

Μελέτη Συναρτήσεων β και Ενοποίηση στο
Καθιερωμένο Πρότυπο και στο Ελάχιστο
Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο των
Στοιχειωδών Σωματιδίων

Γεώργιος Χατζηδάκης

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Φυσικής



Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Τράκας

Εξεταστική Επιτροπή

Νικόλαος Τράκας
Καθηγητής

Γεώργιος Κουτσούμπας
Αν. Καθηγητής

Κωνσταντίνος Φαράκος
Αν. Καθηγητής

Σεπτέμβριος 2012

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσης διπλωματικής είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των σταθερών σύζευξης των κβαντικών θεωριών πεδίου του Καθιερωμένου Προτύπου μέσω των συναρτήσεων β της εξίσωσης ομάδας επανακανονικοποίησης. Επιβεβαιώνεται η αδυναμία ενοποίησης των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο Πρότυπο, αλλά και η επίτευξή της στα πλαίσια του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου των στοιχειωδών σωματιδίων.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is the study of the behavior of the Standard Model QFT coupling constants via the renormalisation group beta functions. Results are obtained regarding the Standard Model and the Minimal Supersymmetric Standard Model. Failure of coupling constant unification is verified in the former case, successful unification of coupling constants in the latter.

Περιεχόμενα

1 Το Καθιερωμένο Πρότυπο των Στοιχειωδών Σωματιδίων	4
1.1 Οι 4 Θεμελιώδεις Δυνάμεις	4
1.2 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)	5
1.2.1 Διαγράμματα Feynman και σταθερά σύζευξης	5
1.2.2 Μια εισαγωγή στο ζήτημα της επανακανονικοποίησης	9
1.2.3 Η Συμμετρία Βαθμίδας	10
1.3 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD)	12
1.3.1 Διαγράμματα Feynman και σταθερά σύζευξης	15
1.4 Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις	18
1.4.1 Λεπτόνια	18
1.4.2 Κουάρκς	19
1.4.3 Ασθενείς και Ηλεκτρομαγνητικές συζεύξεις του W και του Z	21
1.4.4 Η ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση	22
1.4.5 Μηχανισμός Higgs	25
1.5 Ενοποίηση υπό SU(5)	29
1.5.1 Φερμιόνια στην SU(5)	30
1.5.2 Κανονικοποίηση	31
1.5.3 Μποζόνια Βαθμίδας	32
1.5.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης	32
2 Ομάδα Επανακανονικοποίησης και Συνάρτηση β	38
2.1 Συνάρτηση β	39
2.2 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου	42
2.2.1 U(1)	42
2.2.2 SU(2)	44
2.2.3 SU(3)	45
2.3 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου	46
2.3.1 U(1)	46
2.3.2 SU(2)	47
2.3.3 SU(3)	48
3 Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM)	50
3.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία	50
3.2 Τα περιεχόμενα της θεωρίας	51
3.2.1 Θεωρία ομάδων στο MSSM	51
3.3 Συναρτήση β	53
3.4 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση 1ου βρόχου	56
3.4.1 U(1)	56
3.4.2 SU(2)	57
3.4.3 SU(3)	57
3.5 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου	58
3.5.1 U(1)	58
3.5.2 SU(2)	59
3.5.3 SU(3)	60
4 «Τρέξιμο» των σταθερών σύζευξης	61

1 Το Καθιερωμένο Πρότυπο των Στοιχειωδών Σωματιδίων

1.1 Οι 4 Θεμελιώδεις Δυνάμεις

Απ' όσο γνωρίζουμε, υπάρχουν μόνο τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση: *ισχυρή, ηλεκτρομαγνητική, ασθενής και βαρυτική*. Αυτές παρατίθενται στον κάτωθι πίνακα με σειρά ελαττούμενης ισχύος.

Δύναμη	Ισχύς	Θεωρία	Φορέας
Ισχυρή	10	Χρωμοδυναμική	Γλουόνιο
Ηλεκτρομαγνητική	10^{-2}	Ηλεκτροδυναμική	Φωτόνιο
Ασθενής	10^{-13}	GWS	W και Z
Βαρυτική	10^{-42}	-	Βαρυτόνιο

Σε κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις αντιστοιχεί μια φυσική θεωρία. Η κλασσική θεωρία της βαρύτητας είναι, φυσικά, ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα. Η σχετικιστική της γενίκευση είναι η γενική θεωρία της Σχετικότητας του Einstein. Ακόμη δεν έχει προταθεί μια παντελώς ικανοποιητική κβαντική θεωρία της βαρύτητας. Για το σύνολο της επιστημονικής κοινότητας, η βαρύτητα είναι πολύ ασθενής ώστε να διαδραματίσει κάποιον σημαντικό ρόλο στην φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων. Η φυσική θεωρία που περιγράφει τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις λέγεται **ηλεκτροδυναμική**. Διατυπώθηκε κλασσικά από τον Maxwell το 1861, και ήταν συνεπής ως προς την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Η κβαντική θεωρία της ηλεκτροδυναμικής τελειοποιήθηκε από τους Tomonaga, Feynman και Schwinger κατά τη δεκαετία του 1940. Οι ασθενείς δυνάμεις, που είναι υπεύθυνες για την πυρηνική β-διάσπαση (καθώς επίσης και τη διάσπαση του πιονίου, του μιονίου, και πολλών «παράξενων» σωματιδίων) ήταν άγνωστες στην κλασσική φυσική. Η θεωρητική τους περιγραφή δόθηκε με τη σωστή σχετικιστική διατύπωση ευθύς εξαρχής. Η πρώτη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων δόθηκε από τον Fermi το 1933. Μια περισσότερο εκλεπτυσμένη μορφή δόθηκε από τους Lee και Young, τους Feynman και Gell-Mann, και πολλούς άλλους κατά τη δεκαετία του 1950, και έλαβε την τωρινή της μορφή από τους Glashow, Weinberg, Salam τη δεκαετία του 1960. Για λόγους που θα γίνουν ξεκάθαροι αργότερα, η θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων μπορεί να θεωρηθεί και ως η «δυναμική των γεύσεων». Συνήθως αναφερόμαστε σε αυτήν, ως τη θεωρία Glashow-Weinberg-Salam (GWS). Στο μοντέλο GWS η ηλεκτρομαγνητική και η ασθενής αλληλεπίδραση αντιμετωπίζονται ως δυο διαφορετικές εκδηλώσεις μιας και μοναδικής **ηλεκτρασθενούς** δύναμης, οπότε υπό αυτή την έννοια οι τέσσερις δυνάμεις ελαττώνονται σε τρεις. Όσο για τις ισχυρές δυνάμεις, πέρα από το πρωτοποριακό έργο του Yukawa το 1934, δεν υπήρχε κάποια θεωρία μέχρι την εμφάνιση της χρωμοδυναμικής στα μέσα της δεκαετίας του 1970.

Κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις διαδίδεται μέσω της ανταλλαγής ενός σωματιδίου. Ο βαρυτικός φορέας λέγεται *βαρυτόνιο*, οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις διαδίδονται μέσω του *φωτονίου*, οι ισχυρές μέσω του *γλιουονίου*, και οι ασθενείς δυνάμεις μέσω των *ενδιάμεσων διανυσματικών μποζονίων* W και Z. Αυτοί οι φορείς μεταδίδουν τη δύναμη μεταξύ ενός κουάρκ ή ενός λεπτονίου και ενός άλλου. Επομένως είναι σημαντικό να αναλυθούν οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των πραγματικά στοιχειωδών σωματιδίων. Στα επόμενα εδάφια θα ακολουθήσει μια εικόνα του τρόπου με τον οποίο δρουν κάθε μια από τις σχετικές δυνάμεις στα κουάρκς και τα λεπτόνια.

1.2 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)

Η κβαντική ηλεκτροδυναμική είναι παλαιότερη, η απλούστερη και η πιο επιτυχημένη δυναμική θεωρία. Όλες οι υπόλοιπες έχουν μοντελοποιηθεί συνειδητά πάνω σε αυτήν, οπότε κρίνεται σκόπιμο να ξεκινήσουμε από αυτήν. Οσοίσο για να κατασκευάσουμε μια κβαντική θεωρία πεδίου είναι χρήσιμο πρώτα να ορίσουμε την Λανγκραντζιανή ενός συστήματος, η οποία περιγράφει τη δυναμική του συστήματος. Ορίζουμε

$$L = T - V \quad (1)$$

δηλαδή η Λανγκραντζιανή ισούται με την κινητική μείον τη δυναμική ενέργεια του συστήματος. Η Λανγκραντζιανή ενός ελεύθερου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου A^μ είναι:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2)$$

όπου

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (3)$$

ενώ η Λανγκραντζιανή ενός ελεύθερου φερμιονικού πεδίου είναι

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (4)$$

Η Λανγκραντζιανή ενός ηλεκτρομαγνητικού και ενός φερμιονικού πεδίου είναι

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (5)$$

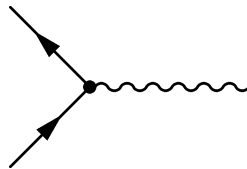
όπου $J^\mu A_\mu$ ο όρος αλληλεπίδρασης των δύο πεδίων. Εδώ, το τετραδιάνυσμα ρεύματος J^μ είναι το κβαντικό τετραδιάνυσμα ρεύματος του φερμιονικού πεδίου

$$J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (6)$$

Στη σωματιδιακή φυσική, συχνά μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε διαδικασίες σκέδασης κατά τις οποίες σωματίδια έρχονται από το άπειρο, αλληλεπιδρούν και μετά φεύγουν. Ένας τρόπος για να γράψουμε μια δεδομένη διαδικασία σκέδασης, καθώς και τη δημιουργία και την καταστροφή των σωματιδίων είναι μέσω διαγραμμάτων Feynman, με τα οποία θα ασχοληθούμε ευθύς αμέσως.

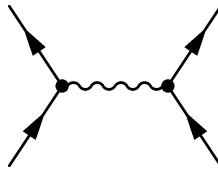
1.2.1 Διαγράμματα Feynman και σταθερά σύζευξης

Στην ηλεκτροδυναμική όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα μπορούν να αναχθούν στην παρακάτω στοιχειώδη διαδικασία



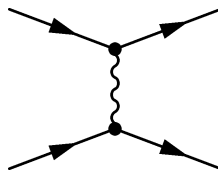
Το διάγραμμα λέει: Φορτισμένο σωματίδιο e εισέρχεται, εκπέμπει (ή απορροφά) ένα φωτόνιο γ και εξέρχεται. Στο διάγραμμα ο χρόνος κυλά προς τα πάνω. Στην προκειμένη περίπτωση θεωρήσαμε ότι το φορτισμένο σωματίδιο είναι ηλεκτρόνιο, θα μπορούσε κάλλιστα να είναι ένα κουάρκ ή οποιοδήποτε φορτισμένο λεπτόνιο.

Για να περιγράψουμε περισσότερο πολύπλοκες διαδικασίες, απλώς ενώνουμε δύο ή περισσότερα αντίγραφα αυτού του θεμελιώδους διαγράμματος. Έστω επί παραδείγματι το ακόλουθο διάγραμμα

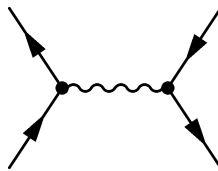


Εδώ δύο ηλεκτρόνια εισέρχονται, ένα φωτόνιο ανταλλάσσεται μεταξύ τους (δεν έχει σημασία ποιο ηλεκτρόνιο το εκπέμπει και πιο το απορροφά, το διάγραμμα περιγράφει και τις δύο διαδικασίες), κι έπειτα εξέρχονται. Επομένως, αυτό το διάγραμμα περιγράφει, την αλληλεπίδραση δύο ηλεκτρονίων. Στην κλασική θεωρία θα την αποκαλούσαμε άπωση Coulomb δύο όμοιων φορτίων (αν βρίσκονται σε ηρεμία). Στην κβαντική ηλεκτροδυναμική αυτή η διαδικασία ονομάζεται *σκέδαση Møller*. Λέμε πως «η αλληλεπίδραση πραγματοποιείται/χαρακτηρίζεται μέσω της ανταλλαγής ενός φωτονίου», για λόγους οι οποίοι είναι πλέον φανεροί.

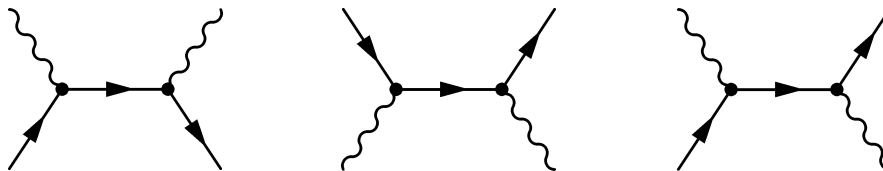
Επιπλέον μπορούμε να περιστρέψουμε αυτά τα διαγράμματα Feynman δίνοντας τους όποια τοπολογική διάταξη επιθυμούμε. Για παράδειγμα,



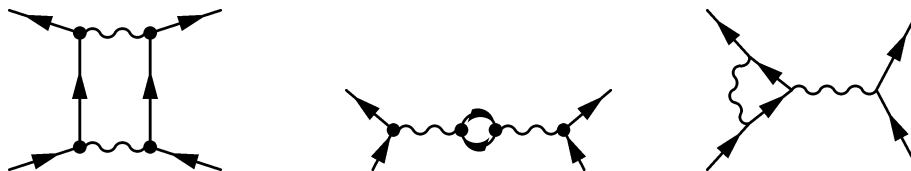
Ο κανόνας που πρέπει να έχει κανείς υπόψη του είναι ότι μια γραμμή σωματιδίου που διαδίδεται «πίσω στο χρόνο» πρέπει να ερμηνευτεί ως το αντίστοιχο *αντισωματίδιο* που ταξιδεύει στην κατεύθυνση του χρόνου. Επομένως σε αυτή τη διαδικασία ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο *εισήλθαν*, ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο *εξήλθαν*. Αυτό το διάγραμμα αντιπροσωπεύει την αλληλεπίδραση δύο αντίθετων φορτίων: την έλξη Coulomb. Στην QED αυτή η διαδικασία ονομάζεται *σκέδαση Bhabba*. Υπάρχει ένα αρκετά διαφορετικό διάγραμμα το οποίο συνεισφέρει εξίσου:



Και τα δύο διαγράμματα πρέπει να συμπεριληφθούν στην ανάλυση της σκέδασης Bhabba. Χρησιμοποιώντας μόνο δύο κορυφές μπορούμε να κατασκευάσουμε τα ακόλουθα διαγράμματα, τα οποία περιγράφουν, αντίστοιχα, δίδυμη εξαύλωση $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$, δίδυμη γένεση $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ και σκέδαση Compton $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$.



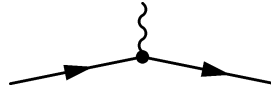
Αν χρησιμοποιήσουμε περισσότερους κόμβους, παρατηρούμε ότι οι δυνατότητες αυξάνουν κατακόρυφα. Επί παραδείγματι, με τέσσερις κόμβους αποκτούμε, μεταξύ άλλων και τα ακόλουθα διαγράμματα:



Σε κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα δύο ηλεκτρόνια εισήλθαν και δύο ηλεκτρόνια εξήλθαν. Και αυτά περιγράφουν την αλληλεπίδραση ομοίων φορτίων (σκέδαση Møller). Οι εσωτερικές γραμμές (αυτές που ξεκινούν και τελειώνουν εντός του διαγράμματος) αντιπροσωπεύουν σωματίδια που δεν παρατηρούνται- επί της ουσίας δεν *μπορούν* να παρατηρηθούν χωρίς να μεταβάλλουμε εξολοκλήρου τη φυσική διεργασία. Αυτά τα σωματίδια αποκαλούνται **δυνητικά**, ενώ οι *εξωτερικές* γραμμές αντιπροσωπεύουν «αληθινά» (παρατηρήσιμα) σωματίδια. Κοινώς, οι εξωτερικές γραμμές μας πληροφορούν για τη φυσική διεργασία που συμβαίνει, ενώ οι εσωτερικές γραμμές περιγράφουν το μηχανισμό που λαμβάνει χώρα.

Αξίζει να αναφερθεί ότι τα διαγράμματα Feynman είναι παντελώς συμβολικά, δηλαδή δεν αντιπροσωπεύουν πραγματικές τροχιές σωματιδίων. Η κάθετη διάσταση είναι ο *χρόνος* ενώ τα οριζόντια διαστήματα δεν αντιστοιχούν σε φυσικά διαστήματα (χώρος).

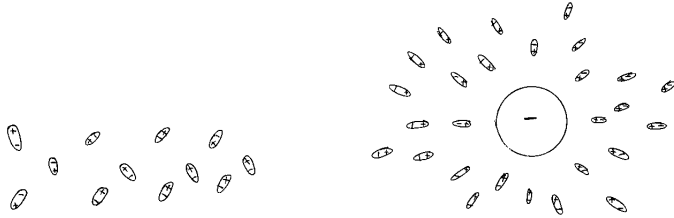
Τέλος αξίζει να αναφερθεί πως οι κανόνες Feynman επιβάλλουν τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής σε κάθε κόμβο, και κατά συνέπεια στο διάγραμμα συνολικά. Επακόλουθο αυτού είναι το γεγονός ότι το θεμελιώδες διάγραμμα της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής δεν αντιπροσωπεύει μια φυσική διαδικασία *από μόνο του*. Θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα, όμως οι υπολογισμοί θα του απέδιδαν τον αριθμό μηδέν. Οι λόγοι είναι κινηματικοί, καθώς η αντίδραση $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ θα παραβίαζε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Στο σύστημα κέντρου μάζας το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, οπότε η ενέργεια του είναι mc^2 . Δεν μπορεί να διασπαστεί σε ένα φωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο ανάκρουσης διότι το δεύτερο θα απαιτούσε από μόνο του ενέργεια μεγαλύτερη από mc^2 . Όπως επίσης ούτε το διάγραμμα $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$ είναι κινηματικά επιτρεπτό, αν και είναι αρκετά εύκολο να σχεδιαστεί.



Στο σύστημα κέντρου μάζας το ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο εισέρχονται συμμετρικά με ίσες και αντίθετες ταχύτητες, επομένως η ολική ενέργεια και ορμή πριν την κρούση είναι μηδέν. Όμως η *τελική* ορμή δεν μπορεί να είναι μηδέν: αφού τα φωτόνια ταξιδεύουν πάντοτε με την ταχύτητα του φωτός, ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου μπορεί να εξαϋλωθεί για να δώσει δύο φωτόνια, όχι όμως *ένα*. Ωστόσο *στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου διαγράμματος*, τέτοια σχήματα είναι απολύτως αποδεκτά, διότι, μολονότι η ενέργεια και η ορμή πρέπει να διατηρούνται σε κάθε κόμβο, *ένα δυνητικό σωματίδιο δεν φέρει την ίδια μάζα* με το αντίστοιχο ελεύθερο σωματίδιο. Στην πραγματικότητα ένα δυνητικό σωματίδιο μπορεί να έχει οποιαδήποτε μάζα απαιτούν οι φυσικοί νόμοι διατήρησης. Τότε γίνεται λόγος για σωματίδια που δεν είναι στο **κέλυφος μάζας** (mass shell), δηλαδή δεν υπακούουν στη σχέση $p^\mu p_\mu = m^2$. Αυτή η συμπεριφορά είναι απολύτως φυσιολογική στα πλαίσια της Αρχής της Απροσδιοριστίας του Heisenberg ($\Delta x \Delta p \approx \hbar$). Αντιθέτως, οι εξωτερικές γραμμές αναπαριστούν *πραγματικά* σωματίδια, τα οποία φέρουν τη «σωστή» μάζα.

Σε κάθε διάγραμμα Feynman αντιστοιχεί ένας *αριθμός* ο οποίος μπορεί να προσδιοριστεί μέσω των *κανόνων Feynman*. Πρώτα σχεδιάζουμε όλα τα διαγράμματα με τις κατάλληλες εξωτερικές γραμμές (όσα έχουν δύο κόμβους, τέσσερις κόμβους κ.ο.κ) κι έπειτα υπολογίζουμε τη συνεισφορά κάθε διαγράμματος, μέσω των *κανόνων Feynman* και αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές. Το τελικό άθροισμα όλων των διαγραμμάτων Feynman με τις συγκεκριμένες εξωτερικές γραμμές αντιπροσωπεύει την πραγματική φυσική διεργασία. Ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα: για οποιαδήποτε δεδομένη αντίδραση υπάρχουν απείρως πολλά διαγράμματα Feynman. Ευτυχώς, κάθε κόμβος στο εσωτερικό ενός διαγράμματος εισάγει έναν παράγοντα $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, **την σταθερά της λεπτής υφής**. Ακριβώς επειδή πρόκειται για έναν πολύ μικρό αριθμό, διαγράμματα με ολόένα και μεγαλύτερο αριθμό κόμβων συνεισφέρουν όλο και λιγότερο στο τελικό αποτέλεσμα, και αναλόγα με την ακρίβεια που επιθυμούμε, μπορούμε να τα αγνοήσουμε.

Όμως στην ηλεκτροδυναμική, η ενεργός σύζευξη εξαρτάται τρόπον τινά από το πόσο μακριά βρίσκεται κανείς από την πηγή. Ποιοτικά, αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό ως εξής. Αν υποθέσουμε πως υπάρχει ένα θετικό σημειακό φορτίο εμβαπτισμένο σε ένα διηλεκτρικό μέσο (π.χ. μια ουσία τα μόρια της οποίας πολώνονται παρουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου). Το αρνητικό άκρο κάθε μοριακού διπόλου θα έλκεται προς το q , και το θετικό άκρο θα απωθείται. Ως απο-

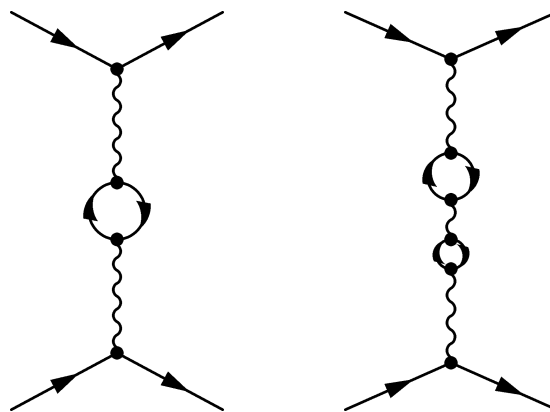


Πίνακας 1: Αρχικά τα μοριακά δίπολα του διηλεκτρικού έχουν τυχαίους προσανατολισμούς, ωστόσο αν τοποθετηθεί σημειακό φορτίο q , αυτά ευθυγραμμίζονται ελαττώνοντας εν μέρει το ενεργό φορτίο του q .

τέλεσμα, το σωματίδιο αποκτά μια «στεφάνη» αρνητικού φορτίου, η οποία ακυρώνει μερικώς το πεδίο της. Επομένως παρουσία του διηλεκτρικού, το ενεργό φορτίο οποιουδήποτε σωματιδίου εμφανίζεται κάπως ελαττωμένο:

$$q_{eff} = \frac{q}{\epsilon} \quad (7)$$

(Ο παράγοντας ϵ κατά τον οποίο ελαττώνεται το πεδίο ονομάζεται *διηλεκτρική σταθερά* του υλικού, και αποτελεί ένα μέγεθος της ευκολίας με την οποία μπορεί να πολωθεί μια ουσία). Αν βρισκόμαστε κοντύτερα από το πλησιέστερο μόριο, δεν υπάρχει αυτό το «κουκούλωμα» (**screening**), και βλέπουμε το πλήρες φορτίο q . Έτσι, αν έκανε κανείς ένα διάγραμμα του ενεργού φορτίου, θα παρατηρούσε πως το ενεργό φορτίο *αυξάνεται* στις μικρές αποστάσεις, και ελαττώνεται στις *μεγάλες*. Αυτό που συμβαίνει στην ηλεκτροδυναμική είναι ότι το ίδιο το κενό συμπεριφέρεται σαν ένα διηλεκτρικό, γεννώντας ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων όπως αυτά που φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα Feynman.



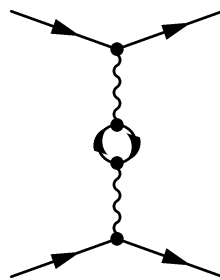
Η ακόλουθη **πόλωση του κενού** καλύπτει μερικώς το φορτίο και ελαττώνει το πεδίο του. Ωστόσο, αν πλησιάσουμε *πολύ* κοντά στο q , η «επικάλυψη» εξαφανίζεται. Σε αυτήν την περίπτωση, η ποσότητα που διαδραματίζει τον ρόλο της «διαμοριακής απόστασης» είναι το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.43 \times 10^{-10} cm$. Για αποστάσεις μικρότερες από αυτή το ενεργό φορτίο αυξάνεται. Αξίζει να σημειωθεί ότι το *γυμνό* φορτίο (αυτό που βλέπουμε από πολύ κοντά), το οποίο θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ως το «πραγματικό» φορτίο του σωματιδίου, **δεν είναι το φορτίο που μετράμε** σε ένα τυπικό πείραμα, εφόσον εκεί σπανίως εργαζόμαστε σε τόσο μικρές αποστάσεις διαχωρισμού. Μια τέτοια περίπτωση είναι η μετατόπιση Lamb— μια μικρή διαταραχή στο φάσμα του υδρογόνου (η κατάσταση s έχει ελαφρώς υψηλότερη ενέργεια

από αυτήν που προβλέπεται στα πλαίσια της κβαντομηχανικής)—όπου η επιρροή της πόλωσης του κενού (ή ορθότερα, η *απουσία* του σε μικρές αποστάσεις) είναι ξεκάθαρα διακρίσιμη.

Εν κατακλείδει, όσο πιο πολύ πλησιάζουμε ένα ηλεκτρόνιο, τόσο περισσότερο αυξάνεται η τιμή του φορτίου του. Έτσι στις χαμηλές, τυπικές ενέργειες της ηλεκτροδυναμικής (μεγάλες αποστάσεις από τα προς μέτρηση φορτία), έχει προσδιοριστεί πειραματικά μια τιμή του ηλεκτρικού φορτίου, που ονομάστηκε σταθερά της λεπτής υφής $\alpha_{em}(M_e = 0.511MeV) = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$, ενώ σε μεγάλες ενέργειες, όπως στην κλίμακα της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης έχει υπολογιστεί πειραματικά ότι είναι $\alpha_{em}(M_{Z^0=91.2GeV}) = \frac{1}{127.9}$. Πλέον η ασθενής πυρηνική δύναμη αρχίζει να γίνεται εξίσου σημαντική με τον ηλεκτρομαγνητισμό και στην πραγματικότητα οι δύο αλληλεπιδράσεις αρχίζουν να αναμειγνύονται με μη τριμμένους τρόπους. (Σε ένα άλλο, πιο μαθηματικό επίπεδο, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι πλέον η θεωρία δεν κάνει χρήση της $U(1)_{em}$ αλλά της $SU(2)_{ασθενής} \times U(1)_{Υπερφορτίο}$). Αν ανέβει κανείς σε υπερβολικά υψηλότερες ενεργειακές κλίμακες, και προσεγγίσει έναν **πόλο Landau**, όπως έχει ονομαστεί, παρατηρείται ότι η σταθερά της λεπτής υφής εκτοξεύεται στο άπειρο.

1.2.2 Μια εισαγωγή στο ζήτημα της επανακανονικοποίησης

Όλα όσα αναφέραμε στις δύο τελευταίες παραγράφους του προηγούμενου εδάφιου μπορούν να αποτελέσουν μια καλή αφετηρία για να συζητήσουμε ένα από τα βαθύτερα προβλήματα της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Ας επανέλθουμε στο διάγραμμα ενός βρόχου.



Λόγω της διατήρησης της ενέργειας και ορμής, η ορμή του φωτονίου διαμοιράζεται στο ηλεκτρόνιο και το ποζιτρόνιο στον εσωτερικό βρόχο. Υπάρχουν άπειροι τρόποι με τους οποίους αυτή η ορμή μπορεί να διαμοιραστεί μεταξύ τους και εμείς πρέπει να τους συμπεριλάβουμε όλες. Πρέπει να αθροίσουμε πάνω στο άπειρο εύρος των ορμών των δύο σωματιδίων. Μπορούμε να εκτελέσουμε ολοκληρώσεις σε όλο το άπειρο εύρος των ορμών του βρόχου, όμως όταν το κάνουμε αυτό, **τα ολοκληρώματα αποκλίνουν**.

Η λύση σε αυτό το πρόβλημα λέγεται **επανακανονικοποίηση** και αναπτύχθηκε στα τέλη του 1940 από τους Tomonga, Schwinger και Feynman, που πήραν το βραβείο Νόμπελ το 1965 για αυτό τους το έργο. Αν αναλογιστούμε ότι το ηλεκτρόνιο περιβάλλεται από ένα νέφος ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων τα οποία ακυρώνουν μερικώς το ηλεκτρικό του φορτίο, καθώς πλησιάζουμε το ηλεκτρόνιο, διεισδύουμε ελαφρώς σε αυτό το νέφος και η τιμή του ηλεκτρικού φορτίου που μετράμε αυξάνει. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι το γυμνό φορτίο του είναι άπειρο, και εφόσον θα υπάρχουν άπειρα ζεύγη ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων, η επίδραση που θα έχουν θα είναι εξίσου άπειρη. Αυτοί οι δύο απειρισμοί ακυρώνουν ο ένας τον άλλον, και το μόνο που αφήνουν είναι την μετρηθείσα σε μια απόσταση τιμή του ηλεκτρικού φορτίου. Επί της ουσίας δύο τιμές για τις οποίες δεν έχουμε κανέναν τρόπο να τις ξέρουμε, και που υπό μια έννοια είναι μαθηματικώς άπειρες, συνδυάζονται για να μας δώσουν μια τιμή που να μπορούμε να μετρήσουμε.

Τα προβλήματα που σχετίζονται με την επανακανονικοποίηση έχουν να κάνουν με την ενέργεια του κενού. Μια θεωρία που παράγει απειρισμούς, ενώ δεν υπάρχουν καν σωματίδια παρόντα, δεν μπορεί να περιμένει κανείς ότι θα τα πάει καλύτερα σε περισσότερο πολύπλοκες καταστάσεις. Μπορεί κανείς να σκεφτεί την επανακανονικοποίηση με τον ακόλουθο τρόπο.

Αρκεί να μπορούμε να υπολογίσουμε τη θεωρία μας μέχρι μια συγκεκριμένη ενέργεια ή απόσταση που ονομάζεται **σημείο αποκοπής**. Καθώς εμείς θέτουμε την απόσταση αποκοπής ίση με το μηδέν, οι προβλεπόμενες «γυμνές» τιμές των ποικίλων ποσοτήτων αλλάζουν και μπορεί να τείνουν στο άπειρο. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν μας ενοχλεί, διότι υποθέτουμε ότι κβαντικές επιδράσεις για τις οποίες δεν γνωρίζουμε τίποτα θα συνδυαστούν με τις γυμνές τιμές για να δημιουργήσουν τις τιμές οι οποίες μας είναι ήδη γνωστές. Ενδέχεται να έχουμε ποσότητες των οποίων η μετρηθείσα τιμή είναι μηδενική να αλλάξει σε μη μηδενική. Αρκεί να έχουμε αρκετές παραμέτρους από την αρχή. Αν χρειαζόμαστε έναν πεπερασμένο αριθμό από παραμέτρους, τότε η μέθοδος λειτουργεί και η θεωρία μας είναι επανακανονικοποιήσιμη. Αν χρειάζεται να προσθέσουμε άπειρο αριθμό παραμέτρων, τότε η μέθοδος δεν λειτουργεί, και η θεωρία είναι μη επανακανονικοποιήσιμη. Μια άλλη μέθοδος είναι η **ομάδα επανακανονικοποίησης** (οι εξισώσεις της οποίας έχουν χρησιμοποιηθεί και στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής για την εξαγωγή των σταθερών σύζευξης). Εδώ δεν αλλάζουμε την απόσταση αποκοπής, *αλλά την απόσταση στην οποία κάνουμε τις μετρήσεις* και την αφήνουμε να τείνει στο άπειρο. Συχνά, μη επανακανονικοποιήσιμοι όροι της θεωρίας θα μηδενιστούν σε μεγάλες αποστάσεις. Επομένως θεωρίες τις οποίες χρησιμοποιούμε συνεχώς, οι οποίες ισχύουν, μπορεί να καταρρεύσουν σε πολύ υψηλές ενέργειες ή πολύ μικρές αποστάσεις, όμως δεν χρειάζεται να μας ανησυχεί κάτι τέτοιο εφόσον, στις ενεργειακές κλίμακες στις οποίες χρησιμοποιούμε τη θεωρία εξακολουθούν να έχουν ισχύ.

1.2.3 Η Συμμετρία Βαθμίδας

Το Καθιερωμένο Πρότυπο ξεκινάει από την υπόθεση, ότι υπάρχει *συμμετρία βαθμίδας*. Αυτό σημαίνει ότι όταν κάνουμε έναν μετασχηματισμό, δεν θα επηρεαστεί η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων. Μια συμμετρία βαθμίδας υποδηλώνει έναν κρυφό βαθμό ελευθερίας. Στον ηλεκτρομαγνητισμό μπορούμε να κάνουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla X \quad (8)$$

Όπου \mathbf{A} το δυναμικό, και X μια τυχαία συνάρτηση. Στην κβαντομηχανική, οι Λανγκραντζιανές που περιγράφουν ένα κβαντικό πεδίο θα είναι αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{i\theta} \quad (9)$$

όπου θ είναι οποιαδήποτε σταθερή γωνία. Τότε γίνεται λόγος για **καθολική συμμετρία βαθμίδας**. Όμως στην κβαντική θεωρία, η φάση θα έπρεπε να είναι τοπικά μη παρατηρήσιμη, εννοώντας «κρυμμένη». Επομένως θα έπρεπε να είναι αναλλοίωτη υπό τον ακόλουθο μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{i\theta\xi(x)} \quad (10)$$

Ωστόσο οι Λανγκραντζιανές, τουλάχιστον αρχικά, δεν φέρονται να είναι αναλλοίωτες κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε την Λανγκραντζιανή Dirac

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m^2\bar{\Psi}\Psi \quad (11)$$

Εκτελώντας τον τοπικό μετασχηματισμό, έχουμε

$$L \rightarrow L - \bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta)\Psi \quad (12)$$

Αυτός ο μετασχηματισμός έχει σημαντικές επιπτώσεις. Το πρόβλημα είναι ότι έχουμε όρους που περιλαμβάνουν παραγώγους του θ . Θέλουμε να τους διώξουμε σαν να ήταν σταθερές. Ο

μόνος τρόπος για να συμβεί αυτό είναι να προσθέσουμε έναν όρο του οποίου ο σκοπός θα είναι να ακυρώσει τους ανεπιθύμητους όρους θ . Αν αντικαταστήσουμε

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + V^\mu \quad (13)$$

και κάνουμε τους μετασχηματισμούς

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta}\Psi \quad (14)$$

$$V^\mu \rightarrow -i\partial^\mu\theta \quad (15)$$

Τότε οι όροι ακυρώνονται, και έχουμε αναλλοίωτο υπό τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ωστόσο για να συμβεί αυτό, πρέπει να προσθέσουμε ένα νέο πεδίο V^μ . Δεν θέλουμε αυτό το νέο πεδίο να καταστρέφει το αναλλοίωτο της βαθμίδας, επομένως οι παράγωγοι του θα πρέπει να υπάρχουν σε αντισυμμετρικό συνδυασμό.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu \quad (16)$$

επομένως ο απλούστερος κινητικός όρος θα είναι $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Επομένως η Λανγκραντζιανή ενός φερμιονικού πεδίου στην οποία καταλήγουμε θα είναι

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m^2\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (17)$$

όπου

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (18)$$

Το νέο πεδίο είναι επί της ουσίας η Λανγκραντζιανή της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως αυτό προέκυψε αυτόματα με το να καταστήσουμε την εξίσωση Dirac αναλλοίωτη υπό τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Το πεδίο το οποίο επινοήσαμε για να ακυρώσουμε τους ανεπιθύμητους όρους προέκυψε να είναι ο ηλεκτρομαγνητισμός. Με τις υπόλοιπες δυνάμεις, εισάγουμε ένα διανυσματικό πεδίο για να ξεφορτωθούμε το τετραδιάνυσμα ∂^μ . Αυτό δημιουργεί νέους όρους στην Λανγκραντζιανή οι οποίοι πρέπει να ταυτοποιηθούν με το σωματίδιο που είναι φορέας της αλληλεπίδρασης. Επειδή πρόκειται για διανυσματικά πεδία, τα σωματίδια είναι μποζόνια βαθμίδας με σπιν-1. *Προκύπτουν αυτόματα σαν αποτέλεσμα της πρωτοβουλίας μας να καταστήσουμε την Λανγκραντζιανή τοπικά αναλλοίωτη.*

1.3 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD)

Θα ξεκινήσουμε κάπως παράδοξα και θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία θεωρίας αναπαράστασεων. Είναι γνωστό από την κβαντομηχανική ότι το σπιν περιγράφεται από μια συμμετρία $SU(2)$. Η $SU(2)$ είναι μια μη Αβελιανή συμμετρία. Η ιδέα των μη Αβελιανών θεωριών βαθμίδας προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Yang και Mills το 1954. Αυτές οι θεωρίες ονομάζονται Yang-Mills. Το 1971-1972 οι 'tHooft και Veltman επινόησαν μια επανακανονικοποιήσιμη εκδοχή της Yang-Mills, για την οποία κέρδισαν το βραβείο Νομπελ το 1999. Ως γνωστόν, μπορούμε να φανταστούμε γραφικά το σπιν με τον ακόλουθο τρόπο. Μπορούμε να φανταστούμε ένα διάνυσμα στον χώρο του σπιν, το οποίο είτε κοιτάει «πάνω» είτε «κάτω». Επομένως οι δύο αυτές καταστάσεις είναι σπιν-πάνω και σπιν-κάτω, και θεωρούνται σαν δύο καταστάσεις ενός σωματιδίου

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow +\frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Αργότερα προτάθηκε η ιδέα ότι θα μπορούσαμε να έχουμε μια συμμετρία ανάλογη με αυτή του σπιν ονόματι **ισοσπίν**, όπου οι καταστάσεις δεν θα ήταν σπιν-πάνω και σπιν-κάτω, αλλά πρωτόνιο και νετρόνιο και θα θεωρούνταν ως οι δύο καταστάσεις ενός σωματιδίου, του νουκλεονίου. Το γεγονός ότι μάζες πρωτονίου και νετρονίου είναι σχεδόν ίσες καθιστά αυτήν την συγκεκριμένη ομαδοποίηση μια σχεδόν ακριβή συμμετρία. Μαθηματικά οι γεννήτορες του ισοσπίν ικανοποιούν τη μεταθετική σχέση

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl}I_l \quad (19)$$

Όπου στη θεμελιώδη αναπαράσταση οι γεννήτορες περιγράφονται από τους πίνακες του Pauli,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

οι οποίοι δρουν στις καταστάσεις πρωτόνιο και νετρόνιο

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

και κατά συνέπεια το νουκλεόνιο σχηματίζει μια διπλέτα

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (22)$$

Και άλλα αδρόνια μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως καταστάσεις σε πολλαπλές της $SU(2)$. **Όσο λιγότερο παρόμοια είναι τα σωματίδια τόσο λιγότερο θα ισχύει η συμμετρία.** Για παράδειγμα τα πιόνια τοποθετούνται στις ακόλουθες καταστάσεις

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

όπου

$$\pi^\pm = \frac{-\pi_1 \pm \pi_2}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

$$\pi_0 = \pi_3 \quad (25)$$

Επομένως μπορούμε να κάνουμε λόγο για το ισοσπίν άλλων σωματιδίων. Γενικά, το σωματίδιο που έχει το μεγαλύτερο θετικό φορτίο είναι και αυτό στο οποίο αποδίδουμε την μέγιστη τιμή της τρίτης συνιστώσας του ισοσπίν I_3 . Στα πρώτα χρόνια της μελέτης των αδρονίων, χρησιμοποιήθηκε ο ακόλουθος τύπος για να συσχετίσει το ηλεκτρικό φορτίο με το ισοσπίν.

$$Q = I_3 + \frac{B}{2} \quad (26)$$

όπου Q είναι το ηλεκτρικό φορτίο, B είναι ο βαρυονικός αριθμός, και I_3 είναι η τρίτη συνιστώσα του ισοσπίν.

Αργότερα, ένα νέο είδος σωματιδίων ανιχνεύτηκε στις υψηλές ενέργειες χαρακτηριστικές των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, των οποίων οι χρόνοι ζωής ήταν σχετικά μεγάλοι, αντιπροσωπευτικοί της ασθενούς δύναμης. Αυτή η συμπεριφορά θεωρήθηκε παράδοξη, και για αυτό το λόγο τα σωματίδια ονομάστηκαν *παράδοξα*. Το 1953 ο Gell-Mann επινόησε έναν νέο κβαντικό αριθμό ονόματι **παραδοξότητα**. Η εξίσωση επομένως τροποποιήθηκε

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \quad (27)$$

όπου S είναι η παραδοξότητα. Η (27) ονομάζεται εξίσωση Gell-Mann-Nishijima. Ο βαρυονικός αριθμός μαζί με την παραδοξότητα μας δίνουν το λεγόμενο υπερφορτίο

$$Y = B + S \quad (28)$$

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (29)$$

Οι καταστάσεις με σπιν πάνω και κάτω έδωσαν τα ονόματα τους στις καταστάσεις με ισοσπίν πάνω και κάτω, οι οποίες με τη σειρά τους έδωσαν τα ονόματα τους στα up και down κουάρκς. Το πρωτόνιο έχει δύο up κουάρκς και ένα down κουάρκ ενώ το νετρόνιο έχει ένα up και δύο down (επομένως τώρα η $SU(2)$ διπλέτα του ισοσπίν μπορεί να ιδωθεί από μια πιο στοιχειώδη σκοπιά, εφόσον επί της ουσίας είναι διπλέτα up-down quarks, η οποία εκτείνεται και για τις υπόλοιπες γενιές των κουάρκς αλλά και των φερμιονίων γενικότερα, όπως και του Higgs, όπως θα δούμε αργότερα). Και η παραδοξότητα ταυτοποιήθηκε με το δικό της κουάρκ, (strange). Έτσι σταδιακά άρχισαν να συμπληρώνονται οι γενιές των στοιχειωδών σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου όπως φαίνεται στον πίνακα (2)

Γενιές			
	1η	2η	3η
Κουάρκς	u	s	t
	d	c	b
Λεπτόνια	ν_e	ν_μ	ν_τ
	e	μ	τ

Πίνακας 2: Τα στοιχειώδη σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου

Αναφορικά όμως με τα κουάρκ μιας και είμαστε στην ισχυρή αλληλεπίδραση, το 1935 ο Yakuwa προέβλεψε ότι θα πρέπει να υπάρχει κάποιο σωματίδιο το οποίο θα ήταν ο φορέας της ισχυρής αλληλεπίδρασης, όπως το φωτόνιο για την ηλεκτρομαγνητική. Στην αρχή αυτό ταυτοποιήθηκε με το πιόνιο, ωστόσο αποτέλεσε μόνο την αρχή καθώς ανακαλύφθηκαν μια πλειάδα από νέα σωματίδια, πρώτα σε κοσμικές ακτίνες, και έπειτα σε επιταχυντές. Ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, οι Gell-Mann και Zweig τοποθέτησαν αυτά τα σωματίδια σε γεωμετρικά σχήματα βασισμένα στις ιδιότητες τους (ο περίφημος Οκταπλός Δρόμος), κάτι που μπορούσε να εξηγηθεί από την ιδέα ότι αποτελούνταν από μικρότερα στοιχεία. Αυτά τα στοιχεία ονομάστηκαν κουάρκ, και το αντίστοιχο μοντέλο, παρουσίασε μεγάλη επιτυχία στην πρόβλεψη νέων σωματιδίων. Ωστόσο κανείς δεν μπορούσε να παρατηρήσει ένα ελεύθερο κουάρκ εκτός αδρονίων.

Όμως αυτό δεν ήταν το μόνο πρόβλημα. Ένα βαρυόνιο, το Δ^{++} , στο μοντέλο των κουάρκ υποτίθεται ότι αποτελείται από τρία up κουάρκ. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς, κάτι που θα παραβίαζε την απαγορευτική αρχή του Pauli, η οποία δεν επιτρέπει σε δύο φερμιόνια με ίδιους κβαντικούς αριθμούς να βρίσκονται στην ίδια κατάσταση. Επομένως για να αντιμετωπιστεί αυτό το δυσάρεστο πρόβλημα, επινοήθηκε ένας νέος κβαντικός αριθμός, ονόματι **χρώμα**, ο οποίος θα ήταν διαφορετικός για τα τρία κουάρκ.

Αρχικά, τα up, down, strange κουάρκ τοποθετήκαν σε μια θεωρία αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς $SU(3)$

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (30)$$

Ωστόσο αυτό αποτελούσε συμμετρία μόνο κατά προσέγγιση. Όμως οι φυσικοί συνειδητοποίησαν ότι η περισσότερο θεμελιώδης συμμετρία $SU(3)$ αποτελούσε μια ακριβή συμμετρία της ισχυρής αλληλεπίδρασης εάν βασιζόταν στα χρώματα

$$\Psi = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix} \quad (31)$$

Όπου η Λανγκραντζιανή της ισχυρής δύναμης είναι

$$L = \sum_{flavors} \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu + m)\Psi - \frac{1}{2}Tr F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (32)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι ένας πίνακας 3×3

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu \quad (33)$$

όπου G_μ είναι ένας συνδυασμός των διανυσματικών μποζονίων βαθμίδας που ονομάζονται γλουόνια και των γεννητόρων Λ^i

$$G_\mu = \frac{1}{2}G_\mu^i \Lambda^i \quad (34)$$

ο τανυστής αναλλοίωτου βαθμίδας δίνεται από τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = \frac{[D_\mu, D_\nu]}{ig} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu] \quad (35)$$

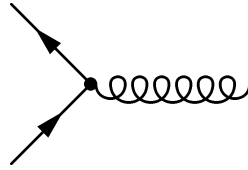
και ο όρος αλληλεπίδρασης μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{g}{2} \sum_{q=u,d} \bar{q}\gamma^\mu \lambda_{\alpha\beta}^\alpha q G_\mu^\alpha \quad (36)$$

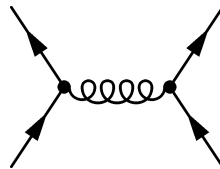
όπου g είναι η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης και G_μ^α είναι το γλουονικό πεδίο.

1.3.1 Διαγράμματα Feynman και σταθερά σύζευξης

Στην χρωμοδυναμική το χρώμα διαδραματίζει τον ρόλο του φορτίου, και η θεμελιώδης διαδικασία (ανάλογη με την $e^- \rightarrow e^- + \gamma$) είναι κουάρκ \rightarrow κουάρκ συν γλουόνιο (εφόσον τα λεπτόνια δεν φέρουν χρώμα, δεν συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις):



Όπως και πριν, συνδυάζουμε δύο ή περισσότερα «θεμελιώδη διαγράμματα» για να αναπαραστήσουμε περισσότερο πολύπλοκες διαδικασίες. Για παράδειγμα, η δύναμη μεταξύ δύο κουάρκς, (η οποία εν πρώτοις είναι επιφορτισμένη με το να καθιστά τα κουάρκς ισχυρά δέσμια μεταξύ τους ώστε να σχηματίζουν βαρυόνια, αλλά και πιο έμμεσα με το να συγκρατεί τα πρωτόνια με τα νετρόνια ώστε να σχηματίζουν πυρήνες) περιγράφεται ως προς την κατώτατη τάξη από το παρακάτω διάγραμμα. Εδώ γίνεται λόγος για «διάδοση» δύναμης μεταξύ δύο κουάρκς μέσω ανταλλαγής γλουονίων.



Σε αυτό το επίπεδο η χρωμοδυναμική είναι παρόμοια με την ηλεκτροδυναμική. Ωστόσο υπάρχουν σημαντικές διαφορές, η πιο εμφανής εκ των οποίων είναι, πως ενώ υπάρχει μόνο ένα είδος ηλεκτρικού φορτίου (θετικό ή αρνητικό δεν έχει σημασία, *ένας αριθμός* αρκεί να το χαρακτηρίσει), υπάρχουν *τρία* είδη χρώματος (κόκκινο, πράσινο και μπλε). Για παράδειγμα ένα blue-up μπορεί να μετατραπεί σε ένα red-up κουάρκ. Εφόσον το χρώμα, όπως και το φορτίο, διατηρείται, αυτό σημαίνει πως το γλουόνιο πρέπει να μεταφέρει τη χρωματική διαφορά. Στην προκειμένη περίπτωση μία μονάδα blueness και μία μονάδα **αντί redness**. Επομένως τα γλουόνια είναι «δίχρωμα», μεταφέροντας μια θετική μονάδα χρώματος και μια αρνητική μονάδα χρώματος. Υπάρχουν επομένως $3 \times 3 = 9$ δυνατότητες, και θα περίμενε κανείς ότι θα υπήρχαν 9 γλουόνια. Ωστόσο, όπως θα φανεί και παρακάτω, υπάρχουν μόνο 8.

Κάθε γλουόνιο έχει ένα χρώμα και ένα αντιχρώμα. Αυτό το γεγονός σε συνδυασμό με τα 3 χρώματα, μας δίνει τελικά 9 συνδυασμούς. Ωστόσο, εξαιτίας της συμμετρίας $SU(3)$, τα χρώματα συνδυάζονται για να σχηματίσουν τις καταστάσεις που απαντώνται στη φύση. Αυτά στοιχειοθετούνται σε μια οκταπλέτα και ένα singlet. Η οκταπλέτα χρώματος της $SU(3)$ είναι που σχηματίζει τα χρώματα των γλουονίων τα οποία έχουν ως εξής:

$$R\bar{G}, \quad R\bar{B}, \quad G\bar{R}, \quad G\bar{B}, \quad B\bar{R}, \quad B\bar{G}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \quad \sqrt{\frac{1}{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}), \quad (37)$$

Οι τελευταίοι δύο συνδυασμοί δεν αλλάζουν τα χρώματα των κουάρκς που τα ανταλλάσσουν. Από την άλλη το singlet χρώματος της $SU(3)$

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (38)$$

δεν φέρει χρώμα και δεν αποτελεί τον φορέα κάποιας αλληλεπίδρασης μεταξύ των χρωμάτων. Από φυσική σκοπιά σχετίζεται με το μεσόνιο.

Εφόσον τα ίδια τα γλουόνια φέρουν χρώμα (αντίθετα με το φωτόνιο, που είναι ηλεκτρικά ουδέτερο) μπορούν να συζευχθούν απευθείας με άλλα γλουόνια, επομένως εκτός από τον θεμελιώδη κόμβο κουάρκ-γλουόνιο, είναι δυνατό να υπάρξουν και κόμβοι γλουονίου-γλουονίου

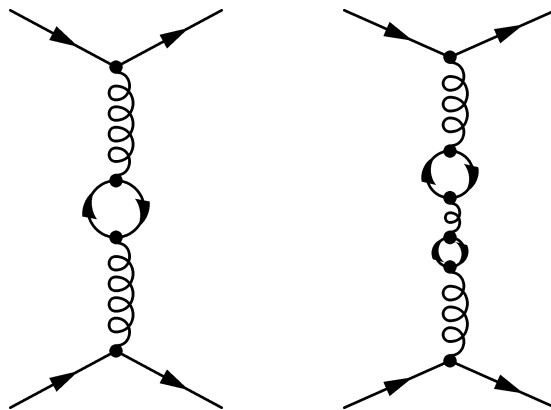


Σχήμα 1: glueballs

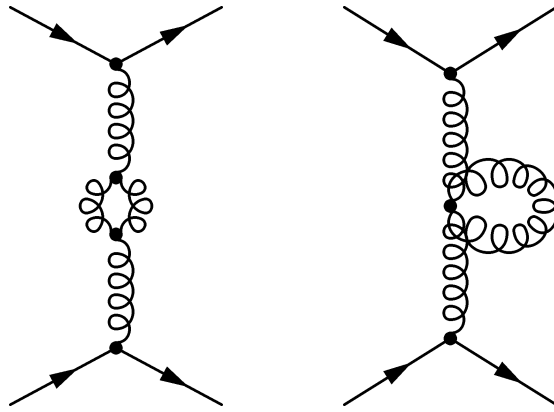
δύο ειδών: κόμβοι τριών γλουονίων, και κόμβοι τεσσάρων γλουονίων. Αυτή η άμεση σύζευξη γλουονίου-γλουονίου καθιστά τη χρωμοδυναμική περισσότερο πολύπλοκη από την ηλεκτροδυναμική, αλλά και αρκετά πλουσιότερη, επιτρέποντας, για παράδειγμα και την ύπαρξη glueballs (δέσμιες καταστάσεις γλουονίων, χωρίς την παρουσία κουάρκ).

Ακόμη μια διαφορά μεταξύ της χρωμοδυναμικής και της ηλεκτροδυναμικής έγκειται στο μέγεθος της **σταθεράς σύζευξης**. Όπως ειπώθηκε και στο προηγούμενο εδάφιο, κάθε κόμβος στην QED εισάγει και έναν παράγοντα $\frac{1}{137}$, και το μικρό μέγεθος αυτού του αριθμού σημαίνει πως στην ανάλυση μας αρκεί να συμπεριλάβουμε τα διαγράμματα Feynman με μικρό αριθμό κόμβων. Πειραματικά, η αντίστοιχη σταθερά σύζευξης της ισχυρής δύναμης, α_s , όπως έχει προσδιοριστεί από, παραδείγματος χάριν, τη δύναμη μεταξύ δύο πρωτονίων, είναι μεγαλύτερη από 1, και το *μεγάλο* μέγεθος αυτού του αριθμού βασάνιζε τη σωματιδιακή φυσική για χρόνια. Διότι αντί να συνεισφέρουν ολοένα και λιγότερο, τα διαγράμματα συνεισφέρουν *ολοένα και περισσότερο*, και η διαδικασία που εισήγαγε ο Feynman, η οποία λειτουργούσε τόσο καλά στην QED, εδώ καθίσταται άχρηστη. Συγκεκριμένα, για την σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης παρατηρείται πως μολονότι είναι μεγάλη στις σχετικά *μεγάλες* αποστάσεις που χαρακτηρίζουν την πυρηνική φυσική, γίνεται αρκετά μικρή σε πολύ μικρές αποστάσεις (μικρότερες από το μέγεθος ενός πρωτονίου). Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως **ασυμπτωτική ελευθερία**. Πρακτικά σημαίνει πως στο εσωτερικό ενός πρωτονίου ή ενός πιονίου, τα κουάρκ δεν αλληλεπιδρούν πολύ. Ακριβώς αυτή η συμπεριφορά παρατηρήθηκε στα πειράματα βαθιάς ανελαστικής σκέδασης.

Όλα όσα είπαμε στην QCD περί διαγραμμάτων πόλωσης του κενού λόγω δημιουργίας δυνητικών ζευγών ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων ισχύουν και εντελώς ανάλογα στην χρωμοδυναμική, όπου έχουμε δημιουργία δυνητικών ζευγών κουάρκ-αντικουάρκ. Ωστόσο υπάρχει ένα σημαντικό επιπρόσθετο στοιχείο. Όχι μόνο έχουμε τον κόμβο κουάρκ-κουάρκ-γλουόνιο (το οποίο από μόνο του θα μας οδηγούσε σε μια αύξουσα σταθερά σύζευξης σε μικρές αποστάσεις),



αλλά επιπλέον έχουμε και τους κόμβους γλουονίου-γλουονίου. Επομένως, εκτός από τα ανάλογα με τα διαγράμματα της πόλωσης του κενού στην QED, εδώ πρέπει να συμπεριλάβουμε και βρόχους (loops) γλουονίων όπως οι εξής:



Δεν είναι a priori ξεκάθαρο τι επιρροή θα έχουν αυτά τα διαγράμματα, ωστόσο αποδεικνύεται πως έχουν **αντίθετη** επίδραση. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι υπάρχει ένας ανταγωνισμός μεταξύ των διαγραμμάτων πόλωσης που περιλαμβάνουν κουάρκ (τα οποία *αυξάνουν* την τιμή της α_s σε μικρές αποστάσεις) και των διαγραμμάτων πόλωσης με τη συμμετοχή μόνο γλουονίων (που την *ελαττώνουν* σε μικρές αποστάσεις). Ποιοτικά αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό ως εξής: ένα κουάρκ περιβάλλεται από ζεύγη κουάρκ-αντικουάρκ τα οποία επικαλύπτουν το χρωματικό του φορτίο, ωστόσο, ακριβώς επειδή τα γλουόνια φέρουν χρωματικό φορτίο, έχουν την αντίθετη επίδραση, δηλαδή οι γλουονικοί βρόχοι επεκτείνουν το ενεργό χρωματικό φορτίο των κουάρκ, επομένως ο ανταγωνισμός των διαγραμμάτων καθίσταται προφανής. Αφού τα πρώτα διαγράμματα εξαρτώνται από τον αριθμό των κουάρκ που έχει η θεωρία μας, (δηλαδή τον αριθμό των γέυσεων f) ενώ τα δεύτερα από τον αριθμό των γλουονίων (δηλαδή των αριθμό *χρωμάτων* n), η απάντηση στο ερώτημα «ποια διαγράμματα συνεισφέρουν περισσότερο» εξαρτάται από τον σχετικό αριθμό των γέυσεων και των χρωμάτων. Η κρίσιμη παράμετρος αποδεικνύεται πως είναι

$$\alpha \equiv 2f - 11n \quad (39)$$

Αν αυτός ο αριθμός είναι **θετικός**, τότε, όπως και στην QED, η ενεργός σύζευξη **αυξάνει** σε μικρές αποστάσεις, αν είναι **αρνητική** τότε η σύζευξη **ελαττώνει**. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο $f = 6$ και $n = 3$ οπότε $\alpha = -21$ επομένως η σταθερά σύζευξης της QCD ελαττώνεται σε μικρές αποστάσεις. Ποιοτικά, αυτή είναι και η προέλευση της ασυμπτωτικής ελευθερίας.

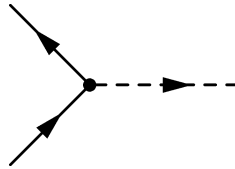
Η τελική διάκριση μεταξύ κβαντικής ηλεκτροδυναμικής και κβαντικής χρωμοδυναμικής, είναι ότι ενώ πολλά σωματίδια φέρουν ηλεκτρικό φορτίο, κανένα από τα σωματίδια που παράγονται φυσικά στον κόσμο μας δεν έχουν χρώμα. Πειραματικά, αυτό που έχει παρατηρηθεί είναι πως τα κουάρκ εγκλωβίζονται σε «άχρωμα» πακέτα των δύο (κουάρκ-αντικουάρκ, μεσόνια) ή των τριών (βαρυόνια). Κατά συνέπεια, οι διαδικασίες που παρατηρούμε στο εργαστήριο είναι επί της ουσίας, έμμεσες και πολύπλοκες εκδηλώσεις της χρωμοδυναμικής.

1.4 Ασθενείς Αλληλεπιδράσεις

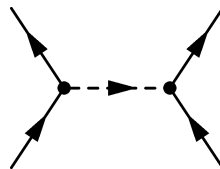
Δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο όνομα που να εξηγεί αυτό το οποίο παράγει τις ασθενείς δυνάμεις, υπό την έννοια ότι το ηλεκτρικό φορτίο παράγει τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και το χρώμα παράγει τις ισχυρές. Ένας συνήθης όρος είναι «ασθενές φορτίο». Οποσδήποτε κι αν το αποκαλέσει κανείς, όλα τα κουάρκς και τα λεπτόνια το φέρουν. (Τα λεπτόνια δεν φέρουν χρώμα, επομένως δεν συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, τα νετρίνα δεν έχουν φορτίο, επομένως δεν δέχονται ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις, όμως όλα συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.) Υπάρχουν δύο είδη ασθενών αλληλεπιδράσεων: οι *φορτισμένες* (με φορέα τα W) και οι *ουδέτερες* (με φορέα το Z).

1.4.1 Λεπτόνια

Ο θεμελιώδης κόμβος φορτίου είναι ο εξής:

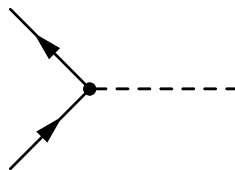


Ένα αρνητικά φορτισμένο λεπτόνιο (e^- , μ^- ή τ^-) μετατρέπεται στο αντίστοιχο νεutrίνο, με την εκπομπή ενός W^- (ή την απορρόφηση ενός W^+): $l^- \rightarrow \nu_l + W^-$. Ως συνήθως συνδυάζουμε τους θεμελιώδεις κόμβους για να δημιουργήσουμε περισσότερο πολύπλοκες αντιδράσεις. Επί παραδείγματι, η διαδικασία $\mu^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_\mu$ θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από το διάγραμμα:

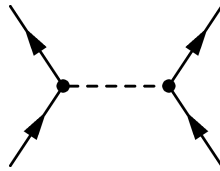


Σχήμα 2: $\mu^- + \nu_e \rightarrow W^- \rightarrow e^- + \nu_\mu$

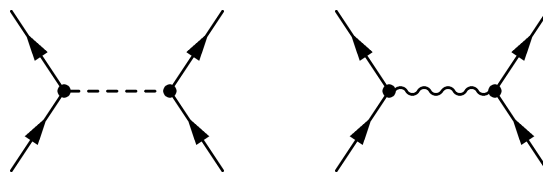
Ο θεμελιώδης ουδέτερος κόμβος είναι:



Σε αυτή την περίπτωση το 1 μπορεί να είναι *οποιοδήποτε* λεπτόνιο (συμπεριλαμβανομένων και νετρίνο). Το Z είναι ο φορέας διαδικασιών όπως η σκέδαση ηλεκτρονίου-νεutrίνο ($\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$):



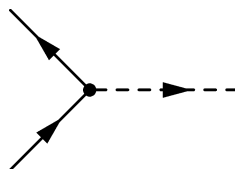
Μολονότι οι φορτισμένες ασθενείς διαδικασίες είχαν αναγνωριστεί εξαρχής (η διάσπαση βήτα είναι μια φορτισμένη διαδικασία), η θεωρητική δυνατότητα ύπαρξης ουδέτερων ασθενών διαδικασιών δεν εκτιμήθηκε μέχρι το 1958. Το μοντέλο GWS περιλαμβάνει τις ουδέτερες ασθενείς διαδικασίες ως αναπόσπαστο συστατικό του, και η ύπαρξη τους επιβεβαιώθηκε πειραματικά στο CERN το 1973. Ο λόγος που η ανακάλυψη των ουδέτερων ασθενών διαδικασιών άργησε τόσο πολύ να πραγματοποιηθεί είναι διπλός: Αφενός κανείς δεν έψαχνε για εκείνες, και αφετέρου οι κατά πολύ ισχυρότερες ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις τείνουν να τις επισκιάζουν. Παραδείγματος χάριν, το Z μπορεί να ανταλλαχθεί μεταξύ δύο ηλεκτρονίων, όμως το ίδιο μπορεί να συμβεί και με ένα φωτόνιο:



Πιθανότατα υπάρχει μια μικρή διόρθωση στο νόμο Coulomb που οφείλεται στο πρώτο διάγραμμα, αλλά η διαδικασία στην οποία μεσολαβεί το φωτόνιο είναι αυτή που αναμφίβολα κυριαρχεί. Για να παρατηρήσει κανείς μια αμιγώς ουδέτερη ασθενή αλληλεπίδραση θα πρέπει να στραφεί στη σκέδαση νετρίνο, όπου δεν υπάρχει κάποιος ηλεκτρομαγνητικός μηχανισμός ανταγωνιστικός σε αυτή, και τα πειράματα με νετρίνο παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες.

1.4.2 Κουάρκς

Είναι άξιο παρατήρησης ότι οι λεπτονικοί κόμβοι της ασθενούς αλληλεπίδρασης συνδέουν μέλη *ίδιας γενιάς*: το e^- μετατρέπεται σε ν_e (με την εκπομπή ενός W^-), ή το $\mu^- \rightarrow \mu^-$ (εκπέμποντας ένα Z), αλλά το e^- ποτέ δεν μετατρέπεται σε μ^- , ούτε το μ^- σε ν_e . Έτσι με αυτόν τον τρόπο η θεωρία επιβάλλει τη διατήρηση του ηλεκτρονιακού αριθμού, του μιονικού αριθμού, αλλά και του ταονικού αριθμού. Ο ίδιος κανόνας ισχύει και για τα κουάρκς, ώστε ο θεμελιώδης κόμβος να είναι:

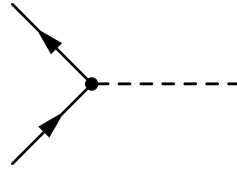


$$q_{-\frac{1}{3}} \rightarrow W^- \rightarrow q_{+\frac{2}{3}}$$

Ένα κουάρκ με φορτίο $-\frac{1}{3}$ (δηλαδή ένα d, s ή b) μετατρέπεται σε ένα αντίστοιχο κουάρκ με φορτίο $+\frac{2}{3}$ (u, c ή t, αντίστοιχα), με την εκπομπή ενός W^- . Το εξερχόμενο κουάρκ φέρει το ίδιο χρώμα με το εισερχόμενο, αλλά διαφορετική γεύση. Δεν είναι το W^- το οποίο «απομακρύνει» τη «χαμένη» γεύση-εξάλλου, το W^- πρέπει να μπορεί να συζευχθεί με λεπτόνια, τα οποία *δεν φέρουν γεύση*. Η ορθότερα, **η γεύση δεν διατηρείται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις**. (Επειδή λοιπόν η γεύση ενός κουάρκ συνήθως αλλάζει σε έναν κόμβο ασθενούς αλληλεπίδρασης,

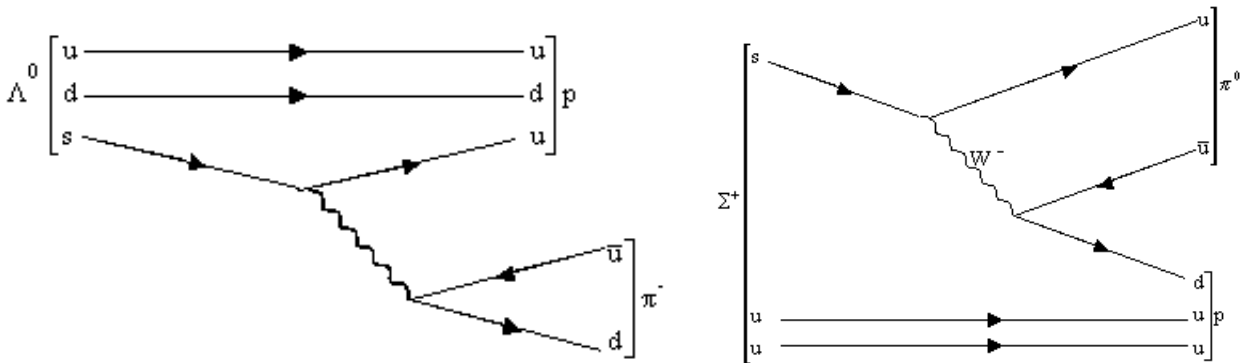
όπως το χρώμα αλλάζει σε έναν κόμβο ισχυρής αλληλεπίδρασης, η θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων μερικές φορές λέγεται και «δυναμική των γεύσεων»). Το άλλο άκρο της γραμμής του W μπορεί να συνδεθεί με λεπτόνια (ημιλεπτονικές διαδικασίες) ή με άλλα κουάρκς (εντελώς αδρονικές διαδικασίες).

Ο θεμελιώδης ουδέτερος κόμβος για τα λεπτόνια ($l \rightarrow l + Z$) αφήνει το είδος των λεπτονίων αμετάβλητο, είναι επομένως φυσικό να υποθέσει κανείς πως το ίδιο θα συμβαίνει και στα κουάρκς:



$$q \rightarrow q + Z$$

Αυτό το διάγραμμα μπορεί να καταλήξει σε διαδικασίες σκέδασης νετρίνο όπως η $\nu_\mu + p \rightarrow \nu_\mu + p$. Επίσης η ανταλλαγή ενός μποζονίου Z έχει μια μικρή συνεισφορά στη δύναμη που ασκείται μεταξύ πρωτονίου και ηλεκτρονίου στο εσωτερικό ενός πυρήνα. Όπως και πριν, αυτή η συνεισφορά, επισκιάζεται από την κυρίαρχη ηλεκτρομαγνητική δύναμη, αλλά είναι ανιχνεύσιμη σε κάποιες προσεκτικά επιλεγμένες ατομικές μεταβάσεις. Μέχρι στιγμής, τα πράγματα είναι απλά: Τα κουάρκς μιμούνται τα λεπτόνια, όσον αφορά τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Η μόνη διαφορά είναι ότι εξαιτίας της ιδιότητας της ισχυρής δύναμης να εγκλωβίζει τα κουάρκς, αυτά γενικά είναι παρόντα, ωστόσο δεν συμμετέχουν. Όμως μια τέτοια εικόνα είναι υπερβολικά απλοϊκή. Διότι όσο ο θεμελιώδης κόμβος των κουάρκς επιτρέπεται να υπάρχει μόνο σε διαδικασίες που αφορούν ίδιες γενιές, δεν θα μπορούμε δώσουμε εξήγηση για ασθενείς αλληλεπιδράσεις που μεταβάλλουν τον κβαντικό αριθμό της παραδοξότητας (strangeness), όπως είναι οι αποδιέγερσεις $\Lambda \rightarrow p^+ + \pi^-$ ή $\Sigma^+ \rightarrow \pi^0 + p$.



Πίνακας 3: Ασθενείς αλληλεπιδράσεις που μετατρέπουν ένα strange-quark σε up-quark (Στα συγκεκριμένα σχήματα έχουμε επιλέξει ο χρόνος να κυλά από τα αριστερά προς τα δεξιά - η κατεύθυνση του χρόνου είναι ζήτημα σύμβασης).

Η λύση σε αυτό το δίλλημα δόθηκε από τον Cabibbo το 1963, και εφαρμόστηκε στις ουδέτερες αλληλεπιδράσεις από τους Glashow, Hλιόπουλο, και Μαϊανι (GIM) το 1963, και επεκτάθηκε σε τρεις γενιές από τους Kobayashi και Maskawa το 1973. Η βασική ιδέα είναι ότι οι γενιές των κουάρκς παρουσιάζονται **αλλοιωμένες (skewed)** όσον αφορά τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Δηλαδή αντί για:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

η ασθενής δύναμη δημιουργεί ζεύγη:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

όπου d', s', b' είναι γραμμικοί συνδυασμοί των φυσικών κουάρκς d, s, b :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (40)$$

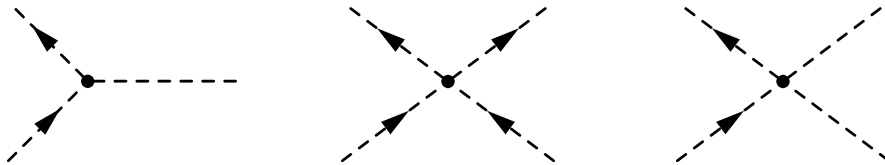
Αν αυτός ο 3×3 πίνακας Kobayashi-Maskawa ήταν μοναδιαίος, τότε τα d', s', b' , θα ήταν τα ίδια με τα d, s, b , κι επομένως μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών γενεών δεν θα ήταν επιτρεπτές. Ωστόσο δεν είναι μοναδιαίος, (είναι σχεδόν μοναδιαίος) και οι πειραματικές τιμές των στοιχείων του πίνακα είναι:

$$\begin{pmatrix} 0.9705 & \text{ως} & 0.9770 & 0.21 & \text{ως} & 0.24 & 0 & \text{ως} & 0.014 \\ 0.21 & \text{ως} & 0.24 & 0.971 & \text{ως} & 0.973 & 0.036 & \text{ως} & 0.070 \\ 0 & \text{ως} & 0.024 & 0.036 & \text{ως} & 0.069 & 0.997 & \text{ως} & 0.999 \end{pmatrix} \quad (41)$$

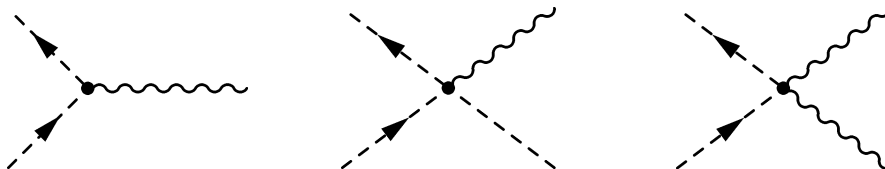
Όπου V_{ud} μετράει τη σύζευξη του u με το d , V_{us} μετράει τη σύζευξη του u με το s κ.ο.κ. Το γεγονός ότι ο δεύτερος πίνακας είναι μη μηδενικός είναι που επιτρέπει διαδικασίες κατά τις οποίες αλλάζει η παραδοξότητα, να συμβαίνουν.

1.4.3 Ασθενείς και Ηλεκτρομαγνητικές συζεύξεις του W και του Z

Στη θεωρία GWS υπάρχουν επίσης και άμεσες συζεύξεις του W με το Z (κατ' αναλογία με τις άμεσες συζεύξεις γλουονίου-γλουονίου στην QCD):



Επιπλέον, επειδή το W είναι φορτισμένο, συζεύγεται με το φωτόνιο:



1.4.4 Η ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση

Η ασθενής αλληλεπίδραση περιγράφεται από μια συμμετρία $SU(2)$. Τα σωματίδια μπορούν να ομαδοποιηθούν σε διπλές σωματιδίων που διαφέρουν κατά μια μονάδα φορτίου.

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \quad (42)$$

Επομένως, η εκπομπή ή απορρόφηση ενός σωματιδίου με φορτίο $+1$ ή -1 μπορεί να αναγκάσει ένα σωματίδιο να μετατραπεί σε ένα άλλο εντός της διπλέτας του. Αυτά τα σωματίδια με φορτίο $+1$ και -1 , ονομάζονται ενδιάμεσα διανυσματικά μποζόνια και συμβολίζονται με W^+ , W^- .

Η συμμετρία υπονοεί τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\Psi \Rightarrow e^{i\theta M} \Psi \quad (43)$$

Όπου ο M είναι ένας 2×2 πίνακας. Οι γεννήτορες πρέπει να είναι Ερμιτιανοί και άιχνοι, και να αντιστοιχούν στην $SU(2)$ επομένως πρέπει να είναι οι πίνακες Pauli. Εάν η Λανγκραντζιανή της ασθενούς δύναμης είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς $SU(2)$, το στοιχείο ομάδας

$$e^{\theta_i G_i} \quad (44)$$

δείχνει ότι κάθε ένας από τους τρεις γεννήτορες G_i σχετίζεται με μια αυθαίρετη γωνία θ_i . Ας θυμηθούμε ότι στην ηλεκτροδυναμική, προσθέσαμε ένα πεδίο το οποίο ταυτοποιήσαμε με το φωτόνιο για να καταστήσουμε τη θεωρία τοπικά αναλλοίωτη. Εδώ ισχύει το ίδιο πράγμα, μόνο που πρέπει να «κρύψουμε» τρεις γωνίες. Οπότε πρέπει να προσθέσουμε τρία πεδία βαθμίδας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει και ένα τρίτο ενδιάμεσο διανυσματικό μποζόνιο εκτός από τα δύο που γνωρίζουμε ήδη. Αυτό είναι το ενδιάμεσο διανυσματικό μποζόνιο Z^0 το οποίο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο.

Θα ανέμενε κανείς ότι ο ακόλουθος μετασχηματισμός θα εξασφάλιζε ότι η βαθμίδα μας θα παραμείνει αναλλοίωτη

$$W_\mu^j \rightarrow W_\mu^j - \frac{\partial_\mu \theta^j}{g} \quad (45)$$

Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν πρόκειται να μας χρησιμεύσει διότι η ομάδα είναι μη Αβελιανή. Πρέπει επομένως να κάνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$W_\mu^j \rightarrow W_\mu^j - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^j + f_{jkl} W_\mu^k \theta^l \quad (46)$$

όπου f_{jkl} είναι οι σταθερές δομής. Για την $SU(2)$, οι γεννήτορες είναι οι πίνακες Pauli των σπιν, και οι σταθερές δομής είναι ϵ_{ijk} . Αυτός ο κανόνας μετασχηματισμού για τα μη Αβελιανά πεδία βαθμίδας αναγκάζει τον κινητικό όρο της Λανγκραντζιανής να πάρει την ακόλουθη μορφή

$$L_{\text{Κινητικό}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} \quad (47)$$

όπου

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g f_{jkl} W_\mu^k W_\nu^l \quad (48)$$

Αυτό σημαίνει ότι **τα μποζόνια βαθμίδας μπορούν να αλληλεπιδρούν με τον εαυτό τους**. Κανείς μπορεί να σκεφτεί ότι τα πεδία και τα σωματίδια δημιουργούνται από άλλα πεδία τα οποία συνδυάζονται με κάποιο τρόπο. Για παράδειγμα, το φωτόνιο θεωρείται ότι είναι ένα στοιχειώδες σωματίο, ωστόσο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα δύο άλλων πεδίων, των W_μ και B_μ .

Τα μποζονικά πεδία της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι W_i^μ , $i = 1, 2, 3$ και συνδυάζονται με τους ακόλουθους τρόπους για να σχηματίσουν τα ακόλουθα σωματίδια.

$$W^+ = \frac{-W^1 + iW^2}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

$$W^- = \frac{-W^1 - iW^2}{\sqrt{2}} \quad (50)$$

$$W^0 = W^3 \quad (51)$$

Δεν υπάρχει σωματίδιο ονόματι W^0 όμως αργότερα αυτό το πεδίο θα συνδυαστεί με το B_μ για να δημιουργήσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ και το Z^0 .

Πρώτα όμως κρίνεται σκόπιμο να γράψουμε την Λανγκρανζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου. Αν διακρίνουμε τα ηλεκτρόνια σε δεξιόστροφα και αριστερόστροφα

$$e_R^- = P_R \Psi_e \quad (52)$$

$$e_L^- = P_L \Psi_e \quad (53)$$

το δεξιόστροφο ηλεκτρόνιο τοποθετείται σε ένα singlet υπό $SU(2)$, ενώ το αριστερόστροφο ηλεκτρόνιο και το νεutrino του ηλεκτρονίου, το οποίο είναι πάντοτε αριστερόστροφο, τοποθετείται σε μια διπλέτα $SU(2)$.

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad (54)$$

Κατά έναν παρόμοιο τρόπο τα αριστερόστροφα up και down κουάρκς τοποθετούνται σε μια διπλέτα, ενώ τα δεξιόστροφα up και down κουάρκς σε singlets (μονήρη υπό $SU(2)$).

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (55)$$

Επομένως η Λανγκρανζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου είναι

$$L = \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f \quad (56)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda^\alpha}{2} G_\mu^\alpha - ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig_1 B_\mu \frac{Y}{2} \quad (57)$$

$$f = L, e_R, Q_L, u_R, d_R \quad (58)$$

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (59)$$

Όπου στην Λανγκρανζιανή προσθέσαμε και την QCD με το πεδίο του γλουνίου G_μ^α , Y είναι το υπερφορτίο, τ^i είναι οι πίνακες Pauli, λ^α είναι οι πίνακες Gell – Mann, και g_1, g_2, g_3 είναι σταθερές σύζευξης.

Λέμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ είναι ένας συνδυασμός του B_μ και του W_μ^0 τα οποία είναι ορθογώνια κανονικοποιημένα πεδία. Ισχύει:

$$A_\mu \propto g_2 B_\mu - g_1 Y_L W_\mu^0 \quad (60)$$

Το A_μ είναι ορθογώνιο με ένα άλλο πεδίο Z_μ . Ισχύει:

$$Z_\mu \propto g_1 Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^0 \quad (61)$$

Τότε τα A_μ, Z_μ ορίζονται ως εξής:

$$A_\mu = \frac{g_2 B_\mu - g_1 Y_L W_\mu^0}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \quad (62)$$

$$Z_\mu = \frac{g_1 Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^0}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \quad (63)$$

Μπορούμε τότε να επιλύσουμε για B_μ, W_μ

$$B_\mu = \frac{g_2 A_\mu + g_1 Y_L Z_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \quad (64)$$

$$W_\mu^0 = \frac{-g_1 Y_L A_\mu + g_2 Z_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \quad (65)$$

Επίσης μπορεί κανείς να κάνει επίλυση ως προς e το φορτίο του ηλεκτρονίου. Τελικά το αποτέλεσμα δίνει:

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (66)$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (67)$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (68)$$

και κατά συνέπεια

$$g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad (69)$$

$$g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad (70)$$

Όπου θ_W είναι η γωνία Weinberg¹, για την οποία έχει προσδιοριστεί ότι είναι

$$\sin^2 \theta \approx 0.23 \quad (71)$$

Επομένως έχουμε τα πεδία W^μ τα οποία αναμειγνύονται για να δημιουργήσουν τα W^+, W^- . Το πεδίο W^μ συνδυάζεται με έναν τρόπο με το πεδίο B^μ ώστε να δημιουργήσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ ενώ αν συνδυαστεί με άλλο τρόπο με το πεδίο B^μ , δημιουργεί το Z^0 . Κάποιες

¹ θ_W είναι η **γωνία Weinberg** ή αλλιώς **γωνία ασθενούς ανάμειξης** και είναι μια παράμετρος της GWS θεωρίας της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης-είναι η γωνία υπό την οποία το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας περιστρέφει το αρχικό επίπεδο των διανυσματικών μποζονίων $W^0 - B^0$, παράγοντας έτσι το μποζόνιο Z^0 και το φωτόνιο της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

και μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει g, g' ως εξής

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{και} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

αριθμητικές σχέσεις για τυπικές ενέργειες μερικών GeV είναι:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad (72)$$

$$\alpha_1 = \frac{g_1^2}{4\pi} = \frac{1}{100} \quad \alpha_2 = \frac{g_2^2}{4\pi} = \frac{1}{30} \quad (73)$$

$$\alpha_3 = \frac{g_3^2}{4\pi} = 0.1 - 0.3 \quad (74)$$

Αυτός ο συνδυασμός του ηλεκτρομαγνητισμού και της ασθενούς δύναμης λέγεται *ηλεκτρασθενής* θεωρία. Προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Glashow το 1961. Επεκτάθηκε από τον Weinberg το 1961 και τον Salam το 1968, και οι τρεις τους μοιράστηκαν από κοινού το βραβείο Nobel για το έργο τους. Οι Weinberg και Salam προσέθεσαν την έννοια της γέννησης της μάζας μέσω του μηχανισμού Higgs. Η ηλεκτρασθενής θεωρία δουλεύει μια χαρά, έχει όμως ένα πρόβλημα. Υποθέτει ότι τα ενδιάμεσα διανυσματικά μποζόνια είναι άμαζα, επομένως θα ανάγκαζε την ασθενή δύναμη να έχει άπειρη εμβέλεια, κάτι που δεν συμβαίνει. Αν ήταν μαζικά, τότε πράγματι θα επρόκειτο για μια μικρής εμβέλειας δύναμη. Το ερώτημα που καλείται κανείς να απαντήσει είναι: «πως προσθέτουμε μάζες χωρίς να καταστρέψουμε τη συμμετρία βαθμίδας». Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του μηχανισμού Higgs.

1.4.5 Μηχανισμός Higgs

Η ηλεκτρασθενής είναι μια θεωρία $SU(2) \times U(1)$. Η λανγκραντζιανή πυκνότητα του μποζονίου είναι ένα άθροισμα των $U(1)$ πεδίων βαθμίδας B_μ και τριών $SU(2)$ πεδίων W_μ^i , $i = 1, 2, 3$.

$$L = -\frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{W\mu\nu}F_W^{\mu\nu} \quad (75)$$

όπου

$$F_B^{\mu\nu} = \partial^\nu B - \partial^\mu B \quad (76)$$

$$F_W^{i\mu\nu} = \partial^\nu W^{i\mu} - \partial^\mu W^{i\nu} \quad (77)$$

Τα γνωστά πεδία σχηματίζονται από τις σχέσεις:

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3 \quad (78)$$

$$Z_\mu = \sin \theta_W B_\mu - \cos \theta_W W_\mu^3 \quad (79)$$

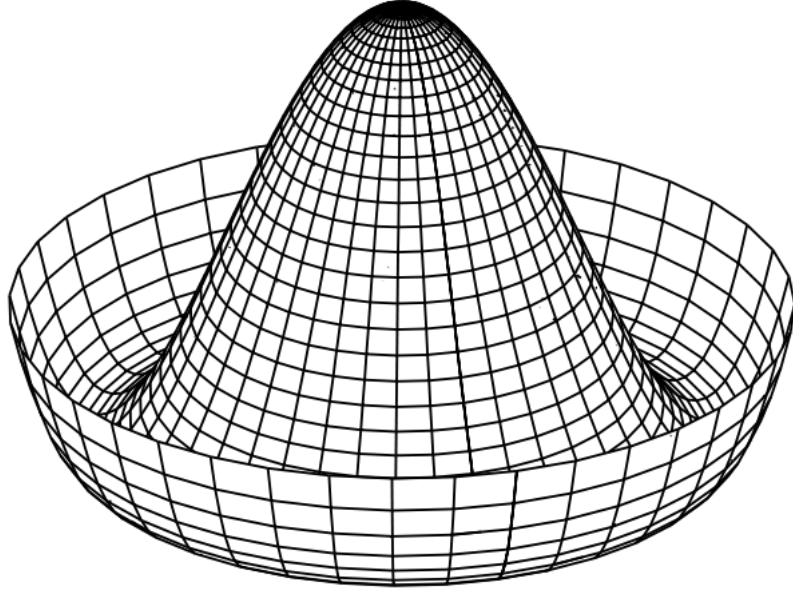
$$W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \quad (80)$$

$$W^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad (81)$$

Τώρα, θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε όρους μάζας για τα σωματίδια W^+ , W^- και Z^0 , όμως τότε η λανγκραντζιανή δεν θα παρέμενε αναλλοίωτη κάτω από $U(1)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας.

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\xi(x)}\Psi(x) \quad (82)$$

Όπου Ψ είναι το μποζονικό πεδίο, Y είναι το υπερφορτίο και $\xi(x)$ μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ο τρόπος με τον οποίο τα W, Z μποζόνια αποκτούν μάζα ενώ παράλληλα η θεωρία βαθμίδας $SU(2) \times U(1)$ παραμένει αναλλοίωτη είναι μέσω του αυθόρμητου σπασίματος της συμμετρίας. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό με το παρακάτω δυναμικό. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα του οποίου η ελάχιστη ενέργεια δεν είναι στην αρχή των αξόνων.



Μπορούμε να φανταστούμε μια μικρή μπάλα στην κορυφή ενός λόφου. Στην κορυφή, η μπάλα βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και το σύστημα είναι συμμετρικό κάτω από περιστροφές στον άξονα z . Ωστόσο αν η μπάλα κυλήσει από τον λόφο μέχρι τον δακτύλιο που βρίσκεται στον πυθμένα, το σύστημα πλέον δεν θα είναι συμμετρικό κάτω από περιστροφές στον άξονα z . Ωστόσο η μπάλα πλέον θα βρίσκεται σε μια κατάσταση ελάχιστης βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Πλέον θα βρίσκεται σε μια ενεργειακά προτιμότερη θέση. Αυτό είναι το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας σε κλασικό επίπεδο.

Προτού περιγράψουμε τον μηχανισμό Higgs, ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω:

$$L = \partial^\mu \Psi^* \partial_\mu \Psi - V(\Psi) \quad (83)$$

όπου Ψ είναι ένα μιγαδικό πεδίο

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Psi_1 + i\Psi_2) \quad (84)$$

και $V(\Psi)$ είναι η δυναμική ενέργεια

$$V(\Psi) = \mu^2 |\Psi|^2 + \lambda |\Psi|^4 \quad (85)$$

Οι σταθερές μ^2 , λ είναι πραγματικές, και το λ είναι θετικό. Η Λανγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη υπό γενικούς μετασχηματισμούς $U(1)$ οι οποίοι περιγράφουν περιστροφές στο μιγαδικό επίπεδο. Για να εξασφαλίσουμε ότι το κενό, η χαμηλότερη κατάσταση ενέργειας, είναι αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς και μετατοπίσεις Lorentz η $\Psi(x)$ πρέπει να είναι μια σταθερά στην κατάσταση του κενού. Αν το μ^2 είναι θετικό, τότε η ελάχιστη δυναμική ενέργεια επιτυγχάνεται όταν $\Psi = 0$. Αν το μ^2 είναι αρνητικό, τότε η κατάσταση ελάχιστου δυναμικού είναι ένας δακτύλιος στο μιγαδικό επίπεδο.

$$\Psi_{V_{min}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} e^{i\theta} \quad (86)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (87)$$

Δεν έχει κάποια σημασία η κατεύθυνση οπότε μπορούμε να θέσουμε $\theta = 0$

$$\Psi_{V_{min}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (88)$$

Αν ορίσουμε ν τέτοιο ώστε

$$\Psi_{V_{min}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \quad (89)$$

η απόκλιση από το επιλεγμένο ελάχιστο μπορεί να περιγραφεί σε σχέση με τα πραγματικά πεδία σ, η ως εξής:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\nu + \sigma + i\eta) \quad (90)$$

Η Λανγκραντζιανή μπορεί να γραφεί ως προς σ, η ως εξής:

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu - \lambda\nu^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \lambda\nu\sigma(\sigma^2 + \eta^2) - \frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \eta^2)^2 + C \quad (91)$$

Οι ανώτεροι όροι είναι όροι αλληλεπίδρασης απομένως η Λανγκραντζιανή ελεύθερου σωματιδίου είναι

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu - \lambda\nu^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta \quad (92)$$

Τα σ, η είναι δύο πραγματικά πεδία *Klein – Gordon*. Καθώς κβαντίζουμε αυτά τα πεδία, η Λανγκραντζιανή περιγράφει δύο διαφορετικά σωματιδιακά πεδία με σπιν 0. Τα μποζόνια σ θα έχουν μάζα

$$m_\sigma = \nu\sqrt{2\lambda} \quad (93)$$

που θα προκύπτει από το σ^2 ενώ τα μποζόνια η είναι άμαζα εξαιτίας του εκφυλισμού του κενού. Οι εναπομείντες όροι είναι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα σ, η μέσω της θεωρίας διαταραχών. Σε αυτό το υποθετικό παράδειγμα, το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, $U(1)$, το οποίο προκλήθηκε από το εκφυλισμένο ενεργειακό ελάχιστο της Λανγκραντζιανής, δημιούργησε μια θεωρία διαταραχών με ένα μαζικό μποζόνιο βαθμίδας.

Τώρα θα δείξουμε τον μηχανισμό Higgs για μια θεωρία $U(1) \times SU(2)$. Πρώτα αντικαθιστούμε την κανονική παράγωγο με τη συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (94)$$

Προσθέτουμε την Λανγκραντζιανή των ελεύθερων πεδίων.

$$L = D^\mu\Psi^*D_\mu\Psi - V(\Psi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (95)$$

Η νέα Λανγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη υπό τους $U(1)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας.

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \Psi(x)e^{iq\xi(x)} \quad (96)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \partial_\mu\xi(x) \quad (97)$$

Όπου ξ είναι μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση. Συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, και εκφράζουμε την Λανγκραντζιανή ως προς σ, η .

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu - \lambda\nu^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2\nu^2A_\mu A^\mu + q\nu A^\mu\partial_\mu\eta + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (98)$$

Η Λανγκραντζιανή έχει ένα μαζικό διανυσματικό μποζονικό πεδίο A και δύο βαθμωτά μποζονικά πεδία σ, η , εκ των οποίων το η είναι άμαζο. Έχει όμως και τον όρο

$$A^\mu\partial_\mu\eta$$

Δεν έχουμε κάποιον τρόπο να ερμηνεύσουμε αυτόν τον όρο. Δεν πρόκειται για όρο αλληλεπίδρασης διότι είναι τετραγωνικός όσον αφορά τα πεδία του, προσομοιάζοντας έτσι ένα ελεύθερο πεδίο. Επομένως πρέπει να φύγει. Αυτή η Λανγκραντζιανή έχει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας ο οποίος μπορεί να απορροφηθεί εκτελώντας έναν μετασχηματισμό βαθμίδας όπου

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\nu + \sigma(x)) \quad (99)$$

Σε αυτήν την βαθμίδα το πεδίο η εξαφανίζεται αφήνοντας

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \lambda\nu^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2\nu^2 A_\mu A^\mu + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (100)$$

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο μηχανισμός Higgs είναι ο εξής: Όταν έχουμε σπάσιμο συμμετρίας **ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας δεν αλλάζει**. Αυτό που αλλάζει είναι **τα σωματίδια**, επομένως οι βαθμοί ελευθερίας ανακατανέμονται σε άλλα σωματίδια. Για να συμβεί αυτό πρέπει απαραίτητα να έχουμε εκφυλισμό του κενού. Ας δούμε τι συμβαίνει σε επίπεδο αριθμών. Ένα βαθμωτό σωματίδιο έχει ένα βαθμό ελευθερίας. Ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (αφού γενικά το $a + bi$) έχει δύο συνιστώσες. Ένα άμαζο διανυσματικό σωματίδιο ταξιδεύει με την ταχύτητα του φωτός, επομένως έχει δύο καταστάσεις εγκάρσιας πόλωσης, οπότε έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας. Ένα μαζικό διανυσματικό σωματίδιο έχει μια κατάσταση διαμήκουσ πόλωσης, επομένως τρεις βαθμούς ελευθερίας. Στο πρώτο παράδειγμα που δώσαμε στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $U(1)$, πριν το σπάσιμο της συμμετρίας είχαμε ένα μιγαδικό βαθμωτό μποζόνιο (2 βαθμοί ελευθερίας), και ένα άμαζο διανυσματικό μποζόνιο (2 β.ε.) επομένως $2 + 2 = 4$ β.ε. Μετά το σπάσιμο της συμμετρίας, είχαμε ένα βαθμωτό σωματίδιο (1 β.ε.) και ένα μαζικό διανυσματικό μποζόνιο, επομένως $3 + 1 = 4$.

Στο παράδειγμα του μηχανισμού Higgs της $SU(2) \times U(1)$, πριν το σπάσιμο της συμμετρίας, είχαμε μια μιγαδική διπλέτα ($2 + 2 = 4$) και τέσσερα άμαζα διανυσματικά μποζόνια ($2 + 2 + 2 + 2 = 8$), επομένως τελικά είχαμε $4 + 8 = 12$ βαθμούς ελευθερίας. Μετά το σπάσιμο της συμμετρίας, είχαμε ένα βαθμωτό σωματίδιο (1 β.ε.), ένα άμαζο διανυσματικό μποζόνιο (2 β.ε.) και τρία μαζικά διανυσματικά μποζόνια ($3 + 3 + 3 = 9$ β.ε.). Επομένως τελικά είχαμε πάλι 12 βαθμούς ελευθερίας. Τα τρία μαζικά διανυσματικά μποζόνια είναι τα W^+, W^-, Z^0 . Το άμαζο διανυσματικό μποζόνιο είναι το φωτόνιο. Και το βαθμωτό σωματίδιο είναι το σωματίδιο Higgs.

Το πιο απλό σενάριο για να εισάγουμε τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων είναι με μια μιγαδική διπλέτα μιγαδικών βαθμωτών. Ωστόσο μπορούμε να εισάγουμε έναν άπειρο αριθμό τέτοιων βαθμωτών πεδίων. Τα πιο απλά υπερσυμμετρικά μοντέλα έχουν πέντε βαθμωτά πεδία τα οποία παραμένουν μετά το μηχανισμό Higgs. Πρόκειται για μια διπλέτα φορτισμένων βαθμωτών, δύο αφόρτιστα βαθμωτά, και ένα αφόρτιστο ψευδοβαθμωτό.

1.5 Ενοποίηση υπό SU(5)

Για να κατασκευάσουμε μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία των ισχυρών, ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων πρέπει να αναζητήσουμε μια ομάδα συμμετρίας, ή τουλάχιστον ένα γινόμενο ταυτόσημων απλών ομάδων (που να έχουν ίδιες σταθερές σύζευξης μέσω επιβολής κάποιων διακριτών συμμετριών). Αυτή η ομάδα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να εμπεριέχει την ομάδα $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ του καθιερωμένου προτύπου ως υποομάδα της, επομένως πρέπει να είναι τουλάχιστον τετάρτου βαθμού. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερις γεννήτορες που να μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα, μιας και πρέπει να περιέχει το Καθιερωμένο Πρότυπο το οποίο έχει ήδη τέσσερις γεννήτορες που μετατίθενται αμοιβαία: δύο λόγω χρώματος $SU(3)$ και δύο, την τρίτη συνιστώσα του ασθενούς ισοσπίν T_z και το υπερφορτίο Y , από την $SU(2) \times U(1)$.

Απαραίτητες προϋποθέσεις για την επιλογή αυτής της ομάδας είναι να έχει μιγαδικές αναπαράστασεις μιας και στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι φερμιονικές αναπαράστασεις δεν είναι ισοδύναμες με τις μιγαδικές συζυγείς τους, αλλά και να έχει τη δυνατότητα να «παράγει» κλασματικές τιμές για τα φορτία των φορτισμένων σωματιδίων. Έτσι, η $SU(5)$, που είναι τετάρτου βαθμού, είναι η μικρότερη ομάδα που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις, και περιέχει την $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ χωρίς να εισάγει νέα φερμιόνια. Μια γενική αναπαράσταση εκφράζεται σε τανυστική μορφή ως:

$$\Psi_{kl\dots}^{ij\dots} \Rightarrow U_m^i U_n^j U_k^s U_l^t \dots \Psi_{st\dots}^{mn\dots} \quad (101)$$

Εδώ όλοι οι δείκτες είναι από 1 ως 5 και οι πίνακες

$$[U]_m^i = \left[\exp\left(ia_\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}\right) \right]_m^i \quad (102)$$

είναι 5×5 μοναδιακοί. Οι $\lambda^\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, 23$ είναι ένα σύνολο από 24 5×5 γενικευμένους πίνακες Gell-Mann, οι οποίοι είναι ερμιτιανοί και χωρίς ίχνος (ώστε οι U να είναι μοναδιακοί με ορίζουσα μονάδα). Έχουν νορμαλισμό

$$\text{tr}(\lambda^\alpha \lambda^b) = 2\delta^{\alpha b} \quad (103)$$

και ικανοποιούν τη μεταθετική άλγεβρα

$$\left[\frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = iC^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (104)$$

Όπου C^{abc} οι σταθερές δομής. Για παράδειγμα,

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (105)$$

Για να πάρουμε το $SU(3) \times SU(2)$ περιεχόμενο μιας αναπαράστασης αναγνωρίζουμε τους πρώτους τρεις από τους δείκτες της $SU(5)$ ως τους δείκτες χρώματος και τους δύο που απομένουν ως τους δείκτες $SU(2)_L$,

$$i = (\alpha, r) \quad \text{με} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{και} \quad r = 4, 5 \quad (106)$$

Έτσι για παράδειγμα έχουμε:

$$\lambda^\alpha = \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & \lambda^\alpha & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Που για $\alpha = 1, \dots, 8$ περικλύει τους 3×3 γεννήτορες της $SU(3)$ με αντίστοιχα διανυσματικά μποζόνια τα οκτώ γλουόνια της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Ή

$$\lambda^{9,10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,2} & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad \lambda^{11} = \text{diag}(0, 0, 0, 1, -1) \quad (108)$$

που εμπεριέχει τους γεννήτορες της $SU(2)$ (οι γνωστοί πίνακες Pauli) στους οποίους αντιστοιχούν τα διανυσματικά μποζόνια W^+ , W^- , W^0 ή ακόμη

$$\lambda^{12} = \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(-2, -2, -2, 3, 3) \quad (109)$$

γεννήτορας στον οποίο αντιστοιχεί το μποζόνιο B. κ.ο.κ.

1.5.1 Φερμιόνια στην $SU(5)$

Στο Καθιερωμένο $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Πρότυπο υπάρχουν 15 αριστερόστροφα φερμιονικά πεδία (δύο συνιστωσών) σε κάθε γενιά. Επειδή οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες δεν αποσαφηνίζουν το πρόβλημα της αναπαραγωγής των φερμιονίων (fermion replication problem), θα γράψουμε τη θεωρία μόνο για την πρώτη γενιά φερμιονίων

$$\begin{aligned} (\nu_e, e^-)_L &: (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \\ e_L^+ &: (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ (u_\alpha, d_\alpha)_L &: (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \\ u_L^{c\alpha} &: (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \\ d_L^{c\alpha} &: (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (110)$$

Στο δεξί μέρος των εξισώσεων έχουμε αναγράψει τους $SU(3) \times SU(2)$ μετασχηματισμούς της γενιάς. Ο εκθέτης c εκφράζει το συζυγές πεδίο (συζυγία φορτίου), καθώς γνωρίζουμε πως αν λάβουμε υπόψιν μας τη συζυγία φορτίου και το γεγονός ότι η Λανγκραντζιανή αντιμετωπίζει με διαφορετικό τρόπο τα αριστερόστροφα από τα δεξιόστροφα φερμιόνια, παίρνουμε τις γνωστές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \psi^c &= C\gamma^0\psi^* = i\gamma^2\psi^*, \quad \bar{\psi}^c = \psi^T C \\ \psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \end{aligned} \quad (111)$$

Επομένως τα περιεχόμενα των απλούστερων $SU(5)$ αναπαραστάσεων ως προς τους μετασχηματισμούς $SU(3) \times SU(2)$ είναι:

$$\begin{aligned}
\text{Η θεμελιώδης αναπ. } \psi_i & \quad \mathbf{5} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \\
\text{Η θεμελιώδης συζυγής αναπ. } \psi^i & \quad \mathbf{5}^* = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}^*) \\
\text{Η αντισυμμετρική } \psi_{ij} = \psi_{ji} & \quad \mathbf{10} = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad (112)
\end{aligned}$$

Μια σύγκριση μεταξύ των σχέσεων (110) και (112) αποκαλύπτει ότι μια οικογένεια φερμιονίων μπορεί να ενταχθεί μέσα σε μια αναγώγιμη αναπαράσταση $SU(5)$ $\mathbf{5}^* + \mathbf{10}$

$$\mathbf{5}^* : (\psi^i)_L = (d^{c1} d^{c2} d^{c3} e^- - \nu_e)_L \quad (113)$$

ή

$$\mathbf{5} : (\psi_i)_R = (d_1 d_2 d_3 e^+ - \nu_e^c)_R \quad (114)$$

και

$$\mathbf{10} : (\chi_{ij})_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^+ \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^+ & 0 \end{bmatrix}_L \quad (115)$$

Αξίζουν να σημειωθούν τα εξής. Σε αυτήν την προσέγγιση σε μια οικογένεια (γενιά) οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας είναι ταυτόσημες με τις ιδιοκαταστάσεις μάζας. Έτσι, οι παραπάνω ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας έχουν ονομαστεί από πεδία πεπερασμένης μάζας. Όταν εισάγουμε στο μοντέλο μας τις φερμιονικές οικογένειες των \mathbf{m} και \mathbf{t} , τότε κι εκείνες θα τις θέσουμε σε αναπαραστάσεις $\mathbf{5}^*$ και $\mathbf{10}$. Τότε όλες οι ιδιοκαταστάσεις βαθμίδας θα είναι κάποιες γραμμικές υπερθέσεις των μαζικών ιδιοκαταστάσεων. Στα παραπάνω λάβαμε υπόψη μας τους μετασχηματισμούς $SU(3) \times SU(2)$. Η ορθότητα των $U(1)$ φορτίων θα φανεί στη συνέχεια.

1.5.2 Κανονικοποίηση

Μια άμεση συνέπεια της επιλογής της $SU(5)$ είναι μια απλή εξήγηση της πειραματικά παρατηρήσιμης κβάντωσης του φορτίου. Πιο συγκεκριμένα, όταν η ομάδα βαθμίδας στην οποία συντελείται ενοποίηση είναι απλή, τότε ακολουθεί κβάντωση του φορτίου. Αυτό συμβαίνει επειδή οι ιδιοτιμές των γεννητόρων μιας απλής μη-Αβελιανής ομάδας είναι διακριτές ενώ αυτές που αντιστοιχούν στην Αβελιανή $U(1)$ είναι συνεχείς. Για παράδειγμα, στην ομάδα $SO(3)$ της περιστροφικής συμμετρίας η τρίτη συνιστώσα της τροχιακής στροφορμής μπορεί να πάρει μόνο ακέραιες ή ημιακέραιες τιμές, ενώ στην ομάδα συμμετρίας $U(1)$ των αναλλοίωτων μετασχηματισμών στο χρόνο, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στις (ενεργειακές) ιδιοτιμές του αντίστοιχου γεννήτορα. Επομένως στην θεωρία της $SU(5)$, όπου το ηλεκτρικό φορτίο Q είναι ένας από τους γεννήτορες, οι ιδιοτιμές του είναι διακριτές κι επομένως κβαντισμένες.

Εφόσον το ηλεκτρικό φορτίο είναι ένας κβαντικός αριθμός που αυξάνει προσθετικά, το Q θα πρέπει να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διαγώνιων γεννητόρων της $SU(5)$. Υπάρχουν μόνο τέσσερις τέτοιοι γεννήτορες στην $SU(5)$ και, αφού το Q μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της $SU(3)$, θα έχουμε:

$$Q = T_z + \frac{Y}{2} = \frac{1}{2} \lambda^{11} + c \lambda^{12} \quad (116)$$

όπου λ^{11} και λ^{12} είναι οι διαγώνιοι γεννήτορες που ανήκουν αντίστοιχα στις υποομάδες $SU(2)$ και $U(1)$ και c κατάλληλη σταθερά. Παρατηρούμε από την εξίσωση (116) ότι, για την ομάδα

$SU(5)$ ο τύπος για το \mathcal{Q} δεν περιλαμβάνει περισσότερους όρους από όσους προβλέπονται από το μοντέλο Glashow-Weinberg-Salam. Ο συντελεστής c ο οποίος συσχετίζει τις τιμές των τελεστών Y και λ^{12} μπορεί να υπολογιστεί συγκρίνοντας τις τιμές των λ^{12} στη θεμελιώδη αναπαράσταση από τη σχέση (109) και τις τιμές των υπερφορτίων Y των σωματιδίων στην (114) ($\mathbf{Y}(5) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1)$). Τελικά προκύπτει:

$$c = -\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (117)$$

Η παρουσία του συντελεστή c σημαίνει ότι το υπερφορτίο Y δεν είναι κατάλληλα κανονικοποιημένο ώστε να αποτελεί έναν από τους γεννήτορες της $SU(5)$ οι οποίοι έχουν την κλίμακα τους «φιξαρισμένη» από τις μη γραμμικές μεταθετικές σχέσεις (104).

1.5.3 Μποζόνια Βαθμίδας

Η $SU(5)$ συζυγής αναπαράσταση της A_j^i έχει διάσταση $5^2 - 1 = 24$ και την εξής διάρθρωση όσον αφορά τους μετασχηματισμούς $SU(3) \times SU(2)$:

$$24 = (8, 1) + (1, 3) + (1, 1) + (3, 2) + (3^*, 2) \quad (118)$$

Αυτός ο συμβολισμός ερμηνεύεται ως εξής:

- (8, 1) είναι τα γλουόνια της $SU(3)$
- (1, 3) είναι τα τρία διανυσματικά πεδία W της $SU(2)$
- (1, 1) είναι το πεδίο B της $U(1)$ το οποίο αντιστοιχεί στο διαγώνιο στοιχείο της A_j^i που δεν ανήκει ούτε στην $SU(3)$, ούτε στην $SU(2)$

Τα υπόλοιπα 12 βαθμωτά πεδία είναι τα X, Y βαθμωτά μποζόνια τα οποία έχουν δείκτες $SU(3), SU(2)$. Τοποθετώντας όλα τα μποζόνια βαθμίδας της $SU(5)$ σε μια μορφή πίνακα 5×5 ,

με $A = \sum_{\alpha=0}^{23} A^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2}$, παίρνουμε τη γενική μορφή:

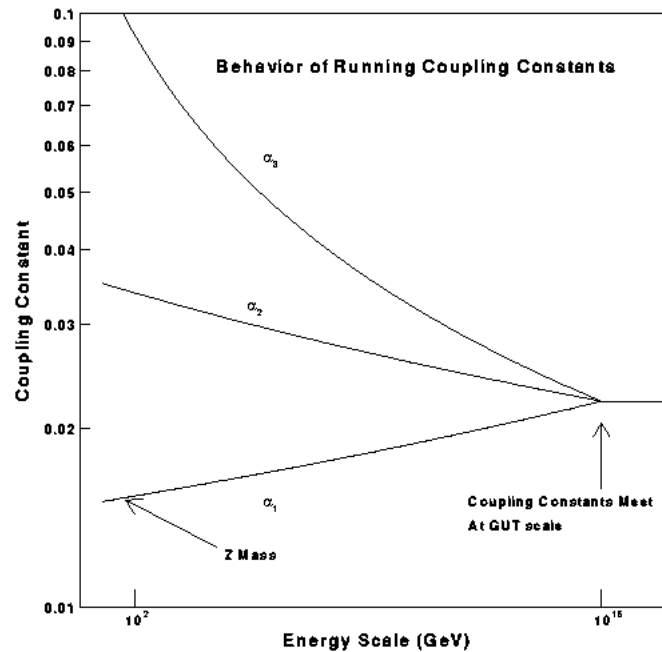
$$A = \begin{bmatrix} & & & X_1 & Y_1 \\ & & & X_2 & Y_2 \\ & & & X_3 & Y_3 \\ X_{\bar{1}} & X_{\bar{2}} & X_{\bar{3}} & W^0/\sqrt{2} & W^+ \\ Y_{\bar{1}} & Y_{\bar{2}} & Y_{\bar{3}} & W^- & W^0/\sqrt{2} \end{bmatrix}_L + \frac{B}{\sqrt{60}} \begin{bmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (119)$$

1.5.4 Ενοποίηση των σταθερών σύζευξης

Το Καθιερωμένο Πρότυπο περιγράφει τις ισχυρές, ασθενείς, και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις σε εύρος ενέργειας μικρότερο από 100GeV με τις τρεις διαφορετικές σταθερές σύζευξης: g_s, g, g' για τα πεδία βαθμίδας $SU(3), SU(2)$ και $U(1)$, αντίστοιχα. Επομένως δεν υπάρχει ουσιαστική εξήγηση για τη διαφορετική ισχύ που παρουσιάζουν οι τρεις αλληλεπιδράσεις. Μια από τις μεγάλες αρετές των Μεγαλοενοποιημένων Θεωριών είναι ότι προσφέρουν μια εξήγηση.

Μια μεγαλοενοποιημένη θεωρία έχει εξ' ορισμού μία μόνο σταθερά σύζευξης που σχετίζεται με την ομάδα βαθμίδας ενοποίησης. Η ίδια σταθερά σύζευξης θα πρέπει να έχει ισχύ και στις υποομάδες αυτής. Η δυνατότητα διαφορετικών συζεύξεων για τις ποικίλες υποομάδες σε χαμηλές ενέργειες προκύπτει από το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Τα μποζόνια βαθμίδας X, Y

(για συντομία τα συμβολίζουμε και τα δύο με X) της $SU(5)$ αποκτούν μάζα και αποσυνδέονται από τις επανακανονικοποιήσεις των σταθερών σύζευξης. Αυτή η αποσύνδεση θα έχει διαφορετικές επιπτώσεις στις διορθώσεις των συζεύξεων διαφορετικών υποομάδων, που με τη σειρά τους προκαλούν διαφορετικές ενεργές συζεύξεις σε χαμηλές ενέργειες μέσω της εξάρτησης από την ενέργεια όπως αυτές προσδιορίζονται από την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης. Η αποσύνδεση των βαριών μποζονίων X αντικατοπτρίζεται στους διαφορετικούς συντελεστές της ομάδας επανακανονικοποίησης για συζεύξεις υποομάδων. Κάτω από την κλίμακα ενοποίησης (M_X στην περίπτωση της $SU(5)$) συμπεριφέρονται διαφορετικά, αναδεικνύοντας τις διαφορές μεταξύ της ισχύος των αλληλεπιδράσεων.



Σχήμα 3: Συμπεριφορά των Σταθερών Σύζευξης

Θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις ποιοτικής φύσης για την ενοποίηση των σταθερών σύζευξης όπως αυτή δίνεται στο παραπάνω γράφημα.

1) Από τη στιγμή που εξάρτηση των σταθερών σύζευξης από την ενέργεια είναι λογαριθμική, και εφόσον, στην ενεργειακή περιοχή $\approx 10^2 \text{ GeV}$, τα g_s, g, g' είναι αρκετά διαφορετικά, η κλίμακα ενοποίησης M_X αναμένεται να είναι πολλές τάξης μεγέθους μεγαλύτερη από 10^2 GeV .

2) Από την ανάλυση των εξισώσεων της ομάδας επανακανονικοποίησης γνωρίζουμε τα εξής. Στις μη-Αβελιανές ομάδες βαθμίδας η σταθερά σύζευξης έχει τη δυνατότητα να ελαττώνεται με την αύξηση της ενέργειας και ο ρυθμός της ελάττωσης είναι πιο μεγάλος όσο μεγαλύτερες είναι οι ομάδες. Για την Αβελιανή ομάδα η σταθερά σύζευξης αυξάνεται με την αύξηση της ενέργειας. Επομένως για ενέργειες μικρότερες από την M_X η διάταξη κατά σειρά μεγέθους των σταθερών σύζευξης πρέπει να είναι $g_s < g < g'$. Κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και πειραματικά.

3) Επιπλέον κάτω από την M_X οι τροχιές των τριών σταθερών σύζευξης πρέπει να έχουν ρυθμιστεί *ακριβώς* ώστε να συγκλίνουν στο ίδιο σημείο όταν πλησιάσουν την M_X . Αυτό υπονοεί ότι πρέπει να υπάρχει μια μη τετριμμένη συνθήκη συνέπειας μεταξύ των g_s, g, g' . Αυτή η σχέση είναι που προβλέπει την γωνία Weinberg θ_W , που συσχετίζει τα g, g' , ως προς την σταθερά της λεπτής υφής α και την σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης α_s .

Συνεχίζοντας με μια περισσότερο λεπτομερή ανάλυση, πρέπει να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των σταθερών σύζευξης της $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ και της $SU(5)$ στην κλίμακα ενοποίησης M_X . Θεωρούμε τις συναλλοίωτες παραγώγους των δύο ομάδων, και παρουσιάζουμε αυτές που

δρουν στις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις τους

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) : \quad D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} + ig \sum_{r=1}^3 W_\mu^r \frac{\tau^r}{2} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (120)$$

$$SU(5) : \quad D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{\alpha=0}^{23} A_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} \quad (121)$$

Ο ορισμός των σταθερών σύζευξης εξαρτάται από τον νορμαλισμό των γεννητόρων. Για τις μη Αβελιανές ομάδες αυτοί οι νορμαλισμοί προκύπτουν από τις μη γραμμικές μεταθετικές σχέσεις της άλγεβρας Lie. Επομένως οι πίνακες Gell-Mann λ^α , μαζί με την γενικευμένη εκδοχή τους στην $SU(5)$ λ^α , και τους πίνακες Pauli τ^r , είναι κανονικοποιημένοι κατά παρόμοιο τρόπο. ($tr \lambda^\alpha \lambda^b = 2\delta^{\alpha b}$), κτλ. Επίσης

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1 \quad (122)$$

με

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g \quad (123)$$

Η σταθερά σύζευξης g_1 είναι αυτή που αντιστοιχεί στην Αβελιανή υποομάδα $U(1)$. Επομένως

$$ig_1 \lambda^0 A_\mu^0 = ig' Y B_\mu \quad (124)$$

Το A_μ^0 ταυτίζεται με το πεδίο βαθμίδας B_μ . Αξίζει να σημειωθεί ότι η άλγεβρα $U(1)$ δεν παρέχει κάποιο (μη γραμμικό) περιορισμό στον γεννήτορα της, που σημαίνει ότι ο Y και ο λ^0 μπορούν να κανονικοποιηθούν με διαφορετικό τρόπο. Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτή τη διαφορά στους νορμαλισμούς παρατηρώντας ότι για την σωματιδιακή κατηγοριοποίηση που προβλέπει η 5 στην σχέση (113), το ασθενές υπερφορτίο θα πρέπει να είναι

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (125)$$

Συγκρίνοντας την (125) με το λ^0 της (105), έχουμε, όπως και στην (117)

$$Y = -\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^0, \quad g' = -\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} g_1 \quad (126)$$

αφού $g' Y = g_1 \lambda^0$. Οι εξισώσεις (126), (122) σε συνδυασμό με την $\tan \theta_W = \frac{g'}{g}$ μπορούν να μεταφραστούν στην εξής σχέση:

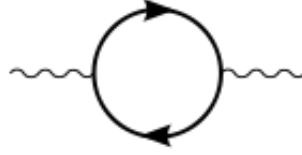
$$\sin^2 \theta_W \equiv \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{3}{8} \quad (127)$$

Αυτή η σχέση και οι ισότητες της (122) ισχύουν στο όριο της $SU(5)$, δηλαδή για μια ενεργειακή κλίμακα $\mu > M_X$. Τώρα πρέπει να μελετήσουμε την περίπτωση $\mu < M_X$. Η εξέλιξη της σταθεράς σύζευξης της βαθμίδας $SU(N)$ ελέγχεται από την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης

$$\frac{dg_n}{d(\ln \mu)} = -b_n g_n^3 \quad (128)$$

όπου

$$b_n = (11n - 2N_F)/48\pi^2 \quad \text{για} \quad n \geq 2 \quad (129)$$



Σχήμα 4: Επανακανονικοποίηση σταθεράς σύζευξης λόγω φερμιονικού βρόχου

και

$$b_1 = N_F/24\pi^2 \quad (130)$$

Οπότε

$$b_n - b_1 = 11n/48\pi^2 \quad (131)$$

Έχουμε αγνοήσει τις συνεισφορές που προέρχονται από το βαθμωτό πεδίο Higgs, N_F είναι ο αριθμός των γεύσεων των κουάρκς (6 για μια θεωρία τριών οικογενειών), κι επομένως οι φερμιονικές επιδράσεις στον σχετικό ρυθμό της εξέλιξης των σταθερών σύζευξης μηδενίζονται. Δεδομένου ότι μόνο τα κουάρκς συζεύγονται με τα γλουόνια της $SU(3)$ ενώ τα κουάρκς αλλά και τα λεπτόνια συζεύγονται με τα διανυσματικά μποζόνια της $SU(2)$ και της $U(1)$, μπορεί κανείς να θεωρήσει αφύσικο το γεγονός ότι φερμιονικές συνεισφορές είναι ίδιες σε όλες τις επανακανονικοποιήσεις των συζεύξεων βαθμίδας. Αυτό εξηγείται παρακάτω.

Τα φερμιόνια συνεισφέρουν μέσω του βρόχου στο διάγραμμα το οποίο είναι ανάλογο του $F_n = N_m g_n^2 \text{tr}(T_i T_j)$ όπου N_m είναι ο αριθμός των πολλαπλετών των φερμιονίων (που έχουν δύο συνιστώσες) που συζεύγονται με τα μποζόνια βαθμίδας και όλοι οι πίνακες αναπαράστασης έχουν παρόμοιο νορμαλισμό ($\text{tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij}$). Πρώτα θα προσδιορίσουμε τον παράγοντα F_n για κάθε ομάδα βαθμίδας. Για την $SU(3)$, ο N_m είναι ο αριθμός των τριπλέτων χρώματος. Εφόσον και τα κουάρκς αλλά και τα αντικουάρκς συζεύγονται με τα γλουόνια έχουμε $N_m = 2N_F$ και $F_3 = N_F g_3^2 \delta_{\alpha\beta}$. Για την $SU(2)$, N_m είναι ο αριθμός των διπλέτων. Εφόσον για κάθε λεπτονική διπλέτα έχουμε *τρεις* διπλέτες χρώματος κουάρκς, τελικά θα έχουμε $N_m = \frac{1}{2}(1 + 3)N_F$ και $F_2 = N_F g_2^2 \delta_{\alpha\beta}$. Τέλος για την $U(1)$, μια απευθείας άθροιση των τετραγωνισμένων ασθενών υπερφορτίων με κατάλληλη επανακανονικοποίηση σύμφωνα με την (126) μας δίνει $F_1 = N_F g_1^2$. Από τη σκοπιά της $SU(5)$, το γεγονός ότι $F_3 = F_2 = F_1$ παύει να είναι μια σύμπτωση. Δηλαδή όλα τα φερμιόνια σχηματίζουν μια πλήρη (αναγωγίσιμη) αναπαράσταση της ομάδας, ($5^* + 10$), και όλοι οι πίνακες αναπαράστασης για τον παράγοντα κάθε υποομάδας έχουν τον ίδιο νορμαλισμό. Μαζί με όλα αυτά, απαιτούμε όλα τα μέρη της αναπαράστασης να αποκτήσουν συγκρίσιμες μάζες $\ll M_X$. Σε αυτήν την κατάσταση αντιπαραβάλλεται εκείνη των μποζόνιων βαθμίδας, τα οποία καταλήγουν να έχουν δύο πολύ διαφορετικές κλίμακες μάζας $M_W \ll M_X$ μολονότι σχηματίζουν μια πλήρη αναπαράσταση της $SU(5)$ (την συζυγή αναπαράσταση). Και αυτή η διαφορά στις μάζες είναι που έχει την ευθύνη για τις διαφορετικές επιπτώσεις στην επανακανονικοποίηση των σταθερών σύζευξης των υποομάδων.

Ας επιστρέψουμε στις λύσεις της εξίσωσης (128). Για g_1, g_2, g_3 έχουμε

$$g_1^{-2}(\mu) = g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1 \ln(\mu/\mu_0) \quad (132)$$

$$g_2^{-2}(\mu) = g_2^{-2}(\mu_0) + 2b_2 \ln(\mu/\mu_0) \quad (133)$$

$$g_3^{-2}(\mu) = g_3^{-2}(\mu_0) + 2b_3 \ln(\mu/\mu_0) \quad (134)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις συζεύξεις χαμηλών ενεργειών ως προς περισσότερο οικείες παραμέτρους χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\tan \theta_W = g'/g, \quad e = g \sin \theta_W \quad \text{και} \quad \text{την} \quad (126) \quad (135)$$

Επομένως

$$\frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W} \quad (136)$$

$$\frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} = \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W} \quad (137)$$

και

$$\frac{g_s^2(\mu)}{4\pi} \equiv \alpha_s(\mu) \quad (138)$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις (132)-(134) στη μορφή

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_3 \ln(\mu/M_X) \quad (139)$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_2 \ln(\mu/M_X) \quad (140)$$

$$(3/5)\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \alpha_s^{-1} + 8\pi b_1 \ln(\mu/M_X) \quad (141)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (122)

$$g_1(M_X) = g_2(M_X) = g_3(M_X) = g_5 \quad \text{και} \quad g_5^2 \equiv \alpha_5 \quad (142)$$

Αν θεωρήσουμε το γραμμικό συνδυασμό $\left[2 \times \text{εξ.}(139) - 3 \times \text{εξ.}(140) + \text{εξ.}(141) \right]$ παίρνουμε

$$2\alpha_s^{-1} - 3\alpha^{-1} \sin^2 \theta_W + (3/5)\alpha^{-1} \cos^2 \theta_W \quad (143)$$

$$= 8\pi [2(b_3 - b_1) - 3(b_2 - b_1)] \ln(\mu/M_X) = 0 \quad (144)$$

Το δεξιό μέλος μηδενίζεται λόγω των εξισώσεων (129)-(131). Επομένως

$$\sin^2 \theta_W = 1/6 + 5\alpha(\mu)/9\alpha_s(\mu) \quad (145)$$

Αυτή είναι η συνθήκη συνέπειας που αναφέρθηκε νωρίτερα. Οι τιμές των σταθερών σύζευξης στην ενέργεια $\mu = M_W$ όπου η γωνία Weinberg εξάγεται πειραματικά συμφωνούν με αυτήν την πρόβλεψη. Αν πάρουμε τον γραμμικό συνδυασμό $\left[8/3 \times \text{εξ.}(139) - \text{εξ.}(140) - 5/3 \times \text{εξ.}(141) \right]$ τότε από τις εξισώσεις (129)-(131) λαμβάνουμε

$$\ln(M_X/\mu) = \frac{\pi}{11} \left[\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)} \right] \quad (146)$$

Αυτή η σχέση είναι που προσδιορίζει την κλίμακα ενοποίησης. Επιπλέον, αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (145) και (146), παίρνουμε

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} - \frac{55}{24\pi} \alpha(\mu) \ln(M_X/\mu) \quad (147)$$

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι κατά τον υπολογισμό του b_n έχουμε θεωρήσει την απλούστερη δυνατή συμπεριφορά όσον αφορά το κατώφλι ενέργειας: για ένα ενδιάμεσο σωματίδιο με μάζα $m < \mu$ η μάζα θεωρείται ότι είναι μηδέν, ενώ για $\mu > m$ η μάζα θεωρείται άπειρη και το σωματίδιο αποσυζεύγεται. Ειδικότερα, για $\mu > M_X$, συνεισφέρουν τα μποζόνια βαθμίδας της $SU(5)$ X, Y και η ισότητα της σχέσης (122) διατηρείται σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Για $\mu < M_X$ αποσυζεύγονται και τα b_n γίνονται διαφορετικά για τις υποομάδες $SU(3), SU(2), U(1)$. Με προσεκτικότερη διαχείριση των ενεργειακών κατωφλιών μπορούμε να ταυτοποιήσουμε το M_X ως τη μάζα του μποζονίου X . Στις εξισώσεις (129)-(130) έχουν αγνοηθεί οι συνεισφορές βαθμίδας. Αν συμπεριληφθεί και το βαθμωτό Higgs του μοντέλου GWS και με προσεκτικότερη διαχείριση των επιδράσεων ανώτερης τάξης, κανείς μπορεί να λάβει αριθμητικά αποτελέσματα κοντά σε

$$M_X \approx 4 \times 10^{14} \text{ GeV} \quad (148)$$

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.21 \quad (149)$$

2 Ομάδα Επανακανονικοποίησης και Συνάρτηση β

Η ομάδα επανακανονικοποίησης αρχικά επινοήθηκε για την σωματιδιακή φυσική, ωστόσο σήμερα βρίσκει ένα εύρος εφαρμογών στην κοσμολογία, τη ρευστομηχανική, τη φυσική στερεάς κατάστασης, ακόμη και στην νανοτεχνολογία. Οι Mann και Low το 1954 περιορίστηκαν στους μετασχηματισμούς κλίμακας της QED, οι οποίοι είναι και οι περισσότερο σημαντικοί από φυσική σκοπιά, και επικεντρώθηκαν σε ασυμπτωτικές μορφές του φωτονικού διαδότη σε υψηλές ενέργειες. Υπολόγισαν τη διακύμανση της ηλεκτρομαγνητικής σύζευξης στην κβαντική ηλεκτροδυναμική, εκτιμώντας την απλότητα της δομής κλιμάκωσης που έχει η θεωρία. Ανακάλυψαν ότι η παράμετρος σύζευξης $g(\mu)$ στην ενεργειακή κλίμακα μ δίνεται επί της ουσίας από την εξίσωση ομάδας

$$g(\mu) = G^{-1}\left(\left(\frac{\mu}{M}\right)^d G(g(M))\right) \quad (150)$$

για κάποια συνάρτηση G (απροσδιόριστη-σήμερα αποκαλείται η συνάρτηση κλιμάκωσης Wegner) και μια σταθερά d , ως προς τη σύζευξη $g(M)$ σε μια κλίμακα αναφοράς M . Οι Mann και Low συνειδητοποίησαν μέσω αυτών των αποτελεσμάτων ότι η ενεργός κλίμακα μπορεί να τεθεί αυθαίρετα μ , και μπορεί να ποικίλει ώστε να προσδιορίσει τη θεωρία σε οποιαδήποτε άλλη κλίμακα. Δηλαδή:

$$g(\kappa) = G^{-1}\left(\left(\frac{\kappa}{\mu}\right)^d G(g(\mu))\right) = G^{-1}\left(\left(\frac{\kappa}{M}\right)^d G(g(M))\right) \quad (151)$$

Η ουσία της ομάδας επανακανονικοποίησης είναι η εξής ιδιότητα της ομάδας: καθώς κυμαίνεται η κλίμακα μ , η θεωρία εμφανίζει ένα «παρόμοιο αντίγραφο» της, και οποιαδήποτε *άληθη κλίμακα μπορεί να καταστεί προσβάσιμη μέσω ενός group action*. Στη βάση αυτής της εξίσωσης ομάδας, οι Mann και Low έπειτα επικεντρώθηκαν σε απειροστικούς μετασχηματισμούς και επινόησαν μια υπολογιστική μέθοδο βασισμένη σε μια συνάρτηση $\psi(g) = Gd/(\partial G/\partial g)$ της παραμέτρου σύζευξης g , την οποία εισήγαν. Η συνάρτηση τους προσδιορίζει τη διαφορική μεταβολή της σύζευξης $g(\mu)$ ως προς μια μικρή αλλαγή στην ενεργειακή κλίμακα μ μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης, της **εξίσωσης της ομάδας επανακανονικοποίησης**:

$$\frac{\partial g}{\partial(\ln \mu)} = \psi(g) = \beta(g) \quad (152)$$

Το μοντέρνο όνομα που δόθηκε σε αυτήν τη συνάρτηση ήταν **συνάρτηση β**. Εφόσον πρόκειται για μια απλή συνάρτηση του g , αν ολοκληρώσουμε μια διαταρακτική προσέγγιση της ως προς g μπορούμε να προσδιορίσουμε την τροχιά επανακανονικοποίησης της σύζευξης. Δηλαδή την διακύμανση της με την ενέργεια. Η πρόβλεψη της εξίσωσης της ομάδας επανακανονικοποίησης, επιβεβαιώθηκε 40 χρόνια μετά από τα πειράματα των επιταχυντών του LEP που μέτρησαν τη «σταθερά» της λεπτής υφής της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής να είναι ίση με $1/127$ σε ενέργειες κοντά στα 200 GeV, εν αντιθέσει με τη συνήθη τιμή $1/137$ για χαμηλές ενέργειες.

2.1 Συνάρτηση β

Ο τύπος που χρησιμοποιήθηκε κατά τον υπολογισμό των σταθερών σύζευξης στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου των Στοιχειωδών Σωματιδίων είναι ο εξής:

$$\beta_{g_1} = (16\pi^2)^{-1} g_1^3 \left(\frac{2}{3} T(R_1) d(R_2) + \frac{1}{3} T(S_1) d(S_2) - \frac{11}{3} C_2(G_1) \right) \quad (153)$$

$$+ (16\pi^2)^{-2} g_1^5 \left(\left[\frac{10}{3} C_2(G_1) + 2C_2(R_1) \right] T(R_1) d(R_2) + \left[\frac{2}{3} C_2(G_1) + 4C_2(S_1) \right] T(S_1) d(S_2) - \frac{34}{3} [C_2(G_1)]^2 \right) \quad (154)$$

$$+ (16\pi^2)^{-2} g_1^3 g_2^2 [2C_2(R_2) d(R_2) T(R_1) + 4C_2(S_2) d(S_2) T(S_1)] \quad (155)$$

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να εξηγηθεί το νόημα του παραπάνω τύπου από τη σκοπιά του μαθηματικού περιεχομένου που εμπεριέχει. Ο συγκεκριμένος τύπος μας λέει ότι το **φερμιονικό multiplet** μετασχηματίζεται σύμφωνα με την αναπαράσταση R_1 (ή R_2) ως προς την ομάδα συμμετρίας G_1 (ή G_2). Το ίδιο ισχύει και για τα βαθμωτά μποζόνια της θεωρίας μας, με την αντικατάσταση \mathbf{S} στη θέση του \mathbf{R} . Η σταθερά σύζευξης που σχετίζεται με την ομάδα G_1 (G_2) είναι g_1 (g_2). Για μια **μη αναγώγιμη** αναπαράσταση \mathbf{R} ισχύουν:

$$R^\alpha R^\alpha = C_2(\mathbf{R}) I \quad (156)$$

$$Tr(R^\alpha R^\beta) = T(\mathbf{R}) \delta^{\alpha\beta} \quad (157)$$

όπου R^α είναι ένας πίνακας αναπαράστασης των **γεννητόρων** της ομάδας. Οι $T(\mathbf{R})$ και $C_2(\mathbf{R})$ σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της ταυτότητας

$$C_2(\mathbf{R}) d(\mathbf{R}) = T(\mathbf{R}) r \quad (158)$$

όπου r είναι ο αριθμός των γεννητόρων ($T(\mathbf{R})$) της ομάδας και $d(\mathbf{R})$ είναι η διάσταση της αναπαράστασης. $C_2(\mathbf{R})$ είναι ο **τετραγωνικός τελεστής Casimir** της αναπαράστασης \mathbf{R} . $C_2(\mathbf{G})$ είναι ο τετραγωνικός τελεστής Casimir της συζυγούς (*adjoint*) αναπαράστασης. Για μια αναπαράσταση της $U(1)$ ισχύει $C_2(\mathbf{G}) = 0$ και $C_2(\mathbf{R}) = T(\mathbf{R}) = Y^2$, όπου Y είναι το **υπερφορτίο** (με την κατάλληλη κανονικοποίηση). Οι τιμές που λαμβάνουν αυτές οι ποσότητες κυμαίνονται σε σχέση με τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των σωματιδιακών πολλαπλετών που συμμετέχουν και κατά συνέπεια με τις αλληλεπιδράσεις που μελετώνται κάθε φορά αλλά και τον τρόπο με τον οποίο συζεύγονται. Θεωρούμε ότι η *βαθμωτή* αναπαράσταση (μποζόνια) είναι μιγαδική, και η φερμιονική αναπαράσταση μιγαδική και χειραλική, διότι (όπως έχουμε επαναλάβει) στις θεωρίες που μας ενδιαφέρουν οι αριστερόστροφες και οι δεξιόστροφες προβολές ενός πεδίου συχνά μετασχηματίζονται κατά διαφορετικό τρόπο. Έτσι, για παράδειγμα στις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των $SU(N)$ έχουμε: $T = \frac{1}{2}$, $d = N$.

Ο τύπος μπορεί να γραφεί σε περισσότερο περιεκτική μορφή ως εξής:

$$\beta_i = (16\pi^2)^{-1} b_i g_i^3 \quad (159)$$

$$+ (16\pi^2)^{-2} \sum_{j=1}^3 b_{ij} g_j^2 g_i^3 \quad (160)$$

όπου τα i, j λαμβάνουν τις τιμές 1,2,3 οι οποίες αναφέρονται αντίστοιχα στις $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$.

Παρατηρούμε ότι η γραμμή (153) του αναλυτικού τύπου αντιστοιχεί στη γραμμή (159) του άνωθι περισσότερο συνεκτικού τύπου, δίνοντας μας τη σχέση για τον παράγοντα β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου (one loop beta factor) b_i

$$b_i = \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1) \quad (161)$$

Εδώ είναι σημαντικό να εξηγήσουμε ένα λεπτό σημείο που μπορεί να προξενήσει παρανοήσεις. Οι όροι $T(R_1)d(R_2)$ και $T(S_1)d(S_2)$ δεν έχουν **καμία** απολύτως διαφορά μεταξύ τους, πρόκειται απλά για σημειολογία θεωρίας ομάδων, η οποία έχει προκύψει από την ανάγκη να φανεί στον τύπο ότι τρόπον τινά, οι όροι $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ είναι αυτοί που υποδηλώνουν ότι το $T(\)d(\)$ αναφέρεται αντίστοιχα σε φερμιόνια και βαθμωτά μποζόνια. Δηλαδή πρόκειται απλά για στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων, και ο μόνος λόγος που τα γράφουμε διαφορετικά στις δύο περιπτώσεις είναι εξαιτίας των διαφορετικών όρων που τα προσδιορίζουν (οι οποίοι, ποσοτικά, εκφράζουν τη διαφορετική συνεισφορά που έχουν τα φερμιόνια από τα βαθμωτά μποζόνια στην εξαγωγή της σταθεράς σύζευξης). Ο τρίτος όρος $\frac{11}{3}C_2(G_1)$ αναφέρεται στη συνεισφορά του μποζόνιου βαθμίδας της κάθε αλληλεπίδρασης και συγκεκριμένα στην *αυτο-αλληλεπίδραση μεταξύ των φορέων της αλληλεπίδρασης*. Αυτό που πρέπει να έχουμε υπόψιν μας είναι ότι είναι μηδέν για αβελιανές ομάδες ($U(1)$) και διάφορος του μηδέν για μη-αβελιανές ($SU(2), SU(3)$). Συγκεκριμένα:

$$C_2(G) = 0 \quad \text{για} \quad U(1) \quad (162)$$

$$C_2(G) = N \quad \text{για} \quad SU(N) \quad (163)$$

Οι γραμμές (154), (155) αντιστοιχούν στη γραμμή του (160) δίνοντας μας τη σχέση για τους παράγοντες βήτα σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου, οι οποίοι περιλαμβάνουν συζεύξεις δευτέρας τάξης κάθε αλληλεπίδρασης με τον εαυτό της αλλά και τις υπόλοιπες δύο.

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij} g_j^2 g_i^3 =$$

$$g_1^5 \left(\left[\frac{10}{3}C_2(G_1) + 2C_2(R_1) \right] T(R_1)d(R_2) + \left[\frac{2}{3}C_2(G_1) + 4C_2(S_1) \right] T(S_1)d(S_2) - \frac{34}{3} [C_2(G_1)]^2 \right) \quad (164)$$

$$+ g_1^3 g_2^2 [2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) + 4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)] \quad (165)$$

Έχοντας αυτά υπόψιν μας θα εξετάσουμε αναλυτικά τη σχέση (161) για να προσδιορίσουμε τον παράγοντα β κάθε μιας αλληλεπίδρασης στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου.

Όσο προ πριν υπολογίσουμε τις συναρτήσεις βήτα κρίνεται σκόπιμο να δούμε ποια σωματίδια συμμετέχουν εν τέλει στη θεωρία μας, στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου, και ποιες είναι οι θεμελιώδεις τους αναπαραστάσεις στις ομάδες συμμετρίας που συνδέονται με τις αντίστοιχες κβαντικές θεωρίες πεδίου. Επομένως σαν προΐμιο των υπολογισμών που θα επακολουθήσουν, αξίζει να επαναλάβουμε συνοπτικά κάποια σημεία.

Στο καθιερωμένο πρότυπο οι δυνάμεις συζεύγονται διαφορετικά με τα **αριστερόστροφα** απ' ότι με τα **δεξιόστροφα** σωματίδια και αυτό είναι κάτι που πρέπει να ληφθεί υπόψιν. Στη συνέχεια ακολουθούν υπό μορφή πινάκων τα σωματίδια τα οποία συμμετέχουν στην θεωρία μας στα πλαίσια του SM. Η κάθετη γραμμή δείχνει πως (ή εάν) ομαδοποιούνται υπό **SU(2)**, χαρακτηριστική ομάδα συμμετρίας της ασθενούς αλληλεπίδρασης, και η οριζόντια γραμμή μας δείχνει πως (ή εάν) ομαδοποιούνται υπό **SU(3)**, χαρακτηριστική ομάδα συμμετρίας της χρωμοδυναμικής. Επίσης για λόγους που θα γίνουν προφανείς στη συνέχεια, στη δεξιά πλευρά

κάθε πίνακα αναγράφεται η τρίτη συνιστώσα T_3 του ισοσπίν, δείχνοντας τρόπον τινά και την ομαδοποίηση σε αυτήν την αναπαράσταση (του ισοσπίν, η οποία ως γνωστόν, δεν διακρίνεται μαθηματικά από την $SU(2)$) όπως και το φορτίο Q που φέρει το κάθε σωματίδιο. Επίσης δεν πρέπει να ξεχνάμε πως όλα τα σωματίδια μας υπόκεινται σε μετασχηματισμούς $U(1)_Y$.

1. Φερμιόνια

(α) **Κουάρκς** Τα κουάρκς είναι τα μόνα σωματίδια που συμμετέχουν στην ισχυρή αλληλεπίδραση, ωστόσο έμφαση πρέπει να δοθεί στις θεμελιώδεις αναπαράστασεις τους υπό $SU(2)$ και πως μεταβάλλονται οι ομαδοποιήσεις τους αναλόγα με το αν είναι αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα.

i. Αριστερόστροφα Κουάρκς

	SU(3)	T_z	Q
SU(2)	$\begin{pmatrix} u_L^r & u_L^g & u_L^b \\ d_L^r & d_L^g & d_L^b \end{pmatrix}$	1/2	+2/3
		-1/2	-1/3

ii. Δεξιόστροφα Κουάρκς

	SU(3)	T_z	Q		SU(3)	T_z	Q
	$\begin{pmatrix} u_R^r & u_R^g & u_R^b \\ d_R^r & d_R^g & d_R^b \end{pmatrix}$	0	+2/3			0	-1/3

(β) Λεπτόνια

i. Αριστερόστροφα Λεπτόνια

		T_z	Q
SU(2)	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	1/2	0
		-1/2	-1

ii. Δεξιόστροφα Λεπτόνια

	T_z	Q
e_L	0	-1

2. Βαθμωτά Μποζόνια

		T_z	Q
SU(2)	$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_0 \end{pmatrix}$	1/2	1
		-1/2	0

2.2 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου

2.2.1 $U(1)$

Στη $U(1)$ συμμετέχουν όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου, φερμιόνια και μποζόνια, δεξιόστροφα και αριστερόστροφα, **ένα προς ένα**, και ο τύπος (153) λαμβάνει την εξής μορφή:

$$b_1 = \underbrace{\frac{2}{3} \sum Y^2}_{\text{Φερμιόνια}} + \underbrace{\frac{1}{3} \sum Y^2}_{\text{Βαθμωτά Μποζόνια}} - \underbrace{\frac{11}{3} C_2(G_1)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} \quad (166)$$

Ο λόγος που μηδενίσαμε τον τετραγωνικό τελεστή Casimir της συζυγούς αναπαράστασης, ο οποίος όπως προαναφέραμε αφορά στην αυτο-αλληλεπίδραση μεταξύ των φορέων της αλληλεπίδρασης, είναι επειδή η ομάδα συμμετρίας ($U(1)$) στην προκειμένη περίπτωση είναι **αβελιανή**. Το Y είναι το κανονικοποιημένο υπερφορτίο των σωματιδίων, το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} Q &= T_z + \sqrt{\frac{5}{3}} Y \Rightarrow \\ Y &= \sqrt{\frac{3}{5}} (Q - T_z) \end{aligned} \quad (167)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας τις δύο τελευταίες στήλες των πινάκων παίρνουμε τον εξής πίνακα για τα *τετραγωνισμένα* κανονικοποιημένα υπερφορτία Y (τελευταία γραμμή) όλων των στοιχειωδών σωματιδίων του καθιερωμένου προτύπου θεωρώντας ενοποίηση αλληλεπιδράσεων υπό την **SU(5)**.

Φερμιόνια							Βαθμωτά Μποζόνια	
Κουάρκς				Λεπτόνια			Higgs	
Αριστερόστροφα		Δεξιόστροφα		Αριστερόστροφα		Δεξιόστροφα		Higgs doublet
u_L	d_L	u_R	d_R	ν_L	e_L	e_R	H_1	H_0
$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$

Πίνακας 4: Τετραγωνισμένα Υπερφορτία στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Έχοντας υπολογίσει τις τιμές των κανονικοποιημένων υπερφορτίων τις αντικαθιστούμε στον τύπο, έχοντας κατά νου ότι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $U(1)$ είναι απλώς *ένας αριθμός*, επομένως δεν μπορούμε να κάνουμε καμία ομαδοποίηση (παραδείγματος χάριν σε τριπλές χρώματος ή διπλές γεύσης). Αντ' αυτού πρέπει να εισάγουμε στον τύπο τα υπερφορτία όλων των σωματιδίων που συμμετέχουν στο Καθιερωμένο Πρότυπο, δηλαδή και των 17, όπως παρατηρούμε από τους πίνακες. Γι' αυτόν άλλωστε το λόγο πολλαπλασιάσαμε επί 3 τα υπερφορτία των κουάρκς, ώστε να ληφθούν υπόψη και τα τρία χρώματα r, g, b. Επομένως ο τύπος γράφεται αναλυτικά:

$$b_1 = \underbrace{\frac{2}{3} \sum Y^2}_{\text{Φερμιόνια}} + \underbrace{\frac{1}{3} \sum Y^2}_{\text{Βαθμωτά Μποζόνια}} \Rightarrow \quad (168)$$

$$b_1 = \underbrace{\left(\frac{2}{3} \sum Y^2 \Big|_{\text{αριστερόστροφα}} + \frac{2}{3} \sum Y^2 \Big|_{\text{δεξιόστροφα}} \right)}_{\text{Κουάρκς}} \cdot \overbrace{3}^{\text{αριθμός χρωμάτων}} + \underbrace{\left(\frac{2}{3} \sum Y^2 \Big|_{\text{αριστερόστροφα}} + \frac{2}{3} \sum Y^2 \Big|_{\text{δεξιόστροφα}} \right)}_{\text{Λεπτόνια}} + \frac{1}{3} \sum Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \quad (169)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των υπερφορτίων ο τύπος γίνεται:

$$b_1 = \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{15} \right) \right] \cdot 3 \cdot \mathbf{n}_G \quad (170)$$

$$+ \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{20} + \frac{3}{20} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right] \cdot \mathbf{n}_G \quad (171)$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{3}{20} + \frac{3}{20} \right) \cdot \mathbf{n}_H \Rightarrow \quad (172)$$

$$b_1 = \frac{4}{3} n_G + \frac{1}{10} n_H \quad (173)$$

όπου στις γραμμές (170), (171) πολλαπλασιάσαμε με τον αριθμό των γενιών φερμιονίων n_G , ενώ στη γραμμή (172) πολλαπλασιάσαμε με τον αριθμό των διπλών Higgs n_H που προβλέπει η θεωρία βαθμίδας. Ο λόγος που το κάναμε αυτό είναι για να λάβουμε υπόψη μας *όλα* τα στοιχειώδη σωματίδια που προβλέπει η φυσική μας θεωρία. Δεδομένου ότι στο Καθιερωμένο Πρότυπο $n_G = 3$ και $n_H = 1$ ο τύπος τελικά γίνεται:

$$\alpha_1 = \frac{4}{3} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{41}{10} \quad (174)$$

Τοποθετώντας την τιμή του παράγοντα β στη σχέση (159), παίρνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της $U(1)$ στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου

$$\beta_1 = (16\pi^2)^{-1} \left(\frac{41}{10} \right) g_1^3 \quad (175)$$

2.2.2 SU(2)

Τα σωματίδια που συμμετέχουν στην $SU(2)$ (ασθενής αλληλεπίδραση) είναι μόνο τα **αριστερόστροφα** φερμιόνια και η διπλέτα Higgs, επομένως ο τύπος (161) αφορά αναπαραστάσεις αριστερόστροφων φερμιονίων και την μποζονική αναπαράσταση της διπλέτας Higgs:

$$b_2 = \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{άθροιση για αριστερόστροφα φερμιόνια}} + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1) \quad (176)$$

Επομένως ο τύπος έχει τη μορφή:

$$b_2 = \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1) \Rightarrow$$

$$b_2 = \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αριστερόστροφα}} \Big|_{\text{Κουάρκς}} + \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Λεπτόνια}} + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) \Big|_{\text{Higgs}} - \frac{11}{3}C_2(G_1) \quad (177)$$

Εδώ πρέπει να ληφθεί υπόψιν μας ότι η κύρια αναπαράσταση του τύπου (R_1) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$ ενώ η δευτερεύουσα (R_2) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(3)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι για τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των $SU(N)$:

$$C_2(G) = N \quad (178)$$

Ενώ συγκεκριμένα για τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των $SU(N)$ ισχύει:

$$T = \frac{1}{2}, \quad d = N \quad (179)$$

Επίσης δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι υπό $SU(3)$, σύμφωνα με τους πίνακες στην αρχή του κεφαλαίου, τα αριστερόστροφα κουάρκς σχηματίζουν μια τριπλέτα (δηλαδή $d(R_2) = \mathbf{3}$), λόγω της απουσίας χρώματος στα λεπτόνια και τα Higgs, τα αριστερόστροφα λεπτόνια έχουν $d(R_2) = \mathbf{1}$ όπως και τα Higgs ($d(S_2) = \mathbf{1}$). Με αυτά τα δεδομένα ο τύπος (177) γίνεται

$$b_2 = \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \mathbf{n}_G + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \mathbf{n}_H - \frac{11}{3} \cdot 2 \right] \Rightarrow \quad (180)$$

$$b_2 = \left(1 + \frac{1}{3} \right) n_G + \frac{1}{6} n_H - \frac{22}{3} \Rightarrow \quad (181)$$

$$b_2 = \frac{4}{3} n_G + \frac{1}{6} n_H - \frac{22}{3} \quad (182)$$

Όπου στην γραμμή (180) πολλαπλασιάσαμε τους παράγοντες που αντιστοιχούν στις φερμιονικές και μποζονικές αναπαραστάσεις με n_G, n_H αντίστοιχα και αντικαθιστώντας τον αριθμό γενιών φερμιονίων ($n_G = 3$) και τον αριθμό των διπλετών Higgs ($n_H = 1$) στο Καθιερωμένο Πρότυπο, λαμβάνουμε την τιμή:

$$b_2 = \frac{4}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 - \frac{22}{3} \Rightarrow$$

$$b_2 = 4 + \frac{1}{6} - \frac{22}{3} \Rightarrow$$

$$b_2 = -\frac{19}{6} \quad (183)$$

αντικαθιστώντας την τιμή του παράγοντα β στην (159) παίρνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της $SU(2)$ στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου.

$$\beta_2 = (16\pi^2)^{-1} \left(-\frac{19}{6} \right) g_2^3 \quad (184)$$

2.2.3 SU(3)

Ως γνωστόν τα σωματίδια που συμμετέχουν στην ισχυρή αλληλεπίδραση είναι μόνο τα κουάρκς, αριστερόστροφα και δεξιόστροφα. Επομένως ο τύπος (161) αφορά μόνο αναπαράστασεις φερμιονίων (συγκεκριμένα των κουάρκς) και όχι αναπαράστασεις βαθμωτών μποζονίων, επομένως μηδενίζεται ο δεύτερος όρος του. Δηλαδή

$$b_3 = \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Κουάρκς}} + \underbrace{\frac{1}{3}T(S_1)d(S_2)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} - \frac{11}{3}C_2(G_1) \quad (185)$$

Άρα για την ισχυρή αλληλεπίδραση έχουμε

$$b_3 = \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1) \Rightarrow \quad (186)$$

$$b_3 = \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Κουάρκς}} \Big|_{\text{αριστερόστροφα}} + \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{δεξιόστροφα}} - \frac{11}{3}C_2(G_1) \quad (187)$$

Εδώ πρέπει να ληφθεί υπόψιν μας ότι η κύρια αναπαράσταση του τύπου (R_1) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(3)$ ενώ η δευτερεύουσα (R_2) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$. Όπως και στην ασθενή αλληλεπίδραση, έτσι κι εδώ ισχύουν τα γνωστά:

$$T(R) = \frac{1}{2}, \quad C_2(G) = N, \quad d(R) = N$$

Επίσης συμβουλευόμενοι τους πίνακες παρατηρούμε ότι υπό $SU(2)$, τα αριστερόστροφα κουάρκς σχηματίζουν μια διπλέτα άρα $d(R_2) = 2$, ενώ τα δεξιόστροφα κουάρκς σχηματίζουν **δύο** singlets, επομένως κι εδώ έχουμε $d(R_2) = 1$, **για το καθένα από αυτά**. Με αυτά τα δεδομένα ο τύπος (187) γίνεται:

$$b_3 = \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right] n_G - \frac{11}{3} \cdot 3 \Rightarrow \quad (188)$$

$$b_3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) n_G - 11 \Rightarrow \quad (189)$$

$$b_3 = \frac{4}{3} n_G - 11 \quad (190)$$

Όπου στη γραμμή (188) πολλαπλασιάσαμε επί τον αριθμό των γενιών των φερμιονίων n_G , ο οποίος στο Καθιερωμένο Πρότυπο ισούται με **3**. Επομένως τελικά έχουμε:

$$b_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 - 11 \Rightarrow$$

$$b_3 = 4 - 11 \Rightarrow$$

$$b_3 = -7 \quad (191)$$

Εισάγοντας την τιμή του παράγοντα β στην (159), παίρνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της $SU(3)$ στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου:

$$\beta_3 = (16\pi^2)^{-1} (-7)g_3^3 \quad (192)$$

2.3 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου

Εδώ θα πρέπει να υπολογίσουμε τους παράγοντες β δεύτερης τάξης όπως αυτοί δίνονται από τους τύπους (154), (155) για κάθε αλληλεπίδραση, λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (178), (179), αλλά και την ταυτότητα (158) για τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις των $SU(N)$.

2.3.1 U(1)

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον όρο «ιδιοσύζευξης» b_{11} (g_1^5). Ισχύει ότι και στον προσδιορισμό της συνάρτησης β πρώτου βρόχου. Στην $U(1)$ συμμετέχουν όλα τα σωματίδια της θεωρίας μας, και δεδομένου ότι στην $U(1)$ ισχύει για τις αναπαραστάσεις $T = C_2(R) = Y^2$, ο τύπος (154) παίρνει την μορφή:

$$b_{11} = 2 \sum_{\text{Φερμιόνια}} Y^4 + 4 \sum_{\text{Higgs}} Y^4 \quad (193)$$

$$b_{11} = 2 \left(3 \sum_{\text{Κουάρκς}} Y^4 + \sum_{\text{Λεπτόνια}} Y^4 \right) + 4 \sum_{\text{Higgs}} Y^4 \quad (194)$$

όπου αντικαθιστώντας τις τιμές των κανονικοποιημένων υπερφορτίων ο τύπος λαμβάνει την μορφή:

$$b_{11} = \frac{19}{15} n_G + \frac{9}{50} n_H \quad (195)$$

Και για $n_G = 3, n_H = 1$ έχουμε:

$$b_{11} = \frac{199}{50} \quad (196)$$

Ο όρος b_{12} ($g_1^3 g_2^2$), υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψιν ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε σύζευξη $U(1)$ με $SU(2)$. Επομένως τα μόνα σωματίδια που συμμετέχουν και στις δύο είναι, τα αριστερόστροφα κουάρκς (επί τον αριθμό χρωμάτων), τα αριστερόστροφα λεπτόνια και το Higgs (και στα λεπτόνια και στο Higgs δεν λαμβάνεται υπόψιν η διπλέτα γεύσης). Από την ταυτότητα (158) μπορούμε να υπολογίσουμε τον τετραγωνικό τελεστή Casimir της *θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(2)$* , δεδομένου ότι η διάσταση της είναι $d(R) = 2$, ο αριθμός των γεννητόρων της είναι $r = 3$, και $T(R) = \frac{1}{2}$. Επομένως :

$$C_2(R) = \frac{3}{4} \quad (197)$$

Οπότε ο τύπος (155) γίνεται:

$$b_{12} = \underbrace{2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Κουάρκς}} + 2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Λεπτόνια}}}_{\text{Αριστερόστροφα}} + 4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1) \Big|_{\text{Higgs}} \Rightarrow \quad (198)$$

$$b_{12} = \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} \right) \cdot n_G + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \cdot n_H \quad (199)$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές των κανονικοποιημένων υπερφορτίων από τον πίνακα (4):

$$b_{12} = \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{1}{60} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{3}{20} \right) \cdot n_G + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{3}{20} \cdot n_H \Rightarrow$$

$$b_{12} = \frac{3}{5} n_G + \frac{9}{10} n_H \quad (200)$$

Όπου για $n_G = 3, n_H = 1$ ο τύπος γίνεται τελικά:

$$b_{12} = \frac{27}{10} \quad (201)$$

Τέλος θα υπολογίσουμε τον όρο \mathbf{b}_{13} ($g_1^3 g_3^2$). Εδώ έχουμε σύζευξη $U(1)$ με $SU(3)$ και τα μόνα σωματίδια που συμμετέχουν και στις δύο αλληλεπιδράσεις είναι τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα κουάρκς (αγνοώντας την πολλαπλότητα χρώματος). Από την ταυτότητα (158) μπορούμε να υπολογίσουμε τον τετραγωνικό τελεστή Casimir της *θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(3)$* , δεδομένου ότι η διάσταση της είναι $d(R) = 3$, ο αριθμός των γεννητόρων της είναι $r = 8$, και $T(R) = \frac{1}{2}$. Επομένως:

$$C_2(R) = \frac{4}{3} \quad (202)$$

Άρα ο τύπος (155) παίρνει την εξής μορφή:

$$b_{13} = \underbrace{2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Αριστερόστροφα}} + 2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Δεξιόστροφα}}}_{\text{Κουάρκς}} + \underbrace{4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} b_{13} &= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \left(\cdot \sum Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \cdot \sum Y^2 \Big|_{\text{Δεξ.Κουάρκς}} \right) \cdot n_G \Rightarrow \\ b_{13} &= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \right) \cdot n_G \Rightarrow \\ b_{13} &= \frac{44}{15} n_G \end{aligned} \quad (204)$$

Και για $n_G = 3$ έχουμε:

$$b_{13} = \frac{44}{5} \quad (205)$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $U(1)$ στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου είναι:

$$\beta_1 = (16\pi^2)^{-1} \left(-\frac{41}{10} \right) g_1^3 + (16\pi^2)^{-2} \left[\frac{199}{50} g_1^5 + \frac{27}{10} g_1^3 g_2^2 + \frac{44}{5} g_1^3 g_3^2 \right] \quad (206)$$

2.3.2 SU(2)

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον όρο \mathbf{b}_{21} ($g_2^3 g_1^2$). Εδώ έχουμε σύζευξη $SU(2)$ με $U(1)$. Και στις δυο αλληλεπιδράσεις συμμετέχουν μόνο τα αριστερόστροφα κουάρκς (επί τον αριθμό χρωμάτων), τα αριστερόστροφα λεπτόνια και η διπλέτα Higgs.

$$b_{21} = \underbrace{2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Κουάρκς}} + 2C_2(R_2)(d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Λεπτόνια}}}_{\text{Αριστερόστροφα}} + 4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)\Big|_{\text{Higgs}} \quad (207)$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= 2 \left(\mathbf{3} \cdot Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_G + 4 \cdot Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_H \Rightarrow \\ b_{21} &= 2 \left(3 \cdot \frac{1}{60} + \frac{3}{20} \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_G + 4 \cdot \frac{3}{20} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_H \\ b_{21} &= \frac{1}{5} \cdot n_G + \frac{3}{10} \cdot n_H \end{aligned} \quad (208)$$

Για $n_G = 3, n_H = 1$ έχουμε:

$$b_{21} = \frac{9}{10} \quad (209)$$

Επειτα θα υπολογίσουμε τον όρο «ιδιοσύζευξης» \mathbf{b}_{22} (g^5)

$$b_{22} = \left[\frac{10}{3}C_2(G_1) + 2C_2(R_1) \right] \underbrace{\left(T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Κουάρκς}} + T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Λεπτόνια}} \right)}_{\text{Αριστερόστροφα}} \quad (210)$$

$$+ \left[\frac{2}{3}C_2(G_1) + 4C_2(S_1) \right] T(S_1)d(S_2) \Big|_{\text{Higgs}} \quad (211)$$

$$- \frac{34}{3}[C_2(G_1)]^2 \quad (212)$$

Ισχύουν όσα είχαν αναφερθεί και στον υπολογισμό του παράγοντα β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου για την $SU(2)$, και με τη χρήση του (197) ο τύπος (210) γίνεται:

$$b_{22} = \left(\frac{10}{3} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) n_G + \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 n_H - \frac{34}{3} \cdot 2^2 \Rightarrow$$

$$b_{22} = \frac{49}{3} \cdot n_G + \frac{13}{6} n_H - \frac{136}{3} \quad (213)$$

Για $n_G = 3, n_H = 1$ έχουμε:

$$b_{22} = \frac{35}{6} \quad (214)$$

Τέλος θα υπολογίσουμε τον όρο \mathbf{b}_{23} ($g_2^3 g_3^2$). Εδώ έχουμε $SU(2)$ με $SU(3)$, επομένως τα **μόνα** σωματίδια που συμμετέχουν και στις δύο αλληλεπιδράσεις είναι τα **αριστερόστροφα κουάρκς**. Οπότε:

$$b_{23} = 2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) + \underbrace{4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} \quad (215)$$

$$b_{23} = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} n_G \Rightarrow$$

$$b_{23} = 4n_G \quad (216)$$

και για $n_G = 3$ παίρνουμε:

$$b_{23} = 12 \quad (217)$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $SU(2)$ στα πλαίσια του Καθερωμένου Προτύπου είναι:

$$\beta_2 = (16\pi^2)^{-1} \left(-\frac{19}{6} \right) g_2^3 + (16\pi^2)^{-2} \left[\frac{9}{10} g_2^3 g_1^2 + \frac{35}{6} g_2^5 + 12 g_2^3 g_3^2 \right] \quad (218)$$

2.3.3 SU(3)

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον όρο \mathbf{b}_{31} ($g_3^3 g_1^2$). Εδώ έχουμε σύζευξη $SU(3)$ και $SU(2)$. Και στις δύο αλληλεπιδράσεις συμμετέχουν μόνο τα αριστερόστροφα και τα δεξιόστροφα κουάρκς (αγνοώντας

την πολλαπλότητα χρώματος).

$$\begin{aligned}
b_{31} &= \underbrace{2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Αριστερόστροφα}} + 2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Δεξιόστροφα}}}_{\text{Κουάρκς}} + \underbrace{4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} \Rightarrow \\
b_{31} &= 2\left(\sum Y^2\Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \sum Y^2\Big|_{\text{Δεξ.Κουάρκς}}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_G \Rightarrow \\
b_{31} &= 2\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_G \Rightarrow \\
b_{31} &= \frac{11}{30}n_G \tag{219}
\end{aligned}$$

και για $n_G = 3$ έχουμε:

$$b_{31} = \frac{11}{10} \tag{220}$$

Για να υπολογίσουμε τον όρο b_{32} ($g_3^3 g_2^2$), πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι έχουμε σύζευξη $SU(2)$ με $SU(3)$, επομένως τα σωματίδια που συμμετέχουν και στις δύο αλληλεπιδράσεις είναι μόνο τα αριστερόστροφα κουάρκς, οπότε:

$$b_{32} = 2C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)\Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \underbrace{4C_2(S_2)d(S_2)T(S_1)}_{\text{μηδενισμός του όρου}} \tag{221}$$

$$b_{32} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n_G \Rightarrow$$

$$b_{32} = \frac{3}{2}n_G \tag{222}$$

και για $n_G = 3$ έχουμε:

$$b_{32} = \frac{9}{2} \tag{223}$$

Τέλος ο όρος b_{33} (g_3^5), δεδομένου ότι έχουμε συμμετοχή μόνο των κουάρκς στην ισχυρή αλληλεπίδραση, υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
b_{33} &= \left[\frac{10}{3}C_2(G_1) + 2C_2(R_1)\right] \underbrace{\left(T(R_1)d(R_2)\Big|_{\text{Αριστερόστροφα}} + T(R_1)d(R_2)\Big|_{\text{Δεξιόστροφα}}\right)}_{\text{Κουάρκς}} - \frac{34}{3}[C_2(G_1)]^2 \Rightarrow \\
b_{33} &= \left[\frac{10}{3} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4}{3}\right] \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot n_G - \frac{34}{3} \cdot 3^2 \Rightarrow \\
b_{33} &= \frac{76}{3}n_G - 102 \tag{224}
\end{aligned}$$

$$b_{33} = \left[\frac{10}{3} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4}{3}\right] \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot n_G - \frac{34}{3} \cdot 3^2 \Rightarrow$$

$$b_{33} = \frac{76}{3}n_G - 102 \tag{225}$$

και για $n_G = 3$ έχουμε:

$$b_{33} = -26 \tag{226}$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $SU(3)$ στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου είναι:

$$\beta_3 = (16\pi^2)^{-1}(-7)g_3^3 + (16\pi^2)^{-2}\left[\frac{11}{10}g_3^3g_1^2 + \frac{9}{2}g_3^3g_2^2 + (-26)g_3^5\right] \tag{227}$$

3 Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM)

3.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Για να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα που προκύπτουν από την προηγούμενη ανάλυση του Καθιερωμένου Προτύπου (ανάμεσα στα οποία, όπως θα φανεί και από τα διαγράμματα στο τελευταίο τμήμα αυτής της εργασίας, και το ζήτημα της αδυναμίας ενοποίησης των σταθερών σύζευξης) υπάρχουν αρκετές ιδέες που μας παρακινούν να επεκτείνουμε το μινιμαλιστικό $SU(5)$ μοντέλο, και οι οποίες παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον ώστε ακόμη και στην περίπτωση αποτυχίας τους αξίζουν να γνωρίζουμε για αυτές. Σίγουρα η υπερσυμμετρία ανήκει σε αυτή την κατηγορία. Υπό μια έννοια η υπερσυμμετρία αποτελεί τον μόνο δυνατό τρόπο να ενοποιηθούν οι περιγραφές σωματιδίων με διαφορετικά σπιν. Πράγματι, πρόκειται για μια συμμετρία της οποίας η βασική λειτουργία είναι να μετατρέπει σωματίδια ή πεδία κάποιου σπιν σε άλλα σωματίδια ή πεδία των οποίων τα σπιν διαφέρουν κατά $\frac{\hbar}{2}$. Κατά την περάτωση αυτής της διαδικασίας μετατρέπει μποζόνια σε φερμιόνια και το ανάποδο. Μέχρι στιγμής δεν υπάρχουν αδιαμφισβήτητα στοιχεία ύπαρξης της υπερσυμμετρίας στη φύση, και αν πράγματι έχει κάποια σχέση με την περιγραφή της φύσης τότε θα πρέπει να είναι σπασμένη. Ωστόσο, μια σπασμένη συμμετρία μπορεί να είναι πλούσια σε συνέπειες αν αυτό το σπάσιμο λαμβάνει χώρα κατά ήπιο και συνεπή τρόπο. Η πιο δελεαστική ιδέα σε αυτήν την κατεύθυνση είναι ότι το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας είναι αυθόρμητο. Αυτό σημαίνει ότι παραμένει μια έγκυρη συμμετρία των υποδόσκοντων φυσικών νόμων, αλλά «σπάει» κατά την εξέλιξη της κατάστασης του σύμπαντος. Αυτή η διαδικασία είναι παρόμοια με τον τρόπο που ο προσανατολισμός των σπιν εντός ενός φερρομαγνήτη σπάει αυθόρμητα την περιστροφική συμμετρία, καθώς ο μαγνήτης ψύχεται μέχρι το σημείο Curie. Η περιστροφική συμμετρία εξακολουθεί να ισχύει σε ένα θεμελιώδες επίπεδο, ακόμη και μέσα στο μαγνήτη, όμως οι σταθεροί προσανατολισμοί των σπιν στο εσωτερικό του μαγνήτη δεν υπακούουν σε αυτήν.

Το Καθιερωμένο Πρότυπο των αλληλεπιδράσεων δίνει μια πολύ καλή ερμηνεία σε ένα πλήθος φυσικών φαινομένων της σωματιδιακής φυσικής. Υπάρχουν όμως θέματα στα οποία αδυνατεί να δώσει απάντηση. Τα βασικότερα είναι το πρόβλημα της ιεραρχίας των ενεργειακών κλιμάκων και η έλλειψη φυσικότητας στην μάζα του Higgs. Το πρόβλημα της ιεραρχίας των ενεργειακών κλιμάκων αναφέρεται στην τεράστια διαφορά μεταξύ της κλίμακας του Planck, $M_{Pl} \approx 10^{19} \text{GeV}$ των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων και της Ηλεκτρασθενούς κλίμακας $M_W \approx 100 \text{GeV}$. Λογικά θα αναμενόταν η εκδήλωση κάποιας καινούριας Φυσικής σε μια ενδιάμεση ενέργεια. Η ενοποίηση των συζεύξεων των τριών θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων - εκτός της βαρύτητας - εισάγει μια νέα κλίμακα περί τα 10^{16}GeV η οποία ονομάζεται κλίμακα ενοποίησης M_{GUT} . Με αυτή την εικόνα το Καθιερωμένο Πρότυπο μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μια ενεργός θεωρία που ισχύει για ενέργειες κοντά στα 100GeV , μπορεί να αποτελέσει δηλαδή την προσέγγιση στο όριο των χαμηλών ενεργειών μιας γενικότερης θεωρίας η οποία εκδηλώνεται σε πολύ υψηλότερες ενέργειες. Η τεράστια διαφορά μεταξύ M_W και M_{GUT} δημιουργεί προβλήματα ευστάθειας στα σχήματα επανακανονικοποίησης και επιφέρει στα βαθμωτά σωματίδια Higgs τεράστιες μάζες. Αυτό ορολογείται ως το **πρόβλημα της ιεραρχίας**.

Σχετικό με το πρόβλημα της ιεραρχίας είναι η **έλλειψη «φυσικότητας»** στη μάζα του Higgs. Οι κβαντικές διορθώσεις στη μάζα του παρουσιάζουν τετραγωνικές αποκλίσεις $\delta m_H^2 \approx g^2 \Lambda^2$ όπου η κλίμακα αποκοπής Λ χαρακτηρίζει την ενέργεια πάνω από την οποία αρχίζει να εκδηλώνεται η νέα Φυσική. Για να ισχύει το διαταρακτικό ανάπτυγμα στην θεωρία πρέπει η μάζα του Higgs να μην ξεπερνά το 1TeV . Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο, θα πρέπει να επέμβουμε στη θεωρία, κάνοντας λεπτές ρυθμίσεις (finetuning) στις παραμέτρους της, κάτι το οποίο είναι εν τέλει *αφύσικο*.

Αναζητήθηκε λοιπόν η ύπαρξη μια νέας συμμετρίας η οποία θα περιόριζε την ύπαρξη των τετραγωνικών αποκλίσεων: η Υπερσυμμετρία εισάγει την συμμετρία ανάμεσα σε μποζόνια και φερμιόνια προτείνοντας νέα σωματίδια με ίσες μάζες με τα γνωστά σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου και σπιν που διαφέρει κατά $1/2$. Στην φύση βέβαια σήμερα δεν επαληθεύεται ένας τέτοιος εκφυλισμός μάζας μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων. Επομένως αν ισχύει η Υπερσυμμετρία θα πρέπει να είναι παραβιασμένη και οι μάζες των υπερσυμμετρικών σωματιδίων να είναι αρκετά μεγαλύτερες από τις μάζες των σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου. Η σημαντική αλλαγή που επιφέρουν οι υπερσυμμετρικοί εταίροι των σωματιδίων είναι ότι πλέον στις κβαντικές διορθώσεις της μάζας του Higgs πλέον εκτός από μποζόνια θα συμμετέχουν και φερμιόνια. Επιπλέον, λόγω της στατιστικής Fermi-Dirac οι συνεισφορές τους θα έχουν αντίθετο πρόσημο με αυτές των μποζονίων. Επομένως εξομαλύνονται οι ανεπιθύμητες τετραγωνικές αποκλίσεις στη μάζα του Higgs και αποδεικνύεται πως αυτό ισχύει σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών.

Επομένως το πρόβλημα της ιεραρχίας επιλύεται με τρόπο φυσικό, διότι οι ενεργειακές αποκλίσεις της μάζας Higgs ελέγχονται χωρίς λεπτές ρυθμίσεις και το μέγεθος της Ηλεκτρασθενούς κλίμακας M_Z εξηγείται με τρόπο φυσικό. Ακόμη μια σημαντική επίπτωση της Υπερσυμμετρίας, η οποία είναι και αυτή που έχει τη μεγαλύτερη σημασία για την παρούσα διπλωματική είναι ότι επιτυγχάνεται ενοποίηση των συζεύξεων βαθμίδας της Ηλεκτρομαγνητικής, της Ασθενούς και της Ισχυρής Αλληλεπίδρασης σε κλίμακα της τάξης των 10^{16} GeV για $M_S \approx 1$ TeV. Κάτι που ήταν αδύνατο να επιτευχθεί στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου.

3.2 Τα περιεχόμενα της θεωρίας

3.2.1 Θεωρία ομάδων στο MSSM

Για να κατασκευάσουμε την πολυπόθητη συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων πρέπει να σχηματίσουμε πολλαπλές σωματιδίων τα οποία να είναι μεν αναπαραστάσεις μιας συγκεκριμένης ομάδας συμμετρίας, αλλά τα μέλη τους να είναι σωματίδια με *διαφορετικό* σπιν. Η μέγιστη ομάδα συμμετρίας σε μια σχετικιστική θεωρία πεδίου αποτελείται από την ομάδα Poincare² των χωροχρονικών μετατοπίσεων και στροφών και την ομάδα των καθολικών εσωτερικών συμμετριών που σχετίζονται με τη διατήρηση κβαντικών αριθμών και τις διακριτές συμμετρίες C, P, T. Οι γεννήτορες αυτών των στοιχείων είναι στοιχεία **άρτια** δηλαδή υπακούουν σε σχέσεις **μετάθεσης** μεταξύ τους, κι έτσι είναι αδύνατο να κατασκευάσει κανείς αναπαραστάσεις με σωματίδια διαφορετικού σπιν με χρήση των ομάδων Lie. Αυτό το εμπόδιο μπορεί να ξεπεραστεί όταν υποθεθεί ότι υπάρχουν **περιττοί** γεννήτορες συμμετρίας οι οποίοι ικανοποιούν σχέσης **αντιμετάθεσης**. Η Υπερσυμμετρία καθορίζεται από την εισαγωγή τέτοιων γεννητόρων οι οποίοι μετασχηματίζονται ως σπίνορες κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Έχει αποδειχτεί ότι η Υπερσυμμετρία είναι η μοναδική πρόσθετη συμμετρία της σωματιδιακής Φυσικής που περιέχει την ομάδα Poincare και που επιτρέπεται όταν εισαχθούν αντιμετατιθέμενοι τελεστές. Αυτοί οι σπινοριακοί τελεστές, Q, \tilde{Q} , μετασχηματίζουν καταστάσεις ακέραιου σπιν σε άλλες με ημιακέραιο σπιν και αντίστροφα

$$\tilde{Q}|\text{μποζόνιο}\rangle = |\text{φερμιόνιο}\rangle, \quad Q|\text{φερμιόνιο}\rangle = |\text{μποζόνιο}\rangle \quad (228)$$

Το πλήθος N των τελεστών που χρειάζεται να προσθέσουμε καθορίζει το είδος της υπερσυμμετρίας. Στην περίπτωση μας έχουμε *ένα* σπινοριακό τελεστή και τον συζυγή του Q, \tilde{Q} , επομένως

²Η συμμετρία Poincare είναι η πλήρης συμμετρία της ειδικής σχετικότητας και περιλαμβάνει μετασχηματισμούς, δηλαδή μετατοπίσεις στο χώρο και το χρόνο (που περιλαμβάνει την Αβελιανή ομάδα των μετασχηματισμών στο χωρόχρονο), στροφές στο χώρο (που περιλαμβάνει τη μη Αβελιανή ομάδα Lie των τριδιάστατων στροφών), και ωθήσεις (boosts), δηλαδή μετασχηματισμούς που συνδέουν δύο ομοιογενώς κινούμενα σώματα. (Οι δύο τελευταίες συμμετρίες συνιστούν μαζί την ομάδα Lorentz). Αυτά τα στοιχεία αποτελούν τους γεννήτορες της ομάδας Poincare.

$N = 1$. Η Υπερσυμμετρία εκδηλώνεται στον λεγόμενο *υπερχώρο* κατ' αναλογία με τη συμμετρία των μετασχηματισμών Lorentz η οποία εκδηλώνεται στον χώρο Minkowski. Ο υπερχώρος καθορίζεται από τις συντεταγμένες $(x^\mu, \theta, \tilde{\theta})$ όπου x^μ είναι η συντεταγμένη του τετραδιάστατου χώρου Minkowski και $\theta, \tilde{\theta}$ είναι σπινόρες τύπου Weyl οι οποίοι υπακούουν σχέσεις αντιμετάθεσης. Αναπαραστάσεις της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας αποτελούν τα υπερπεδία που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών του υπερχώρου. Τα πεδία ύλης αναπαρίστανται με τα χειραλικά υπερπεδία ενώ τα πεδία βαθμίδας με τα διανυσματικά υπερπεδία. Τα χειραλικά υπερπεδία φιλοξενούν βαθμωτά σωματίδια με σπιν $s = 0$ και φερμιόνια με σπιν $s = 1/2$ με ίδιες μάζες ενώ τα διανυσματικά υπερπεδία περιέχουν τα διανυσματικά μποζόνια με σπιν $s = 1$ και τους εταίρους τους με σπιν $s = 1/2$ που επίσης έχουν την ίδια μάζα. Στους δύο πίνακες που ακολουθούν (5, 6) παρουσιάζονται τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου μαζί με τους υπερσυμμετρικούς τους εταίρους. Το τελευταίο πράγμα που πρέπει να επισημάνουμε σχετικά με τη θεωρία αφορά το πεδίο Higgs. Το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο προβλέπει **δύο** διπλές Higgs. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι *ένα μόνο* Higgsino (φερμιονικός υπερσυμμετρικός εταίρος του Higgs) θα οδηγούσε τη θεωρία μας σε *ανωμαλία βαθμίδας*. Αν εισάγουμε δύο Higgsino η ανωμαλία αίρεται, άρα θα πρέπει να εισάγουμε και *δύο* βαθμωτά Higgs. Άλλος ένας λόγος για να έχουμε δύο βαθμωτές διπλές Higgs είναι για να έχουμε συζεύξεις Yukawa μεταξύ του Higgs και του up κουάρκ αλλά και του down κουάρκ. Αυτοί είναι οι όροι που ευθύνονται για τις μάζες των κουάρκ. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο τα d-κουάρκ συζεύγονται με το πεδίο Higgs (το οποίο έχει $Y = -\frac{1}{2}$ και τα u-κουάρκ με το μιγαδικό συζυγές του (το οποίο έχει $Y = \frac{1}{2}$). Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν επιτρέπεται στις υπερσυμμετρικές θεωρίες επομένως χρειάζονται δύο είδη πεδίων Higgs.

Ονόματα		Σπιν 0	Σπιν $\frac{1}{2}$	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks, quarks ($\times 3$ οικογένειες)	\mathcal{Q}	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	(u_L, d_L)	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	\bar{u}	\tilde{u}_R^*	u_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	\bar{d}	\tilde{d}_R^*	d_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons ($\times 3$ οικογένειες)	\mathcal{L}	$(\tilde{\nu}_L, \tilde{e}_L)$	(ν_L, e_L)	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	\bar{e}	\tilde{e}_R^*	e_R^\dagger	$(\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, higgsinos	H_u	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}_u^+, \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	H_d	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}_d^0, \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Πίνακας 5: Χειραλικές υπερπολλαπλές στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Τα πεδία με σπιν-0 είναι μιγαδικά βαθμωτά, και τα πεδία με σπιν-1/2 είναι αριστερόστροφα φερμιόνια Weyl δύο συνιστωσών.

Ονόματα	Σπιν $\frac{1}{2}$	Σπιν 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm \tilde{W}^0$	$W^\pm W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B boson	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Πίνακας 6: Υπερπολλαπλές βαθμίδας στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο

3.3 Συναρτήση β

Εφόσον η υπερσυμμετρία προστατεύει την ιδιοενέργεια του Higgs από διορθώσεις που οφείλονται στις μικρές κλίμακες αποστάσεων, ή ισοδύναμα, στις υψηλές ενεργειακές κλίμακες αποκοπής, είναι σημαντικό να συνδέσουμε τη φυσική στην ηλεκτρασθενή κλίμακα όπου μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις στις θεμελιώδεις παραμέτρους που έχουν οριστεί σε υψηλές ενεργειακές κλίμακες. Αυτό μπορεί να γίνει με την μελέτη της εξέλιξης της ομάδας επανακανονικοποίησης των παραμέτρων. Επίσης, προσδοκούμε ότι το ίδιο το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας θα πρέπει να έχει την προέλευση του σε κάποια υψηλή ενεργειακή κλίμακα. Αν όντως αυτό συμβαίνει τότε και οι παράμετροι του ήπιου (soft) σπασίματος της υπερσυμμετρίας θα πρέπει να μελετηθούν μέσω των εξισώσεων της ομάδας επανακανονικοποίησης. Εάν η Υπερσυμμετρία αποδειχτεί ότι είναι επιλογή της φύσης, τότε η ανάλυση μέσω ομάδας επανακανονικοποίησης θα είναι πολύτιμη για να ανιχνεύσουμε νέα φυσική στις υψηλές ενεργειακές κλίμακες χρησιμοποιώντας τα παρατηρήσιμα μεγέθη των πειραμάτων σύγκρουσης σε κλίμακες των TeV.

Οι παράμετροι που κι εδώ μελετούμε είναι φυσικά οι σταθερές σύζευξης του Καθιερωμένου Προτύπου. Το τρέξιμο των σταθερών σύζευξης βαθμίδας περιγράφεται από της συναρτήσεις β , και ως γνωστόν οι λύσεις τους σε προσέγγιση πρώτου βρόχου στις μη-υπερσυμμετρικές θεωρίες δίνονται από τον τύπο

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g'^2(\mu')} + \frac{b_0}{8\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu'}$$

όπου

$$b_0 = \frac{2}{3}S_f + \frac{1}{3}S_b - \frac{11}{3}C_2(G) \quad (229)$$

όπου ο συγκεκριμένος τύπος είναι μια περισσότερο περιεκτική μορφή του γνωστού τύπου

$$b_i = \frac{2}{3}T(R_1)d(R_2) + \frac{1}{3}T(S_1)d(S_2) - \frac{11}{3}C_2(G_1)$$

που χρησιμοποιήσαμε για τους υπολογισμούς μας στην περίπτωση του Καθιερωμένου Προτύπου.

Σε αυτό το σημείο είναι σκόπιμο να εξηγήσουμε πως παράγεται ο τύπος για την εξαγωγή των συναρτήσεων β στο MSSM. Θα ξεκινήσουμε από τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου, για να δώσουμε μια γεύση της μεθοδολογίας και θα παρουσιάσουμε απλώς τα αποτελέσματα σε δεύτερο βρόχο. Θεωρούμε τον παράγοντα β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου το Καθιερωμένου Προτύπου.

Στις υπερσυμμετρικές θεωρίες, πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψιν το gaugino multiplet στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας βαθμίδας. Τα gaugino συνεισφέρουν στην εξίσωση (229)

με $S_f = C_2(G)$. Οι χειραλικές υπερπολλαπλέτες έχουν ένα σπίνορα Weyl και ένα μιγαδικό βαθμωτό, επομένως οι δύο πρώτοι όροι πάντοτε αθροίζονται ώστε να δίνουν $S_f = S_b$. Επομένως ο παράγοντας β απλοποιείται και δίνει

$$b_i = 3C_2(G) - S_f$$

Θα εξάγουμε τη σχέση για την περίπτωση της $SU(3)$. Πρόκειται για την χαρακτηριστική ομάδα συμμετρίας της ισχυρής αλληλεπίδρασης, επομένως στον τύπο θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι συνεισφορές των κουάρκς (και των squarks) αλλά και του αντίστοιχου μποζονίου βαθμίδας, του γλουόνιου (καθώς και του gluino).

$$b_i = \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Κουάρκς}} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathbf{T}(\mathbf{R}_1)\mathbf{d}(\mathbf{R}_2)}_{\text{squarks}} - \underbrace{\frac{11}{3}C_2(G_1)}_{\text{γλουόνια}} + \underbrace{\frac{2}{3}C_2(G_1)}_{\text{gluino}}$$

Στην συνεισφορά των squarks θέσαμε τον παράγοντα $\frac{1}{3}$ για να φανεί ότι πρόκειται για βαθμωτά μποζόνια, ωστόσο δεν αλλάξαμε το $T(R_1)d(R_2)$ για να φανεί ότι το τμήμα που αφορά την θεωρία ομάδων είναι το ίδιο για τα κουάρκς και τα υπερσυμμετρικά τους. Στη συνεισφορά των gluino, θέσαμε τον παράγοντα $\frac{2}{3}$ για να δείξουμε ότι πρόκειται για φερμιόνια. Δεν αλλάξαμε όμως τον τετραγωνικό τελεστή Casimir της συζυγούς αναπαράστασης, για να δείξουμε ότι ακολουθεί την ίδια θεωρία ομάδων με το γλουόνιο. Επομένως ο τύπος γίνεται:

$$b_i = T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \quad (230)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε αν εργαστούμε για στην $SU(2)$, χαρακτηριστική ομάδα συμμετρίας του ασθενούς ισοσπίν. Εδώ, θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι συνεισφορές των αριστερόστροφων φερμιονίων (και των αντισυμμετρικών τους), των (βαθμωτών) μποζονίων Higgs (και των Higgsino) και των (διανυσματικών) μποζονίων βαθμίδας W (W^+ , W^- , W^0) αλλά και των αντισυμμετρικών τους (winos).

$$\begin{aligned} b_i &= \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathbf{T}(\mathbf{R}_1)\mathbf{d}(\mathbf{R}_2)}_{\text{Αρ.squarks}} + \underbrace{\frac{2}{3}T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathbf{T}(\mathbf{R}_1)\mathbf{d}(\mathbf{R}_2)}_{\text{Αρ.sleptons}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{3}T(S_1)d(S_2)}_{\text{Higgs}} + \underbrace{\frac{2}{3}\mathbf{T}(\mathbf{S}_1)\mathbf{d}(\mathbf{S}_2)}_{\text{Higgsino}} - \underbrace{\frac{11}{3}C_2(G_1)}_{\text{Μποζόνια W}} + \underbrace{\frac{2}{3}C_2(G_1)}_{\text{winos}} \Rightarrow \\ &\quad \text{Καμία διαφορά στα στοιχεία θεωρίας αναπαράστασεων} \\ b_i &= \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{quarks-squarks}} + \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{leptons-sleptons}} + \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Higgs-Higgsino}} - \underbrace{3C_2(G_1)}_{\text{W-Winos}} \Rightarrow \\ b_i &= T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \end{aligned}$$

Οπότε καταλήγουμε πάλι στην σχέση του παράγοντα βήτα σε προσέγγιση πρώτου βρόχου για το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να οδηγηθούμε στον ίδιο τύπο και έχοντας ως αφετηρία την $U(1)$, ενώ κατά παρόμοιο τρόπο, αν και περισσότερο πολύπλοκα, προκύπτουν και οι παράγοντες β σε προσέγγιση δύο βρόχων ώστε τελικά ο τύπος που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή των συναρτήσεων β στο MSSM να είναι ο εξής:

$$\beta_{g_1} = (16\pi^2)^{-1}g_1^3[T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1)] \quad (231)$$

$$+ (16\pi^2)^{-2}g_1^5\left([2C_2(G_1) + 4C_2(R_1)]T(R_1)d(R_2) - 6[C_2(G_1)]^2\right) \quad (232)$$

$$+ (16\pi^2)^{-2}g_1^3g_2^2[4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1)] \quad (233)$$

Όπως και στην περίπτωση του Καθιερωμένου Προτύπου έτσι κι εδώ η (231) αφορά την προσέγγιση σε πρώτο βρόχο, η (232) την ιδιοσύζευξη της κάθε βαθμίδας σε δεύτερο βρόχο και η (233) την σύζευξη κάθε βαθμίδας με τις άλλες δύο (υπονοείται άθροιση προφανώς) σε διαγράμματα δευτέρου βρόχου. Το τελευταίο και σημαντικό πράγμα που πρέπει να θυμάται κανείς είναι ότι **πλέον όταν αναγράφουμε τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου στους τύπους υπονοούμε και τους υπερσυμμετρικούς τους εταίρους.**

3.4 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση 1ου βρόχου

3.4.1 U(1)

Όπως και στην περίπτωση της U(1) στο Καθιερωμένο Πρότυπο, έτσι κι εδώ ο αντίστοιχος τύπος της συνάρτησης β 1ης τάξης:

$$b_1 = T(R_1)d(R_2) - 3C_2(G_1) \quad (234)$$

πρακτικά γίνεται:

$$b_1 = \underbrace{\sum Y^2}_{\text{Φερμιόνια}} - \underbrace{3C_2(G_1)}_{\text{Μηδενισμός του όρου}} \quad (235)$$

οπου ο δεύτερος όρος μηδενίστηκε αφού στην αναπαράσταση της U(1) ο τετραγωνικός τελεστής Casimir της συζυγούς αναπαράστασης είναι μηδέν. ($C_2(G) = 0$). Επομένως:

$$b_1 = \underbrace{\sum Y^2}_{\text{Φερμιόνια}} = \underbrace{\left(\sum Y^2 \Big|_{\text{αριστερόστροφα}} + \sum Y^2 \Big|_{\text{δεξιόστροφα}} \right)}_{\text{Κουάρκς}} \cdot \underbrace{3}_{\text{αριθμός χρωμάτων}} + \underbrace{\left(\sum Y^2 \Big|_{\text{αριστερόστροφα}} + \sum Y^2 \Big|_{\text{δεξιόστροφα}} \right)}_{\text{Λεπτόνια}} + \sum Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \quad (236)$$

συμβουλευόμενοι τον πίνακα (4), παίρνουμε:

$$b_1 = \left[\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \right] \cdot 3 \cdot n_G + \left[\left(\frac{3}{20} + \frac{3}{20} \right) + \frac{3}{5} \right] \cdot n_G + \left(\frac{3}{20} + \frac{3}{20} \right) \cdot n_H \Rightarrow$$

$$b_1 = 2n_G + \frac{3}{10}n_H \quad (237)$$

Όπου για τρεις γενιές φερμιονίων ($n_G = 3$) και δύο διπλέτες Higgs ($n_H = 2$), ο τελευταίος τύπος γίνεται:

$$b_1 = \frac{33}{5} \quad (238)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του παράγοντα β στην σχέση (231) λαμβάνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της U(1) στα πλαίσια του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου.

$$b_1 = (16\pi^2)^{-1} \frac{33}{5} g_1^3 \quad (239)$$

3.4.2 SU(2)

Στο SM είχαμε αναφέρει ότι τα σωματίδια που συμμετέχουν στην $SU(2)$ (ασθενής αλληλεπίδραση) είναι τα αριστερόστροφα φερμιόνια και τα Higgs. Επίσης δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η κύρια αναπαράσταση (R_1) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$ ενώ η δευτερεύουσα (R_2) είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(3)$. Με αυτά τα δεδομένα έχουμε:

$$b_2 = T(R_1)d(R_2) \Big| - 3C_2(G_2) \Rightarrow$$

$$b_2 = \underbrace{T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Κουάρκς}} + T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Λεπτόνια}}}_{\text{Αριστερόστροφα}} + T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Higgs}} - 3C_2(G_1) \quad (240)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (178),(179) ο τύπος γίνεται:

$$b_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \cdot n_G + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot n_H - 3 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$b_2 = 2n_G + \frac{1}{2}n_H - 6 \quad (241)$$

Όπου για τρεις γενιές φερμιονίων ($n_G = 3$) και δύο διπλέτες Higgs ($n_H = 2$), ο τελευταίος τύπος γίνεται:

$$b_2 = 1 \quad (242)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του παράγοντα β στην σχέση (231) λαμβάνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της $SU(2)$ στα πλαίσια του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου.

$$\beta_2 = (16\pi^2)^{-1} \cdot 1 \cdot g_2^3 \quad (243)$$

3.4.3 SU(3)

Τα μοναδικά σωματίδια που συμμετέχουν στην $SU(3)$ (ισχυρή αλληλεπίδραση) είναι τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα κουάρκς. Δεδομένου ότι η κύρια αναπαράσταση εδώ είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(3)$ ενώ η δευτερεύουσα είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της $SU(2)$, και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (178),(179) ο παράγοντας β πρώτης τάξης γίνεται:

$$b_3 = T(R_1)d(R_2) \Big| - 3C_2(G_2) \Rightarrow$$

$$b_3 = \underbrace{T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Αριστερόστροφα}} + T(R_1)d(R_2) \Big|_{\text{Δεξιόστροφα}}}_{\text{Κουάρκς}} - 3C_2(G_1) \Rightarrow \quad (244)$$

$$b_3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \cdot n_G - 3 \cdot 3 \Rightarrow \quad (245)$$

Όπου για τρεις γενιές φερμιονίων ο τύπος τελικά δίνει:

$$b_3 = -3 \quad (246)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του παράγοντα β στην σχέση (231) λαμβάνουμε τη συνάρτηση β σε προσέγγιση πρώτου βρόχου της $SU(3)$ στα πλαίσια του Ελάχιστου Υπερσυμμετρικού Καθιερωμένου Προτύπου.

$$\beta_3 = (16\pi^2)^{-1}(-3)g_3^3 \quad (247)$$

3.5 Υπολογισμός συναρτήσεων β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου

3.5.1 $U(1)$

Αρχικά θα υπολογίσουμε τον όρο «ιδιοσύζευξης» b_{11} (g_1^5) της $U(1)$ στο MSSM. Εδώ συμμετέχουν όλα τα σωματίδια της θεωρίας μας. Κατά τα γνωστά ο τύπος (232) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 4 \left(\sum_{\text{Φερμιόνια}} Y^4 + \sum_{\text{Higgs}} Y^4 \right) \Rightarrow \\ b_{11} &= 4 \left(3 \sum_{\text{Κουάρκς}} Y^4 + \sum_{\text{Λεπτόνια}} Y^4 \right) + 4 \sum_{\text{Higgs}} Y^4 \end{aligned} \quad (248)$$

και με τη βοήθεια του πίνακα (4) ο τύπος γίνεται:

$$b_{11} = \frac{38}{15} n_G + \frac{9}{50} n_H \quad (249)$$

Όπου για $n_G = 3, n_H = 2$ έχουμε:

$$b_{11} = \frac{199}{25} \quad (250)$$

Ο όρος b_{12} ($g_1^3 g_2^2$) αφορά σύζευξη $U(1), SU(2)$. Τα σωματίδια που συμμετέχουν είναι τα αριστερόστροφα κουάρκς (επί τον αριθμό χρωμάτων), τα αριστερόστροφα κουάρκς και τα Higgs (αγνοώντας τη διπλέτα γεύσης). Επομένως ο τύπος (233) γίνεται:

$$\begin{aligned} b_{12} &= 4C_2(R_2) d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Φερμιόνια}} \Rightarrow \\ b_{12} &= 4C_2(R_2) \left[d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Higgs}} \right] \Rightarrow \\ b_{12} &= 4 \cdot \frac{3}{4} \left(3 \cdot 2 \cdot Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + 2 \cdot Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + 2 \cdot Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \right) \Rightarrow \\ b_{12} &= 4 \cdot \frac{3}{4} \left(\left(3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{60} + 2 \cdot \frac{3}{20} \right) \cdot n_G + 2 \cdot \frac{3}{20} \cdot n_H \right) \Rightarrow \\ b_{12} &= \frac{6}{5} n_G + \frac{9}{10} n_H \end{aligned} \quad (251)$$

Και για $n_G = 3, n_H = 2$ ο τύπος γίνεται:

$$b_{12} = \frac{27}{5} \quad (252)$$

Ο όρος b_{13} ($g_1^3 g_3^2$), αφορά σύζευξη $U(1)$ με $SU(3)$. Τα σωματίδια που συμμετέχουν είναι μόνο τα κουάρκς (αγνοώντας την πολλαπλότητα χρώματος). Επομένως ο τύπος (233), λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} b_{13} &= 4C_2(R_2) d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Κουάρκς}} \Rightarrow \\ b_{13} &= 4C_2(R_2) \left[d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + d(R_2) T(R_1) \Big|_{\text{Δεξ.Κουάρκς}} \right] \Rightarrow \\ b_{13} &= 4 \cdot \frac{4}{3} \left(\cdot 3 \sum_{\text{Αρ.Κουάρκς}} \cdot Y^2 + \cdot 3 \sum_{\text{Δεξ.Κουάρκς}} \cdot Y^2 \right) \Rightarrow \\ b_{13} &= 4 \cdot \frac{4}{3} \left(\left(3 \cdot \frac{1}{60} + \cdot 3 \cdot \frac{1}{60} + \cdot 3 \cdot \frac{1}{15} + \cdot 3 \cdot \frac{4}{15} \right) \cdot n_G \right) \Rightarrow \\ b_{13} &= \frac{88}{15} n_G \end{aligned} \quad (253)$$

Και για $n_G = 3$ ο τύπος γίνεται:

$$b_{13} = \frac{88}{5} \quad (254)$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $U(1)$ στα πλαίσια του MSSM είναι:

$$\beta_1 = (16\pi^2)^{-1} \frac{33}{5} g_1^3 + (16\pi^2)^{-2} \left[\frac{11}{10} g_1^5 + \frac{27}{5} g_1^3 g_2^2 + \frac{88}{5} g_1^3 g_3^2 \right] \quad (255)$$

3.5.2 SU(2)

Ο όρος \mathbf{b}_{21} ($g_2^3 g_1^2$) αφορά σύζευξη $SU(2)$ με $U(1)$. Τα σωματίδια που συμμετέχουν είναι τα αριστερόστροφα κουάρκς (επί τον αριθμό χρωμάτων), τα αριστερόστροφα κουάρκς και τα Higgs (αγνοώντας τη διπλέτα γεύσης). Επομένως ο τύπος (233) γίνεται:

$$\begin{aligned} b_{12} &= 4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Φερμιόνια}} \Rightarrow \\ b_{21} &= 4d(R_2)T(R_1) \left[C_2(R_2) \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + C_2(R_2) \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + C_2(R_2) \Big|_{\text{Higgs}} \right] \Rightarrow \\ b_{21} &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(\mathbf{3} \cdot Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + Y^2 \Big|_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + Y^2 \Big|_{\text{Higgs}} \right) \Rightarrow \\ b_{21} &= 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{3} \cdot \frac{1}{60} + \frac{3}{20} \right) \cdot n_G + \frac{3}{20} \cdot n_H \right) \Rightarrow \\ b_{21} &= \frac{2}{5} n_G + \frac{3}{10} n_H \end{aligned} \quad (256)$$

Και για $n_G = 3, n_H = 2$ ο τύπος γίνεται:

$$b_{21} = \frac{9}{5} \quad (257)$$

Ο όρος «ιδιοσύζευξης» \mathbf{b}_{22} (g_2^5), δεδομένης της συμμετοχής αριστερόστροφων φερμιονίων και Higgs είναι:

$$\begin{aligned} b_{22} &= [2C_2(G_1) + 4C_2(R_1)]T(R_1)d(R_2) - 6[C_2(G_1)]^2 \Rightarrow \\ b_{22} &= [2C_2(G_1) + 4C_2(R_1)] \left[\underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αρ.Λεπτόνια}} + \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Higgs}} \right] - 6[C_2(G_1)]^2 \Rightarrow \\ b_{22} &= \left(2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{4} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) n_G + \frac{1}{2} \cdot 1 n_H \right] - 6 \cdot 2^2 \Rightarrow \\ b_{22} &= 14n_G + \frac{7}{2}n_H - 24 \end{aligned} \quad (258)$$

Το οποίο για $n_G = 3, n_H = 2$ μας δίνει:

$$b_{22} = 25 \quad (259)$$

Ο όρος \mathbf{b}_{23} ($g_2^3 g_3^2$), αφορά σύζευξη $SU(2)$ με $SU(3)$, επομένως έχουμε συμμετοχή μόνο των κουάρκς και ο τύπος (232) γίνεται:

$$\begin{aligned} b_{23} &= 4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} \Rightarrow \\ b_{23} &= 4 \cdot \frac{4}{3} \left(3 \cdot \frac{1}{2} \right) n_G \Rightarrow \\ b_{23} &= 8n_G \end{aligned} \quad (260)$$

Όπου για $n_G = 3$ έχουμε :

$$b_{23} = 24 \quad (261)$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $SU(2)$ στα πλαίσια του MSSM είναι :

$$\beta_2 = (16\pi^2)^{-1} 1g_2^3 + (16\pi^2)^{-2} \left[\frac{9}{5} g_2^3 g_1^2 + 25g_2^5 + 24g_2^3 g_3^2 \right] \quad (262)$$

3.5.3 SU(3)

Ο όρος \mathbf{b}_{31} ($g_3^3 g_1^2$), αφορά σύζευξη $SU(3)$ με $U(1)$, επομένως έχουμε συμμετοχή μόνο των κουάρκς (αγνοώντας την πολλαπλότητα χρώματος) και ο τύπος (232) γίνεται :

$$\begin{aligned} b_{31} &= 4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Κουάρκς}} \Rightarrow \\ b_{31} &= 4 \cdot \sum_{\text{κουάρκς}} Y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} n_G \Rightarrow \\ b_{31} &= 4 \cdot \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} n_G \Rightarrow \\ b_{31} &= \frac{11}{15} \end{aligned} \quad (263)$$

Όπου για $n_G = 3$ έχουμε :

$$b_{31} = \frac{11}{5} \quad (264)$$

Ο όρος \mathbf{b}_{32} ($g_3^3 g_2^2$), αφορά σύζευξη $SU(3)$ με $SU(2)$, επομένως έχουμε συμμετοχή μόνο των αριστερόστροφων κουάρκς και ο τύπος (232) γίνεται :

$$\begin{aligned} b_{32} &= 4C_2(R_2)d(R_2)T(R_1) \Big|_{\text{Αρ.Κουάρκς}} \Rightarrow \\ b_{32} &= 4 \cdot \frac{3}{4} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) n_G \Rightarrow \\ b_{32} &= 3n_G \end{aligned} \quad (265)$$

Όπου για $n_G = 3$ έχουμε :

$$b_{32} = 9 \quad (266)$$

Τέλος ο όρος «ιδιοσύζευξης» \mathbf{b}_{33} (g_3^5), δεδομένου ότι έχουμε συμμετοχή μόνο των κουάρκς στην ισχυρή αλληλεπίδραση, υπολογίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} b_{33} &= [2C_2(G_1) + 4C_2(R_1)] \left[\underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Αρ.Κουάρκς}} + \underbrace{T(R_1)d(R_2)}_{\text{Δεξ. Κουάρκς}} \right] - 6[C_2(G_1)]^2 \Rightarrow \\ b_{33} &= \left(2 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{4}{3} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) n_G - 6 \cdot 3^2 \right] \Rightarrow \\ b_{33} &= \frac{68}{3} n_G - 54 \end{aligned} \quad (267)$$

και για $n_G = 3$ έχουμε :

$$b_{33} = 14 \quad (268)$$

Επομένως η συνάρτηση β σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου της $SU(3)$ στα πλαίσια του MSSM είναι :

$$\beta_3 = (16\pi^2)^{-1} (-3)g_3^3 + (16\pi^2)^{-2} \left[\frac{11}{5} g_3^3 g_1^2 + 9g_3^3 g_2^2 + 14g_3^5 \right] \quad (269)$$

4 «Τρέξιμο» των σταθερών σύζευξης

Οι συναρτήσεις βήτα σχεδιάστηκαν με τη βοήθεια της Mathematica. Κατά την σχεδίαση χρησιμοποιήσαμε στη θέση του τύπου

$$\beta_i = (16\pi^2)^{-1} b_i g_i^3 \quad \text{1ος βρόχος}$$

$$+ (16\pi^2)^{-2} \sum_{j=1}^3 b_{ij} g_i^3 g_j^2 \quad \text{2ος βρόχος}$$

τον ισοδύναμο τύπο

$$\beta_i = (2\pi)^{-1} b_i \alpha_i^2 \quad \text{1ος βρόχος}$$

$$+ (8\pi^2)^{-1} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \alpha_i^2 \alpha_j \quad \text{2ος βρόχος}$$

έχοντας κάνει την αντικατάσταση $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$. Ειδικότερα επιλύθηκε η διαφορική εξίσωση της εξής μορφής (για $i = 1, 2, 3$)

$$\frac{d}{d(\ln \mu)} \alpha_i = (2\pi)^{-1} b_i \alpha_i^2 \quad \text{1ος βρόχος}$$

$$+ (8\pi^2)^{-1} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \alpha_i^2 \alpha_j \quad \text{2ος βρόχος}$$

Στην περίπτωση της **προσέγγισης πρώτου βρόχου** επειδή πρόκειται για μια επί της ουσίας πρώτη προσέγγιση έχουμε χρησιμοποιήσει για την επίλυση (και για τη σχεδίαση) ένα ενεργειακό εύρος που έχει ως αφετηρία του τη μάζα του μποζονίου Z^0 ($M_Z = 91.2 \text{ GeV}$) και εκτείνεται ως τα 10^{17} GeV . Στους τύπους εισάγουμε ως αρχικές παραμέτρους τις τιμές των σταθερών σύζευξης στην ενέργεια M_Z οι οποίες έχουν προσδιοριστεί πειραματικά. Συγκεκριμένα η σταθερά σύζευξης της συμμετρίας βαθμίδας $SU(3)$ της ισχυρής αλληλεπίδρασης έχει μετρηθεί

$$\alpha_s = \alpha_3 = 0,1184 \pm 0,007$$

Ενώ στον ηλεκτρομαγνητισμό η σταθερά σύζευξης στην ενεργειακή κλίμακα του M_Z έχει υπολογιστεί ότι είναι

$$\alpha_{em} = \frac{1}{127.9} \quad (270)$$

ενώ οι σταθερές σύζευξης της βαθμίδας $SU(2) \times U(1)$ της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης προκύπτουν από τον υπολογισμό της γωνίας Weinberg για την οποία έχει προσδιοριστεί πειραματικά ότι

$$\sin^2 \theta(M_W) = 0,23116 \quad (271)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (270), (271) μπορούν να υπολογιστούν οι σταθερές σύζευξης

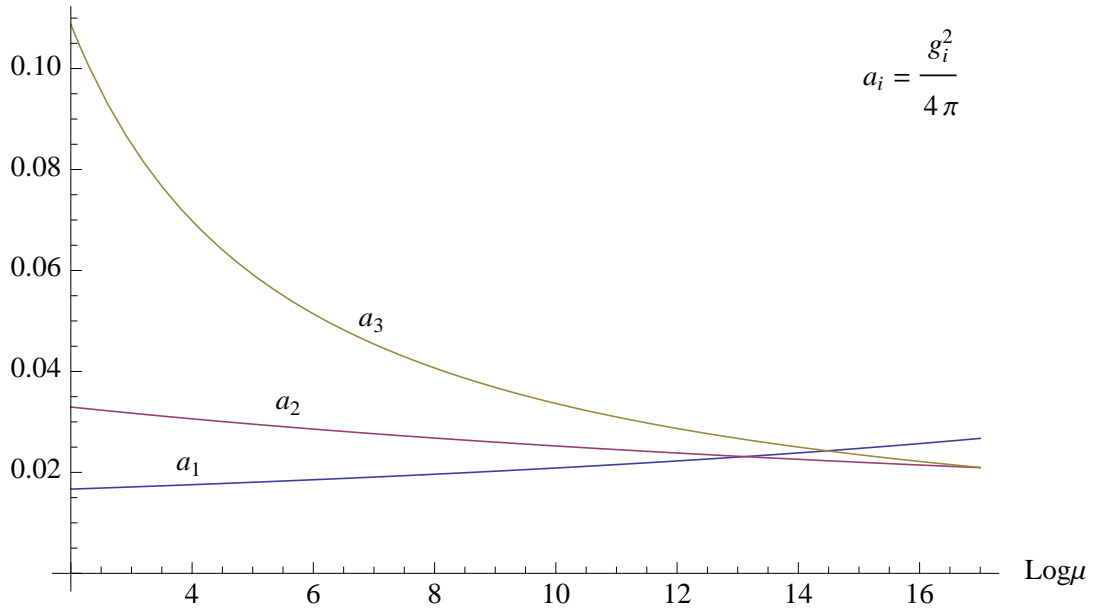
$$\alpha_2 = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta} = 0.033 \quad (272)$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{em}}{\cos^2 \theta} = 0.01 \quad (273)$$

Όμως ο τύπος (273) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στους τύπους. Πρέπει πρώτα να κανονικοποιηθεί κατάλληλα στο σημείο ενοποίησης. Για αυτό το λόγο πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα $\frac{5}{3}$ (όπως έχει αναφερθεί πολλές φορές). Οπότε τελικά

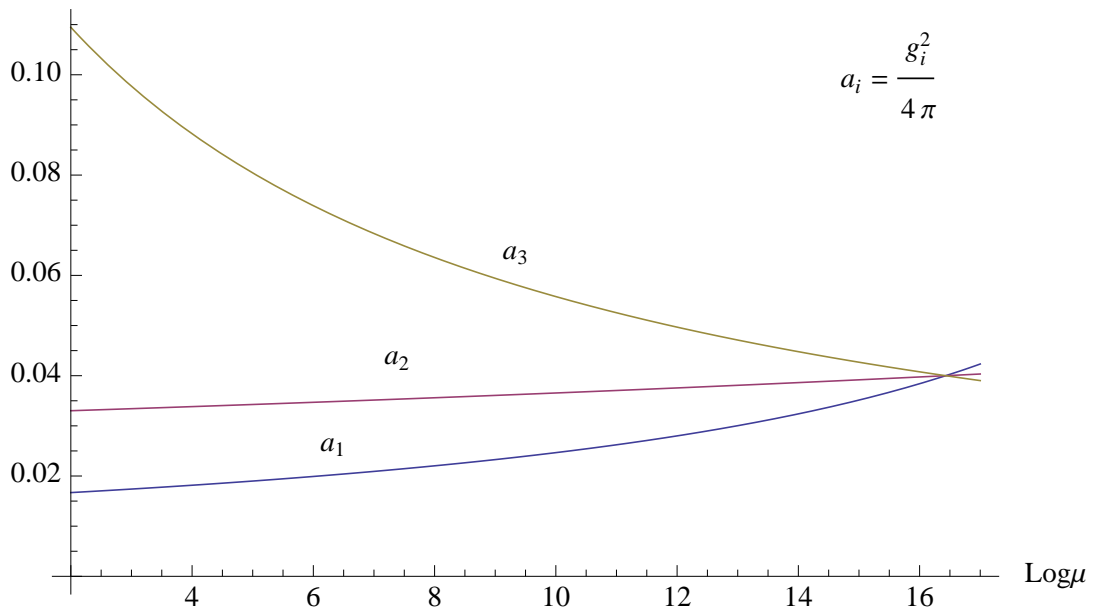
$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \cdot 0.01 \quad (274)$$

Σταθερά Σύζευξης



Σχήμα 5: Εξέλιξη των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο πρότυπο σε προσέγγιση πρώτου βρόχου

Σταθερά Σύζευξης

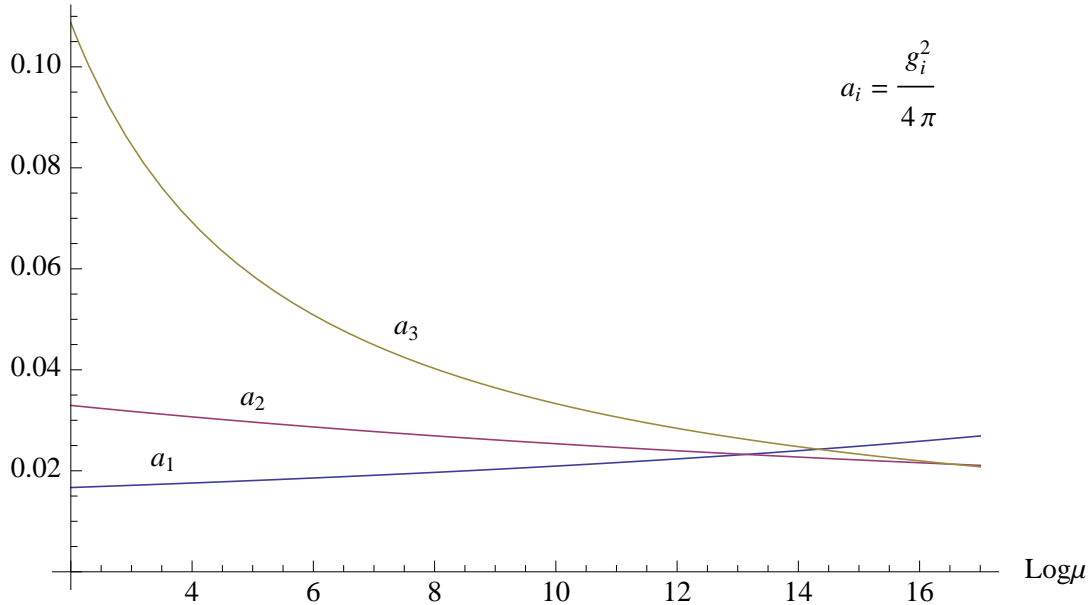


Σχήμα 6: Εξέλιξη των σταθερών σύζευξης στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο σε προσέγγιση πρώτου βρόχου

Από τα σχήματα φαίνεται καθαρά η αδυναμία ενοποίησης στο Καθιερωμένο Πρότυπο θεωρώντας τη μικρότερη ομάδα συμμετρίας βαθμίδας που μπορεί να το εμπεριέχει $SU(5)$. Παρατηρούμε πως πράγματι αναμέναμε ενοποίηση στην ενεργειακή περιοχή των $10^{14} GeV$ κάτι το οποίο φαίνεται με ξεκάθαρο τρόπο πως δεν συμβαίνει. Ωστόσο αυτό το πρόβλημα ξεπερνιέται στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο, λόγω της εισαγωγής των υπερσυμμετρικών σωματιδίων και δύο διπλετών Higgs. Παρατηρούμε ότι όχι μόνο έχουμε ενοποίηση αλλά και ότι αυτή συντελείται σε μεγαλύτερη ενεργειακή κλίμακα από εκείνη που προέβλεπε το προηγούμενο μοντέλο $\approx 10^{16} GeV$.

Στα γραφήματα που αφορούν την εξέλιξη των σταθερών σύζευξης σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου τα πράγματα είναι λίγο πιο διαφορετικά, ειδικότερα στην υπερσυμμετρική περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση του Καθιερωμένου Προτύπου λαμβάνουμε, θεωρώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες με την προσέγγιση πρώτου βρόχου, το εξής γράφημα

Σταθερά Σύζευξης

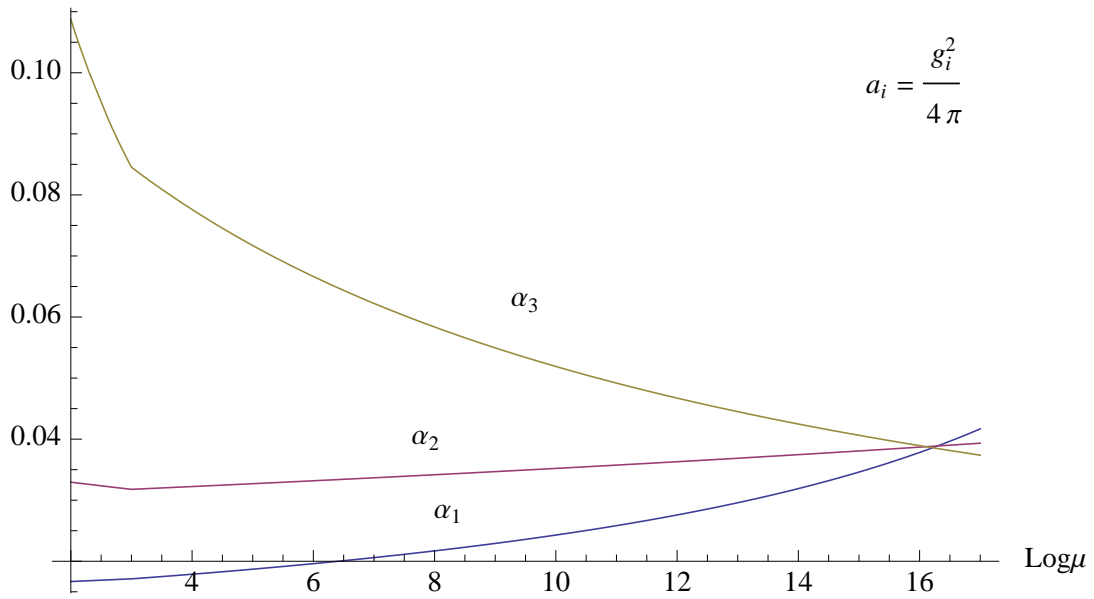


Σχήμα 7: Εξέλιξη των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο πρότυπο σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου

Παρατηρούμε ότι πράγματι έχουμε καλύτερη προσέγγιση όσον αφορά το ζήτημα της ενοποίησης υπό $SU(5)$ (δεδομένου ότι το μέγεθος του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία τομής των τριών σταθερών σύζευξης έχει ελαττωθεί), χωρίς ωστόσο να συντελείται ενοποίηση. Επιβεβαιώνουμε ότι η αδυναμία ενοποίησης του Καθιερωμένου Προτύπου δεν είναι ζήτημα διορθώσεων από συνεισφορές βρόχων ανώτερων τάξεων των διαγραμμάτων Feynman αλλά περισσότερο μια εγγενής αδυναμία του ίδιου του Καθιερωμένου Προτύπου.

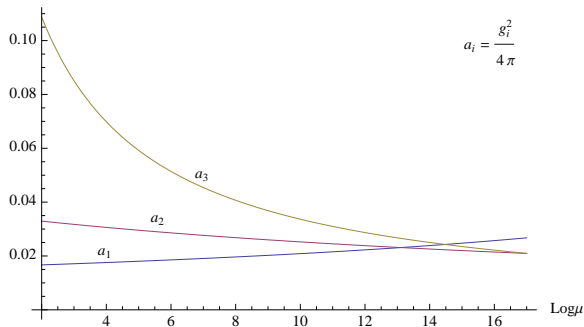
Ωστόσο στα διαγράμματα δευτέρου βρόχου που αφορούν το υπερσυμμετρικό μοντέλο πρέπει να κάνουμε κάποιες τροποποιήσεις προκειμένου να αποκτήσουμε καλύτερη προσέγγιση στην ενοποίηση αλλά και να διατηρήσουμε μια συνέπεια από φυσικής σκοπιάς με τη θεωρητική ανάλυση που έχει προηγηθεί. Για αυτό το λόγο για να πάρουμε το σωστό «τρέξιμο» των σταθερών σύζευξης, δεδομένης της απαίτησης για καλύτερη προσέγγιση, πρέπει να είμαστε αυστηρότεροι με τις αρχικές συνθήκες (εννοώντας εν τέλει ένα μικρό αρχικό ενεργειακό εύρος που αφορά μια τάξη μεγέθους). Συγκεκριμένα έχουμε θεωρήσει ότι στο ενεργειακό εύρος $M_W = 10^2 \text{ GeV}$ ως $M_{SUSY} = 10^3 \text{ GeV}$, δηλαδή από τις τυπικές ενέργειες στις οποίες το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι μια ενεργός θεωρία, μέχρι τη θεωρητική τιμή κατά την οποία έχουμε την έναρξη της νέας φυσικής (μετάβαση στην Υπερσυμμετρία), οι σταθερές σύζευξης εξελίσσονται όπως προβλέπει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που έχουμε εξάγει για το Καθιερωμένο Πρότυπο σε προσέγγιση δύο βρόχων, ενώ από M_{SUSY} και πάνω οι σταθερές τρέχουν όπως προβλέπει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που εξήγαμε για την Υπερσυμμετρική περίπτωση. Στο παράρτημα δίνονται και όλοι οι κώδικες, για να φανούν όλα όσα είπαμε σε αυτό το εδάφιο. Παρατηρείται η απότομη αλλαγή Φυσικής και η καλύτερη ενοποίηση των τριών αλληλεπιδράσεων, ειδικά αν ληφθούν υπόψιν και τα σφάλματα τα οποία δεν σχεδιάστηκαν δεδομένου ότι πρόκειται για ποιοτική αναπαραγωγή γνωστών αποτελεσμάτων.

Σταθερά Σύζευξης

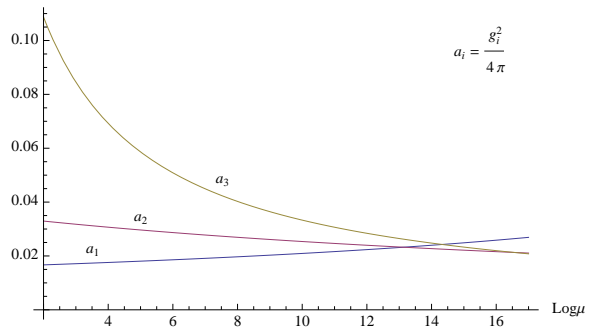


Σχήμα 8: Εξέλιξη των σταθερών σύζευξης στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο σε προσέγγιση δευτέρου βρόχου

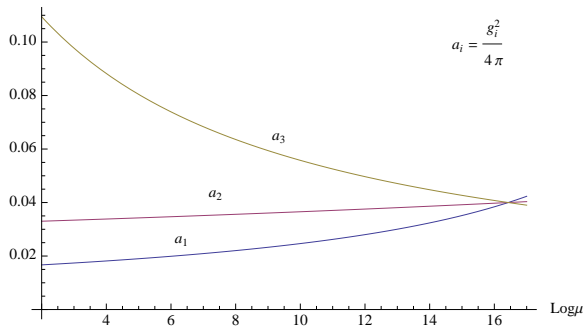
Σταθερά Σύζευξης



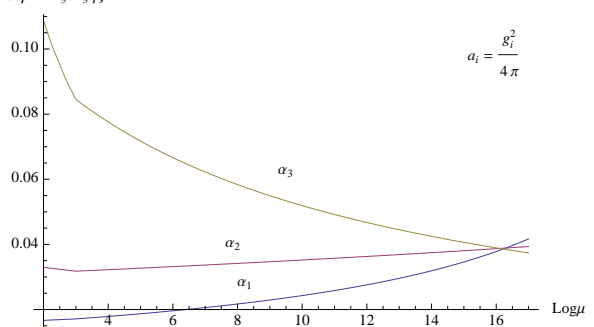
Σταθερά Σύζευξης



Σταθερά Σύζευξης



Σταθερά Σύζευξης



Πίνακας 7: Συγκεντρωτικός πίνακας των γραφημάτων

Αναφορές

- [1] Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*
- [2] Cheng-Li, *Gauge Theory of elementary particle physics*
- [3] Martin, *A Supersymmetry Primer*
- [4] Georgi, *Lie algebras in particle physics*
- [5] Peskin-Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*
- [6] G. K. Leontaris, N. D. Tracas and C. E. Vayonakis, *U(1)'s and Non-Perturbative Unification*, *Mod. Phys. Lett. A* 25(1989)2429
- [7] Ζουπάνος, *Σημειώσεις, Μεγαλοενοποιημένες Θεωρίες*
- [8] Murayama, *Supersymmetry phenomenology*, *arXiv:hep-ph/0002232*
- [9] Jones, *Two-loop β function for a $G_1 \times G_2$ gauge theory*, *Phys. Rev. D* 2(1982)
- [10] *www.Scholarpedia.org*

Παράρτημα

1 βρόχος Καθιερωμένο Πρότυπο

```
b3[a3_] := 1/(2*Pi) (-7*a3^2)
b2[a2_] := 1/(2*Pi) (-19/6*a2^2)
b1[a1_] := 1/(2*Pi) (41/10*a1^2)
tMZ = Log[91.2];

GGG = NDSolve[
  {a3'[t] == b3[a3[t]], a2'[t] == b2[a2[t]], a1'[t] == b1[a1[t]],
  a3[tMZ] == 0.11, a2[tMZ] == 0.033, a1[tMZ] == 0.01*5/3},
  {a3, a2, a1}, {t, tMZ, Log[10^17]}
]
Plot[{a1[Log[10^x]] /. GGG, a2[Log[10^x]] /. GGG, a3[Log[10^x]] /. GGG}, {x,
  2, 17}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {2, 0}]
```

1 βρόχος Υπερσυμμετρία

```
b3[a3_] := 1/(2*Pi) (-3*a3^2)
b2[a2_] := 1/(2*Pi) (1*a2^2)
b1[a1_] := 1/(2*Pi) (33/5*a1^2)
tMZ = Log[91.2];

GGG = NDSolve[
  {a3'[t] == b3[a3[t]], a2'[t] == b2[a2[t]], a1'[t] == b1[a1[t]],
  a3[tMZ] == 0.11, a2[tMZ] == 0.033, a1[tMZ] == 0.01*5/3}, {a3, a2, a1}, {t,
  tMZ, Log[10^17]}
]
Plot[{a1[Log[10^x]] /. GGG, a2[Log[10^x]] /. GGG, a3[Log[10^x]] /. GGG}, {x,
  2, 17}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {2, 0}]
```

2 Βρόχοι Καθιερωμένο Πρότυπο

```
b3[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) (-7*a3^2) + 1/(8*Pi*Pi)*((11/10)*a3^2*a1 + (9/2)*a3^2*a2 - 26*a3^3)
b2[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) ((-19/6)*a2^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((9/10)*a2^2*a1 + 12*a2^2*a3 + (35/6)*a2^3)
b1[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) ((41/10)*a1^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((27/10)*a1^2*a2 + (44/5)*a1^2*a3 + (199/50)*a1^3)
tMZ = Log[91.2];
```

```

GGG = NDSolve[
  {a3'[t] == b3[a1[t], a2[t], a3[t]], a2'[t] == b2[a1[t], a2[t], a3[t]],
  a1'[t] == b1[a1[t], a2[t], a3[t]],
  a3[tMZ] == 0.11, a2[tMZ] == 0.033, a1[tMZ] == 0.01*5/3}, {a3, a2, a1}, {t,
  tMZ, Log[10^17]}
]
Plot[{a1[Log[10^x]] /. GGG, a2[Log[10^x]] /. GGG, a3[Log[10^x]] /. GGG}, {x,
  2, 17}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {2, 0}]

```

2 Βρόχοι Υπερσυμμετρία

```

b3SM[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) (-7*a3^2) + 1/(8*Pi*Pi)*((11/10)*a3^2*a1 + (9/2)*a3^2*a2 - 26*a3^3)
b2SM[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) ((-19/6)*a2^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((9/10)*a2^2*a1 + 12*a2^2*a3 + (35/6)*a2^3)
b1SM[a1_, a2_, a3_] :=
  1/(2*Pi) ((41/10)*a1^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((27/10)*a1^2*a2 + (44/5)*a1^2*a3 + (199/50)*a1^3)
tMZ = Log[91.2];
tMSUSY = Log[10^3]
GGGSM = NDSolve[{a3'[t] == b3SM[a1[t], a2[t], a3[t]],
  a2'[t] == b2SM[a1[t], a2[t], a3[t]], a1'[t] == b1SM[a1[t], a2[t], a3[t]],
  a3[tMZ] == 0.11, a2[tMZ] == 0.033, a1[tMZ] == 0.01*5/3}, {a3, a2, a1}, {t,
  tMZ, tMSUSY}]
a1SUSY = a1[tMSUSY] /. GGGSM[[1]]
a2SUSY = a2[tMSUSY] /. GGGSM[[1]]
a3SUSY = a3[tMSUSY] /. GGGSM[[1]]

```

```

b1SUSY[a1S_, a2S_, a3S_] :=
  1/(2*Pi) ((33/5)*a1S^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((27/5)*a1S^2*a2S + (88/5)*a1S^2*a3S + (199/25)*a1S^3)
b2SUSY[a1S_, a2S_, a3S_] :=
  1/(2*Pi) (a2S^2) + 1/(8*Pi*Pi)*((9/5)*a2S^2*a1S + 24*a2S^2*a3S + 25*a2S^3)
b3SUSY[a1S_, a2S_, a3S_] :=
  1/(2*Pi) (-3*a3S^2) +
  1/(8*Pi*Pi)*((11/5)*a3S^2*a1S + 9*a3S^2*a2S + 14*a3S^3)
GGGSUSY =
  NDSolve[{a3S'[t] == b3SUSY[a1S[t], a2S[t], a3S[t]],
  a2S'[t] == b2SUSY[a1S[t], a2S[t], a3S[t]],
  a1S'[t] == b1SUSY[a1S[t], a2S[t], a3S[t]], a3S[tMSUSY] == a3SUSY,
  a2S[tMSUSY] == a2SUSY, a1S[tMSUSY] == a1SUSY}, {a3S, a2S, a1S}, {t,
  Log[10^3], Log[10^17]}]

```

```

a1TOTAL[t_] := If[t < tMSUSY, a1[t] /. GGGSM[[1]], a1S[t] /. GGGSUSY[[1]]]
a2TOTAL[t_] := If[t < tMSUSY, a2[t] /. GGGSM[[1]], a2S[t] /. GGGSUSY[[1]]]
a3TOTAL[t_] := If[t < tMSUSY, a3[t] /. GGGSM[[1]], a3S[t] /. GGGSUSY[[1]]]

```

```

Plot[a1S[t] /. GGGSUSY, {t, tMSUSY, Log[10^17]}]
Plot[{a1TOTAL[Log[10^x]], a2TOTAL[Log[10^x]], a3TOTAL[Log[10^x]]}, {x, 2,
  17}]

```