ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΟΜΑΔΕΣ & ΑΛΓΕΒΡΕΣ Lie

Διπλωματική Εργασία

Ιωάννη Ασημάκη

Επιβλέπων :

Ανάργυρος Φελλούρης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Μέλη Επιτροπής :

Νικόλαος Καδιανάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Στυλιανός Μαρκάτης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 4

SUMMARY 6

ΕΙΣΑΓΩΓΗ …..7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ...9

1.1 Γενικά – Ορισμοί...9

1.2 Διαφορίσιμες πολλαπλότητες...12

1.3 Εφαπτόμενος χώρος..14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΜΑΔΕΣ Lie..17

2.1 Γενικά – Ορισμοί...17

2.2 Δράση και αναπαράσταση ομάδας Lie...25

2.3 Ομάδες πινάκων Lie…..27

2.4 Η εκθετική και λογαριθμική απεικόνιση για πίνακες.........................33

2.5 Η εκθετική απεικόνιση αφηρημένων ομάδων Lie.......................38

2.6 Συνεκτικότητα και συμπάγεια στις ομάδες πινάκων Lie.............39

2.6.1 Συμπάγεια 40

2.6.2 Συνεκτικότητα 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΛΓΕΒΡΕΣ Lie...45

3.1 Γενικά – Ορισμοί...45

3.2 Ιδεώδη.. 48

3.3 Η άλγεβρα Lie μιας ομάδας πινάκων Lie.................................. 49

3.4 Παραδείγματα αλγεβρών πινάκων Lie..............…......................52

3.5 Ιδιότητες των αλγεβρών Lie (που προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie)................................54

3.6 Η συζυγής απεικόνιση..57

3.7 Η εκθετική απεικόνιση στις ομάδες και τις άλγεβρες πινάκων Lie …...58

3.8 Η άλγεβρα πινάκων Lie ως αφηρημένη άλγεβρα Lie...................63
3.9 Η Μιγαδικοποίηση μιας πραγματικής Lie άλγεβρας................. 64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΧΩΡΟΙ ΡΙΖΩΝ & ΗΜΙΑΠΛΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ Lie...........................66
4.1 Γενικά – Ορισμοί..66
4.2 Παραδείγματα αναγωγικών και ημιαπλών αλγεβρών Lie..69
4.3 Υποάλγεβρες Cartan...70
4.4 Ρίζες και χώροι ριζών...71
4.5 Εσωτερικά γινόμενα ριζών και συν – ρίζες.....................................74
4.6 Η ομάδα Weyl...77
4.7 Συστήματα ριζών και θετικές ρίζες..80
4.8 Παραδείγματα των παραπάνω εννοιών για την $sl(n, \mathbb{C})$ 81
4.8.1 Η Cartan υποάλγεβρα 81
4.8.2 Οι ρίζες...82
4.8.3: Εσωτερικό γινόμενο ριζών..82
4.8.4: Θετικές ρίζες..83
4.9 Αποτελέσματα μοναδικότητας...83

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ...85
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ..86

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση **της θεωρίας των Ομάδων & Αλγεβρών Lie** καθώς και, ειδικότερα, της **θεωρίας των συστημάτων των ριζών**, που σχετίζονται με τις άλγεβρες Lie.

Είναι, βεβαίως, απαραίτητη η αναφορά και η επεξήγηση κάποιων σημείων από τη **θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων**, αφού κατ' ουσίαν οι ομάδες Lie αποτελούν διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Ειδικότερα, η παρούσα διπλωματική εργασία διαρθρώνεται, μετά την **εισαγωγή** **-** που επέχει θέση σύντομης ιστορικής αναφοράς στα θέματα, τα οποία σχετίζονται με την εξέλιξη των ιδεών σχετικά με τις ομάδες και άλγεβρες Lie **-** σε τέσσερα (4) κεφάλαια.

Στο **πρώτο (1^{ο}) κεφάλαιο** γίνεται η παρουσίαση της θεωρίας των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων μαζί με κάποια παραδείγματα.

Στο **δεύτερο (2^{ο}) κεφάλαιο** παρουσιάζονται οι ομάδες Lie, αρχικά ως αφηρημένες ομάδες (δηλαδή ως τυχαία σύνολα που έχουν τη δομή της ομάδας Lie), και στη συνέχεια ως ομάδες πινάκων Lie, οι οποίες είναι αυτές, που κυρίως ενδιαφέρουν στις διάφορες εφαρμογές (π.χ. στη Φυσική).

Για την παρουσίαση της θεωρίας των ομάδων Lie αναφέρονται κάποια βασικά θεωρήματα, προτάσεις και παραδείγματα.

Στο **τρίτο (3^{ο}) κεφάλαιο** γίνεται η παρουσίαση των αλγεβρών Lie. Αρχικά, παρουσιάζεται η σχετική θεωρία με κάποια βασικά θεωρήματα και ορισμούς και στη συνέχεια δίνεται έμφαση στις άλγεβρες πινάκων Lie.

Στο **τέταρτο (4^{ο}) κεφάλαιο** γίνεται μια βασική προυσίαση των συστημάτων ριζών αλγεβρών Lie. Η έλλειψη παραδειγμάτων οφείλεται κυρίως στην πολυπλοκότητα της θεωρίας.

Πρέπει να αναφερθεί ότι η θεωρία των συστημάτων ριζών έχει παρουσιαστεί εδώ σχετικά περιορισμένα, πλην όμως με πληρότητα σε όσα θέματα αναφέρονται.

Μια πιο εκτενής παρουσίαση θα είχε ως αποτέλεσμα την αναφορά αρκετών προαπαιτούμενων στοιχείων, κάτι που ξεφεύγει από το σκοπό, αλλά και την έκταση μιας διπλωματικής εργασίας.

***

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο **Ανάργυρο Φελούρη**, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, για την ευκαιρία που μου έδωσε να μελετήσω το σημαντικό αυτό θέμα των Μαθηματικών και να διευρύνω έτσι τις μαθηματικές μου γνώσεις.

Θέμα, που έχει τόσες πολλές σημαντικές εφαρμογές σε κρίσιμους επιστημονικούς τομείς, όπως η Κβαντομηχανική, η Κρυσταλλογραφία κλπ.,

Τον ευχαριστώ, ιδιαιτέρως, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την καθοδήγηση, την οποία μου πρόσφερε, κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Παράλληλα, οφείλω ευχαριστίες στους κ. κ. **Νικόλαο Καδιανάκη**, Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ και **Στυλιανό Μαρκάτη,** Αναπληρωτή Καθηγητή ΕΜΠ, που δέχτηκαν να συμμετάσχουν στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της υπόψη διπλωματικής εργασίας.

Αθήνα 21 - 9 - 2012

SUMMARY

This thesis is a presentation of the Lie groups, Lie algebras and specifically the root theory of Lie algebras.

Some elements of the theory of differentiable manifolds are also mentioned and explained, in order to make easier the understanding of the groups Lie theory, because the Lie groups are basically differentiable manifolds.

Specifically, this thesis after the introdution, which is a brief historical report to this subjects, which concern the evolution of this mathematical ideas from symmetry to Lie groups anf Lie algebras, consists of four chapters.

At the first chapter the theory of differentiable manifolds is presented along with some examples.

The second chapter consists of the basic theory of Lie groups. At the bigining the abstract Lie groups theory is presented and the matrix Lie groups, which have several applications (especially on Physics).

The third chapter is presentation of the Lie algebras. Initially, we have some basic theorems and definitions and then we focus on the matrix Lie algebras.

Finally, the fourth chapter is basic presentation of the root systems of Lie algebras.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των **Ομάδων & Αλγεβρών Lie** αναπτύχθηκε από τον Νορβηγό μαθηματικό **Sophus Lie** (1842-1899).

Αρχικός σκοπός για την ανάπτυξη της θεωρίας του ήταν η μελέτη των απειροελάχιστων δράσεων μιας ομάδας σε μια πολλαπλότητα. Η μελέτη του αυτή τον οδήγησε στην ανάπτυξη της έννοιας της ομάδας Lie, η οποία είχε ως φυσικό επακόλουθο τον ορισμό των Αλγεβρών Lie.

Πρέπει να σημειωθεί ότι κινητήρια δύναμη για την έρευνα του Sophus Lie αποτέλεσε η θεωρία του **Evariste Galois** (1811-1832) και η ενδεχόμενη επέκτασή της.

Σύμφωνα με αξιόπιστες πηγές, ο Sophus Lie θεωρούσε το χειμώνα του 1873-74 ως την εποχή που γεννήθηκε η θεωρία του. Όμως, αρκετοί ερευνητές της Ιστορίας των Μαθηματικών πιστεύουν ότι η θεωρία είχε ήδη ουσιαστικά αναπτυχθεί τα προηγούμενα τέσσερα χρόνια σε διάφορες εργασίες του Lie. Κάποιες από τις αρχικές ιδέες του Lie προήλθαν μέσω της στενής συνεργασίας του με τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό **Felix Klein** (1849-1925).

Ο Lie συναντιόταν σε καθημερινή βάση με τον Klein από τον Οκτώβρη του 1869 μέχρι το 1872. Παρόλα αυτά όμως ο ίδιος ο Lie αναφέρει ότι τα κύρια αποτελέσματα της θεωρίας εμφανίστηκαν σχεδόν δεκαπέντε χρόνια αργότερα, το 1884.

Το 1884 ένας νεαρός Γερμανός μαθηματικός, ο **Friedrich Engel** (1861-1941) βοήθησε τον Lie να επεκτείνει και να εκδόσει, σε τρεις τόμους, την εργασία του. Ένας άλλος μαθηματικός που συμμετείχε στη συγγραφή και έκδοση των βιβλίων του Lie ήταν ο **Georg Scheffers**.

Η ανάπτυξη των ιδεών του Lie δεν ήταν αποκομμένη από τα υπόλοιπα μαθηματικά. Μάλιστα το ενδιαφέρον του για τη γεωμετρία των Διαφορικών εξισώσεων προκλήθηκε από τα έργα του **Jacobi**, στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και τη Μηχανική.

Η αρχική ιδέα του Lie ήταν να αναπτύξει μια θεωρία για τη συμμετρία των διαφορικών εξισώσεων σε αναλογία με τη θεωρία του Galois για τις αλγεβρικές εξισώσεις.

Η θεώρηση των συνεχών ομάδων από τον **Riemann**, οι ιδέες του Galois για τη συμμετρία, το έργο του Jacobi και του **Poisson** στη Μηχανική και η κατανόηση της Γεωμετρίας από τη σκοπιά των έργων των **Mobius** , **Grassmann** και **Plucker** επενέργησαν στη δημιουργία της θεωρίας του Lie.

Παρότι σήμερα ο Sophus Lie θεωρείται ο κύριος ιδρυτής της θεωρίας, σημαντική συνεισφορά στην υπόψη θεωρία προσέδωσε ο Γερμανός **Wilhlem Killing** (1847-1923) και **Elie Cartan** (1869-1951).

Η πραγματική αναγνώριση της θεωρίας που ανέπτυξε ο Lie, έγινε με τη χρήση της από το γνωστό θεωρητικό φυσικό **Herman Weyl** (1885-1955).

Ο Weyl με τη θεωρία των Ομάδων και Αλγεβρών Lie σε κάποιες εργασίες του το 1922-23 μελέτησε τη συμμετρία των συστημάτων της Κβαντικής Φυσικής. Από τότε, οι έννοιες που ανέπτυξε ο Lie έγιναν αντικείμενο ευρείας μελέτης τόσο από θεωρητικούς μαθηματικούς όσο και από θεωρητικούς φυσικούς.

Η μελέτη των συμμετριών και των συμμετρικών ομάδων αποδείχτηκε κύριας σημασίας όχι μόνο για την κατανόηση της Κβαντικής Φυσικής, αλλά και για τις εφαρμογές της στη Μηχανική, σε κάποιους τομείς των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών καθώς και στις Ιατρικές επιστήμες και ειδικότερα τη Νευροβιολογία.

Ειδικότερα, οι **ομάδες Lie** και οι **ομογενείς χώροι** (το μοντέλο της γεωμετρίας του Klein) αποτελούν θεμελιώδεις έννοιες, οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη, αλλά και επειδή εμφανίζονται ως συμμετρίες στις διάφορες θεωρίες πεδίου.

Αποτελούν πλέον βασικά εργαλεία όχι μόνο στη Διαφορική Γεωμετρία, αλλά και την Αλγεβρική Τοπολογία, τις Συνήθεις και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, την Αρμονική και Μιγαδική Ανάλυση, τη Θεωρία Αριθμών και βεβαίως σε όλο το εύρος της Φυσικής από την Κλασική Φυσική μέχρι τη Σχετικότητα και την Κβαντομηχανική.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία του Lie αποτελεί ακόμη ενεργό κομμάτι της μαθηματικής έρευνας.

Ακόμη, πρέπει να αναφερθεί ότι ο **Claude Chevalley** (1904 -1984) είναι αυτός που έφερε τη θεωρία του Lie σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Οι πολλαπλότητες αποτελούν κατά κάποιο τρόπο μια γενίκευση των επιφανειών του Ευκλείδειου Χώρου.

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι πολλαπλότητες αποτελούν τοπολογικούς χώρους, οι οποίοι κάτω από προϋποθέσεις και σε μια μικρή κλίμακα μοιάζουν ικανοποιητικά με τον Ευκλείδειο Χώρο κάποιας συγκεκριμένης διάστασης.

Πιο συγκεκριμένα, μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι μια πολλαπλότητα, η οποία ταυτίζεται με κάποιο γραμμικό χώρο και επιτρέπει χρήση των αποτελεσμάτων του απειροστικού λογισμού και της ανάλυσης.

Η δημιουργία της θεωρίας των πολλαπλοτήτων, αν και έχει τις ρίζες της στις εργασίες του Maxwell και κάποιων μαθηματικών του $18^{ου}$ αιώνα, άρχισε να διαμορφώνεται στη σημερινή της μορφή από τον Herman Weyl και τον Hassler Whitney.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ορισμοί και κάποια παραδείγματα πολλαπλοτήτων καθώς είναι απαραίτητα για το ορισμό και την κατανόηση της θεωρίας των ομάδων Lie.

1.1 Γενικά - Ορισμοί

Ορισμός 1.1.1 : Έστω X τυχαίο μη κενό σύνολο και έστω το ζεύγος *(U,φ)* με $U \subseteq X$ και $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του U επί ενός ανοικτού συνόλου $V(\subseteq \varphi(U))$ του $\mathbb{R}^n$ (όπου θεωρούμε ότι το $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία).

Αυτό το ζεύγος καλείται **χάρτης** του X.

Παράδειγμα 1: Έστω $M(r \times s, \mathbb{R})$ το σύνολο όλων των πραγματικών $r \times s$ πινάκων. Η συνάρτηση $f : M(r \times s, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{rs}$ με τύπο :

$$f[A]=(\alpha_{11},......,\alpha_{1s},\ \alpha_{21},......,\alpha_{2s},.....,\alpha_{r1},.....,\alpha_{rs}).$$

αποτελεί ένα χάρτη, αφού είναι επί του $\mathbb{R}^{rs}$, το οποίο είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.1.2 : Θα λέμε ότι δυο χάρτες *(U,φ)* και *(V,ψ)* είναι **τοπολογικώς συμβιβαστοί** ή **συσχετισμένοι**, αν ισχύουν οι εξής δυο συνθήκες:

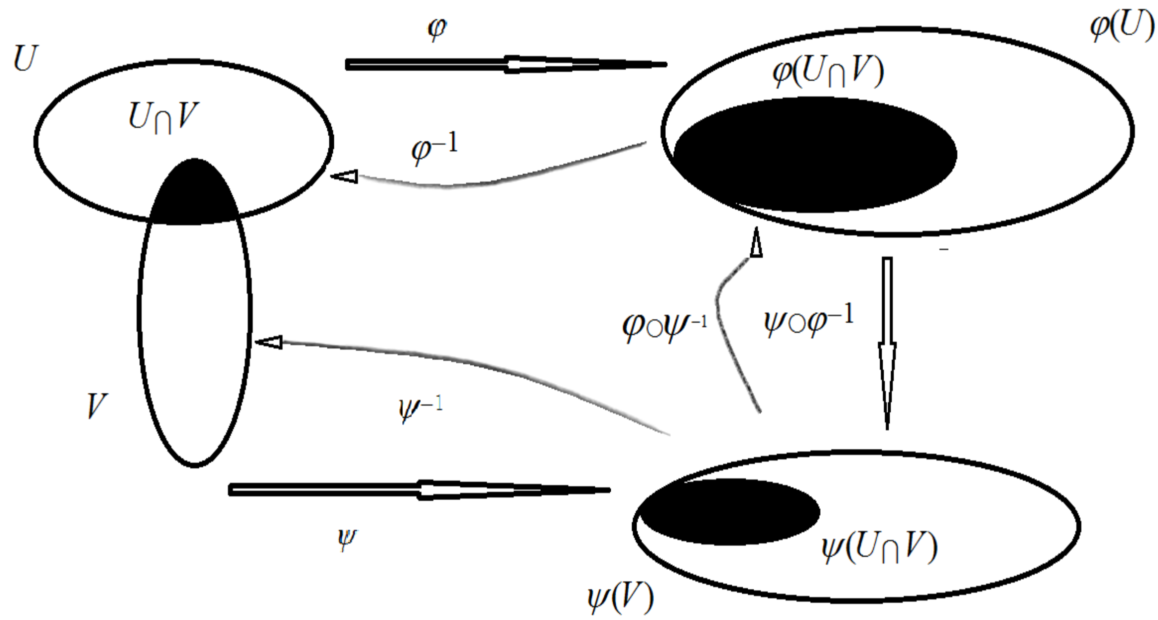
1) Τα σύνολα $\varphi(U\cap V)$ και $\psi(U\cap V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

2) Οι επόμενες δυο απεικονίσεις είναι συνεχείς:

α) $\psi\circ\varphi^{-1}$: $\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$

β) $\varphi\circ\psi^{-1}$: $\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$

Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται **απεικονίσεις μεταφοράς** (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 1

Στη συνέχεια, αναφέρεται η έννοια του τοπολογικού άτλαντα, η οποία είναι απαραίτητη για τον ορισμό των τοπολογικών πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 1.1.3: Έστω *X* σύνολο. **Τοπολογικός άτλας του *X*** καλείται μια οικογένεια τοπικών χαρτών του X, έστω $A=\{U_i,\varphi_i\}_{(i\in I)}$ έτσι ώστε :

1) Τα πεδία ορισμού των χαρτών της *A* αποτελούν μια κάλυψη του *X.*

2) Οι χάρτες της *A* είναι ανά δυο τοπολογικά συμβιβαστοί.

Παράδειγμα 2:

Έστω S^1 το σύνολο των σημείων του μοναδιαίου κύκλου στο $\mathbb{R}^2$.

Αν U είναι το υποσύνολο του S^1 ώστε:

$$U = \{(sin2\pi s, cos2\pi s): 0<s<1\}$$

, τότε η συνάρτηση x: $S^1 \to \mathbb{R}$ με τύπο $x(sin2\pi s, cos2\pi s) = s$ είναι απεικόνιση επί ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ (δηλαδή του $(0,1)$) και άρα αποτελεί χάρτη για το S^1.

Έστω τώρα το σύνολο $U' = \{(sin2\pi s, cos2\pi s): -1/2<s<1/2\}$, με παρόμοια σκέψη θεωρούμε τη συνάρτηση $x'(sin2\pi s, cos2\pi s) = s$, που αποτελεί άλλον ένα χάρτη του S^1.

Είναι φανερό ότι τα U και U' μαζί καλύπτουν το S^1.

Ακόμη, εάν $x \in (0,1/2)$ τότε $x' = x$ και $x' = x-1$ εάν $x \in (1/2,1)$

Ο τύπος της x^{-1} προκύπτει ως εξής:

$$x(sin2\pi s, cos2\pi s) = s \quad \Rightarrow$$

$$x^{-1}(x(sin2\pi s, cos2\pi s)) = x^{-1}(s) \quad \Rightarrow$$

$$x^{-1}(s) = (sin2\pi s, cos2\pi s)$$

Ακόμη, για $s \in (0,1/2)$ $(x' \circ x^{-1})(s) = x'(sin2\pi s, cos2\pi s) = s$

και για $s \in (1/2,1)$ $(x' \circ x^{-1})(s) = x'(sin2\pi(s-1), cos2\pi(s-1)) = s-1$.

Άρα, η συνάρτηση $(x' \circ x^{-1})$ είναι συνεχής και έτσι οι χάρτες x και x' αποτελούν C^∞ **άτλαντα** του S^1 στο $\mathbb{R}$.

Ορίζεται μια σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο όλων των ατλάντων του X με την έννοια ότι $A \leq B$ όπου (A, B) άτλαντες και κάθε χάρτης του A είναι και χάρτης του B, δηλαδή ο B περιέχει περισσότερα στοιχεία.

Σε αυτή τη διάταξη,υπάρχει μέγιστο στοιχείο το οποίο καλούμε **μέγιστο τοπολογικό άτλα**.

Λέμε ότι ένας άτλας είναι διαστάσεως n, εάν οι χάρτες που τον αποτελούν, έχουν ως πεδίο τιμών τον n - διάστατο Ευκλείδειο Χώρο.

Ορισμός 1.1.4 : **Τοπολογική πολλαπλότητα** διάστασης n είναι ένα ζεύγος (X, A) όπου X μη κενό σύνολο και A μέγιστος τοπολογικός άτλας του X διάστασης n.

1.2 Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

Με παρόμοιο τρόπο με τις τοπολογικές πολλαπλότητες ορίζονται και οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, μόνο που πλέον απαιτείται οι συναρτήσεις μεταφοράς εκτός από συνεχείς να είναι και **διαφορίσιμες απεικονίσεις**.

Ας θεωρήσουμε δυο διαφορίσιμες πολλαπλότητες *(X, A)* και *(Y, B)* διαστάσεων *n* και *m* αντίστοιχα.

Επί πλέον, έστω : $f: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση, καθώς και ένα σημείο $x \in X$.

Ακόμη, ας θεωρήσουμε δυο τοπικούς χάρτες $(U, \varphi) \in A$ και $(V, \psi) \in B$, έτσι ώστε : $x \in U$ και $f(x) \in V$ (άρα $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$).

Έτσι, ορίζεται η απεικόνιση :

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \quad : \quad \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \quad ,$$

την οποία καλούμε **τοπική παράσταση** της *f* στο σημείο *x*, που αντιστοιχεί στο δοθέν ζεύγος χαρτών.

Ορισμός 1.2.1 :Έστω $f: X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση (όπως η πιο πάνω αναφερθείσα). Θα λέμε ότι η *f* είναι διαφορίσιμη σ' ένα σημείο *x* του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει τοπική παράσταση *F* της *f* στο *x* (όπως η πιο πάνω αναφερθείσα) που είναι διαφορίσιμη στο *φ(x)*.

Ορισμός 1.2.2 : Έστω *X* σύνολο και *(U, φ) και (V, ψ)* τοπικοί χάρτες (με κοινό πεδίο τιμών $\mathbb{R}^n$).

Θα λέμε ότι αυτοί οι δυο χάρτες είναι **διαφορικώς συμβιβαστοί**, εάν :

1) Τα σύνολα $\varphi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

2) Οι απεικονίσεις : α) $\psi \circ \varphi^{-1} \quad : \quad \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$

β) $\varphi \circ \psi^{-1} \quad : \quad \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$

είναι διαφορίσιμες C^{∞} τάξης.

Ορισμός 1.2.3 : Μία οικογένεια $A = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ τοπικών χαρτών ενός συνόλου *X* είναι διαφορικός άτλας του *X,* αν η *A* είναι άτλας του *X* και οι χάρτες του είναι διαφορικώς συμβιβαστοί.

Όπως και παραπάνω, υπάρχει μέγιστος διαφορικός άτλας του *X*.

Ορισμός 1.2.4 : **Διαφορική ή διαφορίσιμη πολλαπλότητα** ονομάζεται ένα ζεύγος *(X, A)* , που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο *X* και ένα μέγιστο διαφορικό άτλαντα *A* του *X*.

Αποδεικνύεται πως, αν η M και N είναι διαφορικές πολλαπλότητες, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ είναι διαφορική πολλαπλότητα.

Εάν *F* είναι μια απεικόνιση από μια *m*-διάστατη πολλαπλότητα *M* σε μια *n*-διάστατη πολλαπλότητα *N*, τότε η *F* είναι λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων, εάν για κάθε $p \in M$ υπάρχει χάρτης *(U, φ)* της M , έτσι ώστε $p \in U$, και ένας χάρτης *(V, ψ)* της *N*, έτσι ώστε $F(p) \in V$, και ακόμα $F(U) \subseteq V$, έτσι ώστε, τελικώς, η $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ να είναι απείρως διαφορίσιμη από το *φ(U)* στο *ψ(V)* ως συνάρτηση από το $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.5 : Έστω δυο πολλαπλότητες *M* και *N* μια απεικόνιση *1-1* και επί λέγεται **αμφιδιαφόριση**, εάν η $f: M \to N$ και η αντίστροφή της $f^{-1}: M \to N$ είναι διαφορίσιμες.

Δυο πολλαπλότητες *M* και *N* είναι **διαφορομορφικές**, εάν υπάρχει αμφιδιαφόριση από την *M* στη *N* (ή από τη *N* στη *M*).

Παρακάτω, δίνεται ο ορισμός της υποπολλαπλότητας, ο οποίος είναι απαραίτητος για τον ορισμό των **υποομάδων Lie**, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Ορισμός 1.2.6: Έστω *M* μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και έστω *M΄* ένα υποσύνολο του *M*. Η *M΄* θα ονομάζεται **υποπολλαπλότητα** της *M*, εάν υπάρχει διαφορίσιμη πολλαπλότητα *N* και μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\sigma: N \to M$ έτσι ώστε :

1) Η *σ* είναι *1 - 1*.

2) $\sigma(N) = M'$

3) Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση *f* στο N και κάθε $n \in N$ υπάρχει γειτονιά *U* του *n* και μια διαφορίσιμη συνάρτηση *g* στο *M,* έτσι ώστε $g \circ \sigma = f$ στο *U*.(βλέπε [10] της βιβλιογραφίας)

Μπορούμε να δούμε, δηλαδή, ότι μια υποπολλαπλότητα είναι ένα υποσύνολο μιας διαφορικής πολλαπλότητας, για το οποίο ισχύουν κάποιες συνθήκες.

Γενικά, διαφορετικοί συγγραφείς δίνουν διαφορετικούς ορισμούς για την υποπολλαπλότητα. Στην παρούσα εργασία οι υπολλαπλότητες που ενδιαφέρουν, είναι οι ονομαζόμενες **εμβαπτισμένες υποπολλαπλότητες.**

Ορισμός 1.2.7: Μια εμβαπτισμένη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M' της M είναι η εικόνα μιας *1-1* εμβάπτισης $f: N \rightarrow M$ (όπου N διαφορίσιμη πολλαπλότητα), η οποία έχει τοπολογική και διαφορική δομή, τέτοια ώστε η M' να είναι πολλαπλότητα και η f να είναι διαφορομορφισμός.

Κάποιοι άλλοι συγγραφείς ορίζουν μια υποπολλαπλότητα ως εξής:

Ορισμός 1.2.8: Έστω C^k πολλαπλότητα διάστασης n και ένα υποσύνολο N. Το υποσύνολο N θα ονομάζεται υποπολλαπλότητα, διάστασης m της M (όπου $0 \leq m \leq n$), αν για κάθε σημείο $\rho \in N$, υπάρχει ένας χάρτης (U, φ) της M με $\rho \in U$, έτσι ώστε :

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m x O_{(n-m)})$$

με $O_{(n-m)}$ συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο *(0, 0,.....,0)* *n-m* διάστασης του $\mathbb{R}^{(n-m)}$.(βλέπε [13] της βιβλιογραφίας).

Μία λεία εμβαπτυσμένη υποπολλαπλότητα διάστασης κ είναι ένα υποσύνολο Μ ενός n-διάστατου πραγματικού διανυσματικού χώρου, έτσι ώστε για κάθε μ_0 του M να ορίζεται ένα λείο σύστημα χαρτών *(U,φ),* έτσι ώστε για κάθε $m \in U$ το $m \in U \cap M$ αν και μόνο εάν $\varphi(m) \in \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$

Γενικά, υπάρχουν πολλά είδη πολλαπλοτήτων ανάλογα με κάποιες ιδότητες που πληρούν.

Έτσι, εκτός από τις τοπολογικές και τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες ορίζονται:

1) Οι λείες πολλαπλότητες ή αλλιώς C^∞ πολλαπλότητες, για τις οποίες ισχύει ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς είναι C^∞ τάξης.

2) Οι αναλυτικές πολλαπλότητες, οι οποίες αποτελούν λείες πολλαπλότητες, για τις οποίες ισχύει ότι απεικονίσεις μεταφοράς είναι αναλυτικές απεικονίσεις (δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor τους συγκλίνει στη συνάρτηση σε κάποια ανοιχτή σφαίρα).

1.3 Εφαπτόμενος χώρος

Ο **εφαπτόμενος χώρος** μιας πολλαπλότητας αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, τη γενίκευση των διανυσμάτων σε μια πολλαπλότητα.

Σε κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα μπορούμε σε κάθε σημείο *x* να αντιστοιχίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο, ο οποίος είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος, που περιέχει όλες τις πιθανές *"κατευθύνσεις"* από τις οποίες μπορεί κάποια να *"περάσει"* εφαπτομενικά από τη *x*.

Όλοι οι εφαπτόμενοι χώροι έχουν την ίδια διάσταση με την πολλαπλότητα, στην οποία έχουν αντιστοιχηθεί.

Ορισμός 1.3.1: Έστω μια C^k πολλαπλότητα διάστασης n , ένα σημείο $p \in M$ και δυο καμπύλες τάξης C^l: $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$ και $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ (με $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$).
Οι γ_1 και γ_2 είναι ισοδύναμες μέσω του *p,* εάν και μόνον εάν υπάρχει κάποιος χάρτης *(U,φ)* στο *p* με $p \in U$, έτσι ώστε : $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ και $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$.

Στον παραπάνω ορισμό αποδεικνύεται ότι η επιλογή του χάρτη δεν παίζει ρόλο. Πράγματι, έστω *(V,ψ)* είναι άλλος χάρτης του *M*, που περιέχει το *p*. *Α*φού το *p* ανήκει και στο *U* και στο *V*, ισχύει πως $U \cap V \neq \varnothing$ άρα η συνάρτηση $n = \psi \circ \varphi^{-1}$ είναι και αυτή C^k τάξης.
Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (n \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = n'(\varphi(p))((\varphi \circ \gamma_1)'(0)) = n'(\varphi(p))((\varphi \circ \gamma_2)'(0)) =$$
$$= (n \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0) .$$

Ορισμός 1.3.2 : Για κάθε C^k πολλαπλότητα διάστασης *n* με $\kappa \geq 1$ και για κάθε $p \in M$, το εφαπτόμενο του *M* στο σημείο *p* ορίζεται να είναι η κλάση ισοδυναμίας (με τη σχέση ισοδυναμίας που περιγράφηκε πιο πριν) όλων των C^l καμπυλών μέσω του *p* στο *M*.

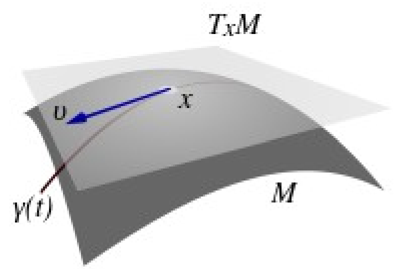
Το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο *p* συμβολίζεται $T_p(M)$ ή T_pM και ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του *M* στο *p*.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός του εφαπτόμενου χώρου, αναφέρονται το εξής παράδειγμα:

Ένας τρόπος κατασκευής μιας πολλαπλότητας είναι να θεωρήσουμε μια υποπολλαπλότητα κάποιου Ευκλείδειου Χώρου $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα μια λεία επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$.

Σ' αυτήν την περίπτωση ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο $x \in S$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων *u* στον $\mathbb{R}^3$ που προκύπτουν από το $u = d\gamma / dt|_{t=0}$, όπου με *γ(t)* εννοούμε μια λεία καμπύλη που βρίσκεται *"πάνω"* στην S και *γ(0)=x*. Έτσι, για κάθε $x \in S$ ο εφαπτόμενος χώρος είναι ένας διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Το παρακάτω σχήμα επεξηγεί οπτικά την παραπάνω έννοια.



Σχήμα 2

Για κάθε λεία απεικόνιση μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων $\varphi : M \to N$ επάγονται γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων: $d\varphi_x : T_x \to T_{\varphi(x)} M$.

Το παρακάτω σχήμα επεξηγεί οπτικά την παραπάνω έννοια.

Εάν ο εφαπτόμενος χώρος ορίζεται μέσω καμπύλων, όπως παραπάνω, τότε η απεικόνιση αυτή ορίζεται ως η απεικόνιση με $d\varphi_x(\gamma'(0)) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$.

Αυτές οι απεικονίσεις, που γράφονται : $D\varphi_x$, $(\varphi_*)_x$ $\varphi'(x)$, ονομάζονται και **παράγωγοι** της *f*.

Στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία αναφέρονται ως **differential pushforwards.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΜΑΔΕΣ Lie

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι ο ορισμός των ομάδων Lie, η παρουσίαση κάποιων απλών ομάδων Lie, ως παραδείγματα, για την καλύτερη κατανόησή τους, καθώς και η παρουσίαση κάποιων βασικών θεωρημάτων και ορισμών, που αφορούν στη γενικότερη θεωρία των ομάδων Lie.

Αρχικά, μελετώνται οι ομάδες Lie στη γενικότερη αφηρημένη μορφή τους και στη συνέχεια αναφέρονται οι ομάδες πινάκων Lie, οι οποίες ουσιαστικά είναι αυτές, που κυρίως ενδιαφέρουν.

2.1 Γενικά - Ορισμοί

Μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες στα Μαθηματικά είναι η έννοια **της ομάδας**.

Η ομάδα είναι ουσιαστικά μια αλγεβρική δομή, η οποία ικανοποιεί κάποια αξιώματα και επιτρέπει την εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων για τα στοιχεία τους .

Ορισμός 2.1.1 : **Ομάδα** είναι ένα σύνολο $G\neq\emptyset$ μαζί με μια εσωτερική πράξη $\circ$ της μορφής $\circ$: $G\times G\rightarrow G$, $(a,b)\rightarrow a\circ b$ η οποία αντιστοιχεί τα *a* και *b* σε ένα στοιχείο $a\circ b$ και για την οποία ισχύουν :

1) Για κάθε *a, b, c* του *G* $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

2)Υπάρχει ένα στοιχείο *e* έτσι ώστε για κάθε $a\in G$ $e\circ a=a\circ e=a$.

Αυτό ονομάζεται **ουδέτερο** στοιχείο του *G* (μονάδα) και γράφεται συνήθως 1_G (στις πολλαπλασιαστικές ομάδες).

3)Υπάρχει για κάθε *a* στο *G* ένα στοιχείο $b\in G$ τέτοιο ώστε $a\circ b=b\circ a=e$.

Αν επίσης, για κάθε *a, b* $a\circ b=b\circ a$ η ομάδα ονομάζεται **αβελιανή** ή **αντιμεταθετική**.

Παράδειγμα 1

Το σύνολο $G=GL(n,\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων $n\times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία και πράξη το γνωστό πολλαπλασιασμό πινάκων, με μοναδιαίο στοιχείο τον γνωστό μοναδιαίο πίνακα, αποτελεί ομάδα.

Μία σημαντική έννοια στη θεωρία των ομάδων είναι η εννοία της υποομάδας.

Ορισμός 2.1.2 Αν ένα υποσύνολο $H\neq\emptyset$ μιας ομάδας *G* είναι κλειστό ως προς την πράξη της *G* $\circ$ (δηλαδή για κάθε $a,b\in H$ $a\circ b\in H$), και αν το *H* είναι και αυτό ομάδα, τότε η *H* είναι μια υποομάδα της *G*.

Οι ομάδες Lie αποτελούν σύνολα, τα οποία έχουν ταυτόχρονα μια αλγεβρική και μια αναλυτική δομή.
Ο συνδυασμός αυτών των δυο δομών και η μελέτη των αλγεβροαναλυτικών ιδιοτήτων τους, τις καθιστά πολύ πλούσιες σε εφαρμογές και θεωρία.

Ορισμός 2.1.3 : Μια **ομάδα Lie** είναι μια ομάδα *G*, η οποία ταυτόχρονα αποτελεί και πεπερασμένης διάστασης λεία πολλαπλότητα και για την οποία ισχύει ότι:
1) Η πράξη της ομάδας $m:G\times G\rightarrow G, m(g,h)=gh$ $g,h\in G$ και
2) Η αντιστροφή στοιχείου $i:G\rightarrow G$, $i(g)=g^{-1}, g\in G$
είναι λείες απεικονίσεις ανάμεσα στις πολλαπλότητες $G\times G$ και G .

Παρατήρηση: Πολλοί συγγραφείς δίνουν ελαφρώς διαφορετικούς ορισμούς για την ομάδα Lie. Κάποιοι απαιτούν οι πολλαπλότητες να είναι μόνο διαφορίσιμες, ενώ ορισμένοι μόνο τον πολλαπλασιασμό και όχι την αντιστροφή να είναι λείες απεικονίσεις, διότι κάτι τέτοιο αποδεικνύεται μόνο με την χρήση της πρώτης συνθήκης.

Παράδειγμα 2:

Εάν G_1 και G_2 είναι ομάδες Lie μπορούμε να ορίσουμε τη δομή μιας ομάδας Lie στο σύνολο $G_1\times G_2$. Το σύνολο $G_1\times G_2$ αποτελεί πολλαπλότητα ως καρτεσιανό γινόμενο πολλαπλοτήτων. Ακόμη αποτελεί ομάδα με πράξη την πράξη της πμάδας κατά συντεταγμένες. Το $G_1 \times G_2$ ονομάζεται το γινόμενο των ομάδων Lie G_1 και G_2 .

Παράδειγμα 3 :

Έστω $G = \mathbb{R}^n$ θεωρούμενο ως πολλαπλότητα και έστω ως πράξη ομάδας η πρόσθεση διανυσμάτων $(x, y) \to x + y$. Το αντίστροφο του *x* είναι *-x.* Και οι δυο απεικονίσεις είναι λείες και έτσι το $\mathbb{R}^n$ είναι μια Αβελιανή ομάδα Lie.

Παράδειγμα 4 :

Έστω $G = SO(2)$ η ομάδα στροφών στο επίπεδο

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} : 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$ όπου *θ* είναι η γωνία στροφής.

Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cos\theta cos\varphi - sin\theta sin\varphi & cos\theta(-sin\varphi) - sin\theta cos\varphi \\ sin\theta cos\varphi + cos\theta sin\varphi & -sin\theta sin\varphi + cos\theta cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix} \quad \in G$$

Το *G* με την ταύτιση με το μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \{(cos\theta, sin\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ αποτελεί *1* - διάστατη πολλαπλότητα. Γράφουμε $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = e^{i\theta}$ με $e^{i\theta} \in S^1$.

Άρα, το $G \times G$ (όπως προκύπτει από προηγούμενο παράδειγμα - πρόταση) είναι *2* - διάστατη πολλαπλότητα.

Για να δείξουμε ότι η *G* είναι ομάδα Lie, θα θεωρήσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων ως απεικόνιση f μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Έστω *(U, φ)* ένας χάρτης του $G \times G$ της μορφής :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}\right) = (\theta, \varphi)$$ με *(θ,φ)* $\in$ $[0,2\pi)^2$

τότε, $f\circ\varphi^{-1}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$.

Εάν *(V,ψ)* ένας χάρτης του *G* της μορφής : $\psi\begin{pmatrix}cosx & -sinx\\ sinx & cosx\end{pmatrix}=x$ με $x \in [0,2\pi)$, τότε

$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\theta,\varphi)=\theta+\varphi$, η οποία είναι προφανώς διαφορίσιμη τάξης C^{∞} , άρα η *f* είναι λεία απεικόνιση.

Με παρόμοια λογική βλέπουμε ότι και η αντιστροφή ενός στοιχείου της *G* αποτελεί λεία απεικόνιση.

Άρα η *SO(2)* είναι ομάδα Lie.

Παράδειγμα 5:

Έστω το σύνολο $S^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}=e^{i\theta}$ με $\theta \in [0,2\pi)$ και πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών. Το S^1 αποτελεί ομάδα Lie, διότι είναι ομάδα και ο πολλαπλασιασμός καθώς και η αντιστροφή είναι λείες απεικονίσεις.

Πράγματι, έστω ένας χάρτης χ του $S^1\times S^1$ στο $\mathbb{R}^2$ και χ' ένας χάρτης του S^1 στο $\mathbb{R}$ καθώς και *f* ο πολλαπλασιασμός θεωρούμενος ως συνάρτηση, τότε η απεικόνιση $\chi'\circ f\circ\chi^{-1}:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ είναι λεία απεικόνιση.

Με παρόμοιο τρόπο φαίνεται ότι και η αντιστροφή είναι λεία απεικόνιση.

Παράδειγμα 6:

Έστω το σύνολο $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^1=\{(x,y,u)/x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},u\in S^1\subset\mathbb{C}\}$ και ορίζουμε την πράξη της ομάδας $\circ$: $G\times G\rightarrow G$ με $(x_1,y_1,u_1)\circ(x_2,y_2,u_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,e^{ix_1y_2}u_1u_2)$.

Μπορεί να ελεγχθεί ότι αυτή η πράξη κάνει όντως την *G* ομάδα. Ακόμη υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο στην *G* το $1_G = (0, 0, 1)$ και κάθε στοιχείο *(x, y, u)* να έχει αντίστροφο το $(-x, -y, e^{ixy}u^{-1})$ και ο πολλαπλασιασμός και η αντιστροφή στοιχείου θεωρούμενη ως απεικόνιση αποτελούν λείες απεικονίσεις και άρα η *G* είναι ομάδα Lie.

Τα δυο παραπάνω αποτελούν παραδείγματα αφηρημένων ομάδων Lie (δηλαδή ομάδων Lie, που δεν αποτελούν ομάδες πινάκων).

Παρατήρηση : Οι δυο απαιτήσεις για τον πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή στοιχείου μπορούν να συνδυαστούν ως εξής:

Για να είναι η *G* ομάδα Lie αρκεί η απεικόνιση $(x,y)\rightarrow x^{-1}y$ να είναι λεία απεικόνιση μεταξύ των πολλαπλοτήτων $G\times G$ και *G*.

Πράγματι, εάν η απεικόνιση $\mu(x,y)=x^{-1}y$ είναι λεία, τότε με αντικατάσταση στη θέση του y τη μονάδα, προκύπτει η απαίτηση για την ομαλότητα της αντιστροφής, ενώ θέτοντας στη θέση του x^{-1} ένα στοιχείο z (αφού για κάθε στοιχείο, υπάρχει το αντίστροφό του στην ομάδα) προκύπτει η απαίτηση για την ομαλότητα του πολλαπλασιασμού.

Κάποια εξίσου σημαντική έννοια και συναφής με αυτή των ομάδων Lie είναι η έννοια της τοπολογικής ομάδας, όπως θα φανεί από τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1.4: Ένα σύνολο G είναι τοπολογική ομάδα, εάν:

α) Το σύνολο G είναι **Hausdorff τοπολογικός χώρος**, δηλαδή για κάθε x, y με $x \neq y$ υπάρχει γειτονιά U του x και γειτονιά V του y έτσι ώστε:

$$U \cap V = \emptyset$$

β) Το G είναι ομάδα.

γ) Ο πολλαπλασιασμός και η αντιστροφή στοιχείου είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Παρακάτω διατυπώνονται κάποια βασικά θεωρήματα και προτάσεις για τις ομάδες Lie.

Θεώρημα 2.1.1: Έστω G ομάδα Lie, και έστω G^o η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας (δηλαδή το μέγιστο συνεκτικό σύνολο που περιέχει την μονάδα). Τότε το G^o είναι κανονική υποομάδα του G και αποτελεί ομάδα Lie.

Απόδειξη:

Αρκεί να δειχθεί ότι το G^o είναι κλειστό στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της αντιστροφής, για να δειχθεί ότι είναι ομάδα Lie.

Αφού η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης είναι συνεκτικό σύνολο (από γνωστή πρόταση της Τοπολογίας), η αντίστροφη απεικόνιση i πρέπει να μεταφέρει το G^o σε ένα υποσύνολο του G, το οποίο περιέχει τη μονάδα, δηλαδή στο G^o.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και ο πολλαπλασιασμός είναι κλειστός στο G^o. Πράγματι, αφού η συνάρτηση $\mu(x,y)=x \circ y$ ($\circ$ η πράξη της ομάδας) είναι συνεχής πρέπει να έχει πεδίο τιμών συνεκτικό υποσύνολο του G, και αφού το G^o είναι *το* μέγιστο συνεκτικό(που περιέχει την μονάδα) $x \circ y \in G^0$.

Για να δείξουμε ότι είναι κανονική υποομάδα πρέπει να δείξουμε ότι, αν $g \in G$ και $h \in G^0$, τότε $ghg^{-1} \in G^0$.

Επειδή ο πολλαπλασιασμός με τα g και g^{-1} είναι συνεχής απεικόνιση θα πάει το G^o σε κάποιο συνεκτικό υποσύνολο του G, και αφού σε αυτό θα υπάρχει η μονάδα, το υποσύνολο αυτό θα είναι το G^o. □

Όπως και στις κλασικές ομάδες, έτσι και για τις ομάδες Lie ορίζονται οι αντίστοιχες υποομάδες, μόνο που παράλληλα με τον κλασικό ορισμό απαιτούμε να είναι ταυτόχρονα και υποπολλαπλότητες.

Ορισμός 2.1.5: Έστω *G* και *H* δύο ομάδες Lie. Η *H* θα είναι μία υποομάδα Lie της *G* εάν η :

1) *H* είναι μια εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα της *G*.
2) *H* είναι μια υποομάδα της *G* (με την αλγεβρική έννοια).

Ο παραπάνω ορισμός δεν είναι εντελώς αυστηρός. Αρκετοί συγγραφείς χρησιμοποιούν διαφορετικούς ορισμούς για το συγκεκριμένο αντικείμενο.

Ένας πιο αυστηρός ορισμός απαιτεί μια υποομάδα Lie να είναι μια υποομάδα, για την οποία ο περιορισμός της ταυτοτικής απεικόνισης από την ομάδα στην αρχική ομάδα είναι μία ένα προς ένα εμβάπτιση και ομομορφισμός ομάδας (έννοια που θα οριστεί στη συνέχεια).

Παράδειγμα 7:

Ένα κλασικό παράδειγμα υποομάδας Lie είναι μία *"κλωστή "* τυλιγμένη πάνω σε έναν τρισδιάστατο τόρο. Εάν αυτός ο τόρος T^2 θεωρηθεί ως γινόμενο των $T^1 \times T^1$ όπου με T^1 συμβολίζουμε τους μοναδιαίους κύκλους, ορίζεται μία καμπύλη πάνω του της μορφής $f(t) = (e^{2\pi i a t}, e^{2\pi i b t})$ με a/b άρρητο.

Αποδεικνύεται (βλέπε [7] της βιβλιογραφίας) ότι αυτή η καμπύλη είναι μονοδιάστατη πολλαπλότητα στον T^2 και αφού $f(s+t) = f(s) f(t)$ στον T^2, αποτελεί υποομάδα Lie.

Παράδειγμα 8 :

Οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ με την πρόσθεση αποτελούν μία υποομάδα Lie στο $\mathbb{R}$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.1.3 θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.2 Αν G είναι τοπολογική ομάδα και U είναι οποιαδήποτε ανοιχτό υποσύνολο που περιέχει την μονάδα, τότε υπάρχει κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $V \subseteq U$ με $1 \in V$, έτσι ώστε: $V = V^{-1}$ και $V^2 \subseteq U$ επιπλέον $\overline{V} \subseteq U$ με την έννοια ότι :

1) Για κάθε $x \in V$, $x^{-1} \in V$.

2) Για $x, y \in V$ $xy \in V$.

Θεώρημα 2.1.3:

1) Κάθε υποομάδα Lie είναι κλειστό σύνολο στο G (όπου G είναι η ομάδα Lie).

2) Κάθε κλειστή υποομάδα μιας ομάδας Lie αποτελεί υποομάδα Lie.

Απόδειξη

1) Για να αποδειχτεί ότι κάθε υποομάδα Lie, έστω H είναι κλειστό σύνολο, αρκεί να δειχτεί ότι $H = \overline{H}$ (όπου με $\overline{H}$ συμβολίζουμε την τοπολογική κλειστότητα του H).

Επειδή από γνωστή πρόταση της τοπολογίας ισχύει $H \subseteq \overline{H}$, αρκεί να δείξουμε ότι για $y \in \overline{H}$ ισχύει $y \in H$.

Αφού η H είναι υποπολλαπλότητα της G, υπάρχει ένας χάρτης της *(U, φ)* με $1 \in U$ (σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.8), έτσι ώστε:

$$\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{O_{(n-m)}\})$$

Από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $V \subseteq U$ με $1 \in U$, έτσι ώστε $V = V^{-1}$ και $\overline{V} \subseteq U$.

Ισχύει $\varphi(\overline{V} \cap H) = \varphi(\overline{V}) \cap (\mathbb{R}^m \times \{O_{(n-m)}\})$ και αφού το $\overline{V}$ είναι κλειστό και η φ είναι ομοιομορφισμός προκύπτει ότι το $\overline{V} \cap H$ είναι κλειστό (Βλέπε [13] βιβλιογραφίας).

Άρα είναι ίσο με την κλειστότητά του, $\overline{\overline{V} \cap H} = \overline{V} \cap \overline{H}$ (προκύπτει και αυτό από πρόταση της Γενικής Τοπολογίας). Επομένως $\overline{V} \cap H = \overline{V} \cap \overline{H}$.

Έστω τώρα $y \in \overline{H}$, αφού $1 \in V^{-1}$, το ανοιχτό σύνολο yV^{-1} περιέχει το y και αφού $y \in \overline{H}$ έχουμε $yV^{-1} \cap H \neq \emptyset$.

Έστω ότι το σύνολο $yV^{-1} \cap H$ περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός από το y (αφού εάν περιλάμβανε το y, $y \in H$ που είναι το ζητούμενο) και έστω ένα τέτοιο στοιχείο το x.

Αφού $x \in yV^{-1} \cap H$ τότε $x \in H$ και $y \in xV$ (διότι $x \in yV^{-1}$, δηλαδή το x είναι της μορφής: $x = ya^{-1} \Rightarrow y = xa$ με $\alpha \in V$).

Τότε $y \in xV \cap \overline{H}$, δηλαδή $x^{-1} y \in V \cap \overline{H} \subseteq \overline{V} \cap \overline{H} = \overline{V} \cap H$.

Άρα $x^{-1} y \in H$ και αφού $x \in H$ έχουμε $y \in H$ και άρα το Η είναι κλειστό.

2) Για τη δεύτερη πρόταση δεν θα δοθεί απόδειξη εδώ, διότι χρησιμοποιούνται τεχνικές από τη θεωρία των Αλγεβρών Lie. □

Στη συνέχεια ακολουθεί ενα λήμμα που απαιτείται για να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση.

Λήμμα 2.1.4: Έστω *M* και *N* πολλαπλότητες τάξης C^∞ (αναλυτική) και έστω $f: M \to N$ μια C^∞ (αναλυτική) απεικόνιση, έτσι ώστε το *f(M)* να περιέχεται σε μια υποπολλαπλότητα *P*. Αν η απεικόνιση είναι συνεχής, τότε είναι και C^∞ τάξης(αναλυτική).

Πρόταση 2.1.5: Έστω *G* μια ομάδα Lie και *H* μια υποπολλαπλότητα της *G,* που αποτελεί υποομάδα της G. Εάν η *H* είναι τοπολογική ομάδα, τότε η *H* είναι υποομάδα Lie της *G*.

Απόδειξη

Αρκεί να δειχτεί ότι η *H* είναι ομάδα Lie. Η απεικόνιση $f: G \times G \to G : (x, y) \to xy^{-1}$ είναι αναλυτική και ο περιορισμός της $f_H : H \times H \to G$ είναι επίσης αναλυτική απεικόνιση. Αφού η *H* είναι τοπολογική ομάδα, η απεικόνιση $f_H : H \times H \to H$ είναι συνεχής. Από το προηγούμενο λήμμα είναι και αναλυτική.

Θεώρημα 2.1.6: Αν το *G* είναι ομάδα Lie και συνεκτικό σύνολο και το *U* είναι μια γειτονιά του *1* τότε το *U* είναι γεννήτορας του *G*.

Όπως και γενικά στη θεωρία ομάδων, δεδομένης μιας υποομάδας $H \in G$, ορίζουμε τα σύμπλοκα της *H* και αντίστοιχα το χώρο των συμπλόκων της *H* ως το σύνολο των συμπλόκων της *H*, τα οποία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, και συμβολίζεται με *G/H* .

Θεώρημα 2.1.7

1) Έστω G μια ομάδα Lie, διάστασης *n* και $H \subset G$ μια υποομάδα Lie διάστασης *κ*. Τότε το σύμπλοκο (ομάδα πηλίκο) *G/H* έχει τη δομή πολλαπλότητας διάστασης *n-k* .

2) Έστω μια κανονική υποομάδα Lie, τότε το σύμπλοκο (ομάδα πηλίκο) *G/H* έχει τη δομή μιας κανονικής ομάδας Lie.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται χρήση της θεωρίας των **fiber bundles (ινικών δεσμών)** και δεν θα δοθεί στο παρόν.

2.2 Δράση και αναπαράσταση ομάδας Lie

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται κάποιοι ορισμοί για κάποιες βασικές απεικονίσεις, ανάμεσα σε ομάδες με σκοπό τον ορισμό και την κατανόηση της δράσης των ομάδων Lie πάνω σε σύνολα, των αναπαραστάσεων των ομάδων Lie (οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη Θεωρητική Φυσική, διότι χρησιμοποιούνται στις συμμετρίες), καθώς και στην έννοια των αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων, που είναι κρίσιμα για την παρουσίαση της περαιτέρω θεωρίας των Αλγεβρών Lie.

Ορισμός 2.2.1 :

α) **Ομομορφισμός ομάδων** είναι μια απεικόνιση *h* μεταξύ δυο ομάδων $(G,*)$ και *(F,* $\circ$ *)*, έτσι $h(u*v)=h(u)\circ h(v)$, όπου στο αριστερό μέλος με $*$ συμβολίζεται η πράξη της *G,* ενώ στο δεξί με $\circ$ η πράξη της *F.*

β) **Ισομορφισμός ομάδας** ονομάζεται μια *1-1* και επί απεικόνιση *f* από το σύνολο *X* στο σύνολο *Y,* έτσι ώστε και η *f* και η f^{1} να διατηρούν τις αλγεβρικές δομές ανάμεσα στα σύνολα, είναι δηλαδή ομομορφισμοί.

γ)**Αυτομορφισμός ομάδας** ονομάζεται μια απεικόνιση, η οποία είναι ισομορφισμός από ένα σύνολο στον εαυτό του.

Παρατηρήσεις: Ουσιασικά ένας ομομορφισμός διατηρεί τις πράξεις ανάμεσα σε ομάδες.

Μια ειδική περίπτωση ομομορφισμών είναι ομομορφισμοί ομάδων Lie, όπου ο ομομορφισμός ανάμεσα σε δυο ομάδες Lie *G* και *H* είναι επίσης και λεία απεικόνιση (δηλαδή απείρως διαφορίσιμη).

Ακόμη, αποδεικνύεται πως το σύνολο των αυτομορφισμών ενός συνόλου αποτελεί ομάδα με πράξη την σύνθεση συναρτήσεων.

Η ομάδα των αυτομορφισμών ενός συνόλου *X* συμβολίζεται με *Aut(X).*

Ορισμός 2.2.1: **Η αναπαράσταση μιας ομάδας Lie** G πάνω σε ένα διανυσματικό χώρο V είναι μια λεία απεικόνιση, η οποία αποτελεί ομομορφισμό από το G στο $Aut(V)$, δηλαδή στην ομάδα αυτομορφισμών του V.

Δηλαδή, η αναπαράσταση μιας ομάδας Lie θα μπορούσε να ορισθεί ως η απεικόνιση σε κάθε στοιχείο $g\in G$ μιας συνάρτησης $\rho_g : G\rightarrow Aut(G), g\rightarrow \rho(g)\equiv \rho_g$ όπου ρ_g αυτομορφισμών του V, έτσι ώστε $\rho_g\rho_h = \rho_{gh}$.

Ορισμός 2.2.5 : Έστω M μια πολλαπλότητα και G μια ομάδα Lie. Μια (αριστερή) **δράση** της G στην M είναι μια λεία απεικόνιση $\varphi : G\times M\rightarrow M$ τέτοια ώστε :

i) $\varphi(1_G, x)=x$ για κάθε $x\in M$

ii) $\varphi(g, \varphi(h, x))=\varphi(gh, x)$ για κάθε $g, h\in G$ και $x\in M$.

Για κάθε $g\in G$ ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi_g : M\rightarrow M$ $\varphi_g(x)=\varphi(g, x)$.

Παράδειγμα 1 : Έστω η $GL(n, \mathbb{R})$ θεωρούμενη ως η ομάδα Lie και έστω $\mathbb{R}^n$ η θεωρούμενη πολλαπλότητα.

Έστω $x\in\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση φ με τύπο $\varphi(A, x)=(detA)x$ είναι δράση της $GL(n, \mathbb{R})$ πάνω στο $\mathbb{R}^n$ διότι:

$$\varphi(I, x)=(detI)x=x$$

$$\varphi(A, \varphi(B, x))=detA(detB\,x)=det(AB)x=\varphi(AB, x)$$

καθόσον $detA\,detB=det(AB)$.

Παρακάτω ορίζουμε κάποιες βασικές δράσεις μιας ομάδας Lie στον εαυτό της.

Αριστερή δράση: Συμβολίζεται με $L_g : G\rightarrow G$ και ορίζεται ως $L_g(h)=gh$.

Δεξιά δράση: Συμβολίζεται με $R_g : G\rightarrow G$ και ορίζεται ως $R_g(h)=hg^{-1}$.

Συζυγής δράση: Συμβολίζεται με $Adj_g : G\rightarrow G$ και ορίζεται ως $Adj_g(h)=ghg^{-1}$.

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η αριστερή και η δεξιά δράση είναι μεταβατικές. Επίσης, εύκολα φαίνεται ότι $Adj_g=L_g R_g$.

Μια σημαντική έννοια στη μελέτη της θεωρίας των ομάδων και των αλγεβρών Lie είναι η έννοια του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου.

Έστω G μια ομάδα Lie και έστω L_g η αριστερή δράση της.

Η παράγωγος $(L_g)_*$ της L_g σε ένα σημείο h θα είναι μια γραμμική απεικόνιση από το $T_h(G)$ στο $T_{gh}(G)$. Ένα διανυσματικό πεδίο θα ονομάζεται αριστερά αναλλοίωτο, εάν για το X ισχύει :

$$(L_g)_*(X_h) = X_{gh}$$

Δηλαδή, για ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X ισχύει ότι η επαγόμενη απεικόνιση της αριστερής δράσης ενός στοιχείου $g \in G$ στο X_h είναι ίση με το X_{gh}, δηλαδή την απεικόνιση του gh μέσω του X. Μία σχηματική επεξήγηση του παρακάτω είναι η ακόλουθη.

$$\begin{tikzcd}
T_hG \arrow[r, "(L_g)_*"] & T_hG \\
G \arrow[u, "X_h"] \arrow[r, "L_g"'] & G \arrow[u, "X_h"']
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 3

2.3 Ομάδες πινάκων Lie

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζεται η έννοια της ομάδας πινάκων Lie. Όπως θα δειχθεί παρακάτω, οι ομάδες πινάκων Lie αποτελούν ομάδες Lie, αν και αρχικά μελετώνται αυτόνομα.

Ορισμός 2.3.1 : Μια τοπολογική ομάδα ονομάζεται **ομάδα πινάκων Lie**, εάν είναι ομοιομορφική με μια κλειστή υποομάδα κάποιας ομάδας Lie του τύπου $GL(n, \mathbb{R})$ ή $GL(n, \mathbb{C})$ (βλέπε [4] της βιβλιογραφίας).

Παρατήρηση: Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν ως ομάδες πινάκων Lie κάποιες από τις υποομάδες Lie του $GL(n, \mathbb{R})$.

Ένας άλλος ορισμός, που δίνεται συχνά για τις ομάδες πινάκων Lie είναι ο εξής:

Ορισμός 2.3.2: Μια ομάδα πινάκων Lie είναι ένα υποσύνολο G του $GL(n,\mathbb{C})$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Εάν A_m είναι μια ακολουθία πινάκων στο G και η A_m συγκλίνει σε κάποιον πίνακα A, τότε ή $A \in G$ ή ο A είναι μη αντιστρέψιμος (βλέπε [2] της βιβλιογραφίας).

Γενικά οι ομάδες πινάκων Lie είναι οι πιο συχνά εμφανιζόμενες ομάδες Lie στις διάφορες εφαρμογές.

Μάλιστα, λόγω ενός σημαντικού θεωρήματος που διατυπώθηκε από τους **Ado** και **Iwasawa** τα αποτελέσματα που ισχύουν για μια ομάδα πινάκων Lie έχουν το αντίστοιχό τους και στις γενικές γραμμικές ομάδες Lie.

Εδώ παραθέτουμε (χωρίς περαιτέρω ανάλυση) κάποια απλά παραδείγματα ομάδων πινάκων Lie).

Παράδειγμα 1

Έστω A_n η πολλαπλασιαστική ομάδα όλων των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο.

Παράδειγμα 2

Έστω N_n η πολλαπλασιαστική ομάδα όλων των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με διαγώνια στοιχεία ίσα με την μονάδα.

Παράδειγμα 3

Για διάσταση 2 μόνο έστω $C^{*} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} / a^2 + b^2 > 0 \, , a \, , b \in \mathbb{R} \right\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παράδειγμα 4

Έστω $GL(n,\mathbb{R})^{+}=\{A\in GL(n,\mathbb{R})/det(A)>0\}$ η υποομάδα δηλαδή του $GL(n,\mathbb{R})$, για την οποία οι πίνακες έχουν θετική ορίζουσα.

Παράδειγμα 5

$GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C})$ **, γενικές γραμμικές ομάδες**

$SL(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R})/det(A)=1\}$

$SL(n,\mathbb{C})=\{A\in GL(n,\mathbb{C})/det(A)=1\}$ **, ειδικές γραμμικές ομάδες**

$O(n,\mathbb{R})=\{A\in GL(n,\mathbb{R})/A^{T}A=I_{n}\}$ **, ορθογώνια ομάδα**

$SO(n,\mathbb{R})=\{A\in O(n)/det(A)=1\}$ **, ειδική ορθογώνια ομάδα**

$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C})/A^{*}A=I_{n}\}$ **, ορθομοναδιαία ομάδα**

$SU(n)=\{A\in U(n)/det(A)=1\}$ **, ειδική ορθομοναδιαία ομάδα**

Στη βιβλιογραφία, οι παραπάνω ομάδες αναφέρονται ως κλασικές ομάδες πινάκων ή κλασικές ομάδες Lie. Οι τελευταίες δύο ομάδες αποτελούν τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες ομάδες στην Φυσική. Για τις αναλυτικές αποδείξεις του οτι οι παραπάνω ομάδες αποτελούν ομαδες πινάκων Lie, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο [2] της βιβλιογραφίας.

Παράδειγμα 6

Η ομάδα Heisenberg *H*

Το σύνολο όλων των 3×3 πραγματικών πινάκων *A* της μορφής :

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

με $a,b,c\in\mathbb{R}$ ονομάζεται ομάδα Heisenberg. Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι το γινόμενο δυο πινάκων αυτής της μορφής δίνει πίνακα αυτής της μορφής. Ακόμη ο αντίστροφος A^{-1} ενός τέτοιου πίνακα *A* είναι της μορφής :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Άρα το *H* είναι υποομάδα του $GL(3,\mathbb{R})$. Ακόμη αποδεικνύεται ότι όριο πινάκων της παραπάνω μορφής δίνει πίνακα τέτοιας μορφής άρα η *H* είναι ομάδα πινάκων Lie.

Παράδειγμα 7

Οι γενικευμένες ορθογώνιες ομάδες και οι ομάδες Lorentz

Έστω *h* και *k* θετικοί ακέραιοι. Ας θεωρήσουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή στο $\mathbb{R}^{n+k}$ από τον τύπο $[x, y]_{n,k} = x_1y_1+...+x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} - ... - x_{n+k}y_{n+k}$,

Έστω το σύνολο των $(n+k)\times(n+k)$ πραγματικών πινάκων *A* για το οποίο ισχύει: $[Ax, Ay]_{n,k} = [x,y]_{n,k}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^{(n+\kappa)}$. Η ομάδα αυτή αποτελεί υποομάδα του $GL(n+\kappa, \mathbb{R})$ και αποδεικνύεται ότι είναι ομάδα πινάκων Lie.

Εάν *A* είναι ένας $(n+k)\times(n+k)$ πραγματικός πίνακας ορίζουμε ως $A^{(i)}$ την *i*-οστή στήλη διάνυσμα του *A*:

$$A = \begin{bmatrix} A_{(1,i)} \\ . \\ . \\ . \\ A_{(n+k,i)} \end{bmatrix}$$

θα λέμε ότι ο *A* ανήκει στην ομάδα *O(n, k)* εάν ισχύουν τα παρακάτω:

$$[A^{(l)}, A^{(j)}]_{n,k} = 0 \quad \text{για} \quad l \neq j$$

$$[A^{(l)}, A^{(l)}]_{n,k} = 1 \quad \text{για} \quad 1 \leq l \leq n$$

$$[A^{(l)}, A^{(l)}]_{n,k} = -1 \quad \text{για} \quad n+1 \leq l \leq n+k$$

Έστω *B* ένας $(n+k)\times(n+k)$ διαγώνιος πίνακας με μονάδες στις πρώτες ή διαγώνιες θέσεις και *-1* στις τελευταίες *k*. Τότε ο A είναι στην *O(n, k)* εάν και μόνον εάν $A^{tr}BA = B$.

Παίρνοντας ορίζουσες στην προηγούμενη σχέση προκύπτει :

$$(det(A))^2 detB = detB \text{ άρα } (det(A))^2 = 1$$

Άρα, για $A \in O(n, k)$ $\quad det(A) = \pm 1$.

Μεγάλο ενδιαφέρον στη Φυσική έχει η ομάδα Lorentz *O(3,1)*.

Παράδειγμα 8

Ευκλείδειες Ομάδες και ομάδες Poincare

Μια άλλη σημαντική κατηγορία ομάδων πινάκων Lie είναι οι **Ευκλείδειες ομάδες *E(n)*** και οι **ομάδες Poincare *P(n,1)***.

Η Ευκλείδεια ομάδα *E(n)* είναι εξ ορισμού η ομάδα όλων των *1-1* απεικονίσεων $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που διατηρούν την απόσταση δηλαδή *d(f(x), f(y)) = d(x, y)* για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ όπου με *d* εννοείται η συνήθης μετρική στον $\mathbb{R}^n$.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε θεωρήσει καμία ιδιότητα της f εκτός από την παραπάνω. Μπορεί η f να μην είναι καν γραμμική. Η ορθογώνια ομάδα, επειδή διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο (αφού $< x, y > = < Ax, Ay >$), αποτελεί υποομάδα του $E(n)$ και είναι η ομάδα όλων των γραμμικών μετασχηματισμών από το $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, που διατηρούν την απόσταση.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται η μεταφορά κατά x, $T_x(y) = x+y$. Το σύνολο αυτό αποτελεί επίσης υποομάδα του $E(n)$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε στοιχείο T της $E(n)$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στην μορφή $T = T_x \circ R$ (θα το συμβολίζουμε με T_xR) με $x \in \mathbb{R}^n$ και $R \in O(n)$.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ και $S \in O(n)$, έτσι ώστε $T_xR = T_yS \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad T_x^{-1} T_y S = T_x^{-1} T_x R \quad \Rightarrow \quad T_x^{-1} T_y S = R \quad \Rightarrow \quad T_x^{-1} T_y S(0) = R(0) \ .$$

Όμως, $S(0) = R(0) = 0$ λόγω του ότι η S και S' είναι γραμμικές.

Η απεικόνιση $T_x^{-1} T_y$ είναι μεταφορά, άρα $T_x^{-1} T_y = 0$ οπότε $T_x^{-1} T_y = I$ (ταυτοτική απεικόνιση). Άρα $T_x = T_y$, επομένως $T_xR = T_yR$, $T_xR = T_xS \Rightarrow T_x^{-1} T_x R = T_x^{-1} T_x S$

$\Rightarrow R = S$.

Θα γράφουμε κάθε στοιχείο $T = T_xR$ του $E(n)$ στη μορφή $\{x, R\}$.

Έτσι, αν $y \in \mathbb{R}^n$ $\{x, R\}\, y = Ry + x$.

Ακόμη, $\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\}y = R_1 (R_2 y + x_2) + x_1 = R_1R_2 y + (x_1 + R_1 x_2)$.

Έτσι, ορίζουμε ως πράξη της $E(n)$ την : $\{X_1 , R_1\} \{X_2 , R_2\} = \{X_1 + R_1 x_2, R_1R_2\}$

Το αντίστροφο ενός στοιχείου δίνεται απο: $\{x, R^{-1}\} = \{-R^{-1}x , R^{-1}\}$

Όπως αναφέρθηκε η $E(n)$ δεν είναι υποομάδα του $GL(n, \mathbb{R})$ ούτε ομάδα πινάκων Lie με την κλασική έννοια. Όμως η $E(n)$ είναι ισομορφική με μια υποομάδα του $GL(n+1, \mathbb{R})$ δια μέσου της απεικόνισης που αντιστοιχίζει το $\{x, R\} \in E(n)$ στον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{bmatrix} & x_1 \\ R & .. \\ & x_n \\ 0..0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι τα στοιχεία της παραπάνω μορφής αποτελούν ομάδα πινάκων Lie με την κλασική έννοια.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται και η ομάδα Poincare $P(n,1)$. Η $P(n,1)$ είναι η ομάδα όλων των μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^{n+1}$ της μορφής $T_x A$ με $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ και $A \in O(n,1)$.

Τα στοιχεία της ομάδας αυτής είναι ουσιαστικά οι αφφινικοί μετασχηματισμοί (δηλαδή οι απεικονίσεις της μορφής $x \rightarrow Ax+b$ με *A* πίνακα $n \times n$ γραμμική απεικόνιση και b σταθερά) του $\mathbb{R}^{n+1}$,

που διατηρούν την μετρική Lorentz $d_L(x,y)=(x_1-y_1)^2+....+(x_n-y_n)^2-(x_{n+1}-y_{n+1})^2$.

Η πράξη της ομάδας Poincare ορίζεται κατά αναλογία με την πράξη της Ευκλείδειας ομάδας.

Η ομάδα Poincare *P(n,1)* είναι ισομορφική με την ομάδα των πινάκων διάστασης $(n+2)\times(n+2)$ της μορφής:

$$\begin{bmatrix} A & \begin{matrix} x_1 \\ .. \\ x_{n+1} \end{matrix} \\ 0..0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούνται μιγαδικές ομάδες πινάκων Lie, υποσύνολο δηλαδή του $GL(n,\mathbb{C})$.

Παρόλα αυτά, αν και ίσως πιο βολικές στη χρήση τους, οι μιγαδικές ομάδες Lie δεν προσφέρουν κάτι καινούργιο στη γενική θεωρία.

Πράγματι, εάν γράψουμε ένα μιγαδικό πίνακα $n \times n$ *A+Bi* (όπου A και B είναι $n \times n$ πραγματικοί πίνακες) στη μορφή $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ έχουμε μια εμβάπτιση του $GL(n,\mathbb{C})$ σε μια κλειστή υποπολλαπλότητα του $GL(2\mathrm{n},\mathbb{R})$.

Η θεωρία των ομάδων πινάκων Lie παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των συμμετριών και κατ' επέκταση στη Φυσική, που μελετά τις συμμετρίες διαφόρων φυσικών συστημάτων (μακροσκοπικών και μικροσκοπικών).

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι κάποιες από τις ομάδες πινάκων, που αναφέρθηκαν στα παραπάνω παραδείγματα και θεωρήθηκαν ως ομάδες Lie, αποτελούν όντως ομάδες Lie.

2.4 Η εκθετική και λογαριθμική απεικόνιση για πίνακες

Η εκθετική απεικόνιση για πίνακες (σε αναλογία με την εκθετική απεικόνιση για πραγματικούς αριθμούς) ορίζεται ως :

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k / k!$$

Είναι γνωστό ότι αυτή η σειρά συγκλίνει και ορίζει μια αναλυτική απεικόνιση από το *GL(n,K)* στον εαυτό του, όπου με *GL(n, K)* συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από *K* (το *K* μπορεί να είναι το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{R}$) , ανάλογα με το αν μας ενδιαφέρουν οι πραγματικές ή οι μιγαδικές ομάδες πινάκων Lie.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τη λογαριθμική απεικόνιση με :

$$\log(1+X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} X^k / k$$

, η οποία αποτελεί και αυτή αναλυτική απεικόνιση σε μια ορισμένη γειτονιά του $1 \in GL(n, K)$.

Στο συνέχεια, αναφέρονται κάποιες προτάσεις αρχικά για την εκθετική και στη συνέχεια για τη λογαριθμική απεικόνιση.

Κάποιες ιδιότητες αποτελούν γενίκευση της εκθετικής και λογαριθμικής απεικόνισης για πραγματικούς αριθμούς, υπάρχουν όμως και διαφορές καθ΄ ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών δεν είναι αντιμεταθετικός.

Το θεώρημα αφορά πίνακες και με πραγματικά και με μιγαδικά στοιχεία.

Θεώρημα 2.4.1 :

Έστω *X* και *Y* αυθαίρετοι πίνακες $n \times n$. Τότε:

1) $exp(0) = I$

2) $(expX)^* = exp(X^*)$

3) Ο *expX* θα είναι αντιστρέψιμος , εάν $(expX)^{-1} = exp(-X)$

4) $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X}e^{\beta X}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

5) Εάν $XY = YX$, τότε $exp(X+Y) = expXexpY = expYexpX$

6) Εάν *C* αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $exp(CXC^{-1}) = Cexp(X)C^{-1}$

7) $\|expX\| \leq \exp\|X\|$

Απόδειξη

Τα (1) και (2) αποδεικνύονται παίρνοντας τους συζυγείς των όρων της σειράς *expX*.

Τα (3) και (4) αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (5).

Για την απόδειξη του (5) πολλαπλασιάζουμε τις δυναμοσειρές όρο προς όρο.

Έτσι: $\exp(X)\exp(Y)=(I+X+\frac{X^2}{2!}+...)(I+Y+\frac{Y^2}{2!}+...)$ και κάνοντας τις πράξεις,

$$\exp(X)\exp(Y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{X^k Y^{m-k}}{k!(m-k)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}X^k Y^{m-k} \quad .$$

Λόγω της αντιμετάθεσης των X και Y

$$(X+Y)^m=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}X^k Y^{m-k}$$

άρα

$$\exp(X)\exp(Y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(X+Y)^m=\exp(X+Y) \quad .$$

Για τη απόδειξη της (6) $(CXC^{-1})^m=CX^mC^{-1}$.

Το (7) αποδεικνύεται με τη χρήση της συνέχειας της e^X και λόγω του ότι συγκλίνει στη σειρά. □

Πρόταση 2.4.2 :

Έστω X $n\times n$ μιγαδικός πίνακας . Τότε, το e^{tX} είναι λεία απεικόνιση στο $M_n(\mathbb{C})$ και

$$\frac{de^{tX}}{dt}=Xe^{tX}=e^{tX}X \quad . \text{ Πιο συγκεκριμένα } \quad \frac{de^{tX}}{dt}\Big|_{t=0}=X \quad .$$

Ο υπολογισμός της εκθετικής απεικόνισης ενός πίνακα αποτελεί σημαντικό εργαλείο στη θεωρία των ομάδων και αλγεβρών πινάκων Lie.

Στη συνέχεια, ακολουθεί ο υπολογισμός των εκθετικών απεικονίσεων για ορισμένες κατηγορίες πινάκων.

Περίπτωση 1

Ο X είναι διαγωνοποιήσιμος

Έστω $n\times n$ διαγωνοποιήσιμος πίνακας (στο $\mathbb{C}$) , τότε υπάρχει C μιγαδικός πίνακας, έτσι ώστε $X = CDC^{-1}$ και

$$C=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Τότε, ο e^D είναι διαγώνιος και σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.1

$$e^X = C\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}C^{-1}$$

Άρα εάν διαγωνοποιείται ο *X*, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον *expX*. Πρέπει να σημειωθεί ότι εάν ο *X* είναι πραγματικός, τότε αν και ο *C* μπορεί να είναι μιγαδικός και τα λ_κ μιγαδικοί, ο *expX* πρέπει να είναι πραγματικός.

Για παράδειγμα

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε τα ιδιοδιανύσματα του *X* είναι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

με ιδιοτιμές $-i\alpha$ και $i\alpha$ αντίστοιχα. Άρα ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$C=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$e^X=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Περίπτωση 2

Ο *X* είναι μηδενοδύναμος

Έστω *X* πίνακας μηδενοδύναμος, δηλαδή $X^m = 0$ για $m > 0$. Επειδή για $l > m$ $X^l = 0$, τότε οι όροι της σειράς που ορίζει την *expX* τερματίζει μετά τους πρώτους *m* όρους.

Έστω

$$X=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $X^3=0$

άρα $$expX = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & (b+1/2\alpha c) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Περίπτωση 3

Ο X είναι αυθαίρετος πίνακας

Παρότι ένας αυθαίρετος πίνακας X μπορεί να μην είναι ούτε διαγωνοποιήσιμος ούτε μηδενοδύναμος, σύμφωνα με θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας μπορεί να γραφεί με τη μορφή $X = S+N$, με S διαγωνοποιήσιμο, N μηδενοδύναμο και $SN = NS$.

'Αρα $expX = exp(S+N) = exp(S)exp(N)$, και κάθε παράγοντας μπορεί να υπολογιστεί σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Για παράδειγμα έστω : $$X = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Τότε, $$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι δύο όροι υπολογίζονται εύκολα (καθώς ο πρώτος όρος είναι ένα πολλαπλάσιο του μοναδιαίου) και επομένως :

$$e^X = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha b \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix}$$

Πρόταση 2.4.3:

Η συνάρτηση :

$$logA = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)} \frac{(A-I)^m}{m}$$

ορίζεται και είναι συνεχής στο σύνολο όλων των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων A με $\|A-I\| < 1$.

Για κάθε *A* με $\|A-I\|<1$, *exp(logA) = A*.

Για κάθε *X* με $\|X\|<log2$, $\|e^X-I\|<1$ και $log(exp(X))=X$.

Πρόταση 2.4.4: Υπάρχει μια σταθερά *c*, έτσι ώστε για όλους τους $n\times n$ πίνακες *B* με $\|B\|<1/2$ να ισχύει:

$$\|\log(I+B)-B\|\leq c\|B\|^2 \quad \text{(όπου} \quad \|B\|=(\textstyle\sum_{k,l=1}^{n}|B_{kl}|^2)^{1/2} \text{).}$$

Απόδειξη

Ισχύει από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης ότι:

$$\log(I+B)-B=\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^m}{m}=B^2\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{B^{m-2}}{m}$$

έτσι ώστε : $\|\log(I+B)-B\|\leq\|B\|^2\sum_{m=2}^{\infty}[\frac{(1/2)^{m-2}}{m}]$, που είναι το ζητούμενο, αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη σειρά συγκλίνει. □

Θεώρημα 2.4.5: **(Τύπος Γινομένου Lie)**

Έστω *X* και *Y* δυο $n\times n$ πίνακες, τότε :

$$\exp(X+Y)=\lim(\exp(\frac{X}{m})+\exp(\frac{Y}{m}))^m \quad \text{του} \quad m\rightarrow +\infty$$

Απόδειξη

Εάν πολλαπλασιάσουμε τα αναπτύγματα υπό μορφή σειράς για το $\exp(\frac{X}{m})$ και $\exp(\frac{Y}{m})$ όλοι οι όροι θα περιλαμβάνουν το $\frac{1}{m^2}$ ή μεγαλύτερες δυνάμεις του $\frac{1}{m}$ εκτός από τρεις.

Έτσι το γινόμενό τους μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\exp\frac{(X)}{m}\exp(\frac{Y}{m})=I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2}) \quad \text{Επειδή , όταν} \quad m\rightarrow+\infty$$

$$\exp\frac{(X)}{m}\exp(\frac{Y}{m})=I \quad \text{(αφού} \quad \frac{X}{m}\rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \frac{Y}{m}\rightarrow 0 \text{)}$$

για κάποιο αρκετά μεγάλο m το $\exp\frac{(X)}{m}\exp(\frac{Y}{m})$ θα βρίσκεται στο πεδίο ορισμού του λογαρίθμου, έτσι από την παραπάνω πρόταση 2.4.4 προκύπτει:

$$\log(\exp(\frac{X}{m})\exp(\frac{Y}{m}))=\log(I+\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})) =$$

$$= \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\left\|\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2})\right\|^2) = \frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2}) .$$

Μια *"εκθετοποίηση"* του λογαρίθμου δίνει:

$$\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m}=\exp(\frac{X}{m}+\frac{Y}{m}+O(\frac{1}{m^2}))$$

και άρα: $$(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m})^m=\exp(X+Y+O(\frac{1}{m}))$$

και λόγω του ότι η εκθετική απεικόνιση είναι συνεχής έχουμε :

$$\lim(\exp\frac{X}{m}\exp\frac{Y}{m})^m=\exp(X+Y) \text{ όταν } m\to+\infty .$$ □

2.5 Η Εκθετική απεικόνιση αφηρημένων ομάδων Lie

Εδώ παρουσιάζεται μια γενίκευση της εκθετικής απεικόνισης, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των γενικών ομάδων Lie, αλλά και των ομάδων πινάκων Lie , όπως θα δούμε παρακάτω.

Η εκθετική απεικόνιση είναι μια συνάρτηση από τον εφαπτόμενο χώρο στη μονάδα της ομάδας Lie στην ίδια την ομάδα.

Η απουσία πολλαπλασιασμού στον εφαπτόμενο χώρο αποκλείει τη χρήση δυναμοσειρών για τον ορισμό της εκθετικής απεικόνισης.

Παρόλα αυτά, όπως θα δειχτεί παρακάτω υπάρχει τρόπος να οριστεί η εκθετική απεικόνιση με πιο αφηρημένο τροπο και τα αποτελέσματα της θεωρίας να ισχύουν και στις ομάδες πινάκων Lie.

Πρόταση 2.5.1 Έστω G ομάδα Lie και $g = T_I G$ και $x\in g$. Τότε υπάρχει ομομορφισμός ομάδων Lie $\gamma_x:\mathbb{R}\to G$, έτσι ώστε $\overset{\circ}{\gamma}_x(0)=x$ (όπου η τελεία σημαίνει παραγώγιση ως προς t).

Η απεικόνιση γ_x θα ονομάζεται η μονοπαραμετρική υποομάδα που αντιστοιχεί στο x. Για την παραπάνω πρόταση δεν θα δοθεί απόδειξη, διότι ειναι πολυ προχωρημένη (βλέπε βιβλίο [14] της βιβλιογραφίας).

Ορισμός 2.5.1 Έστω *G* ομάδα Lie και $g = T_I G$, τότε ως εκθετική απεικόνιση ορίζουμε $\exp : g \to G$ $\exp(x) = \gamma_x(1)$ όπου $\gamma_x(t)$ είναι η μονοπαραμετρική ομάδα με εφαπτόμενο διάνυσμα ίσο με το x.

Δηλαδή, η εκθετική απεικόνιση απεικονίζει ένα στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου στη μονάδα (δηλαδή ουσιαστικά μια καμπύλη για την οποία ισχύει $\gamma(0)=1$) σε ένα στοιχείο της *G*, το οποίο ορίζεται μέσω της $\gamma_x : \mathbb{R} \to G$ και είναι το $\gamma_x(1)$.

Παραδείγματα:

1) Αν $G=\mathbb{R}$ τότε $g=\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha \in g$ η μονοπαραμετρική υποομάδα που αναφέρεται στο *α* είναι η $\gamma_\alpha(t)=t\alpha$. Άρα *exp(α) = α.*

2) Έστω $G=S^1=\{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$. Τότε $g=\mathbb{R}$ και $\exp(\alpha)=e^{2\pi i\alpha}$.

Κάποια άλλα παραδείγματα αποτελούν οι εκθετικές απεικονίσεις, που αφορούν ομάδες πινάκων Lie και παρουσιάστηκαν σε προηγούμενη παράγραφο.

Για την εκθετική απεικόνιση μιας αφηρημένης ομάδας Lie ισχύουν κάποιες ιδιότητες σε αντιστοιχία όπως και για εκθετική απεικόνιση μιας ομάδας πινάκων Lie:

για $x \in g$ και $t, s \in \mathbb{R}$

1) $exp(t+s)x=exp(tx)exp(sx)$

2) $exp(x^{-1})=(exp(x))^{-1}$

2.6 Συνεκτικότητα και συμπάγεια στις ομάδες πινάκων Lie

Δύο πολύ σημαντικές έννοιες για τις ομάδες πινάκων Lie από τοπολογικής άποψης είναι η συμπάγεια και συνεκτικότητα.

2.6.1 Συμπάγεια

Ορισμός 2.6.1: Μια ομάδα πινάκων Lie G λέμε ότι είναι **συμπαγής**, εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω δυο συνθήκες :

1) Εάν A_m είναι μια ακολουθία πινάκων G και η A_m συγκλίνει σε ένα πίνακα A, τότε ο A ανήκει στην G.

2) Υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $A \in G$, $|A_{ij}| \leq C$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω ορισμός δεν συμπίπτει με τον κλασικό τοπολογικό ορισμό της συμπάγειας.

Όμως το σύνολο $M_n(\mathbb{C})$ όλων των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων μπορεί να θεωρηθεί ως *"ισομορφικό"* με το $\mathbb{C}^{n^2}$.

Ένα επακόλουθο του παραπάνω ορισμού είναι ότι η G είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι ένα κλειστό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}^{n^2}$.

Κάποια παραδείγματα συμπαγών ομάδων Lie αποτελούν οι ομάδες *O(n)* και *SO(n).*

Η πρώτη ιδιότητα του ορισμού ικανοποιείται, διότι το όριο ακολουθιών ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και το όριο ακολουθιών πινάκων μοναδιαίας ορίζουσας είναι πίνακας μοναδιαίας ορίζουσας.

Η δεύτερη ιδιότητα ικανοποιείται, διότι εάν ο Α είναι ορθογώνιος, τότε τα διανύσματα στήλης του *A* έχουν νόρμα *1* και άρα $|A_{kl}| \leq 1$ για όλα τα $1 \leq k, l \leq n$.

Κάποιες ομάδες Lie, που δεν είναι συμπαγείς είναι οι ομάδες $GL(n, \mathbb{R})$ και $GL(n, \mathbb{C})$, διότι παραβιάζεται η πρώτη απαίτηση του ορισμού, αφού όριο αντιστρέψιμων πινάκων μπορεί να είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας.

2.6.2 Συνεκτικότητα

Παρακάτω δίνεται ο ορισμός για το πότε μια ομάδα πινάκων Lie είναι συνεκτική. Ο ορισμός αυτός είναι παρόμοιος με τον κλασικό τοπολογικό ορισμό της δρομοσυνεκτικότητας.

Ορισμός 2.6.2.1: Μια ομάδα πινάκων Lie λέγεται συνεκτική, εάν για κάθε δυο πίνακες *A* και *B,* που ανήκουν στην *G* υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση - δρόμος *f(t)* $a \leq t \leq b$, η οποία έχει τιμές στο *G* και *f(a) = A* και *f(b) = B.*

Μια ομάδα πινάκων Lie, που είναι μη συνεκτική, μπορεί να διαμερισθεί σε μια ένωση πολλών συνεκτικών συνόλων του, έτσι ώστε κάθε δυο στοιχεία διαφορετικών συνόλων να μην μπορούν να ενωθούν κατά αυτόν τον τρόπο.

Κάποια παραδείγματα συνεκτικών ομάδων πινάκων Lie αποτελούν η $GL(n,\mathbb{C})$, η $SL(n,\mathbb{C})$, η $U(n)$, η $SL(n,\mathbb{C})$, η $SU(n)$, αλλά όχι η $GL(n,\mathbb{R})$, όπως θα δειχτεί παρακάτω.

Πρόταση 2.6.2.1: Η ομάδα $GL(n,\mathbb{C})$ είναι συνεκτική για κάθε $n\geq 1$.

Απόδειξη

Έστω $n = 1$. Ένας 1×1 πίνακας αντιστρέψιμος και μιγαδικός είναι της μορφής $A = [\lambda]$ με $\lambda\in\mathbb{C}^*$.

Για κάθε δυο τέτοιους αριθμούς μπορούμε να βρούμε εύκολα μονοπάτι, που να τους ενώνει και να μην διέρχεται από το 0.

Για $n\geq 2$, θα δειχτεί ότι κάθε στοιχείο το $GL(n,\mathbb{C})$ μπορεί να ενωθεί μέσω ενός μονοπατιού με την μονάδα. Έτσι κάθε δυο στοιχεία θα ενώνονται μεταξύ τους λόγω της ένωσής τους με τη μονάδα.

Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας, ότι κάθε πίνακας είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Έτσι, για κάθε $n\times n$ μιγαδικό πίνακα A υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας C, έτσι ώστε $A = CBC^{-1}$ με τον B άνω τριγωνικό:

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \dots & \dots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Εάν υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε όλα τα λ_i πρέπει να είναι μη μηδενικά, αφού $detA = detB = \lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n$.

Έστω ο $B(t)$ η συνάρτηση, που προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε το άνω τριγωνικό μέρος του B με $(1-t)$ με t , $0\leq t\leq 1$ (εκτός της διαγωνίου).

Έστω $A(t) = CB(t)C^{-1}$. Τότε $A(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση μονοπάτι, που αρχίζει από το A και καταλήγει στο CDC^{-1} με :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση *A(t)* ανήκει στο $GL(n, \mathbb{C})$, αφού $detA(t) = \lambda_1 \lambda_2 .. \lambda_n = det(A)$.

Τώρα, όπως στην περίπτωση για *n =1* ορίζουμε $\lambda_i(t)$ τη συνάρτηση, που ενώνει κάθε λ_i με το 1 στο $\mathbb{C}^*$ καθώς το *t* πηγαίνει από το *1* στο *2*.

Έτσι η *A(t)* ορίζεται στο διάστημα $1 \le t \le 2$ με :

$$A(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \lambda_n(t) \end{pmatrix} C^{-1}$$

Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση δρόμος, που ξεκινά από το CDC^{-1} για κάθε *t = 1* και καταλήγει στο $I = CIC^{-1}$ για *t = 2*.

Αφού το $\lambda_\kappa(t)$ είναι μη μηδενικό, η *A(t)* ανήκει στο $GL(n, \mathbb{C})$ και άρα το ζητούμενο αποδείχτηκε. ☐

Πρόταση 2.6.2.2: Η ομάδα $SL(n, \mathbb{C})$ είναι συνεκτική για $n \ge 1$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Αρκεί όμως να διατηρηθεί η συνθήκη *detA =1*. Έστω *A* τυχαίο στοιχείο του $SL(n, \mathbb{C})$. Για *n =1* είναι τεριμμένη.

Για $n \ge 2$ ορίζουμε *A(t)* , όπως πριν $0 \le t \le 1$ με *A(0) = A* και $A(1) = CDC^{-1}$ αφού *detA(t) = detA=1*.

Τώρα ορίζουμε $\lambda_\kappa(t)$ όπως πριν με $1 \le \kappa \le n-1$ και $\lambda_n(t)$ να είναι ο αριθμός: $[\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_{n-1}(t)]^{-1}$ αφού $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$ και $\lambda_n(1) = 1$.

Αυτό επιτρέπει τη σύνδεση με την μονάδα παραμένοντας στο $SL(n, \mathbb{C})$. ☐

Πρόταση 2.6.2.3: Η ομάδα *U(n)* είναι συνεκτική για $n \ge 1$.

Απόδειξη

Από πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας, κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας έχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμές της μορφής $e^{i\theta}$.

Άρα, κάθε ορθομοναδιαίος πίνακας *U* γράφεται ως :

$$U = U_1 \begin{pmatrix} e^{(i\theta_1)} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & e^{(i\theta_n)} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

με U_1 ορθομοναδιαίο και $\theta_i \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής είναι ορθομοναδιαίος.

Ορίζουμε :

$$U(t) = U_1 \begin{pmatrix} e^{(i(1-t)\theta_1)} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & e^{(i(1-t)\theta_n)} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

Με το *t* να κινείται από το *0* στο *1* ορίζεται συνεχής συνάρτηση δρόμος στο *U(n)* που ενώνει το *U* με το *I*. Άρα, κάθε δυο στοιχεία του *U(n)* μπορούν να ενωθούν σύμφωνα με το προηγούμενο σκεπτικό. □

Πρόταση 2.6.2.4: Η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ είναι μη συνεκτική, αλλά αναλύεται σε δυο συνιστώσες, το $GL(n, \mathbb{R})^+$, δηλαδή το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με θετική ορίζουσα, και το $GL(n, \mathbb{R})^-$, δηλαδή το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με αρνητική ορίζουσα.

Απόδειξη

Το $GL(n, \mathbb{R})$ δεν μπορεί να είναι συνεκτικό, διότι εάν *det(A)>0* και *det(B)<0* , τότε κάθε συνεχής συνάρτηση που ενώνει το *A* με το *B* , θα περιλαμβάνει στοιχείο με ορίζουσα μηδέν.

Με παρόμοια επιχειρήματα με πριν βλέπουμε ότι το $GL(n, \mathbb{R})^+$ είναι συνεκτικό.

Εφόσον το $GL(n, \mathbb{R})^+$ είναι συνεκτικό, τότε το ίδιο ισχύει και με το $GL(n, \mathbb{R})^-$.

Πράγματι, έστω *C* πίνακας με αρνητική ορίζουσα και έστω *A, B* ανήκουν στο $GL(n, \mathbb{R})^-$.

Τότε $C^{-1}A$ και $C^{-1}B$ ανήκουν στο $GL(n, \mathbb{R})$ και ενώνονται από μια συνεχή συνάρτηση *D(t)* στο $GL(n, \mathbb{R})^+$.

Άρα το *CD(t)* είναι συνεχής συνάρτηση στο , $GL(n, \mathbb{R})^-$ που ενώνει το *A* και *B*. □

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας από ομάδες πινάκων Lie που αναφέρει το αν είναι συνεκτικές και το πόσες συνεκτικές συνιστώσες έχουν:

ΟΜΑΔΑ	ΣΥΝΕΚΤΙΚΗ	ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ
$GL(n, \mathbb{C})$	Ναι	1
$SL(n, \mathbb{C})$	Ναι	1
$GL(n, \mathbb{R})$	Όχι	2
$SL(n, \mathbb{R})$	Ναι	1
$O(n, \mathbb{R})$	Όχι	2
$SO(n, \mathbb{R})$	Ναι	1
$U(n)$	Ναι	1
$SU(n)$	Ναι	1
Heisenberg	Ναι	1
$E(n)$	Όχι	2
$P(n,1)$	Όχι	4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΛΓΕΒΡΕΣ Lie

Η άλγεβρα Lie είναι μια αλγεβρική δομή, η οποία χρησιμοποιείται για την μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων, όπως οι ομάδες Lie και οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες.
Ο όρος άλγεβρα Lie (προς τιμή του θεμελιωτή της θεωρίας, **Sophus Lie**) πρωτοχρησιμοποιήθηκε από τον Herman Weyl το 1930.
Σε παλιότερα κείμενα χρησιμοποιούνταν διαφορετικοί όροι.
Αν και πολλές φορές οι άλγεβρες Lie μελετώνται και μπορούν να οριστούν από μόνες τους, από ιστορικής πλευράς δημιουργήθηκαν για τη μελέτη των ομάδων Lie.
Έτσι, θα μπορούσαμε χωρίς μαθηματική αυστηρότητα να πούμε ότι μια άλγεβρα Lie που αντιστοιχεί σε μια ομάδα Lie *G* είναι ο διανυσματικός χώρος $g=T_1 G$ (δηλαδή ο εφαπτόμενος χώρος στη μονάδα).
Συνήθως, οι άλγεβρες Lie γράφονται με μικρά γράμματα, δηλαδή η Lie άλγεβρα της ομάδας Lie *SU(n)* γράφεται με *su(n).*
Ο συσχετισμός ανάμεσα στις άλγεβρες και τις ομάδες Lie γίνεται με την έννοια ότι ομομορφισμοί ομάδων Lie επεκτείνονται σε ομομορφισμούς αλγεβρών Lie. Αυτή η γενίκευση ικανοποιεί ορισμένες σημαντικές ιδιότητες, όπως το ότι απεικονίζει υποομάδες Lie σε υποάλγεβρες Lie, πυρήνες ομάδων Lie σε πυρήνες αλγεβρών Lie κ.ο.κ.

3.1 Γενικά - Ορισμοί

Ορισμός 3.1.1: Μια άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος *g* πάνω σε ένα σώμα *F* μαζί με μια απεικόνιση [. , .] *:* $g\times g\rightarrow g$, η οποία ονομάζεται **Lie bracket** και η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

1) $[ax+by, z]=a[x,z]+b[y,z]$ και
 $[z, ax+by]=a[z,x]+b[z,y]$ με $a,b\in F$ και $x,y,z\in g$
2) $[x,x]=0$ για κάθε $x\in g$
3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

για κάθε $x, y, z \in g$.
Η παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται **ταυτότητα Jacobi**.

Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν αντί για τη δεύτερη ιδιότητα την ισοδύναμη :

$$[x, y] = -[y, x]$$

Έαν το σώμα έχει χαρακτηριστική διάφορη του 2, τότε οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Πράγματι, έστω ότι $[x, y] = -[y, x]$, τότε $[x, x] = -[x, x] \Leftrightarrow 2[x, x] = 0$ και αφού η χαρακτηριστική του σώματος είναι δυο $[x, x] = 0$. Ακόμη έχουμε $[x+y, x+y] = 0 \Leftrightarrow [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = 0 \Leftrightarrow [y, x] = -[x, y]$

Πρέπει να τονιστεί ότι γενικά το Lie bracket δεν είναι επιμεριστικό ως πράξη με την έννοια ότι η ισότητα

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]]$$ δεν ισχύει πάντα.

Στη συνέχεια, δίνονται δυο παραδείγματα αλγεβρών Lie.

Παράδειγμα 1

Κάθε διανυσματικός χώρος V με το ταυτοτικό μηδενικό Lie bracket γίνεται άλγεβρα Lie. Τέτοιες άλγεβρες Lie λέγονται αβελιανές.

Παράδειγμα 2

Ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ με Lie bracket, που ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, δηλαδή $[x, y] = x \times y$ γίνεται μια τρισδιάστατη άλγεβρα Lie. Πράγματι, για $a, b \in \mathbb{R}$ και *x, y, z* διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ έχουμε για την πρώτη ιδιότητα :

$[ax+by, z] = (ax+by) \times z = ax \times z + by \times z = [ax, z] + [by, z]$ και

$[z, ax+by] = z \times (ax+by) = z \times ax + z \times by = [z, ax] + [z, by]$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι προφανής, ενώ για την τρίτη ιδιότητα ισχύει :

$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) =$

$= (xz)y - (xy)z + (yx)z - (yz)x + (zy)x - (zx)y = 0$

Κάποια άλλα παραδείγματα προκύπτουν από την κατηγορία των αλγεβρών Lie, που προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie.

Σε αντιστοιχία με τους ομομορφισμούς και τους ισομορφισμούς ομάδων Lie υπάρχουν οι ομομορφισμοί και ισομορφισμοί αλγεβρών Lie.

Ορισμός 3.1.2: Έστω A_1 και A_2 δυο άλγεβρες Lie. Ομομορφισμός αλγεβρών Lie είναι μια απεικόνιση $f: A_1 \to A_2$, η οποία είναι γραμμική απεικόνιση ανάμεσα στους διανυσματικούς χώρους A_1 και A_2 και διατηρεί το Lie bracket, δηλαδή για κάθε $A, B \in A_1$ $f([A, B]) = [f(A), f(B)]$.

Ορισμός 3.1.3: Ένας ισομορφισμός αλγεβρών Lie είναι μια $1 \to 1$ και επί συνάρτηση, που είναι και ομομορφισμός Lie αλγεβρών.

Με τη βοήθεια δυο αλγεβρών Lie μπορούμε να κατασκευάσουμε το ευθύ γινόμενό τους. Πράγματι, έστω g και g' δύο άλγεβρες Lie , τότε ορίζεται το ευθύ γινόμενο τους να είναι ο διανυσματικός χώρος $g \oplus g'$ των διατεταγμένων ζευγών *(x, x')* με $x \in g, x' \in g'$ και Lie bracket, που ορίζεται από την σχέση: $[(x, x'), (y, y')] = ([x, y], [x', y'])$ με $x, y \in g$ και $x', y' \in g'$.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, από τις διάφορες ομάδες Lie προκύπτουν διάφορες άλγεβρες Lie.

Ο ορισμός μιας αφηρημένης άλγεβρας Lie από μια αφηρημένη ομάδα Lie (δηλαδή από ομάδα Lie που δεν είναι ομάδα πινάκων) είναι αρκετά περίπλοκη διαδικασία και θα σκιαγραφηθεί στη συνέχεια.

Έστω T_1G ο εφαπτόμενος χώρος στη μονάδα μιας ομάδας Lie G. Για κάθε διάνυσμα $v \in T_1 G$ υπάρχει ένα μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που συμβολίζεται με X^v με την ιδιότητα $X_1^v = v$, το οποίο κατασκευάζεται από το :

$$X_g^v = (L_g)_*(v)$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι το συγκεκριμένο πεδίο είναι αριστερά αμετάβλητο και ότι κάθε αριστερά αμετάβλητο διανυσματικό πεδίο προκύπτει από τέτοια διαδικασία.

Ορισμός 3.1.4 Η άλγεβρα Lie g μιας ομάδας Lie G είναι ο εφαπτόμενος χώρος στην μονάδα με Lie bracket, που ορίζεται από τον τύπο :

$$[v, w] = [X^v, X^w]_1$$

3.2. Ιδεώδη

Σε αυτή την παράγραφο θα δοθεί ο ορισμός της υποάλγεβρας και του ιδεώδους μιας άλγεβρας Lie.

Αρχικά, θα παρατεθούν ορισμένες έννοιες από τη θεωρία δακτυλίων, για να γίνει η αντιστοίχιση ανάμεσα σε αυτό που ονομάζουμε γενικά ιδεώδες και ιδεώδες μιας άλγεβρας Lie.

Ορισμός 3.2.1 : Δακτύλιος $(R,+,\circ)$ είναι ένα σύνολο *R* εφοδιασμένο με δυο πράξεις $+: R\times R\to R$ και $\circ: R\times R\to R$, για το οποίο ισχύουν :

α) Το $(R,+)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα.

β) Για το $(R,\circ)$ ισχύει :

i) Για κάθε $a,b\in R$ $a\circ b\in R$

ii) Για *a, b, c* $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

γ) i) Για κάθε $a,b,c\in R$ $a\circ(b+c)=(a\circ b)+(a\circ c)$

ii)Για κάθε $a,b,c\in R$ $(a+b)\circ c=(a\circ c)+(b\circ c)$

Εάν επιπλέον υπάρχει ένα στοιχείο $1\in R$, ώστε για κάθε $a\in R$ $1\circ a=a\circ 1$ τότε η παραπάνω δομή ονομάζεται δακτύλιος με μονάδα.

Απλά παραδείγματα δακτυλίων αποτελούν το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με τη γνωστή πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, καθώς και το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ μαζί με το γνωστό πολλαπλασιασμό και πρόσθεση.

Παρακάτω, δίνεται ο ορισμός του ιδεώδους ενός δακτυλίου, το οποίο ουσιαστικά είναι ένα σύνολο, που αποτελεί προσθετική υποομάδα του *R* και *"απορροφά"* με τον πολλαπλασιασμό στοιχεία του *R* .

Ορισμός 3.2.2: Ένα υποσύνολο *I* ενός δακτυλίου *R* αποτελεί ένα ιδεώδες του *R,* εάν το *I* είναι υποομάδα ως προς την πρόσθεση και ισχύουν τα εξής:

i) $\forall x\in I$ και $\forall r\in R: xr\in I$

ii) $\forall x\in I$ και $\forall r\in R: rx\in I$

Ανάλογα με το ποια από τις δυο παραπάνω σχέσεις ικανοποιούν, ορίζονται στα δεξιά και αριστερά ιδεώδη του *R*.

Παρακάτω, δίνεται ο ορισμός μιας υποάλγεβρας και ενός ιδεώδους μιας άλγεβρας Lie.

Ορισμός 3.2.3 : Έστω *g* μια άλγεβρα Lie. Ένας υπόχωρος $h \subset g$ ονομάζεται υποάλγεβρα Lie, εάν είναι κλειστό σύνολο ως προς το Lie bracket, δηλαδή για κάθε $x, y \in h$ $[x, y] \in h$.

Ένας υπόχωρος $h \subset g$ ονομάζεται ιδεώδες, εάν για κάθε $x \in g$, $y \in h$ ισχύει ότι $[x, y] \in h$.

Δηλαδή, ένα ιδεώδες μιας άλγεβρας Lie *g* είναι ένα *"ιδεώδες"* κατά κάποιο τρόπο, που απορροφά τα στοιχεία *g* μέσω του Lie bracket, αφού για κάθε $x \in g$, $y \in h$, $[x, y] \in h$, όπως ένα ιδεώδες απορροφά τα στοιχεία ενός δακτυλίου με τον πολλαπλασιασμό.

Παρακάτω αναφέρεται χωρίς απόδειξη το εξής θεώρημα, το οποίο δείχνει ότι οι υποομάδες Lie ομάδων Lie οδηγούν σε υποάλγεβρες Lie αλγεβρών Lie.

Θεώρημα 3.2.1: Έστω *G* μια ομάδα Lie με Lie άλγεβρα *g*. Εάν *H* είναι η Lie υποομάδα της *G* με Lie άλγεβρα *h* , τότε η *h* είναι μια υποάλγεβρα Lie της *g*. Αντίθετα, για κάθε Lie υποάλγεβρα *h* της *G* υπάρχει μοναδική συνεκτική υποομάδα Lie *H* της *G*, της οποίας η Lie άλγεβρα είναι η *h*.

3.3 Η άλγεβρα Lie μιας ομάδας πινάκων Lie

Οι άλγεβρες Lie αποτελούν αναπόσπαστα εργαλεία για τη μελέτη των ομάδων πινάκων Lie.
Η πρακτικότητά τους οφείλεται στο ότι ουσιαστικά αποτελούν γραμμικούς χώρους και μπορούν να μελετηθούν με εργαλεία γραμμικής άλγεβρας.
Έτσι πολλά προβλήματα, που προκύπτουν στις ομάδες Lie, μπορούν να αντιμετωπιστούν θεωρώντας παρόμοια, αλλά απλούστερα, προβλήματα για τις αντίστοιχες Lie άλγεβρες.
Στην παρούσα παράγραφο θα μελετηθούν ορισμένες σχέσεις και θεωρήματα για τις άλγεβρες Lie, που προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie.

Κάποια από αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν και για αφηρημένες ομάδες Lie, όμως είναι ευκολότερη η κατανόησή τους με τη χρήση πινάκων.
Παρακάτω δίνεται ο ορισμός μιας άλγεβρας Lie, που προκύπτει από μια ομάδα πινάκων Lie.

Ορισμός 3.3.1: Έστω *G* μια ομάδα πινάκων Lie. Η Lie άλγεβρα της *G*, που θα συμβολίζεται με *g* είναι το σύνολο όλων των πινάκων *X,* έτσι ώστε ο πίνακας e^{tX} να ανήκει στην G για κάθε πραγματικό αριθμό *t*.

Στη συνέχεια, παρατίθενται κάποιοι ορισμοί και προτάσεις για την κατανόηση της άλγεβρας Lie ως μονοπαραμετρικής υποομάδας μιας ομάδας πινάκων.
Σε αντιστοιχία με τις μονοπαραμετρικές υποομάδες των αφηρημένων ομάδων Lie, ορίζονται και οι μονοπαραμετρικές υποομάδες πινάκων Lie.

Ορισμός 3.3.2: Μια συνάρτηση $A:\mathbb{R}\rightarrow GL(n,\mathbb{C})$ ονομάζεται μονοπαραμετρική υποομάδα του $GL(n,\mathbb{C})$, εάν :

1) Α είναι συνεχής.
2) $A(0)=I$.
3) $A(t+s)=A(t)A(s) \quad \forall \quad t,s\in\mathbb{R}$.

Μία πιο αφηρημένη διατύπωση απαιτεί μια μονοπαραμετρική υποομάδα να είναι ένας λείος ομομορφισμός $f:\mathbb{R}\rightarrow G$ με τις ιδιότητες $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(0)=1$ *και* $f(-t)=f(t)^{-1}$

Παράδειγμα: Η απεικόνιση $\gamma:\mathbb{R}\rightarrow GL(3,\mathbb{R})$ με τύπο:

$$\gamma(t)=\begin{bmatrix} cost & sint & 0 \\ -sint & cost & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

αποτελεί μια μονοπαραμετρική υποομάδα του $GL(3,\mathbb{R})$.

Θεώρημα 3.3.1: Εάν *A* είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα του $GL(n,\mathbb{C})$, τότε υπάρχει μοναδικός $n\times n$ μιγαδικός πίνακας *X*, έτσι ώστε $A(t)=e^{tX}$.

Απόδειξη

Η μοναδικότητα είναι προφανής. Πράγματι, εάν υπάρχει τέτοιος πίνακας *X*, τότε παραγωγίζοντας στο 0 έχουμε: $X = dA(t)/dt|_{t=0}$. Αρκεί να αποδειχτεί η ύπαρξη.

Έστω B_ε η ανοιχτή μπάλα ακτίνας ε με κέντρο το Ο στο $M_n(\mathbb{C})$ (το χώρο όλων των μιγαδικών πινάκων $n \times n$). Δηλαδή, $B_\varepsilon = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : \|X\| < \varepsilon\}$.

Έστω ότι $\varepsilon < log2$, έτσι η εκθετική απεικόνιση μεταφέρει τη B_ε στο $M_n(\mathbb{C})$ με συνεχή αντιστροφή τη λογαριθμική απεικόνιση *log*.

Έστω $U = \exp(B_{\varepsilon/2})$, το οποίο αποτελεί ανοιχτό σύνολο στο $GL(n, \mathbb{C})$.

Η συνέχεια της Α συνεπάγεται ότι υπάρχει $t_o > 0$, έτσι ώστε $A(t) \in U$ για κάθε $|t| \leq t_o$.

Έστω $X = (1/t_0)\log(A(t_o))$ έτσι $t_o X = \log(A(t_o))$, τότε $t_o X \in B_{\varepsilon/2}$ και $A(t_o) = \exp(t_o X)$ (αφού η λογαριθμική είναι η αντίστροφη της εκθετικής).

Τότε το $A(t_o/2)$ ανήκει στο *U* και $A(t_o/2)^2 = A(t_o)$.

Αποδεικνύεται ότι το $A(t_o)$ έχει μοναδική τετραγωνική ρίζα στο *U*, η οποία είναι η $\exp(t_o X/2)$.(βλέπε [2] της βιβλιογραφίας)

Άρα $A(t_o/2) = \exp(t_o X/2)$.

Εφαρμόζοντας το ίδιο σκεπτικό (διαιρώντας, δηλαδή, διαρκώς δια 2) έχουμε ότι:

$$A(t_o/2^k) = \exp(t_o X/2^k)$$

για κάθε θετικό ακέραιο *k*.

Άρα για κάθε ακέραιο *m* έχουμε :

$$A(mt_o/2^k) = A(t_0/2^k)^m = \exp(mt_o X/2^k)$$

Άρα $A(t) = \exp(tX)$ για κάθε πραγματικό *t* της μορφής $t = mt_o/2^k$.

Το σύνολο αυτών των *t* μπορεί να αποδειχτεί ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, και αφού $\exp(tX)$ και $A(t)$ είναι συνεχής έχουμε ότι $A(t) = \exp(tX)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Από όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι το *X* είναι στοιχείο της άλγεβρας Lie g , εάν και μόνον αν η μονοπαραμετρική ομάδα που παράγεται από το *X* ανήκει στο G .

Πρέπει να αναφερθεί ότι στον ορισμό δεν απαιτείται το *t* να είναι γενικά μιγαδικός, αλλά μόνο πραγματικός.

Ακόμη δεν αρκεί μόνο το e^X να ανήκει στο G αφού μπορεί να υπάρχουν πίνακες για τους οποίους $e^X \in G$ αλλά $e^{tX} \notin G$.

Ο ορισμός αυτής της παραγράφου φαινομενικά δεν έχει και πολλή σχέση με τον αυστηρό ορισμό της άλγεβρας Lie.
Μπορεί όμως να αποδειχτεί ότι η άλγεβρα Lie, που προκύπτει από αυτόν τον ορισμό είναι όντως μια άλγεβρα Lie και με τη γενική αφηρημένη έννοια.

3.4 Παραδείγματα αλγεβρών πινάκων Lie

Σε αυτή την παράγραφο θα δοθούν ορισμένα παραδείγματα αλγεβρών Lie, που προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie.

3.4.1 Οι γενικές γραμμικές ομάδες $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$

Για κάθε $n \times n$ μιγαδικό πίνακα X προκύπτει ότι ο e^{tX} είναι αντιστρέψιμος.
Έτσι η Lie άλγεβρα του $GL(n, \mathbb{C})$ είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών $n \times n$ πινάκων και συμβολίζεται με $gl(n, \mathbb{C})$.
Εάν ο X είναι ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας τότε και ο e^{tX} θα είναι αντιστρέψιμος και πραγματικός.
Ακόμη, εάν ο e^{tX} είναι πραγματικός για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε ο $X = de^{tX}/dt|_{t=0}$ θα είναι επίσης πραγματικός.
Άρα η άλγεβρα Lie του $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ένας χώρος όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και συμβολίζεται με $gl(n, \mathbb{R})$.

3.4.2 Οι ειδικές γραμμικές ομάδες $SL(n, \mathbb{R})$ και $SL(n, \mathbb{C})$

Σύμφωνα με γνωστή πρόταση της Γραμμικής άλγεβρας για την εκθετική απεικόνιση,

$$det(e^X) = e^{trace(X)}$$

Άρα, εάν $trace(X) = 0$ τότε $det(e^{tX}) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Αντίθετα, εάν X είναι ένας $n \times n$ πίνακας, ώστε $det(e^{tX}) = 1$ για κάθε t, τότε $e^{t\,trace(X)} = 1$ για κάθε t, κάτι που σημαίνει ότι το $t\ traceX$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$ για κάθε t, πράγμα που αληθεύει για $trace(X) = 0$.

Άρα η Lie άλγεβρα της $SL(n, \mathbb{C})$ είναι ο χώρος όλων των μιγαδικών πινάκων με ίχνος 0 και συμβολίζεται με $sl(n, \mathbb{C})$.

Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι η Lie άλγεβρα του $SL(n, \mathbb{R})$ είναι ο χώρος όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με ίχνος 0 και συμβολίζεται με $sl(n, \mathbb{R})$.

3.4.3 Οι ορθομοναδιαίες ομάδες

Ορθομοναδιαίος ονομάζεται ένας πίνακας, εάν και μόνο αν $U^* = U^{-1}$.

Άρα, για να είναι ο e^{tX} ορθομοναδιαίος, θα πρέπει: $(e^{tX})^* = (e^{tX})^{-1} = (e^{-tX})$

Από προηγούμενη πρόταση $(e^{tX})^* = e^{tX^*}$ και άρα $e^{tX^*} = e^{-tX}$.

Άρα, για να ισχύει η προηγούμενη ισότητα, θα πρέπει επαρκώς $X^* = -X$.

Αντίστροφα, εάν ισχύει διαφορίζοντάς την για $t = 0$ έχουμε ότι $X^* = -X$.

Άρα η Lie άλγεβρα του $U(n)$ είναι όλοι οι μιγαδικοί $n \times n$ πίνακες, για τους οποίους ισχύει $X^* = -X$ και συμβολίζεται με $U(n)$.

Συνδυάζοντας τα δυο παραπάνω αποτελέσματα, βλέπουμε ότι η Lie άλγεβρα της $SU(n)$ είναι ο χώρος όλων των των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων X έτσι ώστε $X^* = -X$ και $trace(X) = 0$ και συμβολίζεται με $su(n)$.

3.4.4 Οι ορθογώνιες ομάδες

Ένας $n \times n$ πίνακας R λέγεται **ορθογώνιος**, εάν $R^T = R^{-1}$. Έτσι, για κάποιον $n \times n$ πραγματικό πίνακα X ο e^{tX} θα είναι ορθογώνιος, εάν και μόνο εάν $(e^{tX})^T = (e^{tX})^{-1}$, δηλαδή $e^{tX^T} = e^{-tX}$.

Είναι προφανές ότι μια επαρκής συνθήκη, για να ισχύει η παραπάνω σχέση, είναι να ισχύει : $X^T = -X$.

Εάν για κάθε t ισχύει $e^{tX^T} = e^{-tX}$ με διαφόριση στο 0, τότε έχουμε $X^T = -X$. Και έτσι βλέπουμε ότι η Lie άλγεβρα ορθογώνιας ομάδας $O(n)$ είναι ο χώρος όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων, ώστε $X^T = -X$.

Να σημειωθεί ότι η συνθήκη $X^T = -X$ έχει ως αποτέλεσμα όλα τα διαγώνια στοιχεία του X να είναι μηδενικά και άρα το ίχνος του X να είναι 0.

3.5 Ιδιότητες των αλγεβρών Lie (που προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie)

Σε αυτή την παράγραφο δίνονται ορισμένες προτάσεις, που ισχύουν για τις άλγεβρες Lie, οι οποίες προκύπτουν από ομάδες πινάκων Lie. Αυτές οι προτάσεις έχουν τα αντίστοιχά τους και για αφηρημένες ομάδες Lie.

Πρόταση 3.5.1: Έστω G μια ομάδα πινάκων Lie με Lie άλγεβρα τη g. Έστω X ένα στοιχείο της g και A ένα στοιχείο της G. Τότε, το AXA^{-1} θα ανήκει στην g.

Απόδειξη

Από γνωστή πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας έχουμε ότι για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα C και κάθε τετραγωνικό πίνακα X ισχύει:

$$e^{(CXC^{-1})} = C e^{X} C^{-1}$$

Άρα $e^{[t(AXA^{-1})]} = A e^{tX} A^{-1}$ και έτσι $Ae^{tX} A^{-1} \in G$ για κάθε t. □

Θεώρημα 3.5.2: Έστω G μια ομάδα πινάκων Lie, g η άλγεβρα Lie που της αντιστοιχεί και $X, Y \in g$. Τότε :

1) $sX \in g$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$
2) $X + Y \in g$
3) $XY - YX \in g$

Απόδειξη

1) Η απόδειξη είναι προφανής, αφού $e^{t(sX)} = e^{(ts)X}$ το οποίο πρέπει να ανήκει στη G, αφού ο X ανήκει στη g.

2) Εάν X και Y αντιμετατίθενται, τότε από γνωστή πρόταση $e^{t(X+Y)} = e^{tX}e^{tY}$, άρα $X + Y \in g$.

Στην περίπτωση που οι X και Y δεν αντιμετατίθενται για την απόδειξη χρησιμοποιείται ο τύπος του Lie για το γινόμενο πινάκων:

$$e^{t(X+Y)} = lim\ (e^{tX/m}\ e^{tY/m})^{m} \quad \text{για} \quad m \to \infty \ .$$

Επειδή τα X και Y ανήκουν στη g , τότε και τα $e^{tX/m}$ και $e^{tY/m}$ θα ανήκουν στη G , όπως επίσης και το γινόμενό τους στην *m-οστή* δύναμη $(e^{tX/m}\ e^{tY/m})^{m}$, αφού το G είναι ομάδα.

Όμως, επειδή το G αποτελεί ομάδα πινάκων Lie, το όριο της παραπάνω παράστασης πρέπει να ανήκει στη G (εάν βέβαια αποτελεί αντιστρέψιμο πίνακα).

Αφού το $e^{t(X+Y)}$είναι αντιστρέψιμος πίνακας έτσι τελικά και το όριο θα ανήκει στη g, άρα $X + Y \in g$.

3) Για τη συγκεκριμένη απόδειξη υπενθυμίζεται ότι $X = de^{tX}/dt|_{t=0}$, άρα

$$de^{tX}Y/dt|_{t=0} = XY \quad ,$$

και έτσι από τον κανόνα του γινομένου

$$d(e^{tX}Ye^{-tX})/dt \quad |_{t=0} = XY(e^{0})+(e^{0}Y)(-X) = XY-YX.$$

Από την προηγούμενη σχέση $e^{tX}Y\,e^{-tX} \in g$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επί πλέον από τις σχέσεις (1) και (2) του υπόψη θεωρήματος έχουμε ότι το g αποτελεί πραγματικό υπόχωρο όλων των τετραγωνικών πινάκων με μιγαδικά στοιχεία.

Αυτό σημαίνει ότι το g είναι τοπολογικά κλειστός χώρος και άρα το

$$XY - YX = lim\ [(e^{hX}Y\,e^{-hX}) - Y]/h \quad \text{για} \quad h \to 0$$

ανήκει στο g (αφού μπορεί να δειχτεί ότι αποτελεί όριο ακολουθίας σε κλειστό σύνολο και άρα είναι στοιχείο του συνόλου). □

Η παραπάνω σχέση δηλαδή ότι $XY - YX \in g$ είναι ιδιαίτερα σημαντική, διότι όπως θα γίνει κατανοητό αργότερα αποτελεί το Lie bracket της άλγεβρας Lie, που προκύπτει από μια ομάδα Lie, αν τη θεωρήσουμε και την αντιμετωπίσουμε ως μια αφηρημένη άλγεβρα Lie.

Ορισμός 3.5.1: Έστω δυο $n \times n$ πίνακες A και B. Ορίζουμε, ως bracket των A και B (ή αλλιώς ως αντιμεταθέτη) των A και B και συμβολίζουμε με $[A,B]$ το εξής : $[A,B] = AB - BA$.

Θεώρημα 3.5.3 : Έστω G και H δυο ομάδες πινάκων Lie, με άλγεβρες g και h αντίστοιχα. Έστω $\Phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε, υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : g \to h$, τέτοια ώστε $\Phi(e^{X}) = e^{\varphi(X)}$, για κάθε $X \in g$.

Η φ έχει τις εξής ιδιότητες :

1) $\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\varphi(X)\Phi(A)^{-1}$ για κάθε $X \in g$ και $A \in G$.

2) $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ για κάθε $X, Y \in g$.

3) $\varphi(X) = d\Phi(e^{tX})/dt \quad |_{t=0}$ για κάθε $X \in g$.

Απόδειξη

Αφού η Φ είναι συνεχής ομομορφισμός ομάδων, η $\Phi(e^{tX})$ θα είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα της H για κάθε $X \in g$ (Με την έννοια ότι αποτελεί απεικόνιση από το $\mathbb{R}$ στο υποσύνολο του $GL(n, \mathbb{R})$).

Έτσι, από το θεώρημα 3.3.1 υπάρχει μοναδικός πίνακας Z, τέτοιος ώστε: $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αυτό το στοιχείο Z πρέπει να είναι στοιχείο της h, αφού $e^{tZ} = \Phi(e^{tX}) \in H$.

Τώρα, θα ορίσουμε $\varphi(X) = Z$ και θα δειχτεί ότι η Φ έχει τις προαναφερθείσες ιδιότητες σε διάφορα βήματα.

Αρχικά έχουμε $\Phi(e^{X}) = e^{\varphi(X)}$ κάτι το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη σχέση $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ και τον ορισμό της φ για $t = 1$.

Ακόμα, επειδή $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$, τότε $\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$, άρα

$$\varphi(sX) = s\varphi(X).$$

Ακόμα $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, διότι από τις προηγούμενες σχέσεις

$$e^{t\varphi(X+Y)} = e^{\varphi[t(X+Y)]} = \Phi(e^{t(X+Y)}),$$

και από τον κανόνα γινομένου Lie και το γεγονός ότι η Φ αποτελεί συνεχή ομομορφισμό έχουμε :

$$e^{t\varphi(X+Y)} = \Phi(\lim(e^{tX/m}e^{tY/m})^{m}) = \lim(\Phi(e^{tX/m})\Phi(e^{tY/m})^{m}) \text{ για } m \to \infty$$

και έτσι : $e^{t\varphi(X+Y)} = \lim(e^{t\varphi(X)/m}e^{t\varphi(Y)/m})^{m} = e^{t(\varphi(X)+\varphi(Y))}$ για $m \to \infty$.

Εάν διαφορίσουμε για $t = 0$ έχουμε ότι $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Για την απόδειξη της *(1)* έχουμε ότι:

$$\exp t\varphi(AXA^{-1}) = \exp\varphi(tAXA^{-1}) = \Phi(\exp tAXA^{-1})$$

χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης και το γεγονός ότι $\Phi(e^{X}) = e^{-\varphi(X)}$ έχουμε ότι:

$$\exp t\varphi(AXA^{-1}) = \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) = \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} = \Phi(A)e^{t\varphi(X)}\Phi(A)^{-1}.$$

Πάλι με διαφόριση στο $t = 0$ προκύπτει το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της (2) ανατρέχουμε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος $[X, Y] = de^{tX}Ye^{-tX}/dt|_{t=0}$ άρα:

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(de^{tX}Ye^{-tX}/dt|_{t=0}) = d\varphi(e^{tX}Y e^{-tX})/dt|_{t=0}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε :

$$\varphi([X, Y]) = d\Phi(e^{tX})\Phi(Y)\varphi(e^{-tX})/dt|_{t=0} =$$

$$= de^{t\varphi(X)}\varphi(Y)e^{-t\varphi(X)}/dt \;|_{t=0} = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

Η απόδειξη της (3) είναι προφανής. □

3.6 Η συζυγής απεικόνιση

Η συζυγής απεικόνιση, όπως έχει ήδη αναφερθεί, μπορεί να ιδωθεί ως μια δράση μιας ομάδας Lie.

Στην παρούσα παράγραφο ορίζεται η συζυγής απεικόνιση για μια ομάδα πινάκων Lie, στα επόμενα θα δειχτεί η σημασία της για τη θεωρία των αλγεβρών πινάκων Lie.

Ορισμός 3.6.1: (**Η συζυγής απεικόνιση**). Έστω G μια ομάδα πινάκων Lie, με Lie άλγεβρα g. Τότε, για κάθε $A \in G$ ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση $Ad_A : g \to g$ από τον τύπο $Ad_A(X) = AXA^{-1}$.

Πρόταση 3.6.1: Έστω G μια ομάδα πινάκων Lie, με Lie άλγεβρα g. Έστω $GL(g)$ η ομάδα όλων των γραμμικών αντιστρέψιμων μετασχηματισμών της g. Τότε, για κάθε $A \in G$ ο Ad_A είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός της με αντίστροφο στοιχείο $Ad_{A^{-1}}$ και η απεικόνιση $A \to Ad_A$ είναι ομομορφισμός ομάδας της G στο $GL(g)$.

Ακόμη για κάθε $A \in G$ ισχύει :

$$Ad_A([X,Y]) = [Ad_A(X), Ad_A(Y)]$$

για κάθε $X, Y \in g$.

Πρόταση 3.6.2: Έστω G μια ομάδα πινάκων Lie, με Lie άλγεβρα g, και έστω $Ad : G \to GL(g)$ ο ομομορφισμός ομάδων Lie, όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Έστω επίσης ad: $g \to gl(g)$ η αντίστοιχη απεικόνιση για τις Lie άλγεβρες. Τότε, για κάθε $X, Y \in g$, $ad_X(Y) = [X,Y]$, όπου με ad συμβολίζουμε την απεικόνιση που έχει την ιδιότητα $e^{adX} = Ad(e^X)$ από το θεώρημα 3.5.3.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση για την ad θα ισχύει:

$$ad_X = dAd(e^{tX})/dt|_{t=0} \ .$$

Έτσι, $ad_X(Y) = dAd(e^{tX})(Y)/dt|_{t=0} = d(e^{tX} Y e^{-tX})/dt|_{t=0} = [X, Y]$. □

Πρόταση 3.6.3: Για κάθε $X \in M_n(\mathbb{C})$ έστω $ad_X : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ με τύπο $ad_X[Y] = [X, Y]$.

Τότε, για κάθε $Y \in M_n(\mathbb{C})$ έχουμε : $e^{ad_X}(Y) = Ad_{e^X}(Y) = e^X Y e^{-X}$.

3.7 Η εκθετική απεικόνιση ανάμεσα στις ομάδες και τις άλγεβρες πινάκων Lie.

Ορισμός 3.7.1. Εάν G είναι μια ομάδα πινάκων Lie με Lie άλγεβρα g, ορίζουμε ως εκθετική απεικόνιση της g την απεικόνιση : $\exp: g \to G$.

Όπως έχει αναφερθεί κάθε πίνακας του $GL(n, \mathbb{C})$ είναι της μορφής *expX* για κάποιον *X*. Όμως εάν $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ μια κλειστή υποομάδα τότε μπορεί να υπάρχει $A \in G$, έτσι ώστε να μην υπάρχει $X \in g$ με $expX = A$.
Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

του $SL(2, \mathbb{C})$. Για αυτόν τον πίνακα δεν υπάρχει $X \in sl(2, \mathbb{C})$ με $expX = A$.
Έστω $X \in sl(2, \mathbb{C})$, αφού *trace X = 0,* οι ιδιοτιμές του *X* θα είναι αντίθετες μεταξύ τους, ή και οι δυο μηδέν.
Στην πρώτη περίπτωση, αν οι ιδιοτιμές είναι *(λ, -λ)* με $\lambda \in \mathbb{C}$ ο *X* είναι διαγωνοποιήσιμος. Άρα και ο *A = expX* θα είναι διαγωνοποιήσιμος. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι ο A έχει τις *-1* και *-1* , ιδιοτιμές και αν ήταν διαγωνοποιήσιμος θα έπρεπε να είναι ο *-I*. Στη δεύτερη περίπτωση ο *expX* θα είχε την *1* ως ιδιοτιμή, άρα $expX \neq A$.

Γίνεται φανερό ότι η εκθετική απεικόνιση δεν απεικονίζει μια ομάδα πινάκων Lie επί της Lie άλγεβράς της. Ακόμη, μπορεί να μην είναι καν *1-1* απεικόνιση. Όμως θα δειχτεί ότι είναι τοπικά *1-1*.

Λήμμα 3.7.1: Έστω B_m ακολουθία στοιχείων της G και $B_m \to I$ (κατά νόρμα). Έστω Y_m= $logB_m$, έστω ότι $Y_m \neq 0$ $\forall$ m και $Y_m / \|Y_m\| \to Y \in M_n(\mathbb{C})$ Τότε $Y \in g$.

Απόδειξη

Για να δειχτεί ότι $Y \in g$ πρέπει $\exp(tY) \in G$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Καθώς $m \to +\infty$, $(t/\|Y_m\|)Y_m \to tY$. Αφού $B_m \to I$, $Y_m \to 0$. Άρα υπάρχουν ακέραιοι K_m έτσι ώστε $K_m\|Y_m\| \to t$.

$$\text{Άρα} \quad \exp(K_m Y_m) = \exp[K_m(\|Y_m\|)\frac{Y_m}{\|Y_m\|}] \to \exp(tY)$$

Όμως, η G είναι κλειστή και $\exp(K_m Y_m) = \exp(Y_m)^{(K_m)} = (B_m)^{(K_m)}$ άρα $\exp(tY) \in G$.

□

Θεώρημα 3.7.2: Για κάθε *0<ε<ln2,* έστω $U_\varepsilon = \{X \in M_n(\mathbb{C}) / \|X\| < \varepsilon\}$ και $V_\varepsilon = exp(U_\varepsilon)$. Έστω $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ μια ομάδα πινάκων Lie με Lie άλγεβρα την *g*. Τότε υπάρχει $\varepsilon \in (0, ln2)$ έτσι ώστε για κάθε $A \in V_\varepsilon$ να είναι $A \in G$, αν και μόνον αν $logA \in g$.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το $M_n(\mathbb{C})$ ως το $\mathbb{C}^{n^2}$ το οποίο είναι ισομορφικό με το $\mathbb{R}^{2n^2}$. Άρα και η g είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2n^2}$. Έστω D το ορθογώνιο συμπλήρωμα ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^{2n^2}$. Έστω η απεικόνιση $\Phi: g \oplus D \to GL(n, \mathbb{C})$ με $\Phi(X, Y) = e^X e^Y$. Το $g \oplus D$ ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^{2n^2}$. Ακόμη το $GL(n, \mathbb{C})$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2n^2}$. Άρα η Φ είναι απεικόνιση από το $\mathbb{R}^{2n^2}$ στον εαυτό του.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης.

$$\frac{d\Phi(tX, 0)}{dt}\Big|_{t=0} = X$$

$$\frac{d\Phi(0, tY)}{dt}\Big|_{t=0} = Y$$

Άρα η παράγωγος στο μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^{2n^2}$ είναι η ταυτοτική. Πιο ειδικά η παράγωγος της Φ στο *0* είναι αντιστρέψιμη και έτσι από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης η Φ έχει αντίστροφη συνεχή συνάρτηση ορισμενη σε γειτονιά του *I*.

Αρκεί να αποδειχτεί ότι για κάποια *ε* το $A \in V_\varepsilon \cap G$ συνεπάγεται $logA \in g$.

Έστω ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Τότε θα υπάρχει ακολουθία $A_m \in G$, έτσι ώστε $A_m \to I$ με $m \to \infty$ και για κάθε m $A_m \notin g$. Χρησιμοποιώντας την αντιστροφή της Φ γράφουμε το A_m ως $A_m = e^{X_m} e^{Y_m}$ με $X_m \in g$, $Y_m \in D$ με X_m και Y_m να τείνουν στο μηδέν. Πρέπει $Y_m \neq 0$, γιατί αλλιώς $log A_m = X_m \in g$. Τώρα έστω $B_m = \exp(-X_m) A_m = \exp(Y_m)$, τότε $A_m \in G$ και $B_m \to I$ καθώς $m \to \infty$.

Αφού η μοναδιαία σφαίρα στο D είναι συμπαγής διαλέγουμε υπακολουθία της Y_m , έτσι ώστε η $\frac{Y_m}{\|Y_m\|}$ να συγκλίνει σε κάποιο $Y \in D$ με $\|Y\| = 1$.

Από το προηγούμενο λήμμα $Y \in g$. Αυτό είναι άτοπο αφού το D είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα της g. Άρα πρέπει να υπάρχει *ε* με $log A \in g$ για κάθε $A \in V_\varepsilon \cap G$. □

Με τη χρήση του προηγούμενου θεωρήματος αποδεικνύεται το επόμενο.

Πρόταση 3.7.3: Εάν *G* είναι ομάδα πινάκων Lie με άλγεβρα Lie g, υπάρχει γειτονιά *U* του *0* στην *g* και γειτονιά *V* του *I* στην *G*, έτσι ώστε η εκθετική απεικόνιση μεταφέρει την *U* ομοιομορφικά στη *V*.

Ορισμός 3.7.2: Εάν $U = U_\varepsilon \cap g$ και $V = V_\varepsilon \cap G$ (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα) τότε ορίζεται ο λογάριθμος της G ως εξής: $\exp^{-1} : V \to g$.

Πρόταση 3.7.4 : Εάν G είναι μια συνεκτική ομάδα Lie , τότε κάθε $A \in G$ γράφεται στη μορφή : $A = e^{X_1} e^{X_2} .... e^{X_m}$ για $X_1, X_2, ... X_m \in g$.

Απόδειξη

Αφού η *G* είναι συνεκτική, μπορεί να βρεθεί συνεχής διαδρομή $A(t) \in G$ με *A(0) = I* και *A(I)=A.*

Έστω *V* γειτονιά *I* στου *G* όπως στον προηγούμενο ορισμό , έτσι ώστε κάθε στοιχείο του *V* είναι ο εκθέτης κάποιου στοιχείου της *g*. Λόγω της συμπάγειας του *[0,1]* επιλέγουμε ακολουθία αριθμών : $0 = t_o < t_1 <...< t_m = 1$, έτσι ώστε $A_{t_{k-1}}^{-1} A_{t_k} \in V$ για κάθε *k =1,2,...n,* τότε $A = (A_{t_0}^{-1} A_{t_1})(A_{t_1}^{-1} A_{t_2})...(A_{t_{(m-1)}}^{-1} A_{t_m})$.

Εάν $X_k \in g$ με $expX_k = A_{t_k}^{-1} A_{t_k}$ έχουμε $A = e^{X_1} e^{X_2} .... e^{X_m}$. □

Πρόταση 3.7.5:

Έστω *G* μια συνεκτική ομάδα πινάκων Lie και *H* μια αυθαίρετη ομάδα πινάκων Lie και Φ_1 και Φ_2 ομομορφισμός ομάδων Lie από την *G* στη *H* . Έστω φ_1 και φ_2 οι αντίστοιχοι ομομορφισμοί Lie αλγεβρών . Εάν $\varphi_1 = \varphi_2$ τότε $\Phi_1 = \Phi_2$.

Απόδειξη

Έστω *A* στοιχείο της *G* . Αφού η *G* είναι συνεκτική σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση $A = e^{X_1} e^{X_2} .... e^{X_n}$ με $X_i \in g$.

Τότε : $\Phi_1(A) = \Phi_1(e^{X_1}) .... \Phi_1(e^{X_n})$ =

$$= e^{\varphi_1(X_1)} .... e^{\varphi_1(X_n)} =$$

$$= e^{\varphi_2(X_1)} .... e^{\varphi_2(X_n)} =$$

$$= \Phi_2(e^{X_1}) .... \Phi_2(e^{X_n}) =$$

$$= \Phi_2(A)$$ □

Στη συνέχεια αναφέρεται το θεώρημα που δείχνει ότι οι κλασσικές ομάδες πινάκων Lie όπως ορίστηκαν αποτελούν και ομάδες Lie με την γενική έννοια.

Θεώρημα 3.7.6: Κάθε ομάδα πινάκων Lie αποτελεί λεία εμβαπτυσμένη πολλαπλότητα και άρα ομαδα Lie.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon \in (0, ln2)$ έτσι ώστε να ισχύει το θεώρημα 3.7.2. Τότε για κάθε $A_0 \in G$ θεωρούμε την γειτονιά $A_0 V_\varepsilon$ του A_0 στο $M_n(\mathbb{C})$.

Τότε, εάν $A \in A_0 V_\varepsilon$ τότε $A_0^{-1} A \in V_\varepsilon$ και αντίστροφα. Θεωρούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο $A_0 V_\varepsilon$ γράφοντας κάθε $A \in A_0 V_\varepsilon$ στη μορφή $A = A_0 expX$ για $X \in U_\varepsilon$. Από το θεώρημα 3.7.2 έχουμε $A \in G$ εάν και μόνο εάν $X \in G$.

Αυτό σημαίνει ότι στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του A_0 η *G* είναι *"όμοια"* με την *g*. Αφού για κάθε A_0 μπορούμε να βρούμε τοπικό σύστημα συντεταγμένων η *G* είναι λεία εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα. □ Για μια πιο αναλυτική αποδειξη του παραπάνω βλέπε [2] της βιβλιογραφίας.

Μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε ομάδα πινάκων Lie ο πολλαπλασιασμός και η αντιστροφή είναι λείες απεικονίσεις ανάμεσα σε πολλαπλότητες, άρα κάθε ομάδα πινάκων Lie είναι ομάδα Lie. $\square$

Πρόταση 3.7.7: Έστω $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ ομάδα πινάκων Lie με Lie άλγεβρα *g*. Τότε, ένας πίνακας *X* ανήκει στην *g*, εάν και μόνο εάν υπάρχει λεία καμπύλη *γ(t)* έτσι ώστε :

1) $\gamma(t) \in G \, \forall t \in \mathbb{R}$
2) $\gamma(0) = I$
3) $\frac{d\gamma(t)}{dt}|_{t=0} = X$

Άρα, η *g* είναι ο εφαπτόμενος χώρος στη μονάδα της *G*.

Απόδειξη

Εάν η $X \in g$, τότε *γ(t) = exp(tX)* και *γ(0) = I* και $\frac{d\gamma(t)}{dt}|_{t=0} = X$.

Αντίστροφα έστω *γ(t)* μια λεία καμπύλη στην *G* με *γ(0) = I* . Τότε από το θεώρημα 3.7.2. $\log(\gamma(t)) \in g$ για κάποιο αρκούντος μικρό *t*. Η *g* είναι πραγματικός υπόχωρος της $M_n(\mathbb{C})$ και αποδεικνύεται ότι είναι και κλειστό σύνολο (με την τοπολογική έννοια).

Άρα, η ποσότητα $\frac{dlog(\gamma(t))}{dt}|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\log(\gamma(h)) - 0}{h}\right)$ ανήκει στην *g*.

Όμως $\log(\gamma(t)) = (\gamma(t) - I) - \frac{(\gamma(t) - I)^2}{2} + \frac{(\gamma(t) - I)^3}{3} + \ldots$.

Εάν διαφορίσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά και εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας παραμένει μόνο η παράγωγος του πρώτου όρου .

Άρα $\frac{dlog(\gamma(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d\gamma(t)}{dt}|_{t=0} \in g$. $\square$

3.8 Η άλγεβρα πινάκων Lie ως αφηρημένη άλγεβρα Lie.

Όπως αναφέρθηκε πιο πριν, μια Lie άλγεβρα πινάκων είναι και άλγεβρα Lie με την αφηρημένη έννοια. Για να δειχτεί αυτό πρέπει αρχικά να δειχθεί ότι ο χώρος όλων των τετραγωνικών πινάκων αποτελεί Lie άλγεβρα.

Πρόταση 3.8.1: Ο χώρος $M_n(\mathbb{R})$ όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων είναι μια άλγεβρα Lie, η οποία έχει ως Lie bracket τον αντιμεταθέτη *[A, B] = AB – BA*.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον αφηρημένο ορισμό μια Lie άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα πεδίο.

Ο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όντως διανυσματικός χώρος πάνω στο $(\mathbb{R})$, άρα αρκεί να δειχτεί ότι ο αντιμεταθέτης είναι το Lie bracket .

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε :

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = (\alpha X + \beta Y)Z - Z(\alpha X + \beta Y) =$$
$$= \alpha XZ + \beta YZ - Z\alpha X - \beta ZY = \alpha\,[X, Z] + \beta\,[Y, Z].$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι:

$$[Z,\ \alpha X + \beta Y] = \ \alpha[Z, X] + \beta[Y, Z].$$

Είναι προφανές ότι $[X, X] = 0$ για κάθε $X \in M_n(\mathbb{R})$. Αρκεί να δειχτεί η **ταυτότητα Jacobi**:

Ισχύει:

$$[X, [Y,Z]]=X[Y , Z]-[Y, Z]X=X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X =$$
$$= XYZ - XZY - YZX + ZYX$$
$$[Y, [Z,X]]=Y[Z,X]-[Z, X]Y=Y(ZX-XZ)-(ZX-XZ)Y=$$
$$= YZX - YXZ - ZXY + XZY \quad \text{και}$$
$$[Z,[X,Y]] = Z[X,Y]-[X-Y]Z=Z(XY-YX)-(XY-YX)Z=$$
$$= ZXY - ZYX - XYZ +YXZ$$

Επομένως: $\boldsymbol{[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0}$ □ .

Αποδεικνύεται ότι, γενικά η υποάλγεβρα μιας άλγεβρας Lie είναι και αυτή Lie άλγεβρα.

Πρόταση 3.8.2: Η Lie άλγεβρα πινάκων g μιας ομάδας πινάκων Lie G είναι μια Lie άλγεβρα.

Απόδειξη

Έχει αποδειχτεί στο θεώρημα 3.5.2 ότι η g αποτελεί μια υποάλγεβρα του $M_n(\mathbb{C})$ και άρα αποτελεί μια άλγεβρα Lie.

Ένα άλλο σημαντικό θεώρημα στην θεωρία των αλγεβρών Lie είναι το θεώρημα του Ado.

Θεώρημα 3.8.3 (Ado)
Κάθε πεπερασμένης διάστασης (αφηρημένη) άλγεβρα Lie επί ενός σώματος K μπορεί να θεωρηθεί ως μία Lie άλγεβρα πινάκων.

Παρακάτω αναφέρεται ένας ορισμός για το τι εννοούμε με την έννοια μιγαδική ομάδα Lie.

Ορισμός 3.8.1: Μια ομάδα πινάκων Lie ορίζεται να είναι μιγαδική, εάν η αντίστοιχη Lie άλγεβρα της g είναι ένας μιγαδικός υπόχωρος του $M_n(\mathbb{C})$, δηλαδή εάν $iX \in g$ για κάθε $X \in g$.

3.9 Η Μιγαδικοποίηση μιας πραγματικής Lie άλγεβρας.

Είναι δυνατόν από μια πραγματική Lie άλγεβρα να *"κατασκευάσουμε"* μια επέκτασή της, η οποία θα είναι μια μιγαδική Lie άλγεβρα.
Η άλγεβρα αυτή ονομάζεται ***"μιγαδικοποίηση"*** και στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία αναφέρεται ως **complexification**.

Ορισμός 3.9.1: Εάν V είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης , τότε η *"μιγαδικοποίηση"* του V , η οποία αναφέρεται ως $V_{\mathbb{C}}$ είναι ο χώρος όλων των γραμμικών συνδυασμών της μορφής: $v_1 + i\, v_2$ με $v_1, v_2 \in V$.
Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο V είναι ένας πραγματικός υπόχωρος του $V_{\mathbb{C}}$.

Πρόταση 3.9.1: Έστω g μια πραγματική Lie άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και $g_{\mathbb{C}}$ η μιγαδικοποίηση της (θεωρούμενη ως διανυσματικός χώρος).
Τότε το Lie bracket στην g επεκετείνεται μοναδικά στην $g_{\mathbb{C}}$, δηλαδή η $g_{\mathbb{C}}$ αποτελεί μια μιγαδική Lie άλγεβρα.
Η μιγαδική Lie άλγεβρα $g_{\mathbb{C}}$ αποτελεί τη μιγαδικοποίηση της πραγματικής Lie άλγεβρας g.

Απόδειξη

Το ότι είναι μοναδική η επέκταση είναι προφανές, διότι, εάν πρέπει το Lie bracket στην $g_{\mathbb{C}}$ να είναι διγραμμικό πρέπει:

$$[X_1+iX_2,\ Y_1+iY_2] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])$$

Για να αποδειχτεί η ύπαρξη πρέπει να ελεγχθεί ότι η προηγούμενη σχέση είναι όντως διγραμμική, ικανοποιεί τη Jacobi ιδιότητα και είναι αντισυμμετρική.

Είναι φανερό ότι η προηγούμενη σχέση είναι διγραμμική. Ακόμη,

$$\begin{aligned} -[Y_1+iY_2,\ X_1+iX_2] &= -[([Y_1, X_1] - [Y_2, X_2]) + i([Y_1, X_2]+[Y_2, X_1])] = \\ &= ([Y_2, X_2] - [Y_1, X_1]) + i(-[Y_1, X_2] - [Y_2, X_1]) = \\ &= [Y_2, X_2]-[Y_1,X_1] + i([X_2,Y_1] +[X_1,Y_2]) = [X_1+iX_2, Y_1+iY_2]. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει η αντιμετρικότητα.

Με παρόμοιο τρόπο, κυκλική εναλλαγή και αρκετές πράξεις δείχνουμε ότι ισχύει και η ιδιότητα Jacobi . □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΧΩΡΟΙ ΡΙΖΩΝ & ΗΜΙΑΠΛΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ Lie

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε κυρίως με τις λεγόμενες **μιγαδικές ημιαπλές Lie άλγεβρες** .

Συνοπτικά αναφέρεται ότι οι ημιαπλές άλγεβρες Lie είναι διανυσματικοί χώροι ισομορφικοί με το ευθύ γινόμενο απλών Lie αλγεβρών.

Αντίστοιχα, οι ρίζες αποτελούν τις *"ιδιοτιμές"* κάποιων αλγεβρών, που ονομάζονται **Cartan υποάλγεβρες.**

Η κατανόηση των ημιαπλών αλγεβρών Lie μπορεί να γίνει ακόμη πιο ουσιαστικά με τη χρήση της θεωρίας των αναπαραστάσεων, που δεν αναφέρεται στην παρούσα εργασία.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το ιδεώδες μιας μιγαδικής άλγεβρας Lie g είναι μια μιγαδική υποάλγεβρά της h για την οποία ισχύει ότι για κέθε $X \in g$ και $H \in h$ έχουμε $[X, H] \in h$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ορισμός του ιδεώδους είναι ισχυρότερος από αυτόν της υποάλγεβρας, αφού για μια υποάλγεβρα απαιτούμε μόνο το Lie bracket δυο στοιχείων της υποάλγεβρας να παραμένει σε αυτήν, ενώ για το ιδεώδες πρέπει το Lie bracket κάθε στοιχείου του με κάθε στοιχείο της g να βρίσκεται μέσα στο ιδεώδες.

Κάθε άλγεβρα Lie έχει δυο *"τετριμμένα"* ιδεώδη τον εαυτό της και το μηδενικό ιδεώδες $h = \{0\}$.

4.1 Γενικά - Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1: Μια μιγαδική άλγεβρα Lie ονομάζεται **αδιάσπαστη**, αν τα μοναδικά της ιδεώδη είναι η ίδια η g και το $\{0\}$.

Μια μιγαδική άλγεβρα g ονομάζεται **απλή** , εάν η g είναι αδιάσπαστη και $dim g \geq 2$.

Ο όρος *"αδιάσπαστη"* δεν αναφέρεται γενικά στη βιβλιογραφία και μπορεί να υπάρχουν πολλές διαφορετικές ονομασίες για την ίδια έννοια.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι μοναδικές αδιάσπαστες Lie άλγεβρες, που δεν είναι απλές, είναι οι μονοδιάστατες και ότι κάθε δυο διαφορετικές μονοδιάστατες Lie άλγεβρες είναι ισομορφικές, αφού τα brackets τους είναι μηδέν.

Μια μονοδιάστατη άλγεβρα Lie δεν έχει μη τετριμμένες υποάλγεβρες και για αυτό δεν έχει και μη τετριμμένα ιδεώδη. 'Ετσι, οι μονοδιάστατες Lie άλγεβρες είναι αδιάσπαστες, αλλά όχι απλές.

Υπάρχει μια αναλογία ανάμεσα στις άλγεβρες Lie πεπερασμένης διάστασης και στις πεπερασμένες ομάδες. Οι υποάλγεβρες μιας άλγεβρας Lie έχουν το αντίστοιχό τους με τις υποομάδες μιας πεπερασμένης ομάδας.

Σε αυτήν την αναλογία οι μονοδιάστατες άλγεβρες Lie (οι οποίες είναι ακριβώς οι Lie άλγεβρες, οι οποίες δεν έχουν τετριμμένες υποάλγεβρες) είναι το ανάλογο των κυκλικών ομάδων, που έχουν τάξη πρώτο αριθμό.

Ορισμός 4.1.2: Μια μιγαδική Lie άλγεβρα ονομάζεται **αναγωγική**, εάν είναι ισομορφική με ένα ευθύ άθροισμα αδιάσπαστων Lie αλγεβρών.

Μια μιγαδική Lie άλγεβρα ονομάζεται **ημιαπλή**, εάν είναι ισομορφική με ένα ευθύ άθροισμα απλών Lie αλγεβρών.

Η απόδειξη για το παρακάτω θεώρημα δεν θα δειχτεί, διότι είναι πολύπλοκη.

Θεώρημα 4.1.1: Μια μιγαδική Lie άλγεβρα είναι ημιαπλή, εάν και μόνο εάν είναι ισομορφική με την *"μιγαδικοποίηση"* μιας άλγεβρας Lie μιας απλά συνεκτικής συμπαγούς ομάδας πινάκων Lie.

Ορισμός 4.1.3: Εάν η g είναι μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα, τότε μια συμπαγής πραγματική μορφή της g είναι μια πραγματική υποάλγεβρα $\mathfrak{k}$ της g με την ιδιότητα ότι κάθε $X \in g$ μπορεί να γραφεί με την μορφή $X = X_1 + i X_2$ κατά μοναδικό τρόπο με X_1 και X_2 να ανήκουν στη $\mathfrak{k}$ και έτσι ώστε να υπάρχει μια συμπαγής απλά συνεκτική ομάδα πινάκων Lie K_1 έτσι ώστε η Lie άλγεβρα $\mathfrak{k}_1$ της K_1 είναι ισομορφική στην $\mathfrak{k}$.

Πρόταση 4.1.2: Έστω g μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα. Εάν g είναι μια υποάλγεβρα του $gl(n,\mathbb{C})$ και $\mathfrak{k}$ είναι μια συμπαγής πραγματική μορφή της g, τότε η συνεκτική υποομάδα K του $GL(n,\mathbb{C})$, της οποίας η άλγεβρα Lie είναι η $\mathfrak{k}$, είναι συμπαγής.

Απόδειξη

Από τον προηγούμενο ορισμό της συμπαγούς πραγματικής μορφής μπορούμε να θεωρήσουμε μια απλά συνεκτική συμπαγή ομάδα πινάκων Lie K_1, της οποίας η Lie άλγεβρα $\mathfrak{k}_1$ είναι ισομορφική με την $\mathfrak{k}$.

Έστω $\varphi:\mathfrak{k}_1\rightarrow\mathfrak{k}\subset gl(n,\mathbb{C})$ ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών

Από το θεώρημα 3.5.2 υπάρχει ένας αντίστοιχος ομομορφισμός ομάδων Lie $\Phi:K_1\rightarrow GL(n,\mathbb{C})$ και έστω K η εικόνα αυτού του ομομορφισμού.

Αφού η εικόνα συμπαγούς συνόλου από συνεχή απεικόνιση είναι συμπαγές σύνολο το K είναι συμπαγές και συνεπώς κλειστό.

Ακόμη, αφού η εικόνα της $\mathfrak{k}_1$ είναι η $\mathfrak{k}$ αποδεικνύεται ότι το K είναι συνεκτικά υποομάδα Lie του $GL(n,\mathbb{C})$ με Lie άλγεβρα $\mathfrak{k}$ $\square$.

Για την παρακάτω πρόταση δεν θα δοθεί απόδειξη λόγω μεγάλης πολυπλοκότητας.

Πρόταση 4.1.3: Εάν g είναι μια πραγματική άλγεβρα Lie και $g_{\mathbb{C}}$ η μιγαδικοποίησή της, τότε η g είναι ημιαπλή, εάν και μόνο εάν η $g_{\mathbb{C}}$ είναι ημιαπλή.

Μια συνέπεια της παραπάνω πρότασης και του θεωρήματος 4.1.1 είναι ότι η πραγματική Lie άλγεβρα μιας συμπαγούς απλά συνεκτικής ομάδας είναι ημιαπλή.

Πρέπει να αναφερθεί όμως ότι αυτό δεν ισχύει για κάθε πραγματική ημιαπλή άλγεβρα.

Ας πάρουμε για παράδειγμα την Lie άλγεβρα $sl(n,\mathbb{R})$. Η αντίστοιχη ομάδα $SL(n,\mathbb{R})$ είναι μη συμπαγής και δεν μπορεί να υπάρξει καμία συμπαγής απλά συνεκτική ομάδα Lie της οποίας η Lie άλγεβρα να είναι η $sl(n,\mathbb{R})$. Πράγματι, εάν υπήρχε, αυτή η ομάδα θα ήταν το **universal cover** της $SL(n,\mathbb{C})$, και αφού το universal cover μιας μη συμπαγούς ομάδας είναι μη συμπαγής, θα οδηγούμαστε στο άτοπο.

4.2 Παραδείγματα αναγωγικών και ημιαπλών αλγεβρών Lie

Σ' αυτή την παράγραφο θα δοθούν ορισμένα παραδείγματα κάποιων Lie αλγεβρών, οι οποίες είναι αναγωγικές ή ημιαπλές.

Παρακάτω παρατίθεται ένας πίνακας με κάποιες Lie άλγεβρες. Όταν στον πίνακα αυτόν (και στον παρακάτω) γράφουμε μόνο αναγωγική σημαίνει μόνο αναγωγική και όχι ημιαπλή.

$sl(n,\mathbb{C})$ $(n\geq 2)$, **ημιαπλή**

$so(n,\mathbb{C})$ $(n\geq 3)$, **ημιαπλή**

$so(2,\mathbb{C})$, **αναγωγική**

$gl(n,\mathbb{C})$ $(n\geq 1)$, **αναγωγική**

Για να πιστοποιηθούν τα αποτελέσματα αυτού του πίνακα χρησιμοποιούμε το θεώρημα 4.1.1.

Η $sl(n,\mathbb{C})$ είναι η μιγαδικοποίηση της *su(n),* η οποία είναι η Lie άλγεβρα της συμπαγούς απλά συνεκτικής ομάδας *SU(n)*.

Η $so(n,\mathbb{C})$ είναι η μιγαδικοποίηση της *so(n)*, η οποία είναι η Lie άλγεβρα της συμπαγούς ομάδας *SO(n)*. Η *SO(n)* όμως δεν είναι απλά συνεκτική.

Ακόμα πρέπει να αναφερθεί ότι η $so(2,\mathbb{C})$ είναι μονοδιάστατη αντιμεταθετική και έτσι αναγωγική, αλλά όχι ημιαπλή.

Στη συνέχεια η $gl(n,\mathbb{C})$ είναι η μιγαδοποίηση της *u(n)*, η οποία είναι η Lie άλγεβρα της συμπαγούς ομάδας *U(n)*. Αυτό σημαίνει ότι η $gl(n,\mathbb{C})$ είναι αναγωγική.

Όμως το κέντρο μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie πρέπει να είναι τετριμμένο και το κέντρο της $gl(n,\mathbb{C})$ δεν είναι, διότι περιλαμβάνει τα πολλαπλάσια της μονάδας.

Ακόμη ισχύει ότι $gl(n,\mathbb{C}) \simeq sl(n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$ όπου η $sl(n,\mathbb{C})$ είναι ημιαπλή και το $\mathbb{C}$ είναι μονοδιάστατο. Άρα η $gl(n,\mathbb{C})$ δεν είναι ημιαπλή.

Πρέπει ακόμη να αναφερθεί ότι όλες οι παραπάνω ημιαπλές άλγεβρες είναι και απλές εκτός από την $so(4,\mathbb{C})$, η οποία είναι ισομορφική με την $sl(2,\mathbb{C})\oplus sl(2,\mathbb{C})$.

Στη συνέχεια, θα δοθεί ένας πίνακας όλων των πραγματικών Lie αλγεβρών (που έχουν αναφερθεί):

$su(n)$ $(n\geq 2)$, **ημιαπλή**

$so(n)$ $(n\geq 3)$, **ημιαπλή**

$so(2)$, **αναγωγική**

$so(n,K)$ $(n+\kappa\geq 3)$, **ημιαπλή**

$so(1,1)$, **αναγωγική**
$sl(n,\mathbb{R})$ $(n\geq 2)$, **ημιαπλή**
$gl(n,\mathbb{R})$ $(n\geq 1)$, **αναγωγική**

Πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν και Lie άλγεβρες, οι οποίες δεν είναι ούτε ημιαπλές ούτε αναγωγικές, όπως οι ομάδες: Heisenberg, Poincare και η Ευκλείδεια ομάδα.

4.3 Υποάλγεβρες Cartan

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτυχθεί η έννοια της δομής των **υποαλγεβρών Cartan**, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.
Η θεωρία των υποαλγεβρών Cartan αναπτύχθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Elie Cartan στη διδακτορική του διατριβή.

Ορισμός 4.3.1: Εάν η g είναι μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα, τότε μια Cartan υποάλγεβρα της g είναι ένας μιγαδικός υπόχωρος h της g με τις ακόλουθες ιδιότητες:
1) Για όλα τα H_1 και H_2 του h $[H_1, H_2]=0$.
2) Για όλα τα $X\in g$, εάν $[H, X]=0$ για κάθε H στη h , τότε $X\in h$.
3) Για όλα τα $H\in h$, η ad_H είναι διαγωνοποιήσιμη.

Η πρώτη συνθήκη του ορισμού λέει ότι η h είναι μια αντιμεταθετική υποάλγεβρα της g.
Η δεύτερη συνθήκη ορίζει ότι η h είναι η μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα.
Ο ορισμός της Cartan υποάλγεβρας υπάρχει ανεξάρτητα με το αν η Lie άλγεβρα είναι ημιαπλή ή όχι.
Όμως, εάν η g δεν είναι ημιαπλή τότε η g μπορεί και να μην έχει υποάλγεβρες Cartan.
Ακόμη, και στην ημιαπλή περίπτωση πρέπει να απδείξουμε ότι η Cartan υποάλγεβρα υπάρχει.

Πρόταση 4.3.1: Έστω g μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα και έστω $\mathfrak{k}$ μια συμπαγής πραγματική μορφή της g και t μια οποιαδήποτε μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα της $\mathfrak{k}$. Ορίζουμε $h\subset g$ της μορφής $h=t+it$. Τότε η h είναι μια Cartan υποάλγεβρα της g.
Γενικά, αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε Cartan υποάλγεβρά της προκύπτει με τον τρόπο της προηγούμενης πρότασης.

Πρέπει να αναφερθεί ακόμη ότι όλες οι Cartan υποάλγεβρες μιας δοσμένης μιγαδικής ημιαπλής Lie άλγεβρας έχουν την ίδια διάσταση.

Ορισμός 4.3.2: Εάν *g* είναι μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα, τότε ο βαθμός της *g* είναι η διάσταση οποιασδήποτε Cartan υποάλγεβρας.

4.4 Ρίζες και χώροι ριζών

Στα παρακάτω θα θεωρήσουμε μια συμπαγή πραγματική μορφή $\mathbf{t}$ της *g* και μια μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα *t* της $\mathbf{t}$.
Ακόμη, θεωρούμε και την Cartan υποάλγεβρα $h=t+it$.

Ορισμός 4.4.1: Μια ρίζα της *g* (όσον αφορά την Cartan υποάλγεβρα *h*) είναι ένα μη μηδενικό συναρτησιακό *α* πάνω στην *h* , έτσι ώστε να υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο *X* της *g* , για το οποίο να ισχύει: $[H,X]=\alpha(H)X$ για όλα τα $H\in h$. Το σύνολο όλων των ριζών γράφεται ως *R*.

Ουσιαστικά, η συνθήκη αυτή για το *X* δείχνει ότι το *X* είναι ένα ιδιοδιάνυσμα για κάθε απεικόνιση ad_H με ιδιοτιμή *α(H).*
Ο λόγος που ορίζουμε το *α* να είναι ένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησιακό είναι ο εξής:
Ας θεωρήσουμε ότι το *X* είναι ιδιοδιάνυσμα της ad_H για κάθε *H*, τότε για $H_1, H_2, H_3, ...H_n$ έχουμε :

$$[H_1,X]=\alpha(H_1)X \;\;,\;\; [H_2,X]=\alpha(H_2)X \;\;, ...\;\; [H_n,X]=\alpha(H_n)X \;\;, \text{δηλαδή}$$

$$[H_1+H_2+...+H_n,X]=(\alpha(H_1)+\alpha(H_2)+...+\alpha(H_n))X$$

άρα, εάν το *α* είναι, όπως το ορίσαμε:

$$[H_1+H_2+...+H_n,X]=(H_1+H_2+...+H_n)X \quad .$$

Προφανώς, κάθε στοιχείο *H* της *h* είναι αυτόματα ιδιοδιάνυσμα για κάθε απεικόνιση ad_H με ιδιοτιμές μηδενικές, αφού $ad_H(H)=(H,H)=0=0H$, όμως ενδιαφέρουν μόνο τα μη μηδενικά συναρτησιακά *α,* τα οποία και γι' αυτό καλούνται ρίζες.
Αυτό βέβαια δεν αποκλείει ότι κάποια *α(H)* θα είναι μηδενικά αρκεί να μην είναι όλα μηδενικά.

Πρόταση 4.4.1: Εάν το *α* είναι ρίζα, τότε το *α(H)* είναι φανταστικό για όλα τα $H \in t$.
Παρακάτω, προχωρούμε στο σημαντικό ορισμό του χώρου ριζών.

Ορισμός 4.4.2: Εάν *α* είναι μια ρίζα, τότε ο χώρος ριζών που συμβολίζεται με g_α είναι ο χώρος όλων των στοιχείων $X \in g$, για τα οποία $[H, X] = \alpha(H) X$ για όλα τα $H \in h$. Ένα στοιχείο της g_α ονομάζεται **διάνυσμα-ρίζα** (για τη ρίζα *α*).

Πιο γενικά, εάν *α* είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο της h^* (του δυϊκού χώρου του *h* δηλαδή), ορίζουμε με g_α το χώρο όλων των $X \in g$,για τα οποία $[H, X] = \alpha(H) X$ για κάθε $H \in h$ (απλά όμως δεν ονομάζουμε την g_α χώρο ριζών).
Παίρνοντας $\alpha = 0$, βλέπουμε ότι g_0 είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της *g*, τα οποία αντιμετατίθενται με κάθε στοιχείο της *h*.
Αφού όμως η *h* είναι η μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα, συμπεραίνουμε ότι $g_0 = h$.
Εάν το *α* δεν είναι μηδενικό συναρτησιακό, αλλά ούτε και ρίζα τότε $g_\alpha = \{0\}$.
Παρακάτω, ακολουθούν ορισμένες προτάσεις που αφορούν τους χώρους ριζών.

Πρόταση 4.4.2: Η Lie άλγεβρα g μπορεί να αναδομηθεί με το ευθύ γινόμενο

$$g = (h \oplus (\oplus g_\alpha))_{(\alpha \in \mathbb{R})}$$

Η παραπάνω πρόταση σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της *g* μπορεί να γραφεί μοναδικά ως άθροισμα ενός στοιχείου της *h* και ενός στοιχείου από κάθε χώρο ριζών g_α.

Πρόταση 4.4.3: Για κάθε *α* και *β* που ανήκουν στο h^* ισχύει $[g_\alpha, g_\beta] \subset g_{(\alpha+\beta)}$.

Απόδειξη

Έστω $X \in g_\alpha$ και $Y \in g_\beta$, τότε για κάθε $H \in h$ ισχύει:

$$[H, [X, Y]] = [[H, X], Y] + [X, [H, Y] \Rightarrow$$

$$[H, [X, Y]] = [\alpha(H)X, Y] + [X, \beta(H)Y] = (\alpha(H)+\beta(H))[X, Y]$$

, δηλαδή $[X, Y] \in g_{(\alpha+\beta)}$.
Η παραπάνω πρόταση δείχνει πιο συγκεκριμένα ότι εάν $X \in g_\alpha$ και $Y \in g_{-\alpha}$ τότε $(X, Y) \in h$ $(= g_0)$.

Πρόταση 4.4.4:

1) Εάν $\alpha \in h^*$ είναι μια ρίζα, τότε και η -α είναι ρίζα.

2) Οι ρίζες παράγουν γραμμικά το h^*.

Απόδειξη

1) Αφού η α είναι ρίζα, υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο X της g έτσι ώστε:

$[H, X] = \alpha(H)X$ για κάθε $H \in h$ και έτσι γενικά για κάθε $H \in t$. Άρα το X μπορεί να γραφεί μοναδικά σαν $X=X_1+iX_2$ με X_1 και X_2 να ανήκουν στην $\mathfrak{t}$.

Άρα για $H \in t$ έχουμε :

$$[H, X] = [H, X_1] + i[H, X_2]$$

όπου $[H, X_1]$ και $[H, X_2]$ ανήκουν στην $\mathfrak{t}$.

Άρα $\alpha(H) = i\alpha$ με α πραγματικό.

Επομένως, $$[H, X] = i\alpha X = -\alpha X_2+i\alpha X_1 .$$

Αφού κάθε στοιχείο της g αναλύεται μοναδικά ως άθροισμα ενός στοιχείου της $\mathfrak{t}$ και ενός στοιχείου της $i\mathfrak{t}$ πρέπει να έχουμε :

$$[H, X_1] = -\alpha X_2 \text{ και}$$
$$[H, X_2] = \alpha X_1.$$

Έστω $Y = X_1 - iX_2$ τότε:

$$[H,Y] = [H, X_1]- i [H, X_2] = -\alpha X_2 - i\alpha X_1 = -i\alpha (X_1 - iX_2)= -i\alpha Y$$

, δηλαδή $[H,Y] = -\alpha (H)Y$ για κάθε $H \in t$ και για κάθε $H \in h$.

Αυτό δείχνει ότι και το -α είναι μια ρίζα.

2) Έστω ότι οι ρίζες δεν παράγουν τον h^*, τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο μη μηδενικό $H \in h$, έτσι ώστε $\alpha(H)= 0$ για κάθε $\alpha \in R$.

Τότε $[H, H_1] = 0$ για όλα τα H_1 στο h και ακόμη $[H, X] = \alpha(H)X =0$ για κάθε $X \in g_\alpha$.

Έτσι, από την πρόταση 4.4.2 το H θα αντιμετατίθεται με όλα τα στοιχεία του g.

Όμως, αποδεικνύεται ότι για μια ημιαπλή Lie άλγεβρα την ιδιότητα αυτή μπορούν να την έχουν μόνο τα μηδενικά στοιχεία, άρα άτοπο. □

Στη συνέχεια, αναφέρεται ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για τις ρίζες και τους χώρους ριζών. Η απόδειξή του θα παραληφθεί, διότι είναι ιδιαίτερα μακροσκελής.

Θεώρημα 4.4.5:

1) Εάν α είναι ρίζα, τότε τα μοναδικά πολλαπλάσια του α που είναι ρίζες είναι το α και το $-\alpha$.

2) Εάν α είναι ρίζα, τότε ο χώρος ριζών g_α είναι μονοδιάστατος.

3) Για κάθε ρίζα α μπορούμε να βρούμε μη μηδενικά στοιχεία $X_\alpha \in g_\alpha$ και $Y_\alpha \in g_{-\alpha}$ και $H_\alpha \in h$ έτσι ώστε: $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$, $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. Το στοιχείο H_α είναι μοναδικό.

Τα στοιχεία του σημείου 3 του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζονται **συν-ρίζες** **(co-roots)**.

Η ονομασία αυτή προκύπτει λόγω του ότι οι ιδιότητές τους σχετίζονται με αυτές των αντίστοιχων ριζών.

4.5 Εσωτερικά γινόμενα ριζών και συν -ρίζες.

Στα επόμενα θεωρούμε και πάλι μια ημιαπλή μιγαδική Lie άλγεβρα, $\mathfrak{k}$ είναι μια συμπαγής πραγματική μορφή της g, t είναι μια μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα της $\mathfrak{k}$ και $h = t+it$ είναι η αντίστοιχη υποάλγεβρα Cartan.

Στη συνέχεια, θεωρούμε και ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle .,. \rangle$ στη g, το οποίο είναι αμετάβλητο στην αυτοσυζυγή δράση της K (όπου K είναι η υποομάδα εκείνη του $GL(n.\mathbb{C})$, της οποίας η Lie άλγεβρα είναι t) με την έννοια ότι για κάθε $X \in \mathfrak{k}$: $\langle ad_x Y, Z \rangle = -\langle Y, ad_x Z \rangle$.

Θεωρούμε ακόμη, ότι το εσωτερικό γινόμενο παίρνει πραγματικές τιμές στο $\mathfrak{k}$.

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δοθεί μια γεωμετρική *"εικόνα"* των ριζών, οι οποίες περιγράφηκαν αλγεβρικά στα προηγούμενα.

Πρόταση 4.5.1: Εάν α και β ρίζες και H_α η συν-ρίζα, που αντιστοιχεί στην α, τότε ο $\beta(H_\alpha)$ είναι ακέραιος.

Υπενθυμίζεται ότι οι ρίζες α είναι στοιχεία του δυϊκού χώρου h^* ενώ οι συν-ρίζες H_α , όπως ορίστηκαν στο θεώρημα 4.4.1 , είναι στοιχεία του h.

Θα χρησιμοποιηθεί το εσωτερικό γινόμενο στον h για να *"ταυτοποιήσουμε"* τον h με τον h^* και έτσι να *"συνυπάρχουν"* στον ίδιο χώρο.

Τώρα, μια γενική πρόταση, που θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα :

Πρόταση 4.5.2: Έστω ένα γραμμικό συναρτησιακό $a \in h^*$ (η οποία δεν είναι απαραίτητα ρίζα), τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο H^α στο h έτσι ώστε :

$\alpha(H) = \langle H^\alpha, H \rangle$ για κάθε $H \in h$.

Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιούμε το συμβολισμό H^α που δεν πρέπει να συγχέεται με το H_α.

Ακόμη, θεωρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό στο δεύτερο παράγοντα.

Η απεικόνιση $\alpha \rightarrow H^\alpha$ είναι *1* προς *1* και επι απεικόνιση ανάμεσα στο h^* και στον h αλλά δεν είναι γραμμική.

Όμως είναι πολύ βολικό στην παρούσα θεωρία να αναγνωρίσουμε κάθε ρίζα $a \in h^*$ με το αντιστοιχούμενο στοιχείο $H^\alpha \in h$.

Κάνοντας αυτό ταυτίζουμε *"σιωπηρά"* το H^α με το α και αντί για H^α γράφουμε α.

Σημείωση: Από εδώ και στο εξής, θα ταυτίζουμε κάθε ρίζα με το αντίστοιχο στοιχείο του h , που δίνεται από την προηγούμενη πρόταση.

Έτσι, στη συνέχεια μια ρίζα α θα είναι ένα μη μηδενικό στοιχείο του h (και όχι του h^*) καταχρηστικά με την ιδιότητα ότι υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο X στην g έτσι ώστε: $[H, X] = \langle a, H \rangle X$ για κάθε $H \in h$.

Δηλαδή, το παραπάνω σημαίνει ότι θα γράφουμε $\langle \alpha, H \rangle$ κάθε φορά που συναντάμε το $\alpha(H)$.

Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα της πιο προηγούμενης πρότασης (4.5.1) ότι το $\beta(H_\alpha)$ είναι ακέραιος θα σημαίνει ότι το $\langle \beta, H^\alpha \rangle$ είναι ακέραιος.

Πρόταση 4.5.3 : Έστω α η ρίζα (σύμφωνα με τα προηγούμενα) και έστω H_α η αντίστοιχη συν-ρίζα. Τότε, για τα α και H_α ισχύει ότι:

$$H_\alpha = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad \text{και} \quad \alpha = \frac{2H_\alpha}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}$$

Απόδειξη

Αποδεικνύεται ότι το H_α ανήκει στο μονοδιάστατο υπόχωρο $(ker\alpha)^\perp$ του $span\alpha$. Έτσι $(ker\alpha)^\perp = ((span\alpha)^\perp)^\perp = span\alpha$.

Άρα το α και το H_α είναι το καθένα πολλαπλάσιο του άλλου, και έτσι η παραπάνω πρόταση προκύπτει από την κανονικοποίηση του εσωτερικού γινομένου $\langle \alpha, H_\alpha \rangle = 2$.

Το πραγματικό νόημα αυτής της πρότασης είναι ότι, αφού ταυτίζουμε με το εσωτερικό γινόμενο το h^* με το h τα α και H_α είναι πολλαπλάσια το ενός του άλλου.

Παρατηρείται ακόμη ότι υπάρχει μια *"συμμετρία"* στις δυο προηγούμενες σχέσεις.

Έτσι, αν αντικαταστήσουμε τη μια στην άλλη έχουμε : $\langle \alpha , \alpha \rangle \langle H_\alpha , H_\alpha \rangle = 4$.

Ακόμη, εάν αναφερθούμε στην πρόταση 4.4.1 χρησιμοποιώντας τα τελευταία συμπεράσματα, παρατηρούμε ότι:

$$\langle \beta , H_\alpha \rangle = 2 \frac{\langle \beta , \alpha \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle}$$

πρέπει να είναι ακέραιος για όλες τις ρίζες α και β.

Αυτό σημαίνει ότι το $\langle \beta , \alpha \rangle$ είναι πραγματικός αριθμός και εάν δεν είναι το μισό του $\langle \alpha , \alpha \rangle$, τότε ακέραιο πολλαπλάσιό του.

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη σχέση της προηγούμενης πρότασης έχουμε :

$$\langle \beta , H_\alpha \rangle = 2 \frac{\langle H_\beta , H_\alpha \rangle}{\langle H_\beta , H_\beta \rangle}$$

το οποίο πρέπει και πάλι να είναι ακέραιος.

Έχει δειχτεί λοιπόν το επόμενο:

Θεώρημα 4.5.4: Για κάθε ρίζα α και β (σύμφωνα με την καινούργια οπτική γωνία) οι ποσότητες :

$$2 \frac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle} \quad \text{και} \quad 2 \frac{\langle H_\beta , H_\alpha \rangle}{\langle H_\beta , H_\beta \rangle}$$

είναι ακέραιοι και ισχύει:

$$2 \frac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle} = 2 \frac{\langle H_\beta , H_\alpha \rangle}{\langle H_\beta , H_\beta \rangle}$$

Ο αριθμός $\langle \beta , H_\alpha \rangle$ είναι η ιδιοτιμή του $ad_{H\alpha}$ στο χώρο ριζών g_β. Αυτός είναι ουσιαστικά και ο λόγος για τον οποίο οι παραπάνω ποσότητες είναι ακέραιοι.

Ασ θυμηθούμε από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι εάν α και β είναι στοιχεία ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τότε η ορθογώνια προβολή του β στο α δίνεται από την ποσότητα

$$\frac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle} \alpha \quad .$$

4.6 Η ομάδα Weyl

Σε αυτή την παράγραφο ορίζεται η ομάδα Weyl με τη χρήση των συμπαγών ομάδων.
Η ομάδα Weyl μπορεί να επεξηγηθεί και με τη χρήση των αλγεβρών Lie. Προφανώς και οι δυο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες.
Στα επόμενα θα έχουμε ότι και πάλι η g θα είναι μια μιγαδική ημιαπλή Lie άλγεβρα, η οποία θα αποτελεί μια υποάλγεβρα του $gl(n, \mathbb{C})$.
Θα θεωρήσουμε επίσης και μια συμπαγή πραγματική μορφή $\mathfrak{k}$ της g και έστω K η συμπαγής υποομάδα του $GL(n, \mathbb{C})$ της οποίας η Lie άλγεβρα είναι $\mathfrak{k}$.
Επίσης, θα θεωρήσουμε μια μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα t της $\mathfrak{k}$ και θα δουλέψουμε με την αντίστοιχη Cartan υποάλγεβρα $h = t+it$.
Ακόμη, το εσωτερικό γινόμενο που θα χρησιμοποιηθεί, θα είναι αμετάβλητο κάτω από την αυτοσυζυγή δράση της K και παίρνει πραγματικές τιμές στην $\mathfrak{k}$.
Ας θεωρήσουμε τις επόμενες δυο ομάδες του K.

$$Z(t)=\{A\in K / Ad_A(H)=H\} \text{ για κάθε } H\in t .$$

$$N(t)=\{A\in K / Ad_A(H)\subset t\} \text{ για κάθε } H\in t .$$

Είναι προφανές ότι η $Z(t)$ είναι μια υποομάδα του $N(t)$ και εύκολα βλέπουμε ότι η $Z(t)$ είναι μια κανονική υποομάδα του $N(t)$.

Ορισμός 4.6.1: Η ομάδα Weyl της μιγαδικής ημιαπλής Lie άλγεβρας g είναι η ομάδα πηλίκο : $W=N(t)/Z(t)$.

Μπορούμε να περιγράψουμε μια δράση της W στην t ως εξής: Για κάθε στοιχείο w της W επιλέγουμε ένα στοιχείο Α απο την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας στην $N(t)$.
Έτσι για $H\in t$ ορίζουμε τη δράση $w.H$ της w στο H ως : $w.H = Ad_A(H)$.
Αποδεικνύεται ότι η δράση αυτή είναι καλά ορισμένη με την έννοια ότι είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του A για κάθε κλάση ισοδυναμίας.
Αφού $h = t+it$, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός επεκτείνεται μοναδικά σε ένα μιγαδικό γραμμικό μετασχηματισμό στην h.
Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και η w δρα στην h.
Εάν w είναι ένα στοιχείο της ομάδας Weyl τότε γράφουμε $w.H$ για τη δράση της w σε ένα στοιχείο H της h.

Είναι φανερό ότι *w* είναι ισομορφική με την ομάδα των γραμμικών μετασχηματισμών της *h*.

Στη συνέχεια, ακολουθούν ορισμένες προτάσεις και θεωρήματα αναφορικά με την ομάδα Weyl.

Πρόταση 4.6.1:

1) Το εσωτερικό γινόμενο $\langle .,. \rangle$ στο *h* είναι αμετάβλητο κάτω από τη δράση της *W*.

2) Το σύνολο $R \subset h$ των ριζών είναι αμετάβλητο κάτω από τη δράση της *W*.

3) Το σύνολο των συν-ριζών είναι αμετάβλητο κάτω από τη δράση της *W* και $w.H_\alpha = H_{w.\alpha}$ για κάθε $w \in W$ και $\alpha \in R$.

4) Η ομάδα Weyl είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη

1) Η δράση της *W* στην *h* είναι ουσιαστικά η αυτοσυζυγής δράση της $N(t) \subset K$ στην *g* περιορισμένη στην *h*.

Αφού το εσωτερικό γινόμενο στο *g* είναι αμετάβλητο κάτω από την αυτοσυζυγή δράση του *K*, ο περιορισμός αυτού του εσωτερικού γινομένου στο *h* είναι αμετάβλητος κάτω από την αυτοσυζυγή δράση στην *N(t)*.

2) Δοθέντος ενός στοιχείου *w* της ομάδας Weyl, έστω $A \in K$ ένα στοιχείο *N(t)* που αναπαριστά το *w*.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha \in h$ είναι μια ρίζα. Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο *X* της *g* έτσι ώστε : $[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X$ για κάθε $H \in h$.

Ας θεωρήσουμε το στοιχείο $Ad_A(X)$ της *g* και ας υπολογίσουμε πως το *h* δρα σε αυτή.

Για $H \in h$ έχουμε : $[H, Ad_A(X)] = Ad_A([Ad_{A-1}(H), X])$, επειδή Ad_A είναι ένας αυτομορφισμός Lie αλγεβρών.

Αφού $A \in N(t)$, $Ad_{A-1}(H) \in h$ έχουμε :

$$[Ad_{A-1}(H), X] = < \alpha, Ad_{A-1}(H) > X ,$$

άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$[H, Ad_A(X)] = < \alpha, Ad_{A-1}(H) > Ad_A X.$$

Αφού το εσωτερικό γινόμενο στο *h* είναι αμετάβλητο κάτω από την Ad_A έχουμε

$$< \alpha, Ad_{A-1}(H) > = < Ad_A(\alpha), H > = < w.a, H >$$

Έτσι, η προηγούμενη σχέση γίνεται : $[H, Ad_A(X)] = < w.a, H > Ad_A X.$

Άρα το *w.α* είναι ρίζα με διάνυσμα $Ad_A(X)$.

3) Έχουμε $H_\alpha = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Άρα $wH_\alpha = \frac{2w.\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2w.\alpha}{\langle w.\alpha, w.\alpha \rangle} = H_{w.\alpha}$ όπου έχει χρησιμοποιηθεί η αμεταβλητότητα του εσωτερικού γινομένου για τη δράση του *W*.

4) Αφού έχουμε ότι οι ρίζες παράγουν γραμμικά το *h* η δράση ενός στοιχείου *w* στο *h* ορίζεται από το πως το *w* δρα στις ρίζες.

Όμως, αφού κάθε *w* διατηρεί το σύνολο των ριζών, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε *w* ως μετάθεση του συνόλου των ριζών, και αφού υπάρχουν μόνο πεπερασμένες μεταθέσεις, προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.6.2: Η υποομάδα *Z(t)* της *SU(2)* δίνεται από τον τύπο:

$$Z(t) = \{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \}$$

και η *N(t)* είναι το σύνολο όλων των πινάκων Α στην *SU(2),* οι οποίοι είτε ανήκουν στην *Z(t)* είτε είναι της μοφής :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

Η ομάδα Weyl *N(t)/Z(t)* έχει δυο στοιχεία. Για κάθε $H \in h = t + it$ και για κάθε *A* της προηγούμενης μορφής έχουμε :

$$AHA^{-1} = -H$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παραλείπεται, διότι είναι ιδιαίτερα μακροσκελής.

Θεώρημα 4.6.3 : Για κάθε ρίζα *α* υπάρχει ένα στοιχείο w_α του *W* έτσι ώστε : $w_\alpha.\alpha = -\alpha$ και $w_\alpha.H = H$ για κάθε $H \in h$ με < α, Η > = 0.

Θεώρημα 4.6.4: Η ομάδα Weyl παράγεται από τα στοχεία w_α, όταν το *α* διατρέχει όλες τις ρίζες.

Αυτό σημαίνει ότι η μικρότερη υποομάδα του *W* που περιέχει όλα τα w_α είναι η ίδια η *W*.

4.7. Συστήματα ριζών και θετικές ρίζες

Στις προηγούμενες παραγράφους διατυπώθηκαν ορισμένες ιδιότητες των ριζών. Γνωρίζουμε ότι οι ρίζες είναι φανταστικές στο t, το οποίο θεωρώντας τη μεταφορά από το h^* στο h, σημαίνει ότι οι ρίζες *"ζουν"* στο $it \subset h$.

Το εσωτερικό γινόμενο $< . , . >$ δημιουργήθηκε για να παίρνει πραγματικές τιμές στο $\mathfrak{t}$ και άρα στο t.

Το εσωτερικό γινόμενο παίρνει επίσης πραγματικές τιμές στο it , διότι

$$< iX, iY > = (-i)i < X, Y > = < X, Y >.$$

Άρα οι ρίζες *"ζουν"* και στον πραγματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $E = it$.

Από προηγούμενες προτάσεις γνωρίζουμε ότι οι ρίζες παράγουν το it και αν το α είναι ρίζα επίσης είναι και το $-\alpha$ ρίζα, αλλά κανένα άλλο πολλαπλάσιο του α δεν είναι ρίζα.

Ακόμη γνωρίζουμε ότι για κάθε ρίζες α και β το $2\dfrac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle}$ είναι ακέραιος.

Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι οι ρίζες είναι αμετάβλητες κάτω από τη δράση των ομάδων Weyl.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.7.1:

Οι ρίζες σχηματίζουν ένα πεπερασμένο σύνολο μη μηδενικών στοιχείων ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο και ισχύουν τα εξής:

1) Οι ρίζες παράγουν γραμμικά τον E.

2) Εάν α είναι ρίζα, τότε το μοναδικό πολλαπλάσιο του α που είναι ρίζα είναι το $-\alpha$.

3) Εάν το α είναι ρίζα, με w_α δηλώνουμε το γραμμικό μετασχηματισμό του E που δίνεται

από το $$w_\alpha = \beta - \frac{(2\langle \alpha , \beta \rangle)}{\langle \alpha , \alpha \rangle}\alpha \quad .$$

Τότε, για κάθε ρίζα α και β το $w_\alpha.\beta$ είναι ρίζα.

4) Εάν α, β ρίζες, τότε η ποσότητα $2\dfrac{\langle \alpha , \beta \rangle}{\langle \alpha , \alpha \rangle}$ είναι ακέραιος.

Ένα οποιοδήποτε σύνολο διανυσμάτων, που ικανοποιεί τα παραπάνω σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο με εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται **σύστημα ριζών.**

Ένα παράδειγμα συστήματος ριζών που προαναφέρθηκε είναι οι συν-ρίζες H_α .
Στη συνέχεια, θα χωρίσουμε τις ρίζες σε δυο ομάδες, εκ των οποίων η μια θα ονομάζεται *"θετική"* και η άλλη *"αρνητική"* με την έννοια ότι κάθε άθροισμα *"θετικών"* ριζών, είναι ρίζα *"θετική"*. Δεν είναι πάντως μοναδικός αυτός ο διαχωρισμός των ριζών.
Ένα καλό παράδειγμα διαχωρισμού είναι ο παρακάτω ορισμός :

Ορισμός 4.7.1: Έστω E πραγματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $R \subset E$ ένα σύστημα ριζών. Τότε μια βάση για το R είναι ένα υποσύνολο $\Delta=\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_r\}$ του R, έτσι ώστε το Δ να σχηματίζει μια βάση για το E ως βάση διανυσματικού χώρου και έτσι ώστε για κάθε $a \in R$ να έχουμε :

$$\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + ... + n_r\alpha_r$$

όπου τα n_j είναι ακέραιοι και είτε είναι όλοι θετικοί ή μηδέν είτε όλοι αρνητικοί ή μηδέν.

Αφού έχουμε διαλέξει τη βάση Δ τα α για τα οποία τα n_j είναι θετικά ή μηδέν λέγονται θετικές ρίζες και τα α για τα οποία τα n_j είναι αρνητικά ή μηδέν λέγονται αρνητικές ρίζες. Τα στοιχεία του Δ λέγονται απλές θετικές ρίζες.
Για τα συστήματα ριζών και τις βάσεις ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.7.2: Για κάθε σύστημα ριζών υπάρχει μια βάση.

Πρόταση 4.7.3: Εάν R είναι το σύνολο των ριζών της g αναφορικά με την
$h = t+it$ και $\Delta = \{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_r\}$ είναι βάση για το R, τότε $\{H_{\alpha 1}+H_{\alpha 2}+....+H_{\alpha r}\}$ είναι βάση για το σύστημα συν-ριζών.

4.8 Παραδείγματα των παραπάνω εννοιών για την $sl(n, \mathbb{C})$.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δοθούν παραδείγματα για τις προηγούμενες δομές για την περίπτωση της $sl(n, \mathbb{C})$.

4.8.1 Η Cartan υποάλγεβρα

Θεωρούμε την πραγματική συμπαγή μορφή $\mathfrak{t} = su(n)$ και τη μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα *t,* η οποία είναι η τομή του συνόλου των διαγώνιων πινάκων με την *su(n),* δηλαδή:

$$t = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha_1 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & i\alpha_n \end{pmatrix} / \alpha_j \in \mathbb{R}, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots. + \alpha_n = 0 \right\}$$

Η αντίστοιχη Cartan υποάλγεβρα είναι $h = t+it$, έτσι ώστε το h να είναι το σύνολο όλων των διαγώνιων πινάκων με στοιχεία μηδέν (0)

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} / \lambda_j \in \mathbb{C}, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots. + \lambda_n = 0 \right\}$$

4.8.2 Οι ρίζες

Έστω E_{kl} ο πίνακας ο οποίος έχει το στοιχείο *1* στην k γραμμή και l στήλη και παντού αλλού *0*.

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι, εάν $H \in t$ (όπως ορίστηκε προηγουμένως), τότε

$HE_{kl} = \lambda_k E_{kl}$ και $E_{kl}H = \lambda_l E_{kl}$.

Άρα $[\, H, K_{kl}] = (\lambda_k - \lambda_l)E_{kl}$.

Εάν $k = l$, τότε *ο* E_{kl} δεν έχει στοιχείο 0 και άρα δεν ανήκει στο $sl(n, \mathbb{C})$.

Εάν $k \neq l$ τότε E_{kl} ανήκει στο $sl(n, \mathbb{C})$ και η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι το E_{kl} είναι ιδιοδιάνυσμα για κάθε απεικόνιση ad_H με $H \in h$, με ιδιοτιμή $(\lambda_k - \lambda_l)$.

Είναι φανερό ότι κάθε στοιχείο του X του $sl(n, \mathbb{C})$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στην πρόσθεση ενός στοιχείου της Cartan υποάλγεβρας (δηλαδή των πινάκων με τα διαγώνια στοιχεία του X) και του γραμμικού συνδυασμού των E_{kl} με $k \neq l$ (του πίνακα με τα μη διαγώνια στοιχεία του X).

Εάν θεωρήσουμε τις ρίζες σαν στοιχεία του h^*, τότε σύμφωνα με τη σχέση : $[\, H, K_{kl}\,] = (\lambda_k - \lambda_l)E_{kl}$ οι ρίζες αποτελούν τα γραμμικά συναρτησιακά α_{kl} , τα οποία αντιστοιχούν σε κάθε $H \in h$ την ποσότητα $(\lambda_k - \lambda_l)$.

Ας σημειωθεί ότι $\alpha_{kl} = -\alpha_{lk}$, αλλά κανένα άλλο πολλαπλάσιο του α_{kl} δεν είναι ρίζα.

4.8.3: Εσωτερικό γινόμενο ριζών

Έστω το εσωτερικό γινόμενο στην $sl(n, \mathbb{C})$: $< X, Y > = trace\ (X^*, Y),$ το οποίο ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο Hilbert-Schmidt.**

Με X^* συμβολίζουμε τον συνήθη αυτοσυζυγή της X. Αποδεικνύεται ότι αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι αμετάβλητο κάτω από την αυτοσυζυγή δράση της $SU(n)$.

Εάν περιορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο στο h έχουμε το *"προφανές"* εσωτερικό γινόμενο στο h όπου: $diag(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)$ με $diag(\sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n)$ δίνουν $\overline{\lambda_1}\sigma_1 + \overline{\lambda_2}\sigma_2 + ... + \overline{\lambda_n}\sigma_n$.

Εάν τώρα θεωρήσουμε τις ρίζες σαν στοιχεία του h και όχι του h^* με τη βοήθεια του προηγούμενου εσωτερικού γινομένου έχουμε ότι:

$$\alpha_{kl} = E_{kk} - E_{ll}$$

με $k \neq l$ άρα $< \alpha_{kl} , \alpha_{kl} > = 2$.

Άρα το εσωτερικό γινόμενο $< \alpha_{kl} , \alpha_{k'l'} >$ έχει τις πιθανές τιμές $0, \pm 1, \pm 2$ ανάλογα με το πλήθος των κοινών στοιχείων ανάμεσα στα σύνολα $\{k, l\}$, $\{k',l'\}$

$$\text{Άρα} \quad 2\frac{\langle \alpha_{kl}, \alpha_{(k'l')} \rangle}{\langle \alpha_{kl}, \alpha_{kl} \rangle} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$$

Είναι φανερό ότι όλες οι ρίζες έχουν "μήκος" $\sqrt[2]{2}$.

Εάν α και β είναι ρίζες και $\alpha \neq \beta$ και $\alpha \neq -\beta$, τότε η γωνία ανάμεσα στα α και β είναι είτε 60^o (αν $< \alpha, \beta > = 1$) είτε 90^o (αν $< \alpha, \beta > = 0$) είτε 120^o (αν $< \alpha, \beta > = -1$).

Σε άλλα συστήματα ριζών βέβαια μπορεί οι ρίζες να μην έχουν τέτοιο "μήκος" και να ανακύπτουν άλλα αποτελέσματα.

4.8.4: Θετικές ρίζες

Τελικά, μπορούμε να βρούμε μια βάση ως εξής :

Θεωρούμε ως βάση τις ρίζες α_{kl} με $l = k+1$. Ισχύει $\alpha_{kl} = E_{kk} - E_{ll}$.

Εάν $k<l$ έχουμε:

$$E_{kk} - E_{ll} = (E_{kk} - E_{k-1,k-1}) + (E_{k-1,k-1} - E_{k-2,k-2}) + ... + (E_{l+1,l+1} - E_{ll})$$

άρα $\alpha_{kl} = \alpha_{k-1,k} + \alpha_{k-1,k-2} + ... + \alpha_{l,l+1}$.

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα μπορούμε να θεωρήσουμε ως θετικές ρίζες τις α_{kl} με $k<l$ και αρνητικές ρίζες τα α_{kl} με $k>l$.

4.9 Αποτελέσματα μοναδικότητας

Δοθείσας μιας μιγαδικής ημιαπλής Lie άλγεβρας g έχουμε βγάλει κάποια αποτελέσματα για την πραγματική συμπαγή μορφή $\mathfrak{k}$ της g, για τη μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα t της $\mathfrak{k}$ και για τα συστήματα των θετικών ριζών.

Κανένα όμως από αυτά τα μαθηματικά *"αντικείμενα"* δεν είναι μοναδικό**.**
Τα επόμενα θεωρήματα που ακολουθούν (χωρίς απόδειξη) αναφέρουν κάποια αποτελέσματα μοναδικότητας με την έννοια ότι κάθε μια από αυτές τις δομές είναι μοναδική κάτω από την αυτοσυζυγή δράση κάποιων ομάδων.
Στα επόμενα η g θα είναι μια υποάλγεβρα κάποιας $gl(n,\mathbb{C})$ Lie άλγεβρας και με G θα εννοούμε τη συνεκτική υποομάδα Lie του $gl(n,\mathbb{C})$ της οποίας η Lie άλγεβρα θα είναι η g.

Θεώρημα 4.9.1: Έστω $\mathfrak{t}_1$ και $\mathfrak{t}_2$ είναι δυο συμπαγείς πραγματικές μορφές της g. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο A της G έτσι ώστε : $Ad_A(\mathfrak{t}_1)=\mathfrak{t}_2$

Θεώρημα 4.9.2: Έστω ότι η $\mathfrak{t}$ είναι η συμπαγής πραγματική μορφή της g και K είναι η συμπαγήςς υποομάδα της G, της οποίας η Lie άλγεβρα είναι η $\mathfrak{t}$. Έστω $\mathfrak{t}_1$ και $\mathfrak{t}_2$ δυο μέγιστες αντιμεταθετικές υποάλγεβρες της $\mathfrak{t}$. Τότε υπάρχει στοιχείο A της K έτσι ώστε $Ad_A(\mathfrak{t}_1)=\mathfrak{t}_2$.

Θεώρημα 4.9.3: Έστω h μια Cartan υποάλγεβρα της g. Τότε υπάρχει μια συμπαγής πραγματική μορφή $\mathfrak{t}$ της g και μια μέγιστη αντιμεταθετική υποάλγεβρα t της $\mathfrak{t}$, έτσι ώστε $h = t+it$.
Εάν h_1 και h_2 είναι δυο Cartan υποάλγεβρες της g, τότε υπάρχει $A\in G$ έτσι ώστε $Ad_A(h_1)=h_2$.

Θεώρημα 4.9.4: Για κάθε δυο συστήματα θετικών ριζών μπορεί να βρεθεί απεικόνιση μεταξύ τους μέσω της ομάδας Weyl.

Στο τελευταίο θεώρημα πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, διαφορετικές διατάξεις της $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ ουσιαστικά αποτελούν το ίδιο σύστημα θετικών απλών ριζών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *"Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία"*, Ανάργυρου Φελλούρη, Αθήνα 2009.

2. *"Graduate Texts in Mathematitics: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction"*, Brian C. Hall, Springer, USA, 2000.

3. *"Lie Groups, Lie Algebras and some of their applications"*, Robert Gilmore, Drexel University, Dover Publications, INC, Mineola, New York, 2002.

4. *"An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry"*, by Robert L.Bryant , Duke University (1991), Durham, NC.

5. *"Lie algebras"*, Shlomo Sternberg, 2004.

6. *"Notes on Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras",* Jean Gallier, University of Pennsylvania, Philadelphia USA 2005.

7. *"Introduction to Lie groups"*, Joseph Hundley, Southern Illinois Umniversity, 2009.

8. *"Introduction to Lie groups and Lie algebras"*, Arthur A.Sagle & Ralph E.Walde, Academic Press, N.Y, San Francisco, London, 1973.

9. *"Finding moonshine, a mathematician journey through symmetry"*, Marcus du Sautoy, 2008.

10. *"Introduction to Differentiable Manifolds"*, Louis Auslander & Robert E. MacKenzie, Mineola, New York, 2009.

11. *"Ομάδες Lie, Ομογενείς χώροι και Διαφορική Γεωμετρία"*, Ανδρέα Αρβανιτογεώργου, Τροχαλία 1999.

12. *"Θεωρία Ομάδων"*, Ι. Δ. Βέργαδου, 1991

13. *"Notes on differential geometry and lie groups" ,* Jean Gallier Department of computer and information science,University of Pennsylvania

14. *"Introduction to Lie Groups and Lie Algebras",* Alexander Kirillov, Jr, Department of Mathematics, Suny at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794, USA.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *WIKIPEDIA*
2. *WOLFRAM- MATH - WIKI*