Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογιστών

Μηχανισμοί Βελτίωσης του Τιμήματος της Αναρχίας στα Παίγνια Συμφόρησης

Διπλωματική Εργασία

του

Ιωάννη Γεωργιάδη

Επιβλέπων: Στάθης Ζάχος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2012

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογιστών

Μηχανισμοί Βελτίωσης του Τιμήματος της Αναρχίας στα Παίγνια Συμφόρησης

Διπλωματική Εργασία

του

Ιωάννη Γεωργιάδη

Επιβλέπων: Στάθης Ζάχος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 29η Αυγούστου 2012.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
.....	.....	.....
Στάθης Ζάχος	Άρης Παγουρτζής	Δημήτρης Φωτάκης
Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής	Λέκτορας
Ε.Μ.Π.	Ε.Μ.Π.	Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2012

(Υπογραφή)

.....

Ιωάννης Γεωργιάδης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Στάθη Ζάχο για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω τη διπλωματική μου εργασία στο εργαστήριο Λογική και Επιστήμης Υπολογιστών, καθώς και για το γεγονός ότι με έκανε να αγαπήσω το αντικείμενο της Πληροφορικής από το πρώτο έτος μου στη σχολή. Επιπλέον θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον λέκτορα κ. Δημήτρη Φωτάκη για την καθοριστικής σημασίας βοήθεια και συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής. Τέλος, ευχαριστώ θερμά όλα τα μέλη του εργαστηρίου, την οικογένεια και τους φίλους μου για την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή έχει σαν αντικείμενο τη μελέτη της επίδρασης της εγωιστικής συμπεριφοράς στα παίγνια συμφόρησης. Αρχικά προσπαθούμε να υπολογίσουμε το τίμημα της αναρχίας στα παίγνια συμφόρησης, το οποίο ουσιαστικά ποσοτικοποιεί το κόστος που επιφέρει η εγωιστική και ιδιοτελής συμπεριφορά των παικτών στο κοινωνικό σύνολο. Στο υπόλοιπο της διπλωματικής εξετάζουμε μεθόδους που μπορούμε να εφαρμόσουμε προκειμένου να μειώσουμε το τίμημα της αναρχίας. Στο πλαίσιο αυτό αρχικά μελετάμε την ιδέα της επιβολής κατάλληλα επιλεγμένων φόρων στους παίκτες για τη χρήση των πόρων του συστήματος και εξετάζουμε υπό ποιες προϋποθέσεις είναι δυνατόν να εξαλείψουμε πλήρως το τίμημα της αναρχίας. Στη συνέχεια εξετάζουμε την εφαρμογή στρατηγικών Stackelberg από το διαχειριστή του συστήματος και υπολογίζουμε το βελτιωμένο τίμημα της αναρχίας για διάφορες τέτοιες στρατηγικές. Τέλος μελετάμε την ιδέα των Coordination Mechanisms σαν έναν τρόπο σχεδίασης παιγνίων τα οποία έχουν χαμηλό τίμημα της αναρχίας.

Abstract

This thesis studies the effects of selfish behavior in congestion games. Firstly, we try to find bounds on the price of anarchy of congestion games, which quantifies the inefficiency caused to the system by the selfish behavior of its users. Later on, we consider methods of reducing the price of anarchy. In this context we initially study the idea of imposing taxes to the players for using the resources of the game and we analyze under which conditions this method eliminates the price of anarchy. Then we proceed to study the idea of Stackelberg strategies that are implemented by a central coordinator and we are able to prove improved bounds on the price of anarchy for various such strategies. Finally we consider the notion of Coordination Mechanisms as a means of designing games with small price of anarchy.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες **7**

Περίληψη **9**

Abstract **11**

Περιεχόμενα **13**

1 Εισαγωγή **15**
1.1 Βασικές Έννοιες και Παραδείγματα 15
1.1.1 Θεωρία Παιγνίων 15
1.1.2 Παραδείγματα Παιγνίων 15
1.1.3 Στρατηγικά Παίγνια Ταυτόχρονης Κίνησης 17
1.1.4 Καταστάσεις Ισορροπίας σε Παίγνια 18
1.1.5 Το Τίμημα της Αναρχίας 21
1.2 Παίγνια Συμφόρησης και Παίγνια Δυναμικού 23
1.2.1 Παίγνια Συμφόρησης 23
1.2.2 Παίγνια Δυναμικού 23
1.2.3 Παραδείγματα 24
1.2.4 Σχέση Μεταξύ Παιγνίων Συμφόρησης και Δυναμικού 25

2 Το Τίμημα της Αναρχίας στα Παίγνια Συμφόρησης **27**
2.1 Μη-ατομικά Παίγνια Συμφόρησης Δικτύου 27
2.1.1 Το Μοντέλο και Βασικοί Ορισμοί 27
2.1.2 Ροή σε Ισορροπία Nash 28
2.1.3 Η Συνάρτηση Οριακού Κόστους 30
2.1.4 Ύπαρξη, Μοναδικότητα και Πολυπλοκότητα της Ισορροπίας Nash . . 30
2.1.5 Παραδείγματα 31
2.1.6 Υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας 33
2.1.7 Άλλα Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις 36
2.2 Ατομικά Παίγνια Συμφόρησης 38
2.2.1 Το Μοντέλο και Βασικοί Ορισμοί 38
2.2.2 Ύπαρξη, Πολυπλοκότητα και Σύγκλιση σε Ισορροπία Nash 38

2.2.3 Το Τίμημα της Αναρχίας για Γραμμικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης 40
2.2.4 Η Έννοια του Ομαλού Παιγνίου 45
2.2.5 Το Τίμημα της Αναρχίας για Γενικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης . . 46
2.2.6 Η περίπτωση των δικτύων παράλληλων ακμών 52
2.2.7 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις 52

3 Μέθοδοι Αντιμετώπισης της Εγωιστικής Συμπεριφοράς 53
3.1 Επιβολή Φόρων στις Ακμές του Δικτύου 54
3.1.1 Μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης 54
3.1.2 Ατομικά παίγνια συμφόρησης 59
3.1.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις 62
3.2 Στρατηγικές Stackelberg 63
3.2.1 Ορισμός του Μοντέλου Παιγνίων Stackelberg 63
3.2.2 Η Βέλτιστη Στρατηγική Stackelberg 63
3.2.3 Ευρετικές Στρατηγικές Stackelberg 64
3.2.4 Στρατηγικές Stackelberg σε ατομικά παίγνια συμφόρησης 76

4 Coordination Mechanisms 81
4.1 Το Μοντέλο 81
4.1.1 Η ιδέα των Coordination Mechanisms 81
4.1.2 Κατηγορίες Scheduling Games 83
4.2 Μηχανισμοί για διάφορες κατηγορίες scheduling games 83
4.2.1 Μηχανισμοί για το $P||C_{max}$ 84
4.2.2 Μηχανισμοί για τα $Q||C_{max}$ και $B||C_{max}$ 86
4.2.3 Μηχανισμοί για το $R||C_{max}$ 88
4.2.4 Μηχανισμοί για το $R||\sum_i w_i c_i$ 94

Βιβλιογραφία 97

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές Έννοιες και Παραδείγματα

1.1.1 Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων έχει σαν σκοπό την ανάλυση καταστάσεων όπου ένα σύνολο οντοτήτων (*παικτών*) αλληλεπιδρά με τέτοιο τρόπο ώστε η απόφαση ενός επηρεάζει τα αποτελέσματα των υπολοίπων. Βρίσκει εφαρμογή, μεταξύ άλλων, στους κλάδους των οικονομικών, της βιολογίας, της μηχανικής και της επιστήμης των υπολογιστών.

Μια από τις βασικές υποθέσεις της Θεωρίας Παιγνίων είναι ότι οι παίκτες συμπεριφέρονται *ορθολογικά* ή *εγωιστικά*. Δηλαδή κάθε παίκτης προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το ατομικό του όφελος, δεδομένων των επιλογών που κάνουν οι υπόλοιποι παίκτες, αδιαφορόντας για το πώς η επιλογή του επηρρεάζει το σύστημα (δηλαδή τους άλλους παίκτες). Κεντρικός σκοπός της Θεωρίας Παιγνίων είναι η μελέτη *καταστάσεων ισορροπίας* σε τέτοιες συνθήκες και αποτελεσμάτων που προκύπτουν ως συνέπεια της αυτής της εγωιστικής συμπεριφοράς.

Η Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων είναι η μελέτη των παραπάνω φαινομένων από την οπτική γωνία της Πληροφορικής. Δηλαδή, εκτός από την ύπαρξη καταστάσεων ισορροπίας, ασχολείται με θέματα όπως η δυνατότητα εύρεσής τους σε αποδοτικό χρόνο, η ταχύτητα σύγκλισης σε ισορροπία, η σύγκριση διαφορετικών καταστάσεων ισορροπίας και η σχεδίαση μηχανισμών που επηρεάζουν το παιχνίδι προς όφελος του συστήματος.

1.1.2 Παραδείγματα Παιγνίων

Ξεκινάμε περιγράφοντας δύο πολύ γνωστά παίγνια και παρουσιάζοντας μέσα από αυτά ορισμένα από τα βασικά χαρακτηριστικά και έννοιες που εμφανίζονται στα στρατηγικά παίγνια.

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Δύο ύποπτοι συλλαμβάνονται από την αστυνομία και κρατούνται ξεχωριστά. Η αστυνομία γνωρίζει ότι είναι και οι δύο ένοχοι, όμως δεν υπάρχουν αρκετά ενοχοποιητικά στοιχεία για

να καταδικαστούν. Ο καθένας από τους δύο έχει να κάνει μια επιλογή. Αν διατηρήσουν και οι δύο τη σιωπή τους, η αστυνομία δεν θα είναι σε θέση να υποστηρίξει με επαρκή στοιχεία τις κατηγορίες εναντίον τους και θα καταδικαστούν σε 1 χρόνο φυλάκιση ο καθένας τους για πλημμελήματα. Αν όμως ένας από τους δύο ομολογήσει και δεχτεί να καταθέσει εναντίον του άλλου στο δικαστήριο, τότε θα αφεθεί ελεύθερος, ενώ ο άλλος θα καταδικαστεί σε 10 χρόνια φυλακή. Αν και οι δύο δεχτούν να μιλήσουν, τότε το δικαστήριο θα δείξει κάποια επιείκεια επειδή συνεργάστηκαν με τις αρχές και ο καθένας τους θα καταδικαστεί σε 5 χρόνια φυλάκισης.

Καθένας από τους δύο υπόπτους πρέπει να αποφασίσει αν θα σιωπήσει ή αν θα μιλήσει, χωρίς να γνωρίζει την απόφαση του άλλου. Υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά σενάρια, ανάλογα με την απόφαση του καθενός. Μπορούμε να συνοψίσουμε την ποινή για τον κάθε ύποπτο σε καθένα από τα τέσσερα σενάρια με τον παρακάτω 2×2 *πίνακα κόστους*.

Υ1 \ Υ2	Μ	Σ
Μ	5, 5	0, 10
Σ	10, 0	1, 1

Σχήμα 1.1: Πίνακας κόστους για Το Δίλημμα του Φυλακισμενού

Ο κάθε ύποπτος έχει δύο δυνατές *δράσεις* (επιλογές), να 'μιλήσει' (Μ) ή να 'σιωπήσει' (Σ). Οι δράσεις του υπόπτου Υ1 αντιστοιχούν στις δύο γραμμές και οι δράσεις του υπόπτου Υ2 στις δύο στήλες του παραπάνω πίνακα.

Θεωρούμε ότι ο κάθε ύποπτος συμπεριφέρται εγωιστικά, δηλαδή επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος του (δηλαδή την ποινή που θα δεχτεί), αδιαφορόντας για το κόστος του άλλου. Με βάση αυτή την υπόθεση, υπάρχει μόνο μία *κατάσταση ισορροπίας* σε αυτό το παίγνιο, αυτή όπου και οι δύο παίκτες μιλάνε. Σε κάθε άλλη περίπτωση τουλάχιστον ένας από τους παίκτες μπορεί να μειώσει το κόστος του, αλλάζοντας την επιλογή του από 'σιωπώ' σε 'μιλάω'. Από την άλλη, το αποτέλεσμα θα ήταν πολύ καλύτερο και για τους δύο παίκτες αν συνεργάζονταν και επιλέγανε να σιωπήσουν. Η λύση αυτή όμως δεν είναι ευσταθής (λύση ισορροπίας) αφού και οι δύο ύποπτοι θα έμπαιναν στον πειρασμό να αλλάξουν τη στρατηγική τους και να μιλήσουν, προκειμένου να αποφύγουν τη φυλακή.

Chicken Game

Δύο οχήματα κινούνται με μεγάλη ταχύτητα και φτάνουν ταυτόχρονα στην ίδια διασταύρωση. Ο κάθε οδηγός έχει δύο επιλογές, να σταματήσει ή να επιχειρήσει να διασχίσει τη διασταύρωση. Υποθέτουμε ότι αν ο οδηγός διασχίσει επιτυχώς τη διασταύρωση έχει ωφέλεια 1, αν σταματήσει 0, αλλά σε περίπτωση σύγκρουσης οι δύο οδηγοί έχουν κόστος 100. Το παίγνιο αυτό περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα ωφελείας:

O1 \ O2	Δ	Σ
Δ	-100, -100	1, 0
Σ	0, 1	0, 0

Σχήμα 1.2: Πίνακας ωφελείας για το Chicken Game

Οι ευσταθείς καταστάσεις του παιγνίου αυτού παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον και θα τις εξετάσουμε παρακάτω.

1.1.3 Στρατηγικά Παίγνια Ταυτόχρονης Κίνησης

Δώσαμε παραπάνω δύο παραδείγματα παιγνίων ταυτόχρονης κίνησης, όπου όλοι οι παίχτες διαλέγουν ταυτόχρονα τη στρατηγική τους, από ένα σύνολο δυνατών δράσεων. Έχουμε ήδη αναφερθεί σε έννοιες όπως κόστος, ωφέλεια, δράση, στρατηγική και ισορροπία. Παρακάτω δίνουμε τον τυπικό ορισμό ενός παιγνίου και τον εννοιών αυτών.

Ορισμός 1.1: Ένα στρατηγικό παίγνιο ταυτόχρονης κίνησης (ή παίγνιο σε κανονική μορφή) χαρακτηρίζεται από ένα πεπερασμένο σύνολο $N = \{1, 2, ..., n\}$ από n παίκτες, όπου κάθε παίκτης $i \in N$ έχει ένα πεπερασμένο σύνολο S_i από δυνατές δράσεις. Για να παίξει, ο κάθε παίκτης επιλέγει μία στρατηγική, η οποία για την ώρα υποθέτουμε ότι ταυτίζεται με μία δράση $s_i \in S_i$. Το διάνυσμα των στρατηγικών που διάλεξαν οι παίκτες (ή *προφίλ στρατηγικών*) ορίζεται ως $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ και το σύνολο όλων των προφίλ στρατηγικών ως $S = \cup_i S_i$, το οποίο ταυτίζεται με το σύνολο των δυνατών εκβάσεων του παίγνιου. Ορίζουμε επίσης το σύνολο $S_{-i} = \cup_{j \neq i} S_j$.

Για να ορίσουμε πλήρως ένα παίγνιο χρειάζεται να προσδιορίσουμε για κάθε παίκτη μια σχέση προτίμησης πάνω στο σύνολο των πιθανών εκβάσεων του παίγνιου. Αυτή η προτίμηση

συνήθως δίνεται μέσω μιας *συνάρτησης ωφελείας* $u_i : S \to \mathbb{R}$. Δεδομένων δύο πιθανών εκβάσεων $s, s' \in S$ λέμε ότι ο i *προτιμάει* το s από το s' αν $u_i(s) \geq u_i(s')$. Λέμε ότι *προτιμάει γνησίως* το s από το s' αν $u_i(s) > u_i(s')$. Για παίγνια δύο παικτών οι ωφέλειες του κάθε παίκτη συνήθως δίνονται από δύο πίνακες ωφελείας του παίγνιου, A, B, διαστάσεων $m \times m$, όπου m το πλήθος των δυνατών δράσεων του κάθε παίκτη (υποθέτωντας κοινό σύνολο δράσεων). Ο πίνακας A δίνει τις ωφέλειες του παίκτη 1 για κάθε πιθανή έκβαση και ο πίνακας B δίνει τις ωφέλειες του παίκτη 2. Στα παραδείγματα που παρουσιάσαμε παραπάνω εμφανίσαμε τους πίνακες A, B σε έναν κοινό δι-πίνακα (bimatrix).

Πολλές φορές προσδιορίζουμε τις προτιμήσεις του κάθε παίχτη μέσω της *συνάρτησης κόστους* $c_i : S \to \mathbb{R}$ αντί της συνάρτησης ωφελείας. Προφανώς, μπορούμε να εναλλάξουμε μεταξύ των δύο συναρτήσεων, αφού $u_i(s) = -c_i(s)$.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι ένα παίγνιο ονομάζεται συμμετρικό όταν δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των παικτών, δηλαδή η ωφέλεια του κάθε παίκτη εξερτάται από τις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι άλλοι παίκτες, αλλά όχι από το ποιος παίζει την κάθε στρατηγική. Δηλαδή το παίγνιο παραμένει το ίδιο αν εναλλάξουμε οποιουσδήποτε δύο παίκτες. Για τα συμμετρικά παίγνια δύο παικτών ισχύει $A = B^T$, όπου A, B οι πίνακες ωφελείας των δύο παικτών.

Σε αντίθετη περίπτωση το παίγνιο ονομάζεται μη-συμμετρικό.

Παραδείγματα

Με βάση τον ορισμό ενός παίγνιου ταυτόχρονης κίνησης, μπορούμε τώρα να ορίσουμε τυπικά τα παίγνια 'Το Δίλημμα του Φυλακισμένου' και 'Chicken Game' που παρουσιάσαμε παραπάνω.

1. Το παίγνιο 'Το Δίλημμα του Φυλακισμένου' αποτελείται από δύο παίκτες $\{1, 2\}$. Τα σύνολα δράσεων τους ταυτίζονται: $S_1 = S_2 = \{M, \Sigma\}$, όπου το M αντιστοιχεί στο 'Μιλάει' και το Σ στο 'Σιωπεί'. Η συνάρτηση κόστους του παίκτη 1 είναι: $c_1(M, M) = 5$, $c_1(M, \Sigma) = 0$, $c_1(\Sigma, M) = 10$, $c_1(\Sigma, \Sigma) = 1$ και του παίκτη 2: $c_2(M, M) = 5$, $c_2(M, \Sigma) = 10$, $c_2(\Sigma, M) = 0$, $c_2(\Sigma, \Sigma) = 1$. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για συμμετρικό παίγνιο.

2. Το παίγνιο 'Chicken Game' αποτελείται κι αυτό από δύο παίκτες $\{1, 2\}$. Τα σύνολα δράσεων τους ταυτίζονται: $S_1 = S_2 = \{\Delta, \Sigma\}$, όπου το Δ αντιστοιχεί στην 'Διασχίζει' και το Σ αντιστοιχεί στο 'Σταματάει'. Η συνάρτηση ωφελείας του παίκτη 1 είναι: $u_1(\Delta, \Delta) = -100$, $u_1(\Delta, \Sigma) = 1$, $u_1(\Sigma, \Delta) = 0$, $u_1(\Sigma, \Sigma) = 0$ και για τον παίκτη 2: $u_2(s) = -u_1(s)$. Κι αυτό το παίγνιο είναι συμμετρικό.

1.1.4 Καταστάσεις Ισορροπίας σε Παίγνια

Στις παρακάτω ενότητες έστω $s_i \in S_i$ η στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης i και $s_{-i} \in S_{-i}$ το διάνυσμα $(n-1)$ διαστάσεων με τις στρατηγικές που επιλέγουν οι υπόλοιποι παίκτες. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $u_i(s_i, s_{-i})$ αντί για $u_i(s)$ για να υποδηλώσουμε την ωφέλεια του παίκτη i.

Λύση Κυρίαρχης Στρατηγικής

Ένα παίγνιο λέμε ότι διαθέτει *λύση κυρίαρχης στρατηγικής* αν κάθε παίκτης έχει μία μοναδική βέλτιστη στρατηγική, ανεξάρτητα από τις στρατηγικές που επιλέγουν οι υπόλοιποι παίκτες. Παρακάτω δίνουμε τον τυπικό ορισμό.

Ορισμός 1.2: Ένα προφίλ στρατηγικών $s \in S$ αποτελεί λύση κυριάρχης στρατηγικής αν για κάθε παίκτη $i \in N$ και κάθε άλλο προφίλ στρατηγικών $s' \in S$ έχουμε:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s'_{-i}).$$

Τα περισσότερα παίγνια δεν διαθέτουν λύση κυρίαρχης στρατηγικής. Το Δίλημμα του Φυλακισμένου που παρουσιάσαμε παραπάνω αποτελεί εξαίρεση. Παρατηρείστε ότι μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής δεν είναι κατ' ανάγκη βέλτιστη ως προς την ωφέλεια των παικτών. Μάλιστα στο Δίλημμα του Φυλακισμένου, η λύση ισορροπίας, δηλαδή το διάνυσμα (M, M), είναι *Pareto μη-βέλτιστη*, δηλαδή υπάρχει άλλη λύση όπου *όλοι* οι παίκτες έχουν αυστηρά μεγαλύτερη ωφέλεια.

Αμιγής Ισορροπία Nash

Μια *Αμιγής Ισορροπία Nash* (Pure Nash Equilibrium) είναι μια ευσταθής λύση όπου κανείς από τους παίκτες δεν μπορεί να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του και να αυξήσει την ωφέλειά του. Παρακάτω δίνουμε τον τυπικό ορισμό της αμιγούς ισορροπίας Nash.

Ορισμός 1.3: Ένα προφίλ στρατηγικών $s \in S$ αποτελεί μια Αμιγή Ισορροπία Nash αν για κάθε παίκτη $i \in N$ και κάθε άλλο προφίλ στρατηγικών $s'_i \in S_i$ έχουμε:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Με άλλα λόγια, κανένας παίκτης δεν μπορεί να αλλάξει τη στρατηγική του από s_i σε s'_i και να αυξήσει την ωφέλειά του, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίκτες διατηρούν την στρατηγική που επίλεξαν.

Προφανώς μια λύση κυριάρχης στρατηγικής είναι και Αμιγής Ισορροπία Nash και είναι μάλιστα η *μοναδική* Αμιγής Ισορροπία Nash αν η λύση είναι γνησίως κυρίαρχη. Ωστόσο, είναι πιθανό για ένα παίγνιο να υπάρχουν παραπάνω από μία ισορροπίες Nash. Έχει αποδειχθεί ότι για συμμετρικά παίγνια δύο παικτών με δύο δυνατές στρατηγικές υπάρχει πάντα Αμιγής Ισορροπία Nash.

Για παράδειγμα, το Chicken Game διαθέτει δύο Αμιγείς Ισορροπίες Nash, τις (Δ, Σ) και (Σ, Δ), δηλαδή τις καταστάσεις όπου ο ένας από τους δύο οδηγούς διασχίζει τη διασταύρωση και ο άλλος σταματάει. Είναι προφανές ότι στην κατάσταση αυτή κανένας οδηγός δεν μπορεί να μεταβάλει τη στρατηγική του προς όφελός του. Το συνολικό κοινωνικό όφελος είναι και στις δύο περιπτώσεις 1, ωστόσο μπορούμε να πούμε ότι οι ισορροπίες αυτές είναι κοινωνικά άδικες καθώς σε κάθε περίπτωση μόνο ο ένας οδηγός έχει κάποιο όφελος.

Μεικτή Ισορροπία Nash

Δεν διαθέτουν όλα τα παίγνια Αμιγή Ισορροπία Nash. Για το λόγο αυτό, προκειμένου να μπορούμε να μελετήσουμε καταστάσεις ισορροπίας σε όλα τα παίγνια, πρέπει να εισάγουμε

μια πιο γενική έννοια ισορροπίας, αυτόν της *Μεικτής Ισορροπίας Nash* (Mixed Nash Equilibrium). Η διαφορά είναι ότι τώρα επιτρέπουμε στους παίκτες πρέπει να *τυχαιοποιήσουν* τη στρατηγική τους. Έτσι η στρατηγική ενός παίκτη είναι τώρα μια κατανομή πιθανότητας στο σύνολο των δυνατών του δράσεων, δηλαδή ένα διάνυσμα $s_i \in D(S_i)$ με $s_i = (p_i^1, p_i^2, ...p_i^{m_i})$, όπου $D(S_i)$ είναι το σύνολο των κατανομών πιθανότητας πάνω στις δράσεις του S_i, $m_i = |S_i|$ είναι το πλήθος των δυνατών δράσεων και p_i^j η πιθανότητα ο παίκτης i να επιλέξει την δράση j. Η ωφέλεια του κάθε παίκτη για δοσμένο προφίλ στρατηγικών θεωρούμε ότι ταυτίζεται με την *αναμενόμενη ωφέλεια* της (μεικτής) στρατηγικής που επίλεξε. Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η Μεικτή Ισορροπία Nash, ορίζεται κατά τρόπο ίδιο με την αμιγή ισορροπία Nash.

Στο παιχνίδι 'Chicken Game' εκτός από τις Αμιγείς Ισορροπίες Nash που αναφέραμε παραπάνω, υπάρχει και μια τρίτη, Μεικτή Ισορροπία Nash, όπου ο κάθε παίκτης παίζει τη στρατηγική $(\frac{1}{101}, \frac{100}{101})$, δηλαδή επιλέγει κάθε φορά να διασχίσει με πιθανότητα $\frac{1}{101}$. Αυτή η ισορροπία είναι πιο 'δίκαιη' από τις δύο αμιγείς ισορροπίες Nash που είδαμε παραπάνω, αφού είναι συμμετρική και οι παίκτες έχουν ακριβώς το ίδιο αναμενόμενο όφελος. Ωστόσο είναι χειρότερη αφού το αναμενόμενο κέρδος του κάθε παίκτη, καθώς και το αναμενόμενο κοινωνικό όφελος είναι 0, αντί για 1 που είναι στις άλλες δύο ισσοροπίες Nash.

Το 1951 ο Nash [Nash51] απέδειξε το παρακάτω πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 1.4: Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο πλήθος δυνατών δράσεων διαθέτει μεικτή ισορροπία Nash.

Αν και γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει μια μικτή ισορροπία Nash ο υπολογισμός της είναι στη γενική περίπτωση δύσκολο πρόβλημα, συγκεκριμένα PPAD-πλήρες όπως έχει αποδειχθεί ([DGP06], [CD05]) ακόμα και για παίγνια δύο παικτών. Υπάρχουν βέβαια κατηγορίες παιγνίων για τα οποία ο υπολογισμός μιας κατάστασης ισορροπίας μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Τέτοια είναι, μεταξύ άλλων, τα παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος τα οποία ορίσαμε παραπάνω και τα παίγνια συμφόρησης στα οποία θα αναφερθούμε εκτενώς στη συνέχεια.

Τέλος να αναφέρουμε ότι κάθε συμμετρικό παίγνιο έχει μια συμμετρική μεικτή ισορροπία Nash (δηλαδή ένα προφίλ στρατηγικών όπου κάθε παίκτης εκτελεί την ίδια στρατηγική), χωρίς αυτό να αποκλείει την ύπαρξη μη-συμμετρικών ισορροπιών.

Άλλα Είδη Ισορροπίας

Υπάρχουν και άλλα είδη ισορροπίας Nash, η πιο σημαντική εκ των οποίων είναι η *Συσχετιστική Ισορροπία Nash (Correlated Nash Equilibrium)*, που αποτελεί περεταίρω γενίκευση της μεικτής ισορροπίας Nash. Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι οι (μεικτές) στρατηγικές που επιλέγουν οι παίκτες δεν είναι ανεξάρτητες , αλλά υπάρχει συσχέτιση μεταξύ τους. Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια της Συσχετιστικής Ισορροπίας Nash, θα δούμε ένα παράδειγμα στο 'Chicken Game' που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κεντρική, έμπιστη αρχή η οποία αναθέτει κάποια πιθανότητα σε καθένα από τα τέσσερα δυνατά προφίλ στρατηγικών, $\{\Sigma, \Sigma\}, \{\Sigma, \Delta\}, \{\Delta, \Sigma\}, \{\Delta, \Delta\}$ από μία πιθανότητα (τις πιθανότητες αυτές τις γνωρίζουν οι παίκτες) και επιλέγει τυχαία ένα

από αυτά με βάση αυτές τις πιθανότητες. Στη συνέχεια ενημερώνει τον κάθε παίκτη για την δράση που επίλεξε για αυτόν, όχι όμως για τις δράσεις που επίλεξε για τους άλλους παίκτες. Σε περίπτωση που οι παίκτες προτιμούν να ακολουθήσουν την πρόταση της έμπιστης αρχής, δηλαδή δεν έχουν μεγαλύτερο αναμενόμενο όφελος αν δεν υπακούσουν, τότε το διάνυσμα πιθανοτήτων που ανάθεσε η έμπιστη αρχή στα προφίλ στρατηγικών ορίζει μία συσχετιστική ισορροπία Nash.

Στο 'Chicken Game' υπάρχουν πολλές συσχετιστικές ισορροπίες Nash. Για παράδειγμα η έμπιστη αρχή μπορεί να επιλέγει μία εκ των $\{\Sigma, \Sigma\}, \{\Sigma, \Delta\}$ και $\{\Delta, \Sigma\}$ με πιθανότητα $1/3$. Σε αυτή την περίπτωση ο παίκτης από τον οποίο η έμπιστη αρχή ζητάει να (Δ)ιασχίσει (αν υπάρχει τέτοιος) γνωρίζει ότι θα έχει όφελος 1 αφού από τον άλλο παίκτη θα ζητηθεί να (Σ)ταματήσει, ενώ αν δεν υπακούσει κι επιλέξει να (Σ)ταματήσει θα έχει όφελος 0. Ο παίκτης από τον οποίο ζητείται να (Σ)ταματήσει γνωρίζει ότι από τον άλλο παίκτη έχει ζητηθεί είτε να (Δ)ιασχίσει είτε να (Σ)ταματήσει με πιθανότητα $1/2$. Σε περίπτωση που υπακούσει έχει όφελος 0, ενώ σε περίπτωση που δεν υπακούσει κι επιλέξει να (Δ)ιασχίσει, έχει αναμενόμενο όφελος $-49,5$. Βλέπουμε λοιπόν ότι και σε αυτή την περίπτωση είναι προς όφελος του παίκτη να υπακούσει. Οπότε η λύση αυτή αποτελεί συσχετιστική ισορροπία Nash.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθούμε στην έννοια της *ϵ-προσεγγιστικής ισορροπίας Nash*, δηλαδή μιας κατάστασης όπου κανένας παίκτης δεν μπορεί να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του και να αυξήσει την ωφέλειά του κατά έναν παράγοντα μεγαλύτερο του ϵ. Η έννοια αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική στην Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων, ειδικά από τη στιγμή που η εύρεση μιας (κανονικής) ισορροπίας Nash είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα σε πολλές κατηγορίες παιγνίων. Συνήθως όταν μιλάμε για προσεγγιστική ισορροπία Nash αναφερόμαστε σε αμιγείς ισορροπίες, αφού αυτή είναι η κατηγορία ισορροπιών που μας ενδιαφέρει να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε (ή έστω να προσεγγίσουμε) στα περισσότερα παίγνια. Ο τυπικός ορισμός της ϵ-προσεγγιστικής ισορροπίας Nash για αμιγείς στρατηγικές είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1.5: Ένα προφίλ στρατηγικών $s \in S$ αποτελεί μια ϵ-προσεγγιστική ισορροπία Nash αν για κάθε παίκτη $i \in N$ και κάθε άλλο προφίλ στρατηγικών $s'_i \in S_i$ έχουμε:

$$(1+\epsilon)(u_i(s_i, s_{-i})) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

1.1.5 Το Τίμημα της Αναρχίας

Όπως είδαμε παραπάνω, το αποτέλεσμα της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών είναι να οδηγείται το σύστημα σε μία κατάσταση ισορροπίας η οποία δεν είναι η βέλτιστη για το κοινωνικό σύνολο. Ποσοτικοποιούμε το κόστος της εγωιστικής και μη συνεργατικής συμπεριφοράς των παικτών με την έννοια *τίμημα της αναρχίας* (Price of Anarchy - *PoA*) [KP99]. Σαν τίμημα της αναρχίας ορίζεται ο λόγος του μεγαλύτερου κοινωνικού κόστους σε κατάσταση ισορροπίας Nash προς το ελάχιστο δυνατό κοινωνικό κόστος. Τυπικά ορίζεται ως

$$PoA = \max_{s, s^{NE}} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i(s^{NE})}{\sum_{i=1}^{n} c_i(s)},$$

όπου s^{NE} ένα προφίλ στρατηγικών που αποτελεί ισορροπία Nash για το σύστημα και s ένα τυχαίο προφίλ στρατηγικών.

Για παράδειγμα, στο Δίλημμα του Φυλακισμένου έχουμε: $s^{NE} = (M, M)$ με κόστος $C(s^{NE}) = c_1(s^{NE}) + c_2(s^{NE}) = 10$ και $s^{opt} = (\Sigma, \Sigma)$ με κόστος $C(s^{opt}) = 1 + 1 = 2$. Οπότε το τίμημα της αναρχίας είναι PoA$=\frac{5}{1} = 5$.

Αν για το ίδιο παίγνιο θέταμε $c_1(M, M) = t$, $c_1(M, \Sigma) = 0$, $c_1(\Sigma, M) = t+1$, $c_1(\Sigma, \Sigma) = 1$, $c_2(M, M) = t$, $c_2(M, \Sigma) = t + 1$, $c_2(\Sigma, M) = 0$, $c_2(\Sigma, \Sigma) = 1$, τότε πάλι κατάσταση ισορροπίας θα ήταν το διάνυσμα (M, M) και βέλτιστη λύση το (Σ, Σ), όμως τώρα το τίμημα της αναρχίας θα γινόταν PoA$=\frac{t}{1} = t$, δηλαδή μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο καθώς $t \to \infty$. Βλέπουμε λοιπόν ότι είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε παίγνια στα οποία το τίμημα της αναρχίας είναι μη-φραγμένο.

Όπως έχουμε δει, υπάρχουν παίγνια που διαθέτουν περισσότερες από μια καταστάσεις ισορροπίας Nash. Στις περιπτώσεις αυτές, εκτός από το τίμημα της αναρχίας, έχει νόημα και η έννοια *τίμημα της σταθερότητας* (Price of Stability - *PoS*), που είναι ο λόγος του ελάχιστου κοινωνικού σε κατάσταση της αναρχίας προς το ελάχιστο δυνατό κοινωνικό κόστος γενικά. Τυπικά ορίζεται ως

$$PoS = \min_{s^{NE}}, \max_{s} \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i(s^{NE})}{\sum_{i=1}^{n} c_i(s)},$$

όπου s^{NE} ένα προφίλ στρατηγικών που αποτελεί ισορροπία Nash για το σύστημα και s ένα τυχαίο προφίλ στρατηγικών.

Στο Δίλημμα του Φυλακισμένου όπου υπάρχει μόνο μία ισορροπία Nash, οι δύο τιμές PoA και PoS ταυτίζονται. Το ίδιο συμβαίνει και στο Chicken Game αν εξετάσουμε μόνο αμιγείς ισορροπίες Nash, διότι και οι δύο καταστάσεις ισορροπίας έχουν το ίδιο κοινωνικό κόστος. Ωστόσο υπάρχουν παίγνια, όπως θα δούμε παρακάτω στα ατομικά παίγνια συμφόρησης, στα οποία το τίμημα της σταθερότητας είναι ίσο με τη μονάδα, ενώ το τίμημα της αναρχίας μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο.

1.2 Παίγνια Συμφόρησης και Παίγνια Δυναμικού

1.2.1 Παίγνια Συμφόρησης

Τα Παίγνια Συμφόρησης είναι μια κλάση παιγνίων που παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τον Rosenthal στο [Ros73]. Βασική τους ιδιότητα είναι ότι διαθέτουν πάντα αμιγή ισορροπία Nash. Χαρακτηρίζονται από ένα σύνολο παικτών και ένα σύνολο πόρων, όπου κάθε εφικτή στρατηγική ενός παίκτη είναι υποσύνολο αυτών των πόρων και η ωφέλειά του εξαρτάται μόνο από το πλήθος των άλλων παικτών που χρησιμοποιούν τον κάθε πόρο που περιλαμβάνεται στη στρατηγική του. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός.

Ορισμός 1.6: Ένα *παίγνιο συμφόρησης* χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο $N = \{1, 2, ..., n\}$ από n παίκτες και από ένα σύνολο πόρων E. Για κάθε παίκτη i το S_i είναι το σύνολο εφικτών στρατηγικών του και κάθε στρατηγική $s_i \in S_i$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο των πόρων, δηλαδή $S_i \subseteq 2^E$. Για κάθε πόρο $e \in E$ ορίζεται μια συνάρτηση κόστους ή καθυστέρησης $\ell_e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, όπου το $\ell_e(k)$ υποδηλώνει το κόστος χρήσης του πόρου e για κάθε παίκτη, όταν αυτός χρησιμοποιείται από k παίκτες. Για ένα δοσμένο προφίλ στρατηγικών $s \equiv= (s_i, s_{-i})$ το κόστος για τον παίκτη i είναι $c_i(s) = \sum_{e \in s_i} \ell_e(n_e(s))$, όπου $n_e(s) = |\{j \in N : e \in s_j\}|$.

1.2.2 Παίγνια Δυναμικού

Η Ακριβής Συνάρτηση Δυναμικού

Βασικό χαρακτηριστικό των παίγνιων δυναμικού είναι η ύπαρξη μιας *συνάρτησης δυναμικού*. Παρακάτω δίνουμε τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης δυναμικού.

Ορισμός 1.7: Για ένα παίγνιο, όπως αυτό ορίστηκε στην Ενότητα 1.3, μια συνάρτηση $\Phi : S \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *συνάρτηση δυναμικού*, αν για κάθε παίκτη i και $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ ισχύει:

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) = \Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) \forall s_i, s'_i \in S_i.$$

Ένα παίγνιο που διαθέτει συνάρτηση δυναμικού ονομάζεται *παίγνιο δυναμικού*. Η συνάρτηση αυτή συχνά ονομάζεται και *ακριβής συνάρτησης δυναμικού* για να τη διακρίνουμε από άλλα είδη συναρτήσεων δυναμικού στα οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δυναμικού ουσιαστικά 'παρακολουθεί' τη μεταβολή στο κόστος του παίκτη που μεταβάλλει μονομερώς τη στρατηγική του. Όταν ένα παίγνιο βρίσκεται σε μια κατάσταση ισορροπίας τότε κανένας παίκτης δεν μπορεί να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του βελτιώνοντας το κόστος του. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τον παραπάνω ορισμό ότι ένα σημείο ισορροπίας του παιγνίου θα αποτελεί αναγκαστικά (τοπικό ή ολικό) ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού. Υποθέτοντας ότι ο χώρος των προφίλ στρατηγικών είναι πεπερασμένος, η συνάρτηση δυναμικού έχει πάντα ελάχιστο, τα παίγνια δυναμικού διαθέτουν πάντα μια αμιγή ισορροπία Nash.

Ο τρόπος που ορίστηκε η συνάρτηση δυναμικού μας δίνει μια μέθοδο εύρεσης μιας αμιγούς ισορροπίας Nash. Ξεκινώντας από μία τυχαία διαμόρφωση $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$

του παιγνίου, θεωρούμε μια ακολουθία διαμορφώσεων $(s^1, s^2, ..., s^k, ...)$ τέτοια ώστε σε κάθε βήμα της ακρβώς ένας παίκτης μεταβάλλει τη στρατηγική του επιλέγοντας κάθε φορά αυτή που ελαχιστοποιεί (ή έστω βελτιώνει απλά) το κόστος του με βάση την υπάρχουσα διαμόρφωση. Τότε προφανώς θα ισχύει $\Phi(s^1) > \Phi(s^2) > ... > \Phi(s^k) > ...$ κι επειδή ο χώρος των προφίλ στρατηγικών είναι πεπερασμένος, η ακολουθία αυτή θα τερματίζει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού, δηλαδή σε μία ισορροπία Nash. Δηλαδή ο φυσικός τρόπος εξέλιξης ενός παιγνίου συμφόρησης με ορθολογικούς παίκτες συγκλίνει σε αμιγή ισορροπία Nash μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Άλλα Είδη Συναρτήσεων Δυναμικού

Για να υπάρχει σύκγλιση σε ισορροπία Nash, με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω αρκεί να ισχύει μια συνθήκη πιο ασθενής από αυτή του ορισμού χ. Συγκεκριμένα αρκεί να υπάρχει μια συνάρτηση $\Phi : S \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε παίκτη i και $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ ισχύει:

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) \geq 0 <=> \Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) \geq 0 \forall s_i, s'_i \in S_i.$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση Φ ονομάζεται *διατακτική συνάρτηση δυναμικού* και τα αντίστοιχα παίγνια *διατακτικά παίγνια δυναμικού*. Για τους λόγους που περιγράψαμε παραπάνω Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.8: Κάθε πεπερασμένο διατακτικό παίγνιο δυναμικού διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash.

Τέλος, αν $w = (w_i), i \in N$ είναι ένα διάνυσμα θετικών αριθμών τα οποία ονομάζουμε βάρη. Μια συνάρτηση $\Phi : S \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε παίκτη i και $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ ισχύει:

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s'_i, s_{-i}) = w_i(\Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i})) \forall s_i, s'_i \in S_i$$

ονομάζεται *w-σταθμισμένη συνάρτηση δυναμικού* και το αντίστοιχο παίγνιο *w-σταθμισμένο παίγνιο δυναμικού*. Αν τα συγκεκριμένα βάρη w δεν μας ενδιαφέρουν, τότε η συνάρτηση ονομάζεται απλά *σταθμισμένη συνάρτηση δυναμικού*. Ο ορισμός της σταθμισμένης συνάρτησης δυναμικού είναι πιο ισχυρός από αυτόν της διατακτικής συνάρτησης δυναμικού, οπότε προφανώς και τα σταθμισμένα παίγνια δυναμικού διαθέτουν αμιγή ισορροπία Nash. Τέλος, μια ακριβής συνάρτηση δυναμικού είναι μια w-σταθμισμένη συνάρτηση δυναμικού με $w_i = 1 \ \forall i \in N$.

Συνήθως, όταν θέλουμε να μελετήσουμε κατά πόσο ένα παίγνιο διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash, προσπαθούμε να κατασκευάσουμε για το παίγνιο αυτό μια συνάρτηση που έχει μία από τις παραπάνω μορφές (διατακτική, σταθμισμένη ή ακριβής συνάρτηση δυναμικού).

1.2.3 Παραδείγματα

Το παίγνιο 'Το Δίλημμα του Φυλακισμένου' που περιγράψαμε στην ενότητα 1.1 έχει πίνακα κόστους τον

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

όπως είχαμε δει. Μια συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο αυτό είναι η

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

,δηλαδή $\Phi(M, M) = 0$, $\Phi(M, \Sigma) = 5$, $\Phi(\Sigma, M) = 0$ και $\Phi(\Sigma, \Sigma) = 6$. Εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι η συνάρτηση αυτή είναι πράγματι μια ακριβής συνάρτηση δυναμικού για το παίγνιο αυτό. Επίσης παρατηρούμε ότι το ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού, δηλαδή το $\Phi(M, M)$ είναι και η μοναδική κατάσταση ισορροπίας Nash του παιγνίου.

Αντίστοιχα, το 'Chicken Game', με πίνακα κόστους τον

$$\begin{pmatrix} (-100, -100) & (1, 0) \\ (0, 1) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

έχει συνάρτηση δυναμικού:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση δυναμικού έχε δύο ελάχιστα, στις καταστάσεις (Δ, Σ), (Σ, Δ) που είναι και οι δύο καταστάσεις (αμιγούς) ισορροπίας Nash του παιγνίου.

1.2.4 Σχέση Μεταξύ Παιγνίων Συμφόρησης και Δυναμικού

Αναφέραμε παραπάνω ότι κάθε παίγνιο συμφόρησης διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash. Στην ενότητα αυτή θα το αποδείξουμε κατασκευάζοντας μια συνάρτηση δυναμικού για τα παίγνια συμφόρησης, όπως τα ορίσαμε στην υποενότητα 1.2.1.

Θεώρημα 1.9: Έστω η συνάρτηση $\Phi : S \to \mathbb{R}_+$ η οποία ορίζεται ως εξής [Ros73]:

$$\Phi(s) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(s)} c_e(i)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ακριβής συνάρτηση δυναμικού για κάθε παίγνιο συμφόρησης, δηλαδή κάθε παίγνιο συμφόρησης είναι και παίγνιο δυναμικού και κατ΄ επέκταση κάθε παίγνιο συμφόρησης διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash.

Απόδειξη: Έστω $s \equiv (s_i, s_{-i})$ και $s' \equiv (s'_i, s_{-i})$. Τότε:

$$\Phi(s) - \Phi(s') = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i) - \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(s')} \ell_e(i) =$$

$$= \sum_{e \in s_i - s'_i} \sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i) - \sum_{e \in s_i - s'_i} \sum_{i=1}^{n_e(s')} \ell_e(i) - \left(\sum_{e \in s'_i - s_i} \sum_{i=1}^{n_e(s')} \ell_e(i) - \sum_{e \in s_i - s'_i} \sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i) \right) =$$

$$= \sum_{e \in s_i - s'_i} \left(\sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i) - \sum_{i=1}^{n_e(s)-1} \ell_e(i) \right) + \sum_{e \in s'_i - s_i} \left(\sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i) - \sum_{i=1}^{n_e(s)+1} \ell_e(i) \right) =$$

$$= \sum_{e \in s_i - s'_i} \ell_e(n_e(s)) - \sum_{e \in s'_i - s_i} \ell_e(n_e(s)+1) = c_i(s) - c_i(s') \qquad \square$$

Μάλιστα έχει αποδειχθεί [MS96] και το παρακάτω πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα, το οποίο είναι ουσιαστικά το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος:

Θεώρημα 1.10: Κάθε πεπερασμένο παίγνιο δυναμικού είναι ισομορφικό με ένα παίγνιο συμφόρησης.

Κεφάλαιο 2

Το Τίμημα της Αναρχίας στα Παίγνια Συμφόρησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το τίμημα της αναρχίας στα παίγνια συμφόρησης. Θα εξετάσουμε δύο κατηγορίες παιγνίων συμφόρησης για τις οποίες τα αποτελέσματα διαφέρουν αρκετά, αν και όπως θα δούμε οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι παραπλήσιες. Και για τις δύο κατηγορίες παιγνίων, θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε την εξάρτηση του τίμηματος της αναρχίας από τη μορφή που έχουν οι συναρτήσεις καθυστέρησης στους πόρους του δικτύου. Θα εκφράσουμε δηλαδή τα όρια στο τίμημα της αναρχίας ως συνάρτηση ενός συνόλου $\mathcal{L}$ στο οποίο ανήκουν οι συναρτήσεις καθυστέρησης του δικτύου και θα παρουσιάσουμε τρόπους υπολογισμού αυτών των ορίων για ορισμένες συνηθισμένες κατηγορίες συναρτήσεων καθυστέρησης.

2.1 Μη-ατομικά Παίγνια Συμφόρησης Δικτύου

Ένα παίγνιο συμφόρησης στο οποίο οι πόροι E αντιστοιχούν στις ακμές ενός γράφου και για κάθε παίκτη i το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του S_i περιλαμβάνει ακριβώς όλα τα μονοπάτια μεταξύ δύο κόμβων $s_i - t_i$, χαρακτηριστικών για τον παίκτη, ονομάζεται παίγνιο συμφόρησης δικτύου. Παρακάτω θα μελετήσουμε ένα τέτοιο παίγνιο.

2.1.1 Το Μοντέλο και Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε ένα δίκτυο το οποίο αναπαριστούμε με έναν κατευθυνόμενο πολυγράφο $G = (V, E)$ και k ζεύγη κορυφών της μορφής $\{s_i, t_i\}$ τα οποία ονομάζουμε *αιτήματα* (*commodities*). Σε κάθε αίτημα $i = 1, ..., k$, αντιστοιχούμε μια απαίτηση εξυπηρέτησης d_i, που γενικά αφορά κάποια ποσότητα (κίνησης, πληροφορίας,...) που πρέπει να μεταφερθεί από το s_i στο t_i. Επίσης συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_i$ το σύνολο των απλών $s_i - t_i$ μονοπατιών και ορίζουμε $\mathcal{P} = \cup_i \mathcal{P}_i$. Για κάθε αίτημα υποθέτουμε ότι η απαίτηση εξυπηρέτησης μπορεί να διαμεριστεί αυθαίρετα σε περισσότερα από ένα μονοπάτια. Ουσιαστικά κάθε αίτημα αποτελείται από ένα πολύ μεγάλο πλήθος χρηστών (παικτών), όπου ο καθένας επιλέγει ένα μονοπάτι και το βάρος του είναι απειροελάχιστο, δηλαδή η απόφαση ενός μόνο χρήστη δεν

επηρεάζει ουσιαστικά το σύστημα. Αυτός είναι ο λόγος που το μοντέλο αυτό ονομάζεται *μη-ατομικό* (*non-atomic*). Αν υπάρχει μόνο ένα αίτημα, δηλαδή όλοι οι παίκτες έχουν κοινούς κόμβους εκκίνησης και τερματισμού, οπότε έχουν και κοινά διαθέσιμα μονοπάτια, δηλαδή στρατηγικές, τότε το παίγνιο είναι συμμετρικό. Σε διαφορετική περίπτωση είναι μη-συμμετρικό.

Μια *ροή* (*flow*) είναι μια συνάρτηση $f : \mathcal{P} \to \mathcal{R}_+$. Συμβολίζουμε με f_P τη συνολική συμφόρηση (ή φορτίο) σε ένα μονοπάτι $P \in \mathcal{P}$. Μια ροή f ονομάζεται *εφικτή* (*feasible*) αν $\forall i = 1, ..., k, \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = d_i$. Για κάθε ακμή $e \in E$ και για μία συγκεκριμένη ροή f ορίζουμε τη συμφόρηση σε μια ακμή e ως $f_e = \sum_{P:e \in P} f_P$. Λέμε ότι η ροή f προκαλεί τη συμφόρηση (f_e). Επίσης αντιστοιχούμε σε κάθε ακμή μια συνεχή, θετική και αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης ℓ_e η οποία αντιστοιχεί σε κάθε τιμή του φορτίου της ακμής e την καθυστέρηση που υφίσταται ο χρήστης για να τη διασχίσει. Θεωρούμε ότι η συνολική καθυστέρηση ενός μονοπατίου P για δοσμένη ροή f ισούται με το άθροισμα των καθυστερήσεων όλων των ακμών του P (προσθετικό μοντέλο) και συμβολίζεται με $\ell_P = \sum_{e \in P} \ell_e(f_e)$. Ένα στιγμιότυπο ενός μη-ατομικού παιγνίου συμφόρησης περιγράφεται πλήρως από την τριάδα (G, d, ℓ).

Ορίζουμε το *κοινωνικό κόστος* (*social cost*) μιας ροής f ως $C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} \ell_P(f) f_P$. Εναλλακτικά, μπορούμε να αθροίσουμε πάνω σε όλες τις ακμές του γράφου και να πάρουμε τον παρακάτω τύπο:

$$C(f) = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e$$

Μια *βέλτιστη ροή* (*optimal flow*) για ένα στιγμιότυπο (G, d, ℓ) είναι μια εφικτή ροή f^* η οποία ελαχιστοποιεί το $C(f)$. Τυπικά, μια βέλτιστη ροή f^* ορίζεται ως η λύση του παρακάτω μη γραμμικού προγράμματος, υπό τον όρο η συνάρτηση $\ell_e(f_e) f_e$ να είναι κυρτή (ώστε τα τοπικά και τα ολικά βέλτιστα να συμπίπτουν):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P:e \in P} f_P = f_e && \forall e \in E \\
& \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = d_i && \forall i = 1, ..., k \\
& f_P \geq 0 && \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned}$$

Έφ' όσον η συνάρτηση $\ell_e(f_e) f_e$ είναι κυρτή, κάτι που στην πράξη ισχύει για τις συνήθεις συναρτήσεις καθυστέρησης (π.χ. πολυώνυμα ορισμένου βαθμού), το παραπάνω πρόγραμμα έχει μοναδική λύση η οποία μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

2.1.2 Ροή σε Ισορροπία Nash

Μία εφικτή ροή f λέμε ότι είναι ροή σε ισορροπία Nash αν κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να παρεκκλίνει από το μονοπάτι που έχει επιλέξει, δηλαδή κάθε παίκτης βρίσκεται στο συντομότερο διαθέσιμο μονοπάτι ως προς τις τιμές $\ell_e(f_e)$.

Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός μιας ροής σε ισορροπία Nash.

Ορισμός 2.1: Μια εφικτή ροή f για ένα δίκτυο (G, d, ℓ) είναι σε ισορροπία Nash αν $\forall i = 1, ..., k$, P_1,$P_2 \in \mathcal{P}_i$, με $f_{P_1} > 0$ και $\delta \in (0, f_{P_1}]$, έχουμε $\ell_{P_1}(f) \leq \ell_{P_2}(\hat{f})$, όπου

$$\hat{f}_P = \begin{cases} f_P - \delta & \text{if } P = P_1 \\ f_P + \delta & \text{if } P = P_2 \\ f_P & \text{if } P \neq \{P_1, P_2\} \end{cases}$$

Το σύμβολο $\hat{f}$ αντιπροσωπεύει μια ροή της οποίας η μόνη διαφορά από την f είναι ότι μια πολύ μικρή ποσότητα φορτίου δ από το μονοπάτι P_1 έχει μεταφερθεί σε ένα άλλο μονοπάτι P_2. Ο παραπάνω ορισμός υπαινίσσεται ότι για μια ροή f σε ισορροπία Nash, καμία τέτοια ποσότητα δ δεν θα 'προτιμούσε' να μεταφερθεί από το μονοπάτι P_1 στο P_2.

Η έννοια της ισορροπίας Nash του συγκεκριμένου μοντέλου ταυτίζεται με αυτή της *ισορροπίας Wardrop*, εξαιτίας της συνεισφοράς του Wardrop [War52], ο οποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε το μοντέλο αυτό και τις καταστάσεις ισορροπίας του.

Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός της ισορροπίας Wardrop που είναι ουσιαστικά ισοδύναμος με τον παραπάνω ορισμό της ισορροπίας Nash.

Πρόταση 2.2: Μια εφικτή ροή f για ένα δίκτυο (G, d, ℓ) είναι σε ισορροπία Wardrop (ή Nash) ανν $\forall i = 1, ..., k$, P_1,$P_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{P_1} > 0$, $\ell_{P_1}(f) \leq \ell_{P_2}(f)$.

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι ότι, αν η f είναι σε ισορροπία Nash, τότε όλα τα $s_i - t_i$ μονοπάτια που μεταφέρουν φορτίο έχουν ίδια καθυστέρηση. Αν αυτή την καθυστέρηση τη συμβολίσουμε με $L_i(f)$, μπορούμε να εκφράσουμε το κοινωνικό κόστος μιας ροής σε ισορροπία Nash ως: $C(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f) d_i$.

Μια επιπλέον συνέπεια του γεγονότος ότι σε μια κατάσταση ισορροπίας οι παίκτες επιλέγουν τα συντομότερα μονοπάτια ως προς τις καθυστερήσεις των ακμών $\ell_e(f_e)$ είναι η παρακάτω πολύ σημαντική πρόταση:

Πρόταση 2.3: Μια εφικτή ροή f για ένα δίκτυο (G, d, ℓ) είναι σε ισορροπία Nash ανν

$$\sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e \leq \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e^* \qquad \text{για όλες τις εφικτές ροές } f^*$$

Απόδειξη:

$$\sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e = C(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f) d_i \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \ell_P(f) f_P^* = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e^*$$

εφόσον $L_i(f) \leq \ell_P(f)$ $\forall i, P \in \mathcal{P}_i$ και $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^* = d_i$ $\forall i$ και για όλες τις εφικτές ροές f^*.

Αντίστροφα: Έστω f μια ορισμένη ροή και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$C^f(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \ell_P(f) x_P = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) x_e$$

στο σύνολο των εφικτών ροών. Από τον δεύτερο ορισμό παρατηρούμε ότι μπορούμε ισοδύναμα να δείξουμε ότι αν μια ροή f ελαχιστοποιεί το $C^f(\cdot)$ τότε η ροή αυτή είναι ροή ισορροπίας Nash.

Από τον πρώτο ορισμό βλέπουμε ότι, για κάθε αίτημα i, η ροή f^* ελαχιστοποιεί το $C^f(\cdot)$ όταν $f^*_P > 0$ μόνο για μονοπάτια που ελαχιστοποιούν το $\ell_P(f)$ στο σύνολο των $s_i - t_i$ μονοπατιών. Όταν η ροή f ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη τότε είναι ροή σε ισορροπία Nash. □

2.1.3 Η Συνάρτηση Οριακού Κόστους

Ένας άλλος τρόπος να χαρακτηρίσουμε μία βέλτιστη ροή είναι ο εξής: Μια ροή f^* είναι βέλτιστη αν το *οριακό όφελος* (*marginal benefit*) της μειώσης του φορτίου σε ένα μονοπάτι είναι το πολύ όσο το *οριακό κόστος* (*marginal cost*) της αύξησης του φορτίου σε ένα άλλο μονοπάτι. Αυτό το οριακό κόστος μπορεί να συμβολιστεί με την συνάρτηση καθυστέρησης $\ell^*_e(x) = \frac{d}{dy}(y \cdot \ell_e(y))(x) = \ell_e(x) + x \cdot \ell'_e(x)$.

Στη συνέχεια, κατ΄ αντιστοιχία με την πρόταση 2.2 για μια ροή σε ισορροπία Nash, ισχύει η παρακάτω πρόταση για μία βέλτιστη ροή.

Πρόταση 2.4: Μια εφικτή ροή f^* είναι βέλτιστη για ένα δίκτυο (G, d, ℓ) ανν $\forall i = 1, ..., k$, P_1,$P_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{P_1} > 0$, $\ell^*_{P_1}(f) \leq \ell^*_{P_2}(f)$, όπου $\ell^*_P(f) = \sum_{e \in P} \ell^*_e(f_e)$ και η συνάρτηση $x \cdot \ell_e(x)$ είναι κυρτή.

Από τις προτάσεις 2.2 και 2.4 προκύπτει το παρακάτω αρκετά χρήσιμο πόρισμα.

Πόρισμα 2.5: Έστω ένα δίκτυο και μια εφικτή ροή f η οποία είναι βέλτιστη για ένα στιγμιότυπο (G, d, ℓ) . Τότε η f είναι ροή σε ισορροπία Nash για το ίδιο στιγμιότυπο, όπου οι συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell_e(x)$ έχουν αντικατασταθεί με τις $\ell^*_e(x) = \ell_e(x) + x \cdot \ell'_e(x)$.

2.1.4 Ύπαρξη, Μοναδικότητα και Πολυπλοκότητα της Ισορροπίας Nash

Για να δείξουμε ότι υπάρχει πάντα ουσιαστικά μοναδική ροή σε ισορροπία Nash, θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας και συγκεκριμένα την σχέση μεταξύ των προτάσεων 2.2 και 2.4, προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μη-γραμμικό πρόγραμμα, παρόμοιο με αυτό της υποενότητας 2.1.1 για τη βέλτιστη ροή, τα τοπικά βέλτιστα του οποίου θα αποτελούν ροές σε ισορροπία Nash. Αναζητούμε δηλαδή μια συνάρτηση $h_e(x)$

που θα παίζει το ρόλο που είχε η $x\ell_e(x)$ στον ορισμό της βέλτιστης ροής και για την οποία θα ισχύει $h_e^{'}(x) = \ell_e(x)$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το η επιθυμητή συνάρτηση είναι η $h_e^{'}(x) = \int_0^x \ell_e(f_e)$. Έτσι το μη-γραμμικό πρόγραμμα του οποίου η βέλτιστη λύση είναι η ροή ισορροπίας Nash του δικτύου είναι ουσιαστικά ίδιο με αυτό της υποενότητας χ, με τη διαφορά ότι η αντικειμενική συνάρτηση $\sum_{e\in E} \ell_e(f_e)f_e$ έχει αντικατασταθεί από την $\sum_{e\in E} \int_0^x \ell_e(f_e)$. Παρατηρούμε ότι, εφόσον η $\ell_e(\cdot)$ είναι πάντα συνεχής, θετική και αύξουσα, η $\sum_{e\in E} \int_0^x \ell_e(f_e)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση. Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.6: Κάθε στιγμιότυπο ενός μη-ατομικού παιγνίου συμφόρησης επιδέχεται μοναδική ισορροπία Nash. Η μοναδική αυτή ροή μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο λύνοντας το παρακάτω κυρτό πρόγραμμα:

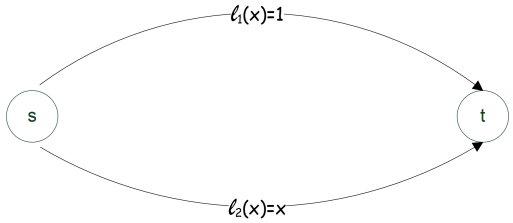
$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e\in E} \int_0^x \ell_e(f_e) & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{P:e\in P} f_P = f_e & \forall e \in E \\
& \sum_{P\in \mathcal{P}_i} f_P = d_i & \forall i = 1, ..., k \\
& f_P \geq 0 & \forall P \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

Η λύση είναι μοναδική υπό την έννοια ότι, για δύο διαφορετικές ροές f, f' σε ισορροπία Nash θα ισχύει $\ell_e(f_e) = \ell_e(f'_e)$ $\forall e \in E$. Επίσης η συνάρτηση $\int_0^x \ell_e(f_e)$, αποτελεί και (ακριβής) συνάρτηση δυναμικού για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό διότι εξασφαλίζει τη δυνατότητα υπολογισμού, αποδοτικά, μιας ισορροπίας Nash για οποιοδήποτε στιγμιότυπο ενός μη-ατομικού δικτυακού παιγνίου συμφόρησης του οποίου οι συναρτήσεις καθυστέρησης πληρούν ορισμένες βασικές συνθήκες (δηλαδή να είναι συνεχείς, θετικές και αύξουσες). Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό δεν είναι γενικά εφικτό σε πολλές άλλες κατηγορίες παιγνίων συμφόρησης.

2.1.5 Παραδείγματα

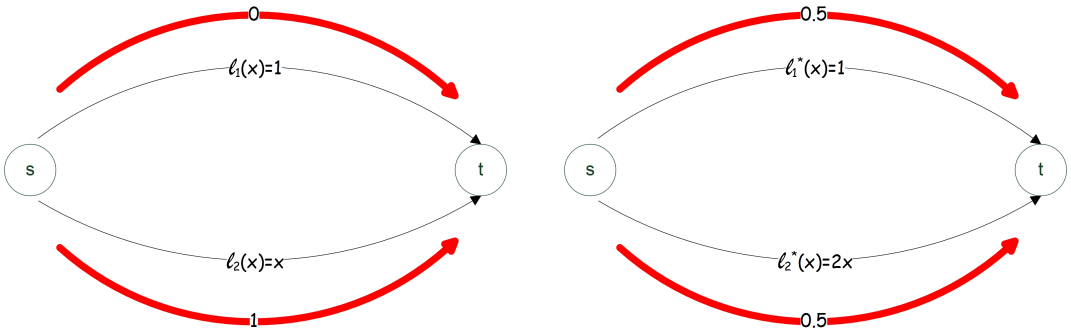
Ένα από τα πιο απλά δίκτυα είναι αυτό του σχήματος 2.1 παρακάτω, το οποίο είναι γνωστό ως το παράδειγμα του Pigou [Pig20].



Σχήμα 2.1: Το παράδειγμα του Pigou

Στο δίκτυο αυτό υπάρχει ένα μόνο αίτημα, $s-t$, και πρέπει να μεταφερθεί μία μονάδα φορτίου. Υπάρχουν δύο διαδρομές, η πάνω με σταθερή καθυστέρηση $\ell_1(x)=1$, ανεξάρτητα από τη συμφόρηση και η κάτω, στην οποία η καθυστέρηση είναι ίση με τη συμφόρηση πάνω στην ακμή, $\ell_2(x)=x$. Στην κατάσταση ισορροπίας (ροή f) ολόκληρο το φορτίο θα βρεθεί στην κάτω ακμή ($f_{e1}=0, f_{e2}=1$) και όλοι οι παίκτες θα υποστούν καθυστέρηση ίση με 1, άρα και το συνολικό κόστος θα είναι ίσο με $C(f)=1$ (σχήμα 2.2.α). Πράγματι, αν μια ποσότητα φορτίου $\epsilon>0$ βρεθεί στην πάνω ακμή, τότε θα έχει καθυστέρηση ίση με 1 οπότε θα επιλέξει να μεταφερθεί στην κάτω ακμή στην οποία θα 'βλέπει' καθυστέρηση $1-\epsilon$.

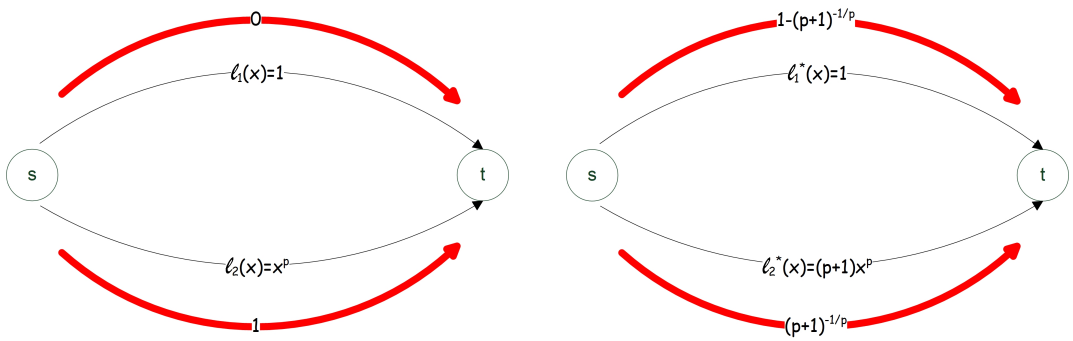
Αν όμως μπορούσαμε να μοιράσουμε το φορτίο κατά τρόπο τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κοινωνικό κόστος, θα τοποθετούσαμε $\frac{1}{2}$ μονάδα φορτίου στην πάνω ακμή και την υπόλοιπη $\frac{1}{2}$ στην κάτω ακμή. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή είναι πράγματι η βέλτιστη ροή. Πράγματι αν αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell_1(\cdot)$ και $\ell_2(\cdot)$ με τις αντίστοιχες συναρτήσεις οριακού κόστους $\ell_1^*(x)=1$ και $\ell_2^*(x)=2x$ η ροή f^* με $f_{e1}^*=0,5$ και $f_{e2}^*=0,5$ αποτελεί ροή ισορροπίας για το νέο δίκτυο (σχήμα 2.2.β). Το συνολικό κόστος της βέλτιστης ροής είναι $C(f^*)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. Δηλαδή το τίμημα της αναρχίας στο στιγμιότυπο αυτό είναι ίσο με $\frac{4}{3}$. Όπως θα δούμε παρακάτω η τιμή αυτή δεν είναι τυχαία, αλλά είναι το χειρότερο δυνατό τίμημα της αναρχίας στα μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης.



(α') Η ροή σε ισορροπία Nash (β') Η βέλτιστη ροή

Σχήμα 2.2: Η λύση ισορροπίας και η βέλτιστη λύση στο παράδειγμα του Pigou

Αν στο παραπάνω παράδειγμα αντικαταστήσουμε την συνάρτηση $\ell_2(x) = x$ με τη μη-γραμμική συνάρτηση $\ell_2(x) = x^p$ για κάποιο μεγάλο $p > 1$, τότε η ροή ισορροπίας Nash είναι ίδια όπως πριν, με ολόκληρο το φορτίο να βρίσκεται στην κάτω ακμή και το κοινωνικό κόστος είναι πάλι ίσο με 1 (σχήμα 2.3.α). Αν όμως εξετάσουμε το ίδιο δίκτυο με τις συναρτήσεις οριακού κόστους αυτή τη φορά, η ροή που διοχετεύει $f^*_{e2} = (p+1)^{-1/p}$ μονάδες φορτίου στην κάτω ακμή και $f^*_{e1} = 1-(p+1)^{-1/p}$ στην πάνω, ισοφαρίζει το οριακό κόστος των δύο ακμών (ίσο με 1 και στις δύο περιπτώσεις), είναι δηλαδή η βέλτιστη ροή του αρχικού δικτύου (σχήμα 2.3.β). Το κόστος αυτής της ροής είναι $C(f^*) = 1 - p \cdot (p+1)^{-(p+1)/p}$, οπότε $C(f^*) \to 0$ καθώς $p \to \infty$. Βλέπουμε δηλαδή ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα απλό δίκτυο δύο κόμβων και δύο ακμών στο οποίο το τίμημα της αναρχίας είναι όσο μεγάλο θέλουμε.



(α′) Η ροή σε ισορροπία Nash (β′) Η βέλτιστη ροή

Σχήμα 2.3: Η μη-γραμμική έκδοση του παραδείγματος του Pigou

2.1.6 Υπολογισμός του Τιμήματος της Αναρχίας

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να βρούμε γενικότερα αποτελέσματα για το τίμημα της αναρχίας για το μοντέλο που εξετάζουμε. Όπως είδαμε στο 2ο παράδειγμα, αυτό μπορεί να είναι μη φραγμένο σε ορισμένες περιπτώσεις. Θα δούμε παρακάτω ότι το τίμημα της αναρχίας είναι ανεξάρτητο από την τοπολογία του δικτύου και εξαρτάται μονάχα από την μορφή των συναρτήσεων καθυστέρησης των ακμών [Rou02a]. Θα παρουσιάσουμε ένα γενικό τύπο που δίνει το τίμημα της αναρχίας και θα υπολογίσουμε τις τιμές που παίρνει για μερικές συνήθισμένες κλάσεις συναρτήσεων. Σαν τίμημα της αναρχίας για μια κλάση συναρτήσεων ορίζουμε το χειρότερο δυνατό τίμημα της αναρχίας που μπορεί να προκύψει σε δίκτυο οι συναρτήσεις καθυστέρησης του οποίου ανήκουν στην κλάση αυτή.

Γραμμικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης

Όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης των ακμών είναι γραμμικές, $\ell_e(x) = a_e(x) + b_e$, $\forall e \in E$ τότε ξέρουμε ήδη από το παράδειγμα του Pigou ότι το τίμημα της αναρχίας είναι

τουλάχιστον $\frac{4}{3}$. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη [CSS08] ότι δεν μπορεί να είναι παραπάνω, δηλαδή το άνω και το κάτω όριο ταυτίζονται και το τίμημα της αναρχίας στην περίπτωση που οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές είναι ακριβώς $\frac{4}{3}$.

Θεώρημα 2.7: Έστω f μια ροή σε ισορροπία Nash σε ένα δίκτυο με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές του ($\ell_e(x) = a_e x + b_e$) και έστω f^{opt} η βέλτιστη ροή για το δίκτυο αυτό. Τότε $C(f) \leq \frac{4}{3}C(f^{opt})$.

Απόδειξη: Έστω f^* μια αυθαίρετη εφικτή ροή. Λόγω της πρότασης χ έχουμε:

$$C(f) = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e \leq \sum_{e \in E} \ell_e(f_e) f_e^* = \sum_{e \in E} \ell_e(f_e^*) f_e^* + \sum_{e \in E} (\ell_e(f_e) - \ell_e(f_e^*)) f_e^*.$$

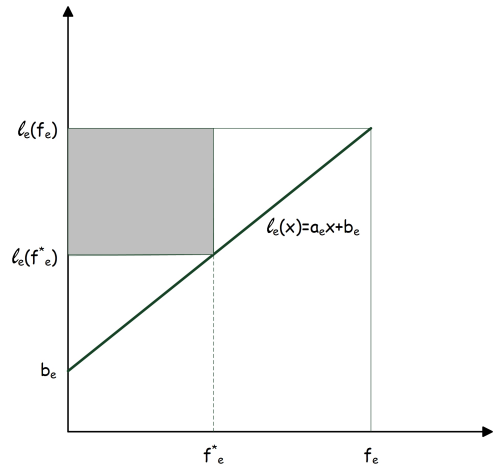
Εφόσον κάθε $\ell_e(\cdot)$ είναι αύξουσα, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $f_e^* \leq f_e$ για να βρούμε ένα άνω φράγμα για τον τελευταίο όρο. Στην περίπτωση αυτή η έκφραση $(\ell_e(f_e) - \ell_e(f_e^*)) f_e^*$ είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου στο σχήμα 2.4 παρακάτω και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$(\ell_e(f_e) - \ell_e(f_e^*)) f_e^* \leq \frac{1}{4} \ell_e(f_e) f_e.$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί να προκύψει κι από το γεγονός ότι $(f_e^* - f_e/2)^2 \geq 0$.

$$\text{Οπότε } C(f) \leq C(f^*) + \frac{1}{4}C(f) => C(f) \leq \frac{4}{3}C(f^*) \text{ για κάθε εφικτή ροή } f^*$$

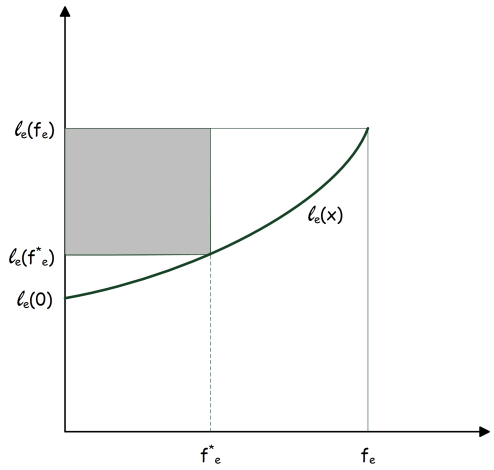
Άρα, για $f^* = f^{opt}$: $C(f) \leq \frac{4}{3}C(f^{opt})$. $\square$



Σχήμα 2.4: Η γεωμετρική επεξήγηση της απόδειξης του θεωρήματος 2.7

Γενικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης

Η σχέση $C(f) \leq \sum_{e\in E} \ell_e(f_e^*)f_e^* + \sum_{e\in E}(\ell_e(f_e) - \ell_e(f_e^*))f_e^*$ από την απόδειξη του θεωρήματος 2.7 ισχύει ανεξάρτητα από το είδος των συναρτήσεων καθυστέρησης. Έτσι κατ' αναλογία με την περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων καθυστέρησης, στη γενική περίπτωση μας ενδιαφέρει ο λόγος των εμβαδών του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου προς το μεγάλο ορθογώνιο του σχήματος 2.5 παρακάτω, όπου όμως τώρα η συνάρτηση $\ell_e(\cdot)$ είναι κάποια αυθαίρετη συνεχής, θετική και αύξουσα συνάρτηση. Αν συμβολίσουμε τον λόγο αυτό των δύο εμβαδών με λ, τότε το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ ίσο με $(1-\lambda)^{-1}$. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει ο λόγος λ εξαρτάται αποκλειστικά από την συνάρτηση $\ell_e(\cdot)$ και ορίζεται ως παράμετρος της συνάρτησης:



Σχήμα 2.5: Ο ορισμός του β για γενικές συναρτήσεις καθυστέρησης

$$\beta(\ell_e) = \sup_{0\leq y\leq x} \frac{y\cdot(\ell_e(x)-\ell_e(y))}{x\cdot\ell_e(x)}.$$

Αντίστοιχα, για μια κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης $\mathcal{L}$, ορίζουμε

$$\beta(\mathcal{L}) = \sup_{\ell_e\in\mathcal{L}} \sup_{0\leq y\leq x} \frac{y\cdot(\ell_e(x)-\ell_e(y))}{x\cdot\ell_e(x)}$$

και το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $\rho(\mathcal{L}) = (1-\beta(\mathcal{L}))^{-1}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι υπάρχουν δίκτυα και μάλιστα πολύ απλής μορφής, στα οποία το τίμημα της αναρχίας δίνεται ακριβώς από τον παραπάνω τύπο, δηλαδή τα άνω και κάτω όρια ταυτίζονται.

Έστω λοιπόν ένα δίκτυο δύο κόμβων s, t και δύο $s-t$ ακμών, e_1, e_2 και έστω ένα αίτημα (s,t,d), όπου d η απαίτηση εξυπηρέτησης. Τέλος έστω οι συναρτήσεις καθυστέρησης των

δύο ακμών $\ell_1(x)$ σταθερή συνάρτηση και ίση παντού με $\ell_2(d)$ και $\ell_2(x) \in \mathcal{L}$ αυθαίρετη συνάρτηση για την οποία ισχύει $\beta(\ell) = \beta(\mathcal{L})$. Επίσης υποθέτουμε ότι το $\mathcal{L}$ περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις. Τότε στην κατάσταση ισορροπίας Nash όλο το φορτίο βρίσκεται στην e_2 και το συνολικό κόστος είναι $d \cdot \ell_2(d)$. Έστω τώρα μια εφικτή ροή η οποία διοχετεύει $d - y$ μονάδες φορτίου στην e_1 και τις υπόλοιπες y στην e_2 με συνολικό κόστος $(d-y) \cdot \ell_2(d) + y \cdot \ell_2(y)$. Ο λόγος του κόστους των δύο αυτών ροών είναι

$$\frac{d \cdot \ell_2(d)}{y \cdot \ell_2(y) + (d-y) \cdot \ell_2(d)} = \left(\frac{y \cdot \ell_2(y) + (d-y) \cdot \ell_2(d)}{d \cdot \ell_2(d)} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{y \cdot (\ell_2(d) - \ell_2(y)}{d \cdot \ell_2(d)} \right)^{-1}$$

Για αυθαίρετα επιλεγμένο d, αν το y είναι επιλεγμένο έτσι ώστε να μεγιστοποιεί τον λόγο αυτό, τότε ο όρος $\frac{y \cdot (\ell_2(d) - \ell_2(y)}{d \cdot \ell_2(d)}$ ταυτίζεται με το $\beta(\ell)$ και άρα με το $\beta(\mathcal{L})$. Δηλαδή το τίμημα της αναρχίας για το στιγμιότυπο αυτό είναι τουλάχιστον $(1 - \beta(\mathcal{L}))^{-1}$, ταυτίζεται δηλαδή με το άνω όριο που βρήκαμε παραπάνω.

2.1.7 Άλλα Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις

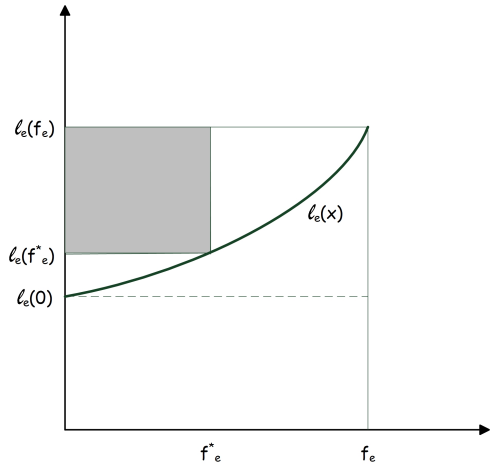
Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, βασιζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να υπολογίσουμε το τίμημα της αναρχίας για διάφορα συνήθη σύνολα συναρτήσεων, δηλαδή πώς θα βρούμε την παράμετρο β των συνόλων αυτών.

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το $\beta(\mathcal{L}_p)$, όπου $\mathcal{L}_p$, το σύνολο που περιέχει όλα τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ p. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι μπορούμε να εργαστούμε με ένα μικρότερο σύνολο, το $\widetilde{\mathcal{L}}_p = \{ax^i : a \in \mathbb{R}, i \leq p\}$. Πράγματι, σε ένα δίκτυο (G, d, ℓ) με συναρτήσεις καθυστέρησης που ανήκουν στο $\mathcal{L}_p$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια ακμή e με $\ell_e(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$ με ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι από $p+1$ ακμές, στο οποίο η i-οστή ακμή θα έχει συνάρτηση καθυστέρησης $\widetilde{\ell}_{e,i}(x) = a_i x^i$. Το νέο δίκτυο $(G, d, \widetilde{\ell})$ είναι προφανώς ισοδύναμο με το αρχικό.

Κατασκευάζουμε λοιπόν ένα δίκτυο δύο κόμβων και δύο ακμών, όπως αυτό στην απόδειξη χ, κι επιλέγουμε $d = a$, $\ell_2(x) = ax^i$ μια αυθαίρετη συνάρτηση του $\widetilde{\mathcal{L}}_p$, και $\ell_1(x) = a$ η σταθερή συνάρτηση, ίση παντού με το $\ell_2(1)$. Το στιγμιότυπο αυτό ισοδύναμο με αυτό του παραδείγματος χ, για το οποίο έχουμε δεί ότι το τίμημα της αναρχίας είναι $[1 - i \cdot (i+1)^{-(i+1)/i}]^{-1} = [1 - \beta(\ell_2)]^{-1}$. Η έκφραση αυτή είναι ανεξάρτητη του a και αύξουσα στο i, οπότε τη μέγιστη δυνατή τιμή του τιμήματος της αναρχίας την παίρνουμε όταν $i = d$, δηλαδή από τις συναρτήσεις της μορφής $\ell(x) = ax^p$, για τις οποίες ισχύει $\beta(\ell) = \beta(\mathcal{L}_p) = \beta(\widetilde{\mathcal{L}}_p) = p \cdot (p+1)^{-(p+1)/p}$, οπότε $\rho(\mathcal{L}_p) = [1 - p \cdot (p+1)^{-(p+1)/p}]^{-1}$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εργαστούμε και για άλλα σύνολα συναρτήσεων.

Υπάρχουν ωστόσο ορισμένες ειδικές περιπτώσεις στις οποίες το τίμημα της αναρχίας είναι πάντα μικρότερο από το άνω όριο που δίνει ο παραπάνω τύπος. Για παράδειγμα στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων καθυστέρησης με μηδενικό σταθερό όρο, δηλαδή $\ell_e(x) = a_e x$, το τίμημα της αναρχίας είναι ακριβώς 1 αντί για $\frac{4}{3}$. Αυτό προκύπτει άμεσα από τις προτάσεις 2.2 και 2.4 κι από το γεγονός ότι $\ell^*(x) = 2 \cdot \ell(x)$. Αντίστοιχα, για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού χωρίς σταθερό όρο, δηλαδή όταν $\ell_e(0) = 0$ τα άνω όρια που έχουν βρεθεί είναι σημαντικά χαμηλότερα από αυτό της γενικής περίπτωσης [CSS05].

Μια άλλη περίπτωση στην οποία τα άνω φράγματα του τιμήματος της αναρχίας είναι καλύτερα από αυτό του γενικού τύπου είναι αυτή στην οποία η τιμή κάθε συνάρτησης καθυστέρησης σε περίπτωση μηδενικής συμφόρησης είναι μη αμελητέα ως προς την τιμή της συνάρτησης καθυστέρησης στην ισορροπία Nash, δηλαδή $\ell_e(0) \geq \eta \ell_e(f^{NE})$ για κάποιο $\eta \in [0, 1)$. Όταν συμβαίνει αυτό, το άνω όριο στο τίμημα της αναρχίας είναι μικρότερο κατά ένα παράγοντα $(1-\eta)^{-1}$. Πράγματι έστω ένα στιγμιότυπο με συναρτήσεις καθυστέρησης από το σύνολο $\mathcal{L}$ και έστω f η ροή ισορροπίας του. Όπως και προηγουμένως, εξετάζουμε το παρακάτω διάγραμμα (που είναι ουσιαστικά ίδιο με το σχήμα 2.5) και παρατηρούμε ότι το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου είναι το πολύ $\beta(\mathcal{L})$ φορές το εμβαδό του ορθογωνίου με πάνω αριστερά γωνία την $(0, \ell_e(f))$ και κάτω δεξιά την $(f_e, \ell_e(0))$, το οποίο με τη σειρά του έχει εμβαδό το πολύ $(1-\eta)\ell_e(f_e) \cdot f_e$. Άμεσα προκύπτει ότι το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $(1-\eta)(1-\beta(\mathcal{L}))^{-1}$ στην περίπτωση αυτή [CSS05].



2.2 Ατομικά Παίγνια Συμφόρησης

2.2.1 Το Μοντέλο και Βασικοί Ορισμοί

Σε αντίθεση με το μοντέλο που μελετήσαμε παραπάνω, εδώ υποθέτουμε ότι το πλήθος των παικτών είναι πεπερασμένο και το βάρος του κάθε παίκτη (που αντιστοιχεί στην απαίτηση εξυπηρέτησης του μη-ατομικού μοντέλου) είναι ένα μη αμελητέο ποσοστό του συνολικού βάρους όλων των παικτών. Επίσης δεν περιοριζόμαστε σε ένα παίγνιο δικτύου αλλά θα μελετήσουμε ένα παίγνιο συμφόρησης στην πιο γενική του μορφή. Όπως θα δούμε, τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε ισχύουν γενικά στα παίγνια συμφόρησης, αλλά και ειδικά στα δικτυακά παίγνια συμφόρησης.

Ο τυπικός ορισμός του παιγνίου είναι ουσιαστικά ο Ορισμός 1.6 της ενότητας 1.2 με τη διαφορά ότι σε κάθε παίκτη i αντιστοιχούμε επιπλέον μια τιμή $w_i > 0$ που είναι το βάρος του. Έτσι τώρα η συνάρτηση καθυστέρησης (θα χρησιμοποιούμε τον όρο αυτό για τις συναρτήσεις κόστους χρήσης των πόρων ακόμα και στα μη δικτυακά παίγνια) του πόρου e ορίζεται ως $\ell_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, όπου το $\ell_e(x)$ υποδηλώνει το κόστος χρήσης του πόρου e ανά μονάδα φορτίου, όταν αυτός χρησιμοποιείται από παίκτες συνολικού βάρους x. Αντίστοιχα, για ένα δοσμένο προφίλ στρατηγικών $s \equiv (s_i, s_{-i})$ το κόστος για τον παίκτη i είναι $c_i(s) = w_i \cdot \sum_{e \in s_i} \ell_e(n_e(s))$, όπου $n_e(s) = \sum_{e \in s_j} w_j$. Το παίγνιο αυτό ονομάζεται παίγνιο συμφόρησης με βάρη. Αν $w_i = 1 \ \forall i \in N$ τότε ονομάζεται παίγνιο συμφόρησης χωρίς βάρη. Θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα και για τις δύο περιπτώσεις.

Το κοινωνικό κόστος ορίζεται ως το άθροισμα από τα κόστη όλων των παικτών, δηλαδή $C(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i(s)$. Ένα προφίλ στρατηγικών ονομάζεται βέλτιστο όταν ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος. Ένα προφίλ στρατηγικών αποτελεί αμιγή ισορροπία Nash αν ισχύει η συνθήκη του ορισμού 1.3.

2.2.2 Ύπαρξη, Πολυπλοκότητα και Σύγκλιση σε Ισορροπία Nash

Παίγνια Χωρίς Βάρη

Ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης χωρίς βάρη, όπως είδαμε στην ενότητα 1.2, διαθέτει συνάρτηση δυναμικού την $\Phi(s) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{n_e(s)} \ell_e(i)$. Ως εκ τούτου κάθε ατομικό παίγνιο συμφόρησης χωρίς βάρη διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash. Όμως, η ύπαρξη μιας συνάρτησης δυναμικού δεν μας δίνει καμία επιπλέον πληροφορία σχετικά με τη μοναδικότητα (ή μη) της ισορροπίας Nash, ούτε εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός αποδοτικού τρόπου υπολογισμού της. Όπως θα δούμε, τα αποτελέσματα αυτά για τα ατομικά παίγνια συμφόρησης διαφέρουν σημαντικά από τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τα μη-ατομικά παίγνια.

Είδαμε ότι στα μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης, υπάρχει ουσιαστικά μοναδική ισορροπία Nash, υπό την έννοια ότι οποιεσδήποτε δύο ροές f, f' σε ισορροπία Nash προκαλούν την ίδια καθυστέρηση σε όλες τις ακμές ($\ell_e(f) = \ell_e(f')$) και κατ' επέκταση έχουν και το ίδιο κόστος. Στα ατομικά παίγνια συμφόρησης αυτό δεν συμβαίνει γενικά και υπάρχουν στιγμιότυπα που επιδέχονται δύο ή περισσότερες ισορροπίες Nash διαφορετικού κόστους. Για παράδειγμα, στο στιγμιότυπο του σχήματος 2.7 της υποενότητας 2.2.3, η βέλτιστη ροή είναι και ροή σε ισορροπία Nash, όμως βλέπουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη ροή σε ισορροπία Nash, μεγαλύτερου κόστους. Μια άλλη διαφορά από τα μη ατομικά παίγνια είναι ότι τώρα οι

έννοιες της ισορροπίας Nash και της ισορροπίας Wardrop δεν ταυτίζονται και μια ροή σε ισορροπία Nash είναι πιθανό να μην πληροί τις αρχές του Wardrop και γενικά μπορεί ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης να μη διαθέτει καμία ισορροπία Wardrop.

Επίσης, στα μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης είδαμε ότι, αν ισχύουν κάποιες απλές προϋποθέσεις για τις συναρτήσεις καθυστέρησης, είναι εύκολο να υπολογιστεί η κατάσταση ισορροπίας Nash ενός στιγμιότυπου. Στα ατομικά παίγνια συμφόρησης, αυτό δεν ισχύει γενικά. Στην ενότητα 1.2.2 περιγράψαμε μια διαδικασία σύγκλισης σε ισορροπία Nash. Η ερώτηση που μας απασχολεί εδώ είναι το πόσο γρήγορα μπορεί να επιτευχθεί η σύγκλιση σε ισορροπία Nash ξεκινώντας από μία αυθαίρετη αρχική κατάσταση, δηλαδή πόσο είναι το μήκος της ακολουθίας διαδοχικών διαμορφώσεων η οποία καταλήγει σε μια ισορροπία Nash. Σε περίπτωση που η σύγκλιση επιτυχγάνεται γρήγορα (σε πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του στιγμιότυπου χρόνο), τότε προφανώς μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά μια ισορροπία Nash. Η απάντηση όμως είναι ότι υπάρχουν στιγμιότυπα παιγνίων και αντίστοιχες αρχικές καταστάσεις τέτοιες ώστε το πλήθος των βημάτων που απαιτείται προκειμένου το σύστημα να οδηγηθεί σε ισορροπία Nash είναι εκθετικό ως προς το μέγεθος του δικτύου. Συγκεκριμένα, οι [FPT04] απέδειξαν ότι ο υπολογισμός μιας αμιγούς ισορροπίας Nash στα ατομικά παίγνια συμφόρησης μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο μόνο στην περίπτωση των συμμετρικών, δικτυακών παιγνίων συμφόρησης. Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή στα γενικά μη-δικτυακά παίγνια συμφόρησης (συμμετρική ή μη) και στα μη-συμμετρικά παίγνια συμφόρησης δικτύου, ο υπολογισμός μιας αμιγούς ισορροπίας Nash είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα (συγκεκριμένα PLS-complete). Ακόμα και στην περίπτωση των συμμετρικών παιγνίων συμφόρησης δικτύου είναι δύσκολο πρόβλημα η εύρεση της καλύτερης ή της χειρότερης (από άποψη κοινωνικού κόστους) ισορροπίας Nash.

Τα αρνητικά αυτά αποτελέσματα οδήγησαν στην προσπάθεια υπολογισμού ϵ-προσεγγιστικών αμιγών ισορροπιών Nash. Στο πλαίσιο αυτό ορίζουμε την έννοα της ϵ-σύγκλισης, η οποία επιτυγχάνεται όταν οι παίκτες οδηγούνται σε μια κατάσταση ϵ-προσεγγιστικής ισορροπίας Nash εκτελώντας σε κάθε βήμα κινήσεις που βελτιώνουν το όφελός τους κατά ένα παράγοντα μεγαλύτερο ή ίσο του ϵ. Έχει αποδειχθεί [CS07] ότι στα συμμετρικά παίγνια συμφόρησης η ϵ-σύγκλιση επιτυγχάνεται, από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση, σε πολυωνυμικό πλήθος βημάτων ως προς τον αριθμό των παικτών και το $1/\epsilon$, αρκεί οι συναρτήσεις κόστους των πόρων να ικανοποιούν την εξής συνθήκη: $\ell_e(t+1) \leq \alpha \ell_e(t)$ για κάθε $t \geq 1$, όπου το $\alpha = O(poly(n))$. Η συνθήκη αυτή προβλέπει ότι όταν ένας παίκτης προστίθεται σε έναν πόρο, το κόστος των υπολοίπων χρηστών του πόρου αυξάνεται το πολύ κατά α. Το θετικό αυτό αποτέλεσμα παύει να ισχύει όταν το παίγνιο είναι μη-συμμετρικό ή όταν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη.

Παίγνια Με Βάρη

Όταν οι παίκτες έχουν διαφορετικά βάρη, τότε το παίγνιο ξεφεύγει από τον αυστηρό ορισμό του παιγνίου συμφόρησης. Έτσι είναι αρκετά πιθανό ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης με βάρη να μην διαθέτει συνάρτηση δυναμικού και κατ' επέκταση να μην διαθέτει αμιγή ισορροπία Nash, όπως για παράδειγμα το στιγμιότυπο του σχήματος 2.6 παρακάτω. Έφ' όσον στη γενική περίπτωση τα αποτελέσματα είναι αρνητικά, το βασικό ερώτημα είναι ποιες υποκατηγορίες των παιγνίων συμφόρησης με βάρη διαθέτουν αμιγή ισορροπία

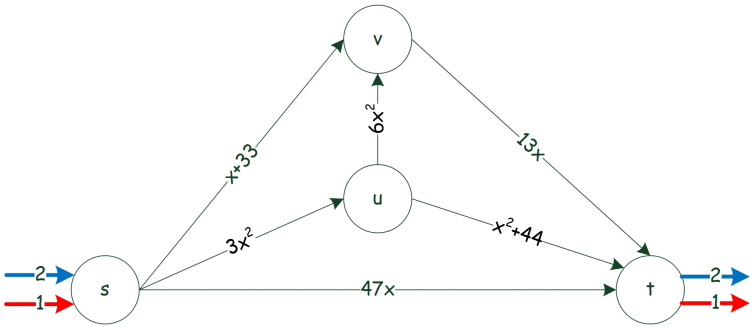
Nash. Περιορισμοί μπορούν να τεθούν είτε στη δομή του παιγνίου είτε στην μορφή των επιτρεπόμενων συναρτήσεων καθυστέρησης στους πόρους. Έχουν βρεθεί τα παρακάτω θετικά αποτελέσματα [FKKMS02], [HK10]:

1. Στα ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη όπου δίκτυο έχει τη μορφή παράλληλων ακμών (ή ισοδύναμα κάθε στρατηγική χρησιμοποιεί μόνο έναν πόρο) υπάρχει πάντα αμιγής ισορροπία Nash και μάλιστα μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

2. Στα ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη στα οποία οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές υπάρχει πάντα αμιγής ισορροπία Nash. Συγκεκριμένα, όταν $ell_e(x) = a_e(x) + b_e$ η συνάρτηση $\Phi(s) = \sum_e (a_e(w_e(s) + b_e)w_e(s) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i} (a_e w_i + b_e)w_i$ αποτελεί b-σταθμισμένη συνάρτηση δυναμικού με $b_i = \frac{1}{2w_i}$.

3. Στα ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη στα οποία οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι εκθετικές υπάρχει πάντα αμιγής ισορροπία Nash. Συγκεκριμένα, όταν $\ell_e(x) = e^x$ η συνάρτηση $\Phi(s) = \sum_{e \in E} e^{(w_e(s))}$ αποτελεί b-σταθμισμένη συνάρτηση δυναμικού με $b_i = \frac{e^{w_i}}{e^{w_i - 1}}$. Στην πιο γενική περίπτωση οι συναρτήσεις καθυστέρησης μπορούν να έχουν τη μορφή $\ell(x) = a_\ell \cdot e^{\phi_x} + b_\ell$, όπου τα $a_\ell, b_\ell \in \mathbb{R}$ μπορεί να εξαρτώνται από τη συνάρτηση $\ell(\cdot)$, ενώ το $\phi \in \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητο της $\ell(\cdot)$.

4. Όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης έχουν οποιαδήποτε άλλη μορφή από αυτή των περιπτώσεων (2) και (3), τότε η ύπαρξη αμιγούς ισορροπίας Nash στα αομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη δεν είναι εξασφαλισμένη και μάλιστα το πρόβλημα της απόφασης αν υπάρχει ή όχι αμιγής ισορροπία Nash σε ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο είναι NP-Complete.



Σχήμα 2.6: Στο δίκτυο αυτό έχουμε δύο παίκτες, βάρους 1 και 2 αντίστοιχα και με κοινή διαδρομή $s \to t$. Με προσεκτική ανάλυση του δικτύου προκύπτει ότι δεν υπάρχει καμία αμιγής ισορροπία Nash.

2.2.3 Το Τίμημα της Αναρχίας για Γραμμικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης

Λόγω της ύπαρξης γενικά περισσότερων από μια ισορροπιών Nash, στα ατομικά παίγνια συμφόρησης έχει νόημα η μελέτη όχι μόνο του τιμήματος της αναρχίας, αλλά και του

τιμήματος της σταθερότητας, δηλαδή του λόγου του κόστους της βέλτιστης ισορροπίας Nash προς το κόστος της βέλτιστης λύσης. Ωστόσο, μας ενδιαφέρει κυρίως να μελετήσουμε την αρνητική επίδραση της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών σε ένα δίκτυο και αυτή εκφράζεται καλύτερα από το τίμημα της αναρχίας, οπότε σε αυτό θα εστιάσουμε την προσοχή μας παρακάτω.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θα ξεκινήσουμε από την πιο απλή περίπτωση όπου οι συναρτήσεις καθυστέρησης των πόρων είναι γραμμικές, $\ell_e(x) = a_e(x) + b_e$. Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις, ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη και χωρίς βάρη.

Άνω Φράγμα στα Παίγνια Χωρίς Βάρη

Όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές, τότε το χειρότερο δυνατό τίμημα της αναρχίας στα ατομικά παίγνια συμφόρησης δίχως βάρη το πολύ $\frac{5}{2}$ [CK05]. Για να το αποδείξουμε θα χρειαστεί κατ' αρχάς η παρακάτω απλή αριθμητική ιδιότητα.

Λήμμα 2.8: Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων k, ℓ ισχύει:

$$k(\ell + 1) \leq \frac{1}{3}\ell^2 + \frac{5}{3}k^2$$

Ακολουθεί τώρα η απόδειξη:

Θεώρημα 2.9 [CK05]: Σε κάθε γραμμικό ατομικό παίγνιο συμφόρησης χωρίς βάρη το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $\frac{5}{2}$.

Απόδειξη: Έστω s μια ισορροπία Nash και s^* ένα βέλτιστο προφίλ στρατηγικών. Στην ισορροπία Nash ο παίκτης i έχει κόστος $c_i(s) = \sum_{e \in s_i}(a_e(n_e(s)) + b_e)$, όπου $n_e(s)$, το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο e στη λύση s. Οπότε το κοινωνικό κόστος θα είναι

$$C(s) = \sum_i c_i(s) = \sum_{e \in E}(a_e(n_e^2(s)) + b_e n_e(s)).$$

Ισχύει ότι $c_i(s) = \sum_{e \in s_i}(a_e(n_e(s)) + b_e) \leq \sum_{e \in s_i^*}(a_e(n_e(s_i^*, s_{-i})) + b_e) \leq \sum_{e \in s_i^*}(a_e(n_e(s)+1) + b_e)$

οπότε για το κοινωνικό κόστος θα ισχύει

$$C(s) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i^*}(a_e(n_e(s) + 1) + b_e) = \sum_{e \in E}(a_e(n_e(s) + 1)n_e(s^*) + b_e n_e(s^*))$$

Από το Λήμμα 2.8 έχουμε ότι $(n_e(s) + 1)n_e(s^*) \leq \frac{1}{3}n_e^2(s) + \frac{5}{3}n_e^2(s^*)$. Οπότε

$$C(s) \leq \sum_{e \in E}(\frac{1}{3}a_e n_e^2(s) + b_e n_e(s^*) + \frac{5}{3}a_e n_e^2(s^*) + b_e n_e(s^*))$$

Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 2.7, αρκεί να επικεντρωθούμε στους πόρους για τους οποίους ισχύει $n_e(s) \geq n_e(s^*)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$C(s) \leq \sum_{e \in E} (\frac{1}{3} a_e n_e^2(s) + b_e n_e(s) + \frac{5}{3} a_e n_e^2(s^*) + b_e n_e(s^*)) \Rightarrow$$

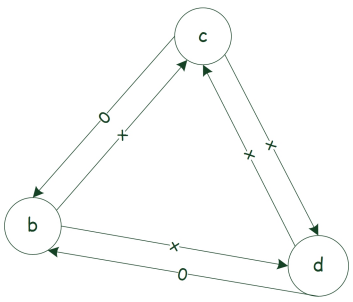
$$\Rightarrow C(s) \leq \frac{1}{3} C(s) + \frac{5}{3} C(s^*) \rightarrow C(s) \leq \frac{5}{2} C(s^*). \qquad \square$$

Κάτω Φράγμα στα Παίγνια Χωρίς Βάρη

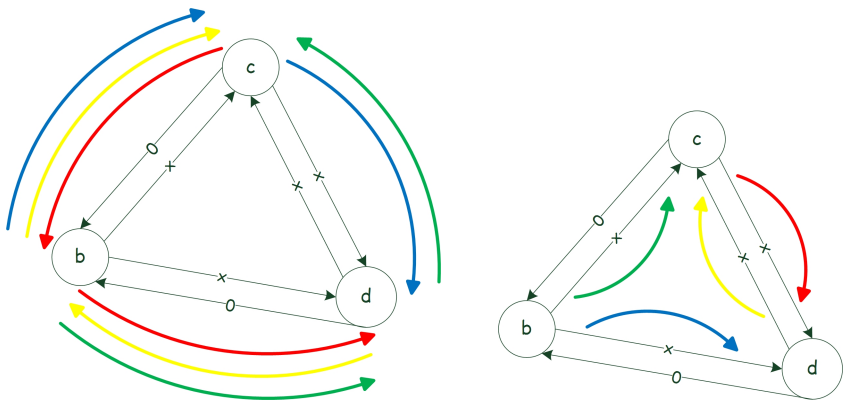
Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα στιγμιότυπο γραμμικού ατομικού παιγνίου συμφόρησης χωρίς βάρη όπου το τίμημα της αναρχίας είναι ακριβώς $\frac{5}{2}$.

Θεώρημα 2.10: Στα γραμμικά ατομικά παίγνια συμφόρησης χωρίς βάρη το τίμημα της αναρχίας είναι ακριβώς $\frac{5}{2}$.

Έστω το παρακάτω απλό δίκτυο (σχήμα 2.7). Έχουμε 4 παίκτες με μονοπάτια $b \rightarrow c$, $b \rightarrow d$, $c \rightarrow d$ και $d \rightarrow c$. Βλέπουμε ότι ο κάθε παίκτης έχει δύο δυνατές διαδρομές, αυτή που χρησιμοποιεί μία ακμή κι αυτή που χρησιμοποιεί δύο ακμές. Στη βέλτιστη λύση κάθε παίκτης επιλέγει την απ΄ ευθείας διαδρομή (σχήμα 2.8.α) με ατομικό κόστος 1, δηλαδή κοινωνικό κόστος 4. Αν όμως όλοι οι παίκτες επιλέξουν την εναλλακτική διαδρομή, καταλήγουμε σε μια κατάσταση ισορροπίας Nash (σχήμα 2.8.β) με κοινωνικό κόστος 10. Οπότε το τίμημα της αναρχίας είναι ακριβώς $\frac{5}{2}$. $\square$



Σχήμα 2.7: Ένα δίκτυο με $PoA = \frac{5}{2}$



(α′) Η ροή σε ισορροπία Nash (β′) Η βέλτιστη ροή

Σχήμα 2.8: Η λύση ισορροπίας και η βέλτιστη λύση στο παράδειγμα του σχήματος 2.7

Άνω Φράγμα στα Παίγνια Με Βάρη

Όταν οι παίκτες έχουν διαφορετικά βάρη το τίμημα της αναρχίας για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης είναι το πολύ $1+\phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ [AAE05]. Η απόδειξη μοιάζει αρκετά με αυτή των παιγνίων χωρίς βάρη. Αρχικά χρειάζεται η παρακάτω ιδιότητα:

Λήμμα 2.11 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz): Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων x, y ισχύει:

$$|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i^2| + \sum_{i=1}^{m} |y_i^2|$$

Ακολουθεί τώρα η απόδειξη:

Θεώρημα 2.12 [AAE05]: Σε κάθε γραμμικό ατομικό παίγνιο συμφόρησης με βάρη το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Απόδειξη: Έστω s μια ισορροπία Nash και s^* ένα βέλτιστο προφίλ στρατηγικών. Στην ισορροπία Nash ο παίκτης i έχει κόστος $c_i(s) = \sum_{e \in s_i}(a_e(w_e(s)) + b_e)$, όπου $w_e(s) = \sum_{j: e \in s_j} w_j$, το συνολικό βάρος των παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο e στη λύση s. Οπότε το κοινωνικό κόστος θα είναι

$$C(s) = \sum_i c_i(s) = \sum_{e \in E}(a_e(w_e^2(s)) + b_e w_e(s)).$$

Ισχύει ότι $c_i(s) = \sum_{e \in s_i}(a_e(w_e(s)) + b_e) \leq \sum_{e \in s_i^*}(a_e(w_e(s_i^*, s_{-i})) + b_e) \leq \sum_{e \in s_i^*}(a_e(w_e(s) + w_i) + b_e)$

οπότε για το κοινωνικό κόστος θα ισχύει

$$C(s) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i^*} (a_e(w_e(s) + w_i) + b_e)$$

Μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση όπου $w_i \leq w_e(s^*)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$C(s) = \sum_{e \in E} (a_e w_e(s) + b_e) w_e(s) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in s_i^*} (a_e(w_e(s) + w_e(s^*)) + b_e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(s) \leq \sum_{e \in E} (a_e(w_e(s) + w_e(s^*)) + b_e) w_e(s^*) = \sum_{e \in E} a_e w_e(s) w_e(s^*) + \sum_{e \in E} (a_e w_e(s^*) + b_e) w_e(s^*)$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwartz έχουμε:

$$\sum_{e \in E} (a_e w_e(s) + b_e) w_e(s) \leq \sqrt{\sum_{e \in E} a_e w_e^2(s) \sum_{e \in E} a_e w_e^2(s^*)} + \sum_{e \in E} (a_e w_e(s^*) + b_e) w_e(s^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{e \in E} (a_e w_e(s) + b_e) w_e(s) \leq \sqrt{\sum_{e \in E} (a_e w_e(s) + b_e) w_e(s) \sum_{e \in E} (a_e w_e(s^*) + b_e) w_e(s^*)} + \sum_{e \in E} (a_e w_e(s^*) + b_e) w_e(s^*$$

Αν ορίσουμε

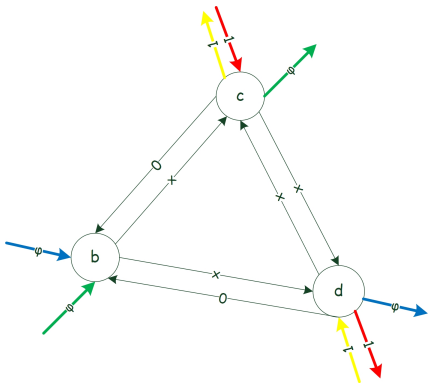
$$x = \sqrt{\frac{C(s)}{C(s^*)}} = \sqrt{\frac{\sum_{e \in E} (a_e w_e(s) + b_e) w_e(s)}{\sum_{e \in E} (a_e w_e(s^*) + b_e) w_e(s^*)}}$$

τότε η παραπάνω ανισότητα ισοδυναμεί με την $x^2 \leq x + 1$ η λύση της οποίας είναι γνωστή, συγκεκριμένα $x^2 \leq 1 + \phi \Rightarrow x^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Το x^2 ισούται με το τίμημα της αναρχίας $\frac{C(s)}{C(s^*)}$, οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

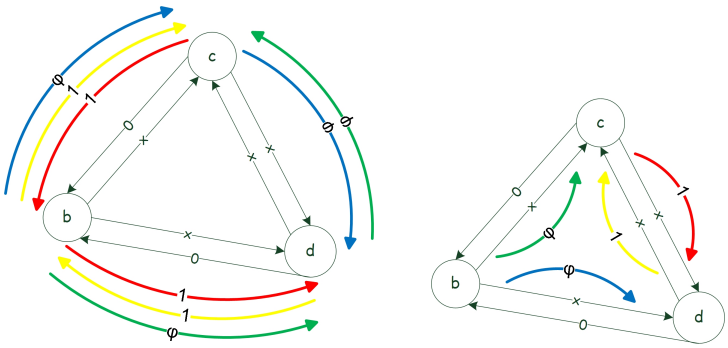
Κάτω Φράγμα στα Παίγνια Με Βάρη

Θεώρημα 2.13: Στα γραμμικά ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη το τίμημα της αναρχίας είναι ακριβώς $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Απόδειξη: Τροποποιούμε το δίκτυο του σχήματος 2.7, προσθέτωντας βάρη στους παίκτες ως εξής: Οι παίκτες με διαδρομές $b \to c$ και $b \to d$ έχουν $w = \phi$ και οι παίκτες με διαδρομές $c \to d$ και $d \to c$ έχουν $w = 1$ (σχήμα 2.9). Πάλι στη βέλτιστη λύση ο κάθε παίκτης επιλέγει τη διαδρομή που αποτελείται από μία μόνο ακμή (σχήμα 2.10.α) και το κοινωνικό κόστος είναι $2\phi^2 + 2$. Αν κάθε παίκτης επιλέξει τη διαδρομή που αποτελείται από δύο ακμές, τότε έχουμε κατάσταση ισορροπίας Nash (σχήμα 2.10.β) με συνολικό κόστος $4\phi^2 + 4\phi + 2$. Το τίμημα της αναρχίας επομένως είναι $\frac{4\phi^2+4\phi+2}{2\phi^2+2} = \frac{8\phi+6}{2\phi+4} = 1 + \frac{6\phi+2}{2\phi+4} = 1 + \frac{2\phi^2+4\phi}{2\phi+4} = 1 + \phi$, επειδή $\phi^2 = \phi + 1$. □



Σχήμα 2.9: Ένα δίκτυο με $PoA = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$



(α′) Η ροή σε ισορροπία Nash (β′) Η βέλτιστη ροή

Σχήμα 2.10: Η λύση ισορροπίας και η βέλτιστη λύση στο παράδειγμα του σχήματος 2.9

2.2.4 Η Έννοια του Ομαλού Παιγνίου

Στην υποενότητα αυτή θα εισάγουμε την έννοια του *ομαλού παιγνίου* (*smooth game*) [Rou01], η οποία θα μας χρησιμεύσει παρακάτω προκειμένου να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας και να υπολογίσουμε μια έκφραση για το τίμημα της αναρχίας των ατομικών παιγνίων συμφόρησης η οποία θα εξαρτάται μόνο από την κλάση των συναρτήσεων καθυστέρησης, κατ΄ αντιστοιχία με την ενότητα 2.1.6. Ο παρακάτω ορισμός αφορά οποιοδήποτε παίγνιο ελαχιστοποίησης κόστους.

Ορισμός 2.14 [Rou01]: Ένα παίγνιο G ονομάζεται (k, m)-ομαλό αν για κάθε δύο καταστάσεις του s, s^* ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq k \cdot C(s^*) + m \cdot C(s).$$

Αν ένα παίγνιο είναι (k, m)-ομαλό με $k \geq 0$ και $m < 1$, εύκολα παρατηρούμε ότι το τίμημα της αναρχίας είναι το πολύ $k/(1-m)$. Είναι δυνατόν ένα παίγνιο να είναι ομαλό για πολλές διαφορετικές τιμές του ζεύγους (k, m). Αν ορίσουμε

$$\rho(G) = \inf \left\{ \frac{k}{1-m} : (k, m) \text{ τέτοια ώστε το παίγνιο είναι} (k, m)\text{-ομαλό} \right\}$$

τότε το $\rho(G)$ αποτελεί άνω φράγμα για το τίμημα της αναρχίας στο παίγνιο G.

Επίσης ένα (k, m)-ομαλό παίγνιο διατηρεί την ιδιότητα του Ορισμού χ, ακόμα κι αν στη θέση του s θεωρήσουμε μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις δυνατές καταστάσεις, όπου στη θέση του κοινωνικού κόστους θεωρούμε την αναμενόμενη τιμή του, δηλαδή ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{s_{-i} \sim \sigma_i}[c_i(s_i^*, s_{-i})] \leq k \cdot C(s^*) + m \cdot \mathbf{E}_{s \sim \sigma}[C(s)].$$

Αυτό έχει σαν συνέπεια τις παρακάτω σημαντικές προτάσεις.

Πρόταση 2.15: Για ένα (k, m) ομαλό παίγνιο G το $\rho(G)$ αποτελεί άνω όριο στο τίμημα της αναρχίας όταν θεωρούμε μεικτές ισορροπίες Nash.

Πρόταση 2.16: Για ένα (k, m) ομαλό παίγνιο G το $\rho(G)$ αποτελεί άνω όριο στο τίμημα της αναρχίας όταν θεωρούμε συσχετιστικές ισορροπίες Nash.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι τα όρια στο τίμημα της αναρχίας ταυτίζονται στις περιπτώσεις των αμιγών, μεικτών και συσχετιστικών ήισορροπιών Nash.

Τέλος, για μια κλάση παιγνίων $\mathcal{G}$ ορίζουμε $A(\mathcal{G})$ να είναι το σύνολο των ζευγών (k, m) για τα οποία κάθε παίγνιο στο $\mathcal{G}$ είναι (k, m)-ομαλό. Μας ενδιαφέρουν tight κλάσεις παιγνίων, δηλαδή αυτές για τις οποίες

$$\sup_{G \in \mathcal{G}} \rho(G) = \inf_{(k,m) \in A(\mathcal{G})} \frac{k}{1-m}.$$

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να βρούμε γενικότερα αποτελέσματα για το τίμημα της αναρχίας για το μοντέλο που εξετάζουμε. Θα δούμε παρακάτω ότι το τίμημα της αναρχίας εξαρτάται πάλι από την μορφή των συναρτήσεων καθυστέρησης των ακμών. Θα παρουσιάσουμε ένα γενικό τύπο που δίνει το τίμημα της αναρχίας και θα υπολογίσουμε τις τιμές που παίρνει για μερικές συνηθισμένες κλάσεις συναρτήσεων. Ουσιαστικά, σαν τίμημα της αναρχίας για μια κλάση συναρτήσεων θεωρούμε το χειρότερο δυνατό τίμημα της αναρχίας που μπορεί να προκύψει σε δίκτυο οι συναρτήσεις καθυστέρησης του οποίου ανήκουν στην κλάση αυτή.

2.2.5 Το Τίμημα της Αναρχίας για Γενικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης

Στην υποενότητα αυτή ουσιαστικά θα δείξουμε ότι τα ατομικά παίγνια συμφόρησης αποτελούν μια tight κλάση παιγνίων, δηλαδή τα άνω και κάτω όρια στο τίμημα της αναρχίας

ταυτίζονται. Θα εξετάσουμε τα παίγνια με βάρη και τα παίγνια χωρίς βάρη ξεχωριστά, όπως κάναμε και για τις γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Η εύρεση των άνω ορίων είναι ιδιαίτερα απλή, η δυσκολία έγκειται στην κατασκευή στιγμιότυπων που πετυχαίνουν ακριβώς αυτά τα όρια.

Άνω Φράγμα στα Παίγνια Χωρίς Βάρη

Έστω $\mathcal{L}$ μια κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης και $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ το σύνολο των ατομικών παιγνίων συμφόρησης χωρίς βάρη οι συναρτήσεις καθυστέρησης των οποίων ανήκουν στο $\mathcal{L}$. Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.17: [Rou01] $A(\mathcal{G}(\mathcal{L})) = \{(k,m)$ τέτοια ώστε $\ell(x+1)x^* \leq k \cdot \ell(x^*)x^* + m \cdot \ell(x)x\}$, για όλους τους ακέραιους $x \geq 0, x^* \geq 1, m < 1$ και για όλες τις $\ell \in \mathcal{L}$. Δηλαδή κάθε παίγνιο $G \in \mathcal{G}$ είναι (k,m)-ομαλό για τα ζεύγη (k,m) που ορίζει η παραπάνω σχέση.

Απόδειξη: Πράγματι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \sum_{e \in E} \ell_e(n_e(s)+1)n_e^*(s)$$

$$\leq \sum_{e \in E} [k \cdot \ell_e(n_e^*(s))n_e^*(s) + m \cdot \ell_e(n_e(s))n_e(s)] = k \cdot C(s^*) + m \cdot C(s). \qquad \square$$

Άμεσα προκύπτει ότι το τίμημα της αναρχίας στα ατομικά παίγνια συμφόρησης χωρίς βάρη με συναρτήσεις καθυστέρησης από ένα σύνολο $\mathcal{L}$ είναι το πολύ

$$\rho(\mathcal{L}) = \inf\{\frac{k}{1-m} : (k,m) \in A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))\}$$

όπου το $A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$ ορίστηκε παραπάνω.

Γενικά δεν υπάρχει κάποιος εύκολος τρόπος για τον υπολογισμό των τιμών που παίρνει η παραπάνω παράσταση για διάφορες κλάσεις $\mathcal{L}$ συναρτήσεων καθυστέρησης, με αποτέλεσμα κάθε περίπτωση να πρέπει να εξεταστεί ξεχωριστά. Οι [ADGMS05] μελέτησαν την περίπτωση που οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ d. Η εύρεση του τιμήματος της αναρχίας στην περίπτωση αυτή ανάγεται στην εύρεση των k, m που βελτιστοποιούν την παραπάνω παράσταση υπό τον περιορισμό ότι $\ell(x+1)x^* \leq k \cdot \ell(x^*)x^* + m \cdot \ell(x)x\}$, όταν οι συναρτήσεις $\ell(\cdot)$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ d.

Ορίζοντας τη γενίκευση Φ_d του χρυσού λόγου ϕ ως τη λύση της εξίσωσης $(x+1)^d = x^d + 1$ και $k = \lfloor \Phi_d \rfloor$ το τίμημα της αναρχίας όταν οι συναρτησεις καθυστέρησης είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ d φράσσεται άνω από τον όρο:

$$\frac{(k+1)^{2d+1} - k^{d+1}(k+2)^d}{(k+1)^{d+1} - (k+2)^d + (k+1)^d - k^d + 1}$$

Κάτω Φράγμα στα Παίγνια Χωρίς Βάρη

Θα θέλαμε να κατασκευάσουμε για οποιοδήποτε σύνολο $\mathcal{L}$, ένα στιγμιότυπο $G \in \mathcal{G}(\mathcal{L})$ στο οποίο το τίμημα της αναρχίας μπορεί να φτάσει όσο κοντά θέλουμε στο $\rho(\mathcal{L})$ (ουσιαστικά τείνει στο $\rho(\mathcal{L})$ καθώς το πλήθος των παικτών και των πόρων τείνει στο άπειρο). Η κατασκευή αυτή [Rou01] είναι αρκετά πολύπλοκη και τεχνική όπως θα δούμε παρακάτω.

Αρχικά υποθέτουμε ότι το $\mathcal{L}$ είναι πεπερασμένο και τα x, x^* φράσσονται από κάποιον ακέραιο n και συμβολίζουμε με $A(\mathcal{L}, n)$ το υποσύνολο του $A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$ για το οποίο ισχύει $x \leq n$, $x^* \leq n$. Ουσιαστικά φράσσουμε το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο σε κάθε πόρο. Το $A(\mathcal{L}, n)$ γεωμετρικά είναι ένα ημιεπίπεδο που προκύπτει από την τομή του ημιεπιπέδου $m < 1$ με πεπερασμένο πλήθος ημιεπιπέδων, ένα για κάθε διαφορετικό ζεύγος τιμών x, x^*. Έστω επίσης $\rho(\mathcal{L}, n) = \inf\{\frac{k}{1-m} : (k, m) \in A(\mathcal{L}, n)\}$. Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα παίγνιο στο οποίο το τίμημα της αναρχίας είναι ίσο με $\rho(\mathcal{L}, n)$. Ακολουθεί ένα λήμμα που περιγράφει συγκεκριμένες ιδιότητες των τιμών (k, m) που ορίζουν το $\rho(\mathcal{L}, n)$.

Λήμμα 2.18 [Rou01]: Για πεπερασμένα $\mathcal{L}$ και n, έστω ότι υπάρχουν $\hat{k}, \hat{m}$ για τα οποία $\frac{\hat{k}}{1-\hat{m}} = \rho(\mathcal{L}, n)$. Τότε υπάρχουν $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$, $x_1, x_2 \in \{0, 1, ..., n\}$, $x_1^*, x_2^* \in \{1, ..., n\}$ και $\eta \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $\ell_i(x_i + 1)x_i^* = \hat{k}\ell_i(x_i^*)x_i^* + \hat{m}\ell_i(x_i)x_i$ για $i = 1, 2$ και $\eta \cdot \ell_1(x_1 + 1)x_1^* + (1 - \eta) \cdot \ell_2(x_2 + 1)x_2^* = \eta \cdot \ell_1(x_1)(x_1) + (1 - \eta) \cdot \ell_2(x_2)(x_2)$.

Θα περιγράψουμε συνοπτικά τα βασικά σημεία της απόδειξης. Αρχικά έστω $\mathcal{H}_{\ell,x,x^*} = \{(k, m) : \ell(x + 1)x^* \leq k \cdot \ell(x^*)x^* + m \cdot \ell(x)x\}\}$ το ημιεπίπεδο που αντιστοιχεί στα ℓ, x, x^* και $\theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$ το σύνορό του. Για καθορισμένα ℓ, x, x^* ορίζουμε

$$\beta_{\ell,x,x^*} = \frac{\ell(x)x}{\ell(x + 1)x^*}$$

και για $x \geq 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{k}{1 - m} = \frac{\ell(x + 1)}{\ell(x^*} \frac{1 - (\beta_{\ell,x,x^*})m}{1 - m}$$

για όλα τα σημεία $(k, m) \in \mathcal{A}(\mathcal{L}, n) \cap \theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$

Στη συνέχεια εξετάζουμε σε ποια περιοχή του $\mathcal{A}(\mathcal{L}, n) \cap \theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$ ανήκει το σημείο $(\hat{k}, \hat{m})$ για τις διάφορες πιθανές τιμές του β_{ℓ,x,x^*}.

1. Για $\beta(\ell, x, x^*) = 1$ η τιμή του $k/(1 - m)$ είναι ίδια για όλα τα σημεία του ημιεπιπέδου.

2. Για $\beta(\ell, x, x^*) < 1$ και $x \geq 1$ το σημείο που ελαχιστοποιεί το $k/(1 - m)$ είναι αυτό με την ελάχιστη δυνατή τιμή του k και τη μέγιστη δυνατή τιμή του m, δηλαδή το δεξιό άκρο του $\mathcal{A}(\mathcal{L}, n) \cap \theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$.

3. Για $\beta(\ell, x, x^*) > 1$ το σημείο που ελαχιστοποιεί το $k/(1-m)$ είναι αυτό με την μέγιστη δυνατή τιμή του k και την ελάχιστη δυνατή τιμή του m, δηλαδή το αριστερό άκρο του $\mathcal{A}(\mathcal{L}, n) \cap \theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$.

4. Το σημείο του τμήματος $\mathcal{A}(\mathcal{L},n)\cap\theta\mathcal{H}_{\ell,0,1}$ που ελαχιστοποιεί το $k/(1-m)$ είναι αυτό με $k=1$ και την ελάχιστη δυνατή τιμή του m, δηλαδή το κάτω άκρο.

Από υπόθεση, υπάρχει ένα ζεύγος $(\hat{k},\hat{m})$ με $\frac{k}{1-m}=\rho(\mathcal{L},n)$. Το σημείο $(\hat{k},\hat{m})$ θα ανήκει σε μία γραμμή $\theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$, όπου τα ℓ,x,x^* ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη του λήμματος. Αν $\beta_{\ell,x,x^*}=1$ τότε παίρνουμε $\ell_1=\ell_2=\ell$, $x_1=x_2=x$, $x_1^*=x_2^*=x^*$ και οποιοδήποτε $\eta\in[0,1]$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Όταν $\beta_{\ell,x,x^*}\neq 1$ τότε από τα $(2)-(4)$ παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει κι ένα δεύτερο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}_{\ell',y,y^*}$ όπου $(\hat{k},\hat{m})\in\theta\mathcal{H}_{\ell',y,y^*}$. Το $(\hat{k},\hat{m})$ θα είναι το δεξιότερο (αριστερότερο) άκρο του $\mathcal{A}(\mathcal{L},n)\cap\theta\mathcal{H}_{\ell,x,x^*}$ και το αριστερότερο (δεξιότερο) του $\mathcal{A}(\mathcal{L},n)\cap\theta\mathcal{H}_{\ell',y,y^*}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μετονομάζουμε τα ℓ,ℓ',x,x^*,y,y^* έτσι ώστε το $(\hat{k},\hat{m})$ να είναι το αριστερό άκρο του $\mathcal{H}_{\ell_1,x_1,x_1^*}$ και το δεξί άκρο του $\mathcal{H}_{\ell_2,x_2,x_2^*}$. Ισχύει τότε $\beta_{\ell_1,x_1,x_1^*}<1$ και $\beta_{\ell_2,x_2,x_2^*}>1$. Η πρώτη συνθήκη του λήμματος ικανοποιείται. Επιλέγουμε το κατάλληλο $\eta\in[0,1]$ για να ικανοποιηθεί και η δεύτερη και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε το στιγμιότυπο ως εξής: Για καθορισμένα $\mathcal{L},n$ έστω ότι υπάρχουν τιμές $(\hat{k},\hat{m})$ τέτοιες ώστε $\frac{\hat{k}}{1-\hat{m}}=\rho(\mathcal{L},n)$. Διαλέγουμε $\ell_1,\ell_2,x_1,x_2,x_1^*,x_2^*$ όπως στο λήμμα 2.18. Έχουμε $E=E_1\cup E_2$ με $E_1\cap E_2=$ και $|E_1|=|E_2|=\kappa=\max\{x_1+x_1^*,x_2+x_2^*\}$. Κάθε πόρος $e_1\in E_1$ έχει συνάρτηση κόστους $\eta\cdot\ell_1(x)$ και κάθε $e_2\in E_2$ $(1-\eta)\cdot\ell_1(x)$. Υπάρχουν κ παίκτες, ο καθένας με δύο δυνατές στρατηγικές. Αν φανταστούμε τα E_1,E_2 σαν δύο κύκλους κ στοιχείων ο καθένας τότε η πρώτη στρατηγική s_i του παίκτη i χρησιμοποιεί x_1 διαδοχικά στοιχεία του E_1 και x_2 διαδοχικά στοιχεία του E_2 ξεκινώντας από το i-οστό στοιχείο κάθε κύκλου. Η δεύτερη στρατηγική v_i χρησιμοποιεί x_j^* διαδοχικά στοιχεία του E_j $(j=1,2)$ τελειώνοντας στο $(i-1)$-οστό στοιχείο κάθε κύκλου. Έχουμε διαλέξει αρκετά μεγάλο κ ώστε οι δύο στρατηγικές να μην χρησιμοποιούν κοινούς πόρους.

Έστω y η κατάσταση στην οποία όλοι οι παίκτες επιλέγουν την πρώτη στρατηγική και y^* αυτή στην οποία επιλέγουν όλοι τη δεύτερη. Ισχύει $y_{e_1}=x_1$ και $y_{e_1}^*=x_1^*$ και αντίστοιχα $y_{e_2}=x_2$ και $y_{e_2}^*=x_2^*$ για τα στοιχεία των E_1 και E_2 αντίστοιχα. Για τον παίκτη i Έχουμε:

$$c_i(y)=\sum_{e\in s_i\cap E_1}\eta\cdot\ell_1(y_e)+\sum_{e\in s_i\cap E_2}(1-\eta)\cdot\ell_2(y_e)=$$

$$\eta\cdot x_1\cdot\ell_1(x_1)+(1-\eta)\cdot x_2\cdot\ell_2(x_2)=$$

$$\eta\cdot x_1^*\cdot\ell_1(x_1+1)+(1-\eta)\cdot x_2^2\cdot\ell_2(x_2+1)=$$

$$\sum_{e\in v_i\cap E_1}\eta\cdot\ell_1(y_e+1)+\sum_{e\in v_i\cap E_2}(1-\eta)\cdot\ell_2(y_e+1)=c_i(y_i^*,y_{-i})$$

Δηλαδή η κατάσταση y είναι ισορροπία Nash για το στιγμιότυπο αυτό. Τέλος έχουμε:

$$C(y)=\sum_{i=1}^{\kappa}c_i(y)=\kappa\cdot[\eta\cdot x_1^*\cdot\ell_1(x_1+1)+(1-\eta)\cdot x_2^*\cdot\ell_2(x_2+1)]=$$

$$\kappa\eta\cdot\Big(\hat{k}\ell_1(x_1^*)x_1^*+\hat{m}\ell_1(x_1)x_1\Big)+\kappa(1-\eta)\cdot\Big(\hat{k}\ell_2(x_2^*)x_2^*+\hat{m}\ell_2(x_2)x_2\Big)=$$

$$\hat{k} \cdot \kappa\,(\eta \cdot \ell_1(x_1^*)x_1^* + (1-\eta) \cdot \ell_2(x_2^*)x_2^*) + \hat{m} \cdot \kappa\,(\eta \cdot \ell_1(x_1)x_1 + (1-\eta) \cdot \ell_2(x_2)x_2) =$$
$$\hat{k} \cdot C(y^*) + \hat{m} \cdot C(y)$$

Οπότε $\frac{C(y)}{C(y^*)} \frac{\hat{k}}{1-\hat{m}} = \rho(\mathcal{L}, n)$

Ας δούμε την κατασκευή του κάτω φράγματος στην πολύ απλή περίπτωση όπου $\mathcal{L} = \{\ell_x = x\}$ και $n = 2$. Τότε το $A(\mathcal{L}, 2)$ ορίζεται από την τομή των ημιεπιπέδων $k + m \geq 2$ (για $x = x^* = 1$) και $k + 4m \geq 3$ (για $x = 2, x^* = 1$). Ισχύει $\beta_{\ell,1,1} < 1 < \beta_{\ell,2,1}$ και το σημείο που ελαχιστοποιεί το $\frac{k}{1-m}$ είναι η τομή των ευθειών που φράσσουν τα δύο ημιεπίπεδα, δηλαδή το $(\hat{k}, \hat{m})$=$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$, οπότε $\rho(\mathcal{L}, 2) = \frac{5}{2}$.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση που δεν υπάρχει κανένα ζεύγος τιμών (k, m), τέτοιο ώστε $\frac{k}{1-m} = \rho(\mathcal{L}, n)$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο στην περίπτωση (2) της απόδειξης του παραπάνω λήμματος και μόνο για $x = n$, $x^* = 1$. Τότε ισχύει $\rho(\mathcal{L}, n) = \beta_{\ell,n,1} \cdot \frac{\ell(n+1)}{\ell(1)} = \frac{n \cdot \ell(n)}{\ell(1)}$. Επίσης $\beta_{\ell,n,1} < 1 \Rightarrow \ell(n+1) > n \cdot \ell(n)$.

Τότε έστω $E = \{e_1, ..., e_{n+1}\}$ και $n + 1$ παίκτες, όπου ο παίκτης i έχει δύο δυνατές στρατηγικές, την $\{e_i\}$ και την $E \setminus \{e_i\}$. Όταν όλοι επιλέγουν την πρώτη στρατηγική $C(f) = (n+1) \cdot \ell(1)$. Όταν όλοι επιλέγουν τη δεύτερη $C(f) = n(n+1) \cdot \ell(n)$. Επειδή $\ell(n+1) > n \cdot \ell(n)$ η κατάσταση αυτή είναι ισορροπία Nash. Άρα $PoA \geq \frac{n \cdot \ell(n)}{\ell(1)} = \rho(\mathcal{L}, n)$.

Άνω Φράγμα στα Παίγνια Με Βάρη

Έστω πάλι $\mathcal{L}$ μια κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης όπου τώρα $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ είναι το σύνολο των ατομικών παιγνίων συμφόρησης με βάρη οι συναρτήσεις καθυστέρησης των οποίων ανήκουν στο $\mathcal{L}$. Ισχύει τώρα η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.19: [BGR10] $A(\mathcal{G}(\mathcal{L})) = \{(k, m)$ τέτοια ώστε $\ell(x + x^*)x^* \leq k \cdot \ell(x^*)x^* + m \cdot \ell(x)x\}$, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x \geq 0, x^* \geq 1, m < 1$ και για όλες τις $\ell \in \mathcal{L}$. Δηλαδή κάθε παίγνιο $G \in \mathcal{G}$ είναι (k, m)-ομαλό για τα ζεύγη (k, m) που ορίζει η παραπάνω σχέση.

Απόδειξη: Πράγματι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(s_i^*, s_{-i}) \leq \sum_{e \in E} \ell_e(w_e(s) + w_i)w_e^*(s) \leq \sum_{e \in E} \ell_e(w_e(s) + w_e(s^*))w_e^*(s) \leq$$

$$\leq \sum_{e \in E} [k \cdot \ell_e(w_e^*(s))w_e^*(s) + m \cdot \ell_e(w_e(s))w_e(s)] = k \cdot C(s^*) + m \cdot C(s). \qquad \square$$

Οπότε, το τίμημα της αναρχίας στα ατομικά παίγνια συμφόρησης με βάρη με συναρτήσεις καθυστέρησης από ένα σύνολο $\mathcal{L}$ είναι το πολύ

$$\rho(\mathcal{L}) = \inf\{\frac{k}{1-m} : (k, m) \in A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))\}.$$

Κάτω Φράγμα στα Παίγνια Με Βάρη

Η κατασκευή του κάτω φράγματος στην περίπτωση των παιγνίων με βάρη [BGR10], βασίζεται κι αυτή σε ένα τεχνικής φύσεως λήμμα, παρόμοιο σε μορφή με το λήμμα 2.18. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$ προκύπτει από ένα μη μετρήσιμο σύνολο περιορισμών, έναν γιά κάθε τριάδα $\ell \in \mathcal{L}$ και $x, x^* \in \mathbb{R}^+$. Αποδεικνύεται ότι το $A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$ μπορεί ισοδύναμα να προκύψει από ένα διαφορετικό σύνολο περιορισμών το οποίο είναι μετρήσιμο. Έστω μια διάταξη στο σύνολο αυτό κι έστω $A_n \supseteq A(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$ το σύνολο των ζευγών (k, m) τα οποία ικανοποιούν τους πρώτους n περιορισμούς.

Επίσης ορίζουμε $\rho_n = \inf\{\frac{k}{1-m} : (k, m) \in A_n\}$. Το ρ_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία που τείνει στο $\rho(\mathcal{L})$. Ισχύει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.20 [BGR10]: Για ορισμένο n έστω ότι υπάρχει ένα ζεύγος τιμών (k_n, m_n), τέτοιο ώστε $\rho_n = \frac{k_n}{1-m_n}$. Τότε υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε για κάθε $w \geq 0$ υπάρχουν $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$, $\eta \in [0, 1]$ ώστε:

$$\ell_i(w \cdot (x_i + 1)) = k_n \ell_i(w) + m_n \ell_i(w \cdot x_i) \cdot x_i, \;\; i = 1, 2 \text{ και}$$

$$\eta \cdot \ell_1(w \cdot (x_1 + 1)) + (1 - \eta) \cdot \ell_2(w \cdot (x_2 + 1)) = \eta \cdot \ell_1(w \cdot x_1) \cdot x_1 + (1 - \eta) \cdot \ell_2(w \cdot (x_2) \cdot x_2.$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι υπάρχουν τιμές (k_n, m_n) τέτοιες ώστε $\rho_n = \frac{k_n}{1-m_n}$. Τότε το παραπάνω λήμμα μας δίνει τα x_1, x_2, ℓ_1, ℓ_2, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του επιθυμητού στιγμιότυπου ως εξής: Έστω $\mathcal{N}$ το σύνολο των παικτών και E το σύνολο των πόρων. Φανταζόμαστε τους πόρους να σχηματίζουν ένα δυαδικό δέντρο βάθους κ το οποίο είναι πλήρες εκτός από το προτελευταίο επίπεδο, οι κόμβοι του οποίου έχουν ένα μόνο παιδί. Για κάθε κόμβο v που δεν αποτελεί φύλλο του δέντρου υπάρχει ένας παίκτης v με δύο στρατηγικές: είτε τον κόμβο v είτε όλα τα παιδιά του v. Ο παίκτης που αντιστοιχεί στη ρίζα έχει βάρος 1 και κάθε άλλος παίκτης v που είναι το αριστερό (δεξί) παιδί ενός παίκτη q έχει βάρος $w_v = w_q \cdot x_1$ ($w_v = w_q \cdot x_2$). Τέλος έστω $\mathcal{N}_L \subset \mathcal{N}$ το σύνολο των παικτών που έχουν για παιδί ένα φύλλο.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις καθυστέρησης των πόρων αναδρομικά. Η ρίζα έχει συνάρτηση καθυστέρησης κάποια $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell(1) = 1$. Κάθε πόρος φύλλο έχει ίδια συναρτήση με τον γονέα του. Τέλος, έστω ένας πόρος e που δεν ανήκει στα δύο τελευταία επίπεδα του δέντρου κι έστω l, r τα παιδιά του, ℓ_e η συνάρτηση καθυστέρησης και w_e το βάρος του παίκτη που αντιστοιχεί στον πόρο αυτό. Ισχύει $w_l = z_1 w_e$ και $w_r = z^2 w_e$. Από όλα τα ζεύγη (ℓ_1, ℓ_2) που δίνει το λήμμα 2.20 για $x^* = w_e$ επιλέγουμε εκείνα για τα οποία ισχύει επίσης $\ell_i(w_e \cdot z_i) \cdot z_i = \ell_e(w_e)$, για $i \in \{1, 2\}$. Έστω η_e η τιμή του η που μας δίνει σε αυτή την περίπτωση το λήμμα 2.20. Ορίζουμε τότε $\ell_l = \eta_e \ell_1$ και $\ell_r = (1 - \eta_e)\ell_2$. Στη βέλτιστη λύση όλοι οι παίκτες επιλέγουν τη στρατηγική αυτή οι πόροι της οποίας βρίσκονται όσο το δυνατόν πιο μακριά από τη ρίζα. Στην περίπτωση που όλοι οι παίκτες όμως επιλέξουν τη στρατηγική που χρησιμοποιεί τον πόρο που βρίσκετε όσο το δυνατόν κοντύτερα στη ρίζα καταλήγουμε σε κατάσταση ισορροπίας Nash με κόστος $\frac{k_n}{1-m_n}$ φορές μεγαλύτερο.

Τέλος, στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τιμές (k_n, m_n) για τις οποίες $\rho_n = \frac{k_n}{1-m_n}$, ένα λίγο διαφορετικό στιγμιότυπο δίνει το επιθυμητό κάτω φράγμα.

2.2.6 Η περίπτωση των δικτύων παράλληλων ακμών

Εξετάζουμε την κατηγορία των παιγνίων στα οποία όλοι οι πόροι είναι διαθέσιμοι σε όλους τους παίκτες και κάθε δυνατή στρατηγική ενός παίκτη χρησιμοποιεί ακριβώς έναν πόρο. Το δικτυακό ισοδύναμο αυτών των παιγνίων είναι τα δίκτυα δύο κόμβων και $|E|$ παράλληλων ακμών.

Ισχύουν τα εξής ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην περίπτωση αυτή:

1. Τα παίγνια χωρίς βάρη συμπεριφέρονται όπως τα αντίστοιχα μη-ατομικά παίγνια ως προς το τίμημα της αναρχίας. Δηλαδή το τίμημα της αναρχίας είναι $\rho(\mathcal{L}) = \frac{1}{1-\beta(\mathcal{L})}$, όπου το $\beta(\mathcal{L})$ έχει οριστεί στην ενότητα 1.2.6. [Fot07]

2. Στα παίγνια με βάρη και με συναρτήσεις καθυστέρησης πολυώνυμα βαθμού το πολύ d το τίμημα της αναρχίας ταυτίζεται με αυτό των δικτύων γενικής μορφής, το οποίο έχει βρεθεί ότι είναι Φ_d^{d+1}. [BGR10], [ADGMS05]

2.2.7 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

Είδαμε ότι τόσο στα μη-ατομικά όσο και στα ατομικά παίγνια συμφόρησης είναι δυνατόν να εκφράσουμε το χειρότερο δυνατό τίμημα της αναρχίας μέσω γενικευμένων τύπων που εξαρτώνται μόνο από την κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης που χρησιμοποιούνται στο δίκτυο. Ωστόσο, σε αντίθεση με τα μη-ατομικά παίγνια, στα ατομικά παίγνια συμφόρησης δεν υπάρχει πάντα κάποιος εύκολος τρόπος να υπολογιστεί ακριβώς το τίμημα της αναρχίας για συγκεκριμένη κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης. Θα πρέπει να εξεταστεί κάθε διαφορετική περίπτωση ξεχωριστά και να βρεθεί ο κατάλληλος μαθηματικός τύπος που θα επιτρέψει να φράξουμε το κόστος της ισορροπίας Nash ως προς το βέλτιστο κόστος.

Τέλος είδαμε ότι στα ατομικά παίγνια συμφόρησης σημαντικό ρόλο παίζει η τοπολογία του δικτύου. Ενώ στα δίκτυα παράλληλων ακμών το τίμημα της αναρχίας είναι γενικά μικρό και συγκεκριμένα ίδιο με αυτό των μη-ατομικών παιγνίων, σε πιο πολύπλοκα δίκτυα αυτό αυξάνεται και τελικά, όπως είδαμε, το χειρότερο δυνατό αποτέλεσμα επιτυγχάνεται ασυμπτωτικά καθώς το πλήθος των παικτών και το μέγεθος του δικτύου τείνει στο άπειρο.

Κεφάλαιο 3

Μέθοδοι Αντιμετώπισης της Εγωιστικής Συμπεριφοράς

Το τίμημα της αναρχίας, το οποίο μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι αποτέλεσμα της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών στα παίγνια συμφόρησης. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε δύο βασικές τεχνικές οι οποίες προσπαθούν να περιορίσουν το φαινόμενο αυτό.

Η πρώτη τεχνική αφορά την επιβολή επιπλέον φόρων στους παίκτες για τη χρήση του κάθε πόρου προσπαθώντας να 'αναγκάσει' τους παίκτες να επιλέξουν στρατηγικές καλύτερες για το κοινωνικό σύνολο, μειώνοντας έτσι το τίμημα της αναρχίας. Ιδανικά θα θέλαμε να βρούμε πόσο φόρο πρέπει να επιβάλουμε σε κάθε πόρο προκειμένου να ωθήσουμε τους παίκτες να επιλέξουν τις στρατηγικές αυτές που αποτελούν τη βέλτιστη λύση για το σύστημα. Ένα τέτοιο διάνυσμα φόρων ονομάζεται *βέλτιστο διάνυσμα φόρων* ή απλά *βέλτιστοι φόροι*.

Η άλλη τεχνική σχετίζεται με την έννοια των παιγνίων *Stackelberg*. Στα παίγνια αυτά υπάρχει ένας παίκτης - ηγέτης (*leader*) που παίζει πρώτος, ενω οι υπόλοιποι παίκτες (*followers*) παίζουν στη συνέχεια διαδοχικά. Στα πλαίσια των παιγνίων συμφόρησης υποθέτουμε ότι ένα μέρος του συνολικού φορτίου στο δίκτυο ελέγχεται και διοχετεύεται κεντρικά από κάποιον διαχειριστή του δικτύου (leader). Για το υπόλοιπο φορτίο επιλέγουν οι χρήστες (followers) αυτόνομα πώς θα το διοχετεύσουν. Ενώ ο κάθε χρήστης χρησιμοποιεί καθαρά ιδιοτελή κριτήρια για το πώς θα διοχετρεύσει το φορτίο του, ο διαχειριστής του συστήματος επιθυμεί να διοχετεύσει το φορτίο που ελέγχει κατά τρόπο ώστε να πετύχει το βέλτιστο αποτέλεσμα για το σύστημα. Πρώτος παίζει ο διαχειριστής, οπότε η επιλογή του επηρεάζει τις αποφάσεις των υπόλοιπων παικτών. Την στρατηγική του κεντρικού διαχειριστή την ονομάζουμε *στρατηγική Stackelberg*. Στόχος είναι να βρεθεί η πολιτική που πρέπει να ακολουθήσει ο διαχειριστής ώστε να ωθήσει τους χρήστες να επιλέξουν στρατηγικές που επιφέρουν όσο το δυνατόν καλύτερο αποτέλεσμα για το σύστημα. Αυτή είναι μια διαφοροποίηση από τον κλασικό ορισμό των παιγνίων Stackelberg, στα οποία leader και followers είναι αντίπαλοι.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε πώς μπορούν να εφαρμοστούν αυτές οι τεχνικές τόσο στα ατομικά όσο και στα μη-ατομικά δικτυακά παίγνια συμφόρησης.

3.1 Επιβολή Φόρων στις Ακμές του Δικτύου

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε το εξής. Έχουμε ένα δίκτυο (G, d, ℓ) για το οποίο γνωρίζουμε μια βέλτιστη ροή f^*, δηλαδή μια ροή που ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος $C(f)$. Καλούμαστε να βρούμε ένα διάνυσμα βέλτιστων φόρων, δηλαδή την κατάλληλη τιμή t_e του φόρου που πρέπει επιβάλλουμε (ανά μονάδα φορτίου) στους χρήστες για τη χρήση της ακμής e του δικτύου, προκειμένου στο νέο δίκτυο η ροή f^* να αποτελεί ροή σε ισορροπία Nash. Λέμε ότι οι φόροι t 'εξαναγκάζουν' τη ροή f^*.

Έχουμε δύο τρόπους να ορίσουμε τους βέλτιστους φόρους και γι' αυτό το λόγο κάνουμε διάκριση μεταξύ της έννοιας των ασθενώς και των γνησίως βέλτιστων φόροων. Ένα διάνυσμα φόρων t ονομάζεται ασθενώς βέλτιστο αν κάποια ροή σε ισορροπία Nash για το δίκτυο μετά την επιβολή των φόρων ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος δηλαδή αποτελεί βέλτιστη ροή για το αρχικό δίκτυο. Η ορισμός των γνησίως βέλτιστων φόρων είναι πιο αυστηρός και απαιτεί κάθε ισορροπία Nash του δίκτυου μετά την επιβολή των φόρων να ελαχιστοποιεί το κοινωνικό κόστος. Στην περίπτωση των μη-ατομικών δικτυακών παιγνίων συμφόρησης, έχουμε δει από την παράγραφο 2.1.2 ότι η απλή παραδοχή ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης $\ell(x)$ είναι γνησίως αύξουσες αρκεί για να εξασφαλίσει τη μοναδικότητα της ροής σε ισορροπία Nash. Στην περίπτωση αυτή η έννοια των ασθενώς βέλτιστων φόρων ταυτίζεται με αυτή των γνησίως βέλτιστων γι' αυτό συνήθως τους αποκαλούμε απλά βέλτιστους φόρους.

Είναι λογικό κάθε χρήστης ενός δικτύου να αξιολογεί διαφορετικά τον λόγο του κόστους των φόρων ως προς την καθυστέρηση που υφίσταται. Για το λόγο αυτό θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε παίκτη j μία παράμετρο $a(j)$ που θα εκφράζει την ευαισθησία του στους φόρους δηλαδή το πώς αξιολογεί τον λόγο χρήμα/χρόνος. Έτσι τώρα το κόστος χρήσης μιας ακμής e από τον παίκτη j θα είναι $\ell_e(x) + a(j) \cdot t_e$.

Επίσης θα υποθέσουμε ότι προτεραιότητά μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνολική συμφόρηση του δικτύου, δηλαδή τον όρο $\sum_{e \in E} \ell_e(f_e) \cdot f_e$ και όχι το συνολικό κόστος των παικτών, στο οποίο περιλαμβάνονται και οι φόροι.

3.1.1 Μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης

Το μοντέλο είναι ουσιαστικά το ίδιο με αυτό της παραγράφου 2.1.1. Έχουμε ένα κατευθυνόμενο δίκτυο $G = (V, E)$ όπου σε κάθε ακμή $e \in E$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση καθυστέρησης $\ell_e(\cdot)$. Έχουμε επίσης ένα (πολύ μεγάλο) πλήθος χρήστων του δικτύου όπου ο καθένας έχει να μεταφέρει μια απειροστή ποσότητα φορτίου από κάποιον αρχικό κόμβο σε κάποιον τελικό. Επιπλέον σε κάθε χρήστη x αντιστοιχεί μια τιμή $a(x) > 0$ που εκφράζει την ευαισθησία του στους φόρους ως προς την καθυστέρηση.

Κάνουμε την υπόθεση ότι η παράμετρος $a(x)$ παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών, οπότε χωρίζουμε τους χρήστες σε ομάδες που αντιστοιχούν στα αιτήματα που ορίσαμε στην παράγραφο 2.1.1 έτσι ώστε στην ίδια ομάδα i ανήκουν χρήστες με κοινό ζεύγος αρχικού-τελικού κόμβου $s_i - t_i$ και κοινή ευαισθησία $a(i)$. Έτσι τώρα κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από τη διαδρομή $s_i - t_i$, την απαίτηση εξυπηρέτησης d_i, αλλά και μια παράμετρο $a(i)$ που εκφράζει την ευαισθησία των παικτών του αιτήματος αυτού ως προς τους φόρους.

Με βάση τα παραπάνω, αν έχουμε μια ροή f στο δίκτυο κι επιβάλουμε σε κάθε ακμή e

φόρο t_e ανά μονάδα φορτίουτότε ένας χρήστης που ανήκει στην ομάδα i και χρησιμοποιεί το μονοπάτι $P \in \mathcal{P}_i$ υφίσταται κόστος

$$\sum_{e \in P} \ell_e(f_e) + a(i) \sum_{e \in P} t_e$$

Επίσης για κάθε $P \in \mathcal{P}_i$ ορίζουμε ως $t_P = a(i) \sum_{e \in P} t_e$ το φόρο ανά μονάδα φορτίου που πρέπει να πληρώσει ο χρήστης του μονοπατιού P. Θα συμβολίζουμε με G^t το νέο δίκτυο μετά την επιβολή των φόρων.

Κατ΄ αναλογία με την πρόταση 2.2, μια ροή f για το δίκτυο G^t είναι ροή σε ισορροπία Nash (ή Wardrop) ανν $\forall i = 1, ..., k$, P_1,$P_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{P_1} > 0$, $\ell_{P_1}(f) + a(i)t_{P_1} \leq \ell_{P_2}(f)a(i)t_{P_2}$.

Κατ΄ αντιστοιχία με την παράγραφο 2.1.4, εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε δίκτυο G^t υπάρχει κάποια ροή f σε ισορροπία Nash η οποία είναι ουσιαστικά μοναδική (δηλαδή αν f, f' ροές σε ισορροπία Nash τότε $\ell_e(f_e) = \ell_e(f'_e)$ για κάθε ακμή e).

Θα δείξουμε στη συνέχεια πώς, για μια δοσμένη ροή f^*, μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά ένα διάνυσμα βέλτιστων φόρων για τη ροή αυτή, δηλαδή τους φόρους που εξαναγκάζουν τη ροή f^*. Οι βέλτιστοι αυτοί φόροι θα δούμε ότι υπολογίζονται λύνοντας ένα ζεύγος δυϊκών γραμμικών προγραμμάτων [KK04], [FJM04]. Θα ξεκινήσουμε από ένα μαθηματικό πρόγραμμα που περιγράφει τις ισορροπίες Wardrop ενός δικτύου και, προσθέτοντας τους κατάλληλους περιορισμούς, θα καταλήξουμε τελικά στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Έστω ένα δίκτυο (G, d, ℓ) για το οποίο f^* είναι μια βέλτιση ροή και $(f^*_e)_{e \in E}$ είναι η συμφόρηση που προκαλεί η βέλτιστη ροή. Στην ενότητα χ είδαμε πώς η f^* μπορεί να υπολογιστεί αποδοτικά αν ισχύουν ορισμένοι περιορισμοί για τις συναρτήσεις $\ell_e(\cdot)$ του δικτύου. Στην ενότητα αυτή δεν θα μας απασχολήσει αυτό το θέμα, αλλά θα υποθέσουμε ότι η βέλτιστη ροή f^* είναι γνωστή και μας έχει δοθεί. Επίσης υποθέτουμε ότι οι $\ell_e(\cdot)$ είναι γνησίως αύξουσες και θετικές. Έστω το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
(c_P(f) - u_i) f_P &= 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \\
c_P(f) - u_i &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \qquad \text{(MP)} \\
\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P &= d_i && \forall i = 1, ..., k \\
f, u &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P},\ \forall i = 1, ..., k
\end{aligned}$$

u_i είναι το κόστος της πιο σύντομης διαδρομής για το αίτημα i. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι λύσεις του παραπάνω σύστημα είναι ακριβώς οι ισορροπίες Wardrop του δικτύου. Πράγματι, οι πρώτες δύο εξισώσεις περιγράφουν την αρχή του Wardrop, δηλαδή ότι όλα τα μονοπάτια που μεταφέρουν φορτίο έχουν το ίδιο κόστος, το οποίο είναι μικρότερο (ή ίσο το

πολύ) από το κόστος κάθε άλλου μονοπατιού που δεν μεταφέρει φορτίο. Η τρίτη εξίσωση είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ροή f να είναι εφικτή. Σε ένα δίκτυο χωρίς φόρους το κόστος $c_P(f)$ ταυτίζεται με την καθυστέρηση $\ell_P(f)$ στο μονοπάτι P. Σε ένα δίκτυο με φόρους, το κόστος $c_P(f)$, περιλαμβάνει επιπλέον και τον όρο $t_P = a(i)\sum_{e\in P} t_e$.

Όταν οι συναρτήσεις c_P είναι θετικές, μπορούμε να ξαναγράψουμε το παραπάνω σύστημα κατά τρόπο τέτοιο ώστε να πάρει τη μορφή ενός *μη-γραμμικού προβλήματος συμπληρωματικότητας* (non-linear complementarity problem).

Ένα μη γραμμικό πρόβλημα συμπληρωματικότητας ορίζεται ως εξής. Μας δίνεται μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και καλούμαστε να βρούμε ένα διάνυσμα x τέτοιο ώστε $x^T F(x) = 0$, $x \geq 0$, $F(x) \geq 0$.

Μετατρέπουμε λοιπόν το (MP) στο παρακάτω πρόβλημα συμπληρωματικότητας

$$\begin{aligned}
(c_P(f) - u_i)f_P &= 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \\
c_P(f) - u_i &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \\
u_i(\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P - d_i) &= 0 && \forall i = 1, ..., k \qquad \text{(NCP1)} \\
\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P &\geq d_i && \forall i = 1, ..., k \\
f, u &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P},\ \forall i = 1, ..., k
\end{aligned}$$

Εμάς μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $c_P(f) = \sum_{e\in P} \ell_e(f_e) + a(i)\sum_{e\in P} t_e$. Ωστόσο, για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω, είναι προτιμότερο να θεωρήσουμε

$$c_P(f) = \frac{\sum_{e\in P} \ell_e(f_e)}{a(i)} + \sum_{e\in P} t_e$$

,δηλαδή το $c_P(f)$ εκφράζει το κόστος σε χρηματικές μονάδες αντί για χρονικές. Εύκολα παρατηρούμε ότι αν $(f_{P_1}, ..., f_{P_\mathcal{P}}, u_1, ..., u_k)$ είναι μια λύση του συστήματος χ με τον πρώτο ορισμό του c_P, τότε $(f_{P_1}, ..., f_{P_\mathcal{P}}, \frac{u_1}{a(1)}, ..., \frac{u_k}{a(k)})$ είναι η αντίστοιχη λύση με τον δεύτερο ορισμό του c_P.

Το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι το εξής: Καλούμαστε να βρούμε ένα διάνυσμα φόρων $t \in \mathbb{R}_+^{|E|}$, τέτοιο ώστε αν $\bar{f}$ είναι μια λύση του $(NCP1)$ με $c_P(f) = \frac{\sum_{e\in P} \ell_e(f_e)}{a(i)} + \sum_{e\in P} t_e$, τότε $\bar{f}_e = f_e^*$, $\forall e \in E$. Ισοδύναμα, καλούμαστε να αποδείξουμε ότι , (i) όλες οι λύσεις του $(NCP1)$ προκαλούν την ίδια συμφόρηση στις ακμές και (ii) υπάρχει τουλάχιστον μία λύση $\bar{f}$ του $(NCP1)$ με $\bar{f}_e = f_e^*$, $\forall e \in E$. Η ισχύς της συνθήκης (i) είναι προφανής. Οι συναρτήσεις $c_P(\cdot)$ είναι προφανώς γνησίως αύξουσες και θετικές, οι λύσεις του $(NCP1)$ είναι ακριβώς οι ισορροπίες Wardrop (ή Nash) του δικτύου και, όπως αναφέραμε και παραπάνω, οποιεσδήποτε δύο ροές σε ισορροπίας Nash προκαλούν την ίδια συμφόρηση στις ακμές του δικτύου.

Για να βρούμε τους φόρους t που 'εξαναγκάζουν' τη βέλτιστη ροή, επεκτείνουμε το $(NCP1)$ προσθέτωντας δύο ακόμα περιορισμούς, διατηρώντας το παράλληλα στη μορφή ενός προβλήματος συμπληρωματικότητας. Έχουμε λοιπόν:

$$
\begin{aligned}
(c_P(f) - u_i)f_P &= 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \\
c_P(f) - u_i &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P}_i, i = 1, ..., k \\
u_i(\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P - d_i) &= 0 && \forall i = 1, ..., k \\
\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P &\geq d_i && \forall i = 1, ..., k \qquad \text{(NCP2)} \\
t_e(f_e - f_e^*) &= 0 && \forall e \in E \\
f_e &\leq f_e^* && \forall e \in E \\
f_P, u_i, t_e &\geq 0 && \forall P \in \mathcal{P},\ \forall i = 1, ..., k,\ \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Έτσι αν $(\bar{f}, \bar{t}, \bar{u})$ είναι μια λύση του $(NCP1)$, τότε $(\bar{f}, \bar{u})$ είναι λύση του $(NCP2)$ με $c_P(f) = \frac{\sum_{e \in P} \ell_e(f_e)}{a(i)} + \sum_{e \in P} \bar{t}_e$.

Επιπλέον η λύση αυτή έχει τις ιδιότητες που περιγράφει η παρακάτω σημαντική πρόταση.

Πρόταση 3.1: Έστω $(\bar{f}, \bar{t}, \bar{u})$ μία λύση του $(NCP2)$. Τότε

1. $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} \bar{f}_P = d_i$, $\forall i = 1, ..., k$.
2. $\bar{f}_e = f_e^*$, $\forall e \in E$.

Απόδειξη: Για το (1) υποθέτουμε ότι $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} \bar{f}_P > d_i \geq 0$ για κάποιο i. Τότε επειδή ισχύει $\bar{u}_i(\sum_{P \in \mathcal{P}_i} \bar{f}_P - d_i) = 0$ έχουμε $\bar{u}_i = 0$. Υπάρχει κάποιο $P \in \mathcal{P}_i$ με $\bar{f}_P > 0$, οπότε $c_P(\bar{f}) > 0 = \bar{u}_i$. Επίσης $(c_P(\bar{f}) - \bar{u}_i)\bar{f}_P = 0$, δηλαδή $\bar{f}_P = 0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Για το (2) έστω πάλι ότι $\bar{f}_e < f_e^*$ για κάποια ακμή $e \in E$. Τότε θα ισχύει $\sum_e \bar{f}_e \cdot \ell_e(\bar{f}_e) < \sum_e f_e^* \cdot \ell_e(f_e^*)$ το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της f^* ως η βέλτιστη ροή (παράγραφος 2.1.1). $\square$

Η σημασία της παραπάνω πρότασης έγκειται στην εξής παρατήρηση. Αφού για κάθε λύση $(\bar{f}, \bar{t}, \bar{u})$ του $(NCP2)$ ισχύει $\bar{f}_e = f_e^*$, $\forall e \in E$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $\ell_e(f_e)$ με τον $\ell_e(f_e^*)$. Με την αντικατάσταση αυτή επιτυγχάνουμε να γραμμικοποιήσουμε το πρόβλημα χωρίς να αλλάξει το σύνολο των λύσεών του. Καταλήγουμε λοιπόν στο παρακάτω *γραμμικό* πρόβλημα συμπληρωματικότητας:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sum_{e\in P}\ell_e(f_e^*)}{a(i)}+\sum_{e\in P}t_e-u_i\right)f_P &= 0 && \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k\\
\frac{\sum_{e\in P}\ell_e(f_e^*)}{a(i)}+\sum_{e\in P}t_e-u_i &\geq 0 && \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k\\
u_i(\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P-d_i) &= 0 && \forall i=1,...,k\\
\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P &\geq d_i && \forall i=1,...,k \qquad \text{(NLP)}\\
t_e(f_e-f_e^*) &= 0 && \forall e\in E\\
f_e &\leq f_e^* && \forall e\in E\\
f_P, u_i, t_e &\geq 0 && \forall P\in\mathcal{P},\ \forall i=1,...,k,\ \forall e\in E
\end{aligned}
$$

Το (NLP) είναι ισοδύναμο με το παρακάτω ζεύγος δυϊκών γραμμικών προγραμμάτων:

$$
\begin{aligned}
\min\sum_i\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P\frac{\ell_P(f^*)}{a_i} &\qquad \text{s.t.}\\
\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P &\geq d_i && \forall i=1,...,k\\
f_e=\sum_{P\in\mathcal{P}:e\in P}f_P &&& \forall e\in E \qquad \text{(LP)}\\
f_e &\leq f_e^* && \forall e\in E\\
f_P &\geq 0 && \forall P
\end{aligned}
$$

και

$$\begin{aligned} \max \sum_i d_i u_i - \sum_e f_e^* t_e & \qquad \text{s.t.} \\ u_i - \sum_{e \in P} t_e \leq \frac{\ell_P(f^*)}{a_i} & \qquad \forall i, \forall P \in \mathcal{P}_i \qquad \text{(DP)} \\ t_e, u_i \geq 0 & \qquad \forall e \in E, \forall i \end{aligned}$$

Δεδομένης της βέλτιστης ροής f^* για να βρούμε τους βέλτιστους φόρους δεν έχουμε παρά να επιλύσουμε το (DP).

Στην ειδική περίπτωση όπου όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια ευαισθησία (για απλότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a(i) = 1$, $\forall i$) το πρόβλημα εύρεσης των βέλτιστων φόρων απλοποιείται αρκετά. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι παίκτες είναι *ομοιογενείς* (διαφορετικά λέμε ότι είναι *ετερογενείς*) και είναι γνωστό εδώ και πολλά χρόνια [BMW56] ότι οι φόροι που πρέπει να τοποθετήσουμε σε κάθε ακμή για να εξαναγκάσουμε μια ροή f^* είναι οι $t_e = f_e^* \cdot \ell_e'(f_e^*)$. όπου $\ell_e'(x)$ είναι η παράγωγος της $\ell_e(x)$. Οι φόροι αυτοί είναι γνωστοι ώς *φόροι οριακού κόστους (marginal cost taxes)*. Ο όρος $\ell_e'(f_e^*)$ αντιστοιχεί στην οριακή αύξηση του κόστους χρήσης της ακμής e που προκαλεί ένας χρήστης και f_e^* είναι το συνολικό φορτίο που υφίσταται την αύξηση αυτή. Στην πράξη οι φόροι οριακού κόστους αναγκάζουν τους χρήστες του δικτύου να πληρώσουν αντίτιμο ίσο με την επιπρόσθετη καθυστέρηση που προκαλεί το φορτίο τους στο υπόλοιπο δίκτυο.

3.1.2 Ατομικά παίγνια συμφόρησης

Θα εξετάσουμε τώρα τη στρατηγική την επιβολή φόρων στα ατομικά παίγνια συμφόρησης. Γνωρίζουμε ότι είναι πιθανό ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης να διαθέτει περισσότερες από μία ισορροπίες Nash. Ως εκ τούτου στα ατομικά παίγνια συμφόρησης πρέπει να κάνουμε διάκριση μεταξύ ασθενώς βέλτιστων και γνησίως βέλτιστων φόρων.

Ομοιογενείς Παίκτες

Αρχικά θε εξετάσουμε την απλή περίπτωση των συμμετρικών παιγνίων συμφόρησης με ομοιογενείς παίκτες. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το κόστος χρήσης της ακμής e σε μια κατάσταση f είναι απλά $\ell_e(f_e + t_e)$. Στην περίπτωση των ατομικών παιγνίων συμφόρησης οι φόροι οριακού κόστους αποτυγχάνουν να εξαναγκάσουν τη βέλτιστη ροή, έστω και ασθενώς. Ωστόσο, αποδεικνύεται [FS10] ότι ασθενώς βέλτιστοι φόροι υπάρχουν πάντα και είναι εύκολο να υπολογιστούν. Οι φόροι αυτοί ονομάζονται *φόροι εξισορρόπησης κόστους (cost-balancing taxes)* και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις όπως θα δούμε είναι γνήσιως βέλτιστοι. Ακολουθεί ο τυπικός ορισμός τους.

Ορισμός 3.2 [FS10]: Ορίζουμε για ένα μονοπάτι P: $f_P^{min} = \min_{e \in P} f_e$. Ένα σύνολο φόρων $(t_e)_{e \in E}$ ονομάζονται φόροι εξισορρόπησης κόστους για μια εφικτή ροή f αν για κάθε μονοπάτι P με $f_P^{min} > 0$ και κάθε άλλο μονοπάτι Q ισχύει:

$$\sum_{e \in P} (\ell_e(f_e) + t_e) \leq \sum_{e \in Q} (\ell_e(f_e) + t_e)$$

Ουσιαστικά οι φόροι εξισσορόπησης κόστους μετατρέπουν κάθε μονοπάτι το οποίο έχει φορτίο σε μονοπάτι ελάχιστου κόστους. Άμεση συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι ότι αν η f είναι μια εφικτή ροή η οποία επιδέχεται ένα σύνολο φόρων εξισορρόπησης κόστους t τότε στο νέο δίκτυο μετά την επιβολή των φόρων t η f θα είναι ροή σε ισορροπία Nash. Δηλαδή οι φόροι εξισορρόπησης κόστους μπορούν να εξαναγκάσουν ασθενώς οποιαδήποτε εφικτή ροή.

Το μόνο που απομένει είναι να περιγράψουμε μια αποδοτική μέθοδο υπολογισμού ενός τέτοιου συνόλου φόρων εξισορρόπησης κόστους για ένα στιγμιότυπο. Αυτό το πετυχαίνει ο παρακάτω αλγόριθμος, ο οποίος ονομάζεται BALANCE. Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα δίκτυο $G = (V, E)$, τις συναρτήσεις καθυστέρησης (ℓ_e) και μια ακυκλική ροή f από έναν αρχικό κόμβο s σε έναν τελικό κόμβο t, η οποία είναι η ροή που θέλουμε να εξαναγκάσουμε με τους φόρους έξισορρόπησης κόστους.

1. Έστω $E_f = \{e \in E : f_e > 0\}$ το σύνολο των ακμών στις οποίες προκαλεί κάποια μη μηδενική συμφόρηση η ροή f κι έστω $G_f = (V, E_f) \subseteq G$.

2. Δίνουμε σε κάθε ακμή e ένα μη-αρνητικό μήκος $\ell_e(f_e)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το μακρύτερο μονοπάτι από τον κόμβο s προς κάθε άλλο κόμβο του G_f προασβάσιμο από το s.

3. Θέτουμε $d_s = 0$ και για κάθε κόμβο $v \in V \setminus \{s\}$ προσβάσιμο από τον s, έστω d_v το μήκος του μακρύτερου $s - v$ μονοπατιού στον G_f.

4. Για κάθε $e = (u, v) \in E_f$ θέτουμε $t_e = d_v - (d_u + \ell_e(f_e))$. Για κάθε $e \notin E_f$ θέτουμε $t_e = \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{e \in P} \ell_e(n) + \delta$ για αυθαίρετα μικρό $\delta > 0$.

Ο αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $O(|V| + |E_f|)$, δηλαδή γραμμικό ως προς το μέγεθος του δικτύου. Ακολουθεί η απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου.

Πρόταση 3.3: Οι φόροι που υπολογίζει ο αλγόριθμος BALANCE για μια ροή f αποτελούν φόρους εξισσορόπησης κόστους για τη ροή αυτή.

Απόδειξη: Αρχικά δείχνουμε ότι $t_e \geq 0$, $\forall e \in E$. Όταν $e \notin E_f$ είναι προφανές. Όταν $e \in E_f$ θέτουμε σε κάθε ακμή μήκος $-d_e$. Έτσι τώρα για κάθε κόμβο v προσβάσιμο από τον s, $-d_v$ είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού στο γράφο $(V, E_f, (-\ell_e(f_e)_{e \in E_f})$. Έτσι για κάθε ακμή $e = (u, v) \in E_f$ ισχύει $-d_v \leq -d_u - \ell_e(f_e)$, οπότε $t_e = d_v - (d_u + \ell_e(f_e)) \geq 0$.

Έστω τώρα $P = (s = v_0, v_1, ..., v_k = t)$ ένα $s - t$ μονοπάτι το οποίο μεταφέρει φορτίο, δηλαδή $f_e > 0$, για κάθε $e \in P$. Για κάθε $e = (v_i, v_{i+1}) \in P$ ισχύει

$t_e = d_{v_{i+1}} - (d_{v_i} + \ell_e(f_e))$. Οπότε $\sum_{e \in P}(\ell_e(f_e) + t_e) = d_t$. Αντίθετα το κόστος κάθε $s-t$ μονοπατιού Q με $f_Q^{min} = 0$ είναι τουλάχιστον $t_{max} \geq d_t$. $\square$

Θα θέλαμε να ξέρουμε αν υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες οι φόροι εξισορρόπησης κόστους είναι γνησίως βέλτιστοι. Αποδεικνύεται ότι αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που το δίκτυο είναι σειριακό-παράλληλο:

Θεώρημα 3.4 [FS10]: Έστω ένα συμμετρικό δικτυακό παίγνιο συμφόρησης όπου το δίκτυο είναι σειριακό-παράλληλο κι έστω f μια ακυκλική ροή η οποία επιδέχεται φόρους εξισορρόπησης κόστους t. Τότε στο νέο δίκτυο που προκύπτει από την επιβολή των φόρων t, κάθε ισορροπία Nash s προκαλέι συμφόρηση $s_e = f_e, \forall e \in E$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ροή σε ισορροπία Nash g που προκαλεί συμφόρηση $g_e \neq f_e$ σε κάποια ακμή $e \in E$. Οι f, g είναι και οι δύο ακέραιες, ακυκλικές ροές όγκου n. Θα αποκαλούμε θετικές ακμές αυτές για τις οποίες $g_e > f_e$ και αρνητικές αυτές για τις οποίες $g_e < f_e$. Προφανώς υπάρχει τουλάχιστον μία θετική και τουλάχιστον μία αρνητική ακμή. Ισχύει $g_e \geq f_e + 1$ για τις θετικές ακμές και $g_e + 1 \leq f_e$ για τις αρνητικές.

Έστω τώρα ότι $H \subseteq G$ είναι η μικρότερη δυνατή συνιστώσα του γράφου G η οποία περιέχει τόσο θετικές όσο και αρνητικές ακμές. Έστω επίσης H_1 μια συνιστώσα του H που περιέχει τουλάχιστον μια θετική ακμή, αλλά καμία αρνητική και H_2 μια συνιστώσα του H που περιέχει τουλάχιστον μία αρνητική αλλά καμία θετική ακμή. Ο αριθμός των παικτών που περνάνε μέσα από τη συνιστώσα H_1 στη λύση g είναι λοιπόν μεγαλύτερος από τον αριθμό των παικτών που περνάνε μέσα από τον H_1 στη λύση f. Το αντίστροφο ακριβώς ισχύει για τη συνιστώσα H_2. Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες H_1 και H_2 δεν μπορεί να συνδέονται σειριακά και κατ' επέκταση ο H αποτελεί παράλληλη σύνδεση των συνιστωσών του $H_1, H_2, ..., H_k$. Έστω s_H, t_H τα κοινά άκρα του H και των συνιστωσών του $H_1, ..., H_k$.

Έστω τώρα $e^+ \in H_1$ μια θετική ακμή και i ένας παίκτης που χρησιμοποιεί την ακμή e^+ στη λύση g. Υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένας τέτοιος παίκτης, αφού $g_{e^+} \geq 1$. Έστω επίσης P^+ ο περιορισμός της ροής g στη συνιστώσα H_1. Επειδή η H_1 δεν περιέχει αρνητικές ακμές ισχύει $g_e \geq f_e, \forall e \in P^+$ και $g_{e^+} > f_{e^+}$. Επειδή οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι αύξουσες παίρνουμε $\sum_{e \in P^+}(\ell_e(g_e) + t_e) > \sum_{e \in P^+}(\ell_e(f_e) + t_e)$.

Επειδή η ροή f είναι ακυκλική και η συνιστώσα H_2 δεν περιέχει θετικές ακμές, θα πρέπει να υπάρχει ένα $s_H - t_H$ μονοπάτι $P^- \in H_2$ το οποίο να αποτελείται αποκλειστικά από αρνητικές ακμές. Δηλαδή $g_e + 1 \leq f_e$, για κάθε $e \in P^-$, οπότε $\sum_{e \in P^-}(\ell_e(g_e + 1) + t_e) \leq \sum_{e \in P^-}(\ell_e(f_e) + t_e) \sum_{e \in P^+}(\ell_e(f_e) + t_e)$. Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό των φόρων εξισορρόπησης κόστους και το γεγονός ότι $f_{P^-}^{min} \geq 1$.

Τελικά παίρνουμε $\sum_{e \in P^+}(\ell_e(g_e) + t_e) > \sum_{e \in P^-}(\ell_e(g_e + 1) + t_e)$ οπότε ο παίκτης i μπορεί να μειώσει το κόστος του αν μεταξύ των s_H και t_H χρησιμοποιήσει το μονοπάτι P^- αντί του P^+. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η ροή g είναι ισορροπία Nash. $\square$

Ετερογενείς Παίκτες

Θα ασχοληθούμε τώρα με την πιο γενική περίπτωση όπου οι παίκτες είναι ετετρογενείς. Μάλιστα δεν θα περιοριστούμε στα συμμετρικά παίγνια, αλλά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο παίκτης i, έχει ευαισθησία στους φόρους $a(i)$, και επιθυμεί να μεταφέρει φορτίο όγκου $d_i = 1$ από έναν κόμβο s (κοινό για όλους τους παίκτες) σε έναν κόμβο t_i. Ο λόγος που θέλουμε οι παίκτες να έχουν κοινό αρχικό κόμβο και μοναδιαία απαίτηση εξυπηρέτησης είναι ότι χρειαζόμαστε αυτές τις συνθήκες να ισχύουν ώστε η βέλτιστη ροή για το δίκτυο να είναι ακυκλική.

Έστω λοιπόν ότι ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες. Στην περίπτωση των μη-ατομικών παιγνίων είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα διάνυσμα φόρων $(t_e^*)_{e\in E}$, τέτοιο ώστε όταν το κόστος χρήσης της ακμής e από έναν χρήστη x είναι $\ell_e(f_e) + a(x)t_e^*$, τότε η βέλτιστη ροή f^* προκύπτει ως ισορροπία Wardrop του δικτύου με τους φόρους.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ακολουθούμε την ίδια διαδικασία υπολογισμού ενός διανύσματος φόρων $(t_e^*)_{e\in E}$ (δηλαδή λύνουμε το πρόβλημα NCP1), όπου όμως τώρα το παίγνιο είναι ατομικό. Εύκολα αποδεικνύεται και σε αυτή την περίπτωση ότι αν μας δωθεί η βέλτιστη *ατομική* ροή f^*, τότε το διάνυσμα φόρων $(t_e^*)_{e\in E}$ που υπολογίζουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) δημιουργεί ένα ατομικό παίγνιο συμφόρησης στο οποίο υπάρχει ως ισορροπία Wardrop μια ροή $\bar{f}$ τέτοια ώστε $\bar{f}_e = f_e^*$, $\forall e \in E$.

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εξαναγκάσουμε ασθενώς τη βέλτιστη ροή, δηλαδή αποδεικύνεται η ύπαρξη ασθενώς βέλτιστων φόρων στην περίπτωση των ατομικών παιγνίων με ετερογενείς παίκτες.

Ωστόσο, όπως περιγράψαμε και παραπάνω, η επιβολή ασθενώς βέλτιστων φόρων δεν μας εξασφαλίζει ότι το δίκτυο θα οδηγηθεί στην επιθυμητή ισορροπία Nash η οποία ταυτίζεται με τη βέλτιστη λύση. Μάλιστα, αποδεικνύεται [FKK10] ότι ακόμα και στην απλή περίπτωση των παιγνίων συμφόρησης σε δίκτυα παράλληλων ακμών με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης μπορούμε να συναντήσουμε στιγμιότυπα τα οποία δεν επιδέχονται γνησίως βέλτιστους φόρους.

Αυτή είναι και η πρώτη διαφοροποίηση στη συμπεριφορά κάποιοι μηχανισμού μείωσης του τιμήματος της αναρχίας μεταξύτων ατομικών και των μη-ατομικών παιγνίων σε δίκτυα παράλληλων ακμών. Όπως είδαμε παραπάνω, στα δίκτυα παράλληλων ακμών τα ατομικά και τα μη-ατομικά παίγνια έχουν το ίδιο τίμημα της αναρχίας ενώ παρακάτω, όταν θα μελετήσουμε στρατηγικές Stackelberg θα δούμε πάλι ότι η βασική στρατηγική που εφαρμόζεται στα δίκτυα παράλληλων ακμών επιφέρει τα ίδια αποτελέσματα σε ατομικά και μη-ατομικά παίγνια.

3.1.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

Είδαμε ότι το πρόβλημα εύρεσης των βέλτιστων φόρων αντιμετωπίζεται επιτυχώς στα μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης. Αντίθετα, στα ατομικά παίγνια αυτό δεν ισχύει γενικά, εξ' αιτίας του γεγονότος ότι ενδέχεται να διαθέτουν παραπάνω από μία ισορροπία Nash. Έτσι η εφαρμογή των ασθενώς βέλτιστων φόρων (τους οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα) δεν μας εξασφαλίζει ότι το σύστημα θα οδηγηθεί στην επιθυμητή ισορροπία Nash και όχι σε κάποια άλλη με μεγαλύτερο κόστος. Ειδικά στην περίπτωση των ετερογενών παικτών,

η οποία είναι και η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση από πρακτική άποψη, ούτε στα πιο απλά δίκτυα παράλληλων ακμών δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη γνησίως βέλτιστων φόρων.

Τέλος, μια ενδιαφέρουσα περίπτωση που δεν εξετάσαμε εδώ είναι το αν και κατά πόσο μπορεί η εφαρμογή φόρων να βελτιώσει το κοινωνικό κόστος αν σε αυτό συνυπολογίσουμε τις επιπλέον χρεώσεις που υφίστανται οι παίκτες λόγω αυτών των φόρων. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί μόνο για την περίπτωση όπου οι παίκτες είναι ομοιογενείς. [CDR03].

3.2 Στρατηγικές Stackelberg

Εξετάζουμε πάλι τα δικτυακά παίγνια συμφόρησης. Έστω d το συνολικό φορτίο που πρέπει να μετακινηθεί. Κάνουμε την εξής υπόθεση: Ένα μέρος ad, $a \in [0,1]$ του συνολικού φορτίου το ελέγχει κάποιος κεντρικός διαχειριστής του συστήματος και το υπόλοιπο $(1-a)d$ οι χρήστες. Ο κεντρικός διαχειριστής επιλέγει πρώτος τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το φορτίο που ελέγχει και εν συνεχεία οι υπόλοιποι παίκτες αντιδρουν ιδιοτελώς, με γνώμονα την ελαχιστοποίηση του κόστους τους και οδηγούν το σύστημα σε μια κατάσταση ισορροπίας Nash. Στόχος του κεντρικού διαχειριστή είναι να επιλέξει τη διαδρομή αυτή η οποία θα οδηγήσει εν τέλει το σύστημα στη βέλτιστη ως προς το κοινωνικό κόστος κατάσταση ισορροπίας. Για αρχή θα εξετάσουμε τα συμμετρικά μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης. Ακολουθεί ένας πιο τυπικός ορισμός.

3.2.1 Ορισμός του Μοντέλου Παιγνίων Stackelberg

Έστω ένα συμμετρικό, μη-ατομικό δικτυακό παίγνιο συμφόρησης (G, d, ℓ) και μια τιμή $a \in [0,1]$ η οποία εκφράζει το ποσοστό του συνολικού φορτίου που ελέγχει ο κεντρικός διαχειριστής. Λέγοντας συμμετρικό εννοούμε ότι υπάρχει ένα μόνο αίτημα (s, t, d). Η στρατηγική που ακολουθεί ο κεντρικός διαχειριστής ονομάζεται *Στρατηγική Stackelberg* και είναι μια εφικτή ροή y συνολικού όγκου ad. Οι υπόλοιποι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές που προκαλούν μια ροή z η οποία είναι ροή ισορροπίας για το δίκτυο $(G, (1-a)d, \hat{\ell})$, όπου $\hat{\ell}_e(x) = \ell_e(y_e + x)$ και y_e είναι η συμφόρηση που προκαλεί η ροή y. Λέμε ότι η ροή $y + z$ *επιφέρεται* από τη ροή y. Επίσης την κατάσταση ισορροπίας που προκύπτει την αποκαλούμε συχνά ισορροπία *Stackelberg*.

3.2.2 Η Βέλτιστη Στρατηγική Stackelberg

Αντίθετα από τους παίκτες οι οποίοι δρουν ιδιοτελώς, ο κενρτικός διαχειριστής του συστήματος έχει στόχο να πετύχει το μικρότερο δυνατό κοινωνικό κόστος. Για να το πετύχει αυτό προσπαθεί να 'προβλέψει' πώς θα αντιδράσουν οι παίκτες στην στρατηγική που θα επιλέξει ο ίδιος και ιδανικά θα ήθελε να είναι σε θέση να υπολογίσει τη *βέλτιστη στρατηγική Stackelberg* δηλαδή μια ροή y^* όγκου ad η οποία επιφέρει μια ροή z^* όγκου $(1-a)d$ τέτοια ώστε ισχύει για το κοινωνικό κόστος ότι $C(y^* + z^*) \leq C(y + z)$ για κάθε άλλη στρατηγική Stackelberg y η οποία επιφέρει ροή z. Σημειώνουμε ότι το κοινωνικό κόστος $C(y^* + z^*)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το κόστος $C(f^*)$ της *βέλτιστης ροής*, όπως αυτή ορίστηκε στην παράγραφο 2.1.1.

Έχουμε λοιπόν να αντιμετωπίσουμε το εξής πρόβλημα. Μας δίνεται ένα δίκτυο (G, d, ℓ) και το ποσοστό a του συνολικού φορτίου το οποίο ελέγχουμε εμείς. Καλούμαστε να βρούμε βέλτιστη στρατηγικής Stackelberg y^*. Το πρόβλημα αυτό αποδεικνύεται ότι είναι γενικά δύσκολο.

Θεώρημα 3.5 [Rou01]: Το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης στρατηγικής Stackelberg σε ένα στιγμιότυπο ενός μη-ατομικού δικτυακού παιγνίου συμφόρησης είναι NP-hard.

Απόδειξη: Θα κάνουμε αναγωγή από το πρόβλημα $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$-PARTITION το οποίο είναι NP-Complete και ορίζεται ως εξής: Έστω ένα σύνολο θετικών ακεραίων $\{a_1, ..., a_n\}$. Υπάρχει κάποιο υποσύνολό του $S \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i \in S} a_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Αν η απάντηση είναι θετική τότε το στιγμιότυπο αυτό του $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$-PARTITION ονομάζεται αληθές στιγμιότυπο, αλλίως ονομάζεται ψευδές.

Έστω ένα τυχαίο στιγμιότυπο $\mathcal{I}$ του $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$-PARTITION, το οποίο ορίζεται από ένα σύνολο n θετικών ακεραίων $\{a_1, ..., a_n\}$ και έστω $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο $\mathcal{I}'$ ενός δικτυακού παιγνίου Stackelberg ως εξής: Έχουμε ένα δίκτυο $G = (V, E)$ με $V = \{s, t\}$ και $|E| = n + 1$ παράλληλες ακμές. Η ακμή i έχει συνάρτηση καθυστέρησης $\ell_i(x) = \frac{x}{a_i} + 4$, $i = 1, ..., n$ και $\ell_{n+1}(x) = \frac{3x}{A}$. Η συνολική απαίτηση εξυπηρέτησης είναι $d = 2A$. Η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα αληθές στιγμιότυπο αν και μόνο αν υπάρχει μια στρατηγική Stackelberg για $\mathcal{I}'$ η οποία επιφέρει ροή συνολικού κόστους το πολύ $\frac{35}{4}A$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα αληθές στιγμιότυπο κι έστω $S \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$ με $\sum_{i \in S} a_i = \frac{2}{3}A$. Εξετάζουμε τη στρατηγική Stackelberg που θέτει $y_i = \frac{3}{4}a_i$, για $i \in S$ και $y_i = 0$ αλλιώς. Η στρατηγική αυτή επιφέρει ροή z με $z_i = 0$, για $i \in S$, $z_i = \frac{1}{4}a_i$, για $i \in \{a_1, ..., a_n\} \setminus S$ και $z_{n+1} = \frac{17}{12}A$. Το συνολικό κόστος $C(y + z)$ είναι ίσο με $\frac{35}{4}A$.

Τέλος υποθέτουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα ψευδές στιγμιότυπο. Χρειάζεται να εξετάσουμε αρκετές υποπεριπτώσεις, αλλά τελικώς αποδεικνύεται ότι για κάθε στρατηγική Stackelberg y που επιφέρει συνολική ροή $y + z$, ισχύει $C(y + z) \geq \frac{35}{4}A$. $\square$

3.2.3 Ευρετικές Στρατηγικές Stackelberg

Είδαμε παραπάνω ότι ο υπολογισμός της βέλτιστης στρατηγικής Stackelberg είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα. Για το λόγο, σε μια προσπάθεια να προσεγγίσουμε τη βέλτιστη λύση, θα εξετάσουμε ορισμένες απλές στρατηγικές και θα δούμε πόσο καλά αποδίδουν σε διάφορες κατηγορίες δικτύων. θα εστιάσουμε τη μελέτη μας σε δύο απλές ευρετικές στρατηγικές, η περιγραφή των οποίων ακολουθεί.

SCALE

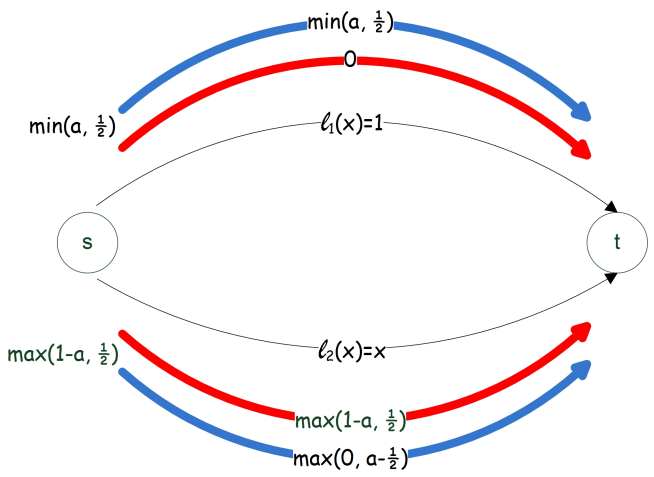
Έστω f^* η βέλτιστη ροή για ένα δίκτυο. Η στρατηγική SCALE για τον κεντρικό διαχειριστή είναι απλά η $z_e = af_e^*$. Αυτή η πολύ απλή στρατηγική θα δούμε ότι είναι ιδιαίτερα αποδοτική σε αρκετές περιπτώσεις.

LLF (Largest Latency First)

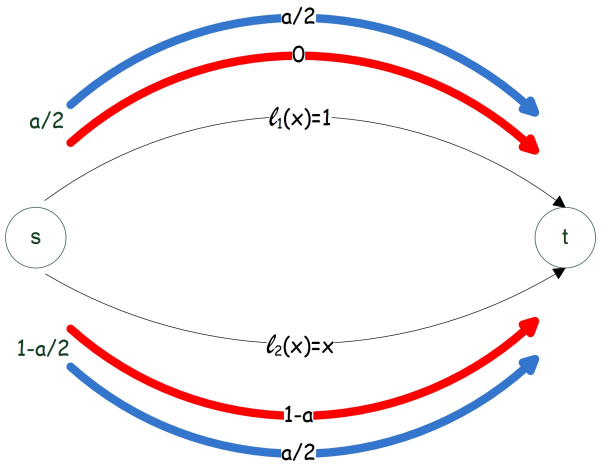
Έστω πάλι f^* η βέλτιστη ροή για ένα δίκτυο. Η στρατηγική LLF διοχετεύει το φορτίο πρώτα στα μονοπάτια εκείνα τα οποία στη βέλτιστη λύση έχουν το μεγαλύτερο κόστος. Το φορτίο που διοχετεύει είναι ίσο με αυτό που βρίσκεται στο μονοπάτι στη βέλτιστη λύση, εκτός ίσως από το τελευταίο μονοπάτι το οποίο χρησιμοποιεί η στρατηγική LLF. Πρόκειται για μια στρατηγική που προνοεί για την ιδιοτελή συμπεριφορά των παικτών και δίνει προτεραιότητα στα μονοπάτια τα οποία οι υπόλοιποι παίκτες τείνουν να μην τα επιλέγουν. Η στρατηγική αυτή τυπικά ορίζεται ως η λύση του εξής γραμμικού προγράμματος: $\max\left\{\sum_{e\in E} y_e \cdot \ell_e(f_e^*) : y_e \leq f_e^*\right\}$, όπου y είναι μια εφικτή ροή όγκου ad.

Παραδείγματα

Παρακάτω βλέπουμε την εφαρμογή των στρατηγικών SCALE και LLF στο απλό δίκτυο του Pigou. Τα μπλέ βέλη συμβολίζουν τη στρατηγική του κεντρικού διαχειριστή και τα κόκκινα αυτή των ιδοτελών παικτών.



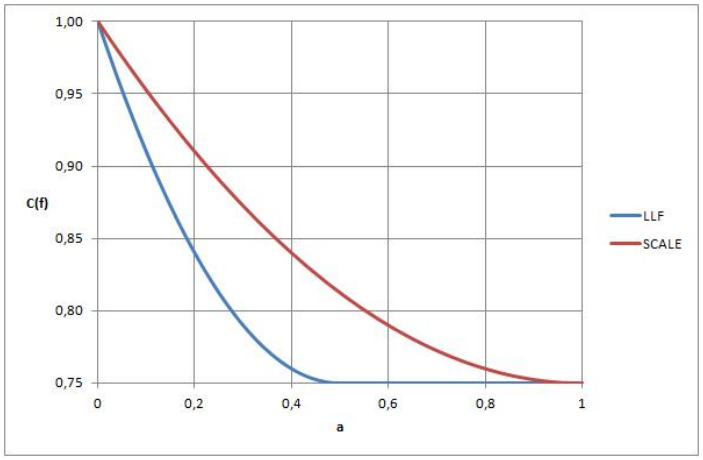
Σχήμα 3.1: Εφαρμογή της στρατηγικής LLF.



Σχήμα 3.2: Εφαρμογή της στρατηγικής SCALE.

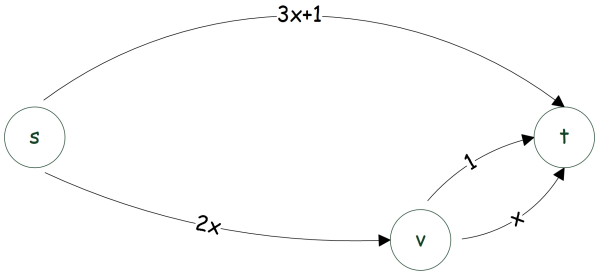
Στην περίπτωση της LLF, όταν $a < \frac{1}{2}$ το συνολικό κόστος είναι $a^2 - a + 1$, ενώ όταν $a \geq \frac{1}{2}$ η στρατηγική LLF επιφέρει τη βέλτιστη λύση κόστους $\frac{3}{4}$.

Στην περίπτωση της SCALE, το συνολικό κόστος είναι $\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1$. Παρατηρούμε ότι η στρατηγική SCALE αποτυγχάνει στην περίπτωση αυτή να επιφέρει τη βέλτιστη λύση για οποιοδήποτε $a < 1$ και ακόμα και για $a \in (0, \frac{1}{2})$ όπου καμία στρατηγική δεν καταφέρνει να επιφέρει τη βέλτιστη λύση, η SCALE αποδίδει χειρότερα από LLF. Ακολουθεί γραφική αναπαράσταση της απόδοσης των δύο στρατηγικών συναρτήσει του a.

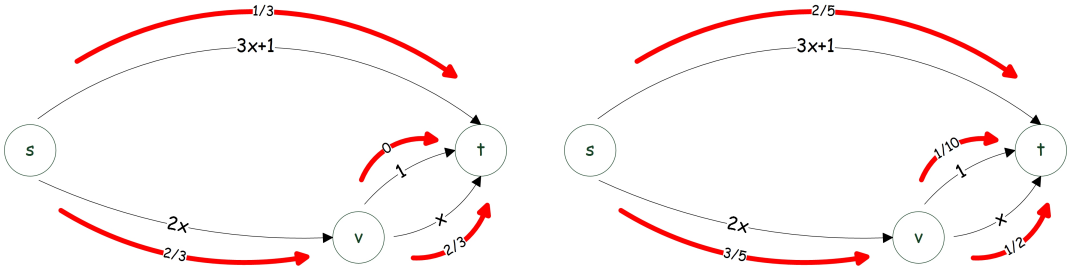


Σχήμα 3.3: Σύγκριση των LLF και SCALE στο παράδειγμα του Pigou

Ακολουθεί ένα ακόμα παράδειγμα εφαρμογής των LLF και SCALE στο δίκτυο του σχήματος 3.4 παρακάτω.

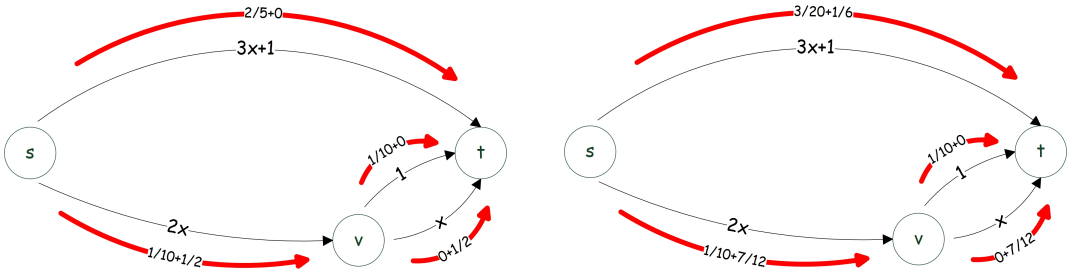


Σχήμα 3.4: Ένα απλό συμμετρικό δίκτυο με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Υποθέτουμε συνολικό φορτίο $d = 1$.



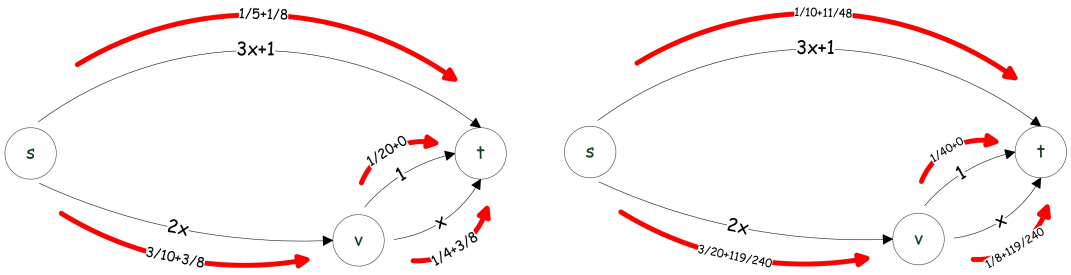
(α′) Η ροή σε ισορροπία Nash με κόστος 2 (β′) Η βέλτιστη ροή με κόστος $\frac{39}{20}$

Σχήμα 3.5: $PoA = \frac{40}{39}$



(α′) Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε $PoA = 1$ (β′) Για $a = \frac{1}{4}$ έχουμε $PoA = \frac{239}{234}$

Σχήμα 3.6: Εφαρμογή της στρατηγικής LLF. Η πρώτη τιμή συμβολίζει το φορτίο του κεντρικού διαχειριστή και η δεύτερη αυτό των ιδιοτελών παικτών



(α′) Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε $PoA = \frac{397}{390}$ (β′) Για $a = \frac{1}{4}$ έχουμε $PoA = \frac{477}{468}$

Σχήμα 3.7: Εφαρμογή της στρατηγικής SCALE. Η πρώτη τιμή συμβολίζει το φορτίο του κεντρικού διαχειριστή και η δεύτερη αυτό των ιδιοτελών παικτών

Αποδοτικότητα των στρατηγικών SCALE και LLF

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των στρατηγικών SCALE και LLF σε διάφορες κατηγορίες δικτύων και θα προσπαθήσουμε φράξουμε το συνολικό κόστος της ισορροπίας Stackelberg που προκύπτει ως προς το βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Τον λόγο αυτών των δύο ποσοτήτων θα τον αποκαλούμε τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής Stackelberg. Ξεκινάμε με μια πρόταση που περιγράφει μια απλή επιθυμητή ιδιότητα των στρατηγικών Stackelberg που θα μελετήσουμε.

Πρόταση 3.6 [Swa07], [CSN07]: Έστω ένα δίκτυακό παίγνιο Stackelberg όπου οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι επιλεγμένες από ένα σύνολο $\mathcal{L}$. Αν για τη στρατηγική Stackelberg y ισχύει $0 \leq y_e \leq f_e^*, \forall e \in E$ τότε $C(y+z) \leq \rho(\mathcal{L}) \cdot C(f^*)$.

Απόδειξη: Για τη ροή z και για κάθε άλλη ροή x ίδιου όγκου ισχύει $\sum_e (y_e+z_e)\cdot \ell_e(y_e+z_e) \leq \sum_e (y_e + x_e) \cdot \ell_e(y_e + z_e)$ (βλέπε πρόταση 2.3). Η πρόταση προκύπτει άμεσα αν θυμηθούμε τον ορισμό του $\beta(\ell)$ από την παράγραφο 2.1.6.

$$\beta(\mathcal{L}) = \sup_{\ell_e \in \mathcal{L}} \sup_{0 \leq b \leq c} \frac{b \cdot (\ell_e(c) - \ell_e(b))}{c \cdot \ell_e(c)}$$

Πράγματι μπορούμε να πάρουμε $b = y + z, c = y + x$ και τότε ισχύει $\sum_e (y_e + x_e) \cdot \ell_e(y_e + z_e) \leq \beta(\mathcal{L})C(y+z) + C(y+x)$. Θέτωντας $x = f^* - y$ έχουμε $C(y+z) \leq \beta(\mathcal{L})C(y+z) + C(f^*)$, οπότε $C(f) \leq (1-\beta(\mathcal{L}))^{-1} \cdot C(f^*) = \rho(\mathcal{L}) \cdot C(f^*)$ □

Η πρόταση 3.6 ουσιαστικά περιγράφει τη συνθήκη που πρέπει να πληροί μια στρατηγική Stackelberg, προκειμένου να μην υπάρχει ο κίνδυνος η εφαρμογή της να οδηγήσει το σύστημα σε μια κατάσταση ισορροπίας με κόστος μεγαλύτερο από το κόστος της ισορροπίας Nash στην οποία θα καταλήξουν οι παίκτες σε περίπτωση που δεν παρεμβούμε καθόλου. Παρατηρούμε ότι οι στρατηγικές SCALE και LLF που θα μελετήσουμε πληρούν τη συνθήκη της πρότασης 3.6.

Στρατηγική LLF

Θα μελετήσουμε τώρα την αποδοτικότητα της στρατηγικής LLF σε παίγνια στα οποία έχουμε θέσει περιορισμό ως προς τις επιτρεπόμενες τοπολογίες των δικτύων. Συγκεκριμένα θα μας απασχολήσουνε τα δίκτυα παράλληλων ακμών και τα σειριακά-παράλληλα δίκτυα. Αρχικά αναφέρουμε δύο ιδιότητες των σειριακών-παράλληλων γράφων οι οποίες θα μας χρειαστούν παρακάτω.

Πρόταση 3.7: Έστω ένας σειριακός - παράλληλος γράφος και s, t τα άκρα του.

1. Έστω f, g δύο ρόες που μεταφέρουν d, r μονάδες φορτίου αντίστοιχα από το s στο t, με $d \geq r$, $d > 0$. Τότε υπάρχει κάποιο ένα $s-t$ μονοπάτι P με $f_P > 0$ για το οποίο $g_e \leq f_e$, $\forall e \in P$.

2. Έστω P ένα $s-t$ μονοπάτι, f μια $s-t$ ροή κι έστω $e_1, ..., e_k$ το υποσύνολο των ακμών του P για τις οποίες ισχύει $f_e > 0$. Τότε υπάρχει ένα μονοπάτι Q το οποίο περιλαμβάνει τις $e_1, ..., e_k$, με $f_Q > 0$.

Ακολουθούν συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.8: Ισχύουν τα παρακάτω:

1. Στα δίκτυα παράλληλων ακμών η στρατηγική LLF επιφέρει ισορροπία Stackelberg κόστους το πολύ $\frac{1}{a} \cdot C(f^*)$. [Rou01]

2. Στα σειριακά-παράλληλα δίκτυα η στρατηγική LLF επιφέρει ισορροπία Stackelberg κόστους το πολύ $(1 + \frac{1}{a}) \cdot C(f^*)$. [Swa07], [CSN07]

3. Στα δίκτυα παράλληλων ακμών η στρατηγική LLF επιφέρει ισορροπία Stackelberg κόστους το πολύ $(a + (1-a) \cdot \rho(\mathcal{L})) \cdot C(f^*)$. [Swa07]

Απόδειξη: Έστω $f = y + z$. Θα προσπαθήσουμε να φράξουμε ξεχωριστά το κόστος της ροής Stackelberg, $C^y(f) = \sum_e y_e \cdot \ell_e(f_e)$ και το κόστος της ροής z, $C^z(f) = \sum_e z_e \cdot \ell_e(f_e)$.

Για το (1), αρχικά τοποθετούμε τις ακμές σε φθίνουσα ως προς το $\ell_e(f_e^*)$ διάταξη κι έστω k το index της τελευταίας ακμής που χρησιμοποιεί ο κεντρικός διαχειριστής. Ορίζουμε $L_y = \ell_k(f_k^*)$. Επίσης συμβολίζουμε με L την κοινή καθυστέρηση όλων των ακμών που χρησιμοποιούν οι παίκτες στην ισορροπία Stackelberg, δηλαδή αυτών με $z_e > 0$. Ισχύει $L \leq L_y$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $L > L_y$, τότε $\forall i \geq k$, $\ell_i(f_i) \geq L > L_y \geq \ell_i(f_i^*)$, δηλαδή $f_i > f_i^*$, για κάθε $i \geq k$, ενώ για $i < k$ ισχύει $y_i = f_i^*$, γεγονός που είναι άτοπο αφού οι f και f^* είναι ροές ίδιου όγκου.

Ισχύει λοιπόν $L \leq L_y$ και για $i \leq k$ έχουμε $L_y \leq \ell_i(f_i^*)$, άρα για $i \leq k$, $\ell_i(f_i) \leq \ell_i(f_i^*)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $C^y(f) = \sum_e y_e \cdot \ell_e(f_e) \leq C(f^*)$. Επίσης ισχύει $C(f^*) \geq a \cdot L_y \geq a \cdot L$ και $C^z(f) = \sum_e z_e \cdot \ell_e(f_e) = (1-a) \cdot L \leq (1-a) \cdot C(f^*)$. Οπότε $C(f) = C^y(f) + C^z(f) \leq C(f^*) + \frac{(1-a)}{a} C(f^*) = \frac{1}{a} C(f^*)$. $\square$

Για το (2) εφαρμόζουμε αρχικά το πρώτο μέρος της πρότασης 3.7 για τις ροές $f^* - y$ και z και παίρνουμε ένα μονοπάτι P με $(f^* - y)_P > 0$ για το οποίο ισχύει $(y_e + z_e) \leq f_e^*$, για κάθε $e \in P$. Ορίζοντας τα L και L_y όπως παραπάνω ισχύει $L \leq \ell_P \leq L_y$, οπότε έχουμε $C^z(f) =\leq (1-a) \cdot L_y$.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το δεύτερο μέρος της πρότασης 3.7 για τη ροή z και για κάποιο μονοπάτι P με $y_P > 0$ και παίρνουμε ένα μονοπάτι Q με $z_Q > 0$, το οποίο περιέχει κάθε ακμή $e \in P$ με $z_e > 0$. Η συνισταμένη καθυστέρηση όλων αυτών των ακμών είναι το πολύ $\ell_Q(f) \leq L_y$. Οπότε $\ell_P(f) \leq \sum_{e \in P: z_e = 0} \ell_e(y_e) + L_y$, άρα $C^y(f) \leq a \cdot L_y + C(f^*)$ και τελικά $C(f) = C^y(f) + C^z(f) \leq L_y + C(f^*) \leq (\frac{1}{a} + 1) \cdot C(f^*)$. $\square$

Τέλος για το (3) έστω $A = \sum_e y_e \ell_e(f_e^*)$ και $B = \sum_e (f_e^* - y_e)\ell_e(f_e^*)$. Τότε $C(f^*) = A + B$ και $\frac{A}{B} \geq \frac{a}{1-a}$. Από την απόδειξη του (1) ξέρουμε ότι $C^y(f) \leq A$ και από την πρόταση 3.6 παίρνουμε $C^z(f) \leq \rho(\mathcal{L}) \cdot B$. Οπότε $C(f) \leq A + \rho(\mathcal{L}) \cdot B$. Ο λόγος $\frac{C(f)}{C(f^*)}$ μεγιστοποιείται όταν $\frac{A}{B} = \frac{a}{1-a}$ και η μέγιστη τιμή που παίρνει τότε είναι το πολύ $a + (1-a)\rho(\mathcal{L})$. $\square$

Παρατήρηση: Όταν $\rho(\mathcal{L}) \leq 2$ ισχύει $a + (1-a) \cdot \rho(\mathcal{L}) \leq \frac{1}{a}$ και το όριο του τρίτου σκέλους του θεωρήματος 3.8 είναι καλύτερο από αυτό του πρώτου σκέλους. Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι πολυώνυμα το πολύ τρίτου βαθμού.

Γενικευμένα Αποτελέσματα των LLF και SCALE

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε γενικευμένα όρια για το τίμημα της αναρχίας, τα οποία θα εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο a και την μορφή των συναρτήσεων καθυστέρησης (δηλαδή ουσιαστικά από την τιμή του $\rho(\mathcal{L})$) και όχι από τη συγκεκριμένη τοπολογία του δικτύου. Θα εργαστούμε με τρόπο παρόμοιο με αυτό της ενότητας χ. Αρχικά θα μας φανεί χρήσιμη η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.9 [Swa07]: Έστω ένα δίκτυακό παίγνιο Stackelberg όπου οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι επιλεγμένες από ένα σύνολο $\mathcal{L}$. Αν για τη στρατηγική Stackelberg y ισχύει $0 \leq y_e \leq f_e^*$, $C^z(f) \leq \rho(\mathcal{L}) \cdot \sum_e (f_e^* - y_e)\ell_e(f_e^*)$.

Απόδειξη: Έστω πάλι $\hat{\ell}_e(x) = \ell_e(y_e + x)$. Ισχύει $\sum_e z_e \cdot \hat{\ell}_e(z_e) \leq \sum_e (f_e^* - y_e)\hat{\ell}_e(z_e)$. Γράφουμε $(f_e^* - y_e)\hat{\ell}_e(z_e) = (f_e^* - y_e)\hat{\ell}_e(f_e^* - y_e) + (f_e^* - y_e)(\hat{\ell}_e(z_e) - \hat{\ell}_e(f_e^* - y_e)) \leq (f_e^* - y_e)\hat{\ell}_e(f_e^* - y_e) + \beta(\hat{\ell}) \cdot z_e\hat{\ell}_e(z_e) \leq (f_e^* - y_e)\hat{\ell}_e(f_e^* - y_e) + \beta \cdot z_e\hat{\ell}_e(z_e)$. Οπότε $(1-\beta)\sum_e z_e\ell_e(y_e + z_e) \leq \sum_e (f_e^* - y_e)\ell_e(f_e^*)$ και τελικά $C^z(f) \leq \rho(\mathcal{L}) \cdot \sum_e (f_e^* - y_e)\ell_e(f_e^*)$. $\square$

Από τις προτάσεις 3.6 και 3.9 ξέρουμε ότι όταν $y_e \leq f_e^*$ τότε μπορούμε να φράξουμε τις ποσότητες $\sum_e y_e \cdot \ell_e(f_e^*)$ και $\sum_e z_e \cdot \ell_e(f_e)$ ως προς το $C(f^*)$. Στόχος μας είναι να εκφράσουμε το $y_e \cdot \ell_e(f_e)$ συναρτήσει των $y_e \cdot \ell_e(f_e^*)$ και $z_e \cdot \ell_e(f_e)$. Από όλα τα ζεύγη τιμών (k, m) για τα οποία ισχύει $y_e \cdot \ell_e(f_e) \leq k y_e \cdot \ell_e(y_e) + m z_e \cdot \ell_e(f_e)$ μας ενδιαφέρει αυτό για το οποίο ελαχιστοποιείται ο λόγος $\frac{C(f)}{C(f^*)}$.

Ορίζουμε λοιπόν για κάθε $b \geq 0$ τις παρακάτω εκφράσεις:

$$\lambda_{LLF}(\mathcal{L}, b) = \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \sup_{x,w \geq 0} \frac{(x - bw) \cdot \ell(x + w)}{x \cdot \ell(x)} \quad \text{και}$$

$$\lambda_{SC}(\mathcal{L}, a, b) = \sup_{\ell \in \mathcal{L}} \sup_{x,w \geq 0} \frac{(ax - bw) \cdot \ell(ax + w)}{ax \cdot \ell(x)}$$

Οι εκφράσεις είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε για $x = y_e, w = z_e$ παίρνουμε

$$y_e \cdot \ell_e(f_e) \leq \lambda_{LLF}(\mathcal{L}, b) \cdot y_e \cdot \ell_e(y_e) + bz_e \cdot \ell_e(f_e)$$

και για $x = f_e^*, w = z_e$ παίρνουμε

$$y_e \cdot \ell_e(f_e) \leq \lambda_{SC}(\mathcal{L}, a, b) \cdot y_e \cdot \ell_e(f_e^*) + bz_e \cdot \ell_e(f_e)$$

Επιλέγοντας στη συνέχεια την τιμή του b που ελαχιστοποιεί τον λόγο $\frac{C(f)}{C(f^*)}$ προκύπτει το παρακάτω θεώρημα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται.

Θεώρημα 3.10:

1. Το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής LLF είναι το πολύ $\min\{\rho(\mathcal{L}), \inf_{b \geq 0}(a \cdot \lambda_{LLF} + \rho(1-a)(1+b))\}$
2. Το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής SCALE είναι το πολύ $\min\{\rho(\mathcal{L}), \inf_{b \geq 0}(a \cdot \lambda_{SC} + \rho(1-a)(1+b))\}$

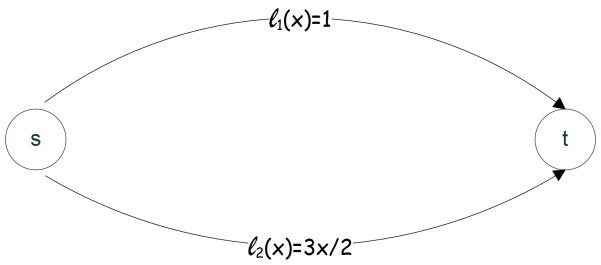
Παρατήρησεις:

1. Για τα παραπάνω όρια ισχύει πάντα $\lambda_{SC} \leq \lambda_{LLF}$ οπότε το όριο που βρήκαμε για τη στρατηγική SCALE είναι καλύτερο από αυτό για τη στρατηγική LLF. Αυτό δεν σημαίνει ότι η στρατηγική SCALE είναι καλύτερη γενικά από την LLF, αφού (i), δεν έχουν βρεθεί κάτω όρια που να ταυτίζονται με τα όρια αυτά και (ii), τα όρια αυτά περιγράφουν τη χειρότερη δυνατή απόδοση που μπορεί να έχουν οι στρατηγικές SCALE και LLF και όχι την αναμενόμενη μέση απόδοσή τους σ΄ ένα τυχαίο στιγμιότυπο.
2. Όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ d, ο παραπάνω τύπος για τη στρατηγική SCALE απλοποιείται και γίνεται $a + \rho(\mathcal{L}_d)(1-a)(1+b(d,a))$ όπου $b(d,a) \geq 0$ είναι η μοναδική λύση του $a^d \left(\frac{b(d,a)+1}{d+1}\right)^{d+1} = \left(\frac{b(d,a)}{d}\right)^d$.

Γραμμικές Συναρτήσεις Καθυστέρησης

Θα ασχοληθούμε τώρα με την ειδική περίπτωση όπου οι συναρτήσεις καθυστέρησης του δικτύου είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού, δηλαδή γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $\ell_e(x) = p_e x + q_e$. Αρχικά θα αναφέρουμε ότι στην ακόμα πιο ειδική περίπτωση όπου επιτρέπουμε μόνο δίκτυα παράλληλων ακμών η στρατηγική LLF αποδίδει καλύτερα από την

SCALE. Συγκεκριμένα στο [Rou01] αποδείχθηκε ότι το κόστος της ισορροπίας Stackelberg που επιφέρει η στρατηγική LLF στην περίπτωση αυτή είναι το πολύ $\frac{4}{3+a}C(f^*)$. Το όριο αυτό είναι καλύτερο από το $\frac{4-a}{3}C(f^*)$, έκφραση που προκύπτει από το θεώρημα χ, για $\rho(\mathcal{L}) = \frac{4}{3}$. Για να δούμε ότι η SCALE αποδίδει όντως χειρότερα στην περίπτωση αυτή, αρκεί να εξετάσουμε το παρακάτω απλό παράδειγμα (σχήμα 3.8). Στη βέλτιστη λύση (για συνολικό φορτίο $d = 1$) έχουμε $\frac{2}{3}$ μονάδες φορτίου στην πάνω ακμή και $\frac{1}{3}$ στην κάτω ακμή, με συνολικό κόστος $\frac{5}{6}$. Για $a = \frac{1}{2}$ η στρατηγική SCALE λοιπόν τοποθετεί $\frac{1}{3}$ μονάδες φορτίου στην πάνω ακμή και $\frac{1}{6}$ στην κάτω. Στη συνέχεια όλοι οι παίκτες θα επιλέξουν την κάτω ακμή και θα καταλήξουμε στην κατάσταση που αποτελεί και ισορροπία Nash του δικτύου χωρίς κεντρική παρέμβαση με συνολικό κόστος 1.



Σχήμα 3.8: Ένα κακό στιγμιότυπο για τη στρατηγική SCALE

Όταν επιτρέπουμε πιο γενικές τοπολογίες δικτύων έχει αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα για την αποδοτικότητα της στρατηγικής SCALE [KK06] :

Θεώρημα 3.11: Το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής SCALE όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές είναι το πολύ $\frac{4}{3} - \frac{X}{3}$, όπου $X = \frac{(1-\sqrt{1-a})(3\sqrt{1-a}+1)}{2\sqrt{1-a}+1}$.

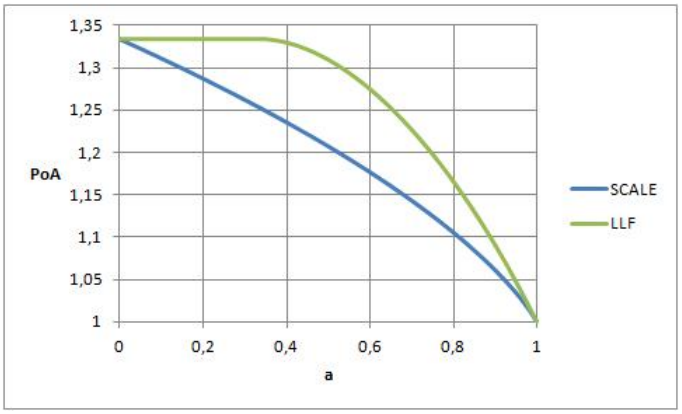
Για τη μελέτη της στρατηγικής LLF χρειαζόμαστε τις έννοιες του 'καλού' και του 'κακού' μονοπατιού. Καλό ονομάζουμε ένα μονοπάτι P για το οποίο $z_P > 0$, και κακό αν $z_P = 0$. Υπάρχει τότε ένα $\lambda \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $\sum_{P \text{ κακό}} f_P^*[\sum_{e\in P}(p_e f_e^* + q_e)] = (1 - \lambda)C(f^*)$ και $\sum_{P \text{ καλό}} f_P^*[\sum_{e\in P}(p_e f_e^* + q_e)] = \lambda C(f^*)$. Ισχύει τότε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.12: Το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής LLF όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές είναι το πολύ

$$\begin{cases} \frac{4}{3} & \text{αν } \lambda \in [0, \frac{1}{3}) \\ (\frac{2(1-\lambda)^2}{2-\lambda-\sqrt{4\lambda-3\lambda^2}}) & \text{αν } \lambda \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

Ισχύει πάντα $\lambda \geq a$. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $\lambda = a$ και το άνω όριο εξακολουθεί να ισχύει (αν $\lambda > a$ τότε απλά παίρνουμε ακόμα καλύτερο όριο). Τότε παίρνουμε το παρακάτω

γράφημα το οποίο δείχνει της καμπύλες του άνω ορίου του τιμήματος της αναρχίας για τις στρατηγικές LLF και SCALE συναρτήσει του a:



Σχήμα 3.9: Άνω φράγματα στο τίημημα της αναρχίας των στρατηγικών LLF και SCALE για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης

Παρατηρούμε ότι η στρατηγική SCALE μοιάζει να είναι πιο αποδοτική από την LLF. Αυτό όμως δεν είναι αλήθεια διότι οι εκφράσεις που έχουμε βρει δεν είναι παρά τα άνω όρια που έχουμε βρει ως τώρα, για τα οποία δεν έχουμε βρει ισοδύναμα κάτω όρια (για την ακρίβεια για τη στρατηγική SCALE έχει βρεθεί ένα *σχεδόν* ισοδύναμο κάτω όριο). Έτσι σε πολλά στιγμιότυπα το τίμημα της αναρχίας των στρατηγικών SCALE και LLF είναι μικρότερο από αυτό που δίνουν οι παραπάνω καμπύλες.

Στην πράξη μάλιστα αποδεικνύεται ότι καμία στρατηγική δεν είναι καλύτερη από την άλλη. Σε ορισμένα στιγμιότυπα η SCALE επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα, ενώ σε άλλα η LLF είναι καλύτερη.

Ως τώρα εξετάσαμε την αποδοτικότητα ορισμένων στρατηγικών Stackelberg ως προς το κόστος της βέλτιστης λύσης. Τώρα θα επιχειρήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση και θα προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε μία στρατηγική η οποία προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο τη *βέλτιστη στρατηγική Stackelberg*, χωρίς να μας απασχολεί αν αυτή επιφέρει τη βέλτιστη λύση ή πόσο απέχει από αυτή. Θα δούμε ότι, παρ' ότι ο υπολογισμός της βέλτιστης στρατηγικής Stackelberg είναι γενικά δύσκολο πρόβλημα, στην περίπτωση των δικτύων παράλληλων ακμών μπορούμε να εκμεταλλευτούμε ορισμένες ιδιότητες της συγκεκριμένης τοπολογίας για να βρούμε μια καλή προσέγγιση της βέλτιστης στρατηγικής αποδοτικά. Συγκεκριμένα θα περιγράψουμε συνοπτικά την κατασκευή ενός FPTAS αλγόριθμου για τη βέλτιστη στρατηγική Stackelberg. [KM02]

Έστω λοιπόν y^* η βέλτιστη ροή Stackelberg και z^* η ροή που επιφέρει η y^*. Έστω επίσης $E_0 = \{e : z_e^* = 0\}$ και $E_+ = \{e : z_e^* > 0\}$, ενώ με $Y_0^* = y^*(E_0)$ συμβολίζουμε το συνολικό φορτίο που τοποθετεί η ροή y^* στις ακμές του E_0. Τέλος υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι πολυώνυμα ορισμένου βαθμού. Αυτό όπως θα δούμε θα μας φανεί χρήσιμο παρακάτω. Η βέλτιστη στρατηγική Stackelberg έχει τις παρακάτω

ιδιότητες.

1. Όλες οι ακμές $e \in E_+$ έχουν κοινή καθυστέρηση. Αυτό είναι προφανές αφού η ροή z^* είναι ισορροπία Nash για το δίκτυο μετά την εφαρμογή της στρατηγικής Stackelberg. Έστω L^* η κοινή αυτή καθυστέρηση.

2. Οι ακμές $e \in E_0$ είναι οι μόνες τις οποίες χρειάζεται να χρησιμοποιήσει η βέλτιστη ροή Stackelberg και σε αυτές πραγματοποιεί τη βέλτιστη ανάθεση. Άρα το οριακό κόστος αύξησης του φορτίου στις ακμές αυτές είναι το ίδιο. Έστω D^* αυτό το κοινό οριακό κόστος.

3. Τέλος, πρέπει $\forall e \in E_0$ να ισχύει $\ell_e(y_e^*) \geq L^*$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι γνωρίζουμε τις τιμές των L^*, D^*, Y_0^*. Τότε για να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική Stackelberg η μόνη δυσκολία είναι να αποφασίσουμε αν η ακμή e ανήκει στο E_0 ή στο E_+. Επειδή δεν είμαστε σε θέση να το γνωρίζουμε αυτό εκ των προτέρων, υπολογίζουμε για κάθε ακμή e ένα ζεύγος τιμών (y_e, u_e) ως εξής: Το u_e το βρίσκουμε λύνοντας την εξίσωση $\ell_e(u_e) = L^*$, ενώ το y_e ορίζεται ως εξής: Έστω $\bar{x}$ η λύση του $(x\ell_e(x))' = D^*$. Αν $\ell_e(\bar{x}) \geq L^*$, τότε $y_e = \bar{x}$, αλλίως $y_e = \infty$. Το ζεύγος (y_e, u_e) μας δίνει την ανάθεση φορτίου στην ακμή e αφότου αποφασίσουμε αν αυτή ανήκει στο E_0 ή στο E_+. Τέλος έστω $U^* = \sum_{e \in E} u_e$ και $U_+^* = \sum_{e \in E_+} u_e = d - Y_0^*$. Για να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική Stackelberg χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.13: Έστω $X \subseteq E$ τέτοιο ώστε ελαχιστοποιεί την έκφραση $\sum_{e \in X} y_e \ell_e(y_e)$, ενώ παράλληλα ικανοποιεί τις εκφράσεις $\sum_{e \in X} y_e = Y_0^*$ και $\sum_{e \in X} u_e = U^* - U_0^*$. Έστω η στρατηγική Stackelberg w που ορίζεται ως εξής: $w_e = y_e$ αν $e \in X$ και $w_e = 0$ διαφορετικά. Τότε $C(w) = C(y^*)$.

Για να υπολογίσουμε λοιπόν τη βέλτιστη στρατηγική Stackelberg δεν έχουμε παρά να βρούμε ένα τέτοιο X. Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι στην ουσία το πολυδιάστατο πρόβλημα του σακιδίου (Multidimensional Knapsack Problem), για το οποίο υπάρχει ψευδοπολυωνυμικός αλγόριθμός ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι πολυωνυμικός.

Προφανώς δεν έχουμε τρόπο να υπολογίσουμε ακριβώς τα L^*, D^*, Y_0^* (αφού τότε θα είμασταν σε θέση να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική Stackelberg που όπως είδαμε είναι NP-Complete πρόβλημα), μπορούμε όμως να τις προσεγγίσουμε κατά ένα παράγοντα $(1+\delta)$ το πολύ για κάποιο δ που θα εξαρτάται από την παράμετρο ϵ του FPTAS. Αυτό το επιτυγχάνουμε δοκιμάζοντας ως υποψήφιες τιμές όλες τις δυνάμεις του $(1+\delta)$. Αν τα L^*, D^*, Y_0^* είναι πολυωνυμικά φραγμένα τότε απαιτείται πολυωνυμικό πλήθος δοκιμών. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το παρακάτω λήμμα το οποίο αποτελεί τροποποίηση του λήμματος 3.13.

Λήμμα 3.14: Έστω $X \subseteq E$ τέτοιο ώστε ελαχιστοποιεί την έκφραση $\sum_{e \in X} y_e \ell_e(y_e)$, ενώ παράλληλα ισχύει $\sum_{e \in X} y_e \in [(1-\delta)Y_0^*, (1+\delta)Y_0^*]$ και

$\sum_{e\in X} u_e \in [(1-\delta)(d-Y_0^*),(1+\delta)(d+Y_0^*)]$. Έστω η στρατηγική Stackelberg w που ορίζεται ως εξής: Αν $y(X) = \sum_{e\in X} y_e \leq \frac{ad}{1+2\delta}$ τότε $w_e = (1+2\delta)y_e$, αλλιώς $w_e = \frac{ad}{y(X)}y_e$. Τότε $C(w) \leq (1+\epsilon)C(y^*)$.

Η συνολική διαδικασία που εφαρμόζουμε είναι εξής. Δοκιμάζουμε κάθε δυνατό συνδυασμό των L^*, D^*, Y_0^* και υπολογίζουμε τα ζεύγη (y_e, u_e) για κάθε ακμή. Στη συνέχεια βρίσκουμε ένα επιθυμητό υποσύνολο X εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα του σακιδίου και το λήμμα χ μας δίνει μια στρατηγική Stackelberg. Από όλες τις υποψήφιες τίμες των L^*, D^*, Y_0^* κρατάμε αυτές που δίνουν τη φθηνότερη λύση.

Τέλος, παρουσιάζουμε μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδέα. Εξετάζουμε πάλι την ιδέα της επιβολής φόρων στις ακμές του δικτύου. Είδαμε στην ενότητα 3.1 πώς αυτή η μέθοδος μπορεί να επιφέρει τη βέλτιστη ροή. Ωστόσο, σε περίπτωση που ένα ποσοστό των χρηστών του δικτύου καταφέρνει επιλέγει να φοροδιαφεύγει και να μην πληρώνει το πρόσθετο κόστος t_e για τη χρήση της ακμής e, τότε προφανώς τα αποτελέσματα της ενότητας 3.1 δεν ισχύουν και η ιδέα της επιβολής φόρων αποτυγχάνει να επιφέρει τη βέλτιστη ροή.

Ωστόσο, όπως θα δούμε εδώ, στην περίπτωση που ένα ποσοστό a των χρηστών του δικτύου είναι 'νομοταγείς' και επιλέγουν να πληρώνουν τους φόρους που θέτουμε στις ακμές του δικτύου, ενώ οι υπόλοιποι φοροδιαφεύγουν, είναι δυνατόν να βρούμε φόρους t τέτοιους ώστε να εξαναγκάσουμε τους παίκτες που πληρώνουν φόρους να εφαρμόσουν τη στρατηγική SCALE. [KK06].

Για κάθε αίτημα i χωρίζουμε τη ροή μεταξύ s_i και t_i σε δύο μέρη. Η ροή $\bar{f}^i$, όγκου ad_i αντιστοιχεί στους παίκτες που πληρώνουν φόρους και η f^i, όγκου $(1-a)d_i$ σε αυτούς που φοροδιαφεύγουν. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι παίκτες που πληρώνουν φόρους είναι ετερογενείς και κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται επιπλέον από την ευαισθησία $\alpha(i)$ των παικτών του στους φόρους.

Οι παίκτες που πληρώνουν φόρους αντιλαμβάνονται κόστος $\ell_e(f_e+\bar{f}_e)+\alpha(i)t_e$, ενώ αυτοί που φοροδιαφεύγουν $\ell_e(f_e+\bar{f}_e)$. Επίσης στην κατάσταση ισορροπίας πρέπει να ισχύει $\sum_i \bar{f}_e^i = af_e^*, \forall e \in E$. Για να βρούμε τους επιθυμητούς φόρους t_e αποδεικνύεται ότι αρκεί

να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα συμπληρωματικότητας:

$$\left(\frac{\sum_{e\in P}\ell_e(f_e+af_e^*)}{\alpha(i)}+\sum_{e\in P}t_e-\bar{u}_i\right)\bar{f}_P^i=0 \qquad \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k$$

$$\left(\sum_{e\in P}\ell_e(f_e+af_e^*)-u_i\right)f_P^i=0 \qquad \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k$$

$$\frac{\sum_{e\in P}\ell_e(f_e+af_e^*)}{\alpha(i)}+\sum_{e\in P}t_e-\bar{u}_i\geq 0 \qquad \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k$$

$$\sum_{e\in P}\ell_e(f_e+af_e^*)+\sum_{e\in P}t_e-u_i\geq 0 \qquad \forall P\in\mathcal{P}_i, i=1,...,k$$

$$\bar{u}_i(\sum_{P\in\mathcal{P}_i}\bar{f}_P^i-ad_i)=0 \qquad \forall i=1,...,k$$

$$u_i(\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P^i-(1-a)d_i)=0 \qquad \forall i=1,...,k$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_i}\bar{f}_P^i\geq ad_i \qquad \forall i=1,...,k$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_i}f_P^i\geq (1-a)d_i \qquad \forall i=1,...,k$$

$$t_e(\sum_i\bar{f}_e^i-af_e^*)=0 \qquad \forall e\in E$$

$$\sum_i\bar{f}_e^i\leq af_e^* \qquad \forall e\in E$$

$$f_P^i,\bar{f}_P^i,u_i,\bar{u}_i,t_e\geq 0 \qquad \forall P\in\mathcal{P},\ \forall i=1,...,k,\ \forall e\in E$$

Το παραπάνω πρόβλημα ουσιαστικά ορίζει ταυτόχρονα δύο ισορροπίες Nash, μία για τους παίκτες που πληρώνουν φόρους και μία για αυτούς που φοροδιαφεύγουν. Αντίστοιχα με την ενότητα 3.1 μπορεί να δειχθεί ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα ζεύγος δυϊκών γραμμικών προγραμμάτων, οπότε έχει πάντα λύση την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε.

3.2.4 Στρατηγικές Stackelberg σε ατομικά παίγνια συμφόρησης

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι οι στρατηγικές Stackelberg που μελετήσαμε μπορούν να εφαρμοστούν εξίσου καλά και στα ατομικά παίγνια συμφόρησης, βελτιώνοντας σημαντικά το τίμημα της αναρχίας. Αρχικά περιγράφουμε το μοντέλο πάνω στο οποίο θα εργαστούμε.

Ορισμός του Μοντέλου Ατομικών Παιγνίων Stackelberg

Έχουμε ένα παίγνιο συμφόρησης N το σύνολο των παικτών του και $|N| = n$. Υποθέτουμε ότι ένα υποσύνολο $L \subseteq N$, $|L| = n_s$ από από αυτούς τους παίκτες δεν επιλέγουν μόνοι τους τη στρατηγική τους, αλλά τους συντονίζει ο κεντρικός διαχειριστής ο οποίος παίζει τη στρατηγική Stackelberg. Οι υπόλοιποι $k = n - ns$ παίκτες είναι ιδιοτελείς. Οι παίκτες δεν έχουν βάρη, οπότε $a = \frac{n_s}{n}$.

Θα συμβολίζουμε με $y(L)$ τη διαμόρφωση Stackelberg, καθώς και τη συμφόρηση που αυτή προκαλεί. Επειδή το παίγνιο είναι ατομικό, ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες από μία ισορροπίες Stackelberg. Με $z(L)$ λοιπόν θα συμβολίζουμε τη χειρότερη δυνατή ισορροπία Stackelberg που επιφέρει η στρατηγική $y(L)$. Τέλος, γράφουμε $f = y + z$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με στρατηγικές Stackelberg για τις οποίες ισχύει $y(L) = (f_i^*)_{i \in L}$, όπου $f^* = (f_1^*, ..., f_n^*)$ είναι η βέλτιστη διαμόρφωση. Αυτές τις στρατηγικές τις αποκαλούμε optimal-restricted

Οι στρατηγικές που θα μελετήσουμε είναι οι LLF και SCALE, τις οποίες είδαμε ήδη στα μη-ατομικά παίγνια, καθώς και μια τρίτη στρατηγική, η οποία ονομάζεται COVER και αφορά μόνο στα ατομικά παίγνια συμφόρησης. Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή των στρατηγικών αυτών στα ατομικά παίγνια συμφόρησης.

LLF

Η στρατηγική LLF ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που την ορίσαμε και στα μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης παραπάνω. Συγκεκριμένα, αν ταξινομήσουμε τους παίκτες σε αύξουσα διάταξη ως προς το κόστος τους στη βέλτιστη λύση, δηλαδή $c_1(f^*) \leq ... \leq c_n(f^*)$, τότε η στρατηγική LLF επιλέγει $L = \{k+1, ..., n\}$.

SCALE

Λόγω της φύσης των ατομικών παιγνίων συμφόρησης, η στρατηγική SCALE όπως ορίστηκε παραπάνω δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια πιθανοτική έκδοση της SCALE, στην οποία κάθε σύνολο $L \subseteq N$, με $|L| = n_s$ επιλέγεται με πιθανότητα $1/\binom{n}{n_s}$ και θέτουμε $y(L) = (f_i^*)_{i \in L}$. Έτσι κάθε παίκτης επιλέγεται με πιθανότητα $a = \frac{n_s}{n}$ και η αναμενόμενη συμφόρηση σε κάθε πόρο e λόγω της y (δηλαδή ο αναμενόμενος αριθμός συντονισμένων παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο e) είναι af_e^*.

COVER

Η στρατηγική COVER μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν ο αριθμός των συντονισμένων παικτών είναι αρκετά μεγάλος ώστε κάθε πόρος να μπορεί να 'καλυφθεί' από τουλάχιστον έναν τέτοιο παίκτη. Για ευκολία θα υποθέσουμε απλά ότι ισχύει $n_s \geq |E|$ κι έστω $\lambda = \lfloor \frac{n_s}{|E|} \rfloor$. Για να εφαρμόσουμε τη στρατηγική COVER επιλέγουμε ένα σύνολο $L \subseteq N$ με $|L| \leq n_s$, έτσι ώστε είτε $y_e(L) \geq \lambda$ ή $y_e(L) = f_e^*$, $\forall e \in E$. Υπάρχουν πολλά τέτοια σύνολα L που ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές. Εμείς θα υποθέσουμε ότι επιλέγουμε το σύνολο που υπολογίζει ο άπληστος λ-covering αλγόριθμος.

Θα εξετάσουμε τώρα την απόδοση των τριών στρατηγικών που περιγράψαμε σε ατομικά παίγνια συμφόρησης στα οποία κάθε πόρος e έχει συνάρτηση καθυστέρησης $\ell_e(x) = p_e x + q_e$. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε και τα οποία οφείλονται στον [β] βασίζονται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.15 [Fot07]: Έστω y μια optimal-restricted διαμόρφωση και $f = y + z$ η χειρότερη δυνατή διαμόρφωση που επιφέρει η y. Τότα για κάθε $v \in (0, 1)$

1. $C(f) \leq \sum_{e \in E} [p_e f_e f_e^* + p_e(f_e^* - y_e) + q_e f_e^*]$.
2. $(1 - v) \cdot C(f) \leq \frac{1}{4v} \sum_{e \in E} p_e (f_e^*)^2 + \sum_{e \in E} p_e(f_e^* - y_e) + \sum_{e \in E} q_e f_e^* - v \sum_{e \in E} q_e f_e$.
3. $(1 - v) \cdot C(f) \leq \frac{1}{4v} C(f^*) + \sum_{e \in E} p_e(f_e^* - y_e) + (1 - \frac{1}{4v}) \sum_{e \in E} q_e(f_e^* - y_e)$.

Ακολουθούν τώρα τα κύρια αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.16 [Fot07]: Το συνολικό κόστος της χειρότερης δυνατής διαμόρφωσης που επιφέρει η στρατηγική LLF στα ατομικά παίγνια συμφόρησης είναι το πολύ $\min \left\{ \frac{20-11a}{8}, \frac{3-2a+\sqrt{5-4a}}{2} \right\} \cdot C(f^*)$

Απόδειξη: Για το πρώτο όριο αρχικά παρατηρούμε ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους x, y, z με $y \leq z$, $xy + y - z \leq \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}y^2 - \frac{11}{12}z$. Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στο πρώτο μέρος του λήμματος 3.15 με $x = f_e, y = f_e^*, z = y_e$ και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $y_e \leq f_e, y_e \leq f_e^*$ παίρνουμε $C(f) \leq \frac{1}{3}C(f) + \frac{5}{3}C(f^*) - \frac{11}{12} \sum_e y_e(p_e f_e^* + q_e)$. Από τον ορισμό της LLF ισχύει $\sum_e y_e(p_e f_e^* + q_e) = \sum_{i \in :} c_i(f^*) \geq a \cdot C(f^*)$ οπότε $C(f) \leq \frac{1}{3}C(f) + \frac{20-11a}{12}C(f^*)$ και τελικά $\frac{C(f)}{C(f^*)} \leq \frac{20-11a}{8}$.

Το δεύτερο όριο προκύπτει από το τρίτο μέρος του λήμματος 3.15, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι για κάθε πόρο e, $f_e^* - y_e \leq f_e^*(f_e^* - y_e)$. Έτσι παίρνουμε $(1 - v) \cdot C(f) \leq \frac{1}{4v}C(f^*) + \sum_{e \in E}(f_e^* - y_e)p_e(f_e^* + q_e) \leq (\frac{1}{4v} + 1 - a) \cdot C(f^*)$. Για τη βέλτιστη τιμή του v, που είναι $\frac{\sqrt{5-4a}-1}{4(1-a)}$ προκύπτει ότι $\frac{C(f)}{C(f^*)} \leq \frac{3-2a+\sqrt{5-4a}}{2}$.

Σχετικά με το κάτω όριο, στο χειρότερο γνωστό στιγμιότυπο, το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής LLF είναι $\frac{5-2a}{4+a} - \epsilon$ για ϵ όσο μικρό θέλουμε.

Θεώρημα 3.17 [Fot07]: Το αναμενόμενο κόστος της χειρότερης δυνατής διαμόρφωσης που επιφέρει η στρατηγική SCALE στα ατομικά παίγνια συμφόρησης είναι το πολύ $\max \left\{ \frac{5-3a}{2}, \frac{5-4a}{3-2a} \right\} \cdot C(f^*)$

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το πρώτο μέρος του λήμματος 3.15 έχουμε: $\mathbb{E}[C(f)] \leq \sum_{e \in E} [p_e(\mathbb{E}[f_e] + 1 - a)f_e^* + q_e f_e^*]$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειαζόμαστε την παρακάτω πρόταση, η οποία ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο y, $a \in [0, 1]$ και θετική, ακέραια τυχαία μεταβλητή X:

$$(\mathbb{E}[X] + 1 - a)y \leq \begin{cases} \frac{1}{3}\mathbb{E}[X^2] + (\frac{5}{3} - a)y^2 & \text{for all } a \in [0, \frac{5}{6}] \\ (a - \frac{1}{2})\mathbb{E}[X^2] + (\frac{5}{2} - 2a)y^2 & \text{for all } a \in (\frac{5}{6}, 1] \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{5-3a}{2} \geq \frac{5-4a}{3-2a}$ για κάθε $a \in \left[0, \frac{5}{6}\right]$ και αντιστρόφως. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση δείχνουμε ότι ισχύει $\mathbb{E}[C(f)] \leq \frac{5-3a}{2} C(f^*)$ για κάθε $a \in \left[0, \frac{5}{6}\right]$ και $\mathbb{E}[C(f)] \leq \frac{5-4a}{3-2a} C(f^*)$ για κάθε $a \in \left(\frac{5}{6}, 1\right]$ και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.

Για το κάτω όριο ισχύει η παρακάτω ενδιαφέρουσα πρόταση:

Θεώρημα 3.18 [Fot07]:

1. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμμετρικό ατομικό παίγνιο συμφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης στο οποίο για *κάθε* optimal-restricted στρατηγική Stackelberg (ντετερμινιστική ή πιθανοτική) το τίμημα της αναρχίας είναι $\frac{2}{1+a} - \epsilon$.

2. Για κάθε $a \in [0, \frac{1}{2})$, $\epsilon > 0$ υπάρχει συμμετρικό ατομικό παίγνιο συμφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης στο οποίο για *κάθε* optimal-restricted στρατηγική Stackelberg (ντετερμινιστική ή πιθανοτική) το τίμημα της αναρχίας είναι $\frac{5-5a+2a^2}{2} - \epsilon$.

Για κάθε $a \in [0, \frac{1}{2})$ ισχύει $\frac{5-5a+2a^2}{2} > \frac{2}{1+a}$, οπότε το παραπάνω θεώρημα δίνει και το παρακάτω χειρότερο γνωστό κάτω όριο για τη στρατηγική SCALE:

$$\begin{cases} \frac{5-5a+2a^2}{2} & a \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{1+a} & a \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Θεώρημα 3.19 [Fot07]: Όταν $n_s > |E|$ και $\lambda = \lfloor \frac{n_s}{|E|} \rfloor$, το κόστος της χειρότερης δυνατής διαμόρφωσης που επιφέρει η στρατηγική COVER στα ατομικά παίγνια συμφόρησης είναι το πολύ $\frac{4\lambda-1}{3\lambda-1}$.

Απόδειξη: Έστω y η διαμόρφωση της στρατηγικής COVER και $f = y + z$ η χειρότερη δυνατή ισορροπία Nash που επιφέρει η y. Επειδή είτε $y_e = f_e^*$ ή $y_e \geq \lambda$, ισχύει $f_e^* - y_e \leq \frac{1}{4\lambda}(f_e^*)^2$. Εφαρμόζωντας το τρίτο μέρος του λήμματος χ παίρνουμε $(1-v)C(f^*) \leq \frac{1}{4v} C(f^*) + \max\left\{\frac{1}{4\lambda}, 1 - \frac{1}{4v}\right\} C(f^*) = \max\left\{\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{4v}, 1\right\} C(f^*)$. Για $v = \frac{\lambda}{4\lambda-1}$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Παρατηρούμε ότι όταν ο λόγος λ των συντονισμέμων παικτών ως προς το πλήθος των πόρων μεγαλώνει, το παραπάνω όριο τείνει σε αυτό των μη ατομικών παιγνίων συμφόρησης, δηλαδή $\frac{4}{3}$. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς όταν το πλήθος των παικτών είναι μεγάλο, τα ατομικά παίγνια συμφόρησης προσεγγίζουν τα μη-ατομικά ως προς τη συμπεριφορά.

Τέλος αναφέρουμε ότι είναι δυνατόν η στρατηγική COVER να συνδυαστεί με μία εκ των LLF ή SCALE για να επιτευχθούν ακόμα καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

LLF και COVER

Αρχικά εφαρμόζουμε τη στρατηγική LLF για να αναθέσουμε $|L^L| = n_s - \lambda|E|$ παίκτες στα μονοπάτια με το μεγαλύτερο κόστος στη λύση f^*. Εν συνεχεία εφαρμόζουμε τη στρατηγική COVER στους υπόλοιπους $\lambda|E|$ παίκτες ως εξής. Έστω $L^C \subseteq N \backslash L^L$, $|L^C| \leq lambda|E|$ το σύνολο των παικτών που αναθέτει ο COVER έτσι ώστε $\min\left\{\lambda, f_e^* - y_e(L^L)\right\} \leq y_e(L^C) \leq f_e^* - y_e(L^L)$, για κάθε $e \in E$. Η συνολική διαμόρφωση Stackelberg είναι $y = (f_i^*)_{i \in L^L \cup L^C}$.

SCALE και COVER

Αρχικά εφαρμόζουμε τη στρατηγική COVER για να αναθέσουμε το πολύ $\lambda|E|$ παίκτες. Έστω $L^C \subseteq N, |L^C| \leq \lambda|E|$ το σύνολο των παικτών αυτών. Για κάθε $e \in E$ ισχύει $\min\{\lambda, f_e^*\} \leq y_e(L^C) \leq f_e^*$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη στρατηγική SCALE κι επιλέγουμε ένα τυχαίο $L^S \subseteq N \backslash L^C, |L^S| = n_s - \lambda|E|$ κι θέτουμε $y(L^S) = (f_i^*)_{i \in L^S}$. Η συνολική διαμόρφωση Stackelberg είναι $y(L^C \cup L^S) = (f_i^*)_{i \in L^C \cup L^S}$.

Η Στρατηγική LLF στα Δίκτυα Παράλληλων Ακμών

Στην ειδική περίπτωση των δικτύων παράλληλων ακμών έχουμε ήδη (παράγραφος χ) δει ότι τα ατομικά παίγνια συμφόρησης συμπεριφέρονται όπως και τα μη ατομικά ως προς το τίμημα της αναρχίας, το οποίο είναι ακριβώς $\rho(\mathcal{L})$ όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι επιλεγμένες από ένα σύνολο $\mathcal{L}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι και για τη στρατηγική LLF τα αποτελέσματα των μη-ατομικών παιγνίων ισχύουν και στα ατομικά παίγνια στην περίπτωση των δικτύων παράλληλων ακμών. Πράγματι για γενικές συναρτήσεις καθυστέρησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.20 [Fot07]:

1. Στα δίκτυα παράλληλων ακμών με ατομικούς παίκτες το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής LLF είναι το πολύ $\frac{1}{a} \cdot C(f^{opt})$.

2. Στα δίκτυα παράλληλων ακμών με ατομικούς παίκτες και συναρτήσεις καθυστέρησης επιλεγμένες από ένα σύνολο $\mathcal{L}$ το τίμημα της αναρχίας της στρατηγικής LLF είναι το πολύ $(a + (1-a)\rho(\mathcal{L})) \cdot C(f^{opt})$.

Κεφάλαιο 4

Coordination Mechanisms

Οι μέθοδοι που περιγράψαμε ως τώρα στην προσπάθεια περιορισμού του τιμήματος της αναρχίας έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Απαιτούν την παρουσία ενός κεντρικού διαχειριστή του συστήματος ο οποίος είναι υπεύθυνος για την εφαρμογή τους συνολικά στο σύστημα. Κατ΄ επέκταση απαιτούν πλήρη γνώση όλων των χαρακτηριστικών του συστήματος από κάποιο άτομο ή διαφορετικά απαιτούν πολύ μεγάλη διακίνηση πληροφοριών εσωτερικά στο σύστημα προκειμένου να εφαρμοστούν.

Στην πράξη αυτό πολύ συχνά δεν ισχύει γεγονός που καθιστά αυτές τις τεχνικές πρακτικά ανεφάρμοστες σε ορισμένες περιπτώσεις. Θα ήταν λοιπόν πολύ βολικό αν μπορούσαμε να αναπτύξουμε μια μέθοδο περιορισμού του τιμήματος της αναρχίας η εφαρμογή της οποίας μπορεί να γίνει τοπικά από ορισμένες επιμέρους μονάδες του συστήματος, χωρίς να απαιτείται η επέμβαση ενός κεντρικού διαχειριστή. Στο πνεύμα αυτό αναπτύχθηκε η ιδέα των Coordination Mechanisms [CKN09], οι οποίοι θα μας απασχολήσουν στο κεφάλαιο αυτό.

4.1 Το Μοντέλο

Το πλαίσιο στο οποίο θα εξετάσουμε τους Coordination Mechanisms είναι πιο περιορισμένο από αυτό των γενικών παιγνίων συμφόρησης. Ουσιαστικά αποτελεί μια διαφορετική εκδοχή των δικτυακών παιγνίων συμφόρησης παράλληλων ακμών. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι έχουμε ένα σύνολο $M = \{1, ..., m\}$ μηχανών οι οποίες παίζουν τον ρόλο των πόρων/ακμών κι ένα σύνολο $= Ns\,\{1, ...n\}$ εργασιών που πρέπει να εκτελεστούν στις μηχανές αυτές κι οι οποίες παίζουν τον ρόλο των παικτών. Αντί για συναρτήσεις καθυστέρησης χρησιμοποιούμε ένα σύνολο τιμών p_ij, $i \in N, j \in M$ όπου p_{ij} είναι ο χρόνος που χρειάζεται η μηχανή j για να εκτελέσει την εργασία i. Για παράδειγμα όταν $p_ij = \frac{w_i}{s_j}$ όπου w_i ο όγκος τη σεργασίας i (ή το βάρος του παίκτη i)και s_j είναι η ταχύτητα της μηχανής j το μοντέλο αυτό είναι ισοδύναμο μ΄ ένα παίγνιο συμφόρησης με βάρη σε δίκτυο παράλληλων ακμών με $\ell_j(x) = \frac{1}{s_j}x$.

4.1.1 Η ιδέα των Coordination Mechanisms

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την ιδέα των Coordination Mechanisms χρειάζεται να αλλάξουμε τους κανόνες του παιγνίου και να το σχεδιάσουμε λίγο διαφορετικά. Υπενθυμίζουμε ότι μια βασική αρχή των παιγνίων συμφόρησης ήταν το γεγονός ότι το κόστος χρήσης ενός πόρου ήταν κοινό για όλους τους παίκτες που τον χρησιμοποιούσαν. Στο κεφάλαιο αυτό θα παραβιάσουμε αυτή την αρχή και θα υποθέσουμε ότι το κόστος χρήσης της μηχανής j είναι μια γενικευμένη συνάρτηση που αποδίδει διαφορετική τιμή σε κάθε παίκτη (ή εργασία), δηλαδή $c_j : \mathbb{R}n \to \mathbb{R}^n$ και $c_j(w_1, ..., w_n) = (c_j^i(w_1, ..., w_n))_{i \in N}$. Συγκεκριμένα κάνουμε την υπόθεση ότι η μηχανή j εξυπηρετεί τους παίκτες (ή εκτελεί τις εργασίες) με μια σειρά που αποφασίζει η ίδια και όχι όλους ταυτόχρονα. Παράλληλα πρέπει να ισχύει $\max_{i \in S} c_j^i(w_1, ..., w_n) \geq \sum_{i \in S} w_i$. Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή j μπορεί να εκτελέσει τις εργασίες με όποια σειρά θέλει, αλλά δεν μπορεί να επιταχύνει την εκτέλεσή τους.

Ένας Coordination Mechanism δεν είναι παρά ένα τέτοιο σύνολο γενικευμένων συναρτήσεων ή *πολιτικών χρονοδρομολόγησης*, μία για κάθε μηχανή. Για συγκεκριμένο Coordination Mechanism κάθε διαφορετικό σύνολο τιμών $p_i j$ ορίζει ένα διαφορετικό παίγνιο. Η κάθε εργασιά επιλέγει μόνη της σε ποια μηχανή θα εκτελεστεί και το σύστημα ευσταθεί σε μια κατάσταση ισορροπίας Nash. Το κοινωνικό κόστος στην ισορροπία Nash το συγκρίνουμε με το ελάχιστο κοινωνικό κόστος, το οποίο είναι κάποια συνάρτηση των c_j^i και το οποίο επιτυχγάνεται με την επιλογή των βέλτιστων πολιτικών χρονοδρομολόγησης, και ο λόγος αυτών των δύο είναι γνωστός ως το τίμημα της αναρχίας. Κάνουμε διάκριση μεταξύ του τιμήματος της αναρχίας ενός παιγνίου και του *τιμήματος της αναρχίας ενός Coordination Mechanism* που είναι το χειρότερο τίμημα της αναρχίας από το σύνολο των παιγνίων που μπορούν να προκύψουν από τον μηχανισμό αυτό για τα διάφορα σύνολα τιμών p_{ij}. Στόχος μας είναι να βρούμε Coordination Mechanisms με χαμηλό τίμημα αναρχίας. Εδώ βλέπουμε το πλεονέκτημα των Coordination Mechanisms έναντι των μεθόδων που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε εκ των προτέρων είναι οι κανόνες του παιγνίου. Με βάση αυτούς επιλέγουμε ένα σύνολο πολιτικών χρονοδρομολόγησης τις οποίες εν συνεχεία οι μηχανές τις υλοποιούν κατανεμημένα χωρίς να απαιτείται η παρέμβασή μας ή ανταλλαγή μεγάλου όγκου πληροφοριών για το δίκτυο μεταξύ των μηχανών.

Μια ουσιαστική διαφορά της ιδέας των Coordination Mechanisms σε σύγκριση με την επιβολή φόρων ή τις στρατηγικές Stackelberg είναι ότι εδώ δεν προσπαθούμε να επέμβουμε στο δίκτυο προκειμένου να μειώσουμε το τίμημα της αναρχίας, αλλά προσπαθούμε να *σχεδιάσουμε* το δίκτυο κατά τρόπο τέτοιο ώστε το τίμημα της αναρχίας να είναι χωρίς να απαιτείται εξωτερική επέμβαση.

Τα παίγνια που προκύπτουν από την εφαρμογή των Coordination Mechanisms είναι γνωστά ως παίγνια χρονοδρομολόγησης ή sceduling games. Η διαφορά τους από τα αντίστοιχα προβλήματα χρονοδρομολόγησης (sceduling problems) είναι ότι στα τελευταία μας δίνονται τα χαρακτηριστικά του παιγνίου, δηλαδή τα N, M, (p_{ij}) και εμείς καλούμαστε να βρούμε τη βέλτιστη λύση, δηλαδή τις πολιτικές χρονοδρομολόγησης των μηχανών που επιτυχγάνουν το ελάχιστο κοινωνικό κόστος. Αντίθετα στα sceduling games επιλέγουμε τις πολιτικές χρονοδρομολόγησης χωρίς να γνωρίζουμε τις τιμές (p_{ij}) εκ των προτέρων κι

αφήνουμε την κάθε εργασία, η οποία ουσιαστικά είναι ένας πλήρως ενημερωμένος ιδιοτελής παίκτης που γνωρίζει την πολιτική χρονοδρομολόγησεις που ακολουθεί η κάθε μηχανή, να επιλέξει μόνη της που θα εκτελεστεί. Την αποδοτικότητα ενός μηχανισμού για ένα scheduling game την μετράμε με το τίμημα της αναρχίας, ενώ την αποδοτικότητα ενός αλγορίθμου για το αντίστοιχο scheduling problem τη μετράμε με το απροξιματιον ρατιο. Όπως θα δούμε, πολλές φορές υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ ενός Coordination Mechanism και του αντίστοιχου αλγόριθμου για το scheduling problem και το τίμημα της αναρχίας του ενός ταυτίζεται με το απροξιματιον ρατιο του άλλου.

4.1.2 Κατηγορίες Scheduling Games

Ανάλογα με τη σχέση μεταξύ των χρόνων εκτέλεσης p_{ij} καθώς και ανάλογα με τον τρόπο που ορίζουμε το κοινωνικό κόστος προκύπτουν διαφορετικοί τύποι scheduling games. Δανειζόμαστε τον συμβολισμό $\alpha|\beta|\gamma$ που χρησιμοποιείται για τα αντίστοιχα scheduling problems.

Η πρώτη παράμετρος προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ των μηχανών και παίρνει μία από τις παρακάτω τιμές.

1. P: όταν πρόκειται για πανομοιότυπες μηχανές, δηλαδή για κάθε i: $p_{ij} = p_{ik} = p_i$, $\forall j, k \in M$.

2. Q: όταν πρόκειται για ομοιόμορφες μηχανές, δηλαδή για κάθε i: $p_{ij} = \frac{p_i}{s_j}$, όπου s_j η ταχύτητα της μηχανής j.

3. R: Είναι η πιο γενική περίπτωση όταν τα p_{ij} είναι πλήρως ασυσχέτιστα μεταξύ τους.

4. B: Συμβολίζε την περιορισμένη ανάθεση. Για κάθε εργασία i υπάρχει ένα σύνολο $S_i \subseteq M$ τέτοιο ώστε $p_{ij} = p_i$ αν $j \in S_i$ ή $p_{ij} = \infty$ διαφορετικά.

Η δεύτερη παράμετρος δεν θα μας απασχολήσει, ενώ τέλος η τρίτη παράμετρος προσδιορίζει την συνάρτηση κοινωνικού κόστους και παίρνει μία από τις παρακάτω τιμές.

1. C_{max}: όταν στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος της εργασίας με το μεγαλύτερο κόστος (makespan).

2. $\sum c_i$ όταν στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα από τα κόστη των εργασιών.

3. $\sum w_i c_i$ όταν στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το *σταθμισμένο* άθροισμα από τα κόστη των εργασιών.

4.2 Μηχανισμοί για διάφορες κατηγορίες scheduling games

Εδώ θα εξετάσουμε μηχανισμούς για διάφορους τύπους παιγνίων χρονοδρομολόγησης και θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το τίμημα της αναρχίας σε κάθε περίπτωση. Επιπλέον

θα μας απασχολήσουν θέματα όπως η ύπαρξη και η ταχύτητα σύγκλισης σε ισορροπία Nash στα παίγνια που προκύπτουν.

4.2.1 Μηχανισμοί για το $P||C_{max}$

Αρχικά θα μελετήσουμε το πιο απλό από τα παίγνια χρονοδρομολόγησης τα οποία θα εξετάσουμε, το $P||C_{max}$. Έχουμε n εργασίες και m μηχανές και ο χρόνος εκτέλεσης της εργασίας i είναι p_i, ανεξάρτητα από τη μηχανή στην οποία εκτελείται. Ως κοινωνικό κόστος λαμβάνουμε το χειρότερο makespan από όλες τις μηχανές, δηλαδή τη χρονική στιγμή κατά την οποία ολοκληρώνει την τελευταία εργασία η μηχανή με τον μεγαλύτερο φόρτο εργασιών.

Το αντίστοιχο πρόβλημα χρονοδρομολόγησης $P||C_{max}$ είναι γνωστό ότι είναι NP-Hard. Έχουν προταθεί διάφοροι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για την επίλυσή του. Από αυτούς τον καλύτερο λόγο προσσέγισης έχει ο αλγόριθμος *LPT-Schedule* [Gra66]. Ο αλγόριθμος αυτός, όταν μια μηχανή είναι ελεύθερη, επιλέγει από τις εργασίες που δεν έχουν εκτελεστεί ακόμα αυτή με το μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης και την αναθέτει στη μηχανή αυτή. Ο λόγος προσέγγισης του αλγορίθμου αυτού έχει βρεθεί ότι είναι $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$.

Επιστρέφουμε τώρα στη μελέτη του αντίστοιχου παιγνίου όπου θα εξετάσουμε δύο απλούς μηχανισμούς τους *ShortestFirst*(SF) και *LongestFirst*(LF). Η πολιτική SF προβλέπει ότι κάθε μηχανή εκτελεί πρώτα τις εργασίες εκείνες που έχουν τον μικρότερο χρόνο εκτέλεσης, ενώ η πολιτική LF κάνει το ακριβώς αντίθετο και δίνει προτεραιότητα στις πιο χρονοβόρες εργασίες.

Για να είναι καλώς ορισμένοι οι μηχανισμοί αυτοί πρέπει να θεσπίσουμε ένα αντικειμενικό κριτήριο με βάση το οποίο κάθε μηχανή επιλέγει ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες εργασίες οι οποίες απαιτούν τον ίδιο χρόνο εκτέλεσης (tie-breaking rule). Σε διαφορετική περίπτωση πιθανές ισοψηφίες ενδέχεται να οδηγήσουν σε 'κακέσ' λύσεις. Ένας απλός τρόπος να αντιμετωπίσουμε αυτό το ενδεχόμενο είναι να υποθέσουμε ότι κάθε εργασία έχει ένα μοναδικό αναγνωριστικό και ότι υπάρχει μια καθολική διάταξη όλων των εργασιών με βάση το αναγνωριστικό τους (π.χ. αλφαβητική). Εκτός αν αναφερθεί διαφορετικά, στη συνέχεια υποθέτουμε ότι κάθε ντετερμινιστικός μηχανισμός χρησιμοποιεί αυτή την καθολική διάταξη των αναγνωριστικών. Ωστόσο αξίζει να αναφέρουμε ότι ένα αρνητικό των μηχανισμών που χρησιμοποιούν αυτή τη μέθοδο είναι η αδυναμία τους να χειριστούν ανώνυμες εργασίες, δηλαδή περιπτώσεις όπου οι εργασίες δεν διαθέτουν κάποιο αναγωνριστικό.

Ο μηχανισμός LongestFirst

Είναι προφανές ότι υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ του μηχανισμού LF και του άπληστου αλγόριθμου χρονοδρομολόγησης LPT Schedule για το αντίστοιχο scheduling problem. Πράγματι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.1 [ILMS09]: Το σύνολο των ισορροπιών Nash που προκύπτουν από την εφαρμογή του μηχανισμού LongtestFirst ταυτίζεται με το σύνολο των λύσεων που εξάγει ο αλγόριθμος LPT Schedule.

Απόδειξη: Έστω x μία λύση που έχει εξαχθεί από τον άπληστο αλγόριθμο LPT

Schedule. Τότε προφανώς σε κάθε μηχανή οι εργασίες εκτελούνται σύμφωνα με την πολιτική LF. Έστω ότι υπάρχει κάποια εργασία i η οποία θα επωφεληθεί αν φύγει από τη μηχανή $x(i)$ κι έστω j η μηχανή στην οποία θα εκτελεστεί πιο γρήγορα. Τότε ο άπληστος αλγόριθμος θα είχε τοποθετήσει την εργασία i στη μηχανή j οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Έστω τώρα x μια ισορροπία Nash που προέκυψε από την εφαρμογή της πολιτικής LF. Θα αποδείξουμε με αναγωγή στον αριθμό των εργασιών ότι η λύση x μπορεί να εκληφθεί και ως προϊόν του άπληστου αλγόριθμου LPT Schedule. Για $n = 1$ δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Έστω λοιπόν x μια ισορροπία Nash ενός στιγμιότυπου με $n + 1$ εργασίες κι έστω i η εργασία με το μικρότερο χρόνο εκτέλεσης, δηλαδή $p_i = \min_{k \in N} p_k$. Προφανώς η εργασία i εκτελείται τελευταία σε κάθε μηχανή, οπότε αν την αφαιρέσουμε από το στιγμιότυπο η ισορροπία Nash διατηρείται στη νέα λύση $x^{'}$ που προκύπτει. Από υπόθεση λοιπόν η λύση x' μπορεί να εξαχθεί από τον άπληστο αλγόριθμο. Επειδή η εργασία i έχει το μικρότερο χρόνο εκτέλεσης ο άπληστος αλγόριθμος θα την τοποθετήσει τελευταία στην μηχανή $j = x(i)$. Οπότε και η λύση x μπορεί να εξαχθεί από τον άπληστο αλγόριθμο. □

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.1 είναι η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.2: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού LF για το πρόβλημα $P||C_{max}$ είναι ίδιο με το λόγο προσέγγισης του άπληστου αλγόριθμου LPT Schedule για το αντίστοιχο πρόβλημα χρονοδρομολόγησης, δηλαδή $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$.

Ένα ακόμα θετικό χαρακτηριστικό του μηχανισμού LF είναι ότι τα παίγνια που προκύπτουν από την εφαρμογή του διαθέτουν πάντα αμιγή ισορροπία Nash, ο υπολογισμός της οποίας είναι εύκολος.

Ο Μηχανισμός ShortestFirst και η Έννοια του Truthfulness

Το γεγονός ότι στο μηχανισμό LongestFirst οι πιο χρονοβόρες εργασίες εκτελούνται πρώτες ενδέχεται να δώσει κίνητρο σε κάποιον παίκτη να πει ψέματα σχετικά με τον όγκο της εργασίας του. Συγκεκριμένα μπορούν κάποιοι παίκτες να προθέσουν περιττές διεργασίες στην εργασία που επιθυμούν να εκτελέσουν, προκειμένου αυτή να φανεί πιο χρονοβόρα απ' ότι πραγματικά είναι ώστε να εκτελεστεί νωρίτερα από κάποιες άλλες εργασίες.

Ένας μηχανισμός που εξασφαλίζει ότι αυτό δεν θα συμβεί είναι ο μηχανισμός ShortestFirst, όπου κάθε μηχανή εκτελεί πρώτα τις λιγότερο χρονοβόρες εργασίες. Έναν μηχανισμό με την ιδιότητα αυτή τον ονομάζουμε *φιλαληθή (truthful)*. Ο μηχανισμός αυτός έχει παραπλήσιες ιδιότητες με τον LF που μελετήσαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί και στην περίπτωση του SF ότι υπάρχει πάντα μια $1 - 1$ αντιστοιχία μεταξύ των ισορροπιών Nash των παιγνίων που προκύπτουν από την εφαρμογή του και των λύσεων που εξάγει ο άπληστος αλγόριθμος SPT-Schedule για το αντίστοιχο scheduling problem. Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού SF ταυτίζεται με τον λόγο προσέγγισης του αλγόριθμου SPT-Schedule ο οποίος είναι $2 - \frac{1}{m}$. Βλέπουμε ότι ο SF έχει χειρότερο τίμημα της αναρχίας από τον LF έχει όμως το θετικό ότι είναι ένας truthful μηχανισμός. Η διαφορά αυτή είναι *το τίμημα της φιλαλήθειας (price of truthfulness)*, δηλαδή το επιπλέον κόστος που πληρώνουμε προκειμένου ο μηχανισμός να είναι φιλαληθής.

Άλλοι μηχανισμοί

Ένας άλλος μηχανισμός που έχει μελετηθεί αρκετά είναι ο μηχανισμός Makespan. Στον μηχανισμό αυτό κάθε μηχανή εκτελει παράλληλα όλες τις εργασίες που της έχουν ανατεθεί και ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί η εκτέλεση μιας εργασίας i είναι ο ίδιος για όλες τις εργασίες που έχουν ανατεθεί στη μηχανή j και ίσος με το makespan M_j της μηχανής.

Ο μηχανισμός αυτός δεν εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι αλλάξαμε τους κανόνες του παιγνίου, αφού το κόστος του κάθε παίκτη ταυτίζεται με αυτό στην περίπτωση του αντίστοιχου παιγνίου συμφόρησης. Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού αυτού για το $P||C_{max}$ είναι $2 - \frac{2}{m+1}$ [ILMS09].

Τέλος, αναφέρουμε και τον μηχανισμό Randomized, όπου κάθε μηχανή ταξινομεί τις εργασίες που έχει να εκτελέσει σε πλήρως τυχαία σειρά. Και αυτός ο μηχανισμός έχει τίμημα της αναρχίας ίσο με $2 - \frac{2}{m+1}$ για το $P||C_{max}$. [ILMS09]

4.2.2 Μηχανισμοί για τα $Q||C_{max}$ και $B||C_{max}$

Το πρόβλημα $Q||C_{max}$ ορίζεται ως εξής: Έχουμε n εργασίες και m μηχανές. Κάθε μηχανή j χαρακτηρίζεται από μια παράμετρο s_j που είναι η ταχύτητά της. Κάθε εργασία i χαρακτηρίζεται από μια παράμετρο p_i που εκφράζει απαίτηση επεξεργασίας. Ο χρόνος εκτέλεσης της εργασίας i στη μηχανή j είναι $p_{ij} = \frac{p_i}{s_j}$.

Στην περίπτωση του $B||C_{max}$ κάθε εργασία i μπορεί να εκτελεστεί μόνο σε ένα υποσύνολο S_i των μηχανών. Ό χρόνος εκτέλεσής είναι ίδιος σε όλες αυτές της μηχανές, δηλαδή $p_{ij} = p_i$ αν $j \in S_i$, ενώ $p_{ij} = \infty$ διαφορετικά.

Για τις δύο αυτές κατηγορίες παιγνίων χρονοδρομολόγησης θα εξετάσουμε την αποδοτικότητα των μηχανισμών ShortestFirst και LongestFirst. Ωστόσο, θα δούμε ότι τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε ισχύουν για *κάθε* ντετερμινιστικό μηχανισμό.

Το παίγνιο $Q||C_{max}$

Ξεκινάμε με την περίπτωση του $Q||C_{max}$ και αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.3 [ILMS09]: Το τίμημα της αναρχίας κάθε ντετερμινιστικού μηχανισμού για το $Q||C_{max}$ είναι $O(logm)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $s_1 \geq ... \geq s_m$. Έστω o η βέλτιστη λύση με κόστος (makespan) C_o κι έστω μ μια αμιγής ισορροπία Nash κόστους $kC_o \leq C \leq (k+1)C_o$ για κάποιον ακέραιο k. Τέλος έστω M_j το (makespan) της μηχανής j στη λύση μ.

Έστω ότι m_ℓ είναι το μικρότερο index μηχανής τέτοιο ώστε το makespan της μηχανής $m_\ell + 1$ είναι μικρότερο από $(k-\ell)C_o$, δηλαδή για κάθε $j \leq m_\ell$, $M_j \geq (k-\ell)C_o$, ενώ $M_{m_\ell+1} < (k-\ell)C_o$. Αρχικά δείχνουμε ότι $M_1 \geq (k-1)C_o$, οπότε $m_1 \geq 1$. Πράγματι, έστω ότι $M_1 < (k-1)C_o$. Έστω i η εργασία που καθορίζει το makespan, δηλαδή έχει χρόνο ολοκλήρωσης $c_i = C \geq kC_o$. Εφ' όσον η μηχανή 1 είναι η γρηγορότερη ισχύει $\frac{p_i}{s_1} \leq C_o$,

άρα η εργασία i θα ολοκληρωθεί γρηγορότερα αν μετακινηθεί στη μηχανή 1, αφού τότε θα έχει χρόνο ολοκλήρωσης $c_i < (k-1)C_o + \frac{p_i}{s_1} \leq kC_o$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού η λύση μ είναι ισορροπία Nash. Άρα $M_1 \geq (k-1)C_o$ και $m_1 \geq 1$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ισχύει η εξής σχέση: $m_\ell \geq (\ell - t - 1)m_t$ για $1 \leq t < \ell \leq k-1$. Τότε θα ισχύει $m_{k-1} \geq 2m_{k-4} \geq 2^i \cdot m_{k-3i-1} \geq 2^{\frac{k-4}{3}} m_1$. Λόγω των σχέσεων $m \geq m_{k-1}$ και $m_1 \geq 1$ παίρνουμε $k = O(logm)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Έστω λοιπόν W το σύνολο των εργασιών οι οποίες έχουν χρόνο ολοκλήρωσης μεγαλύτερο από $(k-\ell+1)C_o$ και εκτελούνται σε μία εκ των $1, 2, ..., m_t$ στη λύση μ κι έστω $i \in W$. Ισχυριζόμαστε ότι η εργασία i εκτελείται σε μία εκ των $1, 2, ..., m_\ell$ στη βέλτιστη λύση o. Πράγματι αν η εργασία i εκτελείται σε μια μηχανή $j > m_\ell$ στη λύση o, τότε $\frac{p_i}{s_{m_\ell+1}} \leq \frac{p_i}{s_j} \leq C_o$, οπότε στη λύση μ η εργασία i μπορεί να μετακινηθεί στη μηχανή $m_\ell + 1$ και να έχει χρόνο ολοκλήρωσης $c_i < (k-\ell)C_o + \frac{p_i}{s_{m_\ell+1}} \leq (k-\ell+1)C_o$. Οπότε όλες οι εργασίες του συνόλου W εκτελούνται σε μία εκ των $1, 2, ..., m_\ell$ στη βέλτιστη λύση.

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.3 είναι η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 4.4: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού ShortestFirst για το $Q||C_{max}$ είναι $O(logm)$.

Ισχύει μάλιστα ότι το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού ShortestFirst για το $Q||C_{max}$ είναι $\Theta(logm)$, δηλαδή τα άνω και κάτω φράγματα ταυτίζονται. Αυτό προκύπτει από γνωστά αποτελέσματα για τον αλγόριθμο SPT-Schedule στο πρόβλημα $Q||C_{max}$ [β] και το γεγονός ότι η ισχύς του θεωρήματος 4.1 μπορεί να επεκταθεί και στη περίπτωση των ομοιόμορφων μηχανών.

Παρόμοια, από γνωστά αποτελέσματα για τον LPT-Schedule προκύπτει ότι το θεώρημα χ δεν δίνει το καλύτερο δυνατό άνω όριο του τιμήματος της αναρχίας του μηχανισμού LongestFirst για το $Q||C_{max}$. Πράγματι αποδεικνύεται [β] ότι το τίμημα της αναρχίας του LF για το $Q||C_{max}$ φράσσεται από μια σταθερά.

Το παίγνιο $B||C_{max}$

Για την περίπτωση του $B||C_{max}$ ισχύει ένα αποτέλεσμα αντίστοιχο με αυτό του θεωρήματος 4.3:

Θεώρημα 4.5 [ILMS09]: Το τίμημα της αναρχίας κάθε ντετερμινιστικού μηχανισμού για το $B||C_{max}$ είναι $O(logm)$.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι τα άνω και κάτω όρια ταυτίζονται, δηλαδή:

Θεώρημα 4.6 [ILMS09]: Το τίμημα της αναρχίας κάθε ντετερμινιστικού μηχανισμού για το $B||C_{max}$ είναι $\Omega(logm)$.

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του $B||C_{max}$ με m εργασίες και m

μηχανές. Η εργασία i μπορεί να εκτελεστεί μόνο στις μηχανές $1, ..., m - i + 1$ με χρόνο εκτέλεσης $p_i = 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $m = 2^k$.

Έστω η παρακάτω ανάθεση εργασιών σε μηχανές. Οι εργασίες 1 ως $2^{k-1} = \frac{m}{2}$ εκτελούνται στις μηχανές 1 ως $\frac{m}{2}$ αντίστοιχα. Οι εργασίες $\frac{m}{2} + 1$ ως $\frac{3m}{4}$ εκτελούνται στις μηχανές 1 ως $\frac{m}{4}$ αντίστοιχα και ούτω καθ' εξής. Η ανάθεση αυτή αποτελεί ισορροπία Nash με κόστος $k = log_2 m$. Στη βέλτιστη ανάθεση η εργασία i εκτελείται στη μηχανή $m - 1 + 1$ με κόστος 1. Άρα το τίμημα της αναρχίας είναι τουλάχιστον $log_2 m$. □

4.2.3 Μηχανισμοί για το $R||C_{max}$

Το πρόβλημα $R||C_{max}$ είναι το πιο γενικό από αυτά που μελετήσαμε παραπάνω. Εδώ για κάθε εργασία i και για κάθε μηχανή j υπάρχει μια τιμή p_{ij} που προσδιορίζει το χρόνο που χρειάζεται η μηχανή j για να εκτελέσει την εργασία i. Τα p_{ij} είναι αυθαίρετοι θετικοί αριθμοί (επιτρέπουμε επίσης να πάρουν την τιμή $+\infty$) πλήρως ασυσχέτιστοι μεταξύ τους.

Ντετερμινιστικοί, ισχυρά τοπικοί, μη προεκχωρητικοί μηχανισμοί

Αρχικά θα μελετήσουμε την απόδοση της πολιτικής SF για την περίπτωση του $R||C_{max}$. Ισχύει και τώρα ότι το γεγονός ότι το σύνολο των ισορροπιών Nash που προκύπτουν από την εφαρμογή της πολιτικής SF αντιστοιχεί ακριβώς στο σύνολο των λύσεων που εξάγει ο αντίστοιχος άπληστος αλγόριθμος. Ο αλγόριθμος αυτός επιλέγει σε κάθε βήμα την εργασία που μπορεί να πετύχει τον καλύτερο δυνατό χρόνο ολοκλήρωσης, από αυτές που δεν έχουν ανατεθεί ακόμα σε κάποια μηχανή, και την τοποθετεί στη μηχανή όπου πετυχαίνει τον χρόνο αυτό.

Αναμενόμενα λοιπόν, το άνω φράγμα του τιμήματος της αναρχίας της πολιτικής SF αντιστοιχεί στο λόγο προσέγγισης του άπληστου αλγόριθμου Shortest-First, ο οποίος είναι ίσος με m. Αντίστοιχα προκύπτει ότι το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού LF είναι μη-φραγμένο και για τον λόγο αυτό δεν θα τον εξετάσουμε εδώ.

Θεώρημα 4.7 [ILMS09]: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού ShortestFirst για το $R||C_{max}$ είναι το πολύ m.

Απόδειξη: Έστω μ μια ισορροπία Nash κι ας υποθέσουμε ότι διατάσσουμε τις εργασίες σε αύξουσα σειρά ως προς το χρόνο ολοκλήρωσης. Αυτή η διάταξη ταυτίζεται με τη σειρά με την οποία τις επιλέγει ο άπληστος αλγόριθμος Shortest-First. Έστω M^i το χειρότερο makespan στην ισορροπία μ αν λάβουμε υπ' όψη μόνο τις εργασίες 1 ως i. Έστω επίσης $p_i = \min_j p_{ij}$. Τότε $M^i \leq M^{i-1} + p_i$. Ισχύει $C = M^n = \sum_i (M^i - M^{i-1}) \leq \sum_i p_i \leq m \cdot C_o$. □

Ένα θετικό χαρακτηριστικό του μηχανισμού SF είναι ότι τα παίγνια που προκύπτουν διαθέτουν πάντα αμιγή ισορροπία Nash. Αυτό αποδεικνύεται με από την ύπαρξη μιας διατακτικής συνάρτησης δυναμικού. Μάλιστα η σύγκλιση σε ισορροπία Nash πραγματοποιείται μετά από το πολύ n^2 μεταβολές κατάστασης. Παρακάτω περιγράφουμε την κατασκευή της συνάρτησης δυναμικού.

Θεώρημα 4.8 [ILMS09]: Τα παίγνια που προκύπτουν από την εφαρμογή του μηχανισμού ShortestFirst για το $R||C_{max}$ είναι παίγνια δυναμικού.

Απόδειξη: Έστω μια κατάσταση u και $c(u) = (c_1, ..., c_n)$ το διάνυσμα των χρόνων ολοκλήρωσης ταξινομημένο σε αύξουσα σειρά. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση δυναμικού είναι ορισμένη έτσι ώστε αν για δύο εργασίες i, k, $p_{ij} = p_{kj}$ και η εργασία i εκτελείται πριν την k στη μηχανή j τότε η συνάρτηση δυναμικού υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τιμές $p_{ij}^{'}, p_{kj}^{'}$ τέτοιες ώστε $p_{ij}^{'} < p_{kj}^{'}$.

Έστω τώρα ότι η εργασία i μεταβαίνει σε μια νέα μηχανή, την $j^{'}$ και μειώνει το χρόνο ολοκλήρωσής της. Έστω v η νέα κατάσταση και $c(v) = c_1^{'}, ..., c_n^{'}$. Έστω $c_k^{'} < c_i$ ο νέος χρόνος ολοκλήρωσης της εργασίας i. Η μετακίνηση της εργασίας i προκάλεσε αύξηση του χρόνου ολοκλήρωσης των εργασιών που έχουν ανατεθεί στη μηχανή $j^{'}$ και είχαν χρόνο ολοκλήρωσης μεγαλύτερο του $c_k^{'}$ στην κατάσταση u. Δηλαδή στην κατάσταση v μειώσαμε την τιμή ενός στοιχείου του διανύσματος από c_i σε $c_k^{'}$ και δεν αυξήσαμε την τιμή κανενός στοιχείου μικρότερου του $c_k^{'}$. Άρα λεξικογραφικά ισχύει $c(v) < c(u)$, οπότε το διάνυσμα c αποτελεί διατακτική συνάρτηση δυναμικού. □

Στα αρνητικά του μηχανισμού SF είναι ότι δεν είναι αρκετά αποδοτικός. Αυτό οφείλεται όπως θα δούμε σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που διαθέτει ο μηχανισμός. Γενικά μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε έναν μηχανισμό με βάση συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που διαθέτει. Έτσι ένας μηχανισμός μπορεί να χαρακτηριστεί ως:

1. *Ντετερμινιστικός ή μη-ντετερμινιστικός* (όπως π.χ. ο μηχανισμός Randomized)

2. *Ισχυρά τοπικός ή απλά τοπικός*. Όλοι οι μηχανισμοί που περιγράφουμε είναι τοπικοί με την έννοια ότι κάθε μηχανή ταξινομεί τις εργασίες που τις έχουν ανατεθεί λαμβάνωντας υπ' όψη μονάχα τις παραμέτρους των εργασιών αυτών και όχι των εργασιών που έχουν ανατεθεί σε άλλες μηχανές. Όπως εξηγήσαμε και στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός ότι μπορούν να υλοποιηθούν τοπικά και χωρίς να απαιτείται μεγάλη ανταλλαγή πληροφοριών είναι ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα των coordination mechanisms σαν μέθοδος αντιμετώπισης του τιμήματος της αναρχίας. Ωστόσο μπορεί μια μηχανή να λαμβάνει υπ' όψη όλες τις παραμέτρους των εργασιών που τις έχουν ανατεθεί ή μονάχα τον χρόνο εκτέλεσής τους στη συγκεκριμένη μηχανή. Μηχανισμοί για τους οποίους ισχύει η τελευταία περίπτωση ονομάζονται ίσχυρά τοπικοί. Τέτοιοι είναι οι μηχανισμοί SF και LF που έχουμε δει.

3. *Προεκχωρητικός ή μη-προεκχωρητικός*. Προεκχωρητικοί ονομάζονται οι μηχανισμοί που επιτρέπουν στις μηχανές να εισάγουν καθυστερήσεις και νεκρά χρονικά διαστήματα κατά την εκτέλεση των εργασιών, ενώ επιτρέπουν τη διακοπή της εκτέλεσης μιας εργασίας πριν αυτή ολοκληρωθεί. Αντίθετα οι μη-προεκχωρητικοί μηχανισμοί επιβάλλουν να εκτελούνται οι εργασίες αδιάλλειπτα με βάση μια ορισμένη σειρά. Ως τώρα έχουμε εξετάσει μονάχα μη-προεκχωρητικούς μηχανισμούς, εκτός από μια παραλλαγή των LF και SF που είδαμε στην ενότητα χ, η οποία εισάγει καθυστερήσεις.

Ο μηχανισμός ShortestFirst είναι ντετερμινιστικός, ισχυρά τοπικός και μη-προεκχωρητικός. Για τους μηχανισμούς με αυτά τα χαρακτηριστικά ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.9 [AJM08]: Το τίμημα της αναρχίας κάθε ντετερμινιστικού, ισχυρά τοπικού, μη-προεκχωρητικού μηχανισμού είναι $\Omega(m)$, συγκεκριμένα είναι τουλάχιστον $\frac{m}{2}$.

Το παραπάνω θεώρημα συνεπάγεται ότι το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού SF είναι $\Theta(m)$.

Ντετερμινιστικοί, τοπικοί, μη προεκχωρητικοί μηχανισμοί

Για να βελτιώσουμε το τίμημα της αναρχίας στην περίπτωση του $R||C_{max}$ θα εξετάσουμε στη συνέχεια τοπικές πολιτικές στις οποίες οι μηχανές λαμβάνουν υπ' όψη όλες τις παραμέτρους των εργασιών οι οποίες τους ανατίθενται. Παρακάτω θα περιγράψουμε μια τέτοια πολιτική την IB (Inefficiency-Based).

Έστω λοιπόν $p_i = \min_j p_{ij}$ για κάθε εργασία i. Ορίζουμε τότε την *αναποτελεσματικότητα (inefficieny)* της εργασίας i στη μηχανή j ως $e_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_i}$. Στην πολιτική IB οι εργασίες σε κάθε μηχανή εκτελούνται σε αύξουσα σειρά ως προς την αναποτελεσματικότητα.

Θεώρημα 4.10 [ILMS09]: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού IB για το $R||C_{max}$ είναι $Ologm$.

Απόδειξη: Για ένα σύνολο $S \subseteq N$ ορίζουμε $W_S = \sum_{i \in S} p_i$. Επίσης $W = \sum_{i \in N} p_i$. Έξετάζουμε μια αμιγή ισορροπία Nash μ. Σε κάθε μηχανή χωρίζουμε τις εργασίες που της έχουν ανατεθεί σε ομάδες. Για τη μηχανή j και για κάθε $k \geq 0$, M_{kj} είναι το σύνολο των εργασιών που εκτελούνται στη μηχανή αυτή μετά από χρόνο $2k \cdot C_o$. Επίσης $M_k = \cup_j M_{kj}$.

Έστω $R_{kj} = W_{M_{kj}} = \sum_{i \in M_{kj}} p_i$. Αν μόνο ένα μέρος μιας εργασίας i εκτελείται στη μηχανή j για χρόνο x μετά τη χρονική στιγμή $2k \cdot C_o$ τότε η συνεισφορά της στο R_{kj} είναι $p_i \frac{x}{p_{ij}} = \frac{x}{e_{ij}}$. Ορίζουμε επίσης $R_k = \sum_j R_{kj}$, ενώ ισχύει $R_0 = W$. Χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.11 [ILMS09]: Για κάθε $k \geq 1$, $R_k \leq \frac{1}{2} R_{k-1}$.

Απόδειξη: Έστω O_j το σύνολο των εργασιών που εκτελεί η μηχανή j στη βέλτιστη λύση και $O_{kj} = O_j \cap M_k$. Επίσης έστω f_{kj} η μικρότερη αναποτελεσματικότητα από το σύνολο των εργασιών του O_{kj} στη λύση μ. Αν το σύνολο O_{kj} δεν είναι κενό, τότε η μηχανή j εκτελεί εργασίες με αναποτελεσματικότητα το πολύ f_{kj} μέχρι τη χρονική στιγμή $(2k-1) \cdot C_o$, διαφορετικά η εργασία που ορίζει το f_{kj} μπορεί να μετακινηθεί στη μηχανή j και να ολοκληρωθεί το αργότερο τη χρονική στιγμή $(2k-1) \cdot C_o + C_o = 2k \cdot C_o$.

Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή j εκτελεί εργασίες με αναποτελεσματικότητα το πολύ f_{kj} μεταξύ των χρονικών στιγμών $(2k-2) \cdot C_o$ και $(2k-1) \cdot C_o$, οπότε $R_{k-1,j} - R_{kj} \geq \frac{C_o}{f_{kj}}$.

Πάράλληλα, στη βέλτιστη λύση, όλες η εργασίες του συνόλου O_{kj} εκτελούνται στη

μηχανή j με αναποτελεσματικότητα τουλάχιστον f_{kj}, οπότε $\sum_{i \in O_{kj}} p_i \leq \frac{C_o}{f_{kj}}$. Αθροίζοντας για όλες τις μηχανές και λαμβάνωντας υπ' όψη ότι $M_k = \cup_j O_{kj}$ παίρνουμε τελικά $R_{k-1} - R_k \geq R_k$, δηλαδή $R_{k-1} \geq 2R_k$. $\square$

Εφαρμόζουμε τώρα το λήμμα χ $b = \lceil logm \rceil$ φορές παίρνουμε $R_b \leq \frac{1}{m} R_0 = \frac{W}{m} \leq C_o$. Αυτό σημαίνει ότι ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης εργασιών του M_b με μοναδιαία αναποτελεσματικότητα είναι το πολύ C_o. Άρα όλες αυτές οι εργασίες έχουν ολοκληρωθεί μέχρι τη χρονική στιγμή $(2b+1) \cdot C_o$. Έστω τώρα μια εργασία που δεν έχει ολοκληρωθεί τη χρονική στιγμή $2b \cdot C_o$. Αυτή η εργασία έχει τη δυνατότητα να εκτελεστεί σε μια μηχανή όπου θα έχει μοναδιαία αναποτελεσματικότητα. Σε αυτή την περίπτωση θα ξεκινήσει να εκτελείται το αργότερο τη χρονική στιγμή $(2b+1) \cdot C_o$ και θα ολοκληρωθεί το αργότερο τη χρονική στιγμή $(2b+2) \cdot C_o$. Αφού η περίπτωση που εξετάζουμε είναι ισορροπία Nash, το χειρότερο δυνατό κόστος είναι το πολύ $(2b+1) \cdot C_o \leq (2logm + 4) \cdot C_o$. $\square$

Το όριο που υπολογίσαμε είναι και το καλύτερο δυνατό για κάθε ντετερμινιστικό, τοπικό, μη-προεκχωρητικό μηχανισμό [β] Οπότε, αν θέλουμε να βελτιώσουμε περεταίρω το τίμημα της αναρχίας θα πρέπει να εξετάσουμε προεκχωρητικούς μηχανισμούς.

Επιπλέον, ο μηχανισμός IB ενδέχεται να οδηγήσει σε παίγνια τα οποία δεν διαθέτουν αμιγή ισορροπία Nash. Ωστόσο, υπάρχει μια ελαφρώς τροποποιημένη έκδοση του μηχανισμού IB, με τίμημα της αναρχίας ίσο με $O(log^2 m)$ η οποία οδηγεί σε παίγνια στα οποία είναι εξασφαλισμένη η γρήγορη σύγκλιση σε κάποια αμιγή ισορροπία Nash.

Η ιδέα της εισαγωγής καθυστερήσεων

Θα επανεξετάσουμε τις πολιτικές LF και SF, προσθέτωντας ωστόσο έναν επιπλέον κανόνα ο οποίος προσδίδει στους μηχανισμούς αυτούς ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ορίζουμε λοιπόν τον εξής μηχανισμό: [Kou04]

- Κάθε μηχανή ταξινομεί τις εργασίες με βάση την πολιτική LF (ή SF) χρησιμοποιώντας την καθολική διάταξη των εργασιών για να αντιμετωπίσει πιθανές ισοψηφίες.
- Στη συνέχεια η μηχανή j εισάγει ορισμένες καθυστερήσεις (όσο μικρές θέλουμε) στην εκτέλεση των εργασιών έτσι ώστε κάθε εργασία να ολοκληρώνεται μόνο σε χρονικές στιγμές t τέτοιες ώστε $t \equiv j(modn)$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι καθυστερήσεις που εισάγονται είναι αμελητέες σε σύγκριση με τους χρόνους εκτέλεσης των εργασιών, έτσι ώστε να μην αυξάνουν το κοινωνικό κόστος.

Ο παραπάνω μηχανισμός, με τον τρόπο που έχει οριστεί, έχει μερικές ωραίες ιδιότητες. Συγκεκριμένα έστω ότι οι μηχανές εφαρμόζουν την πολιτική LF κι εμείς ταξινομημούμε τις n εργασίες σε φθίνουσα σειρά ως προς τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης, χρησιμοποιώντας την διάταξη των αλφαριθμητικών τους σε περίπτωση ισοψηφίας. Τότε η πρώτη εργασία στη σειρά αυτή θα εκτελείται πρώτη σε κάθε μηχανή. Λόγω όμως των καθυστερήσεων που εισάγουμε, θα υπάρχει ακριβώς μία μηχανή στην οποία θα ολοκληρώνεται γρηγορότερα και την οποία θα επιλέξει. Αυτή η επιλογή είναι γνωστή εκ των προτέρων και στις υπόλοιπες

εργασίες, οπότε και η δεύτερη εργασία, με παρόμοια κριτήρια θα επιλέξει τη *μοναδική* μηχανή στην οποία επιτυγχάνει τη γρηγορότερη δυνατή εκτέλεση και ούτω καθ' εξής. Βλέπουμε δηλαδή ότι ο παραπάνω μηχανισμός οδηγεί σε παίγνια τα οποία διαθέτουν ακριβώς μία ισορροπία Nash.

Ο μηχανισμός αυτός προτάθηκε στο [Kou04] για το πρόβλημα $P||C_{max}$. Στην περίπτωση αυτή, σε σύγκριση με τον αντίστοιχο μηχανισμό χωρίς τις καθυστερήσεις, το μόνο πλεονέκτημα είναι ή μοναδικότητα της ισορροπίας Nash. Δεν μπορεί δηλαδή να βελτιώσει το κοινωνικό κόστος. Συγκεκριμένα το ταξμινομημένο διάνυσμα $(M_1, ..., M_m)$ με το makespan όλων των μηχανών στην ισορροπία είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

Ωστόσο έχει ξεχωριστό ενδιαφέρον η μελέτη του μηχανισμού αυτού στην περίπτωση του $R||C_{max}$. Αυτό συμβαίνει επειδή ο μηχανισμός ενδέχεται να 'εμποδίσει' μια εργασία η οποία χωρίς τις καθυστερήσεις θα είχε δύο ή παραπάνω ισοδύναμες για την ίδια επιλογές να κάνει την κοινωνικά χειρότερη επιλογή. Πάντως δεν έχει βρεθεί αν ο μηχανισμός αυτός μπορεί πράγματι να πετύχει καλύτερες ισορροπίες Nash από τον αντίστοιχο μη-προεκχωρητικό σε ορισμένα στιγμιότυπα.

Αμέσως παρακάτω θα δούμε πάντως ότι η εισαγωγή καθυστερήσεων είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να σχεδιάσουμε μηχανισμούς με χαμηλότερο άνω φράγμα στο τίμημα της αναρχίας σε σύγκριση με τους μη-προεκχωρητικούς μηχανισμούς. Συγκεκριμένα θα περιγράψουμε μια σειρά απο προεκχωρητικούς μηχανισμούς, οι οποίοι παρουσιάστηκαν στο [Car09], στην προσπάθεια να βελτιώσουμε το τίμημα της αναρχίας για το παίγνιο $R||C_{max}$. Οι μηχανισμοί που θα παρουσιάσουμε καθυστερούν να αποδεσμεύσουν τις εργασίες πέραν της χρονικής στιγμής κατά την οποία ολοκληρώθηκε η εκτέλεσή τους.

Οι μηχανισμοί αυτοί είναι αρκετά διαφορετικοί από όσους έχουμε δει παραπάνω ως προς τον ορισμό και την υλοποίησή τους. Ως τώρα οι μηχανισμοί που είχαμε δει ήταν απλά κάποιες πολιτικές ταξινόμησης των εργασιώ που έχουν ανατεθεί σε μια μηχανή. Τώρα θα ορίσουμε τους μηχανισμούς διαφορετικά. Για μια εργασία i μια μηχανή j και μια ανάθεση μ θα παρουσιάσουμε μια έκφραση που προσδιορίζει την χρονική στιγμή κατά την οποία η εργασία i ολοκληρώνεται και αποδεσμεύεται από τη μηχανή j και την οποία θα συμβολίσουμε με $c(i, \mu_j)$, όπου μ_j είναι το σύνολο των εργασιών που εκτελεί η μηχανή j στη λύση μ. Δεν θα μας απασχολήσει η συγκεκριμένη σειρά με την οποία οι μηχανές εκτελούν τις εργασίες. Μας αρκεί τα $c(i, \mu_j)$ να εξασφαλίζουν την ύπαρξη εφικτών schedules τα οποία να είναι δυνατόν να υπολογιστούν αποτελεσματικά. Αυτό συμβαίνει όταν για κάθε εργασία $i \in \mu_j$, ο συνολικός απαιτούμενος χρόνος εκτέλεσης των εργασιών που ολοκληρώνονται μέχρι τη στιγμή $c(i, \mu_j)$ είναι το πολύ $c(i, \mu_j)$.

Ο πρώτος μηχανισμός που θα δούμε, ο ACOORD, χρειάζεται να γνωρίζει την καθολική διάταξη των εργασιών με βάση τα μοναδικά αναγωνριστικά τους. Επίσης, για μια ανάθεση μ, έστω μ^i ο περιορισμός της στις i πρώτες εργασίες στην διάταξη αυτή. Τέλος με $M(\mu_j) = \sum_{i \in \mu_j} p_{ij}$ συμβολίζουμε τη συνολική απαίτηση επεξεργασίας από τη μηχανή j στη λύση μ, ενώ υπενθυμίζουμε ότι $e_{ij} = \frac{p_i}{p_{ij}}$ είναι η αναποτελεσματικότητα της εργασίας i όταν εκτελείται στη μηχανή j

Ορισμός 4.12 [Car09]: Ο μηχανισμός ACOORD ορίζεται έτσι ώστε η εργασία i

ολοκληρώνεται στη μηχανή j τη χρονική στιγμή

$$c(i, \mu_j) = (e_{ij})^{1/k} M(\mu_j^i)$$

, όπου k είναι μια παράμετρος που θα προσδιορίσουμε αργότερα και $M(\mu_j^i) = \sum_{i \in \mu_j^i} p_{ij}$. Επειδή $e_{ij} \geq 1$ ο μηχανισμός αυτός δίνει πάντα εφικτά schedules.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο μηχανισμός ACOORD είναι σε ισχύ και οι n παίκτες (που αντιστοιχούν στις n εργασίες) εκτελούν διαδοχικά από μία κίνηση, ξεκινώντας από αυτόν με το μικρότερο αναγωνριστικό. Ο παίτκης επιλέγει τη μηχανή εκείνη που ελαχιστοποιεί την έκφραση $(e_{ij})^{1/k} M(\mu_j^i)$. Παρατηρούμε ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης της εργασίας i εξαρτάται μόνο από εργασίες που προηγούνται στη καθολική διάταξη. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία n κινήσεων που περιγράφουμε παραπάνω θα οδηγήσει σε μια κατάσταση αμιγούς ισορροπίας Nash. Δηλαδή ο μηχανισμός ACOORD οδηγεί σε παίγνια που διαθέτουν πάντα αμιγή ισορροπία Nash και η σύγκλιση σε αυτή γίνεται σε γραμμικό χρόνο.

Επίσης το κόστος της ισορροπίας Nash φράσσεται ως προς τη νόρμα ℓ_{k+1} των φορτίων των μηχανών και το κόστος της βέλτιστης λύσης o:

Λήμμα 4.13: $\max_{j, i \in \mu_j} c(i, \mu_j) \leq \left(\sum_j M(\mu_j)^{k+1} \right)^{\frac{1}{k+1}} + \max_j M(o_j)$.

Κάνωντας χρήση του παραπάνω λήμματος είναι δυνατόν να υπολογιστεί το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού ACOORD. Αποδεικνύεται ότι η καλύτερη επιλογή για την παράμετρο k είναι $k = \Theta(logm)$ και στην περίπτωση αυτή το τίμημα της αναρχίας είναι $O(logm)$.

Ο μηχανισμός ACOORD έχει το ίδιο τίμημα της αναρχίας με τον IB που περιγράψαμε παραπάνω, έχει ωστόσο το πλεονέκτημα ότι επιφέρει παίγνια δυναμικού στα οποία επιτυγχάνεται γρήγορη σύγκλιση σε ισορροπία. Ως εκ τούτου ο μηχανισμός αυτός είναι καλύτερος από τον IB.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν λίγο διαφορετικό μηχανισμό, τον BCOORD, ο οποίος δεν χρησιμοποιεί κάποια καθολική διάταξη των εργασιών και ως εκ τούτου έχει τη δυνατότητα να χρονοδρομολογήσει ανώνυμες εργασίες, δηλαδή εργασίες που δεν διαθέτουν αναγνωριστικά. Στην περίπτωση αυτή μια μηχανή δεν έχει τρόπο να διακρίνει μεταξύ δύο εργασιών που έχουν ίδιους χρόνους εκτέλεσης.

Ορισμός 4.14 [Car09]: Ο μηχανισμός BCOORD ορίζεται έτσι ώστε η εργασία i ολοκληρώνεται στη μηχανή j τη χρονική στιγμή

$$c(i, \mu_j) = (e_{ij})^{1/k} M(\mu_j)$$

Η μόνη διαφορά με τον ορισμό του ACOORD είναι ότι τώρα ο χρόνος ολοκλήρωσης μιας εργασίας δεν εξαρτάται από το αναγνωριστικό του. Επίσης η ισχύς του λήμματος χ διατηρείται και στην περίπτωση του BCOORD.

Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού BCOORD ελαχιστοποιείται αν επιλέξουμε $k = \Theta(logm)$ και τότε γίνεται $O(\frac{logm}{loglogm})$. Ωστόσο τα παίγνια που προκύπτουν από την

εφαρμογή του BCOORD δεν είναι παίγνια δυναμικού και ενδέχεται να μην διαθέτουν αμιγή ισορροπία Nash. Παρ΄ όλα αυτά, το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνει ότι είναι δυνατόν να βελτιώσουμε το όριο $\Theta(logm)$ του τιμήματος της αναρχίας με την εφαρμογή προεκχωρητικών μηχανισμών.

Στο [Car09] παρουσιάζεται κι ένας τρίτος μηχανισμός, ο CCOORD, ο οποίος είναι επίσης ικανός να χειριστεί ανώνυμες εργασίες και επιπλέον διαθέτει συνάρτηση δυναμικού, εξασφαλίζοντας έτσι την ύπαρξη αμιγούς ισορροπίας Nash. Τα παίγνια που επιφέρει ο μηχανισμός αυτός έχουν τίμημα της αναρχίας $O(log^2m)$ και τίμημα της σταθερότητας $O(logm)$. Είναι ο καλύτερος γνωστός μηχανισμός που μπορεί να χειριστεί ανώνυμες εργασίες.

Ανοιχτό παραμένει το πρόβλημα εύρεσης μηχανισμών με ακόμα καλύτερο τίμημα της αναρχίας. Πρωταρχικός στόχος θα ήταν να κατασκευαστεί μηχανισμός με τίμημα της αναρχίας $o(logn)$ ο οποίος να επιφέρει παίγνια δυναμικού.

4.2.4 Μηχανισμοί για το $R||\sum_i w_i c_i$

Θα εξετάσουμε τώρα μηχανισμούς για παίγνια χρονοδρομολόγησης όπου αντικειμενικός στόχος δεν είναι πλέον να ελαχιστοποιήσουμε το μέγιστο makespan μιας μηχανής, αλλά το *σταθμισμένο* άθροισμα των χρόνων ολοκλήρωσης των εργασιών (ή ισοδύναμα το σταθμισμένο μέσο χρόνο ολοκλήρωσης μιας εργασίας). Για το λόγο αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε εργασία i ένα βάρος ή σπουδαιότητα w_i. Η παράμετρος αυτή χαρακτηρίζει το πόσο σημαντική θεωρούμε την εργασία i σε σχέση με τις υπόλοιπες εργασίες και δεν έχει καμία σχέση με την απαίτηση επεξεργασίας της.

Το αντίστοιχο πρόβλημα χρονοδρομολόγησης $R||\sum_i w_i c_i$ είναι NP-Hard, ακόμα και στην απλή περίπτωση των πανομοιότυπων μηχανών ($P||\sum_i w_i c$). Οπότε, ένας δεύτερος στόχος της μελέτης coordination mechanisms για το $R||\sum_j w_j c_j$ είναι η πιθανότητα να μας βοηθήσει στην κατασκευή κάποιου καλού προσεγγιστικού αλγορίθμου.

Θα εξετάσουμε μια σειρά από μηχανισμούς που παρουσιάστηκαν στο [β]. Όπως θα δούμε, για την εύρεση άνω φραγμάτων στο τίμημα της αναρχίας των μηχανισμών αυτών ακολουθείται η συνήθης αποδεικτική τεχνική που είδαμε και στο κεφάλαιο 2. Δηλαδή αρχικά φράσσουμε το κοινωνικό κόστος της ισορροπίας Nash κάνωντας χρήση της συνθήκης που πρέπει να ισχύει για να είναι μια κατάσταση ισορροπία Nash και στη συνέχεια χρησιμοποιείται μια κατάλληλα επιλεγμένη μαθηματική σχέση που μας επιτρέπει να εκφράσουμε το κοινωνικό κόστος ως γραμμικό συνδυασμό του κόστους της ισορροπίας Nash και του κόστους της βέλτιστης λύσης. Η καινούρια ιδέα που χρησιμοποιείται εδώ είναι ότι για να τα πετύχουμε όλα αυτά κάνουμε χρήση μιας απεικόνισης από τον χώρο των καταστάσεων του παιγνίου σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο κατάλληλα επιλεγμένο ώστε το κοινωνικό κόστος να αντιστοιχεί στη νόρμα στο χώρο αυτό.

Για τη συνέχεια ορίζουμε $\rho_{ij} = \frac{p_{ij}}{w_i}$. Ο πρώτος μηχανισμός που θα εξετάσουμε ονομάζεται SmithRule (SR). Στην περίπτωση αυτή η μηχανή j εκτελεί τις εργασίες που της έχουν ανατεθεί διαδοχικά σε αύξουσα σειρά ως προς τα ρ_{ij}. Ο μηχανισμός αυτός είναι ντετερμινιστικός, τοπικός και μη-προεκχωρητικός. Παρατηρούμε ότι όταν οι εργασίες δεν

έχουν βάρη ($w_i = 1, \forall i$) τότε ο μηχανισμός ταυτίζεται με τον ShortestFirst.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι για μια συγκεκριμένη ανάθεση εργασιών σε μηχανές, η πολιτική SmithRule, επιτυγχάνει τη βέλτιστη χρονοδρομολόγηση στην κάθε μηχανή όταν στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το σταθμισμένο άθροισμα των χρόνων ολοκλήρωσης. Αυτό σημαίνει ότι και στη συνολικά βέλτιστη λύση η πολιτική SmithRule είναι σε ισχύ. Αυτό διευκολύνει τη σύγκρση του κόστους μιας κατάστασης ισορροπίας Nash για την πόλιτική SmithRule με το κόστος της βέλτιστης ανάθεσης.

Θεώρημα 4.15 [CCGMO11]: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού SR για το $R||\sum_i w_i c_i$ είναι το πολύ 4.

Απόδειξη: Αρχικά ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : M^N \to L_2(\mathbb{R}^+)^M$ η οποία αντιστοιχεί μια διαμόρφωση του παιγνίου σε ένα διάνυσμα συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται ως εξής: Για μια διαμόρφωση x, αν $\mathbf{f} = \phi(x)$, τότε $f_j(y) = \sum_{i \in X_j : \rho_{ij} \geq y} w_i$, όπου X_j είναι το σύνολο των εργασιών που επιλέγουν τη μηχανή j στη λύση x. Ορίζουμε επίσης $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \sum_{j \in M} \langle f_i, g_i \rangle$, όπου $\langle f_i, g_i \rangle := \int_0^\infty f_i(y) g_i(y) dy$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο L_2. Η νόρμα στο χώρο αυτό ορίζεται ως γνωστόν ως $||||x|||| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Τέλος, έστω $\eta(x) = \sum_i w_i p_{ix_i}$. Αρχικά δείχνουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.16: Για κάθε διαμόρφωση x, $C(x) = \frac{1}{2} \langle \phi(x), \phi(x) \rangle + \frac{1}{2} \eta(x)$.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{f} = \phi(x)$. Ισχύει

$$\langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \sum_j \int_0^\infty f_i(y)^2 dy = \sum_j \sum_{i \in X_j} \sum_{k \in X_j} w_i w_k \int_0^\infty 1_{\rho_{ij} \geq y} 1_{\rho_{kj} \geq y} dy$$

$$= \sum_j \sum_{i \in X_j} \sum_{k \in X_j} w_i w_k \min\{\rho_{ij}, \rho_{ik}\} = \sum_j \sum_{i \in X_j} w_i \left(2 \cdot (\sum_{\substack{k \in X_j \\ \rho_{kj} \leq \rho_{ij}}} p_{kj}) - p_{ij} \right)$$

$$= 2C(x) - \eta(x). \qquad \square$$

Έστω τώρα x μια ισορροπία Nash και x^* μια άλλη διαμόρφωση και $\mathbf{f} = \phi(x), (f^*) = \phi(x^*)$. Για το χρόνο ολοκλήρωσης της εργασίας i στην λύση x ισχύει

$$c_i = \sum_{\substack{k : x_k = x_i \\ \rho_{kx_k} < \rho_{ix_i}}} p_{kx_k} + p_{ix_i} \leq \sum_{\substack{k : x_k = x_i^* \\ \rho_{kx_k} < \rho_{ix_i^*}}} p_{kx_k} + p_{ix_i^*}$$

$$\text{Οπότε } C(x) = \sum_i w_i c_i \leq \sum_j \sum_{i \in X_j^*} \left(\sum_{\substack{k \in X_j \\ \rho_{kj} < \rho_{ij}}} w_i w_k \frac{p_{kj}}{w_k} + p_{ij} w_i \right)$$

$$= \sum_j \sum_{i \in X_j^*} \sum_{k \in X_j} w_i w_k \int_0^\infty 1_{\rho_{ij} \geq y} 1_{\rho_{kj} \geq y} dy + \eta(x^*) = \langle \mathbf{f}^*, \mathbf{f} \rangle + \eta(x^*)$$

Κάνωντας χρήση της ανισότητας των Cauchy-Schwartz και της ιδιότητας $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2, a, b \geq 0$ έχουμε:
$C(x) \leq \|\mathbf{f}^*\| \|\mathbf{f}\| + \eta(x^*) \leq \|\mathbf{f}^*\|^2 + \frac{1}{4}\|\mathbf{f}\|^2 + \eta(x^*) \leq 2C(x^*) + \frac{1}{2}C(x)$, οπότε $C(x) \leq 4C(x^*)$. $C(x^*)$ είναι το κόστος της διαμόρφωσης x^* υπολογισμένο με βάση την πολιτική SmithRule η οποία όπως εξηγήσαμε παραπάνω δίνει το βέλτιστο κόστος για συγκεκριμένη διαμόρφωση. □

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό δεν μπορεί να βελτιωθεί από κανέναν ντετερμινιστικό, τοπικό και μη-προεκχωρητικό μηχανισμό. Όπως θα δούμε όμως στη συνέχεια, μπορούμε να πετύχουμε καλύτερα αποτελέσματα με τηνε φαρμογή προεκχωρητικών μηχανισμών. Παρακάτω θα μελετήσουμε έναν τέτοιο μηχανισμό, τον ProportionalSharing (PS). Όταν μια μηχανή υλοποιεί την πολιτική PS εκτελεί τις εργασίες που της έχουν ανατεθεί παράλληλα και κάθε στιγμή μια εργασία που δεν έχει ολοκληρωθεί λαμβάνει ένα ποσοστό του χρόνου της μηχανής ίσο με το βάρος της (ή τη σπουδαιότητά της) προς το συνολικό βάρος όλων των εργασιών την εκτέλεση των οποίων δεν έχει ολοκληρώσει ακόμα η μηχανή. Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κάθε μηχανή εκτελεί τις εργασίες με βάση την πολιτική SR, αλλά στη συνέχεια καθυστερεί να αποδεσμεύσει την κάθε εργασία για χρονικό διάστημα ίσο με την καθυστέρηση που αυτή προκάλεσε στις εργασίες που σύμφωνα με την πολιτική SR εκτελούνται μετά από αυτή.

Είναι ενδιαφέρον ότι, δεδομένης μιας διαμόρφωσης, η πολιτική PS επιφέρει σε *κάθε* εργασία μεγαλύτερο κόστος απ΄ ότι η πολιτική SR. Ωστόσο, όπως θα δούμε, οδηγεί σε λύσεις με καλύτερο κοινωνικό κόστος, παρά τις επιπλέον καθυστερήσεις. Αυτό συμβαίνει διότι ο μηχανισμός PS, βάζοντας τους παίκτες ουσιαστικά να πληρώσουν για τις καθυστερήσεις που η στρατηγική τους προκαλεί σε άλλους παίκτες, προκαλεί κατά κάποιο τρόπο μια ταύτιση των συμφερόντων του κάθε παίκτη με αυτά του κοινωνικού συνόλου. Η ιδέα αυτή είναι παρόμοια με αυτή των φόρων οριακού κόστους που είδαμε στο κεφάλαιο 3.1. Και σε εκείνη την περίπτωση αναγκάζαμε τους παίκτες να πληρώσουν για το επιπλέον κόστος που προακλούν στο κοινωνικό σύνολο, οδηγώντας έτσι το σύστημα σε καλύτερες λύσεις.

Από τον ορισμό του μηχανισμού PS προκύπτει άμεσα το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.17: Για μια διαμόρφωση x όπου η εργασία i εκτελείται στη μηχανή j ισχύει:

$$c_i = \sum_{\substack{k \in X_j \setminus \{i\} \\ \rho_{kj} \leq \rho_{ij}}} p_{kj} + \sum_{\substack{k \in X_j \\ \rho_{kj} > \rho_{ij}}} \frac{w_k}{w_i} p_{kj} + p_{ij}$$

, οπότε

$$w_i c_i = \sum_{k \in X_j \setminus \{i\}} w_i w_k \min\{\rho_{ij}, \rho_{kj}\} + w_i p_{ij}.$$

Το βασικό αποτέλεσμα είναι το εξής:

Θεώρημα 4.18 [CCGMO11]: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού PS για το $R||\sum_i w_i c_i$ είναι το πολύ $1+\phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $C^{PS}(x)$ για το κόστος της διαμόρφωσης x υπολογισμένο με βάση την πολιτική PS και $C^{SR}(x)$ για το κόστος της διαμόρφωσης x υπολογισμένο με βάση την πολιτική SR. Από το λήμμα χ παρατηρούμε ότι $C^{PS}(x) = \|\phi(x)\|^2$. Επίσης για μια ισορροπία Nash x και κάθε άλλη διαμόρφωση x^* ισχύει

$$C^{PS}(x) \leq \sum_i \left(\sum_{k:x_k=x_i^*} w_i w_k \min\left\{\rho_{ix_i^*}, \rho_{kx_i^*}\right\} + p_{ix_i^*} \right) = \langle \phi(x), \phi(x^*) \rangle + \eta(x^*).$$

Έστω λοιπόν πάλι $\mathbf{f} = \phi(x), \mathbf{f}^* = \phi(x^*)$, x μια ισορροπία Nash και x^* μια βέλτιστη ανάθεση. Έχουμε $C^{PS}(x) \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{f}^*\| + \eta(x^*) \leq a\|\mathbf{f}^*\|^2 + \frac{1}{4a}\|\mathbf{f}\|^2 + \eta(x^*) \leq 2aC^{SR}(x^*) + \frac{1}{4a}C^{PS}(x) + (1-a)\eta(x^*) \leq (1+a)C^(SR(x^*) + \frac{1}{4a}C^{PS}(x)$, επειδή $\eta(x^*) \leq C^{SR}(x^*)$. Για $a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ παίρνουμε $\frac{C^{PS}(x)}{C^{SR}(x^*)} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Μια επιπλέον θετική ιδιότητα του μηχανισμού PS είναι ότι επιφέρει πάντα παίγνια δυναμικού. Πράγματι είναι εύκολο να δείξει κάποιος ότι η συνάρτηση $\Phi^{PS}(x) = \frac{1}{2}C^{PS}(x) + \frac{1}{2}\eta(x)$ είναι ακριβής συνάρτηση δυναμικού για τα παίγνια που προκύπτουν από την εφαρμογή του μηχανισμού PS. Αντίθετα, ο μηχανισμός SR που περιγράψαμε παραπάνω δεν οδηγεί πάντα σε παίγνια που διαθέτουν ισορροπία Nash.

Τέλος αναφέρουμε ότι όταν $w_i = 1$, $\forall i$ ο μηχανισμός ProportionalSharing μετατρέπεται στον EqualSharing και μπορεί να δειχθεί ότι το τίμημα της αναρχίας του είναι $\frac{5}{2}$.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι είναι δυνατόν να πετύχουμε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα με την εφαρμογή μη-ντετερμινιστικών μηχανισμών. Ένας τέτοιος είναι ο μηχανισμός Rand για τον οποίο θα μιλήσουμε κι ο οποίος ορίζεται ως εξής: Για δύο εργασίες i, i' που έχουν ανατεθεί στη μηχανή j, η πιθανότητα η εργασία i να εκτελεστεί πριν την i' είναι $\mathbb{P}\{i \prec i'\} = \frac{\rho_{i'j}}{\rho_{ij}+\rho_{i'j}}$.

Ο μηχανισμός αυτός μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής: Έστω X_j το σύνολο των εργασιών που έχουν ανατεθεί στη μηχανή j. Η εργασία $i \in X_j$ επιλέγεται τότε με πιθανότητα $\frac{\rho_{ij}}{\sum_{k \in X_i \rho_{kj}}}$ για να εκτελεστεί τελευταία. Στη συνέχει αφαιρούμε την εργασία i από το σύνολο κι επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να πάρουμε ένα πλήρες schedule.

Αποδεικνύεται το παρακάτω:

Θεώρημα 4.19 [CCGMO11]: Το τίμημα της αναρχίας του μηχανισμού Rand για το $R||\sum_i w_i c_i$ είναι το πολύ $\frac{32}{15}$. Επιπλέον, όταν το άθροισμα των χρόνων επεξεργασίας είναι αμελητέο σε σχέση με το κοινωνικό κόστος της βέλτιστης λύσης, το παραπάνω όριο μειώνεται σε $\frac{\pi}{2}$. Τέλος, τα παίγνια που προκύπτουν από την εφαρμογή του Rand διαθέτουν ακριβή συνάρτηση δυναμικού, την $\Phi^R(x) = \frac{1}{2}C^R(x) + \frac{1}{2}\eta(x)$.

Βιβλιογραφία

[NRTV07] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. Vazirani, editors. "Algorithmic Game Theory." *Cambridge University Press*, 2007.

[Nash51] J. Nash. "Non-cooperative Games," *Annals of Mathematics*, 54: 289-295, 1951.

[DGP06] C. Daskalakis, P.W. Goldberg, and C.H. Papadimitriou. "The complexity of computing a Nash equilibrium." *Symp. on Theory of Computing*, pages 71-78, 2002.

[CD05] X. Chen and X. Deng. "Settling the complexity of 2-player Nash-equilibrium." *In Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 261-272, 2006.

[KP99] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou. "Worst-case equilibria." *In Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 404-413, 1999.

[Ros73] R. W. Rosenthal. "A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria." *International Journal of Game Theory*, 2: 65-67, 1973.

[MS96] D. Monderer and L. S. Shapley. "Potential games." *Games and Economic Behavior*, 14: 124-143, 1996.

[War52] J. G. Wardrop. "Some theoretical aspects of road traffic research." *In Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Pt. II, volume 1, pages 325-378, 1952.

[Pig20] A.C. Pigou. "The Economics of Welfare". *Macmillan*, 1920.

[Rou02] T. Roughgarden. "Selfish Routing" *PhD Thesis, Cornell University*, 2002.

[Rou02a] T. Roughgarden. "The Price of Anarchy is Independent of the Network Topology." *In Proceedings of the 34th Annual Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 428-437, 2002.

[RT02] T. Roughgarden and E. Tardos. "How Bad is Selfish Routing?" *Journal of the ACM*, 49(2): 235-259, 2002.

[RT04] T. Roughgarden and E. Tardos. "Bounding the Inefficiency of Equilibria in Nonatomic Congestion Games" *Games and Economic Behavior*, 49(2): 389-403, 2004.

[CSS08] J.R. Correa, A.S. Schulz and N.E. Stier-Moses. "A Geometric Approach to the Price of Anarchy in Nonatomic Congestion Games." *Games and Economic Behavior*, 64: 457-469, 2008.

[CSS05] J.R. Correa, A.S. Schulz and N.E. Stier-Moses. "On the Inefficiency of Equilibria in Congestion Games." *In Proceedings of the 11th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*, pages 167-181, 2005.

[FPT04] A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou and K. Talwar, "The complexity of pure Nash equilibria." *In Proceedings of the 36th Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 604-612, 2004.

[CS07] S. Chien and A. Sinclair. "Convergence to Approximate Nash Equilibria in Congestion Games." *In Proceedings of the 18th Annual Symposium on Discrete Algorithms (SODA)* , pages 169-178, 2007.

[FKKMS02] D. Fotakis, S. Kontogiannis, S. Koutsoupias, E. Mavronicolas and P. Spirakis. "The Structure and Complexity of Nash Equilibria for a Selfish Routing Game." *In Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, pages 123-134, 2002.

[HK10] T. Harks and M Klimm. "On the Existence of Pure Nash Equilibria in Weighted Congestion Games." *In Proceedings of the 37rd International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, pages 79-89, 2010.

[CK05] G. Christodoulou and E. Koutsoupias. "The Price of Anarchy of Finite Congestion Games. *In Proceedings of the 37th Annual Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 67-73, 2005.

[AAE05] B. Awerbuch, Y. Azar, and L. Epstein. "The Price of Routing Unsplittable Flow." *In Proceedings of the 37th Annual Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 57-66, 2005.

[ADGMS06] S. Aland, D. Dumrauf, M. Gairing, B. Monien, and F. Schoppmann. "Exact Price of Anarchy for Polynomial Congestion Games." *In Proceedings of the 23rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, pages 218•229, 2006.

[Rou09] T. Roughgarden. "Intrinsic Robustness of the Price of Anarchy." *In Proceedings of the 41st Annual Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 513-522, 2009.

[BGR10] K. Bhawalkar, M. Gairing and T. Roughgarden. "Weighted Congestion Games: Price of Anarchy, Universal Worst-Case Examples, and Tightness." *In Proceedings of the 18th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, (2):17-28, 2010.

[ADGMS05] S. Aland, D. Dumrauf, M. Gairing, B. Monien, and F. Schoppmann. "Exact Price of Anarchy for Polynomial Congestion Games." *In Proceedings of the 23rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, pages 218-229, 2006.

[BMW56] M. Beckman, C. B. McGuire and C. B. Winsten. "Studies in the Economics of Transportation." *Yale University Press*, 1956.

[KK04] G. Karakostas and S. Kolliopoulos. "Edge Pricing of Multicommodity Networks for Heterogeneous Selfish Users." *In Proceedings of the 45th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 268-276, 2004.

[FJM04] L. Fleischer, K. Jain and M. Mahdian "Tolls for Heterogeneous Selfish Users in Multicommodity Networks and Generalized Congestion Games." *In Proceedings of the 45th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 277-285, 2004.

[CDR03] R. Cole, Y. Dodis, and T. Roughgarden. "How Much Can Taxes Help Selfish Routing." *In Proceedings of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 98-107, 2003.

[FS08] D. Fotakis and P. G. Spirakis. "Cost-Balancing Tolls for Atomic Network Congestion Games." *Internet Mathematics*, 5(4): 343-364, 2008.

[FKK10] D. Fotakis, G. Karakostas and S. Kolliopoulos. "On the Existence of Optimal Taxes for Network Congestion Games with Heterogeneous Users." *In Proceedings of the 3rd International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT)*, pages 162-173, 2010.

[Rou01] T. Roughgarden. "Stackelberg scheduling strategies." *In the Proceedings of the 33rd Annual Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 104-113, 2001.

[CSN07] J.R. Correa and N.E. Stier-Moses. "Stackelberg Routing in Atomic Network Games." *Columbia Working Paper*, 2007.

[KK06] G. Karakostas and S. Kolliopoulos. "Stackelberg Strategies for Selfish Routing in General Multicommodity Networks." *Technical Report, McMaster University*, 2006.

[Swa07] C. Swamy. "The Effectiveness of Stackelberg Strategies and Tolls for Network Congestion Games." *In Proceedings of the 18th Annual Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 1133-1142, 2007.

[KM02] V. S. A. Kumar and A. Marathe. "Improved Results for Stackelberg scheduling strategies." *In Proceedings of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, pages 776-787, 2002.

[Fot07] D. Fotakis. "Stackelberg Strategies for Atomic Congestion Games." *In Proceedings of the 15th Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, pages 299-310, 2007.

[CKN09] G. Christodoulou, E. Koutsoupias and A. Nanavati. "Coordination Mechanisms." *Theor. Comput. Sci.* 410(36): 3327-3336, 2009.

[Kou04] E. Koutsoupias. "Coordination Mechanisms for Congestion Games." *In SIGACT News*, 35(4): 58-71, 2004.

[Gra66] R. L. Graham. "Bounds for certain multiprocessors anomalies." *Bell System Technical Journal*, 45:1563-1581, 1966.

[ILMS09] N. Immorlica, L. Li, V.S. Mirrokni, and A.S. Schulz. "Coordination Mechanisms for Selfish Scheduling." Theor. Comput. Sci., 410(17):15891598, 2009.

[AJM08] Y. Azar, K. Jain, and V.S. Mirrokni. "(Almost) Optimal Coordination Mechanisms for Unrelated Machine Scheduling." *In Proceedings of the 19th Annual Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 323-332, 2008.

[Car09] I. Caragiannis. "Efficient Coordination Mechanisms for Unrelated Machine Scheduling." *In Proceedings of the 20th Annual Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 815-824, 2009.

[FS10] L. Fleischer and Z. Svitkina. "Preference-Constrained Oriented Matching." *In Proceedings of the 7th Workshop on Analytic Algorithms and Combinatorics (ANALCO)*, pages 66-73, 2010.

[CCGMO11] R. Cole, J. R. Correa, V. Gkatzelis, V. Mirrokni and N. Olver. "Inner Product Spaces for MinSum Coordination Mechanisms." *In Proceedings of the Annual 43rd Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 539-548, 2011.