

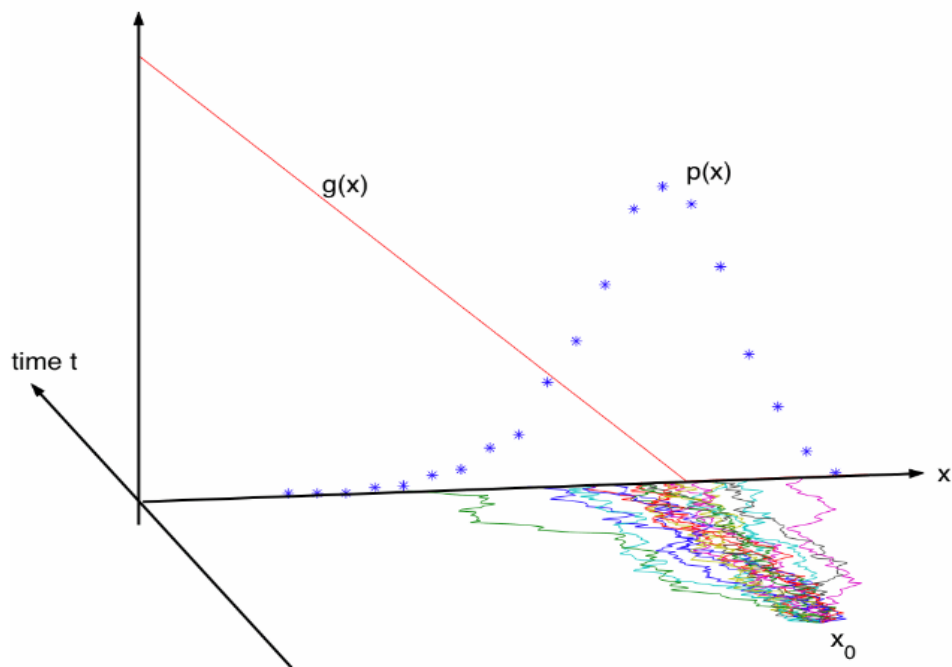


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΛΟΤΚΑ- VOLTERRA

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ Π. ΧΑΡΜΠΗ

Επιβλέπων : **ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LOTKA- VOLTERRA**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ Π. ΧΑΡΜΠΗ

Επιβλέπων: **ΣΠΗΛΙΩΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 1^η Οκτωβρίου 2012.

.....
Αν. Καθ. Ι. Σπηλιώτης

.....
Καθ. Γ. Κοκολάκης

.....
Επ. Καθ. Μ. Λουλάκης

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2012

.....
Κωνσταντίνα Π. Χαρμπή

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνα Π. Χαρμπή, 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μοντέλα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων παίζουν κυρίαρχο ρόλο σε μια πληθώρα περιοχών, όπως η χημεία, η μηχανική, η μικροηλεκτρονική και τα οικονομικά. Ωστόσο, πρόσφατα, υπάρχει αύξηση της χρήσης των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και σε άλλες περιοχές, όπως οι κοινωνικές επιστήμες, η υπολογιστική βιολογία και τα χρηματοοικονομικά. Δυστυχώς, πολλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές καθίσταται αδύνατο να επιλυθούν αναλυτικά και κατά συνέπεια απαιτείται η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων.

Υπάρχουν ποικίλες προσεγγίσεις αναφορικά με την αριθμητική επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Μέθοδοι Monte Carlo μπορούν να χρησιμοποιηθούν όποτε το φυσικό σύστημα προσομοιώνεται απευθείας με χρήση μιας σειράς τυχαίων αριθμών. Μια άλλη μέθοδος περιλαμβάνει τη διαμέριση τόσο της χρονικής όσο και της χωρικής μεταβλητής. Ωστόσο, η πλέον αποτελεσματική και ευρέως εφαρμόσιμη μέθοδος περιλαμβάνει διαμέριση μόνο του χρόνου, παρέχοντας με αυτόν τον τρόπο προσεγγιστικές τιμές των μονοπατιών σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τις πιο βασικές από τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Οι αριθμητικές αυτές μέθοδοι βασίζονται στην προσομοίωση μονοπατιών των προσεγγίσεων διακριτού χρόνου. Επιπλέον, επισημαίνεται πώς αυτές οι μέθοδοι μπορούν να προκύψουν από τη στοχαστική ανάπτυξη Taylor, δίνοντας με αυτόν τον τρόπο τη δυνατότητα άντλησης πιο προχωρημένων αριθμητικών σχημάτων ενώ παρουσιάζονται οι προσομοιώσεις μιας σειράς παραδειγμάτων κλιμακούμενης δυσκολίας παρέχοντας μια συνολική εικόνα της μεθόδου και της αποτελεσματικότητας αυτής.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Μέθοδος (Σχήμα) Euler-Maruyama, Μέθοδος (Σχήμα) Milstein, Ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5, Μέθοδος προβλέπτη-διορθωτή, Στοχαστικό μοντέλο Lotka- volterra, Εξίσωση Verhulst, Ανάπτυξη Itô –Taylor, Ισχυρή σύγκλιση, Ισχυρή τάξη σύγκλισης, Ισχυρή συνεκτικότητα

ABSTRACT

Stochastic differential equation (SDE) models play a prominent role in a range of application areas, including chemistry, mechanics, microelectronics and economics. However, recently there has been an increase in the use of stochastic differential equations in other areas, such as social sciences, computational biology and finance. Unfortunately, many stochastic differential equations that appear in practical applications cannot be solved explicitly and therefore require the use of numerical methods.

There are various approaches to solving stochastic differential equations numerically. Monte Carlo methods could be used whereby the physical system involved is simulated directly using a sequence of random numbers. Another method involves the discretization of both the time and space variables. However, the most efficient and widely applicable approach involves the discretization of the time variable only, thus generating approximate values of the sample paths at the discretization times.

This paper highlights the most basic numerical methods that can be used to solve stochastic differential equations numerically. These numerical methods are based on the simulation of sample paths of time discrete approximations. Furthermore, it shows how these methods can be derived from the stochastic Taylor expansion, thus providing opportunities to derive more advanced numerical schemes and presents the simulations of a series of examples of scaling difficulty, thus providing an overview of the method and its efficiency.

KEYWORDS: Euler-Maruyama method (scheme), Milstein method (scheme), Strong order 1,5 Taylor scheme, Predictor-Corrector method, Stochastic lotka-volterra model, Verhulst equation, Itô –Taylor expansion, strong convergence, strong order of convergence, strong consistency

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Σπηλιώτη για τις γνώσεις που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς επίσης και για τον τρόπο διδασκαλίας του ο οποίος συνέβαλε καθοριστικά στην επιθυμία μου για ενασχόληση με το αντικείμενο 'της στατιστικής και των πιθανοτήτων'. Επίσης, θα ήθελα εξίσου να τον ευχαριστήσω για την αμέριστη συμπαράσταση και συνεχή καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Ακολούθως, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που μου παρείχαν. Θα ήθελα, ωστόσο, να ξεχωρίσω τον καθηγητή και διευθυντή του μεταπτυχιακού προγράμματος κ. Γεώργιο Κοκολάκη, για τη πολύτιμη βοήθεια και συμβουλές του όλη τη χρονιά.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, που μου συμπαραστέκεται σε κάθε βήμα μου και με εμπνυχώνει ηθικά για την επίτευξη των στόχων μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ABSTRACT	8
ΣΧΗΜΑΤΑ	13
ΠΙΝΑΚΕΣ	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	
1.1 Σύντομη Εισαγωγή	15
1.2 Δομή της εργασίας	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΥΝΤΟΜΗ ΘΕΩΡΙΑ	
2.1 Βιβλιογραφική επισκόπηση	19
2.2 Βασική θεωρία	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	
3.1 Μέθοδος Euler-Maruyama	27
3.1.0 Περιγραφή της μεθόδου- Εισαγωγικά παραδείγματα	27
3.1.1 Σύγκλιση της μεθόδου- Τάξης σύγκλισης	31
3.1.2 Παραδείγματα-Εφαρμογές της μεθόδου	39
3.1.3 Αριθμητικός υπολογισμός και ανάλυση του σφάλματος	48
3.1.4 Επί τούτου υπολογισμός της τάξης σύγκλισης για τη Γραμμική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση	58
3.1.5 Επιπλέον παραδείγματα και εφαρμογές της μεθόδου	62
3.1.6 Αριθμητικές επισημάνσεις αναφορικά με το σχήμα Euler	70
3.2 Μέθοδος Milstein	71
3.2.0 Περιγραφή της μεθόδου- Ανάπτυξη Itô –Taylor	71

3.2.1	<i>Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου</i>	75
3.2.2	<i>Σχέση μεταξύ σχημάτων Euler και Milstein</i>	79
3.2.3	<i>Ισχυρή σύγκλιση για τα σχήματα Euler και Milstein</i>	84
3.3	<i>Μέθοδος προβλέπτως-διορθωτής</i>	88
3.3.0	<i>Παρουσίαση της μεθόδου</i>	88
3.3.1	<i>Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου</i>	88
3.4	<i>Ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5</i>	90
3.4.0	<i>Παρουσίαση της μεθόδου</i>	90
3.4.1	<i>Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου</i>	94
3.4.2	<i>Συγκριτικά αποτελέσματα μεθόδων</i>	98
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LOTKA-VOLTERRA		
4.1	<i>Περιγραφή</i>	100
4.2	<i>Προσομοίωση ντετερμινιστικού και στοχαστικού μοντέλου Lotka-Volterra</i>	101
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ		106
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ		107
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		112

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΣΧΗΜΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
3.1	Προσέγγιση Euler για τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross με βήμα $\delta = 2^{-7}$.	31
3.2	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-2}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	42
3.3	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-4}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	43
3.4	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-4}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck.	47
3.5	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck.	48
3.6	Διαστήματα εμπιστοσύνης για αυξανόμενο αριθμό ομάδων.	53
3.7	Διαστήματα εμπιστοσύνης για αυξανόμενο βήμα.	55
3.8	\log_2 του απολύτου σφάλματος συναρτήσει $\log_2 \delta$.	56
3.9	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-5}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.	65
3.10	Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.	66
3.11	Προσέγγιση της 'δαμαζόμενης' μεθόδου Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.	68
3.12	Προσέγγιση Euler με βήμα $\delta = 0,1$ για το μοντέλο της γενετικής.	70
3.13	Προσεγγίσεις Milstein (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	77
3.14	Προσεγγίσεις Milstein (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-9}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	78
3.15	Προσέγγιση Milstein για τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross.	83
3.16	Προσέγγιση Euler για τη μετασχηματισμένη διαδικασία.	84
3.17	Ένα προσομοιωμένο μονοπάτι της κίνησης Brown για αυξανόμενα επίπεδα διαμέρισης, με το N να είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων του $[0,1]$.	86
3.18	Ταχύτητα σύγκλισης των σχημάτων Euler και Milstein (Euler=κίτρινη ενιαία γραμμή, Milstein=γαλάζια διακεκομμένη γραμμή) στην πραγματική τιμή (μωβ γραμμή με τελείες) συναρτήσει του βήματος $\Delta t = \frac{1}{N}$.	87
3.19	Προσέγγιση με τη μέθοδο προβλέπτη-διορθωτή (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια	90

	γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	
3.20	Προσεγγίσεις με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 (κόκκινη γραμμή), Milstein (πράσινη γραμμή) και Euler (μωβ γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	96
3.21	Προσεγγίσεις με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 (κόκκινη γραμμή), Milstein (πράσινη γραμμή) και Euler (μωβ γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-9}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.	97
3.22	Ταχύτητα σύγκλισης των σχημάτων Euler, Milstein και Taylor τάξης 1,5 (Euler=κίτρινη ενιαία γραμμή, Milstein=κόκκινη διακεκομμένη γραμμή, Ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 = πράσινη διακεκομμένη γραμμή) στην πραγματική τιμή (μωβ γραμμή με τελείες) συναρτήσει του βήματος $\Delta t = \frac{1}{N}$.	99
4.1	Υπολογιστικά αποτελέσματα για το ντετερμινιστικό μοντέλο για ένα σύστημα ανταγωνισμού.	104
4.2	Υπολογιστικά αποτελέσματα για το στοχαστικό μοντέλο για ένα σύστημα ανταγωνισμού.	104
Π.1	Προσομοιωμένα μονοπάτια της κίνησης Brown	109

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
3.1	Απόλυτο σφάλμα $\hat{\varepsilon}$ για βήμα $\delta = 2^{-4}$.	50
3.2	Απόλυτα σφάλματα $\hat{\varepsilon}$ για διαφορετικά βήματα δ .	50
3.3	Απόλυτα σφάλματα $\hat{\varepsilon}_1$ και $\hat{\varepsilon}_2$ για διαφορετικά βήματα δ .	50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Σύντομη Εισαγωγή

Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να ερμηνεύσουν και να μοντελοποιήσουν τη συμπεριφορά των συστημάτων στο πέρασμα του χρόνου. Έχουν ευρεία εφαρμογή σε πολλούς επιστημονικούς τομείς, από τη χημεία και τη φυσική έως τη μηχανική, την ιατρική και τα χρηματοοικονομικά. Για παράδειγμα, ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού μπορεί να μοντελοποιηθεί κατά τη διάρκεια μικρών χρονικών περιόδων υποθέτοντας ότι ο πληθυσμός αυξάνεται συνεχώς στο χρόνο με ρυθμό ανάλογο του αριθμού των παρόντων ατόμων σε εκείνη τη χρονική στιγμή:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

όπου $N(t)$ είναι ο αριθμός των ατόμων τη χρονική στιγμή t και λ ο σταθερός ρυθμός ανάπτυξης του πληθυσμού. Η κίνηση ενός εκκρεμούς, δύναται να περιγραφεί από την ακόλουθη δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση (Burden and Faires, 1997):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

όπου L είναι το μήκος του εκκρεμούς, g η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας και θ η γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφη θέση ισορροπίας. Στη θεωρία της εξάπλωσης μεταδοτικών ασθενειών, χρησιμοποιείται η ακόλουθη στοιχειώδης διαφορική εξίσωση, προκειμένου να προβλεφθεί ο αριθμός των μολυσμένων ατόμων του πληθυσμού σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k x(t) y(t)$$

όπου $x(t)$ είναι ο αριθμός των ευπαθών ατόμων τη χρονική στιγμή t και $y(t)$ ο αριθμός των μολυσμένων ατόμων (Burden and Faires, 1997).

Αρκετές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, και όπου αυτό δεν είναι εφικτό, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Η χρήση των αριθμητικών μεθόδων έχει αυξηθεί τα τελευταία χρόνια με την αύξηση της υπολογιστικής δύναμης των προσωπικών υπολογιστών.

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις έχουν αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμες για την επεξήγηση της συμπεριφοράς των συστημάτων με τον χρόνο. Ωστόσο, όταν υπάρχουν αβεβαιότητες

και όταν η τυχαιότητα υπεισέρχεται στο σύστημα, οι διαφορικές εξισώσεις πρέπει να προσαρμοστούν καταλλήλως προκειμένου να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες διακυμάνσεις. Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν με φυσικό τρόπο κατά την περιγραφή αυτών των συστημάτων που επηρεάζονται από την τυχαιότητα.

Παραδοσιακά, οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, έχουν εφαρμογή στη χημεία, τη φυσική, τις μηχανικές επιστήμες, τη μικροηλεκτρονική και τα οικονομικά. Ωστόσο προσφάτως, η χρήση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχει επεκταθεί και σε άλλα πεδία όπως οι κοινωνικές επιστήμες, η υπολογιστική βιολογία και τα χρηματοοικονομικά. Ο Cobb (1998) μας παρέχει ορισμένα παραδείγματα όπου οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις εφαρμόζονται στις κοινωνικές επιστήμες. Ο Brown και λοιποί (2006), χρησιμοποιούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις προκειμένου να προσδιορίσουν το χρόνο απόκρισης στην απλή λήψη αποφάσεων. Ο Saarinen και λοιποί (2006) μοντελοποιούν την εγγενή δυναμική συμπεριφορά των νευρώνων, χρησιμοποιώντας στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Ο Manninen και λοιποί (2006) χρησιμοποιούν τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις προκειμένου να περιγράψουν τη συμπεριφορά των νευρωνικών δικτύων μετάδοσης σήματος. Ο Carletti (2006) χρησιμοποιεί την εφαρμογή των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στις βιοεπιστήμες.

Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις κυριαρχούν και στα χρηματοοικονομικά. Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η εξεύρεση μοντέλου για την απεικόνιση των μεταβολών των τιμών των παγίων περιουσιακών στοιχείων βασίζεται στην ιδέα ότι οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων δύνανται να απεικονισθούν με στοχαστικές διαδικασίες (Hughston, 1996). Το πρότυπο συνεχές δυναμικό μοντέλο για την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου μπορεί να αποκτηθεί, υποθέτοντας ότι η στοχαστική διαδικασία S_t για την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή t είναι μια διαδικασία Itô η οποία χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

η οποία μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως ακολούθως:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t.$$

Το μοντέλο αυτό υποστηρίζει ότι η απειροελάχιστη μεταβολή της τιμής dS_t τη χρονική στιγμή t , που εκφράζεται ως ποσοστό της τιμής, δίδεται από το άθροισμα της μετατόπισης $\mu_t dt$ και ενός ταχέως κυμαινόμενου όρου $\sigma_t dW_t$ όπου W_t είναι η κίνηση Brown (Hughston, 1996).

Υπάρχει μία καλά ανεπτυγμένη θεωρία που αφορά την τιμολόγηση των περιουσιακών στοιχείων και πλήθος μοντέλων έχουν προταθεί. Τα μοντέλα ποικίλουν από το διάσημο μοντέλο Black- Scholes, διωνυμικά και τριωνυμικά μοντέλα και δυναμικό αρμπιτράζ (δηλαδή αγοραπωλησία με σκοπό το κέρδος) μέχρι μοντέλα της οικογένειας Heath- Jarrow- Morton. Τα συνεχούς χρόνου μοντέλα απαιτούν τη χρήση στοχαστικών διαδικασιών και τις περισσότερες φορές περιλαμβάνουν τη χρήση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Η θεωρία και η εφαρμογή της μοντελοποίησης του επιτοκίου, που αποτελεί μέρος της γενικότερης θεωρίας της δυναμικής τιμολόγησης των περιουσιακών στοιχείων, αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους τομείς της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας. Την προηγούμενη δεκαετία, υπήρξε μία διεύρυνση στην έκταση και τον όγκο των σχετιζομένων με το επιτόκιο προϊόντων, τα οποία αποτελούσαν αντικείμενο εμπορίου στις διεθνείς χρηματοοικονομικές αγορές. Σύμφωνα με την Παγκόσμια Ένωση Ανταλλαγών και Παραγώγων, οι εκκρεμείς συναλλαγές πάνω σε πράξεις ανταλλαγής επιτοκίων, συμβάσεις ανταλλαγής συναλλάγματος και δικαιώματα προαίρεσης επιτοκίων, τέλος του 1995 ανέρχονταν στο ποσό των \$ 17,713 τρισεκατομμυρίων σε ονομαστικό κεφάλαιο, ενώ τέλος του 2004 στο ποσό των \$ 183,6 τρισεκατομμυρίων.

Συνεπώς, είναι ιδιαίτερος σημαντικό για τις επενδυτικές τράπεζες, λοιπούς χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς, κυβερνητικά και εταιρικά γραφεία χαρτοφυλακίων να απαιτούν περισσότερο ακριβείς, αντικειμενικούς και επιστημονικούς τρόπους για την τιμολόγηση, αντιστάθμιση κινδύνου και διαχείριση κινδύνου των προκύπτουσών θέσεων. Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι σημαντικό για τον καθορισμό της έκθεσης των επιχειρήσεων στις μεταβολές της αγοράς. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μοντέλα (όπως αυτά των Hull- White και Heath- Jarrow- Morton) χρησιμοποιούνται προκειμένου να ερμηνεύσουν την εξέλιξη των επιτοκίων και να παράσχουν πρόβλεψη για τις μεταβολές των επιτοκίων. Ωστόσο, επειδή πολλά από αυτά τα μοντέλα δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι.

Εξαιτίας της ολοένα και αυξανόμενης χρήσης παγκοσμίως των παραγώγων επιτοκίων, κατέστη επιτακτική η ανάγκη της εις βάθος κατανόησης των διαθέσιμων αριθμητικών μεθόδων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, ώστε να παρέχεται ακριβέστερος και αποτελεσματικότερος τρόπος για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση του κινδύνου των παραγώγων προϊόντων. Ταυτόχρονα, εκδηλώθηκε έντονο ενδιαφέρον για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις στις μηχανικές και φυσικές επιστήμες. Σε αυτό βοήθησαν οι συνεχείς βελτιώσεις στην υπολογιστική ικανότητα και η ταυτόχρονη μείωση στα κόστη των προσωπικών υπολογιστών.

Υπάρχει πληθώρα μεθόδων που έχουν προταθεί για την επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων αριθμητικά. Οι μέθοδοι Monte Carlo μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός συστήματος. Σε αυτήν τη μέθοδο, η φυσική διαδικασία προσομοιώνεται κατευθείαν χρησιμοποιώντας μια ακολουθία τυχαίων αριθμών χωρίς να υφίσταται η ανάγκη για τον προσδιορισμό διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος. Το φυσικό σύστημα περιγράφεται από συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και εν συνεχεία, η Monte Carlo προσομοίωση μπορεί να ξεκινήσει με τυχαία δειγματοληψία από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Casella και Robert, 2005). Διενεργούνται πολλές προσομοιώσεις και το επιθυμητό αποτέλεσμα λαμβάνεται ως ο μέσος όρος επί του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων.

Ωστόσο, οι Kloeden και Platen (1992) ισχυρίζονται ότι η μέθοδος αυτή είναι σε κάποιο βαθμό ανεπαρκής, διότι δεν λαμβάνει υπ' όψιν την εξειδικευμένη δομή των συντελεστών μετατόπισης και διάχυσης. Μια άλλη μέθοδος για την επίλυση των στοχαστικών

διαφορικών εξισώσεων είναι να γίνεται χρήση της διαμέρισης της χρονικής και χωρικής μεταβλητής, ώστε η λύση να προσεγγίζεται ως μαρκοβιανή αλυσίδα πεπερασμένων καταστάσεων. Η εν λόγω μέθοδος είναι εφαρμοστέα σε απλά προβλήματα, αλλά για προβλήματα υψηλότερων διαστάσεων, μπορεί να περιλαμβάνει σημαντικό υπολογιστικό χρόνο, επειδή οι μήτρες μετάβασης περιέχουν πολλές περιττές πληροφορίες, οι οποίες χρήζουν επανεπεξεργασίας, κατά τη διάρκεια των υπολογισμών.

Μια άλλη μέθοδος, περιλαμβάνει μόνο τη διαμέριση του χρονικού διαστήματος $[0, T]$ και όχι της μεταβλητής κατάστασης. Αυτή η προσέγγιση διακριτού χρόνου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να παράγει προσεγγιστικές τιμές των μονοπατιών σε κάθε βήμα των διακριτών χρόνων. Τα προσομοιωμένα μονοπάτια μπορούν εν συνεχεία να αναλυθούν με χρήση στατιστικών μεθόδων προκειμένου να καθορίσουμε πόσο καλή είναι η προσέγγιση σε σχέση με την ακριβή λύση. Αυτή η μέθοδος είναι αποτελεσματική και μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί μέσω ενός ψηφιακού υπολογιστή. Συνεπώς, η εν λόγω μέθοδος είναι προτιμητέα σε σχέση με λοιπές μεθόδους, καθ' ότι έχει χαμηλότερα υπολογιστικά κόστη.

1.2 Δομή της εργασίας

Μετά τα εισαγωγικά στοιχεία του πρώτου κεφαλαίου, το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει μια βιβλιογραφική επισκόπηση. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικότερες αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και εξετάζεται η σύγκλιση, καθώς και η τάξη σύγκλισης αυτών. Επιπλέον, αναλύεται πώς αυτές οι μέθοδοι μπορούν να προκύψουν από τη στοχαστική ανάπτυξη Taylor, παρέχοντας τοιουτοτρόπως τη δυνατότητα άντλησης πιο προχωρημένων αριθμητικών μεθόδων. Επίσης, παρουσιάζονται προσομοιώσεις σε μια σειρά από παραδείγματα, δίνοντας μ' αυτόν τον τρόπο μια συνολική εικόνα της μεθόδου και της αποτελεσματικότητας αυτής στην πράξη, ενώ δίνονται και συγκριτικά αποτελέσματα μεταξύ των μεθόδων. Η επίδραση του βήματος επίσης λαμβάνεται υπόψη. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το μοντέλο Lotka-Volterra και γίνεται συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από προσομοίωση της ντετερμινιστικής και της στοχαστικής περίπτωσης αυτού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΤΟΜΗ ΘΕΩΡΙΑ

2.1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Η θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων είναι καλά εδραιωμένη. Αρχικά, αναπτύχθηκε από μαθηματικούς ως εργαλείο με σκοπό την αναλυτική κατασκευή των μονοπατιών των διαδικασιών διάχυσης για δεδομένους συντελεστές μετατόπισης και διάχυσης. Σύμφωνα με τον Arnold (1974: xi), οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, «χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά το 1908 από τον Langevin κατά τη μελέτη της κίνησης Brown ενός μορίου σε υγρό». Ο Itô (1942), πρώτος εισήγαγε τα στοχαστικά ολοκληρώματα με σκοπό να «διατυπώσει τη στοχαστική διαφορική εξίσωση που καθορίζει τη διαδικασία διάχυσης Kolmogorov» (Mao, 1991: 1). Έκτοτε, η θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχει αναπτυχθεί.

Υπάρχουν αρκετά βιβλία πάνω στις στοχαστικές διαδικασίες και τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Οι Gihman και Skorohod (1972), παρέχουν κάποια πρώτα αναλυτικά αποτελέσματα πάνω στον λογισμό των τυχαίων διαφορικών εξισώσεων ορισμένων στα πλαίσια της κίνησης Brown. Επίσης, καλύπτουν σχετικά αποτελέσματα από τη θεωρία των πιθανοτήτων και τις στοχαστικές διαδικασίες. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο μέρος του βιβλίου παρουσιάζει τη θεωρία μονοδιάστατων στοχαστικών εξισώσεων των οποίων η λύση δίδεται από τις Μαρκοβιανές διαδικασίες διάχυσης, ενώ το δεύτερο μέρος παρέχει ένα γενικό ορισμό των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που βασίζεται στην ιδέα του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης.

Εν συνεχεία, ο Arnold (1974), παρουσιάζει παραδείγματα τόσο στοχαστικών ολοκληρωμάτων όσο και στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων παρέχοντας ταυτοχρόνως τη λύση στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις σαν Μαρκοβιανή διαδικασία και διαδικασία διάχυσης. Επιπλέον, ο Arnold (1974), πηγαίνει πιο μακριά, εξετάζοντας τη σταθερότητα των δυναμικών στοχαστικών συστημάτων όπως επίσης και τον βέλτιστο έλεγχο των δυναμικών συστημάτων.

Μια πιο θεωρητική προσέγγιση στις στοχαστικές διαδικασίες, παρέχεται από τους Gihman και Skorohod (1979). Το βιβλίο τους καλύπτει τη θεωρία των martingales, των στοχαστικών ολοκληρωμάτων, των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, διαδικασιών διάχυσης και συνεχών Μαρκοβιανών διαδικασιών.

Σε αντίθεση με τον Arnold (1974), που παρέχει λίγες πρακτικές εφαρμογές, ο Schuss (1980) παρουσιάζει θεωρία αλλά κυρίως το βιβλίο του παρέχει ευρύ φάσμα εφαρμογών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων τύπου Itô. Συνεπώς, το βιβλίο γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της μαθηματικής θεωρίας και ευρέος φάσματος πεδίων στα οποία εμφανίζονται οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις: πεδία από τη στατιστική μηχανική και τη θεωρία μεταφορών μέχρι τη μαθηματική γενετική.

Το βιβλίο των Karatzas και Shreve (1988) μελετά τις στοχαστικές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο. Το βιβλίο καλύπτει περιοχές από martingales και χρόνους διακοπής έως την κατασκευή της κίνησης Brown. Ακόμη, παρουσιάζονται η στοχαστική ολοκλήρωση και οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και ταυτόχρονα παρέχονται θεωρητικά ερείσματα για ισχυρές και ασθενείς λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην άντληση αριθμητικών μεθόδων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Από νωρίς έγιναν προσπάθειες στον τομέα των αριθμητικών μεθόδων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Ο Milstein (1974) παρέχει μια πρώτη προσέγγιση για την κατασκευή αριθμητικής μεθόδου που επιλύει στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Η μέθοδος αυτή έγινε γνωστή ως μέθοδος Milstein. Οι Hovanessian και Chang (1977) παρέχουν μία εφαρμογή της κεντρικής διαφοράς και μεθόδους προβλέπτη για την εξεύρεση λύσης διαφορικών εξισώσεων με στοχαστικές εισόδους.

Αριθμητικές μέθοδοι για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, δύνανται να κατασκευαστούν μεταφράζοντας μία ντετερμινιστική αριθμητική μέθοδο (όπως οι μέθοδοι Euler ή Runge-Kutta) και εφαρμόζοντάς τη σε μια στοχαστική συνήθη διαφορική εξίσωση. Ωστόσο, η απλή εφαρμογή της ως άνω διαδικασίας εν γένει δεν θα μας παρέχει ακριβείς μεθόδους (Burrage και Burrage, 1996). Η μέθοδος Euler- Maruyama είναι η απλούστερη μέθοδος και κατ' ουσία αποτελεί άμεση μετάφραση της ντετερμινιστικής μεθόδου Euler. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Burrage και Burrage, η εν λόγω μέθοδος δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής. Δεν παύει όμως να είναι μία ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος, δεδομένου ότι αποτελεί σημείο έναρξης για πιο προχωρημένες αριθμητικές μεθόδους για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Μία πολύ περιεκτική και σαφής δημοσίευση από τους Kloeden και Platen (1992), παρέχει μία κατανοητή και συστηματική παρουσίαση των αριθμητικών μεθόδων, καταλλήλων για τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Το βιβλίο, εστιάζει σε μεθόδους διαμέρισης του χρόνου για προβλήματα αρχικών τιμών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με διάχυση Itô ως λύση αυτών. Παρουσιάζονται αριθμητικές μέθοδοι τόσο για ισχυρή όσο και ασθενή τάξη σύγκλισης.

Ενώ το βιβλίο των Kloeden και Platen (1992) παρέχει αριθμητικά σχήματα, το συμπληρωματικό βιβλίο των Kloeden και λουπών (1994), παρουσιάζει τους υπολογισμούς που σχετίζονται με αυτές τις αριθμητικές μεθόδους. Ο υπολογισμός των ροπών ή των μονοπατιών μίας δεδομένης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι σημαντικός για την αποτελεσματική πρακτική εφαρμογή των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και κατ' αυτόν τον τρόπο, το βιβλίο επικεντρώνεται στους αλγορίθμους που σχετίζονται με αυτούς τους υπολογισμούς.

Από τη δημοσίευση αυτών των βιβλίων, κάποιοι άλλοι επικεντρώθηκαν στα αριθμητικά σχήματα δίνοντας παράλληλα έμφαση στους αλγορίθμους που βασίζονται στο τυπικό λογισμικό. Αυτό οφείλεται κυρίως στα επιτεύγματα της τεχνολογίας των Η/Υ και τη μείωση του κόστους της υπολογιστικής δύναμης. Ο Cyganowski και λοιποί (2002), παρέχουν σημαντικά αποτελέσματα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και σύγχρονης θεωρίας πιθανοτήτων με τη βοήθεια του λογισμικού πακέτου Maple.

Παρουσιάζεται αύξηση του αριθμού των άρθρων που γράφονται, με τα περισσότερα να αντλούν νέα αριθμητικά σχήματα ή να προσαρμόζουν τα ήδη υπάρχοντα σε συγκεκριμένες εφαρμογές, κυρίως σε τομείς όπως η φυσική και οι μηχανικές επιστήμες.

Ο Higham (2001), παρέχει εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Τα θέματα που καλύπτονται, περιλαμβάνουν τις μεθόδους Euler- Maruyama, Milstein και Monte Carlo και χρησιμοποιείται το Matlab για την προσομοίωση αριθμητικών λύσεων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Η σταθερότητα του τετραγωνικού μέσου και η ασυμπτωτική σταθερότητα καθώς επίσης και η ισχυρή και η ασθενής σύγκλιση εξετάζονται από πρακτική σκοπιά.

Οι Burrage και Tian (2001) παρουσιάζουν μια σύνθετη μέθοδο Euler για την ισχυρή λύση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που οδηγούνται από d-διάστατη κίνηση Brown. Αυτή η μέθοδος αποτελεί συνδυασμό της ημι-έμμεσης και έμμεσης μεθόδου Euler και χρησιμοποιείται προκειμένου να ληφθούν βελτιωμένες ιδιότητες ευστάθειας συγκριτικά με τις μεθόδους Euler.

Επίσης, οι Burrage και Tian (2001) παρουσιάζουν έμμεσες μεθόδους Taylor για μη ομαλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις Itô. Ειδικότερα, μελετώνται οι ακόλουθες μέθοδοι: η έμμεση μέθοδος Euler- Taylor με ισχυρή τάξη 0,5, η έμμεση μέθοδος Milstein- Taylor με ισχυρή τάξη 1 και η έμμεση μέθοδος Taylor με ισχυρή τάξη 1,5. Οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι οι ιδιότητες ευστάθειας των έμμεσων μεθόδων Euler- Taylor και Milstein- Taylor είναι πολύ καλύτερες από εκείνες των αντίστοιχων ημι-έμμεσων μεθόδων Euler και Milstein. Σύμφωνα με τα αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούσαν ιδιότητες ευστάθειας και σύγκλισης, οι εν λόγω έμμεσες μέθοδοι φαίνεται να είναι πολλά υποσχόμενες για μη ομαλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.

Ο Naess (2001), επικεντρώνεται σε μεθόδους ολοκλήρωσης μονοπατιού για τον υπολογισμό του νόμου πιθανότητας της λύσης των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Το άρθρο, εστιάζει στον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος της Μαρκοβιανής διαδικασίας η οποία επιλύει τη μη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση. Ο Mannella (2002), επικεντρώνεται στις προσομοιώσεις των στοχαστικών διαδικασιών σε υπολογιστή, αλλά εστιάζει σε αλγόριθμους για την προσομοίωση σπάνιων διακυμάνσεων καθώς είναι θέμα μεγάλου ενδιαφέροντος στη μελέτη των βέλτιστων μονοπατιών. Επιπλέον αναλύονται προβλήματα που σχετίζονται με την διαχείριση των ορίων και του συσχετιζόμενου θορύβου. «Σπάνιες ονομάζονται οι διακυμάνσεις οι οποίες φέρνουν το στοχαστικό σύστημα πολύ μακριά από το χώρο φάσεων, στον οποίο βρίσκεται την περισσότερη ώρα» Mannella (2002: 1). Οι αλγόριθμοι τροποποιούνται για να προσομοιώσουν σπάνιες διακυμάνσεις όταν η προσομοίωση χτυπάει πάνω σε προκαθορισμένο όριο στον χώρο των φάσεων. Η εργασία αυτή, χρησιμοποιεί ισχυρά και ασθενή κριτήρια σύγκλισης προκειμένου να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα των αριθμητικών σχημάτων.

Ο Mannella (2002) μελετά επιπλέον και τη μακροχρόνια δυναμική των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, σε αντίθεση με τα σχήματα σύγκλισης που χρησιμοποιούν τη βραχυχρόνια δυναμική. Αυτό παρακινείται από το γεγονός ότι η καλή βραχυχρόνια συμπεριφορά του συστήματος, δεν συνεπάγεται απαραίτητα καλή συμπεριφορά σε

μακροχρόνιο διάστημα. Επίσης, ο Mannella (2002) παρέχει μία εισαγωγή στις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες οδηγούνται από το μη-λευκό θόρυβο. Ο απλούστερος μη-λευκός θόρυβος, είναι ο εκθετικά συσχετιζόμενος λευκός θόρυβος. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθ' ότι παρέχει βαθιά γνώση και ευκαιρίες για την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων σε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες δεν οδηγούνται από το λευκό θόρυβο για κάποια πραγματικά συστήματα.

Η περισσότερη από τη βιβλιογραφία για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, επικεντρώνεται στα μηχανικά και φυσικά συστήματα, αλλά υπάρχει και αύξηση της εφαρμογής των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και σε άλλους επιστημονικούς τομείς. Ο Cobb (1998), παρέχει παραδείγματα χρήσης των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στις κοινωνικές επιστήμες. Ο Carletti (2003) εφαρμόζει μεθόδους τύπου Runge-Kutta για συνήθεις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και τη μέθοδο Euler- Maruyama για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις με καθυστέρηση, ανακλύπτουσες στις βιοεπιστήμες. Ο Frutos (2005), εφαρμόζει άμεσες-έμμεσες Runge- Kutta μεθόδους ως εναλλακτική μέθοδο για την τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων, ιδιαιτέρως δε για τα Αμερικάνικου τύπου συμβόλαια.

Προσφάτως, έχει υπάρξει αύξηση των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, καθώς οι υπάρχουσες χρησιμοποιούμενες μέθοδοι επεκτείνονται. Άμεσες Runge- Kutta μέθοδοι υψηλής ισχυρής τάξης για συνήθεις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζονται από τους Burrage και Burrage (1996) οι οποίες αποτελούν μια πιο αποτελεσματική κλάση αναλυτικών Runge-Kutta μεθόδων συγκριτικά με τις ήδη υπάρχουσες. Οι μέθοδοι Runge- Kutta, οι οποίες βασίζονται στις προσομοιώσεις της κίνησης Brown, έχουν στην καλύτερη περίπτωση ισχυρή τάξη σύγκλισης 1,5. Προκειμένου να αυξήσουν την τάξη σύγκλισης οι Burrage και Burrage (1996) κατασκευάζουν μία νέα κλάση μεθόδων Runge- Kutta προσθέτοντας όρους πολλαπλών στοχαστικών ολοκληρωμάτων από τη στοχαστική σειρά Taylor. Κατ' αυτόν τον τρόπο, προκύπτει μία άμεση μέθοδος τεσσάρων σταδίων ισχυρής τάξης σύγκλισης 2,0.

Ενώ οι περισσότερες μέθοδοι εστιάζουν στην κλάση ισχυρής σύγκλισης, ο Platen (1995), παρέχει μία σύντομη έρευνα πάνω σε ασθενή σχήματα για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και παραθέτει ορισμένες έμμεσες μεθόδους καθώς επίσης και μεθόδους προβλέπτη- διορθωτή. Τα ασθενή σχήματα είναι σημαντικά εάν η ανάλυση επικεντρώνεται στον υπολογισμό κάποιας συνάρτησης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης Itô.

Κατά τη χρήση ενός ειδικού αριθμητικού σχήματος, παίζουν σημαντικό ρόλο όχι μόνο η φύση και η τάξη της σύγκλισης, αλλά και η ευστάθειά του. Η ευστάθεια ενός αριθμητικού σχήματος είναι σημαντική προκειμένου να αποφευχθεί πιθανή έκρηξη της αριθμητικής λύσης. Ο Abukhaled (2004) παρουσιάζει την ευστάθεια του τετραγωνικού μέσου αριθμητικών μεθόδων ασθενούς τάξης 2,0. Ειδικότερα, χρησιμοποιείται η κλειστή μορφή δευτέρας τάξεως, για να δημιουργήσει ένα κριτήριο ευστάθειας του τετραγωνικού μέσου για ασθενή αριθμητικά σχήματα τάξης 2,0. Ο Tocino (2005), μελετά την ευστάθεια του τετραγωνικού μέσου των άμεσων μεθόδων Runge- Kutta δύο σταδίων τάξης 2,0 που έχουν προταθεί από τους Tocino και Vigo- Aguiar (2002). Η ομοιότητα μεταξύ των Abukhaled και Tocino, είναι ότι και οι δύο μελέτες εστιάζουν στη σταθερότητα ασθενών σχημάτων σε

σχέση με τη ροπή δευτέρας τάξεως. Ο Tosino πηγαίνει λίγο πιο πέρα μελετώντας την ευστάθεια γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με πολλαπλασιαστικό θόρυβο.

Σε όλα τα αριθμητικά σχήματα που έχουν αναφερθεί, χρησιμοποιήθηκε σταθερό βήμα. Οι Lehn και λοιποί (2002), ερευνούν προσαρμοστικά σχήματα που χρησιμοποιούν μεταβλητά βήματα στο αριθμητικό σχήμα. Μία επανεξέταση των δύο βασικών αλγορίθμων ελέγχου βήματος διενεργείται και η αποτελεσματικότητά τους συγκρίνεται σε μελέτη προσομοίωσης. Τα προσαρμοστικά σχήματα αποτελούν πιθανό τρόπο μείωσης του υπολογιστικού κόστους. Τα εν λόγω σχήματα προτάθηκαν ως εναλλακτική στα σχήματα υψηλότερης τάξης που απαιτούν προσομοίωση πολλαπλών ολοκληρωμάτων Itô από τη στοχαστική ανάπτυξη Taylor και υπολογισμό συναρτήσεων- έργο πολύ δύσκολο και χρονοβόρο.

Στην πλειονότητα των άρθρων, οι συντελεστές είχαν θεωρηθεί τοπικά Lipschitz και τα αριθμητικά σχήματα βασίστηκαν σε αυτή την υπόθεση. Ο Zhang (2006) αποδεικνύει ότι η προσέγγιση Euler- Maruyama για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις συγκλίνει ομοιόμορφα στη λύση με την L^p έννοια.

Η σύγκλιση των σχημάτων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων εξετάζεται και από τον Fleury (2006). Η σχεδόν βεβαία σύγκλιση αποδεικνύεται για τα άμεσα και έμμεσα σχήματα Euler, τα άμεσα σχήματα Milstein, το στοχαστικό σχήμα Newmark και το έμμεσο σχήμα Itô - Milstein. Χρησιμοποιείται η οικογένεια των χρόνων διακοπής για να διασφαλίσει τη σχεδόν βεβαία σύγκλιση των σχημάτων.

2.2 Βασική θεωρία

1. Στοχαστικές διαδικασίες και κίνηση Brown

Ορισμός 2.2.1 Έστω $T \neq \emptyset$ ένα σύνολο δεικτών. Στοχαστική ανέλιξη στο T με τιμές στο \mathbb{R}^m ονομάζεται μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$ ορισμένων σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) και τιμές στο \mathbb{R}^m . Όταν $T = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ή $T = \mathbb{Z} = (\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ πρόκειται για στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου ενώ αν T είναι διάστημα του \mathbb{R} λέγεται στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου. Για τυχόν αλλά δοσμένο $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $T \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ονομάζεται μονοπάτι ή πραγματοποίηση της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t, t \in T\}$. Συχνά θα γράφουμε $X = \{X_t, t \in T\}$ και στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στη στοχαστική ανέλιξη X .

Το βασικό στοιχείο ενός μοντέλου που περιγράφει τη στοχαστική εξέλιξη είναι η επονομαζόμενη κίνηση Brown.

Ορισμός 2.2.2 Τυπική μονοδιάστατη Κίνηση Brown ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη $\{W_t, t \in [0, \infty)\}$ με τιμές στο \mathbb{R} , ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, F, P) εφοδιασμένο με μια διήθηση $\{F_t, t \geq 0\}$ (δηλαδή μια αύξουσα οικογένεια σ-αλγεβρών) εις τρόπον ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- i. Για κάθε $t \geq 0$ η W_t είναι F_t -μετρήσιμη.
- ii. Η στοχαστική ανέλιξη $\{W_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές.
- iii. $W_0 = 0$ P -σχεδόν βεβαίως.

- iv. Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας F_s .
- v. Όταν $0 \leq s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $W_t - W_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0, t - s)$.

Ιδιότητα της κίνησης Brown

- Για οποιαδήποτε $s, t \geq 0$, $Cov(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$.

2. Ολοκλήρωμα Itô

Σε αυτήν την ενότητα θα θεωρούμε (Ω, F, P) έναν χώρο πιθανότητας εφοδιασμένο με μια διήθηση $\{F_t, t \geq 0\}$. Επίσης $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι μονοδιάστατη κίνηση Brown ορισμένη σε αυτόν τον χώρο.

Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{L}(a, b)$ το σύνολο των συναρτήσεων $f: [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν:

- i. Η f είναι $\mathcal{B}_{[a,b]} \otimes F$ -μετρήσιμη.
- ii. Για έκαστο $t \in [a, b]$ η τυχαία μεταβλητή $f(t, \cdot)$ είναι F_t -μετρήσιμη.
- iii. $\int_a^b E[f^2(t, \cdot)] dt < \infty$.

όπου $\mathcal{B}_{[a,b]} \otimes F$ είναι η σ -άλγεβρα γινόμενο, δηλαδή $\mathcal{B}_{[a,b]} \otimes F = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{B}_{[a,b]}, B \in F\})$, όπου $\mathcal{B}_{[a,b]}$ είναι τα σύνολα Borel του $[a, b]$ δηλαδή $\mathcal{B}_{[a,b]} = \{[a, b] \cap B : B \in \mathcal{B}\}$.

Ιδιαίτερα, αν για μια $f \in \mathcal{L}(a, b)$ υπάρχει διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ και F_{t_i} -μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές $f_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$ ώστε να ισχύει:

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) I_{[t_i, t_{i+1})}(t) + f_{n-1}(\omega) I_{\{b\}}(t) \quad (2.2.1)$$

τότε η f λέγεται στοιχειώδης στοχαστική ανέλιξη και θα γράφουμε $f \in \mathcal{L}^0(a, b)$.

Αποδεικνύεται ότι αν $f \in \mathcal{L}(a, b)$ τότε υπάρχει ακολουθία στοιχειωδών στοχαστικών ανελιξεων $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^0(a, b)$ εις τρόπον ώστε να ισχύει:

$$\lim_n E \left[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt \right] = 0.$$

Όταν η στοχαστική ανέλιξη $f \in \mathcal{L}^0(a, b)$, το στοχαστικό ολοκλήρωμά της ορίζεται ως εξής:

Αν η στοχαστική ανέλιξη $f \in \mathcal{L}^0(a, b)$ γράφεται όπως στην (2.2.1) ορίζουμε

$$\int_a^b f(t) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} f_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}). \quad (2.2.2)$$

Ορισμός 2.2.3 Έστω $f \in \mathcal{L}(a, b)$, Το ολοκλήρωμα Itô της f στο $[a, b]$ ορίζεται από τη σχέση

$$\int_a^b f(t) dW_t = \lim_n \int_a^b f_n(t) dW_t \quad \text{με την } \mathcal{L}^2\text{-έννοια}$$

όπου $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία στοιχειωδών στοχαστικών ανελιξεων τέτοια ώστε

$$\lim_n E \left[\int_a^b (f(t) - f_n(t))^2 dt \right] = 0$$

και με $\int_a^b f_n(t) dW_t$ οριζόμενο από την (2.2.2).

Κάποιες πολύ βασικές ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô διατυπώνονται στη συνέχεια. Έστω ότι $f, g \in \mathcal{L}(a, b)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

1. $E \left[\int_a^b f(t) dW_t \right] = 0$.
2. $E \left[\left(\int_a^b f(t) dW_t \right)^2 \right] = E \left[\int_a^b f^2(t) dt \right]$.
3. $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dW_t = \lambda \int_a^b f(t) dW_t + \mu \int_a^b g(t) dW_t$.
4. Η τυχαία μεταβλητή $I = \int_a^b f(t) dW_t$ είναι F_b -μετρήσιμη.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστή και ως ισομετρία Itô.

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε πολύ τις ιδιότητες 2 και 3.

Ακολουθως, δίνουμε τον ορισμό της τετραγωνικής κύμανσης μιας στοχαστικής ανέλιξης.

Ορισμός 2.2.4 Έστω $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ και X_t μια στοχαστική ανέλιξη. Η τετραγωνική κύμανση είναι η διαδικασία, την οποία συμβολίζουμε με $\langle X \rangle_t$ και η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\langle X \rangle_t = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2,$$

όπου $\|P\| = \sup_k |t_{k+1} - t_k|$, δηλαδή η λεπτότητα της διαμέρισης.

Ειδική περίπτωση

- $\langle W \rangle_t = t$

3. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις-Κανόνας του Itô

Με τον όρο στοχαστική διαφορική εξίσωση εννοούμε την αναζήτηση μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X_t, t \in [0, T]\}$ με τιμές στο \mathbb{R} η οποία μεταξύ άλλων ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dW_s, 0 \leq t \leq T \quad (2.2.3)$$

όπου $a, b: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις και $W = \{W_t, t \geq 0\}$ είναι κίνηση Brown. Η X_t καλείται διαδικασία Itô. Τα ολοκληρώματα στην (2.2.3) ερμηνεύονται με την έννοια Itô. Η (2.2.3) γράφεται εναλλακτικά

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t.$$

Αν η X είναι διαδικασία Itô τότε αναφορικά με την τετραγωνική της κύμανση έχουμε

$$\langle X \rangle_t = \langle X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dW_s \rangle_t = \langle \int_0^t b(s, X_s) dW_s \rangle_t = \int_0^t b^2(s, X_s) ds.$$

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô απαντάει στο ερώτημα: Αν η X_t ικανοποιεί την ως άνω στοχαστική διαφορική εξίσωση και αν $Y_t = F(t, X_t)$ είναι ένας μετασχηματισμός της X_t τι μπορούμε να πούμε για την συμπεριφορά της Y_t ; Αποδεικνύεται ότι αν η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}$ και $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ τότε

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X \rangle_t$$

ή

$$dY_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)b^2(t, X_t) \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)b(t, X_t)dW_t$$

Το παραπάνω είναι γνωστό ως κανόνας του Itô.

4. Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη, δίνει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Θεώρημα 2.1 Έστω ότι οι συναρτήσεις $a, b: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις:

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y| \quad (\text{συνθήκη Lipschitz})$$

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2)$$

για όλα τα $t \geq 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, όπου $K, L > 0$. Αν η X_0 είναι F_0 -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.2.3) έχει λύση και η λύση είναι μοναδική, υπό την έννοια ότι αν Y_t ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.2.3) τότε $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N, N \in \mathcal{F}, p(N) = 0$ και για κάθε $t \in [0, T]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Θεωρούμε τη βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (3.1.1)$$

στο διάστημα $[\tau_0, T]$ με αρχική συνθήκη $X_{\tau_0} = X_0$, όπου W_t είναι κίνηση Brown

ή σε ολοκληρωτική μορφή

$$X_t = X_0 + \int_{\tau_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{\tau_0}^t b(s, X_s) dW_s .$$

Οι όροι στην (3.1.1) καλούνται ως εξής:

- $a(t, X_t)$: συντελεστής μετατόπισης
- $b(t, X_t)$: συντελεστής διάχυσης
- λύση $X = \{X_t, \tau_0 \leq t \leq T\}$: διαδικασία Itô

Ο συντελεστής μετατόπισης είναι το ντετερμινιστικό κομμάτι της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης και χαρακτηρίζει την τοπική τάση. Ο συντελεστής διάχυσης είναι το στοχαστικό κομμάτι το οποίο επηρεάζει το μέσο μέγεθος των διακυμάνσεων της X . Οι ίδιες οι διακυμάνσεις προέρχονται από την κίνηση Brown W_t .

3.1 Μέθοδος Euler-Maruyama

3.1.0 Περιγραφή της μεθόδου- Εισαγωγικά παραδείγματα

Η απλούστερη στοχαστική αριθμητική προσέγγιση είναι η μέθοδος Euler ή μέθοδος Euler-Maruyama όπως καλείται ορισμένες φορές.

Για μια δοθείσα διαμέριση $\tau_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$ του διαστήματος $[\tau_0, T]$, η προσέγγιση Euler είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $Y = \{Y_t, \tau_0 \leq t \leq T\}$ η οποία ικανοποιεί το επαναληπτικό σχήμα

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + b(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i) \quad (3.1.2)$$

για $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ με αρχική τιμή

$$Y_0 = X_0 \quad (3.1.3)$$

όπου $Y_i = Y_{t_i}$ και $W_i = W_{t_i}$.

Θα γράφουμε

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

για την i -οστή χρονική αύξηση και θα καλούμε

$$\delta = \max_i \Delta t_i$$

τη μεγαλύτερη από αυτές. Συνήθως, θα θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση, δηλαδή ισαπέχοντα σημεία στο χρόνο

$$t_i = \tau_0 + i\delta$$

με $\delta = \Delta t_i \equiv \Delta t = \frac{(T-\tau_0)}{N}$ για κάποιο ακέραιο N αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\delta \in (0,1)$. Το δ καλείται βήμα.

Το καίριο ερώτημα είναι πώς θα υπολογίσουμε τις τυχαίες αυξήσεις

$$\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$$

για $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Γνωρίζουμε ότι αν $t > s$, τότε $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε $W_t - W_s = \sqrt{t - s} Z_{s,t}$ με $Z_{s,t} \sim N(0,1)$. Εφαρμόζοντας αυτή τη λύση σε κάθε υποδιάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ λαμβάνουμε

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + b(t_i, Y_i)\sqrt{\Delta t_i}Z_i$$

όπου $Z_i \sim N(0,1)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, αφού οι αυξήσεις της κίνησης Brown σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητες.

Ας σημειώσουμε τη διαφορά από την ντετερμινιστική συνήθη διαφορική εξίσωση. Κάθε σύνολο $\{Y_0, \dots, Y_N\}$ παραγόμενο από τη μέθοδο Euler-Maruyama αποτελεί μια προσεγγιστική πραγματοποίηση της стоχαστικής διαδικασίας-λύσης X η οποία εξαρτάται από τους τυχαίους αριθμούς Z_i που επιλέχθηκαν. Αφού η W_t είναι στοχαστική διαδικασία, κάθε πραγματοποίηση θα είναι διαφορετική και το ίδιο θα συμβαίνει και με τις προσεγγίσεις μας.

Με τους ανωτέρω συμβολισμούς η προσέγγιση Euler γράφεται απλούστερα ως εξής:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta t_i + b(t_i, Y_i)\Delta W_i$$

για $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Η αρχική συνθήκη (3.1.3) δεν θα δηλώνεται πάντοτε.

Η επιτυχής υλοποίηση της μεθόδου στον υπολογιστή έγκειται στην αναδρομική δομή της, η οποία υπολογίζει προσεγγιστικές τιμές της διαδικασίας Itô μόνο σε διακριτά χρονικά σημεία. Θα χρησιμοποιείται ο όρος σχήμα για να χαρακτηρίσουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που μας δίνει τις τιμές της προσέγγισης διακριτού χρόνου στις δοθείσες χρονικές στιγμές. Υπενθυμίζουμε ότι παρόλο που θα μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι τιμές

σε διακριτά χρονικά σημεία θα θεωρούμε μια προσέγγιση διακριτού χρόνου ως μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $[\tau_0, T]$.

Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων και η διαδικασία μπορεί να οριστεί διαφορετικά. Μια φυσική προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε γραμμική παρεμβολή, οπότε η Y_t θα ορίζεται ως εξής:

$$Y_t = Y_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (Y_{i+1} - Y_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

Παράδειγμα 1

Αν η X είναι η κίνηση Brown, αν δηλαδή οι συντελεστές μετατόπισης και διάχυσης είναι σταθερές, τότε το σχήμα Euler δίνει την ακριβή λύση.

Παράδειγμα 2

Αν η X είναι η γεωμετρική κίνηση Brown, αν δηλαδή $a(t, X) = aX$ και $b(t, X) = bX$ με a και b σταθερές τότε το σχήμα Euler γίνεται

$$X_{t+\Delta t} = X_t + aX_t\Delta t + bX_t(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

ενώ η ακριβής λύση είναι

$$X_{t+\Delta t} = X_t \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\Delta t + b(W_{t+\Delta t} - W_t)\right).$$

Γνωρίζουμε ότι αν $a \in \mathbb{R}$ με $|a|$ επαρκώς μικρό, τότε $1 + a \approx \exp(a)$ είναι μια καλή προσέγγιση. Συνεπώς, αν το Δt είναι αρκούντως μικρό, τότε

$$\begin{aligned} X_t + aX_t\Delta t + bX_t(W_{t+\Delta t} - W_t) &= X_t[1 + a\Delta t + b(W_{t+\Delta t} - W_t)] \\ &\approx X_t \exp(a\Delta t + b(W_{t+\Delta t} - W_t)) \\ &= X_{t+\Delta t} \exp\left(\frac{1}{2}b^2\Delta t\right) \end{aligned}$$

και με μικρό Δt έχουμε επιπλέον $\frac{1}{2}b^2\Delta t \approx 0$.

Υπολογιστικό παράδειγμα

Θεωρούμε τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross, δηλαδή τη διαδικασία Itô $X = \{X_t, t \geq 0\}$ που ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.4)$$

με αρχική τιμή $X_0 \in \mathbb{R}^1$.

Πρόκειται για μια διαδικασία Itô με συντελεστή μετατόπισης

$$a(t, x) = \theta_1 - \theta_2 x$$

και συντελεστή διάχυσης

$$b(t, x) = \theta_3 \sqrt{x}.$$

Για να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της προσέγγισης Euler για μια δοθείσα διαμέριση του χρόνου ξεκινάμε από αρχική τιμή $Y_0 = X_0$ και προχωράμε αναδρομικά για να παράγουμε την επόμενη τιμή

$$Y_{i+1} = Y_i + (\theta_1 - \theta_2 Y_i) \Delta t + \theta_3 \sqrt{Y_i} \Delta W_i$$

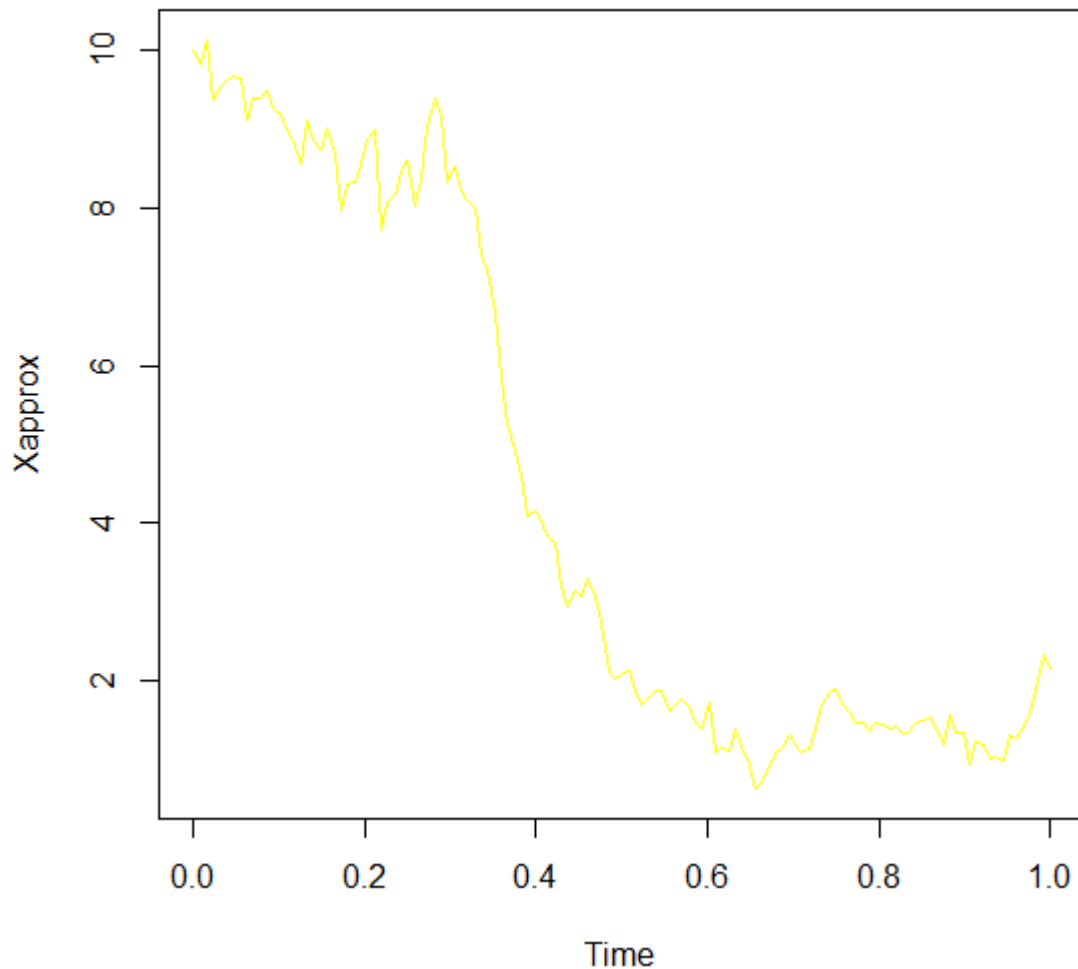
για $i = 0, 1, 2, \dots$ σύμφωνα με το σχήμα Euler (3.1.2). Το ΔW_i είναι η αύξηση της κίνησης Brown στο διάστημα $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Το παρακάτω πρόγραμμα σε R παράγει προσέγγιση Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, 1]$ με βήμα $\delta = 2^{-7}$ για τη διαδικασία Itô X -που ικανοποιεί την (3.1.4) με $X_0 = 10$ και $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (6, 3, 2)$:

```
# Cox-Ingersol-Ross process
set.seed(32)
N<-128
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
theta<-c(6,3,2)
Y<-numeric(N+1)
Y[1]<-10
Z<-rnorm(N)
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+(theta[1]-theta[2]*Y[i])*Dt+theta[3]*sqrt(Y[i])*sqrt(Dt)*Z[i]
}
Y<-ts(Y,start=0,delta=1/N)
plot(Y, type='l', main="Cox-Ingersol-Ross", ylab="Xapprox", col='yellow', col.main='purple')
```

Με την εκτέλεσή του προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Cox-Ingersoll-Ross



Σχήμα 3.1 Προσέγγιση Euler για τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross με βήμα $\delta = 2^{-7}$.

Σημείωση: Για τα ενδιάμεσα σημεία δεν χρειάζεται να γίνει κάποιος ειδικός υπολογισμός, αφού η γραμμική παρεμβολή επιτυγχάνεται γραφικά με την παράμετρο `type='l'` στην εντολή `plot`.

3.1.1 Σύγκλιση της μεθόδου- Τάξης σύγκλισης

Προτού εξετάσουμε τη σύγκλιση (και με ποια έννοια) της μεθόδου, είναι απαραίτητο να δοθούν κάποιοι ορισμοί.

Το κριτήριο του απολύτου σφάλματος ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon = E[|X_T - Y_T|], \quad (3.1.5)$$

δηλαδή είναι η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της διαφοράς ανάμεσα στη διαδικασία $I_t \delta$ και την προσέγγιση σε κάποια πεπερασμένη τελική στιγμή T .

Ορισμός 3.1.1 Για ένα δοθέν μέγιστο βήμα $\delta \in (0, \delta_0)$, με δ_0 έναν πεπερασμένο θετικό αριθμό, ονομάζουμε

$$(t)_\delta := \{t_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

διαμέριση αν $\{t_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι χρονικές στιγμές (πιθανόν και τυχαίες) με

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < \infty,$$

$$\sup_n (t_{n+1} - t_n) \leq \delta,$$

$$n_t(\omega) := \max\{n \in \mathbb{N} : t_n(\omega) \leq t\} < \infty \quad P - \sigma. \beta, t \in \mathbb{R}^+.$$

Επιπρόσθετα, υποθέτουμε ότι t_{n+1} είναι A_{t_n} -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή όπου $\{A_t : t \geq 0\}$ είναι διήθηση (εν γένει συνδεδεμένη με τη διαδικασία Itô ή την κίνηση Brown).

Ορισμός 3.1.2 Μια δεξιά συνεχής διαδικασία $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ ονομάζεται διακριτού χρόνου προσέγγιση με μέγιστο βήμα $\delta \in (0, \delta_0)$ αν βασίζεται σε $(t)_\delta$ όπως δόθηκε στον ανωτέρω ορισμό εις τρόπον ώστε η Y_{t_n} να είναι A_{t_n} -μετρήσιμη και η $Y_{t_{n+1}}$ να μπορεί να οριστεί από τις $Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n}, t_0, \dots, t_n, t_{n+1}$ και έναν πεπερασμένο αριθμό l από A_{t_n} -μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές $Z_{n+1,j}$, $j = 1, \dots, l$, $n = 0, 1, \dots$.

Μια διακριτού χρόνου προσέγγιση αντιστοιχεί σε ένα σχήμα, το οποίο περιγράφει έναν αναδρομικό αλγόριθμο για την παραγωγή τιμών στα διακριτά σημεία και μία προκαθορισμένη μέθοδο παρεμβολής (π.χ. γραμμική παρεμβολή).

Συχνά, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό Y^δ προκειμένου να δείχνουμε την εξάρτηση από το μέγιστο βήμα δ .

Ορισμός 3.1.3 Θα λέμε ότι μια γενική, διακριτού χρόνου προσέγγιση Y^δ με μέγιστο βήμα δ συγκλίνει ισχυρά στη X τη χρονική στιγμή T , αν

$$\lim_{\delta \downarrow 0} E(|X_T - Y_T^\delta|) = 0. \quad (3.1.6)$$

Παρόλο που η προσέγγιση Euler είναι η απλούστερη χρήσιμη διακριτού χρόνου προσέγγιση, εν γένει αριθμητικά δεν είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική. Προκειμένου να αξιολογήσουμε και να συγκρίνουμε διαφορετικές διακριτού χρόνου προσεγγίσεις θα πρέπει να γνωρίζουμε τους ρυθμούς ισχυρής σύγκλισης αυτών.

Ορισμός 3.1.4 Θα λέμε ότι μια διακριτού χρόνου προσέγγιση Y^δ συγκλίνει ισχυρά με τάξη γ > 0 τη χρονική στιγμή T αν υπάρχει θετική σταθερά C η οποία δεν εξαρτάται από το δ , και $\delta_0 > 0$ εις τρόπον ώστε

$$\varepsilon(\delta) = E(|X_T - Y_T^\delta|) \leq C\delta^\gamma \quad (3.1.7)$$

για κάθε $\delta \in (0, \delta_0)$.

Έχουν προταθεί πολλά ακόμη κριτήρια στη βιβλιογραφία, αλλά το (3.1.7) είναι μια φυσική γενίκευση της ντετερμινιστικής περίπτωσης.

Η έννοια της συνεκτικότητας μιας στοχαστικής διακριτού χρόνου προσέγγισης είναι στενά συνδεδεμένη με αυτήν της σύγκλισης και συχνότερα ευκολότερο να εξακριβωθεί.

Ορισμός 3.1.5 Θα λέμε ότι μια διακριτού χρόνου προσέγγιση Y^δ που αντιστοιχεί σε μια διαμέριση του χρόνου $(t)_\delta = \{t_n: n = 0, 1, \dots\}$ με μέγιστο βήμα δ είναι ισχυρά συνεκτική αν υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $c = c(\delta)$ με

$$\lim_{\delta \downarrow 0} c(\delta) = 0 \quad (3.1.8)$$

εις τρόπον ώστε

$$E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta t_n} \middle| A_{t_n} \right) - a(t_n, Y_n^\delta) \right|^2 \right) \leq c(\delta) \quad (3.1.9)$$

και

$$E \left(\frac{1}{\Delta t_n} |Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{t_n}) - b(t_n, Y_n^\delta) \Delta W_n|^2 \right) \leq c(\delta) \quad (3.1.10)$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots$.

Η συνθήκη (3.1.9) απαιτεί ο μέσος της αύξησης της προσέγγισης να συγκλίνει σε αυτόν της διαδικασίας Itô. Από τη συνθήκη (3.1.10) έπεται ότι η διασπορά της διαφοράς ανάμεσα στα τυχαία μέρη της προσέγγισης και της διαδικασίας Itô συγκλίνει επίσης στο μηδέν. Συνεπώς, η ισχυρή συνεκτικότητα παρέχει μια ένδειξη της εγγύτητας των μονοπατιών. Στην πραγματικότητα, συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση της προσέγγισης διακριτού χρόνου στη διαδικασία Itô, κάτι που θα αποδείξουμε αμέσως τώρα σε ένα απλό πλαίσιο.

Θα θεωρήσουμε τη μονοδιάστατη περίπτωση με τη διαδικασία Itô X να ικανοποιεί την αυτόνομη стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

και μια διακριτού χρόνου προσέγγιση Y^δ που αντιστοιχεί σε μια διαμέριση του χρόνου $(t)_\delta$ με ισαπέχοντα σημεία και μήκος βήματος $\Delta t_n \equiv \delta$. Έστω ότι οι υποθέσεις για ύπαρξη ισχυρής λύσης και μοναδικότητα ικανοποιούνται, ειδικότερα οι συντελεστές a και b ικανοποιούν την ομοιόμορφη συνθήκη Lipschitz και γραμμικής αύξησης.

Θεώρημα 3.1 Έστω ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.1 για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή οι συντελεστές a και b ικανοποιούν την ομοιόμορφη συνθήκη Lipschitz και γραμμικής αύξησης. Αν μια διακριτού χρόνου προσέγγιση Y^δ με ισαπέχοντα σημεία μιας μονοδιάστατης διαδικασίας Itô X που ικανοποιεί την αυτόνομη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

με $Y^\delta(0) = X_0$ είναι ισχυρά συνεκτική τότε συγκλίνει ισχυρά στην X .

Απόδειξη

Για $0 \leq t \leq T$ θέτουμε

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} E \left(|Y_{n_s}^\delta - X_s|^2 \right)$$

και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \sup_{0 \leq s \leq t} E \left(\left| \sum_{n=0}^{n_s-1} (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta) - \int_0^s a(X_r) dr - \int_0^s b(X_r) dW_r \right|^2 \right) \\
&\leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \{ E \left(\left| \sum_{n=0}^{n_s-1} (E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - a(Y_n^\delta) \Delta_n) \right|^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + E \left(\left| \sum_{n=0}^{n_s-1} (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n) \right|^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + E \left(\left| \int_0^{t_{n_s}} (a(Y_{n_r}^\delta) - a(X_r)) dr \right|^2 \right) + E \left(\left| \int_0^{t_{n_s}} (b(Y_{n_r}^\delta) - b(X_r)) dW_r \right|^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + E \left(\left| \int_{t_{n_s}}^s a(X_r) dr \right|^2 \right) + E \left(\left| \int_{t_{n_s}}^s b(X_r) dW_r \right|^2 \right) \right\}. \tag{3.1.11}
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
E \left(\left| \int_0^{t_{n_s}} (b(Y_{n_r}^\delta) - b(X_r)) dW_r \right|^2 \right) &= E \left(\int_0^{t_{n_s}} (b(Y_{n_r}^\delta) - b(X_r))^2 dr \right) \text{(ισομετρία It\^o)} \\
&\leq E \left(\int_0^{t_{n_s}} K^2 (Y_{n_r}^\delta - X_r)^2 dr \right) = \int_0^{t_{n_s}} K^2 E \left((Y_{n_r}^\delta - X_r)^2 \right) dr \text{ (ιδιότητα Lipschitz - Θεώρημα} \\
&\text{Fubini)}
\end{aligned}$$

$$\leq K^2 \int_0^{t_{n_s}} \sup_{0 \leq \kappa \leq r} E \left((Y_{n_\kappa}^\delta - X_\kappa)^2 \right) dr = K^2 \int_0^{t_{n_s}} Z(r) dr \tag{3.1.12}$$

$$E \left(\left| \int_0^{t_{n_s}} (a(Y_{n_r}^\delta) - a(X_r)) dr \right|^2 \right) \leq t_{n_s} E \left(\int_0^{t_{n_s}} (a(Y_{n_r}^\delta) - a(X_r))^2 dr \right) \text{ (ανισότητα Cauchy-Schwartz)}$$

$$\leq t_{n_s} E \left(\int_0^{t_{n_s}} K^2 (Y_{n_r}^\delta - X_r)^2 dr \right) = t_{n_s} \int_0^{t_{n_s}} K^2 E \left((Y_{n_r}^\delta - X_r)^2 \right) dr \text{ (ιδιότητα Lipschitz - Θεώρημα Fubini)}$$

$$\leq K^2 T \int_0^{t_{n_s}} \sup_{0 \leq \kappa \leq r} E \left((Y_{n_\kappa}^\delta - X_\kappa)^2 \right) dr = K^2 T \int_0^{t_{n_s}} Z(r) dr \tag{3.1.13}$$

$$\begin{aligned}
E \left(\left| \int_{t_{n_s}}^s b(X_r) dW_r \right|^2 \right) &= E \left(\int_{t_{n_s}}^s (b(X_r))^2 dr \right) \text{(ισομετρία It\^o)} \\
&= \int_{t_{n_s}}^s E \left((b(X_r))^2 \right) dr \leq \int_{t_{n_s}}^s E (K^2 (1 + (X_r)^2)) dr \text{ (Θεώρημα Fubini-2}^n \text{ συνθήκη)} \\
&= \int_{t_{n_s}}^s K^2 (1 + E((X_r)^2)) dr \leq \int_{t_{n_s}}^s K^2 (1 + C_2) dr = K^2 (1 + C_2) (s - t_{n_s})
\end{aligned}$$

$$\leq K^2 (1 + C_2) \delta \tag{3.1.14}$$

$$E \left(\left| \int_{t_{n_s}}^s a(X_r) dr \right|^2 \right) \leq (s - t_{n_s}) E \left(\int_{t_{n_s}}^s (a(X_r))^2 dr \right) \quad (\text{ανισότητα Cauchy-Schwartz})$$

$$\leq (s - t_{n_s}) \int_{t_{n_s}}^s E \left((a(X_r))^2 \right) dr \leq (s - t_{n_s}) \int_{t_{n_s}}^s E(K^2(1 + (X_r)^2)) dr \quad (\text{Θεώρημα Fubini-2}^\eta \text{ συνθήκη})$$

$$= (s - t_{n_s}) \int_{t_{n_s}}^s K^2(1 + E((X_r)^2)) dr \leq (s - t_{n_s}) \int_{t_{n_s}}^s K^2(1 + C_2) dr$$

$$(s - t_{n_s})K^2(1 + C_2)(s - t_{n_s}) \leq K^2T(1 + C_2)\delta \quad (3.1.15)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και μια εκτίμηση για τη δεύτερη ροπή της X_t . Τέλος, χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη ανεξαρτησία λαμβάνουμε:

$$E \left(\left| \sum_{n=0}^{n_s-1} (E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - a(Y_n^\delta) \Delta_n) \right|^2 \right)$$

$$\leq T\delta \sum_{n=0}^{n_s-1} E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} | A_{\tau_n} \right) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right) \quad (3.1.16)$$

$$E \left(\left| \sum_{n=0}^{n_s-1} (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n) \right|^2 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{n_s-1} E \left(| (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n) |^2 \right) \quad (3.1.17)$$

Συνεπώς, λόγω των (3.1.12) -(3.1.17) η (3.1.11) γράφεται

$$Z(t) \leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \sum_{n=0}^{n_s-1} E \left(| (Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta | A_{\tau_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n) |^2 \right) \right.$$

$$+ T\delta \sum_{n=0}^{n_s-1} E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta_n} | A_{\tau_n} \right) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right)$$

$$\left. + K^2(1 + T) \int_0^{\tau_{n_s}} Z(r) dr + K^2(1 + T)(1 + C_2)\delta \right\} .$$

Από την υπόθεση της ισχυρής συνεκτικότητας έπεται από τις (3.1.9) και (3.1.10) ότι

$$Z(t) \leq C_3 \int_0^t Z(r) dr + C_4(\delta + c(\delta))$$

και επομένως από λήμμα Gronwall [βλ. παράρτημα] έχουμε

$$Z(t) \leq C_5(\delta + c(\delta)) .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Lyapunov [βλ. παράρτημα] καταλήγουμε ότι

$$E(|Y_T^\delta - X_T|) \leq \sqrt{Z(T)} \leq \sqrt{C_5(\delta + c(\delta))} . \quad (3.1.18)$$

Παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη λαμβάνουμε

$$\lim_{\delta \downarrow 0} E(|X_T - Y_T^\delta|) \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \sqrt{C_5(\delta + c(\delta))} = 0 ,$$

αφού $\lim_{\delta \downarrow 0} c(\delta) = 0$.

Δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση: Το θεώρημα ισχύει υπό γενικότερες προϋποθέσεις, αν δηλαδή οι συναρτήσεις a, b εξαρτώνται από τη μεταβλητή t του χρόνου και είναι τοπικά Lipschitz (αντί για ολικά).

Πόρισμα 3.1 Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος το σχήμα Euler συγκλίνει και έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης τουλάχιστον $\gamma = 0,5$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$\begin{aligned} E \left(\left| E \left(\frac{Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta}{\Delta t_n} \middle| A_{t_n} \right) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right) &= E \left(\left| E \left(a(Y_n^\delta) + \frac{b(Y_n^\delta) \Delta W_n}{\Delta t_n} \middle| A_{t_n} \right) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right) \\ &= E \left(\left| a(Y_n^\delta) + \frac{1}{\Delta t_n} E(b(Y_n^\delta) \Delta W_n \middle| A_{t_n}) - a(Y_n^\delta) \right|^2 \right) \\ &= E \left(\left| \frac{1}{\Delta t_n} b(Y_n^\delta) E(\Delta W_n \middle| A_{t_n}) \right|^2 \right) = E \left(\left| \frac{1}{\Delta t_n} b(Y_n^\delta) E(\Delta W_n) \right|^2 \right) = 0 , \end{aligned}$$

αφού οι $a(Y_n^\delta)$ και $b(Y_n^\delta)$ είναι A_{t_n} -μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και η αύξηση ΔW_n ανεξάρτητη του A_{t_n} .

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} &E \left(\frac{1}{\Delta t_n} |Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta - E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta \middle| A_{t_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n|^2 \right) \\ &= E \left(\frac{1}{\Delta t_n} |a(Y_n^\delta) \Delta t_n + b(Y_n^\delta) \Delta W_n + E(Y_{n+1}^\delta - Y_n^\delta \middle| A_{t_n}) - b(Y_n^\delta) \Delta W_n|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

από την προηγούμενη σχέση.

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι το σχήμα Euler είναι ισχυρά συνεκτικό με $c(\delta) \equiv 0$. Επομένως, από την (3.1.18) συνεπάγεται ότι έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης τουλάχιστον $\gamma = 0,5$ υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. ■

Παρατήρηση: Σημειώνουμε ότι μια προσέγγιση Euler της διαδικασίας Itô βασισμένη σε κάποια άλλη κίνηση Brown ανεξάρτητη από αυτήν που οδηγεί την διαδικασία Itô δεν συγκλίνει, εν γένει, ισχυρά στη διαδικασία Itô.

Για τη μέθοδο Euler η οποία συγκλίνει ισχυρά με τάξη $\gamma = \frac{1}{2}$ από την ανισότητα Markov έχουμε

$$P\left(|X_{t_n} - Y_n^\delta| \geq \Delta t^{\frac{1}{4}}\right) \leq \frac{1}{\Delta t^{\frac{1}{4}}} E(|X_{t_n} - Y_n^\delta|) \leq C \Delta t^{\frac{1}{4}}$$

ή ισοδύναμα

$$P\left(|X_{t_n} - Y_n^\delta| < \Delta t^{\frac{1}{4}}\right) \geq 1 - C \Delta t^{\frac{1}{4}}$$

δηλαδή κατά μήκος οποιουδήποτε μονοπατιού το σφάλμα είναι μικρό με μεγάλη πιθανότητα.

Ακολούθως, παραθέτουμε ειδικά για τη μέθοδο Euler έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης της σύγκλισης και της τάξης ισχυρής σύγκλισης αυτής.

Για το σκοπό αυτό προσεγγίζουμε τη λύση για όλα τα $t \in [0, T]$ και όχι μόνο τα σημεία t_i . Ορίζουμε

$$Y_t = Y_i + \int_{t_i}^t a(Y_i) ds + \int_{t_i}^t b(Y_i) dW_s$$

για $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ και $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Στο i -οστό υποδιάστημα η Y_t είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dY_t = a(Y_i)dt + b(Y_i)dW_t, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

με $Y_{t_i} = Y_i$.

Υπενθυμίζουμε ότι η λύση X ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

Αν ορίσουμε το σφάλμα ως $\varepsilon_t = X_t - Y_t$ τότε αυτό ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$d\varepsilon_t = (a(X_t) - a(Y_i))dt + (b(X_t) - b(Y_i))dW_t$$

$$\varepsilon_{t_i} = X_{t_i} - Y_{t_i}$$

για $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην ε_t^2 λαμβάνουμε:

$$d(\varepsilon_t^2) = 2(X_t - Y_t)(a(X_t) - a(Y_t))dt + 2(X_t - Y_t)(b(X_t) - b(Y_t))dW_t + (b(X_t) - b(Y_t))^2 dt$$

Συνεπώς, η $E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2]$ ικανοποιεί

$$E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2] = E[\varepsilon_{t_i}^2] + E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2(X_t - Y_t)(a(X_t) - a(Y_t))dt\right] + E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} 2(X_t - Y_t)(b(X_t) - b(Y_t))dW_t\right] + E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(X_t) - b(Y_t))^2 dt\right]$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|2ab| \leq a^2 + b^2$ και τις ιδιότητες των στοχαστικών ολοκληρωμάτων παίρνουμε

$$E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2] \leq E[\varepsilon_{t_i}^2] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(b(X_t) - b(Y_t))^2] dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(X_t - Y_t)^2] dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(a(X_t) - a(Y_t))^2] dt.$$

Όμως,

$$|a(X_t) - a(Y_t)|^2 \leq 2|a(X_t) - a(X_{t_i})|^2 + 2|a(X_{t_i}) - a(Y_t)|^2 \leq 2K|X_t - X_{t_i}|^2 + 2K|X_{t_i} - Y_t|^2$$

και εντελώς όμοια για την b . Επομένως,

$$E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2] \leq E[\varepsilon_{t_i}^2] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(X_t - Y_t)^2] dt + 4kc \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt + 4k \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[\varepsilon_{t_i}^2] dt$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $E[|X_t - X_{t_i}|^2] \leq c|t - t_i|$ (άμεση συνέπεια των συνθηκών που έχουμε επιβάλει).

Συνεπώς,

$$E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2] \leq E[\varepsilon_{t_i}^2](1 + 4k\Delta t) + 2kc(\Delta t)^2 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[\varepsilon_s^2] ds$$

Από λήμμα Gronwall έπεται ότι

$$E[\varepsilon_{t_{i+1}}^2] \leq E[\varepsilon_{t_i}^2](1 + 4k\Delta t) + 2kc(\Delta t)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{t_{i+1}-t} [E[\varepsilon_{t_i}^2](1 + 4k\Delta t) + 2kc(\Delta t)^2] dt \\
& = e^{\Delta t} [E[\varepsilon_{t_i}^2](1 + 4k\Delta t) + 2kc(\Delta t)^2]
\end{aligned}$$

Θέτοντας $a_i = E[\varepsilon_{t_i}^2]$, $R = e^{\Delta t}(1 + 4k\Delta t)$ και $S = e^{\Delta t}2kc(\Delta t)^2$ προκύπτει ότι

$$a_{i+1} \leq Ra_i + S$$

για $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Από τις ανωτέρω ανισότητες έπεται ότι

$$a_N \leq S \frac{R^N - 1}{R - 1} \quad \text{με} \quad a_0 = E[\varepsilon_0^2] = 0.$$

Επομένως,

$$E[\varepsilon_{t_N}^2] \leq \frac{e^{\Delta t} 2kc(\Delta t)^2 e^{N\Delta t} e^{4kN\Delta t}}{e^{\Delta t} - 1 + e^{\Delta t} 4k\Delta t} \leq \Delta t \frac{ce^{(1+4k)T}}{2}.$$

Αυτό ισχύει για κάθε σημείο t_i και επομένως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ικανοποιεί την

$$E[|X_{t_i} - Y_i|^2] \leq \hat{c}\Delta t$$

για $i = 0, 1, \dots, N$, όπου $\hat{c} = \frac{ce^{(1+4k)T}}{2}$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται το ζητούμενο.

3.1.2 Παραδείγματα-Εφαρμογές της μεθόδου

Για να δείξουμε διάφορες πτυχές της προσομοίωσης μιας προσέγγισης διακριτού χρόνου μιας διαδικασίας Itô αλλά και να διαπιστώσουμε αν αποδίδει στην πράξη το σχήμα Euler θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

Παράδειγμα 3.1.2α

Αρχικά, θεωρούμε τη διαδικασία Itô $X = \{X_t, t \geq 0\}$ (γεωμετρική κίνηση Brown) που ικανοποιεί τη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.19)$$

με αρχική τιμή $X_0 \in R^1$.

Πρόκειται για μια διαδικασία Itô με συντελεστή μετατόπισης

$$a(t, x) = ax \quad (3.1.20)$$

και συντελεστή διάχυσης

$$b(t, x) = bx. \quad (3.1.21)$$

Γνωρίζουμε την αναλυτική λύση της (3.1.19) η οποία είναι

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right) \quad (3.1.22)$$

για $t \in [0, T]$ και τη δοθείσα κίνηση Brown $W = \{W_t, t \geq 0\}$. Το γεγονός ότι γνωρίζουμε τη λύση αναλυτικά μας δίνει τη δυνατότητα να συγκρίνουμε την προσέγγιση Euler με την ακριβή λύση και να υπολογίσουμε το σφάλμα.

Για να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της προσέγγισης Euler για μια δοθείσα διαμέριση του χρόνου ξεκινάμε από αρχική τιμή $Y_0 = X_0$ και προχωράμε αναδρομικά για να παράγουμε την επόμενη τιμή

$$Y_{i+1} = Y_i + aY_i\Delta t + bY_i\Delta W_i \quad (3.1.23)$$

για $i = 0, 1, 2, \dots$ σύμφωνα με το σχήμα Euler με συντελεστές μετατόπισης και διάχυσης τις (3.1.20) και (3.1.21) αντίστοιχα. Το ΔW_i είναι η αύξηση της κίνησης Brown στο διάστημα $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Για σύγκριση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.1.22) για να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές της ακριβούς λύσης για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown, λαμβάνοντας

$$X_{\tau_n} = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)\tau_n + bW_{\tau_n}\right)$$

όπου $\{\tau_n : n = 0, 1, \dots, N\}$ είναι μια ομοιόμορφη διαμέριση του $[0, T]$ -λεπτότερη συνήθως από αυτήν που χρησιμοποιεί η αριθμητική μέθοδος.

(Σημείωση : Για την προσομοίωση μονοπατιών της κίνησης Brown βλ. παράρτημα)

Σημειώνεται ότι στα προγράμματα υπολογίζουμε μονοπάτια της κίνησης Brown τα οποία χρησιμοποιούμε για να παράγουμε τις αυξήσεις $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ που χρειάζονται στην (3.1.23). Χάριν απλότητας, επιλέγουμε πάντα το βήμα Δt για την αριθμητική μέθοδο να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο $R \geq 1$ της αύξησης δt για το μονοπάτι της κίνησης Brown. Με αυτόν τον τρόπο, είμαστε βέβαιοι ότι το σύνολο $\{\tau_j\}$ των σημείων στα οποία βασίζεται το μονοπάτι της κίνησης Brown περιέχει τα σημεία $\{t_j\}$ στα οποία η προσέγγιση Euler υπολογίζεται.

Το παρακάτω πρόγραμμα σε R παράγει προσέγγιση Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, 1]$ με βήμα $\delta = 2^{-2}$ για τη διαδικασία Itô X -που ικανοποιεί την (3.1.19) με $X_0 = 1, a = 1.5$ και $b = 1$ -και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση όσο και την ακριβή για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown:

```
# Geometric Brownian Motion
N<-4096 # problem parameters
N1<-4
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
```

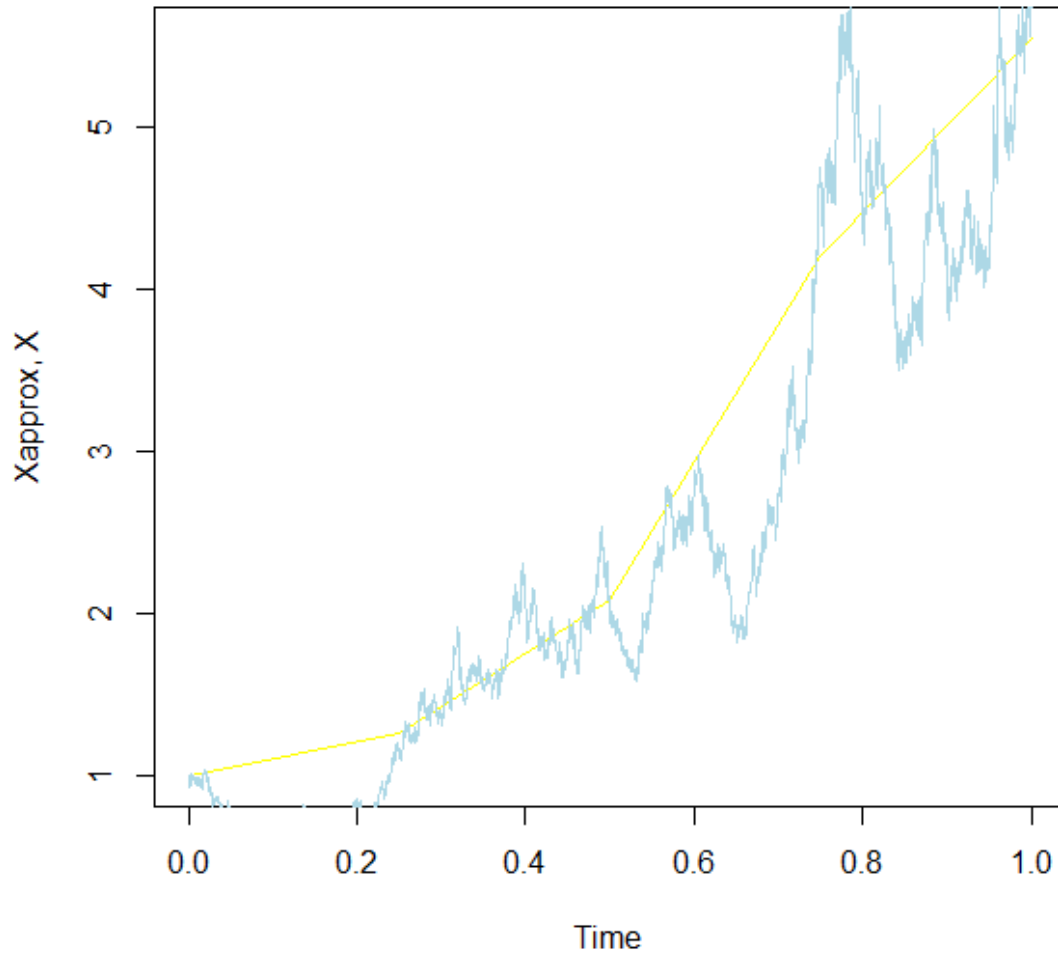


```

X<-numeric(N+1)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
Z<-rnorm(N)
t<-T0+Dt
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i] # Brownian path with Dt=2^(-12)
  X[i+1]<-exp((1.5-0.5)*t+Y[i+1]) # exact solution
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j]) # Euler
approximation with timestep Dt1=R*Dt=2^(-2)
  j<-j+N/N1 # euresh twn katallhlwn shmeiwn ths kinshs Brown
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Geometric Brownian Motion", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')
Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

```

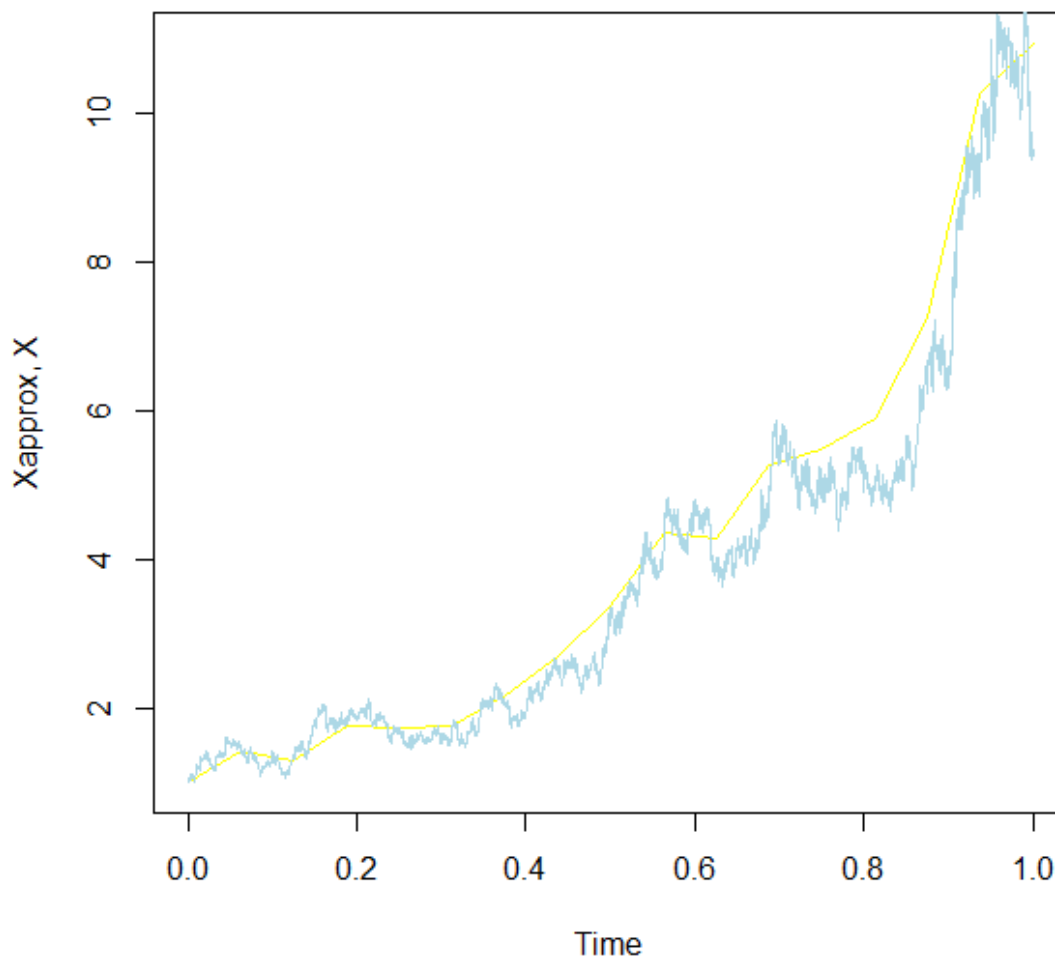
Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.2 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-2}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση Euler διαφέρει από τη διαδικασία Itô. Αναμένουμε, ωστόσο, μια μεγαλύτερη ομοιότητα αν χρησιμοποιήσουμε μικρότερο βήμα. Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για $\delta = 2^{-4}$ οπότε προκύπτει:

Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.3 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-4}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Από το σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι η προσέγγιση Euler είναι πλησιέστερα στη διαδικασία Itô στο τελικό σημείο $T = 1$ όταν το βήμα είναι μικρότερο.

Παράδειγμα 3.1.2β

Ακολουθώντας, θεωρούμε το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck, δηλαδή τη διαδικασία Itô $X = \{X_t, t \geq 0\}$ που ικανοποιεί τη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -\mu X_t dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.24)$$

με αρχική τιμή $X_0 \in \mathbb{R}^1$.

Πρόκειται για μια διαδικασία Itô με συντελεστή μετατόπισης

$$a(t, x) = -\mu x \quad (3.1.25)$$

και συντελεστή διάχυσης

$$b(t, x) = \sigma . \quad (3.1.26)$$

Γνωρίζουμε την αναλυτική λύση της (3.1.24) η οποία είναι

$$X_t = X_0 \exp(-\mu t) + \sigma \exp(-\mu t) \int_0^t \exp(\mu s) dW_s$$

για $t \in [0, T]$, όπου ως γνωστόν $\int_0^t \exp(\mu s) dW_s \sim N\left(0, \frac{1}{2\mu} (\exp(2\mu t) - 1)\right)$ αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται μόνο από τον χρόνο.

Για να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της προσέγγισης Euler για μια δοθείσα διαμέριση του χρόνου ξεκινάμε από αρχική τιμή $Y_0 = X_0$ και προχωράμε αναδρομικά για να παράγουμε την επόμενη τιμή

$$Y_{i+1} = Y_i - \mu Y_i \Delta t + \sigma \Delta W_i$$

για $i = 0, 1, 2, \dots$ σύμφωνα με το σχήμα Euler με συντελεστές μετατόπισης και διάχυσης τις (3.1.25) και (3.1.26) αντίστοιχα. Για σύγκριση, γράφουμε την ακριβή λύση ως εξής:

$$X_t = X_s \exp(-\mu(t-s)) + \sigma \exp(-\mu t) \int_s^t \exp(\mu r) dW_r$$

Συνεπώς, οι αντίστοιχες τιμές της ακριβούς λύσης προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$X_{\tau_{i+1}} = X_{\tau_i} \exp(-\mu \delta t) + \sigma \exp(-\mu \tau_k) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp(\mu r) dW_r .$$

Θέτουμε $\Delta U_i = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp(\mu r) dW_r$ και $\Delta W_i'$. Τότε όλα τα ζεύγη $(\Delta U_i, \Delta W_i')$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Συνεπώς, για την προσομοίωση μονοπατιών το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της από κοινού κατανομής των $(\Delta U_i, \Delta W_i')$. Πρόκειται για διδιάστατη κανονική κατανομή με μηδενικές μέσες τιμές και

$$V[\Delta W_i'] = \delta t$$

$$V[\Delta U_i] = \frac{1}{2\mu} (\exp(2\mu \tau_{i+1}) - \exp(2\mu \tau_i))$$

Υπολογίζουμε πρώτα

$$\begin{aligned} E[U_t W_t] &= E[\langle U, W \rangle_t] = E[\langle \exp(\mu r) \cdot W, W \rangle_t] = E[(\exp(\mu r) \cdot \langle W \rangle)_t] \\ &= (\exp(\mu r) \cdot \langle W \rangle)_t = \int_0^t \exp(\mu r) dr = \frac{1}{\mu} (\exp(\mu t) - 1) \end{aligned}$$

οπότε

$$E[\Delta U_i \Delta W_i'] = E[(U_{i+1} - U_i)(W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i})]$$

$$\begin{aligned}
&= E[U_{i+1}W_{\tau_{i+1}}] - E[U_{i+1}W_{\tau_i}] - E[U_iW_{\tau_{i+1}}] + E[U_iW_{\tau_i}] \\
&= E[U_{i+1}W_{\tau_{i+1}}] - E[W_{\tau_i}E[U_{i+1}|A_{\tau_i}]] - E[U_iE[W_{\tau_{i+1}}|A_{\tau_i}]] + E[U_iW_{\tau_i}] \\
&= E[U_{i+1}W_{\tau_{i+1}}] - E[U_iW_{\tau_i}] - E[U_iW_{\tau_i}] + E[U_iW_{\tau_i}] \\
&= E[U_{i+1}W_{\tau_{i+1}}] - E[U_iW_{\tau_i}] = \frac{1}{\mu}(\exp(\mu\tau_{i+1}) - 1 - \exp(\mu\tau_i) + 1) \\
&= \frac{1}{\mu}(\exp(\mu\tau_{i+1}) - \exp(\mu\tau_i))
\end{aligned}$$

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να προσομοιώσει κανείς τιμές από διδιάστατη κανονική κατανομή. Ένας από αυτούς είναι με τη χρήση της συνάρτησης `mvnrng`. Θα πρέπει, ωστόσο να κατεβάσουμε το πακέτο MASS, αφού ο αλγόριθμος υλοποιείται σε αυτό. Ένας άλλος τρόπος τον οποίον θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ είναι ο εξής: Όταν το ζεύγος των τυχαίων μεταβλητών (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν μπορούμε να γράψουμε

$$Y = \frac{Cov(X, Y)}{V[X]}X + Z$$

όπου η Z είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της X . Συνεπώς, έχουμε

$$\Delta U_i = \frac{Cov(\Delta W_i', \Delta U_i)}{V[\Delta W_i']} \Delta W_i' + Z$$

με

$$\begin{aligned}
V[\Delta U_i] &= V\left[\frac{Cov(\Delta W_i', \Delta U_i)}{V[\Delta W_i']} \Delta W_i'\right] + V[Z] = \left(\frac{Cov(\Delta W_i', \Delta U_i)}{V[\Delta W_i']}\right)^2 V[\Delta W_i'] + V[Z] \Rightarrow \\
V[Z] &= V[\Delta U_i] - \left(\frac{Cov(\Delta W_i', \Delta U_i)}{V[\Delta W_i']}\right)^2 V[\Delta W_i'] \\
&= \frac{1}{2\mu}(\exp(2\mu\tau_{i+1}) - \exp(2\mu\tau_i)) - \frac{\left(\frac{1}{\mu}(\exp(\mu\tau_{i+1}) - \exp(\mu\tau_i))\right)^2}{\delta t}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, προσομοιώνουμε τιμές από δύο ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές Z_1 και Z_2 και ακολούθως κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$$\Delta W_i' = \sqrt{\delta t}Z_1$$

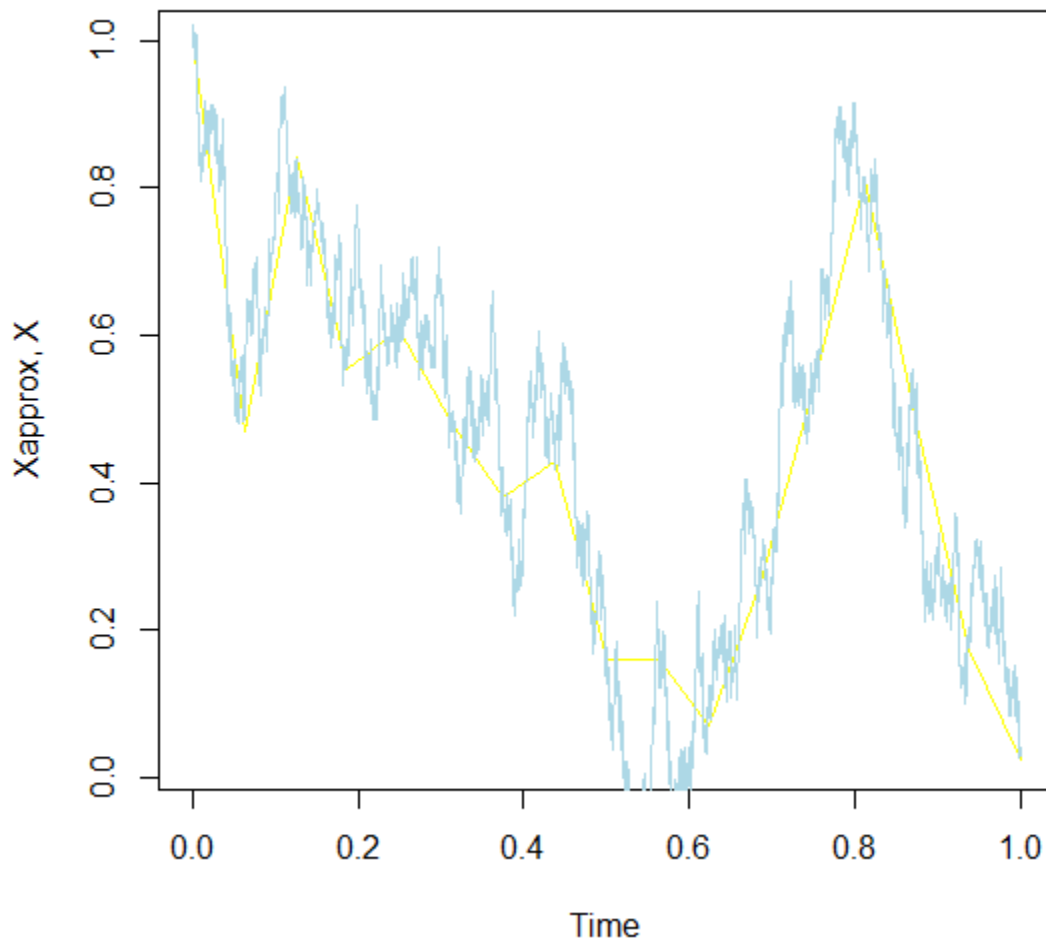
$$\Delta U_i = \frac{1}{\mu} \frac{(\exp(\mu\tau_{i+1}) - \exp(\mu\tau_i))}{\delta t} \sqrt{\delta t} Z_1 + \sqrt{\frac{1}{2\mu} (\exp(2\mu\tau_{i+1}) - \exp(2\mu\tau_i)) - \frac{\left(\frac{1}{\mu} (\exp(\mu\tau_{i+1}) - \exp(\mu\tau_i))\right)^2}{\delta t}} Z_2$$

Ο παρακάτω κώδικας σε R παράγει προσέγγιση Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα [0,1] με βήμα $\delta = 2^{-4}$ για τη διαδικασία $\text{It}\hat{o} X$ -που ικανοποιεί την (3.1.24) με $X_0 = 1, \mu = 1.5$ και $\sigma = 1$ –και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση όσο και την ακριβή:

```
# Ornstein-Uhlenbeck
set.seed(257)
N<-4096
N1<-16
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
Y1<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
Y1[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
Z1<-rnorm(N)
Z2<-rnorm(N)
t<-T0+Dt
for (i in 1:N){
  Y1[i+1]<-Y1[i]+sqrt(Dt)*Z1[i]
  Y[i+1]<-exp(1.5*(t-Dt))*(exp(1.5*Dt)-1)/(1.5*Dt)*sqrt(Dt)*Z1[i]+sqrt((exp(3*(t-
Dt))*(exp(3*Dt)-1)/3-(exp(1.5*(t-Dt))*(exp(1.5*Dt)-1))^2/(1.5*1.5*Dt)))*Z2[i]
  X[i+1]<-X[i]*exp((-1.5)*Dt)+exp((-1.5)*t)*Y[i+1]
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]-1.5*Xapprox[i]*Dt1+(Y1[j+N/N1]-Y1[j])
  j<-j+N/N1
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Ornstein-Uhlenbeck", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')
```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

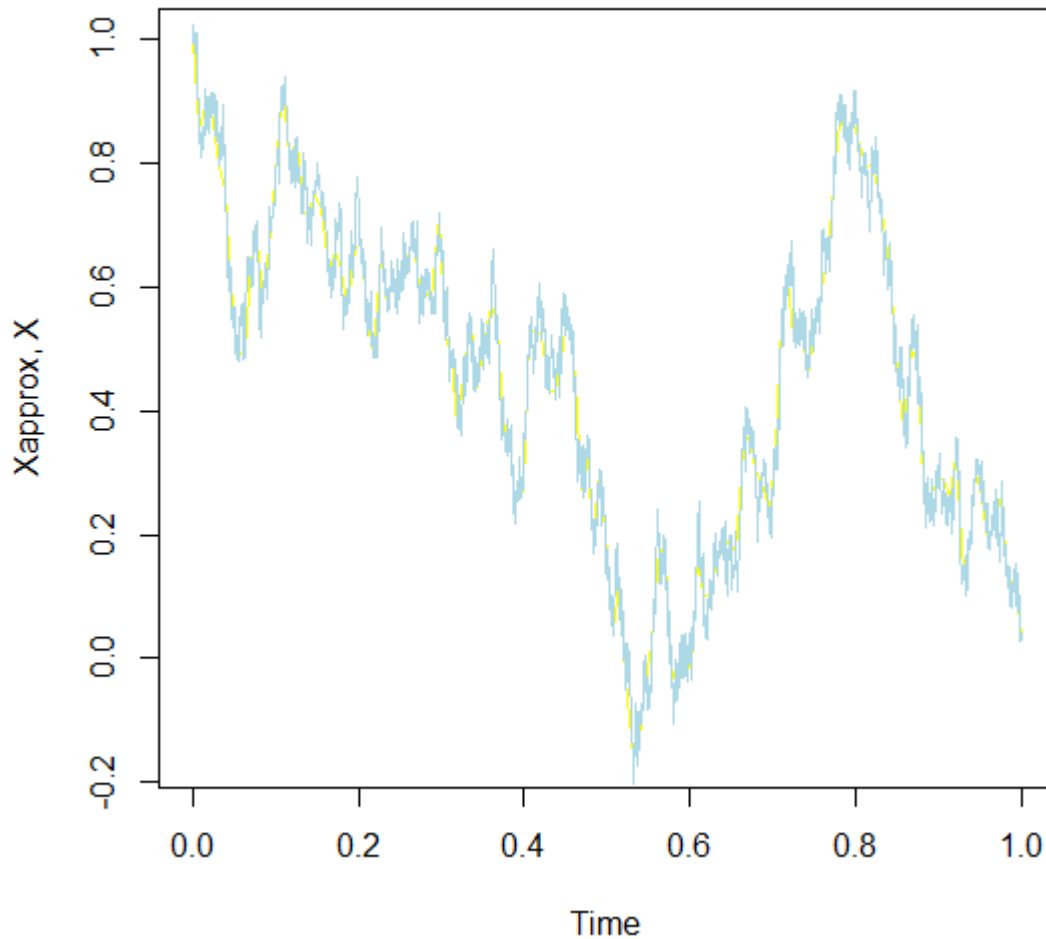
Ornstein-Uhlenbeck



Σχήμα 3.4 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-4}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για $\delta = 2^{-7}$ οπότε προκύπτει

Ornstein-Uhlenbeck



Σχήμα 3.5 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck .

Παρατηρούμε και σε αυτήν την περίπτωση ότι η προσέγγιση Euler είναι πλησιέστερα στη διαδικασία Itô στο τελικό σημείο $T = 1$ όταν το βήμα είναι μικρότερο.

3.1.3 Αριθμητικός υπολογισμός και ανάλυση του σφάλματος

Θα χρησιμοποιήσουμε το πρώτο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας προκειμένου να εξετάσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το κριτήριο του απολύτου σφάλματος και να επιβεβαιώσουμε και στην πράξη τα θεωρητικά αποτελέσματα. Θα ασχοληθούμε, δηλαδή, με τη διαδικασία Itô $X = \{X_t, t \geq 0\}$ (γεωμετρική κίνηση Brown) που ικανοποιεί τη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.19)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η αναλυτική λύση της (3.1.19) είναι

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right).$$

Για το σκοπό αυτό προσομοιώνουμε N μονοπάτια της κίνησης Brown τα οποία χρησιμοποιούμε στη συνέχεια για να κατασκευάσουμε N προσεγγιστικές λύσεις Y και N ακριβείς λύσεις X . Ας συμβολίσουμε την τελική τιμή της κ -οστής προσεγγιστικής και ακριβούς λύσης με $Y_{T,\kappa}$ και $X_{T,\kappa}$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα προσομοιωμένα μονοπάτια, το απόλυτο σφάλμα που δίνεται από την (3.1.5) μπορεί να εκτιμηθεί από την ποσότητα

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N |X_{T,\kappa} - Y_{T,\kappa}|. \quad (3.1.27)$$

Με την εκτέλεση του παρακάτω κώδικα σε R -ο οποίος προσομοιώνει $N = 25$ μονοπάτια της διαδικασίας Itô που ικανοποιεί την (3.1.19) με $X_0 = 1.0$, $\alpha = 1.5$, $b = 1.0$ και τις Euler προσεγγίσεις αυτών με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, T]$ για $T = 1$ με βήμα $\delta = 2^{-4}$ που αντιστοιχούν στα ίδια μονοπάτια της κίνησης Brown και υπολογίζει το $\hat{\varepsilon}$ όπως αυτό ορίζεται στην (3.1.27):

```
# γροlogismos sfalmatos
set.seed(45)
N<-4000
N1<-16
K<-25
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
E<-numeric(K)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
for (k in 1:K){
  Z<-rnorm(N)
  t<-T0+Dt
  for (i in 1:N){
    Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
    X[i+1]<-exp((1.5-0.5)*t+Y[i+1])
    t<-t+Dt
  }
  j<-1
  for (i in 1:N1){
    Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
    j<-j+N/N1
  }
  E[k]=abs(Xapprox[N1+1]-X[N+1])
}
e=mean(E)
```

προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

δ	2^{-4}
$\hat{\varepsilon}$	0.9485053

Πίνακας 3.1 Απόλυτο σφάλμα $\hat{\varepsilon}$ για βήμα $\delta = 2^{-4}$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για $\delta = 2^{-5}$, $\delta = 2^{-6}$ και $\delta = 2^{-7}$ και συνοψίζουμε όλα τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα:

δ	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\hat{\varepsilon}$	0.9485053	0.5862461	0.3850207	0.1835234

Πίνακας 3.2 Απόλυτα σφάλματα $\hat{\varepsilon}$ για διαφορετικά βήματα δ .

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αλλάζοντας το seed, χρησιμοποιώντας, δηλαδή διαφορετική αρχική τιμή για τη γεννήτρια τυχαίων αριθμών και συνδυάζουμε τα δύο αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα γράφοντας $\hat{\varepsilon}_1$ και $\hat{\varepsilon}_2$ αντίστοιχα για το απόλυτο στατιστικό σφάλμα (3.1.27):

δ	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\hat{\varepsilon}_1$	0.9485053	0.5862461	0.3850207	0.1835234
$\hat{\varepsilon}_2$	1.02544	0.5713544	0.4707949	0.2981489

Πίνακας 3.3 Απόλυτα σφάλματα $\hat{\varepsilon}_1$ και $\hat{\varepsilon}_2$ για διαφορετικά βήματα δ .

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στον πίνακα 3.3 παρατηρούμε και στις δύο περιπτώσεις ότι η εκτίμηση του απολύτου σφάλματος μειώνεται όσο μειώνεται το βήμα. Ωστόσο, αυτές οι εκτιμήσεις είναι τυχαίες μεταβλητές και παίρνουν διαφορετικές τιμές στις δύο ομάδες. Για μεγάλες τιμές του N γνωρίζουμε από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι το σφάλμα $\hat{\varepsilon}$ συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά σαν μια γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή και συγκλίνει κατά νόμο στη μη τυχαία μέση τιμή ε της απόλυτης τιμής του σφάλματος καθώς $N \rightarrow \infty$. Προφανώς, στην πράξη δεν μπορούμε να παράγουμε άπειρο αριθμό μονοπατιών. Μπορούμε, ωστόσο, να εκτιμήσουμε τη διασπορά $\sigma_{\hat{\varepsilon}}^2$ του $\hat{\varepsilon}$ και να τη χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για το ε .

Για να το κάνουμε αυτό οργανώνουμε τις προσομοιώσεις σε M ομάδες, καθεμιά εκ των οποίων περιέχει N προσομοιώσεις και εκτιμούμε τη διασπορά του $\hat{\varepsilon}$ με τον ακόλουθο τρόπο. Συμβολίζουμε με $Y_{T,\kappa,j}$ και $X_{T,\kappa,j}$ την προσεγγιστική και ακριβή λύση αντίστοιχα που δίνονται από το κ -οστό μονοπάτι στην j -οστή ομάδα. Για κάθε ομάδα λαμβάνουμε μέσα σφάλματα

$$\hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N |X_{T,\kappa,j} - Y_{T,\kappa,j}|,$$

τα οποία είναι ανεξάρτητα και κατά προσέγγιση γκαουσιανά για μεγάλες τιμές του N . Ο λόγος που οργανώσαμε τα σφάλματα σε ομάδες είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Student για να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για άθροισμα ανεξάρτητων, γκαουσιανών ή εν προκειμένω κατά προσέγγιση γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών με άγνωστη διασπορά. Ειδικότερα, εκτιμούμε τον μέσο

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\varepsilon}_j = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{\kappa=1}^N |X_{T,\kappa,j} - Y_{T,\kappa,j}|$$

και τη διασπορά

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\varepsilon}_j - \hat{\varepsilon})^2$$

των μέσων όρων των ομάδων. Η εμπειρία έχει δείξει ότι οι μέσοι όροι των ομάδων μπορούν να ερμηνευθούν ως γκαουσιανοί για μεγέθη ομάδας $N \geq 15$. Εμείς συνήθως θα χρησιμοποιούμε $N = 100$. Για την κατανομή Student με $M - 1$ βαθμούς ελευθερίας, ένα $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ε δίνεται από

$$(\hat{\varepsilon} - \Delta\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon} + \Delta\hat{\varepsilon}) \quad (3.1.28)$$

με

$$\Delta\hat{\varepsilon} = t_{1-\alpha, M-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{M}} \quad (3.1.29)$$

όπου $t_{1-\alpha, M-1}$ καθορίζεται από την κατανομή Student με $M - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Για $M = 20$ και $\alpha = 0.1$ βρίσκουμε από τους πίνακες της κατανομής Student ότι $t_{1-\alpha, M-1} \approx 1.73$. Σε αυτήν την περίπτωση το απόλυτο σφάλμα ε θα βρίσκεται στο αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης (3.1.28) με πιθανότητα $1 - \alpha = 0,9$.

Το παρακάτω πρόγραμμα σε R προσομοιώνει $M = 10$ ομάδες καθεμιά με $N = 100$ μονοπάτια της διαδικασίας Itô που ικανοποιεί την (3.1.19) με $X_0 = 1.0$, $\alpha = 1.5$, $b = 0.1$ και τις Euler προσεγγίσεις αυτών με ισαπέχοντα σημεία που αντιστοιχούν στα ίδια μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, T]$ για $T = 1$ και υπολογίζει ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το απόλυτο σφάλμα ε . Επίσης, επαναλαμβάνει τη διαδικασία για $M = 20, 40$ και 100 ομάδες-χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση τις ομάδες που έχουν ήδη προσομοιωθεί-και απεικονίζει τα διαστήματα εμπιστοσύνης συναρτήσει του M .

kataskeuh diasthmatwn empistosynhs

M<-c(10,20,40,100)

e1<-numeric(4)

se<-numeric(4)

de<-numeric(4)

a1<-numeric(4)

a2<-numeric(4)

e<-numeric(100)

for (p in 1:4){

 if(p==1)

 j<-0

 if(p>1)

 j<-M[p-1]

 for (l in j+1:M[p]){

 N<-4000

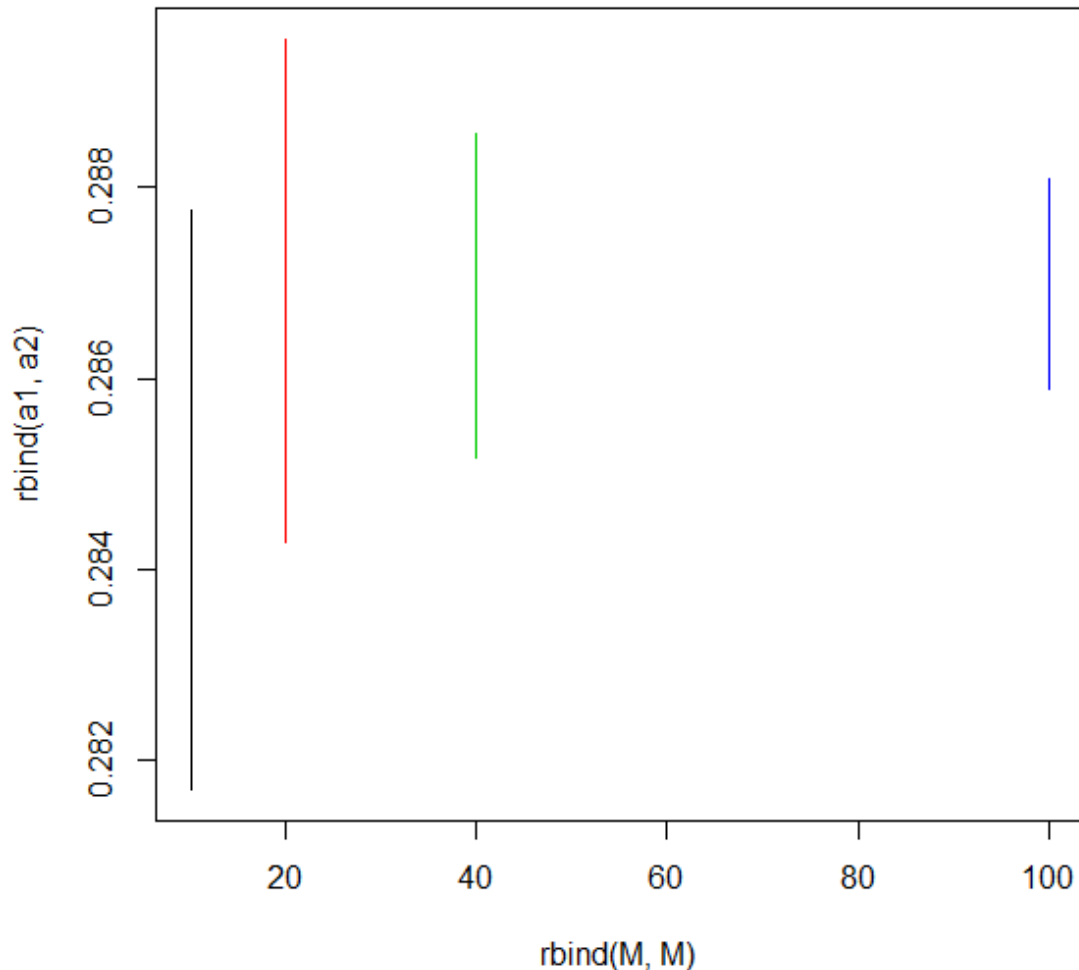
 N1<-16

```

K<-100
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
E<-numeric(K)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
for (k in 1:K){
  Z<-rnorm(N)
  t<-T0+Dt
  for (i in 1:N){
    Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
    X[i+1]<-exp((1.5-0.5*0.1*0.1)*t+0.1*Y[i+1])
    t<-t+Dt
  }
  j<-1
  for (i in 1:N1){
    Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+0.1*Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
    j<-j+N/N1
  }
  E[k]=abs(Xapprox[N1+1]-X[N+1])
}
e[l]=mean(E)
}
e1[p]=mean(e[1:M[p]])
se[p]=var(e[1:M[p]])
de[p]=1.73*sqrt(se[p]/M[p])
a1[p]=e1[p]-de[p]
a2[p]=e1[p]+de[p]
}
matplot(rbind(M,M),rbind(a1,a2),type="l",lty=1)

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα



Σχήμα 3.6 Διαστήματα εμπιστοσύνης για αυξανόμενο αριθμό ομάδων.

Τα αποτελέσματα, όπως απεικονίζονται στο σχήμα 3.6, υποδεικνύουν ότι το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης για το απόλυτο σφάλμα μειώνεται όσο αυξάνει ο αριθμός των ομάδων. Στην πραγματικότητα, αυτό προβλέπεται από τον τύπο (3.1.29) ο οποίος υποδηλώνει ότι για να μειώσουμε στο μισό το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης θα πρέπει να τετραπλασιάσουμε τον αριθμό των ομάδων. Κατέστη εμφανές-από την εκτέλεση του παραπάνω προγράμματος –ότι το να επιτύχουμε αυτήν την επιπλέον ακρίβεια μπορεί να είναι πολύ χρονοβόρο.

Οι προηγούμενοι υπολογισμοί μας παρέχουν μια μέθοδο για να καθορίσουμε τον αριθμό των προσομοιώσεων που χρειάζονται για να λάβουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης δεδομένου μήκους για το απόλυτο σφάλμα ε . Αφού το μήκος $2\Delta\hat{\varepsilon}$ του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι αντιστρόφως ανάλογο με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των ομάδων M , ο απαιτούμενος αριθμός ομάδων για ένα επιλεγμένο διάστημα εμπιστοσύνης αρκούντως μικρού μήκους μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Κατά συνέπεια θα πρέπει να σκεφτούμε αρκετά για να αποφασίσουμε πόση ακρίβεια χρειάζεται πραγματικά στην απάντηση ενός δοθέντος προβλήματος.

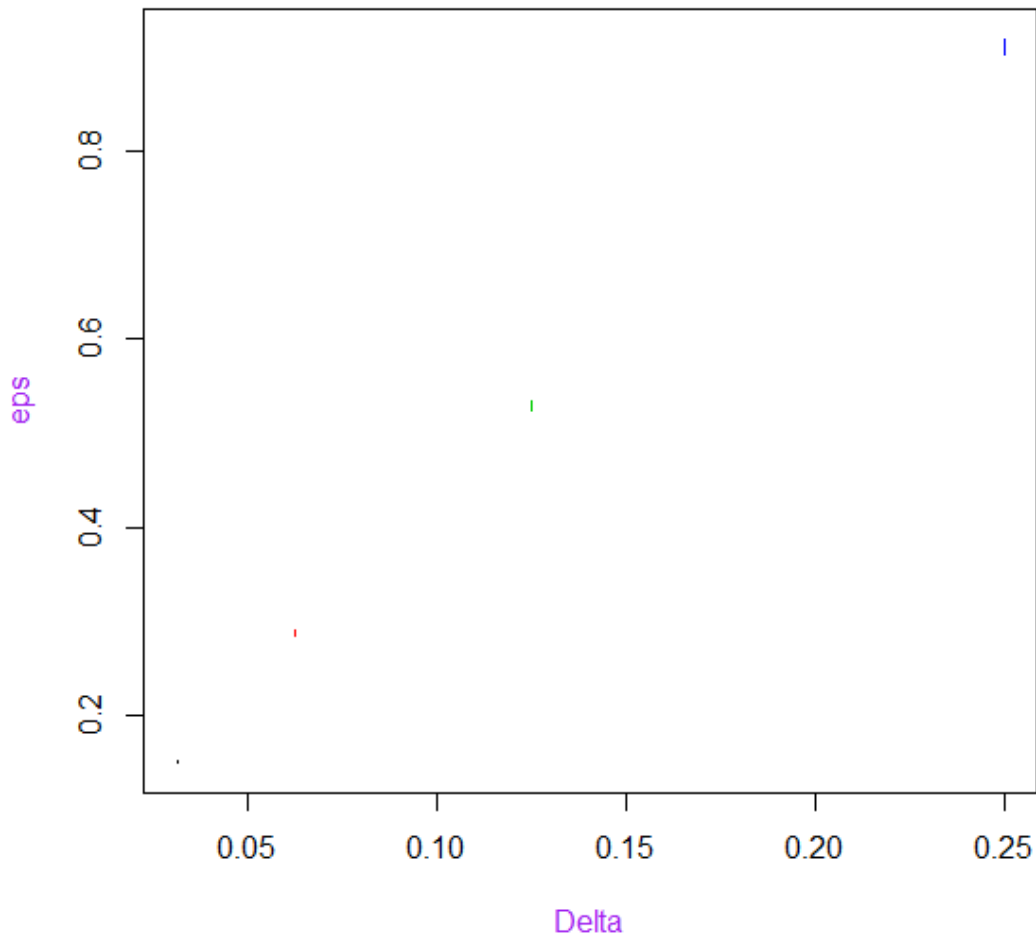
Τώρα θα κοιτάξουμε πιο επισταμένα τη σχέση μεταξύ του απολύτου σφάλματος των προσεγγίσεων Euler και του βήματος.

Το ακόλουθο πρόγραμμα σε R προσομοιώνει $M = 20$ ομάδες καθεμιά με $N = 100$ μονοπάτια της διαδικασίας $It\delta X$ που ικανοποιεί την (3.1.19) με $X_0 = 1.0$, $\alpha = 1.5$, $b = 0.1$ και τις Euler προσεγγίσεις αυτών με ισαπέχοντα σημεία που αντιστοιχούν στα ίδια μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, T]$ για $T = 1$ και υπολογίζει ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το απόλυτο σφάλμα ε . Επίσης, επαναλαμβάνει τη διαδικασία για $\delta = 2^{-3}$, 2^{-4} και 2^{-5} και απεικονίζει τα διαστήματα εμπιστοσύνης για το ε συναρτήσει του δ .

```
# confidence_intervals_2
set.seed(187)
e<-numeric(20)
for (l in 1:20){
  N<-4096
  N1<-4
  K<-100
  T0<-0
  T<-1
  Dt<-1/N
  Dt1<-1/N1
  Y<-numeric(N+1)
  X<-numeric(N+1)
  E<-numeric(K)
  Xapprox<-numeric(N1+1)
  Y[1]<-0
  X[1]<-1
  Xapprox[1]<-1
  for (k in 1:K){
    Z<-rnorm(N)
    t<-T0+Dt
    for (i in 1:N){
      Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
      X[i+1]<-exp((1.5-0.5*0.1*0.1)*t+0.1*Y[i+1])
      t<-t+Dt
    }
    j<-1
    for (i in 1:N1){
      Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+0.1*Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
      j<-j+N/N1
    }
    E[k]=abs(Xapprox[N1+1]-X[N+1])
  }
  e[l]=mean(E)
}
e1=mean(e)
se=var(e)
de=1.73*sqrt(se/20)
a1=e1-de
a2=e1+de
```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα

Confidence intervals for e



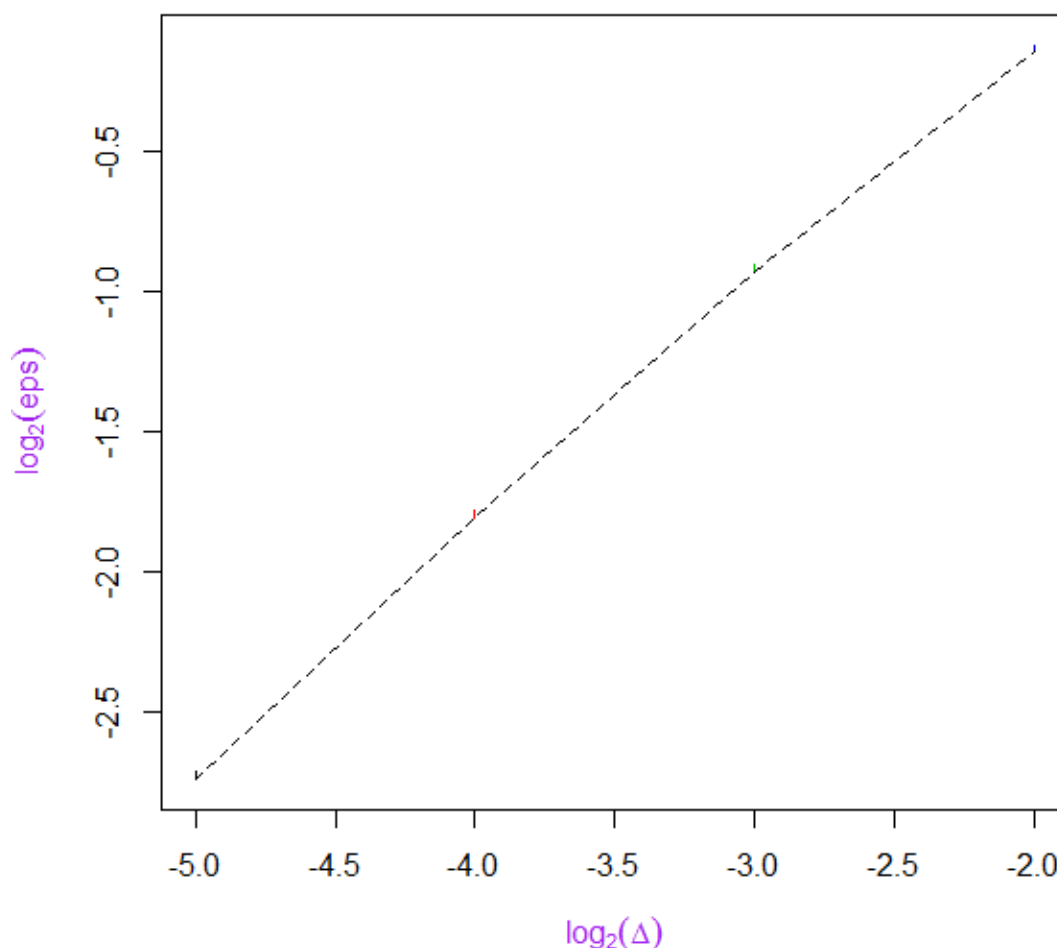
Σχήμα 3.7 Διαστήματα εμπιστοσύνης για αυξανόμενο βήμα.

Το σχήμα 3.7 δείχνει ότι το μήκος βήματος δ έχει ουσιαστικό αποτέλεσμα στην τιμή του απολύτου σφάλματος ε και το μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης. Θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε στο σχήμα 3.7 τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

$$\tilde{\varepsilon}(\delta) = K\delta^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.30)$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά K , που θα υποδείκνυε ότι το απόλυτο σφάλμα είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του βήματος. Αυτό φαίνεται πιο καθαρά, αν απεικονίσουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας \log_2 συντεταγμένες, οπότε το γράφημα της (3.1.30) γίνεται ευθεία γραμμή με κλίση $\frac{1}{2}$:

Confidence intervals for e



Σχήμα 3.8 \log_2 του απολύτου σφάλματος συναρτήσει $\log_2 \delta$.

Βλέπουμε ότι τα διαστήματα εμπιστοσύνης στο σχήμα 3.8 ακολουθούν περίπου μια ευθεία γραμμή με κλίση $\frac{1}{2}$. Θα μπορούσε να γίνει και περαιτέρω διερεύνηση με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Για να διερευνήσουμε περαιτέρω την αιτία του σφάλματος διασπάμε την τυχαία μεταβλητή $\hat{\varepsilon}$ σε δύο μέρη

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{disc} + \varepsilon_{stat}$$

όπου ε_{disc} είναι το σφάλμα διακριτοποίησης χρόνου και ε_{stat} το στατιστικό σφάλμα.

Το σφάλμα διακριτοποίησης χρόνου ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \varepsilon_{disc} &:= E[\hat{\varepsilon}] = E \left[\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{\kappa=1}^N |X_{T,\kappa,j} - Y_{T,\kappa,j}| \right] \\ &= E[|X_T - Y_T|] = \varepsilon \end{aligned}$$

βλέπουμε, δηλαδή, ότι συμπίπτει με το απόλυτο σφάλμα. Αυτό το μέρος του σφάλματος εξαρτάται αποκλειστικά από την επιλογή της αριθμητικής μεθόδου.

Για ένα μεγάλο αριθμό MN ανεξάρτητων προσομοιώσεων, το στατιστικό σφάλμα $\varepsilon_{stat} = \hat{\varepsilon} - \varepsilon_{disc}$ συμπεριφέρεται -λόγω κεντρικού οριακού θεωρήματος- σαν γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά

$$\begin{aligned} V[\varepsilon_{stat}] &= E[(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_{disc})^2] \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{j=1}^M \sum_{\kappa=1}^N E \left[(|X_{T,\kappa,j} - Y_{T,\kappa,j}| - \varepsilon)^2 \right] \\ &= \frac{1}{MN} E[(|X_T - Y_T| - \varepsilon)^2] = \frac{1}{MN} V[|X_T - Y_T|] \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

δηλαδή το στατιστικό σφάλμα είναι αντιστρόφως ανάλογο του συνολικού αριθμού MN των προσομοιώσεων. Η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου επηρεάζει το στατιστικό σφάλμα μόνο μέσω της σταθεράς αναλογίας $V[|X_T - Y_T|]$.

Πέραν του στατιστικού σφάλματος και του σφάλματος από τη διακριτοποίηση του χρόνου, υπάρχει πάντοτε ο κίνδυνος το αποτέλεσμα να επηρεάζεται από λάθη στρογγυλοποίησης, ιδιαίτερα στην περίπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων. Από την (3.1.31) είναι φανερό, ωστόσο, ότι χρειάζεται ένας τεράστιος αριθμός μονοπατιών για να λάβουμε ένα αμελητέο στατιστικό σφάλμα με αποτέλεσμα το σφάλμα στρογγυλοποίησης να μπορεί να αμεληθεί συγκριτικά με τα άλλα δύο είδη σφάλματος.

Από τα ανωτέρω βλέπουμε ότι κατά κύριο λόγο το σφάλμα από τη διακριτοποίηση του χρόνου επηρεάζεται αν επιλέξουμε κάποια άλλη αριθμητική μέθοδο. Για το λόγο αυτό είναι φυσικό να χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκλισης (3.1.7) για συγκρίσεις μεταξύ των διαφορετικών αριθμητικών μεθόδων.

Για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις που δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά-που είναι και η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση- η προηγούμενη ανάλυση εξακολουθεί να ισχύει μόνο που τώρα το X_T είναι άγνωστο, με αποτέλεσμα το απόλυτο σφάλμα να μην μπορεί να βρεθεί αριθμητικά. Για να εκτιμήσουμε την τάξη της σύγκλισης εργαζόμαστε ως εξής: Παράγουμε έναν αριθμό προσεγγίσεων $Y_T^{(n)}$ χρησιμοποιώντας έναν αυξανόμενο αριθμό $N^{(n)} = m2^n$ ισαπεχόντων σημείων στο χρόνο. Υπό τις (αρκετά ισχυρές) προϋποθέσεις ότι οι αριθμητικές προσεγγίσεις με αυξανόμενο αριθμό σημείων προσεγγίζουν την πραγματική λύση μονότονα και ότι η ανισότητα στην (3.1.7) μπορεί να αντικατασταθεί από ισότητα, λαμβάνουμε την ανάλυση

$$\begin{aligned} E \left[\left| Y_T^{(n+1)} - Y_T^{(n)} \right| \right] &= E \left[\left| Y_T^{(n)} - X_T \right| \right] - E \left[\left| Y_T^{(n+1)} - X_T \right| \right] \\ &= C \left(\frac{T}{m2^n} \right)^\gamma - C \left(\frac{T}{m2^{n+1}} \right)^\gamma \\ &= C \left(\frac{T}{m2^n} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{2^\gamma} \right) \end{aligned}$$

έτσι ώστε κατά προσέγγιση

$$\frac{\log \frac{E \left[\left| Y_T^{(n+1)} - Y_T^{(n)} \right| \right]}{E \left[\left| Y_T^{(n+2)} - Y_T^{(n+1)} \right| \right]}}{\log \frac{N^{(n+2)}}{N^{(n+1)}}} = \frac{\log \frac{C \left(\frac{T}{m2^n} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{2^\gamma} \right)}{C \left(\frac{T}{m2^{n+1}} \right)^\gamma \left(1 - \frac{1}{2^\gamma} \right)}}{\log \frac{m2^{n+2}}{m2^{n+1}}} = \frac{\log 2^\gamma}{\log 2} = \gamma$$

Αυτή η εκτίμηση θα πρέπει φυσικά να συνδυαστεί με μια θεωρητική απόδειξη ότι η αριθμητική λύση πράγματι συγκλίνει στη σωστή λύση.

3.1.4 Επί τούτου υπολογισμός της τάξης σύγκλισης για τη Γραμμική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση

Περίπτωση 1

Αναλύουμε τη σύγκλιση για τη γεωμετρική κίνηση Brown

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \quad (3.1.19)$$

όπου τα a και b είναι σταθερές. Υπενθυμίζουμε ότι η ακριβής λύση της (3.1.19) είναι

$$X_t = X_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t} .$$

Το σχήμα Euler για αυτήν τη διαδικασία είναι

$$Y_{i+1} = Y_i + aY_i \Delta t + bY_i \Delta W_i$$

ή

$$Y_{i+1} = Y_i (1 + a\Delta t + b\Delta W_i)$$

όπου $\Delta W_i = \sqrt{\Delta t} Z_i$, $Z_i \sim N(0,1)$. Τότε, προφανώς, η αριθμητική λύση στο σημείο $t = t_k$ είναι

$$Y_{k+1} = X_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 + a\Delta t + b\Delta W_i)$$

Για $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{n}$, $t_2 = \frac{2T}{n}$, ..., $t_n = T$, εξ' ορισμού, το σφάλμα στην ισχυρή σύγκλιση είναι

$$E[|Y_T - X_T|] = X_0 E \left[\left| \prod_{i=0}^{n-1} (1 + a\Delta t + b\Delta W_i) - e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + bW_T} \right| \right] \quad (3.1.32)$$

Αν αναπτύξουμε κατά Taylor μέχρι $O((\Delta t)^2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{(a - \frac{1}{2}b^2)\Delta t + b\Delta W_i} &= 1 + \left[\left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) \Delta t + b\Delta W_i \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) \Delta t + b\Delta W_i \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t + b \Delta W_i \right]^3 + \dots \\
& = 1 + \left[\left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t + b \Delta W_i \right] \\
& \quad + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) b \Delta t \Delta W_i + \frac{1}{2} b^2 (\Delta W_i)^2 \\
& \quad + \frac{1}{6} b^3 (\Delta W_i)^3 + O((\Delta t)^2) \\
& = 1 + a \Delta t + b \Delta W_i + a' b \Delta t \Delta W_i + \frac{1}{6} a^3 (\Delta W_i)^3 + O((\Delta t)^2)
\end{aligned}$$

όπου $a' \equiv \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right)$. Συνεπώς,

$$1 + a \Delta t + b \Delta W_i = e^{(a - \frac{1}{2} b^2) \Delta t + b \Delta W_i} - a' b \Delta t \Delta W_i - \frac{1}{6} b^3 (\Delta W_i)^3 - O((\Delta t)^2)$$

Άρα

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + a \Delta t + b \Delta W_i) = \prod_{i=0}^{n-1} \left[e^{(a - \frac{1}{2} b^2) \Delta t + b \Delta W_i} - a' b \Delta t \Delta W_i - \frac{1}{6} b^3 (\Delta W_i)^3 - O((\Delta t)^2) \right]$$

ή

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + a \Delta t + b \Delta W_i) = e^{(a - \frac{1}{2} b^2) T + b W_T} + n O(\Delta t \Delta W) + n O((\Delta W)^3) + n O((\Delta t)^2)$$

Επομένως, το σφάλμα (3.1.32) γίνεται

$$\begin{aligned}
E[|Y_T - X_T|] &= E[|n O(\Delta t \Delta W) + n O((\Delta W)^3) + n O((\Delta t)^2)|] \\
&= E \left[\left| \frac{T}{\Delta t} O(\Delta t \Delta W) + \frac{T}{\Delta t} O((\Delta W)^3) + \frac{T}{\Delta t} O((\Delta t)^2) \right| \right] \\
&= TE \left[\left| \frac{1}{\Delta t} O(\Delta t \Delta W) + \frac{1}{\Delta t} O((\Delta W)^3) + \frac{1}{\Delta t} O((\Delta t)^2) \right| \right] \\
&= O\left((\Delta t)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι το σχήμα Euler έχει τάξη ισχυρής σύγκλισης ίση με $\frac{1}{2}$.

Περίπτωση 2

Τώρα, θα προσπαθήσουμε να αποκτήσουμε κάποια διαίσθηση γιατί το σχήμα Euler έχει τάξη ισχυρής σύγκλισης ίση με 1 για τη διαδικασία

$$dX_t = a dt + b dW_t$$

όταν η b είναι ντετερμινιστική συνάρτηση. Σε αυτήν την περίπτωση, το σχήμα Euler είναι

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i)\Delta t + b(t_i)\Delta W_i$$

κι επομένως τη χρονική στιγμή $t_n = T$,

$$Y_T = Y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a(t_i)\Delta t + \sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)\Delta W_i .$$

Αφού η ακριβής λύση είναι

$$X_T = X_0 + \int_0^T a(t)dt + \int_0^T b(t)dW_t$$

έχουμε

$$Y_T - X_T = \sum_{i=0}^{n-1} a(t_i)\Delta t - \int_0^T a(t)dt + \sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)\Delta W_i - \int_0^T b(t)dW_t$$

η πρώτη διαφορά του δεξιού μέλους του οποίου έχει σφάλμα $O(\Delta t)$. Τώρα θα αναλύσουμε το σφάλμα για τη δεύτερη διαφορά του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης. Ορίζουμε

$$A \equiv \sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)\Delta W_i ,$$

$$B \equiv \int_0^T b(t)dW_t$$

Επισημαίνουμε ότι

1. Η A είναι κανονική τυχαία μεταβλητή- ως άθροισμα ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών- με μέση τιμή

$$E[A] = E \left[\sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)\Delta W_i \right] = \sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)E[\Delta W_i] = 0$$

και διασπορά

$$V[A] = V \left[\sum_{i=0}^{n-1} b(t_i)\Delta W_i \right] = \sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)V[\Delta W_i] = \sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)\Delta t \quad (3.1.33)$$

Συνεπώς, η κανονική τυχαία μεταβλητή A μπορεί να εκφραστεί ως

$$A = \frac{W_{\tau T}}{\sqrt{T}} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)\Delta t}$$

αφού το δεξί μέλος της ανωτέρω εξίσωσης είναι μια τυχαία μεταβλητή Gauss με μηδενικό μέσο και διασπορά όπως στην (3.1.33).

2. Η B είναι επίσης κανονική τυχαία μεταβλητή- αφού η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι τυχαία -με μέση τιμή και διασπορά

$$E[B] = E\left[\int_0^T b(t)dW_t\right] = 0$$

$$V[B] = E[B^2] = E\left[\left(\int_0^T b(t)dW_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T b^2(t)dt\right] = \int_0^T b^2(t)dt .$$

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή B μπορεί να εκφραστεί ως

$$B = \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T b^2(t)dt} .$$

Συνεπώς, έχουμε

$$A - B = \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)\Delta t} - \sqrt{\int_0^T b^2(t)dt} \right)$$

Αφού

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)\Delta t - \int_0^T b^2(t)dt = O(\Delta t) ,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^2(t_i)\Delta t = \int_0^T b^2(t)dt + O(\Delta t)$$

Αν ορίσουμε $\Sigma \equiv \int_0^T b^2(t)dt$, έχουμε

$$A - B = \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\Sigma + O(\Delta t)} - \sqrt{\Sigma} \right) = \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\Sigma} \sqrt{1 + \frac{O(\Delta t)}{\Sigma}} - \sqrt{\Sigma} \right)$$

$$= \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\Sigma} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{O(\Delta t)}{\Sigma} + O((\Delta t)^2) \right) - \sqrt{\Sigma} \right)$$

$$= \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \frac{1}{2} \frac{O(\Delta t)}{\sqrt{\Sigma}}$$

Επομένως,

$$Y_T - X_T = O(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{W_{\tau_T}}{\sqrt{T}} \frac{O(\Delta t)}{\sqrt{\Sigma}} = O(\Delta t)$$

δηλαδή το σχήμα Euler έχει τάξη ισχυρής σύγκλισης ίση με ένα όταν η $b(t)$ είναι ντετερμινιστική συνάρτηση.

3.1.5 Επιπλέον παραδείγματα και εφαρμογές της μεθόδου

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με δύο ενδιαφέροντα παραδείγματα μη γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στα οποία θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Euler. Το πρώτο αφορά τη δυναμική του πληθυσμού και το επόμενο τη γενετική.

Παράδειγμα 3.1.5α

Δυναμική του πληθυσμού Το απλούστερο ντετερμινιστικό μοντέλο της αύξησης του πληθυσμού είναι η εκθετική εξίσωση $\dot{x} = ax$, όπου το a είναι συνήθως μια θετική σταθερά η οποία, ωστόσο, μπορεί να ποικίλλει σε πρόσημο και πλάτος ανάλογα με το χρόνο t έτσι ώστε να καλύπτει τις εποχικές διακυμάνσεις. Οι ιδιομορφίες του περιβάλλοντος μπορούν να μοντελοποιηθούν επιτρέποντας στο a να ποικίλλει με τυχαίο τρόπο, ως $a + \sigma \xi_t$, όπου ξ_t είναι μια διαδικασία μηδενικού μέσου. Τόσο το ντετερμινιστικό όσο και το στοχαστικό μοντέλο επιτρέπουν μη φραγμένη εκθετική αύξηση, κάτι που δεν ευσταθεί σε ένα περιβάλλον με περιορισμένους πόρους. Κάτω από τέτοιες προϋποθέσεις, μία πεπερασμένη K είναι κατάλληλη, με τον πληθυσμό να μειώνεται οποτεδήποτε ξεπερνά αυτήν την τιμή. Είναι εύκολο να εντάξουμε αυτό το στοιχείο στο ντετερμινιστικό μοντέλο αντικαθιστώντας τη σταθερά αύξησης a με το γραμμικό παράγοντα $a(K - x)$. Τότε λαμβάνουμε τη γραμμική-τετραγωνική εξίσωση Verhulst

$$\dot{x} = a(K - x)x$$

η οποία γράφεται συνήθως ως εξής

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

με το aK να έχει αντικατασταθεί από το λ και το ax από το x .

«Τυχαιοποιώντας» την παράμετρο λ , δηλαδή θεωρώντας ότι εξελίσσεται τυχαία στο χρόνο ως $\lambda + \sigma \xi_t$ λαμβάνουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dW_t \quad (3.1.34)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά με τη μέθοδο της σύγκρισης. Ειδικότερα, η λύση αυτής είναι

$$X_t = \frac{X_0 \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)}{1 + X_0 \int_0^t \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma W_s\right) ds}$$

Το σχήμα Euler για αυτήν είναι:

$$Y_{i+1} = Y_i + (\lambda Y_i - Y_i^2)\Delta t + \sigma Y_i \Delta W_i.$$

Για σύγκριση, γράφουμε την ακριβή λύση ως εξής:

$$X_t = \frac{X_s \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right)}{1 + X_s \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma W_s\right) \int_s^t \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)r + \sigma W_r\right) dr}$$

Συνεπώς, οι αντίστοιχες τιμές της ακριβούς λύσης προσδιορίζονται ως ακολούθως:

$$X_{\tau_{i+1}} = \frac{X_{\tau_i} \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma(W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i})\right)}{1 + X_{\tau_i} \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i + \sigma W_{\tau_i}\right) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)r + \sigma W_r\right) dr}$$

όπου το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή προσεγγίζεται ως εξής:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)r + \sigma W_r\right) dr \approx \sum_{i=0}^{N'-1} \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s_i + \sigma W_{s_i}\right) (s_{i+1} - s_i)$$

όπου $\tau_i = s_0 < s_1 < \dots < s_i < \dots < s_{N'} = \tau_{i+1}$ είναι μια ομοιόμορφη διαμέριση του υποδιαστήματος $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Στην υλοποίηση θα χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη συνάρτηση της R BBridge η οποία κατασκευάζει κίνηση Brown με δεδομένα άκρα-εδώ τα W_{τ_i} και $W_{\tau_{i+1}}$. Η προσέγγιση με το άθροισμα αποτελεί ουσιαστικά εφαρμογή της μεθόδου Euler στο ολοκλήρωμα του παρονομαστή με λεπτότερη διαμέριση.

Ο παρακάτω κώδικας σε R παράγει προσέγγιση Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα $\delta = 2^{-5}$ για τη διαδικασία Itô X -που ικανοποιεί την (3.1.34) με $X_0 = 1$, $\lambda = 1.5$ και $\sigma = 1$ –και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση όσο και την ακριβή για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown:

```
# Stochastic Verhulst Equation
```

```
N<-4000
```

```
N1<-32
```

```
N2<-100
```

```
T0<-0
```

```
T<-1
```

```
Dt<-1/N
```

```
Dt1<-1/N1
```

```
Dt2<-1/N2
```

```
Y<-numeric(N+1)
```

```
X<-numeric(N+1)
```

```
B<-numeric(N+1)
```

```
B1<-numeric(N2)
```

```
Xapprox<-numeric(N1+1)
```

```
Y[1]<-0
```

```
X[1]<-1
```

```
B[1]<-0
```

```
Xapprox[1]<-1
```

```
Z<-rnorm(N)
```

```
t<-T0+Dt
```

```
t1<-0
```

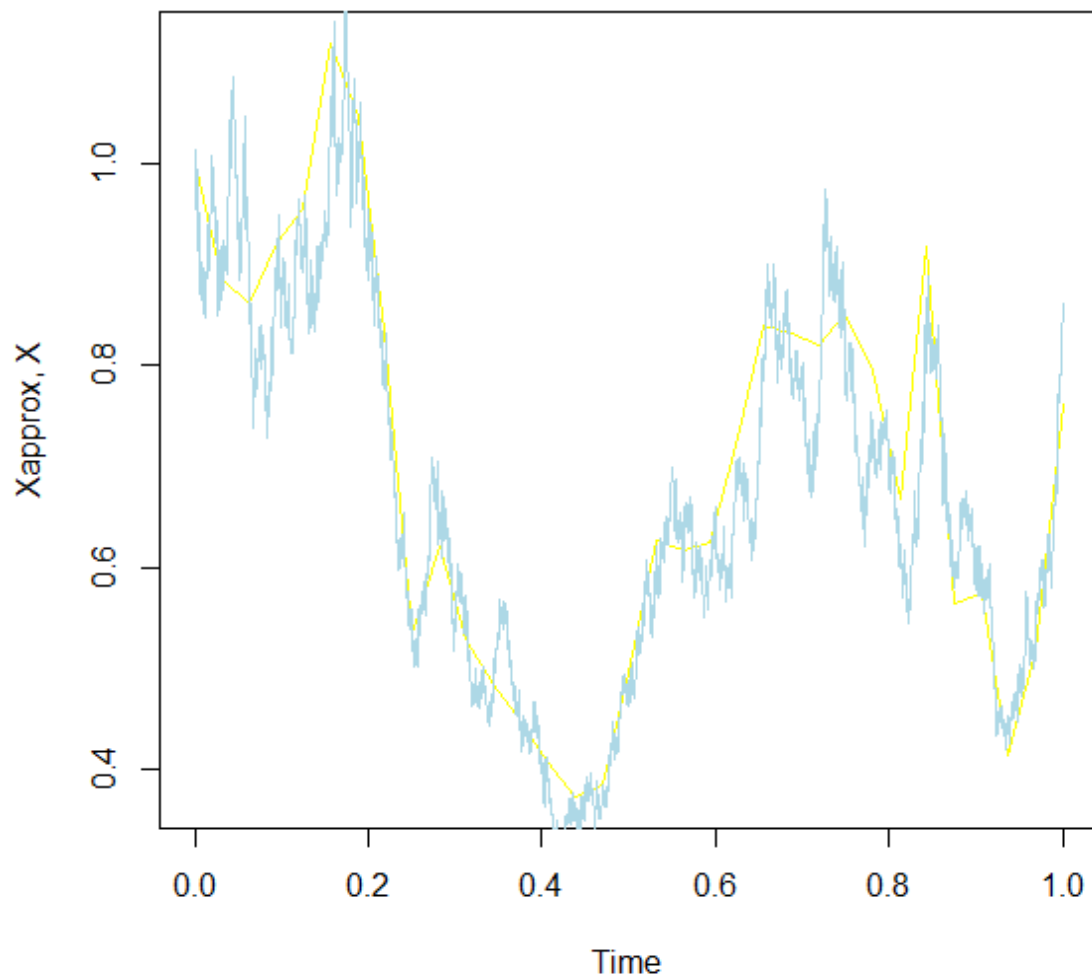
```

B1[1]<-0
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
  tmp.BB<-BBridge(Y[i],Y[i+1],t-Dt,t,N=100)
  w<-as.numeric(tmp.BB)
  B[i+1]<-B[i]
  for (l in 1:N2){
    B[i+1]<-B[i+1]+exp(w[l]+t1)*(Dt2*Dt)
    t1<-t1+1/(N*N2)
  }
  X[i+1]<-exp(t+Y[i+1])/(1+B[i+1])
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+(1.5*Xapprox[i]-Xapprox[i]^2)*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  j<-j+N/N1
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Verhulst", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

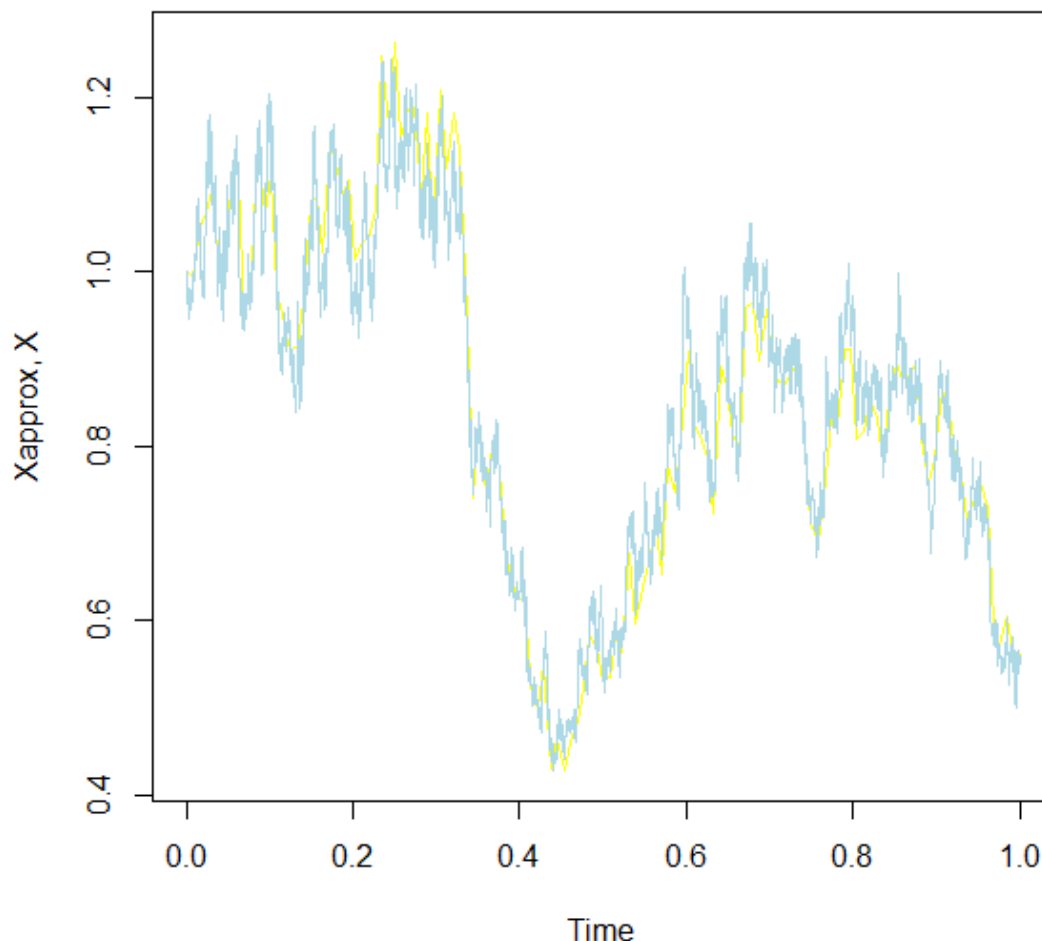
Verhulst



Σχήμα 3.9 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-5}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για $\delta = 2^{-7}$ οπότε προκύπτει

Verhulst



Σχήμα 3.10 Προσέγγιση Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.

Σημειώνεται ότι ο συντελεστής μετατόπισης της стоχαστικής εξίσωσης Verhulst δεν ικανοποιεί την ικανή συνθήκη για ισχυρή σύγκλιση με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουμε αν η προσέγγιση που λαμβάνουμε με τη μέθοδο Euler θα συγκλίνει στην ακριβή λύση. Από τα ανωτέρω σχήματα, βλέπουμε ότι το σχήμα Euler 'δουλεύει' καλά για τη συγκεκριμένη επιλογή των παραμέτρων. Εν γένει, ωστόσο, έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις όταν οι συντελεστές μεγαλώνουν υπεργραμμικά. Για το λόγο αυτό, εισάγουμε μια παραλλαγή της μεθόδου Euler –πολύ εύκολα υλοποιήσιμη- η οποία αποδεικνύεται ότι συγκλίνει ισχυρά στη λύση, με τάξη σύγκλισης $\frac{1}{2}$ (ίδια με της μεθόδου Euler) όταν ο συντελεστής διάχυσης είναι ολικά Lipschitz και ο συντελεστής μετατόπισης είναι μονόπλευρα ολικά Lipschitz-δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη $(x - y)(a(x) - a(y)) \leq C(x - y)^2$ για κάποια σταθερά C και για κάθε $x, y \in D$ με D το σύνολο τιμών της X -με την παράγωγό του να αυξάνεται το πολύ σαν πολυώνυμο (τα οποία ισχύουν όλα στην περίπτωση μας) [7]. Πρόκειται για την 'δαμαζόμενη' μέθοδο Euler, η οποία έχει ως εξής:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{a(Y_i) \frac{T}{N}}{1 + \frac{T}{N} |a(Y_i)|} + b(Y_i) \Delta W_i$$

για όλα τα $i \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ και όλα τα $N \in \mathbb{N}$.

Ο παρακάτω κώδικας σε R παράγει προσέγγιση της ‘δαμαζόμενης’ μεθόδου Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, 1]$ με βήμα $\delta = 2^{-7}$ για τη διαδικασία Itô X -που ικανοποιεί την (3.1.34) με $X_0 = 1, \lambda = 1.5$ και $\sigma = 1$ –και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση όσο και την ακριβή για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown:

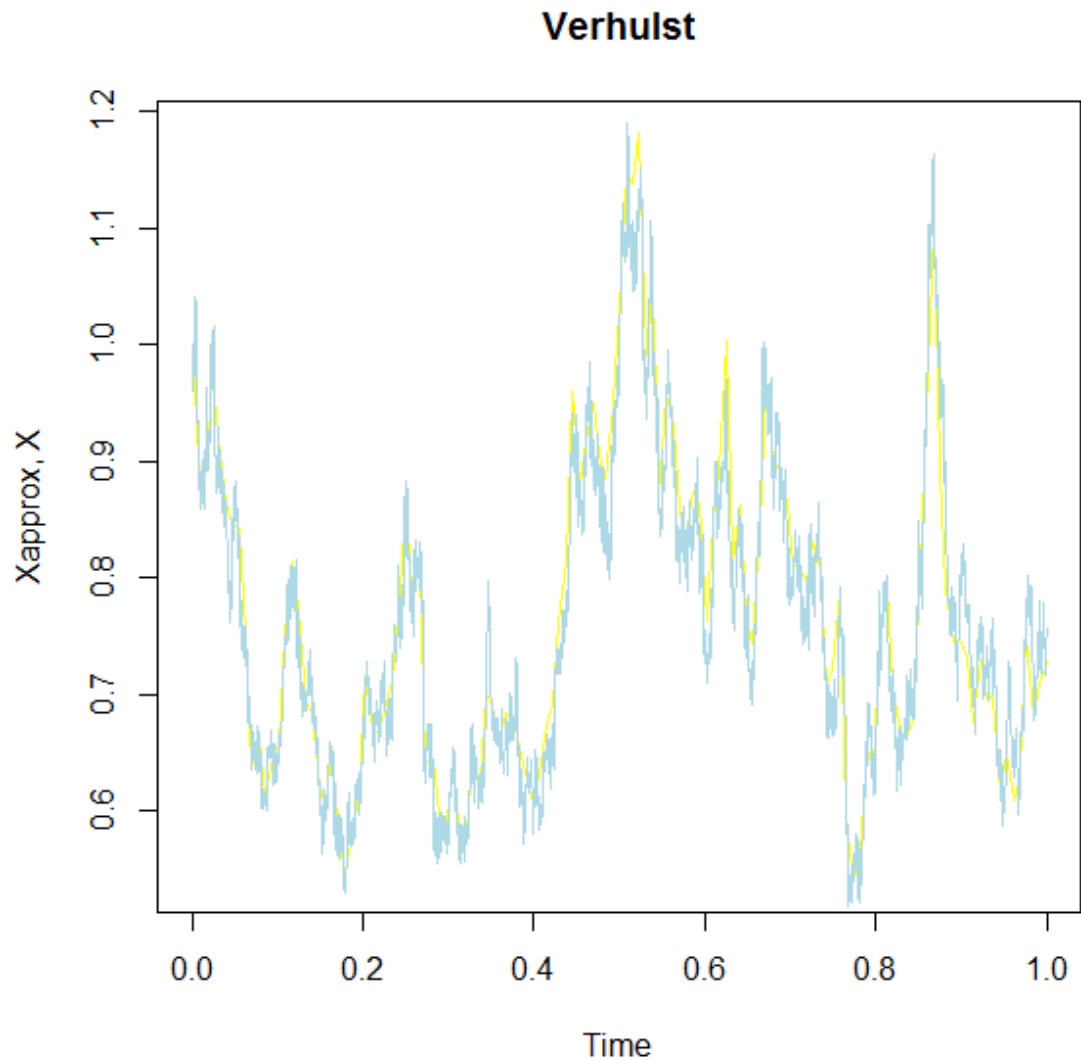
```
# Verhulst tamed_euler
N<-4096
N1<-128
N2<-100
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Dt2<-1/N2
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
B<-numeric(N+1)
B1<-numeric(N2)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
B[1]<-0
Xapprox[1]<-1
Z<-rnorm(N)
t<-T0+Dt
t1<-0
B1[1]<-0
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
  tmp.BB<-BBridge(Y[i],Y[i+1],t-Dt,t,N=100)
  w<-as.numeric(tmp.BB)
  B[i+1]<-B[i]
  for (l in 1:N2){
    B[i+1]<-B[i+1]+exp(w[l]+t1)*(Dt2*Dt)
    t1<-t1+1/(N*N2)
  }
  X[i+1]<-exp(t+Y[i+1])/(1+B[i+1])
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+((1.5*Xapprox[i]-Xapprox[i]^2)*Dt1)/(1+abs((1.5*Xapprox[i]-
Xapprox[i]^2))*Dt1)+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  j<-j+N/N1
}
```

```

Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Verhulst", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:



Σχήμα 3.11 Προσέγγιση της ‘δαμαζόμενης’ μεθόδου Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-7}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για την εξίσωση Verhulst.

Παράδειγμα 3.1.5β

Γενετική Η εξίσωση Itô

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma X_t(1 - X_t)dW_t \quad (3.1.35)$$

όπου

$$a(x) = \left(a - x + \lambda x(1 - x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x(1 - x)(1 - 2x) \right),$$

έχει γενετική εφαρμογή, με την X_t να αντιπροσωπεύει την αναλογία τη χρονική στιγμή t του ενός από τα δύο δυνατά αλληλόμορφα ενός συγκεκριμένου γονιδίου. Μια μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου μπορεί να κατασκευαστεί για την μοντελοποίηση των αλλαγών από γενιά σε γενιά στις αναλογίες των αλληλομόρφων που οφείλονται αφενός στη φυσική επιλογή, η οποία ευνοεί το αλληλόμορφο το πλέον κατάλληλο για την παρούσα κατάσταση ενός τυχαία μεταβαλλόμενου περιβάλλοντος και αφετέρου σε μεταλλάξεις οι οποίες σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουν το ένα αλληλόμορφο στο άλλο. Ουσιαστικά, αυτή η διακριτού χρόνου μαρκοβιανή διαδικασία συγκλίνει σε μια διαδικασία X_t που ικανοποιεί την (3.1.35) καθώς ο συνολικός αριθμός των αλληλομόρφων γίνεται αυθαίρετα μεγάλος.

Δυστυχώς, η εξίσωση (3.1.35) δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και κατά συνέπεια είναι αναγκαίο να καταφύγουμε σε αριθμητική επίλυση αυτής.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Euler. Το σχήμα Euler για την ανωτέρω διαδικασία έχει ως εξής:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta t + \sigma Y_i(1 - Y_i)\Delta W_i$$

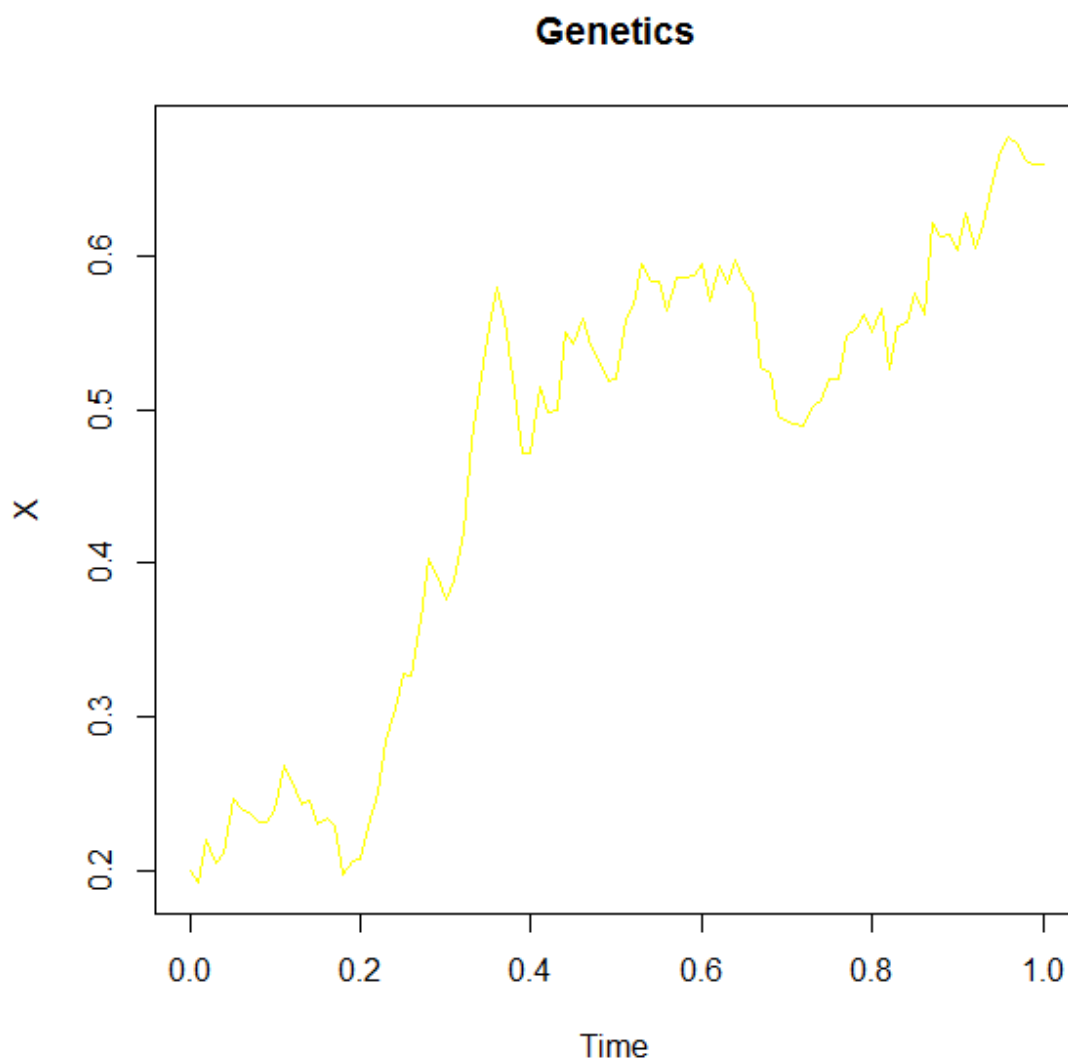
Όσον αφορά την υλοποίηση της μεθόδου στον υπολογιστή, για να μην ξαναγράψουμε κώδικα εξ' αρχής θα χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη συνάρτηση `sde.sim` που μας παρέχει η R και η οποία βρίσκεται στο CRAN πακέτο που ονομάζεται `sde` (το οποίο θα πρέπει να κατεβάσουμε την πρώτη φορά και στη συνέχεια να φορτώνουμε κάθε φορά που τρέχουμε το πρόγραμμά μας). Η συνάρτηση `sde.sim` μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση μονοπατιών λύσεων γενικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η συνάρτηση μπορεί να προσομοιώσει μονοπάτια με τη μέθοδο Euler αλλά και με άλλες μεθόδους. Η συνάρτηση δέχεται τους δύο συντελεστές `drift` και `sigma`. Οι συντελεστές θα πρέπει να είναι αντικείμενα της κλάσης `expression` με ορίσματα ονομαζόμενα `t` και `x` αντίστοιχα, για το χρόνο και το χώρο. Αν ο συντελεστής διάχυσης δεν προσδιορίζεται, υποθέτουμε ότι είναι μοναδιαίος (δηλαδή ταυτοτικά ίσος με ένα). Ο χρήστης μπορεί να προσδιορίσει την αρχική τιμή X_0 (προεπιλεγμένη τιμή το 1), το διάστημα $[\tau_0, T]$ (προεπιλεγμένη τιμή $[0,1]$), το βήμα `delta` και τον αριθμό N των τιμών της διαδικασίας που θα παραχθούν (προεπιλεγμένη τιμή 100). Η συνάρτηση πάντοτε επιστρέφει ένα αντικείμενο `ts` (χρονοσειρά) μήκους $N + 1$ -δηλαδή την αρχική τιμή X_0 και τις N νέες προσομοιωμένες τιμές του μονοπατιού. Αν το βήμα δεν προσδιορίζεται, $\delta = \frac{T-\tau_0}{N}$. Αν το βήμα προσδιορίζεται, τότε παράγονται N νέες παρατηρήσεις σε σημεία αυξανόμενα κατά δ και ο χρονικός ορίζοντας προσδιορίζεται κατ' αναλογία ως $T = \delta N$.

Ο παρακάτω κώδικας σε R παράγει προσέγγιση Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα $\delta = 0,1$ για τη διαδικασία $Itd X$ που ικανοποιεί την (3.1.35) με $X_0 = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $\lambda = 1,5$ και $\sigma = 1$ –και απεικονίζει την προσεγγιστική λύση:

```
# process genetics
require(sde)
set.seed(5)
d<-expression(0.5-x+1.5*x*(1-x)+0.5*x*(1-x)*(1-2*x))
s<-expression(x*(1-x))
```

```
sde.sim(X0=0.2,drift=d, sigma=s)->X
plot(X, main="Genetics",col='yellow')
```

Με την εκτέλεσή του προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:



Σχήμα 3.12 Προσέγγιση Euler με βήμα $\delta = 0,1$ για το μοντέλο της γενετικής.

3.1.6 Αριθμητικές επισημάνσεις αναφορικά με το σχήμα Euler

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη γεωμετρική κίνηση Brown στην (3.1.19). Αν $X_0 > 0$, τότε η διαδικασία είναι πάντοτε θετική, ως εκθετική συνάρτηση της κίνησης Brown. Η εφαρμογή του σχήματος Euler είναι δυνατόν να οδηγήσει σε μη αναμενόμενα αποτελέσματα. Πράγματι, το σχήμα Euler για την X_t έχει ως ακολούθως

$$Y_{i+1} = Y_i(1 + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t}Z)$$

και αν το Δt είναι πολύ μικρό μπορεί σε μία ή περισσότερες προσομοιώσεις ο ψευδο-τυχαίος αριθμός Z που θα προκύψει από την κανονική κατανομή να είναι τέτοιος ώστε

$$Z < -\frac{1+a\Delta t}{b\sqrt{\Delta t}}$$

και τότε το Y_{i+1} λαμβάνει αρνητικές τιμές. Αυτό είναι αποτέλεσμα της μεθόδου προσέγγισης που χρησιμοποιείται. Στην πραγματικότητα, το σχήμα Euler είναι εγγυημένο ότι θα συγκλίνει στην μαθηματική περιγραφή της γεωμετρικής κίνησης Brown, αλλά προσομοίωση με προσομοίωση δεν μπορούμε να αναμένουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα θα συμβαίνει κάθε φορά.

3.2 Μέθοδος Milstein

3.2.0 Περιγραφή της μεθόδου- Ανάπτυξη Itô –Taylor

Η ανάπτυξη κατά Itô –Taylor (στοχαστική ανάπτυξη Taylor) είναι το στοχαστικό αντίστοιχο της ανάπτυξης κατά Taylor στη ντετερμινιστική περίπτωση και είναι πολύ ουσιαστική για τις προσεγγίσεις διακριτού χρόνου στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η ανάπτυξη κατά Itô –Taylor βασίζεται σε επαναληπτική εφαρμογή του κανόνα του Itô.

Θεωρούμε τη βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \quad (3.2.1)$$

Χάριν απλότητας θεωρούμε την αυτόνομη περίπτωση, δηλαδή οι συναρτήσεις a , b δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή t του χρόνου.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $f(X_t)$ λαμβάνουμε

$$df(X_t) = \left(a(X_t) \frac{\theta f}{\theta x}(X_t) + \frac{1}{2} b^2(X_t) \frac{\theta^2 f}{\theta x^2}(X_t) \right) dt + b(X_t) \frac{\theta f}{\theta x}(X_t) dW_t \quad (3.2.2)$$

Αν ορίσουμε

$$\mathcal{L}^0 \equiv a(x) \frac{\theta}{\theta x} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{\theta^2}{\theta x^2}$$

$$\mathcal{L}^1 \equiv b(x) \frac{\theta}{\theta x}$$

η εξίσωση (3.2.2) γίνεται

$$df(X_t) = \mathcal{L}^0 f(X_t)dt + \mathcal{L}^1 f(X_t) dW_t$$

ή σε ολοκληρωτική μορφή

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^0 f(X_s)ds + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^1 f(X_s) dW_s . \quad (3.2.3)$$

Αν επιλέξουμε $f(x) = x$ η (3.2.3) δίνει

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s)ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s \quad (3.2.4)$$

δηλαδή λαμβάνουμε τη δοθείσα στοχαστική διαφορική εξίσωση σε ολοκληρωτική μορφή.

Τώρα θα εφαρμόσουμε τον κανόνα του Itô στις συναρτήσεις εντός των ολοκληρωμάτων.

Συνεπώς, για $f(x) = a(x)$ η (3.2.3) δίνει

$$a(X_t) = a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^0 a(X_s) ds + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^1 a(X_s) dW_s \quad (3.2.5)$$

Όμοια, αν $f(x) = b(x)$ έχουμε

$$b(X_t) = b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^0 b(X_s) ds + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^1 b(X_s) dW_s \quad (3.2.6)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.2.5) και (3.2.6) στην (3.2.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left\{ a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 a(X_r) dr + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 a(X_r) dW_r \right\} ds \\ + \int_{t_0}^t \left\{ b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 b(X_r) dr + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_r) dW_r \right\} dW_s \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

όπου

$$\mathcal{L}^0 a = a(x) \frac{\theta a}{\theta x} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{\theta^2 a}{\theta x^2} = aa' + \frac{1}{2} b^2 a''$$

$$\mathcal{L}^0 b = a(x) \frac{\theta b}{\theta x} + \frac{1}{2} b^2(x) \frac{\theta^2 b}{\theta x^2} = ab' + \frac{1}{2} b^2 b''$$

$$\mathcal{L}^1 a = b(x) \frac{\theta a}{\theta x} = ba'$$

$$\mathcal{L}^1 b = b(x) \frac{\theta b}{\theta x} = bb'$$

Μαζεύοντας τα τέσσερα διπλά ολοκληρώματα σε ένα υπόλοιπο R έχουμε

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R \quad (3.2.8)$$

με

$$\begin{aligned} R = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 a(X_r) dr ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 a(X_r) dW_r ds \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 b(X_r) dr dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_r) dW_r dW_s \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η ουσία της μεθόδου είναι να χρησιμοποιούμε επαναληπτικά την αντικατάσταση έτσι ώστε να λαμβάνουμε σταθερές ολοκληρωτέες ποσότητες σε όρους όλο και υψηλότερης τάξης. Για παράδειγμα, ο τελευταίος όρος του υπολοίπου, R , (ο οποίος είναι ο μικρότερης τάξης όρος στο R αν $\Delta t = t - t_0$ είναι μικρό) είναι

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_r) dW_r dW_s$$

$$= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \left\{ \mathcal{L}^1 b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^r \mathcal{L}^0 \mathcal{L}^1 b(X_q) dq + \int_{t_0}^r \mathcal{L}^1 \mathcal{L}^1 b(X_q) dW_q \right\} dW_r dW_s$$

όπου επιλέξαμε $f = \mathcal{L}^1 b$ στην εξίσωση (3.2.3). Ο πρώτος όρος της τελευταίας γραμμής της ως άνω εξίσωσης είναι

$$\mathcal{L}^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s = b(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3.2.8) γίνεται

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + b(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s + \tilde{R} \quad (3.2.9)$$

με \tilde{R} ένα νέο υπόλοιπο.

Το επόμενο βήμα είναι να διατυπώσουμε αριθμητικούς αλγορίθμους από τις εξισώσεις που προέκυψαν με τη στοχαστική ανάπτυξη Taylor. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Για την (3.2.9) χρειαζόμαστε τη λύση του διπλού ολοκληρώματος. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s &= \int_{t_0}^t W_s - W_{t_0} dW_s = \int_{t_0}^t W_s dW_s - \int_{t_0}^t W_{t_0} dW_s \\ &= \frac{1}{2} (W_t^2 - t - W_{t_0}^2 + t_0) - W_{t_0} (W_t - W_{t_0}) \\ &= \frac{1}{2} (W_t - W_{t_0})^2 - \frac{1}{2} (t - t_0) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Με $\Delta t := t - t_0$ και την τυχαία μεταβλητή $\Delta W_t := W_t - W_{t_0}$ η ανωτέρω εξίσωση γράφεται ως εξής

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r dW_s = \frac{1}{2} (\Delta W_t)^2 - \frac{1}{2} \Delta t$$

Για την κατασκευή αριθμητικών μεθόδων υψηλότερης τάξης χρειάζεται να υπολογιστούν επίσης τα τρία ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dr ds, \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r ds, \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dr dW_s$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ντετερμινιστικό. Με τον υπολογισμό των δύο τελευταίων θα ασχοληθούμε στην ενότητα 3.4.

Για το διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, επιλέγοντας

$$t_0 = t_i, \quad t = t_{i+1},$$

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i$$

$$\Delta W_i := W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$$

και συνδυάζοντας τις (3.2.9) και (3.2.10) λαμβάνουμε

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a(X_{t_i})\Delta t + b(X_{t_i})\Delta W_i + \frac{1}{2}b(X_{t_i})b'(X_{t_i})((\Delta W_i)^2 - \Delta t) + \tilde{R}$$

- Κρατώντας τους τρεις πρώτους όρους παίρνουμε τη μέθοδο Euler:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta t + b(Y_i)\Delta W_i$$

- Αν κρατήσουμε όλους τους όρους $O(\Delta t)$ λαμβάνουμε τη μέθοδο Milstein:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta t + b(Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}b(Y_i)b'(Y_i)((\Delta W_i)^2 - \Delta t)$$

Σημειώνουμε ότι το σχήμα Milstein χρειάζεται τον υπολογισμό της παραγώγου b' για τον τελευταίο όρο.

Όπως είδαμε, το σχήμα Milstein κάνει χρήση του κανόνα του Itô για να αυξήσει την ακρίβεια της προσέγγισης προσθέτοντας και όρο δεύτερης τάξης. Με την ίδια διαδικασία, η εκδοχή του σχήματος σε μη αυτόνομες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$Y_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta t + b(t_i, Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}b(t_i, Y_i)b'(t_i, Y_i)((\Delta W_i)^2 - \Delta t),$$

όπου έχουμε θεωρήσει ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος.

Αποδεικνύεται ότι το σχήμα Milstein έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης ίση με 1. Ας θεωρήσουμε το γενικό μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$a(t, x) = \theta_1 - \theta_2 x$$

$$b(t, x) = \theta_3 \Rightarrow b'(t, x) = 0$$

δηλαδή τα σχήματα Euler και Milstein συμπίπτουν. Αυτή είναι μία από τις περιπτώσεις στις οποίες το σχήμα Euler έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης $\gamma = 1$.

Παράδειγμα

Η γεωμετρική κίνηση Brown

Για τη διαδικασία αυτή το σχήμα Euler γίνεται

$$Y_{i+1}^E = Y_i^E (1 + a\Delta t) + bY_i^E \Delta W_i$$

και το σχήμα Milstein

$$Y_{i+1}^M = Y_i^M + aY_i^M \Delta t + aY_i^M \Delta W_i + \frac{1}{2}b^2 Y_i^M \{(\Delta W_i)^2 - \Delta t\}$$

$$= Y_i^M \left(1 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t \right) + b Y_i^M \Delta W_i + \frac{1}{2} b^2 Y_i^M (\Delta W_i)^2 .$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\Delta W_i \sim \sqrt{\Delta t} Z$ με $Z \sim N(0,1)$. Επομένως,

$$Y_{i+1}^E = Y_i^E (1 + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t}Z)$$

και

$$\begin{aligned} Y_{i+1}^M &= Y_i^M \left(1 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t \right) + b Y_i^M \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} b^2 Y_i^M \Delta t Z^2 \\ &= Y_i^M \left(1 + \left(a + \frac{1}{2} b^2 (Z^2 - 1) \right) \Delta t + b\sqrt{\Delta t} Z \right) . \end{aligned}$$

Κοιτάζοντας την ακριβή λύση της (3.1.19), το σχήμα Milstein κάνει την ανάπτυξη ακριβώς μέχρι τάξη $O(\Delta t)$. Πράγματι, η τυπική ανάπτυξη κατά Taylor δίνει

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} &= X_t \exp \left(\left(a - \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) \Delta t + b\sqrt{\Delta t} Z \right) \\ &= X_t \left[1 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t + b\sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} b^2 \Delta t Z^2 + O(\Delta t) \right] \\ &= Y_{i+1}^M . \end{aligned}$$

3.2.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

Θεωρούμε και πάλι τη διαδικασία Itô $X = \{X_t, t \geq 0\}$ (γεωμετρική κίνηση Brown) που ικανοποιεί τη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t, \quad t \in [0, T]$$

με αρχική τιμή $X_0 \in R^1$.

Όπως έχουμε δει, το σχήμα Euler για αυτήν είναι

$$Y_{i+1}^E = Y_i^E (1 + a\Delta t) + b Y_i^E \Delta W_i$$

και το σχήμα Milstein

$$Y_{i+1}^M = Y_i^M \left(1 + \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t \right) + b Y_i^M \Delta W_i + \frac{1}{2} b^2 Y_i^M (\Delta W_i)^2 .$$

Το παρακάτω πρόγραμμα σε R παράγει προσεγγίσεις Milstein και Euler με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα $\delta = 2^{-6}$ για την παραπάνω διαδικασία με $X_0 = 1$, $\alpha = 1.5$ και $b = 1$ και απεικονίζει τόσο τις προσεγγιστικές λύσεις όσο και την ακριβή για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown:

```
# Geometric Brownian Motion
set.seed(934)
N<-4096
```

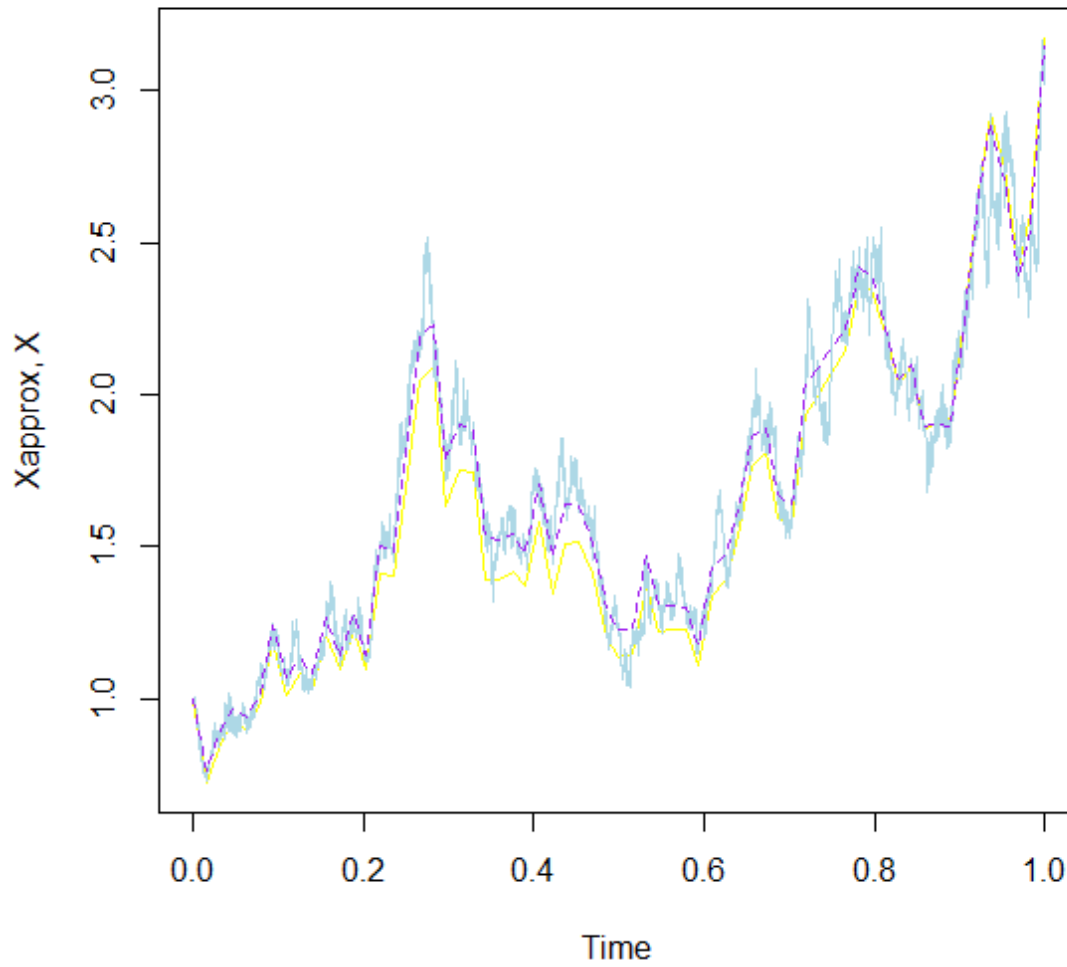
```

N1<-64
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Xapproxm<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
Xapproxm[1]<-1
Z<-rnorm(N)
t<-T0+Dt
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
  X[i+1]<-exp((1.5-0.5)*t+Y[i+1])
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  Xapproxm[i+1]<-Xapproxm[i]+1.5*Xapproxm[i]*Dt1+Xapproxm[i]*(Y[j+N/N1]-
Y[j])+0.5*Xapproxm[i]*((Y[j+N/N1]-Y[j])^2-Dt1)
  j<-j+N/N1
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
Xapproxm<-ts(Xapproxm,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Geometric Brownian Motion", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')
lines(Xapproxm,col='purple',lty='dashed')
e1=abs(Xapprox[N1+1]- X[N+1])
e2=abs(Xapproxm[N1+1]- X[N+1])

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

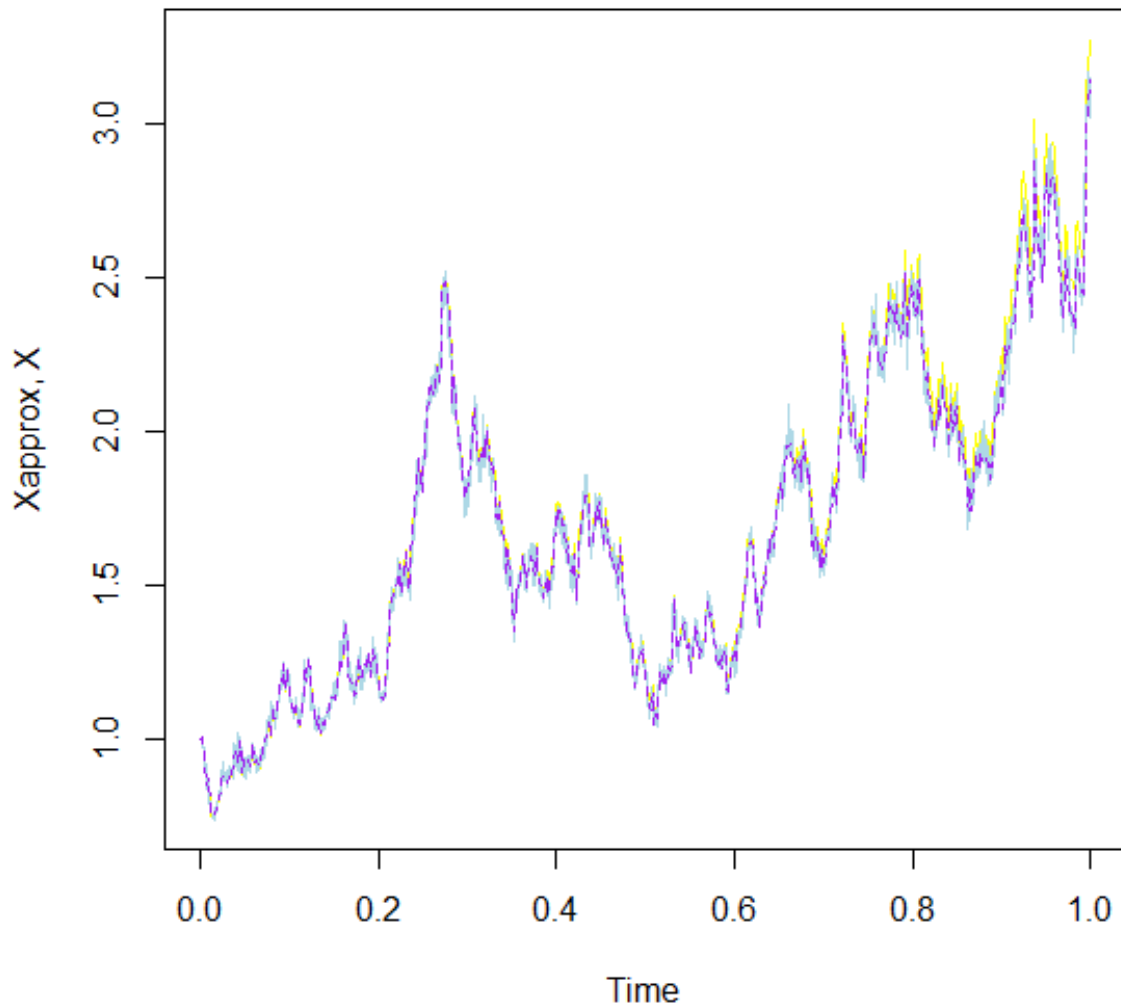
Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.13 Προσεγγίσεις Milstein (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για $\delta = 2^{-9}$ οπότε προκύπτει:

Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.14 Προσεγγίσεις Milstein (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-9}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Από τα ανωτέρω σχήματα είναι φανερό ότι η προσέγγιση Milstein είναι πλησιέστερα στη διαδικασία Itô στο τελικό σημείο $T = 1$ όταν το βήμα είναι μικρότερο. Επίσης, βλέπουμε ότι η μέθοδος Milstein προσεγγίζει καλύτερα την ακριβή λύση σε σύγκριση με τη μέθοδο Euler. Ειδικά για το τελικό σημείο βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon_1^E = |X_T - Y_N^E| = 0,02879443 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1^M = |X_T - Y_N^M| = 0,005539738$$

για $\delta = 2^{-6}$ και

$$\varepsilon_1^E = |X_T - Y_N^E| = 0,1236299 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1^M = |X_T - Y_N^M| = 0,00391396$$

για $\delta = 2^{-9}$.

3.2.2 Σχέση μεταξύ σχημάτων Euler και Milstein

Θα δείξουμε ένα αποτέλεσμα που αφορά μετασχηματισμούς στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και τα δύο σχήματα προσέγγισης. Δοθείσης της γενικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad (3.1.1)$$

το σχήμα Milstein για αυτήν είναι

$$\begin{aligned} \Delta X = X_{i+1} - X_i &= \left(a(t_i, X_i) - \frac{1}{2} b(t_i, X_i) b_x(t_i, X_i) \right) \Delta t \\ &+ b(t_i, X_i) \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} b(t_i, X_i) b_{xx}(t_i, X_i) \Delta t Z^2 \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

με $Z \sim N(0,1)$. Θεωρούμε τώρα το μετασχηματισμό $y = F(x)$ και τον αντίστροφο αυτού $x = G(y)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $Y_t = F(X_t)$ λαμβάνουμε

$$dY_t = \frac{\theta F}{\theta x}(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\theta^2 F}{\theta x^2}(X_t) d\langle X \rangle_t \quad (3.2.12)$$

Όμως, $X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dW_s = X_0 + (a \cdot \langle W \rangle)_t + (b \cdot W)_t$

όπου με $(b \cdot W)_t$ έχουμε συμβολίσει το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t b(s, X_s) dW_s$ και όμοια για το $\int_0^t a(s, X_s) ds$.

Επομένως,

$$\langle X \rangle_t = \langle b \cdot W \rangle_t = (b^2 \cdot \langle W \rangle)_t \quad (3.2.13)$$

Συνεπώς, η (3.2.12) λόγω των (3.1.1) και (3.2.13) γίνεται

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\theta F}{\theta x}(X_t) (a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\theta^2 F}{\theta x^2}(X_t) b^2(t, X_t) dt \\ &= \left(F'(X_t) a(t, X_t) + \frac{1}{2} F''(X_t) b^2(t, X_t) \right) dt + F'(X_t) b(t, X_t) dW_t \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Επιλέγουμε τώρα την F ως τον μετασχηματισμό Lamperti [βλ. παράρτημα] έτσι ώστε

$$F'(x) = \frac{1}{b(t, x)}, \quad F''(x) = -\frac{b_x(t, x)}{b^2(t, x)}.$$

Τότε η (3.2.14) γίνεται

$$dY_t = \left(\frac{a(t, X_t)}{b(t, X_t)} - \frac{1}{2} b_x(t, X_t) \right) dt + dW_t$$

Αξίζει να σημειωθεί ξανά ότι ο μετασχηματισμός Lamperti είναι τέτοιος ώστε ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας μπροστά από την κίνηση Brown να μην εξαρτάται πλέον από την κατάσταση της διαδικασίας. Το σχήμα Euler για την Y_t δίνει

$$\Delta Y = \left(\frac{a(t_i, X_i)}{b(t_i, X_i)} - \frac{1}{2} b_x(t_i, X_i) \right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} Z$$

Ακολούθως, αναπτύσσουμε κατά Taylor τον αντίστροφο μετασχηματισμό με σκοπό να λάβουμε μια συγκρίσιμη έκφραση.

$$G(Y_i + \Delta Y) = G(Y_i) + G'(Y_i)\Delta Y + \frac{1}{2}G''(Y_i)(\Delta Y)^2 + O((\Delta Y)^3) . \quad (3.2.15)$$

Όμως,

$$G'(y) = \frac{d}{dy} F^{-1}(y) = \frac{1}{F'(G(y))} = b(t, G(y))$$

και

$$G''(y) = b_x(t, G(y))G'(y) = b_x(t, G(y))b(t, G(y))$$

Συνεπώς, η (3.2.17) γράφεται

$$\begin{aligned} G(Y_i + \Delta Y) - G(Y_i) &= \left(a(t_i, X_i) - \frac{1}{2} b(t_i, X_i) b_x(t_i, X_i) \right) \Delta t \\ &\quad + b(t_i, X_i) \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} b(t_i, X_i) b_x(t_i, X_i) \Delta t Z^2 \\ &\quad + O\left((\Delta t)^{\frac{3}{2}}\right) . \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σχήμα Milstein στην αρχική διαδικασία (3.2.11) και το σχήμα Euler στη μετασχηματισμένη διαδικασία είναι ίσα μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της τάξης Δt . Έτσι, κατά βάση, όποτε είναι δυνατόν, θα πρέπει κανείς να χρησιμοποιεί το σχήμα Euler στη μετασχηματισμένη διαδικασία.

Γενικά, αν η F (όχι κατ' ανάγκη ο μετασχηματισμός Lamperti) εξαλείφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ της κατάστασης της διαδικασίας και των αυξήσεων της κίνησης Brown, αυτή η μέθοδος μετασχηματισμού είναι μάλλον πάντα ευπρόσδεκτη, καθώς μειώνει την ασάθεια της διαδικασίας προσομοίωσης. Περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αυτό το θέμα μπορούν να βρεθούν στο [3]. Ακολουθούν κάποιες εφαρμογές της μεθόδου μετασχηματισμού που μόλις παρουσιάσαμε.

Μετασχηματισμός της γεωμετρικής κίνησης Brown

Το πρώτο παράδειγμα αφορά τη γεωμετρική κίνηση Brown. Αν χρησιμοποιήσουμε $F(x) = \log(x)$, τότε από την (3.1.22) και τον κανόνα του Itô λαμβάνουμε

$$d \log X_t = \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) dt + b dW_t$$

Συνεπώς, το σχήμα Euler για τη μετασχηματισμένη διαδικασία είναι

$$\Delta \log X = \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \Delta t + b \sqrt{\Delta t} Z$$

Αν τώρα αναπτύξουμε κατά Taylor τον αντίστροφο μετασχηματισμό $G(y) = x^y$, λαμβάνουμε το σχήμα Milstein.

Μετασχηματισμός της διαδικασίας Cox-Ingersoll-Ross

Μια πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή του μετασχηματισμού Lamperti αφορά τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross. Η δυναμική της διαδικασίας είναι

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t) dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t,$$

και το σχήμα Milstein για αυτήν είναι

$$\Delta X = \left((\theta_1 - \theta_2 X_i) - \frac{1}{4} \theta_3^2 \right) \Delta t + \theta_3 \sqrt{X_i} \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{4} \theta_3^2 \Delta t Z^2. \quad (3.2.16)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $y = \sqrt{x}$ λαμβάνουμε τη μετασχηματισμένη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = \frac{1}{2Y_t} \left((\theta_1 - \theta_2 Y_t^2) - \frac{1}{4} \theta_3^2 \right) dt + \frac{1}{2} \theta_3 dW_t,$$

για την οποία το σχήμα Euler είναι

$$\Delta Y = \frac{1}{2Y_i} \left((\theta_1 - \theta_2 Y_i^2) - \frac{1}{4} \theta_3^2 \right) \Delta t + \frac{1}{2} \theta_3 \sqrt{\Delta t} Z.$$

Αφού $G(y) = x^2$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} G(Y_i + \Delta Y) - G(Y_i) &= (Y_i + \Delta Y)^2 - Y_i^2 = (\Delta Y)^2 + 2Y_i \Delta Y \\ &= \frac{1}{4} \theta_3^2 \Delta t Z^2 + o\left((\Delta t)^{\frac{3}{2}}\right) + \left((\theta_1 - \theta_2 Y_i^2) - \frac{1}{4} \theta_3^2 \right) \Delta t + Y_i \theta_3 \sqrt{\Delta t} Z, \end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η (3.2.16), δοθέντος ότι $Y_i = \sqrt{X_i}$.

Για να δούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα και γραφικά υλοποιούμε τους παρακάτω κώδικες σε R για τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t) dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = 10,$$

με $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (6, 3, 2)$.

Η Cox-Ingersoll-Ross διαδικασία με το σχήμα Milstein

Χρειαζόμαστε τη μερική παράγωγο του συντελεστή $b(\cdot, \cdot)$ ως προς x ,

$$b_x(t, x) = \frac{\theta}{\theta x} 2\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Συνεπώς,

```
# Cox-Ingersoll-Ross process (CIR-2)
d<-expression(6-3*x)
s<-expression(2*sqrt(x))
s.x<-expression(1/sqrt(x))
set.seed(64)
sde.sim(X0=10, drift=d, sigma=s, sigma.x=s.x, method="milstein")->X
plot(X, main="Cox-Ingersoll-Ross")
```

Η Cox-Ingersoll-Ross διαδικασία με το σχήμα Euler στη μετασχηματισμένη διαδικασία

$$Y_t = \sqrt{X_t}$$

$$dY_t = \frac{1}{2Y_t} \left((\theta_1 - \theta_2 Y_t^2) - \frac{1}{4} \theta_3^2 \right) dt + \frac{1}{2} \theta_3 dW_t, \quad Y_0 = \sqrt{10}$$

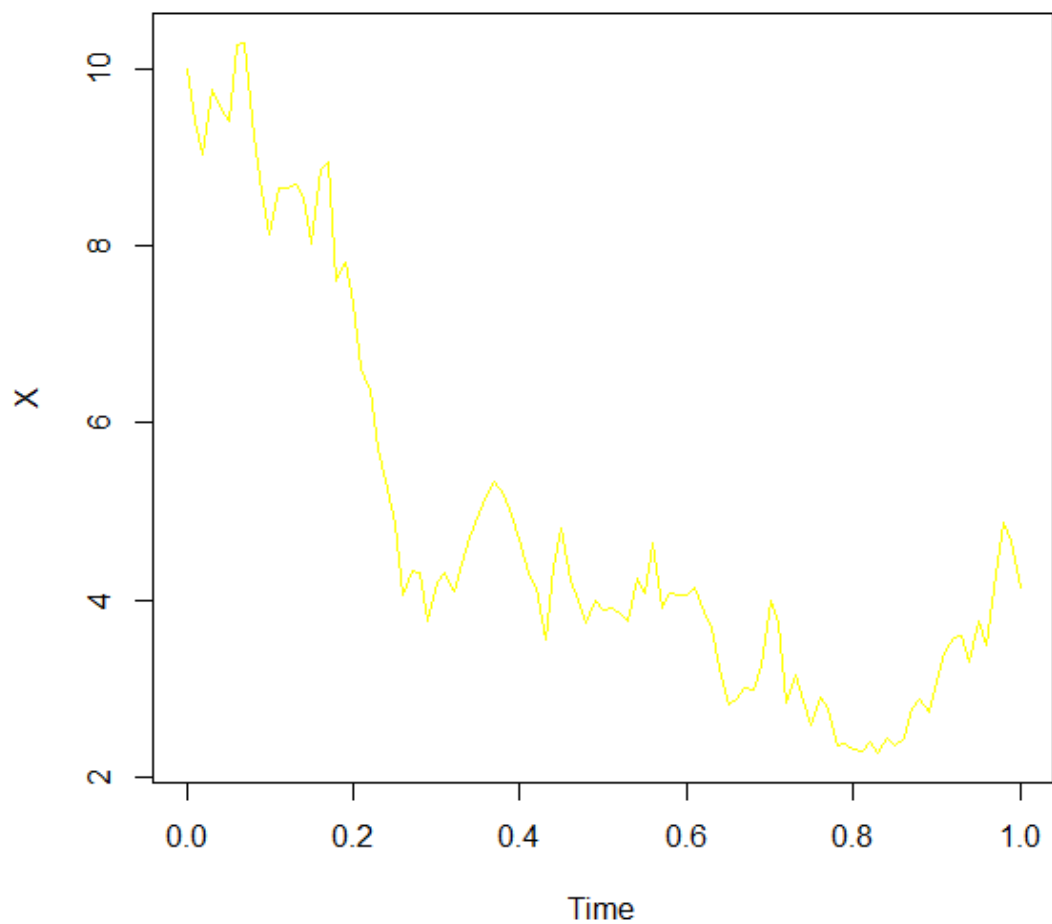
με $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (6, 3, 2)$.

```
# Cox-Ingersoll-Ross process (CIR-3)
set.seed(64)
d<-expression((6-3*x^2-1)/(2*x))
s<-expression(1)
sde.sim(X0=sqrt(10), drift=d, sigma=s)->Y
plot(Y^2, main="Cox-Ingersoll-Ross")
```

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκε η έτοιμη συνάρτηση `sde.sim` που μας παρέχει η R και η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, βρίσκεται στο CRAN πακέτο `sde`.

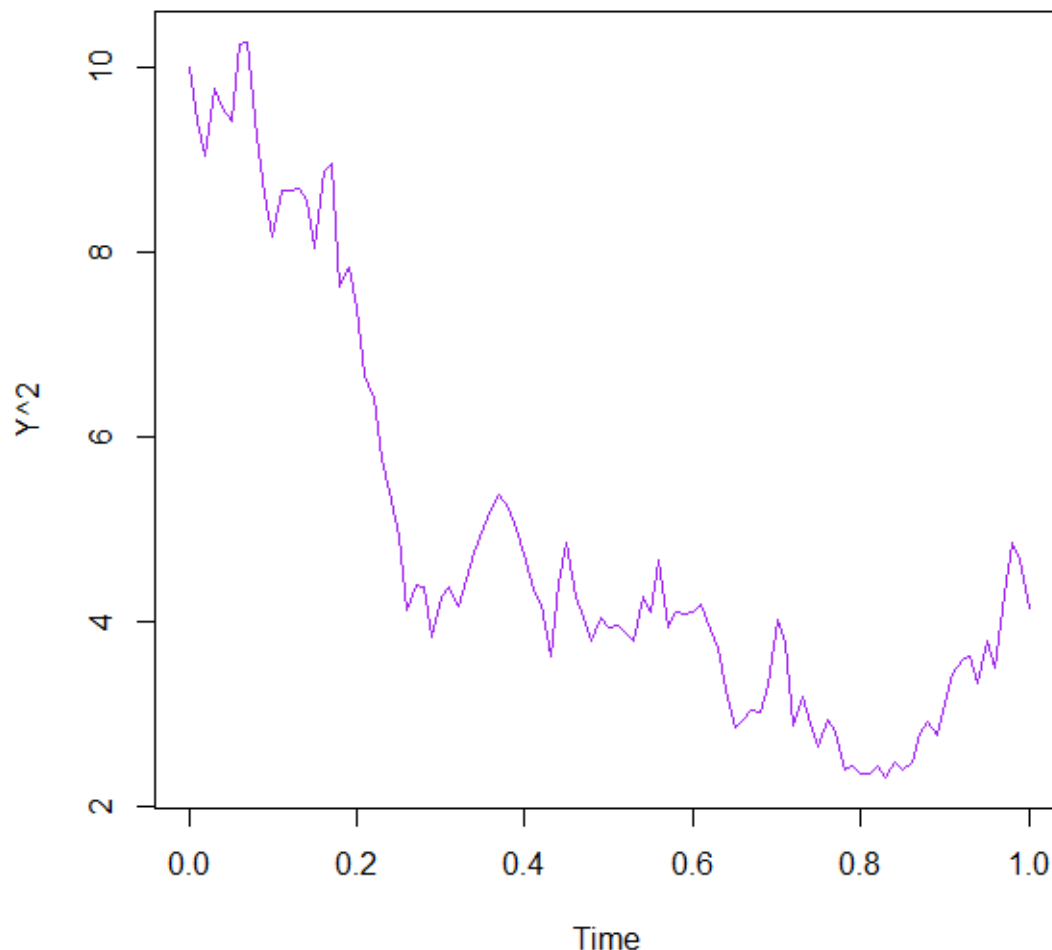
Με την εκτέλεσή τους προέκυψαν τα κάτωθι αποτελέσματα

Cox-Ingersoll-Ross



Σχήμα 3.15 Προσέγγιση Milstein για τη διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross.

Cox-Ingersoll-Ross



Σχήμα 3.16 Προσέγγιση Euler για τη μετασχηματισμένη διαδικασία.

Επαληθεύουμε, συνεπώς, ότι το σχήμα Milstein CIR-2 επιστρέφει το ίδιο μονοπάτι με το CIR-3 αλλά σε διαφορετική κλίμακα (δηλ. $Y^2 = X$).

3.2.3 Ισχυρή σύγκλιση για τα σχήματα Euler και Milstein

Για να δείξουμε στην πράξη πώς η ισχυρή σύγκλιση λαμβάνει χώρα στα σχήματα διακριτοποίησης, αναπαράγουμε εδώ κάποια εμπειρικά στοιχεία από το [8]. Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι να δείξει πώς το σχήμα Milstein συμπεριφέρεται καλύτερα από το σχήμα Euler όσον αφορά τη σύγκλιση στην απλή περίπτωση της γεωμετρικής κίνησης Brown. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η σύγκλιση είναι στο όριο του βήματος διακριτοποίησης, καθώς $\Delta t \rightarrow 0$. Το πείραμα εξελίσσεται ως εξής:

1. Αρχικά προσομοιώνουμε μονοπάτια της κίνησης Brown με αυξανόμενο επίπεδο λεπτότητας (δηλαδή με μειούμενη τιμή του Δt). Αυτό γίνεται επαναληπτικά χρησιμοποιώντας τη γέφυρα Brown.

2. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown τόσο με το σχήμα Euler όσο και με το σχήμα Milstein, χρησιμοποιώντας το διαθέσιμο μονοπάτι της κίνησης Brown.
3. Τέλος, συγκρίνουμε τις τιμές της διαδικασίας X τη χρονική στιγμή T στις δύο περιπτώσεις.

Το σχήμα 3.16 είναι το αποτέλεσμα του βήματος 1 και τη λογική αυτού εξηγούμε αμέσως τώρα. Η άνω-αριστερή γωνία απεικονίζει το μονοπάτι μιας γέφυρας Brown που ξεκινά από το 1 τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και καταλήγει στο 1 τη χρονική στιγμή $T = 1$ χρησιμοποιώντας δύο διαστήματα, δηλαδή στην πραγματικότητα έχουμε τρία σημεία του μονοπατιού τις χρονικές στιγμές $0, \frac{1}{2}$ και 1. Η άνω-δεξιά εικόνα έχει δημιουργηθεί έχει δημιουργηθεί χρησιμοποιώντας δύο γέφυρες Brown. Η πρώτη γέφυρα Brown ξεκινά από το 1 τη χρονική στιγμή 0 και καταλήγει στο $B\left(\frac{1}{2}\right)$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}$. Η δεύτερη γέφυρα Brown ξεκινά από το $B\left(\frac{1}{2}\right)$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}$ και καταλήγει στο 1 τη χρονική στιγμή 1. Αυτό το μονοπάτι αποτελείται από πέντε σημεία τις χρονικές στιγμές $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Στο επόμενο βήμα, η διαδικασία επαναλαμβάνεται χωρίζοντας κάθε διάστημα $\left[0, \frac{1}{4}\right], \dots, \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ σε δύο μέρη μέχρι την τελευταία κάτω-δεξιά εικόνα η οποία αποτελείται από $2^{14} + 1$ σημεία του μονοπατιού της κίνησης Brown. Το σχήμα παράγεται με τον ακόλουθο κώδικα ο οποίος δείχνει έναν εναλλακτικό τρόπο κατασκευής διαδικασίας με συνεχές αλλά πουθενά παραγωγίσιμο μονοπάτι (δηλαδή κίνηση Brown).

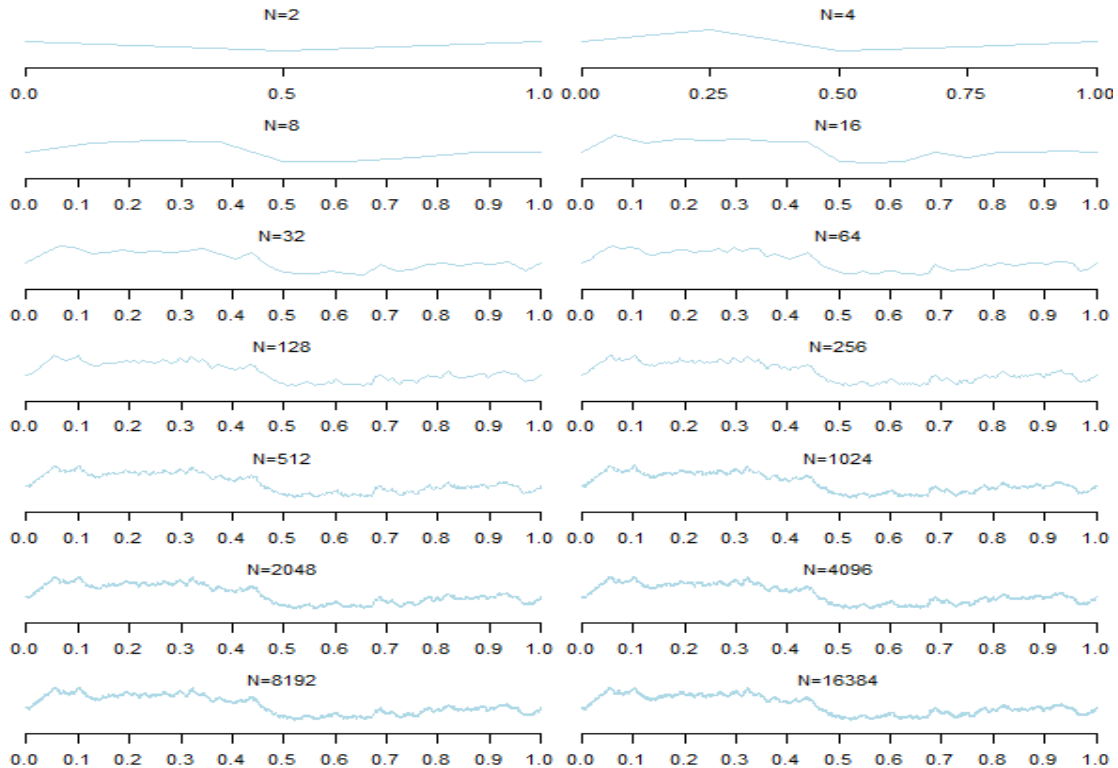
```
# Euler-Milstein
set.seed(2)
W<-vector(14,mode="list")
W[[1]]<-BBridge(1,1,0,1,N=2)
for(i in 1:13){
  cat(paste(i,"\n"))
  n<-length(W[[i]])
  t<-time(W[[i]])
  w<-as.numeric(W[[i]])
  tmp<-w[1]
  for(j in 1:(n-1)){
    tmp.BB<-BBBridge(w[j],w[j+1],t[j],t[j+1],N=2)
    tmp<-c(tmp,as.numeric(tmp.BB[2:3]))
  }
  W[[i+1]]<-ts(tmp, start=0, deltat=1/(2^(i+1)))
}
min.w<-min(unlist(W))-0.5
max.w<-max(unlist(W))+0.5
opar<-par(no.readonly=TRUE)
par(mfrow=c(7,2),mar=c(3,0,0,0))
for(i in 1:14){
  plot(W[[i]], ylim=c(min.w,max.w),axes=F,col='light blue')
  if(i==1)
    axis(1,c(0,0.5,1))
  if(i==2)
    axis(1,c(0,0.25,0.5,0.75,1))
}
```

```

if(i>2)
  axis(1,c(0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1))
text(0.5,2.2,sprintf("N=%d",2^i))
}
par(opar)

```

Στον παραπάνω κώδικα σε R , κάνουμε χρήση της συνάρτησης BBridge του πακέτου sde.



Σχήμα 3.17 Ένα προσομοιωμένο μονοπάτι της κίνησης Brown για αυξανόμενα επίπεδα διαμέρισης, με το N να είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων του $[0,1]$.

Το επόμενο βήμα είναι να προσομοιώσουμε μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown χρησιμοποιώντας τόσο το σχήμα Euler όσο και το σχήμα Milstein και να υπολογίσουμε την τιμή $X(T)$ και με τα δύο σχήματα. Ο ακόλουθος κώδικας πραγματοποιεί τους υπολογισμούς αυτούς και απεικονίζει τις δύο τιμές έναντι της πραγματικής τιμής $X(T)$ για το δοθέν μονοπάτι της κίνησης Brown (δηλαδή της κίνησης Brown που καταλήγει στο 1 τη χρονική στιγμή 1, που είναι ένα είδος γέφυρας Brown) $X(1) = \exp\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)$. Έχουμε επιλέξει $a = 1$ και $b = \frac{1}{2}$.

```

S0<-1
theta<-c(1,0.5)
euler<-NULL
milstein<-NULL
for(i in 1:14){
  n<-length(W[[i]])
  Dt<-1/n
  sDt<-sqrt(Dt)

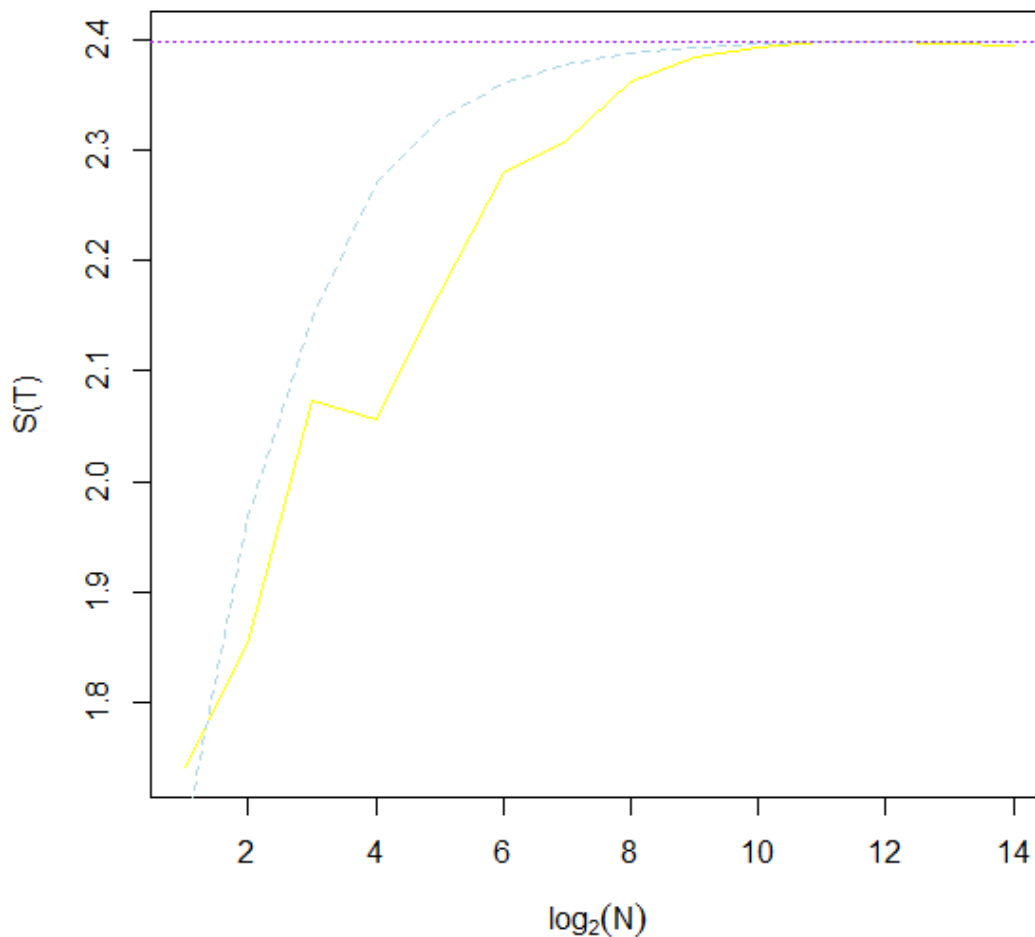
```

```

E<-numeric(n)
E[1]<-S0
M<-numeric(n)
M[1]<-S0
for(j in 2:n){
  Z<-W[[i]][j]-W[[i]][j-1]
  E[j]<-E[j-1]*(1+theta[1]*Dt+theta[2]*Z)
  M[j]<-M[j-1]*(1+(theta[1]-0.5*theta[2]^2)*Dt+theta[2]*Z+0.5*theta[2]^2*Z^2)
}
cat(paste(i,"\\n"))
euler<-c(euler,E[n])
milstein<-c(milstein,M[n])
}
plot(1:14,euler,type="l",main="Milstein vs
Euler",xlab=expression(log[2](N)),ylab="S(T)",col='yellow')
lines(1:14,milstein,lty=2,col='light blue')
abline(h=exp(theta[1]-0.5*theta[2]^2),lty=3,col='purple')

```

Milstein vs Euler



Σχήμα 3.18 Ταχύτητα σύγκλισης των σχημάτων Euler και Milstein (Euler=κίτρινη ενιαία γραμμή, Milstein=γαλάζια διακεκομμένη γραμμή) στην πραγματική τιμή (μωβ γραμμή με τελείες) συναρτήσει του βήματος $\Delta t = \frac{1}{N}$.

Το σχήμα δείχνει την ταχύτητα σύγκλισης των δύο σχημάτων (Euler=ενιαία γραμμή, Milstein=διακεκομμένη γραμμή) στην πραγματική τιμή (γραμμή με τελείες) συναρτήσεως του $\Delta t = \frac{1}{N}$.

3.3 Μέθοδος προβλέπτης-διορθωτής

3.3.0 Παρουσίαση της μεθόδου

Και τα δύο σχήματα διακριτοποίησης που έχουμε δει μέχρι στιγμής θεωρούν ότι οι συντελεστές a και b δεν μεταβάλλονται στο διάστημα Δt , κάτι που φυσικά δεν αληθεύει για μια γενική στοχαστική διαφορική εξίσωση, καθώς τα a και b μπορεί να εξαρτώνται τόσο από τον χρόνο t όσο και από την κατάσταση της διαδικασίας X_t . Ένας τρόπος αυτών των συντελεστών είναι κατά κάποιο τρόπο. Αφού οι συντελεστές εξαρτώνται από το X_t και εμείς προσομοιώνουμε το X_t , η μέθοδος που παρουσιάζουμε στη συνέχεια προσπαθεί απλά να προσεγγίσει τις καταστάσεις της διαδικασίας πρώτα. Η μέθοδος αυτή έχει τάξη ασθενούς σύγκλισης ίση με . Ο αλγόριθμος προβλέπτης-διορθωτής έχει ως εξής: Αρχικά θεωρούμε την απλή προσέγγιση (τον προβλέπτη)

$$\tilde{Y}_{i+1} = Y_i + a(t_i, Y_i)\Delta t + b(t_i, Y_i)\sqrt{\Delta t}Z$$

Κατόπιν, επιλέγουμε δύο συντελεστές ζ και η στο διάστημα $[0,1]$ και υπολογίζουμε τον διορθωτή

$$Y_{i+1} = Y_i + \left(\zeta \tilde{a}(t_{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}) + (1 - \zeta) \tilde{a}(t_i, Y_i) \right) \Delta t + \left(\eta b(t_{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}) + (1 - \eta) b(t_i, Y_i) \right) \sqrt{\Delta t} Z$$

όπου

$$\tilde{a}(t_i, Y_i) = a(t_i, Y_i) - \eta b(t_i, Y_i) b_x(t_i, Y_i) .$$

3.3.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

Ο ακόλουθος κώδικας εφαρμόζει τη μέθοδο προβλέπτη-διορθωτή στη γεωμετρική κίνηση Brown με $X_0 = 1$, $\alpha = 1.5$ και $b = 1$ και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση που προκύπτει όσο και την προσέγγιση Euler και την ακριβή λύση για το ίδιο μονοπάτι της κίνησης Brown:

```
# Predictor-Corrector method
N<-4096
N1<-64
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Xapproxr<-numeric(N1)
Y[1]<-0
```



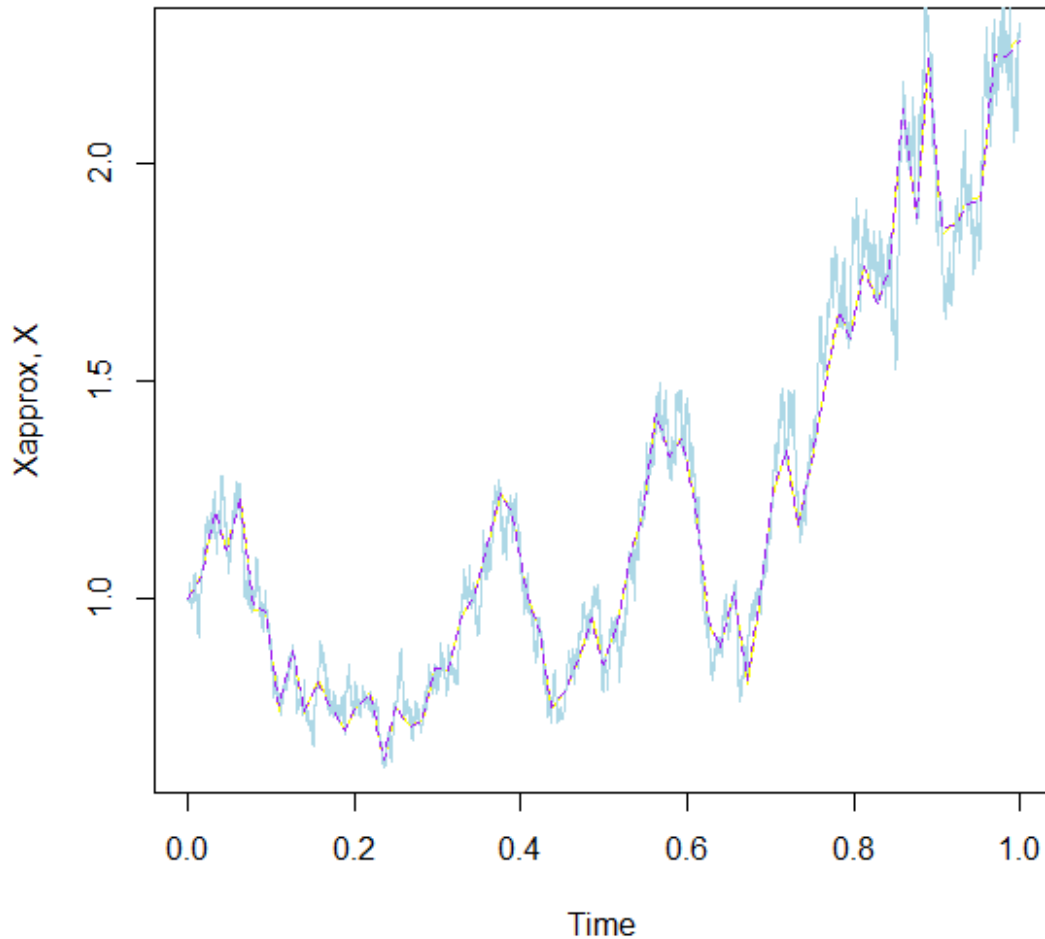
```

X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
Xapproxp[1]<-1
Z<-rnorm(N)
t<-T0+Dt
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
  X[i+1]<-exp((1.5-0.5)*t+Y[i+1])
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapproxp[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  Xapprox[i+1]<-
Xapprox[i]+(0.4*1.2*Xapproxp[i+1]+0.6*1.2*Xapprox[i])*Dt1+(0.3*Xapproxp[i+1]+0.7*Xapprox[i])*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  j<-j+N/N1
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
Xapproxp<-ts(Xapproxp,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapproxp, main="Geometric Brownian Motion", ylab="Xapprox, X", col='yellow')
lines(X,col='light blue')
lines(Xapprox,col='purple',lty='dashed')

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.19 Προσέγγιση με τη μέθοδο προβλέπτη-διορθωτή (μωβ γραμμή) και Euler (κίτρινη γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

3.4 Ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1, 5

3.4.0 Παρουσίαση της μεθόδου

Ένα πιο ακριβές ισχυρό σχήμα Taylor μπορεί να ληφθεί αν συμπεριλάβουμε περισσότερα πολλαπλά στοχαστικά ολοκληρώματα από τη στοχαστική ανάπτυξη Taylor στο σχήμα. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε την (3.2.5) για $f = \mathcal{L}^0 a$, $f = \mathcal{L}^1 a$, $f = \mathcal{L}^0 b$, $f = \mathcal{L}^1 b$ και κρατάμε τα ολοκληρώματα με τις σταθερές ολοκληρωτέες ποσότητες. Τότε το νέο υπόλοιπο R' αποτελείται από τριπλά ολοκληρώματα. Για την $f = \mathcal{L}^1 b$ η ανάλυση διενεργήθηκε στην προηγούμενη ενότητα όπου προέκυψε ο διορθωτικός όρος

$$bb' \frac{1}{2} ((\Delta W)^2 - \Delta t) \quad (3.4.1)$$

ο οποίος οδήγησε στο σχήμα Milstein το οποίο έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης ίση με 1.

Για $f = \mathcal{L}^0 a$ το ολοκλήρωμα δεν είναι στοχαστικό και προκύπτει άμεσα ο όρος

$$\left(aa' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) \frac{1}{2} (\Delta t)^2 . \quad (3.4.2)$$

Για $f = \mathcal{L}^1 a$ και $f = \mathcal{L}^0 b$ τα ολοκληρώματα είναι στοχαστικά και τα καλούμε

$$I_{(1,0)} := \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_r ds = \int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) ds ,$$

$$I_{(0,1)} := \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dr dW_s = \int_{t_0}^t (s - t_0) dW_s ,$$

ενώ

$$\mathcal{L}^1 a(X_{t_0}) = b(X_{t_0}) a'(X_{t_0}) \quad (3.4.3)$$

$$\mathcal{L}^0 b(X_{t_0}) = a(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) + \frac{1}{2} b^2(X_{t_0}) b''(X_{t_0}). \quad (3.4.4)$$

Τώρα θα πρέπει να προσεγγίσουμε τα δύο στοχαστικά ολοκληρώματα $I_{(0,1)}$ και $I_{(1,0)}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Itô στην tW_t και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} d(tW_t) &= W_t dt + t dW_t \Rightarrow \\ tW_t &= t_0 W_{t_0} + \int_{t_0}^t W_s ds + \int_{t_0}^t s dW_s \Rightarrow \\ \int_{t_0}^t s dW_s &= tW_t - t_0 W_{t_0} - \int_{t_0}^t W_s ds \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Έχουμε

$$I_{(0,1)} = \int_{t_0}^t (s - t_0) dW_s = \int_{t_0}^t s dW_s - t_0 (W_t - W_{t_0})$$

το οποίο λόγω της (3.4.5) γίνεται

$$\begin{aligned} I_{(0,1)} &= tW_t - t_0 W_{t_0} - \int_{t_0}^t W_s ds - t_0 W_t + t_0 W_{t_0} \\ &= (t - t_0) W_t - \int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) ds - W_{t_0} (t - t_0) \\ &= (t - t_0) (W_t - W_{t_0}) - I_{(1,0)} . \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$I_{(0,1)} = \Delta U, \quad (3.4.6)$$

$\Delta t := t - t_0$ και $\Delta W := W_t - W_{t_0}$, η ως άνω σχέση γράφεται:

$$I_{(0,1)} = \Delta W \Delta t - \Delta U. \quad (3.4.7)$$

Σε αυτό το σημείο τα δύο στοχαστικά διπλά ολοκληρώματα $I_{(0,1)}$ και $I_{(1,0)}$ εκφράζονται συναρτήσει μόνο μίας τυχαίας μεταβλητής ΔU πλέον της μεταβλητής ΔW που χρησιμοποιούνταν προηγουμένως. Η τυχαία μεταβλητή ΔU είναι μια κανονικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή (ως όριο αθροίσματος κανονικών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών) με μέση τιμή και διασπορά:

$$\begin{aligned} E[\Delta U] &= E \left[\int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) ds \right] = \int_{t_0}^t E[W_s - W_{t_0}] ds = 0 \\ V[\Delta U] &= E \left[\left(\int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) ds \right)^2 \right] = E \left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0})(W_r - W_{t_0}) ds dr \right] \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t E[(W_s - W_{t_0})(W_r - W_{t_0})] ds dr = 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^r E[(W_s - W_{t_0})(W_r - W_{t_0})] ds dr \\ &= 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^r \{ E[W_s W_r] - E[W_s W_{t_0}] - E[W_r W_{t_0}] + E[(W_{t_0})^2] \} ds dr \\ &= 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^r \{ s - t_0 \} ds dr = \int_{t_0}^t (r^2 - t_0^2) dr - 2t_0 \int_{t_0}^t (r - t_0) dr \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} - t_0^2(t - t_0) - t_0 t^2 + t_0^3 + 2t_0^2(t - t_0) \\ &= \frac{t^3}{3} - t_0 t^2 + t_0^2 t - \frac{t_0^3}{3} = \frac{1}{3}(t - t_0)^3 = \frac{1}{3}(\Delta t)^3 \end{aligned}$$

Η συνδιακύμανση των ΔU και ΔW είναι:

$$\begin{aligned} E[\Delta U \Delta W] &= E \left[\int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) ds (W_t - W_{t_0}) \right] = E \left[\int_{t_0}^t (W_t - W_{t_0})(W_s - W_{t_0}) ds \right] \\ &= \int_{t_0}^t E[(W_t - W_{t_0})(W_s - W_{t_0})] ds \\ &= \int_{t_0}^t \{ E[W_t W_s] - E[W_t W_{t_0}] - E[W_s W_{t_0}] + E[(W_{t_0})^2] \} ds \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^t \{s - t_0\} ds = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0(t - t_0) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2 = \frac{1}{2}(\Delta t)^2$$

Όλα τα ζεύγη $(\Delta U_i, \Delta W_i)$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα για όλα τα i .

Για την πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής ΔU χρησιμοποιούμε δύο ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές Z_1 και Z_2 ($Z_i \sim N(0,1), i = 1,2$) και κάνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \sqrt{\Delta t} Z_1 \\ \Delta U &= \frac{1}{2}(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \left(Z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2 \right)\end{aligned}$$

αφού με αυτόν τον τρόπο οι ΔU και ΔW ακολουθούν κανονική κατανομή με τις επιθυμητές ροπές. Πράγματι,

$$\begin{aligned}E[\Delta U] &= E \left[\frac{1}{2}(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \left(Z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2 \right) \right] = \frac{1}{2}(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \left(E[Z_1] + \frac{1}{\sqrt{3}} E[Z_2] \right) = 0, \\ E[\Delta U \Delta W] &= E \left[\frac{1}{2}(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \left(Z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2 \right) \sqrt{\Delta t} Z_1 \right] = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left(E[Z_1^2] + \frac{1}{\sqrt{3}} E[Z_1 Z_2] \right) \\ &= \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} E[Z_1] E[Z_2] \right) = \frac{1}{2}(\Delta t)^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}V[\Delta U] &= E \left[\left\{ \frac{1}{2}(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \left(Z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2 \right) \right\}^2 \right] = \frac{1}{4}(\Delta t)^3 \left(E[Z_1^2] + \frac{2}{\sqrt{3}} E[Z_1 Z_2] + \frac{1}{3} E[Z_2^2] \right) \\ &= \frac{1}{4}(\Delta t)^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} E[Z_1] E[Z_2] + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4}(\Delta t)^3 \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(\Delta t)^3.\end{aligned}$$

Τέλος, θα συμπεριλάβουμε έναν ακόμη όρο στο σχήμα. Στο υπόλοιπο R' υπάρχει ο όρος $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r \mathcal{L}^1 \mathcal{L}^1 b(X_q) dW_q dW_r dW_s$. Εφαρμόζουμε την (3.2.5) για $f = \mathcal{L}^1 \mathcal{L}^1 b$ και κρατάμε το ολοκληρώμα με τη σταθερή ολοκληρωτέα ποσότητα, δηλαδή το

$$\mathcal{L}^1 \mathcal{L}^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r dW_q dW_r dW_s$$

όπου

$$\mathcal{L}^1 \mathcal{L}^1 b(X_{t_0}) = b(X_{t_0}) \frac{\theta}{\theta x} \left(b(X_{t_0}) b'(X_{t_0}) \right) \quad (3.4.8)$$

και

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r dW_q dW_r dW_s = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} (W_s - W_{t_0})^2 - \frac{1}{2} (s - t_0) dW_s \quad (3.4.9)$$

Όμως, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $\frac{(W_t - W_{t_0})^3}{6} - \frac{1}{2}(t - t_0)(W_t - W_{t_0})$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{(W_t - W_{t_0})^3}{6} - \frac{1}{2}(t - t_0)(W_t - W_{t_0})\right) \\ &= -\frac{1}{2}(W_t - W_{t_0})dt + \left(\frac{(W_t - W_{t_0})^2}{2} - \frac{1}{2}(t - t_0)\right)dW_t + \frac{1}{2}(W_t - W_{t_0})dt \Rightarrow \\ & \frac{(W_t - W_{t_0})^3}{6} - \frac{1}{2}(t - t_0)(W_t - W_{t_0}) = \int_{t_0}^t \left(\frac{(W_s - W_{t_0})^2}{2} - \frac{1}{2}(s - t_0)\right)dW_s \Rightarrow \\ & \int_{t_0}^t \left(\frac{(W_s - W_{t_0})^2}{2} - \frac{1}{2}(s - t_0)\right)dW_s = \frac{(W_t - W_{t_0})^3}{6} - \frac{1}{2}(t - t_0)(W_t - W_{t_0}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η (3.4.9) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r dW_q dW_r dW_s &= \frac{(W_t - W_{t_0})^3}{6} - \frac{1}{2}(t - t_0)(W_t - W_{t_0}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W)^2 - \Delta t \right\} \Delta W . \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Αν προσθέσουμε τους διορθωτικούς όρους (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) και (3.4.6), (3.4.4) και (3.4.7), (3.4.8) και (3.4.10) λαμβάνουμε το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + a(Y_i)\Delta t + b(Y_i)\Delta W_i + \frac{1}{2}b(Y_i)b'(Y_i)((\Delta W_i)^2 - \Delta t) + b(Y_i)a'(Y_i)\Delta U_i \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ a(Y_i)a'(Y_i) + \frac{1}{2}b^2(Y_i)a''(Y_i) \right\} (\Delta t)^2 + \left\{ a(Y_i)b'(Y_i) + \frac{1}{2}b^2(Y_i)b''(Y_i) \right\} \{ \Delta W_i \Delta t - \Delta U_i \} \\ &+ \frac{1}{2}b(Y_i)(b(Y_i)b'(Y_i))' \left\{ \frac{1}{3}(\Delta W_i)^2 - \Delta t \right\} \Delta W_i . \end{aligned}$$

Το παραπάνω σχήμα-όπως δηλώνεται και στο όνομά του- έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης ίση με 1,5. Επίσης, για την υλοποίηση του σχήματος χρειάζονται πρόσθετες μερικές παράγωγοι των συντελεστών μετατόπισης και διάχυσης. Τέλος, ας σημειωθεί ότι το σχήμα Euler δεν είναι ισχυρής τάξης $\gamma = 1,5$ για τη γενική διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, καθότι υπάρχουν επιπλέον όροι στο ανάπτυγμα.

3.4.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

Θεωρούμε για ακόμη μία φορά τη γεωμετρική κίνηση Brown

Το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 για αυτήν είναι

$$Y_{i+1} = Y_i + aY_i\Delta t + bY_i\Delta W_i + \frac{1}{2}b^2Y_i\{(\Delta W_i)^2 - \Delta t\} + abY_i\Delta U_i + \frac{1}{2}a^2Y_i(\Delta t)^2 \\ + abY_i\{\Delta W_i\Delta t - \Delta U_i\} + \frac{1}{2}ab^2Y_i\left\{\frac{1}{3}(\Delta W_i)^2 - \Delta t\right\}\Delta W_i.$$

Το παρακάτω πρόγραμμα σε R παράγει προσέγγιση με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 με ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα $\delta = 2^{-6}$ για την παραπάνω διαδικασία με $X_0 = 1, a = 1.5$ και $b = 1$ και απεικονίζει τόσο την προσεγγιστική λύση όσο και την ακριβή και τις προσεγγίσεις Euler και Milstein για συγκριτικούς λόγους:

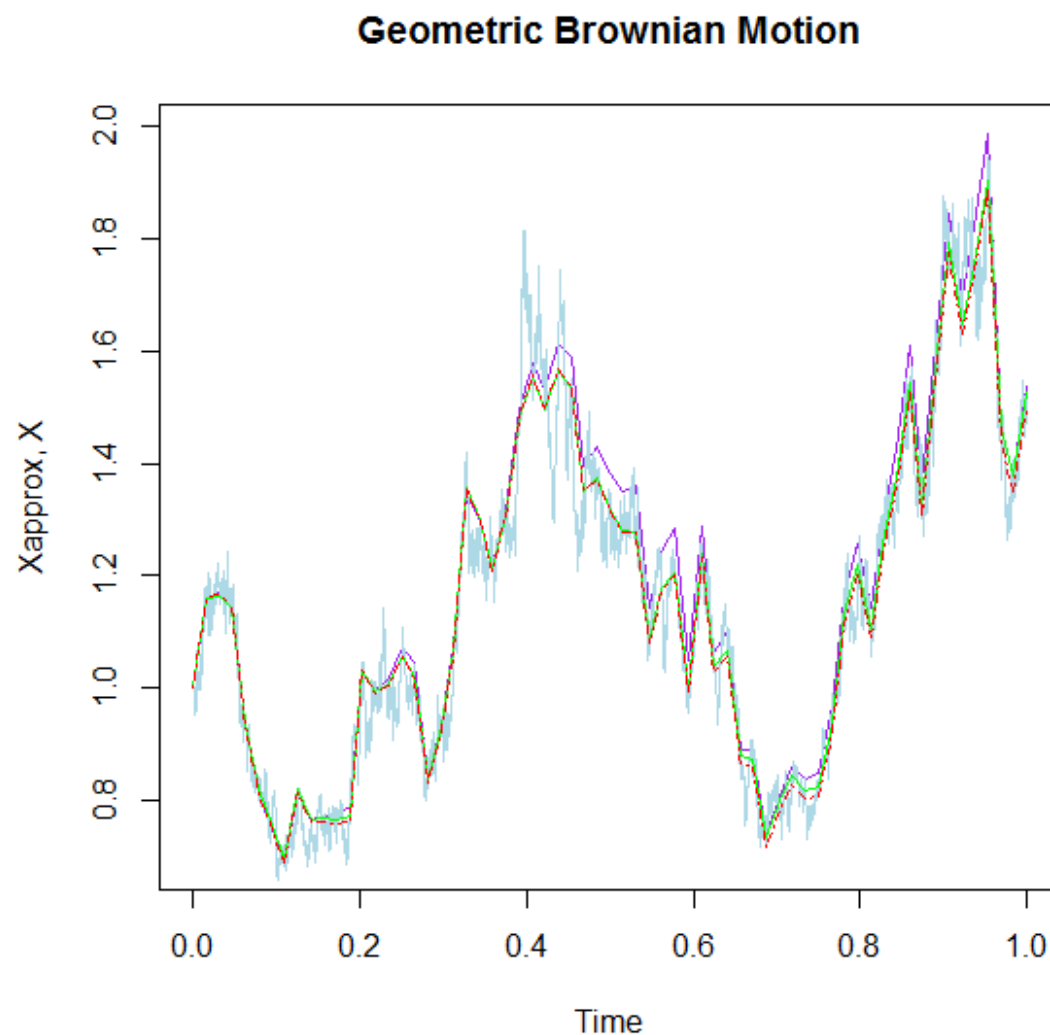
```
# geom_br_m_1.5strong_taylor_scheme
set.seed(45)
N<-4096
N1<-512
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Dt1<-1/N1
Y<-numeric(N+1)
X<-numeric(N+1)
K<-numeric(N)
Xapprox<-numeric(N1+1)
Xapproxm<-numeric(N1+1)
Xapprox1<-numeric(N1+1)
Y[1]<-0
X[1]<-1
Xapprox[1]<-1
Xapproxm[1]<-1
Xapprox1[1]<-1
Z<-rnorm(N)
Z1<-rnorm(N1)
t<-T0+Dt
for (i in 1:N){
  Y[i+1]<-Y[i]+sqrt(Dt)*Z[i]
  X[i+1]<-exp((1.5-0.5)*t+Y[i+1])
  t<-t+Dt
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+1.5*Xapprox[i]*Dt1+Xapprox[i]*(Y[j+N/N1]-Y[j])
  Xapproxm[i+1]<-Xapproxm[i]+1.5*Xapproxm[i]*Dt1+Xapproxm[i]*(Y[j+N/N1]-
Y[j])+0.5*Xapproxm[i]*((Y[j+N/N1]-Y[j])^2-Dt1)
  j<-j+N/N1
}
j<-1
for (i in 1:N1){
  K[i]<-0.5*(Dt1*(Y[j+N/N1]-Y[j])+Dt1*sqrt(Dt1)*Z1[i]/sqrt(3))
  Xapprox1[i+1]<-Xapprox1[i]+1.5*Xapprox1[i]*Dt1+Xapprox1[i]*(Y[j+N/N1]-
Y[j])+0.5*Xapprox1[i]*((Y[j+N/N1]-Y[j])^2-
Dt1)+1.5*Xapprox1[i]*K[i]+0.5*(1.5*Xapprox1[i]*1.5)*Dt1^2+(1.5*Xapprox1[i])*((Y[j+N/N1]-
Y[j])*Dt1-K[i])+0.5*Xapprox1[i]*(1/3*(Y[j+N/N1]-Y[j])^2-Dt1)*(Y[j+N/N1]-Y[j])
```

```

j<-j+N/N1
}
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=1/N1)
Xapprox1<-ts(Xapprox1,start=0,delta=1/N1)
Xapproxm<-ts(Xapproxm,start=0,delta=1/N1)
X<-ts(X,start=0,delta=1/N)
plot(Xapprox, main="Geometric Brownian Motion", ylab="Xapprox, X", col='purple')
lines(X,col='light blue')
lines(Xapproxm,col='green',lty=1)
lines(Xapprox1,col='red',lty=4)
e1<-abs(X[N+1]-Xapprox[N1+1])
e2<-abs(Xapproxm[N1+1]- X[N+1])
e3<-abs(X[N+1]-Xapprox1[N1+1])

```

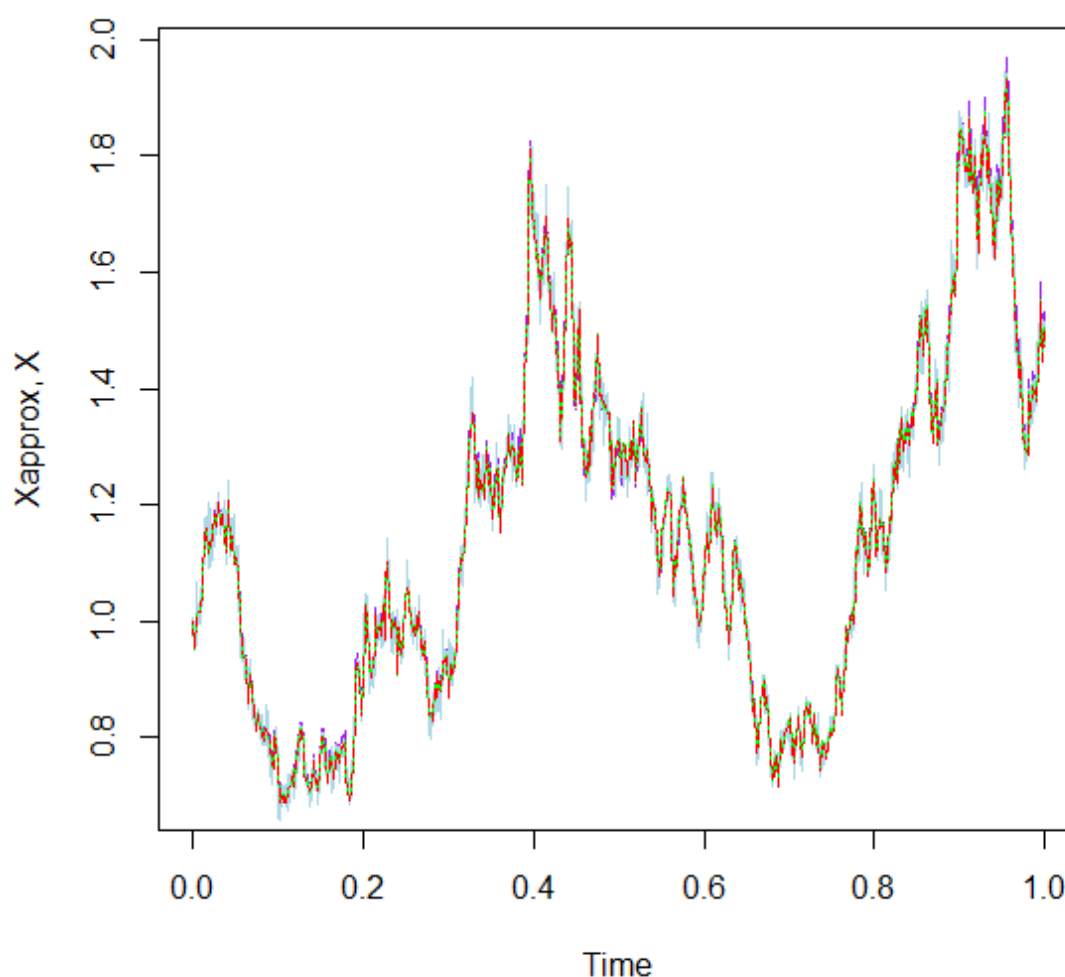
Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Σχήμα 3.20 Προσεγγίσεις με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 (κόκκινη γραμμή), Milstein (πράσινη γραμμή) και Euler (μωβ γραμμή) με βήμα $\delta = 2^{-6}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για $\delta = 2^{-9}$ οπότε προκύπτει:

Geometric Brownian Motion



Σχήμα 3.21 Προσεγγίσεις με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 (κόκκινη γραμμή), Milstein (πράσινη γραμμή) και Euler (μωβ γραμμή) με μικρότερο βήμα $\delta = 2^{-9}$ και ακριβής λύση (γαλάζια γραμμή) για τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Από τα ανωτέρω σχήματα είναι φανερό ότι η προσέγγιση με το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 είναι πλησιέστερα στη διαδικασία Itô στο τελικό σημείο $T = 1$ όταν το βήμα είναι μικρότερο. Επίσης, βλέπουμε ότι το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 προσεγγίζει καλύτερα την ακριβή λύση σε σύγκριση με τις μεθόδους Euler και Milstein. Ειδικά για το τελικό σημείο βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon_1^E = |X_T - Y_N^E| = 0,0375 \quad , \quad \varepsilon_1^M = |X_T - Y_N^M| = 0,0284 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1^T = |X_T - Y_N^T| = 0,0011$$

για $\delta = 2^{-6}$ και

$$\varepsilon_1^E = |X_T - Y_N^E| = 0,0317 \quad , \quad \varepsilon_1^M = |X_T - Y_N^M| = 0,0043 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1^T = |X_T - Y_N^T| = 0,0001$$

για $\delta = 2^{-9}$.

3.4.2 Συγκριτικά αποτελέσματα μεθόδων

Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι να δείξει πώς το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 υπερέρχει τόσο του σχήματος Milstein όσο και του σχήματος Euler όσον αφορά τη σύγκλιση στην απλή περίπτωση της γεωμετρικής κίνησης Brown. Για το σκοπό αυτό επαναλαμβάνουμε τα βήματα της ενότητας 3.2.3.

Συνεπώς, αφού προσομοιώσουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μονοπάτια της κίνησης Brown με αυξανόμενο επίπεδο λεπτότητας, ακολούθως θα πρέπει να προσομοιώσουμε μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown χρησιμοποιώντας τόσο το σχήμα Euler και το σχήμα Milstein όσο και το ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 και να υπολογίσουμε την τιμή $X(T)$ και με τα τρία σχήματα. Ο ακόλουθος κώδικας πραγματοποιεί τους υπολογισμούς αυτούς και απεικονίζει τις τρεις τιμές έναντι της πραγματικής τιμής $X(T)$ για το δοθέν μονοπάτι της κίνησης Brown (δηλαδή της κίνησης Brown που καταλήγει στο 1 τη χρονική στιγμή 1, που είναι ένα είδος γέφυρας Brown) $X(1) = \exp\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)$. Έχουμε επιλέξει και εδώ $a = 1$ και $b = \frac{1}{2}$.

```
S0<-1
theta<-c(1,0.5)
euler<-NULL
milstein<-NULL
strongtayl<-NULL
for(i in 1:14){
  n<-length(W[[i]])
  Dt<-1/n
  sDt<-sqrt(Dt)
  E<-numeric(n)
  E[1]<-S0
  M<-numeric(n)
  M[1]<-S0
  T<-numeric(n)
  T[1]<-S0
  K<-numeric(n)
  for(j in 2:n){
    Z<-W[[i]][j]-W[[i]][j-1]
    K[j]<-0.5*(Dt*Z+Dt*sqrt(Dt)*rnorm(1)/sqrt(3))
    E[j]<-E[j-1]*(1+theta[1]*Dt+theta[2]*Z)
    M[j]<-M[j-1]*(1+(theta[1]-0.5*theta[2]^2)*Dt+theta[2]*Z+0.5*theta[2]^2*Z^2)
    T[j]<-T[j-1]+T[j-1]*Dt+0.5*T[j-1]*Z+0.5^3*T[j-1]*(Z^2-Dt)+0.5*T[j-1]*K[j]+0.5*T[j-1]*Dt^2+(0.5*T[j-1])*(Z*Dt-K[j])+0.5^4*T[j-1]*(1/3*Z^2-Dt)*Z
  }
  cat(paste(i,"\n"))
  euler<-c(euler,E[n])
  milstein<-c(milstein,M[n])
  strongtayl<-c(strongtayl,T[n])
}
```

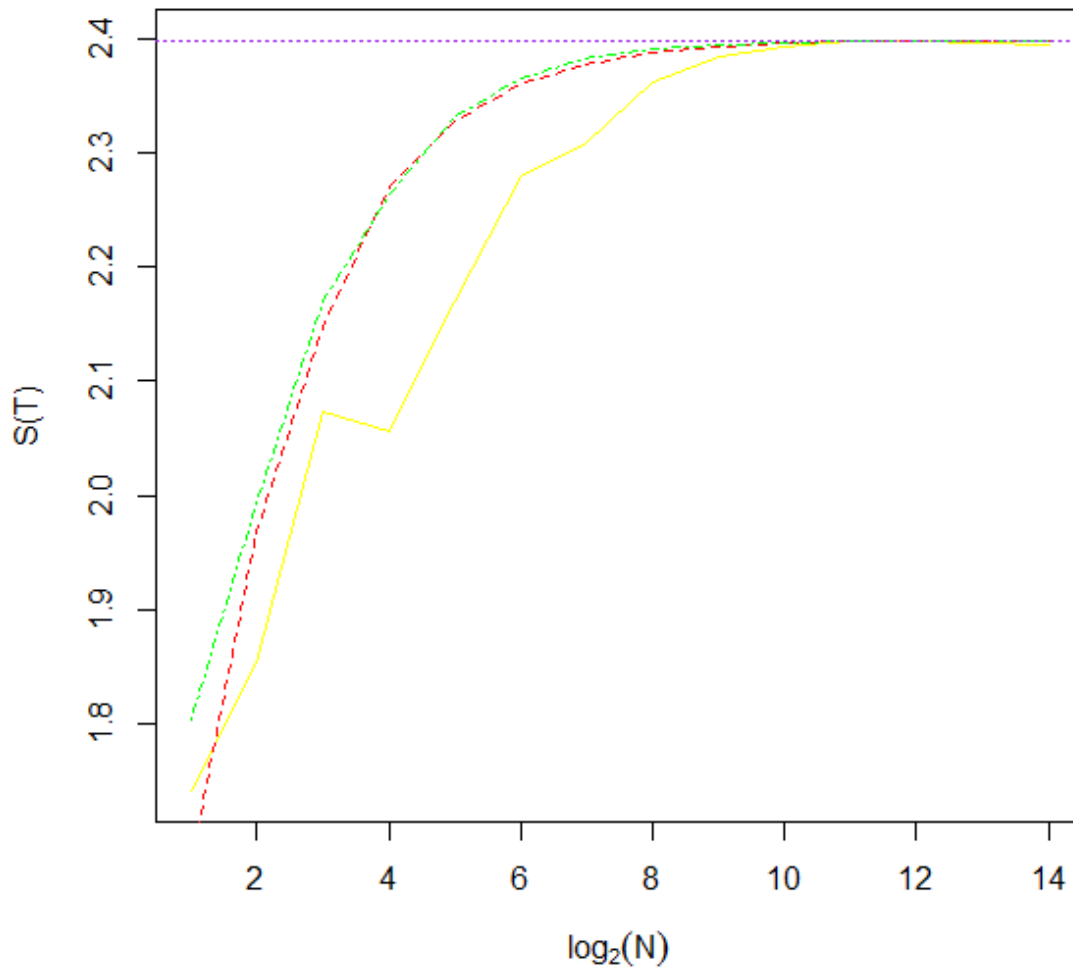
```

plot(1:14,euler,type="l",main="Milstein vs Euler vs 1.5 Strong Taylor Scheme
",xlab=expression(log[2](N)),ylab="S(T)",col='yellow')
lines(1:14,milstein,lty=2,col='red')
lines(1:14,strongtayl,lty=4,col='green')
abline(h=exp(theta[1]-0.5*theta[2]^2),lty=3,col='purple')

```

Με την εκτέλεσή του προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Milstein vs Euler vs 1.5 Strong Taylor Scheme



Σχήμα 3.22 Ταχύτητα σύγκλισης των σχημάτων Euler, Milstein και Taylor τάξης 1,5 (Euler=κίτρινη ενιαία γραμμή, Milstein=κόκκινη διακεκομμένη γραμμή, Ισχυρό σχήμα Taylor τάξης 1,5 = πράσινη διακεκομμένη γραμμή) στην πραγματική τιμή (μωβ γραμμή με τελείες) συναρτήσει του βήματος $\Delta t = \frac{1}{N}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ LOTKA- VOLTERRA

4.1 Περιγραφή

Πέρα από τεχνητές περιπτώσεις, όπως τα εργαστηριακά πειράματα, μοντέλα που περιγράφουν τη δυναμική πληθυσμού ενός μόνο είδους είναι συχνά μη ρεαλιστικά, από τη στιγμή που στη φύση τα περισσότερα είδη συνυπάρχουν με άλλα και επηρεάζονται από την παρουσία τους με τον έναν ή τον άλλο τρόπο. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις μπορεί να είναι καλοπροαίρετες, ουδέτερες ή εχθρικές, όπως συμβαίνει στις συμβιωτικές, θηρευτή-θηράματος και ανταγωνιστικές σχέσεις αντίστοιχα. Όλα αυτά μπορούν να ενσωματωθούν σε μοντέλα δυναμικής πληθυσμού με όρους που συνδέουν ξεχωριστά μοντέλα ενός είδους. Ένα ντετερμινιστικό μοντέλο που μελετάται συχνά και αφορά τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ειδών είναι το σύστημα Lotka-Volterra:

$$\dot{x}^i = x^i(a^i + \sum_{j=1}^d b^{i,j}x^j) \quad (4.1.1)$$

για $i = 1, 2, \dots, d$ στην περίπτωση που έχουμε d διαφορετικά είδη.

Ερμηνεία των παραμέτρων

Οι εξισώσεις Lotka-Volterra αντιπροσωπεύουν ανταγωνισμό και θήρευση ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων. Είναι λιγότερο κατάλληλες για περιγραφή συμβίωσης.

Οι τιμές των a^i είναι οι ρυθμοί ενδογενούς γέννησης ή θανάτου των ειδών. Θετική τιμή για το a^i σημαίνει ότι το είδος i δύναται να αναπαραχθεί απουσία όλων των άλλων ειδών (για παράδειγμα, επειδή είναι φυτό), ενώ αρνητική τιμή σημαίνει ότι ο πληθυσμός του θα μειωθεί αν τα υπόλοιπα κατάλληλα είδη δεν είναι παρόντα (για παράδειγμα, ένα φυτοφάγο το οποίο δεν μπορεί να επιζήσει αν δεν τρώει φυτά ή ένας θηρευτής ο οποίος δεν μπορεί να επιβιώσει χωρίς το θήραμά του).

Οι τιμές των $b^{i,j}$ αντιπροσωπεύουν τις σχέσεις μεταξύ των ειδών. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή του $b^{i,j}$ δείχνει την επίδραση που έχει το είδος j στο i . Η επίδραση είναι ανάλογη των πληθυσμών και των δύο ειδών, όπως επίσης και της τιμής του $b^{i,j}$. Συνεπώς, αν $b^{i,j} < 0$ και $b^{j,i} < 0$ τότε λέμε ότι τα δύο είδη είναι σε άμεσο ανταγωνισμό, αφού καθένα έχει άμεση αρνητική επίδραση στον πληθυσμό του άλλου. Αν $b^{i,j} > 0$ και $b^{j,i} < 0$ τότε το είδος i θεωρείται θηρευτής (ή παράσιτο) για το είδος j , αφού ο πληθυσμός του μεγαλώνει εις βάρος του j . Αν τα $b^{i,j}$ και $b^{j,i}$ είχαν θετικές τιμές, τότε θα μιλούσαμε για συμβίωση. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη, αφού μπορεί να επιτρέψει στους πληθυσμούς και των δύο ειδών να μεγαλώσουν απεριόριστα.

Έμμεσες θετικές και αρνητικές επιδράσεις είναι επίσης δυνατές. Για παράδειγμα, αν δύο θηρευτές τρώνε το ίδιο θήραμα τότε ανταγωνίζονται έμμεσα, παρόλο που μπορεί να μην έχουν άμεσο όρο ανταγωνισμού στον πίνακα της κοινότητας.

Οι διαγώνιοι όροι $b^{i,i}$ συνήθως λαμβάνονται αρνητικοί (δηλαδή ο πληθυσμός του είδους i έχει αρνητική επίδραση στον εαυτό του). Αυτός ο 'αυτοπεριορισμός' αποτρέπει την απεριόριστη αύξηση των πληθυσμών.

'Τυχαιοποιώντας' τις παραμέτρους αύξησης a^i σε $a^i + \sigma^i \xi_t^i$ οδηγούμαστε σε ένα σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο θα ερμηνεύουμε ως εξισώσεις Itô με ανεξάρτητες κινήσεις Brown

$$dX_t^i = X_t^i (a^i + \sum_{j=1}^d b^{i,j} X_t^j) dt + \sigma^i X_t^i dW_t^i \quad (4.1.2)$$

για $i = 1, 2, \dots, d$. Αναλυτικές λύσεις για τις εξισώσεις (4.1.2) δεν είναι γνωστές, οπότε θα πρέπει να τις επιλύσουμε αριθμητικά ή να προβούμε σε μια ποιοτική διερεύνηση της ευστάθειας των λύσεών τους.

Οι εξισώσεις (4.1.2) γράφονται σε ολοκληρωτική μορφή

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \left[a^i X_s^i + \sum_{j=1}^d b^{i,j} X_s^i X_s^j \right] ds + \int_0^t \sigma^i X_s^i dW_s^i$$

για $i = 1, 2, \dots, d$.

Αν $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \dots & 0 & a^d \end{bmatrix}$ και $B = [b^{i,j}] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^d \end{bmatrix}$ τότε για $d = 2$ το σύστημα Lotka-

Volterra γράφεται συνεπτυγμένα ως εξής:

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \left(A + \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{X}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^2 \cdot \mathbf{X}_s \end{bmatrix} \right) ds + \int_0^t \begin{bmatrix} \sigma^1 X_s^1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 X_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_s^1 \\ dW_s^2 \end{bmatrix}.$$

4.2 Προσομοίωση ντετερμινιστικού και στοχαστικού μοντέλου Lotka-Volterra

Σε αυτήν την ενότητα εκτελούμε προσομοιώσεις τόσο του ντετερμινιστικού όσο και του στοχαστικού μοντέλου Lotka-Volterra για ένα σύστημα δύο ειδών ($d = 2$) τα οποία βρίσκονται σε ανταγωνισμό και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Θεωρούμε τις ακόλουθες παραμέτρους για το μοντέλο:

$$a^1 = 0,44, a^2 = 0,15, b^{1,1} = -0,01, b^{1,2} = -0,022, b^{2,1} = -0,005, b^{2,2} = -0,0067, \sigma^1 = 0,15 \text{ και } \sigma^2 = 0,2.$$

Το ντετερμινιστικό μοντέλο που προκύπτει είναι το εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= 0,44x^1 - 0,01(x^1)^2 - 0,022x^1x^2 \\ \dot{x}^2 &= 0,15x^2 - 0,0067(x^2)^2 - 0,005x^1x^2. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο στοχαστικό μοντέλο είναι:

$$dX_t^1 = (0,44X_t^1 - 0,01(X_t^1)^2 - 0,022X_t^1X_t^2)dt + 0,15X_t^1dW_t^1$$

$$dX_t^2 = (0,15X_t^2 - 0,0067(X_t^2)^2 - 0,005X_t^1X_t^2)dt + 0,2X_t^2dW_t^2,$$

όπου W_t^1 και W_t^2 είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown.

Το στοχαστικό μοντέλο θα επιλυθεί αριθμητικά με χρήση της μεθόδου Euler (δηλαδή με εφαρμογή της μεθόδου Euler σε κάθε εξίσωση χωριστά):

$$Y_{i+1}^1 = Y_i^1 + (0,44Y_i^1 - 0,01(Y_i^1)^2 - 0,022Y_i^1Y_i^2) \Delta t + 0,15Y_i^1\sqrt{\Delta t}Z_1$$

$$Y_{i+1}^2 = Y_i^2 + (0,15Y_i^2 - 0,0067(Y_i^2)^2 - 0,005Y_i^1Y_i^2) \Delta t + 0,2Y_i^2\sqrt{\Delta t}Z_2$$

όπου Z_1 και Z_2 είναι δύο ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές για $i = 0,1,2, \dots$ μέχρις ότου είτε κάποιο εκ των Y_{i+1}^1 , Y_{i+1}^2 γίνει λιγότερο από μηδέν είτε υπερβούμε κάποιο μέγιστο χρόνο.

(Σημειώνουμε ότι το ντετερμινιστικό μοντέλο θα επιλυθεί και αυτό αριθμητικά με χρήση της ντετερμινιστικής μεθόδου Euler.)

Τα παρακάτω προγράμματα σε R εκτελούν προσομοιώσεις του ντετερμινιστικού και του στοχαστικού μοντέλου Lotka-Volterra με τις προαναφερθείσες τιμές των παραμέτρων και αρχικές συνθήκες $Y_0^1 = 15$ και $Y_0^2 = 15,5$ και απεικονίζουν τα αποτελέσματα:

```
# Deterministic Lotka-Volterra model
T0<-0
T<-100
N1<-100
Dt1<-100/N1
Xapprox<-numeric(N1+1)
Yapprox<-numeric(N1+1)
Yapprox[1]<-15
Xapprox[1]<-15.5
t<-T0+Dt1
i<-1
while((i<=N1)&&(Xapprox[i]>=0)&&(Yapprox[i]>=0)){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+(0.44*Xapprox[i]-0.01*Xapprox[i]^2-
0.022*Xapprox[i]*Yapprox[i])*Dt1
  Yapprox[i+1]<-Yapprox[i]+(0.15*Yapprox[i]-0.0067*Yapprox[i]^2-
0.005*Xapprox[i]*Yapprox[i])*Dt1
  i<-i+1
}
par(mfrow=c(1,2))
plot(Xapprox,Yapprox,type='l',xlab='population 1',ylab='population 2',col='green')
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=100/N1)
Yapprox<-ts(Yapprox,start=0,delta=100/N1)
plot(Xapprox,ylim=c(0,max(Xapprox,Yapprox)),col='light blue',type='l',ylab='populations 1,2')
lines(Yapprox,col='yellow',type='l')
```

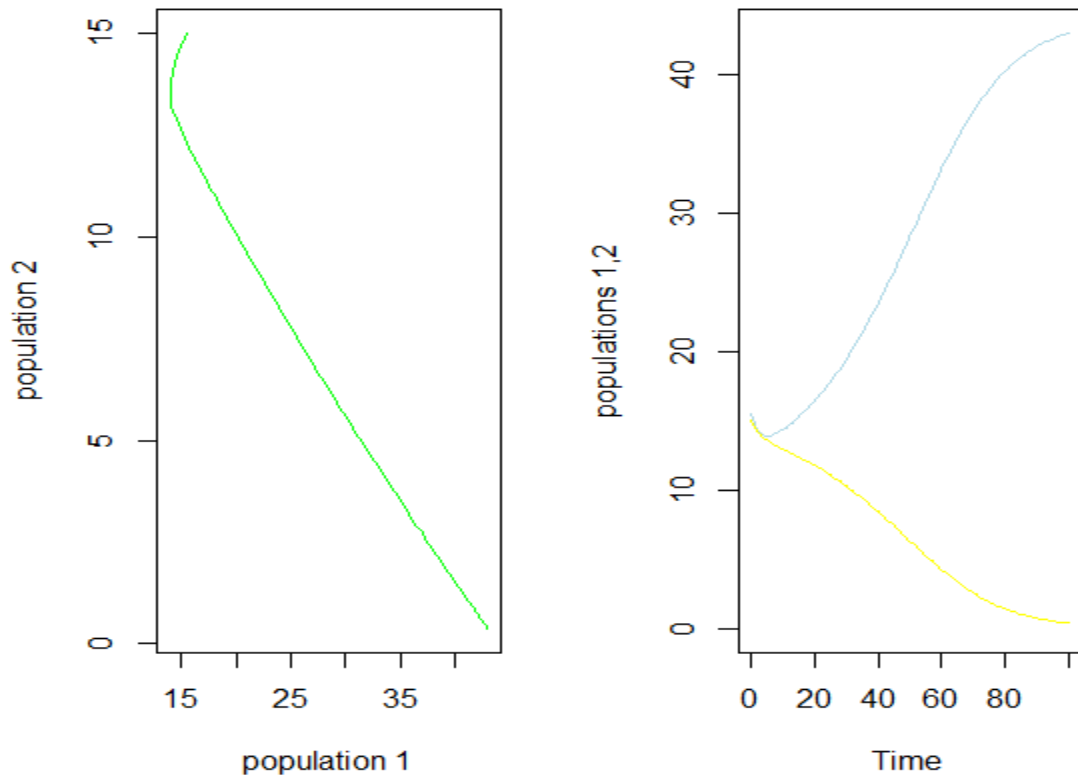
```
# Stochastic Lotka-Volterra model
set.seed(38)
```

```

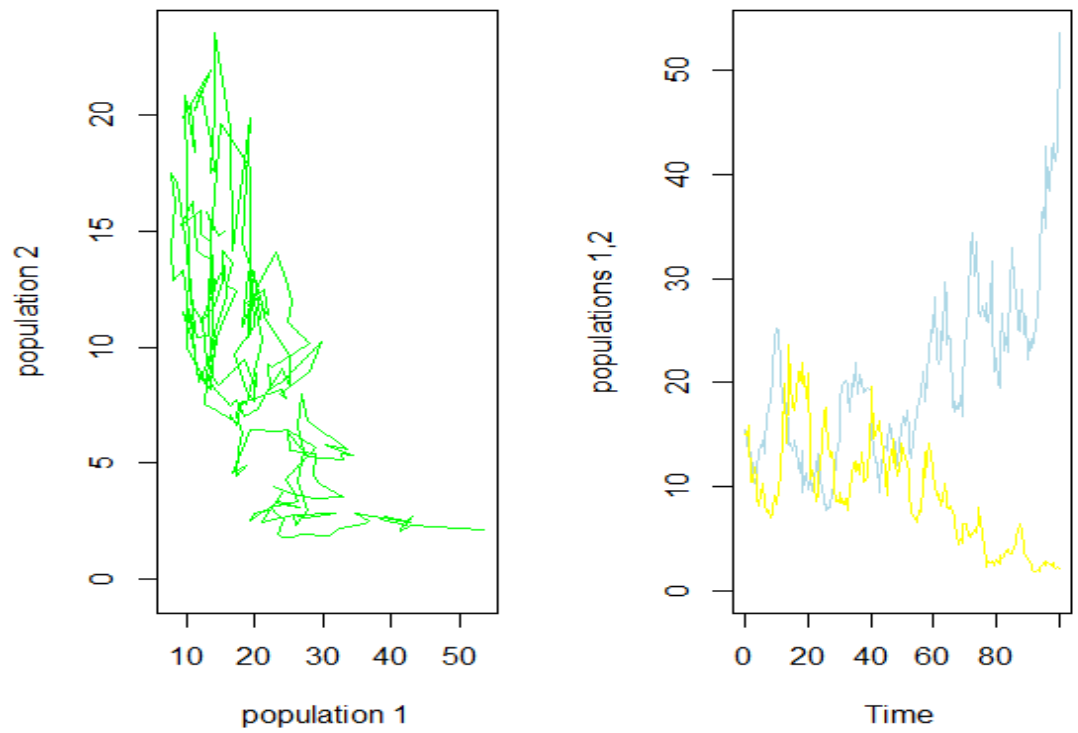
T0<-0
T<-100
N1<-200
Dt1<-100/N1
Xapprox<-numeric(N1+1)
Yapprox<-numeric(N1+1)
Yapprox[1]<-15
Xapprox[1]<-15.5
Z1<-rnorm(N1)
Z2<-rnorm(N1)
t<-T0+Dt1
i<-1
while((i<=N1)&&(Xapprox[i]>=0)&&(Yapprox[i]>=0)){
  Xapprox[i+1]<-Xapprox[i]+(0.44*Xapprox[i]-0.01*Xapprox[i]^2-
0.022*Xapprox[i]*Yapprox[i])*Dt1+0.15*Xapprox[i]*sqrt(Dt1)*Z1[i]
  Yapprox[i+1]<-Yapprox[i]+(0.15*Yapprox[i]-0.0067*Yapprox[i]^2-
0.005*Xapprox[i]*Yapprox[i])*Dt1+0.2*Yapprox[i]*sqrt(Dt1)*Z2[i]
  i<-i+1
}
par(mfrow=c(1,2))
plot(Xapprox,Yapprox,type='l',ylim=c(-0.5,max(Yapprox)),xlab='population
1',ylab='population 2',col='green')
Xapprox<-ts(Xapprox,start=0,delta=100/N1)
Yapprox<-ts(Yapprox,start=0,delta=100/N1)
plot(Xapprox,ylim=c(0,max(Xapprox,Yapprox)),col='light blue',type='l',ylab='populations 1,2')
lines(Yapprox,col='yellow',type='l')
Xapprox[] > Yapprox[]

```

Με την εκτέλεσή τους προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Σχήμα 4.1 Υπολογιστικά αποτελέσματα για το ντετερμινιστικό μοντέλο για ένα σύστημα ανταγωνισμού.



Σχήμα 4.2 Υπολογιστικά αποτελέσματα για το στοχαστικό μοντέλο για ένα σύστημα ανταγωνισμού.

Οι ανωτέρω γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν τη διαφορά μεταξύ του ντετερμινιστικού και του στοχαστικού μοντέλου. Στην ντετερμινιστική περίπτωση το πρώτο είδος πάντα ξεπερνά σε πληθυσμό το δεύτερο, ενώ στο στοχαστικό μοντέλο το δεύτερο είδος ξεπερνά σε πληθυσμό το πρώτο περίπου το 38% του χρόνου.

Σημειώνουμε ότι η μέθοδος Euler δεν είναι η πιο ενδεικτική για εφαρμογή στο μοντέλο Lotka-Volterra καθώς οι συντελεστές μετατόπισης δεν ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες ισχυρής σύγκλισης και συνεπώς δεν γνωρίζουμε αν η προσέγγιση που παίρνουμε είναι 'καλή'. Ωστόσο είναι η απλούστερη μέθοδος για να λάβουμε κάποια πρώτα αποτελέσματα και να συνάγουμε κάποια συμπεράσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων επαλήθευσαν τα κύρια στοιχεία της θεωρίας αναφορικά με τη σύγκλιση των μεθόδων και την τάξη σύγκλισης αυτών. Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι τα σχήματα υψηλότερης τάξης (αλλά και το σχήμα Euler) παρέχουν αρκετά ικανοποιητικές προσεγγίσεις της λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Επίσης, κατέστη φανερή η ευκολία με την οποία τα αριθμητικά σχήματα μπορούν να υλοποιηθούν στον ψηφιακό υπολογιστή. Συνεπώς, κάποιος μπορεί να εφαρμόσει τα απλά σχήματα Euler και Milstein και να αναμένει να λάβει μια 'λογική' λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

Η παρούσα εργασία δεν έθιξε καθόλου το θέμα της αριθμητικής ευστάθειας. Ωστόσο, σύμφωνα με τους Kloeden και Platen, όλα τα στοχαστικά σχήματα ενός βήματος που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την εργασία είναι αριθμητικά ευσταθή υπό κάποιες ικανές συνθήκες ομαλότητας των συντελεστών μετατόπισης και διάχυσης.

Επίσης, η ανάλυση που έγινε θεώρησε σταθερό βήμα κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων. Ωστόσο, κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει μεταβλητό βήμα κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης προσομοίωσης. Ο Lehn, και λοιποί, (2002) εξετάζουν προσαρμοστικά σχήματα τα οποία χρησιμοποιούν μεταβλητά βήματα στο αριθμητικό σχήμα. Συνεπώς, περαιτέρω έρευνα θα μπορούσε να εστιάσει σε θέματα σύγκλισης όταν χρησιμοποιούνται μεταβλητά βήματα στο αριθμητικό σχήμα. Ακόμη, το μεταβλητό βήμα θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας σε αριθμητικές μεθόδους υψηλότερης τάξης, οι οποίες είναι περίπλοκες όταν θεωρούμε σταθερό βήμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Μαθηματικό υπόβαθρο

Μετασχηματισμός Lamperti

Υπάρχει μια ειδική εφαρμογή του κανόνα του Itô που έχει ενδιαφέρον σε πολλές μεθόδους προσομοίωσης και εκτίμησης. Έστω ότι έχουμε τη стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

όπου ο συντελεστής διάχυσης εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή κατάσταση. Μια τέτοια стоχαστική διαφορική εξίσωση μπορεί πάντοτε να μετασχηματιστεί σε μία με μοναδιαίο συντελεστή διάχυσης, αν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Lamperti,

$$Y_t = F(X_t) = \int_z^{X_t} \frac{1}{b(u)} du.$$

Εδώ το z είναι μια αυθαίρετη τιμή από το χώρο καταστάσεων της X . Στην πραγματικότητα, η διαδικασία Y_t επιλύει τη стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = a_Y(t, Y_t)dt + dW_t,$$

όπου

$$a_Y(t, y) = \frac{a(t, F^{-1}(y))}{b(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2} b'(F^{-1}(y)),$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε και ως εξής

$$dY_t = \left(\frac{a(t, X_t)}{b(X_t)} - \frac{1}{2} b'(X_t) \right) dt + dW_t.$$

Για να λάβουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα εφαρμόζουμε τον κανόνα του Itô με

$$F(x) = \int_z^x \frac{1}{b(u)} du, \quad F'(x) = \frac{1}{b(x)}, \quad F''(x) = -\frac{b'(x)}{b^2(x)}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} dF(X_t) &= \frac{1}{b(X_t)} dX_t - \frac{1}{2} \frac{b'(X_t)}{b^2(X_t)} d\langle X \rangle_t \\ &= \frac{1}{b(X_t)} (a(t, X_t)dt + b(X_t)dW_t) - \frac{1}{2} \frac{b'(X_t)}{b^2(X_t)} b^2(X_t)dt \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a(t, X_t)}{b(X_t)} - \frac{1}{2} b'(X_t) \right) dt + dW_t$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Προσομοίωση μονοπατιών της κίνησης Brown

Για υπολογιστικούς σκοπούς είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε διακριτή κίνηση Brown, όπου το W_t υπολογίζεται σε διακριτούς χρόνους t . Για το σκοπό αυτό θέτουμε $\Delta t = \frac{T}{N}$ για κάποιο θετικό ακέραιο N και συμβολίζουμε με W_i το W_{t_i} , όπου $t_i = i\Delta t$. Έχουμε

$$W_{i+1} = W_i + (W_{i+1} - W_i) = W_i + \Delta W_i \quad i = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$W_0 = 0$$

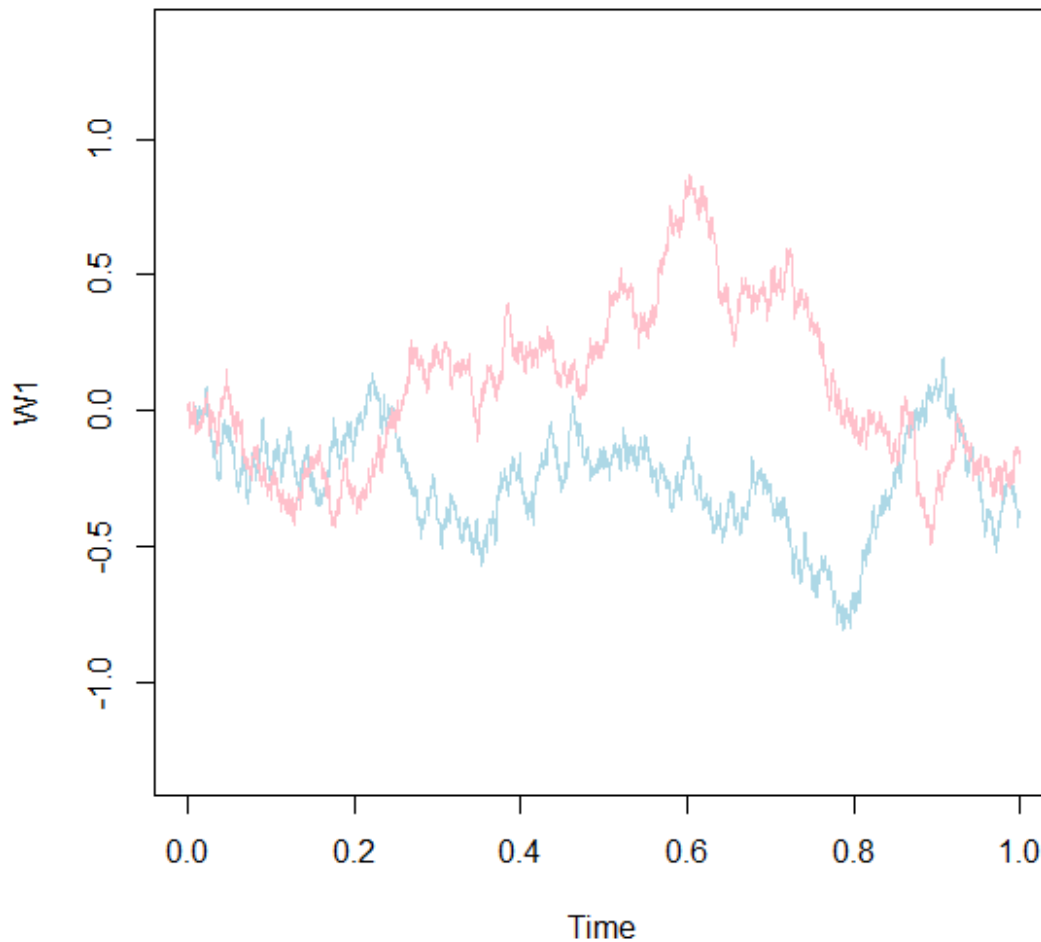
όπου κάθε ΔW_i είναι μία ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή της μορφής $\sqrt{\Delta t}N(0,1)$.

Ο παρακάτω κώδικας σε R προσομοιώνει δύο μονοπάτια της κίνησης Brown:

```
# Brownian Motion
N<-4096
T0<-0
T<-1
Dt<-1/N
Y<-matrix(nrow=2,ncol=N+1)
W1<-numeric(N+1)
W2<-numeric(N+1)
Y[1,1]<-0
Y[2,1]<-0
j<-1
for(k in 1:2){
  Z<-rnorm(N)
  t<-T0+Dt
  for (i in 1:N){
    Y[j,i+1]<-Y[j,i]+sqrt(Dt)*Z[i]
    t<-t+Dt
  }
  j<-j+1
}
W1<-ts(Y[1,],start=0,delta=1/N)
W2<-ts(Y[2,],start=0,delta=1/N)
m1<-min(W1)
m2<-min(W2)
m<-min(m1,m2)
M1<-max(W1)
M2<-max(W2)
M<-max(M1,M2)
plot(W1, ylim=c(m-0.5,M+0.5),main="Brownian Motion",col='light blue')
lines(W2, main="Brownian Motion",col='pink')
```

Με την εκτέλεσή του προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Brownian Motion



Σχήμα Π.1 Προσομοιωμένα μονοπάτια της κίνησης Brown

Τα δύο μονοπάτια στο ως άνω γράφημα της κίνησης Brown καθιστούν φανερή την τυχαία συμπεριφορά αυτής.

Επεξήγηση του κώδικα

Ο παραπάνω κώδικας σε *R* προσομοιώνει δύο μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0,1]$ με $N = 4096$. Εδώ, χρησιμοποιείται η γεννήτρια τυχαίων αριθμών *rmnorm*-κάθε κλήση στην *rmnorm(N)* παράγει N ανεξάρτητους ψευδοτυχαίους αριθμούς από την κατανομή $N(0,1)$. Οι αριθμοί από την *rmnorm(N)* πολλαπλασιάζονται στη συνέχεια επί $\sqrt{\Delta t}$ και χρησιμοποιούνται ως αυξήσεις στο *for loop* το οποίο δημιουργεί το διάνυσμα διάστασης $N + 1$ -γραμμή του πίνακα Y ο οποίος είναι ένας $2 \times N + 1$ πίνακας κάθε γραμμή του οποίου περιέχει το i -οστό μονοπάτι της κίνησης Brown. Υπάρχει, ωστόσο, ένα μικρό πρόβλημα: Η *R* ξεκινά τη δεικτοδότηση των πινάκων από το 1 και όχι από το μηδέν. Συνεπώς, υπολογίζουμε το $Y[i,]$ ως $Y[i, 1], Y[i, 2], \dots, Y[i, N + 1]$ και στη συνέχεια διορθώνουμε το πρόβλημα αυτό με την εντολή *ts* η οποία μας μετατρέπει ταυτόχρονα το $Y[i,]$ σε χρονοσειρά. Αν θέλουμε διαδοχικές εκτελέσεις του προγράμματος να μας δίνουν

τα ίδια αποτελέσματα θα πρέπει να θέσουμε την αρχική κατάσταση της γεννήτριας τυχαίων αριθμών. Αυτό επιτυγχάνεται αν τοποθετήσουμε την εντολή `set.seed()` στην αρχή του προγράμματος γράφοντας στην παρένθεση έναν αυθαίρετο αριθμό.

Χρήσιμες ανισότητες

1. Έστω τυχαία διανύσματα $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$. Τότε

$$E(|X + Y|^r) \leq c_r (E(|X|^r) + E(|Y|^r))$$

με $c_r = 1$ για $r \leq 1$ και $c_r = 2^{r-1}$ για $r \geq 1$.

2. Ανισότητα Lyapunov

Αν η τυχαία μεταβλητή X δεν είναι συγκεντρωμένη σε ένα μοναδικό σημείο και η $E(|X|^s)$ υπάρχει για κάποιο $s > 0$ τότε για κάθε $0 < r < s$ και $a \in \mathbb{R}$

$$(E(|X - a|^r))^{\frac{1}{r}} \leq (E(|X - a|^s))^{\frac{1}{s}}.$$

Λήμμα Gronwall

Αν οι συνεχείς συναρτήσεις u, κ και $K : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ικανοποιούν την

$$u(t) \leq K(t) + \int_a^t \kappa(s)u(s) ds \quad \text{για κάθε } t \in [a, b]$$

τότε

$$u(t) \leq K(t) + \int_a^t K(s)\kappa(s) \exp\left(\int_s^t \kappa(r) dr\right) ds.$$

Μέθοδος Euler-Maruyama για συστήματα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Οι αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να επεκταθούν και σε συστήματα. Έστω

$$\mathbf{X}_t = [X_t^1 \quad X_t^2 \quad \dots \quad X_t^d]^T$$

$$\mathbf{W}_t = [W_t^1 \quad W_t^2 \quad \dots \quad W_t^m]^T$$

$$\mathbf{a} : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{και} \quad \mathbf{b} : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m},$$

όπου $W_t^i, 1 \leq i \leq m$ είναι ανεξάρτητες κινήσεις Brown.

Τότε ένα σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχει τη μορφή:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{a}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{b}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t.$$

Το σύστημα γράφεται κατά συντεταγμένες:

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t a^i(s, \mathbf{X}_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b^{i,j}(s, \mathbf{X}_s) dW_s^j$$

για $i = 1, 2, \dots, d$.

Η μέθοδος Euler για συστήματα λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \mathbf{a}(t_i, \mathbf{Y}_i)\Delta t + \mathbf{b}(t_i, \mathbf{Y}_i)\Delta \mathbf{W}_i$$

για $i = 0, 1, \dots, N - 1$, όπου $\Delta t = \frac{T}{N}$, $\Delta \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{t_{i+1}} - \mathbf{W}_{t_i}$.

Σε μορφή συνιστωσών, η μέθοδος Euler γίνεται:

$$Y_{i+1}^j = Y_i^j + a^j(t_i, \mathbf{Y}_i)\Delta t + \sum_{j=1}^m b^{i,j}(t_i, \mathbf{Y}_i)\Delta W_i^j$$

για $j = 1, 2, \dots, d$, όπου $\Delta W_i^j \sim N(0, \Delta t)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ed Allen, *Discrete-time stochastic models, sdes, and numerical methods*, Lecture Notes, University of Tennessee, Knoxville, 2011. Διαθέσιμο: http://www.nimbios.org/tutorials/TT_stochastic_modeling_talks/eallenUTlect1.pdf
2. David Cai, Lecture Notes, New York University, New York. Διαθέσιμο: http://www.math.nyu.edu/~cai/Courses/Derivatives/compfin_lecture_5.pdf
3. H. Doss, *Liens entre equations differentielles stochastiques et ordinaires*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 13, 99–125, 1977.
4. Nadrajh Govender, *A brief analysis of certain numerical methods used to solve Stochastic Differential Equations*, Master Thesis, University of Pretoria, Pretoria, 2006. Διαθέσιμο: <http://upetd.up.ac.za/thesis/available/etd-07232007-095621/unrestricted/dissertation.pdf>
5. D.J. Higham, *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review, Vol. 43, No. 3, pp. 525-546, 2001. Διαθέσιμο: http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/Articles_11/higham:01.pdf
6. D. Higham, *Euler-Maruyama*, Lecture Notes, University of Strathclyde, Scotland, 2010. Διαθέσιμο: http://jones.math.unibas.ch/~cohen/Des2010/em_basel.pdf
7. Martin Hutzenthaler, Arnulf Jentzen and Peter E. Kloeden, *Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with non-globally Lipschitz continuous coefficients*, University of Munich (LMU), Bielefeld University and University of Frankfurt, 2010. Διαθέσιμο: <http://arxiv.org/pdf/1010.3756.pdf>
8. S.M. Iacus, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations with R examples*, Springer, Milan, 2008.
9. P. Jäckel, *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley and Sons, Trowbridge, 2002.
10. P.E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
11. Γ. Κοκολάκης και Ι. Σπηλιώτης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική*, εκδ. Συμεών (4^η έκδοση), Αθήνα, 1999.
12. Dirk P. Kroese, Thomas Taimre and Zdravko I. Botev, *Handbook of Monte Carlo Methods*, Wiley, 2011.
13. Thomas Önskog, *Lecture Notes on Stochastic Differential Equations*, Umeå University, Sweden, 2007. Διαθέσιμο: <http://snovit.math.umu.se/Studenter/matematik/kurser/Stokdiffekv/ht07/LectureNotesSDE.pdf>

14. Claudio Pacati, *Generating Sample Paths*, Lecture Notes, University of Siena, Italy, 2011. Διαθέσιμο: http://www.econ-pol.unisi.it/fineng/genpaths_pres.pdf
15. Thomas Schaffter, *Numerical Integration of SDEs: A Short Tutorial*, EPFL, Swiss, 2010. Διαθέσιμο: http://infoscience.epfl.ch/record/143450/files/sde_tutorial.pdf
16. Rüdiger Seydel, *Tools for Computational Finance*, 2nd edition, Springer, Köln, 2004.
17. T. Shores, *Math Finance Seminar: Numerical Simulation of SDEs*, Lecture Notes, University of Nebraska, Lincoln, 2006. Διαθέσιμο: <http://www.math.unl.edu/~tshores1/Public/Research/MathFinanceSeminar/MathFinSemLecture.pdf>
18. Ι. Σπηλιώτης, *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, εκδ. Συμεών, Αθήνα, 2004.