θα είναι σημαντικά βαρύτερος, ενδέχεται να οδηγεί σε μη ασήμαντη επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας καθιστώντας επιτακτική τη μη γραμμική ανάλυση τέτοιων κατασκευών. Επιπλέον γνωρίζοντας ότι οι φορτίσεις που καταπονούν τις κατασκευές αυτές είναι κατ' εξοχήν δυναμικές, η δυναμική ανάλυση του φορέα είναι επιτακτική, προκειμένου να αποφεύγονται σφάλματα που ενδέχεται να προκύψουν κατά την εφαρμογή απλοποιημένων διαδικασιών ανάλυσης, ενώ για τον αξιόπιστο σχεδιασμό του ο προσδιορισμός των δυναμικών χαρακτηριστικών του θα πρέπει να

γίνεται με ακρίβεια.

1.2 Στόχοι της εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιούνται ιδιομορφικές αναλύσεις πυλώνων ανεμογεννητριών, καθώς και μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις αυτών. Επιλέγεται ο πυλώνας να προσομοιωθεί με στοιχεία δοκού, καθώς δίνουν ακριβή αποτελέσματα, εύληπτα και σε σημαντικά μικρότερο χρόνο σε σχέση με άλλα, πιο ακριβή μοντέλα (π.χ. στοιχεία κελύφους). Το πρόβλημα της δοκού μεταβλητής, τυχαίας, διπλά συμμετρικής διατομής, που υπόκειται σε δυναμικό φορτίο επιλύεται με τη βοήθεια λογισμικού γραμμένου σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN που λειτουργεί κάνοντας χρήση της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης (Α.Ε.Μ.) [24], [15]. Στην παρούσα εργασία διερευνάται η επιρροή της γεωμετρικής μη γραμμικότητας (θεωρία μετρίως μεγάλων μετακινήσεων), καθώς και της περιστροφικής αδράνειας. Για να ελεγχθεί η ακρίβεια και η ορθότητα του λογισμικού που χρησιμοποιείται, αλλά και για να διαπιστωθεί το κατά πόσο η θεωρία δοκού προσεγγίζει με ακρίβεια το πρόβλημα των πυλώνων ανεμογεννητριών, πραγματοποιούνται συγκρίσεις με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων κελύφους, κάνοντας χρήση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) με χρήση στοιχείων κελύφους. Πραγματοποιούνται παραμετρικές αναλύσεις για τρία διαφορετικά ύψη πυλώνων, με στόχο να διαπιστωθεί η επίδραση της μη γραμμικότητας και της περιστροφικής αδράνειας όσο μεταβάλλεται το ύψος του πυλώνα, η ταχύτητα του ανέμου καθώς και η διακύμανση της. Στον υπολογισμό των φορτίων υπεισέρχεται και ο εκάστοτε τύπος πτερυγίου που επιλέχθηκε για τον κάθε πυλώνα.

Για την παραγωγή των χρονοϊστοριών φόρτισης με τις οποίες έγιναν οι παραπάνω αναλύσεις χρησιμοποιείται η Θεωρία Πτερυγίων Ρότορα (Rotor Blade Theory) [7],[12] και καταστρώνεται κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab που ακολουθεί τον αλγόριθμο υπολογισμού των φορτίων για συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της ροής του ανέμου (ασυμπίεστη και οριζόντια ροή, γνωστής ταχύτητας ανέμου). Ο κώδικας επαληθεύεται με δεδομένα από τη βιβλιογραφία και εν συνεχεία χρησιμοποιείται για να μετατρέψει χρονοϊστορίες ταχύτητας σε χρονοϊστορίες δύναμης. Για την παραγωγή τεχνητών χρονοϊστοριών ταχυτήτων χρησιμοποιείται το λογισμικό "Artificial Wind" [27] που παράγει τεχνητά φάσματα με βάση τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών [10] και λαμβάνοντας υπόψη του τον Ευρωκώδικα 1 [8].

Κεφάλαιο 2

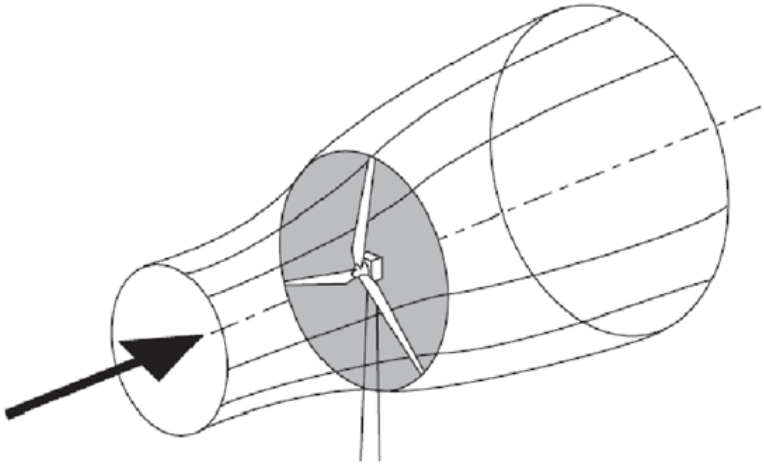
Φορτίο ανέμου

2.1 Εισαγωγή

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση των βασικότερων θεωριών για τον υπολογισμό των φορτίων από τα οποία καταπονείται μια ανεμογεννήτρια, καθώς και το πώς τα πτερύγια και ο πυλώνας αλληλεπιδρούν με τη ροή του ανέμου. Στην αρχή θα παρουσιαστούν πιο απλοποιητικές μέθοδοι (Θεωρία Ενεργοποιητή Δίσκου, Θεωρία Περιστρεφόμενου Δίσκου), που δεν υπεισέρχονται σε μεγάλες λεπτομέρειες όσον αφορά το σχεδιασμό των πτερυγίων, άλλα είναι πολύ χρήσιμες για μια πρώτη εκτίμηση και έχουν καλά αποτελέσματα. Εν συνεχεία θα παρουσιαστούν και πιο εμπλουτισμένες θεωρίες (Θεωρία Πτερυγίων Ρότορα), που υπεισέρχονται σε λεπτομέρειες που αφορούν το σχεδιασμό των πτερυγίων. Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιαστεί ο βασικός αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για να προσδιοριστούν τα φορτία που καταπονούν τον πυλώνα μιας ανεμογεννήτριας, για δεδομένα χαρακτηριστικά μιας ροής ανέμου.

Οι ανεμογεννήτριες χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ενέργειας, εκμεταλλευόμενες την κινητική ενέργεια του ανέμου. Αυτό σημαίνει πως ο άνεμος, καθώς χάνει ένα μέρος από την κινητική του ενέργεια, αναγκαστικά επιβραδύνει. Θεωρείται πως καθώς διέρχεται από την περιοχή μιας ανεμογεννήτριας, ο άνεμος διαχωρίζεται σε δύο ανεξάρτητα μέρη: Ένα τμήμα του ανέμου επηρεάζεται από τη λειτουργία της ανεμογεννήτριας, χάνει ένα κομμάτι της κινητικής του ενέργειας και επιβραδύνει, ενώ το υπόλοιπο τμήμα παραμένει ανεπηρέαστο και διατηρεί την ταχύτητά του. Αν υποθέσουμε ότι τα δύο τμήματα του ανέμου δεν επηρεάζουν το ένα το άλλο, τότε η μάζα του κάθε τμήματος οφείλει να διατηρείται σταθερή, αφού τα δύο τμήματα δεν ανταλλάσσουν μάζες και η συνολική μάζα του αέρα δεν μπορεί να χαθεί. Είναι δυνατόν πλέον να παρασταθούν τα δύο αυτά τμήματα του αέρα, σχεδιάζοντας το σύνορό τους, που θα είναι όπως στο σχήμα 2.1. Προχωρώντας προς τα κατάντη ο άνεμος επιβραδύνεται μεν, αλλά δε συμπιέζεται, με αποτέλεσμα να πλαταίνει το σύνορο.

Να σημειωθεί πως παρ' όλο που ο άνεμος χάνει μέρος τις κινητικής του ενέργειας, αυτό δεν επιτυγχάνεται με απότομη μεταβολή στην ταχύτητα. Κάτι τέτοιο



Σχήμα 2.1: Η ροή του ανέμου που διέρχεται από ανεμογεννήτρια [7]

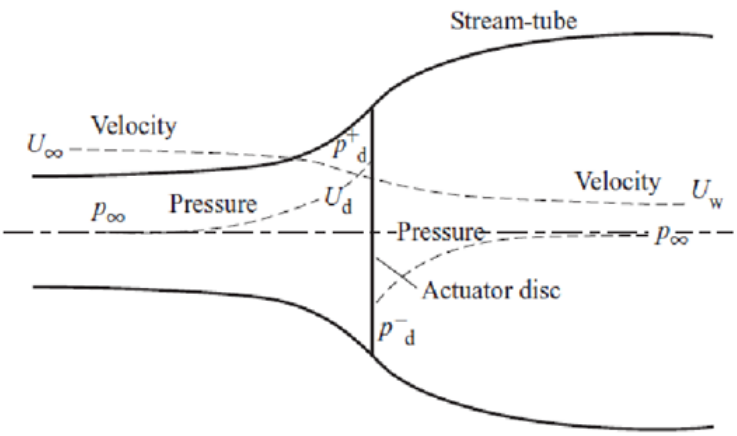
είναι αδύνατο, εξαιτίας των τεράστιων επιταχύνσεων και δυνάμεων που θα απαιτούνταν για κάτι τέτοιο. Αντιθέτως, καθώς η πίεση είναι ένα μέγεθος που μπορεί να μεταβληθεί απότομα χωρίς καταστροφικές συνέπειες, όλες οι ανεμογεννήτριες, ανεξαρτήτως σχεδιασμού, λειτουργούν με αυτόν τον τρόπο.

Καθώς ο άνεμος διέρχεται από τον περιστρεφόμενο δίσκο της ανεμογεννήτριας, η στατική πίεση πέφτει και έτσι, όταν ο άνεμος εξέρχεται του δίσκου, η πίεση είναι χαμηλότερη από την ατμοσφαιρική. Η περιοχή αυτή ονομάζεται **απόρρευμα** (wake). Τελικά, αρκετά μακριά από το δίσκο, η στατική πίεση πρέπει να επανέλθει στο ατμοσφαιρικό επίπεδο ώστε να αποκατασταθεί το ισοζύγιο. Η αύξηση της στατικής πίεσης επιτυγχάνεται με αναπόφευκτη περαιτέρω μείωση της ταχύτητας. Συνεπώς, συγκρίνοντας διατομές αρκετά ανάντη και κατάντη, δεν παρατηρείται καμία μεταβολή στη στατική πίεση, αλλά παρατηρείται μεταβολή στην ταχύτητα και επομένως και στην κινητική ενέργεια.

2.2 Θεωρία Ενεργοποιητή Δίσκου (Actuator Disc Theory)

Ο μηχανισμός που περιγράφτηκε παραπάνω εξηγεί το γεγονός ότι χάνεται ενέργεια από τον άνεμο, αλλά σε καμία περίπτωση δεν εξηγεί τι συμβαίνει σε αυτή την ενέργεια. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράξει ωφέλιμο έργο, αλλά μπορεί ένα τμήμα της να γυρίσει στο περιβάλλον και τελικά να χαθεί με τη μορφή θερμότητας. Παρ' όλα αυτά, είναι εφικτή μια πρώτη ανάλυση της αεροδυναμικής συμπεριφοράς των ανεμογεννητριών χωρίς περαιτέρω εμβάθυνση στο σχεδιασμό τους χρησιμοποιώντας τη Θεωρία Ενεργοποιητή Δίσκου.

Παρουσιάζεται στο σχήμα 2.2 η κατανομή πιέσεων και δυνάμεων που περιγράφτηκε στην εισαγωγή. Ανάντη του δίσκου η διατομή έχει μικρότερο εμβαδόν σε σχέση με αυτό του δίσκου, ο οποίος με τη σειρά του έχει μικρότερο εμβαδόν σε



Σχήμα 2.2: Actuator Disc [7]

σχέση με τα κατάντη. Αυτό συμβαίνει γιατί η παροχή μάζας πρέπει να διατηρείται σταθερή. Η μάζα του ανέμου που διέρχεται από μια τυχαία διατομή στη μονάδα του χρόνου είναι ρAU, όπου ρ είναι η πυκνότητα του ανέμου, A είναι το εμβαδόν της διατομής και U είναι η ταχύτητα του ανέμου. Η παροχή μάζας πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε σημείο της διατομής, συνεπώς:

$$\rho A_\infty U_\infty = \rho A_d U_d = \rho A_w U_w \tag{2.1}$$

Το σύμβολο ∞ αναφέρεται στη διατομή στα ανάντη (επαρκώς μακριά από την περιοχή της ανεμογεννήτριας), το σύμβολο d αναφέρεται στη διατομή του δίσκου, ενώ το σύμβολο w αναφέρεται στη διατομή στα κατάντη. Ο ενεργοποιητής δίσκος προκαλεί μεταβολή στην ταχύτητα, η οποία πρέπει να επαλληλιστεί με την ταχύτητα U_∞. Η παράλληλη προς τη ροή του ανέμου συνιστώσα είναι $-aU_\infty$, όπου a είναι ο αξονικός επαγωγικός συντελεστής (axial flow induction factor). Οπότε, η ταχύτητα στο δίσκο δίνεται από τη σχέση:

$$U_d = U_\infty(1 - a) \tag{2.2}$$

2.2.1 Θεωρία Ορμής (Momentum Theory)

Καθώς ο άνεμος διέρχεται από το δίσκο ένα μέρος από την ταχύτητά του, το οποίο είναι $U_\infty - U_w$ χάνεται, και επομένως ο ρυθμός μεταβολής της ορμής δίνεται από τη σχέση:

$$\text{Ρυθμός Μεταβολης της Ορμής} = (U_\infty - U_w)\rho A_d U_d \tag{2.3}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής οφείλεται σε κάποια δύναμη, η οποία με τη

σειρά της οφείλεται αποκλειστικά σε διαφορά πιέσεων. Συνεπώς:

$$(p_{\mathrm{d}}^{+} - p_{\mathrm{d}}^{-})A_{\mathrm{d}} = (U_{\infty} - U_{\mathrm{w}})\rho A_{\mathrm{d}} U_{\mathrm{d}} = (U_{\infty} - U_{\mathrm{w}})\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}(1 - a) \tag{2.4}$$

Εφαρμόζεται δύο φορές η εξίσωση Bernoulli, σύμφωνα με την οποία, η ολική ενέργεια σε μια ροή, συμπεριλαμβανομένης της κινητικής ενέργειας, της στατικής πίεσης και της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας, παραμένει σταθερή, αρκεί να μην ασκείται ή παράγεται έργο από τη ροή, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 + p + \rho g h = \text{σταθ.} \tag{2.5}$$

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται μία φορά από τα ανάντη προς το δίσκο και μία φορά από το δίσκο προς τα κατάντη. Να σημειωθεί πως χρειάζονται δύο εξισώσεις και όχι μία, γιατί η ολική ενέργεια στα ανάντη και στα κατάντη δεν είναι η ίδια. Επομένως, στη διατομή στα ανάντη ισχύει:

$$\frac{1}{2}\rho_{\infty} U_{\infty}^2 + p_{\infty} + \rho_{\infty} g h_{\infty} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{d}} U_{\mathrm{d}}^2 + p_{\mathrm{d}}^{+} + \rho_{\mathrm{d}} g h_{\mathrm{d}} \tag{2.6}$$

Υποθέτοντας πως η ροή είναι ασυμπίεστη και οριζόντια ($\rho_{\infty} = \rho_{\mathrm{d}} = \rho$ και $h_{\infty} = h_{\mathrm{d}} = h$), προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 + p_{\infty} = \frac{1}{2}\rho U_{\mathrm{d}}^2 + p_{\mathrm{d}}^{+} \tag{2.6α}$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει για τα κατάντη:

$$\frac{1}{2}\rho U_{\mathrm{w}}^2 + p_{\infty} = \frac{1}{2}\rho U_{\mathrm{d}}^2 + p_{\mathrm{d}}^{-} \tag{2.6β}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$(p_{\mathrm{d}}^{+} - p_{\mathrm{d}}^{-}) = \frac{1}{2}\rho(U_{\infty}^2 - U_{\mathrm{w}}^2)$$

Οπότε, από την εξίσωση 2.4 προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\rho(U_{\infty}^2 - U_{\mathrm{w}}^2)A_{\mathrm{d}} = (U_{\infty} - U_{\mathrm{w}})\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}(1 - a) \tag{2.7}$$

Τελικά:

$$U_{\mathrm{w}} = (1 - 2a)U_{\infty} \tag{2.8}$$

Δηλαδή, η μισή ταχύτητα χάνεται από τα ανάντη μέχρι το δίσκο και η άλλη μισή από το δίσκο μέχρι τα κατάντη.

2.2.2 Συντελεστής Ισχύος (Power Coefficient)

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.4, προκύπτει ότι η δύναμη στον άνεμο είναι:

$$T = (p_{\mathrm{d}}^{+} - p_{\mathrm{d}}^{-})A_{\mathrm{d}} = 2\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}^{2} a(1-a) \tag{2.9}$$

Για να υπολογιστεί η παραγόμενη ισχύς, πολλαπλασιάζεται η δύναμη στον άνεμο T με την ταχύτητα του ανέμου στο δίσκο U_{d}:

$$\text{Ισχύς} = TU_{\mathrm{d}} = 2\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}^{3} a(1-a)^{2} \tag{2.10}$$

Είναι προτιμότερο, αντί για ισχύ, να γίνεται λόγος για κάποιον αδιάστατο συντελεστή. Οπότε, διαιρώντας την παραγόμενη ισχύ με τη διατιθέμενη, $\frac{1}{2}\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}^{3}$, προκύπτει η ακόλουθη ποσότητα που ονομάζεται **Συντελεστής Ισχύος**:

$$C_p = \frac{\text{Ισχύς}}{\frac{1}{2}\rho A_{\mathrm{d}} U_{\infty}^{3}} \tag{2.11}$$

Εκτελώντας τις πράξεις:

$$C_p = 4a(1-a)^{2} \tag{2.12}$$

2.2.3 Το όριο Betz (Betz Limit)

Ο σκοπός των ανεμογεννητριών είναι να μεγιστοποιήσουν την παραγόμενη ενέργεια και μαθηματικά αυτό μεταφράζεται σε μεγιστοποίηση του συντελεστή ισχύος. Παραγωγίζοντας ως προς a τη σχέση 2.12, προκύπτει:

$$\frac{\mathrm{d}C_P}{\mathrm{d}a} = 4(1-a)(1-3a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Αυτό δίνει:

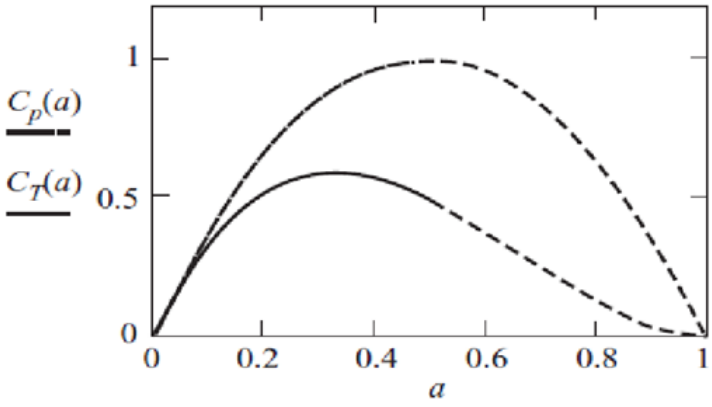
$$C_{P,\max} = \frac{16}{27} = 0.593 \tag{2.13}$$

Αυτή είναι και η μέγιστη τιμή του συντελεστή ισχύος, γνωστή και ως Betz Limit, από τον Albert Betz και μέχρι στιγμής δεν έχει σχεδιαστεί ανεμογεννήτρια που να μπορεί να ξεπεράσει αυτό το όριο [7, T. Burton et al.]. Να σημειωθεί πως το όριο αυτό δεν οφείλεται σε απώλειες λόγω σχεδιασμού, καθώς μέχρι στιγμής δεν έχει γίνει η παραμικρή εμβάθυνση στη διαδικασία του σχεδιασμού.

2.2.4 Συντελεστής Ώθησης (Thrust Coefficient)

Η δύναμη πάνω στον ενεργοποιητή δίσκο μπορεί επίσης να αδιαστατοποιηθεί, διαιρούμενη με τη διατιθέμενη, $\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^{2} A_{\mathrm{d}}$, για να δώσει ένα **Συντελεστή Ώθησης**:

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^{2} A_{\mathrm{d}}} = 4a(1-a) \tag{2.14}$$



Σχήμα 2.3: $C_P(a)$-$C_T(a)$ [7]

Να σημειωθεί πως παρουσιάζεται πρόβλημα στην περίπτωση που $a \geq \frac{1}{2}$, διότι η ταχύτητα στο απόρρευμα που δίνεται από τη σχέση $U_w = (1 - 2a)U_\infty$, πλέον γίνεται μικρότερη ή ίση του μηδενός και προφανώς αυτό δεν έχει καμία φυσική σημασία.

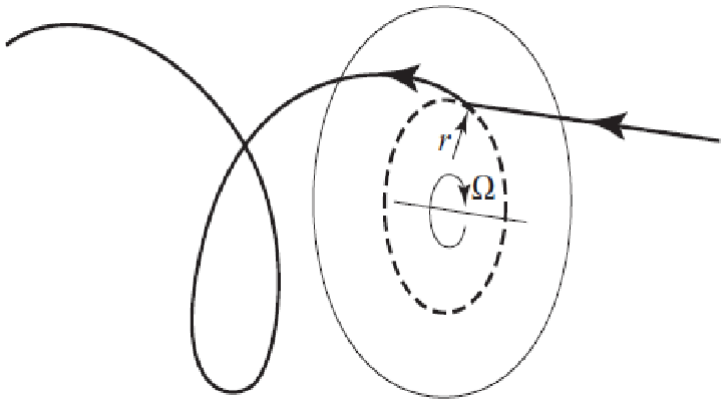
Στο σχήμα 2.3 φαίνεται η γραφική παράσταση των συντελεστών C_P και C_T, συναρτήσει του συντελεστή a.

2.3 Θεωρία Περιστρεφόμενου Δίσκου (Rotor Disc Theory)

Ο τρόπος με τον οποίο η ενέργεια του ανέμου μετατρέπεται σε ωφέλιμη ενέργεια για τον άνθρωπο ποικίλλει, ανάλογα με το σχεδιασμό της εκάστοτε ανεμογεννήτριας. Οι περισσότερες όμως χρησιμοποιούν ένα πλήθος **πτερυγίων** (blades), που περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από έναν άξονα κάθετο στο επίπεδό τους και παράλληλο στην κατεύθυνση του ανέμου. Τα πτερύγια, καθώς περιστρέφονται, σχηματίζουν έναν νοερό δίσκο και με τη βοήθεια του αεροδυναμικού τους σχεδιασμού αναπτύσσεται μια διαφορά πίεσης κατά μήκος του δίσκου, η οποία, όπως συζητήθηκε παραπάνω, είναι υπεύθυνη για την απώλεια ορμής κατά τη διεύθυνση της ροής. Απώλεια ορμής συνεπάγεται όμως και απώλεια ενέργειας, η οποία μπορεί να συλλεχθεί π.χ. από μια ηλεκτρική γεννήτρια. Η γεννήτρια αυτή θα ασκεί ροπή ίση και αντίθετη με αυτήν που ασκεί η ροή, και έτσι η γωνιακή ταχύτητα θα παραμένει σταθερή. Το έργο της ροπής που ασκεί ο άνεμος στη γεννήτρια μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια.

2.3.1 Περιστροφή του απορρεύματος (Wake Rotation)

Το γεγονός ότι ασκείται ροπή από τον αέρα στο δίσκο σημαίνει πως ασκείται μια ίση και αντίθετη ροπή από το δίσκο στον αέρα, σύμφωνα με τον τρίτο Νόμο του



Σχήμα 2.4: Η τροχιά σωματιδίου διερχόμενου από τον Περιστρεφόμενο Δίσκο) [7]

Newton. Αυτό έχει ως συνέπεια ο άνεμος να αποκτά στροφορμή και έτσι, στην περιοχή του απορρεύματος, η ταχύτητα των σωματιδίων του αέρα εκτός από μια συνιστώσα παράλληλη στη ροή, έχει αποκτήσει και εφαπτομενική συνιστώσα (Σχήμα 2.4).

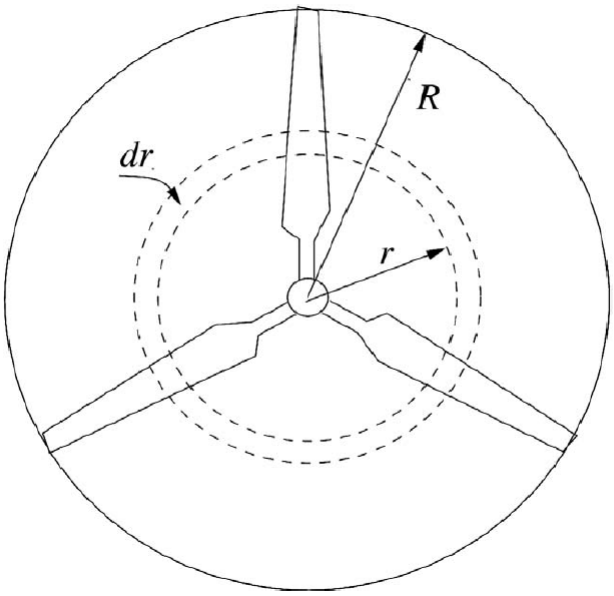
Το γεγονός ότι τα σωματίδια του αέρα αποκτούν μια πρόσθετη εφαπτομενική συνιστώσα στην ταχύτητά τους συνεπάγεται ότι αυξάνει η κινητική τους ενέργεια. Κάτι τέτοιο έχει ως συνέπεια μια πτώση στη στατική πίεση στην περιοχή του απορρεύματος, πτώση πρόσθετη σε αυτήν που είχε γίνει λόγος παραπάνω.

Η στροφορμή αποκτάται εξ ολοκλήρου κατά το πέρασμα του ανέμου από το δίσκο. Η μεταβολή της εφαπτομενικής ταχύτητας εκφράζεται ποσοτικά με τον **εφαπτομενικό επαγωγικό συντελεστή** (tangential induction factor), a'. Ανάντη του δίσκου η εφαπτομενική ταχύτητα είναι μηδενική, όμως ακριβώς μετά το δίσκο η εφαπτομενική ταχύτητα είναι $2\Omega r a'$. Να σημειωθεί ότι η εφαπτομενική ταχύτητα έχει αντίθετη φορά από αυτήν της περιστροφής του δίσκου, γιατί άλλωστε προκαλείται από την αντίδραση στη ροπή που ασκείται σ' αυτόν.

2.3.2 Θεωρία Στροφορμής (Angular Momentum Theory)

Για σωματίδια που απέχουν διαφορετική απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας μεταβάλλεται και το ίδιο συμβαίνει και με την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας. Βασική παραδοχή της θεωρίας στροφορμής είναι ότι ο νοητός δίσκος που διαγράφουν τα πτερύγια αποτελείται από ένα πλήθος δακτυλίων, ανεξάρτητων μεταξύ τους, που ο καθένας τους επηρεάζει μόνο το τμήμα του ανέμου που διέρχεται από αυτόν. Ο κάθε δακτύλιος περιγράφεται από τη θέση της εσωτερικής του ακτίνας, r, και το πάχος του, Δr, όπως στο σχήμα 2.5. Ισχύει ότι:

Ροπή = Ρυθμός Μεταβολης Στροφορμής



Σχήμα 2.5: Προσδιορισμός δακτυλίων [12]

Δηλαδή:

$$\delta Q = \rho \delta A_{\mathrm{d}} U_{\infty} (1 - a) 2\Omega a' r^2 \tag{2.15}$$

όπου δA_{d} είναι το εμβαδόν του δακτυλίου.

Η δρώσα ροπή στον άξονα του ρότορα είναι επίσης δQ, οπότε: $\delta P = \Omega \delta Q$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις 2.10 και 2.15, προκύπτει:

$$2\rho \delta A_{\mathrm{d}} U_{\infty}^3 a (1 - a)^2 = \rho \delta A_{\mathrm{d}} U_{\infty} (1 - a) 2\Omega^2 a' r$$

Απλοποιώντας:

$$U_{\infty}^2 a (1 - a) = \Omega^2 r^2 a$$

Ονομάζουμε **λόγο τοπικών ταχυτήτων** (local speed ratio) και συμβολίζουμε με λ_r το πηλίκο της εφαπτομενικής ταχύτητας του κάθε δακτυλίου Ωr προς την ταχύτητα του ανέμου στο αδιατάρακτο πεδίο U_{∞}. Στην άκρη του δίσκου έχουμε $r = R$ και ο λόγος $\lambda = \Omega R / U_{\infty}$ αποκαλείται πλέον **λόγος ταχυτήτων κορυφής** (tip speed ratio). Οπότε:

$$a(1 - a) = \lambda_r^2 a' \tag{2.16}$$

Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι $\delta A_{\mathrm{d}} = 2\pi r \delta r$. Η πρόσθετη ισχύς είναι:

$$\delta P = \Omega \delta Q = (\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^3 2\pi r \delta r) 4a'(1 - a) \lambda_r^2$$

Να σημειωθεί πως ο όρος μέσα στην παρένθεση αντιπροσωπεύει τη συνολική ισχύ του ανέμου στο δακτύλιο, ενώ ο όρος εκτός παρένθεσης αντιπροσωπεύει την ικανότητα του πτερυγίου να αποκομίσει αυτή την ισχύ.

$$\eta_r = 4a'(1-a)\lambda_r^2 \tag{2.17}$$

Αδιαστατοποιώντας:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}C_P = \frac{4\pi\rho U_\infty^3(1-a)a'\lambda_r^2 r}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^3 \pi R^2} = \frac{8(1-a)a'\lambda_r^2 r}{R^2}$$

ή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}C_P = 8a(1-a)a'\lambda^2\mu^3 \tag{2.18}$$

όπου $\mu = r/R$

Γνωρίζοντας την ακτινική μεταβολή των a και a', μπορούμε να ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση και να υπολογίσουμε το συντελεστή ισχύος για ένα δεδομένο λόγο ταχυτήτων κορυφής λ.

$$C_P = \int_0^1 8a(1-a)a'\lambda^2\mu^3\mathrm{d}\mu$$

2.3.3 Μέγιστη Ισχύς

Όπως και στη θεωρία ενεργοποιητή δίσκου, έτσι και στη θεωρία του περιστρεφόμενου δίσκου ζητούμενο αποτελεί η μεγιστοποίηση της παραγόμενης ενέργειας, δηλαδή η μεγιστοποίηση της ισχύος. Ισοδύναμα, μπορεί να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα η_r. Παραγωγίζοντας ως προς a ή a' και μηδενίζοντας, προκύπτει (και οι δύο παραγωγίσεις καταλήγουν στο ίδιο συμπέρασμα):

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}a'} = \frac{\lambda_r^2}{1-2a} \tag{2.19}$$

Λαμβάνοντας την εξίσωση 2.16 προκύπτει:

$$a'\lambda_r^2 = (1-a)(1-2a) \tag{2.20}$$

Τελικά, οι τιμές των a ή a' που μεγιστοποιούν το συντελεστή ισχύος είναι:

$$a = \frac{1}{3} \text{ και } a' = \frac{a(1-a)}{\lambda^2\mu^2} \tag{2.21}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση του C_P, συνεπάγεται:

$$C_P = \int_0^1 8a(1-a)\frac{a(1-a)}{\lambda^2\mu^2}\lambda^2\mu^3\mathrm{d}\mu = 4a(1-a)^2 = \frac{16}{27} \tag{2.22}$$

Παρατηρείται ότι η τιμή του C_P ταυτίζεται με αυτήν που είχε υπολογιστεί και στη θεωρία του ενεργοποιητή δίσκου.

2.4 Θεωρία Πτερυγίων Ρότορα (Rotor Blade Theory)

2.4.1 Θεωρία Στοιχείων Πτερυγίου (Blade Element Theory)

Πλέον, εμβαθύνοντας στο σχεδιασμό μιας ανεμογεννήτριας, μπορούν να οριστούν μερικά επιπλέον μεγέθη:

Χορδή (chord) ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που σχεδιάζεται στη διατομή ενός πτερυγίου και έχει το μεγαλύτερο δυνατό μήκος. Η χορδή συμβολίζεται με c. Καθώς η διατομή μεταβάλλεται κατά μήκος, εννοείται πως μεταβάλλεται και η χορδή.

Γωνία βήματος (pitch angle) ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει η χορδή με την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Η γωνία βήματος συμβολίζεται με β. Όπως και η χορδή, επίσης η γωνία βήματος μεταβάλλεται με το μήκος.

Γνωρίζοντας τις δύο συνιστώσες (την παράλληλη προς τη ροή και την εφαπτομενική) της ταχύτητας του ανέμου στο απόρρευμα, γίνεται πλέον να προσδιοριστεί η συνισταμένη ταχύτητα:

$$W = \sqrt{U_\infty^2(1-a)^2 + \Omega^2 r^2 (1+a')^2} \tag{2.23}$$

Υπολογίζεται πλέον και η γωνία ϕ που σχηματίζει η συνισταμένη ταχύτητα σε σχέση με το επίπεδο περιστροφής:

$$\phi = \arctan\left(\frac{U_\infty(1-a)}{\Omega r(1+a')}\right) \tag{2.24}$$

Ορίζεται ως **γωνία πρόσπτωσης** (angle of attack) και συμβολίζεται με α η γωνία που σχηματίζεται από τη συνισταμένη ταχύτητα και τη χορδή. Προφανώς ισχύει:

$$\alpha = \phi - \beta \tag{2.25}$$

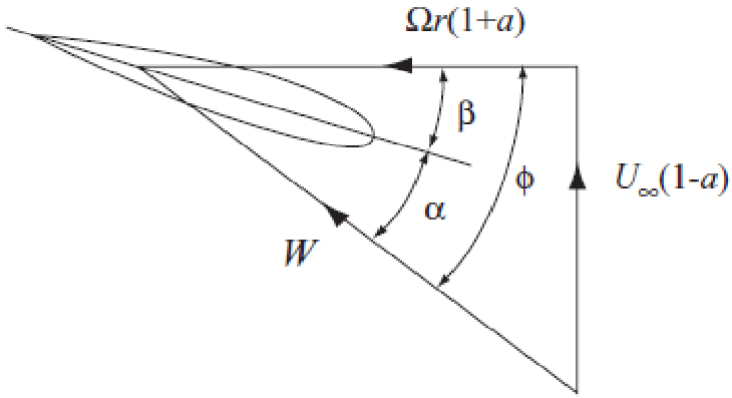
Όλα όσα ειπώθηκαν φαίνονται στο σχήμα 2.6.

Δύο ειδών είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχειώδες τμήμα πτερυγίου. Αυτές είναι οι **Δυνάμεις Άντωσης** (Lift Forces) και οι **Δυνάμεις Οπισθέλκουσας** (Drag Forces). Σε ένα στοιχειώδες τμήμα πτερυγίου αυτές ορίζονται ως εξής:

$$\delta L = C_l\left(\frac{1}{2}\rho W^2 c\delta r\right) \tag{2.26}$$

$$\delta D = C_d\left(\frac{1}{2}\rho W^2 c\delta r\right) \tag{2.27}$$

Οι δυνάμεις άντωσης είναι αυτές που είναι κατά κύριο λόγο υπεύθυνες για την περιστροφή των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας, ενώ παίζουν σημαντικό ρόλο και σε άλλα αεροδυναμικά φαινόμενα, όπως, για παράδειγμα, την ανύψωση των αεροπλάνων. Οι δυνάμεις οπισθέλκουσας είναι κυρίως αυτές που καταπονούν τον πυλώνα των ανεμογεννητριών. Ο αεροδυναμικός σχεδιασμός γίνεται ούτως ώστε να μεγιστοποιηθούν οι δυνάμεις άντωσης και να ελαχιστοποιηθούν οι δυνάμεις οπισθέλκουσας.



Σχήμα 2.6: Οι συνιστώσες της ταχύτητας [7]

Παραδοχή της Θεωρίας Στοιχείων Πτερυγίου είναι ότι οι δυνάμεις πάνω στο πτερύγιο μπορούν να προσδιοριστούν μέσω της γωνίας πρόσπτωσης. Δηλαδή, ανάλογα με τη γωνία πρόσπτωσης α, υπολογίζονται οι αεροδυναμικοί συντελεστές C_d και C_l και μέσω αυτών προσδιορίζονται οι στοιχειώδεις δυνάμεις στο τμήμα του πτερυγίου. Ακολούθως αυτές ολοκληρώνονται οι δυνάμεις ούτως ώστε να προσδιοριστούν οι συνολικές δυνάμεις στο πτερύγιο. Να σημειωθεί ότι αγνοούνται τα τρισδιάστατα φαινόμενα.

2.4.2 Θεωρία Ορμής Στοιχείων Πτερυγίου (Blade Element Momentum Theory)

Οι δύο βασικές παραδοχές της θεωρίας ορμής στοιχείων πτερυγίου είναι πρώτον, ότι το κάθε στοιχείο πτερυγίου είναι *εντελώς* ανεξάρτητο από όλα τα άλλα και δεύτερον, ότι η δύναμη που προκαλείται από τη ροή είναι σταθερή σε όλη την επιφάνεια του κάθε δακτυλίου. Επί της ουσίας αυτό προϋποθέτει την ύπαρξη άπειρου αριθμού πτερυγίων. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η θεωρία και κατόπιν θα δειχθούν ορισμένες διορθώσεις που έχουν γίνει ώστε να βελτιωθεί η ακρίβειά της.

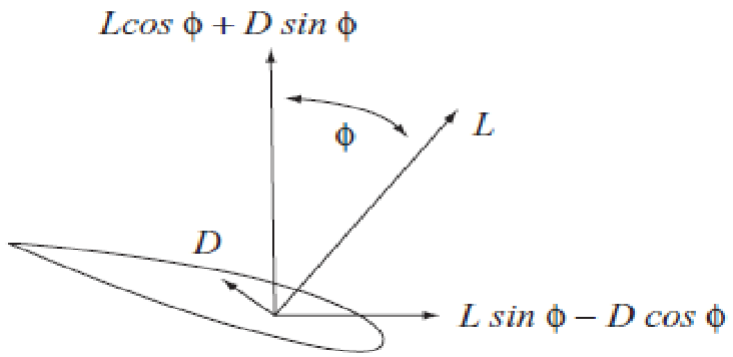
Στόχος αποτελεί να μετασχηματιστούν οι δυνάμεις Lift και Drag στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο έχει τον άξονα n ως κατακόρυφο άξονα και τον t ως οριζόντιο (βλ. σχήμα 2.7). Με απλή τριγωνομετρία προκύπτει ότι:

$$\delta F_{\mathrm{t}} = \delta L \sin\phi + \delta D \cos\phi \tag{2.28}$$

$$\delta F_{\mathrm{n}} = \delta L \cos\phi + \delta D \sin\phi \tag{2.29}$$

Εναλλακτικά, μετασχηματίζοντας τους συντελεστές αντί για τις δυνάμεις, προκύπτει:

$$C_{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{l}} \sin\phi + C_{\mathrm{d}} \cos\phi \tag{2.30}$$



Σχήμα 2.7: Οι Lift και Drag δυνάμεις [7]

$$C_n = C_l \cos\phi + C_d \sin\phi \tag{2.31}$$

Οπότε ισχύει:

$$C_t = \frac{\delta F_t}{\frac{1}{2}\rho W^2 c} \tag{2.32}$$

και

$$C_n = \frac{\delta F_n}{\frac{1}{2}\rho W^2 c} \tag{2.33}$$

Στην προσπάθεια να εκφραστεί μαθηματικά το κατά πόσο ο δακτύλιος καλύπτεται από πτερύγια, ορίζεται ως **συντελεστής πληρότητας** (solidity) και συμβολίζεται με $\sigma(r)$ (ή και σ) ο λόγος:

$$\sigma(r) = \frac{c(r)N}{2\pi r} \tag{2.34}$$

Ολοκληρώνοντας τις στοιχειώδεις δυνάμεις δF_n, προκύπτει:

$$T = N\delta F_n \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho N \frac{U_\infty^2 (1-a)^2}{\sin^2\phi}\mathrm{d}r \tag{2.35}$$

Ομοίως με τις ροπές:

$$Q = rN\delta F_t \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho N \frac{U_\infty (1-a)\Omega r(1+a')}{\sin\phi\cos\phi} c C_t r \mathrm{d}r \tag{2.36}$$

Από τη σχέση 2.9, αντικαθιστώντας το εμβαδόν με $2\pi r\delta r$, συνεπάγεται ότι:

$$T = 4\pi\rho r U_\infty^2 a(1-a)\mathrm{d}r \tag{2.37}$$

Ομοίως, για τη ροπή, προκύπτει:

$$Q = \rho \delta A_{\mathrm{d}} U_{\infty}(1-a) 2\Omega a' r^2 = 4\pi\rho r^3 U_{\infty}(1-a)\Omega a' \mathrm{d}r \tag{2.38}$$

Εξισώνοντας ανά δύο τις τέσσερις παραπάνω σχέσεις και πραγματοποιώντας μερικές απλές πράξεις, εύκολα προκύπτει ότι:

$$a = \frac{1}{\frac{4\sin^2\phi}{\sigma C_{\mathrm{n}}} + 1} \tag{2.39}$$

και:

$$a' = \frac{1}{\frac{4\sin\phi\cos\phi}{\sigma C_{\mathrm{t}}} - 1} \tag{2.40}$$

2.4.3 Συντελεστής Απωλειών Prandtl (Prandtl's Tip Loss Factor)

Ο **Συντελεστής Απωλειών Prandtl** είναι ένας συντελεστής που συμβολίζεται με F και εισάγεται για να διορθώσει την υπόθεση που έγινε νωρίτερα για άπειρο πλήθος πτερυγίων. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$T = F\left[4\pi\rho r U_{\infty}^2 a(1-a)\mathrm{d}r\right] \tag{2.41}$$

$$Q = F\left[\frac{1}{2}\rho N \frac{U_{\infty}(1-a)\Omega r(1+a')}{\sin\phi\cos\phi} c C_{\mathrm{t}} r \mathrm{d}r\right] \tag{2.42}$$

Όπου

$$F = \frac{2}{\pi}\cos^{-1} e^{-f} \tag{2.43}$$

με

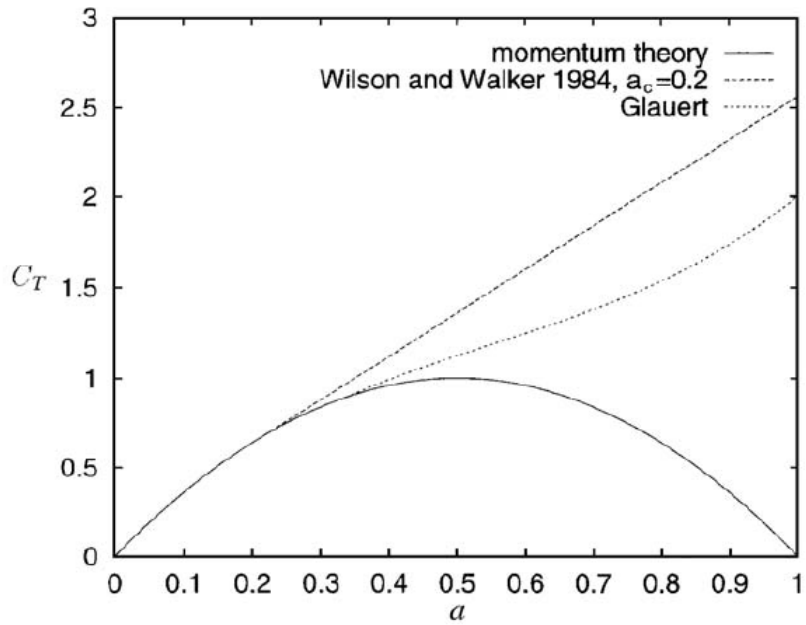
$$f = \frac{N}{2}\frac{R-r}{r\sin\phi} \tag{2.44}$$

Αυτό έχει συνέπειες και στις επόμενες σχέσεις. Έτσι οι εξισώσεις 2.39 και 2.40 μετατρέπονται σε:

$$a = \frac{1}{\frac{4F\sin^2\phi}{\sigma C_{\mathrm{n}}} + 1} \tag{2.45}$$

και:

$$a' = \frac{1}{\frac{4F\sin\phi\cos\phi}{\sigma C_{\mathrm{t}}} - 1} \tag{2.46}$$



Σχήμα 2.8: Διόρθωση Glauert [12]

2.4.4 Διόρθωση Glauert για μεγάλες τιμές του αξονικού επαγωγικού συντελεστή

Έχει αποδειχτεί μέσω πειραματικών αποτελεσμάτων [7, T. Burton et al.] πως όταν ο αξονικός επαγωγικός συντελεστής πάρει τιμές μεγαλύτερες από 0.4, τότε η Θεωρία Ορμής παύει να δίνει ρεαλιστικά αποτελέσματα. Έχουν προταθεί αρκετές εμπειρικές σχέσεις ανάμεσα στο συντελεστή ώθησης C_T και στον αξονικό επαγωγικό συντελεστή a, όπως:

$$C_T = \begin{cases} 4a(1-a)F & \text{αν } a \leq \frac{1}{3} \\ 4a(1-\frac{1}{4}(5-3a)a)F & \text{αν } a > \frac{1}{3} \end{cases} \tag{2.47}$$

ή

$$C_T = \begin{cases} 4a(1-a)F & \text{αν } a \leq a_c \\ 4(a_c^2+(1-2a_c)a)F & \text{αν } a > a_c \end{cases} \tag{2.48}$$

όπου $a_c \simeq 0.2$ και F είναι ο συντελεστής απωλειών του Prandtl.

Οι δύο κατανομές του C_T, μαζί με την έκφραση από τη Θεωρία Ορμής, φαίνονται στο σχήμα 2.8

Όμως, είχε προκύψει ότι:

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 2\pi r \mathrm{d}r} = \frac{(1-a)^2 \sigma C_n}{\sin^2\phi}$$

Εξισώνοντας την παραπάνω έκφραση του C_T με τη δεύτερη εμπειρική σχέση, συνεπάγεται:
Αν $a \leq a_c$, τότε:

$$4a(1-a)F = \frac{(1-a)^2 \sigma C_n}{\sin^2 \phi}$$

Και από εδώ, λύνοντας ως προς a, προκύπτει:

$$a = \frac{1}{\frac{4F \sin^2 \phi}{\sigma C_n} + 1} \tag{2.49}$$

Εάν όμως $a > a_c$:

$$4(a_c^2 + (1-2a_c)a)F = \frac{(1-a)^2 \sigma C_n}{\sin^2 \phi}$$

Οπότε, λύνοντας ως προς a, προκύπτει:

$$a = \frac{1}{2}\left[2 + K(1-2a_c) - \sqrt{\left(K(1-2a_c)+2\right)^2 + 4(Ka_c^2 - 1)}\right] \tag{2.50}$$

όπου

$$K = \frac{4F \sin^2 \phi}{\sigma C_n} \tag{2.51}$$

2.5 Προσδιορισμός Φορτίων - Πορεία Υπολογισμών

Με βάση όλα τα παραπάνω μπορεί να καταστρωθεί πλέον ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό των φορτίων που ασκούνται στην κορυφή της ανεμογεννήτριας λόγω της περιστροφής του ρότορα. Θα εξηγηθεί αναλυτικά πώς γίνεται αυτό:

Κατ' αρχάς πρέπει να αποφασιστεί το πλήθος των στοιχείων στα οποία θα χωριστούν τα πτερύγια. Είθισται να επιλέγεται ένας αριθμός M ανάμεσα στο 10 και στο 20 [13, G. Ingram]. Στη συνέχεια, είναι απαραίτητο να είναι γνωστά τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της κάθε διατομής. Πιο συγκεκριμένα, για καθεμιά από τις M διατομές, χρειάζονται:

- Η χορδή c.
- Η γωνία βήματος β.
- Πίνακες που να δίνουν την τιμή των C_d και C_l συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης.

Εκτός από τα παραπάνω, είναι αναγκαίο επίσης να υπάρχουν πληροφορίες για το πλήθος N των πτερυγίων καθώς και για τη γωνιακή ταχύτητα Ω με την οποία περιστρέφονται τα πτερύγια. Επίσης, η πυκνότητα ρ του αέρα θεωρείται σταθερή και ίση με $1.225 kg/m^3$.

Γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω, μπορεί να ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία [12], ξεκινώντας από το πρώτο στοιχείο πτερυγίου:

1. Αρχικοποιείται ο αλγόριθμος, υποθέτοντας πως $a = a' = 0$.
2. Υπολογίζεται η γωνία ϕ από τη σχέση 2.24.
3. Υπολογίζεται η γωνία πρόσπτωσης α από τη σχέση 2.25.
4. Με βάση τη γωνία πρόσπτωσης, υπολογίζονται από τους Πίνακες Συντελεστών οι τιμές των C_d και C_l.
5. Υπολογίζονται οι τιμές των συντελεστών C_t και C_n από τις σχέσεις 2.30 και 2.31.
6. Πλέον μπορούν να υπολογιστούν εκ νέου ο συντελεστής a από τη σχέση 2.49 ή 2.50 (ανάλογα με τη σύγκριση των a και a_c) και ο συντελεστής a' από τη σχέση 2.46.
7. Αν η μεταβολή των a και a' είναι μεγαλύτερη από την ανεκτή, τότε επαναλαμβάνονται οι υπολογισμοί από το βήμα 2. Αν πάλι η μεταβολή είναι επαρκώς μικρή, τότε εκτελείται το βήμα 8.
8. Υπολογίζονται οι στοιχειώδεις δυνάμεις στο τμήμα του πτερυγίου:

$$\delta F_\mathrm{t} = C_\mathrm{t}(\frac{1}{2}\rho W^2 c \delta r) \tag{2.52}$$

$$\delta F_\mathrm{n} = C_\mathrm{n}(\frac{1}{2}\rho W^2 c \delta r) \tag{2.53}$$

Επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία για κάθε τμήμα του πτερυγίου. Πλέον είναι δυνατή η άθροιση των στοιχειωδών δυνάμεων, από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$F_\mathrm{y} = \sum \delta F_\mathrm{t} \tag{2.54}$$

$$F_\mathrm{z} = \sum \delta F_\mathrm{n} \tag{2.55}$$

Όσον αφορά τη μελέτη του πυλώνα, το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στη δύναμη F_y, που είναι αυτή που καταπονεί τον πυλώνα.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, που συμπεριλαμβάνει και τις διορθώσεις Prandtl και Glauert, αποτελεί τη βάση με την οποία υπολογίζονται τα φορτία για κάθε τύπο πτερυγίου που εξετάστηκε στην παρούσα εργασία.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Δοκού

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί αναλυτικά το πρόβλημα της δοκού τυχαίας, μεταβλητής, διπλά συμμετρικής διατομής, που υπόκειται σε δυναμικό φορτίο υπό τη θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων - μικρών παραμορφώσεων. Η εν λόγω μη γραμμική θεωρία δοκού χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για την προσομοίωση των πυλώνων ανεμογεννητριών. Ο τρόπος αυτός προσομοίωσης είναι πλεονεκτικός για τους παρακάτω λόγους:

- Μέσω της θεωρίας δοκού οι ραβδόμορφοι φορείς, δηλαδή οι φορείς των οποίων η μια διάσταση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες δύο, προσομοιώνονται με ικανοποιητική ακρίβεια. Αυτό επαληθεύτηκε και στο παρόν πρόβλημα, καθώς διεξήχθησαν συγκρίσεις μεταξύ των αποτελέσματων που ελήφθησαν από τα προσομοιώματα δοκού και των αντιστοίχων από προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων κελύφους και η σύγκλιση που παρατηρήθηκε ήταν πολύ ικανοποιητική.

- Η ταχύτητα στους υπολογισμούς είναι πολύ υψηλή. Όπως έγινε φανερό, ο χρόνος ανάλυσης των προσομοιωμάτων δοκού ήταν ιδιαίτερα μικρός σε αντίθεση με το χρόνο ανάλυσης και το υπολογιστικό κόστος των προσομοιωμάτων κελύφους χωρίς να υπάρχει απώλεια στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

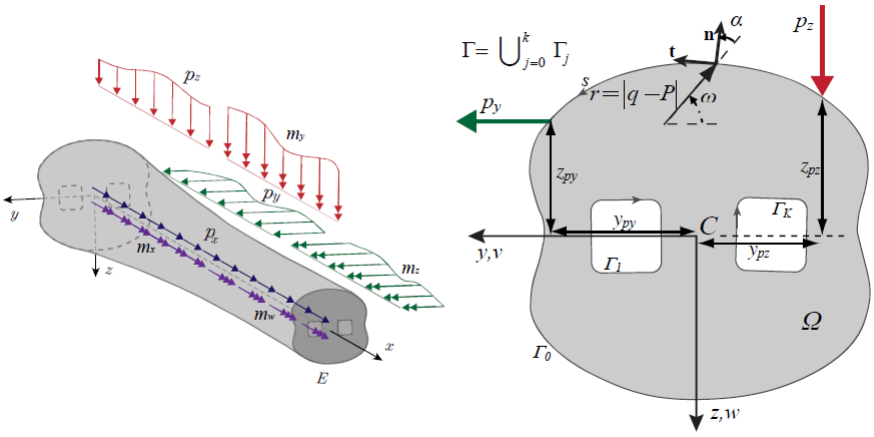
- Δίνει εύληπτα αποτελέσματα, εύκολα αντιληπτά για το μηχανικό και εύκολα αξιολογίσιμα. Σε αντίθεση με τα στοιχεία κελύφους, το μοντέλο από στοιχεία δοκού δίνει τη δυνατότητα καλύτερης εποπτείας, μέσω των διαγραμμάτων των εντατικών μεγεθών M, Q, N που αναφέρονται σε ολόκληρη τη διατομή.

3.2 Ανάλυση Δοκού μεταβλητής, διπλά συμμετρικής διατομής

3.2.1 Διατύπωση του Προβλήματος

Θεωρείται ευθύγραμμη δοκός μήκους L , μεταβλητής διατομής, τυχόντος σχήματος αλλά διπλά συμμετρικής, εμβαδού $A = A(x)$. Η διατομή περιλαμβάνει το δισδιάστατο χωρίο Ω το οποίο είναι απλά ή πολλαπλά συνεκτικό (υπάρχει η δυνατότητα να περιλαμβάνει οπές), ενώ το σύνορο της εν λόγω διατομής $\Gamma = \partial\Omega$, είναι τμηματικά λείο. Το υλικό από το οποίο αποτελείται η δοκός είναι γραμμικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο με μέτρο ελαστικότητας E , μέτρο διάτμησης G και λόγο Poisson ν . Με $Cxyz$ συμβολίζεται το κύριο καμπτικό σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής C (το οποίο, λόγω της διπλής συμμετρίας της διατομής, ταυτίζεται με το κέντρο στρέψης).

Η δοκός υπόκειται στις πλέον γενικές συνθήκες στήριξης στα άκρα της, ενώ υποβάλλεται σε συνδυασμό τυχαία κατανεμημένης ή/και συγκεντρωμένης αξονικής φόρτισης $p_x = p_x(x,t)$, η οποία ασκείται κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα x, εγκάρσιας φόρτισης $p_y = p_y(x,t)$ και $p_x = p_x(x,t)$ η οποία ασκείται σε αποστάσεις y_{p_y}, z_{p_y} και y_{p_z}, z_{p_z} από το κέντρο βάρους, στρεπτικής ροπής $m_x = m_x(x,t)$ και ροπής στρέβλωσης $m_w = m_w(x,t)$ κατά την διεύθυνση του διαμήκη άξονα x, καθώς και καμπτικές ροπές $m_z = m_z(x,t)$ και $m_y = m_y(x,t)$ περί του άξονα y και z, αντίστοιχα (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1: Δοκός μεταβλητής διατομής που υπόκειται σε συνδυασμένη δράση αξονικών, εγκάρσιων φορτίων, καμπτικών και στρεπτικών ροπών[24]

Για τη συμπεριφορά της ράβδου, στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, υιοθετούνται οι παρακάτω παραδοχές:

- Οι διατομές της ράβδου περιστρέφονται περί τον διαμήκη άξονα, που διέρχεται από το κέντρο στρέψης, ως στερεά σώματα. Δεν αναπτύσσονται, συνεπώς, παραμορφώσεις εντός του επιπέδου της διατομής (distortion).

- Οι διατμητικές παραμορφώσεις που οφείλονται στα εγκάρσια φορτία που δρουν στη δοκό θεωρούνται μηδενικές (θεωρία δοκού Euler-Bernoulli).
- Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις και οι γωνίες στροφής λόγω στρέψης μπορούν να είναι μετρίως μεγάλες, αλλά οι παραμορφώσεις θεωρούνται μικρές. Σύμφωνα με την παραδοχή αυτή, οι συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεων είναι μικρότερες της μονάδας και οι όροι δεύτερης τάξης θεωρούνται μικροί αλλά όχι αμελητέοι [20] (θεωρία μετρίως μεγάλων μετατοπίσεων-μικρών παραμορφώσεων).

3.2.2 Πεδίο μετατοπίσεων

Για την προσέγγιση του προβλήματος που διατυπώθηκε παραπάνω, θα γίνει χρήση της ημιαντίστροφης μεθόδου του St. Venant (semi-inverse method). Αρχικά θα υιοθετηθεί ένα κατάλληλο πεδίο μετατοπίσεων με βάση το οποίο υποθέτουμε ότι η δοκός θα παραμορφωθεί. Σύμφωνα με την εν λόγω μέθοδο, εάν το συγκεκριμένο πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και δίνει τη λύση του προβλήματος, τότε είναι το σωστό. Η μόρφωση του κατάλληλου πεδίου μετατοπίσεων θα βασιστεί στις παραδοχές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι διατομές περιστρέφονται ως στερεά σώματα, συνεπώς τα σημεία εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο στρέψης της διατομής S. Η στροφή της διατομής σε τυχούσα θέση της ράβδου x θα περιγράφεται από το μέγεθος $\vartheta_x(x)$. Η πρώτη παράγωγος της στροφής, $\vartheta'_x(x)$ ονομάζεται **συστροφή** και εκφράζει τη σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου, ανηγμένη στη μονάδα μήκους. Η διαμήκης συνιστώσα της μετατόπισης οφείλεται αφ' ενός σε στροφή των διατομών περί τους άξονες y και z λόγω κάμψης και αφ' ετέρου στη στρέβλωση των διατομών λόγω στρέψης. Για την περιγραφή της διαμήκους μετατόπισης των σημείων της διατομής λόγω στρέβλωσης, υιοθετείται μια συνάρτηση $\varphi_S^P(y,z)$ η οποία ονομάζεται πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, αναφέρεται στο κέντρο στρέψης της διατομής S και εκφράζει τη στρέβλωση της δοκού για μοναδιαία συστροφή $\vartheta'_x(x)$. Η στρέβλωση που περιγράφει η εν λόγω συνάρτηση οφείλεται στην κατανομή των πρωτογενών διατμητικών τάσεων [25].

Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις ενός τυχαίου σημείου μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των μετακινήσεων του κέντρου βάρους της διατομής και της γωνίας στροφής της διατομής στο επίπεδο της. Θεωρώντας, λοιπόν, την κίνηση ενός τυχαίου σημείου της διατομής κατά την παραμόρφωση της δοκού, προκύπτουν οι εκφράσεις των συνιστωσών του διανύσματος της μετατόπισης, ως εξής:

$$\bar{u}(x,y,z,t) = u(x,t) - y\vartheta_z(x,t) + z\vartheta_y(x,t) + \vartheta'_x(x,t)\varphi_S^P \qquad (3.1\ \alpha)$$

$$\bar{v}(x,y,z,t) = v(x,t) - z\sin(\vartheta_x(x,t)) - y[1 - cos(\vartheta_x(x,t))] \qquad (3.1\ \beta)$$

$$\bar{w}(x,y,z,t) = w(x,t) + y\sin(\vartheta_x(x,t)) - z[1 - cos(\vartheta_x(x,t))] \qquad (3.1\ \gamma)$$

$$\vartheta_y(x,t) = v'(x,t)\sin(\vartheta_x(x,t)) - w'(x,t)\cos(\vartheta_x(x,t)) \tag{3.1 δ}$$

$$\vartheta_z(x,t) = v'(x,t)\cos(\vartheta_x(x,t)) + w'(x,t)\sin(\vartheta_x(x,t)) \tag{3.1 ε}$$

Όπου $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ είναι η συνιστώσες της μετατόπισης του τυχαίου σημείου ως προς το καθολικό σύστημα αξόνων Cyz. Όπου $u(x,t) = \frac{1}{A}\int_A \bar{u}(x,y,z,t)\,dA$ αποτελεί τη μέση αξονική μετακίνηση της διατομής [4], $v = v(x,t)$, $w = w(x,t)$ είναι οι συνιστώσες μετατόπισης του κέντρου βάρους, ενώ $\vartheta_y(x,t)$, $\vartheta_z(x,t)$ είναι οι γωνίες στροφής της διατομής λόγω της κάμψης περί τους άξονες y και z , αντίστοιχα, οι εκφράσεις των οποίων προέκυψαν από απαίτηση μηδενισμού των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xy} και γ_{xz} στο κέντρο στρέψης (που εν προκειμένω ταυτίζεται με το κέντρο βάρους) της διατομής. Η απαίτηση αυτή οφείλεται στην υιοθέτηση δοκού τύπου Euler-Bernoulli και στο γεγονός ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις στο κέντρο βάρους, λόγω στρέβλωσης, είναι επίσης μηδενικές. Με τον συμβολισμό $(\ )'$, υποδηλώνεται η παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x και θα εφαρμόζεται σε όλη τη συνέχεια της παρούσας ενότητας, για απλοποίηση της παρουσίασης των εξισώσεων. Οι σχέσεις 3.1, συνεπώς, αποτελούν το διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων που υιοθετείται για την επίλυση του προβλήματος.

3.2.3 Παραμορφώσεις - Τάσεις

Στην περίπτωση της γραμμικής ανάλυσης η παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα, καθώς επιτρέπει διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης στην αρχική (απαραμόρφωτη) διαμόρφωση της δοκού και για τον προσδιορισμό της παραμόρφωσης χρησιμοποιείται ο απειροστικός τανυστής παραμόρφωσης. Στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας, όπως έχει αναφερθεί, δεν υιοθετείται η παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων και οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας που διέπουν το εξεταζόμενο μη γραμμικό πρόβλημα θα μορφωθούν στην παραμορφωμένη (άγνωστη) διαμόρφωση της δοκού, με ολική διατύπωση Lagrange. Συνεπώς, για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων, θα χρησιμοποιηθεί ο τανυστής παραμορφώσεων Green ε^G αντί του απειροστικού τανυστή παραμορφώσεων. Οι συνιστώσες του τανυστή Green δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις [23]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\bar{v}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\bar{w}}{\partial x})^2\right] \tag{3.2 α}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\bar{v}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\bar{w}}{\partial y})^2\right] \tag{3.2 β}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z})^2 + (\frac{\partial\bar{v}}{\partial z})^2 + (\frac{\partial\bar{w}}{\partial z})^2\right] \tag{3.2 γ}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} \tag{3.2 δ}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{3.2 ε}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \tag{3.2 στ}$$

Για την απλοποίηση των παραπάνω εκφράσεων, υιοθετείται η παραδοχή ότι οι διαμήκεις μετατοπίσεις είναι αρκούντως μικρές, ούτως ώστε οι μη γραμμικοί όροι που προκύπτουν λόγω της μετατόπισης $\bar{u}$ να μπορούν να αμεληθούν. Η παραδοχή αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι σε ένα ραβδωτό σώμα, στο οποίο η μια διάσταση είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις άλλες δύο, η παραμορφωσιακή εικόνα που αναμένεται να αναπτυχθεί θα οφείλεται κυρίως στα εγκάρσια βέλη και τη στροφή λόγω στρέψης, ενώ οι διαμήκεις μετατοπίσεις θα είναι σημαντικά μικρότερες. Από τη θεώρηση του πεδίου μετατοπίσεων (σχέσεις 3.1) και με εφαρμογή της παραπάνω παραδοχής, προκύπτει εύκολα ότι $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0$, ενώ οι εναπομείναντες όροι του τανυστή παραμορφώσεων γράφονται ως εξής:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{w}}{\partial x})^2\right] \tag{3.3 α}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{3.3 β}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{3.3 γ}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων (σχέσεις (3.1)) στις σχέσεις (3.3) προκύπτουν οι τελικές εκφράσεις των παραμορφώσεων συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = u' + z(v''\sin\vartheta_x - w''\cos\vartheta_x) - y(v''\cos\vartheta_x + w''\sin\vartheta_x) + \\ + \vartheta_x''\varphi_S^P + \frac{1}{2}\left[v'^2 + w'^2 + (y^2+z^2)(\vartheta_x')^2\right]\end{aligned} \tag{3.4 α}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y} - z\right)\vartheta_x' \tag{3.4 β}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} + y\right)\vartheta_x' \tag{3.4 γ}$$

Στη συνέχεια, έχοντας θεωρήσει ότι η δοκός αποτελείται από γραμμικά ελαστικό, ισότροπο, ομογενές υλικό και αμελώντας την επιρροή του λόγου του Poisson, μπορούμε να εξάγουμε τις εκφράσεις των συνιστωσών του δευτέρου τανυστή

τάσεων Piola-Kirchhoff, ο οποίος είναι συζυγής ως προς το έργο με τον τανυστή παραμορφώσεων Green.

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^* & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

Όπου το απομειωμένο μέτρο ελαστικότητας E^* προκύπτει από το νόμο του Hooke ως εξής:

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.6}$$

Η παραπάνω έκφραση του E^* μπορεί να απλοποιηθεί εάν γίνει παραδοχή ότι ισχύουν συνθήκες επίπεδης έντασης στη δοκό [28, 2]. Έτσι προκύπτει ότι:

$$E^* = \frac{\mathrm{E}}{(1-\nu^2)} \simeq \mathrm{E} \tag{3.7}$$

Συνεπώς, στη συνέχεια της παρούσας θεωρίας το μέτρο ελαστικότητας του υλικού E θα χρησιμοποιηθεί στη θέση του E^* , ενώ σημειώνεται ότι οποιαδήποτε εύλογη τιμή του E^* μπορεί να χρησιμοποιηθεί, χωρίς κανένα περιορισμό. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.4) στις (3.5), προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις:

$$\begin{aligned} S_{xx} = E\Big[& u' + z(v''\sin\vartheta_x - w''\cos\vartheta_x) - y(v''\cos\vartheta_x + w''\sin\vartheta_x) + \\ & + \vartheta_x''\varphi_S^P + \frac{1}{2}\Big[v'^2 + w'^2 + (y^2+z^2)(\vartheta_x')^2\Big]\Big] \end{aligned} \tag{3.8 α}$$

$$S_{xy} = G\vartheta_x'\Big(\frac{\partial\varphi_S^P}{\partial y} - z\Big) \tag{3.8 β}$$

$$S_{xz} = G\vartheta_x'\Big(\frac{\partial\varphi_S^P}{\partial z} + y\Big) \tag{3.8 γ}$$

Από την εξίσωση (3.8 α), γίνεται φανερή η συμμετοχή της συστροφής $\vartheta_x'(x)$ στην ανάπτυξη ορθών τάσεων μέσω του όρου $\frac{1}{2}\Big[v'^2+w'^2+(y^2+z^2)(\vartheta_x')^2\Big]$, που εκφράζει τη μη γραμμική επιρροή της στρέψης (όρος Wagner) [3, 9]. Στην περίπτωση δοκού υποβαλλόμενης σε στρεπτική καταπόνηση, αναπτύσσονται εφελκυστικές ορθές τάσεις λόγω της στροφής που υφίσταται η διατομή περί το διαμήκη άξονα της, με αποτέλεσμα, οι αρχικά ευθύγραμμες διαμήκεις ίνες της δοκού να αποκτούν ελικοειδή μορφή. Στην περίπτωση αυτή, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ισορροπία των δυνάμεων (το ολοκλήρωμα των ορθών τάσεων απουσία εξωτερικής αξονικής φόρτισης πρέπει να μηδενίζεται) η δοκός υφίσταται βράχυνση [4, 3, 22, 21]. Για το λόγο αυτό η προαναφερθείσα επιρροή αναφέρεται είτε ως μη γραμμική επιρροή στρέψης, είτε ως βράχυνση λόγω στρέψης (shortening effect).

3.2.4 Εξισώσεις Ισορροπίας

Μέχρι στιγμής, στο πεδίο μετατοπίσεων που χρησιμοποιήθηκε, έχουν εισαχθεί οι πέντε άγνωστες ποσότητες $u_x(x,t)$, $v_x(x,t)$, $w_x(x,t)$, $\vartheta_x(x,t)$ και $\varphi_S^P(y)$.

Για να μορφωθούν οι μη γραμμικές εξισώσεις κίνησης εφαρμόζεται η αρχή δυνατών έργων:

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{mass}} = \delta W_{\text{ext}} \tag{3.9}$$

όπου:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V (S_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + S_{xy}\delta\gamma_{xy} + S_{xz}\delta\gamma_{xz})\, dV \tag{3.10 α}$$

$$\delta W_{\text{mass}} = \int_V \rho(\ddot{\bar{u}}\delta\bar{u} + \ddot{\bar{v}}\delta\bar{v} + \ddot{\bar{w}}\delta\bar{w})\, dV \tag{3.10 β}$$

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{ext}} = \int_L \Big(p_x\delta u + p_y\delta\, \tilde{v}_{p_y} + p_z\delta\, \tilde{w} + m_y\delta\vartheta_y + m_z\delta\vartheta_z + m_x\delta\vartheta_x + m_w\delta\vartheta_x'\Big)\, dx + \\ + \Big[N_b\delta u + R_{by}\delta v + R_{bz}\delta w + M_{bz}\delta\vartheta_z + M_{by}\delta\vartheta_y + \\ + M_{bt}\delta\vartheta_x + M_{bw}\delta\vartheta_x'\Big]_0^L\end{aligned} \tag{3.10 γ}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, $\delta(\cdot)$ είναι ο τελεστής του λογισμού των μεταβολών, ο οποίος υποδηλώνει τις δυνατές μεταβολές των ποσοτήτων, ενώ ο τελεστής $(\dot{\cdot})$ υποδηλώνει παραγώγιση ως προς χρόνο, V είναι ο όγκος της δοκού στην απαραμόρφωτη κατάσταση, $\tilde{v}_{p_y}$, $\tilde{w}_{p_z}$ είναι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής των φορτίων p_y, p_z, αντίστοιχα, ενώ N_b, R_{by}, R_{bz}, M_{by}, M_{bz}, M_{bt}, M_{bw} είναι τα εξωτερικώς επιβαλλόμενα φορτία και ροπές στα άκρα της δοκού.

Ορίζονται τα εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται στις διατομές, στην παραμορφωμένη διαμόρφωση της δοκού ως εξής:

$$N = \int_\Omega S_{xx}\, d\Omega \tag{3.11 α}$$

$$M_y = \int_\Omega S_{xx} z\, d\Omega \tag{3.11 β}$$

$$M_z = -\int_\Omega S_{xx} y\, d\Omega \tag{3.11 γ}$$

$$M_t^P = \int_\Omega \left[S_{xy}(\frac{\partial\varphi_S^P}{\partial y} - z) + S_{xz}(\frac{\partial\varphi_S^P}{\partial z} + y)\right] d\Omega \tag{3.11 δ}$$

$$M_w = -\int_\Omega S_{xx}\varphi_S^P\, d\Omega \tag{3.11 ε}$$

$$M_R = \int_\Omega S_{xx}(y^2 + z^2)\, d\Omega \tag{3.11 στ}$$

όπου M_t^P η στρεπτική ροπή που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις S_{xy}, S_{xz} [25, 26], M_w η ροπή στρέβλωσης και M_R εντατικό μέγεθος ανώτερης τάξης ([16, 17, 18]). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων, όπως προέκυψαν στις εξισώσεις (3.8), προκύπτουν οι εκφράσεις των εντατικών μεγεθών της δοκού συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών, ως εξής:

$$N = EA\left[u' + \frac{1}{2}\left(v'^2 + w'^2 + \frac{I_p}{A}\vartheta_x'^2\right)\right] \tag{3.12 α}$$

$$M_y = -EI_y(w'' \cos\vartheta_x - v'' \sin\vartheta_x) \tag{3.12 β}$$

$$M_z = EI_y(v'' \cos\vartheta_x + w'' \sin\vartheta_x) \tag{3.12 γ}$$

$$M_t^P = GI_t\vartheta_x' \tag{3.12 δ}$$

$$M_w = -EC_s\vartheta_x'' \tag{3.12 ε}$$

$$M_R = N\frac{I_p}{A} + \frac{1}{2}\left(I_R - \frac{I_p^2}{A}\right)\vartheta_x'^2 \tag{3.12 στ}$$

όπου το εμβαδόν A, οι κύριες ροπές αδράνειας I_y , I_z ως προς το κέντρο βάρους της διατομής C , η πολική ροπή αδράνειας I_p , το μέγεθος I_R , που αποτελεί την ροπή αδράνειας τέταρτης τάξης ([16, 17, 18]), η στρεπτική σταθερά I_t και η σταθερά στρεβλώσεως C_S , ως προς το κέντρο στρέψης της διατομής S , ορίζονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$A = A(x) = \int_\Omega d\Omega \tag{3.13 α}$$

$$I_y = I_y(x) = \int_\Omega z^2\, d\Omega \tag{3.13 β}$$

$$I_z = I_z(x) = \int_\Omega y^2\, d\Omega \tag{3.13 γ}$$

$$I_p = I_p(x) = \int_\Omega (y^2 + z^2)\, d\Omega \tag{3.13 δ}$$

$$I_R = I_R(x) = \int_\Omega (y^2 + z^2)^2\, d\Omega \tag{3.13 ε}$$

$$I_t = I_t(x) = \int_\Omega (y^2 + z^2 + y\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial z} - z\frac{\partial \varphi_S^P}{\partial y})\, d\Omega \tag{3.13 στ}$$

$$C_S = C_S(x) = \int_\Omega (\varphi_S^P)^2\, d\Omega \tag{3.13 ζ}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξισώσεις 3.3), και τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών, όπως αυτές ορίστηκαν στις εξισώσεις 3.11 και εφαρμόζοντας την αρχή δυνατών έργων, οι εξισώσεις κίνησης της δοκού προκύπτουν:

$$-N' + \rho A\ddot{u} = p_x \tag{3.14 α}$$

$$\begin{aligned}
&-(Nv')' + (M_z \cos\vartheta_x + M_y \sin\vartheta_x)'' + \rho A\ddot{v} - \rho I_z \ddot{v}'' - \rho I_z' \ddot{v}' + \\
&\quad + \rho I_z[-w''\ddot{\vartheta}_x - w'\ddot{\vartheta}_x' - 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x' + (v''\dot{\vartheta}_x + 2v'\dot{\vartheta}_x' - 2\dot{w}'')\dot{\vartheta}_x] - \\
&\quad - \rho I_z'[w'\ddot{\vartheta}_x + (2\dot{w}' - v'\dot{\vartheta}_x)\dot{\vartheta}_x] + \rho(I_y - I_z)[\ddot{w}'\vartheta_x' - (v''\vartheta_x + v'\vartheta_x')\ddot{\vartheta}_x - \\
&\quad - 2(\dot{v}'\vartheta_x' + \dot{v}''\vartheta_x)\dot{\vartheta}_x + (\ddot{w}'' - \ddot{v}''\vartheta_x - \ddot{\vartheta}_x' v' - 2\ddot{v}'\vartheta_x' - 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x')\vartheta_x] - \\
&\quad - \rho(I_y' - I_z') \cdot (\ddot{v}'\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x v' + 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x - \ddot{w}')\vartheta_x = \\
&= p_y - (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_z' - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_y' + \vartheta_x\vartheta_x' m_z - (\vartheta_x' - \frac{1}{2}\vartheta_x^2\vartheta_x')m_y
\end{aligned} \tag{3.14 β}$$

$$\begin{aligned}
&-(Nw')' + (M_z \sin\vartheta_x + M_y \cos\vartheta_x)'' + \rho A\ddot{w} - \rho I_y \ddot{w}'' - \rho I_y' \ddot{w}' + \\
&\quad + \rho I_y[v''\ddot{\vartheta}_x + v'\ddot{\vartheta}_x' + 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x' + (w''\dot{\vartheta}_x + 2w'\dot{\vartheta}_x' + 2\dot{v}'')\dot{\vartheta}_x] + \\
&\quad + \rho I_y'[v'\ddot{\vartheta}_x + (2\dot{v}' + w'\dot{\vartheta}_x)\dot{\vartheta}_x] + \rho(I_y - I_z)[\ddot{v}'\vartheta_x' + (w''\vartheta_x + w'\vartheta_x')\ddot{\vartheta}_x + \\
&\quad + 2(\dot{w}'\vartheta_x' + \dot{v}''\vartheta_x)\dot{\vartheta}_x + (\ddot{v}'' + \ddot{w}''\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x' w' + 2\ddot{w}'\vartheta_x' + 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x')\vartheta_x] + \\
&\quad + \rho(I_y' - I_z') \cdot (\ddot{w}'\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x w' + 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x - \ddot{v}')\vartheta_x = \\
&= p_z + (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_y' - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_z' - \vartheta_x\vartheta_x' m_y - (\vartheta_x' - \frac{1}{2}\vartheta_x^2\vartheta_x')m_z
\end{aligned} \tag{3.14 γ}$$

$$\begin{aligned}
&M_y(w''\sin\vartheta_x + v''\cos\vartheta_x) + M_y(w''\cos\vartheta_x - v''\sin\vartheta_x) - M_t^{P\prime} \\
&\quad - M_w'' - (M_R\vartheta_x')' + \rho I_p\ddot{\vartheta}_x - \rho C_S\ddot{\vartheta}_x'' - \rho C_S'\ddot{\vartheta}_x' + \\
&\quad + \rho I_y(v'^2\ddot{\vartheta}_x + 2v'\dot{v}'\dot{\vartheta}_x - v'\ddot{w}') + \rho I_z(w'^2\ddot{\vartheta}_x + 2w'\dot{w}'\dot{\vartheta}_x + w'\ddot{v}') + \\
&\quad + \rho(I_y - I_z)(v'\ddot{v}' - w'\ddot{w}')\vartheta_x = \\
&= m_x + p_z y_{p_z}\cos\vartheta_x - p_y z_{p_y}\cos\vartheta_x - p_z z_{p_z}\sin\vartheta_x - p_y y_{p_y}\sin\vartheta_x + \\
&\quad + m_w' + [v'(1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2) + w'\vartheta_x]m_y + [w'(1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2) - v'\vartheta_x]m_z
\end{aligned} \tag{3.14 δ}$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι σημαντικά μη γραμμικό και πεπλεγμένο. Η απλοποίηση του μπορεί να επιτευχθεί αναπτύσσοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\cos\vartheta_x \simeq 1 - \frac{\vartheta_x^2}{2!} = 1 - \frac{\vartheta_x^2}{2} \tag{3.15 α}$$

$$\cos\vartheta_x \simeq \vartheta_x - \frac{\vartheta_x^3}{3!} = \vartheta_x - \frac{\vartheta_x^3}{6} \tag{3.15 β}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.15), συνυπολογίζοντας τους όρους μέχρι τρίτης τάξης, οι (3.14) γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&-E(Au'' + A'u') - E\Big[A(v'v'' + w'w'') + \frac{1}{2}A'(v'^2 + w'^2) + (I_p\vartheta_x'' + \frac{1}{2}I_p'\vartheta_x')\vartheta_x'\Big] + \\
&\quad + \rho A\ddot{u} = p_x
\end{aligned} \tag{3.16 α}$$

$$\begin{aligned}
&E(I_z v'''' + 2I_z' v''' + I_z'' v'') - Nv'' - N'v' + \\
&\quad + E(I_y - I_z)[(v''''\vartheta_x - w'''' + 4v'''\vartheta_x' + 2v''\vartheta_x'')\vartheta_x + 2(v''\vartheta_x' - w''')\vartheta_x' - w''\vartheta_x''] + \\
&\quad + E(I_y' - I_z')[2(v'''\vartheta_x - w''' + 2v''\vartheta_x')\vartheta_x - 2w''\vartheta_x'] + E(I_y'' - I_z'')\cdot \\
&\quad \cdot (v''\vartheta_x - w'')\vartheta_x + \rho A\ddot{v} - \rho I_z\ddot{v}'' - \rho I_z'\ddot{v}' + \rho I_z[-w''\ddot{\vartheta}_x - w'\ddot{\vartheta}_x' - 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x' + \\
&\quad + (v''\dot{\vartheta}_x + 2v'\dot{\vartheta}_x' - 2\dot{w}'')\dot{\vartheta}_x] - \rho I_z'[w'\ddot{\vartheta}_x + (2\dot{w}' - v'\dot{\vartheta}_x)\dot{\vartheta}_x] + \rho(I_y - I_z)[\ddot{w}'\vartheta_x' - \\
&\quad - (v''\vartheta_x + v'\vartheta_x')\ddot{\vartheta}_x - 2(\dot{v}'\vartheta_x' + \dot{v}''\vartheta_x)\dot{\vartheta}_x + (\ddot{w}'' - \ddot{v}''\vartheta_x - \ddot{\vartheta}_x'v' - 2\ddot{v}'\vartheta_x' - 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x')\vartheta_x] - \\
&\quad - \rho(I_y' - I_z')(\ddot{v}'\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x v' + 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x - \ddot{w}')\vartheta_x = p_y - (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_z' - \\
&\quad - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_y' + \vartheta_x\vartheta_x' m_z - (\vartheta_x' - \frac{1}{2}\vartheta_x^2\vartheta_x')m_y
\end{aligned} \tag{3.16 β}$$

$$\begin{aligned}
&E(I_y w'''' + 2I_y' w''' + I_y'' w'') - Nw'' - N'w' - \\
&\quad - E(I_y - I_z)[(w''''\vartheta_x + v'''' + 4w'''\vartheta_x' + 2w''\vartheta_x'')\vartheta_x + 2(w''\vartheta_x' + v''')\vartheta_x' + v''\vartheta_x''] - \\
&\quad - E(I_y' - I_z')[2(w'''\vartheta_x + v''' + 2w''\vartheta_x')\vartheta_x + 2v''\vartheta_x'] - E(I_y'' - I_z'')\cdot \\
&\quad \cdot (w''\vartheta_x + v'')\vartheta_x + \rho A\ddot{w} - \rho I_y\ddot{w}'' - \rho I_y'\ddot{w}' + \rho I_y[v''\ddot{\vartheta}_x + v'\ddot{\vartheta}_x' + 2\dot{v}'\dot{\vartheta}_x' + \\
&\quad + (w''\dot{\vartheta}_x + 2w'\dot{\vartheta}_x' + 2\dot{v}'')\dot{\vartheta}_x] + \rho I_y'[v'\ddot{\vartheta}_x + (2\dot{v}' + w'\dot{\vartheta}_x)\dot{\vartheta}_x] + \rho(I_y - I_z)[\ddot{v}'\vartheta_x' + \\
&\quad + (w''\vartheta_x + w'\vartheta_x')\ddot{\vartheta}_x + 2(\dot{w}'\vartheta_x' + \dot{w}''\vartheta_x)\dot{\vartheta}_x + (\ddot{v}'' + \ddot{w}''\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x'w' + 2\ddot{w}'\vartheta_x' + 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x')\vartheta_x] + \\
&\quad + \rho(I_y' - I_z')(\ddot{w}'\vartheta_x + \ddot{\vartheta}_x w' + 2\dot{w}'\dot{\vartheta}_x + \ddot{v}')\vartheta_x = p_z + (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_y' - \\
&\quad - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_z' - \vartheta_x\vartheta_x' m_y - (\vartheta_x' - \frac{1}{2}\vartheta_x^2\vartheta_x')m_z
\end{aligned} \tag{3.16 γ}$$

$$
\begin{aligned}
&E(C_S\vartheta_x'''' + 2C_S'\vartheta_x''' + C_S''\vartheta_x'') - G(I_t\vartheta_x'' + I_t'\vartheta_x') - N[\frac{I_p}{A}\vartheta_x'' + (\frac{I_p'}{A} - \frac{I_pA'}{A^2})\vartheta_x'] - N'\frac{I_p}{A}\vartheta_x' + \\
&- \frac{3}{2}E(I_R - \frac{I_p^2}{A})\vartheta_x''\vartheta_x'^2 + E(\frac{2I_p'I_p}{A} - \frac{A'I_p^2}{A^2} - I_R')\vartheta_x'^3 + E(I_y - I_z)\cdot \\
&\cdot [(v''^2 - w''^2)\vartheta_x - w''v''] + \rho I_p\ddot{\vartheta}_x - \rho C_S\ddot{\vartheta}_x'' - \rho C_S'\ddot{\vartheta}_x' + \rho I_y(v'^2\ddot{\vartheta}_x + \\
&+ 2v'\dot{v}'\dot{\vartheta}_x - v'\ddot{w}') + \rho I_z(w'^2\ddot{\vartheta}_x + 2w'\dot{w}'\dot{\vartheta}_x + w'\ddot{v}') + \rho(I_y - I_z)(v'\ddot{v}' - w'\ddot{w}')\vartheta_x = \\
&= m_x + p_z y_{p_z} - p_y z_{p_y} + (\frac{1}{2}\vartheta_x^2 z_{p_y} + \frac{1}{6}\vartheta_x^3 y_{p_y} - \vartheta_x y_{p_y})p_y + \\
&+ (\frac{1}{6}\vartheta_x^3 z_{p_z} - \frac{1}{2}\vartheta_x^2 y_{p_z} - \vartheta_x z_{p_z})p_z + m_w' + [v'(1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2) + w'\vartheta_x]m_y + \\
&+ [w'(1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2) - v'\vartheta_x]m_z \qquad (3.16\ \delta)
\end{aligned}
$$

3.2.5 Αρχικές Συνθήκες - Συνοριακές Συνθήκες

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι: (Για $x \in (0, L)$)

$$u(x,0) = 0 = u_0(x) \qquad \dot{u}(x,0) = 0 = \dot{u}_0(x) \qquad (3.17\ \alpha,\beta)$$

$$v(x,0) = 0 = v_0(x) \qquad \dot{v}(x,0) = 0 = \dot{v}_0(x) \qquad (3.18\ \alpha,\beta)$$

$$w(x,0) = 0 = w_0(x) \qquad \dot{w}(x,0) = 0 = \dot{w}_0(x) \qquad (3.19\ \alpha,\beta)$$

$$\vartheta_x(x,0) = 0 = \vartheta_{x0}(x) \qquad \dot{\vartheta}_x(x,0) = 0 = \dot{\vartheta}_{x0}(x) \qquad (3.20\ \alpha,\beta)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_1 u(x,t) + \alpha_2 N_b(x,t) = \alpha_3 \qquad (3.21)$$

$$\beta_1 v(x,t) + \beta_2 R_{by}(x,t) = \beta_3 \qquad \bar{\beta}_1\vartheta_z(x,t) + \bar{\beta}_2 M_{bz}(x,t) = \bar{\beta}_3 \qquad (3.22\ \alpha,\beta)$$

$$\gamma_1 w(x,t) + \gamma_2 R_{bz}(x,t) = \gamma_3 \qquad \bar{\gamma}_1\vartheta_y(x,t) + \bar{\gamma}_2 M_{by}(x,t) = \bar{\gamma}_3 \qquad (3.23\ \alpha,\beta)$$

$$\delta_1 \vartheta_x(x,t) + \delta_2 M_{bt}(x,t) = \delta_3 \qquad \bar{\delta}_1 \vartheta'_x(x,t) + \bar{\delta}_2 M_{bw}(x,t) = \bar{\delta}_3 \qquad (3.24\ \alpha,\beta)$$

όπου R_{by}, R_{bz}, M_{by}, M_{bz} δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις (έχοντας διατηρήσει τους μη γραμμικούς όρους μέχρι τρίτης τάξης):

$$\begin{aligned} R_{by} = &-E(I_z v''' + I'_z v'') + N v' + E(I_y - I_z)[w''\vartheta'_x + (w''' - v'''\vartheta_x - 2v''\vartheta'_x)\vartheta_x] - \\ &- E(I'_y - I'_z)(v''\vartheta_x - w'')\vartheta_x - (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_z - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_y \end{aligned} \qquad (3.25\ \alpha)$$

$$\begin{aligned} R_{bz} = &-E(I_y w''' + I'_y w'') + N w' + E(I_y - I_z)[v''\vartheta'_x + (v''' + w'''\vartheta_x + 2w''\vartheta'_x)\vartheta_x] + \\ &+ E(I'_y - I'_z)(w''\vartheta_x + v'')\vartheta_x + (1 - \frac{1}{2}\vartheta_x^2)m_y - (\vartheta_x - \frac{1}{6}\vartheta_x^3)m_z \end{aligned} \qquad (3.25\ \beta)$$

$$M_{bz} = EI_z v'' + E(I_y - I_z)(\vartheta_x v'' - w'')\vartheta_x \qquad (3.25\ \gamma)$$

$$M_{by} = -EI_y w'' + E(I_y - I_z)(\vartheta_x w'' + v'')\vartheta_x \qquad (3.25\ \delta)$$

όπου M_{bt} και M_{bw} οι ροπές στρέψης και στρέβλωσης αντίστοιχα στο σύνορο της δοκού και δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_{bt} = -EC_S\vartheta'''_x - EC'_S\vartheta''_x + (GI_t + N\frac{I_p}{A})\vartheta'_x + \frac{1}{2}E(I_R - \frac{I_p^2}{A})\vartheta'^3_x + m_w \qquad (3.26\ \alpha)$$

$$M_{bw} = -EC_S\vartheta''_x \qquad (3.26\ \beta)$$

Τέλος, τα α_k, β_k, $\bar{\beta}_k$, γ_k, $\bar{\gamma}_k$, δ_k, $\bar{\delta}_k$, $(k = 1, 2, 3)$ είναι συναρτήσεις του χρόνου και ορίζονται στα άκρα της δοκού $(x = 0, L)$. Σημειώνεται ότι οι συνοριακές συνθήκες (3.21)-(3.24) μπορούν να είναι οι πλέον γενικές συνθήκες που μπορούν να θεωρηθούν στα άκρα μιας δοκού, συμπεριλαμβανομένης και της ελαστικής στήριξης. Οποιοσδήποτε συμβατικός τρόπος στήριξης (πάκτωση, κυλιόμενη πάκτωση, απλή έδραση ή ελεύθερο άκρο) μπορεί να προκύψει από τις συγκεκριμένες εξισώσεις συνοριακών συνθηκών με κατάλληλη θεώρηση της τιμής των εν λόγω συναρτήσεων (π.χ. για πακτωμένο άκρο ισχύει, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1 = \bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\delta}_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_2 = \delta_3 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_3 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0$).

3.2.6 Αριθμητική επίλυση

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, η μη γραμμική στρεπτο-καμπτική δυναμική ανάλυση δοκών μεταβλητής διατομής υπό τυχούσες συνοριακές συνθήκες και εξωτερική φόρτιση ανάγεται στον προσδιορισμό των κινηματικών μεγεθών $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ και $\vartheta_x(x,t)$ τα οποία είναι δύο φορές και τέσσερις φορές, αντίστοιχα, παραγωγίσιμα ως προς x και δύο φορές παραγωγίσιμα ως προς t και ικανοποιούν το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης (εξισώσεις (3.16)) κατά μήκος της δοκού καθώς και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες (εξισώσεις (3.17)-(3.20), (3.21)) στα άκρα $x = 0, L$. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, οι εξισώσεις (3.16) έχουν λυθεί με εφαρμογή της Μεθόδου Αναλογικής Εξίσωσης (ΑΕΜ) [15], η οποία είναι μια μεθοδολογία που βασίζεται στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (ΒΕΜ) που την επεκτείνει αντιμετωπίζοντας τα εγγενή μειονεκτήματα της. Η εφαρμογή της ως άνω μεθόδου οδηγεί στη διατύπωση ενός μη γραμμικού συστήματος αλγεβο-διαφορικών εξισώσεων (DAE) κίνησης, το οποίο μπορεί να επιλυθεί με χρήση οποιουδήποτε επαναληπτικού αλγορίθμου αριθμητικής χρονικής ολοκλήρωσης. Το λογισμικό Variabeam [24] που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία κάνει εφαρμογή της γραμμικής πολύ-βηματικής μεθόδου Petzold-Gear[6]. Σημειώνεται επίσης, ότι το εν λόγω λογισμικό υπολογίζει τις γεωμετρικές σταθερές των διατομών χρησιμοποιώντας την αμιγή Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, δηλαδή για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιείται μόνο συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικά Αποτελέσματα - Εφαρμογές

4.1 Εισαγωγή

Με βάση την ανάλυση φορτίων ανέμου και της θεωρίας δοκού που αναπτύχθηκαν εκτενώς στα κεφάλαια 2 και 3, πραγματοποιήθηκαν παραμετρικές αναλύσεις πυλώνων ανεμογεννητριών. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκαν ολοκληρωτικά τρία διαφορετικά ύψη πυλώνων ανεμογεννητριών από χάλυβα.

Εφαρμόζοντας τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2, συντάχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab, στον οποίο μια δεδομένη ταχύτητα ανέμου, για γνωστό τύπο πτερυγίων, μετατρέπεται σε φορτίο που καταπονεί τον πυλώνα. Για να διαπιστωθεί η ακρίβεια του κώδικα συγκρίνονται ορισμένα ενδιάμεσα αποτελέσματα που παράγονται με τα αντίστοιχα της βιβλιογραφίας [7].

Εν συνεχεία, επιλέγονται τα χαρακτηριστικά των χρονοϊστοριών ταχύτητας που θα χρησιμοποιηθούν, από [19]. Επιλέγονται τιμές για μέση ταχύτητα και τυπική απόκλιση και στη συνέχεια χρησιμοποιείται το λογισμικό γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab "Artificial Wind" [27], το οποίο παράγει τεχνητές χρονοϊστορίες ταχυτήτων χρησιμοποιώντας τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών [10] και λαμβάνοντας υπόψη τον Ευρωκώδικα 1 [8]. Ακολούθως, οι χρονοϊστορίες αυτές εισάγονται ως δεδομένα στον κώδικα υπολογισμού φορτίων ανέμου και ως αποτέλεσμα εξάγονται οι αντίστοιχες χρονοϊστορίες φόρτισης.

Καθώς πλέον οι χρονοϊστορίες φόρτισης αποτελούν το δυναμικό φορτίο που καταπονεί τον κάθε πυλώνα, έχουν συγκεντρωθεί όλα τα απαραίτητα δεδομένα για μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις. Θεωρείται ότι το πρόβλημα του πυλώνα της ανεμογεννήτριας μπορεί να επιλυθεί ικανοποιητικά κάνοντας χρήση της θεωρίας δοκού. Τα στοιχεία δοκού προτιμώνται κατ' αρχάς έναντι των στοιχείων κελύφους γιατί οι αποκλίσεις στα αποτελέσματα δεν είναι μεγάλες, ενώ ο υπολογιστικός όγκος είναι σημαντικά μικρότερος. Πραγματοποιούνται αρχικά συγκριτικές αναλύσεις ώστε αφ' ενός να επιβεβαιωθεί η αποτελεσματικότητα της χρήσης στοιχείων δοκού για την επίλυση του παρόντος προβλήματος, αφ' ετέρου να εξακριβωθεί η

αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του κώδικα "Variabeam" [24] με τον οποίο επιλύθηκε το πρόβλημα δοκού κάνοντας χρήση της Α.Ε.Μ. Έχοντας επιβεβαιώσει και την ορθότητα της παραδοχής αλλά και την ακρίβεια του κώδικα, το επόμενο βήμα είναι πλήρεις αναλύσεις όλων των πυλώνων με προσομοίωση στοιχείων δοκού, καθώς και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

4.2 Συγκρίσεις Φορτίων Ανέμου

4.2.1 Προγραμματισμός

Με βάση τα όσα γράφτηκαν στο Κεφάλαιο 2, συντάχθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab, ο οποίος ακολουθεί επακριβώς τη διαδικασία των 8 βημάτων που περιγράφτηκε. Αξίζει να σημειωθεί ότι:

- Καθώς οι πίνακες δίνουν τις τιμές των συντελεστών C_d και C_l για μεμονωμένες τιμές της γωνίας πρόσπτωσης α, ενώ στην πραγματικότητα αυτή μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή στο $(-180, 180)$, αποφασίστηκε όταν ο αλγόριθμος συναντούσε γωνία πρόσπτωσης α που δεν υπήρχε καθεαυτή στους πίνακες, οι συντελεστές που αντιστοιχούσαν σε αυτήν να προσδιορίζονται με γραμμική παρεμβολή.
- Καθώς η βιβλιογραφία δε συνιστούσε κάποιο κριτήριο σύγκλισης, κρίθηκε πως η διαδικασία θεωρείται επαρκής και σταματάει όταν:

$$(\Delta a)^2 + (\Delta a')^2 < 10^{-4}$$

Πραγματοποιήθηκαν δοκιμές και με αυστηρότερο κριτήριο σύγκλισης (10^{-6}) χωρίς όμως να παρατηρηθεί καμία σημαντική διαφοροποίηση στα αποτελέσματα, οπότε η παραδοχή για κριτήριο σύγκλισης $< 10^{-4}$ κρίνεται επιτυχημένη.

4.2.2 Συγκρίσεις

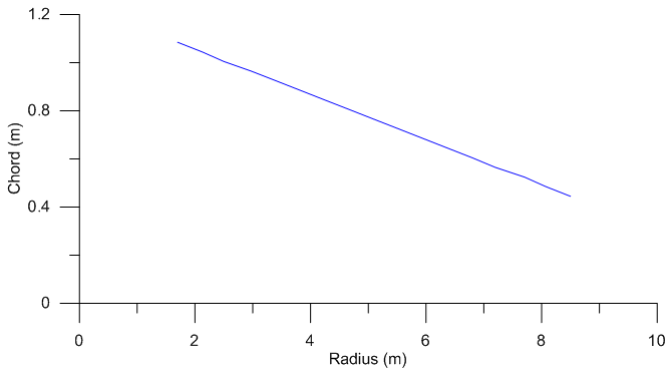
Η δημιουργία και η επαλήθευση του κώδικα που συντάχθηκε στηρίχτηκε σε μεγάλο βαθμό στην αντίστοιχη διαδικασία της βιβλιογραφίας [7]. Από εκεί αντλήθηκε ουσιαστικά το σύνολο των δεδομένων που απαιτούνταν για να τρέξει μια πρώτη ρεαλιστική ανάλυση στα πλαίσια της θεωρίας που αναπτύξαμε στις προηγούμενες ενότητες, αλλά και τα αντίστοιχα αποτελέσματα με τα οποία έγιναν οι συγκρίσεις. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία για το πτερύγιο που στο εξής θα αναφέρεται ως ΤΠ0:

- Το αεροδυναμικό προφίλ της αεροτομής NACA632XX, που συνίσταται σε μια διακριτοποίηση 17 στοιχείων για τα οποία δίνονται:
    1. Η χορδή c κάθε διατομής (σχήμα 4.1).
    2. Η γωνία βήματος β κάθε διατομής.

3. Το thickness to chord ratio, που επί της ουσίας αποτελεί την "ταυτότητα" κάθε διατομής και χρησιμοποιείται για την ανάγνωση των πινάκων των συντελεστών C_d και C_l.

- Μια σειρά από διαγράμματα για τους αεροδυναμικούς συντελεστές C_d και C_l, των οποίων δίνεται η τιμή συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης (Παράρτημα Ι.1). Να σημειωθεί πως τα διαγράμματα δεν είναι τόσα όσες είναι και οι διατομές, αλλά κάθε πίνακας αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο thickness to chord ratio. Δίνονται τιμές για 5 διαφορετικά thickness to chord ratios, 12%, 15%, 18%, 21%, 25% και ανάλογα με την "ταυτότητα" της κάθε διατομής επιλέγεται ο αντίστοιχος πίνακας.

- Πλήθος πτερυγίων: $N = 3$



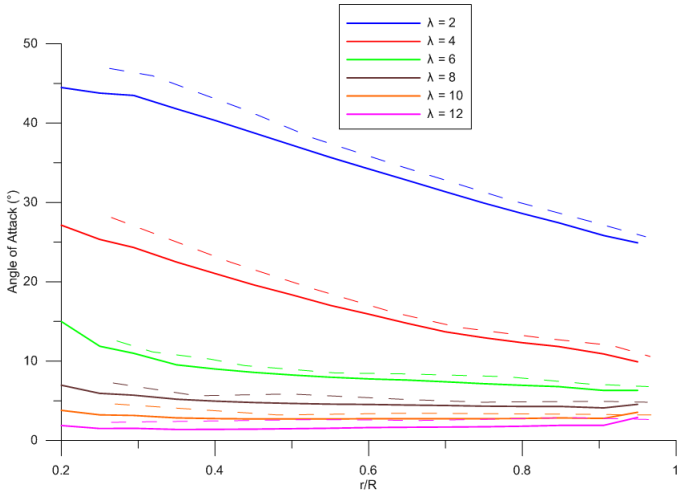
Σχήμα 4.1: Διάγραμμα r-c (ΤΠ0) [7]

Για την ευκολότερη αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, επιλέχθηκε ο λόγος ταχυτήτων κορυφής $\lambda = \frac{\Omega R}{U_\infty}$ να ακολουθεί τις βιβλιογραφικές τιμές [7]. Για να επιτευχθεί αυτό, προτιμήθηκε να διατηρηθεί η ταχύτητα του ανέμου U_∞ σταθερή και ίση με 2.5m/s και να μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα Ω.
Με γνώμονα ότι οι τιμές του λ που στοχεύεται να προκύψουν είναι 2, 4, 6, 8, 10 και 12 και λύνοντας τη σχέση που δίνει το λ ως προς Ω, προκύπτει $\Omega = \frac{\lambda U_\infty}{R}$, δηλαδή $\Omega = 0.588, 1.176, 1.764, 2.353, 2.941, 3.529 rad/s$ ή $\Omega = 5.617, 11.234, 16.852, 22.469, 28.086, 33.703$rpm (περιστροφές ανά λεπτό).

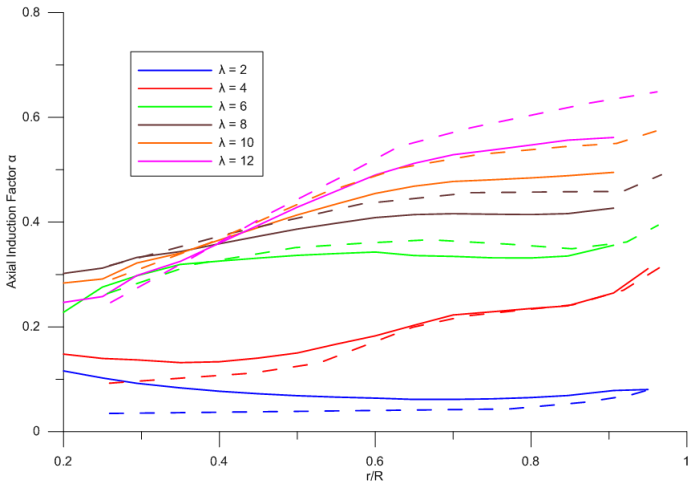
Πέρα από τον καθεαυτό στόχο της ανάλυσης, δηλαδή τον προσδιορισμό της συνολικής οριζόντιας δύναμης που καταπονεί τον πυλώνα της ανεμογεννήτριας, κρίθηκε σκόπιμο να εξαχθούν και άλλα ενδιάμεσα αποτελέσματα με στόχο μια ευρύτερη ποιοτική κατανόηση του θέματος. Επίσης, τα συγκεκριμένα αποτελέσματα μπορούσαν να συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από παλαιότερες ανάλογες έρευνες [7], ώστε να γίνει ποιοτικά αντιληπτό το φαινόμενο και να επαληθευτεί η ορθή λειτουργία του κώδικα που συντάχθηκε.

Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται η κατά μήκος του πτερυγίου κατανομή της γωνίας πρόσπτωσης, συγκρινόμενη με την αντίστοιχη της βιβλιογραφίας, ενώ στο σχήμα

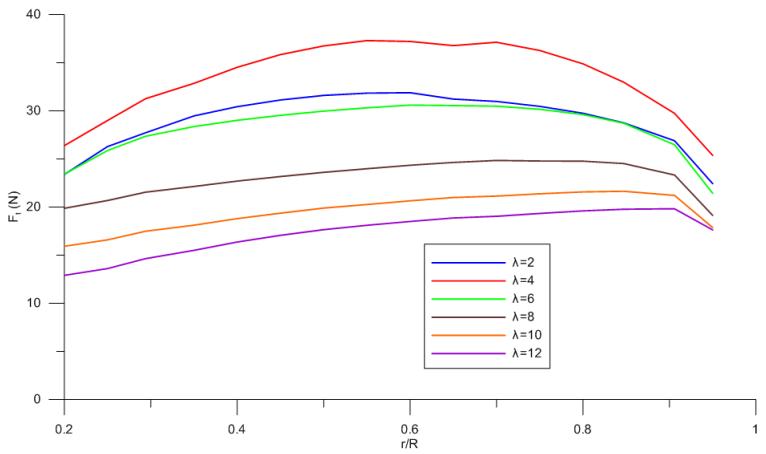
4.3 παρουσιάζεται η κατά μήκος του πτερυγίου κατανομή του αξονικού επαγωγικού συντελεστή a, συγκρινόμενη με την αντίστοιχη βιβλιογραφική. Τέλος, στο σχήμα 4.4 παρουσιάζεται η κατά μήκος κατανομή των στοιχειωδών δυνάμεων F_t. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης κρίνονται ικανοποιητικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα δεδομένα από τη βιβλιογραφία δεν ήταν πλήρη σε κάθε περίπτωση, ώστε να αναμένεται να υπάρξει πλήρης ταύτιση των καμπύλων.



Σχήμα 4.2: Κατά μήκος κατανομή της γωνίας πρόσπτωσης - Σύγκριση α[7] **Συνεχής Γραμμή:** Αποτελέσματα παρούσης εργασίας, **Διακεκομμένη Γραμμή:** Αποτελέσματα βιβλιογραφίας



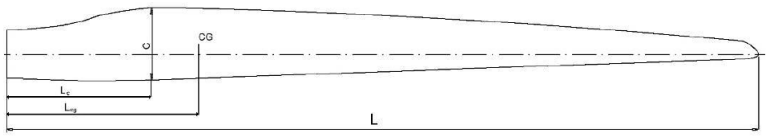
Σχήμα 4.3: Κατά μήκος κατανομή του αξονικού επαγωγικού συντελεστή a - Σύγκριση [7] **Συνεχής Γραμμή:** Αποτελέσματα παρούσης εργασίας, **Διακεκομμένη Γραμμή:** Αποτελέσματα βιβλιογραφίας



Σχήμα 4.4: Κατά μήκος κατανομή των στοιχειωδών δυνάμεων

4.3 Δεδομένα Αναλύσεων

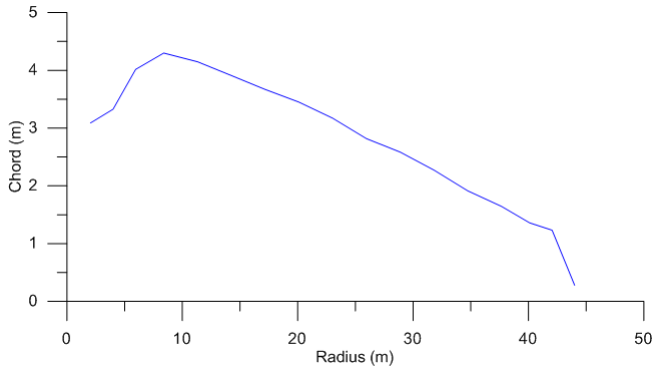
Συνολικά εξετάστηκαν 3 διαφορετικοί τύποι πτερυγίων, οι οποίοι στο εξής για την παρούσα εργασία θα ονομάζονται ΤΠ1, ΤΠ2 και ΤΠ3. Για τον **ΤΠ1** χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα που παραχωρήθηκαν από την τεχνική εταιρία Vestas. Το προφίλ του ΤΠ1 φαίνεται στο σχήμα 4.5, ενώ το διάγραμμα της χορδής c σε συνάρτηση με την ακτίνα r, φαίνεται στο σχήμα 4.6. Τα διαγράμματα των αεροδυναμικών συντελεστών C_d και C_l του ΤΠ1 παρατίθενται στο παράρτημα Ι.2.



Σχήμα 4.5: Το προφίλ του ΤΠ1

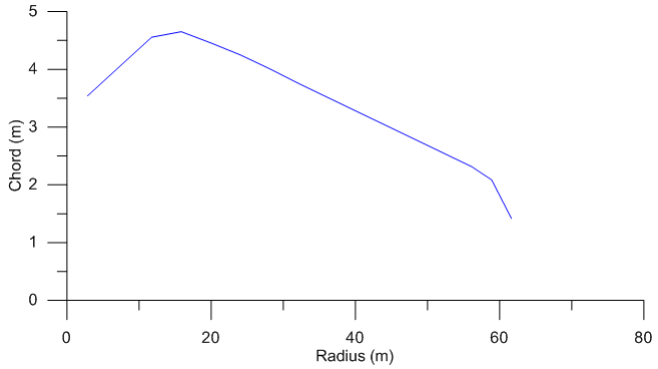
Ο **ΤΠ2** προσομοιώθηκε με βάση την τεχνική έκθεση [14]. Πιο συγκεκριμένα, τα δεδομένα που αντλήθηκαν ήταν τα εξής:

- Το αεροδυναμικό προφίλ, που συνίσταται σε μια διακριτοποίηση 17 στοιχείων για τα οποία δίνονται:
  1. Η χορδή c κάθε διατομής (σχήμα 4.7).
  2. Η γωνία βήματος β κάθε διατομής.
  3. Το thickness to chord ratio κάθε διατομής.
- Μια σειρά από πίνακες (βλ. παράρτημα Ι.2)που δίνουν την τιμή των αεροδυναμικών συντελεστών C_d και C_l συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης a. Οι πίνακες αναφέρονται σε συγκεκριμένα ονόματα αεροτομών και δίνονται με το όνομα που συναντήθηκαν στη βιβλιογραφία [14] (π.χ. Airfoil DU21_A17).



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα r-c (ΤΠ1)

- Πλήθος πτερυγίων: $N = 3$.
- Γωνιακή Ταχύτητα Περιστροφής $\Omega = 12.1\text{rpm}$.

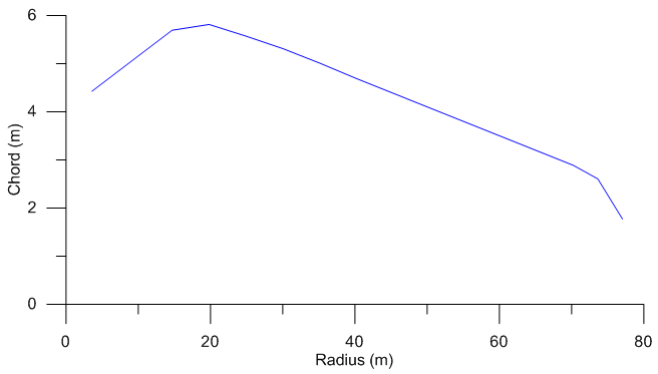


Σχήμα 4.7: Διάγραμμα r-c (ΤΠ2) [14]

Λόγω έλλειψης αντίστοιχων δεδομένων, για την προσομοίωση του **ΤΠ3** χρησιμοποιήθηκαν και πάλι τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν και για τον ΤΠ2 υπό κατάλληλη κλίμακα, προκειμένου να ληφθεί υπόψη η διαφορά μεγέθους των δύο πύργων για τους οποίους προορίζονται. Πιο συγκεκριμένα, η επεξεργασία των δεδομένων έγινε ως εξής:

- Η διακριτοποίηση των 17 στοιχείων διατηρήθηκε, το μέγεθος των στοιχείων αυξήθηκε αναλογικά.
- Η χορδή c κάθε διατομής αυξήθηκε αναλογικά σχήμα (4.8).
- Η γωνία βήματος β κάθε διατομής έμεινε σταθερή.
- To thickness to chord ratio, διατηρήθηκε το ίδιο για κάθε διατομή.

- Οι πίνακες που δίνουν την τιμή των συντελεστών C_d και C_l συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης διατηρήθηκαν ίδιοι. (Βλ. Παράρτημα Ι.2).
- Πλήθος πτερυγίων: $N = 3$.
- Γωνιακή Ταχύτητα Περιστροφής $\Omega = 12.1$rpm.



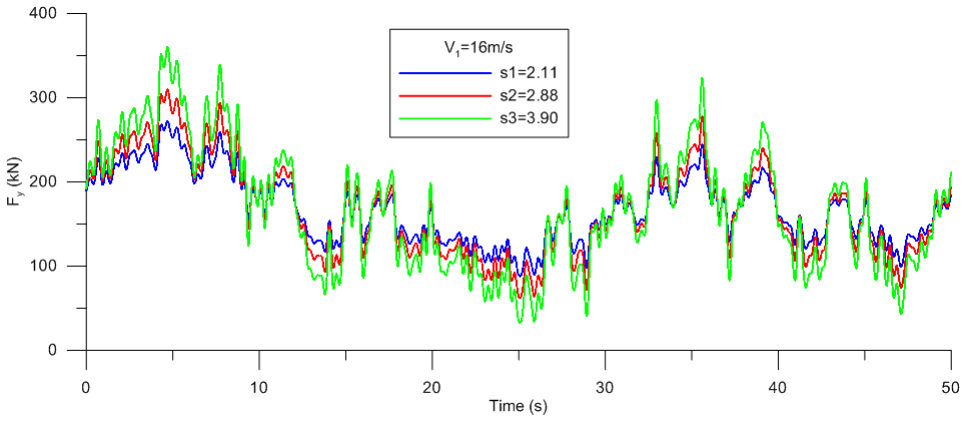
Σχήμα 4.8: Το Διάγραμμα r-c (ΤΠ3)

Στοχεύοντας να καλυφθεί μεγάλος αριθμός περιπτώσεων, θεωρήθηκε σκόπιμο να εξεταστεί η συμπεριφορά των πυλώνων για πολλές χρονοϊστορίες ανέμου. Έτσι, επιλέχτηκε ένα πλήθος μέσων τιμών ταχύτητας ανέμου και ένα πλήθος τυπικών αποκλίσεων [19], προκειμένου να προκειμένου να ληφθούν υπόψη διαφορετικές διακυμάνσεις της ταχύτητας του ανέμου. Εκλέχτηκαν λοιπόν τρεις μέσες τιμές ταχύτητας ($V_1 = 16$m/s, $V_2 = 20$m/s, $V_3 = 25$m/s) και τρεις τιμές τυπικής απόκλισης ($s_1 = 2.11$m/s, $s_2 = 2.88$m/s, $s_3 = 3.90$m/s).

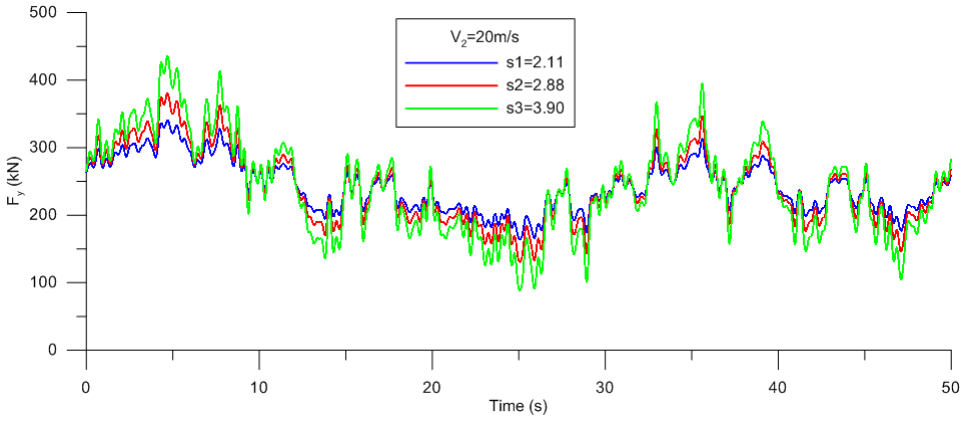
Για την παραγωγή χρονοϊστοριών με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό "Artificial Wind" [27], το οποίο παράγει τεχνητές χρονοϊστορίες ταχύτητας ανέμου με τη χρήση της θεωρίας στοχαστικών διαδικασιών [10], λαμβάνοντας υπόψη τον Ευρωκώδικα 1 [8]. Με τη βοήθεια του λογισμικού αυτού παρήχθησαν οι 9 χρονοϊστορίες με τα ζητούμενα χαρακτηριστικά (Πίνακας 4.1) που περιγράφτηκαν παραπάνω. Να σημειωθεί ότι οι χρονοϊστορίες εκτείνονται σε χρόνο από 0 μέχρι 50 seconds και έχουν βήμα 0.001 seconds. Οι χρονοϊστορίες ταχυτήτων που παράχθηκαν εισήχθησαν ως δεδομένα στον κώδικα υπολογισμού φορτίων ανέμου και για καθένα τύπο πτερυγίων έδωσαν τις χρονοϊστορίες φόρτισης που φαίνονται στα σχήματα 4.9 - 4.17:

Πίνακας 4.1: Ονομασία, στατιστικά χαρακτηριστικά χρονοϊστοριών φόρτισης [19]

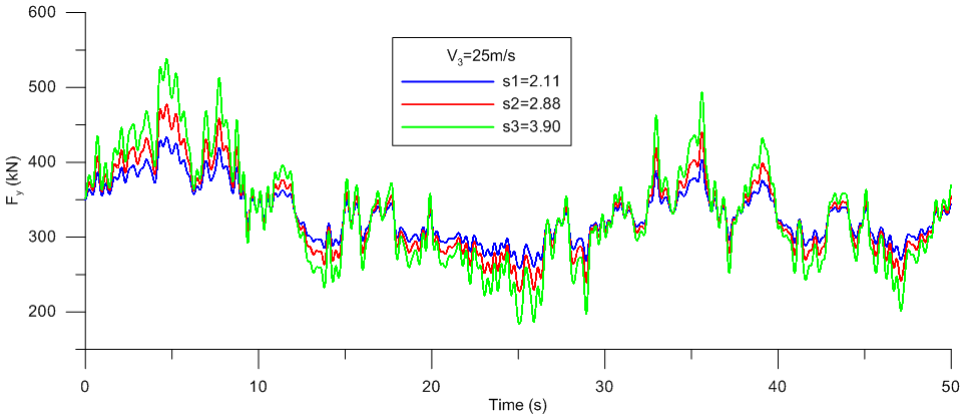
Ονομασία	Μέση Τιμή Ταχύτητας (m/s)	Τυπική Απόκλιση (m/s)
Χρονοϊστορία 1	16	2.11
Χρονοϊστορία 2	20	2.11
Χρονοϊστορία 3	25	2.11
Χρονοϊστορία 4	16	2.88
Χρονοϊστορία 5	20	2.88
Χρονοϊστορία 6	25	2.88
Χρονοϊστορία 7	16	3.90
Χρονοϊστορία 8	20	3.90
Χρονοϊστορία 9	25	3.90



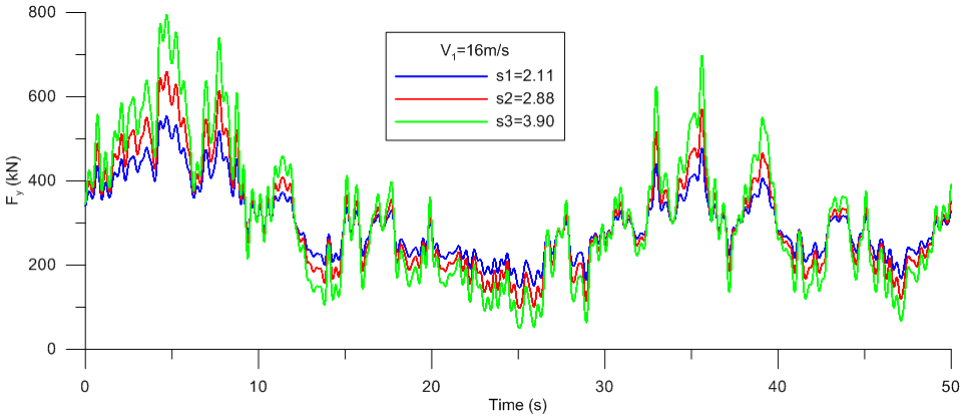
Σχήμα 4.9: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ1 για $V_1 = 16$m/s



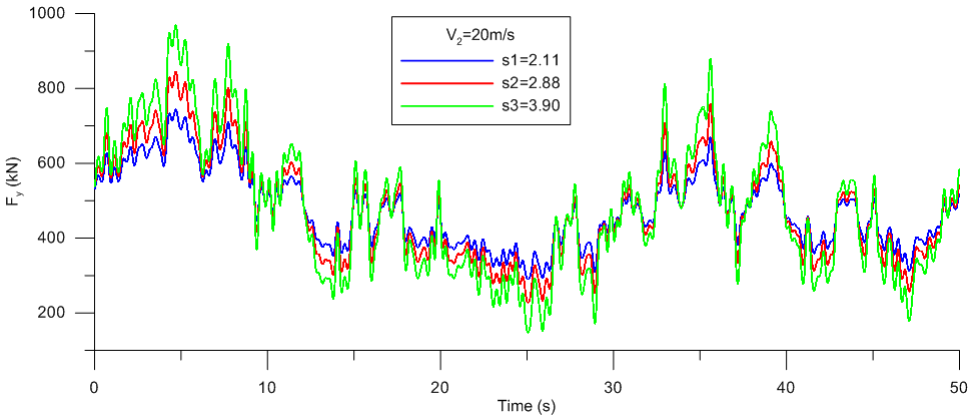
Σχήμα 4.10: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ1 για $V_2 = 20$m/s



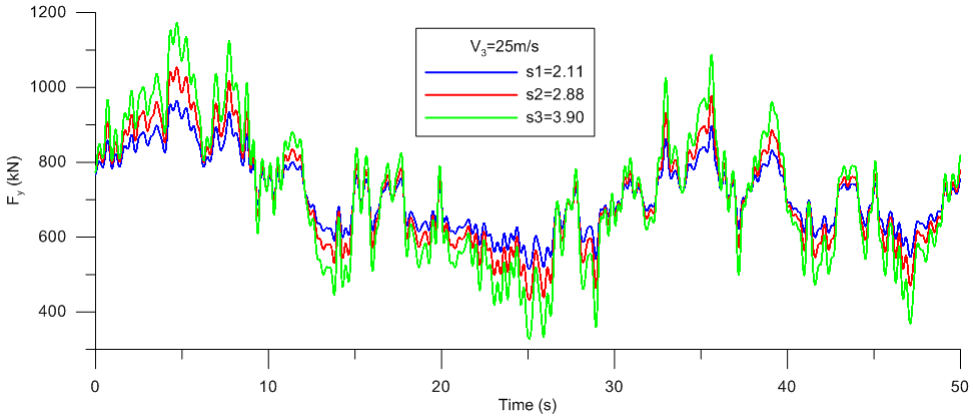
Σχήμα 4.11: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ1 για $V_3 = 25$m/s



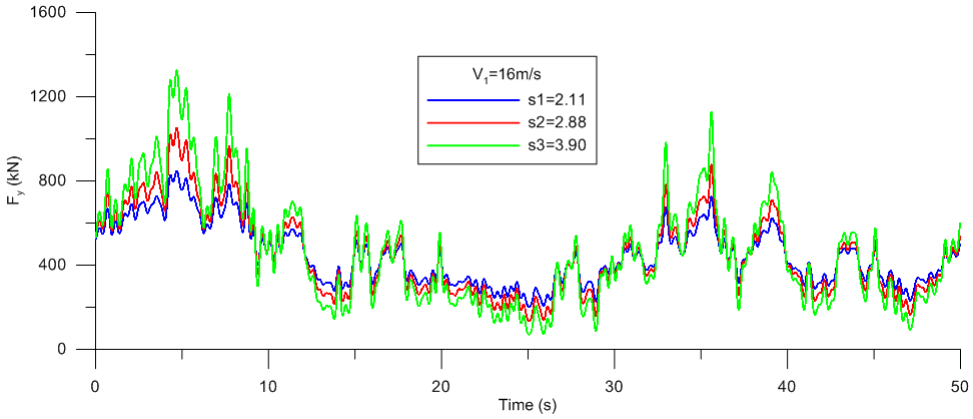
Σχήμα 4.12: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ2 για $V_1 = 16$m/s



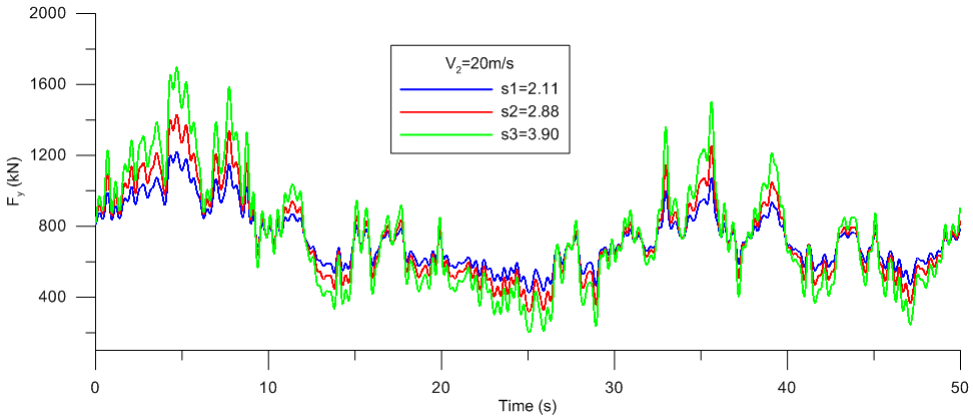
Σχήμα 4.13: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ2 για $V_2 = 20$m/s



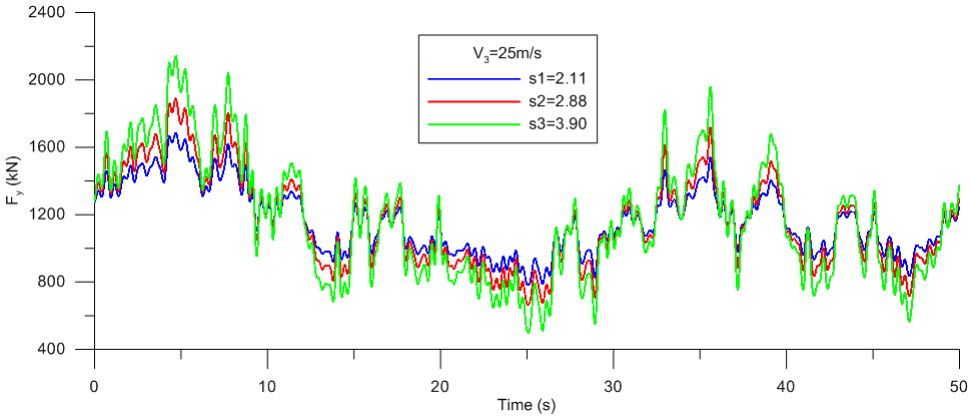
Σχήμα 4.14: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ2 για $V_3 = 25$m/s



Σχήμα 4.15: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ3 για $V_1 = 16$m/s



Σχήμα 4.16: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ3 για $V_2 = 20$m/s



Σχήμα 4.17: Χρονοϊστορίες φόρτισης για τον τύπο πτερυγίων ΤΠ3 για $V_3 = 25$m/s

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν τρεις χαλύβδινοι πυλώνες, των οποίων τα τεχνικά χαρακτηριστικά δίνονται στον Πίνακα 4.2. Να σημειωθεί απλώς ότι για την προσομοίωση των πυλώνων Π1 και Π2 χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα που αντλήθηκαν από [19], ενώ λόγω έλλειψης αντίστοιχων δεδομένων για τον πυλώνα Π3, χρησιμοποιήθηκαν και πάλι τα χαρακτηριστικά των Π1 και Π2 υπό κατάλληλη κλίμακα, ώστε να ληφθεί υπόψη η διαφορά μεγέθους ανάμεσα στους πύργους για τους οποίους αναφέρονται.

Πίνακας 4.2: Τεχνικά Χαρακτηριστικά των πυλώνων

Κωδική Ονομασία	**Π1**	**Π2**	**Π3**
Ύψος [m]	87.6	120	150
Τύπος Πτερυγίων	ΤΠ1	ΤΠ2	ΤΠ3
Διάμετρος στη βάση [m]	6	8.43	11
Διάμετρος στην κορυφή [m]	3.87	3.87	4.8
Πάχος στη βάση [m]	0.062	0.048	0.062
Πάχος στην κορυφή [m]	0.031	0.025	0.031
Μάζα Κορυφής [Mg]	117.4	403.22	504.025

Το μοντέλο στο λογισμικό Variabeam [24] προσομοιώθηκε ως εξής:

- Ως στατικό μοντέλο επιλέχτηκε πρόβολος (πάκτωση στη βάση).
- Οι πυλώνες προσομοιώθηκαν με 21 γραμμικά στοιχεία κατά μήκος.
- Για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών της κυκλικής διατομής, η διατομή διακριτοποιήθηκε σε 1500 συνοριακά στοιχεία.
- Ως φορτία εισήχθησαν το εγκάρσιο φορτίο F_y, που τοποθετήθηκε στην κορυφή και το αξονικό φορτίο που αποτελείται από το ίδιο βάρος που θεωρή-

θηκε κατανεμημένο αναλογικά με το μεταβλητό πάχος των γραμμικών στοιχείων, καθώς και από το βάρος του μηχανολογικού εξοπλισμού στην κορυφή. Να τονιστεί ότι το αξονικό φορτίο εισάγεται ως **στατικό** και όχι δυναμικό. Πιο συγκεκριμένα, οι πυλώνες αναλύονται στατικά υπό την επίδραση των εν λόγω αξονικών φορτίων και η προκύπτουσα μετακίνηση εισάγεται ως αρχική συνθήκη κατά τη δυναμική ανάλυση.

- Η μάζα στην κορυφή εισήχθη ως συνοριακή συνθήκη.

- Ως χαρακτηριστικά του υλικού χρησιμοποιήθηκαν: Μέτρο Ελαστικότητας E = 210GPa, Μέτρο Διάτμησης G = 80.77GPa, Λόγος Poisson $\nu = 0$ και πυκνότητα μάζας $\rho = 8.5\text{Mg/m}^3$.

4.4 Σύγκριση με προσομοιώματα F.E.M.

Το κύριο σώμα των αναλύσεων (βλ. ενότητα 4.5) πραγματοποιήθηκε με το λογισμικό Variabeam [24], το οποίο βασίστηκε στη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης (Α.Ε.Μ.) για να επιλύσει το πρόβλημα της θεωρίας δοκού, όπως αυτό περιγράφτηκε στο Κεφάλαιο 3. Προτού όμως πραγματοποιηθεί μεγαλύτερος αριθμός αναλύσεων, θεωρήθηκε σκόπιμο να πραγματοποιηθούν επιλύσεις με στοιχεία κελύφους, ώστε να επιβεβαιωθεί η η καταλληλότητα της θεωρίας δοκού για την προσομοίωση των πυλώνων ανεμογεννητριών, καθώς και να εξακριβωθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων του λογισμικού Variabeam [24]. Οι αναλύσεις με στοιχεία κελύφους εκτελούνται με τη βοήθεια του εμπορικού λογισμικού FEMAP v.10 [11].
Το μοντέλο των στοιχείων κελύφους αναλύθηκε με βάση το εμπορικό λογισμικό FEMAP v.10 [11]. Επιλέχτηκε να συγκριθούν τα μοντέλα των Π1 και Π2, υποβαλλόμενα στη δυναμική φόρτιση της χρονοϊστορίας φόρτισης 5 (V_2 = 20m/s, s_2 = 2.88m/s) των ΤΠ1 και ΤΠ2, αντίστοιχα ως εξής:

- Ως διαστάσεις των πυλώνων χρησιμοποιήθηκαν αυτές που δίνονταν από [19].

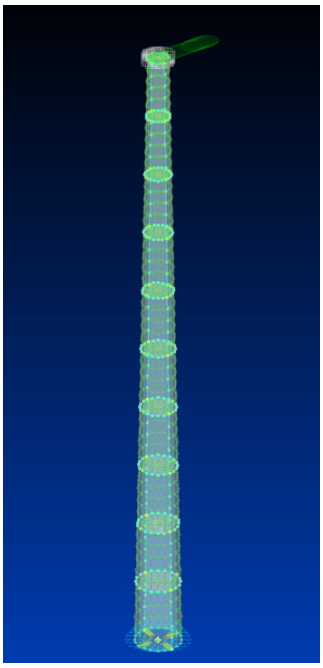
- Ως χαρακτηριστικά του υλικού χρησιμοποιήθηκαν: Μέτρο Ελαστικότητας E = 210GPa, Μέτρο Διάτμησης G = 80.77GPa, Λόγος Poisson $\nu = 0$ και πυκνότητα μάζας $\rho = 8.5\text{Mg/m}^3$.

- Το σύνολο του κάθε πυλώνα προσομοιώθηκε από 1500 στοιχεία κελύφους.

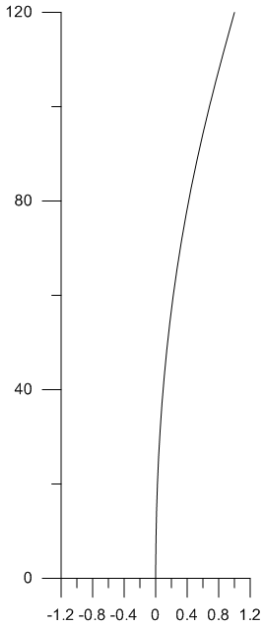
- Για να αντιμετωπιστεί η αδυναμία προσομοίωσης μεταβλητού πάχους, το κάθε μοντέλο χωρίστηκε σε 10 ίσες "ζώνες" σταθερού πάχους. Το πάχος της κάθε ζώνης επιλέχτηκε να είναι τέτοιο, ώστε ο συνολικός όγκος της κάθε ζώνης να είναι ίσος με τον όγκο του αντίστοιχου θεωρητικού μοντέλου. Να σημειωθεί ότι η παραδοχή αυτή είναι ρεαλιστική, καθώς και στην πράξη εφαρμόζονται ανάλογες τεχνικές για την κατασκευή των πυλώνων.

- Στην κορυφή κάθε ζώνης τοποθετήθηκε διάφραγμα, ώστε να τηρηθεί η παραδοχή της θεωρίας δοκού περί απαραμόρφωτης διατομής. Επίσης η συγκεκριμένη παραδοχή είναι εύλογη, καθώς και στην πράξη τοποθετούνται μεταλλικοί δακτύλιοι ανά τακτά διαστήματα για τον ίδιο σκοπό.
- Τα διαφράγματα προσομοιώθηκαν με στοιχεία κελύφους, πάχους 0.08m και αμελητέας μάζας.
- Οι συνοριακές συνθήκες ήταν πλήρους πάκτωσης για τα σημεία της βάσης, ενώ ελεύθερες για τα υπόλοιπα σημεία.
- Το φορτίο και η μάζα κορυφής ισομοιράστηκαν στους κόμβους της περιφέρειας της ακραίας διατομής του κάθε πύργου.
- Τα χαρακτηριστικά της δυναμικής φόρτισης εισήχθησαν κατάλληλα (μέσω επεξεργασίας του αρχείου "FUNCTION.esp").

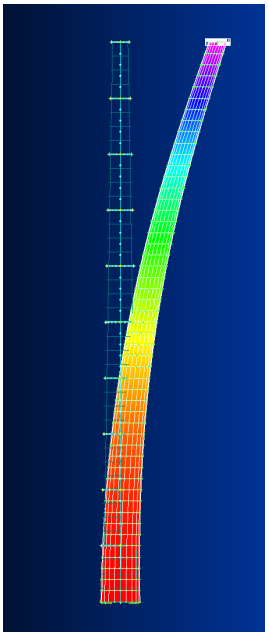
Στο σχήμα 4.18 παρουσιάζεται ένα στάδιο κατά την κατασκευή του προσομοιώματος του Π2 στο FEMAP v.10, ενώ στα σχήματα 4.19 - 4.21 παρατίθενται οι τρεις πρώτες ιδιομορφές του πυλώνα Π2, όπως προέκυψαν από τις ιδιομορφικές αναλύσεις των στοιχείων δοκού και των στοιχείων κελυφών, αντίστοιχα. Στα διάγραμματα 4.22 και 4.23 φαίνονται συγκριτικά οι εγκάρσιες μετατοπίσεις w των Π1 και Π2 για γραμμική και για μη γραμμική ανάλυση, όπως αυτές υπολογίστηκαν με τα προγράμματα Variabeam [24] και FEMAP v.10 [11], αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι οι αποκλίσεις γενικά είναι μικρές, με μικρές διαφορές σε κάποιους κύκλους φόρτισης, αλλά πολύ καλή σύγκλιση σε επίπεδα μέγιστων τιμών.



Σχήμα 4.18: Μοντέλο Π2, Απαραμόρφωτη Εικόνα

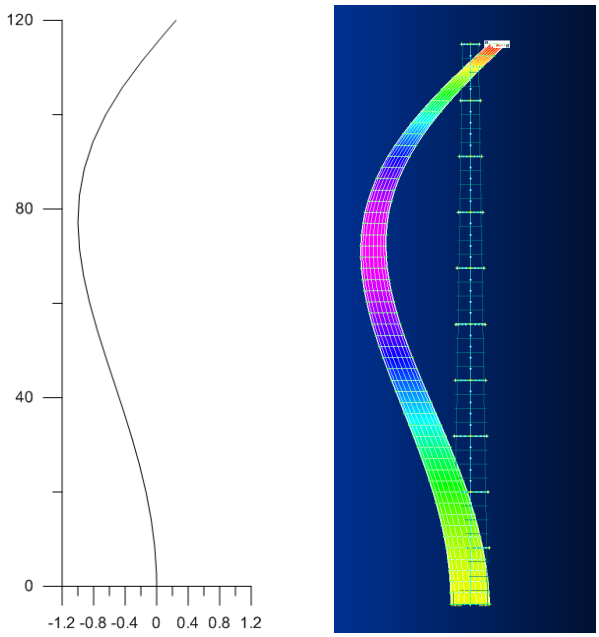


(α′) Στοιχεία Δοκού



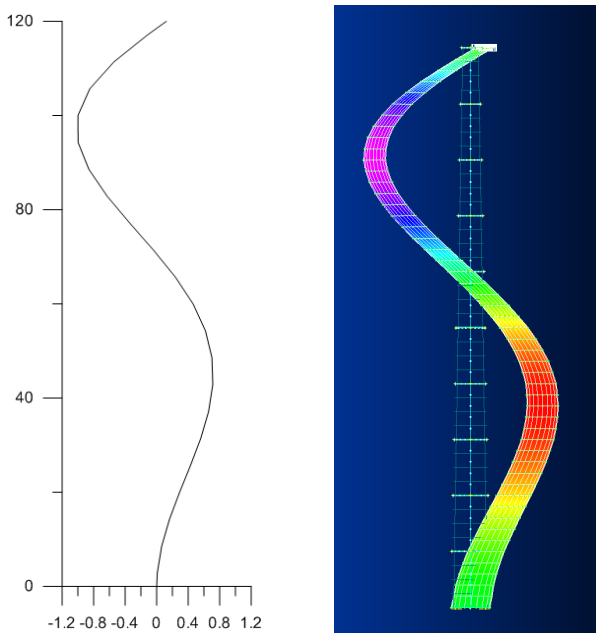
(β′) Στοιχεία Κελύφους

Σχήμα 4.19: Πρώτη ιδιομορφή



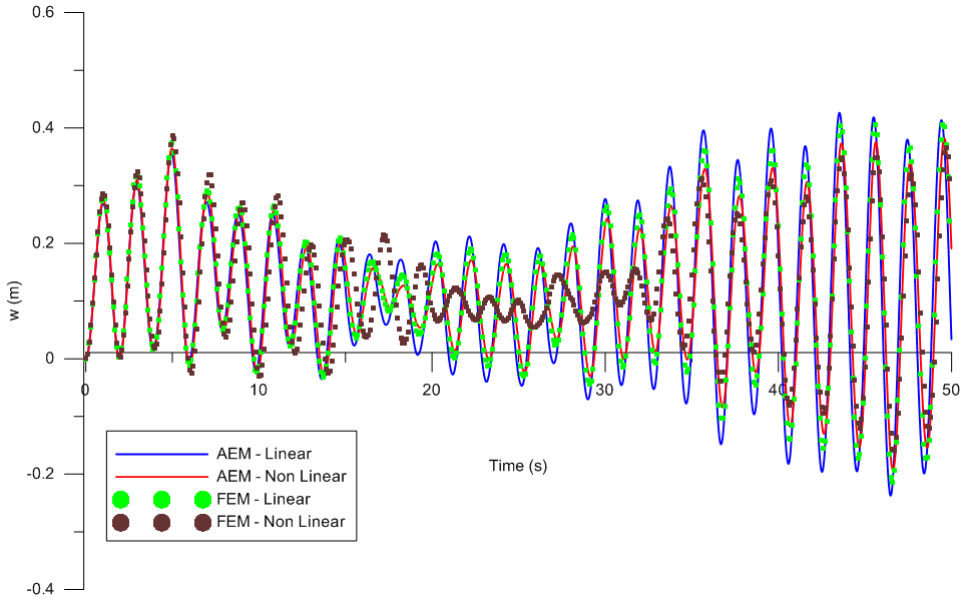
(α′) Στοιχεία Δοκού (β′) Στοιχεία Κελύφους

Σχήμα 4.20: Δεύτερη ιδιομορφή

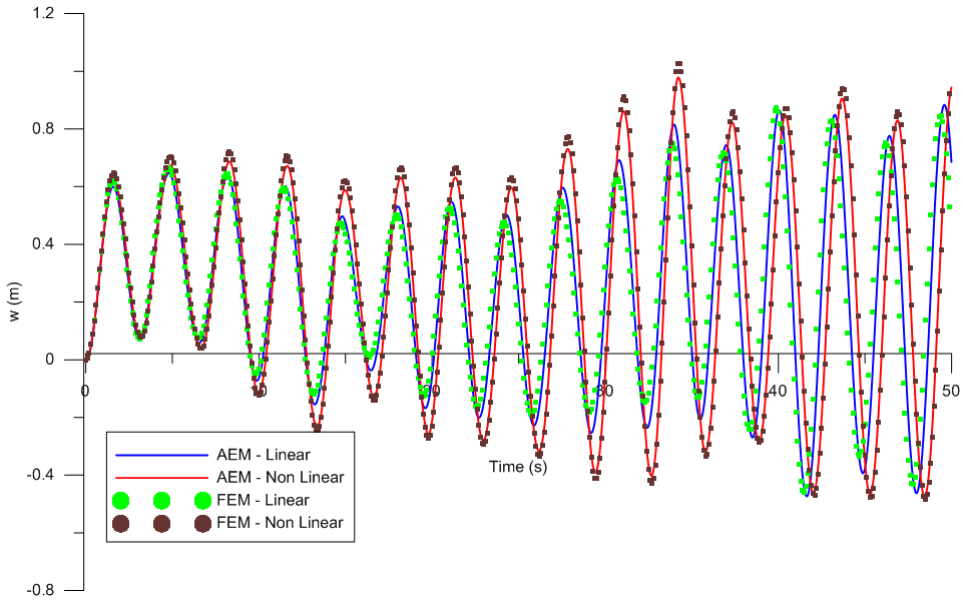


(α′) Στοιχεία Δοκού (β′) Στοιχεία Κελύφους

Σχήμα 4.21: Τρίτη ιδιομορφή



Σχήμα 4.22: Σύγκριση Α.Ε.Μ και F.E.M. - Εγκάρσιες Μετατοπίσεις w στην κορυφή του πυλώνα Π1



Σχήμα 4.23: Σύγκριση Α.Ε.Μ και F.E.M. - Εγκάρσιες Μετατοπίσεις w στην κορυφή του πυλώνα Π2

4.5 Αναλύσεις

Έχοντας εξακριβώσει ότι τα αποτελέσματα από τη θεωρία δοκού μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ασφάλεια, διεξήχθησαν περαιτέρω αναλύσεις, διερευνώντας τις επιρροές της μη γραμμικότητας, καθώς και του φαινομένου της περιστροφικής αδράνειας. Ειδικότερα, για καθέναν από τους 3 πύργους πραγματοποιήθηκαν ιδιομορφικές αναλύσεις, καθώς και γραμμικές και μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις για καθεμιά από τις χρονοϊστορίες φόρτισης που παράχθηκε. Ως αποτελέσματα εξήχθησαν οι ιδιοπερίοδοι, οι ιδιομορφές, καθώς και η αξονική μετατόπιση u, η εγκάρσια μετατόπιση w της κορυφής και τα εντατικά μεγέθη M, Q, N.

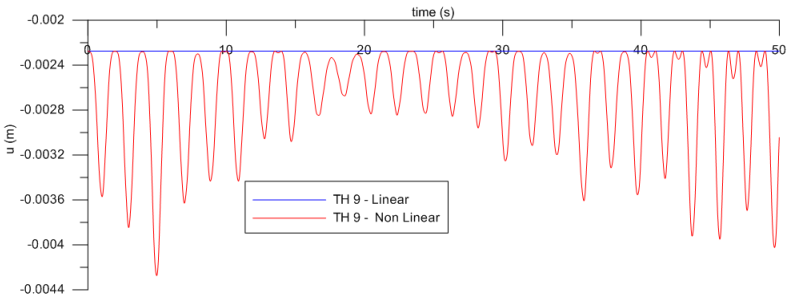
Στον πίνακα 4.3 παρατίθενται οι 12 πρώτες ιδιοπερίοδοι του κάθε πυλώνα, όπως αυτές προέκυψαν από τις αντίστοιχες ιδιομορφικές αναλύσεις με και χωρίς περιστροφική αδράνεια. Στα διαγράμματα 4.24 - 4.35 παρατίθενται αναλυτικά τα αποτελέσματα των γραμμικών και μη γραμμικών αναλύσεων που προέκυψαν για τη χρονοϊστορία ανέμου με $V_3 = 25\text{m/s}$ και $s_3 = 3.90\text{m/s}$ για όλους τους πυλώνες. Ανάλογη μορφή έχουν και τα υπόλοιπα αποτελέσματα όλων των πύργων και για τις υπόλοιπες χρονοϊστορίες φόρτισης που εξετάστηκαν. Στους πίνακες 4.4 - 4.7 παρατίθενται συγκριτικά οι μέγιστες τιμές των μεγεθών u, w, M και Q για όλες τις χρονοϊστορίες φόρτισης. Επίσης, στα σχήματα 4.36 - 4.38 παρουσιάζεται η εγκάρσια μετατόπιση w στην κορυφή του κάθε πυλώνα, για τις δυσμενέστερες χρονοϊστορίες φόρτισης (με $s_3 = 3.90\text{m/s}$), για γραμμική και μη γραμμική δυναμική ανάλυση, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της μέγιστης εγκάρσιας μετατόπισης του κάθε πυλώνα. Επιπλέον, στα σχήματα 4.39 - 4.41 παρουσιάζονται συγκριτικά η μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση w από όλες τις χρονοϊστορίες φόρτισης στην κορυφή των πυλώνων Π1, Π2 και Π3 για γραμμική και μη γραμμική δυναμική ανάλυση, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης εγκάρσιας μετατόπισης, όπως επίσης και τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις στη βάση των πυλώνων Π1, Π2, Π3.

Παρατηρείται ότι η μη γραμμικότητα παρουσιάζει αποκλίσεις και στους τρεις πυλώνες. Όμως, στην περίπτωση του πυλώνα Π1, οι προκύπτουσες μετακινήσεις από μη γραμμική ανάλυση είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες που προέκυψαν από γραμμική ανάλυση, ενώ, αντιθέτως, στους πυλώνες Π2 και Π3 η επιρροή της μη γραμμικότητας είναι σημαντική, αγγίζοντας μέχρι και το 9.5% και όχι προς την πλευρά της ασφάλειας.

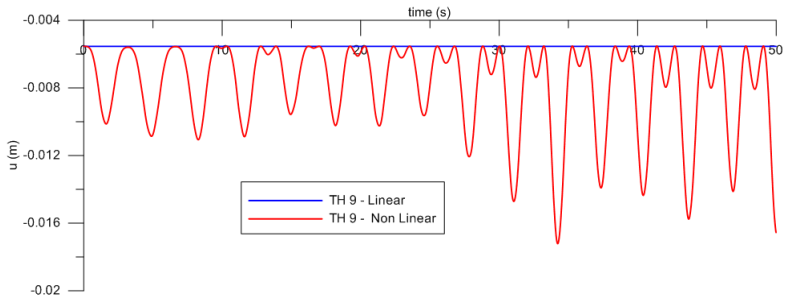
Όσον αφορά το φαινόμενο της περιστροφικής αδράνειας, οι αποκλίσεις σε επίπεδο μέγιστων τιμών είναι πολύ μικρές, χωρίς ουσιώδη επιρροή στο εύρος των μετακινήσεων, αλλά με ελαφρώς πιο έντονη επιρροή στα εντατικά μεγέθη. Παρ' όλα αυτά, όπως φαίνεται και στον πίνακα 4.3, στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, όπως προέκυψε από την ιδιομορφική ανάλυση των πύργων, η επιρροή της περιστροφικής αδράνειας ενδέχεται να μην είναι αμελητέα, ειδικά σε περιπτώσεις ταλαντώσεων που ενεργοποιούν ανώτερες ιδιομορφές (π.χ. σεισμική διέγερση).

Πίνακας 4.3: Επιρροή της περιστροφικής αδράνειας στις ιδιοπεριόδους

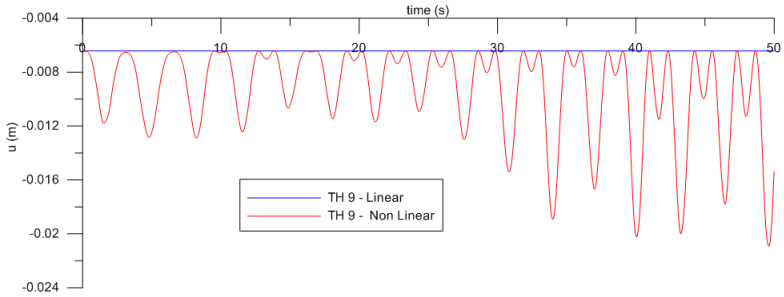
	Π1		**Π2**		**Π3**	
	Π.Α.	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**
T_1	1.946	1.946	3.150	3.150	3.110	3.109
T_2	0.308	0.307	0.469	0.468	0.555	0.554
T_3	0.107	0.106	0.165	0.164	0.199	0.198
T_4	0.086	0.086	0.137	0.137	0.144	0.144
T_5	0.053	0.053	0.082	0.081	0.100	0.098
T_6	0.032	0.031	0.049	0.048	0.060	0.058
T_7	0.030	0.030	0.045	0.045	0.054	0.054
T_8	0.021	0.020	0.033	0.031	0.040	0.038
T_9	0.017	0.017	0.024	0.024	0.029	0.029
T_{10}	0.015	0.014	0.023	0.022	0.029	0.027
T_{11}	0.012	0.011	0.018	0.016	0.022	0.020
T_{12}	0.011	0.011	0.016	0.016	0.020	0.020



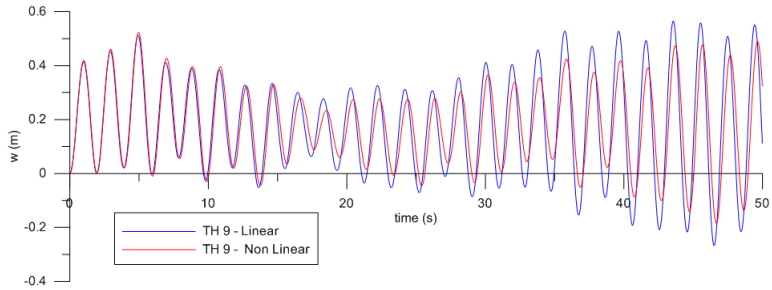
Σχήμα 4.24: Αξονική μετατόπιση *u* της κορυφής του πυλώνα Π1



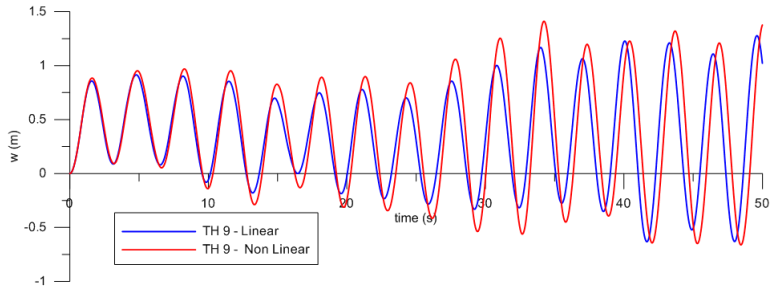
Σχήμα 4.25: Αξονική μετατόπιση *u* της κορυφής του πυλώνα Π2



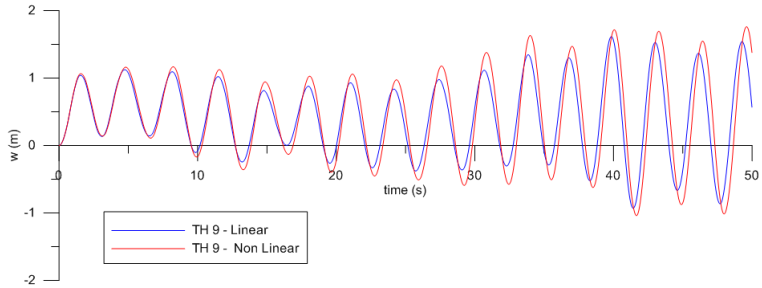
Σχήμα 4.26: Αξονική μετατόπιση u της κορυφής του πυλώνα Π3



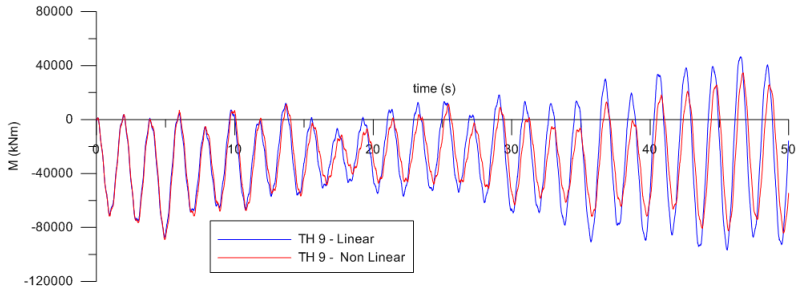
Σχήμα 4.27: Εγκάρσια μετατόπιση w της κορυφής του πυλώνα Π1



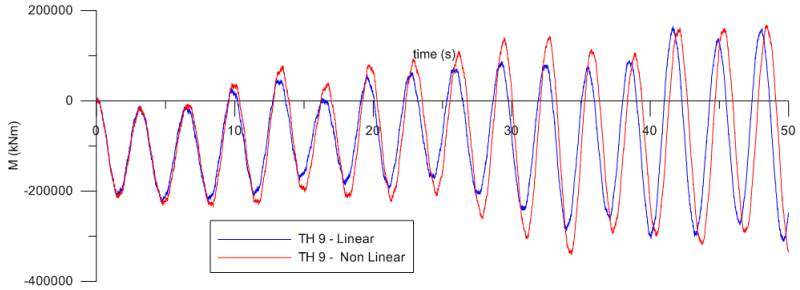
Σχήμα 4.28: Εγκάρσια μετατόπιση w της κορυφής του πυλώνα Π2



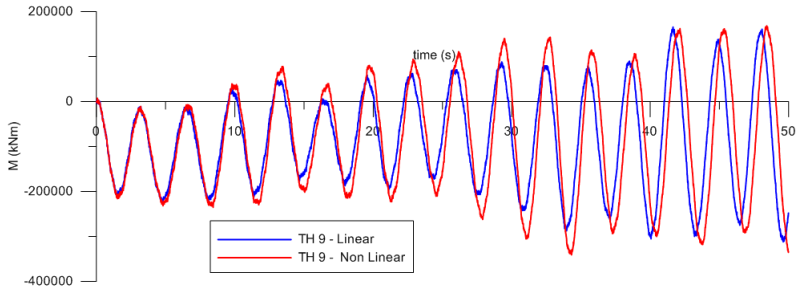
Σχήμα 4.29: Εγκάρσια μετατόπιση w της κορυφής του πυλώνα Π3



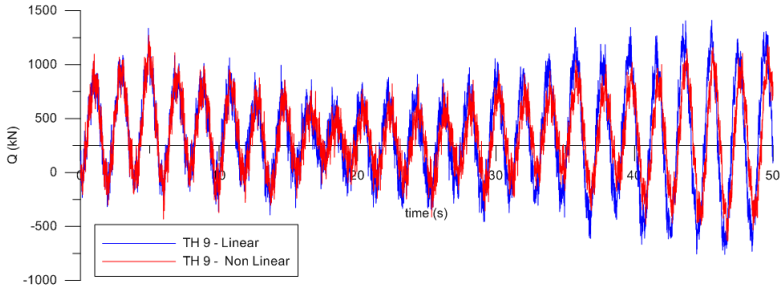
Σχήμα 4.30: Καμπτική ροπή M στη βάση του πυλώνα Π1



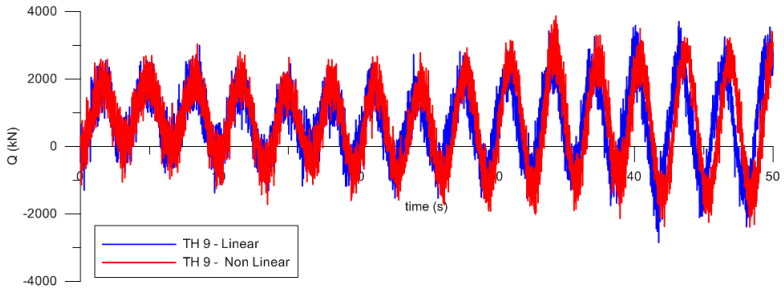
Σχήμα 4.31: Καμπτική ροπή M στη βάση του πυλώνα Π2



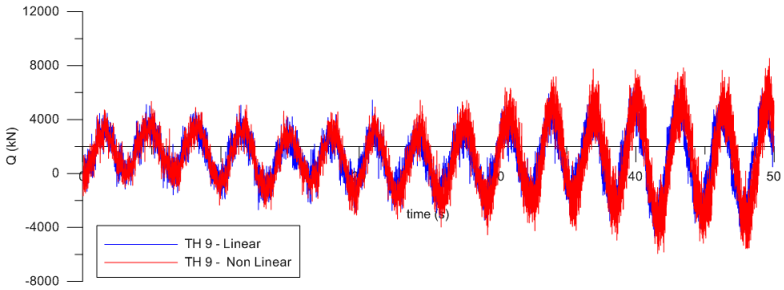
Σχήμα 4.32: Καμπτική ροπή M στη βάση του πυλώνα Π3



Σχήμα 4.33: Τέμνουσα Δύναμη Q τη βάση του πυλώνα Π1



Σχήμα 4.34: Τέμνουσα Δύναμη Q τη βάση του πυλώνα Π2



Σχήμα 4.35: Τέμνουσα Δύναμη Q τη βάση του πυλώνα Π3

Πίνακας 4.4: Μέγιστη τιμή της αξονικής μετατόπισης u(m) όλων των πυλώνων για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση, με και χωρίς περιστροφική αδράνεια

u		**Γραμμική Ανάλυση**		**Μη γραμμική Ανάλυση**	
		Π.Α.	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**
			$V_1 = 16$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	-0.0023	-0.0023	-0.0028	-0.0028
	$s_2 = 2.88$	-0.0023	-0.0023	-0.0030	-0.0030
	$s_3 = 3.90$	-0.0023	-0.0023	-0.0035	-0.0035
Π2	$s_1 = 2.11$	-0.0055	-0.0055	-0.0076	-0.0076
	$s_2 = 2.88$	-0.0055	-0.0055	-0.0092	-0.0092
	$s_3 = 3.90$	-0.0055	-0.0055	-0.0121	-0.0121
Π3	$s_1 = 2.11$	-0.0064	-0.0064	-0.0082	-0.0082
	$s_2 = 2.88$	-0.0064	-0.0064	-0.0099	-0.0099
	$s_3 = 3.90$	-0.0064	-0.0064	-0.0132	-0.0132
			$V_2 = 20$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	-0.0023	-0.0023	-0.0031	-0.0031
	$s_2 = 2.88$	-0.0023	-0.0023	-0.0033	-0.0034
	s3 =3.90	-0.0023	-0.0023	-0.0037	-0.0037
Π2	$s_1 = 2.11$	-0.0055	-0.0055	-0.0091	-0.0091
	$s_2 = 2.88$	-0.0055	-0.0055	-0.0112	-0.0122
	$s_3 = 3.90$	-0.0055	-0.0055	-0.0149	-0.0149
Π3	$s_1 = 2.11$	-0.0064	-0.0064	-0.0096	-0.0096
	$s_2 = 2.88$	-0.0064	-0.0064	-0.0120	-0.0120
	$s_3 = 3.90$	-0.0064	-0.0064	-0.0168	-0.0168
			$V_3 = 25$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	-0.0023	-0.0023	-0.0037	-0.0037
	$s_2 = 2.88$	-0.0023	-0.0023	-0.0039	-0.0039
	$s_3 = 3.90$	-0.0023	-0.0023	-0.0043	-0.0043
Π2	$s_1 = 2.11$	-0.0055	-0.0055	-0.0112	-0.0112
	$s_2 = 2.88$	-0.0055	-0.0055	-0.0131	-0.0132
	$s_3 = 3.90$	-0.0055	-0.0055	-0.0172	-0.0172
Π3	$s_1 = 2.11$	-0.0064	-0.0064	-0.0122	-0.0121
	$s_2 = 2.88$	-0.0064	-0.0064	-0.0150	-0.0149
	$s_3 = 3.90$	-0.0064	-0.0064	-0.0209	-0.0209

Πίνακας 4.5: Μέγιστη τιμή της εγκάρσιας μετατόπισης w(m) όλων των πυλώνων για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση, με και χωρίς περιστροφική αδράνεια

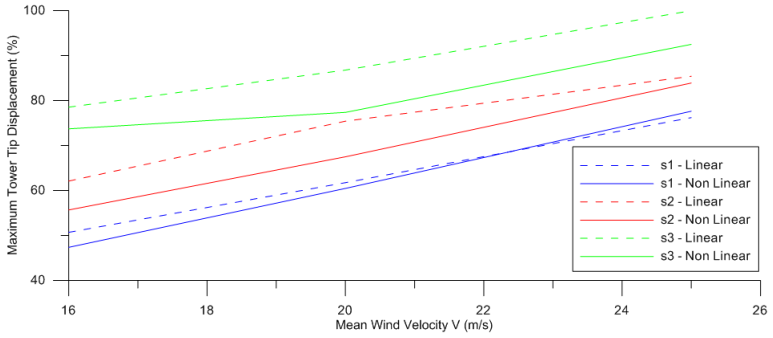
w		**Γραμμική Ανάλυση**		**Μη γραμμική Ανάλυση**	
		Π.Α.	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**
			$V_1 = 16$m/s		
	$s_1 = 2.11$	0.2866	0.2875	0.2677	0.2677
Π1	$s_2 = 2.88$	0.3510	0.3523	0.3147	0.3171
	$s_3 = 3.90$	0.4439	0.4453	0.4166	0.4173
	$s_1 = 2.11$	0.5428	0.5433	0.5949	0.5941
Π2	$s_2 = 2.88$	0.7341	0.7343	0.7890	0.7882
	$s_3 = 3.90$	1.0033	1.0032	1.0606	1.0597
	$s_1 = 2.11$	0.5640	0.5614	0.6159	0.6149
Π3	$s_2 = 2.88$	0.8138	0.8116	0.8574	0.8568
	$s_3 = 3.90$	1.1820	1.1806	1.2019	1.2020
			$V_2 = 20$m/s		
	$s_1 = 2.11$	0.3490	0.3502	0.3418	0.3417
Π1	$s_2 = 2.88$	0.4263	0.4280	0.3815	0.3841
	$s_3 = 3.90$	0.4905	0.4921	0.4373	0.4408
	$s_1 = 2.11$	0.6896	0.6908	0.7794	0.7797
Π2	$s_2 = 2.88$	0.8834	0.9878	0.9782	1.0651
	$s_3 = 3.90$	1.1701	1.1706	1.2659	1.2647
	$s_1 = 2.11$	0.7296	0.7252	0.8247	0.8221
Π3	$s_2 = 2.88$	1.0090	1.0052	1.0942	1.0927
	$s_3 = 3.90$	1.4220	1.4192	1.4877	1.4872
			$V_3 = 25$m/s		
	$s_1 = 2.11$	0.4307	0.4330	0.4388	0.4387
Π1	$s_2 = 2.88$	0.4827	0.4845	0.4742	0.4741
	$s_3 = 3.90$	0.5651	0.5671	0.5228	0.5229
	$s_1 = 2.11$	0.8474	0.8485	0.9817	0.9816
Π2	$s_2 = 2.88$	1.0017	1.0035	1.1428	1.1435
	$s_3 = 3.90$	1.2772	1.2784	1.4110	1.4088
	$s_1 = 2.11$	1.0036	1.0031	1.0997	1.0966
Π3	$s_2 = 2.88$	1.1938	1.1864	1.3519	1.3477
	$s_3 = 3.90$	1.6156	1.6095	1.7613	1.7594

Πίνακας 4.6: Μέγιστη τιμή της καμπτικής ροπής M(kNm) όλων των πυλώνων για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση, με και χωρίς περιστροφική αδράνεια

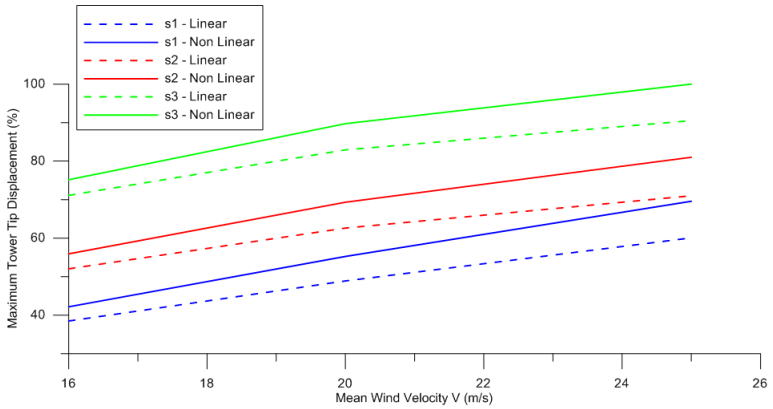
M		**Γραμμική Ανάλυση**		**Μη γραμμική Ανάλυση**	
		Π.Α.	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**
			$V_1 = 16$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	49103	49551	45720	45575
	$s_2 = 2.88$	59393	60193	54084	53683
	$s_3 = 3.90$	75622	75289	70648	71316
Π2	$s_1 = 2.11$	132256	132953	143638	143985
	$s_2 = 2.88$	178529	181500	191891	192488
	$s_3 = 3.90$	244288	247899	258352	260183
Π3	$s_1 = 2.11$	242904	244676	281046	277471
	$s_2 = 2.88$	353762	352373	385466	382787
	$s_3 = 3.90$	513802	513757	534034	535124
			$V_2 = 20$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	60620	60824	58587	58402
	$s_2 = 2.88$	72204	72934	65345	65248
	$s_3 = 3.90$	83250	84210	75263	74271
Π2	$s_1 = 2.11$	172509	168962	190442	190874
	$s_2 = 2.88$	215276	244263	236350	260356
	$s_3 = 3.90$	285005	289400	308708	310553
Π3	$s_1 = 2.11$	319363	313659	372513	368411
	$s_2 = 2.88$	434468	436418	495069	492951
	$s_3 = 3.90$	617919	616677	664079	663725
			$V_3 = 25$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	74638	74860	75296	75129
	$s_2 = 2.88$	83699	84062	81166	81024
	$s_3 = 3.90$	96826	97576	89081	88981
Π2	$s_1 = 2.11$	213570	211092	241392	242470
	$s_2 = 2.88$	248287	244765	279054	280294
	$s_3 = 3.90$	311957	316195	340941	343666
Π3	$s_1 = 2.11$	433354	432126	483216	484464
	$s_2 = 2.88$	513991	518222	612817	608265
	$s_3 = 3.90$	704888	699788	792752	785059

Πίνακας 4.7: Μέγιστη τιμή της τέμνουσας δύναμης Q(kN) όλων των πυλώνων για γραμμική και μη γραμμική ανάλυση, με και χωρίς περιστροφική αδράνεια

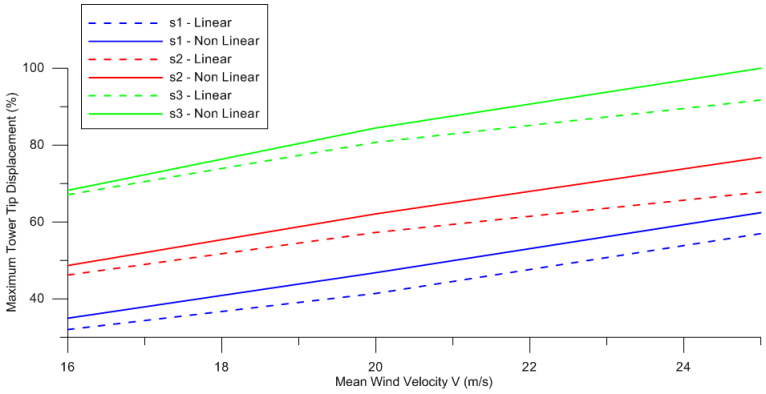
Q		Γραμμική Ανάλυση		Μη γραμμική Ανάλυση	
		Π.Α.	**Χ.Π.Α.**	**Π.Α.**	**Χ.Π.Α.**
			$V_1 = 16$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	726	735	663	647
	$s_2 = 2.88$	855	868	750	769
	$s_3 = 3.90$	1068	1064	962	989
Π2	$s_1 = 2.11$	1627	1642	1868	1799
	$s_2 = 2.88$	2033	2042	2170	2060
	$s_3 = 3.90$	2592	2608	2812	2650
Π3	$s_1 = 2.11$	2556	2418	3301	2923
	$s_2 = 2.88$	3369	3209	4380	3596
	$s_3 = 3.90$	4512	4339	5828	4740
			$V_2 = 20$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	930	930	856	856
	$s_2 = 2.88$	1036	1050	903	943
	$s_3 = 3.90$	1202	1214	1048	1044
Π2	$s_1 = 2.11$	2200	2303	2388	2314
	$s_2 = 2.88$	2613	2791	2807	2929
	$s_3 = 3.90$	3189	3234	3620	3388
Π3	$s_1 = 2.11$	3410	3380	4578	4281
	$s_2 = 2.88$	4405	4166	5470	4978
	$s_3 = 3.90$	5764	5485	7211	6292
			$V_3 = 25$m/s		
Π1	$s_1 = 2.11$	1171	1195	1102	1148
	$s_2 = 2.88$	1268	1268	1176	1219
	$s_3 = 3.90$	1412	1433	1271	1306
Π2	$s_1 = 2.11$	2799	3072	3126	3021
	$s_2 = 2.88$	3183	3331	3225	3701
	$s_3 = 3.90$	3706	3786	3873	3966
Π3	$s_1 = 2.11$	4818	4988	6049	5664
	$s_2 = 2.88$	5701	5347	7093	6311
	$s_3 = 3.90$	7147	6682	8544	7750



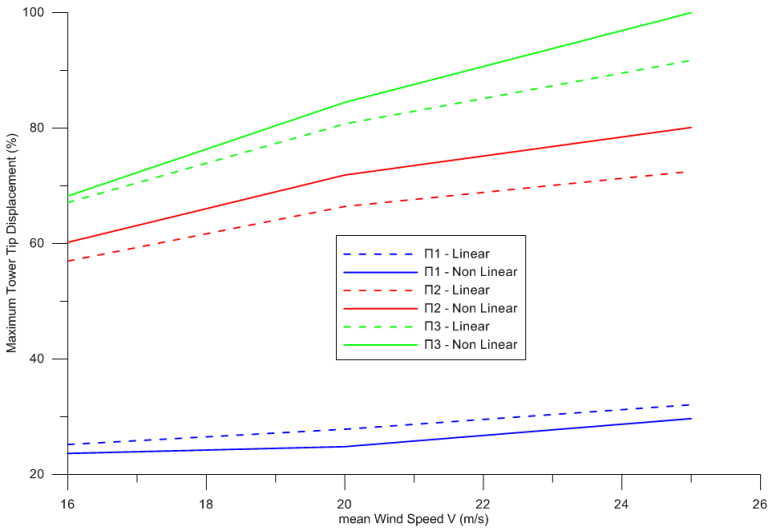
Σχήμα 4.36: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση w στην κορυφή του πυλώνα Π1 για κάθε χρονοϊστορία φόρτισης, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης μετατόπισης



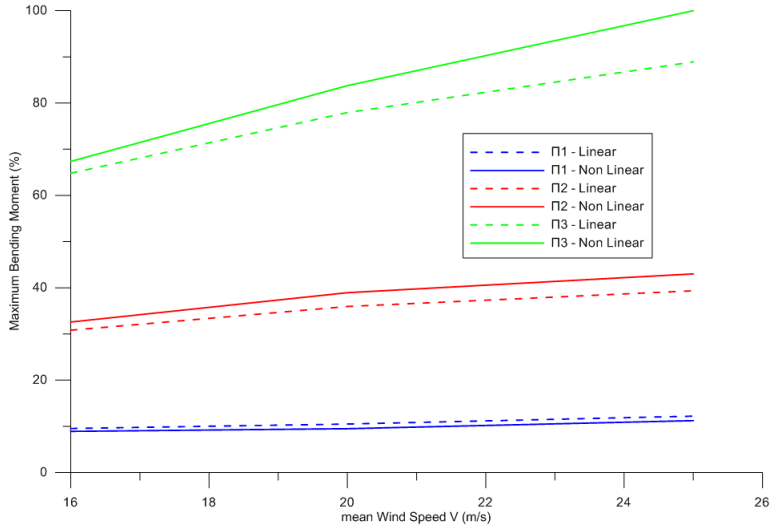
Σχήμα 4.37: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση w στην κορυφή του πυλώνα Π2 για κάθε χρονοϊστορία φόρτισης, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης μετατόπισης



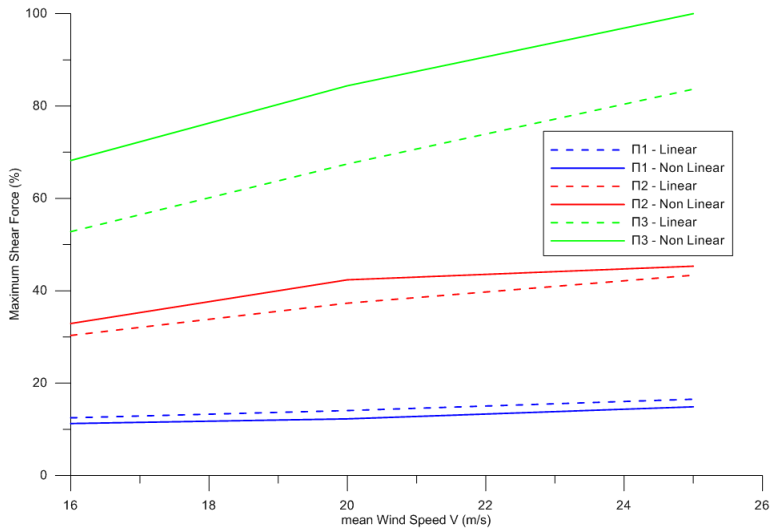
Σχήμα 4.38: Μέγιστη αδιαστατοποιημένη εγκάρσια μετατόπιση w στην κορυφή του πυλώνα Π3 για κάθε χρονοϊστορία φόρτισης



Σχήμα 4.39: Μέγιστη εγκάρσια μετατόπιση w στην κορυφή των πυλώνων Π1, Π2 και Π3 για τυπική απόκλιση $s_3 = 3.90$m/s, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης μετατόπισης



Σχήμα 4.40: Μέγιστη ροπή κάμψης M στη βάση των πυλώνων Π1, Π2 και Π3 για τυπική απόκλιση $s_3 = 3.90$m/s, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης μετατόπισης



Σχήμα 4.41: Μέγιστη τέμνουσα δύναμη Q στη βάση των πυλώνων Π1, Π2 και Π3 για τυπική απόκλιση $s_3 = 3.90$m/s, εκπεφρασμένη ως ποσοστό της ολικά μέγιστης μετατόπισης

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα - Ιδέες για μελλοντική έρευνα

5.1 Συμπεράσματα

Συνοπτικά, στην παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκαν ιδιομορφικές καθώς και μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις πυλώνων ανεμογεννητριών υπό τη δράση φορτίων ανέμου. Ακολουθήθηκε ο αλγόριθμος που βασίζεται στη Θεωρία Πτερυγίων Ρότορα [7], [12], [14], [13] για τον υπολογισμό των φορτίων από τον άνεμο που υλοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, ενώ για τις αναλύσεις χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN που βασίζεται στη Μέθοδο Αναλογικής Εξίσωσης [15] και πραγματοποιεί μη γραμμική δυναμική ανάλυση δοκού, υπό τυχαία εξωτερικά φορτία και συνοριακές συνθήκες. Ο κώδικας έδινε τη δυνατότητα να επιλέγεται αν θα ληφθεί υπόψη η περιστροφική αδράνεια ή όχι, οπότε πραγματοποιούνταν κάθε φορά και τα δύο είδη αναλύσεων με στόχο να αποφασιστεί αν στο συγκεκριμένο πρόβλημα το φαινόμενο της περιστροφικής αδράνειας έχει αποφασιστική σημασία. Επίσης, με ανάλογο κίνητρο, πραγματοποιήθηκαν και γραμμικές και μη γραμμικές αναλύσεις, ώστε να φανεί το πόσο σημαντικό είναι να λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα. Εν συνεχεία, έγινε σύγκριση με προσομοίωμα πεπερασμένων στοιχείων κελύφους, το οποίο επιλύθηκε με τη βοήθεια του εμπορικού λογισμικού FEMAP v.10 [11]. Αφού διαπιστώθηκε η ακρίβεια του εν λόγω κώδικα και διαπιστώθηκε η καταλληλότητα του προσομοιώματος δοκού για την ανάλυση του υπό εξέταση προβλήματος, διεξήχθησαν περαιτέρω αναλύσεις για τρεις χαλύβδινους πυλώνες.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- Στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, όσον αφορά τον υπολογισμό των εγκάρσιων μετατοπίσεων, καθώς και των καμπτικών ροπών και τεμνουσών δυνάμεων, η μη γραμμικότητα έδωσε αποκλίσεις, της τάξης του 15% στις μετατοπίσεις και του 20% στις δυνάμεις και ροπές. Γενικά, στους πυλώνες που εξετάστηκαν, το αξονικό φορτίο λόγω του ιδίου βάρους του πυλώνα, των

πτερυγίων και των μηχανολογικών εξαρτημάτων φάνηκε να μειώνει τη δυσκαμψία του φορέα, γεγονός που οδήγησε στην αύξηση των μετατοπίσεων και των εντατικών μεγεθών. Όπως έγινε αντιληπτό και στα αποτελέσματα, η επιρροή της μη γραμμικότητας γινόταν εντονότερη αυξανομένου του ύψους του πυλώνα και του αξονικού του φορτίου.

- Όσον αφορά τις αξονικές μετατοπίσεις, από τις μη γραμμικές αναλύσεις προκύπτουν πρόσθετες μετατοπίσεις, οι οποίες δεν μπορούν να υπολογιστούν από τη θεωρία μικρών μετακινήσεων. Η απόκλιση στο εν λόγω μέγεθος άγγιζε ακόμα και το 70%.

- Στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν, η περιστροφική αδράνεια δεν φάνηκε να επηρεάζει ουσιωδώς το μέγεθος των μετακινήσεων ενώ η επιρροή ήταν ελαφρώς πιο έντονη στα εντατικά μεγέθη. Ωστόσο, όπως προέκυψε από την ιδιομορφική ανάλυση των πύργων, η επιρροή της περιστροφικής αδράνειας ενδέχεται να μην είναι αμελητέα, ειδικά σε περιπτώσεις ταλαντώσεων που ενεργοποιούν ανώτερες ιδιομορφές (π.χ. σεισμική διέγερση).

- Η παραδοχή ότι ο πυλώνας μπορεί να προσομοιωθεί με στοιχεία δοκού κρίνεται απολύτως ορθή, καθώς η σύγκριση με το ακριβέστερο μοντέλο από στοιχεία κελύφους έδωσε πολύ κοντινά αποτελέσματα, αλλά σε υπερδιπλάσιας τάξης μεγέθους χρόνο, ενώ πρέπει να γίνει και ιδιαίτερη αναφορά στη διαφορά όγκου των δύο προβλημάτων: Η Θεωρία Δοκού επιλύθηκε με 21 γραμμικά στοιχεία, ενώ για την προσομοίωση του ακριβέστερου μοντέλου χρειάστηκαν περίπου 1500 στοιχεία κελύφους.

5.2 Ιδέες για μελλοντική έρευνα

Κατά τη μελέτη του παρόντος θέματος προέκυψαν ειδικά ζητήματα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, η διερεύνηση των οποίων δεν ήταν εφικτή στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Τέτοια ζητήματα που τίθενται ως ιδέες για μελλοντική έρευνα είναι τα παρακάτω:

- Η επιρροή του σεισμού. Έχει διαπιστωθεί ότι η κύρια φόρτιση των πυλώνων των ανεμογεννητριών προέρχεται από τον άνεμο. Παρ' όλα αυτά, θα είχε ενδιαφέρον να γινόταν μελέτη και σεισμικών φαινομένων, που είτε να δρουν μεμονωμένα, είτε να δρουν ταυτόχρονα με τον άνεμο.

- Το υλικό των πυλώνων. Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας οι πυλώνες ήταν όλοι χαλύβδινοι. Παρ' όλα αυτά, θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί η δυναμική απόκριση πυλώνων από άλλα υλικά. Ενδεικτικά προτείνονται πυλώνες είτε από σκυρόδεμα είτε σύμμικτοι είτε και δικτυώματα.

- Η αλληλεπίδραση εδάφους-κατασκευής. Πιο συγκεκριμένα, το στατικό προσομοίωμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένας πρόβολος, με πλήρη πάκτωση στο

ένα άκρο του. Θα μπορούσε εναλλακτικά η πάκτωση να αντικατασταθεί από ελατήρια, των οποίων οι σταθερές να προσδιορίζονται από κατάλληλες γεωτεχνικές μελέτες, ώστε να προσομοιώνεται η συμπεριφορά του εδάφους και στη συνέχεια να συγκριθούν τα μοντέλα για πιθανές αποκλίσεις.

- Η αλληλεπίδραση πτερυγίων - πυλώνα. Στην παρούσα εργασία τα πτερύγια και ο πυλώνας θεωρήθηκαν εντελώς ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθεί η αλληλεπίδραση των δύο αυτών στοιχείων, με την κατασκευή ενιαίου προσομοιώματος. Στη θεωρία μεγάλων μετακινήσεων, ενδέχεται οι αποκλίσεις να μην είναι αμελητέες.

- Η φόρτιση καθ' ύψος του πυλώνα. Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η συμπεριφορά των πυλώνων ανεμογεννητριών, θεωρώντας πως τα φορτία ανέμου αντιπροσωπεύονται πλήρως από ένα δυναμικό φορτίο στην κορυφή του πυλώνα. Θα ήταν ενδιαφέρουσα η θεώρηση, ότι ο άνεμος καταπονεί τον πυλώνα καθ' όλο το ύψος του, και να γίνει μια δυναμική μελέτη του αντίστοιχου προσομοιώματος, στο οποίο ενδέχεται να παίζουν σημαντικό ρόλο και ιδιομορφές ανώτερης τάξης.

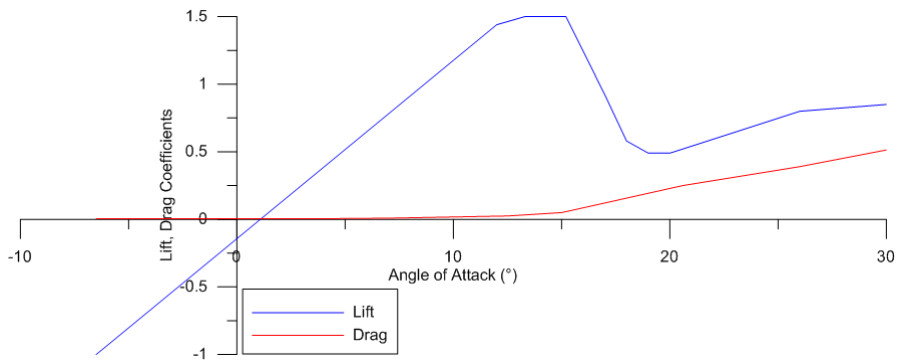
Παράρτημα

Παρουσιάζονται αναλυτικά διαγράμματα των αεροδυναμικών συντελεστών της αεροτομής NACA632XX [7] που χρησιμοποιήθηκε για την επαλήθευση του κώδικα υπολογισμού φορτίων ανέμου, καθώς και των αεροτομών DU21_A17, DU25_A17, DU30_A17, DU35_A17, DU40_A17, NACA64_A17, Cylinder1, Cylinder2 [14], που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των φορτίων στην κορυφή των πυλώνων

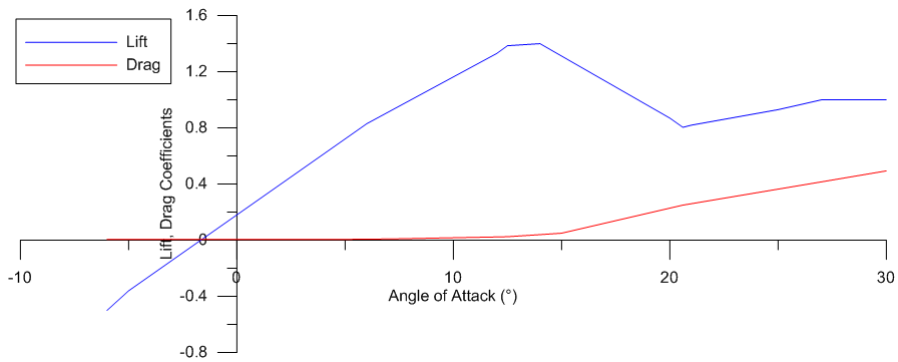
Παράρτημα I

Πίνακες Αεροδυναμικών Συντελεστών C_d και C_l

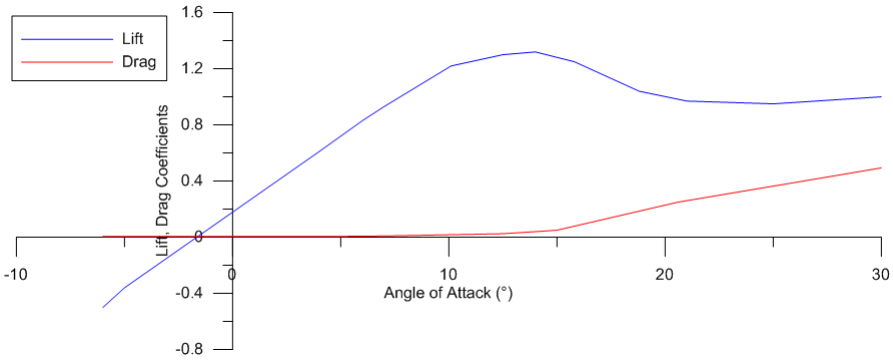
I.1 Αεροδυναμικοί Συντελεστές αεροτομής NACA632XX



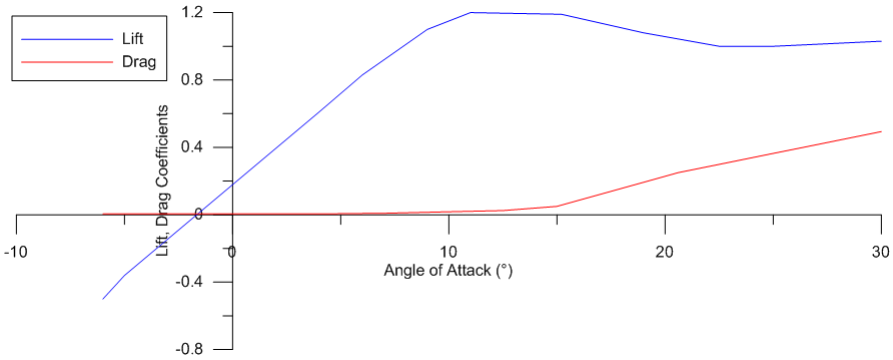
Σχήμα I.1: Lift, Drag Coefficients (thickness to chord = 12%) [7]



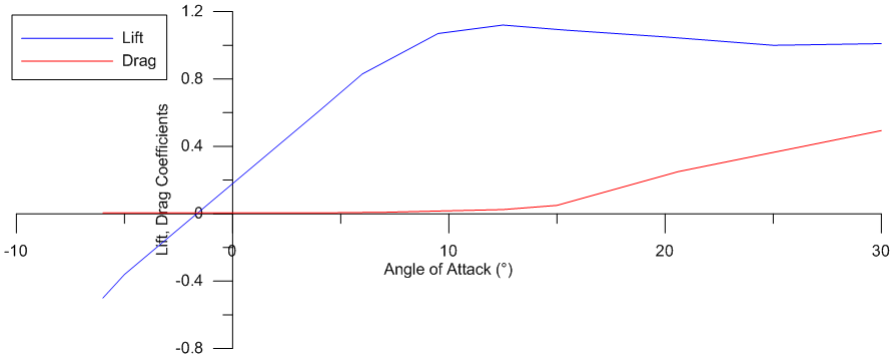
Σχήμα I.2: Lift, Drag Coefficients (thickness to chord = 15%) [7]



Σχήμα Ι.3: Lift, Drag Coefficients (thickness to chord = 18%) [7]

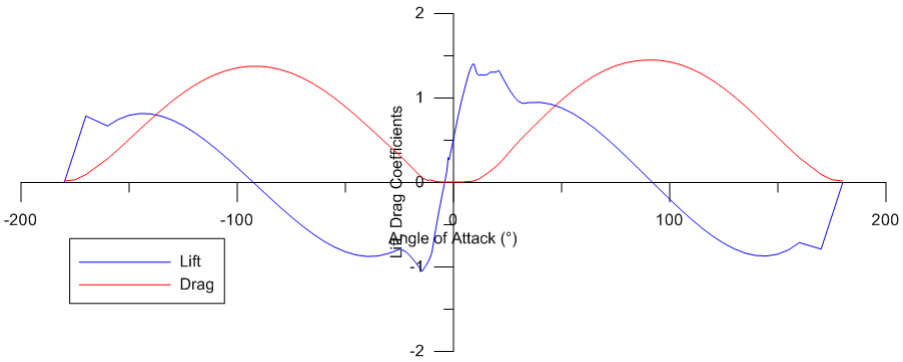


Σχήμα Ι.4: Lift, Drag Coefficients (thickness to chord = 21%) [7]

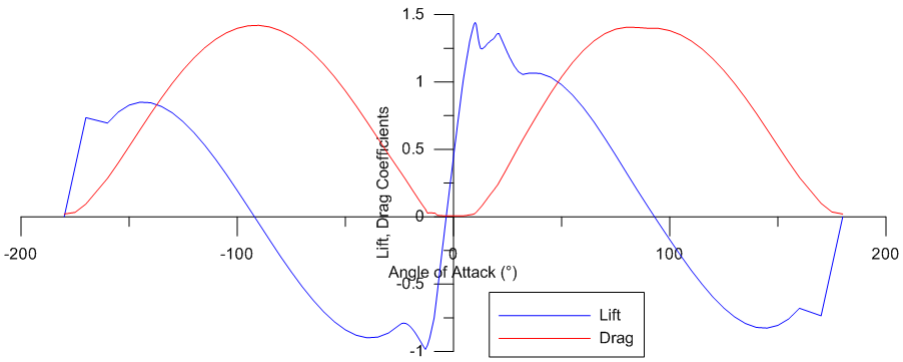


Σχήμα Ι.5: Lift, Drag Coefficients (thickness to chord = 25%) [7]

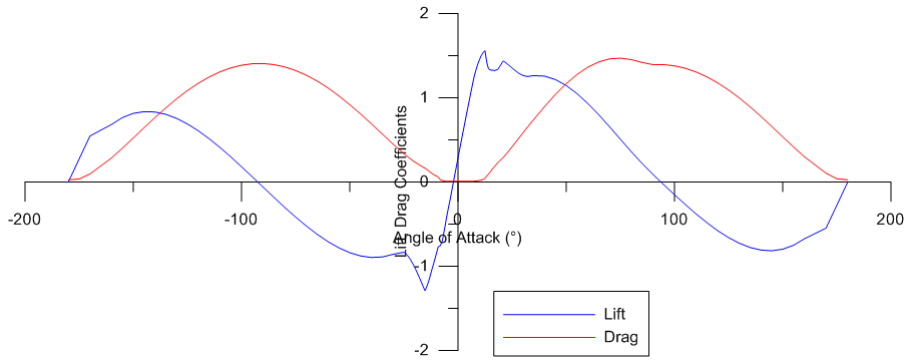
I.2 Αεροδυναμικοί Συντελεστές αεροτομών DU21_A17, DU25_A17, DU30_A17, DU35_A17, DU40_A17, NACA64_A17, Cylinder1, Cylinder2



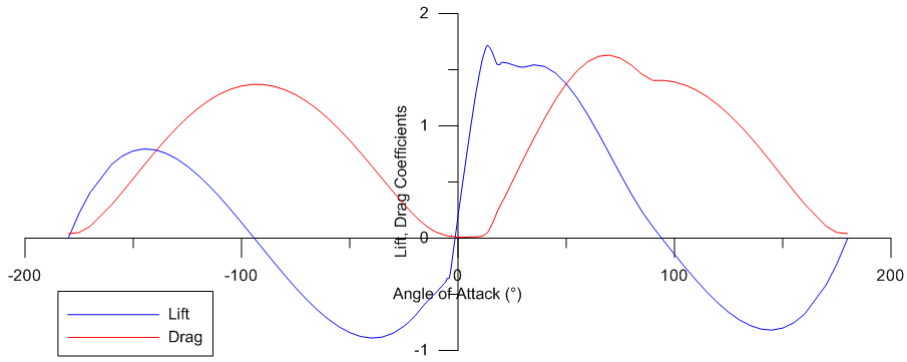
Σχήμα I.6: Airfoil DU21_A17 Coefficients [14]



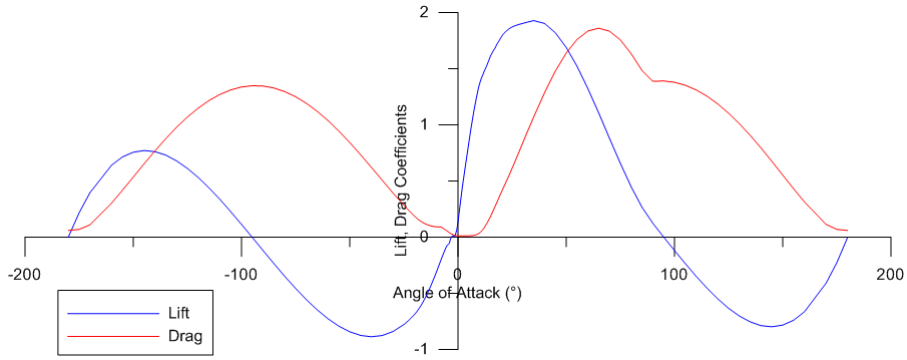
Σχήμα I.7: Airfoil DU25_A17 Coefficients [14]



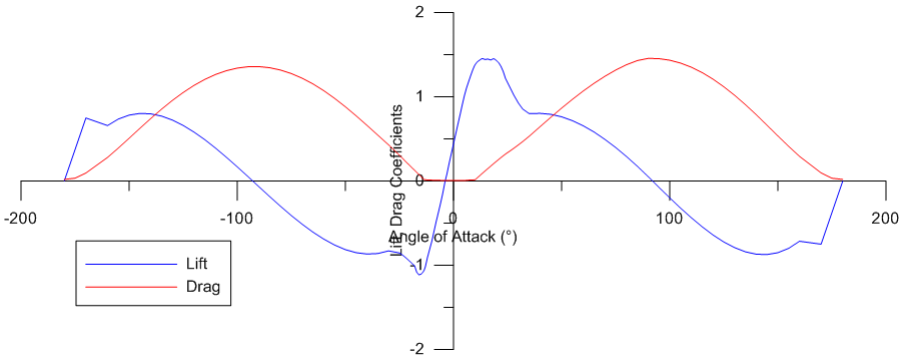
Σχήμα I.8: Airfoil DU30_A17 Coefficients [14]



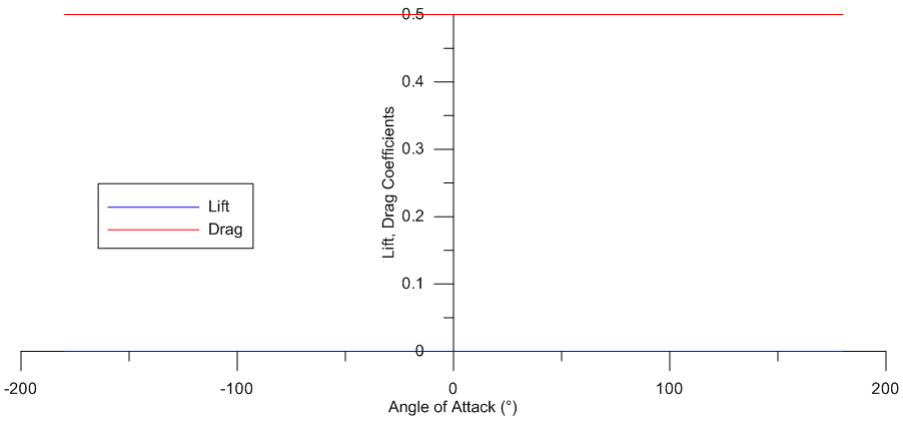
Σχήμα I.9: Airfoil DU35_A17 Coefficients [14]



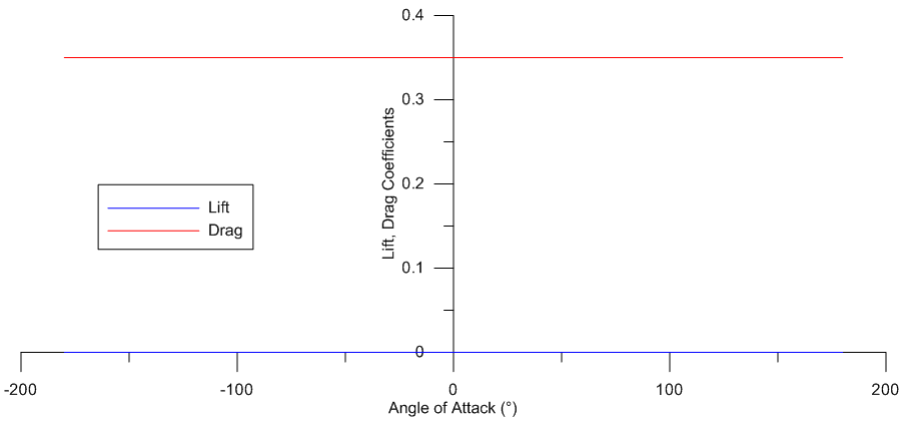
Σχήμα I.10: Airfoil DU40_A17 Coefficients [14]



Σχήμα I.11: Airfoil NACA64_A17 Coefficients [14]



Σχήμα I.12: Airfoil-Cylinder1 Coefficients [14]



Σχήμα I.13: Airfoil-Cylinder2 Coefficients [14]

Βιβλιογραφία

[1] Anders Ahlström. "Aeroelastic Simulation of Wind Turbone Dynamics". PhD thesis. Royal Institute of Technology Department of Mechanics, 2005.

[2] A.E. Armenakas. *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*. New York: Taylor and Francis Group, 2006.

[3] M.M. Attard. "Nonlinear shortening and bending effect under pure torque of thin-walled open beams". In: *Thin-Walled Structures* 4 (1986), pp. 165–177.

[4] M.M. Attard. "Nonlinear Theory of Non-Uniform Torsion of Thin-Walled Open Beams". In: *Thin-Walled Structures* 4 (1986), pp. 101–134.

[5] Anders Björck. *AERFORCE: Subroutine Package for unsteady Blade-Element/Momentum Calculations*. FFA TN, 2007.

[6] K.E. Brenan, S.L. Campbell, and L.R. Petzold. *Numerical Solution of Initial-value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Amsterdam: North-Holland, 1989.

[7] T. Burton et al. *Wind Energy Handbook*. Wiley, 2001.

[8] CEN/TC250. *Eurocode 1: Actions on structures-General actions-Part 1-4: Wind actions, prEN 1991-1-4*. 2004.

[9] G. Chen and N.S. Trahair. "Inelastic nonuniform torsion of steel I-beams". In: *Journal of Constructional Steel Research* 23 (1992), pp. 189–207.

[10] G. Deodatis. "Simulation of Ergodic Multivariate Stochastic Processes". In: *Journal of Engineering Mechanics* 122.8 (1996).

[11] *FEMAP for Windows - Finite element modeling and post-processing software. Help System Index, Version 10*. 2008.

[12] Martin O. L. Hansen. *Aerodynamics of Wind Turbines*. 2nd ed. Earthscan, 2008.

[13] Grant Ingram. *Wind Turbine Blade Analysis using the Blade Element Momentum Method*. Durham University, 2011.

[14] J. M. Jonkman. *Dynamic Modeling and Loads Analysis of an Offshore Floating Wind Turbine*. National Renewable Energy Laboratory, 2007.

[15] J.T. Katsikadelis. "The Analog Equation Method. A Boundary – only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies". In: *Theoretical and Applied Mechanics* 27 (2002), pp. 13–38.

[16] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. "Flexural-torsional post-buckling analysis of thin-walled elements with open sections". In: *Thin-Walled Structures* 39 (2001), pp. 907–938.

[17] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. "Lateral post-buckling analysis of thinwalled open section beams". In: *Thin-Walled Structures* 40 (2002), pp. 1013–1036.

[18] F. Mohri, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. "Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections". In: *Journal of Sound and Vibration* 275 (2004), pp. 434–446.

[19] A. Quilligan et al. "Fragility analysis of steel and concrete wind turbine towers". In: *Engineering Structures* 36 (2012), pp. 270–282.

[20] J.N. Reddy. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press, 2004.

[21] H.R. Ronagh, M.A. Bradford, and M.M. Attard. "Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Applications". In: *Computers and Structures* 77 (2000), pp. 301–313.

[22] H.R. Ronagh, M.A. Bradford, and M.M. Attard. "Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory". In: *Computers and Structures* 77 (2000), pp. 285–299.

[23] H. Rothert and V. Gensichen. *Nichtlineare Stabstatik*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[24] E.J. Sapountzakis and I.H. Dikaros. "Nonlinear Flexural-Torsional Dynamic Analysis of Beams of Variable Cross Section by BEM – Application to the Analysis of Wind Turbine Towers". In: *Eleventh International Conference on Computational Structures Technology (CST 2012), September 4-7, Dubrovnik, Croatia*. Civil-Comp Press (accepted for publication in the proceedings), 2012.

[25] E.J. Sapountzakis and V.G. Mokos. "Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM". In: *Computational Mechanics* 30 (2003), pp. 131–142.

[26] E.J. Sapountzakis and V.G. Mokos. "Nonuniform torsion of bars of variable cross section, Computers and Structures". In: *Computers and Structures* 82 (2004), pp. 703–715.

[27] I. Vassilopoulou, C. Gantes, and I. Gkimousis. "Response of Cable Networks under Wind Loading". In: *7th Greek National Steel Structures Conference, Volos*.

[28] V. Vlasov. *Thin-walled elastic beams*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1963.

[29] *Zero Energy Buildings website*. url: http://www.zeroenergybuildings.org/.

[30] Χ. Δημόπουλος. "Ενίσχυση οπών ανθρωποθυρίδων σε χαλύβδινα κελύφη πυλώνων ανεμογεννητριών". Διδακτορική διατριβή. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2012.

[31] Ι.Χ. Δίκαρος. "Μη Γραμμική Ανάλυση Πλακών Ενισχυμένων με Δοκούς με Μερική Διατμητική Σύνδεση". Μεταπτυχιακή εργασια. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2011.