



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΤΕΡΥΓΙΟΥ
ΑΝΕΜΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΜΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ
FLAP ΚΑΙ SLAT



Διπλωματική εργασία : Μιχαλακέας Δημοσθένης
Επιβλέπων καθηγητής : Βουτσινάς Σπυρίδων

Αθήνα Οκτώβριος 2012

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή μου, κύριο Βουτσινά Σπυρίδωνα, για την αμέριστη βοήθειά που μου προσέφερε, ως προς το επιστημονικό και γνωστικό επίπεδο, κατά την διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας. Ο χρόνος που διέθεσε για μένα αλλά και η διάθεση του απέναντί μου, είχαν καθοριστική σημασία για την αποπεράτωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον λέκτορα κύριο Ριζιώτη Βασίλειο καθώς και τον διδάκτορα Προσπαθόπουλο Ιωάννη για την έμπρακτη υποστήριξή τους σε κάθε δυσκολία που αντιμετώπισα.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδακτορικούς φοιτητές Παπαδάκη Γεώργιο και Μανωλά Δημήτριο καθώς και τον Παναγιώτη Σχοινά που επίσης μου παρείχαν τις γνώσεις τους και γενικότερα τη συμπαράστασή τους όποτε το χρειαζόμουν.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον φίλο και συμφοιτητή Μάντζαρη Θεόδωρο με τον οποίο εργαστήκαμε, όλο αυτό το διάστημα, σε διπλανά γραφεία, για τις ευχάριστες και διασκεδαστικές ώρες που περάσαμε κατά την διάρκεια της πτυχιακής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται μελέτη πτερυγίου μεταβλητής γεωμετρίας στην ακμή εκφυγής (flap) καθώς και στην ακμή πρόσπτωσης (slat). Έχει στόχο να ελέγξει την επίδραση που έχει η μεταβλητή γεωμετρία στην τελική αποδιδόμενη ισχύ της ανεμογεννήτριας. Για τον σκοπό αυτό διεξήχθη ανάλυση τυπικής διάταξης αεροτομής με γεωμετρικά μεταβαλλόμενη ακμή εκφυγής αλλά και ακμής πρόσπτωσης σε σταθερές γωνίες, αρχικά σε πτερύγιο χωρίς πάχος και έπειτα σε πτερύγιο με πάχος.

Η αεροδυναμική επίλυση του προβλήματος έγινε μέσω του υπολογιστικού πρότυπου General Unsteady Vortex Particle (GENUVP). Ο κώδικας αυτός αποτελεί ένα σύνθετο και ιδιαίτερο ευέλικτο υπολογιστικό εργαλείο με την δυνατότητα επίλυσης μη μόνιμης ασυμπίεστης και μη συνεκτικής ροής γύρω από περίπλοκες γεωμετρίες σωμάτων.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	5
1.1 Εισαγωγή στις ανεμογεννήτριες.....	5
1.2 Σκοπός της εργασίας.....	6
1.4 Διάρθρωση της εργασίας.....	7
2. Το Πεδίο Ροής του Ασυμπιέστου Μη Συνεκτικού Ρευστού	8
2.1 Εισαγωγή.....	8
2.2 Αναπαράσταση φύλλου στροβιλότητας.....	9
2.2.1 Η δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας.....	11
2.3 Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας.....	11
2.4 Οι Βασικές Εξισώσεις του Προβλήματος	13
2.5 Η Ροή Γύρω από Ανωστικά Σώματα με Πάχος.....	15
2.6 Ο Υπολογισμός των Πιέσεων.....	18
Σύνοψη.....	21
3. Αριθμητική Διακριτικοποίηση του Προβλήματος	22
3.1 Εισαγωγή.....	22
3.2 Διακριτικοποίηση της Γεωμετρίας ενός Σώματος με Πάχος.....	22
3.3 Αναπαράσταση του Φύλλου Στροβιλότητας	24
3.4 Οι Βαθμοί Ελευθερίας των Διανομών των Ιδιομορφιών στα Σώματα	26
3.5 Κινηματική Συνθήκη Μη Εισχώρησης.....	29
3.6 Η Δυναμική Συνθήκη Kutta-Joukowski	30
3.7 Το Επιφανειακό Φύλλο Στροβιλότητας: Ο Κοντινός Ομόρρους.....	34
3.8 Η μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας σε χωρική.....	36
3.9 Η Χωρική Κατανομή Στροβιλότητας: Ο Μακρινός Ομόρρους.....	38
3.10 Η μεταφορά και παραμόρφωση της χωρικής στροβιλότητας.....	40
3.11 Ο Υπολογισμός των Φορτίων	42
4. Ανεμογεννητρια αναφοράς	44
5. Πτερύγιο χωρίς πάχος (thin blade)	45
5.1 Μεταβάλλοντας την ακμή εκφυγής (flap).....	45
5.2 Μεταβάλλοντας την ακμή πρόσπτωσης (slat).....	56
5.3 Αξιολόγηση - Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	67
6. Πτερύγιο με πάχος (thick blade)	72
6.1 Μεταβάλλοντας την ακμή εκφυγής (flap).....	72
6.2 Μεταβάλλοντας την ακμή πρόσπτωσης (slat).....	81
6.3 Αξιολόγηση - Σχολιασμός αποτελεσμάτων.....	91
7. Συμπεράσματα	94
Βιβλιογραφία	95

1. Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στις ανεμογεννήτριες

Οι Ανεμογεννήτριες αποτελούν την εξέλιξη των ανεμόμυλων. Ενώ οι τελευταίοι βασίζουν την κίνησή τους στη δύναμη της αντίστασης (drag) του αέρα, για τις Α/Γ βασικός κινητήριος «μοχλός» είναι η δύναμη της άνωσης (lift).

Ανεμογεννήτριες τοποθετούνται μεμονωμένα ή σε συστάδες υπό τη μορφή αιολικών πάρκων, κυρίως όταν στόχος είναι η μαζική ηλεκτροπαραγωγή. Το αιολικό δυναμικό κάθε περιοχής είναι αυτό που υποδεικνύει το αν και που θα ήταν συμφέρον να εγκατασταθούν Α/Γ. Από εκεί και πέρα, συνυπολογίζονται και άλλοι παράγοντες όπως η τοποθεσία και η πρόσβαση ώστε να διευκολύνεται η μεταφορά των εξαρτημάτων ή αν είναι συμφέρουσα η σύνδεση με το κεντρικό δίκτυο μίας χώρας. Έτσι συναντούμε Α/Γ συνήθως σε κορυφές βουνών και στη θάλασσα (πλωτές).

Οι Α/Γ μπορεί να είναι οριζοντίου άξονα, στις οποίες ο δρομέας βρίσκεται συνεχώς κάθετα στην κατεύθυνση του ανέμου και κατακόρυφου άξονα, όπου ο άξονας περιστροφής του δρομέα είναι κάθετος προς την επιφάνεια του εδάφους.

Η απόδοση μιας ανεμογεννήτριας εξαρτάται από το μέγεθος της και την ταχύτητα του ανέμου. Το μέγεθος της είναι συνάρτηση των αναγκών που καλείται να εξυπηρετήσει και ποικίλει από μερικές εκατοντάδες μέχρι μερικά εκατομμύρια Watt.

Μια τυπική ανεμογεννήτρια οριζοντίου άξονα αποτελείται από τα εξής μέρη :

- το δρομέα, που αποτελείται από δύο ή τρία πτερύγια. Τα πτερύγια προσδένονται πάνω σε μια πλήμνη είτε σταθερά, είτε με τη δυνατότητα να περιστρέφονται γύρω από το διαμήκη άξονα τους μεταβάλλοντας το βήμα.

- το σύστημα μετάδοσης της κίνησης, αποτελούμενο από τον κύριο άξονα, τα έδρανα του και το κιβώτιο πολλαπλασιασμού στροφών, το οποίο προσαρμόζει την ταχύτητα περιστροφής του δρομέα στη σύγχρονη ταχύτητα της ηλεκτρογεννήτριας.

- την ηλεκτρική γεννήτρια, σύγχρονη ή επαγωγική, η οποία μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική και βρίσκεται συνήθως πάνω στον πύργο της ανεμογεννήτριας. Υπάρχει και το σύστημα πέδης το οποίο είναι ένα συνηθισμένο δισκόφρενο που τοποθετείται στον κύριο άξονα ή στον άξονα της γεννήτριας.

- το σύστημα προσανατολισμού, αναγκάζει συνεχώς τον άξονα περιστροφής του δρομέα να βρίσκεται παράλληλα με τη διεύθυνση του ανέμου.

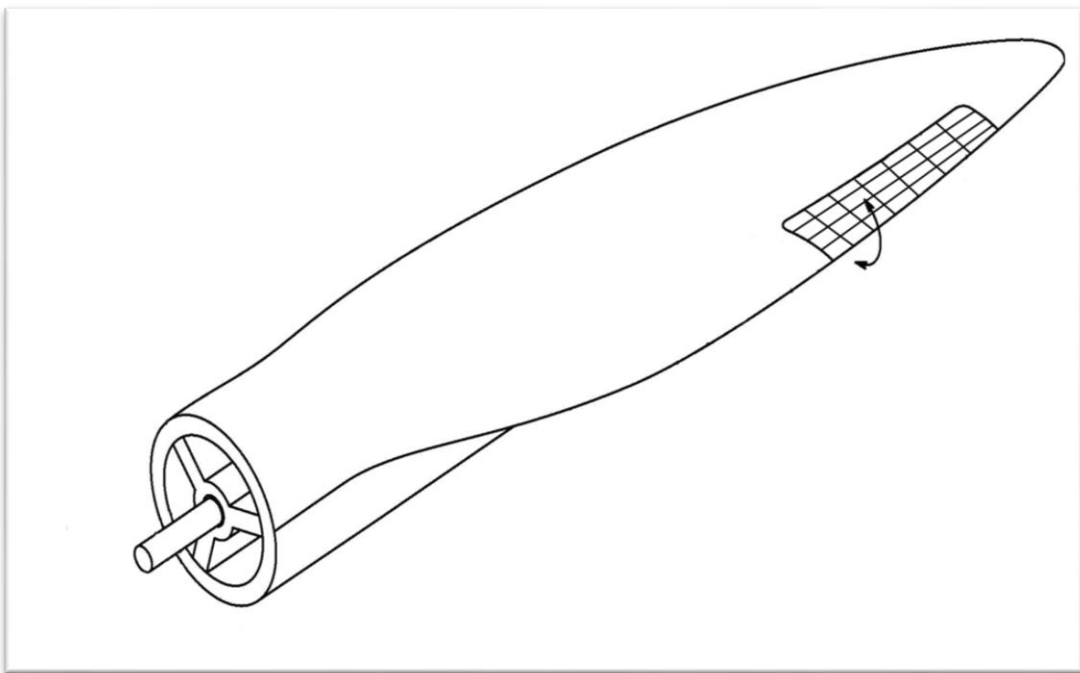
- τον πύργο, ο οποίος στηρίζει όλη την παραπάνω ηλεκτρομηχανολογική εγκατάσταση.

- τον ηλεκτρονικό πίνακα και τον πίνακα ελέγχου, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι στη βάση του πύργου. Το σύστημα ελέγχου παρακολουθεί, συντονίζει και ελέγχει όλες τις λειτουργίες της ανεμογεννήτριας, φροντίζοντας για την ορθή λειτουργία της.

1.2 Σκοπός της εργασίας

Στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται η μελέτη της αεροδυναμικής συμπεριφοράς των πτερυγίων Α/Γ με σκοπό τον έλεγχο της επίδρασης που έχει στην αποδιδόμενη ισχύ. Για τον λόγο αυτό εξετάζουμε την συμπεριφορά των πτερυγίων μεταβάλλοντας την γεωμετρία τους. Πιο συγκεκριμένα, αλλάζουμε την γεωμετρία του πτερυγίου, μεταβάλλοντας, σε συγκεκριμένα τμήματα, την ακμή εκφυγής (flap) ή την ακμή πρόσπτωσης (slat) του πτερυγίου.

Η μελέτη πραγματοποιήθηκε αρχικά σε πτερύγιο χωρίς πάχος (thin blade) και κατόπιν σε πτερύγιο με πάχος (thick blade). Σε κάθε περίπτωση το τμήμα της μεταβλητής γεωμετρίας του πτερυγίου έχει μήκος περίπου 10 μέτρα ενώ το πλάτος του είτε το 10% είτε το 20% του μήκους της χορδής. Οι γωνίες στρέψης που εξετάσαμε σε κάθε περίπτωση είναι $0^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ$.



Εικόνα 1.2.1 : Πτερύγιο με flap

Η μελέτη έγινε χρησιμοποιώντας τον κώδικα General Unsteady Vortex Particle (GENUVP) έκδοση 3 για το πτερύγιο χωρίς πάχος ενώ για το πτερύγιο με πάχος, την έκδοση 7.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή στις Α/Γ - Σκοπός της εργασίας - Διάρθρωση της εργασίας

Κεφάλαιο 2^ο: Γίνεται η αναλυτική παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου πάνω στο οποίο βασίζεται η μέθοδος επίλυσης του γενικού προβλήματος της ροής γύρω από ανωστικό σώμα με πάχος και πρότυπο ελευθέρου ομόρρου. Η ροή γύρω από ένα τυχαίο σώμα ,που αναπαρίσταται με διανομές πηγών και διπόλων, επιλύεται με την εφαρμογή κινηματικών και δυναμικών συνθηκών (συνθήκη μη εισχώρησης της κάθετης ταχύτητας και εξίσωση πιέσεων στην ακμή εκφυγής). Το πρότυπο ομόρρου βασίζεται στη θεωρία φύλλων στροβιλότητας και η εξέλιξή του περιγράφεται από τις εξισώσεις του Helmholtz.

Κεφάλαιο 3^ο: Παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτοποίησης των εξισώσεων του προβλήματος και γίνονται οι επιλογές για την διακριτή αναπαράσταση των παραμέτρων του προβλήματος.

Κεφάλαιο 4^ο: Παρουσιάζονται στοιχεία για την ανεμογεννήτρια αναφοράς

Κεφάλαιο 5^ο: Παρουσιάζεται η περίπτωση του πτερυγίου χωρίς πάχος (thin).

Κεφάλαιο 6^ο: Παρουσιάζεται η περίπτωση του πτερυγίου με πάχος (thick).

Κεφάλαιο 7^ο: Συμπεράσματα

2. Το Πεδίο Ροής του Ασυμπίεστου Μη Συνεκτικού Ρευστού

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται το θεωρητικό πλαίσιο που επιλέγεται για την επίλυση του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο θεώρημα διαχωρισμού ταχυτήτων του Helmholtz το πεδίο ροής εκφράζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου ροής. Η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων συνδυάζεται με τη μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας για την αναπαράσταση των σωμάτων και των φύλλων στροβιλότητας που εκφεύγουν από αυτά. Σύμφωνα με το θεώρημα Green, η διαταραχή που εισάγεται στη ροή από την παρουσία στερεών σωμάτων, περιγράφεται από το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(\vec{x})$ ενός αστρόβιλου πεδίου ροής, που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και προκύπτει με την τοποθέτηση διανομών κατάλληλων ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων. Στο στροβιλό τμήμα του πεδίου ροής είναι δυνατόν να συμπεριληφθεί τόσο η ελεύθερη στροβιλότητα που εκφεύγει από τα ανωστικά σώματα (ως συνέπεια του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin) όσο και η στροβιλότητα που υπάρχει στο επερχόμενο πεδίο ροής και που μπορεί να προέρχεται από προπορευόμενα σώματα.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, οι εξισώσεις του προβλήματος επιλύονται στο συνοριακό πλέγμα της εξωτερικής επιφάνειας των σωμάτων και όχι σε ένα χωρικό πλέγμα που καλύπτει όλο το πεδίο ροής (όπως συμβαίνει στις πλεγματικές μεθόδους που επιλύουν τις εξισώσεις Euler και Navier-Stokes). Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή στα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν είναι μη γραμμικές συμπεριλαμβάνοντας και μη μόνιμους όρους. Στα στερεά σώματα ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης της ταχύτητας. Επιπλέον στα ανωστικά σώματα ικανοποιείται και η δυναμική συνθήκη εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής. Με τις εξισώσεις αυτές υπολογίζονται οι εντάσεις των διανομών ιδιομορφιών (πηγών, διπόλων) στα σώματα. Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η διαχείριση των φύλλων στροβιλότητας γίνεται μέσω της αναπαράστασής τους με ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας, που καθώς δεν προαπαιτεί την ύπαρξη συνδετικής δομής, διευκολύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις πρόσπτωσης της στροβιλότητας σε στερεά σώματα. Η χρονική και χωρική εξέλιξη της στροβιλότητας ικανοποιεί τις εξισώσεις του Helmholtz, που συμπεριλαμβάνουν και μία μη γραμμική εξίσωση μεταφοράς με όρους διάδοσης, παραμόρφωσης και διάχυσης. Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτουν οι άγνωστες εντάσεις των διανομών πηγών και διπόλων και είναι δυνατός ο άμεσος υπολογισμός του πεδίου ταχυτήτων. Ο υπολογισμός των πιέσεων στα στερεά όρια είναι ένα πρόβλημα πλήρως αποσυσζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και γίνεται με ολοκλήρωση της απόκλισης των εξισώσεων ορμής.

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα ευέλικτο αριθμητικό σχήμα που μπορεί να επιλύει με ικανοποιητική ακρίβεια προβλήματα μόνιμης και μη μόνιμης ροής σε περιπτώσεις σωμάτων που είναι ανωστικά, ή μη ανωστικά και μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα και να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα επιμέρους θεωρητικά εργαλεία και καταστρώνεται το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος.

2.2 Αναπαράσταση φύλλου στροβιλότητας

Κάθε κινούμενη ή μη επιφάνεια S_w , που παρουσιάζει ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας, σε πεδίο ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, ονομάζεται φύλλο στροβιλότητας και ουσιαστικά αποτελεί το φυσικό ανάλογο των στρωμάτων διάτμησης.

Στην περίπτωση της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ένα τρισδιάστατο ανωστικό σώμα επιβάλλεται ο ορισμός μίας γραμμής στο στερεό σύνορό του (της ακμής εκφυγής), από όπου θα εκφεύγει ένα επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας (ο ομόρρους του), με ασυνέχεια (πήδημα) της εφαπτομενικής ταχύτητας επομένως και του δυναμικού. Η ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη επιφανειακής διανομής διπόλων και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάπτυξη κυκλοφορίας, συνεπώς και άνωσης.

Εξ' ορισμού, το φύλλο στροβιλότητας είναι μία κινούμενη επιφάνεια S_w με ασυνέχεια (πήδημα) ταχύτητας $[[\vec{U}]](\vec{x}_w)$ στην τυχαία θέση $\vec{x}_w \in S_w$. Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση, που έχει άμεση σχέση με ρευστομηχανικές εφαρμογές, είναι αυτή ενός δυναμικού φύλλου στροβιλότητας που παράγεται ως επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού (ή ισοδύναμα ως μία διανομή διπόλων) και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned} [[\vec{U}]](\vec{x}_w) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}_w) &= 0 \quad , \vec{x}_w \in S_w \\ \vec{\gamma}(\vec{x}_w) &= \vec{\nu}(\vec{x}_w) \times [[\vec{U}]](\vec{x}_w) \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου $\vec{\nu}(\vec{x}_w)$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο \vec{x}_w της επιφανείας S_w και $\vec{\gamma}(\vec{x}_w)$ η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας στην ίδια θέση.

Σε κάθε σημείο \vec{x}_w του φύλλου στροβιλότητας S_w ισχύει:

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_w; t) \quad (2.2)$$

$$[[P]](\vec{x}_w) = 0 \quad (2.3)$$

όπου $\vec{u}(\vec{x}_w; t)$ είναι η μέση ταχύτητα μεταφοράς του φύλλου στροβιλότητας και $[[P]](\vec{x}_w)$ είναι η ασυνέχεια (το πήδημα) της πίεσης στην θέση \vec{x}_w .

Η σχέση (2.2) είναι η κινηματική εξίσωση του ομόρρου που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της γεωμετρίας του. Η (2.3) είναι η δυναμική εξίσωση του ομόρρου που εξισώνει την πίεση της επάνω και της κάτω πλευράς σε κάθε σημείο του φύλλου στροβιλότητας και ουσιαστικά ρυθμίζει την χρονική εξέλιξη της έντασης της στροβιλότητας σε αυτό.

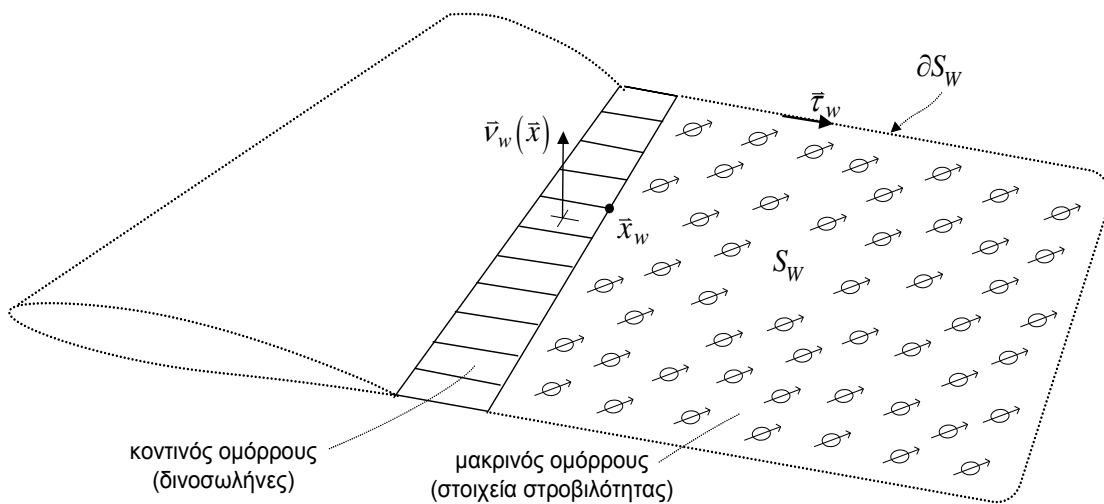
Σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz το πεδίο ταχύτητας ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού μπορεί να γραφεί ως:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla\Phi(\bar{x}, t) + \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) \quad (2.4)$$

Στην περίπτωση ροής γύρω από ανωστικό σώμα ο όρος $\nabla\Phi(\bar{x}, t)$ είναι δυνατόν να συμπεριλάβει και την συνεισφορά της αποβαλλόμενης στροβιλότητας αυτού του σώματος που μπορεί να διανέμεται ως ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας. Έτσι προκύπτει η δυναμική (potential) θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας, σύμφωνα με την οποία ο ομόρρους αναπαρίσταται από μία επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού κατασκευασμένη από πλέγμα δινοσωλήνων.

Όμως, καθώς η γεωμετρία του ομόρρου δεν είναι δεδομένη και προκύπτει από την (2.2), αυτή η θεώρηση είναι δυνατό να παρουσιάσει αριθμητικές αστάθειες, ιδιαίτερα σε περιοχές αναδίπλωσης του φύλλου στροβιλότητας, που είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν εάν αυτό αναπαρασταθεί μέσω του δεύτερου όρου της (2.4). Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η θεωρητικά ισοδύναμη στροβιλή (vortex) εκδοχή του φύλλου στροβιλότητας, που εισάγει τον ομόρρου ως περιοχή γενικευμένης στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή ο ομόρρους απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του.

Στο αριθμητικό πρότυπο που παρουσιάζεται, δεχόμαστε ότι το φύλλο στροβιλότητας αποτελείται από δύο τμήματα: τον κοντινό και τον μακρινό ομόρρου, που αναπαρίστανται με τη δυναμική και τη στροβιλή θεώρηση αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1: Η αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας

2.2.1 Η δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

Η δυναμική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας γίνεται με τη θεώρηση πλέγματος ευθύγραμμων δινοσωλήνων, με ένταση μ_w που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin και γεωμετρία \bar{x}_w όπως αυτή προκύπτει από την κινηματική συνθήκη (2.2).

Με αυτά τα δεδομένα υπολογίζονται το δυναμικό $\Phi_w(\bar{x}_o; t)$ και η ταχύτητα $\bar{u}_w(\bar{x}_o; t)$ που το φύλλο στροβιλότητας επάγει σε σημείο του χώρου $\bar{x}_o \in D$ (Hess 1972):

$$\Phi_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_w(\bar{x}_o; t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}_w) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\bar{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Στην παραπάνω σχέση διακρίνουμε δύο όρους, έναν επιφανειακό και έναν επικαμπύλιο. Εάν τεθεί:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\bar{x}; t) &= \delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \cdot \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}_w; t) \} \\ &+ \delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w) \mu_w(\bar{x}_w; t) \bar{\tau}_w(\bar{x}_w; t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

όπου $\bar{\tau}_w(\bar{x}_w; t)$ το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο $\partial S_w(t) = (C_s) \cup (C_o)$ και $\delta_{S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$, $\delta_{\partial S_w}(\bar{x} - \bar{x}_w)$ συναρτήσεις Dirac ορισμένες αποκλειστικά στην S_w και στο σύνορο ∂S_w αυτής αντίστοιχα, τότε η (2.6) γράφεται:

$$\bar{u}_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}; t) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx \quad (2.8)$$

Η (2.7) ορίζει την γενικευμένη στροβιλότητα που αποδεικνύεται, ότι όχι μόνο κινηματικά αλλά και δυναμικά συμπεριφέρεται όπως η χωρική στροβιλότητα.

2.3 Ο Ομόρρους ως Φύλλο Στροβιλότητας

Η εμφάνιση άνωσης ισοδυναμεί με την κατανομή κυκλοφορίας στο πρόβλημα της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα. Όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια της θεώρησης μη συνεκτικού ρευστού επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπτομενική ταχύτητα, συνεπώς και στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω

από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρου της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης.

Τη χρονική στιγμή t σε μία τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω πλευράς (υπερπίεσης/pressure side, δείκτης "-") και της επάνω πλευράς (υποπίεσης/suction side, δείκτης "+") θα ισούται με την κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα σε αυτή την τομή :

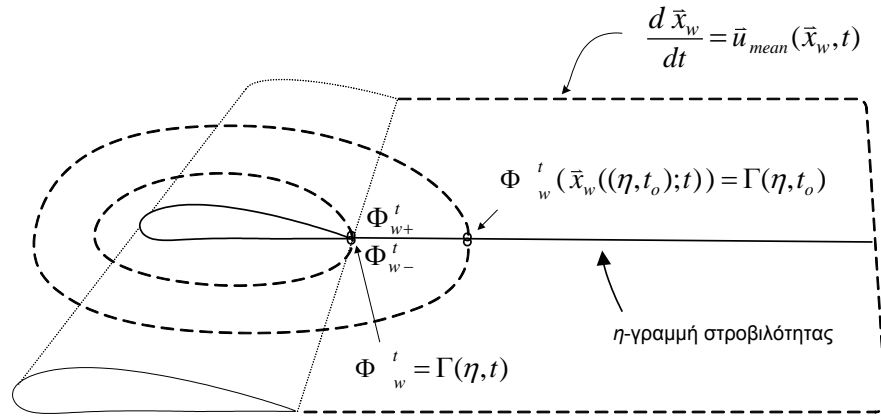
$$[[\Phi_w^t]] = \Phi_{w+}^t - \Phi_{w-}^t = \Gamma^t \quad (2.9)$$

Η ένταση της διαφοράς (του πηδήματος) δυναμικού $[[\Phi_w]](\vec{x}_w)$ καθορίζει την ένταση δινοσωλήνα $\mu_w(\vec{x}_w)$ στο υλικό σημείο $\vec{x}_w \in S_w$ του ομόρρου:

$$\mu_w(\vec{x}_w) = -[[\Phi_w]](\vec{x}_w) = -(\Phi_w^+ - \Phi_w^-) \quad , \vec{x}_w \in S_w \quad (2.10)$$

ενώ η θέση $\vec{x}_w \in S_w$ ενός υλικού σημείου του ομόρρου θα καθορίζεται από την μέση ταχύτητα (που σαφώς έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα):

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \frac{1}{2} \{ \bar{u}^+(\vec{x}_w, t) + \bar{u}^-(\vec{x}_w, t) \} = \bar{u}_{mean}(\vec{x}_w, t) \quad (2.11)$$



Σχήμα 2.2 : Η ασυνέχεια δυναμικού και η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής του ανωστικού σώματος επεκτείνεται στη συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής διπόλων που μεταφέρεται με ένα υλικό σημείο κατά μήκος μίας γραμμής στροβιλότητας συντηρεί τη ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή t το υλικό σημείο $\vec{x}_w((\eta, t_o); t)$, που αποβλήθηκε τη στιγμή t_o από την η -γραμμή

στροβιλότητας, θα έχει ένταση $[\Phi_w^t](\vec{x}_w(\eta, t_0); t)$ ίση με την ένταση που είχε η κυκλοφορία $\Gamma(\eta, t_0)$ στην η -γραμμή στροβιλότητας τη στιγμή t_0 :

$$[\Phi_w^t](\vec{x}_w(\eta, t_0); t) = \Gamma(\eta, t_0) \quad (2.12)$$

Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει τη συνέχεια των πιέσεων στην ακμή εκφυγής της πτέρυγας καθώς το ασυμπίεστο ρευστό δεν μπορεί να παραλάβει ορθές τάσεις:

$$P^+ = P^- \Rightarrow [P] = 0 \quad (2.13)$$

Αποτελεί τη δυναμική συνθήκη του προβλήματος και μαζί με την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης ορίζουν πλήρως ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες είναι και οι εντάσεις των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων. Η συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης καθορίζει ποσοτικά τη στροβιλότητα που αποβάλλεται στον ομόρρου της πτέρυγας ή ισοδύναμα την κυκλοφορία πάνω σε αυτή. Είναι μη γραμμική συνθήκη λόγω της ύπαρξης του τετραγωνικού όρου της ταχύτητας στο όρο της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση Bernoulli. Αποτέλεσμα είναι το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μη γραμμικό (σε αντίθεση με το διδιάστατο πρόβλημα όπου η αντίστοιχη συνθήκη είναι γραμμική).

Η δυναμική συνθήκη μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Πράγματι σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin θα πρέπει :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \Gamma) = 0 \Rightarrow \frac{\partial [\Phi](\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}_w, t) \cdot (\nabla [\Phi](\vec{x}_w, t)) \quad (2.14)$$

όπου θεωρώντας ότι η ταχύτητα στον ομόρρου είναι ουσιαστικά η μέση ταχύτητα της πάνω και κάτω πλευράς, θα έχουμε :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial [\Phi](\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \right\} \cdot \left\{ \vec{u}^+(\vec{x}_w, t) - \vec{u}^-(\vec{x}_w, t) \right\} \quad (2.15)$$

και κάνοντας πράξεις :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^+(\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{+2}(\vec{x}_w, t) &= \frac{\partial \Phi^-(\vec{x}_w, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^{-2}(\vec{x}_w, t) \Rightarrow \\ \frac{P^+}{\rho} = \frac{P^-}{\rho} = \frac{[P]}{\rho} &\Rightarrow [P] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

δηλαδή το θεώρημα του Kelvin ισοδυναμεί με τη συνθήκη του μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου της πτέρυγας με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας, γεγονός που επιβεβαιώνει την εξίσωση (2.10).

2.4 Οι Βασικές Εξισώσεις του Προβλήματος

Το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz εξασφαλίζει ότι οποιοδήποτε πεδίο ταχύτητας γράφεται στην μορφή

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla \Phi(\vec{x}, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) + \vec{U}_\infty(t) \quad (2.17)$$

όπου: $\bar{U}_\infty(t)$ η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο, $\Phi(\bar{x}, t)$ είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής και $\bar{u}_\omega(\bar{x}, t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από το γενικευμένο πεδίο χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$, τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \Phi(\bar{x}, t) &= 0 \\ \nabla \cdot \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Από τις (1.17) και (1.18) προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot \bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) = \Delta \Phi(\bar{x}, t) \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \bar{u}(\bar{x}, t) = \nabla \times \bar{u}_\omega(\bar{x}, t) = \omega(\bar{x}, t) \quad (2.20)$$

όπου: $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$ η στροβιλότητα και $\Delta \Phi(\bar{x}, t)$ ο ρυθμός μεταβολής του όγκου.

Θεωρώντας ροή ασυμπύεστη με στερεά σύνορα επιφανείας S_i , $S = \bigcup_i S_i$ τότε από την (2.19) προκύπτει η εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 \Phi(\bar{x}, t) = 0 \quad (2.21)$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας την μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων

$$\nabla^2 \Phi_\mu = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Phi_\sigma = 0 \quad (2.22)$$

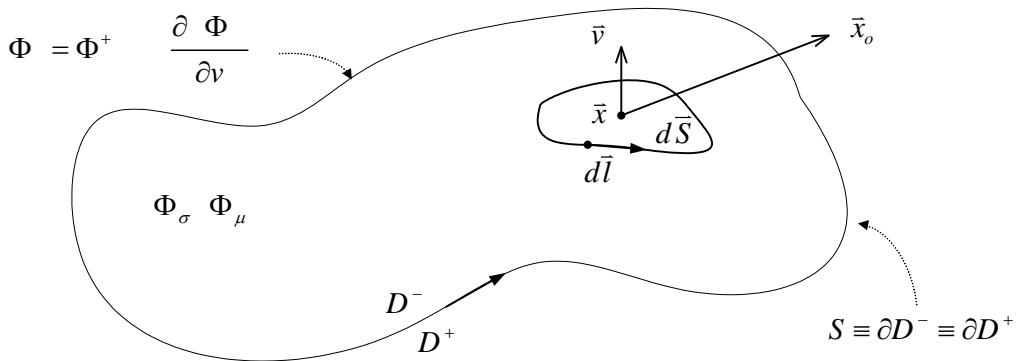
Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $\nabla^2(\cdot)$, η συνάρτηση $\Phi_{\sigma,\mu} = \Phi_\mu + \Phi_\sigma$ θα ικανοποιεί επίσης την εξίσωση του πεδίου ροής (δηλαδή την εξίσωση Laplace) και θα ισχύει:

$$\nabla^2 \Phi_{\sigma,\mu} = \nabla^2 (\Phi_\mu + \Phi_\sigma) = \nabla^2 \Phi_\mu + \nabla^2 \Phi_\sigma = 0 \quad (2.23)$$

Η αναπαράσταση του δυναμικού για τη μικτή διατύπωση σε σημείο $\bar{x}_o \in D^+$ προκύπτει θέτοντας $\Phi^- = 0$:

$$\Phi_{\sigma,\mu}^+(\bar{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{1}{|\bar{x}_o - \bar{x}|} dS(\bar{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\bar{x}) \frac{\bar{v}(\bar{x}) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \quad (2.24)$$

Η ταχύτητα που επάγεται στο $\bar{x}_o \in D^+$ θα προκύπτει



$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{\sigma, \mu}^+(\bar{x}_o) = \bar{u}(\bar{x}_o) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x}) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} \mu(\bar{x}) \frac{d\bar{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Σημειώνεται ότι η θετική φορά διαγραφής του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην παραπάνω εξίσωση είναι η ανθρωπολογιακή, ώστε το κάθετο διάνυσμα να έχει θετική φορά προς τον εξωτερικό χώρο, ενώ επιπλέον γίνεται η παρατήρηση ότι ο όρος αυτός μηδενίζεται στην περίπτωση μίας κλειστής επιφανείας S .

Στις παραπάνω σχέσεις χρειάζεται να προσδιοριστούν οι δύο διανομές $\sigma(\bar{x})$, $\mu(\bar{x})$ της διατύπωσης. Η κατασκευή της μικτής διατύπωσης μπορεί να συσχετιστεί με το φυσικό πρόβλημα της ροής γύρω από ανωστικό σώμα με πάχος. Σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει η δυνατότητα ικανοποίησης της συνθήκης εξίσωσης των πιέσεων στην ακμή εκφυγής που αποτελεί τη δυναμική εξίσωση του προβλήματος που σε συνδυασμό με την κινηματική συνθήκη οδηγεί στον καθορισμό των άγνωστων διανομών. Επειδή όμως η δυναμική συνθήκη στο πρόβλημα της πτέρυγας είναι μη γραμμική, οι εξισώσεις που προσδιορίζουν τις δύο διανομές εμφανίζονται συζευγμένες κατά τρόπο μη γραμμικό. Παρά το γεγονός ότι με τη χρήση της κινηματικής και της δυναμικής συνθήκης επιλύεται πλήρως το πρόβλημα που θέσαμε, μπορεί να αμφισβητηθεί η καλή τοποθέτηση του προβλήματος, αφού η συνέχεια των πιέσεων στον ομόρρου δεν εξασφαλίζεται. Σε επόμενη παράγραφο, όπου εξετάζεται το πρόβλημα του ανωστικού σώματος με πάχος, θα δούμε αναλυτικά πως υλοποιείται η διατύπωση πηγών-διπόλων, καθώς και το πως προσδιορίζονται οι δύο διανομές.

2.5 Η Ροή Γύρω από Ανωστικά Σώματα με Πάχος

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο την περιγραφή ροών ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος. Στη συνέχεια εξετάζονται οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρεί μία διατύπωση ώστε να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν πιο πιστά σε αυτό το πρόβλημα.

Από τη θεωρία του μη συνεκτικού ρευστού είναι γνωστό ότι η ανάπτυξη άνωσης, συνεπώς και κυκλοφορίας, σε ένα σώμα προϋποθέτει την ύπαρξη μίας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού στο πεδίο ροής. Υποχρεωτικά αυτή η επιφάνεια θα αποτελεί επιφάνεια ασυνέχειας των εφαπτομενικών ταχυτήτων. Ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος μπορεί να αναπαρίσταται από μία τέτοια επιφάνεια. Η άνωση μπορεί να εισαχθεί υποχρεωτικά μέσω μίας διανομής διπόλων καθώς μία τέτοια διανομή παρουσιάζει ασυνέχεια τόσο στην ταχύτητα όσο και στο δυναμικό και θα πρέπει απαραίτητα να περιλαμβάνεται στη διατύπωση που θα χρησιμοποιήσουμε.

Μία διανομή πηγών έχει συνεχή εφαπτομενική ταχύτητα στην επιφάνεια στην οποία προφανώς διανέμεται μια συνεχής κατανομή δυναμικού, ενώ παρουσιάζει ασυνέχεια της κάθετης ταχύτητας και συνεπώς ασυνέχεια της

κάθετης παραγώγου του δυναμικού πάνω στην επιφάνεια. Μη μηδενική ένταση της διανομής πηγών σημαίνει ότι το ρευστό «διαπερνά» την επιφάνεια με ρυθμό ίσο με την ένταση των πηγών στο εν λόγω σημείο. Με τη διανομή πηγών στην κλειστή επιφάνεια ενός σώματος αναπαριστούμε το πάχος του. Ασυμπτωτικές αναλύσεις δείχνουν ότι το πρόβλημα του «πάχους» μπορεί να αντιμετωπιστεί και με την τοποθέτηση μίας διανομής πηγών στη μέση επιφάνεια του σώματος και με ένταση ανάλογη της κλίσης της συνάρτησης του πάχους του σώματος (Ashley and Landahl 1965). Οπότε, με τον ένα, ή τον άλλο τρόπο, μία διανομή πηγών θα πρέπει να αποτελεί επίσης μέρος της διατύπωσης που θα επιλέξουμε για την επίλυση του προβλήματος.

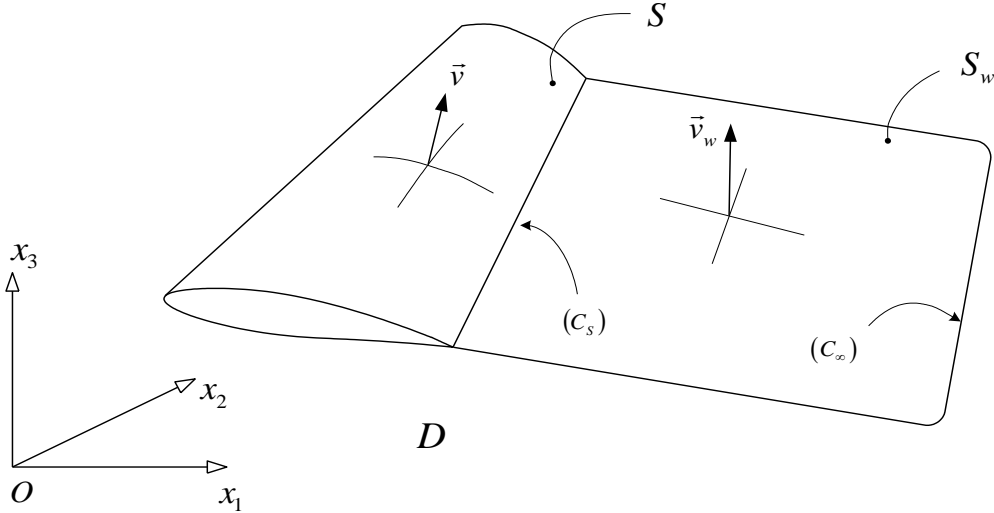
Τα παραπάνω συνοψίζονται στο συμπέρασμα ότι για την εξέταση της ροής γύρω από ανωστικά σώματα με πάχος απαιτείται ο καθορισμός μίας διατύπωσης που να περιλαμβάνει και τις δύο διανομές πηγών και διπόλων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον λοιπόν παρουσιάζουν τόσο η άμεση όσο και η μεικτή διατύπωση πηγών-διπόλων με τις οποίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με ενιαίο τρόπο προβλήματα μη ανωστικών και ανωστικών σωμάτων με πάχος και αποβαλλόμενα φύλλα στροβιλότητας.

Στην περίπτωση της άμεσης διατύπωσης η υπόθεση της τμηματικά σταθερής διανομής δυναμικού οδηγεί στον άμεσο υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού και την ικανοποίηση της συνθήκης Kutta-Joukowski ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής. Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ταχυτήτων πάνω στην επιφάνεια του σώματος προκύπτει με την εφαρμογή αριθμητικού σχήματος παραγωγίσις του δυναμικού, η ακρίβεια του οποίου εξαρτάται από την ποιότητα με την οποία γίνεται η γεωμετρική αναπαράσταση του σώματος. Στην περίπτωση της μικτής διατύπωσης το πεδίο ταχυτήτων προκύπτει με ακρίβεια αφού επιλυθεί το σύστημα που καθορίζει τις άγνωστες εντάσεις των πηγών και των διπόλων, όμως η εφαρμογή της συνθήκης Kelvin γίνεται σε θέση κοντά στην ακμή εκφυγής, καθώς ακριβώς επάνω στην ακμή εκφυγής παρουσιάζεται απειρισμός ταχυτήτων.

Μετά την ανάλυση που προηγήθηκε, επανερχόμαστε στο πρόβλημα αναπαράστασης του δυναμικού και του πεδίου ταχυτήτων γύρω από ανωστικά σώματα. Για το σκοπό αυτό θα εφαρμόσουμε το θεώρημα διαχωρισμού των ταχυτήτων του Helmholtz, και τα όσα προαναφέρθηκαν για την μικτή διατύπωση αναπαράστασης του δυναμικού Φ του αστρόβιλου πεδίου ροής και την αναπαράσταση των φύλλων στροβιλότητας.

Θεωρούμε τη ροή που δημιουργεί ανωστικό σώμα κινούμενο σε ασυμπίεστο μη συνεκτικό ρευστό στο χώρο D . Έστω S η εξωτερική επιφάνεια του σώματος, \bar{n} το κάθετο διάνυσμα σε αυτήν, S_w η επιφάνεια ασυνέχειας της ταχύτητας, με πήδημα ταχύτητας που συμβολίζεται με $[[\bar{u}]]$ και \bar{v}_w το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S_w . Θεωρούμε ότι η εξωτερική επιφάνεια του σώματος, καθώς και η επιφάνεια ασυνέχειας ταχύτητας είναι επαρκώς λείες ώστε σε κάθε σημείο τους να υπάρχει μοναδικό κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω. Μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου η S_w είναι φύλλο στροβιλότητας και αναπαριστά τον ομόρροο ανωστικό σώματος. Η επιφάνεια S_w έχει όριο $\partial S_w = C_s \cup C_\infty$, όπου C_s η καμπύλη τομής των S και S_w και C_∞ το έπ' άπειρο

σύνορο της S_w . Η περίπτωση αυτή είναι συνεπής με το θεώρημα στροβιλότητας του Helmholtz, σύμφωνα με το οποίο οι γραμμές σταθερής στροβιλότητας πρέπει να είναι είτε κλειστές, είτε ανοικτές με άκρα στο άπειρο, ή σε στερεό σύνορο.



Σχήμα 2.3 : Η γεωμετρία του σώματος, του ομόρρου και οι βασικοί συμβολισμοί

Θεωρώντας τη ροή ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα με φύλλο στροβιλότητας και υιοθετώντας τη διατύπωση πηγών διπόλων, το δυναμικό που επάγεται από το σώμα και τον κοντινό ομόρρο του σε τυχαίο σημείο $\bar{x}_o \in D$ θα υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma, \mu}(\bar{x}_o; t) = & -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}; t) \frac{dS(\bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\bar{x}; t) \frac{\bar{v}(\bar{x}) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Το συνολικό πεδίο ταχύτητας σε σημείο $\bar{x}_o \in D$ θα αναπαρίσταται αθροίζοντας τις επιμέρους συνιστώσες του: την επί άπειρο ταχύτητα, την επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα (2.20) και τον κοντινό ομόρρο τους (2.6), καθώς και την επαγόμενη ταχύτητα από το χωρικά διανεμημένο πεδίο στροβιλότητας (2.8) στη μορφή:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{x}_o; t) = & \bar{U}_\infty(\bar{x}; t) \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\bar{x}; t) \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_S \{ \nabla \mu(\bar{x}; t) \times \bar{v}(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dS(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S} \mu(\bar{x}; t) \frac{d\vec{l} \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \bar{v}_w(\bar{x}) \} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\vec{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{\omega}(\bar{x}) \times (\bar{x}_o - \bar{x})}{|\bar{x}_o - \bar{x}|^3} dx
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Είναι δυνατόν να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις σε αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης του πεδίου ταχύτητας:

i) Στη γενική περίπτωση η ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής στο άπειρο \bar{U}_∞ είναι δυνατόν να μεταβάλλεται με το χρόνο, ή να παρουσιάζει διακυμάνσεις στο εσωτερικό του πεδίου D αρκεί να έχει πάντα μηδενική απόκλιση και στροβιλισμό.

ii) Στη γενική περίπτωση η συνεισφορά της ταχύτητας $\bar{u}_\omega(\bar{x})$ μίας χωρικής κατανομής στροβιλότητας μπορεί να συμπεριλαμβάνει και την αποβαλλόμενη στροβιλότητα από σώματα που προηγούνται και που προσπίπτει στο εξεταζόμενο σώμα.

Θεωρώντας ότι το δυναμικό διαταραχής $\Phi(\bar{x})$ αναπαριστά τη συνολική συνεισφορά των σωμάτων και του κοντινού τους ομόρρου, τότε η (2.27) θα γράφεται στη μορφή:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{U}_\infty + \nabla \Phi_{\sigma, \mu}(\bar{x}) + \bar{u}_\omega(\bar{x}) \tag{2.28}$$

2.6 Ο Υπολογισμός των Πιέσεων

Το μέγεθος της πίεσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό από τεχνολογικής πλευράς στα διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με πεδία ροής. Στις διάφορες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των πεδίων ροής η πίεση υπολογίζεται άμεσα. Είτε προκύπτει σαν λύση του προβλήματος, είτε η χρήση Eulerian χωρικού πλέγματος καθιστά τον υπολογισμό της πρωτογενή.

Στην παρούσα μέθοδο ο υπολογισμός των πιέσεων στην επιφάνεια ενός σώματος αποτελεί ένα πρόβλημα που είναι πλήρως αποσυζευγμένο από τον υπολογισμό του πεδίου ροής και απαιτεί την επίλυση μίας ακόμα εξίσωσης που περιέχει την πίεση ως άγνωστο.

Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$p(\bar{x}; t) = p_\phi(\bar{x}; t) + p_\omega(\bar{x}; t) \tag{2.29}$$

Από την ολοκλήρωση της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής προκύπτει η εξίσωση Bernoulli για αστρόβιλο πεδίο, που οδηγεί στον υπολογισμό του όρου $p_\Phi(\bar{x};t)$. Ο υπολογισμός είναι εξαιρετικά απλός αλλά χρειάζεται προσοχή στον τρόπο υλοποίησής του. Η ολοκλήρωση της εξίσωσης ορμής ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς, που κινείται με ταχύτητα $\bar{U}_B(\bar{x};t)$, αλλά με βάση τις απόλυτες ταχύτητες δίνει:

$$\frac{\partial\Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{u}^2(\bar{x};t) + \frac{p_\Phi(\bar{x};t)}{\rho} - \bar{u}(\bar{x};t) \cdot \bar{U}_B(\bar{x};t) = c(t) \quad (2.30)$$

Ισοδύναμα, ως προς την σχετική ταχύτητα $\bar{u}_r(\bar{x};t)$:

$$\bar{u}_r(\bar{x};t) = \bar{u}(\bar{x};t) - \bar{U}_B(\bar{x};t) \quad (2.31)$$

μετά από την εισαγωγή της (1.31) στην (1.30) προκύπτει:

$$\frac{\partial\Phi(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{u}_r^2(\bar{x};t) + \frac{p_\Phi(\bar{x};t)}{\rho} - \frac{1}{2}\bar{U}_B^2(\bar{x};t) = c(t) \quad (2.32)$$

όπου: $\Phi(\bar{x};t)$ το συνολικά επαγόμενο δυναμικό του αστρόβιλου πεδίου ροής στη θέση \bar{x} :

$$\Phi(\bar{x};t) = \Phi_\infty(\bar{x};t) + \Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t) \quad (2.33)$$

$p_\Phi(\bar{x};t)$ η στατική πίεση στη θέση \bar{x} , ρ η πυκνότητα. και $c(t)$ μία σταθερά που προκύπτει από την τιμή της έκφρασης (2.30) ή (2.32) στο άπειρο ($\bar{x} \rightarrow \infty$):

$$c(t) = \frac{\partial\Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{U}_\infty^2(t) + \frac{p_\infty(t)}{\rho} - \bar{U}_\infty(t) \cdot \bar{U}_B(t) \quad (2.34)$$

Ο μη μόνιμος όρος δυναμικού στην εξίσωση Bernoulli συμπεριλαμβάνει τις χρονικές μεταβολές που συμβαίνουν στο αστρόβιλο πεδίο (της επερχόμενης ροής και αυτού που αντιστοιχεί στα ιδιόμορφα στοιχεία: τις κατανομές πηγών και διπόλων στα σώματα):

$$\frac{\partial\Phi(\bar{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_\infty(t)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t)}{\partial t} \quad (2.35)$$

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον τρόπο υπολογισμού αυτών των μεγεθών, που εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο εφαρμόζεται η αντίστοιχη έκφραση για την εξίσωση Bernoulli (2.30) ή (2.32). Μετά την επίλυση του προβλήματος και τον υπολογισμό των παραμέτρων των διανομών των ιδιομορφιών γίνεται ο υπολογισμός των ταχυτήτων $\bar{u}(\bar{x},t)$ στα σημεία του σώματος όπου έχει ικανοποιηθεί η συνθήκη μη εισχώρησης. Σε αυτά τα σημεία επίσης υπολογίζεται και ο ρυθμός μεταβολής του επαγόμενου δυναμικού της συνολικής ροής. Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\partial\Phi_\infty(\bar{x};t)/\partial t$ μηδενίζεται, σε κάθε άλλη περίπτωση όμως θα πρέπει να υπολογίζεται σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος. Γνωρίζοντας τις εντάσεις των πηγών και των διπόλων είναι δυνατός ο υπολογισμός των τιμών του δυναμικού $\Phi_\sigma(\bar{x};t)$, $\Phi_\mu(\bar{x};t)$ σε κάθε χρονική στιγμή, οπότε ο όρος $\partial\Phi_{\sigma,\mu}(\bar{x};t)/\partial t$

υπολογίζεται εύκολα στην περίπτωση του διακριτοποιημένου προβλήματος από τη χρονική μεταβολή τους.

Έχοντας χρησιμοποιήσει την εξίσωση Bernoulli γίνεται ο υπολογισμός του όρου της πίεσης που αντιστοιχεί στο αστρόβιλο μέρος του πεδίου ροής. Εκκρεμεί ο υπολογισμός του όρου που αντιστοιχεί στο στροβιλό μέρος της ροής. Όπως προαναφέρθηκε η πίεση $p_\omega(\bar{x};t)$ που επάγει μία διανομή στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{p_\omega(\bar{x}_o;t)}{\rho} &= \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\bar{u}_\omega(\bar{x};t) \times \bar{\omega}(\bar{x};t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x})}{(\bar{x}_o - \bar{x})^3} dx, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \frac{\bar{u}(\bar{x}_{\Omega_j};t) \times \bar{\Omega}(\bar{x}_{\Omega_j};t) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})}{(\bar{x}_o - \bar{x}_{\Omega_j})^3}, \quad \bar{x}_o \neq \bar{x}_{\Omega_j} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ο υπολογισμός του συντελεστή στατικής πίεσης $c_p(\bar{x};t)$ προκύπτει από την σχέση (2.37), αδιαστατοποιώντας με την κατάλληλη, σε κάθε περίπτωση, πίεση αναφοράς p_{ref} :

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{p_{ref}} \quad (2.37)$$

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε το θεωρητικό πλαίσιο για την επίλυση του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Το πεδίο ροής εκφράζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου ροής. Το αστρόβιλο πεδίο ροής περιγράφεται από την εξίσωση Laplace για το βαθμωτό δυναμικό Φ , η επίλυση της οποίας γίνεται μέσω της μικτής διατύπωσης πηγών-διπόλων. Με τον τρόπο αυτό στο αστρόβιλο πεδίο ροής εκτός από την επερχόμενη ροή μπορεί να συμπεριληφθεί και η διαταραχή που εισάγει η παρουσία ανωστικών σωμάτων με πάχος. Κύριο ρόλο στην αλληλεπίδραση των σωμάτων έχει η στροβιλότητα του ομόρρου των ανωστικών σωμάτων που μπορεί να προσπίπτει σε σώματα που ακολουθούν. Η αναπαράσταση του στροβιλού μέρους της ροής γίνεται με τη χρήση μεθοδολογίας στοιχείων στροβιλότητας. Η χρονική και χωρική εξέλιξη της στροβιλότητας γίνεται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Helmholtz. Το στροβιλό μέρος της ροής μπορεί να περιλαμβάνει τόσο τον ομόρρο των ανωστικών σωμάτων, όσο και την στροβιλότητα της επερχόμενης ροής.

Αυτή η μεθοδολογία παρέχει την δυνατότητα της κοινής αντιμετώπισης προβλημάτων ροής σε ανωστικά και μη ανωστικά σώματα με πάχος, που μπορούν να κινούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Επίσης, συμπεριλαμβάνεται ο υπολογισμός του πεδίου πιέσεων, που επάγει το στροβιλό μέρος της ροής μέσα από την ολοκλήρωση της απόκλισης του θεωρήματος ορμής. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ο ορθός υπολογισμός του πεδίου πιέσεων στο γενικευμένο πεδίο ροής, καθώς ο υπολογισμός της πίεσης από το αστρόβιλο μέρος της ροής γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση Bernoulli.

3. Αριθμητική Διακριτικοποίηση του Προβλήματος

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο τρόπος διακριτικοποίησης των εξισώσεων που περιγράφουν το θεωρητικό πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος της μη μόνιμης ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού γύρω από σώματα με πάχος. Διαρθρώνεται το σύστημα των διακριτών εξισώσεων του προβλήματος που ικανοποιούν τη συνθήκη μη εισχώρησης στο στερεό σύνορο και επιπλέον την εξίσωση των πιέσεων στην ακμή εκφυγής ενός ανωστικού σώματος. Τα σώματα αναπαρίστανται γεωμετρικά με πλέγμα αποτελούμενο από τετράπλευρα επίπεδα στοιχεία, στα οποία κατανομούνται διανομές πηγών και διπόλων με τμηματικά σταθερή και διγραμμική ένταση αντίστοιχα. Προφανώς στην περίπτωση των μη ανωστικών σωμάτων η διανομή διπόλων είναι μηδενική. Το αποβαλλόμενο φύλλο στροβιλότητας αναπαρίσταται κοντά στο σώμα με πλέγμα δινοσωλήνων (vortex lattice) σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση, ενώ μακριά από αυτό με στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση. Η ένταση της αρχικά αποβαλλόμενης στροβιλότητας υπολογίζεται σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Η μεταφορά και η παραμόρφωσή του γίνεται επιλύοντας τις υλικές εξισώσεις του Helmholtz.

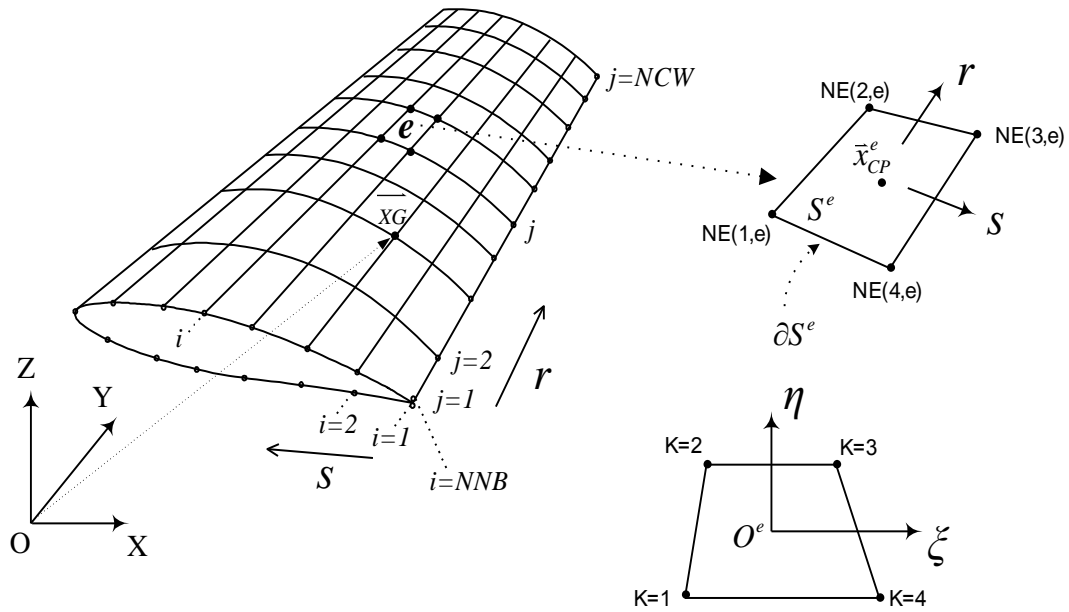
Η επιτυχημένη εφαρμογή του διακριτοποιημένου σχήματος εξισώσεων σε ένα πρόβλημα καθορίζεται από την κατάλληλη επιλογή τόσο της χωρικής διακριτικοποίησης της επιφανειακής γεωμετρίας των σωμάτων, όσο και του χρονικού βήματος εξέλιξης του προβλήματος, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ικανοποιητική αναπαραγωγή της λεπτομέρειας των διαφόρων φυσικών μηχανισμών που αναμένεται να εμφανιστούν.

3.2 Διακριτικοποίηση της Γεωμετρίας ενός Σώματος με Πάχος

Η γεωμετρία της επιφάνειας ενός σώματος αποτελεί δεδομένο του εξεταζόμενου προβλήματος. Προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων (\overline{XG}) στο γενικό-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που ορίζεται είτε άμεσα, είτε έμμεσα από τις κατανομές των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του σώματος. Ένα τέτοιο επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μία διπαραμετρική επιφάνεια $S(s_i, r_j)$:

$$S(s_i, r_j), \quad i=1, NNB, \quad j=1, NCW$$

όπου NNB , NCW ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την s και r διάστασή του αντίστοιχα. Οι γραμμές s_i είναι συνήθως προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, ιδιότητα που όπως θα φανεί στη συνέχεια διευκολύνει αριθμητικές διαδικασίες όπως την αποβολή στροβιλότητας. Στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου ανωστικού σώματος η παράμετρος μήκους s αντιστοιχεί στο μήκος τόξου, που διατρέχει την επιφάνεια του σώματος σε δεδομένη ακτινική θέση. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης (*pressure side*), περνάει από το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης (*suction side*). Η παράμετρος μήκους r αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.



Σχήμα 3.1 : Η διακριτοποίηση της γεωμετρίας ενός σώματος με πάχος

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από NNT (Total Nodes Number) κόμβους, που σχηματίζουν NTE (Total Number of Elements) τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία:

$$NNT = NNB \cdot NCW \quad (3.1)$$

$$NTE = (NNB - 1) \cdot (NCW - 1) \quad (3.2)$$

Η γενική αρίθμηση των κόμβων NOD (NODE number) και των στοιχείων NEL (ELEMENT number) του πλέγματος προκύπτει από μία ακολουθία της μορφής:

$$NOD(i, j) = (j - 1) \cdot NNB + i, \quad i = 1, NNB, \quad j = 1, NCW \quad (3.3)$$

$$NEL(i, j) = (j - 1) \cdot (NNB - 1) + i, \quad i = 1, NNB - 1, \quad j = 1, NCW - 1 \quad (3.4)$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στην γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των σωμάτων με επίπεδα στοιχεία οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου υπολογιστή. Αυτό επιτυγχάνεται με την προβολή των κόμβων του τετραπλεύρου στοιχείου σε ένα μέσο επίπεδο. Σε σώματα που τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους εμφανίζουν έντονες κλίσεις αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των κόμβων στις περιοχές αυτές. Από αυτή την διαδικασία προκύπτουν κατά κανόνα τραπεζοειδή στοιχεία που παρουσιάζουν ικανοποιητική παραλληλία πλευρών κατά την ακτινική τους κατεύθυνση. Το γεωμετρικό σφάλμα που προκύπτει από την θεώρηση επίπεδων στοιχείων ελαχιστοποιείται με την επιλογή πυκνότερου πλέγματος σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία $\overline{XG}(k,n)$, $k=1:3$, $n=1:NNT$, όπου το k αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και το n σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση (3.3). Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου e , ($e=1,NTE$) καθορίζεται από τις συντεταγμένες \overline{XG} των τεσσάρων κορυφών του, που αριθμούνται δεξιόστροφα (Σχήμα 3.1). Σύμφωνα με αυτές μπορούμε να ορίσουμε το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου $O^e(\xi,\eta,\zeta)$, με μοναδιαία βάση $\bar{e}_\xi^e, \bar{e}_\eta^e, \bar{e}_\zeta^e$ ως προς το γενικό (αδρανειακό) σύστημα. Οι κορυφές $K=1,4$ στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος που έχουν αρίθμηση $NE(K,e)$, ($K=1,4$, $e=1,NTE$). Ένας κόμβος K της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου θα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο κόμβο NE έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} K=1 &\rightarrow NE(1,e) = (j-1) \cdot (NNB-1) + i \\ K=2 &\rightarrow NE(2,e) = j \cdot (NNB-1) + i \\ K=3 &\rightarrow NE(3,e) = j \cdot (NNB-1) + i + 1 \\ K=4 &\rightarrow NE(4,e) = (j-1) \cdot (NNB-1) + i + 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Με δεδομένη τη γεωμετρία των κόμβων του πλέγματος γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού S^e , του μήκους της περιφέρειας ∂S^e του στοιχείου e , τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών, το πλάτος και τις διαγώνιους του στοιχείου καθώς και άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στους υπολογισμούς. Για κάθε στοιχείο του επιφανειακού πλέγματος ορίζεται το "σημείο ελέγχου" \bar{x}_{cp}^e που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης. Ο υπολογισμός του γίνεται έτσι ώστε να μηδενίζεται η εφαπτομενική αυτεπαγόμενη ταχύτητα της διανομής πηγών του στοιχείου για αύξηση της ακρίβειας των υπολογισμών μας.

3.3 Αναπαράσταση του Φύλλου Στροβιλότητας

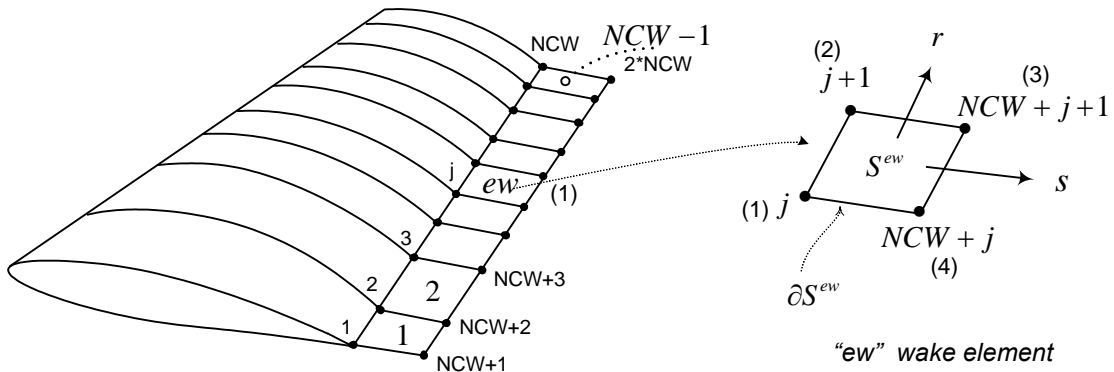
Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία εκτενής ανάλυση στον τρόπο παραγωγής και εξέλιξης του φύλλου στροβιλότητας. Η παραγωγή και η εξέλιξη του φύλλου στροβιλότητας γίνεται σταδιακά στο τέλος κάθε χρονικού βήματος επίλυσης, όταν έχουν υπολογιστεί οι άγνωστες διανομές πηγών και διπόλων στο αστρόβιλο πεδίο ροής.

Εξετάζοντας τη γενική περίπτωση της μη μόνιμης ροής ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος είναι δυνατόν να αποτελείται από δύο τμήματα :

α) τον "κοντινό" ομόρρου : Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί το τμήμα του φύλλου στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από το σώμα και αναπαρίσταται μέσω της δυναμικής θεώρησης με τη δημιουργία πλέγματος δινοσωλήνων. Ο μακρινός ομόρρους αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στροβιλή θεώρηση με στοιχεία στροβιλότητας. Αρχικά παράγεται ένα τμήμα επιφανειακής στροβιλότητας (κοντινός ομόρρους), που εκφεύγει από το σώμα με ένταση που προκύπτει από το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Αυτή η περιοχή απαρτίζεται από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι δημιουργείται ένα

δισκοπλέγμα (vortex lattice) όπου διανέμεται επιφανειακή και επικαμπύλια στροβιλότητα.

Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαρίσταται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών $r = ct$ του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για τον ομόρρο και για το σώμα, καθώς αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου αποτελείται από τους κόμβους του σώματος που βρίσκονται πάνω στην ακμή εκφυγής καθώς και τους κόμβους που προκύπτουν από τη μεταφορά αυτών σύμφωνα με την μέση ταχύτητα που υπολογίζεται στα σημεία ελέγχου των στοιχείων της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία $NCW - 1$ επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από $2 \cdot NCW$. Η θέση του τετράπλευρου στοιχείου "ew" του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από τις συντεταγμένες $\overline{XWAKE}(k, nw)$, $k = 1, 3$, $nw = 1, 2 \cdot NCW$ των τεσσάρων κορυφών του nw , που αριθμούνται δεξιόστροφα. Με δεδομένα αυτά τα σημεία κάνουμε αντίστοιχους υπολογισμούς για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των στοιχείων τόσο στο γενικό όσο και στο τοπικό τους σύστημα. Στην περίπτωση των στοιχείων του κοντινού ομόρρου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός του σημείου ελέγχου καθώς δεν επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης σε αυτά.



Σχήμα 3.2 Η διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου με επιφανειακά στοιχεία (wake elements)

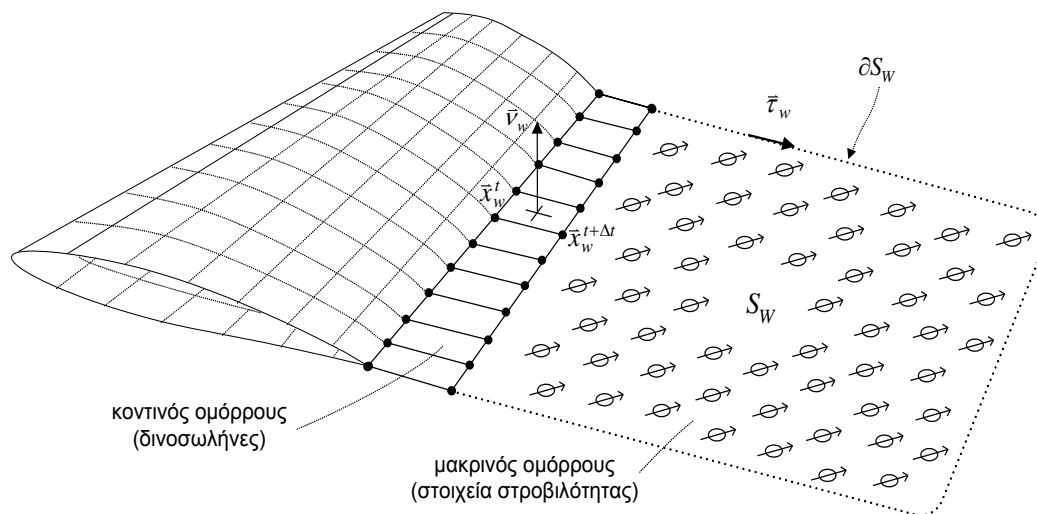
Για κάθε στοιχείο "ew" του κοντινού ομόρρου κατασκευάζεται ο πίνακας $NEWAKE$ αντιστοίχισης της τοπικής με τη γενική αριθμηση ενός κόμβου όπως ακριβώς συμβαίνει για τα στοιχεία της επιφάνειας του σώματος.

$$\begin{aligned}
 K = 1 & \rightarrow NEWAKE(1, ew) = ew \\
 K = 2 & \rightarrow NEWAKE(2, ew) = ew + 1 \\
 K = 3 & \rightarrow NEWAKE(3, ew) = NEWAKE(2, ew) + NCW \\
 K = 4 & \rightarrow NEWAKE(4, ew) = NEWAKE(1, ew) + NCW
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Τέλος, όπως θα φανεί στο στάδιο διάρθρωσης των εξισώσεων του προβλήματος, είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός πίνακα $ICIRC(e)$, $e=1, NTE$, που θα αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο “ e ” του πλέγματος την τιμή j της ακτινικής λωρίδας στην οποία βρίσκεται, σύμφωνα με τον ορισμό (3.4). Θεωρώντας μάλιστα ότι η αποβολή στροβιλότητας γίνεται μόνο από την ακμή εκφυγής και όχι από παράπλευρες ακμές (όπως λχ. το ακροπερύγιο), τότε σε κάθε ακτινική λωρίδα αντιστοιχεί ένα στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας $ICIRC(e)$ θα γράφεται:

$$ICIRC(e(i, j)) = ew(j) = j, \quad j = 1, NCW - 1 \quad (3.7)$$

β) τον “μακρινό” ομόρρο: Ο μακρινός ομόρρος αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στροβιλή θεωρία με στοιχεία στροβιλότητας. Αφού δημιουργηθεί ο κοντινός ομόρρος, αυτή η διανομή στροβιλότητας μετατρέπεται σε χωρική, καθώς συγκεντρώνεται σημειακά σε στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles). Έτσι σχηματίζεται ο μακρινός ομόρρος σε στροβιλή μορφή. Στην γενική έκφραση ενός πεδίου στροβιλότητας μπορούν να εισάγονται και φύλλα στροβιλότητας άλλων σωμάτων ή και διαταραχές της επί άπειρον ροής (λχ. εισερχόμενη τυρβώδης ροή) με μορφή χωρικής στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή οι θέσεις και οι εντάσεις των στοιχείων στροβιλότητας θεωρούνται γνωστές στο χρονικό βήμα που εισάγονται στο πρόβλημα.



Σχήμα 3.3 Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας

3.4 Οι Βαθμοί Ελευθερίας των Διανομών των Ιδιομορφιών στα Σώματα

Το θεώρημα του Green καθιστά δυνατή την αναπαράσταση των σωμάτων κατανέμοντας στην επιφάνειά τους διανομές πηγών και διπόλων. Σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζεται η ένταση των πηγών και των διπόλων σε κάθε στοιχείο των σωμάτων και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ένταση πηγών και διπόλων αποτελεί ένα βαθμό ελευθερίας του προβλήματος ο οποίος επηρεάζει το πεδίο ροής. Για να έχει λύση το πρόβλημα αφού τα σημεία του σώματος είναι άπειρα χρειαζόμαστε

ένα πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας καθώς και τις αντίστοιχες συνθήκες για να επιλυθεί το πρόβλημα. Αυτές οι συνθήκες καθορίζουν τον τύπο των ιδιομορφιών που θα χρησιμοποιηθούν. Οι ιδιομορφίες είναι οι πηγές ,τα δίπολα και τα «εικονικά» δίπολα.

α) Πηγαία σώματα: Σε αυτά τα σώματα χρησιμοποιείται μια κατανομή πηγών για να καθορίσουμε την επιφάνεια ενός μη ανωστικού τρισδιάστατου σώματος. Σε αυτήν την περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι σταθερές έντασης κατανομή πηγών σε κάθε στοιχείο του πλέγματος πάνω στην επιφάνεια του σώματος και συνεπώς ο αριθμός αυτών των βαθμών ελευθερίας είναι ίδιος με τον αριθμό των στοιχείων του πλέγματος. Η συνθήκη που χρησιμοποιείται σε αυτά τα σώματα είναι η συνθήκη μη-εισχώρησης σε κάθε στοιχείο του πλέγματος στο σημείο που τοποθετείται η πηγή.

β) Λεπτά ανωστικά διπολικά σώματα: Ένα διπολικό σώμα μπορεί να είναι είτε ανωστικό είτε μή-ανωστικό. Αυτό εξαρτάται από το αν έχει ομόρρου ή όχι (ο ομόρρους δημιουργεί μια επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού και οδηγεί σε δημιουργία κυκλοφορίας και συνεπώς άνωσης). Σε αυτή την περίπτωση οι βαθμοί ελευθερίας αποτελούνται από την κατανομή διπόλων σε κάθε στοιχείο του πλέγματος που περιβάλλει την επιφάνεια του σώματος. Συνεπώς ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι όσα είναι τα στοιχεία του πλέγματος του σώματος και χρησιμοποιείται αντίστοιχος αριθμός συνθηκών μη-εισχώρησης για να βρούμε τις τιμές των διπόλων.

γ) «Εικονικά» διπολικά σώματα: Αυτά τα σώματα δεν μπορούν να θεωρηθούν σαν ξεχωριστά σώματα γιατί πάντα συνδέονται με ένα μη ανωστικό πηγαίο σώμα. Στην ουσία αυτά τα σώματα δημιουργούν μία γραμμική κατανομή διπόλων σε ένα ήδη υπάρχον πηγαίο σώμα και αποβάλλουν στροβιλότητα με σκοπό να μετατρέψουν το μή ανωστικό πηγαίο σώμα σε ανωστικό. Λόγω αυτής της συσχέτισης δεν χρησιμοποιούμε τη συνθήκη μη εισχώρησης για να υπολογιστεί η ένταση της κατανομής αφού αυτή η συνθήκη χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο πηγαίο σώμα. Η συνθήκη που χρησιμοποιούμε σε αυτή την περίπτωση είναι η συνθήκη KUTTA σύμφωνα με την οποία απαιτείται η πίεση στο πάνω μέρος της ακμής εκφυγής να είναι ίδια με την πίεση στο κάτω μέρος αυτής. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται εξισώνοντας τις πιέσεις στα σημεία ελέγχου των στοιχείων του πλέγματος (εκεί που ικανοποιείται η συνθήκη μη εισχώρησης στο πηγαίο σώμα) που δημιουργούν την ακμή εκφυγής. Με αυτό τον τρόπο εισάγουμε NCW-1 συνθήκες (αφού αυτό το σώμα και το συνδεδεμένο πηγαίο θεωρούνται ως ένα) και συνεπώς θέλουμε NCW -1 βαθμούς ελευθερίας για να έχει λύση το σύστημα. Για αυτό το λόγο θεωρούμε ότι η ένταση της κατανομής των διπόλων στο «εικονικό» σώμα σε κάθε «φέτα» του σώματος και σε κάθε στοιχείο της φέτας είναι ανάλογη με το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο. Συνεπώς $\mu = B \cdot \text{slength}$ (όπου slength είναι το μήκος της πλεγματικής γραμμής μέχρι αυτό το στοιχείο) με τον συντελεστή αναλογίας B να αλλάζει από φέτα σε φέτα.

Συνοψίζοντας στην μέθοδο που χρησιμοποιούμε κάνουμε τις ακόλουθες επιλογές:

(α) Θεωρούμε επίπεδα στοιχεία.

(β) Τοποθετούμε τις διανομές των ιδιομορφιών στην πραγματική επιφάνεια των σωμάτων.

(γ) Επιλέγουμε επιφανειακές κατανομές για τις διανομές των ιδιομορφιών πηγών και διπόλων στα σώματα και τον κοντινό ομόρρου και συγκεντρωμένες κατανομές σε σημεία για τη διανομή στροβιλότητας στον ομόρρου.

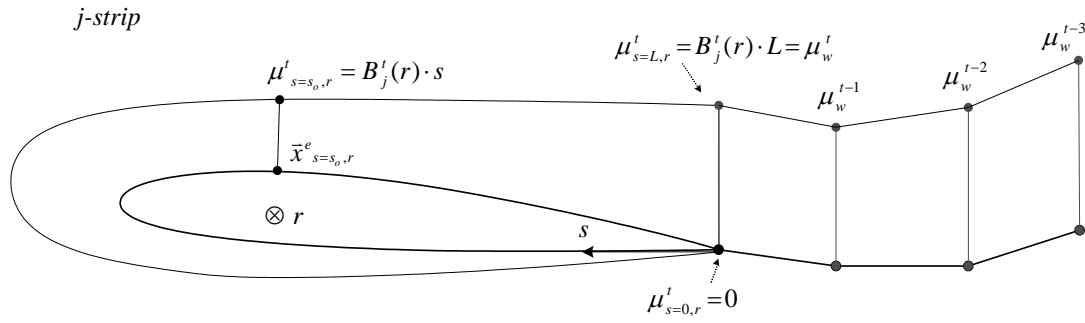
(δ) Θεωρούμε τμηματικά σταθερές κατανομές πηγών για τα στοιχεία του πλέγματος. Επίσης θεωρούμε κατανομή διπόλων τμηματικά σταθερή κατά την r -κατεύθυνση του πλέγματος και γραμμική κατά την s -κατεύθυνση. Σύμφωνα με τα παραπάνω στο στοιχείο e τοποθετείται επιφανειακή κατανομή πηγών και διπόλων και σε τυχαίο σημείο $\bar{x}^e(s, r) \in S^e$ υπολογίζονται οι εντάσεις σ^e και μ^e αντίστοιχα:

$$\sigma^e(\bar{x}^e) = ct, \quad \bar{x}^e \in S^e \quad (3.8)$$

και:

$$\begin{aligned} \mu^e(\bar{x}^e(s, r)) &= B(r) \cdot s, \quad \bar{x}^e \in S^e \\ B(r) &= B_{j=ICIRC(e)} = ct, \quad r_j \leq r \leq r_{j+1}, \quad j=1, ICIRC(NTE) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Η κλίση της διανομής διπόλων $B(r)$ μεταβάλλεται κατά την ακτινική κατεύθυνση, ενώ έχει σταθερή τιμή $B_{ICIRC(e)} = ct$, κατά την s -κατεύθυνση, για όλα τα σημεία ελέγχου \bar{x}_{CP}^e κατά το εύρος μίας ακτινικής "λωρίδας" με μέση ακτίνα r (0).



Σχήμα 3.4 Η γραμμική μεταβολή της διανομής διπόλων $\mu(s)$ κατά τη διεύθυνση της χορδής στην ακτινική θέση r (j -strip)

Με τον τρόπο αυτό ο καθορισμός της διανομής διπόλων στο γεωμετρικό πλέγμα ανάγεται σε πρόβλημα υπολογισμού των αγνώστων σταθερών B_j . Επιλέγοντας τμηματικά σταθερή κατανομή για τη διανομή διπόλων στην ακτινική κατεύθυνση προσεγγίζεται αντίστοιχα με τμηματικά σταθερή κατανομή και η κυκλοφορία του σώματος. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη φόρτισης του σώματος προσεγγίζεται τόσο ακριβέστερα όσο πιο πυκνή είναι η διακριτοποίηση της γεωμετρίας κατά το εύρος του. Η διατήρηση της κυκλοφορίας στο χρόνο, σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin οδηγεί στον καθορισμό των εντάσεων μ_w^t των διπόλων στον ομόρρου:

$$\mu_w^t = B_j^t \cdot L, \quad \mu_w^{t-1} = B_j^{t-1} \cdot L, \quad \dots \quad (3.10)$$

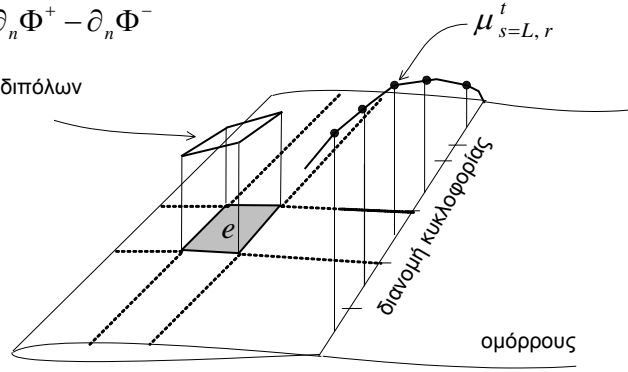
Συνοψίζοντας τα παραπάνω, στο 0 παρουσιάζονται οι αριθμητικές επιλογές για την αναπαράσταση ενός ανωστικού σώματος. Τοποθετούνται επιφανειακές διανομές πηγών (τμηματικά σταθερές, piecewise constant source distribution) και διπόλων (διγραμμικά μεταβαλλόμενες, bi-linearly varying dipole distribution) και η κυκλοφορία προκύπτει στην ακμή εκφυγής του σώματος, ως συνέπεια της εφαρμογής του θεωρήματος του Kelvin.

τμηματικά σταθερή διανομή πηγών

$$\sigma^e = \partial_n \Phi = \partial_n \Phi^+ - \partial_n \Phi^-$$

διγραμμική διανομή διπόλων

$$\mu^e = B(r) \cdot s$$



Σχήμα 3.5 Η διανομή ιδιομορφιών στο σώμα και η κατανομή κυκλοφορίας

Ορίζοντας με τον τρόπο αυτό τις κατανομές των ιδιομορφιών εισάγονται *NDFT* (Total Number of Degrees of Freedom) βαθμοί ελευθερίας:

$$\begin{aligned} NDFT &= NTE_{\sigma^e} + (NCW - 1)_{\mu^e} \\ &= NTE_{\sigma^e} + (ICIRC(NTE))_{\mu^e} \end{aligned} \quad (3.11)$$

όπου NTE_{σ^e} είναι ο αριθμός των αγνώστων εντάσεων $\sigma^e(\bar{x}) = ct$, $\bar{x} \in S^e$ των τμηματικά σταθερών επιφανειακών πηγών στα NTE στοιχεία του γεωμετρικού πλέγματος του σώματος και $(ICIRC(NTE))_{\mu^e} = (NCW - 1)_{\mu^e}$ ο αριθμός των τιμών κλίσεων B_j της κατανομής διπόλων, που είναι ίσος με τον αριθμό των ακτινικών θέσεων που ορίζεται στην διακριτοποίηση του σώματος. Αυτό το σύστημα των *NDFT* αγνώστων είναι πλήρως ορισμένο καθώς μπορούν να οριστούν NTE το πλήθος εξισώσεις που να ικανοποιούν την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης και $NCW-1$ εξισώσεις που να ικανοποιούν τη δυναμική συνθήκη Kutta-Joukowski.

3.5 Κινηματική Συνθήκη Μη Εισχώρησης

Η ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης σε σημείο \bar{x} της επιφανείας ενός σώματος επιβάλλει τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας σε αυτό το σημείο:

$$(\bar{u}(\bar{x}; t) - \bar{U}_B(\bar{x}; t)) \cdot \bar{v}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in S \quad (3.12)$$

όπου:

$\bar{v}(\bar{x})$ το κάθετο διάνυσμα στη θέση \bar{x} ,

$\bar{U}_B(\bar{x})$ η ταχύτητα του σώματος στο αδρανειακό σύστημα και $\bar{u}(\bar{x})$ η ταχύτητα του πεδίου ροής στη θέση \bar{x} .

Η ταχύτητα του πεδίου ροής υπολογίζεται ακολούθως:

$$\bar{u}(\bar{x};t) = \bar{U}_\infty(t) + \bar{u}_{SD}(\bar{x};t) + \bar{u}_{NW}(\bar{x};t) + \bar{u}_\omega(\bar{x};t), \quad \bar{x} \in D \quad (3.13)$$

όπου:

$\bar{U}_\infty(t)$ η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο,

$\bar{u}_{SD}(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα,

$\bar{u}_{NW}(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της επιφανειακής κατανομής στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου των σωμάτων και

$\bar{u}_\omega(\bar{x};t)$ η επαγόμενη ταχύτητα της χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας.

Εισάγοντας στην (3.13) τις διακριτές εκφράσεις όλων των συνιστωσών της ταχύτητας και θέτοντας:

$$\bar{U}_a(\bar{x};t) = \bar{U}_\infty(t) + \bar{u}_\omega(\bar{x};t) \quad (3.14)$$

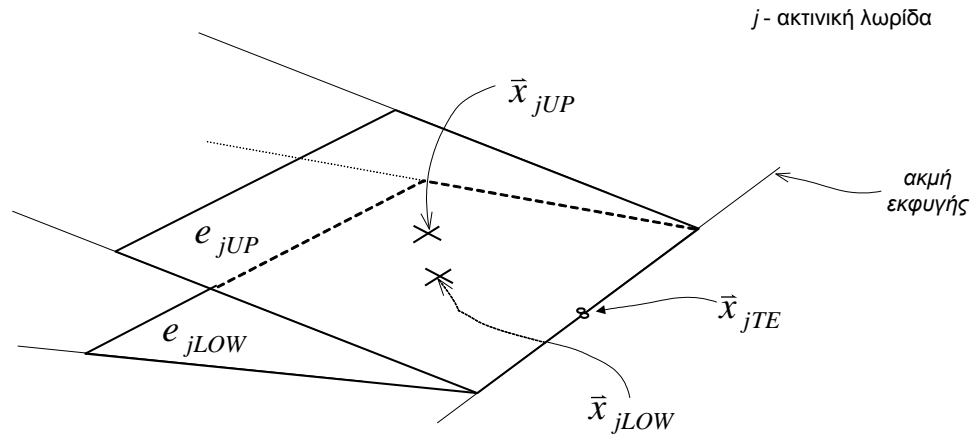
καταλήγουμε στην διακριτή μορφή της συνθήκης μη εισχώρησης που εφαρμόζεται στο σημείο ελέγχου $\bar{x}_{CP}^{e_i}$ κάθε στοιχείου e_i , ($i=1, NTE$) του σώματος:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{e=1}^{NTE} \left\{ \sigma^e \bar{u}_\sigma^e(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 + B_{ICIRC(e)} \bar{u}_\mu^e(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right\} \cdot \bar{v}^{e_i} \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_{ew=1}^{NTEW} B_{ew} \left[\bar{u}_\mu^{ewA}(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right] \right] \cdot \bar{v}^{e_i} \right. \\ & \quad \left. = - \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{CP}^{e_i};t) - \bar{U}_B(\bar{x}_{CP}^{e_i};t) \right] \cdot \bar{v}^{e_i} - \left[\sum_{ew=1}^{NTEW} B_{ew}^{old} \left[\bar{u}_\mu^{ewB}(\bar{x}_{CP}^{e_i};t)^1 \right] \right] \cdot \bar{v}^{e_i} \right. \end{aligned} \quad (3.15)$$

όπου \bar{v}^{e_i} το κάθετο διάνυσμα στο στοιχείο e_i . Η παραπάνω εξίσωση είναι χωρισμένη σε δύο μέρη όπου στο πρώτο μέρος συμπεριλαμβάνονται όλοι οι άγνωστοι. Ο υπερδείκτης "old" αναφέρεται στην ένταση στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου που είναι γνωστή από το προηγούμενο χρονικό βήμα.

3.6 Η Δυναμική Συνθήκη Kutta-Joukowski

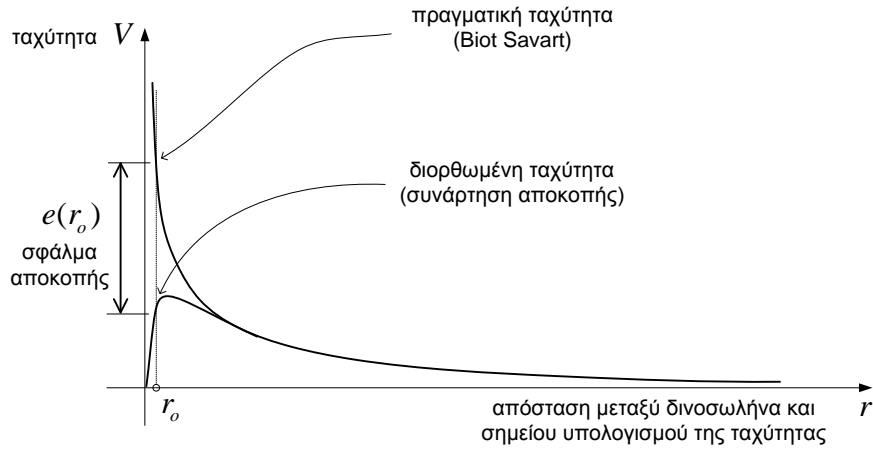
Η εφαρμογή της δυναμικής συνθήκης ολοκληρώνει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων του προβλήματος. Η συνθήκη Kutta-Joukowski επιβάλλει την εξίσωση των πιέσεων, ή ισοδύναμα τον μηδενισμό του πηδήματος της πίεσης στην ακμή εκφυγής και συνεπώς είναι μία μη γραμμική συνθήκη για την ταχύτητα. Ικανοποιείται σε όλες τις ακτινικές λωρίδες όπου έχουμε ορίσει τους άγνωστους συντελεστές $B_{j=ICIRC(e)}$ της διανομής διπόλων, δηλαδή $ICIRC(NTE) = NCW - 1$ φορές. Όμως δεν εφαρμόζεται στην ακμή εκφυγής \bar{x}_{jTE} , καθώς η ταχύτητα απειρίζεται σε σημεία πάνω σε δινοσωλήνα, αλλά στα σημεία ελέγχου \bar{x}_{jUP} και \bar{x}_{jLOW} των στοιχείων που ορίζουν την ακμή εκφυγής (0):



Σχήμα 3.6 Η αριθμητική εφαρμογή της συνθήκης Kutta-Joukowski

Αυτή η επιλογή της θέσεως από τη μία εξασφαλίζει ότι ο υπολογισμός της ταχύτητας γίνεται με ακρίβεια (καθώς στα σημεία ελέγχου εφαρμόζουμε και τη συνθήκη μη εισχώρησης), από την άλλη όμως επιβάλλει την πύκνωση των σημείων στην ακμή εκφυγής, ώστε να προσεγγίζονται καλύτερα οι συνθήκες του πεδίου ροής στην περιοχή αυτή.

Η πύκνωση όμως του γεωμετρικού πλέγματος έχει ένα βασικό περιορισμό, που επιβάλλει την ύπαρξη “αριθμητικά σημαντικής απόστασης” μεταξύ ενός σημείου ελέγχου και των πλευρών που το περιβάλλουν, ώστε να αποφεύγονται ιδιόμορφοι υπολογισμοί ταχυτήτων κοντά σε δινοσωλήνα. Έχει διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση ενός πλέγματος με δυσανάλογα στοιχεία η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να καθυστερεί σημαντικά, αλλά και να οδηγείται σε απόκλιση. Ένας κανόνας που μπορεί να εφαρμοστεί αποβλέποντας στον περιορισμό αυτού του σφάλματος είναι η προσπάθεια αποφυγής δημιουργίας στοιχείων που θα έχουν πλευρές με δυσανάλογο λόγο μήκους, ώστε δύο απέναντι δινοσωλήνες να είναι τοποθετημένοι πολύ κοντά μεταξύ τους. Η πύκνωση προς την ακμή εκφυγής σε συνδυασμό με αυτόν τον περιορισμό επιβάλλει έμμεσα και την πύκνωση κατά την ακτινική κατεύθυνση. Η πύκνωση αυτή οδηγεί σε αύξηση των βαθμών ελευθερίας και των αποβαλλόμενων στοιχείων στροβιλότητας, επιβαρύνοντας σημαντικά τις υπολογιστικές ανάγκες της μεθόδου.



Σχήμα 3.7: Η επαγόμενη ταχύτητα δινωσωλήνα συναρτήσει της απόστασης από αυτόν

Η ταχύτητα $\vec{u}(\vec{x})$ σε τυχαίο σημείο \vec{x} υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \nabla\Phi_{\infty} + \vec{u}_{\omega} + \nabla\Phi_{\sigma,\mu} \\ &= \vec{U}_a + \nabla\Phi_{\sigma,\mu}\end{aligned}\quad (3.16)$$

όπου η \vec{U}_a συμπεριλαμβάνει τις συνεισφορές του μακρινού ομόρρου \vec{u}_{ω} και της αδιατάρακτης ροής $\vec{U}_{\infty} = \nabla\Phi_{\infty}$ (που θεωρείται αστρόβιλη) και σύμφωνα με τα όσα έχουμε προαναφέρει αποτελεί δεδομένο της εξίσωσης, ενώ η $\nabla\Phi_{\sigma,\mu}$ αναπαριστά τη συνεισφορά του σώματος και του κοντινού του ομόρρου και για λόγους απλοποίησης της γραφής των εξισώσεων στη συνέχεια του κειμένου θα συμβολίζεται ως $\nabla\Phi$ ($\nabla\Phi \equiv \nabla\Phi_{\sigma,\mu}$).

Σύμφωνα με τα όσα έχουν προαναφερθεί για τον υπολογισμό των πιέσεων στο προηγούμενο κεφάλαιο, από την εφαρμογή της συνθήκης Kutta-Joukowski στα σημεία ελέγχου της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής σε μία ακτινική θέση προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{p_{UP}(\vec{x}_{UP};t)}{\rho} &= \frac{p_{LOW}(\vec{x}_{LOW};t)}{\rho} \Rightarrow \\ &\frac{\partial\Phi_{UP}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{u}^2(\vec{x}_{UP};t) - \vec{u}(\vec{x}_{UP};t) \cdot \vec{U}_b(\vec{x}_{UP};t) = \\ &\frac{\partial\Phi_{LOW}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{u}^2(\vec{x}_{LOW};t) - \vec{u}(\vec{x}_{LOW};t) \cdot \vec{U}_b(\vec{x}_{LOW};t)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Ορίζοντας για το μέγεθος a το «πήδημα» $[[a]]$ ως τη διαφορά μεταξύ των τιμών που λαμβάνει στην επάνω και την κάτω πλευρά στην j -ακτινική λωρίδα έτσι ώστε:

$$[[a]] = a(\vec{x}_{jUP}, t) - a(\vec{x}_{jLO}, t)\quad (3.18)$$

τότε η εξίσωση (3.17) γράφεται απλοποιημένη:

$$\frac{p}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + \frac{1}{2} \cdot [\vec{u}]^2 - [\vec{u} \cdot \vec{U}_b] = 0 \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + [\vec{u}]^2 - [\vec{u} \cdot \vec{U}_b] = 0$$

εισάγοντας την (3.16) στην παραπάνω μετά από πράξεις καταλήγουμε στην:

$$2 \cdot \frac{\vartheta[\Phi]}{\vartheta t} + [\nabla\Phi \cdot (\nabla\Phi + 2 \cdot (\vec{U}_a - \vec{U}_b))] = [\vec{U}_a \cdot (2 \cdot \vec{U}_b - \vec{U}_a)] \quad (3.20)$$

Ο τετραγωνικός όρος της επαγόμενης ταχύτητας των σωμάτων $\nabla\Phi$ καθιστά τη συνθήκη μη γραμμική. Για την διατύπωση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος, γραμμικοποιούμε τη συνθήκη Kutta, επιλύοντας με επαναληπτική διαδικασία το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος. Σε ένα δεδομένο χρονικό βήμα θεωρούμε ότι το τετράγωνο της άγνωστης ταχύτητας προσεγγίζεται με το γινόμενο της ταχύτητας στην τρέχουσα επανάληψη (άγνωστο μέγεθος) επί την ταχύτητα στην προηγούμενη επανάληψη (γνωστό μέγεθος). Επίσης το πήδημα δυναμικού $[\Phi]$ συσχετίζεται άμεσα με την κυκλοφορία Γ και την άγνωστη διανομή μ_{UP} :

$$[\Phi] = \Gamma = -\mu_{up} \quad (3.21)$$

Έτσι στην (n)-επανάληψη η συνθήκη Kutta γράφεται :

$$2 \cdot \frac{\vartheta\mu_{up}}{\vartheta t} + [\nabla\Phi^n \cdot (\nabla\Phi^{n-1} + 2 \cdot (\vec{U}_a - \vec{U}_b))] = [\vec{U}_a \cdot (2 \cdot \vec{U}_b - \vec{U}_a)] \quad (3.22)$$

Στην πρώτη επανάληψη του μηδενικού χρονικού βήματος θεωρούμε μηδενικές τιμές για τα $\nabla\Phi_{jUP}^{(n-1)}$, $\nabla\Phi_{jLOW}^{(n-1)}$, ενώ για την πρώτη επανάληψη μίας χρονικής στιγμής θεωρούμε τις τιμές των $\nabla\Phi_{jUP}$, $\nabla\Phi_{jLOW}$ στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Αυτή η διαδικασία είναι ευσταθής και συγκλίνει σχετικά γρήγορα σε 3-4 περίπου επαναλήψεις.

Εξετάζοντας την (3.21) χρειάζεται να γίνει μία παρατήρηση που σχετίζεται με το ότι ο όρος $\nabla\Phi^{(n)}$ περιλαμβάνει και την συνεισφορά του κοντινού ομόρρου μέρος της οποίας είναι γνωστή.:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi^{(n)}(\bar{x}_o; t) &= \bar{u}_{SD}(\bar{x}_o; t) + \bar{u}_{NW}(\bar{x}_o; t) \\ &= \sum_{e=1}^{NTE} \left\{ \sigma^{e(n)} \bar{u}_{\sigma}^e(\bar{x}_o; t)^1 + B_{ICIRC(e)}^{(n)} \cdot \bar{u}_{\mu}^e(\bar{x}_o; t)^1 \right\} \\ &\quad + \sum_{ew=1}^{NTEW} \left\{ B_{ew}^{(n)} \cdot \bar{u}_{\mu}^{ewA}(\bar{x}_o; t)^1 + B_{ew}^{old} \cdot \bar{u}_{\mu}^{ewB}(\bar{x}_o; t)^1 \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

θέτοντας:

$$\nabla\Phi^B(\bar{x}_o; t) = \sum_{ew=1}^{NTEW} \left\{ B_{ew}^{old} \cdot \bar{u}_{\mu}^{ewB}(\bar{x}_o; t)^1 \right\} \quad (3.24)$$

και συμβολίζοντας με $\nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_o;t)$ τους υπόλοιπους παράγοντες του δευτέρου μέρους της (3.23) προκύπτει:

$$\nabla\Phi^{(n)}(\bar{x}_o;t) = \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_o;t) + \nabla\Phi^B(\bar{x}_o;t) \quad (3.25)$$

Ας θεωρήσουμε τα στοιχεία e_{jUP} και e_{jLOW} στην ακμή εκφυγής, καθώς και τα αντίστοιχα σημεία ελέγχου \bar{x}_{jUP} και \bar{x}_{jLOW} , που βρίσκονται στην ακτινική λωρίδα j , $j=1, NCW-1$ (0). Εισάγοντας στην (3.22) την (3.25) προκύπτει η διακριτή μορφή της γραμμικοποιημένης δυναμικής συνθήκης (εξίσωση (3.26)). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλα τα μεγέθη στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι γνωστά κατά τη (n)-επανάληψη αφού αναφέρονται είτε στο προηγούμενο χρονικό βήμα (old), είτε στο προηγούμενο βήμα (n-1) της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης της μη γραμμικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} & \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_{jUP};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jUP};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & - \nabla\Phi^{(n),A}(\bar{x}_{jLOW};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jLOW};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \\ & - 2 \frac{\mu_{jUP}}{\Delta t} = - 2 \frac{\mu_{jUP}^{old}}{\Delta t} \\ & - \nabla\Phi^B(\bar{x}_{jUP};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jUP};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & + \nabla\Phi^B(\bar{x}_{jLO};t) \cdot \left[\nabla\Phi^{(n-1)}(\bar{x}_{jLOW};t) + 2 \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - \bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \\ & - \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jUP};t) - 2\bar{U}_b(\bar{x}_{jUP};t)) \right] \\ & + \left[\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) \cdot (\bar{U}_a(\bar{x}_{jLOW};t) - 2\bar{U}_b(\bar{x}_{jLOW};t)) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.7 Το Επιφανειακό Φύλλο Στροβιλότητας: Ο Κοντινός Ομόρρους.

Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί μία λεπτή ζώνη κοντά στην ακμή εκφυγής όπου η στροβιλότητα διανέμεται ιδιόμορφα σε επιφανειακό πλέγμα διπόλων. Η υλική εξέλιξη του κοντινού ομόρρου καθορίζεται από την κινηματική εξίσωση:

$$\frac{d\bar{x}_w}{dt} = \bar{U}_m(\bar{x}_w;t) \Rightarrow \bar{x}_w^{t+\Delta t} = \bar{x}_w^t + \bar{U}_m(\bar{x}_w;t) \cdot \Delta t \quad (3.28)$$

όπου ο όρος $\bar{U}_m(\bar{x}_w;t)$ εκφράζει τη συνολική μέση ταχύτητα στην ακμή εκφυγής (που ουσιαστικά λαμβάνει την τιμή \bar{x}_w^t), και σαφώς έχει μόνο εφαπτομενική συνιστώσα, συμπεριλαμβάνοντας την επίδραση της επ'άπειρον ροής, των σωμάτων και της ελεύθερης στροβιλότητας. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θεωρούμε ότι η διεύθυνση αυτής της ταχύτητας είναι προδιαγεγραμμένη και μάλιστα ότι είναι η εφαπτομενική στο στοιχείο που βρίσκεται ακριβώς κάτω από την ακμή εκφυγής. Αυτό βρίσκεται σε συνέπεια με τη θεωρία του ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, που επιβάλλει ότι η διεύθυνση εκφυγής του κοντινού ομόρρου μπορεί να είναι εφαπτομενική είτε στην κάτω, είτε στη επάνω πλευρά, είτε να είναι η διχοτόμος της πάνω και κάτω πλευράς στην ακμή

εκφυγής. Το μέτρο αυτής της ταχύτητας υπολογίζεται από την μέση τιμή των ταχυτήτων όπως αυτές υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου των δύο επιφανειακών στοιχείων που βρίσκονται εκατέρωθεν από την ακμή εκφυγής, με κοινή πλευρά την ακμή εκφυγής. Η εφαρμογή της (3.28) οδηγεί στην δημιουργία επιφανειακής διανομής στροβιλότητας από δινοσωλήνες που ορίζουν τετράπλευρα στοιχεία. Έτσι προσδιορίζεται η γεωμετρία του κοντινού ομόρρου. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας θα πρέπει το μήκος του κοντινού ομόρρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το μήκος των γειτονικών στοιχείων του σώματος στην ακμή εκφυγής. Αυτό είναι ένα γεωμετρικό κριτήριο που πρέπει να ικανοποιείται στο βαθμό που είναι δυνατό. Η εξίσωση (3.28) στην περίπτωση αυτή συσχετίζει την κλίμακα χρόνου με την κλίμακα μήκους του προβλήματος, ώστε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος να είναι ευσταθής. Αυτό βέβαια δεν εξασφαλίζει ότι μία τυχαία επιλογή χρονικού βήματος και χωρικής διακριτοποίησης που ικανοποιεί αυτό το γεωμετρικό κριτήριο είναι πάντα αρκετή για την λεπτομερή αναπαράσταση του πεδίου ροής. Επιπλέον θα πρέπει η κλίμακα μήκους να επιλέγεται ώστε να μπορεί να αναπαράγει την κλίμακα μήκους των διαφόρων φυσικών μηχανισμών του εξεταζόμενου προβλήματος.

Σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράφηκε ο κοντινός ομόρρος αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων με μήκος που καθορίζεται από την τοπική ταχύτητα. Στην περίπτωση της περιστροφής εκφεύγουν ευθύγραμμοι δινοσωλήνες με μήκος ($dx = \omega \cdot r \cdot dt$) που αυξάνει γραμμικά με την ακτίνα και γίνεται ιδιαίτερα σημαντικό στο ακροπτερύγιο, με συνέπεια την αύξηση της ακτίνας του εκφεύγοντος ελικοειδούς δινοσωλήνα. Αυτό αλλοιώνει την φυσική του προβλήματος και οδηγεί στην ακτινική απομάκρυνση των δινοσωλήνων του κοντινού ομόρρου από το σώμα με συνέπεια την εξασθένιση της επαγόμενης ταχύτητας του ομόρρου στο σώμα (που είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης), με αποτέλεσμα τον υπολογισμό αυξημένων φορτίων και την υπερεκτίμηση των υπολογισμών. Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος μπορεί να γίνει με την επιλογή μικρού χρονικού βήματος.

Ο ποσοτικός καθορισμός της αποβαλλόμενης στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρο γίνεται σε κάθε χρονικό βήμα με την ικανοποίηση της δυναμικής συνθήκης μηδενισμού της πίεσης στην ακμή εκφυγής και είναι σύμφωνος με την αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει στη συνέχεια θα δούμε πως καθορίζεται η ένταση της κατανομής διπόλων μ_w στους δινοσωλήνες του κοντινού ομόρρου.

Με δεδομένη τη γεωμετρία $\bar{x}_w(t)$ σε στοιχείο w του κοντινού ομόρρου και τις εντάσεις των διπόλων $\mu_w(\bar{x}_w; t)$ σε αυτό, υπολογίζονται το δυναμικό $\Phi_w(\bar{x}_o; t)$ και η ταχύτητα $\bar{u}_w(\bar{x}_o; t)$ που αυτό επάγει σε σημείο του χώρου $\bar{x}_o \in D$:

$$\Phi_w(\bar{x}_o; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{\bar{v}_w(\bar{x}_w) \cdot (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x})$$

(3.29)

$$\begin{aligned}\bar{u}_w(\bar{x}_o; t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \left\{ \nabla \mu_w(\bar{x}_w; t) \times \nu_w(\bar{x}) \right\} \times \frac{\bar{x}_o - \bar{x}_w}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} dS_w(\bar{x}) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\partial S_w} \mu_w(\bar{x}_w; t) \frac{d\vec{l}_w \times (\bar{x}_o - \bar{x}_w)}{|\bar{x}_o - \bar{x}_w|^3} \right]\end{aligned}\quad (3.30)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο απειρισμός που προκύπτει όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής των παραπάνω σχέσεων μπορεί να συμβεί μόνο μετά την επίλυση του συστήματος εάν επιδιώξουμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας σε θέσεις πάνω στο επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας.

3.8 Η μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας σε χωρική

Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή t το αλγεβρικό σύστημα έχει επιλυθεί. Αν $\mu^{ew}(\xi, \eta)$ είναι η διανομή διπόλων στο στοιχείο ew του κοντινού ομόρρου στο τοπικό σύστημα, τότε η ένταση $\vec{\Omega}_{ew}$ της ισοδύναμης χωρικής στροβιλότητας θα είναι:

$$\vec{\Omega}_{ew} = \int_{S^{ew}} \left\{ \nabla_{\xi\eta} \mu^{ew}(\xi, \eta) \times \vec{\nu}^{ew} \right\} d\xi d\eta + \left[\int_{\partial S^{ew}} \mu^{ew}(\xi, \eta) d\vec{l} \right] \quad (3.31)$$

όπου ο συμβολισμός $\nabla_{\xi\eta}$ σημαίνει ότι οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς την τοπική βάση. Σε κάθε χρονικό βήμα και για κάθε στοιχείο του κοντινού ομόρρου παράγονται δύο στοιχεία χωρικής στροβιλότητας σύμφωνα με την (3.31), ένα που συγκεντρώνει την επιφανειακή στροβιλότητα και ένα που συμπεριλαμβάνει τον επικαμπύλιο όρο. Στο τελευταίο στοιχείο του ομόρρου παράγεται ένα επιπλέον στοιχείο στροβιλότητας που συγκεντρώνει τον στρόβιλο του ακροπερυγίου. Αυτό σημαίνει ότι αν ο συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων είναι n , ο συνολικός αριθμός στοιχείων στροβιλότητας NVR (Number of Vortex Particles) μετά την εξέλιξη και των n χρονικών βημάτων θα είναι:

$$NVR_n = n \cdot (2 \cdot NTEW + 1) \quad (3.32)$$

Η ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου οδηγεί στη δημιουργία ενός στοιχείου στροβιλότητας έντασης $\vec{\Omega}_{surf_1}^{ew}$ τοποθετημένο στη θέση $\overline{XVR}_{surf_1}^{ew}$ του γεωμετρικού κέντρου του στοιχείου (με κορυφές \overline{XWAKE}_i^{ew}) από το οποίο προέρχεται:

$$\overline{XVR}_{surf_1}^{ew} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \overline{XWAKE}_i^{ew} \quad (3.33)$$

Η έντασή του προκύπτει από την ολοκλήρωση της διανομής διπόλων στο επιφανειακό στοιχείο. Η διανομή διπόλων στον ομόρρου μπορεί να γραφτεί :

$$\mu^{ew}(\xi, \eta) = a_{00} + b_{00} + (a_{10} + b_{10})\xi + (a_{01} + b_{01})\eta + (a_{11} + b_{11})\xi\eta \quad (3.34)$$

από όπου προκύπτει:

$$\left\{ \nabla_{\xi\eta} \boldsymbol{\mu}^{ew}(\xi, \eta) \times \bar{\mathbf{v}}^{ew} \right\} = \begin{Bmatrix} a_{10} + b_{10} + (a_{11} + b_{11})\xi \\ -a_{01} - b_{01} - (a_{11} + b_{11})\eta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

και συνεπώς η ένταση του στοιχείου στροβιλότητας γράφεται :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{surf-1}^{ew} &= \int_{S^{ew}} \left\{ \nabla_{\xi\eta} \boldsymbol{\mu}^{ew}(\xi, \eta) \times \bar{\mathbf{v}}^{ew} \right\} d\xi d\eta \\ &= \left((a_{10} + b_{10}) \cdot S^{ew} + (a_{11} + b_{11}) m_{\xi}^{ew} \right) \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\xi}^{ew} \\ &\quad - \left((a_{01} + b_{01}) \cdot S^{ew} + (a_{11} + b_{11}) m_{\eta}^{ew} \right) \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\eta}^{ew} \end{aligned} \quad (3.36)$$

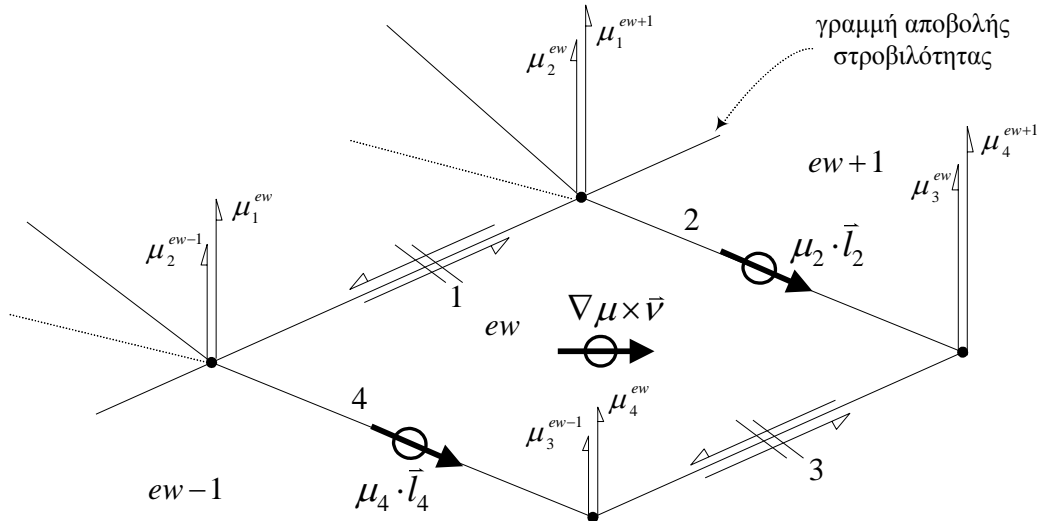
όπου S^{ew} το εμβαδόν του στοιχείου, $\bar{\mathbf{e}}_{\xi}^{ew}$, $\bar{\mathbf{e}}_{\eta}^{ew}$ η επιφανειακή βάση του στοιχείου (ew) και m_{ξ}^{ew} , m_{η}^{ew} οι ροπές του τετραπλεύρου ως προς ξ και η αντίστοιχα:

$$m_{\xi}^{ew} = \int_{S^{ew}} \xi \cdot d\xi d\eta \quad , \quad m_{\eta}^{ew} = \int_{S^{ew}} \eta \cdot d\xi d\eta \quad (3.37)$$

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε πλευρά K , ($K=1,4$) του στοιχείου του κοντινού ομόρρου έχει σταθερή τιμή διπολικής έντασης μ_K και μήκος $\bar{\mathbf{l}}_K = l_K \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_K$ (όπου $\bar{\boldsymbol{\tau}}_K$ τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε πλευρά), τότε ο δεύτερος όρος της (3.31) γράφεται:

$$\oint_{\partial S^{ew}} \boldsymbol{\mu}^{ew}(\xi, \eta) d\bar{\mathbf{l}} = \sum_{k=1}^4 \mu_K \bar{\mathbf{l}}_K = \sum_{k=1}^4 \mu_K l_K \bar{\boldsymbol{\tau}}_K \quad (3.38)$$

Για τον υπολογισμό αυτού του όρου ας θεωρήσουμε τρία γειτονικά στοιχεία στον κοντινό ομόρρου σώματος το ew και τα $ew-1$, $ew+1$ (0).



Σχήμα 3.8 : Η παραγωγή χωρικής στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου

Αριθμώντας ωρολογιακά τις πλευρές των στοιχείων υπολογίζουμε την μέση τιμή για την ένταση του δινοσωλήνα σε καθεμία από αυτές:

πλευρά 1 : $\mu_1 = 0$ (3.39)

Η πλευρά αυτή είναι πάνω στην ακμή εκφυγής. Η διανομή διπόλων έχει συνεχή ένταση κατά την σ -κατεύθυνση, με συνέπεια αυτός ο δινοσωλήνας του κοντινού ομόρρου να αλληλοαναιρείται με τον αντίστοιχο του σώματος. Για λόγους οικονομίας υπολογιστικού χρόνου οι όροι αυτοί δεν υπολογίζονται ούτε στο σώμα ούτε στον ομόρρο.

πλευρά 2 : $\mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_1^{ew+1} + \mu_4^{ew+1}), \quad ew \neq NTEW$ (3.40)

Η διανομή διπόλων παρουσιάζει ασυνέχεια κατά την τ -κατεύθυνση (γραμμή αποβολής στροβιλότητας). Στην πλευρά αυτή θέτουμε ένταση στροβιλότητας ίση με τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 2 και 4 των στοιχείων ew και $ew+1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το τελευταίο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=NTEW$) τότε θέτουμε την μέση τιμή της πλευράς 2:

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_2^{ew} + \mu_3^{ew}), \quad ew = NTEW \quad (3.41)$$

πλευρά 3 : $\mu_3 = 0$ (3.42)

Η διανομή διπόλων στον ομόρρο είναι συνεχής και οι αντίστοιχοι όροι αλληλοαναιρούνται. Η μόνη περίπτωση που η πλευρά 3 δεν αντιστοιχεί σε μηδενική ένταση είναι αυτή του πρώτου χρονικού βήματος οπότε αντιστοιχεί στον αρχικό στρόβιλο και είναι:

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(\mu_3^{ew} + \mu_4^{ew}), \quad t=1 \quad (3.43)$$

πλευρά 4 : $\mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}) - \frac{1}{2}(\mu_2^{ew-1} + \mu_3^{ew-1}), \quad ew \neq 1$ (3.44)

Κατά αντιστοιχία με την πλευρά 2 σε αυτήν την πλευρά θέτουμε τη διαφορά της μέσης τιμής των εντάσεων που υπολογίζουμε στις πλευρές 4 και 2 των στοιχείων ew και $ew-1$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που εξετάζουμε το πρώτο στοιχείο του κοντινού ομόρρου ($ew=1$) τότε η ένταση ισούται με την μέση τιμή της πλευράς 4:

$$\mu_4 = \frac{1}{2}(\mu_1^{ew} + \mu_4^{ew}), \quad ew=1 \quad (3.45)$$

3.9 Η Χωρική Κατανομή Στροβιλότητας: Ο Μακρινός Ομόρρος.

Ο μακρινός ομόρρος προκύπτει με σταδιακό τρόπο στο χρόνο από την ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική στροβιλότητα και αποτελεί δεδομένο του προβλήματος που εξετάζουμε.

Απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας σφαιρικής συμμετρίας (vortex particles), από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του ομόρρου. Εάν θεωρήσουμε ότι τη στιγμή t έχουν δημιουργηθεί συνολικά $K(t)$ σημειακά στοιχεία στροβιλότητας (vortex particles) εντάσεως $\bar{\Omega}_j$, $j=1, K(t)$, τότε σε τυχαία θέση \bar{x} του χώρου η επαγόμενη στροβιλότητα και ταχύτητα θα υπολογίζονται αντίστοιχα από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\bar{\omega}(\bar{x};t) = \sum_{j=1}^{K(t)} \bar{\Omega}_j(t) \cdot \zeta_\varepsilon(|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|) \quad (3.46)$$

και

$$\bar{u}_w(\bar{x};t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) \times (\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t))}{|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|^3} f_\varepsilon(|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|) \quad (3.47)$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ταχύτητας (3.47) παρουσιάζει ιδιομορφία όταν $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_{\Omega_j}$, δηλαδή το σημείο υπολογισμού είναι πολύ κοντά σε στοιχείο στροβιλότητας. Για την άρση αυτού του απειρισμού εισάγεται κατάλληλη συνάρτηση αποκοπής $f_\varepsilon(r)$, $r = |\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}|$ που ομαλοποιεί την ταχύτητα σε μια χαρακτηριστική περιοχή ακτίνας ε (μήκος αποκοπής) με κέντρο τη θέση \bar{x}_{Ω_j} κάθε στοιχείου στροβιλότητας. Η συνάρτηση αποκοπής πρέπει να ικανοποιεί ταυτοτικά τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} f_\varepsilon(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} f_\varepsilon(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

ενώ η συνάρτηση $\zeta_\varepsilon(r)$ συνδέεται με την $f_\varepsilon(r)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{f'_\varepsilon(r)}{4\pi r^2} \quad (3.49)$$

Μία τυπική συνάρτηση αποκοπής είναι η εκθετική συνάρτηση (Βουτσινάς 1990):

$$f_\varepsilon(r) = 1 - e^{-\frac{r^3}{\varepsilon^3}} \quad (3.50)$$

που αντιστοιχεί στη συνάρτηση (Beale and Majda 1985):

$$\zeta_\varepsilon(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{r^3}{\varepsilon^3}\right) \quad (3.51)$$

Επίσης χρησιμοποιήθηκε και μία συνάρτηση αποκοπής με αλγεβρική μορφή που εφαρμοζόμενη στον υπολογισμό της ταχύτητας δίνει:

$$\bar{u}_w(\bar{x};t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{K(t)} \frac{\bar{\Omega}_j(t) \times (\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t))}{\left(|\bar{x} - \bar{x}_{\Omega_j}(t)|^6 + \varepsilon^6\right)^{1/2}} \quad (3.52)$$

Σαφώς η επίδραση της εκθετικής συνάρτησης αποκοπής στον υπολογισμό της ταχύτητας οδηγεί σε οξύτερες μεταβολές όσο το σημείο υπολογισμού

προσεγγίζει το στοιχείο στροβιλότητας σε σύγκριση με την αντίστοιχη αλγεβρική μορφή.

Εάν συμβολίσουμε με h τη μέση απόσταση μεταξύ των στοιχείων στροβιλότητας, τότε η σύγκλιση της μεθόδου των στοιχείων στροβιλότητας για συναρτήσεις αποκοπής δεύτερης τάξης ακρίβειας, το αριθμητικό σφάλμα ελαχιστοποιείται όταν επιλέξουμε μήκος αποκοπής ε :

$$\varepsilon = h^a, \quad (0.6 < a < 1) \quad (3.53)$$

3.10 Η μεταφορά και παραμόρφωση της χωρικής στροβιλότητας

Με την μετατροπή της επιφανειακής στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε χωρική αυτός ουσιαστικά παύει να υφίσταται, καθώς η στροβιλότητα που ήταν διανεμημένη σε αυτόν μεταφέρεται πλέον από τα αντίστοιχα στοιχεία στροβιλότητας. Σε όλα τα στοιχεία στροβιλότητας εφαρμόζονται οι σχέσεις μεταφοράς και παραμόρφωσης της στροβιλότητας του Helmholtz.

Η εξέλιξη της τροχιάς και η μεταβολή της έντασης για το στοιχείο στροβιλότητας που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση \bar{x}_Ω , κινείται με \bar{u}_Ω και έχει ένταση στροβιλότητας $\bar{\Omega}$ θα προκύπτει από τις εξισώσεις:

$$\frac{d\bar{x}_\Omega(t)}{dt} = \bar{u}(\bar{x}_\Omega(t); t) \quad (3.54)$$

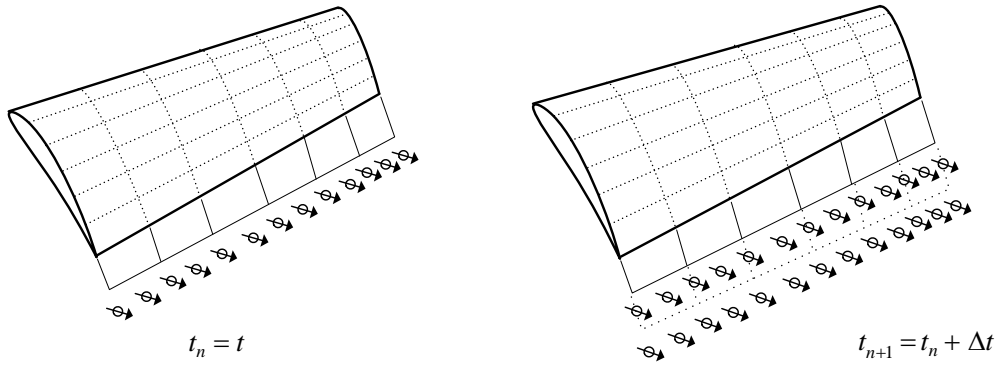
και

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Omega}}{dt}(\bar{x}_\Omega; t) &= (\bar{\Omega}(\bar{x}_\Omega; t) \nabla \cdot) \bar{u}(\bar{x}_\Omega; t) \\ &= \sum_{q=1}^{NVR} \left\{ \frac{\bar{\Omega}_q \times \bar{\Omega}_\Omega}{4\pi r^3} - 3 \frac{(\bar{\Omega}_\Omega \cdot \bar{r}) \cdot (\bar{\Omega}_q \times \bar{r})}{4\pi r^5} \right\}, \quad \bar{r} = \bar{x}_\Omega - \bar{x}_q \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ο όρος $(\bar{\Omega}(\bar{x}_\Omega; t) \nabla \cdot) \bar{u}(\bar{x}_\Omega; t)$ αποτελεί τον όρο παραμόρφωσης των εξισώσεων Lagrange. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στο τέλος ενός χρονικού βήματος, όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις (3.54) και (3.55) είναι γνωστά ή υπολογίζονται αναλυτικά. Η επίλυση (δηλαδή η ολοκλήρωση) των εξισώσεων στο χρόνο γίνεται με ένα σχήμα Adams-Basford ακρίβειας $O(\Delta t^2)$. Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος ολοκλήρωσης είναι σε συνέπεια με το πρόβλημα μεταφοράς της ελεύθερης στροβιλότητας που έχει υπερβολικό χαρακτήρα. Έτσι θα έχουμε :

$$\bar{\Omega}^{(t_{n+1})} = \bar{\Omega}^{(t_n)} + \Delta t \cdot \left(\frac{3}{2} \bar{\Omega}^{(t_n)} \nabla \bar{u}(t_n) - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^{(t_{n-1})} \nabla \bar{u}(t_{n-1}) \right) \quad (3.56)$$

Σχηματικά η μεταφορά της στροβιλότητας από ένα χρονικό βήμα t_n στο επόμενο t_{n+1} φαίνεται παρακάτω (σχήμα 3.8).



Σχήμα 3.9 : Η μετακίνηση των στοιχείων στροβιλότητας μεταξύ δύο χρονικών βημάτων

Λόγω της αποβαλλόμενης στροβιλότητας από τα ακροπτερύγια και τον αρχικά αποβαλλόμενο στρόβιλο εμφανίζονται οι περιοχές αναδίπλωσης του φύλλου στροβιλότητας ως συγκέντρωση νέφους στοιχείων στροβιλότητας στα όρια του φύλλου στροβιλότητας.

Ολοκληρώνοντας την αναφορά μας στην παραγωγή του φύλλου στροβιλότητας σημειώνεται για μία ακόμη φορά ότι η επιλογή της υλικής αναπαράστασής του με χωρική διανομή στροβιλότητας γίνεται καθώς η εφαρμογή της τροφοδότησης του μακρινού ομόρρου με επιφανειακή διανομή στροβιλότητας εμφανίζει έντονες αριθμητικές αστάθειες, που δημιουργούν ανωμαλίες στη μέθοδο. Η ύπαρξη ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό της ταχύτητας εισάγει έντονη διασπορά στην υπολογιζόμενη κατανομή $\bar{x}_w^{t+\Delta t}$ (3.54), με συνέπεια την απώλεια της λειότητας του φύλλου στροβιλότητας ακόμη και μετά το πέρας μικρού χρονικού διαστήματος από τη στιγμή της δημιουργίας του.

Στην γενική περίπτωση η αποβαλλόμενη στροβιλότητα από ένα σώμα μπορεί να προσπίπτει σε άλλο σώμα. Στην περίπτωση που κάποιο στοιχείο στροβιλότητας βρίσκεται πολύ κοντά στην επιφάνεια ενός σώματος τότε θα πρέπει αυτό να κινείται εφαπτομενικά ως προς αυτό, σύμφωνα με το πεδίο ταχυτήτων που υπολογίζουμε πάνω σε αυτό το σώμα. Μάλιστα σημειώνεται ότι το πεδίο ταχυτήτων στο σώμα είναι γνωστό στα σημεία ελέγχου αυτού, καθώς εκεί εφαρμόζουμε τη συνθήκη μη εισχώρησης. Όμως η εφαρμογή των εξισώσεων στροβιλότητας του Helmholtz δεν περιλαμβάνει αυτόν τον περιορισμό. Για το λόγο αυτό μετά την εφαρμογή αυτών των εξισώσεων είναι απαραίτητο να γίνεται έλεγχος εάν κάποιο στοιχείο στροβιλότητας εισχωρεί στο εσωτερικό σώματος. Στην περίπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο, η θέση του στοιχείου στροβιλότητας $\bar{x}_\Omega^{(t_{n+1})}$ διορθώνεται σύμφωνα με την εφαπτομενική ταχύτητα \bar{u}_{CP}^e , που έχει το πλησιέστερο σε αυτό σημείο ελέγχου \bar{x}_{CP}^e του σώματος:

$$\bar{x}_\Omega^{(t_{n+1}), corrected} = \bar{x}_\Omega^{(t_n)} + \Delta t \cdot \bar{u}_{CP}^e \quad (3.57)$$

3.11 Ο Υπολογισμός των Φορτίων

Σε κάθε χρονικό βήμα, αφού ολοκληρωθεί η επίλυση των εξισώσεων του συστήματος, είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της ροής πάνω σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο του σώματος.

Έχοντας υπολογίσει τις διανομές των πηγών και των διπόλων σε όλα τα επιφανειακά στοιχεία που απαρτίζουν τα σώματα και γνωρίζοντας την προϊστορία του δυναμικού ο υπολογισμός των πιέσεων γίνεται σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο μέσω της ολοκλήρωσης της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής. Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων.

$$p^e(\bar{x};t) = p_{\Phi}^e(\bar{x};t) + p_{\omega}^e(\bar{x};t) \quad (3.58)$$

Στο απόλυτο σύστημα αναφοράς, στο τυχαίο στοιχείο e που ανήκει σε σώμα κινούμενο με σχετική ταχύτητα $\bar{U}_B^e(\bar{x};t)$ θα ισχύει για τον υπολογισμό της πίεσης:

$$\frac{\partial \Phi^e(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{u}^e(\bar{x};t)^2 + \frac{p_{\omega}^e(\bar{x};t)}{\rho} + \frac{p_{\Phi}^e(\bar{x};t)}{\rho} - \bar{u}^e(\bar{x};t) \cdot \bar{U}_B^e(\bar{x};t) = c(t) \quad (3.59)$$

όπου ο δείκτης (e) υποδηλώνει ότι όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο στοιχείο e .

Ο μη μόνιμος όρος αυτής της σχέσης υπολογίζεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \Phi^e(\bar{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_{\infty}^e(\bar{x};t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\bar{x};t)}{\partial t} \quad (3.60)$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος $\partial \Phi_{\infty}^e(\bar{x};t)/\partial t$ μηδενίζεται, αλλιώς πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με τα δεδομένα του κάθε προβλήματος, ενώ ο υπολογισμός του όρου δυναμικού διαταραχής $\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\bar{x};t)/\partial t$ γίνεται εύκολα καθώς σε κάθε χρονική υπολογίζουμε τις τιμές του δυναμικού $\Phi_{\sigma}^e(\bar{x};t)$, $\Phi_{\mu}^e(\bar{x};t)$ και συνεπώς και τη χρονική μεταβολή τους.

Η εξίσωση (3.60) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης p^e σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο της γεωμετρίας του σώματος. Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης στο στοιχείο e γίνεται με την αδιαστατοποίηση της πίεσης p^e ως προς μία κατάλληλη πίεση αναφοράς P_{ref} . Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση του συντελεστή πίεσης c_p^e των αριθμητικών προλέξεων με τα πειραματικά δεδομένα θα πρέπει να είναι γνωστή η P_{ref} που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

$$c_p^e = \frac{P^e - P_{\infty}}{P_{ref}} \quad (3.61)$$

Κλείνοντας την αναφορά στον τρόπο υπολογισμού των πιέσεων αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια στην αναπαράσταση της γεωμετρίας του εξεταζόμενου σώματος επηρεάζει άμεσα τους υπολογισμούς των πιέσεων, τόσο

στο χείλος πρόσπτωσης, όπου εμφανίζονται οι μέγιστες τιμές πιέσεων, όσο και στην ακμή εκφυγής, όπου η ικανοποίηση της εξίσωσης των πιέσεων αποτελεί τη βασική συνθήκη για την παραγωγή στροβιλότητας και την ορθή επίλυση του προβλήματος.

Ο υπολογισμός της κάθετης δύναμης, που αναπτύσσεται στο στοιχείο e γίνεται απ'ευθείας καθώς η πίεση p^e έχει ήδη υπολογιστεί:

$$\bar{F}_n^e(\bar{x};t) = (p^e(\bar{x};t) \cdot A^e) \cdot \bar{\nu}^e \quad (3.62)$$

η δύναμη αυτή οδηγεί στην εμφάνιση ροπής $Q^e(\bar{x};t)$ ως προς την αρχή των αξόνων:

$$Q^e(\bar{x};t) = \bar{x} \times \bar{F}_n^e(\bar{x};t) \quad (3.63)$$

Σημειώνεται ότι στους υπολογισμούς των φορτίων δεν υπεισέρχονται συνεκτικές διορθώσεις, οπότε η συνολική στιγμιαία δύναμη $\bar{F}^{NB}(t)$ και ροπή $\bar{Q}^{NB}(t)$ που αναπτύσσονται στο σώμα (NB) στο απόλυτο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\bar{F}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \bar{F}_n^e(x;t) \quad (3.64)$$

$$\bar{Q}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \bar{Q}_n^e(x;t) \quad (3.65)$$

4. Ανεμογεννητρια αναφοράς

Ως ανεμογεννήτρια αναφοράς (Reference Wind Turbine - RWT) ορίζουμε μια μηχανή ισχύος 5MW με ακτίνα πτερυγίου 63 μέτρα (διάμετρος πτερύγωσης 126m, συμπεριλαμβανομένης και της πλήμνης), η οποία δημιουργήθηκε από το Εθνικό Εργαστήριο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (National Renewable Energy Laboratory – NREL). Η ανεμογεννήτρια αναφοράς κατέχει βασικό ρόλο καθώς όλες οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων της νέας γεωμετρίας του πτερυγίου πραγματοποιούνται με βάση αυτήν. Έτσι μπορούμε εύκολα να έχουμε εκτίμηση ως προς την βελτίωση ή μη των νέων δοκιμών.

Στον παρακάτω πίνακα παρατίθενται στοιχεία της ανεμογεννήτριας, όπως η ισχύς και η γωνιακή ταχύτητα, για διάφορες τιμές της ταχύτητας του ανέμου.

Nominal speed= 1.267(rad/s)

U(m/s)	TSR	Power(kW)	Thrust (kN)	pitch (deg)	rot. Speed (rad/s)
5.00	7.90	470.82	156.33	0.00	0.627
6.00	7.91	813.57	225.17	0.00	0.753
7.00	7.90	1291.92	306.31	0.00	0.878
8.00	7.90	1928.46	400.13	0.00	1.003
9.00	7.90	2745.79	506.50	0.00	1.129
10.00	7.90	3766.52	625.36	0.00	1.255
11.00	7.26	4979.23	716.91	0.00	1.267
12.00	6.65	5315.90	589.85	4.00	1.267
13.00	6.14	5312.52	512.06	6.65	1.267
14.00	5.70	5309.60	462.32	8.70	1.267
15.00	5.32	5315.74	426.55	10.46	1.267
16.00	4.99	5306.39	397.50	12.07	1.267
17.00	4.70	5305.11	374.67	13.55	1.267
18.00	4.43	5312.40	356.49	14.93	1.267
19.00	4.20	5307.74	340.85	16.24	1.267
20.00	3.99	5306.73	327.85	17.49	1.267
21.00	3.80	5310.17	316.93	18.70	1.267
22.00	3.63	5317.35	307.72	19.87	1.267
23.00	3.47	5307.83	299.02	21.01	1.267
24.00	3.33	5319.84	292.48	22.10	1.267
25.00	3.19	5300.17	285.50	23.17	1.267

Πίνακας 4.1 : Στοιχεία της Α/Γ αναφοράς

5. Πτερύγιο χωρίς πάχος (thin blade)

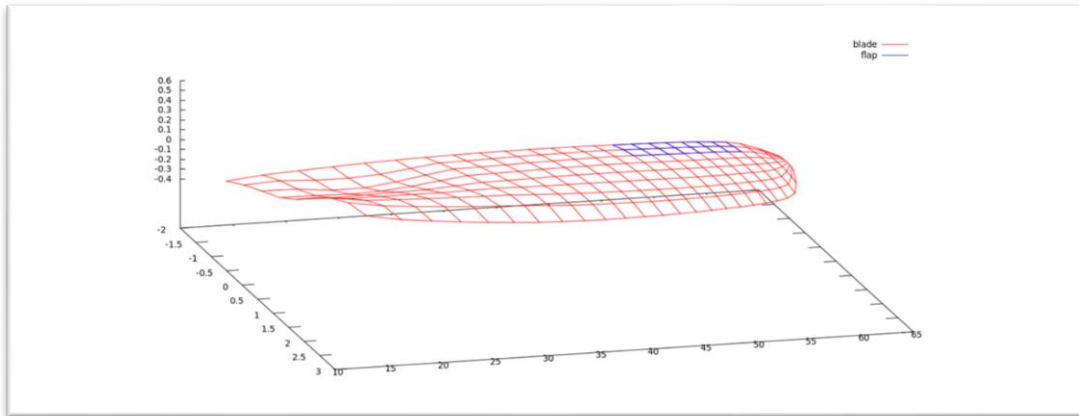
Οι υπολογισμοί έγιναν για ομοιόμορφη ταχύτητα ανέμου $U=8$ m/s και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega=1.003$ rad/s, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα (πίνακας 4.1). Το μήκος του πτερυγίου χωρίς πάχος είναι από τα 13.5 μέχρι τα 61.5 μέτρα.

5.1 Μεταβάλλοντας την ακμή εκφυγής (flap)

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε το πτερύγιο A/Γ χωρίς πάχος (thin). Μεταβάλλουμε συγκεκριμένο τμήμα του πτερυγίου στρεβλώνοντας την ακμή εκφυγής του αέρα (flap). Οι διαφορετικές θέσεις του flap φαίνονται στις παρακάτω εικόνες.

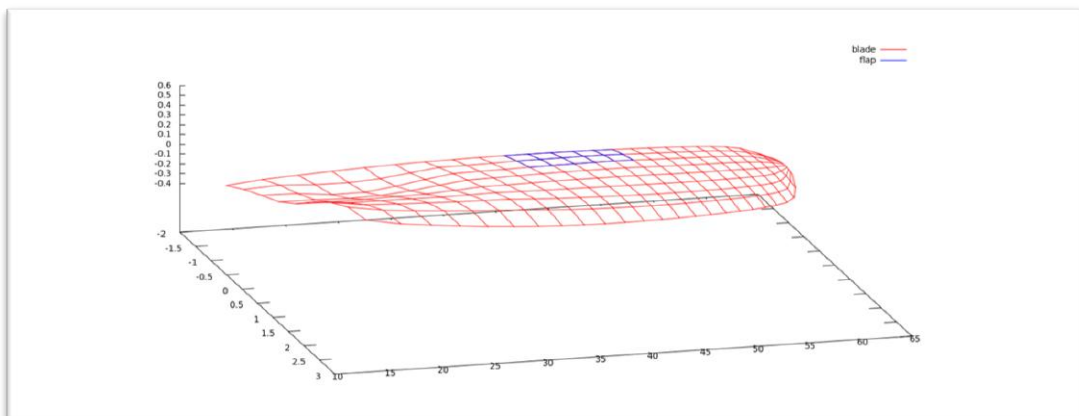
Συγκεκριμένα οι θέσεις του flap είναι :

- a) στο τέλος του πτερυγίου - από 48.23 μέχρι τα 58.20 μέτρα



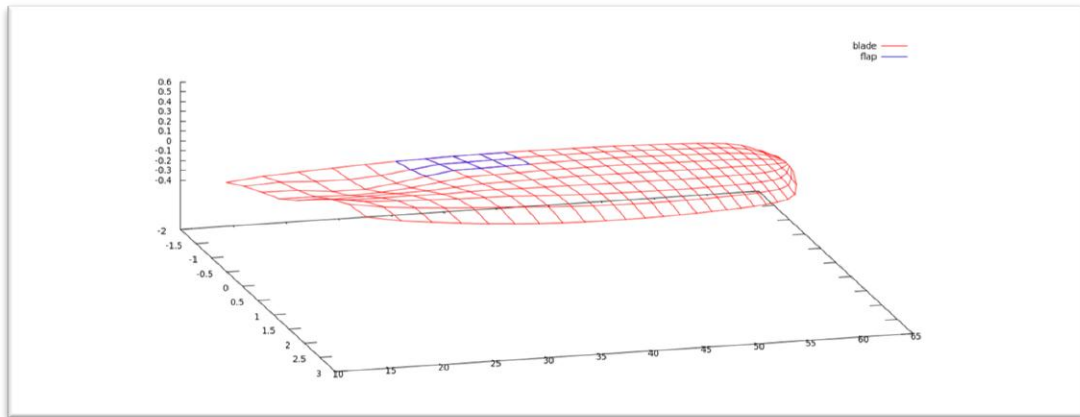
Εικόνα 5.1.1: edge flap

- b) στην μέση ,περίπου, του πτερυγίου - από τα 38.56 μέχρι τα 48.23 μέτρα



Εικόνα 5.1.2 : middle flap

c) κοντά στην αρχή του πτερυγίου - από τα 28.83 μέχρι τα 38.56 μέτρα

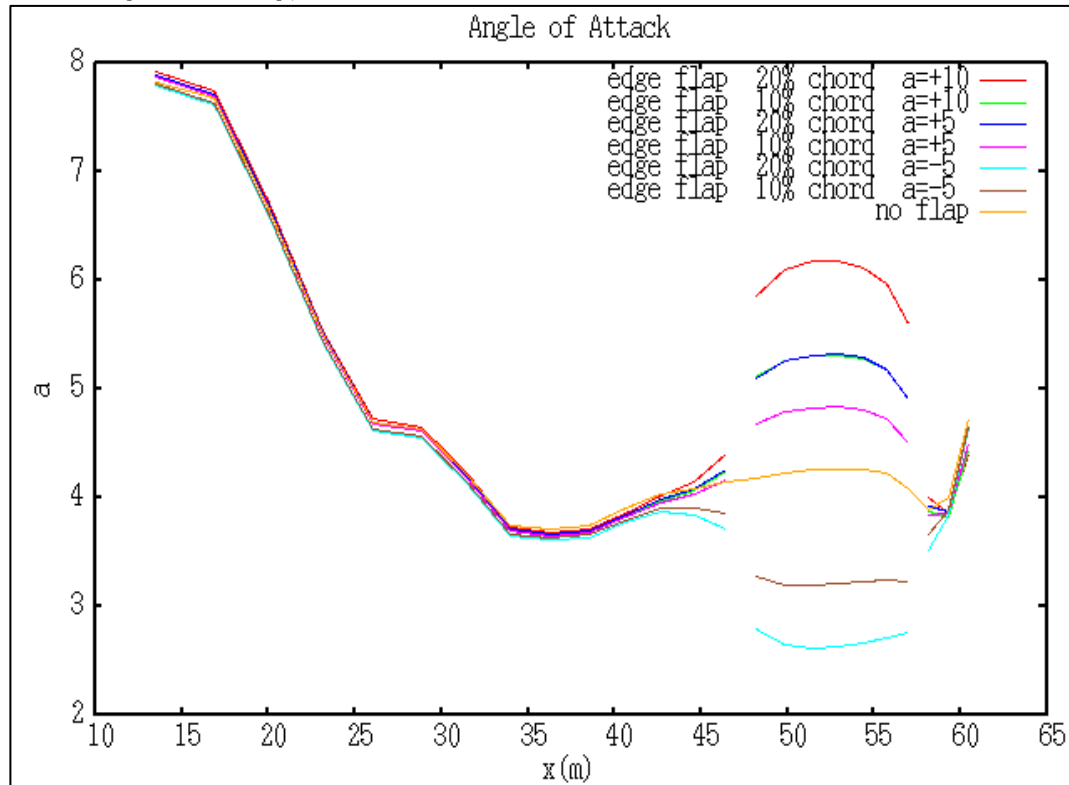


Εικόνα 5.1.3 : begin flap

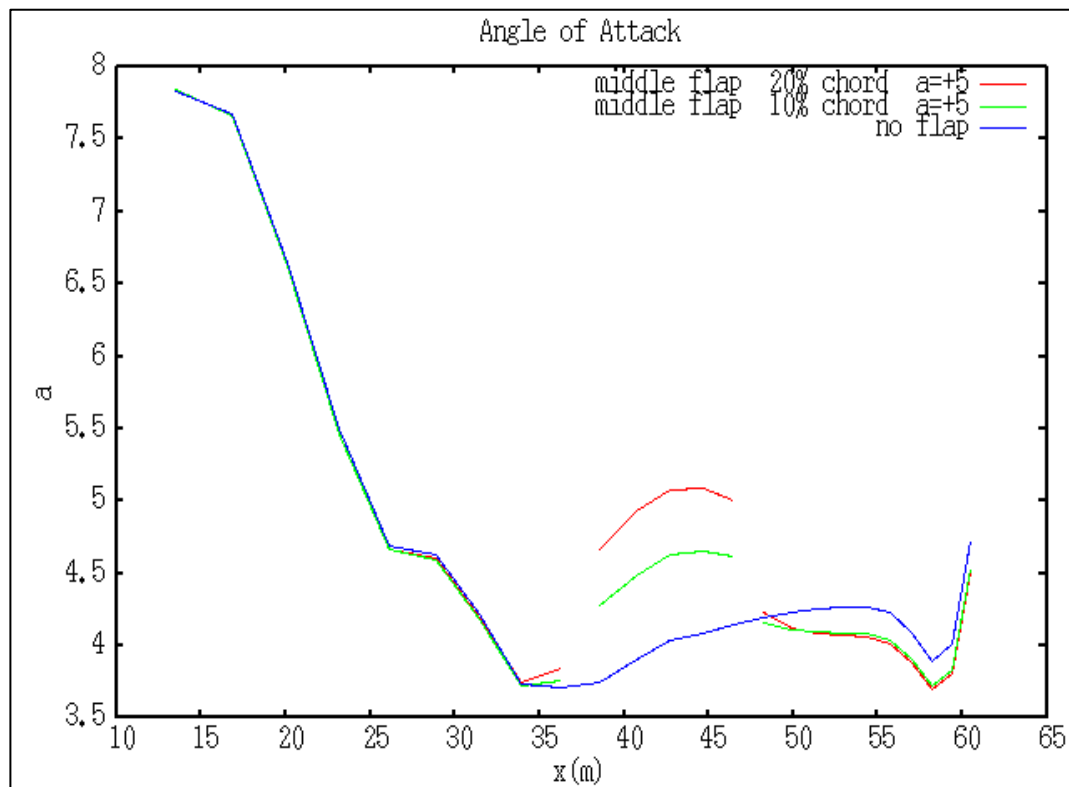
Ξεκινώντας από το flap στο τέλος του πτερυγίου, συνεχίζοντας με το flap στην μέση του πτερυγίου και τελειώνοντας με το flap στην άκρη του πτερυγίου, τα διαγράμματα που ακολουθούν έχουν την ακόλουθη δομή:

1. Διάγραμμα για την γωνία πρόσπτωσης
2. Διάγραμμα για τον συντελεστή άνωσης
3. Διάγραμμα για την αξονική δύναμη
4. Διάγραμμα για την εφαπτομενική δύναμη
5. Διάγραμμα για την ισχύ

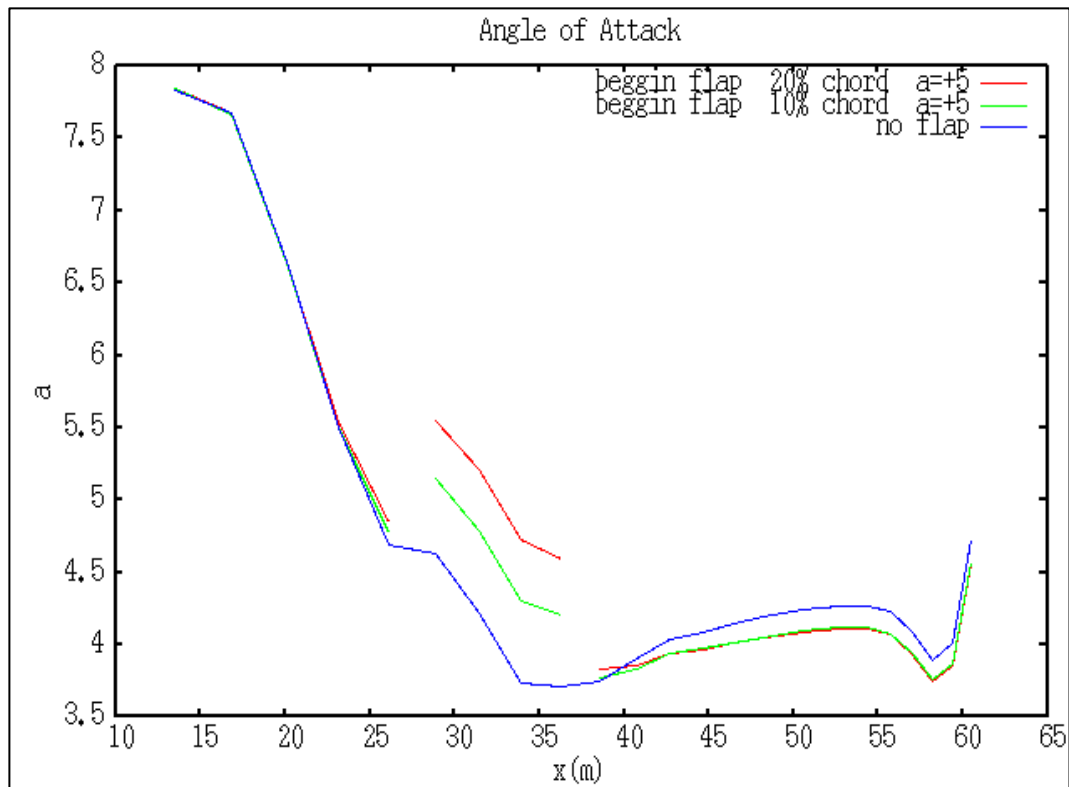
Γωνία πρόσπτωσης



Διάγραμμα 5.1.1 : Γωνία πρόσπτωσης - edge flap



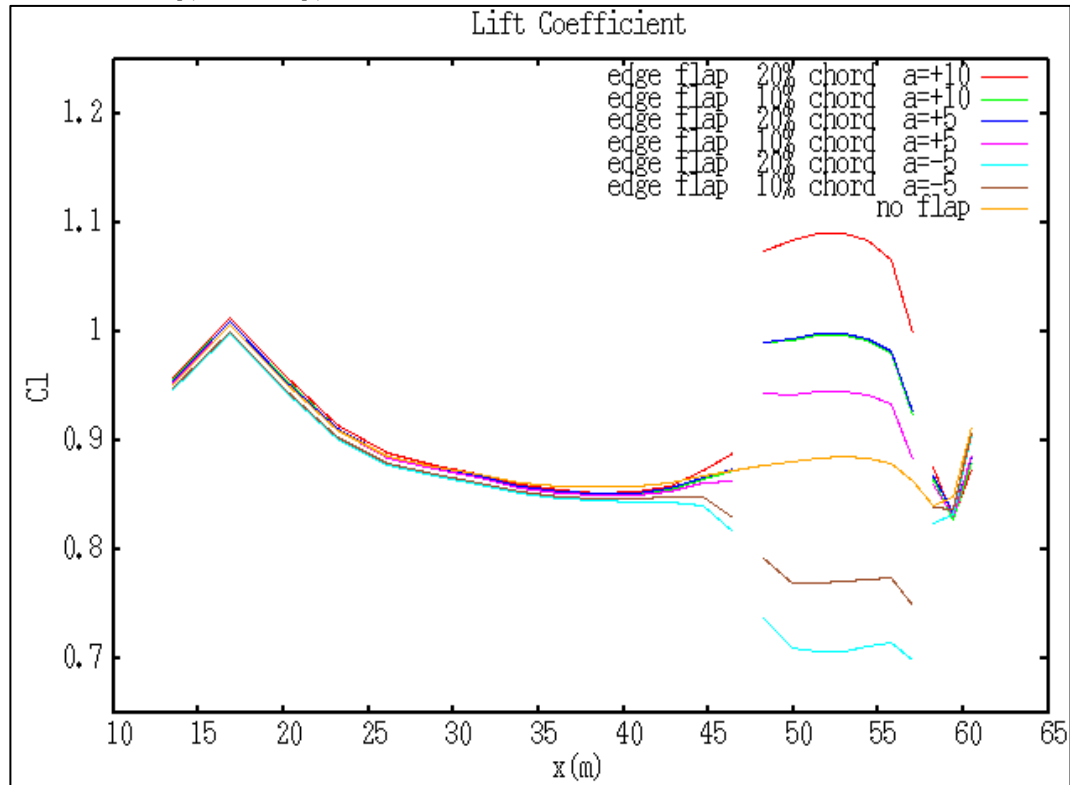
Διάγραμμα 5.1.2 : Γωνία πρόσπτωσης - middle flap



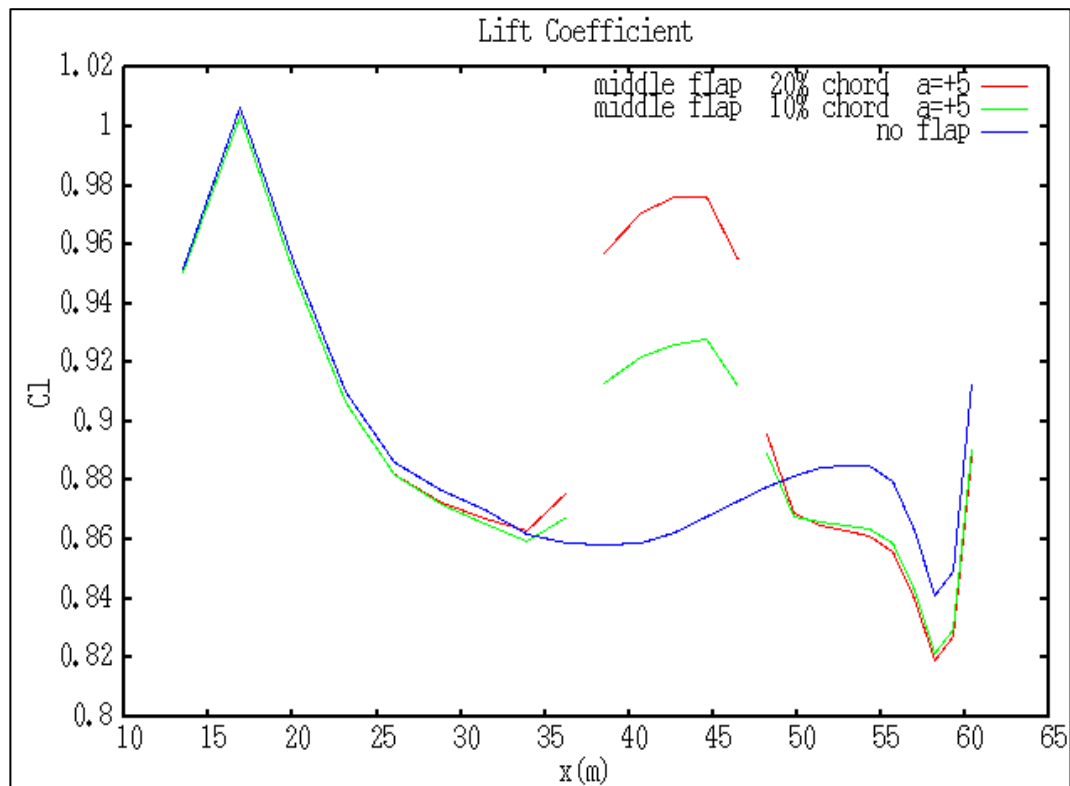
Διάγραμμα 5.1.3 : Γωνία πρόσπτωσης - *begin flap*

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι στο τμήμα του flap όταν η γωνία του παίρνει θετικές τιμές τότε αυξάνεται και η γωνία πρόσπτωσης. Αντίστοιχα ,όταν παίρνει αρνητικές τιμές παρατηρούμε μείωση της γωνίας πρόσπτωσης. Αυτό συμβαίνει διότι αλλάζοντας την γωνία του flap, αλλάζει και η γεωμετρία του σώματος, η οποία επηρεάζει την γωνία πρόσπτωσης.

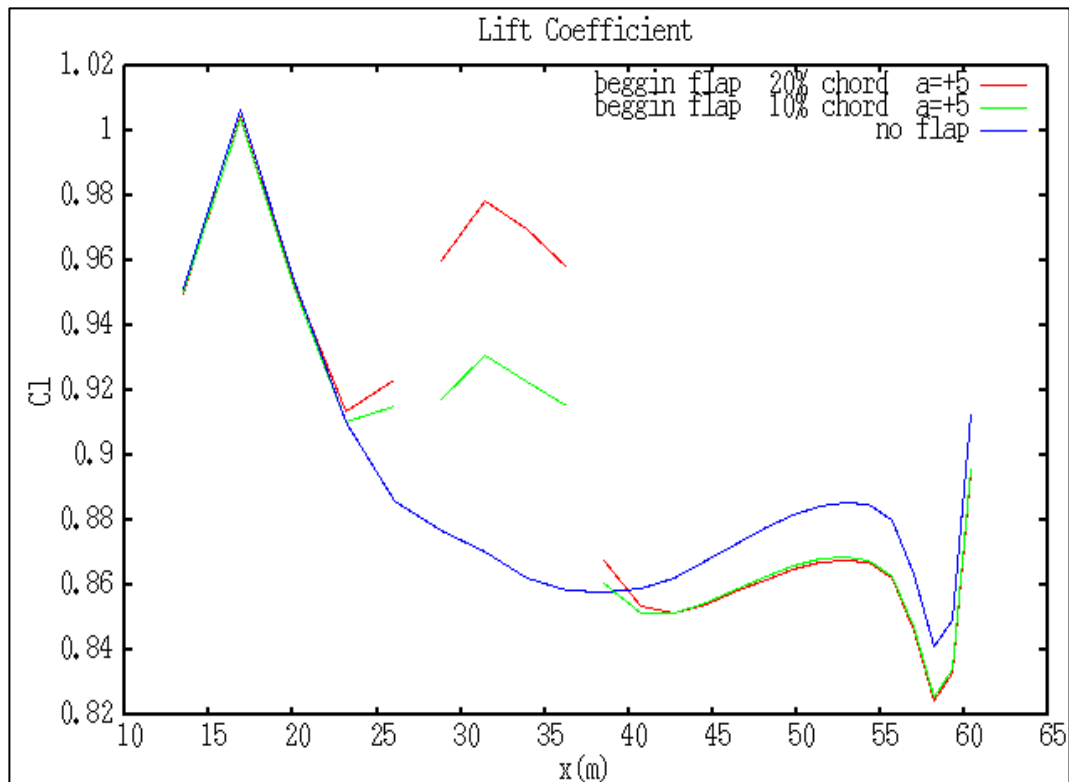
Συντελεστής άνωσης



Διάγραμμα 5.1.4 : Συντελεστής άνωσης - edge flap



Διάγραμμα 5.1.5 : Συντελεστής άνωσης - middle flap

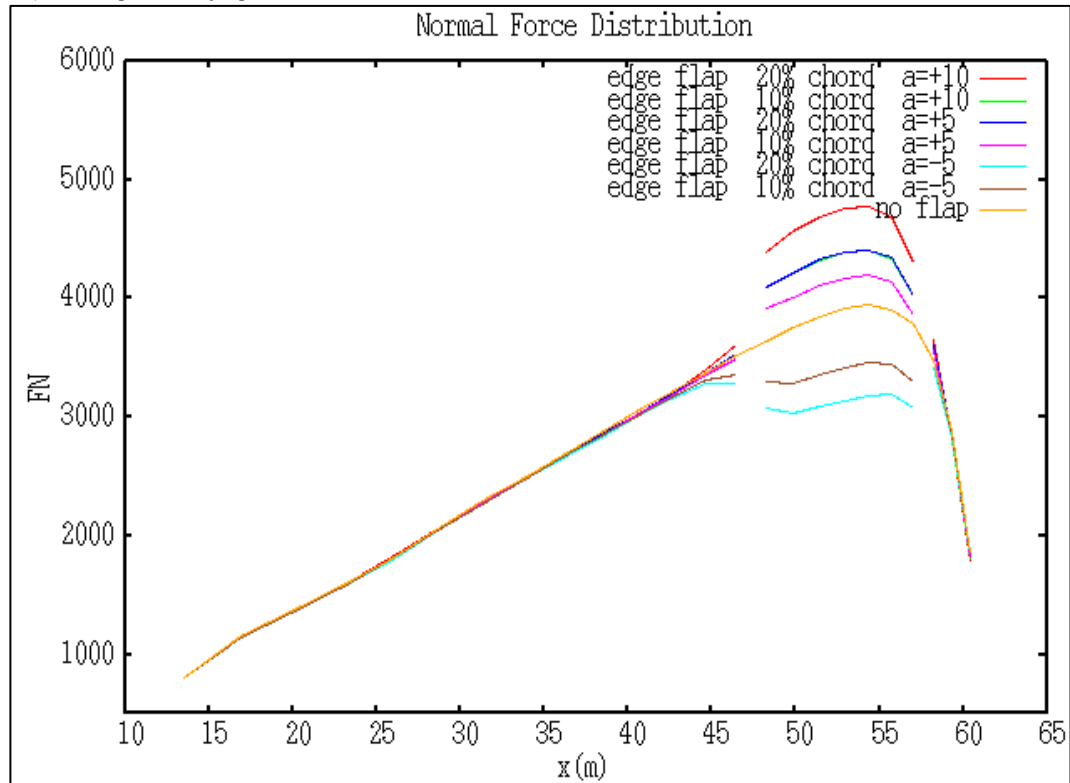


Διάγραμμα 5.1.6 : Συντελεστής άνωσης - begin flap

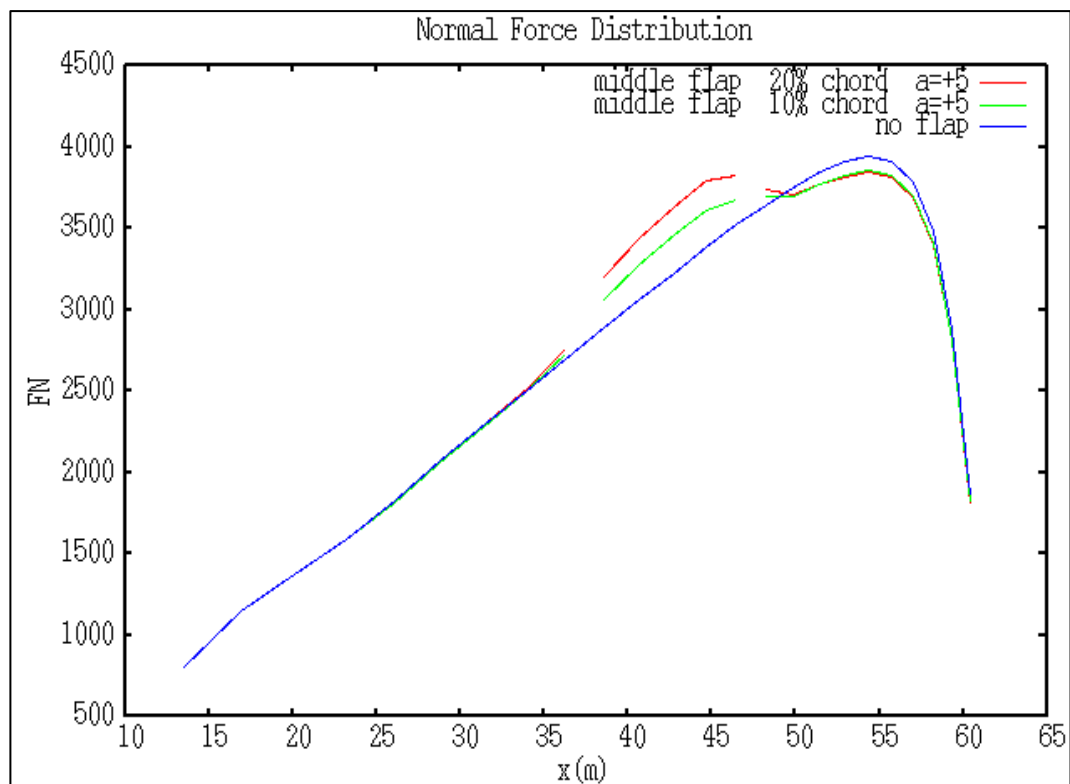
Στα διαγράμματα αυτά παρατηρούμε ότι ο συντελεστής άνωσης “συμφωνεί” με το διάγραμμα της γωνίας πρόσπτωσης. Αυτό συμβαίνει διότι η γωνία πρόσπτωσης και ο συντελεστής άνωσης είναι ανάλογα μεγέθη και συνεπώς στα σημεία που αυξάνεται ή μειώνεται η γωνία πρόσπτωσης, αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα και ο συντελεστής άνωσης.

Παρ’ όλα αυτά επειδή ο συντελεστής άνωσης είναι ένα μέγεθος δευτερεύον - δηλαδή είναι απόρροια του υπολογισμού άλλων μεγεθών όπως των φορτίων, των ταχυτήτων και της γωνίας πρόσπτωσης - είναι πιθανόν να μην είναι υπολογισμένο με μεγάλη ακρίβεια. Όπως παρατηρούμε και στα διαγράμματα ο συντελεστής άνωσης στο ακροπτερύγιο δεν οδεύει προς το μηδέν όπως και θα έπρεπε. Στα τελευταία μέτρα του πτερυγίου υπάρχει μια ανωμαλία που ενδεχομένως να οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού.

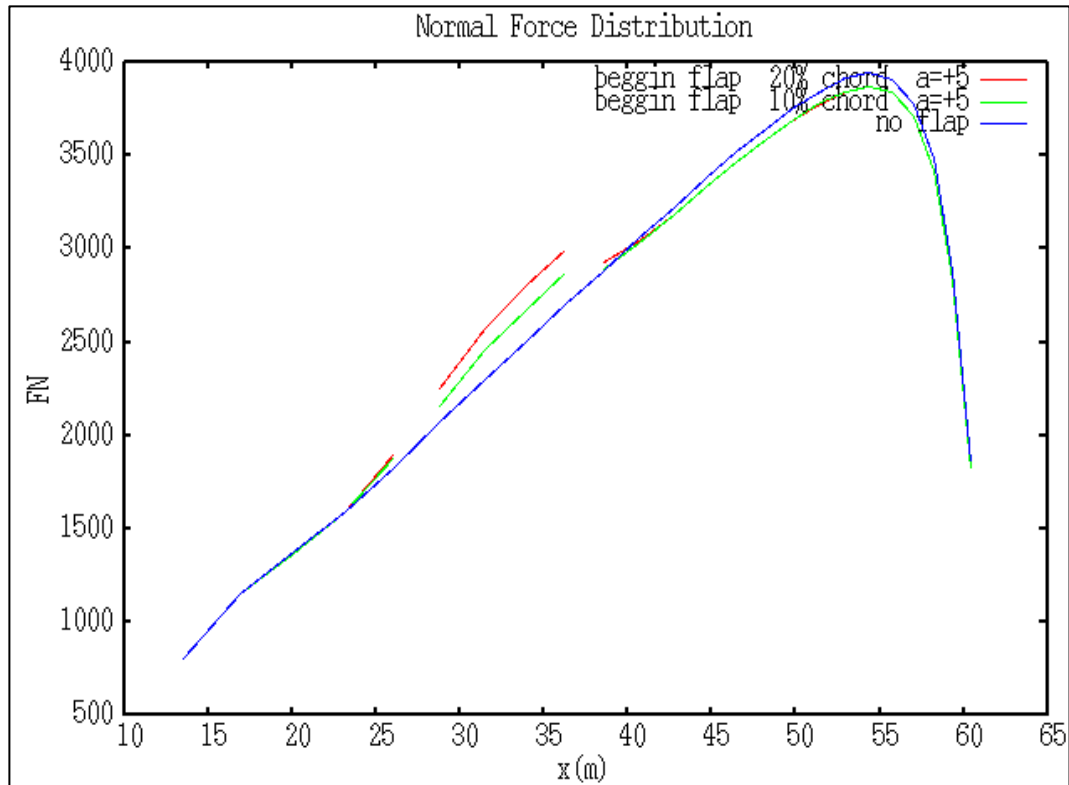
Αξονική δύναμη



Διάγραμμα 5.1.7 : Αξονική δύναμη - edge flap



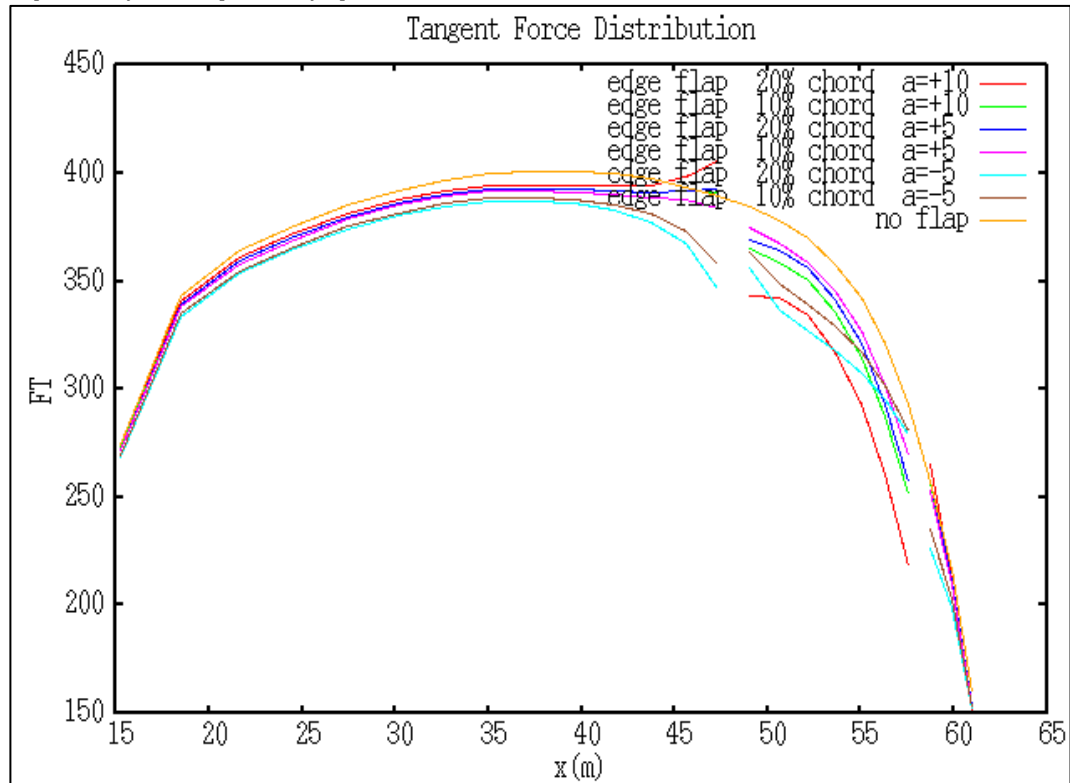
Διάγραμμα 5.1.8 : Αξονική δύναμη - middle flap



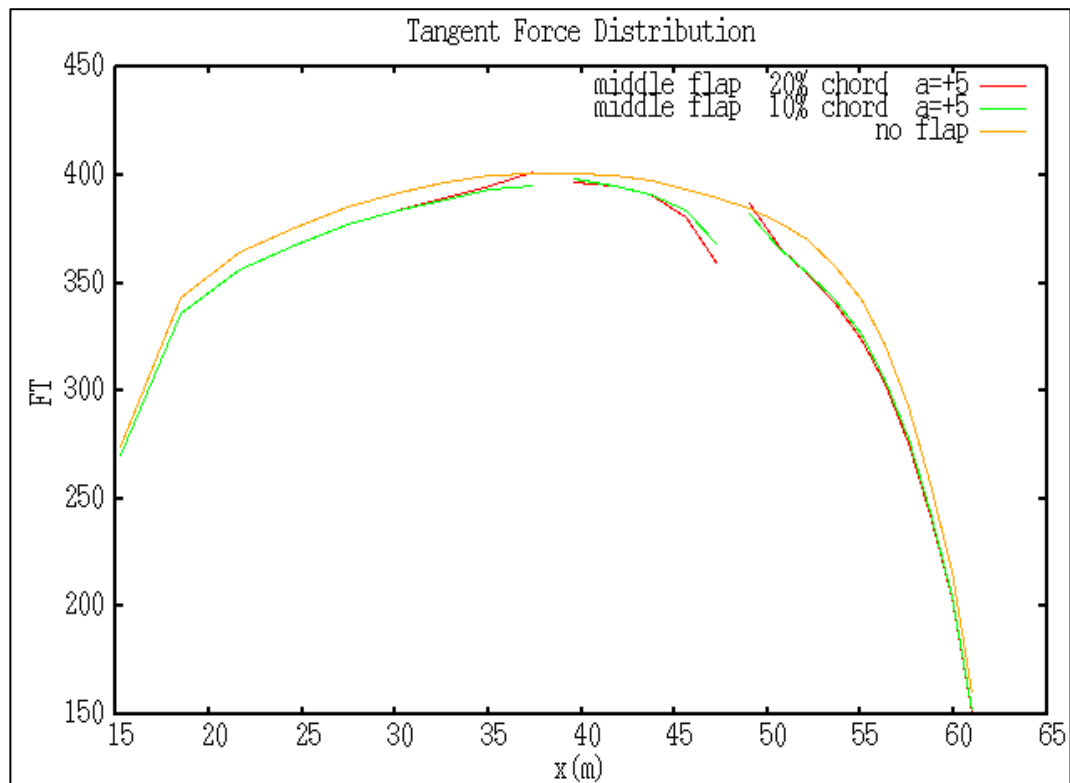
Διάγραμμα 5.1.9 : Αξονική δύναμη - *begin flap*

Στα διαγράμματα της αξονικής δύναμης παρατηρούμε ότι στο σημείο όπου είναι τοποθετημένο το flap, όταν η γωνία του αυξάνεται, δηλαδή παίρνει θετικές τιμές, αυξάνεται και η αξονική δύναμη. Αντίστοιχα, όταν η γωνία του είναι αρνητική παρατηρούμε μείωση της αξονικής δύναμης.

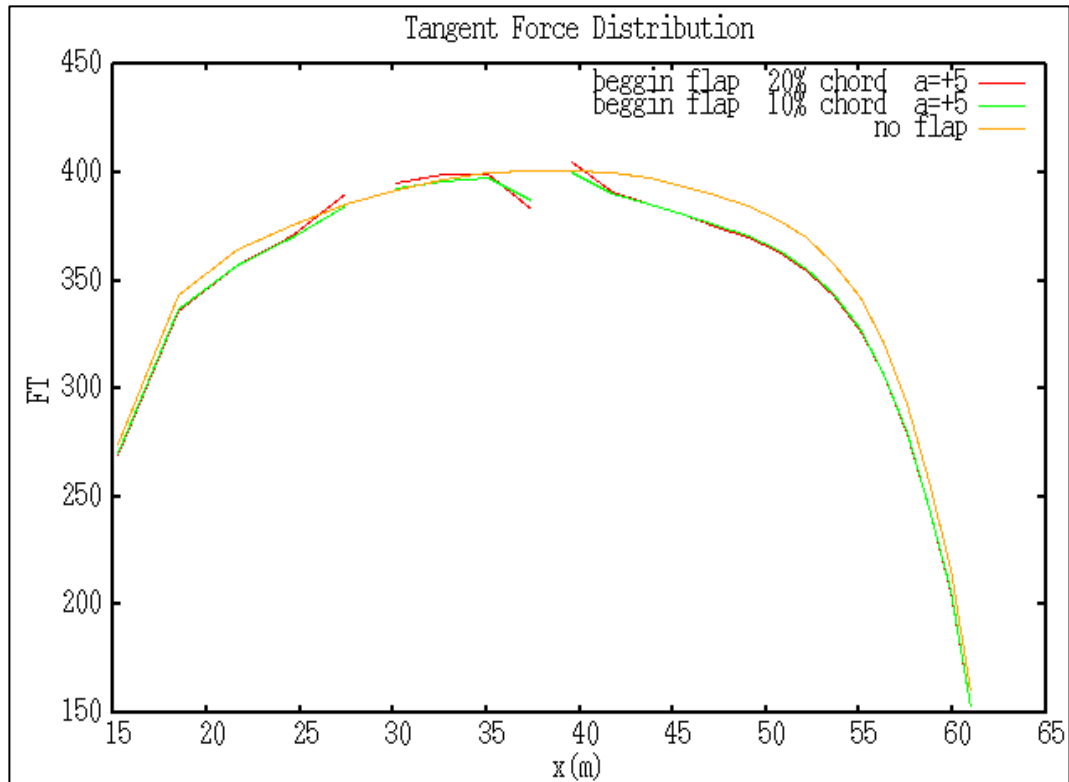
Εφαπτομενική δύναμη



Διάγραμμα 5.1.10 : Εφαπτομενική δύναμη - edge flap



Διάγραμμα 5.1.11 : Εφαπτομενική δύναμη - middle flap

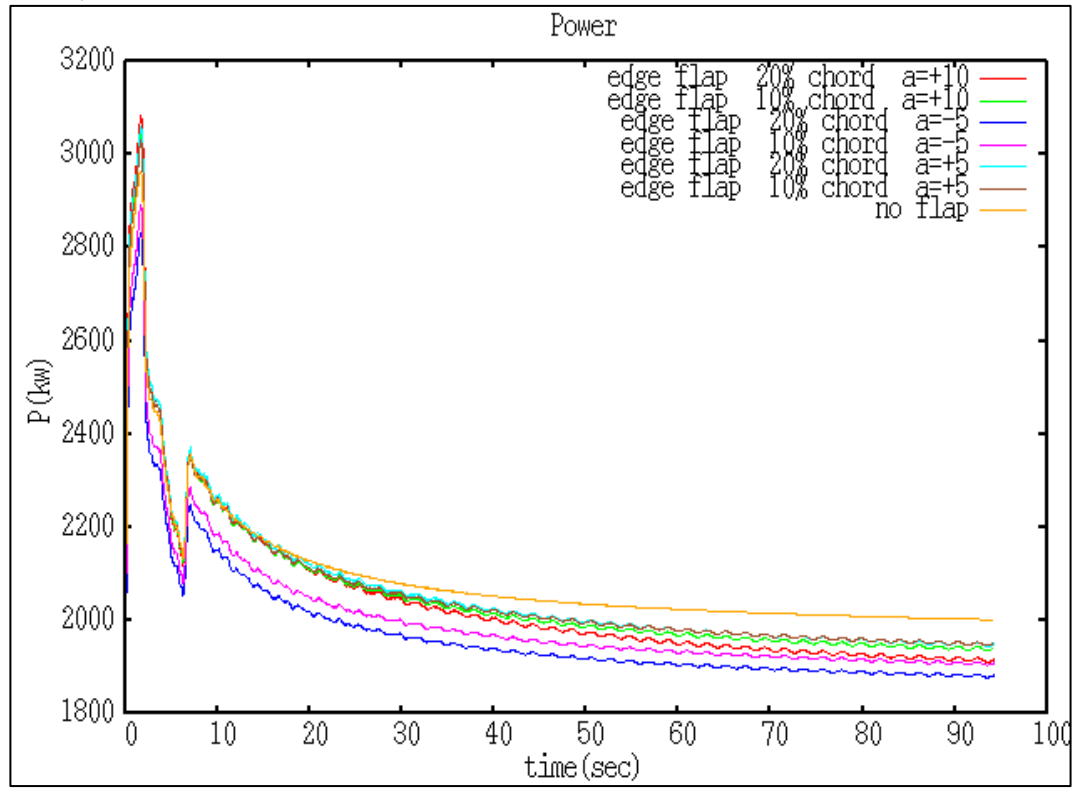


Διάγραμμα 5.1.12: Εφαπτομενική δύναμη - begin flap

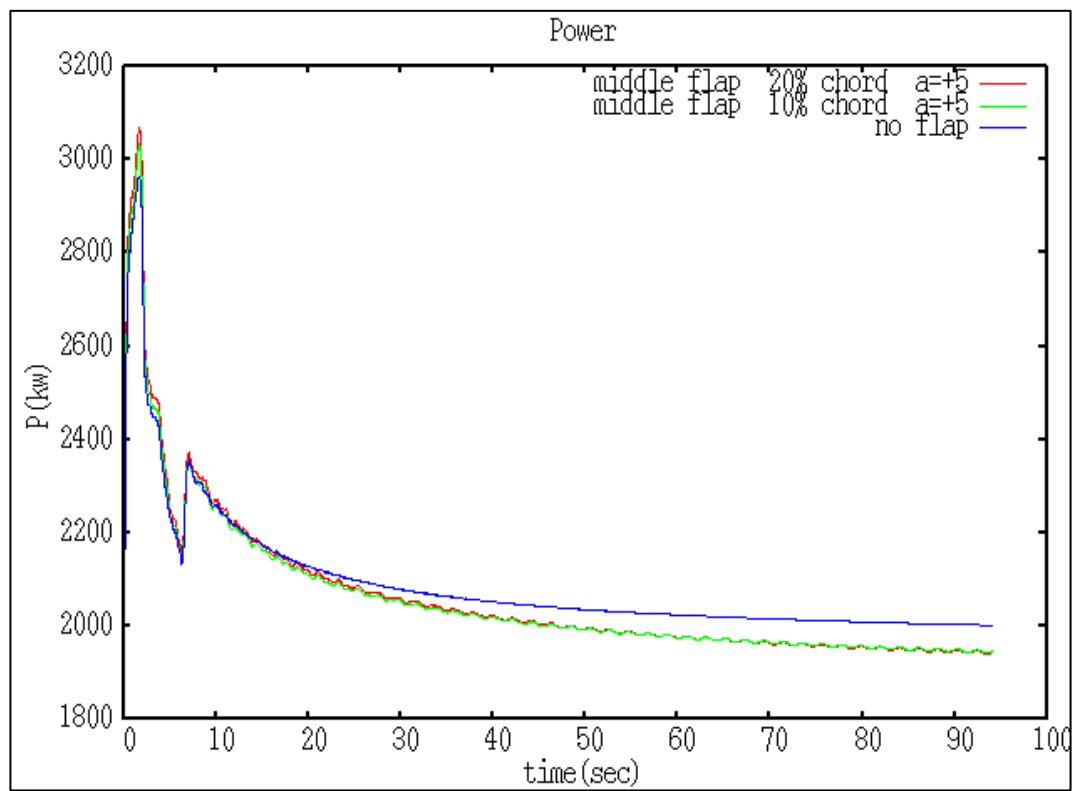
Η εφαπτομενική δύναμη είναι αυτή που τελικά κινεί την ανεμογεννήτρια. Είναι η δύναμη μέσω της οποίας παίρνουμε την ισχύ.

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα ότι η εφαπτομενική δύναμη δεν είναι σε κανένα σημείο μεγαλύτερη από την δύναμη που παρουσιάζει το αρχικό ενιαίο πτερύγιο χωρίς μεταβολή. Περιμένουμε συνεπώς η ισχύς της ανεμογεννήτριας να είναι μειωμένη σε σχέση με το αρχικό-πτερύγιο αναφοράς.

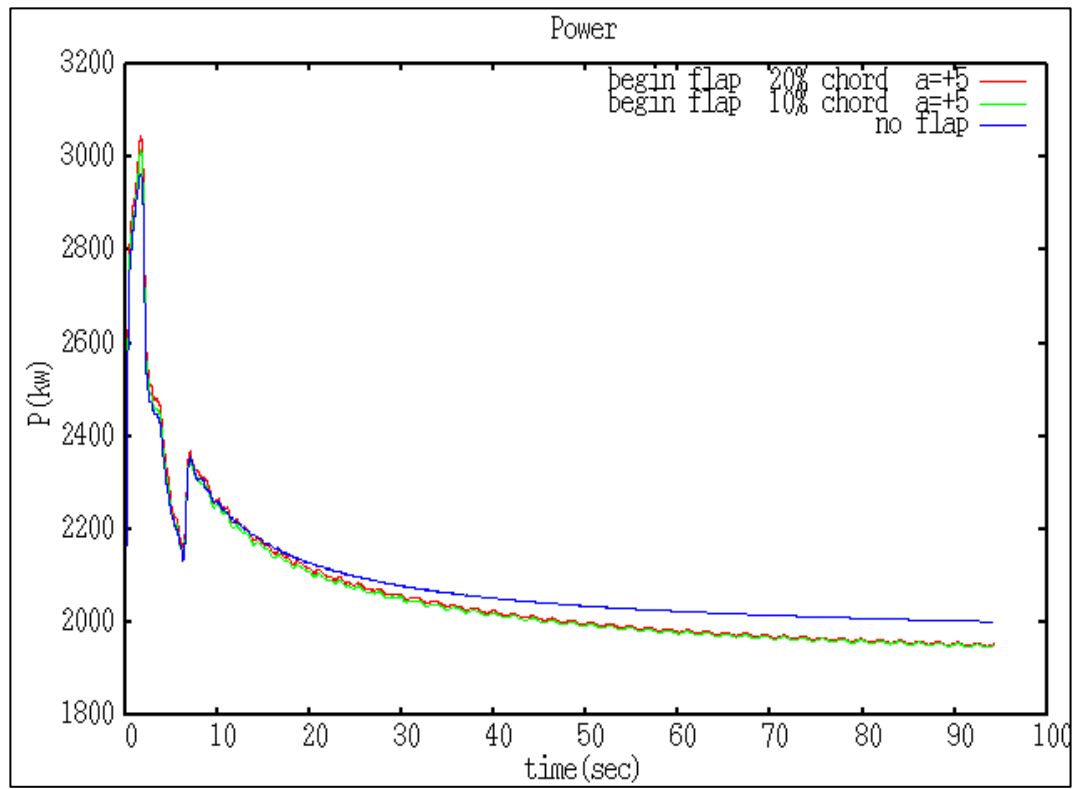
Ισχύς



Διάγραμμα 5.1.13 : Ισχύς - edge flap



Διάγραμμα 5.1.14 : Ισχύς - middle flap

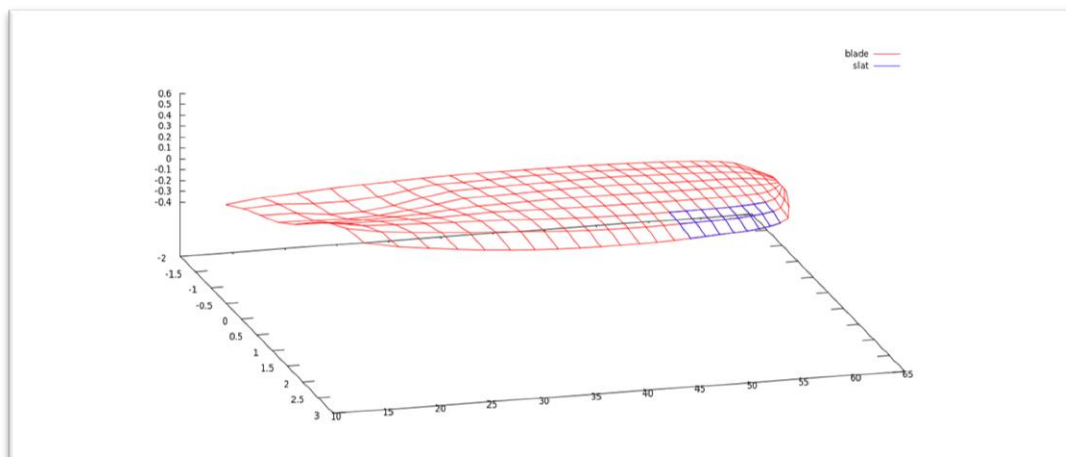


Διάγραμμα 5.1.15 : Ισχύς - begin flap

5.2 Μεταβάλλοντας την ακμή πρόσπτωσης (slat)

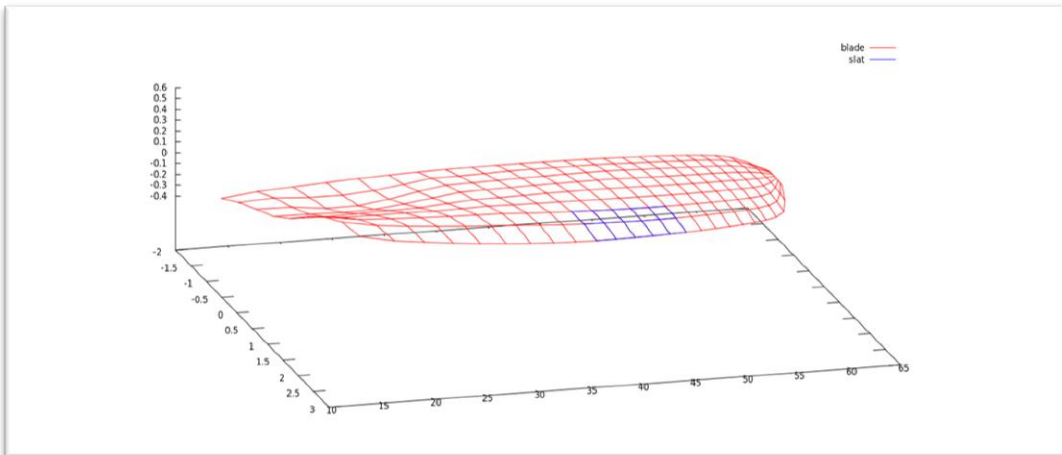
Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε το πτερύγιο A/Γ χωρίς πάχος (thin). Μεταβάλλουμε συγκεκριμένο τμήμα του πτερυγίου στρεβλώνοντας την ακμή πρόσπτωσης (slat). Οι διαφορετικές θέσεις του slat φαίνονται στις παρακάτω εικόνες. Συγκεκριμένα οι θέσεις του slat είναι :

- a) στο τέλος του πτερυγίου - από 48.23 μέχρι τα 58.20 μέτρα



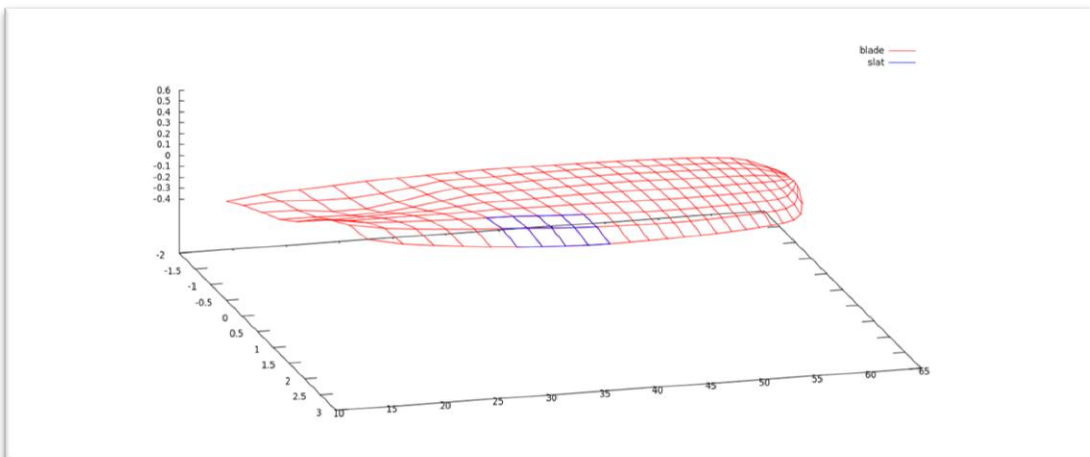
Εικόνα 5.2.1 : edge slat

b) στην μέση ,περίπου, του πτερυγίου - από τα 38.56 μέχρι τα 48.23 μέτρα



Εικόνα 5.2.2 : middle slat

c) κοντά στην αρχή του πτερυγίου - από τα 28.83 μέχρι τα 38.56 μέτρα

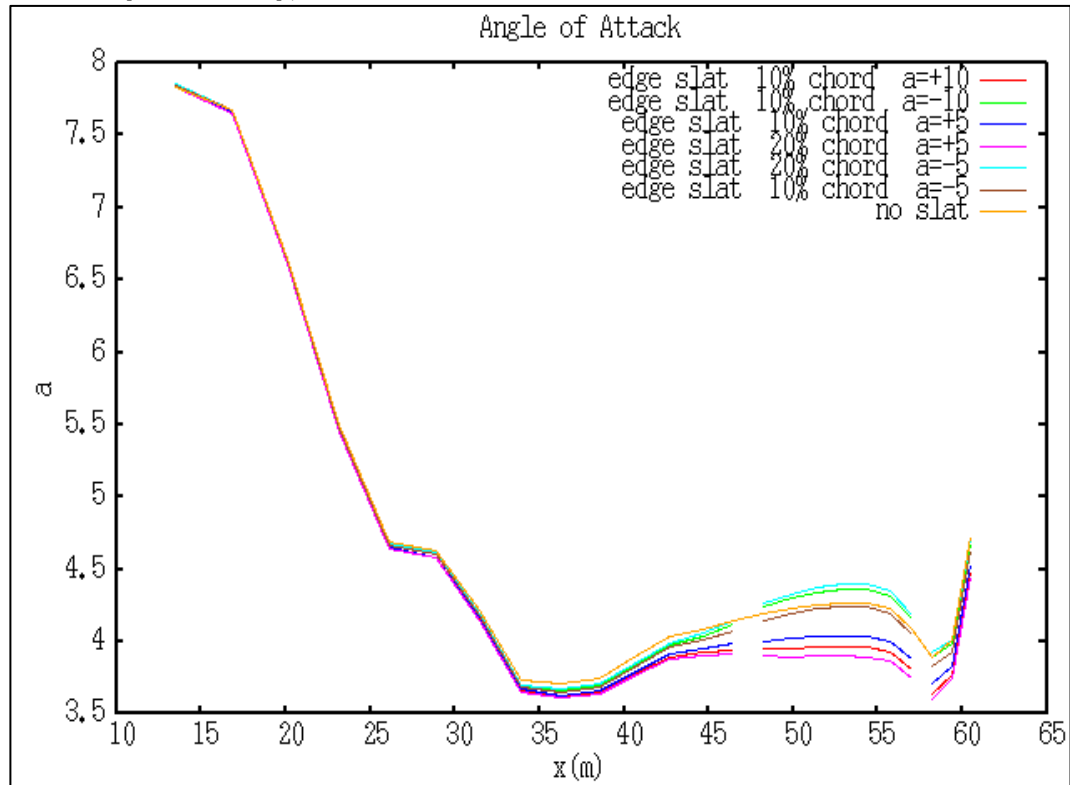


Εικόνα 5.2.3 : begin slat

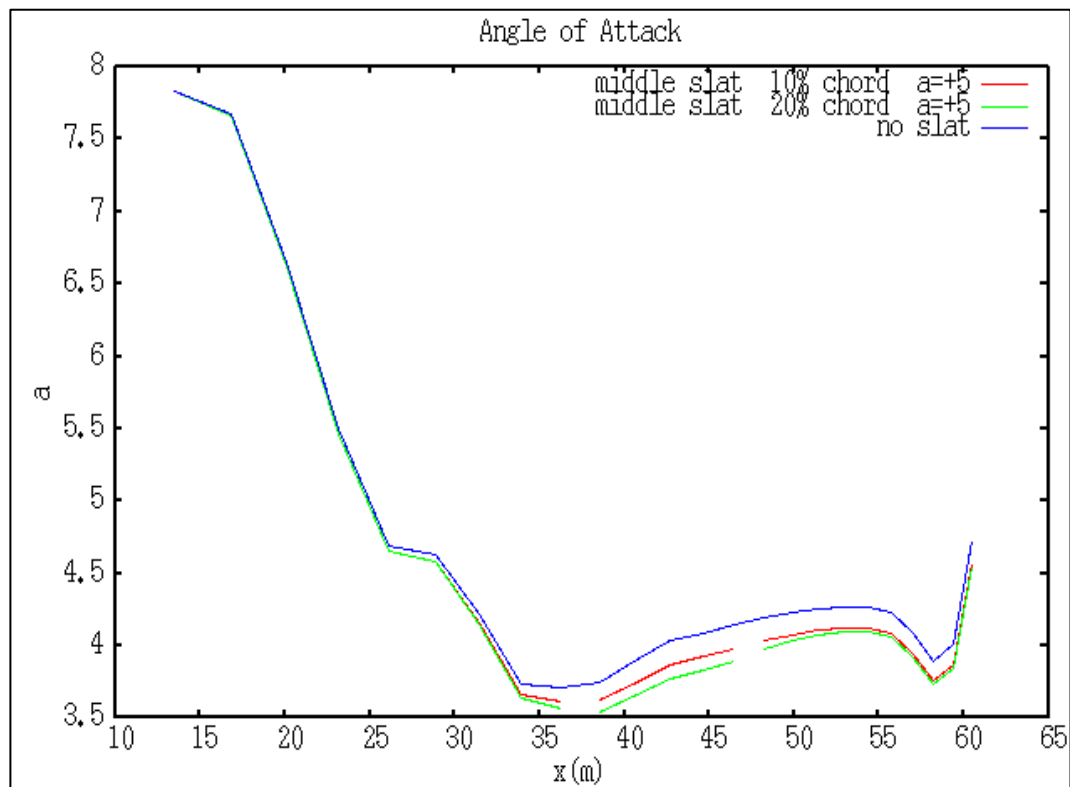
Ξεκινώντας από το slat στο τέλος του πτερυγίου, συνεχίζοντας με το slat στην μέση του πτερυγίου και τελειώνοντας με το slat στην άκρη του πτερυγίου, τα διαγράμματα που ακολουθούν έχουν την ακόλουθη δομή:

1. Διάγραμμα για την γωνία πρόσπτωσης
2. Διάγραμμα για τον συντελεστή άνωσης
3. Διάγραμμα για την αξονική δύναμη
4. Διάγραμμα για την εφαπτομενική δύναμη
5. Διάγραμμα για την ισχύ

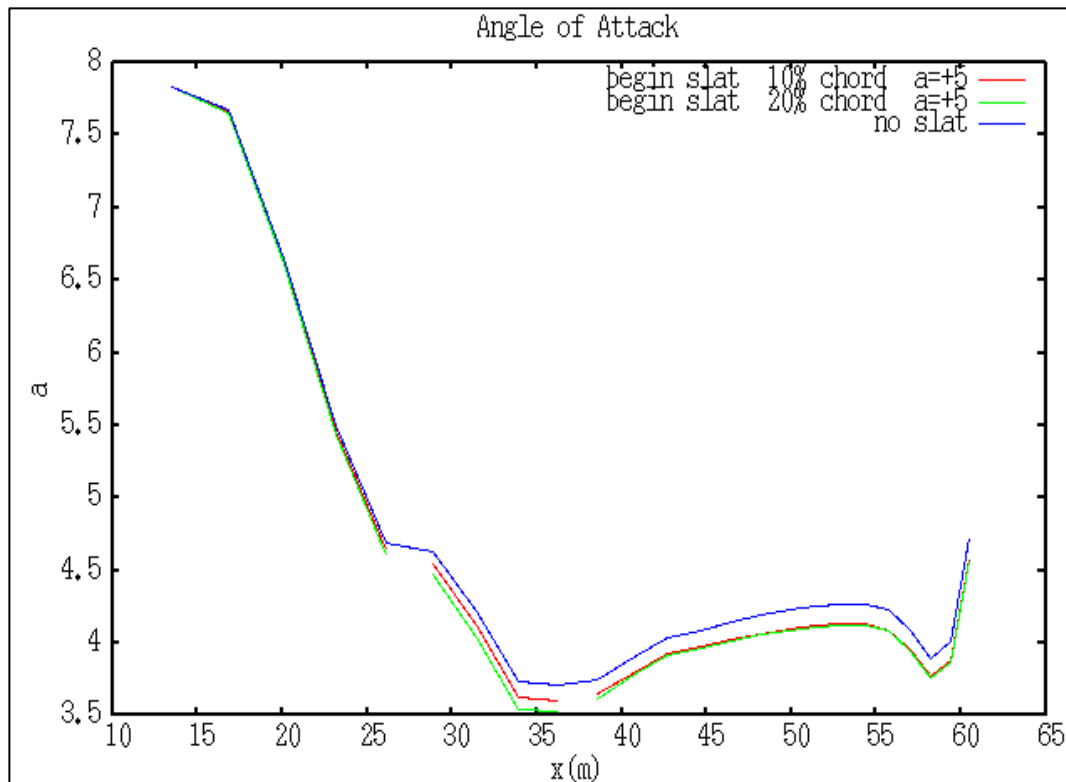
Γωνία πρόσπτωσης



Διάγραμμα 5.2.1: γωνίες πρόσπτωσης - edge slat



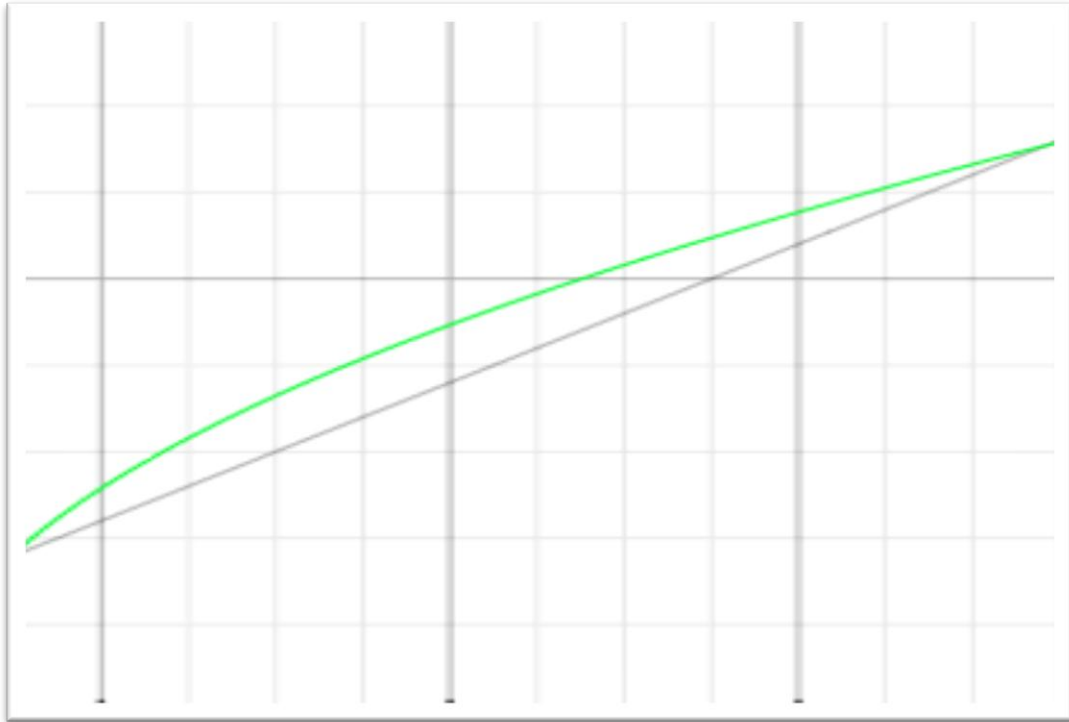
Διάγραμμα 5.2.2: γωνίες πρόσπτωσης - middle slat



Διάγραμμα 5.2.3: γωνίες πρόσπτωσης - begin slat

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε την γωνία πρόσπτωσης κατά μήκος του πτερυγίου. Στην αρχή του πτερυγίου έχουμε αυξημένες γωνίες πρόσπτωσης λόγω συστροφής της πτέρυγας.

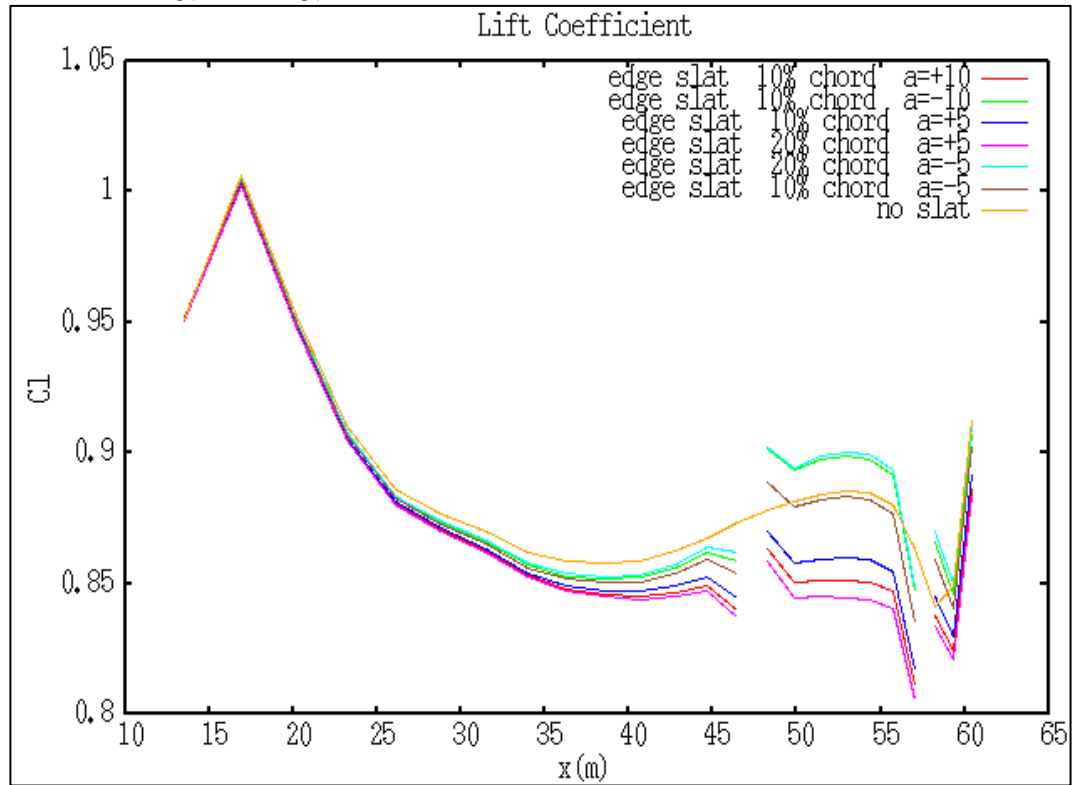
Παρατηρούμε ακόμα (κυρίως στο διάγραμμα 5.2.1) πως η μεταβολή της γωνίας πρόσπτωσης ,για θετικές μοίρες στροφής του slat, είναι απέχει περισσότερο από την καμπύλη που σχηματίζει το πτερύγιο αναφοράς (καμπύλη no slat). Αντίστοιχα ,για αρνητικές μοίρες στροφής του slat, οι καμπύλες βρίσκονται αρκετά κοντά στην καμπύλη αναφοράς. Παρατηρούμε επίσης, ότι η καμπύλη που σχηματίζεται για το slat με πλάτος το 10% της χορδής και γωνία πρόσπτωσης ίση με $\alpha = -5^\circ$ (edge slat 10% chord $\alpha = -5^\circ$) βρίσκεται κάτω από την καμπύλη αναφοράς ενώ θα ανέμενε κανείς να βρίσκεται από πάνω όπως και στην περίπτωση του flap. Αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης καμπυλότητας του πτερυγίου στην ακμή ακμή πρόσπτωσης σε σχέση με την ακμή εκφυγής.



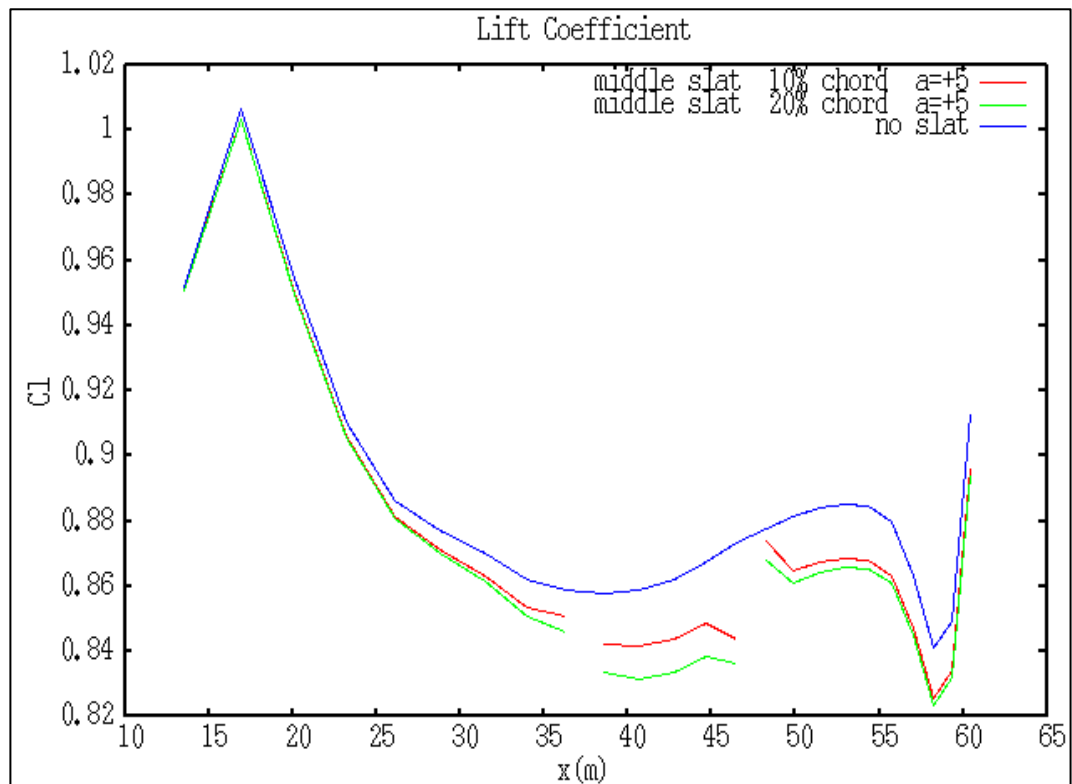
Εικόνα 5.2.1 : Αεροτομή χωρίς πάχος (πράσινο χρώμα) -- χορδή αεροτομής

Παρατηρώντας την προηγούμενη εικόνα βλέπουμε πως το αριστερό τμήμα (δηλαδή η ακμή πρόσπτωσης) της λεπτής αεροτομής παρουσιάζει μεγαλύτερη καμπυλότητα σε σχέση με το δεξί τμήμα (δηλαδή την ακμή εκφυγής).

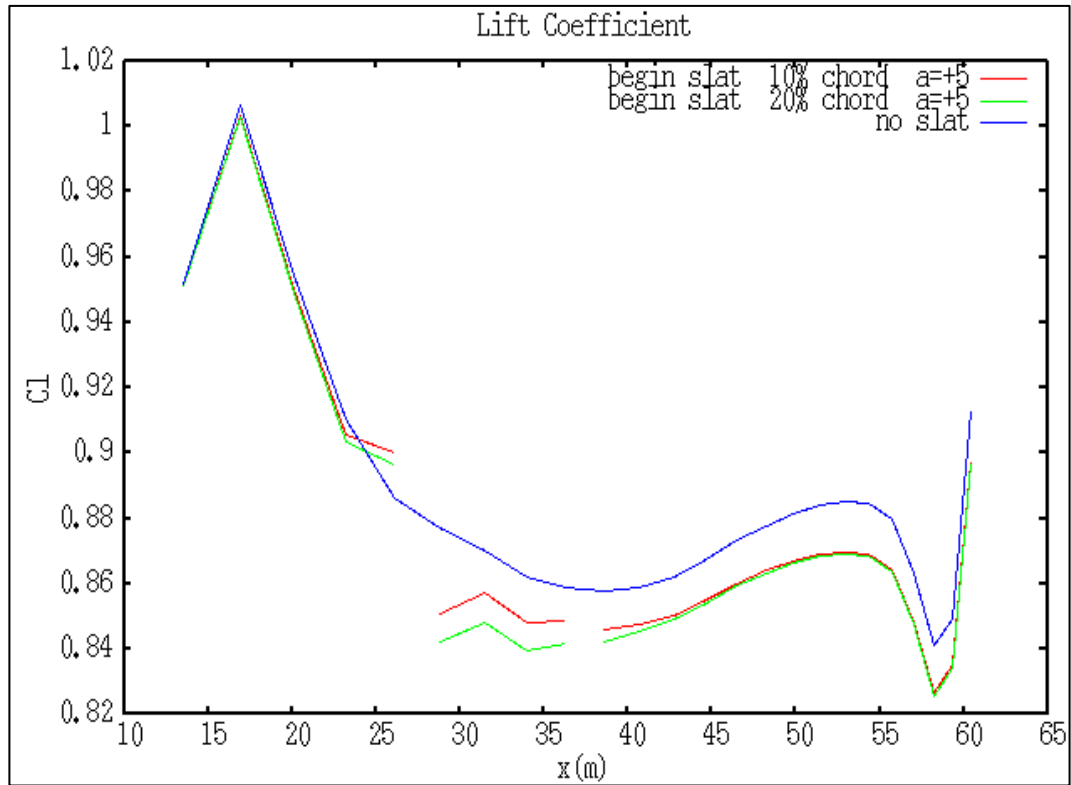
Συντελεστής άνωσης



Διάγραμμα 5.2.4: Συντελεστής άνωσης - edge slat

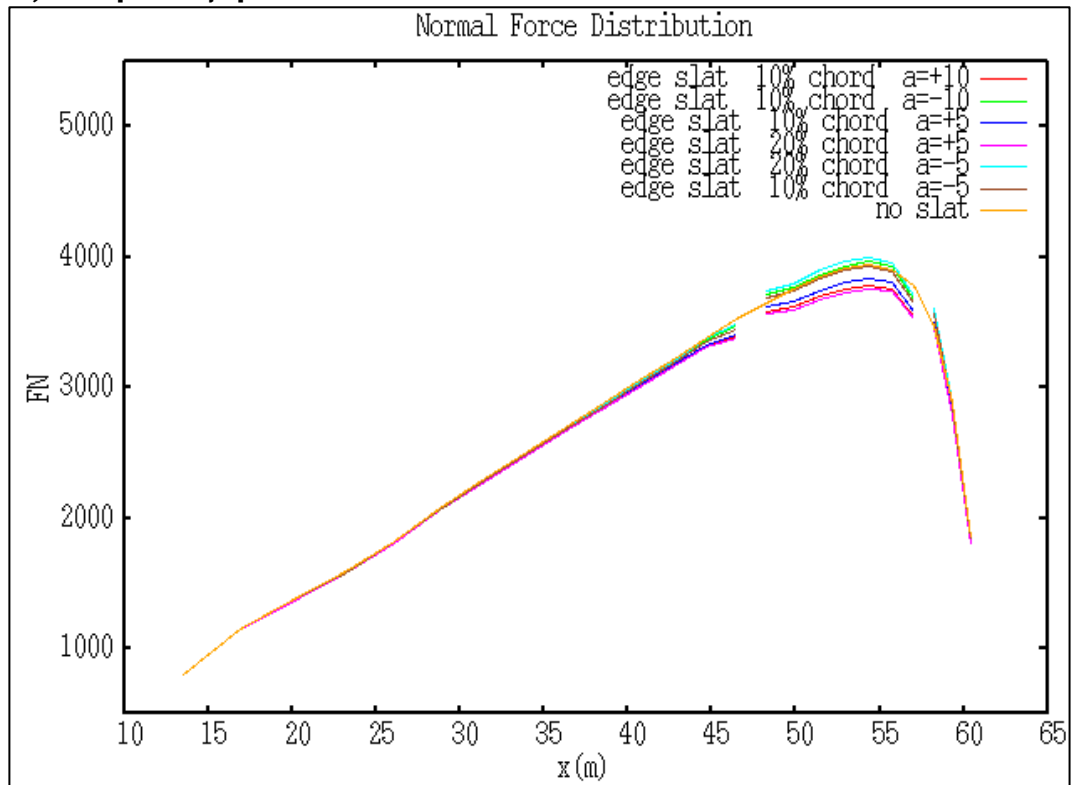


Διάγραμμα 5.2.5: Συντελεστής άνωσης - middle slat

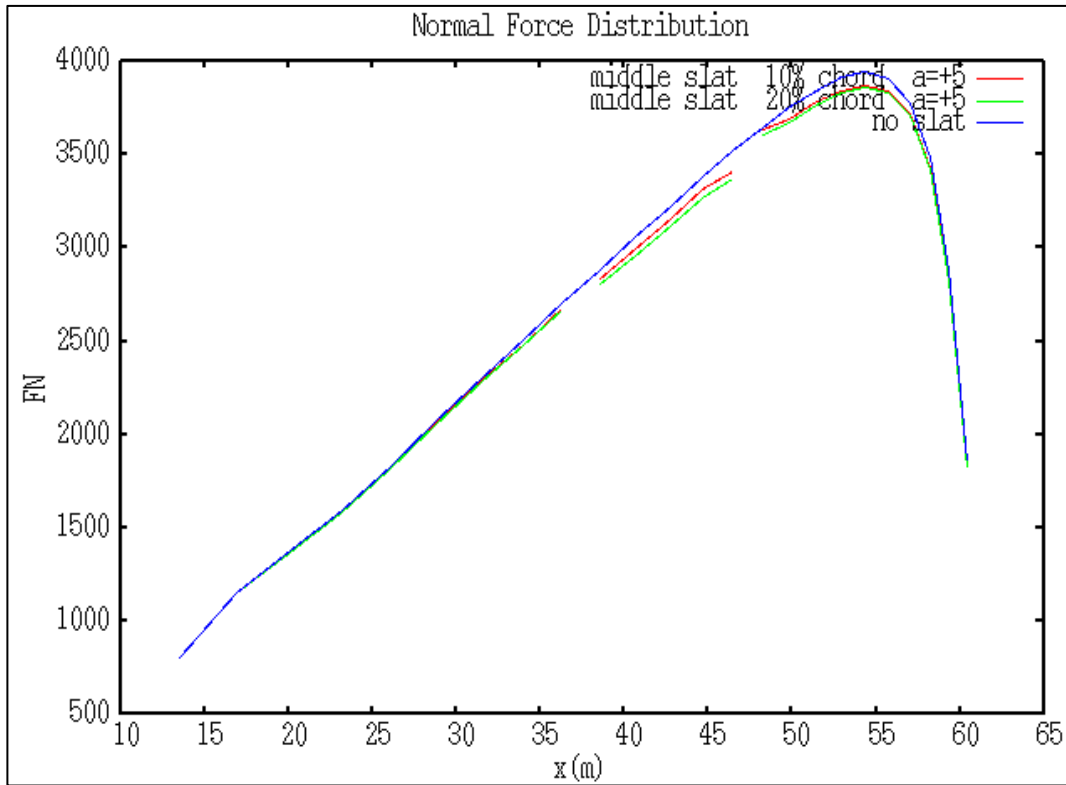


Διάγραμμα 5.2.6: Συντελεστής άνωσης - begin slat

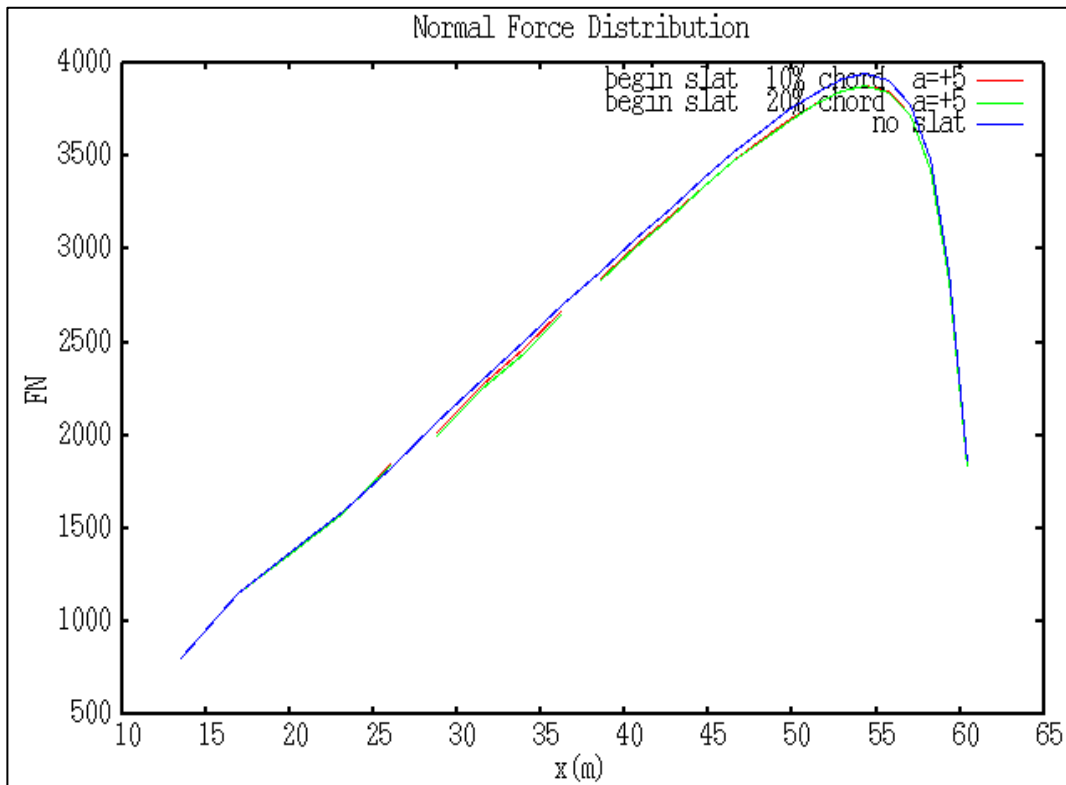
Αξονική δύναμη



Διάγραμμα 5.2.7: Αξονική δύναμη - edge slat



Διάγραμμα 5.2.8: Αξονική δύναμη - middle slat



Διάγραμμα 5.2.9: Αξονική δύναμη - begin slat

Στα παραπάνω διαγράμματα της αξονικής δύναμης, η φθίνουσα πορεία στην περιοχή του slat για κάθε θέση έχει ως εξής:

Για το slat στην άκρη του πτερυγίου

- 1) Slat edge 20% chord $\alpha = -5^\circ$
- 2) Slat edge 10% chord $\alpha = -10^\circ$
- 3) Αρχικό ενιαίο πτερύγιο
- 4) Slat edge 10% chord $\alpha = -5^\circ$
- 5) Slat edge 10% chord $\alpha = +5^\circ$
- 6) Slat edge 10% chord $\alpha = +10^\circ$
- 7) Slat edge 20% chord $\alpha = +5^\circ$

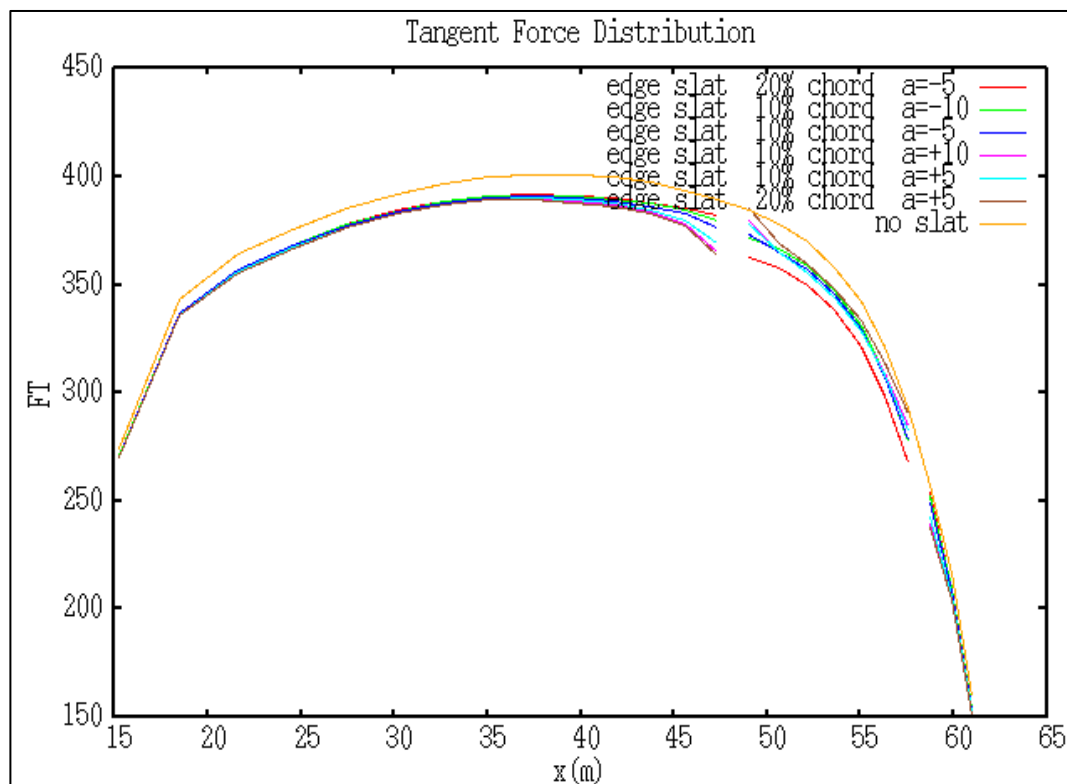
Για το slat στην μέση του πτερυγίου

- 1) Αρχικό ενιαίο πτερύγιο
- 2) slat middle 10% chord $\alpha = +5^\circ$
- 3) slat middle 20% chord $\alpha = +5^\circ$

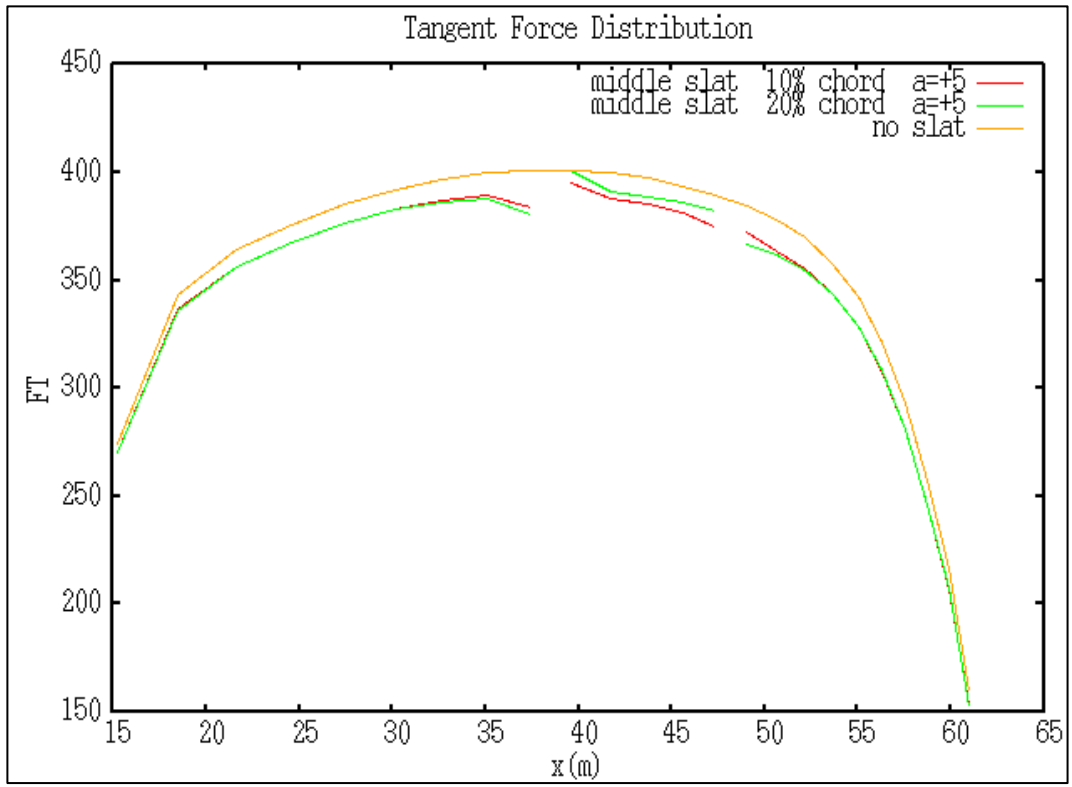
Για το slat κοντά στην αρχή του πτερυγίου

- 1) Αρχικό ενιαίο πτερύγιο
- 2) Slat begin 10% chord $\alpha = +5^\circ$
- 3) Slat begin 20% chord $\alpha = +5^\circ$

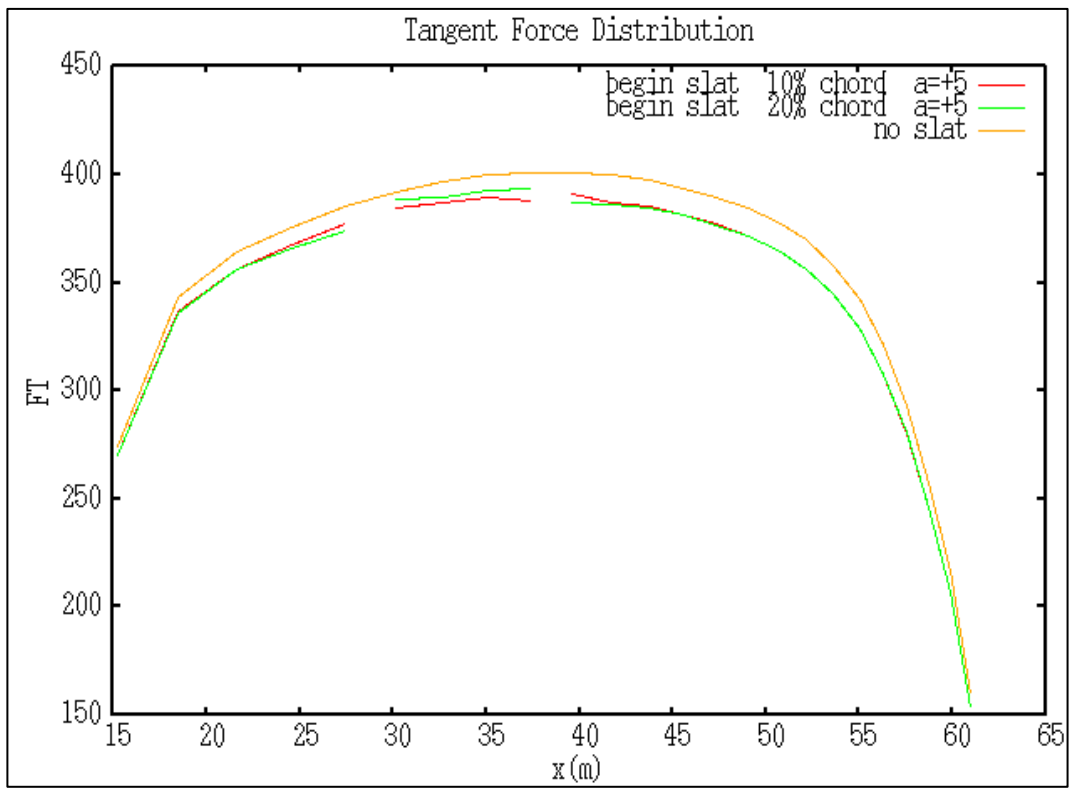
Εφαπτομενική δύναμη



Διάγραμμα 5.2.10: Εφαπτομενική δύναμη - edge slat

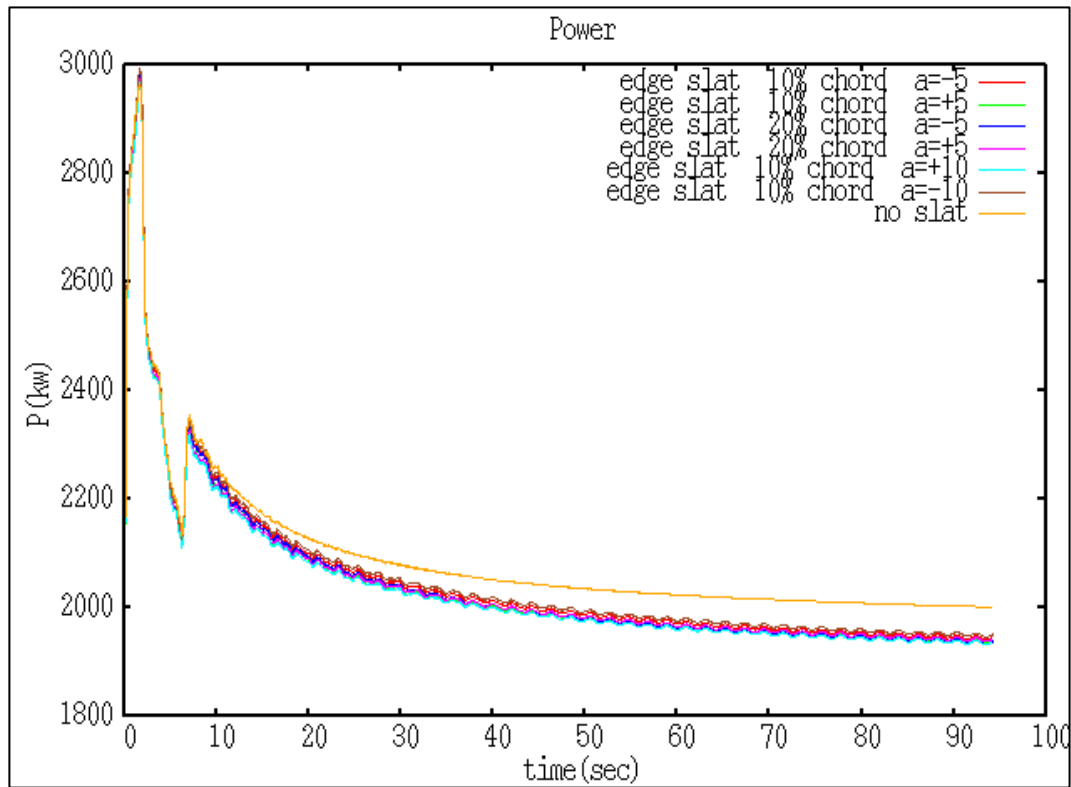


Διάγραμμα 5.2.11: Εφαπτομενική δύναμη - middle slat

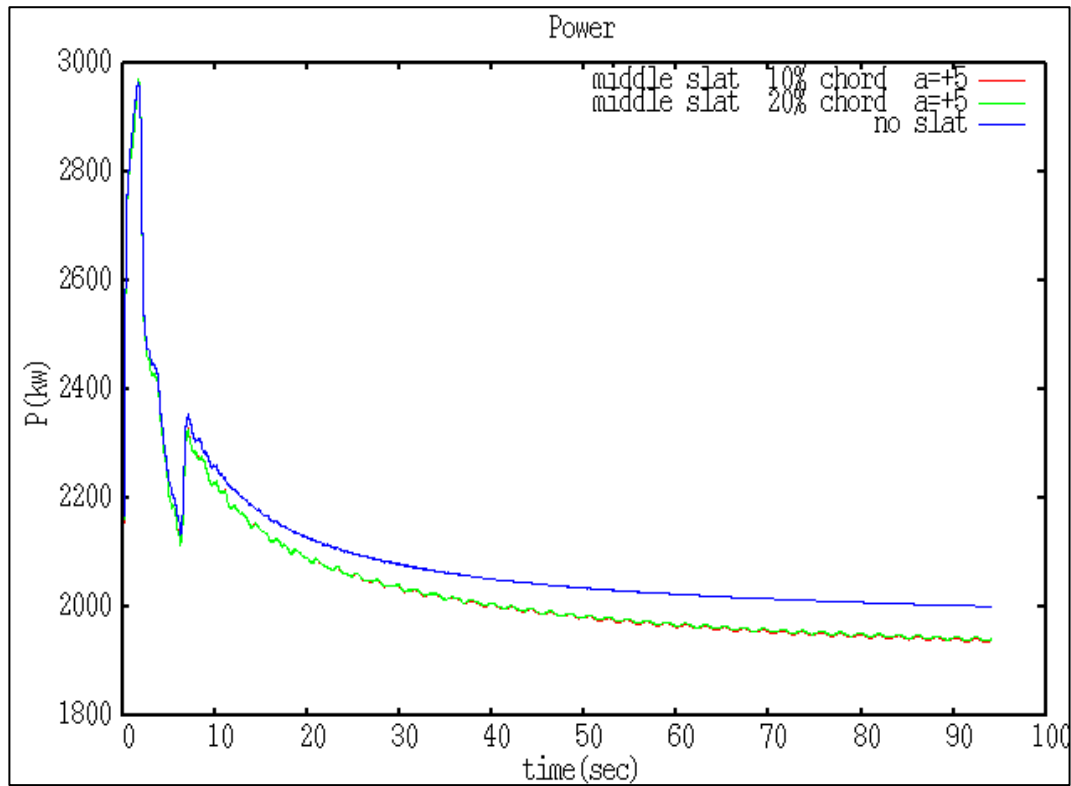


Διάγραμμα 5.2.12: Εφαπτομενική δύναμη - begin slat

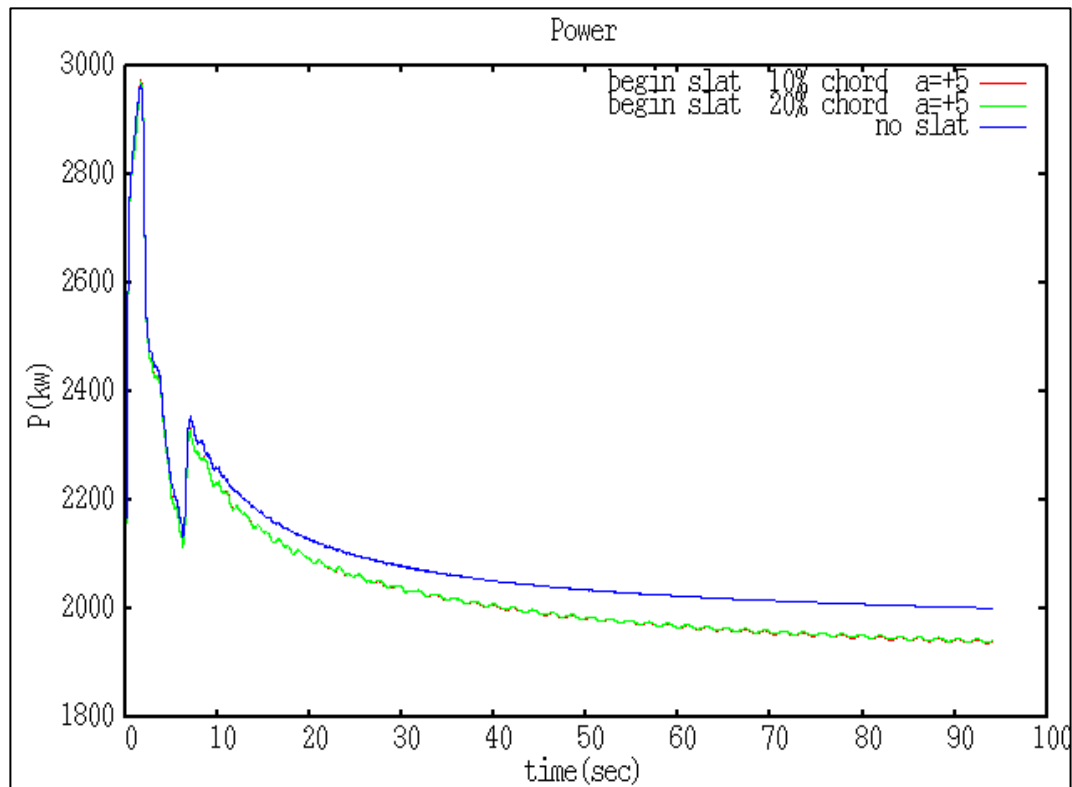
Ισχύς



Διάγραμμα 5.2.13: Ισχύς - edge slat



Διάγραμμα 5.2.14: Ισχύς - middle slat



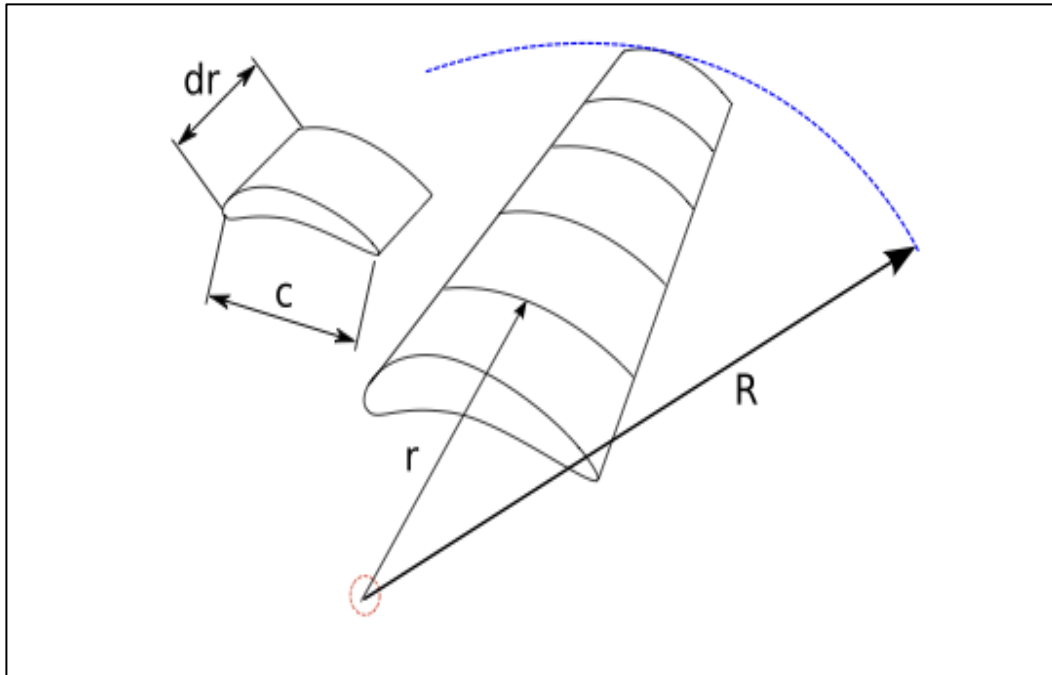
Διάγραμμα 5.2.15: Ισχύς - begin slat

5.3 Αξιολόγηση - Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα, του παρόντος κεφαλαίου 5, χρησιμοποιήθηκε το αρχικό ενιαίο πτερύγιο για την σχεδίαση των διαγραμμάτων. Στα αριθμητικά αποτελέσματα παρακάτω γίνεται σύγκριση και με τις δυο μορφές του πτερυγίου, δηλαδή με το αρχικό ενιαίο πτερύγιο και με αυτό που η γωνία του flap ή του slat είναι $\alpha=0^\circ$.

Επίσης στα διαγράμματα της αξονικής και της εφαπτομενικής δύναμης, η δύναμη στον y-άξονα είναι σε Nt/m-strip.

Με την λέξη strip εννοούμε λωρίδες ,μήκους dr - ισαπέχοντες ή μη, κάθετες στο μήκος του πτερυγίου, όπου το έχουμε χωρίσει για την λεπτομερή του ανάλυση.



Εικόνα 5.3.1 : Strips κατά μήκος του πτερυγίου

Ενιαίο πτερόγιο - πτερόγιο με flap ή slat αλλά $\alpha=0^\circ$

Για να μπορέσουμε να μεταβάλλουμε την ακμή εκφυγής ή την ακμή πρόσπτωσης, έχοντας το αρχικό και ενιαίο πτερόγιο, πρέπει να το “κόψουμε” κατά μήκος σε τρία τμήματα. Το πρώτο ξεκινά από την αρχή του πτερυγίου και τελειώνει στο σημείο που αρχίζει το flap ή το slat, το δεύτερο περιλαμβάνει το flap ή το slat με αντίστοιχο μήκος, και το τρίτο από το σημείο που τελειώνει το flap ή το slat μέχρι το τέλος του πτερυγίου. Αυτό είναι λοιπόν και το πτερόγιο με βάση το οποίο κάνουμε τις συγκρίσεις, δηλαδή αυτό που έχει flap ή slat αλλά η γωνία στροφής του είναι 0 μοίρες.

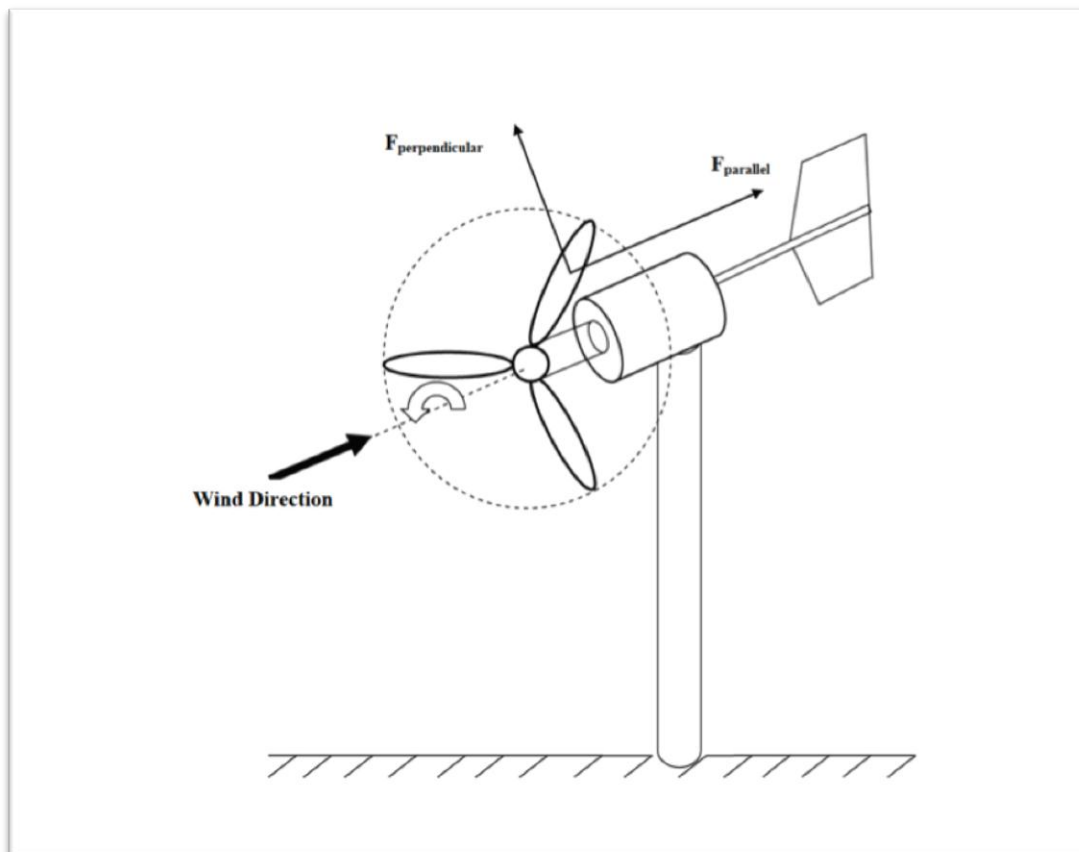
Όπως θα δούμε και παρακάτω το πτερόγιο αυτό παρουσιάζει μικρή διαφορά σε σύγκριση με το αρχικό ενιαίο πτερόγιο, η οποία οφείλεται στον διαφορετικό τρόπο αποβολής της στροβιλότητας στην ακμή εκφυγής. Έχοντας τρία σώματα είναι αναγκαίο να συνδέσουμε τον ομόρρου του κάθε σώματος με το επόμενο, πράγμα το οποίο οδηγεί σε αυτή την μικρή μείωση. Το αριθμητικό λάθος που προκύπτει είναι αμελητέο καθώς η διαφορά είναι μικρότερη του 3%.

Σχετικά με την εφαπτομενική δύναμη και την ισχύ

Στην παρακάτω εικόνα είναι σχεδιασμένες δύο βασικές δυνάμεις που δρουν στα πτερύγια μιας Α/Γ, η διεύθυνση του ανέμου. καθώς επίσης και η φορά περιστροφής της. Η $F_{parallel}$ είναι η αξονική δύναμη ενώ η $F_{perpendicular}$ είναι η εφαπτομενική ή περιστροφική δύναμη, δηλαδή η δύναμη που πολλαπλασιασμένη με την ακτίνα και την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τελικά παράγει την ισχύ.

$$\text{Ισχύς} = P = F_{perpendicular} * R * \omega$$

Έτσι μπορούμε να καταλάβουμε γιατί στα παραπάνω διαγράμματα η ισχύς που αποδίδει η Α/Γ είναι μειωμένη σε σχέση με το πτερύγιο αναφοράς.



Εικόνα 5.3.2 : Δυνάμεις που δρουν σε πτερύγιο Α/Γ

Αριθμητικά αποτελέσματα

Στους παρακάτω πίνακες φαίνεται η μείωση/αύξηση της ισχύος για κάθε μια περίπτωση συγκριτικά

- με το αρχικό ενιαίο πτερύγιο
- με το πτερύγιο που έχει flap ή slat αλλά η γωνία του είναι $a=0^\circ$ - flap($a=0$) ή slat ($a=0$)

Αξίζει να αναφέρουμε πως η διαφορά στην ισχύ του πτερυγίου χωρίς flap ή slat (γωνία $a=0^\circ$) και του αρχικού - ενιαίου πτερυγίου είναι 2,92% .

Θέση Flap	Ισχύς (KW)	% αύξησης με βάση το ενιαίο πτερύγιο	% αύξησης με βάση slat ($a=0$)
beggin flap 20% chord $a=+5$	1960,11355	-2,37%	0,56%
beggin flap 10% chord $a=+5$	1957,64547	-2,50%	0,44%
middle flap 20% chord $a=+5$	1951,40661	-2,81%	0,12%
middle flap 10% chord $a=+5$	1953,83447	-2,69%	0,24%
edge flap 20% chord $a=+10$	1922,67578	-4,24%	-1,36%
edge flap 20% chord $a=+5$	1956,13134	-2,57%	0,36%
edge flap 20% chord $a=-5$	1888,29013	-5,95%	-3,12%
edge flap 10% chord $a=+10$	1946,69502	-3,04%	-0,12%
edge flap 10% chord $a=+5$	1957,5232	-2,50%	0,43%
edge flap 10% chord $a=-5$	1914,81065	-4,63%	-1,76%
flap ($a=0$)	1949,10894	-2,92%	0,00%
no flap	2007,77009	0,00%	3,01%

Θέση Slat	Ισχύς (KW)	% αύξησης με βάση το ενιαίο πτερύγιο	% αύξησης με βάση slat ($a=0$)
beggin slat 20% chord $a=+5$	1949,11295	-2,92%	0,00%
beggin slat 10% chord $a=+5$	1948,04165	-2,97%	-0,05%
middle slat 20% chord $a=+5$	1948,94986	-2,93%	-0,01%
middle slat 10% chord $a=+5$	1946,82852	-3,04%	-0,12%
edge slat 20% chord $a=+5$	1948,87765	-2,93%	-0,01%
edge slat 20% chord $a=-5$	1944,33977	-3,16%	-0,24%
edge slat 10% chord $a=+10$	1943,39585	-3,21%	-0,29%
edge slat 10% chord $a=-10$	1957,25219	-2,52%	0,42%
edge slat 10% chord $a=+5$	1945,92341	-3,08%	-0,16%
edge slat 10% chord $a=-5$	1952,39717	-2,76%	0,17%
slat ($a=0$)	1949,10894	-2,92%	0,00%
no slat	2007,77009	0,00%	3,01%

Σύμφωνα με τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα που σχετίζονται με την ισχύ που αποδίδει η Α/Γ παρατηρούμε ότι :

A) Η επίδραση του slat σε σχέση με το flap είναι αρκετά μικρότερη. Σε όποια θέση και αν εξετάσουμε το slat βλέπουμε πως η μεγαλύτερη αλλαγή που μπορεί να επιφέρει στην ισχύ είναι |0.42%| σε σχέση με το πτερυγίου στο οποίο η γωνία του flap ή slat είναι ίση με $a=0^\circ$. Αντίθετα η μεγαλύτερη αλλαγή που μπορεί να επιφέρει το flap είναι |3.12%| .

B) Σχετικά με το flap :

- Με σταθερή γωνία στροφής του flap, είτε θετική είτε αρνητική, όσο αυξάνεται το εμβαδόν του flap τόσο μειώνεται η ισχύς [εξαιρέση αποτελεί το begin flap το οποίο δεν ακολουθεί το παραπάνω - βρίσκεται αρκετά κοντά στην πλήμνη].
- Με σταθερό το εμβαδόν του flap όσο αυξάνεται η απόλυτη τιμή της γωνίας στροφής του flap τόσο μειώνεται και η ισχύς. Η διαφορά της μείωσης είναι μικρότερη όταν η γωνία είναι $a=+10^\circ$ ενώ είναι μεγαλύτερη όταν η γωνία είναι $a=-10^\circ$ σε σχέση πάντα με την γωνία $a=0^\circ$.

C) Σχετικά με το slat :

- Με σταθερή και θετική γωνία στροφής του slat όσο αυξάνεται το εμβαδόν του τόσο αυξάνεται και η ισχύς.
- Με σταθερή και αρνητική γωνία στροφής του slat όσο αυξάνεται το εμβαδόν του τόσο μειώνεται η ισχύς.
- Με σταθερό το εμβαδόν του slat, όσο αυξάνει η γωνία στροφής του τόσο μειώνεται η ισχύς (ξεκινώντας από $a=-10^\circ$ και οδεύοντας προς $a=10^\circ$)
- Με σταθερό το εμβαδόν αλλά και την γωνία στροφής του slat (π.χ. 10% chord και $a=+5^\circ$) όσο πιο κοντά στην πλήμνη βρίσκεται το slat τόσο αυξάνεται η ισχύς σε σχέση με τις υπόλοιπες θέσεις

6. Πτερύγιο με πάχος (thick blade)

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε την περίπτωση του πτερυγίου με πάχος μεταβάλλοντας είτε την ακμή εκφυγής είτε την ακμή πρόσπτωσης, σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

Οι υπολογισμοί έγιναν για ομοιόμορφη ταχύτητα ανέμου $U=11$ m/s και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega=1.267$ rad/s, όπως φαίνεται και στον πίνακα 4.1 (Α/Γ Αναφοράς).

6.1 Μεταβάλλοντας την ακμή εκφυγής (flap)

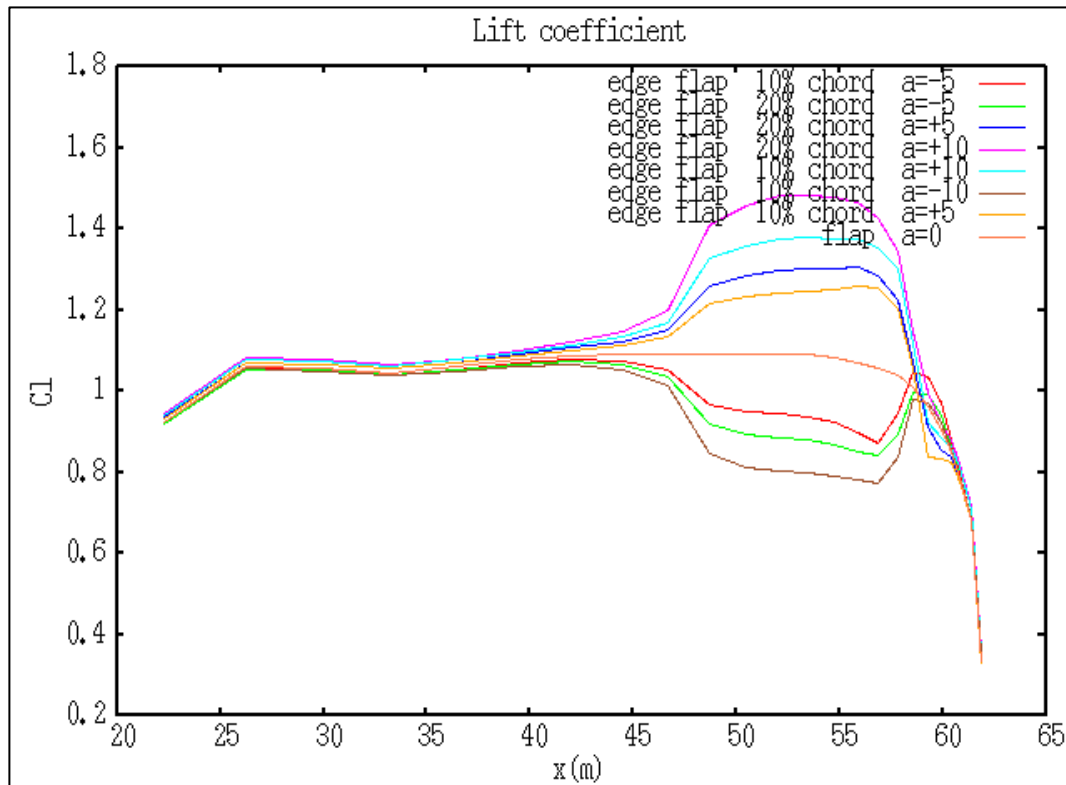
Στην περίπτωση του πτερυγίου με πάχος και με μήκος που ξεκινά στα 20,34 μέτρα και τελειώνει στα 62,05 μέτρα, εξετάζουμε την μεταβλητή ακμή εκφυγής, που βρίσκεται στις κάτωθι θέσεις:

- a) edge flap : από τα 47,74170 μέχρι τα 58,21097 μέτρα
- b) middle flap : από τα 45,64019 μέχρι τα 55,38906 μέτρα
- c) begin flap : από τα 40,75808 μέχρι τα 51,32896 μέτρα

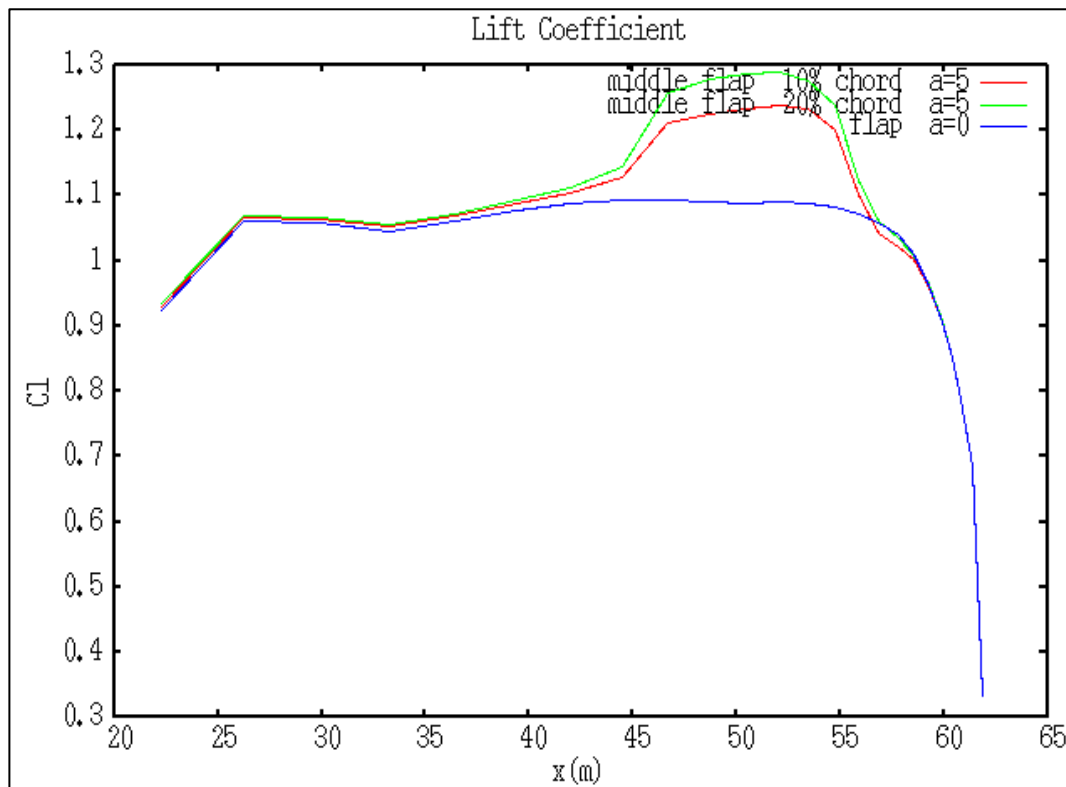
Τα διαγράμματα που ακολουθούν είναι με βάση την ακόλουθη σειρά:

- 1. Διάγραμμα συντελεστή άνωσης
- 2. Διάγραμμα αξονικής δύναμης
- 3. Διάγραμμα εφαπτομενικής δύναμης
- 4. Διάγραμμα ώσης (thrust)
- 5. Διάγραμμα ισχύος

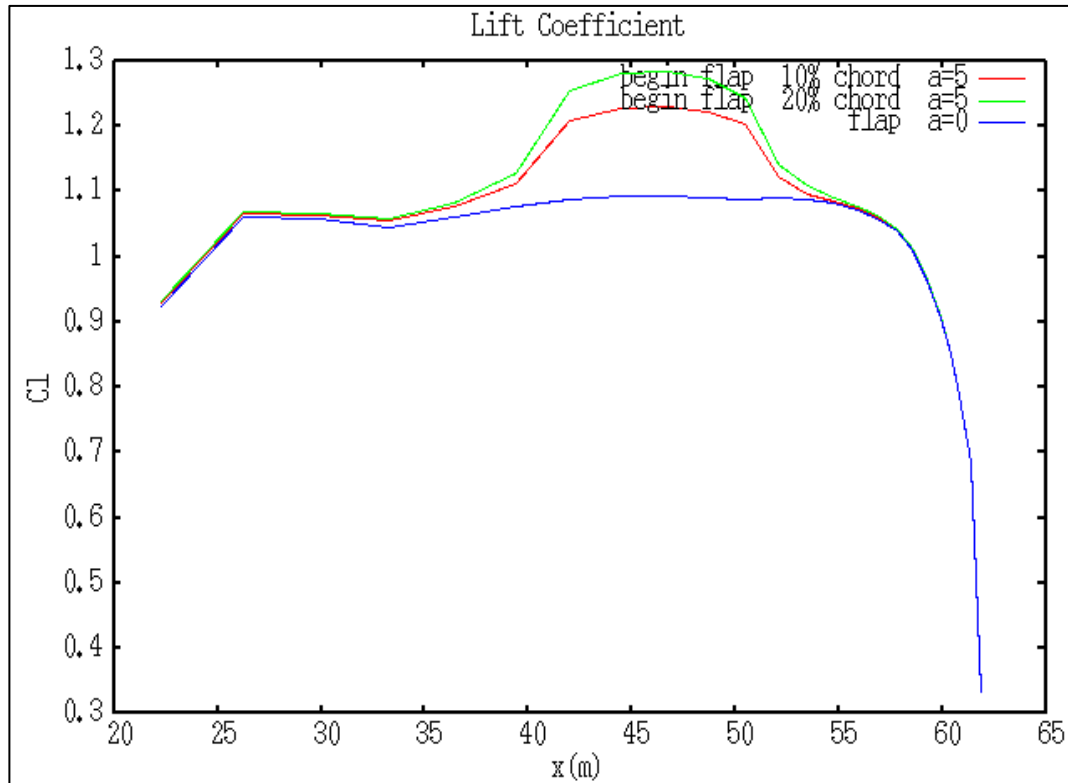
Συντελεστής άνωσης



Διάγραμμα 6.1.1 : Συντελεστής άνωσης - edge flap

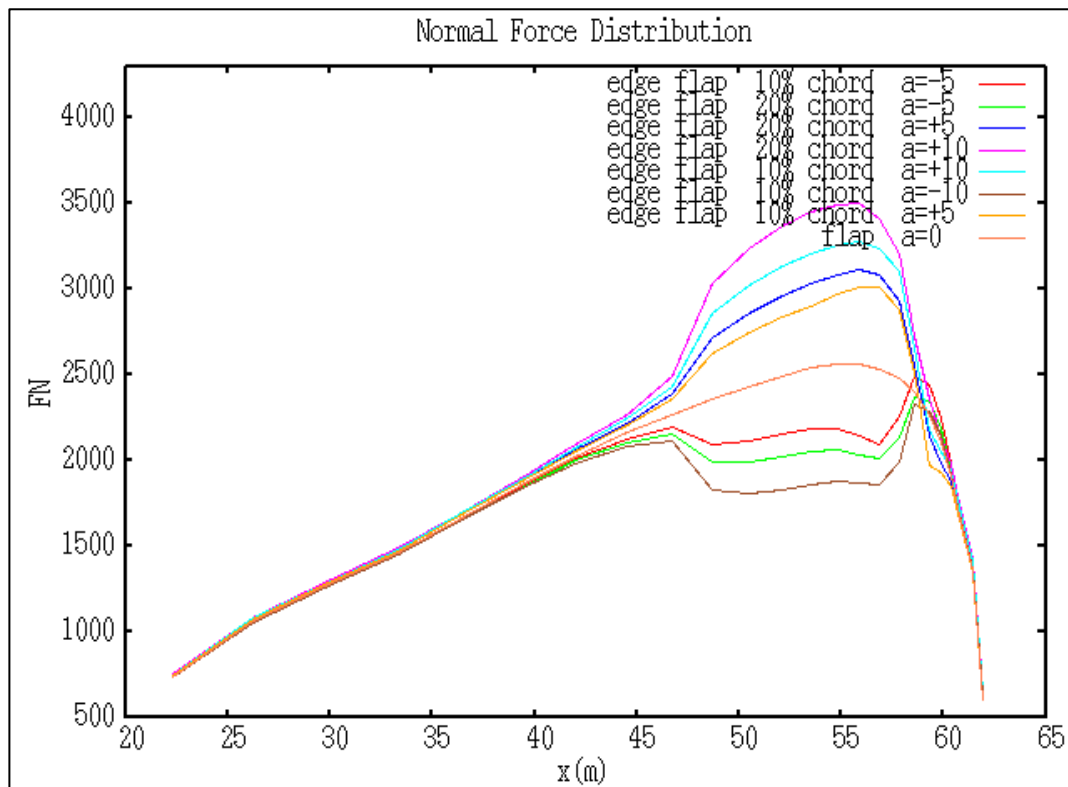


Διάγραμμα 6.1.2 : Συντελεστής άνωσης - middle flap

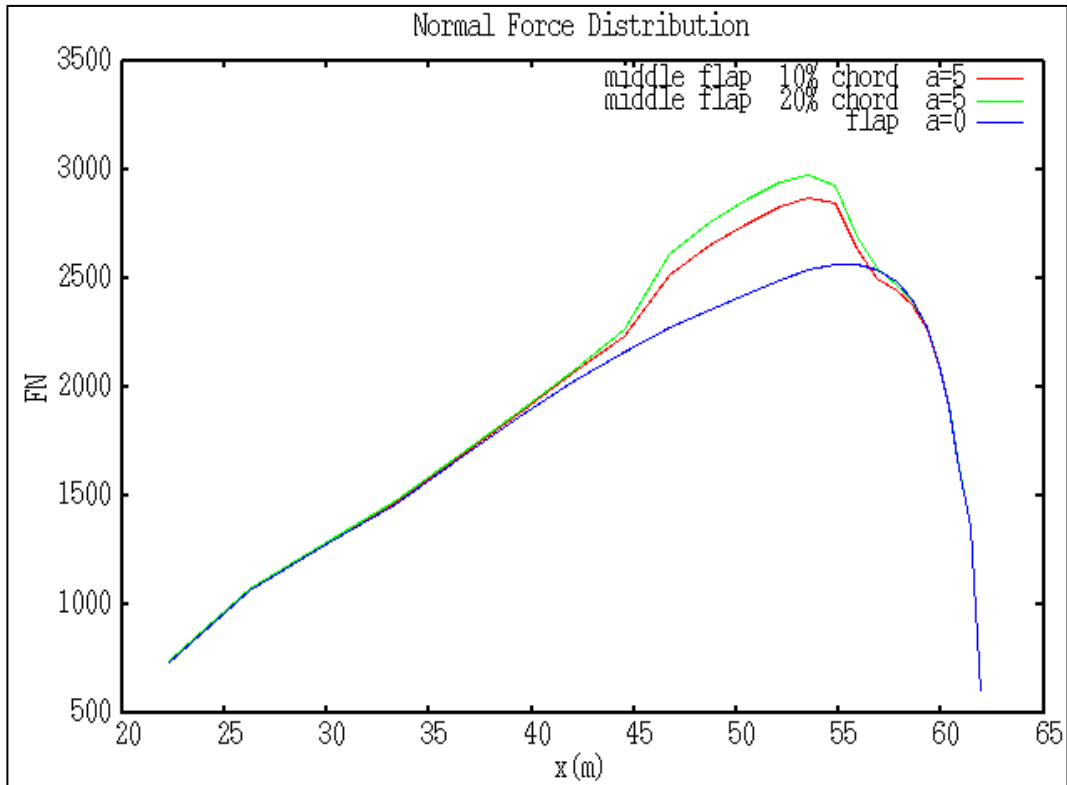


Διάγραμμα 6.1.3 : Συντελεστής άνωσης - begin slat

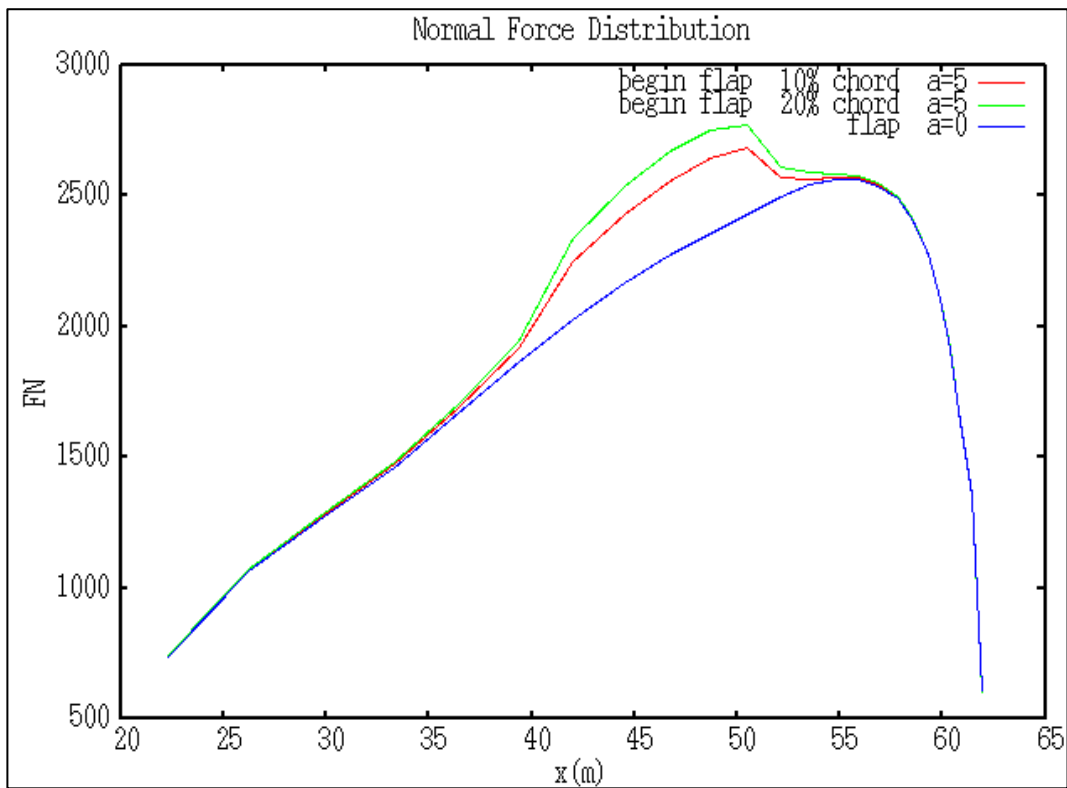
Αξονική δύναμη



Διάγραμμα 6.1.4 : Αξονική δύναμη - edge flap

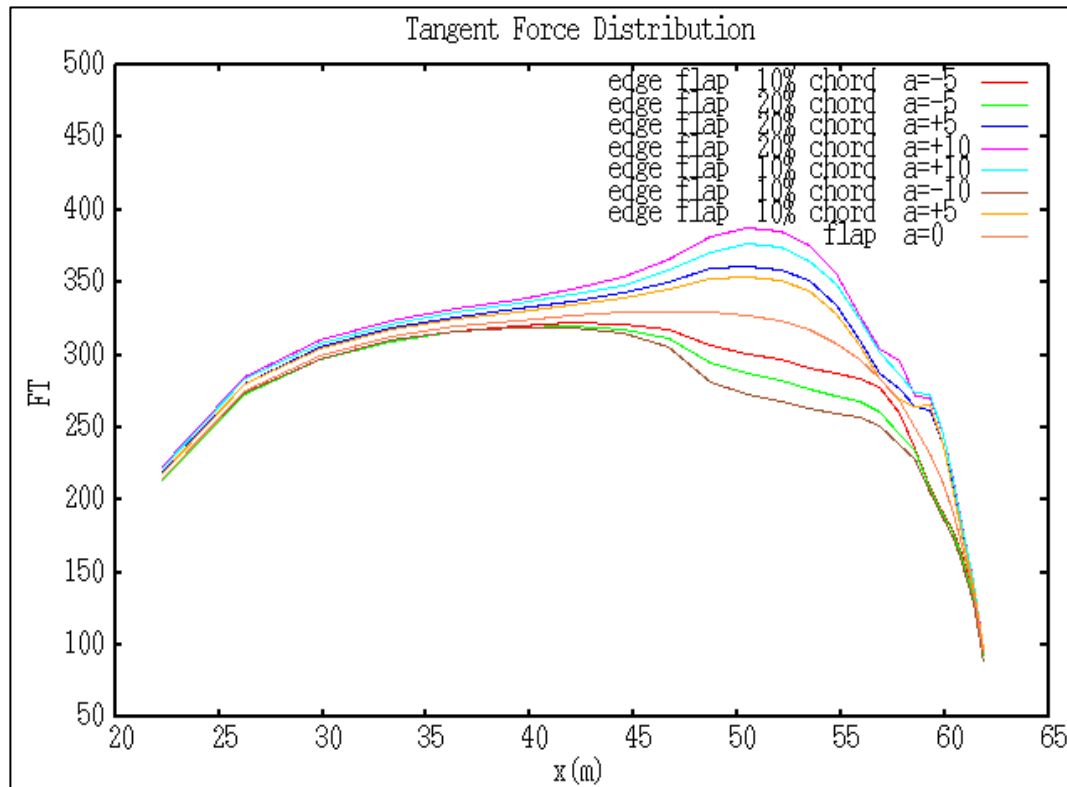


Διάγραμμα 6.1.5 : Αξονική δύναμη - middle flap

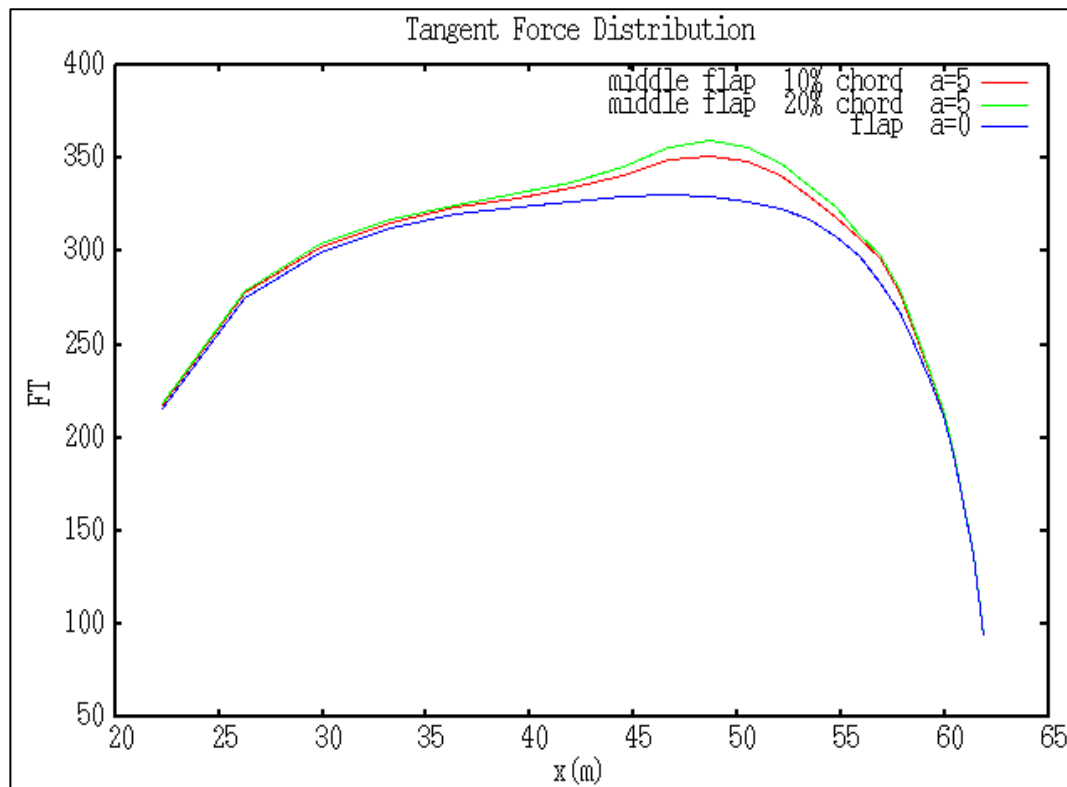


Διάγραμμα 6.1.6 : Αξονική δύναμη - begin flap

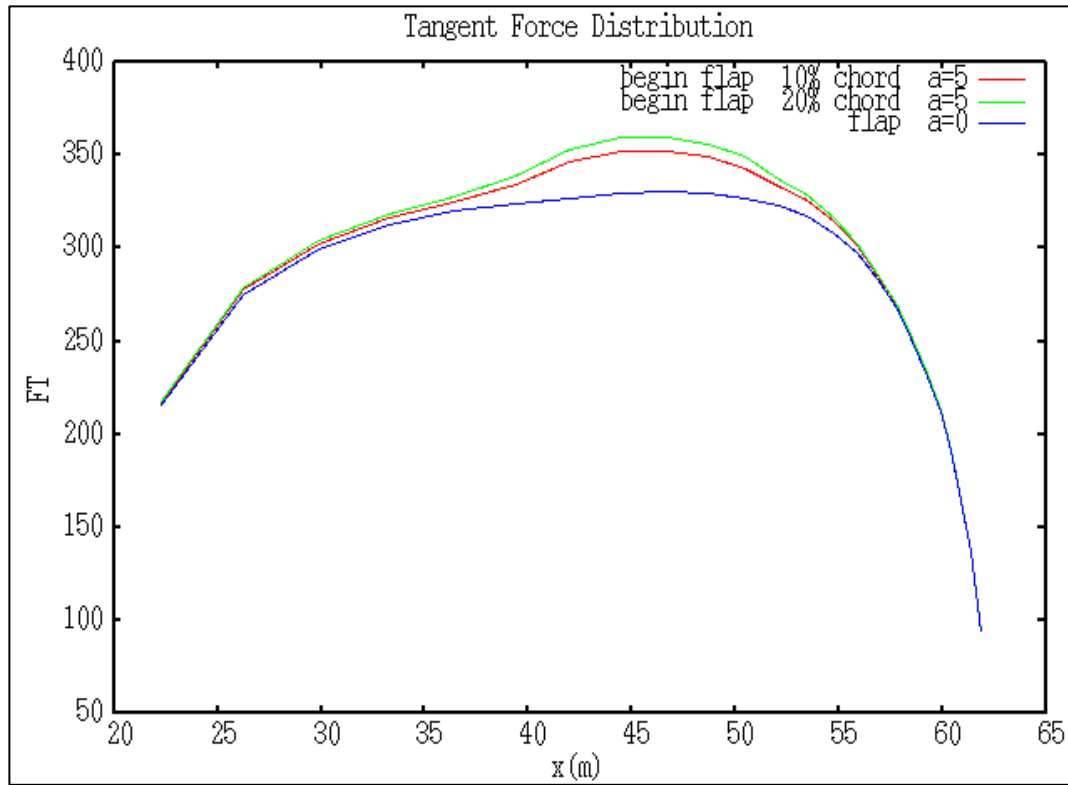
Εφαπτομενική δύναμη



Διάγραμμα 6.1.7 : Εφαπτομενική δύναμη - edge flap

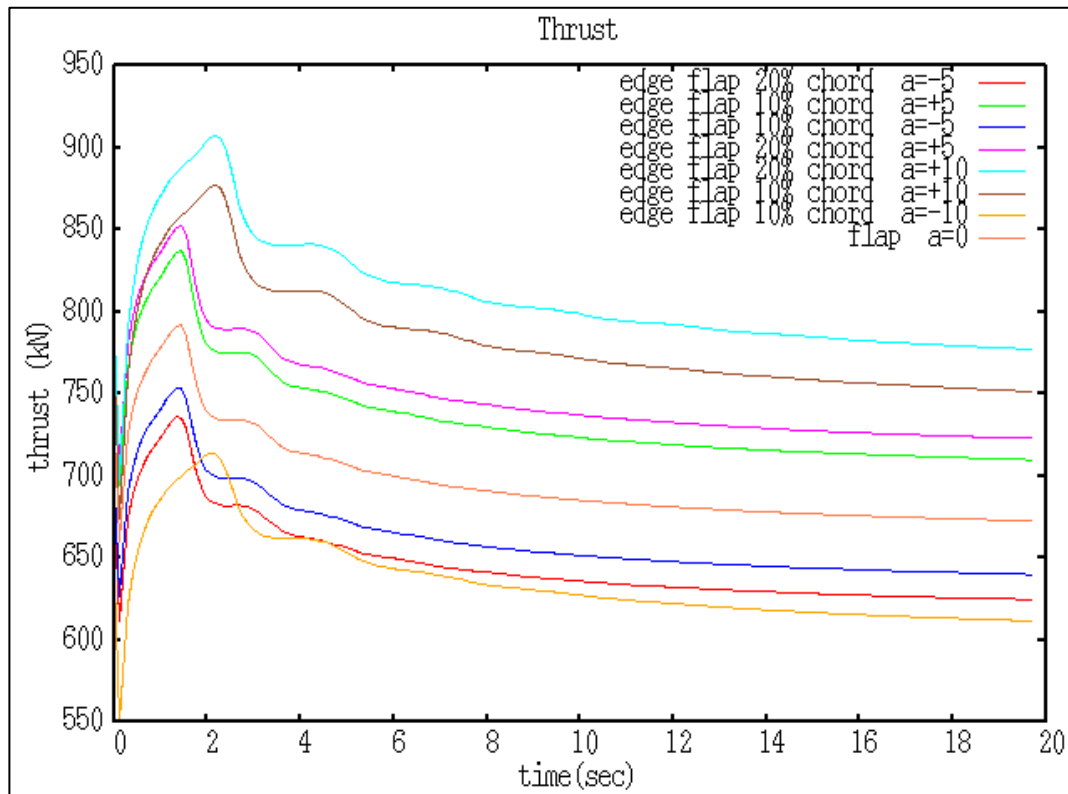


Διάγραμμα 6.1.8 : Εφαπτομενική δύναμη - middle flap

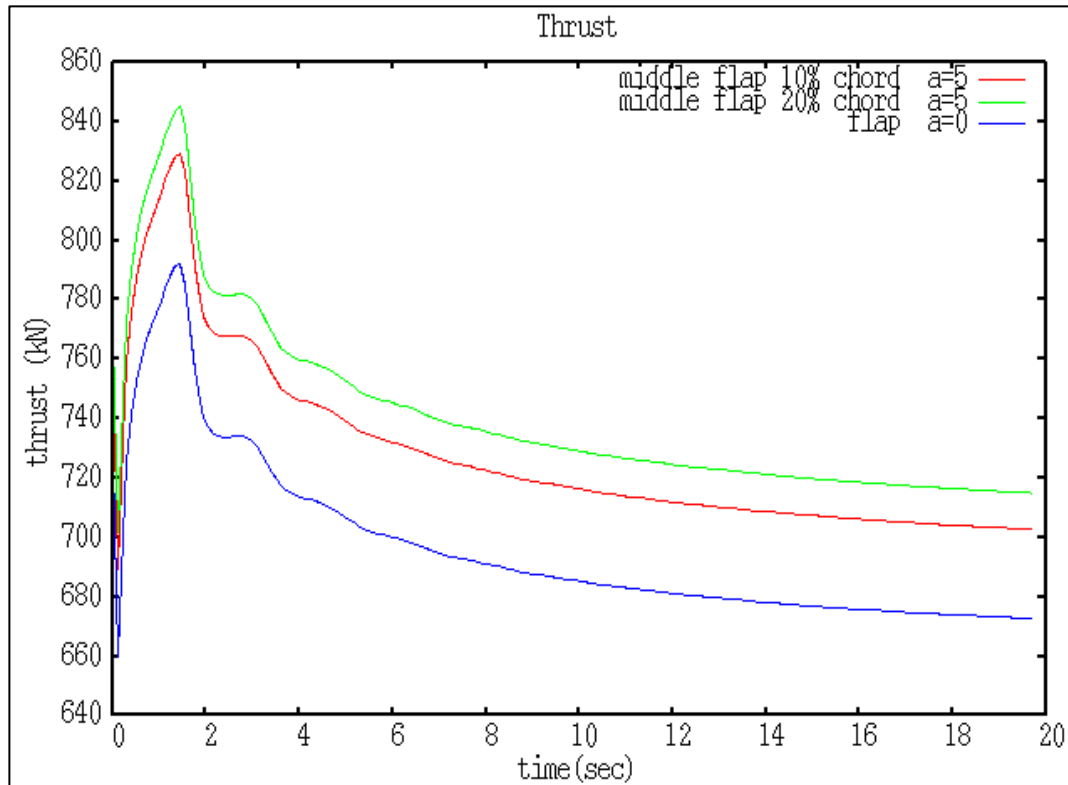


Διάγραμμα 6.1.9 : Εφαπτομενική δύναμη - begin flap

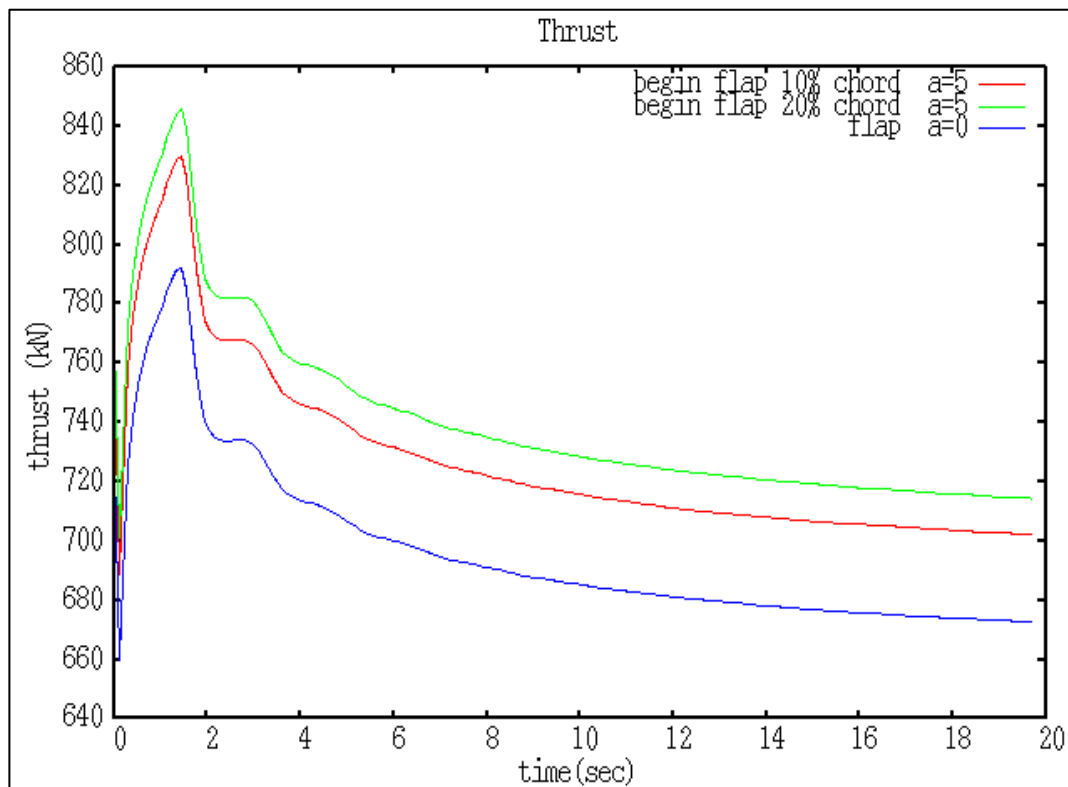
Δύναμη ώσης (thrust)



Διάγραμμα 6.1.10 : Δύναμη ώσης - edge flap



Διάγραμμα 6.1.11 : Δύναμη ώσης - middle flap

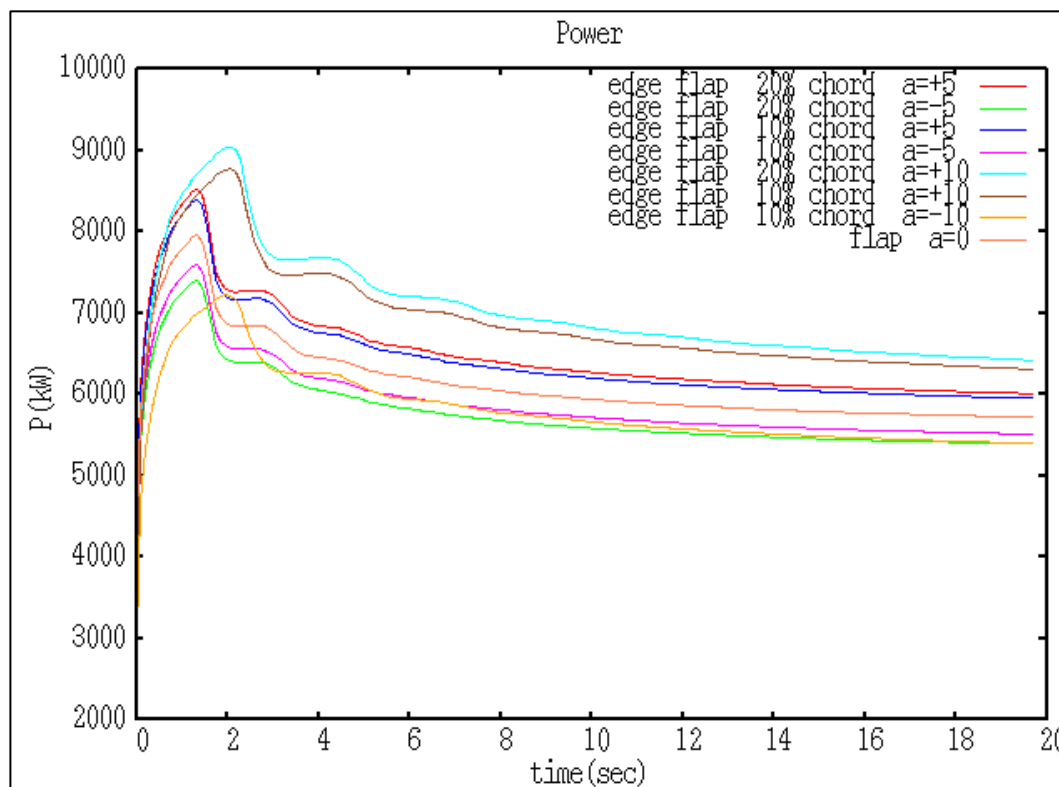


Διάγραμμα 6.1.12 : Δύναμη ώσης - begin flap

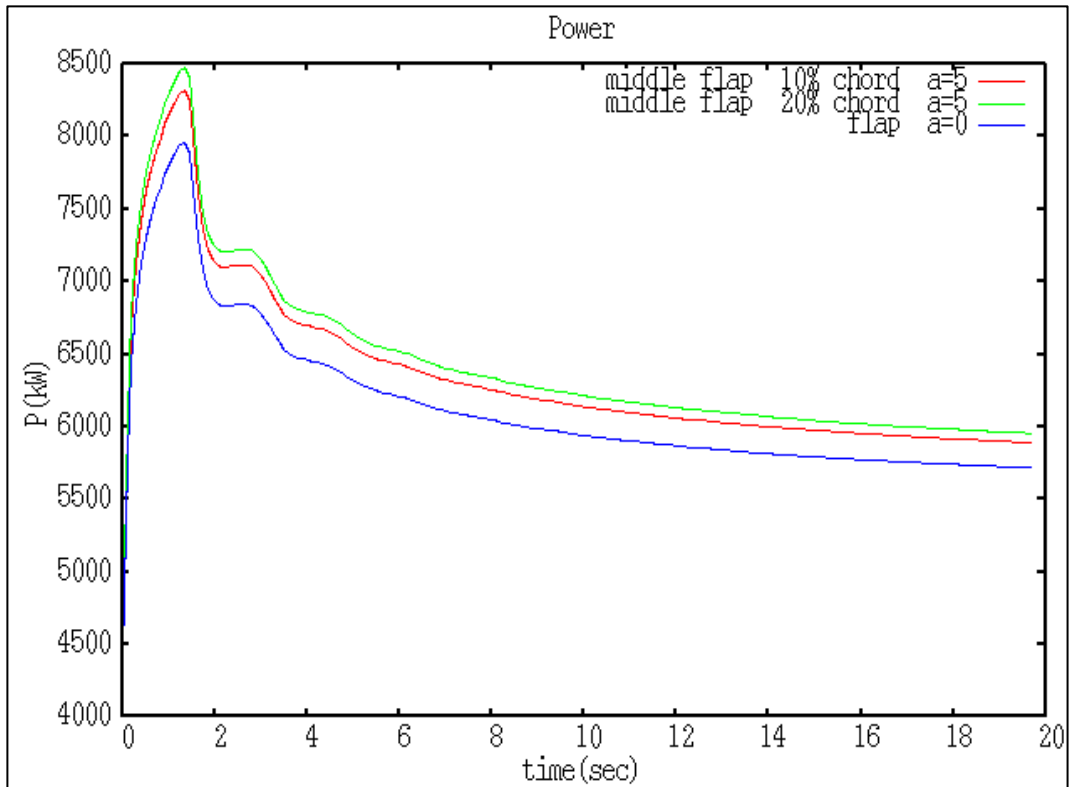
Στην περίπτωση του flap η δύναμη της ώσης ακολουθεί φθίνουσα πορεία με:

- 1) Edge 20% chord $\alpha=+10^\circ$
- 2) Edge 10% chord $\alpha=+10^\circ$
- 3) Edge 20% chord $\alpha=+5^\circ$
- 4) Middle 20% chord $\alpha=+5^\circ$
- 5) Begin 20% chord $\alpha=+5^\circ$
- 6) Edge 10% chord $\alpha=+5^\circ$
- 7) Middle 10% chord $\alpha=+5^\circ$
- 8) Begin 10% chord $\alpha=+5^\circ$
- 9) Ενιαίο πτερύγιο
- 10) Edge 10% chord $\alpha=-5^\circ$
- 11) Edge 20% chord $\alpha=-5^\circ$
- 12) Edge 10% chord $\alpha=-10^\circ$

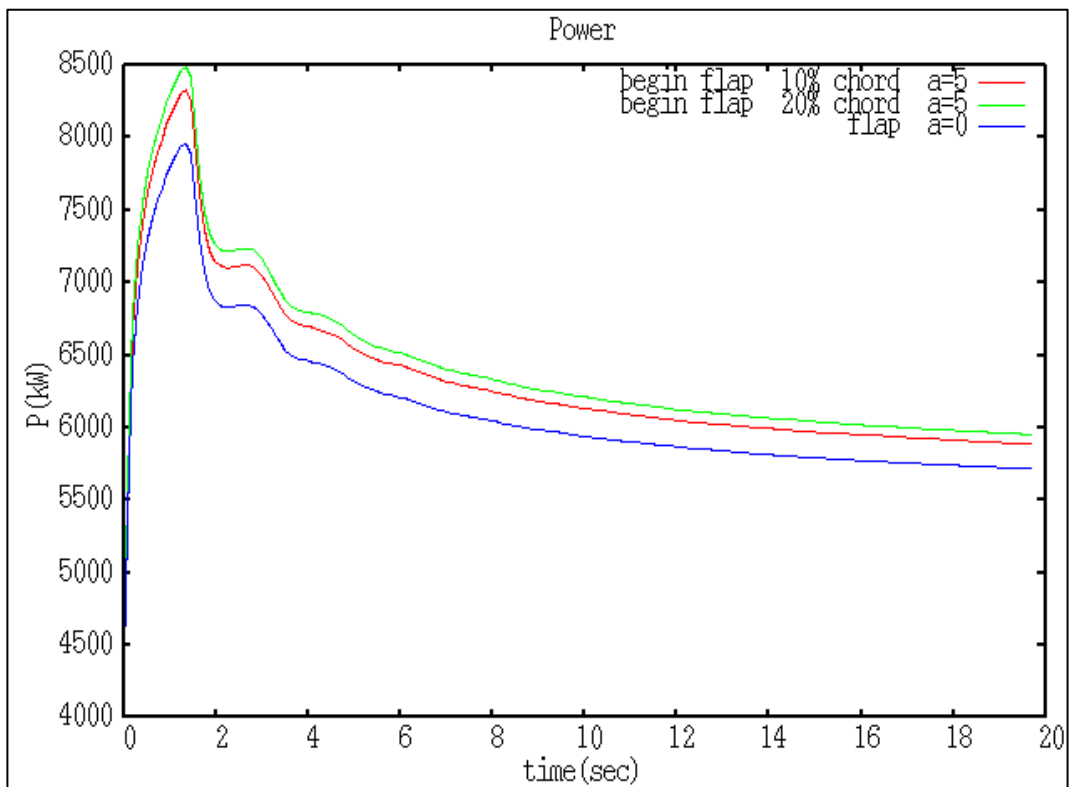
Διάγραμμα ισχύος



Διάγραμμα 6.1.13 : Ισχύς - edge flap



Διάγραμμα 6.1.14 : Ισχύς - middle flap



Διάγραμμα 6.1.15 : Ισχύς - begin flap

6.2 Μεταβάλλοντας την ακμή πρόσπτωσης (slat)

Στην περίπτωση που εξετάζουμε - πτερύγιο με πάχος και με μήκος από 20,34 μέχρι και 62,05 - οι θέσεις της μεταβλητής ακμής εκφυγής είναι οι κάτωθι:

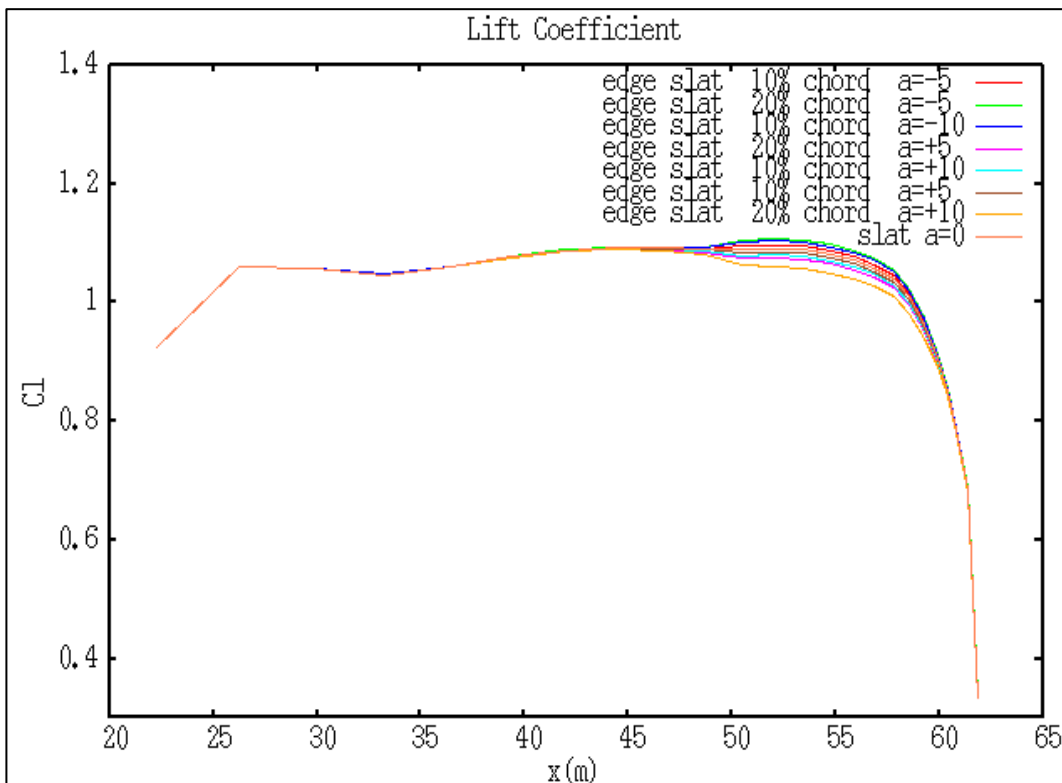
- edge slat: από 49,63 μέχρι 59,57 μέτρα
- middle slat: από 45,64 μέχρι 55,38 μέτρα
- begin slat: από 40,75 μέχρι 49,63 μέτρα

Όπως και στην περίπτωση του πτερυγίου χωρίς πάχος, η δομή των διαγραμμάτων στην παρούσα περίπτωση (πτερύγιο με πάχος) έχει ως εξής:

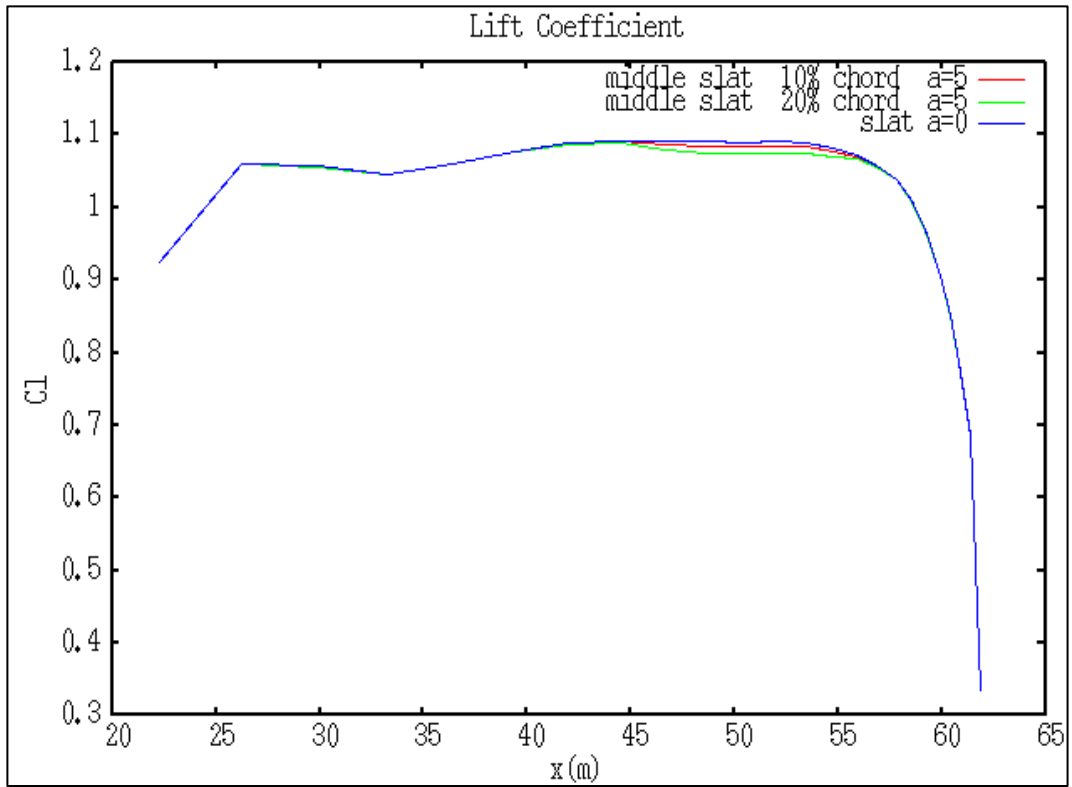
1. Διάγραμμα συντελεστή άνωσης
2. Διάγραμμα αξονικής δύναμης
3. Διάγραμμα εφαπτομενικής δύναμης
4. Διάγραμμα ώσης
5. Διάγραμμα ισχύος

*** Στα παρακάτω ποιοτικά διαγράμματα επειδή οι διαφορές που προκύπτουν είναι πάρα πολύ μικρές και δυσανάγνωστες, στο τέλος κάθε διαγράμματος αναφέρεται η δομή που έχουν κατά φθίνουσα σειρά.***

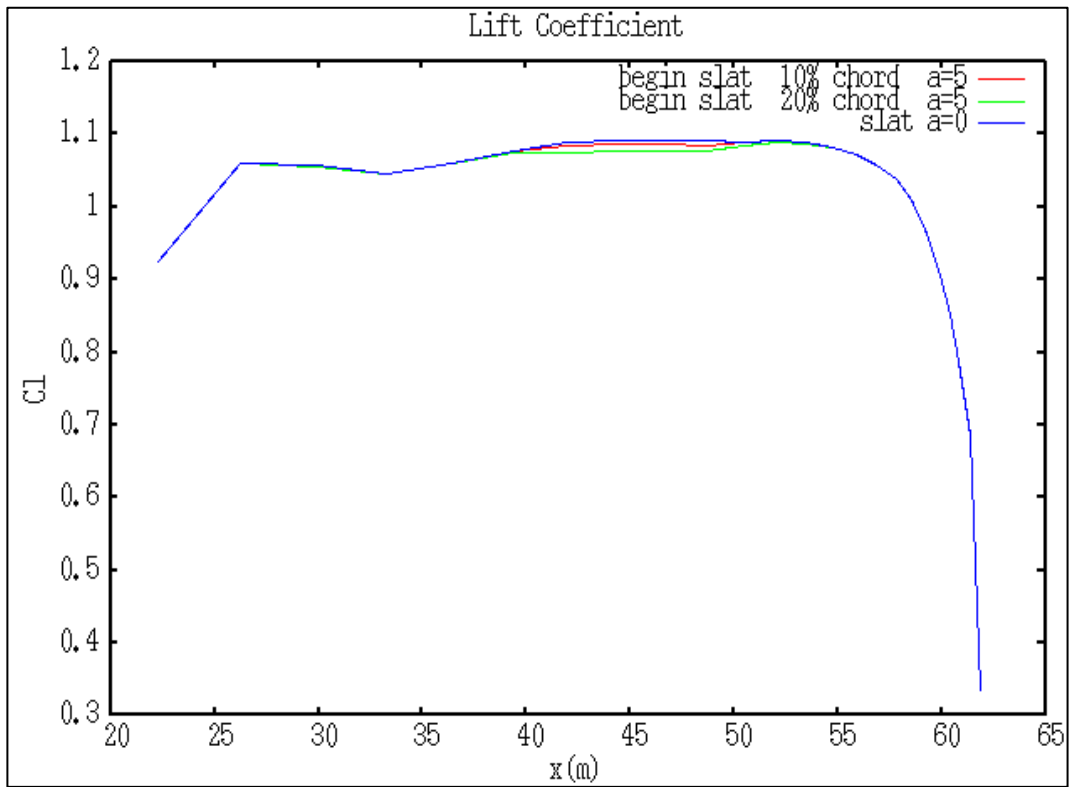
Διάγραμμα συντελεστή άνωσης



Διάγραμμα 6.2.1 : Συντελεστής άνωσης - edge slat



Διάγραμμα 6.2.2 : Συντελεστής άνωσης - middle slat



Διάγραμμα 6.2.3 : Συντελεστής άνωσης - begin slat

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε πως ο συντελεστής άνωσης όταν το slat βρίσκεται στο τέλος του πτερυγίου ακολουθεί φθίνουσα πορεία με:

- 1) Edge slat 20% chord $\alpha=-5^\circ$
- 2) Edge slat 10% chord $\alpha=-10^\circ$
- 3) Edge slat 10% chord $\alpha=-5^\circ$
- 4) Slat $\alpha=0^\circ$
- 5) Edge slat 10% chord $\alpha=+5^\circ$
- 6) Edge slat 10% chord $\alpha=+10^\circ$
- 7) Edge slat 20% chord $\alpha=+5^\circ$
- 8) Edge slat 20% chord $\alpha=+10^\circ$

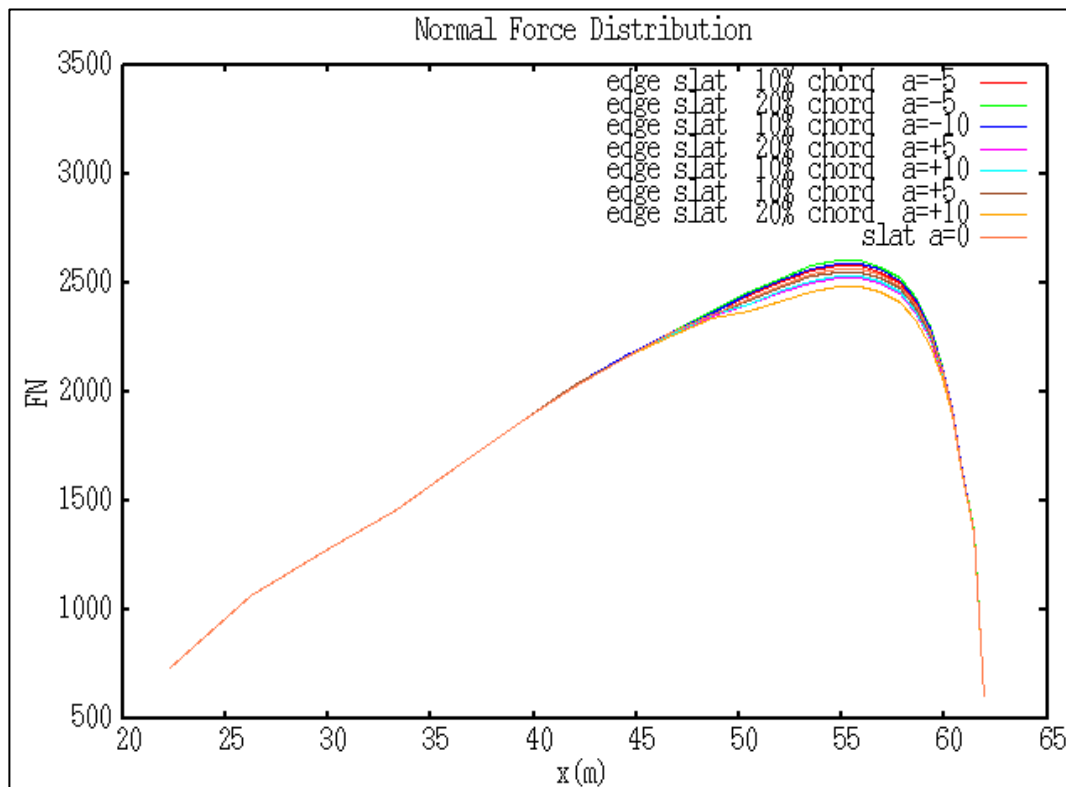
Όταν το slat βρίσκεται στην μέση περίπου του πτερυγίου έχουμε για το συντελεστή άνωσης κατά φθίνουσα σειρά:

- 1) Slat $\alpha=0^\circ$
- 2) Middle slat 10% $\alpha=+5^\circ$
- 3) Middle slat 20% $\alpha=+5^\circ$

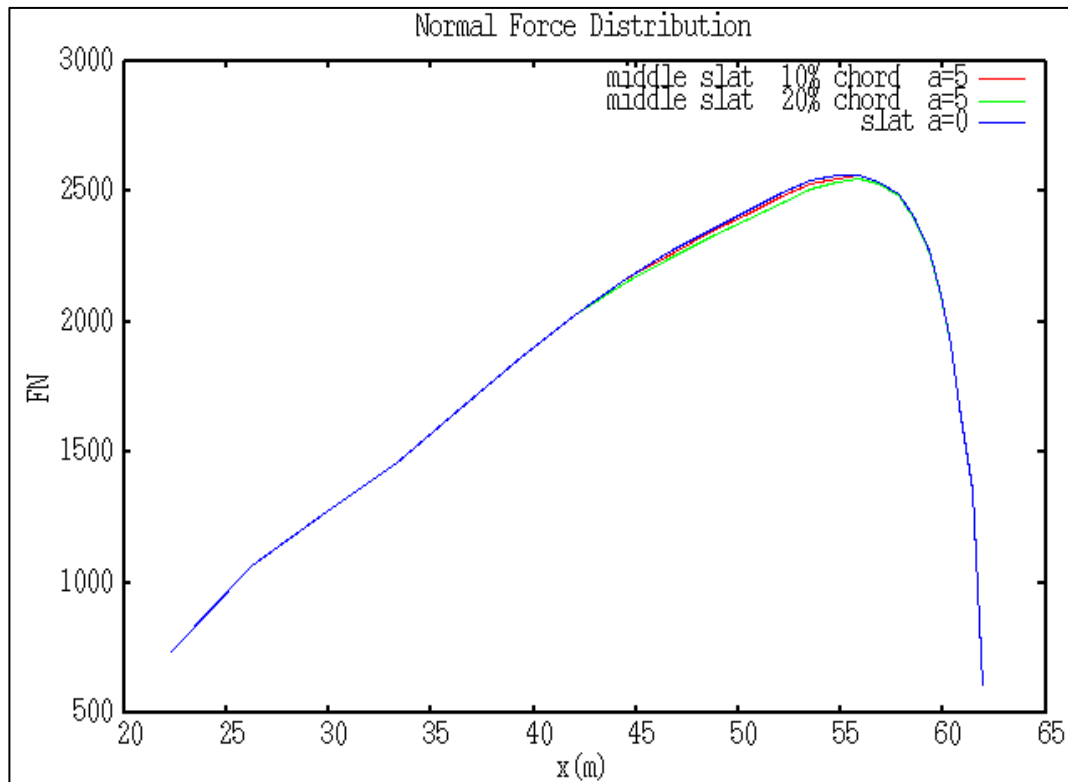
Όταν το slat βρίσκεται προς την αρχή του πτερυγίου έχουμε κατά φθίνουσα σειρά:

- 1) Slat $\alpha=0^\circ$
- 2) Begin slat 10% chord $\alpha=+5^\circ$
- 3) Begin slat 20% chord $\alpha=+5^\circ$

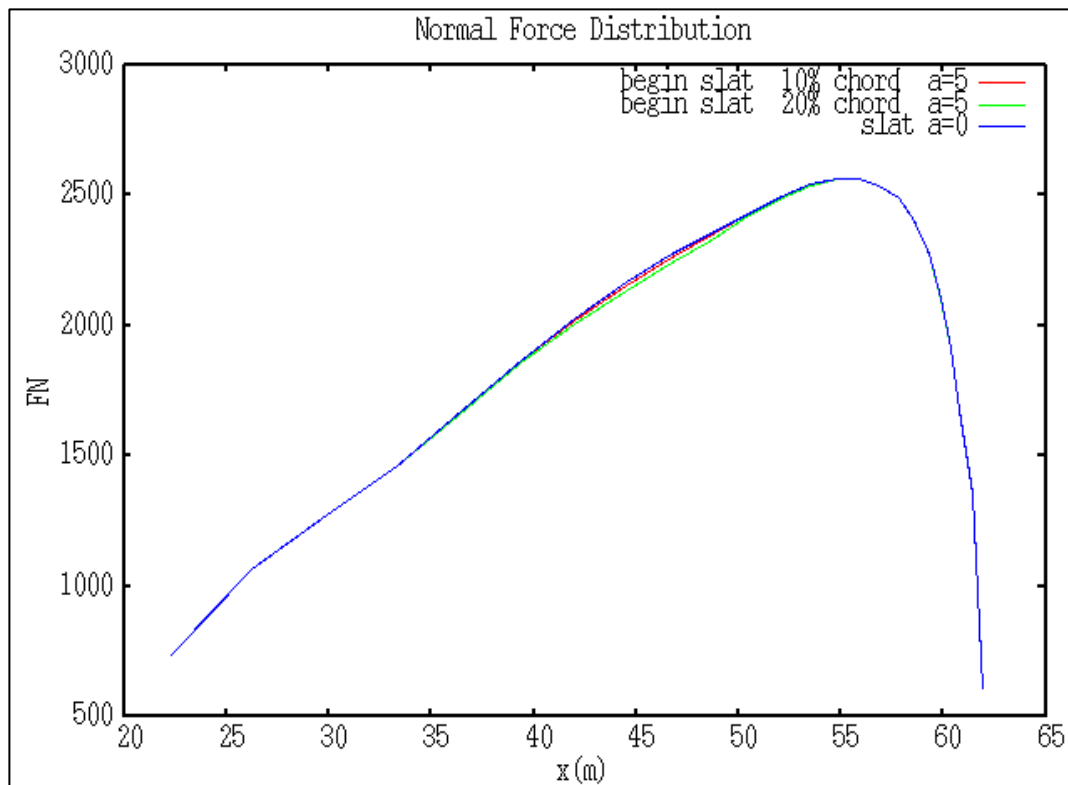
Αξονική δύναμη



Διάγραμμα 6.2.4 : Αξονική δύναμη - edge slat



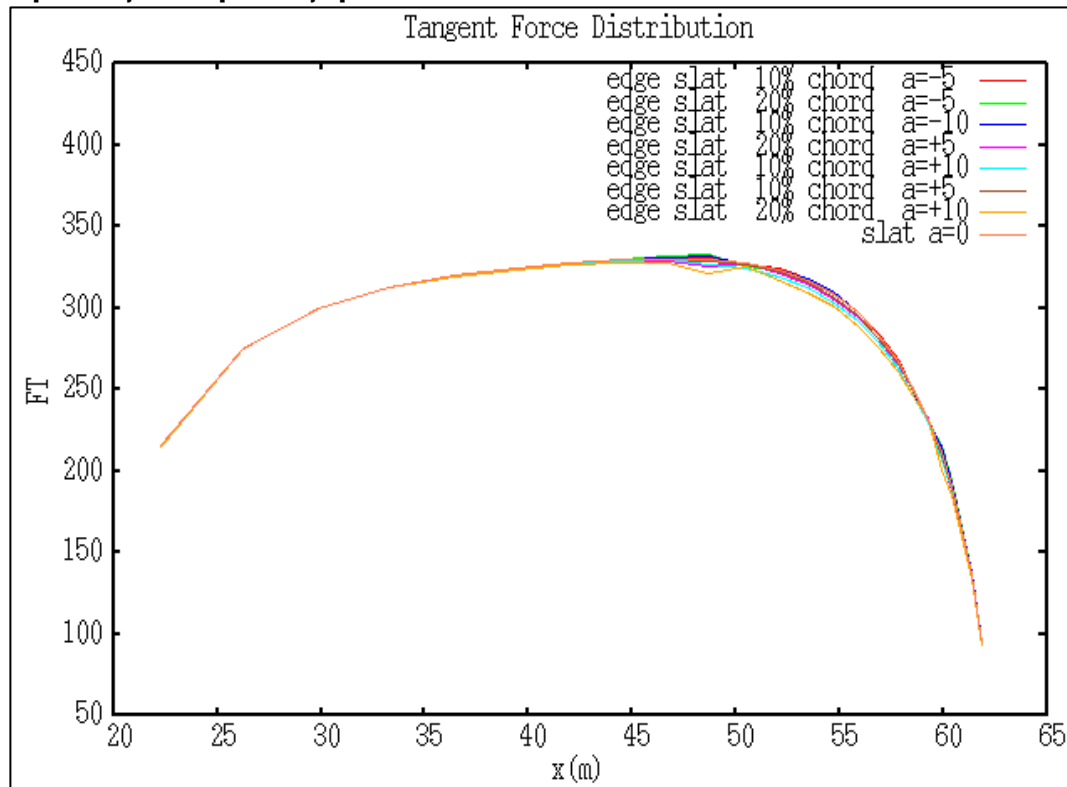
Διάγραμμα 6.2.5 : Αξονική δύναμη - middle slat



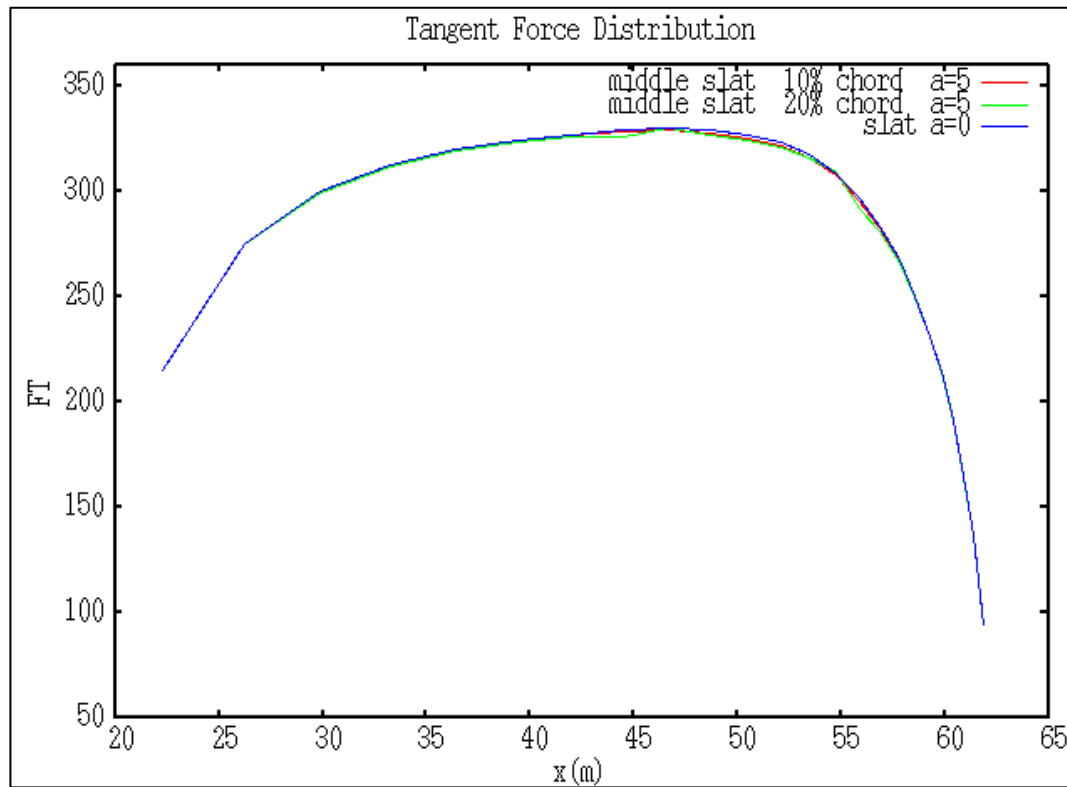
Διάγραμμα 6.2.6 : Διάγραμμα αξονικής δύναμης - begin slat

Τα διαγράμματα της αξονικής δύναμης ακολουθούν αντίστοιχη φθίνουσα πορεία όπως του συντελεστή άνωσης.

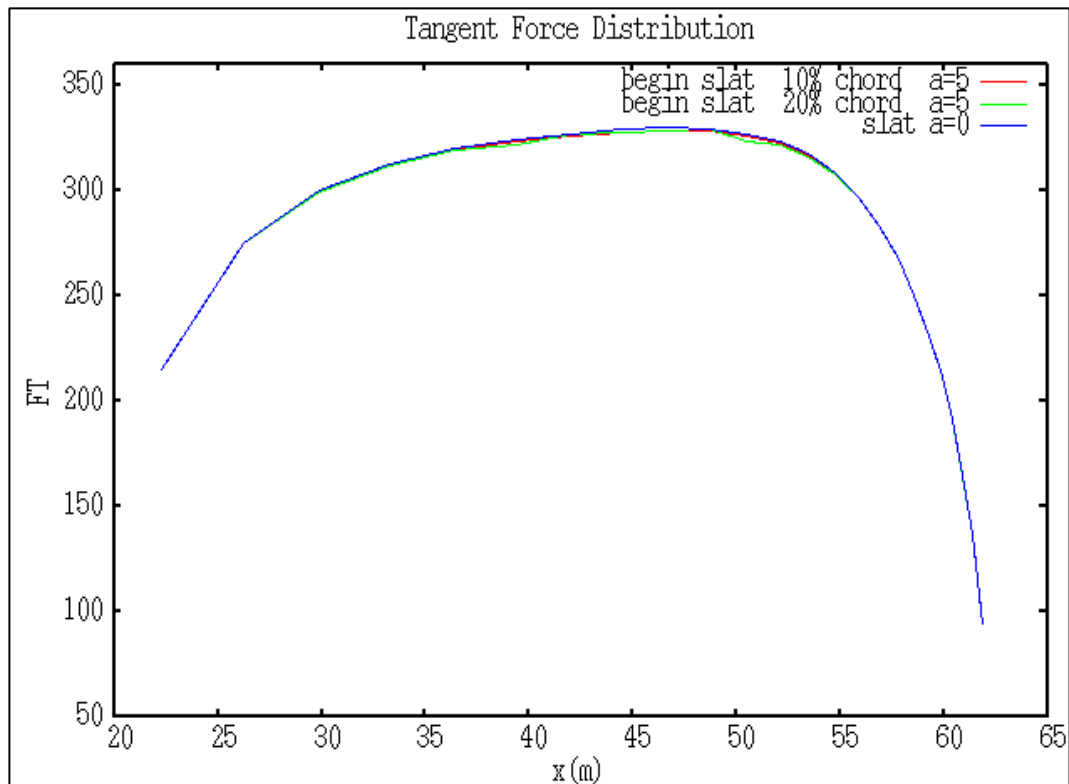
Εφαπτομενική δύναμη



Διάγραμμα 6.2.7 : Διάγραμμα εφαπτομενικής δύναμης - edge slat



Διάγραμμα 6.2.8 : Διάγραμμα εφαπτομενικής δύναμης - middle slat



Διάγραμμα 6.2.9 : Εφαπτομενική δύναμη - begin slat

Τα διαγράμματα της εφαπτομενικής δύναμης κατά φθίνουσα πορεία για την κάθε θέση είναι:

Για το slat στην άκρη του πτερυγίου

- 1) Edge slat 20% chord $a=-5^\circ$
- 2) Edge slat 10% chord $a=-10^\circ$
- 3) Edge slat 10% chord $a=-5^\circ$
- 4) Slat $a=0^\circ$
- 5) Edge 10% $a=+5^\circ$
- 6) Edge slat 20% chord $a=+5^\circ$
- 7) Edge slat 10% chord $a=+10^\circ$
- 8) Edge slat 20% chord $a=+10^\circ$

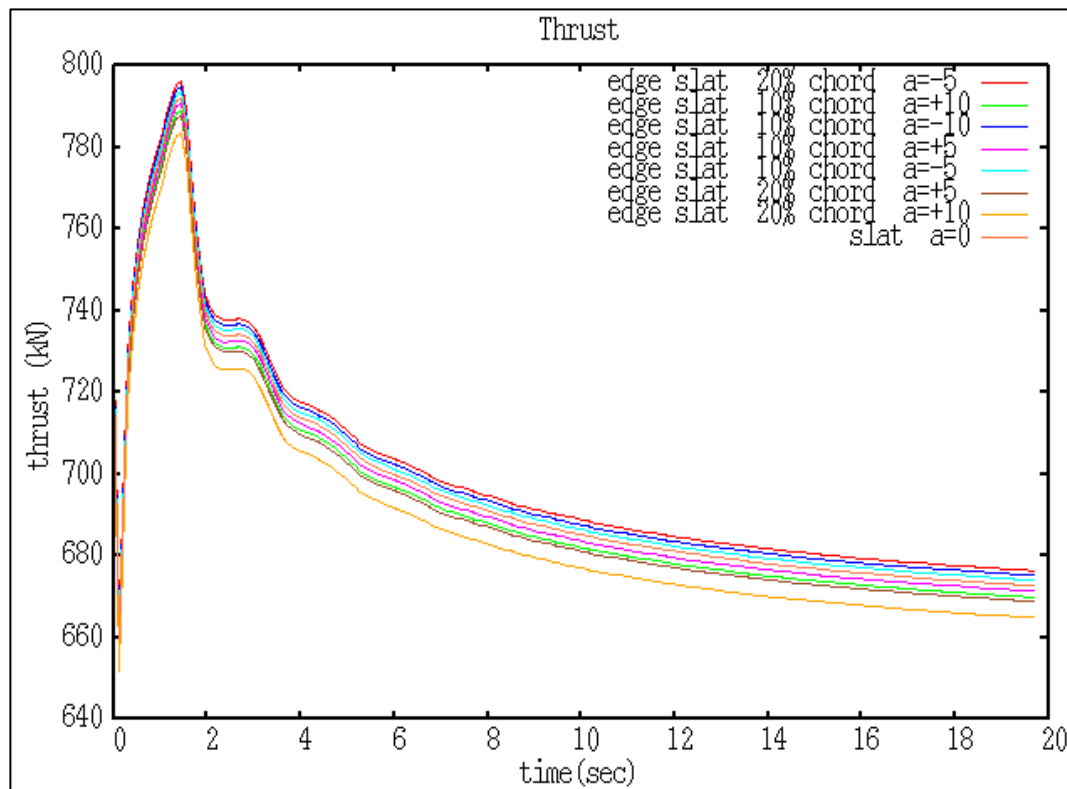
Για το slat στην μέση του πτερυγίου

- 1) Slat $a=0^\circ$
- 2) Middle slat 10% $a=+5^\circ$
- 3) Middle slat 20% $a=+5^\circ$

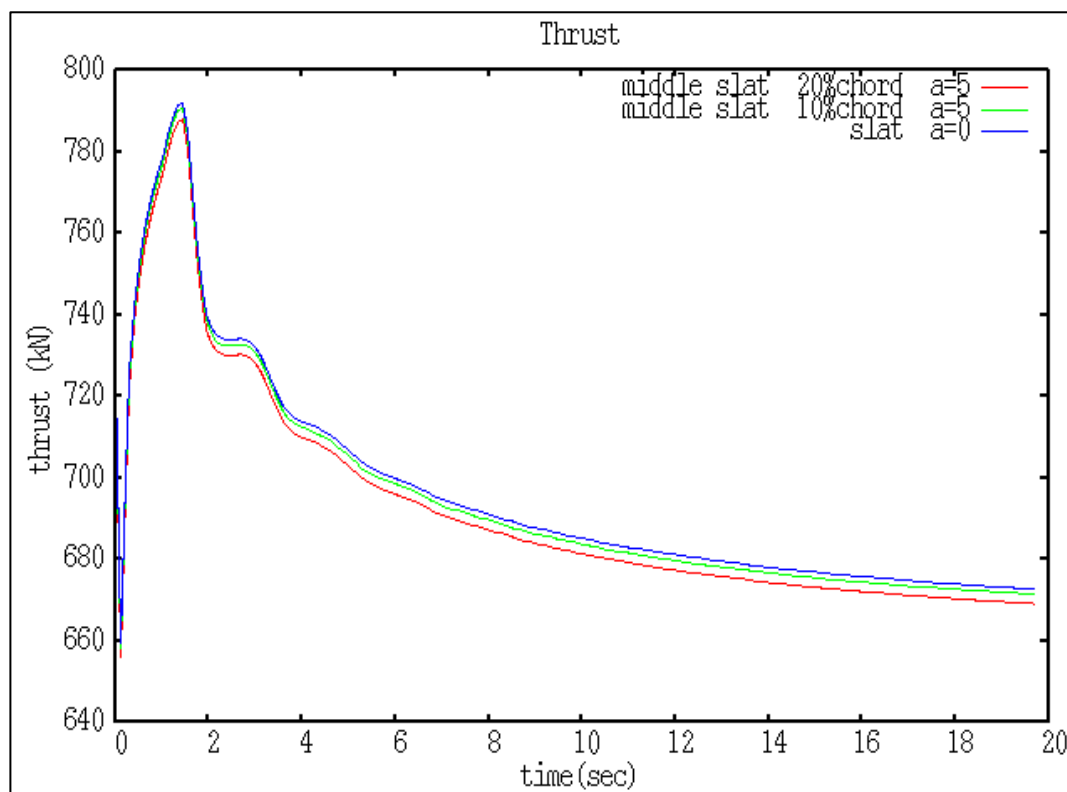
Για το slat στην αρχή του πτερυγίου

- 1) Slat $a=0^\circ$
- 2) Begin slat 10% $a=+5^\circ$
- 3) Begin slat 20% $a=+5^\circ$

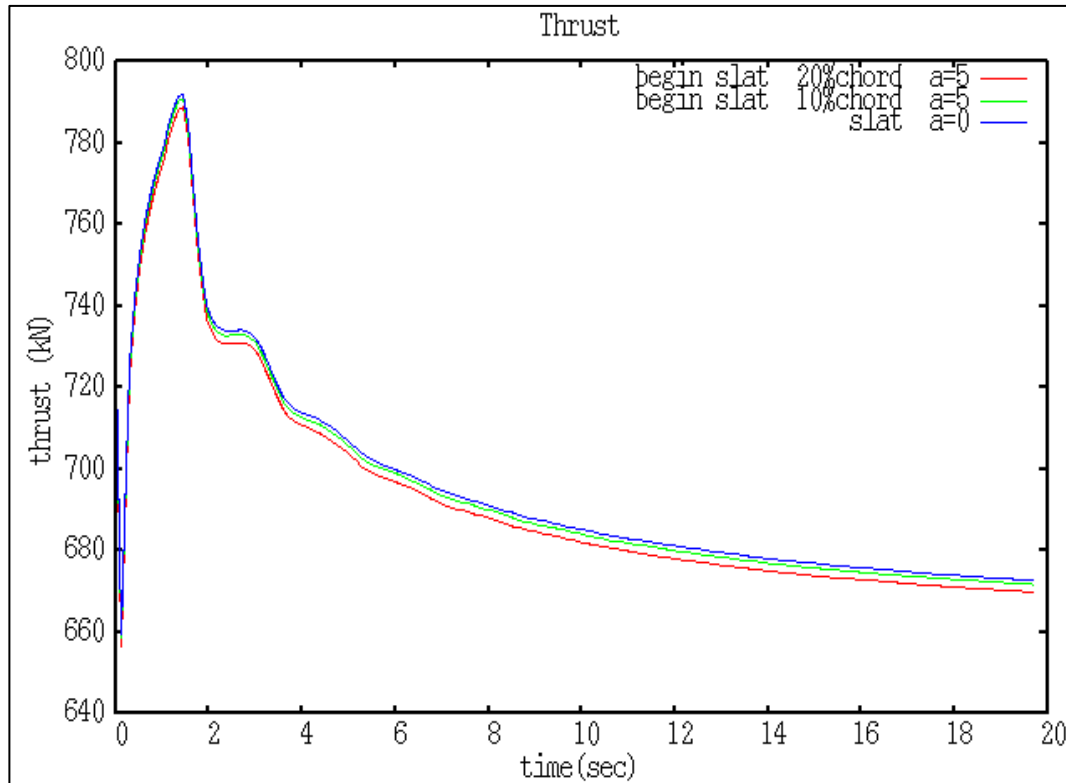
Δύναμη ώσης (thrust)



Διάγραμμα 6.2.10 : Διάγραμμα δύναμης ώσης - edge slat



Διάγραμμα 6.2.11 : Διάγραμμα δύναμης ώσης - middle slat

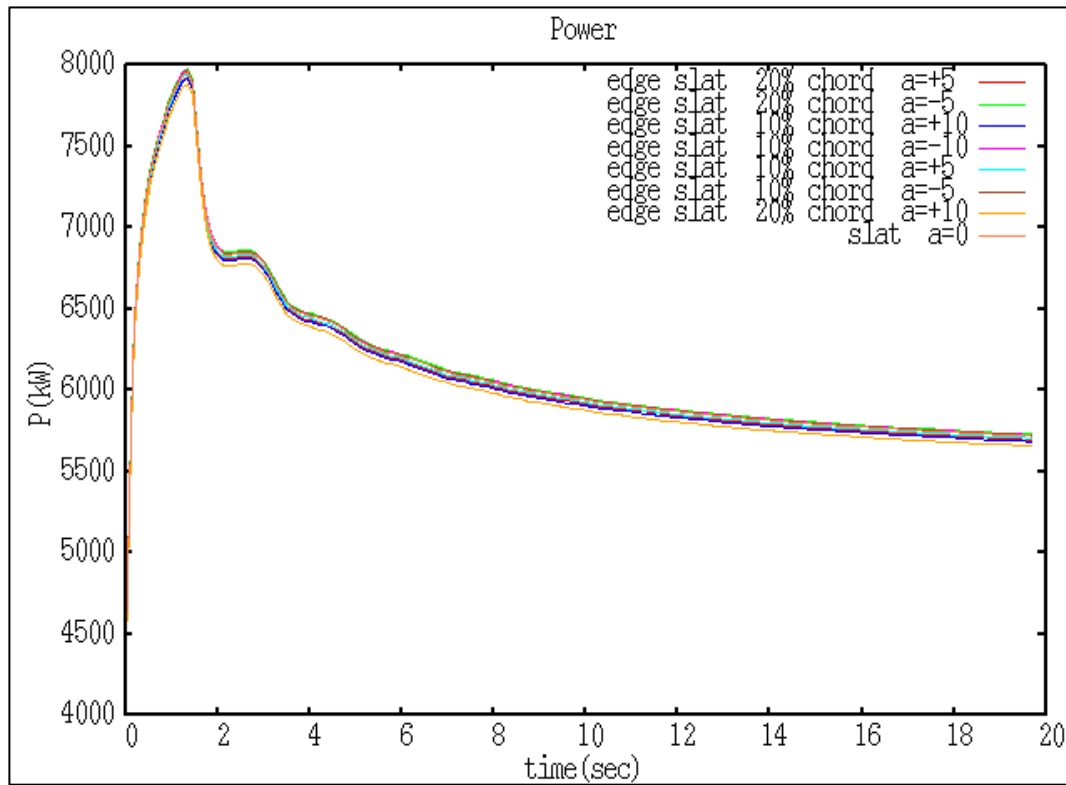


Διάγραμμα 6.2.12 : Διάγραμμα δύναμης ώσης - begin slat

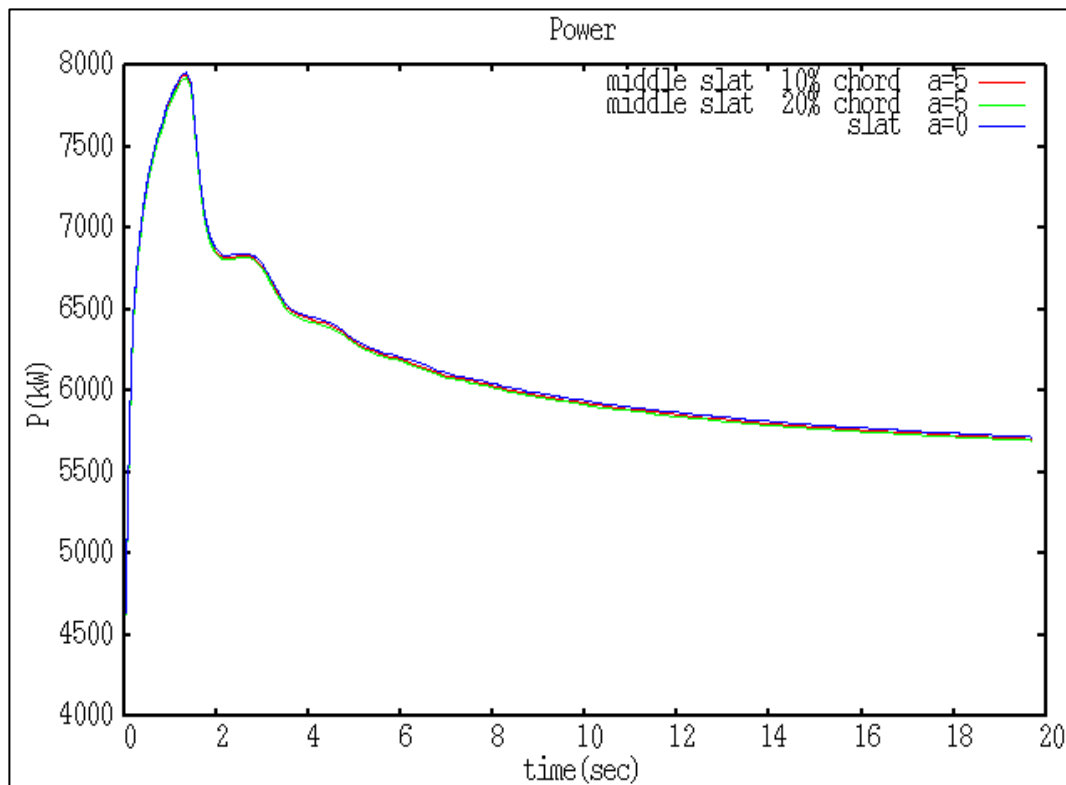
Παρατηρούμε πως η δύναμη της ώσης ακολουθεί φθίνουσα πορεία με:

- 1) Edge 20% chord $a=-5^\circ$
- 2) Edge 10% chord $a=-10^\circ$
- 3) Edge 10% chord $a=-5^\circ$
- 4) Ενιαίο πτερύγιο
- 5) Begin 10% chord $a=+5^\circ$
- 6) Middle 10% chord $a=+5^\circ$
- 7) Edge 10% chord $a=+5^\circ$
- 8) Edge 10% chord $a=+10^\circ$
- 9) Begin 20% chord $a=+5^\circ$
- 10) Middle 20% chord $a=+5^\circ$
- 11) Edge 20% chord $a=+5^\circ$
- 12) Edge 20% chord $a=+10^\circ$

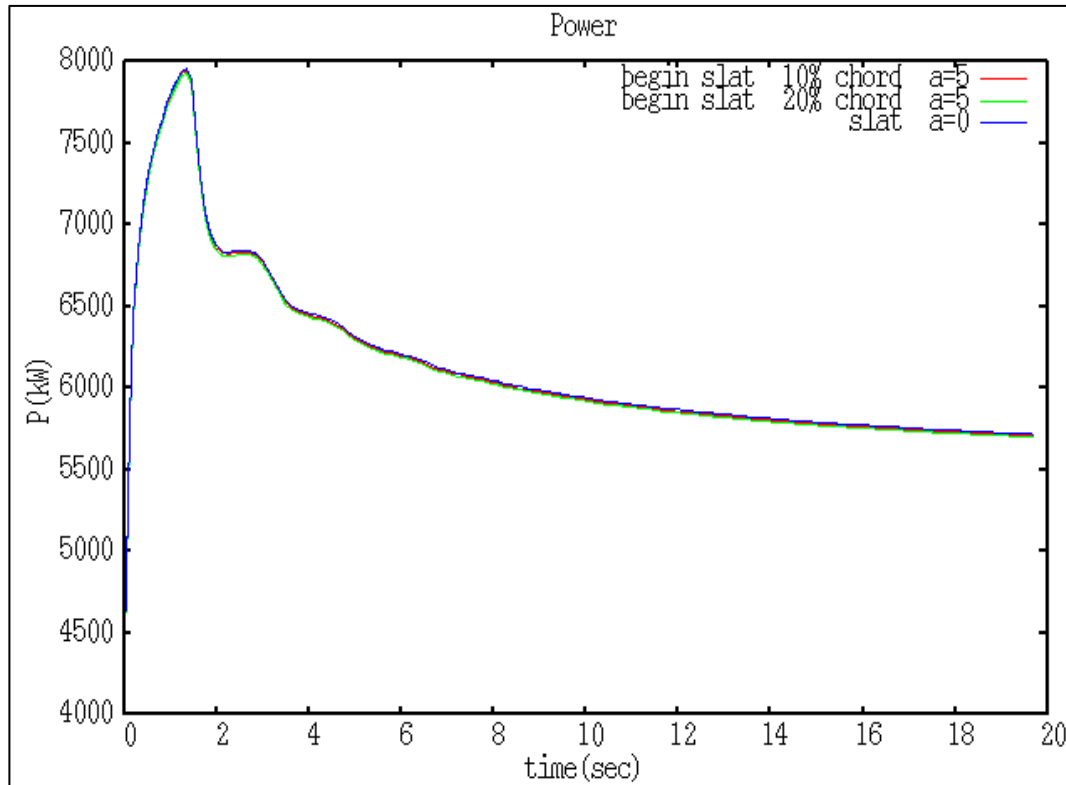
Διάγραμμα ισχύος



Διάγραμμα 6.2.13 : Διάγραμμα ισχύος - edge slat



Διάγραμμα 6.2.14 : Διάγραμμα ισχύος - middle slat



Διάγραμμα 6.2.15 : Διάγραμμα ισχύος - *begin slat*

Στα διαγράμματα της ισχύος παρατηρούμε ότι υπάρχει πλήρης αντιστοιχία (όπως και πρέπει) σχετικά με τα διαγράμματα της εφαπτομενικής δύναμης, δηλαδή όπου μειώνεται η εφαπτομενική δύναμη μειώνεται και η ισχύς και όπου αυξάνεται η εφαπτομενική δύναμη αυξάνεται και η ισχύς.

6.3 Αξιολόγηση - Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα, του παρόντος κεφαλαίου 6, για την σχεδίαση των διαγραμμάτων, χρησιμοποιήθηκε το πτερύγιο που έχει flap ή slat αλλά η γωνία του είναι $\alpha=0^\circ$. Στα αριθμητικά αποτελέσματα παρακάτω γίνεται σύγκριση και με τις δυο μορφές του πτερυγίου, δηλαδή με το αρχικό ενιαίο πτερύγιο και με αυτό που η γωνία του flap ή του slat είναι $\alpha=0^\circ$.

Επίσης στα διαγράμματα της αξονικής και της εφαπτομενικής δύναμης, η δύναμη στον y -άξονα είναι σε Nt/m-strip

Σχετικά με τις ιδιομορφίες των διαγραμμάτων του συντελεστή άνωσης που βρίσκονται προς το τέλος του πτερυγίου στην περίπτωση του flap edge

Το flap, σε σχέση με το slat, επιφέρει γενικότερα μεγαλύτερη και άμεση μεταβολή στην επαγόμενη επίδραση που δημιουργούν οι στρόβιλοι αποβολής. Αυτό συμβαίνει διότι το flap βρίσκεται στην ακμή εκφυγής του ρευστού εκεί όπου “δημιουργούνται” οι στρόβιλοι αποβολής.

Όσον αφορά στο slat, επειδή δεν αλλάζει η γεωμετρία αποβολής, όπως στο flap, έχουμε μόνο έμμεση επαγόμενη επίδραση. Αυτό συμβαίνει διότι αν και αλλάζει η γεωμετρία του πτερυγίου λόγω του slat, η γεωμετρία αποβολής παραμένει η ίδια σε σχέση με το αρχικό πτερύγιο

Κατά μήκος, λοιπόν, του πτερυγίου, δηλαδή ξεκινώντας από τα περίπου 13 μέτρα όπου είναι η αρχή του και οδεύοντας προς το τέλος, δηλαδή τα 62 περίπου μέτρα παρατηρούμε ότι αυξάνεται η φόρτιση μέχρι και το 90% περίπου του μήκους του πτερυγίου όπου και συναντάμε την μέγιστη τιμή του και ύστερα μέχρι το ακροπτερύγιο φθίνει. Έτσι όσο η φόρτιση του πτερυγίου έχει θετική κλίση, δηλαδή αυξάνεται, οι στρόβιλοι που δημιουργούνται έχουν δεξιόστροφη φορά και είναι θετικοί. Κατ’ αντιστοιχία, όταν η κλίση είναι αρνητική, οι στρόβιλοι αποβολής είναι αριστερόστροφοι και έχουν αρνητικό πρόσημο.

Στην περίπτωση που το flap είναι τέτοιο ώστε να αυξάνει τον συντελεστή άνωσης η κλίση της φόρτισης παραμένει θετική και συναθροίζονται οι δύο στρόβιλοι δημιουργώντας ομαλή μετάβαση. Η μετάβαση όμως από την αυξημένη φόρτιση που δημιουργείται λόγω του flap στην φθίνουσα φόρτιση του ακροπτερυγίου δεν είναι ομαλή και συνεπώς τα διαγράμματα παρουσιάζουν κάποιες ιδιομορφίες.

Πα’ όλα αυτά η ευστάθεια των αποτελεσμάτων είναι αποδεκτή διότι τα υπόλοιπα ποιοτικά διαγράμματα ακολουθούν αναμενόμενη εξέλιξη.

Δύναμη ώσης (thrust)

Η πτερύγωση δρα απέναντι στον αέρα ως ενιαίος δίσκος ενέργειας. Ουσιαστικά αφαιρεί μέρος της κινητικής ενέργειας του αέρα προκειμένου να κινηθεί η ίδια. Για να γίνει αυτό, η πτερύγωση ασκεί στον αέρα κάποια συνολική (αν εξετάσουμε το πρόβλημα μακροσκοπικά) δύναμη με κατεύθυνση αντίθετη της κίνησής του και σύμφωνα με το νόμο δράσης – αντίδρασης ο αέρας ασκεί αντίθετη δύναμη στην πτερύγωση, τη δύναμη thrust.

Στην περίπτωση που εξετάζουμε δηλαδή του πτερυγίου με πάχος παρατηρούμε ότι για το flap, η δύναμη της ώσης αυξάνει για θετικές μοίρες

στροφής του flap σε σχέση με το ενιαίο πτερύγιο, ενώ όσον αφορά στο slat η δύναμη της ώσης αυξάνει για αρνητικές μοίρες στροφής του slat σχετικά με το ενιαίο πτερύγιο.

Αριθμητικά αποτελέσματα

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα σχετικά με την μείωση ή αύξηση της αποδιδόμενης ισχύος της A/Γ συγκριτικά με :

- Το αρχικό ενιαίο πτερύγιο
- Το πτερύγιο που έχει flap ή slat αλλά η γωνία του είναι $\alpha=0^\circ$

Η διαφορά του αρχικού ενιαίου πτερυγίου (original blade) με το πτερύγιο που έχει flap ή slat αλλά η γωνία του είναι $\alpha=0^\circ$ ανέρχεται σε 0.0%.

Θέση Flap	Ισχύς (kw)	% αύξησης με βάση το ενιαίο πτερύγιο	% αύξησης με βάση flap ($\alpha=0$)
begin 20% chord $\alpha=5$	5951,221899	4,09%	4,09%
begin 10% chord $\alpha=5$	5886,973596	2,97%	2,97%
middle 20% chord $\alpha=5$	5953,555713	4,14%	4,14%
middle 10% chord $\alpha=5$	5888,182314	2,99%	2,99%
edge 10% chord $\alpha=5$	5951,195292	4,09%	4,09%
edge 10% chord $\alpha=10$	6156,080595	7,68%	7,68%
edge 10% chord $\alpha=-10$	5299,243971	-7,31%	-7,31%
edge 10% chord $\alpha=-5$	5510,876049	-3,61%	-3,61%
edge 20% chord $\alpha=5$	6010,152603	5,13%	5,13%
edge 20% chord $\alpha=-5$	5393,58099	-5,66%	-5,66%
edge 20% chord $\alpha=10$	6247,696098	9,28%	9,28%
flap ($\alpha=0$)	5717,129712	0,00%	0,00%
original blade	5717,129712	0,00%	0,00%

Θέση Slat	Ισχύς (kw)	% αύξησης με βάση το ενιαίο πτερύγιο	% αύξησης με βάση slat ($\alpha=0$)
begin 20% chord $\alpha=5$	5698,740474	-0,32%	-0,32%
begin 10% chord $\alpha=5$	5707,254714	-0,17%	-0,17%
middle 20% chord $\alpha=5$	5694,487155	-0,40%	-0,40%
middle 10% chord $\alpha=5$	5705,810334	-0,20%	-0,20%
edge 10% chord $\alpha=5$	5704,901895	-0,21%	-0,21%
edge 10% chord $\alpha=10$	5683,399638	-0,59%	-0,59%
edge 10% chord $\alpha=-10$	5724,651891	0,13%	0,13%
edge 10% chord $\alpha=-5$	5724,036129	0,12%	0,12%
edge 20% chord $\alpha=5$	5693,244228	-0,42%	-0,42%
edge 20% chord $\alpha=-5$	5728,247637	0,19%	0,19%
edge 20% chord $\alpha=10$	5657,130927	-1,05%	-1,05%
slat ($\alpha=0$)	5717,129712	0,00%	0,00%
original blade	5717,129712	0,00%	0,00%

Από τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα παρατηρούμε ότι:

- A) Το slat επιφέρει πολύ μικρότερη αλλαγή στην αποδιδόμενη ισχύ συγκριτικά με το flap, δηλαδή μικρότερη του 1% (σε απόλυτες τιμές) σχετικά με το slat για $a=0^\circ$.
- B) Σχετικά με το flap :
- Με σταθερή και θετική γωνία στροφής του flap, όσο αυξάνουμε το εμβαδόν του τόσο αυξάνεται η ισχύς
 - Με σταθερή και αρνητική γωνία στροφής του flap, όσο αυξάνουμε το εμβαδόν του τόσο μειώνεται η ισχύς
 - Με σταθερό το εμβαδόν του flap, όσο αυξάνεται η γωνία στροφής του flap τόσο αυξάνεται η ισχύς, δηλαδή για γωνία $a=10^\circ$ η A/Γ παράγει την μεγαλύτερη ισχύ
 - Με σταθερό εμβαδόν αλλά και την γωνία στροφής του flap (π.χ. 10% chord και $a=+5^\circ$) όσο πιο κοντά στην πλήμνη βρίσκεται το flap τόσο μειώνεται η ισχύς σε σχέση με τις υπόλοιπες θέσεις.
- C) Σχετικά με το slat :
- Με σταθερή και θετική γωνία στροφής του slat, όσο αυξάνεται το εμβαδόν του τόσο μειώνεται η ισχύς
 - Με σταθερή και αρνητική γωνία στροφής του slat, όσο αυξάνουμε το εμβαδόν του τόσο αυξάνει και η ισχύς
 - Με σταθερό το εμβαδόν του slat, όσο αυξάνεται η γωνία στροφής του slat τόσο μειώνεται η ισχύς, δηλαδή για γωνία $a=-10^\circ$ η A/Γ παράγει την μεγαλύτερη ισχύ
 - Με σταθερό εμβαδόν αλλά και την γωνία στροφής του slat (π.χ. 10% chord και $a=+5^\circ$) όσο πιο κοντά στην πλήμνη βρίσκεται το slat τόσο αυξάνεται η ισχύς σε σχέση με τις υπόλοιπες θέσεις

7. Συμπεράσματα

Κλείνοντας την παρούσα εργασία κατά την οποία έγινε έλεγχος στην επίδραση που έχει η μεταβολή είτε της ακμής πρόσπτωσης (slat) είτε της ακμής εκφύγισης (flap) αφ' ενός σε πτερύγιο χωρίς πάχος και αφ' ετέρου σε πτερύγιο με πάχος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και στις δυο περιπτώσεις το slat επιφέρει πολύ μικρότερη αλλαγή σε σχέση με το flap το οποίο βρίσκεται στη ακμή εκφυγής του ρευστού εκεί όπου δημιουργούνται οι στρόβιλοι αποβολής

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα για κάθε περίπτωση που εξετάστηκε στα δυο προηγούμενα κεφάλαια, όπου:

- a είναι γωνία στροφής του flap ή slat
- A είναι το εμβαδόν του flap ή του slat
- P είναι η ισχύς

Slat	Thin	Thick
a=σταθερή και θετική	A αυξάνεται=> P μειώνεται	A αυξάνεται P μειώνεται
a= σταθερή και αρνητική	A αυξάνεται=> P μειώνεται	A αυξάνεται => P αυξάνεται
A = σταθερό	a αυξάνεται (από -10 προς 10 μοίρες) => P μειώνεται	a αυξάνεται (από -10 προς 10 μοίρες) => P μειώνεται
Flap	Thin	Thick
a = σταθερή	A αυξάνεται => P μειώνεται (εξαιρέση begin flap που η P αυξάνεται - επειδή είναι κοντύτερα στην πλήμνη)	
A= σταθερό	a αυξάνεται => P μειώνεται	
a=σταθερή και θετική		A αυξάνεται => P αυξάνεται
a= σταθερή και αρνητική		A αυξάνεται => P μειώνεται
A= σταθερό		a αυξάνεται (από <-> σε <+>) => P αυξάνεται

Πίνακας 7 : Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Βιβλιογραφία

- Vasilis A. Riziotis, Spyros G. Voutsinas. “Aero-elastic Modeling of the Active Flap Concept for Load Control”
- Tony Burton, David Sherpe, Nick Jenkins, Ervin Bossanyi “Wind Energy Handbook”
- Γ. Μπεργελές . “Ανεμοκινητήρες”
- M. Ragheb 19/4/2012 . “Aerodynamics of Rotor Blades”
- Grant Ingram, October 18, 2011. “Wind Turbine Blade Analysis Using the Blade Element Momentum Method, version 1.1 “