



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ
ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Έλλης Ι. Μήτρου

Επιβλέπων: Π. Ν. Παπανικολάου

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Ευχαριστίες

Μετά την ολοκλήρωση αυτής της επίπονης, αλλά τόσο εποικοδομητικής προσπάθειας, θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας, κύριο Παναγιώτη Ν. Παπανικολάου, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. Η παρότρυνσή του για την επιλογή του θέματος της διπλωματικής εργασίας καθώς και η συνεχής υποστήριξή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αποτέλεσαν βασικό παράγοντα για την επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Ηλία Γ. Παπακωνσταντή, Διδάκτορα Μηχανικό Ε.Μ.Π., ο οποίος δέχτηκε να αναλάβει τη συνεπίβλεψη της εργασίας. Η συμβολή του στη χάραξη των βασικών κατευθυντήριων γραμμών του υπολογιστικού αλγορίθμου ήταν εξαιρετικά σημαντική. Χωρίς την υπομονή του, τις συνεχείς παρατηρήσεις και παρεμβάσεις στα αριθμητικά προβλήματα που αντιμετωπίσαμε δε θα ήταν εφικτή η ολοκλήρωση της αριθμητικής διαδικασίας.

Αρωγός σε αυτή την εργασία ήταν οι γονείς μου οι οποίοι με βοήθησαν τόσο υλικά όσο και ηθικά όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Ολοκληρώνοντας, θα ήθελα να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην αδερφή μου, η ηθική υποστήριξη της οποίας ήταν πραγματικά ανεκτίμητη, ειδικά τους τελευταίους μήνες.

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί.....	ii
Περίληψη	iv
Extended Abstract	v
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία για την Ανάπτυξη Τυρβωδών Ροών	1
1.2 Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες.....	2
1.3 Αντικείμενο Εργασίας.....	2
1.4 Διάρθρωση Εργασίας.....	3
2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ	4
2.1 Διαστατική Ανάλυση και Πειραματικές Προσεγγίσεις	4
2.2 Ολοκληρωματικά Μοντέλα – Αναλυτικές Λύσεις	5
2.3 Αριθμητικά Μοντέλα	10
2.3.1 Δισδιάστατα Αριθμητικά Μοντέλα.....	11
2.3.2 Πολύπλοκα Αριθμητικά Μοντέλα	14
2.4 Λογισμικά Πακέτα Προσομοίωσης Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών	16
2.4.1 Cormix.....	16
2.4.2 VISJET.....	17
2.4.3 Τρισδιάστατα Υπολογιστικά Πακέτα.....	17
3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ.....	18
3.1 Παρουσίαση Προβλήματος.....	18
3.2 Εξισώσεις που Διέπουν τη Ροή	19
3.3 Αριθμητική Μέθοδος Διακριτοποίησης Διαφορικών Εξισώσεων	20
3.4 Διακριτοποιημένες Εξισώσεις.....	22
3.5 Οριακές & Αρχικές Συνθήκες	24
3.6 Μοντέλο Τύρβης.....	25
3.7 Παρατηρήσεις Σχετικά με την Αριθμητική Επίλυση.....	26
3.8 Υπολογιστική Διαδικασία	28
4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	30
4.1 Κατακόρυφη Φλέβα.....	30
4.2 Οριζόντια Φλέβα.....	39
4.3 Φλέβα με Γωνία Εκροής 45°	46
5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	51
5.1 Συμπεράσματα.....	51
5.2 Προτάσεις.....	52
6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	54
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	57
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β	64

Συμβολισμοί

Λατινικά Σύμβολα

B	άνωση φλέβας
c	συγκέντρωση
D	διάμετρος στομίου εκροής της φλέβας
Fr_o	αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude, $u_o / \sqrt{[(\Delta\rho)_o / \rho_a] g * D}$
g	επιτάχυνση βαρύτητας
k	τυρβώδης κινητική ενέργεια
l_m	χαρακτηριστική κλίμακα μήκους, $l_m = M_o^{3/4} / B_o^{1/2}$
l_q	χαρακτηριστική κλίμακα μήκους, $l_q = Q_o / \sqrt{M_o}$
m	ειδική ορμή
M	ορμή φλέβας
p	πίεση
Pr	αριθμός Prandtl
q	ροή λόγω πυκνομετρικής διαφοράς που προκαλείται από τη μοριακή και τυρβώδη μεταφορά
Q	παροχή φλέβας
r	εγκάρσιος άξονας, κάθετα στον άξονα της φλέβας
Δr	χωρικό βήμα κατά τη διεύθυνση r
R	λόγος ταχυτήτων, u_a / u_o
R_o	ακτίνα στομίου εκροής της φλέβας
Ri_o	αριθμός Richardson, $1 / Fr_o = \sqrt{[(\Delta\rho)_o / \rho_o] g D} / u_o$
s	διαμήκης άξονας φλέβας
Δs	χωρικό βήμα κατά τη διεύθυνση s
t	χρόνος
u	μέση χρονικά ταχύτητα κατά το διαμήκη άξονα
u'	τυρβώδης διακύμανση ταχύτητας κατά το διαμήκη άξονα
v	μέση χρονικά ταχύτητα κατά τον εγκάρσιο άξονα
v'	τυρβώδης διακύμανση ταχύτητας κατά τον εγκάρσιο άξονα
x	οριζόντιος άξονας
$y_{1/2}$	ακτινική απόσταση από τον άξονα συμμετρίας της φλέβας μέχρι το σημείο όπου $(u - u_a) / (u_c - u_a) = 0,5$

z κατακόρυφος άξονας

Ελληνικά Σύμβολα

δ πλάτος στρώματος ανάμειξης
Δρ διαφορά πυκνότητας μεταξύ φλέβας και περιβάλλοντος
ε ρυθμός απομείωσης κινητικής ενέργειας
θ γωνία μεταξύ του διαμήκη άξονα της φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο
μ δυναμικό ιξώδες
ν κινηματικό ιξώδες
ρ πυκνότητα
τ η συνολική διατμητική τάση στην εξίσωση κίνησης κατά s

Δείκτες

i υποδηλώνει τη διεύθυνση s
j υποδηλώνει τη διεύθυνση r
c ποσότητα στον άξονα συμμετρίας της φλέβας
o παράμετρος που αφορά σε αρχική τιμή
a παράμετρος που αφορά τον αποδέκτη
t υποδηλώνει ποσότητα τυρβώδους ροής

Εκθέτες

' μεταβαλλόμενο μέγεθος (τυρβώδης διακύμανση)

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετάται η ροή αξονοσυμμετρικών ανωστικών φλεβών σε πυκνομετρικά ομογενή αποδέκτη με μικρή ταχύτητα. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται προσπάθεια κατάστρωσης ενός αλγορίθμου που βασίζεται στις δισδιάστατες εξισώσεις RANS σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι εξισώσεις RANS διακριτοποιούνται χωρικά ως προς τις δύο διαστάσεις της φλέβας και επιλύονται αριθμητικά με ένα ρητό σχήμα εμπρόσθιων διαφορών. Οι τυρβώδεις όροι της ροής λαμβάνονται υπ' όψιν με την εφαρμογή ενός απλού μοντέλου τύρβης, του μοντέλου μήκους μείξης.

Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται από ένα υπολογιστικό μοντέλο που καταστρώνεται υπό τη μορφή υπολογιστικού κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran PowerStation 4.0. Από την εφαρμογή του μοντέλου υπολογίζονται σε κάθε σημείο της ροής οι μέσες χρονικά ταχύτητες της ροής, η διαμήκης u και η εγκάρσια v , η πυκνομετρική διαφορά $\Delta\rho$ της φλέβας με το περιβάλλον, η γωνία θ που σχηματίζει ο άξονας της φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο και η τροχιά της φλέβας. Επειδή η φλέβα θεωρείται αξονοσυμμετρική, υπολογίζονται τα προφίλ των χαρακτηριστικών τιμών, ταχυτήτων u και v και πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$, από τον άξονα συμμετρίας μέχρι το όριο της φλέβας με τον αποδέκτη.

Εξετάζονται οι περιπτώσεις της απλής φλέβας και της τυρβώδους ανωστικής φλέβας που εκρέουν υπό γωνίες 0° , 90° και 45° ως προς το οριζόντιο επίπεδο σε ομογενή, κινούμενο με μικρή ταχύτητα αποδέκτη.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη χρήση του μοντέλου για όλα τα σενάρια, συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις αλλά και με προγενέστερα υπολογιστικά αποτελέσματα.

Extended Abstract

1. INTRODUCTION

Buoyant jets are presented in installations associated with the disposal of waste water or hot water in water bodies, as well as in stacks and car exhausts for the emission of gas pollutants. Wastewater from desalination plants can also be disposed in adjacent water bodies. The regulations on the quality of coastal water discharges are associated with the dilution of the effluent. The dilution of waste is required to assess the environmental impact in disposal areas.

Computation of buoyant jets can be performed with the use of integral models, one-dimensional and two-dimensional finite difference models, or more complex numerical models. In the present thesis a two – dimensional mathematical model is applied to determine the behavior of turbulent, axisymmetric buoyant jets issuing into ambient with small co-flow.

2. MATHEMATICAL MODEL

The differential equations of motion are summarized as:

Continuity Equation:

$$\frac{\partial(ur)}{\partial s} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

Momentum Equations:

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g * \sin\theta \quad (2)$$

where: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'}$

$$u^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g * \cos\theta \quad (3)$$

Conservation of tracer:

$$u \frac{\partial c}{\partial s} + v \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-rq) \quad (4)$$

where: $q = v \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} - \overline{\Delta\rho'v'}$

The variables of the above system of equations are the time-averaged velocity components u and v and the turbulent velocity variations u' and v' , along axes s and r respectively, of a cylindrical coordinate system, the density difference between jet and ambient $\Delta\rho$, is the total shear stress in s -momentum equation τ , and the concentration flux due to molecular and turbulent transport q . Furthermore, g is the gravitational acceleration and ρ_0 is the initial jet density.

A simple turbulent model is used for the calculation of turbulent velocity variations. In the main region of flow, Prandtl's mixing length model is employed:

$$v_t = (0,0762 * \delta)^2 * \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5a)$$

where δ is the jet width.

In the main region of flow, the Prandtl's constant viscosity model is used, for vertical buoyant jets:

$$v_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a) \quad (5b)$$

In the main region of flow the modified Keyfs formula is used, for horizontal and inclined buoyant jets:

$$v_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5} \quad (5c)$$

In each spatial step, an explicit finite – difference scheme is used to solve the equations (1) – (4). Boundary conditions need to be defined: (i) at discharge to start the solution, (ii) at the flow boundaries and (iii) at the jet axis of symmetry.

In the present thesis the system of the two-dimensional differential RANS equations in cylindrical coordinates has been discretized, and an explicit computational scheme is built in Fortran PowerStation 4.0 programming language.

3. CALCULATIONS PERFORMED

The following flow fields have been considered: (i) a vertical buoyant jet in a uniform homogeneous ambient with small co-flow and (ii) a buoyant jet discharging horizontally or inclined at an angle of 45° to horizontal into a uniform homogeneous ambient with small horizontal co-flow.

The explicit scheme employed calculates the time-averaged velocities, the axial and transverse u and v respectively, the density difference $\Delta\rho$ of jet to the environment, the angle θ formed by the jet axis with the horizontal plane and the jet trajectory.

The results are compared with experimental measurements and with computational results from one-dimensional modeling using the integrated over a cross section equations of motion.

4. RESULTS

4.1. Vertical Buoyant Jets

In Figure 1 (a) and (b) the predicted normalized velocity u and density difference $\Delta\rho$ for vertical buoyant jets are compared to those computed using the theory by List & Imberger (1973) and the measurements of Papanicolaou & List (1988). There is good agreement of the predicted velocities with the measurements of Papanicolaou & List (1988) for simple jet. The predicted velocity decay along jet axis is overestimated by about 40% for non-dimensional distance z/D greater than 60, if compared to the results using List & Imberger (1973) theory. The diagram of the computed density difference decays faster near the source, but as the non-dimensional distance from the source increases, the calculations are in agreement with results by List & Imberger (1973).

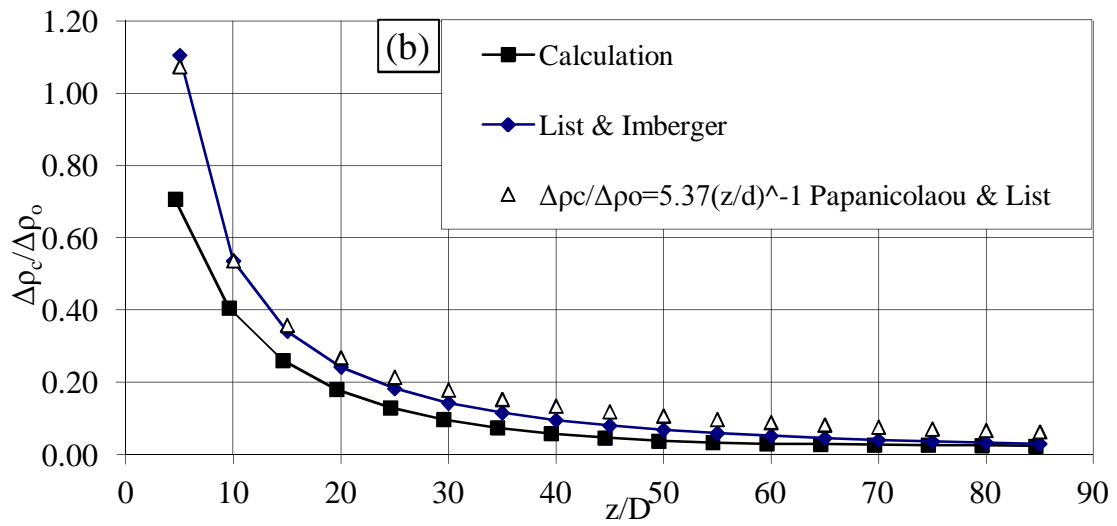
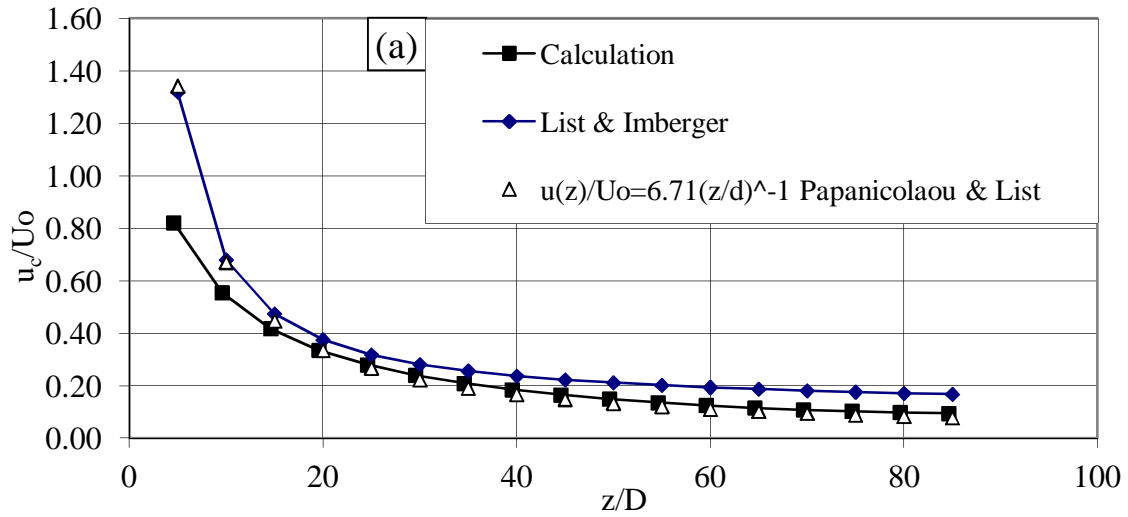


Figure 1. Non-dimensional (a) velocity u , and (b) density difference with respect to normalized distance from the source, for $Fr_0=14.28$ and $\Delta\rho_0 = 10.0 \text{ kg/m}^3$.

4.2. Horizontal Buoyant Jets

In Figure 2 the calculated non-dimensional trajectories of four horizontally discharged buoyant jets are compared with the experimental data of Michas & Papanicolaou (2008). Initially, near the source, the results from the present calculations are in agreement with experiments, but as the non-dimensional distance from the source increases ($x/l_m > 3$), they deviate significantly.

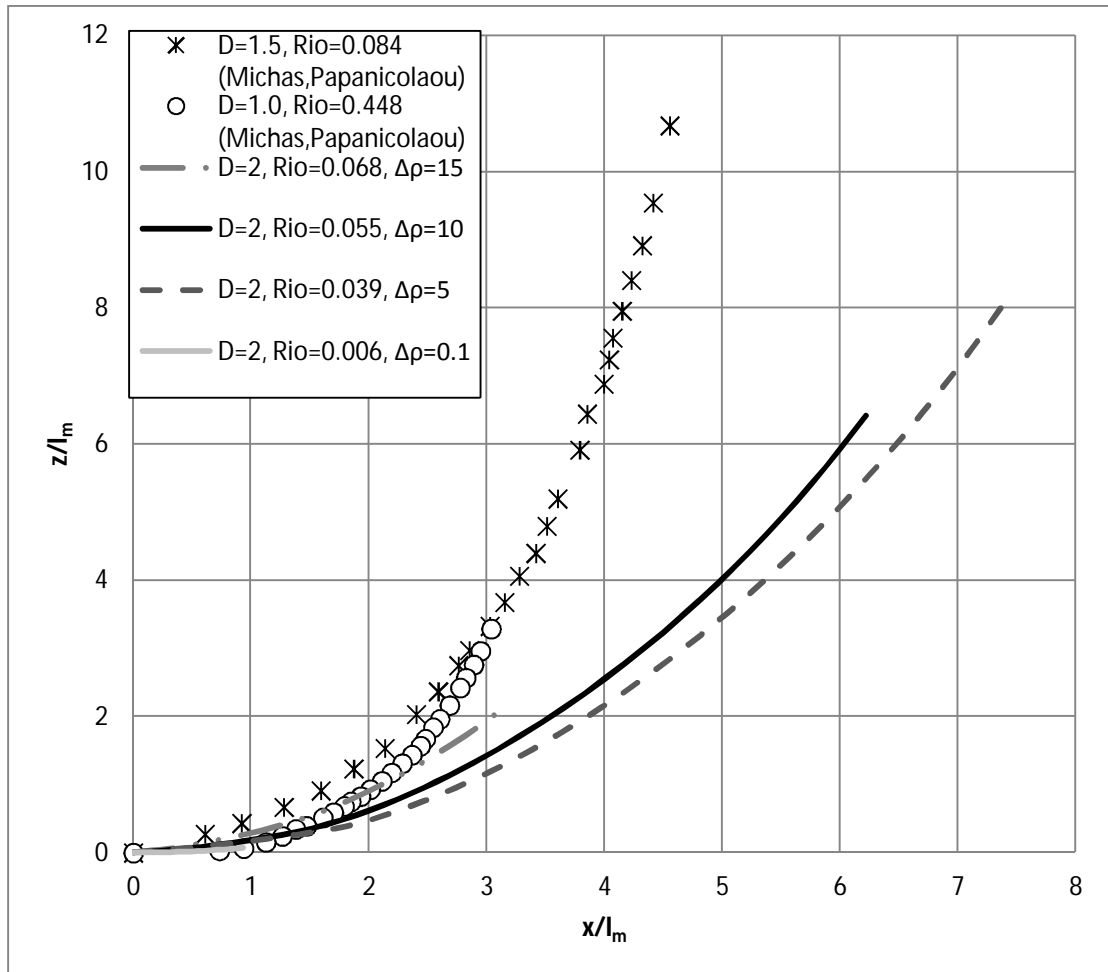


Figure 2. Non-dimensional trajectories of horizontal turbulent buoyant jets.

4.3. Inclined Buoyant Jets

In Figure 3 the non-dimensional trajectories of four buoyant jets discharging at 45° to horizontal are compared with the results of an integral model (Papakonstantis, 2009). Initially the results from the present analysis show agreement with experiments, but as the non-dimensional distance from the source increases, there is significant deviation.

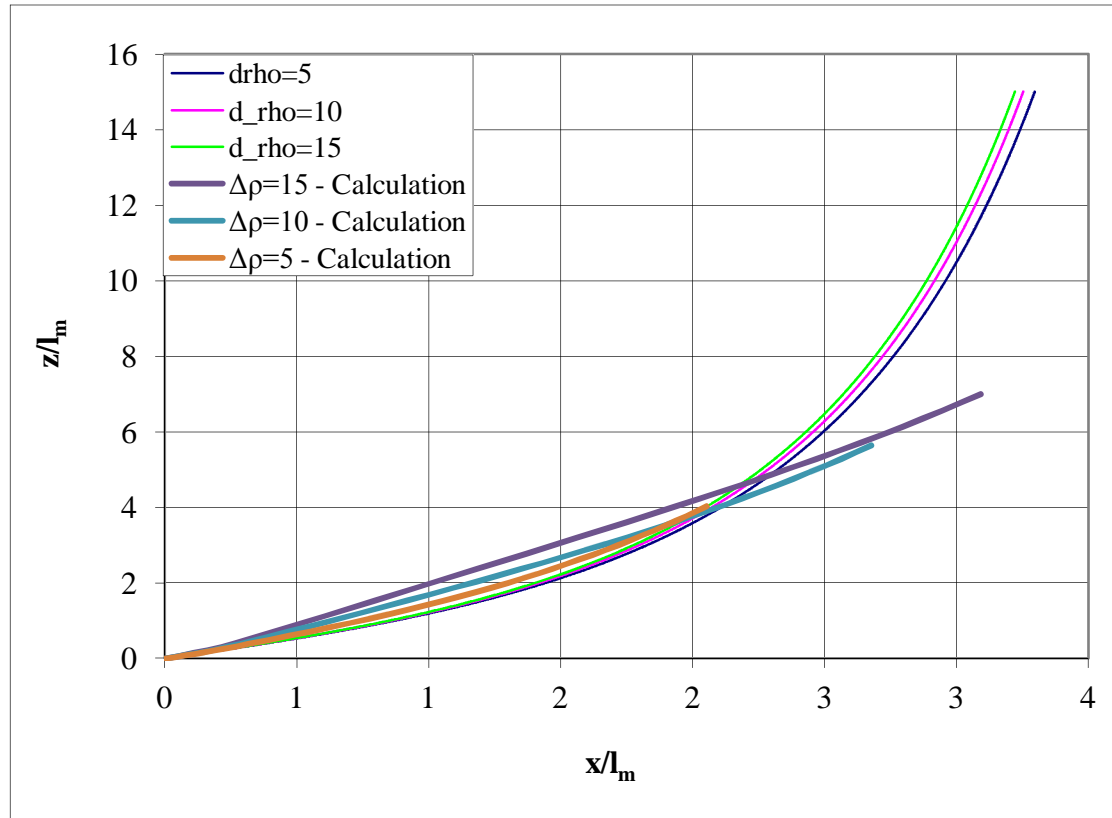


Figure 3. Non-dimensional trajectories of inclined turbulent buoyant jets.

5. CONCLUSIONS

In the present thesis an explicit two-dimensional finite difference algorithm has been built to solve the RANS equations for round buoyant jets in cylindrical polar coordinates. Calculation of vertical buoyant jets has shown that the non-dimensional velocities and the non-dimensional density differences are in agreement with experimental data, especially at large distances from the source.

Calculations of buoyant jets discharging horizontally or inclined showed that the trajectories are in agreement with experimental data especially near the discharge origin. At longer distances from the point of discharge there are significant deviations between experiments and computation.

Model results were found to be sensitive to the change of constant parameters considered in the turbulence model.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ροές ανωστικών φλεβών παρουσιάζονται σε αρκετά φαινόμενα που σχετίζονται με τη διάθεση υγρών αποβλήτων ή θερμών νερών σε υδάτινους αποδέκτες καθώς επίσης και σε περίπτωση που σχετίζονται με την εκπομπή αέριων ρύπων στην ατμόσφαιρα. Ζεστό νερό από την ψύξη των θερμικών σταθμών ενέργειας, καθώς και υγρά απόβλητα από εγκαταστάσεις επεξεργασίας λυμάτων, συνήθως διατίθενται μέσω διαχυτήρων στη θαλάσσια περιοχή κοντά στην εγκατάσταση. Βαρύτερα λύματα από μονάδες αφαλάτωσης μπορούν επίσης να διατίθενται στον παρακείμενο υδάτινο αποδέκτη. Οι κανονισμοί σχετικά με την ποιότητα των παράκτιων υδάτινων αποδεκτών έχουν σχέση με την αραίωση των λυμάτων. Για την εκτίμηση των περιβαλλοντικών επιπτώσεων απαιτείται ο προσδιορισμός της αραίωσης των αποβλήτων.

Για την προσομοίωση της ροής ανωστικών φλεβών έχουν χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιούνται ευρέως ολοκληρωματικά μοντέλα, μονοδιάστατα και δισδιάστατα μοντέλα πεπερασμένων διαφορών και πιο πολύπλοκα αριθμητικά μοντέλα.

1.1 Εισαγωγικά Στοιχεία για την Ανάπτυξη Τυρβωδών Ροών

Οι περισσότερες ροές στη φύση αλλά και σε ανθρωπογενείς εφαρμογές είναι τυρβώδεις. Παραδείγματα από την καθημερινή ζωή (π.χ. άνεμος, κίνηση νερού σε ποταμούς κλπ) μας δίνουν μια διαισθητική κατανόηση του φαινομένου. Η γένεση της τύρβης προκαλείται σε πραγματικές ροές από «διαταράξεις» οι οποίες εισάγονται σε αυτές. Τύρβη σημαίνει ότι στο πεδίο ροής υπάρχει χρονική διακύμανση της ταχύτητας και συγκέντρωσης κάποιας ουσίας.

Το ιξώδες του ρευστού τείνει να εξομαλύνει τις διαταράξεις καθώς αυτές μεταγονται στα κατόπτη και στη στρωτή ροή πράγματι οι διαταράξεις αυτές εξαλείφονται. Όμως αν αυξηθεί η ταχύτητα και οι αδρανειακές δυνάμεις υπερισχύσουν των δυνάμεων του ιξώδους, οι διαταράξεις δεν εξαλείφονται πλέον, αλλά αντιθέτως μπορεί ακόμα και να μεγεθυνθούν.

Η παράμετρος η οποία, μαζί με το μέγεθος και τον τύπο της διατάραξης, καθορίζει την έναρξη της τυρβώδους φύσης της ροής, είναι ο αριθμός Reynolds, $Re=ul/v$ (όπου u η χαρακτηριστική ταχύτητα της ροής, l ένα χαρακτηριστικό μήκος και v το κινηματικό ιξώδες του υγρού). Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds προκαλούνται αστάθειες στη ροή οι οποίες είναι αδύνατο να εξαλειφθούν από το ιξώδες του ρευστού. Οι αστάθειες αυτές είναι υπεύθυνες για την παραγωγή τύρβης, παράγοντας στροβίλους μεγάλης κλίμακας. Οι στρόβιλοι αυτοί είναι επίσης ασταθείς και προκαλούν την παραγωγή μικρότερων στροβίλων, και ούτω καθ' εξής, έως ότου το ιξώδες γίνεται σημαντικό στις μικρότερες κλίμακες. Αυτή η διαδικασία κατάπτωσης κατά την οποία στρόβιλοι μικρότερης κλίμακας παράγονται από μεγαλύτερους συνεχίζεται αδιάκοπα μέσα σε μια ροή υψηλού αριθμού Reynolds, αφαιρώντας ενέργεια από τις μεγάλες κλίμακες και μεταβιβάζοντάς την στις μικρότερες και ούτω καθ' εξής, μέχρις ότου αυτή η ενέργεια αναλώνεται από τη δράση του ιξώδους στις μικρότερες κλίμακες.

Οι τυρβώδεις ροές μπορούν να περιγραφούν από τις ίδιες διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν και τις στρωτές ροές, με τις κατάλληλες, φυσικά, προσαρμογές. Το πεδίο ροής της τύρβης χαρακτηρίζεται από διακυμάνσεις της ταχύτητας σε κάθε κατεύθυνση και ένταση. Για την τυρβώδη ροή, η λύση των εξισώσεων Navier- Stokes είναι αδύνατη καθώς οι εξισώσεις είναι ελλειπτικές και μη γραμμικές. Η μελέτη των τυρβωδών ροών γίνεται είτε πειραματικά είτε υπολογιστικά.

1.2 Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες

Οι τυρβώδεις εκτοξευόμενες φλέβες είναι εκροές ρευστού από ένα ακροφύσιο, σωλήνα ή οπή οποιασδήποτε γεωμετρίας, σε ομοειδές ή μη ρευστό με την ίδια ή διαφορετική πυκνότητα και ανήκουν στην κατηγορία των ελεύθερων διατμητικών ροών.

Τα χαρακτηριστικά και η ρευστοδυναμική συμπεριφορά των εκτοξευόμενων φλεβών εξαρτώνται από τους παρακάτω παράγοντες: παράμετροι (χαρακτηριστικά) της φλέβας, παράμετροι του περιβάλλοντος ρευστού και γεωμετρικές παράμετροι (Fischer et al. 1979).

Στα χαρακτηριστικά των φλεβών περιλαμβάνονται η αρχική κατανομή ταχύτητας και η ένταση τύρβης της φλέβας, η ογκομετρική παροχή και η ορμή της φλέβας καθώς και η συγκέντρωση ή η θερμοκρασία μεταφερόμενων ουσιών. Στις περιβαλλοντικές παραμέτρους περιλαμβάνονται η πυκνομετρική διαφορά φλέβας και αποδέκτη, η στρωμάτωση (θερμική ή πυκνομετρική), η κίνηση του αποδέκτη κλπ. Οι γεωμετρικές παράμετροι περιλαμβάνουν τη μορφή και το προσανατολισμό των φλεβών, την αλληλεπίδραση με άλλες φλέβες, καθώς και την επίδραση που έχουν σε αυτή τα όρια του αποδέκτη.

Οι βασικοί τύποι φλεβών είναι οι παρακάτω:

- απλή (εκτοξευόμενη) φλέβα μόνο με αρχική ορμή (jet)
- πλούμιο ή απλή ανωστική φλέβα με «μηδενική» αρχική ορμή αλλά με πυκνομετρική διαφορά σε σχέση με το περιβάλλον διάχυσης (plume)
- ανωστική φλέβα με αρχική ορμή και πυκνομετρική διαφορά σε σχέση με το περιβάλλον ρευστό (buoyant jet)

Οι παραπάνω φλέβες μπορεί να είναι αξονοσυμμετρικές ή δισδιάστατες όταν εκρέουν από σχισμή φλέβας (Παπανικολάου 2009).

1.3 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η παρουσίαση ενός δισδιάστατου μοντέλου προσομοίωσης τυρβωδών ανωστικών φλεβών. Το μοντέλο επιλύει αριθμητικά μέσω ρητού σχήματος πεπερασμένων διαφορών τις εξισώσεις RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations). Ως μοντέλο τύρβης χρησιμοποιείται το απλό μοντέλο μήκους ανάμειξης Prandtl. Συγκεκριμένα καταστρώθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran Power Station 4.0 που υπολογίζει χαρακτηριστικές παραμέτρους της ροής, δηλαδή τη διαμήκη ταχύτητα u , την αξονική ταχύτητα v , την πυκνομετρική διαφορά $\Delta\rho$ της φλέβας με το περιβάλλον και την τροχιά της

ανωστικής φλέβας. Εξετάζονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις εκροής: κατακόρυφη, οριζόντια και υπό γωνία 45° .

Η εργασία μπορεί να χωριστεί σε τρία σκέλη. Το πρώτο σκέλος περιλαμβάνει τη θεωρητική επισκόπηση των πειραματικών προσεγγίσεων και αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης ανωστικών φλεβών, που βασίστηκε σε εκτεταμένη βιβλιογραφική έρευνα.

Στο δεύτερο σκέλος παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκε ο αλγόριθμος του αριθμητικού μοντέλου.

Το τρίτο και τελευταίο σκέλος της εργασίας έχει ως στόχο τη συστηματική αξιολόγηση του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε σε σχέση με πειραματικά αλλά και υπολογιστικά αποτελέσματα.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Η εργασία περιλαμβάνει, εκτός από την παρούσα εισαγωγή (Κεφάλαιο 1), τέσσερα Κεφάλαια και δύο Παραρτήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 πραγματοποιείται συνοπτική βιβλιογραφική επισκόπηση των πειραματικών προσεγγίσεων και των υπολογιστικών μεθόδων προσομοίωσης ανωστικών φλεβών.

Στο Κεφάλαιο 3 δίνεται η μεθοδολογία αριθμητικής προσομοίωσης της ροής τυρβωδών ανωστικών φλεβών που χρησιμοποιήθηκε ως βάση του αλγοριθμικού σχήματος. Παρουσιάζεται η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται, το αριθμητικό σχήμα που εφαρμόστηκε για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων καθώς και οι διακριτοποιημένες εξισώσεις. Επίσης περιγράφεται η διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την εφαρμογή του μοντέλου και συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις και υπολογιστικά σχήματα που έχουν παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία.

Στο Κεφάλαιο 5 συνοψίζονται τα κύρια συμπεράσματα της εργασίας και διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Στο Παράρτημα Α παρουσιάζονται όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα του υπολογιστικού κώδικα.

Στο Παράρτημα Β παρατίθεται ο υπολογιστικός κώδικας σε γλώσσα Fortran PowerStation 4.0.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι τυρβώδεις ανωστικές φλέβες έχουν μελετηθεί τόσο με εργαστηριακά πειράματα όσο και με υπολογιστικά μοντέλα. Η μελέτη της συμπεριφοράς των ανωστικών φλεβών πειραματικά προηγήθηκε και συνέβαλε στην ανάπτυξη των υπολογιστικών προσεγγίσεων, καθώς χαρακτηριστικοί συντελεστές και εξισώσεις που προέκυψαν από τη διαστατική ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν αρχικά στις αριθμητικές εξισώσεις. Η συνεχής εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων, αλλά και η ανάγκη για μεγαλύτερη ακρίβεια σε πολύπλοκα προβλήματα ανωστικών φλεβών, που δύσκολα προσομοιώνονται εργαστηριακά, οδήγησε στην ανάπτυξη όλο και πιο σύνθετων υπολογιστικών μοντέλων.

Για την προσομοίωση ανωστικών φλεβών έχουν αναπτυχθεί ολοκληρωματικά μοντέλα, αριθμητικά μοντέλα δύο ή τριών διαστάσεων, πολύπλοκα αριθμητικά μοντέλα, όπως π.χ. μοντέλα προσομοίωσης μεγάλων δινών, αλλά και λογισμικά πακέτα. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμένα από τα μοντέλα αυτά.

2.1 Διαστατική Ανάλυση και Πειραματικές Προσεγγίσεις

Πειραματικές εργασίες με αντικείμενο τη ροή τυρβωδών εκτοξευόμενων φλεβών έχουν ξεκινήσει πριν από πολλές δεκαετίες. Οι Hinze & Zijnen (1949) υπολόγισαν την κατανομή των ταχυτήτων, των θερμοκρασιών και της συγκέντρωσης θερμού αέρα ο οποίος εκρέει από κυκλικό ακροφύσιο, σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα της φλέβας. Ο Kiser (1963) μελέτησε τη συμπεριφορά φλέβας αλατόνευρου, που εκρέει από οριζόντιο κυκλικό ακροφύσιο. Ο Papanicolaou (1984) πραγματοποίησε πειράματα σε βυθισμένες ανωστικές φλέβες θετικής άνωσης, με βαρύτερη εκτοξευόμενη φλέβα σε σχέση με το περιβάλλον νερό.

Ο Kotsovinos (1985) μελέτησε τη συμπεριφορά ανωστικού πλουμίου γλυκού νερού, ενώ οι Papanicolaou and List (1987) μελέτησαν την κατανομή των θερμοκρασιών και της αραιώσης μιας τυρβώδους εκτοξευόμενης ανωστικής φλέβας γλυκού νερού με κυκλικό ακροφύσιο. Χρησιμοποιώντας θερμίστορες, και μετρώντας θερμοκρασιακές διαφορές, υπολόγισαν τις συγκεντρώσεις για διαφορετικές αποστάσεις από το ακροφύσιο και τον άξονα της φλέβας.

Ένα χρόνο αργότερα, οι Papanicolaou and List (1988) πραγματοποίησαν παρόμοια πειράματα για βυθισμένη κυκλική φλέβα αλατόνευρου σε νερό χρησιμοποιώντας μία μέθοδο με Laser. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, εμπλούτιζαν την εκτοξευόμενη φλέβα με ροδαμίνη 6G η οποία, όταν διεγερθεί από μονοχρωματική ακτινοβολία (laser) μήκος κύματος $\lambda=514.4\text{nm}$ (πράσινο) εκπέμπει ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda=570\text{nm}$ (κίτρινο) με ένταση ανάλογη της συγκέντρωσης της ροδαμίνης. Τα πειράματα μαγνητοσκοπήθηκαν και έτσι προέκυψε η εικόνα των ισοθερμικών περιοχών απ' όπου και με κατάλληλες μαθηματικές διαδικασίες οι ερευνητές κατέληξαν στην κατανομή των θερμοκρασιών και της συγκέντρωσης της φλεβας. Ο Papanicolaou (1994) χρησιμοποίησε την ανεμομετρία laser σε πειράματα μέτρησης του προφίλ ταχύτητας βυθισμένης φλέβας, η οποία εκρέει, όχι από κάποιο σωλήνα, αλλά απευθείας από μία δεξαμενή η οποία συμπιέζεται από ένα έμβολο, η πίεση του οποίου μπορούσε να ρυθμιστεί.

Η μέθοδος P.I.V. (Particle Image Velocimetry) αναπτύχθηκε στις αρχές του 1980 και αρχικά είχε σκοπό να αναλύει τις ταχύτητες ροής των σωματιδίων κινούμενων ρευστών από ψηφιακές εικόνες. Είναι μια μέθοδος μέτρησης μετακινήσεων, η οποία βασίζεται στην ανάλυση της κίνησης συγκεκριμένων σωματιδίων χρησιμοποιώντας φωτογραμμετρία κοντινής ανάλυσης (close range photogrammetry) και επιτυγχάνει υψηλής ακρίβειας αποτελέσματα στις μετρήσεις των μετακινήσεων. Οι Davidson, Gaskin & Wood (2001) πραγματοποίησαν πειράματα για φλέβες αρνητικής άνωσης σε αποδέκτη κινούμενο με μικρές ταχύτητες, χρησιμοποιώντας τεχνολογία P.I.V. για να μετρήσουν την ταχύτητα συμπαράσυρσης. Συνέκριναν στη συνέχεια τα πειραματικά με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, που προέκυψαν από ένα ολοκληρωματικό μοντέλο, και κατέληξαν σε σύγκλιση για τις περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει συμπαράσυρση και για τις περιπτώσεις έγχυσης της φλέβας οριζόντια ή κάθετα με μικρές τιμές συμπαράσυρσης. Οι Grizzi, Falchi & Romano (2006) παρουσίασαν μια νέα τεχνική βελτίωσης της μεθόδου.

2.2 Αναλυτικές Λύσεις - Ολοκληρωματικά Μοντέλα

Στα ολοκληρωματικά μοντέλα ολοκληρώνονται οι υδροδυναμικές εξισώσεις διατήρησης της ορμής και της μάζας σε κάθε διατομή κατά μήκος της τροχιάς της φλέβας και οι κατανομές της ταχύτητας και της συγκέντρωσης σε κάθε διατομή καθορίζονται εκ των προτέρων (ως επί το πλείστον κατανομές Gauss). Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών δίνουν τη θέση της τροχιάς, αλλά και ποσοτήτων όπως η παροχή, η ορμή, η άνωση, η θερμοκρασία και η διαφορά πυκνότητας της φλέβας με το περιβάλλον ρευστό.

Οι Morton et al. (1956) ανέπτυξαν για πρώτη φορά μια ολοκληρωμένη θεωρία για την περιγραφή ανωστικών φλεβών, βασιζόμενοι στην υπόθεση της συμπαράσυρσης (entrainment hypothesis), την οποία πρώτος εισήγαγε ο G.I. Taylor (1952). Στην εργασία τους οι Morton et al. (1956) προσδιόρισαν τις παραμέτρους της ροής ενός πλουμίου ως συνάρτηση της απόστασης από την «πηγή». Επιπλέον, εξήγησαν το ρόλο τον οποίο κατέχει η πυκνότητα του περιβάλλοντος στη ροή των πλουμίων που παρατηρούνται στη φύση.

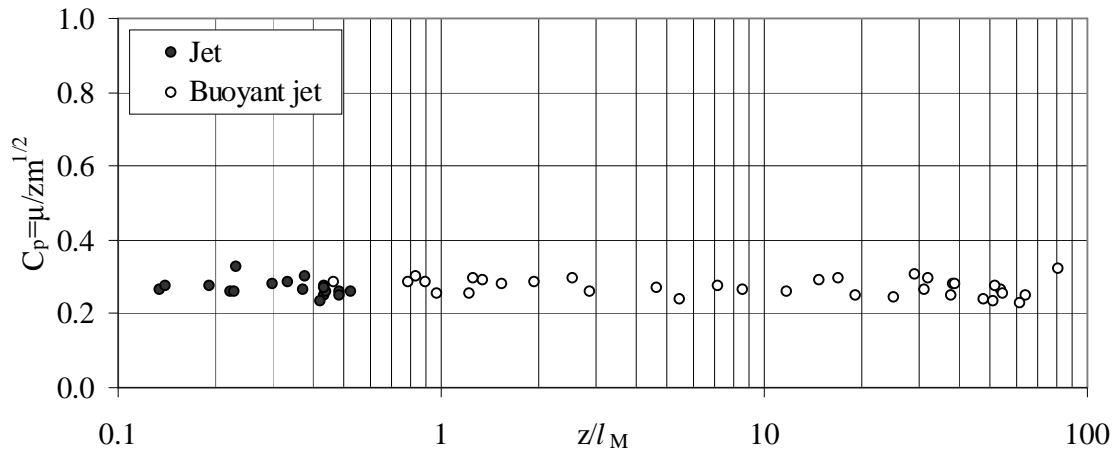
Οι List & Imberger (1973) ανέπτυξαν μια γενικευμένη θεωρία για τις κατακόρυφες ανωστικές φλέβες, με βάση την οποία ο μηχανικός μπορεί να υπολογίσει την ειδική (ογκομετρική) παροχή και ορμή σε οποιαδήποτε απόσταση από την πηγή, εάν γνωρίζει τις αρχικές της παραμέτρους. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας τις αρχές διαστατικής ανάλυσης και ασυμπτωτική θεωρία, μπόρεσαν να εκφράσουν τον τοπικό αριθμό Richardson $Ri(z)$ μιας ανωστικής φλέβας σαν συνάρτηση της κατακόρυφης απόστασης z από το στόμιο εκροής, του αρχικού αριθμού Richardson Ri_0 , του οριακού αριθμού Richardson του πλουμίου Ri_p και μιας σταθεράς παραμέτρου C_p που είναι μια διαφορετική έκφραση του πλάτους της φλέβας.

Η σταθερά παράμετρος πλάτους της φλέβας C_p ορίζεται από τη σχέση

$$C_p = \frac{\mu}{z\sqrt{m}} = \sqrt{2\pi} \frac{b}{z} \quad (2.1)$$

όπου: μ η ογκομετρική παροχή και m η ειδική ορμή της φλέβας

σύμφωνα με την κλίμακα μήκους $l_q=Q/\sqrt{M}$ μιας απλής φλέβας. Από τα πειραματικά δεδομένα των Papanicolaou & List (1988) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1 προέκυψε μια μέση τιμή της παραμέτρου πλάτους $C_p=0.27$.



Σχήμα 2.1. Παράμετρος πλάτους C_p της γενικευμένης θεωρίας των List & Imberger (1973) με τα πειραματικά δεδομένα των Papanicolaou & List (1988).

Με βάση την ασυμπτωτική θεωρία ο τοπικός αριθμός Richardson $Ri(z)$ της φλέβας μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\frac{Ri(z)}{Ri_p} = \left(\frac{z}{z_o}\right) \left(\frac{Ri_o}{Ri_p}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{Ri_o}{Ri_p}\right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_o}\right)^2 - 1 \right] \right\}^{-1/2} ; \quad \frac{z Ri_o}{z_o Ri_p} = \frac{z C_p}{l_m Ri_p} \quad (2.2)$$

ως συνάρτηση των Ri_o , Ri_p και C_p , όπου z_o είναι η απόσταση του νοητού κέντρου (virtual origin) της φλέβας που προκύπτει από την σχέση (2.1) εάν αντικαταστήσουμε τις τοπικές $\mu(z)$ και $m(z)$ με τις αρχικές παραμέτρους της φλέβας Q_o και M_o αντίστοιχα, δηλαδή

$$z_o = \frac{Q_o}{C_p \sqrt{M_o}} = \frac{l_q}{C_p} = 3.7l_q = 3.28D \quad (2.3)$$

Από την εξίσωση (2.2) για απλές φλέβες ($Ri_o \rightarrow 0$) προκύπτει ότι $Ri(z) \sim z$, ενώ για πλούμια ($Ri_o \rightarrow Ri_p$) προκύπτει ότι $Ri(z) = Ri_p$, πράγμα που δείχνει ότι εκτός από τη μεταβατική περιοχή ($1 < z/l_m < 5$), η παραπάνω εξίσωση ασυμπτωτικά ισχύει επίσης για τις απλές φλέβες και τα πλούμια. Από την εξίσωση (2.2) και το σύστημα των εξισώσεων (2.16), (2.17) και (2.18) προκύπτει, μετά από πράξεις, ότι η ειδική ορμή $m(z)$ βασισμένη μόνο στην κατανομή ταχύτητας της μέσης ροής και αμελώντας τη συνεισφορά της τύρβης, καθώς και η ειδική (ογκομετρική) παροχή $\mu(z)$ της φλέβας σε απόσταση z από την πηγή μπορούν να υπολογιστούν απ' ευθείας από τις εξισώσεις

$$\frac{m(z)}{M} = \left\{ 1 + \left(\frac{Ri_o}{Ri_p} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_o} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{2/3} \quad (2.4)$$

$$\frac{\mu}{Q} = \frac{z}{z_o} \left\{ 1 + \left(\frac{Ri_o}{Ri_p} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_o} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/3} \quad (2.5)$$

Όμως

$$\mu(z) = \int w(r, z) dA = \pi b^2 w_c \quad (2.6)$$

$$m(z) = \int_A w^2(r, z) dA = \frac{\pi b^2 w_c^2}{2} \quad (2.7)$$

απ' όπου μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$w_c(z) = \frac{2m(z)}{\mu(z)} = \frac{2M}{Q} \left(\frac{z}{z_o} \right)^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{Ri_o}{Ri_p} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_o} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/3}$$

Η ειδική (ανά μονάδα βάρους) άνωση έχει οριστεί ως

$$B = \frac{(\rho_a - \rho_o)}{\rho_a} g Q = g_o' Q; \quad g_o' = \frac{\Delta \rho_o}{\rho_a} g$$

και διατηρείται κατά μήκος της τροχιάς της φλέβας εάν ο αποδέκτης είναι ομογενής και η διαφορά πυκνότητας οφείλεται στην αλατότητα. Σε απόσταση z η ειδική άνωση προκύπτει από τη σχέση

$$B = \int_0^\infty \frac{\Delta \rho_c}{\rho_a} g w_c 2\pi r dr = \pi \frac{\Delta \rho_c}{\rho_a} g w_c b^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho_o}{\rho_a} g Q = \pi \frac{\Delta \rho_c}{\rho_a} g w_c b^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} &\Rightarrow \frac{\Delta \rho_c(z)}{\Delta \rho_o} = Q \left(\pi w_c b^2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right)^{-1} = \frac{Q}{\mu(z)} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \left(\frac{z}{z_o} \right)^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{Ri_o}{Ri_p} \right)^2 \left[\left(\frac{z}{z_o} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{-1/3} \end{aligned}$$

Στην εργασία των Noutsopoulos & Yannopoulos (1987), παρουσιάζεται η ανάπτυξη ενός μοντέλου τυρβώδους κυκλικής ανωστικής φλέβας σε ήρεμο αποδέκτη. Κύριος σκοπός είναι η εξαγωγή των εξισώσεων της μέσης αξονικής ταχύτητας και συγκέντρωσης. Ολοκληρώνοντας τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη σταθερή τυρβώδη ροή, στην περιοχή εγκατεστημένης ροής και λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο πυρήνα για την περιοχή εγκατάστασης της ροής, ως προς την εγκάρσια διεύθυνση r και στη συνέχεια ως προς τη διαμήκη διεύθυνση z , προκύπτουν οι αναλυτικές λύσεις:

$$\frac{w_m}{V_o} = \frac{\sqrt{2}}{2K_w} F_o^{-1} Z^{-1} \left[M_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \gamma Z^2 \right]^{1/3} \quad (2.8)$$

$$c_m F_o = \frac{\sqrt{2}\gamma}{4K_c^2} Z^{-1} \left[M_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \gamma Z^2 \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (2.9)$$

όπου,

$$Z = \frac{z}{D} F_o^{-1} \quad (\text{αδιάστατη δυναμική κλίμακα μήκους}) \quad (2.10)$$

$$M_1 = 1 + \frac{3.0}{F_o^2} \quad (2.11)$$

(μεταβλητή που προκύπτει από το μοντέλο πυρήνα με τιμή, που κυμαίνεται μεταξύ 1 και 1,50)

$$K_w = 0.12 - 0.02 \exp(-0.05 * Z^2) \quad (\text{συντ/στής διεύρυνσης ταχυτήτων}) \quad (2.12)$$

$$K_c = \sqrt{K_w(\gamma - K_w)} \cong 0.12 \quad (\text{συντ/στής διεύρυνσης συγκεντρώσεων}) \quad (2.13)$$

$$\gamma = \frac{K_w^2 + K_c^2}{K_w} = 0.24 \quad (2.14)$$

Οι Agrawal και Prasad (2003) παρουσίασαν αναλυτικές λύσεις για την περιγραφή τυρβωδών ανωστικών φλεβών, θεωρώντας αρχικά γκαουσιανή κατανομή της διαμήκουσ ταχύτητας της φλέβας. Το μοντέλο βασίστηκε σε τρία βασικά βήματα. Πρώτον, την υπόθεση γκαουσιανής κατανομής για τη μέση διαμήκη ταχύτητα και θερμοκρασία της φλέβας. Δεύτερον, η αναλυτική λύση της διαμήκουσ ταχύτητας αντικαταστάθηκε στην εξίσωση συνέχειας και με ολοκλήρωση προέκυψε το προφίλ της μέσης εγκάρσιας ταχύτητας της φλέβας. Τρίτον, οι εκφράσεις των δύο ταχυτήτων αντικαταστάθηκαν στις απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης και ενέργειας και ολοκληρώθηκαν ώστε να υπολογιστούν η τυρβώδης τάση και η ορμή της φλέβας.

Συνέχεια της εργασίας των Morton et al. (1956) αποτέλεσε η μελέτη ανωστικών φλεβών υπό γωνία σε ήρεμο περιβάλλον που έγινε από τον Fan (1967), όπου και θεωρήθηκε ένας μηχανισμός συμπαράσυρσης με βάση τη διαφορά μεταξύ της ταχύτητας εκτόξευσης και την ταχύτητα περιβάλλοντος και ένας συντελεστής οπισθέλκουσας δύναμης C_d λόγω της διαφοράς πίεσης. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα πειραματικά, όπου οι συντελεστές α και C_d , βρέθηκαν από τις παρατηρούμενες τροχιές και τους λόγους αραίωσης. Σε δέκα περιπτώσεις που μελετήθηκαν, όπου ο αριθμός Froude κυμαίνονταν από 10 έως 80 και ο λόγος ταχυτήτων από 4 έως 16, υπολογίστηκαν ο συντελεστής συμπαράσυρσης $\alpha = 0,4 \sim 0,5$ και ο συντελεστής $C_d = 1,7 \sim 0,1$.

Οι ολοκληρωματικές εξισώσεις της κίνησης μιας κατακόρυφης ανωστικής φλέβας σε απόσταση z από το ακροφύσιο (πηγή) είναι (Papanicolaou & Kokkalis, 2008):

$$\text{Εξ. Συνέχειας:} \quad \frac{d\mu}{dz} = 2\sqrt{2\pi} \alpha m^{1/2} \quad (2.15)$$

$$\text{Εξ. Ορμής:} \quad \frac{dm}{dz} = \frac{1 + \lambda^2}{2} \frac{\mu\beta}{m} \quad (2.16)$$

$$\text{Εξ. Διατήρησης άνωσης:} \quad \frac{d\beta}{dz} = 0 \quad (2.17)$$

αντίστοιχα, όπου

$$\mu(z) = \int_A w(r, z) dA = \pi b^2 w_c \quad (2.18)$$

$$m(z) = \int_A w^2(r, z) dA = \frac{\pi b^2 w_c^2}{2} \quad (2.19)$$

$$\beta(z) = \int_A g c(r, z) w(r, z) dA = \pi \frac{\Delta \rho}{\rho_o} g w b^2 \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \quad (2.20)$$

Οι κατανομές μέσης ταχύτητας και συγκέντρωσης μιας ουσίας που μεταφέρει η φλέβα θεωρήσαμε ότι είναι Γκαουσιανές της μορφής

$$w(r, z) = w_c(z) \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right)$$

$$c(r, z) = c_c(z) \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad \text{ή} \quad \Delta \rho(r, z) = \Delta \rho_c(z) \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right)$$

Ο δείκτης c συμβολίζει τις τιμές στον άξονα, ενώ r είναι η ακτινική απόσταση από τον άξονα, z η κατακόρυφη απόσταση από το ακροφύσιο και b και b_c τα $1/e$ (e είναι η βάση των Νεπέρειων λογαρίθμων) πλάτη της φλέβας από τις κατανομές μέσης ταχύτητας και συγκέντρωσης αντίστοιχα. Επίσης $\lambda = b_c/b$ είναι ο λόγος των δύο πλατών και a ο συντελεστής συμπαράσυρσης περιβάλλοντος ρευστού από τη φλέβα όπως τον έχει ορίσει ο G.I. Taylor, θεωρώντας ότι η εισροή περιβάλλοντος ρευστού της φλέβας στα όριά της γίνεται με ταχύτητα $v_e = a w_c$.

Οι εξισώσεις (2.15), (2.16) και (2.17) αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων αρχικών τιμών (initial value problem) για τον προσδιορισμό της ογκομετρικής παροχής $\mu(z)$ και ορμής $m(z)$ σε απόσταση z πάνω από το ακροφύσιο, με αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} \mu(0) &= Q \\ m(0) &= M, \text{ και} \\ \beta(0) &= B = \text{σταθερά.} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.15) - (2.17) με αρχικές τιμές τις (2.21) μπορεί να λυθεί με αριθμητικές μεθόδους, εφαρμόζοντας για παράδειγμα τον αλγόριθμο Runge-Kutta 4^{ης} τάξεως.

Ο Jirka (2004) παρουσίασε ένα ολοκληρωματικό μοντέλο, γνωστό ως Corjet, που μπορεί να επιλύσει προβλήματα ροής ανωστικών φλεβών σε ομογενή αλλά και σε στρωματοποιημένο, κινούμενο ή ακίνητο αποδέκτη.

Ο Yannopoulos (2006) ανέπτυξε ένα ολοκληρωματικό μοντέλο 2^{ας} τάξης, με δύο εξαρτημένες μεταβλητές, για επίπεδες και κυκλικές, τυρβώδεις ανωστικές φλέβες για μη στρωματοποιημένη ροή. Αρχικά οι μερικές διαφορικές εξισώσεις του όγκου, της ορμής και της διατήρησης του δείκτη ολοκληρώνονται στη διατομή της ανωστικής φλέβας. Οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από αυτή την ολοκλήρωση σχηματίζουν ένα σύστημα εξισώσεων το οποίο λύνεται με τη βοήθεια ενός αλγορίθμου Runge-Kutta 4^{ης} τάξης. Με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης, οι άγνωστες μεταβλητές υπολογίζονται σε τόσα βήματα όση είναι η τάξη της μεθόδου, δηλαδή τέσσερα.

Μειονεκτήματα των μοντέλων αυτών είναι το γεγονός ότι πρέπει να καθορίζονται οι κατανομές των χαρακτηριστικών ποσοτήτων u , c σε κάθε διατομή που θεωρούνται ως επί το πλείστον γκαουσιανές. Τα ολοκληρωματικά μοντέλα είναι ουσιαστικά μονοδιάστατα μοντέλα και για το λόγο αυτό προέκυψε η ανάγκη ανάπτυξης πιο σύνθετων δισδιάστατων και τρισδιάστατων υπολογιστικών μοντέλων για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας στα αποτελέσματα.

2.3 Αριθμητικά Μοντέλα

Η ανάλυση τυρβωδών ροών με τη βοήθεια των τρισδιάστατων εξισώσεων RANS (Reynolds Average Navier – Stokes) έχει βρει ιδιαίτερη εφαρμογή. Λόγω γενικώς της αδυναμίας να επιλυθούν οι εξισώσεις Navier – Stokes για τυρβώδεις ροές, πλην αριθμητικών λύσεων με τη μέθοδο DNS (Direct Numerical Simulation) για μικρούς αριθμούς Reynolds, καταλήγουμε στην πρακτική μετατροπής τους σε εξισώσεις που περιγράφουν τις μέσες χρονικά τιμές των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Ακολουθώντας την πρακτική που εισήγαγε ο O. Reynolds και εφαρμόζοντας διαδικασία μέσου όρου, η εξίσωση της συνέχειας λαμβάνει την παρακάτω μορφή (Hossain & Rodi 1982):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.22)$$

όπου t ο χρόνος

Παρομοίως η εξίσωση ορμής λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) + \rho g_i \quad (2.23)$$

Οι εξισώσεις (2.22) και (2.23) συνιστούν τις Reynolds- Averaged – Navier – Stokes (RANS) εξισώσεις. Ο όρος $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ της εξίσωσης (2.23) συμπεριφέρεται σαν να υπάρχει μια επιπλέον τάση η οποία δρα στο ροϊκό πεδίο, εκτός από τη μέση τάση. Ο όρος αυτός ονομάζεται τανυστής των τάσεων Reynolds (ή τυρβωδών τάσεων) και στα επόμενα όπου απαιτηθεί θα συμβολίζεται ως:

$$s_{ij}^t = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.24)$$

Το ιδιάζον χαρακτηριστικό των εξ. RANS (εξ. 2.22 και 2.23) είναι ότι δεν αποτελούν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, αφού δεν υπάρχει μια ευθεία σχέση που να συνδέει τον τανυστή s_{ij}^t με τις u_i και p . Η εύρεση τέτοιου «κλεισίματος» των εξ. RANS μέσω ενός καταστατικού νόμου για τον s_{ij}^t έχει αποτελέσει και εξακολουθεί να αποτελεί τον κύριο σκοπό των μοντέλων τύρβης.

Λόγω της εμφάνισης νέων άγνωστων ποσοτήτων, όπως οι τυρβώδεις τάσεις $\rho \overline{u'_i u'_j}$ και ροές $\rho \overline{c'_i c'_j}$, χρειάζεται να οριστούν επιπλέον εξισώσεις, οι οποίες ανάλογα με την πολυπλοκότητά τους κατατάσσονται σε μοντέλα τύρβης. Τα μοντέλα τύρβης που έχουν αναπτυχθεί είναι τα παρακάτω (Saad, 2004):

- Μοντέλα μηδενικής εξίσωσης: μήκος μίξης
- Μοντέλα μίας εξίσωσης

- Μοντέλα δύο εξισώσεων: k-ε, k-ω
- Ολοκληρωματικά μοντέλα
- Μοντέλα 2ας τάξης κλεισίματος τύρβης: Αλγεβρικά μοντέλα τάσεων (ASM), Μοντέλα τάσεων Reynolds (RSM)
- Μοντέλα προσομοίωσης μεγάλων δινών (LES)

2.3.1 Δισδιάστατα Αριθμητικά Μοντέλα

Ο Madni (1975) παρουσίασε ένα δισδιάστατο αριθμητικό μοντέλο, που υπολόγιζε την εγκάρσια και διαμήκη ταχύτητα και τη διαφορά θερμοκρασίας κυκλικής ανωστικής θερμικής φλέβας. Το μοντέλο επιλύει τις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και διατήρησης της ενέργειας χρησιμοποιώντας ρητό υπολογιστικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, αλλά και το πεπλεγμένο σχήμα Dufort – Frankel, με αλγόριθμο σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran. Τα αποτελέσματα των αξονικών ποσοτήτων σε αδιάστατη μορφή συγκρίνονται με πειραματικά αποτελέσματα. Ως μοντέλο τύρβης χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μήκους ανάμειξης Prandtl (1925), ο οποίος υπέθεσε ότι το τυρβώδες ιξώδες περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$\nu_t = \overline{u'v'} * l_m \quad (2.25)$$

όπου u' είναι το μέτρο της διακύμανσης της ταχύτητας λόγω τύρβης και l_m το μήκος ανάμειξης. Η έννοια του μήκους ανάμειξης έχει ως εξής: Σε ροές τύπου οριακού στρώματος, όταν ένα «τμήμα» ρευστού ταξιδεύει με τη μέση ταχύτητα της θέσης του, αυτό μετατοπίζεται, λόγω τύρβης, στην εγκάρσια διεύθυνση από το επίπεδο y_1 στο επίπεδο y_2 . Σε αυτή τη διαδικασία μετατόπισης η μέση διαμήκης ταχύτητά του (δηλαδή η ταχύτητα στην αρχική θέση) διαφέρει από την ταχύτητα στη νέα θέση κατά $\Delta u \cong (\partial u / \partial y)(y_2 - y_1)$. Ως μήκος ανάμειξης ορίζεται η απόσταση $(y_2 - y_1)$ όπου η Δu ισούται με τη μέση τιμή των εγκάρσιων διακυμάνσεων, δηλαδή $\hat{\nu}$.

Ο Prandtl (1925) θεώρησε ροές τύπου οριακού στρώματος με μόνη σημαντική τυρβώδη τάση την $\overline{u'v'}$ και βαθμίδα ταχύτητας $(\partial u / \partial y)$ και βάσει του προηγούμενου ορισμού του μήκους ανάμειξης, εξέφρασε το $\overline{u'v'}$ ως:

$$\overline{u'v'} = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (2.26)$$

Συνδυασμός των εξ. (2.25) και (2.26) δίνει:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (2.27)$$

Η εξ. (2.27) αποτελεί το μοντέλο του μήκους ανάμειξης του Prandtl (Prandtl's Mixing Length Hypothesis). Η εξίσωση αυτή περιγράφει το ν_t ως συνάρτηση της τοπικής βαθμίδας της μέσης ταχύτητας και εμπεριέχει μία μόνο άγνωστη παράμετρο, το μήκος ανάμειξης l_m .

Το μοντέλο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί και ακόμα χρησιμοποιείται με επιτυχία για σχετικά απλές ροές, διότι το l_m μπορεί να περιγραφεί σε πολλές περιπτώσεις μέσω απλών εμπειρικών σχέσεων. Παρά τους περιορισμούς και τις αστοχίες του, η ιδέα του τυρβώδους ιξώδους χρησιμοποιείται ευρύτατα και έχει δώσει αποτελέσματα σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο του μήκους ανάμειξης δεν

αποδίδει πάντα σε περιπτώσεις όπου φαινόμενα όπως καμπυλότητα ροής, αποκόλληση, μεγάλες βαθμίδες πίεσης, απότομες αλλαγές στη διάτμηση κ.λπ. είναι παρόντα. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται εναλλακτικό σχήμα μοντελοποίησης της τύρβης, για αυτό και οι έρευνες στράφηκαν προς τα μοντέλα δύο εξισώσεων (Celik, 1999).

Ο Pantokratoras (1987) παρουσίασε ένα αριθμητικό μοντέλο για τον υπολογισμό των παραμέτρων κυκλικού πλουμίου σε στρωματοποιημένο αποδέκτη. Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή επιλύθηκαν αριθμητικά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών που αναπτύχθηκε από τους Patankar & Spalding (1970). Ο Dunni (2004) παρουσίασε ένα δισδιάστο αριθμητικό μοντέλο για την περιγραφή αξονοσυμμετρικών θερμικών τυρβωδών φλεβών σε κυλινδρικές συντεταγμένες, επιλύοντας τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν τη ροή με διάφορες τεχνικές πεπερασμένων διαφορών.

Στα μοντέλα δύο εξισώσεων, προστίθενται στις μεταβλητές ροής και άλλες δύο μεταβλητές μέσω των οποίων υπολογίζεται το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας ν_t . Δύο είναι τα ευρέως χρησιμοποιούμενα μοντέλα δύο εξισώσεων: το μοντέλο k-ε και το μοντέλο k-ω. Η πρώτη μεταβλητή είναι και στα δύο μοντέλα η τυρβώδης κινητική ενέργεια k (turbulent kinetic energy) ενώ ε είναι ο ρυθμός απομείωσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (dissipation ration of turbulent kinetic energy) και ω η κλίμακα της τύρβης.

Οι Kolmogorov (1942) και Prandtl (1945) πρότειναν τον προσδιορισμό της κατανομής της k από την επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς γι' αυτή την ποσότητα. Η εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = & -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} - \beta g_i \overline{\rho u'_i t} \dots \dots \dots (\Pi_k + G_k) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u'^2 u'_j} + \overline{\rho u'_j} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \dots \dots \dots (D_k) \\ & - \nu \frac{\partial u'_j \partial u'_j}{\partial x_j \partial x_j} \dots \dots \dots (\varepsilon_k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

όπου, ο πρώτος όρος του δεξιού σκέλους της εξ (2.28):

$$\Pi_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_j} \quad (2.29)$$

είναι ο όρος παραγωγής τυρβώδους κινητικής ενέργειας και

$$G_k = \beta g_i \frac{k_t}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.30)$$

Η διαδικασία μοντελοποίησης για την ποσότητα ε εμπεριέχει πολλές περισσότερες παραδοχές απ' ότι η αντίστοιχη διαδικασία για την k-εξίσωση (Bahari & Hejazi 2009).

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} (\Pi_k + C_{\varepsilon 3} G_k) \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.31)$$

Οι Hossain & Rodi (1982) παρουσίασαν ένα μοντέλο για την προσομοίωση της μέσης ταχύτητας και θερμοκρασίας (ή συγκέντρωσης) για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες και το εφάρμοσαν για κατακόρυφες τυρβώδεις φλέβες. Η μελέτη εστιάζει στον προσδιορισμό των τυρβωδών τάσεων και θερμικών ροών που παρουσιάζονται στις διαφορικές εξισώσεις και ιδιαίτερος στη μοντελοποίηση της επίδρασης της τύρβης μέσω του μοντέλου τύρβης δύο εξισώσεων k-ε. Οι όροι της μεταγωγής και διάχυσης αμελούνται από τις αρχικές διαφορικές εξισώσεις και εισάγονται ως αλγεβρικές σχέσεις. Ένα τροποποιημένο μοντέλο k-ε δύο εξισώσεων αναπτύχθηκε από τους Yan & Holmstedt (1999) για να βελτιώσει τη συνεισφορά και τη μεταφορά της τύρβης σε σχέση με το αρχικό μοντέλο k-ε. Το τροποποιημένο μοντέλο ήταν σταθερό, με μικρό υπολογιστικό κόστος και μπορούσε να εφαρμοστεί για πολύπλοκα προβλήματα. Τα υπολογιζόμενα προφίλ ταχύτητας και θερμοκρασίας και ο ρυθμός διάχυσης συμφωνούσαν με τα πειραματικά δεδομένα.

Το μοντέλο k- ω παρουσιάστηκε επίσης από τον Kolmogorov (1942) και εξελίχθηκε από τον Wilcox (1994). Το μοντέλο αυτό επιλύει τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και την κλίμακα της τύρβης ω , για πλήρως τυρβώδεις ροές χωρίς να απαιτείται ειδική προσαρμογή τους στα όρια της φλέβας. Ο Menter (1992) παρατήρησε σημαντική εξάρτηση του μοντέλου από το είδος της ροής και πρότεινε κάποιες αριθμητικές βελτιώσεις του αριθμητικού σχήματος που όμως δεν έλυσαν το πρόβλημα.

Η ευρεία εφαρμογή των μοντέλων δύο εξισώσεων οφείλεται στο ότι τα αποτελέσματά τους επιβεβαιώνονται και από τα πειραματικά αποτελέσματα. Παρ' όλα αυτά, τα μοντέλα k-ε και k- ω δε δίνουν μια γενική λύση, αφού ο προσδιορισμός των συντελεστών που χρησιμοποιείται στα μοντέλα τύρβης δεν είναι αυστηρά καθορισμένος, δεδομένου ότι τα μοντέλα που περιλαμβάνουν πολλές υποθέσεις που βασίζονται στα πειραματικά αποτελέσματα. Συνεπώς, η δημοφιλής προσέγγιση για τον καθορισμό των συντελεστών κλεισίματος είναι να ρυθμίζονται οι τιμές κατά τέτοιο τρόπο ώστε το μοντέλο να αποκτά λογική συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτή η προσέγγιση συνεπάγεται ότι μία σταθερά που προσδιορίζεται πειραματικά από μία εφαρμογή μπορεί να μην είναι αναγκαστικά η καλύτερη για ένα ευρύ φάσμα τυρβωδών ροών.

Για τις διατμητικές ροές φλεβών και τα δύο μοντέλα δίνουν καλά αποτελέσματα. Η διασπορά των τιμών για αυτές τις ροές προβλέπεται για το μοντέλο k-ε στο 30% για κυκλική φλέβα, 15% για στρώμα ανάμιξης και 5% για επίπεδη φλέβα. Οι προβλέψεις για το k- ω μοντέλο έχουν μικρότερη διασπορά, αλλά είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες στις οριακές συνθήκες. Η ευαισθησία αυτή επιτρέπει ευελιξία στη βαθμονόμηση του μοντέλου και επομένως, η αυξημένη ακρίβεια που λαμβάνεται με τη χρήση του k- ω μοντέλου θα πρέπει να αντιμετωπίζεται με προσοχή (Celik, 1999).

Για σταθερή ασυμπίεστη ροή οριακού στρώματος σε αριθμό Reynolds κοντά στο 10^6 και τα δύο μοντέλα αποδίδουν πολύ καλά, με τιμές του συντελεστή τριβής και της μέσης ταχύτητας εντός 5%. Ωστόσο, για ασυμπίεστα οριακά στρώματα με

μεγάλες πιέσεις, το k- ω μοντέλο φαίνεται να δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το μοντέλο k- ϵ (Celik, 1999).

Συμπερασματικά, τα μοντέλα δύο εξισώσεων έχουν αποδείξει ότι αποδίδουν καλά για ένα ευρύ φάσμα των ροών της υδραυλικής μηχανικής. Η εφαρμογή τους είναι περιορισμένη, ωστόσο, σε ροές που ακολουθούν στενά τις παραδοχές στις οποίες βασίζονται τα μοντέλα δύο εξισώσεων. Το μοντέλο k- ω είναι θεωρητικά καλύτερο από το μοντέλο k- ϵ για ροές με δυσμενή διαβάθμιση πίεσης, παρ' όλο που χρησιμοποιούνται παραλλαγές του μοντέλου k- ϵ με διόρθωση σε κάποιους παράγοντες, όπως η καμπυλότητα της ροής και η τύρβη, σε αυτές τις περιπτώσεις. Γενικώς, κανένα μοντέλο δεν είναι σε θέση να δώσει ποσοτικά καλά αποτελέσματα για περισσότερο πολύπλοκες ροές, όπως οι ροές με ξαφνικές αλλαγές του ρυθμού έντασης, καμπύλες επιφάνειες και δευτερεύουσες κινήσεις. Ενώ τα μοντέλα δύο εξισώσεων μπορεί να είναι σε θέση να δώσουν ποιοτικά αποτελέσματα για τέτοιες ροές, γενικά απαιτείται ένα επιπλέον επίπεδο πολυπλοκότητας ώστε τα υπολογιστικά αποτελέσματα να συμφωνήσουν με τα πειραματικά (Celik, 1999).

2.3.2 Πολύπλοκα Αριθμητικά Μοντέλα

Οι Launder, Reece και Rodi (1975) και Gibson & Launder (1978) παρήγαγαν αλγεβρικά μοντέλα τυρβωδών τάσεων υποθέτοντας ότι η προσέγγιση Boussinesq περιέχεται μόνο στους πρώτους όρους των διαφορικών εξισώσεων. Κατά την προσέγγιση Boussinesq θεωρείται ότι η μεταβολή της μέσης πυκνότητας $\bar{\rho}$ μπορεί να μη λαμβάνεται υπόψη στους όρους αδράνειας της εξίσωσης ορμής, αλλά είναι ουσιαστική και λαμβάνεται υπόψη στον όρο βαρύτητας της ίδιας εξίσωσης. Οι σταθερές του μοντέλου, όπως εκτιμήθηκαν από αυτές τις ομάδες μελετητών χρησιμοποιούνται ευρέως, παρόλο που υπήρξαν και άλλες μελετητικές προσπάθειες για τη βελτίωσή τους. Οι Gatski και Speziale (1993) παρήγαγαν ένα αλγεβρικό μοντέλο τάσεων, συμπεριλαμβάνοντας τους όρους δευτέρας τάξης στην κινητική ενέργεια $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$.

Βασικό πλεονέκτημα της χρήσης μιας τέτοιας μη γραμμικής εξίσωσης είναι η δυνατότητα πρόβλεψης ανισοτροπίας στις τάσεις Reynolds. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο για περιπτώσεις όπου δευτερεύουσες ροές λαμβάνουν χώρα, όπως όταν ένας σωλήνας ή κανάλι είναι καμπύλο.

Οι Chen & Chen (1979) παρουσίασαν ένα υπολογιστικό μοντέλο για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες σε ομοιογενές ήρεμο περιβάλλον, όπου οι τυρβώδεις τάσεις και θερμικές ροές μοντελοποιούνται από το αλγεβρικό μοντέλο τάσεων (ASM), ενώ οι διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς επιλύονται για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k, το ρυθμό απομείωσης ϵ και τη διακύμανση της θερμοκρασίας $\overline{t'^2}$. Η ροή μελετάται σε τρεις περιοχές, στη μη τυρβώδη, στην ενδιάμεση και στην περιοχή όπου η φλέβα συμπεριφέρεται ως πλούμιο. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι η ροή επιταχύνεται στη ζώνη εγκατάστασης της ροής. Ένα βελτιωμένο υπολογιστικό μοντέλο για αξονοσυμμετρική τυρβώδη φλέβα προτάθηκε από τους Dewan et al. (1997) k- ϵ - $\overline{t'^2}$ - γ , με διόρθωση των εμπειρικών σταθερών που πρότειναν οι Chen & Chen (1979) και

λαμβάνοντας υπόψη και τη διαλλειπτικότητα γ , που υπολογίστηκε από τις RANS ποσότητες.

Τα μοντέλα προσομοίωσης μεγάλων δινών LES (Large Eddy Simulation) χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για τη μοντελοποίηση της τύρβης. Προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Smagorinsky (1963) στην προσπάθειά του να προσομοιώσει τα ρεύματα της ατμόσφαιρας. Βασική αρχή του LES είναι ότι τα φυσικά χαρακτηριστικά των κινήσεων στην ατμόσφαιρα είναι διαφορετικά ανάλογα με τη χωρική κλίμακα. Έτσι γίνεται ένας διαχωρισμός σε ροή με μεγάλες κλίμακες (super – grid scales) και μικρές υπο-κλίμακες (sub – grid scales). Οι μικρότερης κλίμακας δίνες απομακρύνονται με τη χρήση φίλτρων ώστε να μείνουν μόνο οι μεγάλες αναλυμένες κλίμακες της τυρβώδους ροής. Για το λόγο αυτό οι μεταβλητές που χαρακτηρίζουν τη ροή (ταχύτητα, θερμοκρασία, πίεση κλπ), φιλτράρονται χωρικά, ώστε να οριστούν τα τμήματα εκείνα που έχουν κλίμακες με μέγεθος μεγαλύτερο από αυτό του φίλτρου (δηλαδή τα αναλυμένα τμήματα). Αφού η τύρβη έχει μικρές διακυμάνσεις στις μικρότερες κλίμακες, οι συνηθισμένες υποθέσεις των μονοδιάστατων μοντέλων δεν εφαρμόζονται, αφού το πλέγμα του υπολογιστικού πεδίου είναι αρκετά μικρό (Celik, 1999).

Για τον υπολογισμό των αναλυμένων τμημάτων (των προαναφερθέντων μεταβλητών) επιλύονται φιλτραρισμένες εξισώσεις (Navier Stokes, μεταφοράς θερμότητας και Poisson για την πίεση), ενώ τα χαρακτηριστικά μεγέθη της υποκλίμακας, όπως τυρβώδης κινητική ενέργεια, ροές ορμής και θερμότητας, παραμετροποιούνται με τη χρήση σχημάτων κλεισίματος. Η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη με τη χρήση των μέσων τιμών στις εξισώσεις RANS, αν και στα μοντέλα LES χρησιμοποιούνται μόνο οι όροι της τύρβης που είναι μεγαλύτεροι από ένα καθορισμένο ελάχιστο πλάτος.

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη των υπο-κλιμάκων που προκύπτουν από τη διαδικασία του «φιλτραρίσματος» μπορούν να επιλυθούν από τα SGS μοντέλα (subgrid scale models), τα οποία είναι ανάλογα με το τυρβώδες μοντέλο που χρησιμοποιείται στους RANS υπολογισμούς. Για αυτό είναι βασικός στόχος να προσδιοριστεί η επίδραση των μικρών κλιμάκων, με βάση την υπόθεση της διάχυσης. Εδώ, θεωρείται ότι ο ρόλος των μικρών δινών είναι να απορροφούν ενέργεια από τις μεγάλες δίνες και να τη διαχέουν, ώστε να καταστρέφεται συνεχώς η ενέργεια των μεγάλων δινών. Μερικά δημοφιλή μοντέλα υπο-κλιμάκων είναι το μοντέλο του Smagorinsky (1963) και το δυναμικό μοντέλο Smagorinsky (Germano et al. 1990).

Οι Yuan, Street & Ferziger (1999) παρουσίασαν LES προσομοιώσεις κυκλικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη. Οι προσομοιώσεις έγιναν για δύο φλέβες με διαφορετικούς αριθμούς Reynolds και διαφορετικούς λόγους ταχυτήτων φλέβας με τον αποδέκτη. Τα υπολογιστικά αποτελέσματα είχαν καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα με τα οποία συγκρίθηκαν. Οι μεγάλης κλίμακας συνεκτικές δομές που παρατηρήθηκαν σε πειραματικές απεικονίσεις της ροής αναπαράχθηκαν από τις προσομοιώσεις, καθώς και οι μηχανισμοί με τους οποίους περιγράφονται.

Οι Zhou, Luo & Williams (2001) εφάρμοσαν το μοντέλο LES σε μία χωρικά αναπτυσσόμενη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα. Παρατηρήθηκε ότι η διάχυση

του πλουμίου και η μέγιστη μέση ταχύτητα στον άξονα εξαρτώνται από την εγκάρσια εισροή. Η ελικοειδής μορφή αστάθειας οδηγεί σε ισχυρότερο ρυθμό διάχυσης συγκριτικά με την αξονοσυμμετρική. Η ενισχυμένη συμπαράσυρση συνδέθηκε άμεσα με την ισχυρή τυρβώδη ορμή και η ενέργεια που μεταφέρεται μεταξύ του πλουμίου και του περιβάλλοντος ρευστού προκύπτει από δυναμικές δίνες. Ο ρυθμός συμπαράσυρσης της τάξης του 0,09 συμπίπτει με τις υπολογισμένες πειραματικές τιμές.

Οι Wang, Frohlich, Michelassi & Rodi (2008) μελέτησαν με LES προσομοίωση τρεις περιπτώσεις κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών με διαφορετική πυκνότητα σε αέριο αποδέκτη με μικρή ταχύτητα. Λεπτομερείς συγκρίσεις των αποτελεσμάτων δείχνουν καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά. Επιβεβαιώνουν ότι μια φλέβα με χαμηλότερη πυκνότητα αναπτύσσεται πιο γρήγορα από ότι μια πυκνότερη.

Λόγω της επίλυσης των εξισώσεων Navier Stokes τα μοντέλα LES έχουν μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον καθώς μπορούν να προσομοιώσουν περίπλοκες περιπτώσεις τύρβης. Όμως τα μοντέλα αυτά έχουν μεγάλο «υπολογιστικό κόστος», διότι απαιτούν αρκετά πυκνό πλέγμα για να διακριτοποιηθούν οι εξισώσεις διατήρησης και χρειάζονται μεγάλη ισχύ υπολογιστικών συστημάτων.

2.4 Λογισμικά Πακέτα Προσομοίωσης Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών

2.4.1 Cormix

Το λογισμικό προσομοίωσης διάχυσης ρύπων σε υδατικούς όγκους CORMIX έχει δημιουργηθεί από το πανεπιστήμιο του Cornell με την υποστήριξη της Αμερικάνικης Αρχής Προστασίας του Περιβάλλοντος (EPA). Το εν λόγω λογισμικό αποτελεί υποστηρικτικό σύστημα λήψης αποφάσεων κατά τη διαδικασία εκτίμησης επιπτώσεων στο περιβάλλον που προκύπτουν από συνεχείς σημειακές πηγές ρύπων. Η χρήση του λογισμικού CORMIX δίνει τη δυνατότητα διαμόρφωσης προβλέψεων συγκέντρωσης ουδέτερων και δραστικών ουσιών όπως και την προσομοίωση της ανάμιξης κίνησης εκροών μικρότερης αλλά και μεγαλύτερης πυκνότητας σε σχέση με την πυκνότητα του υδατικού φορέα όπου εκρέει ο εκάστοτε ρύπος. Έχει επίσης την ικανότητα προσομοίωσης εκροών διαφορετικής θερμοκρασίας από αυτήν του θαλάσσιου περιβάλλοντος. Ταυτόχρονα, το CORMIX έχει μελετηθεί και βαθμονομηθεί για μία σειρά υδροδυναμικών συνθηκών, βάση των οποίων εκπονούνται οι προβλέψεις διασποράς και μεταφοράς ρύπων. Διαθέτει δηλαδή τη δυνατότητα αναγνώρισης των υδροδυναμικών συνθηκών στη ζώνη ανάμιξης και στην ευρύτερη ζώνη μεταφοράς των εκροών και στη συνέχεια αξιολόγησης της συμβατότητας των υπολογισμών που πραγματοποιούνται.

Το CORMIX είναι ένα σύστημα, το οποίο χρησιμοποιείται για την ανάλυση, πρόβλεψη και σχεδιασμό της διάθεσης αστικών και βιομηχανικών αποβλήτων μέσα σε υδάτινους αποδέκτες (θάλασσα, ποτάμι, λίμνη, εκβολή ποταμού). Στοχεύει στον υπολογισμό της τροχιάς και της μεταβολής της αραίωσης αξονοσυμμετρικών ανωστικών ροών, δισδιάστατων ανωστικών ροών και επιφανειακών πλουμίων, τόσο

στην «κοντινή» (near field) όσο και στη «μακρινή» (far field) περιοχή της ανάμιξης (<http://www.cormix.info/>).

2.4.2 VISJET

Το VISJET είναι ένα υπολογιστικό σύστημα μοντελοποίησης που στοχεύει στην πρόβλεψη της τροχιάς και της μεταβολής της αραίωσης των διατιθέμενων λυμάτων στο περιβάλλον νερό. Το μοντέλο παρέχει τρισδιάστατη οπτικοποίηση της ροής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη είτε μίας φλέβας είτε μιας ομάδας ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν σε κινούμενο αποδέκτη που μπορεί να είναι και στρωματοποιημένος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σχεδιασμό εκβολής, την εκτίμηση των επιπτώσεων και την ανάλυση κινδύνου ρύπανσης του περιβάλλοντος ή των φυσικών απορρίψεων (π.χ. υδροθερμικές πηγές) (<http://www.aoe-water.hku.hk/visjet/visjet.htm>). Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί ολοκληρωματικές λαγκραζιανές εξισώσεις για την προσομοίωση της συμπεριφοράς των ανωστικών φλεβών (Lee et al., 2000).

Σε σύγκριση με το Cormix, το Visjet φαίνεται πως αποδίδει καλύτερα την αρχική αραίωση σε στρωματοποιημένο αποδέκτη (Etemad-Shahidi & Azimi, 2003).

2.4.3 Τρισδιάστατα Υπολογιστικά Πακέτα

Το CFX αποτελεί σήμερα ένα από τα πλέον εξελιγμένα λογισμικά πακέτα τρισδιάστατης αριθμητικής προσομοίωσης ροών. Παρέχει μια μεγάλη ποικιλία νέων μοντέλων, εργαλείων κατασκευής πλεγμάτων, καθώς και οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων που αυξάνει σημαντικά το εύρος εφαρμογών και τη χρηστικότητα του πακέτου. Μερικές από τις δυνατότητες του υπολογιστικού αυτού πακέτου είναι: πολλαπλά συστήματα αναφοράς (MFR), εξελιγμένα μοντέλα τύρβης, καύσης και ακτινοβολίας, και προσομοίωση ελευθέρων επιφανειών (<http://www.ansys.com>). Παρόμοιο λογισμικό πακέτο είναι και το Fluent.

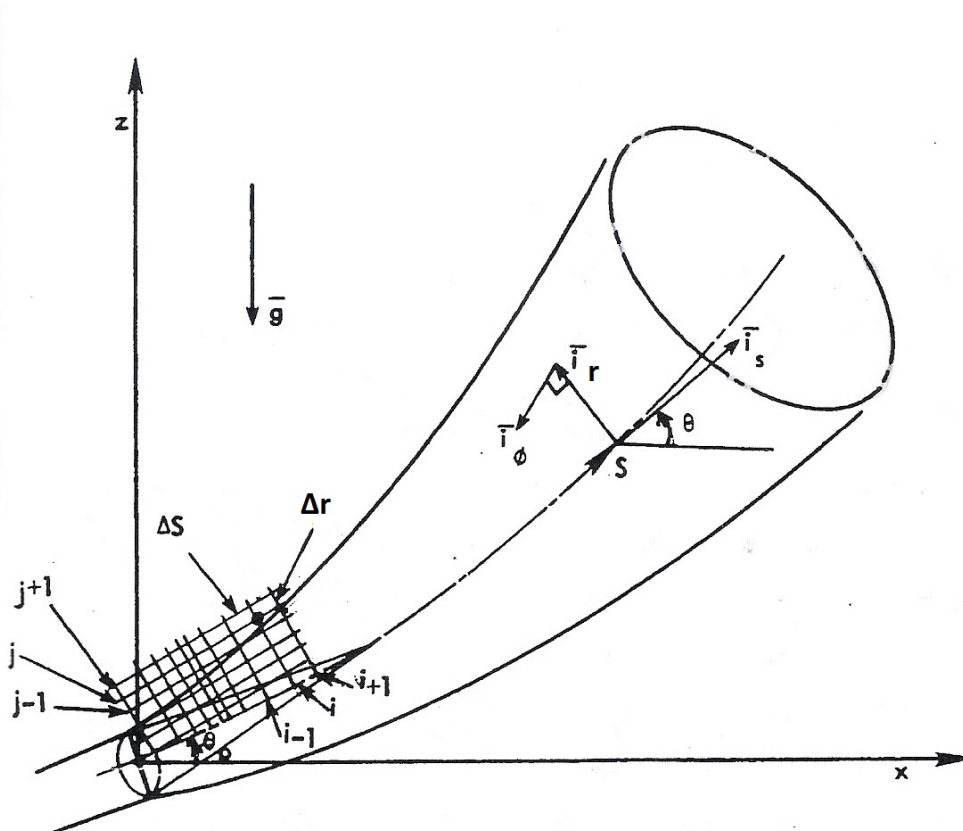
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα δισδιάστατο υπολογιστικό μοντέλο το οποίο υπολογίζει τα χαρακτηριστικά μεγέθη αξονοσυμμετρικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών, βασιζόμενο στις RANS εξισώσεις με την εφαρμογή ενός απλού μοντέλου τύρβης, του μοντέλου μήκους μείξης. Το μοντέλο καταστρώνεται υπό τη μορφή υπολογιστικού κώδικα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran PowerStation 4.0.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΡΟΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

3.1 Παρουσίαση Προβλήματος

Έστω κυκλική τυρβώδης ανωστική φλέβα, με αρχική παροχή Q_0 και διαφορά πυκνότητας $\Delta\rho_0$, μικρότερη σε σχέση με το περιβάλλον ρευστό, η οποία εκρέει υπό γωνία θ_0 ως προς το οριζόντιο επίπεδο, σε ομογενή αποδέκτη με μικρή ταχύτητα. Η περιοχή μελέτης θεωρείται πολύ μεγάλη ώστε να μην επηρεάζεται η ροή από στερεά όρια.

Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται για τη γενική περίπτωση του προβλήματος δίδεται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων και πλέγμα πεπερασμένων διαφορών για την ανάλυση της τυρβώδους ροής (Madni 1975).

Στο Σχ. 3.1 ο άξονας s τοποθετείται κατά μήκος της τροχιάς της φλέβας και ο άξονας r εγκαρσίως αυτής. Η τροχιά της φλέβας θεωρείται ότι ακολουθεί το νοητό άξονα συμμετρίας και ως γωνία θ ορίζεται η γωνία που σχηματίζει ο άξονας της φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο σε κάθε θέση.

3.2 Εξισώσεις που Διέπουν τη Ροή

Η κίνηση μιας ανωστικής φλέβας περιγράφεται από τις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και διατήρησης δείκτη. Η τελική μορφή των εξισώσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι η παρακάτω (Madni 1975):

Εξ. Συνέχειας :

$$\frac{\partial(ur)}{\partial s} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0 \quad (3.1)$$

Εξίσωση Κίνησης κατά s:

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g * \sin\theta \quad (3.2)$$

όπου: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'}$

Εξίσωση Κίνησης κατά r:

$$u^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g * \cos\theta \quad (3.3)$$

Εξίσωση Διατήρησης Δείκτη:

$$u \frac{\partial c}{\partial s} + v \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-rq) \quad (3.4)$$

Επειδή η διαφορά πυκνότητας $\Delta\rho$ είναι ανάλογη της συγκέντρωσης c , ισχύει:

$$\frac{\rho - \rho_\alpha}{\rho_0 - \rho_\alpha} = \frac{c - c_\alpha}{c_0 - c_\alpha} \quad (3.5)$$

Οπότε από τις Εξ. (3.4) και (3.5) προκύπτει η μορφή της εξίσωσης διατήρησης δείκτη που χρησιμοποιείται τελικά:

$$u \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial s} + v \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-rq) \quad (3.6)$$

όπου: $q = v \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} - \Delta\rho'v'$ η ροή λόγω πυκνομετρικής διαφοράς που προκαλείται από τη μοριακή και την τυρβώδη διάχυση.

Η διατμητική τάση τ στην εξ. (3.2) είναι το άθροισμα του μοριακού και του τυρβώδους ιξώδους, οπότε:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'v'} \Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} - \overline{u'v'}$$

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο μήκους ανάμειξης ως μοντέλο τύρβης, έχουμε:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.7)$$

όπου ν_t το τυρβώδες ιξώδες

Οπότε,

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \Rightarrow \frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial r} = n \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.8)$$

Αντίστοιχα, στην εξίσωση διατήρησης δείκτη (3.6):

$$q = \nu \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} - \overline{\Delta\rho'v'} \quad (3.9)$$

όπου,

$$-\overline{\Delta\rho'v'} = \nu_c \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} \quad (3.10)$$

$$q = \nu \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} + \nu_c \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial r} = (\nu + \nu_c) \frac{\partial c}{\partial r} \quad (3.11)$$

όπου ν_c η τυρβώδης διάχυση της συγκέντρωσης

Οι εξ. (3.1) – (3.4) είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Με μια πρώτη ματιά εμφανίζονται έξι άγνωστοι όροι, οι u , v , $\Delta\rho$, θ , ν_t , ν_c . Οι ν_t και ν_c συσχετίζονται με τον τυρβώδη αριθμό Prandtl ως εξής:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\nu_c} \quad (3.12)$$

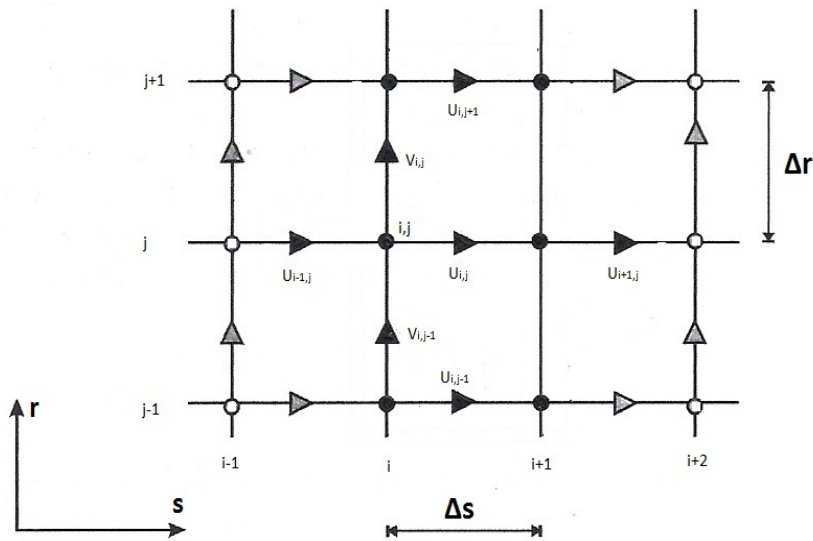
όπου, $Pr_t = 0.7$ σε όλους τους υπολογισμούς, σύμφωνα και με τα πειραματικά αποτελέσματα των Forstall & Shapiro (1950) και Landis & Shapiro (1951).

3.3 Αριθμητική Μέθοδος Διακριτοποίησης Διαφορικών Εξισώσεων

Επιλύουμε αριθμητικά τις δισδιάστατες διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας ρητό αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών σε έκκεντρο κάρναβο για να υπολογίσουμε το πεδίο ροής. Πραγματοποιείται διακριτοποίηση του πεδίου ροής της φλέβας κατά τις δύο διαστάσεις s κατά μήκος του άξονα της φλέβας και r εγκάρσιως της τροχιάς της φλέβας, με χωρικά βήματα Δs και Δr αντίστοιχα (Σχ. 3.2). Το βήμα Δs είναι μεταβαλλόμενο, ενώ το Δr θα λαμβάνεται ως εξής:

$$\Delta r = R_o / n\gamma_i$$

όπου, R_o η ακτίνα του στομίου εκροής και $n\gamma_i$ το πλήθος των διαστημάτων Δr στα οποία διαιρείται η ακτίνα του στομίου εκροής.



Σχήμα 3.2. Σχηματική παρουσίαση διακριτοποίησης των εξισώσεων συνέχειας και ορμής.

Η φιλοσοφία των αριθμητικών μεθόδων προσέγγισης των διαφορικών εξισώσεων έγκειται στην υποκατάσταση του συνεχούς πεδίου που παρέχει η αναλυτική λύση από ένα σύνολο διακεκριμένων τιμών της άγνωστης συνάρτησης, σε επιλεγμένα σημεία του χώρου και χρόνου (κόμβοι). Προς το σκοπό αυτό υποδιαιρείται το πεδίο ενδιαφέροντος σε υποπεδία όπου με διάφορους τρόπους οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις μετατρέπονται σε αλγεβρικές εξισώσεις μεταξύ των τιμών των γειτονικών σημείων – κόμβων. Προκύπτει έτσι ένα σύστημα αλγεβρικών σχέσεων που συνδέει τις άγνωστες τιμές, η φύση του οποίου εξαρτάται πρωταρχικά από τη μορφή της προς επίλυση διαφορικής εξίσωσης (Κουτίτας, 1985).

Οι κύριες μέθοδοι κατάστρωσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων είναι α) η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών, β) η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων και γ) η μέθοδος οριακών στοιχείων. Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, η οποία συνίσταται στην προσεγγιστική έκφραση των παραγώγων με διαφορές των τιμών της συνάρτησης στους κόμβους. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση αναπτυγμάτων σε σειρές Taylor.

Οι εξ. (3.1) – (3.4) λύνονται χρησιμοποιώντας ένα ρητό σχήμα εμπρόσθιων διαφορών όπου όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές υπολογίζονται στους κόμβους του πλέγματος. Γενικά, η εμπρόσθια διαφορά προσέγγισης πρώτης παραγώγου μπορεί να γραφεί ως:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.13)$$

όπου, Δf_i είναι η πρώτη εμπρόσθια διαφορά, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ είναι το βήμα, και εκφράζει το μήκος του διαστήματος στο οποίο έγινε η προσέγγιση και $O(\Delta x)$ είναι το σφάλμα της τάξης Δx (σφάλμα αποκοπής) και στην προκειμένη περίπτωση η ακρίβεια της προσέγγισης χαρακτηρίζεται ως πρώτης τάξης.

Το πλεονέκτημα του ρητού σχήματος είναι ότι όλες οι τιμές σε κάθε κόμβο εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τιμές στον προηγούμενο κόμβο, άρα δεν απαιτείται η κατάστρωση πολύπλοκων αλγεβρικών εξισώσεων, αλλά τίθενται αρκετοί περιορισμοί στην ευστάθεια και στο βήμα των υπολογισμών.

3.4 Διακριτοποιημένες Εξισώσεις

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (3.1) – (3.4) μετατρέπονται κατά τα παραπάνω στις αλγεβρικές εξισώσεις (3.14) - (3.17), οι οποίες επιλύονται βήμα προς βήμα και δίνουν λύσεις σε κάθε κόμβο του πεδίου ροής (Madni 1975).

Εξίσωση Συνέχειας:

$$\begin{aligned} & \frac{r_{j+1} + r_j}{4 * ds} [(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) + (u_{i+1,j} - u_{i,j})] + \frac{(r_{j+1} * v_{i+1,j+1} - r_j * v_{i+1,j})}{dr} = 0 \\ & \Rightarrow -\frac{r_{j+1} + r_j}{4 * ds} (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}) = \frac{r_{j+1} * v_{i+1,j+1} - r_j * v_{i+1,j}}{dr} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{r_{j+1} * v_{i+1,j+1}}{dr} = \frac{r_j * v_{i+1,j}}{dr} - \frac{r_{j+1} + r_j}{4 * ds} (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow v_{i+1,j+1} = \frac{r_j * v_{i+1,j}}{r_{j+1}} - \frac{dr * (r_{j+1} + r_j)}{r_{j+1} * 4ds} (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}) \quad (3.14) \end{aligned}$$

Εξίσωση Κίνησης κατά s:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}}{ds} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{v_{i,j}}{dr} (u_{i,j} - u_{i,j-1})^* = \\ & = \frac{1}{dr * r_j} \left\{ \left[\frac{(r_{j+1} + r_j)(v_{i,j} + v_{i,j+1})(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{4 dr} \right] \right. \\ & \left. - \left[\frac{(r_j + r_{j-1})(v_{i,j} + v_{i,j-1})(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{4 dr} \right] \right\} + \frac{\Delta \rho_{i,j}}{\rho_o} g * \sin \theta_i \\ & \Rightarrow u_{i+1,j} = \\ & = u_{i,j} - v_{i,j} * ds \frac{(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{dr * u_{i,j}} + ds \frac{(r_{j+1} + r_j)(v_{i,j} + v_{i,j+1})(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{4 * r_j * dr^2 * u_{i,j}} \\ & - ds \frac{(r_j + r_{j-1})(v_{i,j} + v_{i,j-1})(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{4 * r_j * dr^2 * u_{i,j}} + \frac{ds \Delta \rho_{i,j}}{u_{i,j} \rho_o} g \\ & * \sin \theta_i \quad (3.15) \end{aligned}$$

Όταν η εγκάρσια ταχύτητα $v_{i,j}$ είναι θετική χρησιμοποιείται ο όρος με τον αστερίσκο, αλλιώς αντικαθίσταται από τον όρο:

$$\frac{v_{i,j}}{dr} (u_{i,j+1} - u_{i,j})$$

Εξίσωση Κίνησης κατά r:

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i,j})^2}{ds} (\theta_{i+1} - \theta_i) &= \frac{\Delta\rho_{i,j}}{\rho_o} g * \cos\theta_i \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{ds}{(u_{i,j})^2} \frac{\Delta\rho_{i,j}}{\rho_o} g * \cos\theta_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

Εξίσωση Διατήρησης Δείκτη:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j}}{ds} (\Delta\rho_{i+1,j} - \Delta\rho_{i,j}) + \frac{v_{i,j}}{dr} (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1}) \\ &= \frac{1}{r_j * dr} \left\{ \left[\frac{(r_{j+1} + r_j) (v_{i,j} + v_{c_{i,j+1}}) (\Delta\rho_{i,j+1} - \Delta\rho_{i,j})}{4 dr} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{(r_j + r_{j-1}) (v_{c_{i,j}} + v_{c_{i,j-1}}) (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1})}{4 dr} \right] \right\} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \frac{u_{i,j}}{ds} (\Delta\rho_{i+1,j} - \Delta\rho_{i,j}) \\ &= -\frac{v_{i,j}}{dr} (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1}) \\ &\quad + \frac{(r_{j+1} + r_j) (v_{c_{i,j}} + v_{c_{i,j+1}}) (\Delta\rho_{i,j+1} - \Delta\rho_{i,j})}{4 * r_j * dr^2} \\ &\quad - \frac{(r_j + r_{j-1}) (v_{c_{i,j}} + v_{c_{i,j-1}}) (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1})}{4 * r_j * dr^2} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \Delta\rho_{i+1,j} = \\ &= \Delta\rho_{i,j} - \frac{v_{i,j} * ds}{u_{i,j} * dr} (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1}) + ds \frac{(r_{j+1} + r_j) (v_{c_{i,j}} + v_{c_{i,j+1}}) (\Delta\rho_{i,j+1} - \Delta\rho_{i,j})}{4 * r_j * u_{i,j} * dr^2} \\ &\quad - ds \frac{(r_j + r_{j-1}) (v_{c_{i,j}} + v_{c_{i,j-1}}) (\Delta\rho_{i,j} - \Delta\rho_{i,j-1})}{4 * r_j * u_{i,j} * dr^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η χρήση των σειρών Taylor δίνει μια εκτίμηση του σφάλματος που προκύπτει από την αριθμητική μέθοδο. Για το ρητό σχήμα εμπρόσθιων διαφορών, δίνεται στη συνέχεια ένα παράδειγμα για την προσέγγιση του όρου $(\partial u / \partial s)_{i,j}$.

Το ανάπτυγμα Taylor για $u(s + \Delta s, r)$ δίνει:

$$u(s + \Delta s, r) = u(s, r) + \Delta s \frac{\partial u}{\partial s}(s, r) + \frac{(\Delta s)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, r) + \frac{(\Delta s)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3}(s, r) + O[(\Delta s)^4]$$

Κάνοντας πράξεις:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, r) + \frac{u(s + \Delta s, r) - u(s, r)}{\Delta s} - \frac{(\Delta s)}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, r) + \frac{(\Delta s)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial s^3}(s, r) + O[(\Delta s)^3]$$

ή

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta s} + O[\Delta s]$$

3.5 Οριακές & Αρχικές Συνθήκες

Στις εξ. (3.14) – (3.17) τίθεται το πρόβλημα των αρχικών τιμών, στο σημείο εκροής της φλέβας στο περιβάλλον, καθώς όλες οι επόμενες τιμές εξαρτώνται από τις αρχικές. Για αυτό είναι απαραίτητο να καθοριστούν οι τιμές των μεταβλητών στην εκροή ώστε να αρχίσει η επίλυση του προβλήματος.

Οι εξ. (3.1) – (3.4) είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς s με τρεις μεταβλητές, γι' αυτό και απαιτούνται τρεις αρχικές συνθήκες. Αυτές είναι:

$$u(s_0, r) = F(r), \quad \Delta \rho(s_0, r) = G(r), \quad \theta(s_0) = \theta_0 \quad (3.18)$$

Καθώς η επίλυση προχωράει, είναι απαραίτητος ο καθορισμός των συνθηκών στα όρια της ροής. Η εξ. (3.2) είναι 2ας τάξης ως προς r και έτσι απαιτούνται δύο οριακές συνθήκες για τη διαμήκη ταχύτητα u . Ακολούθως, απαιτούνται δύο οριακές συνθήκες για την Εξ. (3.4) για τη διαφορά πυκνότητας $\Delta \rho$ και μία οριακή συνθήκη για την Εξ. (3.1) και την εγκάρσια ταχύτητα v , που καθορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r}(s, 0) = \frac{\partial \Delta \rho}{\partial r}(s, 0) = 0, \quad v(s, 0) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u(s, r) = u_a, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta \rho(s, r) = \Delta \rho_a \end{aligned} \quad (3.19)$$

Τα αρχικά προφίλ των ταχυτήτων μπορούν να προκύψουν από πειραματικά αποτελέσματα ή εμπειρικές σχέσεις. Στην παρούσα εργασία τα αρχικά προφίλ των ταχυτήτων και της διαφοράς πυκνότητας θεωρήθηκαν ομοιόμορφα. Ο υπολογιστικός κώδικας ωστόσο μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί σε οποιοδήποτε άλλο προφίλ.

Εφόσον τα αρχικά προφίλ θεωρούνται ομοιόμορφα οι συναρτήσεις $F(r)$ και $G(r)$ της εξ. (3.18) είναι ίσες με σταθερές τιμές που δίνονται κάθε φορά από το χρήστη, $F(r) = C_1$ και $G(r) = C_2$. Στην περίπτωση του ήρεμου και ομογενούς περιβάλλοντος, $u_a = 0$ και $\Delta \rho_a = 0$.

Η οριακή συνθήκη (3.19) του άξονα συμμετρίας προκύπτει από τα αναπτύγματα Taylor για την ταχύτητα και τη διαφορά πυκνότητας ως εξής:

$$u_{i+1,2} = u_{i+1,1} + \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial r}\right)_1 \Delta r + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_1 \frac{(\Delta r)^2}{2!} + O(\Delta r)^3 \quad (3.20)$$

$$u_{i+1,3} = u_{i+1,1} + \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial r}\right)_1 (2\Delta r) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_1 \frac{(\Delta r)^2}{2!} + O(\Delta r)^3 \quad (3.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της εξ. (3.20) με 4, αφαιρώντας από αυτή την εξ. (3.21) και θέτοντας $\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial r}\right)_1 = 0$, έχουμε:

$$4u_{i+1,2} - u_{i+1,3} = 3u_{i+1,1} + O(\Delta r)^3$$

ή

$$u_{i+1,1} = \frac{4u_{i+1,2} - u_{i+1,3}}{3} \quad (3.22)$$

Αντιστοίχως για το $\Delta\rho$,

$$\Delta\rho_{i+1,1} = \frac{4\Delta\rho_{i+1,2} - \Delta\rho_{i+1,3}}{3} \quad (3.23)$$

Η οριακή συνθήκη στο εξωτερικό όριο της φλέβας δίνεται από τη σχέση

$$(u_{i+1,1} - u_{i+1,j}) / (u_{i+1,1} - u_a) \leq 0,99 \quad (3.24)$$

για διευκόλυνση στον υπολογισμό, παρ' ότι έχει δοθεί στη σχέση (3.19) κριτήριο για καθορισμό του εξωτερικού ορίου στο $r \rightarrow \infty$.

3.6 Μοντέλο Τύρβης

Εξίσωση Υπολογισμού Τυρβώδους Ιξώδους:

Χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικές σχέσεις υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους.

Στην περιοχή εγκατάστασης της ροής χρησιμοποιείται το μοντέλο τύρβης του Prandtl (1952), σύμφωνα με το οποίο:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|$$

όπου $l^2 = 0,0762 * \delta$

l το μήκος ανάμειξης που καθορίζεται από τη γεωμετρία της ροής και γενικά υπολογίζεται με βάση το εγκάρσιο πλάτος της φλέβας και δ το πλάτος της φλέβας, από τον άξονα συμμετρίας μέχρι το εξωτερικό όριο.

Οπότε, τελικά το τυρβώδες ιξώδες στην αρχική περιοχή (Madni, 1975) δίδεται από τη σχέση:

$$\nu_t = (0,0762 * \delta)^2 * \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.25a)$$

Η εφαρμογή της σχέσης (3.25a) και στην περιοχή εγκατεστημένης ροής, οδηγούσε σε υπολογιστικά σφάλματα και κατά συνέπεια στον τερματισμό του αλγορίθμου μετά από μερικές δεκάδες βήματα.

Στην περιοχή εγκατεστημένης ροής της φλέβας, για κατακόρυφες φλέβες χρησιμοποιήθηκε η σχέση (3.25b) που προτάθηκε από τον Prandtl:

$$\nu_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a) \quad (3.25b)$$

Για την προσομοίωση οριζόντιων φλεβών και φλεβών που εκρέουν υπό γωνία χρησιμοποιήθηκε η σχέση (3.26c) που προτάθηκε από το Madni (1975) και αποτελεί τροποποίηση του μοντέλου του Keyrs (Bradshaw 1969):

$$v_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5} \quad (3.25c)$$

όπου, Ri ο τοπικός αριθμός Richardson της φλέβας δίνεται από τη σχέση (3.26):

$$Ri = \frac{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_o} gD}}{u} \quad (3.26)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επίδραση του αριθμού Richardson είναι αμελητέα στην αλλαγή της τύρβης στις κατακόρυφε φλέβες (Anwar, 1969) για αυτό και επιλέχθηκε αρχικά η σχέση (3.25b) για την μελέτη της κατακόρυφης φλέβας.

3.7 Παρατηρήσεις σχετικά με την Αριθμητική Επίλυση

❖ *Εμφάνιση μεγάλης εγκάρσιας ροής στο όριο της φλέβας με το περιβάλλον*

Για λόγους ταχυτήτων (u_a/u_o) που πλησιάζουν το μηδέν, για τυπικές τιμές 0.03 ~ 0.05, παρατηρήθηκε ξαφνική αύξηση της εγκάρσιας ταχύτητας στο εξωτερικό όριο της φλέβας που φτάνει γρήγορα εκτός ελέγχου. Αρχικά θεωρήθηκε ότι, για να ξεπεραστεί η αστάθεια, ήταν αρκετή η κατάλληλη τροποποίηση του διαμήκους βήματος Δs ή η επιλογή διαφορετικού μοντέλου τύρβης. Παρ' όλα αυτά, το πρόβλημα παρέμενε μέχρι να παρατηρηθεί ότι το τυρβώδες ιξώδες ήταν μικρό συγκριτικά με το γινόμενο της εγκάρσιας ταχύτητας v και του εγκάρσιου βήματος Δr . Για την αντιμετώπιση του προβλήματος και την περαιτέρω εξέλιξη της αριθμητικής διαδικασίας, χρησιμοποιήθηκε μια μετατροπή στον υπολογισμό του ιξώδους, που προτάθηκε από τους Patankar και Spalding (1970).

Η ποιοτική περιγραφή του φαινομένου που αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο δίνεται τώρα με μαθηματικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (v_{i,j} + v_{i,j+1}) &= \frac{1}{2} \left[(v_{i,j} + v_{i,j+1}) + |v_{i,j}\Delta r| + \left| (v_{i,j} + v_{i,j+1}) - |v_{i,j}\Delta r| \right| \right] \\ (v_{i,j} + v_{i,j-1}) &= \frac{1}{2} \left[(v_{i,j} + v_{i,j-1}) + |v_{i,j}\Delta r| + \left| (v_{i,j} + v_{i,j-1}) - |v_{i,j}\Delta r| \right| \right] \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Από τις εξ. (3.8.1) προκύπτει:

- Εάν $(v_{i,j} + v_{i,j+1}) > |v_{i,j}\Delta r|$, τότε

$$(v_{i,j} + v_{i,j+1}) = \frac{1}{2} \left[(v_{i,j} + v_{i,j+1}) + |v_{i,j}\Delta r| + \left| (v_{i,j} + v_{i,j+1}) - |v_{i,j}\Delta r| \right| \right]$$

- Εάν $(v_{i,j} + v_{i,j+1}) < |v_{i,j}\Delta r|$, τότε

$$\begin{aligned} (v_{i,j} + v_{i,j+1}) &= \frac{1}{2} \left[(v_{i,j} + v_{i,j+1}) + |v_{i,j}\Delta r| + |v_{i,j}\Delta r| - (v_{i,j} + v_{i,j+1}) \right] \\ &= |v_{i,j}\Delta r| \end{aligned}$$

❖ *Καθορισμός του διαμήκους βήματος Δs*

Εκτός από την τροποποίηση των εξισώσεων RANS λόγω της μεγάλης εγκάρσιας ροής, είναι απαραίτητος ο καθορισμός περιορισμών στην επιλογή του βήματος, κυρίως για την περιοχή εγκατάστασης της ροής. Αρχικά, επιχειρήθηκε αριθμητική επίλυση για διάφορες τιμές βήματος της τάξης των μερικών εκατοστών ή χιλιοστών. Παρατηρήθηκε ότι δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο επιλογής η μικρή τιμή του βήματος, διότι δεν έδινε ευσταθείς λύσεις. Συγκεκριμένα, η αριθμητική επίλυση αστοχούσε μετά από μερικές εκατοντάδες βήματα. Η μέθοδος των Patankar και Spalding (1970) επιτρέπει ένα βήμα της τάξης του 2% του πλάτους ανάμειξης. Οι περιορισμοί ευστάθειας για τη ρητή μέθοδο είναι πιο αυστηροί, ειδικά για λόγους ταχυτήτων κοντά στο 0, $R \rightarrow 0$. Με μια πιο προσεκτική εξέταση της ανάλυσης ευστάθειας Von Neumann, προέκυψε (Madni, 1975):

$$\Delta S \leq \min_{j=2,nj} \left[\frac{u_{i,j} \Delta r}{\left| v_{i,j} + \frac{(v_{i,j-1} - v_{i,j+1})}{2\Delta r} \right|} \right]$$

Κριτήριο Ευστάθειας:

$$\Delta S \leq \min_{j=2,nj} \left[\frac{u_{i,j} \Delta r}{\left| v_{i,j} + \frac{FUNC}{2\Delta r} \right|} \right]$$

όπου,

$$FUNC = \max [(v_{i,j-1} - v_{i,j+1}), (v_{c,i,j-1} - v_{c,i,j+1})]$$

Εξαιρετικά σημαντική, όπως αποδείχτηκε, ήταν και η επιλογή του αρχικού διαμήκους βήματος ΔS . Αύξηση ή μείωση του βήματος της τάξης του 10^{-3} οδηγούσε σε εξαιρετικά μεγάλες αστάθειες και τερματισμό του αλγορίθμου. Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήθηκε αρχικό βήμα $\Delta S_0 = 0.002\text{m}$ για όλες τις περιπτώσεις φλεβών.

❖ *Ταχύτητα περιβάλλοντος*

Ταχύτητα περιβάλλοντος της τάξης του 5% της ταχύτητας της φλέβας παρατηρήθηκε ότι, όχι μόνο επιταχύνει την υπολογιστική διαδικασία αλλά είναι απαραίτητη για την προώθηση της λύσης. Συγκεκριμένα, στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε ταχύτητα περιβάλλοντος, στην κατακόρυφη φλέβα $u_a=0.06\text{m/sec}$, στην οριζόντια φλέβα $u_a=0.12\text{m/sec}$ και στη φλέβα υπό γωνία 45° $u_a=0.13\text{m/sec}$.

❖ *Καθορισμός κόμβων υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους*

Το τυρβώδες ιξώδες υπολογίζεται για 2 επιπλέον κόμβους πέρα από το προφίλ της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ της φλέβας με τον αποδέκτη. Έτσι, μειώνονται οι τιμές που υπολογίζονται για τη συνάρτηση FUNC, με αποτέλεσμα μεγαλύτερη οικονομία υπολογιστικού χρόνου.

3.8 Υπολογιστική Διαδικασία

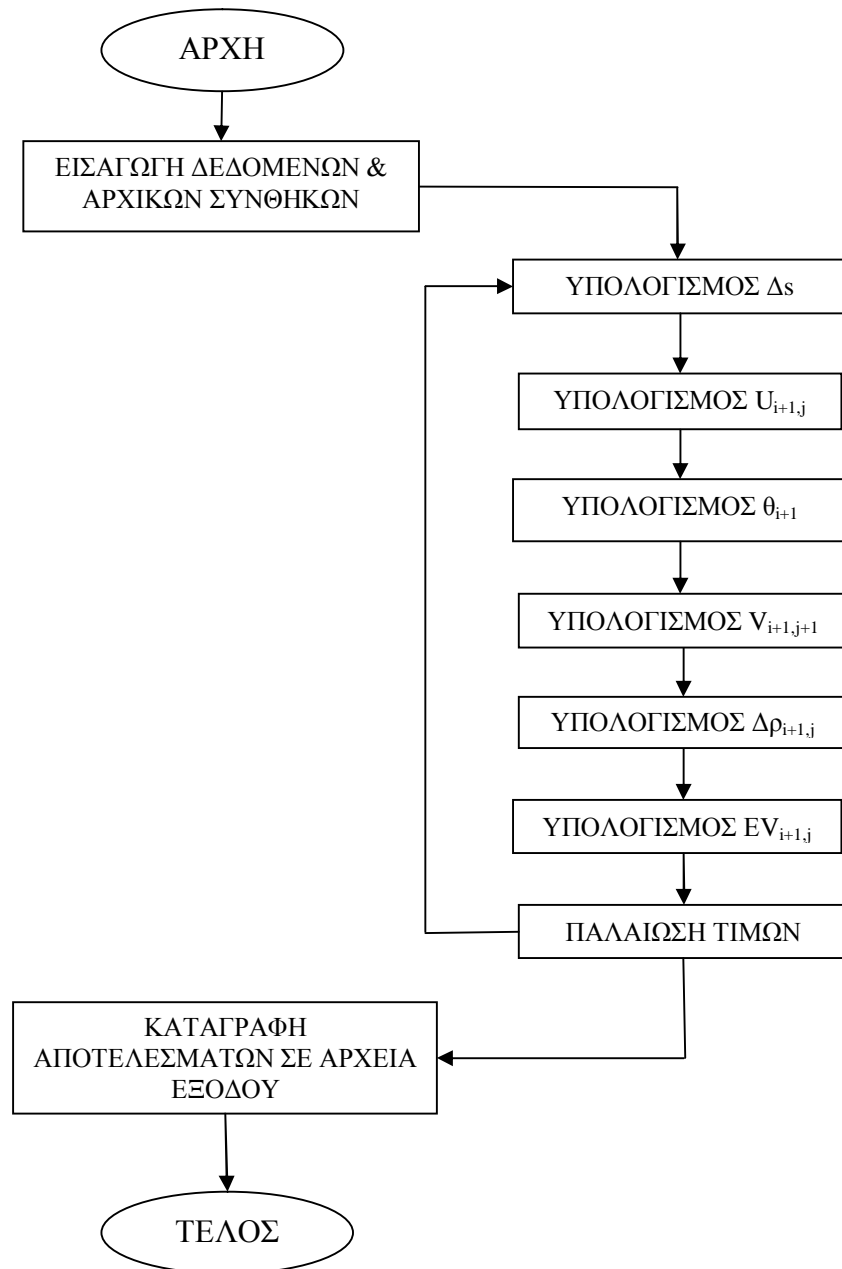
Η λογική διαδικασία επίλυσης του προγράμματος δίνεται στη συνέχεια και στο Σχήμα 3.3. Ακολουθήθηκαν τα παρακάτω βήματα:

- ❖ Ορισμός μεταβλητών
- ❖ Καθορισμός σταθερού βήματος dr κατά την εγκάρσια διεύθυνση της φλέβας (διεύθυνση r) και μεταβαλλόμενου βήματος ds κατά τη διαμήκη διεύθυνση της φλέβας (διεύθυνση s).
- ❖ Καθορισμός συστήματος συντεταγμένων (s, r) της φλέβας.
- ❖ Καθορισμός αρχικών τιμών εντός και εκτός ορίων φλέβας.
- ❖ Καθορισμός οριακών συνθηκών
- ❖ Υπολογισμός των χαρακτηριστικών μεγεθών της φλέβας κατά την εγκάρσια διεύθυνση, σε κάθε κόμβο j , για τον ίδιο κόμβο $i+1$ κατά τη διαμήκη διεύθυνση.
 - Υπολογισμός της ταχύτητας $U_{i+1,j}$ από την εξίσωση κίνησης κατά s .
 - Υπολογισμός της γωνίας θ_{i+1} που σχηματίζει η φλέβα με την οριζόντια διεύθυνση, από την εξίσωση κίνησης κατά r .
 - Υπολογισμός της ταχύτητας $V_{i+1,j+1}$, από την εξίσωση συνέχειας.
 - Υπολογισμός της πυκνομετρικής διαφοράς $DR_{i+1,j}$, από την εξίσωση διατήρησης δείκτη.
 - Υπολογισμός του συνολικού ιξώδους $N_{i+1,j}$.
- ❖ Παλαίωση τιμών και επανάληψη της διαδικασίας. Οι υπολογιζόμενες τιμές σε κάθε κόμβο $i+1$ προκύπτουν από τις υπολογισμένες τιμές στον προηγούμενο κόμβο i . Επομένως, για την προώθηση της λύσης, ο κόμβος $i+1$ θεωρείται κόμβος i στην επόμενη επανάληψη.

Η εξ. (3.15) λύνεται για $U_{i+1,j}$ όταν είναι γνωστά τα U στους κόμβους i και $i-1$ για όλα τα j , ξεκινώντας από το σημείο που βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας και προχωρώντας προς το εξωτερικό όριο της φλέβας, χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες του άξονα συμμετρίας, εξ. (3.22), και του εξωτερικού ορίου, εξ. (3.24). Με καθορισμένο το $U_{i+1,j}$ υπολογίζεται το $V_{i+1,j}$ από την εξ. (3.14), με τις ίδιες οριακές συνθήκες για τον άξονα συμμετρίας και το εξωτερικό όριο. Ακολούθως, υπολογίζονται η γωνία θ_{i+1} λύνοντας την εξ. (3.16) και η διαφορά πυκνοτήτων $\Delta\rho_{i+1,j}$ από την εξ. (3.17). Τέλος, υπολογίζονται τα ιξώδη $N_{i+1,j}$ και $N_{C_{i+1,j}}$ από τις εξ. (3.25).

Γίνεται στη συνέχεια παλαίωση των υπολογιζόμενων τιμών ώστε να χρησιμοποιηθούν στο επόμενο υπολογιστικό βήμα. Όλες οι υπολογιζόμενες τιμές στον κόμβο $i+1$ θεωρούνται ως τιμές του κόμβου i και η επίλυση προχωράει μέχρι να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός σε όλους τους καθορισμένους κόμβους.

Με βάση την αριθμητική ανάλυση που έγινε στις προηγούμενες ενότητες καταστρώθηκε ένα πρόγραμμα υπολογισμού των χαρακτηριστικών μεγεθών της ροής σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran PowerStation 4.0. Ο κώδικας παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α της εργασίας.



Σχήμα 3.3. Διάγραμμα ροής της γενικής αριθμητικής μεθόδου.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Με βάση τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο καταστρώθηκε κώδικας σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran Power Station 4.0 με τον οποίο έγιναν οι υπολογισμοί που ακολουθούν.

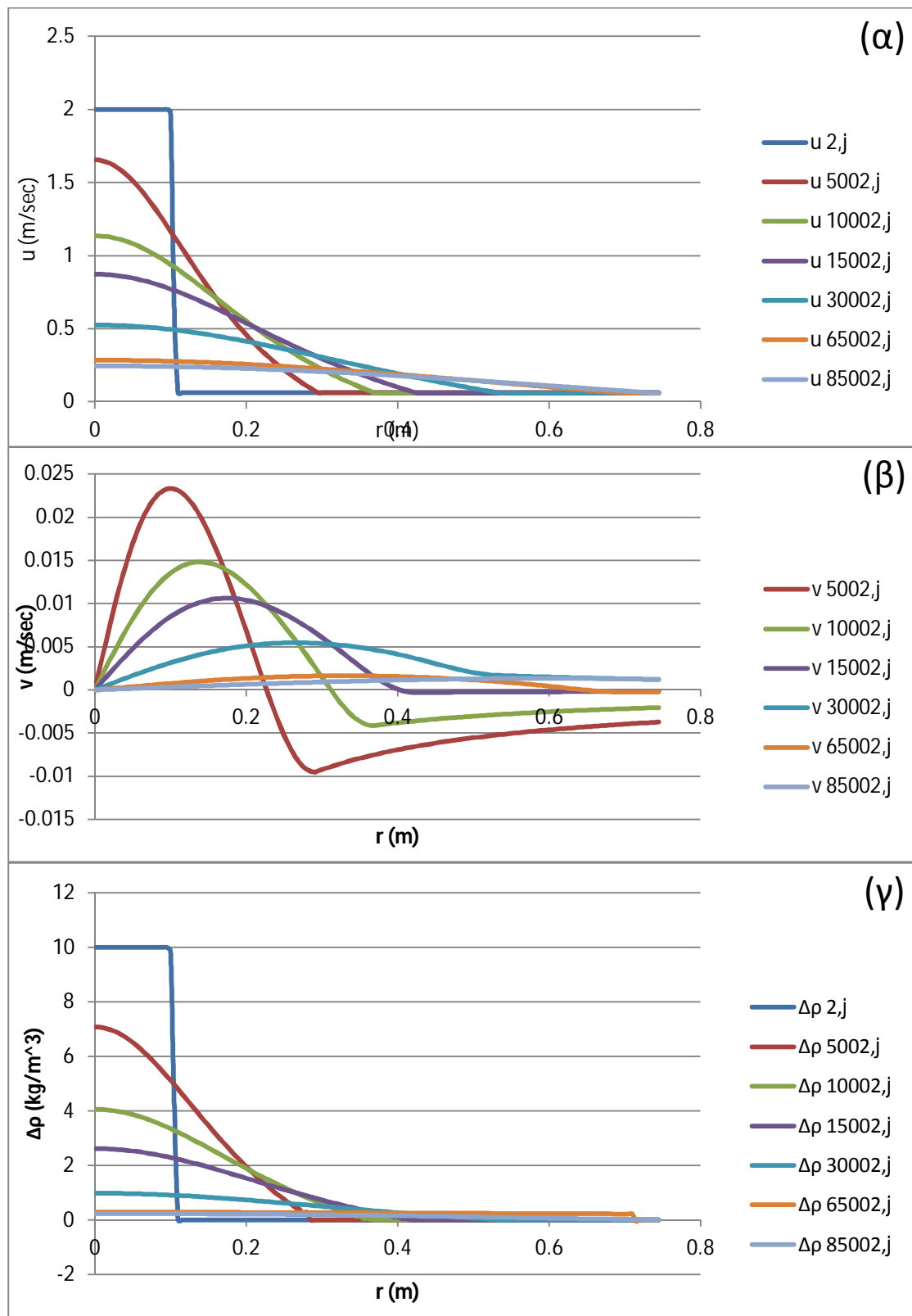
4.1 Κατακόρυφη φλέβα

Μελετήσαμε τέσσερις τυρβώδεις φλέβες με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μία απλή φλέβα και τρεις ανωστικές φλέβες. Στον Πίνακα 4.1 που ακολουθεί δίνονται οι αρχικές συνθήκες των αριθμητικών πειραμάτων όπου, D η διάμετρος του στομίου εκροής, u_o η αρχική ταχύτητα εκροής της φλέβας, $\Delta\rho_o$ η αρχική πυκνομετρική διαφορά μεταξύ φλέβας και περιβάλλοντος εκροής, u_a η ταχύτητα του περιβάλλοντος, θ_o η αρχική γωνία εκροής της φλέβας, Q_o η αρχική παροχή, M_o η αρχική ορμή, B_o η αρχική άνωση, l_q και l_m χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους που δίνονται από τις εξισώσεις $l_q = Q_o/\sqrt{M_o}$ και $l_m = M_o^{3/4}/B_o^{1/2}$, Ri_o ο αρχικός αριθμός Richardson και Fr_o ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude.

D	u_o	$\Delta\rho_o$	u_a	θ_o	Q_o	M_o	B_o	l_q	l_m	Ri_o	Fr_o
(m)	(m/s)	(kg/m ³)	(m/s)		(m ³ /s)	(m ⁴ /s ²)	(m ⁴ /s ³)	(m)	(m)		
0.2	2	0.1	0.06	90°	0.063	0.126	0.00006	0.177	26.883	0.0066	142.78
0.2	2	5	0.06	90°	0.063	0.126	0.00308	0.177	3.802	0.0466	20.19
0.2	2	10	0.06	90°	0.063	0.126	0.00616	0.177	2.688	0.0659	14.28
0.2	2	15	0.06	90°	0.063	0.126	0.00925	0.177	2.195	0.0807	11.66

Πίνακας 4.1. Αρχικά δεδομένα για τους υπολογισμούς κατακόρυφων φλεβών.

Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζονται ενδεικτικά τα εγκάρσια προφίλ (α) της διαμήκους ταχύτητας u , (β) της εγκάρσιας ταχύτητας v και (γ) της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της κατακόρυφης φλέβας. Επειδή οι φλέβες θεωρούνται αξονοσυμμετρικές, ο αλγόριθμος υπολογίζει σε κάθε περίπτωση το μισό εγκάρσιο προφίλ, από τον διαμήκη άξονα έως το εξωτερικό όριο της φλέβας, για κάθε ποσότητα. Τα εγκάρσια προφίλ της διαμήκους ταχύτητας u και της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ ομοιάζουν με γκαουσιανή κατανομή. Τα πλάτη των εγκάρσιων προφίλ των δύο αυτών ποσοτήτων δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Τα διαγράμματα της εγκάρσιας ταχύτητας v ομοιάζουν ποιοτικά με τα διαγράμματα που παρουσιάζονται από τον Ying (2000) και από τους Agrawal & Prasad (2003) για ολοκληρωματικό μοντέλο. Τα σχήματα με όλα τα προφίλ των χαρακτηριστικών ποσοτήτων για κάθε φλέβα που μελετήθηκε, δίνονται στο Παράρτημα Β της εργασίας.

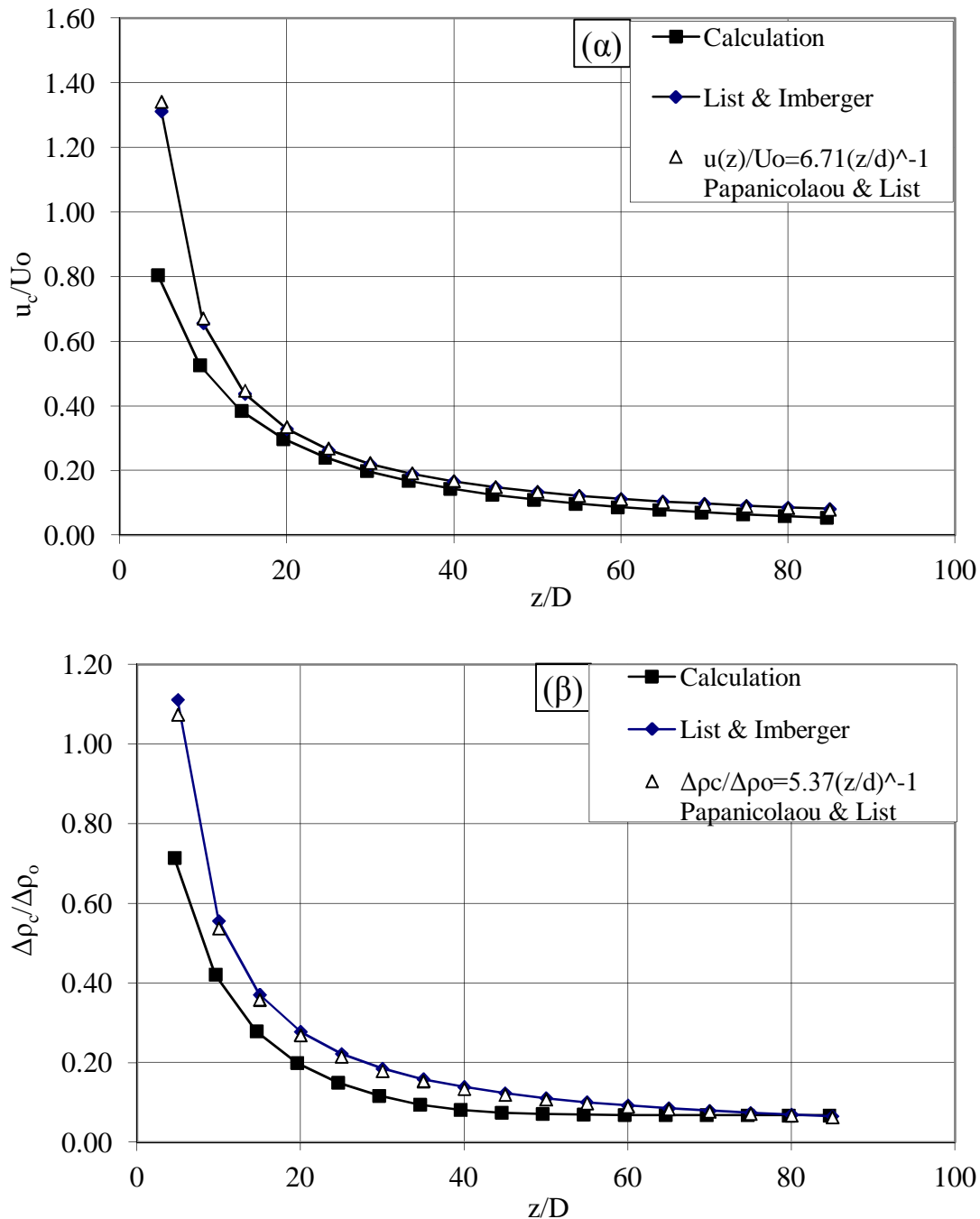


Σχήμα 4.1. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχυτήτων u , (β) ταχυτήτων v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας.

Ο υπολογιστικός κώδικας εφαρμόστηκε στα δεδομένα του πίνακα 4.1. Στη συνέχεια συγκρίνονται τα αποτελέσματα του κώδικα για τη διαμήκη ταχύτητα u και την πυκνομετρική διαφορά $\Delta\rho$ με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973) και με τα πειραματικά δεδομένα των Papanicolaou & List (1988).

Στα Σχήματα 4.2 (α) και (β) γίνεται σύγκριση της αδιάστατης ταχύτητας και της αδιάστατης πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973) και τα αποτελέσματα των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988) για ανωστική φλέβα, που ομοιάζει με απλή φλέβα ($Fr_o=142.78$). Παρατηρείται ότι για την απλή φλέβα οι κατανομές των ταχυτήτων συμφωνούν ικανοποιητικά.

Από την κατανομή των αδιάστατων πυκνομετρικών διαφορών φαίνεται ότι στα μικρότερα z/D υπολογίζονται από τον αλγόριθμο μικρότερες πυκνομετρικές διαφορές αρχικά κατά 50% σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Υπάρχει όμως συμφωνία καθώς αυξάνεται η αδιάστατη απόσταση από την πηγή.

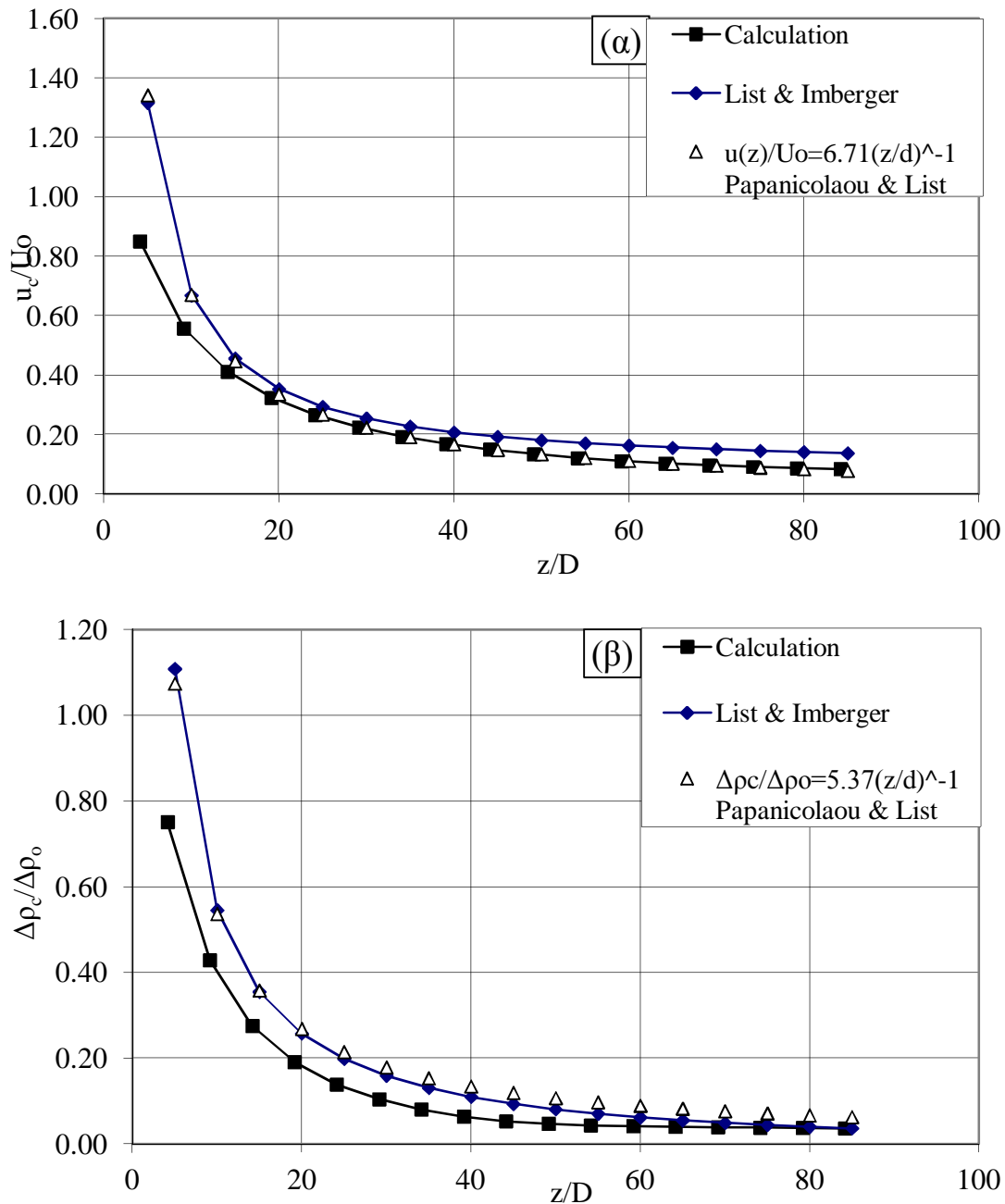


Σχήμα 4.2. (α) Αδιάστατη ταχύτητα, και (β) αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή, για $Fr_0=142.78$ και $\Delta\rho_0=0.1 \text{ kg/m}^3$.

Στα Σχήματα 4.3 (α) και (β) γίνεται σύγκριση της αδιάστατης ταχύτητας και της πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο (για $Fr_0=20.19$) με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973) και των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988) που αφορούν απλή φλέβα. Παρατηρείται ότι για την τυρβώδη ανωστική φλέβα υπάρχει καλή συμφωνία της κατανομής των υπολογισμένων ταχυτήτων με την κατανομή των μετρημένων τιμών των Papanicolaou & List (1988). Ωστόσο, οι ταχύτητες που προβλέπονται από τις σχέσεις

των List & Imberger (1973) είναι μεγαλύτερες κατά περίπου 30% σε σχέση με τις τιμές αδιάστατης ταχύτητας που προκύπτουν από το μοντέλο.

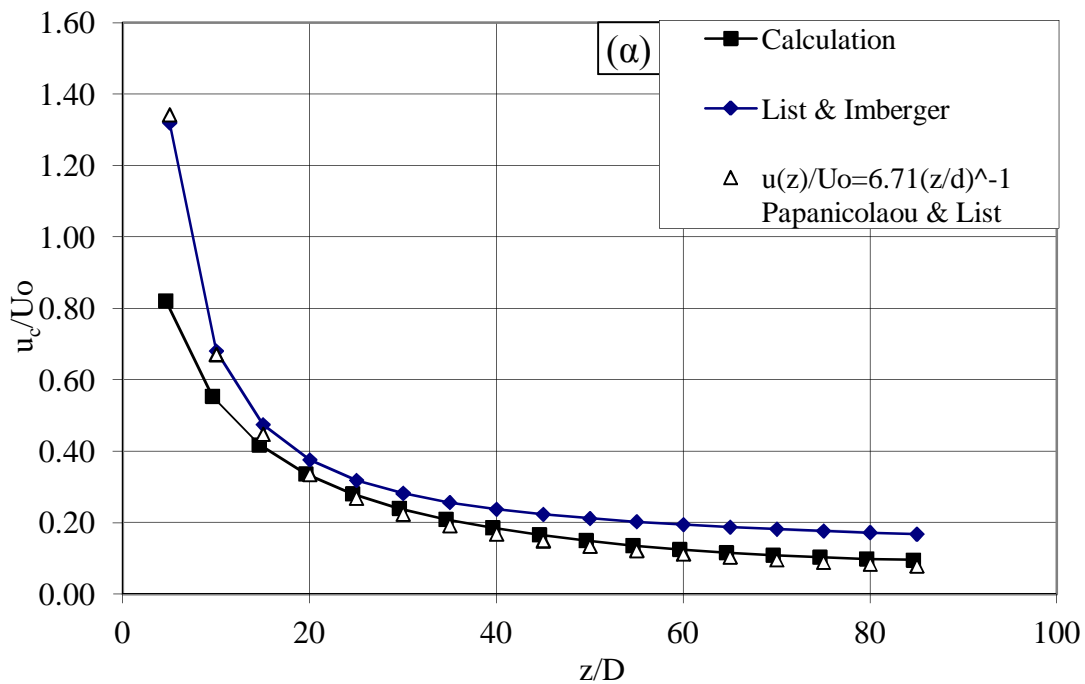
Από τις κατανομές των πυκνομετρικών διαφορών φαίνεται πως υπολογίζεται μεγαλύτερη μείωση της πυκνομετρικής διαφοράς από τον αλγόριθμο σε σχέση με τα αποτελέσματα των List & Imberger (1973) και τα δεδομένα των Papanicolaou & List (1988). Σύγκλιση των τιμών υπάρχει για αδιάστατες αποστάσεις z/D από την πηγή μεγαλύτερες του 60.

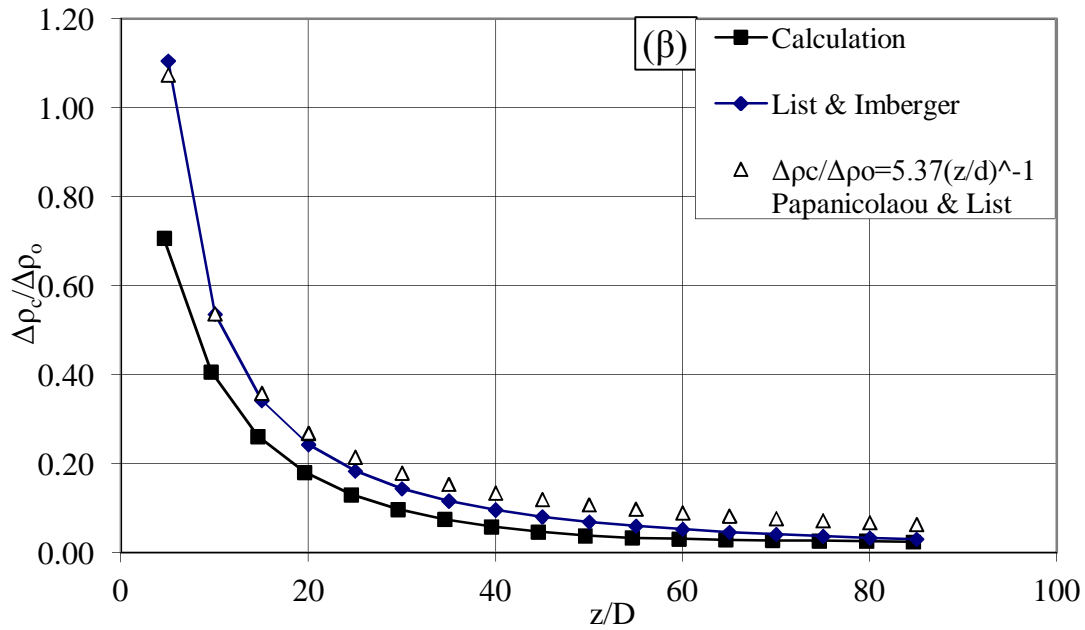


Σχήμα 4.3. (α) Αδιάστατη ταχύτητα, και (β) αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή, για $Fr_0=20.19$ και $\Delta\rho_0 =5.0 \text{ kg/m}^3$.

Στα Σχήματα 4.4 (α) και (β) γίνεται σύγκριση της αδιάστατης ταχύτητας και της πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο (για $Fr_0=14.28$) με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973) και των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988). Στην περίπτωση της τυρβώδους ανωστικής φλέβας υπάρχει καλή συμφωνία της κατανομής των υπολογισμένων ταχυτήτων με το διάγραμμα των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988), που αφορούν απλή φλέβα. Τα αποτελέσματα των List & Imberger (1973) είναι μεγαλύτερα μακριά από την πηγή ($z/D>60$), έως και 40%.

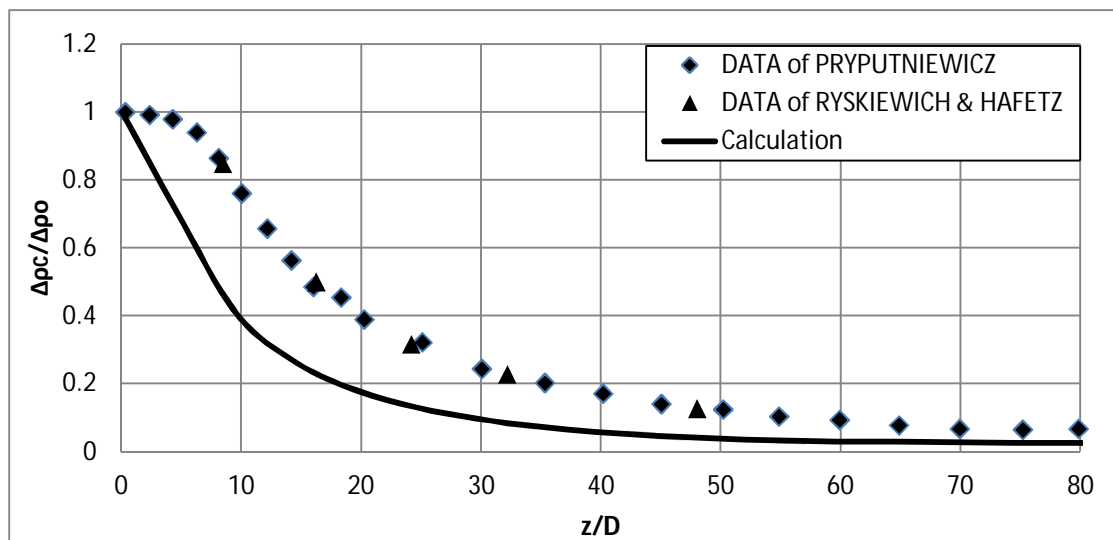
Από την κατανομή των πυκνομετρικών διαφορών φαίνεται πως αρχικά υπολογίζεται ταχύτερη μείωση, της τάξης του 50%, της πυκνομετρικής διαφοράς από τον αλγόριθμο σε σχέση με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται. Καθώς η απόσταση από την πηγή αυξάνεται όμως, τα αποτελέσματα του μοντέλου συμφωνούν με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973), ενώ οι μετρημένες τιμές των Papanicolaou & List (1988) για απλή φλέβα είναι μεγαλύτερες.





Σχήμα 4.4. (α) Αδιάστατη ταχύτητα, (β) αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά για ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή, για $Fr_o=14.28$ και $\Delta\rho_o = 10.0 \text{ kg/m}^3$.

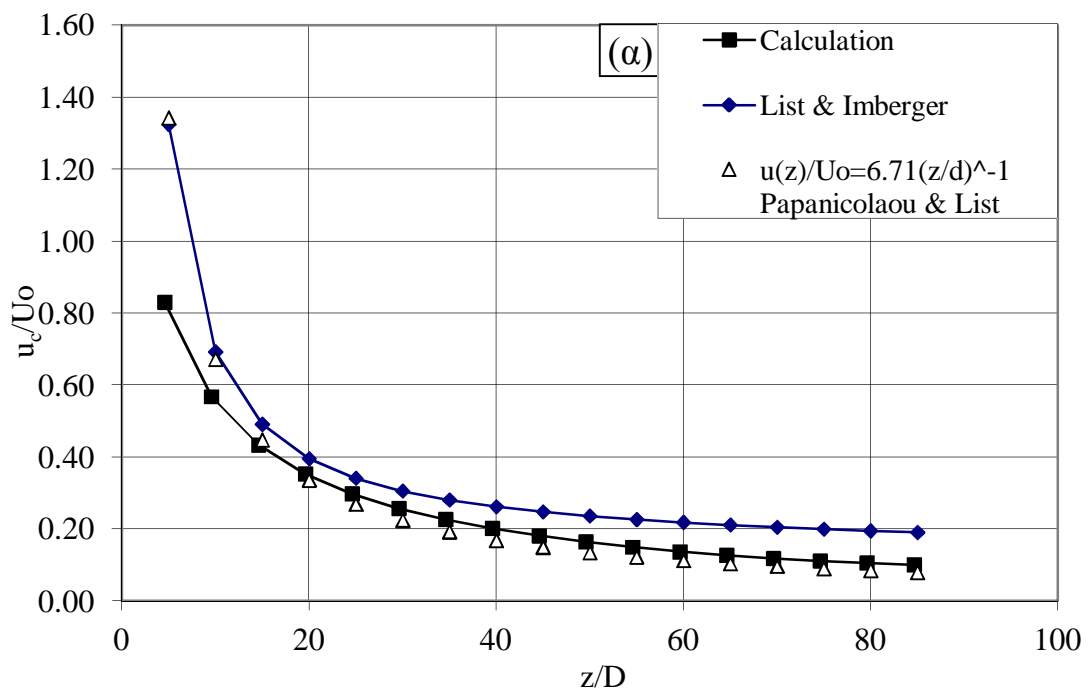
Στο Σχήμα 4.5 γίνεται σύγκριση της αδιάστατης πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο με τα πειραματικά αποτελέσματα των Pryputniewicz (1974) και Ryskiewich & Hafetz (1975) για ανωστική θερμαινόμενη φλέβα με $Fr_o=4$. Σε αυτήν την περίπτωση φαίνεται πως ο αλγόριθμος υπολογίζει διπλάσια μείωση της διαφοράς πυκνότητας σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα, αλλά για αποστάσεις z/D μεγαλύτερες από 30 τα διαγράμματα αρχίζουν να συγκλίνουν.

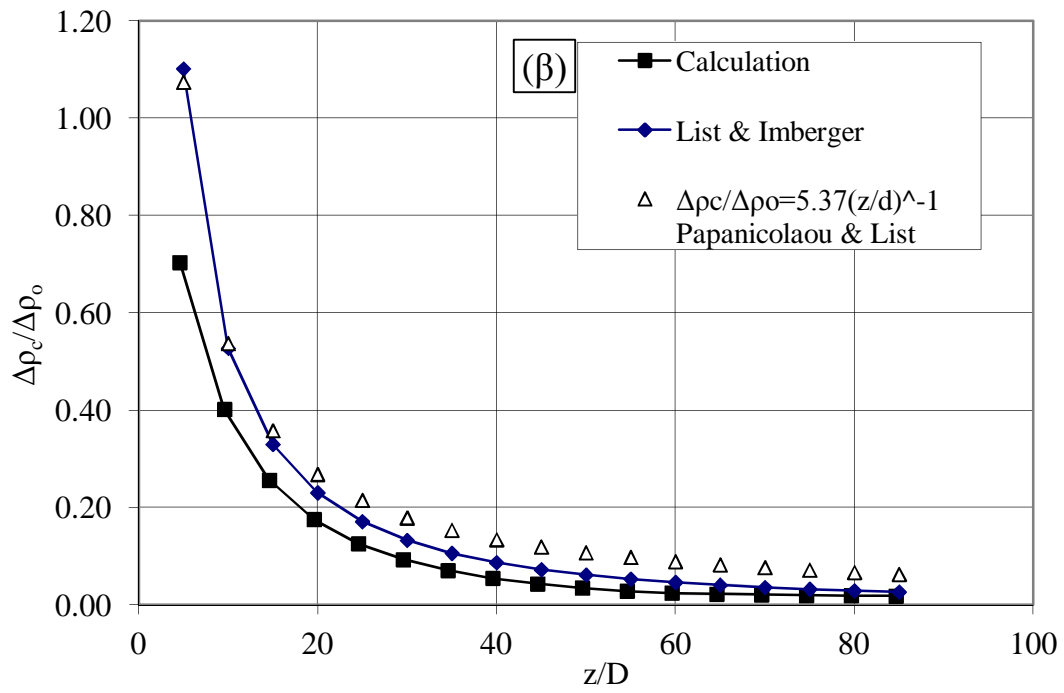


Σχήμα 4.5. Αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά για $Fr_o=14.28$ και αδιάστατη θερμική διαφορά για $Fr_o=4$, ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή.

Στα Σχήματα 4.6 (α) και (β) γίνεται σύγκριση της αδιάστατης ταχύτητας και της πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο (για $Fr_o=11.66$) με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973) και των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988) για ανωστική φλέβα που ομοιάζει με απλή φλέβα. Υπάρχει καλή συμφωνία της κατανομής των υπολογισμένων ταχυτήτων με την κατανομή των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988). Τα αποτελέσματα των List & Imberger (1973) είναι μεγαλύτερα κατά 30% στην περιοχή μέχρι $z/D=40$, ενώ η απόκλιση αυξάνεται σε περίπου 50% σε μεγαλύτερες αποστάσεις από την πηγή.

Από τις κατανομές των πυκνομετρικών διαφορών φαίνεται ότι υπάρχει καλή συμφωνία των υπολογισμών με τα αποτελέσματα της θεωρίας των List & Imberger (1973). Οι μετρημένες τιμές των Papanicolaou & List (1988) για την πυκνομετρική διαφορά είναι μεγαλύτερες σε σχέση με το μοντέλο κατά 40% σε όλο το μήκος της τροχιάς της φλέβας.





Σχήμα 4.6. (α) Αδιάστατη ταχύτητα, (β) αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή, για $Fr_0=11.66$, $\Delta\rho_0=15\text{ kg/m}^3$.

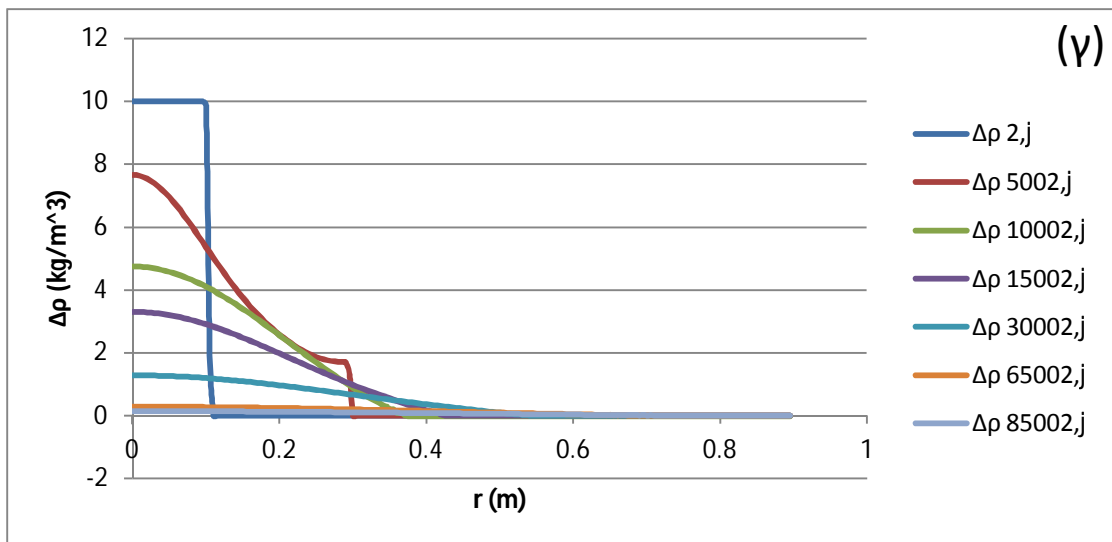
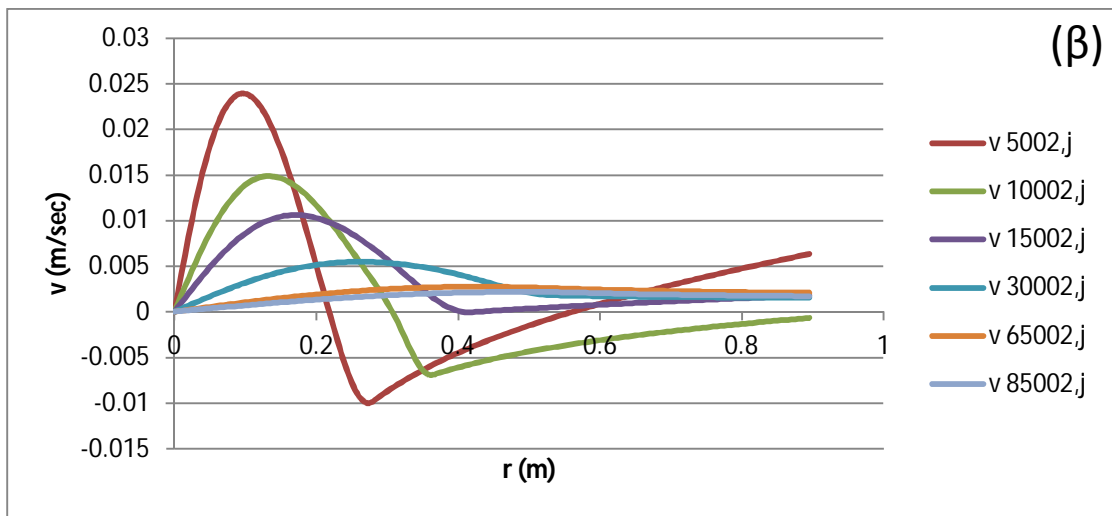
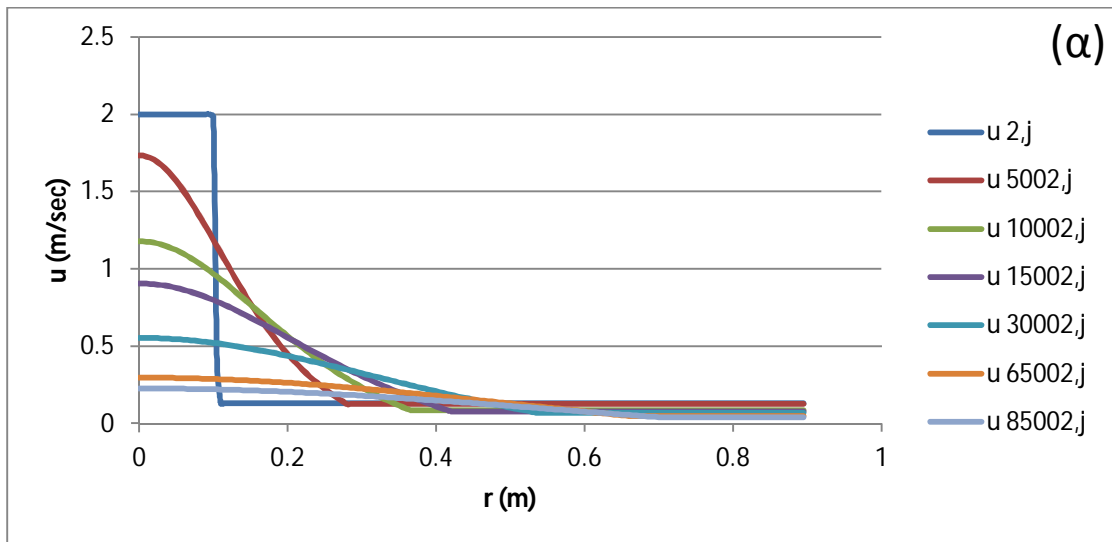
4.2 Οριζόντια Φλέβα

Μελετήσαμε τέσσερις τυρβώδεις φλέβες με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μία απλή φλέβα και τρεις περιπτώσεις ανωστικών φλεβών. Στον πίνακα 4.2 που ακολουθεί δίδονται οι αρχικές συνθήκες των πειραμάτων όπου, D η διάμετρος του στομίου εκροής, u_o η αρχική ταχύτητα εκροής της φλέβας, $\Delta\rho_o$ η αρχική πυκνομετρική διαφορά μεταξύ φλέβας και περιβάλλοντος εκροής, u_a η ταχύτητα του περιβάλλοντος, θ_o η αρχική γωνία εκροής της φλέβας, Q_o η αρχική παροχή, M_o η αρχική ορμή, B_o η αρχική άνωση, l_q και l_m χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους που δίνονται από τις εξισώσεις $l_q = Q_o/\sqrt{M_o}$ και $l_m = M_o^{3/4}/B_o^{1/2}$, Ri_o ο αρχικός αριθμός Richardson και Fr_o ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude.

D	u_o	Δρ_o	u_a	θ_o	Q_o	M_o	B_o	l_q	l_m	Ri_o	Fr_o
(m)	(m/s)	(kg/m ³)	(m/s)		(m ³ /s)	(m ⁴ /s ²)	(m ⁴ /s ³)	(m)	(m)		
0.2	2	0.1	0.12	0°	0.063	0.126	0.00006	0.177	26.883	0.0066	142.78
0.2	2	5	0.12	0°	0.063	0.126	0.00308	0.177	3.802	0.0466	20.19
0.2	2	10	0.12	0°	0.063	0.126	0.00616	0.177	2.688	0.0659	14.28
0.2	2	15	0.12	0°	0.063	0.126	0.00925	0.177	2.195	0.0807	11.66

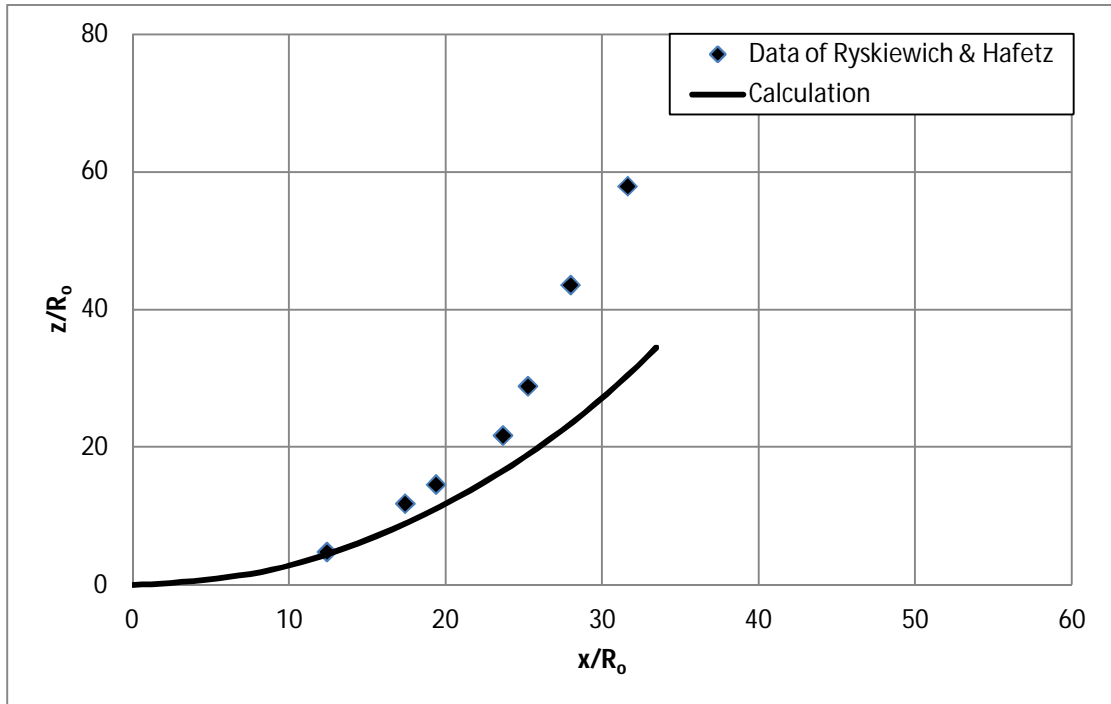
Πίνακας 4.2. Αρχικά δεδομένα για τους υπολογισμούς οριζόντιων φλεβών.

Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζονται ενδεικτικά τα εγκάρσια προφίλ (α) της διαμήκουσ ταχύτητας u , (β) της εγκάρσιας ταχύτητας v και (γ) της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της οριζόντιας φλέβας. Επειδή οι φλέβες θεωρούνται αξονοσυμμετρικές, ο αλγόριθμος υπολογίζει σε κάθε περίπτωση το μισό εγκάρσιο προφίλ, από τον διαμήκη άξονα έως το εξωτερικό όριο της φλέβας, για κάθε ποσότητα. Τα εγκάρσια προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας u και της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ ομοιάζουν με γκαουσιανή κατανομή. Τα πλάτη των εγκάρσιων προφίλ των δύο αυτών ποσοτήτων δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Τα διαγράμματα της εγκάρσιας ταχύτητας v ομοιάζουν ποιοτικά με τα διαγράμματα που παρουσιάζονται από τον Ying (2000) και από τους Agrawal & Prasad (2003) για ολοκληρωματικό μοντέλο. Τα σχήματα με όλα τα προφίλ των χαρακτηριστικών ποσοτήτων για κάθε φλέβα που μελετήθηκε, δίνονται στο Παράρτημα Β της εργασίας.



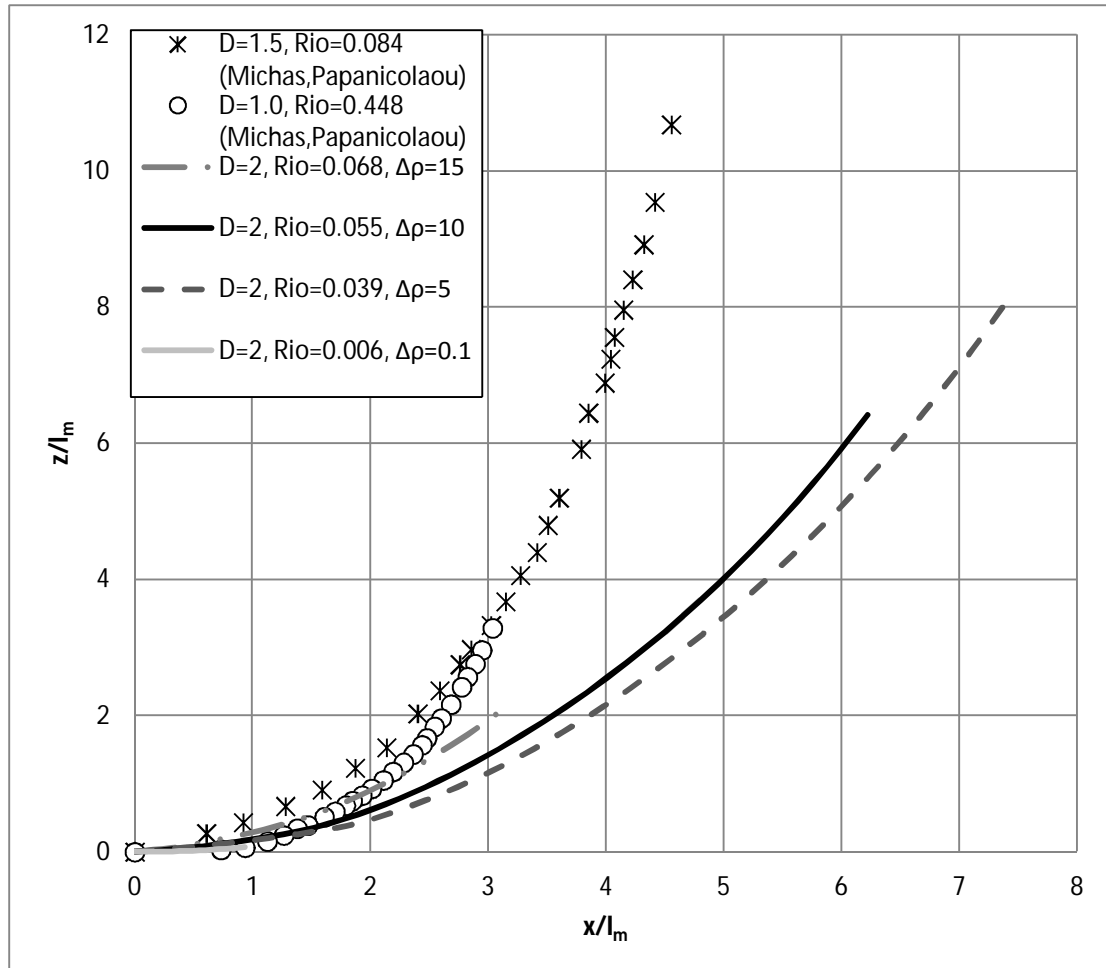
Σχήμα 4.7. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχυτήτων u , (β) ταχυτήτων v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας.

Στο Σχήμα 4.8 γίνεται σύγκριση των αδιάστατων τροχιών με πειραματικά αποτελέσματα των Ryskiewitch & Hafetz (1975). Οι συντεταγμένες x, z αδιαστατοποιήθηκαν με την ακτίνα του στομίου εκροής της φλέβας. Από τη σύγκριση φαίνεται ότι αρχικά οι τροχιές συμφωνούν ικανοποιητικά, ενώ σε μεγαλύτερες αποστάσεις (συμπεριφορά πλουμίου) υπάρχει μια συνεχώς αυξανόμενη απόκλιση στην υπολογιζόμενη τροχιά.



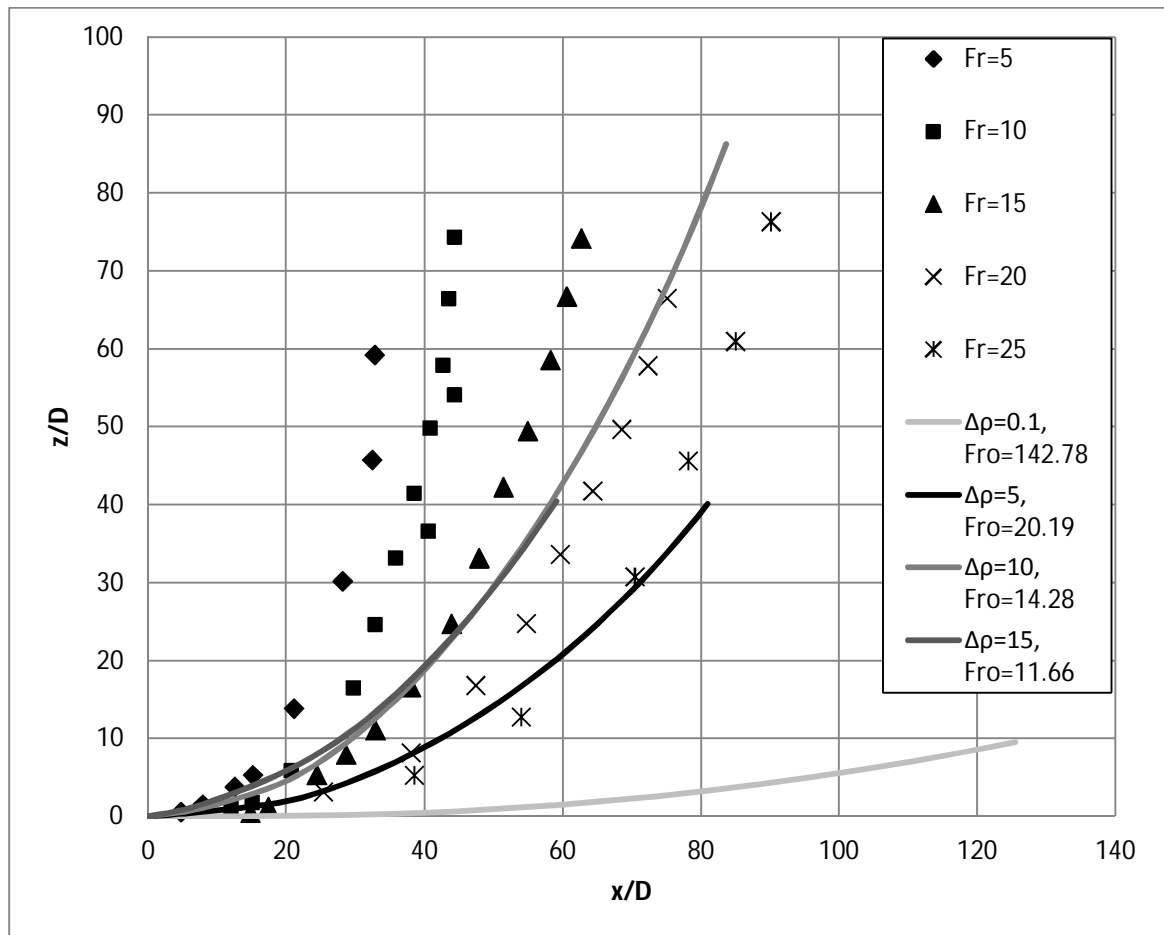
Σχήμα 4.8. Αδιάστατες τροχιές κυκλικής οριζόντιας φλέβας με πυκνομετρική διαφορά με το περιβάλλον, για $Fr_0=14.28$.

Στο Σχήμα 4.9 γίνεται σύγκριση των αδιάστατων τροχιών των τεσσάρων οριζόντιων φλεβών που υπολογίστηκαν από τον αλγόριθμο με τις τροχιές που προέκυψαν από τα πειραματικά αποτελέσματα των Michas & Papanicolaou (2008). Οι τροχιές έχουν αδιαστατοποιηθεί με την κλίμακα μήκους l_m . Αρχικά υπάρχει σύμπτωση των τροχιών, ενώ στην περιοχή για $x/l_m > 3$ όπου η φλέβα συμπεριφέρεται ως πλούμιο, οι υπολογισμένες τροχιές αποκλίνουν σημαντικά από τις πειραματικές.



Σχήμα 4.9. Αδιάστατες τροχιές αξονοσυμμετρικής οριζόντιας ανωστικής φλέβας.

Στο Σχήμα 4.10 γίνεται σύγκριση των αδιάστατων τροχιών που υπολογίστηκαν από τον αλγόριθμο με τις αδιάστατες τροχιές που προέκυψαν από τα πειράματα των Davidson (1989) και Gaskin (1995). Τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται με σημεία, ενώ τα υπολογισμένα από τον αλγόριθμο αποτελέσματα με συνεχή γραμμή. Η αδιαστατοποίηση έγινε με την αρχική διάμετρο εκροής της φλέβας. Για τις περιπτώσεις με $Fr_0=15$ και $Fr_0=20$ φαίνεται πως υπάρχει σύμπτωση των αποτελεσμάτων αρχικά, αλλά οι υπολογισμένες τροχιές αρχίζουν να διαφοροποιούνται από τις πειραματικές καθώς η απόσταση x/D αυξάνεται. Πιθανώς αυτό να οφείλεται στη συμπεριφορά της ροής ως πλουμίου.



Σχήμα 4.10. Αδιάστατες τροχιές κυκλικής οριζόντιας φλέβας με πυκνομετρική διαφορά με το περιβάλλον.

Στο Σχήμα 4.11 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του κώδικα με τις προβλέψεις ολοκληρωματικού μοντέλου (Papanicolaou et al., 2008, Παπακωνσταντής 2009). Προκειμένου να ελεγχθεί η ευαισθησία των αποτελεσμάτων του κώδικα ως προς τις θεωρούμενες σταθερές στο μοντέλο τύρβης (Εξισώσεις 3.25b και 3.25c) πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις με τα ίδια αρχικά δεδομένα ροής για τις εξής περιπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση (α): } \nu_t = 0,03 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5}$$

$$\text{Περίπτωση (β): } \nu_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5}$$

Περίπτωση (γ): $\nu_t = 0,02 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5}$

Περίπτωση (δ): $\nu_t = 0,015 * y_{1/2} * (u_c - u_a) * (1 - Ri)^{0,5}$

Περίπτωση (ε): $\nu_t = 0,035 * y_{1/2} * (u_c - u_a)$

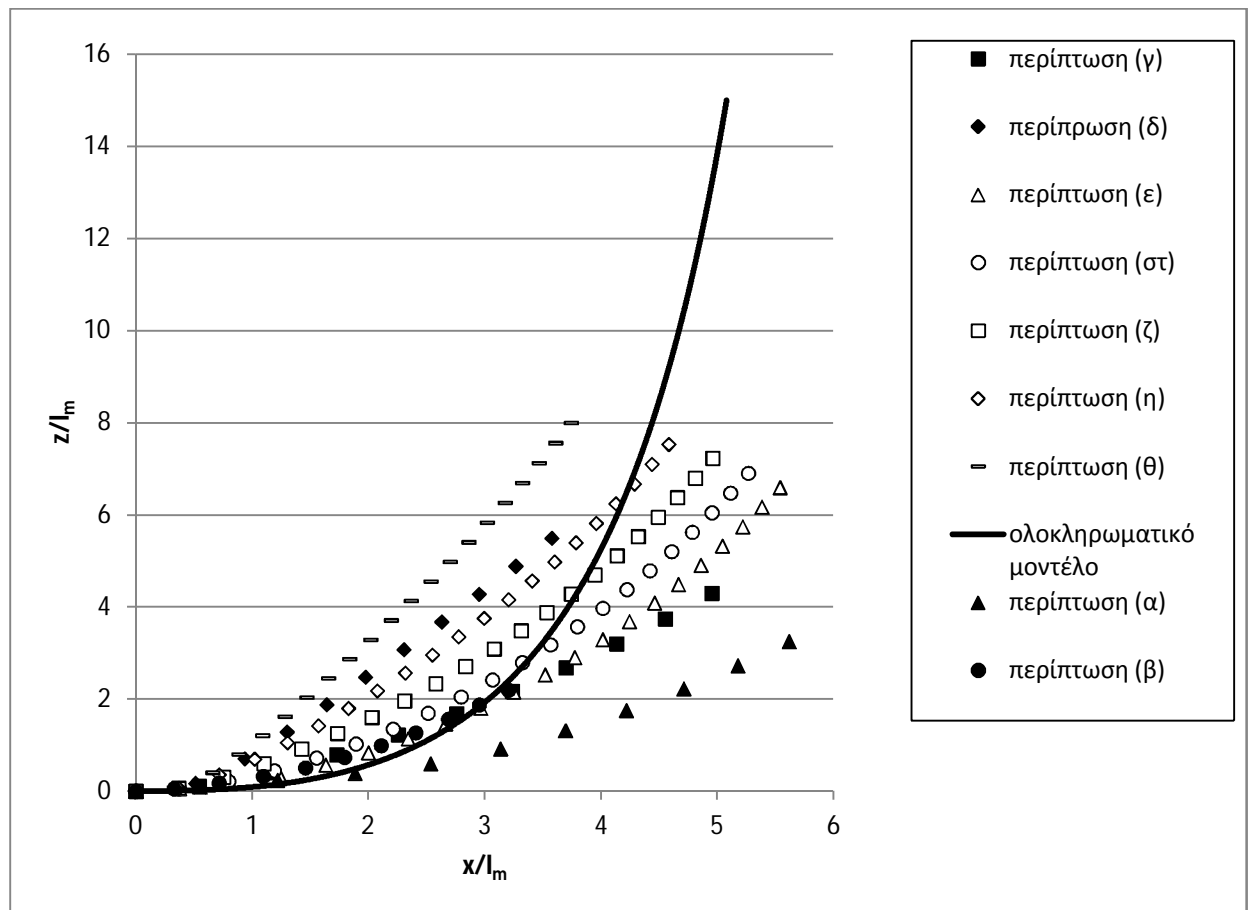
Περίπτωση (στ): $\nu_t = 0,03 * y_{1/2} * (u_c - u_a)$

Περίπτωση (ζ): $\nu_t = 0,027 * y_{1/2} * (u_c - u_a)$

Περίπτωση (η): $\nu_t = 0,0246 * y_{1/2} * (u_c - u_a)$

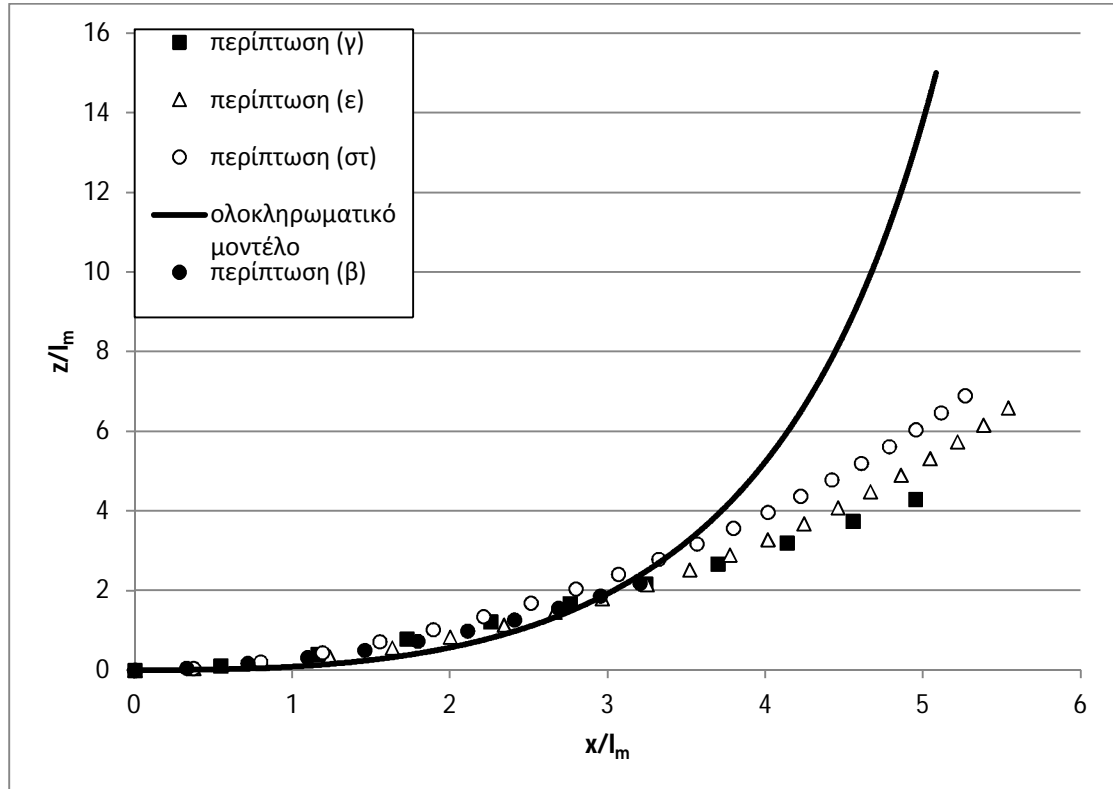
Περίπτωση (θ): $\nu_t = 0,02 * y_{1/2} * (u_c - u_a)$

Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι οι σχέσεις (3.25c) που λαμβάνουν υπόψη τον αριθμό Richardson, προσομοιώνουν ικανοποιητικά την τροχιά για τυρβώδη ανωστική φλέβα, αλλά όχι για την περιοχή όπου η φλέβα συμπεριφέρεται ως πλούμιο. Για τις σχέσεις (3.25b), όπου δε λαμβάνεται υπόψη ο αριθμός Richardson, οι τροχιές είναι σχεδόν ευθύγραμμες και απαιτείται αύξηση του συντελεστή για να πλησιάσουν στην υπολογιζόμενη τροχιά από το μονοδιάστατο μοντέλο.



Σχήμα 4.11. Σύγκριση τροχιών ανωστικής φλέβας για διαφορετικές σταθερές του μοντέλου τύρβης.

Στο Σχήμα 4.12 δίνονται οι τέσσερις περιπτώσεις του σχήματος 4.11, που συγκλίνουν περισσότερο με το μονοδιάστατο μοντέλο. Στις περιπτώσεις (β) και (γ) δε λαμβάνεται υπόψη η επίδραση του αριθμού Richardson (εξ. 3.25b), ενώ στις περιπτώσεις (ε) και (στ) λαμβάνεται υπόψη η επίδραση του αριθμού Richardson (εξ. 3.25c).



Σχήμα 4.12 Σύγκριση τροχιών ανωστικής φλέβας για διαφορετικές σταθερές του μοντέλου τύρβης.

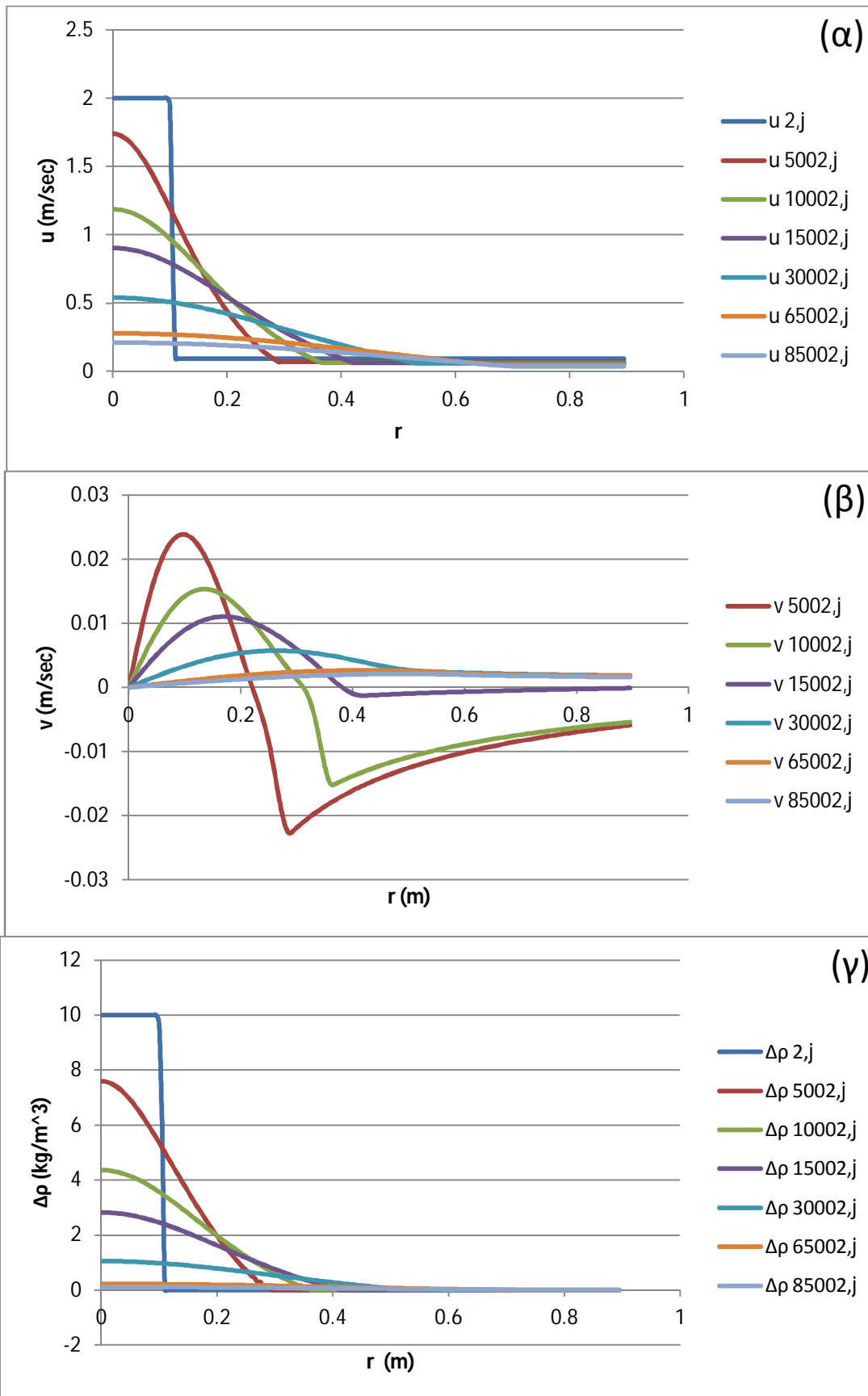
4.3 Φλέβα με Γωνία Εκροής 45°

Μελετήσαμε τέσσερις τυρβώδεις φλέβες με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μία απλή φλέβα και τρεις περιπτώσεις ανωστικών φλεβών. Στον πίνακα 4.3 που ακολουθεί δίδονται οι αρχικές συνθήκες των πειραμάτων όπου, D η διάμετρος του στομίου εκροής, u_o η αρχική ταχύτητα εκροής της φλέβας, $\Delta\rho_o$ η αρχική πυκνομετρική διαφορά μεταξύ φλέβας και περιβάλλοντος εκροής, u_a η ταχύτητα του περιβάλλοντος, θ_o η αρχική γωνία εκροής της φλέβας, Q_o η αρχική παροχή, M_o η αρχική ορμή, B_o η αρχική άνωση, l_q και l_m χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους που δίνονται από τις εξισώσεις $l_q = Q_o/\sqrt{M_o}$ και $l_m = M_o^{3/4}/B_o^{1/2}$, Ri_o ο αρχικός αριθμός Richardson και Fr_o ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude.

D	u_o	Δρ_o	u_a	θ_o	Q_o	M_o	B_o	l_q	l_m	Ri_o	Fr_o
(m)	(m/s)	(kg/m ³)	(m/s)		(m ³ /s)	(m ⁴ /s ²)	(m ⁴ /s ³)	(m)	(m)		
0.2	2	0.1	0.13	45°	0.063	0.126	0.00006	0.177	26.883	0.0066	142.78
0.2	2	5	0.13	45°	0.063	0.126	0.00308	0.177	3.802	0.0466	20.19
0.2	2	10	0.13	45°	0.063	0.126	0.00616	0.177	2.688	0.0659	14.28
0.2	2	15	0.13	45°	0.063	0.126	0.00925	0.177	2.195	0.0807	11.66

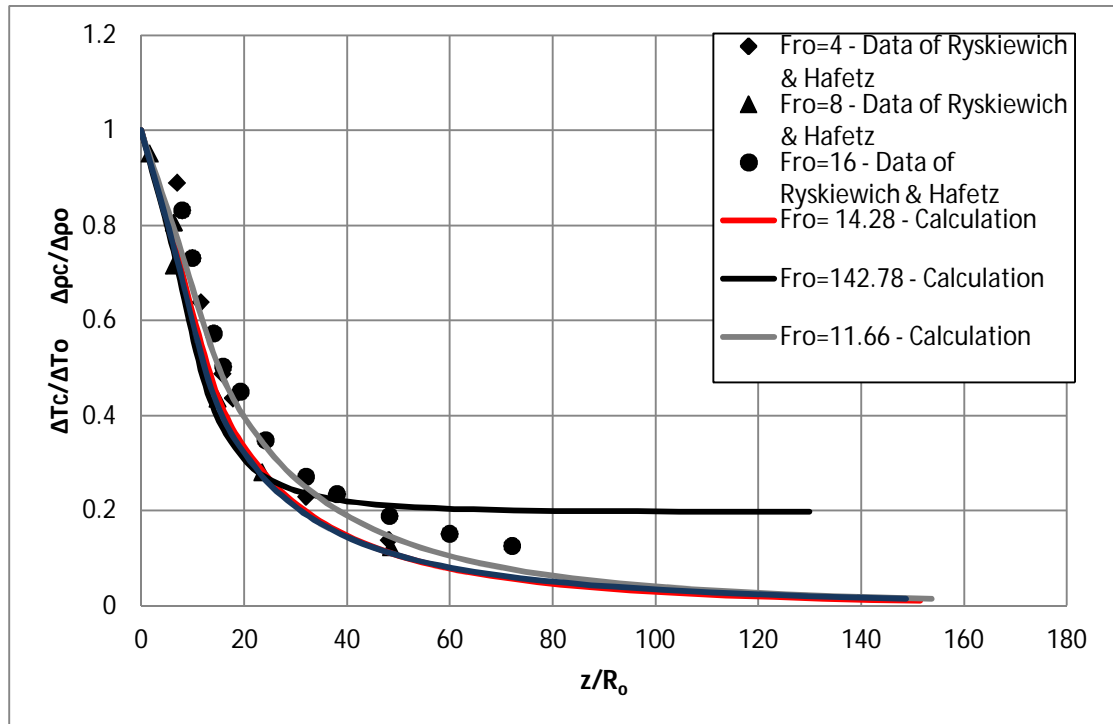
Πίνακας 4.3. Αρχικά δεδομένα για τους υπολογισμούς φλεβών υπό γωνία εκροής 45°.

Στο Σχήμα 4.13 παρουσιάζονται ενδεικτικά τα εγκάρσια προφίλ (α) της διαμήκους ταχύτητας u , (β) της εγκάρσιας ταχύτητας v και (γ) της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας υπό γωνία εκροής 45°. Επειδή οι φλέβες θεωρούνται αξονοσυμμετρικές, ο αλγόριθμος υπολογίζει σε κάθε περίπτωση το μισό εγκάρσιο προφίλ, από τον διαμήκη άξονα έως το εξωτερικό όριο της φλέβας, για κάθε ποσότητα. Τα εγκάρσια προφίλ της διαμήκους ταχύτητας u και της πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ ομοιάζουν με γκαουσιανή κατανομή. Τα πλάτη των εγκάρσιων προφίλ των δύο αυτών ποσοτήτων δεν παρουσιάζουν σημαντική διαφορά μεταξύ τους. Οι κατανομές της εγκάρσιας ταχύτητας v ομοιάζουν ποιοτικά με τα διαγράμματα που παρουσιάζονται από τον Ying (2000) και από τους Agrawal & Prasad (2003) για ολοκληρωματικό μοντέλο. Τα σχήματα με όλα τα προφίλ των χαρακτηριστικών ποσοτήτων για κάθε φλέβα που μελετήθηκε, δίνονται στο Παράρτημα Β της εργασίας.



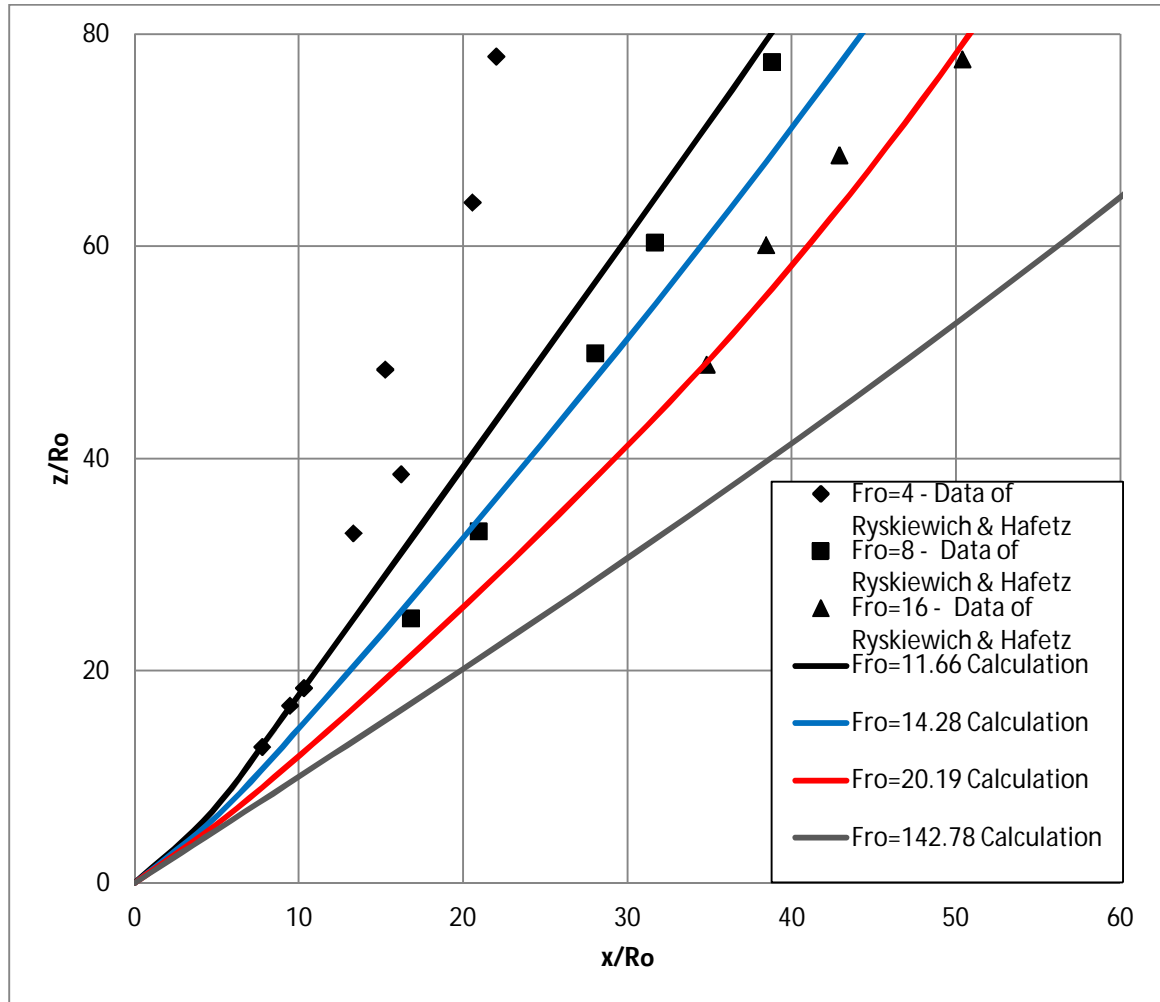
Σχήμα 4.13. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας.

Στο Σχήμα 4.14 γίνεται σύγκριση της αδιάστατης πυκνομετρικής διαφοράς που υπολογίστηκε από τον αλγόριθμο με τα πειραματικά αποτελέσματα των Pryputniewicz (1974) και Ryskiewich & Hafetz (1975) για ανωστικές θερμαινόμενες φλέβες, με $Fr_o=4$, $Fr_o=8$ και $Fr_o=16$. Τα αποτελέσματα συγκλίνουν ικανοποιητικά, εκτός από την περίπτωση της απλής φλέβας με $\Delta\rho=0.1\text{kg/m}^3$ και $Fr_o=142.78$.



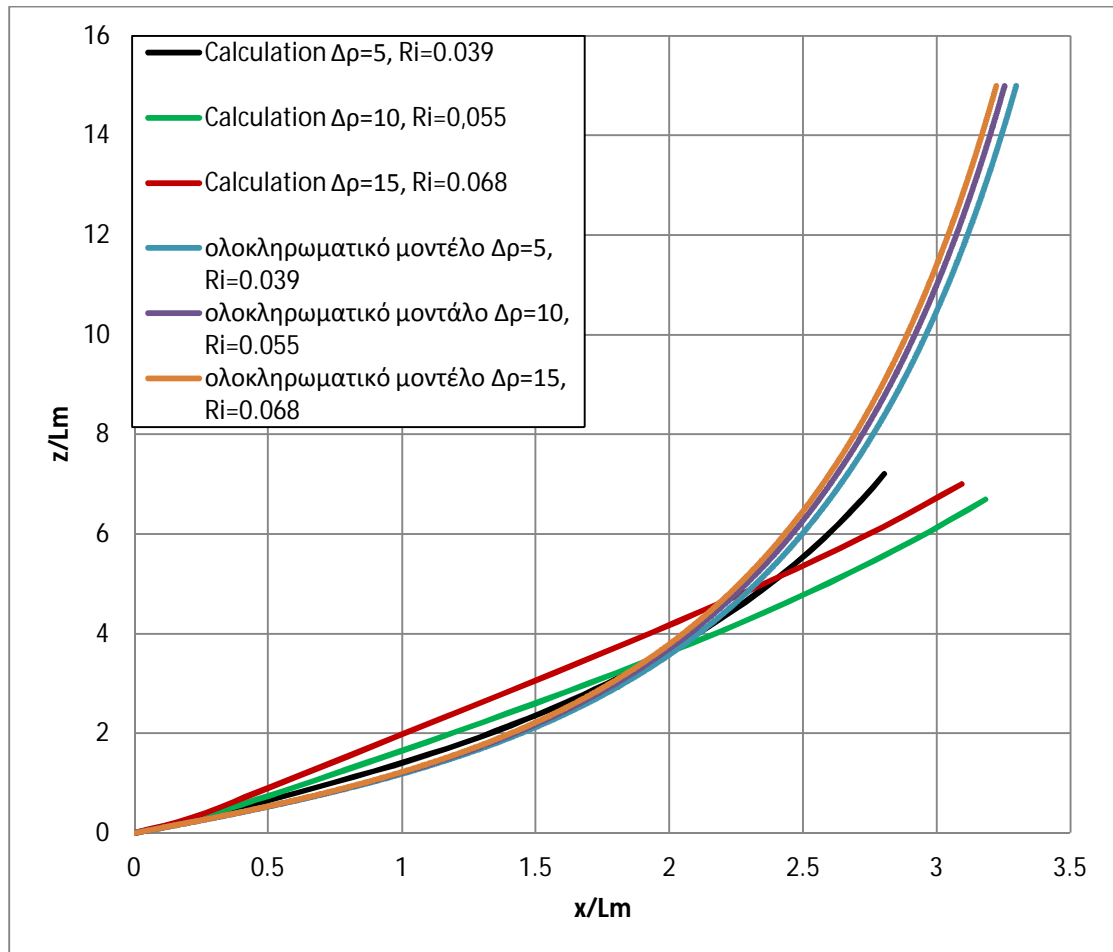
Σχήμα 4.14. Αδιάστατη πυκνομετρική διαφορά και αδιάστατη θερμοκρασιακή διαφορά ως συνάρτηση της αδιάστατης απόστασης από την πηγή, για γωνία παροχέτευσης 45° .

Στο Σχήμα 4.15 γίνεται σύγκριση των αδιάστατων τροχιών με τα πειραματικά αποτελέσματα των Ryskiewitch & Hafetz (1975) για θερμαινόμενες φλέβες υπό γωνία. Η αδιαστατοποίηση έχει γίνει με την ακτίνα του στομίου εκροής της φλέβας. Οι τροχιές που υπολογίζονται από τον αλγόριθμο συγκλίνουν ικανοποιητικά με τις πειραματικές.



Σχήμα 4.15. Αδιάστατες τροχιές κυκλικής φλέβας με πυκνομετρική διαφορά με το περιβάλλον, για γωνία παροχέτευσης 45° .

Στο Σχήμα 4.16 γίνεται σύγκριση των υπολογισμένων αποτελεσμάτων για τυρβώδη ανωστική φλέβα με πυκνομετρική διαφορά με τον αποδέκτη με τα υπολογιστικά αποτελέσματα ολοκληρωματικού μοντέλου (Παπακωνσταντής, 2009) για φλέβες υπό γωνία. Τα αποτελέσματα αδιαστατοποιούνται με την κλίμακα μήκους L_m . Αρχικά φαίνεται ότι οι τροχιές συγκλίνουν ικανοποιητικά. Ο αλγόριθμος αποκλίνει σε μεγαλύτερες αποστάσεις όπου η φλέβα αποκτά συμπεριφορά πλουμίου, για τις ανωστικές φλέβες με $Ri=0.055$ και $Ri=0.068$. Η τροχιά της ανωστικής φλέβας με $Ri=0.039$ προσομοιώνεται καλύτερα ακόμη και σε μεγαλύτερες αποστάσεις.



Σχήμα 4.16. Αδιάστατες τροχιές κυκλικής φλέβας με πυκνομετρική διαφορά με το περιβάλλον, με γωνία παροχέτευσης 45° .

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

5.1 Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας καταστρώθηκε ένα υπολογιστικό μοντέλο σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran PowerStation 4.0 για την περιγραφή της ροής τυρβωδών αξονοσυμμετρικών ανωστικών φλεβών σε πυκνομετρικά ομογενή αποδέκτη. Το μοντέλο υπολογίζει τις μέσες χρονικά ταχύτητες της ροής, τη διαμήκη u και την εγκάρσια v , την πυκνομετρική διαφορά $\Delta\rho$ της φλέβας με το περιβάλλον, τη γωνία θ που σχηματίζει ο άξονας της φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο και την τροχιά της φλέβας.

Η κατάσταση του αλγόριθμου βασίστηκε στις εξισώσεις RANS σε κυλινδρικές συντεταγμένες και για την αριθμητική τους επίλυση χρησιμοποιήθηκε το ρητό σχήμα των εμπρόσθιων διαφορών. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις της απλής φλέβας και της τυρβώδους ανωστικής φλέβας που εκρέουν υπό γωνία σε ομογενή, κινούμενο με μικρή ταχύτητα αποδέκτη.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν, συγκρίνονται με πειραματικές μετρήσεις αλλά και με προγενέστερα υπολογιστικά αποτελέσματα.

Κατακόρυφες φλέβες

- Στην περίπτωση της απλής φλέβας, το διάγραμμα των ταχυτήτων u συμφωνεί ικανοποιητικά με τα διαγράμματα που προκύπτουν από τη θεωρία των List & Imberger (1973) και από τα δεδομένα των Papanicolaou & List (1988). Στις τρεις εξεταζόμενες περιπτώσεις τυρβωδών ανωστικών φλεβών, τα διαγράμματα της αδιάστατης ταχύτητας u έχουν καλή συμφωνία με τα διαγράμματα που προκύπτουν από τις μετρημένες σταθερές των Papanicolaou & List (1988). Ωστόσο, το αριθμητικό μοντέλο υπολογίζει γρηγορότερη μείωση της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας σε σχέση με τη θεωρία των List & Imberger (1973). Ενώ για μικρές αποστάσεις από την πηγή υπάρχει συμφωνία των αποτελεσμάτων, καθώς η απόσταση z/D αυξάνεται, και ειδικά για αποστάσεις $z/D > 40$, τα διαγράμματα αποκλίνουν καθώς μειώνεται ο αρχικός αριθμός Froude σε ποσοστά που ξεκινούν από 15% για φλέβα με $Fr_0 = 20.19$ και φτάνουν μέχρι 50% για φλέβα με $Fr_0 = 11.66$. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι για ανωστική φλέβα με $Fr_0 = 11.66$, οι τιμές του διαγράμματος των αδιάστατων ταχυτήτων u που προκύπτουν από το μοντέλο βρίσκονται μεταξύ των τιμών που προκύπτουν από τη θεωρία των List & Imberger (1973) και των μετρημένων τιμών των Papanicolaou & List (1988).
- Για όλες τις περιπτώσεις των ανωστικών φλεβών που μελετήθηκαν, οι αδιάστατες κατανομές των πυκνομετρικών διαφορών $\Delta\rho$ που προκύπτουν από το μοντέλο αποκλίνουν αρχικά έως και 50%, σε σχέση με τις κατανομές που προκύπτουν από τη θεωρία των List & Imberger (1973) και των μετρημένων σταθερών των Papanicolaou & List (1988), για z/D μέχρι 40. Για μεγαλύτερες αποστάσεις από την πηγή ($z/D > 40$), όπου η φλέβα αναμένεται να συμπεριφέρεται ως πλούμιο, οι υπολογισμένες κατανομές συμφωνούν ικανοποιητικά με τα διαγράμματα της γενικευμένης θεωρίας των List &

Imberger (1973). Οι κατανομές που προκύπτουν από τις μετρημένες σταθερές των Papanicolaou & List (1988) είναι μεγαλύτερες κατά 20% έως 40% για την πυκνομετρική διαφορά σε σχέση με το μοντέλο και στις περιοχές μακριά από την πηγή, για τις περιπτώσεις φλεβών με $Fr_o=14.28$ και $Fr_o=11.26$ αντιστοίχως.

Οριζόντιες φλέβες

- Οι αδιαστατοποιημένες τροχιές που προέκυψαν από το μοντέλο παρουσιάζουν αρχικά καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα των Ryskiewich & Hafetz (1975), Davidson (1989), Gaskin (1995) και Michas & Papanicolaou (2008). Καθώς η απόσταση από την πηγή αυξάνεται, οι υπολογισμένες τροχιές αποκλίνουν σημαντικά από τις πειραματικές. Πιθανώς αυτό να οφείλεται στη συμπεριφορά της ροής ως πλουμίου.
- Τα αποτελέσματα του κώδικα ήταν ιδιαίτερα ευαίσθητα σε κάθε αλλαγή των θεωρούμενων σταθερών που χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο τύρβης, όπως φάνηκε από τη σύγκριση των υπολογιζόμενων αδιάστατων τροχιών με την τροχιά του ολοκληρωματικού μοντέλου των Papanicolaou et al. (2008) και Παπακωνσταντής (2009). Η παρουσία του αριθμού Richardson στο μοντέλο τύρβης είναι ιδιαίτερα σημαντική για να ληφθεί υπόψη η άνωση.

Φλέβες υπό γωνία 45°

- Οι αδιάστατες πυκνομετρικές κατανομές του μοντέλου παρουσιάζουν πολύ καλή συμφωνία με τις αδιάστατες θερμοκρασιακές κατανομές που προκύπτουν από τα πειραματικά αποτελέσματα των Ryskiewich & Hafetz (1975), εκτός από την περίπτωση της απλής φλέβας με $Fr_o=142.78$. Σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα του μοντέλου συμφωνούν με τα πειραματικά μόνο για μικρές αποστάσεις από την πηγή, $z/R < 40$.
- Οι αδιάστατες με την ακτίνα τροχιές που προκύπτουν από το μοντέλο συμφωνούν ικανοποιητικά με τις αδιάστατες τροχιές που προκύπτουν από τα πειραματικά αποτελέσματα των Ryskiewich & Hafetz (1975). Οι υπολογισμένες αδιάστατες τροχιές συμφωνούν αρχικά ικανοποιητικά και με τα αποτελέσματα ολοκληρωματικού μοντέλου (Papanicolaou et al., 2008 και Παπακωνσταντής, 2009). Αποκλίσεις παρατηρούνται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από την πηγή όπου η φλέβα αναμένεται να έχει αποκτήσει συμπεριφορά πλουμίου.

5.2 Προτάσεις – Περαιτέρω Έρευνα

Σε μελλοντική εργασία θα ήταν σκόπιμο:

- να επιλεγεί διαφορετικό αριθμητικό σχήμα διακριτοποίησης των εξισώσεων RANS, π.χ. πεπλεγμένο σχήμα, το οποίο δε θα υπόκειται σε αυστηρούς περιορισμούς ευστάθειας. Έτσι πιθανόν να απαιτείται λιγότερος υπολογιστικός χρόνος για την εκτέλεση του αλγόριθμου και το μοντέλο να εφαρμοστεί σε ακίνητο αποδέκτη.
- να εφαρμοστεί ένα πιο περίπλοκο μοντέλο τύρβης που ενδεχομένως να μπορούσε να βελτιώσει τα αποτελέσματα.

- να τροποποιηθεί ο αλγόριθμος κατάλληλα ώστε να μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά και η ροή φλεβών αρνητικής άνωσης.
- να μελετηθούν οι ροές ανωστικών φλεβών και σε κινούμενο ή/και στρωματοποιημένο αποδέκτη.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κουτίτας Χ., 1985. *Υπολογιστική Υδραυλική*, Εκδόσεις Επίκεντρο, Ξάνθη.
- Παπακωνσταντής Η., 2009. *Τυρβώδεις Κυκλικές Φλέβες Αρνητικής Άνωσης υπό Γωνία σε Ακίνητο Ομογενή Αποδέκτη*. Διδακτορική Διατριβή, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Παπανικολάου Π., 2009. *Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες*, Διδακτικές σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος “Περιβαλλοντική Υδραυλική” του ΔΠΜΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ.
- Agrawal A. & Prasad A., 2003. *Integral Solution for the Mean Flow Profiles of Turbulent Jets, Plumes, and Wakes*, J. Fluid Mech., **125**, p. 813-822.
- Anwar H., 1969. *Behavior of Buoyant Jet in Calm Fluid*, ASCE J. of the Hydraulics Division, **91**, p. 139 – 153.
- Bahari A. M. & Hejazi K., 2009. *Investigation of Buoyant Parameters of k-ε Turbulence Model in Gravity Stratified Flows*, World Academy of Science, Engineering and Technology 55, p. 537-544.
- Bradshaw P., 1969. *The Analogy Between Streamline Curvature and Buoyancy in Turbulent Shear Flow*, J. Fluid Mech., **36**, part 1, p. 177 – 191.
- Celik I., 1999. *Introductory Turbulence Modeling*, Lecture Notes, Mechanical & Aerospace Dept., West Virginia University.
- Chen C. & Chen C., 1979. *On Prediction and Unified Correlation for Decay of Vertical Buoyant Jets*, J. Heat Transfer, **101**, p. 532-537.
- Davidson M., Gaskin S. & Wood I., 2002. *A Study of a Buoyant Axisymmetric Jet in a Small CO-flow*, J. Hydraulic Research, **40**, No.4, p. 477-489.
- Dewan A., Arakeri J. & Srinivasan J., 1997. *A New Turbulence Model For The Axisymmetric Plume*, Appl. Math. Modelling, **21**, p. 709 – 719.
- Duvvi L.P.K., 2004, *An Explicit Finite Difference Analysis of Buoyant Jets*, Thesis, Lamar University – Beaumont.
- Etemad-Shahidi A. & Azimi A.H., 2003, *Testing the CORMIX2 and VISJET Models to Predict the Dilution of San Francisco Outfall*, Diffuse Pollution Conference Dublin.
- Fischer H. B., List E. J., Koh R. C. Y., Imberger J. & Brooks N.A., 1979, *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press., New York.
- Forstall W. & Shapiro A., 1950. *Momentum and Mass Transfer in Coaxial Gas Jets*, Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, **17**, p. 399- 408.
- Germano M., Piomelli U., Moin P. & Cabot W., 1991. *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*, Physics of Fluids, **3**, p. 1760 – 1765.
- Grizzi S., Falchi M., Romano G. P., 2006. *Stereo PIV Investigation of a Round Jet*, XIV AIVELA Annual Meeting, Rome.

- Hinze J. & Van der Hegge Zijnen B., 1949. *Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet*, Appl. Scient. Res. A1, p. 435-461.
- Hossain M. & Rodi W., 1982. *A Turbulence Model for Buoyant Flows and Its Application to Vertical Buoyant Jets, Turbulent Buoyant Jets and Plumes, HMT: The Science & Applications of Heat and Mass Transfer – Reports, Reviews & Computer Programs*, **6**.
- Jirka G., 2004. *Integral Model for Turbulent Buoyant Jets in Unbounded Stratified Flows. Part I: Single Round Jet*, Env. Fluid Mechanics, **4**, p. 1-56.
- Kiser K., 1963. *Material and momentum transport in axisymmetric turbulent jet of water*, A.I.Ch.E. J19, p. 386-390.
- Kotsonivos N., 1985. *Temperature measurements in a turbulent round plume*, Int. J. Heat Mass Transfer, **28**, p. 771-777.
- Landis F. & Shapiro A., 1951. *The Turbulent Mixing of Co-Axial Gas Jets*, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute.
- Lee J., Cheung V., Wang W. and Cheung S. K., 2000. *Lagrangian Modeling and Visualization of Rosette Outfall Plumes*, Proc. Hydrodynamics, Iowa, July 23-27.
- List E. & Imberger J., 1973. *Turbulent Entrainment in Buoyant Jets and Plumes*. ASCE J. Hyd. Div. **99**, HY9, p. 1461-1474.
- Madni I., 1975. *A Finite-Difference Analysis of Turbulent, Axisymmetric, Buoyant Jets and Plumes*, PhD, Iowa State University.
- Menter F., 1992. *Improved Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Model for Aerodynamic Flows*, NASA TM-103975.
- Michas S. & Papanicolaou P., 2008. *Horizontal Round Heated Jets Into Calm Uniform Ambient*, Elsevier, **248**, p.803-815.
- Morton B., Taylor G.I. & Turner J., 1956. *Turbulent Gravitational Convection from Maintained and Instantaneous Sources*, Proc. Roy. Soc. London, **A234**, p. 1-23.
- Noutsopoulos G. & Yannopoulos P., 1987. *The Round Vertical Turbulent Buoyant Jet*, J. Hydraulic Research –IAHR, **25**, No. 4, p. 481 – 502.
- Pantokratoras A., 1987. *Numerical Computation of a Round Laminar Plume in a Stratified Environment*, International Communications Heat and Mass Transfer, **14**, p. 589 – 596.
- Papanicolaou P., 1984. *Mass and momentum transport in a turbulent buoyant vertical axisymmetric jet*, National Science Foundation Report No. KH-R-46.
- Papanicolaou P., 1994. *A piston driven jet for the study of the zone of flow establishment*, Expts. in Fluids, **17**, 287.
- Papanicolaou P. & List E., 1987. *Statistical and spectral properties of tracer concentration in round buoyant jets*, Int. J. Heat Mass Transfer, **30 (10)**, p. 2057-2071.

- Papanicolaou P. & List E., 1988. *Investigations of round vertical turbulent buoyant jets*, J. Fluid Mech., **195**, p. 341-391.
- Papanicolaou P. & Kokkalis T., 2008. *Vertical Buoyancy Preserving and Non-Preserving Fountains, in a Homogeneous Calm Ambient*, Int. J. Heat and Mass Transfer, **51 (15)**, p. 4109-4120.
- Papanicolaou P., Papakonstantis I. & Christodoulou G., 2008. *On the entrainment coefficient in negatively buoyant jets*. J. Fluid Mech., **614**, 447–470.
- Patankar S. V. & Spalding D. E., 1970. *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*, 2nd edition, Intertext Books, London.
- Prandtl L., 1925. *Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz*, ZAMM, **5**, p. 136-139.
- Ryskiewich B. & Hafetz L., 1975. *An Experimental Study of the Free Surface Effect on a Buoyant Jet*, General Dynamics Report, No. U440-74-103.
- Saad T., 2004. *Turbulence Modeling for Beginners*, University of Tennessee Space Institute.
- Smagorinsky J., 1963. *General Circulation Experiments with the Primitive Equations*, Monthly Weather Review, **91**, p. 99 – 164.
- Wang P., Frohlich J., Michelassi V. & Rodi W., 2008. *Large-eddy Simulation of Variable-density Turbulent Axisymmetric Jets*, Int. J. of Heat and Fluid Flow, **29 (3)**, p. 654 – 664.
- Wilcox D., 1994. *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, La Canada, CA.
- Yan L., Street R. & Ferziger J., 1999. *Large-eddy Simulations of a Round Jet in a Crossflow*, J. Fluid Mech., **379**, p. 71 – 104.
- Yan Z. & Holmstedt G., 1999. *A Two-Equation Turbulence Model and Its Application to a Buoyant Diffusion Flame*, J. of Heat and Mass Transfer, **42 (7)**, p. 1305 - 1315.
- Yannopoulos P., 2006. *An Improved Integral Model for Plane and Round Turbulent Buoyant Jets*, J. Fluid Mech., **547**, p. 267-296.
- Ying C., 2000, *The Radial Velocities of Axisymmetric Jets and Plumes*, M. Phil. Thesis, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong.
- Zhou X., Luo K. & Williams J., 2001. *Large-eddy Simulation of a Turbulent Forced Plume*, European J. Mech. – B/Fluids, **20**, p. 233 – 254.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Σε αυτό το παράρτημα δίνεται ο υπολογιστικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για τη επίλυση των αριθμητικών εξισώσεων της τυρβώδους ροής και επεξηγούνται οι συμβολισμοί που χρησιμοποιήθηκαν.

```
PROGRAM MAIN
IMPLICIT NONE
INTEGER I,J,NI,NJ,NY,NY1,NY2,NYI,NYO,NYC
REAL CA, DRSTART, DENSA, DENSO, DS(85010), DS1, DY, FRO, G, GOT, KV, PI,
      RAD, REO, THETAO, UA, USTART, res(85010), ypir(85010), UJHALF(85010)
REAL CC1, DR(85010,180), CV(85010,180), DELTA(85010), DMIX(85010),
      DX(85010), DZ(85010), EV(85010,180), SMUP(85010,180),
      SMUM(85010,180), THETA(85010), U(85010,180), UMEAN(85010), UTEST,
      V(85010,180), X(85010), Y(85010), YCORE(85010,180),
      YUHALF(85010,180), Z(85010)
REAL CDELTA, CMEAN, CTEST, YCHALF, S(85010)

OPEN (1, FILE='DATA.dat')
READ(1,*) RAD, NI, NJ, NYI, USTART, UA, CA, DRSTART, DENSA, DENSO, KV, G

REO=USTART*(2.0*RAD)/KV           ! v=KV: kinematic viscosity
                                  ! RAD: η ακτίνα του στομίου εκκένωσης
                                  ! DENS: πυκνότητα

GOT=G*(DENSA-DENSO)/DENSO
FRO=USTART/(GOT*2.0*RAD)**0.5
WRITE (*,*) 'FRO=',FRO
Write (*,*) 'give thetao:'
READ (*,*) THETAO
Write (*,*) 'thetao=',thetao

PI=4.0*ATAN(1.0)                 ! PI = π
THETAO=PI*THETAO/180.0
Close (1)

! ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ y
DY=RAD/NYI                       ! NYI : αριθμός διαστημάτων στη διατομή
Write (*,*) 'dy=',dy
! ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ s
DS(1)=0.0
DS(2)=0.0009

! ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ
! κατά μήκος της φλέβας
S(1)=0.0
! εγκάρσια διεύθυνση φλέβας
Y(1)=0.0
DO J=2,NJ
  Y(J)=Y(J-1)+DY
ENDDO
```

! ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

```
X(1)=0.0           ! X: Οριζόντια διεύθυνση στο επίπεδο
Z(1)=0.0           ! Z: Κατακόρυφη διεύθυνση στο επίπεδο
DX(1)=0.0
DZ(1)=0.0
THETA(1)=THETAO    ! thetao = αρχική γωνία εκροής φλέβας
DELTA(1)=RAD        ! δ: mixing layer thickness (πλάτος φλέβας)
DMIX(1)=0.0         ! delta-ycore
YCORE(1,1)=RAD      ! πλάτος περιοχής ομοιόμορφης ροής (γ-πυρήνα)
```

! ΕΝΤΟΣ ΟΡΙΩΝ ΦΛΕΒΑΣ

```
DO J=1,NYI+1       ! NYI+1: αριθμός κόμβων στο ακροφύσιο
  U(1,J)=USTART    ! ustart = uo : ταχύτητα εξόδου φλέβας
  V(1,J)=0.0
  DR(1,J)=DRSTART  ! drstart = dro : αρχική διαφορά πυκνότητας
  EV(1,J)=1.0e-3   ! EV: Effective Viscosity
  CV(1,J)=1.0e-3/0.7
ENDDO
```

! ΕΚΤΟΣ ΟΡΙΩΝ ΦΛΕΒΑΣ

```
DO J=NYI+2,NJ
  U(1,J)=UA*sin(thetao) ! UA=Uambient
  V(1,J)=0.0
  DR(1,J)=CA
  EV(1,J)=1.0E-6
  CV(1,J)=1.0E-6/0.7
ENDDO
```

! BOUNDARY CONDITION

```
DO I=1, NI
  V(I,1)=0.0
ENDDO
```

! ΡΗΤΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

```
DO 20 I=1,NI
```

! κριτήριο ευστάθειας

```
do j=2,NY
  CC1=ABS(V(I,j))/(U(I,j)*DY)+(Y(j)+Y(j+1))*
  AMAX1((EV(I,J)+EV(I,J+1)),(CV(I,J)+CV(I,J+1)))/(4.0*U(I,j)*Y(J)*DY**2.0
  )+(Y(j)+Y(j-1))*AMAX1((EV(I,J)+EV(I,J-1)),(CV(I,J)+CV(I,J-1)))/
  (4.0*U(I,j)*Y(J)*DY**2.0)
  !write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'CC1=',CC1
  DS1=0.5/CC1

  IF (DS1.GT.(0.9*DS(I))) THEN
    DS(I+1)=0.9*DS(I)
  ELSE
    DS(I+1)=DS1
  END IF
END IF
```

```

if (i.gt.100.and.ds(i+1).le.5.0e-6) then
ds(i+1)=5.0e-6
endif
if (i.gt.500.and.ds(i+1).le.5.0e-5) then
ds(i+1)=5.0e-5
endif
if (i.gt.1000.and.ds(i+1).le.2.0e-4) then
ds(i+1)=2.0e-4
endif
enddo

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'DS1=',DS1
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'DS=',DS(I+1)

! διαμήκης τροχιά φλέβας
S(I+1)=S(I)+DS(I+1)
Write (*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'S=',S(I+1)

DO 10 J=2,NJ

SMUP(I,J)=0.5*(EV(I,J)+EV(I,J+1)+ABS(V(I,J)*DY)+ABS(EV(I,J)+EV(I,J+1)-
ABS(V(I,J)*DY)))
SMUM(I,J)=0.5*(EV(I,J)+EV(I,J-1)+ABS(V(I,J)*DY)+ABS(EV(I,J)+EV(I,J-1)-
ABS(V(I,J)*DY)))

IF (V(I,J).GE.0.0) GOTO 11
! s-momentum: Υπολογισμός της Ui+1,j
U(I+1,J)=U(I,J)-DS(I+1)*V(I,J)*(U(I,J+1)-U(I,J))/(DY*U(I,J))+
DS(I+1)*((Y(J)+Y(J+1))/(4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*SMUP(I,J)*(U(I,J+1)-
U(I,J))-(Y(J)+Y(J-1))/(4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*SMUM(I,J)*(U(I,J)-U(I,J-1))))+
DS(I+1)*G/U(I,J)*DR(I,J)/DENSO*SIN(THETA(I))
11 U(I+1,J)=U(I,J)-DS(I+1)*V(I,J)*(U(I,J)-U(I,J-1))/(DY*U(I,J))+DS(I+1)*
((Y(J)+Y(J+1))/(4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*SMUP(I,J)*(U(I,J+1)-U(I,J))-
(Y(J)+Y(J-1))/(4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*SMUM(I,J)*(U(I,J)-U(I,J-1))))+
DS(I+1)*G/U(I,J)*DR(I,J)/DENSO*SIN(THETA(I))
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'U=',u(i+1,j)

!centerline condition
U(I+1,1)=(4.0*U(I+1,2)-U(I+1,3))/3.0

! ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ UMEAN (μέσης ταχύτητας)
UMEAN(I+1)=(U(I+1,1)+UA*sin(THETA(I)))/2.0
! write(*,*) 'umean=',umean(i+1)
! ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ YUHALF (y1/2)
IF (U(I+1,J).LE.UMEAN(I+1)) then
! ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ YUHALF
YUHALF(I+1,j)=(J-2)*DY+((Y(J)-Y(J-1))/(U(I+1,J)-
U(I+1,J-1)))*(UMEAN(I+1)-U(I+1,J-1)))
! write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'yuhalf=',yuhalf(I+1,j)
end if

```

! ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ YCORE (y-πυρηνα)

IF (U(I+1,J).LT.(0.99*U(I+1,1))) THEN

! ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ YCORE

YCORE(I+1,j)=(J-2)*DY

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'ycore(i+1,j)=' ,ycore(i+1,j)

END IF

! outer boundary condition

UTEST=(U(I+1,1)-U(I+1,J))/(U(I+1,1)-UA*sin(THETA(I)))

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'utest=' ,utest

IF(UTEST.GT.0.99) THEN

GOTO 27

ELSE

GOTO 10

END IF

10 CONTINUE

27 NY=J

! αριθμός κόμβων κατά πλάτος

write(*,*) 'ny=' ,ny

UJHALF(I+1)=MAXVAL(U,MASK=U.LT.((U(I+1,1)+UA*sin(THETA(I)))/2.0))

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'ujhalf=' ,ujhalf(i+1)

res(i+1)=MAXVAL(YUHALF)

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'res=' ,res(i+1)

ypir(i+1)=MINVAL(YCORE,MASK=YCORE.GT.0.0)

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'ypir=' ,ypir(i+1)

DELTA(I+1)=(NY-1)*DY

DMIX(I+1)=DELTA(I+1)-YPIR(I+1)

write(*,*) 'delta(i+1)=' ,delta(i+1)

write(*,*) 'dmix(i+1)=' ,dmix(i+1)

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'uc=' ,u(i+1,1)

write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'umean=' ,umean(i+1)

! καθορισμός χαρακτηριστικών τιμών περιβάλλοντος

DO J=NY+1, NJ

EV(I+1,J)=1.0e-06

U(I+1,J)=UA*sin(THETA(I))

! write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'u(i+1,j)=' ,ua

ENDDO

NY1=(NY+1)/2

NY2=(NY+2)/2

IF(NY1.EQ.NY2) THEN

NYO=NY+1

write(*,*) 'nyo=' ,nyo

ENDIF

```

DO J=1,NYO,2
! y-momentum – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΘΗΤΑ
THETA(I+1)=THETA(I)+DS(I+1)*DR(I,J)/(U(I,J)**2.0*DENS0)*G*
      COS(THETA(I))
enddo
write(*,*) 'theta(i)=' ,theta(i+1)

! ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΟΝΤΙΑΣ & ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
DX(I+1)=DS(I+1)*COS(THETA(I+1))
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'dx(i)=' ,dx(i+1)
DZ(I+1)=DS(I+1)*SIN(THETA(I+1))
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'dz(i)=' ,dz(i+1)
X(I+1)=X(I)+DX(I+1)
Z(I+1)=Z(I)+DZ(I+1)

DO J=1,NJ-1
! Continuity: Υπολογισμός Vi+1,j+1
V(I+1,J+1)=Y(J)*V(I+1,J)/Y(J+1)-DY/(4.0*DS(I+1)*Y(J+1))*(Y(J+1)+Y(J))*
      (U(I+1,J+1)-U(I,J+1)+U(I+1,J)-U(I,J))
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j+1,'v=' ,v(i+1,j+1)
ENDDO

DO 30 J=2,Nj
! Conservation of index: Υπολογισμός του DRi+1,j
DR(I+1,J)=DR(I,J)-DS(I+1)*V(I,J)*(DR(I,J)-DR(I,J-1))/(DY*U(I,J))+
      DS(I+1)*((Y(J)+Y(J+1))/(4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*
      (CV(I,J)+CV(I,J+1))*(DR(I,J+1)-DR(I,J))-(Y(J)+Y(J-1)))/
      (4.0*U(I,J)*Y(J)*DY**2.0)*(CV(I,J)+CV(I,J-1))*(DR(I,J)-DR(I,J-1)))
write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'DR=' ,DR(i+1,j)

! centerline condition
IF(J.lt.3) GOTO 30

      DR(I+1,1)=(4.0*DR(I+1,2)-DR(I+1,3))/3.0
      ! write(*,*) 'DRc=' ,DR(i+1,1)
! Υπολογισμός CMEAN
      CMEAN=(DR(I+1,1)+CA)/2.0

! ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ YCHALF
      IF(DR(I+1,J).LE.CMEAN) then
! ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ YCHALF
YCHALF=Y(J-2)+((Y(J)-Y(J-1))/(DR(I+1,J)-DR(I+1,J-1)))*(CMEAN-DR(I+1,J-1))
!write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'ychalf=' ,ychalf
      end if
! outer boundary condition
      CTEST=(DR(I+1,1)-DR(I+1,J))/(DR(I+1,1)-CA)
      ! write(*,*) 'i=',i+1,'j=',j,'ctest=' ,ctest
IF(CTEST.GE.0.99) THEN
      GOTO 33
      ELSE

```



```

        GOTO 30
    ENDIF
30 CONTINUE

33 NYC=J
write(*,*) 'nyc=',nyc

CDELTA=(NYC-1)*DY           ! πλάτος προφίλ διαφοράς πυκνοτήτων

! καθορισμός χαρακτηριστικών τιμών περιβάλλοντος
DO J=NYC+1,NJ
    CV(I+1,J)=1.0e-06/0.7
    DR(I+1,J)=CA
ENDDO

! υπολογισμός συνολικού ιξώδους ν με χρήση μοντέλου μήκους ανάμειξης
DO J=2,NYC+2
    EV(I+1,J)=(0.0762*DELTA(I+1))**2.0*ABS((U(I+1,J)-U(I+1,J-1))/(DY))

    IF(ypir(i+1).le.DY) then

        RI(I+1)=(PI/4)**0.25*(DR(I+1,1)/DENSO*G*2.0*RAD)**0.5/USTART

        EV(I+1,J)=0.0246*res(I+1)*(U(I+1,1)-ua*COS(THETA(I+1)))*(1.0-
            1.0*RI(I+1))**0.5
        ! EV(I+1,J)=0.0246*res(i+1)*(u(i+1,1)-ua*SIN(THETA(I+1)))
        endif

        IF (EV(I+1,J).EQ.0.0) THEN
            EV(I+1,J)=1.0E-6
            END IF

        CV(I+1,J)=EV(I+1,J)/0.7
    ENDDO

20 CONTINUE

! UPDATE TIMΩN
DO I=1,NI
DO J=2,NJ
    U(I,J)=U(I+1,J)
    V(I,J)=V(I+1,J)
    EV(I,J)=EV(I+1,J)
    CV(I,J)=CV(I+1,J)
    DR(I,J)=DR(I+1,J)
ENDDO
    THETA(I)=THETA(I+1)
    DS(I)=DS(I+1)
    S(I)=S(I+1)
    X(I)=X(I+1)

```

```

        Z(I)=Z(I+1)
ENDDO

! αρχεία καταγραφής αποτελεσμάτων
OPEN(2,FILE='U_RESULTS.dat')
WRITE(2,21)
21 FORMAT(/14X,'DS',16X,'S',14X,'U')
OPEN(4,FILE='V_RESULTS.dat')
WRITE(4,41)
41 FORMAT(/14X,'DS',16X,'S',14X,'V')
OPEN(5,FILE='C_RESULTS.dat')
WRITE(5,51)
51 FORMAT(/14X,'DS',16X,'S',14X,'DR')
OPEN(6,FILE='YUHALF.dat')
OPEN(10,FILE='EV_RESULTS.dat')
    DO I=1,NI,5000
    DO J=1,NJ
        WRITE(2,200) DS(I),S(I),U(I,J)
        WRITE(4,200) DS(I),S(I),V(I,J)
        WRITE(5,200) DS(I),S(I),DR(I,J)
        write(6,200) yuhalf(i,j)
        write(10,200) EV(I,J)
    ENDDO
    ENDDO
200   FORMAT(8X,F10.6,8X,F10.6,8X,F10.7)

OPEN(3,FILE='THETA_RESULTS.dat')
WRITE(3,90)
90 FORMAT(/14X,'DS',16X,'S',14X,'THETA')
WRITE(3,100) (DS(I),S(I),THETA(I), I=1,NI,5000)

100 FORMAT(8X,F10.6,8X,F10.6,8X,F10.6)

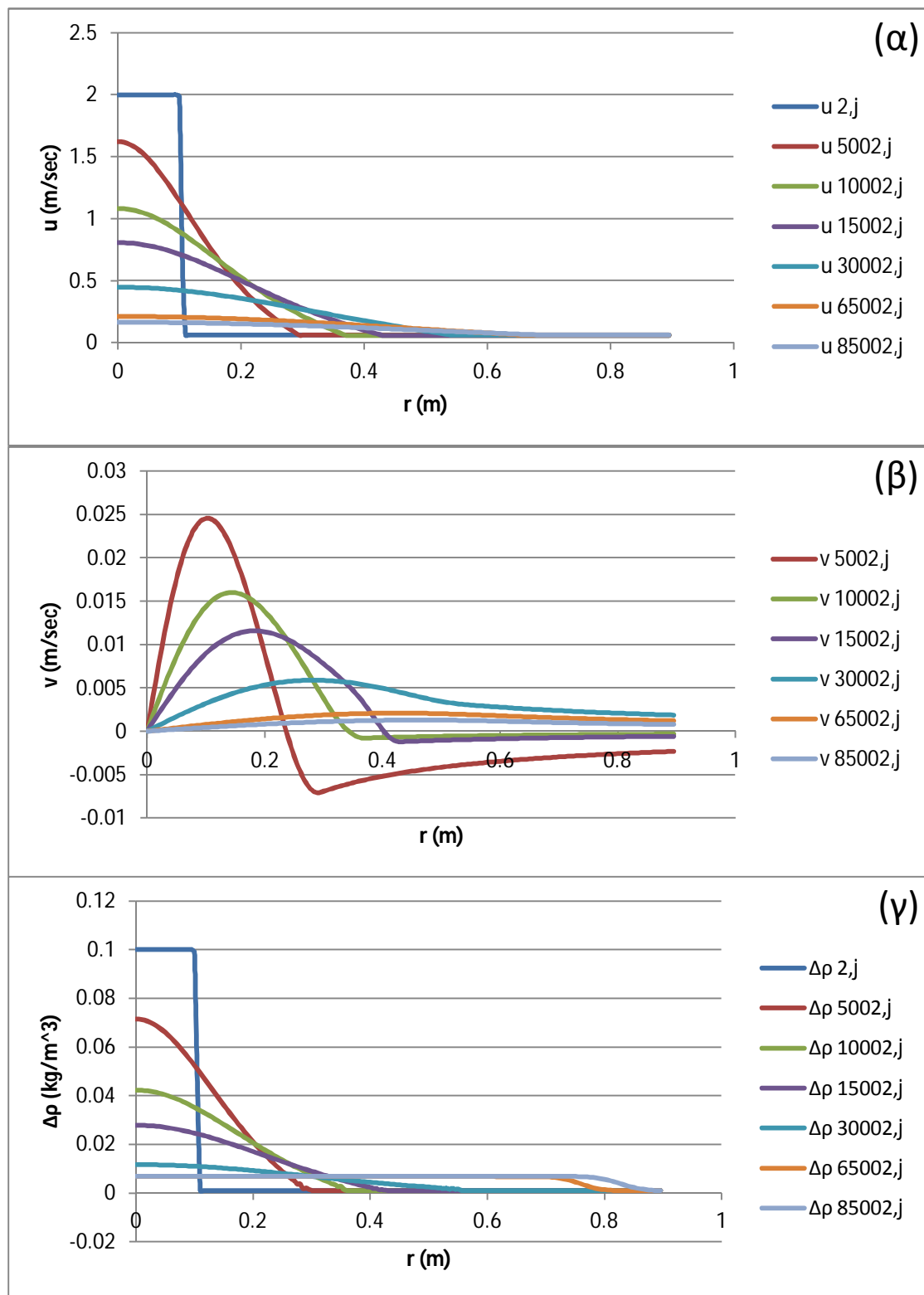
OPEN(7,FILE='X.dat')
OPEN(8,FILE='Z.dat')
write(7,200) (ds(i),s(i),X(I),I=1,NI,5000)
write(8,200) (ds(i),s(i),Z(I),I=1,NI,5000)

END

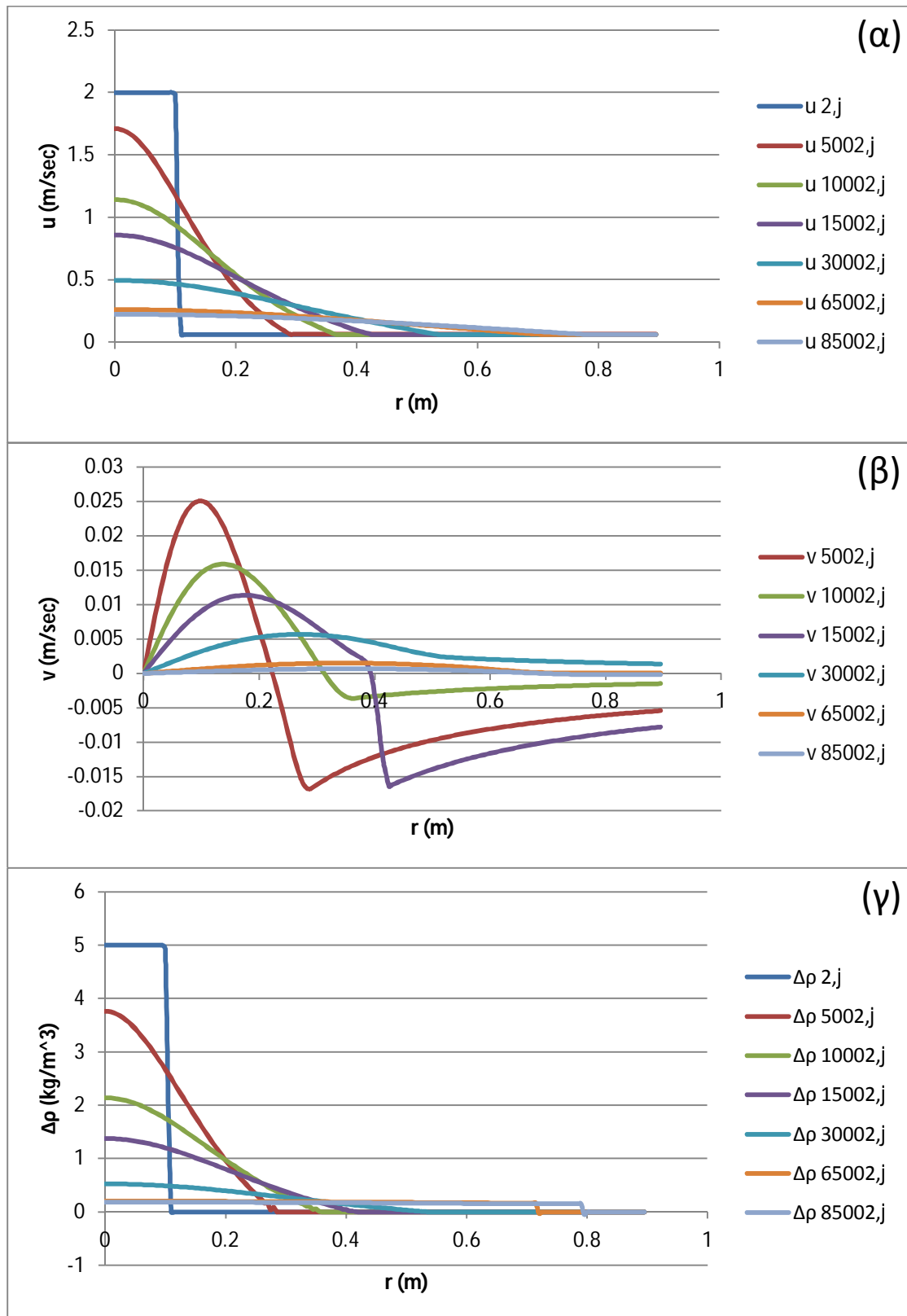
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

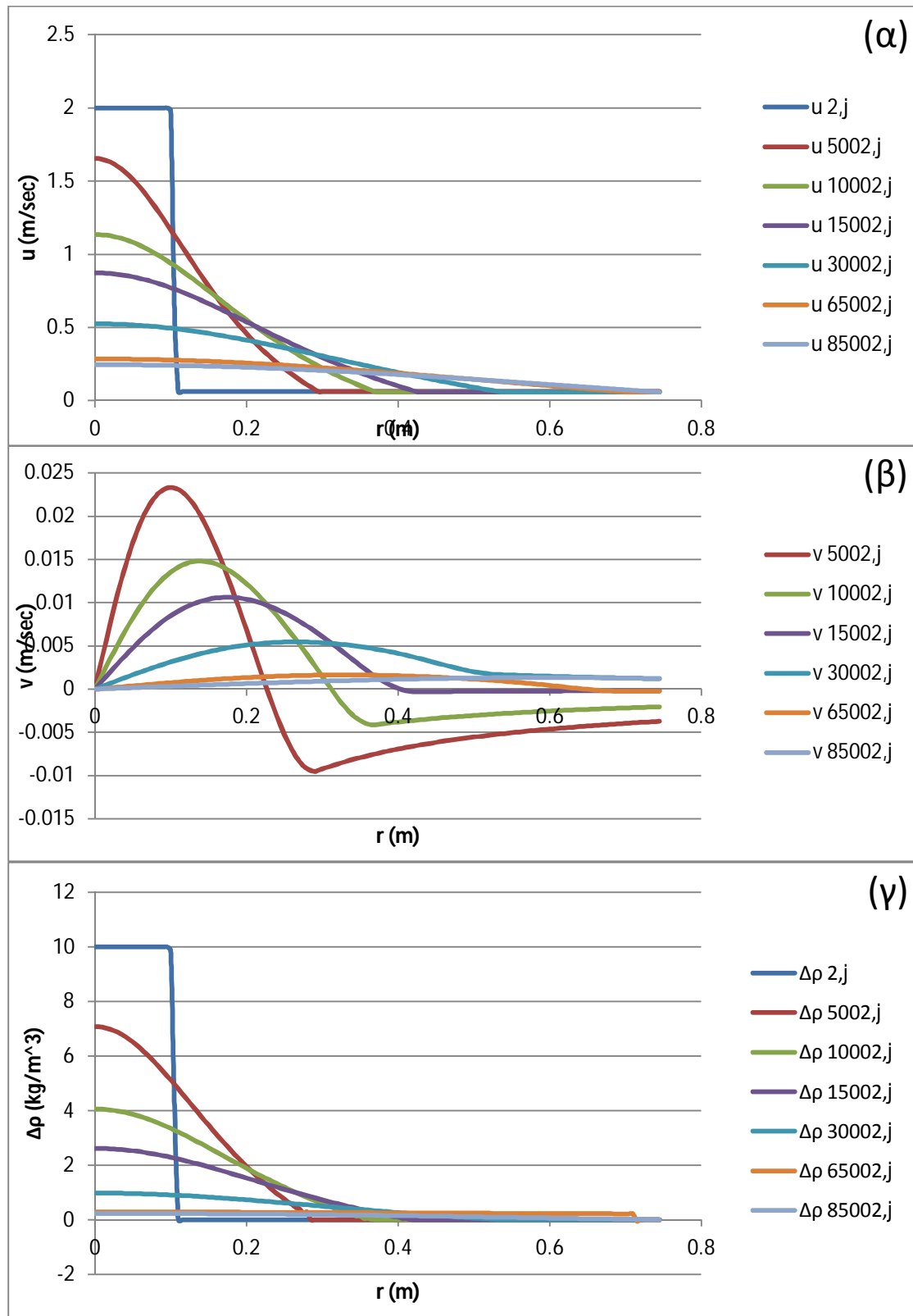
Κατακόρυφη φλέβα



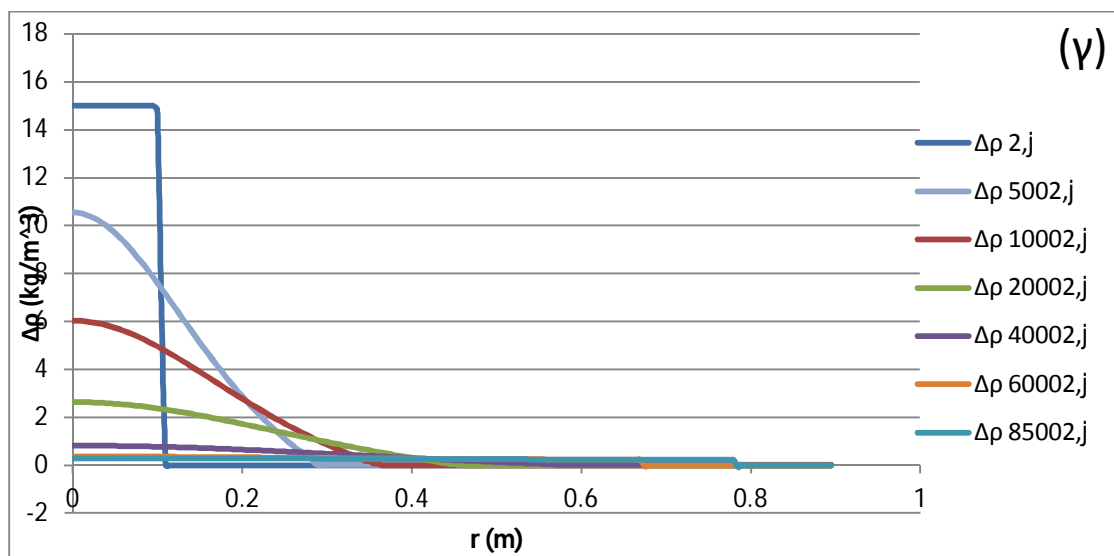
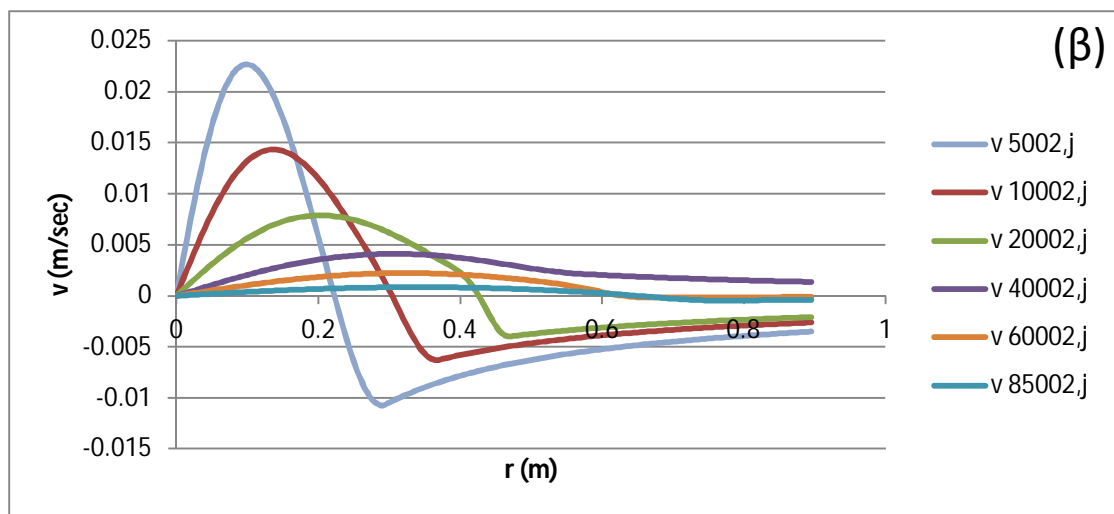
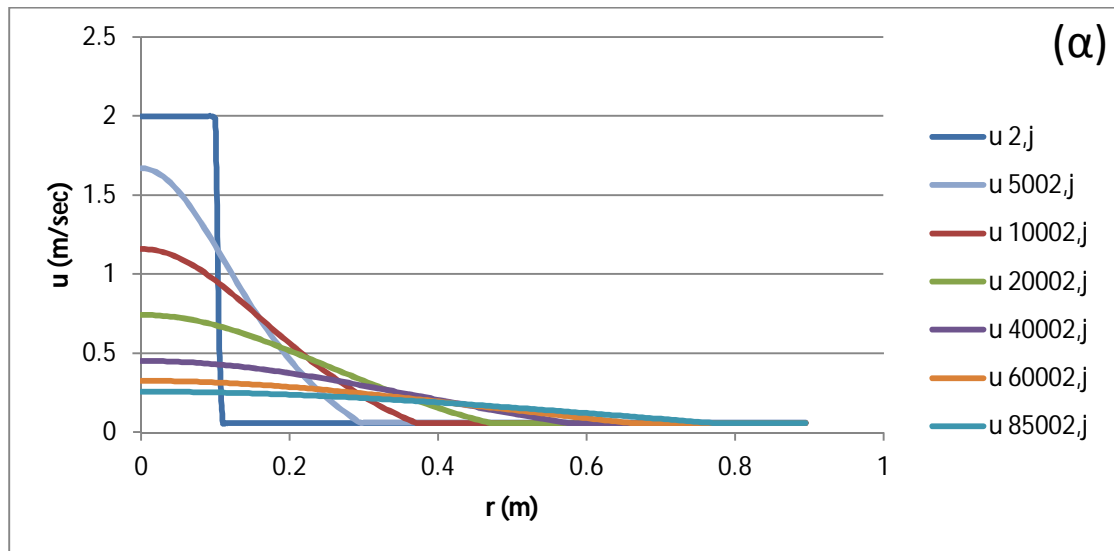
Σχήμα Β1. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=142.78$, $\Delta\rho_o=0.1$ kg/m³.



Σχήμα Β2. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=20.19$, $\Delta\rho_o =5.0$ kg/m^3 .

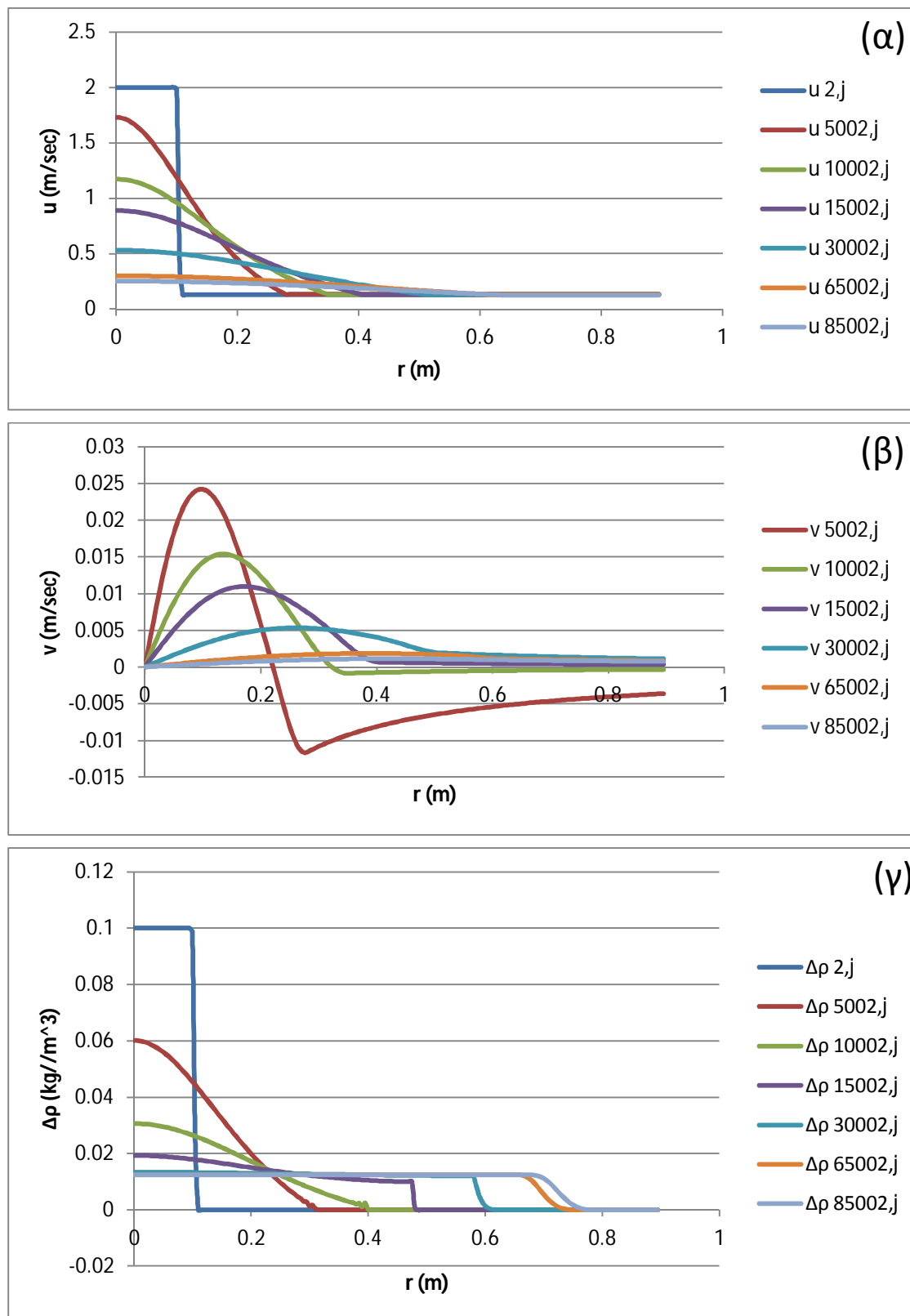


Σχήμα Β3. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=14.28$, $\Delta\rho_o = 10.0 \text{ kg/m}^3$.

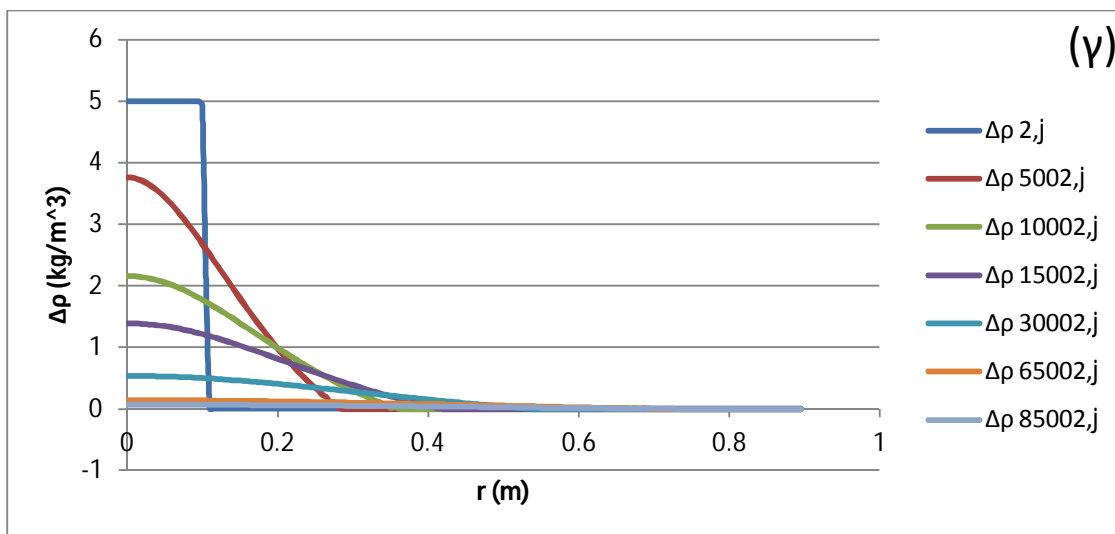
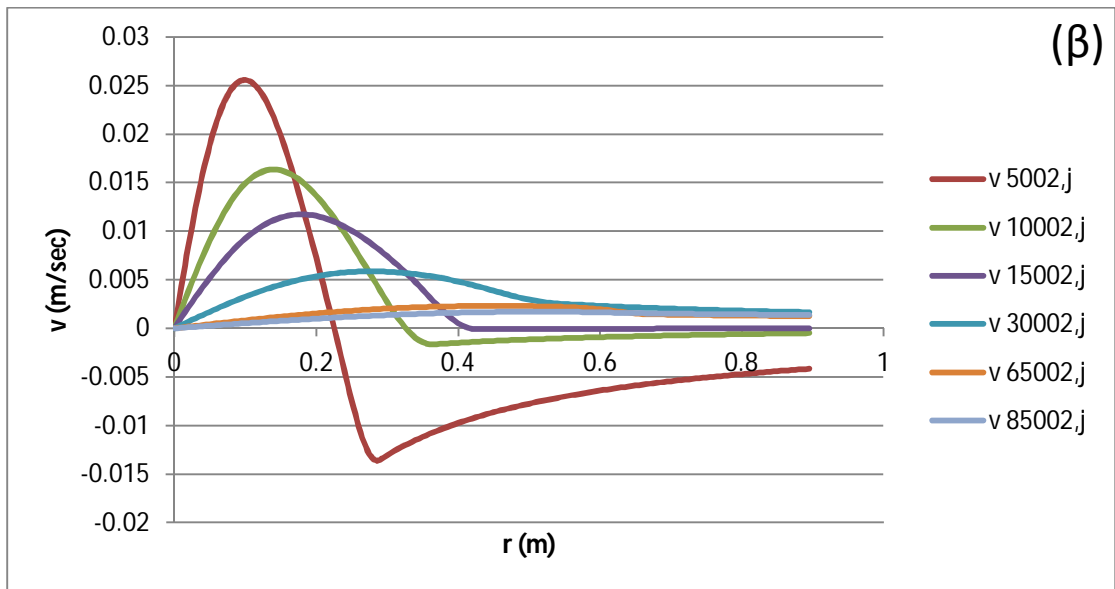
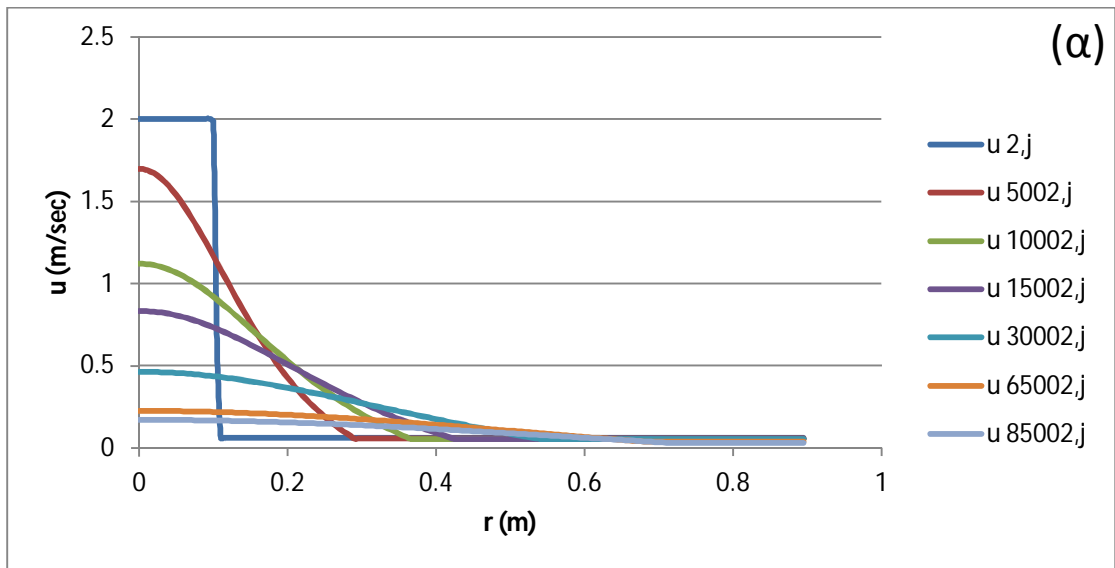


Σχήμα Β4. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_0=11.66$, $\Delta\rho_0 = 15 \text{ kg/m}^3$.

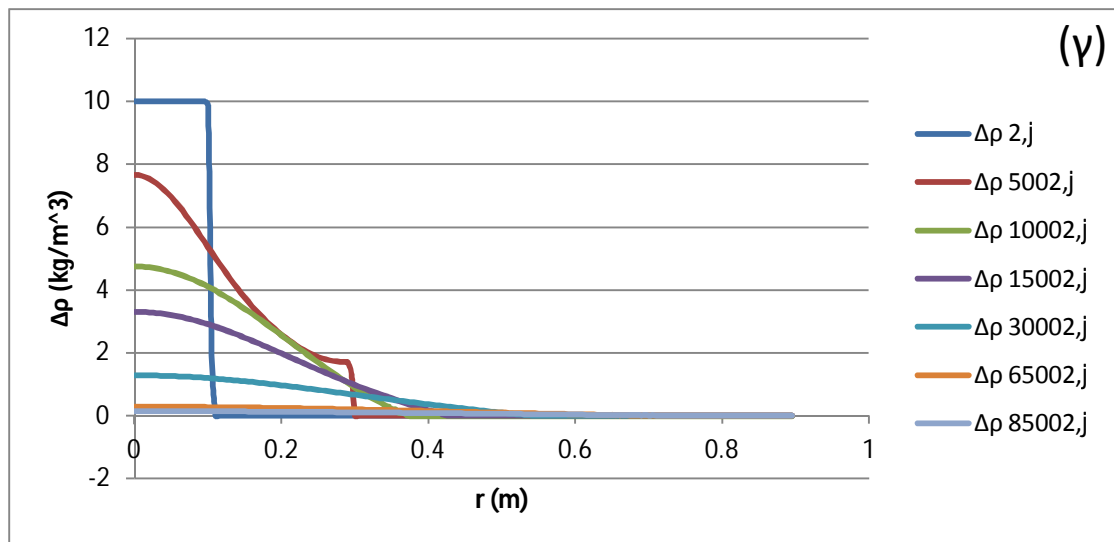
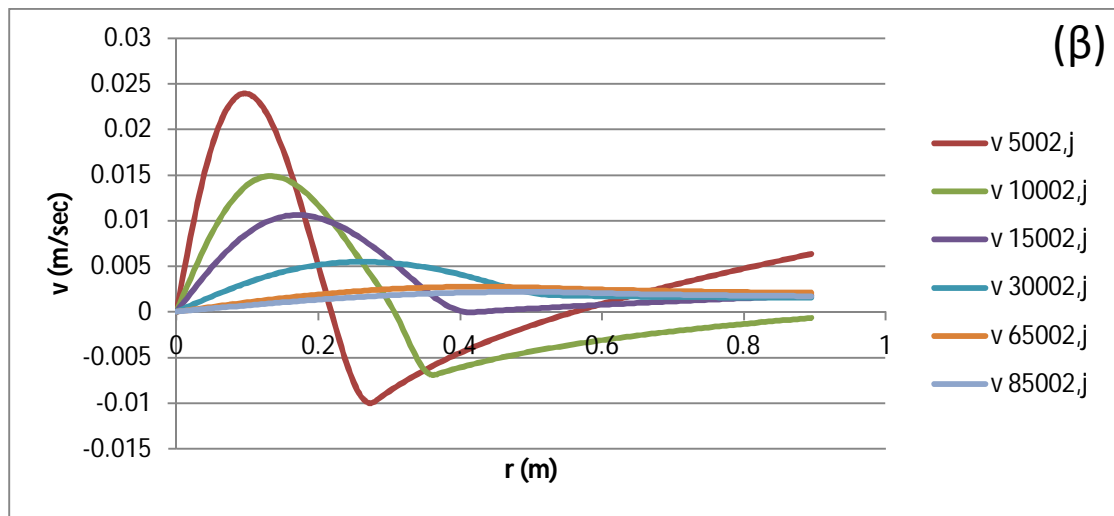
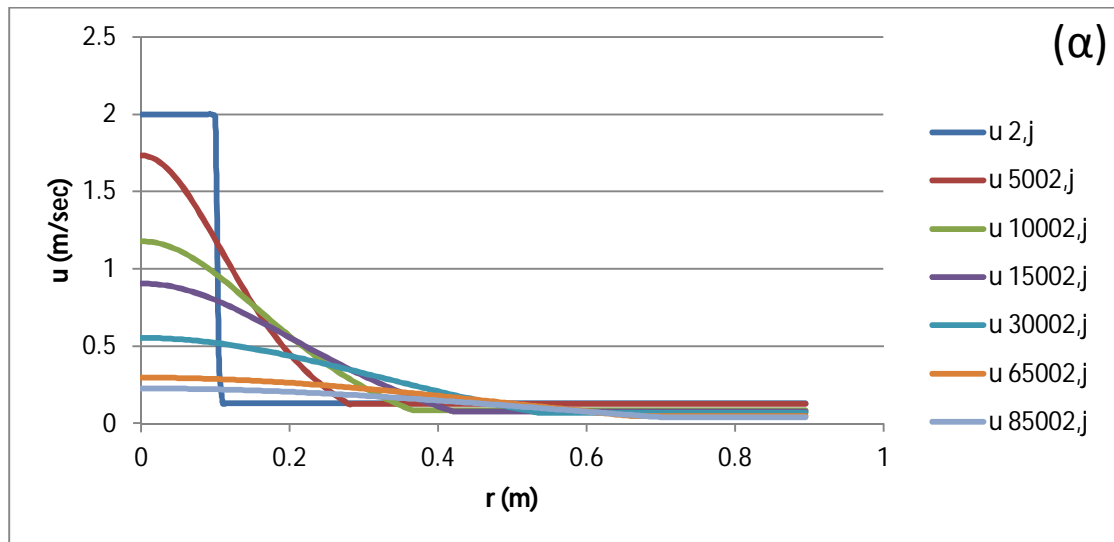
Οριζόντια Φλέβα



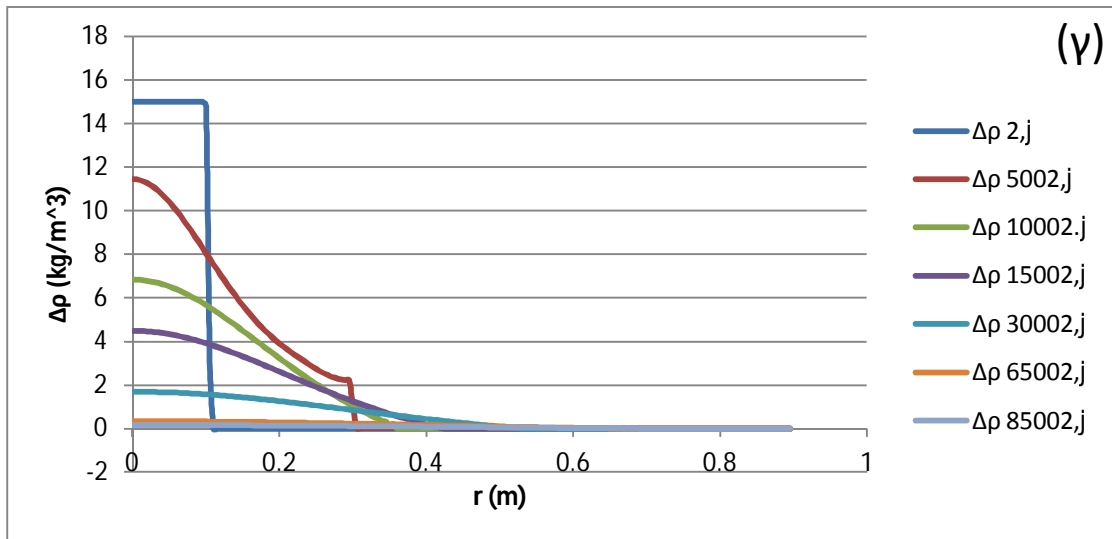
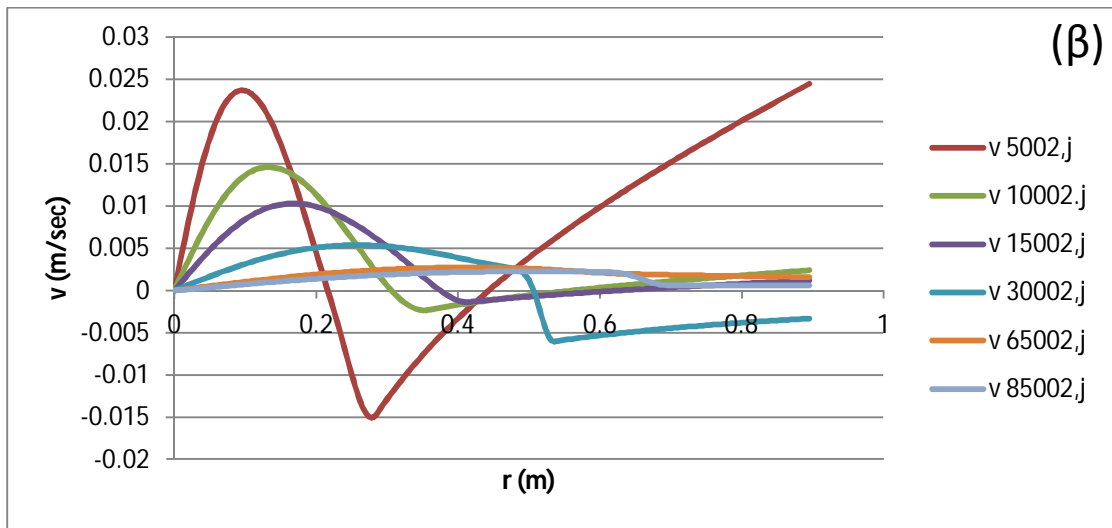
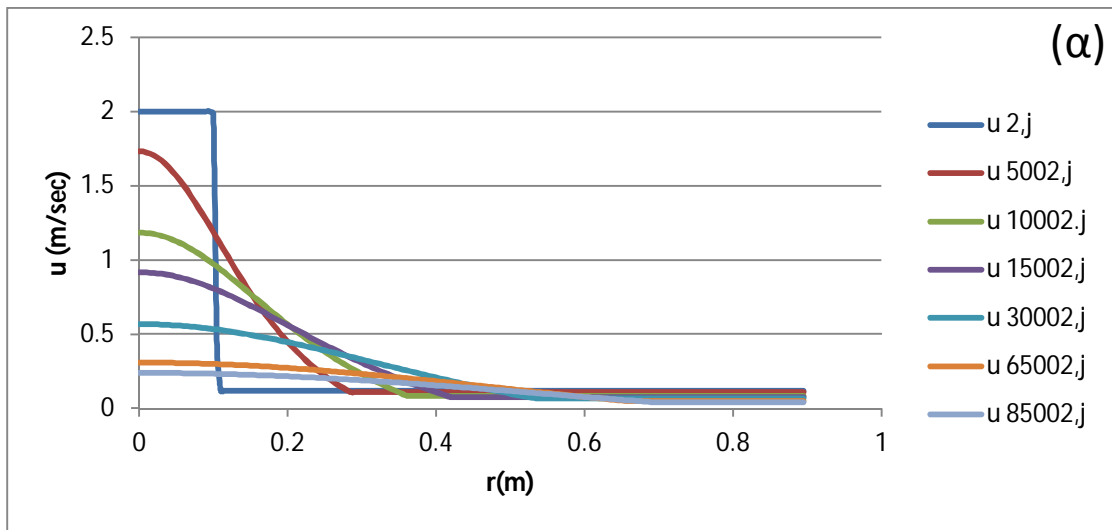
Σχήμα Β5. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=142.78$, $\Delta\rho_o=0.1 \text{ kg/m}^3$ και οριζόντια γωνία παροχέτευσης.



Σχήμα Β6. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=20.19$, $\Delta\rho_o =5.0 \text{ kg/m}^3$ και οριζόντια γωνία παροχέτευσης.

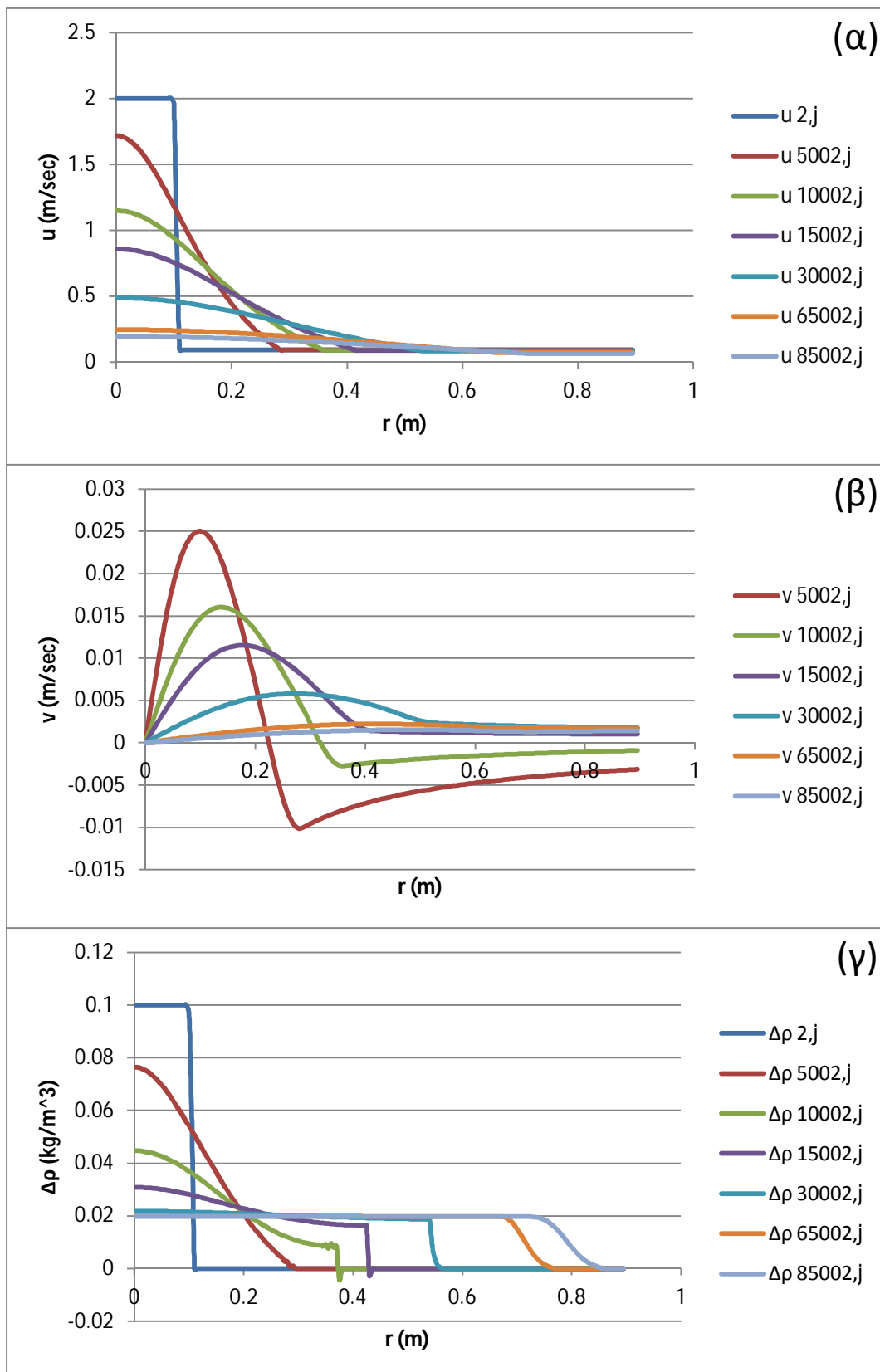


Σχήμα Β7. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=14.28$, $\Delta\rho_o =10.0 \text{ kg/m}^3$ και οριζόντια γωνία παροχέτευσης.

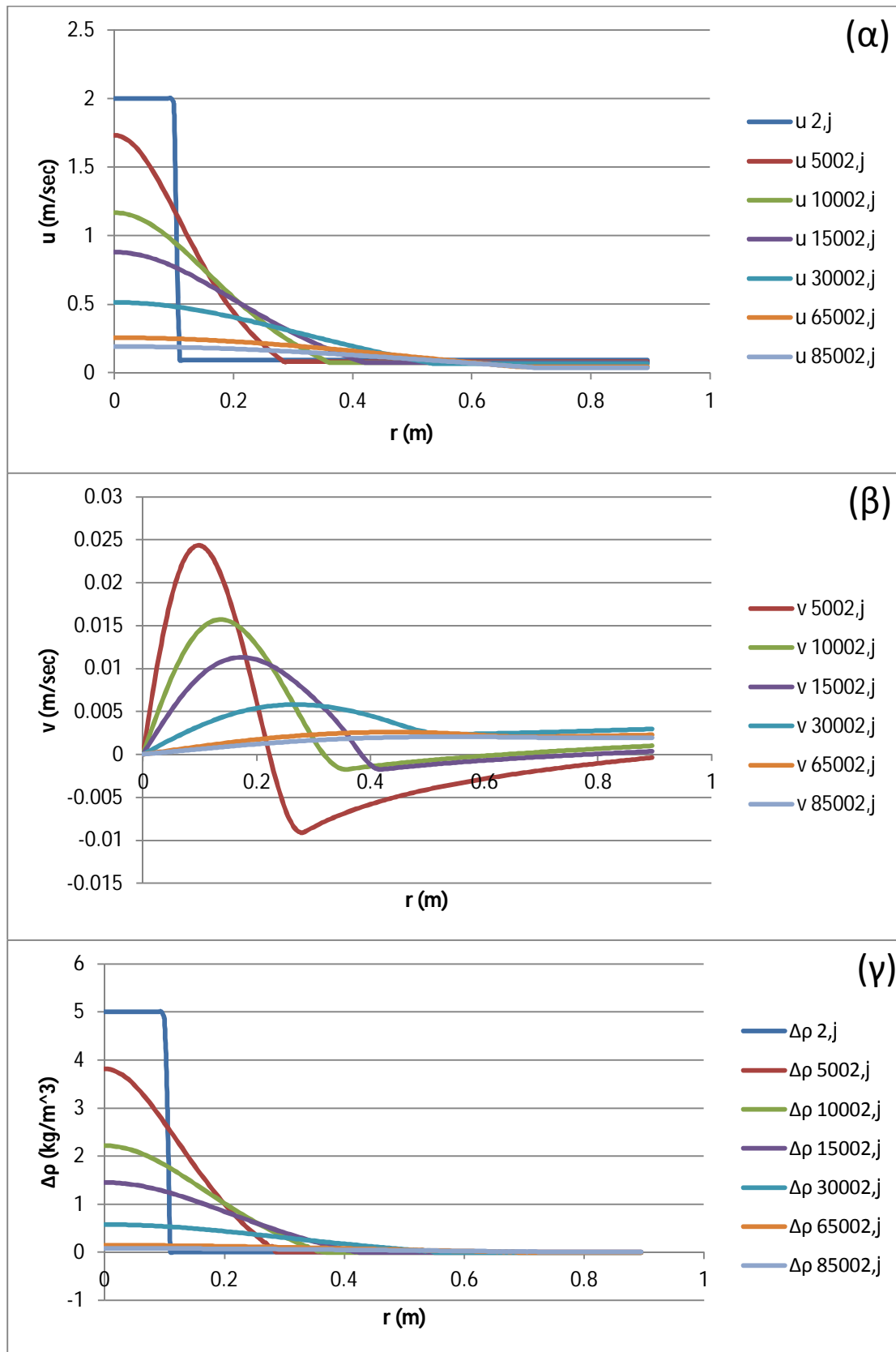


Σχήμα Β8. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_o=11.66$, $\Delta\rho_o = 15 \text{ kg/m}^3$ και οριζόντια γωνία παροχέτευσης.

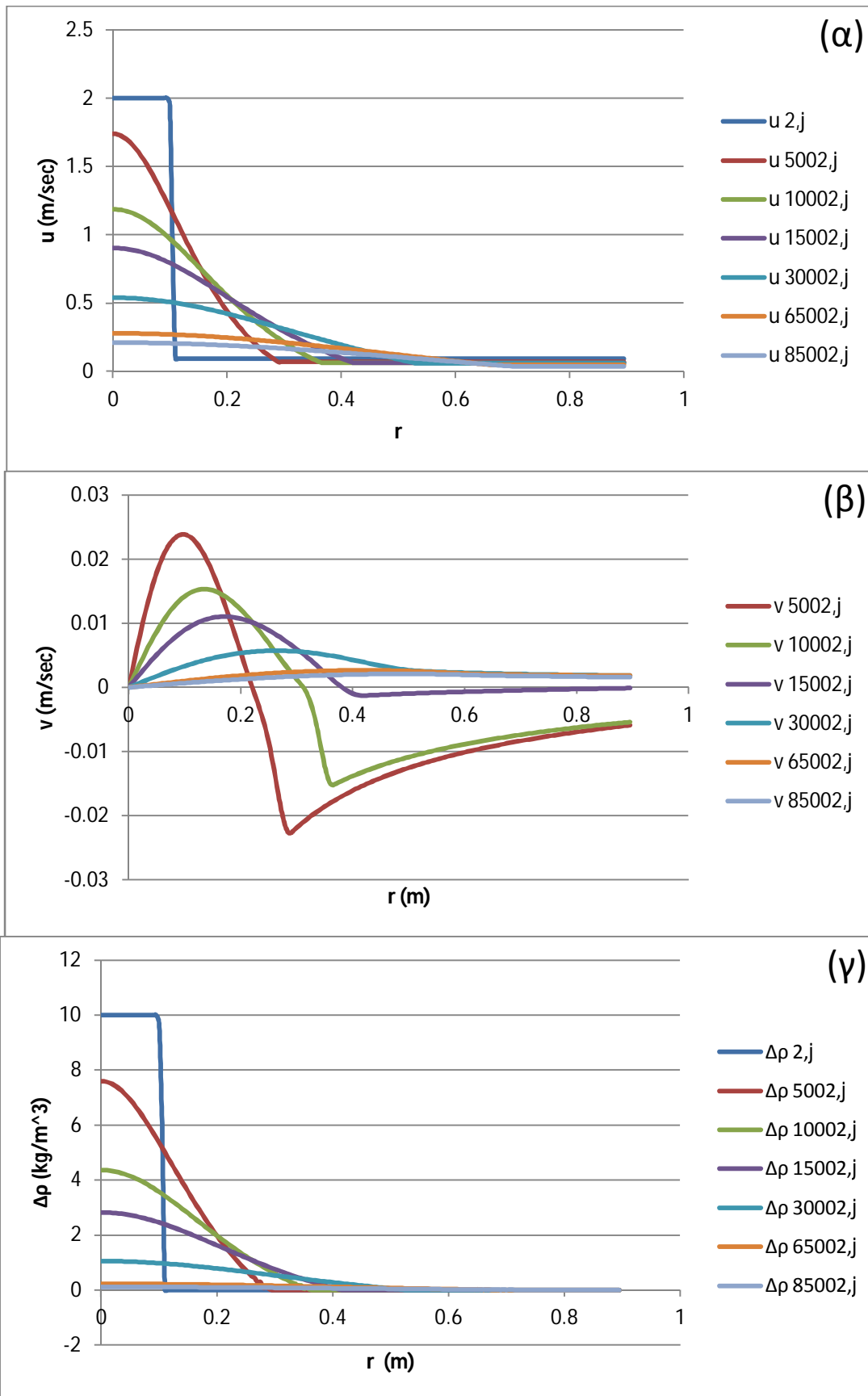
Υπό Γωνία 45°



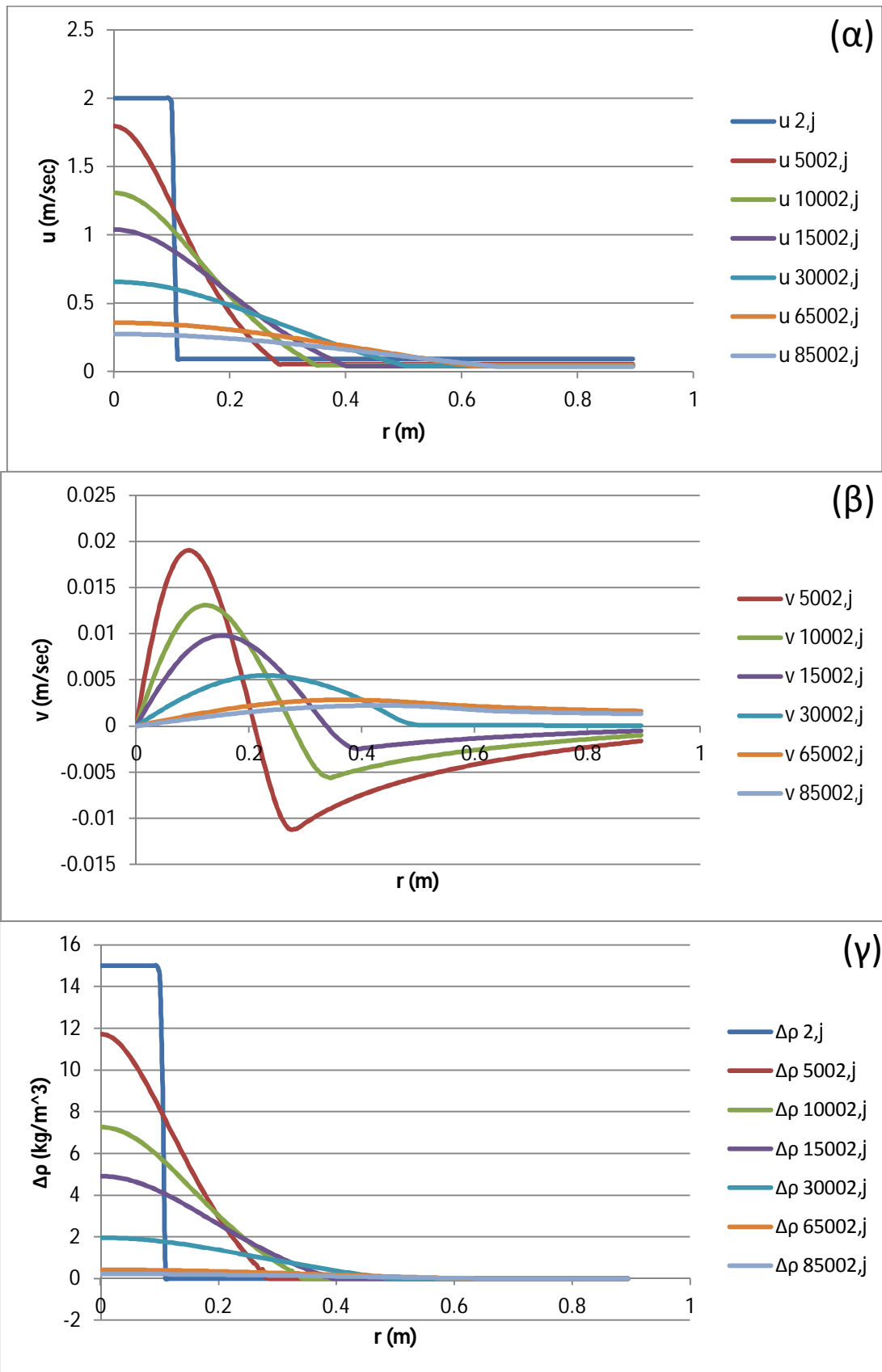
Σχήμα Β9. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_0=142.78$, $\Delta\rho_0 = 0.1 \text{ kg/m}^3$ και γωνία παροχέτευσης 45° .



Σχήμα Β10. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_0=20.19$, $\Delta\rho_0 = 5\text{kg/m}^3$ και γωνία παροχέτευσης 45° .



Σχήμα Β11. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_0=14.28$, $\Delta\rho_0=10\text{kg/m}^3$ και γωνία παροχέτευσης 45° .



Σχήμα Β12. Εγκάρσιο προφίλ (α) ταχύτητας u , (β) ταχύτητας v και (γ) πυκνομετρικής διαφοράς $\Delta\rho$ σε χαρακτηριστικές διατομές της φλέβας, για $Fr_0=11.66$, $\Delta\rho_0 = 15\text{kg/m}^3$ και γωνία παροχέτευσης 45° .