



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**“Μελέτη μονοδιάστατης χρονικά μεταβαλλόμενης αρτηριακής
ροής αίματος σε φυσιολογικές, παθολογικές καταστάσεις και
μετά από αποκατάσταση”**

Διπλωματική εργασία για την απόκτηση
διπλώματος μηχανολόγου μηχανικού

ΚΡΗΤΙΚΟΥ ΗΛΕΚΤΡΑ

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Καθηγητής Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αθήνα
2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**“Μελέτη μονοδιάστατης χρονικά μεταβαλλόμενης αρτηριακής
ροής αίματος σε φυσιολογικές, παθολογικές καταστάσεις και
μετά από αποκατάσταση”**

Διπλωματική εργασία για την απόκτηση
διπλώματος μηχανολόγου μηχανικού

ΚΡΗΤΙΚΟΥ ΗΛΕΚΤΡΑ

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ

Καθηγητής Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Αθήνα
2012



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF MECHANICAL ENGINEERING

**“One dimensional unsteady arterial blood flow in normal,
pathological and after repair conditions”**

KRITIKOU ELECTRA

Supervisor:

Professor TSANGARIS SOKRATES

School of Mechanical Engineering

National Technical University of Athens

Athens
2012

Αφιερώνεται στη μητέρα μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην παρούσα εργασία, μελετάται η διάδοση κυμάτων σε αγγεία του κυκλοφορικού συστήματος και στην συνέχεια η τοποθέτηση ενδομοσχεύματος για την αποκατάσταση των ανευρυσμάτων της κοιλιακής αορτής.

Συγκεκριμένα στο 1^ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην θεωρία διάδοσης κυμάτων στις αρτηρίες. Παρουσιάζονται οι εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες που χρησιμοποιήθηκαν στην συνέχεια της εργασίας και ο τρόπος υπολογισμού των ανακλάσεων για το γραμμικοποιημένο σύστημα. Παρουσιάζονται επίσης χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογιστικών μοντέλων του κυκλοφορικού συστήματος που βρέθηκαν στην βιβλιογραφία.

Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται όλα τα επιμέρους βήματα που προηγήθηκαν της σύνταξης του υπολογιστικού κώδικα. Για την εξαγωγή συμπερασμάτων αναπτύχθηκε υπολογιστικός κώδικας βασισμένος στην ρητή έκφραση της αριθμητικής μεθόδου Mac-Cormack. Οι οριακές συνθήκες διατυπώθηκαν κάνοντας χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών. Τα αιμοφόρα αγγεία μοντελοποιήθηκαν ως ελαστικοί αγωγοί σε μόνιμη και παλλόμενη ροή.

Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων για τις υπολογιστικές περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Οι πρώτες υπολογιστικές περιπτώσεις αποτελούν απλά μοντέλα που μελετούνται ως τμήματα ενδοαγγειακού μοσχεύματος, κάνοντας την απαραίτητη σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της βιβλιογραφίας ώστε να εξακριβωθεί η αξιοπιστία της αριθμητικής μεθοδολογίας. Στην συνέχεια, με δύο διαφορετικές θεωρήσεις αντιμετώπισης, μελετώνται τα ρευστομηχανικά μεγέθη λόγω της τοποθέτησης ενδομοσχεύματος σε διακλάδωση για την αποκατάσταση των ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής.

Τέλος, στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα των ανωτέρω υπολογιστικών περιπτώσεων.

ABSTRACT

In this paper, the propagation of waves in vessels of the circulatory system and the use of endografts for the restoration of aneurysms of the abdominal aorta are studied.

Specifically, the 1st chapter explains the theory of wave propagation in arteries. It presents the equations of incompressible fluid with constant viscosity, which were used in this study. The theory of wave reflections for the linearized system was also addressed. It also presents some examples of models of the circulatory system found in the literature.

The 2nd chapter writes about all the preceded steps leading to the syntax of the computational code. In order to draw conclusions a computational code was created based on the Mac-Cormack explicit finite difference scheme. The boundary conditions were formulated using the method of characteristics. Blood vessels were modelled as elastic tubes and the flow was considered to be steady and pulsatile both.

In the 3rd chapter, we present the results for the computational cases studied. The first computational cases on simple geometries were studied to verify the reliability of the developed code comparing its results with already presented results found in the literature. Afterwards, two different approaches of bifurcated vessels considered, using endografts for the restoration of aneurysms in the abdominal aorta.

Finally, the 4th chapter presents the conclusions of the above computational cases.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π. υπό την επίβλεψη του καθηγητή Σωκράτη Τσαγγάρη, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για την ανάθεση και εποπτεία της εργασίας, την ενθάρρυνση που μου προσέφερε και για τη γενικότερη συμβολή του στη μελλοντική μου επαγγελματική σταδιοδρομία. Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τον Δρ. κ. Χρήστο Μανόπουλο, για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές, τον χρόνο, την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διάδοση Κυμάτων στις Αρτηρίες	1
1.1 Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα	1
1.2 Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα	2
1.3 Εξισώσεις ασυμπιέστου ρευστού με σταθερό ιξώδες	2
1.4 Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα	5
1.4.1 Στένωση– διεύρυνση	5
1.4.2 Διακλάδωση	7
1.5 Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηριακές περιοχές	7
1.6 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής	8
1.7 Ενδοαγγειακό μόσχευμα	8
1.8 Μοντέλα κυκλοφορικού συστήματος	9
1.8.1 1ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος	10
1.8.2 2ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος	12

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Διαμόρφωση του Προβλήματος	14
2.1 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος	14
2.2 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος	14
2.3 Αδιαστατοποίηση	16
2.4 Διακριτοποίηση του χώρου	18
2.5 Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων	18
2.6 Αρχικές και Οριακές συνθήκες	19
2.6.1 Εγγύς άκρο αγγείου	22
2.6.1.1 Παλμός πίεσης	24
2.6.1.2 Παλμός με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων	26

2.6.2 Άπω άκρο αγγείου	26
2.6.2.1 Συνθήκη μη-ανάκλασης	28
2.6.2.2 Τερματική αντίσταση	29
2.7 Αγγείο με stent	29
2.7.1 Συνάρτηση $E(x)$ στα σημεία αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας	30
2.7.2 Θεώρηση stent ως ξεχωριστό αγγείο	31
2.8 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	32
2.9 Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης	33
2.10 Μέθοδος επίλυσης(MacCormack)	34
2.10.1 Βήμα πρόβλεψης(predictor step)	35
2.10.2 Βήμα διόρθωσης(Corrector step)	35
2.11 Μέθοδος απαλοιφής Gauss	36
2.11.1 Φάση τριγωνοποίησης	36
2.11.2 Φάση πίσω-αντικατάσταση	37
2.12 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson	37

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Υπολογιστικές Περιπτώσεις και Αποτελέσματα	40
3.1 Εισαγωγή	40
3.2 Αγγείο με stent	40
3.2.1 Παλμός πίεσης μικρής διάρκειας	41
3.2.2 Ρεαλιστικός παλμός πίεσης	43
3.2.3 Παλμός πίεσης επαναλαμβανόμενης διέγερσης	49
3.3 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	53
3.4 Διπλή διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	70
3.5 Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης	88
3.6 Ενδοαγγειακό μόσχευμα	99

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συμπεράσματα	116
4.1 Εισαγωγή	116
4.2 Αγγείο με stent	116
4.3 Απλή Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	118
4.4 Διπλή Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης	119
4.5 Απλή Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης	119
4.6 Ενδομόσχευμα	119
Παράρτημα	121
Βιβλιογραφία-Αρθρογραφία	123

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ1.1	
Σχηματική παράσταση στένωσης– διεύρυνσης _____	5
ΣΧΗΜΑ1.2	
Σχηματική παράσταση διακλάδωσης _____	7
ΣΧΗΜΑ1.3	
Ενδομόσχευμα _____	8
ΣΧΗΜΑ1.4	
Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων _____	11

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ2.1	
Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο εγγύς άκρο _____	22
ΣΧΗΜΑ2.2	
Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο άπω άκρο _____	26
ΣΧΗΜΑ2.3	
Σχηματική παράσταση αγγείου με stent _____	29
ΣΧΗΜΑ2.4	
Το μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει του μήκους του αγγείου _____	30
ΣΧΗΜΑ2.5	
Σχηματική αναπαράσταση υποδιαίρεσης αγγείου με stent σε δύο αγγεία _____	31
ΣΧΗΜΑ2.6	
Σχηματική παράσταση της διακλάδωσης _____	32
ΣΧΗΜΑ2.7	
Σχηματική παράσταση των γωνιών της διακλάδωσης _____	33

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΧΗΜΑ3.1	
Σχηματική παράσταση στενωμένης αρτηρίας _____	40
ΣΧΗΜΑ3.2	
Παλμός πίεσης μικρής διάρκειας _____	41

ΣΧΗΜΑ3.3-3.4	
Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας	42
ΣΧΗΜΑ3.5	
Ρεαλιστικός παλμός πίεσης	43
ΣΧΗΜΑ3.6-3.7	
Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας	44
ΣΧΗΜΑ3.8	
Η πίεση στο σημείο P για $k=1, 10$ και 100	46
ΣΧΗΜΑ3.9-3.11	
Η πίεση, η διατομή και η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου για μία περίοδο για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας	47
ΣΧΗΜΑ3.12	
Παλμός πίεσης επαναλαμβανόμενης διέγερσης	49
ΣΧΗΜΑ3.13-3.14	
Η πίεση στο σημείο $x=8\text{cm}$ για σταθερό και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας	50
ΣΧΗΜΑ3.15-3.17	
Η πίεση, η διατομή και η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου της τελευταίας περιόδου για σταθερό και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας	51
ΣΧΗΜΑ3.18	
Σχηματική παράσταση διακλάδωσης	53
ΣΧΗΜΑ3.19	
Παλμός εισόδου	54
ΣΧΗΜΑ3.20-3.23	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P, M και D του πατρικού και των θυγατρικών αγγείων	55
ΣΧΗΜΑ3.24-3.29	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P, M και D του πατρικού και των θυγατρικών αγγείων σε βάθος χρόνου 6 περιόδων	58
ΣΧΗΜΑ3.30-3.35	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου της τελευταίας περιόδου στο πατρικό και τα θυγατρικά αγγεία	61
ΣΧΗΜΑ3.36-3.37	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στο μέσο του πατρικού αγγείου για διπλάσια αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος	64

ΣΧΗΜΑ3.38-3.39	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P,M και D των θυγατρικών αγγείων για διπλάσια αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος _____	66
ΣΧΗΜΑ3.40-3.45	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου για μία περίοδο στο πατρικό και το θυγατρικό αγγείο με $Rf=0.4$ για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$ _____	67
ΣΧΗΜΑ3.46	
Σχηματική παράσταση διπλής διακλάδωσης _____	70
ΣΧΗΜΑ3.47-3.56	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P,M και D σε όλα τα αγγεία _____	71
ΣΧΗΜΑ3.57-3.58	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P,M και D στο αγγείο 1 για διπλάσια αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος _____	76
ΣΧΗΜΑ3.59	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο σημείο M του αγγείου 2 _____	77
ΣΧΗΜΑ3.60	
Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο σημείο M του αγγείου 2 _____	78
ΣΧΗΜΑ3.61-3.66	
Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής στα σημεία P,M και D στα αγγεία 3,4 και 5 _____	79
ΣΧΗΜΑ3.67-3.78	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου για μία περίοδο στα αγγεία 1,2,3 και 5 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$ _____	82
ΣΧΗΜΑ3.79	
Σχηματική παράσταση των γωνιών της διακλάδωσης _____	88
ΣΧΗΜΑ3.80	
Παλμός εισόδου _____	89
ΣΧΗΜΑ3.81-3.89	
Η χρονική εξέλιξη της διατομής, της πίεσης και της ταχύτητας στο μέσο του πατρικού και των θυγατρικών αγγείων για τις δύο ομάδες γωνιών _____	90
ΣΧΗΜΑ3.90–3.98	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου για μία περίοδο στο πατρικό και τα θυγατρικά αγγεία για τις δύο ομάδες γωνιών _____	94
ΣΧΗΜΑ3.99	

Σχηματική παράσταση ενδομοσχεύματος με τη μέθοδο Α _____	99
ΣΧΗΜΑ3.100	
Σχηματική παράσταση ενδομοσχεύματος με τη μέθοδο Β _____	99
ΣΧΗΜΑ3.101	
Παλμός πίεσης _____	100
ΣΧΗΜΑ3.102-3.119	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση στα σημεία $x=5, 12.5, 17.5$ και 22.5cm για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους αντίστοιχα _____	101
ΣΧΗΜΑ3.120-3.128	
Η διατομή, η ταχύτητα και η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου για μία περίοδο για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και μη ενιαίο με τη μέθοδο Β _____	111

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΤΗΡΙΕΣ

1.1 Μορφές σφυγμικών κυμάτων στο κυκλοφορικό σύστημα

Το αίμα εκρέει από την αριστερή κοιλία στο κυκλοφορικό σύστημα με ρυθμικές συσπάσεις της καρδιάς. Το προστιθέμενο αίμα στην αορτή προκαλεί αύξηση της πίεσης και επομένως προκαλεί ροή του αίματος κατά μήκος της αορτής και του κυκλοφορικού συστήματος. Δημιουργείται έτσι η ανάπτυξη σφυγμικών κυμάτων (κύματα πίεσης) και η ροή είναι παλλόμενη (pulsating flow), δηλαδή σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Ο όγκος που εκβάλλεται από την καρδιά δεν είναι σταθερός αλλά μπορεί να μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο.

Σε όλη την έκταση του αρτηριακού συστήματος η πίεση φθάνει σε μια μέγιστη τιμή που ονομάζεται συστολική πίεση. Η φυσιολογική συστολική πίεση στην αορτή είναι της τάξεως των 120 mm Hg στο νεαρό ενήλικο. Η ελάχιστη πίεση ονομάζεται διαστολική πίεση και στην βραχιόνιο αρτηρία είναι της τάξεως των 70-80 mm Hg.

Το κύμα πίεσης αλλάζει μορφή και μέγεθος κατά τη μεταφορά του μέσα στο αρτηριακό σύστημα. Οι αιτίες της μεταβολής του είναι πολλές και δεν μπορούν να διαχωριστούν εύκολα διότι είναι αλληλοεξαρτώμενες. Υπάρχουν καταρχήν δύο μορφές λέπτυνσης (tapering): η γεωμετρική λέπτυνση που είναι μείωση της διατομής και η ελαστική λέπτυνση που είναι αύξηση της δυσκαμψίας του τοιχώματος (wall stiffness). Σε μέσου μεγέθους αρτηρίες η ελαστική λέπτυνση είναι μικρή και η πίεση πέφτει προοδευτικά. Όμως σε μικρού μεγέθους αρτηρίες η λέπτυνση είναι σημαντική και η πίεση πέφτει γρήγορα σε μέση τιμή 30-38 mm Hg στα αρτηρίδια και πίεση σφυγμού στα 5 mm Hg. Αυτές οι τιμές αναφέρονται σε κανονικές συνθήκες και αλλάζουν δραστικά στην περίπτωση συστολής ή διαστολής. Φθάνοντας στα τριχοειδή το κύμα πίεσης αποσβεννύεται τελείως. Η απόσβεση αυτή οφείλεται στο ιξώδες του αίματος και στην ιξώδη συνιστώσα του ιξωδοελαστικού τοιχώματος των αγγείων. Πρόσθετα, σημαντικά δρουν στον παλμό πίεσης οι αρτηριακές διακλαδώσεις και η ασυνέχεια στις ελαστικές ιδιότητες. Όταν το κύμα πίεσης φθάσει σε διακλάδωση ή ασυνέχεια τότε ένα τμήμα του κύματος διαδίδεται και ένα τμήμα ανακλάται. Το ανακλώμενο κύμα προστίθεται στο αρχικό και δημιουργεί αύξηση της συστολικής πίεσης (peaking), που εξαρτάται από τη στενότητα των αρτηριδίων και την δραστηριότητα των προτριχοειδικών σφιγκτήρων. Το ανακλώμενο κύμα, επανακλάται μέχρι ότου αποσβεσθεί. Η επαλληλία των διαδιδόμενων και ανακλωμένων κυμάτων προκαλεί εκτός από την ενίσχυση και διασπορά (dispersion) του κύματος. Το αορτικό κύμα πίεσης, που είναι περίπου τριγωνικής μορφής εξομαλύνεται και εκτείνεται φθάνοντας στα αρτηρίδια. Η μικρή αύξηση πίεσης που ακολουθεί την εντομή (η εντομή παρατηρείται αμέσως μετά την σύγκλιση της αορτικής βαλβίδας και οφείλεται στο εξής: όταν η κοιλία χαλαρώνει η ενδοκοιλιακή πίεση αρχίζει να ελαττώνεται γρήγορα και η προς τα πίσω ροή αίματος από την αορτή προς την κοιλία έχει ως αποτέλεσμα να αρχίζει να πέφτει και η αορτική πίεση. Η προς τα πίσω ροή κλείνει απότομα την αορτική βαλβίδα.) του παλμού πίεσης, που

οφείλεται στην ανάκλαση του κύματος, στρογγυλεύεται και βαθμιαία αντικαθίσταται από αργό αλλά διακεκριμένο βαθούλωμα. Ο μηχανισμός της απόσβεσης και της ενίσχυσης των κυμάτων πίεσης είναι διαφορετικός για τις διάφορες συνιστώσες του κύματος. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε συνιστώσα οδεύει με διαφορετική ταχύτητα.

Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι περί τα 3 m/sec στη θωρακική αορτή και πάνω από 5 m/sec στις μικρότερες αρτηρίες όπου υπερέχει το κολλαγόνο. Δομικές αλλαγές του τοιχώματος επηρεάζουν την ταχύτητα διάδοσης. Επίσης, παθολογικές αλλαγές όπως σκλήρυνση ή υπέρταση ή μυϊκή συστολή του αρτηριακού τοιχώματος προκαλούν μείωση της εκτασιμότητας του τοιχώματος και επομένως αύξηση της ταχύτητας διάδοσης (για το απολύτως στερεό τοίχωμα τείνει στο άπειρο).

Υπάρχουν τέλος και πρόσθετες αλλοιώσεις του παλμού πίεσης οφειλόμενες σε κεντρομόλους μεταβολές πίεσης σε θέση καμπυλότητας αγγείων, σε ταλαντώσεις ορισμένων τμημάτων του αρτηριακού συστήματος, κυρίως σε περιοχές στενώσεων. Επίσης, υπάρχει δευτερεύουσα πάλμωση οφειλόμενη στην αναπνοή καθώς και σε μεταβολές της ενδοθωρακικής ή ενδοϊστικής πίεσης ή της πίεσης του περιβάλλοντος. [Τσαγγάρης, 2004]

1.2 Σχέση πίεσης παροχής στο κυκλοφορικό σύστημα

Η μέτρηση της κυματομορφής της παροχής χωρίς να διαταράξουμε αυτή ήταν ανέφικτη. Με την εισαγωγή της τεχνικής μέτρησης με παλλόμενους υπερήχους Doppler έγινε δυνατή η μέτρηση της κυματομορφής παροχής κατά μήκος του αρτηριακού συστήματος και του προφίλ ταχύτητας. Σημαντική πληροφορία δίδει επίσης η μέτρηση της παροχής με τον ηλεκτρομαγνητικό μετρητή παροχής.

Αναλυτικός συσχετισμός πίεσης – ταχύτητας είναι αρκετά σύνθετος και απαιτεί την κατασκευή πολύπλοκων μοντέλων που πρέπει να λαμβάνουν τις ιδιομορφές των διαφόρων τμημάτων και περιοχών του κυκλοφορικού συστήματος. Αυτό που περιπλέκει την κατάσταση είναι οι ανακλάσεις.

Στην αορτή τα μέγιστα της ταχύτητας μπορούν να φθάσουν σε 1 m/sec ή και 1,5 m/sec σε φυσιολογικές συνθήκες, ενώ η μέση τιμή της είναι περί τα 0,4 m/sec.

Αν και η ταχύτητα είναι μη παλλόμενη στα τριχοειδή, εντούτοις υπάρχουν παλμώσεις στο φλεβικό σύστημα. Αυτό οφείλεται κυρίως στην αντλητική επενέργεια του δεξιού κόλπου της καρδιάς. [Τσαγγάρης, 2004]

1.3 Εξισώσεις ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες

Οι θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής βασίζονται σε δύο αξιωματικούς νόμους διατήρησης (για το ασυμπίεστο ρευστό). Το νόμο διατήρησης της μάζας και το νόμο διατήρησης της ορμής. Από την εφαρμογή του νόμου διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση συνέχειας. Ο νόμος διατήρησης της ορμής εκφράζει το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

Το ρευστομηχανικό μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσεται και επιλύεται, βασίζεται στις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής με σταθερές την πυκνότητα, τη θερμοκρασία και το ιξώδες του ρευστού. Επίσης, θεωρείται ότι όλα τα σημεία της διάταξης του μοντέλου βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο με αποτέλεσμα οι βαρυτικές δυνάμεις να εξαλείφονται, ενώ υποτίθεται αξονοσυμμετρική ροή. Μέσω ενός συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, x) η εξίσωση Navier Stokes κατά την φ κατεύθυνση απλοποιείται όταν η ροή του ρευστού είναι αξονικά συμμετρική χωρίς περιδίνηση (swirl), οπότε για την ταχύτητα κατά την περιφερειακή κατεύθυνση ισχύει $w=0$. Δηλαδή, κανένα μέγεθος δεν εξαρτάται από τη φ και όλες οι μεταβολές των μεγεθών ως προς φ είναι μηδενικές. Κατά τις δύο άλλες κατευθύνσεις, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παραδοχές, οι εξισώσεις Navier Stokes έχουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-1)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1-2)$$

,όπου: v, u είναι οι ταχύτητες του ρευστού αντίστοιχα κατά την ακτινική r και αξονική x κατεύθυνση με $v=v(r, x, t)$ και $u=u(r, x, t)$.

p είναι η πίεση του ρευστού με $p=p(r, x, t)$.

ρ και ν είναι η πυκνότητα και το κινηματικό ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Για λεπτά σώματα με σχέση πάχους προς μήκος μικρή ή αντίστοιχα για στενόμακρους κυλινδρικούς αγωγούς με σχέση ακτίνας προς μήκος μικρή, αν αδιαστατοποιηθούν οι εξισώσεις Navier-Stokes παραπάνω, τότε αναδεικνύεται ότι οι όροι ιξώδους δευτέρας τάξης κατά x είναι αμελητέοι σε σχέση με τους υπολοίπους όρους ιξώδους της εξίσωσης, οπότε οι εξισώσεις Navier-Stokes λαμβάνουν τη μορφή:

Ακτινική κατεύθυνση r :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (1-3)$$

Αξονική κατεύθυνση x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Navier-Stokes κατά τη x κατεύθυνση με την πυκνότητα ρ , οπότε η (1-4) παίρνει τη μορφή:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot v \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-5)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφα τον κανόνα παραγώγισης γινομένου στο τελευταίο άθροισμα της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot (v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1-6)$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας, θεωρώντας ασυμπίεστο ρευστό και αξονική συμμετρία, παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot v)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-7)$$

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής ασυμπίεστου ρευστού με σταθερό ιξώδες και για στενόμακρες κυλινδρικές δομές μικρής καμπυλότητας με αξονική συμμετρία, όπως φαίνεται αναλυτικά στο [Μανόπουλος, 2009], καταλήγουμε:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(A \cdot \bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (1-8)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A=\pi R^2$)

R είναι η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού

\bar{u} είναι η μέση ταχύτητα στην διατομή

και Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

Εξίσωση ορμής κατά την x κατεύθυνση:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{\rho \cdot R} \cdot \tau_R = 0 \quad (1-9)$$

, όπου τ_R είναι η διατμητική τάση

Στην εξίσωση ορμής (1-9), η διατμητική τάση του ρευστού στο τοίχωμα τ_R είναι ένα άγνωστο μέγεθος, όπως η διατομή του κυλινδρικού αγωγού, η πίεση και η ταχύτητα του ρευστού. Όμως, μέσω κατάλληλων θεωριών η διατμητική αυτή τάση σε κυλινδρικούς αγωγούς μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών της ταχύτητας του ρευστού και της διατομής του αγωγού. Μια τέτοια θεώρηση μπορεί να είναι η μόνιμη στρωτή ροή Poiseuille. Ωστόσο, στις εφαρμογές που εμφανίζονται εδώ έχει γίνει θεώρηση άτριβης ροής, οπότε η διατμητική τάση μηδενίζεται ($\tau_R=0$).

Οι προκύπτουσες άγνωστες συναρτήσεις από την κατάστρωση του μοντέλου είναι η ταχύτητα του ρευστού, η πίεση του ρευστού και η εγκάρσια διατομή του εύκαμπτου αγωγού. Για την εύρεση των τριών αυτών αγνώστων συναρτήσεων χρησιμοποιείται μια επιπλέον αλγεβρική καταστατική εξίσωση, πέραν αυτών της συνέχειας και της ορμής, η οποία συνδέει τη μεταβλητή διατομή του εύκαμπτου αγωγού με την εσωτερική διαμορφούμενη πίεση του ρευστού.

Και οι τρεις μαζί ανωτέρω εξισώσεις του μοντέλου αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα (3x3), του οποίου η επίλυση καθορίζει τα ρευστομηχανικά μεγέθη μιας μη μόνιμης μονοδιάστατης ροής ρευστού εντός εύκαμπτου κυλινδρικού αγωγού με τις προαναφερθείσες παραδοχές. Συνήθως η ροή που προκύπτει από τέτοιου είδους μοντέλα δεν καλείται μονοδιάστατη αλλά ψευδο-μονοδιάστατη εξαιτίας της επιπλέον μεταβολής της εγκάρσιας διατομής του εύκαμπτου αγωγού σε κάθετη διεύθυνση από αυτή της ταχύτητας του ρευστού. [Μανόπουλος, 2009]

1.4 Ανακλάσεις για το γραμμικοποιημένο σύστημα (1-8),(1-9)

Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες το σύστημα των εξισώσεων (1-8),(1-9) παρουσιάζει σχετικά χαμηλή γραμμικότητα.

Στο σημείο ανάκλασης από το προσπίπτον κύμα (incident) έντασης P_1 δημιουργείται ένα ανακλώμενο κύμα P_2 και ένα διερχόμενο κύμα P_1' .

Ορίζεται ως συντελεστής ανάκλασης R_r (reflection coefficient) το πηλίκο:

$$R = \frac{P_2}{P_1} \quad (1-10)$$

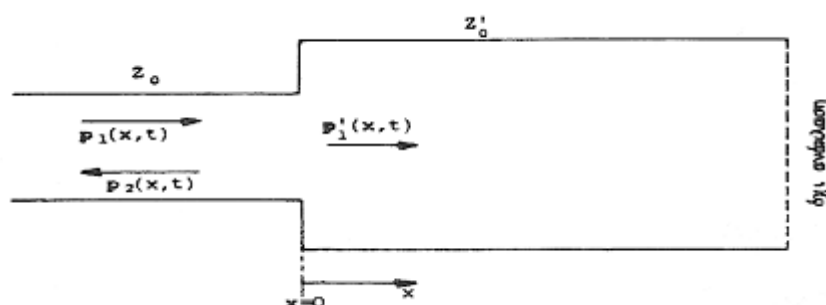
και ως συντελεστής διέλευσης T (transmission coefficient) το πηλίκο:

$$T = \frac{P_1'}{P_1} \quad (1-11)$$

Ισχύει ότι:

$$P_1 = P_2 + P_1' \quad (1-12)$$

1.4.1 Στένωση – διεύρυνση



Σχήμα 1.1 Σχηματική παράσταση στένωσης-διεύρυνσης

Το προσπίπτον κύμα $P_1(x,t)$ φθάνοντας στην ασυνέχεια της διατομής (στη θέση $x=0$) υφίσταται εν μέρει ανάκλαση, προκύπτει δε έτσι το ανακλώμενο κύμα $P_2(x,t)$ που οδεύει προς τα αριστερά και το διερχόμενο κύμα $P_1'(x,t)$ που οδεύει προς τα δεξιά.

Υποτίθεται ότι το διερχόμενο κύμα $P_1'(x,t)$ λόγω του μεγάλου μήκους του αγωγού δεν υφίσταται νέα ανάκλαση.

Στην διεπιφάνεια ($x=0$) ισχύει συνέχεια των μεγεθών της πίεσης και της παροχής, επομένως:

$$P_1 = P_{1'} + P_2 \quad (1-13)$$

Ο λόγος συνεκτικότητας είναι :

$$\lambda = \frac{1-R}{1+R} = \left(\frac{E}{E'} \cdot \frac{h}{h'}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^{5/2} \quad (1-14)$$

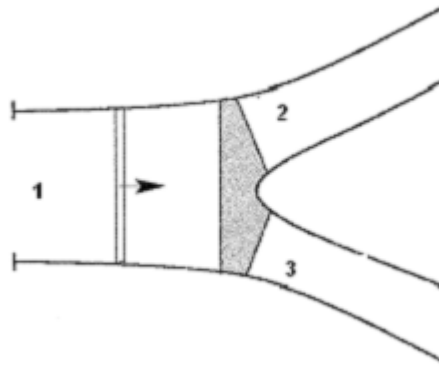
Γενικά :

- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής της διατομής A του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του πάχους h του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Υπάρχει ανάκλαση στην περίπτωση μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας E του αγγείου, $\lambda \neq 1$.
- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, $R = -1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση, χωρίς αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση κλειστού άκρου.
- Στην περίπτωση όπου $A' \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, $R = -1$ έχουμε ανάκλαση χωρίς μεταβολή πλάτους αλλά με αλλαγή φάσης. Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση ανοικτού άκρου.
- Για $\lambda = 1$ έχουμε την περίπτωση προσαρμοσμένων συνθηκών και δεν έχουμε ανάκλαση.

Η ασυνέχεια ανάλογα με την τιμή του λ χαρακτηρίζεται ως:

- a) $\lambda < 1$: Αλλαγή από λιγότερο στερεή σε περισσότερο στερεή (κλειστό άκρο).
- b) $\lambda > 1$: Προσαρμοσμένες συνθήκες (μη ανάκλαση).
- c) $\lambda > 1$: Αλλαγή από περισσότερο στερεή σε λιγότερο στερεή (ανοικτό άκρο)
[Τσαγγάρης, 2004]

1.4.2 Διακλάδωση



Σχήμα 1.2 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Ο συντελεστής ανάκλασης για την διακλάδωση δίνεται από την σχέση [Sherwin et al, 2003,Wang,2003]:

$$R = \frac{\frac{A_0^1}{c_0^1} \frac{A_0^2}{c_0^2} \frac{A_0^3}{c_0^3}}{\frac{A_0^1}{c_0^1} + \frac{A_0^2}{c_0^2} + \frac{A_0^3}{c_0^3}} \quad (1-15)$$

, όπου: A_0^i είναι η αρχική διατομή του i αγγείου

και c_0^i είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος του i αγγείου

$$c_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2 \cdot \rho \cdot \sqrt{A_0}}} \quad (1-16)$$

,όπου

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h \cdot E}{1 - \xi^2} \quad (1-17)$$

,όπου ξ ο λόγος Poisson

1.5 Αύξηση πλάτους πίεσης σε στενωμένες αρτηριακές περιοχές

Στένωση των αιμοφόρων αγγείων είναι μία σχετικά συνήθης κατάσταση στο κυκλοφορικό σύστημα. Η στένωση δημιουργείται με διάφορους μηχανισμούς, όπως π.χ. με απόθεση ινώδους ή δημιουργία ενδοαρτηριακής πλάκας. Υπάρχει καθολική συμφωνία μεταξύ των ερευνητών ότι μετά την απόθεση του ινώδους ή άλλου υλικού, το εσωτερικό τοίχωμα της αρτηρίας καλύπτεται από ενδοθηλιακό στρώμα και ενσωματώνεται στο αρτηριακό τοίχωμα. Επομένως η στενωμένη περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τμήμα της αρτηρίας με διαφορετική ακτίνα και πάχος τοιχώματος και άλλες ελαστικές ιδιότητες.

Το προηγούμενο φαινόμενο είναι μια διαδεδομένη νόσος των ηλικιωμένων κυρίως και οδηγεί σε καρδιακό έμφραγμα, εγκεφαλική θρόμβωση και άλλες σοβαρές ασθένειες. Εν μέρει αυτές οι επιπλοκές οφείλονται στην αυξημένη συστολική πίεση που παρατηρείται όταν υπάρχει στένωση που προκαλεί περαιτέρω εξέλιξη της αρτηριοσκλήρωσης. Οι προκαλούμενες μεταβολές στην μορφή και την μέγιστη τιμή της πίεσης και παροχής μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά με την χρήση της μονοδιάστατης θεωρίας και με την βοήθεια των χαρακτηριστικών.

Οι μεταβολές δεν είναι μόνο γεωμετρικές (απότομη στένωση και διεύρυνση) αλλά και μεταβολές στις ελαστικές ιδιότητες του σωλήνα. Αντίστοιχη είναι η μεταβολή του πάχους του τοιχώματος και επομένως μεταβάλλεται και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος μεταβάλλεται και λόγω της κατάλληλης αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας του τοιχώματος του σωλήνα.

Το προσπίπτον κύμα φθάνοντας στην στένωση, μόνο ένα τμήμα του διέρχεται δια της στένωσης και το άλλο τμήμα ανακλάται στο εγγύς τμήμα της στένωσης. Το ανακλώμενο τμήμα οδεύει προς τα πίσω και ανακλάται εκ νέου. Το τμήμα που διέρχεται από την στένωση διαχωρίζεται εκ νέου σε ανακλώμενο και διερχόμενο τμήμα φθάνοντας στην έξοδο του αγγείου. Η πίεση και η παροχή σε κάθε σημείο λαμβάνονται προσθέτοντας όλα τα διερχόμενα τμήματα.

1.6 Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής

Ως ανεύρυσμα ορίζεται μια εντοπισμένη, παθολογική και μόνιμη διάταση του τοιχώματος ενός αγγείου, η οποία είναι τουλάχιστον 50% μεγαλύτερη από την αναμενόμενη φυσιολογική διάμετρό του. Η φυσιολογική διάμετρος της αορτής μειώνεται σταδιακά από το θώρακα μέχρι το διχασμό, είναι μεγαλύτερη στους άντρες απ' ό,τι στις γυναίκες και αυξάνεται με την ηλικία. Επομένως, με βάση τον παραπάνω ορισμό, το όριο διαμέτρου για το χαρακτηρισμό ενός διατεταμένου τμήματος της αορτής ως ανευρύσματος ποικίλλει. Για πρακτικούς λόγους, στην κοιλιακή αορτή το όριο αυτό θεωρείται τα 3 εκ.

Όσον αφορά στην παθογένεια, το ανεύρυσμα αποτελεί μια εκφυλιστική διαδικασία όπου η αθηροσκλήρωση φαίνεται να παίζει κεντρικό ρόλο. Ωστόσο, οι ιστολογικές διαταραχές του τοιχώματος της ανευρυσματικής αορτής (κατακερματισμός των φυσιολογικών σιβάδων κερατίνης - ελάττωση περιεκτικότητας σε ελαστίνη), καθώς και η ύπαρξη ειδικών μορφών ανευρυσμάτων (μυκωτικά - φλεγμονώδη), συνηγορούν για μια πιο πολύπλοκη παθογένεια όπου εμπλέκονται γενετικοί παράγοντες σε συνδυασμό με φλεγμονώδεις και πιθανώς αυτοάνοσες αντιδράσεις.

1.7 Ενδοαγγειακό μόσχευμα

Το 1986 ο Volodos στην Ουκρανία και λίγο αργότερα, το 1991, οι Parodi, Palmaz και Barone στην Αργεντινή περιγράφουν μία πρωτοποριακή τεχνική που θα άλλαζε τα δεδομένα της χειρουργικής αντιμετώπισης των ΑΚΑ: την ενδοαγγειακή αποκατάσταση με τοποθέτηση ενδονάρθηκα (stent) μέσω των μηριαίων αρτηριών. Η ευκολία της

προσπέλασης σε συνδυασμό με την ελάχιστα επεμβατική τεχνική αφενός την καθιστούσε εφικτή σε ασθενείς οι οποίοι λόγω υψηλού εγχειρητικού κινδύνου δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με την ανοικτή μέθοδο, αφετέρου μείωνε τη βαρύτητα της επέμβασης (διάρκεια νοσηλείας, ανάγκη νοσηλείας σε μονάδα εντατικής θεραπείας, απώλεια αίματος, αναπνευστικές - καρδιολογικές επιπλοκές). Η μέθοδος με τις συνεχείς βελτιώσεις της αποτέλεσε έκτοτε αντικείμενο μεγάλου ενδιαφέροντος, αντικρουόμενων απόψεων αλλά κυρίως συνεχούς αξιολόγησης.



Σχήμα 1.3 Ενδομόσχευμα(σώμα, σκέλος, προεκτάσεις) [Μαράκης,2006]

1.8 Μοντέλα Κυκλοφορικού Συστήματος

Η επίλυση της ροής στο αγγείο, όπως αναλυτικά περιγράφεται στο 2^ο κεφάλαιο (Διαμόρφωση του Προβλήματος), αποτελεί την βάση για την επίλυση δικτύων με αγγεία, τόσο πολύπλοκων που μπορούν να συμπεριλάβουν το κυκλοφορικό του εγκεφάλου ακόμα και ολόκληρο το κυκλοφορικό σύστημα του ανθρώπου. Πολλές εργασίες έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια και αποδεικνύουν το συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για μαθηματική και υπολογιστική προσομοίωση του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου. Ανάμεσα σε αυτές τις εργασίες, μεγάλη ερευνητική δραστηριότητα παρουσιάζεται για πολύπλοκα τρισδιάστατα μοντέλα ικανά να παρέχουν αρκετές λεπτομέρειες του πεδίου ροής, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός των τάσεων τοιχώματος. Ωστόσο, αυτοί οι υπολογισμοί είναι περισσότερο απαιτητικοί, ως προς την κατασκευή της γεωμετρίας, του υπολογιστικού μοντέλου και του υπολογιστικού χρόνου. Εκτός αυτού, οι μηχανικοί και οι ιατρικοί ερευνητές συνήθως δεν χρειάζεται να γνωρίζουν λεπτομέρειες της ροής σε τέτοιο βαθμό και έτσι η εφαρμογή απλοποιημένων μοντέλων, που αποδεικνύεται ικανή να παρέχει χρήσιμες πληροφορίες και με χαμηλό υπολογιστικό κόστος, κερδίζει συνεχώς έδαφος.

Πολλές μελέτες με επεμβατικό τρόπο (in vivo) έχουν γίνει για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος. Το βασικό μειονέκτημα αυτών των μελετών είναι ότι είναι δύσκολες και ακριβές για να γίνουν καθώς επίσης και το γεγονός ότι περιορίζονται σε εύκολα προσβάσιμες αρτηρίες. Σαν αποτέλεσμα, η χρήση ενός υπολογιστικού μοντέλου με την χρήση υπολογιστή για την μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος αποτελεί μία καλή εναλλακτική. Τα περισσότερα υπολογιστικά μοντέλα τέτοιου είδους βασίζονται στις ίδιες εξισώσεις, την μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση ορμής κατά x και την εξίσωση συνέχειας. Διαφορές υπάρχουν μεταξύ των μοντέλων κυρίως

(α) στον τύπο των οριακών συνθηκών,

(β) στην εξίσωση ελαστικότητας πίεσης – διατομής που χρησιμοποιείται και

(γ) στην μέθοδο επίλυσης.

Στην βιβλιογραφία [Stergiopoulos et al, 1992, Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003] παρατηρήθηκαν τα παρακάτω υπολογιστικά μοντέλα (μαθηματικό μοντέλο, οριακές συνθήκες, μέθοδος επίλυσης).

1.8.1 1^ο Υπολογιστικό μοντέλο κυκλοφορικού συστήματος

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1-18)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\pi \cdot D \cdot \tau_0}{\rho} \quad (1-19)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διατομή του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = -\frac{\rho}{\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{8 \cdot C_v \cdot \pi \cdot \mu}{\rho \cdot A} \cdot Q + (C_u - 1) \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \right] \quad (1-20)$$

, όπου: μ είναι η κινηματική συνεκτικότητα

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W .

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω εξίσωση ελαστικότητας πίεσης-διατομής:

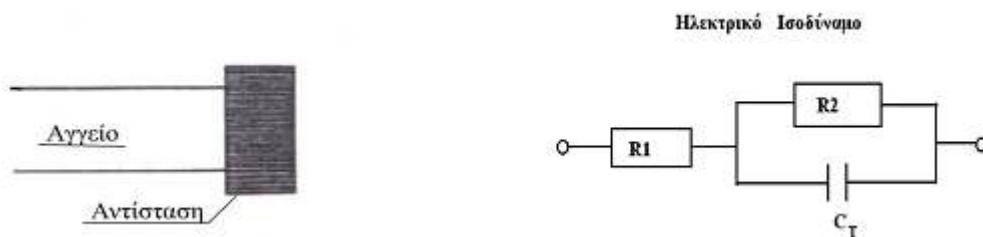
$$A(x) = A_0(x) \cdot [1 + C_0 \cdot (P - P_0) + C_1 \cdot (P - P_0)^2] \quad (1-21)$$

, όπου: $A_0(x)$ είναι η αρχική διατομή στην θέση x του αγγείου

και P είναι η αρχική πίεση

Οριακές συνθήκες

- 1) Στο εγγύς άκρο του δικτύου, ορίζεται η χρονική μεταβολή της πίεσης είτε της παροχής.
- 2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.
- 3) Στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων εισάγεται μία αντίσταση για να προσομοιώσει το επισωρευτικό αποτέλεσμα που επιφέρουν τα περιφερειακά αγγεία, στα οποία διακλαδίζεται το αρχικό αγγείο, και τα τριχοειδή αγγεία. Το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης που χρησιμοποιείται αποτελείται από μία αντίσταση που βρίσκεται σε σειρά με ένα παράλληλο συνδυασμό αντίστασης και πυκνωτή (προσομοιώνει τη ποσότητα αίματος που μπορεί να διατηρηθεί σε ορισμένο τμήμα της κυκλοφορίας για κάθε αύξηση της πίεσης).



Σχήμα 1.4 Σχηματική παράσταση αντίστασης στο άπω άκρο των τερματικών αγγείων

Με βάση τα παραπάνω η οριακή συνθήκη στο δεξιό άκρο του αγγείου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{P}{R_1 \cdot R_2 \cdot C_T} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot \frac{Q}{R_1 \cdot C_T} \quad (1-22)$$

Στη παραπάνω σχέση ορίζεται ως $R_1 + R_2 = R_T$ η συνολική αντίσταση στο άκρο του αγγείου και ως C_T η χωρητικότητα ή η αγγειακή ενδοτικότητα.

Επισημαίνεται ότι για το άπω άκρο των τερματικών αγγείων του δικτύου πρέπει να οριστούν τα R_T , C_T και R_1/R_T .

Μέθοδος υπολογισμού

Ένα απλό ρητό σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την μετατροπή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις. Οι εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών παραγώγων είχαν πρώτης τάξης ακρίβεια ως προς τον χρόνο και τον χώρο. [Stergiopoulos et al, 1992]

1.8.2 2^ο Υπολογιστικό μοντέλο

Μαθηματικό μοντέλο

Το μαθηματικό μοντέλο βασίζεται στις μονοδιάστατες εξισώσεις ροής που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και της εξίσωσης ορμής. Οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1-18)$$

και

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\pi \cdot D \cdot \tau_0}{\rho} \quad (1-19)$$

, όπου: A είναι η διατομή του κυλινδρικού αγωγού ($A = \pi \cdot R^2$)

Q είναι η παροχή όγκου στην διατομή A

ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού

D είναι η διατομή του αγγείου

και τ_0 είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα και υπολογίζεται από την σχέση:

$$\tau_0 = -\frac{\rho}{\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{8 \cdot C_v \cdot \pi \cdot \mu}{\rho \cdot A} \cdot Q + (C_u - 1) \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \right] \quad (1-20)$$

, όπου: μ είναι η κινηματική συνεκτικότητα

και οι συντελεστές C_v και C_u είναι συναρτήσεις του αδιάστατου αριθμού Womersley W .

Αυτό το μαθηματικό μοντέλο διαφέρει από το προηγούμενο ως προς την εξίσωση ελαστικότητας. Στην προκειμένη περίπτωση η εξίσωση ελαστικότητας παίρνει την αλγεβρική μορφή:

$$P = P_{ext} + \beta \cdot (\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (1-23)$$

, όπου

$$\beta(x) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot h_0 \cdot E}{(1-\nu^2)} \quad (1-24)$$

h_0 είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος του αγγείου

E είναι το μέτρο ελαστικότητας του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

Οριακές συνθήκες

1) Στο εγγύς άκρο ορίζεται η χρονική μεταβολή είτε της πίεσης είτε της παροχής όγκου.

2) Στις διακλαδώσεις θεωρείται σταθερή ολική πίεση και συνέχεια της παροχής όγκου.

3) Μοντελοποιώντας μονάχα το αρτηριακό σύστημα του κυκλοφορικού το πρόβλημα μπορεί να γίνει πιο εύκολο. Ωστόσο, το φλεβικό σύστημα ανακλά προς τα πίσω οδεύοντα κύματα. Έτσι είναι επιτακτική η ανάγκη της προσέγγισης των χαρακτηριστικών αυτών των ανακλάσεων. Για αυτό τον λόγο εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης. Η τερματική αντίσταση είναι ο αρνητικός λόγος της προσεγγίζουσας το άκρο χαρακτηριστικής μεταβλητής προς την απομακρυνόμενη από το άκρο χαρακτηριστική μεταβλητή

Μέθοδος υπολογισμού

Για τον υπολογισμό των μεγεθών του κυκλοφορικού συστήματος υιοθετήθηκε η μέθοδος των χαρακτηριστικών. [Sherwin et al, 2003, Formaggia et al, 2003]

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Εισαγωγή

Αρτηρίες ονομάζονται τα αγγεία του οργανισμού που μεταφέρουν οξυγονωμένο αίμα από την καρδιά προς τα υπόλοιπα όργανα. Όσο απομακρύνονται από την καρδιά διακλαδίζονται και σχηματίζουν όλο και μικρότερα αγγεία, μικρότερες αρτηρίες και αρτηρίδια, τα οποία τελικά καταλήγουν στα τριχοειδή αγγεία.

Οι αρτηρίες εκτός από την κατάταξή τους κατά μέγεθος, κατατάσσονται συχνά και με τη δομή τους. Οι μεγάλες αρτηρίες που εκβάλλουν από την καρδιά και οι πρώτοι κλάδοι τους είναι ελαστικές αρτηρίες διότι περιέχουν μεγάλο ποσοστό ελαστίνης. Απομακρυνόμενοι από την καρδιά, το ποσοστό των μυϊκών κυττάρων που βρίσκεται υπό μορφή δακτυλίων γύρω από τον αυλό της αρτηρίας αυξάνει και η αρτηριακή δομή πλησιάζει εκείνης των μυϊκών αρτηριών.

Πέντε συντελεστές αποτελούν το τοίχωμα του αγγείου: Ενδοθηλιακός ιστός, ίνες κολλαγόνου, ίνες ελαστίνης, λείοι μύες και βασική ουσία. Η επί της εκατό περιεκτικότητα κάθε αγγείου στις διάφορες συνιστώσες ποικίλει ανάλογα με το μέγεθος του αγγείου. Οι μεγαλύτερες μεταβολές στα ποσοστά εμφανίζονται στις αναλογίες ινών κολλαγόνου και ελαστίνης, που είναι τα ελαστικά συστατικά του τοιχώματος. Επομένως, είναι επιτακτική η ανάγκη μοντελοποίησης των αρτηριών ως ελαστικοί σωλήνες. Η σχέση που δίνει την εξάρτηση της διατομής της αρτηρίας με την πίεση, λέγεται σχέση ελαστικότητας και παρουσιάζεται παρακάτω(2-3).

Η ροή που διαρρέει το αρτηριακό σύστημα είναι παλλόμενη, καθώς σε κάθε σημείο του κυκλοφορικού συστήματος η ταχύτητα και η πίεση είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Παλαιότερα λόγω των μειωμένων υπολογιστικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών ο υπολογισμός της ροής, σε πολύπλοκα δίκτυα, ήταν δυνατός μονάχα θεωρώντας σταθερή ροή.

Παρακάτω παρατίθεται όλη η διαδικασία διαμόρφωσης του προβλήματος που προηγήθηκε της σύνταξης του κώδικα υπολογισμού της ροής. [Τσαγγάρης, 2004]

2.2 Μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος

Το αίμα θεωρείται ως ασυμπύεστο και συνεκτικό ρευστό. Η ροή θεωρείται ως στρωτή και μονοδιάστατη, δηλαδή η ταχύτητα και η πίεση θεωρούνται σταθερές σε κάθε διατομή και λαμβάνουν μια μέση τιμή.

Για κάθε αρτηρία επιλύουμε τις μονοδιάστατες εξισώσεις κίνησης για την ροή. Οι εξισώσεις περιέχουν 3 άγνωστες παραμέτρους: την ταχύτητα, την πίεση και την διατομή και όλες είναι συναρτήσεις της θέσης x και του χρόνου t . Οι μονοδιάστατες εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής που επιλύθηκαν είναι οι παρακάτω:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0 \quad (2-1)$$

και

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \left(- \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot u}{A} \right) \quad (2-2)$$

Στην εξίσωση (2-2) η πυκνότητα παρίσταται με το σύμβολο ρ και η δυναμική συνεκτικότητα με το σύμβολο μ . Στην ίδια εξίσωση ο τελευταίος όρος αποτελεί τον όρο συνεκτικών απωλειών για στρωτή ροή. Μια αυστηρή διατύπωση της μονοδιάστατης εξίσωσης της ορμής δεν θα επέτρεπε την χρήση αυτού του όρου, καθώς αναφέρεται σε μόνιμη ροή, ωστόσο πολλές φορές χρησιμοποιείται και σε δυναμικές μελέτες, χωρίς την δημιουργία σημαντικού σφάλματος. Στην εν λόγω εργασία ο όρος αυτός μηδενίζεται.

Οι ελαστικές ιδιότητες του τοιχώματος των αρτηριών μοντελοποιούνται εισάγοντας την σχέση ελαστικότητας. Έτσι το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται με την παρακάτω μη-γραμμική σχέση ελαστικότητας πίεσης– διατομής:

$$P = P_{ext} + \beta(x)(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-3)$$

,όπου

$$\beta(x) = \frac{E(x)h_0\sqrt{\pi}}{A_0(1-\nu^2)}$$

A_0 είναι η αρχική διατομή στη θέση x του αγγείου

P_{ext} είναι η εξωτερική πίεση του αγγείου

h_0 είναι το αρχικό πάχος του τοιχώματος στη θέση x του αγγείου

$E(x)$ είναι το μέτρο ελαστικότητας στη θέση x του αγγείου

ν είναι ο λόγος Poisson

Άρα η (2-3) αντικαθιστώντας γίνεται:

$$P = P_{ext} + \frac{E(x)h_0\sqrt{\pi}}{A_0(1-\nu^2)}(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \quad (2-4)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\sqrt{A_0}$ και αντικαθιστώντας το με πR_0^2 , όπου R_0 η αρχική ακτίνα στη θέση x του αγγείου προκύπτει:

$$P = P_{ext} + \frac{E(x)h_0}{R_0(1-\nu^2)} \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) \quad (2-5)$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$C = \sqrt{\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial A}} \quad (2-6)$$

Από τη (2-4) παραγωγίζοντας ως προς A και αντικαθιστώντας το $A_0(x)$ με $\pi R_0^2(x)$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2(1-v^2)R_0R_0\sqrt{\pi}\sqrt{A}}$$

Αντικαθιστώντας το πR_0^2 με A_0 και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{A}{\rho}$ προκύπτει:

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2R_0(1-v^2)\rho} \frac{A}{\sqrt{AA_0}}$$

Τέλος, κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη:

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2\rho R_0(1-v^2)} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-7)$$

Άρα από (2-7) και (2-6),

$$C^2 = \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} = \frac{E(x)h_0}{2\rho R_0(1-v^2)} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-8)$$

$$\text{Για } A=A_0, C_0^2 = \frac{E(x)h_0}{2\rho R_0(1-v^2)} \quad (2-9)$$

Άρα,

$$C^2 = C_0^2 \sqrt{\frac{A}{A_0}} \quad (2-10)$$

Η (2-4) πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους με 2ρ , λόγω των (2-8) και (2-9) δίνει:

$$P = P_{\text{ext}} + 2\rho(C^2 - C_0^2) \quad (2-11)$$

και εναλλακτικά η (2-5)

$$P = P_{\text{ext}} + 2\rho C_0^2 \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) \quad (2-12)$$

2.3 Αδιαστατοποίηση

Η αδιαστατοποίηση του μαθηματικού προβλήματος οδηγεί στην εμφάνιση αδιάστατων αριθμών που ελέγχουν το πρόβλημα και μειώνουν την πολυπαραμετρικότητα του. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι γνωστοί αδιαστατοποιημένοι αριθμοί της ρευστομηχανικής, όπως ο αριθμός Reynolds.

Εισάγονται οι παρακάτω αδιάστατες παράμετροι:

$$t^* = \frac{tC_o}{L} \Rightarrow t = \frac{t^*L}{C_o} \quad (2-13)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \Rightarrow x = x^*L \quad (2-14)$$

$$A^* = \frac{A}{A_o} \Rightarrow A = A^*A_o \quad (2-15)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho C_o^2} \Rightarrow p = p^* \rho C_o^2 \quad (2-16)$$

$$u^* = \frac{u}{C_o} \Rightarrow u = u^*C_o \quad (2-17)$$

$$Re = \frac{C_o R_o}{\nu} \quad (2-18)$$

$$\delta = \frac{R_o}{L} \quad (2-19)$$

$$Str = \frac{\omega L}{C_o} \quad (2-20)$$

$$M = \frac{C_o}{C'_o} \quad (2-21)$$

, όπου

A_o , είναι η αρχική διατομή του αγωγού πριν υποστεί οποιαδήποτε συμπίεση

C_o , είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος στα τοιχώματα του αγωγού

C'_o , είναι η αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος του εκάστοτε αγωγού ή του τμήματος του ίδιου αγωγού με διαφορετικά όμως γεωμετρικά χαρακτηριστικά ή/και μέτρο ελαστικότητας

L είναι το μήκος αδιαστατοποίησης

Re είναι ο αριθμός Reynolds

ν η κινηματική συνεκτικότητα

Οι αδιάστατοι αριθμοί Re , Str και $Mach$ ονομάζονται Reynolds, Strouhal και Mach αντίστοιχα. Αυτό που διαφοροποιείται είναι η εισαγωγή της χαρακτηριστικής ταχύτητας του κύματος C_o , αντί κάποιας χαρακτηριστικής ταχύτητας του ρευστού. Αν ο αγωγός δεν παρουσιάζει αλλαγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών ή ελαστικών ιδιοτήτων, το C_o συμπίπτει με το C'_o .

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω αδιάστατες παραμέτρους και θεωρώντας τη γενική περίπτωση C'_o , οι ανωτέρω εξισώσεις του μοντέλου αδιαστατοποιούνται ως εξής:

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (A^* u^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{u^{*2}}{2} + P^* \right) = 0 \quad (2-23)$$

$$P^* = \frac{P_{ext}}{\rho C_0^2} + 2 \left(\frac{C^2}{C_0^2} - \frac{C_0'^2}{C_0^2} \right) \quad (2-24)$$

και εναλλακτικά

$$P^* = \frac{P_{ext}}{\rho C_0^2} + 2 \frac{1}{M^2} \left(\sqrt{\frac{A^*}{A_0}} - 1 \right) \quad (2-25)$$

2.4 Διακριτοποίηση του χώρου

Ο μονοδιάστατος χώρος μήκους L_v/L , όπου L_v το μήκος του αγγείου και L το μήκος αδιαστατοποίησης, διακριτοποιείται με πλήθος k αριθμητικών κόμβων που ισαπέχουν μεταξύ τους με αδιάστατη απόσταση: $\Delta x = \frac{L_v}{L(k-1)}$. Η θέση κάθε κόμβου ορίζεται από την συντεταγμένη x_i :

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad i=1,2,\dots,k \quad (2-26)$$

Το χρονικό βήμα προκύπτει από την σχέση ευστάθειας (2-33). Κάθε χρονικός κόμβος ορίζεται από την συντεταγμένη t_n :

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n=1,2,\dots \quad (2-27)$$

2.5 Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων

Αντικαθιστώντας την πρώτη χρονική παράγωγο με πρόσω έκφραση διαφορών και τις χωρικές παραγώγους με πρόσω και πίσω έκφραση διαφορών (όπως επιτάσσει η μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack) προκύπτουν οι παρακάτω διακριτοποιημένες αλγεβρικές σχέσεις:

Η (2-22) γίνεται:

$$\frac{A_i^{*n+1} - A_i^{*n}}{\Delta t^*} + \frac{1}{\Delta x^*} (A_{i+1}^{*n} u_{i+1}^{*n} - A_i^{*n} u_i^{*n}) = 0$$

Λύνοντας ως προς A_i^{*n+1} με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{*n+1} = A_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (A_{i+1}^{*n} u_{i+1}^{*n} - A_i^{*n} u_i^{*n}) \quad (2-28)$$

, ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$A_i^{*n+1} = A_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (A_i^{*n} u_i^{*n} - A_{i-1}^{*n} u_{i-1}^{*n}) \quad (2-29)$$

Η (2-23) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{u_i^{*n+1} - u_i^{*n}}{\Delta t^*} = - \frac{1}{\Delta x^*} \left(\left(\frac{u_{i+1}^{*n}}{2} \right)^2 + P_{i+1}^{*n} \right) - \left(\frac{u_i^{*n}}{2} + P_i^{*n} \right)$$

Λύνοντας ως προς u_i^{*n+1} με πρόσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{*n+1} = u_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \left(\left(\frac{(u_{i+1}^{*n})^2}{2} + P_{i+1}^{*n} \right) - \left(\frac{(u_i^{*n})^2}{2} + P_i^{*n} \right) \right) \quad (2-30)$$

,ή με πίσω έκφραση διαφορών για τις χωρικές παραγώγους:

$$u_i^{*n+1} = u_i^{*n} - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \left(\left(\frac{(u_i^{*n})^2}{2} + P_i^{*n} \right) - \left(\frac{(u_{i-1}^{*n})^2}{2} + P_{i-1}^{*n} \right) \right) \quad (2-31)$$

Το κριτήριο ευστάθειας είναι [Zagzoule et al, 1986]:

$$(|u| + C_o) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (2-32)$$

Αδιαστατοποιώντας το κριτήριο ευστάθειας σύμφωνα με τις σχέσεις (2-13) και (2-14) και κάνοντας αλγεβρικές πράξεις η (2-32) παίρνει την μορφή:

$$\frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} \leq 1 \quad (2-33)$$

Η (2-24) διακριτοποιείται ως εξής:

$$P_i^{*n+1} = \frac{P_{ext_i}^{n+1}}{\rho C_o^2} + 2 \left(\frac{(C_i^{n+1})^2}{C_o^2} - \frac{C_o'^2}{C_o^2} \right) \quad (2-34)$$

και εναλλακτικά

$$P_i^{*n+1} = \frac{P_{ext_i}^{n+1}}{\rho C_o^2} + 2 \frac{1}{M^2} \left(\sqrt{\frac{A_i^{*n+1}}{A_o^*}} - 1 \right) \quad (2-35)$$

2.6 Αρχικές και Οριακές συνθήκες

Επιλέγεται αρχικά, η εσωτερική και εξωτερική πίεση στο αγγείο να είναι μηδέν. Δηλαδή, για $t=0$, $P(x,0) = P_{ext}(x,0) = 0$. Επίσης, δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση σε οποιοδήποτε σημείο του αγγείου και η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδενική, ενώ η ταχύτητα του κύματος ίση με C'_o . Συνεπώς, $A(x,0) = A_o = \text{const}$, $u(x,0) = 0$ και $C(x,0) = C'_o$.

Ο υπολογισμός των οριακών συνθηκών γίνεται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών χρησιμοποιείται λόγω της ικανότητά της να εκμεταλλεύεται τις υπερβολικές ιδιότητες των μη συνεκτικών, ασυμπύεστων εξισώσεων της ορμής και της συνέχειας. Οι κύριες μεταβλητές που περιγράφουν το ρευστομηχανικό πρόβλημα (πίεση, διατομή και ταχύτητα) υπολογίζονται συναρτήσει των αντίστοιχων τιμών τους πάνω στις χαρακτηριστικές καμπύλες. Επί της ουσίας, σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων ονομάζουμε χαρακτηριστικές καμπύλες τις καμπύλες εκείνες, κατά μήκος των οποίων οι μερικές διαφορικές μετατρέπονται σε συνήθειες οπότε και επιλύονται απλούστερα. Στην περίπτωση των υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, οι χαρακτηριστικές είναι πραγματικές και ξεχωριστές. Αυτό σημαίνει ότι η πληροφορία διαδίδεται σε δύο κατευθύνσεις. Εάν υπάρχουν πλευρικά όρια όπως στην περίπτωση μας, μόνο μια συνθήκη απαιτείται

σε κάθε σημείο γιατί μια χαρακτηριστική μεταφέρει την πληροφορία έξω από το υπολογιστικό πεδίο και μια την μεταφέρει μέσα. Υπάρχουν διάφοροι τύποι συνθηκών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Οι ιδανικές όμως είναι αυτές που επιτρέπουν στο κύμα να εξέλθει του πεδίου χωρίς τις επανομαζόμενες ψευδείς ανακλάσεις.

Εμείς θέλουμε να επιλύσουμε τις ακόλουθες μερικές διαφορικές:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Au) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + p\right) = 0$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσις γινομένου συναρτήσεων στην πρώτη και τον κανόνα αλυσίδας στη δεύτερη προκύπτουν οι ακόλουθες:

$$L_1 = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2-36)$$

$$L_2 = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2-37)$$

Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό L των L_1 και L_2 ως εξής:

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 \quad (2-38)$$

Αντικαθιστώντας τα L_1 και L_2 και κάνοντας πράξεις :

$$L = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda_1 u + \lambda_2 A) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial t} + (\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-39)$$

Εάν $x=x(t)$ είναι η εξίσωση μιας καμπύλης τότε η κλίση της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της καμπύλης θα είναι $\frac{dx}{dt}$, ενώ εάν $u=u(t,x)$ και $A=A(t,x)$ λύσεις των (2-36) και (2-37) τότε

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2-40)$$

$$\text{και } dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx \quad (2-41)$$

αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας στην (2-39), το $\frac{\partial u}{\partial t}$ από την (2-40) και το $\frac{\partial A}{\partial t}$ από την (2-41) προκύπτει:

$$L = \lambda_1 \frac{du}{dt} + \lambda_2 \frac{dA}{dt} + [(\lambda_1 u + \lambda_2 A) - \lambda_1] \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + [(\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u) - \lambda_2] \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2-42)$$

Θέλουμε βάση της θεωρίας οι όροι των μερικών παραγώγων να μηδενιστούν, οπότε και επιλέγουμε τέτοια λ_1 και λ_2 ώστε να ισχύει :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 u + \lambda_2 A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} + \lambda_2 u} \quad (2-43)$$

Η διαφορική λοιπόν έκφραση (2-42) για το L λαμβάνοντας υπ'όψη όλα τα παραπάνω δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$dtL = \lambda_1 du + \lambda_2 dA \quad (2-44)$$

Από τη σχέση (2-43) κάνοντας πράξεις :

$$-\lambda_1/\lambda_2 = \frac{-A dt}{dx - u dt} = \frac{dx - u dt}{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} dt}$$

Εάν θέσουμε $\lambda_2/\lambda_1 = \lambda$ τότε:

$$\lambda = \frac{dx - u dt}{A dt} \quad (2-45)$$

$$\text{και } \lambda = \frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} dt}{u dt - dx} \quad (2-46)$$

Λύνοντας ως προς dx τη δεύτερη (2-46) προκύπτει:

$$dx = \left(u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} \frac{1}{\lambda} \right) dt$$

Αντικαθιστώντας από την πρώτη (2-45) το dx και λύνοντας ως προς λ καταλήγουμε στην:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A} \frac{1}{A} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} \quad (2-47)$$

Αντικαθιστώντας στην (2-45) το λ προκύπτουν οι δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις:

$$dx = \left(u + \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} A \right) dt \Rightarrow dx = (u + c) dt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt_+} = (u + c) \quad (2-48)$$

και

$$dx = \left(u - \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial A}} A^{-\frac{1}{2}} A \right) dt \Rightarrow dx = (u - c) dt \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt_-} = (u - c) \quad (2-49)$$

Οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών προκύπτουν συνδυάζοντας τις σχέσεις (2-44) και (2-48) για τη μία κατεύθυνση και τις σχέσεις (2-44) και (2-49) για την άλλη :

$$A du + \left(\frac{dx}{dt_+} - u \right) dt = 0$$

και

$$A du + \left(\frac{dx}{dt_-} - u \right) dt = 0$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω τελικά καταλήγουμε στις:

$$\int u du + \int \frac{c}{A} dA = 0 \Rightarrow u + 4(c - c'_0) = \text{const} = \xi \quad (2-50)$$

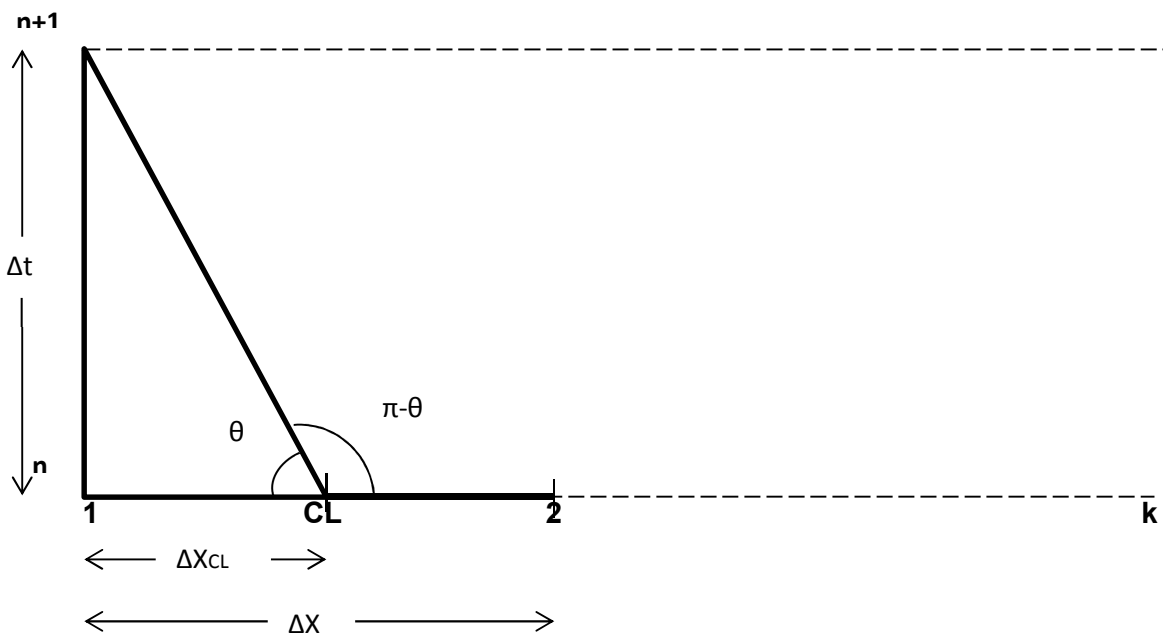
και

$$\int u du - \int \frac{c}{A} dA = 0 \Rightarrow u - 4(c - c'_0) = \text{const} = \eta \quad (2-51)$$

[Lister]

2.6.1 Εγγύς άκρο αγγείου

Θεωρούμε γνωστό το πεδίο ροής σε όλο το μήκος του αγγείου τον χρονικό κόμβο n και θέλουμε να το υπολογίσουμε τον χρονικό κόμβο $n+1$:



Σχήμα 2.1 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο εγγύς άκρο

Τα σημεία 1,2 αποτελούν τον πρώτο και δεύτερο χωρικό κόμβο αντίστοιχα. Το σημείο CL ανήκει πάνω στην αριστεροκλινή χαρακτηριστική $\eta = \text{const}$. Εφαρμόζοντας γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα στο αριστερό άκρο του αγγείου παίρνουμε:

$$\frac{\Delta x_{CL}}{\Delta x} = \frac{u_{CL}^n - u_1^n}{u_2^n - u_1^n} \quad (2-52)$$

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα του κύματος στο αριστερό άκρο του αγγείου προκύπτει:

$$\frac{\Delta x_{CL}}{\Delta x} = \frac{c_{CL}^n - c_1^n}{c_2^n - c_1^n} \quad (2-53)$$

Για απειροστές ποσότητες $\Delta x, \Delta t$ θεωρούμε την αριστεροκλινή χαρακτηριστική ευθεία. Οπότε ισχύει:

$$\cot(\pi-\theta)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow -\cot(\theta)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -\frac{\Delta x_{CL}}{\Delta t} \xrightarrow{2-49}$$

$$\Delta x_{CL} = \Delta t(c_{CL} - u_{CL}) \quad (2-54)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-54) στη (2-52) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_{CL}^n - u_{CL}^n) = \frac{u_{CL}^n - u_1^n}{u_2^n - u_1^n} \quad (2-55)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το u_{CL}^n και κάνοντας ανακατανομή των όρων η (2-55) γίνεται:

$$\left(\frac{1}{u_2^n - u_1^n} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{CL}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CL}^n + \frac{u_1^n}{u_2^n - u_1^n}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(u_2^n - u_1^n)\Delta x$ και λύνοντας ως προς u_{CL}^n :

$$u_{CL}^n = \frac{c_{CL}^n \Delta t (u_2^n - u_1^n) + u_1^n \Delta x}{\Delta x + \Delta t (u_2^n - u_1^n)}$$

Τελικά βγάζοντας κοινό παράγοντα από τον αριθμητή και παρονομαστή το Δx καταλήγουμε στην:

$$u_{CL}^n = \frac{c_{CL}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n) + u_1^n}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} \quad (2-56)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-54) στη (2-53) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_{CL}^n - u_{CL}^n) = \frac{c_{CL}^n - c_1^n}{c_2^n - c_1^n} \quad (2-57)$$

Αναπτύσσοντας την επιμεριστική του πρώτου μέλους και αντικαθιστώντας το u_{CL}^n από τη (2-56) προκύπτει:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CL}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c_{CL}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n) + u_1^n}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} = \frac{c_{CL}^n}{c_2^n - c_1^n} - \frac{c_1^n}{c_2^n - c_1^n}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το c_{CL}^n :

$$c_{CL}^n = \frac{-u_1^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_2^n - c_1^n) + c_1^n (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n))}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_1^n - c_2^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_2^n - u_1^n)} \quad (2-58)$$

Από τη συνθήκη συμβατότητας (2-51) για αριστεροκλινή χαρακτηριστική ισχύει:

$$u_{CL}^n - 4(c_{CL}^n - c_0') = \text{const}$$

Άρα, και με δεδομένο ότι το c_0' απαλοίφεται:

$$u_1^{n+1} - 4c_1^{n+1} = u_{CL}^n - 4c_{CL}^n \quad (2-59)$$

Αδιαστατοποιούμε τις σχέσεις (2-56),(2-58),(2-59) :

$$u_{CL}^{*n} = \frac{c_{CL}^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n}) + u_1^{*n}}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_1^{*n} - u_2^{*n})} \quad (2-60)$$

$$c_{CL}^{*n} = \frac{-u_1^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_2^{*n} - c_1^{*n}) + c_1^{*n} (1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n}))}{1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_1^{*n} - c_2^{*n}) + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_2^{*n} - u_1^{*n})} \quad (2-61)$$

$$u_1^{*n+1} - 4c_1^{*n+1} = u_{CL}^{*n} - 4c_{CL}^{*n} \quad (2-62)$$

Έχουν επιλεγεί δύο τύπου οριακές συνθήκες για την είσοδο του αγγείου. Στη μεν πρώτη επιβάλλουμε παλμό πίεσης, στη δε δεύτερη παλμό με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων. Ακολουθεί η ανάλυση και των δύο.

2.6.1.1 Παλμός πίεσης

Με την επιβολή ενός παλμού πίεσης της επιλογής μας,

$$P_{in}(0,t)=f(t) \quad (2-63)$$

θα προκληθούν ψευδείς ανακλάσεις. Πρόκειται δηλαδή για μία μη ιδανική συνθήκη, γεγονός που μας απαγορεύει να δώσουμε αυτή την τιμή στην πίεση εισόδου και κατόπιν να υπολογίσουμε τη διατομή και την ταχύτητα. Θα πρέπει συνεπώς να την εισαγάγουμε στη συνθήκη συμβατότητας της αριστεροκλινούς χαρακτηριστικής ως εξής:

$$u-4(c-c'_0)=u-4\left(\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A^{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A_0^{\frac{1}{4}}\right) \quad (2-64)$$

$$u+4(c-c'_0)=u+4\left(\sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A^{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{\beta}{2\rho}} A_0^{\frac{1}{4}}\right) \quad (2-65)$$

$$P = P_{ext} + \beta(\sqrt{A} - \sqrt{A_0}) \Rightarrow$$

$$A^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{(P-P_{ext})}{\beta} + \sqrt{A_0}}$$

Αφαιρώντας την (2-64) από τη (2-65) και αντικαθιστώντας το $A^{\frac{1}{4}}$ παίρνουμε:

$$u+4(c-c'_0) - u-4(c-c'_0) = 8 \frac{\beta}{2\rho} \left(\sqrt{\frac{(P-P_{ext})}{\beta} + \sqrt{A_0(x)}} - A_0^{\frac{1}{4}} \right)$$

Κάνοντας πράξεις:

$$u+4(c-c'_0) - u-4(c-c'_0) = 8 \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left(\sqrt{(P - P_{ext}) + \beta\sqrt{A_0}} - \sqrt{\beta A_0^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (2-66)$$

Σε αυτή μόνο τη σχέση θεωρούμε τον όρο $u-4(c-c'_0)=0$. Η (2-66) λοιπόν γίνεται :

$$u+4(c-c'_0) = 8 \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left(\sqrt{(P - P_{ext}) + \beta\sqrt{A_0}} - \sqrt{\beta A_0^{\frac{1}{4}}} \right)$$

Αδιαστατοποιώντας και λαμβάνοντας υπόψη ότι στην είσοδο $c'_0 = c_0$ καταλήγουμε τελικά στην:

$$u^* + 4(c^* - 1) = 8 \left(\sqrt{\frac{P^* - P_{ext}^*}{2}} + 1 - 1 \right)$$

,η οποία για την είσοδο του αγγείου και για τη νέα χρονική στιγμή n+1 γίνεται:

$$u_1^{*n+1} + 4(c_1^{*n+1} - 1) = 8 \left(\sqrt{\frac{P_{in}^{*n+1} - P_{ext}_i^{*n+1}}{2}} + 1 - 1 \right) \quad (2-67)$$

Οι σχέσεις (2-62) και (2-67) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους από το οποίο προκύπτουν οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην είσοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή n+1 από τις ακόλουθες:

$$u_1^{*n+1} = \frac{u_{CL}^{*n} - 4(c_{CL}^{*n} - 1) + 8 \left(\sqrt{\frac{P_{in}^{*n+1} - P_{ext}_i^{*n+1}}{2}} + 1 - 1 \right)}{2} \quad (2-68)$$

$$c_1^{*n+1} = \frac{8 \left(\sqrt{\frac{P_{in}^{*n+1} - P_{ext}_i^{*n+1}}{2}} + 1 - 1 \right) - u_1^{*n+1}}{4} + 1 \quad (2-69)$$

Παρόλο που με αυτόν τον τρόπο ο παλμός πίεσης εισάγεται έμμεσα, αποδεικνύεται πως είναι αποτελεσματικός, ενώ απολαμβάνει μη-ανακλαστικές ιδιότητες.

Σε ότι αφορά τη διατομή, αυτή προκύπτει συναρτήσει της ταχύτητας κύματος ως εξής:

Από τη σχέση (2-10), λύνοντας ως προς A παίρνουμε:

$$A = A_0 \left(\frac{C}{C_0} \right)^4 \quad (2-70)$$

Αδιαστατοποιώντας, καταλήγουμε στη σχέση:

$$A_1^{*n+1} = A_0^* \left(\frac{C_1^{*n+1}}{C_0^*} \right)^4 \quad (2-71)$$

Τέλος, η πίεση δίνεται από τη σχέση (2-34):

$$P_1^{*n+1} = \frac{P_{ext}_1^{*n+1}}{\rho C_0^2} + 2 \left(\frac{C_1^{*n+1}}{C_0^2} - 1 \right)$$

ή

$$P_1^{*n+1} = P_{ext}_1^{*n+1} + 2 \left((C_1^{*n+1})^2 - 1 \right) \quad (2-72)$$

[Formaggia et al,2003]

2.6.1.2 Παλμός με όρους χαρακτηριστικών εξισώσεων

Θεωρούμε την ακόλουθη συνθήκη:

$$u+4(c-c_0)=f(t) \quad (2-73)$$

Σε συνδυασμό με τη συνθήκη συμβατότητας, σχέση (2-62), για αριστεροκλινή χαρακτηριστική, προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους από το οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην είσοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

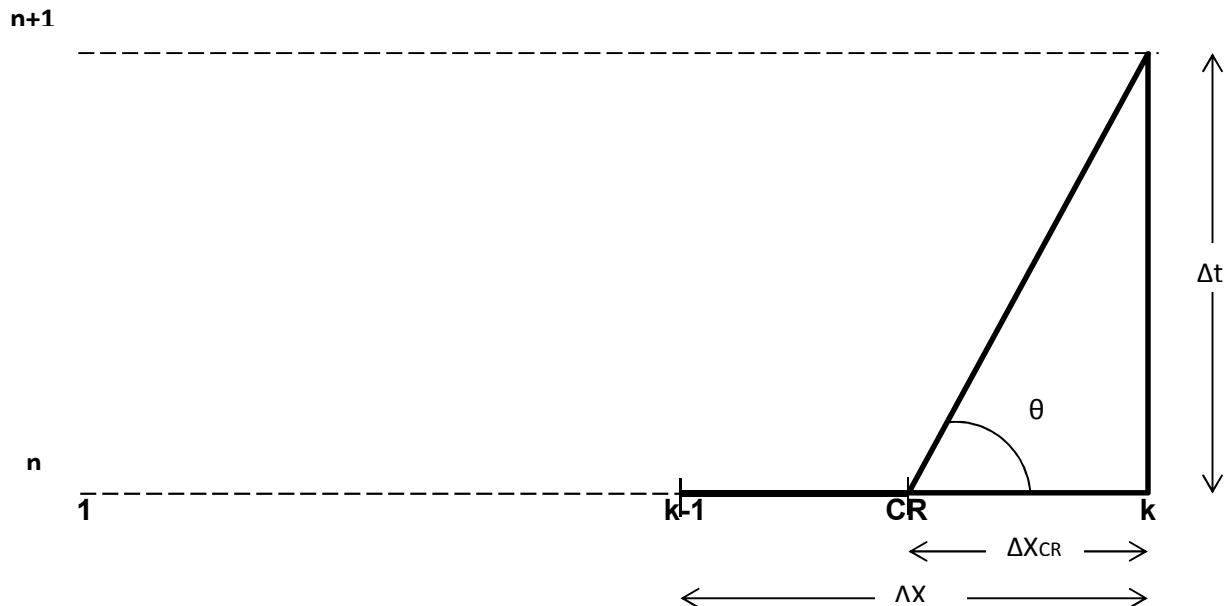
$$u_1^{*n+1} = \frac{u_{CL}^{*n} - 4(c_{CL}^{*n} - 1) + f^*(t)}{2} \quad (2-74)$$

$$c_1^{*n+1} = \frac{f^*(t) - u_1^{*n+1}}{4} + 1 \quad (2-75)$$

Η διατομή και η πίεση υπολογίζονται ως ανωτέρω από τις σχέσεις (2-71),(2-72). [Sherwin et al, 2003]

2.6.2 Άπω άκρο αγγείου

Θεωρούμε γνωστό το πεδίο ροής σε όλο το μήκος του αγγείου τον χρονικό κόμβο n και θέλουμε να το υπολογίσουμε τον χρονικό κόμβο $n+1$:



Σχήμα 2.2 Σχηματική παράσταση του χωροχρονικού πεδίου στο άπω άκρο

Τα σημεία $k-1, k$ αποτελούν τον προτελευταίο και τελευταίο χωρικό κόμβο αντίστοιχα. Το σημείο CR ανήκει πάνω στη δεξιοκλινή χαρακτηριστική $\xi = \text{const}$. Εφαρμόζοντας γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα στο δεξί άκρο του αγγείου παίρνουμε:

$$\frac{\Delta x_{CR}}{\Delta x} = \frac{u_{CR}^n - u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} \quad (2-76)$$

Εφαρμόζοντας αντίστοιχα γραμμική παρεμβολή για την ταχύτητα του κύματος στο αριστερό άκρο του αγγείου προκύπτει:

$$\frac{\Delta x_{CR}}{\Delta x} = \frac{c_{CR}^n - c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} \quad (2-77)$$

Για απειροστές ποσότητες $\Delta x, \Delta t$ θεωρούμε την δεξιοκλίνη χαρακτηριστική ευθεία. Οπότε ισχύει:

$$\cot(\theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \cot(\theta) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} \simeq - \frac{\Delta x_{CR}}{\Delta t} \xrightarrow{2-48}$$

$$\Delta x_{CR} = \Delta t(c_{CR} + u_{CR}) \quad (2-78)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-78) στη (2-76) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CR}^n + u_{CR}^n) = \frac{u_{CR}^n - u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} \quad (2-79)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το u_{CR}^n και κάνοντας ανακατανομή των όρων η (2-79) γίνεται:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{u_{k-1}^n - u_k^n} \right) u_{CR}^n = - \frac{u_k^n}{u_{k-1}^n - u_k^n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CR}^n$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(u_{k-1}^n - u_k^n)\Delta x$ και λύνοντας ως προς u_{CR}^n :

$$u_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n \Delta t (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n \Delta x}{\Delta x - \Delta t (u_{k-1}^n - u_k^n)}$$

Τελικά, βγάζοντας κοινό παράγοντα από τον αριθμητή και τον παρονομαστή το Δx καταλήγουμε στην:

$$u_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} \quad (2-80)$$

Αντικαθιστώντας τη (2-78) στη (2-77) έχουμε:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{CR}^n + u_{CR}^n) = \frac{c_{CR}^n - c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} \quad (2-81)$$

Αναπτύσσοντας την επιμεριστική του πρώτου μέλους και αντικαθιστώντας το u_{CR}^n από τη (2-81) προκύπτει:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c_{CR}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n) + u_k^n}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{CR}^n = \frac{c_{CR}^n}{c_{k-1}^n - c_k^n} - \frac{c_k^n}{c_{k-1}^n - c_k^n}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το c_{CR}^n :

$$c_{CR}^n = \frac{u_k^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{k-1}^n - c_k^n) + c_k^n (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n))}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_{k-1}^n - c_k^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k-1}^n - u_k^n)} \quad (2-82)$$

Από τη συνθήκη συμβατότητας για δεξιοκλινή χαρακτηριστική (2-50) ισχύει:

$$u_{CR}^n + 4(c_{CR}^n - c'_o) = \text{const}$$

Άρα, και με δεδομένο ότι το c'_o απαλοίφεται:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n \quad (2-83)$$

Αδιαστατοποιούμε τις σχέσεις (2-80), (2-82), (2-83) :

$$u_{CR}^{*n} = \frac{c_{CR}^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n}) + u_k^{*n}}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n})} \quad (2-84)$$

$$c_{CR}^{*n} = \frac{u_k^{*n} \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_{k-1}^{*n} - c_k^{*n}) + c_k^{*n} (1 + \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n}))}{1 - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (c_{k-1}^{*n} - c_k^{*n}) - \frac{\Delta t^*}{\Delta x^*} (u_{k-1}^{*n} - u_k^{*n})} \quad (2-85)$$

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-86)$$

Το κυκλοφορικό σύστημα αποτελείται από αρτηρίες, οι οποίες διακλαδίζονται συνεχώς σε μικρότερες μέχρι τα τριχοειδή αγγεία. Αν ενδιαφερόμαστε, όπως στην εν λόγω εργασία, μόνο για μεγαλύτερες αρτηρίες του δικτύου, το πρόβλημα μπορεί να απλουστευτεί αρκετά, μοντελοποιώντας ένα μέρος του δικτύου. Έχουν επιλεγεί δύο τύπου οριακές συνθήκες για την έξοδο του αγγείου. Στη μεν πρώτη επιβάλλουμε μη ανακλαστικές ιδιότητες, στη δε δεύτερη που χρησιμοποιείται στην περίπτωση της απλής και διπλής διακλάδωσης θεωρούμε έναν συντελεστή ανάκλασης R_r (κεφάλαιο 1^ο, σχέση 1-15).

2.6.2.1 Συνθήκη μη-ανάκλασης

Προκειμένου να μην υπάρχουν ανακλάσεις, θέτουμε τον όρο $u-4(c-c'_o)$ ίσο με το μηδέν, δηλαδή:

$$u-4(c-c'_o)=0 \quad (2-87)$$

Από τις σχέσεις (2-87) και (2-50) προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από το οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην έξοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

$$u_k^{*n+1} = \frac{u_{CR}^{*n} + 4(c_{CR}^{*n} - c'_o)^*}{2} \quad (2-88)$$

$$c_k^{*n+1} = \frac{u_k^{*n+1}}{4} + c'_o \quad (2-89)$$

Η διατομή και η ταχύτητα δίνονται από τις σχέσεις (2-70) και (2-34):

$$A_k^{*n+1} = A_o^* \left(\frac{C_k^{*n+1}}{C_o'^*} \right)^4 \quad (2-90)$$

$$P_k^{*n+1} = \frac{P_{ext_1}^{*n+1}}{\rho C_o'^2} + 2 \left(\frac{(C_k^{*n+1})^2}{C_o'^2} - \frac{C_o'^2}{C_o'^2} \right) \text{ ή}$$

$$P_k^{*n+1} = P_{ext_k}^{*n+1} + 2 \left((C_k^{*n+1})^2 - C_o'^2 \right) \quad (2-91)$$

2.6.2.2 Τερματική αντίσταση

Το δίκτυο των αγγείων, που αμελούμε, επίσης αντανακλά πίσω οδεύοντα κύματα. Πρέπει να προσεγγιστούν αυτές οι ανακλάσεις στο τέλος του μοντελοποιημένου δικτύου. Έτσι εισάγεται η έννοια της τερματικής αντίστασης R_t (terminal resistance).

Για $R_t=1$ έχουμε πλήρη ανάκλαση.

Για $R_t=0$ έχουμε μηδενική ανάκλαση.

Για $R_t > 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με αρνητική ταχύτητα.

Για $R_t < 0$ το πίσω οδεύον κύμα συνεισφέρει με θετική ταχύτητα.

Με γνωστή λοιπόν την τιμή του R_t , από τη σχέση:

$$R_t = - \frac{u-4(C-C_o)}{u+4(C-C_o)} \quad (2-92)$$

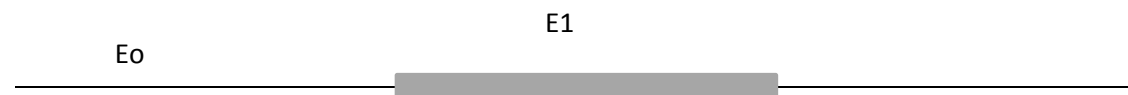
και τη συνθήκη συμβατότητας (2-50) για δεξιοκλινή χαρακτηριστική προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, από το οποίο υπολογίζονται οι τιμές της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας u^* και της αδιαστατοποιημένης ταχύτητας κύματος c^* στην έξοδο του αγγείου τη νέα χρονική στιγμή $n+1$.

$$u_k^{*n+1} = \frac{u_{CR}^{*n} + 4(C_{CR}^{*n} - C_o'^*)}{1 + \frac{1+R_t}{1-R_t}} \quad (2-93)$$

$$C_k^{*n+1} = \frac{u_k^{*n+1}(1+R_t)}{4(1-R_t)} + C_o'^* \quad (2-94)$$

Η διατομή και η πίεση υπολογίζονται ως ανωτέρω από τις σχέσεις (2-90),(2-91).

2.7 Αγγείο με stent



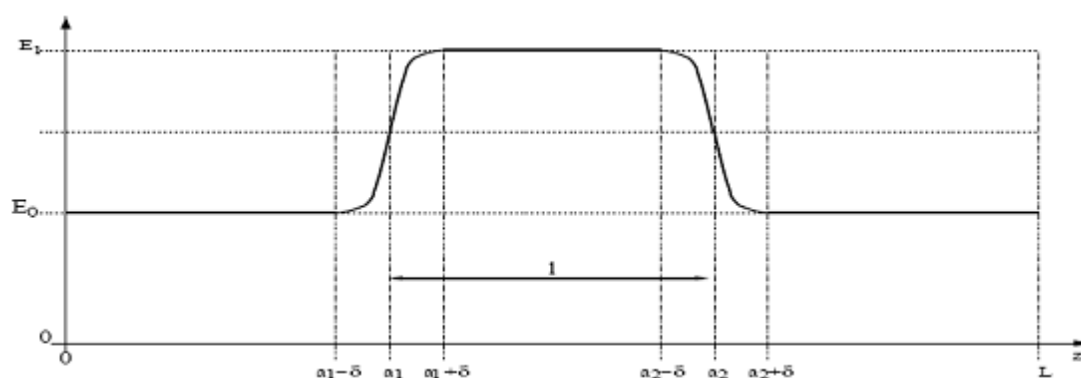
Σχήμα 2.3 Σχηματική παράσταση αγγείου με stent

Όταν στο αγγείο τοποθετείται stent, οι ελαστικές του ιδιότητες ποικίλουν. Αν απλά αλλάξουμε συναρτήσεϊ του μήκους x την τιμή του $\beta(x)$, μπορεί οι διαφορετικές ιδιότητες να λαμβάνονται υπόψη, όμως στο σημείο της αλλαγής παρουσιάζεται

ασυνέχεια. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα υιοθετήθηκαν δύο μεθοδολογίες.

2.7.1 Συνάρτηση $E(x)$ στα σημεία αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας

Το stent αντιμετωπίζεται ως τμήμα του αγωγού, το οποίο έχει διαφορετικό μέτρο ελαστικότητας, οπότε και ισχύουν οι εξισώσεις των οποίων η ανάλυση έχει προηγηθεί, αλλά εισάγεται μία συνάρτηση υπολογισμού του E πέμπτου βαθμού ώστε η μετάβαση από τη μία τιμή στην άλλη να γίνεται ομαλά. Βάση του κατωτέρω σχήματος καταstrώνεται ένα γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων, το οποίο επιλύεται με τη μέθοδο Gauss(2.11).



Σχήμα 2.4 Το μέτρο ελαστικότητας συναρτήσει του μήκους του αγγείου

,όπου $x=a_1$ η είσοδος του stent, $x=a_2$ η έξοδος και δ μία τιμή μήκους που δίνουμε εμείς.

Η συνάρτηση θα είναι της μορφής:

$$E(x)=s_0+s_1E(x)+s_2E(x)^2+s_3E(x)^3+s_4E(x)^4+s_5E(x)^5 \quad (2-95)$$

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των συντελεστών του τμήματος $(a_1-\delta,a_1+\delta)$ είναι:

$$E_0= s_0+s_1E(a_1-\delta)+s_2E(a_1-\delta)^2+s_3E(a_1-\delta)^3+s_4E(a_1-\delta)^4+s_5E(a_1-\delta)^5 \quad (2-96)$$

$$E_1= s_0+s_1E(a_1+\delta)+s_2E(a_1+\delta)^2+s_3E(a_1+\delta)^3+s_4E(a_1+\delta)^4+s_5E(a_1+\delta)^5 \quad (2-97)$$

Στις θέσεις $x=a_1-\delta$ και $x=a_1+\delta$, η $E(x)$ παρουσιάζει την ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα. Άρα, ισχύει:

$$\frac{dE(a_1-\delta)}{dx}=0 \Rightarrow$$

$$0=s_1+2s_2E(a_1-\delta)+3s_3E(a_1-\delta)^2+4s_4E(a_1-\delta)^3+5s_5E(a_1-\delta)^4 \quad (2-98)$$

$$\frac{dE(a_1+\delta)}{dx}=0 \Rightarrow$$

$$0=s_1+2s_2E(a_1+\delta)+3s_3E(a_1+\delta)^2+4s_4E(a_1+\delta)^3+5s_5E(a_1+\delta)^4 \quad (2-99)$$

Στο σημείο a_1 αλλάζουν τα κοίλα της $E(x)$, δηλαδή από κυρτή γίνεται κοίλη. Άρα, ισχύει:

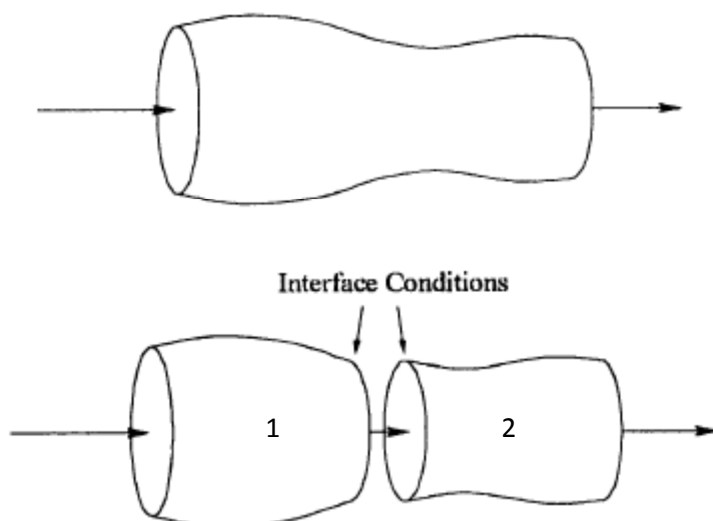
$$\frac{d^2E(a_1)}{dx^2} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 2s_2 + 6s_3 E(a_1) + 12s_4 E(a_1)^2 + 20s_5 E(a_1)^3 \quad (2-100)$$

$$\frac{E_0 + E_1}{2} = s_0 + s_1 E(a_1) + s_2 E(a_1)^2 + s_3 E(a_1)^3 + s_4 E(a_1)^4 + s_5 E(a_1)^5 \quad (2-101)$$

Καθ' όμοιο τρόπο προκύπτει και η συνάρτηση του $E(x)$ για το τμήμα $(a_2 - \delta, a_2 + \delta)$.

2.7.2 Θεώρηση stent ως ξεχωριστό αγγείο



Σχήμα 2.5 Σχηματική παράσταση υποδιαίρεσης αγγείου με stent σε δύο αγγεία

Στη δε δεύτερη, ισχύουν τα εξής για το σημείο της αλλαγής:

Συνέχεια των παροχών μάζας:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad (2-102)$$

Συνέχεια ολικής πίεσης:

$$P_{t1} = P_{t2} \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (2-103)$$

Στην ουσία αυτό που κάνουμε είναι να θεωρούμε το τμήμα με το stent διαφορετικό αγωγό. Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα, η πίεση και η διατομή της εξόδου του φυσιολογικού αγγείου και της εισόδου του stent ή αντίστοιχα της εξόδου του stent και της εισόδου του φυσιολογικού αγγείου υπολογίζονται ως οριακές συνθήκες.

Προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους, το οποίο εκτός από τις ανωτέρω εξισώσεις περιλαμβάνει και τις συνθήκες συμβατότητας των χαρακτηριστικών της εξόδου και της εισόδου αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n$$

$$u_1^{n+1} - 4c_1^{n+1} = u_{CL}^n - 4c_{CL}^n$$

Αντικαθιστώντας τις πιέσεις στην (2-103) από τη σχέση (2-11) και τη διατομή στην (2-102) από τη σχέση (2-70) και αδιαστατοποιώντας:

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-104)$$

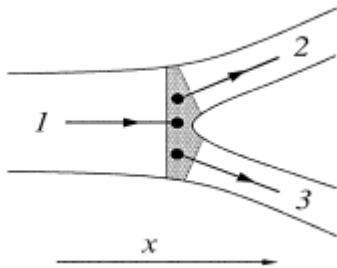
$$u_1^{*n+1} - 4c_1^{*n+1} = u_{CL}^{*n} - 4c_{CL}^{*n} \quad (2-105)$$

$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((c_k^{*n+1})^2 - C_{o1}^{*2}) = (u_1^{*n+1})^2 + 4((c_1^{*n+1})^2 - C_{o2}^{*2}) \quad (2-106)$$

$$\frac{A_{o1}^*}{C_{o1}^{*2}} (c_1^{*n+1})^4 u_1^{*n+1} = \frac{A_{o2}^*}{C_{o2}^{*2}} (c_2^{*n+1})^4 u_2^{*n+1} \quad (2-107)$$

Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Newton - Raphson (2.12). Έχοντας υπολογίσει λοιπόν την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα εξόδου του φυσιολογικού αγγείου και εισόδου του stent, καθώς και την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα κύματος αντίστοιχα, η διατομή και η πίεση προκύπτουν αδιαστατοποιώντας τις σχέσεις (2-70) και (2-11) για το φυσιολογικό αγγείο και το stent αντίστοιχα.

2.8 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης



Σχήμα 2.6 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Αρχικά ισχύει η συνέχεια των παροχών μάζας, δηλαδή:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 + A_3 u_3 \quad (2-108)$$

Επίσης, θεωρούμε συνέχεια ολικής πίεσης. Τότε:

$$P_{t1} = P_{t2} \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (2-109)$$

$$P_{t1} = P_{t3} \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho u_3^2 \quad (2-110)$$

Προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους, το οποίο εκτός από τις ανωτέρω εξισώσεις περιλαμβάνει και τις συνθήκες συμβατότητας των χαρακτηριστικών της εξόδου του αγγείου 1 και της εισόδου των 2 και 3 αντίστοιχα, οι οποίες είναι:

$$u_k^{n+1} + 4c_k^{n+1} = u_{CR}^n + 4c_{CR}^n$$

$$u_{1_2}^{n+1} - 4c_{1_2}^{n+1} = u_{CL_2}^n - 4c_{CL_2}^n$$

$$u_{1_3}^{n+1} - 4c_{1_3}^{n+1} = u_{CL_3}^n - 4c_{CL_3}^n,$$

, όπου οι δείκτες 2 και 3 συμβολίζουν ότι πρόκειται για τα αγγεία 2 και 3 αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας τις πιέσεις στις (2-109) και (2-110) από τη σχέση (2-11) και τη διατομή στην (2-108) από τη σχέση (2-70) και αδιαστατοποιώντας:

$$u_k^{*n+1} + 4c_k^{*n+1} = u_{CR}^{*n} + 4c_{CR}^{*n} \quad (2-111)$$

$$u_{1_2}^{*n+1} - 4c_{1_2}^{*n+1} = u_{CL_2}^{*n} - 4c_{CL_2}^{*n} \quad (2-112)$$

$$u_{1_3}^{*n+1} - 4c_{1_3}^{*n+1} = u_{CL_3}^{*n} - 4c_{CL_3}^{*n} \quad (2-113)$$

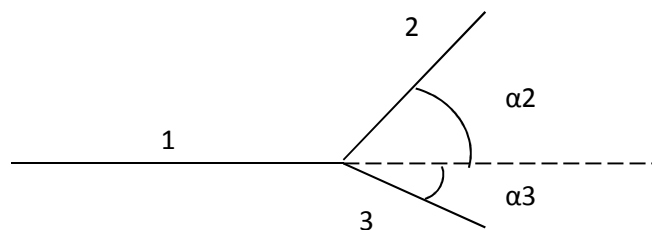
$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((C_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*n+1}) = (u_{1_2}^{*n+1})^2 + 4((C_{1_2}^{*n+1})^2 - C_{o_2}^{*n+1}) \quad (2-114)$$

$$(u_k^{*n+1})^2 + 4((C_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*n+1}) = (u_{1_3}^{*n+1})^2 + 4((C_{1_3}^{*n+1})^2 - C_{o_3}^{*n+1}) \quad (2-115)$$

$$\frac{A_{o_1}^*}{C_{o_1}^{*n+1}} (C_k^{*n+1})^4 u_{1_1}^{*n+1} = \frac{A_{o_2}^*}{C_{o_2}^{*n+1}} (C_{1_2}^{*n+1})^4 u_{1_2}^{*n+1} + \frac{A_{o_3}^*}{C_{o_3}^{*n+1}} (C_{1_3}^{*n+1})^4 u_{1_3}^{*n+1} \quad (2-116)$$

Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται με τη μέθοδο Newton-Raphson(2.12). Έχοντας υπολογίσει λοιπόν την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα εξόδου του πατρικού αγγείου και εισόδου των θυγατρικών, καθώς και την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα κύματος αντίστοιχα, η διατομή και η πίεση προκύπτουν αδιαστατοποιώντας τις σχέσεις (2-70) και (2-11).

2.9 Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης



Σχήμα 2.7 Σχηματική παράσταση γωνιών διακλάδωσης

Σε μία διακλάδωση σε αντίθεση με την προηγούμενη ανάλυση είναι λογικό να έχουμε πτώση της ολικής πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής. Αυτή η πτώση μπορεί να αποδοθεί στην ταχύτητα του ρευστού και στις γωνίες των θυγατρικών αγγείων.

Προκειμένου να εισάγουμε την πτώση ολικής πίεσης στην ανάλυσή μας χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_{t1}-\text{sign}(u_1)f_1(u_1) = P_{t2}+\text{sign}(u_2)f_2(u_2,\alpha_2) \quad (2-117)$$

$$\text{και } P_{t1}-\text{sign}(u_1)f_1(u_1) = P_{t3}+\text{sign}(u_3)f_3(u_3,\alpha_3) \quad (2-118)$$

,όπου

$$f_1(u_1) = \gamma_1 u_1^2$$

$$f_2(u_2,\alpha_2) = \gamma_2 u_2^2 \sqrt{2(1 - \cos(\alpha_2))}$$

$$f_3(u_3,\alpha_3) = \gamma_3 u_3^2 \sqrt{2(1 - \cos(\alpha_3))}$$

Τα $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ είναι θετικής τιμής συντελεστές της επιλογής μας, ίδιας τάξης μεγέθους με την πυκνότητα.

Αδιαστατοποιώντας λοιπόν τις σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (u_k^{*n+1})^2 + 4((C_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*2}) - 2\text{sign}(u_k^{*n+1} C_{o_1}^{*}) \frac{\gamma_1}{\rho} (u_k^{*n+1})^2 = \\ (u_{1_2}^{*n+1})^2 + 4((C_{1_2}^{*n+1})^2 - C_{o_2}^{*2}) + 2\text{sign}(u_{1_2}^{*n+1} C_{o_2}^{*}) \frac{\gamma_2}{\rho} (u_{1_2}^{*n+1})^2 \sqrt{2(1 - \cos(\alpha_2))} \end{aligned} \quad (2-119)$$

και

$$\begin{aligned} (u_k^{*n+1})^2 + 4((C_k^{*n+1})^2 - C_{o_1}^{*2}) - 2\text{sign}(u_k^{*n+1} C_{o_1}^{*}) \frac{\gamma_1}{\rho} (u_k^{*n+1})^2 = \\ (u_{1_3}^{*n+1})^3 + 4((C_{1_3}^{*n+1})^2 - C_{o_3}^{*2}) + 2\text{sign}(u_{1_3}^{*n+1} C_{o_3}^{*}) \frac{\gamma_2}{\rho} (u_{1_3}^{*n+1})^2 \sqrt{2(1 - \cos(\alpha_3))} \end{aligned} \quad (2-120)$$

Οι δύο λοιπόν αυτές εξισώσεις αντικαθιστούν τις αντίστοιχες της περίπτωσης με διατήρηση ολικής πίεσης και το σύστημα επιλύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. [Formaggia et al,2003]

2.10 Μέθοδος επίλυσης Mac-Cormack

Η μέθοδος MacCormack αποτελεί ένα ρητό σχήμα πεπερασμένων διαφορών, που έχει δεύτερης τάξης ακρίβεια στον χώρο και τον χρόνο. Εισάχθηκε το 1969 και έγινε η πιο φημισμένη ρητή μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση πεδίων ροής για τα επόμενα 15 χρόνια. Σήμερα έχει εμπλουτιστεί με περισσότερο περίπλοκες προσεγγίσεις.

Θεωρούμε ότι το πεδίο ροής σε κάθε θέση του όγκου ελέγχου είναι γνωστό την χρονική στιγμή t και θέλουμε να υπολογιστεί την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, δηλαδή πρόκειται για μία μέθοδο χρονοπροέλασης. Στην συνέχεια παρατίθεται ο τρόπος υπολογισμού της διατομής A με την βοήθεια της εξίσωσης διατήρησης της μάζας,

κάνοντας χρήση της μεθόδου MacCormack. Ομοίως υπολογίζεται και η ταχύτητα με την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Η πίεση υπολογίζεται από την σχέση ελαστικότητας, αφού είναι γνωστή η διατομή.

Η διατομή στην θέση i για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ είναι:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \quad (2-121)$$

Όπου, $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av}$ είναι μια αντιπροσωπευτική μέση τιμή της χρονικής παραγώγου $\frac{\partial A}{\partial t}$ ανάμεσα στις χρονικές τιμές t και $t+\Delta t$. Αυτή η μέση τιμή υπολογίζεται σε δύο βήματα, πρόβλεψης και διόρθωσης.

2.10.1 Βήμα πρόβλεψης(predictor step)

Αντικαθιστούμε με πρόσω διαφορές το δεξί άκρο της εξίσωσης διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial A^n}{\partial t_i} = -\left(\frac{A_{i+1}^n u_{i+1}^n - A_i^n u_i^n}{\Delta x}\right)$$

Όλες οι μεταβλητές είναι γνωστές την χρονική στιγμή t , άρα το δεξί μέλος είναι γνωστό. Έτσι υπολογίζεται η διατομή A την χρονική στιγμή $t+\Delta t$, με τους δύο πρώτους όρους σειράς Taylor:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \frac{\partial A^n}{\partial t_i} \Delta t \quad (2-122)$$

Η διατομή A_i^{n+1} υπολογιζόμενη από αυτό το βήμα πρόβλεψης, αποτελεί πρώτης τάξης ακρίβεια, αφού περιέχει όρους πρώτης τάξης της σειράς Taylor.

2.10.2 Βήμα διόρθωσης(Corrector step)

Στο βήμα διόρθωσης, αρχικά υπολογίζεται η χρονική παράγωγος με τα δεδομένα του βήματος πρόβλεψης για την χρονική στιγμή $t+\Delta t$:

$$\frac{\partial A^{n+1}}{\partial t_i} = -\left(\frac{A_i^{n+1} u_i^{n+1} - A_{i-1}^{n+1} u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right)$$

Η μέση τιμή της χρονικής παραγώγου της διατομής υπολογίζεται από τον αριθμητικό μέσο των χρονικών παραγώγων:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_i^{n+1} \right]$$

Έτσι υπολογίζεται η διορθωμένη τιμή της διατομής την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ από τη γνωστή σχέση:

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{av} \Delta t \quad (2-123)$$

Αυτά τα δύο βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης επαναλαμβάνονται για όλα τα σημεία του αγγείου και έτσι υπολογίζεται το πεδίο ροής σε όλα τα σημεία την χρονική στιγμή $t+\Delta t$. Για να υπολογιστεί η ταχύτητα u κατά μήκος του αγγείου επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία κάνοντας χρήση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής.

Όπως περιγράφηκε παραπάνω στο βήμα πρόβλεψης χρησιμοποιούμε πρόσω διαφορές και στο βήμα διόρθωσης πίσω διαφορές, γεγονός που καθιστά την μέθοδο Mac-Cormack διπλής ακρίβειας μέθοδο. [Anderson, 1995]

2.11 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss είναι μία από τις πλέον αποτελεσματικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων με υπολογιστή. Η μέθοδος βασίζεται στη μετατροπή του αρχικού συστήματος, με επιτρεπτές πράξεις, σε ισοδύναμο του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι άνω τριγωνικός. Τότε το νέο σύστημα επιλύεται εύκολα με διαδοχικές αντικαταστάσεις. Ο πίνακας συντελεστών θα πρέπει να είναι τετραγωνικός και ομαλός. Η μέθοδος Gauss εφαρμόζεται σε δύο φάσεις:

2.11.1 Φάση τριγωνοποίησης

Το γραμμικό σύστημα των έξι εξισώσεων που έχουμε να επιλύσουμε για να βρούμε τους συντελεστές του $E(x)$ είναι:

$$E_0 = s_0 + s_1 E(a_1 - \delta) + s_2 E(a_1 - \delta)^2 + s_3 E(a_1 - \delta)^3 + s_4 E(a_1 - \delta)^4 + s_5 E(a_1 - \delta)^5$$

$$E_1 = s_0 + s_1 E(a_1 + \delta) + s_2 E(a_1 + \delta)^2 + s_3 E(a_1 + \delta)^3 + s_4 E(a_1 + \delta)^4 + s_5 E(a_1 + \delta)^5$$

$$\frac{E_0 + E_1}{2} = s_0 + s_1 E(a_1) + s_2 E(a_1)^2 + s_3 E(a_1)^3 + s_4 E(a_1)^4 + s_5 E(a_1)^5$$

$$0 = s_1 + 2s_2 E(a_1 - \delta) + 3s_3 E(a_1 - \delta)^2 + 4s_4 E(a_1 - \delta)^3 + 5s_5 E(a_1 - \delta)^4$$

$$0 = s_1 + 2s_2 E(a_1 + \delta) + 3s_3 E(a_1 + \delta)^2 + 4s_4 E(a_1 + \delta)^3 + 5s_5 E(a_1 + \delta)^4$$

$$0 = 2s_2 + 6s_3 E(a_1) + 12s_4 E(a_1)^2 + 20s_5 E(a_1)^3$$

Το φέρνουμε στην ακόλουθη μορφή:

$$b_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 + \alpha_{15} x_5 + \alpha_{16} x_6 \quad (2-124)$$

$$b_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 + \alpha_{25} x_5 + \alpha_{26} x_6 \quad (2-125)$$

$$b_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4 + \alpha_{35} x_5 + \alpha_{36} x_6 \quad (2-126)$$

$$b_4 = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4 + \alpha_{45} x_5 + \alpha_{46} x_6 \quad (2-127)$$

$$b_5 = \alpha_{51} x_1 + \alpha_{52} x_2 + \alpha_{53} x_3 + \alpha_{54} x_4 + \alpha_{55} x_5 + \alpha_{56} x_6 \quad (2-128)$$

$$b_6 = \alpha_{61} x_1 + \alpha_{62} x_2 + \alpha_{63} x_3 + \alpha_{64} x_4 + \alpha_{65} x_5 + \alpha_{66} x_6 \quad (2-129)$$

, όπου $x_1:x_6$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές του $E(x)$

a_{ij} οι γνωστοί συντελεστές των x_i

b_i οι γνωστές τιμές της κάθε εξίσωσης

Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & b_5 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & b_6 \end{pmatrix}$$

Για $p=1$ έως 6 αν χρειάζεται αντάλλαξε τη γραμμή p με κάποια από τις επόμενες ώστε να ισχύει $a_{pp} \neq 0$. Εν συνεχεία απάλειψε τον άγνωστο x_p στις γραμμές $p+1$ έως 6. Εάν ε_1 έως ε_6 οι εξισώσεις μας, η παραπάνω διαδικασία συμβολίζεται ως εξής:

$$(\varepsilon_r) \rightarrow (\varepsilon_r - m_{rp}\varepsilon_p) \text{ για κάθε } r = p+1,6$$

,όπου m_{rp} είναι ο πολλαπλασιαστής της γραμμής p που αφαιρείται από τη γραμμή r και την αντικαθιστά.

Το τελικό αποτέλεσμα μετά και την απαλοιφή του x_5 στη γραμμή 6 είναι:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & b_6 \end{pmatrix}$$

Εάν κάποιο στοιχείο της διαγωνίου μηδενιστεί η μέθοδος είναι μη εφαρμόσιμη.

2.11.2 Φάση πίσω-αντικατάσταση

Το άνω τριγωνικό σύστημα επιλύεται εύκολα με τη διαδικασία της πίσω αντικατάστασης. Έτσι αρχίζοντας από την τελευταία εξίσωση υπολογίζουμε το x_6 , αντικαθιστούμε στην προηγούμενη και υπολογίζουμε το x_5 και ούτω καθεξής οπότε τελικά από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε το x_1 . [Παπαγεωργίου-Τσίτουρας,2004]

2.12 Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson

Η μέθοδος Newton-Raphson είναι μία από τις πιο δυνατές και γνωστές επαναληπτικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων. Εκτός του ότι η σύγκλιση επιτυγχάνεται γρήγορα, η μέθοδος χρησιμοποιεί τις τιμές της συνάρτησης με αποτέλεσμα να προκύπτουν περισσότερο ακριβείς προσεγγίσεις της λύσης σε κάθε επανάληψη. Ο μόνος της περιορισμός έγκειται στη σωστή επιλογή της αρχικής

προσέγγισης. Αν αυτή δεν βρίσκεται κοντά στη ρίζα, η μέθοδος μπορεί να αποκλίνει. Στη δικιά μας περίπτωση η Newton-Raphson χρησιμοποιείται σε κάθε χρονική στιγμή στις οριακές συνθήκες. Από τη στιγμή που για την εύρεση των τιμών της χρονικής στιγμής $t+\Delta t$ χρησιμοποιούνται ως αρχικές προσεγγίσεις οι τιμές της προηγούμενης χρονικής στιγμής t , η σύγκλιση εξασφαλίζεται.

Στη γενικευμένη περίπτωση για ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους ισχύουν τα εξής:

Έστω $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}^{(r+1)}$ η τιμή του διανύσματος \mathbf{x} στην $(r+1)$ επανάληψη. Τότε έχουμε την επαναληπτική σχέση :

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r, \quad r=0,1,2,\dots \quad (2-130)$$

,όπου $\delta\mathbf{x}^r$ το διάνυσμα των αντίστοιχων διορθώσεων.

Αν το $\mathbf{x}^{(r+1)}$ είναι μία βελτιωμένη προσέγγιση του \mathbf{x} τότε:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r+1)}) &\approx \mathbf{0} \text{ ή} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r) &\approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2-131)$$

,όπου \mathbf{f} το διάνυσμα των εξισώσεων του συστήματος.

Αναπτύσσοντας τη σχέση (2-131) σε σειρά Taylor και παραλείποντας όλους τους όρους που περιέχουν δυνάμεις του $\delta\mathbf{x}^r$ μεγαλύτερες του 1 προκύπτει:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^r) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) \delta\mathbf{x}^r \approx \mathbf{0} \quad (2-132)$$

$$\text{,όπου } \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^r)}{\partial x_j}, \text{ για } i=1,2,\dots,n \text{ και } j=1,2,\dots,n \quad (2-133)$$

είναι ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian), και ο δείκτης r δηλώνει ότι υπολογίζεται στο σημείο \mathbf{x}^r .

Λύνοντας την σχέση (2-132) προκύπτει ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton:

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^r)}{\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r)} \quad (2-134)$$

Στην πράξη επιλύουμε το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^r) \delta\mathbf{x}^r = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^r) \quad (2-135)$$

και εν συνεχεία υπολογίζουμε την επόμενη προσέγγιση

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^r + \delta\mathbf{x}^r \quad (2-136)$$

Με την έννοια αυτή, η μέθοδος Newton-Raphson αντικαθιστά ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων με ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, αλλά επειδή οι λύσεις των δύο συστημάτων γενικά δεν ταυτίζονται, η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η προσεγγιστική λύση να έχει την επιθυμητή ακρίβεια. Ένα κριτήριο είναι να συνεχίσουμε τις επαναλήψεις έως ότου να ικανοποιηθεί η ανισότητα:

$$\frac{\delta x^r}{x^r + \delta x^r} < \varepsilon \quad (2-137)$$

,όπου ε το επιθυμητό σφάλμα. [Παπαγεωργίου-Τσίτουρας,2004]

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

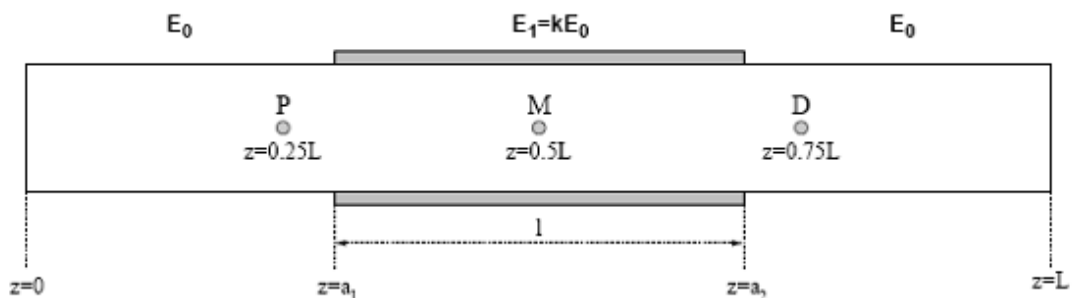
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Εισαγωγή

Επειδή ο υπολογιστικός κώδικας που συντάχτηκε δεν είχε ελεγχθεί ως προς την εγκυρότητά του, κρίθηκε σκόπιμο να συγκριθούν τα αποτελέσματά του με αυτά αντίστοιχων δημοσιευμένων άρθρων. Έτσι παρακάτω παρατίθενται εκτός των δικών μας υπολογιστικών περιπτώσεων και μία σειρά περιπτώσεων που επιλύθηκαν για να ελεγχθεί το υπολογιστικό σχήμα που παρουσιάστηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά των αντίστοιχων άρθρων.

3.2 Αγγείο με stent

Θεωρούμε την περίπτωση αρτηρίας, στην οποία έχει τοποθετηθεί μεταλλικό πλέγμα (stent), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1 και μελετούμε τις αλλαγές που δημιουργούνται στην πίεση από την αλλαγή των ελαστικών χαρακτηριστικών, λόγω της ύπαρξης του stent, το οποίο είναι ένα μεταλλικό πλέγμα που τοποθετείται στις στενωμένες αρτηρίες για να αποκατασταθεί η ροή.



Σχήμα 3.1 Σχηματική παράσταση στενωμένης αρτηρίας

Το κομμάτι που προσομοιώνει την ύπαρξη της πρόσθεσης του stent μήκους l είναι αυτό που βρίσκεται μεταξύ των συντεταγμένων a_1 και a_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Το αντίστοιχο μέτρο ελαστικότητας θεωρείται ως πολλαπλάσιο του μέτρου ελαστικότητας E_0 του φυσιολογικού ιστού. Η μετάβαση από τη μία τιμή στην άλλη του μέτρου ελαστικότητας γίνεται με τη συνάρτηση $E(x)$, όπως έχει αναλυθεί στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.7.1).

Τρία σημεία κατά μήκος του αγγείου έχουν επισημανθεί με τα γράμματα P (proximal=εγγύς), M (medium=μέσο) και D (distal=άπω) που αντιστοιχούν στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, και $\frac{3}{4}$ του μήκους. Θα χρησιμοποιηθούν ως σημεία ελέγχου για την μεταβολή της πίεσης. Θεωρήθηκαν οι αρχικές τιμές $A=A_0$ και $u=0$ και θεωρήθηκε η εξωτερική πίεση του αγγείου $P_{ext}=0$.

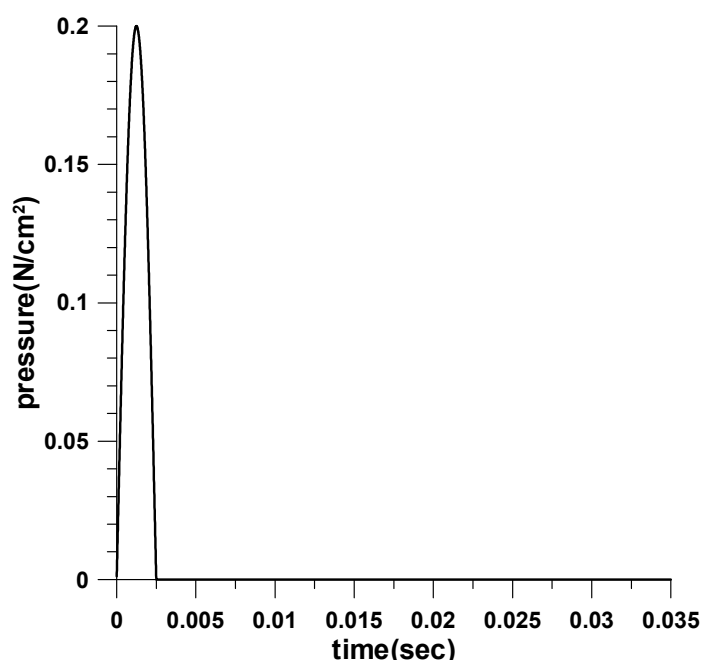
Οι οριακές συνθήκες για αυτή την περίπτωση είναι οι παρακάτω:

1. Στο άπω άκρο θεωρούμε οριακές συνθήκες μη-ανάκλασης(non-reflecting), θεωρώντας ότι ο όρος $u-4(c-c_0)$ παραμένει σταθερός και ίσος με την αρχική του τιμή, δηλαδή $u-4(c-c_0)=0$ (αγγείο απείρου μήκους όπου το οδεύον κύμα πίεσης δεν φτάνει στο άπω άκρο). Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.6.2.1).

2. Για το εγγύς άκρο του αγγείου θεωρούμε ότι ο όρος $u+4(c-c_0)$ υπολογίζεται από την σχέση (2-67), εφόσον δίνεται παλμός πίεσης. Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.6.1.1).

Χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί παλμοί πίεσης.

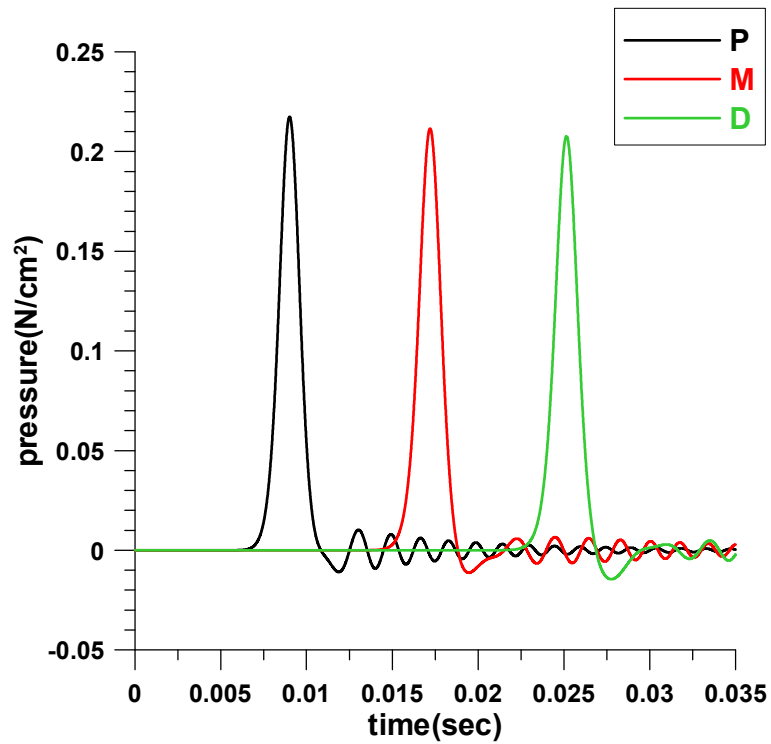
3.2.1 Παλμός πίεσης μικρής περιόδου



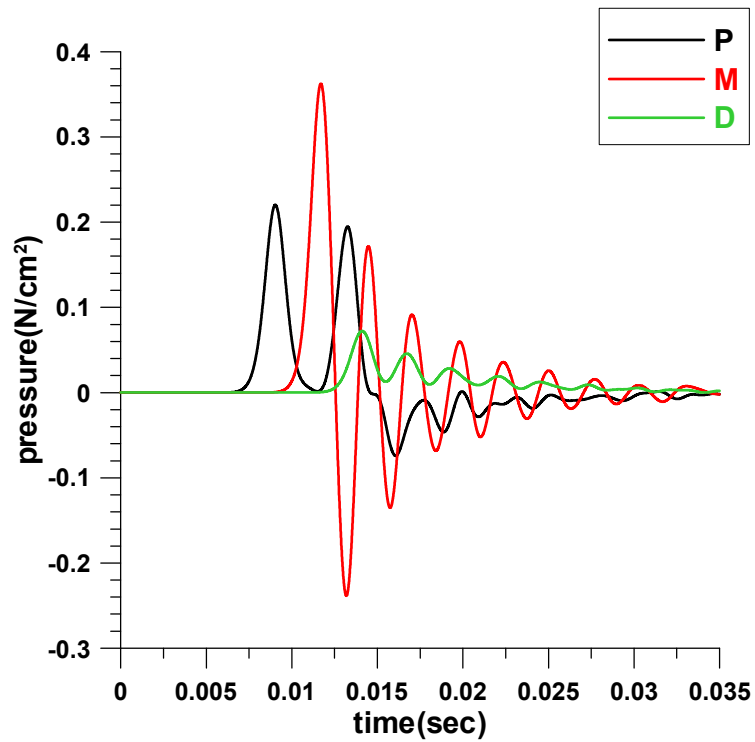
Σχήμα 3.2 Παλμός πίεσης

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση σταθερού μέτρου ελαστικότητας καθ' όλο το μήκος του αγγείου (Σχήμα3.3), αλλά και για την περίπτωση του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας λόγω του stent μήκους l (Σχήμα3.4). Θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής είναι $E_1=100 \cdot E_0$, όπου $E_0=30\text{N/cm}^2$, το μήκος της στενωμένης περιοχής είναι $l=a_2-a_1=5\text{cm}$, το μήκος του αγγείου είναι $L = 15\text{cm}$, ενώ $\delta=0,5\text{cm}$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1\text{gr/cm}^3$. Όταν το μέτρο ελαστικότητας παραμένει το ίδιο καθ' όλο το μήκος του αγγείου ο παλμός ταξιδεύει ανεπηρέαστος. Αντιθέτως στην περίπτωση αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας, η κατάσταση αλλάζει. Καθώς το κύμα εισέρχεται στην περιοχή του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας, τμήμα αυτού ανακλάται, ενώ το υπόλοιπο επιταχύνει. Επιπλέον, μία ανάκλαση παρουσιάζεται στη έξοδο από το stent, όταν το μέτρο ελαστικότητας αποκτά τη χαμηλότερη τιμή του φυσιολογικού αγγείου. Στη μέση του αγγείου παρουσιάζεται μία ταλαντούμενη πίεση, λόγω των κυμάτων που ανακλώνται πίσω και μπροστά μεταξύ της εισόδου και εξόδου του

stent. Το κύμα στο άπω άκρο παρουσιάζεται αποδυναμωμένο, γιατί ποσοστό της ενέργειας έχει ανακλαστεί προς τα πίσω και ποσοστό αυτής έχει παγιδευτεί μέσα στο μήκος του stent.



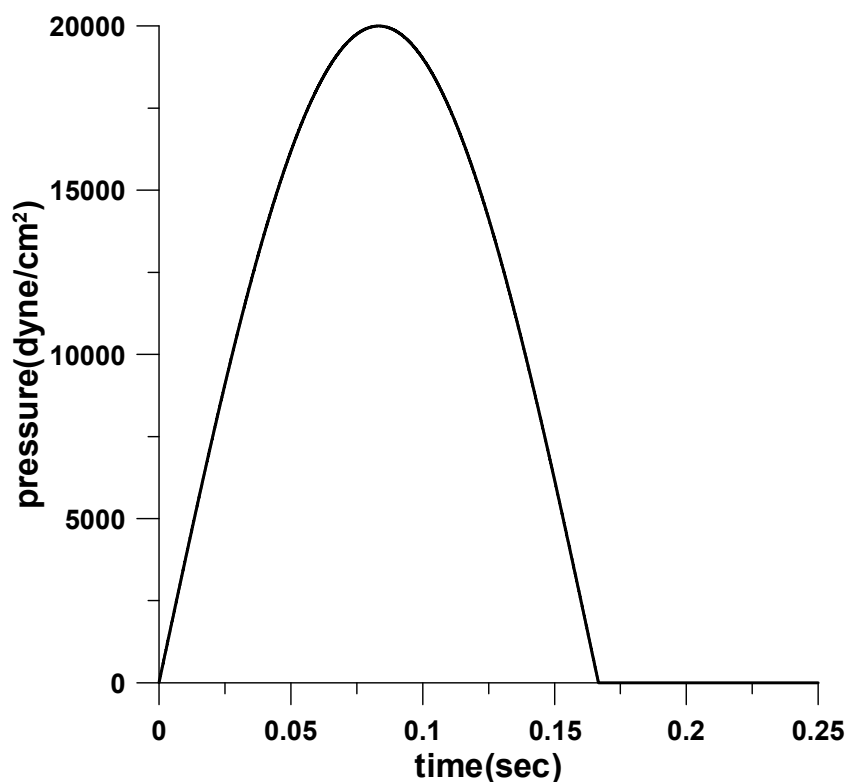
Σχήμα 3.3 Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.4 Η πίεση στα σημεία P, M, D για μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

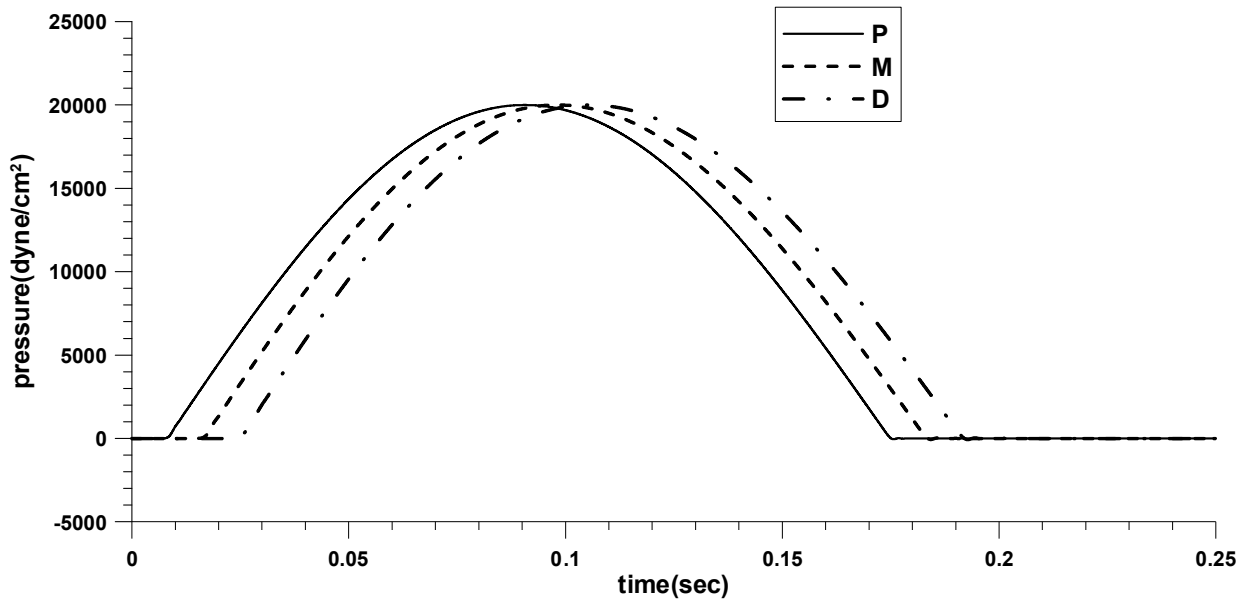
3.2.2 Παλμός πίεσης ρεαλιστικής περιόδου

Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται σε αυτή την περίπτωση για την πίεση είναι οι dynes/cm², λόγω αντιπαράβολής με τα διαγράμματα του Sherwin.

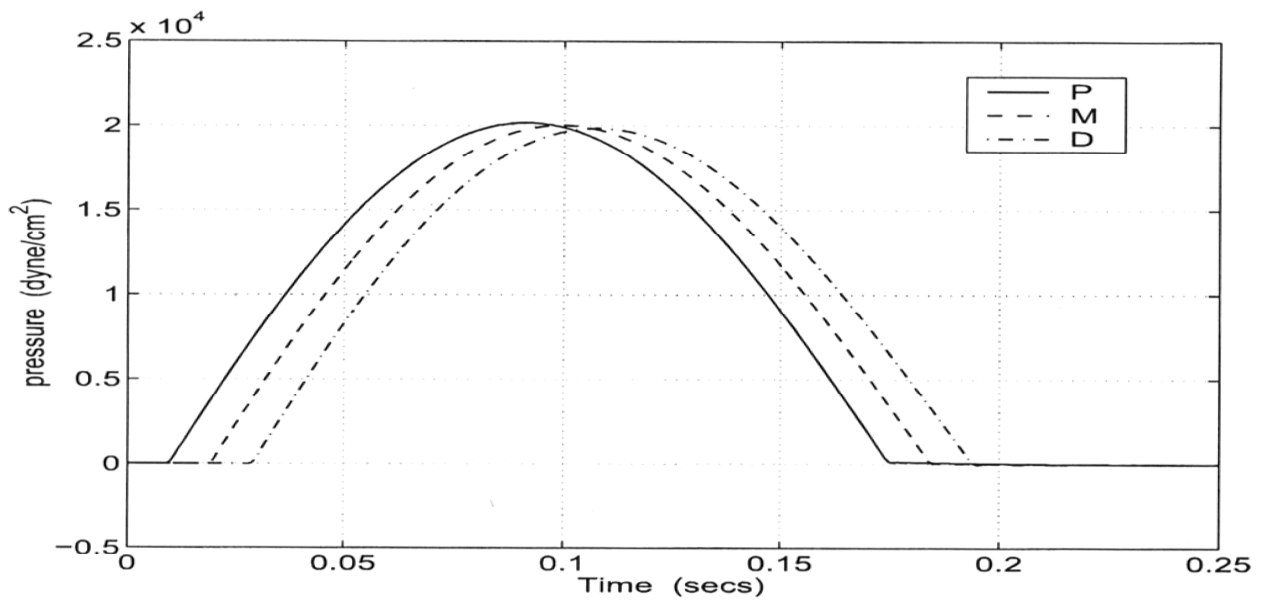


Σχήμα 3.5 Παλμός πίεσης [Formaggia et al, 2003]

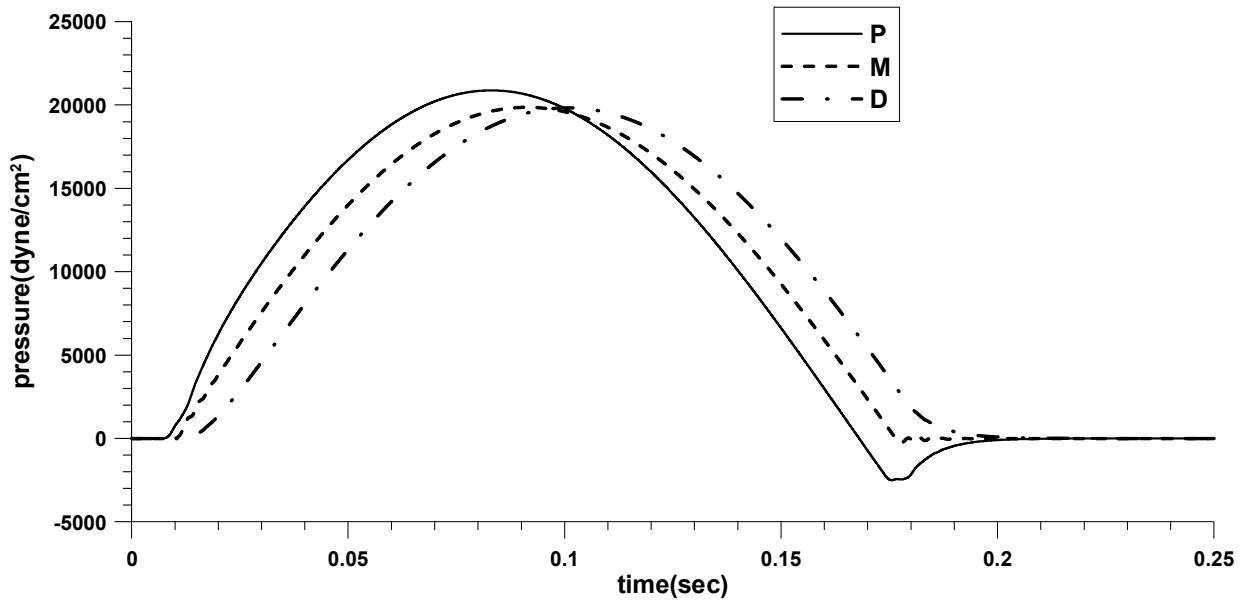
Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα, όπως και στην περίπτωση του παλμού πίεσης μικρής περιόδου, για σταθερό μέτρο ελαστικότητας καθ' όλο το μήκος του αγγείου (Σχήμα3.6), αλλά και για αυξημένο μέτρο ελαστικότητας, ομαλής μετάβασης, λόγω της τοποθέτησης του stent μήκους l (Σχήμα3.7). Θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής είναι $E_1=100 \cdot E_0$, όπου $E_0=3 \cdot 10^6$ dynes/cm², το μήκος της στενωμένης περιοχής είναι $l = a_2 - a_1 = 5$ cm, το μήκος του αγγείου είναι $L = 15$ cm, η διάμετρος $D=0,5$ cm, το πάχος $h=0,005$ cm, ενώ $\delta=0,5$ cm. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1$ gr/cm³. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανακλώμενων κυμάτων είναι πολύπλοκη. Η βασική επίδραση του stent είναι η αύξηση της πίεσης στο σημείο P που πλησιάζει τις 25000dynes/cm². Η αλληλεπίδραση μεταξύ του εισερχόμενου και ανακλώμενων κυμάτων φαίνεται στις ασυνέχειες της κλίσης, ειδικά για το σημείο P. Εκτός αυτών, το κύμα εντός της περιοχής του stent έχει εμφανώς μεγαλύτερη επιτάχυνση.



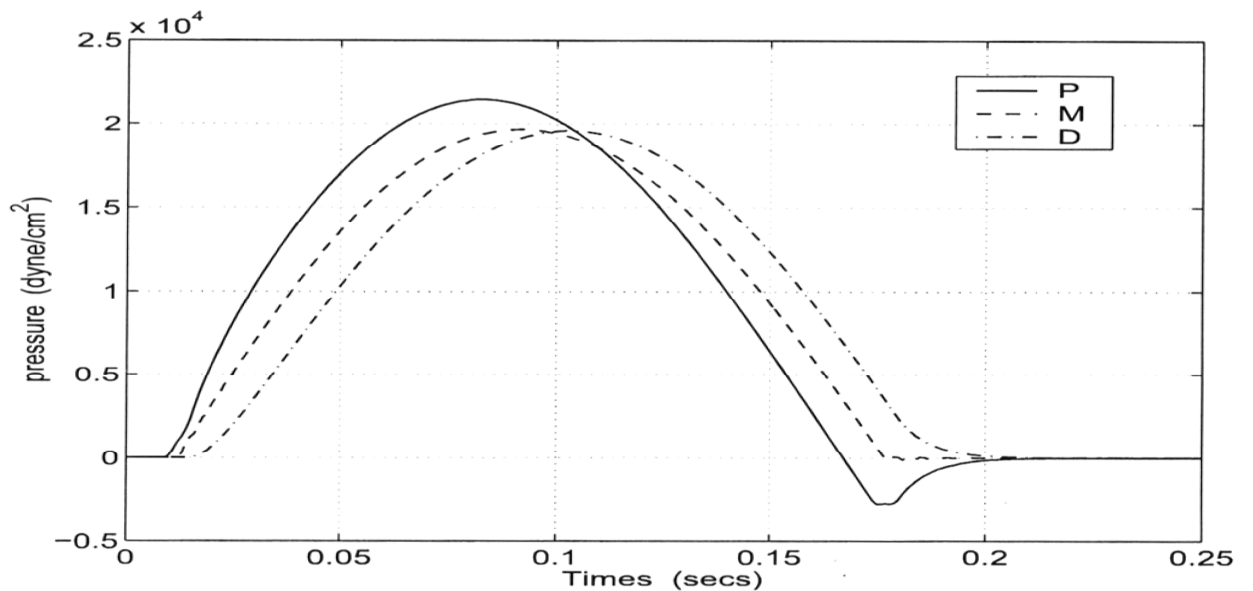
Σχήμα 3.6 Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.6 Η πίεση στα σημεία P, M, D για σταθερό μέτρο ελαστικότητας [Sherwin et al, 2003]



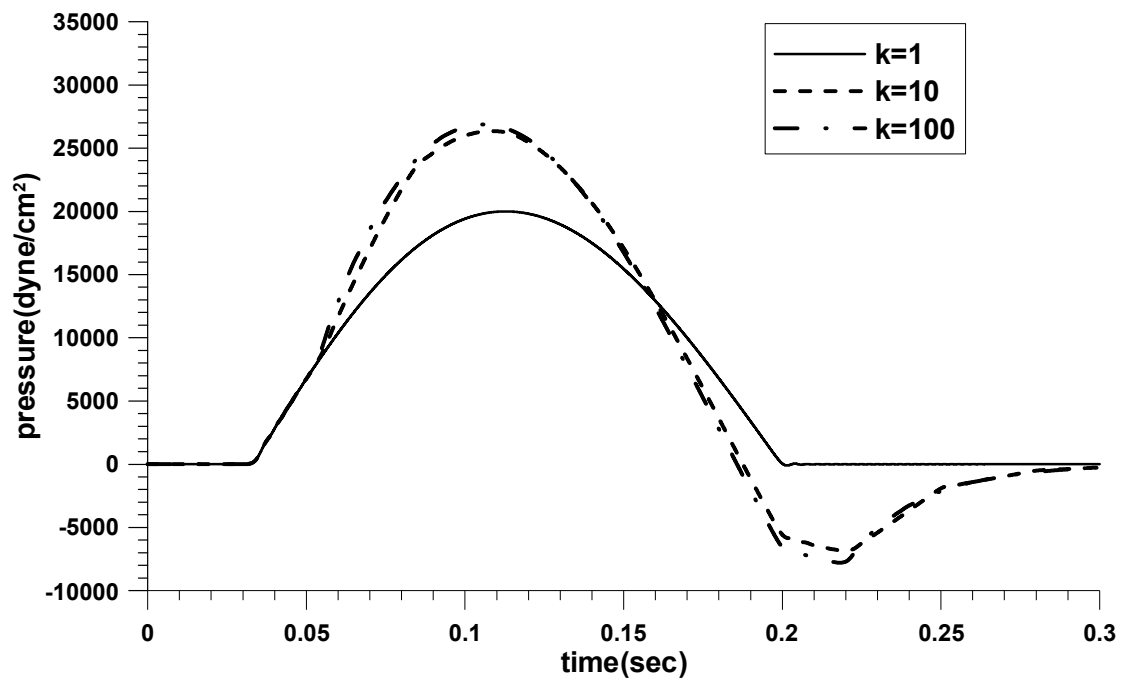
Σχήμα 3.7 Η πίεση στα σημεία P, M, D για μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



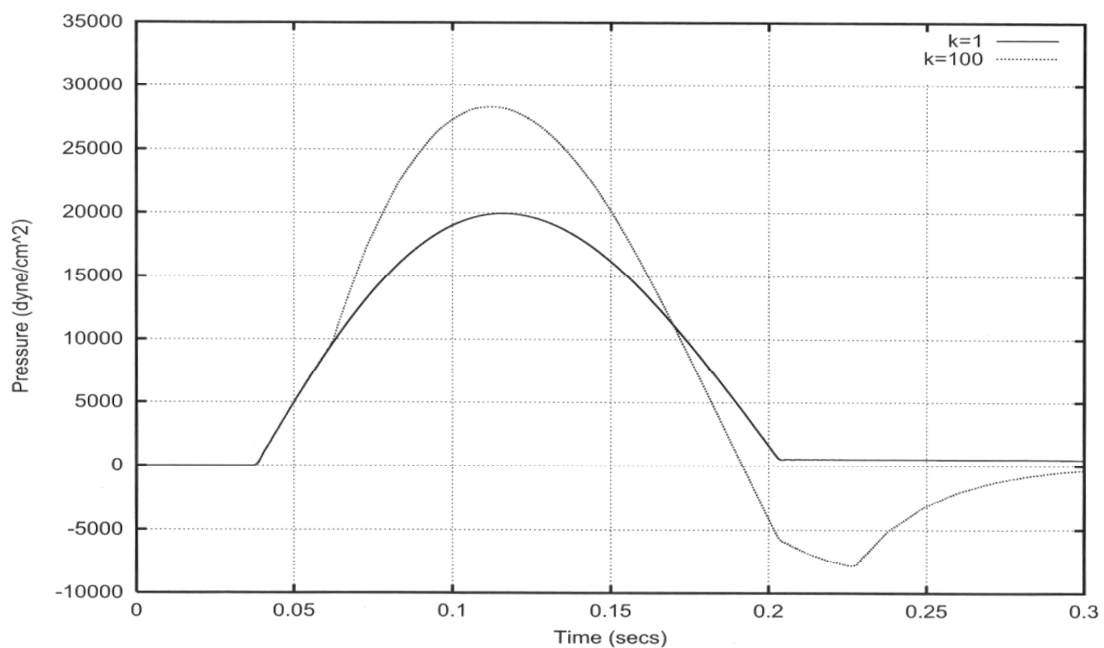
Σχήμα 3.7 Η πίεση στα σημεία P, M, D για μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας [Sherwin et al, 2003]

Στο Σχήμα 3.8 μελετάται η επίδραση μεγαλύτερων τιμών του λόγου $k=E_1/E_0$ στην πίεση. Θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής είναι αρχικά $E_1=E_0$ και εν συνεχεία $E_1=kE_0$, όπου $E_0=3 \cdot 10^5 \text{ dynes/cm}^2$, το μήκος της στενωμένης περιοχής είναι $l = a_2 - a_1 = 20 \text{ cm}$, το μήκος του αγγείου είναι $L = 60 \text{ cm}$, η διάμετρος $D=0,5 \text{ cm}$, το πάχος $h=0,005 \text{ cm}$, ενώ $\delta=1 \text{ cm}$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1 \text{ gr/cm}^3$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των τιμών για $k=10$ και 100 . Αυτό συμβαίνει γιατί άπαξ και σκληρύνει το τμήμα του αγωγού σε κάποιο βαθμό και οι παραμορφώσεις περιοριστούν δραστικά σε αυτό το τμήμα, τότε το αποτέλεσμα επί της διατομής των περιορισμένων παραμορφώσεων αυξάνοντας

το μέτρο ελαστικότητας θα είναι το ίδιο. Τα ρευστομηχανικά δηλαδή μεγέθη δεν θα επηρεάζονται περεταίρω.



Σχήμα 3.8 Η πίεση στο σημείο P για $k=1, 10$ και 100



Σχήμα 3.8 Η πίεση στο σημείο P για $k=1$ και $k=100$ [Formaggia et al, 2003]

Οι μικρές αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, οφείλονται σε δύο λόγους:

1. Οι υπολογιστικές μεθοδολογίες είναι διαφορετικές.

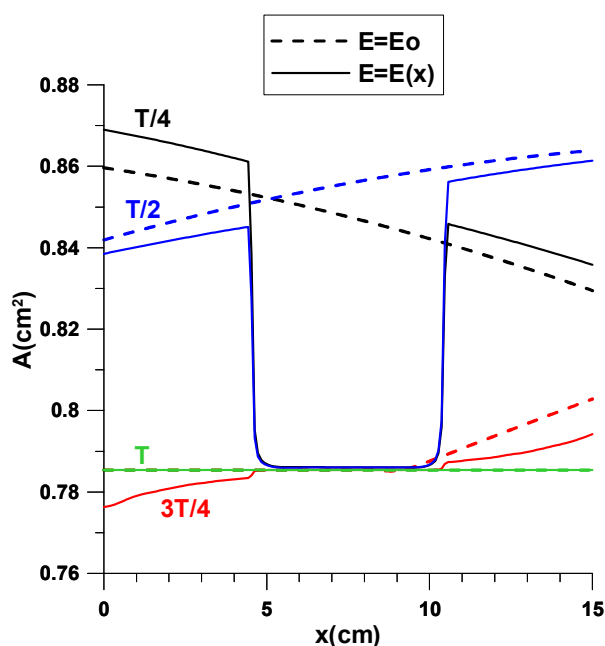
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.

Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η επίδραση του μήκους του stent, συγκρίνοντας τις τιμές της μέγιστης πίεσης για μήκος stent 4, 14 και 24cm αντίστοιχα. Καταγράφονται οι τιμές της μέγιστης πίεσης για όλο το αγγείο και για μία περίοδο. Και στις τρεις περιπτώσεις το stent τοποθετείται στο μέσο του αγγείου. Θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής $E_1=100E_0$, όπου $E_0=3 \cdot 10^5 \text{ dynes/cm}^2$, το μήκος του αγγείου είναι $L = 60 \text{ cm}$, η διάμετρος $D=0,5 \text{ cm}$, το πάχος $h=0,005 \text{ cm}$, ενώ $\delta=1 \text{ cm}$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1 \text{ gr/cm}^3$. Η μέγιστη τιμή παρατηρείται πάντα ανάντι του stent. Δίνεται η κανονικοποιημένη τιμή της απόστασης μεταξύ του τμήματος ανάντι του stent και του σημείου που καταγράφεται η μέγιστη τιμή.

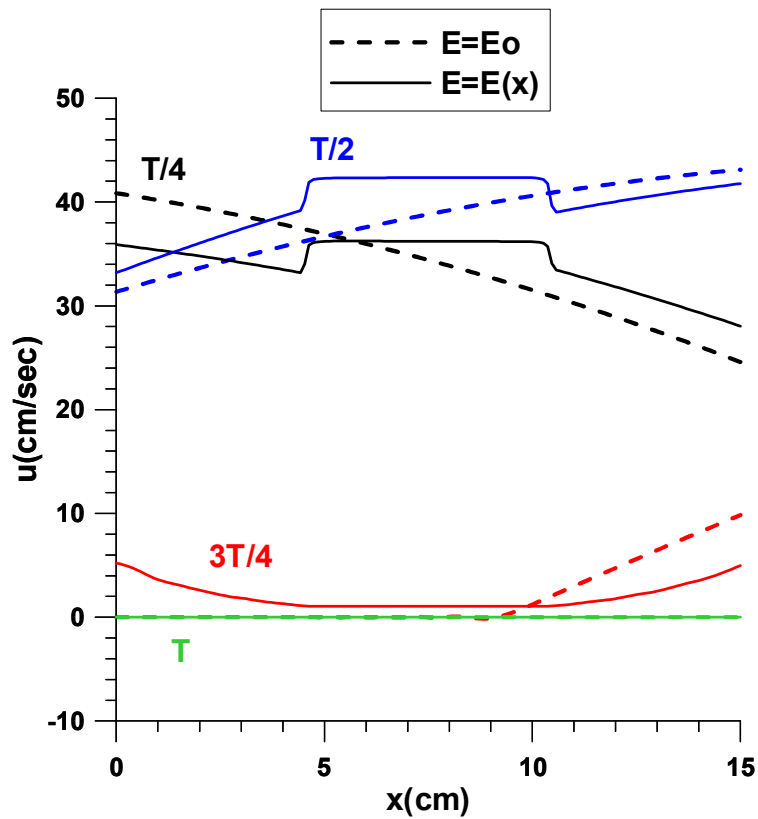
Πίνακας 3.1: Μέγιστη τιμή πίεσης για διάφορα μήκη stent

Μήκος stent(cm)	Μέγιστη πίεση(dyne/cm ²)	Θέση
4	22721.3	0.23
14	25992.6	0.17
24	28170.2	0.16

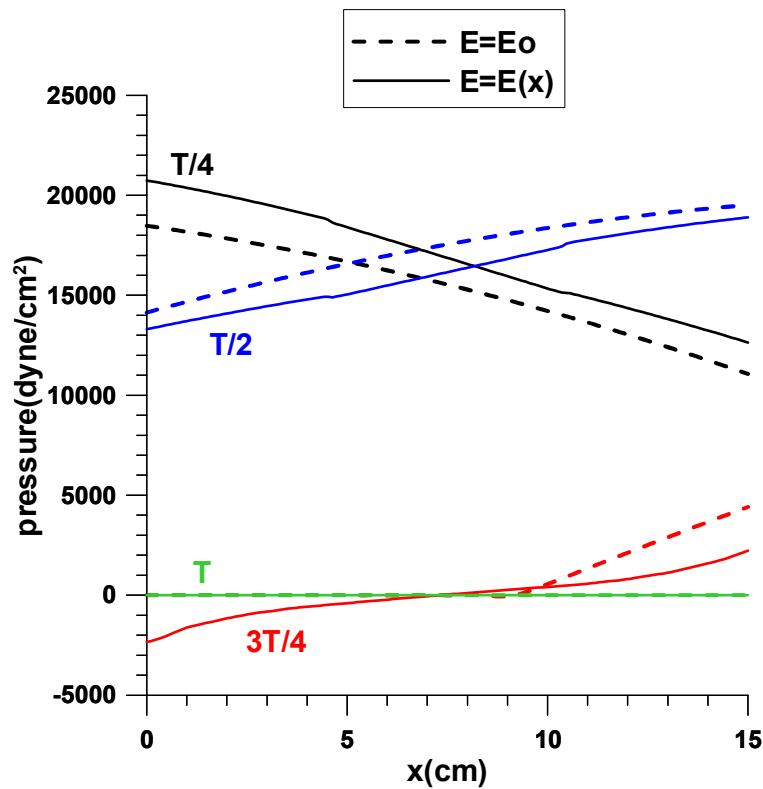
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας.



Σχήμα 3.9 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

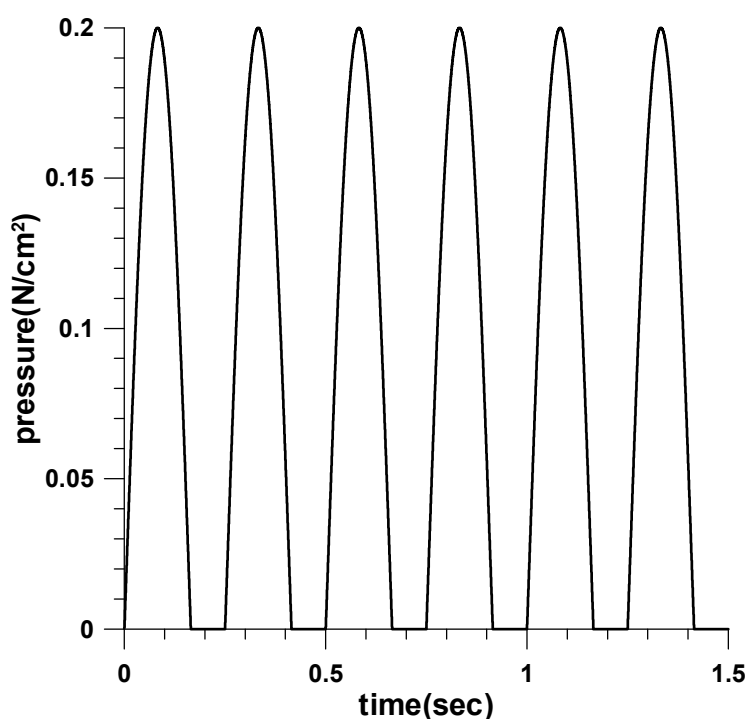


Σχήμα 3.10 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.11 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

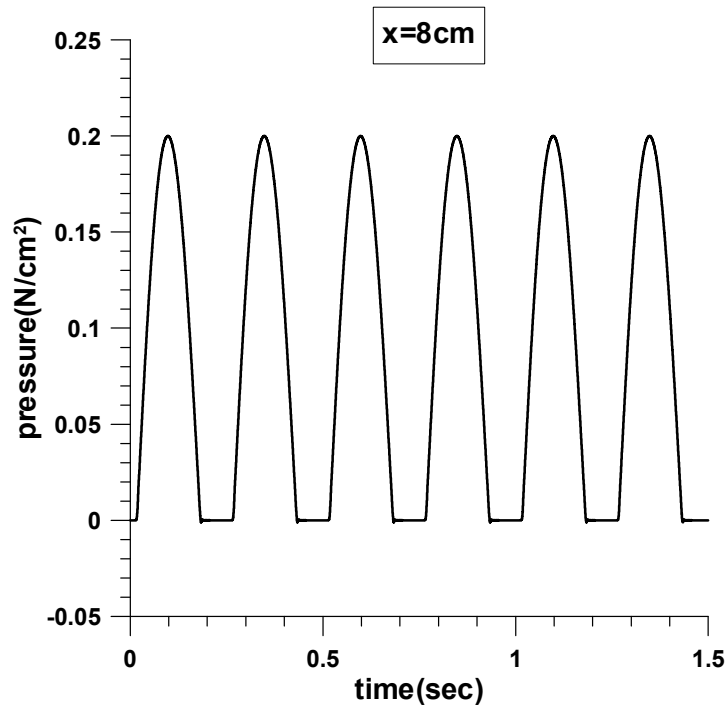
3.2.3 Παλμός πίεσης επαναλαμβανόμενης περιόδου



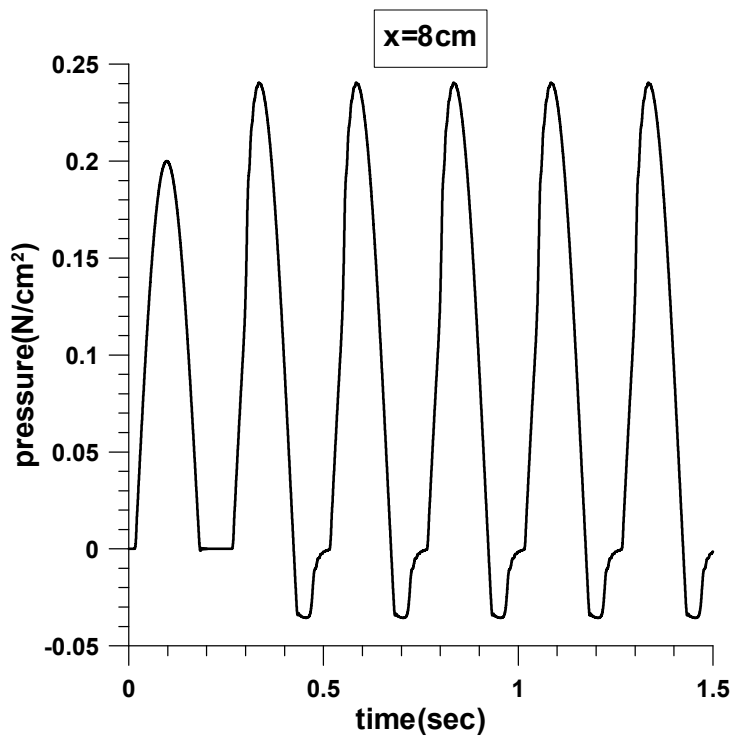
Σχήμα 3.12 Παλμός πίεσης

Εξετάστηκε επαναλαμβανόμενη χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση εισόδου για να μελετηθεί η περίπτωση μη μόνιμης διέγερσης του αγγείου.

Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για ενιαίο και για αυξημένο μέτρο ελαστικότητας, ομαλής μετάβασης, λόγω της τοποθέτησης του stent μήκους l . Θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας της στενωμένης περιοχής είναι $E_1=100 \cdot E_0$, όπου $E_0=30\text{N/cm}^2$, το μήκος της στενωμένης περιοχής είναι $l = a_2 - a_1 = 10\text{cm}$, το μήκος του αγγείου είναι $L = 120\text{cm}$, η διάμετρος $D=0,5\text{cm}$, το πάχος $h=0,005\text{cm}$, $\delta=0.5\text{cm}$, ενώ το stent τοποθετείται μεταξύ των θέσεων $x=70\text{cm}$ και $x=80\text{cm}$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1\text{gr/cm}^3$. Τα Σχήματα 3.13-3.14 δείχνουν την πίεση στη θέση $x=8\text{cm}$ για σταθερό και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας. Παρατηρείται αύξηση του μεγίστου της πίεσης, γεγονός που οφείλεται στη συμβολή του εισερχόμενου με το ανακλώμενο κύμα. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως η επίδραση του stent γίνεται ιδιαίτερα αισθητή ακόμα και αρκετά μακριά από το σημείο τοποθέτησής του.

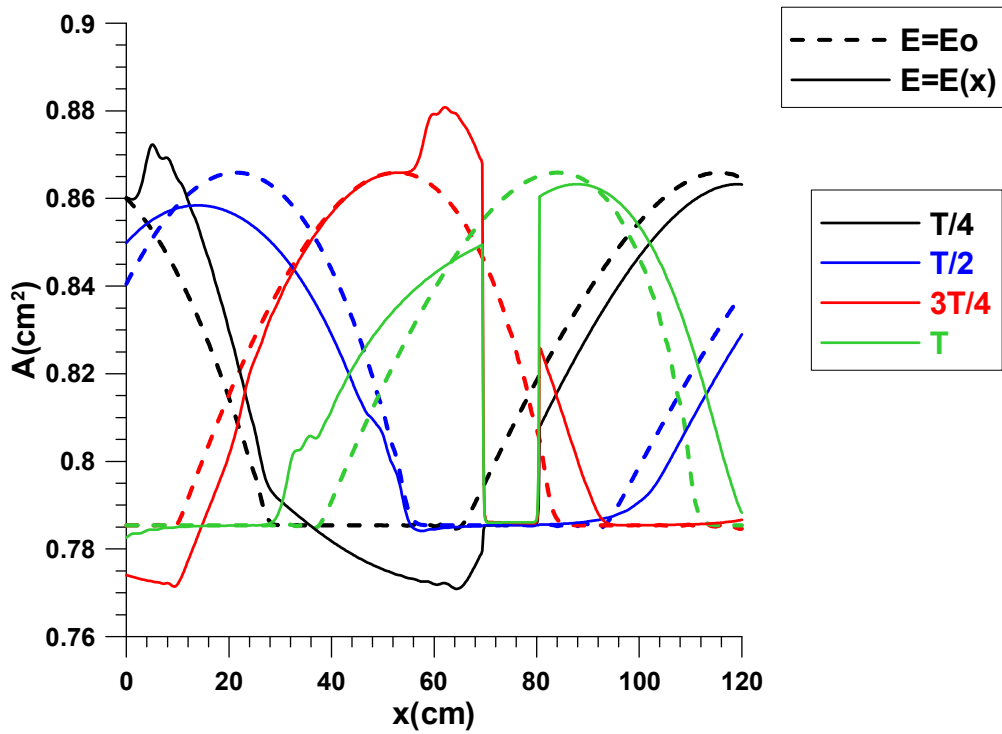


Σχήμα 3.13 Η πίεση στη θέση $x=8\text{cm}$ για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

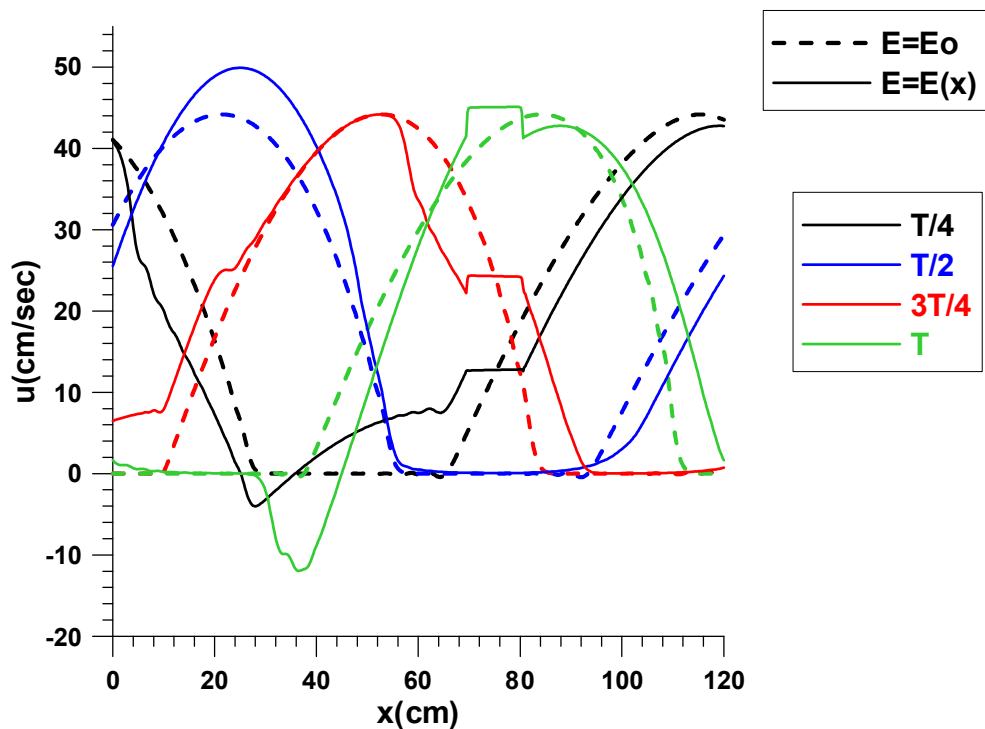


Σχήμα 3.14 Η πίεση στη θέση $x=8\text{cm}$ για μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

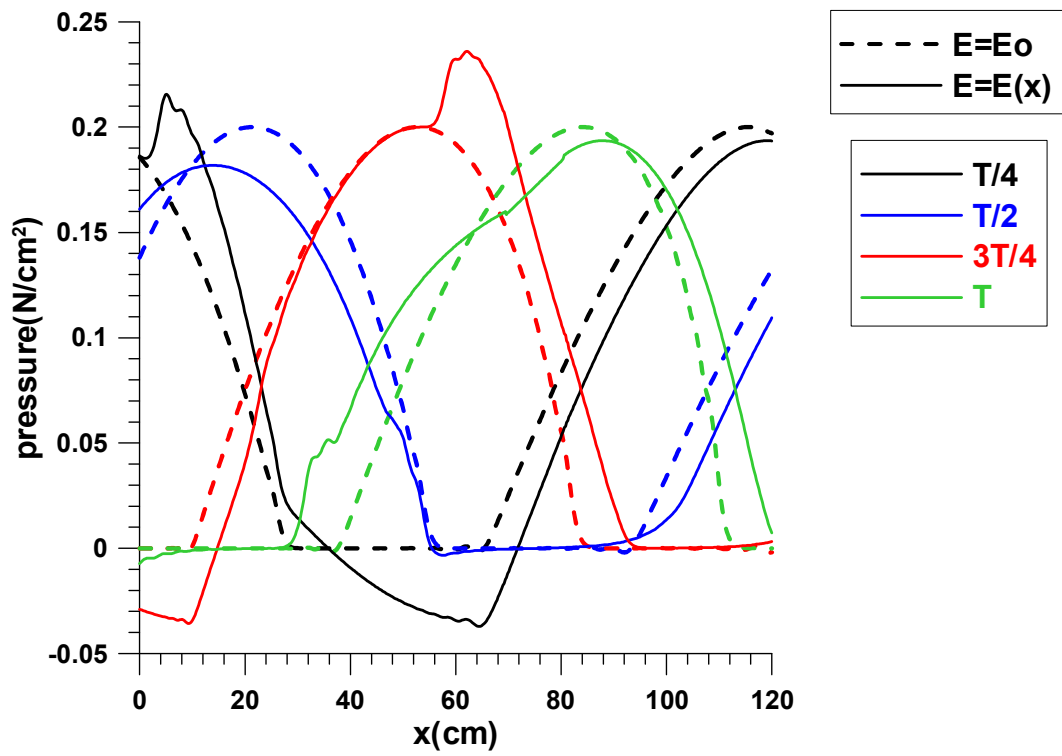
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας.



Σχήμα 3.15 Η διατομή συναρτήσεϊ του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.16 Η ταχύτητα συναρτήσεϊ του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

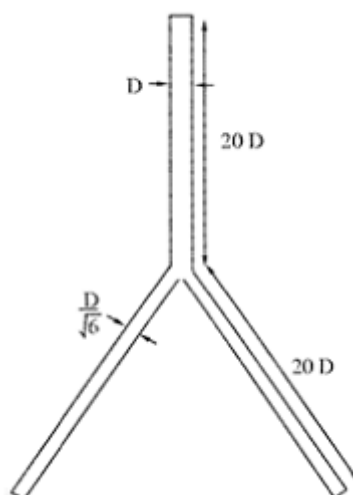


Σχήμα 3.17 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

3.3 Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης

Σκοπός της συγκεκριμένης εφαρμογής είναι η μελέτη της ανάκλασης λόγω της διακλάδωσης.

Θεωρούμε την περίπτωση της διακλάδωσης(Σχήμα3.18):



Σχήμα 3.18 Σχηματική παράσταση διακλάδωσης

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε 3 αγγεία, όπου κάθε αγγείο είναι μήκους $20 \cdot D$, όπου $D=2,5\text{cm}$ είναι η διάμετρος του πατρικού αγγείου. Η ταχύτητα διαμέσου του πατρικού αγγείου είναι $C=300\text{cm/s}$. Για να προκύψει αυτή η τιμή της ταχύτητας επιλέγονται για το πατρικό αγγείο οι φυσιολογικές τιμές πάχους τοιχώματος αγγείου $h=0,05\text{cm}$ και μέτρου ελαστικότητας $E=33,75\text{N/cm}^2$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1\text{gr/cm}^3$.

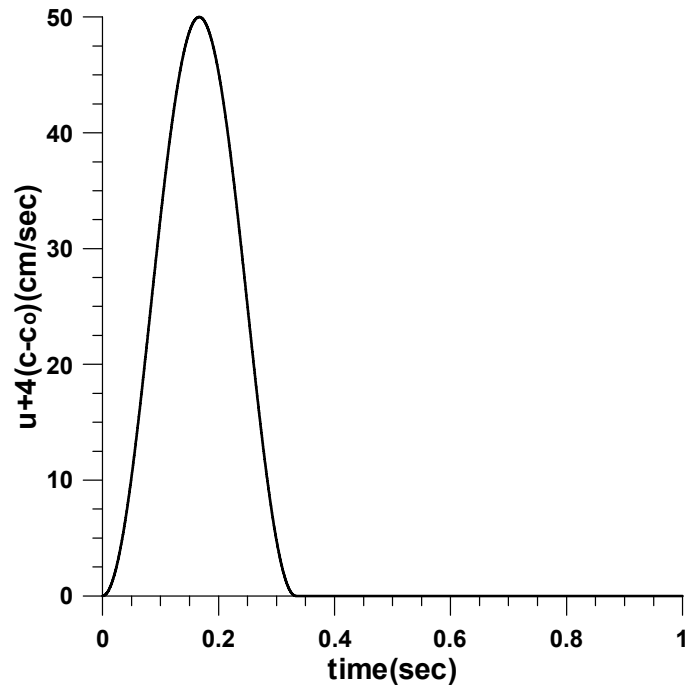
Για να επιτύχουμε γραμμικό συντελεστή ανάκλασης στην διακλάδωση(παράγραφος 1.4.2) $R_r=0,5$, θεωρούμε ότι τα θυγατρικά αγγεία έχουν διάμετρο $\frac{D}{\sqrt{6}}$ και πάχος τοιχώματος $\frac{h}{\sqrt{6}}$.

Στο εγγύς άκρο του πατρικού αγγείου δίνεται η ακόλουθη συνθήκη, η οποία έχει αναλυθεί θεωρητικά στο κεφάλαιο 2(παράγραφος 2.6.1.2):

$$u+4(c-c_0)=f(t)=50\sin^2(3\pi t)H(t-\frac{1}{3}),$$

όπου $H(\tau)$ είναι η τμηματική συνάρτηση Heaviside: $H(t-a)=\begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

Η συγκεκριμένη οριακή συνθήκη δίνει μία θετική ημιτονοειδή ταχύτητα στην είσοδο κατά το $\frac{1}{3}$ της περιόδου και όλα τα πίσω οδεύοντα κύματα απορροφώνται, χωρίς περαιτέρω ανάκλαση.



Σχήμα 3.19 Παλμός εισόδου

Πρέπει επίσης να αναφερθεί πως στην είσοδο των θυγατρικών αγγείων έχουμε θεωρήσει κατ'εξαιρέση συνθήκη μη-ανάκλασης, γεγονός που μηδενίζει τη συνθήκη συμβατότητας της αριστεροκλινούς χαρακτηριστικής, δηλαδή $u-4(c-c_0)=0$ (κεφάλαιο 2, παράγραφος 2.6.2.1). Η συνθήκη αυτή επιλέχθηκε ώστε το ανακλώμενο κύμα λόγω τερματικής αντίστασης στα θυγατρικά αγγεία να εισέλθει ανεπηρέαστο στο πατρικό αγγείο.

Στην έξοδο των θυγατρικών αγγείων δίνεται ο συντελεστής ανάκλασης R_f και συγκεκριμένα:

$$R_{f2} = -0.5 \text{ και}$$

$$R_{f3} = -0.4,$$

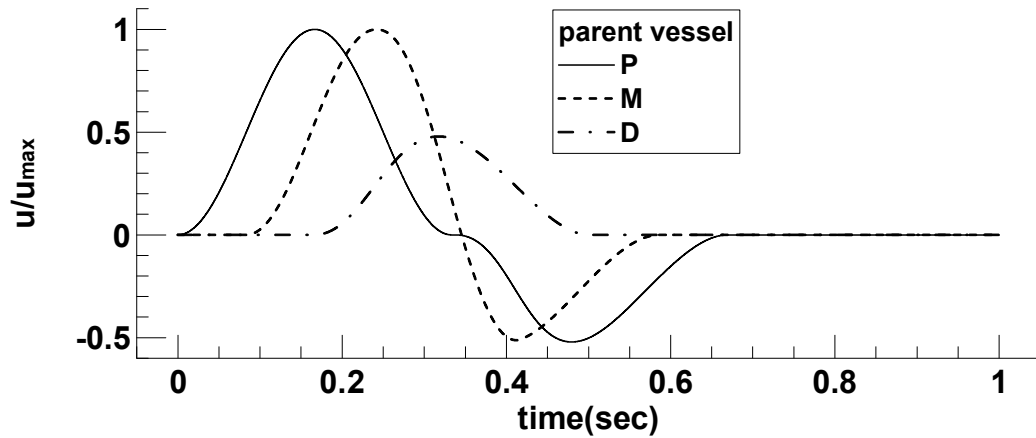
Οπότε και χρησιμοποιούνται οι σχέσεις για την πίεση, τη διατομή και την ταχύτητα, όπως έχουν αναλυθεί στο κεφάλαιο 2 (παράγραφος 2.6.2.2).

Τρία σημεία μελετώνται κατά μήκος του κάθε αγγείου, τα οποία έχουν επισημανθεί με τα γράμματα P (proximal=εγγύς), M (medium=μέσο) και D (distal=άπω) και αντιστοιχούν στην αρχή, τη μέση και το τέλος του.

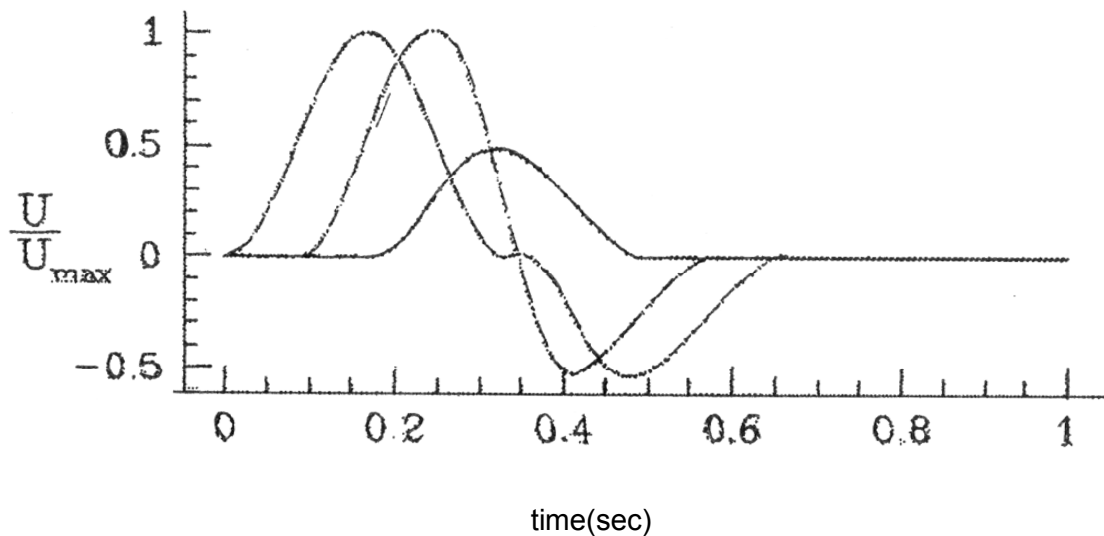
Στα παρακάτω σχήματα (3.20, 3.23) φαίνεται τόσο στο πατρικό, όσο και στα θυγατρικά αγγεία η χρονική εξέλιξη της ανηγμένης ταχύτητας ως προς την μέγιστη ταχύτητα και της ανηγμένης διατομής ως προς την αρχική διατομή.

Τα διαγράμματα του πατρικού αγγείου δείχνουν πως το εισερχόμενο κύμα με το καθυστερημένο ανακλώμενο συμβάλλουν. Ο θετικός συντελεστής ανάκλασης R_f ανάντι της διακλάδωσης συνεπάγεται πως το πρόσημο της κατανομής της ταχύτητας λόγω του ανακλώμενου κύματος είναι το αντίθετο από αυτό της εισερχόμενης. Ενώ

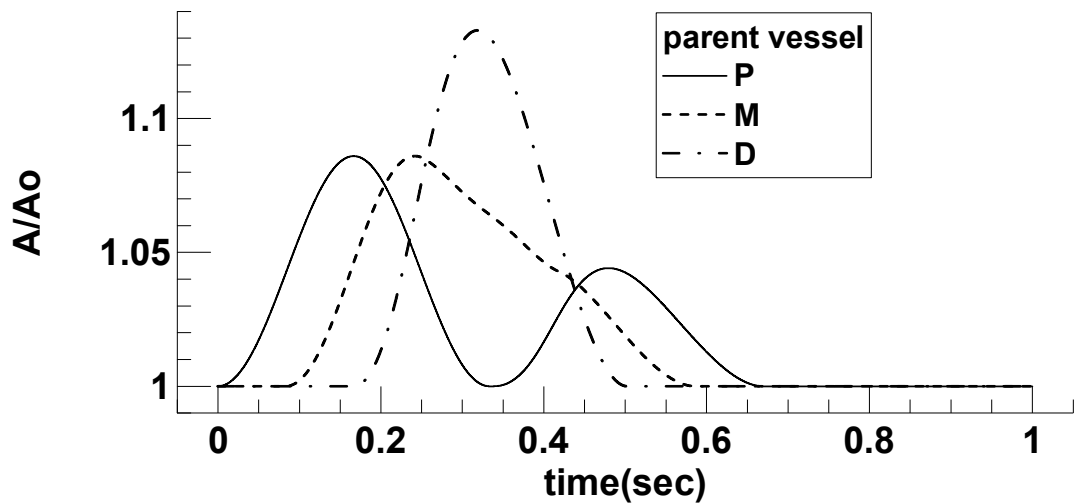
στην αρχή του αγγείου είναι ξεκάθαρη η διαφορά φάσης μεταξύ του εισερχόμενου και του ανακλώμενου κύματος, στο τέλος παρατηρούμε το ακριβώς αντίθετο, δηλαδή τα δύο προφίλ ταχύτητας να διαμορφώνονται σε ένα κύμα, το οποίο παρουσιάζει ένα μέγιστο $u/u_{max}=0,5$.



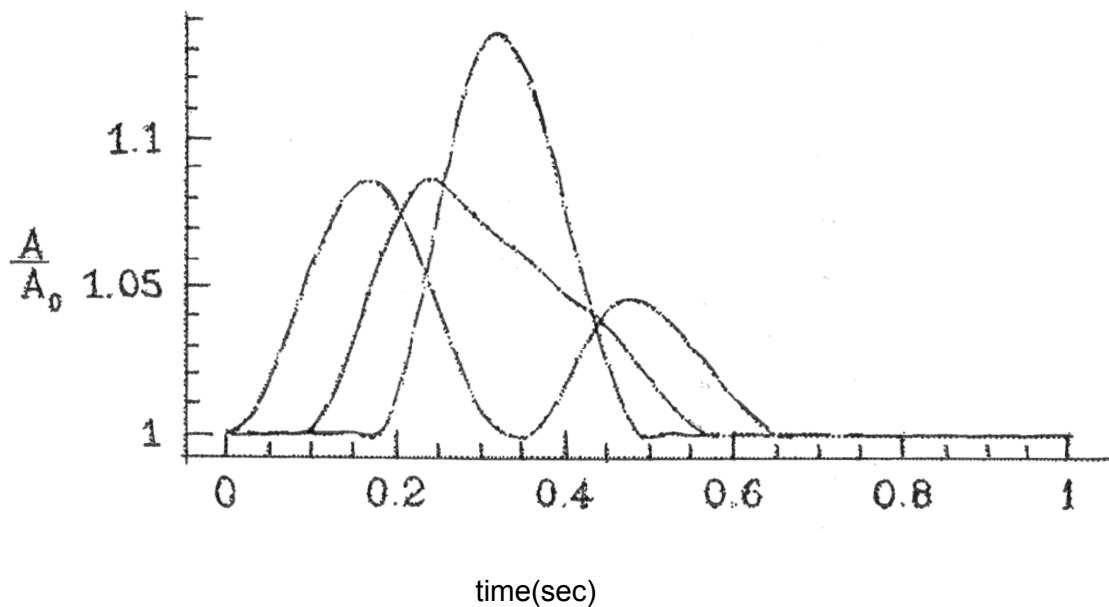
Σχήμα 3.20 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου



Σχήμα 3.20 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου [Sherwin et al, 2003]



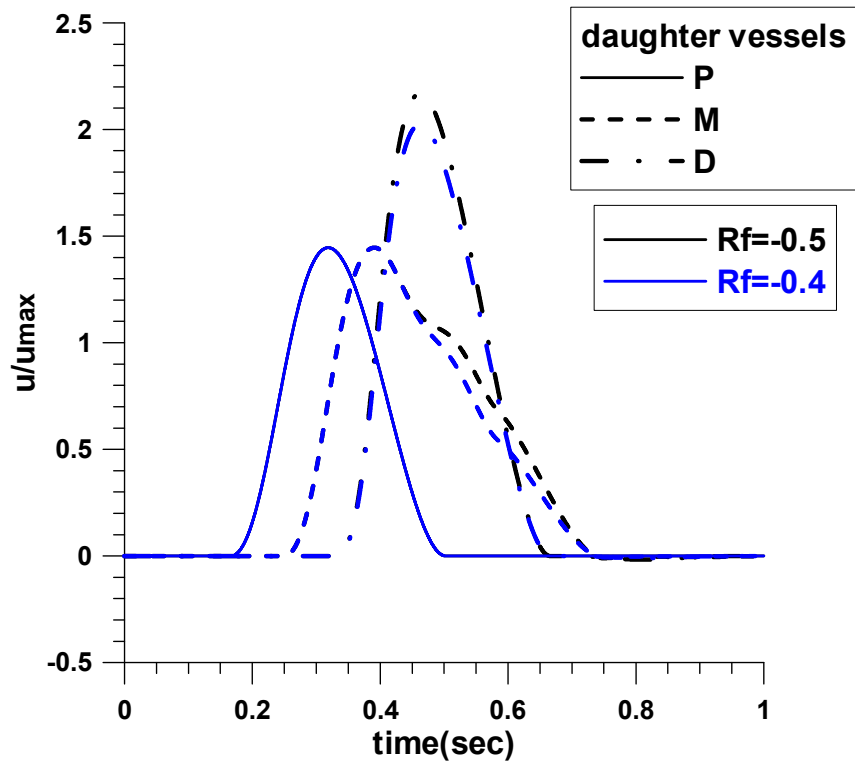
Σχήμα 3.21 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου



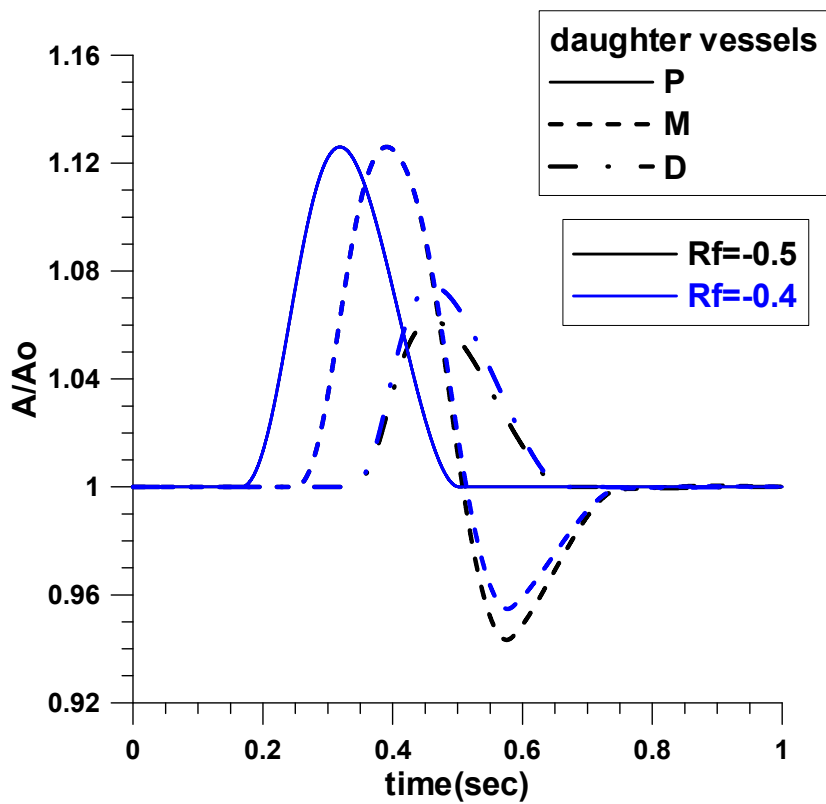
Σχήμα 3.21 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου [Sherwin et al, 2003]

Οι μικρές αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, οφείλονται σε δύο λόγους:

1. Οι υπολογιστικές μεθοδολογίες είναι διαφορετικές.
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.

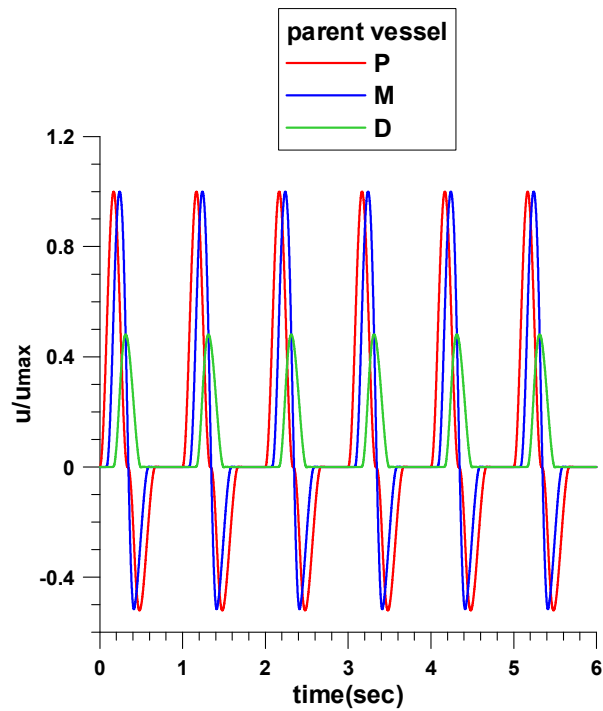


Σχήμα 3.22 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D των θυγατρικών αγγείων

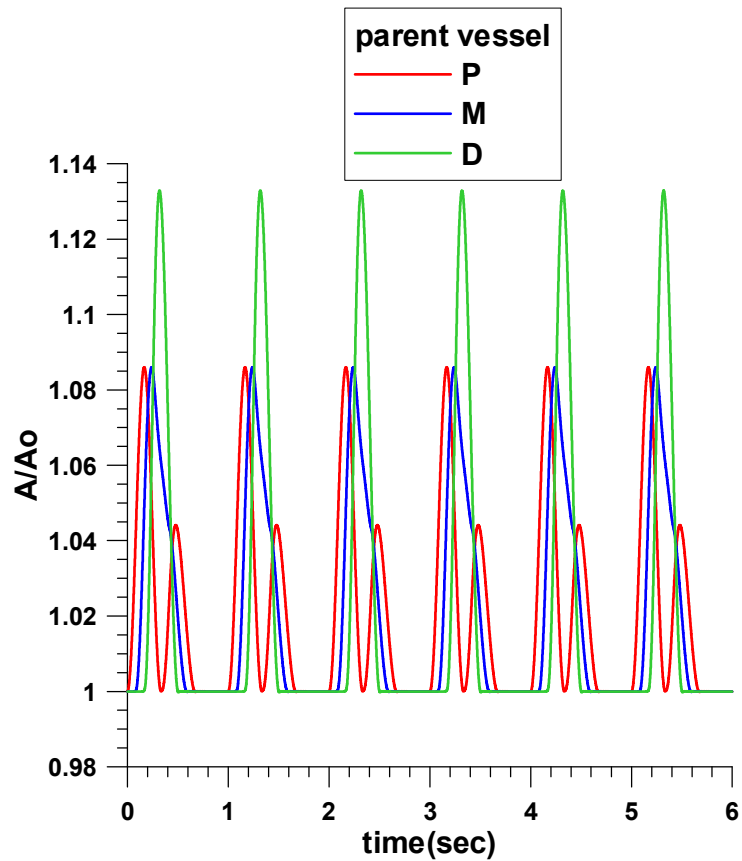


Σχήμα 3.23 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D των θυγατρικών αγγείων

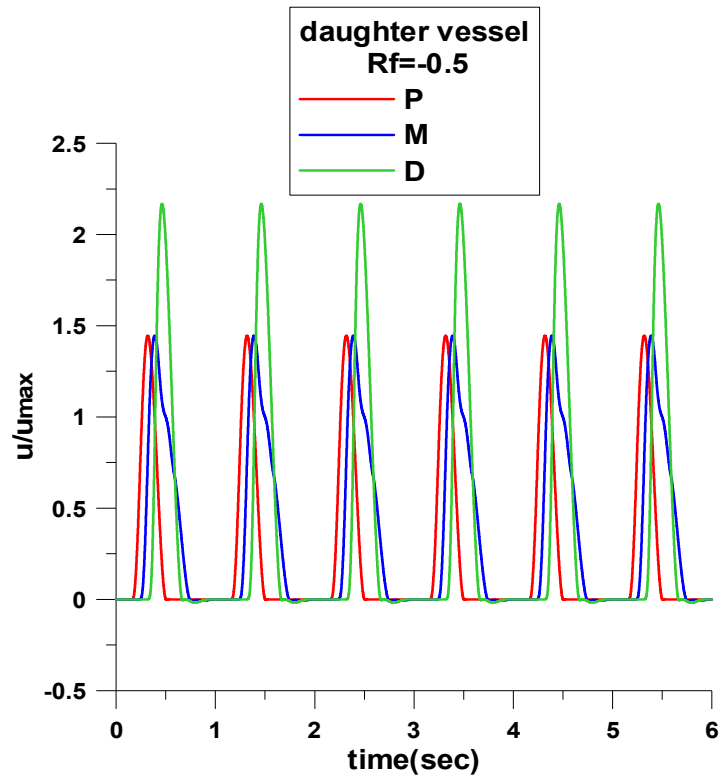
Εξετάστηκε επαναλαμβανόμενη χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση εισόδου για να μελετηθεί η περίπτωση μη μόνιμης διέγερσης του αγγείου.



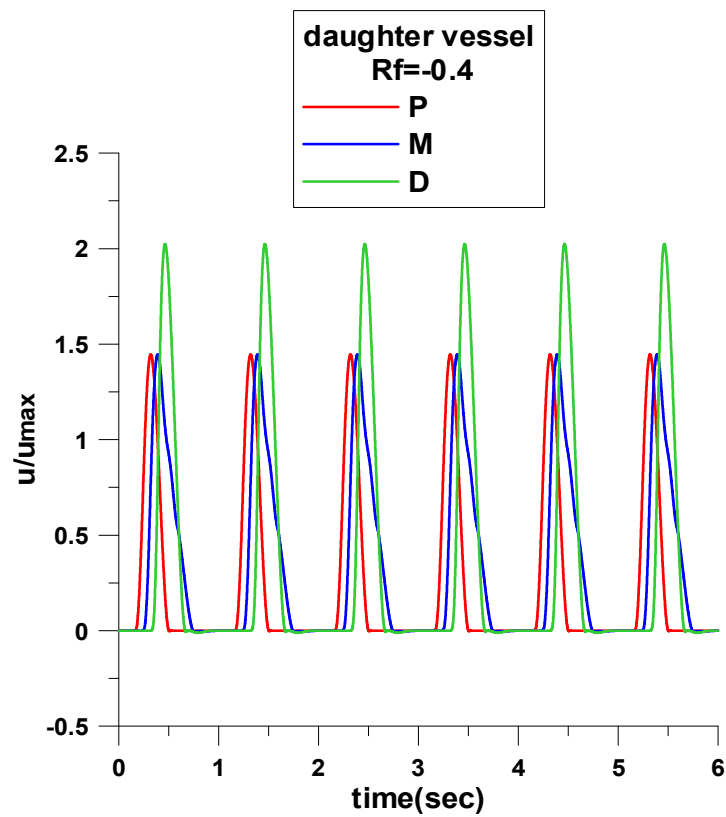
Σχήμα 3.24 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου



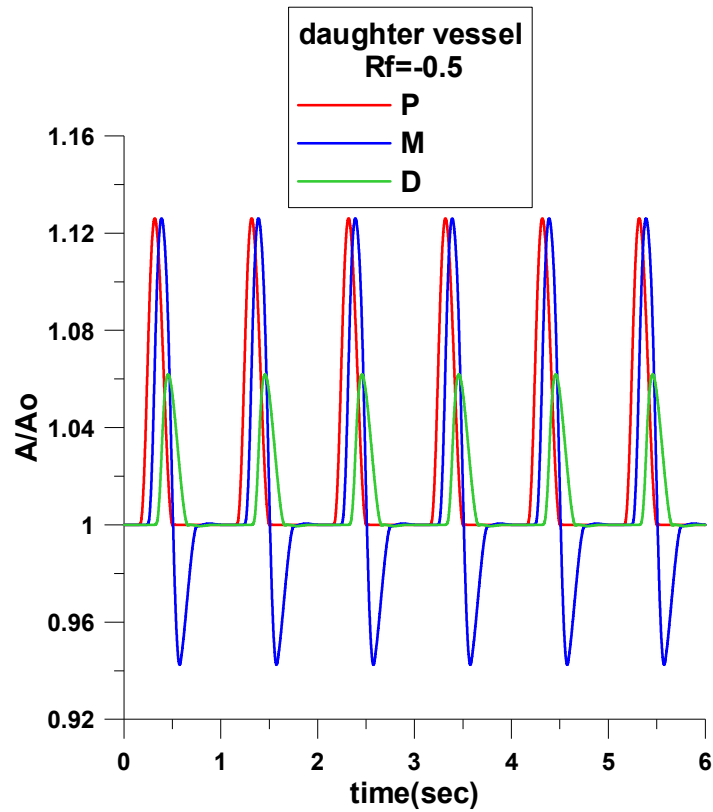
Σχήμα 3.25 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D του πατρικού αγγείου



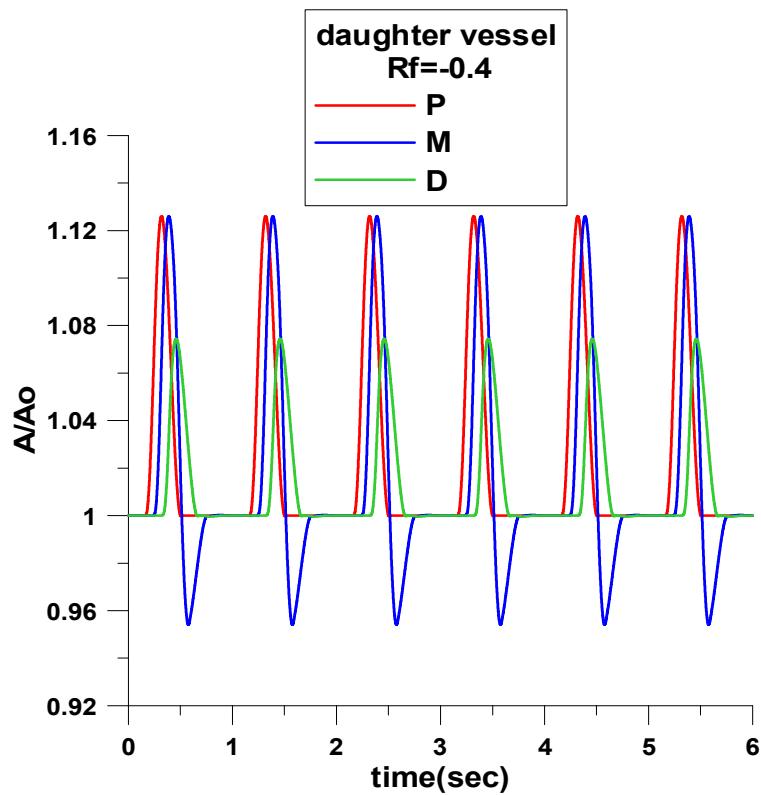
Σχήμα 3.26 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D του θυγατρικού αγγείου με $R_f=-0.5$



Σχήμα 3.27 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P, M, D του θυγατρικού αγγείου με $R_f=-0.4$

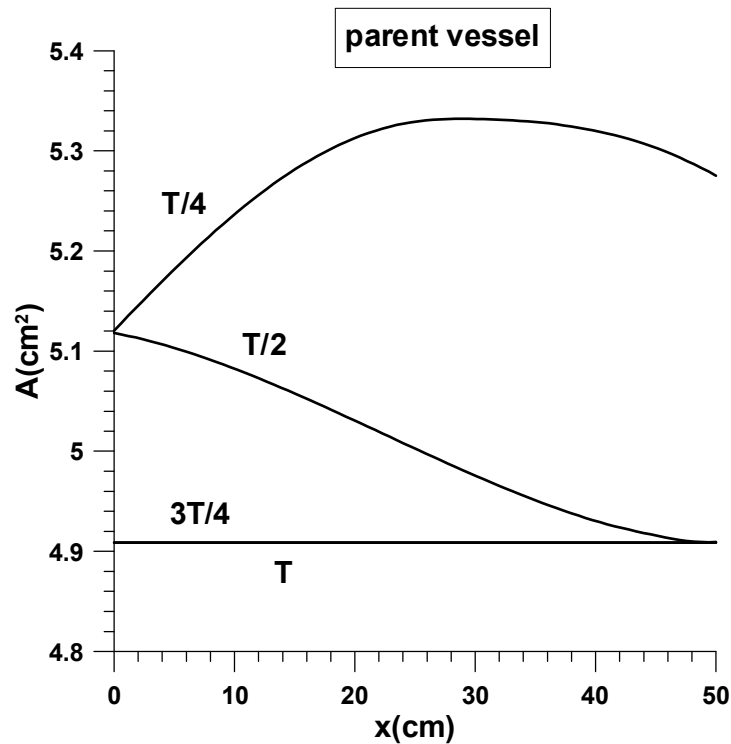


Σχήμα 3.28 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D του θυγατρικού αγγείου με $R_f=-0.5$

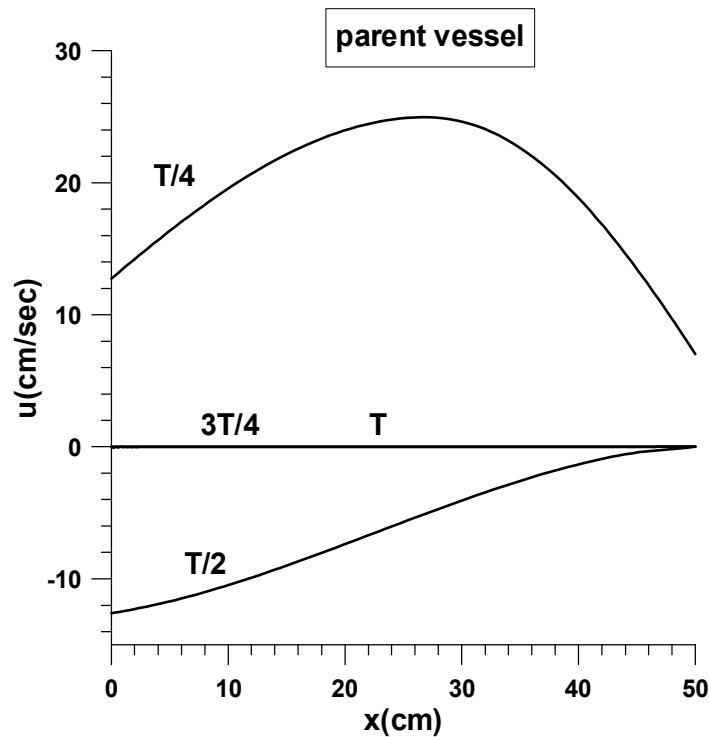


Σχήμα 3.29 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P, M, D του θυγατρικού αγγείου με $R_f=-0.4$

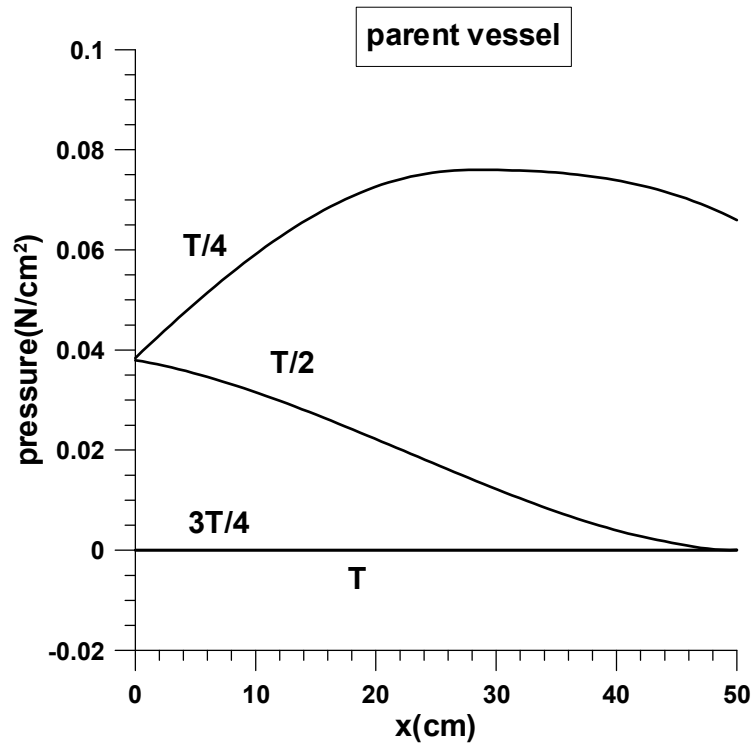
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου για το πατρικό και τα θυγατρικά αγγεία.



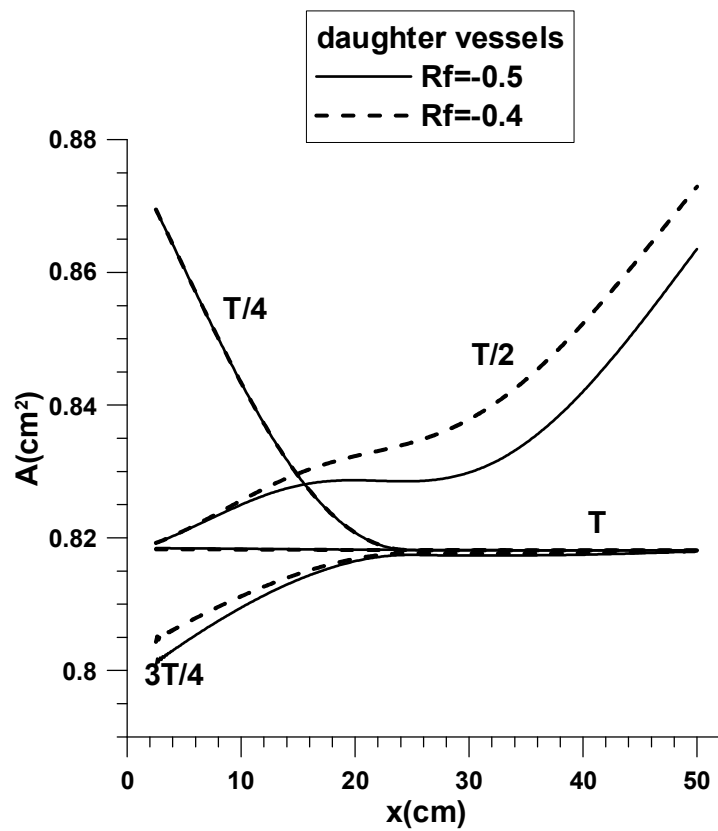
Σχήμα 3.30 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στο πατρικό αγγείο



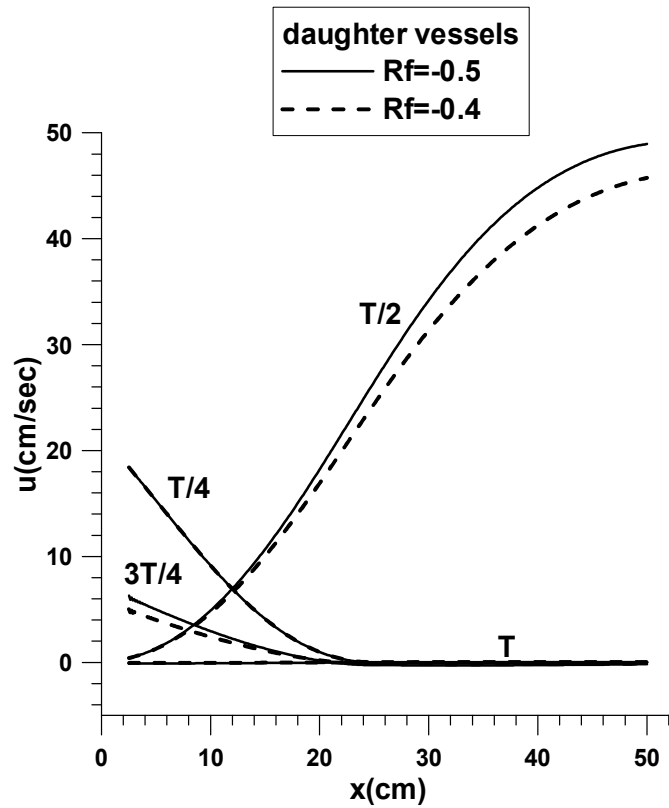
Σχήμα 3.31 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στο πατρικό αγγείο



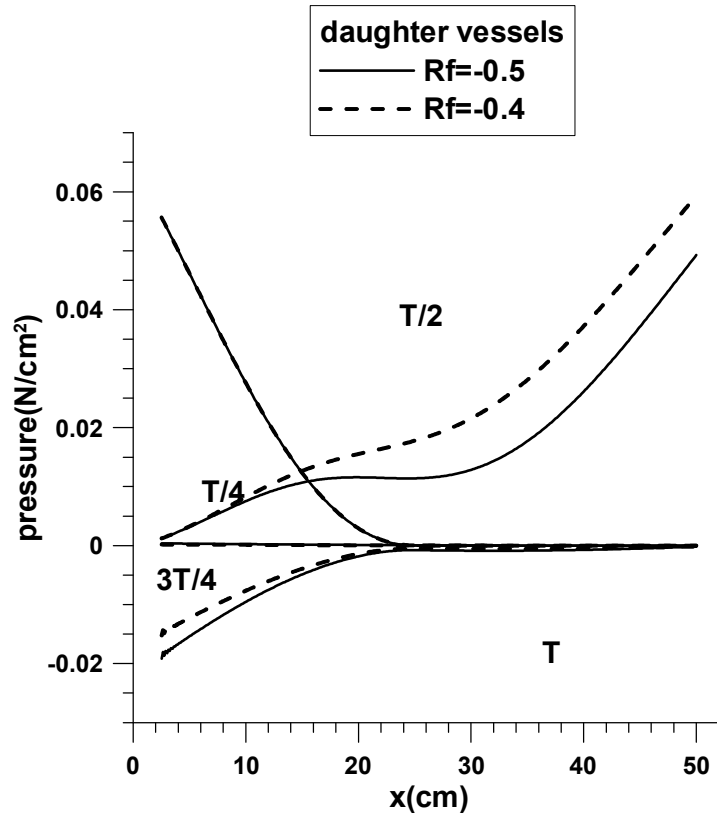
Σχήμα 3.32 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στο πατρικό αγγείο



Σχήμα 3.33 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στα θυγατρικά αγγεία



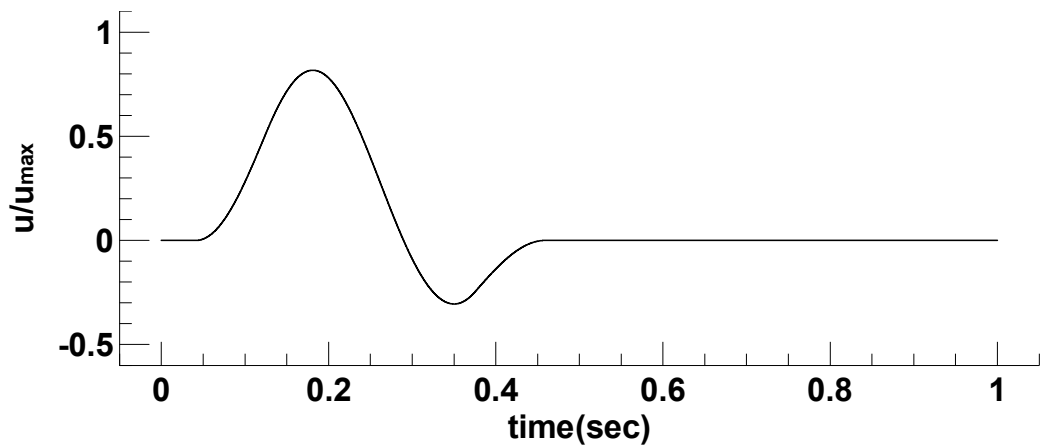
Σχήμα 3.34 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στα θυγατρικά αγγεία



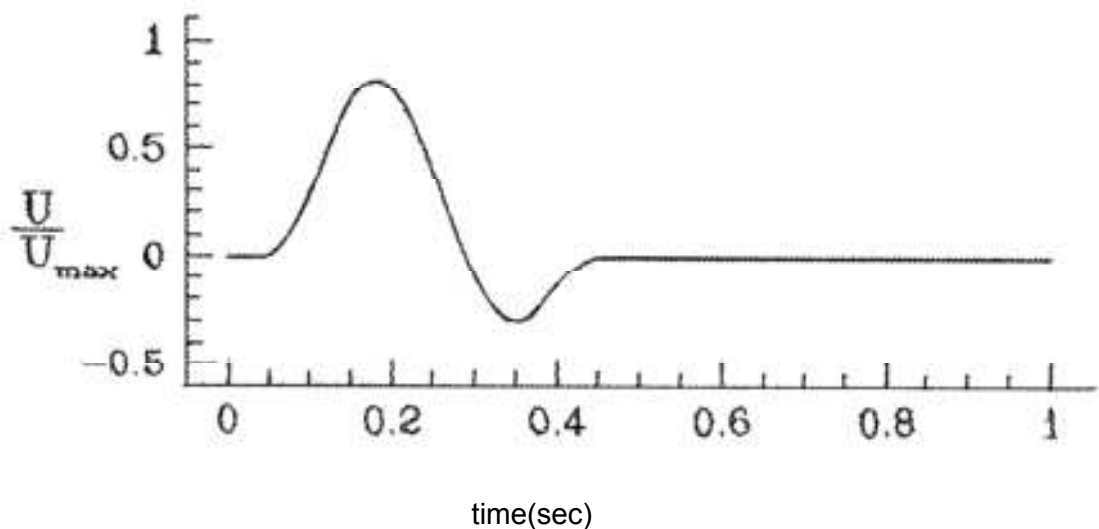
Σχήμα 3.35 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα της τελευταίας περιόδου στα θυγατρικά αγγεία

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται το ίδιο παράδειγμα, αλλά με διπλασιασμένη αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος, πράγμα που επιτυγχάνεται τετραπλασιάζοντας το μέτρο ελαστικότητας του πατρικού, δηλαδή $E=135\text{N/cm}^2$, και διατηρώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους.

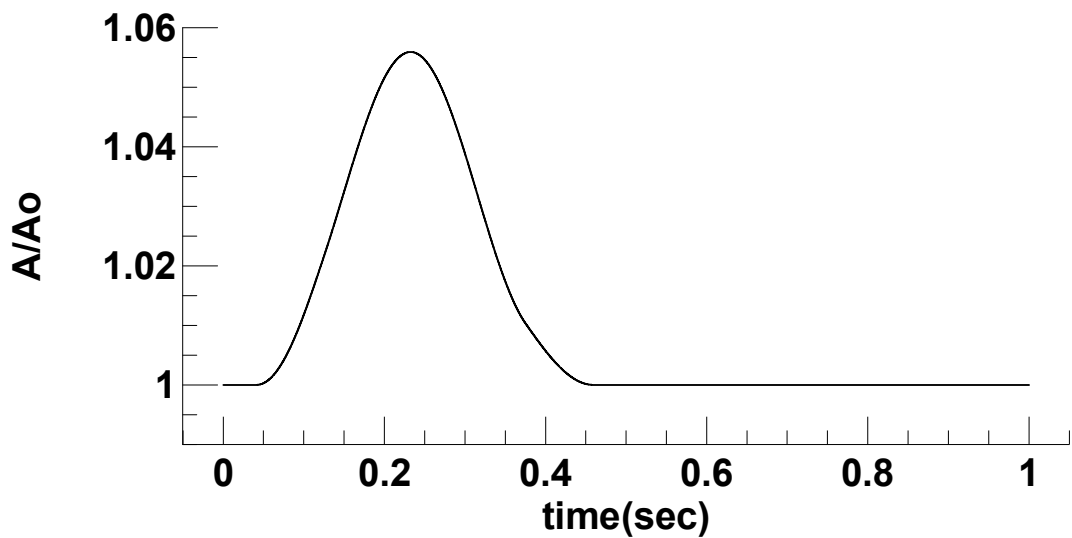
Παρατηρούμε πως ο χρόνος που απαιτείται ώστε το εισερχόμενο και ανακλώμενο κύμα να φτάσουν στην εκάστοτε θέση μειώνεται σχεδόν κατά το ήμισυ για την περίπτωση της διπλάσιας αρχικής ταχύτητας διάδοσης του κύματος. Εκτός αυτού η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι εντονότερη, γεγονός που συντελεί στη μείωση του μεγίστου της ταχύτητας.



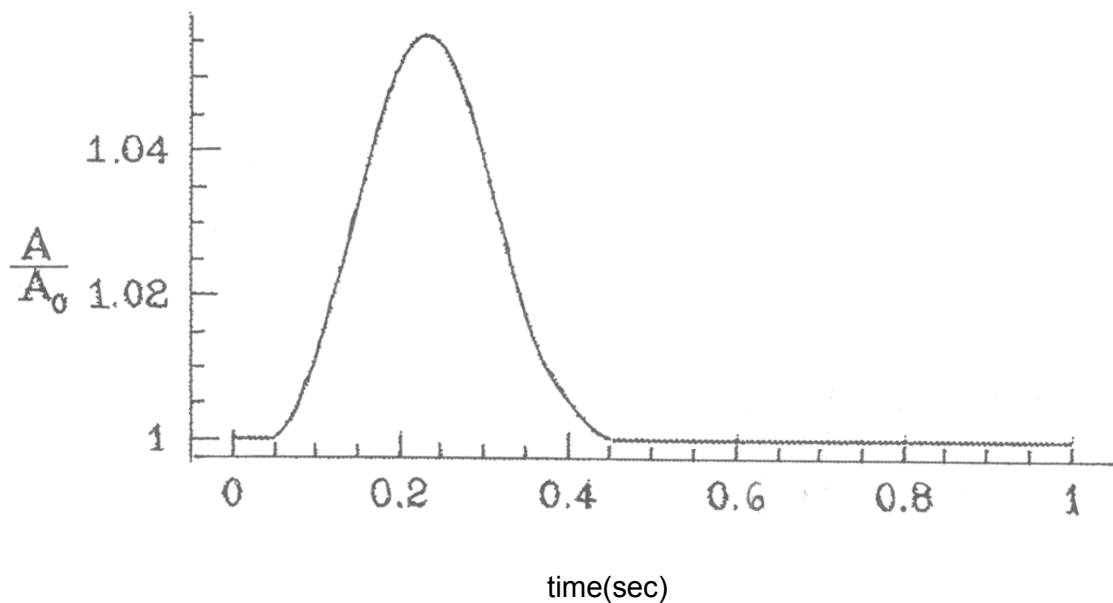
Σχήμα 3.36 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο σημείο M του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



Σχήμα 3.36 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο σημείο M του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος [Sherwin et al, 2003]



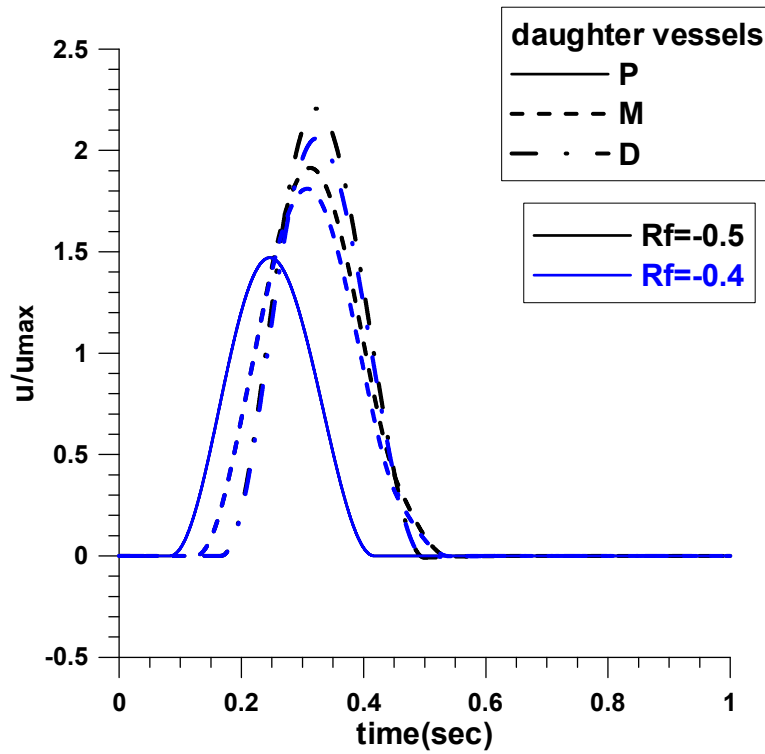
Σχήμα 3.37 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο σημείο M του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



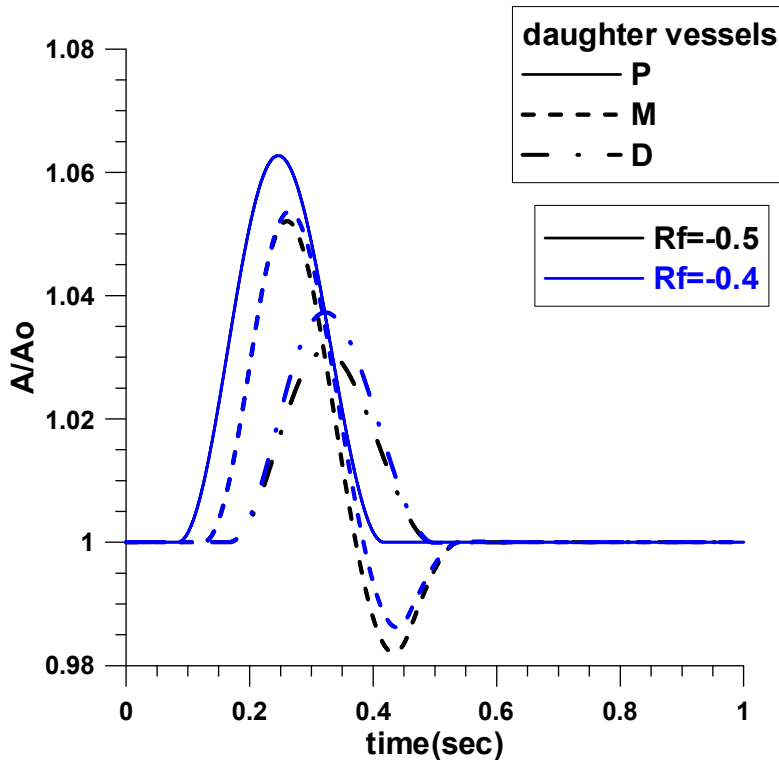
Σχήμα 3.37 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο σημείο M του πατρικού αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος [Sherwin et al, 2003]

Οι μικρές αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, οφείλονται σε δύο λόγους:

1. Οι υπολογιστικές μεθοδολογίες είναι διαφορετικές.
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.



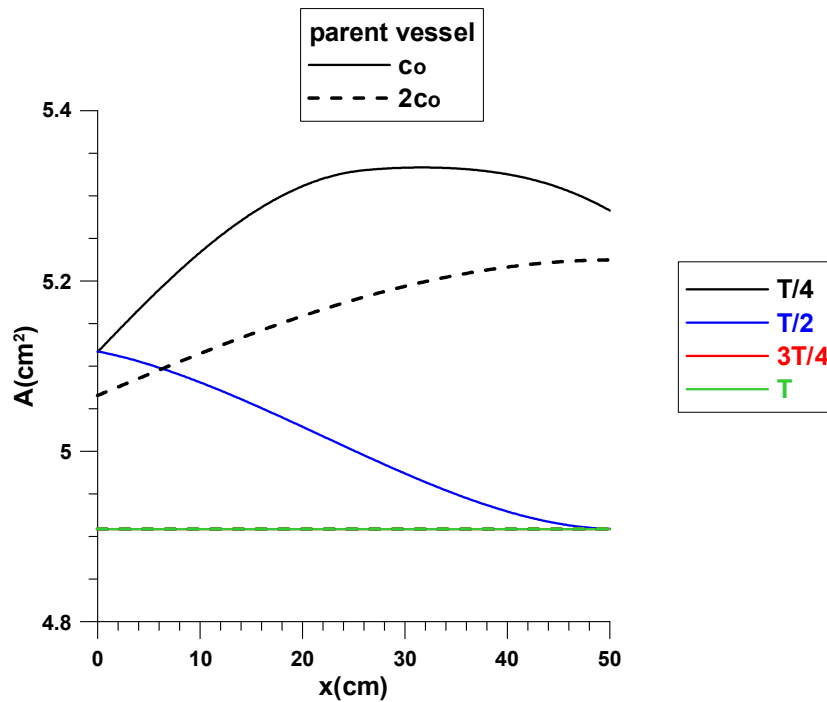
Σχήμα 3.38 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D των θυγατρικών αγγείων για διπλάσια ταχύτητα κύματος



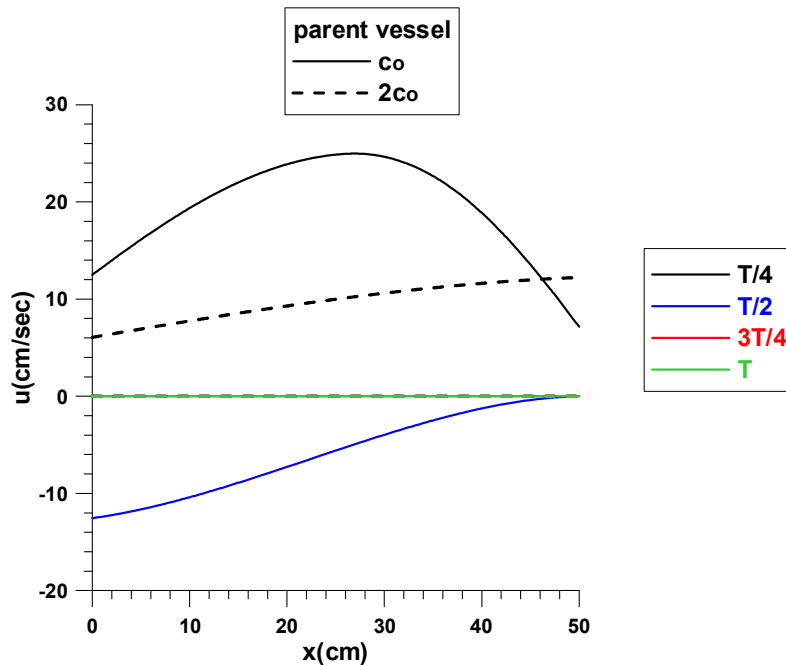
Σχήμα 3.39 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D των θυγατρικών αγγείων για διπλάσια ταχύτητα κύματος

Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο

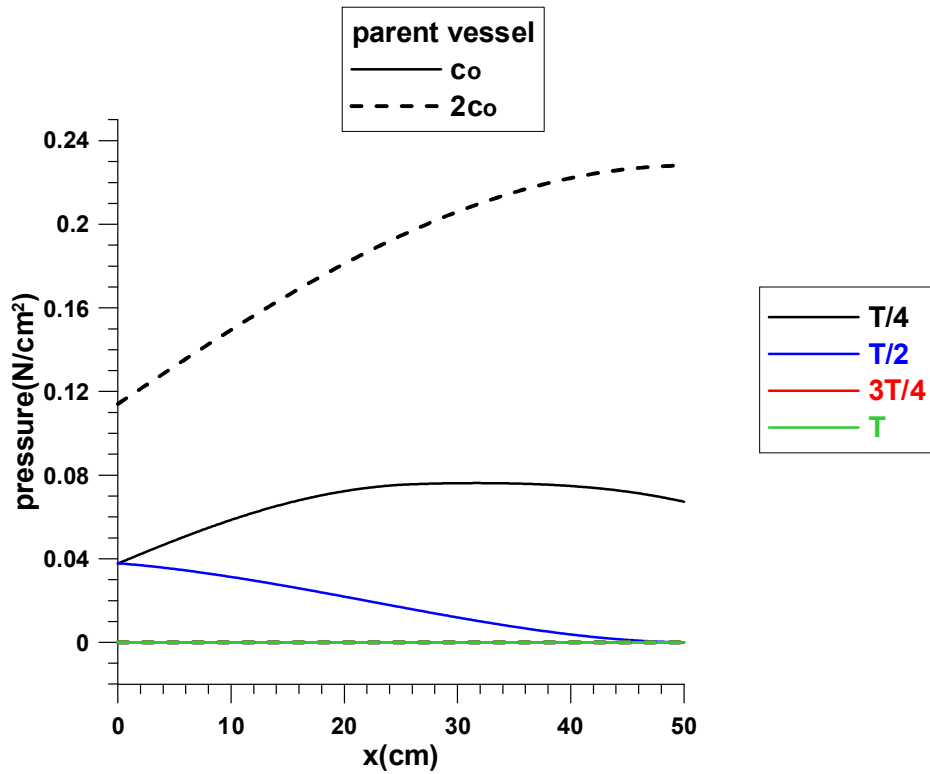
πατρικό και το θυγατρικό αγγείο με $R_f = -0.4$ για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



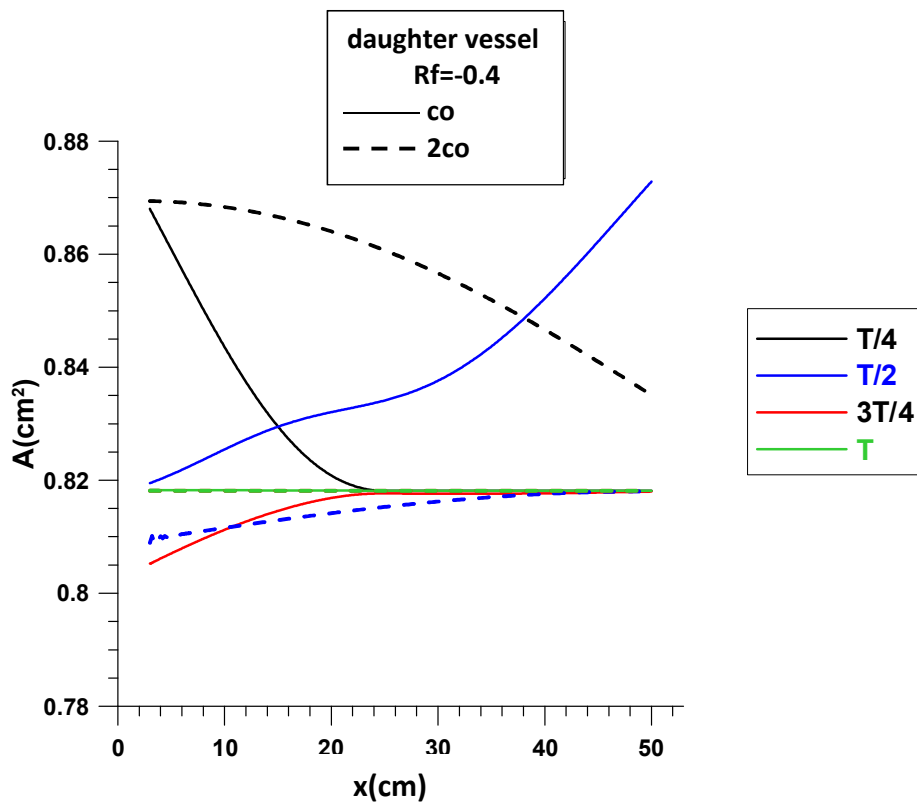
Σχήμα 3.40 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



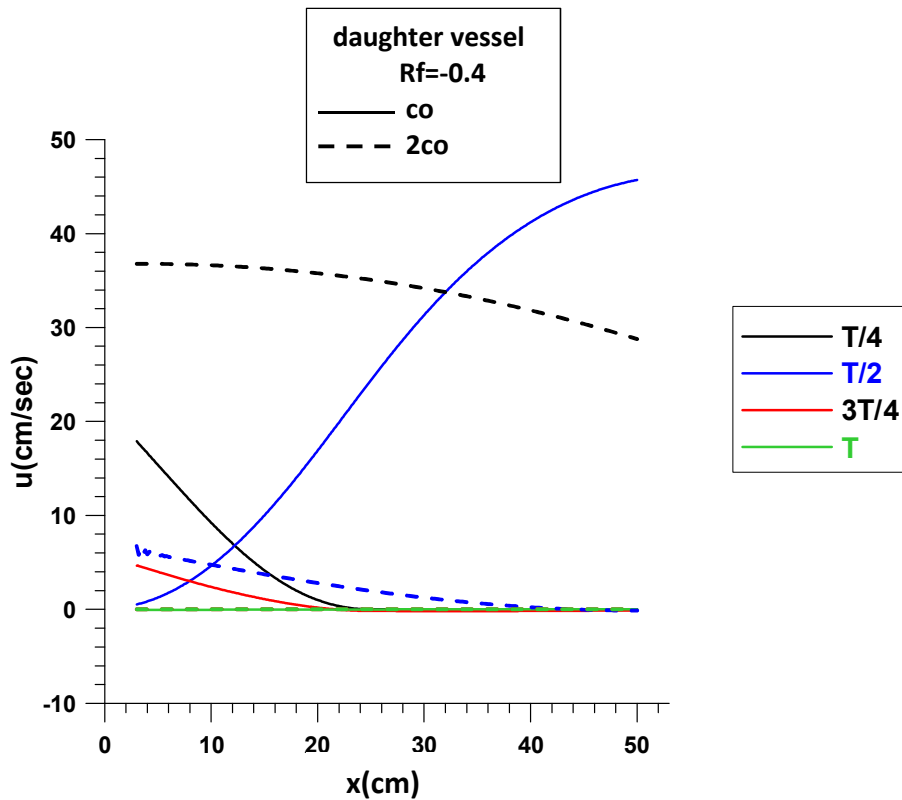
Σχήμα 3.41 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



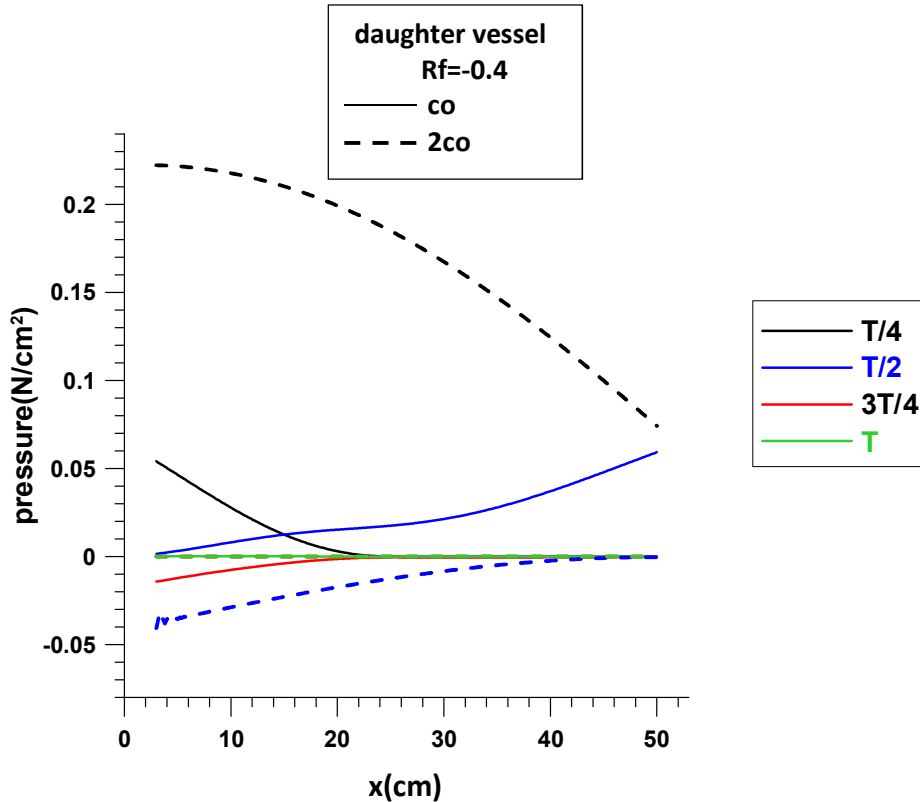
Σχήμα 3.42 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



Σχήμα 3.43 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο θυγατρικό αγγείο με $R_f = -0.4$ για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



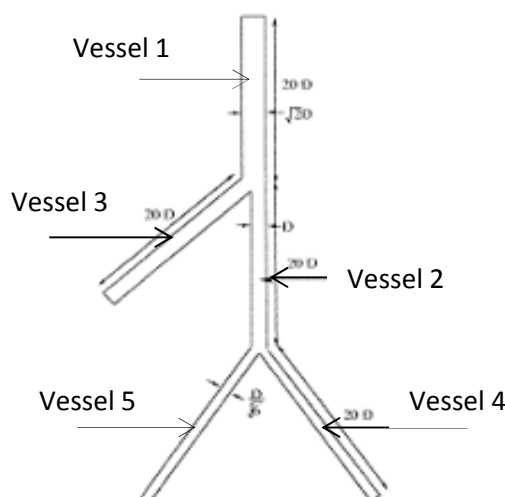
Σχήμα 3.44 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο θυγατρικό αγγείο με $R_f=-0.4$ για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



Σχήμα 3.45 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο θυγατρικό αγγείο με $R_f=-0.4$ για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.

3.4 Διπλή διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης

Για να ολοκληρώσουμε την σύγκριση των αποτελεσμάτων θεωρούμε μία διπλή διακλάδωση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και εφαρμόζουμε την ίδια υπολογιστική τακτική με πριν.



Σχήμα 3.46 Σχηματική παράσταση διπλής διακλάδωσης

Σε αυτή την περίπτωση τα κάτω τρία αγγεία είναι όμοια με αυτά της προηγούμενης περίπτωσης. Τα δύο πρόσθετα αγγεία είναι τέτοια ώστε ο συντελεστής ανάκλασης της πάνω διακλάδωσης να προκύπτει $R_f = -0,5$. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την ίδια αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος σε όλα τα αγγεία, θέτοντας τα θυγατρικά αγγεία της ίδιας διαμέτρου και δίνοντας στο πατρικό αγγείο διάμετρο $\sqrt{2} \cdot D$ και πάχος τοιχώματος $\sqrt{2} \cdot h$.

Πρέπει επίσης να αναφερθεί πως στην είσοδο των θυγατρικών αγγείων 3,4 και 5 έχουμε θεωρήσει κατ'εξάιρεση συνθήκη μη-ανάκλασης, γεγονός που μηδενίζει τη συνθήκη συμβατότητας της αριστεροκλινούς χαρακτηριστικής, δηλαδή $u-4(c-c_0)=0$. Η συνθήκη αυτή επιλέχθηκε ώστε το ανακλώμενο κύμα λόγω τερματικής αντίστασης στα θυγατρικά αγγεία να εισέλθει ανεπηρέαστο στο πατρικό αγγείο. Επειδή στην είσοδο του αγγείου 2 δεν έχει εφαρμοστεί συνθήκη μη ανάκλασης, ποσοστό του πίσω οδεύοντος κύματος ανακλάται, οπότε και η ανάκλαση αυτή φαίνεται ξεκάθαρα στα διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της ταχύτητας και της διατομής σε όλα τα αγγεία.

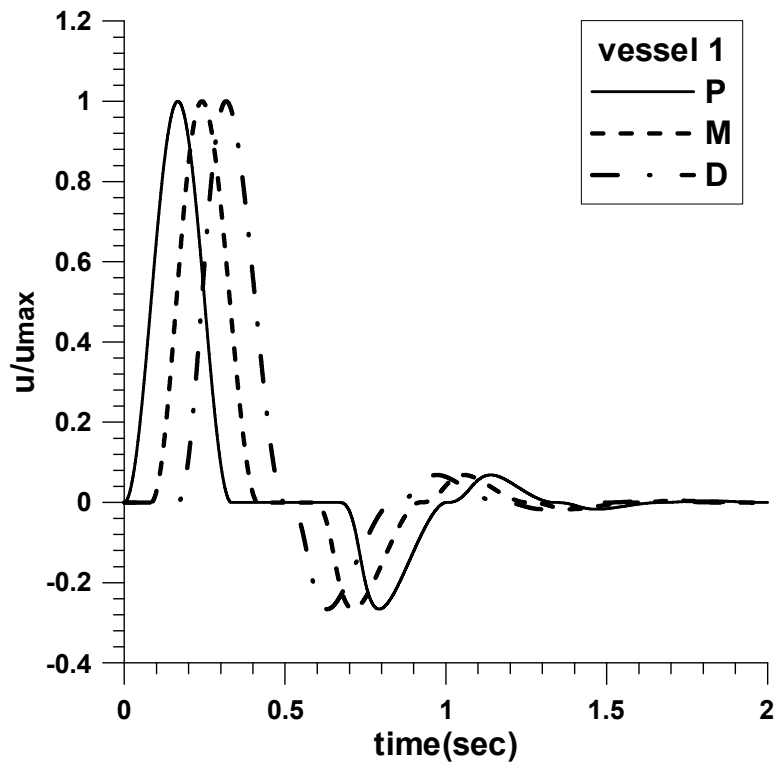
Στην έξοδο των θυγατρικών αγγείων δίνεται ο συντελεστής ανάκλασης R_f και συγκεκριμένα:

$$R_{f3} = -0.5$$

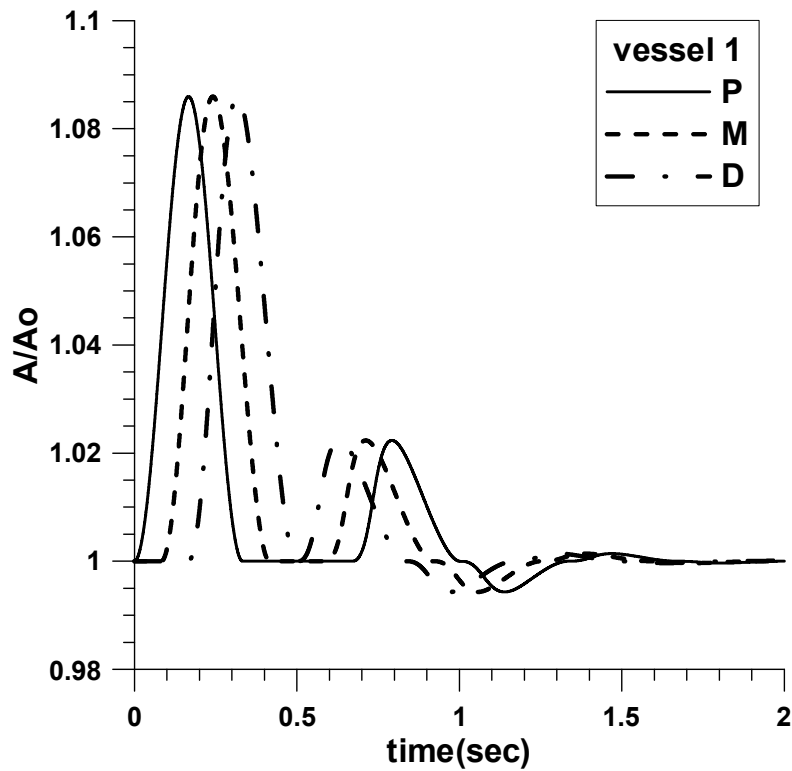
$$R_{f4} = -0.4 \text{ και}$$

$R_{f5} = -0.5$.

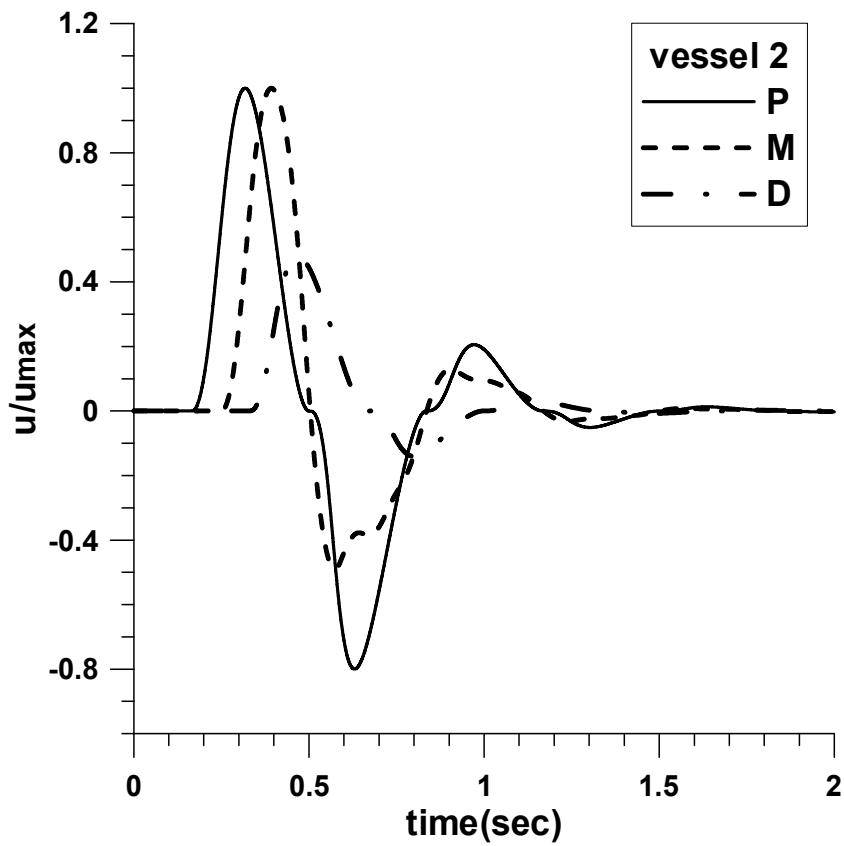
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της διατομής σε όλα τα αγγεία.



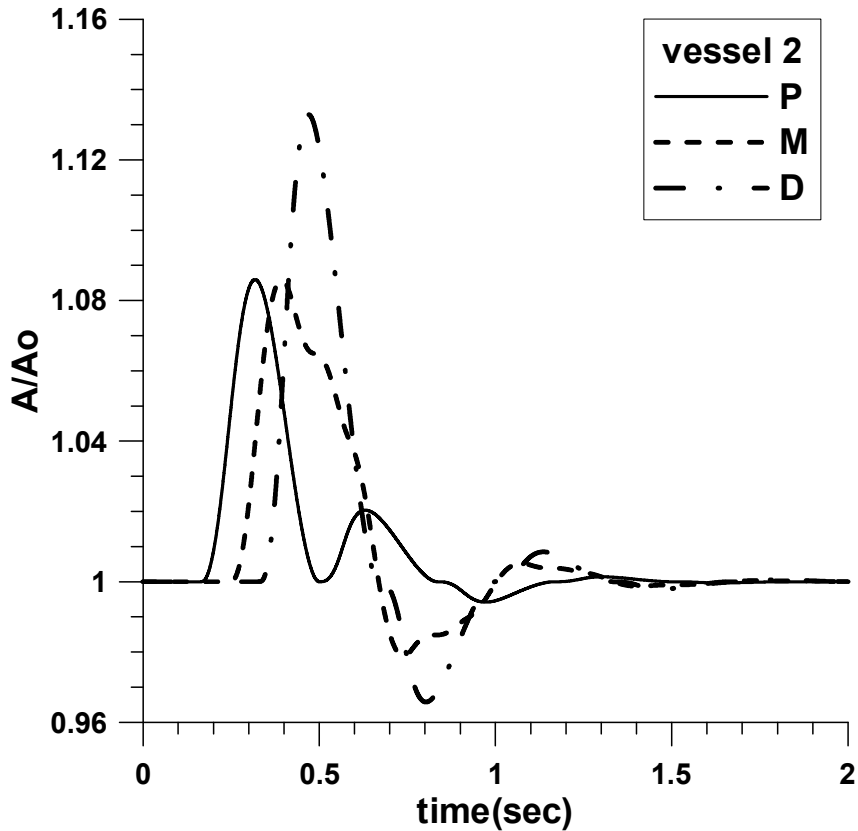
Σχήμα 3.47 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 1^{ου} αγγείου



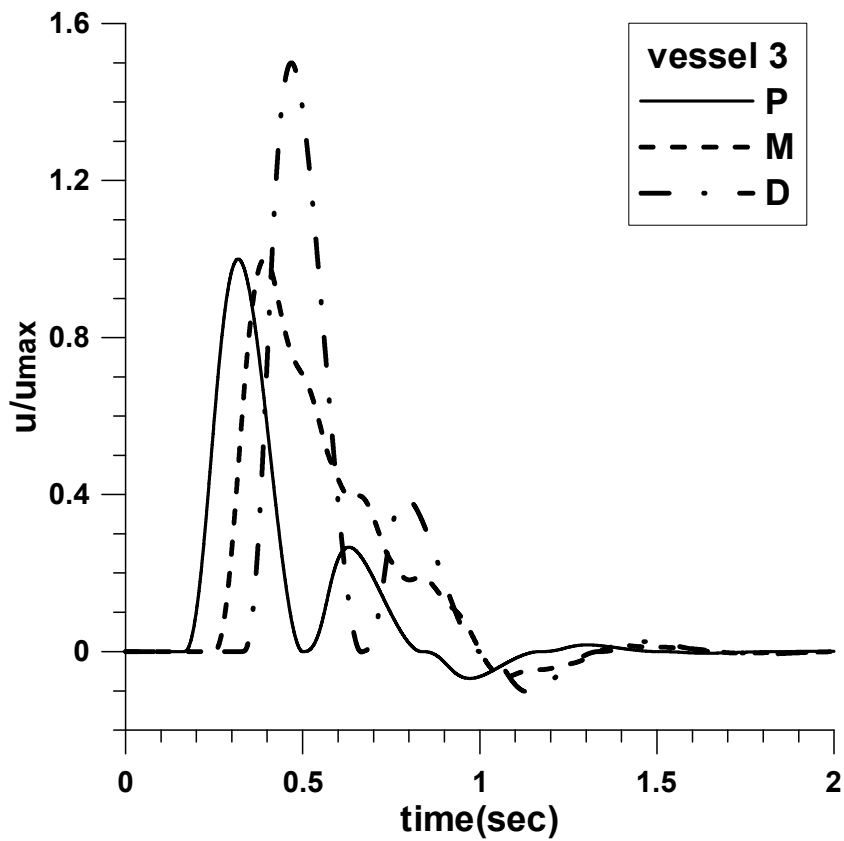
Σχήμα 3.48 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 1^{ου} αγγείου



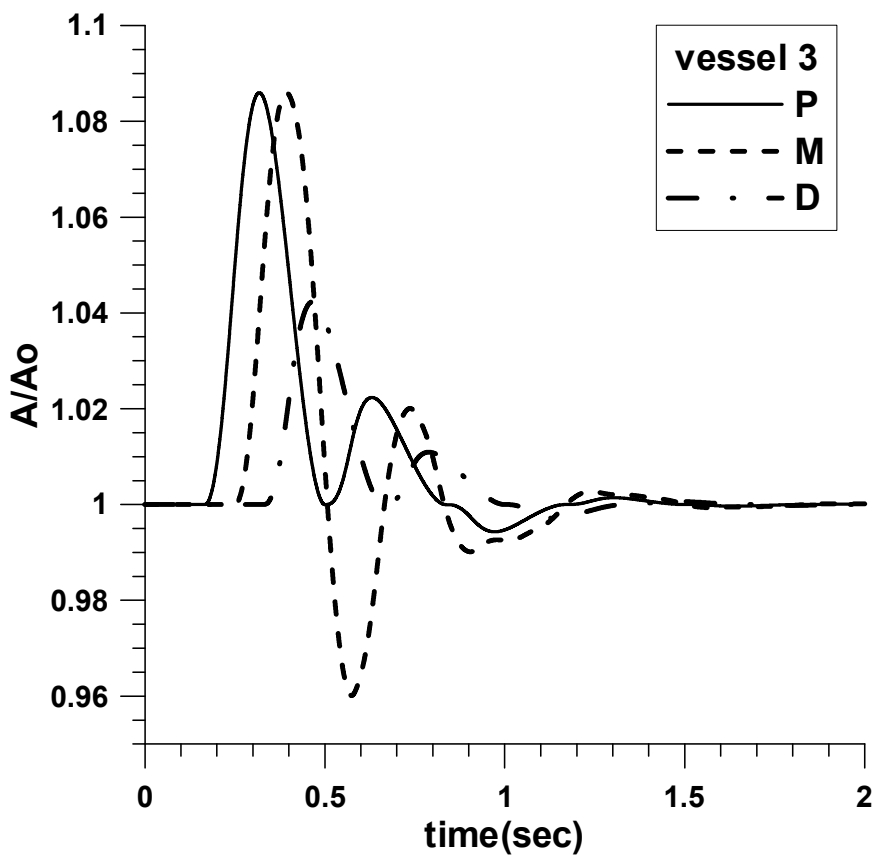
Σχήμα 3.49 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 2^{ου} αγγείου



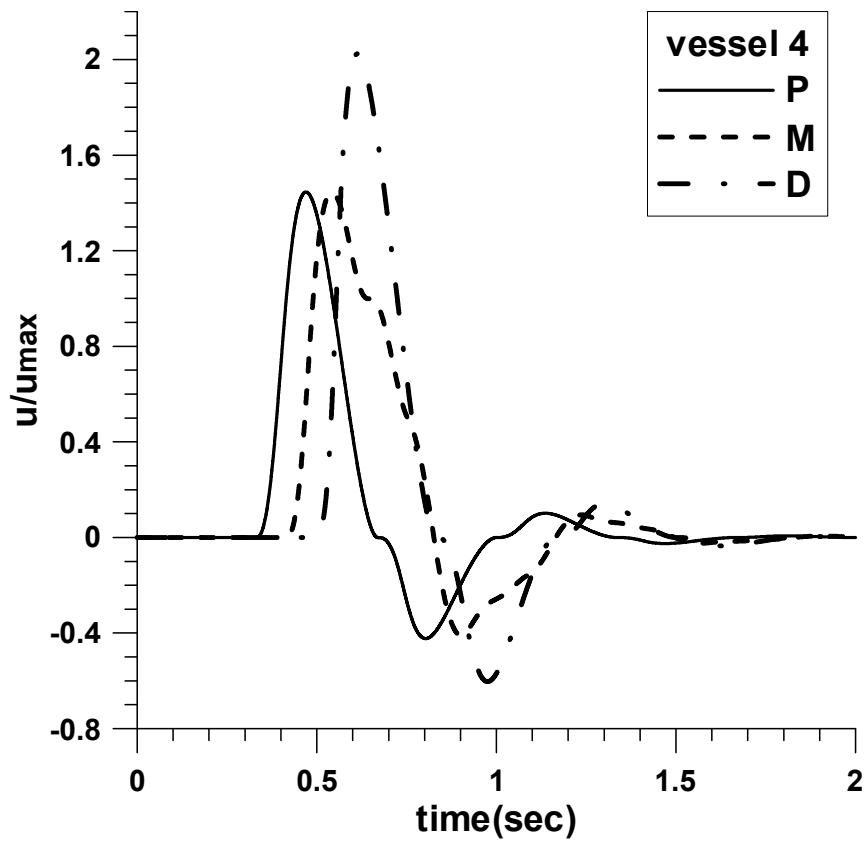
Σχήμα 3.50 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 2^{ου} αγγείου



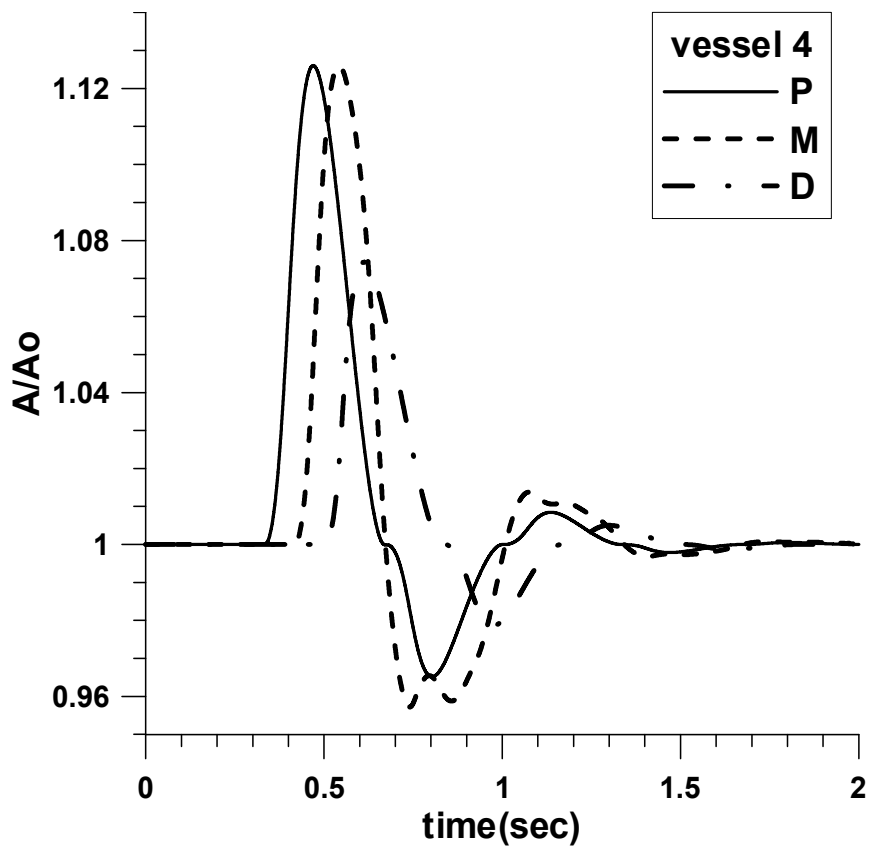
Σχήμα 3.51 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 3^{ου} αγγείου



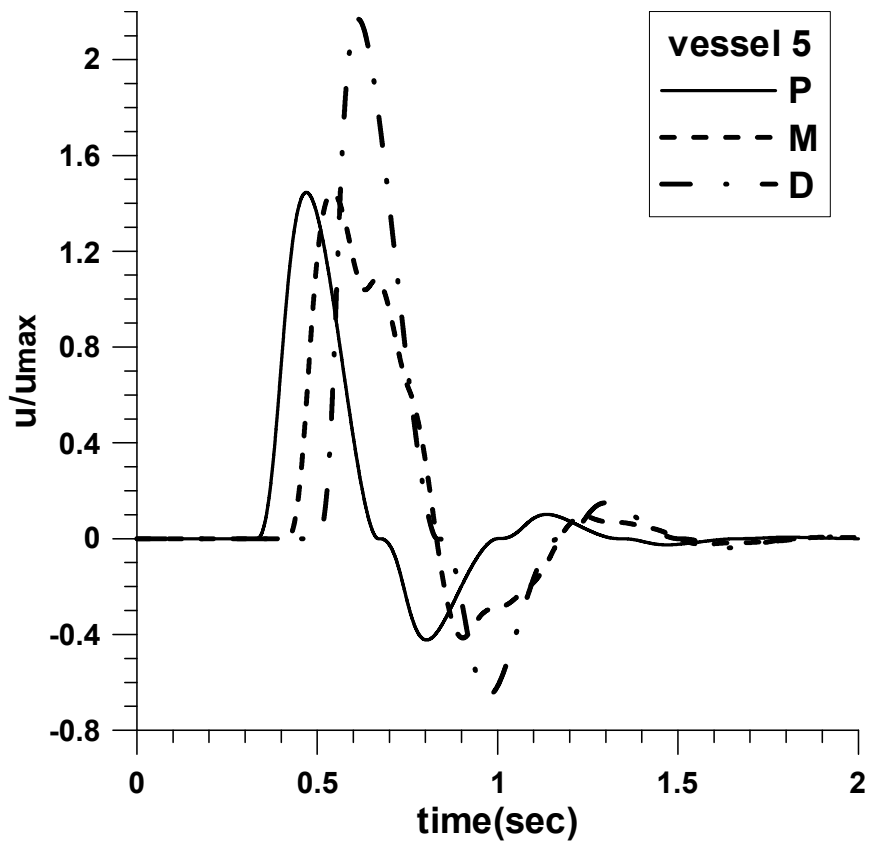
Σχήμα 3.52 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 3^{ου} αγγείου



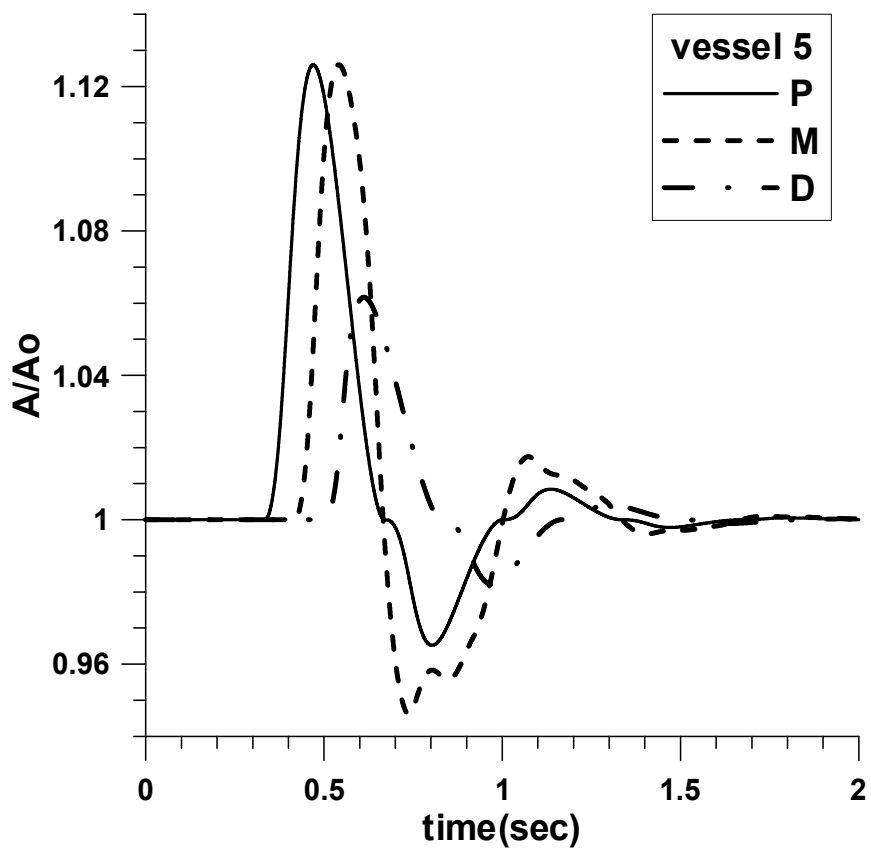
Σχήμα 3.53 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 4^{ου} αγγείου



Σχήμα 3.54 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 4^{ου} αγγείου

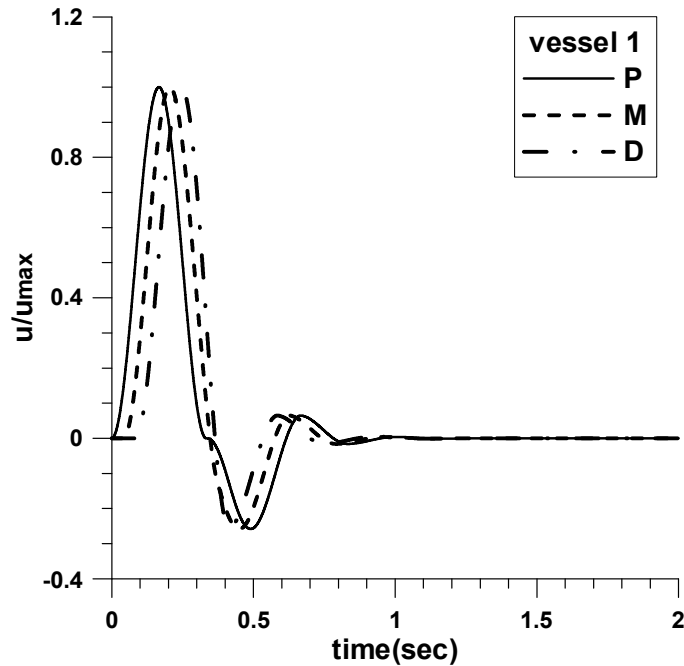


Σχήμα 3.55 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 5^{ου} αγγείου

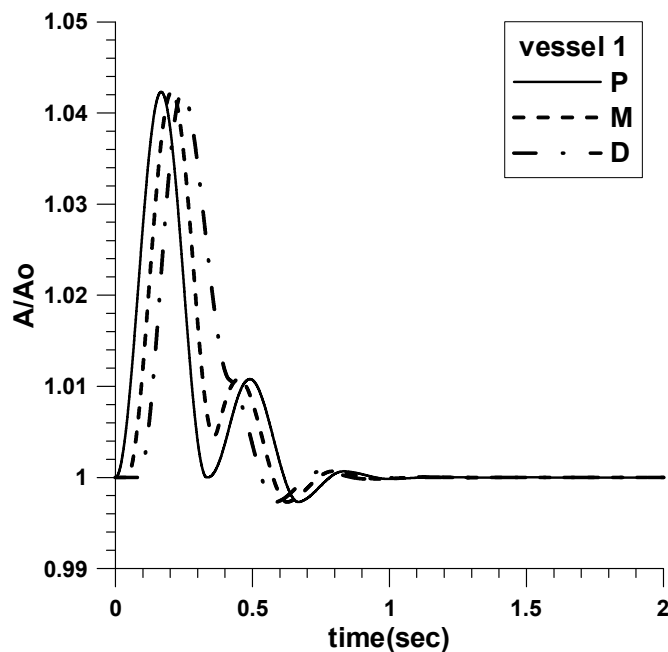


Σχήμα 3.56 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 5^{ου} αγγείου

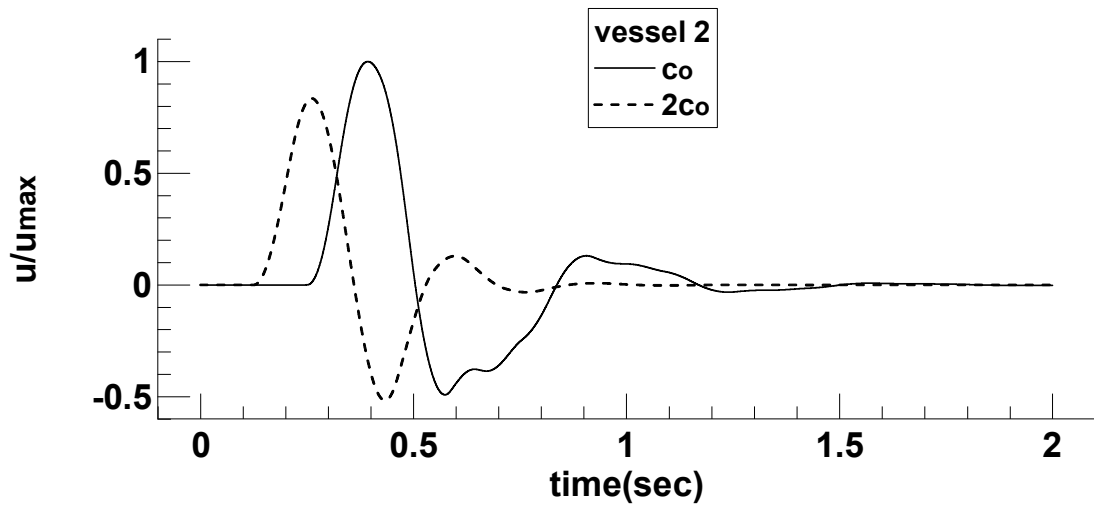
Ακολουθεί το ίδιο παράδειγμα, αλλά με διπλασιασμένη αρχική ταχύτητα διάδοσης του κύματος, πράγμα που επιτυγχάνεται τετραπλασιάζοντας το μέτρο ελαστικότητας του πατρικού αγγείου, δηλαδή $E=135\text{N/cm}^2$, και διατηρώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους. Όπως και στην περίπτωση της απλής διακλάδωσης φαίνεται η εντονότερη αλληλεπίδραση του εισερχόμενου με το ανακλώμενο κύμα, καθώς και η ταχύτερη εξασθένηση που σχετίζεται με την ταχύτερη ανάκλαση.



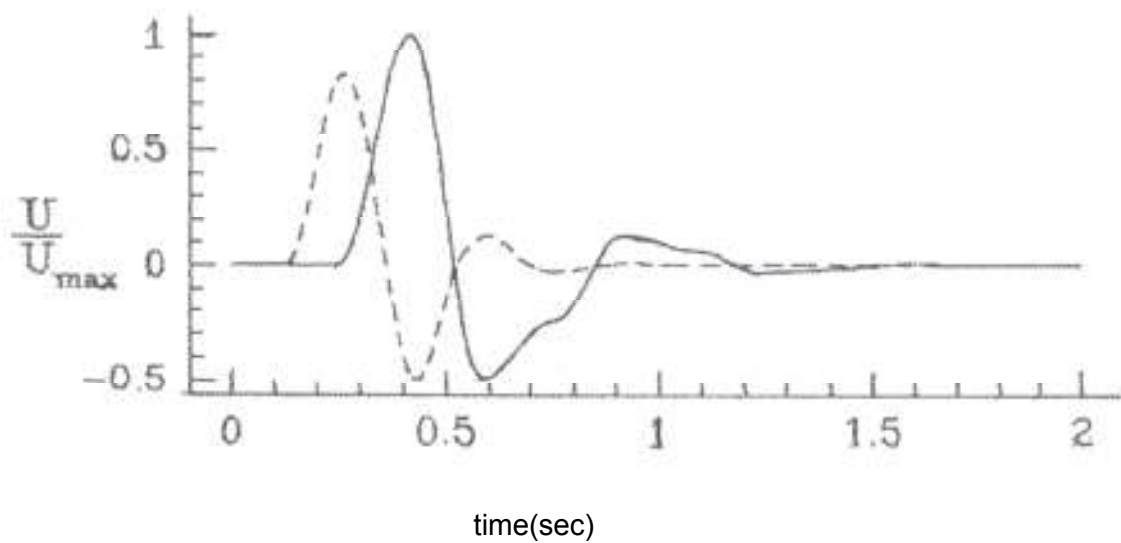
Σχήμα 3.57 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 1^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



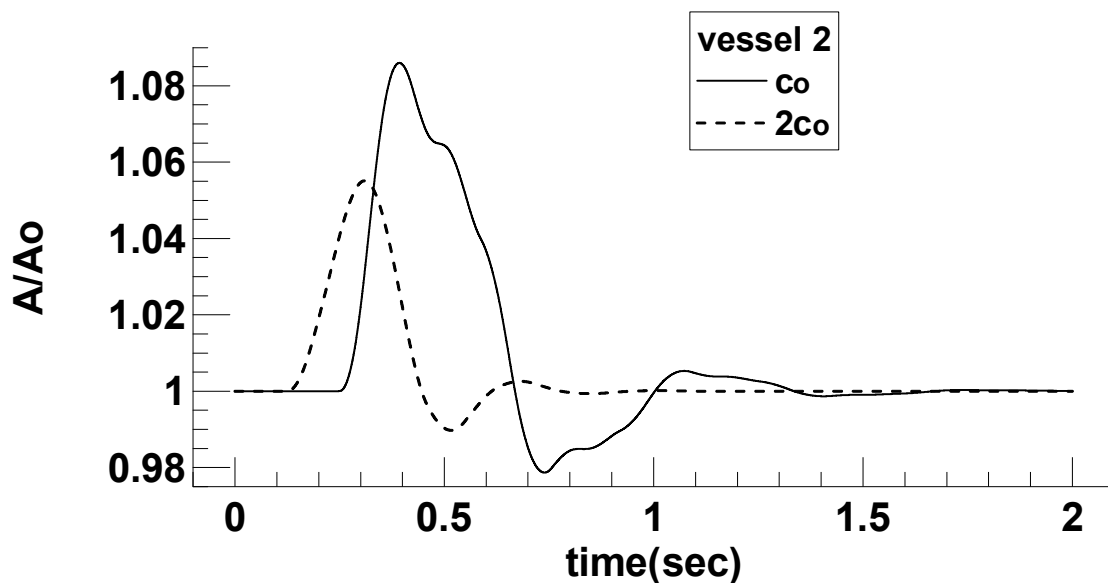
Σχήμα 3.58 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 1^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



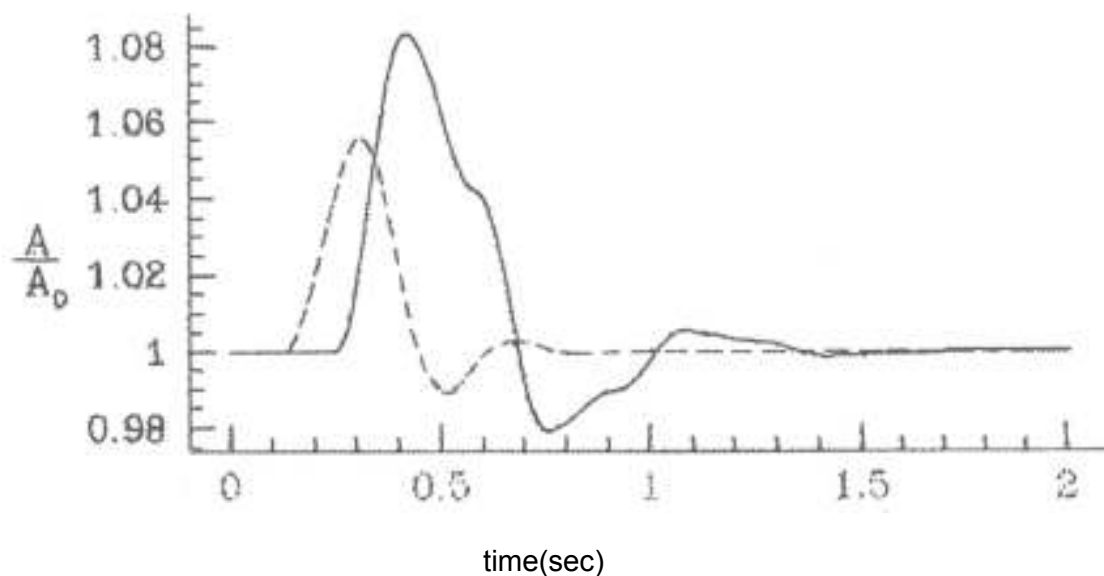
Σχήμα 3.59 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο σημείο M του 2^{ου} αγγείου για c_0 και $2c_0$.



Σχήμα 3.59 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο σημείο M του 2^{ου} αγγείου για c_0 και $2c_0$. [Sherwin et al, 2003]



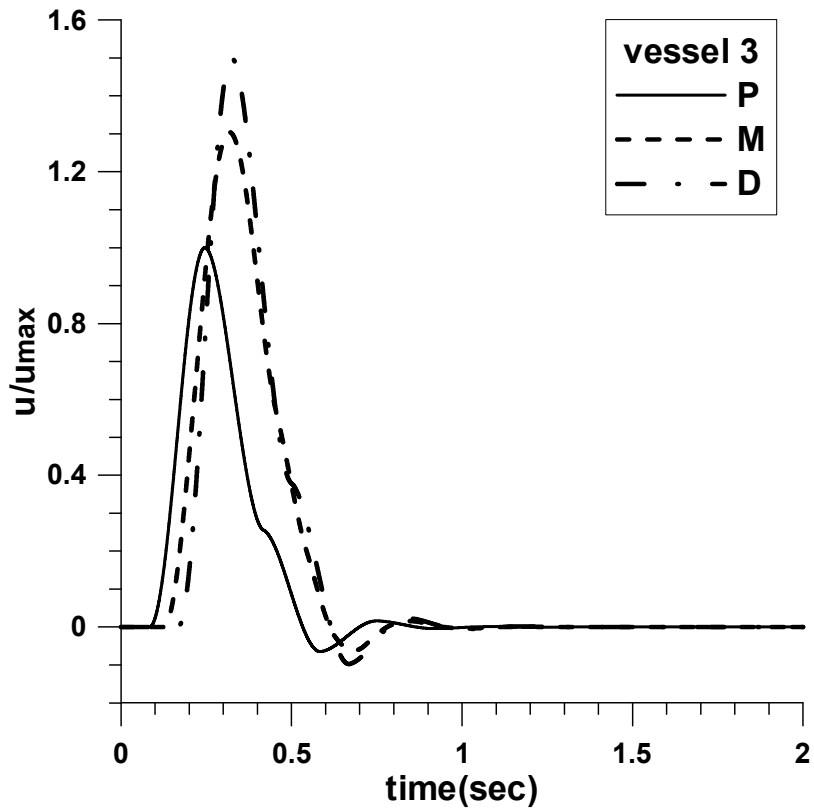
Σχήμα 3.60 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο σημείο M του 2^{ου} αγγείου για c_0 και $2c_0$.



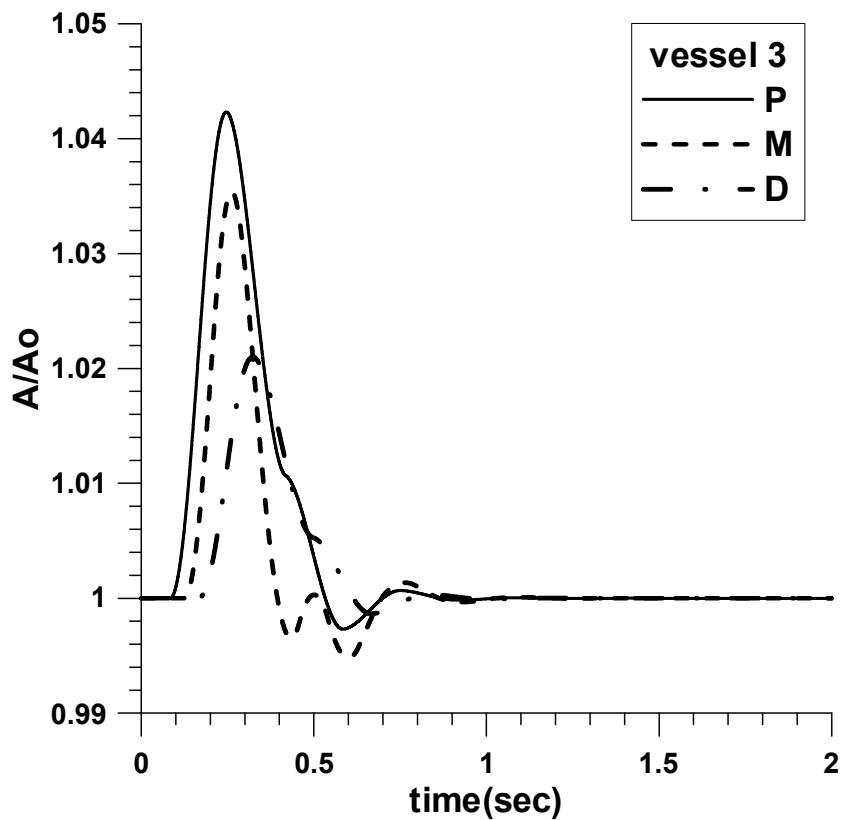
Σχήμα 3.60 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο σημείο M του 2^{ου} αγγείου για c_0 και $2c_0$. [Sherwin et al, 2003]

Οι μικρές αποκλίσεις που φαίνονται στα παραπάνω διαγράμματα, οφείλονται σε δύο λόγους:

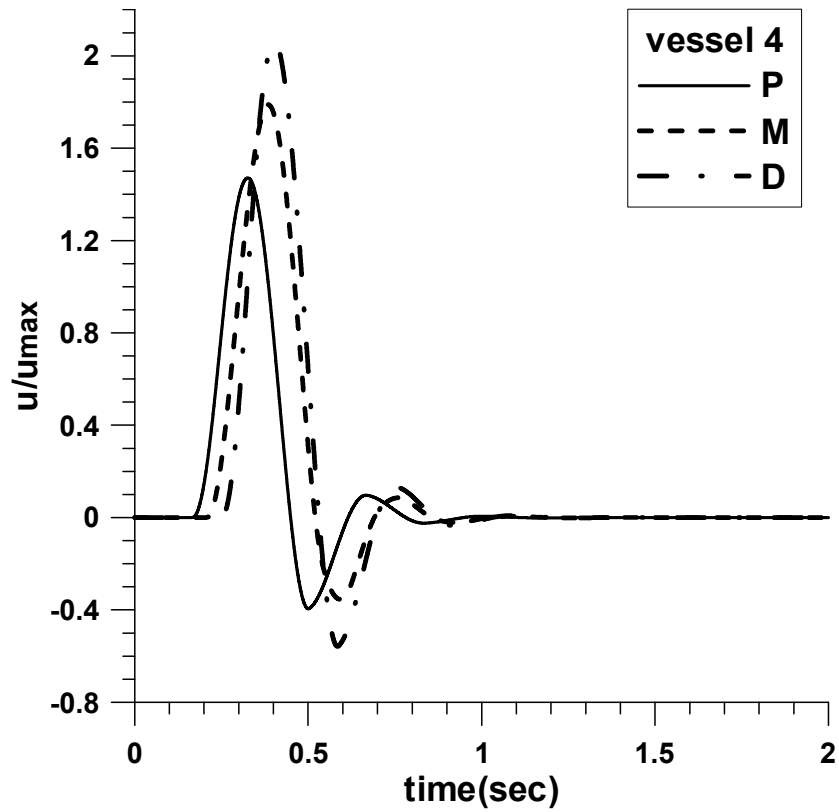
1. Οι υπολογιστικές μεθοδολογίες είναι διαφορετικές.
2. Η χαμηλού επιπέδου επεξεργασία εικόνας που υπέστησαν τα διαγράμματα, ενδεχομένως δημιούργησε κάποιες αλλοιώσεις.



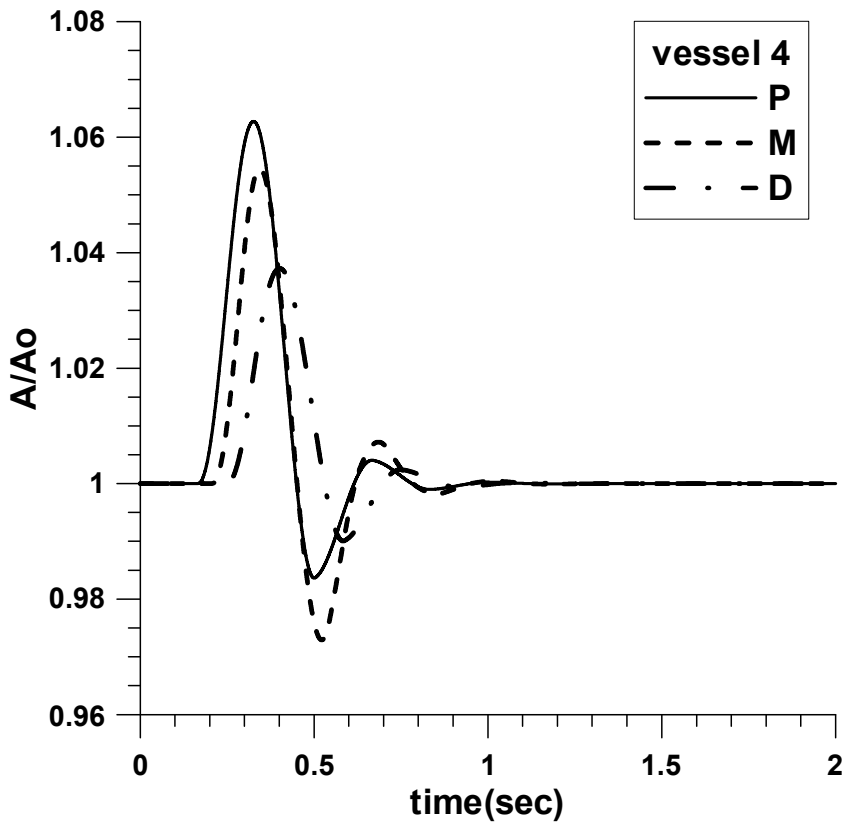
Σχήμα 3.61 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 3^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



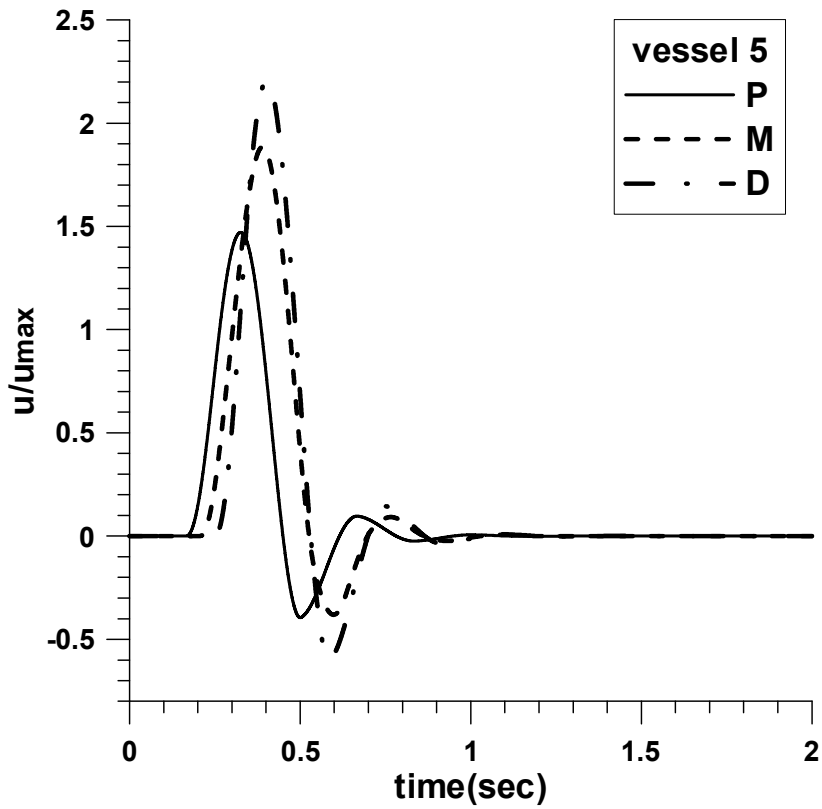
Σχήμα 3.62 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 3^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



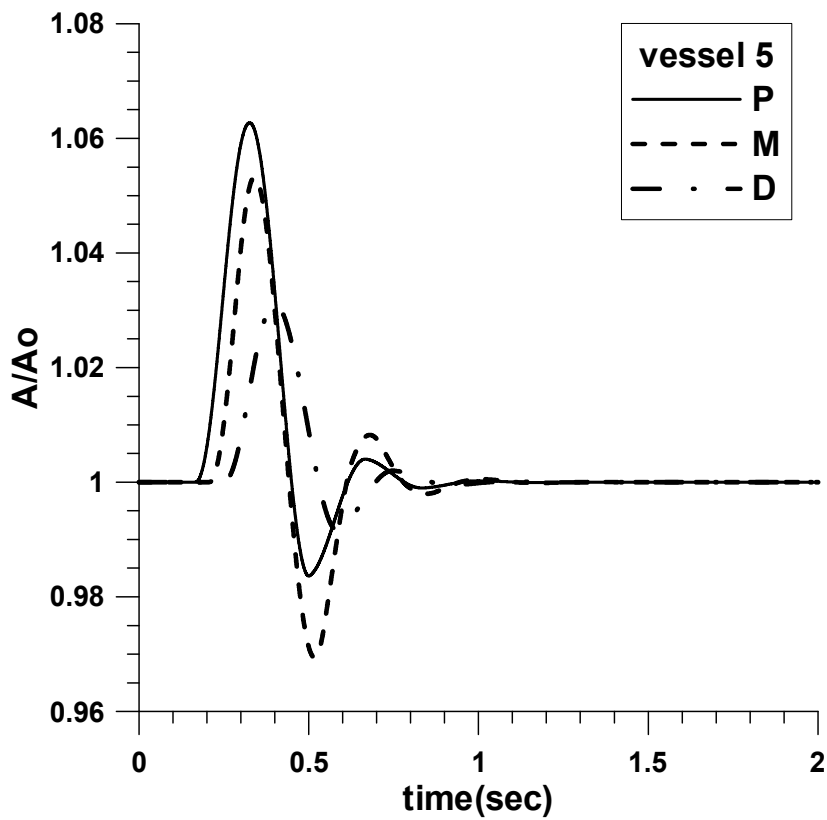
Σχήμα 3.63 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 4^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος



Σχήμα 3.64 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 4^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος

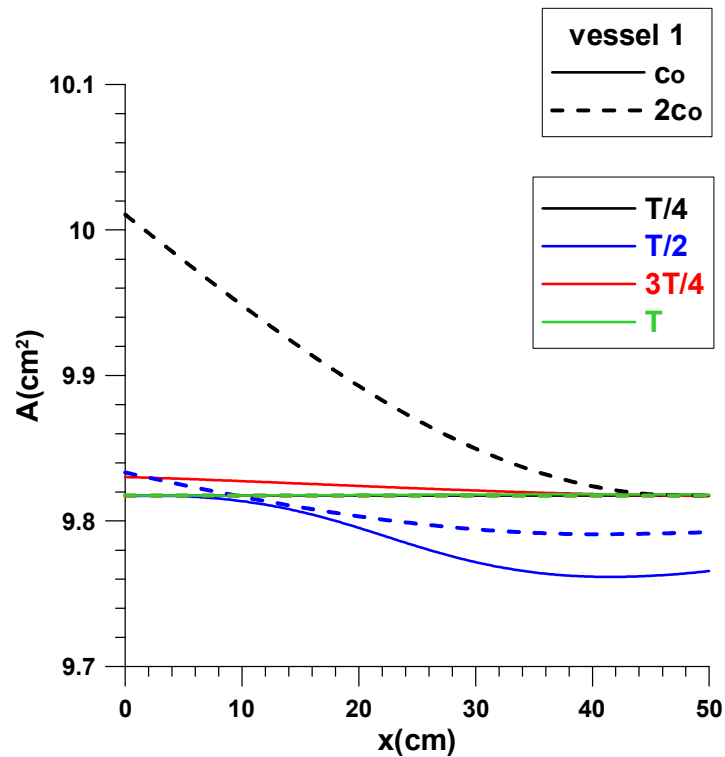


Σχήμα 3.65 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στα σημεία P,M,D του 5^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος

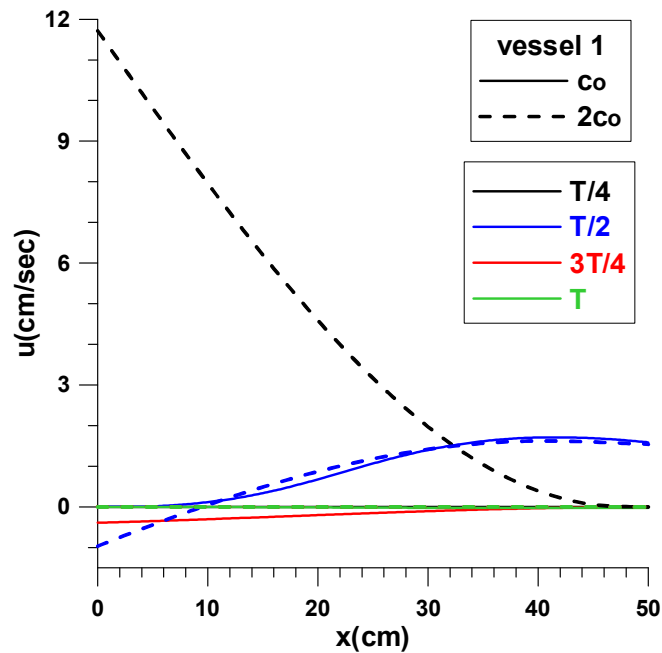


Σχήμα 3.66 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στα σημεία P,M,D του 5^{ου} αγγείου για διπλάσια ταχύτητα κύματος

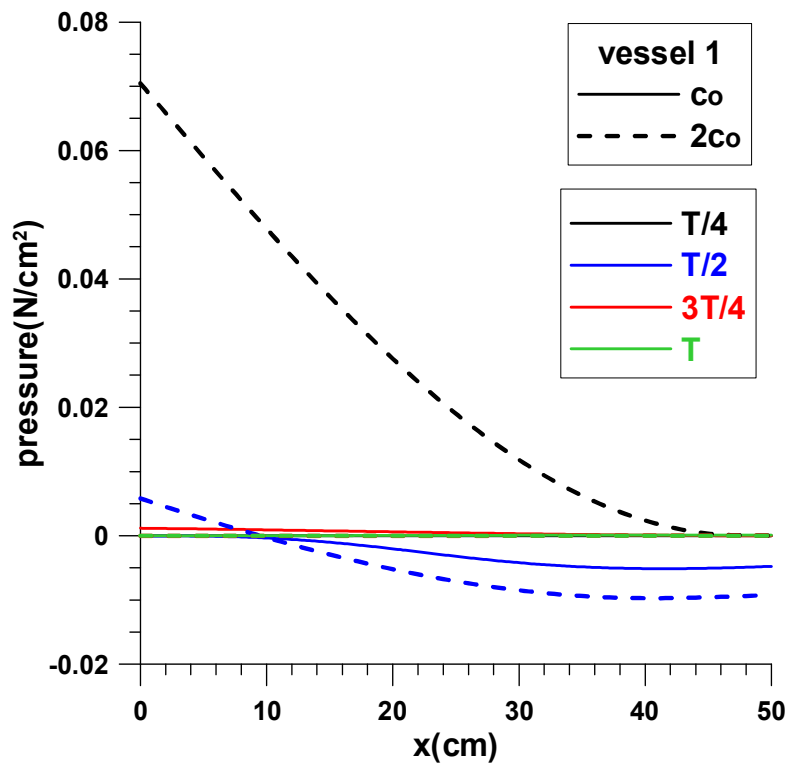
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου για τα αγγεία 1,2,3 και για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



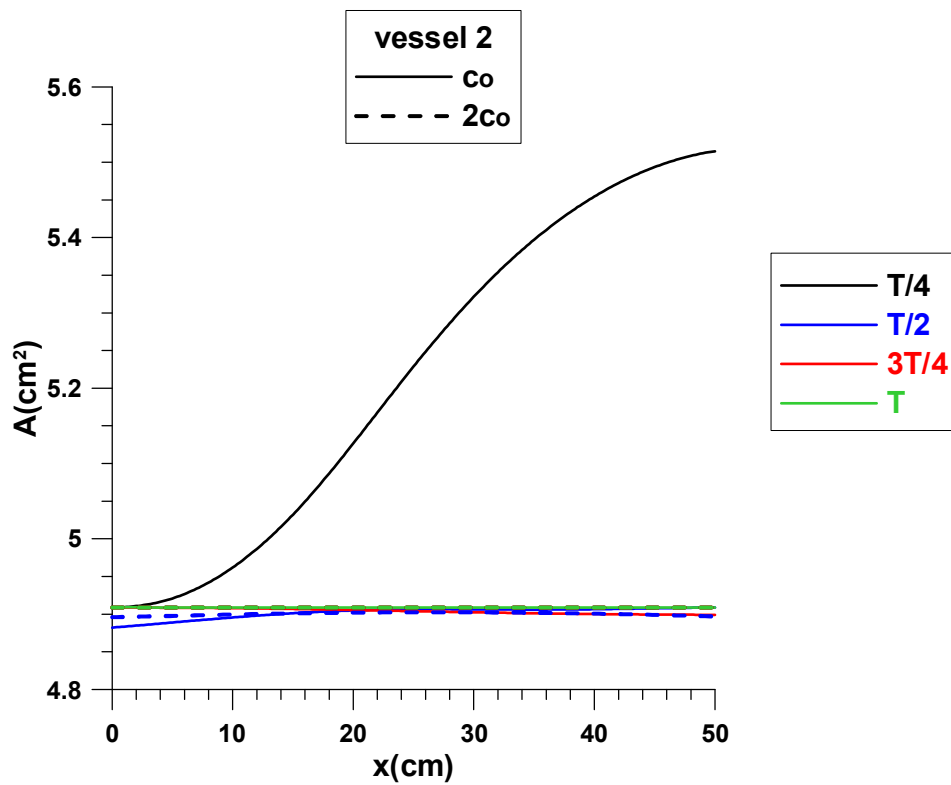
Σχήμα 3.67 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 1 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



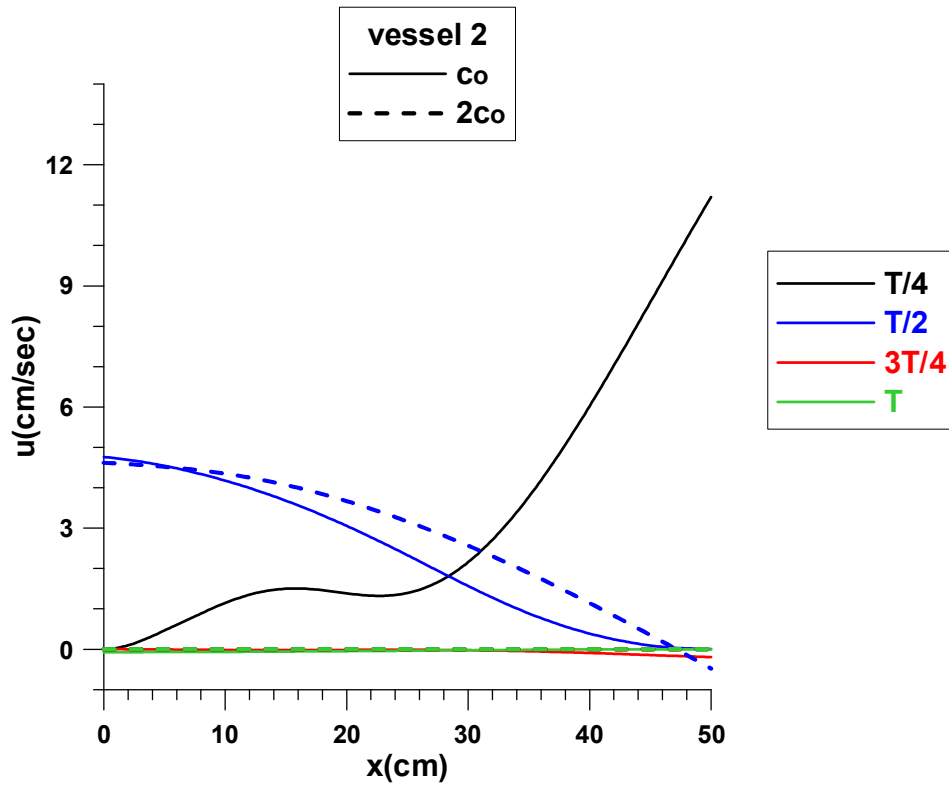
Σχήμα 3.68 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 1 για ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



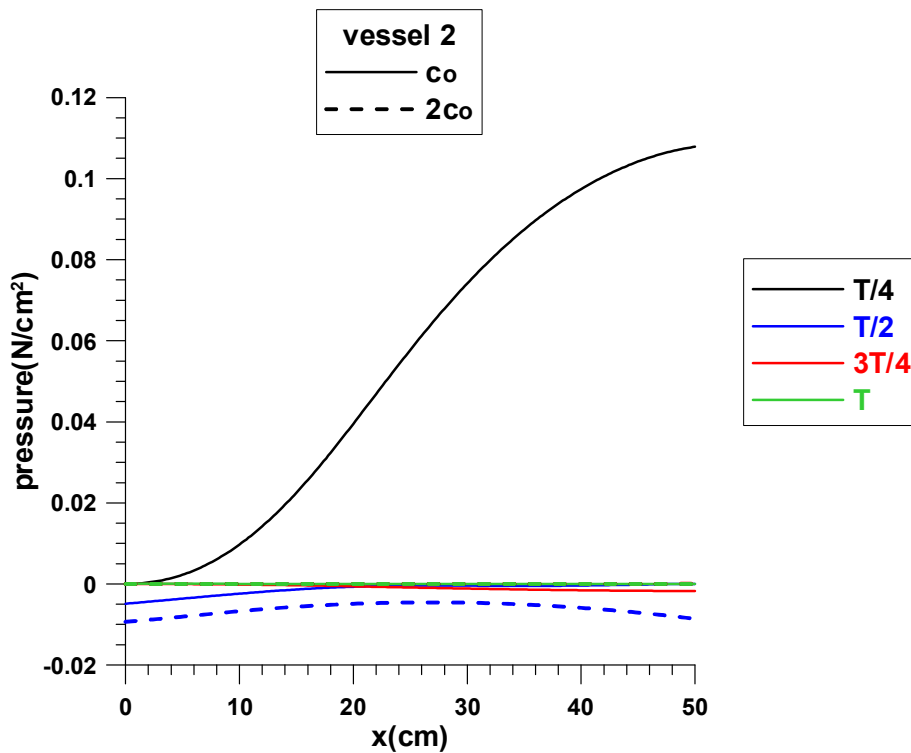
Σχήμα 3.69 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 1 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



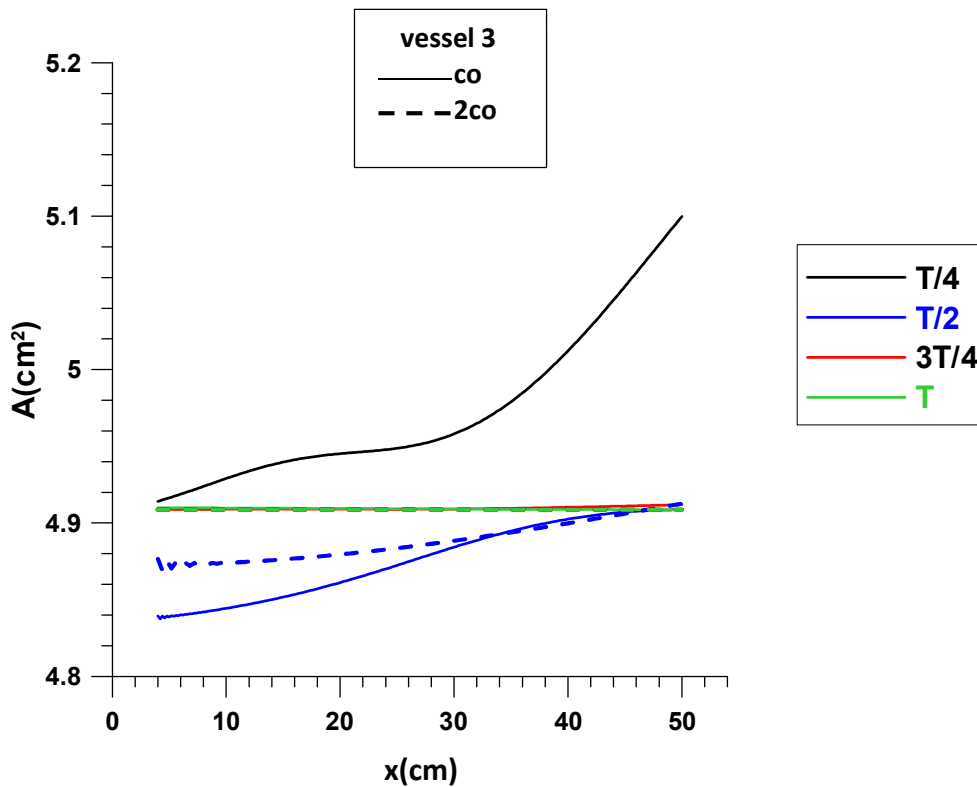
Σχήμα 3.70 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 2 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



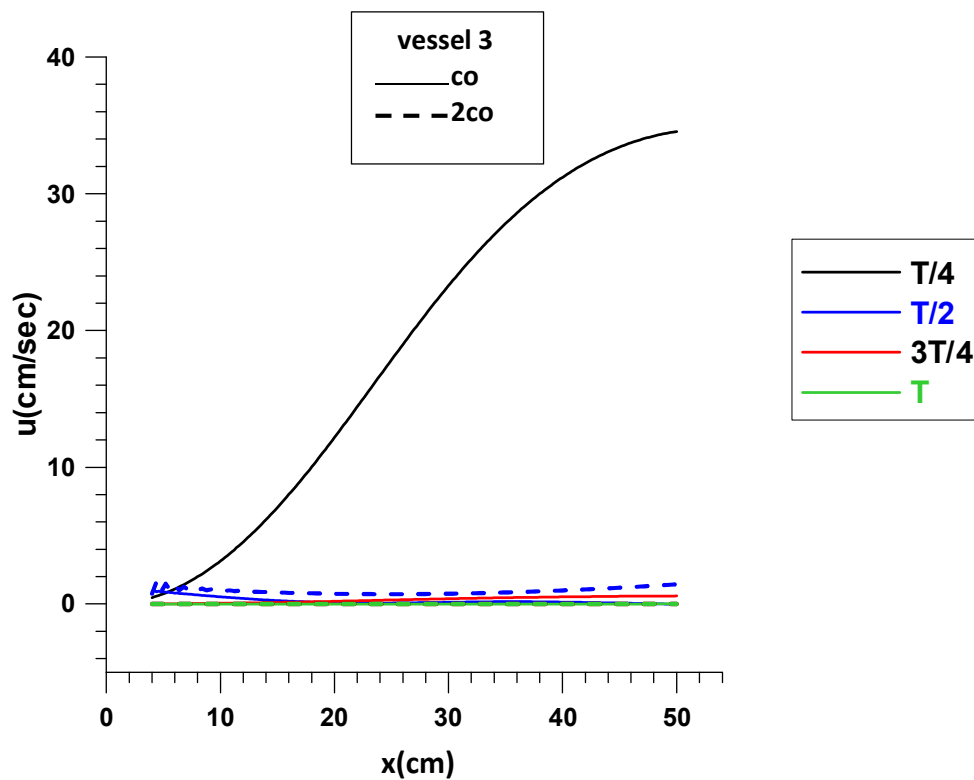
Σχήμα 3.71 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 2 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



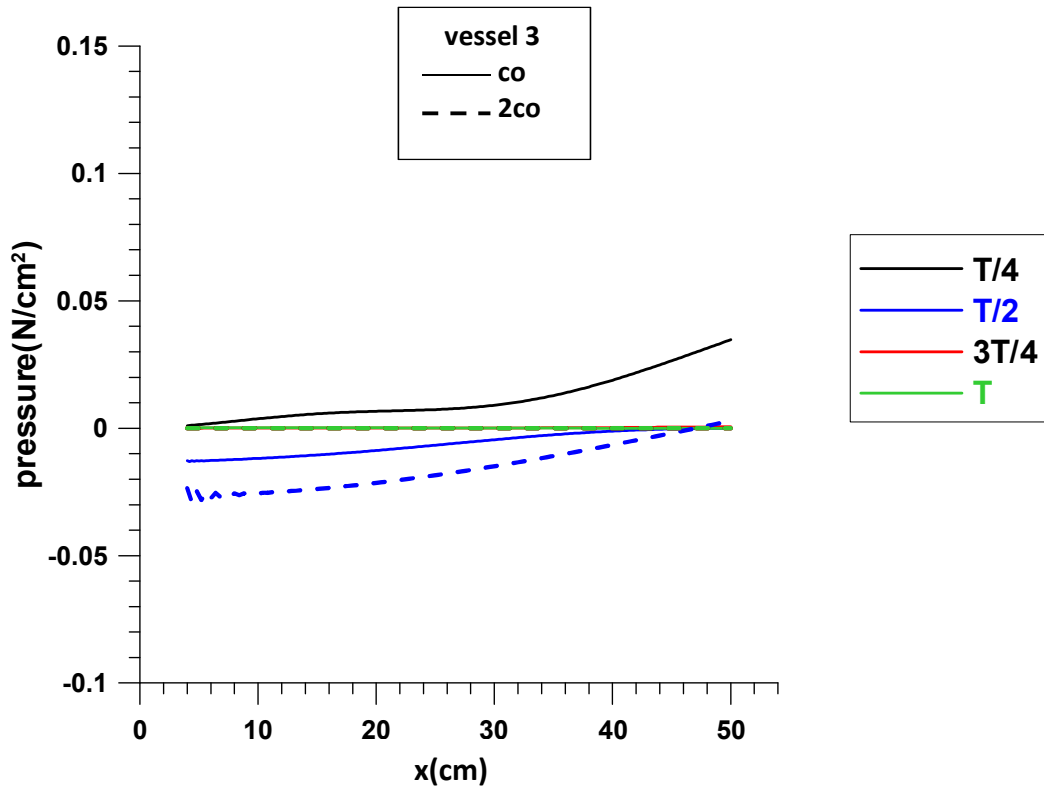
Σχήμα 3.72 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 2 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



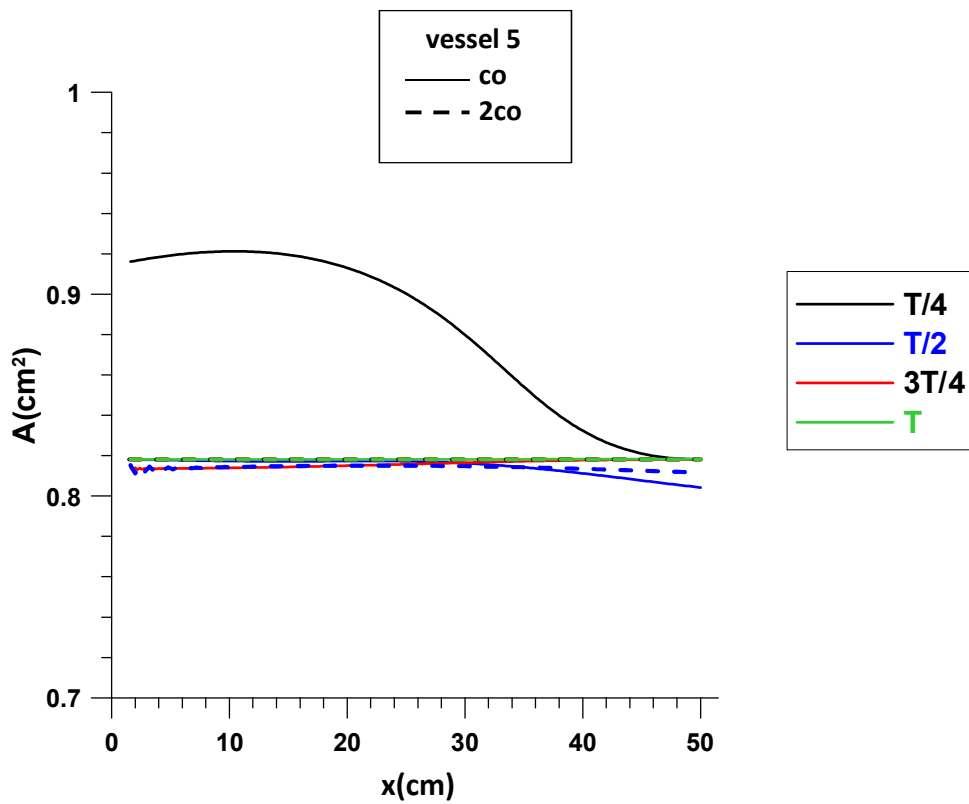
Σχήμα 3.73 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 3 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



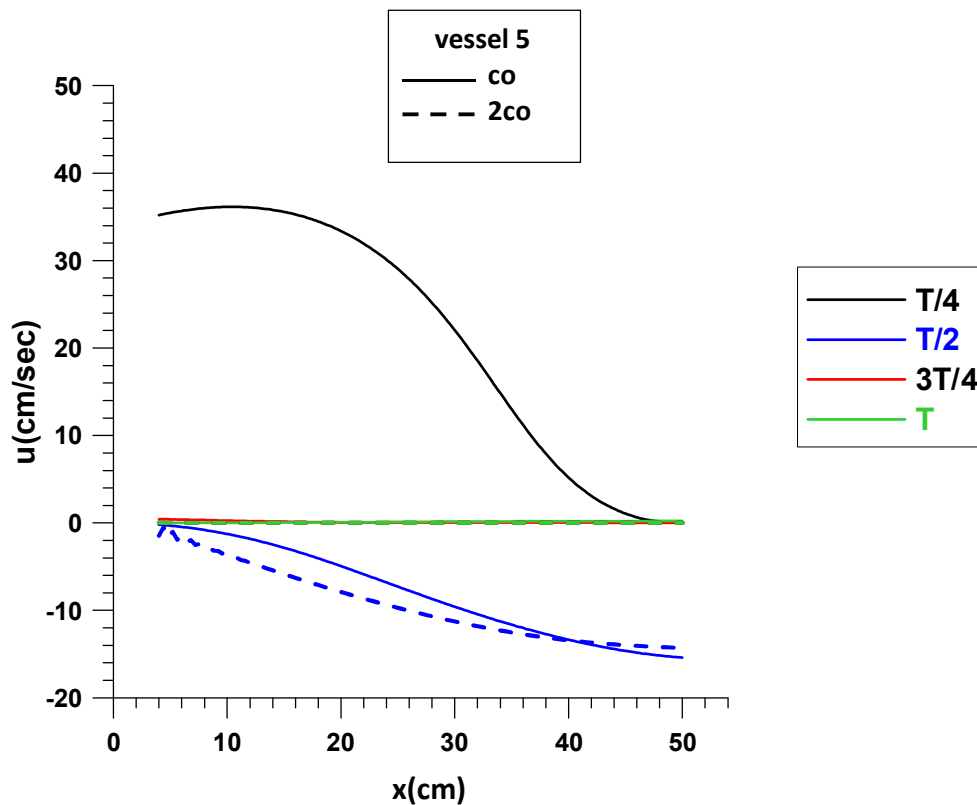
Σχήμα 3.74 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 3 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



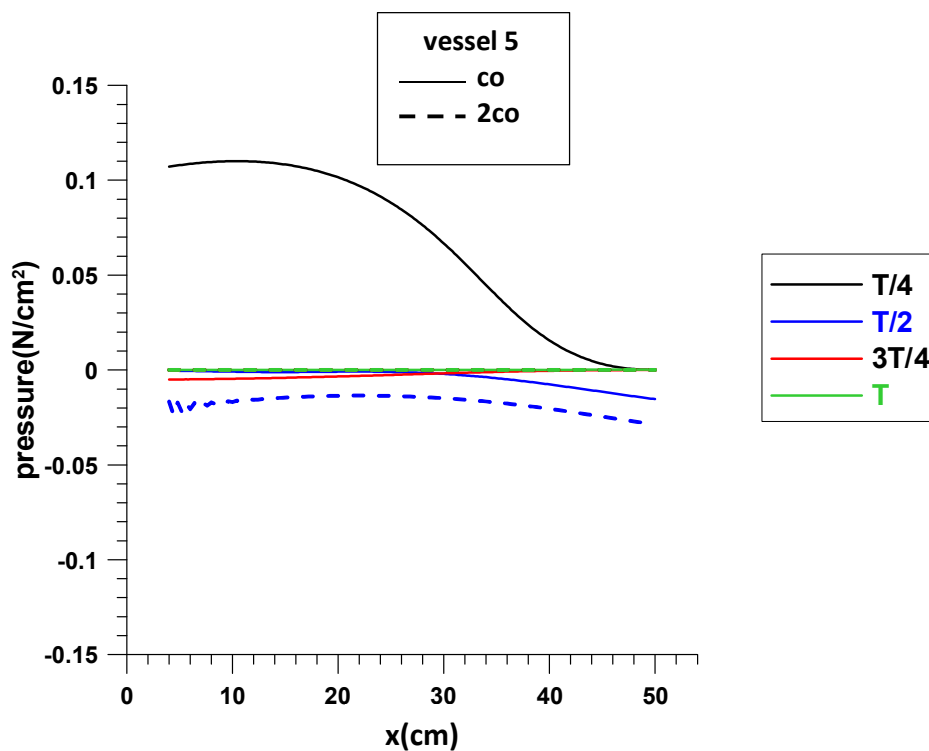
Σχήμα 3.75 Η πίεση συναρτήσσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 3 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



Σχήμα 3.76 Η διατομή συναρτήσσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 5 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



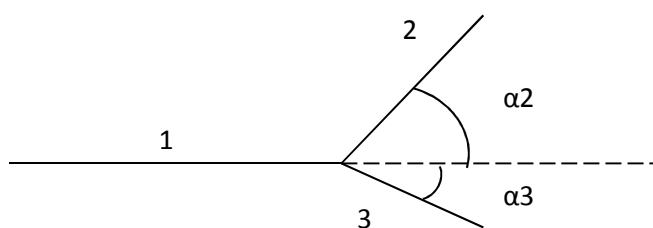
Σχήμα 3.77 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 5 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.



Σχήμα 3.78 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο αγγείο 5 για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.

3.5 Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης

Θεωρούμε την περίπτωση της διακλάδωσης(Σχήμα3.79):



Σχήμα 3.79 Σχηματική παράσταση των γωνιών της διακλάδωσης

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε 3 αγγεία, όπου κάθε αγγείο είναι μήκους 10cm, πάχους $h=0,05\text{cm}$, μέτρου ελαστικότητας $E=33,75\text{N/cm}^2$, ενώ η διάμετρος τους διαφέρει και είναι αντίστοιχα $D_1=1\text{cm}$, $D_2=0,8\text{cm}$ και $D_3=0,6\text{cm}$. Η πυκνότητα είναι $\rho=1\text{gr/cm}^3$. Οι συντελεστές των εξισώσεων ολικής πίεσης(παράγραφος 2.9) είναι:

$$\gamma_1=0$$

$$\gamma_2=2$$

$$\gamma_3=2,$$

ενώ οι υπολογισμοί γίνονται για δύο ομάδες γωνιών. Στην πρώτη:

$$\alpha_1=0$$

$$\alpha_2=0$$

$$\alpha_3=0$$

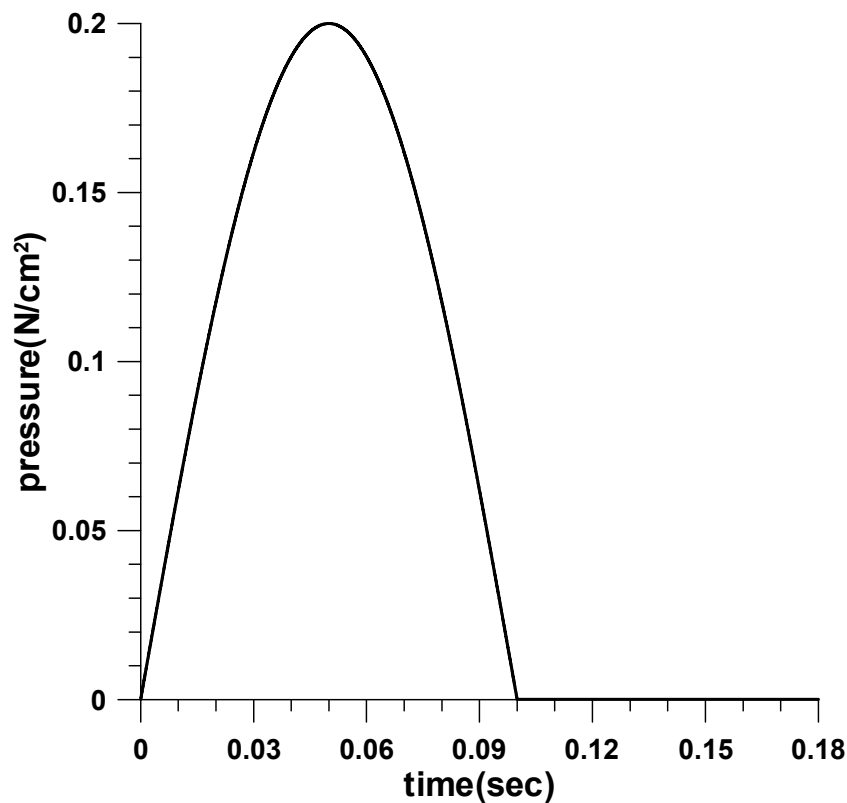
και στην δεύτερη:

$$\alpha_1=0$$

$$\alpha_2=\pi/6$$

$$\alpha_3=\pi/4$$

Στο εγγύς άκρο του πατρικού αγγείου δίνεται ο ακόλουθος παλμός πίεσης:

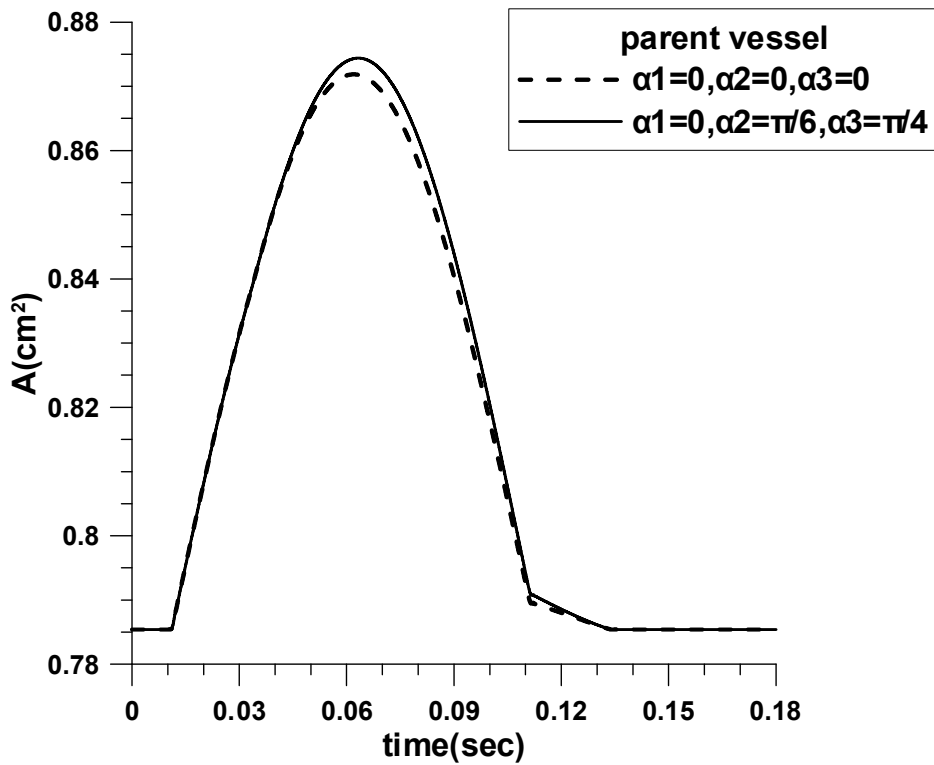


Σχήμα 3.80 Παλμός πίεσης

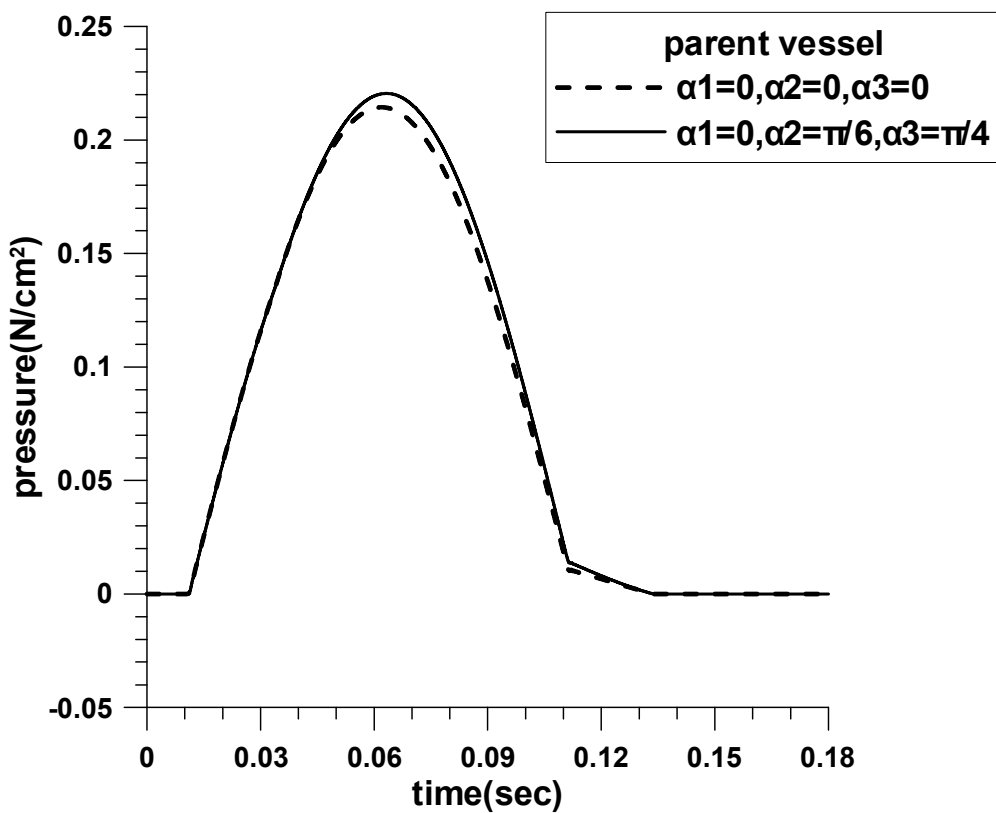
1. Στο άπω άκρο των θυγατρικών αγγείων θεωρούμε οριακές συνθήκες μη-ανάκλασης(non-reflecting), θεωρώντας ότι ο όρος $u-4(c-c_0)$ παραμένει σταθερός και ίσος με την αρχική του τιμή, δηλαδή $u-4(c-c_0) = 0$ (αγγείο απείρου μήκους όπου το οδεύον κύμα πίεσης δεν φτάνει στο άπω άκρο). Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.6.2.1).

2. Για το εγγύς άκρο του αγγείου θεωρούμε ότι ο όρος $u+4(c-c_0)$ υπολογίζεται από την σχέση (2-67), εφόσον δίνεται παλμός πίεσης. Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.6.1.1).

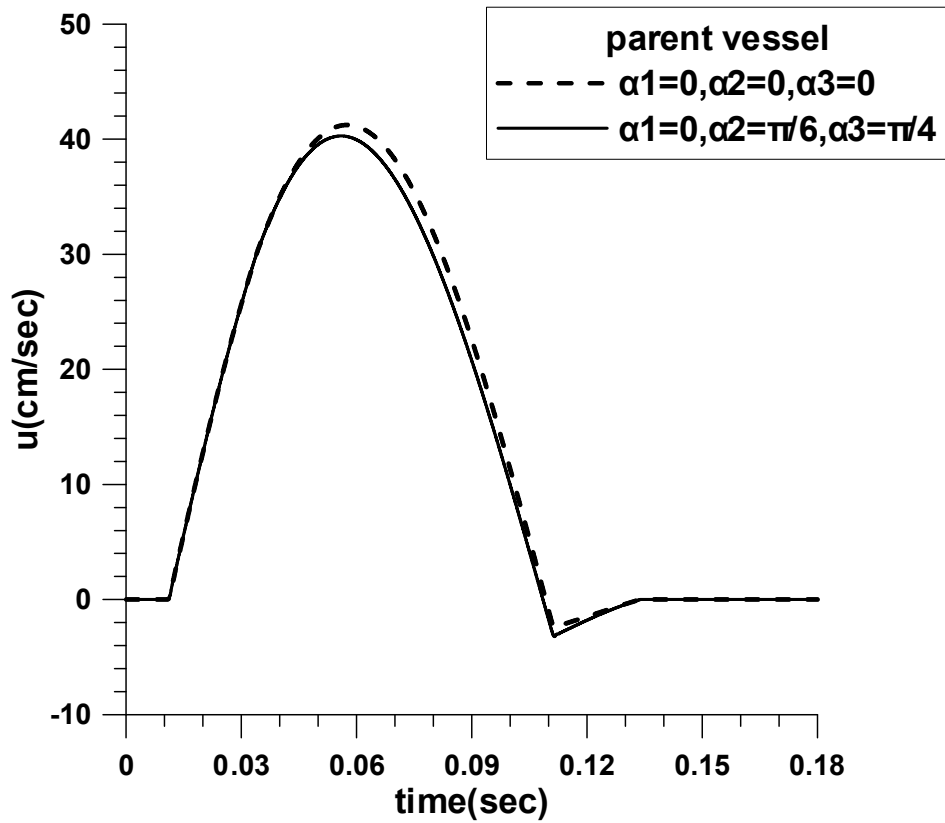
Παρατηρούμε πως στο πατρικό αγγείο η ανάκλαση είναι μεγαλύτερη, γεγονός που συνεπάγεται μία αύξηση στο επίπεδο της πίεσης. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει στα θυγατρικά αγγεία, όπου το κύμα που διαδίδεται είναι μικρότερης έντασης. Οι διαφορές παρ' όλα αυτά είναι μικρές μεταξύ αυτών των περιπτώσεων όπου λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των γωνιών ή όχι στα θυγατρικά αγγεία.



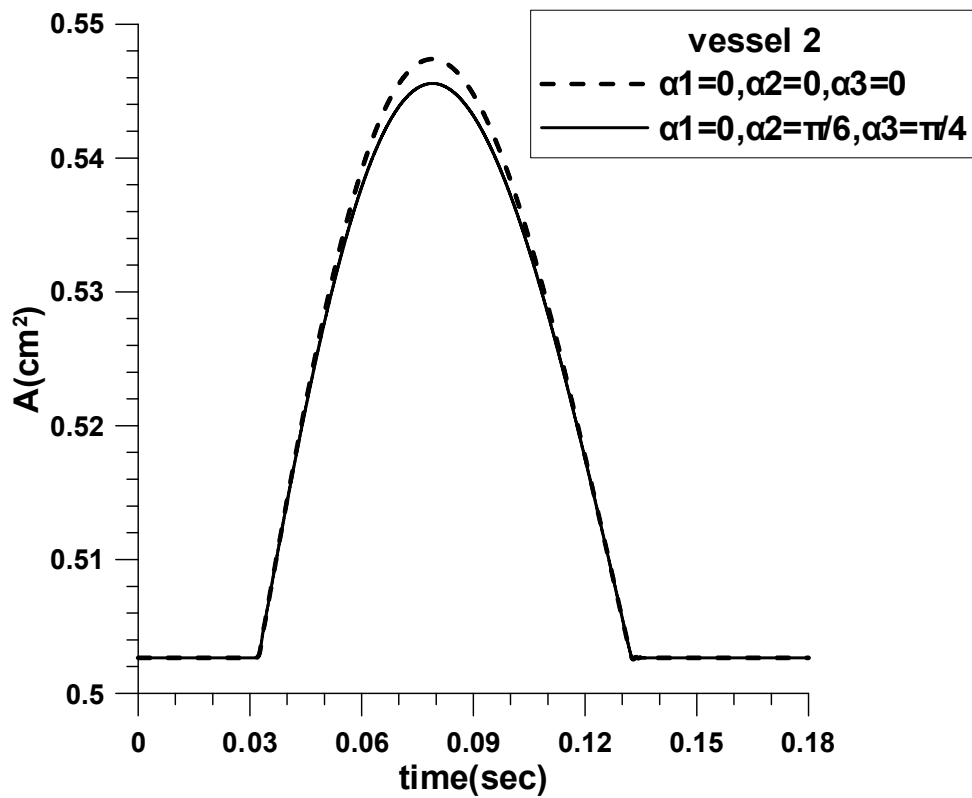
Σχήμα 3.81 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο μέσο του πατρικού αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



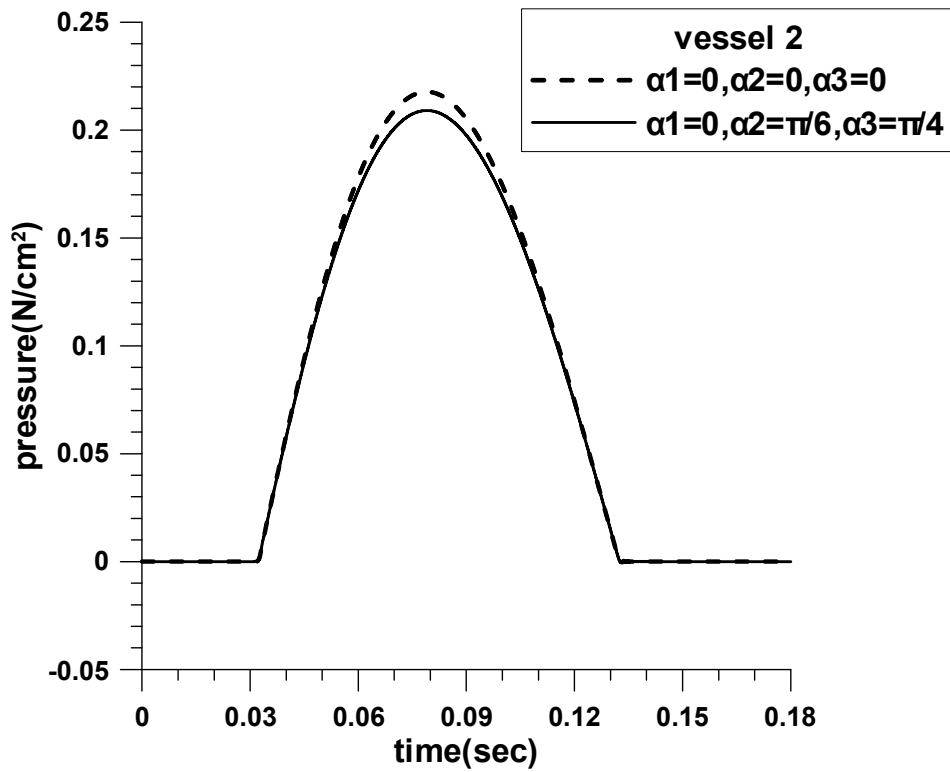
Σχήμα 3.82 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στο μέσο του πατρικού αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



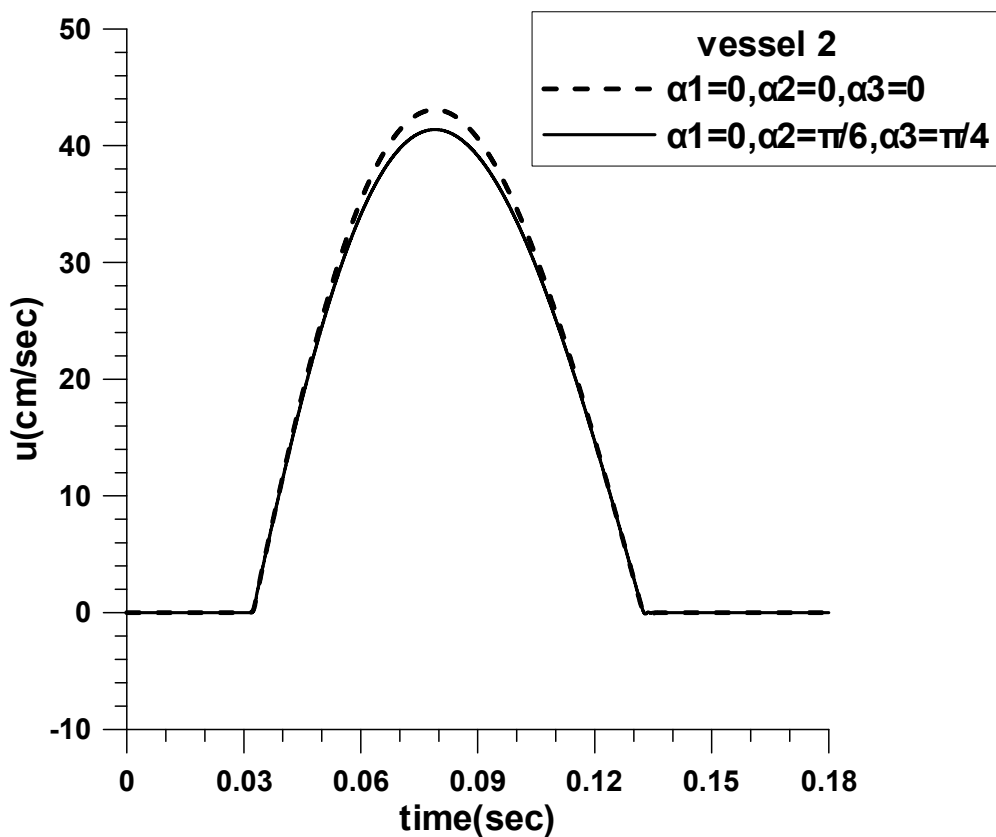
Σχήμα 3.83 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο μέσο του πατρικού αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



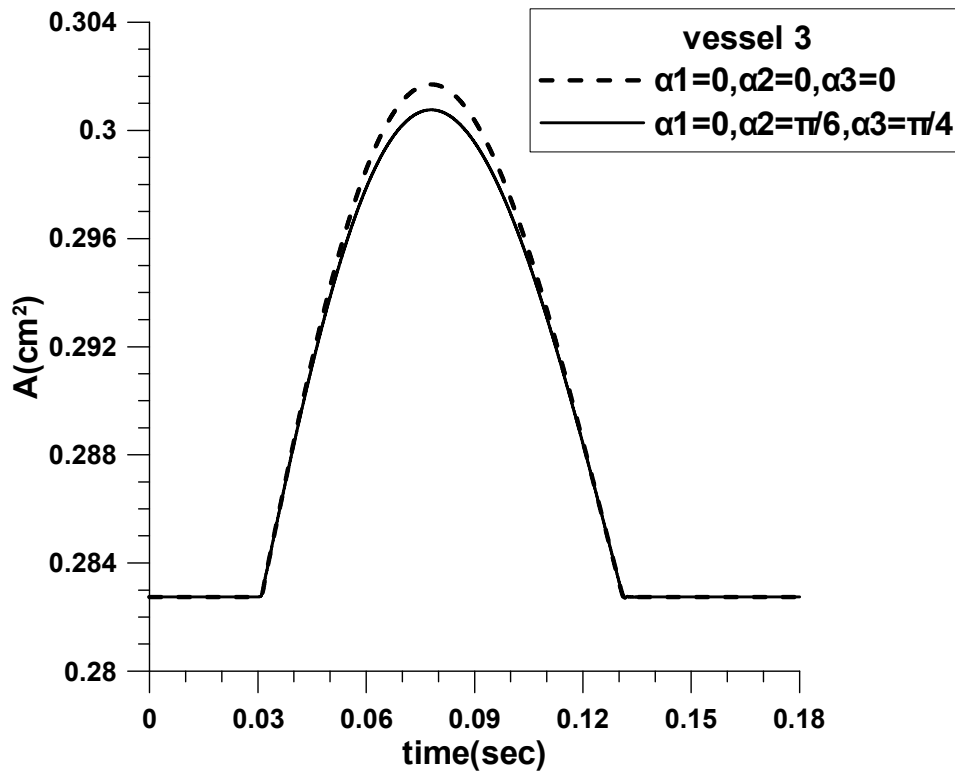
Σχήμα 3.84 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο μέσο του 2^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



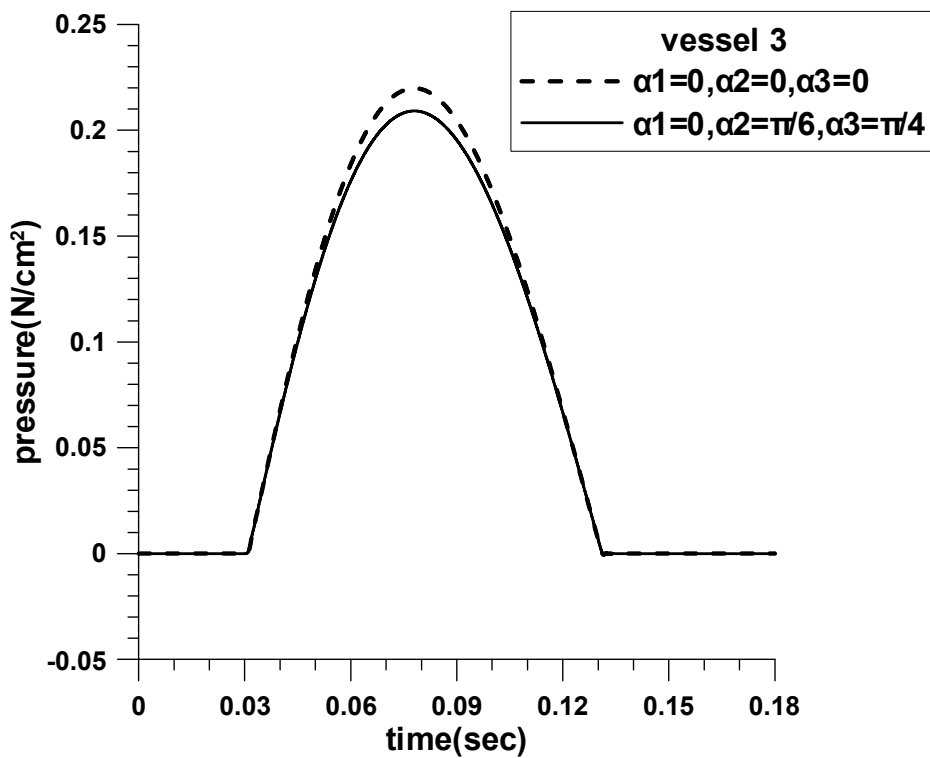
Σχήμα 3.85 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στο μέσο του 2^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



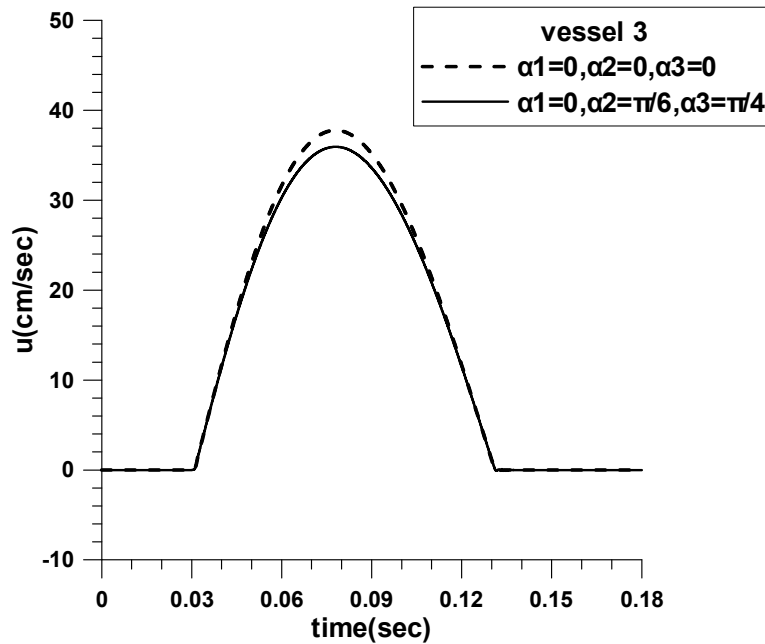
Σχήμα 3.86 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο μέσο του 2^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών



Σχήμα 3.87 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στο μέσο του 3^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών

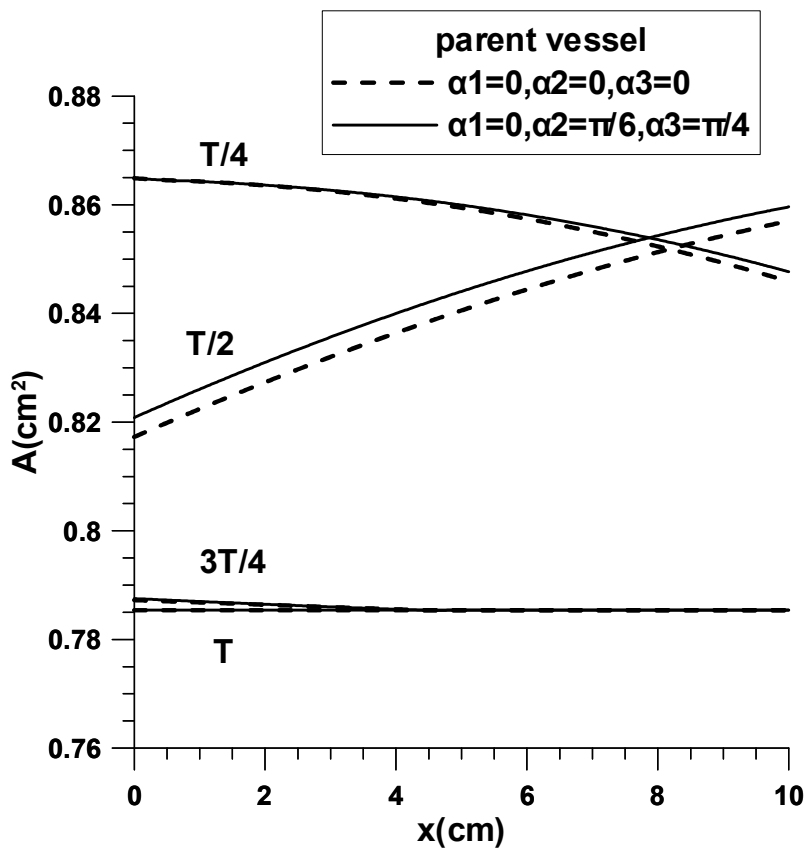


Σχήμα 3.88 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στο μέσο του 3^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών

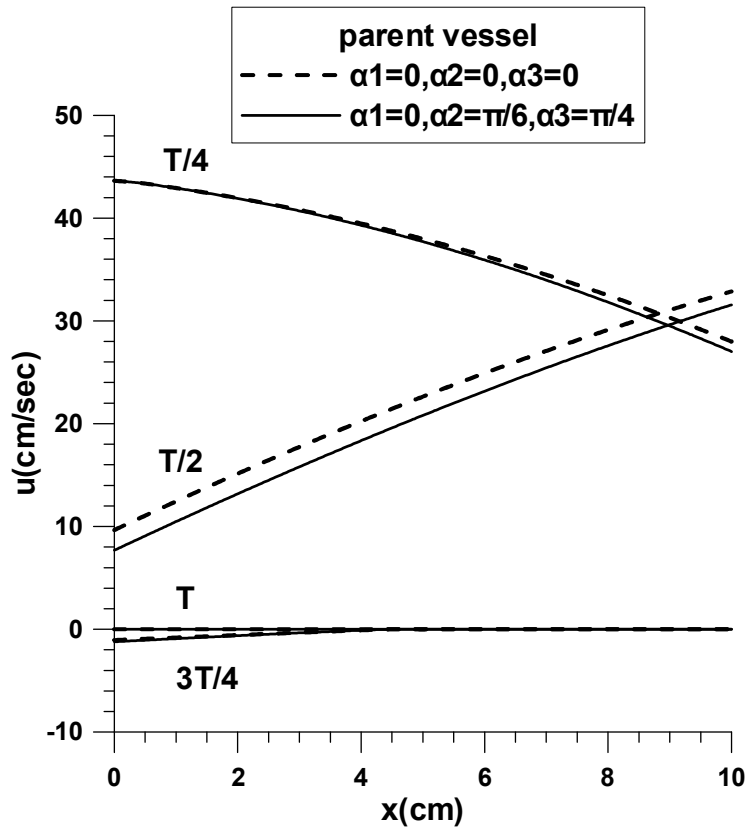


Σχήμα 3.89 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στο μέσο του 3^{ου} αγγείου για τις δύο ομάδες γωνιών

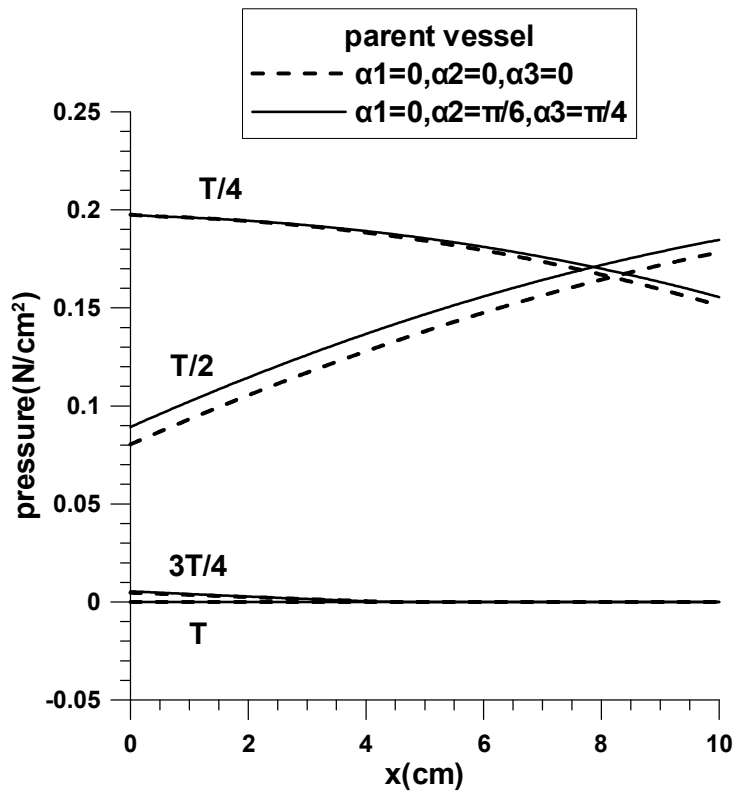
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους για τις δύο ομάδες γωνιών στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου για το πατρικό και τα θυγατρικά αγγεία.



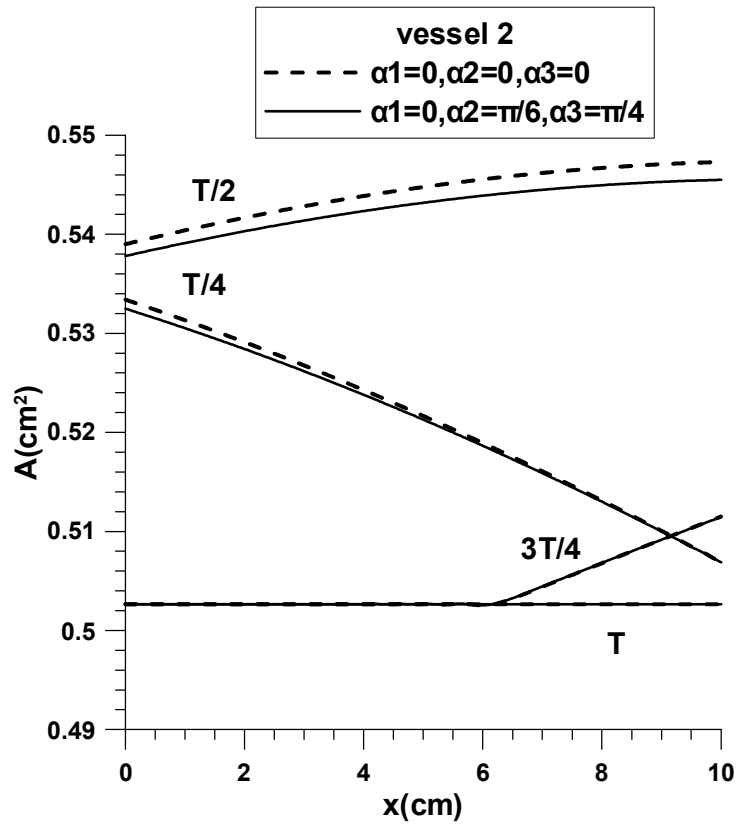
Σχήμα 3.90 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο.



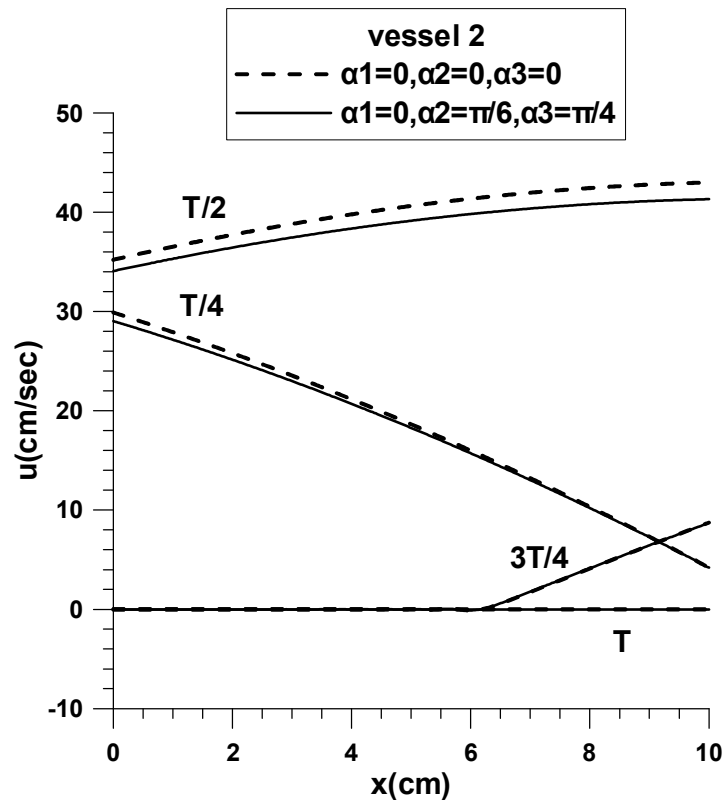
Σχήμα 3.91 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο.



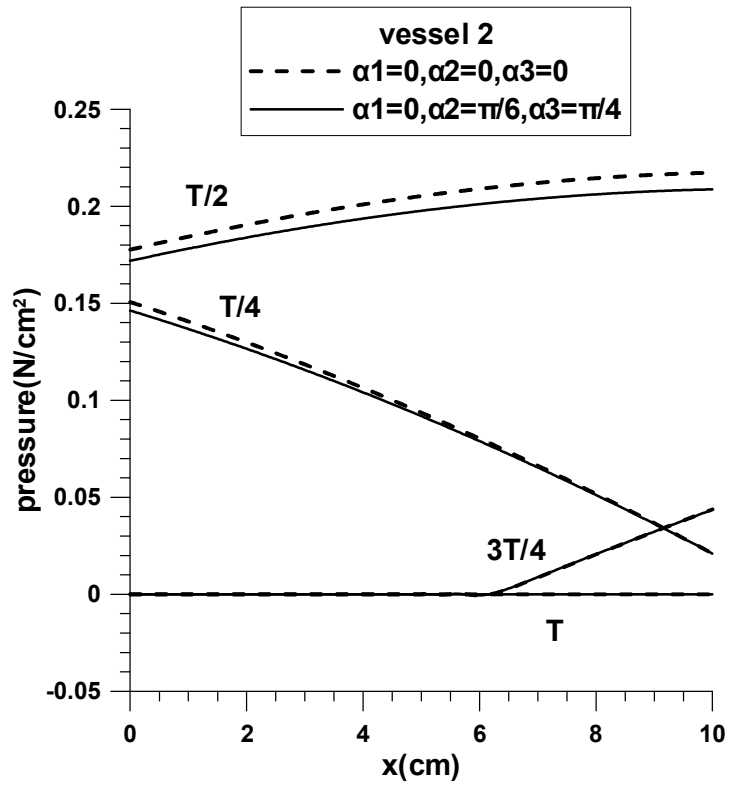
Σχήμα 3.92 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο πατρικό αγγείο.



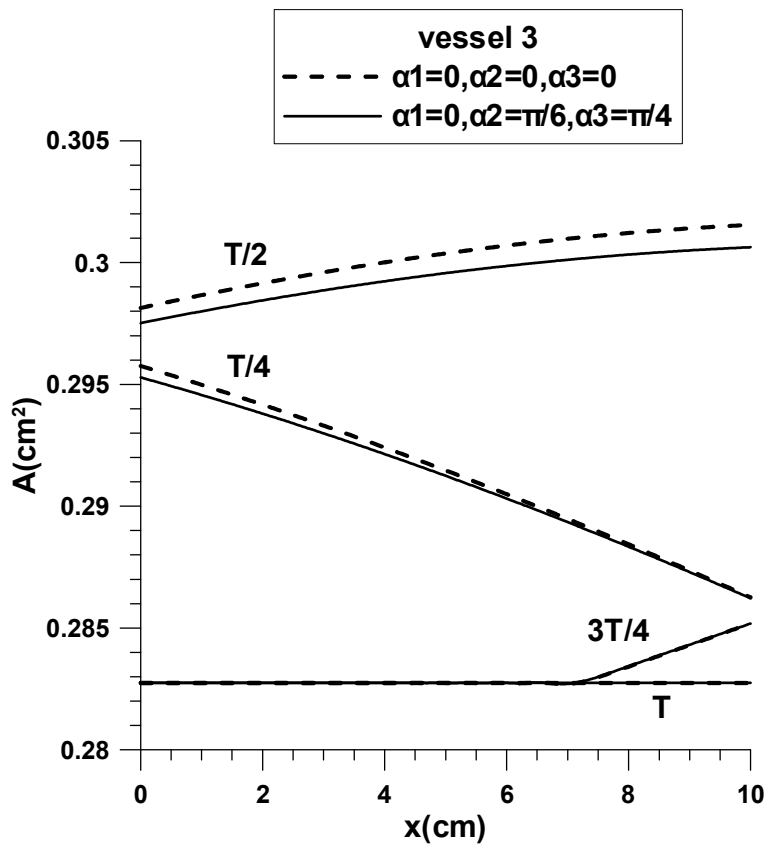
Σχήμα 3.93 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 2^ο αγγείο.



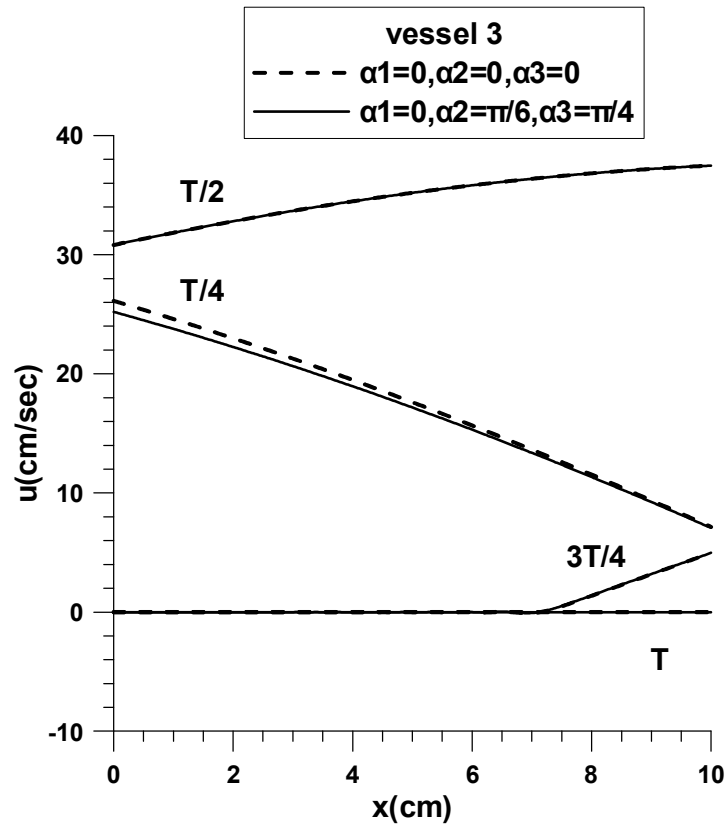
Σχήμα 3.94 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 2^ο αγγείο.



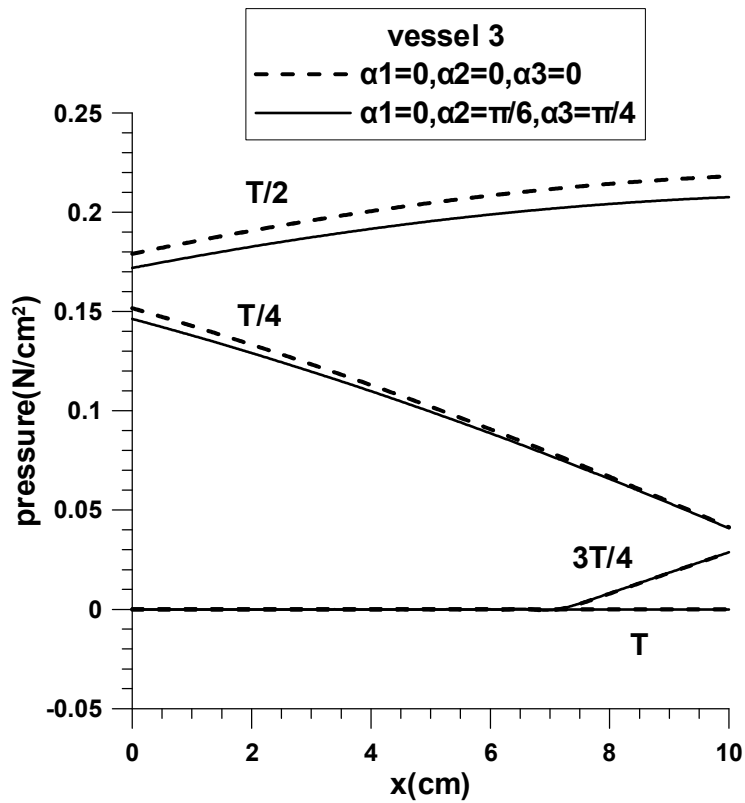
Σχήμα 3.95 Η πίεση συναρτῆσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 2^ο αγγείο.



Σχήμα 3.96 Η διατομή συναρτῆσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 3^ο αγγείο.



Σχήμα 3.97 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 3^ο αγγείο.



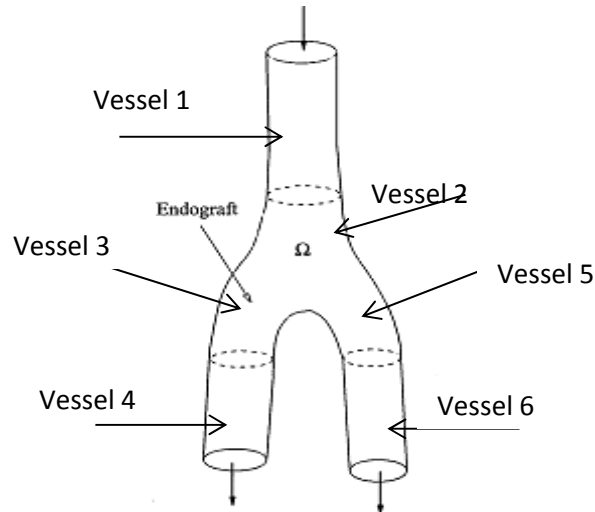
Σχήμα 3.98 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου αντίστοιχα μιας περιόδου στο 3^ο αγγείο.

3.6 Ενδαγγειακό μόσχευμα

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι να μελετηθεί η ροή στα ενδοαγγειακά μοσχεύματα(endografts).

Προκειμένου λοιπόν να γίνει η υπολογιστική μελέτη υιοθετήθηκαν δύο μέθοδοι:

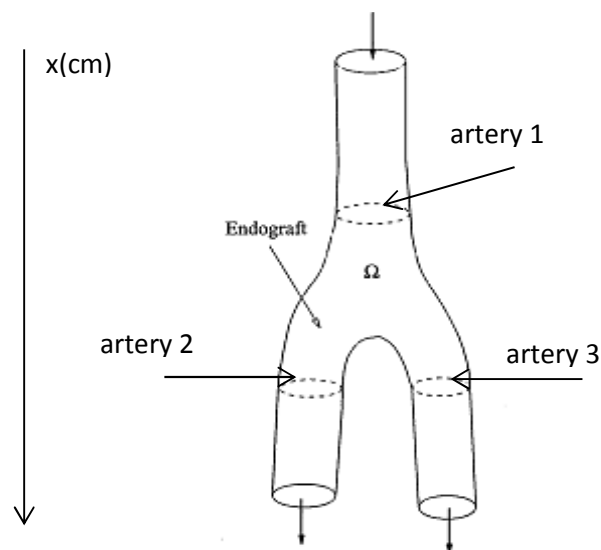
A) Θεωρούμε, όπως δείχνει και το ακόλουθο σχήμα, 6 διαφορετικά αγγεία:



Σχήμα 3.99 Σχηματική παράσταση ενδομοσχεύματος με τη μέθοδο A

Τα αγγεία 1,4 και 6 έχουν τα χαρακτηριστικά των φυσιολογικών αγγείων του οργανισμού, ενώ τα αγγεία 2,3 και 5 αποτελούν το ενδοαγγειακό μόσχευμα.

B) Θεωρούμε, όπως δείχνει και το ακόλουθο σχήμα, 3 διαφορετικές αρτηρίες:



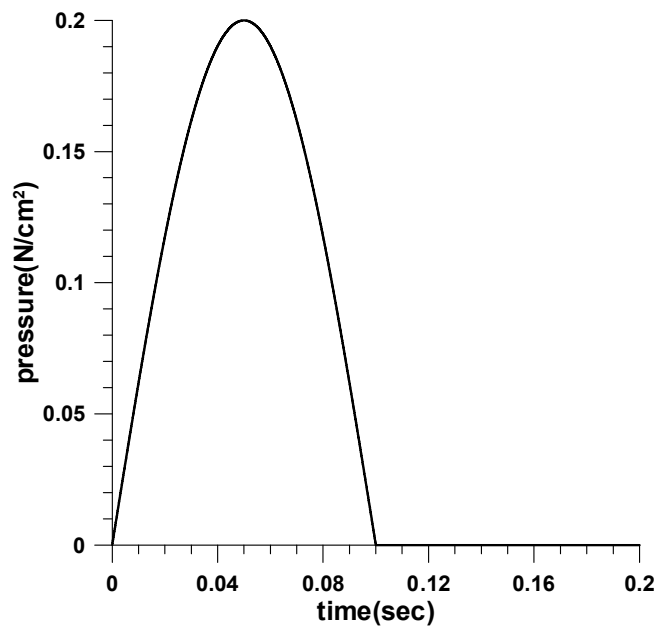
Σχήμα 3.100 Σχηματική παράσταση ενδομοσχεύματος με τη μέθοδο B

Σε αυτή την περίπτωση οι αρτηρίες 1,2 και 3 αντιμετωπίζονται ως αρτηρίες μη ενιαίων ελαστικών ιδιοτήτων.

Ισχύουν τα εξής:

Τα μήκη των φυσιολογικών αγγείων 1,4 και 6 είναι $L_{normal}=10\text{cm}$, ενώ τα μήκη των αγγείων του ενδομοσχεύματος 2,3 και 5 είναι $L_{end}=5\text{cm}$. Οι αρτηρίες 1,2 και 3 συνεπώς έχουν μήκος η καθεμία 15cm . Η διάμετρος των αγγείων 1 και 2 της πρώτης περίπτωσης ή της αρτηρίας 1 της δεύτερης αντίστοιχα είναι $1,2\text{cm}$. Η διάμετρος των αγγείων 3 και 4 της πρώτης περίπτωσης ή της αρτηρίας 2 της δεύτερης αντίστοιχα είναι $0,8\text{cm}$. Τέλος, η διάμετρος των αγγείων 5 και 6 της πρώτης περίπτωσης ή της αρτηρίας 3 της δεύτερης αντίστοιχα είναι 1cm . Το πάχος όλων των αγγείων είναι $h=0,05\text{cm}$. Σε ότι αφορά το μέτρο ελαστικότητας, τα αγγεία ή τα τμήματα των αρτηριών που αντιστοιχούν στα φυσιολογικά του οργανισμού έχουν μέτρο ελαστικότητας $E_o=100\text{N/cm}^2$, ενώ τα αγγεία ή τα τμήματα των αρτηριών που αποτελούν το ενδοαγγειακό μόσχευμα έχουν μέτρο ελαστικότητας $E_{end}=600\text{N/cm}^2$. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης του $E(x)$, όπως αναλύεται στο 2^ο κεφάλαιο(παράγραφος 2.7.1), στην περίπτωση των τριών αγγείων θεωρήσαμε $\delta=0,5\text{cm}$. Η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho=1\text{gr/cm}^3$.

Στο εγγύς άκρο δίνεται ο ακόλουθος παλμός πίεσης:



Σχήμα 3.101 Παλμός πίεσης

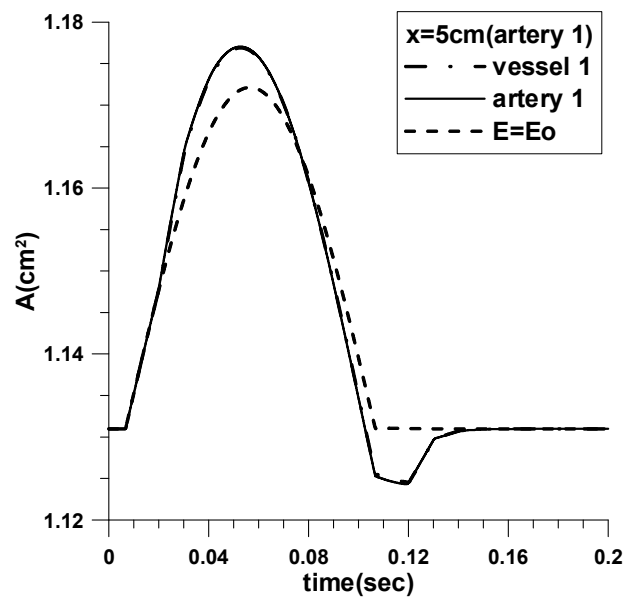
Για το εγγύς άκρο του αγγείου θεωρούμε ότι ο όρος $u+4(c-c_0)$ υπολογίζεται από την σχέση (2-67), εφόσον δίνεται παλμός πίεσης. Οι τιμές της ταχύτητας, της διατομής και της πίεσης υπολογίζονται σύμφωνα με τα λεχθέντα στην ανάλυση των οριακών συνθηκών στο 2^ο κεφάλαιο (παράγραφος 2.6.1.1).

Στην πρώτη περίπτωση οι οριακές συνθήκες εισόδου-εξόδου των αγγείων 1 και 2 και εξόδου-εισόδου των αγγείων 3 και 4 αντίστοιχα, αλλά και των 5 και 6 αντίστοιχα έχουν παρουσιαστεί στο 2^ο κεφάλαιο(παράγραφος 2.7.2).

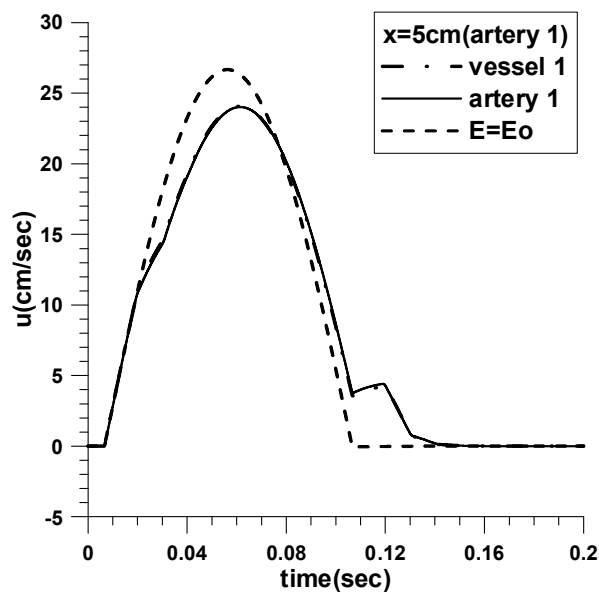
Στο άπω άκρο των θυγατρικών αγγείων 4 και 6 της πρώτης περίπτωσης ή των θυγατρικών αρτηριών 2 και 3 της δεύτερης θεωρούμε συνθήκη μη-ανάκλασης, όπως αυτή έχει αναλυθεί στο 2^ο κεφάλαιο(παράγραφος 2.6.2.1).

Μεταξύ των δύο μεθόδων (3 αρτηριών ή 6 αγγείων) δεν παρατηρούνται διαφορές. Στην ουσία η μία επιβεβαιώνεται από την άλλη.

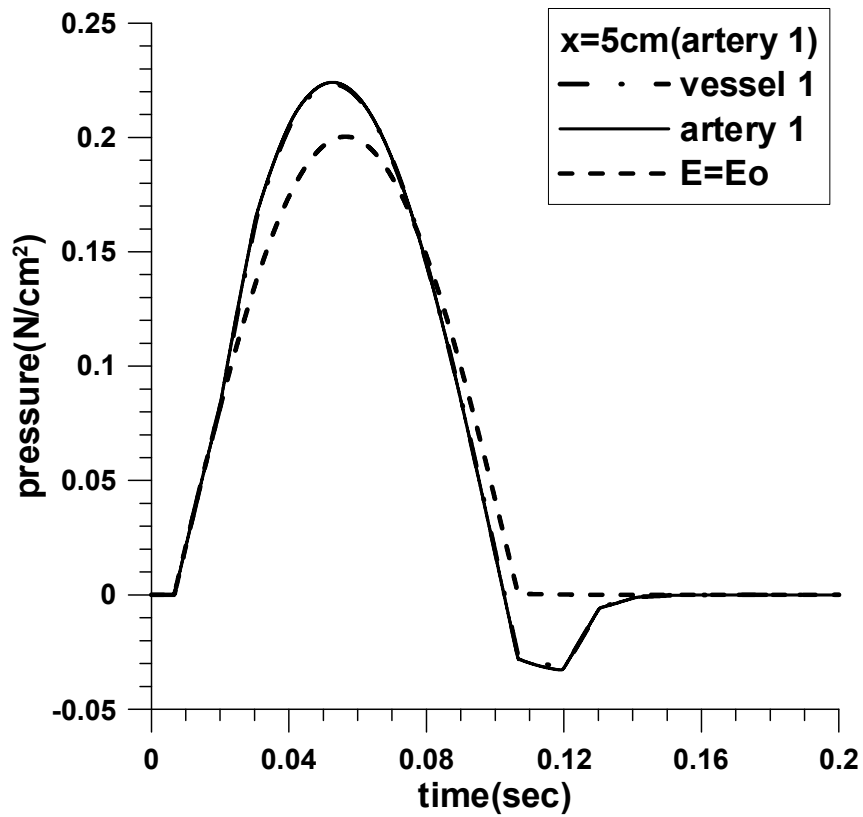
Στα διαγράμματα του φυσιολογικού αγγείου ανάντι της διακλάδωσης παρατηρούμε τόσο το ανακλώμενο κύμα από το ενδοαγγειακό μόσχευμα, όσο και το αντίστοιχο από τη διακλάδωση. Στα διαγράμματα του μοσχεύματος ανάντι της διακλάδωσης το ανακλώμενο κύμα είναι κυρίως αυτό της διακλάδωσης και κατά ένα μικρό ποσοστό της εξόδου από το ενδομόσχευμα στις λαγόνιες αρτηρίες. Στα διαγράμματα του ενδομοσχεύματος κατάντι της διακλάδωσης το μόνο ανακλώμενο κύμα είναι αυτό της εξόδου από το ενδομόσχευμα. Τέλος, στα διαγράμματα των αγγείων κατάντι της διακλάδωσης ανακλώμενο κύμα δεν υφίσταται.



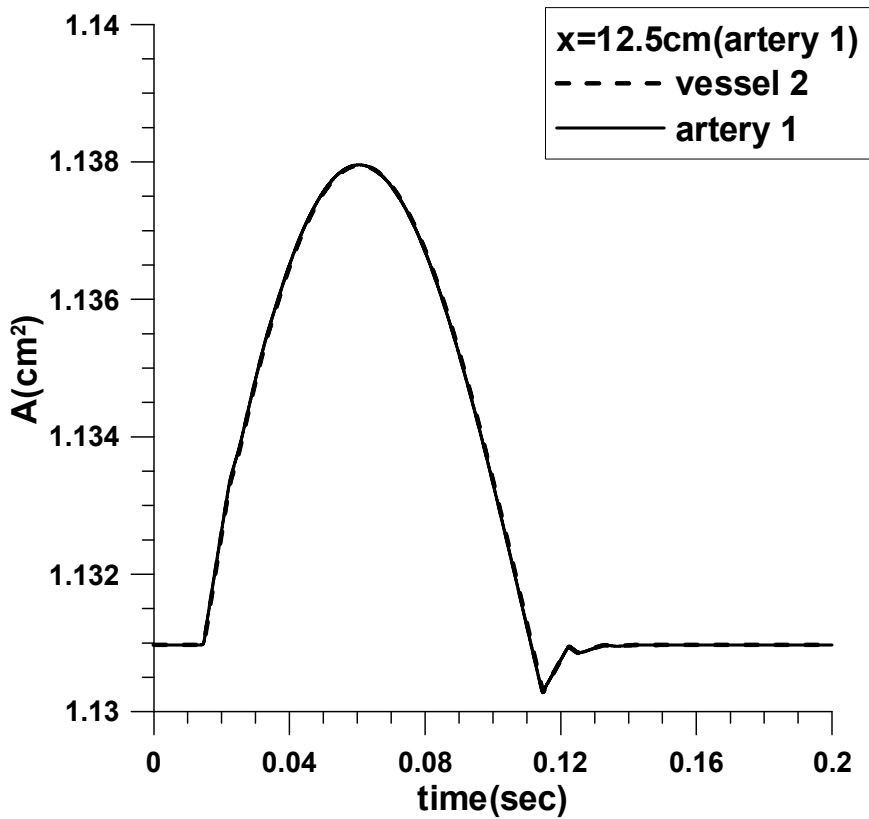
Σχήμα 3.102 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



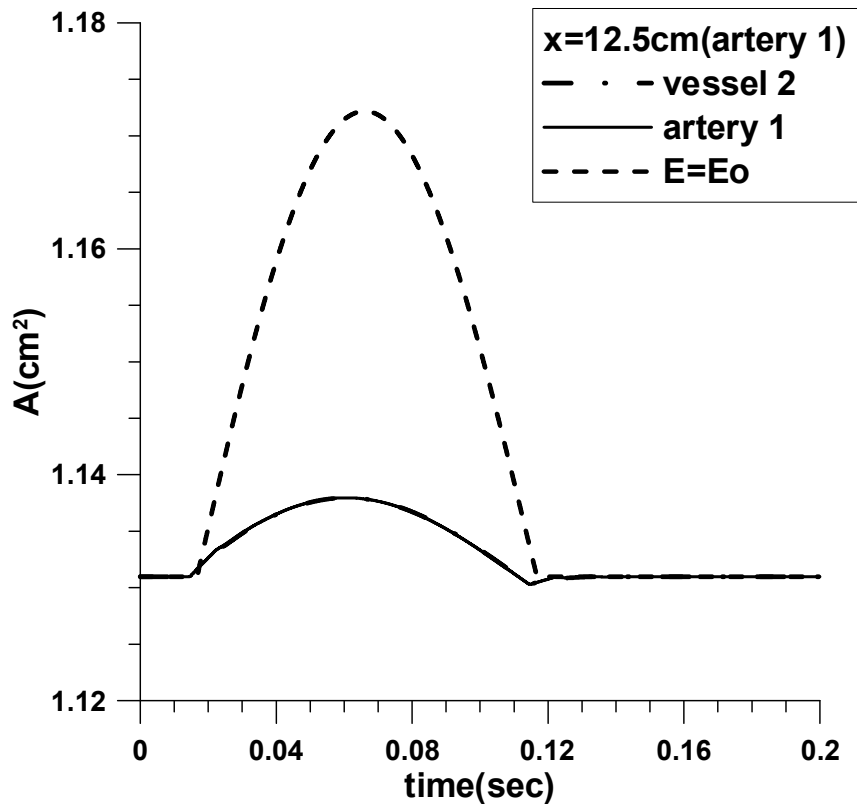
Σχήμα 3.103 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



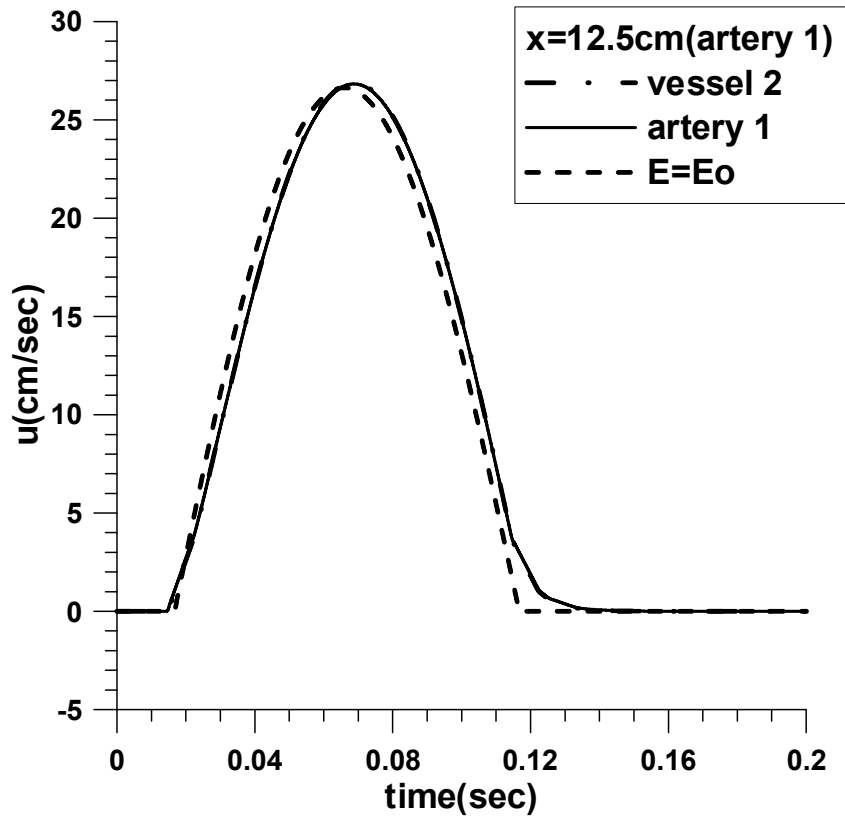
Σχήμα 3.104 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



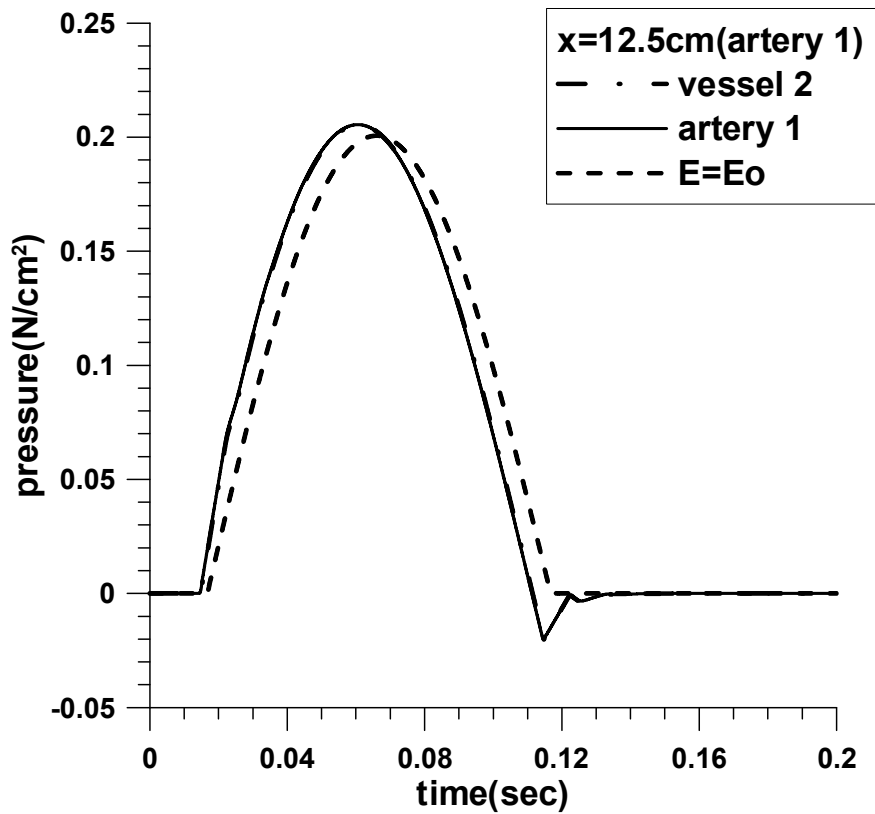
Σχήμα 3.105 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=12,5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 με τις δύο μεθόδους



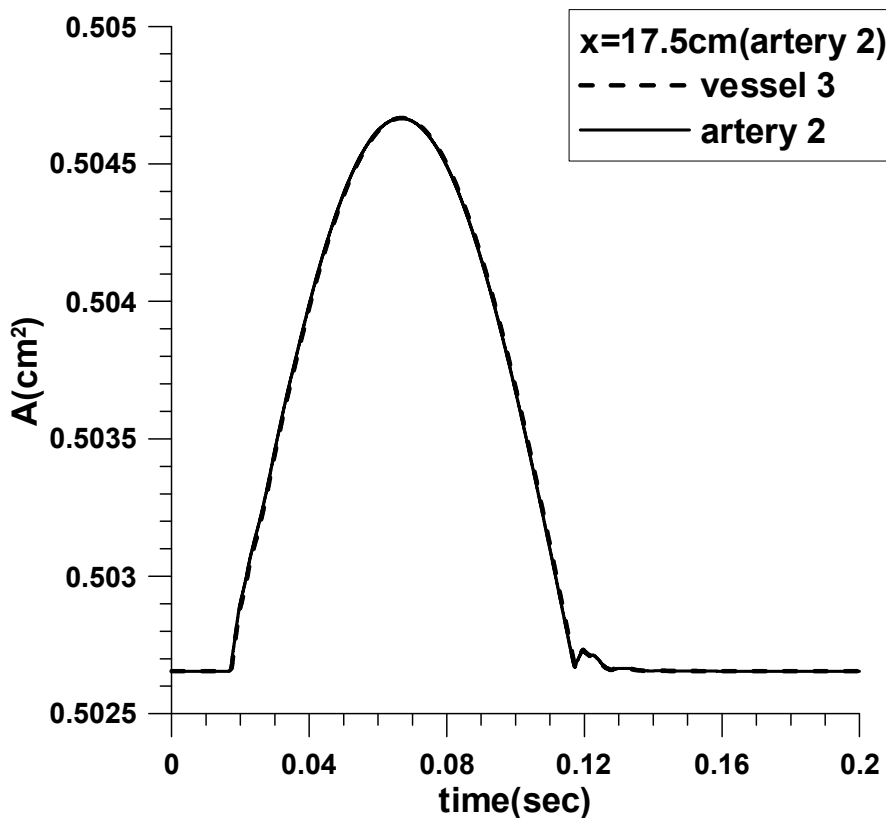
Σχήμα 3.106 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=12,5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



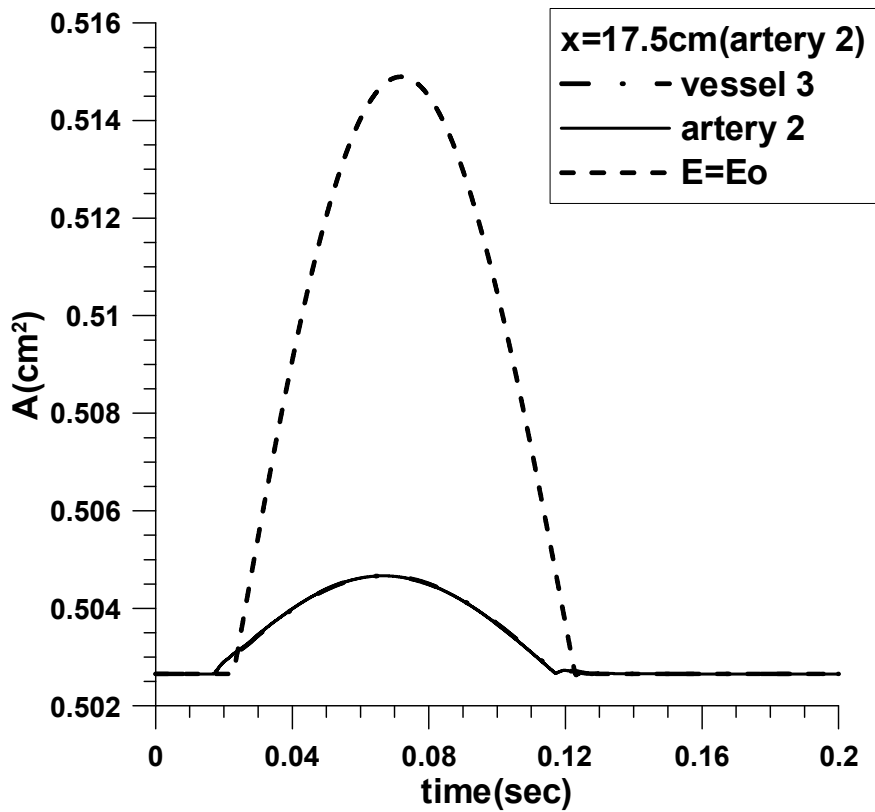
Σχήμα 3.107 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=12,5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



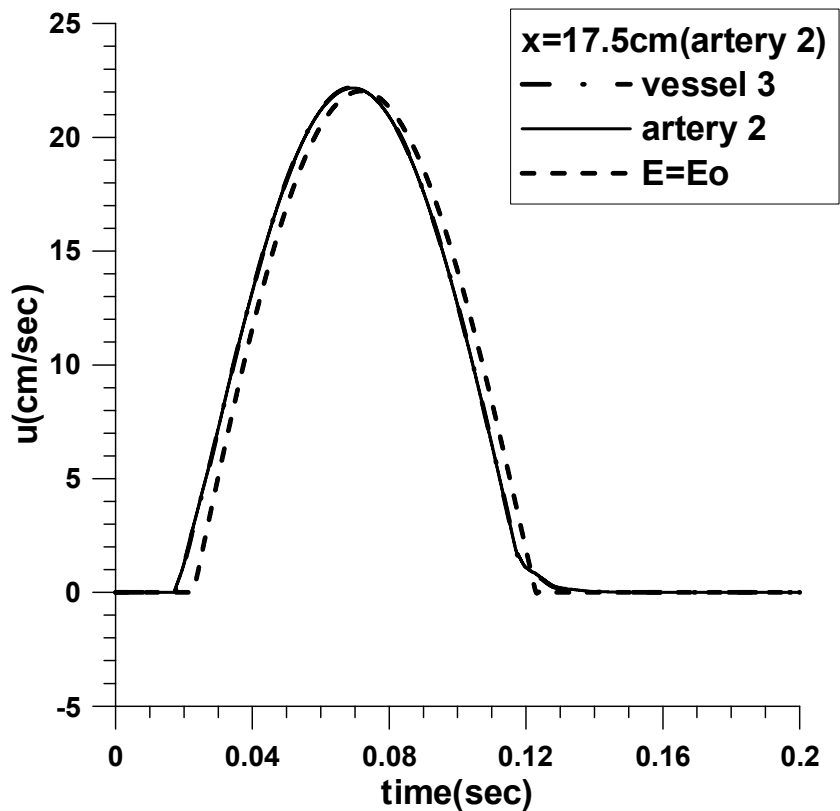
Σχήμα 3.108 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=12,5\text{cm}$ της αρτηρίας 1 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



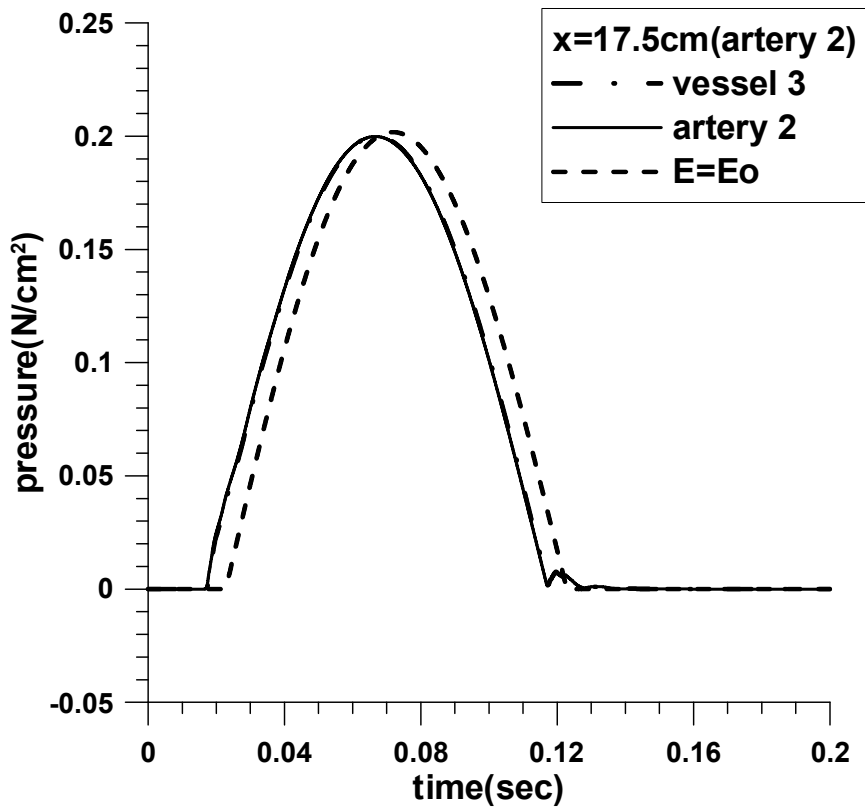
Σχήμα 3.109 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 2 με τις δύο μεθόδους



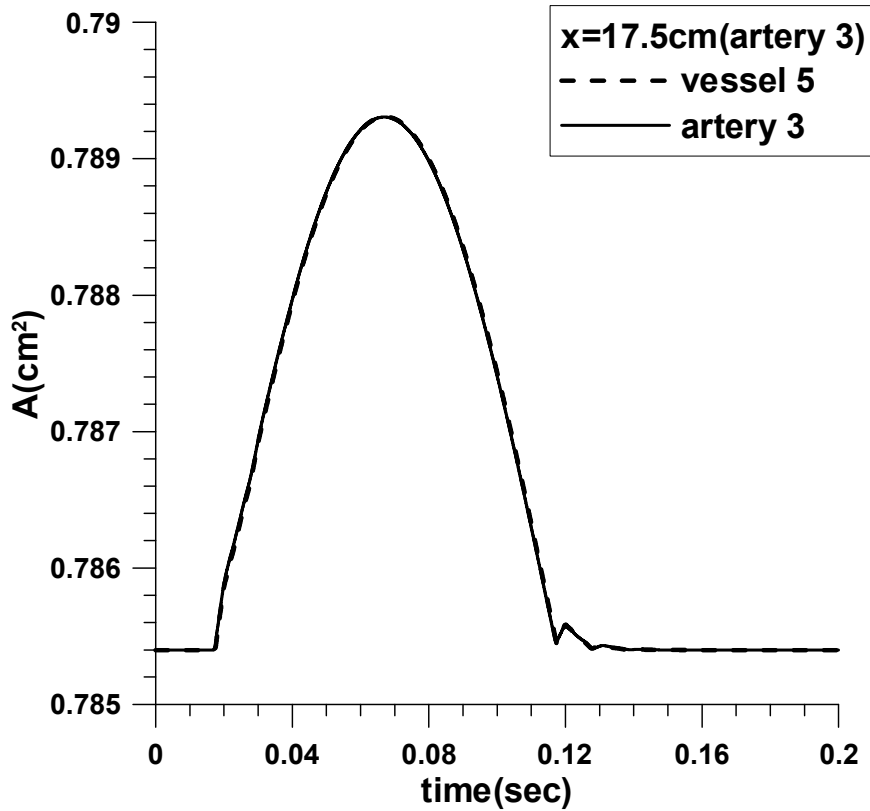
Σχήμα 3.110 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



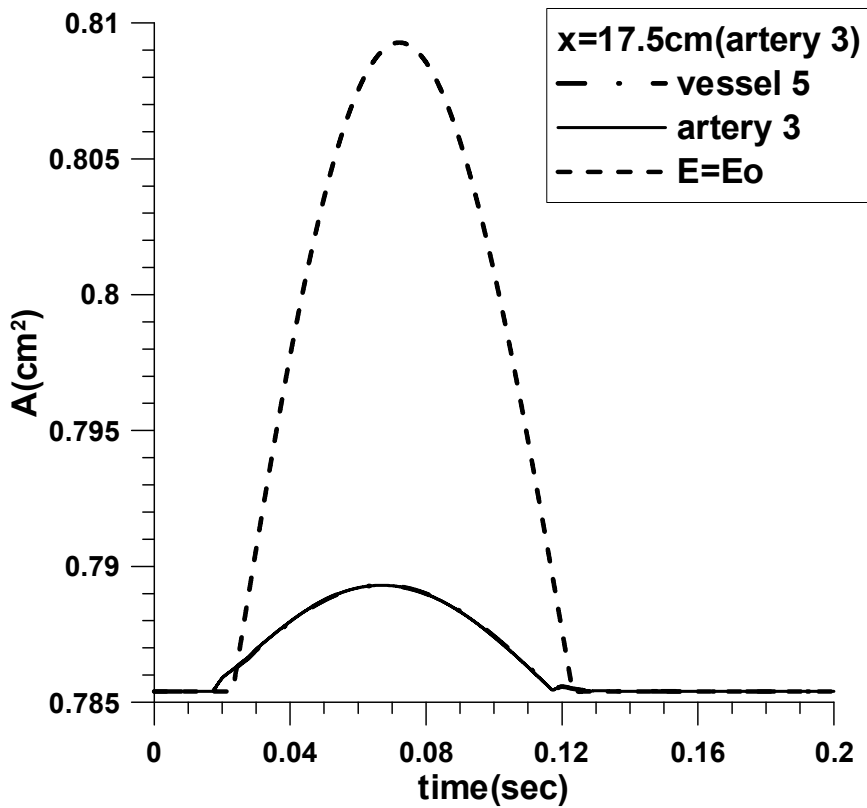
Σχήμα 3.111 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



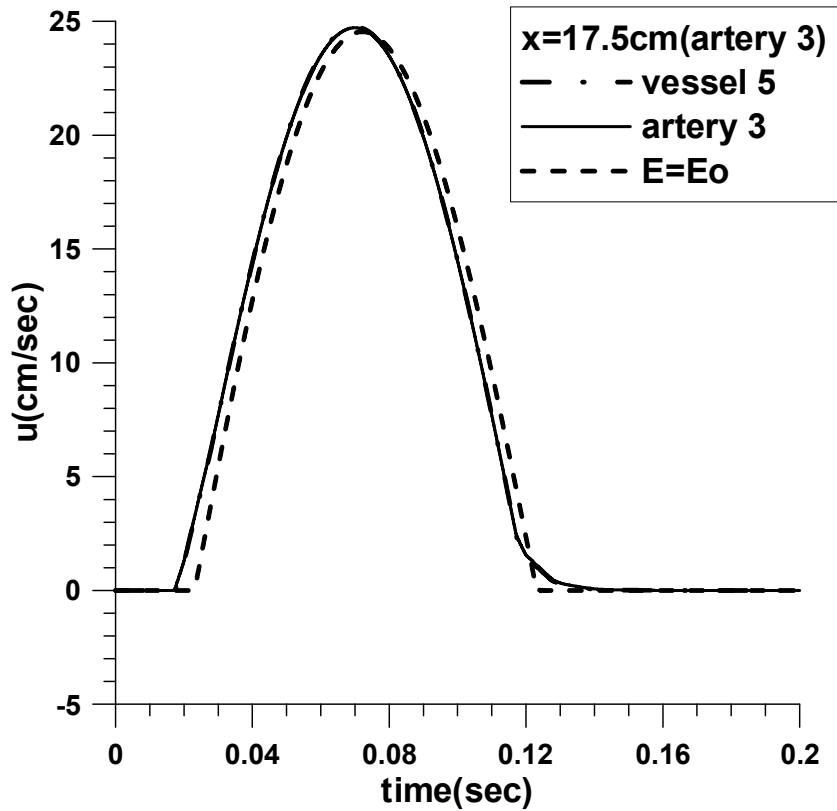
Σχήμα 3.112 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



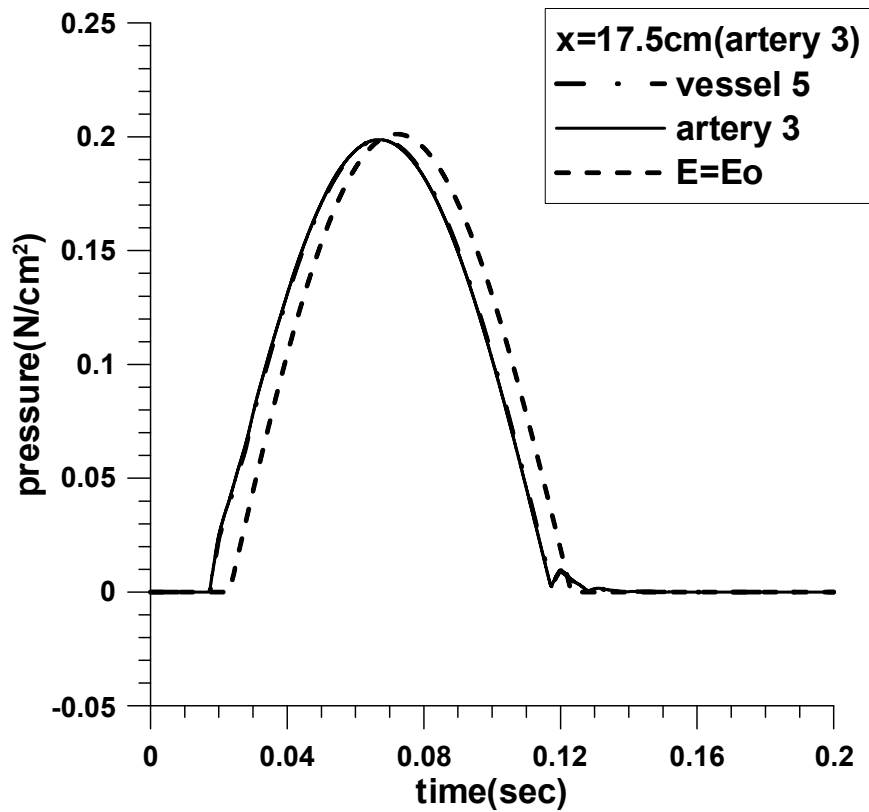
Σχήμα 3.113 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 με τις δύο μεθόδους



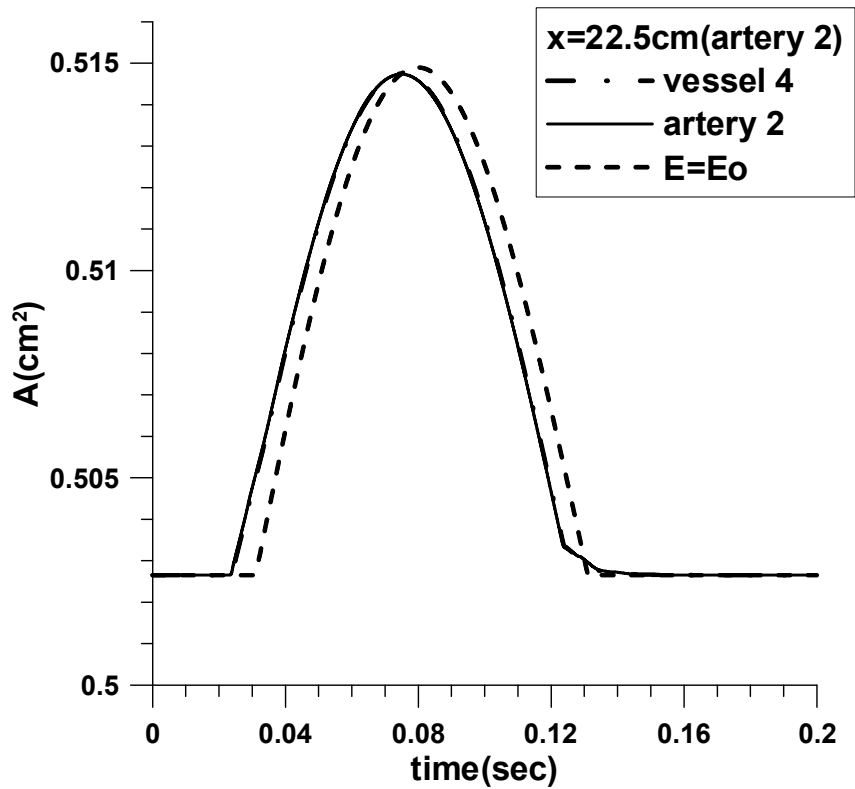
Σχήμα 3.114 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



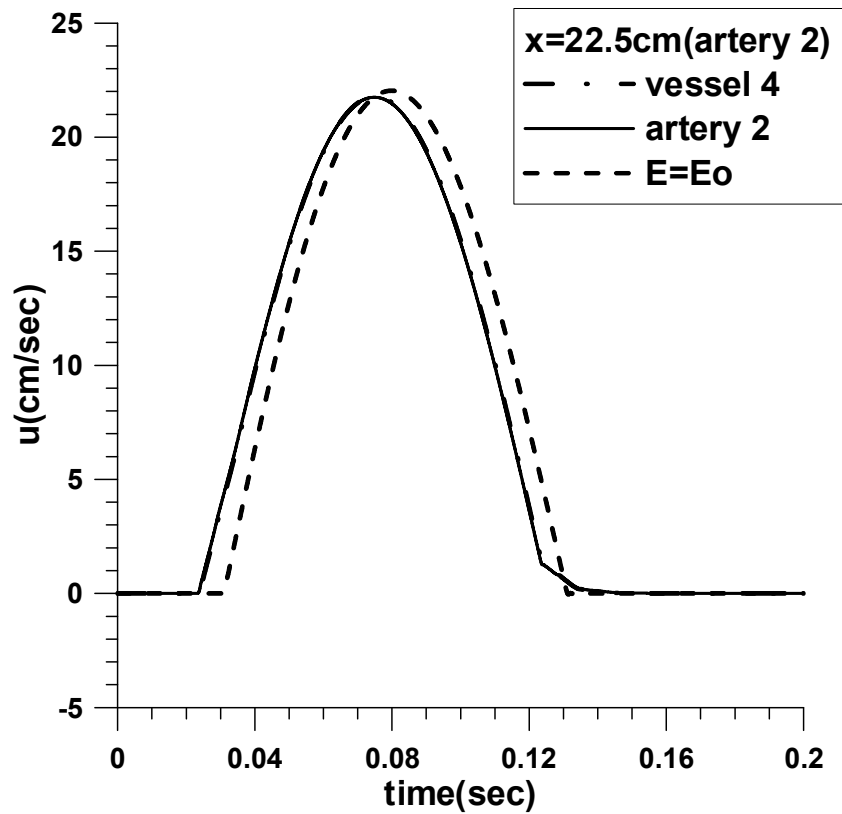
Σχήμα 3.115 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



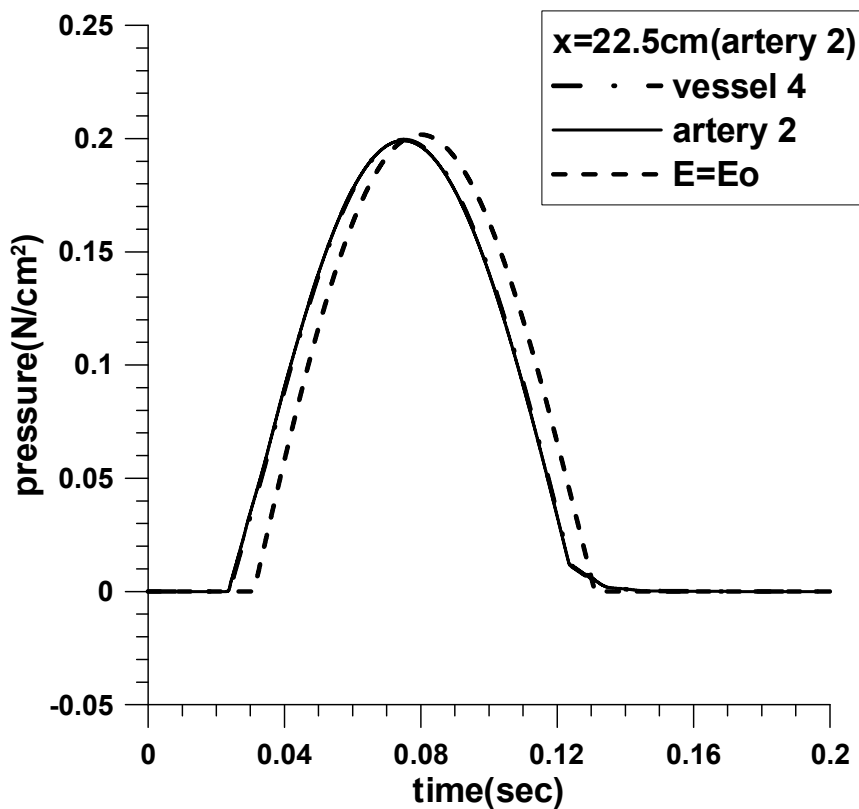
Σχήμα 3.116 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=17,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



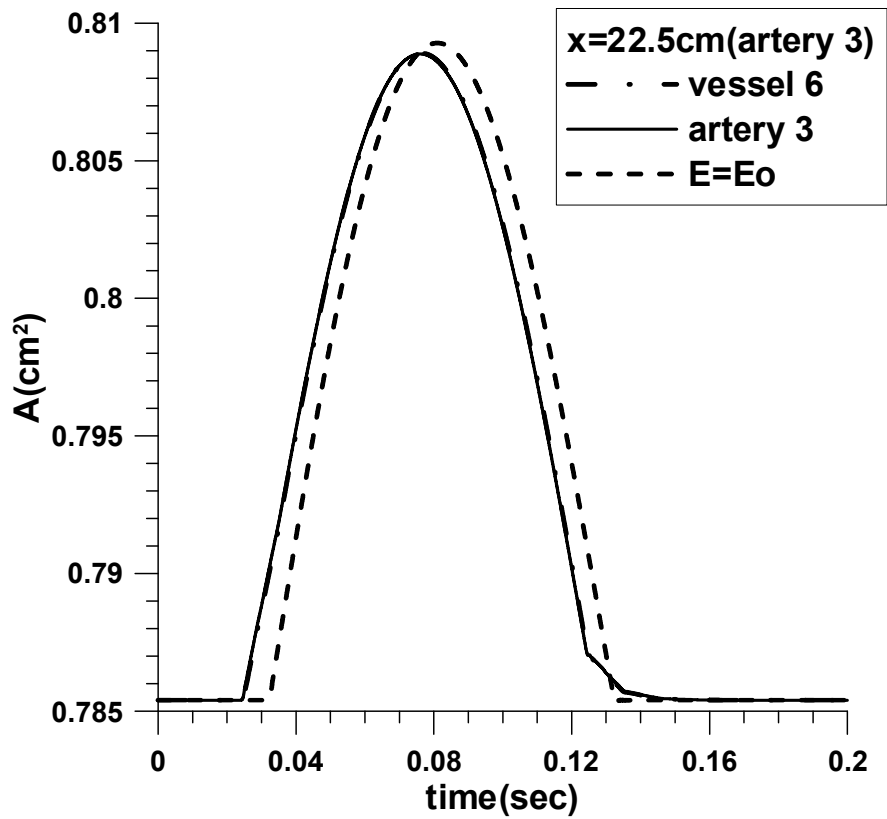
Σχήμα 3.117 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=22,5\text{cm}$ της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



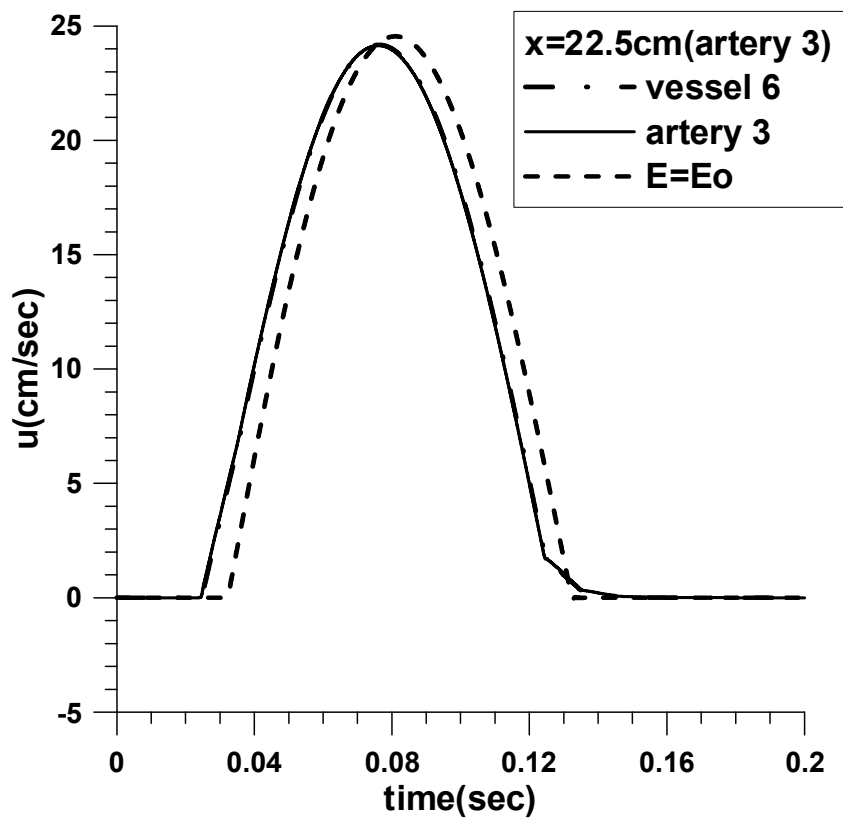
Σχήμα 3.118 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=22,5$ cm της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



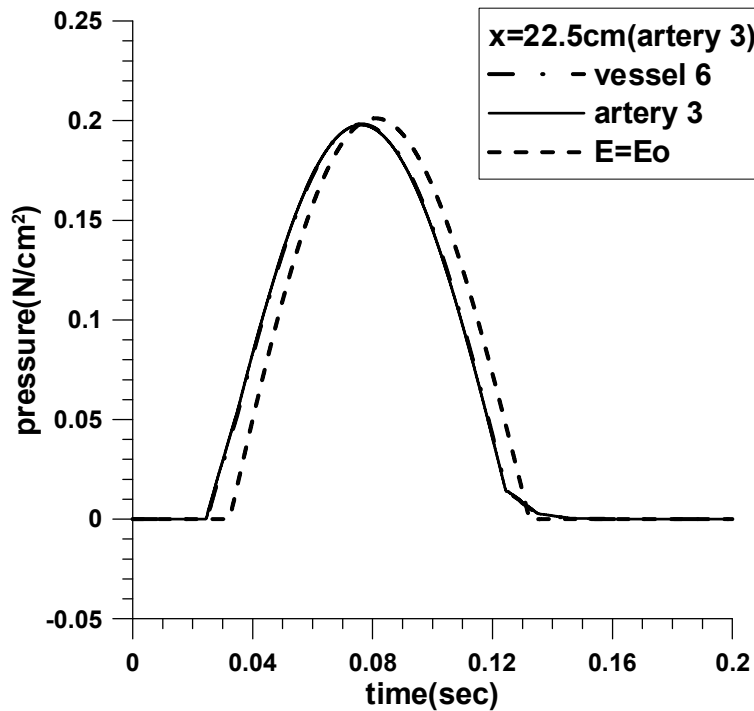
Σχήμα 3.119 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=22,5$ cm της αρτηρίας 2 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους



Σχήμα 3.120 Η χρονική εξέλιξη της διατομής στη θέση $x=22,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους

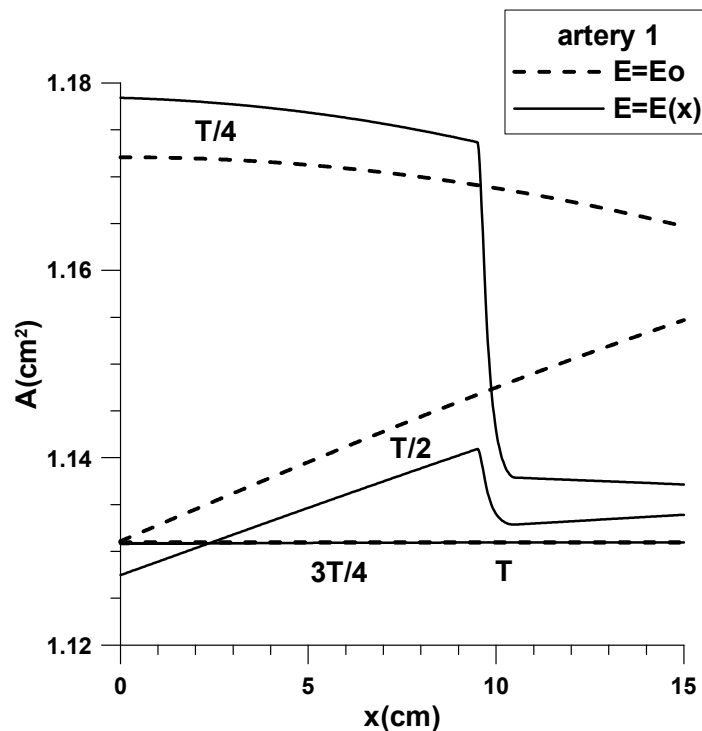


Σχήμα 3.121 Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας στη θέση $x=22,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους

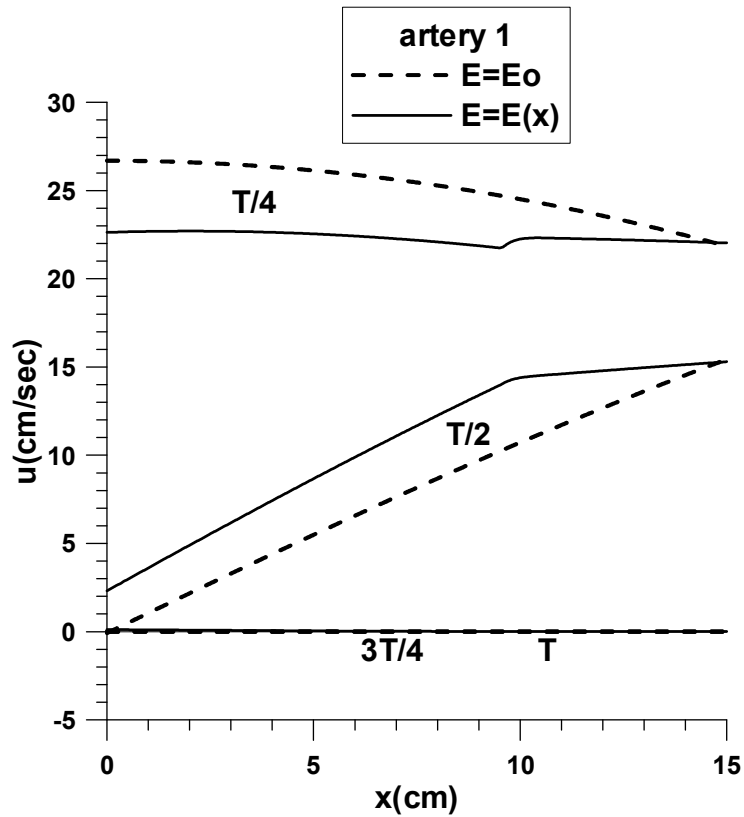


Σχήμα 3.122 Η χρονική εξέλιξη της πίεσης στη θέση $x=22,5\text{cm}$ της αρτηρίας 3 για ενιαίο μέτρο ελαστικότητας και για μη ενιαίο με τις δύο μεθόδους

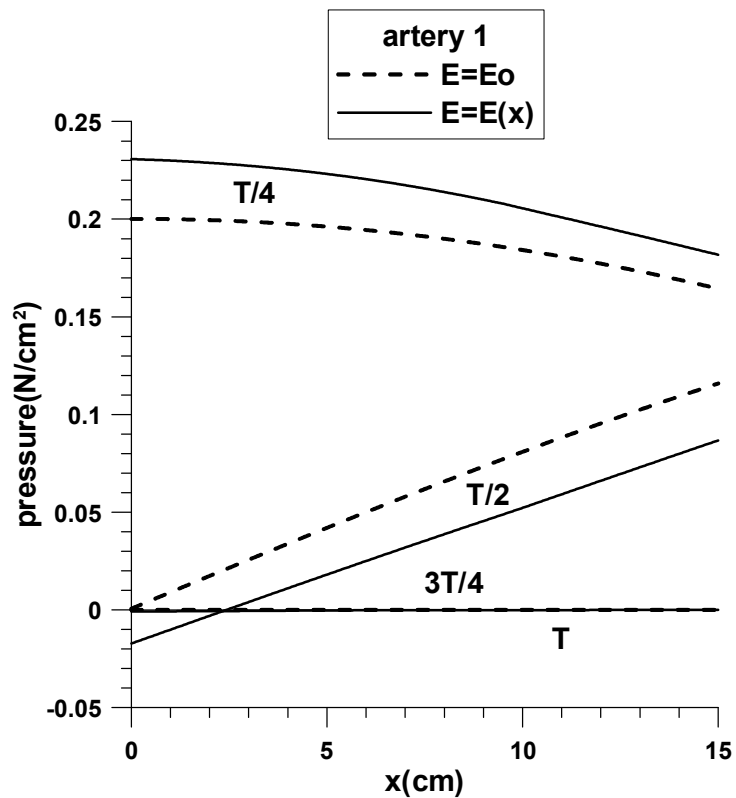
Ακολουθούν τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας (φυσιολογική κατάσταση αγγείων και αποκατάσταση) για όλες τις αρτηρίες με τη δεύτερη μέθοδο.



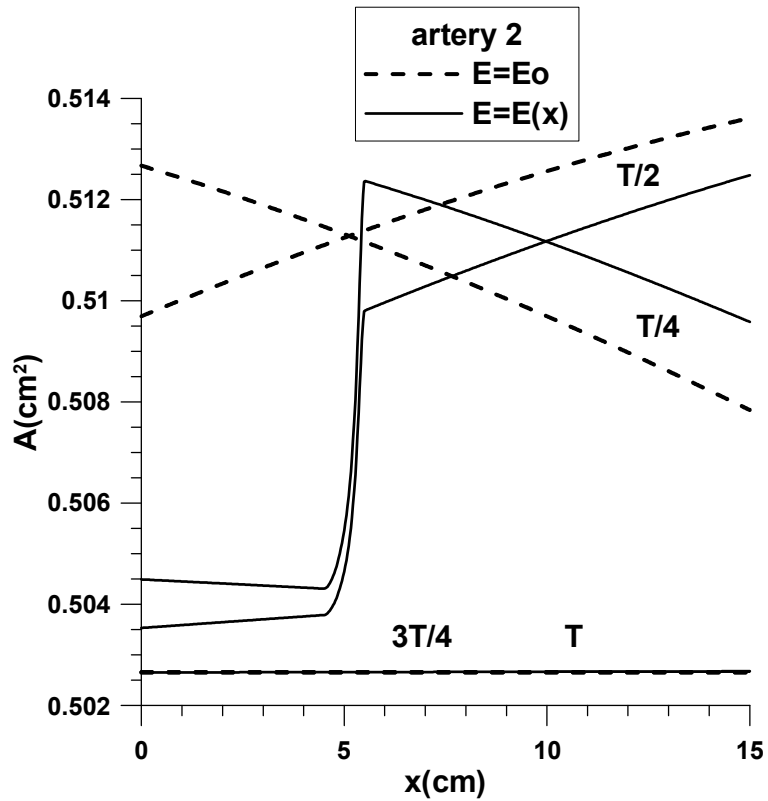
Σχήμα 3.123 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 1 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



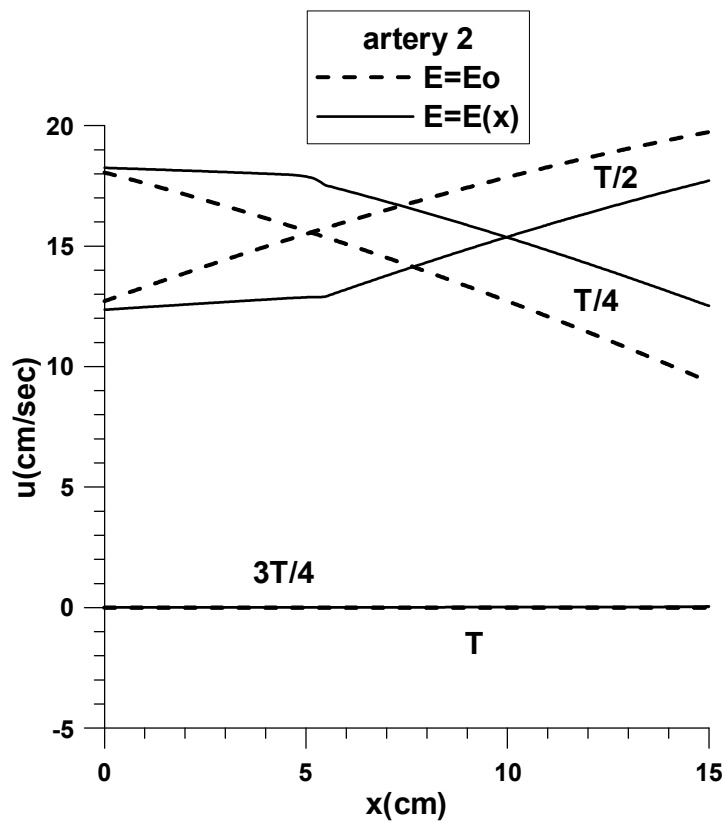
Σχήμα 3.124 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 1 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



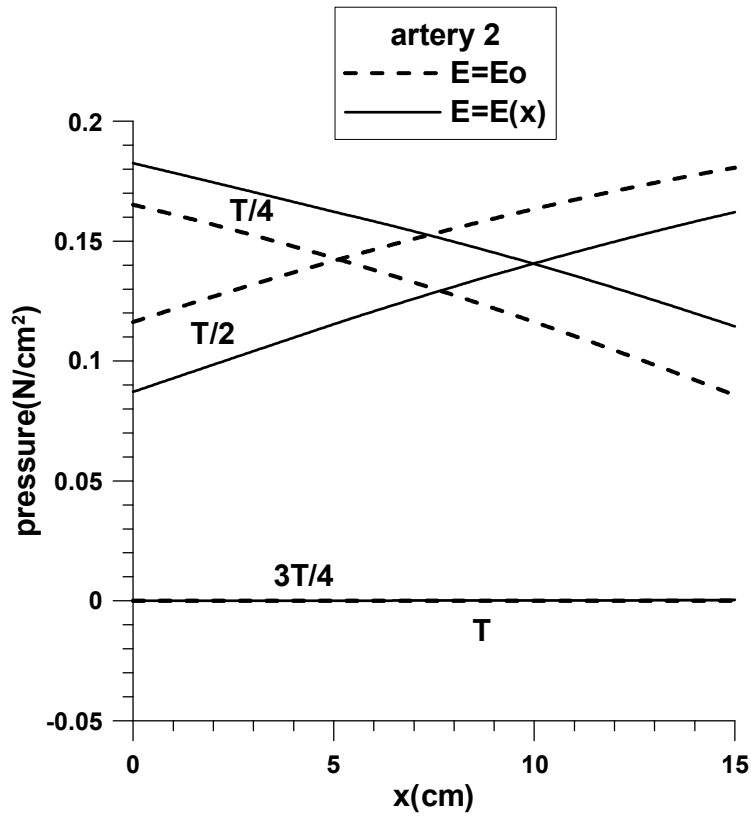
Σχήμα 3.125 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 1 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



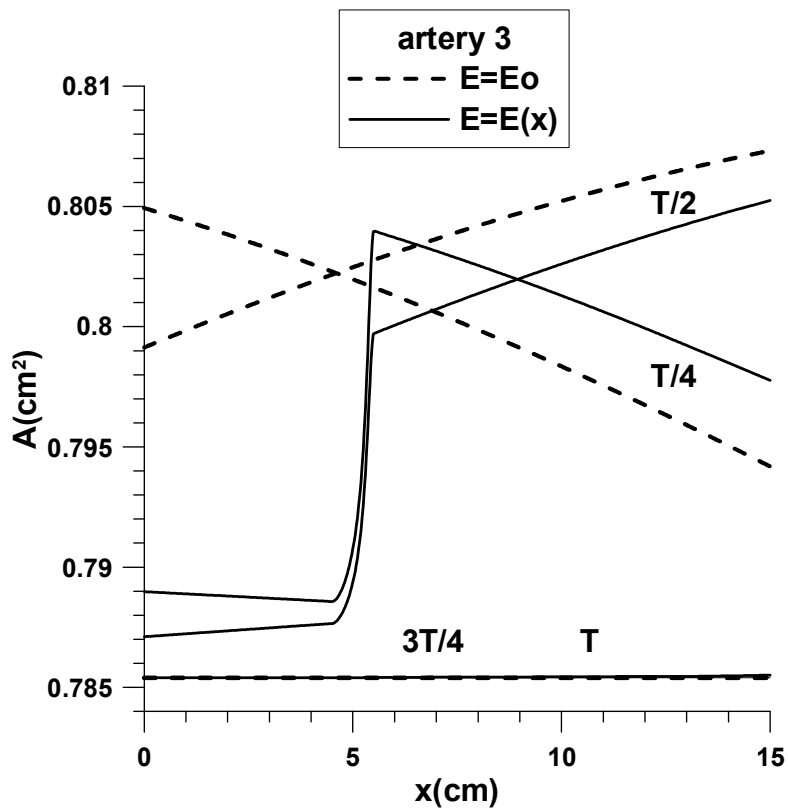
Σχήμα 3.126 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 2 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



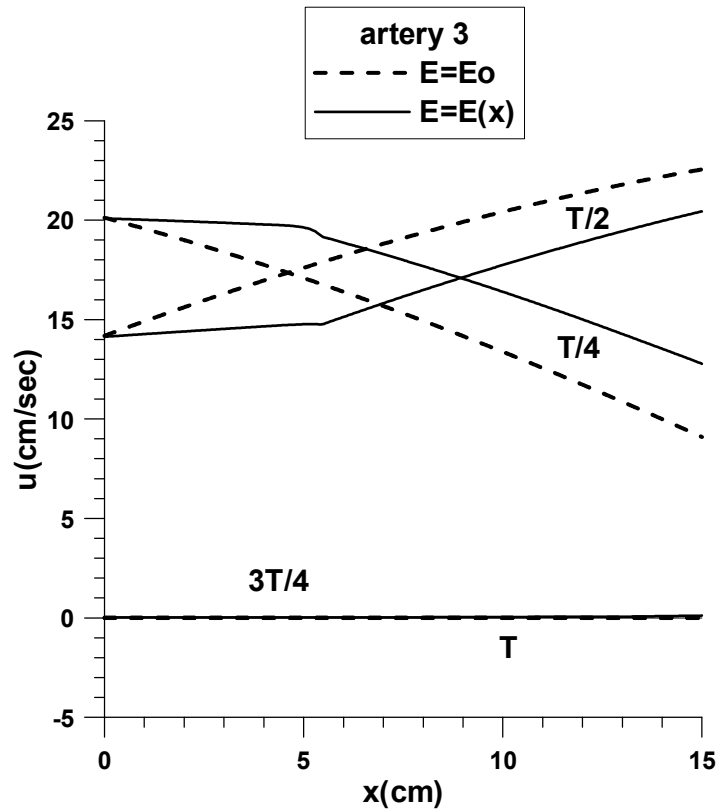
Σχήμα 3.127 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 2 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



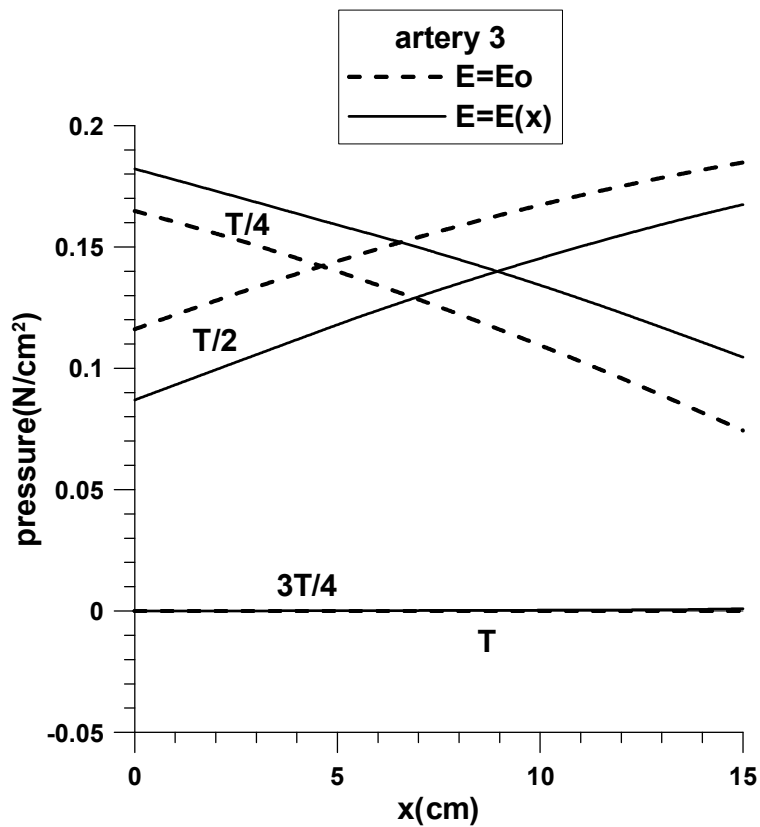
Σχήμα 3.128 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 2 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.129 Η διατομή συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 3 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.130 Η ταχύτητα συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 3 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας



Σχήμα 3.131 Η πίεση συναρτήσει του μήκους στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου στην αρτηρία 3 για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας

4° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Συμπεράσματα

4.1) Εισαγωγή

Στην εν λόγω εργασία βασικός σκοπός είναι η μελέτη της αρτηριακής ροής αίματος σε φυσιολογικές, παθολογικές καταστάσεις και μετά από αποκατάσταση. Συγκεκριμένα, μελετάται η χρήση ενδομοσχεύματος για την αντιμετώπιση των ανευρυσμάτων κοιλιακής αορτής.

4.2) Αγγείο με αποκατάσταση stent

Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων για αγγείο που βρίσκεται σε φυσιολογική κατάσταση και για αγγείο, στο οποίο τοποθετείται stent (ή για αγγείο με αθήρωμα που βρίσκεται σε παθολογική κατάσταση). Τόσο η τοποθέτηση του stent, όσο και η σκλήρυνση του αγγείου συνεπάγεται αλλαγή των ελαστικών χαρακτηριστικών του.

Έχοντας επιλέξει συνθήκη μη-ανάκλασης του κύματος στην έξοδο του αγγείου, μπορούμε να μελετήσουμε την επίδραση στην ανάκλαση του κύματος μόνο λόγω της τοποθέτησης του stent και όχι της ύπαρξης της τερματικής αντίστασης του αγγείου.

- Ανεξαρτήτως του παλμού πίεσης που δίνεται για την είσοδο, όταν το μέτρο ελαστικότητας παραμένει το ίδιο καθ' όλο το μήκος του αγγείου (φυσιολογική κατάσταση) ο παλμός διαδίδεται ανεπηρέαστος. Αντιθέτως στην περίπτωση αλλαγής του μέτρου ελαστικότητας, η κατάσταση αλλάζει όπως περιγράφεται παρακάτω.
- Στην περίπτωση του παλμού πίεσης με μικρή περίοδο (impulse wave), καθώς το κύμα εισέρχεται στην περιοχή του αυξημένου μέτρου ελαστικότητας, τμήμα αυτού ανακλάται, ενώ το υπόλοιπο επιταχύνει. Επιπλέον, μία ανάκλαση παρουσιάζεται στη έξοδο από το stent, όταν το μέτρο ελαστικότητας αποκτά τη χαμηλότερη τιμή του φυσιολογικού αγγείου. Στη μέση του αγγείου παρουσιάζεται μία ταλαντούμενη πίεση, λόγω των κυμάτων που ανακλώνται πίσω και μπροστά μεταξύ της εισόδου και εξόδου του stent. Το κύμα στο άπω άκρο παρουσιάζεται αποδυναμωμένο, γιατί ποσοστό της ενέργειας έχει ανακλαστεί προς τα πίσω και ποσοστό αυτής έχει παγιδευτεί μέσα στο μήκος του stent.
- Στην περίπτωση του παλμού πίεσης με μία μεγαλύτερη, πιο ρεαλιστική περίοδο, η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανακλώμενων κυμάτων είναι πιο πολύπλοκη. Να σημειωθεί ότι αρχικώς τα γεωμετρικά-ελαστικά χαρακτηριστικά του αγγείου και του stent είναι τα ίδια με της προηγούμενης περίπτωσης. Η βασική λοιπόν επιρροή του stent είναι η αύξηση της πίεσης στο εγγύς άκρο. Η αλληλεπίδραση μεταξύ του εισερχόμενου και ανακλώμενων κυμάτων φαίνεται στις ασυνέχειες της κλίσης της καμπύλης της πίεσης συναρτήσει του χρόνου.

Γί αυτήν την περίπτωση παλμού πίεσης έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για διάφορες τιμές του μέτρου ελαστικότητας του stent. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των τιμών για αύξηση αυτού από κάποια τάξη μεγέθους και πάνω. Αυτό συμβαίνει γιατί άπαξ και σκληρύνει το τμήμα του αγωγού σε κάποιο βαθμό και οι παραμορφώσεις περιοριστούν δραστικά σε αυτό το τμήμα, τότε το αποτέλεσμα επί της διατομής των περιορισμένων παραμορφώσεων, αυξάνοντας το μέτρο ελαστικότητας, θα είναι το ίδιο. Τα ρευστομηχανικά δηλαδή μεγέθη δεν θα επηρεάζονται περαιτέρω.

Ομοίως, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για τοποθέτηση του stent σε διαφορετικά σημεία του αγγείου. Η μέγιστη τιμή πίεσης παρατηρείται πάντα ανάντι του stent.

Τέλος, για την περίπτωση παλμού πίεσης, ρεαλιστικής περιόδου παρατίθενται τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους του αγγείου στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μίας περιόδου για ενιαίο και μη ενιαίο μέτρο ελαστικότητας. Η επίδραση της τοποθέτησης του stent είναι σημαντική. Σε ότι αφορά τη διατομή, στο $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ της περιόδου η ουσιαστική διαφορά μεταξύ φυσιολογικού αγγείου και αγγείου με αποκατάσταση είναι η κάθετη πτώση των τιμών στο τμήμα που τοποθετείται το stent, ενώ σε ότι αφορά την ταχύτητα συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο. Αντίστοιχα, στην πίεση η διαφορά στο τμήμα τοποθέτησης του stent δεν είναι εξίσου αισθητή, αλλά παρ'όλα αυτά διατηρείται καθ'όλο το μήκος του αγγείου. Στα $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο της περιόδου οι διαφορές στις τιμές και στα τρία ρευστομηχανικά μεγέθη μεταξύ των δύο περιπτώσεων, φυσιολογικού αγγείου και αγγείου με αποκατάσταση, είναι μικρές.

- Εξετάστηκε επαναλαμβανόμενη χρονικά μεταβαλλόμενη πίεση εισόδου για να μελετηθεί η περίπτωση μη μόνιμης διέγερσης του αγγείου. Επιλέχτηκε ως παλμός πίεσης εισόδου αυτός της ρεαλιστικής περιόδου που αναφέρθηκε παραπάνω. Τα γεωμετρικά-ελαστικά χαρακτηριστικά όμως του αγγείου και του stent εδώ διαφέρουν από τα αντίστοιχα των προηγούμενων περιπτώσεων. Γίνεται απεικόνιση της χρονικής εξέλιξης της πίεσης σε σημείο, το οποίο βρίσκεται ανάντι αρκετά μακριά από το σημείο τοποθέτησης του stent. Παρατηρείται αύξηση του μεγίστου της πίεσης, γεγονός που οφείλεται στη συμβολή του εισερχόμενου με το ανακλώμενο κύμα. Παρατηρείται πως η επίδραση του stent γίνεται ιδιαίτερα αισθητή ακόμα και αρκετά μακριά από το σημείο τοποθέτησής του.

Παρατίθενται τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους του αγγείου για το $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και το σύνολο της περιόδου μετά την διαμόρφωση μιας σταθερής περιοδικής μεταβολής του φαινομένου για τις δύο περιπτώσεις του ενιαίου και μη ενιαίου μέτρου ελαστικότητας. Η επίδραση της τοποθέτησης του stent είναι σημαντική και στις τέσσερις χρονικές στιγμές. Μεταβάλλεται το ημιτονοειδές σχήμα της καμπύλης που κυριαρχεί χωρίς τις ανακλάσεις

4.3 Απλή Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης

Μελετάται η ροή του αίματος σε φυσιολογική κατάσταση στις διακλαδώσεις αγγείων.

Έχοντας επιλέξει συνθήκη μη-ανάκλασης για την είσοδο των θυγατρικών αγγείων το ανακλώμενο κύμα λόγω τερματικής αντίστασης στα θυγατρικά αγγεία εισέρχεται ανεπηρέαστο στο πατρικό αγγείο.

- Σε ότι αφορά την απλή διακλάδωση τα διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της ταχύτητας και της διατομής στην αρχή και το μέσο, σημεία P και M, του πατρικού αγγείου δείχνουν πως το εισερχόμενο κύμα με το καθυστερημένο ανακλώμενο συμβάλλουν.

Ο θετικός συντελεστής ανάκλασης R_f ανάντι της διακλάδωσης συνεπάγεται πως το πρόσημο της κατανομής της ταχύτητας λόγω του ανακλώμενου κύματος είναι το αντίθετο από αυτό της εισερχόμενης.

Ενώ στην αρχή του αγγείου είναι ξεκάθαρη η διαφορά φάσης μεταξύ του εισερχόμενου και του ανακλώμενου κύματος, στο τέλος, σημείο D, παρατηρούμε το ακριβώς αντίθετο, δηλαδή τα δύο προφίλ ταχύτητας να διαμορφώνονται σε ένα κύμα.

Στα θυγατρικά αγγεία αξίζει να σημειωθεί πως η μεταξύ τους διαφορά στα αποτελέσματα, οφείλεται στην επιλογή διαφορετικών συντελεστών ανάκλασης R_f , αφού κατά τα άλλα έχουν ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά και ελαστικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα, μεγαλύτερος συντελεστής ανάκλασης συνεπάγεται ελαφρώς αυξημένες τιμές στη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας, ενώ στη χρονική εξέλιξη της διατομής το ακριβώς αντίθετο. Η επιλογή αρνητικών συντελεστών ανάκλασης καταλήγει σε θετική ταχύτητα για κάθε σημείο των αγγείων.

Η επίδραση της ταχύτητας διάδοσης του κύματος φαίνεται επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς και για διπλάσια αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος. Παρατηρούμε πως ο χρόνος που απαιτείται ώστε το εισερχόμενο και ανακλώμενο κύμα να φτάσουν στην εκάστοτε θέση μειώνεται κατά το ήμισυ για την περίπτωση της διπλάσιας αρχικής ταχύτητας διάδοσης του κύματος. Εκτός αυτού η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι εντονότερη, γεγονός που συντελεί στη μείωση του μεγίστου της ταχύτητας.

Παρατίθενται τα διαγράμματα της διατομής, της ταχύτητας και της πίεσης συναρτήσει του μήκους του πατρικού και του θυγατρικού αγγείου με συντελεστή ανάκλασης $R_f = -0,4$ στο $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο του χρόνου μιας περιόδου για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$. Σε ότι αφορά το πατρικό, τόσο στο διάγραμμα της διατομής όσο και στο διάγραμμα της ταχύτητας παρατηρείται μείωση των τιμών στο $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{2}$ της περιόδου για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος. Στο διάγραμμα της πίεσης, αυτή η μείωση παρατηρείται στο $\frac{1}{2}$ της περιόδου, αλλά όχι στο $\frac{1}{4}$, όπου συμβαίνει το αντίθετο. Στα $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο της περιόδου, δεν υπάρχουν διαφορές στις τιμές για ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$ σε κανένα από τα τρία ρευστομηχανικά μεγέθη. Σε ότι αφορά το θυγατρικό αγγείο, και στα τρία ρευστομηχανικά μεγέθη για διπλάσια ταχύτητα διάδοσης κύματος στο $\frac{1}{4}$ της

περιόδου οι τιμές είναι μεγαλύτερες, ενώ στο $\frac{1}{2}$ μικρότερες. Όπως και στο πατρικό, στα $\frac{3}{4}$ και στο σύνολο, δεν υπάρχουν διαφορές για ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$.

4.4 Διπλή Διακλάδωση με διατήρηση ολικής πίεσης

Έχοντας επιλέξει συνθήκη μη-ανάκλασης για την είσοδο των θυγατρικών αγγείων στη δεύτερη κατά σειρά διακλάδωση το ανακλώμενο κύμα λόγω τερματικής αντίστασης στα θυγατρικά αγγεία εισέρχεται ανεπηρέαστο στο δεύτερο πατρικό αγγείο. Καθ' ότι όμως στην είσοδο του δεύτερου μητρικού αγγείου δεν έχει εφαρμοστεί συνθήκη μη-ανάκλασης, ποσοστό του πίσω οδεύοντος κύματος ανακλάται. Η ανάκλαση αυτή φαίνεται ξεκάθαρα στα διαγράμματα χρονικής εξέλιξης της ταχύτητας και της διατομής σε όλα τα αγγεία.

- Οι ανωτέρω υπολογιστικές περιπτώσεις επαναλήφθηκαν και για διπλή διακλάδωση. Όπως και στην περίπτωση της απλής διακλάδωσης, συγκρίνοντας τα διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της ταχύτητας και της διατομής για αρχική ταχύτητα διάδοσης κύματος c_0 και $2c_0$, φαίνεται η εντονότερη αλληλεπίδραση του εισερχόμενου με το ανακλώμενο κύμα, καθώς και η ταχύτερη εξασθένηση που σχετίζεται με την ταχύτερη ανάκλαση.

4.5 Απλή Διακλάδωση με πτώση ολικής πίεσης

Έχοντας επιλέξει συνθήκη μη-ανάκλασης για την έξοδο των θυγατρικών αγγείων μπορούμε να μελετήσουμε την επίδραση μόνο της διακλάδωσης και όχι της τερματικής αντίστασης των θυγατρικών αγγείων. Θέλουμε να μελετήσουμε την πτώση της ολικής πίεσης λόγω της κατεύθυνσης της ροής στη διακλάδωση και των γωνιών των θυγατρικών αγγείων. Γίνεται σύγκριση λοιπόν μεταξύ της περίπτωσης που δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν την κατεύθυνση της ροής και τις γωνίες των θυγατρικών αγγείων και της περίπτωσης που λαμβάνουμε υπ' όψιν τόσο την κατεύθυνση όσο και τις γωνίες αντίστοιχα.

- Παρατηρούμε πως στο πατρικό αγγείο η ανάκλαση είναι μεγαλύτερη, γεγονός που συνεπάγεται μία αύξηση στο επίπεδο της πίεσης. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει στα θυγατρικά αγγεία, όπου το κύμα που διαδίδεται είναι μικρότερης έντασης. Οι διαφορές παρ' όλα αυτά είναι μικρές μεταξύ αυτών των περιπτώσεων όπου λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των γωνιών ή όχι στα θυγατρικά αγγεία.

4.6 Ενδομόσχευμα

Στην παρούσα εργασία μελετώνται τα ρευστομηχανικά μεγέθη της ροής κατόπιν τοποθέτησης ενδομοσχεύματος. Η υπολογιστική μελέτη έγινε με δύο διαφορετικές μεθόδους, τα αποτελέσματα των οποίων συγκρίνονται. Στην ουσία πρόκειται για τους δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την ασυνέχεια που παρουσιάζεται στη ροή όταν το μέτρο ελαστικότητας αλλάζει, όταν δηλαδή από την

τιμή που έχει στο φυσιολογικό αγγείο ή αρτηρία λαμβάνει την τιμή του ενδομοσχεύματος και ανάποδα. Στην πρώτη μέθοδο θεωρούμε ότι η αρτηρία στην οποία έχει τοποθετηθεί το ενδομόσχευμα υποδιαιρείται σε δύο αγγεία, το πρώτο που είναι το φυσιολογικό και το δεύτερο που αποτελεί το μόσχευμα και εφαρμόζουμε στο σημείο της αλλαγής, εξόδου του πρώτου αγγείου και εισόδου του δεύτερου, οριακές συνθήκες. Στην δεύτερη θεωρούμε ότι η αρτηρία με το ενδομόσχευμα αποτελεί μία ενιαία αρτηρία, αλλά η μετάβαση από την μία τιμή του μέτρου ελαστικότητας στην άλλη γίνεται ομαλά. Τις αντίστοιχες θεωρήσεις κάνουμε και για τα θυγατρικά αγγεία.

Έχοντας επιλέξει συνθήκη μη-ανάκλασης στην έξοδο των θυγατρικών αγγείων, μπορούμε να μελετήσουμε την επίδραση μόνο της τοποθέτησης του ενδομοσχεύματος και όχι της τερματικής αντίστασης των θυγατρικών αγγείων.

- Μεταξύ των δύο μεθόδων (3 αρτηριών ή 6 αγγείων) δεν παρατηρούνται διαφορές. Στην ουσία η μία επιβεβαιώνεται από την άλλη.
- Στα διαγράμματα του φυσιολογικού αγγείου ανάντι της διακλάδωσης παρατηρούμε τόσο το ανακλώμενο κύμα από το ενδοαγγειακό μόσχευμα, όσο και το αντίστοιχο από τη διακλάδωση. Στην ουσία εδώ μεταβάλλεται το ημιτονοειδές σχήμα της καμπύλης που κυριαρχεί χωρίς τις ανακλάσεις.
- Στα διαγράμματα του ενδομοσχεύματος ανάντι της διακλάδωσης το ανακλώμενο κύμα είναι κυρίως αυτό της διακλάδωσης και κατά ένα μικρό ποσοστό της εξόδου από το ενδομόσχευμα στις λαγόνιες αρτηρίες.
- Στα διαγράμματα του ενδομοσχεύματος κατάντι της διακλάδωσης το μόνο ανακλώμενο κύμα είναι αυτό της εξόδου από το ενδομόσχευμα.
- Τέλος, στα διαγράμματα των φυσιολογικών αγγείων κατάντι της διακλάδωσης το ανακλώμενο κύμα είναι εμφανώς αποδυναμωμένο, γιατί κατά το μεγαλύτερο ποσοστό του έχει παγιδευτεί μέσα στο μήκος του ενδομοσχεύματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ορισμός συμβόλων

μ : δυναμική συνεκτικότητα

ρ : πυκνότητα

ν : λόγος Poisson

L_v : μήκος αγγείου

D : διάμετρος αγγείου

E : μέτρο ελαστικότητας αγγείου

h : πάχος τοιχώματος αγγείου

R : ακτίνα αγγείου

A : διατομή αγγείου

P : πίεση αγγείου

P_{ext} : εξωτερική πίεση

C : ταχύτητα διάδοσης αγγείου

k : πλήθος χωρικών κόμβων αγγείου

n : πλήθος χρονικών κόμβων αγγείου

δ : αδιάστατη παράμετρος δ

Re : αδιάστατος αριθμός Re

Str : αδιάστατος αριθμός Str

M : αδιάστατος αριθμός M

A^* : αδιαστατοποιημένη διατομή

P^* : αδιαστατοποιημένη πίεση

V^* : αδιαστατοποιημένη ταχύτητα

C^* : αδιαστατοποιημένη ταχύτητα διάδοσης

dx^* : αδιαστατοποιημένο χωρικό βήμα

dt^* : αδιαστατοποιημένο χρονικό βήμα

Δx_{CL} : μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών

Δx_{CR} : μήκος για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών

ξ : συνθήκη συμβατότητας δεξιοκλινούς χαρακτηριστικής

η : συνθήκη συμβατότητας αριστεροκλινούς χαρακτηριστικής

$E(x)$: συνάρτηση υπολογισμού μέτρου ελαστικότητας

δ : μήκος για τη συνάρτηση υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας

P_t : ολική πίεση

Q : παροχή μάζας

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Σ. Τσαγγάρης, Βιορευστομηχανική και Βιοϊατρική Τεχνολογία, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2004 σελ. 117 - 154.
- [2]. Σ. Τσαγγάρης, Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2005 σελ. 56 - 88.
- [3]. Γ. Μπεργελές, Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2006 σελ. 95 -125.
- [4]. Χ. Μανόπουλος, «Μελέτη αντλητικών φαινομένων σε ιατροβιολογικές εφαρμογές, μέσω αλληλεπίδρασης ροής ρευστού και κίνησης σώματος», Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009, σελ. 49 - 66.
- [5]. N.Stergiou, D.F. Young, T.R. Rogge, 1992, Computer Simulation of Arterial Flow with Applications to Arterial and Aortic Stenosis, J. Biomechanics, Vol. 25, pp. 1477 – 1488.
- [6]. Γ.Σ.Παπαγεωργίου, Χ.Γ.Τσίτουρας, Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2004 σελ 96-112,244-252.
- [7]. Γ.Δάσιος,Κ.Κυριακή, Μερικές διαφορικές εξισώσεις, Αθήνα 1994 σελ 33-41.
- [8]. J.J. Wang, K.H.Parker, Wave propagation in a model of the arterial circulation, 2003, J.Biomechanics, Vol 37, pp.457-470.
- [9]. John D. Anderson, Computational Fluid Dynamics the Basics with Applications, United States of America 1995 pp. 222 – 225.
- [10]. I. Formaggia, A. Veneziani, "Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system", VKI-Lecture Series, 2003.
- [11]. S.J. Sherwin, V. Franke, J. Peiro, K. Parker, 2003, One-Dimensional Modeling of a Vascular network in Space-Time Variables, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 47, pp.217 – 250.
- [12]. Christos G. Manopoulos, Demetri S. Mathioulakis, Sokrates G. Tsangaris, 2006, Onedimensional model of Valveless pumping in a Closed Loop and a Numerical Solution, J.Biomechanics, Vol. 39, pp. 1454 – 1463.
- [13]. Rainald Lohner, Juan Cebra, Orlando Soto, Peter Yum, James E. Burgess, 2003, Applications of Patient-Specific CFD in Medicine and Life Sciences, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 43, pp. 637 – 650.
- [14]. M.Lister,The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics, The Pennsylvania State University.
- [15]. S.J. Sherwin, L.Formaggia, J.Peiro,V. Franke, 2003, Computational modeling of 1D Blood flow with variable mechanical properties and its application to the

simulation of wave propagation in the human arterial system, International Journal for numerical methods in fluids, Vol. 43, pp.673 – 700.

[16]. L.Formaggia, D.Lamponi, A.Quarteroni, 2003, One-Dimensional Models for blood flow in arteries, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 47, pp.251 – 276.

[17]. Ι. Μαράκης, Χ. Ρηγόπουλος, Β. Κατσίκας, Ενδοαγγειακή αντιμετώπιση ανευρυσμάτων αορτής στο ΓΝΑ «Γ. Γεννηματάς», Ιατρικό βήμα, Ιούνιος-Αύγουστος 2006, σελ 18-23.

[18]. Κ. Στόκος, “ Υπολογιστική προσομοίωση μη μόνιμης ροής στο κυκλοφορικό σύστημα ”, Διπλωματική Εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2009

[19]. Κ.Χ.Γιαννάκογλου, Ι.Αναγνωστόπουλος, Γ.Μπεργελές, Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 2004, σελ 3.3-3.7, 3.9-3.15.