



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΤΕΡΥΓΙΩΝ ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ
ΜΕ ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΟΥ
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΕΩΣ ΤΗΝ ΡΙΖΑ**



Διπλωματική εργασία του

Μάντζαρη Θεόδωρου

Επιβλέπων καθηγητής: Βουτσινάς Σπυρίδων

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θεωρώ υποχρέωση μου να ευχαριστήσω τον καθηγητή κύριο Βουτσινά. Η καθοδήγηση που μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, ο χρόνος που διέθεσε για εμένα αλλά και η διάθεσή του απέναντί μου, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στο να μπορέσω να ολοκληρώσω την εργασία.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη του τομέα τους λέκτορα Βασίλειο Ριζιώτη, Διδάκτορα Προσπαθόπουλο Ιωάννη, υποψήφιους διδάκτορες Παναγιώτη Σχοινά και ιδιαιτέρως τους Παπαδάκη Γεώργιο και Μανωλά Δημήτριο, για την υποστήριξή τους τόσο σε ζητήματα που αφορούσαν την εργασία όσο και για την ψυχολογική υποστήριξη.

Ξεχωριστά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο και συνάδελφο Μιχαλακέα Δημοσθένη ο οποίος συνέβαλε ώστε τα φοιτητικά χρόνια να αποτελέσουν μια ακόμα πιο όμορφη ανάμνηση.

Περίληψη

Αντικείμενο της εργασίας είναι η ανάλυση πτερυγίων με επέκταση του αεροδυναμικού σχεδιασμού μέχρι την ρίζα.

Στις περισσότερες ανεμογεννήτριες το εσωτερικό τμήμα των πτερυγίων σχεδιάζεται ικανοποιώντας κυρίως κατασκευαστικά κριτήρια αφού πιστεύεται ότι το ποσό της παραγόμενης ισχύος που προέρχεται από αυτό το τμήμα είναι ασήμαντο σε σχέση με την παραγόμενη ισχύ από το υπόλοιπο πτερύγιο. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει σε έναν σχεδιασμό όπου η ρίζα του πτερυγίου αποτελείται από την σταδιακή μετάβαση από αεροτομές σε ένα κυλινδρικό τμήμα το οποίο δένει στην πλήμνη της ανεμογεννήτριας.

Ωστόσο πρόσφατα έχουν αναφερθεί βελτιωμένοι συντελεστές ισχύος σε ρότορος όπου η αεροδυναμική σχεδίαση φτάνει έως την ρίζα του πτερυγίου. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια ανάλυση του νέου αυτού σχεδιασμού και συγκρίνεται με ένα τυπικά σχεδιασμένο ρότορα.

Η σύγκριση αφορά την παραγόμενη ισχύ, τα αξονικά και τα περιφερειακά φορτία κατά μήκος των πτερυγίων, την συνολική δύναμη ώσης, την γωνία πρόσπτωσης καθώς και τον συντελεστή άνωσης. Τέλος γίνεται υπολογισμός της ετήσιας παραγόμενης ενέργειας. Αρχικά μελετάται η περίπτωση του λεπτού πτερυγίου (thin) και στην συνέχεια του πτερυγίου με πάχος (thick).

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ο νέος σχεδιασμός δίνει μεγαλύτερες τιμές ισχύος, ενώ έχουμε και σημαντική αύξηση στην ετήσια παραγόμενη ενέργεια από την ανεμογεννήτρια.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	4
Τεχνολογικό πρόβλημα.....	5
Σκοπός της εργασίας.....	6
Διάρθρωση της εργασίας	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	8
1.1 Το πεδίο ροής του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού	8
2.2 Η αριθμητική διακριτοποίηση του προβλήματος	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	50
2.1 Ανεμογεννήτρια αναφοράς.....	50
2.2 Νέα γεωμετρία.....	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	53
3.1 Δεδομένα και βασικά σημεία ελεγχου	53
3.2 Αποτελεσματα	54
3.3 Κατασκευή καμπύλης ισχύος και υπολογισμός ετήσιας παραγόμενης ενέργειας	67
3.4 Έλεγχος συστροφής πτερυγίου	70
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	72
4.1 Δεδομένα και βασικά σημεία ελέγχου.....	72
4.2 Αποτελεσματα	73
4.3 Εύρεση βέλτιστης αδιάστατης ταχύτητας ακροπτερυγίου (TSR) και ετήσιας παραγόμενης ενέργειας	78
4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	84
5.1 Συμπεράσματα.....	84
5.2 Βιβλιογραφία	85

Εισαγωγή

Οι λύσεις για την ηλεκτροδότηση του πλανήτη λιγοστεύουν όλο και περισσότερο, με αποτέλεσμα να στρεφόμαστε σε άλλου είδους μορφών παραγωγής ενέργειας, τις ανανεώσιμες. Ανάμεσα στις διάφορες ανανεώσιμες τεχνολογίες για την παραγωγή ενέργειας, η αιολική ενέργεια είναι η πιο πετυχημένη στην αγορά. Οι λόγοι που αυτό συμβαίνει αφορούν τις περιβαλλοντικές ανησυχίες και τα κόστη. Πλέον στις ενεργειακές πολιτικές των περισσότερων κρατών συνυπολογίζονται οι εκπομπές του διοξειδίου του άνθρακα, γεγονός που δίνει ένα συντριπτικό πλεονέκτημα στις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, ενώ το τυπικό κόστος ανά KWh παραγόμενο από ανεμογεννήτριες έχει φτάσει τα επίπεδα των συμβατικών πηγών ενέργειας.

Στην Ευρώπη παρατηρείται ραγδαία αύξηση των αιολικών πάρκων. Σύμφωνα με τα στοιχεία της EWEA οι ετήσιες εγκαταστάσεις αιολικής ενέργειας αυξάνονται σταθερά τα τελευταία 17 χρόνια, από 814 MW το 1995 σε 9.616 MW το 2011 παρουσιάζοντας μέση αύξηση 15.6%, ενώ πρόσφατα η Ευρωπαϊκή Ένωση έθεσε στόχο να καλύπτει το 20% των ενεργειακών της αναγκών από ανανεώσιμες πηγές ενέργειας έως το 2020. Η Ελλάδα θα μπορούσε να είναι πρωτοπόρος στον τομέα της αιολικής ενέργειας, χάρη στο εξαιρετικό αιολικό δυναμικό που διαθέτει. Ωστόσο το μερίδιο της στην ετήσια εγκατάσταση ισχύος για το έτος 2011 αντιστοιχεί μόλις στο 3%.

Η μηχανές οι οποίες παράγουν την αιολική ενέργεια είναι οι ανεμογεννήτριες, οι οποίες δεσμεύουν ένα τμήμα της κινητικής ενέργειας του αέρα και το μετατρέπουν σε ηλεκτρική ενέργεια. Υπάρχουν πολλών ειδών ανεμογεννήτριες και χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες. Οριζοντίου άξονα όπου ο άξονας περιστροφής του δρομέα είναι παράλληλος με το έδαφος και κατακόρυφου άξονα, όπου ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος στην επιφάνεια του εδάφους. Αν και η δεύτερη κατηγορία παρουσιάζει κάποια πλεονεκτήματα, όπως το χαμηλό κέντρο βάρους και η απλότητα στον σχεδιασμό των πτερυγίων, η διάταξη που έχει κυριαρχήσει στην αγορά είναι οι ανεμογεννήτριες οριζοντίου άξονα. Τα τυπικά μέρη μιας τέτοιας μηχανής είναι τα εξής:

- Ο δρομέας, ο οποίος αποτελείται από δύο ή τρία πτερύγια και κατασκευάζεται από ενισχυμένο πολυεστέρα. Τα πτερύγια προσδένονται πάνω σε μια πλήμνη είτε σταθερά, είτε με την δυνατότητα να περιστρέφονται γύρω από τον διαμήκη άξονα τους μεταβάλλοντας το βήμα. Αποτελεί το 30-40% του συνολικού κόστους μιας ανεμογεννήτριας.
- Το σύστημα μετάδοσης της κίνησης, αποτελούμενο από τον κύριο άξονα, τα έδρανα του και το κιβώτιο ταχυτήτων που προσαρμόζει την ταχύτητα περιστροφής στην σύγχρονη ταχύτητα της ηλεκτρογεννήτριας.
- Η ηλεκτρική γεννήτρια η οποία μετατρέπει την μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική και η οποία βρίσκεται συνήθως πάνω στον πύργο, ενώ υπάρχει και το σύστημα πέδης.
- Το σύστημα προσανατολισμού που αναγκάζει τον άξονα περιστροφής του δρομέα να βρίσκεται παράλληλα με την διεύθυνση του ανέμου.

- Ο πύργος ο οποίος στηρίζει όλη την παραπάνω εγκατάσταση.

Τεχνολογικό πρόβλημα

Η αεροδυναμική των ανεμογεννητριών παραμένει ένας απαιτητικός και κρίσιμος ερευνητικός τομέας για την αιολική ενέργεια. Ο σχεδιασμός των Α/Γ θα πρέπει να ικανοποιεί παράλληλα την απαίτηση για αύξηση των αεροδυναμικών δυνάμεων που είναι υπεύθυνες για την παραγωγή ενέργειας αλλά και μείωση των κοπωτικών δυνάμεων ώστε να επιμηκυνθεί η διάρκεια ζωής τους.

Ένα από τα κρίσιμότερα μέρη της Α/Γ είναι ο ρότορας, άφου είναι ο μηχανισμός που αλληλεπιδρά κατευθείαν με τον άνεμο παράγοντας μηχανική ενέργεια. Στις περισσότερες Α/Γ το εσωτερικό μέρος του ρότορα είναι σχεδιασμένο κυρίως με κατασκευαστικά κριτήρια αφού το ποσό της ενέργειας που παράγεται από αυτό το τμήμα του ρότορα θεωρείται ασήμαντο σε σχέση με το υπόλοιπο τμήμα. Έτσι το σχήμα του τμήματος αυτού διαμορφώνεται από την σταδιακή μετάβαση απο αεροτομές σε ένα κυλινδρικό τμήμα που ενώνεται με την πλήμνη (Εικόνα 1).



Εικόνα 1

Ωστόσο, πρόσφατα έχουν αναφερθεί αυξημένοι συντελεστές ισχύος για πτερύγια με αυξημένη χορδή και συστροφή στην ρίζα τους, ενώ μια από τις μεγαλύτερες εταιρείες κατασκευής ανεμογεννητριών, η ENERCON έχει εφαρμόσει τον παραπάνω σχεδιασμό τα τελευταία χρόνια.

Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της αεροδυναμικής συμπεριφοράς των πτερυγίων μιας ανεμογεννήτριας εάν αλλάξουμε την γεωμετρία τους. Συγκεκριμένα εξετάζουμε την επίδραση που έχει η επέκταση του αεροδυναμικού σχεδιασμού έως την ρίζα του πτερυγίου , ώστε να έχουμε ένα πιο αεροδυναμικά αποτελεσματικό ρότορα. (Εικόνα 2).



Εικόνα 2

Έτσι γίνεται σύγκριση μεταξύ του νέου πτερυγίου και της αρχικής γεωμετρίας. Η σύγκριση περιλαμβάνει την παραγόμενη ενέργεια, τις δυνάμεις κατά μήκος των πτερυγίων, τον συντελεστή άνωσης καθώς και την γωνία πρόσπτωσης.

Η μελέτη πραγματοποιήθηκε αρχικά σε πτερύγιο χωρίς πάχος (thin blade) και κατόπιν σε πτερύγιο με πάχος (thick blade). Σε κάθε περίπτωση έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων με την αρχική γεωμετρία.

Η μελέτη έγινε χρησιμοποιώντας την έκδοση 3 του κώδικα General Unsteady Vortex Particle (GENUVP) για το πτερύγιο χωρίς πάχος ενώ για το πτερύγιο με πάχος, την έκδοση 7.

Διάρθρωση της εργασίας

Στην παράγραφο αυτή γίνεται η εισαγωγή στην παρούσα εργασία με την παρουσίαση της διάρθρωσής της.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάται το εργαλείο-κώδικας που χρησιμοποιήθηκε κατά την εκπόνηση της εργασίας και γίνεται η αναλυτική παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου πάνω στο οποίο βασίζεται η μέθοδος επίλυσης του γενικού προβλήματος της ροής γύρω από ανωστικό σώμα και πρότυπο ελευθέρου ομόρρου. Η ροή γύρω από ένα τυχαίο σώμα, που αναπαρίσταται με δίπολα και πηγές, επιλύεται με την εφαρμογή κινηματικών και δυναμικών συνθηκών (συνθήκη μη εισχώρησης της κάθετης ταχύτητας και εξίσωση πιέσεων στην ακμή εκφυγής). Το πρότυπο ομόρρου βασίζεται στη θεωρία φύλλων στροβιλότητας και η εξέλιξή του περιγράφεται από τις εξισώσεις του Helmholtz.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται η ανεμογεννήτρια αναφοράς που χρησιμοποιήσαμε στην εργασία καθώς και τα χαρακτηριστικά λειτουργίας της.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η περίπτωση της λεπτής αεροτομής. Γίνεται η αεροδυναμική ανάλυση καθώς και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η περίπτωση της αεροτομής με πάχος. Γίνεται η αεροδυναμική ανάλυση καθώς και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων. Στην συνέχεια πραγματοποιείται μια ποιοτική σύγκριση μεταξύ των δύο περιπτώσεων, του λεπτού πτερυγίου και του πτερυγίου με πάχος.

Στο πέμπτο κεφάλαιο περιέχει τα τελικά συμπεράσματα της εργασίας καθώς και την βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε.

Κεφάλαιο 1

Θεωρητικό υπόβαθρο του κώδικα

1.1 Το Πεδίο Ροής του Ασυμπίεστου Μη Συνεκτικού Ρευστού

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται το θεωρητικό πλαίσιο που επιλέγεται για την επίλυση του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο θεώρημα διαχωρισμού ταχυτήτων του Helmholtz το πεδίο ροής εκφράζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου ροής. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων συνδυάζεται με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας για την αναπαράσταση των σωμάτων και των φύλλων στροβιλότητας που εκφεύγουν από αυτά. Σύμφωνα με το θεώρημα Green, η διαταραχή που εισάγεται στη ροή από την παρουσία στερεών σωμάτων, περιγράφεται από το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(\vec{x})$ ενός αστρόβιλου πεδίου ροής, που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και προκύπτει με την τοποθέτηση διανομών κατάλληλων ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων. Στο στροβιλό τμήμα του πεδίου ροής είναι δυνατόν να συμπεριληφθεί τόσο η ελεύθερη στροβιλότητα που εκφεύγει από τα ανωστικά σώματα (ως συνέπεια του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin) όσο και η στροβιλότητα που υπάρχει στο επερχόμενο πεδίο ροής και που μπορεί να προέρχεται από προπορευόμενα σώματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, οι εξισώσεις του προβλήματος επιλύονται στο συνοριακό πλέγμα της εξωτερικής επιφάνειας των σωμάτων και όχι σε ένα χωρικό πλέγμα που καλύπτει όλο το πεδίο ροής (όπως συμβαίνει στις πλεγματικές μεθόδους που επιλύουν τις εξισώσεις Euler και Navier-Stokes). Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή στα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν είναι μη γραμμικές συμπεριλαμβάνοντας και μη μόνιμους όρους. Στα στερεά σώματα ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης της ταχύτητας. Επιπλέον στα ανωστικά σώματα ικανοποιείται και η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής. Με τις εξισώσεις αυτές υπολογίζονται οι εντάσεις των διανομών ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στα σώματα. Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η διαχείριση των φύλλων στροβιλότητας γίνεται μέσω της αναπαράστασής τους με ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας, που καθώς δεν προαπαιτεί την ύπαρξη συνδετικής δομής, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πρόσπτωσης της στροβιλότητας σε στερεά σώματα. Η χρονική και χωρική εξέλιξη της στροβιλότητας ικανοποιεί τις εξισώσεις του Helmholtz, που

συμπεριλαμβάνουν και μία μη γραμμική εξίσωση μεταφοράς με όρους διάδοσης, παραμόρφωσης και διάχυσης. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτουν οι άγνωστες εντάσεις των διανομών πηγών και διπόλων και είναι δυνατός ο άμεσος υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων. Ο υπολογισμός των πιέσεων στα στερεά όρια είναι ένα πρόβλημα πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και γίνεται με ολοκλήρωση της απόκλισης των εξισώσεων ορμής.

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα ευέλικτο αριθμητικό σχήμα που μπορεί να επιλύει, με ικανοποιητική ακρίβεια και σημαντική οικονομία σε χρόνο και μνήμη Η/Υ, προβλήματα μόνιμης και μη μόνιμης ροής σε περιπτώσεις σωμάτων που είναι ανωστικά, ή μη ανωστικά και μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα και να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Προβλήματα που εξετάζονται αφορούν την πρόλεξη της ροής και των φορτίων σε πτέρυγες και δρομείς διαφόρων τύπων, όπως για παράδειγμα σε δρομέα ανεμοκινητήρα, ή ελικοπτέρου αλλά και σε έλικα πλοίου.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα επιμέρους θεωρητικά εργαλεία και καταστρώνεται το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος.

Αναπαράσταση φύλλου στροβιλότητας

Κάθε κινούμενη ή μη επιφάνεια S_w , που παρουσιάζει ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας, σε πεδίο ροής ασυμπιέστου μη συνεκτικού ρευστού, ονομάζεται φύλλο στροβιλότητας και ουσιαστικά αποτελεί το φυσικό ανάλογο των στρωμάτων διάτμησης.

Στην περίπτωση της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ένα τρισδιάστατο ανωστικό σώμα επιβάλλεται ο ορισμός μίας γραμμής στο στερεό σύνορό του (της ακμής εκφυγής), από όπου θα εκφεύγει ένα επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας (ο ομόρρους του), με ασυνέχεια (πήδημα) της εφαπτομενικής ταχύτητας επομένως και του δυναμικού. Η ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη επιφανειακής διανομής διπόλων και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάπτυξη κυκλοφορίας, συνεπώς και άνωσης.

Εξ'ορισμού, το φύλλο στροβιλότητας είναι μία κινούμενη επιφάνεια S_w με ασυνέχεια (πήδημα) ταχύτητας $[[\vec{U}]](\vec{x}_w)$ στην τυχαία θέση $\vec{x}_w \in S_w$. Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση, που έχει άμεση σχέση με ρευστομηχανικές εφαρμογές, είναι αυτή ενός δυναμικού φύλλου στροβιλότητας που παράγεται ως επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού (ή ισοδύναμα ως μία διανομή διπόλων) και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned} [[\vec{U}]](\vec{x}_w) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}_w) &= 0, \quad \vec{x}_w \in S_w \\ \vec{\gamma}(\vec{x}_w) &= \vec{\nu}(\vec{x}_w) \times [[\vec{U}]](\vec{x}_w) \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου $\vec{\nu}(\vec{x}_w)$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο \vec{x}_w της επιφανείας S_w και $\vec{\gamma}(\vec{x}_w)$ η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας στην ίδια θέση.

Σε κάθε σημείο \bar{x}_w του φύλλου στροβιλότητας S_w ισχύει:

$$\frac{d\bar{x}_w}{dt} = \bar{u}(\bar{x}_w; t) \quad (1.2)$$

$$\llbracket P \rrbracket(\bar{x}_w) = 0 \quad (1.3)$$

όπου $\bar{u}(\bar{x}_w; t)$ είναι η μέση ταχύτητα μεταφοράς του φύλλου στροβιλότητας και $\llbracket P \rrbracket(\bar{x}_w)$ είναι η ασυνέχεια (το πήδημα) της πίεσης στην θέση \bar{x}_w .

Η σχέση (1.2) είναι η κινηματική εξίσωση του ομόρρου που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της γεωμετρίας του. Η (1.3) είναι η δυναμική εξίσωση του ομόρρου που εξισώνει την πίεση της επάνω και της κάτω πλευράς σε κάθε σημείο του φύλλου στροβιλότητας και ουσιαστικά ρυθμίζει την χρονική εξέλιξη της έντασης της στροβιλότητας σε αυτό.

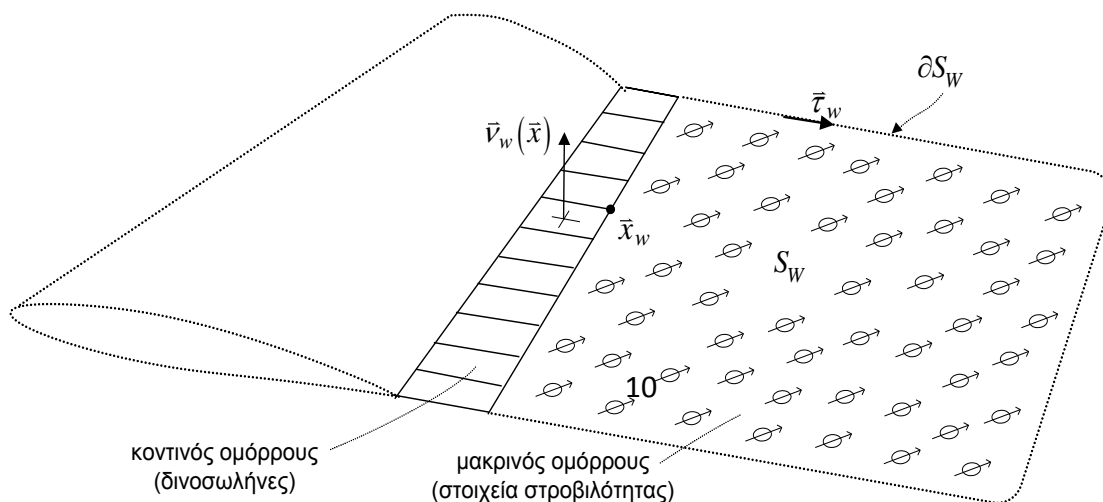
Σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz το πεδίο ταχύτητας ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού μπορεί να γραφεί ως:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla\Phi(\bar{x}, t) + \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) \quad (1.4)$$

Στην περίπτωση ροής γύρω από ανωστικό σώμα ο όρος $\nabla\Phi(\bar{x}, t)$ είναι δυνατόν να συμπεριλάβει και την συνεισφορά της αποβαλλόμενης στροβιλότητας αυτού του σώματος που μπορεί να διανέμεται ως ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας. Έτσι προκύπτει η δυναμική (potential) θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας, σύμφωνα με την οποία ο ομόρρος αναπαρίσταται από μία επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού κατασκευασμένη από πλέγμα δινοσωλήνων.

Όμως, καθώς η γεωμετρία του ομόρρου δεν είναι δεδομένη και προκύπτει από την (1.2), αυτή η θεώρηση είναι δυνατό να παρουσιάσει αριθμητικές αστάθειες, ιδιαίτερα σε περιοχές αναδίπλωσης του φύλλου στροβιλότητας, που είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν εάν αυτό αναπαρασταθεί μέσω του δεύτερου όρου της (1.4). Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η θεωρητικά ισοδύναμη στροβιλή (vortex) εκδοχή του φύλλου στροβιλότητας, που εισάγει τον ομόρρο ως περιοχή γενικευμένης στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή ο ομόρρος απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του.

Στο αριθμητικό πρότυπο που παρουσιάζεται, δεχόμαστε ότι το φύλλο στροβιλότητας αποτελείται από δύο τμήματα: τον κοντινό και τον μακρινό ομόρρο, που αναπαρίστανται με



τη δυναμική και τη στροβιλή θεώρηση αντίστοιχα (0).

Σχήμα 1.1 Η αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας

Η δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

Η δυναμική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας γίνεται με τη θεώρηση πλέγματος ευθύγραμμων δινοσωλήνων, με ένταση μ_w που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin και γεωμετρία \bar{x}_w όπως αυτή προκύπτει από την κινηματική συνθήκη (1.2).

Με αυτά τα δεδομένα υπολογίζονται το δυναμικό $\Phi_w(\bar{x}_o; t)$ και η ταχύτητα $\bar{u}_w(\bar{x}_o; t)$ που το φύλλο στροβιλότητας επάγει σε σημείο του χώρου $\bar{x}_o \in D$ (Hess 1972):

$$\Phi_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(\bar{x}_o; t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\bar{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Στην παραπάνω σχέση διακρίνουμε δύο όρους, έναν επιφανειακό και έναν επικαμπύλιο. Εάν τεθεί:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\bar{x}; t) = & \delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \cdot \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w; t) \} \\ & + \delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \mu_w(\bar{x}_w; t) \bar{t}_w(\bar{x}_w; t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

όπου $\bar{t}_w(\bar{x}_w; t)$ το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο $\partial S_w(t) = (C_s) \cup (C_o)$ και $\delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$, $\delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$ συναρτήσεις Dirac ορισμένες αποκλειστικά στην S_w και στο σύνορο ∂S_w αυτής αντίστοιχα, τότε η (1.6) γράφεται:

$$\bar{u}_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}; t) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx \quad (1.8)$$

Η (1.7) ορίζει την γενικευμένη στροβιλότητα που αποδεικνύεται, ότι όχι μόνο κινηματικά αλλά και δυναμικά συμπεριφέρεται όπως η χωρική στροβιλότητα.

Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας

Η εμφάνιση άνωσης ισοδυναμεί με την κατανομή κυκλοφορίας στο πρόβλημα της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα. Όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια της θεώρησης μη συνεκτικού ρευστού επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπτομενική ταχύτητα, συνεπώς και στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρους της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης.

Τη χρονική στιγμή t σε μία τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω πλευράς (υπερπίεσης/pressure side, δείκτης "-") και της επάνω πλευράς (υποπίεσης/suction side, δείκτης "+") θα ισούται με την κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα σε αυτή την τομή :

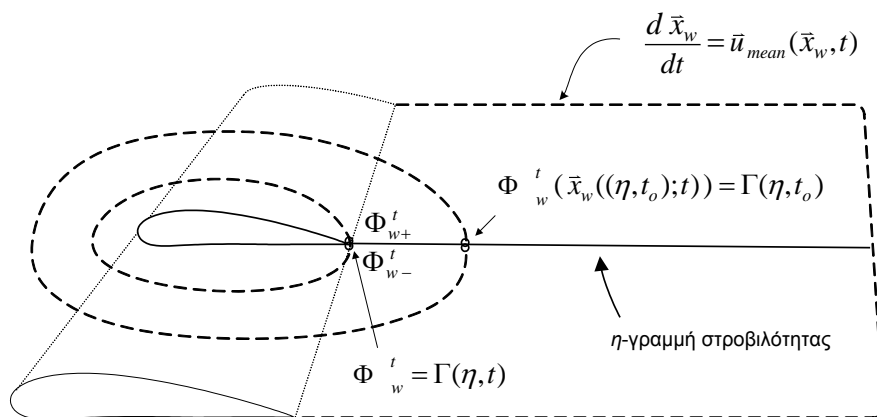
$$[[\Phi_w^t]] = \Phi_{w+}^t - \Phi_{w-}^t = \Gamma^t \quad (1.9)$$

Η ένταση της διαφοράς (του πηδήματος) δυναμικού $[[\Phi_w]](\vec{x}_w)$ καθορίζει την ένταση δινοσωλήνα $\mu_w(\vec{x}_w)$ στο υλικό σημείο $\vec{x}_w \in S_w$ του ομόρρου:

$$\mu_w(\vec{x}_w) = -[[\Phi_w]](\vec{x}_w) = -(\Phi_w^+ - \Phi_w^-) \quad , \vec{x}_w \in S_w \quad (1.10)$$

ενώ η θέση $\vec{x}_w \in S_w$ ενός υλικού σημείου του ομόρρου θα καθορίζεται από την μέση ταχύτητα (που σαφώς έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα):

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \frac{1}{2} \{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \} = \vec{u}_{mean}(\vec{x}_w, t) \quad (1.11)$$



Σχήμα 1.2 Η ασυνέχεια δυναμικού και η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής του ανωστικού σώματος επεκτείνεται στη συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής διπόλων που μεταφέρεται με ένα υλικό σημείο κατά μήκος μίας γραμμής στροβιλότητας συντηρεί τη ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή t το υλικό σημείο $\vec{x}_w((\eta, t_0); t)$, που αποβλήθηκε τη στιγμή t_0 από την η -γραμμή στροβιλότητας, θα έχει ένταση $[[\Phi_w^t]](\vec{x}_w(\eta, t_0); t)$ ίση με την ένταση που είχε η κυκλοφορία $\Gamma(\eta, t_0)$ στην η -γραμμή στροβιλότητας τη στιγμή t_0 :

$$[[\Phi_w^t]](\vec{x}_w(\eta, t_0); t) = \Gamma(\eta, t_0) \quad (1.12)$$

Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει τη συνέχεια των πιέσεων στην ακμή εκφυγής της πτέρυγας καθώς το ασυμπιεστο ρευστό δεν μπορεί να παραλάβει ορθές τάσεις:

$$P^+ = P^- \Rightarrow [[P]] = 0 \quad (1.13)$$

Αποτελεί τη δυναμική συνθήκη του προβλήματος και μαζί με την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης ορίζουν πλήρως ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες είναι και οι εντάσεις των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων. Η συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης καθορίζει ποσοτικά τη στροβιλότητα που αποβάλλεται στον ομόρρου της πτέρυγας ή ισοδύναμα την κυκλοφορία πάνω σε αυτή. Είναι μη γραμμική συνθήκη λόγω της ύπαρξης του τετραγωνικού όρου της ταχύτητας στο όρο της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση Bernoulli. Αποτέλεσμα είναι το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μη γραμμικό (σε αντίθεση με το διδιάστατο πρόβλημα όπου η αντίστοιχη συνθήκη είναι γραμμική).

Η δυναμική συνθήκη μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Πράγματι σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin θα πρέπει:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \Gamma) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial [[\Phi]](\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}_w, t) \cdot (\nabla [[\Phi]](\vec{x}_w, t)) \quad (1.14)$$

όπου θεωρώντας ότι η ταχύτητα στον ομόρρου είναι ουσιαστικά η μέση ταχύτητα της πάνω και κάτω πλευράς, θα έχουμε:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial [[\Phi]](\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \} \cdot \{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) - \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \} \quad (1.15)$$

και κάνοντας πράξεις:

$$\frac{\partial \Phi^+(\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{+2}(\vec{x}_w, t) = \frac{\partial \Phi^-(\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{-2}(\vec{x}_w, t) \Rightarrow$$

$$\frac{P^+}{\rho} = \frac{P^-}{\rho} = \frac{[P]}{\rho} \Rightarrow [P] = 0 \quad (1.16)$$

δηλαδή το θεώρημα του Kelvin ισοδυναμεί με τη συνθήκη του μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρροο της πτέρυγας με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας, γεγονός που επιβεβαιώνει την εξίσωση (1.10).

Οι Βασικές Εξισώσεις του Προβλήματος

Το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz εξασφαλίζει ότι οποιοδήποτε πεδίο ταχύτητας γράφεται στην μορφή

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla\Phi(\bar{x}, t) + \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) + \bar{U}_\infty(t) \quad (1.17)$$

όπου: $\bar{U}_\infty(t)$ η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο, $\Phi(\bar{x}, t)$ είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής και $\bar{u}_\omega(\bar{x}, t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από το γενικευμένο πεδίο χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$, τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \Phi(\bar{x}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

Από τις (1.17) και (1.18) προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot \bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla^2\Phi(\bar{x}, t) = \Delta\Phi(\bar{x}, t) \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla \times \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) = \omega(\bar{x}, t) \quad (1.20)$$

όπου: $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$ η στροβιλότητα και $\Delta\Phi(\bar{x}, t)$ ο ρυθμός μεταβολής του όγκου.

Θεωρώντας ροή ασυμπίεστη με στερεά σύνορα επιφανείας S_i , $S = \bigcup_i S_i$ τότε από την (1.19) προκύπτει η εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\Phi(\bar{x}, t) = 0 \quad (1.21)$$

Επείτα χρησιμοποιώντας την μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

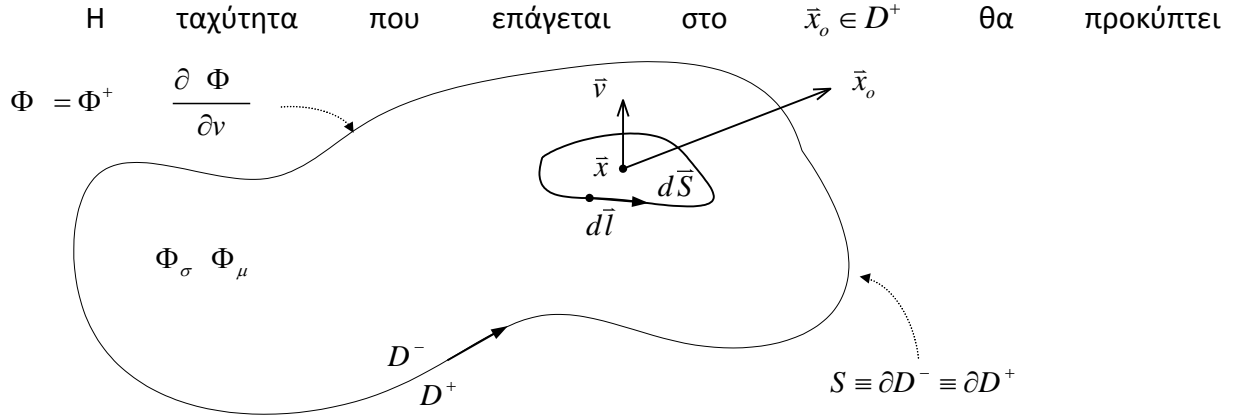
$$\nabla^2\Phi_\mu = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2\Phi_\sigma = 0 \quad (1.22)$$

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $\nabla^2(\cdot)$, η συνάρτηση $\Phi_{\sigma,\mu} = \Phi_\mu + \Phi_\sigma$ θα ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του πεδίου ροής (δηλαδή την εξίσωση Laplace) και θα ισχύει:

$$\nabla^2\Phi_{\sigma,\mu} = \nabla^2(\Phi_\mu + \Phi_\sigma) = \nabla^2\Phi_\mu + \nabla^2\Phi_\sigma = 0 \quad (1.23)$$

Η αναπαράσταση του δυναμικού για τη μικτή διατύπωση σε σημείο $\bar{x}_o \in D^+$ προκύπτει θέτοντας $\Phi^- \equiv 0$:

$$\Phi_{\sigma,\mu}^+(\bar{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{1}{|\bar{x}_o - \bar{x}|} dS(\bar{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\bar{x}) \frac{\bar{v}(\bar{x}) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \quad (1.24)$$



$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{\sigma,\mu}^+(\bar{x}_o) = \bar{u}(\bar{x}_o) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x}) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial S} \mu(\bar{x}) \frac{d\bar{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Σημειώνεται ότι η θετική φορά διαγραφής του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην παραπάνω εξίσωση είναι η ανθρωπολογική, ώστε το κάθετο διάνυσμα να έχει θετική φορά προς τον εξωτερικό χώρο, ενώ επιπλέον γίνεται η παρατήρηση ότι ο όρος αυτός μηδενίζεται στην περίπτωση μίας κλειστής επιφανείας S .

Στις παραπάνω σχέσεις χρειάζεται να προσδιοριστούν οι δύο διανομές $\sigma(\bar{x})$, $\mu(\bar{x})$ της διατύπωσης. Η κατασκευή της μικτής διατύπωσης μπορεί να συσχετιστεί με το φυσικό πρόβλημα της ροής γύρω από ανωστικό σώμα με πάχος. Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει η δυνατότητα ικανοποίησης της συνθήκης εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής που αποτελεί τη δυναμική εξίσωση του προβλήματος που σε συνδυασμό με την κινηματική συνθήκη οδηγεί στον καθορισμό των άγνωστων διανομών. Επειδή όμως η δυναμική συνθήκη στο πρόβλημα της πτέρυγας είναι μη γραμμική, οι εξισώσεις που προσδιορίζουν τις δύο διανομές εμφανίζονται συζευγμένες κατά τρόπο μη γραμμικό. Παρά το γεγονός ότι με τη χρήση της κινηματικής και της δυναμικής συνθήκης επιλύεται πλήρως το πρόβλημα που θέσαμε, μπορεί να αμφισβητηθεί η καλή τοποθέτηση του προβλήματος, αφού η συνέχεια των πιέσεων στον ομόρρου δεν εξασφαλίζεται. Παρόλα αυτά η επαλήθευση της ορθότητας της μεθόδου μπορεί να γίνει με τη σύγκριση των προλέξεων της με πειραματικά δεδομένα. Σε

επόμενη παράγραφο, όπου εξετάζεται το πρόβλημα του ανωστικού σώματος με πάχος, θα δούμε αναλυτικά πως υλοποιείται η διατύπωση πηγών-διπόλων, καθώς και το πως προσδιορίζονται οι δύο διανομές.

Η Ροή Γύρω από Ανωστικά Σώματα με Πάχος

Το δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας έχει ως στόχο την περιγραφή ροών ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος. Στη συνέχεια εξετάζονται οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρεί μία διατύπωση ώστε να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν πιο πιστά σε αυτό το πρόβλημα.

Από τη θεωρία του μη συνεκτικού ρευστού είναι γνωστό ότι η ανάπτυξη άνωσης, συνεπώς και κυκλοφορίας, σε ένα σώμα προϋποθέτει την ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού στο πεδίο ροής. Υποχρεωτικά αυτή η επιφάνεια θα αποτελεί επιφάνεια ασυνέχειας των εφαπτομενικών ταχυτήτων. Ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος μπορεί να αναπαρίσταται από μία τέτοια επιφάνεια. Η άνωση μπορεί να εισαχθεί υποχρεωτικά μέσω μίας διανομής διπόλων καθώς μία τέτοια διανομή παρουσιάζει ασυνέχεια τόσο στην ταχύτητα όσο και στο δυναμικό και θα πρέπει απαραίτητα να περιλαμβάνεται στη διατύπωση που θα χρησιμοποιήσουμε.

Μία διανομή πηγών έχει συνεχή εφαπτομενική ταχύτητα στην επιφάνεια στην οποία προφανώς διανέμεται μια συνεχής κατανομή δυναμικού, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια της κάθετης ταχύτητας και συνεπώς ασυνέχεια της κάθετης παραγωγού του δυναμικού πάνω στην επιφάνεια. Μη μηδενική ένταση της διανομής πηγών σημαίνει ότι το ρευστό «διαπερνά» την επιφάνεια με ρυθμό ίσο με την ένταση των πηγών στο εν λόγω σημείο. Με τη διανομή πηγών στην κλειστή επιφάνεια ενός σώματος αναπαριστούμε το πάχος του. Ασυμπτωτικές αναλύσεις δείχνουν ότι το πρόβλημα του «πάχους» μπορεί να αντιμετωπιστεί και με την τοποθέτηση μίας διανομής πηγών στη μέση επιφάνεια του σώματος και με ένταση ανάλογη της κλίσης της συνάρτησης του πάχους του σώματος (Ashley and Landahl 1965). Οπότε, με τον ένα, ή τον άλλο τρόπο, μία διανομή πηγών θα πρέπει να αποτελεί επίσης μέρος της διατύπωσης που θα επιλέξουμε για την επίλυση του προβλήματος.

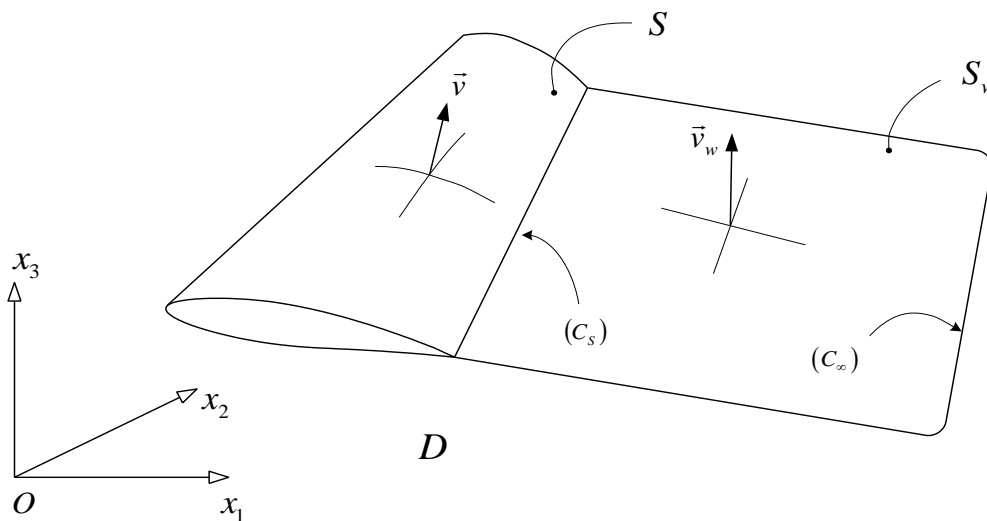
Τα παραπάνω συνοψίζονται στο συμπέρασμα ότι για την εξέταση της ροής γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος απαιτείται ο καθορισμός μίας διατύπωσης που να περιλαμβάνει και τις δύο διανομές πηγών και διπόλων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον λοιπόν παρουσιάζουν τόσο η άμεση όσο και η μεικτή διατύπωση πηγών-διπόλων με τις οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με ενιαίο τρόπο προβλήματα μη ανωστικών και ανωστικών σωμάτων με πάχος και αποβαλλόμενα φύλλα στροβιλότητας.

Στην περίπτωση της άμεσης διατύπωσης η υπόθεση της τμηματικά σταθερής διανομής δυναμικού οδηγεί στον άμεσο υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού και την ικανοποίηση της συνθήκης Kutta-Joukowski ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ταχυτήτων πάνω στην επιφάνεια του σώματος προκύπτει με την εφαρμογή αριθμητικού σχήματος παραγωγίσις του δυναμικού, η ακρίβεια του οποίου εξαρτάται από την ποιότητα με την οποία γίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση του σώματος.

Στην περίπτωση της μικτής διατύπωσης το πεδίο ταχυτήτων προκύπτει με ακρίβεια αφού επιλυθεί το σύστημα που καθορίζει τις άγνωστες εντάσεις των πηγών και των διπόλων, όμως η εφαρμογή της συνθήκης Kelvin γίνεται σε θέση κοντά στην ακμή εκφυγής, καθώς ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής παρουσιάζεται απειρισμός ταχυτήτων.

Μετά την ανάλυση που προηγήθηκε, επανερχόμαστε στο πρόβλημα αναπαράστασης του δυναμικού και του πεδίου ταχυτήτων γύρω από ανωστικά σώματα. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε το θεώρημα διαχωρισμού των ταχυτήτων του Helmholtz, και τα όσα προαναφέρθηκαν για την μικτή διατύπωση αναπαράστασης του δυναμικού Φ του αστρόβιλου πεδίου ροής και την αναπαράσταση των φύλλων στροβιλότητας.

Θεωρούμε τη ροή που δημιουργεί ανωστικό σώμα κινούμενο σε ασυμπίεστο μη συνεκτικό ρευστό στο χώρο D . Έστω S η εξωτερική επιφάνεια του σώματος, \vec{n} το κάθετο διάνυσμα σε αυτήν, S_w η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας, με πήδημα ταχύτητας που συμβολίζεται με $[[\vec{u}]]$ και \vec{n}_w το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S_w . Θεωρούμε ότι η εξωτερική επιφάνεια του σώματος, καθώς και η επιφάνεια ασυνέχειας ταχύτητας είναι επαρκώς λείες ώστε σε κάθε σημείο τους να υπάρχει μοναδικό κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω. Μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου η S_w είναι φύλλο στροβιλότητας και αναπαριστά τον ομόρρου ανωστικού σώματος. Η επιφάνεια S_w έχει όριο $\partial S_w = C_s \cup C_\infty$, όπου C_s η καμπύλη τομής των S και S_w και C_∞ το έπ' άπειρο σύνορο της S_w . Η περίπτωση αυτή είναι συνεπής με το θεώρημα στροβιλότητας του Helmholtz, σύμφωνα με το οποίο οι γραμμές σταθερής στροβιλότητας πρέπει να είναι είτε κλειστές, είτε ανοικτές με άκρα στο άπειρο, ή σε στερεό σύνορο.



Σχήμα 1.3 Η γεωμετρία του σώματος, του ομόρρου και οι βασικοί συμβολισμοί

Θεωρώντας τη ροή ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα με φύλλο στροβιλότητας και υιοθετώντας τη διατύπωση πηγών διπόλων, το δυναμικό που επάγεται από το σώμα και τον κοντινό ομόρρου του σε τυχαίο σημείο $\vec{x}_o \in D$ θα υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned}\Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x}_o;t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x};t) \frac{dS(\bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\bar{x};t) \frac{\bar{v}(\bar{x}) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w;t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x})\end{aligned}\quad (1.26)$$

Το συνολικό πεδίο ταχύτητας σε σημείο $\bar{x}_o \in D$ θα αναπαρίσταται αθροίζοντας τις επιμέρους συνιστώσες του: την επί άπειρο ταχύτητα, την επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα (1.20) και τον κοντινό ομόρρου τους (1.6), καθώς και την επαγόμενη ταχύτητα από το χωρικά διανεμημένο πεδίο στροβιλότητας (1.8) στη μορφή:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\bar{x}_o;t) = & \bar{U}_\infty(\bar{x};t) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x};t) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x};t) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} \mu(\bar{x};t) \frac{d\vec{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w;t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w;t) \frac{d\vec{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx\end{aligned}\quad (1.27)$$

Είναι δυνατόν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης του πεδίου ταχύτητας:

Στη γενική περίπτωση η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής στο άπειρο \bar{U}_∞ είναι δυνατόν να μεταβάλλεται με το χρόνο, ή να παρουσιάζει διακυμάνσεις στο εσωτερικό του πεδίου D αρκεί να έχει πάντα μηδενική απόκλιση και στροβιλισμό.

Στη γενική περίπτωση η συνεισφορά της ταχύτητας $\bar{u}_o(\bar{x})$ μίας χωρικής κατανομής στροβιλότητας μπορεί να συμπεριλαμβάνει και την αποβαλλόμενη στροβιλότητα από σώματα που προηγούνται και που προσπίπτει στο εξεταζόμενο σώμα.

Θεωρώντας ότι το δυναμικό διαταραχής $\Phi(\bar{x})$ αναπαριστά τη συνολική συνεισφορά των σωμάτων και του κοντινού τους ομόρρου, τότε η (1.27) θα γράφεται στη μορφή:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{U}_\infty + \nabla \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x}) + \bar{u}_o(\bar{x}) \quad (1.28)$$

Ο Υπολογισμός των Πίεσεων

Το μέγεθος της πίεσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό από τεχνολογικής πλευράς στα διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με πεδία ροής. Στις διάφορες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των πεδίων ροής η πίεση υπολογίζεται άμεσα. Είτε προκύπτει σαν λύση του

προβλήματος, είτε η χρήση Eulerian χωρικού πλέγματος καθιστά τον υπολογισμό της πρωτογενή.

Στην παρούσα μέθοδο ο υπολογισμός των πιέσεων στην επιφάνεια ενός σώματος αποτελεί ένα πρόβλημα που είναι πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και απαιτεί την επίλυση μίας ακόμα εξίσωσης που περιέχει την πίεση ως άγνωστο.

Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$p(\bar{x};t) = p_\phi(\bar{x};t) + p_\omega(\bar{x};t) \quad (1.29)$$

Από την ολοκλήρωση της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli για αστρόβιλο πεδίο, που οδηγεί στον υπολογισμό του όρου $p_\phi(\bar{x};t)$. Ο υπολογισμός είναι εξαιρετικά απλός αλλά χρειάζεται προσοχή στον τρόπο υλοποίησής του. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης ορμής ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς, που κινείται με ταχύτητα $\bar{U}_B(\bar{x};t)$, αλλά με βάση τις απόλυτες ταχύτητες δίνει:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}^2(\bar{x};t) + \frac{p_\phi(\bar{x};t)}{\rho} - \bar{u}(\bar{x};t) \cdot \bar{U}_B(\bar{x};t) = c(t) \quad (1.30)$$

Ισοδύναμα, ως προς την σχετική ταχύτητα $\bar{u}_r(\bar{x};t)$:

$$\bar{u}_r(\bar{x};t) = \bar{u}(\bar{x};t) - \bar{U}_B(\bar{x};t) \quad (1.31)$$

μετά από την εισαγωγή της (1.31) στην (1.30) προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}_r^2(\bar{x};t) + \frac{p_\phi(\bar{x};t)}{\rho} - \frac{1}{2} \bar{U}_B^2(\bar{x};t) = c(t) \quad (1.32)$$

όπου :

$\Phi(\bar{x};t)$ το συνολικά επαγόμενο δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής στη θέση \bar{x} :

$$\Phi(\bar{x};t) = \Phi_\infty(\bar{x};t) + \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t) \quad (1.33)$$

$p_\phi(\bar{x};t)$ η στατική πίεση στη θέση \bar{x} , ρ η πυκνότητα. και $c(t)$ μία σταθερά που προκύπτει από την τιμή της έκφρασης (1.30) ή (1.32) στο άπειρο ($\bar{x} \rightarrow \infty$):

$$c(t) = \frac{\partial \Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{U}_\infty^2(t) + \frac{p_\infty(t)}{\rho} - \bar{U}_\infty(t) \cdot \bar{U}_B(t) \quad (1.34)$$

Ο μη μόνιμος όρος δυναμικού στην εξίσωση Bernoulli συμπεριλαμβάνει τις χρονικές μεταβολές που συμβαίνουν στο αστρόβιλο πεδίο (της επερχόμενης ροής και αυτού που αντιστοιχεί στα ιδιόμορφα στοιχεία: τις κατανομές πηγών και διπόλων στα σώματα):

$$\frac{\partial \Phi(\bar{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t)}{\partial t} \quad (1.35)$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον τρόπο υπολογισμού αυτών των μεγεθών, που εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο εφαρμόζεται η αντίστοιχη έκφραση για την εξίσωση Bernoulli (1.30) ή (1.32). Μετά την επίλυση του προβλήματος και τον υπολογισμό των παραμέτρων των διανομών των ιδιομορφιών γίνεται ο υπολογισμός των ταχυτήτων $\bar{u}(\bar{x}, t)$ στα σημεία του σώματος όπου έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη μη εισχώρησης. Σε αυτά τα σημεία επίσης υπολογίζεται και ο ρυθμός μεταβολής του επαγόμενου δυναμικού της συνολικής ροής. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\partial\Phi_\infty(\bar{x}; t)/\partial t$ μηδενίζεται, σε κάθε άλλη περίπτωση όμως θα πρέπει να υπολογίζεται σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος. Γνωρίζοντας τις εντάσεις των πηγών και των διπόλων είναι δυνατός ο υπολογισμός των τιμών του δυναμικού $\Phi_\sigma(\bar{x}; t)$, $\Phi_\mu(\bar{x}; t)$ σε κάθε χρονική στιγμή, οπότε ο όρος $\partial\Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x}; t)/\partial t$ υπολογίζεται εύκολα στην περίπτωση του διακριτοποιημένου προβλήματος από τη χρονική μεταβολή τους.

Έχοντας χρησιμοποιήσει την εξίσωση Bernoulli γίνεται ο υπολογισμός του όρου της πίεσης που αντιστοιχεί στο αστρόβιλο μέρος του πεδίου ροής. Εκκρεμεί ο υπολογισμός του όρου που αντιστοιχεί στο στροβιλό μέρος της ροής. Όπως προαναφέρθηκε η πίεση $p_\omega(\bar{x}; t)$ που επάγει μία διανομή στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{p_\omega(\bar{x}_o; t)}{\rho} &= \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{u}_\omega(\bar{x}; t) \times \bar{\omega}(\bar{x}; t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{(\bar{x}_o - \bar{x})^3} dx, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{\bar{u}(\bar{x}_{\Omega_j}; t) \times \bar{\Omega}(\bar{x}_{\Omega_j}; t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})}{(\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})^3}, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x}_{\Omega_j} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή στατικής πίεσης $c_p(\bar{x}; t)$ προκύπτει από την σχέση (1.37), αδιαστατοποιώντας με την κατάλληλη, σε κάθε περίπτωση, πίεση αναφοράς p_{ref} :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{p_{ref}} \quad (1.37)$$

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο για την επίλυση του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Το πεδίο ροής εκφράζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου ροής. Το αστρόβιλο πεδίο ροής περιγράφεται από την εξίσωση Laplace για το βαθμωτό δυναμικό Φ , η επίλυση της οποίας γίνεται μέσω της μικτής διατύπωσης πηγών-διπόλων. Με τον τρόπο αυτό στο αστρόβιλο πεδίο ροής εκτός από την επερχόμενη ροή μπορεί να συμπεριληφθεί και η διαταραχή που εισάγει η παρουσία ανωστικών σωμάτων με πάχος. Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η αναπαράσταση του στροβιλού μέρους της ροής γίνεται με τη χρήση μεθοδολογίας στοιχείων στροβιλότητας. Η χρονική και χωρική εξέλιξη της στροβιλότητας γίνεται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Helmholtz. Το στροβιλό μέρος της ροής μπορεί να περιλαμβάνει τόσο τον ομόρρο των ανωστικών σωμάτων, όσο και την στροβιλότητα της επερχόμενης ροής.

1.2Η Αριθμητική Διακριτοποίηση του Προβλήματος

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων που περιγράφουν το θεωρητικό πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Διαρθρώνεται το σύστημα των διακριτών εξισώσεων του προβλήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη μη εισχώρησης στο στερεό σύνορο και επιπλέον την εξίσωση των πιέσεων στην ακμή εκφυγής ενός ανωστικού σώματος. Τα σώματα αναπαρίστανται γεωμετρικά με πλέγμα αποτελούμενο από τετράπλευρα επίπεδα στοιχεία, στα οποία κατανέμονται διανομές πηγών και διπόλων με τμηματικά σταθερή και διγραμμική ένταση αντίστοιχα. Προφανώς στην περίπτωση των μη ανωστικών σωμάτων η διανομή διπόλων είναι μηδενική. Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας αναπαρίσταται κοντά στο σώμα με πλέγμα δινοσωλήνων (vortex lattice) σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση, ενώ μακριά από αυτό με στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση. Η ένταση της αρχικά αποβαλλόμενης στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Η μεταφορά και η παραμόρφωσή του γίνεται επιλύοντας τις υλικές εξισώσεις του Helmholtz.

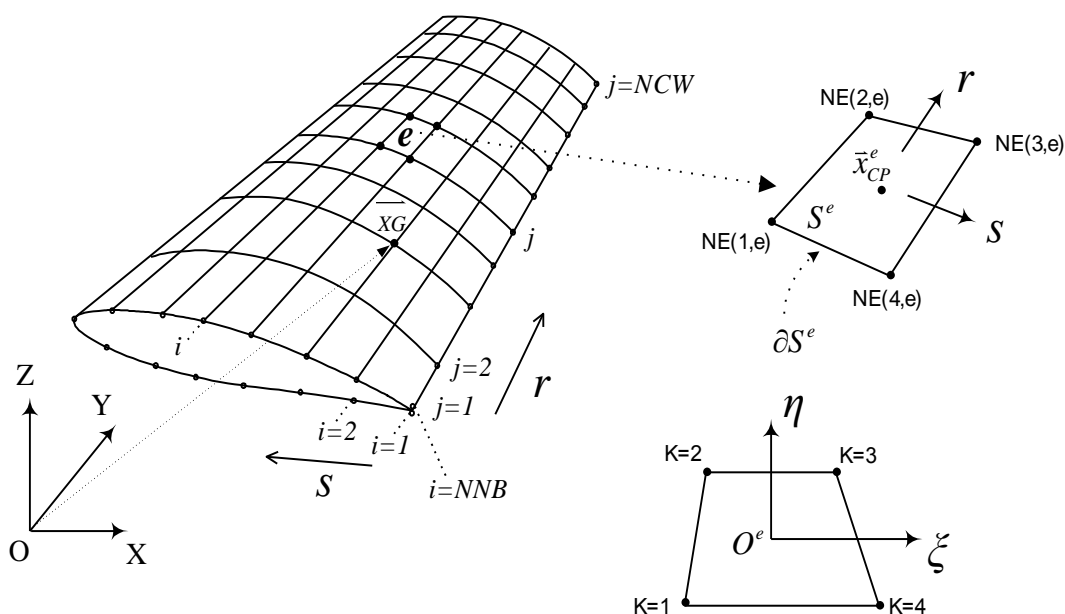
Η επιτυχημένη εφαρμογή του διακριτοποιημένου σχήματος εξισώσεων σε ένα πρόβλημα καθορίζεται από την κατάλληλη επιλογή τόσο της χωρικής διακριτοποίησης της επιφανειακής γεωμετρίας των σωμάτων, όσο και του χρονικού βήματος εξέλιξης του προβλήματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ικανοποιητική αναπαραγωγή της λεπτομέρειας των διαφόρων φυσικών μηχανισμών που αναμένεται να εμφανιστούν.

Η Διακριτοποίηση της Γεωμετρίας ενός Σώματος με Πάχος

Η γεωμετρία της επιφάνειας ενός σώματος αποτελεί δεδομένο του εξεταζόμενου προβλήματος. Προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων (\overline{XG}) στο γενικό-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που ορίζεται είτε άμεσα, είτε έμμεσα από τις κατανομές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος (Σχήμα 2.1). Ένα τέτοιο επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μία διπαραμετρική επιφάνεια $S(s_i, r_j)$:

$$S(s_i, r_j), \quad i=1, NNB, \quad j=1, NCW$$

όπου NNB , NCW ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την s και r διάστασή του αντίστοιχα. Οι γραμμές s_i είναι συνήθως προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, ιδιότητα που όπως θα φανεί στη συνέχεια διευκολύνει αριθμητικές διαδικασίες όπως την αποβολή στροβιλότητας. Στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου ανωστικού σώματος η παράμετρος μήκους s αντιστοιχεί στο μήκος τόξου, που διατρέχει την επιφάνεια του σώματος σε δεδομένη ακτινική θέση. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης (*pressure side*), περνάει από το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης (*suction side*). Η παράμετρος μήκους r αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.



Σχήμα 2.1. Η διακριτοποίηση της γεωμετρίας ενός σώματος με πάχος

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από NNT (Total Nodes Number) κόμβους, που σχηματίζουν NTE (Total Number of Elements) τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία:

$$NNT = NNB \cdot NCW \quad (2.1)$$

$$NTE = (NNB - 1) \cdot (NCW - 1) \quad (2.2)$$

Η γενική αρίθμηση των κόμβων NOD (NODE number) και των στοιχείων NEL (ELEMENT Number) του πλέγματος προκύπτει από μία ακολουθία της μορφής:

$$NOD(i, j) = (j - 1) \cdot NNB + i, \quad i = 1, NNB, \quad j = 1, NCW \quad (2.3)$$

$$NEL(i, j) = (j - 1) \cdot (NNB - 1) + i, \quad i = 1, NNB - 1, \quad j = 1, NCW - 1 \quad (2.4)$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στην γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των σωμάτων με επίπεδα στοιχεία οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου υπολογιστή. Αυτό επιτυγχάνεται με την προβολή των κόμβων του τετραπλεύρου στοιχείου σε ένα μέσο επίπεδο. Σε σώματα που τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους εμφανίζουν έντονες κλίσεις αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των κόμβων στις περιοχές αυτές. Από αυτή την διαδικασία προκύπτουν κατά κανόνα τραπεζοειδή στοιχεία που παρουσιάζουν ικανοποιητική παραλληλία πλευρών κατά την ακτινική τους κατεύθυνση. Το γεωμετρικό σφάλμα που προκύπτει από την θεώρηση επίπεδων στοιχείων ελαχιστοποιείται με την επιλογή πυκνότερου πλέγματος σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία $\overline{XG}(k, n)$, $k = 1:3$, $n = 1:NNT$, όπου το k αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και το n σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση (2.3). Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου e , ($e = 1, NTE$) καθορίζεται από τις συντεταγμένες \overline{XG} των τεσσάρων κορυφών του, που αριθμούνται δεξιόστροφα (Σχήμα 2.1). Σύμφωνα με αυτές μπορούμε να ορίσουμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου $O^e(\xi, \eta, \zeta)$, με μοναδιαία βάση $\bar{e}_\xi^e, \bar{e}_\eta^e, \bar{e}_\zeta^e$ ως προς το γενικό (αδρανειακό) σύστημα. Οι κορυφές $K = 1, 4$ στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος που έχουν αρίθμηση $NE(K, e)$, ($K = 1, 4$, $e = 1, NTE$). Ένας κόμβος K της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου θα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο κόμβο NE έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} K = 1 & \rightarrow NE(1, e) = (j - 1) \cdot (NNB - 1) + i \\ K = 2 & \rightarrow NE(2, e) = j \cdot (NNB - 1) + i \\ K = 3 & \rightarrow NE(3, e) = j \cdot (NNB - 1) + i + 1 \\ K = 4 & \rightarrow NE(4, e) = (j - 1) \cdot (NNB - 1) + i + 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Με δεδομένη τη γεωμετρία των κόμβων του πλέγματος γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού S^e , του μήκους της περιφέρειας ∂S^e του στοιχείου e , τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών, το πλάτος και τις διαγώνιους του στοιχείου καθώς και άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στους υπολογισμούς. Για κάθε στοιχείο του επιφανειακού πλέγματος ορίζεται το "σημείο ελέγχου" \bar{x}_{CP}^e που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης. Ο υπολογισμός του γίνεται έτσι ώστε να μηδενίζεται η

εφαπτομενική αυτεπαγόμενη ταχύτητα της διανομής πηγών του στοιχείου για αύξηση της ακρίβειας των υπολογισμών μας.

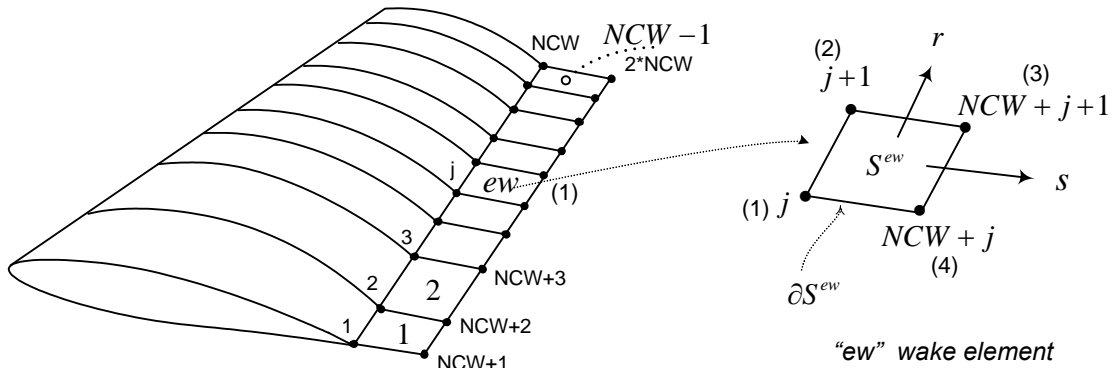
Η Αναπαράσταση του Φύλλου Στροβιλότητας

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία εκτενής ανάλυση στον τρόπο παραγωγής και εξέλιξης του φύλλου στροβιλότητας. Η παραγωγή και η εξέλιξη του φύλλου στροβιλότητας γίνεται σταδιακά στο τέλος κάθε χρονικού βήματος επίλυσης, όταν έχουν υπολογιστεί οι άγνωστες διανομές πηγών και διπόλων στο αστρόβιλο πεδίο ροής.

Εξετάζοντας τη γενική περίπτωση της μη μόνιμης ροής ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος είναι δυνατόν να αποτελείται από δύο τμήματα :

α) τον “κοντινό” ομόρρου : ,Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί το τμήμα του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από το σώμα και αναπαρίσταται μέσω της δυναμικής θεώρησης με τη δημιουργία πλέγματος δινοσωλήνων. Ο μακρινός ομόρρους αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση με στοιχεία στροβιλότητας. Αρχικά παράγεται ένα τμήμα επιφανειακής στροβιλότητας (κοντινός ομόρρους), που εκφεύγει από το σώμα με ένταση που προκύπτει από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Αυτή η περιοχή απαρτίζεται από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι δημιουργείται ένα δινοπλέγμα (vortex lattice) όπου διανέμεται επιφανειακή και επικαμπύλια στροβιλότητα.

Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαρίσταται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών $r = ct$ του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για τον ομόρρου και για το σώμα, καθώς αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου αποτελείται από τους κόμβους του σώματος που βρίσκονται πάνω στην ακμή εκφυγής καθώς και τους κόμβους που προκύπτουν από τη μεταφορά αυτών σύμφωνα με την μέση ταχύτητα που υπολογίζεται στα σημεία ελέγχου των στοιχείων της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία $NCW - 1$ επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από $2 \cdot NCW$. Η θέση του τετράπλευρου στοιχείου “ ew ” του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από τις συντεταγμένες $\overline{XWAKE}(k, nw)$, $k = 1, 3$, $nw = 1, 2 \cdot NCW$ των τεσσάρων κορυφών του nw , που αριθμούνται δεξιόστροφα. Με δεδομένα αυτά τα σημεία κάνουμε αντίστοιχους υπολογισμούς για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων τόσο στο γενικό όσο και στο τοπικό τους σύστημα. Στην περίπτωση των στοιχείων του κοντινού ομόρρου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός του σημείου ελέγχου καθώς δεν επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης σε αυτά.



Σχήμα 2.2. Η διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου με επιφανειακά στοιχεία (wake elements)

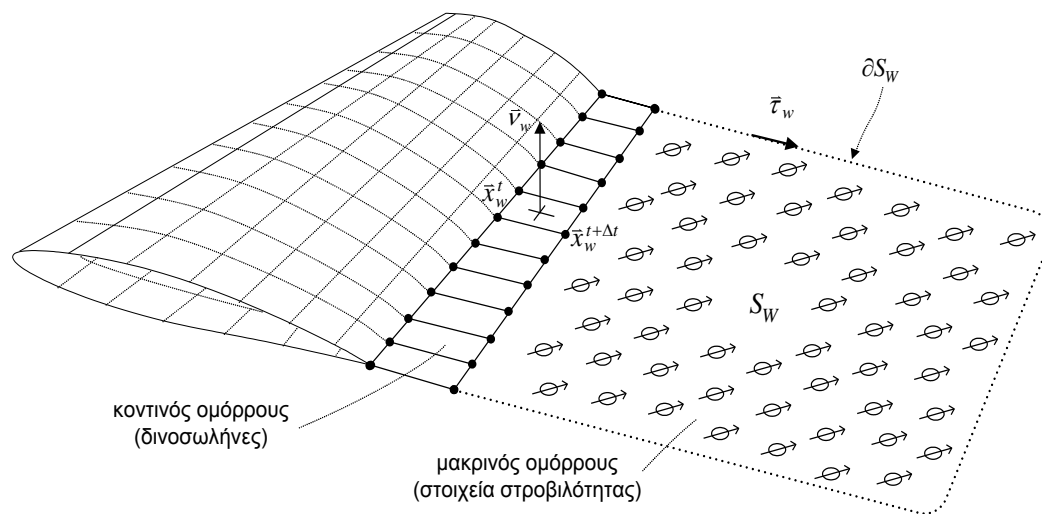
Για κάθε στοιχείο “ew” του κοντινού ομόρρου κατασκευάζεται ο πίνακας *NEWAKE* αντιστοίχισης της τοπικής με τη γενική αρίθμηση ενός κόμβου όπως ακριβώς συμβαίνει για τα στοιχεία της επιφάνειας του σώματος.

$$\begin{aligned}
 K = 1 & \rightarrow NEWAKE(1, ew) = ew \\
 K = 2 & \rightarrow NEWAKE(2, ew) = ew + 1 \\
 K = 3 & \rightarrow NEWAKE(3, ew) = NEWAKE(2, ew) + NCW \\
 K = 4 & \rightarrow NEWAKE(4, ew) = NEWAKE(1, ew) + NCW
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Τέλος, όπως θα φανεί στο στάδιο διάρθρωσης των εξισώσεων του προβλήματος, είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός πίνακα *ICIRC(e)*, $e=1, NTE$, που θα αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο “e” του πλέγματος την τιμή j της ακτινικής λωρίδας στην οποία βρίσκεται, σύμφωνα με τον ορισμό. Θεωρώντας μάλιστα ότι η αποβολή στροβιλότητας γίνεται μόνο από την ακμή εκφυγής και όχι από παράπλευρες ακμές (όπως λχ. το ακροπτερύγιο), τότε σε κάθε ακτινική λωρίδα αντιστοιχεί ένα στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας *ICIRC(e)* θα γράφεται:

$$ICIRC(e(i, j)) = ew(j) = j, \quad j = 1, NCW - 1
 \tag{2.7}$$

β) τον “μακρινό” ομόρρου : Ο μακρινός ομόρρου αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση με στοιχεία στροβιλότητας. Αφού δημιουργηθεί ο κοντινός ομόρρου, αυτή η διανομή στροβιλότητας μετατρέπεται σε χωρική, καθώς συγκεντρώνεται σημειακά σε στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles). Έτσι σχηματίζεται ο μακρινός ομόρρου σε στροβιλή μορφή. Στην γενική έκφραση ενός πεδίου στροβιλότητας μπορούν να εισάγονται και φύλλα στροβιλότητας άλλων σωμάτων ή και διαταραχές της επί άπειρον ροής (λχ. εισερχόμενη τυρβώδης ροή) με μορφή χωρικής στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή οι θέσεις και οι εντάσεις των στοιχείων στροβιλότητας θεωρούνται γνωστές στο χρονικό βήμα που εισάγονται στο πρόβλημα.



Σχήμα 2.3. Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας

Οι Βαθμοί Ελευθερίας των Διανομών των Ιδιομορφιών στα Σώματα

Το θεώρημα του Green καθιστά δυνατή την αναπαράσταση των σωμάτων κατανέμοντας στην επιφάνειά τους διανομές πηγών και διπόλων. Σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζεται η ένταση των πηγών και των διπόλων σε κάθε στοιχείο των σωμάτων και συνέπως μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ένταση πηγών και διπόλων αποτελεί ένα βαθμό ελευθερίας του προβλήματος ο οποίος επηρεάζει το πεδίο ροής. Για να έχει λύση το πρόβλημα αφού τα σημεία του σώματος είναι άπειρα χρειαζόμαστε ένα πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας καθώς και τις αντίστοιχες συνθήκες για να επιλυθεί το πρόβλημα. Αυτές οι συνθήκες καθορίζουν τον τύπο των ιδιομορφιών που θα χρησιμοποιηθούν. Οι ιδιομορφίες είναι οι πηγές, τα δίπολα και τα «εικονικά» δίπολα.

α) **Πηγαία σώματα:** Σε αυτά τα σώματα χρησιμοποιείται μια κατανομή πηγών για να καθορίσουμε την επιφάνεια ενός μη ανωστικού τρισδιάστατου σώματος. Σε αυτήν την περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι σταθερές έντασης κατανομή πηγών σε κάθε στοιχείο του πλέγματος πάνω στην επιφάνεια του σώματος και συνεπώς ο αριθμός αυτών των βαθμών ελευθερίας είναι ίδιος με τον αριθμό των στοιχείων του πλέγματος. Η συνθήκη που χρησιμοποιείται σε αυτά τα σώματα είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης σε κάθε στοιχείο του πλέγματος στο σημείο που τοποθετείται η πηγή.

β) **Λεπτά ανωστικά διπολικά σώματα:** Ένα διπολικό σώμα μπορεί να είναι είτε ανωστικό είτε μή-ανωστικό. Αυτό εξαρτάται από το αν έχει ομόρρου ή όχι (ο ομόρρους

δημιουργεί μια επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού και οδηγεί σε δημιουργία κυκλοφορίας και σύνεπως άνωσης). Σε αυτή την περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας αποτελούνται από την κατανομή διπόλων σε κάθε στοιχείο του πλέγματος που περιβάλλει την επιφάνεια του σώματος. Συνεπώς ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι όσα είναι τα στοιχεία του πλέγματος του σώματος και χρησιμοποιείται αντίστοιχος αριθμός αριθμός συνθηκών μη-εισχώρησης για να βρούμε τις τιμές των διπόλων.

γ) «Εικονικά» διπολικά σώματα:

1) Αυτά τα σώματα δεν μπορούν να θεωρηθούν σαν ξεχωριστά σώματα γιατί πάντα συνδέονται με ένα μη ανωστικό πηγαίο σώμα. Στην ούσια αυτά τα σώματα δημιουργούν μία γραμμική κατανομή διπόλων σε ένα ήδη υπάρχον πηγαίο σώμα και αποβάλλουν στροβιλότητα με σκοπό να μετατρέψουν το μή ανωστικό πηγαίο σώμα σε ανωστικό. Λόγω αυτής της συσχέτισης δεν χρησιμοποιούμε τη συνθήκη μη εισχώρησης για να υπολογιστεί η ένταση της κατανομής αφού αυτή η συνθήκη χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο πηγαίο σώμα. Η συνθήκη που χρησιμοποιούμε σε αυτή την περίπτωση είναι η συνθήκη ΚΥΤΤΑ σύμφωνα με την οποία απαιτείται η πίεση στο πάνω μέρος της ακμής εκφυγής να είναι ίδια με την πίεση στο κάτω μέρος αυτής. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται εξισώνοντας τις πιέσεις στα σημεία ελέγχου των στοιχείων του πλέγματος (εκεί που ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης στο πηγαίο σώμα) που δημιουργούν την ακμή εκφυγής. Με αυτό τον τρόπο εισάγουμε NCW-1 συνθήκες (αφού αυτό το σώμα και το συνδεδεμένο πηγαίο θεωρούνται ως ένα) και συνεπώς θέλουμε NCW -1 βαθμούς ελευθερίας για να έχει λύση το σύστημα. Για αυτό το λόγο θεωρούμε ότι η ένταση της κατανομής των διπόλων στο «εικονικό» σώμα σε κάθε «φέτα» του σώματος και σε κάθε στοιχείο της φέτας είναι ανάλογη με το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο. Συνεπώς $\mu = B * slength$ (όπου $slength$ είναι το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο) με τον συντελεστή αναλογίας B να αλλάζει από φέτα σε φέτα.

2) Οπώς και στην περίπτωση της πτέρυγας, έτσι και στο πλευρικό τοίχωμα του ακροπερυγίου χρησιμοποιούμε μια κατανομή διπόλων κατά μήκος της. Το σώμα αυτό δεν είναι ξεχωριστό αλλά συσχετίζεται με το αντίστοιχο πηγαίο σώμα. Τοποθετείται μια γραμμική κατανομή διπόλων σε ένα ήδη υπάρχον πηγαίο σώμα το οποίο τελικά συμμετέχει στην αποβολή στροβιλότητας. Χαρακτηριστικό είναι ότι αυτό το σώμα δεν είναι ανωστικό (δηλαδή δεν αποβάλλει στροβιλότητα), αλλά στην ούσια χρησιμοποιείται για την μεταφορά της στροβιλότητας από το κάτω μέρος του περυγίου στο πάνω από όπου και εκφεύγει ο συνολικός στρόβιλος. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι δεν εισάγουμε καινούργιους βαθμούς ελευθερίας στο πρόβλημα, αφού η κατανομή διπόλων που χρησιμοποιούμε είναι αυτή της τελευταίας «φέτας» του περυγίου. Ετσι ικανοποιούμε έμμεσα τη συνθήκη ΚΥΤΤΑ πράγμα το οποίο φαίνεται παρακάτω στα αντιστοιχά διαγράμματα του C_p στην τελευταία φέτα του περυγίου.

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω η βασική διαφορά του διπολικού σώματος πλευρικού τοιχώματος από το διπολικό σώμα του περυγίου είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση του περυγίου η κατανομή του μ είναι άγνωστη και αποτελεί έναν από τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος (το βρίσκουμε από τη συνθήκη ΚΥΤΤΑ), ενώ στην

περίπτωση της τάπας η κατανομή του μ πάνω στο σώμα είναι γνωστή ενώ περιμένουμε απο τα αποτελέσματα να ικανοποιούν έμμεσα τη συνθήκη αυτή.

Συνοψίζοντας στην μέθοδο που χρησιμοποιούμε κάνουμε τις ακόλουθες επιλογές:

- (α) Θεωρούμε επίπεδα στοιχεία.
- (β) Τοποθετούμε τις διανομές των ιδιομορφιών στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων.

(γ) Επιλέγουμε επιφανειακές κατανομές για τις διανομές των ιδιομορφιών πηγών και διπόλων στα σώματα και τον κοντινό ομόρρου και συγκεντρωμένες κατανομές σε σημεία για τη διανομή στροβιλότητας στον ομόρρου.

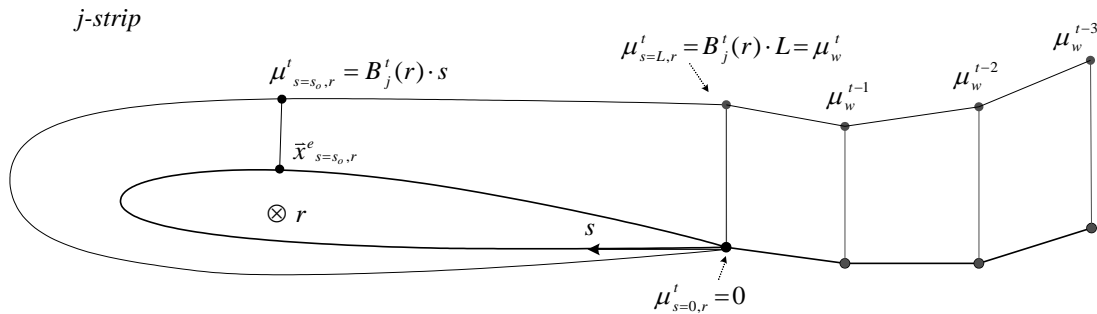
(δ) Θεωρούμε τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος. Επίσης θεωρούμε κατανομή διπόλων τμηματικά σταθερή κατά την r -κατεύθυνση του πλέγματος και γραμμική κατά την s -κατεύθυνση. Σύμφωνα με τα παραπάνω στο στοιχείο e τοποθετείται επιφανειακή κατανομή πηγών και διπόλων και σε τυχαίο σημείο $\bar{x}^e(s, r) \in S^e$ υπολογίζονται οι εντάσεις σ^e και μ^e αντίστοιχα:

$$\sigma^e(\bar{x}^e) = ct, \quad \bar{x}^e \in S^e \tag{2.8}$$

και:

$$\begin{aligned} \mu^e(\bar{x}^e(s, r)) &= B(r) \cdot s, \quad \bar{x}^e \in S^e \\ B(r) &= B_{j=ICIRC(e)} = ct, \quad r_j \leq r \leq r_{j+1}, \quad j=1, ICIRC(NTE) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Η κλίση της διανομής διπόλων $B(r)$ μεταβάλλεται κατά την ακτινική κατεύθυνση, ενώ έχει σταθερή τιμή $B_{ICIRC(e)} = ct$, κατά την s -κατεύθυνση, για όλα τα σημεία ελέγχου \bar{x}_{CP}^e κατά το εύρος μίας ακτινικής “λωρίδας” με μέση ακτίνα r (Σχήμα 2.4).

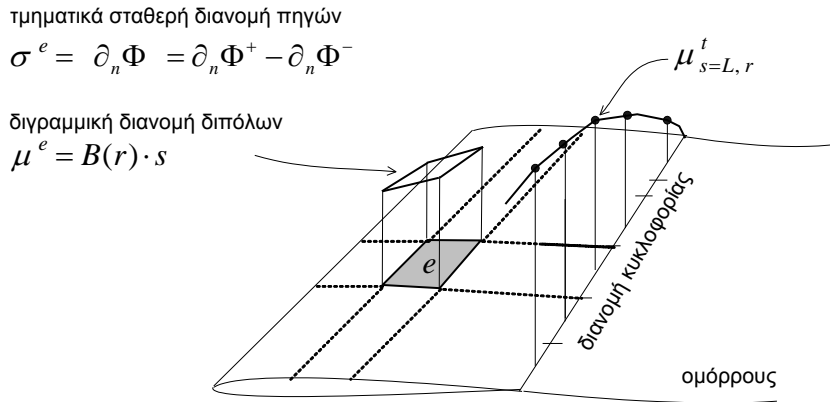


Σχήμα 2.4. Η γραμμική μεταβολή της διανομής διπόλων $\mu(s)$ κατά τη διεύθυνση της χορδής στην ακτινική θέση r (j -strip).

Με τον τρόπο αυτό ο καθορισμός της διανομής διπόλων στο γεωμετρικό πλέγμα ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των αγνώστων σταθερών B_j . Επιλέγοντας τμηματικά σταθερή κατανομή για τη διανομή διπόλων στην ακτινική κατεύθυνση προσεγγίζεται αντίστοιχα με τμηματικά σταθερή κατανομή και η κυκλοφορία του σώματος. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη φόρτισης του σώματος προσεγγίζεται τόσο ακριβέστερα όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας κατά το εύρος του. Η διατήρησης της κυκλοφορίας στο χρόνο, σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin οδηγεί στον καθορισμό των εντάσεων μ_w^t των διπόλων στον ομόρροο:

$$\mu_w^t = B_j^t \cdot L, \quad \mu_w^{t-1} = B_j^{t-1} \cdot L, \quad \dots \quad (2.10)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, στο Σχήμα 2.5 παρουσιάζονται οι αριθμητικές επιλογές για την αναπαράσταση ενός ανωστικού σώματος. Τοποθετούνται επιφανειακές διανομές πηγών (τμηματικά σταθερές, piecewise constant source distribution) και διπόλων (διγραμμικά μεταβαλλόμενες, bi-linearly varying dipole distribution) και η κυκλοφορία προκύπτει στην ακμή εκφυγής του σώματος, ως συνέπεια της εφαρμογής του θεωρήματος του Kelvin.



Σχήμα 2.5. Η διανομή ιδιομορφιών στο σώμα και η κατανομή κυκλοφορίας

Ορίζοντας με τον τρόπο αυτό τις κατανομές των ιδιομορφιών εισάγονται *NDFT* (Total Number of Degrees of Freedom) βαθμοί ελευθερίας:

$$\begin{aligned} NDFT &= NTE_{\sigma^e} + (NCW - 1)_{\mu^e} \\ &= NTE_{\sigma^e} + (ICIRC(NTE))_{\mu^e} \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου NTE_{σ^e} είναι ο αριθμός των αγνώστων εντάσεων $\sigma^e(\bar{x}) = ct$, $\bar{x} \in S^e$ των τμηματικά σταθερών επιφανειακών πηγών στα NTE στοιχεία του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος και $(ICIRC(NTE))_{\mu^e} = (NCW - 1)_{\mu^e}$ ο αριθμός των τιμών κλίσεων B_j της κατανομής διπόλων, που είναι ίσος με τον αριθμό των ακτινικών θέσεων που ορίζεται στην διακριτοποίηση του σώματος. Αυτό το σύστημα των *NDFT* αγνώστων είναι πλήρως ορισμένο καθώς μπορούν να οριστούν NTE το πλήθος εξισώσεις που να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μη

εισχώρησης και $NCW-1$ εξισώσεις που να ικανοποιούν τη δυναμική συνθήκη Kutta-Joukowski. Σε επόμενη παράγραφο θα δούμε πως σχηματίζεται αυτό το αλγεβρικό σύστημα.

Η Κινηματική Συνθήκη Μη Εισχώρησης

Η ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης σε σημείο \bar{x} της επιφάνειας ενός σώματος επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας σε αυτό το σημείο:

$$(\bar{u}(\bar{x};t) - \bar{U}_B(\bar{x};t)) \cdot \bar{v}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in S \quad (2.12)$$

όπου:

$\bar{v}(\bar{x})$ το κάθετο διάνυσμα στη θέση \bar{x} ,

$\bar{U}_B(\bar{x})$ η ταχύτητα του σώματος στο αδρανειακό σύστημα και

$\bar{u}(\bar{x})$ η ταχύτητα του πεδίου ροής στη θέση \bar{x} .

Η ταχύτητα του πεδίου ροής υπολογίζεται ακολούθως:

$$\bar{u}(\bar{x};t) = \bar{U}_\infty(t) + \bar{u}_{SD}(\bar{x};t) + \bar{u}_{NW}(\bar{x};t) + \bar{u}_\omega(\bar{x};t), \quad \bar{x} \in D \quad (2.13)$$

όπου:

$\bar{U}_\infty(t)$ η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο,

$\bar{u}_{SD}(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα,

$\bar{u}_{NW}(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της επιφανειακής κατανομής στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρο των σωμάτων και

$\bar{u}_\omega(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας.

Εισάγοντας στην (2.13) τις διακριτές εκφράσεις όλων των συνιστωσών της ταχύτητας και θέτοντας:

$$\bar{U}_a(\bar{x};t) = \bar{U}_\infty(t) + \bar{u}_\omega(\bar{x};t) \quad (2.14)$$

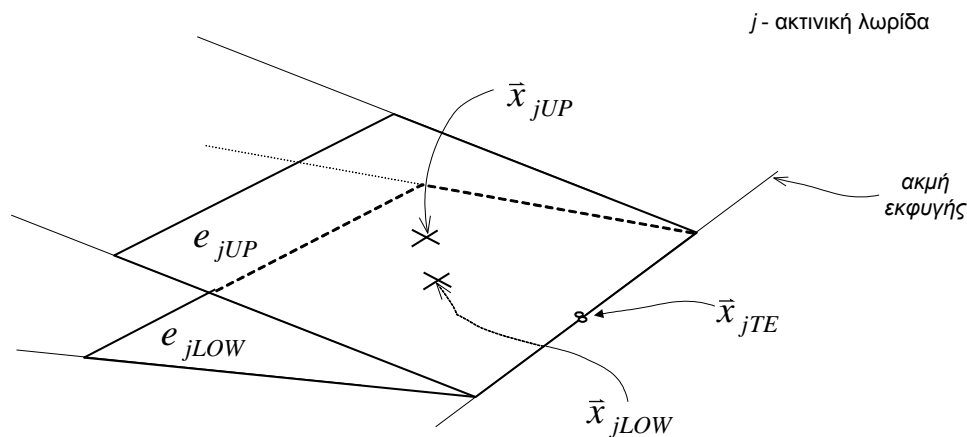
καταλήγουμε στην διακριτή μορφή της συνθήκης μη εισχώρησης που εφαρμόζεται στο σημείο ελέγχου $\bar{x}_{CP}^{e_i}$ κάθε στοιχείου e_i , ($i=1, NTE$) του σώματος:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{e=1}^{NTE} \left\{ \sigma^e \bar{u}_\sigma^e(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 + B_{ICIRC(e)} \bar{u}_\mu^e(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right\} \right] \cdot \bar{v}^{e_i} \\ & + \left[\sum_{ew=1}^{NTEW} B_{ew} \left[\bar{u}_\mu^{ewA}(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right] \right] \cdot \bar{v}^{e_i} \quad (2.15) \\ & = - \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{CP}^{e_i};t) - \bar{U}_B(\bar{x}_{CP}^{e_i};t) \right] \cdot \bar{v}^{e_i} - \left[\sum_{ew=1}^{NTEW} B_{ew}^{old} \left[\bar{u}_\mu^{ewB}(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right] \right] \cdot \bar{v}^{e_i} \end{aligned}$$

όπου \bar{v}^{e_i} το κάθετο διάνυσμα στο στοιχείο e_i . Η παραπάνω εξίσωση είναι χωρισμένη σε δύο μέρη όπου στο πρώτο μέρος συμπεριλαμβάνονται όλοι οι άγνωστοι. Ο υπερδείκτης “old” αναφέρεται στην ένταση στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου που είναι γνωστή από το προηγούμενο χρονικό βήμα.

Η Δυναμική Συνθήκη Kutta-Joukowski

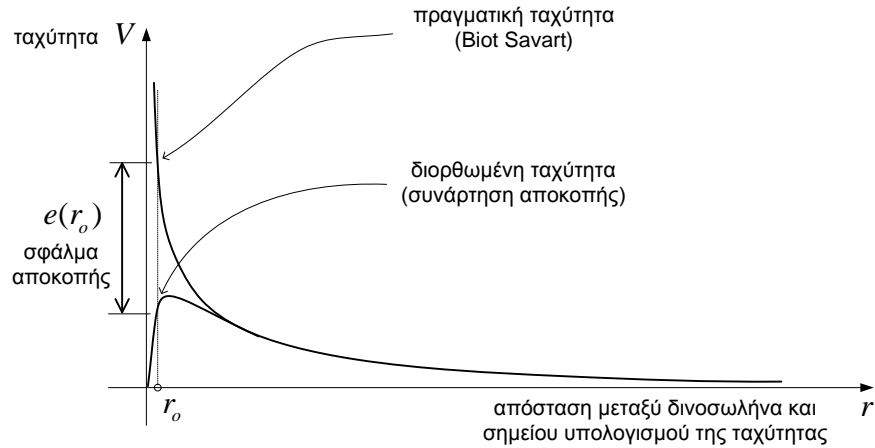
Η εφαρμογή της δυναμικής συνθήκης ολοκληρώνει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος. Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει την εξίσωση των πιέσεων, ή ισοδύναμα τον μηδενισμό του πηδήματος της πίεσης στην ακμή εκφυγής και συνεπώς είναι μία μη γραμμική συνθήκη για την ταχύτητα. Ικανοποιείται σε όλες τις ακτινικές λωρίδες όπου έχουμε ορίσει τους άγνωστους συντελεστές $B_{j=ICIRC(e)}$ της διανομής διπόλων, δηλαδή $ICIRC(NTE) = NCW - 1$ φορές. Όμως δεν εφαρμόζεται στην ακμή εκφυγής \bar{x}_{jTE} , καθώς η ταχύτητα απειρίζεται σε σημεία πάνω σε δινοσωλήνα, αλλά στα σημεία ελέγχου \bar{x}_{jUP} και \bar{x}_{jLOW} των στοιχείων που ορίζουν την ακμή εκφυγής (Σχήμα 2.6):



Σχήμα 2.6. Η αριθμητική εφαρμογή της συνθήκης Kutta-Joukowski

Αυτή η επιλογή της θέσεως από τη μία εξασφαλίζει ότι ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με ακρίβεια (καθώς στα σημεία ελέγχου εφαρμόζουμε και τη συνθήκη μη εισχώρησης), από την άλλη όμως επιβάλλει την πύκνωση των σημείων στην ακμή εκφυγής, ώστε να προσεγγίζονται καλύτερα οι συνθήκες του πεδίου ροής στην περιοχή αυτή.

Η πύκνωση όμως του γεωμετρικού πλέγματος έχει ένα βασικό περιορισμό, που επιβάλλει την ύπαρξη “αριθμητικά σημαντικής απόστασης” μεταξύ ενός σημείου ελέγχου και των πλευρών που το περιβάλλουν, ώστε να αποφεύγονται ιδιόμορφοι υπολογισμοί ταχυτήτων κοντά σε δινοσωλήνα. Έχει διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση ενός πλέγματος με δυσανάλογα στοιχεία η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να καθυστερεί σημαντικά, αλλά και να οδηγείται σε απόκλιση. Ένας κανόνας που μπορεί να εφαρμοστεί αποβλέποντας στον περιορισμό αυτού του σφάλματος είναι η προσπάθεια αποφυγής δημιουργίας στοιχείων που θα έχουν πλευρές με δυσανάλογο λόγο μήκους, ώστε δύο απέναντι δινοσωλήνες να είναι τοποθετημένοι πολύ κοντά μεταξύ τους. Η πύκνωση προς την ακμή εκφυγής σε συνδυασμό με αυτόν τον περιορισμό επιβάλλει έμμεσα και την πύκνωση κατά την ακτινική κατεύθυνση. Η πύκνωση αυτή οδηγεί σε αύξηση των βαθμών ελευθερίας και των αποβαλλόμενων στοιχείων στροβιλότητας, επιβαρύνοντας σημαντικά τις υπολογιστικές ανάγκες της μεθόδου.



Σχήμα 2.7. Η επαγόμενη ταχύτητα δινωσωλήνα συναρτήσει της απόστασης από αυτόν

Η ταχύτητα $\vec{u}(\vec{x})$ σε τυχαίο σημείο \vec{x} υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \nabla\Phi_{\infty} + \vec{u}_{\omega} + \nabla\Phi_{\sigma,\mu} \\ &= \vec{U}_a + \nabla\Phi_{\sigma,\mu}\end{aligned}\quad (2.16)$$

όπου η \vec{U}_a συμπεριλαμβάνει τις συνεισφορές του μακρινού ομόρρου \vec{u}_{ω} και της αδιατάρακτης ροής $\vec{U}_{\infty} = \nabla\Phi_{\infty}$ (που θεωρείται αστρόβιλη) και σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει αποτελεί δεδομένο της εξίσωσης, ενώ η $\nabla\Phi_{\sigma,\mu}$ αναπαριστά τη συνεισφορά του σώματος και του κοντινού του ομόρρου και για λόγους απλοποίησης της γραφής των εξισώσεων στη συνέχεια του κειμένου θα συμβολίζεται ως $\nabla\Phi$ ($\nabla\Phi \equiv \nabla\Phi_{\sigma,\mu}$).

Σύμφωνα με τα όσα έχουν προαναφερθεί για τον υπολογισμό των πιέσεων στο προηγούμενο κεφάλαιο, από την εφαρμογή της συνθήκης Kutta-Joukowski στα σημεία ελέγχου της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής σε μία ακτινική θέση προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{p_{UP}(\vec{x}_{UP};t)}{\rho} &= \frac{p_{LOW}(\vec{x}_{LOW};t)}{\rho} \Rightarrow \\ \frac{\partial\Phi_{UP}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{u}^2(\vec{x}_{UP};t) - \vec{u}(\vec{x}_{UP};t) \cdot \vec{U}_b(\vec{x}_{UP};t) &= \\ \frac{\partial\Phi_{LOW}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{u}^2(\vec{x}_{LOW};t) - \vec{u}(\vec{x}_{LOW};t) \cdot \vec{U}_b(\vec{x}_{LOW};t)\end{aligned}\quad (2.17)$$

Ορίζοντας για το μέγεθος a το «πήδημα» $[[\alpha]]$ ως τη διαφορά μεταξύ των τιμών που λαμβάνει στην επάνω και την κάτω πλευρά στην j -ακτινική λωρίδα έτσι ώστε:

$$[[\alpha]] = \alpha(\vec{x}_{jUP}, t) - \alpha(\vec{x}_{jLO}, t)\quad (2.18)$$

τότε η εξίσωση (2.17) γράφεται απλοποιημένη:

$$\frac{p}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + \frac{1}{2} \cdot [\vec{u}]^2 - [\vec{u} \cdot \vec{U}_b] = 0 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + [\vec{u}]^2 - [\vec{u} \cdot \vec{U}_b] = 0$$

εισάγοντας την (2.16) στην παραπάνω μετά από πράξεις καταλήγουμε στην:

$$2 \cdot \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + [\nabla\Phi \cdot (\nabla\Phi + 2 \cdot (\vec{U}_a - \vec{U}_b))] = [\vec{U}_a \cdot (2 \cdot \vec{U}_b - \vec{U}_a)] \quad (2.20)$$

Ο τετραγωνικός όρος της επαγόμενης ταχύτητας των σωμάτων $\nabla\Phi$ καθιστά τη συνθήκη μη γραμμική. Για την διατύπωση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος, γραμμικοποιούμε τη συνθήκη Kutta, επιλύοντας με επαναληπτική διαδικασία το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος. Σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα θεωρούμε ότι το τετράγωνο της άγνωστης ταχύτητας προσεγγίζεται με το γινόμενο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη (άγνωστο μέγεθος) επί την ταχύτητα στην προηγούμενη επανάληψη (γνωστό μέγεθος). Επίσης το πήδημα δυναμικού $[\Phi]$ συσχετίζεται άμεσα με την κυκλοφορία Γ και την άγνωστη διανομή μ_{UP} :

$$[\Phi] = \Gamma = -\mu_{UP} \quad (2.21)$$

Έτσι στην (n)-επανάληψη η συνθήκη Kutta γράφεται :

$$2 \cdot \frac{\vartheta\mu_{UP}}{\vartheta t} + [\nabla\Phi^n \cdot (\nabla\Phi^{n-1} + 2 \cdot (\vec{U}_a - \vec{U}_b))] = [\vec{U}_a \cdot (2 \cdot \vec{U}_b - \vec{U}_a)] \quad (2.22)$$

Στην πρώτη επανάληψη του μηδενικού χρονικού βήματος θεωρούμε μηδενικές τιμές για τα $\nabla\Phi_{jUP}^{(n-1)}$, $\nabla\Phi_{jLOW}^{(n-1)}$, ενώ για την πρώτη επανάληψη μίας χρονικής στιγμής θεωρούμε τις τιμές των $\nabla\Phi_{jUP}$, $\nabla\Phi_{jLOW}$ στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Αυτή η διαδικασία είναι ευσταθής και συγκλίνει σχετικά γρήγορα σε 3-4 περίπου επαναλήψεις.

Εξετάζοντας την (2.23) χρειάζεται να γίνει μία παρατήρηση που σχετίζεται με το ότι ο όρος $\nabla\Phi^{(n)}$ περιλαμβάνει και την συνεισφορά του κοντινού ομόρρου μέρος της οποίας είναι γνωστή.:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi^{(n)}(\vec{x}_o; t) &= \vec{u}_{SD}(\vec{x}_o; t) + \vec{u}_{NW}(\vec{x}_o; t) \\ &= \sum_{e=1}^{NTE} \left\{ \sigma^{e(n)} \vec{u}_\sigma^e(\vec{x}_o; t)^1 + B_{ICIRC(e)}^{(n)} \cdot \vec{u}_\mu^e(\vec{x}_o; t)^1 \right\} \\ &\quad + \sum_{ew=1}^{NTEW} \left\{ B_{ew}^{(n)} \cdot \vec{u}_\mu^{ewA}(\vec{x}_o; t)^1 + B_{ew}^{old} \cdot \vec{u}_\mu^{ewB}(\vec{x}_o; t)^1 \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

θέτοντας:

$$\nabla\Phi^B(\bar{x}_o;t) = \sum_{ew=1}^{NTEW} \left\{ B_{ew}^{old} \cdot \bar{\mu}_{\mu}^{ewB}(\bar{x}_o;t) \right\} \quad (2.24)$$

και συμβολίζοντας με $\nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_o;t)$ τους υπόλοιπους παράγοντες του δευτέρου μέρους της (2.23) προκύπτει:

$$\nabla\Phi^{(n)}(\bar{x}_o;t) = \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_o;t) + \nabla\Phi^B(\bar{x}_o;t) \quad (2.25)$$

Ας θεωρήσουμε τα στοιχεία e_{jUP} και e_{jLOW} στην ακμή εκφυγής, καθώς και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου \bar{x}_{jUP} και \bar{x}_{jLOW} , που βρίσκονται στην ακτινική λωρίδα j , $j=1, NCW-1$ (Σχήμα 2.6). Εισάγοντας στην (2.22) την (2.25) προκύπτει η διακριτή μορφή της γραμμικοποιημένης δυναμικής συνθήκης (εξίσωση (2.26)). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλα τα μεγέθη στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι γνωστά κατά τη (n)-επανάληψη αφού αναφέρονται είτε στο προηγούμενο χρονικό βήμα (old), είτε στο προηγούμενο βήμα (n-1) της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης της μη γραμμικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} & \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_{jUP};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jUP};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & - \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_{jLOW};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jLOW};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \\ & - 2 \frac{\mu_{jUP}}{\Delta t} = -2 \frac{\mu_{jUP}^{old}}{\Delta t} \\ & - \nabla\Phi^B(\bar{x}_{jUP};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jUP};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & + \nabla\Phi^B(\bar{x}_{jLO};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jLOW};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \\ & - \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - 2\bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & + \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - 2\bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Η Διάρθρωση του Συστήματος Εξισώσεων του Προβλήματος

Οι βασικές εξισώσεις του συστήματος είναι:

- η κινηματική εξίσωση μη εισχώρησης (2.15) στα σημεία ελέγχου και
- η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής (2.26).

Οι άγνωστοι του συστήματος είναι:

- οι εντάσεις των πηγών σ^e , ($e=1, NTE$) στα σημεία ελέγχου των στοιχείων του επιφανειακού πλέγματος και
- οι κλίσεις $B_{j=ICIRC(e)}$, ($j=1, NCW-1$, $e=1, NTE$) της διανομής διπόλων για τις ακτινικές λωρίδες του πλέγματος (ή αντίστοιχα η κυκλοφορία στην ακμή εκφυγής).

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα $[S]$ που περιέχει το σύνολο των βαθμών ελευθερίας ως εξής:

$$[S] = [\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^e, \dots, \sigma^{NTE}, B_1, B_2, \dots, B_{j=ICIRC(e)}, \dots, B_{NCW-1}]^T \quad (2.27)$$

που όπως έχουμε προαναφέρει (2.11) το συνολικό τους πλήθος είναι $NDFT$ (Total Number of Degrees of Freedom):

$$NDFT = NTE + ICIRC(NTE) \quad (2.28)$$

Για τον έλεγχο της σύγκλισης της επαναληπτικής διαδικασίας εφαρμόζεται σε όλα τα στοιχεία $\{S_i\}$ του πίνακα των βαθμών ελευθερίας κριτήριο της μορφής:

$$\frac{\{S_i\}^{(n)} - \{S_i\}^{(n-1)}}{\{S_i\}^{(n)}} < \varepsilon, \quad i = 1, NDFT \quad (2.29)$$

όπου ε μία προεπιλεγμένη τιμή σφάλματος και $(^n)$, $(^{n-1})$ η τρέχουσα και η προηγούμενη επανάληψη αντίστοιχα.

Το Επιφανειακό Φύλλο Στροβιλότητας: Ο Κοντινός Ομόρρος.

Ο κοντινός ομόρρος αποτελεί μία λεπτή ζώνη κοντά στην ακμή εκφυγής όπου η στροβιλότητα διανέμεται ιδιόμορφα σε επιφανειακό πλέγμα διπόλων. Η υλική εξέλιξη του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\bar{x}_w}{dt} = \bar{U}_m(\bar{x}_w; t) \Rightarrow \bar{x}_w^{t+\Delta t} = \bar{x}_w^t + \bar{U}_m(\bar{x}_w; t) \cdot \Delta t \quad (2.31)$$

όπου ο όρος $\bar{U}_m(\bar{x}_w; t)$ εκφράζει τη συνολική μέση ταχύτητα στην ακμή εκφυγής (που ουσιαστικά λαμβάνει την τιμή \bar{x}_w^t), και σαφώς έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα, συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της επ'άπειρον ροής, των σωμάτων και της ελεύθερης στροβιλότητας. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θεωρούμε ότι η διεύθυνση αυτής της

ταχύτητας είναι προδιαγεγραμμένη και μάλιστα ότι είναι η εφαπτομενική στο στοιχείο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την ακμή εκφυγής. Αυτό βρίσκεται σε συνέπεια με τη θεωρία του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, που επιβάλλει ότι η διεύθυνση εκφυγής του κοντινού ομόρρου μπορεί να είναι εφαπτομενική είτε στην κάτω, είτε στη επάνω πλευρά, είτε να είναι η διχοτόμος της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Το μέτρο αυτής της ταχύτητας υπολογίζεται από την μέση τιμή των ταχυτήτων όπως αυτές υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου των δύο επιφανειακών στοιχείων που βρίσκονται εκατέρωθεν από την ακμή εκφυγής, με κοινή πλευρά την ακμή εκφυγής. Η εφαρμογή της (2.31) οδηγεί στην δημιουργία επιφανειακής διανομής στροβιλότητας από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι προσδιορίζεται η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θα πρέπει το μήκος του κοντινού ομόρρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος των γειτονικών στοιχείων του σώματος στην ακμή εκφυγής. Αυτό είναι ένα γεωμετρικό κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται στο βαθμό που είναι δυνατό. Η εξίσωση (2.31) στην περίπτωση αυτή συσχετίζει την κλίμακα χρόνου με την κλίμακα μήκους του προβλήματος, ώστε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος να είναι ευσταθής. Αυτό βέβαια δεν εξασφαλίζει ότι μία τυχαία επιλογή χρονικού βήματος και χωρικής διακριτοποίησης που ικανοποιεί αυτό το γεωμετρικό κριτήριο είναι πάντα αρκετή για την λεπτομερή αναπαράσταση του πεδίου ροής. Επιπλέον θα πρέπει η κλίμακα μήκους να επιλέγεται ώστε να μπορεί να αναπαράγει την κλίμακα μήκους των διαφόρων φυσικών μηχανισμών του εξεταζόμενου προβλήματος.

Σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράφηκε ο κοντινός ομόρρος αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων με μήκος που καθορίζεται από την τοπική ταχύτητα. Στην περίπτωση της περιστροφής εκφεύγουν ευθύγραμμοι δινοσωλήνες με μήκος ($dx = \omega \cdot r \cdot dt$) που αυξάνει γραμμικά με την ακτίνα και γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό στο ακροπτερύγιο, με συνέπεια την αύξηση της ακτίνας του εκφεύγοντος ελικοειδούς δινοσωλήνα. Αυτό αλλοιώνει την φυσική του προβλήματος, καθώς ο ομόρρος μπορεί να έχει την τάση συστολής στην περίπτωση μίας έλικας (ή διαστολής, όπου το σφάλμα θα είναι μικρότερο). Αυτό το αριθμητικό σφάλμα οδηγεί στην ακτινική απομάκρυνση των δινοσωλήνων του κοντινού ομόρρου από το σώμα με συνέπεια την εξασθένιση της επαγόμενης ταχύτητας του ομόρρου στο σώμα (που είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης), με αποτέλεσμα τον υπολογισμό αυξημένων φορτίων και την υπερεκτίμηση των υπολογισμών. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος μπορεί να γίνει με την επιλογή μικρού χρονικού βήματος.

Ο ποσοτικός καθορισμός της αποβαλλόμενης στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρο γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα με την ικανοποίηση της δυναμικής συνθήκης μηδενισμού της πίεσης στην ακμή εκφυγής και είναι σύμφωνος με την αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στη συνέχεια θα δούμε πως καθορίζεται η ένταση της κατανομής διπόλων μ_w στους δινοσωλήνες του κοντινού ομόρρου.

Με δεδομένη τη γεωμετρία $\bar{x}_w(t)$ σε στοιχείο w του κοντινού ομόρρου και τις εντάσεις των διπόλων $\mu_w(\bar{x}_w; t)$ σε αυτό, υπολογίζονται το δυναμικό $\Phi_w(\bar{x}_o; t)$ και η ταχύτητα $\bar{u}_w(\bar{x}_o; t)$ που αυτό επάγει σε σημείο του χώρου $\bar{x}_o \in D$:

$$\Phi_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(\bar{x}_o; t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times v_w(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\bar{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο απειρισμός που προκύπτει όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής των παραπάνω σχέσεων μπορεί να συμβεί μόνο μετά την επίλυση του συστήματος εάν επιδιώξουμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας σε θέσεις πάνω στο επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας.

Η μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας σε χωρική

Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t το αλγεβρικό σύστημα (2.30) έχει επιλυθεί. Αν $\mu^{ew}(\xi, \eta)$ είναι η διανομή διπόλων στο στοιχείο ew του κοντινού ομόρρου στο τοπικό σύστημα, τότε η ένταση $\bar{\Omega}_{ew}$ της ισοδύναμης χωρικής στροβιλότητας θα είναι:

$$\bar{\Omega}_{ew} = \int_{S^{ew}} \{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) \times \bar{v}^{ew} \} d\xi d\eta + \oint_{\partial S^{ew}} \mu^{ew}(\xi, \eta) d\bar{l} \quad (2.34)$$

όπου ο συμβολισμός $\nabla_{\xi\eta}$ σημαίνει ότι οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς την τοπική βάση. Σε κάθε χρονικό βήμα και για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου παράγονται δύο στοιχεία χωρικής στροβιλότητας σύμφωνα με την (2.34), ένα που συγκεντρώνει την επιφανειακή στροβιλότητα και ένα που συμπεριλαμβάνει τον επικαμπύλιο όρο. Στο τελευταίο στοιχείο του ομόρρου παράγεται ένα επιπλέον στοιχείο στροβιλότητας που συγκεντρώνει τον στρόβιλο του ακροπτερυγίου. Αυτό σημαίνει ότι αν ο συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων είναι n , ο συνολικός αριθμός στοιχείων στροβιλότητας NVR (Number of Vortex Particles) μετά την εξέλιξη και των n χρονικών βημάτων θα είναι:

$$NVR_n = n \cdot (2 \cdot NTEW + 1) \quad (2.35)$$

Η ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου οδηγεί στη δημιουργία ενός στοιχείου στροβιλότητας έντασης $\bar{\Omega}_{surf_1}^{ew}$ τοποθετημένο στη θέση $\overline{XVR}_{surf_1}^{ew}$ του γεωμετρικού κέντρου του στοιχείου (με κορυφές \overline{XWAKE}_i^{ew}) από το οποίο προέρχεται:

$$\overline{XVR}_{surf_1}^{ew} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \overline{XWAKE}_i^{ew} \quad (2.36)$$

Η έντασή του προκύπτει από την ολοκλήρωση της διανομής διπόλων στο επιφανειακό στοιχείο. Η διανομή διπόλων στον ομόρρου μπορεί να γραφτεί :

$$\mu^{ew}(\xi, \eta) = a_{00} + b_{00} + (a_{10} + b_{10})\xi + (a_{01} + b_{01})\eta + (a_{11} + b_{11})\xi\eta \quad (2.37)$$

από όπου προκύπτει:

$$\left\{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) \times \bar{v}^{ew} \right\} = \begin{Bmatrix} a_{10} + b_{10} + (a_{11} + b_{11})\xi \\ -a_{01} - b_{01} - (a_{11} + b_{11})\eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

και συνεπώς η ένταση του στοιχείου στροβιλότητας γράφεται :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{surf-1}^{ew} &= \int_{S^{ew}} \left\{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) \times \bar{v}^{ew} \right\} d\xi d\eta \\ &= \left((a_{10} + b_{10}) \cdot S^{ew} + (a_{11} + b_{11}) m_{\xi}^{ew} \right) \cdot \bar{e}_{\xi}^{ew} \\ &\quad - \left((a_{01} + b_{01}) \cdot S^{ew} + (a_{11} + b_{11}) m_{\eta}^{ew} \right) \cdot \bar{e}_{\eta}^{ew} \end{aligned} \quad (2.39)$$

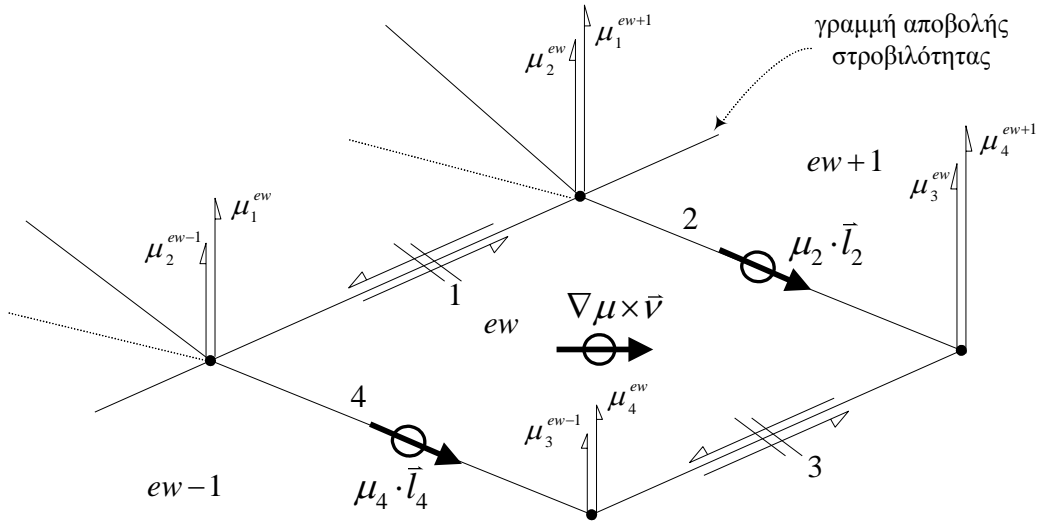
όπου S^{ew} το εμβαδόν του στοιχείου, \bar{e}_{ξ}^{ew} , \bar{e}_{η}^{ew} η επιφανειακή βάση του στοιχείου (ew) και m_{ξ}^{ew} , m_{η}^{ew} οι ροπές του τετραπλεύρου ως προς ξ και η αντίστοιχα:

$$m_{\xi}^{ew} = \int_{S^{ew}} \xi \cdot d\xi d\eta \quad , \quad m_{\eta}^{ew} = \int_{S^{ew}} \eta \cdot d\xi d\eta \quad (2.40)$$

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε πλευρά K , ($K=1,4$) του στοιχείου του κοντινού ομόρρου έχει σταθερή τιμή διπολικής έντασης μ_K και μήκος $\bar{l}_K = l_K \cdot \bar{\tau}_K$ (όπου $\bar{\tau}_K$ τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε πλευρά), τότε ο δεύτερος όρος της (2.34) γράφεται:

$$\oint_{\partial S^{ew}} \mu^{ew}(\xi, \eta) d\bar{l} = \sum_{k=1}^4 \mu_K \bar{l}_K = \sum_{k=1}^4 \mu_K l_K \bar{\tau}_K \quad (2.41)$$

Για τον υπολογισμό αυτού του όρου ας θεωρήσουμε τρία γειτονικά στοιχεία στον κοντινό ομόρρου σώματος το ew και τα $ew-1$, $ew+1$ (Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8. Η παραγωγή χωρικής στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου

Αριθμώντας ωρολογιακά τις πλευρές των στοιχείων υπολογίζουμε την μέση τιμή για την ένταση του δινοσωλήνα σε καθεμία από αυτές:

πλευρά 1 : $\mu_1 = 0$ (2.42)

Η πλευρά αυτή είναι πάνω στην ακμή εκφυγής. Η διανομή διπόλων έχει συνεχή ένταση κατά την σ-κατεύθυνση, με συνέπεια αυτός ο δινοσωλήνας του κοντινού ομόρρου να αλληλοαναιρείται με τον αντίστοιχο του σώματος. Για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου οι όροι αυτοί δεν υπολογίζονται ούτε στο σώμα ούτε στον ομόρρου .

πλευρά 2 : $\mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_1^{ew+1} + \mu_4^{ew+1})$, $ew \neq NTEW$ (2.43)

Η διανομή διπόλων παρουσιάζει ασυνέχεια κατά την τ-κατεύθυνση (γραμμή αποβολής στροβιλότητας). Στην πλευρά αυτή θέτουμε ένταση στροβιλότητας ίση με τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 2 και 4 των στοιχείων ew και $ew+1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το τελευταίο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=NTEW$) τότε θέτουμε την μέση τιμή της πλευράς 2:

$\mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew})$, $ew = NTEW$ (2.44)

πλευρά 3 : $\mu_3 = 0$ (2.45)

Η διανομή διπόλων στον ομόρρου είναι συνεχής και οι αντίστοιχοι όροι αλληλοαναιρούνται. Η μόνη περίπτωση που η πλευρά 3 δεν αντιστοιχεί σε μηδενική ένταση είναι αυτή του πρώτου χρονικού βήματος οπότε αντιστοιχεί στον αρχικό στρόβιλο και είναι:

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(\mu_3^{ew} + \mu_4^{ew}), \quad t=1 \quad (2.46)$$

πλευρά 4:
$$\mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_2^{ew-1} + \mu_3^{ew-1}), \quad ew \neq 1 \quad (2.47)$$

Κατά αντιστοιχία με την πλευρά 2 σε αυτήν την πλευρά θέτουμε τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 4 και 2 των στοιχείων ew και $ew-1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το πρώτο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=1$) τότε η ένταση ισούται με την μέση τιμή της πλευράς 4:

$$\mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}), \quad ew=1 \quad (2.48)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο υπολογισμός του επικαμπύλιου όρου οδηγεί στη δημιουργία στοιχείων στροβιλότητας που τοποθετούνται στο μέσο της αντίστοιχης πλευράς με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά θέσης και έντασης στροβιλότητας:

$$\begin{aligned} \overline{XVR}_{line,1}^{ew} &= 0.5 \cdot (\overline{XWAKE}_1^{ew} + \overline{XWAKE}_4^{ew}) \\ \vec{\Omega}_{line,1}^{ew} &= \mu_4 l_4 \vec{\tau}_4 \end{aligned} \quad (2.49)$$

και

$$\begin{aligned} \overline{XVR}_{line,2}^{ew} &= 0.5 \cdot (\overline{XWAKE}_2^{ew} + \overline{XWAKE}_3^{ew}) \\ \vec{\Omega}_{line,2}^{ew} &= \mu_2 l_2 \vec{\tau}_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Η Χωρική Κατανομή Στροβιλότητας: Ο Μακρινός Ομόρρος.

Ο μακρινός ομόρρος προκύπτει με σταδιακό τρόπο στο χρόνο από την ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική στροβιλότητα και αποτελεί δεδομένο του προβλήματος που εξετάζουμε. Απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας σφαιρικής συμμετρίας (vortex particles), από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του ομόρρου. Εάν θεωρήσουμε ότι τη στιγμή t έχουν δημιουργηθεί συνολικά $K(t)$ σημειακά στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) εντάσεως $\vec{\Omega}_j$, $j=1, K(t)$, τότε σε τυχαία θέση \vec{x} του χώρου η επαγόμενη στροβιλότητα και ταχύτητα θα υπολογίζονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{\omega}(\vec{x}; t) = \sum_{j=1}^{K(t)} \vec{\Omega}_j(t) \cdot \zeta_\varepsilon(|\vec{x} - \vec{x}_{\Omega_j}(t)|) \quad (2.52)$$

και

$$\bar{u}_w(\bar{x}; t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) \times (\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t))}{|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|^3} f_\varepsilon(|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|) \quad (2.53)$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ταχύτητας (2.53) παρουσιάζει ιδιομορφία όταν $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_{\Omega_j}$, δηλαδή το σημείο υπολογισμού είναι πολύ κοντά σε στοιχείο στροβιλότητας. Για την άρση αυτού του απειρισμού εισάγεται κατάλληλη συνάρτηση αποκοπής $f_\varepsilon(r)$, $r = |\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}|$ που ομαλοποιεί την ταχύτητα σε μια χαρακτηριστική περιοχή ακτίνας ε (μήκος αποκοπής) με κέντρο τη θέση \bar{x}_{Ω_j} κάθε στοιχείου στροβιλότητας. Η συνάρτηση αποκοπής πρέπει να ικανοποιεί ταυτοτικά τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f_\varepsilon(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} f_\varepsilon(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

ενώ η συνάρτηση $\zeta_\varepsilon(r)$ συνδέεται με την $f_\varepsilon(r)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{f'_\varepsilon(r)}{4\pi r^2} \quad (2.55)$$

Μία τυπική συνάρτηση αποκοπής είναι η εκθετική συνάρτηση (Βουτσινάς 1990):

$$f_\varepsilon(r) = 1 - e^{-\frac{r}{\varepsilon}} \quad (2.56)$$

που αντιστοιχεί στη συνάρτηση (Beale and Majda 1985):

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right) \quad (2.57)$$

Επίσης χρησιμοποιήθηκε και μία συνάρτηση αποκοπής με αλγεβρική μορφή που εφαρμοζόμενη στον υπολογισμό της ταχύτητας δίνει:

$$\bar{u}_w(\bar{x}; t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) \times (\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t))}{\left(|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|^6 + \varepsilon^6\right)^{1/2}} \quad (2.58)$$

Σαφώς η επίδραση της εκθετικής συνάρτησης αποκοπής στον υπολογισμό της ταχύτητας οδηγεί σε οξύτερες μεταβολές όσο το σημείο υπολογισμού προσεγγίζει το στοιχείο στροβιλότητας σε σύγκριση με την αντίστοιχη αλγεβρική μορφή.

Εάν συμβολίσουμε με h τη μέση απόσταση μεταξύ των στοιχείων στροβιλότητας, τότε η σύγκλιση της μεθόδου των στοιχείων στροβιλότητας για συναρτήσεις αποκοπής δεύτερης τάξης ακρίβειας, το αριθμητικό σφάλμα ελαχιστοποιείται όταν επιλέξουμε μήκος αποκοπής ε :

$$\varepsilon = h^a, \quad (0.6 < a < 1) \quad (2.59)$$

Η μεταφορά και παραμόρφωση της χωρικής στροβιλότητας

Με την μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική αυτός ουσιαστικά παύει να υφίσταται, καθώς η στροβιλότητα που ήταν διανεμημένη σε αυτόν μεταφέρεται πλέον από τα αντίστοιχα στοιχεία στροβιλότητας. Σε όλα τα στοιχεία στροβιλότητας εφαρμόζονται οι σχέσεις μεταφοράς και παραμόρφωσης της στροβιλότητας του Helmholtz. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν υλικά (Lagrangian) τόσο την εξέλιξη των θέσεων των στοιχείων στροβιλότητας όσο και την ένταση αυτών.

Η εξέλιξη της τροχιάς και η μεταβολή της έντασης για το στοιχείο στροβιλότητας που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση \bar{x}_Ω , κινείται με \bar{u}_Ω και έχει ένταση στροβιλότητας $\bar{\Omega}$ θα προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$\frac{d\bar{x}_\Omega(t)}{dt} = \bar{u}(\bar{x}_\Omega(t); t) \quad (2.60)$$

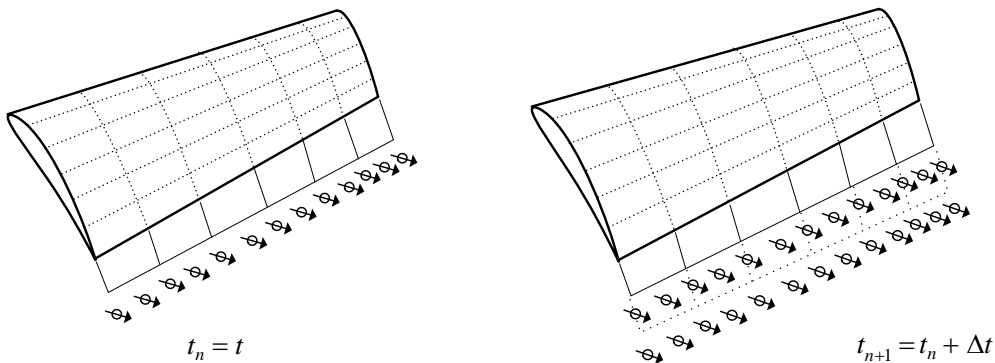
και

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Omega}}{dt}(\bar{x}_\Omega; t) &= (\bar{\Omega}(\bar{x}_\Omega; t) \nabla \cdot) \bar{u}(\bar{x}_\Omega; t) \\ &= \sum_{q=1}^{NVR} \left\{ \frac{\bar{\Omega}_q \times \bar{\Omega}_\Omega}{4\pi r^3} - 3 \frac{(\bar{\Omega}_\Omega \cdot \bar{r}) \cdot (\bar{\Omega}_q \times \bar{r})}{4\pi r^5} \right\}, \quad \bar{r} = \bar{x}_\Omega - \bar{x}_q \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ο όρος $(\bar{\Omega}(\bar{x}_\Omega; t) \nabla \cdot) \bar{u}(\bar{x}_\Omega; t)$ αποτελεί τον όρο παραμόρφωσης των εξισώσεων Lagrange. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στο τέλος ενός χρονικού βήματος, όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις (2.60) και (2.61) είναι γνωστά ή υπολογίζονται αναλυτικά. Η επίλυση (δηλαδή η ολοκλήρωση) των εξισώσεων στο χρόνο γίνεται με ένα σχήμα Adams-Basford ακρίβειας $O(\Delta t^2)$. Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος ολοκλήρωσης είναι σε συνέπεια με το πρόβλημα μεταφοράς της ελεύθερης στροβιλότητας που έχει υπερβολικό χαρακτήρα. Έτσι θα έχουμε :

$$\bar{\Omega}^{(t_{n+1})} = \bar{\Omega}^{(t_n)} + \Delta t \cdot \left(\frac{3}{2} \bar{\Omega}^{(t_n)} \nabla \bar{u}(t_n) - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^{(t_{n-1})} \nabla \bar{u}(t_{n-1}) \right) \quad (2.62)$$

Σχηματικά η μεταφορά της στροβιλότητας από ένα χρονικό βήμα t_n στο επόμενο t_{n+1} φαίνεται παρακάτω (Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9. Η μετακίνηση των στοιχείων στροβιλότητας μεταξύ δύο χρονικών βημάτων

Λόγω της αποβαλλόμενης στροβιλότητας από τα ακροπτερύγια και τον αρχικά αποβαλλόμενο στρόβιλο εμφανίζονται οι περιοχές αναδίπλωσης του φύλλου στροβιλότητας ως συγκέντρωση νέφους στοιχείων στροβιλότητας στα όρια του φύλλου στροβιλότητας.

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στην παραγωγή του φύλλου στροβιλότητας σημειώνεται για μία ακόμη φορά ότι η επιλογή της υλικής αναπαράστασής του με χωρική διανομή στροβιλότητας γίνεται καθώς η εφαρμογή της τροφοδότησης του μακρινού ομόρρου με επιφανειακή διανομή στροβιλότητας εμφανίζει έντονες αριθμητικές αστάθειες, που δημιουργούν ανωμαλίες στη μέθοδο. Η ύπαρξη ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό της ταχύτητας εισάγει έντονη διασπορά στην υπολογιζόμενη κατανομή $\bar{x}_w^{t+\Delta t}$ (2.60), με συνέπεια την απώλεια της λειότητας του φύλλου στροβιλότητας ακόμη και μετά το πέρασ μικρού χρονικού διαστήματος από τη στιγμή της δημιουργίας του.

Στην γενική περίπτωση η αποβαλλόμενη στροβιλότητα από ένα σώμα μπορεί να προσπίπτει σε άλλο σώμα. Στην περίπτωση που κάποιο στοιχείο στροβιλότητας βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός σώματος τότε θα πρέπει αυτό να κινείται εφαπτομενικά ως προς αυτό, σύμφωνα με το πεδίο ταχυτήτων που υπολογίζουμε πάνω σε αυτό το σώμα. Μάλιστα σημειώνεται ότι το πεδίο ταχυτήτων στο σώμα είναι γνωστό στα σημεία ελέγχου αυτού, καθώς εκεί εφαρμόζουμε τη συνθήκη μη εισχώρησης. Όμως η εφαρμογή των εξισώσεων στροβιλότητας του Helmholtz δεν περιλαμβάνει αυτόν τον περιορισμό. Για το λόγο αυτό μετά την εφαρμογή αυτών των εξισώσεων είναι απαραίτητο να γίνεται έλεγχος εάν κάποιο στοιχείο στροβιλότητας εισχωρεί στο εσωτερικό σώματος. Στην περίπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο, η θέση του στοιχείου στροβιλότητας $\bar{x}_\Omega^{(t_{n+1})}$ διορθώνεται σύμφωνα με την εφαπτομενική ταχύτητα \bar{u}_{CP}^e , που έχει το πλησιέστερο σε αυτό σημείο ελέγχου \bar{x}_{CP}^e του σώματος:

$$\bar{x}_\Omega^{(t_{n+1}), corrected} = \bar{x}_\Omega^{(t_n)} + \Delta t \cdot \bar{u}_{CP}^e \quad (2.63)$$

Ο Υπολογισμός των Φορτίων

Σε κάθε χρονικό βήμα, αφού ολοκληρωθεί η επίλυση των εξισώσεων του συστήματος, είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της ροής πάνω σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο του σώματος.

Έχοντας υπολογίσει τις διανομές των πηγών και των διπόλων σε όλα τα επιφανειακά στοιχεία που απαρτίζουν τα σώματα και γνωρίζοντας την προϊστορία του δυναμικού ο υπολογισμός των πιέσεων γίνεται σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. §1.10) μέσω της ολοκλήρωσης της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής. Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων.

$$p^e(\bar{x};t) = p_\Phi^e(\bar{x};t) + p_\omega^e(\bar{x};t) \quad (2.64)$$

Στο απόλυτο σύστημα αναφοράς, στο τυχαίο στοιχείο e που ανήκει σε σώμα κινούμενο με σχετική ταχύτητα $\bar{U}_B^e(\bar{x};t)$ θα ισχύει για τον υπολογισμό της πίεσης:

$$\frac{\partial \Phi^e(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}^e(\bar{x};t)^2 + \frac{P_\omega^e(\bar{x};t)}{\rho} + \frac{P_\Phi^e(\bar{x};t)}{\rho} - \bar{u}^e(\bar{x};t) \cdot \bar{U}_B^e(\bar{x};t) = c(t) \quad (2.65)$$

όπου ο δείκτης (e) υποδηλώνει ότι όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο στοιχείο e .

Ο μη μόνιμος όρος αυτής της σχέσης υπολογίζεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \Phi^e(\bar{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty^e(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\bar{x};t)}{\partial t} \quad (2.66)$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\partial \Phi_\infty^e(\bar{x};t)/\partial t$ μηδενίζεται, αλλιώς πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος, ενώ ο υπολογισμός του όρου δυναμικού διαταραχής $\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\bar{x};t)/\partial t$ γίνεται εύκολα καθώς σε κάθε χρονική υπολογίζουμε τις τιμές του δυναμικού $\Phi_\sigma^e(\bar{x};t)$, $\Phi_\mu^e(\bar{x};t)$ και συνεπώς και τη χρονική μεταβολή τους.

Η εξίσωση (2.66) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης p^e σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο της γεωμετρίας του σώματος. Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης στο στοιχείο e γίνεται με την αδιαστατοποίηση της πίεσης p^e ως προς μία κατάλληλη πίεση αναφοράς P_{ref} . Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση του συντελεστή πίεσης c_p^e των αριθμητικών προλέξεων με τα πειραματικά δεδομένα θα πρέπει να είναι γνωστή η P_{ref} που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

$$c_p^e = \frac{P^e - P_\infty}{P_{ref}} \quad (2.67)$$

Κλείνοντας την αναφορά στον τρόπο υπολογισμού των πιέσεων αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια στην αναπαράσταση της γεωμετρίας του εξεταζόμενου σώματος επηρεάζει

άμεσα τους υπολογισμούς των πιέσεων, τόσο στο χείλος πρόσπτωσης, όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές πιέσεων, όσο και στην ακμή εκφυγής, όπου η ικανοποίηση της εξίσωσης των πιέσεων αποτελεί τη βασική συνθήκη για την παραγωγή στροβιλότητας και την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Ο υπολογισμός της κάθετης δύναμης, που αναπτύσσεται στο στοιχείο e γίνεται απ'ευθείας καθώς η πίεση p^e έχει ήδη υπολογιστεί:

$$\bar{F}_n^e(\bar{x};t) = (p^e(\bar{x};t) \cdot A^e) \cdot \bar{\nu}^e \quad (2.68)$$

η δύναμη αυτή οδηγεί στην εμφάνιση ροπής $Q^e(\bar{x};t)$ ως προς την αρχή των αξόνων:

$$Q^e(\bar{x};t) = \bar{x} \times \bar{F}_n^e(\bar{x};t) \quad (2.69)$$

Σημειώνεται ότι στους υπολογισμούς των φορτίων δεν υπεισέρχονται συνεκτικές διορθώσεις, οπότε η συνολική στιγμιαία δύναμη $\bar{F}^{NB}(t)$ και ροπή $\bar{Q}^{NB}(t)$ που αναπτύσσονται στο σώμα (NB) στο απόλυτο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\bar{F}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \bar{F}_n^e(x;t) \quad (2.70)$$

$$\bar{Q}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \bar{Q}_n^e(x;t) \quad (2.71)$$

Οι Αριθμητικές Παράμετροι της Μεθόδου

Οι βασικές παράμετροι της μεθόδου που επιδρούν σημαντικά στην ποιότητα των αποτελεσμάτων αλλά και την ευστάθεια της μεθόδου καθορίζοντας ταυτόχρονα και τις υπολογιστικές απαιτήσεις της μεθόδου είναι:

- Οι διαστάσεις του γεωμετρικού πλέγματος
- Το χρονικό βήμα
- Το μήκος αποκοπής ε που χρησιμοποιείται για την αναίρεση των ιδιόμορφων υπολογισμών ταχυτήτων της ελεύθερης στροβιλότητας

Οι διαστάσεις του γεωμετρικού πλέγματος θα πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να εμπεριέχεται όλη την λεπτομέρεια των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος. Επίσης θα πρέπει να καλύπτεται η κλίμακα μήκους που απαιτείται για την προσομοίωση φυσικών μηχανισμών, όπως λ.χ. είναι η αποβολή στροβιλότητας από το ακροπτερύγιο. Τέλος πρέπει να

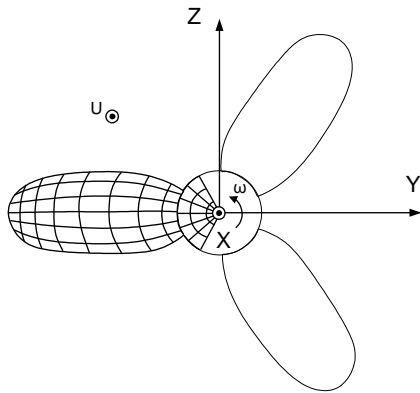
ικανοποιούνται οι συνθήκες που τίθενται από την αριθμητική ανάλυση του προβλήματος, όπως είναι η θεώρηση τραπεζοειδών επίπεδων στοιχείων.

Η επιλογή του χρονικού βήματος πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτεται η χρονική κλίμακα εξέλιξης των μεταβατικών φαινομένων που εξετάζουμε. Η επιλογή του χρονικού βήματος καθορίζει το μήκος του κοντινού ομόρρου που θα πρέπει να είναι τάξης μεγέθους του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος σε αυτή την περιοχή. Αυτό όμως δεν είναι δυνατό στην περίπτωση των στρεφόμενων δρομέων, όπου τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου στο ακροπτερύγιο είναι σαφώς δυσανάλογα με τα αντίστοιχα του σώματος. Στην γενική περίπτωση όπου απαιτείται λεπτομερής αναπαράσταση του πεδίου ροής επιβάλλεται η χρήση μικρού χρονικού βήματος. Στις περιπτώσεις των στρεφόμενων δρομέων που εξετάστηκαν χρησιμοποιήθηκε ως τυπική τιμή χρονικό βήμα της τάξης των 90 βημάτων ανά περίοδο περιστροφής.

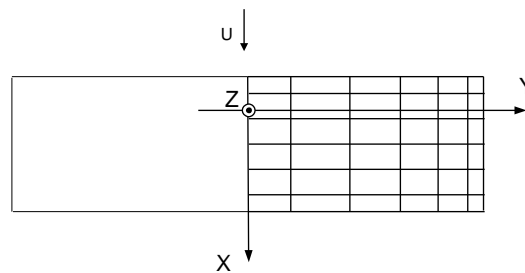
Η επιλογή του μήκους αποκοπής ε της ελεύθερης στροβιλότητας, σύμφωνα με τις (2.56) και (2.58) είναι μία αριθμητική παράμετρος αναγκαία για την εξέλιξη των στοιχείων στροβιλότητας. Θεωρείται σταθερά για όλα τα στοιχεία στροβιλότητας και δεν μεταβάλλεται χρονικά. Η τιμή της συνήθως λαμβάνεται ίση με την ελάχιστη απόσταση που υπάρχει μεταξύ δύο στοιχείων στροβιλότητας κατά μήκος της γραμμής αποβολής και στις δοκιμές που έγιναν δεν φάνηκε να επηρεάζει αισθητά τα αποτελέσματα των υπολογισμών πάνω στα σώματα. Σαφώς όμως επηρεάζει την ποιότητα των υπολογισμών ταχυτήτων στον ομόρρο.

Προβλήματα με Άξονα ή Επίπεδο Συμμετρίας

Η αντιμετώπιση προβλημάτων όπου η ροή παρουσιάζει συμμετρία είτε ως προς άξονα (Σχήμα 2.10α), είτε ως προς επίπεδο συμμετρίας (Σχήμα 2.10β) έχει προβλεφθεί στο σχεδιασμό του υπολογιστικού εργαλείου. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα εξισώσεων διαρθρώνεται και επιλύεται μόνο για το τμήμα της συμμετρίας, λαμβάνοντας όμως υπόψη όλες τις συνεισφορές των στοιχείων (σώματα, στοιχεία στροβιλότητας) του προβλήματος. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ακριβώς ισοδύναμα με τα αντίστοιχα από την επίλυση του πλήρους προβλήματος. Ο περιορισμός του αριθμού των αγνώστων ελαττώνει τουλάχιστον στο μισό την διάσταση του συστήματος των εξισώσεων που επιλύεται. Σημαντική οικονομία όμως επιτυγχάνεται και λόγω του ότι περιορίζεται έτσι ο αριθμός των στοιχείων στροβιλότητας που επιβαρύνει με εκθετικό τρόπο τον απαιτούμενο χρόνο υπολογιστή.



(α)



(β)

Σχήμα 2.10. Συμμετρία ως προς: (α) τον άξονα X, (β) το επίπεδο-Z

Κεφάλαιο 2

2.1 Ανεμογεννήτρια αναφοράς

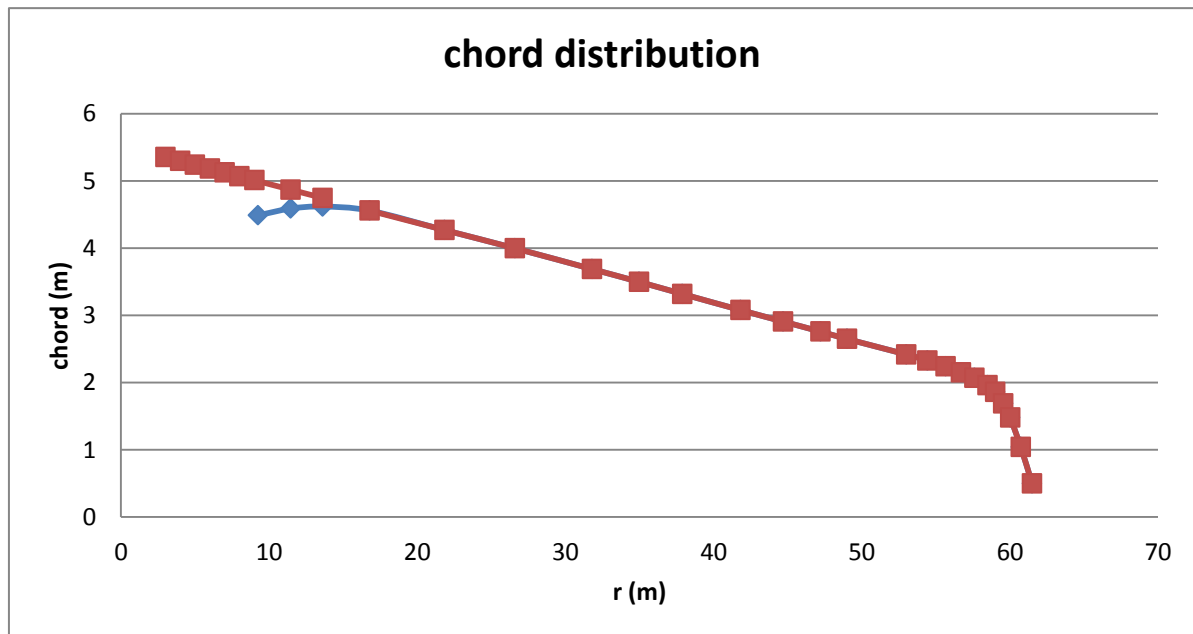
Η εργασία αυτή έγινε με βάση την ανεμογεννήτρια αναφοράς NREL 5MW, οριζοντίου άξονα, με διάμετρο πτερύγωσης 126m (συμπεριλαμβανομένης και της πλήμνης). Ως ανεμογεννήτρια αναφοράς ορίζουμε μηχανές που έχουν σχεδιαστεί από εργαστήρια με σκοπό να αποτελέσουν σημείο αναφοράς για τις διάφορες ερευνητικές ομάδες. Η συγκεκριμένη Α/Γ αναπτύχθηκε από το εργαστήριο NREL (Εθνικό Εργαστήριο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής). Ακολουθεί ο πίνακας με τα χαρακτηριστικά λειτουργίας την Α/Γ για τις διάφορες ταχύτητες ανέμου.

U(m/s)	TSR	Power(kW)	Thrust (kN)	pitch (deg)	rot. Speed (rad/s)	TSRnom	Cp	CT
5.00	7.90	470.82	156.33	0.00	0.63	15.965	0.493	0.819
6.00	7.91	813.57	225.17	0.00	0.75	13.305	0.493	0.819
7.00	7.90	1291.92	306.31	0.00	0.88	11.404	0.493	0.819
8.00	7.90	1928.46	400.13	0.00	1.00	9.978	0.493	0.819
9.00	7.90	2745.79	506.50	0.00	1.13	8.870	0.493	0.819
10.00	7.90	3766.52	625.36	0.00	1.25	7.983	0.493	0.819
11.00	7.26	4979.23	716.91	0.00	1.27	7.257	0.490	0.776
12.00	6.65	5315.90	589.85	4.00	1.27	6.652	0.403	0.536
13.00	6.14	5312.52	512.06	6.65	1.27	6.141	0.317	0.397
14.00	5.70	5309.60	462.32	8.70	1.27	5.702	0.253	0.309
15.00	5.32	5315.74	426.55	10.46	1.27	5.322	0.206	0.248
16.00	4.99	5306.39	397.50	12.07	1.27	4.989	0.170	0.203
17.00	4.70	5305.11	374.67	13.55	1.27	4.696	0.141	0.170
18.00	4.43	5312.40	356.49	14.93	1.27	4.435	0.119	0.144
19.00	4.20	5307.74	340.85	16.24	1.27	4.201	0.101	0.124
20.00	3.99	5306.73	327.85	17.49	1.27	3.991	0.087	0.107
21.00	3.80	5310.17	316.93	18.70	1.27	3.801	0.075	0.094
22.00	3.63	5317.35	307.72	19.87	1.27	3.629	0.065	0.083
23.00	3.47	5307.83	299.02	21.01	1.27	3.471	0.057	0.074
24.00	3.33	5319.84	292.48	22.10	1.27	3.326	0.050	0.066
25.00	3.19	5300.17	285.50	23.17	1.27	3.193	0.044	0.060

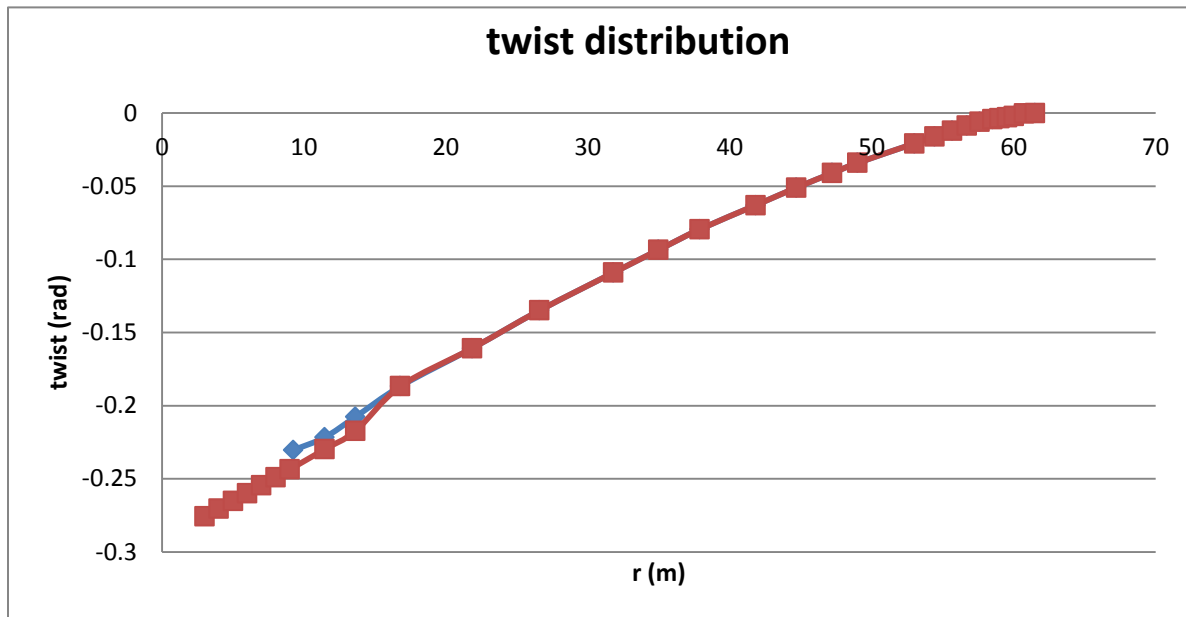
Πίνακας 2.1 Πίνακας λειτουργίας ανεμογεννήτριας αναφοράς

2.2 Νέα γεωμετρία

Για την περίπτωση του λεπτού πτερυγίου αρχικά το πτερύγιο εκτεινόταν από τα 13.6m έως 61.5, ενώ μετά την επέκταση ο αεροδυναμικός σχεδιασμός ξεκινάει από τα 3m. Για την επέκταση του πτερυγίου χρησιμοποιήσαμε πολυώνυμα παρεμβολής πρώτου έως τετάρτου βαθμού τόσο για την κατανομή της χορδής όσο και για την κατανομή της συστροφής. Επιλέχθηκε η γεωμετρία εκείνη που δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα ως προς την παραγόμενη ισχύ, η οποία προκύπτει από πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Ακολουθούν τα διαγράμματα με την κατανομή της χορδής και της συστροφής σε σχέση με την αρχική γεωμετρία για την περίπτωση του λεπτού πτερυγίου.



Σχήμα 2.2 Κατανομή χορδής



Σχήμα 2.3 Κατανομή συστρόφής

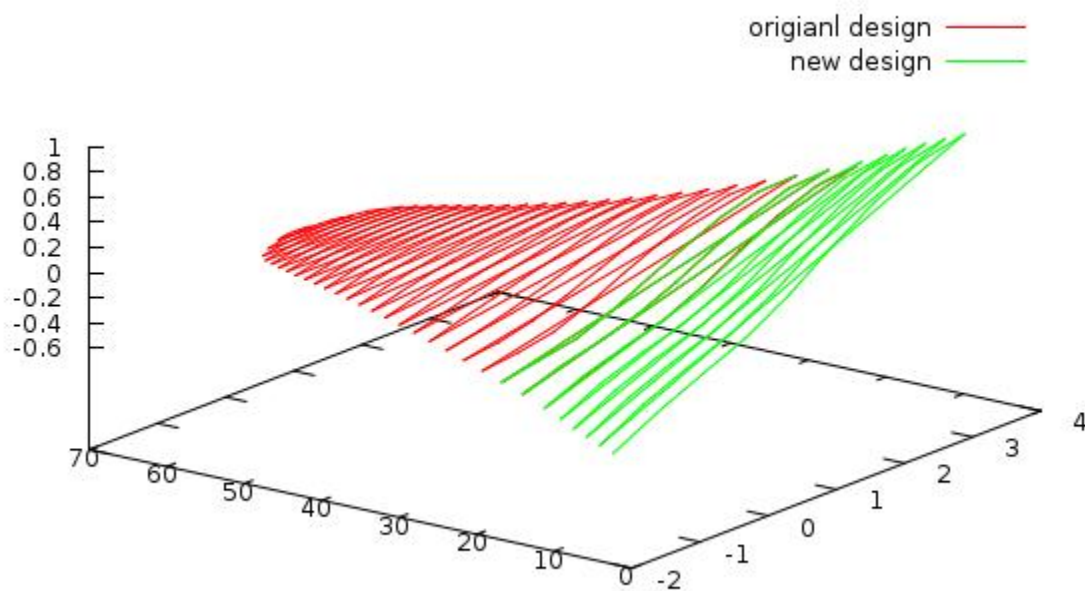
Για την περίπτωση του πτερυγίου με πάχος χρησιμοποιήθηκαν και πάλι πολυώνυμα παρεμβολής δευτέρου βαθμού. Έχοντας της συντεταγμένες του αρχικού πλέγματος εφαρμόσαμε τα πολυώνυμα παρεμβολής και προέκυψαν οι συντεταγμένες της επέκτασης. Αρχικά το πτερύγιο εκτεινόταν από τα 20 έως τα 63m ενώ μετά την επέκταση εκτείνεται από τα 3 έως τα 63m.

Κεφαλαίο 3

Πτερυγίο χωρίς πάχος (thin)

3.1 Δεδομένα και βασικά σημεία ελέγχου

Οι υπολογισμοί έγιναν για ομοιόμορφη ταχύτητα ανέμου 8 m/s και γωνιακή ταχύτητα 1.003 rad/s. Αρχικά το αεροδυναμικό τμήμα του πτερυγίου εκτεινόταν από τα 13.6m έως τα 61.5m, ενώ μετά την επέκταση η κατανομή της χορδής και της συστροφής φτάνει έως τα 3m. Στο διάγραμμα που ακολουθεί φαίνεται η γεωμετρία των δύο πτερυγίων.



Εικόνα 3.1 Γεωμετρία πτερυγίων

Τα σημεία που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε είναι:

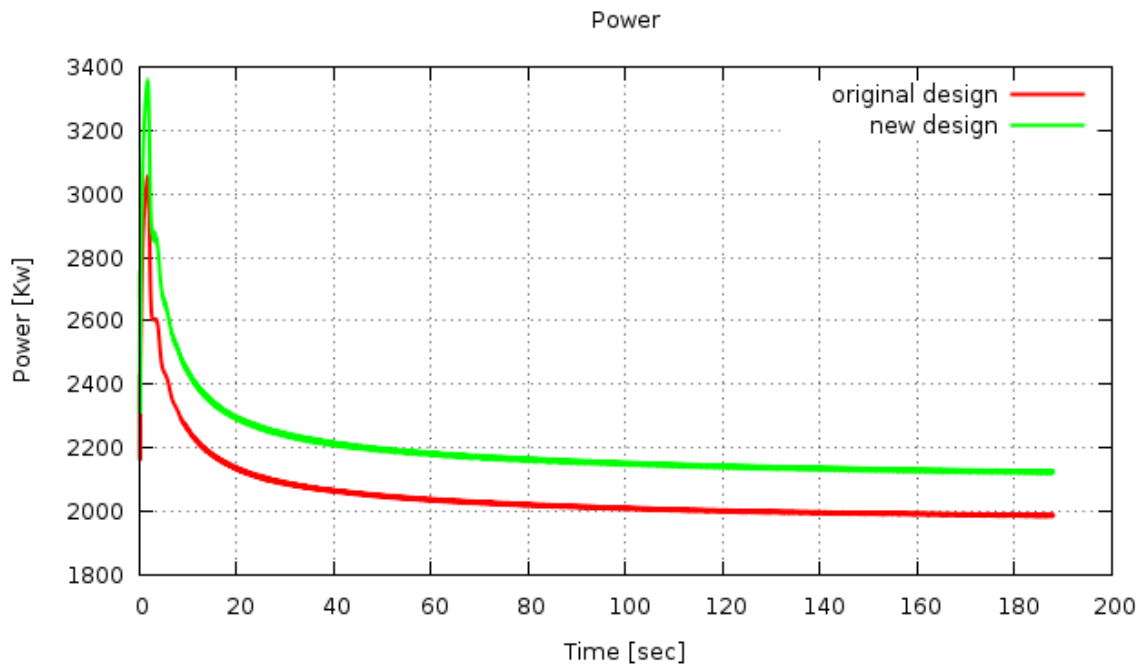
- Η συνολική ισχύς που αποδίδει η Α/Γ. Έτσι θα εκτιμήσουμε αν έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα και στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε τους λόγους στους οποίους αυτό οφείλεται.
- Η γωνία πρόσπτωσης κατά μήκος των πτερυγίων. Η γωνία πρόσπτωσης επηρεάζει άμεσα τα φορτία.
- Οι αξονικές δυνάμεις κατά μήκος των πτερυγίων καθώς σχετίζονται άμεσα με την αντοχή των πτερυγίων.
- Οι περιφερειακές δυνάμεις κατά μήκος των πτερυγίων. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν την κινητήρια δύναμη για το πτερόγιο.
- Η δύναμη της ώσης, η οποία αποτελεί την συνολική δύναμη αντίδρασης του αέρα στην Α/Γ.
- Ο συντελεστή άνωσης. Είναι δευτερόν μέγεθος αφού προκύπτει μέσα από τα φορτία και την σχετική ταχύτητα.
- Η παραγόμενη ροπή κατά μήκος των πτερυγίων.

3.2 Αποτελέσματα

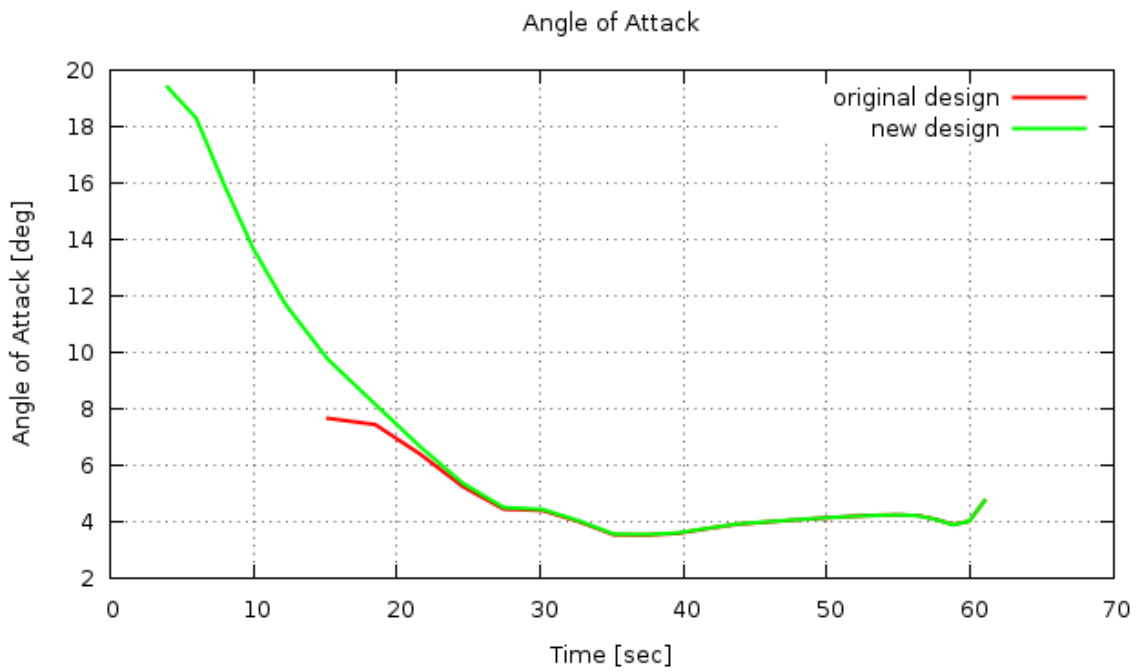
Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζονται τα βασικά σημεία ελέγχου με την βοήθεια καμπυλών.

Παρουσιάζονται 3 σετ διαγραμμάτων. Το πρώτο αγνοεί την επίδραση της συνεκτικότητας και προκύπτει από την βασική έκδοση του κώδικα. Στο δεύτερο εισάγουμε έναν πίνακα με τους συντελεστές άνωσης, οπισθέλκουσας και ροπής για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης και ο κώδικας υπολογίζει τα φορτία με βάση αυτούς τους συντελεστές. Έτσι λαμβάνεται υπόψη η συνεκτικότητα. Το τρίτο σετ αποτελείται από υπολογισμούς που βασίζονται στην μέθοδο ONERA, η οποία αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο υπολογισμού συνεκτικών ροών.

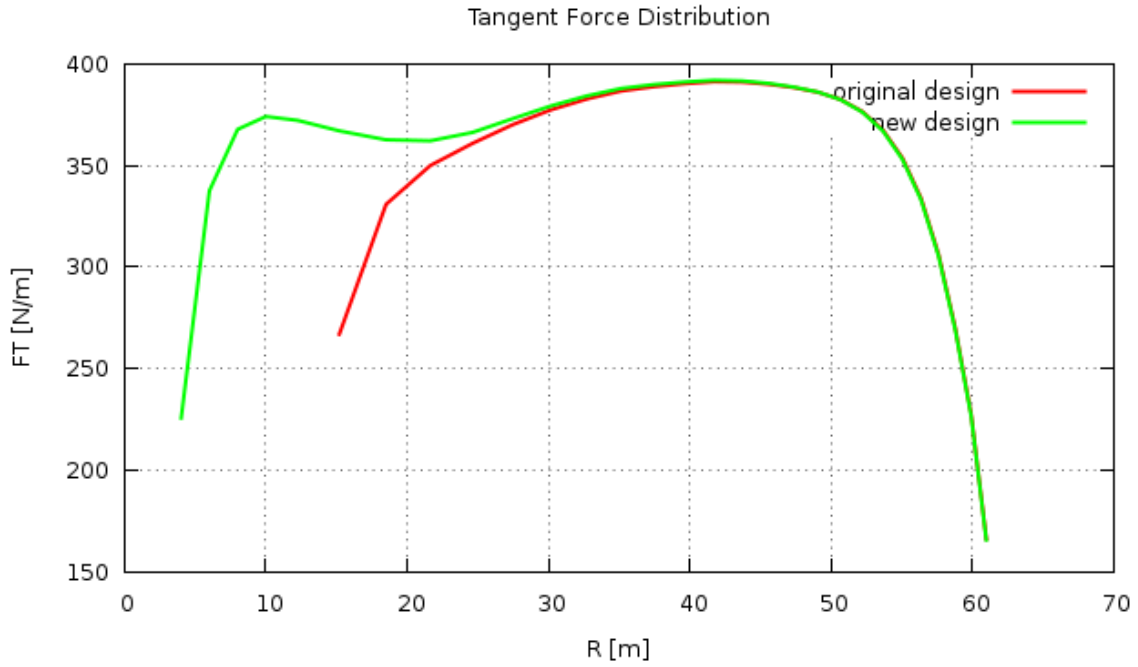
i) Αγνοώντας την επίδραση της συνεκτικότητας



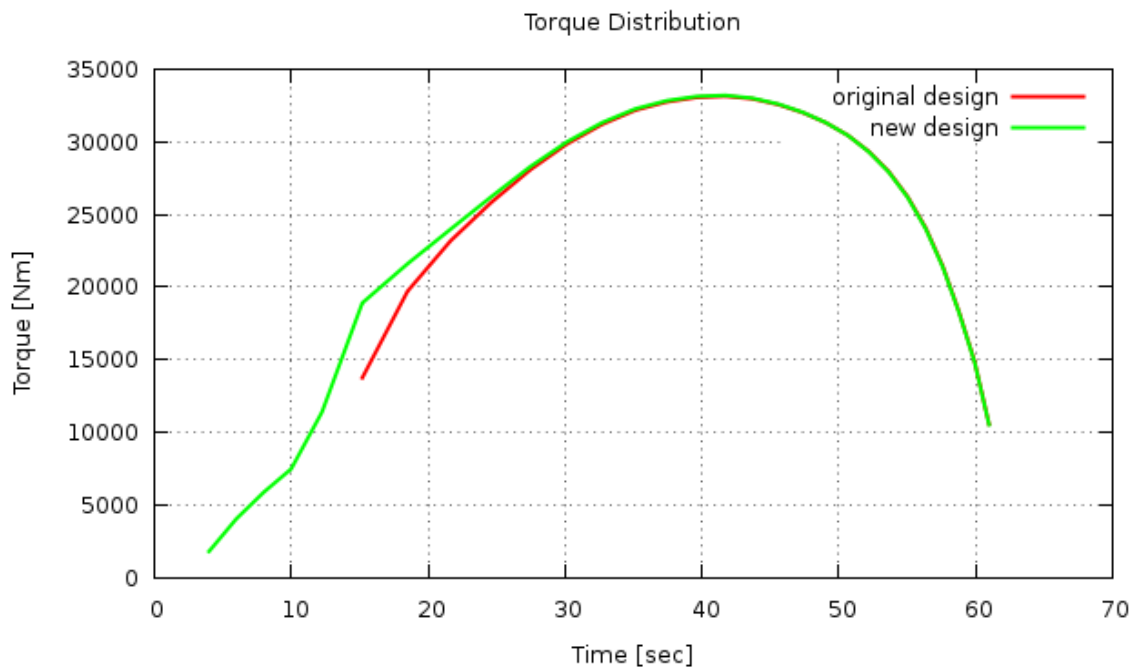
Σχήμα 3.1 Παραγόμενη ισχύς



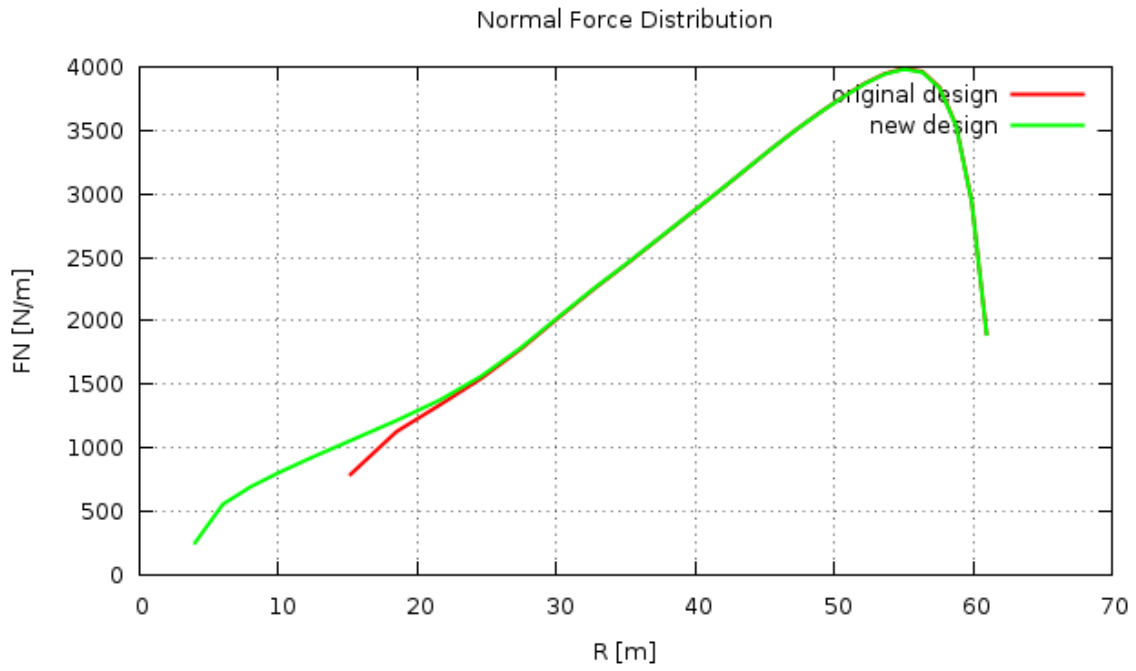
Σχήμα 3.2 Κατανομή της γωνίας πρόσπτωσης κατά μήκος του πτερυγίου



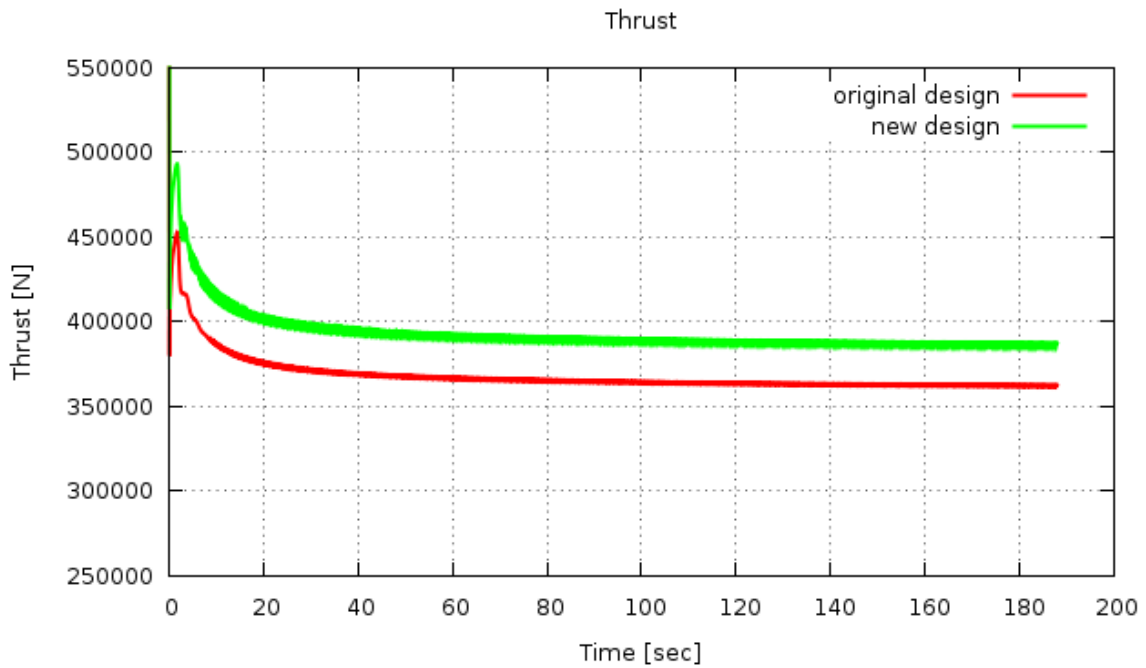
Σχήμα 3.3 Κατανομή της εφαπτομενικής δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



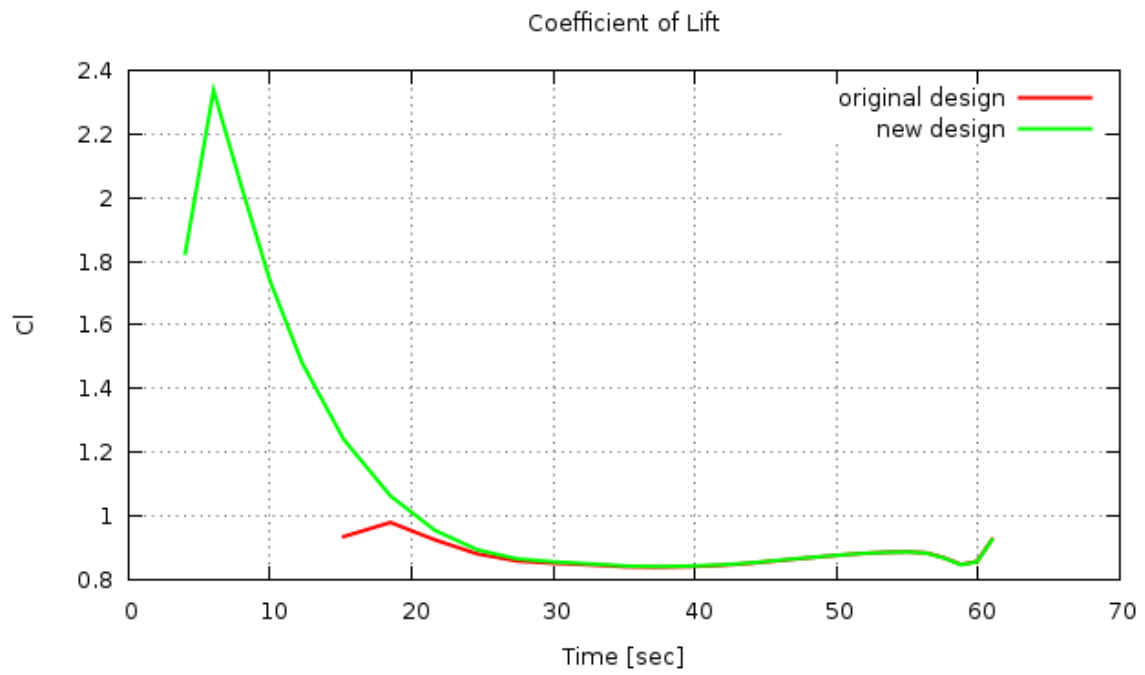
Σχήμα 3.4 Κατανομή της ροπής κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.5 Κατανομή της καθέτου δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.6 Η δύναμη της ώσης

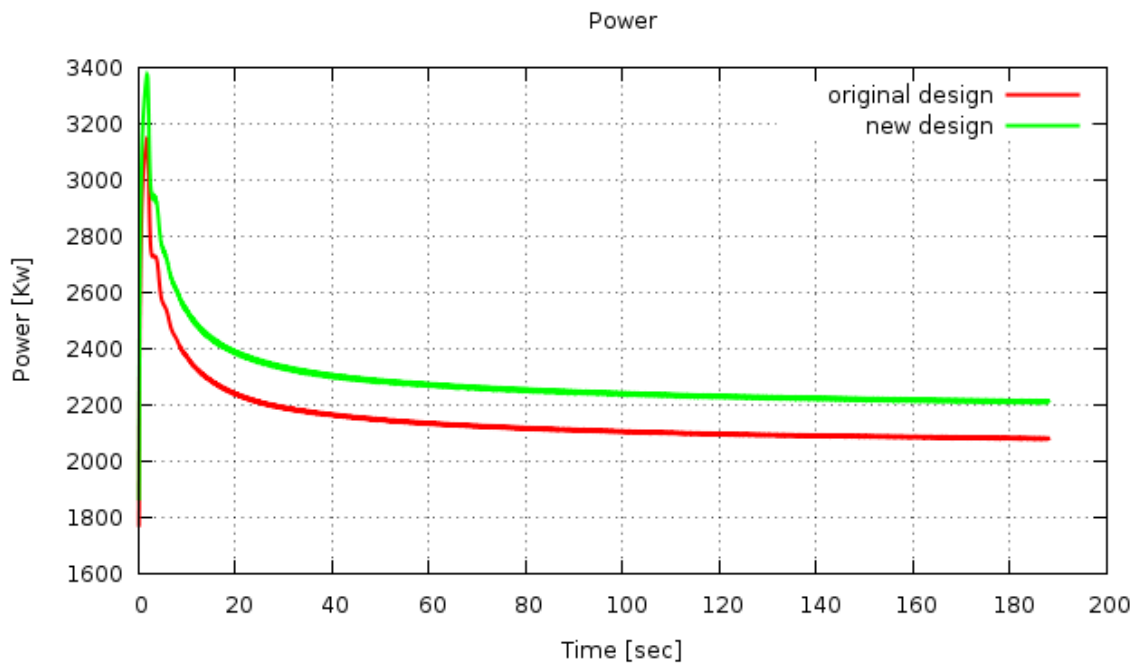


Σχήμα 3.7 Κατανομή του συντελεστή άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου

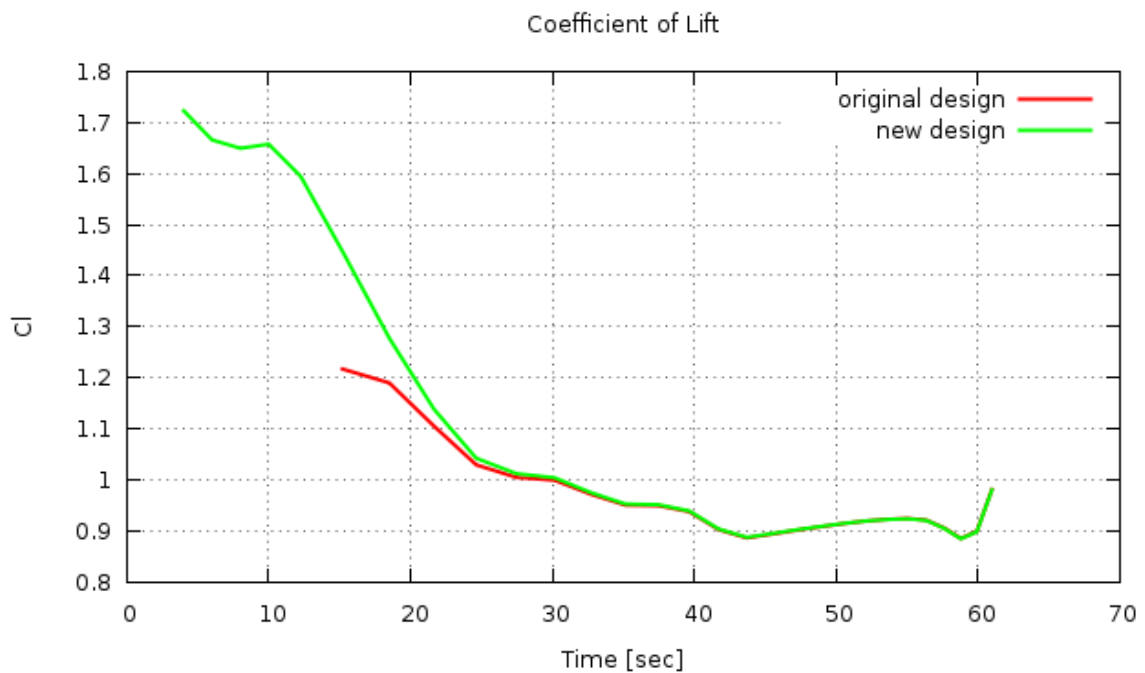
Ακτινική θέση(m)	Ισχύς αρχικός σχεδιασμός (kw)	Ισχύς επέκταση (kw)	Ποσοστό αύξησης %
4		1.81	
6		4.04	
8		5.88	
10		7.48	
12.25		11.39	
15.19	13.46	18.91	40.47
18.50	19.50	21.62	10.83
21.64	22.99	23.97	4.26
24.62	25.62	26.16	2.11
27.46	27.79	28.16	1.33
30.15	29.51	29.81	1.02
32.71	30.80	31.08	0.88
35.13	31.73	31.98	0.80
37.44	32.27	32.51	0.74
39.64	32.55	32.78	0.70
41.72	32.61	32.82	0.65
43.70	32.42	32.62	0.61
45.58	32.02	32.20	0.57
47.36	31.46	31.63	0.53
49.06	30.76	30.91	0.48
50.67	29.88	30.01	0.43
52.20	28.77	28.88	0.37
53.66	27.40	27.49	0.32
55.04	25.68	25.75	0.26
56.35	23.57	23.62	0.2
57.60	20.97	21.01	0.15
58.78	17.90	17.92	0.08
59.91	14.57	14.57	0.02
60.98	10.28	10.28	0.02

Πίνακας 3.1 Ποσοστιαία μεταβολή στην παραγόμενη ισχύ

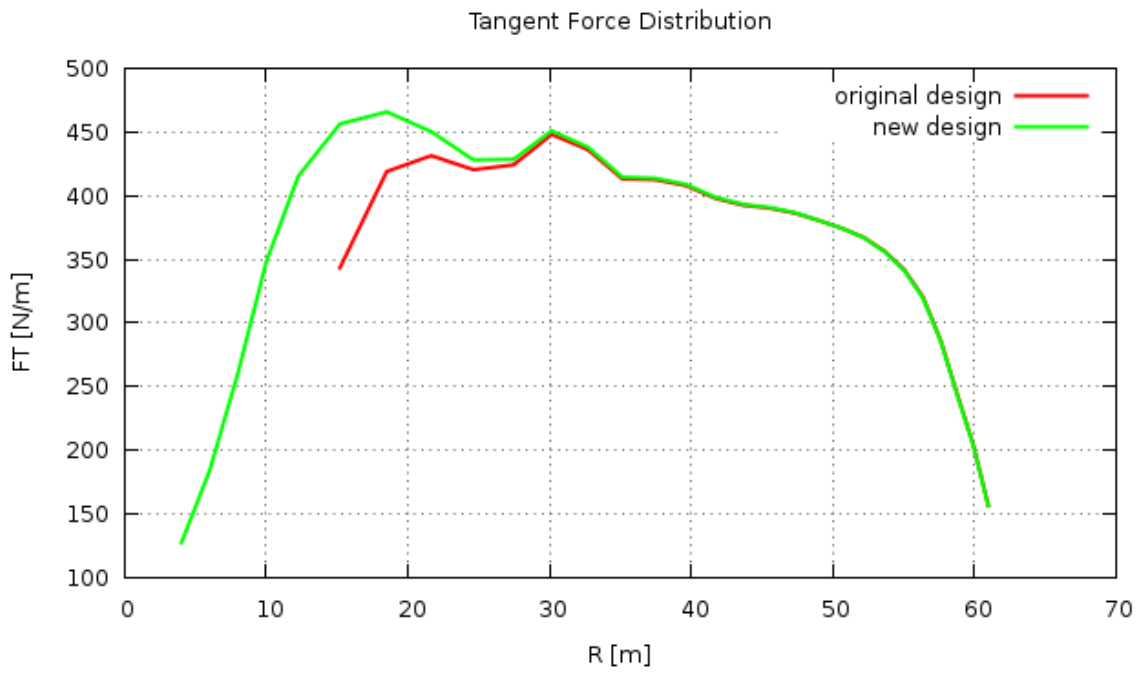
ii) Λαμβάνοντας υπόψιν την επίδραση της συντεκτικότητας.



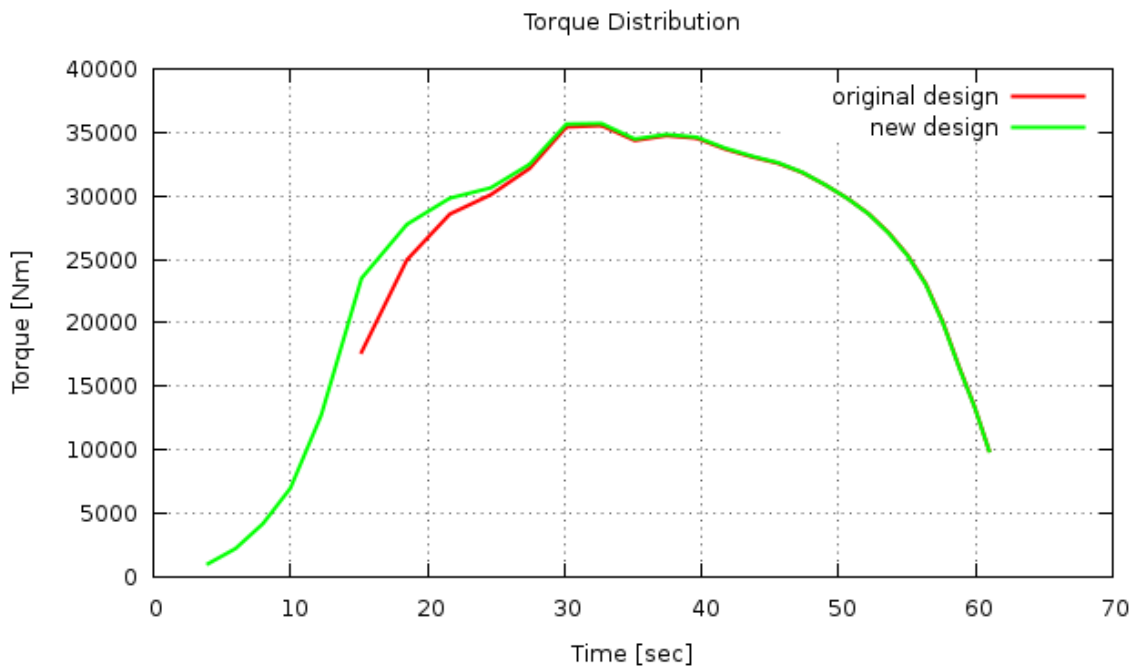
Σχήμα 3.8 Παραγόμενη ισχύς



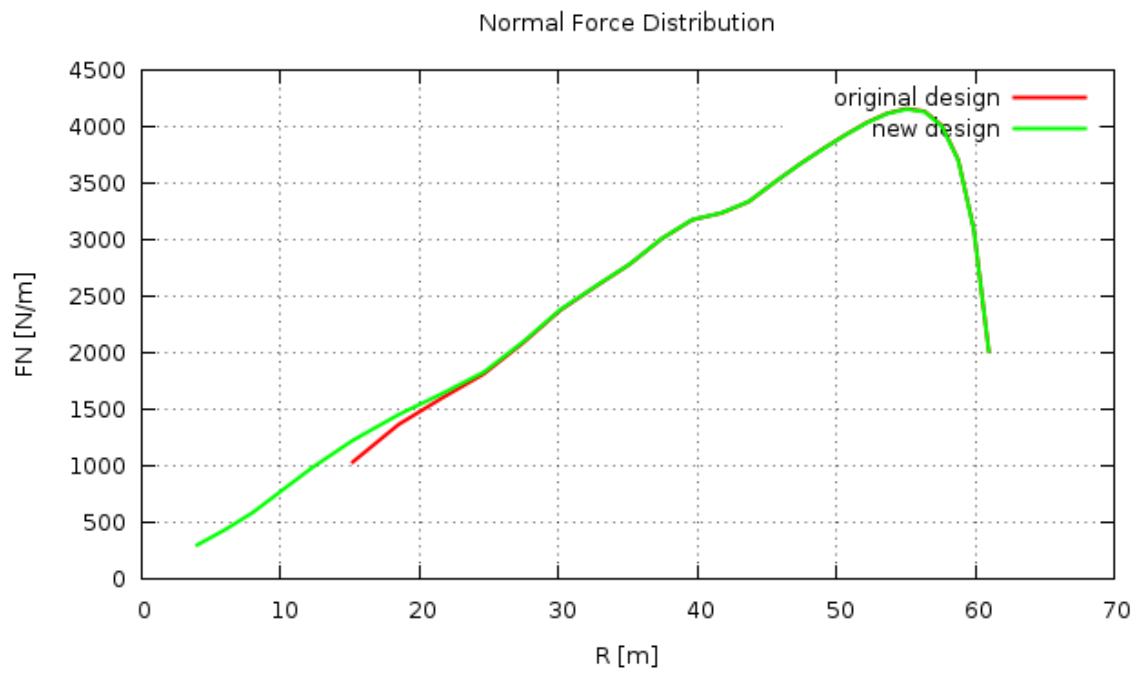
Σχήμα 3.9 Κατανομή του συντελεστή άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου



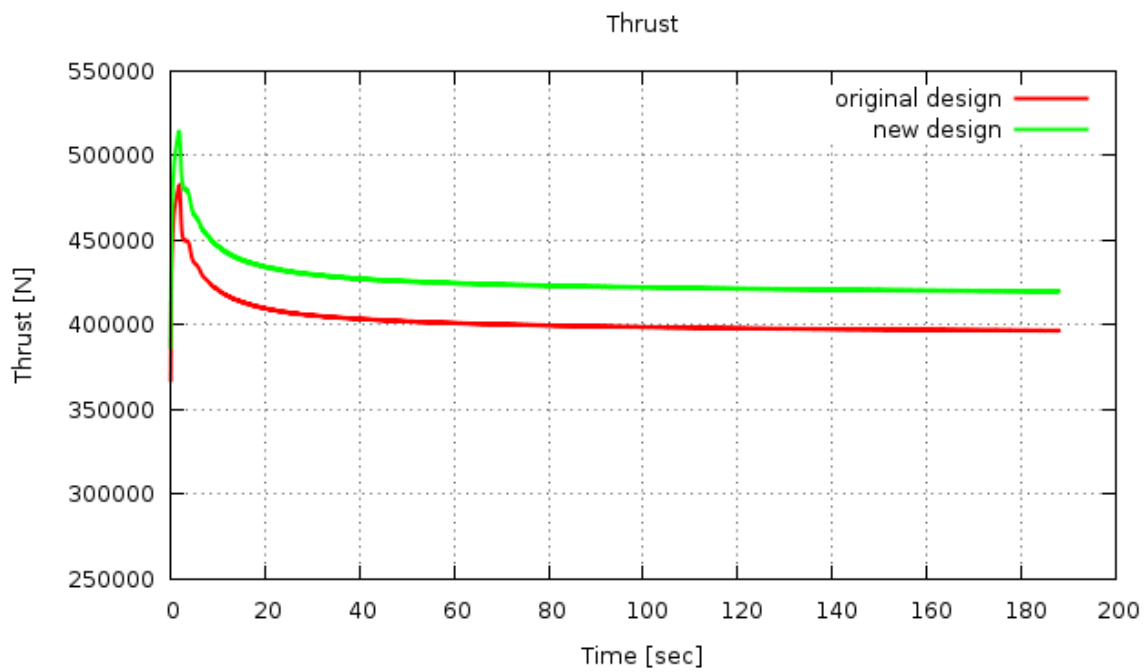
Σχήμα 3.10 Κατανομή της εφαπτομενικής δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.11 Κατανομή της ροπής κατά μήκος του πτερυγίου

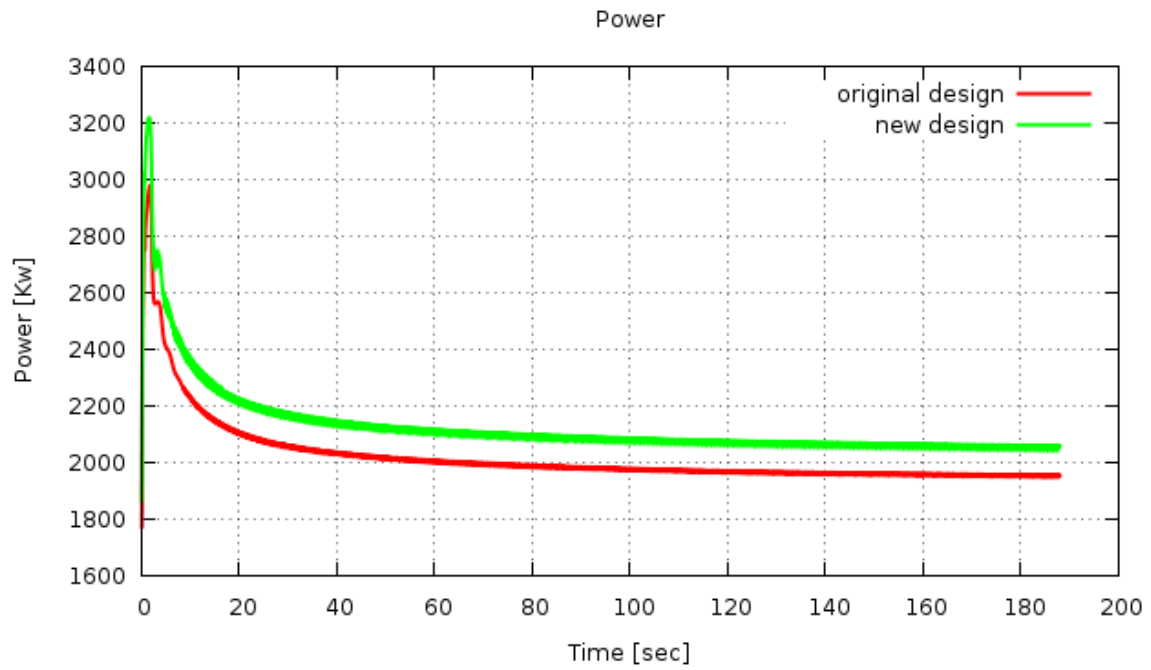


Σχήμα 3.12 Κατανομή της καθέτου δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου

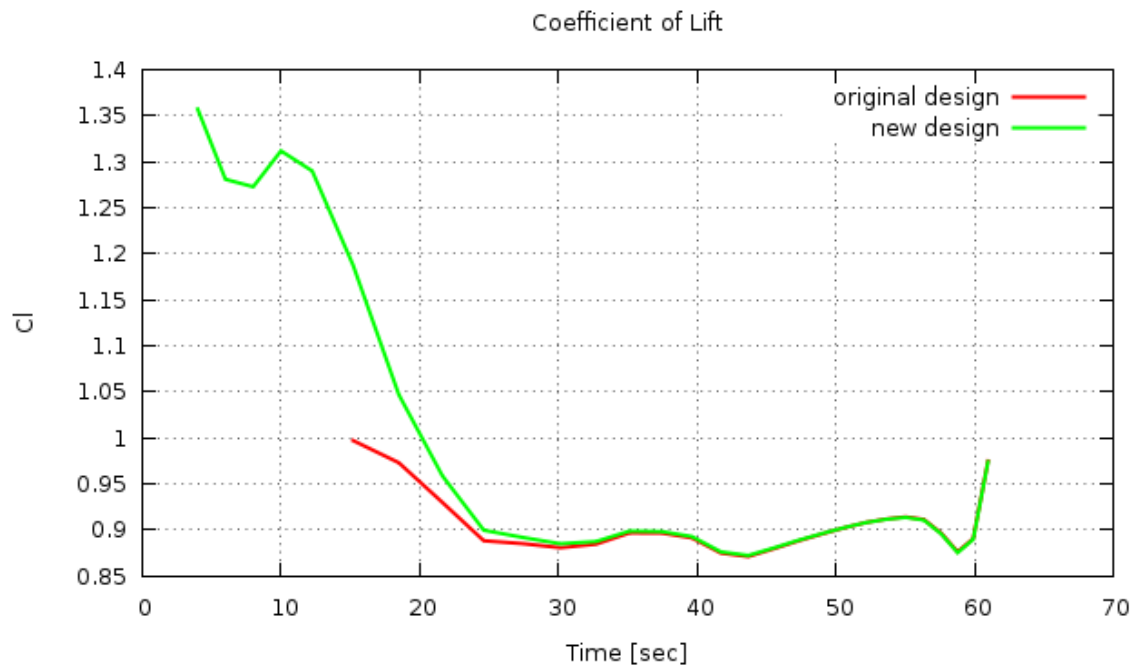


Σχήμα 3.13 Η δύναμη της ώσης

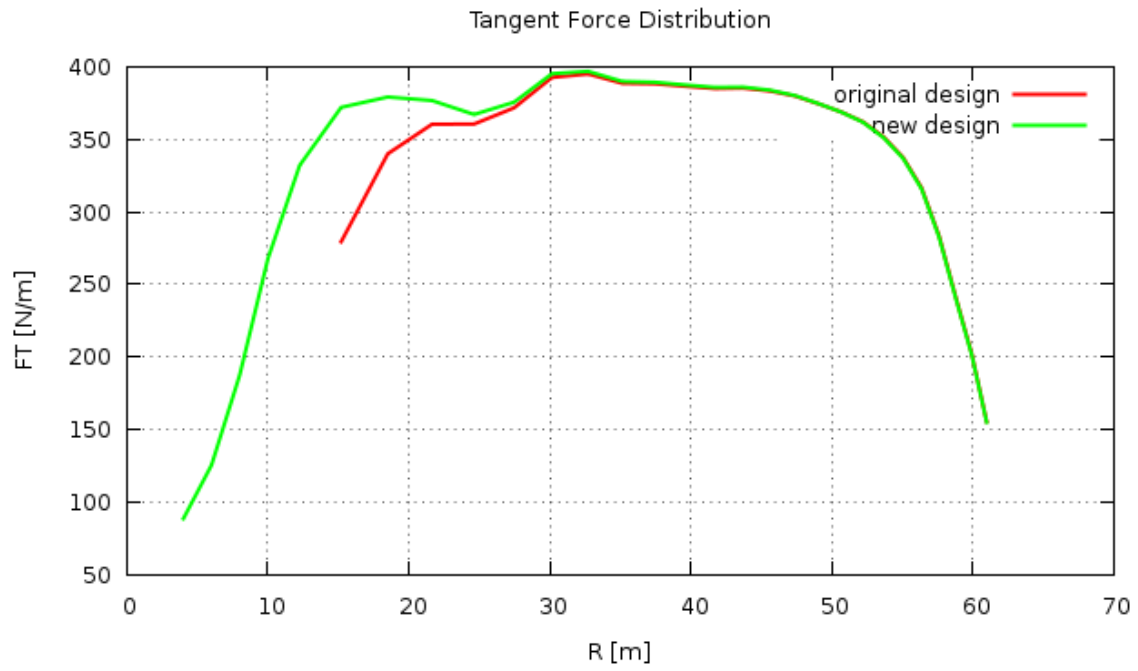
iii) Μέθοδος ONERA



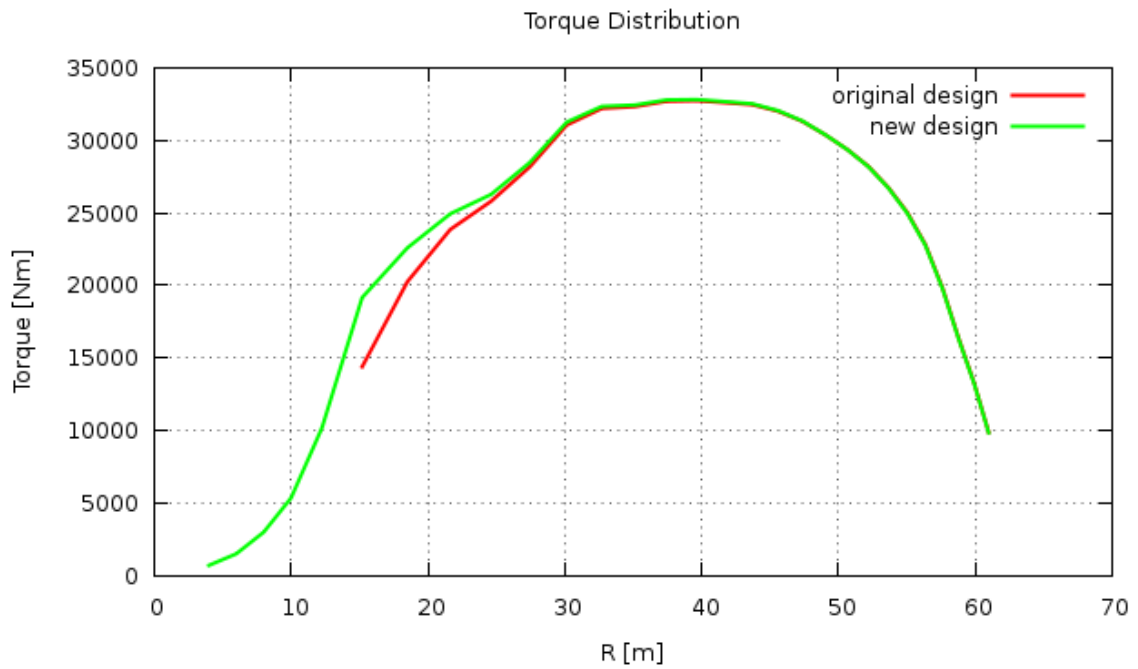
Σχήμα 3.14 Παραγόμενη ισχύς



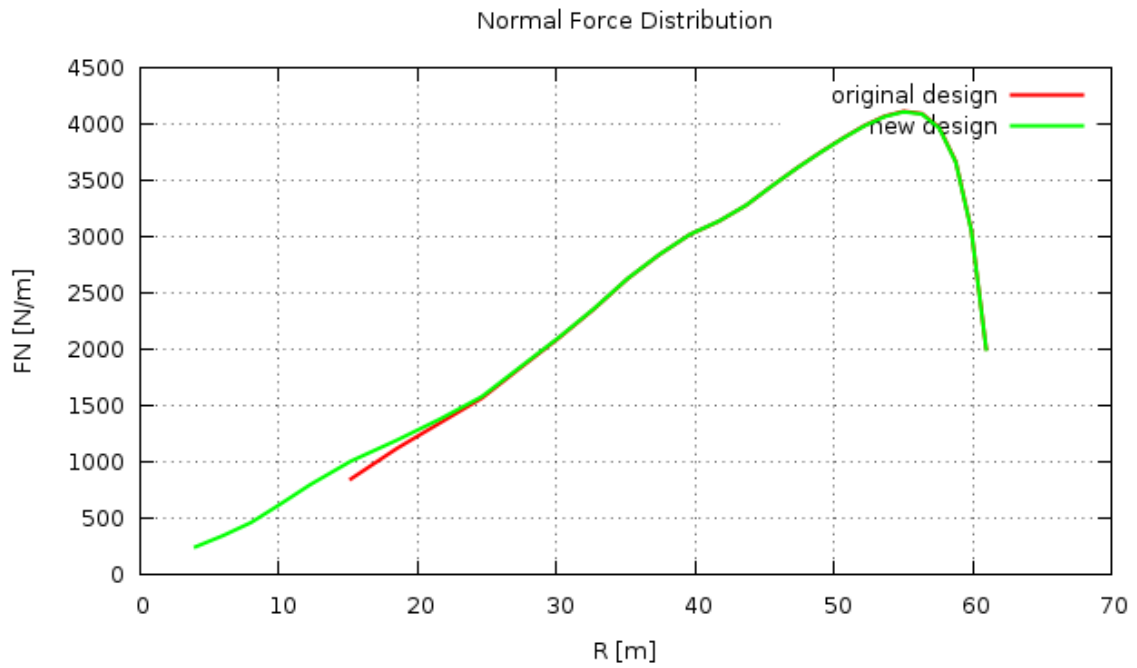
Σχήμα 3.15 Κατανομή του συντελεστή άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου



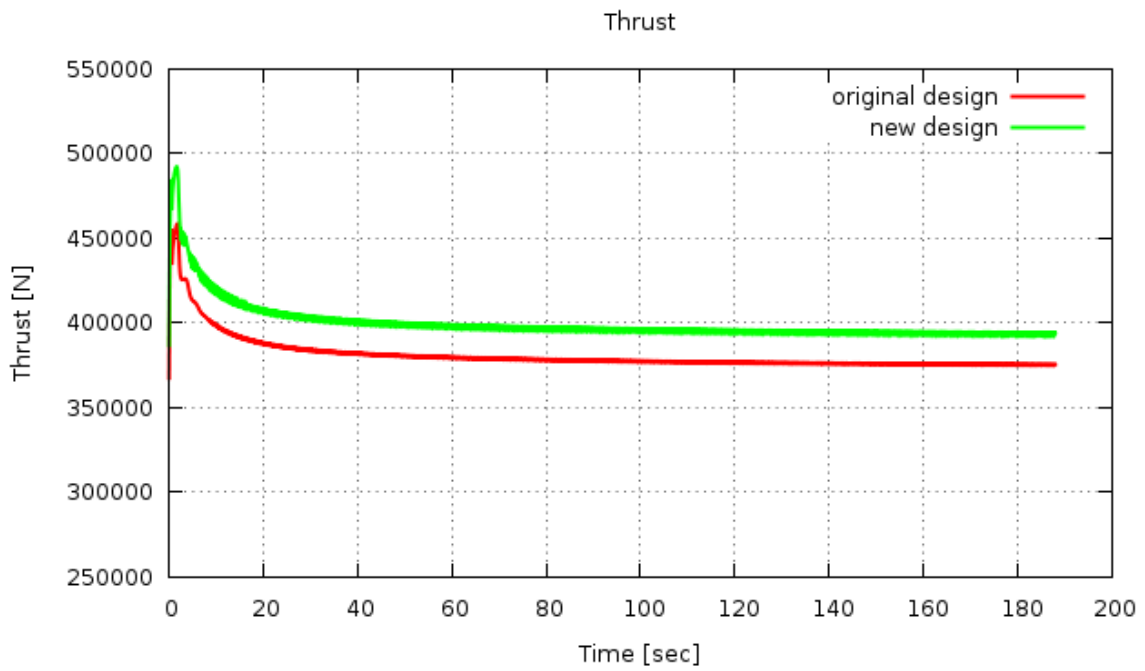
Σχήμα 3.16 Κατανομή της εφαπτομενικής δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.17 Κατανομή της ροπής κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.18 Κατανομή της καθέτου δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 3.19 Η δύναμη της ώσης

Άπο τα παραπάνω συμπεραίνουμε τα εξής:

- Η παραγόμενη ισχύς αυξάνεται και στις 3 περιπτώσεις. Η αύξηση της παραγόμενης ισχύος οφείλεται στο τμήμα της επέκτασης, όπως προκύπτει από το διάγραμμα της ροπής.
- Ωστόσο παρατηρούμαι ότι η εφαπτομενική δύναμη (και η ροπή) παρουσιάζεται αυξημένη στο τμήμα 15-30m. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στον πίνακα της ποσοστιαίας μεταβολής της ισχύος ανά λωρίδα (strip), όπου την μεγαλύτερη αύξηση παρουσιάζουν τα πρώτα strip. Η αύξηση αυτή οφείλεται στην ελαχιστοποίηση της επίδρασης των στροβίλων αποβολής από την ρίζα του πτερυγίου. Οι στροβίλοι αυτοί δημιουργούνται στην ρίζα του πτερυγίου και είναι πρωτίστως υπεύθυνοι για την εισαγωγή της εφαπτομενικής ταχύτητας στον ομόρρο. Προσθέτοντας το επιπλέον τμήμα στο πτερύγιο, προκαλούμε την μετατόπιση των στροβίλων αυτών προς την πλήμνη με αποτέλεσμα να επηρεάζουν λιγότερο την λειτουργία της Α/Γ.
- Η γωνία πρόσπτωσης παρουσιάζεται ιδιαίτερα αυξημένη στο τμήμα της επέκτασης. Αυτό προκαλεί και της ιδιαίτερα υψηλές τιμές (μη αποδεκτές) του συντελεστή άνωσης στην περίπτωση που αγνοούμε την επίδραση της συνεκτικότητας, ενώ ο συντελεστής άνωσης είναι μικρότερος στις υπόλοιπες 2 περιπτώσεις. Για την μείωση της γωνίας πρόσπτωσης θα πρέπει να αυξήσουμε την συστροφή στο τμήμα της επέκτασης.
- Η δύναμη της ώσης αυξάνεται. Η αύξηση αυτή προκύπτει από την επιπλέον κάθετη δύναμη που εμφανίζεται στο τμήμα της επέκτασης. Αυτό σημαίνει ότι συνολικά δεσμεύεται μεγαλύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας του αέρα αλλά και ότι η Α/Γ καταπονείται περισσότερο αξονικά. Η αύξηση αυτή είναι αναμενόμενη αφού προσθέτοντας την επέκταση αυξάνει η στερεότητα του πτερυγίου.

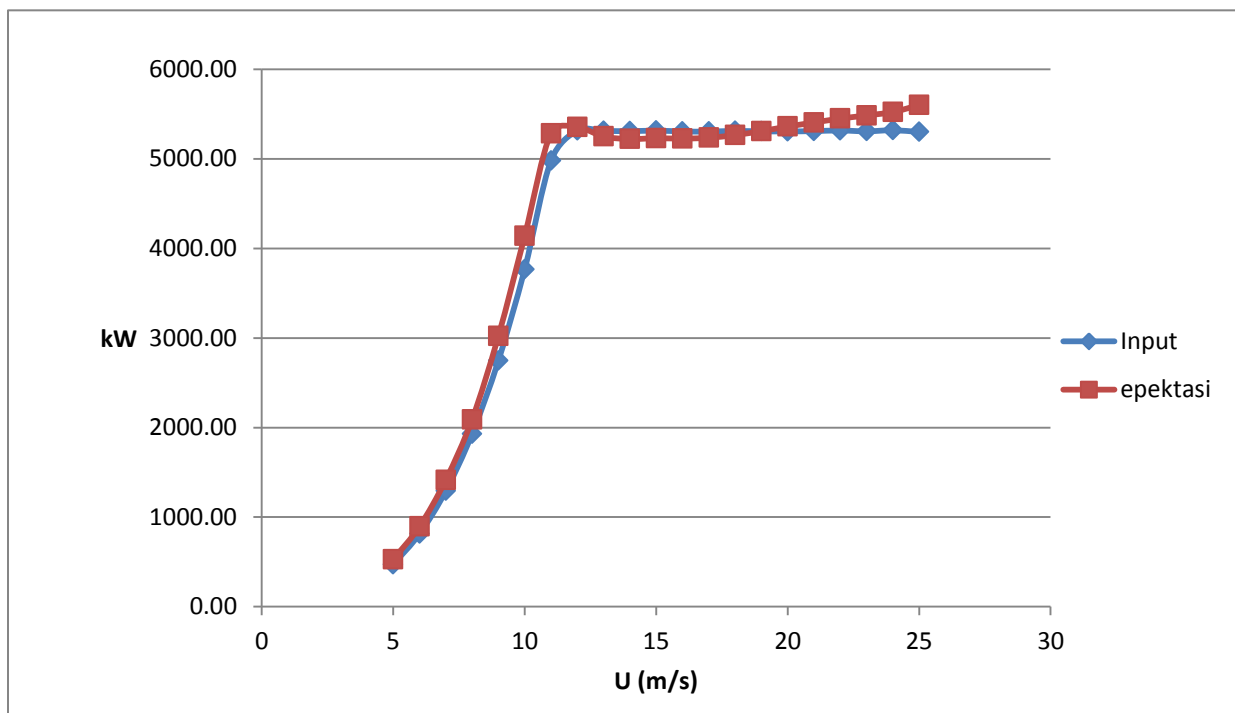
3.3 Κατασκευή καμπύλης ισχύος

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την καμπύλη ισχύος της ανεμογεννήτριας. Για τον σκοπό αυτό χρειάστηκε να τρέξουμε τον κώδικα για ταχύτητες ανέμου 5-25 m/s. Για ταχύτητες μεγαλύτερες των 11 m/s μεταβάλλουμε την γωνία βήματος (pitch) σύμφωνα με τον πίνακα λειτουργίας της Α/Γ αναφοράς. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι τιμές της ισχύος για τις δυο περιπτώσεις (με ή χωρίς επέκταση) καθώς και οι συντελεστές ισχύος.

U(m/s)	Ταχ.Περιστρ. (rad/s)	P (kW)αρχικός σχεδιασμός	Cp αρχικός σχεσιασμός	P(kw) επέκταση	Cp επέκταση
5	0.6273	470.82	0.493	526.61	0.583
6	0.7529	813.57	0.493	894.71	0.573
7	0.8776	1291.91	0.493	1415.41	0.571
8	0.964	1928.46	0.493	2089.63	0.564
9	1.1289	2745.79	0.493	3020.62	0.573
10	1.2545	3766.52	0.493	4139.56	0.573
11	1.2671	4979.23	0.49	5285.21	0.549
12	1.2671	5315.89	0.403	5354.15	0.428
13	1.2671	5312.52	0.317	5250.22	0.33
14	1.2671	5309.6	0.253	5221.76	0.263
15	1.2671	5315.74	0.206	5230.71	0.214
16	1.2671	5306.39	0.17	5226.49	0.176
17	1.2671	5305.11	0.141	5236.06	0.147
18	1.2671	5312.4	0.119	5266.41	0.125
19	1.2671	5307.74	0.101	5310.1	0.107
20	1.2671	5306.72	0.087	5361.04	0.093
21	1.2671	5310.17	0.075	5406.26	0.081
22	1.2671	5317.34	0.065	5450.02	0.071
23	1.2671	5307.82	0.057	5485.09	0.062
24	1.2671	5319.83	0.0504	5319.84	0.055
25	1.2671	5300.17	0.044	5600.6	0.05

Πίνακας 3.2 Παραγόμενη ισχύς και συντελεστής ισχύος

Έτσι παίρνουμε την καμπύλη ισχύος:



Σχήμα 3.20 Καμπύλη ισχύος

Παρατηρούμαι ότι η παραγόμενη ισχύς της Α/Γ με τον νέο σχεδιασμό είναι μεγαλύτερη για τις περισσότερες ταχύτητες ανέμου. Ωστόσο η περιοχή των ταχυτήτων που μας ενδιαφέρει είναι από την ταχύτητα έναρξης λειτουργίας της Α/Γ έως την ονομαστική ταχύτητα δηλαδή από τα 5 έως τα 11m/s. Ως ονομαστική ταχύτητα ανέμου ονομάζουμε την ταχύτητα εκείνη όπου η Α/Γ αποδίδει την ονομαστική ισχύ για πρώτη φορά. Ο λόγος που μας ενδιαφέρει αυτή η περιοχή είναι διότι σε μεγαλύτερες ταχύτητες έχουμε ρύθμιση της ισχύος ώστε αυτή να μην ξεπερνάει την ονομαστική. Η ρύθμιση αυτή πραγματοποιείται στην συγκεκριμένη Α/Γ μεταβάλλοντας την γωνία βήματος. Έτσι απαιτείται εκ νέου υπολογισμός της γωνίας βήματος που απαιτείται για κάθε ταχύτητα αφού έχει αλλάξει η γεωμετρία του πτερυγίου. Για αυτό τον λόγο βλέπουμε ότι σε ορισμένες ταχύτητες μεγαλύτερες των 11m/s παρατηρείται μείωση της παραγόμενης ενέργειας, άρα και του συντελεστή ισχύος.

Στην συνέχεια για να βρούμε την ετήσια παραγόμενη ενέργεια θα χρειαστούμε ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό της κατανομής της ταχύτητας του ανέμου. Η κατανομή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η Weibull, η οποία προσδιορίζει την πιθανότητα η ταχύτητα του ανέμου να βρίσκεται σε μια περιοχή της ταχύτητας 'V' βάσει των παραμέτρων C και K. Η έκφρασή της είναι:

$$f(V)dV = \frac{k}{c} \frac{V^{k-1}}{c} \exp\left\{-\frac{V^k}{c}\right\} dV$$

Η παράμετρος C, ονομάζεται παράμετρος κλίμακας της κατανομής, μετριέται σε m/s ενώ εκφράζει την μέση ταχύτητα του ανέμου . Χάρην ευκολίας θεωρούμαι ότι δίνεται απο την σχέση :

$$C \approx 1.1 \cdot V$$

όπου V είναι η μέση ταχύτητα. Η παράμετρος K ονομάζεται παράμετρος μορφής της κατανομής, είναι καθαρός αριθμός και εκφράζει την διασπορά γύρω απο την μέση ταχύτητα. Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέξαμε είναι C=7 και K=2.

Με την βοήθεια του προγράμματος excel προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

U (m/s)	f(u)	Hours	Ετήσια Παραγόμενη Ενέργεια γεωμετρία(kwh)	Ετήσια Παραγόμενη Ενέργεια με επέκταση (kwh)
5	0.054112	474.0182	223174.9581	249622.713
6	0.060559	530.5001	431598.6909	474644.1991
7	0.065062	569.9465	736322.4319	806706.6547
8	0.067611	592.2709	1142168.886	1237626.922
9	0.06829	598.2185	1642584.577	1806992.757
10	0.067266	589.2463	2219409.414	2439222.583
11	0.064768	567.3639	2825035.297	2998640.689
12	0.061068	534.9522	2843749.907	2864217.052
13	0.056459	494.5775	2627453.917	2596641.092
14	0.051235	448.8166	2383038.806	2343615.068
15	0.045674	400.1056	2126857.531	2092839.737
16	0.040025	350.6214	1860533.002	1832521.973
17	0.034498	302.2003	1603207.111	1582340.636
28	0.002463	21.57339	114606.5591	113614.2282
29	0.001777	15.56672	82624.124	82660.7745
20	0.020078	175.8792	933342.4523	942895.6325
21	0.016255	142.3973	756153.7405	769837.359
22	0.012966	113.5784	603935.5206	619004.7283
23	0.01019	89.26554	473806.1156	489629.3751
24	0.007893	69.14216	367824.9375	381879.163
25	0.006026	52.78858	279788.51	295647.5231

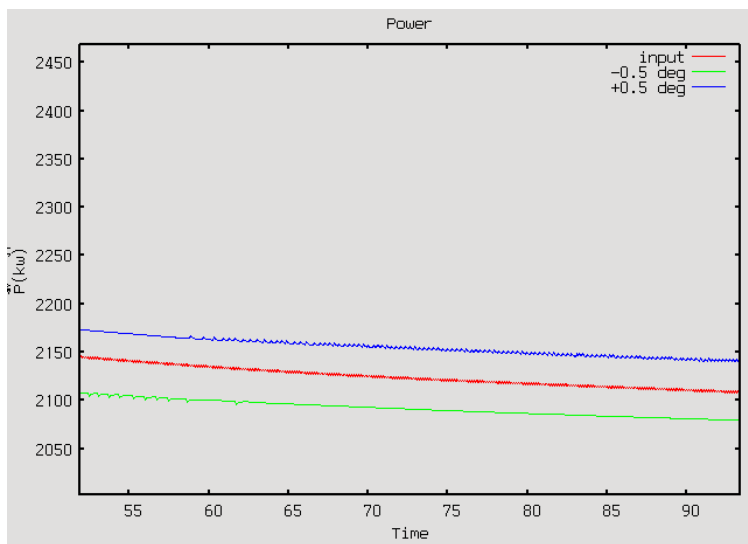
Πίνακας 3.3 Ετήσια παραγόμενη ενέργεια

Για να υπολογίσουμε το ποσοστό αύξησης της ετήσιας παραγόμενης ενέργειας κρατάμε σταθερές τις τιμές της παραγόμενης ισχύος για ταχύτητες ανέμου μεγαλύτερες των 11m/s, όπου και προκύπτει ότι έχουμε αύξηση της ετήσιας παραγόμενης ισχύος κατά 3.02%.

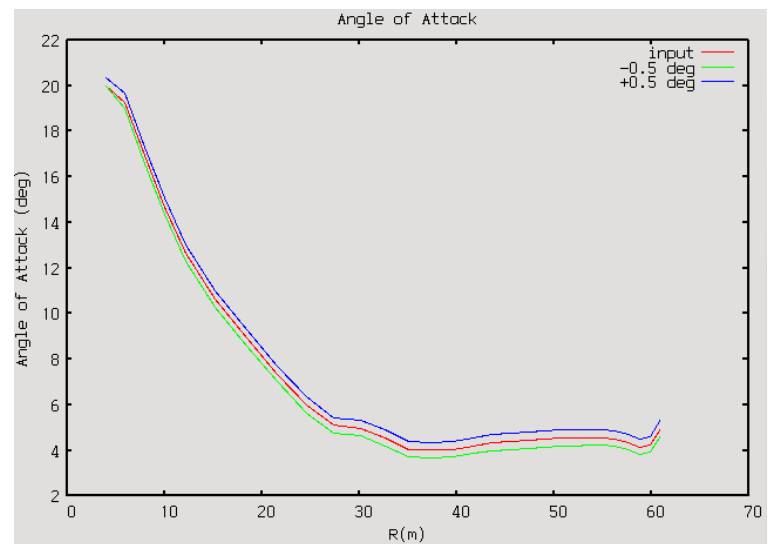
3.4 Έλεγχος συστροφής πτερυγίου

Στην συνέχεια για την ίδια ταχύτητα ανέμου μεταβάλλαμε την γωνία βήματος κατά μισή μοίρα ώστε να δούμε αν η συστροφή του πτερυγίου που επιλέξαμε είναι η βέλτιστη ή εάν χρειάζεται περαιτέρω επεξεργασία.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν φαίνεται η παραγόμενη ισχύς και η γωνία πρόσπτωσης για τις τρεις περιπτώσεις με γωνία βήματος +0.5 μοίρες, με γωνία βήματος -0.5 μοίρες και χωρίς γωνία βήματος.



Σχήμα 4.21 Παραγόμενη ισχύς



Σχήμα 4.22 Γωνία πρόσπτωσης

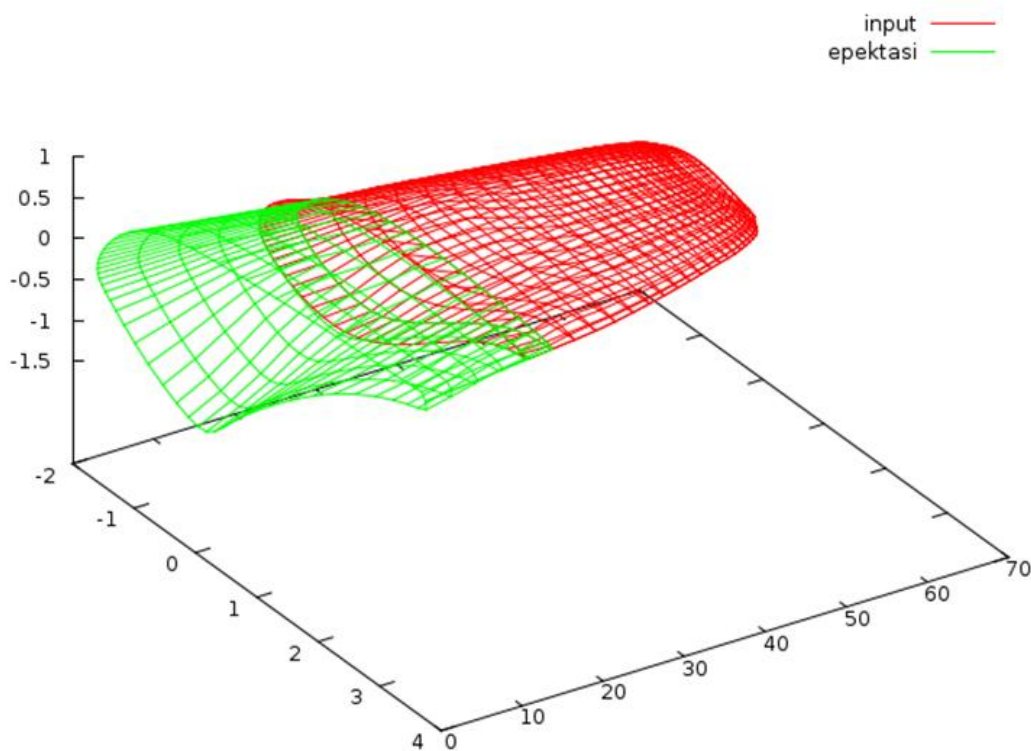
Παρατηρούμαι ότι η παραγόμενη ισχύς καθώς και η γωνία πρόσπτωσης μεταβάλλονται. Συγκεκριμένα με γωνία βήματος +0.5 μοίρες αυξάνονται ενώ με γωνία βήματος -0.5 μοίρες μειώνονται, ενώ αναμέναμε το αντίθετο. Συνεπώς η κατανομή της συστροφής που επιλέχθηκε δεν είναι η βέλτιστη.

Κεφάλαιο 4

Αεροτομή με παχος (thick)

4.1 Δεδομένα και βασικά σημεία ελέγχου

Οι υπολογισμοί έγιναν για ομοιόμορφη ταχύτητα ανέμου 8 m/s και γωνιακή ταχύτητα 1.003 rad/s, ενώ η επίδραση της συνεκτικότητας δεν λαμβάνεται υπόψιν. Αρχικά το αεροδυναμικό τμήμα του πτερυγίου εκτεινόταν από τα 20m έως τα 61.5m, ενώ μετά την επέκταση η κατανομή της χορδής και της συστροφής φτάνει έως τα 3m. Στο εικόνα που ακολουθεί φαίνεται η γεωμετρία των δύο πτερυγίων.



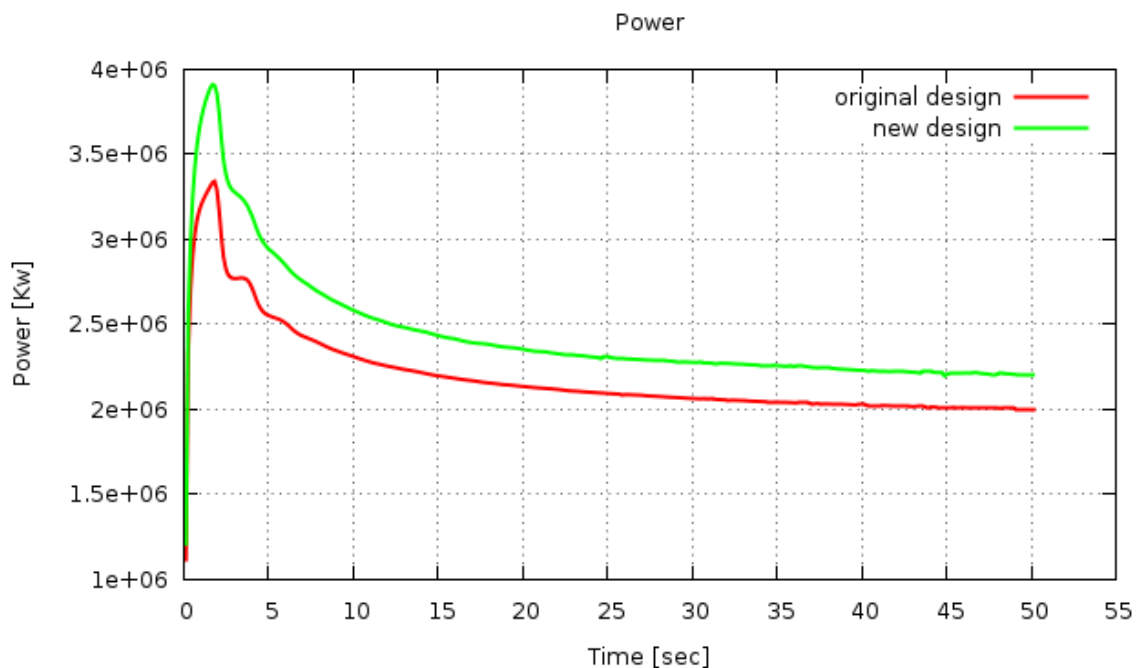
Εικόνα 4.1 Γεωμετρία πτερυγίου

Τα σημεία που μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε όπως και στην περίπτωση του λεπτού πτερυγίου είναι:

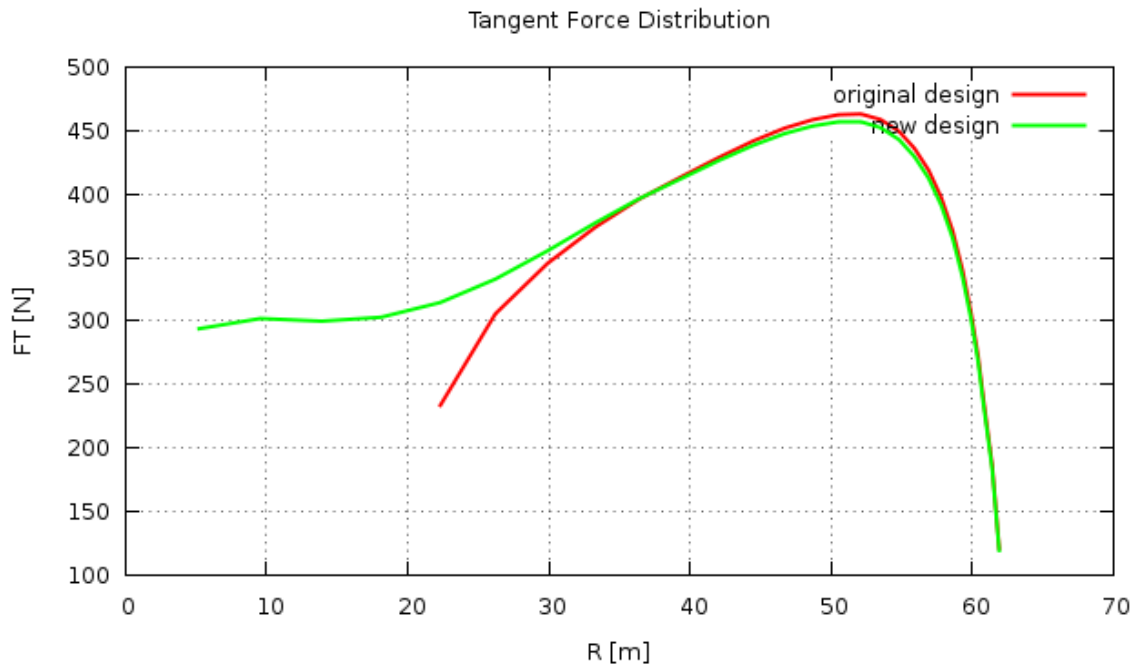
- Η συνολική ισχύς που αποδίδει η Α/Γ. Έτσι θα εκτιμήσουμε αν έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα και στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε τους λόγους στους οποίους αυτό οφείλεται.
- Οι αξονικές δυνάμεις κατά μήκος των πτερυγίων καθώς σχετίζονται άμεσα με την αντοχή των πτερυγίων.
- Οι περιφερειακές δυνάμεις κατά μήκος των πτερυγίων. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν την κύρια συνιστώσα την άνωσης, άρα αποτελούν την κινητήρια δύναμη για το πτερόγιο.
- Η δύναμη της ώσης, η οποία αποτελεί την συνολική δύναμη αντίδρασης του αέρα στην Α/Γ.
- Ο συντελεστή άνωσης. Είναι δευτερόν μέγεθος αφού προκύπτει μέσα από τα φορτία και την σχετική ταχύτητα.
- Η παραγόμενη ροπή κατά μήκος των πτερυγίων.

4.2 Αποτελέσματα

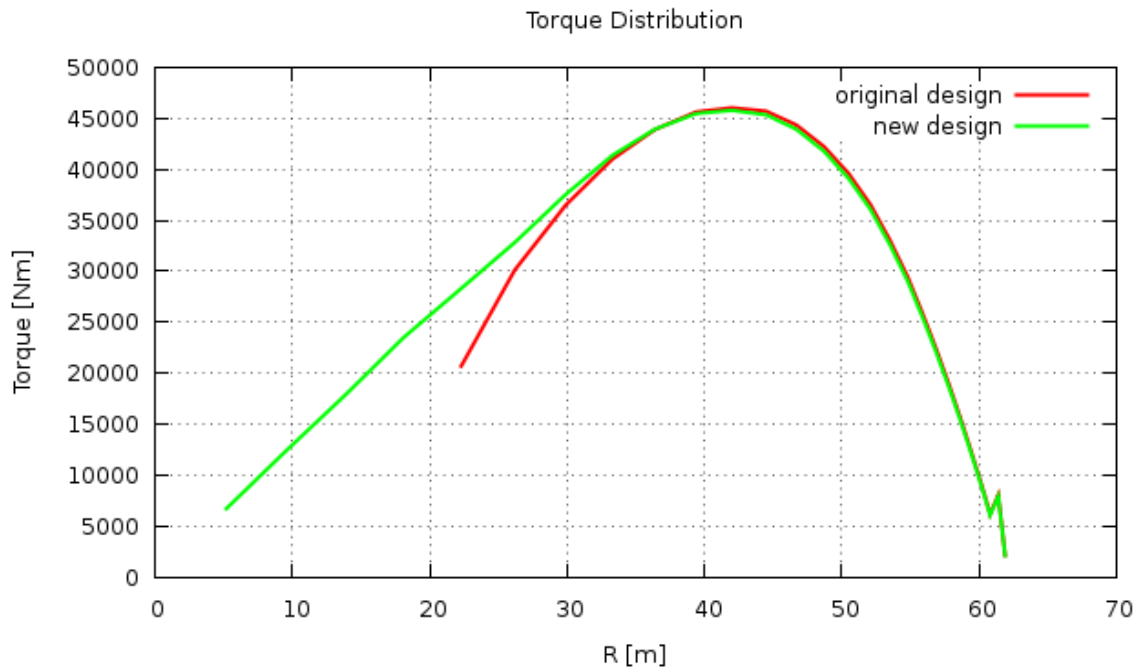
Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζονται τα βασικά σημεία ελέγχου με την βοήθεια καμπυλών. Στην περίπτωση της πτέρυγας με πάχος στα αποτελέσματα δεν λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της συνεκτικότητας.



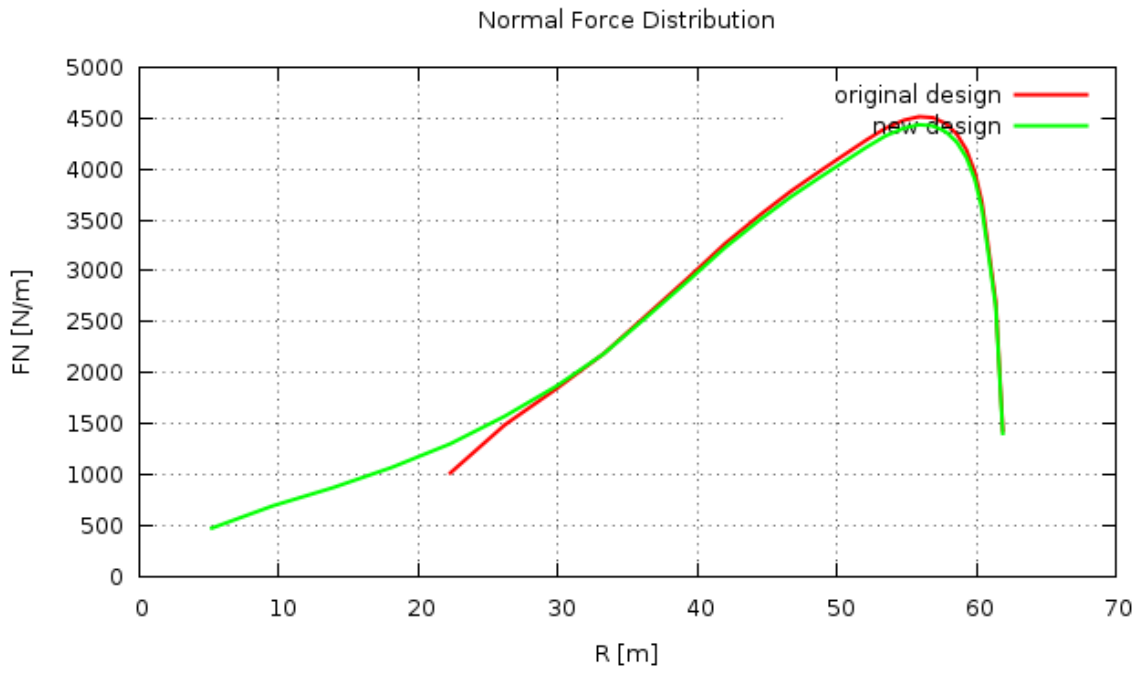
Σχήμα 4.1 Παραγόμενη ισχύς



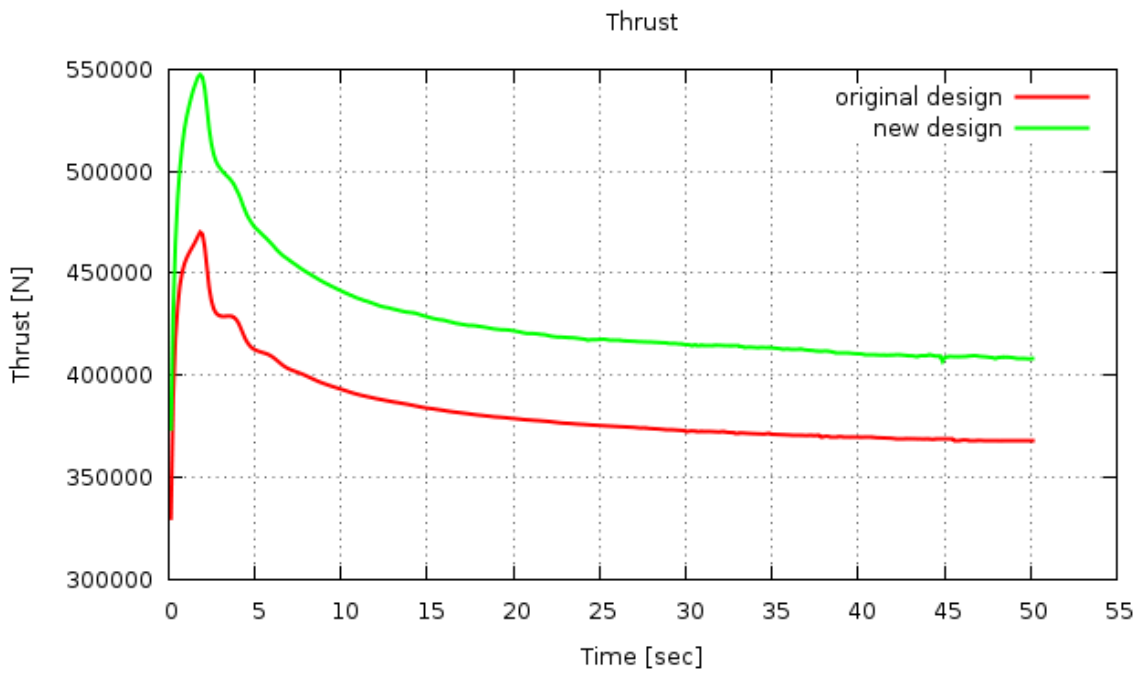
Σχήμα 4.2 Κατανομή της εφαπτομενικής δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



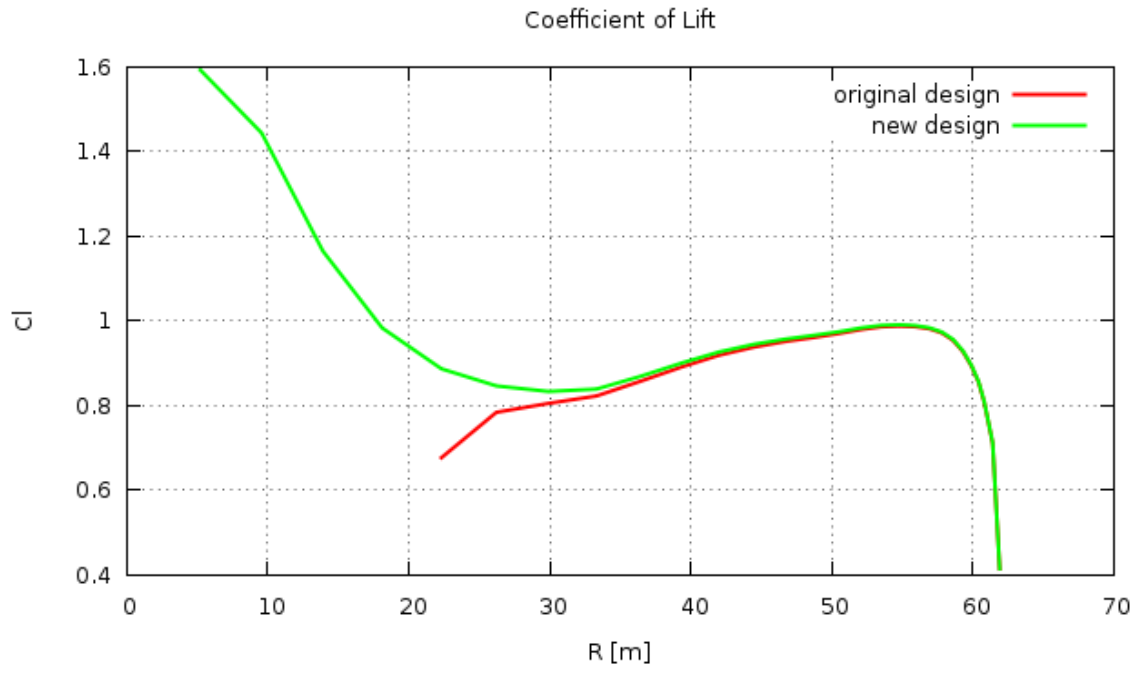
Σχήμα 4.3 Παραγόμενη ροπή κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 4.4 Κατανομή της καθέτης δύναμης κατά μήκος του πτερυγίου



Σχήμα 4.5 Δύναμη ώσης



Σχήμα 4.6 Συντελεστής άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου

Ακτινική θέση (m)	Ισχύς αρχική γεωμετρία (kw)	Ισχύς επέκταση (kw)	Ποσοστό Μεταβολής %
5.2		20.25	
9.55		37.34	
13.9		53.97	
18.1		70.76	
22.3	62.31	85.30	37
26.2	90.66	98.88	9
29.9	109.76	113.02	3
33.3	123.34	124.57	0.1
36.4	132.09	132.33	0.02
39.4	137.29	136.95	-0.02
42	138.51	137.89	-0.04
44.5	137.51	136.58	-0.07
46.7	133.42	132.29	-0.08
48.7	127.09	125.84	-0.09
50.5	119.13	117.81	-0.11
52.1	109.91	108.58	-0.12
53.5	99.53	98.25	-0.13
54.8	88.68	87.48	-0.13
55.9	77.71	76.62	-0.14
56.9	67.11	66.15	-0.14
57.8	57.01	56.18	-0.14
58.6	47.54	46.84	-0.14
59.3	38.76	38.17	-0.15
59.9	30.96	30.51	-0.14
60.4	24.32	23.96	-0.14
60.8	18.62	18.35	-0.14
61.4	24.28	23.93	-0.14
61.9	6.47	6.38	-0.12

Πίνακας 4.1 Ποσοστιαία μεταβολή στην παραγόμενη ισχύ

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε τα εξής:

- Η παραγόμενη ισχύς αυξάνεται κατά 9.1%. Η αύξηση της παραγόμενης ισχύος οφείλεται στο τμήμα της επέκτασης, όπως προκύπτει από το διάγραμμα της ροπής.
- Ωστόσο παρατηρούμαι ότι η εφαπτομενική δύναμη (και η ροπή) παρουσιάζεται αυξημένη στο τμήμα 20-35m. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στον πίνακα με την ποσοστιαία μεταβολή της ισχύος ανά strip, όπου την μεγαλύτερη αύξηση παρουσιάζουν τα πρώτα strip. Η αύξηση αυτή οφείλεται στην ελαχιστοποίηση της επίδρασης των στροβίλων αποβολής από την ρίζα του πτερυγίου. Οι στρόβιλοι αυτοί δημιουργούνται στο τέλος του αεροδυναμικού σχεδιασμού του πτερυγίου. Οι στρόβιλοι αυτοί είναι πρωτίστως υπεύθυνοι για την εισαγωγή της εφαπτομενικής ταχύτητας στον ομόρρου. Προσθέτοντας το επιπλέον τμήμα στο πτερύγιο, προκαλούμε την μετατόπιση των στροβίλων αυτών προς την πλήμνη με αποτέλεσμα να επηρεάζουν λιγότερο την λειτουργία της Α/Γ.
- Η δύναμη της ώσης αυξάνεται κατά 10%. Αυτό σημαίνει ότι συνολικά δεσμεύεται μεγαλύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας του αέρα αλλά και ότι η Α/Γ καταπονείται περισσότερο. Η αύξηση αυτή είναι αναμενόμενη αφού προσθέτοντας την επέκταση αυξάνει η στερεότητα του πτερυγίου.
- Ο συντελεστής άνωσης παρουσιάζεται αυξημένος, λόγω της υπόθεσης της μη συνεκτικότητας.

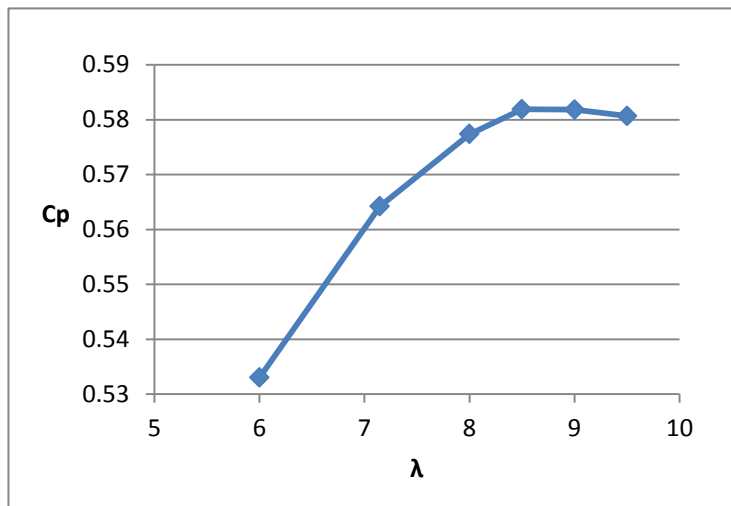
4.3 Εύρεση βέλτιστης αδιάστατης ταχύτητας ακροπτερυγίου (TSR) και ετήσιας παραγόμενης ενέργειας

Ως αδιάστατη ταχύτητα ακροπτερυγίου λ ορίζουμε τον λόγο της γραμμικής ταχύτητας του ακροπτερυγίου προς την ταχύτητα του ανέμου.

$$\lambda = \frac{\omega R}{U}$$

Όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του πτερυγίου, R η ακτίνα και U η ταχύτητα του ανέμου. Ο συντελεστής ισχύος της ανεμογεννήτριας εξαρτάται από το λ . Για ταχύτητες μικρότερες της ονομαστικής η ανεμογεννήτρια λειτουργεί στον βέλτιστο συντελεστή ισχύος για μια τιμή του λ . Η τιμή αυτή ονομάζεται βέλτιστη ταχύτητα ακροπτερυγίου (λ_{opt}) και για την ανεμογεννήτρια αναφοράς που χρησιμοποιούμε είναι $\lambda=7.9$ (Πίνακας 3.1).

Ωστόσο αλλάζοντας την γεωμετρία αλλάζει και η τιμή του λ_{opt} . Για τον σκοπό αυτό επιλέξαμε την ονομαστική ταχύτητα ανέμου 11 m/s και μεταβάλλαμε την τιμή του λ από 6 έως 9.5. Οπότε προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



Η τιμή του λ που δίνει τον μέγιστο συντελεστή ισχύος, ίσο με 0.58, είναι για $\lambda = 8.5$ και αντιστοιχεί σε ταχύτητα περιστροφής 1.507 rad/s.

Σχήμα 4.6 Συντελεστής ισχύος για διάφορες τιμές του λ

Στην συνέχεια τρέχουμε τον κώδικα για ταχύτητες ανέμου 5-11 m/s και τιμή $\lambda=8.5$, ώστε να υπολογίσουμε με την βοήθεια της κατανομής Weibull την ετήσια παραγόμενη ενέργεια. Όπως και στην περίπτωση του thick πτερυγίου, μας ενδιαφέρουν οι ταχύτητες ανέμου μέχρι την ονομαστική (11m/s) καθώς σε μεγαλύτερες ταχύτητες η παραγόμενη ενέργεια μειώνεται για λόγους αντοχής της Α/Γ. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε την παραγόμενη ισχύ, τον συντελεστή ισχύος καθώς και την ταχύτητα περιστροφής για τις παραπάνω ταχύτητες.

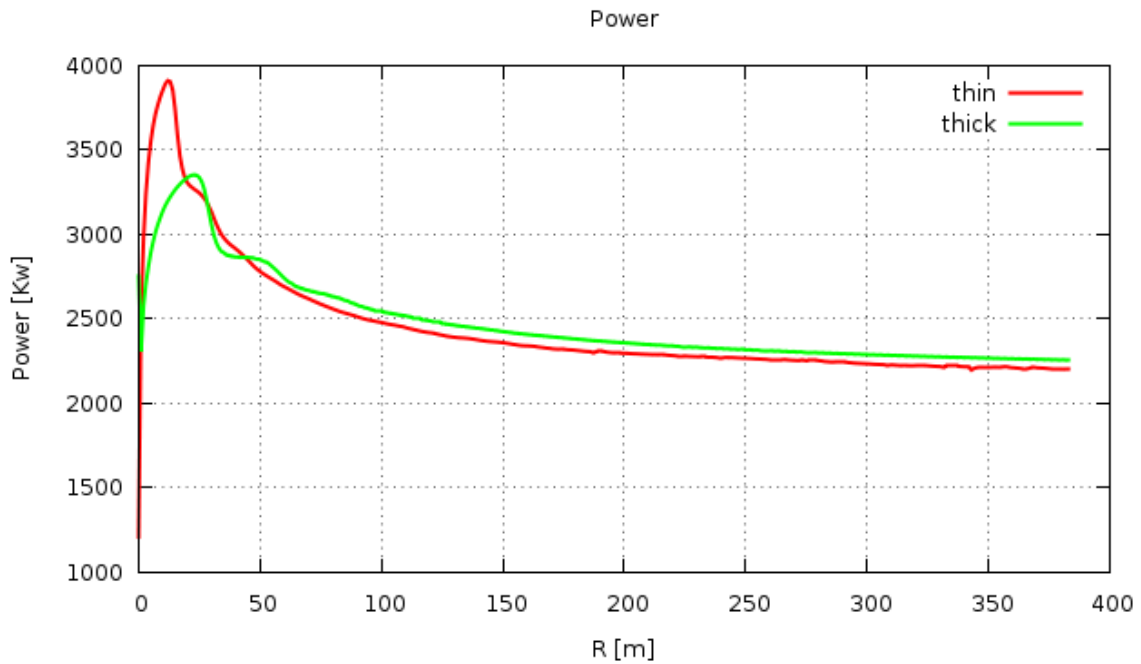
U (m/s)	λ	P (Kw)	Cp Επέκταση	Cp Αρχικός σχεδιασμός
5	8.5	556.0479	0.582458645	0.49317761
6	8.5	984.5596	0.596830771	0.493178138
7	8.5	1522.632	0.581250896	0.49317696
8	8.5	2279.981	0.58307464	0.49317711
9	8.5	3314.486	0.595321471	0.493177528
10	8.5	4444.365	0.581932548	0.493177733
11	8.5	5415.132	0.581901264	0.489831883

Πίνακας 4.2 Παραγόμενη ισχύς και συντελεστής ισχύος για λ_{otm}

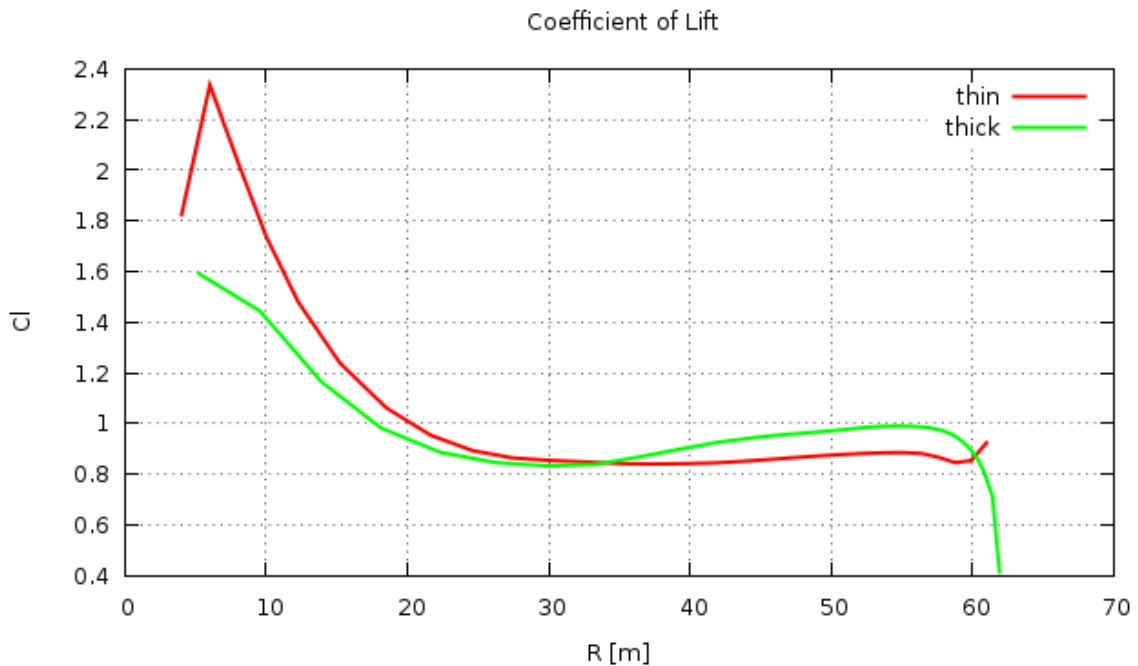
Χρησιμοποιώντας την κατανομή Weibull με τις ίδιες παραμέτρους όπως στην περίπτωση του λεπτού πτερυγίου βλέπουμε ότι η ετήσια παραγόμενη ενέργεια για ταχύτητες ανέμου 5-11 m/s είναι 10961715 kWh και παρουσιάζει αύξηση 18.9% σε σύγκριση με την αρχική γεωμετρία. Κρατώντας τις τιμές της ισχύος σταθερές για ταχύτητες μεγαλύτερες των 11 m/s προκύπτει αύξηση της ετήσιας παραγόμενης ενέργειας κατά 5%. Η τιμή αυτή είναι σχεδόν διπλάσια από την τιμή της αύξησης για την περίπτωση του λεπτού πτερυγίου και οφείλεται στο γεγονός ότι η Α/Γ λειτουργεί στο βέλτιστο λ.

4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων

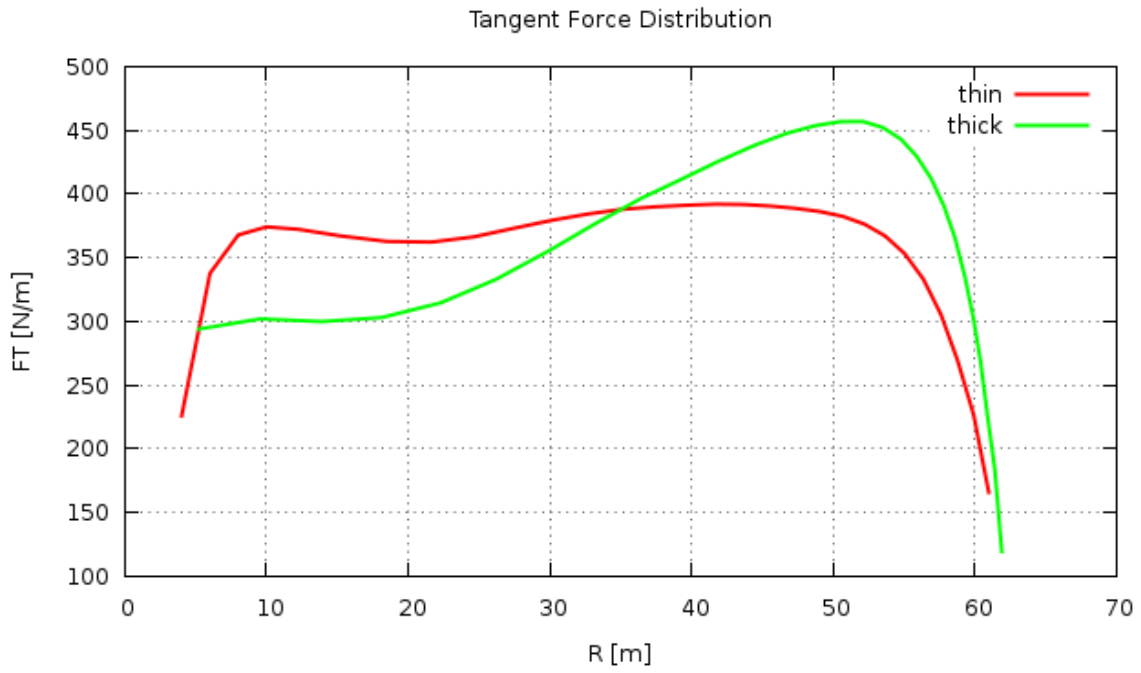
Στην συνέχεια πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ της νέας γεωμετρίας στην περίπτωση του λεπτού πτερυγίου και του πτερυγίου με πάχος μη λαμβάνοντας υπόψιν την επίδραση της συνεκτικότητας.



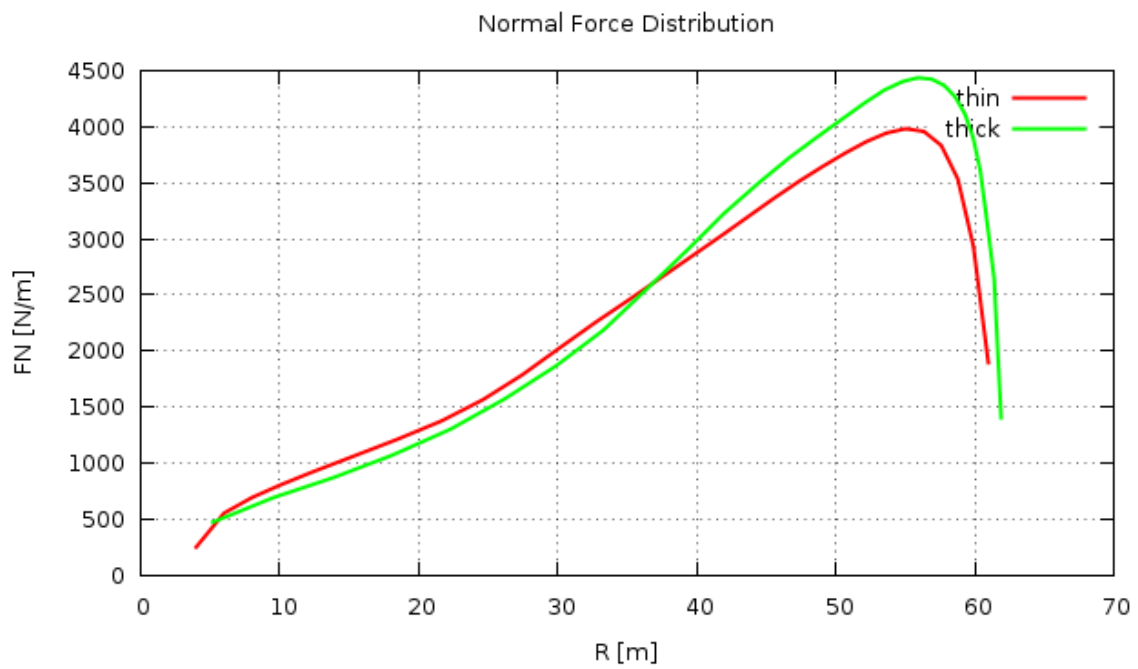
Σχήμα 4.7 Σύγκριση παραγόμενης ισχύος



Σχήμα 4.8 Σύγκριση συντελεστή άνωσης



Σχήμα 4.9 Σύγκριση εφαπτομενικής δύναμης



Σχήμα 4.10 Σύγκριση καθέτου δύναμης

Παρατηρούμαι ότι η διαφορά στην παραγόμενη ενέργεια είναι ασήμαντη καθώς είναι μικρότερη του 3%. Ωστόσο παρατηρούμαι διαφοροποίηση στα διαγράμματα της εφαλτομενικής και της καθέτου δύναμης. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι η διαφορετική κατανομή του συντελεστή άνωσης κατά μήκος του πτερυγίου. Στο διάγραμμα της εφαλτομενικής δύναμης παρατηρούμαι ότι στις περιοχές που ο συντελεστής άνωσης της περίπτωσης του λεπτού πτερυγίου είναι μεγαλύτερος δίνει και μεγαλύτερη δύναμη και το αντίστροφο. Στο διάγραμμα της αξονικής δύναμης παρατηρούμαι ότι έως την μέση του πτερυγίου δεν υπάρχει κάποια σημαντική διαφοροποίηση στις δυνάμεις ενώ πηγαίνοντας προς το ακροπτερύγιο το πτερύγιο με πάχος παρουσιάζει μεγαλύτερη αξονική δύναμη λόγω μεγαλύτερου συντελεστή άνωσης.

Κεφάλαιο 6

6.1 Τελικά συμπεράσματα

Από την ανάλυση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι η αεροδυναμική επέκταση του πτερυγίου έως την ρίζα, οδηγεί σε αύξηση της παραγόμενης ισχύος η οποία με την σειρά της οδηγεί σε αύξηση της ετήσιας παραγόμενης ενέργειας. Στην περίπτωση του λεπτού πτερυγίου η αύξηση αυτή ανέρχεται σε 3% ενώ στην περίπτωση του πτερυγίου με πάχος σε 6%.

Τα ποσοστά αύξησης της ετήσιας παραγόμενης ενέργεια είναι ιδιαίτερα σημαντικά. Αρκεί να ανεφέρουμε ότι αύξηση της ετήσιας παραγόμενης ενέργειας κατά 2% σε βάθος χρόνου την διάρκεια ζωής μιας ανεμογεννήτριας, ισοδυναμεί με το κόστος αγοράς της ανεμογεννήτριας. Η παραπάνω εφαρμογή θα οδηγούσε σε μείωση του κόστους ανά KWh, που αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους στόχους στην βιομηχανία των ανεμογεννητριών.

6.2 Βιβλιογραφία

1. J. Johansen, H.A. Madsen, N.N. Sorensen, C. Bak, “Numerical Investigation of a Wind Turbine Rotor with an aerodynamically redesigned hub-region”.
2. “Considerably Higher Yields – Revolutionary Rotor Blade Design” WindBlatt 3/2004, Enercon.
3. B. Akay, C.S. Ferreira, G.J. van Bussel, G.Tescione, “Experimental Investigation of Wind Turbine Blade Rotor Flow”
4. Tony Burton, David Sharpe, Nick Jenkins, Ervin Bossanyi, “Wind Energy Handbook”
5. Μπεργελές Γεώργιος, “Ανεμοκινητήρες”
6. Επίσημη ιστοσελίδα του Ευρωπαϊκού κέντρου αιολικής ενέργειας, www.ewea.org.