ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ

ΤΣΟΥΤΣΗ ΧΡΥΣΑΥΓΗΣ

ΣΤΟΝ ΤΟΜΕΑ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΜΕ ΘΕΜΑ

« Θεωρία Ουρών Αναμονής »

Επιβλέπων:Ιωάννης Κολέτσος , Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής Επιτροπή:

Βασίλειος Κοκκίνης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αλέξης Παπαϊωάννου, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ιωάννης Κολέτσος, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 18 Ιουλίου 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ :

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Τι είναι Επιχειρησιακή Έρευνα?

Γενικά η Επιχειρησιακή Έρευνα συχνά αναφέρεται και ως η επιστήμη των αποφάσεων ή ως η επιστήμη της διαχείρισης. Είναι μια διεπιστημονική μαθηματική επιστήμη που επικεντρώνεται στην αποτελεσματική χρήση της τεχνολογίας από τις οργανώσεις. Βέβαια ο όρος «Επιχειρησιακή» (Operational ή Operations) έχει την έννοια της διαδικασίας ή της λειτουργίας και όχι της εταιρείας καθ'αυτής. Αντίθετα , άλλοι τεχνολογικοί και μηχανολογικοί κλάδοι, έχουν ως εστίαση την ανάπτυξη αυτής της επιστήμης για την παραγωγή μοντέλων-λύσεων.

Παρακάτω παρατίθενται ορισμοί που έχουν διατυπωθεί για την Επιχειρησιακή Έρευνα:

Ορισμός Εταιρείας Επιχειρησιακής Έρευνας UK:

Η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα που ανακύπτουν στη διεύθυνση και διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια στις επιχειρήσεις.

Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.
Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά.

Ορισμός Ackoff - Sasienni

Επιχειρησιακή Έρευνα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι:η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων από μικτές ομάδες σε προβλήματα που αφορούν τον έλεγχο οργανωμένων συστημάτων (αποτελούμενων από ανθρώπους και μηχανές) κατά τρόπο ώστε να παρέχουν λύσεις που εξυπηρετούν κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τους σκοπούς του οργανισμού ως συνόλου.

Ο Ελληνικός Ορισμός της Επιχειρησιακής Ερευνας

Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επιστημονική προετοιμασία των Αποφάσεων της Διοικήσεως (με την επιστημονική ανάλυση των Δεδομένων και τη δημιουργία μαθηματικών προτύπων).

Προέλευση Επιχειρησιακής Έρευνας:

Από την έλευση της βιομηχανικής επανάστασης,ο κόσμος γνώρισε μια αξειοσημείωτη ανάπτυξη, στο μέγεθος και στην πολυπλοκότητα των οργανισμών.Τα μικρά μαγαζιά των τεχνιτών παλαιοτέρων εποχών εξελίχθηκαν στις επιχειρησεις δισεκατομμυρίων του σήμερα.Ένα αναπόσπαστο κομμάτι αυτής της επαναστατικής αλλαγής ήταν μία απίστευτη αύξηση στο τομέα της εργασίας και η κατάτμηση των ευθυνών διαχείρισης σ'αυτές τις επιχειρήσεις.Τα αποτελέσματα ήταν θεαματικά.Παρ'όλα αυτά,η αυξανόμενη εξειδίκευση δημιούργησε καινούργια προβλήματα ,τα οποία απασχολούν ακόμα πολλές επιχειρήσεις.Ένα πρόβλημα είναι η τάση πολλών μελών μιας επιχείρησης να αναπτύσσονται σε σχετικά αυτόνομες αυτοκρατορίες με τους δικούς τους στόχους και συστήματα αξιολόγησης,με αποτέλεσμα να μην αντιλαμβάνονται πως οι δικές τους δραστηριότητες και στόχοι μπλέκουν με αυτές της υπόλοιπης επιχείρησης.Ένα άλλο σχετικό πρόβλημα είναι το ότι καθώς η πολυπλοκότητα και η εξειδίκευση σε έναν οργανισμό αυξάνονται,γίνεται όλο και πιο δύσκολη η κατανομή των διαθέσιμων πηγών στις διάφορες δραστηριότητες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αποτελεσματική για την επιχείρηση σαν σύνολο.Αυτού του είδους τα προβλήματα και η ανάγκη ενός καλύτερου τρόπου για να λυθούν και μάλιστα άμεσα,δημιούργησε την ανάγκη της επιχειρησιακής έρευνας(operational research).

Οι ρίζες της Επιχειρησιακής Έρευνας μπορούν να ανιχνευθούν πολλές δεκαετίες πίσω,όπου πρώιμες προσπάθειες έγιναν για την χρησιμοποίηση επιστημονικών προσεγγίσεων στην διαχείριση των επιχειρήσεων.Παρ'όλα αυτά ,η αρχή της Επιχιερησιακής Έρευνας έχει γενικά αποδοθεί στις στρατιωτικές υπηρεσίες στις αρχές του 2^{ου} Παγκοσμίου Πολέμου.Εξαιτίας του πολέμου υπήρχε μια επείγουσα ανάγκη να διανεμηθούν διασκορπισμένες πηγές στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις με αποτελεσματικό τρόπο.Γι'αυτό το λόγο η βρετανική και η αμερικανική στρατιωτική διαχείριση ,κάλεσε ένα μεγάλο αριθμό επιστημόνων για να εφαρμόσουν μια επιστημονική προσέγγιση για να αντιμετωπίσουν κι άλλα προβλήματα στρατηγικής και τακτικής.Για την ακρίβεια τους ζητήθηκε να κάνουν έρευνα πάνω σε (στρατιωτικές) επιχειρήσεις.Αυτές οι επιστημονικές ομάδες ήταν οι πρώτες ομάδες Επιχειρησιακής Έρευνας. Αναπτύσσοντας αποτελεσματικές μεθόδους χρησιμοποιώντας το καινούργιο εργαλείο του ραντάρ,αυτές οι ομάδες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο σε αρκετές πολεμικές επιχειρήσεις.

Όταν ο πόλεμος τελείωσε , η επιτυχία της Επιχειρησιακής Έρευνας στην πολεμική προσπάθεια κινητοποίησε το ενδιαφέρον για την εφαρμογή της εκτός του στρατιωτικού τομέα.Καθώς η βιομηχανική «έκρηξη» συνέχιζε την πορεία της μετά το τέλος του πολέμου,τα προβλήματα που προκαλούνταν απ’την αυξημένη πολυπλοκότητα και εξειδίκευση στις επιχειρήσεις έρχονταν πάλι στο προσκήνιο.Γινόταν προφανές σ’ένα μεγάλο αριθμό αθρώπων ότι αυτά τα προβλήματα ήταν σχεδόν ταυτόσιμα με αυτά που είχαν αντιμετωπίσει κατά τη διάρκεια του πολέμου στον στρατιωτικό τομέα απλά σε ένα διαφορετικό πλαίσιο.Από τις αρχές του 1950 ,αυτά τα άτομα,τα οποία είχαν υπηρετήσει μόνα τους ή με τις ομάδες της Ε.Ε. κατά τη διάρκεια του πολέμου,σύστησαν τη χρήση της Ε.Ε. σε μια ποικιλία οργανισμών στον επιχειρηματικό,βιομηχανικό και κυβερνητικό τομέα.Η ταχεία διάδοση της Επιχειρησιακής Έρευνας ακολούθησε σύντομα.

Τουλάχιστον δύο άλλοι παράγοντες έπαιξαν σημαντικό ρόλο σ’αυτή την γρήγορη ανάπτυξη της Ε.Ε. κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου .Ο ένας ήταν η ουσιώδης πρόοδος που έγινε για την βελτίωση των μεθόδων της Ε.Ε.Μετά τον πόλεμο,πολλοί απ’τους επιστήμονες που είχαν συμμετάσχει στις ομάδες της Ε.Ε. ή που είχαν ακούσει σχετικά με αυτή απέκτησαν κίνητρο για να διεξάγουν έρευνα σχετική με τον τομέα αυτό κάτι το οποίο οδήγησε σε εξελίξεις.Ένα πρώιμο παράδειγμα είναι η μέθοδος simplex για τη λύση γραμμικών προγραμματιστικών προβλημάτων,η οποία αναπτύχθηκε από τον George Dantzig το 1947.Πολλά από τα βασικά εργαλεία της Ε.Ε. ,όπως ο γραμμικός προγραμματισμός,ο δυναμικός προγραμματισμός,ο δυναμικός προγραμματισμός η θεωρία ουρών αναμονής και η θεωρία απογραφών αναπτύχθηκαν σχετικά ολοκληρωμένα πριν τα τέλη της δεκαετίας του ’50.

Ένας δεύτερος παράγοντας που έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη του τομέα της Ε.Ε. ήταν η επανάσταση των ηλεκτρονικών υπολογιστών.Ένα μεγάλο κομμάτι υπολογισμών απαιτείται συνήθως για την αποτελεσματική αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων που αφορούν την Ε.Ε.Γι’ αυτό το λόγο η ανάπτυξη ηλεκτρονικών,ψηφιακών υπολογιστών με την ικανότητα τους να διεξάγουν αριθμητικούς υπολογισμούς χίλιες ή και εκατομμύρια φορές πιο γρήγορα από έναν άνθρωπο ήταν ένα τεράστιο δώρο για την Ε.Ε.Μία ακόμα μεγαλύτερη ώθηση ήρθε την δεκαετία του ’80 με την ανάπτυξη αυξανόμενα δυνατών,προσωπικών υπολογιστών συνοδευόμενων από καλά,λογισμικά πακέτα για την υλοποίηση της Ε.Ε.Αυτό έκανε πιο μαζική τη χρήση της Ε.Ε. από μεγάλο αριθμό ανθρώπων.Σήμερα κυριολεκτικά εκατομμύρια άτομα έχουν έτοιμη πρόσβαση σε λογισμικό Επιχειρησιακής Έρευνας.Σαν συνέπεια μια μεγάλη ποικιλία υπολογιστών χρησιμοποιούνται συνεχώς για την λύση προβλημάτων Ε.Ε.

Η Φύση της Επιχειρησιακής Έρευνας:

Όπως δηλώνει και το όνομά της,η Ε.Ε. περιλαμβάνει «έρευνα των επιχειρήσεων».Έτσι η Ε.Ε. εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν τη διεξαγωγή και τον συντονισμό των επιχιερήσεων(δηλαδή των δραστηριοτήτων) μέσα σ'έναν οργανισμό . Η φύση του οργανισμού ουσιατικά δεν παίζει ρόλο καθώς η Ε.Ε. έχει εφαρμοσθεί εκτενώς σε τόσο διαφοροποιημένους τομείς όπως αυτός των κατασκευών,των μεταφορών,των τηλεπικοινωνιών,των οικονομικών ,της υγείας,του στρατού και των δημόσιων υπηρεσιών κ.ά.Γι'αυτό το λόγο και το πλάτος των εφαρμογών της είναι ασυνήθιστα ευρύ.

Το κομμάτι της έρευνας σημαίνει ότι η Ε.Ε. χρησιμοποιεί μία προσέγγιση που μοιάζει με τον τύπο έρευνας που διεξάγεται σε εδραιωμένα επιστημονικά πεδία (συχνά χρησιμοποιείται και ο όρος «management science» αντί του όρου «operational research»).Συγκεκριμένα η διαδικασία ξεκινά με την προσεκτική παρατήρηση και μοντελοποίηση του προβλήματος.Στη συνέχεια κατασκευάζεται έναν επιστημονικό (συνήθως μαθηματικό) μοντέλο που στόχο έχει να απομονώσει την ουσία του πραγματκού προβλήματος.Αυτό το μοντέλο θεωρείται ότι είναι επαρκώς ακριβές για την αναπαράσταση των βασικών συστατικών του προβλήματος ώστε τα αποτελέσματα που προκύπτουν απ'αυτό είναι επίσης αξιόπιστα.Μετά διεξάγονται κατάλληλα πειράματα για να εξετασθεί αυτή η υπόθεση και εν τέλει να επαληθευθεί κάποια μορφή της αρχικής υπόθεσης (επαλήθευση μοντέλου).Βέβαια πρέπει να σημειωθεί ότι πέρα από την επιστημονική έρευνα σε θεμελιώδη πεδία των επιχειρήσεων,η Ε.Ε. αφορά την πρακτική διαχείριση ενός οργανισμού .Γι'αυτό το λόγο για να είναι επιτυχής πρέπει να παρέχει θετικά ,κατανοητά αποτελέσματα.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι η ευρεία της άποψη,καθώς υιοθετεί μία οργανωτική αντιμετώπιση των πραγμάτων.Έτσι προσπαθεί να λύσει τα αντικρουόμενα συμφέροντα ανάμεσα στα μέλη ενός οργανισμού με τέτοιο τρόπο που να ωφελεί τον οργανισμό σαν σύνολο.Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι η μελέτη κάθε προβλήματος πρέπει να λαμβάνει υπ'όψιν της εξονυχιστικά όλες τις πτυχές του οργανισμού αλλά θα πρέπει να είναι συνεπής με τους στόχους της επιχείρησης σαν σύνολο.

Ένα επιπρόσθετο χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ότι συχνά προσπαθεί να βρει μια «καλή» λύση (συχνά αναφερόμενη ως βέλτιστη λύση) για το τρέχον πρόβλημα.(Λέμε μια καλή ή μια βέλτιστη λύση κι όχι ΤΗΝ βέλτιστη λύση διότι μπορεί να υπάρχουν πολλές «βέλτιστες λύσεις»).

Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά οδηγούν φυσικά σ'ένα ακόμα χαρακτηριστικό.Είναι προφανές ότι κανένα άτομο μεμονωμένα δεν πρέπει να θεωρείται ως ειδικό σ'όλες τις πτυχές της Ε.Ε.Αυτό απαιτεί μια ομάδα- σύνολο ατόμων τα οποία έχουν διαφορετικό υπόβαθρο και ικανότητες.Γι'αυτό κι όταν διεξάγεται μια μελέτη Επιχειρησιακής Έρευνας σχετικά με κάποιο νέο πρόβλημα,είναι συχνά απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί μια «ομάδα προσέγγισης»(team approach).Αυτή η ομάδα χρειάζεται να περιλαμβάνει άτομα που είναι υψηλά εκπαιδευμένα στα μαθηματικά,στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων,στις κοινωνικές επιστήμες και τις ειδικές τεχνικές της Ε.Ε.Η ομάδα χρειάζεται επίσης την απαραίτητη εμπειρία αλλά και ποικιλία ικανοτήυων ώστε να δώσει την πρέπουσα εξέταση στα πολλά «παρακλάδια» ενός προβλήματος μέσα στην επιχείρηση.

Ο Αντίκτυπος της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει έναν εντυπωσιακό αντίκτυπο στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας πολλών οργανισμών σ'όλο τον κόσμο.Στην πορεία ,η Ε.Ε. συνείσφερε σημαντικά στην αύξηση της παραγωγικότητας των οικονομιών διαφόρων χωρών.Σήμερα υπάρχουν μερικές δεκάδες χώρες – μέλη στη Διεθνή Ομοσπονδία Κοινωνιών-Κοινοτήτων(?) Επιχειρησιακής Έρευνας (International Federation of Operational Research Societies),με την κάθε χώρα να έχει διεθνή κοινότητα Ε.Ε.Και η Ευρώπη και η Ασία έχουν ομοσπονδίες Ε.Ε. για να συντονίζουν διεθνή συνέδρια και να εκδίδουν διεθνή Τύπο σε αυτές τις ηπείρους.

Ένα Παράδειγμα (Μεγιστοποίησης ενός προϊόντος)

Ένας παραγωγός παράγει ένα προϊόν έστω με την ονομασία Wozac σε τεράστιες ποσότητες θερμαίνοντας ένα χημικό μείγμα σε κοντέινερ υψηλής πίεσης.Κάθε φορά που μια παρτίδα βρίσκεται σε εξέλιξη μια διαφορετική ποσότητα Wozac παράγεται.Το ποσό που παράγεται είναι *η παρτίδα διαδικασίας* (η οποία μετράται σε λίβρες) .Ο παραγωγός ενδιαφέρεται να καταλάβει τους παράγοντες που επηρεάζουν την παρτίδα Wozac που παράγεται.

Η λύση μέσω μιας μοντελοποίησης της διαδικασίας είναι:

Ο παραγωγός πρώτα ενδιαφέρεται να προσδιορίσει τους παράγοντες που επηρεάζουν την παρτίδα που παράγεται από την όλη διαδικασία.Αυτό μπορεί ν'αναφέρεται σαν ένα «περιγραφικό μοντέλο» καθώς περιγράφει την συμπεριφορά του πραγματικού προϊόντος που παράγεται σαν συνάρτηση διαφόρων παραγόντων.

Ο παραγωγός μπορεί να προσδιορίσει (μέσω κατάλληλων μεθόδων)ότι οι ακόλουθοι παράγοντες επηρεάζουν την παραγόμενη παρτίδα.

- Ο όγκος των κοντέινερ σε λίτρα (V).
- Η πίεση του κοντέινερ σε ml(milliliters) (P)
- Η θερμοκρασία του κοντέινερ σε βαθμούς Κελσίου(T)
- Η χημική σύνθεση του επεξεργασμένου χημ.μείγματος

Αν θεωρήσουμε A,B,C το ποσοστό του μείγματος που φτιάχνουν τα χημικά A,B,C τότε ο παραγωγός μπορεί να βρει για παράδειγμα ότι:

(1) παρτίδα= 300 +0.8V + 0.01P + 0.06T + 0.001T*P – 0.01T^2 – 0.001P^2 + 11.7A + 9.4B + 16.4C + 19A*B + 11.4A*C – 9.6B*C

Για να προσδιορίσει αυτή τη σχέση ,η παρτίδα προϊόντος που παράγεται θα πρέπει να μετρηθεί για πολλούς διαφορετικούς συνδυασμούς των προαναφερόμενων παραγόντων.Η γνώση αυτής της εξίσωσης θα δώσει τη δυνατότητα στον παραγωγό να περιγράψει το ποσό του παραγόμενου προϊόντος όταν είναι γνωστά τα μεγέθη του όγκου,της πίεσης, της θερμοκρασίας και της χημικής σύνθεσης.

ΘΕΩΡΙΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Οι ουρές αναμονής είναι μέρος της καθημερινότητάς μας.Όλοι μας είμαστε αναγκασμένοι συχνά να περιμένουμε σε ουρές για να αγοράσουμε ,για παράδειγμα, ένα εισητήριο , να κάνουμε μια κατάθεση σε μια τράπεζα,να πληρώσουμε για ψώνια κ.ά.Έχουμε συνηθίσει λοιπόν τις πολλές ώρες αναμονής,αλλά παρ'όλα αυτά ενοχλούμαστε πολύ από αυτές.

Το να περιμένεις σε μια ουρά δεν είναι απλά θέμα προσωπικής μόνον ενόχλησης.Το ποσό του χρόνου που ξοδεύει στην αναμονή ο πληθυσμός ενός έθνους,είναι μέγιστος παράγοντας για την ποιότητα της ζωής καθώς και για την αποτελεσματικότητα της εθνικής οικονομίας.

Μεγάλα προβλήματα στην αποτελεσματικότητα προκαλούνται επίσης και σε άλλους τομείς , οι οποίοι δεν αφορούν την αναμονή ανθρώπων.Για παράδειγμα , μηχανές οι οποίες περιμένουν σε «ουρά» για να επισκευασθούν μπορεί να προκαλέσει μεγάλη απώλεια χρήματος.Αεροπλάνα που περιμένουν να απογειωθούν ή να προσγειωθούν μπορεί να διαταράξουν το πρόγραμμα επόμενων προγραμματισμένων δρομολογίων.

Η Θεωρία Ουρών Αναμονής λοιπόν, είναι η μελέτη της «αναμονής» σε όλες αυτές και όχι μόνο τις καταστάσεις.Χρησιμοποιεί *μοντέλα ουρών* για να αναπαραστήσει τους διάφορους τύπους *συστημάτων ουρών* (συστήματα που περιλαμβάνουν κάποιο είδος ουρών αναμονής) τα οποία προκύπτουν στην πράξη.Οι φόρμουλες κάθε μοντέλου υποδεικνύουν πώς το τρέχον σύστημα ουράς θα πρέπει να λειτουργήσει, περιλαμβάνοντας ένα μέσο χρόνο αναμονής που θα προκύψει κάτω από ποκίλλες, πιθανές καταστάσεις.

Γι'αυτό το λόγο αυτά τα μοντέλα ουρών αναμονής είναι πολύ βοηθητικά στον προσδιορισμό του τρόπου λειτουργίας ενός συστήματος ουράς αναμονής ώστε να είναι ο πιο αποτελεσματικός. Δεδομένου ότι μεγάλη εξυπηρέτηση για να λειτουργήσει το σύστημα απαιτεί πολύ μεγάλο κόστος. Αλλά και έλλειψη επαρκούς εξυπηρέτησης έχει ως αποτέλεσμα πολύ μεγάλη αναμονή και όλες φυσικά τις συνέπειές της. Τα μοντέλα παρέχουν την δυνατότητα εύρεσης της κατάλληλης ισορροπίας μεταξύ κόστους εξυπηρέτησης και χρόνου αναμονής.

Παράδειγμα:

Ένα εστιατόριο fast-food έχει 3 υπαλλήλους στο γκισέ που εξυπηρετούν.Ο υπεύθυνος του εστιατορίου έκανε μια μελέτη για να ερευνήσει κάποια παράπονα που έγιναν σχετικά με το γεγονός ότι η εξυπηρέτηση είναι αργή.Η μελέτη έδειξε την παρακάτω σχέση μεταξύ του αριθμού των υπαλλήλων που παίρνουν παραγγελία στο γκισέ και του χρόνου αναμονής για την εξυπηρέτηση των πελατών.

Αρ.υπαλ.:	1	2	3	4	5	6	7
Μέσος χρ. **Αναμονής(min)**	16.2	10.3	6.9	4.8	2.9	1.9	1.3

Μία μελέτη λοιπόν αυτών των δεδομένων μας δείχνει ένα μέσο χρόνο αναμονής 7 λεπτών για τον τρέχον αριθμό των τριών υπαλλήλων.Πέντε υπάλληλοι χρειάζονται για να μειωθεί ο χρόνος αναμονής στα 3 λεπτά.

Γενικά λοιπόν,όπως προαναφέρθηκε,οι ουρές αναμονής εμφανίζονται σε συστήματα εξυπηρέτησης όπου η ζήτηση για κάποια υπηρεσία δεν μπορεί να ικανοποιηθεί μερικές φορές άμεσα από την δυναμικότητα του συστήματος που παρέχει την εξυπηρέτηση,λόγω των τυχαίων διακυμάνσεων που παρατηρούνται τόσο στο ρυθμό προσέλευσης όσο και στον χρόνο εξυπηρέτησης κάθε πελάτη από το σύστημα.Η απόδοση του συστήματος αξιολογείται με βάση τις τιμές ορισμένων βασικών δεικτών(δείκτες απόδοσης- μέτρα λειτουργικότητας),όπως για παράδειγμα ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά,ο συνολικός μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα,το ποσοτό απασχόλησης της θέσης εξυπηρέτησης ή των θέσεων εξυπηρέτησης κτλ.Στόχος της μελέτης ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας του υπό τον όρο ότι οι τιμές των δεικτών απόδοσης του συστήματος ικανοποιούν κάποιες ελάχιστες προδιαγραφές.

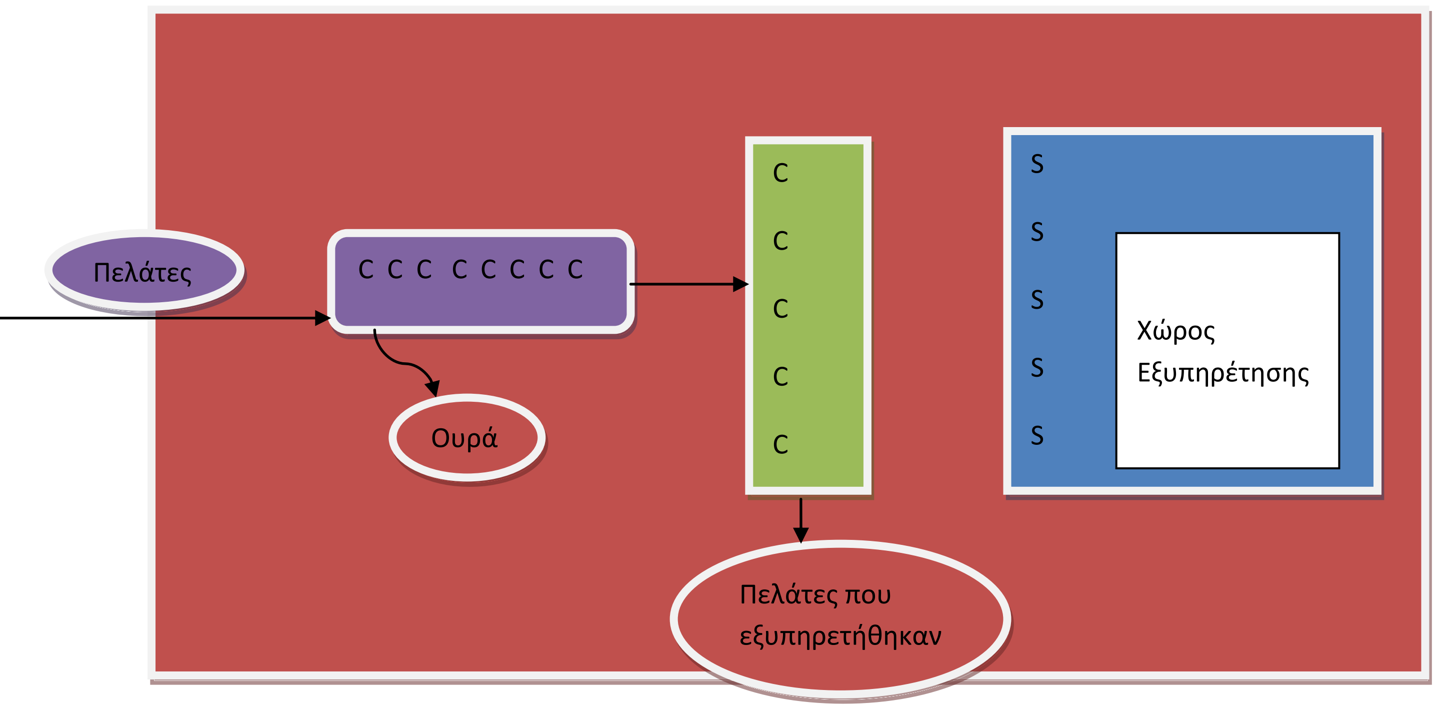
ΕΝΑ ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Θ.ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ:

Ο χώρος των επειγόντων περιστατικών ενός τοπικού, δημόσιου νοσοκομείου,ο οποίος παρέχει γρήγορη ιατρική περίθαλψη για επείγοντα περιστατικά τα οποία φθάνουν στο νοσοκομείο με ασθενοφόρο ή με κάποιο ιδιωτικό όχημα.Σε οποιαδήποτε στιγμή υπάρχει πάντα ένας γιατρός επί του καθήκοντος στο χώρο των επειγόντων . Παρ'όλα αυτά εξαιτίας της αυξανόμενης τάσης των ασθενών να χρησιμοποιούν τις υπηρεσίες που προσφέρονται στο χώρο των επειγόντων του νοσοκομείου παρά να πάνε σε κάποιο ιδιωτικό γιατρό,το νοσοκομείο αντιμετωπίζει μία συνεχή αύξηση στον αριθμό των περιστατικών.Σαν αποτέλεσμα ,έχει γίνει σύνηθες σε πολλούς ασθενείς να φθάνουν στις ώρες αιχμής(νωρίς το βράδυ) και να περιμένουν μέχρι να έρθει η σειρά τους να εξυπηρετηθούν από τον γιατρό που εφημερεύει.Γι' αυτό το λόγο έγινε μία πρόταση να προστεθεί ένας δεύτερος γιατρός στο χώρο κατά τη διάρκεια των ωρών αιχμής,έτσι ώστε δύο περισπτώσεις επειγόντων περιστατικών να εξυπηρετούνται ταυτόχρονα. Ο υπεύθυνος διαχείρισης του νοσοκομείου ανέλαβε να μελετήσει το παραπάνω αίτημα. Ο υπεύθυνος διαχείρισης ξεκίνησε με το να συγκεντρώνει σχετικά,ιστορικά δεδομένα και μετά να προβάλλει αυτά τα δεδομένα στον επόμενο χρόνο.Αναγνωρίζοντας ότι ο χώρος των επειγόντων είναι μία περίπτωση ουράς αναμονής,εφάρμοσε διάφορα,εναλλακτικά μοντέλα της θεωρίας ουρών αναμονής,για να προβλέψει τα χαρακτηριστικά της αναμονής του συστήματος με ένα γιατρό και με δύο γιατρούς.

ΜΙΑ ΒΑΣΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ:

Όπως προαναφέρθηκε η θεωρία της ουράς αναμονής εφαρμόζεται σε διάφορες περιπτώσεις ουρών αναμονής(waiting –line situations).Παρ'όλα αυτά η επικρατέστερη κατάσταση είναι η ακόλουθη:

Μία γραμμή αναμονής,η οποία κατά διαστήματα μπορεί να είναι και άδεια, σχηματίζεται μπροστά από ένα χώρο εξυπηρέτησης,στον οποίο μπορεί να υπάρχει ένας ή περισσότεροι εξυπηρετητές.Κάθε πελάτης «γεννάται» από μία πηγή αφίξεων και εξυπηρετείται από έναν εξυπηρετητή,ίσως μετά από κάποιο χρόνο αναμονής στην ουρά.



Το παραπάνω διάγραμμα που απεικονίζει την ένα βασικό σύστημα αναμονής αντικατροπτίζει και το πρότυπο παράδειγμα του νοσοκομείου που αναφέρθηκε.Η πηγή αφίξεων «παράγει» τους πελάτες υπό μορφή επειγόντων περιστατικών που απαιτούν ιατρική περίθαλψη.Ο χώρος των επειγόντων είναι ο χώρος εξυπηρέτησης και οι γιατροί είναι οι εξυπηρετητές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Η Θεωρία Ουρών Αναμονής δεν εφαρμόζεται μόνο σε ειδικές περιπτώσεις αλλά αποτελεί ένα εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλούς και διάφορους τομείς της σύγχρονης ζωής. Μερικές βασικές κατηγορίες περιπτώσεων που χρησιμοποιείται η Θεωρία Ουρών Αναμονής είναι οι εξής:

Αρχικά,ένα σημαντικό παράδειγμα συστημάτων ουράς αναμονής είναι τα συστήματα εμπορικών υπηρεσιών, στα οποία οι πελάτες γίνονται αποδέκτες υπηρεσιών από εμπορικούς οργανισμούς.Πολλοί από αυτούς περιλαμβάνουν διαπροσωπική επαφή σ'ένα συγκεκριμένο και σταθερό τόπο,όπως για παράδειγμα σ'ένα κομμωτήριο, στο γκισέ μιας τράπεζας, στο ταμείο ενός καταστήματος κτλ.

Μία άλλη κατηγορία είναι τα συστήματα υπηρεσιών μεταφοράς.Για μερικά από αυτά τα συστήματα , τα μεταφορικά μέσα είναι οι πελάτες (π.χ. ένα πλοίο που περιμένει να «φορτώσει» με ένα πλήρωμα,το οποίο αποτελεί τους εξυπηρετητές). Σε άλλες περιπτώσεις τα μέσα μεταφοράς είναι οι εξυπηρετητές (π.χ. τα ταξί ή οι ανελκυστήρες).

Πρόσφατα , σχετικά ,η Θεωρία Ουρών Αναμονής έχει εφαρμοσθεί κατά πάσα πιθανότητα περισσότερο στα συστήματα «εσωτερικών» υπηρεσιών, στα οποία οι πελάτες είναι ενσωματωμένοι στον οργανισμό που προσφέρει την εκάστοτε υπηρεσία.Για παράδειγμα , οι σταθμοί ελέγχου όπου οι ελεγκτές(εξυπηρετητές) επιθεωρούν-ελέγχουν την ποιότητα διαφόρων προιόντων (πελάτες).

Τέλος ,υπάρχει και η κατηγορία των συστημάτων κοινωνικών υπηρεσιών.Για παράδειγμα ,το δικαστικό σύστημα είναι ένα δίκτυο ουράς αναμονής , στο οποίο τα δικαστήρια είναι εγκαταστάσεις υπηρεσιών , οι δικαστές αποτελούν τους εξυπηρετητές και οι υποθέσεις που αναμένουν να εκδικασθούν είναι οι πελάτες.

Αυτές είναι λοιπόν τέσσερις γενικές κατηγορίες συστημάτων ουρών αναμονής, οι οποίες όμως δεν είναι μοναδικές.Για την ακρίβεια η Θεωρία Ουρών Αναμονής εφαρμόζεται ευρέως στον τομέα των τηλεπικοινωνιών,ένα πολύ σημαντικό τομέα.Παρ'όλα αυτά οι παραπάνω κατηγορίες αντικατροπτίζουν το γεγονός ότι η Θεωρία Ουρών Αναμονής εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς της σύγχρονης κοινωνίας.

Χαρακτηριστικά Συστημάτων Ουρών Αναμονής:

Πηγή Πελατών:Ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις των πελατών θεωρείται άπειρος (πρακτικά πολύ μεγάλου μεγέθους)όπως π.χ. οι πελάτες τραπεζών,αυτοκίνητα σε σταθμούς διοδίων κλπ, ή πεπερασμένος όπως για παράδειγμα ο αριθμός των μηχανημάτων ενός εργοστασίου που αναμένουν επισκευή.(Στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι «πελάτες» θεωρείται άπειρος)

Αφίξεις στο σύστημα:Σε κάθε σύστημα ουράς αναμονής υπάρχουν «πελάτες» οι οποίοι προσέρχονται για εξυπηρέτηση. Με τον γενικό όρο «πελάτης» εννοούμε τα πρόσωπα,αντικείμενα ή συμβάντα που εισέρχονται στο σύστημα για εξυπηρέτηση.Οι αφίξεις σε ένα σύστημα ουράς αναμονής χαρακτηρίζονται από τα εξής βασικά χαρακτηριστικά:

Κατανομή Αφίξεων: Οι «πελάτες» καταφθάνουν στο σύστημα είτε σύμφωνα με κάποιο γνωστό και σταθερό ρυθμό (π.χ. ένα ημικατεργασμένο προΪόν σε ένα σταθμό εργασίας κάθε 15 λεπτά) ή αλλιώς ,όπως στις περισσότερες περιπτώσεις σε «τυχαίες» χρονικές στιγμές (π.χ. ασθενείς σε εφημερίες).Οι αφίξεις θεωρούνται τυχαίες όταν είναι η μία ανεξάρτητη από την άλλη(δεν επηρρεάζεται μία άφιξη από μία προηγούμενη) και η χρονική στιγμή πραγματοποίησής τους δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς.Στην περίπτωση αυτή ο μέσος αριθμός των αφίξεων χαρακτηρίζεται από τον μέσο αριθμό των αφίξεων ανά μονάδα του χρόνου(π.χ. πελάτες ανά ώρα).Στην Θεωρία ουρών αναμονής,η τυχαία μεταβλητή «αριθμός των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου» μπορεί πολλές φορές να προσεγγισθεί από την κατανομή **Poisson** .Αν γίνει αυτό ,τότε η μέση τιμή της Poisson αντιστοιχεί στη μέση τιμή των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου,συμβολίζεται με λ και αποτελεί τον μέσο αριθμό αφίξεων στη μονάδα του χρόνου.Για παράδειγμα αν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης η διαδικασία αφίξεων ακολουθεί την κατανομή Poisson και καταφθάνουν κατά μέσο όρο 10 πελάτες ανά ώρα, τότε λ=10 και αυτό αποτελεί τη μέση τιμής της κατανομής Poisson που χαρακτηρίζει τη διαδικασία αφίξεων. Αν παρασταθεί με Χ το πλήθος των αφίξεων που πιθανόν να πραγματοποιηθούν σε μία ώρα (δηλαδή στη μονάδα του χρόνου), τότε όπως αναφέρθηκε, το Χ είναι τυχαία μεταβλητή και η πιθανότητα να πάρει αυτή κάποια συγκεκριμένη, τιμή έστω x (το x είναι δεδομένος αριθμός), δίνεται από την σχέση:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2,3, \ldots$$

Σημειώστε ότι όταν ο μέσος αριθμός είναι λ(=10 άτομα ανά ώρα όπως αναφέρθηκε παραπάνω),τότε είναι λογικό να υποτεθεί ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις, παρεμβάλλεται χρόνος που κατά μέσο όρο είναι ίσος με 1/λ(= 1/10 ώρες δηλ. 6 λεπτά στο παράδειγμα).

Χρόνος Εξυπηρέτησης:
Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση του πελάτη μπορεί να είναι σταθερός (π.χ. σε ένα αυτόματο πλυντήριο αυτοκινήτων όπου απαιτούνται ακριβώς 10 λεπτά για κάθε όχημα, σε ένα σταθμό επεξεργασίας σε μία βιομηχανία όπου απαιτούνται ακριβώς τρία δευτερόλεπτα για να τοποθετηθεί ένα εξάρτημα), ή όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής, να παρουσιάζει μεταβλητότητα που οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Για πολλές περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την **Εκθετική κατανομή**, με μέση τιμή 1/μ. Για παράδειγμα, αν σε ένα ταμείο μίας τράπεζας ο ταμίας είναι σε θέση να εξυπηρετήσει κατά μέσο όρο 15 άτομα ανά ώρα, τότε λέμε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι το μ=15 άτομα / ώρα και λογικά 1/μ= 1/15 ώρες αποτελεί το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης (δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση είναι 1/μ=1/15 ώρες = 4 λεπτά). Αν με παραστήσετε με Τ το χρόνο που απαιτείται για μία εξυπηρέτηση, τότε το Τ είναι τυχαία μεταβλητή και η πιθανότητα ο χρόνος αυτός να είναι μικρότερος ή ίσος από μία δεδομένη τιμή έστω t, δίνεται από τη σχέση:

$$P(T \leq t) = 1 - e^{\frac{1}{\mu}.t}$$

Όπου **μ** όπως προαναφέρθηκε συμβολίζεται ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται στην χρονική μονάδα.

Θέσεις Εξυπηρέτησης: Για τον πελάτη που αναμένει στην ουρά μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης (π.χ. ταμεία στην τράπεζα, διάδρομοι διοδίων, ταμεία σε υπεραγορές κλπ.). Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη θέση εξυπηρέτησης.

Επίσης, άλλες φορές για την πλήρη εξυπηρέτηση του πελάτη απαιτείται η διαδοχική προσέλευσή του σε περισσότερες από μία θέσεις εξυπηρέτησης, δηλαδή εξυπηρετείται σε διαδοχικές φάσεις (π.χ. η διεκπεραίωση κάποιας εργασίας που απαιτεί εγκρίσεις σε πολλά στάδια).

Λειτουργία της Ουράς Αναμονής: Η ουρά σχηματίζεται από «πελάτες» που αναμένουν τη σειρά τους να εξυπηρετηθούν. Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται ένας πελάτης που αναμένει στην ουρά για να εξυπηρετηθεί είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των συστημάτων ουρών αναμονής και ονομάζεται **πειθαρχεία**. Οι μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι κυρίως οι εξής:

- **FIFO (First In – First Out):** Οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης.
- **LIFO (Last In- First Out)**: Οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα με την σειρά προσέλευσης.
- **Τυχαία επιλογή:** Οι πελάτες επιλέγονται τυχαία από τους αναμένοντες στην ουρά.
- **Προτεραιότητες:** Οι πελάτες χωρίζονται σε κατηγορίες-κλάσεις με διαφορετικές προτεραιότητες.Επιλέγονται πρώτα οι πελάτες με την υψηλή προτεραιότητα.Μεταξύ πελατών με την ίδια κλάση προτεραιότητας επιλέγεται αυτός που αναμένει τον περισσότερο χρόνο(π.χ. άτομα με ειδικές ανάγκες,ηλικιωμένοι κτλ εξυπηρετούνται πρώτα).

Ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο που αφορά την ουρά αναμονής είναι η **χωρητικότητά** της. Η χωρητικότητα της ουράς αναμονής μπορεί να είναι άπειρη (πρακτικά όποιος προσέρχεται μπορεί να μείνει) ή πεπερασμένη(όταν κάποιος προσέρχεται αφού έχουν καταληφθεί όλες οι θέσεις αναμονής,δεν μπορεί να εισέλθει στο σύστημα).

Επιπλέον η συμπεριφορά στην αναμονή των πελατών,όταν μιλάμε για ανθρώπους,παρουσιάζει ενδιαφέρον και παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση της ουράς αναμονής.Οι «ανθρώπινοι» πελάτες μπορεί να μεταπηδήσουν από μια ουρά σε μια άλλη,θεωρώντας ότι έτσι θα μειώσουν τον χρόνο αναμονής τους.Μπορεί επίσης να αρνηθούν να μπουν σε μια ουρά αναμονής ,αντιλαμβανόμενοι ότι ίσως υπάρχει μεγάλη καθυστέρηση, ή ακόμη μπορεί να αποχωρήσουν αν αναμένουν για πολλή ώρα σε μια ουρά.

Συμβολισμός Μοντέλων: Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά λειτουργίας ενός συστήματος ουράς αναμονής χρησιμοποιείται και ένα διαφορετικό μοντέλο για την ανάλυσή του.

Για τη διάκριση των μοντέλων ο D. G. Kendall πρότεινε έναν εύχρηστο συμβολισμό με πέντε σύμβολα που έχει τη γενική μορφή «A/B/s/k/N», όπου τα σύμβολα παριστάνουν τα εξής:

- **A:** θέση για το σύμβολο της κατανομής εισόδου πελατών. Πιθανό σύμβολο για τη θέση A είναι το M, που παριστάνει τη διαδικασία Poisson. Άλλα σύμβολα είναι το G που σημαίνει γενική ή οποιαδήποτε κατανομή (General), και το D που σημαίνει προσδιοριστική διαδικασία εισόδου, δηλαδή με γνωστό και σταθερό ρυθμό (Deterministic).
- **B:** θέση για το σύμβολο της κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης. Χρησιμοποιούνται τα ίδια σύμβολα με την περίπτωση A.
- **s :** θέση για το πλήθος των παράλληλων θέσεων εξυπηρέτησης.
- **k :** θέση για την χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης,όταν οι θέσεις στην ουρά αναμονής είναι περιορισμένες. Το k είναι το πλήθος των θέσεων αναμονής μαζί με τις θέσεις εξυπηρέτησης.
- **N :** θέση για το πλήθος των πελατών στην πηγή,όταν είναι πεπερασμένο.

Όπου
M: εκθετική κατανομή (exponential distribution-Markovian)
D: εκφυλισμένη κατανομή (degenerate distribution)
E_k: Erlang κατανομή (με παράμετρο k)
(G: γενική κατανομή (general distribution))

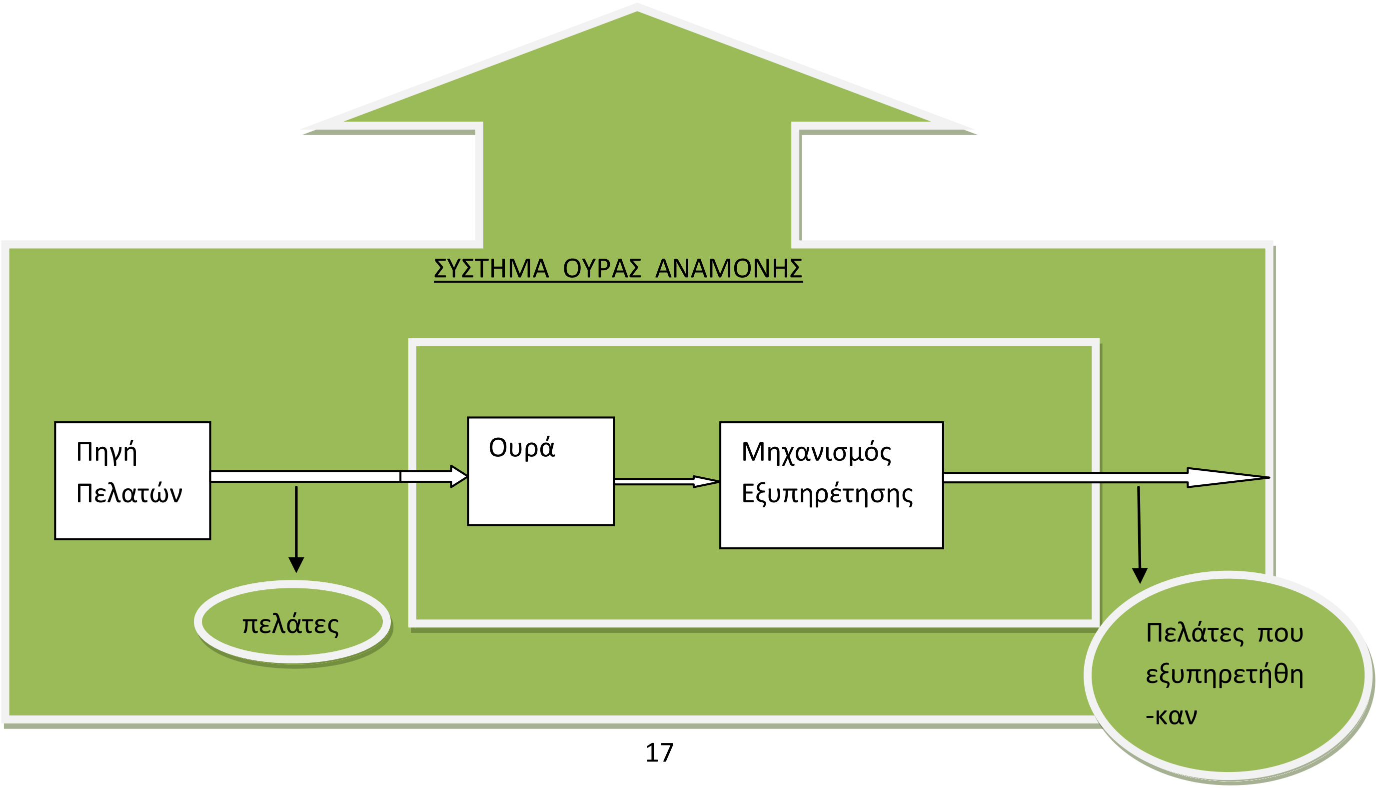
Για παράδειγμα το M/M/s μοντέλο υποθέτει ότι ο χρόνος αφίξεων και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθούν και οι δυο εκθετική κατανομή και ο αριθμός των εξυπηρετητών είναι s (όπου s ακέραιος,θετικός αριθμός).Το M/G/1 μοντέλο υποθέτει ότι οι χρόνοι αφίξεων ακολυθούν εκθετική κατανομή,αλλά δεν παραθέτει συγκεκριμένη κατανομή για το χρόνο εξυπηρέτησης,ενώ ο αριθμός των εξυπηρετητών περιορίζεται στον 1.

Πριν γίνει η παράθεση των μοντέλων, σημειώνεται συνοπτικά (θα αναλυθούν οι επιμέρους σχέσεις και ιδιότητες παρακάτω) ότι όταν στη διαδικασία εισόδου παρατηρείται ότι ισχύει η κατανομή Poisson με <u>μέσο ρυθμό αφίξεων</u> ίσο με λ, τότε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με <u>μέση τιμή</u> ίση με 1/λ. Ομοίως, όταν ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ, τότε το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται σε ένα χρονικό διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ίση με μ. Έχουμε ήδη αναφέρει κάποια στοιχεία σχετικά, ως επιπλέον παράδειγμα όμως, ας υποτεθεί ότι σε ένα κεντρικό υπολογιστικό σύστημα, η διαδικασία εισόδου εργασιών ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ=20 εργασίες το λεπτό. Τότε, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ = 1/20 λεπτά δηλαδή 3 δευτερόλεπτα κατά μέσο όρο. Αυτό είναι πολύ λογικό, αφού όταν σε ένα σύστημα καταφθάνουν <u>κατά μέσο όρο</u> 20 εργασίες το λεπτό, πράγματι μπορεί κανείς να υποθέσει ότι κατά μέσο όρο καταφθάνει μία εργασία ανά 3 δευτερόλεπτα.Προσοχή όμως αυτό δεν σημαίνει ότι στην πραγματικότητα θα καταφθάνει μία εργασία κάθε 3 δευτερόλεπτα σταθερά,απλώς αυτή είναι η μέση συμπεριφορά της διαδικασίας εισόδου.

Από την άλλη πλευρά, ας υποτεθεί ότι στην εξυπηρέτηση του συστήματος αυτού, όπου έχουμε το υπολογιστικό σύστημα (μία θέση εξυπηρέτησης), αυτό δύναται να διεκπεραιώσει, κατά μέσο όρο μία εργασία σε 2 δευτερόλεπτα, ακολουθώντας εκθετική κατανομή για το χρόνο εξυπηρέτησης. Τότε είναι $1/\mu=1/30$ λεπτά (=2 δευτερόλεπτα) και το πλήθος των εργασιών που εξυπηρετούνται ανά λεπτό ακολουθεί την κατανομή Poisson, με μέση τιμή $\mu=30$ εργασίες ανά το λεπτό.

Επίσης, είναι σημαντικό να αναφερθούμε στην έννοια της ***κατάστασης ισορροπίας*** *(steady state).* Ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, όταν η συμπεριφορά του δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που υπάρχουν κατά την έναρξη της λειτουργίας του. Δηλαδή, ένα σύστημα εξυπηρέτησης φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας, όταν παρέλθει ένα εύλογο χρονικό διάστημα από την αρχική του κατάσταση, στη διάρκειά του οποίου εξαλείφεται η επίδραση των συνθηκών εκκίνησης. Η περίοδος που απαιτείται, ώστε το σύστημα να μην εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εκκίνησης και να συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας, ονομάζεται **παροδική περίοδος** (transient period, warm up period). Τα μοντέλα που αναφέρονται παρακάτω και οι τύποι που χρησιμοποιούνται θεωρούν ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Η Βασική Διαδικασία Ουράς Αναμονής:



ΒΑΣΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ:

- Κατάσταση του συστήματος: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα
- Μέγεθος ουράς: ο αριθμός των πελατών που αναμένει στην ουρά να ξεκινήσει η διαδικασία εξυπηρέτησης/η κατάσταστη του συστήματος με τον ελάχιστο αριθμό πελατών στην ουρά που αναμένει
- N(t): ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη χρον.στιγμή t(t≥0)
- p_n (t):η πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς n πελάτες στο σύστημα τη χρον.στιγμή t, δεδομένου του πλήθους τη στιγμή 0
- L : ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $= \sum_{n=0}^{\infty} np_n$
- λ_n : μέσος ρυθμός αφίξεων καινούργιων πελατών όταν n πελάτες βρίσκονται στο σύστημα.(λ αν το λ_n είναι σταθερό για κάθε n)
- μ_n : μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης όταν n πελάτες βρίσκονται στο σύστημα(όταν ο ρυθμός εξυπηρέτησης ανά απασχολούμενο εξυπηρετητή είναι σταθερός για κάθε n≥1 τότε συμβολίζεται με μ και τότε μ_n = sμ όταν το n≥s,δηλ. όλοι οι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι)

Σημείωση: ο μ_n αποτελεί τον συνδυασμένο-από κοινού ρυθμό εξυπηρέτησης με τον οποίο όλοι οι απασχολημένοι εξυπηρετητές αποπερατώνουν την δουλειά τους.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις 1/λ είναι ο μέσος χρόνος αφίξεων και 1/μ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.Επίσης ορίζουμε την ***χρησιμοποίηση της γραμμής ή την ένταση της κίνησης*** ως ρ=λ/(sμ),δηλ. το αναμενόμενο μέρος του χρόνου κατά το οποίο ο κάθε εξυπηρετητής είναι απασχολημένος.

Αναγκαία προϋπόθεση για να είναι ένα σύστημα ουράς αναμονής ευσταθές είναι : ρ ≤ 1. Στις περισσότερες περιπτώσεις η συνθήκη αυτή είναι και επαρκής (η επαρκής συνθήκη για την ακρίβεια είναι ρ < 1).Παρ'όλα αυτά σε περιπτώσεις αρκετά σύνθετων συστημάτων ουρών αναμονής η συνθήκη αυτή μπορεί να μην είναι επαρκής.

- L_q : μέσο μήκος ουράς(εκτός δηλ.των πελατών που εξυπηρετούνται) $= \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\, p_n$
- S = χρόνος αναμονής στο σύστημα για κάθε πελάτη(συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου εξυπηρέτησης)
- T= μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα [T = E {S}]

- W_n =χρόνος αναμονής στην ουρά του κάθε πελάτη
- W= μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά

Σχέσεις μεταξύ L , T ,L_q,**W :**

Υποθέτοντας ότι το λ_n είναι σταθερό λ για κάθε n πελάτη , ισχύει η σχέση για ένα σύστημα ουράς αναμονής που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ότι

$L = \lambda T$ (η οποία αναφέρεται και ως φόρμουλα του Little-Little's formula διότι ο John D.C. Little την απέδειξε με ακρίβεια πρώτος)

Κατ'επέκταση ισχύει και $L_q = \lambda W$

Αν το λ_n δεν είναι το ίδιο για κάθε n , τότε το λ αντικαθίσταται από το **λ** όπου αποτελεί το μέσο ρυθμό αφίξεων

Στη συνέχεια υποθέτοντας ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός και ίσος με 1/μ για κάθε n≥1 , έχουμε τη σχέση $T = W + 1/\mu$

Να σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση που σε κάποια χρονική στιγμή ,κάποιοι πελάτες δεν μπορούν να μπουν στο σύστημα διότι αυτό είναι πλήρες,τότε χρησιμοποιούμε την παράμετρο λ_{eff} ως ρυθμό αφίξεων ,ο οποίος ισούται με τον ρυθμό αφίξεων λ όταν όλοι οι πελάτες που φθάνουν μπορούν να εισέλθουν στο σύστημα.Διαφορετικά,στην περίπτωση δηλ.που το σύστημα είναι πλήρες(π.χ. ένας χώρος στάθμευσης), $\lambda_{eff} < \lambda$.Φυσικά στους προηγούμενους τύπους δεν μεταβάλλεται κάτι,απλά αντικαθιστούμε το λ με το λ_{eff}.

Επιπλέον αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο με τους επιμέρους χρόνους τον τύπο του Little ,προκύπτει και οι ακόλουθος για τα αντίστοιχα μήκη.:

$L = L_q + \lambda/\mu$

Ακόμη μία σχέση μας δίνει και το μέσο πλήθος των απασχολημένων εξυπηρετητών στο σύστημα,με τη λογική ότι αυτό πρέπει να ισούται με τη διαφορά του μέσου πλήθους πελατών στο σύστημα μείον το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά.Δηλ. :

$\bar{s} = L - L_q = \lambda / \mu$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πολύ σημαντικές καθ'ότι παρέχουν τη δυνατότητα στα τέσσερα βασικά μεγέθη L , T , L_q ,W να ορίζονται άμεσα εφ'όσον ένα από αυτά βρεθεί αναλυτικά. Το γεγονός αυτό μας δίνει μεγάλη διευκόλυνση διότι πολλές φορές κάποια από τα παραπάνω μεγέθη είναι πιο εύκολο να βρεθούν από τα άλλα σε περιπτώσεις λύσεων προβλημάτων ουρών αναμονής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε τοπικό,πνευματικό κέντρο υπάρχει ειδικός χώρος για στάθμευση για τους επισκέπτες του κέντρου.Ο χώρος αυτός περιλαμβάνει μόνο πέντε θέσεις στάθμευσης.Τα αμάξια που χρησιμοποιούν το χώρο αυτό φθάνουν σύμφωνα με Poisson κατανομή ,με ρυθμό έξι αμάξια ανά ώρα.Ο επιτρεπόμενος χρόνος στάθμευσης ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 30 λεπτά.Οι επισκέπτες που δεν μπορούν να βρουν άδεια θέση με το που φθάνουν στο χώρο, μπορούν να περιμένουν προσωρινά μέσα σ'αυτόν μέχρι κάποιο αμάξι να φύγει.Ο προσωρινός χώρος αναμονής μπορεί να χωρέσει μόνο τρία αμάξια.Όλα τα υπόλοιπα αμάξια που δεν μπορούν να σταθμεύσουν και δεν μπορούν να βρουν θέση ούτε στο χώρο αναμονής αναγκαστικά πρέπει να αποχωρήσουν.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα εξής :

- Την πιθανότητα p_n να υπάρχουν n αμάξια στο σύστημα.
- Το ρυθμό λ_{eff} με τον οποίο τα αμάξια φθάνουν στο χώρο στάθμευσης.
- Το μέσο πλήθος αμαξιών στο χώρο.
- Το μέσο χρόνο που ένα αμάξι περιμένει ,στο χώρο ,για μια θέση στάθμευσης.
- Τέλος,το μέσο πλήθος των κατειλημμένων θέσεων στάθμευσης.

Σημειώνουμε αρχικά ότι μία θέση σταθμεύσεως λειτουργεί σαν εξυπηρετητής,έτσι ώστε το σύστημα να διαθέτει συνολικά 5 (παράλληλα τοποθετημένους) εξυπηρετητές.Επίσης ,η μέγιστη χωρητικότητα του συστήματος είναι 5 + 3 = 8 αμάξια.

Έχουμε λοιπόν :

$\lambda_n = 6$ αμάξια/ώρα , n = 0 , 1 , 2 , … , 8

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\frac{60}{30}\right) = 2n\,\frac{\alpha\mu\acute{\alpha}\xi\iota\alpha}{\acute{\omega}\rho\alpha}, n = 1,2,\ldots,5 \\ 5\left(\frac{60}{30}\right) = 10\,\frac{\alpha\mu\acute{\alpha}\xi\iota\alpha}{\acute{\omega}\rho\alpha}, n = 6,7,8 \end{cases}$$

έτσι έχουμε :

$p_n = \frac{(\frac{6}{2})^n}{n!} p_0$, n=1,2,…,5 και $p_n = \frac{(\frac{6}{2})^n}{5!5^{n-5}} p_0$, n=6,7,8

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την p_0 :

$p_0 + p_1 + \ldots + p_8 = 1$ =>

$p_0 + p_0\left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5!5^1} + \frac{3^7}{5!5^2} + \frac{3^8}{5!5^3}\right) = 1$ =>

$p_0 = 0.04812$

Από την τιμή του p_0 υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες :

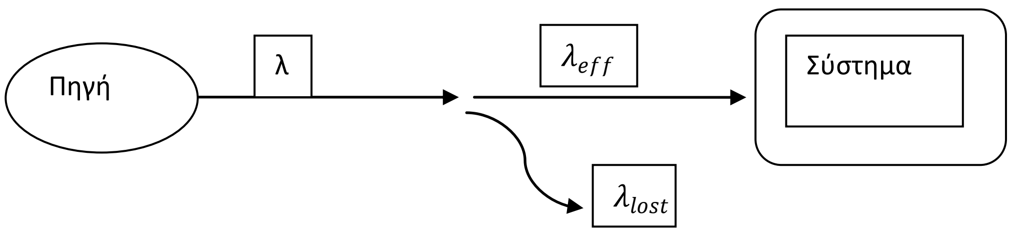
$p_1 = 0.14436$, $p_2 = 0.21654$, $p_3 = 0.21654$, $p_4 = 0.16240$

$p_5 = 0.09744$, $p_6 = 0.05847$, $p_7 = 0.03508$, $p_8 = 0.02105$

Για τον υπολογισμό του λ_{eff} σκεφτόμαστε ότι ένα αμάξι που φθάνει στο χώρο μπορεί είτε να εισέλθει σε αυτόν ή να πάει κάπου αλλού με ρυθμούς λ_{eff} ή λ_{lost} αντίστοιχα.Άρα $\lambda = \lambda_{eff} + \lambda_{lost}$.Ένα αμάξι δεν θα μπορεί να εισέλθει στο χώρο στάθμευσης αν υπάρχουν ήδη 8 αμάξια σε αυτόν.Αυτό σημαίνει ότι η αναλογία των αμαξιών που δεν θα μπορούν να εισέλθουν στο χώρο θα ισούται με την τιμή p_8 . Έτσι έχουμε :

$\lambda_{lost} = p_8 \lambda = 6 \times 0.02105 = 0.1263$ αμάξια/ώρα και

$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{lost} = 5.8737$ αμάξια/ώρα



Ο μέσος αριθμός αμαξιών στο χώρο στάθμευσης γενικά,δηλ. Των αμαξιών που περιμένουν και αυτών που είναι ήδη σταθμευμένα , ισούται με το L – το μέσο πλήθος «πελατών» στο σύστημα.Άρα έχουμε :

L = $0p_0$ + $1p_1$ + … +$8p_8$ = 3.1286 αμάξια

Ένα αμάξι που περιμένει στη προσωρινή θέση ,αποτελεί ουσιαστικά ένα αμάξι που περιμένει στην ουρά.Έτσι ο χρόνος αναμονής του είναι W = T – 1/μ,

όμως ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα,σύμφωνα με τον τύπο του Little, ισούται με T = L / λ_{eff} = 3.1286 / 5.8737 = 0.53265 ώρα

άρα W = 0.53265 – ½ = 0.03265 ώρα.

Επίσης ο μέσος αριθμός των απασχολούμενων θέσεων στάθμευσης είναι ουσιαστικά ο μέσος αριθμός απασχολούμενων εξυπηρετητών στο σύστημα,άρα :

$\bar{s}$ = L – L_q = λ_{eff} / μ = 5.8737 / 2 = 2.9368 θέσεις.

Ο ρόλος της Εκθετικής κατανομής

Εν γένει τα χαρακτηριστικά των συστημάτων ουρών αναμονής καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από τις κατανομές πιθανότητας που ακολουθούν οι χρόνοι αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης.Στην πραγματικότητα αυτές οι κατανομές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε μορφή, καθ'ότι αντιλαμβανόμαστε ότι οι αφίξεις των πελατών γίνονται με τυχαίο ρυθμό.Παρ'όλα αυτά, για την μοντελοποίηση αυτών των συστημάτων αναμονής,πρέπει να καθορίζουμε συγκεκριμένα το είδος κάθε μιας από τις παραπάνω κατανομές.Για να είναι σωστή βέβαια μια παραδοχή κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης και της ανάλυσης θα πρέπει να είναι επαρκώς ρεαλιστική ούτως ώστε το μοντέλο να παρέχει λογικές προβλέψεις ενώ ταυτοχρόνως θα πρέπει να είναι ικανοποιητικά απλό για να είναι και μαθηματικά συμβατό.

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τα παραπάνω οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρέτησης στα μοντέλα συστημάτων αναμονής περιγράφονται από την Εκθετική Κατανομή.

Υποθέτοντας ότι η τυχαία μεταβλητή Τ αντιπροσωπεύει είτε το χρόνο άφιξης είτε το χρόνο εξυπηρέτησης, τότε θεωρώντας ότι ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο α ισχύει :

$f_T(t) = ae^{-at}, t \geq 0$

με $E\{T\} = 1/\alpha$ (μέση τιμή)

και $var\{T\} = 1/\alpha^2$ (διασπορά)

και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$P\{T \leq t\} = 1 - e^{-at}$, $t \geq 0$

$P\{T \geq t\} = e^{-at}$, $t \geq 0$

Για να ανιχνεύσουμε όμως τους πιθανούς κινδύνους της παραδοχής για την εκθετική κατανομή στα μοντέλα ουρών αναμονής εξετάζουμε τις ιδιότητες της Εκθετικής κατανομής.

1. ***Έλλειψη μνήμης εκθετικής κατανομής* :**
   Δεδομένου ότι το t (χρόνος) ακολουθεί εκθ.καταν. η οποία ορίζεται από την f(t),αν S είναι το μεσοδιάστημα από το τελευταίο γεγονός ,τότε η

έλλειψη μνήμης περιγράφεται μαθηματικά ως : $P\{ t > T + S/t > S \} = P\{ t > T \}$

Προς απόδειξη αυτού :

$$\mathrm{P}\{ \mathrm{t} > \mathrm{T} + \mathrm{S} | \mathrm{t} > \mathrm{S} \} = \frac{\mathrm{P}\{ \mathrm{t} > T + S | \mathrm{t} > S \}}{(\mathrm{P}\{\mathrm{t} > S\})} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda T}$$

$$= \mathrm{P}\{ \mathrm{t} > \mathrm{T} \}$$

(Για παράδειγμα ο χρόνος διαδοχικών αφίξεων λεωφορείων σε μια στάση, εφόσον αυτός ακολουθεί την εκθετική κατανομή, η πιθανότητα να περιμένουμε ακόμα 10 λεπτά της ώρας δεδομένου ότι έχουν περάσει ήδη 30 λεπτά και δεν έχει περάσει το επόμενο λεωφορείο (δεσμευμένη πιθανότητα), είναι ακριβώς ίση με την πιθανότητα να περάσουν **ακριβώς** 10 λεπτά της ώρας μέχρι το επόμενο λεωφορείο γιατί μόλις τώρα χάσαμε το προηγούμενο λεωφορείο. Δηλαδή η κατανομή δεν έχει μνήμη των προηγούμενων αφίξεων!)

Στην περίπτωση του χρόνου αφίξεων σε μια ουρά,το φαινόμενο αυτό αναπαριστά το σύνηθες γεγονός όπου ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη είναι ανεξάρτητος από τη χρονική στιγμή που έγινε η τελευταία άφιξη σε αυτήν.Γιανα γίνει πιο σαφές , έστω ότι τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ αφίφεων σε μια ουρά ακολουθούν Εκθετική κατανομή με λ=6.Η ιδιότητα της έλλειψηε μνήμης μας λέει ότι ασχέτως πόσος χρόνος έχει περάσει από την τελευταία άφιξη στο σύστημα, η κατανομή πιθανότητας του χρόνου που απομένει μέχρι την επόμενη άφιξη έχει συνάρτηση πιθανότητας $6e^{-6t}$.Αυτό σημαίνει ότι για να προβλέψουμε τις μελλοντικές αφίξεις , δεν χρειάζεται να λαμβάνουμε υπ’όψιν μας το χρόνο που έχει περάσει από την τελευταία άφιξη.Αυτή η παρατήρηση απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση του συστήματος ουράς.

Για την περίπτωση του χρόνου εξυπηρέτησης ,αν οι ενέργειες που απαιτούνται από τους εξυπηρετητές διαφέρουν ανάλογα με τον πελάτη ,τότε αν αρκετός χρόνος εξυπηρέτησης έχει ήδη παρέρθει για κάποιο πελάτη, το μόνο που μπορεί να συμβεί είναι αυτός ο πελάτης να απαιτήσει πιο εκτενή εξυπηρέτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Forgetfulness Property) :

Μία μηχανή εξυπηρέτησης πάντα έχει έτοιμη άλλη μηχανή για άμεση αντικατάσταση σε περίπτωση βλάβης.Ο χρόνος για να πάθει βλάβη η μηχανή (ή της εφεδρικής της) ακολουθεί Εκθετική κατανομή και προκύπτει κάθε 40 λεπτά,κατά μέσο όρο.Ο χειριστής της μηχανής ισχυρίζεται ότι η μηχανή παθαίνει βλάβη κάθε βράδυ στις 8.30.Ας αναλύσουμε τον ισχυρισμό του χειριστή.

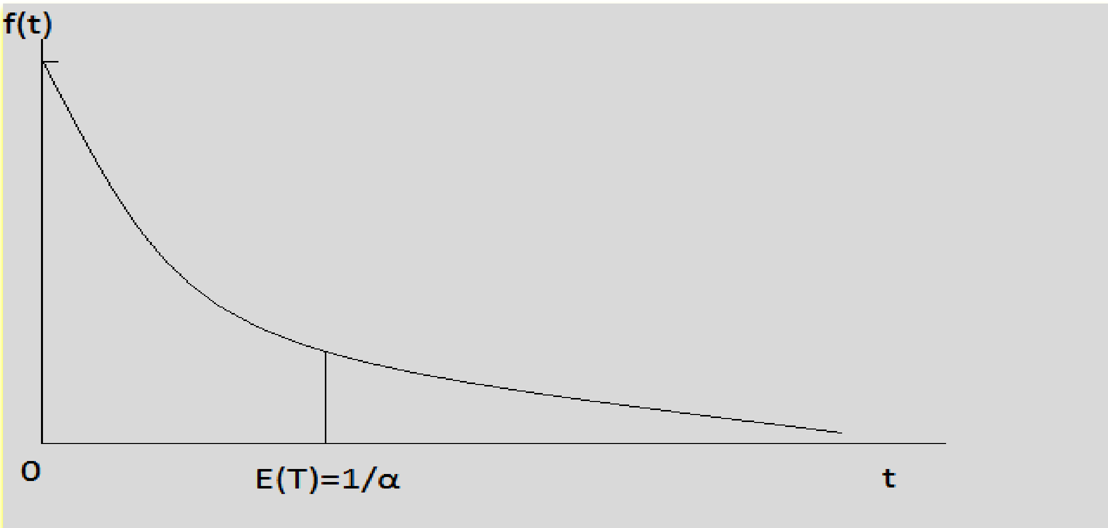
Ο μέσος ρυθμός αποτυχίας-βλάβης της μηχανής είναι λ=60/40=1.5 βλάβη ανά ώρα.Άρα η η Εκθετική κατανομή του χρόνου βλάβης είναι : f(t)=1.5$e^{-1.5t}$(t>0)

Όσον αφορά τον ισχυρισμό του χειριστή,δεν μπορεί να είναι σωστός διότι έρχεται σε σύγκρουση με το γεγονός ότι ο χρόνος μεταξύ των διαδοχικών βλαβών ακολουθεί Εκθετική κατανομή,δηλ. τυχαίος.Η πιθανότητα μία βλάβη να κτυπά στις 8.30 το βράδυ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να στηρίξει ή να αντικρούσει τον ισχυρισμό του χειριστή γιατί η τιμή μιας τέτοιας πιθανότητας εξαρτάται από την ώρα κατά τη διάρκεια της μέρας(8.30 PM).Για παράδειγμα αν είναι 8.20 το βράδυ η πιθανότητα ο χειριστής να έχει δίκιο είναι

P{ t < 10/60}= 1 $-e^{-1.5(\frac{10}{60})}$=0.22 , η οποία είναι μικρή δηλ. Αν είναι 7.00 PM η πιθανότητα να πάθει βλάβη η μηχανή στις 8.30 αυξάνεται περίπου κατά 0.9.Αυτές οι ακραίες τιμές δείχνουν ότι ο ισχυρισμός του χειριστή δεν μπορεί να αναλυθεί από υπολογισμούς πιθανοτήτων και άρα θα πρέπει να αρνηθούμε τον ισχυρισμό και να βασιστούμε στα χαρακτηριστικά της Εκθετικής κατανομής.

2. **Η $f_T(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t.**

Μία συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι : P{ 0 ≤ T ≤ S } > P{ t ≤ T ≤ t + S}



Όπως είναι φανερό και από την παραπάνω γραφική παράσταση,στο χρόνο Τ είναι πολύ πιθανό να αντιστοιχεί τιμή πολύ κοντά στο 0.(π.χ. P{ 0 ≤ T ≤ $\frac{1}{2\alpha}$ }=0.393 ενώ P { $\frac{1}{2\alpha}$ ≤ T ≤ $\frac{3}{2\alpha}$ }= 0.383)

Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή διαπιστώνουμε τα εξής :

Αν το Τ αναπαριστά τον χρόνο εξυπηρέτησης,το ερώτημα αν η παραπάνω ιδιότητα είναι κατάλληλη για ένα μοντέλο ουράς αναμονής εξαρτάται από τη φύση της εξυπηρέτησης που παρέχεται.
Δηλαδή, αν το είδος της εξυπηρέτησης που απαιτείται είναι το ίδιο για κάθε πελάτη , δηλ.ο εξυπηρετητής εκτελεί τιν ίδια ακολουθία ενεργειών κάθε φορά, τότε οι ρεαλιστικοί χρόνοι εξυπηρέτησης τείνουν να είναι κοντά στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης που αναμένεται.Ένας πολύς μικρός χρόνος , μακρυά αρκετά από τον μέσο σχεδόν αποκλείεται, διότι όπως είναι λογικό πάντα απαιτείται ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα για να αποπερατωθεί η διαδικασία της εξυπηρέτησης.Άρα είναι φανερό ότι η εκθετική κατανομή δεν είναι κατάλληλη για αυτού του είδους την περίπτωση.

Αν για κάθε πελάτη οι ενέργειες που απαιτούνται από τον εξυπηρετητή διαφέρουν ως προς το είδος και την ποσότητα,η Εκθετική κατανομή φαίνεται να είναι αρκούντως εφαρμόσιμη.Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η περίπτωση του χώρου των Επειγόντων του νοσοκομείου που αναφέρθηκε παραπάνω.Εκεί οι γιατροί αντιμετωπίζουν μία ποικιλλία ιατρικών περιστατικών και στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι παρέχουν σχετικά γρήγορα μία θεραπεία για το κάθε πρόβλημα.Μπορεί όμως κάποιος ασθενής να απαιτεί πιο εκτενή ιατρική φροντίδα.

Στην περίπτωση τώρα που το Τ αναπαριστά το χρόνο άφιξης,η ιδιότητα που εξετάζουμε προβλέπει τις περιπτώσεις εκείνες όπου πιθανοί πελάτες αναβάλλουν την είσοδό τους στην ουρά βλέποντας έναν άλλο πελάτη να μπαίνει σε αυτήν πριν από αυτούς.Αν τοποθετηθούν λοιπόν οι χρόνοι αφίξεων σε μια χρονική γραμμή ,θα βλέπαμε ότι παρουσιάζουν μία συσσώρευση με κατά διαστήματα μεγάλα κενά να χωρίζουν αυτά τα χωρία συσσώρευσης,εξαιτίας του γεγονότος ότι η πιθανότητα για μικρά ενδοδιαστήματα μεταξύ αφίξεων είναι μεγάλη ενώ η αντίστοιχη για μεγάλα ενδοδιαστήματα μικρή.

3. Η σχέση της Εκθετικής κατανομής με την Poisson κατανομή.

Έστω ότι ο χρόνος μεταξύ συνεχόμενων «εμφανίσεων» ενός γεγονότος ακολουθεί Εκθετική κατανομή(με παράμετρο α).Τότε η σχέση της Εκθετικής με την Poisson κατανομή μας οδηγεί ουσιαστικά στην πρόταση που αφορά την κατανομή πιθανότητας του αριθμού των εμφανίσεων αυτού του γεγονότος σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
Έστω ότι συμβολίζουμε με K(t) των αριθμό των εμφανίσεων από τη χρονική στιμή 0 όπου εμφανίζεται για πρώτη φορά το γεγονός (π.χ. οι

αφίξεις ή οι ενέργειες εξυπηρέτησης σε ένα ταμείο όπου ο εξυπηρετητής είναι πάντα απασχολημένος).Η μαθηματική έκφραση της παραπάνω πρότασης που αναφέραμε είναι η

$P\{K(t)=n\} = \frac{(at)^n e^{-at}}{n!}$ για n= 0,1,2,.....

Δηλαδή το K(t) ακολουθεί την Poisson κατανομή με παράμετρο αt.
Για παράδειγμα για n=0 η αντίστοιχη πιθανότητα είναι $P\{K(t)=0\}=e^{-at}$ η οποία είναι η πιθανότητα της πρώτης εμφάνισης του γεγονότος που προκύπτει από την Εκθετική κατανομή μετά από χρόνο t.
Η μέση τιμή ,σύμφωνα με την Poisson κατανομή,είναι ίση με αt,όπου α είναι ο αριθμός των εμφανίσεων του γεγονότος ανά μονάδα χρόνου.Έτσι το α είναι ο μέσος ρυθμός των εμφανίσεων του γεγονότος.Όταν οι εμφανίσεις μετρούνται σε μία συνεχή , χρονική βάση τότε η διαδικασία του μετρήματος λέμε ότι ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο α.

Έστω λοιπόν ότι εξετάζουμε χρόνους αφίξεων ,όπου τα χρονικά ενδιοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.Τότε το K(t) είναι ο αριθμός των αφίξεων σε χρόνο t ,όπου α=λ και αποτελεί το μέσο ρυθμό αφίξεων.Οι αφίξεις λοιπόν συμβαίνουν σύμφωνα με μία Poisson κατανομή με παράμετρο λ.

Αν πάλι εξετάζουμε χρόνους εξυπηρέτησης οι οποίοι ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ.Τότε η παραπάνω ιδιότητα μας προσφέρει πληροφορίες για τις προβλεπόμενες ενέργειες εξυπηρέτησης ως εξής : θέτοντας K(t) το πλήθος αυτών των ενεργειών από κάποιο εξυπηρετητή ,που βρίσκεται συνεχώς σε απασχόληση , σε χρόνο t με μ=α.Στην περίπτωση που υπάρχουν πολλαπλοί εξυπηρετητές ,έστω n, τότε α=nμ.

4. **Η ελάχιστη μεταξύ διαφόρων , ανεξάρτητων ,εκθετικών, τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί επίσης Εκθετική κατανομή.**

Έστω $X_1,X_2.X_3,.......,X_n$ ανεξάρτητες,εκθετικές,τυχαίες μετβλητές με παραμέτρους $α_1,α_2,....,α_n$ αντίστοιχα και έστω M η ελάχιστη των τιμών που παίρνουν αυτές οι μεταβλητές.
Αν οι $X_1,X_2.X_3,.......,X_n$ εκφράζουν το χρόνο μέχρι τις εμφανίσεις ενός συμβάντος ,τότε το M εκφράζει το χρόνο μέχρι να γίνει η πρώτη εμφάνιση.
Για κάθε t≥0 έχουμε :

$$P\{M > t\} = P\{X_1 > t, X_2 > t, \ldots\ldots, X_n > t\}$$
$$= P\{X_1 > t\}\, P\{X_2 > t\} \ldots\ldots P\{X_n > t\}$$
$$= e^{-a1t} e^{-a2t} \ldots\ldots e^{-ant}$$

$=\exp(-\sum_{i=1}^{n} ait)$

οπότε η Μ ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο α= $\sum_{i=1}^{n} ai$

Στην περίπτωση των χρόνων αφίξεων ,υποθέτουμε ότι υπάρχουν n διαφορετικοί τύποι πελατών,αλλά τα ενδιοδιαστήματα για κάθε τύπο (i=1,…,n), ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο α_i .Γνωρίζουμε ότι ο υπολλειπόμενος χρόνος από οποιαδήποτε,συγκεκριμένη χρονική στιγμή μέχρι την επόμενη άφιξη ενός πελάτη,τύπου i ακολουθεί την ίδια κατανομή,με παράμετρο α_i (αυτό το γεγονός εξάγεται από την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης που αναφέρθηκα παραπάνω).Αν X_i είναι ο υπολλειπόμενος χρόνος ,τότε η ιδιότητα (4) μας λέει ότι η Μ,δηλ.τα χρονικά ενδιοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων σαν σύνολο ,ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο α=$\sum_{i=1}^{n} ai$.Επομένως ακόμα κι αν αγνοήσουμε το διαχωρισμό των πελατών ,πάλι θα έχουμε Εκθετική κατανομή για τα ενδιοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων.

Τώρα στην περίπτωση των χρόνων εξυπηρέτησης(με πολλαπλούς εξυπηρετητές),θεωρούμε αρχικά ότι έχουμε ένα σύστημα όπου n είναι το πλήθος των εξυπηρετητών που είναι απασχολημένοι, όλοι οι εξυπηρετητές ακολουθούν την ίδια Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και X_i είναι το υπόλοιπο χρόνου για κάθε εξυπηρετητή i(δηλ.ο χρόνος που απομένει σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή για κάποιο εξυπηρετητή μέχρι να εξυπηρετήσει τον επόμενο πελάτη).Ο X_i ακολουθεί και αυτός Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha=\mu_i$.Τότε η Μ,όπου είναι το υπόλοιπο χρόνου για οποιονδήποτε από αυτούς τους εξυπηρετητές,ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο α=nμ.

5. **Για κάθε t > 0, P { T ≤ t + Δt | T > t } ≈ αΔt, για Δt μικρό.**

Έστω Τ ο χρόνος από την τελευταία εμφάνιση ενός γεγονότος(άφιξη ή εξυπηρέτηση) μέχρι την επόμενη.Θεωρούμε ότι χρόνος t έχει ήδη παρέλθει ,χωρίς να έχει γίνει πάλι του ίδιου τύπου γεγονός.Ξέρουμε ότι η πιθανότητα να ξανασυμβεί στο επόμενο ενδοδιάστημα μήκους Δt είναι σταθερή ,ανεξάρτητη του t.Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει λοιπόν ότι όταν το Δt είναι μικρό,αυτή η πιθανότητα είναι πολύ κοντά στην τιμή αΔt,δηλαδή είναι σχεδόν ανάλογη του Δt.Στην περίπτωση αυτή ο παράγοντας α είναι ο μέσος ρυθμός εμφάνισης του γεγονότος,έτσι ώστε το πλήθος των εμφανίσεων στο ενδοδιάστημα Δt να είναι ακριβώς αΔt.(οι πιθανές ,μικρές, αποκλίσεις από την τιμή αυτή προέρχονται από την πιθανότητα του να συμβαίνουν περισσότερα από ένα γεγονότα)

Με μαθηματικές εκφράσεις, η σταθερή πιθανότητα για κάποιο Δt>0 ,σύμφωνα με την Εκθετική κατανομή,όπως έχουμε προαναφέρει είναι :

P { T ≤ t + Δt | T > t } = P { T ≤ Δt } = 1−$e^{-a\Delta t}$, t ≥ 0
Και παίρνοντας το ανάπτυγμα σε σειρά του e^x για οποιοδήποτε x ($e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,\ -\infty < x < \infty$) έχουμε ότι
P { T ≤ t + Δt | T > t } = 1 – 1 + αΔt – $\sum_{n=2}^{\infty}(-a\Delta t)^n\ /n!$ ≈ αΔt (για μικρό Δt)

Είναι φανερό ότι επειδή έχουμε θεωρήσει ότι το T μπορεί να αναπαριστά είτε χρόνους αφίξεων είτε χρόνους εξυπηρέτησης σε συστήματα ουρών αναμονής,η ιδιότητα αυτή μας παρέχει μία καλή προσέγγιση της πιθανότητας να συμβεί το γεγονός που μελετάμε στο επόμενο ,μικρό ενδοδιάστημα Δt.

6. **Δεν επηρρεάζεται από τη συνάθροιση ή το διαχωρισμό.**
Η συγκεκριμένη ιδιότητα έχει σαν σκοπό αρχικά την επαλήθευση του γεγονότος ότι η διαδικασία των αφίξεων σε ένα σύστημα ακολουθεί την Poisson κατανομή.
Αρχικά θεωρούμε την συνάθροιση,δηλ. το συνδυασμό , διαφόρων διαδικασιών εισαγωγής(αφίξεων) που ακολουθούν Poisson κατανομή σε μία γενική,συνολική διαδικασία.Θεωρούμε διάφορους πελάτες,διαφορετικού είδους,όπου οι πελάτες κάθε τέτοιου είδους (τύπος i) φθάνουν σε ένα σύστημα αναμονής σύμφωνα με μια Poisson ακολουθία με παράμετρο λ_i (i=1,2,…,n) .Υποθέτοντας ότι πρόκειται για ανεξάρτητες Poisson κατανομές, η ιδιότητα λέει ουσιαστικά ότι η συνολική,γενική διαδικασία (η άφιξη όλων των πελατών ανεξαρτήτως του τύπου στον οποίο ανήκουν) θα είναι και αυτή Poisson με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.Δηλαδή η Poisson κατανομή-διαδικασία δεν επηρρεάζεται από τη συνάθροιση.
Αυτή η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες 3 ,4 που προαναφέρθηκαν και υποννοεί ότι τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων των πελατών τύπου i ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i . Άρα και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων για όλους τους πελάτες θα ακολουθούν επίσης Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.
Όσον αφορά το κομμάτι του διαχωρισμού αυτό αναφέρεται στην αντίστροφη διαδικασία όπου η συναθροιστική διαδικασία των αφίξεων ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμτρο λ,αλλά τώρα μας απασχολούν

οι επιμέρους (δημιουργούμενες από τους αντίστοιχους διαχωρισμούς) διαδικασίες εισαγωγής-αφίξεων στο σύστημα.Υποθέτοντας ότι κάθε αφιχθείς πελάτης έχει μια καθορισμένη πιθανότητα p_i ανάλογα με τον τύπο στον οποίο ανήκει (i=1,2,...,n) με $\lambda_i = p_i \lambda$ και $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, η ιδιότητα αυτή λέει ότι η διαδικασία αφίξεων των πελατών τύπου i θα ακολουθεί και αυτή με τη σειρά της Poisson κατανομή με παράμετρο λ_i.Δηλαδή μια Poisson ακολουθία παραμένει ανεπηρρέαστη από μία ή περισσότερες επιμέρους διαιρέσεις.

Η Erlang Κατανομή (για τους χρόνους αφίξεων)

Σε περίπτωση που τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων σε ένα σύστημα ουράς αναμονής δεν φαίνονται να ακολουθούν την Εκθετική κατανομή ,τότε συχνά μοντελοποιούνται με την βοήθεια της Erlang κατανομής.Στην Erlang κατανομή έχουμε μία συνεχή,τυχαία μεταβλητή (έστω Τ),της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\boldsymbol{f(t)}$ προσδιορίζεται από δύο παραμέτρους:μία παράμετρο ρυθμού (rate parameter) **R** , και μία παράμετρο μορφής (shape parameter) **k** (το k θετικός,ακέραιος αριθμός).Εδώ να σημειώσουμε ότι για k=1 η Erlang κατανομή καταλήγει στην Εκθετική κατανομή με παράμετρο R.(Αν η τιμή της παραμέτρου k αυξηθεί τότε η Erlang κατανομή συμπεριφέρεται όλο και περισσότερο σαν την κανονική κατανομή).Δεδομένων λοιπόν των παραμέτρων R ,k η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang κατανομής είναι :

$$f(t)=\frac{\mathrm{R}(Rt)^{k-1}e^{-Rt}}{(\mathrm{k}-1)!} \quad (t \geq 0)$$

Με μέση τιμή $E(T)=\frac{k}{R}$ και διασπορά $var(T) =\frac{k}{R^2}$

Μπορεί να δειχθεί ότι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Erlang κατανομή με παράμετρο μορφής k και παράμετρο ρυθμού kλ έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητη $A_1,A_2,......,A_k$, όπου κάθε A_i ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο kλ, και με τις A_i να είναι τυχαίες,ανεξάρτητες μεταβλητές.

Αν μοντελοποιήσουμε τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ αφίξεων σε μια ουρά με τη βοήθεια της Erlang κατανομής με παράμετρο μορφής k,αυτό που λέμε ουσιαστικά είναι ότι η διαδικασία αφίξεων είναι ισοδύναμη με τη κατάσταση όπου ένας πελάτης περνά από k φάσεις (κάθε μια από αυτές διαθέτει την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης) πριν φθάσει στην ουρά.

PURE BIRTH-DEATH MODELS (Σχέση Εκθετικής –Poisson κατανομής)

Στις παρακάτω σελίδες θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ Εκθετικής και Poisson κατανομής που έχουμε ήδη δει, μέσα από δύο βασικές διαδικασίες σε ουρές αναμονής.Η πρώτη περιλαμβάνει μόνο αφίξεις (pure birth) ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει μόνο αναχωρήσεις από ένα σύστημα ουράς (pure death).Ένα παράδειγμα pure birth μοντέλου είναι η δημιουργία πιστοποιητικών γέννησης νεογνών ενώ ένα παράδειγμα μοντέλου pure death είναι η απόσυρση προϊόντων αποθέματος από ένα κατάστημα.

Η Εκθετική κατανομή στηρίζεται σε 3 βασικά αξιώματα(τα οποία ουσιαστικά εξάγονται από τις ιδιότητες και όσα έχουμε ήδη αναφέρει γι'αυτήν-όπως π.χ. το πρώτο αξίωμα είναι η ιδιότητα έλλειψης μνήμης)

1ο Αξίωμα

Δεδομένου ότι N(t) είναι το πλήθος των γεγονότων στο ενδοδιάστημα (0,t), η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος στο μεσοδιάστημα (T,T+S) εξαρτάται μόνο από το S.(με την έννοια ότι η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το N(t) έχει σταθερές,ανεξάρτητες προσαυξήσεις).

2ο Αξίωμα

Η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος σε ένα αρκετά μικρό,χρονικό ενδοδιάστημα $h>0$ είναι θετική και μικρότερη του 1.

3ο Αξίωμα

Σε αρκετά μικρό χρονικό ενδοδιάστημα $h>0$,τουλάχιστον μία εμφάνιση γεγονότος μπορεί να συμβεί – δηλ. $P\{ N(h) > 1 \} = 0$.

Pure Birth Model

Έστω ότι οι αφίξεις σε ένα σύστημα ουράς αναμονής γίνεται με ρυθμό λ πελάτες ανά μονάδα χρόνου.Τότε για αρκετά μικρό χρόνικό ενδοδιάστημα $h>0$ τα παραπάνω αξιώματα μας δείχνουν ότι

p_0(h)=$e^{-\lambda h}$ = 1 – λh + $\frac{(\lambda h)^2}{2!}$ – … = 1 – λh + $0(h^2)$

Σύμφωνα με το Αξίωμα 3 κατά τη διάρκεια του h>0 μία τουλ.εμφάνιση γεγονότος –αφίξεως μπορεί να συμβεί.Καθώς λοιπόν το h→ 0 : p_1(h) = 1 – p_0(h) ≈ λh .

Αυτό το γεγονός δείχνει ότι η πιθανότητα να συμβεί μία άφιξη στο ενδοδιάστημα h είναι ανάλογη με το h ,με σταθερά αναλογίας το λ,το ρυθμό αφίξεων δηλ.

Έστω τώρα p_n(t) η πιθανότητα n αφίξεων στο διάστημα t.Για h>0 αρκετά μικρό έχουμε :

p_n(t +h) ≈ p_n(t)(1 – λh) + p_{n-1}(t)λh , για n>0

p_0(t+h) ≈p_0(t)(1 – λh) , για n=0

Για την πρώτη εξίσωση , n αφίξεις θα συμβούν κατά τη διάρκεια του t+h αν υπάρχουν n αφίξεις κατά τη διάρκεια t και καθόλου αφίξεις κατά το χρονικό διάστημα h,ή n-1 αφίξεις κατά το t και μία άφιξη στο h.Όλοι οι άλλοι συνδυασμοί αποκλείονται από το Αξίωμα 3.Για τη δεύτερη εξίσωση , καμμία άφιξη δεν μπορεί να συμβαίνει κατά το t+h μόνο αν καμμία άφιξη δεν συμβεί κατά το h.

Παίρνοντας τώρα τα όρια καθώς το h→0 έχουμε :

p'_n(t) = $\lim_{h\to 0} \frac{p_n(t+h)-p_n\ (t)}{h} = -\lambda p_n$(t) + λp_{n-1}(t), n > 0

p'_0(t) = $\lim_{h\to 0} \frac{p_0\ (t+h)-p_0\ (t)}{h}$ = $-\ \lambda p_0$(t)

Η λύση των παραπάνω διαφορικών εξίσώσεων είναι :

p_n(t) = $\frac{(\lambda t)^n\ e^{-\lambda t}}{n!}$, n= 0, 1, 2 , …

η οποία είναι η κατανομή Poisson με μέση τιμή E{ n|t } = λt αφίξεις στο χρ.διάστημα t. (Δηλαδή αυτό που έχουμε ήδη αναφέρει,ότι αν ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ , τότε το πλήθος των αφίξεων σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο ακολουθεί την Poisson κατανομή με μέση τιμή λt).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε μία πόλη γεννιούνται παιδιά με ρυθμό μία γέννηση ανά 12 λεπτά.Ο χρόνος μεταξύ των γεννήσεων ακολουθεί εκθετική κατανομή.Θέλουμε να βρούμε τα εξής :

- Το μέσο αριθμό γεννήσεων ανά έτος.
- Την πιθανότητα να μη συμβεί καμμιά γέννηση σε μια μέρα.
- Την πιθανότητα να συνταχθούν 50 πιστοποιητικά γεννήσεως μέχρι το τέλος των επόμενων 3 ωρών δεδομένου ότι έχουν συνταχθεί 40 πιστοποιητικά τις τελευταίες 2 ώρες.

Ο ρυθμός γεννήσεων ανά μέρα είναι : $\lambda = \frac{24 \times 60}{12} = 120$ γεννήσεις / μέρα

Ο αριθμός των γεννήσεων ανά έτος είναι : $\lambda t = 120 \times 365 = 43.800$ γεννήσεις/έτος

Η πιθανότητα μηδενικών γεννήσεων σε μια μέρα υπολογίζεται με τη βοήθεια της Poisson κατανομής :

$$p_0(1) = \frac{(120 \times 1)^0 \; e^{-120 \times 11}}{0!} \approx 0$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα 50 πιστοποιητικών γεννήσεως μέχρι το τέλος των επόμενων 3 ωρών δεδομένου των 40 πιστοποιητικών τις τελευταίες 2 ώρες ,παρατηρούμε ότι επειδή η κατανομή του αριθμού των γεννήσεων είναι Poisson η ζητούμενη πιθανότητα μειώνεται στο να έχουμε 50 – 40 = 10 γεννήσεις σε μία ώρα (3-2=1) . Εφόσον το λ= 60/12=5 γεννήσεις ανά ώρα έχουμε ότι :

$$p_{10}(1) = \frac{(5 \times 1)^{10} \; e^{-5 \times 1}}{10!} = 0.01813$$

PURE DEATH MODEL

Σε ένα pure-death μοντέλο το σύστημα ξεκινά με N πελάτες τη χρονική στιγμή 0 και δεν επιτρέπονται άλλες αφίξεις.Οι αναχωρήσεις γίνονται με ρυθμό μ πελάτες ανά μονάδα χρόνου.

Αντίστοιχα με την περίπτωση της pure-birth διαδικασίας που είδαμε πριν , προσδιορίζουμε την πιθανότητα να παραμένουν n πελάτες μετά από t χρόνο στο σύστημα (p_n(t)) :

p'_N(t) = -μp_N(t)

p'_n(t) = - μ p_n(t) + μp_{n+1}(t), 0<n<N

p'_0(t) = μp_1(t)

οι λύσεις των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων είναι

p_n(t) = $\dfrac{(\mu t)^{N-n} \; e^{-\mu t}}{(N-n)!}$, n = 1,2,3,…, N

p_0(t)= 1 –$\sum_{n=1}^{N} p_n$ (t)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε ένα ανθοπωλείο υπάρχει απόθεμα 18 ντουζίνες τριαντάφυλλα στην αρχή κάθε εβδομάδας.Κατά μέσο όρο ,ο υπάλληλος του ανθοπωλείου πουλά 3 ντουζίνες τριαντάφυλλα κάθε μέρα.Παρ'όλα αυτά η πραγματική ζήτηση ακολουθεί Poisson κατανομή.Όποια στιγμή το απόθεμα φτάσει τις 5 ντουζίνες ,γίνεται παραγγελία για 18 καινούργιες στο ξεκίνημα της επόμενης εβδομάδας.Εξαιτίας της φύσης του προϊόντος ,όλα τα τριαντάφυλλα που μένουν στο τέλος κάθε εβδομάδας πετιούνται.Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα εξής :

- Την πιθανότητα καινούργιας παραγγελίας στο τέλος ή πριν το τέλος κάθε μέρας της εβδομάδας.
- Το μέσο αριθμό δωδεκάδων τριανταφύλλων που θα πεταχθεί στο τέλος της εβδομάδας.

Ο ρυθμός πωλήσεων είναι μ=3 ντουζίνες ανά μέρα.Η πιθανότητα καινούργιας παραγγελίας στο τέλος μιας μέρας είναι :

$p_{n\leq 5}$ (t) = p_0(t) + p_1(t) + … + p_5 (t)

= p_0(t) + $\sum_{n=1}^{5} \frac{(3t)^{18-n}}{(18-n)!} e^{-3t}$, t = 1, 2 , …, 7

Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πρόγραμμα στον υπολογιστή υπολογίζουμε ότι ο μέσος αριθμός δωδεκάδων απο τριαντάφυλλα που πετιούνται στο τέλος της εβδομάδας (t = 7) είναι E { n | t= 7 } = $\sum_{n=0}^{18} n p_n$ (7) = 0.664 ντουζίνες.

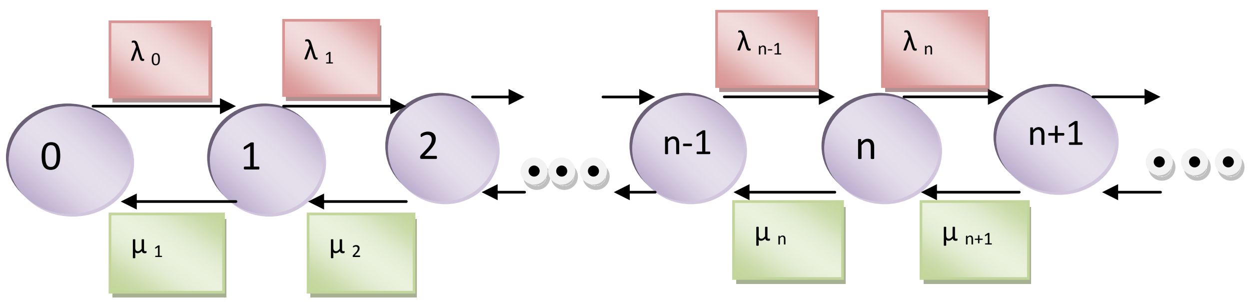
BIRTH AND DEATH MODELS

Στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής θεωρούμε ότι οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις των πελατών στο σύστημα γίνονται σύμφωνα με την διαδικασία «γέννησης» και «θανάτου» (birth-death process).Το πρώτο κομμάτι της «γέννησης» (birth) σε μία ουρά αναμονής αναφέρεται στην άφιξη ενός πελάτη σε αυτή ενώ το κομμάτι του «θανάτου» (death) αναφέρεται στην αναχώρηση ενός πελάτη, που έχει εξυπηρετηθεί , από το σύστημα. Η διαδικασία αυτή ουσιαστικά περιγράφει το πώς μεταβάλλεται το πλήθος των πελατών σε ένα σύστημα ουράς καθώς αυξάνεται ο χρόνος.

Παραδοχές της Birth-Death Διαδικασίας.

- Έστω N(t)=n το πλήθος των πελατών σε ένα σύστημα ουράς αναμονής.Τότε η κατανομή πιθανότητας του χρόνου μέχρι την επόμενη «γέννηση» - άφιξη στο σύστημα είναι Εκθετική με παράμετρο λ_n (n=0,1,2,...).
- Έστω πάλι N(t)=n το πλήθος των πελατών σε ένα σύστημα ουράς αναμονής.Τότε η κατανομή πιθανότητας του χρόνου μέχρι τον επόμενο «θάνατο»-ολοκλήρωση εξυπηρέτησης είναι Εκθετική με παράμετρο μ_n (n=1,2,....).
- Η τυχαία μεταβλητή (χρόνος) της πρώτης πρότασης και η τυχαία μεταβλητή της δεύτερης πρότασης είναι αμοιβαία ανεξάρτητες.Δηλαδή η μετάβαση στην επόμενη κατάσταση είναι είτε μία «γέννηση» (n-> n+1) είτε ένας «θάνατος» (n-> n-1) , ανάλογα με τον αν η προηγούμενη ή η επόμενη τυχαία μεταβλητή είναι μικρότερη.

<u>ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΥΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ BIRTH-DEATH ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ:</u>



Γενικά εκτός ορισμένων ειδικών περιπτώσεων , η ανάλυση της διαδικασίας birth-death είναι αρκετά δύσκολη όταν το σύστημα μας βρίσκεται σε παροδική περίοδο(transient period).Μπορούμε να εξάγουμε όμως αυτήν την κατανομή,όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα,αν το σύστημά μας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας(steady-state condition), η οποία επιτυγχάνεται αφού το σύστημα λειτουργήσει για εύλογα μεγάλη χρονικά περίοδο.Άλλωστε τις περισσότερες φορές η ανάλυση των συστημάτων ουρών αναμονής γίνεται όταν αυτά βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας.

Τα γενικευμένα μοντέλα ουρών υποθέτουν ότι οι ρυθμοί αφίξεων και αναχωρήσεων είναι σταθερά εξαρτώμενες,δηλαδή εξαρτώνται από τον αριθμό των πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης.Για παράδειγμα σε ένα κατάστημα που υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός μηχανών ,ο ρυθμός με τον οποίο χαλάνε οι μηχανές μειώνεται όσο ο αριθμός των χαλασμένων μηχανών αυξάνεται διότι μόνο οι μηχανές που λειτουργούν είναι ικανές να χαλάσουν.

Στηριζόμενοι στο γεγονός όπως είδαμε ότι η κατάσταση n μπορεί να μεταβεί στις καταστάσεις n-1 ή n+1 και ότι για n >0 ,οι αναμενόμενοι ρυθμοί ροής μέσα και έξω από την κατάσταση n πρέπει να είναι ίσοι έχουμε τα εξής :

(Ρυθμός ροής μέσα στην κατάσταση n)= $\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$

(Ρυθμός ροής έξω από την κατάσταση n) = $(\lambda_n + \mu_n)p_n$

Εξισώνοντας τους δύο ρυθμούς έχουμε την **εξίσωση ισορροπίας** :

$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$, n= 1,2, …

- Για να γίνει πιο σαφής ο τρόπος με τον οποίο εξάγουμε την εξίσωση ισορροπίας ας σκεφτούμε αρχικά την κατάσταση 0 : η διαδικασία εισάγει σε αυτή την κατάσταση μόνο από την κατάσταση 1.Έτσι η πιθανότητα, στην κατάσταση ισορροπίας, να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση 1 (P_1) αντιπροσωπεύει το κομμάτι του χρόνου μέσα στο οποίο η διαδικασία μπορεί να εισέλθει στην κατάσταση 0.Δεδομένου ότι η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1 , ο μέσος ρυθμός εισαγωγής στην κατ.0 είναι μ_1.Από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση ο μέσος αυτός ρυθμός είναι 0.Γι΄αυτό το λόγο ο γενικός μέσος ρυθμός με τον οποίο η διαδικασία αφήνει την κατάσταση στην οποία βρίσκεται για να εισέλθει στην 0 είναι : $\mu_1 p_1 + 0(1 - p_1) = \mu_1 p_1$
  Με την ίδια λογική ο μέσος εξερχόμενος ρυθμός είναι $\lambda_0 p_0$,
  άρα η εξίσωση ισορροπίας για την κατάσταση 0 είναι :
  $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

Άρα έχουμε $p_1 = (\frac{\lambda_0}{\mu_1})p_0$.

Στη συνέχεια για n = 1 έχουμε :

$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1$

Αντικαθιστώντας το $p_1 = (\frac{\lambda_0}{\mu_1}) p_0$ και απλοποιώντας έχουμε

$p_2 = (\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}) p_0$

Γενικά μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει :

$p_n = (\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1}) p_o$, n= 1,2, ...

Όπου η τιμή του p_0 προσδιορίζεται από την εξίσωση $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

Για απλοποίηση των τύπων μπορούμε να θέσουμε ->

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} , \; n=1,2,\dots$$

Και με $C_n = 1$ για n = 0.

Έτσι οι πιθανότητες στην κατάσταση ισορροπίας μπορούν να γραφούν :

$p_n = C_n \, p_0$

Η απαίτηση $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ μας δίνει ότι $(\sum_{n=0}^{\infty} C_n) p_0 = 1$ το οποίο συνεπάγεται ότι :

$p_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} C_n)^{-1}$

Επίσης να υπενθυμίσουμε ότι έχοντας υπολογίσει το p_n ισχύει ότι

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

Και $L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \, p_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα συνοικιακό super-market διαθέτει 3 γκισέδες στο χώρο των ταμείων. Σε περίπτωση που σε κάποιο από αυτά ο αριθμός των πελατών ξεπεράσει τους 3 στην ουρά,ανοίγει ένα ακόμα ταμείο.Αυτό σημαίνει ότι για λιγότερους από τέσσερις πελάτες ,μόνο ένα ταμείο λειτουργεί.Για τέσσερις έως έξι πελάτες , δύο ταμεία θα λειτουργήσουν.Για άνω των έξι πελατών και τα τρία γκισέ στο χώρο των ταμείων λειτουργούν.Οι πελάτες φτάνουν στο χώρο των ταμείων σύμφωνα με την Poisson κατανομή, με μέση τιμή 10 πελάτες ανά ώρα.Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης στο ταμείο για κάθε πελάτη ακολουθεί Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 12 λεπτά.

- Θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα ,στην κατάσταση ισορροπίας, p_n να υπάρχουν πελάτες στο χώρο των ταμείων.

Έχουμε ότι λ_n = λ = 10 πελάτες/ώρα για n = 0,1,2,...

$$\text{Και} \quad \mu_n \begin{cases} \frac{60}{12} = 5\frac{\pi\varepsilon\lambda ά\tau\varepsilon\varsigma}{ώ\rho\alpha}\ \gamma\iota\alpha\ n = 0,1,2,3 \\ 2 \times 5 = 10\frac{\pi\varepsilon\lambda ά\tau\varepsilon\varsigma}{ώ\rho\alpha}\ \gamma\iota\alpha\ n = 4,5,6 \\ 3 \times 5 = 15\ \frac{\pi\varepsilon\lambda ά\tau\varepsilon\varsigma}{ώ\rho\alpha}\ \gamma\iota\alpha\ \ n = 7,8,\ldots \end{cases}$$

$p_1 = (\frac{10}{5})p_0 = 2p_0$

$p_2 = (\frac{10}{5})^2 p_0 = 4p_0$

$p_3 = (\frac{10}{5})^3 p_0 = 8p_0$

$p_4 = (\frac{10}{5})^3(\frac{10}{10})\ p_0 = 8p_0$

$p_5 = (\frac{10}{5})^3(\frac{10}{10})^2 p_0 = 8p_0$

$p_6 = (\frac{10}{5})^3(\frac{10}{10})^3 p_0 = 8p_0$

$p_n = (\frac{10}{5})^3(\frac{10}{10})^3(\frac{10}{15})^{n-6} p_0 = 8(\frac{2}{3})^{n-6} p_0$ για n = 7,8,...

Η τιμή για το p_0 προσδιορίζεται από την εξίσωση $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.Δηλαδή :

$p_0 + p_0[\ 2+4+8+8+8+8 + 8(2/3) + 8\ (2/3)^2 + 8\ (2/3)^3 + \ldots\ ] = 1$

Ισοδύναμα $p_0 \left\{31 + 8[\,1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \ldots]\right\} = 1$

Και χρησιμοποιώντας τον τύπο της γεωμετρικής σειράς $\sum_{\iota=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, |x|<1

έχουμε $p_0 \left[31 + 8(\frac{1}{1-\frac{2}{3}})\right] = 1$ => $p_0 = 1/55$

Αφού υπολογίσαμε το p_0 μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα επιθυμούμε για το πρόβλημα.Για παράδειγμα ,αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να λειτουργεί μόνο το ένα ταμείο μπορούμε ισοδύναμα να υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ τρεις πελάτες στο σύστημα , δηλ :

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = (1+2+4+8)(1/55) \approx 0.273$

{M/M/1} ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΥΡΑΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Σε αυτό το τμήμα θα εξετάσουμε την περίπτωση του μοντέλου ουράς αναμονής με έναν εξυπηρετητή στο σύστημα (s=1).

Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα με έναν σταθερό ρυθμό λ(πελάτες/μονάδα χρόνου).Επιπλέον ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι επίσης σταθερός και ίσος με μ πελάτες ανά μονάδα χρόνου.Σε αυτό το μοντέλο δεν υπάρχει περιορισμός για το μέγεθος του συστήματος,δηλ δεν υπάρχει περιορισμός για τη χωρητικότητα της ουράς αναμονής(είναι άπειρη).

Έχουμε επομένως ότι $\boldsymbol{\lambda_n = \lambda}$ και $\boldsymbol{\mu_n = \mu}$, για n= 0,1,2 ….

(Ακόμη λ_{eff} = λ και λ_{lost} = 0 , αφού όλοι οι πελάτες που φθάνουν στο σύστημα μπορούν να εισέλθουν σε αυτό.)

Για s = 1,οι παράγοντες C_n για την birth-death διαδικασία γίνονται :

$C_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n = \rho^n$, για n=0,1,2,….

Έτσι $p_n = \rho^n p_0$ για n=0,1,2,…

όπου το p_0 το υπολογίζουμε από τον τύπο $p_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n)^{-1} = (\frac{1}{1-\rho})^{-1} = \frac{1}{1-\rho}$, έχοντας βέβαια υποθέσει ότι ρ<1 έτσι ώστε η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = \frac{1}{1-\rho}$

Έτσι $p_n = (1\text{-}\rho)\rho^n$, n=1 , 2 , … (ρ <1) η οποία είναι γεωμετρική κατανομή

Επίσης έχουμε και :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho)^n$$

$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho)^n$

$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} (\frac{1}{1-\rho})$

$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Όλα τα παραπάνω προϋποθέτουν τη συνθήκη ότι ρ < 1, η οποία σημαίνει ότι ο ρυθμός αφίξεως λ είναι αυστηρά μικρότερος από το ρυθμό εξυπηρέτησης μ ,έτσι ώστε το σύστημα να φτάσει σε μια κατάσταση ισορρόπίας.

Αν το λ ≥ μ , δηλ.ο ρυθμός αφίξεως ξεπερνά το ρυθμό εξυπηρέτησης , η γεωμετρική σειρά στο τύπο για το p_0 δεν συγκλίνει ,και έτσι οι πιθανότητες για την κατάσταση ισορροπίας p_n δεν υπάρχουν.Σε αυτή την περίπτωση ,η κατάσταση αναμονής λειτουργεί συνέχεια σε μια «παροδική περίοδο» (transient state) στην οποία το μήκος της ουράς αυξάνεται χωρίς όριο με την πάροδο του χρόνου.

Επανερχόμενοι λοιπόν στην προηγούμενη κατάσταση (λ < μ και με λ_{eff} = λ),

Υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα σταθερά μεγέθη για το σύστημά μας :

$T = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

$W = T - 1/\mu = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

$L_q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ (ή $L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\, p_n = L - 1(1 - p_0) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$)

$\bar{s} = L - L_q = \rho$

- Οι παραπάνω σχέσεις (σταθερά μεγέθη) καθώς και η εξαγωγή του τύπου για τον υπολογισμό της p_n ,σύμφωνα με την γενική birth-death διαδικασία ,είναι απόλυτα ανεξάρτητα από την πειθαρχεία της ουράς αναμονής,πράγμα που σημαίνει ότι εφαρμόζονται σε οποιαδήποτε μέθοδο πειθαρχείας ακολουθείται.

- Παρ'όλο που ο μέσος χρόνος αναμονής είναι ανεξάρτητος από την πειθαρχεία που ακολουθείται σε μια ουρά ,η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εξαρτάται από την χρησιμοποιούμενη πειθαρχεία.Γι'αυτό το λόγο θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο M/M/1 με την μέθοδο FIFO (first in-first out). Αν μια τυχαία άφιξη-πελάτης φθάνοντας στο σύστημα βρίσκει n πελάτες ήδη σε αυτό ,τότε θα περιμένει n + 1 εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης,συμπεριλαμβανομένου φυσικά και του δικού του/της χρόνου εξυπηρέτησης.

Αν λοιπόν θέσουμε T_1,T_2,.... να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές χρόνου εξυπηρέτησης, οι οποίες ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ, και $X_{n+1} = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n+1}$ (για n=0,1,2,..),έτσι ώστε ο X_{n+1} να αποτελεί τον δεσμευμένο χρόνο αναμονής ,δεδομένου ότι υπάρχουν ήδη n πελάτες στο σύστημα.Επειδή η πιθανότητα να βρει ένας πελάτης, που μόλις φθάνει στο σύστημα ,n πελάτες ήδη μέσα σε αυτό είναι p_n έχουμε ότι

$p\ \{\ S > t\ \} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\ p\{\ X_{n+1} > t\ \}$ η οποία πιθανότητα μετά από αρκετές απλοποιήσεις γίνεται

$p\ \{\ S > t\ \} = e^{-\mu(1-\rho)t}$,t ≥ 0

Άρα ο χρόνος αναμονής στο σύστημα για κάθε πελάτη ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ(1-ρ).

Άρα T = E { S } = 1 / μ(1-ρ)

Ας εξετάσουμε τώρα το χρόνο αναμονής στην ουρά για κάθε πελάτη (δηλ.χωρίς να περιλαμβάνεται ο χρόνος εξυπηρέτησης)όταν πάλι η πειθαρχεία στην ουρά είναι first in –first out .Αν ένας πελάτης φθάσει στην ουρά και δεν υπάρχει κανείς άλλος πελάτης στο σύστημα,τότε εξυπηρετείται αμέσως , έτσι

$p\{\ W_n = 0\ \} = p_0 = 1 - \rho$

αν όμως ο πελάτης αυτός βρει να υπάρχουν ήδη n πελάτες στο σύστημα ,θα πρέπει να περιμένει n εκθετικούς χρλονους εξυπηρέτησης μέχρι να φτάσει η στιγμή να εξυπηρετηθεί ο ίδιος,έτσι ώστε :

$$
\begin{aligned}
p\ \{\ W_n > t\ \} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n p\{X_n > t\ \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^n\ p\ \{X_n > t\} \\
&= \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n\ p\{X_{n+1} > t\} \\
&= \rho p\ \{S > t\} \\
&= \rho e^{-\mu(1-\rho)t}\ , \text{για}\ \ t \geq 0
\end{aligned}
$$

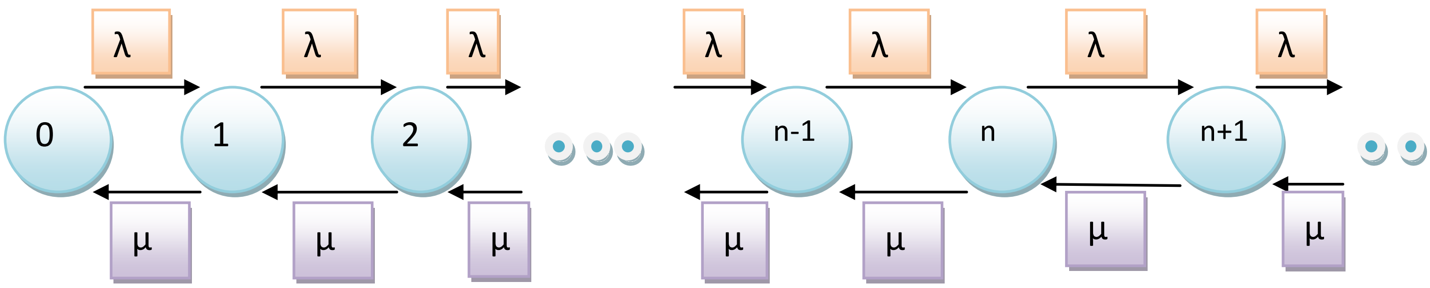
Παρατηρούμε εδώ ότι W_n δεν ακολουθεί ακριβώς Εκθετική κατανομή , επειδή $p\{ W_n = 0 \} > 0$.Παρ'όλα αυτά η δεσμευμένη κατανομή του W_n,δεδομένου ότι $W_n > 0$, ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ(1−ρ) όπως δηλαδή και ο S,διότι

$$p\{W_n > t | W_n > 0\} = \frac{p\{W_n > t\}}{p\{W_n > 0\}} = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad ,\text{για } t \geq 0$$

Έτσι η μέση τιμή της κατανομής (της μη δεσμευμένης) του W_n (ή εφαρμόζοντας τους τύπους του Little) :

$W = E\{ W_n \} = \lambda/\mu(\mu-\lambda)$.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΥΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ Μ/Μ/1 :



Μ / Μ / 1/k ΜΟΝΤΕΛΟ

Σε αυτό το μοντέλο υπάρχει η ειδοποιός διαφορά της μή άπειρης ουράς αναμονής.Δηλαδή υπάρχει ένα όριο k θέσεων για το πλήθος των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα,με μέγιστο μήκος ουράς = k −1(δηλ. k πελάτες βρίσκονται στο σύστημα με ένα πελάτη να εξυπηρετείται) .Όταν ο αριθμός των πελατών φθάσει στο σύστημα τον αριθμό k,δεν επιτρέπονται άλλες αφίξεις.Αυτή την περίπτωση θα μπορούσαμε να έχουμε στην περίπτωση του παραδείγματος του χώρου των Επειγόντων στο νοσοκομείο ,αν υπήρχαν μόνο k κρεβάτια για τους ασθενείς και υπήρχε η πολιτική να στέλνονται σε άλλο νοσοκομείο αν δεν υπάρχει άδειο,διαθέσιμο κρεβάτι.

Μία άλλη ερμηνεία για μία τέτοια περίπτωση συστήματος ουράς αναμονής είναι οι πελάτες να φεύγουν από το σύστημα όποτε υπάρχουν πολλοί πελάτες –k – μπροστά από αυτούς και δεν διατίθενται να περιμένουν πολύ χρόνο στην ουρά.Αυτό το φαινόμενο συναντάται συχνά σε δημόσιες υπηρεσίες.Παρ'όλα αυτά υπάρχουν καταλληλότερα μοντέλα για να περιγράψουν αυτές τις περιπτώσεις.

Το διάγραμμα για τους ρυθμούς για το μοντέλο αυτό είναι το ίδιο με το παραπάνω για την περίπτωση της άπειρης χωρητικότητας του συστήματος,μόνο που σταματά όταν το πλήθος φθάσει τον αριθμό k.

Έτσι λοιπόν έχουμε :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,2,\dots,k-1 \\ 0, & n = k, k+1, \dots \end{cases}$$

Επειδή $\lambda_n = 0$ για κάποιες τιμές του n ένα σύστημα ουράς αναμονής που ταιριάζει με αυτό το μοντέλο θα φθάνει πάντα σε κατάσταση ισορροπίας ,ακόμα κι όταν το ρ ≥ 1.

$\mu_n = \mu$ n=0,1,...

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ρ = λ/μ έχουμε :

$$p_n = \begin{cases} 0 \ , & n > 0 \\ \rho^n p_0 \ , & n \le k \end{cases}$$

Η τιμή του p_0 καθορίζεται από τη σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, η οποία δίνει

$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k) = 1$ (ενώ πριν είχαμε $p_0(1 + \rho + \rho^2 + \dots) = 1$)

ή

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Έτσι έχουμε :

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{k+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad , \quad n = 0 , 1, \ldots,k$$

Επίσης έχουμε

$\lambda_{lost} = \lambda p_n$

$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{lost} = \lambda(1 - p_k)$

Ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι :

$$L = \sum_{n=0}^{k} n p_n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} n\, \rho^n$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{k+1}} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}\right)$$

$$= \frac{\rho(1-(k+1)\rho^k + k\rho^{k+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{k+1})} \quad , \ \rho \neq 1$$

Όταν το ρ = 1 τότε το L = N/2

L_q = L – (1 – p_0)

Όταν το ρ < 1 ,το δεύτερο μέρος της έκφρασης για το μήκος L συγκλίνει στο 0 όσο το N -> ∞ ,έτσι ώστε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα να συγκλίνουν με τη σειρά τους σε αυτά που αντιστοιχούν στην περίπτωση που εξετάσαμε πριν για το μοντέλο M/M/1 .

Τα υπόλοιπα σταθερά μεγέθη μπορούμε να τα εξάγουμε και πάλι από τους τύπους- φόρμουλα του Little :

$$T = \frac{L}{\lambda_{eff}} \qquad \text{και} \qquad W = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$$

Άρα

$$T = \frac{L}{\lambda(1-p_k)} \qquad \text{και} \qquad W = \frac{L_q}{\lambda(1-p_k)} \quad \text{ή} \quad W = T - 1/\mu$$

{M / M / s} ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΥΡΑΣ

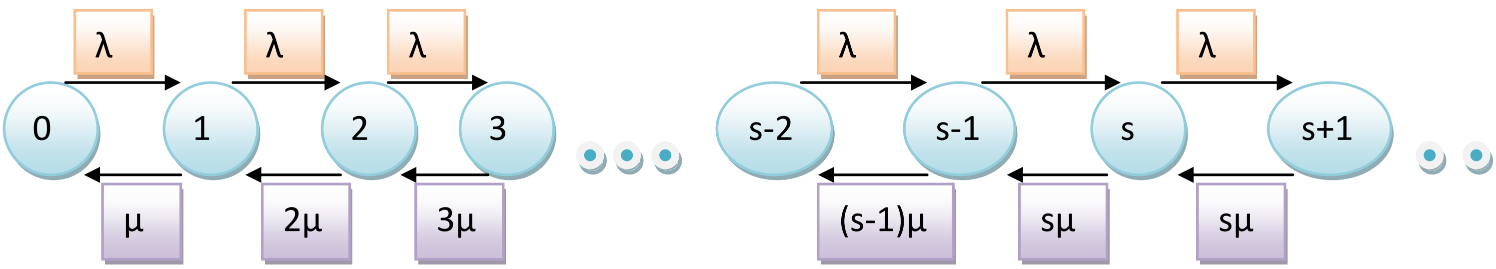
Σε αυτό το μοντέλο,εν αντιθέσει με τα προηγούμενα μοντέλα που εξετάσθηκαν,υπάρχουν s παράλληλα τοποθετημένοι εξυπηρετητές.Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ αντίστοιχα.Σε αυτό το μοντέλο και πάλι δεν υπάρχει όριο ως προς τον αριθμό των πελατών στο σύστημα και γι'αυτό το $\lambda = \lambda_{eff}$.

Έχοντας s παράλληλους εξυπηρετητές στο σύστημα ,το αποτέλεσμα είναι μία αναλογική αύξηση στο ρυθμό εξυπηρέτησης σε **nμ** αν το n≤s (δηλαδή για n απασχολημένους εξυπηρετητές) και **sμ** αν n> s (δηλαδή όταν και οι s εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι).Έτσι λοιπόν έχουμε :

$\lambda_n = \lambda \quad , \quad n \geq 0$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΥΘΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ Μ/ Μ/s :



Έχοντας θέσει για απλοποίηση από προηγούμενη θεωρία : $C_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}}\cdots\frac{\lambda_0}{\mu_1}$, n=1,2,… , έχουμε ότι οι παράγοντες αυτοί στη περίπτωση αυτού του μοντέλου είναι :

$$C_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} , \quad n = 1,2, \dots , s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} , \quad n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

Κατά συνέπεια αν το λ < sμ , έτσι ώστε το ρ=λ/(sμ) < 1 τότε :

$$p_0 = 1 / [1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}$$

$$= 1 / [\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \frac{1}{1-\lambda/(s\mu)}]$$

Από τους παραπάνω παράγοντες επίσης έχουμε :

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 , \quad 0 \leq n \leq s \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! s^{n-s}} p_0 , \quad n \geq s \end{cases}$$

Επίσης από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να δειχθεί ότι η πιθανότητα ,στην κατάσταση ισορροπίας , όλοι οι εξυπηρετητές να είναι απασχολημένοι είναι :

$$p(n \geq s) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s! \, (1 - \frac{\lambda}{s\mu})} p_0$$

- ✓ (Στο τέλος παρατίθεται και ένας πίνακας με αποτελέσματα για την παραπάνω πιθανότητα για διάφορες περιπτώσεις)

Ακόμη έχουμε :

$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) p_n$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j p_{j+s} = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \rho^j p_0 = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho^j) = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} (\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j)$$

$$= p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \rho \frac{d}{d\rho} (\frac{1}{1-\rho}) = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$$

(Επειδή λ=λ_{eff}) έχουμε επίσης L = L_q + ρ

W = L_q / λ και T = W + 1/μ

- Όσον αφορά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το χρόνο αναμονής ,η μέθοδος που εφαρμόσθηκε για το μοντέλο με τον ένα μόνον εξυπηρετητή μπορεί να επεκταθεί και για το μοντέλο με τους πολλαπλούς εξυπηρετητές.Έτσι για t ≥ 0 :

$$p\{ S > t \} = e^{-\mu t} \left[\frac{1+p_0 (\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!(1-\rho)} \left(\frac{1-e^{-\mu t (s-1-\frac{\lambda}{\mu})}}{s-1-\lambda/\mu} \right) \right]$$

$$p\{ W_n > t \} = (1 - p\{W_n = 0\}) e^{-s\mu(1-\rho)t}$$

όπου $p\{W_n = 0\} = \sum_{n=0}^{s-1} p_n$

Στο παράδειγμα του χώρου των επειγόντων του δημόσιου νοσοκομείου,που είχαμε αναφέρει πολύ αρχικά, ο υπεύθυνος διαχείρισης κατέληξε ότι τα επείγοντα περιστατικά φθάνουν σχεδόν σε τυχαίο ρυθμό,έτσι ώστε τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή (Poisson διαδικασία αφίξεων).Επίσης κατέληξε ότι ο χρόνος που ξοδεύει ένας γιατρός για να θεραπεύσει τα περιστατικά , κατά προσέγγιση , ακολουθεί Εκθετική κατανομή.Γι'αυτό το λόγο επέλεξε ένα το μοντέλο M/M/s για μία πρωταρχική μελέτη του συστήματος ουράς.

Με το να προβάλλει τα διαθέσιμα δεδομένα (π.χ.από μια βάρδια νωρίς το βράδυ) στην επόμενη χρονιά,υπολόγισε ότι οι ασθενείς θα φθάνουν με μέσο ρυθμό 1 ασθενούς κάθε ½ της ώρας.Ένας γιατρός απαιτεί ένα μέσο χρόνο 20 λεπτών για να «θεραπεύσει» κάθε περιστατικό.Έτσι με 1 ώρα σαν μονάδα χρόνου :

1/λ=1/2 ώρα ανά πελάτη(ασθενή) και 1/μ = 1/3 ώρα ανά πελάτη

Έτσι ώστε λ = 2 πελάτες/ώρα και μ = 3 πελάτες/ώρα

Οι δύο εναλλακτικές που έχει ο υπεύθυνος διαχείρισης είναι να συνεχίσει να έχει ένα γιατρό κατά τη διάρκεια των ωρών αιχμής (s=1) ή να προσθέσει ακόμη ένα γιατρό εκείνες τις ώρες (s=2) .Και στις δυο περιπτώσεις :

ρ= $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$ έτσι ώστε το σύστημα να φθάσει σε κατάσταση ισορροπίας.Βέβαια επειδή το $\boldsymbol{\lambda}$ δεν παραμένει σταθερό όλες τις ώρες της ημέρας(αλλάζει από βάρδιες σε βάρδιες),το σύστημα δεν φθάνεο ποτέ ουσιαστικά σε μια κατάσταση ισορροπίας.Όμως ο υπεύθυνος διαχείρισης θεωρεί ότι οι συνθήκες και τα αποτελέσματα της κατάστασης ισορροπίας θα του παρέχουν μια καλή προσέγγιση .

Γι'αυτό το λόγο λοιπόν οι παραπάνω εξισώσεις που αναφέρθηκαν στο μοντέλο M/M/s μας δίνουν τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα.

Με βάση λοιπόν τα παρακάτω αποτελέσματα ο υπεύθυνος κατέληξε ότι η παρουσία μόνο του ενός γιατρού είναι ανεπαρκής για την επόμενη χρονιά,ούτως ώστε να παρέχει τη σωστή περίθαλψη στους ασθενείς στο χώρο των Επειγόντων περιστατικών.

	s=1	**s=2**
ρ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
p_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
p_1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
p_n	$\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$	$(\frac{1}{3})^n$
L_q	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{12}$
L	2	$\frac{3}{4}$
W	$\frac{2}{3}$ $ώρας$	$\frac{1}{24}ώρας$
T	1 ώρας	$\frac{3}{8}ώρας$
$P\{W_n > 0\}$	0.667	0.167
$P\{W_n > 1/2\}$	0.404	0.022
$P\{W_n > 1\}$	0.245	0.003
$P\{W_n > t\}$	$\frac{2}{3}e^{-t}$	$\frac{1}{6}e^{-4t}$
$P\{S > t\}$	e^{-t}	$\frac{1}{2}e^{-3t}(3 - e^{-t})$

ΤΟ M / M / s/k ΜΟΝΤΕΛΟ :

Όπως αναφέραμε και στο κομμάτι για το M / M / 1 μοντέλο,και σε αυτό τον τύπο μοντέλου υπάρχει και η περίπτωση της μη άπειρης(πεπερασμένης) ουράς αναμονής,δηλ. το πλήθος των πελατών στο σύστημα δεν μπορεί να ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο αριθμό (k) .Επομένως ,και πάλι, το μέγιστο μέγεθος της ουράς είναι k-s . Οποιοσδήποτε πελάτης φθάνει στο σύστημα ενώ αυτό είναι πλήρες ,δεν του επιτρέπεται να εισέλθει και αποχωρεί για πάντα.Από την άποψη της birth – death διαδικασίας,εκείνες τις στιγμές ο μέσος ρυθμός αφίξεων στο σύστημα γίνεται μηδέν.

Με βάση την παραπάνω πρόταση εισάγουμε αρχικά το :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,1,\ldots,k-1 \\ 0 & n > k \end{cases}$$

Επειδή για κάποιες για τιμές του n η τιμή του λ_n είναι 0 , το σύστημα αναμονής που ταιριάζει σε αυτό το μοντέλο πάντα φθάνει σε κατάσταση ισορροπίας ακόμα και όταν το ρ = λ/sμ ≥1 .Η συνήθης , ρεαλιστική ερμηνεία αυτού του μοντέλου είναι η ύπαρξη μόνο πεπερασμένου χώρου αναμονής ο οποίος μπορεί να χωρέσει ένα μέγιστο πλήθος k πελατών σε ένα σύστημα.Για παράδειγμα στην περίπτωση του χώρου των Επειγόντων του νοσοκομείου , το σύστημα αναμονής που το αντιπροσωπεύει θα έχει μια πεπερασμένη ουρά αν υπάρχουν μόνο k στο πλήθος κρεβάτια για τους ασθενείς που φθάνουν και αν το νοσοκομείο έχει σαν πολιτική να στέλνει σε άλλο νοσοκομείο τους ασθενείς που φθάνουν όταν δεν υπάρχουν άδεια κρεβάτια.Επίσης και πάλι μία πρακτική ερμηνεία του μοντέλου αυτού είναι οι περιπτώσεις που πελάτες φεύγουν από μια ουρά , όταν βρίσκουν αρκετούς άλλους πελάτες πριν από αυτούς και δεν διατίθενται να περιμένουν για πολλή ώρα . Το διάγραμμα ρυθμών είναι το ίδιο με του μοντέλου M/M/s μόνο που σταματά όταν φθάσει στην κατάσταση k.

Επειδή αυτό το σύστημα διαθέτει k θέσεις για το πλήθος των πελατών ,το k είναι και ο μέγιστος αριθμός εξυπηρετητών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και γι’αυτό το λόγο υποθέτουμε ότι s ≤ k .Έχουμε λοιπόν :

$$\mu = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le s \\ s\mu\,, & s \le n \le k \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\dots,s \\ (\frac{\lambda}{\mu})^s(\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{s!s^{n-s}}, \quad n = s, s+1, \dots k \\ 0, \qquad n > k \end{cases}$$

Όπου ρ=λ/μ

Έτσι έχουμε : $$p_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} p_0 \ , \quad 0 \le n \le s \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!s^{n-s}} p_0 \ , \quad n = s, s+1, \dots, k \\ 0, \qquad n > k \end{cases}$$

Όπου $p_0 = 1 / [\ \sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{k} (\frac{\lambda}{s\mu})^{n-s}]$

$$L_q = \sum_{n=s}^{k} (n-s) p_n$$

$$= \sum_{j=0}^{k-s} j p_{j+s}$$

$$= \frac{\rho^s \rho}{s!s} \sum_{j=0}^{k-s} j (\frac{\rho}{s})^{j-1} p_0$$

$$= \frac{\rho^{s+1}}{ss!} \frac{d}{d(\frac{\rho}{s})} \sum_{j=0}^{k-s} (\frac{\rho}{s})^j$$

$$= \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} \left\{ 1 - (\frac{\rho}{s})^{k-s+1} - (k-s+1)(1-\frac{\rho}{s})(\frac{\rho}{s})^{k-s} \right\} p_0$$

για ρ/s=1 το $L_q = \frac{\rho^s (k-s)(k-s+1)}{2s!} p_0$

για να προσδιορίσουμε τις τιμές των W, T, L πρέπει να προσδιορίσουμε πρώτα το λ_{eff}.Επειδή κανείς πελάτης δεν μπορεί να μπει στο σύστημα με το που το όριο φθάσει το k , $\lambda_{lost} = \lambda p_k$

άρα $\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{lost} = (1 - p_k)\lambda$

Επίσης έχουμε $L = \sum_{n=0}^{s-1} np_n + L_q + s(1 - \sum_{n=0}^{s-1} p_n)$

- Εδώ πρέπει να παραθέσουμε και μια ειδική περίπτωση αυτού του μοντέλου που είδαμε, όταν k = s , έτσι ώστε η χωρητικότητα της ουράς να είναι k – s = 0 .Σε αυτή την περίπτωση οι πελάτες που φθάνουν όταν όλοι οι εξυπηρετητές είναι απασχολημένοι φεύγουν αμέσως και «χάνονται» στο σύστημα.Μία τέτοια περίπτωση για παράδειγμα είναι ένα τηλεφωνικό δίκτυο με s συγκεκριμένα τηλεφωνικές γραμμές και κάθε άτομο που καλεί λαμβάνει σήμα κατειλλημένου και το κλείνει, όταν όλες οι γραμμές είναι απασχολημένες!Αυτού του είδους τα συστήματα , δηλαδή «συστήματα αναμονής» χωρίς ουρά , αντιπροσωπεύονται από τη λεγόμενη φόρμουλα της «απώλειας» του Erlang (Erlang's Formula ή Erlang-B) , η οποία ονομάζεται έτσι επειδή αυτού του είδους το σύστημα μελετήθηκε από τον A.K.Erlang στις αρχές του 20ού αιώνα,Δανό μηχανικό τηλεπικοινωνιών ο οποίος θεωρείται και ο θεμελιωτής της Θεωρίας Αναμονής (συγκεκριμένα ο τύπος-φόρμουλα για το συγκεκριμένο σύστημα αναμονής ανακαλύφθηκε από τον Erlang το 1917) .Όπως είναι προφανές σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα να είναι απασχολημένες όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης ισοδυναμεί με το ποσοστό των πελατών που χάνονται:

$$p_s = \frac{\frac{p^s}{s!}}{1 + p + \frac{p^2}{2!} + \cdots + \frac{p^s}{s!}}$$

ΤΟ Μ / Μ / ∞ ΜΟΝΤΕΛΟ :

Σε αυτή την περίπτωση μοντέλου ο αριθμός των εξυπηρετητών είναι απεριόριστος επειδή ο πελάτης είναι επίσης εξυπηρετητής (self-service model)!Για παράδειγμα ένα μηχάνημα ATM μιας τράπεζας. Εναλλακτικά μπορεί στο σύστημα αυτό να θεωρήσουμε είτε ότι υπάρχει μια μονάδα εξυπηρέτησης, η οποία επιταχύνει τον ρυθμό της γραμμικά όσο έρχονται περισσότεροι πελάτες, είτε ότι διατίθεται πάντα μια καινούργια μονάδα, για κάθε πελάτη που φθάνει στο σύστημα. Εδώ ,σε κάθε περίπτωση, ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ισοδυναμεί με τον αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται, εφ' όσον δεν υπάρχει αναμονή.

Το μοντέλο αυτό υποθέτει ότι ο ρυθμός αφίξεων είναι σταθερός.

Έτσι έχουμε :

$\lambda_n = \lambda$, $n = 0,1,2, \ldots$

$\mu_n = n\mu$, $n = 0,1,2, \ldots$

$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu} p_0 = \frac{p^n}{n!} p_0$, n=0,1,2,…

και αφού $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ έχουμε ότι

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots} = \frac{1}{e^{\rho}} = e^{-\rho}$$

Σαν αποτέλεσμα λοιπόν : $p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}$, $n = 0,1,2, \ldots$

και άρα ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο μήκος $L = \rho$,και όπως είναι αναμενόμενο $L_q = W = 0$,επειδή δεν υπάρχει αναμονή!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 :

Ας υποθέσουμε ότι κάθε χρόνο σε μια μεγάλη,επαρχιακή πόλη της Ελλάδας ανοίγουν κατά μέσο όρο 3 ζαχαροπλαστεία.Ο μέσος χρόνος κατάτον οποίο ένα ζαχαροπλαστείο παραμένει σε λειτουργία είναι τα 10 χρόνια.Την 1η Ιανουαρίου 2525,ποιος θα είναι ο μέσος αριθμός των ζαχαροπλαστείων στην πόλη αυτή;Αν τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των «ανοιγμάτων» των ζαχαροπλαστείων ακολουθούν Εκθετική κατανομή , ποιά η πιθανότητα την 1η Ιανουαρίου του 2525 να υπάρχουν 25 ζαχαροπλαστεία στην πόλη;

- Έχουμε ότι λ = 3 ζαχαροπλαστεία ανά χρόνο και 1/μ = 10 χρόνια ανά ζαχαροπλαστείο.Υποθέτοντας ότι έχουμε φθάσει στην κατάσταση ισορροπίας έχουμε το μέσο πλήθος $L = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 30$ $\zeta\alpha\chi\alpha\rho o\pi\lambda\alpha\sigma\tau\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$ στην πόλη.

Αφού οι χρόνοι «αφίξεων»(ανοιγμάτων) ακολουθούν Εκθετική κατανομή έχουμε :$p_{25} = \frac{30^{25} e^{-30}}{25!} = 0.05$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 :

Ένας επενδυτής στο χρηματιστήριο επενδύει 1000 ευρώ το μήνα σε ένα είδος μετοχών ως αποθέμα ασφαλείας.Οι συναλλαγές των μετοχών γίνονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές,άρα και σε τυχαίο ρυθμό , επειδή ο επενδυτής αποφασίζει να τις κάνει όταν βρεθεί μια «καλή» ευκαιρία για αγορά.Επίσης κρατάει αυτές τις μετοχές αποθέματος για 3 χρόνια κατά μέσο όρο αλλά τις πουλάει και πάλι σε τυχαίες χρονικές στιγμές,όταν βρεθεί μια κατάλληλη ευκαιρία στην αγορά για να το κάνει.Σύμφωνα με τη πορεία του επενδυτή ,ένα 25% από αυτές τις μετοχές σημειώνουν πτώση σε ένα ποσοστό περίπου 20% το χρόνο.Αυτές που απομένουν 75% σημειώνουν άνοδο με ένα ρυθμό περίπου 12% το χρόνο.Θέλουμε λοιπόν να εκτιμήσουμε την καθαρή αξία για τον επενδυτή ,μακροπρόθεσμα , στο χρηματιστήριο.

- Αυτή η περίπτωση μπορεί να μοντελοποιηθεί με ένα M/M/∞ μοντέλο καθώς ο επενδυτής δεν χρειάζεται να περιμένει σε κάποια ουρά αναμονής για να αγοράσει ή να πουλήσει τις μετοχές που διατηρεί ως απόθεμα.
  Ο μέσος χρόνος μεταξύ των συναλλαγών είναι 1 μήνας.Επομένως λ = 12 μετοχές ανά χρόνο.Ο ρυθμός πωλήσεων είναι ο μ = 1/3 μετοχής ανά χρόνο.
  Έχουμε λοιπόν $L = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 36\ μετοχές\ αποθέματος - ασφαλείας.$
  Έτσι η εκτίμηση για τη μακροπρόθεσμη ,μέση καθαρή αξία του επενδυτή για ένα χρόνο είναι :
  $$(0.25L \times 1000)(1 - 0.20) + (0.75L \times 1000)(1 + 0.12)$$
  $$= 63.990\ ευρώ$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ $P(n\geq s)$ ΓΙΑ ΤΟ M/M/s ΜΟΝΤΕΛΟ :

ρ	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7
0.10	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
0.30	0.14	0.07	0.04	0.02	0.01	0.00
0.40	0.23	0.14	0.09	0.06	0.04	0.03
0.50	0.33	0.24	0.17	0.13	0.10	0.08
0.55	0.39	0.29	0.23	0.18	0.14	0.11
0.60	0.45	0.35	0.29	0.24	0.20	0.17
0.65	0.51	0.42	0.35	0.30	0.26	0.21
0.70	0.57	0.51	0.43	0.38	0.34	0.30
0.75	0.64	0.57	0.51	0.46	0.42	0.39
0.80	0.71	0.65	0.60	0.55	0.52	0.49
0.85	0.78	0.73	0.69	0.65	0.62	0.60
0.90	0.85	0.83	0.79	0.76	0.74	0.72
0.95	0.92	0.91	0.89	0.88	0.87	0.85

Πεπερασμένη Πηγή πελατών (Πεπερασμένος πληθυσμός πελατών στο σύστημα)

Το μοντέλο που θα δούμε εδώ διαφέρει από τα προηγούμενα στο ότι η πηγή που «γεννά» τους πελάτες σε ένα σύστημα ουράς αναμονής είναι πεπερασμένη,δηλαδή το πλήθος των πελατών στο σύστημα είναι πεπερασμένο (για παράδειγμα N μηχανές που βρίσκονται σε ένα εργοστάσιο,και κάθε φορά που κάποια από αυτές χαλά , οι υπεύθυνοι την αντικαθιστούν με μια από ένα πλήθος εφεδρικών μηχανών που διαθέτουν) .Υποθέτοντας λοιπόν ότι **N** είναι το όριο για τον πληθυσμό που «γεννά» η πηγή , το πλήθος των πελατών στο σύστημα είναι n=0,1,2,...,N έτσι ώστε κάθε φορά ο αριθμός των πιθανών πελατών που απομένει από την πηγή να είναι $N-n$. Ένας πελάτης θα βρίσκεται είτε στο σύστημα (εξυπηρετούμενος ή σε αναμονή) είτε εκτός συστήματος (φθάνοντας στο σύστημα). Όλοι οι πελάτες δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

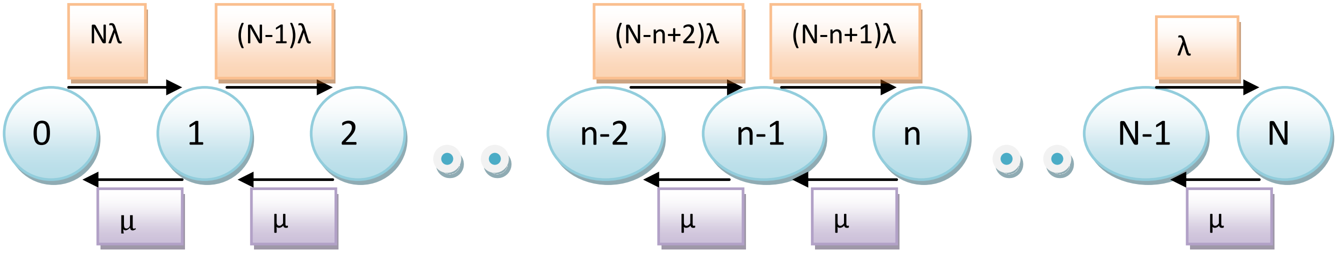
Εφόσον n πελάτες βρίσκονται μέσα στο σύστημα και N –n είναι ο αριθμός αυτών που βρίσκονται έξω από αυτό ,η τρέχουσα κατανομή πιθανότητας του χρόνου που απομένει μέχρι την επόμενη άφιξη είναι ουσιαστικά η κατανομή του ελαχίστου από τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των N – n πελατών που βρίσκονται εκτός συστήματος.Από τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο κομμάτι για την Εκθετική κατανομή καταλαβαίνουμε ότι και αυτή η κατανομή πρέπει να είναι Εκθετική με παράμετρο $\lambda_n = (N-n\,)\lambda$.Έτσι και αυτό το μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση birth-death διαδικασίας.

- Θα δούμε χωριστά παρακάτω τις περιπτώσεις αυτού του μοντέλου για σύστημα με έναν εξυπηρετητή και για πολλαπλούς εξυπηρετητές.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Συστήματος 1ός Εξυπηρετητή :

$$\lambda_n = \begin{cases} (\,N-n\,)\lambda, & n = 0,1,\dots,N \\ 0\,, & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu\,, \qquad n = 1,2,\dots$$



Γι'αυτό το μοντέλο λοιπόν οι παραάγοντες C_n είναι :

$$C_n = \begin{cases} N(N-1)\ldots(N-n+1)(\frac{\lambda}{\mu})^n = \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n\,, & n \leq N \\ 0\,, & n > N \end{cases}$$

Έτσι $p_0 = 1 \,/\, \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n\right]$

$p_n = \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n p_0$, n=1, 2, … , N

$L_q = \sum_{n=1}^{N}(n-1)p_n$ το οποίο δίνει $L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - p_0)$

$$L = \sum_{n=0}^{N} np_n = L_q + 1 - p_0 = N - \mu/\lambda(1 - p_0)$$

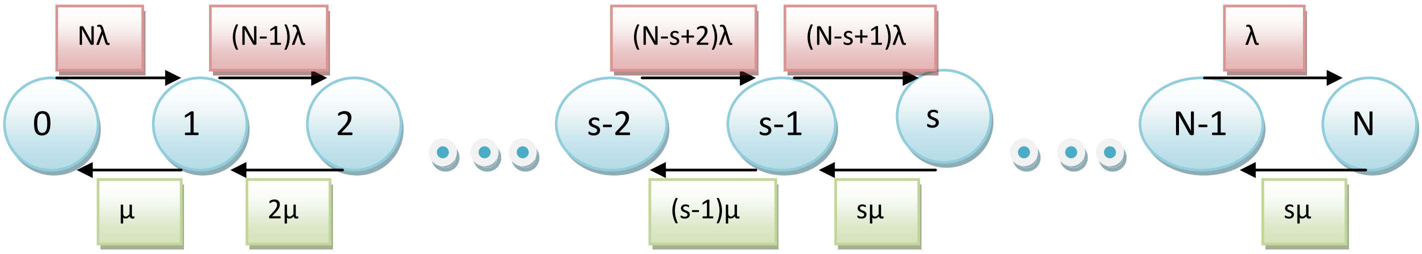
με $W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$ και $W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$

με το $\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n p_n \,(= E\{(N-n)\lambda\}) = \sum_{n=0}^{N}(N-n)\lambda p_n = \lambda(N-L)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Συστήματος Πολλαπλών Εξυπηρετητών (s>1) :

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda\,, & n = 0,1,2,\dots,N \\ 0\,, & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \{n\mu\,, \quad n = 1,2,\dots s\} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \mu_n = \{s\mu\,, n = s, s+1,\dots\}$$



Έτσι λοιπόν αντίστοιχα με την περίπτωση του ενός εξυπηρετητή έχουμε τα εξής :

$$C_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n = 0,1,2,\dots,s \\ \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & n = s, s+1,\dots,N \\ 0\,, & n > N \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,, & 0 \leq n \leq s \\ \frac{N!}{(N-n)!\,s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,, & s \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

$$p_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{N!}{(N-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{N} \frac{N!}{(N-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

Με $L_q = \sum_{n=s}^{N}(n-s)p_n$

Και $L = \sum_{n=s}^{s-1} np_n + L_q + s(1-\sum_{n=0}^{s-1} p_n)$

με $W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$ και $W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$ με

λ_{eff} *να είναι το ίδιο με την περίπτωση του ενός εξυπηρετητή .*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Το τμήμα της δημοτικής αστυνομίας ενός δήμου της Αττικής διαθέτει 5 περιπολικά αυτοκίνητα.Κάθε περιπολικό χρειάζεται service μια φορά κάθε 30 μέρες.Το τμήμα διαθέτει 2 μηχανικούς για την επιδιόρθωση των περιπολικών όταν χρειάζεται,καθένας από τους οποίους θέλει κατά μέσο όρο 3 μέρες για να επισκευάσει το όχημα.Τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των εμφανίσεων βλαβών και τα αντίστοιχα μεταξύ των επισκευών ακολουθούν την Εκθετική κατανομή.

Θέλουμε να βρούμε τα εξής :

- Το μέσο αριθμό περιπολικών που βρίσκονται σε καλή κατάσταση.
- Το μέσο χρόνο που κάθε περιπολικό απαιτεί επισκευή.
- Την πιθανότητα ένας από τους μηχανικούς να μένει αδρανής.

Έχουμε τα εξής :

N = 5 , s = 2 , λ = 1/30 περιπολικό /ημέρα και μ=1/3 περ./ημ.

Άρα $\rho = \frac{1/30}{1/3} = \frac{1}{10}$

- $p_1 = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{10}\right)p_0 = 0.5p_0$
- $p_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 p_0 = 0.1p_0$
- $p_3 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \frac{3!}{2!2}p_0 = 0.015p_0$
- $p_4 = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{2!2^2}p_0 = 0.0015p_0$
- $p_5 = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5 \frac{5!}{2!2^3}p_0 = 0.000075p_0$

Έτσι $p_0(0.5 + 0.1 + 0.015 + 0.0015 + 0.000075) = 1$ και άρα $p_0 = 0.619$

και έχουμε και τις τιμές των υπόλοιπων πιθανοτήτων :

$p_1 = 0.310$, $p_2 = 0.062$, $p_3 = 0.009$, $p_4 = 0.001$ και $p_5 = 0$

Ο αριθμός των περιπολικών που αναμένονται να βρίσκονται σε καλή κατάσταση είναι $N - L$,δηλ.

$N - \sum_{n=0}^{5} np_n = 5 - [0(0.619) + 1(0.310) + 2(0.062) + 3(0.009) + 4(0.001) + 5 \cdot 0] = 5 - 0.465 = 4.535$ *περιπολικά σε καλή κτάσταση*

Στη συνέχεια ψάχνουμε τον $W = L/\lambda_{eff}$ όπου $\lambda_{eff} = \lambda\,(N - L) = \frac{4.535}{30} = 0.151$ περιπολικά /ημέρα

Έτσι $W = \frac{0.465}{0.151} = 3.08$ ημέρες

Τέλος η πιθανότητα όπου ένας μηχανικός μπορεί να μείνει αδρανής

είναι :

$p_0 + 0.5p_1 = 0.619 + 0.5\,(0.310) = 0.774$

(αν υπήρχαν 3 μηχανικοί για τις επισκευές η αντίστοιχη πιθανότητα θα ήταν για έναν από αυτούς πάλι $p_0 + \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2$ έτσι επαγωγικά η πιθανότητα να είναι κάποιος συγκεκριμένος μηχανικός αδρανής όταν το πλήθος τους είναι γενικά s είναι : $p_0 + \frac{s}{s-1}p_1 + \frac{s}{s-2}p_2 + \ldots + \frac{p_{s-1}}{s}$.

Μοντέλο Ουράς Αναμονής με μή σταθερό Μέσο Ρυθμό Εξυπηρέτησης(state-dependent service rates model)

Μέχρι τώρα στα μοντέλα που έχουμε δει υποθέταμε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης ήταν σταθερός,ανεξαρτήτως του πλήθους των πελατών μέσα στο σύστημα.Το γεγονός αυτό δυστυχώς δεν αντικατοπτρίζει πλήρως την πραγματικότητα,ειδικά σε συστήματα ουρών αναμονής όπου οι εξυπηρετητές είναι άνθρωποι. Για παράδειγμα είναι πιθανόν σε ένα σύστημα όπου η ουρά είναι πολύ μεγάλη , οι εξυπηρετητές να τείνουν να δουλεύουν πολύ πιο γρήγορα απ'όταν η ουρά είναι μικρή ή μηδαμινή.Αυτό μπορεί να επιδράσει απλώς αυξάνοντας το ρυθμό εξυπηρέτησης,διότι γενικά οι εξυπηρετητές δρουν υπό πίεση και άρα πιο γρήγορα όταν υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής είτε να επιδράσει πιθανόν αρνητικά στην ποιότητα των υπηρεσιών εξυπηρέτησης.

Θεωρώντας λοιπόν ότι ο ρυθμός εξυπηρέτησης αυξάνεται καθώς το μήκος της ουράς αυξάνεται ,μπορούμε να διαμορφώσουμε ένα «θεωρητικό» μοντέλο που να παρουσιάζει τον τρόπο που αυξάνεται ο ρυθμός έχοντας ταυτόχρονα όμως αυτό το μοντέλο αρκετή απλότητα ώστα να μπορεί να εφαρμοσθεί στην πράξη.

Αρχικά δημιουργούμε μια μοντελοποίηση για την περίπτωση του ενός εξυπηρετητή :

$\boldsymbol{\mu_n = \ n^c\mu_1}$ **, n=0,1,2,...**

όπου n = αριθμός των πελατών στο σύστημα

μ_n= μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης όταν n πελάτες βρίσκονται στο σύστημα

c = συντελεστής πίεσης (pressure coefficient)-θετική σταθερά που εκφράζει το βαθμό στον οποίο ο ρυθμός εξυπηρέτησης επηρεάζεται από την κατάσταση του συστήματος(δηλ.το πλήθος των πελατών)

Για παράδειγμα έστω c =1 ,υποθέτουμε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ευθέως ανάλογος με το πλήθος των πελατών n.Για c = ½ υποθέτουμε ότι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ευθέως ανάλογος με την τετραγωνική ρίζα του n κ.ο.κ.Μέχρι τώρα επομένως,στα μοντέλα που εξετάσαμε το c = 0.

Έστω λοιπόν τώρα να υποθέσουμε ότι οι αφίξεις στο σύστημα αναμονής ακολουθούν την Poisson κατανομή με $\lambda_n = \lambda$ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν Εκθετική κατανομή με $\mu_n = n^c \mu_1$.Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια ειδική μορφή της birth-death διαδικασίας , με τους παράγοντες C_n που έχουμε ορίσει να έχουν την μορφή :

$$C_n = \frac{(\frac{\lambda}{\mu_1})^n}{(n!)^c} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

Έτσι όλοι οι τύποι για τα μεγέθη που ισχύουν στην κατάσταση ισορροπίας είναι εφαρμόσιμοι και σε αυτή τη περίπτωση.Παρ'όλα αυτά,δεν είναι διαθέσιμες γενικά οι αναλυτικές εκφράσεις των αθροισμάτων που περιλαμβάνονται σε αυτούς τους τύπους.Όμως σχεδόν ακριβή αποτελέσματα για την πιθανότητα p_0 και το μήκος L έχουν υπολογισθεί-γραφικά για διάφορες τιμές του c και του λ/μ_1 (με χρήση υπολογιστή και χρησιμοποιώντας σε πίνακες ένα πεπερασμένο πλήθος ορών) .

Μία ακόμη περίπτωση είναι το σύστημα αναμονής να αντιδράσει σε μία ουρά μεγάλου μήκους με το να μειώσει το ρυθμό αφίξεων αντί να αυξήσει το ρυθμό εξυπηρέτησης (για παράδειγμα όταν σε μια υπηρεσία η ουρά σε ένα ταμείο είναι πολύ μεγάλη ,ο υπάλληλος παραπέμπει κάποιους από τους πελάτες να απευθυνθούν σε κάποιο άλλο ταμείο) .Σε αυτές τις περιπτώσεις οι μέσοι ρυθμού αφίξεων μοντελοποιούνται ως εξής :

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \lambda_0 \ , \ n = 0,1,2,\ldots$$

Όπου η b είναι μία σταθερά ανάλογης ερμηνείας με αυτήν της c που είδαμε.Οι παράγοντες C_n της birth-death διαδικασίας με αυτά τα λ_n είναι οι ίδιοι ακριβώς με τους προηγούμενους , έχοντας αυτή τη φορά $\boldsymbol{\mu_n = \mu} \ , \boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$ και αντικαθιστώντας το λ με το λ_0 , για το μοντέλο με μη σταθερό ρυθμό εξυπηρέτησης όπου c = b και $\lambda/\mu_1 = \lambda_0/\mu$ έτσι ώστε τα απότελέσματα που αφορούν την κατάσταση ισορροπίας να παραμένουν τα ίδια.

Βέβαια ένα πιο γενικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί,το οποίο συνδυάζει αυτές τις δύο περιπτώσεις , δηλαδή αμφότεροι οι μέσοι ρυθμοί αφίξεων και εξυπηρέτησης να είναι μή σταθεροί (state-dependent mean arrival and mean service rates).Έτσι έχουμε :

$$\mu_n = n^{\alpha} \mu_1 \ , \ n = 1,2,\ldots$$

Και $\lambda_n = (n+1)^{-b}\lambda_0$, $n = 0,1,2,\ldots$

Και πάλι οι παράγοντες C_n είναι ίδιοι με αυτούς του μοντέλου μη σταθερού ρυθμού εξυπηρέτησης παραπάνω, με $c = a + b$ $και$ $\frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{\lambda_0}{\mu_1}$, έτσι ώστε οι τύποι για τα μεγέθη που ισχύουν στην κατάσταση ισορροπίας (και οι οποίοι έχουν υπολογισθεί γραφικά) να είναι εφαρμόσιμοι σε αυτό το γενικευμένο μοντέλο.

Τώρα ας δούμε την αντίστοιχη μοντελοποίηση στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότεροι του ενός εξυπηρετητές (s > 1):

Το μοντέλο που θα δούμε για την περίπτωση των πολλαπλών εξυπηρετητών είναι το γενικευμένο,που συνδυάζει και τους δύο μέσους ρυθμούς στο σύστημα να μην είναι σταθεροί και να εξαρτώνται από την εκάστοτε κατάσταση του συστήματος.Είναι φυσικό να έχουμε τα μ_n και λ_n να ποικίλλουν ανάλογα με το πλήθος των πελατών ανά εξυπηρετητή (n/s) όπως ποικίλλουν στην περίπτωση του ενός εξυπηρετητή ανάλογα με το n.

Έτσι :
$$\mu_n = \begin{cases} n\mu_1 & , \ n \le s \\ (\frac{n}{s})^a s\mu_1 & , \ n \ge s \end{cases}$$

Και
$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_0 & , \ n \le s-1 \\ (\frac{s}{n+1})^b \lambda_0 & , \ n \ge s-1 \end{cases}$$

Έτσι λοιπόν οι παράγοντες C_n για την birth-death διαδικασία με τα παραπάνω δεδομένα είναι :

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\lambda_0}{\mu_1})^n}{n!} , & n = 0,1,2,\ldots,s \\ \dfrac{(\frac{\lambda_0}{\mu_1})^n}{s!\,(\frac{n!}{s!})^c s^{(1-c)(n-s)}} , & n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

με c = α + b

Οι τιμές για τα p_0 , L_q , L έχουν υπολογισθεί γραφικά για διάφορες τιμές του c , λ_0/μ_1 και s.

Το παράδειγμα του χώρου των Επειγόντων του τοπικού,δημόσιου νοσοκομείου με μη σταθερό μέσο,ρυθμό εξυπηρέτησης :Ύστερα από συλλογή κι άλλων δεδομένων ,ο υπεύθυνος διαχείρισης διαπίστωσε ότι ο χρόνος που περνά ένας γιατρός με κάθε ασθενή τείνει να μειώνεται καθώς το πλήθος των ασθενών που βρίσκονται σε αναμονή αυξάνεται.Γεγονός που φαίνεται λογικό και εξηγείται με το ότι ο γιατρός τείνει να δουλεύει πιο γρήγορα όταν υπάρχει αύξηση στην ουρά αναμονής των ασθενών.Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης μ_n (δηλ. ο ρυθμός με τον οποίο ο γιατρός στο χώρο των Επειγόντων περιθάλπτει τους ασθενείς ενώ υπάρχουν n ασθενείς σ'αναμονή) φαίνεται να ταιριάζει στην περίπτωση του μοντέλου του εξαρτώμενου από την κατάσταση του συστήματος ρυθμού εξυπηρέτησης.Γι'αυτό λοιπόν και ο υπεύθυνος διαχείρισης του νοσοκομείου αποφάσισε να το εφαρμόσει.Με βάση λοιπόν τα καινεούργια δεδομένα , ο κάθε γιατρός χρειάζεται έναν μέσο όρο 24 λεπτών για να κουράρει το κάθε ασθενή αν δεν περιμένουν άλλοι ασθενείς.Αυτός ο μέσος χρόνος γίνεται 12 λεπτά όταν ο κάθε γιατρός έχει 6 ασθενείς,επομένως 5 να περιμένουν για τον καθένα.Έτσι λοιπόν με ένα μόνον γιατρό σε εφημερία :

$\mu_1 = 2\frac{1}{2}$ $ασθενείς\ /ώρα$ $\qquad\qquad$ $\mu_6 = 5\ ασθενείς/ώρα$

Έτσι ο συντελεστής πίεσης c πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση : $\mu_6 = 6^c\mu_1$ =>6^c = 2 => ***c = 0.4*** .Ο διαχειριστής για να συγκρίνει τις διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων του ενός γιατρού σε εφημερία και των δύο γιατρών αντίστοιχα,ανέπτυξε το παραπάνω μοντέλο που είδαμε και για τις 2 περιπτώσεις,βρίσκοντας τα διάφορα ,εμπλεκόμενα μεγέθη(στην κατάσταση ισορροπίας φυσικά).

	s=1	**s=2**
$\frac{\lambda}{s\mu_1}$	0.8	0.4
$\frac{\lambda}{s\mu_6}$	0.4	0.2
p_0	0.367	0.440
p_1	0.294	0.352
L_q	0.618	0.095
L	1.251	0.864
W	0.309 ώρα	0.048 ώρα
T	0.626 ώρα	0.432 ώρα
$p\{W_n > 0\}$	0.633	0.208

Οι τιμές των L , p_0 και για την περίπτωση s=2 , L_q βρίσκονται από τις δεδομένες τιμές που έχουν υπολογισθεί γραφικά και χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν τα παρακάτω :

$p_1 = C_1 p_0$

$L_q = L - (1 - p_0)$, $για\ s = 1$

$L_q = L - p_1 - 2(1 - p_0 - p_1)$, $για\ s = 2$

$W = \frac{L_q}{\lambda}$ και $T = \frac{L}{\lambda}$ και $p\{W_n > 0\} = 1 - \sum_{n=0}^{s-1} p_n$

Τα αποτελέσματα από τον παραπάνω πίνακα(και το ότι δεν παρεκλίνουν σημαντικά από τα αντίστοιχα του παραδείγματος για το M/M/s μοντέλο) στηρίζουν τη άποψη ότι ο ένας γιατρός θα είναι ανεπαρκής για την επόμενη χρονιά!

ΜΟΝΤΕΛΑ Ο.Α. ΜΕ ΜΗ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Μέχρι τώρα όλα τα μοντέλα ουρών αναμονής που έχουμε δει ,στηρίζονταν στην διαδικασία birth – death.Επομένως αναγκαστικά οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούσαν την Εκθετική κατανομή.Αυτού του είδους η κατανομή πιθανότητας έχει αρκετές, «βολικές» ιδιότητες ,αλλά μπορεί να εφαρμοσθεί,δίνοντας αξιόλογα αποτελέσματα,μόνο σε ορισμένα προβλήματα συστημάτων ουράς αναμονής.Συγκεκριμένα η παραδοχή ότι τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή συνεπάγεται με το ότι οι αφίξεις γίνονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές – άρα ακολουθούν Poisson κατανομή – γεγονός λογικό σε πολλές περιπτώσεις.Όμως σε άλλες,επίσης πολλές περιπτώσεις,οι αφίξεις γίνονται σε συγκεκριμένες,προγραμματισμένες ή τακτικές χρονικές συχνότητες.Επιπλέον οι χρόνοι εξυπηρέτησης αποκλίνουν πολύ συχνά από την Εκθετική κατανομή .

Γι'αυτό λοιπόν το λόγο είναι σημαντική η ύπαρξη εναλλακτικών μοντέλων που στηρίζονται σε άλλες κατανομές-μή Εκθετικές.Βέβαια είναι γεγονός ότι η ανάλυση αυτών των μοντέλων παρουσιάζει αρκετά μεγαλύτερη δυσκολία. Σε αυτές τις περιπτώσεις πολλές φορές είναι χρήσιμη έως απαραίτητη η χρήση προσομοιώσεων και υπολογιστικών προγραμμάτων με χρήση Η/Υ.

Παρακάτω λοιπόν παρατίθενται μια σύνοψη αυτών των μοντέλων καθώς και κάποια αποτελέσματά τους.

ΤΟ M / G / 1 ΜΟΝΤΕΛΟ (POLLACZEK – KHINTCHINE FORMULA)

Στο μοντέλο αυτό θεωρείται ότι υπάρχει ένας εξυπηρετητής ,τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή (οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την Poisson κατανομή) και ο ρυθμός των αφίξεων είναι $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda_{eff}} = \boldsymbol{\lambda})$. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών θεωρούνατι και πάλι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ακολουθούν την ίδια κατανομή.Όμως εδώ δεν υπάρχουν κάποια όρια για το είδος της κατανομής που ακολουθούν οι χρόνοι εξυπηρέτησης.Το μόνο που αρκεί και πρέπει να ξέρουμε είναι η μέση τιμή **E{t} (ή 1/μ)** και η διασπορά **var{ t } (ή σ^2)** αυτής της κατανομής.Επίσης ,για να φτάσει σε μια κατάσταση ισορροπίας το σύστημα, θα πρέπει να ισχύει ότι **ρ=λE{t} <1**.

Τα αποτελέσματα (στην κατάσταση ισορροπίας) για αυτό το μοντέλο είναι τα εξής :

$$p_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2(E^2\{t\} + var\{t\})}{2(1 - \lambda E\{t\})}$$

$$L = \lambda E\{t\} + L_q$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda} \quad , \quad T = W + E\{t\}$$

Δεδομένης της πολυπλοκότητας στην ανάλυση των μοντέλων ουράς αναμονής,τα οποία δεν θέτουν όρια στο είδος της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης ,είναι πολύ σημαντικό το γεγονός ότι υπάρχει ένας απλός τύπος που παρέχει το μήκος της ουράς L_q. Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή σαν **Pollaczek-Khintchine (P-K) formula** και πήρε το όνομά της από δύο πρωτοπόρους στην ανάλυση της Θεωρίας Ουρών Αναμονής , οι οποίοι βρήκαν τον τύπο αυτό στις αρχές της δεκαετίας του ΄30.

Παρατηρούμε από τα παραπάνω ότι για δεδομένη μέση τιμή της οποιαδήποτε κατανομής ακολουθούν οι χρόνοι αφίξεων, τα $L_q, L, T\ και\ W$ αυξάνονται όσο αυξάνεται και η διασπορά var{t}.Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η συνέπεια του εξυπηρετητή ως προς τις υπηρεσίες που προσφέρει έχει σημαντική επίδραση στη γενικότερη επίδοση του συστήματος ως προς την εξυπηρέτηση.Δηλαδή δεν μετρά μόνον η ταχύτητα με την οποία «εργάζεται» ένας εξυπηρετητής.

Όταν η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης είναι Εκθετική ισχύει $\sigma^2 = 1/\mu^2$ και τα παραπάνω αποτελέσματα είναι τα ίδια με αυτά στην περίπτωση του M/M/1 μοντέλου .

Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι προσπάθειες για εξαγωγή αντίστοιχων τύπων στην περίπτωση που το σύστημα έχει πάνω από έναν εξυπηρετητή δεν έχουν δώσει κάποιο αποτέλεσμα.Παρ'όλα αυτά κάποια αποτελέσματα έχουν βρεθεί και είναι διαθέσιμα για 2 συγκεκριμένες και σημαντικές περιπτώσεις πολλαπλών εξυπηρετητών των οποίων τα μοντέλα παραντίθενται παρακάτω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Σε ένα πρατήριο καυσίμων υπάρχει χώρος αυτόματου καθαρισμού για τα οχήματα.Τα αυτοκίνητα φθάνουν σύμφωνα με την Poisson κατανομή ,με μέσο ρυθμό 4 αυτοκίνητα ανά ώρα και όσως χρειαστεί να περιμένουν σε ειδικό χώρο στάθμευσης αν ο χώρος καθαρισμού είναι απασχολημένος.Επίσης επειδή τα οχήματα που δεν βρίσκουν χώρο να σταθμεύσουν στο αντίστοιχο,διαθέσιμο μπορόυν να σταθμεύσουν στο δρόμο έξω από το πρατήριο , η ουρά θεωρείται ότι δεν έχει περιορισμό στο μέγεθός της.Το μηχανικό σύστημα που εκτελεί τον καθαρισμό είναι προγραμματισμένο ώστε να χρειάζεται 10 λεπτά για τον καθαρισμό κάθε αυτοκινήτου (επομένως δεν γνωρίζουμε την ακριβή κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης).

Έχουμε λοιπόν $\lambda_{eff} = \lambda = 4\ αυτοκίνητα/ώρα$

$E\{t\} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}\ της\ ώρας$ και $var\{t\} = 0$

Άρα έχουμε :

$$L_q = \frac{4^2[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0]}{2(1-\frac{4}{6})} = 0.667\ αυτοκίνητα$$

$$L = 4\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{4^2[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0]}{2(1-\frac{4}{6})} = 1.333\ αυτοκίνητα$$

$$W = \frac{0.667}{4} = 0.167\ ώρα$$

$$T = \frac{1.333}{4} = 0.333\ ώρα$$

ΤΟ $M / D / s$ ΜΟΝΤΕΛΟ

Σε περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής όπου οι ενέργειες των εξυπηρετητών χαρακτηρίζονται από μια «ρουτίνα»,δηλαδή οι εξυπηρετητές εκτελούν τις ίδιες,επαναλαμβανόμενες πράξεις για όλους τους πελάτες, υπάρχει όπως είναι κατανοητό μικρή διαφοροποίηση στο χρόνο εξυπηρέτησης που απαιτείται.Το μοντέλο αυτό λοιπόν χρησιμοποιείται συχνά για την αναπαράσταση τέτοιων περιπτώσεων ουρών αναμονής καθώς υποθέτει ότι όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης πρακτικά είναι ίσοι με μια καθορισμένη σταθερά και οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την Poisson κατανομή , με σταθερό μέσο ρυθμό ίσο με λ.

Όταν ο εξυπηρετητής είναι μόνον ένας το M/D/1 μοντέλο είναι μια ειδική περίπτωση του M/G/1 μοντέλου όπου η διασπορά $\sigma^2 = 0$, έτσι ώστε ο τύπος Pollaczek-Khintchine να παίρνει τη μορφή :

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

Και τα υπόλοιπα μεγέθη να υπολογίζονται όπως εδείχθη παραπάνω.Επίσης μπορούμε να προσέξουμε ότι τα μεγέθη L_q , W μειώνονται ακριβώς στο μισό σε σχέση με τα αντίστοιχα των Εκθετικών χρόνων εξυπηρέτησης που ίσχυαν στο μοντέλο M/M/1 ,όπου $\sigma^2 = 1/\mu^2$.Οπότε μειώνοντας τη διασπορά σ^2 μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά την επίδοση ενός συστήματος ουράς αναμονής.

Για την περίπτωση των πολλαπλών εξυπηρετητών αυτού του μοντέλου,είναι διαθέσιμη μια πολύπλοκη μέθοδος για την εξαγωγή της κατανομής πιθανότητας του πλήθους των πελατών στο σύστημα (στην κατάσταση ισορροπίας) και για τη μέση τιμή της.(Τα αποτελέσματα αυτά καθώς και οι μέσες τιμές του μήκους L έχουν υπολογισθεί γραφικά για διάφορες περιπτώσεις .)

ΤΟ $M/E_k/s$ ΜΟΝΤΕΛΟ

Το μοντέλο M/D/s υποθέτει όπως είδαμε μηδαμινή διαφοροποίηση στους χρόνους εξυπηρέτησης(σ=0) ενώ η Εκθετική κατανομή στους χρόνους αυτούς υποθέτει πολύ μεγάλη διαφοροποίηση (σ=1/μ). Αυτές αποτελούν δύο ακραίες περιπτωσεις και ανάμεσά τους υπάρχει ένα ευρύ φάσμα περιπτώσεων στο οποίο στην πράξη ανήκουν οι περισσότερες κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης.Ακόμη ένα είδος θεωρητικής κατανομής για τους χρόνους εξυπηρέτησης που ταιριάζει σε αυτό το ευρύ φάσμα είναι η Erlang κατανομή που έχουμε δει (για τους χρόνους αφίξεων πριν). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang κατανομής είναι :

$$f(t)=\frac{(\mu k)^{k} t^{k-1} e^{-k\mu t}}{(k-1)!} \quad (t \geq 0)$$

Με μέση τιμή $E\{t\} = 1/\mu$ και διασπορά $var\{t\} = \frac{1}{\sqrt{k}\mu}$

(με μ και k να είναι αυστηρά θετικές παράμετροι και ειδικά η k είναι ακέραιος αριθμός- k: shape parameter/παράμετρος μορφής)

Η Erlang κατανομή είναι μια πολύ σημαντική κατανομή για τη θεωρία αναμονής για δυο λόγους.Για τον πρώτο λόγο ,όπως έχουμε δει και στο κομμάτι για τους χρόνους αφίξεων , θεωρούμε k ανεξάρτητες,τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2, \dots, T_k$ οι οποίες ακολουθούν όλες την ίδια Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/(kμ). Τότε το άθροισμά τους $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ ακολουθεί την Erlang κατανομή με παραμέτρους μ και k .Αυτό μεταφράζεται σε ένα σύστημα ουράς αναμονής με το ότι ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση συγκεκριμένων ενεργειών εξυπηρέτησης μπορεί κάλιστα να ακολουθεί την Εκθετική κατανομή.Παρ’όλα αυτά , η συνολική εξυπηρέτηση που απαιτείται από ένα πελάτη μπορεί να περιλαμβάνει όχι μόνο μια συγκεκριμένη ενέργεια από τον εξυπηρετητή αλλά μια σειρά από k στο πλήθος ενέργειες.Αν η κάθε μια από αυτές ακολουθεί την ίδια Εκθετική κατανομή με όλες τις υπόλοιπες ως προς το χρόνο διάρκειας , τότε ο ολικός χρόνος εξυπηρέτησης θα ακολουθεί την Erlang κατανομή.

Ο δεύτερος λόγος είναι ότι η Erlang κατανομή αποτελεί ουσιαστικά μια μεγάλη οικογένεια κατανομών (καθώς υπάρχουν δύο παράμετροι),οι οποίες δέχονται τιμές μη αρνητικές.Έτσι και ρεαλιστικά οι κατανομές των χρόνων εξυπηρέτησης μπορούν να προσεγγισθούν από την Erlang κατανομή.Άλλωστε και η Εκθετική κατανομή (όπως έχουμε ήδη δει) αλλά και η εκφυλισμένη (degenerated distribution – D) είναι ειδικές περιπτώσεις της Erlang κατανομής , για k=1 και k=∞ αντίστοιχα.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση του $M/E_k/1$ μοντέλου ,που είναι μια ειδική περίπτωση του M/G/1 μοντέλου με τους χρόνους εξυπηρέτησης να ακολουθούν την Erlang κατανομή με παράμετρο μορφής k.

Από τον τύπο Pollaczek-Khintchine με $\sigma^2 = 1/(k\mu^2)$ έχουμε :

$$L_q = \frac{\frac{\lambda^2}{k\mu^2} + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$T = W + \frac{1}{\mu} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad L = \lambda T$$

Στην περίπτωση των πολλαπλών εξυπηρετητών (M/E_k/s) , η σχέση μεταξύ Erlang και Εκθετικής κατανομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαμόρφωση μιας τροποποιημένης birth-death διαδικασίας ως προς όμως ατομικές,εκθετικές φάσεις εξυπηρέτησης (k ανά πελάτη) αντί ως προς όλους τους πελάτες στο σύστημα.Παρ’όλα αυτά δεν έχει εξαχθεί κάποια γενική σχέση που να ισχύει σε αυτή την περίπτωση σε κατάσταση ισορροπίας για την πιθανότητα του πλήθους των πελατών στο σύστημα.Και πάλι όμως λύσεις για πολυάριθμες,ατομικές περιπτώσεις έχουν υπολογισθεί γραφικά καθώς απαιτούν προχωρημένη θεωρία για την εύρεσή τους.

NON-POISSON QUEUEING MODELS (ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΟΙ ΑΦΙΞΕΙΣ ΔΕΝ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ POISSON ΚΑΤΑΝΟΜΗ)

Στα μοντέλα που έχουμε δει μέχρι τώρα οι αφίξεις γίνονταν σύμφωνα με την Poisson κατανομή,δηλ.τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούσαν Εκθετική κατανομή.Παρ'όλα αυτά σε πολλές περιπτώσεις οι αφίξεις σε ένα σύστημα ουράς αναμονής μπορεί να γίνονται σε τακτικές ή καθορισμένες χρονικές στιγμές και όχι τυχαίες.Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν τα μοντέλα που έχουμε δει μέχρι τώρα δεν μπορούν να εφαρμοσθούν και υπάρχει η ανάγκη για κάποιο άλλο,εναλλακτικό μοντέλο.

Υπάρχουν τρία διαθέσιμα,τέτοια μοντέλα με την προϋπόθεση οι χρόνοι εξυπηρέτησης να ακολουθούν Εκθετική κατανομή.

- Το πρώτο μοντέλο είναι το $\mathbf{GI/M/s}$,το οποίο δεν προϋποθέτει κανένα περιορισμό στο είδος της κατανομής που ακολουθούν τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων.Γι'αυτήν τη περίπτωση υπάρχουν διαθέσιμα απότελέσματα,για την κατάσταση ισορροπίας βέβαια,για τις περιπτώσεις του ενός αλλά και των περισσοτέρων εξυπηρετητών,πάντα όμως σε σχέση με τους «εκθετικούς» χρόνους εξυπηρέτησης.Παρ'όλα αυτά τα αποτελέσματα αυτά χαρακτηρίζονται από δυσκολία ως προς τη χρήση.

- Το δεύτερο μοντέλο είναι το $\mathbf{D/M/s}$,το οποίο υποθέτει ότι όλοι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων σε ένα σύστημα είναι ίσοι με μία καθορισμένη σταθερά , η οποία εκφράζει το γεγονός το ότι οι αφίξεις στο σύστημα αυτό γίνονται σε τακτικά ή καθορισμένα χρονικά διαστήματα.

- Το τρίτο μοντέλο $\boldsymbol{E_k/M/s}$ υποθέτει πάλι ότι τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την Erlang κατανομή,η οποία παρέχει ένα ενδιάμεσο πεδίο περιπτώσεων μεταξύ των καθορισμένων και των εντελώς τυχαίων αφίξεων σε ένα σύστημα ουράς αναμονής.

Εκτενή αποτελέσματα έχουν υπολογισθεί και για τα δύο τελευταία μοντέλα,γραφικά και πάλι.

Αν πάλι ούτε τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων ούτε οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν Εκθετική κατανομή τώρα υπάρχουν τρία διασέσιμα μοντέλα ουράς αναμονής, για τα οποία και πάλι υπάρχουν διαθέσιμα ,υπολογισμένα αποτελέσματα .

Ένα από αυτά τα μοντέλα είναι το $\boldsymbol{E_m/E_k/s}$ στο οποίο και τα ενδονιαστήματα μεταξύ των αφίξεων αλλά και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την Erlang κατανομή.Τα άλλα δύο μοντέλα είναι $\boldsymbol{E_k/D/s}$ και $\mathbf{D}/\boldsymbol{E_k/s}$ τα οποία θεωρούν ότι ένα από τα δύο χρονικά είδη ακολουθεί την Erlang κατανομή ενώ για το άλλο θεωρούν ότι οι αντόστοιχοι χρόνοι είναι ίσοι με μία καθορισμένη σταθερά.

ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ :

Η λίστα των μοντέλων ουράς αναμονής που δεν ακολουθούν Εκθετική κατανομή γενικά περιλάμβάνει κι άλλα μοντέλα , εκτός από όλα αυτά που έχουμε δει μέχρι τώρα.

Για παράδειγμα, ένα άλλο είδος κατανομής που χρησιμοποιείται περιστασιακά είναι η Υπερεκθετική κατανομή.Το βασικό χαρακτηριστικό αυτής της κατανομής είναι ότι η διαπορά $\boldsymbol{\sigma}$ είναι μεγαλύτερη της μέσης τιμής $\mathbf{1/\mu}$,σε αντίθεση με την Erlang κατανομή όπου η διασπορά είναι μικρότερη από τη μέση τιμή(σ<1/μ) με εξαίρεση την περίπτωση για k=1,δηλ.την Εκθετική κατανομή , όπου σ=1/μ.

Ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος ουράς αναμονής είναι η επισκευή οχημάτων ή κάποιου είδους μηχανημάτων όπου οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι γενικά πολύ μικροί και οι επισκευές επομένως χαρακτηρίζονται από μια «ρουτίνα» αλλά μερικές φορές μπορεί να τύχει οι επισκευές να έχουν μεγάλη διάρκεια (μεγάλοι χρόνοι εξυπηρέτησης).Τότε η διασπορά των χρόνων εξυπηρέτησης μπορεί να τείνει να είναι κατα πολύ μεγαλύτερη από τη μέση τιμή και σε αυτή την περίπτωση η Υπερεκθετική κατανομή ταιριάζει ως κατανομή για τους χρόνους εξυπηρέτησης.Γενικά η Υπερεκθετική κατανομή αποτελεί ένα συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων Εκθετικών κατανομών.

Σε ένα παράδειγμα συστήματος όπως παραπάνω με τις επισκευές,όπου χρησιμοποιείται η Υπερεκθετική κατανομή για τη μοντελοποίηση των χρόνων εξυπηρέτησης, αυτή λοιπόν υποθέτει ότι υπάρχουν σταθερές πιθανότητες p και $1-p$ για όποιο είδος εξυπηρέτησης θα χρειαστεί(μικρής ή μεγάλης χρονικής διάρκειας) ,έτσι ώστε ο αντίστοιχος χρόνος εξυπηρέτησης να ακολουθεί Εκθετική κατανομή, αλλά οι παράμετροι για αυτές τις δυο κατανομές να διαφέρουν.

Άλλο ένα είδος κατανομών είναι οι λεγόμενες phase – type κατανομές οι οποίες χρησιμοποιούνται όταν ο ολικός χρόνος διαιρείται σε πεπερασμένες φάσεις(phases) κάθε μία από τις οποίες ακολουθεί Εκθετική κατανομή ,με πιθανόν διαφορετικές παραμέτρους ενώ οι φάσεις μπορεί να είναι παράλληλα ή σε σειρά μεταξύ τους.

Αν οι φάσεις βρίσκονται παράλληλα αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία επιλέγει τυχαία μία από τις φάσεις για να διεκπαιρεωθεί κάθε φορά σύμφωνα με συγκεκριμένες πιθανότητες.Σε αυτό το είδος ανήκει και η Υπερεκθετική κατανομή.Επίσης και η Erlang κατανομή είναι ένα είδος phase-type κατανομής.Η Erlang κατανομή υποθέτει ότι όλες οι k φάσεις της βρίσκονται σε σειρά και ότι έχουν όλες την ίδια παράμετρο για την Εκθετική κατανομή που ακολουθούν .

Αφαιρώντας λοιπόν τους διάφορους,επιμέρους περιορισμούς οι phase-type κατανομές μπορούν να εφαρμοσθούν πολύ καλύτερα από την Erlang κατανομή για χρόνους εξυπηρέτησης ή ενδοδιαστήματα μεταξύ αφίξεων που παρατηρούνται σε ρεαλιστικά συστήματα ουρών αναμονής.

PRIORITY – DISCIPLINE QUEUEING MODELS

Σε αυτά τα μοντέλα ουράς αναμονής η πειθαρχεία της ουράς ακολουθεί τις **προτεραιότητες.**Οι πελάτες χωρίζονται όπως έχουμε ξαναπεί σε κατηγορίες με διαφορετικές προτεραιότητες και επιλέγονται από την ουρά με βάση αυτές.

Πολλές ουρές αναμονής στη πραγματικότητα βασίζονται στην πειθαρχεία των προτεραιοτήτων.Για παράδειγμα σημαντικοί πελάτες επιλέγεται να εξυπηρετηθούν πιο γρήγορα ή επείγουσες δουλειές εκτελούνται πρώτα από άλλες κτλ.Επίσης τέτοιες σειρές συναντάμε στη διεκπεραίωση αλληλογραφίας (απλό, συστημένο, αεροπορικώς, επείγον, courier, κλπ.) και στα δίκτυα Η/Υ.

Παρακάτω θα δούμε λοιπόν **δύο** βασικά μοντέλα που ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία.Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι και τα δύο μοντέλα βασίζονται στις ίδιες παραδοχές γενικότερα απλά διαφέρουν ως προς το είδος της πειθαρχείας.

- Και τα δύο μοντέλα υποθέτουν ότι υπάρχουν $\boldsymbol{N}$ κατηγορίες-κλάσεις προτεραιότητας,με την κλάση 1 να έχει την μεγαλύτερη προτεραιότητα και τη N να έχει τη λιγότερη.Όταν ένας εξυπηρετητής ξεκινά τη διαδικασία εξυπηρέτησης για ένα νέο πεκλατη από την ουρά αναμονής,ο πελάτης που επιλέγει είναι αυτός που ανήκει στη κλάση με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα,το οποίο στην ουρά αναμονής μεταφράζεται ως τον πελάτη που περίμενε για το μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.Δηλαδή οι πελάτες επιλέγονται σύμφωνα με τις κλάσεις προτεραιότητας,αλλά και σύμφωνα με τη λογική του “first-come-first-served”(ο πρώτος που μπαίνει στην ουρά θα εξυπηρετηθεί και πρώτος) μεταξύ των επιμέρους αυτών κατηγοριών προτεραιότητας.
- Σε κάθε κλάση η διαδικασία των αφίξεων στο σύστημα ακολουθεί Poisson κατανομή και οι χρόνοι εξυπηρέτησης την Εκθετική κατανομή.Επίσης τα μοντέλα κάνουν την ίδια,αυστηρή παραδοχή ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι ο ίδιος για όλες τις κλάσεις προτεραιότητας,αλλά επιτρέπουν το μέσο ρυθμό αφίξεων να διαφοροποιείται μεταξύ των κλάσεων.

Η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο βασικών αυτών μοντέλων είναι το αν οι προτεραιότητες είναι με **διακοπές(preemptive priorities) ή χωρίς διακοπές(non-preemptive priorities)**.

- Με τις προτεραιότητες χωρίς διακοπή-non preemptive priorities ,όταν ένας πελάτης εξυπηρετείται δεν μπορεί να εκδιωχθεί πίσω στην ουρά αν ένας πελάτης με μεγαλύτερο βαθμό προτεραιότητας εισέλθει στο σύστημα.Επομένως η διαδικασία εξυπηρέτησης ενός πελάτη δεν μπορεί να διακοπεί ,σε καμμία περίπτωση ,αν έχει ήδη ξεκινήσει.
- Με τις προτεραιότητες με διακοπή-preemptive priorities ,ο πελάτης που εξυπηρετείται ,με τη χαμηλότερου βαθμού προτεραιότητα,διακόπτεται και ωθείται πίσω στην ουρά ,αν ένας πελάτης με υψηλότερου βαθμού προτεραιότητα εισέλθει στο σύστημα.Ο εξυπηρετητής επομένως υποχρεούται να εξυπηρετήσει άμεσα τον νέο πελάτη με την υψηλότερη συγκριτικά προτεραιότητα.Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι εξαιτίας της «έλλειψης μνήμης» της Εκθετικής κατανομής δεν μας ανησυχεί το να προσδιορίσουμε το σημείο κατά το οποίο ξεκινά η εξυπηρέτηση όταν ένας πελάτης διακόπτεται και επιστρέφει στην ουρά.Η κατανομή του εναπομείναντα χρόνου εξυπηρέτησης είναι πάντα η ίδια.

Επαναλαμβάνουμε ότι η διαδικασία των αφίξεων όλων των πελατών στο σύστημα και για τα δυο μοντέλα,αν αγνοήσουμε το διαχωρισμό των πελατών ανάλογα με τις κλάσεις προτεραιοτήτων,ακολουθεί μία Poisson κατανομή και όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την ίδια Εκθετική κατανομή.Επομένως τα δύο μοντέλα ανήκουν στην κατηγορία των $M/M/s$ μοντέλων με εξαίρεση τη σειρά με την οποία εξυπηρετούνται οι πελάτες.Έτσι όταν υπολογίζουμε το ολικό πλήθος,μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της κατάστασης ισορροπίας του μοντέλου $M/M/s$.Έτσι οι τύποι ,για οποιοδήποτε-τυχαία επιλεγμένο- πελάτη για , τα L , L_q καθώς και οι αντίστοιχοι για τους T,W είναι οι ίδιοι με το $M/M/s$ μοντέλο .

Αυτό που μεταβάλλεται σε αυτά τα μοντέλα είναι η κατανομή που ακολουθούν οι χρόνοι αναμονής,καθώς για το $M/M/s$ μοντέλο ίσχυε η πειθαρχεία του first come-first served στην ουρά.Όμως με την πειθαρχεία των προτεραιοτήτων οι χρόνοι αναμονής ακολουθούν κατανομή με μεγαλύτερη διασπορά,διότι όπως είναι αναμενόμενο οι χρόνοι αναμονής των πελατών στις κλάσεις με τη μεγαλύτερη προτεραιότητα τείνουν να είναι αρκετά μικρότεροι από τους αντίστοιχους όταν ακολουθείται η πειθαρχεία first comes-first served(ενώ οι αντίστοιχοι χρόνοι των κλάσεων χαμηλότερης προτεραιότητας τείνουν να είναι αρκετά μεγαλύτεροι).Έτσι,μέσω της χρήσης των προτεραιοτήτων ,θέλουμε να βελτιώσουμε την απόδοση μεταξύ των κλάσεων υψηλότερης προτεραιότητας σε βάρος της απόδοσης των κλάσεων χαμηλότερης προτεραιότητας.Για να διαπιστώσουμε λοιπόν αυτή τη βελτίωση θα υπολογίσουμε μέτρα όπως το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα και το μέσο πλήθος των πελατών στο σύστημα για κάθε κλάση προτεραιότητας.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΔΙΑΚΟΠΕΣ (NON PREEMPTIVE PRIORITIES MODEL)

Έστω T_k ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας, συμπεριλαμβανομένου δηλαδή και του χρόνου εξυπηρέτησης ,για ένα μελος της k κλάσης προτεραιότητας.Έτσι :

$$T_k = \frac{1}{AB_{k-1}B_k} + \frac{1}{\mu}, \qquad k = 1,2,\dots,N$$

όπου $A = s!\frac{s\mu-\lambda}{r^s}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{r^j}{j!} + s\mu$

$B_0 = 1$

$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu}$

s= πλήθος των εξυπηρετητών

μ= μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης ανά απασχολημένο εξυπηρετητή

λ_i=μέσος ρυθμός αφίξεων για την κλάση i

$\lambda = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i$

Και $r = \frac{\lambda}{\mu}$

Υποθέτεται βέβαια ότι $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i < s\,\mu$ ώστε η κλάση k να φτάνει σε κατάσταση ισορροπίας.

Ο τύπος του Little εφαρμόζεται για κάθε μία κλάση προτεραιότητας,έτσι ώστε το L_k ,δηλ. ο μέσος αριθμός στην κατάσταση ισορροπίας των μελών της κλάσης k στο σύστημα αναμονής (συμπεριλαμβανομένων και όσων εξυπηρετούνται) είναι :

$$L_k = \lambda_k T_k \quad , \quad k = 1,2, \dots, N$$

Για να προσδιορίσουμε το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά αυτή τη φορά,δηλ.χωρίς το χρόνο εξυπηρέτησης,για την κλάση προτεραιότητας k απλώς αφαιρούμε τον όρο 1/μ απ'τον τύπο για το T_k . Για το μέσο μήκος της ουράς πολλαπλασιάζουμε με το λ_k.

Η περίπτωση του ενός εξυπηρετητή για το μοντέλο προτεραιοτήτων χωρίς διακοπές.

Παραπάνω κάναμε την υπόθεση ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι ο ίδιος για όλες τις κλάσεις προτεραιοτήτων και ισούται με 1/μ.Στην πράξη όμως αυτή η υπόθεση παραβιάζεται εξαιτίας των διαφοροποιήσεων μεταξύ των απαιτήσεων εξυπηρέτησης για κάθε κλάση.

Στην περίπτωση όμως του ενός εξυπηρετητή μπορούμε να δεχθούμε την ύπαρξη διαφορετικών μέσων χρόνων εξυπηρέτησης και να έχουμε χρήσιμα αποτελέσματα παρ'όλα αυτά.

Έστω λοιπόν $1/\mu_k$ η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης για την κλάση προτεραιότητας k.

Άρα μ_k =ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης για την κλάση k (k=1,2,…,N)

Τότε ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα για ένα μέλος της κλάσης k είναι(στην κατάσταση ισορροπίας) :

$$T_k = \frac{\alpha_k}{b_{k-1} b_k} + \frac{1}{\mu_k} \quad , \quad k = 1,2, \dots N$$

με

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{{\mu_i}^2}$$

$$b_0 = 1$$

$$b_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

Αυτά βέβαια ισχύουν όσο $\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$,δηλ. η τυχαία κλάση προτεραιότητας k βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.Επίσης μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Little για την εύρεση και των υπόλοιπων μεγεθών,για κάθε κλάση προτεραιότητας.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΚΟΠΕΣ (PREEMPTIVE PRIORITIES MODEL)

Σε αυτό το μοντέλο κάνουμε και πάλι την παραδοχή ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε κλάση προτεραιότητας είναι ο ίδιος.

Έχοντας τις «διακοπές» να αλλάζουν το χρόνο αναμονής στο σύστημα έχουμε τα εξής αποτελέσματα (για την περίπτωση του ενός εξυπηρετητή):

$$T_k = \frac{\frac{1}{\mu}}{B_{k-1}B_k} \ , \ k = 1, \dots, N$$

Για s >1,δηλ.για παραπάνω από ένα εξυπηρετητή,υπολογίζεται μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία η οποία θα εφαρμοσθεί στο παρακάτω παράδειγμα.

Ο μέσος αριθμός στην κατάσταση ισορροπίας των μελών της κλάσης k στο σύστημα αναμονής δίνεται και πάλι από τον τύπο :

$$L_k = \lambda_k T_k \quad , \quad k = 1,2, \dots, N$$

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την ουρά ,χωρίς τους πελάτες που εξυπηρετούνται , βρίσκονται πάλι όπως και στο μοντέλο χωρίς διακοπές,μέσω των μεγεθών T_k και L_k .

Εξαιτίας της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης της Εκθετικής κατανομής οι διακοπές δεν επηρρεάζουν τη διαδικασία της εξυπηρέτησης,δηλ. το πότε γίνοται οι διάφορες ενέργειες της εξυπηρέτησης.Ο ολικός μέσος χρόνος εξυπηρέτησης για κάθε πελάτη είναι πάντα 1/μ.

Το παράδειγμα του δημόσιου νοσοκομείου με τη χρήση προτεραιοτήτων :

Κατά την περαιτέρω μελέτη του,ο υπεύθυνος διαχείρισης του νοσοκομείου πρόσεξε ότι στο χώρο των Επειγόντων οι ασθενείς δεν εξυπηρετούνται σύμφωνα με την πειθαρχεία του first comes-first served αλλά η προϊσταμένη νοσηλεύτρια τους κατατάσσει σε 3 κατηγορίες περιστατικών :

1. Τα κρίσιμα περιστατικά ,όπου η άμεση αντιμετώπισή στους είναι ζωτικής σημασίας
2. Τα σοβαρά περιστατικά ,όπου η έγκαιρη αντιμετώπιση είναι σημαντική για να αποτραπεί η χειροτέρευση της κατάστασης
3. Τα σταθερά περιστατικά,όπου η αντιμετώπισή τους μπορεί να καθυστερήσει χωρίς να προκληθούν σοβαρές συνέπειες

Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την κατηγοριοποίηση αντιμετωπίζονται οι ασθενείς που εισάγονται στα Επείγοντα , με αυτούς που βρίσκονται στη ίδια κατηγορία να εξυπηρετούνται σύμφωνα με την πειθαρχεία του first comes-first served.Βέβαια ο γιατρός θα διακόψει την απασχόλησή του με ένα περιστατικό αν εισέλθει στο χώρο των Επειγόντων ασθενής που ανήκει σε κατηγορία υψηλότερης προτεραιότητας.

Περίπου ένα 10% των ασθενών ανήκουν στην πρώτη καταηγορία , ένα 30% στη δεύτερη και το 60% ανήκει στην τρίτη κατηγορία.Επίσης θεωρείται ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης του κάθε περιστατικού από τον γιατρό δεν παρουσιάζει σημαντική διαφοροποίηση ανάμεσα σε αυτές τις κατηγορίες.

Έτσι λοιπόν ο υπεύθυνος αποφάσισε ότι για τη μοντελοποίηση του συστήματος στο χώρο των Επειγόντων θα χρησιμοποιούσε ένα priority- discipline μοντέλο ,με τις τρεις παραπάνω κατηγορίες ασθενών να αποτελούν τις κλάσεις προτεραιότητας.Επειδή μάλιστα ,όπως αναφέρθηκε, η αντιμετώπιση ενός περιστατικού μπορεί να διακοπεί ,θεώρησε ότι η χρήση ενός μοντέλου με διακοπές είναι πιο κατάλληλη.

Από τα δεδομένα που έχουμε ήδη βρει σε προηγούμενες φορές, έχουμε **λ=2,μ=3.**

Έτσι από τα ποσοστά παραπάνω έχουμε $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.6$, $\lambda_3 = 1.2$.

Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα αποτελέσματα για το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά για τις 3 παραπάνω κλάσεις,όταν υπάρχει ένας γιατρός και όταν υπάρχουν δύο γιατροί σε εφημερία αντίστοιχα.

Τα αποτελέσματα για το μοντέλο με διακοπές όταν υπάρχουν δυο γιατροί σε εφημερία προκύπτουν ως εξής : επειδή οι χρόνοι αναμονής στο σύστημα για την κλάση 1 δεν επηρρεάζονται από την παρουσία ασθενών από τις χαμηλότερης προτεραιότητας δύο κλάσεις, η τιμή του T_1 θα είναι η ίδια για οποιαδήποτε τιμή των λ_2 , λ_3.Γι'αυτό το λόγο ο μέσος χρόνος T_1 θα πρέπει να ισούται με το ν αντίστοιχο T που ισχύει στο μοντέλο με μια κλάση μόνο,δηλ.απλά ένα M/M/s μοντέλο με s=2 , μ=3 , λ = $\lambda_1 = 0.2$.

Έτσι $T_1 = T = 0.3337\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma$ για λ=0.2

και $T_1 - \frac{1}{\mu} = 0.3337 - 0.3333 = 0.00037\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma$

Στη συνέχεια αν πάρουμε τις δύο πρώτες κλάσεις προτεραιότητας ,παρατηρούμε πάλι ότι οι ασθενείς που ανήκουν σε αυτές τις δύο κλάσεις παραμένουν ανεπηρέαστοι από την παρουσία των ασθενών της κλάσης 3 καθώς είναι χαμηλότερης προτεραιότητας,επομένως μπορούμε στην ανάλυση να την αγνοήσουμε.

Έστω ότι T_{1-2} είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα μιας τυχαίας άφιξης που ανήκει σε μία από τις δύο αυτές κλάσεις προτεραιότητας έτσι ώστε η πιθανότητα να ισούται με $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ =1/4 αν η άφιξη ανήκει στην κλάση 1 και η αντίστοιχη αν ανήκει στην κλάση 2 να ισούται με $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ =3/4 .

Έτσι έχουμε : $T_{1-2} = \frac{1}{4}T_1 + \frac{3}{4}T_2$

Επιπλέον επειδή ο μέσος χρόνος αναμονής είναι ο ίδιος ανεξαρτήτως του είδους της πειθαρχείας της ουράς ο T_{1-2} πρέπει να ισούται με τον T του μοντέλου M/M/s με s=2 , μ=3 , λ=$\lambda_1 + \lambda_2 = 0.8$. Άρα θα ισχύει :

$$T_{1-2} = T = 0.33937 \ \omega\rho\varepsilon\varsigma$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι :

$$T_2 = \frac{4}{3}\left[0.33937 - \frac{1}{4}0.3337\right] = 0.34126 \, \omega\rho\varepsilon\varsigma$$

και άρα : $T_3 - \frac{1}{\mu} = 0.00793 \ \omega\rho\varepsilon\varsigma$

Τέλος θεωρούμε T_{1-3} το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα για μια τυχαία άφιξη που ανήκει σε κάποια από τις τρεις κλάσεις,έτσι ώστε οι πιθανότητες να είναι 0.1 , 0.3 και 0.6 αν η άφιξη ανήκει στην κλάση 1 , 2 και 3 αντίστοιχα.

Έτσι ισχύει : $T_{1-3} = 0.1T_1 + 0.3T_2 + 0.6T_3$

Αντίστοιχα πάλι ο T_{1-3} πρέπει να ισούται με τον αντίστοιχο μέσο χρόνο T του M/M/s μοντέλου για s=2 , μ=3 και λ =$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$=2 έτσι ώστε :

$$T_{1-3} = T = 0.375 \, \omega\rho\varepsilon\varsigma$$

Συνεπώς : $T_3 = \frac{1}{0.6}[0.375 - 0.1(0.3337) - 0.3(0.34126)] = 0.39875 \, \omega\rho\varepsilon\varsigma$

και άρα $T_3 - \frac{1}{\mu} = 0.06542 \ \omega\rho\varepsilon\varsigma$

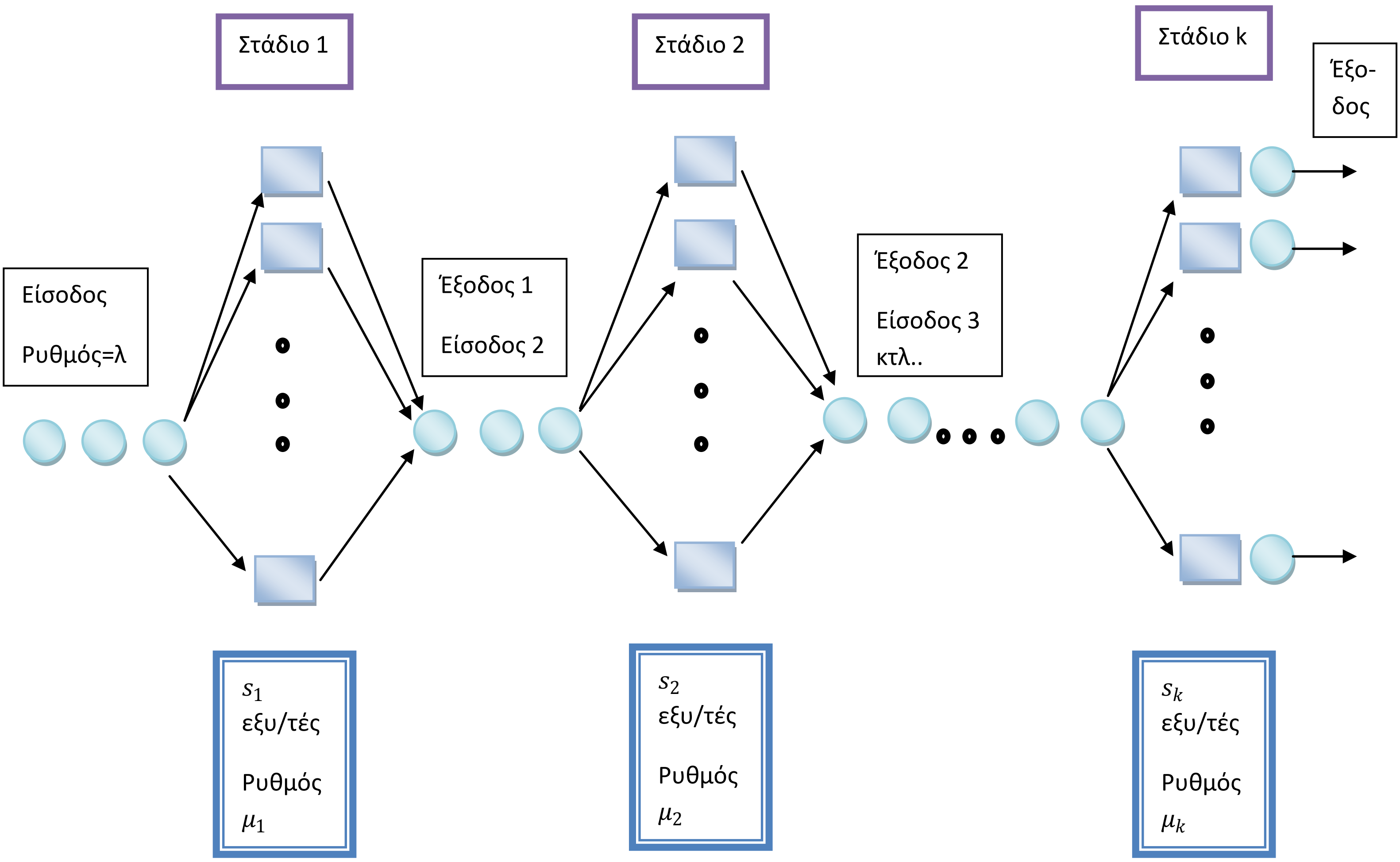
	Προτεραιότητες Με διακοπές		Προτεραιότητες Χωρίς διακοπές	
	s=1	**s=2**	**s=1**	**s=2**
A_1	–	–	4.5	36
B_1	0.933	–	0.933	0.967
B_2	0.733	–	0.733	0.867
B_3	0.333	–	0.333	0.667
$T_1 - 1/\mu$	0.024 ώρες	0.00037 ώρες	0.238 ώρες	0.029 ώρες
$T_2 - 1/\mu$	0.154 ώρες	0.00793 ώρες	0.325 ώρες	0.033 ώρες
$T_3 - 1/\mu$	1.033 ώρες	0.06542 ώρες	0.889 ώρες	0.048 ώρες

Από τον παραπάνω πίνακα λοιπόν βγάζουμε τα εξής συμπεράσματα :

Όταν το s=1 , οι τιμές $T_k - 1/\mu$ για το μοντέλο με διακοπές δείχνουν ότι έχοντας ένα γιατρό στο ΄χωρο των Επειγόντων θα προκαλούσε περίπου 1.5 λεπτό(0.024 ώρες) αναμονής κατά μέσο όρο για τα κρίσιμα περιστατικά , πάνω από 9 λεπτά αναμονής για τα σοβαρά και πάνω από μια ώρα αναμονής για τα σταθερά περιστατικά.Αντιθέτως για s=2 ,δηλ.προσθέτοντας έναν ακόμη γιατρό ,ο χρόνος αναμονής θα εξαλειφόταν για όλες τις κλάσεις εκτός αυτής των σταθερών περιστατικών.Γι'αυτό το λόγο ο υπέυθυνος διαχείρισης του νοσοκομείου πρότεινε την ύπαρξη δύο γιατρών στο χώρο των Επειγόντων του νοσοκομείου κατά τις ώρες αιχμής για το επόμενο έτος.

ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (QUEUEING NETWORKS)

Μέχρι τώρα στα συστήματα αναμονής που είδαμε η εξυπηρέτηση του κάθε πελάτη ατομικά γινόταν από έναν εξυπηρετητή μόνο.Πολλές φορές όμως στην πράξη ,η εξυπηρέτηση ενός πελάτη δεν ολοκληρώνεται αν αυτός δεν περάσει για αυτό το σκοπό από περισσότερους του ενός εξυπηρετητή.Έτσι λοιπόν υπάρχουν τα δίκτυα ουρών αναμονής,δίκτυα τα οποία αποτελούνται από παραπάνω του ενός κέντρου εξυπηρέτησης(π.χ. η κυκλοφορία πακέτων δεδομένων,όπου διακινούνται μεταξύ διαφορετικών κόμβων ενός δικτύου υπολογιστών).Η μελέτη λοιπόν αυτών των δικτύων είναι πολύ σημαντική και ταυτόχρονα αρκετά πιο πολύπλοκη.



Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται ένα δίκτυο ουράς αναμονής , όπου η κάθε άφιξη περνά από το στάδιο εξυπηρέτησης 1 (αφού περιμένει στην ουρά αν όλοι οι εξυπηρετητές του σταδίου 1 είναι απασχολημένοι).Αφού ολοκληρώσει με το στάδιο 1 ο πελάτης περιμένει και εισέρχεται στο στάδιο εξυπηρέτησης 2.Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου ολοκληρώσει και το k στάδιο εξυπηρέτησης.

Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται **σύστημα – δίκτυο ουρών αναμονής k-σταδίων εν σειρά**.

Αρχικά θα παραθέσουμε μία βασική ιδιότητα ισοδυναμίας για την διαδικασία εισαγωγής – εξαγωγής πελατών για ορισμένα συστήματα ουράς αναμονής.

- **Ιδιότητα :**

  Θεωρούμε ότι σ'ένα κέντρο εξυπηρέτησης υπάρχουν s εξυπηρετητές και μία άπειρης χωρητικότητας ουρά , στην οποία η διαδικασία των αφίξεων ακολουθεί την Poisson κατανομή με παράμετρο λ καθώς επίσης ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την ίδια Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ για κάθε εξυπηρετητή.Τότε η διαδικασία της εξόδου των πελατών απ'το κέντρο εξυπηρέτησης ακολουθεί επίσης Poisson κατανομή με παράμετρο λ .

Εδώ να σημειώσουμε το γεγονός ότι η παραπάνω ιδιότητα ισχύει ανεξαρτήτως του είδους της πειθαρχείας που ακολουθείται στο σύστημα.

Από την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε να εξάγουμε το εξής γεγονός για ένα δίκτυο ουρών αναμονής : αν οι παραπάνω πελάτες πρέπει να πάνε και σε άλλο κέντρο κατά τη διαδικασία της εξυπηρέτησης , αυτό το δεύτερο κέντρο θα έχει πάλι μια διαδικασία αφίξεων που ακολουθεί Poisson κατανομή.Έχοντας κι αυτή μια Εκθετική κατανομή για τους χρόνους εξυπηρέτησης τότε η ιδιότητα ισχύει και για το δεύτερο κέντρο και μπορεί να παρέχει μια Poisson διαδικασία αφίξεων για λενα τρίτο κέντρο εξυπηρέτησης κτλ.

Η παραπάνω ευρύτερη ιδιότητα για τα δίκτυα ορών αναμονής εκεφράζεται καλύτερα με το παρακάτω Θεώρημα (Jackson's theorem 1957):

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Αν τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων για ένα σύστημα ουρών αναμονής σε σειρά ακολουθούν Εκθετική κατανομή με ρυθμό λ ,οι χρόνοι εξυπηρέτησης για κάθε στάδιο ακολουθούν Εκθετική κατανομή και κάθε στάδιο έχει άπειρη χωρητικότητα ουράς αναμονής τότε τα αντίστοιχα χρονικά ενδοδιαστήματα για τις αφίξεις σε κάθε στάδιο του συστήματος-δικτύου ακολουθούν Εκθετική κατανομή με ρυθμό λ.

Για να συμβαίνει βέβαια το παραπάνω θα πρέπει κάθε στάδιο στο δίκτυο να διαθέτει επαρκή χωρητικότητα για εξυπηρέτηση για μια ροή αφίξεων με ρυθμό λ.Σε διαφορετική περίπτωση η ουρά θα «εκραγεί» στο στάδιο με την ανεπαρκή χωρητικότητα.

ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΑΠΕΙΡΗΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ

Εδώ θα δούμε ένα από τα δύο βασικά δίκτυα ουρών αναμονής που θα εξετάσουμε.Θεωρούμε ότι όλοι οι πελάτες δέχονται εξυπηρέτηση μέσα από **m** κέντρα εξυπηρέτησης ***σε σειρά*** σε μια καθορισμένη ακολουθία.Θεωρούμε επίσης ότι κάθε κέντρο διαθέτει μια ουρά αναμονής με άπειρη χωρητικότητα.Ακόμη θεωρούμε ότι οι πελάτες φθάνουν στο πρώτο κέντρο εξυπηρέτησης σύμφωνα με μια Poisson κατανομή με παράμετρο λ και κάθε κέντρο έχει χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i για τους s_i εξυπηρετητές του,όπου $s_i\mu_i > \lambda$.Επομένως κάθε κέντρο εξυπηρέτησης έχει μια Poisson διαδικασία αφίξεων-εισόδου σε αυτό με παράμετρο λ.Επομένως , το M/M/s μοντέλο μπορεί να εφαρμοσθεί για την ανάλυση του κάθε κέντρου εξυπηρέτησης χωριστά και ανεξαρτήτως των άλλων κέντρων.

Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι από κοινού-μεικτή πιθανότητα για n_1 πελάτες στο κέντρο 1(στάδιο 1) , για n_2 πελάτες στο κέντρο 2 κ.ο.κ είναι το γινόμενο των επιμέρους ανεξάρτητων πιθανοτήτων,των οποίων ο τύπος είναι αυτός που ισχύει στο απλό M/M/s μοντέλο .Δηλαδή :

$$p\{(N_1, N_2, \dots, N_m) = (n_1, n_2, \dots, n_m)\} = p_{n_1} p_{n_2} \dots p_{n_m}.$$

Παρομοίως ο ολικός χρόνος αναμονής και το μέσο πλήθος των πελατών σε ολόκληρο το σύστημα μπορεί να υπολογισθεί απλά προσθέτοντας τις αντίστοιχες ποσότητες που ισχύουν για κάθε κέντρο εξυπηρέτησης-στάδιο χωριστά.

Βέβαια η ιδιότητα ισοδυναμίας όπως προαναφέρθηκε δεν ισχύει και οι συνέπειες της δεν μπορούν να εφαρμοσθούν στην περίπτωση ουρών με πεπερασμένη χωρητικότητα.Τα αποτελέσματα που έχουν βρεθεί για δίκτυα ουρών αναμονής πεπερασμένης χωρητικότητας ελιναι περιορισμένα και σε αυτές τις περιπτώσεις τα επιμέρους στάδια πρέπει να αναλύονται συνδυασμένα,εν αντιθέσει με τα προηγούμενα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Στην διαδικασία κατασκευής ενός αυτοκινήτου οι δύο τελευταίες ενέργειες που γίνονται για να ολοκληρωθεί η διαδικασία είναι η εγκατάσταση της μηχανής και η τοποθέτηση των ελαστικών.Ένας μέσος όρος 54 αυτοκινήτων ανά ώρα φθάνουν για την εκτέλεση των δύο παραπάνω ενεργειών.Ένας μηχανικός είναι διαθέσιμος να εγκαταστήσει τη μηχανή και μπορεί να εξυπηρετήσει ένα μέσο όρο 60 αυτοκινήτων ανά ώρα.Στη συνέχεια το αυτοκίνητο μεταβαίνει στο χώρο των ελαστικών και περιμένει για την τοποθέτησή τους.Τρεις εργαζόμενοι εξυπηρετούν στο χώρο των ελαστικών , όπου ο καθένας ασχολείται μεένα αυτοκίνητο τη φορά και περατώνει τη διαδικασία σε 3 λεπτά κατά μέσο όρο.Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των αυτοκινήτων και οι χρόνοι «εξυπηρέτησης» ακολουθούν Εκθετική κατανομή.

Θέλουμε να υπολογίσουμε :

i. Το μέσο μήκος ουράς σε κάθε χώρο (ο χώρος για την εγκατάσταση της μηχανής και ο χώρος για την τοποθέτηση των ελαστικών).
ii. Τον ολικό μέσο χρόνο που χρειάζεται να περιμένει ένα αυτοκίνητο για να «εξυπηρετηθεί».

Η παραπάνω περίπτωση αποτελεί ένα δίκτυο ουρών αναμονής σε σειρά, με :

λ=54 αυτοκίνητα ανά ώρα

$s_1 = 1$, $s_2 = 3$

$\mu_1 = 60$ αυτοκίνητα/ώρα , $\mu_2 =20$ αυτοκίνητα/ώρα

Εφόσον $\lambda < \mu_1$ και $\lambda < 3\mu_2$ καμμία από τις δύο ουρές δεν θα «εκραγεί» και άρα το Θεώρημα του Jackson μπορεί να εφαρμοσθεί.

Για το πρώτο στάδιο,δηλ.την εγκατάσταση της μηχανής,έχουμε :

$$\rho = \frac{54}{60} = 0.90$$

$L_q{}^{(1)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.90^2}{1-0.90} = 8.1 \ \text{αυτοκίνητα}$,

$W^{(1)} = \frac{L_q{}^1}{\lambda} = \frac{8.1}{54} = 0.15 \ \text{ώρες}$

Για το δεύτερο στάδιο , δηλ.την τοποθέτηση των ελαστικών έχουμε :

$$\rho = \frac{54}{3(20)} = 0.90$$

Από τον πίνακα στο M/M/s μοντέλο για τις πιθανότητες έχουμε ότι $p(n \geq 3) = 0.83$.Έτσι έχουμε :

$$L_q^{(2)} = \frac{0.83(0.90)}{1 - 0.90} = 7.47 \ \text{αυτοκίνητα}$$

Και $W^{(2)} = \frac{L_q^{(2)}}{\lambda} = \frac{7.47}{54} = 0.138 \ \text{ώρες}$

Έτσι ο ολικός μέσος χρόνος αναμονής για ένα αυτοκίνητο για την εγκατάσταση μηχανής και ελαστικών είναι : 0.15+0.138=0.288 ώρες.

ΤΑ ΔΙΚΤΥΑ JACKSON (JACKSON NETWORKS)

Τα συστήματα δικτύων ουρών αναμονής (άπειρης χωρητικότητας) σε σειρά δεν είναι τα μόνα που αναλύονται με τη βοήθεια του μοντέλου M/M/s για κάθε στάδιο χωριστά.Ένα άλλο είδος σημαντικού δικτύου που χρησιμοποιεί την ιδιότητα αυτή είναι τα λεγόμενα **δίκτυα Jackson** τα οποία ονομάσθηκαν έτσι από τον άνθρωπο που πρώτος τα χαρακτήρισε και απέδειξε ότι η εφαρμογή του M/M/s μοντέλου χωριστά και η απλή πρόσθεση των επιμέρους μεγεθών μπορεί να εφαρμοσθεί και σε αυτά τα δίκτυα.

Τα χαρακτηριστικά ενός Jackson δικτύου είναι τα ίδια με αυτά των προηγούμενων δικτύων(σε σειρά) με τη διαφορά όμως ότι οι πελάτες επισκέπτονται τα διάφορα στάδια σε διαφορετική σειρά ή ακόμη μπορεί να μην επισκεφθούν και όλα τα στάδια(κέντρα εξυπηρέτησης).

Σε κάθε στάδιο οι αφιχθέντες πελάτες φθάνουν σε αυτό από το εξωτερικό ολόκληρου του συστήματος αλλά και από τα άλλα στάδια ,ακολουθώντας οι αφίξεις τους Poisson κατανομή πάντα.Τα χαρακτηριστικά των δικτύων αυτών συνοψίζονται ως εξής :

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΩΝ JACKSON :

Έστω ότι υπάρχουν στο δίκτυο m κέντρα εξυπηρέτησης ,όπου το κάθε κέντρο i έχει :

i. Μια άπειρης χωρητικότητας ουρά αναμονής.
ii. Πελάτες που φθάνουν σε αυτό από το εξωτερικό του συστήματος ακολουθώντας (οι αφίξεις τους) Poisson κατανομή με παράμετρο $\boldsymbol{\alpha_i}$.
iii. Εξυπηρετητές $\boldsymbol{s_i}$ με χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν Εκθετική κατανομή με παραμέτρο $\boldsymbol{\mu_i}$.

Κάθε πελάτης που εξέρχεται από το i κέντρο εξυπηρέτησης κατευθύνεται στο επόμενο κέντρο j (j = 1,…,m) με πιθανότητα $\boldsymbol{p_{ij}}$ ή αποχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα $\boldsymbol{q_{ij} = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}}$.

- Μία ακόμη βασική ιδιότητα των δικτύων αυτής της κατηγορίας είναι η εξής :
  Κάθε στάδιο ενός δικτύου Jackson (ή αλλιώς κάθε κέντρο εξυπηρέτησής του) ,συμπεριφέρεται ως ένα ανεξάρτητο σύστημα ουράς αναμονής,που λειτουργεί σύμφωνα με το M/M/s μοντέλο, με ρυθμό αφίξεων ίσο με :

$$\lambda_j = a_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_{ij} \qquad (s_j \mu_j > \lambda_j)$$

Σε αυτή την περίπτωση όμως η ιδιότητα αυτή δεν μπορεί να αποδειχθεί απ'αυθείας από την ιδιότητα ισοδυναμίας.Διαισθητικά η σύνδεση μεταξύ των δυο ιδιοτήτων γίνεται ως εξής :σε κάθε στάδιο i οι διαδικασίες εισαγωγής σε αυτό από τις διάφορες πηγές (έξωτερικό του συστήματος και άλλα στάδια-κέντρα εξυπηρέτησης) , είναι ανεξάρτητες Poisson διαδικασίες έτσι ώστε η «αθροιστική» διαδικασία εισαγωγής στο στάδιο αυτό να είναι και αυτή Poisson με παράμετρο λ_i (προκύπτει από την ιδιότητα 6 της Εκθετικής κατανομής) .Η εξίσωση ισοδυναμίας τότε μας λέει ότι η «αθροιστική» διαδικασία εξαγωγής των πελατών από το στάδιο i πρέπει να είναι Poisson με παράμετρο λ_i.Ο διαχωρισμός λοιπόν της αθροιστικής διαδικασίας εξαγωγής (ιδιότητα 6 και πάλι), η διαδικασία της μεταγωγής των πελατών από το στάδιο i στο στάδιο j θα είναι Poisson με παράμετρο $\lambda_i p_{ij}$. Αυτή η διαδικασία είναι ταυτόχρονα η διαδικασία εισαγωγής των πελατών στο στάδιο j και έτσι διατηρείται η φύση της Poisson κατανομής στην ακολουθία των διαδικασιών σε όλο το δίκτυο.

Η παραπάνω εξίσωση με την οποία υπολογίζουμε το λ_j βασίζεται στο γεγονός ότι ο λ_i είναι ταυτόχρονα ο ρυθμός αναχωρήσεων αλλά και ο ρυθμός αφίξεων για όλους τους πελάτες που χρησιμοποιούν το κέντρο εξυπηρέτησης i.Επειδή η p_{ij} είναι η αναλογία ή αλλιώς η μερίδα των πελατών που αναχωρούν από το στάδιο i και οι οποίοι εισέρχονται μετά στο στάδιο j , ο ρυθμός με τον οποίο οι πελάτες από το στάδιο i εισέρχονται στο στάδιο j είναι $\boldsymbol{\lambda_i p_{ij}}$.Αθροίζοντας το γινόμενο αυτό για όλα τα i και ύστερα προσθέτοντάς το στο α_j ,έχουμε τον *ολικό ρυθμό αφίξεων* στο στάδιο j από όλες τις πηγές.

Για να υπολογίσουμε τον λ_j από την εξίσωση παραπάνω πρέπει να μας είναι γνωστοί ο λ_i για i≠j ,αλλά αυτοί οι είναι επίσης άγνωστοι.Γι'αυτό η διαδικασία που ακολουθούμε είναι να λύσουμε ταυτόχρονα ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ το γενικό σύστημα των γραμμικών εξισώσεων για τα λ_j για j=1,2,...,m .

Για να έχουμε μία εικόνα των υπολογισμών αυτών ας θεωρήσουμε ένα σύστημα Jackson με τρία στάδια-κέντρα εξυπηρέτησης με παραμέτρους που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Κέντρο(στάδιο) j	$\boldsymbol{s_j}$	$\boldsymbol{\mu_j}$	$\boldsymbol{a_j}$	$\boldsymbol{p_{ij}}$		
				i=1	**i=2**	**i=3**
j=1	1	10	1	0	0.1	0.4
j=2	2	10	4	0.6	0	0.4
j=3	1	10	3	0.3	0.3	0

Εφαρμόζοντας λοιπόν την εξίσωση που είδαμε παραπάνω για τους λ_j για j=1,2,3 έχουμε το παρακάτω σύστημα :

$$\lambda_1 = 1 + 0.1\lambda_2 + 0.4\lambda_3$$
$$\lambda_2 = 4 + 0.1\lambda_1 + 0.4\lambda_3$$
$$\lambda_3 = 3 + 0.3\lambda_1 + 0.3\lambda_2$$

Η λύση αυτού του συστήματος μας δίνει $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = \frac{7}{2}$

Έχοντας λοιπόν τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ κάθε ένα από τα τρία στάδια-κέντρα του δικτύου μπορεί να αναλυθεί ξεχωριστά χρησιμοποιώντας τους τύπους που ισχύουν στο M/M/s μοντέλο.Για παράδειγμα , για την κατανομή του πλήθους των πελατών $N_i = n_i$ στο κέντρο i έχουμε :

$$\rho_i = \frac{\lambda_\iota}{s_i \mu_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \gamma\iota\alpha \quad i = 1 \\ \frac{1}{2} & \gamma\iota\alpha \quad i = 2 \\ \frac{3}{4} & \gamma\iota\alpha \quad i = 3 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές και τις παραμέτρους του πίνακα στον τύπο για την p_n έχουμε τα εξής αποτελέσματα :

$p_{n_1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n_1}$, για το κέντρο 1

$$p_{n_2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \quad \gamma\iota\alpha \quad n_2 = 0 \\ \frac{1}{3} \quad \gamma\iota\alpha \quad n_2 = 1 \\ \frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{n_3} \quad \gamma\iota\alpha \quad n_2 \geq 2 \end{cases} \quad , \text{ για το κέντρο 2}$$

$p_{n_3} = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{n_3}$, για το κέντρο 3

Η μεικτή πιθανότητα των (n_1, n_2, n_3) δίνεται απλά από το γινόμενο των επιμέρους αντίστοιχων πιθανοτήτων,δηλαδή :
$p\{(N_1, N_2, N_3) = (n_1, n_2, n_3)\} = p_{n_1}p_{n_2}p_{n_3}$

Κατά παρόμοιο τρόπο ο μέσος αριθμός των πελατών L_i στο κέντρο i είναι $L_1 = 1$, $L_2 = \frac{4}{3}$, $L_3 = 3$ .O μέσος αριθμός των πελατών σ'όλο το δίκτυο είναι $L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{5}{3}$.

Για τον υπολογισμό του ολικού μέσου χρόνου αναμονής στο σύστημα (συμπεριλαμβανομένων και των χρόνων εξυπηρέτησης) για ένα πελάτη , δεν μπορούμε απλά να προσθέσουμε τους επιμέρους,αντίστοιχους,μέσους χρόνους αναμονής του κάθε κέντρου του δικτύου,διότι ο κάθε πελάτης δεν επισκέπτεται απαραίτητα κάθε κέντρο μόνο μια φορά.Παρ'όλα αυτά ο τύπος του Little μπορεί να εφαρμοσθεί με ρυθμό αφίξεων στο δίκτυο $\boldsymbol{\lambda}$ ο οποίος ισούται με το άθροισμα των ρυθμών αφίξεων από το *εξωτερικό μέρος* στα διάφορα κέντρα : $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 8$ και έτσι ο μέσος χρόνος αναμονής στο δίκτυο να είναι $T = \frac{L}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2}{3}$.(Τέλος να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλα, πιο πολύπλοκα , δίκτυα ουρών αναμονής όπου το κάθε κέντρο εξυπηρέτησης μπορεί να αναλυθεί ξεχωριστά και ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα κέντρα.)

ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ (QUEUEING DECICION MODELS)

Σε αυτό το είδος μοντέλων το επίπεδο εξυπηρέτησης (service level) σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης με ουρά αναμονής είναι μια συνάρτηση του ρυθμού εξυπηρέτησης μ και του αριθμού των εξυπηρετητών,οι οποίοι είναι τοποθετημένοι παράλληλα, s.

Εδώ θα δούμε δύο βασικά μοντέλα λήψης αποφάσεων τα οποία έχουν σκοπό τον καθορισμό του κατάλληλου επιπέδου εξυπηρέτησης για τα συστήματα ουρών αναμονής.Το πρώτο μοντέλο είναι ένα ***μοντέλο κόστους(cost model)*** και το δεύτερο ένα ***μοντέλο επιπέδου φιλοδοξίας(aspiration-level model)***.Και στα δύο μοντέλα γίνεται η διαπίστωση ότι όσο υψηλό είναι το επίπεδο εξυπηρέτησης τόσο μειωμένος είναι ο χρόνος αναμονής στο σύστημα.Τα μοντέλα κάνουν χρήση διαφόρων μεγεθών απόδοσης που έχουμε δει μέχρι τώρα για τα διάφορα είδη συτημάτων ουρών αναμονής με σκοπό την επίτευξη μιας ισορροπίας μεταξύ των αντικρουόμενων παραγόντων του επιπέδου εξυπηρέτησης και του χρόνου αναμονής.

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΟΣΤΟΥΣ (COST MODELS)

Τα μοντέλα κόστους στοχεύουν στην εξισορόπηση δύο αντικρουόμενων ειδών κόστους :

1. Το κόστος για την παροχή εξυπηρέτησης(εγκατάσταση-λειτουργία θέσεων εξυπηρέτησης,αδράνεια).
2. Το κόστος (για την επιχείρηση) από την αναμονή των πελατών.

- **Γενικά** ,όπως θα δούμε :
  - Όταν αυξάνεται η δυναμικότητα του συστήματος (s) τότε μειώνεται ο μέσος χρόνος αναμονής των πελατών στο σύστημα, με αποτέλεσμα να μειώνεται και το κόστος από την παραμονή των πελατών(έμμεσο κόστος).Αυξάνεται όμως το κόστος παροχής εξυπηρέτησης(άμεσο κόστος).

- Όταν μειώνεται η δυναμικότητα του συστήματος (s) τότε αυξάνεταο ο μέσος χρόνος αναμονής των πελατών στο σύστημα οπότε αυξάνεται και το κόστος από την αναμονή των πελατών.Μειώνεται όμως το κόστος της παροχής εξυπηρέτησης.

Υπάρχει λοιπόν σημείο ισορροπίας?

Έστω $x = (s \text{ ή } \mu)$ το επίπεδο εξυπηρέτησης , τότε το μοντέλο κόστους εκφράζεται με την εξής εξίσωση :

$$\boldsymbol{ETC(x) = ESC(x) + EWC(x)}$$

όπου

ETC= το μέσο συνολικό μεταβλητό κόστος λειτουργίας (Total cost)

ESC= το μέσο κόστος παροχής εξυπηρέτησης (Service cost)

EWC= το μέσο κόστος αναμονής των πελατών (Waiting cost)

- ***Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού μέσου κόστους ETC.***

$\boldsymbol{c_w}$ = το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά μονάδα χρόνου

$\boldsymbol{c_s}$ = το κόστος εξυπηρέτησης από μια θέση στη μονάδα του χρόνου

όπου $EWC(x) = c_w L$ και $ESC(x) = c_s x$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Μια εταιρεία εφοδιαστικής και διανομών διαθέτει μεγάλο στόλο οχημάτων τα οποία τις ώρες αιχμής καταφθάνουν στη κεντρική αποθήκη για φορτοεκφόρτωση με ρυθμό 15 αυτοκίνητα ανά ώρα (διαδικασία Poisson).

Στην αποθήκη υπάρχουν ομοιόμορφα συνεργεία φορτοεκφορτωτών καθένα από τα οποία είναι σε θέση να εξυπηρετήσει ένα όχημα κατά μέσο όρο σε 12 λεπτά(Εκθετική κατανομή).

Το ωριαίο κόστος εργασίας ενός συνεργείου ανέρχεται στα 20 ευρώ ανά ώρα ενώ το κόστος που αφορά τον αδρανή οδηγό και το όχημά του ανέρχεται στα 24 ευρώ ανά ώρα.

Ποιό είναι το βέλτιστο πλήθος συνεργείων?(άρα εδώ το x=με το πλήθος των παράλληλων εξυπηρετητών s)

ΛΥΣΗ

- ✓ Ο μέσος ρυθμός αφίξεων είναι λ=15 οχήματα / ώρα.
- ✓ Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ=60/12=5 οχήματα / ώρα.

Είναι ένα σύστημα M/M/s με πλήθος θέσεων s που πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με 4 .

- Διαδικασία :
  Για κάθε πιθανή ακέραια τιμή του s ,υπολογίζουμε από το σχετικό τύπο για το M/M/s , το L_q και στη συνέχεια το L.Κατόπιν υπολογίζουμε το συνολικό μεταβλητό ωριαίο κόστος.Συγκρίνουμε τις διαδοχικές τιμές ώστε να βρούμε το βέλτιστο.

Σύστημα M/M/s :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

$$L_q = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s\lambda\mu}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}p_0$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ :

s	L	ESC	EWC	ETC
4	4.5283	4x20=80	108.6792	188.6792
5	3.3542	5x20=100	80.5015	180.5015
6	3.0991	6x20=120	74.3784	194.3784
7	3.0292	7x20=140	72.6776	212.6776
8	3.0078	8x20=160	72.1872	232.1872

Εδώ λοιπόν βλέπουμε από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα ότι η βέλτιστη λύση για να έχουμε το ελάχιστο μέσο συνολικό κόστος είναι το πλήθος των συνεργείων είναι το 5(s=5).

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τα διάφορα μεγέθη απόδοσης για την περίπτωση του s=5(καταλληλότερη και πιο εύκολη η χρήση υπολογιστή!)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Η εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων Speedy επιθυμεί να προσλάβει ένα στέλεχος για να εργάζεται τις αργίες.Θα απασχολείται για ένα εξάωρο αποκλειστικά τις ημέρες αυτές.Ενδιαφέρονται 3 υποψήφιες η Αντωνία,η Βασιλική και η Γιάννα,κάθεμια από τις οποίες έχει εμπειρία ανάλογης εργασίας.

Ο υπεύθυνος προσωπικού απσχόλησε την κάθεμία για μία δοκιμαστική περίοδο,συνέλεξε δεδομένα σχετικά με την απόδοσή τους και διαπίστωσε ότι και οι 3 υποψήφιες ακολουθούν Εκθετική κατανομή χρόνου εξυπηρέτησης,με μέσο χρόνο 16 λεπτά για την Αντωνία,12 λεπτά για τη Βασιλική και 11 λεπτά για τη Γιάννα.

Το συνολικό κόστος εργασίας των υποψηφίων για ένα εξάωρο είναι είναι ανάλογο της εμπειρίας τους και ανέρχεται σε 90 ευρώ για την Αντωνία,114 ευρώ για τη Βασιλική και 150 ευρώ για τη Γιάννα.

Ο ρυθμόα αφίξεων στο κατάστημα τις αργίες είναι 7 πελάτες ανά δίωρο (κατανομή Poisson) .

Το κόστος για την επιχείρηση από την αναμονή ενός πελάτη στο σύστημα εκτιμήθηκε στα 10 ευρώ ανά ώρα.

Ποιά υποψήφια θα προσληφθεί με βάση το κριτήριο του ωριαίου κόστους?

ΛΥΣΗ :

ΔΕΔΟΜΕΝΑ :

Υποψήφια	Ρυθμός εξυπηρέτησης μ (πελάτες/ώρα)	Ωριαίο κόστος εργασίας c_s(ευρώ)
Α	60 / 16 =3.75	90 / 6 =15
Β	60 / 12 = 5	114 / 6 = 19
Γ	60 / 11 = 5.45454	150 / 6 = 25

- Σύγκριση 3 συστημάτων M/M/1 , τα οποία ενώ έχουν ίδιο ρυθμό αφίξεων λ = 3.5 άτομα ανά ώρα , διαφέρουν στο ρυθμό εξυπηρέτησης καθώς και στο κόστος παροχής της εξυπηρέτησης.Υπολογίζουμε για κάθε υποψήφια τους δείκτες και το προσδοκώμενο κόστος λειτουργίας.

ΣΥΣΤΗΜΑ M/M/1 :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$T = W + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$p_0 = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = p_0(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

$$p_{n>k} = (\frac{\lambda}{\mu})^{k+1}$$

Δείκτης	Αντωνία (λ=3.5,μ=3.75)	Βασιλική (λ=3.5,μ=5)	Γιάννα (λ=3.5,μ=5.4545)
L_q (πελάτες)	13.0667	1.6333	1.1490
L (πελάτες)	14	2.333	1.7907
W (ώρες)	3.733	0.4667	0.3283
T (ώρες)	4	0.6667	0.5116
p_0	6.6667%	30%	35.83%
$p_{wait} = 1 - p_0$	93.333%	70%	64.17%
$EWC = c_w L$	10x14=140	10x2.333=23.33	10x1.79
$ESC = c_s s$	15	19	25
$ETC = EWC + ESC$	155	42.33	42.9

(Οι παραπάνω υπολογισμοί γίνονται με απλή εφαρμογή των ανάλογων τύπων καθώς και με χρήση κατάλληλου προγράμματος στον Η/Υ.)

- Κατ'αρχήν απορρίπτεται η Αντωνία αφού απέχει κατά πολύ από τις υπόλοιπες υποψήφιες και ως προς τους λειτουργικούς δείκτες και ως προς το συνολικό κόστος.
- Με βάση το ωριαίο λειτουργικό κόστος επιλέγεται η Βασιλική(42.33<42.9).
- Όμως η διαφορά σε σχέση με τη Γιάννα είναι μόλις 0.57 ευρώ/ώρα (εφόσον οι εκτιμήσεις είναι σχετικά ακριβείς).Συνολικά ανά εξάωρο η εξοικονόμηση ανέρχεται μόλις στα 3.42 ευρώ αν προσληφθεί η Β έναντι της Γ.
- Υπάρχουν όμως και οι δείκτες απόδοσης,οι οποίοι για τη Γιάννα είναι όλοι καλύτεροι .Επομένως τα στοιχεία αυτά πρέπει να ληφθούν υπ'όψιν για την τελική απόφαση.
- Τέλος,αλλά καθόλου ελάχιστο,ακόμη κι αν προσληφθεί η Γιάννα , ο καλύτερος μέσος χρόνος αναμονής είναι σχεδόν 20 λεπτά και ο χρόνος συνολικής παραμονής πάνω από 30 λεπτά (0.5116 ώρες).Δηλαδή ένα καθόλου μικρό χρονικό διάστημα.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΦΙΛΟΔΟΞΙΑΣ

Εν γένει τα η «ύπαρξη» των μοντέλων κόστους που είδαμε στηρίζεται απόλυτα στο πόσο καλά μπορούν να εκτιμηθούν οι παράμετροι κόστους.Κάποιες φορές αυτές οι παράμετροι είναι δύσκολο να εκτιμηθούν με ακρίβεια ή και γενικά,ειδικά αυτή που αντιστοιχεί στην αναμονή του πελάτη.Το μοντέλο επιπέδου φιλοδοξίας έχει ως σκοπό να μετριάσει αυτή τη δυσκολία,δουλεύοντας άμεσα με τα μεγέθη-μέτρα απόδοσης του συστήματος της ουράς αναμονής.Η γενική ιδέα είναι ο καθορισμός ενός επαρκούς εύρους για το επίπεδο εξυπηρέτησης (μ ή s) με τον προσδιορισμό ορίων σε αντικρουόμενα μέτρα αποδόσεως.Τέτοιου είδους όρια είναι τα *επίπεδα φιλοδοξίας* που ο υπεύθυνος για τις αποφάσεις επιθυμεί να επιτύχει.

Η απεικόνιση της διαδικασίας γίνεται με την εφαρμογή της στο μοντέλο πολλαπλών εξυπηρετητών,όπου επιθυμείται ο καθορισμός ενός «αποδεκτού» πλήθους εξυπηρετητών s^*.Αυτό το επιτυγχάνουμε με το να θεωρήσουμε τα δύο ακόλουθα και συγκρουόμενα μέτρα απόδοσης.

1. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα *T.*
2. Το ποσοστό αδράνειας των εξυπηρετητών *X.*

Η τιμή του μέσου χρόνου αναμονής στο σύστημα T μπορεί να υπολογισθεί με τον ανάλογο τύπο ή χρησιμοποιώντας κατάλληλο πρόγραμμα στον Η/Υ. Το ποσοστό αδράνειας των εξυπηρετητών μπορεί να υπολογισθεί ως εξής :

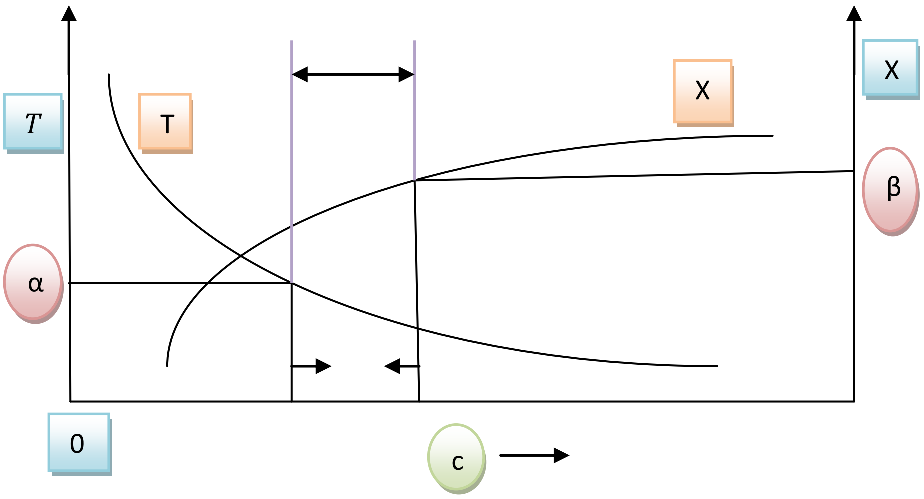
$$X = \frac{s - \bar{s}}{s} \times 100 = \frac{s - (L - L_q)}{s} \times 100 = \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right) \times 100$$

Το πρόβλημα υποβιβάζεται στον προσδιορισμό του πλήθους των εξυπηρετητών s^* έτσι ώστε :

$T \leq a$ και $X \leq \beta$

όπου α και β είναι τα επίπεδα της φιλοδοξίας που καθορίζονται από το άτομο που είναι υπεύθυνο για τις αποφάσεις.

Η λύση του προβλήματος μπορεί επίσης να δοθεί με τη γραφική παράσταση του μέσου χρόνου αναμονής T και του X ως συνάρτηση του s όπως φαίνεται παρακάτω.Με τον εντοπισμό του α και του β στο γράφημα,μπορούμε αμέσως να καθορίσουμε ένα αποδεκτό εύρος για το s^*.Αν οι δύο υποθέσεις δεν μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτοχρόνως , τότε μία από τις δύο πρέπει να παραληφθεί μέχρι να καθοριστεί ένα εφικτό εύρος.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σε ένα κατάστημα διαφόρων εργαλείων,υπάρχουν αρκετοί πωλητές στο χώρο που εξυπηρετούν ,σε περίπτωση που κάποιο εργαλείο χρειάζεται αντικατάσταση .Οι διάφορες «αιτήσεις» για αντικατάσταση, φθάνουν στο χώρο σύμφωνα με Poisson κατανομή, με $17\frac{1}{2}$ αντικαταστάσεις ανά ώρα κατά μέσο όρο.Κάθε πωλητής αναλαμβάνει κατά μέσο όρο 10 περιπτώσεις ανά ώρα.Υποθέτουμε ότι θέλουμε να καθορίσουμε τον αριθμό των πωλητών έτσι ώστε ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την απόκτηση ενός νέου εργαλείου να παραμένει κάτω των 5 λεπτών.Την ίδια στιγμή απαιτείται το ποσοστό αδράνειας στους εξυπηρετητές να είναι το πολύ 20%.

Αρχικά παρατηρούμε από τα δεδομένα ότι το όριο φιλοδοξίας για το χρόνο αναμονής των 5 λεπτών είναι ανέφικτο καθώς ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 6 λεπτά.

Στον ακόλουθο πίνακα συνοψίζονται τα *T* και *X* σαν συνάρτηση του s και απεικονίζεται η παραπάνω διαπίστωση.Τελικά για s≥5 , *T*= 6 λεπτά..Αυτό σημαίνει ότι δεν θα υπάρχει αναμονή στην ουρά.Ο πίνακας δείχνει επίσης ότι οποιαδήποτε αύξηση στο πλήθος των εξυπηρετητών μπορεί μόνον να αυξήσει την αδράνεια *X*.

s	2	3	4	5	6	7	8
T	25.6	7.6	6.3	6.0	6.0	6.0	6.0
X (%)	12.5	41.7	56.3	65.0	70.8	75.0	78.0

Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν δεν υπάρχει κάτι που μπορεί να γίνει διότι το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με την αύξηση του πλήθους των εξυπηρετητών.Αντ'αυτού , μπορούμε είτε να μειώσουμε το χρόνο εξυπηρέτησης ή να αναγνωρίσουμε το γεγονός ότι τα εργαλεία ζητούνται για αντικατάσταση σε αδικαιολόγητα υψηλό ρυθμό (λ=17.5 «αιτήσεις» αγοράς ανά ώρα).Αυτός πιθανόν να είναι ο τομέας που πρέπει να αναζητηθεί η λύση.Για παράδειγμα ίσως θα πρέπει να ερευνηθεί ο λόγος για τον οποίο τα εργαλεία χρειάζονται αντικατάσταση σε τόσο υψηλό βαθμό.Ισως ο λόγος είναι ότι η κατασκευή ή ο σχεδιασμός του εργαλείου εξ'αρχής δεν είναι καλός ή είναι ανεπαρκής?

**ΠΩΣ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΑΝ ΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΤΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ Η ΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Εν γένει, μας ενδιαφέρει το πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το αν τα δεδομένα που έχουμε ,σχετικά με κάποιο σύστημα ουράς αναμονής , είναι σύμφωνα με την υπόθεση ότι τα χρονικά ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν Εκθετική κατανομή.

Ας υποθέσουμε ότι καταγράφθηκαν οι $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ως τα ενδοδιαστήματα μεταξύ των αφίξεων σε ένα σύστημα ουράς.Μπορεί να δειχθεί ότι μια επαρκής εκτίμηση του ρυθμού αφίξεων $\boldsymbol{\lambda}$ μπορεί να γίνει με τον τύπο :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{t_i}}$$

Για παράδειγμα,έστω ότι έχουμε καταγράψει τους εξής χρόνους : $t_1 = 20$, $t_2 = 30$, $t_3 = 40$, $t_4 = 50$, δηλ. έχουμε δει 4 αφίξεις σε διάστημα 140 μονάδων χρόνου ή διαφορετικά ένα μέσο όρο 1 άφιξης ανά 35 μονάδες χρόνου.Τότε η εκτίμηση του ρυθμού αφίξεων $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ είναι :

$$\hat{\lambda} = \frac{4}{20 + 30 + 40 + 50} = \frac{1}{35}$$

πελάτης ανά μονάδα χρόνου.

Δοθέντος του $\hat{\lambda}$ μπορούμε να εξετάσουμε αν οι t_1, t_2, t_3, t_4 συνάδουν με την υπόθεση ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με ρυθμό $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ και με συνάρτηση πυκνότητας $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{e}^{-\hat{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{t}}$.Ο ευκολότερος τρόπος είνα να χρησιμοποιήσουμε ένα χ^2-έλεγχο καλής προσαρμογής(το οποίο ελέγχει κατά πόσο συνάδουν οι τα δεδομένα που έχουμε παρατηρήσει σε σχέση με τις ανάλογες,προσδοκώμενες τιμές).Μέσω αυτού του ελέγχου καθορίζουμε αν είναι δικαιολογημένο ή όχι το συμπέρασμα ότι οι $t_1, t_2, \ldots, t_n$ αντιπροσωπεύουν ένα τυχαίο δείγμα μιας τυχαίας μεταβλητής με δοσμένη συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$.

Αρχικά «σπάμε» το σύνολο των πιθανών χρόνων αφίξεων σε $\boldsymbol{k}$ κατηγορίες.Με την προϋπόθεση ότι η $f(t)$ διέπει τους χρόνους των αφίξεων ,προσδιορίζουμε τον αριθμό των t_i που περιμένουμε να ανήκει στην κατηγορία i.Ονομάχουμε αυτό τον αριθμό e_i.Ύστερα μετράμε πόσες από τις παρατηρούμενες τιμές των t_i όντως ανήκαν στην κατηγορία i.Ονομάζουμε αυτό τον αριθμό o_i.Ύστερα χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο για τον υπολογισμό της τιμής του χ^2 στατιστικού :

$$\chi^2(obs) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

όπου η τιμή του $\chi^2(obs)$ ακολουθεί την χ^2 κατανομή με *k-2* βαθμούς ελευθερίας.

Αν η τιμή του $\chi^2(obs)$ είναι μικρή , τότε υποθέτουμε ότι όντως τα t_i είναι δείγματα μιας τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$.Αν η τιμή του πάλι είναι μεγάλη ,συμπεραίνουμε ότι τα t_i δεν αντιπροσωπεύουν ένα τυχαίο δείγμα μιας τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$.

Για να είμαστε ακριβείς και πιο σωστοί,υπολογίζοντας την τιμή του παραπάνω στατιστικού ελέγχου $\chi^2(obs)$ ουσιαστικά ελέγχουμε τις εξής υποθέσεις :

$\boldsymbol{H_0}$: $t_1, t_2, \dots, t_n$ *είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f(t).*

$\boldsymbol{H_\alpha}$: $t_1, t_2, \dots, t_n$ *δεν είναι ένα τυχαίο δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f(t).*

Δοθέντος του α , δεχόμαστε την H_0 αν $\chi^2(obs) \le \chi^2_{k-r-1}(a)$ και αντίστοιχα δεχόμαστε την H_α αν $\chi^2(obs) > \chi^2_{k-r-1}(a)$ (εδώ το r είναι ο αριθμός των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν για να προσδιορίσουμε την κατανομή των χρόνων αφίξεων).

Εκτός από την χρήση των στατιστικών πινάκων για την χ^2-κατανομή ,στον Η/Υ με τη χρήση του Excel,απλώς εισάγουμε την εντολή CHINV(Alpha,*k-r-1*).Έτσι αν το r=1 τότε οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή,αν r=2 τότε ακολουθούν είτε κανονική είτε Erlang κατανομή.Όταν επιλέγουμε τα όρια για τις k κατηγορίες ,είναι φρόνιμο να εξασφαλίσουμε ότι κάθε e_i είναι τουλα΄χιστον 5, $k \le 30$ και τα e_i να διατηρηθούν ίσα όσο είναι δυνατόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

Οι ακόλουθοι χρόνοι αφίξεων έχουν παρατηρηθεί (σε λεπτά) : 0.01,0.07,0.03,0.08,0.04,0.10,0.05,0.10,0.11,1.17,1.50,0.93,0.54,0.19,0.22,0.36, 0.27,0.46,0.51,0.110.56,0.72,0.29,0.04,0.73.Είναι λογικό να συμπεράνουμε ότι αυτά τα δεδομένα προέρχονται από μία Εκθετική κατανομή?

ΛΥΣΗ :

Οι παραπάνω τιμές είναι στο σύνολό τους 25 με $\sum_{i=1}^{25} t_i = 9.19$, έτσι $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{9.19}} = \mathbf{2.72}$ αφίξεις ανά λεπτό.Τώρα μπορούμε να εξετάσουμε το αν τα δεδομένα μας συνάδουν με μια Εκθετική τυχαία μεταβλητή (έστω **A**) η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας $\boldsymbol{f(t)=2.72e^{-2.72t}}$.Επιλέγουμε 5 κατηγορίες για να εξασφαλίσουμε την πιθανότητα μια παρατήρηση της μεταβλητής A να «πέφτει» σε κάθεμια από τις 5 κατηγορίες να είναι 0.20.Αυτό μας δίνει $\boldsymbol{e_i = 25(0.20) = 5}$ για κάθε κατηγορία.Για να θέσουμε τα όρια των κατηγοριών,χρειάζεται να προσδιορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής , $\boldsymbol{F(t)}$, για την **A**:

$$F(t) = P(A \leq t) = \int_0^t 2.72e^{-2.72s} ds \; = 1 - e^{-2.72t}$$

Ύστερα επιλέγουμε τις 5 κατηγορίες ως εξής :

Κατηγορία 1: $0 \leq t \leq m_1$ λεπτά

Κατηγορία 2 : $m_1 \leq t \leq m_2$ λεπτά

Κατηγορία 3 : $m_2 \leq t \leq m_3$ λεπτά

Κατηγορία 4 : $m_3 \leq t \leq m_4$ λεπτά

Κατηγορία 5: $m_4 \leq t$ λεπτά

όπου $F(m_1) = 0.20$, $F(m_2) = 0.40$, $F(m_3) = 0.60$, $F(m_4) = 0.80$.

Εφόσον $F(t) = 1 - e^{-2.72t}$, βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε αριθμό p , η τιμή του t που ικανοποιεί την *F(t)=p* μπορεί να βρεθεί ως εξής :

$$1 - e^{-2.72t} = p$$

$$1 - p = e^{-2.72t}$$

παίρνοντας τους λογαρίθμους (με βάση το e) και στα 2 μέλη της εξίσωσης έχουμε :

$$t = \frac{\ln(1-p)}{-2.72}$$

έτσι

$$m_1 = \frac{\ln 0.80}{-2{,}72} = 0.08$$

$$m_2 = \frac{\ln 0.60}{-2{,}72} = 0.19 \qquad m_3 = \frac{\ln 0.40}{-2{,}72} = 0.34 \qquad m_4 = \frac{\ln 0.20}{-2{,}72} = 0.59$$

Έτσι οι κατηγορίες μας είναι οι εξής :

Κατηγορία 1: $0 \leq t \leq 0.08$ λεπτά

Κατηγορία 2 : $0.08 \leq t \leq 0.19$ λεπτά

Κατηγορία 3 : $0.19 \leq t \leq 0.34$ λεπτά

Κατηγορία 4 : $0.34 \leq t \leq 0.59$ λεπτά

Κατηγορία 5: $0.59 \leq t$ λεπτά

Μετά λοιπόν την ταξινόμηση των δεδομένων σε αυτές τις κατηγορίες, βρίσκουμε ότι $o_1 = 6, o_2 = 5, o_3 = 4, o_4 = 5, o_5 = 5$.

Με την κατασκευή των κατηγοριών μας έχουμε $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 0.20(25) = 5$.

Τώρα υπολογίζουμε την τιμή $\chi^2(obs)$:

$$\chi^2(obs) = \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} =$$

$$= 0.20 + 0 + 0.20 + 0 + 0 = 0.40$$

Αυθαίρετα επιλέγουμε το α=0.05 .Εφόσον προσπαθούμε να ελένξουμε αν οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν Εκθετική κατανομή , ***r=1*** . Τότε $\chi_3^2(0.05) = 7.81$ και βέπουμε ότι για α=0.05 , μπορούμε να δεχθούμε την υπόθεση ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων που παρατηρήθηκαν προέρχονται από μια Εκθετική κατανομή με λ =2.72 αφίξεις/λεπτό.

(Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας το Excel όπως είπαμε και παραπάνω εισάγοντας την εντολή CHINV(0.05,3) , παίρνουμε την τιμή 7.81.

- Στην περίπτωση των χρόνων εξυπηρέτησης (αν θέλουμε να εξετάσουμε αν ακολουθούν Εκθετική κατανομή),απλώς εφαρμόζουμε τη προσέγγιση που είδαμε σε χρόνους εξυπηρέτησης $s_1, s_2, \dots, s_n$ που παρατηρήθηκαν.Ξεκινάμε με μια εκτίμηση , έστω $\boldsymbol{\hat{\mu}}$, του ρυθμού εξυπηρέτησης μ ,από τον τύπο :

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} s_i}$$

Ύστερα εφαρμόζουμε πάλι τον τύπο του χ^2 *στατικστικού ελέγχου*,για να εξετάσουμε αν είναι λογική η υπόθεση ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης που παρατηρήθηκαν ακολουθούν Εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $\boldsymbol{\hat{\mu} e^{-\mu t}}$.

Επίλογος-Συμπεράσματα

Τα συστήματα ουρών αναμονής όπως είδαμε παίζουν σημαντικό ρόλο στην κοινωνία και στις διάφορες λειτουργίες της.Η επάρκεια και η αποτελεσματικότητα αυτών των συστημάτων μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στην ποιότητα της ζωής μας αλλά και στην παραγωγικότητα σε πάρα πολλούς τομείς.

Η Θεωρία Ουρών Αναμονής μελετά τα συστήματα αυτά μέσω της διαμόρφωσης μαθηματικών μοντέλων για την αναπαράσταση της λειτουργίας των αντίστοιχων συστημάτων και στη συνέχεια μέσω αυτών των μοντέλων εκμαιεύει διάφορα μέτρα αποδόσεως.Η μελέτη και η ανάλυση αυτή παρέχει πολύ σημαντικές πληροφορίες με σκοπό τον αποτελεσματικό σχεδιασμό συστημάτων ουρών αναμονής.Όλο αυτό βέβαια έχει ως ουσιαστικότερο στόχο την κατάλληλη εξισορρόπηση μεταξύ του κόστους παροχής των διαφόρων υπηρεσιών και του κόστους που σχετίζεται με την αναμονή για τις υπηρεσίες αυτές.

Παραπάνω λοιπόν είδαμε βασικά μοντέλα ουρών αναμονής,όπου για καθένα από αυτά υπάρχουν διάφορα,χρήσιμα αποτελέσματα.Βέβαια η Θεωρία Ουρών Αναμονής δεν περιλαμβάνει μόνον αυτά αλλά ακόμη περισσότερα ενώ κάθε χρόνο δημιουργούνται και δημοσιεύονται και άλλα.

Η Εκθετική κατανομή αποτελεί βασικό παράγοντα στην Θεωρία Ουρών καθώς χρησιμοποιείται για την αναπράσταση της κατανομής των χρόνων εξυπηρέτησης και των χρόνων αφίξεων.Παρόμοια χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες phase-type κατανομές,όπως η Erlang κατανομή,όπου ο ολικός χρόνος διαιρείται σε ανεξάρτητες φάσεις οι οποίες ακολουθούν Εκθετική κατανομή.

Τα μοντέλα ουρών που ακολουθούν την πειθαρχεία των προτεραιοτήτων(priority-discipline queueing models)είναι πολύ χρήσιμα για περιπτώσεις,αρκετά συνηθισμένες,όπου οι πελάτες σε ένα σύστημα «χωρίζονται» σε κατηγορίες όπου σε κάποιες από αυτές δίνεται προτεραιότητα ως προς την εξυπηρέτηση σε σχέση με τις άλλες.Ακόμη πολύ σύνηθες είναι το φαινόμενο οι πελάτες σε ένα σύστημα ουράς αναμονής να εξυπηρετούνται σε πάνω από ένα κέντρα εξυπηρέτησης.Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τα μοντέλα δικτύων ουρών αναμονής,ένας τομέας με μεγάλη δραστηριότητα.Τέλος σε περιπτώσεις όπου κανένα από τα διαθέσιμα μοντέλα δεν μπορεί να αναπαραστήσει ικανοποιητικά ένα σύστημα ουράς,μια συνήθης προσέγγιση είναι η εύρεση «σχετικών» δεδομένων αποδόσεως με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων για την αναπαράσταση της λειτουργίας των συστημάτων αυτών.

Βιβλιογραφία :

Operations Research ~ Applications and Algorithms , Wayne L. Winston

Introduction to Operations Research , Hillier / Lieberman (seventh edition)

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα , Κολέτσος Ιωάννης – Στογιάννης Δημήτρης , Εκδόσεις Συμεών 2012

Operations Research – An Introduction , Hamdy A. Taha (eighth edition)

Introduction to Management Science , Bernard W. Taylor III (eighth edition)

Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας , Τόμος Β' , Σαπουντζής Κωνσταντίνος , Εκδόσεις Σταμούλη

Μελέτες Περιπτώσεων Επιχειρησιακής Έρευνας , Γεωργίου Α., Οικονόμου Γ. και Τσιότρα Γ., Εκδόσεις Μπένου 2006

Fundamentals of Queueing Theory , Gross D. and C. Harris ,(third edition) New York : Wiley 1997

Ουρές Αναμονής , Φακίνος Δημήτρης , Εκδόσεις Συμμετρία

Practical Queueing Analysis , Tanner M., New York : McGraw – Hill , 1995

Introduction to Queueing Theory , Cooper R. B (second edition) Elsevier North – Holland New York , 1981

Queueing Methods for Service and Manufacturing , Hall R., Prentice Hall , Upper Saddle River , N.J. , 1991

Elements of Queueing Theory with Applications, Saaty T., Dover New York , 1983

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα , Δ.Φακίνου και Α.Οικονόμου , Εκδόσεις Συμμετρία