ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ισορροπία σε Χρηματοοικονονικές Αγορές

Διπλωματική εργασία
της
Επισκόπου Κωνσταντίνας

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Α. Πολυράκης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ισορροπία σε Χρηματοοικονονικές Αγορές

Διπλωματική εργασία

της

Επισκόπου Κωνσταντίνας

Πολυράκης Ιωάννης	Καρανάσιος Σωτήρης	Παπαϊωάννου Αλέξανδρος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
....	....	....

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

....
Επισκόπου Κωνσταντίνα
Διπλωματούχος Μαθηματικός Εφαρμογών ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους αυτούς τους ανθρώπους που με ενέπνευσαν να ασχοληθώ με τα μαθηματικά και με καθοδήγησαν όλα αυτά τα χρόνια ως μαθήτρια και μετέπειτα ως φοιτήτρια.
Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, κύριο Ιωάννη Πολυράκη, για τη συνεργασία, την πολύτιμη βοήθεια και την επιστημονική καθοδήγηση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της εργασίας.
Ευχαριστώ επίσης τους συμφοιτητές και φίλους μου για τις συμβουλές και τη βοήθεια που μου παρείχαν όποτε χρειάστηκε.
Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένεια μου για την ηθική και υλική υποστήριξη τους τα χρόνια των σπουδών μου και γενικότερα στη ζωή μου.

Κωνσταντίνα Επισκόπου,

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να καταλάβει ο αναγνώστης το ρόλο και τη λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών. Γι αυτό το λόγο, η ανάλυση γίνεται με βάση το πιο απλό μοντέλο δύο περιόδων. Η απλότητα αυτού του μοντέλου είναι ότι αφαιρεί όλα τα σύνθετα στοιχεία από το γενικό μοντέλο, εκτός από δύο που θεωρούνται θεμελιώση για κάθε επενδυτή (παίκτη): τη σχέση προτίμησης και το εξωγενές εισόδημα. Η σχέση προτίμησης αντιπροσωπεύει τη στάση του επενδυτή απέναντι στην κατανάλωση στο παρόν σε αντιδιαστολή με την κατανάλωση στο μέλλον (ανυπομονησία), όπως και τη στάση του απέναντι σε μια αβέβαιη κατανάλωση στο μέλλον (αποστροφή ρίσκου). Χαρακτηριστικό του εισοδήματος του επενδυτή είναι πως δεν είναι όμοια κατανεμημένο στο χρόνο ή τις καταστάσεις. Γι αυτό εισάγεται η έννοια του χρηματοοικονομικού συμβολαίου, που είναι η αξίωση για κάποιο εισόδημα. Οι επενδυτές, με την ανταλλαγή τέτοιων συμβολαίων, αλλάζουν τη μορφή των εισοδημάτων τους για να έχουν πιο όμοια κατανάλωση κατά μήκος του χρόνου και των αβέβαιων ενδεχομένων. Στο Κεφάλαιο 2 δίνονται αναλυτικά τα χαρακτηριστικά της χρηματοοικονομικής οικονομίας. Αρχικά μελετάμε το μοντέλο αναφοράς των Arrow- Debreu στο οποίο, για κάθε κατάσταση υπάρχει η αξίωση να πληρώσει μία μονάδα εισοδήματος στη συγκεκριμένη κατάσταση. Η συναλλαγή σε αυτές τις θεμελιώδεις συνθήκες οδηγεί σε τιμές ισορροπίας, που είναι οι παρούσες αξίες τη στιγμη 0 μιας μονάδας εισοδήματος τη στιγμή 1. Αφού οι επενδυτές οδηγούνται να μεγιστοποιήσουν την προτίμησή τους με αυτές τις τιμές, αποδεικνύεται πως η κατανομή ισορροπίας είναι βέλτιστη κατά Pareto (Κεφάλαιο 3). Στη συνέχεια εισάγουμε μια πιο ευρεία ομάδα συμβολαίων και εξετάζουμε την ιδέα της απουσίας κερδοσκοπίας στις χρηματοοικονομικές αγορές, πως χαρακτηρίζεται και ποιες είναι οι συνέπειές της. Διατυπώνουμε το επιχείρημα πως τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια πρέπει να τιμολογούνται ώστε να μην αφήνουν περιθώρια κερδοσκοπίας: δεν πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να αγοραστεί ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων που δίνει θετικό αποτέλεσμα με μηδενικό κόστος γιατί τότε κάθε επενδυτής θα επιθυμεί να κατέχει άπειρη ποσότητα τέτοιων χαρτοφυλακίων (Κεφάλαιο 4). Όταν δεν υπάρχουν δυνατότητες κερδοσκοπίας στις

χρηματοοικονομικές αγορές το πρόβλημα επιλογής χαρτοφυλακίου του επενδυτή έχει λύση. Η αγορά μιας μονάδας συμβολαίου δημιουργεί ένα κόστος ίσο με την τιμή του τη στιγμή μηδέν που με τη σειρά του παράγει εισόδημα τη στιγμή 1. Οι απολαβές εισοδήματος που παράγονται από το σχηματισμό όλων των πιθανών χαρτοφυλακίων συμβολαίων σχηματίζουν τον υπόχωρο αγοράς. Έτσι, κατά τη γεωμετρική ερμηνεία της απουσίας κερδοσκοπίας, που δίνεται στο Κεφάλαιο 4, οι συνθήκες μεγιστοποίησης της προτίμησης του επενδυτή θέλουν τη βέλτιστη απολαβή να είναι το σημείο στο οποίο η παρούσα τιμή είναι κάθετη στον υπόχωρο αγοράς. Στο τελευταίο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 5) ορίζουμε τις πλήρεις και μη πλήρεις αγορές. Πλήρεις είναι οι αγορές στις οποίες ο υπόχωρος αγοράς έχει μέγιστη διασταση και μη πλήρεις όταν η διάσταση του υπόχωρου αγοράς είναι μικρότερη της μέγιστης. Στην περίπτωση μη πλήρους αγοράς οι επενδυτές έχουν περιορισμούς ως προς τις απολαβές που μπορούν αν επιτύχουν. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας εξετάζουμε μόνο την περίπτωση της πλήρους αγοράς: σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μοναδικό διάνυσμα τιμών παρούσας αξίας που υποστηρίζει τον υπόχώρο αγοράς, άρα οι κλίσεις των επενδυτών είναι ίσες και η ισορροπία βέλτιστη κατά Pareto. Η ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς είναι ουσιαστικά ισορροπία Arrow- Debreu.

Abstract

The focus of this diploma thesis is on understanding the role and functioning of the financial markets and the analysis is based on the simplest two period model. The key to the simplicity of this model is that it abstracts from all the the complicating elements of the general model except two, which are taken as primitive for eiach agent: the preference ordering and an exogenously given income stream. The preference ordering represents the agent's attitude towards consumption today versus consumption in the future (his impatience) as well as his attitude towards the variability of an uncertain consumption stream in the future (his risk aversion). The characteristic of the income stream of agents is that they typically are not evenly distributed over time or across the uncertain states of nature. Thus, we use the idea of a financial contract, which is a claim to an income stream. By exchanging such claims agents change the shapes of their income streams, obtaining a more even consumption across time and the uncertain contingencies. In Chapter 2 we demonstrate analytically the characteristics of a financial economy. We begin by studying the reference model (the Arrow-Debreu model) in which, for each state, there is a claim which promises o pay one unit of income in the specific state. Trading in these primitive claims leads to equilibrium prices which are the present values at date 0 of one unit of income in each state at date 1. Since agents in solving their maximum problems are led to such prices, it is proven that the equilibrium allocation is Pareto optimal (Chapter 3). A more general form of contracts is then introduced and we study the absence of arbitrage on the financial markets, its characterization and the consequences. It is stated that the financial securities must always be appropriately priced in the minimal sense that they do not offer arbitrage opportunities: it must not be possible to purchase a portfolio of securities which gives a positive reurn at zero cost- for any agent would want to hold an infinite amount if such a portfolio (Chapter 4). When there are no arbitrage opportunities on the financial markets an agent's portfolio choice problem has a solution. Purchasing one unit of a security incurs a cost at date 0 equal to its price and generates an income stream at date 1. The income transfers generated by forming all possible portfolios of securities form a subspace, called market subspace. Thus, according to the geometric interpretation of the absence of arbitrage given in Chapter 4, the first- order conditions for the agent's financial market maximum problem assert that the optimal income transfer is the point where the agent's indifference surface is tangent to the market subspace. In the last chapter (Chapter 5) we give the definitions of complete and incomplete markets. The financial markets are said to be complete when the market subspace has maximal dimension S; they are said to be incomplete when its dimension is less than S, and in this case agents are actually constrained in the income transfers that they can achieve. During this diploma thesis, we take

under consideration only the case of complete financial markets: in this case there is a unique vector of present value prices that supports the market subspace. Thus all agents' (normalized) gradient vectors coincide and the equilibrium is pareto optimal. The financial market equilibrium is essentially an Arrow- Debreu equilibrium.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η στατική και συγχρόνως ντετερμινιστική θεώρηση της οικονομίας, όπου αγνοείται ο παράγοντας χρόνος και οι διαφορετικές καταστάσεις υπό τις οποίες πραγματοποιούνται οι συναλλαγές, είναι αρκετά μακριά από την πραγματικότητα. Ωστόσο, το στατικό μοντέλο ισορροπίας (Arrow-Debreu) μπορεί να διαμορφωθεί κατάλληλα ώστε να εκφράζει τη συμπεριφορά των καταναλωτών όταν στην οικονομία υπεισέρχεται ο παράγοντας της αβεβαιότητας και του χρόνου. Οι έννοιες της αβεβαιότητας και του χρόνου είναι άμεσα συνδεδεμένες μεταξύ τους, υπό την έννοια της βαθμιαίας αποκάλυψης. Οι επενδυτές της οικονομίας δεν είναι ενήμεροι για τις καταστάσεις που διαμορφώνονται στην αγορά, αλλά αποκτούν πληροφόρηση για αυτές με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε ενώ σε μια συμβατική αρχή του χρονικού ορίζοντα δε γνωρίζουν τίποτα για τις ακριβείς συνθήκες στην αγορά, στο τέλος του χρονικού ορίζοντα είναι πλήρως ενημερωμένοι για το ποια κατάσταση, μέσα από ένα σύνολο δυνατών καταστάσεων, αντιμετωπίζουν. Έτσι κατά μήκος των περιόδων ενός θεωρούμενου χρονικού ορίζοντα, οι συναλλαγές που πραγματοποιούν, διεξάγονται μέσα στο καθεστώς αβεβαιότητας, η οποία βαθμιαία όμως μειώνεται.

Η βαθμιαία αποκάλυψη της πληροφορίας περιγράφεται μέσω μιας οικογένειας διαμερίσεων του S. Υπενθυμίζουμε ότι μια διαμέριση του S, είναι μια συλλογή από υποσύνολα του S, τα οποία είναι ξένα ανά δύο και των οποίων η ένωση είναι το S. Η έννοια του δένδρου πληροφόρησης στηρίζεται στην υπόθεση ότι κάθε στοιχείο της διαμέρισης αναπαρίσταται ως κόμβος ενός δένδρου και αυτό ισχύει για όλες τις διαμερίσεις.

Το πιο απλό δένδρο πληροφόρησης έχει δύο περιόδους $t = 0, 1$ και S διαφορετικά αποτελέσματα τη στιγμή $t = 1$. Οι καταστάσεις θα γράφονται $s = 1, ..., S$ και συχνά είναι πιο βολικό να συμπεριλαμβάνεται η στιγμή $t = 0$ ως η κατάσταση $s = 0$, ώστε οι καταστάσεις να είναι συνολικά $S + 1$.

Κεφάλαιο 2

Χαρακτηριστικά Χρηματοοικονομικής Αγοράς

Θεωρούμε την πιο απλή οικονομία με ένα αγαθό, πεπερασμένο αριθμό επενδυτών ($i = 1, ..., I$) και πεπερασμένο αριθμό αγαθών (n αγαθά), όμως δεν υπάρχει άνω φραγμα για το πλήθος των αγαθών που μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο. Επίσης υποθέτουμε ότι έχουμε διανύσματα αγαθών όπου οι συντεταγμένες του διανυσματος είναι ο αριθμός των μονάδων του αντίστοιχου αγαθού. Κάθε τέτοιο διάνυσμα ονομάζεται δέσμη αγαθών.
Τα διανύσματα αγαθών είναι στοιχεία του χώρου R^n που ονομάζεται χώρος αγαθών. Αφού σε κάθε κατάσταση υπάρχει μόνο ένα αγαθό, ο χώρος των αγαθών θα είναι ο R^n με $n = S + 1$.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο όλων των δεσμών αγαθών που μπορεί να εμφανιστούν στην οικονομία είναι ένα κυρτό υποσύνολο $X^i \subset R^n$ που ονομάζεται σύνολο κατανάλωσης ενός επενδυτή i. Η κυρτότητα του συνόλου κατανάλωσης είναι μια από τις βασικές υποθέσεις της οικονομίας. Πρακτικά σημαίνει ότι αν οι δέσμες αγαθών **a** και **b** ανήκουν στον X^i τότε κάθε κυρτός συνδυασμός είναι διαθέσιμος, δηλαδή $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \in X^i$. Επίσης, είναι φυσικό να υποθέσουμε ακόμη ότι αν μια δέσμη αγαθών **x** είναι διαθέσιμη και τα θετικά πολλαπλάσιά της είναι επίσης αγαθά της οικονομίας τότε το σύνολο κατανάλωσης είναι κώνος του χώρου αγαθών. Έτσι, υποθέτουμε συνήθως ότι το X^i είναι κυρτό υποσύνολο του θετικού κώνου

$$\mathbb{R}^n_+ = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ | x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\right\}$$

του $\mathbb{R}^n$ και στις περισσότερες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το X^i είναι ακριβώς ο $\mathbb{R}^n_+$.

Ορίζεται το διάνυσμα κατανάλωσης $\mathbf{x}^i = ({x_0}^i, {x_1}^i, ..., {x_j}^i)$ για τον i επενδυτή, όπου ${x_0}^i$ είναι η κατανάλωση στο παρόν και $({x_1}^i, ..., {x_j}^i)$ η κατανάλωση στο μέλλον.

Στην οικονομία μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις συμπεριφορές των επενδυτών σε σχέση με τις προτιμήσεις τους, τις τιμές και το συνολικό διαθέσιμο αγαθό. Ο τρόπος που ο τυχαίος επενδυτής συγκρίνει τα διάφορα αγαθά και λαμβάνει τις αποφάσεις του είναι μια διμελής σχέση που στα οικονομικά αναφέρεται ως σχέση προτίμησης. Γενικά για σύνολο $A \neq \emptyset$ και $\mathbf{x}, \ \mathbf{y} \ \in \ A$ η δέσμη αγαθών $\mathbf{x}$ είναι προτιμότερη ή ίδια από τη δέσμη αγαθών $\mathbf{y}$ και γράφουμε $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$. Αν $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ και $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ γράφουμε ότι το $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ και λέμε ότι το $\mathbf{x}$ είναι αδιάφορο του $\mathbf{y}$. Επίσης, λέμε ότι η σχέση προτίμησης είναι

- πλήρης, άν για κάθε $\mathbf{x}, \ \mathbf{y} \ \in \ A$ ισχύει $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ ή $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$
- μεταβατική, άν για κάθε $\mathbf{x}, \ \mathbf{y}, \ \mathbf{z} \in \ A$ ισχύει $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ και $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$ συνεπάγεται $\mathbf{x} \succsim \mathbf{z}$
- λογική αν η $\succsim$ είναι πλήρης και μεταβατική
- κυρτή αν το σύνολο $P_{\succsim}(\mathbf{x})$ είναι κυρτό για κάθε $\mathbf{x} \in A$. Δηλαδή για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$ και $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$ έπεται ότι $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succsim \mathbf{x} \, \forall \lambda \in [0, 1]$
- αυστηρά κυρτή αν $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$ με $\mathbf{y} \geq \mathbf{z}$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\mathbf{y} \succsim \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \succsim \mathbf{x}$, έπεται ότι $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succ \mathbf{x} \, \forall \lambda \in (0, 1)$
- άνω ημισυνεχής αν για κάθε $\mathbf{x} \ \in \ A$ το σύνολο $P_{\succsim}(\mathbf{x})$[1] είναι κλειστό υποσύνολο του A
- κάτω ημισυνεχής αν για κάθε $\mathbf{x} \ \in \ A$ το σύνολο $P_{\precsim}(\mathbf{x})$[2] είναι κλειστό υποσύνολο του A
- συνεχής αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής

[1] Το σύνολο των στοιχείων του A τα οποία είναι προτιμότερα ή αδιάφορα του x θα ονομάζεται σύνολο των προτιμότερων ή ίδιων στοιχείων του x και θα συμβολίζεται με $P_{\succsim}(\mathbf{x})$, δηλαδή

$$P_{\succsim}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \ \in \ A | \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$$

[2] Ανάλογα ορίζουμε το $P_{\precsim}(\mathbf{x})$

$$P_{\precsim}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \ \in \ A | \mathbf{y} \precsim x\}$$

Η σχέση προτίμησης του i επενδυτή ορίζεται στο σύνολο κατανάλωσης και συμβολίζεται με $\underset{i}{\succsim}$ και είναι πλήρης, μεταβατική και συνεχής. Οι προτιμήσεις των επενδυτών εκφράζονται συχνά με συναρτήσεις που σε κάθε δέσμη αγαθών $\mathbf{x}$ αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός $u^i(\mathbf{x})$ που είναι η βαθμολογία του i επενδυτή για το διάνυσμα αγαθών $\mathbf{x}$ σύμφωνα με τις προτιμήσεις και τις ανάγκες του. Έτσι η δέσμη αγαθών $\mathbf{x}$ είναι προτιμότερη της $\mathbf{y}$ αν $u^i(\mathbf{x}) \geq u^i(\mathbf{y})$. Ορίζεται λοιπόν η συνάρτηση χρησιμότητας $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to R$ που ορίζει τη σχέση

$$\mathbf{x} \underset{i}{\succsim} \mathbf{y} \Leftrightarrow u^i(\mathbf{x}) \geq u^i(\mathbf{y})$$

στο $\mathbb{R}^n_+$ και λέμε ότι η σχέση προτίμησης $\underset{i}{\succsim}$ αναπαρίσταται από τη συνάρτηση u^i.

Σύνολα αδαφορίας της $\succsim$ ή της u^i ονομάζονται οι ισοσταθμικές της u^i. Έτσι για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ το σύνολο των στοιχείων που είναι αδιάφορα του $\mathbf{x_0}$ είναι η $u^i(\mathbf{x_0})$-ισοσταθμική της u^i, δηλαδή

$$P_{\sim}(\mathbf{x_0}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+ | u^i(\mathbf{y}) = u^i(\mathbf{x_0})$$

.

Το είδος της συνάρτησης χρησιμότητας (κυρτή, κοίλη κλπ) συνδέεται με το είδος της σχέσης προτίμησης που αναπαριστά. Θα δούμε πότε ονομάζεται κυρτή, κοίλη μια u^i συνάρτηση χρησιμότητας.

- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ κυρτή αν $\forall\, x,\ y \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+$,και $\lambda\ \epsilon\, (0,1)$ ισχύει
  $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda u^i(x) + (1-\lambda)u^i(y)$
  ή αλλιώς το $\{(x,a)\, \epsilon\, \mathbb{R}^n_+ \times R \mid u^i(x) \leq a\}$ είναι κυρτό σύνολο
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ αυστηρά κυρτή αν $\forall\, x,\ y\, \epsilon \mathbb{R}^n_+,\, \lambda\, \epsilon\, (0,1)$ με $x \neq y$ ισχύει
  $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda u^i(x) + (1-\lambda)u^i(y)$
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ κοίλη αν η $-u^i$ κυρτή.
  Δηλαδή το $\{(x,a)\, \epsilon\, \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \mid u^i(x) \geq a\}$ είναι κυρτό σύνολο
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ αυστηρά κοίλη αν η $-u^i$ αυστηρά κυρτή.
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ σχεδόν κυρτή αν $\forall\, x,\ y\, \epsilon\, \mathbb{R}^n_+,\, \lambda\, \epsilon\, (0,1)$ ισχύει
  $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\ \{u^i(x), u^i(y)\}$

- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ αυστηρά σχεδόν κυρτή αν $\forall\ x,\ y \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \,\epsilon\, (0,1)$ ισχύει $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\ \{u^i(x), u^i(y)\}$
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ σχεδόν κοίλη αν η $-u^i$ σχεδόν κυρτή
  Δηλαδή για $\forall\ x,\ y \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \,\epsilon\, (0,1)$ πρέπει
  $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\ \{u^i(x), u^i(y)\}$
- $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ αυστηρά σχεδόν κοίλη αν η $-u^i$ αυστηρά σχεδόν κυρτή.
  Δηλαδή αν $\forall\ x,\ y \,\epsilon\, \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \,\epsilon\, (0,1)$ με $x \neq y$ ισχύει
  $u^i(\lambda x + (1-\lambda)y) > min\ \{u^i(x), u^i(y)\}$

Για τη συνάρτηση χρησιμότητας θεωρούμε τρεις βασικές υποθέσεις.

Υπόθεση U'' (αυστηρή μονοτονία)
(i) $u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}^n_+$
(ii)$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n_+$ *με* $x \geq x'$ *και* $x \neq x'$ *ισχύει* $u^i(x) > u^i(x')$

Υπόθεση U' (αυστηρή μονοτονία και σχεδόν κοιλότητα)
Η u^i *ικανοποιεί την* U'' *και είναι αυστηρά σχεδόν κοίλη, δηλαδή* $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n_+$ *και* $\lambda \in (0,1)$ *τοτε ισχύει* $u^i\,(\lambda x + (1-\lambda)x') > min\,\{u^i(x), u^i(x')\}$.

Ορίζεται ο $\mathbb{R}^n_{++} = \left\{x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ | x_j > 0, j = 1, \ldots, n\right\}$, το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με θετικές συντεταγμένες. Επίσης, οι συναρτήσεις u^i λέγονται C^∞ στον $\mathbb{R}^n_{++}$ (smooth) αν $\forall k = 1, 2, ..$ οι όλες οι k-ιοστες μερικές παράγωγοι της u^i είναι συνεχείς.

Υπόθεση U (Smooth preferences)
i)$u^i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $\mathbb{R}^n_+$ *και* C^∞ *στο* $\mathbb{R}^n_{++}$
ii) $U^i(x) = \left\{x' \in \mathbb{R}^n_+ | u^i(x') \geq u^i(x)\right\} \subset \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$
iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\left(\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}^n_{++}$
iv) $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$ *ισχύει* $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 u^i(x)}{\partial x_j \partial x_k} < 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ *τέτοιο ώστε* $\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial u^i(x)}{\partial x_j} = 0 \to$ *στον* $\mathbb{R}^n_{++}$

Από την υπόθεση U (Debreu 1972) λαμβάνουμε τις εξής πληροφορίες: η ιδιότητα (ii) ισχυρίζεται ότι οποιαδήποτε καμπύλη αδιαφορίας που περνά από ένα θετικό διάνυσμα κατανάλωσης δεν τέμνεται με το μη αρνητικό κώνο του συνόλου αγαθών. Άρα η λύση στο πρόβλημα μεγίστου του i επενδυτή δε θα βρεθεί στο σύνορο του συνόλου κατανάλωσης. Η ιδιότητα (iii) είναι η υπόθεση ισχυρής μονοτονίας για τη διαφορίσιμη περίπτωση. Η ιδιότητα iv) συνεπάγεται πως η u^i είναι αυστηρά σχεδόν κοίλη στον $\mathbb{R}^n_{++}$.

Μια συνάρτηση χρησιμότητας που ικανοποιεί την υπόθεση U μερικές φορές λέγεται διαφορίσιμα αυστηρά σχεδόν κοίλη. Στο μοντέλο γενικής ισορροπίας, όταν η u^i είναι αυστηρά σχεδόν κοίλη συνεπάγεται ότι ο επενδυτής i έχει μια καλά ορισμένη συνάρτηση ζήτησης και όταν η u^i είναι κυρτή συνεπάγεται ότι αυτή η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

Οι επιλογές που θα κάνει ο επενδυτής καθορίζονται από την ανυπομονησία και την αποστροφή ρίσκου. Οι πράκτορες προτιμούν την κατανάλωση στο παρόν παρά στο μέλλον, δηλαδή κατανάλωση μέρα με τη μέρα (ανυπομονησία). Επίσης προτιμούν την αναμενόμενη αξία ενός τυχαίου διανύσματος κατανάλωσης σε σχέση με το ίδιο το διάνυσμα.

'Αλλο χαρακτηριστικό του επενδυτή i είναι το αρχικό διαθέσιμο του αγαθού (ή του εισοδήματος) σε κάθε κατάσταση. Λέγεται αρχικό αγαθό, συμβολίζεται $\omega^i = (\omega_0^i, \omega_1^i, \ldots, \omega_S^i)$ και έχει διαμορφώσει μια σχέση προτίμησης με την οποία θα κάνει τις επιλογές του ο επενδυτής με σκοπό να βελτιώσει τη θέση του. Το ολικό αγαθό είναι $\omega = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$ και είναι αυτό που θα διατεθεί και θα ανταλλαγεί στην αγορά.

Άρα τα χαρακτηρηστικά του επενδυτή i συνοψίζονται στο ζεύγος $(u^i, \omega^i), i = 1, ..., I$. 'Εστω $(u, \omega) = \left(u^1, \ldots, u^I, \omega_1, \ldots, \omega^I\right)$ το διάνυσμα χαρακτηριστικών των I παικτών. Συμβολίζουμε $E(u, \omega)$ την οικονομία ανταλλαγής.

Αν υποθέσουμε ότι το συνολικό αγαθό θα διανεμηθεί και ότι x^i είναι το διάνυσμα αγαθών που θα αποκτήσει ο i επενδυτής τη χρονική στιγμή που μελετάμε, τα διανύσματα $x^1, ..., x^I$ με τη σειρά που αναγράφονται δηλώνουν την κατανομή του συνολικού αγαθού κατά τη νέα περίοδο. Αν $x^1, ..., x^I \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x^1 + ... + x^I = \omega$, το στοιχείο $x = (x^1, ..., x^I)$ ονομάζεται κατανομή.
Το σύνολο των κατανομών της οικονομίας ανταλλαγής $E(u, \omega)$ είναι
$A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{nI} | \sum_{i=1}^{I} (x^i - \omega^i) = 0\right\}$ ή $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{nI} | \sum_{i=1}^{I} x^i = \omega\right\}$

Ορισμός 2.1 *Μια κατανομή λέγεται εφικτή αν*
i) $x^i \in \mathbb{R}_+^n$, $i = 1, \ldots, I$
ii) $\sum_{i=1}^{I} (x^i - \omega^i) \leq 0$

Ορίζεται το σύνολο των εφικτών κατανομών $F = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{nI} | \sum_{i=1}^{I} (x^i - \omega^i) \leq 0\right\}$.
Το σύνολο F εξάρτάται μόνο από το $\omega = \sum_{i=1}^{I} \omega^i$ και όχι απο την κατανομή των αρχικών αγαθών ω^i ανάμεσα στους επενδυτές.

Ορισμός 2.2 *Μια κατανομή* $\bar{x} = \left(\bar{x}^i, \ldots, \bar{x}^I\right)$ *είναι Pareto άριστη (Pareto optimum)*

αν
i) $\bar{x} \in F$
ii) $\not\exists \ x = \left(x^1, \ldots, x^I\right) \in F$ *τέτοιο ώστε* $u^i(x^i) \geq u^i(\bar{x^i}), i = 1, \ldots, I$ *με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον ενα i.*

Κεφάλαιο 3

Ισορροπία Τυχαίας Αγοράς

Σε αυτή τη διπλωματική μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις ποιοτικές ιδιότητες των κατανομών όταν διαφορετικές δομές αγορών εφάπτονται στη βασική οικονομία ανταλλαγής $E(u, \omega)$. Θα μελετήσουμε δύο τέτοιες δομές αγορών, το σύστημα τυχαίων αγορών (Κεφάλαιο 3) και το σύστημα χρηματοοικονομικών αγορών (Κεφάλαιο 4).

Αρχικά θα δούμε τον τρόπο που λειτουργούν οι οικονομίες. Οι επενδυτές πουλάνε κάποια αγαθά (ή συμβόλαια) από τα οποία λαμβάνουν εισόδημα και αγοράζουν νέα αγαθά για τα οποία υφίσταται κάποια δαπάνη. Οι επενδυτές μπορούν να αγοράσουν και να πουλήσουν όπως επιθυμούν αρκεί η συναλλαγή να διέπεται από την αρχή οφέλους. Σύμφωνα με αυτή ένας επενδυτής δεν μπορεί να αποσύρει από την αγορά ποσότητα αγαθών μεγαλύτερη από την ποσότητα που προσφέρει στην αγορά. Στο απλό μοντέλο δύο περιόδων που μελετάμε όλοι οι όροι συναλλαγής διατυπώνονται τη στιγμή $t = 0$ και για να ελέγχεται η ευθύνη αυτή τη στιγμή. Επίσης υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος ανέξοδος μηχανισμός που διασφαλίζει ότι όλοι οι επενδυτές τηρούν τους όρους των συμβολαίων τη στιγμή $t = 1$. Έτσι απαιτείται μόνο μία μονάδα οφέλους στη στιγμή $t = 0$ και το π_0 δίνει τον αριθμό μονάδων οφέλους που πρέπει να πληρωθούν για μία μονάδα αγαθού τη στιγμή $t = 1$.

Το στατικό μοντέλο της γενικής ισορροπίας έχει μία αγορά για κάθε αγαθό και όλα τα αγαθά συναλλάσσονται ταυτόχρονα. Όπως παρατήρησαν οι Arrow (1953) και Debreu (1959) το μοντέλο γενικής ισορροπίας μπορεί να γενικευτεί σε μια σύνθεση που συμπεριλαμβάνει χρόνο και αβεβαιότητα. Στο μοντέλο της οικονομίας με ένα αγαθό, ως αγαθό θεωρούμε ένα συμβόλαιο που αποδίδει στο μέλλον αγαθό και είναι επιρρεπές σε τυχαία συμβάντα.

Ορισμός 3.1 *Τυχαίο συμβόλαιο για την κατάσταση $s(s = 0, 1, \dots, S)$ είναι η υπόσχεση να παραλάβει κανείς μια μονάδα του μοναδικού αγαθού στην κατάσταση s και τίποτα άλλο. Η τιμή π_s του συμβολαίου για την κατάσταση s*

πληρώνεται τη στιγμή $t = 0$ και μετριέται σε μονάδες οφέλους τη στιγμή 0.

Αν υπάρχει ένα πλήρες σύνολο τυχαίων συμβολαίων την $t = 0$, τότε κάθε επενδυτής i μπορεί να πουλήσει το αρχικό αγαθό του $\omega^i = (\omega_0^i, \omega_1^i, \ldots, \omega_s^i)$ και να αποκτήσει εισόδημα : $\sum_{s=0}^{S} \pi_s \omega_s^i, \ \ i = 1, ..., I$ (μετριέται σε μονάδες οφελους την t=0)
και να αγοράσει ένα διάνυσμα κατανάλωσης $x^i = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_S^i)$ στην τυχαία αγορά που να ικανοποιεί $\sum_{s=0}^{S} \pi_s x_s^i \leq \sum_{s=0}^{S} \pi_s \omega_s^i, i = 1, 2, \ldots, I.$
Επειδή οι σχέσεις προτίμησης έχουμε υποθέσει ότι είναι μονότονες, πάντα ο επενδυτής θα ξοδεύει το εισόδημα του.
Ορίζεται λοιπόν το σύνολο προϋπολογισμού για τον i επενδυτή

$$B(\pi, \omega^i) = \left\{ x^i \in \mathbb{R}_+^n | \sum_{s=0}^{S} \pi_s x_s^i = \sum_{s=0}^{S} \pi_s \omega_s^i \right\} = \left\{ x^i \in \mathbb{R}_+^n | \pi \left(x^i - \omega^i \right) = 0 \right\}$$

με $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_s)$ το διάνυσμα τιμών στη τυχαία αγορά και $\pi\omega^i = \sum_{s=0}^{S} \pi_s \omega_s^i$
.

Ορισμός 3.2 *Η ισορροπία σε τυχαία αγορά (CM ισορροπία) για μια οικονομία $E(u, \omega)$ με ένα αγαθό είναι το ζεύγος $(\bar{x}, \bar{\pi}) \in \mathbb{R}_+^{nI} \times \mathbb{R}_+^n$ τέτοιο ώστε*
i)$\bar{x}^i \in argmax$[1] $\{u^i(x^i) | x^i \in B(\bar{\pi}, \omega^i)\}, i = 1, \ldots, I$, δηλαδή

$$\bar{x} = argmax \left\{ u^i \left(x^i \right) | \bar{\pi} \left(x^i - \omega^i \right) = 0 \right\}$$

ii) $\sum_{i=1}^{I} \left(\bar{x^i} - \omega^i \right) = 0$

3.1 Ύπαρξη ισορροπίας τυχαίας αγοράς

Η ισορροπία ορίζει το αποτέλεσμα της διαδικασίας συναλλαγής όταν οι επενδυτές συμπεριφέρονται όπως απαιτεί το μοντέλο της οικονομίας. Η ύπαρξη ισορροπίας, αν υπάρχει, είναι χρήσιμο εργαλείο στην πρόβλεψη των συνεπειών μιας συναλλαγής. Για να εξετάσουμε την ύπαρξη ισορροπίας σε τυχαίες αγορές πρέπει να λυθούν τα εξής προβλήματα:
(α) για δοθείσες τιμές $\bar{\pi}$ κάθε επενδυτής πρέπει να βρει συναρτήσεις χρησιμότητας που μεγιστοποιούν το διάνυσμα ζήτησης $\bar{x^i}$. Αυτό παράγει το σύνολο ζήτησης $\sum_{i=1}^{I} \bar{x^i}$.
(β) πρέπει να βρεθούν τιμές $\bar{\pi}$ τέτοιες ώστε το σύνολο ζήτησης να συμπίπτει

[1] argmax: το σύνολο μεταβλητών που μεγιστοποιούν το $u^i(x^i)$ στο $\mathrm{B}(\bar{\pi}, \omega^i)$

με το ολικό διαθέσιμο αγαθό $\sum_{i=1}^{I} \omega^i$.

Στην ισορροπία τυχαίας αγοράς κάθε πράκτορας μπορεί να αγοράζει όσο θέλει από το τυχαίο συμβόλαιο χωρίς να επηρεάζεται η τιμή του π_s. Επειδή οι προτιμήσεις του παίκτη είναι αυστηρά μονότονες η τιμή του συμβολαίου πρέπει να είναι θετική για κάθε κατάσταση, αν το πρόβλημα μεγίστου του επενδυτή έχει λύση. Σε μια τέτοια οικονομία δεν υπάρχουν ελευθερα συμβόλαια στην ισορροπία. ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1 (απουσία ελεύθερων συμβολαίων σε τυχαία αγορά)
Αν η συνάρτηση χρησιμότητας ικανοποιεί την υπόθεση U'' τα επόμενα είναι ισοδύναμα
i) το πρόβλημα $max\left\{u^i\left(x^i\right)|x^i \in B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)\right\}$ έχει λύση
ii) $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n_{++}$
iii) $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$ είναι συμπαγές

Απόδειξη. i)⇒ ii) Έστω $\pi_s = 0$ για κάποιο s. Τότε, λόγω μονοτονίας η ζήτηση του παίκτη i για το αγαθό s θα είναι δεν είναι φραγμένη αφού το αγαθό έχει μηδενική τιμή. Αρα το i) δεν έχει λύση, ΑΤΟΠΟ.
ii)⇒ iii) Έστω $m^i = \sum_{s=0}^{S} \bar{\pi}_s \omega_s^i$ το εισόδημα του επενδυτή i. Τότε για $x^i \in B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$ ισχύει $0 \leq x_s^i \leq \frac{m^i}{\bar{\pi}_s}$ ώστε το $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$ φραγμένο. Επειδή η απεικόνιση $\phi : x^i \xrightarrow{\phi} \bar{\pi}x^i$ είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι το $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$ είναι κλειστό και συμπαγές.
iii)⇒ i) Η u^i είναι συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$. Άρα λαμβάνει μέγιστη τιμή σε αυτό. Άρα ισχύει το i.
Από την πρόταση που μόλις αποδείξαμε συνεπάγεται ότι το πρόβλημα (α) έχει λύση. □

Για τη σχέση προτίμησης $\underset{i}{\succsim}$ για κάθε επενδυτή i έχουμε υποθέσει ότι είναι λογική και συνεχής. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι είναι και αυστηρά κυρτή (δηλαδή ισχύει η υπόθεση U') τότε για κάθε i και για κάθε διάνυσμα τιμών $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n_{++}$ η $\underset{i}{\succsim}$ λαμβάνει μέγιστη τιμή ακριβώς σε ένα σημείο του $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$,δηλαδή το πρόβλημα μεγίστου έχει μοναδική λύση γιατί ισχύει το θεώρημα 3.1.1 . Αυτό το σημείο συμβολίζεται $f^i(\bar{\pi})$ και είναι το αγαθό που επιθυμεί να αποκτήσει ο i καταναλωτής.
Τα σημεία αυτά ανήκουν στο ίδιο σύνολο αδιαφορίας της $\underset{i}{\succsim}$ που είναι διάφορο του κενού. Άρα αν συμβολίσουμε το σύνολο των σημείων του $B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)$ στα οποία η $\underset{i}{\succsim}$ παίρνει μέγιστη τιμή με $A(\bar{\pi},\omega^i)$ θα είναι $A(\bar{\pi},\omega^i) \neq \emptyset$ και λέγεται

σύνολο ζήτησης.
Ορίζεται, δηλαδή, η συνάρτηση ζήτησης $f^i : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ με
$f^i(\pi) = argmax\{u^i(x^i)|x^i \in B(\bar{\pi}, \omega^i)\}$.
Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{I} f^i(\bar{\pi})$ είναι το συνολικό ζητούμενο αγαθό.
Επειδή το συνολικό αγαθό που θα ανταλλαγεί είναι το συνολικό αγαθό που κατέχουν οι επενδυτές την προηγούμενη χρονική περίοδο, η διαφορά $Z : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως
$Z(\pi) = \sum_{i=1}^{I} (f^i(\pi) - \omega^i) = \sum_{i=1}^{I} f^i(\bar{\pi}) - \omega$ ονομάζεται συνάρτηση συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης και εκφράζει κατά πόσο η προσφορά ικανοποιεί τη συνάρτηση ζήτησης, αφού $\sum_{i=1}^{I} f^i(\bar{\pi})$ είναι το ζητούμενο αγαθό και ω το προσφερόμενο.
Κάθε αυστηρά θετικό διάνυσμα $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n_{++}$ για το οποίο ισχύει $Z(\bar{\pi}) = 0$ ονομάζεται τιμή ισορροπίας της οικονομίας.

Θεώρημα 3.1.1 *Αν το σύνολο προϋπολογισμού $B(\bar{\pi}, \omega^i)$ είναι συμπαγές και η σχέση προτίμησης $\underset{i}{\succsim}$ είναι λογική και άνω ημισυνεχής, η $\underset{i}{\succsim}$ παίρνει μέγιστη τιμή σε ένα τουλάχιστον σημείο του $B(\bar{\pi}, \omega^i)$. Τα στοιχεία στα οποία μεγιστοποιείται η $\underset{i}{\succsim}$ ανήκουν στο σύνολο αδιαφορίας της $\underset{i}{\succsim}$. Αν επιπλέον η $\underset{i}{\succsim}$ είναι αυστηρά κυρτή, το μέγιστο λαμβάνεται ακριβώς σε ένα σημείο του $B(\bar{\pi}, \omega^i)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα. □

Αν οι σχέσεις προτίμησης $\underset{i}{\succsim}$ των επενδυτών είναι συνεχείς μονότονες και αυστηρά κυρτές, η συνάρτηση συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης [2] ικανοποιεί τις ιδιότητες:
1)$Z(\pi) \geq -\omega \forall \pi \in \mathbb{R}^n_{++}$ (κάτω φραγμένο)
2)Αν $\pi^\nu \in \mathbb{R}^n_{++}$ τέτοιο ώστε $\pi^\nu \to \pi \in \partial\mathbb{R}^n_{++}, \pi \neq 0 \Rightarrow \|Z(\pi^\nu)\| \overset{\nu\to\infty}{\to} \infty$ (συμπεριφορά ορίων)
3)$Z(a\pi) = Z(\pi)\ \forall a > 0, \forall \pi \in \mathbb{R}^n_{++}$ (ομογένεια)
4) Η Z είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n_{++}$
5)$\pi Z(\pi) = 0\ \forall \pi \in \mathbb{R}^n_{++}$ (νόμος Walras)

Δοθέντος ότι το πρόβλημα (α) έχει λύση το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης CM ισορροπίας δίνει απάντηση στο πρόβλημα (β).

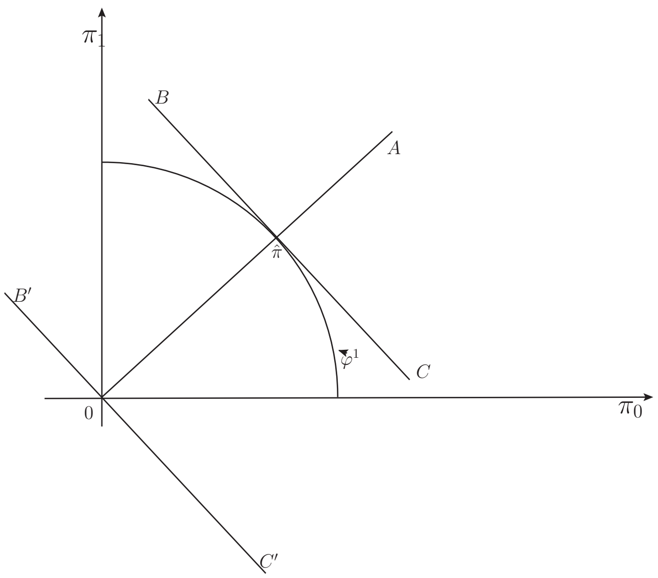
Θεώρημα 3.2 (Ύπαρξη CM ισορροπίας) *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση U'. Αν $\sum_{i=1}^{I} \omega^i \in \mathbb{R}^n_{++}$ τότε η οικονομία ανταλλαγών $E(u, \omega)$ έχει CM ισορροπία.*

[2]Για τη συνάρτηση ζήτησης f^i ισχύουν οι ιδιότητες (2)-(5) της συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης και επιπλέον η ιδιότητα $f^i(\pi) \geq 0\, \forall \pi \in \mathbb{R}^n_{++}$ (ιδιότητα *)

Απόδειξη. Αφού ισχύει η U' συνεπάγεται ότι το πρόβλημα $max\left\{u^i\left(x^i\right)|x^i \in B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)\right\}$ έχει λύση. Άρα υπάρχει συνάρτηση ζήτησης $f^i : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ με
$f^i(\pi) = argmax\left\{u^i(x^i)|x^i \in B\left(\bar{\pi},\omega^i\right)\right\}$ και η συνολική συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης είναι όπως ορίστηκε και παραπάνω
$Z : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ με $Z : (\pi) = \sum\left(f^i(\pi) - \omega^i\right)$.
Τότε το ζεύγος $(\bar{x},\bar{\pi})$ είναι CM ισορροπία αν και μόνο αν

$$\bar{x} = \left(f^1(\bar{\pi}),\ldots,f^I(\bar{\pi})\right) \text{ και } Z(\bar{\pi}) = 0 \tag{3.1}$$

Από την ιδιότητα (3) της Z συμπεραίνουμε ότι η συνολική υπερβάλλουσα ζήτηση κάθε επενδυτή εξαρτάται μόνο από τις τιμές αναφοράς $(Z(\pi))$. Έτσι μπορούμε να προχωρούμε σε κανονικοποίηση για να είναι οι τιμές καθορισμένες. Στην παρούσα απόδειξη χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση $\sum_{s=0}^{S}\pi_s^2 = 1$ για να αντικατασταθεί οποιοδήποτε διάνυσμα τιμών στο τμήμα ΟΑ του επόμενου σχήματος με το σημείο $\hat{\pi}$ στη μοναδιαία σφαίρα. (Αν έχω 2 καταστάσεις $s = 0, s = 1$ τότε έχω $\pi_0^2 + \pi_1^2 = 1 \to$ μοναδιαίος κύκλος)



Σχήμα 3.1: *Κανονικοποίηση τιμών στη μοναδιαία σφαίρα όταν $n = 2$: το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο (BC) στη σφαίρα στο $\hat{\pi}$ και ο εφαπτόμενος χώρος (B'C')*

Η μοναδιαία σφαίρα ορίζεται $\varphi^{n-1} = \left\{\pi \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^{n}\pi_j^2 = 1\right\}$ και η μη αρνητική και θετική μοναδιαία σφαίρα είναι αντίστοιχα $\varphi_+^{n-1} = \varphi^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^n$ και $\varphi_{++}^{n-1} = \varphi^{n-1} \cap \mathbb{R}_{++}^n$. Η σφαίρα είναι η επίπεδη επιφάνεια $g(\pi) = 1$ της συνάρτησης $g\left(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n\right) = \sum_{j=1}^{n}\pi_j^2$.

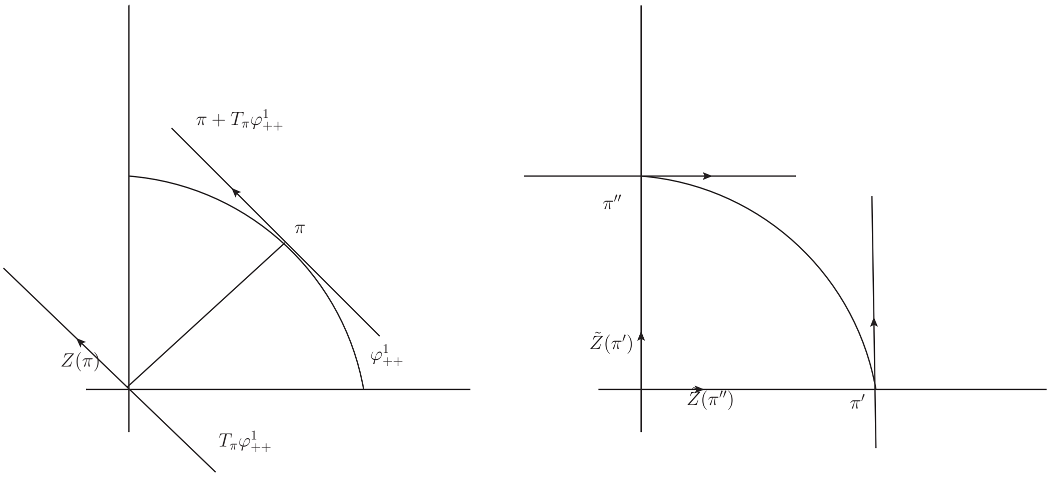
Η συνάρτηση για το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο BC της μοναδιαίας σφαίρας στο σημείο $\hat{\pi}$ του σχήματος είναι $\bigtriangledown g(\widehat{\pi})(\pi - \widehat{\pi}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\pi}(\pi - \widehat{\pi}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\pi}\pi = 1$. Μεταφέροντας το υπερεπίπεδο από το BC στο B'C' (συμμετρικό του) δίνεται ο εφαπτόμενος χώρος στο $\widehat{\pi}$, ο $T_{\widehat{\pi}}\varphi^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n | \widehat{\pi}z = 0\}$, δηλαδή όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που είναι κάθετα στο $\widehat{\pi}$.
Από την ιδιότητα (5) για τη συνολική ζήτηση Z ($\pi Z(\pi) = 0 \forall \pi \in \mathbb{R}^n_{++}$) παίρνουμε ότι η συνολική υπερβάλλουσα ζήτηση $Z(\widehat{\pi})$ βρίσκεται στον εφαπτόμενο χώρο $T_{\widehat{\pi}}\varphi^{n-1}$. Δηλαδή η συνάρτηση συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης $Z : \varphi^{n-1}_{++} \to \mathbb{R}^n$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο[3] πάνω στη θετική μοναδιαία σφαίρα.

Οι ιδιότητες (1) και (2) της Z συνεπάγονται ότι όταν η τιμή ενός αγαθού τείνει στο 0 τότε η υπερβάλλουσα ζήτηση γίνεται αυθαίρετα μεγάλη ($\pi_j \to 0 \Rightarrow Z_j \to \infty$). Αν αυτό συμβαίνει για πολλά αγαθά, δε θα πηγαίνει η συνολική ζήτηση για κάθε αγαθό στο άπειρο, αλλά για τουλάχιστον ένα αγαθό η $Z \to \infty$. Άρα η Z μπορεί να τροποποιηθεί κοντά στο σύνορο $\partial\varphi^{n-1}_{+}$ ώστε να αποκτήσει ένα διανυσματικό πεδίο $\tilde{Z}$ που ορίζεται σε όλο το φ^{n-1}_{+}, έχει την ιδιότητα $\tilde{Z}(\pi) = 0 \Leftrightarrow Z(\pi) = 0$ και είναι εσωτερικής κατεύθυνσης στο όριο ($\pi_j = 0$ συνεπάγεται $\tilde{Z}_j(\pi) > 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 για την περίπτωση $n = 2$: στο $\pi' = (1, 0), \tilde{Z}_0(\pi') > 0$ και στο $\pi'' = (0, 1), \tilde{Z}_1(\pi'') > 0$). Ένα τέτοιο $\tilde{Z}$ (η κατασκευή του δίνεται στο παράρτημα) είναι το ίδιο με το Z εκτός από μια μικρή περιοχή του $\partial\varphi^{n-1}_{+}$ που δεν περιέχει μηδενικές τιμες του Z. Ισχύει ότι κάθε συνεχές διανυσματικό πεδίο εσωτερικής κατεύθυνσης στη μη αρνητική μοναδιαία σφαίρα λαμβάνει σε κάποιο σημείο μηδενική τιμή.
Δηλαδή ισχύει το

Θεώρημα διανυσματικού πεδίου εσωτερικής κατεύθυνσης: "Αν $\upsilon : \varphi^{n-1}_{+} \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο εσωτερικής κατεύθυνσης στη μη αρνητική μοναδιαία σφαίρα φ^{n-1}_{+}, τότε υπάρχει $\bar{\pi} \in \varphi^{n-1}_{+}$ τέτοιο ώστε $\upsilon(\bar{\pi}) = 0$."

Από αυτό προκύπτει ότι υπάρχει το διάνυσμα τιμών ισορροπίας τέτοιο ώστε να ισχύει η (3.1) συνθήκη CM ισορροπίας. □

[3]Μια απεικόνιση $\upsilon : \varphi^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\upsilon(\pi) \in T_\pi\varphi^{n-1} \forall \pi \in \varphi^{n-1}$ λέγεται διανυσματικό πεδίο στη μοναδιαία σφαίρα φ^{n-1}. Ένα διανυσματικό πεδίο υ στη μη αρνητική μοναδιαία σφαίρα λέγεται εσωτερικής κατεύθυνσης στο σύνορο $\partial\varphi^{n-1}_{+}$ αν $\upsilon_i(\pi) \neq 0 \forall \pi \in \partial\varphi^{n-1}_{+}$ με $\pi_j = 0$, αφού το διάνυσμα $\upsilon(\pi)$που βρίσκεται σε π σημεία δείχνει προς το εσωτερικό του φ^{n-1}_{+}.



Σχήμα 3.2: *Το πρώτο σχήμα δείχνει την υπερβάλλουσα ζήτηση ως διανυσματικό πεδίο στο φ^1_{++} όταν $n = 2$. Το δεύτερο δείχνει την ιδιότητα κατεύθυνσης προς τα μέσα του $\tilde{Z}(\pi)$*

3.2 Ιδιότητα του βέλτιστου Pareto της ισορροπίας τυχαίας αγοράς

Το μοντέλο των Arrow-Debreu αποτελεί ιδανικό σύστημα αγοράς γιατί οδηγεί σε εξισώσεις ισορροπίας και σε κατανομές βέλτιστες κατά Pareto. Ισχύει, λοιπόν, το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3 (CM ισορροπία βέλτιστη κατά Pareto)
Αν η $E(u, \omega)$ οικονομία ικανοποιεί την υπόθεση U'' και το ζεύγος $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι CM ισορροπία, τότε η κατανομή $\bar{x}$ είναι Pareto βέλτιστη.

Απόδειξη. Αν $\bar{x}$ δεν είναι Pareto, τότε $\exists\ x \in F$[4] τέτοιο ώστε $u^i(x^i) \geq u^i(\bar{x}^i)$ με $u^j(x^j) \geq u^j(\bar{x}^j)$ για $i = 1, \ldots, I$ και για κάποιο j.
Αφού το $\bar{x}^j$ είναι βέλτιστο για κάποιον επενδυτή j στο $B\left(\bar{\pi}, \omega^j\right)$ τότε το $x^j \notin B\left(\bar{\pi}, \omega^j\right) \Leftrightarrow \bar{\pi}x^j > \pi\omega^j$. Για $i \neq j$ και αφού u^i είναι μονότονη θα είναι $\bar{\pi}x^i \geq \bar{\pi}\omega^i$. Έτσι $\bar{\pi}\sum_{i=1}^{I} x^i > \bar{\pi}\sum_{i=1}^{I}\omega^i$, άτοπο αφού $x \in F$. □

Στο παραπάνω θεώρημα, αν αντί για την υπόθεση U'' χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση U, δηλαδή απαιτήσουμε οι συναρτήσεις χρησιμότητας να είναι διαφορίσιμες, μπορούμε να αποδείξουμε καλύτερα γιατί η ισορροπία τυχαίας αγοράς οδηγεί σε κατανομή άριστη κατά Pareto. Για να προχωρήσουμε σε

[4]F είναι το σύνολο των εφικτών κατανομών

αυτή την απόδειξη, χρειάζεται να διατυπώσουμε τις αναγκαίες και επαρκείς συνθήκες πρώτης τάξης για να είναι μια κατανομή άριστη κατά Pareto.

Θεώρημα 3.4 (Χαρακτηρισμός βέλτιστου κατά Pareto)
Έστω οικονομία $E(u,\omega)$ *που ικανοποιεί την υπόθεση* U. *Μια κατανομή* $\bar{x} = (\bar{x}^1, ..., \bar{x}^I)$ *είναι βέλτιστη κατά Pareto αν και μόνο αν*
i) $\bar{x} \in F$ *και*
ii) υπάρχει $\bar{\pi}_{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^S$ *τέτοιο ώστε*

$$\pi_1^1(\bar{x}^1) = ... = \pi_1^I(\bar{x}^I) = \pi_1 \tag{3.2}$$

Απόδειξη. " $\Rightarrow$ "
Το $\bar{x}$ είναι βέλτιστο κατά Pareto αν και μόνο αν υπάρχει $\left(\bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^I\right) \in \mathbb{R}^{I-1}$ τέτοιο ώστε

$$\bar{x} = argmax \left\{ u^1(x^1) | \begin{array}{c} u^i(x^i) \geq \bar{v}^i, i = 2, \ldots, I \\ \sum_{i=2}^{I}(x^i - \omega^i) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν $\bar{v}^i \leq u^i(0)$, τότε η αυστηρή μονοτονία της u^i συνεπάγεται ότι $\bar{x}^i = 0$ και ο επενδυτής i μπορούν να παραλειφθούν. Αν $\bar{v}^i > u^i(0)$, τότε λόγω συνέχειας της u^i υπάρχει $x^i \in \mathbb{R}^n_{++}$. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως το $\bar{x}$ είναι ένα εσωτερικό μέγιστο του προβλήματος 1. Οι 1ης τάξης συνθήκες για αυτό το πρόβλημα γράφονται ως εξής:
Υπάρχουν διανύσματα $\bar{a} = (\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_I}) \in \mathbb{R}^I_{++}$ και $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi_1}) \in \mathbb{R}^{S+1}$ τέτοια ώστε

$$\bar{a_i} \nabla u^i(x^i) = \bar{\pi}, i = 1, \ldots, I(\text{συνθήκες πρώτης τάξης}) \tag{3.4}$$

Διαιρώντας την (3.4) με το περιεχόμενο για $t = 0$ συνεπάγεται πως
$\pi_1^i(x^i) = \bar{\pi}_1, i = 1, \ldots, I$ ώστε μια κατανομή $\bar{x}$ Pareto βέλτιστη να ικανοποιεί τη σχέση $\pi_1^1(\bar{x}^1) = \cdots = \pi_1^I(x^I) = \bar{\pi}_1$.

"$\Leftarrow$"
Αν $\bar{x} \in F$ και $\bar{v}^i = u^i(\bar{x}^i), i = 2, \ldots, I$ τότε το $\bar{x}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς της (3.3)
Επίσης, αν ισχύει η (3.1) οι πρώτης τάξης συνθήκες (3.4) ικανοποιούνται για

$$\bar{a_i} = \frac{1}{\frac{\partial u^i(\bar{x^i})}{\partial x_0^i}} \text{ για } i = 1, ..., I$$

Αφού $u^1()$ είναι σχεδόν κοίλη και το σύνολο περιορισμών είναι συμπαγές $\Rightarrow \bar{x}$ Pareto βέλτιστη.

□

Αυτό που μόλις αποδείξαμε σημαίνει ότι για να είναι μία κατανομή $\bar{x} = \left(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^I\right)$ Pareto βέλτιστη θα πρέπει οι κλίσεις των επενδυτών $\left(\bigtriangledown u^1(\bar{x}^1), \ldots, \bigtriangledown u^I(\bar{x}^I)\right)$ να δείχνουν στην ίδια διεύθυνση ή οι κανονικοποιημένες κλίσεις [5] να εξισώνονται, δηλαδή $\pi^1(\bar{x}^1) = \cdots = \pi^I(\bar{x}^I) = \bar{\pi}$. Το $\bar{\pi}$ είναι το διάνυσμα τιμών που εισάγεται στα $S+1$ αγαθών κατά μήκος των καταστάσεων στην Pareto βέλτιστη κατανομή. Αν δεν ικανοποιείται αυτό, θα υπάρχει μια μικρή ανακατανομή των αγαθών ανάμεσα στους επενδυτές που είναι προτιμότερη από όλους. Αυτή η ανακατανομή είναι μια κατά Pareto βελτίωση. Αντίστροφα, σε μια κατανομή οι κλίσεις των παικτών δείχνουν όλα προς την ίδια κατεύθυνση, τότε η κατανομή είναι Pareto βέλτιστη. Η συναλλαγή σε μια τυχαία αγορά εξασφαλίζει ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, όπως αποδεικνεύεται εδω:

(εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος (3.3) χρησιμοποιώντας την υπόθεση U)

Απόδειξη. Έστω το ζεύγος $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι η ισορροπία στην τυχαία αγορά, με $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_1)$. Τότε το $\bar{x}^i$ είναι λύση στο πρόβλημα μεγίστου του i επενδυτή, δηλαδή

$$\bar{x} = argmax\left\{u^i\left(x^i\right) | \bar{\pi}\left(x^i - \omega^i\right) = 0\right\} \tag{3.5}$$

για $x^i \in \mathbb{R}^n_+$.
Αν $\omega^i = 0$ τότε $x^i = 0$.
Αν $\omega^i \neq 0$, $\omega^i \in \mathbb{R}^n_+$ τότε $\bar{\pi}\omega^i > 0$ και οι πρώτης τάξεως συνθήκες του προβλήματος (3.5) είναι:
Υπάρχει $\bar{\lambda}^i_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\nabla u^i(x^i) = \bar{\lambda}^i_0 \bar{\pi} \Leftrightarrow$

$$\pi^i_1(x^i) = \bar{\pi}_1 \tag{3.6}$$

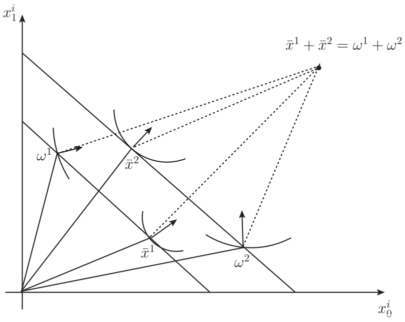
για $x^i \in \mathbb{R}^n_{++}$.
Αφού $\bar{x} \in \bar{F}$ και το $\bar{x^i}$ ικανοποιεί την (3.6) για $i = 1, ..., I$, από χαρακτηρισμό βέλτιστου κατά Pareto το $\bar{x}$ είναι άριστο κατά Pareto. □

Μια γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος (3.3) δίνεται στο σχήμα 3.3 για την περίπτωση δύο παικτών.

Το σχήμα απεικονίζει δύο επενδυτές που ξεκινούν με αρχικό διαθέσιμο ω^1, ω^2 όπου οι κανονικοποιημένες κλίσεις των επενδυτών είναι διακριτά ($\pi^1(\omega^1) \neq \pi^2(\omega^2)$). Η συναλλαγή σε τυχαία αγορά οδηγεί σε ισορροπία $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{\pi})$ όπου οι κανονικοποιημένες κλίσεις των επενδυτών είναι ίσα $\bar{\pi}^1(x^1) = \bar{\pi}^2(x^2) = \bar{\pi}$. Επειδή όλοι οι επενδυτές έχουν το ίδιο διάνυσμα τιμών $\bar{\pi}$, οι κλίσεις τους

---

[5] τα $\pi^i(\bar{x}^i) = \frac{1}{\lambda^i_0(\bar{x}^i)} \bigtriangledown u^i(\bar{x}^i)$ με $\lambda^i_0(\bar{x}^i) = \frac{\partial u^{i(\bar{x}^i)}}{\partial x^i_0}$ λέγονται κανονικοποιημένες κλίσεις (grad) του επενδυτή i στο $\bar{x}^i$



Σχήμα 3.3: *Ισορροπία Τυχαίας Αγοράς. Δύο επενδυτές ξεκινούν με αρχικά αγαθά* ω^1, ω^2 *στα οποία οι κανονικοποιημένες κλίσεις (grad) είναι διακριτές:* $(\pi^1(\omega^1) \neq \pi^2(\omega^2))$. *Η ανταλλαγή στις τυχαίες αγορές οδηγεί σε μια ισορροπία* $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{\pi})$ *στην οποία οι κανονικοποιημένες κλίσεις είναι ίσες* $\pi^1(\bar{x}^1) = \pi^2(\bar{x}^2) = \bar{\pi}$

$\bigtriangledown u^i(\bar{x}^i)$ δείχουν όλα προς την ίδια κατεύθυνση και αυτό εξασφαλίζει το βέλτιστο κατά Pareto. Έτσι το προσωπικό ενδιαφέρον -σχέση (3.5)- οδηγεί στην κοινωνική ευμάρεια -σχέση (3.3)- όταν οι επενδυτές συναλλάσσονται υπό κοινό διάνυσμα τιμών $\bar{\pi}$ που έχει καθιερωθεί στις ανταγωνιστικές αγορές.

Κεφάλαιο 4

Ισορροπία Χρηματοπιστωτικής Αγοράς

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε το συμβόλαιο τυχαίας αγοράς, που υπόσχεται να αποδώσει εισόδημα στον παίκτη γα ένα συγκεκριμένο συμβάν. Με ένα τέτοιο συμβόλαιο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τα ασφαλιστικά συμβόλαια που περιλαμβάνουν φυσικούς κινδύνους πέρα από τον έλεγχο των ανθρώπων (ενδεχόμενα τυχαίου συμβολαίου). Γι αυτό και τα άτομα αγοράζουν τέτοια συμβόλαια για να εξασφαλιστούν απέναντι σε τέτοια ενδεχόμενα. Στο μοντέλο τυχαίας αγοράς που μελετήσαμε τα συμβόλαια μπορούν να καλύψουν όλα αυτά τα ενδεχόμενα και είναι το μόνο είδος συμβολαίου που ανταλλάσσεται. Ωστόσο, υπάρχει μεγάλο εύρος οικονομικών ρίσκων, εκτός αυτών των φυσικών κινδύνων, που μπορούν να επηρεάσουν την οικονομία και δεν καλύπτονται απο τα ασφαλιστικά συμβόλαια. Έτσι, κρίνεται αναγκαίο να επεκταθεί ο ορισμός του τυχαίου συμβολαίου για να συμπεριλάβει όλους τους κινδύνους, φυσικούς και οικονομικούς, που μπορούν να συμβούν στα άτομα και να επηρεάσουν την οικονομία.

Ορισμός 4.1 *Χρηματοοικονομικό συμβόλαιο $j(j = 1, \ldots, j)$ είναι η υπόσχεση να παραλάβει ένας επενδυτής $V_s^j \in \mathbb{R}$ μονάδες αγαθού (ή εισοδήματος) στην κατάσταση s για $s = 1, \ldots, S$. Η τιμή του χρηματοοικονομικού συμβολαίου είναι q_j, πληρώνεται τη στιγμή $t = 0$ και μετριέται σε μονάδες οφέλους τη στιγμή 0.*

Τα είδη των συμβολαίων που μελετά αυτό το κεφάλαιο και ανταλλάσσονται στις αγορές έχουν συγκεκριμένες προϋποθέσεις για όλους τους αγοραστές και πωλητές. Τέτοια ήδη συμβολαίων είναι τα ομόλογα, ίδια κεφάλαια, ασφάλειες, δικαιώματα προαίρεσης και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης που ανταλλάσσονται μέσω χρηματοοικονομικών διαμεσολαβητών. Στο μοντέλο δύο περιόδων και ενός αγαθού δεν είναι δυνατό να θεωρηθούν αυτά τα συμβόλαια ως ξεχωριστή περίπτωση το καθένα. Στη βιβλιογραφία τα συμβόλαια αυτά αναφέρονται ως χρεόγραφα.

Υιοθετούμε κάποιες ιδανικές υποθέσεις. Υποθέτουμε πως οι αγορές στις οποίες ανταλλάσσονται τα συμβόλαια είναι ανταγωνιστικές, ώστε οι επενδυτές να πιστεύουν ότι μπορούν να αγοράσουν και να πουλήσουν όσα συμβόλαια θέλουν χωρίς να επηρεάσουν τις τιμές τους. Επιπλέον, κάθε συμβόλαιο μπορεί να αγοραστεί και να πουληθεί σε διαιρετές μονάδες, ενώ τα κόστη συναλλαγής δεν συμπεριλαμβάνονται στις αγοραπωλησίες. Θεωρούμε ότι τα συμβόλαια ελέγχονται και επιβάλλονται , έτσι ώστε οι επενδυτές να μην μπορούν να τα αθετήσουν. Υπάρχουν πολύ μεγάλες τιμωρίες για την αθέτηση συμβολαίων για να αποτρέπουν τους παίκτες να παραβούν τις υποσχέσεις των συμβολαίων. Εναλλακτικά, αν για λόγους συγκυριών ένα χρέος δεν πληρωθεί, αυτές οι συγκυρίες είναι εκ των προτέρων γνωστές και συμπεριλαμβάνονται στις προβλέψεις του συμβολαίου.

Τη στιγμή $t = 1$ οι πληρωμές των χρεογράφων (για κάθε κατάσταση) παρουσιάζονται σε ένα $S \times J$ πίνακα V, όπου

$$V = \begin{bmatrix} V_1^1 & . & . & . & V_1^j \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ V_s^1 & . & . & . & V_S^j \end{bmatrix}$$

Η οικονομία συναλλαγής που αποτελείται από I παίκτες, με χαρακτηριστικά $(u, \omega) = (u^1, ..., u^I, \omega^1, \omega^I)$, που ανταλλάσσουν J χρεόγραφα με πληρωμές τη στιγμή t=1, που δίνονται από τον πίνακα V, συμβολίζεται $E(u, \omega, V)$. (Αν V είναι ο $S \times S$ ταυτοτικός πίνακαςI_s, η $E(u, \omega, I_s)$ είναι η οικονομία τυχαίας αγοράς που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο)

Έστω $q = (q_1, q_2, \ldots, q_j)$ είναι το διάνυσμα τιμών συμβολαίου με τα q_j να εκφράζονται σε μονάδες οφελους τη στιγμή $t = 0$ για $j = 1, \ldots, J$. Επιλέγουμε η μονάδα οφελους να είναι η μονάδα αγαθού τη στιγμή t=0 ($\pi_0 = 1$).

Έστω $z^i = (z_1^i, \ldots, z_J^i) \in \mathbb{R}^J$ είναι το χαρτοφυλάκιο του i-επενδυτή και δίνει τον αριθμό μονάδων από τα J συμβόλαια που αγοράστηκαν (αν $z_j^i > 0$) ή που πουλήθηκαν (αν $z_j^i < 0$) από τον επενδυτή i.

Αν η αγορά και η πώληση αυτών των συμβολαίων είναι η μόνη δυνατότητα στην αγορά, τότε το σύνολο προϋπολογισμού είναι

$$B(q, w^i, v) = \left\{ x^i \in \mathbb{R}^n_+ | \quad \begin{matrix} x^i_0 = w^i_0 - q_1 z^i_1 - \cdots - q_J z^i_J, z^i \in \mathbb{R}^J \\ x^i_s = w^i_s + V^1_s z^i_1 + \cdots + V^J_s z^i_J, s = 1, \ldots, S \end{matrix} \right\}$$

Ο πίνακας W συμβολίζει τιν πίνακα πληρωμών των συμβολαίων για $t = 0, t = 1$

$$W = W(q, V) = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 & . & . & . & -q_J \\ V^1_1 & & & & V^J_1 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ V^1_S & . & . & . & V^J_S \end{bmatrix}$$

τότε το σύνολο προϋπολογισμού της χρηματοοικονομικής αγοράς του επενδυτή i είναι

$$B(q, w^i, V) = \left\{ x^i \in \mathbb{R}^n_+ | x^i - \omega^i = W z^i, z^i \in \mathbb{R}^J \right\}$$

Κάθε απόφαση του πράκτορα i γίνεται με βάση το ζευγάρι (x^i, z^i) που λέγεται *πράξη* του επενδυτή, όπου x^i είναι ένα διάνυσμα κατανάλωσης και z^i ένα χαρτοφυλάκιο.
Το χαρτοφυλάκιο z^i λέγεται ότι χρηματοδοτεί το x^i έτσι ώστε

$$(x^i; z^i) \in B(q, w^i, V) \Leftrightarrow x^i \in B(q, w^i, V), x^i - w^i = W z^i, z^i \in \mathbb{R}^J$$

.
Αν $\bar{x}^i$ μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα $u^i(x^i)$ του i επενδυτή και $\bar{z}^i$ ένα χαρτοφυλάκιο που χρηματοδοτεί το $\bar{x}^i$ τότε γράφουμε

$$(\bar{x}^i, \bar{z}^i) \in argmax \left\{ u^i(x^i) | (x^i; z^i) \in B(q, w^i, V) \right\}$$

Ορισμός 4.2 *Ισορροπία μιας χρηματοοικονομικής αγοράς (FM ισορροπία) για την οικονομία ανταλλαγής* $E(u, \omega, V)$ *είναι το ζεύγος* $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q}) \in \mathbb{R}^{nI}_+ \times \mathbb{R}^{JI} \times \mathbb{R}^J$ *τέτοιο ώστε*
i) $(\bar{x}^i; \bar{z}^i) \in argmax \{u^i(x^i) | (x^i; z^i) \in B(\bar{q}, w^i, V)\}, i = 1, \ldots, I$
ii) $\sum_{i=1}^I \bar{z}^i = 0$
Η σχέση $\sum_{i=1}^I \bar{z}^i = 0$ σημαίνει ότι το $\bar{x}$ είναι εφικτό, δηλαδή $\sum(\bar{x}^i - w^i) = 0$. Με άλλα λόγια, στο μοντέλο για ένα αγαθό η ζήτηση για το αγαθό που καθορίζεται από τις επιλογές του χαρτοφυλακίου του i επενδυτή είναι ίση με την προσφορά σε κάθε κατάσταση.

4.1 Απουσία Κερδοσκοπίας

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι στην ισορροπία τυχαίας αγοράς δεν υπάρχουν ελεύθερα συμβόλαια γιατί οι προτιμήσεις κάθε επενδυτή (που διαμορφώνουν το σύνολο προϋπολογισμού) είναι αυστηρά μονότονες. Αυτή η ιδιότητα των προτιμήσεων ισχύει και στην ισορροπία χρηματοοικονομικών αγορών. Το να μην υπάρχουν ελεύθερα αγαθά σημαίνει ότι κανείς δεν μπορεί να πάρει κάτι χωρίς να δώσει κάτι. Γενικέυοντας, μπορουμε να πούμε ότι δεν υπάρχει δυνατότητα κερδοσκοπίας (απουσία κερδοσκοπίας).
Απουσία κερδοσκοπίας σημαίνει ότι δεν υπάρχουν δυνατότητες κερδοσκοπίας όταν ο επενδυτής δεν μπορεί ακολουθώντας μια επενδυτική στρατηγική να έχει πληρωμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός κατά μήκος όλων των κόμβων του δέντρου πληροφόρησης (πιθανές καταστάσεις) και σε ένα τουλάχιστον κόμβο (μία τουλάχιστον κατάσταση) οι πληρωμές να είναι γνήσια μεγαλύτερες του μηδενός.
Άρα αν υπάρχει επενδυτική στρατηγική με κερδοσκοπία, δημιουργεί μια αυθαίρετα μεγάλη πληρωμή σε κάποια κατάσταση χωρίς να έχει γίνει κάποια αντίστοιχη θυσία σε άλλη κατάσταση. Είναι, δηλαδή, σαν να αγοράζει κάποιος αγαθό σε μηδενική τιμή. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα μεγίστου του καταναλωτή, αρα δεν υπάρχει και ισορροπία.
Αφού οι επενδυτικές ευκαιρίες δίνονται από τον πίνακα πληρωμών $W(q, V)$ οδηγούμαστε, λοιπόν στον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 4.3 *Δοθέντων (q, V) δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας σε χρηματοοικονομικές αγορές αν δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο που να παράγει ημιθετικό* [1] *διάνυσμα εισοδήματος, δηλαδή δεν υπάρχει $z \in \mathbb{R}^J$ τέτοιο ώστε $Wz > 0$.*

Ορισμός 4.4 *Το q είναι ένα διάνυσμα τιμών μη κερδοσκοπίας αν δοθέντων (q, V) δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας στις χρηματοοικονομικές αγορές.*

4.1.1 Γεωμετρική ερμηνεία απουσίας κερδοσκοπίας

Σε μια χρηματοοικονομική αγορά, οι συναλλαγές επιτρέπουν την αναδιανομή των εισοδημάτων κατά μήκος των $S + 1$ καταστάσεων.. Έτσι όταν ένας επενδυτής i αγοράζει ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων $z^i = (z_1^i, z_2^i, \ldots, z_J^i) \in \mathbb{R}^J$ επιφέρει ένα διάνυσμα απολαβών $\tau^i = Wz^i \in \mathbb{R}^{S+1}$ κατά μήκος των καταστάσεων.

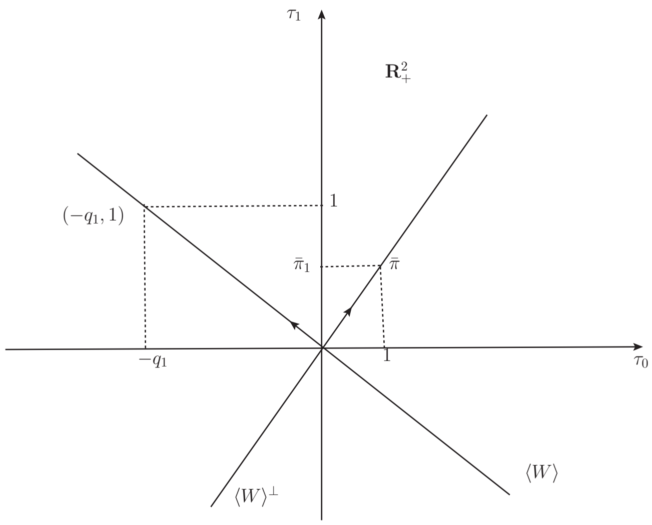
[1] Ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^{S+1}$ λέγεται ημιθετικό, $y > 0$, αν είναι μη αρνητικό αλλά οχι μηδενικό: έχει τουλάχιστον ένα στοιχειο που είναι αυστηρά θετικό, $y > 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}^{S+1}, y \neq 0$

Το σύνολο όλων των πιθανών απολαβών που αποκτιούνται με αυτό τον τρόπο είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{S+1}$, παράγεται από τις J στήλες του πίνακα W και συμβολίζεται
$\langle W \rangle$. Ο πίνακας $\langle W \rangle = \{\tau \in \mathbb{R}^{S+1} | \tau = Wz, z \in \mathbb{R}^J\}$ συνοψίζει τις ευκαιρίες που προσφέρουν οι χρηματοπιστοτικές αγορές και ονομάζεται υπόχωρος απολαβών ή υπόχωρος αγοράς.
Έτσι, η απουσία κερδοσκοπίας στις χρηματοπιστωτικές αγορές δηλώνεται γεωμετρικά από το γεγονός ότι ο υποχώρος απολαβών και ο θετικός κώνος $\mathbb{R}_+^{S+1}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το μηδενικό διάνυσμα. Δηλαδή

$$\langle W \rangle \cap \mathbb{R}_+^{S+1} = \{0\} \tag{4.1}$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να αποκτηθεί εισόδημα σε κάποια κατάσταση χωρίς να το παραδώσει κανείς σε κάποια άλλη κατάσταση.

Αν θεωρήσουμε την πιο απλή περίπτωση, όπου δεν υπάρχει αβεβαιότητα ($S = 1$). Έχουμε ένα συμβόλαιο ($J = 1$) που είναι ομόλογο ($V_1^1 = 1$), ο πίνακας απολαβών είναι 2×1 πίνακας με $W = \begin{bmatrix} -q_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\langle W \rangle$ είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων στον $\mathbb{R}^2$ και παράγεται από το διάνυσμα $(-q_1, 1)$. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται ότι αν ικανοποιείεται η σχέση (4.1), τότε η τιμή q_1 του ομολόγου πρέπει να είναι θετική. Επίσης υπάρχει διάνυσμα $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1) \in \mathbb{R}_{++}^2$ που είναι κάθετο στο W, δηλαδή $\bar{\pi}W = 0$. Αν $\bar{\pi}$ είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_1)$ τότε $\bar{\pi}W = 0 \Leftrightarrow q_1 = \bar{\pi}_1$. Αυτό σημαίνει ότι αν $\bar{\pi}_1$ συμβολίζει την αξία τη στιγμή 0 μιας μονάδας εισοδήματος τη στιγμή 1, τότε η αγία ενός ομολόγου (q_1) είναι η παρούσα αξία ($\bar{\pi}_1$) στη στιγμή 0 μιας μονάδας εισοδήματος τη στιγμή 1.
Στο παράδειγμα που μόλις δώσαμε η απαίτηση ότι ο $\langle W \rangle$ δεν έχει κοινό σημείο με τον ημιθετικό κώνο $\mathbb{R}_+^{S+1} \setminus \{0\}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει αυστηρά θετικό διάνυσμα τιμών κάθετο στον υπόχωρο απολαβών. Αυτή η ιδιότητα είναι γενική. Πράγματι, το σύνολο των διανυσμάτων $\pi \in \mathbb{R}^{S+1}$ που είναι ορθογώνια σε καθεμία από τις στήλες του πίνακα W λέγεται υπόχωρος ορθογώνιος στον $\langle W \rangle$ και συμβολίζεται $\langle W \rangle^\perp$.
Είναι, δηλαδή, $\langle W \rangle^\perp = \{\pi \in \mathbb{R}^{S+1} | \pi W = 0\} = \{\pi \in \mathbb{R}^{S+1} | \pi \tau = 0, \forall \tau \in \langle W \rangle\}$
και λέγεται χώρος τιμών καταστάσης ή χώρος της παρούσας αξίας.
Συνήθως κανονικοποιούμε το διάνυσμα τιμών $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_S)$ έτσι ώστε $\pi_0 = 1$. Τότε η τιμή π_s για $s = 1, ..., S$ λέγεται παρούσα αξία τη στιγμή ($t = 0$) μιας μονάδας εισοδήματος στην κατάσταση s.
Η ύπαρξη τέτοιου διανύσματος τιμών π εκφραζεται γεωμετρικά ως



Σχήμα 4.1: *Γεωμετρική ερμηνεία απουσίας ευκαιριών κερδοσκοπίας όταν* $S = 1$*:αφού το ομόλογο πληρώνει μία μονάδα τη στιγμή 1 η τιμή του* q_1 *πρέπει να είναι θετική τη στιγμή 0*

$$\langle W \rangle^{\perp} \cap \mathbb{R}^{S+1}_{++} \neq \{0\} \tag{4.2}$$

Με το επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι οι (4.1) και (4.2) είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 4.1 (Απουσία κερδοσκοπίας σε χρηματοοικονομικές αγορές) *Αν η συνάρτηση χρησιμότητας ικανοποιεί την υπόθεση* U'' *τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
i) Το πρόβλημα $\max\{u^i(x^i)|x^i \in B(\bar{q}, \omega^i, V)\}$ *έχει λύση.*
ii) Δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας στην χρηματοπιστωτική αγορά.
iii) Υπάρχει ένα διάνυσμα με θετικές τιμές κατάστασης $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *τέτοιο ώστε*

$$\bar{\pi} W(\bar{q}, V) = 0$$

.
iv) Το σύνολο προϋπολογισμού της χρηματοοικονομικής αγοράς $B(\bar{q}, \omega^i, V)$ *είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. i)⇒ii) Έστω $\bar{x}^i \in argmax\{u^i(x^i)|x^i \in B(\bar{q}, \omega^i, V)\}(1)$ με $x^i = \omega^i + W\bar{z}^i$.
Αν υπάρχει $z^i \in \mathbb{R}^J$ τέτοιο ώστε $Wz^i > 0$ τότε

$x^i = \omega^i + W\bar{z}^i + Wz^i > \bar{x}^i$.
Με βάση την υπόθεση U'' η u^i είναι αυστηρά μονότονη, άρα $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i)$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\bar{x}^i$ είναι Pareto βέλτιστη.
ii)⇒iii) Έστω $\Delta = \{\tau \in \mathbb{R}_+^{S+1} | \sum_{s=0}^{S} \tau^s = 1\}$.
Λόγω απουσίας κερδοσκοπίας είναι $\langle W \rangle \cap (\mathbb{R}_+^{S+1} \setminus \{0\}) = \emptyset \Rightarrow \langle W \rangle \cap \Delta = \emptyset$,
.
Επειδή τα W και Δ είναι κυρτά, ισχύει το θεώρημα 4.2 για $X = \mathbb{R}^{S+1}$, $K = \Delta$ και $M = \langle W \rangle$. Άρα υπάρχει $\bar{\pi} \in \mathbb{R}_{++}^{S+1}$ τέτοιο ώστε

$$\underset{\tau\in W}{sup}\, \bar{\pi}\tau < \underset{\tau\in\Delta}{inf}\, \bar{\pi}\tau \tag{4.3}$$

.
Πρέπει να δείξουμε ότι $\bar{\pi} \in \mathbb{R}_{++}^{S+1}$. Έστω $\bar{\pi}_\sigma \leq 0$ για κάποια κατάσταση σ. Υποθέτουμε ότι $\tilde{\tau} \in \Delta$ τέτοιο ώστε $\tilde{\tau}_\sigma = 0$, $\tilde{\tau}_s = 0, s \leq \sigma$.
Τότε $\bar{\pi}\tilde{\tau} \leq 0$ τέτοιο ώστε $\underset{\tau\in W}{sup}\, \bar{\pi}\tau < 0$, που αντιφάσκει την $\bar{\pi}\tau = 0,\ \tau = 0$.
Μένει να δείξουμε ότι $\bar{\pi} \in \langle W \rangle^\perp$ τέτοιο ώστε $\bar{\pi}\tilde{\tau} \leq 0$.
Αφού $\langle W \rangle$ είναι υπόχωρος, υπάρχει $\alpha \in R$ τέτοιο ώστε $\alpha\tilde{\tau} \in \langle W \rangle$ και $\bar{\pi}(\alpha\tilde{\tau}) > \underset{\tau\in\Delta}{min}\, \bar{\pi}\tau$, άτοπο λόγω της σχέσης (4.3).
iii)⇒iv) Αφού $\bar{\pi} \in \mathbb{R}_{++}^{S+1} \Rightarrow B(\bar{\pi}, \omega)$ συμπαγές από θεώρημα 3.1.
$\forall\, x^i \in B(\bar{q}, \omega^i, V)\, \exists\, z^i\, :\, x^i - \omega^i = Wz^i$.
Αφού $\bar{\pi}W = 0 \Rightarrow \bar{\pi}(x^i - \omega^i) = 0$ τέτοιο ώστε $x^i \in B(\bar{\pi}, \omega)$.
Έτσι είναι $B(\bar{q}, \omega^i, V) \subset B(\bar{\pi}, \omega)$. Το $B(\bar{q}, \omega^i, V)$ είναι κλειστό και το $B(\bar{\pi}, \omega^i)$ συμπαγές. Οπότε, αφού το κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές, το $B(\bar{q}, \omega^i, V)$ θα είναι συμπαγές.
iv)⇒i) Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο λαμβάνει μέγιστη τιμή και το $B(\bar{q}, \omega^i, V)$ είναι συμπαγές, ισχύει το i). □

Θεώρημα 4.2 (Αυστηρός Διαχωρισμός Κυρτών Συνόλων)
Αν X ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και έστω K και M μη κενά κυρτά υποσυνολα του X με $K \cap M \neq \{0\}$. *Αν K συμπαγές και M κλειστό, τότε υπάρχει* $\pi \in X$, $\pi \neq 0$ *τέτοιο ώστε* $\underset{\tau\in M}{sup}\, \pi\tau < \underset{\tau\in K}{inf}\, \pi\tau$.
(η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα)

Παρατήρηση:
Το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε είναι σημαντικό για την τιμολόγηση των συμβολαίων που θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Αρχικά δηλώνει ότι το πρόβλημα μεγίστου των επενδυτών με μονότονες προτιμήσεις έχει λύση αν και μόνο αν δεν υπάρχει δυνατότητα κερδοσκοπίας. Άρα, ένα διάνυσμα τιμών συμβολαίου είναι τιμή ισορροπίας αν είναι διάνυσμα τιμών συμβολαίου μη κερδοσκοπίας. Ωστόσο, η έννοια της απουσίας κερδοσκοπίας είναι προηγούμενη αυτής της ισορροπίας, αφού η απουσία κερδοσκοπίας εξαρταται από τη

δομή του πίνακα πληρωμών V των συμβολαίων και είναι ανεξάρτητη των χαρακτηριστικών των επενδυτών (προτιμήσεις και αρχικές πηγές (u, ω).
Για κάθε συμβόλαιο j το διάνυσμα τιμών κατάστασης $\bar{\pi}$ ορίζει ένα κέρδος επένδυσης όταν επενδύοντας, αγοράζει κανείς μια μονάδα από το συμβόλαιο j στην τιμή q_j την $t=0$ και παίρνει το εισόδημα V_s^j την $t=1$ στην κατάσταση s. Αν $W^j = (-\bar{q}_j, V_1^j, \ldots, V_s^j)$ είναι η j στήλη του W, τότε η σχέση

$$\bar{\pi} W^j = 0, j = 1, ..., J \tag{4.4}$$

σημαίνει ότι υπάρχει μηδενικό κέρδος για την επένδυση ενός αγαθού για κάθε συμβόλαιο $j,\ j = 1, ..., J$. Άρα το θεώρημα λέει ότι η απουσία κερδοσκοπίας είναι ίσοδύναμη με την ύπαρξη θετικού διανύσματος τιμών κατάστασης, υπό του οποίου η επένδυση σε κάθε συμβόλαιο οδηγεί σε μηδενικό κέρδος.

4.1.2 Τιμολόγηση συμβολαίου

Η συνθήκη για μηδενικό κέρδος (4.4) μπορεί αν γραφτεί

$$\bar{\pi}_0 \bar{q} = \bar{\pi}_1 V \underset{\bar{\pi}_0 = 1}{\Leftrightarrow} q = \bar{\pi}_1 V \Leftrightarrow q_j = \sum_{s=1}^{S} \bar{\pi}_s V_s \tag{4.5}$$

αν κανονικοποιήαουμε το $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1)$ ώστε $\pi_0 \bar{=} 1$.
Έτσι, η σχέση (4.5) ισχυρίζεται πως η τιμή q_j του συμβολαίου j είναι η παρούσα αξία μελλοντικού του διανύσματος εισοδήματος V_s^j, $s = 1, ..., S$, αφού λόγω κανονικοποίησης το $\bar{\pi}_s$ δηλώνει την παρούσα αξία (στην $t = 0$) μιας μονάδας εισοδήματος στην κατάσταση s.
Επεκτείνοντας την (4.5), η επιλογή ενός χαρτοφυλακίου $z = (z_1, ..., z_J) \in R^J$ οδηγεί στο διάνυσμα εισοδήματος τη στιγμή $t = 1$ $y = \sum_{j=1}^{J} V^j z_j$. Το σύνολο όλων αυτών των πιθανών χαρτοφυλακίων παράγει τον υπόχωρο του R^S,
$\langle V \rangle = \{y \in R^S | y = \sum_{j=1}^{J} V^j z_j, z \in R^J\} = \langle V \rangle = \{y \in R^S | y = Vz, z \in R^J\}$.
Έτσι εχουμε ορίσει το σύνολο με όλα τα πιθανά εισοδήματα τη στιγμή $t = 1$ που θα αποκτηθούν αν επενδύσει κανείς στα J συμβόλαια.

Ορισμός 4.5 *Ο $\langle V \rangle \subset \mathbb{R}^s$ που παράγεται από τις στήλες του πίνακα αποδόσεων V λέγεται marketed υπόχωρος.*

Ορισμός 4.6 *Αν $q = (q_1, \ldots, q_j)$ είναι ένα διάνυσμα τιμών για J συμβόλαια τότε το κόστος $c_q(y)$ μιας εισοδηματικής απόδοσης y στον $\langle V \rangle$ ορίζεται ως $c_q(y) = qz,\ \forall z \in \mathbb{R}^J$ τέτοιο ώστε $y = Vz$.*

Αν $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ είναι ένα διάνυσμα τιμών παρούσας αξίας που προκαλείται από το διάνυσμα τιμών μη κερδοσκοπίας $\bar{q} \in \mathbb{R}^J$ ώστε να ισχύει $\bar{q} = \sum \bar{\pi}_s V_s^j$ τότε

$$\forall y \in \langle V \rangle \ c_{\bar{q}}(y) = \bar{q}z = \sum_j \sum_s \bar{\pi}_s V_s^j z_j = \sum_s \bar{\pi}_s y_s$$

ώστε το κόστος $c_{\bar{q}}(y)$ να είναι ίσο με την παρούσα αξία του διανύσματος εισοδήματος y.

4.1.3 Συνθήκες πρώτης τάξης

Το πρόβλημα μεγίστου $\max\{u^i(x^i)|x^i \in B(\bar{q}, \omega^i, V)\}$ ενός επενδυτή έχει λύση όταν $\bar{q}$ είναι η μη κερδοσκοπική τιμή συμβολαίου. Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας u^i ικανοποιεί την υπόθεση U και $V^s = (V_s^1, ..., V_s^J)$ η s γραμμή του πίνακα V.
Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του i επενδυτή γράφεται

$$\max_{(x^i,z^i)\in\mathbb{R}^{s+1}_{+}\times\mathbb{R}^j} \left\{ u^i(x^i) \Big| \begin{array}{c} x_0^i - \omega_0^i = -\bar{q}z^i \\ x_j^i - \omega_j^i = V_s z^i, \ \ s = 1, \ldots, S \end{array} \right\} \tag{4.6}$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης ώστε το $(\bar{x}^i, \bar{z}^i)$ να λύνει το (4.6) είναι ότι $\exists \ \bar{\lambda}^i \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ ($\lambda^i = (\lambda_0^i, \ldots, \lambda_j^i)$ πολλαπλασιαστές Lagrange) τέτοια ώστε να είναι:

$$\nabla L^i(\bar{x}^i, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i) = 0^2$$

Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με

$$\nabla u^i(\bar{x}^i) = \bar{\lambda}^i \tag{4.7}$$

$$-\lambda_0^i \bar{q} + \sum_s \lambda_s^i V_s = 0 \tag{4.8}$$

$$\bar{x}_0^i - \omega_0^i = -\bar{q}z^i, \quad \bar{x}_j^i - \omega_j^i = V_s \bar{z}^i, \quad \text{για} \ \ s = 1, \ldots, S \tag{4.9}$$

Από τον ορισμό του διανύσματος παρούσας αξίας $\pi^i(\bar{x}^i)$ και αν διαιρέσω και τα δύο μέλη της (4.7) με την οριακή χρησιμότητα[3] του αγαθού τη στιγμή $t = 0$ η (4.7) είναι ισοδύναμη με την

$$\bar{\pi}^i = \pi^i(\bar{x}^i) \quad \text{με} \ \ \bar{\pi}^i = \frac{1}{\bar{\lambda}_0^i} \bar{\lambda}^i$$

[2] $L^i(x^i, z^i, \lambda^i) = u^i(x^i) - \lambda_0^i(x_0^i - \omega_0^i + qz^i) - \sum_{s=1}^S \lambda_s^i(x_s^i - \omega_s^i + V_s z^i)$ είναι η συνάρτηση Lagrange

[3] Η οριακή χρησιμότητα του αγαθού είναι $\nabla u^i(\bar{x}^i)$

Η σχέση (4.8) μπορεί να γραφτεί

$$\bar{q}^j = \sum_s \bar{\pi}^i_s V^j_s \Leftrightarrow \bar{\pi}^i W = 0$$

και η (4.9) γράφεται

$$\bar{x}^i - \omega^i = W\bar{z}^i$$

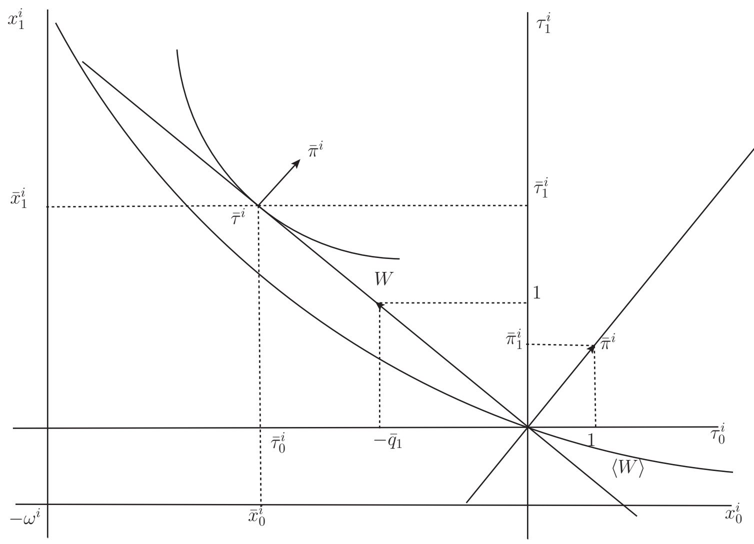
Αν θέσω $\bar{\tau}^i = x^i - \omega^i$ το διάνυσμα καθαρής συναλλαγής (ή αλλίως διάνυσμα απολαβών) του i επενδυτήυτές οι πρώτης τάξης συνθήκες μπορούν να γραφτούν ως

$$\bar{\tau}^i \in \langle W \rangle, \;\; \bar{\pi}^i \in \langle W \rangle^{\perp} \tag{4.10}$$

$\bar{\tau}^i \in \langle W \rangle$ σημαίνει πως ο επενδυτής i επιλέγει μια καθαρή συναλλαγή στο σύνολο ευκαιριών $\langle W \rangle$. $\bar{\pi}^i \in \langle W \rangle^{\perp}$ συνεπάγεται πως όταν ο επενδυτής είναι στην καθαρή συναλλαγή που έχει επιλέξει καμία οριακή αλλαγή δεν αυξάνει περαιτέρω τη συνάρτηση χρησιμοτητάς του.

Γεωμετρικά η (4.10) ισχυρίζεται ότι στον χώρο καθαρών συναλλαγών ο επενδυτής i είναι στο διάνυσμα της πιο επιθυμητής γι αυτόν συναλλαγής στον υπόχωρο αγοράς όταν η επιφάνεια αδιαφορίας που περνά από αυτό το σημείο είναι εφαπτόμενη του υπόχωρου αγοράς.

Στο σχήμα 4.2 βλέπουμε αυτή τη γεωμετρική ερμηνεία για την πιο απλή περίπτωση $S = J = 1$.



Σχήμα 4.2: *Ο επενδυτής i βρίσκεται στο μέγιστο στο διάννσμα καθαρής συναλλαγής* $\bar{\tau}^i \in \langle W \rangle$ *όταν η καμπύλη αδιαφορίας που περνά από το* τ^i *είναι εφαπτόμενη στον υπόχωρο αγοράς. Σε αυτό το σημείο η κλίση* $\bar{\pi}^i$ *βρίσκεται στον ορθογώνιο υπόχωρο* $\langle W \rangle^{\perp}$

4.2 Γεωμετρική ερμηνεία της FM ισορροπίας

Το θεώρημα 4.1 ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση καθαρής συναλλαγής $\tau^i(q) = argmax\{u^i(\omega^i + \tau^i)|\tau^i \in \langle W(q)\rangle\}$ είναι καλά ορισμένη αν και μόνο αν η τιμή συμβολαίου q ανήκει στο σύνολο τιμών μη κερδοσκοπίας $Q = \{q \in \mathbb{R}^J|q = \pi_1 V,\ \ \pi_1 \in \mathbb{R}^S_{++}\}$. Για διάφορες τιμές του q ο $\langle W(q)\rangle$ περιστρέφεται στον χώρο R^{S+1} καθαρών συναλλαγών. Για κάθε $\langle W(q)\rangle$ ο επενδυτής επιλέγει $(\tau^1(q), ..., \tau(q))$. Κάθε $\tau^i(q)$ βρίσκεται στο σημείο του $\langle W(q)\rangle$ που η επιφάνεια αδιαφορίας του επενδυτή είναι εφαπτόμενη στον υπόχωρο αγοράς. Για την περίπτωση ισορροπίας μια τιμή συμβολαίου ισορροπίας $\bar{q} \in Q$ έχει την ιδιότητα το $(\tau^1(\bar{q}), \ldots, \tau^I(\bar{q}))$ να ισορροπεί στον $\langle W(\bar{q})\rangle$, δηλαδή $\sum_{i=1}^I \tau^i(\bar{q}) = 0$. Άρα η εύρεση μιας τιμής συμβολαίου ισορροπίας έγκειται στο να περιστρέφεται ο υπόχωρος αγοράς ανάλογα με τις διάφορες τιμές του $q \in Q$ μέχρι να βρεθεί ένας ισορροπημένος υπόχωρος αγοράς (δηλαδή $\sum_{i=1}^I \tau^i(\bar{q}) = 0$).

Κεφάλαιο 5

Ισορροπία χωρίς κερδοσκοπία

5.1 Πλήρεις και μη πλήρεις αγορές

Ένας γραμμικός χώρος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των γραμμικών υποχώρων του και των ορθογωνίων συμπληρωμάτων τους.
Άρα $R^{S+1} = \langle W \rangle \oplus \langle W \rangle^{\perp} \Rightarrow S + 1 = dim\langle W \rangle + \langle W \rangle^{\perp}$.
Σε περίπτωση μη κερδοσκοπίας $dim\langle W \rangle \leq (S+1) - 1 = S$.
Άρα S είναι η μέγιστη διάσταση του υποχώρου αγοράς $\langle W \rangle$ και για $dim\langle W \rangle = S$ προύπτουν οι καλύτερες ευκαιρίες που μπορούν να προσφέρουν οι χρηματοοικονομικές αγορές.

Ορισμός 5.1 *Έστω ότι ο υπόχωρος αγοράς $\langle W(q, V) \rangle$ είναι χωρίς κερδοσκοπία. Αν έχει τη μέγιστη διάσταση τότε οι χρηματοοικονομικές αγορές λέγονται πλήρεις, ενώ αν είναι η διάσταση μικρότερη της μέγιστης οι αγορές λέγονται ημιτελείς.*

Ο τελευταίος ορισμός εμπλέκει και το διάνυσμα τιμών και τον V πίνακα πληρωμών συμβολαίων. Ωστόσο, στο μοντέλο ενός αγαθού και δύο περιόδων η διάσταση του $\langle W(q, V) \rangle$ είναι ανεξάρτητη της τιμής μη κερδοσκοπίας q. Μπορούμε, λοιπόν, να προσδιορίσουμε την πληρότητα του $\langle W(q, V) \rangle$ κατευθείαν από τον V πίνακα πληρωμών συμβολαίων για $t = 1$.

Πρόταση 5.1 (Χαρακτηρισμός Πληρότητας)
Σε μια οικονομία $E(u, \omega, V)$ δύο περιόδων, οι χρηματοοικονομικές αγορές είναι πλήρεις για οποιοδήποτε διάνυσμα τιμών q μη κερδοσκοπίας q αν και μόνο αν $rankV = S$.

Απόδειξη. Αν q είναι μια τιμή μη κερδοσκοπίας τότε $\exists\, \pi \in \mathbb{R}^{S+1}$ τέτοιο ώστε $q = \sum_{s=1}^{S} \pi_s V_s$. Άρα η πρώτη σειρά του $W = [-q, V]^T$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων γραμμών, δηλαδή των $V_s, s = 1, ..., S$. Άρα $rankW = rankV = S$. $\square$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι όσο πιο μεγάλη η διάσταση του υπόχωρου αγοράς ($dim\langle W\rangle$), τόσο πιο μικρός ($dim\langle W\rangle^{\perp}$) είναι ο χώρος των διανυσμάτων παρούσας αξίας. Εν συντομία, όσο πιο πολλές οι ευκαιρίες για απολαβές ($\bar{\tau}^i \in \langle W\rangle$) τόσο μικρότερη είναι η δυνατή διαφοροποίηση γνώμεων μεταξύ των πρακτόρων για την παρούσα αξία εισοδήματος την $t = 1$ ($\bar{\pi}^i \in \langle W\rangle^{\perp}$).

Σε πλήρες αγορές ισχύει $dim\langle W\rangle = S$ και $\langle W\rangle^{\perp} = 1$ άρα υπάρχει μοναδικό $\bar{\pi} \in \langle W\rangle^{\perp}$ (με $\bar{\pi}_0 = 1$) τέτοιο ώστε στην ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς τα διανύσματα παρούσας αξίας να συμπίπτουν, δηλαδή $\bar{\pi}^1 = \cdots = \bar{\pi}^I = \bar{\pi}$.
Σε ημιτελείς αγορές που ισχύει $\langle W\rangle = J < S$ και $\langle W\rangle^{\perp} = S - J + 1 > 1$, η συναλλαγή δεν ωθεί τα διανύσματα παρούσας αξίας σε ισότητα. Στην πραγματικότητα, είναι τα $\bar{\pi}^i$ διακριτά μεταξύ τους για $i = 1, ..., I$.

Η μελέτη της ισορροπίας μιας χρηματοοικονομικής αγοράς μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο πρώτος βασίζεται στην τιμή συμβολαίων q, αλλά παρουσιάζει δυσκολίες αν έχουμε μοντέλο με περισσότερες των δύο περιόδων. Σε αυτή την περίπτωση αλλάζει η διάσταση του πίνακα $\langle W(q)\rangle$ καθώς αλλάζει το q και δεν μπορούμε να εδραιώσουμε την ύπαρξη ισορροπίας. Με το δεύτερο τρόπο που βασίζεται στις τιμές κατάστασης π, μπορούμε να μετατρέψουμε την ισορροπία μιας χρηματοπιστωτικης αγοράς σε ισορροπία μη κερδοσκοπίας, που είναι η ισορροπία των Arrow-Debreu υπό περιορισμούς.

Σε ένα σύστημα χρηματοοικονομικών αγορών το σύνολο προϋπολογιμού είναι

$$B(q, \omega^i, V) = \left\{ x^j \in \mathbb{R}^n_+ | \begin{matrix} x^i_0 - \omega^i_0 = -qz^i, \;\; z^i \in \mathbb{R}^j \\ x^i_s - \omega^i_s = V_s z^i, s = 1, ..., S \end{matrix} \right\}$$

Για αλλαγή μεταβλητής $q = \pi_{\mathbf{1}} V$ (εξίσωση μη κερδοσκοπίας) οι περιορισμοί του συνόλου προϋπολογισμού για $t = 0$ γίνονται

$$\left\{ \begin{matrix} x^i_0 - \omega^i_0 = -qz^i = -\pi_1 V z^i = -\sum \pi_s V_s z^i \\ x^i_s - \omega^i_s = V_s z^i, s = 1, ..., S \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum_{s=0}^{S} \pi_s (x^i_s - \omega^i_s = 0 \Leftrightarrow \pi(x^i - \omega^i) = 0$$

Αν $x^i_{\mathbf{1}} - \omega^i_{\mathbf{1}} = (x^i_1 - \omega^i_1, ..., x^i_S - \omega^i_S)$ τότε οι περιορισμοί του συνόλου προϋπολογισού την t=1 γράφονται $x^i_{\mathbf{1}} - \omega^i_{\mathbf{1}} = V z^i$. Επειδή ο επενδυτής i είναι ελεύθερος να επιλέξει οποιδήποτε χαρτοφυλάκιο, συνεπάγεται ότι $x^i_{\mathbf{1}} - \omega^i_{\mathbf{1}} \in \langle V\rangle$.

Τότε το σύνολο προϋπολογισμού που εξαρτάται από τις τιμές κατάστασης π είναι

$$B(\pi, \omega^i, V) = \left\{ x^j \in \mathbb{R}^n_+ \middle| \begin{matrix} \Leftrightarrow \pi(x^i - \omega^i) = 0 \ , s = 1, \ldots, S \\ x^i_1 - \omega^i_1 = V z^i \Leftrightarrow x^i_1 - \omega^i_1 \in \langle V \rangle \end{matrix} \right\}$$

Άρα για αλλαγή μεταβλητής $q = \pi_1 V$ είναι

$$B(\pi, \omega^i, V) = B(q, \omega^i, V) \tag{5.1}$$

Το $B(\pi, \omega^i, V)$ είναι το σύνολο προϋπολογισμού υπό περιορισμούς κατά τους Arrow-Debreu.

Ορισμός 5.2 *Ισορροπία χωρίς κερδοσκοπία είναι για την οικονομία* $E(u, \omega, V)$ *το ζεύγος* $(\bar{x}, \bar{\pi}) \in \mathbb{R}^{nI}_+ \times \mathbb{R}^n_+$ *τέτοιο ώστε*
i)$\bar{x}^i \in argmax\{u^i(x^i) | x^i \in B(\bar{\pi}, \omega^i, V)\}, \ i = 1, ..., I$
ii)$\sum_{i=1}^{I}(x^i - \omega^i) = 0$ [1]

Παρατήρηση:
Η ισότητα (5.1) συνεπάγεται ότι αν το $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι ισορροπία μη κερδοσκοπίας με $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_{\mathbf{1}})$ τότε το $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς αν $\bar{q} = \bar{\pi}_{\mathbf{1}} V$ και $\bar{z} = (\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I)$ ώστε $x^i_{\mathbf{1}} - \omega^i_{\mathbf{1}} = V\bar{z}^i$ και $\bar{z}^1 = -\sum_{i=2}^{I} \bar{z}^i$
Αντίστροφα αν $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς τότε από το θεώρημα (4.1) υπάρχει $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_1)$ τέτοιο ώστε $\bar{q} = \bar{\pi}_1 V$ και $(\bar{x}, \bar{\pi})$ ισορροπία μη κερδοσκοπίας.

Για μη πλήρεις αγορές υπάρχουν πολλά διανύσματα τιμών κατάστασης που μπορούν να δώσουν ισορροπία μη κερδοσκοπίας. Δηλαδή για μια κατανομή $\bar{x}$ το $(\bar{x}, \pi)$ είναι ισορροπία μή κερδοσκοπίας για οποιοδήποτε $\pi = (1, \pi_1)$ στο σύνολο

$$R(\pi) = \{\pi_1 \in R^S_{++} | \pi_1 V = \bar{\pi}_1 V\}$$

Έτσι, το διάνυσμα παρούσας αξίας $\bar{\pi}^i_1$ για οποιονδήποτε επενδυτή μπορεί να αντιπροσωπεύσει το σύνολο $R(\bar{\pi})$. Δηλαδή μπορούμε να παραλείψουμε τους περιορισμούς για τη στιγμη $t = 1$ του συνόλου προϋπολογισμού μη κερδοσκοπίας για τον πρώτο επενδυτή και να καταλήξουμε στο σύνολο προϋπολογισμού $B(\bar{\pi}, \omega^1)$ της τυχαίας αγοράς.

Ορισμός 5.3*Κανονικοποιημένη ισορροπία (NA) μη κερδοσκοπίας για τη χρηματοοικονομική οικονομία* $E(u, \omega, V)$ *είναι το ζεύγος* $(\bar{x}, \bar{\pi}) \in \mathbb{R}^{nI}_+ \times \mathbb{R}^n_+$ *τέτοιο ώστε*

[1] Η ζήτηση και η προσφορά του αγαθού ισούνται σε κάθε κατάσταση

i)

$$\bar{x}^1 \in argmax\{u^1(x^1)|x^1 \in B(\bar{\pi}, \omega^1)\} \quad \textit{και}$$
$$\bar{x}^i \in argmax\{u^i(x^i)|x^i \in B(\bar{\pi}, \omega^i, V)\}, \;\; i = 2, \ldots, I$$

ii)$\sum_{i=1}^{I}(\bar{x}^i - \omega^i) = 0$

Πρόταση 5.2(ισοδυναμία NA-FM ισορροπίας) *Έστω $E(u, \omega, V)$ οικονομία ενός αγαθού που ικανοποιεί την υπόθεση U.*
i) Αν $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι FM ισορροπία και αν $\bar{\pi}^1$ είναι το διάνυσμα παρούσας αξίας του πρώτου επενδυτή, τότε το $(\bar{x}, \bar{\pi}^1)$ είναι NA ισορροπία.
ii) Αν $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι NA ισορροπία με $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_1)$ τότε υπάρχουν χαρτοφυλάκια $\bar{z} = (\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I)$ και τιμές συμβολαίου $\bar{q} = \bar{\pi}_1 V$ τέτοια ώστε $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ να είναι FM ισορροπία.

Απόδειξη. i) Έστω $\pi^1 = \pi 1(\bar{x}^1)$ διάνυσμα παρούσας αξίας του πρώτου επενδυτή στην ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$. Αφού $\bar{x}^1 - \omega^1 = W\bar{z}^1$ και $\bar{\pi}^1 W = 0$ (από τη σχέση 4.10), τότε $\bar{\pi}^1(\bar{x}^1 - \omega^1) = 0$ ώστε $\bar{x}^1 \in B(\bar{\pi}^1, \omega^1)$.
Αφού $\pi^1(\bar{x}^1) = \bar{\pi}^1$, οι συνθήκες πρώτης τάξης για την μεγιστοποίηση του $u^1(x^1)$ στο $B(\bar{\pi}^1, \omega^1)$ ικανοποιούνται στο $\bar{x}^1$.
Ισχύει $B(\bar{\pi}^1, \omega^i, V) = B(\bar{\pi}^1, \omega^i, V)$ λόγω της (5.1) έτσι ώστε για κάθε επενδυτή $i = 2, ..., I$ η μεγιστοποίηση στο σύνολο προϋπολογισμού μη κερδοσκοπίας $B(\bar{\pi}^1, \omega^i, V)$ να οδηγεί στην ίδια βέλτιστη επιλογή $\bar{x}^i$. Αφού το $\bar{x}$ είναι εφικτό, το $(\bar{x}, \bar{\pi}^1)$ είναι ισορροπία μη κερδοσκοπίας.
ii) Έστω $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι ισορροπία μη κερδοσκοπίας με $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_{\mathbf{1}})$. Τότε $\bar{\pi}^1 = \pi^1(\bar{x}^1) = \bar{\pi}$.
Ορίζουμε $\bar{q} = \bar{\pi}_{\mathbf{1}}^1 V$, $\bar{z}^i$ τη λύση του $\bar{x}_{\mathbf{1}}^i - \omega_{\mathbf{1}}^i = Vz^i$, $i = 2, ..., I$ και έστω $\bar{z}^1 = -\sum_{i=2}^{I}\bar{z}^i$. Τότε $\sum_{i=1}^{I}(\bar{x}_{\mathbf{1}}^i - \omega_{\mathbf{1}}^i) = 0$ συνεπάγεται $\bar{x}_{\mathbf{1}}^i - \omega_{\mathbf{1}}^i = V\bar{z}^1$.
Έτσι ο πρώτος επενδυτής εξασφαλίζει τις συνθήκες πρώτης τάξης (4.7)-(4.9) και το $(\bar{x}^1, \bar{z}^1)$ μεγστοποιεί τη χρησιμότητα στο σύνολο προϋπολογισμού $B(\bar{q}, \omega^1, V)$.
Για κάθε επενδυτή η ισότητα $B(q, \omega^i, V) = B(\pi, \omega^i, V)$ συνεπάγεται $B(\bar{q}, \omega^i, V) = B(\bar{\pi}^1, \omega^i, V)$ ώστε το $\bar{x}^i$ να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα στο σύνολο προϋπολογισμού χρηματοοικονομικής αγοράς $B(\bar{q}, \omega^i, V)$.
Αφού $\bar{x}$ είναι εφικτό και $\sum_{i=1}^{I}\bar{z}^i = 0$, άρα το $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς. □

Πρόταση 5.3(ύπαρξη ισορροπίας NA) *Έστω $E(u, \omega, V)$ οικονομία που ικανοποιεί την υπόθεση U'. Αν $\omega^i \in \mathbb{R}_{++}^n$, $\; i = 1, \ldots, I$ τότε υπάρχει διάνυσμα τιμών κατάστασης $\bar{\pi} \in \mathbb{R}_{++}^n$ και κατανομή $\bar{x}$ τέτοια ώστε το $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι NA ισορροπία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συνάρτησεις ζήτησης $f^1 : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$, $f^i_V : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, ..., I$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$f^1(\pi) = argmax\{u^1(x^1)|x^1 \in B(\pi, \omega^1)\}$$
$$f^i_V(\pi) = argmax\{u^i(x^i)|x^i \in B(\pi, \omega^i, V)\}, i = 1, ..., I$$

Η συνάρτηση ζήτησης τυχαίας αγοράς $f^1(\pi)$ του πρώτου επενδυτή έχει σε αντιστοιχία τις ιδιότητες (2)-(5) της συνάρτησης συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης Z και την ιδιότητα (*) της συνάρτησης ζήτησης f^i. Οι συναρτήσεις ζήτησης f^i_V των υπολοίπων επενδυτών (i=2,...,I) έχουν σε αντιστοιχία τις ιδιότητες (2)-(4) της συνάρτησης συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης Z και την ιδιότητα (*) της συνάρτησης ζήτησης f^i.
Έτσι, η συνολική συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης $Z_V : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τη σχέση

$$Z_V(\pi) = f^1(\pi) - \omega^1 + \sum_{i=2}^{I}(f^i_V(\pi) - \omega^i)$$

έχει τις ιδιότητες (1)-(5) της συνάρτησης συνολικής υπερβάλλουσας ζήτησης Z. Αυτές οι πέντε ιδιότητες συνεπάγονται πως η Z_V ορίζει ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο στη θετική μοναδιαία σφαίρα φ^{n-1}_{++} που είναι ισοδύναμη (δηλαδή έχει τα ίδια μηδενικά) με ένα διανυσματικό πεδίο $\tilde{Z}_V$ στο φ^{n-1}_{+}.
Το φ^{n-1}_{+} δειχνει προς τα μέσα στο σύνορο $\partial\varphi^{n-1}_{+}$.
Από το θεώρημα (3.3) βγαίνει το συμπέρασμα πως υπάρχχει $\bar{\pi} \in \varphi^{n-1}_{++}$ τέτοιο ώστε $Z_V(\bar{\pi}) = 0$. □

Θεώρημα 5.4(ύπαρξη ισορροπίας FM)
Έστω $E(u, \omega, V)$ οικονομία ενός αγαθού που ικανοποιεί την υπόθεση U^2. Τότε αν αν $\omega^i \in \mathbb{R}^n_{++},\ \ i = 1, \ldots, I$ τότε υπάρχει $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ ισορροπία τυχαίας αγοράς.

Απόδειξη. Συνεπάγεται από την πρόταση 5.3 και την ιδιότητα (ii) της πρότασης 5.2. □

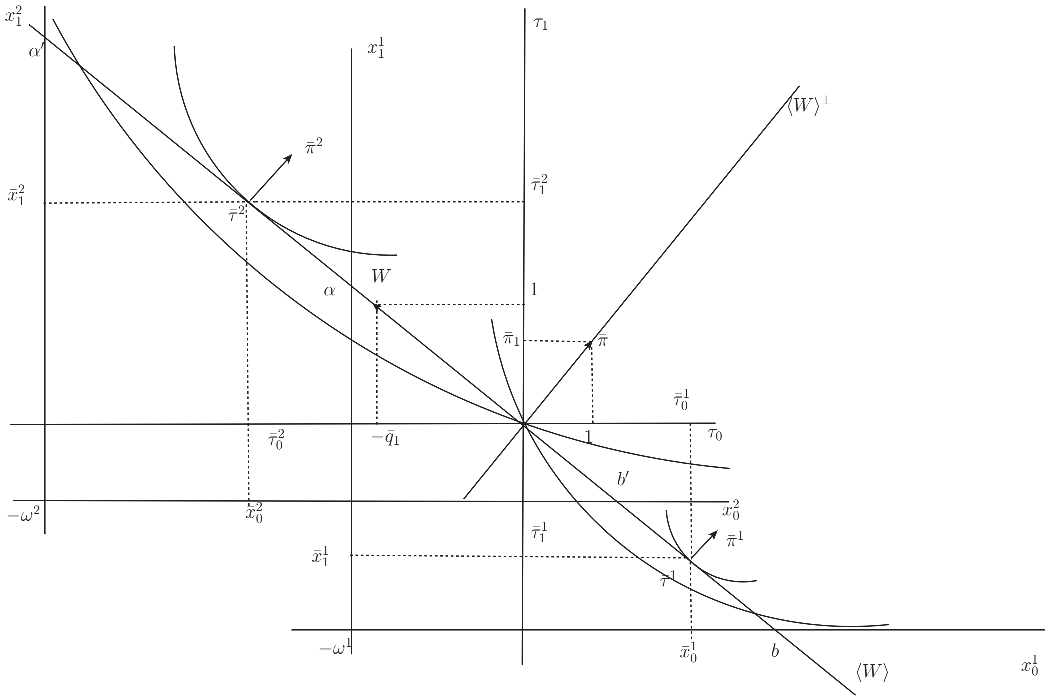
Θεώρημα 5.5 (ισοδυναμία NA-FM με πλήρεις αγορές) *Έστω $E(u, \omega, V)$ οικονομία ενός αγαθού που ικανοποιεί την υπόθεση U και έστω ότι οι χρηματοοικονομικές αγορές είναι πλήρεις ($\langle V \rangle = \mathbb{R}^S$).*

[2] Αν στην ισοδυναμία NA και FM ισορροπίας αντικαταστήσουμε την υπόθεση U με την υπόθεση U' χωρίς την υπόθεση διαφορισιμότητας των προτιμήσεων. Για να είναι αυτό δυνατό, τα διανύσματα παρούσας αξίας των επενδυτών που είναι ορισμένα ως κανονικιοποιημένες κλίσεις υπό την υπόθεση U πρέπει να οριστούν ως κανονικοποιημένες κλίσεις υπόν την υπόθεση U'. Το ίδιο ισχύει και για το θεώρημα 5.5

i) Αν $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι ισορροπία χρηματοπιστωτικής αγοράς, τότε το $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι ισορροπία τυχαίας αγοράς, όπου $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_\mathbf{1}) \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ είναι το μοναδικό διάνυσμα τιμών που ικανοποιεί την $\bar{q} = \bar{\pi}_\mathbf{1} V$.
ii) Αν $(\bar{x}, \bar{\pi})$ είναι ισορροπία τυχαίας αγοράς με $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}_\mathbf{1})$ τότε υπάρχει χαρτοφυλάκιο $\bar{z} = (\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^I)$ και διάνυσμα τιμών συμβολαίου $\bar{q} = \bar{\pi}_\mathbf{1} V$ τέτοιο ώστε $((\bar{x}, \bar{z}), \bar{q})$ είναι ισορροπία χρηματοοικονομικής αγοράς.

Απόδειξη. Όταν $\langle V \rangle = \mathbb{R}^S$ το $B(\pi, \omega^i, V) = B(\pi, \omega^i)$. Το ζητούμενο προκύπτει από την πρόταση 5.2. □

Μια γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος 5.5 φαίνεται στο σχήμα 5.1 για την περίπτωση $S = J = 1$. Το σύνολο προϋπολογισμού $B(\bar{q}, \omega^1, V)$ είναι το τμήμα $[a, b]$, ενώ το $B(\bar{q}, \omega^2, V)$ είναι το τμήμα $[a', b']$. Για τις μεταβλητές $\tau^i = x^i - \omega^i$ στην καθαρή συναλλαγή η ισορροπία δίνεται από το ζεύγος $(\bar{\tau}^1, \bar{\tau}^2)$ όπου $\bar{\tau}^1 + \bar{\tau}^2 = 0$. Είναι ξεκάθαρο πως αφού $dim\langle W \rangle = 1$ οι αγορές είναι πλήρεις. Το μοναδιαίο διανύσμα $\bar{\pi} = (1, \bar{\pi}) \in \langle W \rangle^\perp$ ορίζει τα δύο σύνολα προϋπολογισμού $B(\bar{\pi}, \omega^1)$ και $B(\bar{\pi}, \omega^2)$ που είναι τα τμήματα $[a, b]$ και $[a', b']$.



Σχήμα 5.1: *σοδυναμία ισορροπίας χρηματοπιστωτικής αγοράς και ισορροπίας τυχαίας αγοράς όταν οι αγορές είναι πλήρεις με* $S = J = 1 = V_1^1$. *Αφού* $\pi W = 0$*(δηλαδή* $\bar{\pi}_1 = \bar{q}$*) και* $dim\langle W\rangle = 1$, *τα σύνολα προϋπολογισμού στην FM και CM ισορροπία είναι τα ίδια: τα τμήματα* $[a, b]$ *για τον επενδυτή 1 και* $[a', b']$ *για τον επενδυτή 2. Για την ισορροπία σε αυτό το σχήμα, αφού* $\bar{q}_1 < 1$ *ο ρυθμός ενδιαφέροντος είναι θετικός.*

Παράρτημα Α΄

Α΄.1 Μεγιστοποίηση Χρησιμότητας

Γενικά αν $D \subseteq X$ και $\succsim$ σχέση προτίμησης που ορίζεται στο D, λέμε ότι η $\succsim$ παίρνει μέγιστη τιμή (μεγιστοποιείται) στο D στο σημείο x_0 αν $x_0 \in D$ και $x_0 \succsim x$, για κάθε $x \in D$.

Θεώρημα 1.1 *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος, και $\succsim$ λογική σχέση προτίμησης στο X. Αν η σχέση προτίμησης $\succsim$ είναι άνω ημισυνεχής, τότε η $\succsim$ παίρνει μέγιστη τιμή στο X, σε ένα τουλάχιστον σημείο του X. Τα στοιχεία στα οποία μεγιστοποιείται η $\succsim$ ανήκουν στο σύνολο αδιαφορίας της $\succsim$. Αν επιπλέον το X είναι κυρτό υποσύνολο χώρου με norm και η $\succsim$ είναι αυστηρά κυρτή, η $\succsim$ παίρνει μέγιστη τιμή ακριβώς σε ένα σημείο του D*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $F_x = \{y \in X | y \succsim x\}$ είναι συμπαγές σαν τομή του συμπαγούς X και του κλειστού συνόλου $P_{\succsim}(x)$. Αν δείξουμε ότι

$$F = \bigcap_{x \in X} F_x \neq \emptyset$$

, τότε κάθε στοιχείο x_0 της τομής μεγιστοποιεί τη σχέση προτίμησης γιατί $x_0 \in F_x \forall\, x$, επομένως $x_0 \succsim x \;\forall\; x \in X$. Για να δείξουμε ότι η τομή δεν είναι κενή αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων $F_x, x \in X$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Έτσι υποθέτουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n \in X$. Επειδή η σχέση προτίμησης $\succsim$ είναι πλήρης και μεταβατική, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n \succsim x_{n-1} \succsim \cdots \succsim x_2 \succsim x_1$. Τότε

$$\cap_{i=1}^{n} F_{x_i} = F_{x_n} \neq \emptyset$$

. Επομένως $F \neq \emptyset$ και η $\succsim$ παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο στοιχείο x_0 του X. Αν υποθέσουμε ότι το x_0' είναι επίσης μέγιστο στοιχείο της $\succsim$ στο D έχουμε ότι $x_0' \succsim x_0$ και $x_0 \succsim x_0'$ και $x_0' \sim x_0$. Επομένως το σύνολο των στοιχείων στα οποία η $\succsim$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι αδιάφορα μεταξύ τους. Αν επιπλέον το

X είναι κυρτό και η $\succsim$ αυστηρά κυρτή και υποθέσουμε ότι x_0, x_0' είναι μέγιστα στοιχεία της $\succsim$ με $x_0 \neq x_0'$ έχουμε ότι

$$\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0' \succ x_0$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$, άτοπο γιατί $\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0' \in D$. Άρα $x_0 = x_0'$. □

Από το θεώρημα 1.1 συνεπάγεται το θεώρημα 3.1.1

Α΄.2 Κατασκευή Ισοδύναμου Διανυσματικού πεδίου $\tilde{Z}$

Θα δείξουμε πως κατασκευάζεται το διανυσματικό πεδίο $\tilde{Z}$ που αναφέρεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 . Το $\tilde{Z}$ έχει τα ίδια μηδενικά με το Z, ορίζεται σε όλο το φ_{+}^{n-1} και δείχνει προς τα μέσα στο σύνορο.

Πρόταση 1.2(Διανυσματικό Πεδίο Εσωτερικής Κατεύθυνσης Ισοδύναμο του Z**)** *Αν* $Z : \varphi_{++}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *είναι μία συνάρτηση συνολικής υπερβαλουσας ζήτησης σαν αυτή του Θεωρήματος 3.2 που ικανοποιεί τις συνθήκες (1)-(5), τότε υπάρχει ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο* $\tilde{Z} : \varphi_{+}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *που έχει τα ίδια μηδενικά με το* Z*,*

$$\tilde{Z}(\pi) = 0 \Leftrightarrow Z(\pi) = 0$$

Απόδειξη. Είναι πιο βολικό να χρησιμοποιούμε την ένδειξη $j = 1, ..., n$ για τα αγαθά, παρά την $s = 0, 1, ..., S$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$N_j = \{\pi \in \varphi_{++}^{n-1} | Z_j(\pi) > 0,\ \pi_j < \frac{1}{\sqrt{n}}\}$$

Από τον ορισμό των N_j, το Z δεν μπορεί να έχει μηδέν στο N_j, άρα τα μηδέν του Z πρέπει να βρίσκονται στο σύνολο

$$K = \varphi_{++}^{n-1} \setminus \cup_{j=1}^{n} N_j$$

Θα δείξουμε ότι K είναι κλειστό ως υποσύνολο του φ_{+}^{n-1}. Έστω $\pi^\nu \in K$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $\pi^\nu \to \pi$. Αν $\pi \in \partial\varphi_{+}^{n-1}$, έστω $J = \{j \in \{1, ..., n\} | \pi_j = 0\}$. Για ν επαρκώς μεγάλο, $\pi_j^\nu < \frac{1}{n}$ για $j \in J$ και αφού $\pi \not\in \cup_{j=1}^{n} N_j$, $Z_j(\pi^\nu) \leq 0, j \in J$. Αλλά τότε το $\|Z(\pi^\nu))\|$ δεν μπορεί να παέι στο άπειρο αφού $Z_j(\pi^\nu)$ είναι κάτω φραγμένο λόγω της ιδιότητας (1) για κάθε $j = 1, ..., n$ και για κάθε

$j \notin J$ είναι άνω φραγμένο από το νόμο Walras της ιδιότητας (4), που αντιφάσκει λόγω της συμπεριφοράς ορίων από την ιδιότητα (5). Έτσι $\pi \in \varphi_{++}^{n-1}$. Αφού π^{ν} δεν ανήκει στην ένωση $\cup_{j=1}^{n} N_j$ που είναι ανοικτή, το π δεν μπορεί να ανήκει σε αυτό το σύνολο ώστε $\pi \in K$ και K κλειστό.

Έστω U μια ανοικτή περιοχή του K στο φ_{++}^{n-1} τέτοια ώστε $K \subset U \subset \bar{U} \subset \varphi_{++}^{n-1}$. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\alpha : \varphi_{+}^{n-1} \to [0,1]$ τέτοια ώστε $\alpha(\pi) = \begin{cases} 1 \text{ αν } \pi \in K \\ 0 \text{ αν } \pi \notin U \end{cases}$

Έστω $\pi^* = (\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}) \in \varphi_{++}^{n-1}$ και ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο Z^* στο φ_{+}^{n-1} από τη σχέση $Z^*(\pi) = \frac{\pi^*}{\pi^*\pi} - \pi$.

Το Z^* είναιεσωτερικής κατεύθυνσης στο σύνορο $\partial\varphi_{+}^{n-1}$ αφού $\pi_j = 0$ συνεπάγεται $Z_j^*(\pi) = \frac{\pi_j^*}{\pi^*\pi} > 0$. Συνεπάγεται ότι το διανυσματικό πεδίο $\tilde{Z}$ στο φ_{+}^{n-1} που ορίζεται από τη σχέση

$$\tilde{Z}(\pi) = \alpha(\pi)Z(\pi) + (1 - \alpha(\pi))Z^*(\pi)$$

είναι συνεχές και κατεύθυνσης προς τα μέσα στο σύνορο $\partial\varphi_{+}^{n-1}$.

Μένει να δείξουμε ότι $\tilde{Z}(\pi) = 0$ αν και μόνο αν $Z(\pi) = 0$.

Έστω $Z(\pi) = 0$. Τότε $\pi \in K \Rightarrow \alpha(\pi) = 1 \Rightarrow \tilde{Z}(\pi) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\tilde{Z}(\pi) = 0$, τότε τρεις περιπτώσεις είναι πιθανές:(α) $\pi \in K$, (β) $\pi \in N_j$ για κάποιο j, (γ) $\pi \in \partial\varphi_{+}^{n-1}$.

(α)$\Rightarrow \alpha(\pi) = 1 \Rightarrow Z(\pi) = 0$

(β): αδύνατο γιατί $\pi \in N_j \Rightarrow Z_j(\pi) > 0, \pi_j < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ώστε $Z_j^*(\pi) = (\frac{1}{\pi^*\pi})1/\sqrt{n} - \pi_j > 0$. Έτσι $\pi \in N_j \Rightarrow \tilde{Z}_j(\pi) > 0$.

(γ): αδύνατο γιατί $\pi \in \partial\varphi_{+}^{n-1} \Rightarrow \pi_j = 0$ για κάποια $j \Rightarrow Z^*(\pi) > 0 \Rightarrow \tilde{Z}_j(\pi) > 0$, που είναι άτοπο. □

Α΄.3 Διαχωρισμός Κυρτών Συνόλων

Το πιο βασικό αποτέλεσμα της κυρτής ανάλυσης είναι το θεώρημα που ισχυρίζεται ότι τα ασυνεχή κυρτά σύνολα μπορούν να διαχωριστούν από ένα υπερεπίπεδο. Υπό την πιο ισχυρή υπόθεση ότι ένα από τα σύνολα είναι συμπαγές και το άλλο κλειστό, η διαχώριση είναι αυστηρή. Η τελευταία ιδιότητα είναι ο ισχυρισμος του θεωρήματος 4.2. Αυτή η ιδιότητα είναι ο ισχυρισμός του θεωρήματος διαχωρισμού κυρτών συνόλων. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 1.3.1: Προβολή σε Κυρτά Σύνολα

Έστω C ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $x \notin C$, τότε υπάρχει διά-

νυσμα $y \in C$ που είναι το πιο κοντινό στο x.

$$\|x-y\| = min\{\|z-x\| \, |z \in C\}$$

Επιπλέον, αν το C είναι κυρτό, τότε το διάνυσμα y είναι μοναδικό. Το y λέγεται προβολή του x πάνω στο C και συμβολίζεται με $y = \Pi_C(x)$.

Απόδειξη. Διάλεγουμε οποιοδήποτε $z \in C$ και υποθέτουμε ότι η μπάλα $B(x,\alpha)$ ακτίνας $\alpha = \|z-x\|$ με κέντρο το x. Αφού το $C \cap B(x,a)$ είναι συμπαγές, η συνάρτηση απόστασης $d_x(y) = \|y-x\|$ έχει ελάχιστο και είναι περιορισμένο σε αυτό το σύνολο.
Αν υποθέσουμε ότι C κυρτό και υπάρχει $y' \in C$ με $\|x-y'\| = \|x-y\|$ και $y \neq y'$ τότε

$$\|y-x\|^2 = \left\|y - \frac{1}{2}(y+y')\right\|^2 + \left\|x - \frac{1}{2}(y+y')\right\|^2 > \left\|x - \frac{1}{2}(y+y')\right\|$$

, άτοπο γιατί το y ειναι το πιο κοντινό στο x.

□

Λήμμα 1.3.2: Διαχωρισμός Σημείου και Κυρτού Συνόλου
Έστω C ένα μη κενό κλειστό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $x \not\in C$, το y συμβολίζει την προβολή του x πάνω στο C. Το υπερεπίπεδο H^y_π ορθογώνιο στο $\pi = x - y$ που περνά από το y διαχωρίζει αυστηρά το x και το C. Είναι

$$\left.\begin{array}{c} \pi(z-y) \leq 0, \forall\, z \;\in C \\ \pi(x-y) > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \pi z \leq \pi x, \;\; \forall\, z \in C$$

Απόδειξη. Για κάθε $z \in C$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi_z : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται

$$\phi_z(t) = \|x - (tz + (1-t)y)\|^2$$

Αφού y είναι η προβολή του x πάνω στο C, το ϕ_z έχει ελάχιστο στο $[]0,1$ στο $t = 0$ έτσι ώστε $\phi'_z(0) \geq 0, \forall\, z \in C$. Αφού

$$\phi_z(t) = \|(x-y) + t(y-z)\|^2 = \|(x-y)\|^2 + 2t(x-y)(y-z) + t^2\|x-z\|^2$$

είναι $\phi'_z(0) = 2(x-y)(y-z)$. Έτσι $x \not\in C$, $\pi(x-y) = \|x-y\|^2 > 0$. □

Θεώρημα 1.3 (Διαχωρισμός Ασυνεχών και Κυρτών συνόλων)
i) Αν και είναι μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $K \cap M = \emptyset$, τότε υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \neq 0$, τέτοια ώστε

$$\underset{x \in M}{sup}\, \pi x \leq \underset{x' \in K}{inf}\; \pi x' \tag{Α΄.1}$$

ii) Αν επιπλέον K είναι συμπαγές και M κλειστό, τότε

$$\underset{x \in M}{sup}\, \pi x < \underset{x' \in K}{inf}\; \pi x' \tag{Α΄.2}$$

Απόδειξη. Το σύνολο $C = M - K = \{y \in \mathbb{R}^n | y = x - x', x \in M, x' \in K\}$ είναι μη κενό και κυρτό και $\cap M = \emptyset$ συνεπάγεται $0 \not\in C$. Πρέπει να θεωρήσουμε δύο υποθέσεις. α) $0 \not\in \bar{C}$. Από το λήμμα 1.2.2 υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \neq 0$, τέτοιο ώστε $\pi z > \pi 0, \forall\, z \in \bar{C}$ και έτσι συγκεκριμένα $\forall z \in C$ που συνεπάγεται τη σχέση (2.2). Αν K είναι συμπαγές και M κλειστό, τότε $C = \bar{C}$ και έτσι ισχύει η σχέση (1.2).
β)$0 \in \bar{C}$. Έστω $\{e^1, ..., e^m\}$ μια μέγιστη συλλογή γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στο C. Τότε $\forall x \in C, \{x, e^1, ..., e^m\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα έτσι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i e^i$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\alpha > 0, -\alpha \sum_{i=1}^m e^i \not\in \bar{C}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $-\alpha \sum_{i=1}^m e^i \in \bar{C}$, τότε υπάρχει μια ακολουθία $x^\nu = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{nu} e^i \in C$, τέτοιο ώστε $x^{nu} \to -\alpha \sum_{i=1}^m e^i$. Αφού $\{e^1, ..., e^m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $\lambda_i^\nu \to -\alpha, i = 1, ..., m$ έτσι ώστε για επαρκώς μεγάλο ν, $\lambda_i^\nu < 0, i = 1, ..., m$. Από την κυρτότητα του C

$$0 = \left(\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^\nu}\right) x^\nu - \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i^\nu}{1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i^\nu}\right) e^i \in C$$

, άτοπο γιατί $0 \not\in C$. Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}, -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^m e^i \not\in \bar{C}$. Από το λήμμα 1.2.2 υπάρχει $\pi_k \in$
$mathbbR^n$, που μπορεί να επιλεγεί με $\|\pi_k\| = 1$, τέτοιο ώστε

$$\pi_k z < \pi_k \left(-\frac{1}{k} \sum_{i=1}^m e^i\right), \forall\, z \in \bar{C}$$

Επιλέγοντας μια υπακολουθία τέτοια ώστε $\pi_k \to \pi$ και περιορίζοντας την ανισότητα στα στοιχεία του C δίνει

$$\pi z \leq 0, \forall\, z \in C \Leftrightarrow \pi x \leq \pi x', \forall\, x \in M, \forall\, x' \in K$$

που αποδεικνύει την (1.1). □

Βιβλιογραφία

[1] Ι. Α. Πολυράκης *Θέματα Ανάλυσης και θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία*, Αθήνα, 2010.

[2] M. Magill, M. Quinzii, *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, 2002

[3] Ι. Α. Πολυράκης, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Μαθηματικών, Αθήνα, 2010.