

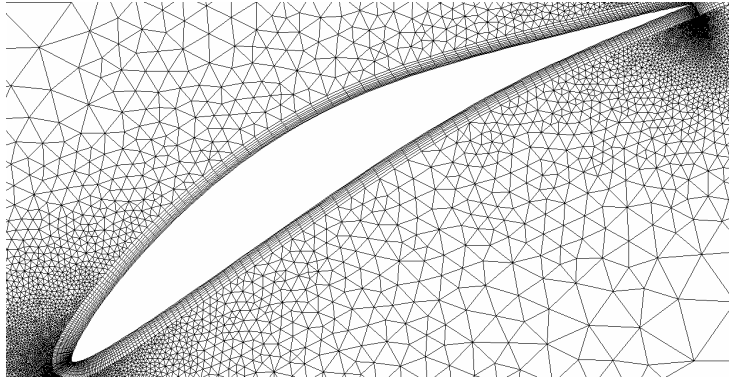


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Τομέας Ρευστών – Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

**Αλγόριθμος προσαρμογής διδιάστατων υβριδικών πλεγμάτων στην υπό εξέλιξη λύση
ενός πεδίου ροής και πιστοποίηση**



Διπλωματική Εργασία
Φαίδωνα Ι. Χριστακόπουλου

Επιβλέπων : Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2007

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

**“Αλγόριθμος προσαρμογής διδιάστατων υβριδικών πλεγμάτων στην υπό εξέλιξη
λύση ενός πεδίου ροής και πιστοποίηση”**

Διπλωματική Εργασία
Φαίδωνα Ι. Χριστακόπουλου

Επιβλέπων : Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύσσεται η θεωρία της προσαρμογής σε διδιάστατα μη – δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων καθώς και η αντίστοιχη θεωρία για υβριδικά πλέγματα, τα οποία αποτελούνται από τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία. Αρχικά, γίνεται μια σύντομη αναφορά στα είδη των πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται σήμερα σε προβλήματα της μηχανικής των ρευστών αλλά και γενικότερα. Στη συνέχεια, γίνεται λεπτομερής καταγραφή του τι είναι η προσαρμογή, ποιοι λόγοι οδήγησαν στη ανάπτυξη θεωριών προσαρμογής, ποιοι είναι οι κανόνες τη διέπουν και ποια είναι τα κριτήρια οδηγούν σε αυτή. Το βασικό τμήμα της εργασίας αυτής ασχολείται με την αλγοριθμική διαδικασία προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων, εξελίσσοντας ουσιαστικά τον αντίστοιχο αλγόριθμο που ήδη χρησιμοποιείται σε πλέγματα που έχουν μόνο τριγωνικά στοιχεία. Γίνεται εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου σε προβλήματα ροής και σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο ειδών πλεγμάτων μεταξύ τους αλλά και με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Τα προβλήματα που εξετάστηκαν είναι η ροή γύρω από μεμονωμένη αεροτομή για διάφορες συνθήκες εισόδου. Για την γένεση των πλεγμάτων, την επίλυση της ροής και την επεξεργασία και ανακατανομή των σημείων κάθε αεροτομής χρησιμοποιήθηκε λογισμικό του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π.. Σε όλες τις περιπτώσεις το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιήθηκε είναι εκείνο των Spalart – Allmaras.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING
FLUIDS SECTION
LABORATORY OF THERMAL TURBOMACHINES

“A two - dimensional hybrid grid adaptation algorithm and validation”

Diploma Thesis
Faidon I. Christakopoulos

Supervisor : K.C. Giannakoglou, Deputy Professor of N.T.U.A.

Throughout this diploma thesis the development of the theory of adaptation of two - dimensional unstructured meshes of triangular elements and hybrid meshes, which consist of triangular and quadratic elements, is carried out. In the beginning, a quick reference to the types of meshes that are being used today in problems of mechanics of fluids and also generally to other problems is given. Furthermore, a description of what adaptation is, which reasons have led to the creation of the theory of adaptation, of the rules, in which this process obeys and the criteria, which lead to adaptation, are described. The basic part of this thesis has to do with the algorithmic adaptation's procedure of hybrid grids, developing the algorithm that is being used in grids with only triangular elements. This algorithm is applied to problems of flow and the results of the two different types of meshes have been compared between themselves and the experimental data. The problems, that have been probed, are the flows around an isolated airfoil for different inlet conditions. For the generation of the meshes, the solving of the flow and the processing and reapportionment of the points of every airfoil programs of the Laboratory of Thermal Turbomachines has been used. In every case the turbulence model that has been used is that of Spalart – Allmaras.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Κ.Χ. Γιαννάκογλου για την επίβλεψη της εργασίας και για τις σημαντικές παρατηρήσεις και συμβουλές του.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω τον υποψήφιο διδάκτορα Θωμά Ζερβογιάννη για την πολύτιμη βοήθειά του.

Αθήνα, Οκτώβριος 2007
Φαίδων Ι. Χριστακόπουλος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή	σελ. 3
1.1 Εισαγωγή.....	σελ. 5
1.2 Είδη πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται σήμερα.....	σελ. 5
1.3 Σκοπός της παρούσης εργασίας.....	σελ. 6
Κεφάλαιο 2 : Προσαρμογή μη – δομημένων τριγωνικών υπολογιστικών πλεγμάτων	σελ. 9
2.1 Εισαγωγή.....	σελ. 11
2.2 Βασικές αρχές του εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων.....	σελ. 12
2.3 Διαχείριση πληροφοριών κατά τον εμπλουτισμό μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων πλέγματα.....	σελ. 16
2.4 Κριτήρια εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων.....	σελ. 17
2.5 Διαδικασία εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων.....	σελ. 18
2.6 Επιλογή συνάρτησης κρίσης.....	σελ. 21
2.7 Εφαρμογή της προσαρμογής μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω μεμονωμένη αεροτομή NACA.....	σελ. 26
Κεφάλαιο 3 : Προσαρμογή υβριδικών υπολογιστικών πλεγμάτων	σελ. 31
3.1 Εισαγωγή.....	σελ. 33
3.2 Βασικές αρχές του εμπλουτισμού σε υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα.....	σελ. 34
3.3 Διαχείριση πληροφοριών κατά τον εμπλουτισμό υβριδικών πλεγμάτων.....	σελ. 38
3.4 Κριτήρια εμπλουτισμού υβριδικών πλεγμάτων.....	σελ. 38
3.5 Διαδικασία εμπλουτισμού υβριδικών πλεγμάτων.....	σελ. 38
3.6 Επιλογή κριτηρίων εμπλουτισμού.....	σελ. 47
3.7 Εφαρμογή της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA.....	σελ. 48
Κεφάλαιο 4 : Παρουσίαση αποτελεσμάτων εφαρμογής της προσαρμογής πλεγμάτων στην μεμονωμένη αεροτομή RAE 2822	σελ. 53
4.1 Εισαγωγή.....	σελ. 55
4.2 Περίπτωση R6.....	σελ. 56
4.2.1 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή.....	σελ. 57
4.2.2 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή.....	σελ. 59
4.2.3 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή.....	σελ. 63
4.2.4 Συγκρίσεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R6 – συμπεράσματα.....	σελ. 67
4.3 Περίπτωση R9.....	σελ. 69
4.3.1 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή.....	σελ. 69
4.3.2 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή.....	σελ. 71
4.3.3 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή.....	σελ. 75
4.3.4 Συγκρίσεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R9 – συμπεράσματα.....	σελ. 79
4.4 Περίπτωση R10.....	σελ. 81
4.4.1 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή.....	σελ. 81
4.4.2 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή.....	σελ. 83
4.4.3 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή.....	σελ. 87
4.4.4 Συγκρίσεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R10 – συμπεράσματα.....	σελ. 92
Ανακεφαλαίωση.....	σελ. 95
Βιβλιογραφία.....	σελ. 99
Προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν.....	σελ. 100

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Σύμφωνα με τις κλασσικές μεθόδους της μηχανικής των ρευστών και της αεροδυναμικής, τα στοιχεία της ροής (πίεση, θερμοκρασία, ταχύτητα κλπ) υπολογίζονται με τη χρήση αναλυτικών σχέσεων (π.χ. εξισώσεις Navier – Stokes) , οι οποίες προκύπτουν από τους βασικούς νόμους της ρευστομηχανικής. Οι σχέσεις αυτές, όμως, βρίσκονται συχνά σε ολοκληρωματική ή διαφορική μορφή. Το γεγονός αυτό καθιστά πολύ δύσκολο και συχνά απαγορευτικό τον αναλυτικό υπολογισμό των στοιχείων της ροής σε πολλά σημεία του χώρου.

Η ανάπτυξη θεωριών αριθμητικής ανάλυσης (βλ. [1]) σε συνδυασμό με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών κατέστησαν δυνατή τη λύση του προβλήματος αυτού. Πλέον ο υπολογισμός των στοιχείων της ροής γίνεται με τη χρήση των θεωριών πεπερασμένων διαφορών – όγκων και αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Έτσι, ο μηχανικός καθορίζει ένα «υπολογιστικό πλέγμα», στους κόμβους του οποίου υπολογίζονται τα ζητούμενα μεγέθη της ροής, με βάση τους νόμους της μηχανικής των ρευστών και τις θεωρίες που προαναφέρθηκαν.

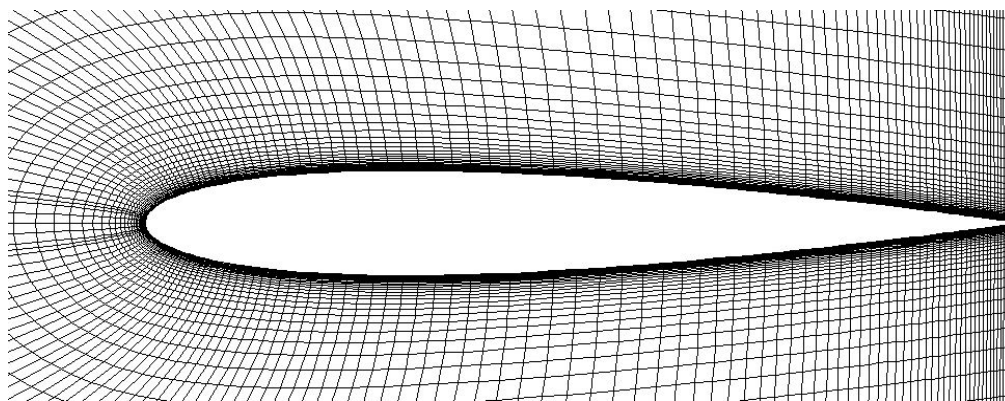
Για περισσότερα παραπέμπουμε στα βιβλία [1] (κεφ.2), [2].

1.2 Είδη πλεγμάτων που χρησιμοποιούνται σήμερα

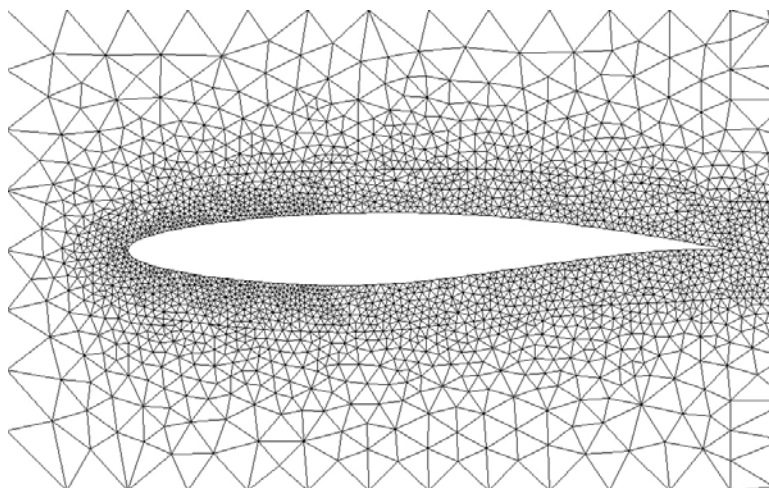
Τα υπολογιστικά πλέγματα χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες :

1. στα δομημένα πλέγματα
2. στα μη δομημένα πλέγματα

Τα δομημένα πλέγματα μετασχηματίζονται σε κανονικά σχήματα σε μετασχηματισμένο επίπεδο και μπορούν να παρασταθούν με μια αρίθμηση της μορφής (i,j,k). Αντίθετα, τα μη δομημένα πλέγματα παριστάνονται με κατάλληλα μητρώα συσχέτισης γειτονικών στοιχείων του πλέγματος. Στις ακόλουθες εικόνες δίνονται δύο παραδείγματα, δομημένου και μη δομημένου πλέγματος αντίστοιχα.

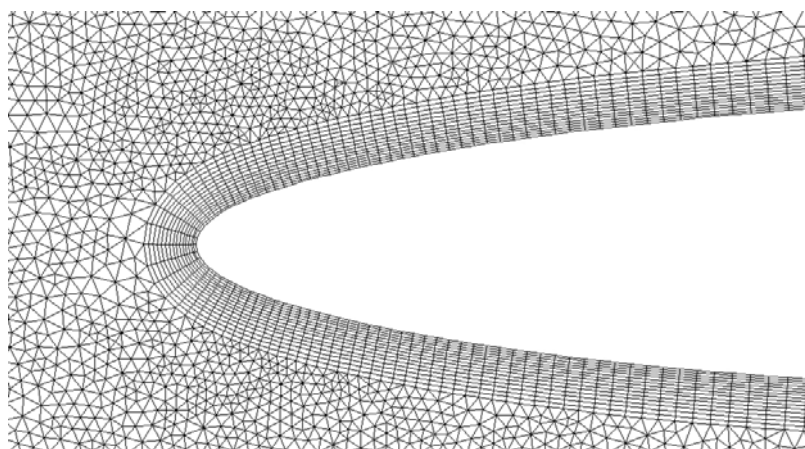


Εικόνα 1.1 : Τμήμα από δομημένο πλέγμα αεροτομής με τετράπλευρα στοιχεία



Εικόνα 1.2 : Τμήμα από μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων γύρω από αεροτομή

Στην κατηγορία των μη – δομημένων πλεγμάτων ανήκει ένα ειδικό είδος πλεγμάτων, το οποίο βρίσκει μεγάλη εφαρμογή τα τελευταία χρόνια. Τα πλέγματα αυτά ονομάζονται υβριδικά (συχνά συναντώνται και με την ονομασία ημι – δομημένα πλέγματα) και έχουν μορφή δομημένου πλέγματος τετράπλευρων στοιχείων κοντά σε τοίχωμα (π.χ. επιφάνεια μιας αεροτομής) και μορφή μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων στον υπόλοιπο χώρο. Ένα παράδειγμα υβριδικού πλέγματος παρουσιάζεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 1.3 : Τμήμα από υβριδικό πλέγμα κοντά στην ακμή πρόσπτωσης μεμονωμένης αεροτομής

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η λειτουργικότητα αυτών των πλεγμάτων και το κατά πόσο η χρήση τους οδηγεί σε καλύτερη προσέγγιση της λύσης.

1.3 Σκοπός της παρούσης εργασίας

Κατά τη διάρκεια κυρίως των τελευταίων δεκαετιών έχουν γίνει πολλές μελέτες γύρω από τη δημιουργία πλεγμάτων, με σκοπό την καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Τα τελευταία χρόνια, στην προσπάθεια βελτίωσης των αποτελεσμάτων, εισήχθη από τους ερευνητές η έννοια της προσαρμογής των υπολογιστικών πλεγμάτων (βλ. [4], [5], [9], [10]).

Η κεντρική ιδέα της προσαρμογής είναι να μπορεί ένα πλέγμα να «εντοπίζει» περιοχές, όπου εμφανίζονται φυσικά φαινόμενα (π.χ. θέση εμφάνισης ενός κύματος κρούσης πάνω σε μία αεροτομή) και που άπτονται, επομένως, υψηλού ενδιαφέροντος. Με τον εντοπισμό αυτό, το πλέγμα θα πυκνώνει και θα δημιουργούνται περισσότεροι υπολογιστικοί κόμβοι στη δεδομένη περιοχή, με αποτέλεσμα τον υπολογισμό των στοιχείων εκεί με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Με αυτή την ιδέα ασχολήθηκαν και οι ερευνητές του Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π. αναπτύσσοντας το λογισμικό προσαρμογής μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων με επιτυχία. Ακολούθως, η έρευνα συνεχίστηκε για την ανάπτυξη του αντίστοιχου λογισμικού για την προσαρμογή υβριδικών πλεγμάτων, τα οποία αποτελούνται από τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία, σε μια προσπάθεια διερεύνησης του αν αυτού του είδους τα πλέγματα είναι ικανά να προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική λύση. Το λογισμικό αυτό είναι ακόμη υπό ανάπτυξη και εξέλιξη και, όπως είναι προφανές, απαιτείται να γίνουν εφαρμογές του σε ήδη γνωστά προβλήματα για την απόδειξη της εγκυρότητάς του. Σε αυτό το σημείο εισέρχεται και ο ρόλος της παρούσης εργασίας.

Έτσι, αρχικά, στο κεφάλαιο που θα ακολουθεί, γίνεται μια λεπτομερής περιγραφή της θεωρίας της προσαρμογής των μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων. Αναφέρονται οι κανόνες, στους οποίους υπακούει η διαδικασία αυτή, τα κριτήρια, τα οποία χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό των περιοχών ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, και τα βήματα που ακολουθούνται. Στο τέλος γίνεται μια απλή επίδειξη της εφαρμογής του αντίστοιχου λογισμικού σε πρόβλημα ροής γύρω από μια μεμονωμένη αεροτομή NACA.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται ανάπτυξη της διαδικασίας προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων, εξελίσσοντας ουσιαστικά τον αντίστοιχο αλγόριθμο που ήδη χρησιμοποιείται σε πλέγματα που έχουν μόνο τριγωνικά στοιχεία. Και εδώ γίνεται στο τέλος εφαρμογή του αντίστοιχου λογισμικού σε πρόβλημα ροής γύρω από μεμονωμένη αεροτομή NACA.

Το υπόλοιπο τμήμα της εργασίας γίνεται η εφαρμογή των αλγοριθμικών διαδικασιών που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια σε γνωστά προβλήματα. Έτσι, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή του υπάρχοντος λογισμικού προσαρμογής σε προβλήματα ροής γύρω από τη γνωστή αεροτομή R.A.E.. Οι περιπτώσεις, οι οποίες εξετάζονται, είναι οι R6, R9 και R10, για τις οποίες υπάρχουν και τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Στις σελίδες του κεφαλαίου αυτού γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων με χρήση προσαρμογής σε πλέγματα τριγωνικών στοιχείων και υβριδικά πλέγματα και σύγκρισή τους με τα αντίστοιχα πειραματικά για τη διαπίστωση ή όχι του αν τα αποτελέσματα με χρήση υβριδικών πλεγμάτων προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική λύση. Παρόμοια διαδικασία γίνεται και στο πέμπτο κεφάλαιο, στο οποίο, όμως, εξετάζεται το πρόβλημα της ροής γύρω από αεροτομή συμπίεστη της γερμανικής εταιρίας M.A.N..

Έτσι, στο τέλος της εργασίας ο γράφων έχει αποκομίσει σημαντικές γνώσεις γύρω από την προσαρμογή υπολογιστικών πλεγμάτων και έχει πραγματοποιηθεί μια αρχική πιστοποίηση

του λογισμικού που διαθέτει το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, με αποτέλεσμα να προάγεται και η ερευνητική δραστηριότητα του εργαστηρίου.

Κλείνοντας αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, πρέπει να αναφέρουμε, ότι για την ανακατανομή των σημείων στο περίγραμμα μιας αεροτομής, τη γένεση των πλεγμάτων και την επίλυση της ροής χρησιμοποιήθηκε λογισμικό του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π.. Έτσι, για την ανακατανομή των σημείων μιας αεροτομής χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας `onecurv3`, για τη γένεση των πλεγμάτων οι κώδικες `normkirk01`, `rizzikirk11` και `hybgridgen2d`. Τέλος, να αναφέρουμε, ότι για την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Mesh του εργαστηρίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εμπλουτισμός μη – δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων

2.1 Εισαγωγή

Η προσαρμογή (adaptation) ενός υπολογιστικού πλέγματος στη λύση του φυσικού προβλήματος που έχει μοντελοποιηθεί συνίσταται στη προσθήκη ή αφαίρεση στοιχείων του πλέγματος (κόμβων, ακμών ή και ολόκληρων πεπερασμένων στοιχείων όπως τρίγωνα ή τετράπλευρα) σε κατάλληλες θέσεις του χωρίου. Η προσαρμογή συνήθως πραγματοποιείται πέραν της μίας φοράς κατά τη διάρκεια της εξέλιξης της λύσης. Η πρώτη προσαρμογή πραγματοποιείται μετά από κάποιον αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου επίλυσης, έτσι ώστε να έχει επέλθει μία πρώτη ικανοποιητική σύγκλιση στη λύση του προβλήματος. Οι θέσεις του χωρίου, στις οποίες θα λάβει χώρα η προσαρμογή, εντοπίζονται με βάση την ικανοποίηση σχετικών κριτηρίων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να υπάρχει επαρκής ανάλυση του διακριτοποιημένου χωρίου που να επιτρέπει την αριθμητική επίλυση του φυσικού προβλήματος με την επιθυμητή ακρίβεια στις περιοχές αυτές. Τέτοιες περιοχές σε προβλήματα ροής είναι, παραδείγματος χάριν, περιοχές σημείων ανακοπής, εμφάνισης κυμάτων κρούσης, ανακυκλοφορίας κλπ. Επίσης, μέσω της αφαίρεσης στοιχείων του πλέγματος (ή αλλιώς διαδικασία απεμπλουτισμού), αποφεύγεται η υπερφόρτωση του υπολογιστικού πλέγματος με περιττά στοιχεία σε περιοχές με μειωμένη επιθυμητή ακρίβεια της λύσης. Με τον τρόπο αυτό μειώνεται ο υπολογιστικός χρόνος και το υπολογιστικό κόστος (απαιτήσεις μνήμης υπολογιστή).

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την προσαρμογή σε μη – δομημένα πλέγματα τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων (adaptation of unstructured meshes of triangular elements). Μάλιστα, και σε αυτό το κεφάλαιο αλλά και σε όλη την εργασία θα μας απασχολήσει ο εμπλουτισμός, δηλαδή η προσθήκη νέων κόμβων, πλευρών και στοιχείων και όχι ο απεμπλουτισμός.

Οι λόγοι, οι οποίοι οδήγησαν στην ανάπτυξη των θεωριών προσαρμογής, είναι πολλοί. Ενδεικτικά αναφέρουμε, ότι κατά τη λύση ενός φυσικού προβλήματος, πχ ενός προβλήματος ροής, πολλά μεγέθη δεν είναι γνωστά. Έτσι, δεν είναι δυνατός ο εκ των προτέρων προσδιορισμός π.χ. της θέσης εμφάνισης του κύματος κρούσης σε μία αεροτομή και, επομένως, η κατασκευή ενός καταλληλότερου για την επίλυση πλέγματος, πιο πυκνού στην επιθυμητή περιοχή. Στο γεγονός αυτό θα μπορούσε κανείς να αντιπαραβάλει ότι θα μπορούσε να γίνει εξ αρχής χρήση ενός πυκνού πλέγματος, το οποίο θα παρήγαγε μια λύση πλησιέστερα στην πραγματική. Κάτι τέτοιο, όμως, θα απαιτούσε μεγάλη υπολογιστική μνήμη και χρόνο επεξεργασίας. Σε αντίθεση, στην περίπτωση των πλεγμάτων με προσαρμογή, πραγματοποιείται εκκίνηση της επίλυσης από ένα σχετικά αραιό πλέγμα και, καθώς η αριθμητική λύση συγκλίνει στην πραγματική, γίνεται ταυτόχρονα και πύκνωση ή αραιώση σε κατάλληλες περιοχές, έτσι ώστε να προσεγγιστεί μια πιο ακριβής λύση. Ακόμη, με τη χρήση πλεγμάτων με προσαρμογή υπάρχει η δυνατότητα παρακολούθησης π.χ. ενός κύματος κρούσης, το οποίο αλλάζει θέση.

Η προσαρμογή μη δομημένων πλεγμάτων παρουσιάζει μια σειρά πλεονεκτημάτων εν σχέση με εκείνη των δομημένων πλεγμάτων. Κατ' αρχή στα πρώτα υπάρχει η δυνατότητα τοπικής επέμβασης στην περιοχή ενδιαφέροντος. Αντίθετα, στα δομημένα πλέγματα κάθε επέμβαση

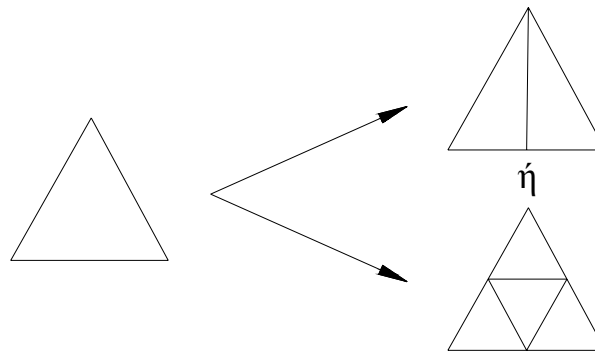
συνεπάγεται ολικές αλλαγές στο πλέγμα, με πρόσθεση γραμμών και στηλών σε όλο το χωρίο. Επιπροσθέτως, η επέμβαση και συνεπώς η προσαρμογή είναι πιο εύκολη σε πλέγμα σύνθετων γεωμετριών. Από την άλλη μεριά, είναι δυνατόν να παρουσιαστούν προβλήματα (όσον αφορά την προσέγγιση της πραγματικής λύσης) κατά την επίλυση με μη δομημένα πλέγματα, κυρίως λόγω της γειννίας μεγάλων με μικρά πεπερασμένα στοιχεία, τα οποία προκύπτουν μετά από προσαρμογή. Ακόμη, ο χειρισμός της προσαρμογής μη δομημένων πλεγμάτων είναι πιο πολύπλοκος και απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο απ' ότι εκείνος των δομημένων πλεγμάτων.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τοπολογίες, οι οποίες υπακούουν στην ακόλουθη βασική αρχή : δεν επιτρέπεται να δημιουργηθεί υπολογιστικός κόμβος στο εσωτερικό της ακμής ενός ενεργού τριγώνου ή τετράπλευρου (με τον όρο «ενεργό» εννοείται κάθε πεπερασμένο στοιχείο, το οποίο συμμετέχει τη δεδομένη χρονική στιγμή στον υπολογισμό). Δεν θα ασχοληθούμε, δηλαδή με τεχνικές απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding).

2.2 Βασικές αρχές του εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων

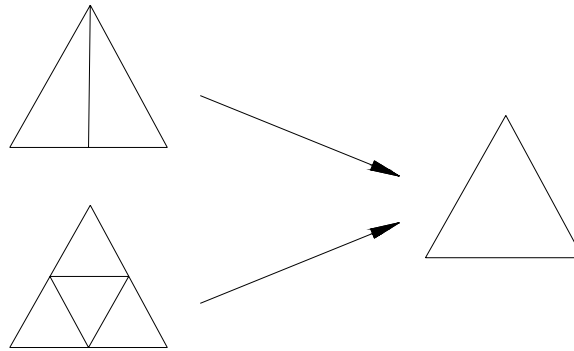
Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τις βασικές αρχές που διέπουν τη διαδικασία του εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων, αναπαράγοντας στη ουσία την ήδη υπάρχουσα θεωρία (βλ. [4] και [5]).

Ο εμπλουτισμός συνίσταται στη διαίρεση μεγάλων τριγώνων σε μικρότερα, δηλαδή δημιουργία νέων κόμβων, πλευρών και τριγώνων. Μία ενδεικτική σχηματική αναπαράσταση του εμπλουτισμού φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.1 : Σχηματική αναπαράσταση του εμπλουτισμού

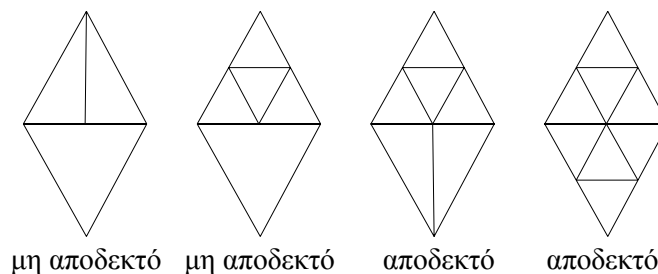
Σε αντίθεση, κατά τη διαδικασία του απεμπλουτισμού, μικρότερα τρίγωνα, που έχουν προέλθει από προηγούμενο εμπλουτισμό, επανενώνονται στα τρίγωνα, από τα οποία έχουν προέλθει. Όπως είναι προφανές, δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί απεμπλουτισμός στα τρίγωνα του αρχικού πλέγματος. Μία ενδεικτική σχηματική αναπαράσταση του απεμπλουτισμού δίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.2 : Σχηματική αναπαράσταση του απεμπλουτισμού

Εδώ μπορούμε να δανειστούμε την ορολογία της βιολογίας και να ονομάσουμε το αρχικό πλέγμα «γενιά 1» ή συμβολικά Γ1. Έτσι, μόλις πραγματοποιηθεί η πρώτη προσαρμογή του αρχικού πλέγματος θα προκύψει η γενιά 2 ή Γ2, η οποία θα ονομάζεται και απόγονος της Γ1. Με παρόμοια λογική θα ακολουθήσουμε την ορολογία αυτή και παρακάτω.

Κατά τη διερεύνηση του προβλήματος της προσαρμογής των υπολογιστικών πλεγμάτων έχουν διατυπωθεί διαφορετικές θεωρίες σχετικά με το ποιες αρχές διέπουν την προσαρμογή. Στην παρούσα εργασία η βασική αρχή είναι ότι δεν επιτρέπεται να υπάρχουν στο όριο των τριγώνων πάνω από τρεις κόμβοι, δηλαδή κάθε κόμβος μπορεί να είναι μόνο κοινή κορυφή τριγώνων και όχι μεσόκομβος κάποιας πλευράς. Στην ακόλουθη εικόνα δίνεται ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της αρχής :

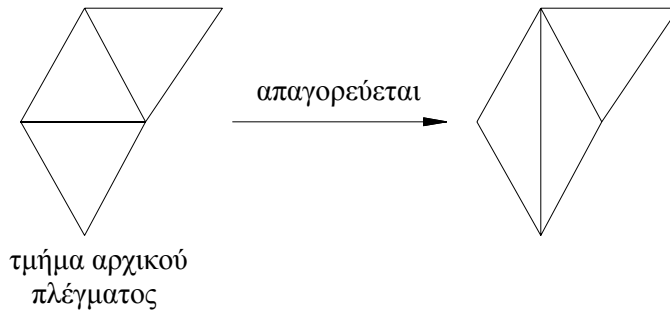


Εικόνα 2.3 : Παράδειγμα εφαρμογής της αρχής εμπλουτισμού στην παρούσα εργασία

Οι μη αποδεκτές περιπτώσεις της προηγούμενης εικόνας ανήκουν στην κατηγορία των τεχνικών απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding) που προαναφέραμε και δεν θα μας απασχολήσουν. Αναφέρουμε, όμως, ότι οι τεχνικές απλής υπέρθεσης έχουν μικρότερες απαιτήσεις μνήμης, καθώς, όταν εμπλουτίζεται ένα τρίγωνο, το γεγονός αυτό δεν συνεπάγεται και τον εμπλουτισμό κάποιων εκ των γειτονικών του στοιχείων. Από την άλλη πλευρά, όμως, απαιτούν σαφώς πολυπλοκότερη τοπολογική δομή και, επομένως, πιο σύνθετο λογισμικό επίλυσης.

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε, ότι κάθε αλγόριθμος προσαρμογής υπολογιστικών πλεγμάτων πρέπει να υπακούει σε ορισμένους κανόνες. Αυτοί αναφέρονται ακολούθως :

- Κανόνας 1 : Η μορφή του αρχικού πλέγματος (Γ1) δεν μπορεί να αλλάξει, δηλαδή οι αρχικοί κόμβοι και πλευρές παραμένουν αμετακίνητα. Έτσι, λ.χ. απαγορεύεται η δημιουργία άλλων τριγώνων στην θέση των αρχικών με χρήση των ίδιων κόμβων, όπως φαίνεται και στην ακόλουθη εικόνα :



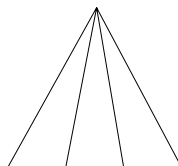
Εικόνα 2.4 : Παράδειγμα εφαρμογής του πρώτου κανόνα

- Κανόνας 2 : Υπάρχουν μόνο δύο τρόποι, με τους οποίους μπορεί να διασπαστεί ένα τρίγωνο. Οι τρόποι αυτοί παρουσιάζονται στην ακόλουθη εικόνα, στην οποία έχει σχεδιαστεί και ένας μη αποδεκτός τρόπος διάσπασης τριγώνου:



Εικόνα 2.5 : Τρόποι διάσπασης τριγώνων και μη αποδεκτός τρόπος διάσπασης

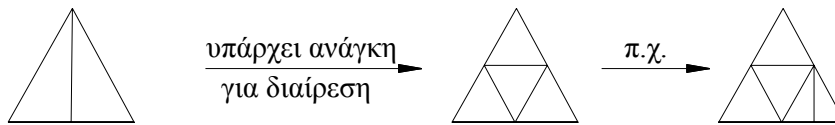
Όπως είναι φανερό, οι νέοι κόμβοι επιβάλλεται να ανήκουν στις ήδη υπάρχουσες πλευρές και σε πλευρά του τριγώνου που διασπάται μπορεί να εισαχθεί ένας μόνο κόμβος, ο οποίος, μάλιστα, θα βρίσκεται στο μέσο της πλευράς (μεσόκομβος). Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η δημιουργία «μακρόστενων» τριγώνων (βλ. ακόλουθη εικόνα), τα οποία μπορεί να προκαλέσουν πολλές φορές πρόβλημα στην επίλυση.



Εικόνα 2.6 : Δημιουργία «μακρόστενων» τριγώνων κατά μία διαφορετική διάσπαση τριγώνου, η οποία δεν υπακούει στον κανόνα 2

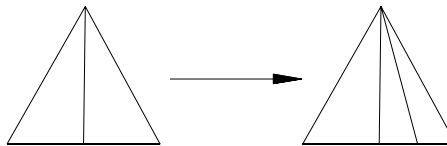
- Κανόνας 3 : Τρίγωνο, το οποίο έχει προέλθει από διαίρεση μητρικού τριγώνου σε δύο τρίγωνα, απαγορεύεται να διαιρεθεί περαιτέρω. Πρέπει πρώτα να γίνει διαίρεση του τριγώνου της προηγούμενης γενιάς σε τέσσερα τρίγωνα, να γίνει εφαρμογή των δύο προηγούμενων κανόνων (πιθανή αλλαγή και στο

τρόπο διαίρεσης των γειτονικών του αρχικού τριγώνων) και κατόπιν να γίνει διαίρεση κάποιου ή κάποιων από τα τέσσερα νέα τρίγωνα, αν ισχύουν ακόμη τα κριτήρια εμπλουτισμού. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται σχηματικά στην ακόλουθη εικόνα :



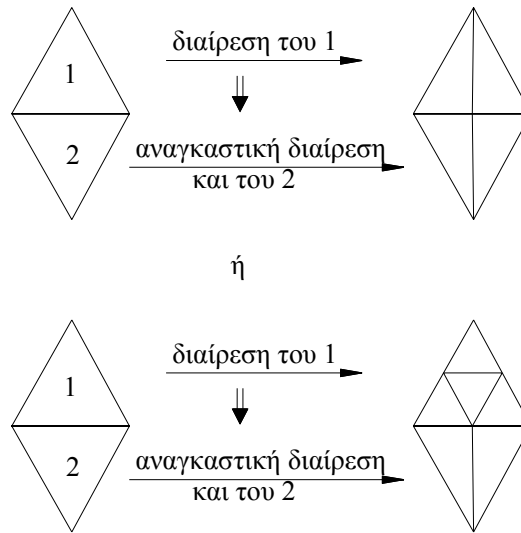
Εικόνα 2.7 : Σχηματική αναπαράσταση του κανόνα 3

Ο λόγος, για τον οποίο επιβάλλεται ο κανόνας αυτός, είναι και πάλι η αποφυγή δημιουργίας «μακρόστενων» τριγώνων, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα :



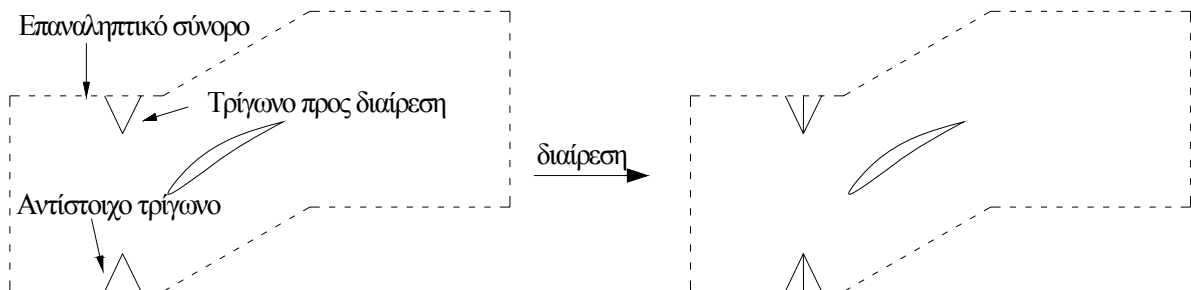
Εικόνα 2.8 : Πιθανό αποτέλεσμα διαίρεσης από μη εφαρμογή του κανόνα 3

- Κανόνας 4 : Τρίγωνο, το οποίο έχει προέλθει από διάσπαση τριγώνου προηγούμενης γενιάς σε τέσσερα τρίγωνα, επιτρέπεται να διαιρεθεί.
- Κανόνας 5 : Δεν επιτρέπεται να διασπώνται τα τρίγωνα επ' άπειρο. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η δημιουργία πολύ μικρών τριγώνων καθώς και η υπερβολική αύξηση του χρόνου υπολογισμού και των απαιτήσεων μνήμης, λόγω της υπερβολικής και αναίτιας αύξησης του αριθμού των τριγώνων. Για το λόγο αυτό, ο χρήστης ορίζει ποσοτικά το μικρότερο μήκος ακμής που επιτρέπεται να δημιουργηθεί.
- Κανόνας 6 : Κατά τη διάσπαση ενός τριγώνου είναι δυνατόν να οδηγηθεί σε διάσπαση και κάποιο από τα γειτονικά του τρίγωνα, έτσι ώστε να διατηρηθεί η φυσιογνωμία του τυπικού μη δομημένου πλέγματος. Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτού του κανόνα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Εικόνα 2.9 : Παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα 6

- Κανόνας 7 : Στα περιοδικά πλέγματα (π.χ. σε πρόβλημα εσωτερικής αεροδυναμικής σε συμπιεστή θερμικής στροβιλομηχανής), ο εμπλουτισμός τριγώνων στο περιοδικό σύνορο πρέπει να συνοδεύεται και από τον αντίστοιχο εμπλουτισμό των αντίστοιχων τριγώνων, όπως αυτά προκύπτουν μέσω της περιοδικότητας. Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτού του κανόνα φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



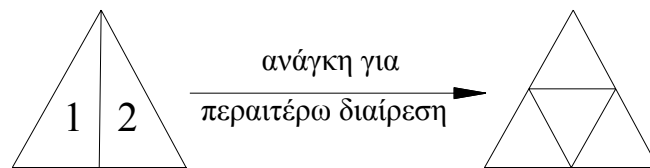
Εικόνα 2.10 : Παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα 7

2.3 Διαχείριση πληροφοριών κατά τον εμπλουτισμό μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων

Η περιγραφή και η διαχείριση των μη δομημένων πλεγμάτων είναι, λόγω της μορφής τους, μία διαδικασία σαφώς πιο πολύπλοκη από την αντίστοιχη των δομημένων πλεγμάτων. Αυτό ισχύει σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό για τον εμπλουτισμό τους. Παραδείγματος χάριν, ενώ στα δομημένα πλέγματα χρειάζονται μόνο δύο δείκτες (i,j) για την περιγραφή του κάθε κόμβου, στα μη δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων είναι απαιτείται μια σειρά πληροφοριών που συνδέει κόμβους, πλευρές και τρίγωνα. έτσι ώστε να είναι δυνατή η προσπέλαση και η διαχείριση όλων των στοιχείων τους.

Τα τρίγωνα ενός μη δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων χωρίζονται σε δύο κατηγορίες :

1. *ενεργά τρίγωνα*, τα οποία συμμετέχουν στην επίλυση κατά την τρέχουσα επανάληψη. Τα τρίγωνα αυτά μπορεί να ανήκουν στην Γ1 ή σε κάποια επόμενη γενιά, να έχουν, δηλαδή, προκύψει από εμπλουτισμό.
2. *εξουδετερωμένα τρίγωνα*, τα οποία έχουν απαλειφθεί λόγω εμπλουτισμού. Παραδείγματα εξουδετερωμένων τριγώνων δίνονται στις ακόλουθες εικόνες :



Εικόνα 2.11 : Παράδειγμα εξουδετέρωσης τριγώνων. Τα τρίγωνα 1 και 2 εξουδετερώθηκαν μέσω εμπλουτισμού.

Για την διαχείριση των τριγωνικών πλεγμάτων κατά των εμπλουτισμό χρησιμοποιούνται οι *τοπολογικοί πίνακες*. Οι πίνακες αυτοί είναι αναγκαίοι για την περιγραφή του πλέγματος. Έτσι, σε αυτούς, αποθηκεύονται για κάθε τρίγωνο οι κορυφές και οι πλευρές του (οι πλευρές θα αποθηκεύονται με βάση τους κόμβους που αποτελούν τα άκρα τους) και για κάθε κόμβο οι συντεταγμένες του και ένας δείκτης, ο οποίος θα υποδεικνύει τον τύπο του κόμβου, δηλαδή αν είναι εσωτερικός ή οριακός (ή περιοδικός για περιοδικά πλέγματα) και την οριακή συνθήκη που θα εφαρμοστεί σε αυτόν. Κατά τη διαδικασία του εμπλουτισμού οι πληροφορίες που περιέχουν αυτοί οι πίνακες για τα στοιχεία που θα υποστούν διάσπαση χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία νέων κόμβων, ακμών και τριγώνων.

2.4 Κριτήρια εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων

Ο εμπλουτισμός των υπολογιστικών πλεγμάτων είναι μία προσπάθεια να προσεγγιστεί η πραγματική λύση σε μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι με τα κλασσικά πλέγματα και με τη χρήση όσο το δυνατό λιγότερων υπολογιστικών στοιχείων (γεγονός που επιβάλλεται από τις ανάγκες υπολογιστικής οικονομίας). Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι προφανές ότι πρέπει να γίνει σωστή επιλογή των περιοχών του πλέγματος, στις οποίες θα πραγματοποιηθεί ο εμπλουτισμός. Η επιλογή αυτή συνήθως πραγματοποιείται με κριτήρια, τα οποία εφαρμόζονται πάνω στις ακμές του υπολογιστικού πλέγματος. Τα κριτήρια αυτά λαμβάνουν υπόψη ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη του πεδίου ροής πάνω σε κάθε ενεργή πλευρά και στη συνέχεια, με βάση αυτά τα μεγέθη, σημειώνουν τις υποψήφιες προς εμπλουτισμό πλευρές. Η επιλογή, επομένως, των περιοχών που θα υποστούν προσαρμογή εξαρτάται από τρεις παραμέτρους :

1. Από την σωστή επιλογή εκείνης της φυσικής ποσότητας (*αισθητήριο*), η οποία μπορεί να δώσει τις απαραίτητες ενδείξεις για τις περιοχές του πεδίου όπου συμβαίνουν τα φυσικά

φαινόμενα που άπτονται μίας πιο λεπτομερούς εικόνας του πεδίου (π.χ. κύμα κρούσης, σημείο ανακοπής). Τέτοια μεγέθη σε προβλήματα ροής μπορεί, παραδείγματος χάριν, να είναι η πυκνότητα, η πίεση, η ταχύτητα κ.α..

2. Από την εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης (*συνάρτηση κρίσης*), η οποία, βασιζόμενη στο αισθητήριο, θα παρέχει μία αριθμητική ένδειξη της ευαισθησίας της κάθε ενεργού πλευράς. Τέτοια συνάρτηση μπορεί να είναι η πρώτη ή η δεύτερη παράγωγος μιας ροϊκής ποσότητας, η διαφορά, ο μέσος όρος, ένας διαφορικός τελεστής κ.α..
3. Από την τελική επιλογή των πλευρών (και επομένως των τριγώνων) που θα υποστούν εμπλουτισμό, ορίζοντας το αντίστοιχο *χαρακτηριστικό όριο* για τις αριθμητικές ενδείξεις της συνάρτησης κρίσης.

Αξίζει να αναφέρουμε, ότι τα αισθητήρια καθώς και οι αντίστοιχες συναρτήσεις κρίσης μπορεί να είναι περισσότερα από ένα, με κάθε ζεύγος να εντοπίζει διαφορετικά φυσικά φαινόμενα και να επιβάλλει προσαρμογή σε διαφορετικές περιοχές του επιλυτικού πεδίου.

Ακόμη, στο βήμα αυτό εφαρμόζεται και ο κανόνας 5 που προαναφέρθηκε. Ορίζεται αυθαίρετα ένα ελάχιστο μήκος πλευράς ως ένα ποσοστό του ελάχιστου μήκους πλευράς του αρχικού πλέγματος (Γ_1), π.χ. 10 – 20%, και πλευρές, οι οποίες έχουν μήκος μικρότερο από αυτό το ελάχιστο μήκος, δεν επιτρέπεται να υποστούν εμπλουτισμό.

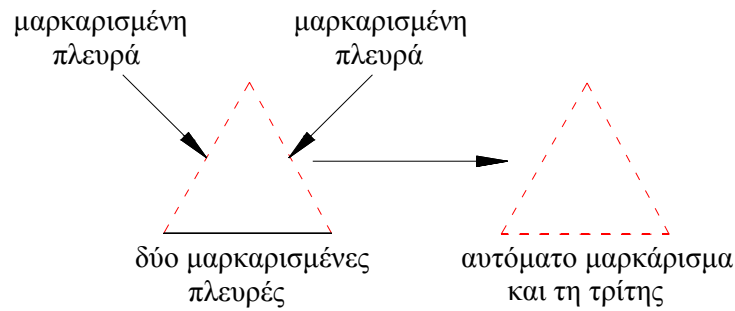
Τέλος, αναφέρουμε ότι το μαρκάρισμα μιας πλευράς για εμπλουτισμό θα την οδηγήσει σίγουρα σε διάσπαση. Ακόμη, είναι δυνατόν να οδηγηθεί μία πλευρά σε διάσπαση ακόμη και όταν δεν έχει μαρκαριστεί για εμπλουτισμό, λόγω της επιβολής των προαναφερθέντων κανόνων για διατήρηση της τυπικής μορφής ενός μη δομημένου πλέγματος και την αποφυγή της εμφάνισης μορφών των τεχνικών απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων.

2.5 Διαδικασία εμπλουτισμού μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων

Αφού έχουν μαρκαριστεί με τον παραπάνω τρόπο οι υποψήφιες προς εμπλουτισμό πλευρές ακολουθείται ο αλγόριθμος εμπλουτισμού των μη δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων, ο οποίος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα :

- Βήμα 1 :

Σαρώνονται τα μαρκαρισμένα τρίγωνα και αν εντοπιστεί τρίγωνο, το οποίο έχει δύο μόνο μαρκαρισμένες πλευρές, τότε μαρκάρεται αυτόματα και η τρίτη πλευρά, όπως αυτό επιβάλλεται από τον κανόνα 2. Η διαδικασία φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

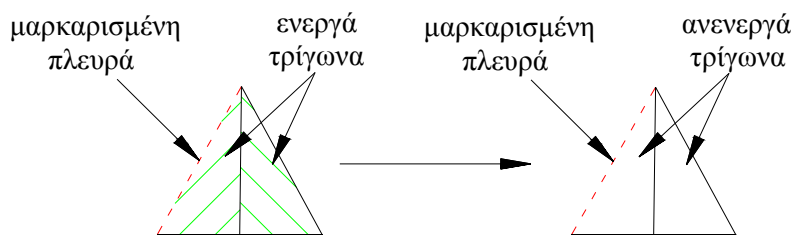


Εικόνα 2.12 : Διαδικασία του βήματος 1

• Βήμα 2 :

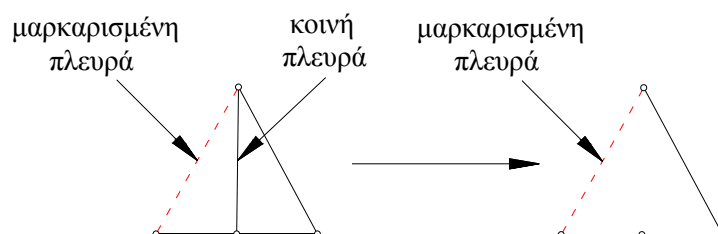
Σαρώνονται τα μαρκαρισμένα τρίγωνα και αν εντοπιστούν μαρκαρισμένα τρίγωνα (όσες πλευρές και αν είναι μαρκαρισμένες) με ένα μόνο αδελφό τρίγωνο (που έχουν δηλαδή προέλθει από διάσπαση μητρικού τριγώνου σε δύο τρίγωνα), τότε ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία, όπως αυτή επιβάλλεται από τον κανόνα 3:

α . Απαλείφονται τα δύο τρίγωνα – παιδιά, δηλαδή παύουν να είναι ενεργά και οι ID τους εισέρχονται σε λίστα αναμονής των τριγώνων για πιθανή μελλοντική χρήση. Η διαδικασία περιγράφεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.13 : Διαδικασία του βήματος 2α – απαλοιφή των τριγώνων

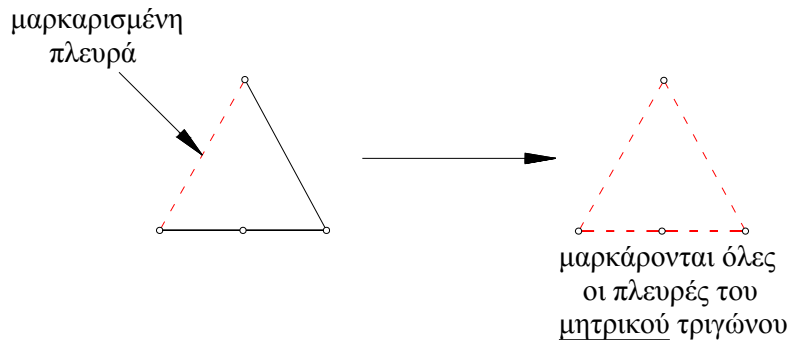
β . Απαλείφεται η κοινή πλευρά τους (δηλαδή τα τρίγωνα παιδιά εξουδετερώνονται) και ο ID της εισέρχεται σε λίστα αναμονής τριγώνων για πιθανή μελλοντική χρήση, όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.14 : Διαδικασία του βήματος 2β – απαλοιφή της κοινής πλευράς

Παρατήρηση : Όταν γίνεται απαλοιφή της κοινής πλευράς, ο αντίστοιχος μεσόκομβος δεν διαγράφεται, καθώς αυτός θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο βήμα κατά τη διαίρεση του τριγώνου σε τέσσερα τρίγωνα, όπως αυτό επιβάλλεται από τον κανόνα 3.

γ . Μαρκάρονται για εμπλουτισμό και οι τρεις πλευρές του μητρικού τριγώνου :

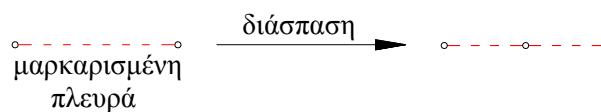


Εικόνα 2.15 : Διαδικασία του βήματος 2γ – μαρκάρισμα όλων των πλευρών του μητρικού τριγώνου

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνει τα βήματα 1 και 2 έως ότου δεν πραγματοποιούνται νέα μαρκαρίσματα.

- Βήμα 3 :

Σε αυτό το βήμα πραγματοποιείται η διάσπαση των ήδη μαρκαρισμένων πλευρών. Για κάθε πλευρά που διασπάται, εξάγονται από τις λίστες αναμονής δύο ID πλευρών και ένα ID κόμβου, οι πλευρές που προκύπτουν ενεργοποιούνται και οι τοπολογικοί πίνακές τους συμπληρώνονται. Τα παραπάνω δεν πραγματοποιούνται σε ήδη διασπασμένες μαρκαρισμένες πλευρές που έχουν προκύψει από το βήμα 2 διατηρώντας τον μεσόκομβό τους. Η διαδικασία φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

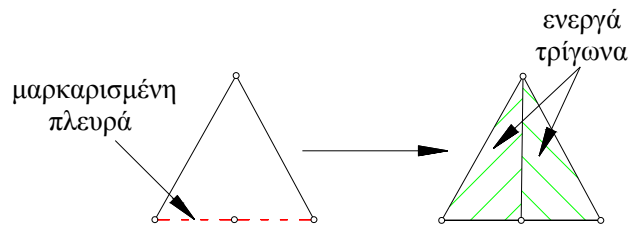


Εικόνα 2.16 : Διαδικασία του βήματος 3 – διάσπαση των μαρκαρισμένων πλευρών

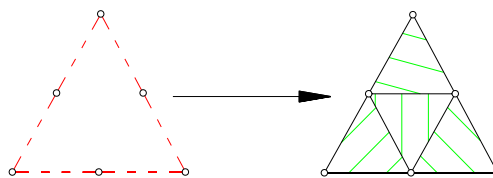
Ο νέος κόμβος τοποθετείται στο γεωμετρικό μέσο της μητρικής πλευράς, εκτός και αν πρόκειται για οριακό σημείο, οπότε οι συντεταγμένες του προκύπτουν από ακριβή παρεμβολή. Κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο, έτσι ώστε να μην τροποποιείται η πραγματική γεωμετρία του χωρίου. Η μη τήρηση αυτής της γεωμετρίας οδηγεί σε απόκλιση από την πραγματική λύση. Τέλος, υπολογίζονται οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές του πεδίου στους νέους κόμβους με αριθμητική παρεμβολή.

• Βήμα 4 :

Στο τελευταίο αυτό βήμα πραγματοποιείται ο σχηματισμός των τριγώνων, που θα αντικαταστήσουν τα μητρικά. Έτσι, εξάγονται από τις λίστες αναμονής δύο ή τέσσερις ID τριγώνων, ανάλογα με το σε πόσα τρίγωνα διασπάται το μητρικό τρίγωνο, καθώς και οι ID των εσωτερικών ακμών του μητρικού τριγώνου. Ακόμη, καθορίζονται οι τοπολογικές πληροφορίες των νέων στοιχείων που δημιουργούνται σε αυτό το βήμα. Η διαδικασία φαίνεται στα ακόλουθα σχήματα :



Εικόνα 2.17 : Διαδικασία του βήματος 4 – διάσπαση μητρικού τριγώνου σε δύο νέα τρίγωνα



Εικόνα 2.18 : Διαδικασία του βήματος 4 – διάσπαση μητρικού τριγώνου σε τέσσερα νέα τρίγωνα

2.6 Επιλογή συνάρτησης κρίσης

Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.4, πολύ σημαντικό ρόλο κατά την προσαρμογή παίζει η σωστή επιλογή των περιοχών του υπολογιστικού χωρίου, στην οποία θα λάβει χώρα η προσαρμογή. Η σωστή επιλογή αυτών των περιοχών θα οδηγήσει σε καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής λύσης. Εδώ να υπενθυμίσουμε, ότι το μαρκάρισμα για εμπλουτισμό λειτουργεί στις ακμές του πλέγματος. Οι ανωτέρω περιοχές επιλέγονται με βάση τις τρεις παραμέτρους που ήδη αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.4 : το *αισθητήριο*, τη *συνάρτηση κρίσης* και το *χαρακτηριστικό όριο* εμπλουτισμού και απεμπλουτισμού. Στην παρούσα παράγραφο θα αναλυθούν και θα περιγραφούν οι τρεις αυτές παράμετροι.

Στη συνέχεια δίνεται μία σύντομη περιγραφή των παραμέτρων αυτών :

1. **Αισθητήριο** : Είναι μία φυσική ποσότητα (π.χ. σε προβλήματα μηχανικής των ρευστών πίεση, πυκνότητα, αριθμός Mach), η οποία επιλέγεται από τον χρήστη. Στη ποσότητα αυτή εφαρμόζεται η συνάρτηση κρίσης. Το αισθητήριο πρέπει να διαθέτει την απαραίτητη ευαισθησία έτσι ώστε να «αντιλαμβάνεται» τις περιοχές του πλέγματος, οι οποίες άπτονται εμπλουτισμού.

2. **Συνάρτηση κρίσης** : Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιεί τις τιμές του αισθητηρίου στους δύο ακραίους κόμβους κάθε ακμής του πλέγματος (πιθανότατα και σε άλλους γειτονικούς), έτσι ώστε να δώσει μία ένδειξη της τάσης της κάθε ακμής προς εμπλουτισμό ή απεμπλουτισμό.
3. **Χαρακτηριστικό όριο** : Το όριο αυτό καθορίζει το αν θα πραγματοποιηθεί εμπλουτισμός σε μια ακμή ή όχι. Η ένδειξη της κάθε ακμής του πλέγματος, που έχει υπολογιστεί μέσω της συνάρτησης κρίσης, συγκρίνεται με τα όρια αυτά και αν είναι μεγαλύτερη από το χαρακτηριστικό όριο εμπλουτισμού, τότε η ακμή μαρκάρεται προς εμπλουτισμό.

Έτσι, με χρήση των τριών αυτών παραμέτρων, επιτυγχάνεται ένα σωστό μαρκάρισμα πλευρών προς εμπλουτισμό. Το αν, όμως, τελικά θα οδηγηθούν οι πλευρές αυτές σε εμπλουτισμό εξαρτάται από τη διαδικασία εμπλουτισμού που προαναφέρθηκε. Έτσι, είναι δυνατόν κάποιες πλευρές, οι οποίες μαρκαρίστηκαν μέσω αυτών των τριών παραμέτρων, να μην υποστούν τελικά εμπλουτισμό ενώ κάποιες άλλες, που δεν είχαν μαρκαριστεί, να υποστούν.

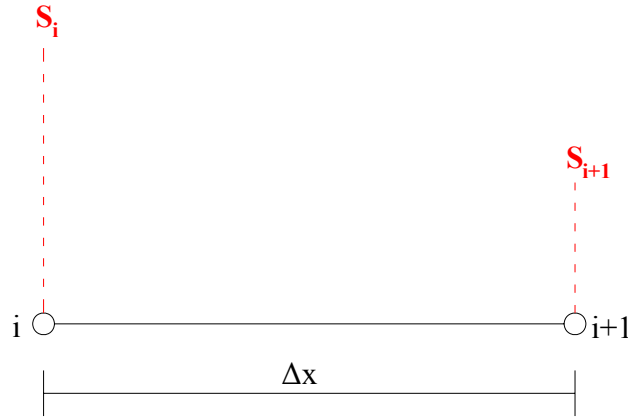
Στη συνέχεια, προχωρούμε σε κάποια περαιτέρω εμβάθυνση όσον αφορά τη συνάρτηση κρίσης.

Η συνάρτηση κρίσης είναι μία αναλυτική συνάρτηση με μεταβλητή η φυσική ποσότητα - αισθητήριο που έχει επιλεγεί. Όπως ήδη προαναφέραμε, η συνάρτηση αυτή παρέχει μία ένδειξη για κάθε ακμή του πλέγματος, η οποία υποδηλώνει την τάση προς εμπλουτισμό της κάθε ακμής.

Οι συναρτήσεις κρίσης χωρίζονται κυρίως σε δύο κατηγορίες :

1. Συναρτήσεις κρίσεις, οι οποίες στηρίζονται στην απόλυτη μεταβολή του αισθητηρίου.
2. Συναρτήσεις κρίσεις, οι οποίες στηρίζονται στην σχετική ως προς το μήκος (δηλαδή στη χωρική παράγωγο) μεταβολή του αισθητηρίου.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τις διαφορές ανάμεσα στις δύο αυτές θεωρίες. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε για παράδειγμα ένα μονοδιάστατο πρόβλημα εμπλουτισμού μεταξύ δύο κόμβων i και $i+1$. Ένα τέτοιο πρόβλημα απεικονίζεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.19 : Μονοδιάστατο πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ δύο κόμβων i και $i+1$

Στην ανωτέρω εικόνα με S συμβολίζεται το αισθητήριο. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, η συνάρτηση κρίσης μπορεί να στηρίζεται :

1. στην απόλυτη μεταβολή του αισθητηρίου, δηλαδή στην ποσότητα $|S_i - S_{i+1}|$ ή σε κάποιο αδιάστατο παράγωγό της
2. στη σχετική μεταβολή του αισθητηρίου ως προς το μήκος (χωρική παράγωγος), δηλαδή στην ποσότητα $\left| \frac{S_i - S_{i+1}}{\Delta x} \right| \sim \left| \frac{dS}{dx} \right|$ ή σε άλλες παρόμοιες αδιάστατες μορφές της. Μερικές τέτοιες μορφές, οι οποίες συναντώνται στην βιβλιογραφία είναι :

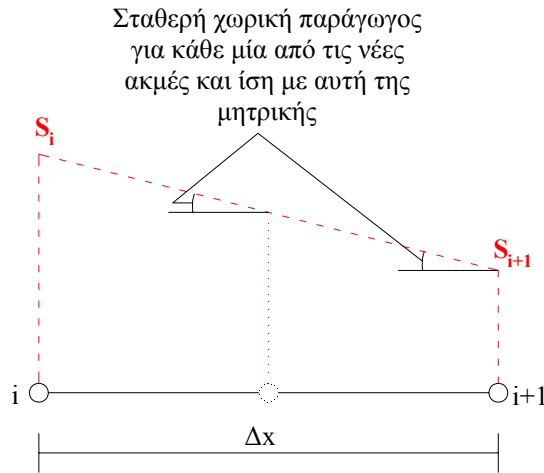
- $f = 1 + \left| \frac{dS}{dx} \right|$
- $f = \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dx} \right)^2}$
- $f = \left| \frac{dS}{dx} \right| + b \cdot \left| \frac{d^2S}{dx^2} \right|, \quad b \in \mathbb{R}$

Κάθε μια από αυτές τις εκφράσεις συμπεριφέρεται διαφορετικά και χρησιμοποιείται σε διαφορετικές περιπτώσεις.

Παρά το γεγονός ότι η διαφορά ανάμεσα στις δύο κατηγορίες συναρτήσεων κρίσης φαίνεται, εκ πρώτης όψης, απλή, είναι, εν τέλει, ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν κατά την επιλογή συνάρτησης κρίσης. Αυτό οφείλεται στις διαφορετικές ιδιότητες τους και, επομένως, στην διαφορετική συμπεριφορά τους.

Σε περίπτωση, παραδείγματος χάριν, έντονης γραμμικής μεταβολής του αισθητηρίου (σταθερή κλίση) πάνω σε μία ακμή (η οποία ορίζεται από τους κόμβους i και $i+1$), όπως φαίνεται στη ακόλουθη εικόνα, ο εμπλουτισμός της (διάσπαση σε δύο νέες ακμές) δεν θα

οδηγήσει σε μεταβολή της συνάρτησης κρίσης στις νέες ακμές, αν αυτή στηρίζεται σε χωρικές παραγώγους.

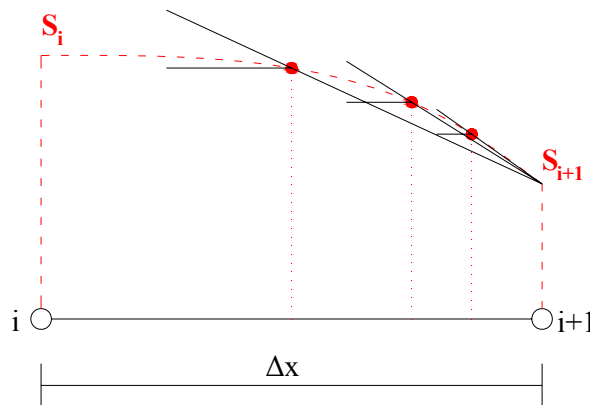


Εικόνα 2.20 : Μονοδιάστατο πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ δύο κόμβων i και $i+1$ με έντονη γραμμική μεταβολή του αισθητηρίου

Έτσι, ένα κριτήριο, το οποίο στηρίζεται στη σχετική μεταβολή του αισθητηρίου, θα οδηγούσε πάντα στη συνέχιση της διάσπασης της ακμής, όσες διασπάσεις κι αν είχαν προηγηθεί.

Σε αντίθεση, η χρήση μιας συνάρτησης κρίσης, ή οποία στηρίζεται στην απόλυτη μεταβολή του αισθητηρίου, θα ήταν καταλληλότερη, καθώς η απόλυτη μεταβολή του αισθητηρίου θα μειώνεται στο μισό με κάθε εμπλουτισμό.

Σε περίπτωση, όμως, που η κατανομή του αισθητηρίου δεν είναι γραμμική, οι τιμές συναρτήσεων κρίσης, οι οποίες στηρίζονται σε χωρικές παραγώγους, θα παίρνουν διαφορετικές τιμές για κάθε νέα ακμή που θα προκύπτει από περαιτέρω εμπλουτισμό της μητρικής πλευράς. Οι τιμές αυτές θα βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές του αισθητηρίου στους ακραίους κόμβους της μητρικής πλευράς, όπως φαίνεται και στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 2.21 : Μονοδιάστατο πρόβλημα προσαρμογής μεταξύ δύο κόμβων i και $i+1$ με μη – γραμμική μεταβολή του αισθητηρίου

Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον εγκλωβισμό του εμπλουτισμού σε συγκεκριμένες ακμές. Κάτι τέτοιο είναι μερικές φορές επιθυμητό και άλλες φορές δεν είναι.

Αν στην περίπτωση κατανομής της εικόνας 21 του αισθητηρίου χρησιμοποιούταν συνάρτηση κρίσης, η οποία στηριζόταν στην απόλυτη μεταβολή του αισθητηρίου, τότε οι τιμές που αυτή θα έπαιρνε στις νέες ακμές θα ήταν μικρότερες των αντιστοίχων της μητρικής ακμής.

Σε πολλές περιπτώσεις, βέβαια, είναι προτιμότερο η συνάρτηση κρίσης να είναι ένας συνδυασμός περισσότερων της μίας συναρτήσεων κρίσης. Έτσι, για παράδειγμα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μία συνάρτηση κρίσης με την ακόλουθη μορφή :

$$f = \left| \frac{dS}{dx} \right| + b \cdot \left| \frac{d^2S}{dx^2} \right|, \quad b \in \mathbb{R}$$

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε, ότι, γενικά, είναι προτιμότερο να αδιαστατοποιούνται οι συναρτήσεις κρίσης, όταν κάτι τέτοιο είναι δυνατό, όπως, για παράδειγμα, η ακόλουθη συνάρτηση κρίσης :

$$f = \left| \frac{S_i - S_{i+1}}{S_i + S_{i+1}} \right|$$

Κάτι τέτοιο παρέχει τη δυνατότητα να εντοπίζονται φαινόμενα, στα οποία οι τιμές του πεδίου (οπότε και οι μεταβολές τους) είναι μικρές. Παρ' όλ' αυτά πρέπει να υπάρχει μεγάλη προσοχή κατά την αδιαστατοποίηση για την αποφυγή του μηδενισμού του παρονομαστή. Ένα χαρακτηριστικός τρόπος, με τον οποίο αντιμετωπίζεται αυτό το πρόβλημα, είναι η γραφή της συνάρτησης κρίσης ως:

$$f = \frac{|S_i - S_{i+1}|}{|S_i + S_{i+1}| + \varepsilon}$$

όπου ε πολύ μικρή θετική σταθερά.

Ακόμη, είναι δυνατό να είναι επιθυμητή η ενίσχυση ή η αποθάρρυνση της διάσπασης μικρών ή μεγάλων ακμών του πλέγματος, ανάλογα με τις απαιτήσεις που έχουμε από αυτό. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνται οι λεγόμενες **συναρτήσεις βαρύτητας**. Οι συναρτήσεις αυτές είναι μεταβλητές με το μήκος l της ακμής και πολλαπλασιάζονται με την τιμή της

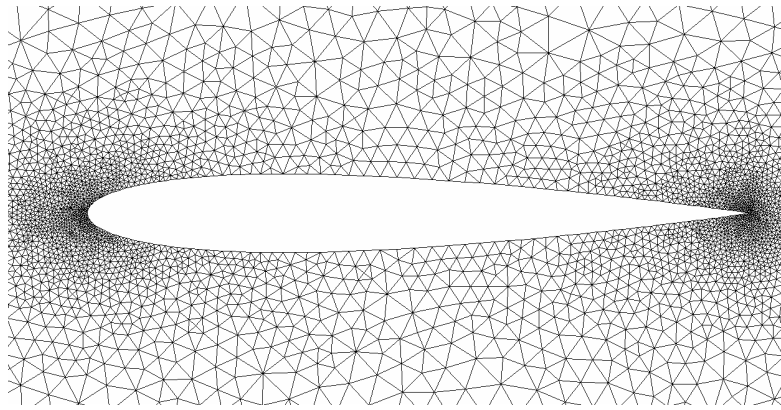
συνάρτησης κρίσης. Για παράδειγμα, αν $g(l)$ η συνάρτηση βαρύτητας και $f = \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dx} \right)^2}$ η

συνάρτηση κρίσης που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε, τότε η νέα συνάρτηση κρίσης, η οποία τελικά θα χρησιμοποιήσουμε, θα είναι :

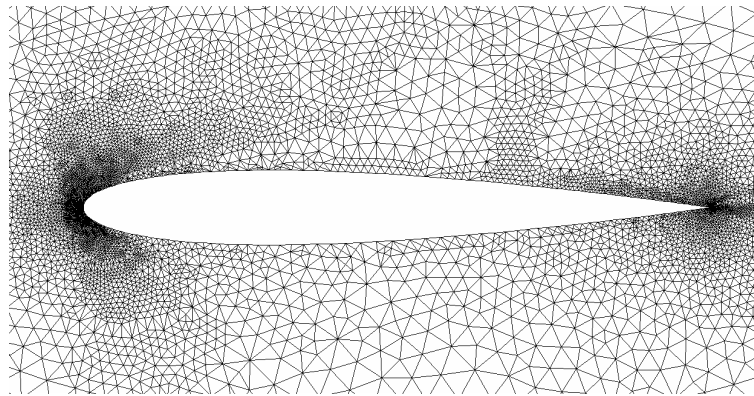
$$f_{new} = f \cdot g(l) = g(l) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dx}\right)^2}$$

2.7 Εφαρμογή της προσαρμογής μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω μεμονωμένη αεροτομή NACA

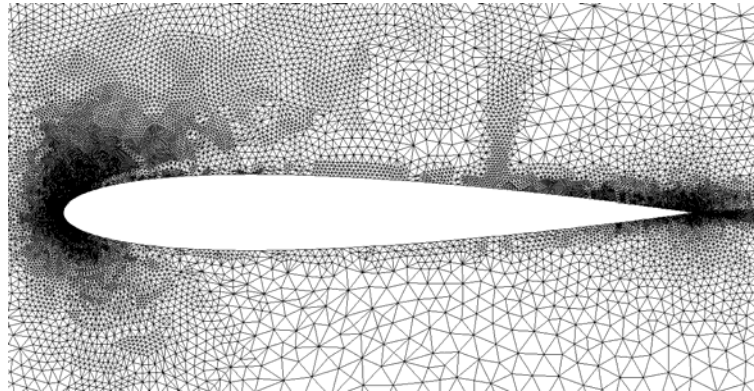
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής της προσαρμογής μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω από μία μεμονωμένη αεροτομή Naca. Ο αριθμός Mach της επ’ άπειρο ροής είναι $M_\infty = 0.8$, ο αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή $Re = 6.5 \cdot 10^6$ και η γωνία της επ’ άπειρο ροής $\alpha_\infty = 0^\circ$. Οι προσαρμογές που πραγματοποιήθηκαν ήταν τρεις. Αρχικά παρουσιάζουμε την αλλαγή στη μορφή του πλέγματος μέσω της εφαρμογής της προσαρμογής και παρατηρούμε ότι το πλέγμα πυκνώνει (υφίσταται προσαρμογή) στο σημείο πρόσπτωσης (σημείο ανακοπής), όπου έχουμε το φαινόμενο μηδενισμού της ταχύτητας, στο σημείο εκφυγής καθώς και στη θέση εμφάνισης του κρουστικού κύματος (φαινόμενο ασυνέχειας της πίεσης), το οποίο φαίνεται και στη δεύτερη σειρά εικόνων. Σε αυτές παρουσιάζονται οι γραμμές ίσο – Mach και, όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, με την εφαρμογή της κάθε προσαρμογής, το πάχος του κύματος κρούσης μικραίνει, γεγονός που συνεπάγεται την καλύτερη πρόλεξη της λύσης. Στην τελευταία σειρά εικόνων φαίνεται η σταδιακή πύκνωση του πλέγματος στη θέση του κύματος κρούσης. Οι εικόνες που αναφέραμε ακολουθούν :



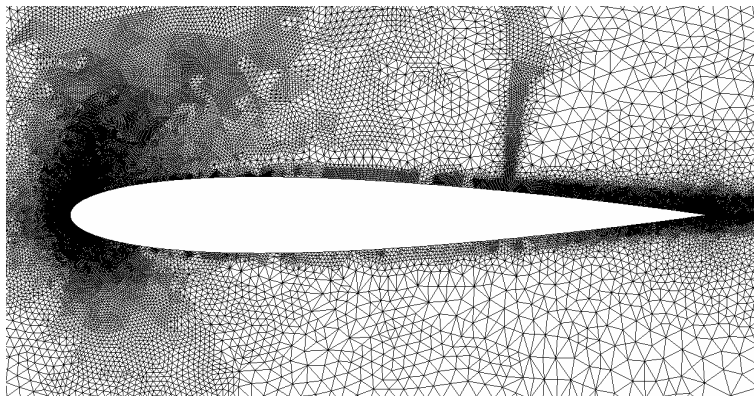
Εικόνα 2.22 : Το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων πριν την προσαρμογή



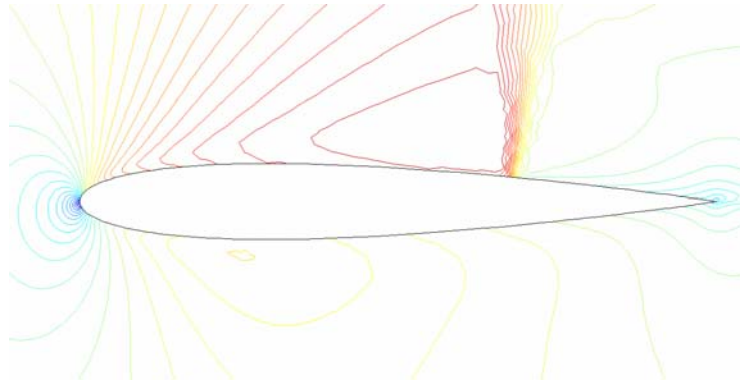
Εικόνα 2.23 : Το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων μετά την πρώτη προσαρμογή



Εικόνα 2.24 : Το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων μετά την δεύτερη προσαρμογή



Εικόνα 2.25 : Το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων μετά την τρίτη προσαρμογή



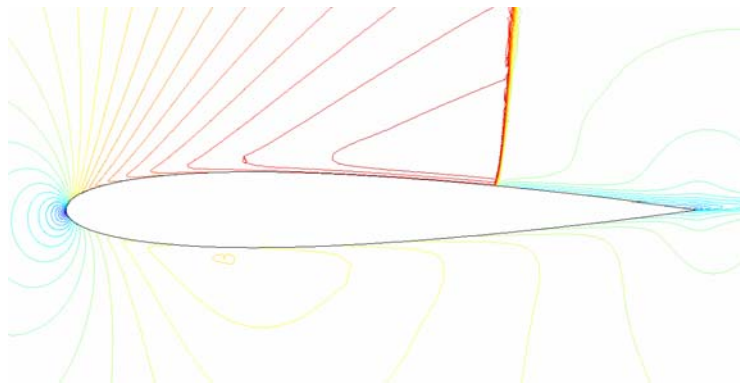
Εικόνα 2.26 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την πρώτη προσαρμογή



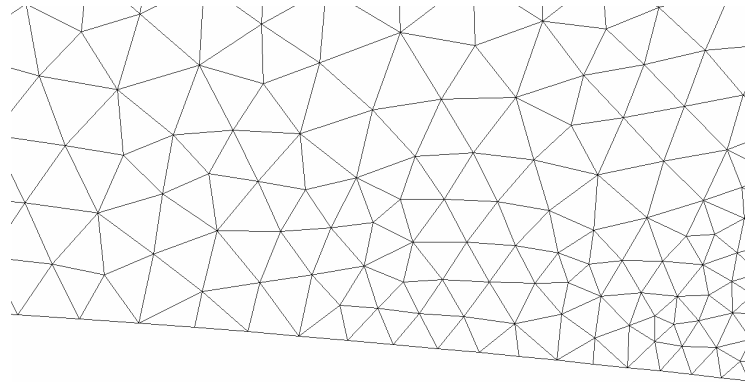
Εικόνα 2.27 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την δεύτερη προσαρμογή



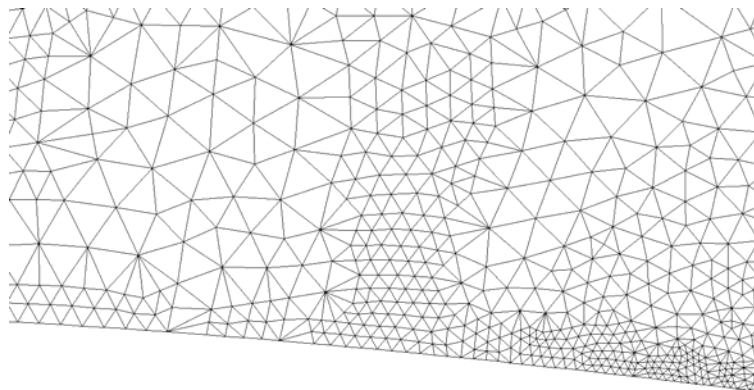
Εικόνα 2.28 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την τρίτη προσαρμογή



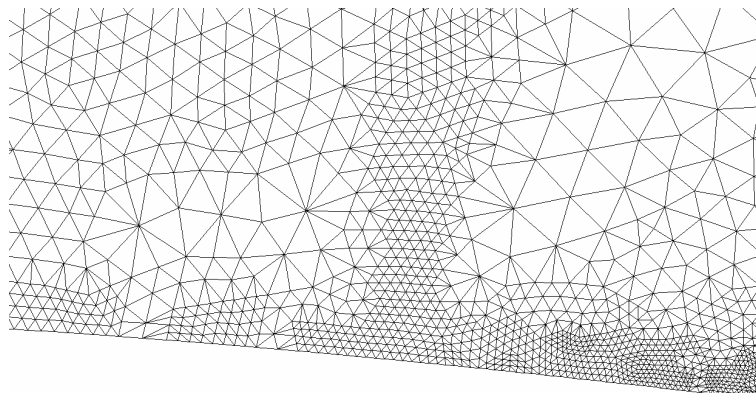
Εικόνα 2.29 : Οι γραμμές iso – Mach στο τέλος της επίλυσης



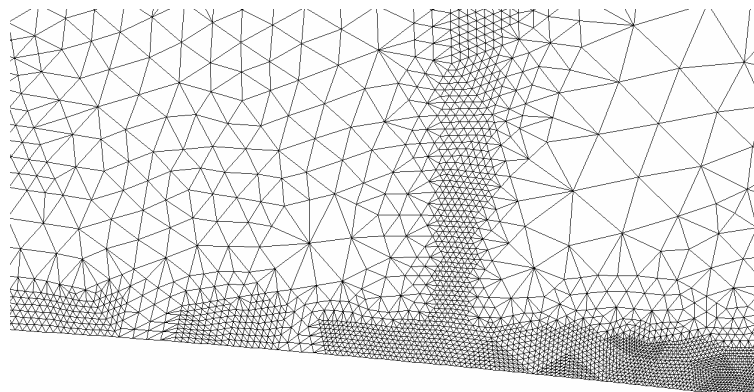
Εικόνα 2.30 : Το πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης πριν την προσαρμογή



Εικόνα 2.31 : Το πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την πρώτη προσαρμογή



Εικόνα 2.32 : Το πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την δεύτερη προσαρμογή



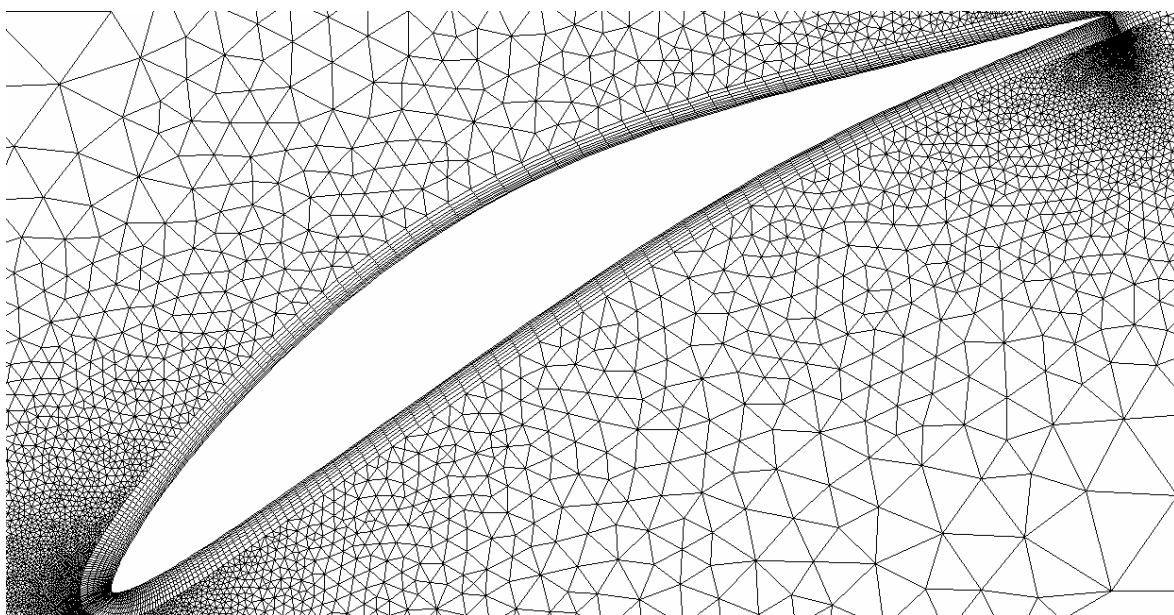
Εικόνα 2.33 : Το πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την τρίτη προσαρμογή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προσαρμογή υβριδικών υπολογιστικών πλεγμάτων

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται επέκταση από της αλγοριθμικής διαδικασίας που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και σε υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα, θεωρία που αναπτύσσεται για πρώτη φορά για το Εργαστήριο Θερμικών στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π.. Έτσι, αυτό που θα πραγματοποιηθεί σε αυτό το κεφάλαιο είναι η ανάλυση του εμπλουτισμού υβριδικών υπολογιστικών πλεγμάτων. Τα υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα είναι τα πλέγματα, στα οποία συναντά κανείς και τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία. Τα τετράπλευρα στοιχεία συνιστούν ένα δομημένο πλέγμα κοντά σε κάποιο τοίχωμα, πάνω στο οποίο θέλουμε να εξετάσουμε την εξέλιξη ενός φαινομένου, παραδείγματος χάρη, σε πρόβλημα ροής, γύρω από μία αεροτομή ή πάνω σε στερεό τοίχωμα. Το δομημένο αυτό πλέγμα δεν καλύπτει όλο το υπολογιστικό χωρίο, αλλά περιορίζεται σε κάποιο τμήμα του και, στη συνέχεια, το υπόλοιπο χωρίο συμπληρώνεται με μη – δομημένα τριγωνικά στοιχεία. Ένα παράδειγμα τέτοιου πλέγματος γύρω από μία αεροτομή της πτερύγωσης ενός συμπιεστή στροβιλομηχανής δίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.1 : Υβριδικό πλέγμα γύρω από αεροτομή πτερύγωσης συμπιεστή στροβιλομηχανής

Η κεντρική ιδέα, η οποία οδήγησε στη δημιουργία τέτοιων πλεγμάτων, βασίζεται στις δύο ακόλουθες προτάσεις. Ως γνωστό, τα πλέγματα τετράπλευρων στοιχείων έχουν την ικανότητα να προσεγγίζουν τα πραγματικά στοιχεία του προβλήματος καλύτερα από τα μη – δομημένα πλέγματα τριγωνικών στοιχείων, καθώς οι διάφορες παράγωγοι υπολογίζονται κατά την κάθετη στο τοίχωμα κατεύθυνση και όχι κατά κάποια άλλη κατεύθυνση, η οποία θα εισήγαγε σφάλμα στον υπολογισμό. Αντίθετα, για την πλήρωση ενός ολόκληρου υπολογιστικού χωρίου απαιτούνται, κατά βάση, περισσότερα τετράπλευρα στοιχεία απ' ότι μη – δομημένα τριγωνικά, καθώς τα πρώτα δεν έχουν την ικανότητα να αυξάνουν το μέγεθος των στοιχείων τους όσο προσεγγίζεται το πέρας του υπολογιστικού χωρίου, όπως τα δεύτερα. Το γεγονός αυτό σημαίνει υψηλότερες απαιτήσεις υπολογιστικής μνήμης και χρόνου επεξεργασίας καθώς και επίτευξη υψηλής ακρίβειας σε περιοχές που κάτι τέτοιο δεν άπτεται του ενδιαφέροντος μας (π.χ. σε πρόβλημα αεροδυναμικής μακριά από την αεροτομή). Έτσι, γίνεται προφανές, ότι ο συνδυασμός των δύο πλεγμάτων θα παρείχε καλή

προσέγγιση της πραγματικής λύσης στην περιοχή που μας ενδιαφέρει (π.χ. κοντά στην αεροτομή), ικανοποιητική προσέγγιση στις περιοχές λιγότερου ενδιαφέροντος, οικονομία υπολογιστικής μνήμης και μικρότερο χρόνο επεξεργασίας (απ' ότι αν είχαμε μόνο δομημένο πλέγμα τετράπλευρων στοιχείων). Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν τα υβριδικά πλέγματα, τα οποία κοντά στην περιοχή που μας ενδιαφέρει αποτελούνται από πλέγμα τετράπλευρων στοιχείων, το οποίο, τουλάχιστον κατά τη γένεση του πλέγματος και όχι μετά από προσαρμογή, έχει τη μορφή (προσοχή : μόνο τη μορφή και όχι την κατασκευή) δομημένου πλέγματος τετράπλευρων στοιχείων, και στην υπόλοιπη περιοχή από ένα μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. Συνολικά, ένα υβριδικό πλέγμα είναι ένα μη – δομημένο πλέγμα.

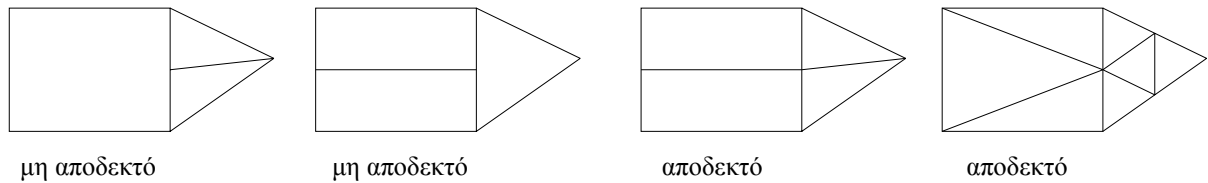
Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην ανάλυση του προβλήματος του εμπλουτισμού τέτοιων πλεγμάτων.

3.2 Βασικές αρχές του εμπλουτισμού σε υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα

Όπως ήδη αναφέραμε, τα υβριδικά υπολογιστικά πλέγματα αποτελούνται από δύο τμήματα : ένα τμήμα τετράπλευρων στοιχείων και ένα τμήμα μη δομημένων τριγωνικών στοιχείων. Όπως είναι προφανές, στις περιοχές που υπάρχουν μόνο μη δομημένα τριγωνικά στοιχεία, ο εμπλουτισμός θα πραγματοποιείται με βάση τα όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Ακόμη, πρέπει να αναφέρουμε, όταν πραγματοποιείται εμπλουτισμός στο τμήμα του πλέγματος με τετράπλευρα στοιχεία (μη – δομημένο), αυτή έχει τοπικό χαρακτήρα και όχι ολικό όπως στα δομημένα πλέγματα, όπου η προσαρμογή συνεπάγεται προσθήκη γραμμών και στηλών σε ολόκληρο το χωρίο. Ο τοπικός αυτός χαρακτήρας είναι και το αντικείμενο που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια και που, μαζί με τα όσα έχουν ειπωθεί για τον εμπλουτισμό μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων, θα πλαισιώσουν την προσαρμογή των υβριδικών πλεγμάτων.

Ενδεικτικά και για λόγους υπενθύμισης, αναφέρουμε, ότι **εμπλουτισμός** ενός στοιχείου ενός πλέγματος ονομάζεται η διαίρεση του στοιχείου αυτού (μητρικό στοιχείο) σε νέα μικρότερα στοιχεία (απόγονοι).

Και εδώ, όπως και στο Κεφάλαιο 2, θα ακολουθηθεί η βασική αρχή, η οποία διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση : κάθε κόμβος μπορεί να είναι μόνο κοινή κορυφή δύο στοιχείων και όχι μεσόκομβος κάποιας πλευράς. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η εμφάνιση μορφών τέτοιων, όπως στις τεχνικές απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding). Η αρχή αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής : δεν επιτρέπεται η δημιουργία υπολογιστικού κόμβου στο εσωτερικό ακμής ενεργού στοιχείου. Ως ενεργό χαρακτηρίζεται το στοιχείο, το οποίο κατά τη συγκεκριμένη χρονική επανάληψη λαμβάνει μέρος στο υπολογισμό. Μια σχηματική απεικόνιση αποδεκτού και μη αποδεκτού τρόπου διάσπασης στοιχείων, δίνεται στην εικόνα 2.3 καθώς και στην ακόλουθη εικόνα :

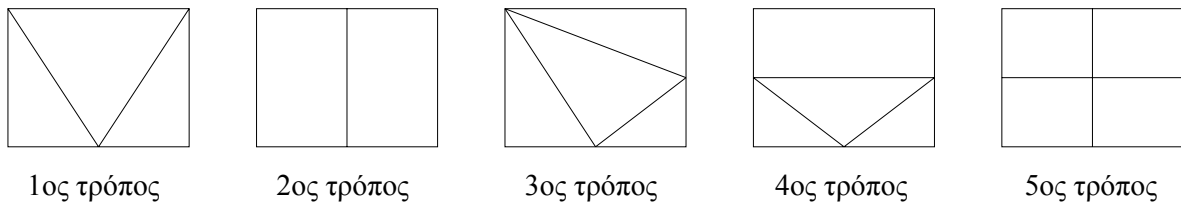


Εικόνα 3.2 : Παράδειγμα αποδεκτού και μη αποδεκτού τρόπου διάσπασης στοιχείων

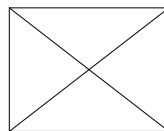
Οι μη αποδεκτές περιπτώσεις της προηγούμενης εικόνας ανήκουν στην κατηγορία των τεχνικών απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων (grid embedding) που προαναφέραμε και δεν θα μας απασχολήσουν. Αναφέρουμε, όμως, ότι οι τεχνικές απλής υπέρθεσης έχουν μικρότερες απαιτήσεις μνήμης, καθώς, όταν εμπλουτίζεται ένα τρίγωνο, το γεγονός αυτό δεν συνεπάγεται και τον εμπλουτισμό κάποιων εκ των γειτονικών του στοιχείων. Από την άλλη πλευρά, όμως, απαιτούν σαφώς πολυπλοκότερη τοπολογική δομή και, επομένως, πιο σύνθετο λογισμικό επίλυσης.

Κάθε αλγόριθμος που αναπτύσσεται για το πρόβλημα της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων υπακούει, φυσικά, στους επτά κανόνες που υπακούει ένας αλγόριθμος προσαρμογής μη δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων, οι οποίοι αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. παράγραφο 2.2), αλλά και σε ορισμένους νέους κανόνες. Οι νέοι αυτοί κανόνες συνοψίζονται ακολούθως.

- **Κανόνας δ** : Ένα τετράπλευρο στοιχείο μπορεί να διασπαστεί μόνο με πέντε τρόπους. Οι τρόποι αυτοί φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα, η οποία ακολουθείται από μία εικόνα μη αποδεκτού τρόπου διάσπασης.

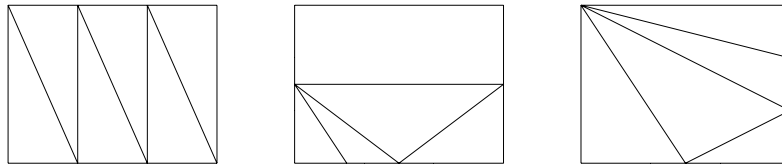


Εικόνα 3.3 : Διαφορετικοί τρόποι διάσπασης τετράπλευρων στοιχείων



Εικόνα 3.4 : Παράδειγμα μη αποδεκτού τρόπου διάσπασης

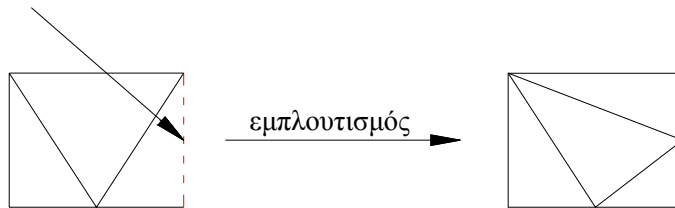
Όπως γίνεται φανερό, οι νέοι κόμβοι επιβάλλεται να ανήκουν στις ήδη υπάρχουσες πλευρές και σε κάθε πλευρά που διασπάται μπορεί να εισαχθεί ένας μόνο κόμβος, ο οποίος, μάλιστα, θα βρίσκεται στο μέσο της πλευράς (μεσόκομβος). Εξαιρέση αποτελεί η διάσπαση ενός τετραπλεύρου σύμφωνα με τον πέμπτο τρόπο, κατά τον οποίο εισάγεται ένας κόμβος στο βαρύκεντρο του τετραπλεύρου. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η δημιουργία «μακρόστενων» στοιχείων, τα οποία μπορεί να προκαλέσουν πολλές φορές πρόβλημα στην επίλυση. Ένα παράδειγμα δημιουργίας τέτοιων μακρόστενων στοιχείων φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα, όπου υποθέσαμε ότι στη διασπώμενη πλευρά μπορούν να εισαχθούν μέχρι δύο νέα σημεία :



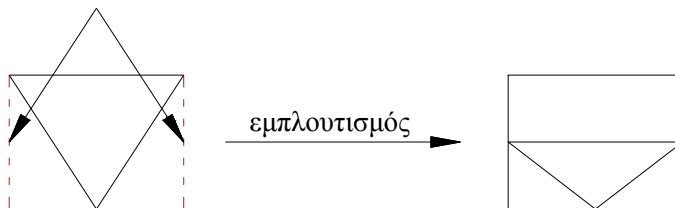
Εικόνα 3.5 : Δημιουργία «μακρόστενων» στοιχείων κατά μία διαφορετική διάσπαση, η οποία δεν ακολουθεί τον κανόνα 8

- Κανόνας 9 : Τρίγωνα, τα οποία έχουν προέλθει από διαίρεση μητρικού τετράπλευρου σε τρία τρίγωνα, απαγορεύεται να διαιρεθούν περαιτέρω. Πρέπει πρώτα να γίνει διαίρεση του μητρικού τετράπλευρου σε κάποια από τις άλλες επιτρεπόμενες διασπάσεις (το σε ποια θα εξεταστεί παρακάτω, κατά τη περιγραφή της διαδικασίας εμπλουτισμού). Το ίδιο ισχύει και για τρίγωνα, τα οποία έχουν προέλθει από διάσπαση του μητρικού τετράπλευρου σε τέσσερα τρίγωνα, με την εξαίρεση ότι η επαναδιάσπαση του μητρικού τετράπλευρου μπορεί να γίνει μόνο με τον τέταρτο ή τον πέμπτο τρόπο διάσπασης. Κατόπιν, αν ισχύουν ακόμη τα κριτήρια εμπλουτισμού, μπορεί γίνεται διαίρεση κάποιου ή κάποιων από τα νέα στοιχεία. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας είναι πιθανή η αλλαγή και στο τρόπο διαίρεσης των γειτονικών στοιχείων του αρχικού τετράπλευρου. Η ανωτέρω διαδικασία αυτή φαίνεται στις ακόλουθες εικόνες :

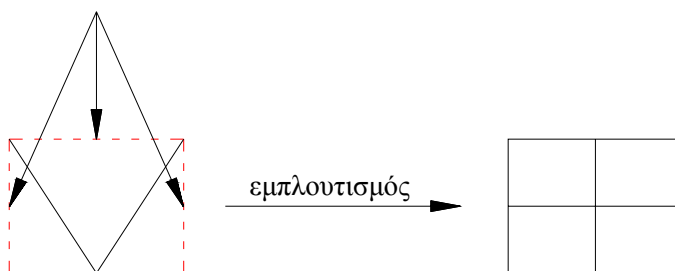
μαρκαρισμένες πλευρές
προς εμπλουτισμό



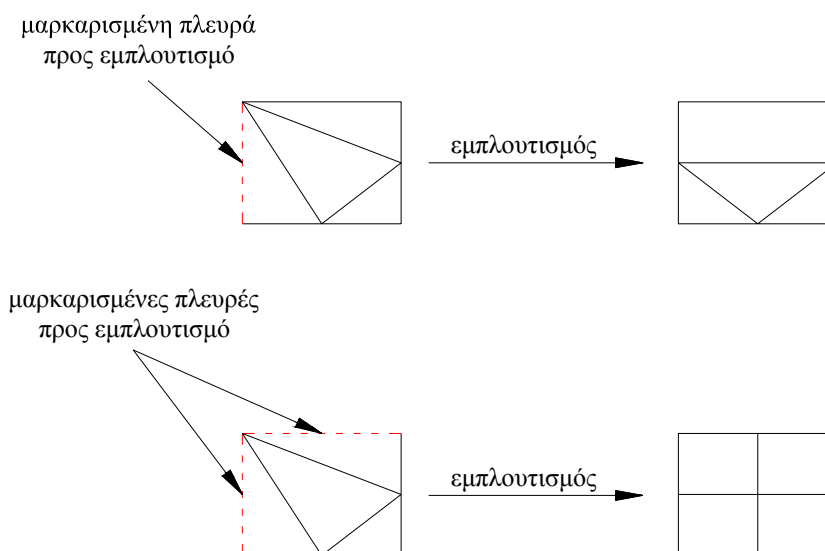
μαρκαρισμένες πλευρές
προς εμπλουτισμό



μαρκαρισμένες πλευρές
προς εμπλουτισμό

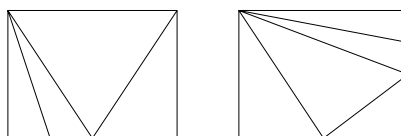


Εικόνα 3.6 : Σχηματική απεικόνιση του κανόνα 9 για τρίγωνα που έχουν προκύψει από διάσπαση του μητρικού τετράπλευρου σε τρία τρίγωνα



Εικόνα 3.7 : Σχηματική απεικόνιση του κανόνα 9 για τρίγωνα που έχουν προκύψει από διάσπαση του μητρικού τετράπλευρου σε τέσσερα τρίγωνα

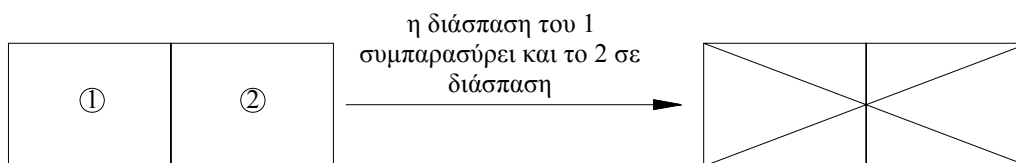
Ο λόγος, για τον οποίο επιβάλλεται ο κανόνας αυτός, είναι και πάλι η αποφυγή δημιουργίας «μακρόστενων» τριγώνων, όπως για παράδειγμα στην παρακάτω διάσπαση :



Εικόνα 3.8 : Πιθανό αποτέλεσμα διαίρεσης από μη εφαρμογή του κανόνα 9

- Κανόνας 10 : Στοιχεία, τα οποία έχουν προέλθει από διάσπαση του μητρικού τετράπλευρου με τον τέταρτο ή τον πέμπτο τρόπο επιτρέπεται να υποστούν προσαρμογή. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι τα στοιχεία που έχουν προέλθει από διάσπαση μητρικού τετραπλεύρου με τον πέμπτο τρόπο είναι και αυτά τετράπλευρα, οπότε μπορούν να υποστούν εμπλουτισμό με τους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους που αναφέραμε. Ομοίως, τα στοιχεία που έχουν προέλθει από διάσπαση μητρικού τετραπλεύρου με τον τέταρτο τρόπο είναι ένα τετράπλευρο, το οποίο μπορεί να υποστεί εμπλουτισμό με τους τέσσερις προηγούμενους διαφορετικούς τρόπους, και τρία τρίγωνα, τα οποία συνιστούν ένα αδελφό τετράπλευρο του τελευταίου τετραπλεύρου. Έτσι, αν τα τρία αυτά τρίγωνα χρειαστούν περαιτέρω εμπλουτισμό, τότε αυτός θα γίνει στο αδελφό τετράπλευρο, με βάση τα όσα επιβάλλει ο κανόνας 9.
- Κανόνας 11 : Δεν επιτρέπεται να διασπώνται τα στοιχεία επ' άπειρο, για τους λόγους που αναφέρθηκαν και κατά τον αντίστοιχο κανόνα κατά τον εμπλουτισμό τριγωνικών στοιχείων.
- Κανόνας 12 : Κατά τη διάσπαση ενός τετραπλεύρου, είναι δυνατόν να οδηγηθεί σε διάσπαση και κάποιο από τα γειτονικά του τετράπλευρα, έτσι ώστε να

μην εμφανιστούν μορφές ανάλογες εκείνων των τεχνικών απλής υπέρθεσης νέων στοιχείων. Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτού του κανόνα φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.9 : Παράδειγμα εφαρμογής του κανόνα 12

3.3 Διαχείριση πληροφοριών κατά τον εμπλουτισμό υβριδικών πλεγμάτων

Και εδώ η διαχείριση των πληροφοριών γίνεται ακριβώς όπως και στην περίπτωση του εμπλουτισμού των μη δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων. Για το λόγο αυτό παραπέμπουμε στην παράγραφο 2.3.

3.4 Κριτήρια εμπλουτισμού υβριδικών πλεγμάτων

Τα κριτήρια εμπλουτισμού είναι και στην περίπτωση του προβλήματος της προσαρμογής των υβριδικών πλεγμάτων τα ίδια όπως και στην περίπτωση του προβλήματος της προσαρμογής των τριγωνικών πλεγμάτων (βλ. παράγραφο 2.4). Ενδεικτικά αναφέρουμε, ότι και εδώ οι παράμετροι, οι οποίοι καθορίζουν το ποιες περιοχές του υπολογιστικού χωρίου θα υποστούν προσαρμογή, είναι το αισθητήριο, η συνάρτηση κρίσης και τα χαρακτηριστικά όρια των τιμών της συνάρτησης κρίσης.

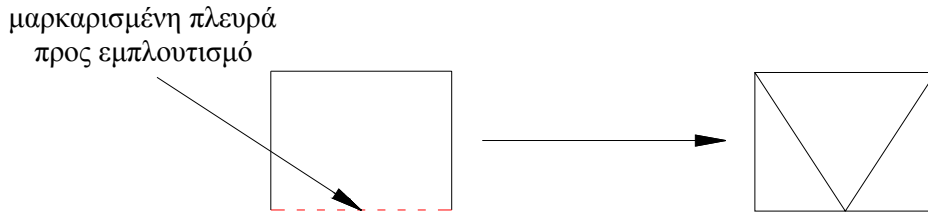
3.5 Διαδικασία εμπλουτισμού υβριδικών πλεγμάτων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα υβριδικά πλέγματα αποτελούνται από ένα τμήμα τετράπλευρων στοιχείων κοντά στην περιοχή που μας ενδιαφέρει και από ένα τμήμα τριγωνικών στοιχείων στο υπόλοιπο υπολογιστικό χωρίο. Τα στοιχεία, δηλαδή, που συντελούν ένα υβριδικό πλέγμα είναι τρίγωνα και τετράπλευρα. Έτσι, κατά τη διαδικασία του εμπλουτισμού, όταν ο αλγόριθμος συναντά τριγωνικά στοιχεία, τα οποία ανήκουν στην περιοχή των μη δομημένων τριγώνων, τότε η διαδικασία που θα ακολουθείται θα είναι η ίδια με εκείνη που περιγράψαμε για τον εμπλουτισμό των μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων (βλ. παράγραφο 2.5). Για το λόγο αυτό δεν θα αναφέρουμε ξανά τα όσα ειπώθηκαν στην ανωτέρω παράγραφο.

Έτσι, για να ολοκληρωθεί η περιγραφή της διαδικασίας εμπλουτισμού των υβριδικών πλεγμάτων, αρκεί να αναλύσουμε τα βήματα που ακολουθεί ο αλγόριθμος προσαρμογής κατά τον εμπλουτισμό των τετράπλευρων στοιχείων. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι κατά τη

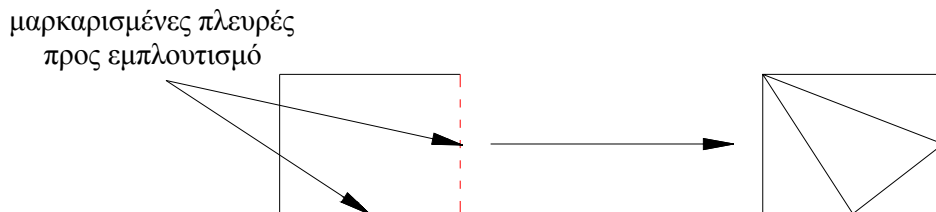
διάσπασή του ένα τετράπλευρο στοιχείο μπορεί να διασπαστεί μόνο με τους ακόλουθους τρόπους :

- Αν είναι μαρκαρισμένη μία μόνο πλευρά, τότε το τετράπλευρο διασπάται ως εξής :



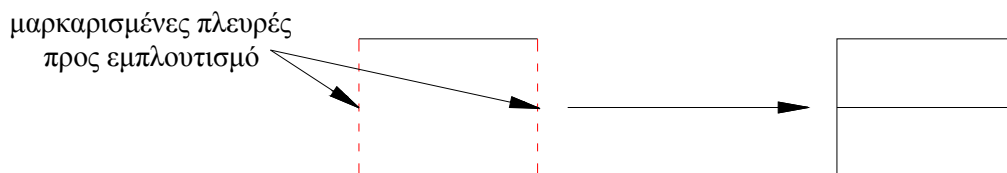
Εικόνα 3.12 : Τρόπος διάσπασης του τετραπλεύρου, όταν είναι μαρκαρισμένη μία μόνο πλευρά

- Αν είναι μαρκαρισμένες δύο διαδοχικές πλευρές, τότε το τετράπλευρο διασπάται ως εξής :



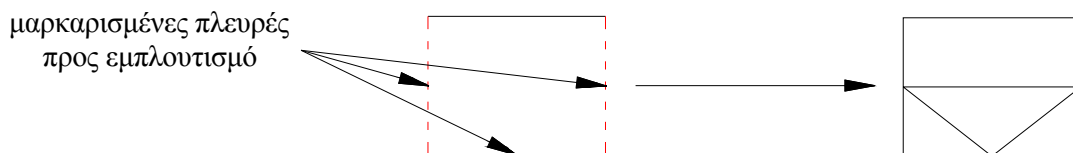
Εικόνα 3.13 : Τρόπος διάσπασης του τετραπλεύρου, όταν είναι μαρκαρισμένες δύο διαδοχικές πλευρές

- Αν είναι μαρκαρισμένες δύο απέναντι πλευρές, τότε το τετράπλευρο διασπάται ως εξής :



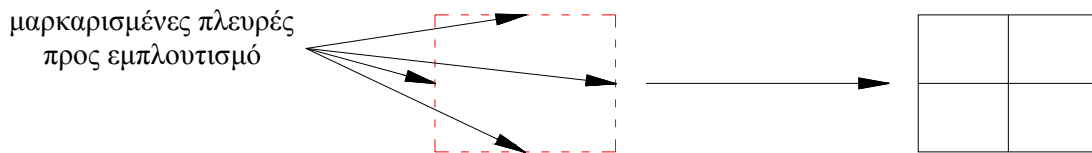
Εικόνα 3.14 : Τρόπος διάσπασης του τετραπλεύρου, όταν είναι μαρκαρισμένες δύο απέναντι πλευρές

- Αν είναι μαρκαρισμένες τρεις πλευρές, τότε το τετράπλευρο διασπάται ως εξής :



Εικόνα 3.15 : Τρόπος διάσπασης του τετραπλεύρου, όταν είναι μαρκαρισμένες τρεις πλευρές

- Αν είναι μαρκαρισμένες και οι τέσσερις πλευρές, τότε εισάγεται ένας κόμβος στο βαρύκεντρο του τετραπλεύρου και αυτό διασπάται ως εξής:



Εικόνα 3.16 : Τρόπος διάσπασης του τετραπλεύρου, όταν είναι μαρκαρισμένες και οι τέσσερις πλευρές

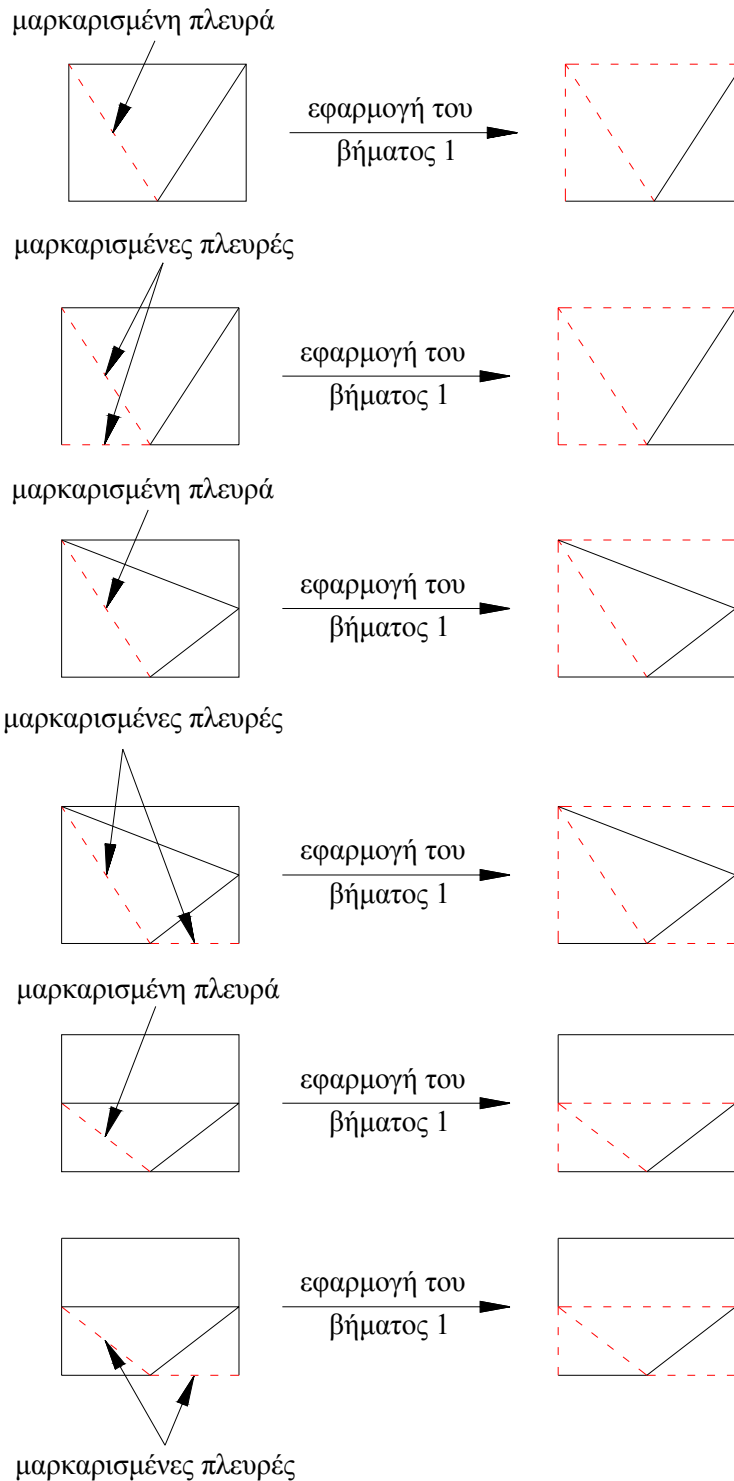
Στο σημείο αυτό μπορούμε να προχωρήσουμε στην διατύπωση των βημάτων που ακολουθεί ο αλγόριθμος προσαρμογής κατά τον εμπλουτισμό τετράπλευρων στοιχείων. Τα βήματα αυτά παρατίθενται ακολούθως.

- Βήμα 1 :

Σαρώνονται όλες οι μαρκαρισμένες πλευρές και αν βρεθούν μαρκαρισμένες εσωτερικές πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου, οι οποίες έχουν προκύψει από τη διάσπαση του με τον κάποιον από τους τρεις πρώτους τρόπους, τότε μαρκάρονται όσες μη διασπασμένες πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου δεν είναι ήδη μαρκαρισμένες. Το ίδιο συμβαίνει και όταν είναι μαρκαρισμένη τουλάχιστον μία πλευρά, από εκείνες τις δύο πλευρές, οι οποίες έχουν προκύψει από διάσπαση πλευράς του μητρικού τετραπλεύρου.

Επίσης, έστω ένα μητρικό τετράπλευρο, το οποίο έχει διασπαστεί με τον τέταρτο τρόπο, δηλαδή σε δύο αδελφά τετράπλευρα, ένα εκ των οποίων έχει διασπαστεί με τον πρώτο τρόπο. Τότε, αν είναι μαρκαρισμένη κάποια εκ των πλευρών αυτού του διασπασμένου αδελφού τετραπλεύρου, τότε μαρκάρονται όσες μη διασπασμένες πλευρές του δεν είναι ήδη διασπασμένες. Το ίδιο συμβαίνει και όταν είναι μαρκαρισμένη τουλάχιστον μία πλευρά, από εκείνες τις πλευρές, οι οποίες έχουν προκύψει από διάσπαση πλευρών του μητρικού τετραπλεύρου.

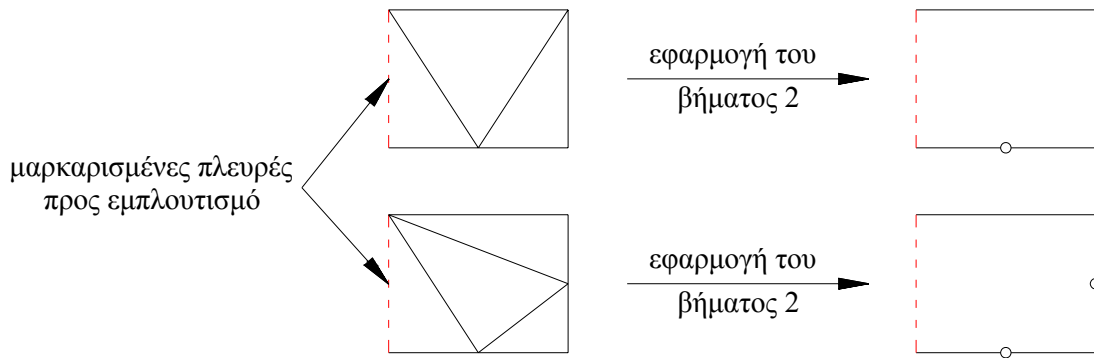
Μερικά παραδείγματα των ανωτέρω δίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.17 : Παραδείγματα εφαρμογής του βήματος 1

• Βήμα 2 :

Σύμφωνα με τον κανόνα 9, απαγορεύεται να διαιρεθούν περαιτέρω τρίγωνα, τα οποία έχουν προέλθει από διάσπαση μητρικού τετραπλεύρου σε τρία ή τέσσερα τρίγωνα. Έτσι, σε περίπτωση που εντοπιστούν τέτοια τρίγωνα μαρκαρισμένα προς εμπλουτισμό (όσες πλευρές τους και αν έχουν μαρκαριστεί), τότε απαλείφονται τα παιδιά – τρίγωνα δια της απαλοιφής των κοινών τους πλευρών. Η διαδικασία φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



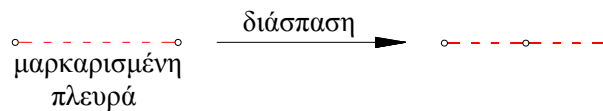
Εικόνα 3.19 : Παράδειγμα εφαρμογής του βήματος 2 – απαλοιφή των κοινών πλευρών των παιδιών τριγώνων

Παρατήρηση : Όταν γίνεται απαλοιφή των κοινών πλευρών, οι αντίστοιχοι μεσόκομβοι δεν διαγράφονται, καθώς θα χρησιμοποιηθούν σε επόμενο βήμα κατά τη νέα διαίρεση του μητρικού τετραπλεύρου, όπως αυτό επιβάλλεται από τον κανόνα 9.

Ο αλγόριθμος επαναλαμβάνει τα βήματα 1 και 2 έως ότου δεν πραγματοποιούνται νέα μαρκαρίσματα.

• Βήμα 3 :

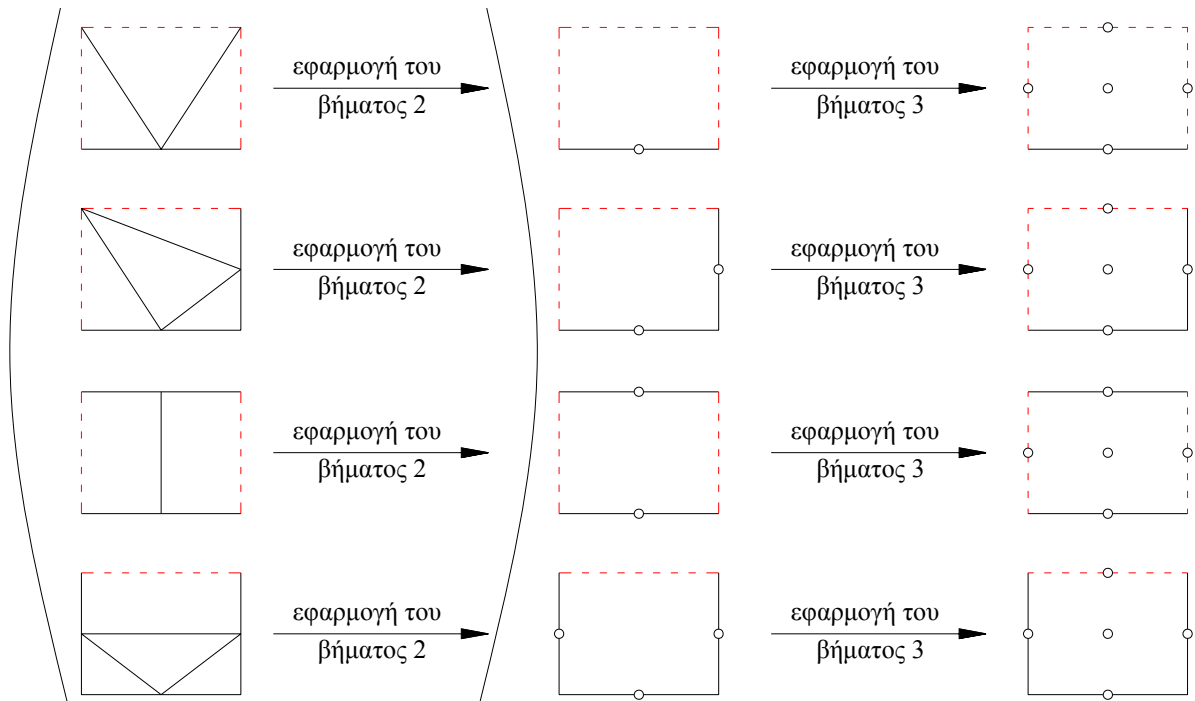
Σε αυτό το βήμα πραγματοποιείται η διάσπαση των ήδη μαρκαρισμένων πλευρών. Για κάθε πλευρά που διασπάται, εξάγονται από τις λίστες αναμονής δύο ID πλευρών και ένα ID κόμβου, οι πλευρές που προκύπτουν ενεργοποιούνται και οι πίνακές τους (τοπολογικοί και γενεαλογικοί) συμπληρώνονται. Τα παραπάνω δεν πραγματοποιούνται σε ήδη διασπασμένες μαρκαρισμένες πλευρές που έχουν προκύψει από το βήμα 2 διατηρώντας τον μεσόκομβό τους. Η διαδικασία φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.20 : Διαδικασία του βήματος 3 – διάσπαση των μαρκαρισμένων πλευρών

Ο νέος κόμβος τοποθετείται στο γεωμετρικό μέσο της μητρικής πλευράς, εκτός και αν πρόκειται για οριακό σημείο, οπότε οι συντεταγμένες του προκύπτουν από ακριβή παρεμβολή. Κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο, έτσι ώστε να μην τροποποιείται η πραγματική γεωμετρία του χωρίου. Η μη τήρηση αυτής της γεωμετρίας οδηγεί σε απόκλιση από την πραγματική λύση. Τέλος, υπολογίζονται οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές του πεδίου στους νέους κόμβους με αριθμητική παρεμβολή.

Επίσης, αν όλες οι μη διασπασμένες πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου οδηγούνται σε διάσπαση τότε δημιουργείται ένας νέος κόμβος στο βαρύκεντρο αυτού. Τέτοιες περιπτώσεις φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.21 : Εφαρμογή του βήματος 3 σε περιπτώσεις όπου όλες οι διασπασμένες πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου οδηγούνται σε διάσπαση

• Βήμα 4 :

Στο τελευταίο αυτό βήμα πραγματοποιείται η νέα διαίρεση των μητρικών τετραπλεύρων. Στο σημείο αυτό διαχωρίζουμε τις διάφορες περιπτώσεις μαρκαρίσματος που μπορεί να συναντήσει ο αλγόριθμος εμπλουτισμού.

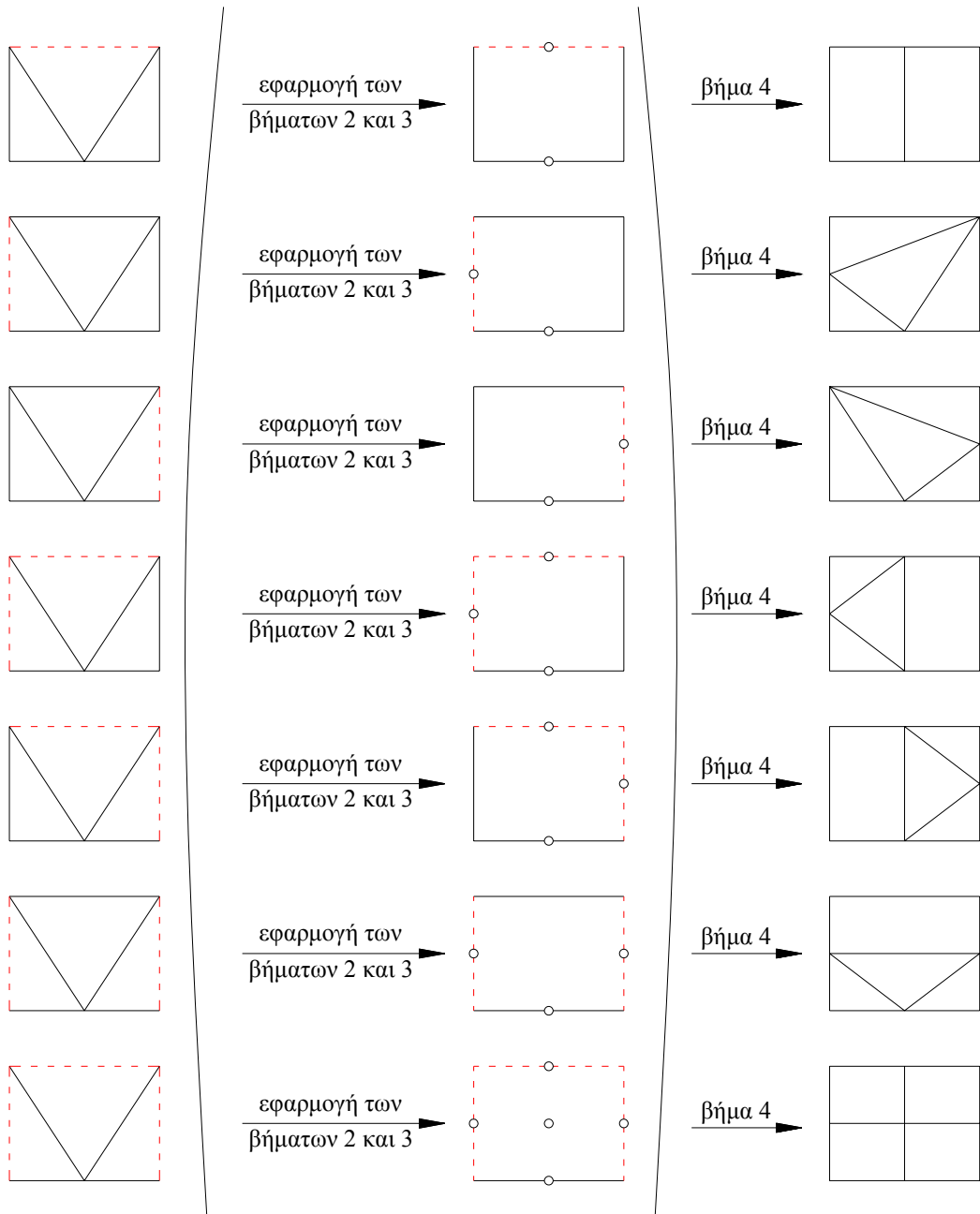
1^η Περίπτωση

Διαίρεση τετραπλεύρων, τα οποία δεν έχουν υποστεί εμπλουτισμό έως τη δεδομένη χρονική επανάληψη. Η διαίρεση αυτή γίνεται με τους πέντε τρόπους που έχουμε ήδη αναφέρει.

2^η Περίπτωση

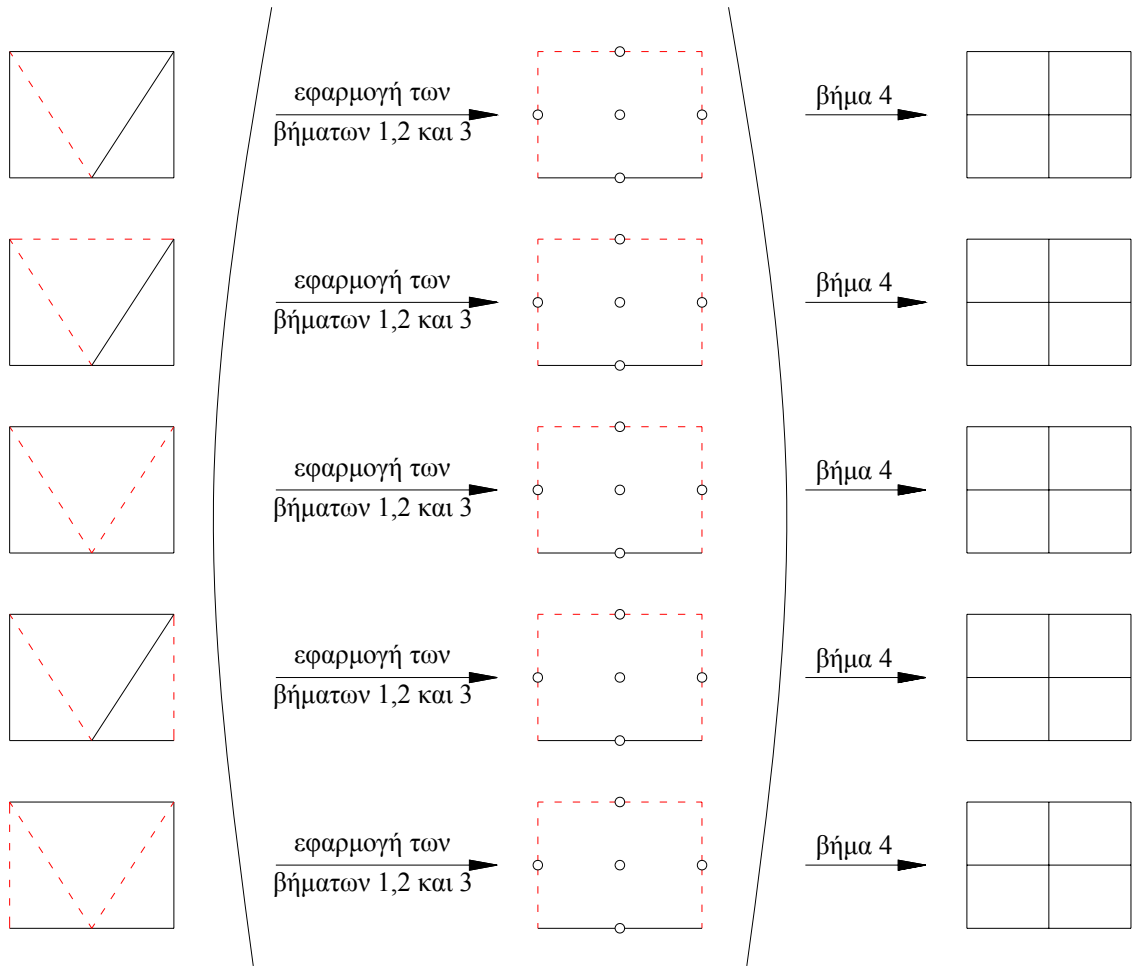
Νέα διαίρεση μητρικών τετραπλεύρων, τα οποία στην προηγούμενη φάση είχαν διαιρεθεί σε τρία τρίγωνα (πρώτος τρόπος διαίρεσης).

Αν είναι μαρκαρισμένες προς εμπλουτισμό μόνο πλευρές, οι οποίες είναι μη διασπασμένες πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου, τότε οι διάφορες περιπτώσεις μαρκαρίσματος καθώς και οι αντίστοιχες νέες διαιρέσεις, οι οποίες υπακούν στον κανόνα 9 φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



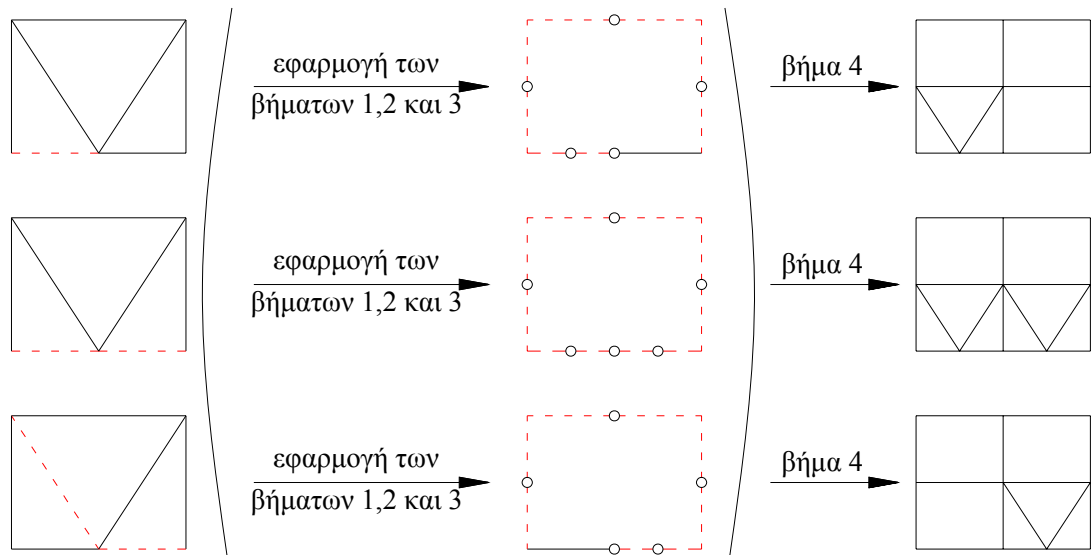
Εικόνα 3.21 : Διάφορες περιπτώσεις της δεύτερης περίπτωσης του βήματος 4, στις οποίες είναι μαρκαρισμένες προς εμπλουτισμό μόνο πλευρές που είναι αμιγώς πλευρές και του μητρικού τετραπλεύρου. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

Αν είναι μαρκαρισμένη έστω και μία εκ των διαγωνίων πλευρών, τότε η νέα διάσπαση του μητρικού τετραπλεύρου θα γίνει σύμφωνα με τον πέμπτο τρόπο διάσπασης. Μερικά παραδείγματα δίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.22 : Παραδείγματα της δεύτερης περίπτωσης του βήματος 4, στα οποία είναι μαρκαρισμένη προς εμπλουτισμό τουλάχιστον μία εκ των διαγωνίων πλευρών. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

Αν είναι μαρκαρισμένη προς εμπλουτισμό κάποια εκ των πλευρών που έχουν προκύψει από διάσπαση πλευράς του μητρικού τετραπλεύρου, τότε το μητρικό τετράπλευρο διασπάται και πάλι σύμφωνα με τον πέμπτο τρόπο και στη συνέχεια εμπλουτίζονται ορισμένα από τα νέα προκύπτουν τετράπλευρα, σύμφωνα με τους κόμβους που υπάρχουν. Μερικά τέτοια παραδείγματα φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα :

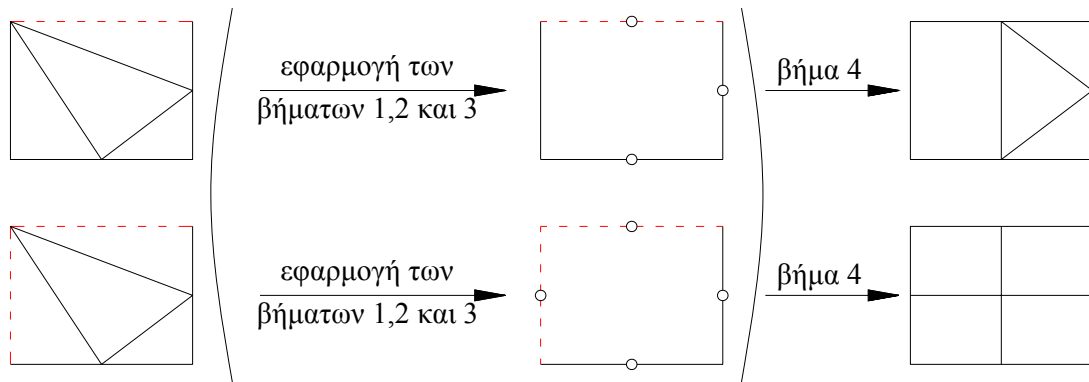


Εικόνα 3.23 : Παραδείγματα της δεύτερης περίπτωσης του βήματος 4, στα οποία είναι μαρκαρισμένη προς εμπλουτισμό τουλάχιστον μία εκ των πλευρών που έχουν προκύψει από διάσπαση πλευράς του μητρικού τετραπλεύρου. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

3^η Περίπτωση

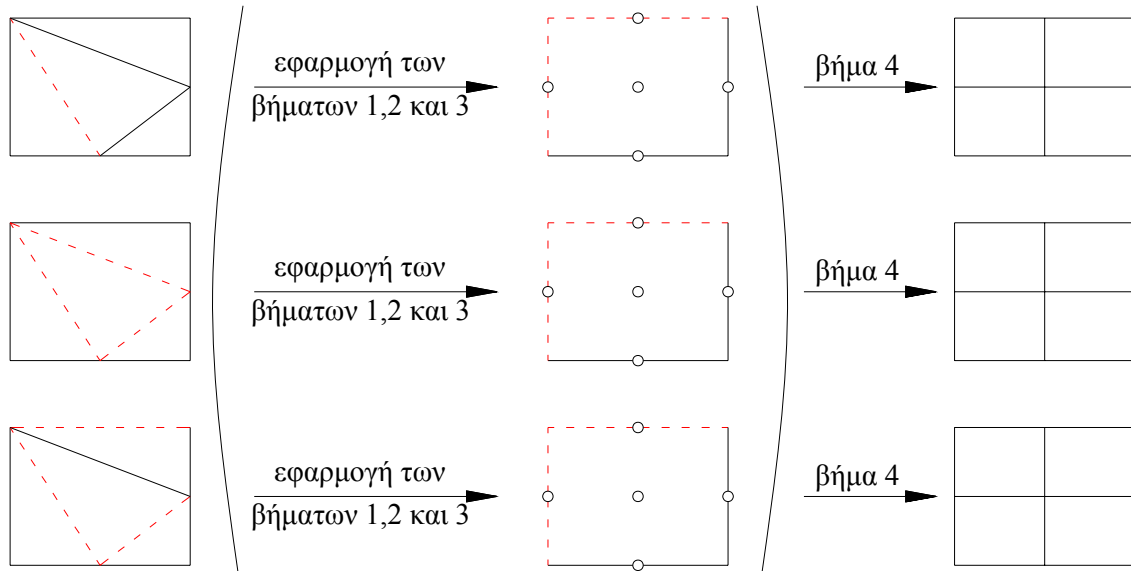
Νέα διαίρεση μητρικών τετραπλεύρων, τα οποία στην προηγούμενη φάση είχαν διαιρεθεί σε τέσσερα τρίγωνα (τρίτος τρόπος διαίρεσης).

Αν είναι μαρκαρισμένες προς εμπλουτισμό μόνο πλευρές, οι οποίες είναι μη διασπασμένες πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου, τότε οι διάφορες περιπτώσεις μαρκαρίσματος καθώς και οι αντίστοιχες νέες διαιρέσεις, οι οποίες υπακούνε στον κανόνα 9 φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



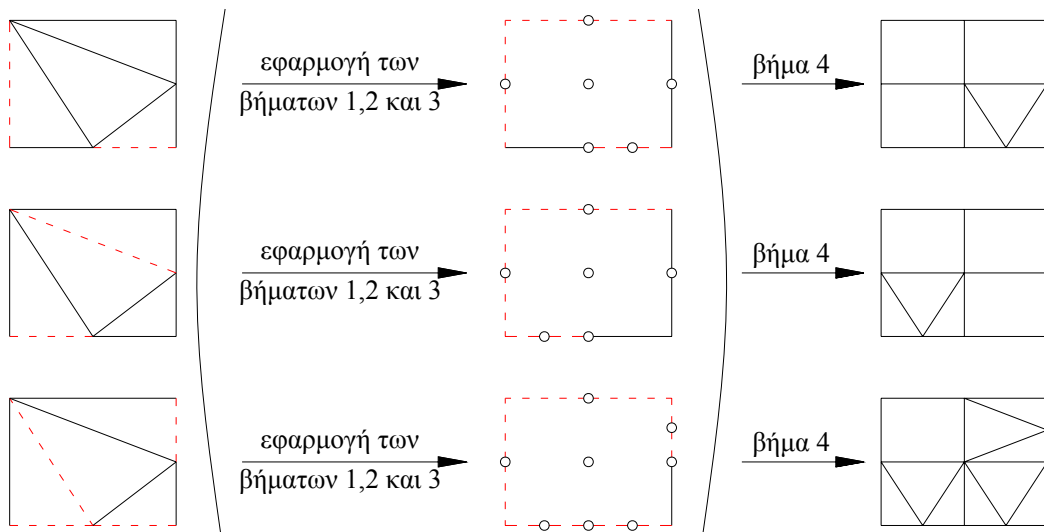
Εικόνα 3.24 : Παραδείγματα της τρίτης περίπτωσης του βήματος 3, στα οποία είναι μαρκαρισμένες μόνο πλευρές, οι οποίες είναι αμιγώς και πλευρές του μητρικού τετραπλεύρου. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

Αν είναι μαρκαρισμένη έστω και μία εκ των εσωτερικών πλευρών του μητρικού τετραπλεύρου και καμία από της πλευρές που έχουν προκύψει από διάσπαση μητρικής πλευράς, τότε η νέα διάσπαση του τελευταίου θα γίνει σύμφωνα με τον πέμπτο τρόπο διάσπασης. Μερικά παραδείγματα δίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 3.25 : Παραδείγματα της τρίτης περίπτωσης του βήματος 3, όπου είναι μαρκαρισμένη τουλάχιστον μία εσωτερική πλευρά του μητρικού τετραπλεύρου και καμία εκ των πλευρών που έχουν προκύψει από διάσπαση μητρικής πλευράς. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

Τέλος, αν είναι μαρκαρισμένη προς εμπλουτισμό κάποια εκ των πλευρών που έχουν προκύψει από διάσπαση πλευράς του μητρικού τετραπλεύρου, τότε το μητρικό τετράπλευρο διασπάται σύμφωνα με τον τέταρτο τρόπο και στη συνέχεια εμπλουτίζονται ορισμένα από τα νέα προκύπτουν τετράπλευρα, σύμφωνα με τους κόμβους που υπάρχουν. Μερικά τέτοια παραδείγματα φαίνονται στην ακόλουθη εικόνα :



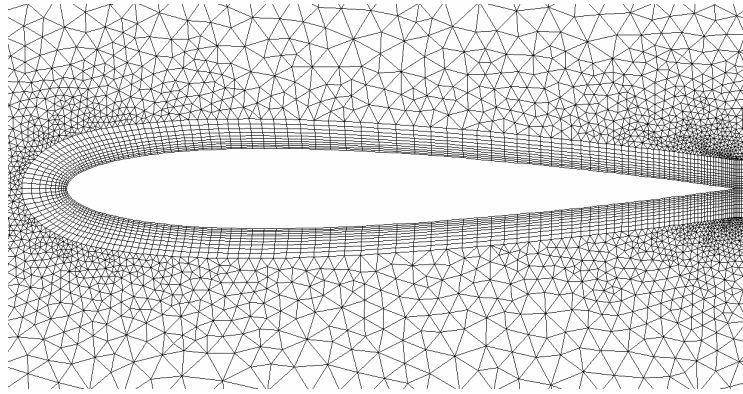
Εικόνα 3.26 : Παραδείγματα της τρίτης περίπτωσης του βήματος 4, στα οποία είναι μαρκαρισμένη προς εμπλουτισμό τουλάχιστον μία εκ των πλευρών που έχουν προκύψει από διάσπαση πλευράς του μητρικού τετραπλεύρου. Με διακεκομμένη γραμμή σημειώνονται οι προς εμπλουτισμό μαρκαρισμένες πλευρές.

3.6 Επιλογή κριτηρίων εμπλουτισμού

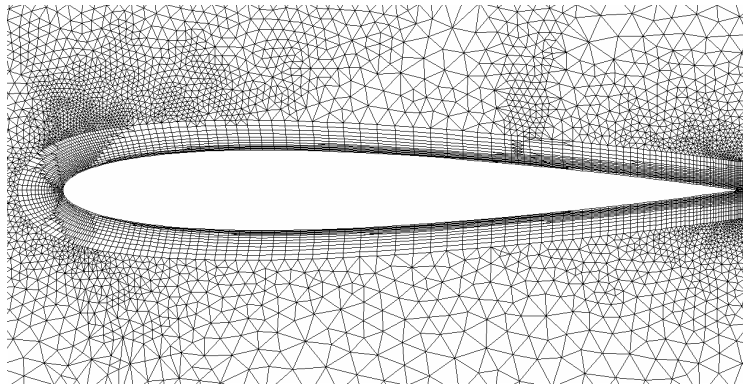
Τα κριτήρια προσαρμογής στην περίπτωση του προβλήματος της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων είναι τα ίδια με την περίπτωση του προβλήματος της προσαρμογής των μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων. Για το λόγο αυτό, παραπέμπουμε στην παράγραφο 2.6.

3.8 Εφαρμογή της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω μία ελεύθερη αεροτομή NACA

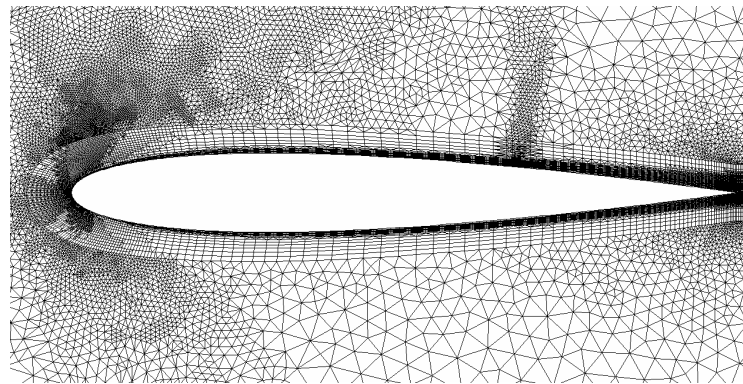
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων σε πρόβλημα ροής ρευστού γύρω από μία μεμονωμένη αεροτομή Naca. Ο αριθμός Mach της επ' άπειρο ροής είναι $M_\infty = 0.8$, ο αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή $Re = 6.5 \cdot 10^6$ και η γωνία της επ' άπειρο ροής $\alpha_\infty = 0^\circ$. Οι προσαρμογές που πραγματοποιήθηκαν ήταν τρεις. Αρχικά παρουσιάζουμε την αλλαγή στη μορφή του πλέγματος μέσω της εφαρμογής της προσαρμογής και παρατηρούμε ότι το πλέγμα πυκνώνει (υφίσταται προσαρμογή) στο σημείο πρόσπτωσης (σημείο ανακοπής), όπου έχουμε το φαινόμενο μηδενισμού της ταχύτητας, στο σημείο εκφυγής καθώς και στη θέση εμφάνισης του κρουστικού κύματος (φαινόμενο ασυνέχειας της πίεσης), το οποίο φαίνεται και στη δεύτερη σειρά εικόνων. Σε αυτή παρουσιάζονται οι γραμμές $iso - Mach$ και, όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, με την εφαρμογή της κάθε προσαρμογής, το πάχος του κύματος κρούσης μικραίνει, γεγονός που συνεπάγεται την καλύτερη πρόλεξη της λύσης. Στην τελευταία σειρά εικόνων φαίνεται η σταδιακή πύκνωση του πλέγματος στη θέση του κύματος κρούσης. Οι εικόνες που αναφέραμε ακολουθούν :



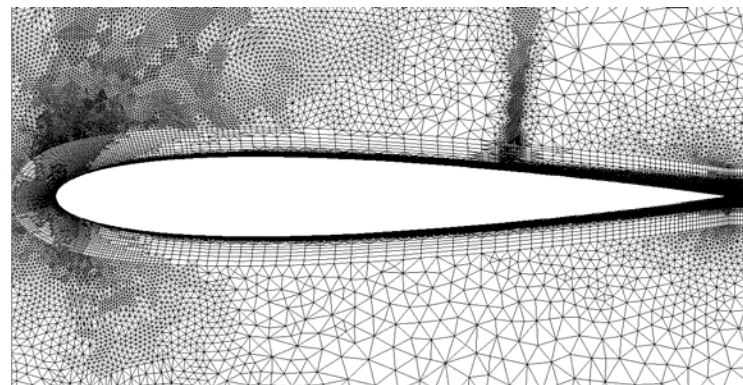
Εικόνα 3.38 : Το υβριδικό πλέγμα πριν την προσαρμογή



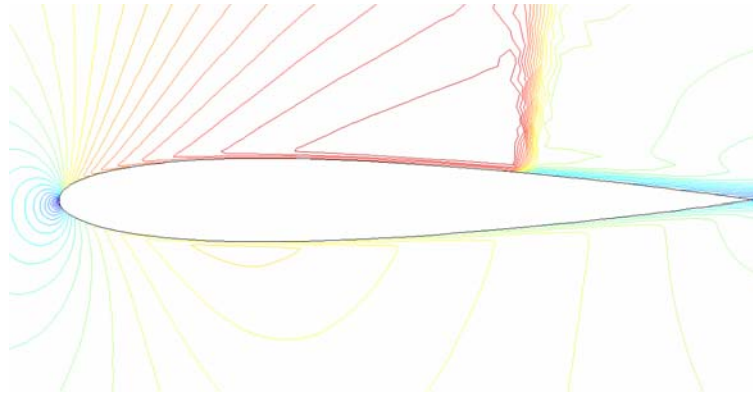
Εικόνα 3.39 : Το υβριδικό πλέγμα μετά την πρώτη προσαρμογή



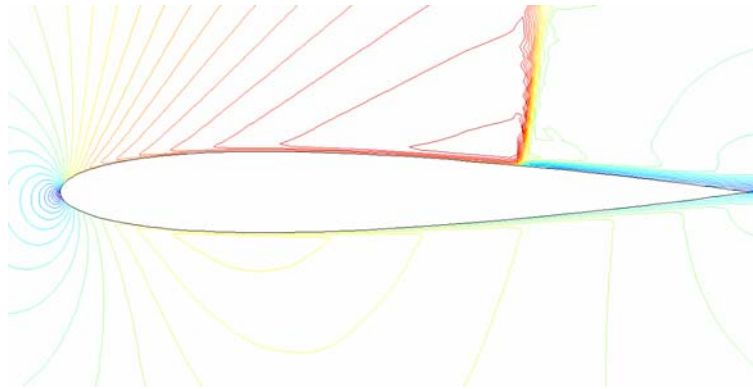
Εικόνα 3.40 : Το υβριδικό πλέγμα μετά την δεύτερη προσαρμογή



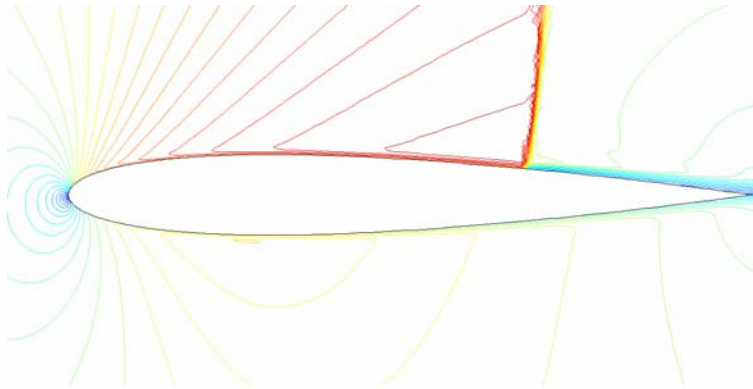
Εικόνα 3.41 : Το υβριδικό πλέγμα μετά την τρίτη προσαρμογή



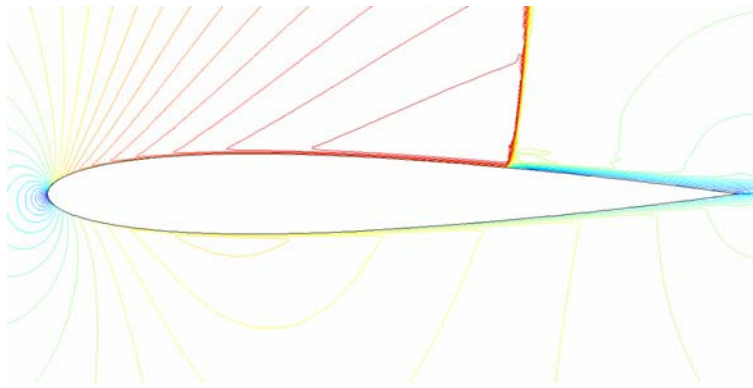
Εικόνα 3.42 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την πρώτη προσαρμογή



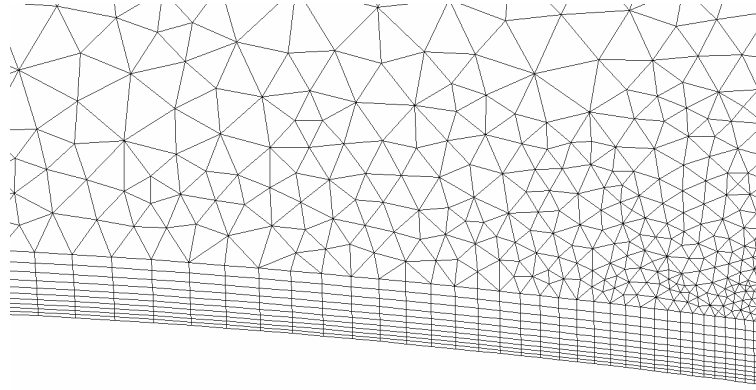
Εικόνα 3.43 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την δεύτερη προσαρμογή



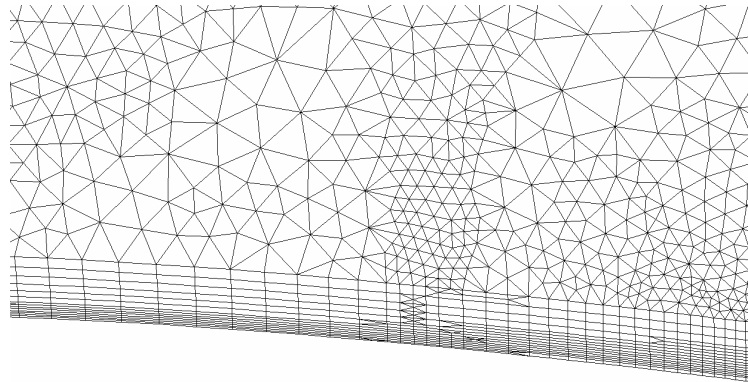
Εικόνα 3.44 : Οι γραμμές iso – Mach πριν την τρίτη προσαρμογή



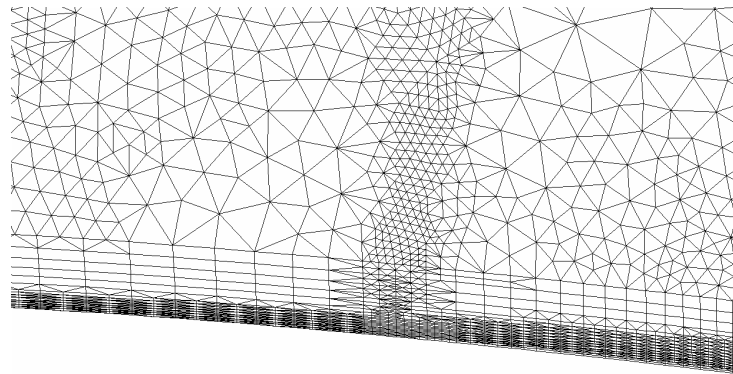
Εικόνα 3.45 : Οι γραμμές iso – Mach στο τέλος της επίλυσης



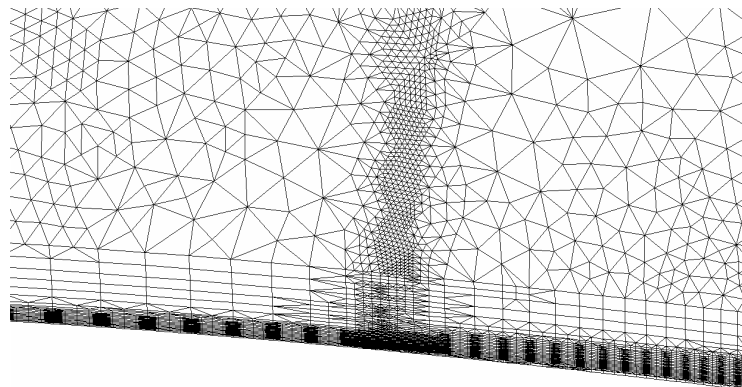
Εικόνα 3.46 : Το υβριδικό πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης πριν την προσαρμογή



Εικόνα 3.47 : Το υβριδικό πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την πρώτη προσαρμογή



Εικόνα 3.48 : Το υβριδικό πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την δεύτερη προσαρμογή



Εικόνα 3.49 : Το υβριδικό πλέγμα στη θέση του κύματος κρούσης μετά την τρίτη προσαρμογή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παρουσίαση αποτελεσμάτων εφαρμογής της προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων στην μεμονωμένη αεροτομή RAE 2822

4.1 Εισαγωγή

Όπως ήδη προαναφέραμε, για την πιστοποίηση του αλγορίθμου προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων, όπως και για άλλο κάθε αλγόριθμο, απαιτείται να γίνει εφαρμογή του σε κάποια ήδη «γνωστά προβλήματα», για να αποδειχθεί ότι όντως ο αλγόριθμος προσεγγίζει την πραγματική λύση. Με τον όρο «γνωστά προβλήματα» εννοούμε προβλήματα που έχουν επιλυθεί στο παρελθόν και γι' αυτό διαθέτουμε τη λύση τους (π.χ. προβλήματα, τα οποία έχουν επιλυθεί πειραματικά και διαθέτουμε τα πειραματικά στοιχεία).

Έτσι, σε αυτό το κεφάλαιο, για την πιστοποίηση του αλγορίθμου προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων θα γίνει εφαρμογή του σε προβλήματα ροής γύρω από τη μεμονωμένη διηχητική αεροτομή RAE 2822. Για αυτή την αεροτομή είναι γνωστά τα πειραματικά στοιχεία για τις περιπτώσεις R6, R9 και R10 (βλ. [6]). Εν συντομία, αναφέρουμε τις συνθήκες των περιπτώσεων στον ακόλουθο πίνακα :

Περίπτωση	Mach _∞	Reynolds	α _∞
R6	0.725	6.5x10 ⁶	2.60°
R9	0.730	6.5x10 ⁶	2.80°
R10	0.750	6.2x10 ⁶	2.81°

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα εξεταστούν, το μοντέλο τύρβης που χρησιμοποιείται είναι εκείνο των Spalart – Allmaras χαμηλών αριθμών Reynolds.

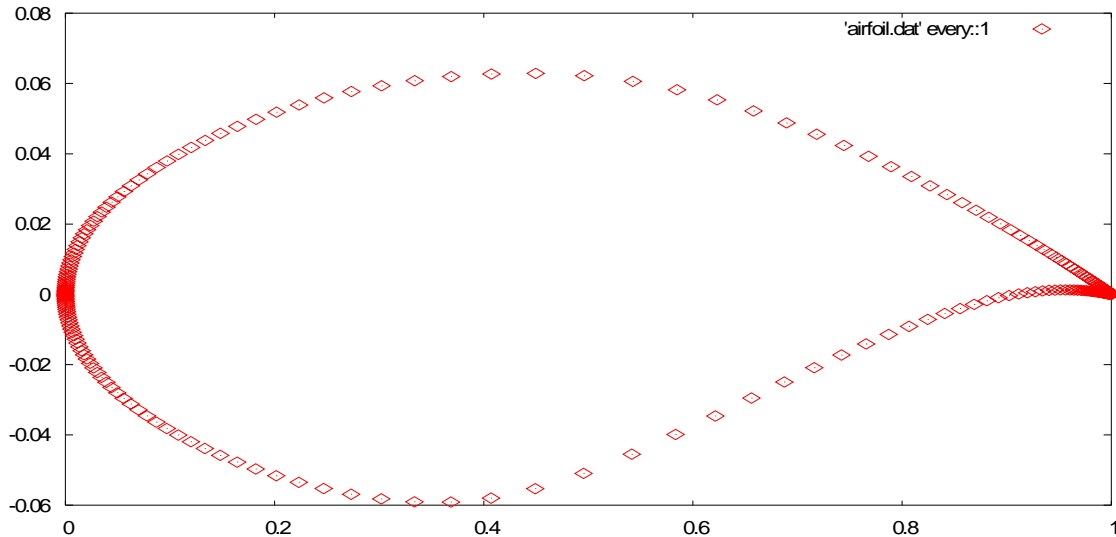
Ακόμη, για την απόδειξη του γεγονότος, ότι τα αποτελέσματα με χρήση προσαρμογής είναι ακριβέστερα από εκείνα χωρίς προσαρμογή, θα προχωρήσουμε σε εξέταση των ανωτέρω περιπτώσεων με πλέγματα με προσαρμογή και με πλέγματα χωρίς προσαρμογή και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Παράλληλα, επιθυμούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τη χρήση υβριδικών πλεγμάτων με προσαρμογή με τα αντίστοιχα με χρήση μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων, για να διαπιστώσουμε αν το πρώτο είδος πλεγμάτων επιτυγχάνει καλύτερη προσέγγιση της λύσης από το δεύτερο. Για το λόγο αυτό, εξετάζουμε τις ίδιες περιπτώσεις ροής γύρω από τη διηχητική αεροτομή RAE 2822 και με τη χρήση μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα των υβριδικών πλεγμάτων με προσαρμογή.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων και τον σχολιασμό τους ανά περίπτωση.

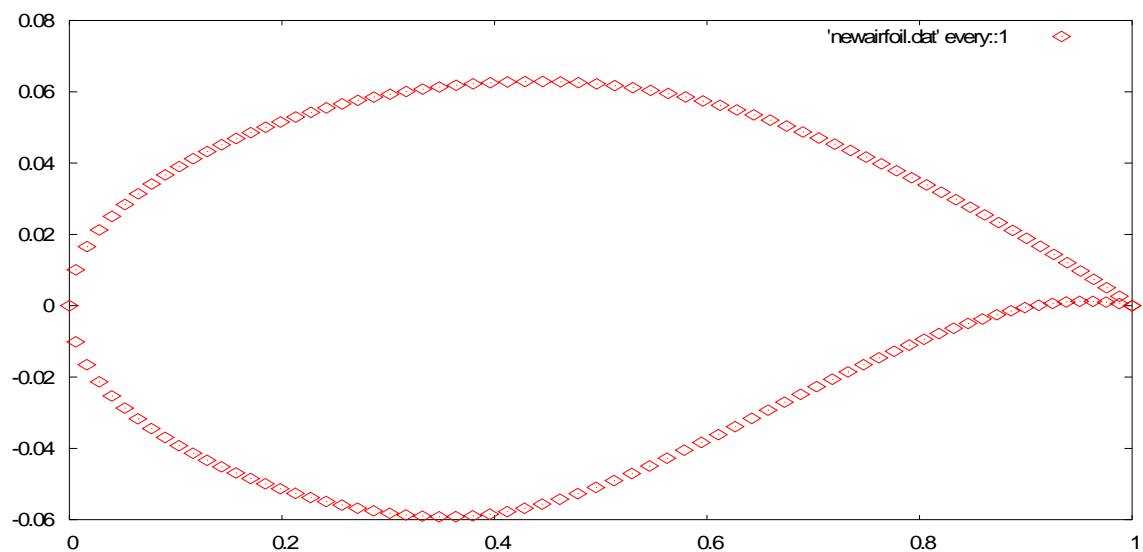
4.2 Περίπτωση R6

Η δημιουργία του πλέγματος ξεκινά με την κατανομή σημείων πάνω στην αεροτομή. Η κατανομή των σημείων πάνω στην αεροτομή, όπως αυτή δίνεται από τα πειραματικά στοιχεία (βλ. [6]), περιέχει 213 σημεία και φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 4.1 : Κατανομή των σημείων πάνω στην αεροτομή, όπως αυτή δίνεται από τα πειραματικά στοιχεία

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε μια νέα κατανομή με 141 σημεία. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται με τη λογική τα σημεία πάνω στο περίγραμμα δεν πρέπει να είναι πάρα πολλά γιατί σκοπός της διερεύνησης που θα γίνει είναι η διαπίστωση ή όχι του αν μπορεί να προσεγγιστεί η πραγματική λύση από ένα σχετικά αραιό πλέγμα. Τέλος, αναφέρουμε ότι η ανακατανομή των σημείων έγινε με χρήση του κώδικα `onpecurv3` του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών. Η νέα κατανομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

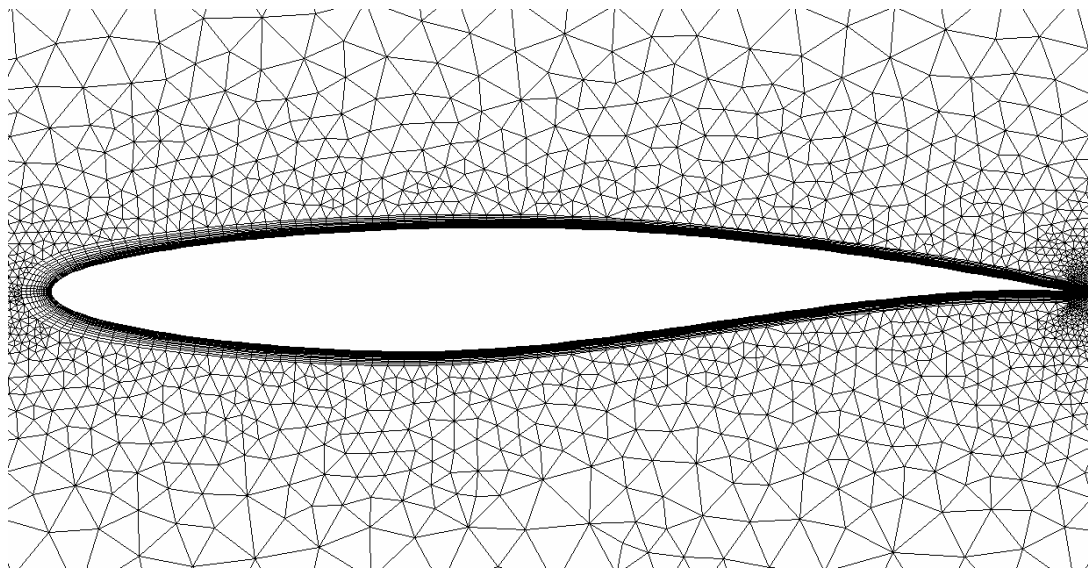


Εικόνα 4.2: Νέα κατανομή 141 σημείων πάνω στην αεροτομή για την επίλυση της περίπτωσης R6

Μετά τον προσδιορισμό της κατανομής των σημείων πάνω στην αεροτομή, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δημιουργία πλεγμάτων γύρω από την αεροτομή. Αυτό θα γίνει με τη χρήση του κώδικα `hybgridgen2d` του Ε.Θ.Σ., ο οποίος έχει τη δυνατότητα να δημιουργεί και υβριδικά πλέγματα αλλά και μη – δομημένα πλέγματα τετράπλευρων στοιχείων. Τα πλέγματα που δημιουργούνται είναι δύο : ένα υβριδικό, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για στις προσπάθειες επίλυσης με και χωρίς προσαρμογή, και ένα μη –δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, στο το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για επίλυση με προσαρμογή. Τα πλέγματα αυτά τα παρουσιάζουμε στις ακόλουθες παραγράφους ανά περίπτωση.

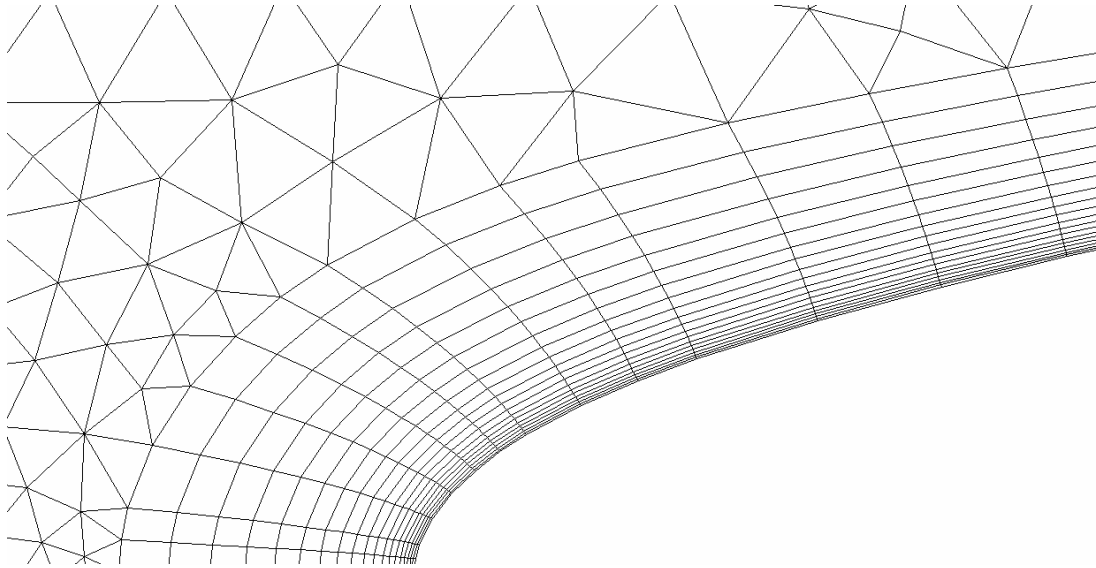
4.2.1 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

Για αυτό το πλέγμα δημιουργήσαμε είκοσι «στρώματα» τετράπλευρων στοιχείων και το υπόλοιπο χωρίο πληρώθηκε με μη – δομημένα τριγωνικά στοιχεία, όπως υπαγορεύει η δομή των υβριδικών πλεγμάτων. Το κοντά στην αεροτομή τμήμα του πλέγματος που δημιουργήθηκε φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα (δεν μπορεί να προβληθεί όλο το πλέγμα για λόγους ευκρίνειας) :



Εικόνα 4.3: Αρχικό υβριδικό πλέγμα για την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

Μια καλύτερη απεικόνιση του πλέγματος πάνω στο τοίχωμα της αεροτομής φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

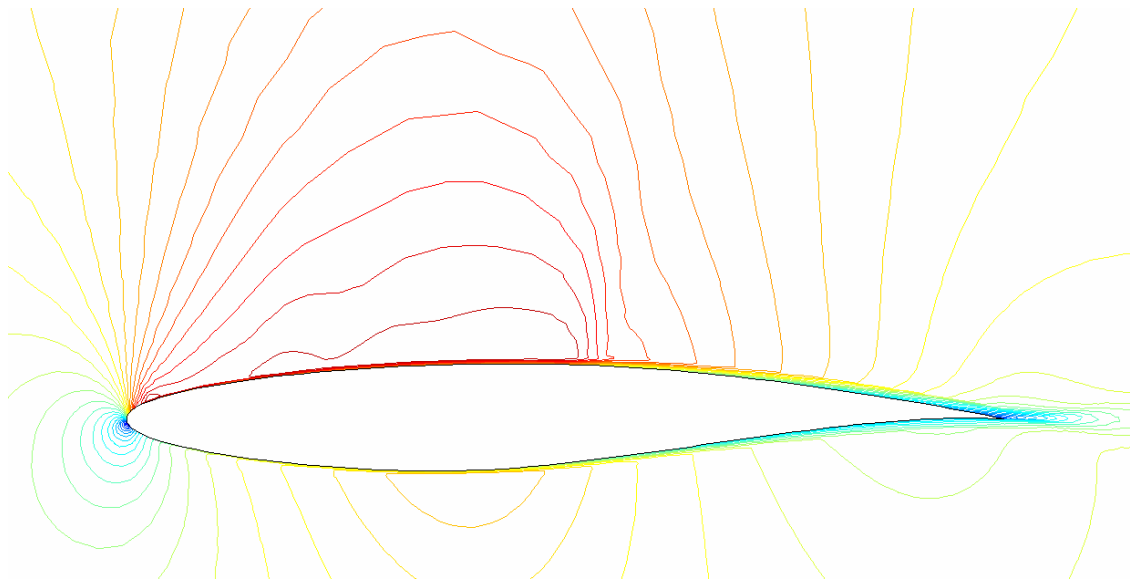


Εικόνα 4.4: Τμήμα του αρχικού υβριδικού πλέγματος κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής για την επίλυση της περίπτωσης R6

Το ανωτέρω πλέγμα θα χρησιμοποιηθεί ως αρχικό πλέγμα και στην περίπτωση που χρησιμοποιείται προσαρμογή (βλ. επόμενη παράγραφος).

Στη συνέχεια, προχωρούμε στη επίλυση της ροής, το πέρας της οποίας τίθεται στους 3000 υπολογιστικούς κύκλους,

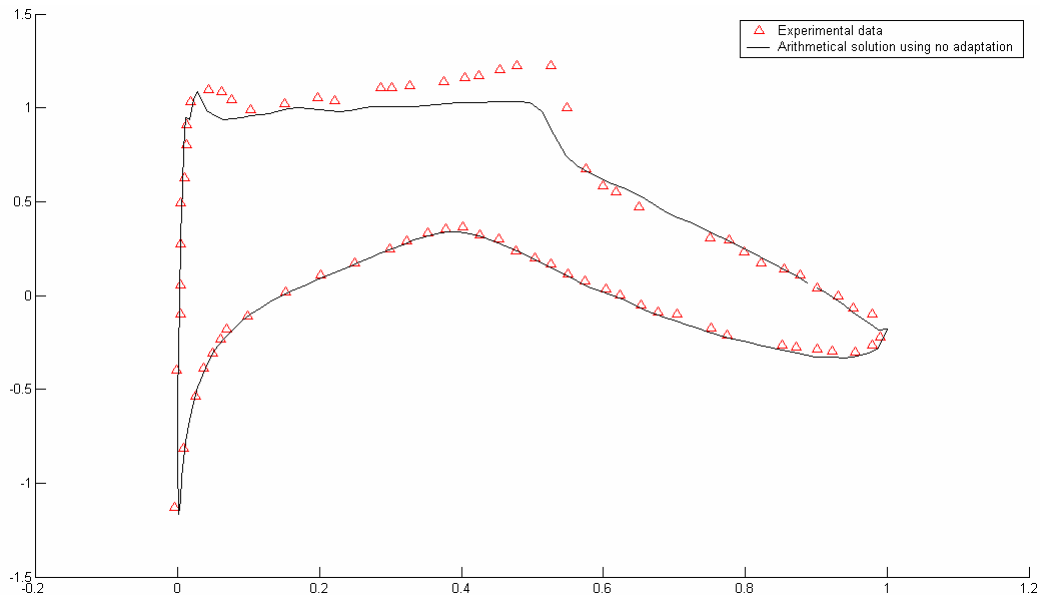
Στην παρούσα περίπτωση, όπου δεν χρησιμοποιείται προσαρμογή, η μορφή του πλέγματος δεν αλλάζει. Στην επόμενη εικόνα φαίνονται οι γραμμές ισο – Mach του πεδίου ροής μετά την επίλυση με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή :



Εικόνα 4.5: Γραμμές ισο – Mach του πεδίου ροής μετά το πέρας της επίλυσης με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει στην τελευταία εικόνα, το πάχος του εμφανιζόμενου κύματος κρούσης είναι σχετικά μεγάλο, γεγονός που συνεπάγεται το ότι η λύση που προέκυψε δεν είναι επαρκώς ακριβής.

Στην ακόλουθη εικόνα φαίνεται η κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή στο τέλος της επίλυσης εν συγκρίσει με την αντίστοιχη πειραματική :



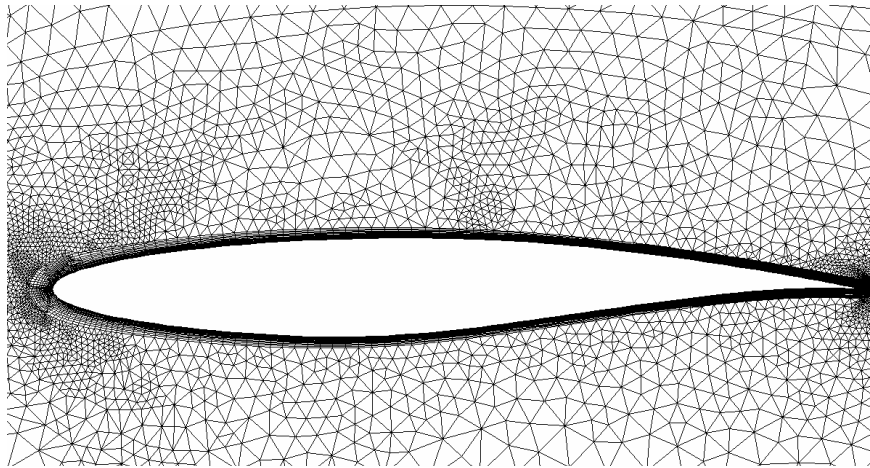
Εικόνα 4.6: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή στο τέλος της επίλυσης με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή και σύγκρισή της με την αντίστοιχη πειραματική

Είναι προφανές, ότι η θέση εμφάνισης του κύματος κρούσης δεν προσεγγίζεται επακριβώς.

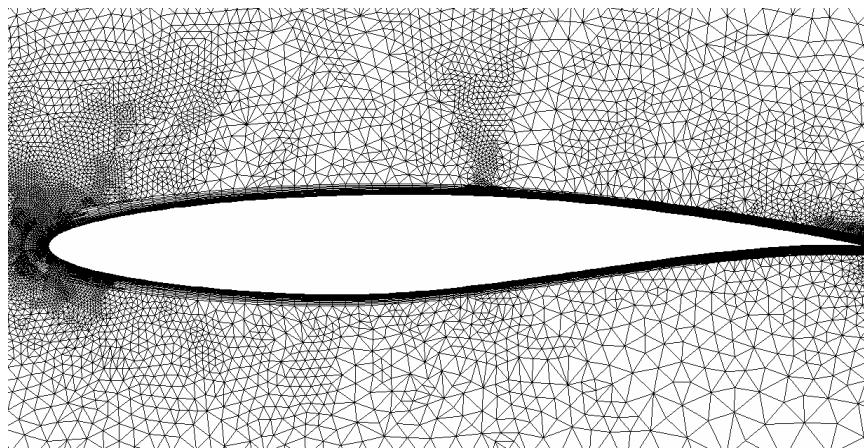
4.2.2 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της επίλυσης με χρήση του ανωτέρω πλέγματος, αλλά με προσαρμογή. Σε αυτή την περίπτωση η μορφή του πλέγματος αλλάζει μετά από κάθε προσαρμογή. Και εδώ, ο μέγιστος αριθμός υπολογιστικών κύκλων που θέτουμε είναι 3000. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης της ροής έχουμε επιλέξει να πραγματοποιηθούν δύο προσαρμογές, η πρώτη στον χιλιοστό υπολογιστικό κύκλο και η δεύτερη μετά από 1000 κύκλους, δηλαδή στον κύκλο 2000. Το αισθητήριο που χρησιμοποιείται είναι ο αριθμός Mach (αφού αναμένουμε την εμφάνιση κύματος κρούσης).

Στο πλαίσιο της επίδειξης της πυκνώσης του πλέγματος, παρουσιάζουμε στις ακόλουθες εικόνες τη μορφή τμήματος αυτού κοντά στην αεροτομή, μετά από τις διάφορες προσαρμογές (η μορφή του πλέγματος πριν οποιαδήποτε προσαρμογή είναι εκείνη της εικόνας 4.3) :

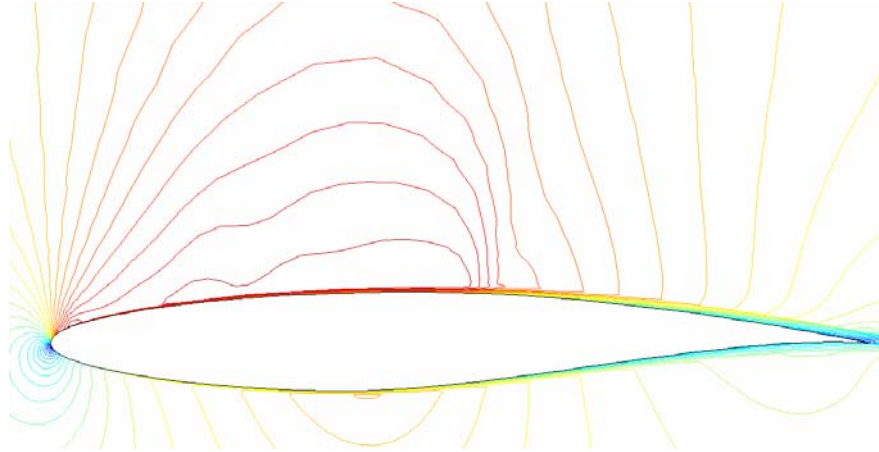


Εικόνα 4.7: Μορφή του πλέγματος κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, μετά την πρώτη προσαρμογή

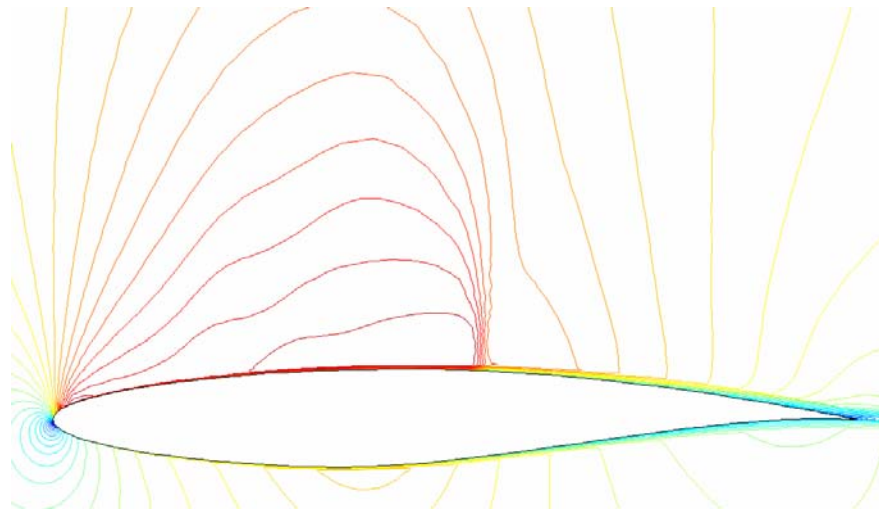


Εικόνα 4.8: Μορφή του πλέγματος κοντά στο τοίχωμα της αεροτομής κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, μετά την δεύτερη προσαρμογή

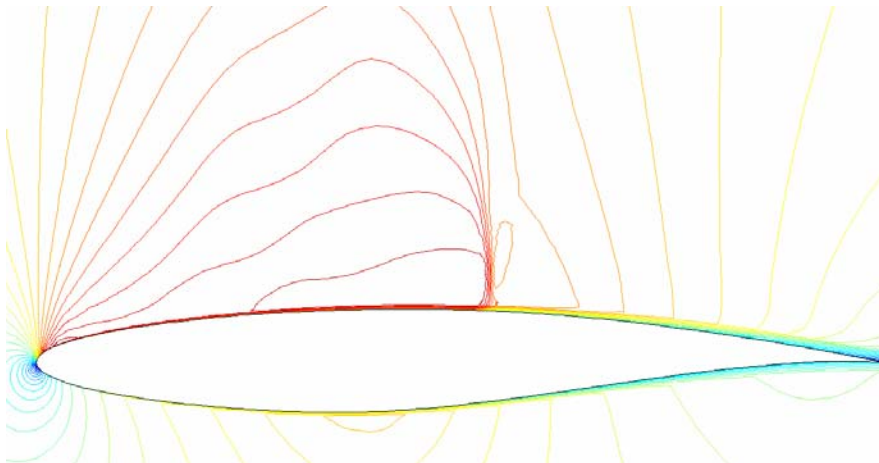
Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει το πλέγμα πυκνώνει στη θέση εμφάνισης του κύματος κρούσης, στο σημείο πρόσπτωσης, στο σημείο εκφυγής και πάνω στο οριακό στρώμα. Μάλιστα, σε κάθε προσαρμογή, το πλέγμα πυκνώνει ακόμη περισσότερο στις ανωτέρω θέσεις. Το αποτέλεσμα αυτής της πυκνώσης μπορεί να φανεί στις ακόλουθες εικόνες, οι οποίες παρουσιάζουν τις γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής. Σε αυτές τις εικόνες είναι εμφανής η μείωση του πάχους του κύματος κρούσης, γεγονός που συνεπάγεται την καλύτερη προσέγγιση της λύσης. Οι εικόνες αυτές παρατίθενται παρακάτω :



Εικόνα 4.9: Γραμμές iso – Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν από την πρώτη προσαρμογή (με χρήση, δηλαδή, του αρχικού πλέγματος)

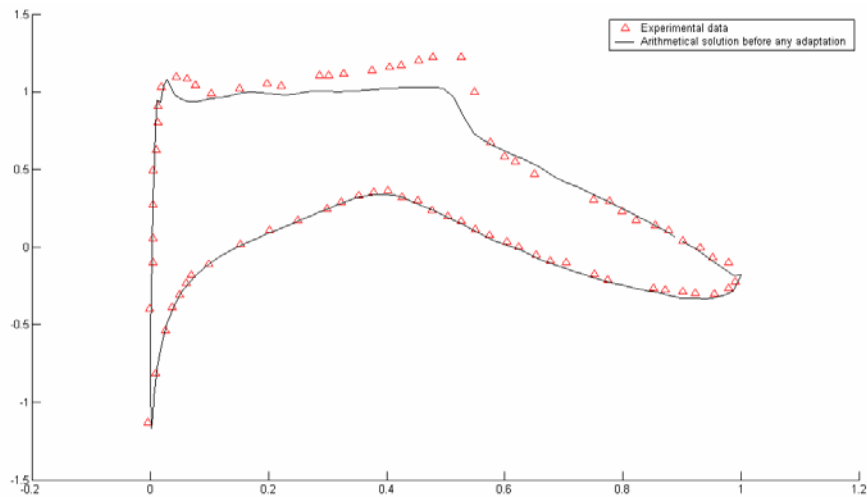


Εικόνα 4.10: Γραμμές iso – Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν από τη δεύτερη προσαρμογή (με χρήση, δηλαδή, του πλέγματος που έχει προκύψει μετά την πρώτη προσαρμογή)

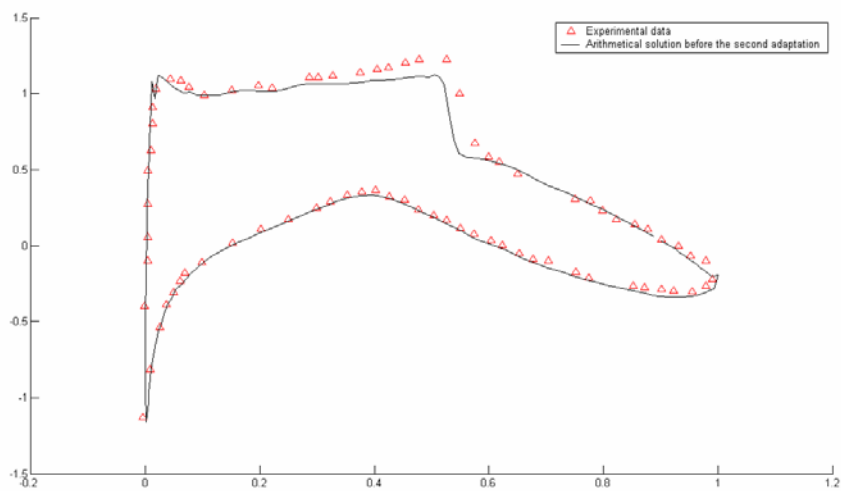


Εικόνα 4.11: Γραμμές iso – Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (με χρήση, δηλαδή, του πλέγματος που έχει προκύψει μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

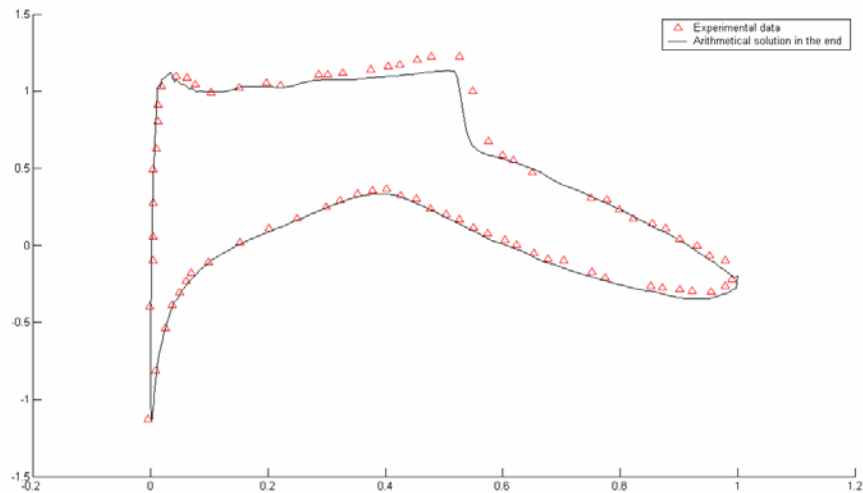
Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, παρουσιάζουμε την εξέλιξη της λύσης, δηλαδή την κατανομή του $-c_p$ στην αεροτομή εν συγκρίσει με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Παρατηρούμε, ότι με τη διαδοχική πραγματοποίηση προσαρμογών στο πλέγμα, η αριθμητική λύση προσεγγίζει τα πειραματικά δεδομένα όλα και περισσότερο. Οι εικόνες αυτές φαίνονται ακολούθως :



Εικόνα 4.12: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν από την πρώτη προσαρμογή (με χρήση, δηλαδή, του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.13: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν από τη δεύτερη προσαρμογή (με χρήση, δηλαδή, του πλέγματος που έχει προκύψει από την πρώτη προσαρμογή)

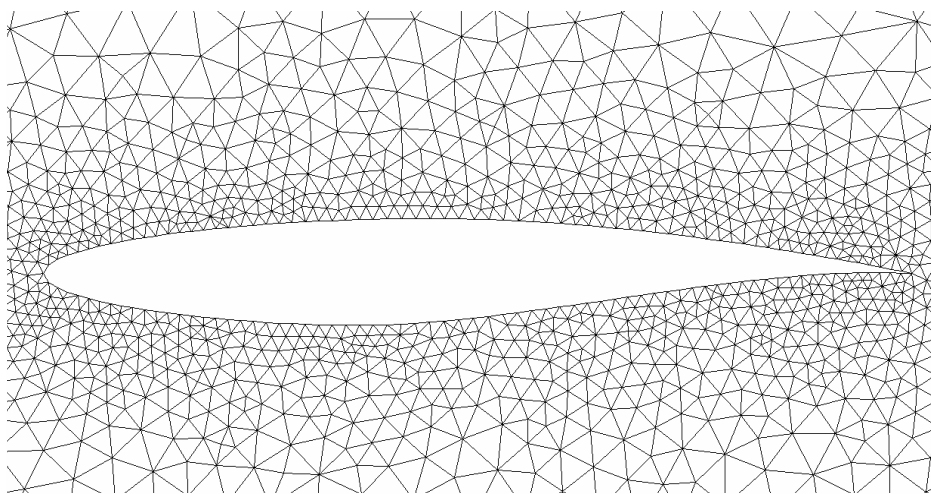


Εικόνα 4.14: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν από την πρώτη προσαρμογή (με χρήση, δηλαδή, του πλέγματος που έχει προκύψει από τη δεύτερη προσαρμογή)

Παρατηρούμε ότι με κάθε προσαρμογή, η αριθμητική λύση προσεγγίζει την πραγματική.

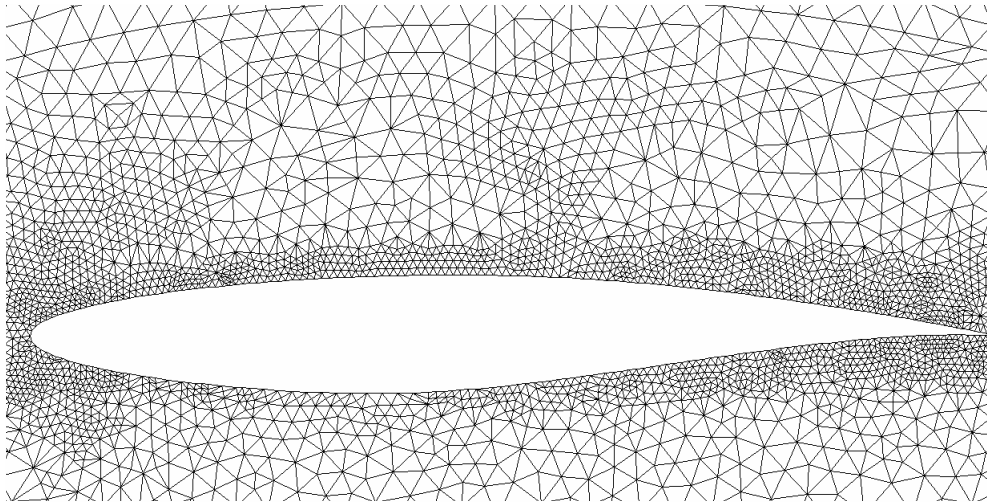
4.2.3 Επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή

Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε τα στοιχεία της προσαρμογής ίδια με εκείνα της προηγούμενης παραγράφου, έτσι ώστε να υπάρχει μια κοινή βάση σύγκρισης. Αρχικά, χρησιμοποιώντας την κατανομή σημείων, που φαίνεται στην εικόνα 4.2, δημιουργούμε το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων, τμήμα του οποίου κοντά στην αεροτομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

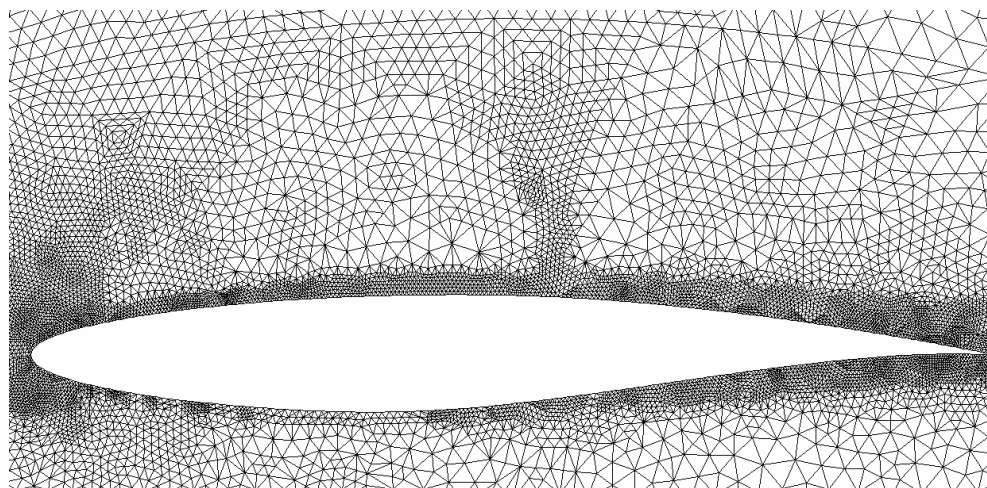


Εικόνα 4.15: Τμήμα του αρχικού πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις μεταβολές στη μορφή του πλέγματος μετά από κάθε προσαρμογή :

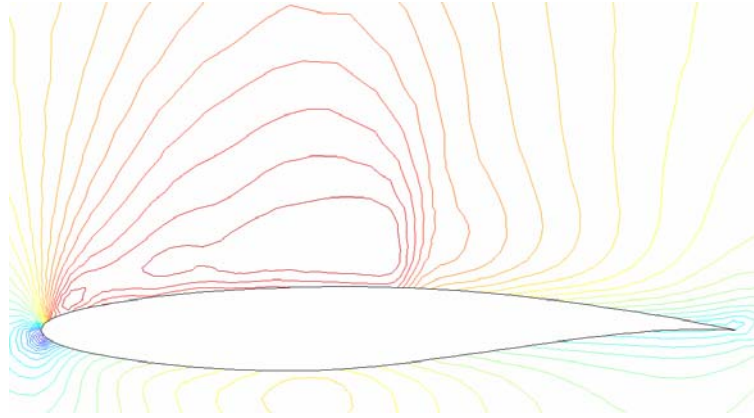


Εικόνα 4.16: Μορφή του πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, μετά την πρώτη προσαρμογή

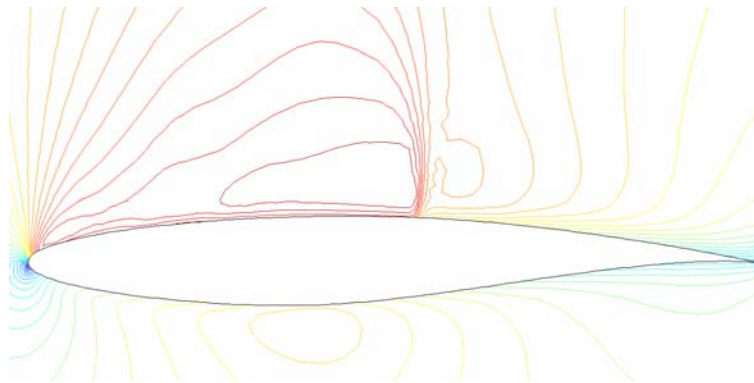


Εικόνα 4.17: Μορφή του πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, μετά τη δεύτερη προσαρμογή

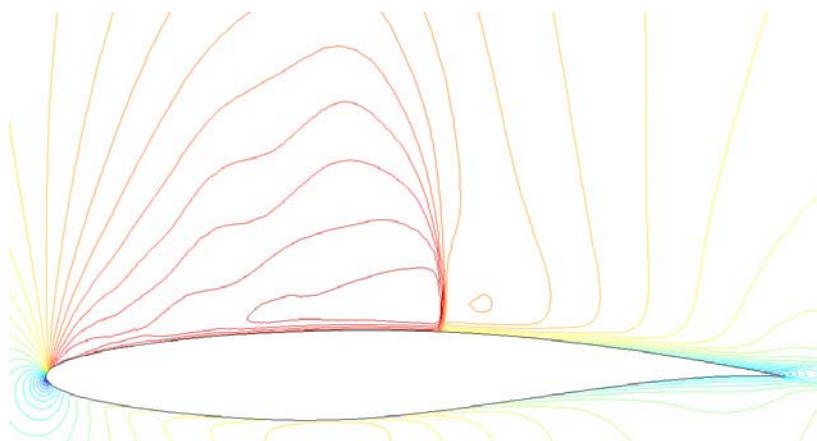
Και εδώ παρατηρούμε, ότι το πλέγμα πυκνώνει στη θέση εμφάνισης του κύματος κρούσης, στο σημείο πρόσπτωσης, στο σημείο εκφυγής και πάνω στο οριακό στρώμα και ότι, σε κάθε προσαρμογή, το πλέγμα πυκνώνει ακόμη περισσότερο στις ανωτέρω θέσεις. Το αποτέλεσμα αυτής της πυκνώσης μπορεί να φανεί στις ακόλουθες εικόνες, οι οποίες παρουσιάζουν τις γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής. Σε αυτές τις εικόνες είναι εμφανής η μείωση του πάχους του κύματος κρούσης, γεγονός που συνεπάγεται την καλύτερη προσέγγιση της λύσης. Οι εικόνες αυτές φαίνονται παρακάτω :



Εικόνα 4.18: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)



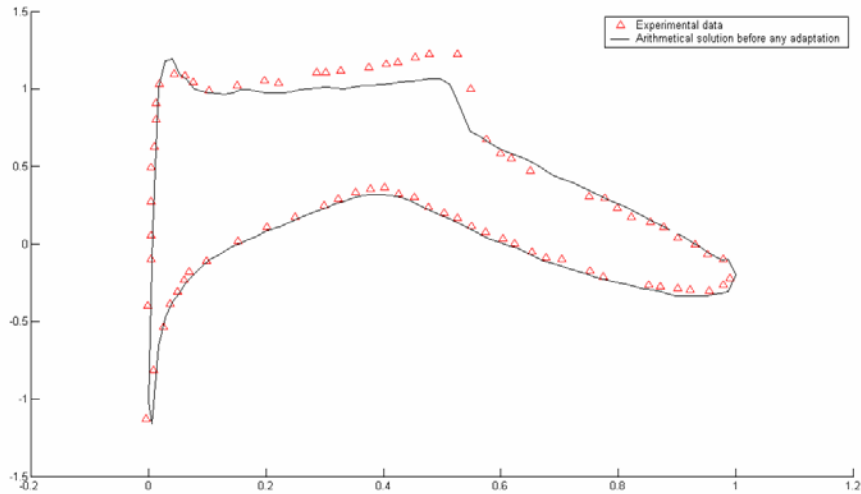
Εικόνα 4.19: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)



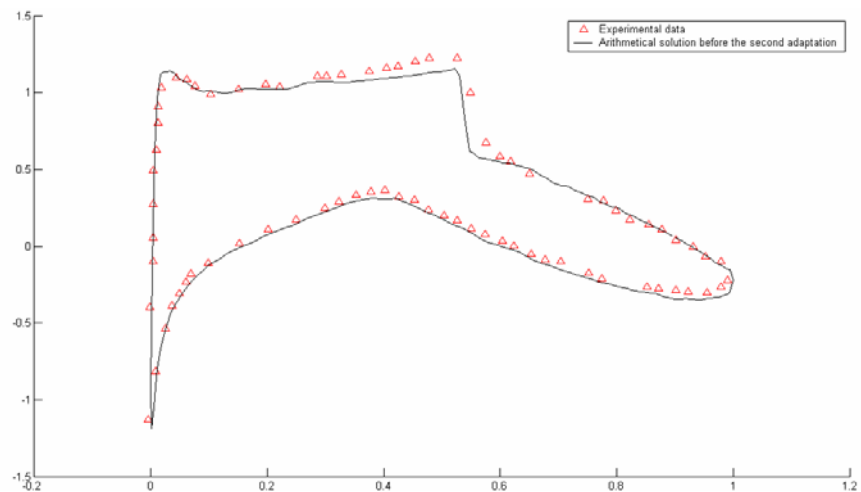
Εικόνα 4.20: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Παρατηρούμε και εδώ, ότι το πάχος του κύματος κρούσης ελαττώνεται με εφαρμογή της κάθε προσαρμογής.

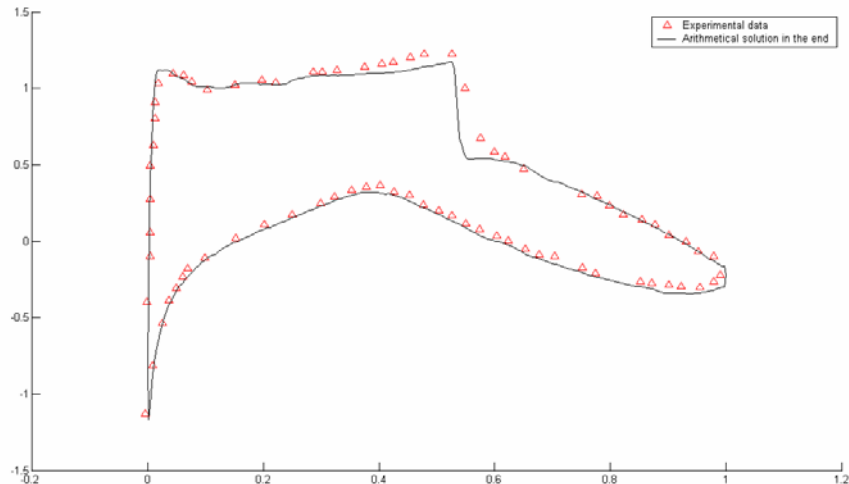
Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, εν συγκρίσει με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα :



Εικόνα 4.21: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων εν συγκρίσει με την πειραματική κατανομή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.22: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων εν συγκρίσει με την πειραματική κατανομή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)

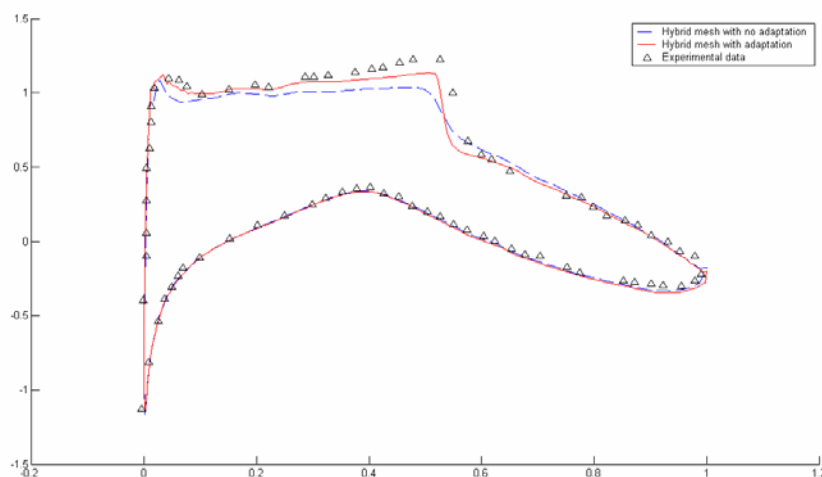


Εικόνα 4.23: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R6 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων εν συγκρίσει με την πειραματική κατανομή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η εξελισσόμενη λύση προσεγγίζει την πραγματική λύση με κάθε προσαρμογή.

4.2.4 Συγκρίσεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R6 – συμπεράσματα

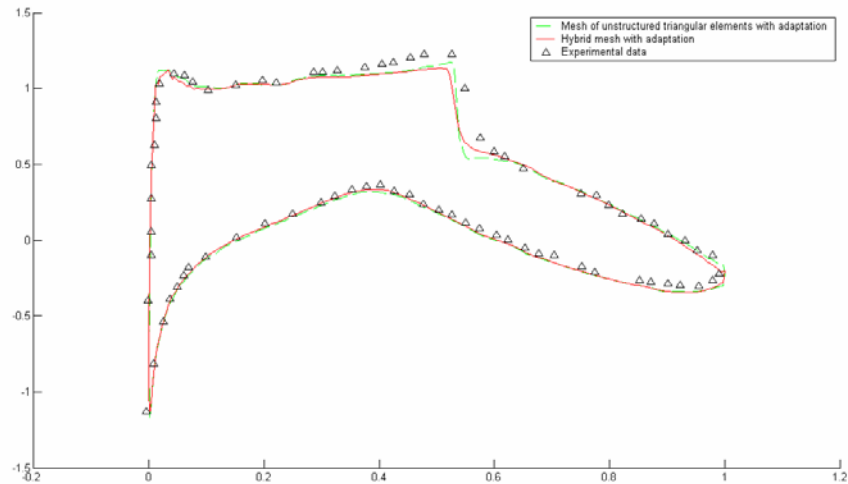
Στην ακόλουθη εικόνα παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.



Εικόνα 4.24: Σύγκριση τελικών κατανομών του $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με και χωρίς προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με διακεκομμένη γραμμή η κατανομή για χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή και με τρίγωνα, τα πειραματικά στοιχεία.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα (και επομένως την πραγματική λύση) από την αντίστοιχη με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που πρόκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.



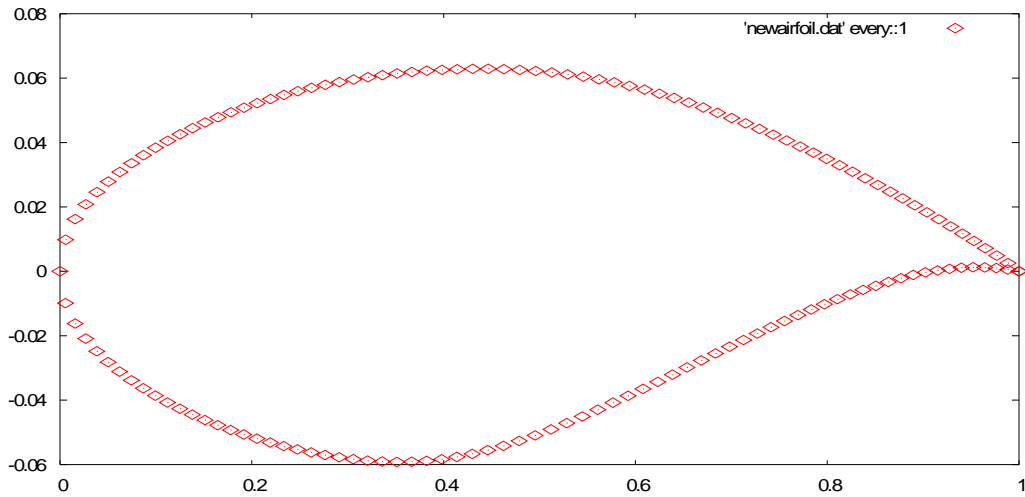
Εικόνα 4.25: Σύγκριση τελικών κατανομών του $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή και μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R6. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με διακεκομμένη γραμμή η κατανομή για χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή και με τρίγωνα, τα πειραματικά στοιχεία.

Στην τελευταία εικόνα παρατηρούμε, ότι η κατανομή που προέκυψε με τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή προσεγγίζει περισσότερο τα πειραματικά δεδομένα (οπότε και την πραγματική λύση) απ’ ότι η αντίστοιχη με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, συμπεραίνουμε, ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή είναι εκείνα που προσεγγίζουν περισσότερο την πραγματική λύση.

4.3 Περίπτωση R9

Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε μια νέα κατανομή 145 σημείων πάνω στην αεροτομή. Η κατανομή αυτή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

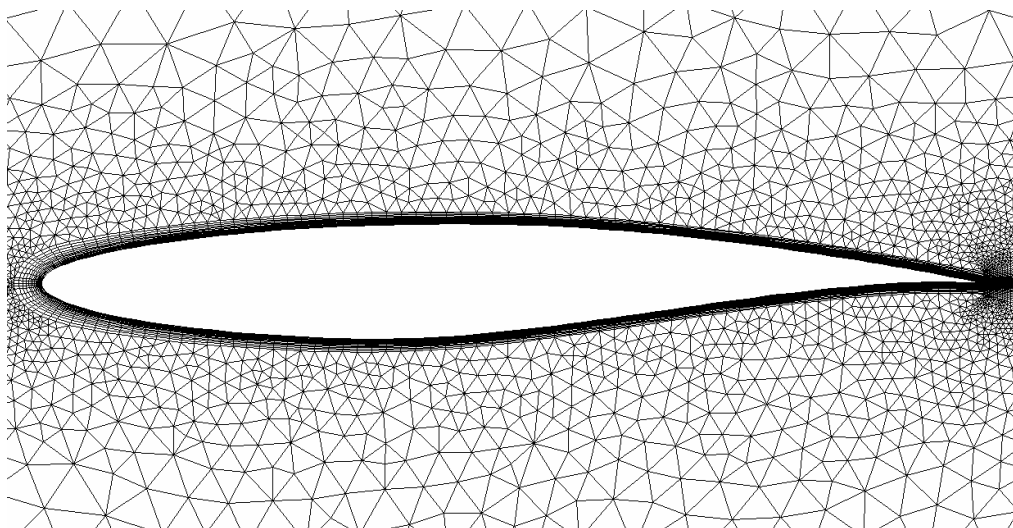


Εικόνα 4.26: Νέα κατανομή 145 σημείων πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9

4.3.1 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της επίλυσης της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή. Οι κύκλοι αριθμητικής επίλυσης ορίζονται να είναι 3000.

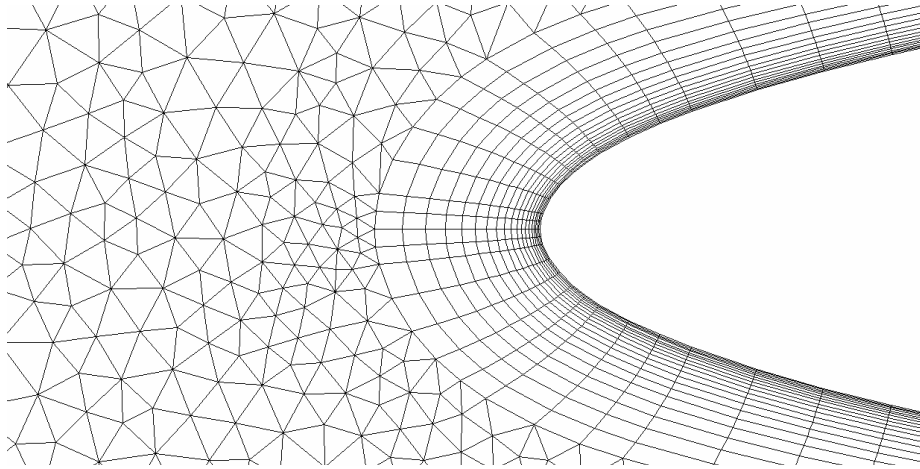
Αρχικά, με βάση την κατανομή των σημείων που φαίνεται στην εικόνα 4.26 δημιουργούμε το υβριδικό πλέγμα, στο οποίο καθορίζουμε να υπάρχουν είκοσι στρώματα (layers) τετράπλευρων στοιχείων. Τμήμα του πλέγματος αυτού κοντά στην αεροτομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 4.27: Τμήμα του αρχικού υβριδικού πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9

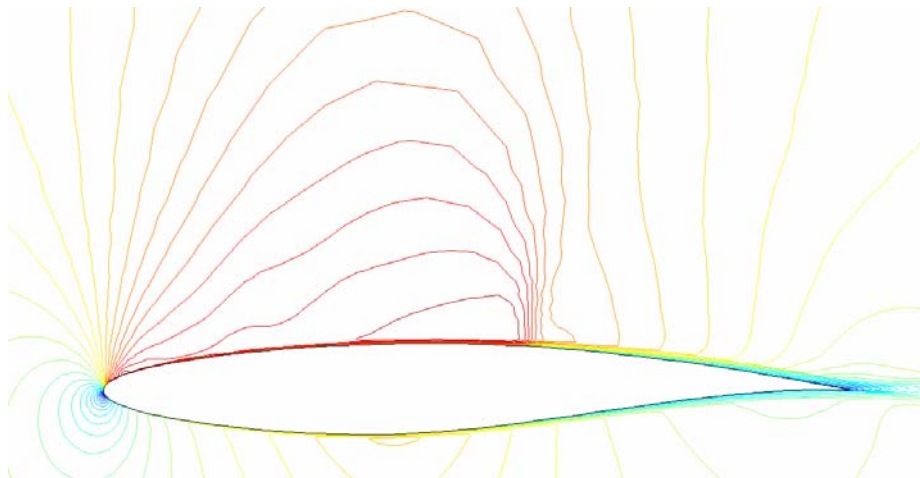
Το πλέγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί ως αρχικό πλέγμα και στην ακόλουθη παράγραφο επίλυσης της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή.

Μία καλύτερη εικόνα του πλέγματος κοντά στην αεροτομή δίνεται παρακάτω :



Εικόνα 4.28: Τμήμα του αρχικού υβριδικού πλέγματος κοντά στο σημείο πρόσπτωσης κατά την επίλυση της περίπτωσης R9

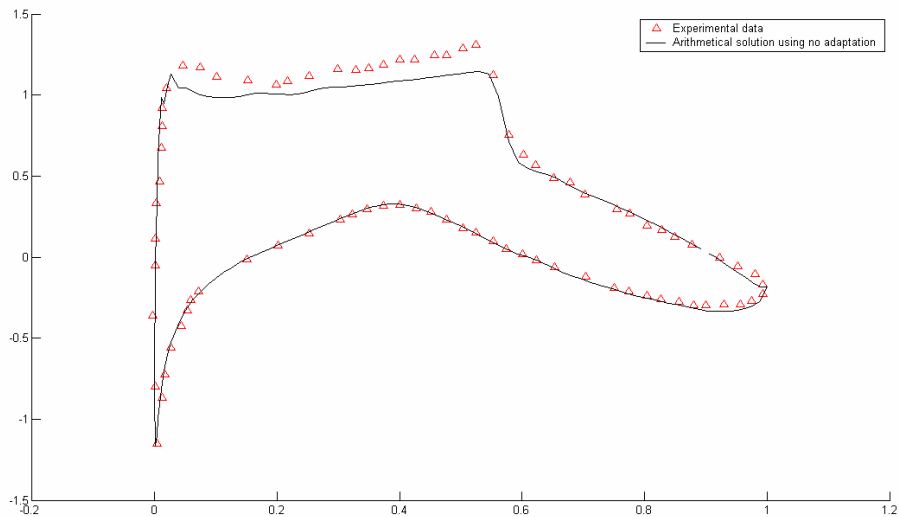
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τη μορφή των γραμμών ισο – Mach του πεδίου ροής (κοντά στην αεροτομή) που προέκυψε στο τέλος της επίλυσης :



Εικόνα 4.29: Γραμμές ισο – Mach του πεδίου ροής κατά την επίλυση της περίπτωσης R9, με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

Παρατηρούμε, ότι το πάχος του κύματος κρούσης που σχηματίζεται είναι σχετικά μεγάλο, γεγονός που συνεπάγεται απόκλιση από την πραγματική λύση.

Τέλος, παρουσιάζουμε την κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή που προέκυψε στο τέλος της επίλυσης, συγκρίνοντάς την ταυτόχρονα με τα πειραματικά δεδομένα :

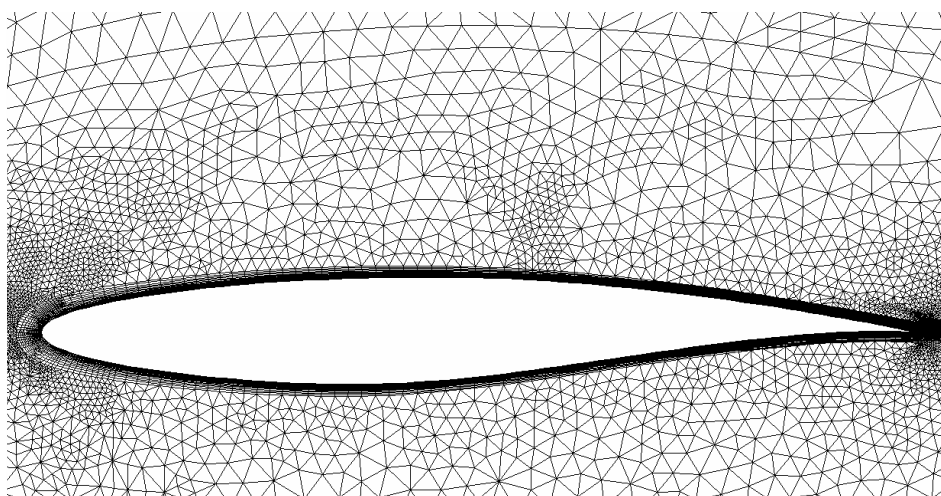


Εικόνα 4.30: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9, με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή, και σύγκρισή της με τα πειραματικά δεδομένα. Με συνεχόμενη γραμμή φαίνεται η υπολογισμένη κατανομή και με τρίγωνα τα πειραματικά σημεία.

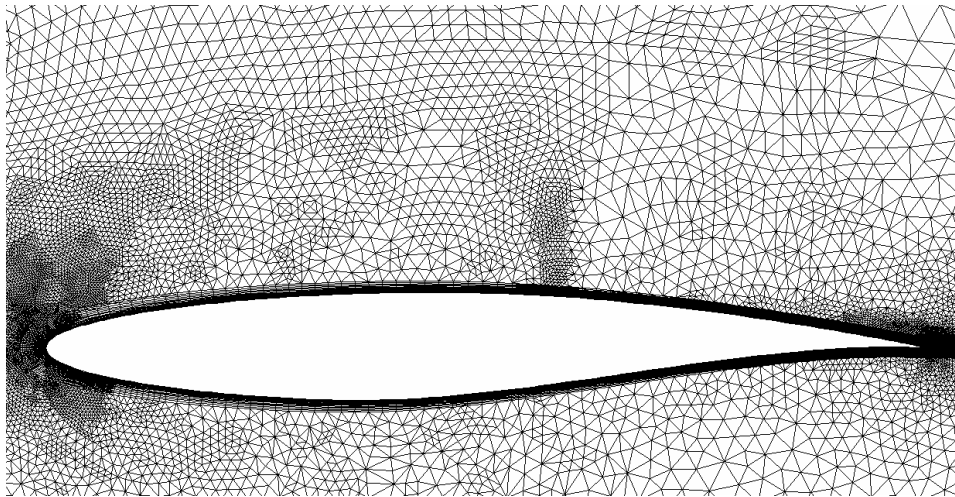
4.3.2 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση του πλέγματος της εικόνα 4.27 αλλά με προσαρμογή. Οι υπολογιστικοί κύκλοι είναι και πάλι 3000. Οι προσαρμογές, οι οποίες πραγματοποιούνται, είναι δύο. Η πρώτη λαμβάνει χώρα κατά τον επτακοσιοστό κύκλο και άλλα μετά από άλλους επτακόσιους, δηλαδή στον κύκλο 1400. Και σε αυτή την περίπτωση, το αισθητήριο είναι ο αριθμός Mach, καθώς αναμένουμε την εμφάνιση κύματος κρούσης.

Στις επόμενες εικόνες παρουσιάζουμε την αλλαγή στη μορφή του πλέγματος μετά από κάθε προσαρμογή :

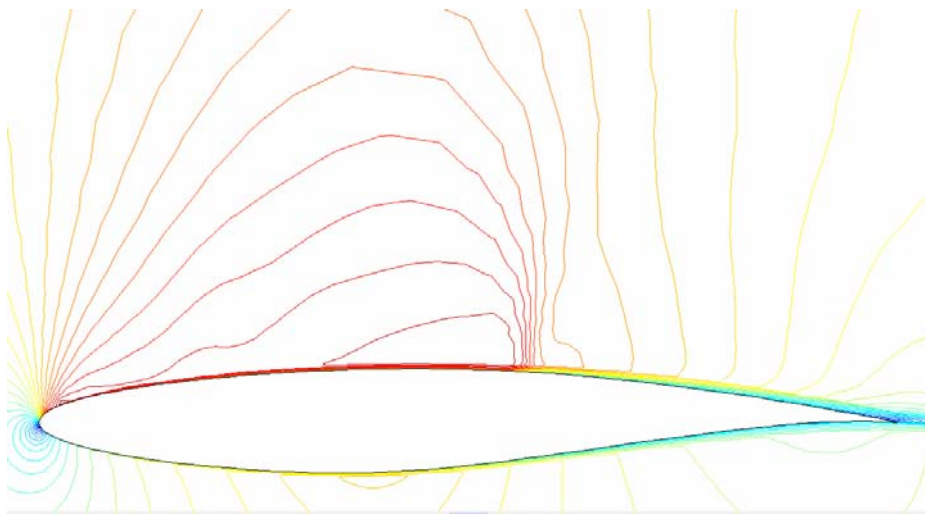


Εικόνα 4.31: Μορφή του υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, μετά από την πρώτη προσαρμογή

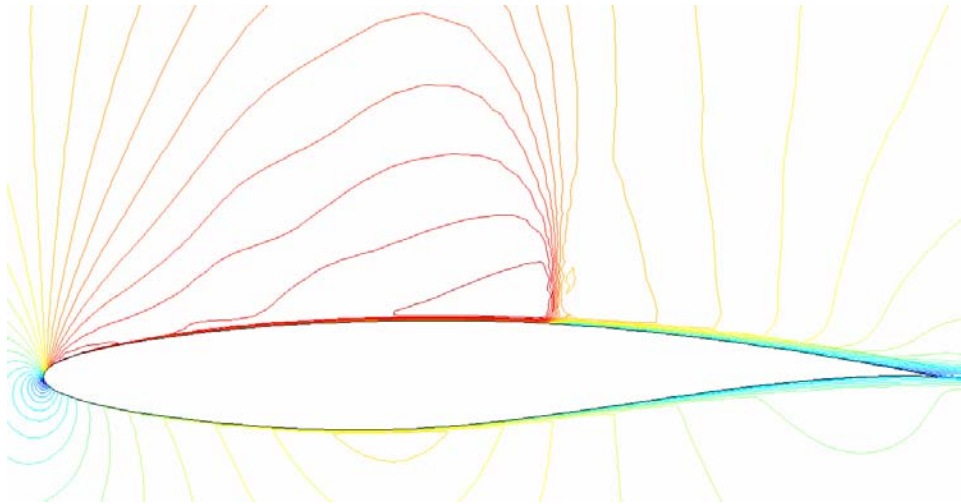


Εικόνα 4.32: Μορφή του υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, μετά από τη δεύτερη προσαρμογή

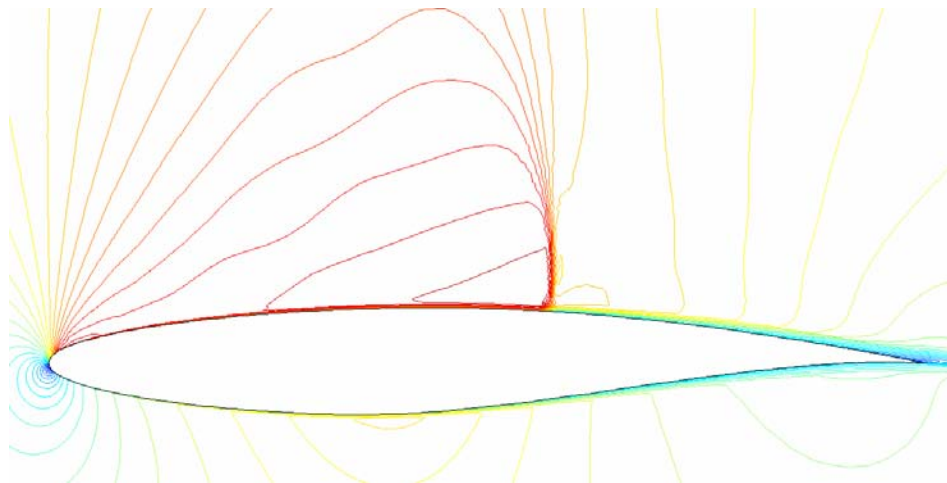
Όπως φαίνεται σε αυτές τις εικόνες, σε κάθε προσαρμογή το πλέγμα πυκνώνει στη θέση εμφάνισης του κύματος κρούσης, στο σημείο πρόσπτωσης, στο σημείο εκφυγής και πάνω στο οριακό στρώμα. Το αποτέλεσμα αυτής της πυκνώσεως μπορεί να φανεί στις ακόλουθες εικόνες, οι οποίες παρουσιάζουν τις γραμμές iso - Mach του πεδίου ροής. Σε αυτές τις εικόνες είναι εμφανής η μείωση του πάχους του κύματος κρούσης, γεγονός που συνεπάγεται την καλύτερη προσέγγιση της λύσης. Οι εικόνες αυτές φαίνονται παρακάτω :



Εικόνα 4.33: Γραμμές iso - Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)

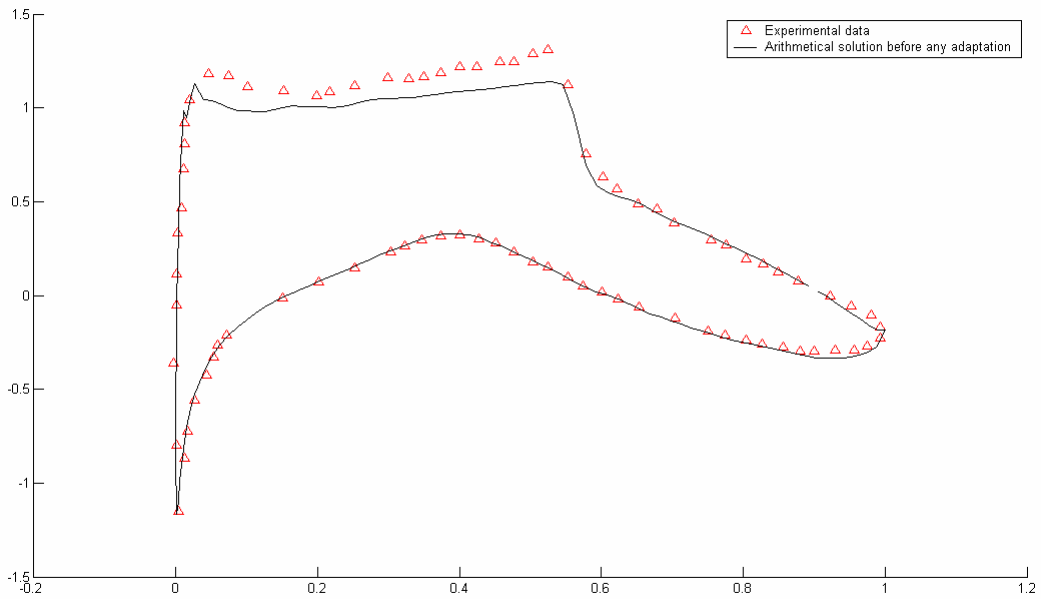


Εικόνα 4.34: Γραμμές ίσο - Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από την πρώτη προσαρμογή)

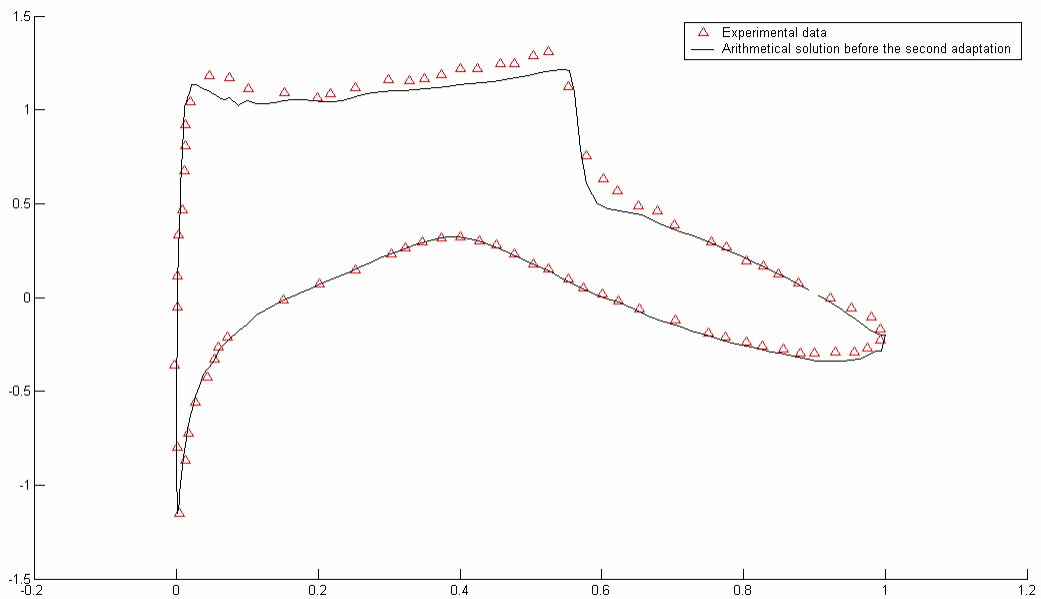


Εικόνα 4.35: Γραμμές ίσο - Mach κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από τη δεύτερη προσαρμογή)

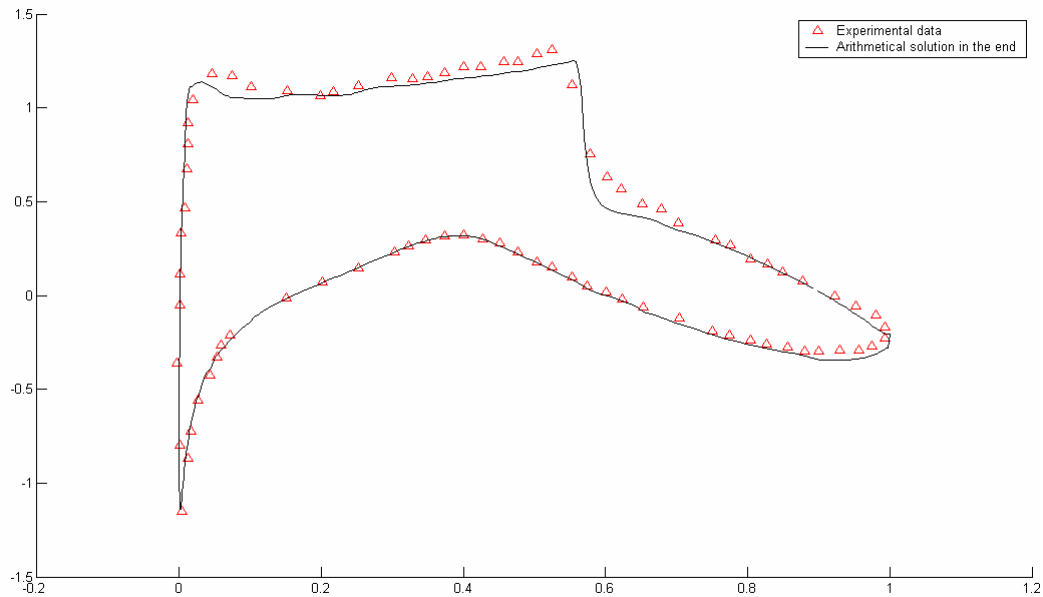
Τέλος, στις ακόλουθες εικόνες παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή. Στις εικόνες αυτές φαίνονται και τα πειραματικά δεδομένα.



Εικόνα 4.36: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.37: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από την πρώτη προσαρμογή)



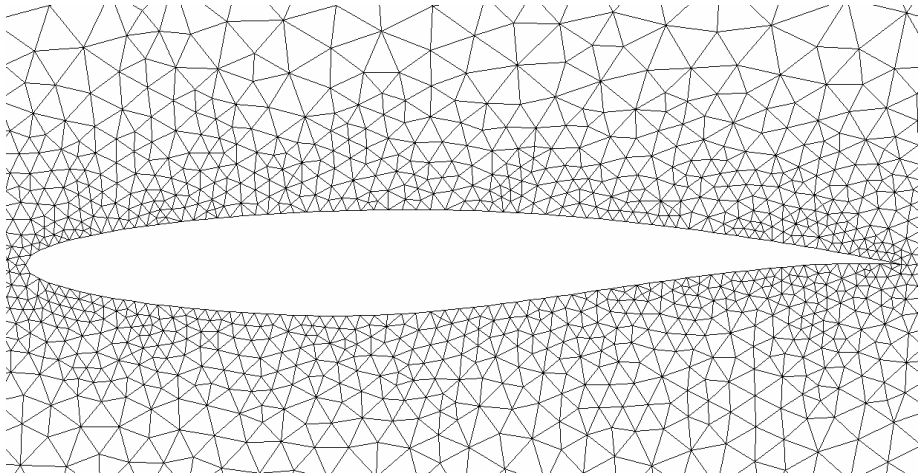
Εικόνα 4.38: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από τη δεύτερη προσαρμογή)

Όπως, μπορεί κανείς να δει η υπολογιζόμενη κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή προσεγγίζει την πειραματική καθώς οι πραγματοποιούνται προσαρμογές.

4.3.3 Επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή

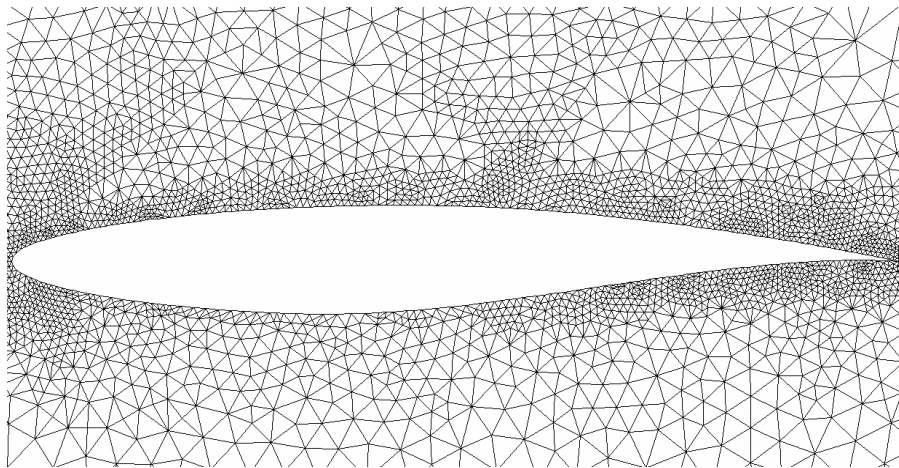
Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση μη δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων. Τα στοιχεία της προσαρμογής είναι ίδια με εκείνα της προηγούμενης παραγράφου και η κατανομή των σημείων πάνω στην αεροτομή είναι εκείνη της εικόνας 4.26, έτσι ώστε να υπάρχει μια κοινή βάση σύγκρισης.

Αρχικά, με βάση την ανωτέρω κατανομή σημείων πάνω στην αεροτομή, δημιουργούμε το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων. Τμήμα του πλέγματος αυτού κοντά στην αεροτομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

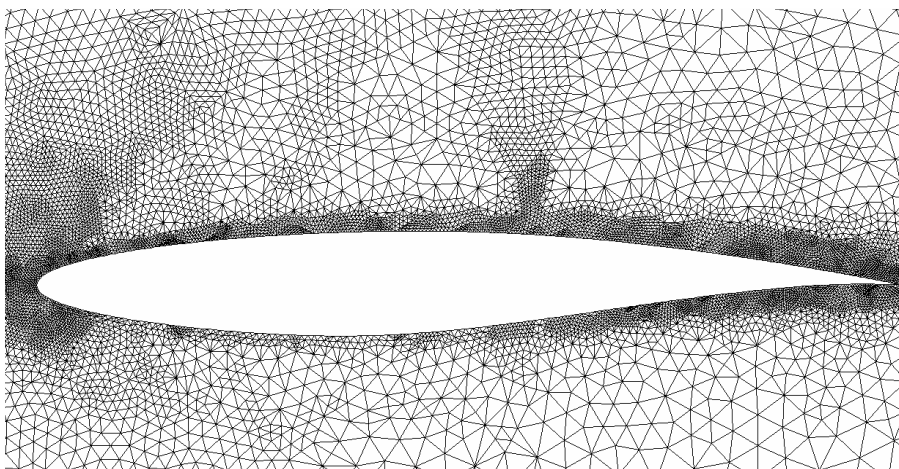


Εικόνα 4.39: Τμήμα του μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε την αλλαγή στη μορφή του πλέγματος με κάθε προσαρμογή :



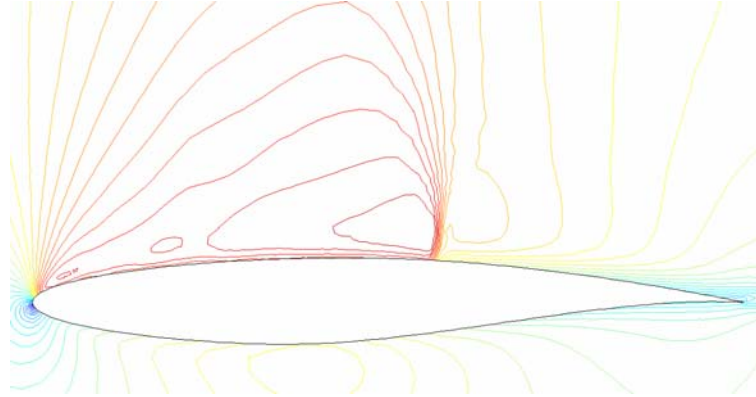
Εικόνα 4.40: Αλλαγή στη μορφή του μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9, μετά από την πρώτη προσαρμογή



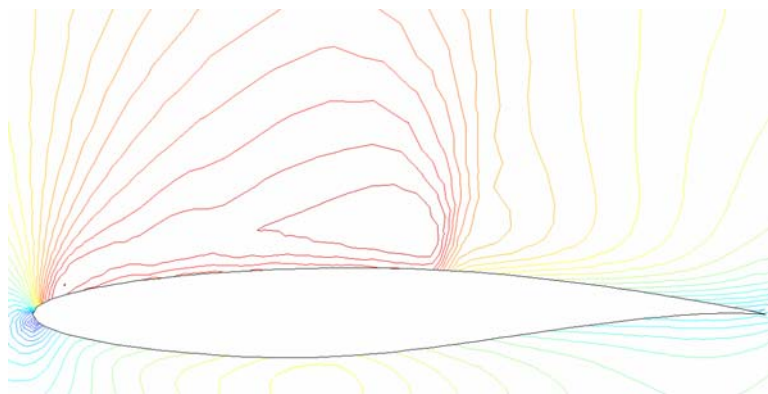
Εικόνα 4.41: Αλλαγή στη μορφή του μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9, μετά από τη δεύτερη προσαρμογή

Και εδώ παρατηρείται πύκνωση του πλέγματος στη θέση εμφάνισης του κύματος κρούσης, στα σημεία πρόσπτωσης και εκφυγής καθώς και στο οριακό στρώμα.

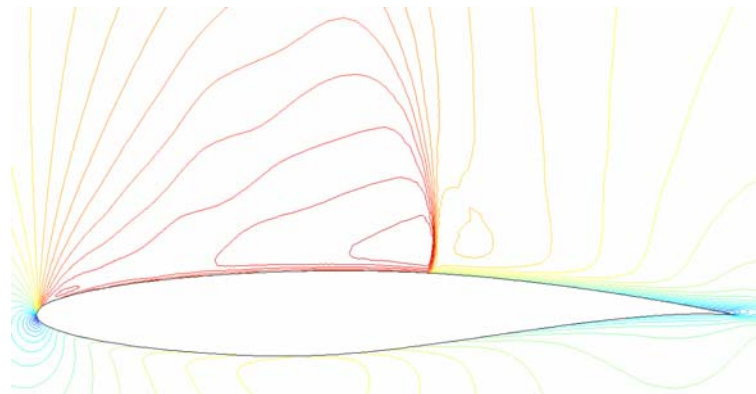
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή:



Εικόνα 4.42: Γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση μη - δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)

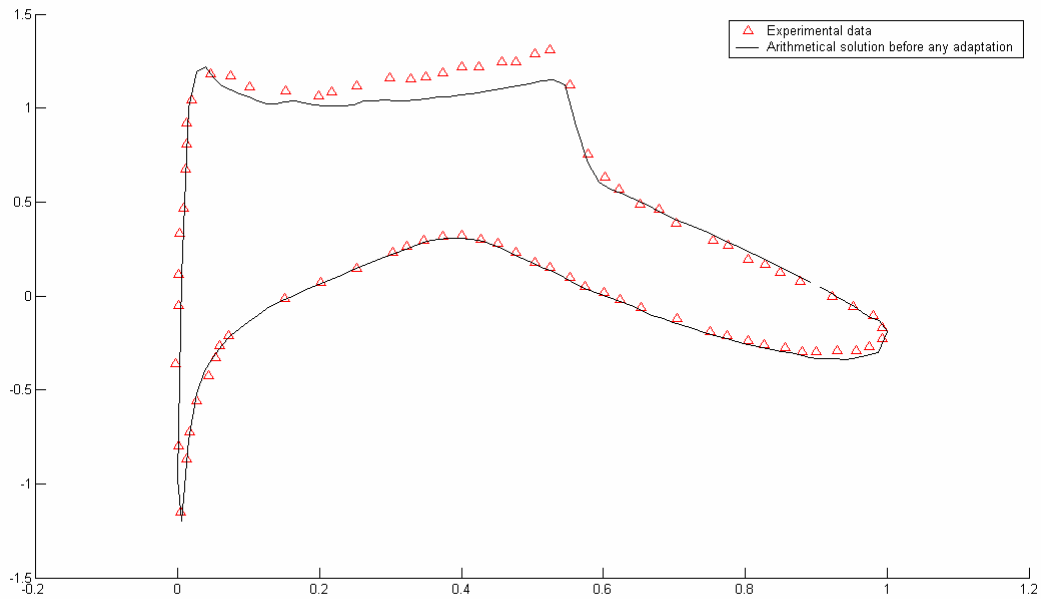


Εικόνα 4.43: Γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση μη - δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)

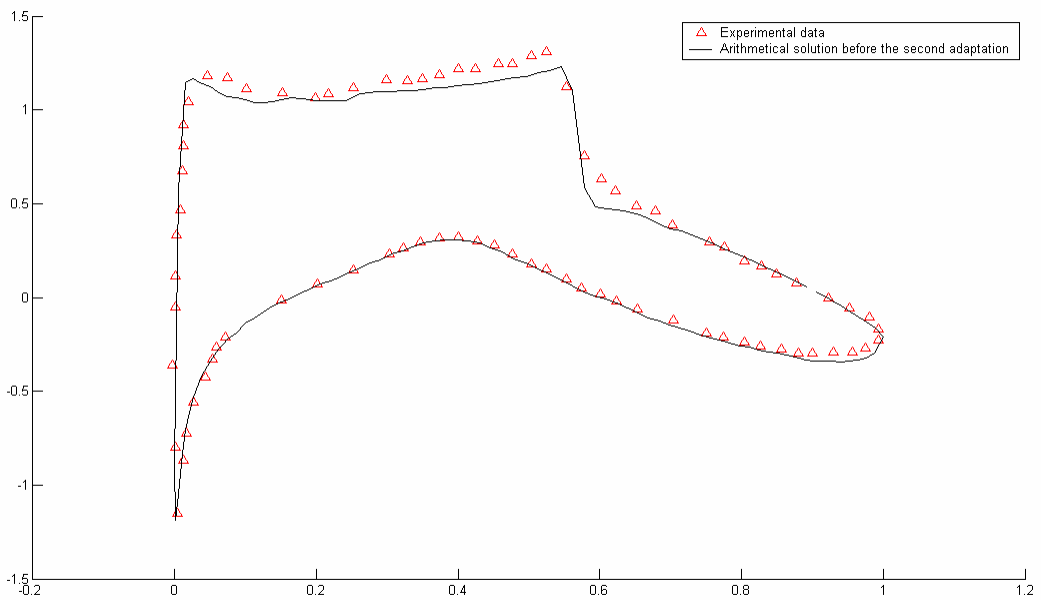


Εικόνα 4.44: Γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση μη - δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)

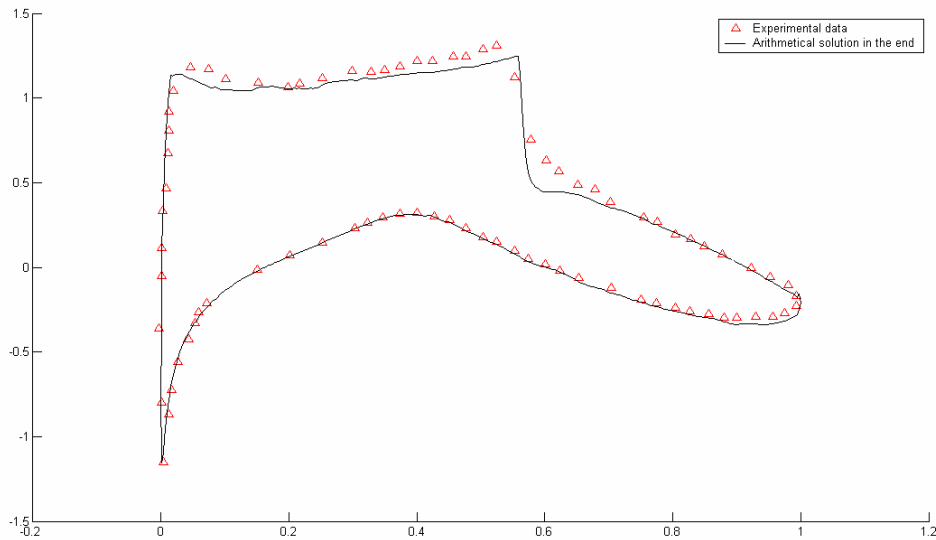
Στις ακόλουθες εικόνες παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή.



Εικόνα 4.45: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.46: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από την πρώτη προσαρμογή)

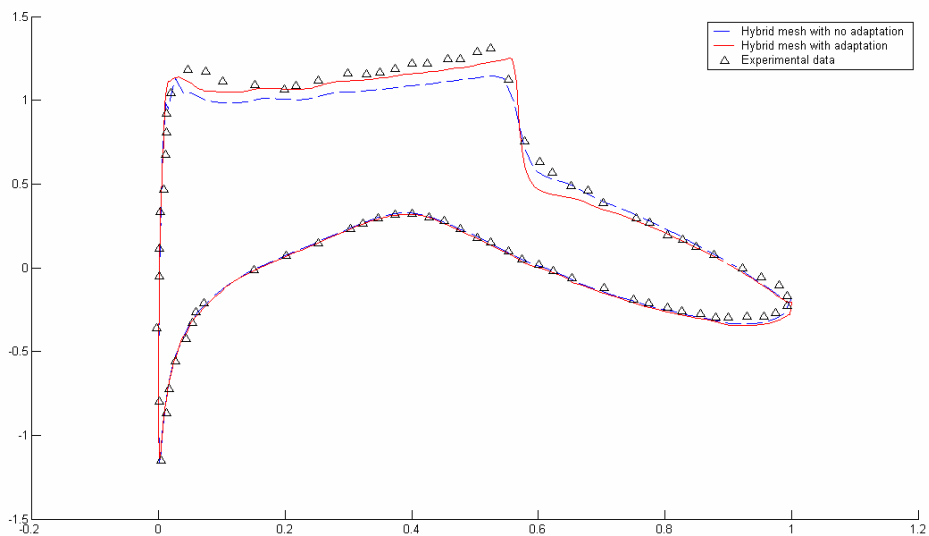


Εικόνα 4.47: Κατανομή του $-c_p$ κατά την επίλυση της περίπτωσης R9 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή, με χρήση του πλέγματος που προέκυψε από τη δεύτερη προσαρμογή)

Και εδώ φαίνεται ότι, με κάθε προσαρμογή προσεγγίζεται περισσότερο η πραγματική λύση.

4.2.4 Σύγκρισεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R9 – συμπεράσματα

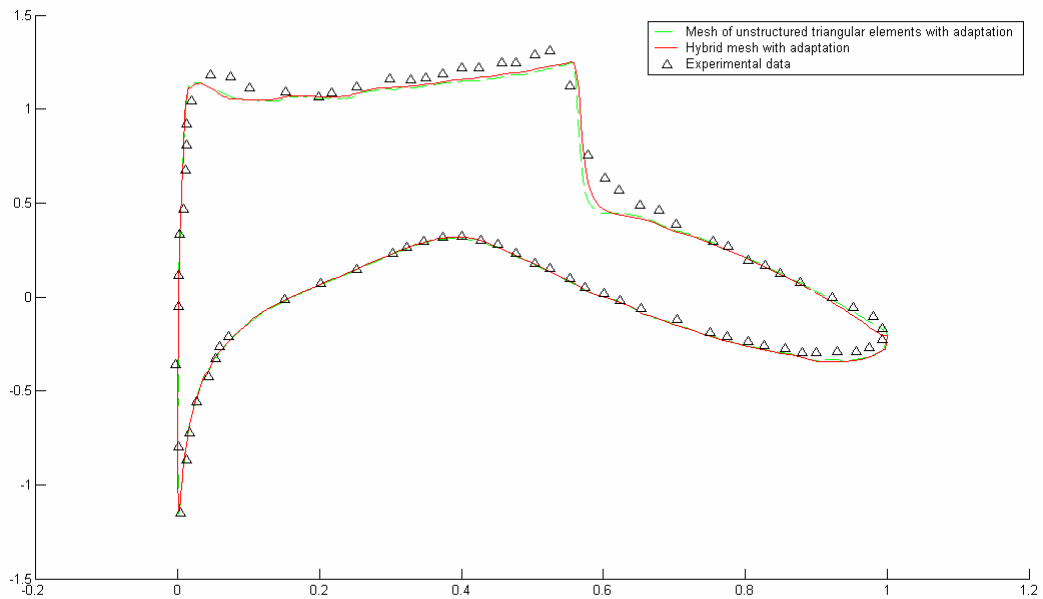
Στην ακόλουθη εικόνα παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.



Εικόνα 4.48: Σύγκριση τελικών κατανομών του $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με και χωρίς προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με τελείες η κατανομή για χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή και με τρίγωνα τα πειραματικά στοιχεία.

Παρατηρούμε, ότι τα αποτελέσματα με χρήση προσαρμογής είναι πιο κοντά στην πραγματική λύση.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που πρόκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.

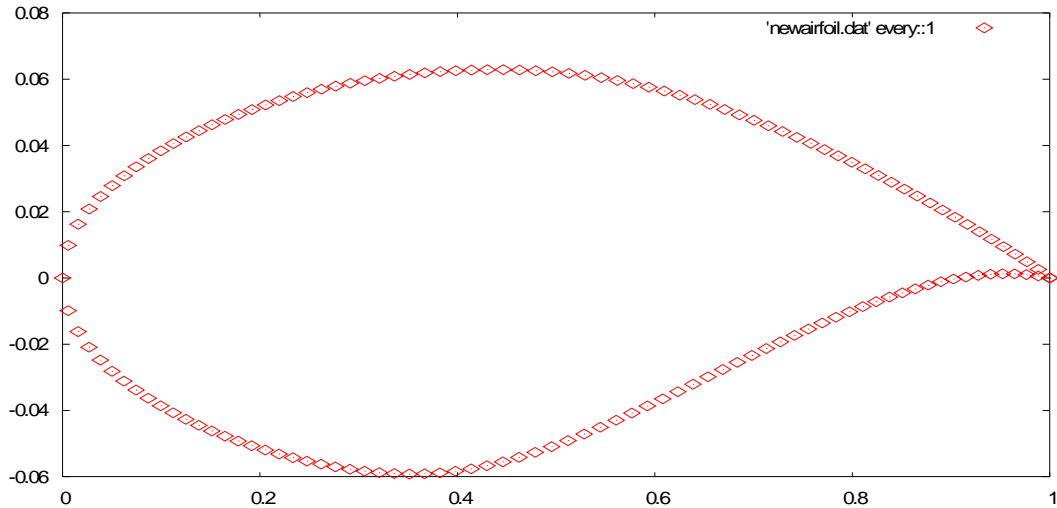


Εικόνα 4.49: Σύγκριση τελικών κατανομών $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή και μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R9. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με διακεκομμένη γραμμή η κατανομή για χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή και με τρίγωνα, τα πειραματικά στοιχεία.

Στην τελευταία εικόνα παρατηρούμε, ότι η κατανομή που προέκυψε με τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή προσεγγίζει ελαφρώς περισσότερο τα πειραματικά δεδομένα (οπότε και την πραγματική λύση) απ’ ότι η αντίστοιχη με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων.

4.4 Περίπτωση R10

Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε μια κατανομή 145 σημείων, τα οποία κατανέμονται όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

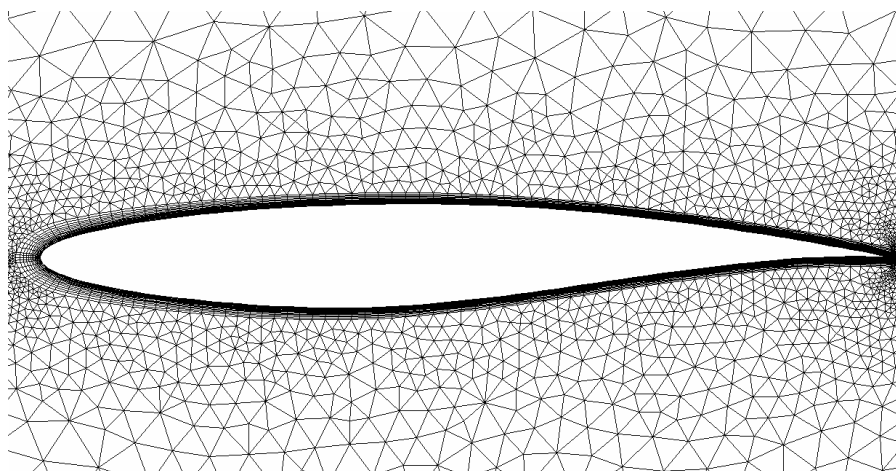


Εικόνα 4.50: Νέα κατανομή 145 σημείων πάνω στην αεροτομή για την περίπτωση R10

4.4.1 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή

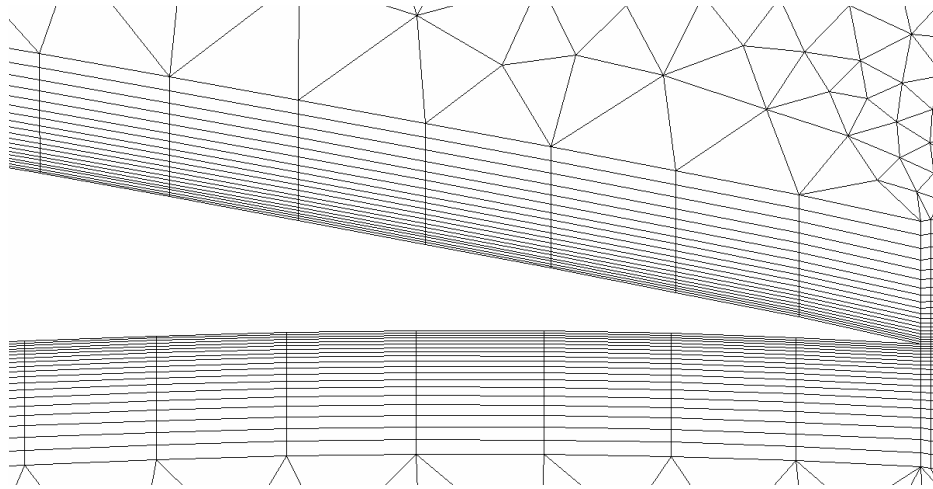
Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή. Οι επαμαλήψεις που χρησιμοποιούνται ανέρχονται στους 3000 και τα στρώματα (layers) τετράπλευρων στοιχείων ανέρχονται στα είκοσι.

Αρχικά, παρουσιάζουμε το υβριδικό πλέγμα που δημιουργήσαμε με βάση την κατανομή της εικόνας 4.49. Τμήμα του πλέγματος αυτού κοντά στην αεροτομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 4.51: Τμήμα του υβριδικού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της περίπτωσης R10 κοντά στην αεροτομή

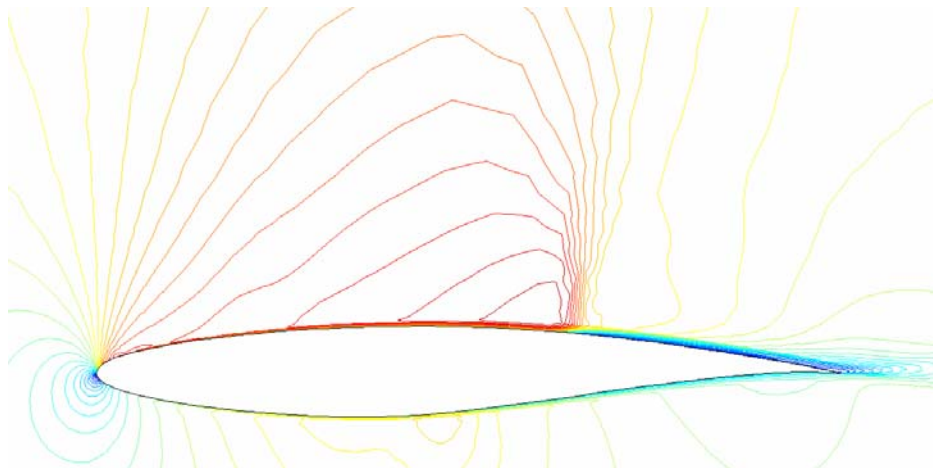
Μια καλύτερη εικόνα του πλέγματος πάνω στο τοίχωμα φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :



Εικόνα 4.52: Τμήμα του υβριδικού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της περίπτωσης R10 κοντά στο σημείο εκφυγής

Κατά την επίλυση της ροής με χρήση πλέγματος χωρίς προσαρμογή η μορφή του πλέγματος δεν αλλάζει.

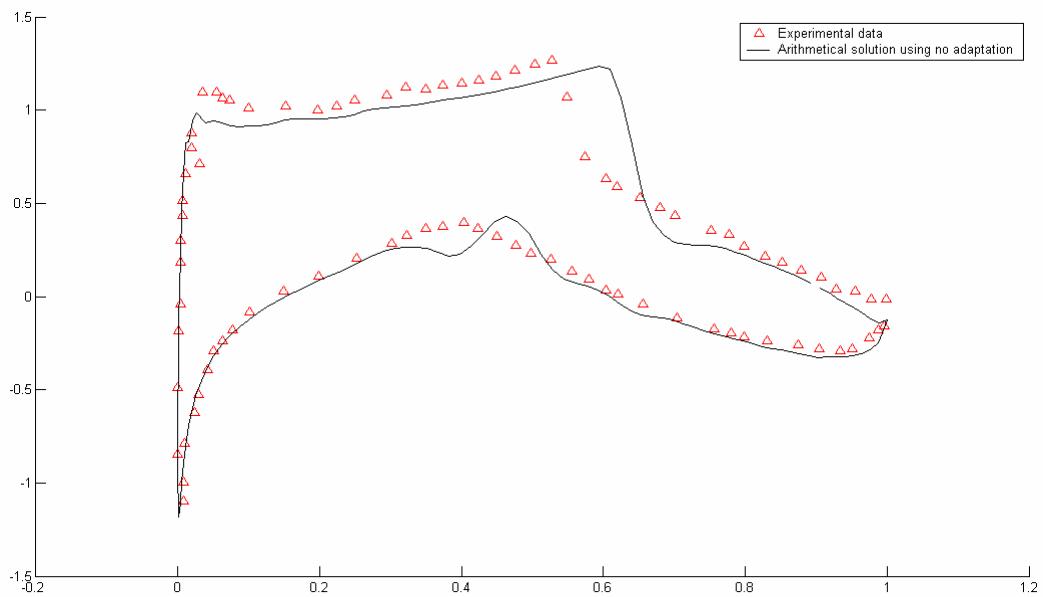
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή στο τέλος της επίλυσης :



Εικόνα 4.53: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή στο τέλος της επίλυσης

Παρατηρούμε ότι το κύμα κρούσης εντοπίζεται, αλλά είναι σχετικά «παχύ», γεγονός που σημαίνει απόκλιση από την πραγματική λύση.

Τέλος, παρουσιάζουμε την κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή που προέκυψε στο τέλος της επίλυσης. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για λόγους σύγκρισης.



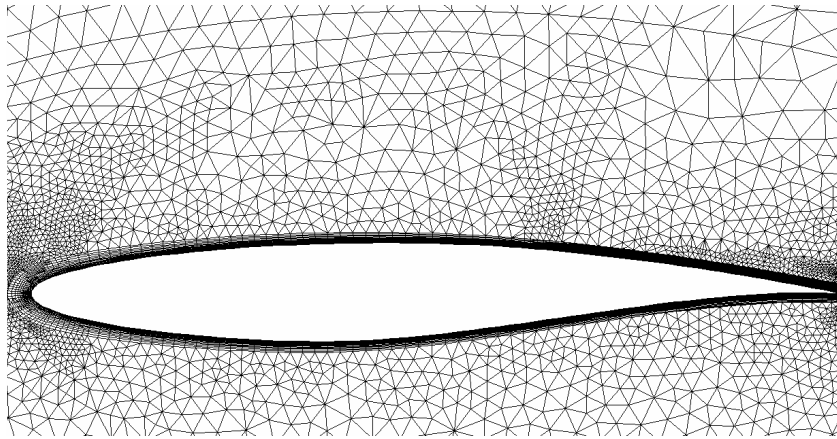
Εικόνα 4.54: Κατανομή του- c_p πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή στο τέλος της επίλυσης

Παρατηρούμε ότι, ενώ εντοπίζεται το κύμα κρούσης, δεν υπολογίζεται επακριβώς η θέση του. Επίσης, δεν προσεγγίζεται ικανοποιητικά ένα τμήμα της κατανομής στην πλευρά πίεσης.

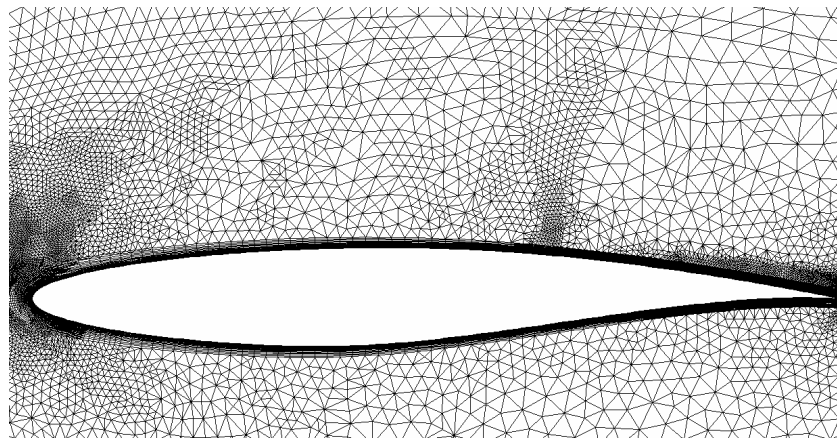
4.4.2 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Και εδώ χρησιμοποιούνται 3000 υπολογιστικοί κύκλοι (επαναλήψεις) και είκοσι στρώματα τετράπλευρων στοιχείων. Επίσης, πραγματοποιούνται δύο προσαρμογές, εκ των οποίων η πρώτη πραγματοποιείται στη χλιοστή επανάληψη και η δεύτερη μετά από άλλες χίλιες επαναλήψεις, δηλαδή στον κύκλο 2000. Και εδώ το αισθητήριο είναι ο αριθμός Mach.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τις μεταβολές στη μορφή του πλέγματος μετά από κάθε προσαρμογή :



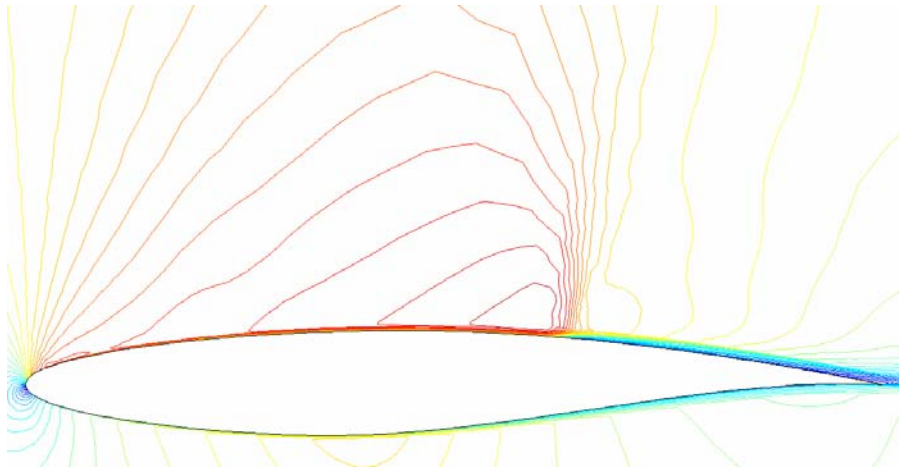
Εικόνα 4.55: Μορφή του υβριδικού πλέγματος μετά την πρώτη προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή



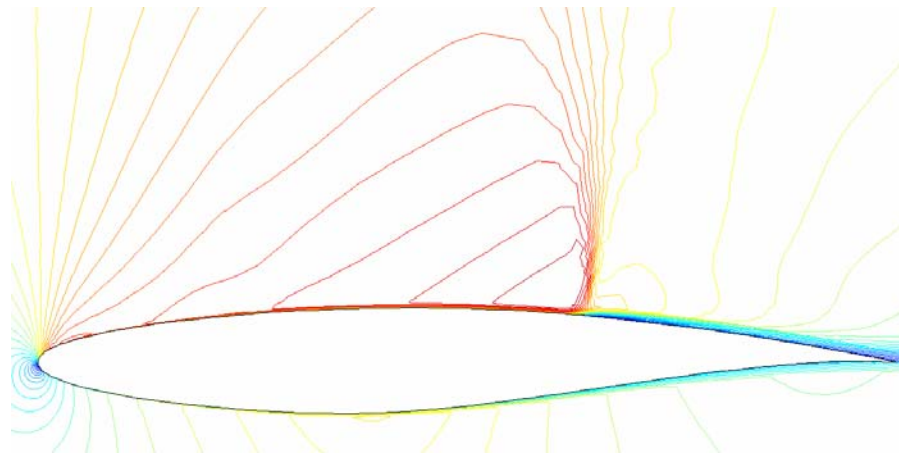
Εικόνα 4.56: Μορφή του υβριδικού πλέγματος μετά τη δεύτερη προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή

Παρατηρούμε ότι το κύμα κρούσης εντοπίζεται και το πλέγμα πυκνώνει στη θέση εμφάνισης του. Επίσης, πυκνώνει στα σημεία πρόσπτωσης και εκφυγής και στο οριακό στρώμα.

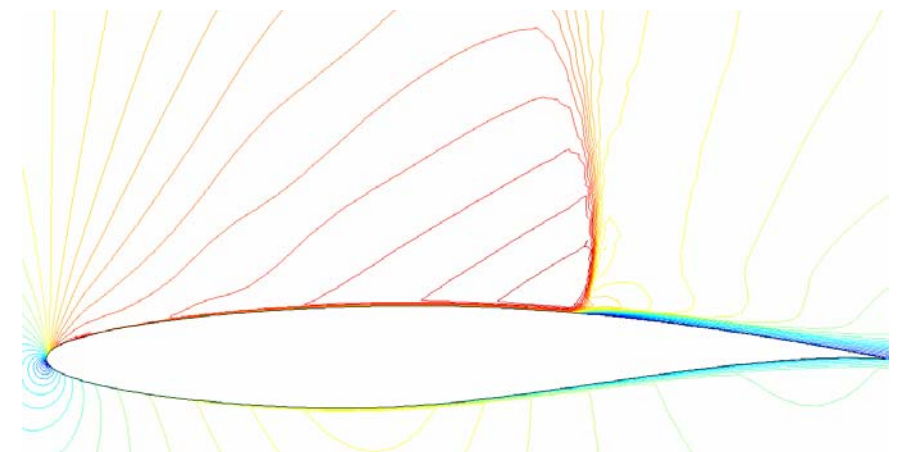
Στις εικόνες που θα ακολουθήσουν παρουσιάζουμε τις γραμμές $iso - Mach$ του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή :



Εικόνα 4.57: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του αρχικού πλέγματος)



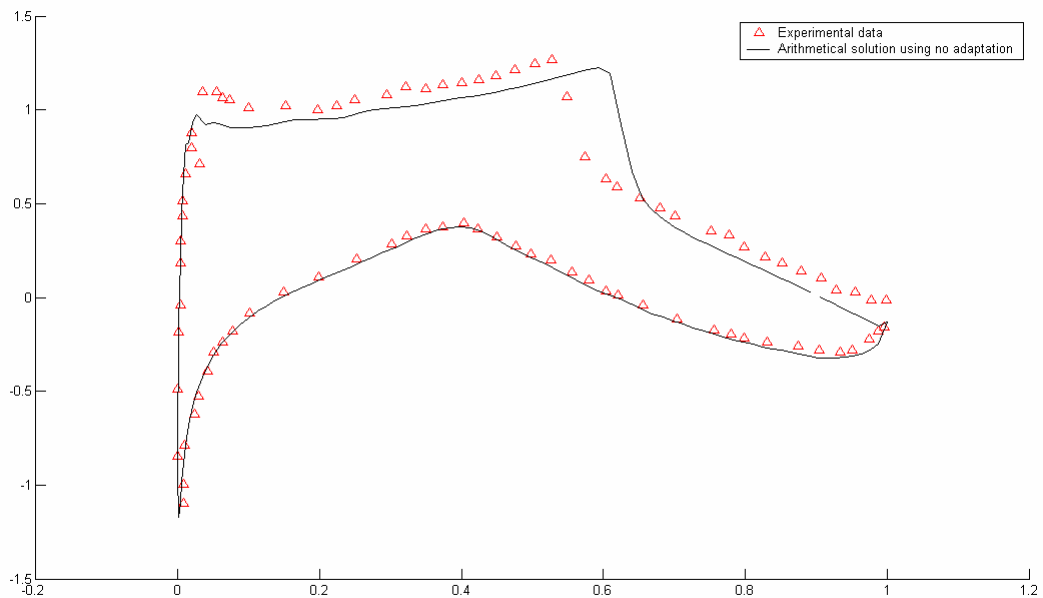
Εικόνα 4.58: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)



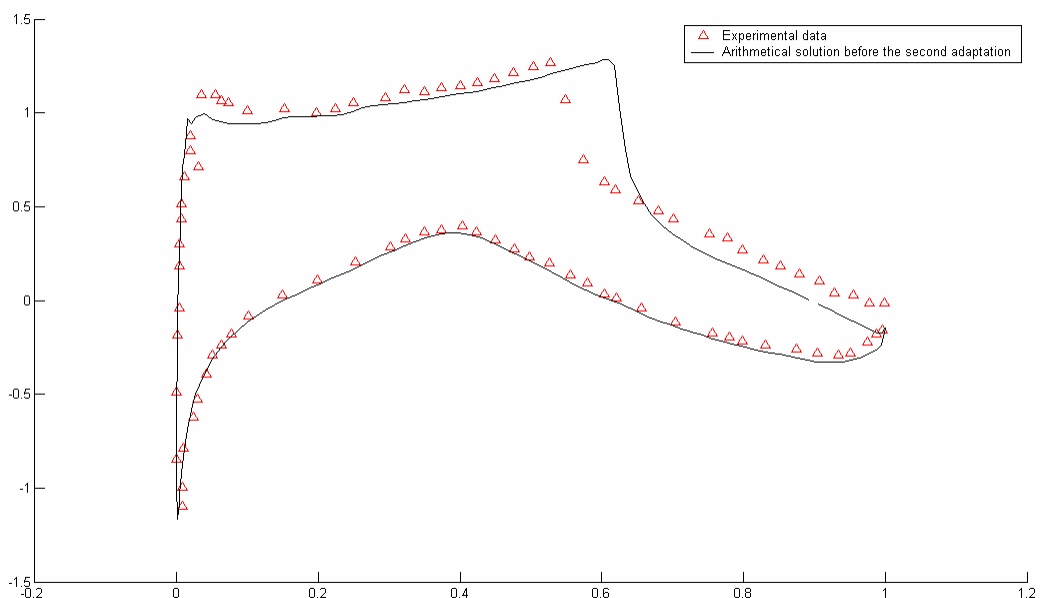
Εικόνα 4.59: Γραμμές iso – Mach του πεδίου ροής κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυση (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Παρατηρούμε ότι μετά από κάθε προσαρμογή το πάχος του κύματος κρούσης μικραίνει, γεγονός που προάγει την καλύτερη προσέγγιση της λύσης.

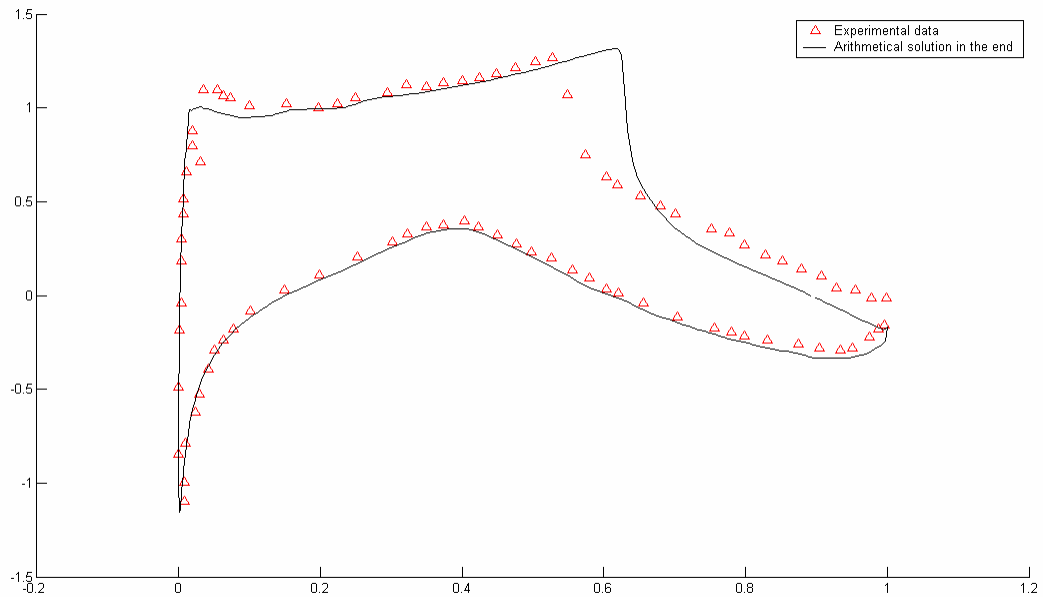
Τέλος, παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή. Στα διαγράμματα αυτά παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για λόγους σύγκρισης.



Εικόνα 4.60: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.61: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)



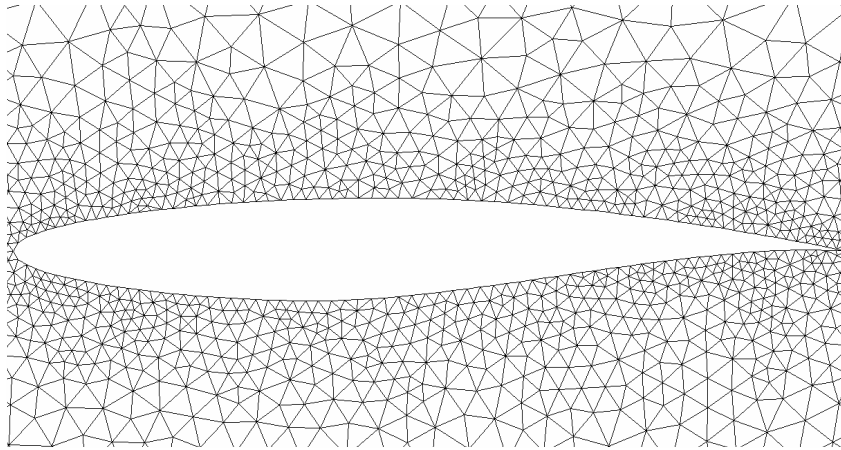
Εικόνα 4.62: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Παρατηρούμε ότι στο μεγαλύτερο τμήμα της αεροτομής τα πειραματικά δεδομένα (επομένως και η πραγματική λύση) προσεγγίζονται σε μεγάλο βαθμό, αλλά, ενώ το κύμα κρούσης εντοπίζεται, η θέση εμφάνισής του αποκλίνει από την πραγματική.

4.4.3 Επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή

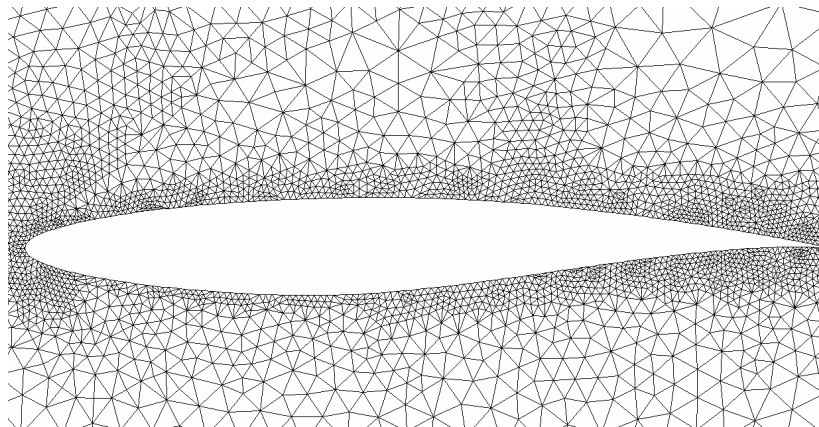
Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή. Τα δεδομένα της προσαρμογής και ο αριθμός των υπολογιστικών κύκλων είναι ίδια με εκείνα της προηγούμενης παραγράφου έτσι ώστε να υπάρχει μια κοινή βάση σύγκρισης.

Με βάση την κατανομή της εικόνας 4.49, δημιουργούμε το μη – δομημένο πλέγμα τριγωνικών στοιχείων που θα χρησιμοποιηθεί. Τμήμα αυτού του πλέγματος κοντά στη αεροτομή φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα :

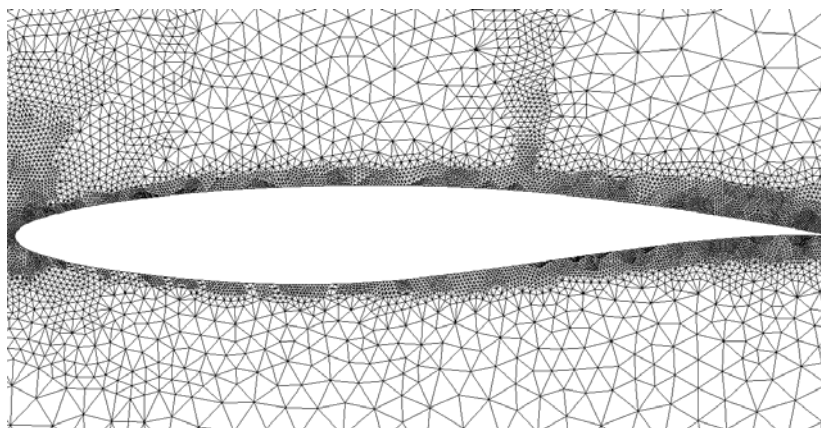


Εικόνα 4.63: Τμήμα του πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή

Οι μεταβολές στη μορφή αυτού του πλέγματος κατά τις δύο προσαρμογές φαίνονται στις ακόλουθες εικόνες :



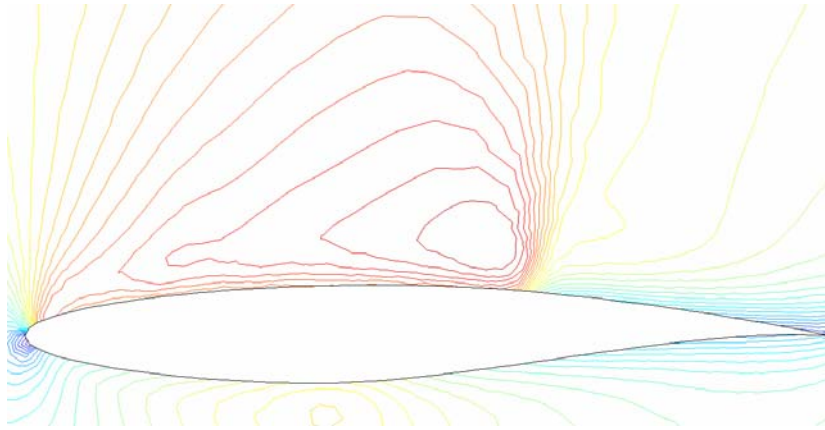
Εικόνα 4.64: Μορφή του πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, μετά την πρώτη προσαρμογή



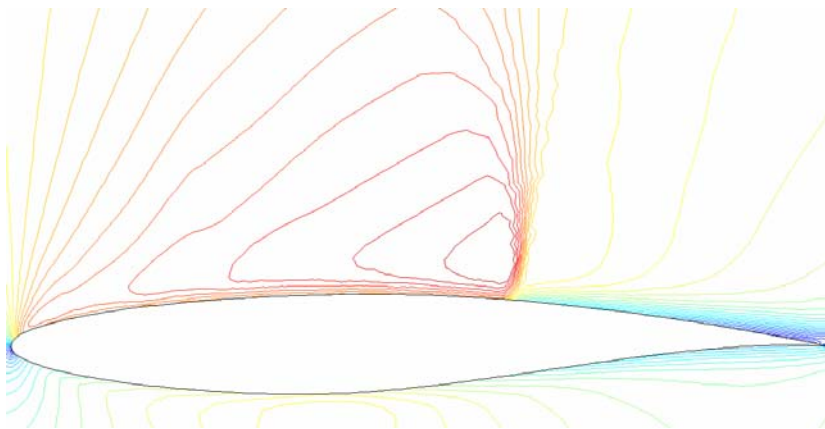
Εικόνα 4.65: Μορφή του πλέγματος κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, μετά τη δεύτερη προσαρμογή

Παρατηρούμε ότι μετά από κάθε προσαρμογή το πλέγμα πυκνώνει στα σημεία πρόσπτωσης και εκφυγής καθώς και στο οριακό στρώμα.

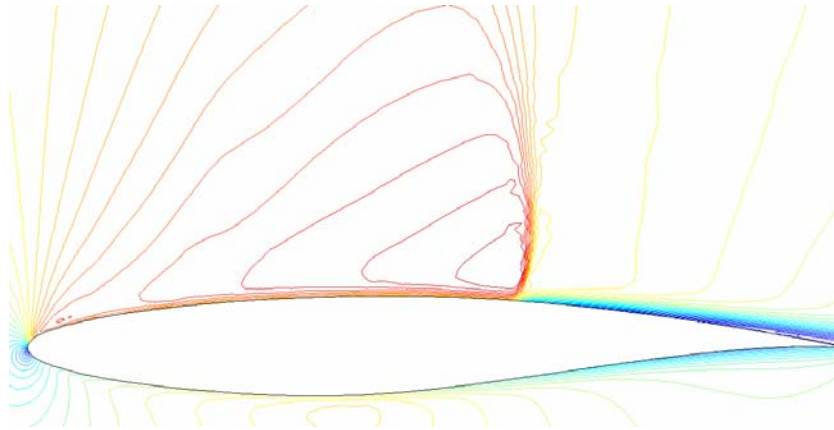
Στις επόμενες εικόνες παρουσιάζονται οι γραμμές ισο – Mach της ροής κοντά στην αεροτομή :



Εικόνα 4.66: Γραμμές ισο - Mach κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του αρχικού πλέγματος)



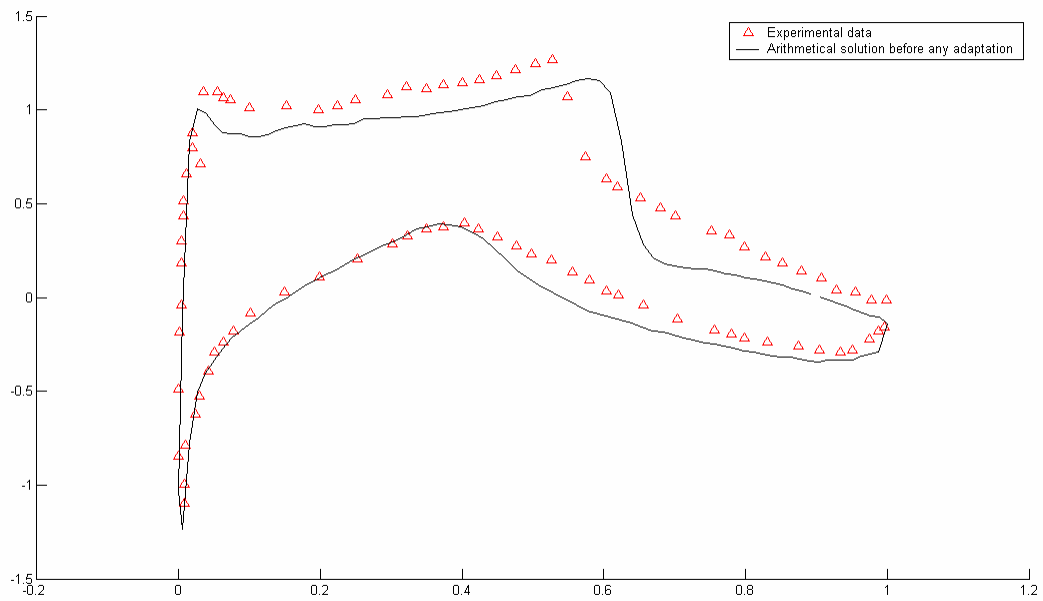
Εικόνα 4.67: Γραμμές ισο - Mach κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)



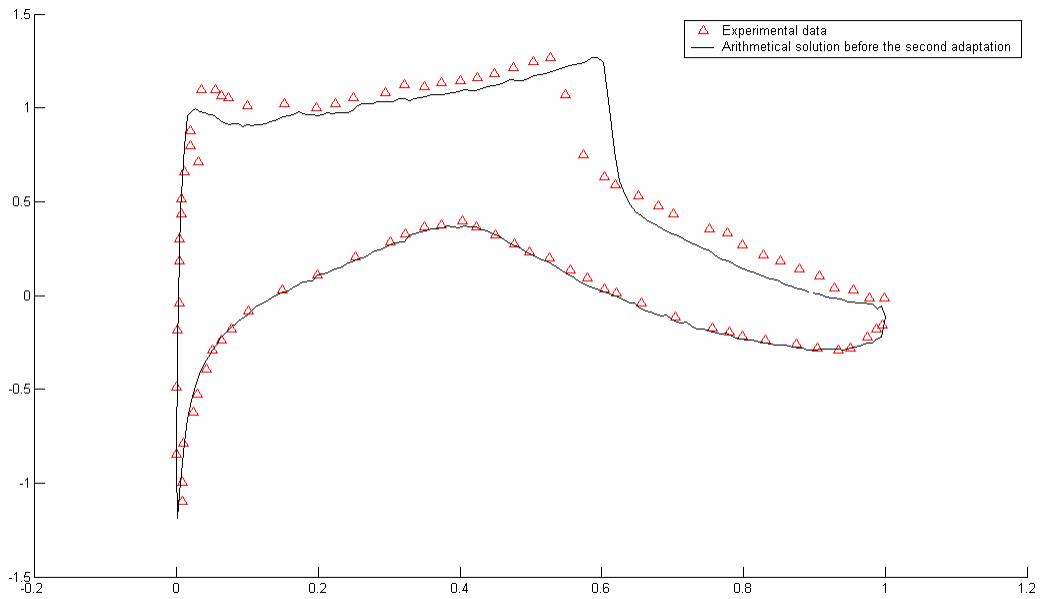
Εικόνα 4.68: Γραμμές iso - Mach κοντά στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Όπως είναι αναμενόμενο, με κάθε προσαρμογή το πάχος του κύματος κρούσης ελαττώνεται.

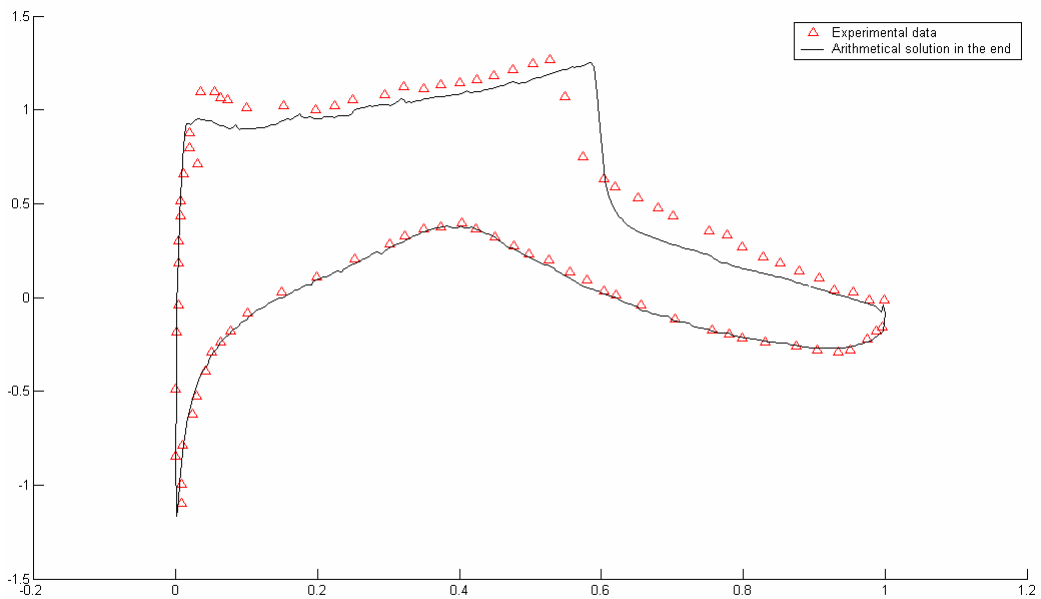
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε την εξέλιξη της κατανομής του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή μαζί με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα :



Εικόνα 4.69: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, πριν την πρώτη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του αρχικού πλέγματος)



Εικόνα 4.70: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, πριν τη δεύτερη προσαρμογή (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά την πρώτη προσαρμογή)

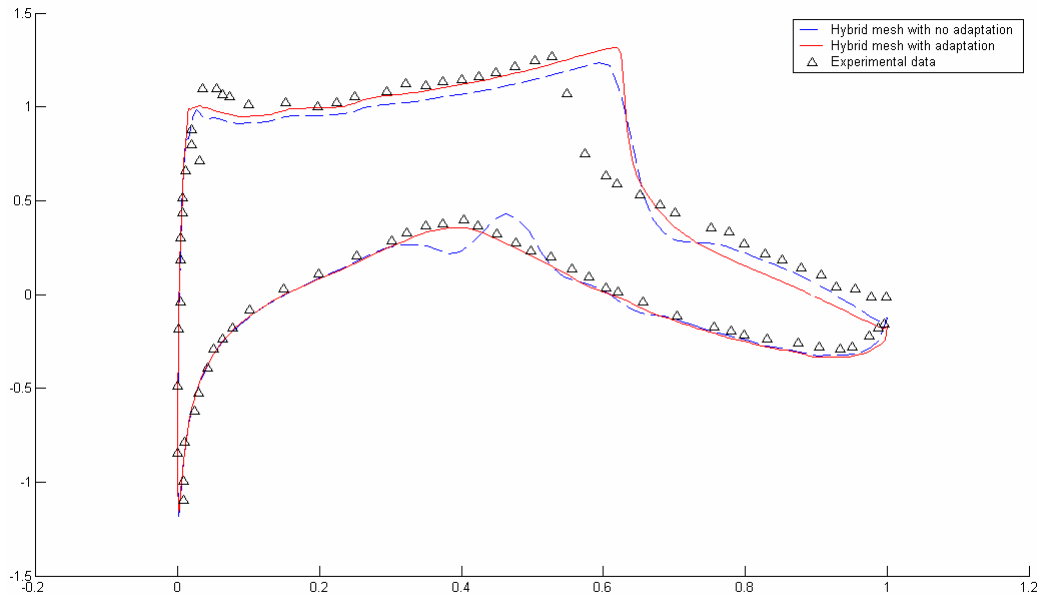


Εικόνα 4.71: Κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10 με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, στο τέλος της επίλυσης (δηλαδή με χρήση του πλέγματος που προέκυψε μετά τη δεύτερη προσαρμογή)

Παρατηρούμε ότι με κάθε προσαρμογή, η υπολογιζόμενη κατανομή προσεγγίζει όλο και περισσότερο τα πειραματικά δεδομένα, οπότε και την πραγματική λύση.

4.4.4 Συγκρίσεις των αποτελεσμάτων για την περίπτωση R10 – συμπεράσματα

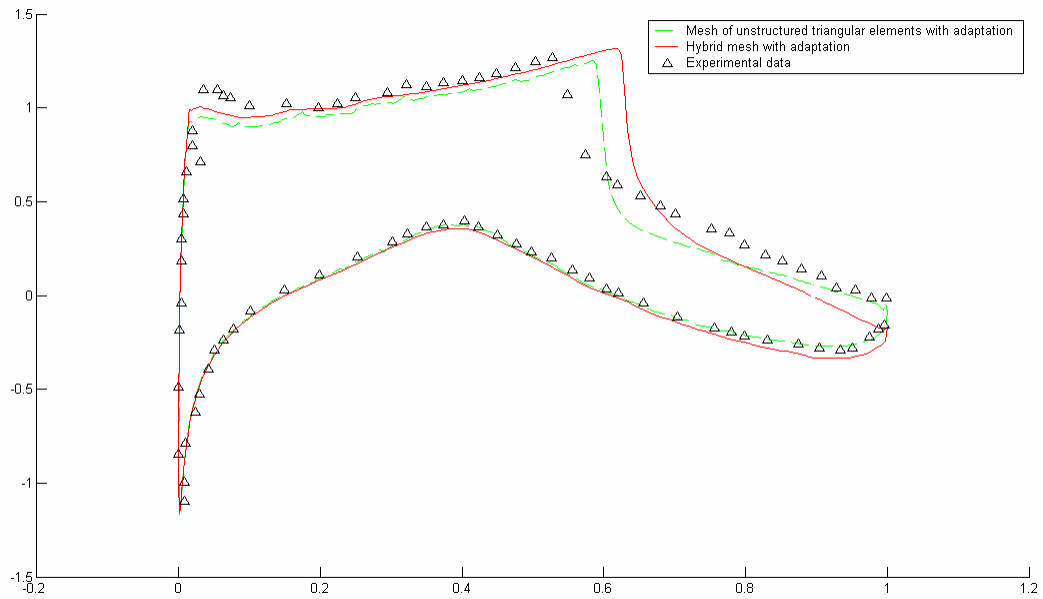
Στην ακόλουθη εικόνα παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.



Εικόνα 4.72: Σύγκριση τελικών κατανομών του $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με και χωρίς προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με τελείες η κατανομή για χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή και με τρίγωνα τα πειραματικά στοιχεία.

Παρατηρούμε ότι η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή είναι σαφώς πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα απ' ότι εκείνη με χρήση υβριδικού πλέγματος χωρίς προσαρμογή.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την τελική κατανομή του $-c_p$ πάνω στην αεροτομή, που προέκυψε με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή, και την αντίστοιχη, που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή. Στο ίδιο διάγραμμα φαίνονται και τα πειραματικά στοιχεία.



Εικόνα 4.73: Σύγκριση τελικών κατανομών του $-c_p$ πάνω στη αεροτομή από τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή και μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή κατά την επίλυση της περίπτωσης R10. Με συνεχή γραμμή φαίνεται η κατανομή με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή, με διακεκομμένη γραμμή η κατανομή για χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή και με τρίγωνα, τα πειραματικά στοιχεία.

Είναι προφανές ότι και στις δύο περιπτώσεις εντοπίζεται το κύμα κρούσης αλλά όχι η ακριβής θέση του. Επίσης, παρατηρούμε, ότι σε άλλα τμήματα της κατανομής, η κατανομή που προέκυψε με τη χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή προσεγγίζει περισσότερο τα πειραματικά δεδομένα (οπότε και την πραγματική λύση) και σε άλλα αυτό το πραγματοποιεί η κατανομή με χρήση μη – δομημένου πλέγματος τριγωνικών στοιχείων. Κατά κύριο λόγο η κατανομή που προέκυψε με χρήση υβριδικού πλέγματος με προσαρμογή είναι πιο κοντά στην πραγματική απ’ ότι η αντίστοιχη που προέκυψε με χρήση μη – δομημένων πλεγμάτων τριγωνικών στοιχείων με προσαρμογή.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να πούμε, ότι στην παρούσα εργασία έγινε, αρχικά, αναδιατύπωση του αλγορίθμου εμπλουτισμού μη – δομημένων τριγωνικών πλεγμάτων, αλγόριθμο τον οποίο ήδη διέθεται το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π.. Παράλληλα, έγινε και επίδειξη εφαρμογής του συγκεκριμένου αλγορίθμου σε μεμονωμένη αεροτομή.

Στη συνέχεια, εξελίσσοντας στην ουσία τον προηγούμενο αλγόριθμο, διατυπώθηκε με λεπτομέρεια ο αλγόριθμος προσαρμογής υβριδικών πλεγμάτων. Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί θέμα έρευνας του εργαστηρίου κατά τη δεδομένη χρονική περίοδο με εξέλιξη του αντίστοιχου κώδικα. Στο πλαίσιο της πιστοποίησης αυτών (αλγορίθμου και κώδικα) εισέρχεται ο ρόλος της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Έτσι, έγινε εφαρμογή των ανωτέρω σε διάφορες περιπτώσεις τυρβώδους ροής γύρω από διηγητική αεροτομή. Σε κάθε περίπτωση έγιναν πολλές και διαφορετικές προσπάθειες επίλυσης της ροής, μεταβάλλοντας την κατανομή των σημείων πάνω στο περίγραμμα της αεροτομή, το πλέγμα, τις παραμέτρους προσαρμογής καθώς και τις παραμέτρους του κώδικα επίλυσης. Έτσι, στο τέλος της εργασίας αυτής αποκτήθηκε σημαντική εμπειρία γύρω από τον τρόπο που επηρεάζουν οι παράμετροι αυτοί την επίλυση. Παράλληλα, κατά τη διάρκεια όλων αυτών των «τρεξιμάτων» επίλυσης εντοπίστηκαν και επισημάνθηκαν ορισμένες αδυναμίες του κώδικα αυτού, γεγονός που έδωσε στο εργαστήριο τη δυνατότητα διόρθωσής τους.

Από τις παραπάνω προσπάθειες επιλέχθηκαν και παρουσιάστηκαν οι αντιπροσω – πευτικότερες. Επίσης, παρουσιάστηκε και η σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα αυτών των προσπαθειών με τα αντίστοιχα από χρήση άλλων ειδών πλέγματα, απ' όπου καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η χρήση υβριδικών πλεγμάτων με εμπλουτισμό μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής λύσης.

Κλείνοντας να αναφέρουμε ότι, εκτός από τα οφέλη της παρούσης εργασίας για το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, που αφορούν στην πιστοποίηση του ανωτέρω αλγορίθμου και κώδικα, σημαντικά ήταν τα οφέλη και για τον γράφοντα. Έτσι, αποκομίστηκαν σημαντικές γνώσεις πάνω στα υπολογιστικά πλέγματα και την προσαρμογή τους καθώς και εμπειρία πάνω στον τρόπο δράσης κατά τη διερεύνηση υπολογιστικών προβλημάτων.

Βιβλιογραφία

- [1]. «Συνεκτικές ροές στις στροβιλομηχανές», Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2004
- [2]. «Υπολογιστική ρευστομηχανική», Γ. Μπεργελές, Εκδόσεις Συμεών, Ανατύπωση 2000 (1^η Έκδοση 1993)
- [3]. «Μέθοδοι βελτιστοποίησης στην αεροδυναμική», Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2005 (3^η Έκδοση)
- [4]. «Μέθοδος και λογισμικό προσαρμογής μη – δομημένων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων κατά την επίλυση προβλημάτων ροής», Π.Ι.Κ. Λιακόπουλος, Αθήνα 11 Οκτωβρίου 2001
- [5]. «Γένεση και προσαρμογή αριθμητικών πλεγμάτων», Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Διδακτικό σύγγραμμα, Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Αθήνα 1999
- [6]. «Aerofoil RAE 2822 - Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements» Experimental Data Base for Computer Program Assessment, Cook, P.H., M.A. McDonald, M.C.P. Firmin, , AGARD Report AR 138, 1979
- [7]. «Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for complex geometries», Kallinderis, YKhawaja, AMcMorris, HAIAA-1995-211 Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 33rd, Reno, NV, Jan 9-12, 1995
- [8]. «Hybrid prismatic/tetrahedral grid generation for viscous flows around complex geometries», Kallinderis, Yannis; Khawaja, Aly; McMorris, Harlan AIAA Journal. Vol. 34, no. 2, Feb. 1996
- [9]. «Hybrid adaptation method and directional viscous multigrid with prismatic-tetrahedral meshes», Parthasarathy, VKallinderis, YNakajima, K AIAA-1995-670 Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 33rd, Reno, NV, Jan 9-12, 1995
- [10]. Spatial adaptation of unstructured meshes for unsteady aerodynamic flow computations Rausch, Russ D. (Purdue University, West Lafayette, IN); Batina, John T. (NASA, Langley Research Center, Hampton, VA); Yang Henry T. Y. (Purdue University, West Lafayette, IN) AIAA Journal 1992
- [11]. «Applied numerical analysis (Fourth edition)» Gerald, Curtis F; Wheatley, Patrick O Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co , 1989
- [12]. Computational Techniques for Fluid Dynamics: a solutions manual, CAJ Fletcher, K Srinivas, 1992
- [13]. Viscous Fluid Flows FM White, McGraw-Hill, New York, 1974

Προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν

- [1]. Fortran 77
- [2]. Matlab 6
- [3]. AutoCad 2008
- [4]. Mesh
- [5]. Gnuplot
- [6]. Microsoft Word 2003
- [7]. Microsoft Picture Manager 2003

