ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μονότονοι Τελεστές σε χώρους Banach

ΔΗΜΗΤΡΑ ΣΤΕΝΟΥ

Επιβλεπων Καθηγητης:

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Χ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ

Αθηνα, Οκτωβριος 2012

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Δημήτριο Χ. Κραββαρίτη για την καθοδήγηση, το ενδιαφέρον και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε τόσο κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας όσο και γενικότερα στα πλαίσια των δραστηριοτήτων μου στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Βασίλειο Παπανικολάου και κ. Νίκο Γιαννακάκη, οι οποίοι αποτελούν μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου που με στηρίζει ένθερμα στις επιλογές μου, στις σπουδές μου και τη ζωή μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία εξετάζουμε κάποιες από τις ιδιότητες μη γραμμικών μονότιμων και πλειονότιμων μονότονων τελεστών και παραθέτουμε ορισμένες εφαρμογές τους σε Προβλήματα Συνοριακών Τιμών.

Στο Κεφάλαιο 2 αναφερόμαστε σε ορισμένα βασικά Θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης, τα οποία είναι χρήσιμα για τα επόμενα κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια εισαγωγή στους χώρους Sobolev, παρατίθενται κάποιες βασικές τους ιδιότητες, ενώ στην συνέχεια με την βοήθεια της ανισότητας Poincare και των ιδιοτήτων των χώρων Sobolev μελετώνται δύο Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, εκ των οποίων το ένα είναι γραμμικό και το άλλο μη γραμμικό.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία των μονότιμων μονότονων τελεστών σε χώρους Banach και αναφερόμαστε σε κάποιες βασικές τους ιδιότητες. Στην συνέχεια αποδυκνύεται ένα βασικό Θεώρημα επί των Minty- Browder και κατόπιν ορίζονται οι τελεστές Nemyckii με ταυτόχρονη απόδειξη ορισμένων ιδιοτήτων τους.

Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθεται μια εφαρμογή τους Θεωρήματος Minty- Browder σε ένα μη γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών.

Στο Κεφάλαιο 6 γινεται μια εισαγωγή στη θεωρία των Πλειονότιμων Μονότονων τελεστών, παρατίθενται και αποδυκνύονται οι καλές ιδιότητες της Duality Map καθώς επίσης ασχολούμαστε με ορισμένες από τις βασικές ιδιότητες των Μεγιστικά Μονότονων Τελεστών. Τέλος, αποδυκνύουμε το Κύριο Θεώρημα των Ασθενώς Πιεστικών Μονότονων τελεστών.

Κεφάλαιο 2

Προκαταρκτικές Έννοιες

Θεώρημα 2.1. ***(Θεωρημα Banach-Steinhauss ή διαφορετικά Αρχή του Ομοιόμορφου Φράγματος)***.
Έστω X ένας χώρος Banach, Y ένας χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ μία όχι κατ ανάγκην αριθμήσιμη οικογένεια γραμμικών και συνεχών τελεστών από τον X στον Y.
Υποθέτουμε ότι:

$$sup_{i\in I}||T_i(x)|| < \infty, \forall x \in X.$$

Τότε,

$$sup_{i\in I}||T_i||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Δηλαδή, $\exists c > 0 : ||T_i(x)||_{\mathcal{L}(X,Y)} < c||x||, \forall x \in X$.

Πρόταση 2.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Τότε, ο X^* είναι επίσης χώρος Banach, με*

$$x^* \in X^* \quad \textit{και} \quad ||x^*|| = sup\{|x^*(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\}.$$

Πρόταση 2.2. *Έστω X,Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση. Τότε, η T είναι συνεχής εάν και μόνο εάν*

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty \ ,$$

όπου $\mathcal{L}(X,Y)$ επίσης χώρος Banach

και

$$||T||_{\mathcal{L}(X,Y)} = sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq 1, \forall x \in X\}$$

Θεώρημα 2.2. ***(Θεώρημα Hahn-Banach).***
Έστω X ένας πραγματικός χώρος με νόρμα και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X(όχι απαραίτητα κλειστός).
Έστω ρ θετικό ομογενές,υπογραμμικό συναρτησιακό στον X, με $\rho : X \to \mathbb{R}$. Έστω επιπλέον, f γραμμικό συναρτησιακό στον Y τ.ω.

$$f(x) \leq \rho(x),\ \forall x \in X$$

Τότε, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό F στον X τέτοιο ώστε:

$$F = f \text{ , στον } Y \text{ και } F(x) \leq f(x) \text{ , } \forall x \in X.$$

Υπενθύμιση:Το συναρτησιακό ρ ονομάζεται

1. **υπογραμμικό**, εάν ικανοποιείται η σχέση:

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in X \tag{2.1}$$

2. **ομογενές**, εάν ικανοποιείται η σχέση:

$$\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \forall \lambda > 0 \tag{2.2}$$

Πόρισμα 2.1. ***(Συνέπειες του Θεωρήματος Hahn-Banach σε χώρους με νόρμα.)***

1. *Έστω $(X, ||.||)$ χώρος με νόρμα και με $X \neq \{0_X\}$.*
   Τότε,
   $\forall x \in X\ \exists x^* \in X^*$, με $||x^*|| = 1$ και $x^*(x_0) = ||x_0|| \neq 0$.
   Άρα, ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.

2. *Έστω $(X, ||.||)$ χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X.*
   Εάν $x_0 \in X \diagdown Y$, τότε $\exists x^* \in X^*$, με $||x^*|| = 1$ τ.ω. $x^*(y) = 0, \forall y \in Y$ και $x^*(x_0) = dist(x_0, Y) = inf\{||x_0 - y|| : y \in Y\}$.

3. *Ο γραμμικός υπόχωρος Y του X είναι πυκνός στον X εάν και μόνο εάν $\forall x^* \in X^*$, με $x^*(x) = 0, \forall x \in Y$, ισχύει ότι: $x^* = 0$.*

Θεώρημα 2.3. ***(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach).***
Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος, με $X \neq \varnothing$ και $f : X \to X$ συστολή.
Τότε, $\exists! x \in X : f(x) = x$.

Ορισμός 2.1. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο $T^* : Y^* \to X^*$ καλείται συζυγής ή δυικός τελεστής του T και ορίζεται ως:*

$$T^*(y^*) = y^*(Tx)$$

Εύκολα αποδυκνύεται ότι: $||T|| = ||T^*||$.

Θεώρημα 2.4. ***(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower)***
Κάθε συνεχής συνάρτηση από την μπάλα $\mathcal{B}(0,1)$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα 2.2. ***(Πόρισμα Θεωρήματος σταθερού σημείου του Brower)***
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση και $\forall x \in \mathbb{R}^n$, με $||x|| = R > 0$ ισχύει ότι:

$$< f(x), x >\geq 0.$$

Τότε, υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$, με $||x_0|| \leq R$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θεώρημα 2.5. ***(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder).***
Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{K} \subset X$ ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X.Εάν η συνάρτηση $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ είναι συνεχής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα 2.3. ***(Πόρισμα Σταθερού Σημείου του Schauder).***
Έστω X ένας χώρος Banach και $\mathcal{K} \subset X$ ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X. Εάν η συνάρτηση $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ συνεχής και συμπαγής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

Θεώρημα 2.6. ***(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης Lebesque).***
Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(\Omega)$ και $f, h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ τ.ω:

$$f_n(x) \to f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega$$

και

$$|f(x)| \leq h(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

τότε,

$$f_n \to f \text{ στον } \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Θεώρημα 2.7. ***(Γενικευμένο Θεώρημα Lebesque).***
Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *και* $f, h \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *τ.ω:*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega$$

και

$$h_n(x) \to h(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Εάν επιπλέον, ισχύουν:

$$|f_n(x)| \leq h_n(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

και

$$h_n \to h \text{ στον } \mathcal{L}^1(\Omega),$$

τότε,

$$f_n \to f \text{ στον } \mathcal{L}^1(\Omega).$$

Ορισμός 2.2. *Έστω* $\mathcal{H}$ *ένας χώρος Hilbert και* $\alpha(.,.) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *ένα διγραμμικό συναρτησιακό. Το* α *λέγεται:*

1. **συνεχές**, *εάν υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε:*

$$|\alpha(u,v)| \leq c|u||v|, \ \forall u, v \in \mathcal{H}$$

2. **πιεστικό**, *εάν υπάρχει σταθερά* $k > 0$ *τέτοια ώστε:*

$$\alpha(u,v) \geq k|u|^2, \ \forall u \in \mathcal{H}$$

Θεώρημα 2.8. ***(Θεώρημα Lax-Milgram).***
Έστω $\mathcal{H}$ *ένας χώρος Hilbert και* $\alpha(\cdot,\cdot)$:$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *ένα διγραμμικό, συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό. Τότε,* $\forall \phi \in \mathcal{H}$ *υπάρχει μοναδικό* $u \in \mathcal{H}$ *τέτοιο ώστε:*

$$\alpha(u,v) =< \phi, v >, \ \forall v \in \mathcal{H}$$

Επιπλέον, εάν το α *είναι συμμετρικό, τότε το* u *χαρακτηρίζεται από την παρακάτω ιδιότητα:*

$$u \in \mathcal{H}$$

και

$$\frac{1}{2}\alpha(u,v) - < \phi, v >= min_{v\in\mathcal{H}}\{\frac{1}{2}\alpha(u,u) - < \phi, v >\}$$

Θεώρημα 2.9. *(Φασματικό Θεώρημα)*.
Έστω T ένας αυτοσυζυγής,συμπαγής τελεστής σ΄έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε, υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T, με

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n < x, u_n > u_n$$

όπου λ_n είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των u_n.

Θεώρημα 2.10. *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert με νόρμα $||.||$ και εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$. Έστω $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ ένα κλειστο, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{K}$ τέτοιο ώστε:*

$$||f - u|| = min\{||f - w|| : w \in \mathcal{K}\} \tag{1}$$

Επιπλέον, το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$$< f - u, w - u > \leq 0, \forall w \in \mathcal{K} \tag{2}$$

Παρατήρηση 2.1. *Με βάση το παραπάνω θεώρημα η απεικόνιση:*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$$

όπου $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f) := u, \forall f \in \mathcal{H}$, $u \in \mathcal{K}$ και $||f - u|| = min\{|||f - w|| : w \in \mathcal{K}\}$, είναι καλώς ορισμένη.

Ορισμός 2.3. *Η απεικόνιση $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ ονομάζεται* ***μετρική προβολή*** *του $\mathcal{H}$ στο $\mathcal{K}$ και προφανώς ισχύει ότι $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\alpha) = \alpha, \ \forall a \in \mathcal{K}$.*
Με χρήση της μετρικής προβολής $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ του $\mathcal{H}$ στο $\mathcal{K}$ η σχέση (2) γράφεται:

$$< f - \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f), w - \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f) > \leq 0, \forall w \in \mathcal{K} \tag{3}$$

Ουσιαστικά, το $u = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f)$ είναι το πλησιέστερο σημείο του $\mathcal{K}$ προς το $f \in \mathcal{H}$ και η (3) δείχνει ότι $\forall w \in \mathcal{K}$ η γωνία ϕ που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $f - \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f), w - \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(f)$ είναι αμβλεία.

Ορισμός 2.4. *Έστω X χώρος Banach. Ένας τελεστής $\mathcal{P} : X \to X$ καλείται* ***προβολή*** *εάν ισχύει ότι:*

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}.$$

Τότε ο $\mathcal{P}(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και $\mathcal{P}x = x, \ \forall x \in X$.
Ένας υπόχωρος Y του X που ισοδυναμεί με τον $\mathcal{P}(X)$ για κάποια προβολή $\mathcal{P} : X \to X$ καλείται ***συμπληρωματικός***.

Ορισμός 2.5. *Έστω X χώρος Banach.*

i. *Η ασθενής τοπολογία w επί του X είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει όλα τα στοιχεία του X^* συνεχή.*

ii. *Η ασθενής άστρο τοπολογία w^* επί του X^* είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει όλα τα στοχεία του $\widehat{X}$ συνεχή. (Ισχύει ότι $\widehat{X}$ υπόχωρος του X^{**}).*

Παρατήρηση 2.2. `

i. *Τα στοιχεία του X^* είναι συνεχή στην $\mathcal{T}_{||.||}$ και στην w τοπολογία.*

ii. *Ισχύει ότι $(X, w)^* = X^*$*

Ορισμός 2.6. *Έστω X ένας χώρος Banach. Ο X καλείται* ***αυτοπαθής*** *ή* ***ανακλαστικός*** *εάν $\widehat{X} = X^{**}$. Δηλαδή, εάν η απεικόνιση $\wedge : X \to X^{**}$ είναι επί. Επομένως, εάν ο X είναι ανακλαστικός ισχύει ότι:*

$$(X^*, w^*) = (X^*, w)$$

Αντίστροφα, εάν ισχύει ότι $(X^*, w^*) = (X^*, w)$, τότε ο X είναι ανακλαστικός.

Υπενθύμιση: Έστω X χώρος Banach.Τότε, υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $\wedge : X \to X^{**}$, η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1) Για $x \in X$ ισχύει ότι: $\widehat{x}(x^*) = x^*(x), \ \forall x^* \in X^*$

2) $||\widehat{x}||_{X^{**}} = ||x||_X, \ \forall x \in X$

Σχόλιο:
Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, η $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}[0,1]$ δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Ορισμός 2.7. *Έστω A ένα σύνολο. Το A καλείται σχετικά συμπαγές, εάν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x, \text{ καθώς } k \to \infty, \text{ με } x \in A$$

Θεώρημα 2.11. ***(Θεώρημα Kakutani)***
Έστω X χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i. *Ο X ειναι ανακλαστικός.*

ii. *Η $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ είναι ασθενώς συμπαγής.*

iii. *Κάθε φραγμένο σύνολο υποδυκνύει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. (Για αυτό στην πραγματικότητα η $\mathcal{B}_X$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγής.)*

Λήμμα 2.1. *Έστω X χώρος Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και έστω F τέτοιο ώστε: $F = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}^w$. Εάν το F είνια ασθενώς συμπαγές, τότε το F είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές.*

Παρατήρηση 2.3. *Κάθε χώρος Banach X, με $dimX \leq \infty$ είναι ανακλαστικός εάν και μόνο εάν ο X^* είναι ανακλαστικός.*

Θεώρημα 2.12. ***(Θεώρημα Mazur)***
Έστω X ένας χώρος Banach και K υποσύνολο του X κυρτό. Τότε,

$$\overline{K}^w = \overline{K}^{||\cdot||}$$

Θεώρημα 2.13. ***(Θεώρημα Banach-Alaoglou)***
Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Τότε, η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ είναι w^* - συμπαγής.

Πρόταση 2.3. ***(Συνέπειες Θεωρήματος Banach-Alaoglou)***

1. *Σε έναν χώρο Hilbert κάθε φραγμένο και κλειστό σύνολο είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές, για αυτό κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία(οι χώροι Hilbert είναι ανακλαστικοί.)*

2. *Τα $||\cdot||$-κλειστά, κυρτά σύνολα είναι ασθενώς κλειστά, άρα οι $||\cdot||$-κλειστότητες κυρτών και φραγμένων συνόλων στους χώρους Hilbert ή σε ανακλαστικούς χώρους Banach είναι ασθενώς συμπαγείς.*

3. *Εάν X ανακλαστικός χώρος Banach, τότε κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Παρατήρηση 2.4. *Το Θεώρημα Banach-Alaoglou δεν συνεπάγεται ότι η w^*- τοπολογία είναι τοπικά συμπαγής. Αυτό συμβαίνει διότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}_X$ είναι μόνο μία γειτονιά του 0_X στην ισχυρή τοπολογία $\mathcal{T}_{||\cdot||}$, αλλά συνήθως δεν αποτελεί γειτονιά του μηδενός ως προς την $\mathcal{T}_{w^*}$ τοπολογία.*

Ορισμός 2.8. `

1. *Ένας χώρος Banach X καλείται* αυστηρά κυρτός *εάν και μόνο εάν*

$$||\lambda x + (1-\lambda)y|| < 1,\ \forall \lambda \in (0,1),\ \mu\epsilon\ ||x|| = ||y|| = 1 \ \kappa\alpha\iota\ x \neq y$$

2. *Ένας χώρος Banach X καλείται* ομοιόμορφα τοπικά κυρτός *εάν και μόνο εάν* $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X,\ \mu\epsilon\ ||x|| = 1\ \exists \delta(\epsilon, x) > 0\ \tau.\omega.$
εάν

$$||x - y|| \geq \epsilon,$$

τότε

$$||\tfrac{x+y}{2}|| \leq 1 - \delta,\ \forall y \in X,\ \mu\epsilon\ ||y|| = 1$$

3. *Ένας χώρος Banach καλείται* ομοιόμορφα κυρτός *εάν και μόνο εάν* $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0,\ \tau.\omega.$
εάν,

$$||x - y|| \geq \epsilon,\ \mu\epsilon\ ||x|| = ||y|| = 1$$

τότε,

$$||\tfrac{x+y}{2}|| \geq 1 - \delta,\ \forall y \in X.$$

4. *Ένας χώρος Banach ικανοποιεί την συνθήκη Kadec-Klee εάν για ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mu\epsilon\ ||x_n|| = 1, ||x|| = 1$ *και* $x_n \rightharpoonup x$, *καθώς* $n \to \infty$
προκύπτει ότι,

$$||x_n - x|| \to 0,\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ n \to \infty$$

Παρατήρηση 2.5. *Σύμφωνα με τα προηγούμενα καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:*

i. *Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός.*

ii. *Έστω X ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Τότε, ο X ικανοποιεί την συνθήκη Kadec-Klee.*

iii. *Εάν X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, τότε ο X είναι τοπικά ομοιόμορφα κυρτός.*

iv. *Εάν ο X είναι ένας τοπικά ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, τότε ο X είναι αυστηρα κυρτός.*

Θεώρημα 2.14. ***(Θεώρημα Goldstine)***
Έστω X ένας χώρος Banach. Ισχύει ότι:

$$\overline{\mathcal{B}_{\widehat{X}}}^{w^*} = \mathcal{B}_{X^{**}}$$

Παρατήρηση 2.6. *Έστω $(X, ||| \cdot |)$ με νόρμα. Τότε,*

i. $(X, w)^* = X^*$

ii. $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$ *και* $X^{**} = (X^{**}, w^*)$, *με* $\widehat{X}$ *υπόχωρος του* X^{**}.
Τότε,

$$(X^{**}, w)^* = \widehat{X}^*$$

όπου, $(X^*, w^*)^* = \{f : X^* \to \mathbb{R}$ *γραμμικές,* w^**- συνεχείς*$\}$

iii. *Αφού ο* $\widehat{X}$ *είναι υπόχωρος του* X^{**}, *συμπεραίνουμε ότι* $\mathcal{B}_{\widehat{X}} \subset \mathcal{B}_{X^{**}}$.
Επομένως,

$$\overline{\mathcal{B}_{\widehat{X}}}^{w^*} \subset \overline{\mathcal{B}_{X^{**}}}^{w^*}$$

Θεώρημα 2.15. *Έστω ένας απειροδιάστατος χώρος Banach* X.
Εάν $S_X = \{x \in X : ||x|| = 1\}$, *τότε ισχύει ότι:*

$$\overline{S_X}^{w} = \mathcal{B}_X,$$

όπου $\mathcal{B}_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$

Θεώρημα 2.16. ***(Θεώρημα James)***
Έστω X ένας χώρος Banach. Ο X είναι ανακλαστικός εάν και μόνο εάν κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον χώρο παίρνει το maximum του σε μία κλειστή μοναδιαία μπάλα του χώρου.
Εναλλακτικά,μία πιο ισχυρή εκδοχή είναι η εξής: Κάθε w-κλειστό $C \subset X$, όπου X χώρος Banach, είναι w^*-συμπαγές εάν και μόνο εάν κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον X φτάνει σε ένα maximum στο C.

Θεώρημα 2.17. ***(Θεώρημα Baire)***
Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία από πυκνά, ανοικτά υποσύνολα του X.
Τότε,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ πυκνό.}$$

Θεώρημα 2.18. ***(2η Μορφή Θεωρήματος Baire)***
Έστω (X,ρ) *πλήρης μετρικός χώρος και* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία από κλειστά υποσύνολα του* X *,τέτοια ώστε*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$$

Τότε,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ F_{n_0}^{\circ} \neq \varnothing$$

Πρόταση 2.4. *Έστω* X *ένας χώρος Banach.*

i. Εάν $K \subset X$ *είναι* w*- συμπαγές, τότε το* K *είναι* $||\cdot||$*- φραγμένο.*

ii. Εάν $K \subset X^*$ *είναι* w^**- συμπαγές, τότε το* K *είναι* $||\cdot||$*- φραγμένο.*

Ορισμός 2.9. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος.*
Μία συνάρτηση $f : (X,\rho) \to (X,\rho)$ *καλείται non-expansive εάν για κάθε δύο στοιχεία του χώρου,* $a,b \in X$*, η απόσταση μεταξύ των* $f(a), f(b)$ *δεν είναι μεγαλύτερη από αυτή των* a,b*.*
Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$||f(a) - f(b)|| \leq ||a - b||, \ \forall a,b \in X$$

Κεφάλαιο 3

Χώροι Sobolev

3.1 Εισαγωγή στους χώρους Sobolev

Ορισμός 3.1.

i. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό σύνολο και* $p \in \mathbb{R}$, *με* $1 \leq p < \infty$.
Τότε, ορίζουμε τον χώρο:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(\tilde{\Omega}),\ \forall \tilde{\Omega} \subset \subset \Omega\}$$

όπου $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega$ *σημαίνει ότι υπάρχει συμπαγές σύνολο* K *τέτοιο ώστε* $\tilde{\Omega} \subset K \subset \Omega$, *δηλαδή το* $\tilde{\Omega}$ *περιέχεται συμπαγώς στο* Ω.

ii. *Έστω* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Τότε, το* $v^\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ *καλείται* α*-τάξης ασθενής παράγωγος του* u *και συμβολίζεται ως*

$$v^\alpha = D^\alpha u$$

εάν:

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v^\alpha(x) \phi(x) dx,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

όπου ο α *καλείται πολυδείκτης με* $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ *και*

$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : D^\alpha u$ *ομοιόμορφα συνεχείς στο* $\tilde{\Omega}$, $\forall \alpha$ *και το* $supp u$ *είναι συμπαγές υποσύνολο του* $\Omega\}$, *με* $supp u = \{x : u(x) \neq 0\}$.

iii. $L^\infty(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : ||u||_\infty = max_{x\in\Omega}\{|u(x)|\}\}$

Θεώρημα 3.1. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $1 \leq p < \infty$.
Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

i. *Ο χώρος* $C_0^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον χώρο* $L^p(\Omega)$.

ii. *Έστω* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *και έστω ότι* $\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Τότε,

$$u(x) = 0, \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Ορισμός 3.2. *Ο χώρος Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$, *με* $p \in [1, \infty]$, *ορίζεται ως εξής:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists Du \in L^p(\Omega)\},$$

όπου Du *είναι η ασθενής παράγωγος της* $u : \Omega \to \mathbb{R}$.
Προφανώς,

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$$

Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ *είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:*

$$||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

με

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + ||Du||_{L^p(\Omega)},\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

ή καμιά φορά με την ισοδυναμή της

$$(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||Du||_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}},\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Ειδικότερα, ο χώρος $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ *είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{L^2(\Omega)},\ \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

Η αντίστοιχη νόρμα του $H^1(\Omega)$ *ορίζεται ως:*

$$||\cdot||_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$||u||_{H^1(\Omega)} := (||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||Du||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}},\ \forall u \in H^1(\Omega)$$

και είναι ισοδύναμη με την νόρμα του $W^{1,2}(\Omega)$.

Πρόταση 3.1. *Ο χώρος Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *είναι:*

i. *χώρος Banach, για* $1 \leq p \leq \infty$

ii. *ανακλαστικός χώρος, για* $1 < p < \infty$

iii. *διαχωρίσιμος χώρος, για* $1 \leq p < \infty$

Ειδικά ο χώρος $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ *είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Ορισμός 3.3. *Για* $1 \leq p < \infty$ *συμβολίζουμε με* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *το κλειστό περίβλημα του* $C_0^\infty(\Omega)$ *στον* $W^{1,p}(\Omega)$.
Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ *είναι εφοδιασμένος με την νόρμα που επάγει ο* $W^{1,p}(\Omega)$ *και είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.*
Επιπλέον, για $1 < p < \infty$ *ο χώρος* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *είναι ανακλαστικός.*
Για $p = 2$ *έχουμε ότι*

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

όπου ο $H_0^1(\Omega)$ *είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Παρατήρηση 3.1.

- *Ο χώρος* $C_0^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $W_0^{1,2}(\Omega)$, *δηλαδή:*

  $$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

  Πιο συγκεκριμένα, εάν $\Omega = \mathbb{R}^n$, *τότε:*

  $$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

  Γενικά ισχύει:

  $$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \subsetneqq H^1(\Omega)$$

- *Οι συναρτήσεις του* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *είναι συναρτήσεις του* $W^{1,p}(\Omega)$ *που μηδενίζονται στο σύνορο* $\partial\Omega$.
  Επιπλέον, αποδυκνύεται ότι για $1 \leq p < \infty$, *κάθε* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *που έχει συμπαγή φορέα, με* $supp u \subset \Omega$, *ανήκει στον* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ορισμός 3.4. *Για ακέραιους $k \geq 2$ και $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τον χώρο:*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \text{για } |\alpha| = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i < k\}$$

Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα:

$$|| \cdot ||_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} := \textstyle\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)},\ \forall u \in W^{k,p}(\Omega)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι :

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{|\alpha_1|} x_1 \partial^{|\alpha_2|} x_2 \cdots \cdots \partial^{|\alpha_n|} x_n}$ *είναι η ασθενής μερική παράγωγος του u.*

Για $p = \infty$ ορίζουμε την νόρμα στον χώρο $W^{k,\infty}(\Omega)$ ως εξής:

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)},\ \forall u \in W^{k,\infty}(\Omega)$$

Θεώρημα 3.2. *Ο χώρος $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach, για $k > 0,\ 1 \leq p < \infty$.*

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy.
Τότε, $\forall |\alpha| \leq k$ η ακολουθία $(D^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης Cauchy στον χώρο $L^p(\Omega)$.
Όμως, ο χώρος $L^p(\Omega)$ είναι χώρος Banach, δηλαδή κάθε Cauchy ακολουθία είναι και συγκλίνουσα, οπότε:
Για κάθε α υπάρχει $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ τέτοιο ώστε:

$$D^\alpha u_n \to u^\alpha, \text{ στον } L^p(\Omega)$$

Όταν $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ θέτουμε $u := u^{(0,0,\ldots,0)}$ έτσι ώστε $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$.
Θα δείξουμε ότι:

$$u^\alpha = D^\alpha u$$

Για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u D^\alpha \phi dx &= lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} lim_{n\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_n \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha \phi dx,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_\Omega u D^{|\alpha|} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha \phi dx,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Δηλαδή,

$$u^\alpha = D^\alpha u$$

Άρα,

$$D^{\alpha}u_n \to D^{\alpha}u, \text{ καθώς } n \to \infty, \ \forall |\alpha| \leq k$$

Το τελευταίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$u_n \to u \text{ στον } W^{k,p}(\Omega)$$

Άρα, ο $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach.

$\square$

Ορισμός 3.5. *Έστω B_1, B_2 δύο χώροι Banach. Λέμε ότι ο B_1 ενσφηνώνεται στον B_2 και γράφουμε $B_1 \hookrightarrow B_2$, εάν για κάθε $u \in B_1$ συνεπάγεται ότι :*

$$u \in B_2 \text{ και } ||u||_{B_2} \leq c||u||_{B_1}$$

με c σταθερά η οποία δεν εξαρτάται από τον B_1.
Ορίζουμε τον τελεστή ενσφήνωσης $J : B_1 \to B_2$ έτσι ώστε κάθε $u \in B_1$ μεταφέρεται μέσω του J στο ίδιο $u \in B_2$.
Επειδή $B_1 \hookrightarrow B_2$ συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής J είναι γραμμικός και συνεχής. Δηλαδή, εάν

$$||u||_{B_2} \leq c||u||_{B_1}, \ \forall u \in B_1$$

Τότε,

$$||J||_{B_1 \to B_2} \leq c$$

Εάν $B_1 \hookrightarrow B_2$ και $J : B_1 \to B_2$ συμπαγής τελεστής, τότε λέμε ότι ο B_1 ενσφηνώνεται συμπαγώς στον B_2.
Για παράδειγμα,

$$l_1 > l_2 \Rightarrow W^{l_1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l_2,p}(\Omega)$$

και

$$l > 0 \Rightarrow W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

Θεώρημα 3.3. *Εάν $q > p$ και $r < l$, τότε $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{r,q}(\Omega)$*

Θεώρημα 3.4. *(Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev)*
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$.

i. Εάν $1 \leq p < n$, τότε $\forall q^*$, με $1 \leq q^* \leq \frac{np}{n-p}$ η ενσφήνωση:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q*}(\Omega)$$

είναι συνεχής.

ii. Ε'αν $q^* \leq \frac{np}{n-p}$, τότε η ενσφήνωση:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q*}(\Omega)$$

είναι συμπαγής.

Πρόταση 3.2. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *και* $sup||u_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M < \infty$, *για* $M \neq M(n)$. *Τότε, υπάρχει υπακολουθία* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *τ.ω.*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \text{ στον } W^{1,p}(\Omega)$$

Θεώρημα 3.5. ***(Θεώρημα Rellich)***
Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ *και έστω ότι το σύνορο* $\partial\Omega$ *είναι τάξης* C^1.
Τότε, ο $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *συμπαγώς για κάθε* $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ *έτσι ώστε:*
Εάν

$$sup||u_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M < \infty, \text{ για κάποιο } M$$

Τότε,

$$\exists (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{: } u_{n_k} \rightharpoonup u, \text{ στον } L^q(\Omega)$$

Στην περίπτωση που $n = 2,\ p = 2$, *ο* $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *συμπαγώς για* $1 \leq q < \infty$.

Θεώρημα 3.6. ***(Θεώρημα Rayleich)***
Για $u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0$, *το πηλίκο Rayleich ορίζεται ως εξής:*

$$R(u) = \frac{\int_\Omega (\nabla u)^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \frac{|u|^2_{H_0^1(\Omega)}}{||u||^2_{L(\Omega)}}$$

Ισχύει ότι:

$$\lambda_1 = min_{u\in H_0^1(\Omega)} R(u), \text{ με } \lambda_1 : \text{η 1η ιδιοτιμή της Λαπλασιανής.}$$

3.2 Ανισότητα Poincare

Θεώρημα 3.7. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει:*

$$||u||_{L(\Omega)} \leq c||\nabla u||_{L(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Παρατήρηση 3.2. *Στον χώρο $H_0^1(\Omega)$ θεωρούμε την απεικόνιση*

$$|\cdot| : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} := ||\nabla u||_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Επομένως, για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &||u||_{H_0^1(\Omega)} = ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = ||u||_{L^2(\Omega)} + |u|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Leftrightarrow\ &||u||_{H_0^1(\Omega)} \geq |u|_{H_{0^1(\Omega)}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Από την ανισότητα Poincare έχουμε:

$$\begin{aligned} ||u||_{H_0^1(\Omega)} &= ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \\ &= (c+1)||\nabla u||_{L^2(\Omega)} \\ &= (c+1)|u|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Από τις σχέσεις $(3.1), (3.2)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$|u|_{H_01(\Omega)} \leq ||u||_{H_01(\Omega)} \leq (c+1)|u|_{H_0^1(\Omega)}$$

Επομένως, οι νόρμες $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)},\ ||\cdot||_{H_0^1(\Omega)}$ είναι ισοδύναμες στον $H_0^1(\Omega)$.

3.3 Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$, με $f \in L^2(\Omega)$.

Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Πρόβλημα Dirichlet):

$$(1) \left\{ \begin{array}{rll} -\Delta u & = f, & \sigma\tau o\ \Omega \\ u & = 0, & \sigma\tau o\ \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Για δεδομένη $f \in L^2(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του Π.Σ.Τ. (1) μία συνάρτηση $u \in X = H_0^1(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in X = H_0^1(\Omega)$ να ισχύει:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx \tag{3.3}$$

Θα δείξουμε ότι το Πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική ασθενή λύση.

Απόδειξη. Θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό:

$$a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$a(u,w) := \int_\Omega \nabla u \nabla w dx,\ \forall u, w \in H_0^1(\Omega)$$

- Θα δείξουμε ότι το a είναι συνεχές.
  Για κάθε $u, w \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |a(u,w)| &= |\int_\Omega \nabla u \nabla w dx| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla w| dx \\ &\leq |u|_{H_0^1(\Omega)} |w|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

  Επομένως, το διγραμμικό συναρτησιακο $a(u,w)$ είναι συνεχές.

- Θα δείξουμε ότι το a είναι πιεστικό.
  Για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \\ &= ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = |u|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

  Άρα, το συνατησιακό $a(u,w)$ είναι πιεστικό.

Με βάση τα παραπάνω οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram ισχύουν, οπότε υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ τ.ω.:

$$\begin{aligned} a(u,w) &= \langle f, w\rangle,\ \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx,\ \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Επομένως, για δεδομένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε να ισχύει η σχέση (3.3), δηλαδή υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ για το Πρόβλημα Dirichlet (1).

□

Πρόταση 3.3. *Η συνάρτηση $F : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, όπου σε κάθε $f \in L^2(\Omega)$ η F αντιστοιχεί στην μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ του Προβλήματος Dirichlet είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ τ.ω.:

$$\begin{aligned} F(f) &= u \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx,\ \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Προφανώς, η συνάρτηση F είναι γραμμική, αφού για κάθε $f, g \in L^2(\Omega)$ ισχύει ότι:

$$F(f+g) = F(f) + F(g)$$

Για $w = u \in H_0^1(\Omega)$ η σχέση (3.4) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla u dx &= \int_\Omega f u dx \\ \Leftrightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx &= \int_\Omega f u dx \\ \Leftrightarrow ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} = |u|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega f u dx \\ &\le ||f||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} \\ \Leftrightarrow |u|^2_{H_0^1(\Omega)} &\le ||f||_{L^2(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} \\ &\le c||f||_{L^2(\Omega)} |u|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\le c||f||_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Όμως, $u = F(f)$, οπότε η σχέση (3.5) γίνεται:

$$|F(f)|_{H_0^1(\Omega)} \le c||f||_{L^2(\Omega)},\ \forall f \in L^2(\Omega) \tag{3.6}$$

Τελικά λοιπόν η γραμμική συναρτηση F είναι συνεχής. □

Παρατήρηση 3.3. *Γνωρίζουμε ότι:*

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} \leq ||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq (c+1)|u|_{H_0^1(\Omega)}$$

Επομένως, για $u = F(f) \in H_0^1(\Omega)$ *και λόγω της σχέσης* (3.6) *έχουμε τα παρακάτω:*

$$\begin{aligned} &|F(f)|_{H_0^1(\Omega)} \leq ||F(f)||_{H_0^1(\Omega)} \leq (c+1)|F(f)|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{c+1}|F(f)|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c+1}||F(f)||_{H_0^1(\Omega)} \leq |F(f)|_{H_0^1(\Omega)} \leq c||f||_{L^2}(\Omega) \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{c+1}||F(f)||_{H_0^1(\Omega)} \leq c||f||_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Όμως, $\forall f \in L^2(\Omega)$ *ισχύει ότι:*

$$||F(f)||_{H_0^1(\Omega)} = ||F(f)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla F(f)||_{L^2(\Omega)} \geq ||F(f)||_{L^2(\Omega)}$$

Άρα, η σχέση (3.7) *γίνεται:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+1}||F(f)||_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{c+1}||F(f)||_{H_0^1(\Omega)} \leq c||f||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow ||F(f)||_{L^2(\Omega)} &\leq c(c+1)||f||_{L^2(\Omega)} \\ &= M||f||_{L^2(\Omega)},\ \forall f \in L^2(\Omega) \\ \Leftrightarrow ||F||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} &\leq M \end{aligned} \tag{3.8}$$

Επομένως, η γραμμική συνάρτηση $F : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *είναι συνεχής.*

3.4 Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

Θεώρημα 3.8. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών:*

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u & = g(u), \quad \sigma\tau o\ \Omega \\ \quad u & = 0, \qquad \sigma\tau o\ \partial\Omega \end{array}\right\}$$

όπου η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά $k > 0$. Εάν για την σταθερά Lipschitz k της g ισχύει ότι $k < \lambda_1$, με:

$$\lambda_1 = min\{\frac{|w|^2_{H^1_0(\Omega)}}{||w||^2_{H^1_0(\Omega)}} : w \in H^1_0(\Omega)\},$$

τότε το Πρόβλημα Dirichlet (2) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz, με σταθερά $k > 0$, άρα ισχύει:

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Για $y = 0$ η σχέση (3.9) γίνεται:

$$|g(x) - g(0)| \leq k|x - 0|, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Όμως, $\forall x \in \mathbb{R}$ ιαχύει:

$$||g(x) - g(0)|| \leq |g(x) - g(0)| \tag{3.11}$$

Επομένως, από τις σχέσεις $(3.9), (3.10)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} ||g(x) - g(0)|| &\leq |g(x) - g(0)| \leq k|x| \\ \Leftrightarrow |g(x)| &\leq k|x| + |g(0)|, \ \forall u \in L^2(\Omega), \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |g(u(x))| &\leq k|u(x)| + |g(0)| \\ \Rightarrow |g(u(x))|^2 &\leq (k|u(x)| + |g(0)|)^2 \\ \Rightarrow |g(u(x))|^2 &\leq 2(k^2|u(x)|^2 + |g(0)|^2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Επίσης, η σχέση (3.9) ισχύει $\forall u, w \in L^2(\Omega)$, άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} |g(u(x)) - g(w(x))| &\leq k|u(x) - w(x)| \\ \Rightarrow |g(u(x)) - g(w(x))|^2 &\leq k^2|u(x) - w(x)|^2 \\ \Rightarrow \int_\Omega |g(u(x)) - g(w(x))|^2 dx &\leq k^2 \int_\Omega |u(x) - w(x)|^2 dx \\ \Rightarrow ||g(u) - g(w)||_{L^2(\Omega)} &\leq k||u - w||_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

□

Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $F : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, όπως ορίστηκε στο Πρόβλημα Dirichlet (1).
Τότε, $\forall u, w \in L^2(\Omega)$ οι $g(u), g(w) \in L^2(\Omega)$, οπότε από την σχέση (3.13) έχουμε:

$$\begin{aligned} ||(F \circ g)(u) - (F \circ g)(w)||_{L^2(\Omega)} &= ||F(g(u)) - F(g(w))||_{L^2(\Omega)} \\ &= ||F(g(u) - g(w))||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||F||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} ||g(u) - g(w)||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ||F||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} k ||u - w||_{L^2(\Omega)} \\ &= k||F||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} ||u - w||_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ο τελεστής F είναι αυτοσυζυγής.
Πράγματι, $\forall f, g \in L^2(\Omega)$ $\exists u, v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ αντίστοιχα που είναι ασθενείς λύσεις του Προβλήματος Dirichlet (1) τ.ω.:

$$u = F(f) \text{ και } v = F(g)$$

Επομένως, ισχύουν τα εξής:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \ \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.15}$$

και

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega g w dx, \ \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.16}$$

Για $w = v \in H_0^1(\Omega)$ και $w = u \in H_0^1(\Omega)$ αντίστοιχα οι σχέσεις $(3.15), (3.16)$ γίνονται:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \tag{3.17}$$

και

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g u dx \tag{3.18}$$

Από τις σχέσεις $(3.17), (3.18)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f v dx = \int_\Omega g u dx \\ \Leftrightarrow &\int_\Omega f F(g) dx = \int_\Omega g F(f) dx \\ &\Leftrightarrow \langle f, F(g)\rangle = \langle g, F(f)\rangle = \langle F(f), g\rangle, \ \forall f, g \in L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Τελικά λοιπόν ο τελεστής F είναι αυτοσυζιγής.

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι ο τελεστής $F : L^2(\Omega) \to L^2(Omega)$ είναι συμπαγής

Άρα οι υποθέσεις του Φασματικού Θεωρήματος ικανοποιούνται και έτσι υπάρχει ακολουθία ιδιοτιμών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, με $\lambda_1 > 0$ τ.ω.:

$$lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty \text{ και } \lambda_1 = min\{\tfrac{|w|^2_{H^1_0(\Omega)}}{||w||^2_{L^2(\Omega)}} : w \in H^1_0(\Omega)\}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{|w|^2_{H^1_0(\Omega)}}{||w||^2_{L^2(\Omega)}},\ \forall w \in H^1_0(\Omega) \\ \Leftrightarrow \lambda_1|w|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq ||w||^2_{H^1_0(\Omega)},\ \forall w \in H^1_0(\Omega) \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε ότι $\forall f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει $u \in H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, η οποία είναι ασθενής λύση του Προβλήματος Dirichlet (1) τ.ω.:

$$\begin{aligned} u &= F(f) \\ \Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega f w dx,\ \forall w \in H^1_0(\Omega). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Οπότε, για $w = u \in H^1_0(\Omega)$ η σχέση (3.20) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla u dx &= \int_\Omega f u dx \\ \Rightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx &= \int_\Omega f u dx \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \int_\Omega (\nabla u)^2 dx = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} &= |u|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1||u||^2_{L^2(\Omega)} &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1||u||_{L^2(\Omega)} &\leq ||f||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda_1||F(f)||_{L^2(\Omega)} &\leq ||f||_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow ||F||_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} &\leq \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Άρα, η σχέση (3.14) γίνεται:

$$||(F \circ g)(u) - (F \circ g)(w)||_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k}{\lambda_1}||u - w||_{L^2(\Omega)},\ \forall u, w \in L^2(\Omega)$$

με $k < \lambda_1 \Rightarrow \frac{k}{\lambda_1} < 1$

Δηλαδή η συνάρτηση $F \circ g$ είναι συστολή και επομένως, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach προκύπτει ότι η $F \circ g$ έχει σταθερό σημείο.
Άρα, $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned}
(F \circ g)(u) &= u \\
\Leftrightarrow F(g(u)) &= u \\
\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx &= \int_\Omega g(u) w dx, \ \forall w \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Τελικά λοιπόν δείξαμε ότι το Πρόβλημα Dirichlet (2) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1(\Omega)$.

Κεφάλαιο 4

Θεωρία One-Valued Μονότονων Τελεστών

4.1 Εισαγωγή στους One-Valued τελεστές

Ορισμός 4.1. *Έστω ένας χώρος Banach X και ένας τελεστής $A : X \to X^*$.*

i. Ο A καλείται μονότονος *εάν και μόνο εάν* $\forall u, v \in X$ *ισχύει ότι*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0.$$

ii. Ο A καλείται αυστηρά μονότονος *εάν και μόνο εάν* $\forall u, v \in X$ *ισχύει ότι*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0.$$

iii. Ο A καλείται ισχυρά μονότονος *εάν και μόνο εάν*

$$\exists c > 0 : \langle Au - Av, u - v \rangle \geq c||u - v||^2, \ \forall u, v \in X$$

iv. Ο A καλείται ομοιόμορφα μονότονος *εάν και μόνο εάν* $\forall u, v \in X$ *ισχύει ότι:*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq \alpha(||u - v||)||u - v||,$$

όπου $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ αυστηρώς αύξουσα συνάρτηση με:

$$\alpha(0) = 0 \text{ και } a(t) \to \infty, \text{ καθώς } t \to \infty$$

Για παράδειγμα, έστω $\alpha(t) = c|t|^{p-1}$, με $p > 1$ και $c > 0$.

Τότε,

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &\geq \alpha(||u - v||)||u - v|| \\ &= c||u - v||^{p-1}||u - v|| \\ &= c||u - v||^p \end{aligned}$$

v. Ο A καλείται πιεστικός *εάν και μόνο εάν*

$$lim_{||u||\to\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{||u||}=\infty$$

vi. Ο A καλείται ασθενώς πιεστικός *εάν και μόνο εάν*

$$lim_{||u||\to\infty}||Au||=\infty$$

vii. Ο $A:X\to Y$, όπου X,Y χώροι Banach καλείται stable *εάν και μόνο εάν*

$$||Au-Av,u-v||\geq\alpha(||u-v||),\ \forall u,v\in X,$$

όπου $\alpha:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}+$, με $\alpha(0)=0$ και $\alpha(t)\to\infty$, καθώς $t\to\infty$.

viii. Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$. Ο A καλείται stable έαν και μόνο εάν

$$\exists c>0:|\langle Au-Av,u-v\rangle|\geq c||u-v||^2,\ \forall u,v\in\mathcal{H}$$

$$\Rightarrow||Au-Av||\geq||u-v||,\ \forall u,v\in\mathcal{H}$$

Παρατήρηση 4.1. *Έστω X χώρος Banach και $A:X\to X^*$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*
A ισχυρά μονότονος $\Rightarrow$ A ομοιόμορφα μονότονος $\Rightarrow$ A αυστηρά μονότονος
$\Rightarrow$ A μονότονος.
Επίσης, εάν ο A είναι ομοιόμορφα μονότονος, τότε ο A είναι πιεστικός και stable.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι εάν ο A είναι ομοιόμορφα μονότονος, τότε ο A είναι stable.

$$||A(u)-A(v)||\cdot||u-v||\geq\langle A(u)-A(v),u-v\rangle\geq\alpha(||u-v||)\cdot||u-v||$$

$$\Rightarrow||A(u)-A(v)||\geq\alpha(||u-v||)$$

Επομένως, ο $A:X\to X^*$ είναι stable.
Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι εάν ο A είναι ομοιόμορφα μονότονος, τότε ο A είναι πιεστικός.

$$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle&=\langle A(u)-A(0)+A(0),u\rangle\\&=\langle A(u)-A(0),u\rangle+\langle A(0),u\rangle\\&\geq\alpha(||u||)\cdot||u||-||A(0)||\cdot||u||\end{aligned}$$

Αλλά, $\alpha(||u||)\to\infty$, καθώς $||u||\to\infty$

Άρα,

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{||u||} \geq \alpha(||u||) - ||A(0)||$$

$$\Rightarrow lim_{||u|| \to \infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{||u||} = \infty$$

Επομένως, ο A είναι πιεστικός.

□

Παράδειγμα 4.1. *Έστω H χώρος Hilbert, με $||\cdot||$ νόρμα, $\langle\cdot\rangle$ εσωτερικό γινόμενο και $K \subset H$ ένα κλειστό, κυρτό, μη κενό υποσύνολο του H. Θεωρούμε την μετρική προβαλή του H στο K, $\mathcal{P}_K : H \to K$, με $\mathcal{P}_K(f) := u, \forall f \in H, u \in K$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις:*

1. $||f - u|| = min\{||f - w|| : w \in K\}$

2. $\langle f - u, w - u\rangle \leq 0, \ \forall w \in K$

Τότε, η μετρική προβολή $\mathcal{P}_K$ είναι ένας μονότονος τελεστής.

Απόδειξη. Από υπόθεση ισχύει ότι:

i. $\langle x - \mathcal{P}_K(x), w - \mathcal{P}_K(x)\rangle \leq 0, \ \forall w \in K$

ii. $\langle y - \mathcal{P}_K(y), w - \mathcal{P}_K(y)\rangle \leq 0, \ \forall w \in K$

Θέτουμε $w = \mathcal{P}_K(y) \in K$ στη σχέση (i), οπότε έχουμε:

$$\langle x - \mathcal{P}_K(x), \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x)\rangle \leq 0, \ \forall w \in K$$

Θέτουμε $w = \mathcal{P}_K(x) \in K$ στη σχέση (ii), άρα:

$$\langle y - \mathcal{P}_K(y), \mathcal{P}_K(x) - \mathcal{P}_K(y)\rangle \leq 0, \ \forall w \in K$$

Με πρόσθεση των δύο τελευταίων σχέσεων κατά μέλη προκύπτει ότι,

$$\langle x - \mathcal{P}_K(x), \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x) + \langle y - \mathcal{P}_K(y), \mathcal{P}_K(x) - \mathcal{P}_K(y)\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \langle x - \mathcal{P}_K(x) - y + \mathcal{P}_K(y), \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x) \leq 0$$
$$\Rightarrow \langle x - y, \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x) + ||\mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x)||^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow ||\mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x)||^2 \leq \langle y - x, \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x)\rangle$$

Από την τελευταία σχέση καταληγουμε στο ότι,

$$\langle y - x, \mathcal{P}_K(y) - \mathcal{P}_K(x)\rangle \geq 0, \ \forall x, y \in H$$

Άρα, η απεικόνιση $\mathcal{P}_K : H \to K$ είναι μονότονος τελεστής. □

Παράδειγμα 4.2. *Έστω H χώρος Hilbert και $V : H \to H$ μία non-expansive απεικόνιση.*
Τότε, η απεικόνιση $x \longmapsto x - V(x)$ είναι μονότονη.

Απόδειξη. Αρχικά, αφού η $V : H \to H$ είναι non-expansive ισχύει ότι:

$$||V(x) - V(y)|| \leq ||x - y||, \; \forall x, y \in H.$$

$$\begin{aligned}
\langle x - V(x) - y + V(y), x - y \rangle &= \langle x - V(x), x - y \rangle + \langle -y + V(y), x - y \rangle \\
&= \langle x, x - y \rangle + \langle -V(x), x - y \rangle + \langle -y, x - y \rangle + \langle V(y), x - y \rangle \\
&= 2||x - y||^2 - 2\langle V(x) - V(y), x - y \rangle \\
&\geq 2||x - y||^2 - 2||V(x) - V(y)|| \cdot ||x - y|| \\
&\geq 2||x - y||^2 - 2||x - y|| \cdot ||x - y|| \\
&= 0, \; \forall x, y \in H
\end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση $x \longmapsto x - V(x)$ είναι μονότονη.

□

Ορισμός 4.2. *Έστω $f : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, με U ανοικτό υποσύνολο σε έναν χώρο Banach X.*

i. Η f καλείται Gateaux διαφορίσιμη στο $u \in U$ εάν και μόνο εάν υπάρχει συναρτησιακό $\alpha \in X^*$ τέτοιο ώστε:

$$lim_{t \to 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} = \langle \alpha, h \rangle, \; \forall h \in X.$$

Το α καλειται Gateaux παράγωγος της f στο U και γράφουμε ότι $f'(u) = \alpha$.

ii. Η f καλείται Gateaux διαφορίσιμη στο ανοικτό $U \subseteq X$ εάν και μόνο εάν η f είναι Gateaux διαφορίσιμη σε κάθε $u \in X$.

Ορισμός 4.3. *Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $f : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση σε τυχαίο $U \subseteq X$. Η f καλείται Gateaux διαφορίσιμη στο $U \subseteq X$ εάν και μόνο εάν η f είναι ορισμένη σε μια ανοικτή περιοχή του U και είναι G-διαφορίσιμη σε κάθε $u \in U$.*

Πρόταση 4.1. *Έστω $f : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ μία G-διαφορίσιμη συνάρτηση στο κυρτό $U \subseteq X$, όπου X πραγματικός χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. Η f είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

ii. Η $f' : U \to X^*$ είναι μονότονη (αντίστοιχα, γνησίως μονότονη).

Απόδειξη. Έστω $x, y \in U$.
Ορίζουμε συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\phi(t) := f(x + ty), \ \forall t \in [0,1]$$

Προφανώς, $\phi'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x), \ \forall t \in [0,1]$,

ή διαφορετικά,

$$\phi'(t) = \langle f'(x + t(y - x)), y - x \rangle \ \forall t \in [0,1], \text{ αφού } f'(u) \in X^*, \ \forall u \in U.$$

$(i.) \Rightarrow (ii.)$
Έστω ότι η f είναι κυρτή.
Τότε, η ϕ είναι επίσης κυρτή και η ϕ' είναι μονότονη, δηλαδή $\forall x, y \in U$ ισχύει ότι:

$$\begin{gathered}\phi'(1) \geq \phi'(0) \\ \Leftrightarrow \langle f'(x + 1 \cdot (y - x)), y - x \rangle \geq \langle f'(x + 0 \cdot (y - x)), y - x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f'(y), y - x \rangle \geq \langle f'(x), y - x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall x, y \in U\end{gathered}$$

Άρα, $f' : U \to X^*$ μονότονη συνάρτηση.

$(ii.) \Rightarrow (i.)$

Έστω ότι $f' : U \to X^*$ μονότονη συνάρτηση και έστω επίσης $s, t \in [0,1]$, με $s < t$. Τότε,

$$\begin{aligned}\phi'(t) - \phi'(s) &= \langle f'(x + t(y - x)), y - x \rangle - \langle f'(x + s(y - x)), y - x \rangle \\ &= \langle f'(x + t(y - x)) - f'(x + s(y - x)), y - x \rangle\end{aligned} \tag{4.1}$$

Η $f' : U \to X^*$ μονότονη συνάρτηση, άρα:

$$\begin{gathered}\langle f'(x + t(y - x)) - f'(x + s(y - x)), x + t(y - x) - x - s(y - x) \rangle \geq 0 \\ \Leftrightarrow (t - s)\langle f'(x + t(y - x)) - f'(x + s(y - x)), y - x \rangle \geq 0\end{gathered}$$

Όμως, $t - s > 0$ από υπόθεση, άρα η σχέση (4.1) :

$$\langle f'(x + t(y - x)) - f'(x + s(y - x)), y - x \rangle \geq 0 \tag{4.2}$$

Επομένως,

$$\phi'(t) - \phi'(s) \geq 0 \Leftrightarrow \phi'(t) \geq \phi'(s), \ \forall t, s \in [0,1], \text{ με } s < t$$

Οπότε, ϕ' μονότονη $\Rightarrow \phi$ κυρτή $\Rightarrow f$ κυρτή. $\square$

4.2 Ιδιότητες One-Valued Μονότονων Τελεστών

Οι παρακάτω προτάσεις παρουσιάζουν μερικές από τις βασικές ιδιότητες των one-valued μονότονων τελεστών.

Πρόταση 4.2. *Έστω $A : X \to X^*$ ένας μονότονος τελεστής σε έναν πραγματικό χώρο Banach X. Ο A είναι τοπικά φραγμένος.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο A είναι τοπικά φραγμένος αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \in X \;\; \exists \mathcal{U} \subseteq X$, με $x \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε η εικόνα $A[\mathcal{U}] \subseteq X^*$ να είναι φραγμένη. Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπον απαγωγή.

Έστω A όχι τοπικά φραγμένος τελεστής. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία $(x_n)_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $x_n \to x$, καθώς $n \to \infty$ για κάποιο $x \in X$ και $||A(x_n)||_{X^*} \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.

Αφού $x_n \to x$, καθώς $n \to \infty$ έπεται ότι $||x_n|| \to ||x||$, καθώς $n \to \infty$ και η ακολουθία $(||x_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε:

$$\alpha_n = \tfrac{1}{1+||A(x_n)||_{X^*}\cdot||x_n-x||_X}$$

Προφανώς, $0 < \alpha_n < 1, \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Από υπόθεση, ο A είναι μονότονος, άρα $\forall u \in X, \forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
&0 \leq \langle Ax_n - Au, x_n - u\rangle \\
\Leftrightarrow\; &0 \leq \langle Ax_n - Au, x_n - x + x - u\rangle \\
\Leftrightarrow\; &0 \leq \langle Ax_n, x_n - x\rangle + \langle Ax_n, x - u\rangle - \langle Au, x_n - u\rangle \\
\Leftrightarrow\; \langle Ax_n, u - x\rangle &\leq \langle Ax_n, x_n - x\rangle - \langle Au, x_n - u\rangle \\
&\leq ||Ax_n||_{X^*}\cdot||x_n - x||_X + ||Au||_{X^*}\cdot||u - x_n||_X \\
&\leq ||Ax_n||_{X^*}\cdot||x_n - x||_X + ||Au||_{X^*}\cdot(||u||_X + ||x_n||_X)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ανισοτική σχέση με τον όρο α_n έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\alpha_n\langle Ax_n, u - x\rangle \leq \alpha_n||Ax_n||_{X^*}\cdot||x_n - x||_X + \alpha_n||Au||_{X^*}(||u||_X + ||x_n||_X) \\
&\alpha_n\langle Ax_n, u - x\rangle \leq 1 + \alpha_n||Au||_{X^*}(||x_n||_X + ||u||_X)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Όμως, εξ'ορισμού της α_n έπεται ότι :

$$\alpha_n||Ax_n||_{X^*}\cdot||x_n - x||_X = 1 - \alpha_n$$

Θέτουμε $K(x,u) = \alpha_n ||Au||_{X^*} \cdot (||x_n||_X + ||u||_X)$, το οποίο εξαρτάται από τα $u, x \in X$ και όχι από το $n \in \mathbb{N}$.
Επομένως, η σχέση (4.3) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\alpha_n \langle Ax_n, u - x \rangle \leq 1 + \alpha_n ||Au||_{X^*} \cdot (||x_n||_X + ||u||_X) \\ \Leftrightarrow\ &\alpha_n \langle Ax_n, u - x \rangle < 1 + K(x,u), \qquad \forall x, u \in X \end{aligned} \tag{4.4}$$

Θέτουμε $w = u - x \in X$ και έτσι η σχέση (4.4) γίνεται:

$$\alpha_n \langle Ax_n, u - x \rangle < 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall w \in X \tag{4.5}$$

Άρα, από τις σχέσεις $(4.4), (4.5)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} &|\alpha_n \langle Ax_n, w \rangle| < 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall w \in X \\ \Leftrightarrow\ &|\langle \alpha_n A(x_n), w \rangle| < 1 + \widehat{K}(x,w),\ \forall w \in X \end{aligned} \tag{4.6}$$

Επομένως, $sup_{n\to\infty} |\langle \alpha_n Ax_n, w \rangle| < 0$ και με εφαρμογή του Θεωρήματος Banach-Steinhauss υπάρχει $\lambda(x) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} &||\alpha_n Ax_n||_{X^*} \leq \lambda(x) \\ \Leftrightarrow\ &||Ax_n||_{X^*} \leq \frac{\lambda(x)}{\alpha_n} \\ \Leftrightarrow\ &||Ax_n||_{X^*} \leq \lambda(x)(1 + ||Ax_n||_{X^*}) \cdot ||x_n - x||_X \\ \Leftrightarrow\ &||Ax_n||_{X^*}(1 - \lambda(x)||x_n - x||_X) \leq \lambda(x) \\ \Leftrightarrow\ &||Ax_n||_{X^*} \leq \frac{\lambda(x)}{1 - \lambda(x)||x_n - x||_X} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Όμως, $x_n \to x$, καθώς $n \to \infty$, επομένως η ακολουθία $(||x_n - x||)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, άρα και η ακολουθία $(\frac{\lambda(x)}{1-\lambda(x)||x_n - x||_X})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Το τελευταίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα, από την σχέση (4.7), ότι η ακολουθία $(||A(x_n)||_{X^*})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, γεγονός που καταλήγει σε άτοπο, γιατί $||Ax_n||_{X^*} \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.
Επομένως, ο τελεστής A είναι τοπικά φραγμένος.

$\square$

Πρόταση 4.3. *Έστω $A : X \to X$ ένας γραμμικός και μονότονος τελεστής σε έναν χώρο Banach X. Τότε, ο A είναι συνεχής τελεστής.*

Απόδειξη. Ο A είναι μονότονος άρα, από Πρόταση 4.2, ο A είναι τοπικά φραγμένος τελεστής. Επομένως, ο A είναι τοπικά φραγμένος κια γραμμικός σε μια περιοχή του 0_X, δηλαδή στην $\mathcal{B}_X = x \in X : ||x|| \leq 1$.
Οπότε,

$$\exists c > 0 : ||Ax||_{X^*} \leq c||x||_X,\ \forall u \in X$$

.
Άρα, ο τελεστής A είναι συνεχής. $\square$

Ορισμός 4.4. *Έστω $A : X \to X^*$ ένας τελεστής σε έναν χώρο Banach X.*

i. *Ο A καλείται* demicontinuous *εάν και μόνο εάν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in X$, έπεται ότι: $Au_n \rightharpoonup Au$, καθώς $n \to \infty$.*

ii. *Ο A καλειται* hemicontinuous *εάν και μόνο εάν η απεικόνιση $t \longmapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, $\forall u, w, v \in X$.*

iii. *Ο A καλείται* ισχυρά συνεχής *εάν και μόνο εάν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u \in X$, έπεται ότι $Au_n \to Au$, καθώς $n \to \infty$.*

iv. *Ο A καλείται* φραγμένος *εάν και μόνο εάν απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του X^*.*

Παρατήρηση 4.2. *A συνεχής $\Rightarrow$ A demicontinuous $\Rightarrow$ A hemicontinuous.*

Πρόταση 4.4. *Έστω X, Y ανακλαστικοί χώροι Banach και $A : X \to Y$ ένας τελεστής. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

i. *Εάν ο A είναι ισχυρά συνεχής, τότε ο A είναι συμπαγής.*

ii. *Εάν ο A είναι γραμμικός και συμπαγής, τότε ο A είναι ισχυρά συνεχής.*

Απόδειξη. i. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία φραγμένη ακολουθία στον X.
Ο χώρος Banach X είναι ανακλαστικός, οπότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \text{ καθώς } k \to \infty \text{ στον } X.$$

Όμως, ο A είναι ισχυρά συνεχής τελεστής, άρα

$$Au_{n_k} \to Au, \text{ καθώς } k \to \infty, \text{ στον } Y.$$

Επομένως ο A είναι συμπαγής αφού καθε φραγμένη ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έχει συγκλίνουσα συγκλίνουσα υπακολουθία $(Au_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον Y.

ii. Έστω $A : X \to Y$ γραμμικός και συμπαγής τελεστής. Θα δείξουμε ότι ο A είναι ισχυρά συνεχής.
Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ φραγμένη ακολουθία στον X. Τότε, επειδή ο A είναι συμπαγής τελεστής υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε:

$$Au_{n_k} \to Au, \text{ καθώς } k \to \infty. \text{ στον } Y.$$

Ο X είναι ανακλαστικός χώρος και η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη, άρα

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \text{ καθώς } k \to \infty, \text{ με } u \in X.$$

Επομένως, απο τις δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούμαστε στο ότι ο $A : X \to Y$ είναι ισχυρά συνεχής τελεστής.

$\square$

Λήμμα 4.1. *Έστω X, X^* χώροι Banach και $A : X \to X^*$ ένας μονότονος και hemicontinuous τελεστής. Εάν υπάρχουν $x \in X, b \in X^*$, τέτοια ώστε:*

$$\langle b - Ay, x - y \rangle \geq 0,\ \forall y \in X$$

Τότε, $b = Ax$.

Απόδειξη. Έστω $z \in X$. Θέτουμε $y = x - tz$, με $t > 0$. Από υπόθεση, ο τελεστής A είναι μονότονος, άρα:

$$\begin{aligned} & \langle b - Ay, x - y \rangle \geq 0,\ \forall y \in X \\ \Leftrightarrow\ & \langle b - A(x - tz), x - (x - tz) \rangle \geq 0,\ \forall t > 0 \\ \Leftrightarrow\ & t\langle b - A(x - tz), z \rangle \geq 0,\ \forall t > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \langle b - A(x - tz), z \rangle \geq 0,\ \forall t > 0, \forall z \in X \end{aligned} \tag{4.8}$$

Θεωρούμε ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, με $t_n > 0$ και $t_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = x - t_n z$, $\forall z \in X$, με $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ και $x_n \to x$ πάνω σε μια ημιευθεία.
Από υπόθεση, ο A είναι hemicontinuous τελεστής, άρα

$$Ax_n = A(x - t_n z) \rightharpoonup Ax, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Οπότε,

$$\langle b - A(x - t_n z), z \rangle \rightharpoonup \langle b - Ax, z \rangle, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Όμως, από την σχέση (4.8) έπεται ότι

$$\langle b - Ax, z \rangle \geq 0,\ \forall z \in X \tag{4.9}$$

και

$$\begin{aligned} & \langle b - Ax, -z \rangle \geq 0,\ \forall z \in X \\ \Leftrightarrow\ & \langle b - Ax, z \rangle \leq 0,\ \forall z \in X \end{aligned} \tag{4.10}$$

Τελικά, από τις σχέσεις (4.9),(4.10) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & \langle b - Ax, z \rangle = 0,\ \forall z \in X \\ \Rightarrow\ & b - Ax = 0 \\ \Leftrightarrow\ & b = Ax \end{aligned} \tag{4.11}$$

□

Πόρισμα 4.1. *Έστω $A : X \to X^*$ ένας μονότονος τελεστής σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach X. Ο A ειναι hemicontinuous εάν και μόνο εάν ο A είναι demicontinuous.*

Πρόταση 4.5. *Έστω μία συνεχής και πιεστική συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Τότε, η* f *είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$.
Η f είναι πιεστική, άρα ισχύει ότι:

$$lim_{||x|| \to \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{||x||}$$

Ισοδύναμα, $\forall M > 0\ \exists R > 0$, τ.ω. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, με $||x|| \geq R$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle f(x), x \rangle &> M||x|| \\ &= ||y|| \cdot ||x|| \\ &\geq \langle y, x \rangle \\ \Rightarrow \langle f(x), x \rangle &> \langle y, x \rangle \\ \Leftrightarrow \langle f(x) - y, x \rangle &> 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $H(x) = f(x) - y$, με $x \in \mathbb{R}^n$.
Η συνάρτηση H είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής.
Επιπλέον, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι:

$$\langle H(x), x \rangle = \langle f(x) - y, x \rangle \tag{4.13}$$

Άρα, από τις σχέσεις (4.12), (4.13) καταλήγουμε στο ότι:

$$\langle H(x), x \rangle > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ με } R = ||x|| > 0$$

Επομένως, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower

$$\exists x_o \in \mathbb{R}^n, \text{ με } ||x_o|| \leq R \text{ τ.ω.}$$

$$H(x_o) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) - y = 0 \Leftrightarrow f(x_o) = y \tag{4.14}$$

Δηλαδή, $\forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $f(x_o) = y$.
Άρα, η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι επί.

□

Παρατήρηση 4.3. *Ένα ανάλογο συμπέρασμα αποδυκνύεται στο παρακάτω Θεώρημα για απειροδιάστατους χώρους, όπου εκτός από την συνέχεια και την πιεστικότητα του τελεστή απαιτείται και η μονοτονία του.*

Θεώρημα 4.1. ***(Θεώρημα Minty- Browder)***
Έστω X διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach. Εάν $A : X \to X^*$ είναι ένας συνεχής, μονότονος και πιεστικός τελεστής, τότε ο A είναι επί.

Απόδειξη. Έστω $y \in X^*$.
Ο χώρος Banach X είναι διαχωρίσιμος, άρα υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποχώρων του X, με $dimX_n < \infty$ και $X_n = \langle w_1, w_2, ...w_n\rangle$ τέτοια ώστε:

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}.$$

Ο $A|_{X_n}$ παραμένει συνεχής και πιεστικός και $dimX_n < \infty$, οπότε από Πρόταση 4.5 ο $A : X_n \to {X_n}^*$ είναι επί για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα, υπάρχει $x_n \in X_n$ τέτοιο ώστε $Ax_n = y$.
Θεωρούμε ακολουθία $(x_n)_n \subseteq X$.
Ισχύει ότι:

$$\frac{\langle Ax_n, x_n\rangle}{||x_n||} = \frac{\langle y, x_n\rangle}{||x_n||} \leq \frac{||y|| \cdot ||x_n||}{||x_n||} = ||y|| \tag{4.15}$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον X.
Έστω ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.
Τότε, θα υπήρχε x_n, με $||x_n|| \to \infty$, καθώς $n \to \infty$.
Όμως, ο τελεστής A είναι πιεστικός από υπόθεση, άρα:

$$lim_{||x_n||\to\infty} \frac{\langle Ax_n, x_n\rangle}{||x_n||} = \infty$$

Το τελευταίο είναι άτοπο από την σχέση (4.15).
Ο χώρος Banach X είναι ανακλαστικός και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ είναι φραγμένη στον X, άρα υπαρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε :

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \in X, \text{ καθώς } k \to \infty \text{ .}$$

Επίσης, ο A είναι μονότονος τελεστής, άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} &\langle Ax_{n_k} - Az, x_{n_k} - z\rangle \geq 0, \ \forall z \in X \\ &\Leftrightarrow \langle y - Az, x_{n_k} - z\rangle \geq 0, \ \forall z \in X \end{aligned} \tag{4.16}$$

Επιπλέον, από την στιγμή που $x_{n_k} \rightharpoonup x \in X$, καθώς $k \to \infty$, έπεται ότι:

$$\langle y - Az, x_{n_k} - z\rangle \rightharpoonup \langle y - Az, x - z\rangle$$

Όμως, από την (4.16) ισχύει ότι:

$$\langle y - Az, x_{n_k} - z\rangle \geq 0, \ \forall z \in X$$

Οπότε, $\langle y - Az, x - z\rangle \geq 0, \ \forall z \in X$.
Επίσης, ο A είναι συνεχής $\Rightarrow$ A hemicontinuous. Οι υποθέσεις του Λήμματος (4.1) ικανοποιούνται και έτσι έχουμε ότι:$y = Ax$.
Άρα,

$$\forall y \in X^* \ \exists x \in X : Ax = y, \text{ δηλαδή ο τελεστής } A : X \to X^* \text{ είναι επί.}$$

□

Το θεώρημα Minty-Browder βρίσκει πολλές εφαρμογές σε Μη γραμμικά Προβλήματα Συνοριακών Τιμών. Μία εφαρμογή του παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο, αλλά πρώτα θα χρειαστεί να δώσουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες του τελεστή Nemyckii.

Ορισμός 4.5. *Έστω X χώρος Banach και τελεστής $A : D(A) \subseteq X \to X^*$. Ο A καλείται* μεγιστικά μονότονος *εάν και μόνο εάν $\forall [u, u^*] \in X \times X^*$ και $\langle u^* - Av, u - v\rangle_X \geq 0,\ \forall v \in D(A)$, ισχύει ότι:*

$$u \in D(A) \text{ και } u^* = Au.$$

4.3 Τελεστές Nemyckii

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό, μετρήσιμο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με $N \geq 1$ και έστω συνάρτηση $f : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x, u) \in \mathbb{R},\ \forall (x, u) \in G \times \mathbb{R}^n$, με $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

I. Τις συνθήκες Καραθεοδωρή, δηλαδή:

(1) Η απεικόνιση $x \longmapsto f(x, u)$ είναι μετρήσιμη στο $G,\ \forall u \in \mathbb{R}^n$.

(2) Η απεικόνιση $u \longmapsto f(x, u)$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$, για σχεδόν όλα τα $x \in G$.

II. Την αυξητική συνθήκη, δηλαδή:
Για κάθε $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$|f(x, u)| \leq \alpha(x) + b \sum_{n=1}^{\infty} |u_i|^{\frac{p_i}{q}},$$

όπου $b > 0$ σταθερό, $\alpha \in L^q(G)$ μη αρνητική συνάρτηση και $1 \leq q$, $p_i \leq \infty,\ \forall i \in I$.

Τότε, ο τελεστής Nemyckii ορίζεται ως $F : X \to X^*$, με:

$(Fu)(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))$, με $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, όπου
$X = L^{p_i}(G), X^* = L^q(G)$.

Ειδικότερα, για $n = 1$ έχουμε την συνάρτηση $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Οπότε, ο τελεστής Nemyckii $F : X \to X^*$, με $X = L^p(G), X^* = L^q(G), p = p_1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, έτσι ώστε $\frac{p}{q} = p - 1$, ορίζεται ως:

$$(Fu)(x) = f(x, u(x))$$

Η f καλείται να ικανοποιήσει παλι τις δύο παρακάτω συνθήκες:

I. Τις συνθήκες του Καραθεοδωρή, δηλαδή:

   (1) Η απεικόνιση $x \longmapsto f(x,u)$ είναι μετρήσιμη στο G, $\forall u \in \mathbb{R}$.

   (2) Η απεικόνιση $u \longmapsto f(x,u)$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}$, για όλα σχεδόν τα $x \in G$.

II. Την αυξητική συνθήκη παρακάτω:
Έστω $1 < p < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και έστω μία μη αρνητική συνάρτηση $\alpha \in L^q(G)$ και $b > 0$ σταθερό τέτοια ώστε:

$$|f(x,u)| \leq \alpha(x) + b|u|^{p-1},\ \forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}$$

Θεώρημα 4.2. *Έστω $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (I), (II).*
Τότε, ο τελεστής Nemyckii F απεικονίζει το $L^p(G)$ στο $L^q(G)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in L^p(G)$.
Η απεικόνιση $x \longmapsto u(x)$ είναι μετρήσιμη στο G, άρα υπάρχει μία ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $u_n(x) \to u(x)$ σ.π. στο G.
Από την $(I.2.)$ συνθήκη έχουμε ότι:

$$lim_{n\to\infty} f(x,u_n(x)) = f(x,u(x)) = F(x,u(x)),\ \sigma.\pi.\ \text{στο}\ G\ (\star)$$

Θεωρούμε $u_n(x) = \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^{(n)} X_{G_i^n}(x)$, όπου $G_i^n \subset G$ μετρήσιμα σύνολα $\forall n \in \mathbb{N}$.
Τότε,

$$f(x,u_n(x)) = f(x, \sum_{i=1}^{M(n)} c_i^{(n)} X_{G_i^n}(x)) = \sum_{i=1}^{M(n)} f(x, c_i^{(n)}) X_{G_i^n}(x)$$

Όμως, οι $f(x, c_i^{(n)})$ μετρήσιμες $\Rightarrow f(x,u_n(x))$ μετρήσιμη.
Επομένως, από την σχέση $(\star)$ συμπεραίνουμε ότι η $F(x,u(x))$ είναι μετρήσιμη ως όριο μετρήσιμων συναρτήσεων.
Επιπλέον, η f πληρεί την συνθήκη (II), με $p > 1$, άρα ισχύει:

$$\begin{aligned} |(Fu)(x)|^q &= |f(x,u(x))|^q \\ &\leq \{|\alpha(x)| + b|u(x)|^{p-1}\}^q \\ &\leq 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p) \end{aligned} \tag{4.17}$$

(*Υπενθύμιση*: $(\alpha + b)^p \leq (\alpha^p + b^p)$, $\forall \alpha, b \in \mathbb{R}$, με $\alpha, b > 0$.)

Η συνάρτηση $(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p)$ είναι ολοκληρώσιμη ως αθροισμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, επομένως από την σχέση (4.17) έπεται ότι και η

$$|F(u)(x)|^q = |f(x, u(x))|^q$$

είναι ολοκληρώσιμη.
Άρα, $\forall u \in L^p(G)$ η $(Fu) \in L^q(G)$, δηλαδή ο τελεστής Nemyckii
$F : L^p(G) \to L^q(G)$ είναι καλά ορισμένος.

$\square$

Πρόταση 4.6. *Ο τελεστής Nemyckii $F : L^p(G) \to L^q(G)$ είναι φραγμένος και μάλιστα υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει:*

$$||Fu||_{L^q(G)} \leq c(||\alpha||_{L^q(G)} + b||u||^{p-1}_{L^p(G)}),\ \forall u \in L^p(G).$$

Απόδειξη. Έστω $u \in L^p(G)$. Τότε, από την σχέση (4.17) του προηγούμενου Θεωρήματος ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
|(Fu)(x)|^q &\leq 2^q(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p) \\
\Leftrightarrow \int_G |(Fu)(x)|^q dx &\leq 2^q(\int_G |\alpha(x)|^q dx + b^q \int_G |u(x)|^p dx) \\
\Leftrightarrow ||Fu||^q_{L^q(G)} &\leq 2^q(||\alpha||^q_{L^q(G)} + b^q||u||^p_{L^p(G)}) \\
\Rightarrow (||Fu||^q_{L^q(G)})^{\frac{1}{q}} &\leq (2^q(||\alpha||^q_{L^q(G)} + b^q||u||^p_{L^p(G)}))^{\frac{1}{q}} \\
&= 2(||\alpha||^q_{L^q(G)} + b^q||u||^p_{L^p(G)})^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{1+\frac{1}{q}}[(||\alpha||^q_{L^q(G)})^{\frac{1}{q}} + (b^q)^{\frac{1}{q}}(||u||^p_{L^p(G)})^{\frac{1}{q}}] \\
&= 2^{1+\frac{1}{q}}(||\alpha||_{L^q(G)} + b||u||^{p-1}_{L^p(G)}),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

όπου $c = 2^{1+\frac{1}{q}} > 0$
Επομένως, ο τελεστής Nemyckii είναι φραγμένος.

$\square$

Θεώρημα 4.3. *Ο τελεστής Nemyckii $F : L^p(G) \to L^q(G)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(G)$, με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$. Θα δείξουμε ότι $F(u_n) \to F(u)$, καθώς $n \to \infty$.

Από την στιγμή που $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$ υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $u \in L^p(G)$, τέτοια ώστε :

$$u_{n_k(x)} \to u(x) \text{ σχεδόν παντού στο } G, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
|(Fu_{n_k})(x) - (Fu)(x)|^q &= |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \\
&\leq c(|f(x, u_{n_k}(x))|^q + |f(x, u(x))|^q) \\
&\leq c(|\alpha(x)|^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Θέτουμε,
$g_{n_k}(x) = f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))$ και $h_{n_k}(x) = c(|\alpha|^q + b^q |u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)$

Οπότε, $g_{n_k} \in L^1(G)$ και $h_{n_k} \in L^1(G)$.
Επομένως η σχέση (4.19) γράφεται:

$$|g_{n_k}(x)|^q \leq h_{n_k}(x), \text{ σχεδόν παντού στον } L^1(G).$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη $(I.2.)$, άρα αφού $u_{n_k}(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού στο G, καθώς $k \to \infty$, έχουμε ότι:

$$f(x, u_{n_k}(x)) \to f(x, u(x))$$

Άρα, $g_{n_k} \to 0$ και $h_{n_k} \to c(|\alpha|^q + b^q|u(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)$, σχεδόν παντού στο G, καθώς $k \to \infty$.
Θέτουμε $h(x) = c(|\alpha(x)|^q + b^q|u(x)|^p + |f(x, u(x))|^q)$.
Επομένως,

$$h_{n_k}(x) \to h(x) \ \sigma.\pi. \text{ στο } G, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Επιπλέον, $u_n \to u$ στον L^p, καθώς $n \to \infty \Rightarrow ||u_n|| \to ||u||$.
Άρα και

$$h_{n_k} \to h \text{ στον } L^1(G).$$

Οι προυποθέσεις του Γενικευμένου Θεωρήματος Lebesgue ικανοποιούνται.
Επομένως, καθώς $k \to \infty$ έχουμε,

$$\begin{aligned} ||F(u_{n_k}) - F(u)||^q_{L^q(G)} &= \int_G |(Fu_{n_k})(x) - (Fu)(x)|^q dx \\ &= \int_G |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q dx \\ &= \int_G |g_{n_k}(x)|^q dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Τελικά,

$$||F(u_{n_k}) - F(u)||^q_{L^q(G)} \longrightarrow 0 \Rightarrow F(u_{n_k}) \to F(u) \Rightarrow F(u_n) \to F(u) \quad (\star)$$

Απόδειξη της $(\star)$:
Έστω ότι $F(u_n) \nrightarrow F(u)$.
Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $F(u_{n_l}) \nrightarrow F(u)$.
Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(F(u_{n_{l_m}}))_m \subset (F(u_{n_l}))_l$, τέτοια ώστε
$F(u_{n_{l_m}}) \to F(u)$, το οποίο είναι άτοπο.
Επομένως, ισχύει ότι $F(u_n) \to F(u)$, καθώς $n \to \infty$, άρα ο τελεστής Nemyckii F είναι συνεχής. $\square$

Παρατήρηση 4.4. *i. Εάν η f είναι μονότονη, έτσι ώστε $f(x,u) \leq f(x,v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$, με $u \leq v$, $\forall x \in G$, τότε ο τελεστής Nemyckii F είναι μονότονος. Αντίστοιχα, αν η f είναι αυστηρά μονότονη, τότε ο F είναι αυστηρά μονότονος.*

ii. Εάν η f είναι πιεστική, δηλαδή για δοσμένο $d > 0$ και δοσμένη συνάρτηση $g \in L^1(G)$, να ισχύει:

$$f(x,u)u \geq d|u|^p + g(x), \ \forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}$$

Τότε, ο τελεστής Nemyckii F είναι πιεστικός και ισχύει ότι:

$$\langle Fu, u \rangle_X \geq d||u||^p + \int_G g(x)dx, \ \forall u \in X$$

iii. Εάν η f είναι αυστηρά μονότονη, πιεστική και ισχύουν τα παρακάτω:

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ καθώς } n \to \infty \text{ και } \overline{lim}_{n\to\infty} \langle Fu_n - Fu, u_n - u \rangle \leq 0$$

τότε,

$$u_n \to u, \text{ στον } X, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

iv. Εάν $\forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}$ έχουμε ότι $f(x,u)u \geq 0$, τότε $\langle Fu, u \rangle_X \geq 0$, $\forall u \in X$.

v. Εάν $\forall (x,u) \in G \times \mathbb{R}$, $\exists R > 0$, με $|u| > R, |G| < \infty$ τέτοιο ώστε:

$$f(x,u)u \geq 0$$

Τότε,

$$\langle Fu, u \rangle_X \geq -c, \ \forall u \in X \text{ και } c > 0.$$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή του Θεωρήματος Minty- Browder

Έστω σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, με αρκετά λείο σύνορο.
Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$(*) \left\{ \begin{array}{rl} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + au & = f, \quad \sigma\tau o\ \Omega \\ u & = 0, \quad \sigma\tau o\ \partial\Omega \end{array} \right\}$$

όπου $a \geq 0$ σταθερά και $2 \leq p < \infty$, με $p \geq \frac{2n}{n+2}$.

Για δεδομένη $f \in L^q(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του προβλήματος $(*)$ μία $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ώστε $\forall w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ να ισχύει ότι:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx = \int_\Omega fwdx \tag{5.1}$$

Για να είναι η (5.1) καλά ορισμένη πρέπει $u, w \in L^2(\Omega)$.
Από Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev, εάν $p \geq \frac{2n}{n+2}$, ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ ενσφηνώνεται στον $L^2(\Omega)$, επομένως η (5.1) είναι όντως καλά ορισμένη.

Ορίζουμε $a(u,w) := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx,\ \forall u, w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$.

- Θα δείξουμε ότι για σταθερό $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ η απεικόνιση $w \longmapsto a(u,w)$ είναι φραγμένη για κάθε $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
  Έστω $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ σταθερό.

Τότε, $\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
|a(u,w)| &= |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx| \\
&\le |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx| + a|\int_\Omega uwdx| \\
&\le \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla w| dx + a\int_\Omega |u||w|dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}||\nabla w| dx + a\int_\Omega |u||w|dx \\
&\le (\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx)^{\frac{1}{q}} \cdot (\int_\Omega |\nabla w|^p dx)^{\frac{1}{p}} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)} \\
&= (||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{q}} \cdot ||\nabla w||_{L^p(\Omega)} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)} \\
&= ||\nabla u||^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} \cdot ||\nabla w||_{L^p(\Omega)} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)} \\
&= ||\nabla u||^{p-1}_{L^p(\Omega)} \cdot ||\nabla w||_{L^p(\Omega)} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)} \\
&\le ||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} + ac||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot (||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + ac||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)})
\end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$|a(u,w)| \le ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot (||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + ac||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}),\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Θέτουμε $M = ||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + ac||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} > 0$.
Επειδή το $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι σταθερό από υπόθεση συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα M είναι σταθερή.
Οπότε,

$$|a(u,w)| \le M||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)},\ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Άρα, το συναρτησιακό $a(u,w)$ είναι φραγμένο για σταθερό $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ και έτσι καταλήγουμε στο ότι το $a(u,w) \in X^* = (W_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Ορίζουμε τον τελεστή $A : X \to X^*$, με $(Au)(w) := a(u,w),\ \forall w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$.
Με βάση το τελευταίο συμπέρασμα ο τελεστής A είναι καλά ορισμένος, αφού $a(u,w) \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$.

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
(Au)(w) &= \int_\Omega f w dx,\ \forall w \in X \\
\Leftrightarrow \langle Au, w\rangle &= \langle f, w\rangle,\ \forall w \in X \\
\Leftrightarrow A(u) &= f
\end{aligned}
$$

Άρα, για δεδομένη $f \in L^q(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του Προβλήματος Συνοριακών τιμών $(*)$ μία συνάρτηση $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$A(u) = f$$

Με βάση τα παραπάνω για να υπάρχει λύση στο Π.Σ.Τ $(*)$ αρκεί ο τελεστής A να είναι επί.

- Ο χώρος $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός χώρος Banach, αφού $1 < p < \infty$. Εάν δείξουμε λοιπόν ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι μονότονος, πιεστικός και συνεχής, τότε με εφαρμογή του Θεωρήματος Minty-Browder ο τελεστής A είναι επί.

  i. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι μονότονος.
  Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle Au - Aw, u - w\rangle \geq 0,\ \forall u, w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$.
  Για $u \in X$ έχουμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle = a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u dx + a\int_\Omega u \cdot u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u)^2 dx + a\int_\Omega u^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + a\int_\Omega u^2 dx \\
&= ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} + a||u||^2_{L^2(\Omega)} \\
&= ||u||^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + a||u||^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

  Ομοίως, για $w \in X$ έχουμε ότι :

$$\langle Aw, w\rangle = a(w,w) = ||w||^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + a||w||^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.3}$$

Στην συνέχεια, για $u, w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\langle Au, w\rangle = a(u,w) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega uwdx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\nabla w dx + a\int_\Omega uwdx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla w dx + a\int_\Omega uwdx \\
&\leq (\int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^q dx)^{\frac{1}{q}} \cdot (\int_\Omega |\nabla w|^p dx)^{\frac{1}{p}} + a(\int_\Omega u^2 dx)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_\Omega w^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||\nabla u||^{p-1}_{L^p(\Omega)} \cdot ||\nabla w||_{L^p(\Omega)} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} + a||u||_{L^2(\Omega)} \cdot ||w||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ομοίως, για $u, w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε:

$$\langle Aw, u\rangle = a(w,u) \leq ||w||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} + a||w||_{L^2(\Omega)} \cdot ||u||_{L^2(\Omega)} \tag{5.5}$$

Από τις σχέσεις $(5.2) - (5.5)$ προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
\langle Au - Aw, u - w\rangle &= \langle Au, u\rangle - \langle Au, w\rangle - \langle Aw, u\rangle + \langle Aw, w\rangle \\
&\geq a(||u||^2_{L^2(\Omega)} - ||w||^2_{L^(\Omega)})^2 + ||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}(||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} - ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}) - \\
&- ||w||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}(||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} - ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}) \\
&= a(||u||_{L^2(\Omega)} - ||w||_{L^2(\Omega)}) + (||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} - ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}) \cdot (||u||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - ||w||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}) \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Επομένως, από την σχέση (5.6) ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι μονότονος.

ii. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι πιεστικός.
Για $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle = a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u dx + a\int_\Omega u \cdot u dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p dx + a\int_\Omega u^2 dx \\
&= ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} + a||u||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} \\
&\geq k||u||^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Επομένως, για $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, με $||u||_X \neq \varnothing$ ισχύει ότι:

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{||u||_X} \geq k\frac{||u||_X^p}{||u||_X}$$
$$= k||u||_X^{p-1}$$

Άρα,

$$lim_{||u||_X \to \infty}\frac{\langle Au, u\rangle}{||u||_X} = \infty$$

Τελικά λοιπόν δείχτηκε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι πιεστικός.

iii. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι συνεχής.
Έστω η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, με $u_n \to u$, καθώς $n \to \infty$, $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$.

Από υπόθεση,

$$u_n \to u \Leftrightarrow ||u_n - u|| \to 0,\ n \to \infty$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, u(x)) := |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x),\ \forall x \in \Omega,\ \forall u \in X$
Η f πληρεί τις συνθήκες του Καραθεοδωρή και την αυξητική συνθήκη, (δηλαδή, για $p > 1,\ \forall x \in \Omega,\ \forall u \in X$

$$|f(x, u(x))| \leq ||a(x)|| + b||u||_X^{p-1}, \text{ με } a \in L^q(\Omega), b > 0, \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1)$$

Ορίζουμε τον τελεστή Nemyckii $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, όπου:

$$(Fu)(x) := f(x, u(x)) = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο τελεστής F είναι καλα ορισμένος και συνεχής, δηλαδή:

$$u_n \to u, \text{ καθώς } n \to \infty \Rightarrow Fu_n \to Fu, \text{ καθώς } n \to \infty \Rightarrow$$
$$||Fu_n - Fu||_{L^q(\Omega)} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Τότε, για κάθε $w \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\langle Au_n - Au, w\rangle &= \langle Au_n, w\rangle - \langle Au, w\rangle = a(u_n, w) - a(u, w) = \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx - (\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w dx + a\int_\Omega u w dx) \\ &= \int_\Omega Fu_n \nabla w dx + a\int_\Omega u_n w dx - (\int_\Omega Fu\nabla w dx + a\int_\Omega u w dx) \\ &= \int_\Omega (Fu_n - Fu)\nabla w dx + a\int_\Omega (u_n - u) w dx \\ &\leq (||Fu_n - Fu||_{L^q(\Omega)} + a||u_n - u||_{W_0^{1,p}(\Omega)})||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle Au_n - Au, w\rangle}{||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \leq ||Fu_n - Fu||_{L^q(\Omega)} + a||u_n - u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}||Au_n - Au||_{X^*} &= sup\{\frac{\langle Au_n - Au, w\rangle}{||w||_X} : w \in X, ||w||_X \neq 0\} \\ &\leq ||Fu_n - Fu||_{L^q(\Omega)} + a||u_n - u||_X\end{aligned}$$

Οπότε,

$$||Au_n - Au||_{X^*} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Τελικά λοιπόν δείξαμε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι συνεχής.
Οι υποθέσεις του Θεωρήματος Minty-Browder ικανοποιούνται άρα το Μη Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών $(*)$ έχει ασθενή λύση, από τη στιγμή που ο τελεστής A είναι επί.

Κεφάλαιο 6

Θεωρία Multi-valued μονότονων τελεστών

6.1 Εισαγωγή στους Πλειονότιμους Τελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μία εισαγωγή στους πλειονότιμους τελεστές σε χώρους Banach.
Έστω ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ σε έναν χώρο Banach X.
Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

- $D(A) = \{x \in X : A(x) \neq \varnothing\}$, ως το πεδίο ορισμού του τελεστή A.
- $R(A) = \{x^* \in X^* : \exists x \in D(A) \text{ τ.ω. } x^* \in A(x)\}$, ως το σύνολο τιμών του τελεστή A.
- $Gr(A) = \{[x, x^*] \in X \times X^* : x^* \in A(x)\}$, ως το γράφημα του τελεστή A.
- $Gr(A^{-1}) = \{[x^*, x] \in X^* \times X : [x, x^*] \in Gr(A)\}$, ως το γράφημα του τελεστή A^{-1}.

Επιπλέον, εάν $A_1; A_2 : X \to 2^{X^*}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x), \ \forall x \in D(A_1) \bigcap D(A_2)$$

και

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x), \ \forall x \in D(A).$$

Ορισμός 6.1. *Έστω X χώρος Banach.*

i. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* μονότονος *εάν και μόνο εάν $\forall [x_i, x_i^*] \in Gr(A)$, με $i = 1, 2$, ισχύει ότι:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

ii. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* αυστηρά μονότονος *εάν και μόνο εάν $\forall [x_i, x_i^*] \in Gr(A)$, με $i = 1, 2$, ισχύει ότι:*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle > 0$$

iii. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* πιεστικός *εάν και μόνο εάν είτε το $D(A)$ είναι φραγμένο είτε το $D(A)$ είναι μη φραγμένο και ισχύει ότι:*

$$lim_{||x|| \to \infty} \frac{inf\{\langle x^*, x \rangle : x^* \in A(x)\}}{||x||} = \infty, \text{ με } x \in D(A).$$

iv. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* ασθενώς πιεστικός *εάν και μόνο εάν είτε το $D(A)$ είναι φραγμένο είτε το $D(A)$ είναι μη φραγμένο και ισχύει ότι:*

$$lim_{||x|| \to \infty} inf\{||x^*|| : x^* \in A(x)\} = \infty, \text{ με } x \in D(A).$$

v. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* φραγμένος *εάν και μόνο εάν απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε φραγμένα σύνολα.*

vi. *Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ καλείται* μεγιστικά μονότονος *εάν και μόνο εάν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\text{Εάν } Gr(A) \subseteq Gr(A'), \text{ όπου } A' \text{ μονότονος τελεστής, τότε } A = A'.$$

Δηλαδή, $\forall [y, y^*] \in X \times X^*$ για το οποίο ισχύει:

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \ \forall [x, x^*] \in Gr(A)$$

Τότε,

$$[y, y^*] \in Gr(A).$$

Παρακάτω παρατίθενται κάποια παραδείγματα πλειονότιμων μονότονων τελεστών.

Η duality map είναι πολύ σημαντικό εργαλείο στη θεωρία των μεγιστικά μονότονων τελεστών.

Ορισμός 6.2. *Έστω $\phi(u) = 2^{-1}||u||^2$, $\forall u \in X$, όπου X ανακλαστικός χώρος Banach. Η duality map*

$$\mathcal{J} : X \to 2^{X^*}$$

του X ορίζεται ως:

$$\mathcal{J} = \partial\phi.$$

6.2 Καλές ιδιότητες της duality map

Πρόταση 6.1. *Έστω X ένας πραγματικός ανακλαστικός χώρος Banach και έστω ο δυικός του, X^* αυστηρά κυρτός.*
Θέτουμε $\phi(u) = 2^{-1}||u||^2$, $\forall u \in X$. Τότε, ισχύουν τα παρακάτω:

i. Η duality map $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μονότιμη, επί, περιττή, μονότονη, demicontinuous, μεγιστικά μονότονη, φραγμένη και πιεστική.
Για κάθε $u \in X$ έχουμε

$$\mathcal{J}u = \phi'(u),$$

όπου η ϕ' δηλώνει την Gateaux παράγωγο.
Η νόρμα $u \longmapsto ||u||$ είναι Gateaux παραγωγίσιμη στον $X\backslash\{0\}$.
Εάν θέσουμε $\psi(u) = ||u||$, τότε:

$$\psi'(u) = \frac{\mathcal{J}u}{||u||},\ \forall u \in X\backslash\{0\}.$$

Επιπλέον, για κάθε $u \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα συναρτησιακό $u^* \in X^*$ τ.ω.:

$$\langle u^*, u\rangle_X = ||u^*|| \cdot ||u|| \text{ και } ||u^*|| = ||u||$$

Το συναρτησιακό u^* είναι ισοδύναμο με το $\mathcal{J}u$. Για αυτό, για όλα τα $u \in X$, έχουμε ότι:

$$\langle \mathcal{J}u, u\rangle_X = ||u||^2 \text{ και } ||\mathcal{J}u|| = ||u||$$

Επιπρόσθετα, το $\mathcal{J}$ είναι θετικά ομογενές, δηλαδή:

$$\mathcal{J}(\lambda u) = \lambda \mathcal{J}u,\ \forall \lambda > 0,\ \forall u \in X.$$

ii. *Έστω X αυστηρά κυρτός χώρος Banach. Τότε, ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι αυστηρά μονότονος, $1-1$ και επί.*
Ο αντίστροφος τελεστής $\mathcal{J}^{-1} : X^* \to X$ είναι ισοδύναμος με την duality map του δυικού χώρου X^*.
Επιπλέον, από την σχέση:

$$\langle \mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle_X \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty \quad (\star)$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ στον } X, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Τέλος, εάν ο X είναι τοπικά ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, τότε από τη σχέση $(\star)$ συμπεραίνουμε ότι:

$$u_n \to u \text{ στον } X \text{ καθώς } n \to \infty.$$

iii. *Έστω X^* τοπικά ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach.*
Τότε, ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι συνεχής.
Επιπλέον, η νόρμα $u \longmapsto ||u||$ είναι Frechet παραγωγίσιμη στον $X \backslash \{0\}$.

iv. *Έστω X, X^* τοπικά ομοιόμορφα κυρτοί χώροι Banach.*
Τότε, η duality map $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι ομοιομορφισμός.

v. *Έστω X^* ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach.*
Τότε, ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε φραγμένα υποσύνολα του X.
Η F-παράγωγος της νόρμας $u \mapsto ||u||$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε φραγμένα υποσύνολα του X τα οποία βρίσκονται έξω από κάποια γειτονιά του σημείου $u = 0$.

Απόδειξη.

i. Ορίζουμε την απεικόνιση $A : X \to 2^{X^*}$, όπου:

$$Au = \{u^* \in X^* : \langle u^*, u\rangle_X = ||u||^2, \ ||u^*|| = ||u||\}$$

- Αρχικά, δείχνουμε ότι $Au \neq \varnothing$.
  Έστω $X_0 = \langle\{u\}\rangle = \{x \in X : x = tu, \ \forall t \in \mathbb{R}\}$.
  Ορίζουμε $f(tu) = t||u||^2, \ \forall t \in \mathbb{R}$, με $||f|| = ||u||, \ \forall u \in X$.
  Η $f : X_0 \to \mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό, με $||f|| = ||u||$.
  Από το Θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f σε ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $u^* : X \to \mathbb{R}$, με $||u^*|| = ||u||$.
  Προφανώς ισχύει ότι:

$$\langle u^*, u\rangle_X = f(u) = ||u||^2$$

  Επομένως, $Au \neq \varnothing$.

- Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μονότιμη.
  Έστω $u_i^* \in Au,\ i = 1, 2$, έτσι ώστε $\langle u_i^*, u\rangle = ||u||^2 = ||u_i^*||^2$.

$$\begin{aligned}
0 \leq (||u_1^*|| - ||u||)^2 &= ||u_1^*||^2 + ||u||^2 - 2||u_1|| \cdot ||u|| \\
\Leftrightarrow 2||u_1^*|| \cdot ||u|| &\leq ||u_1^*||^2 + ||u||^2 \\
&= ||u_1^*||^2 + ||u_2^*||^2 = \langle u_1^* + u_2^*, u\rangle \\
&\leq ||u_1^* + u_2^*|| \cdot ||u||, \quad \forall u \in X \qquad (6.1) \\
\Leftrightarrow 2||u_1^*|| \cdot ||u|| &\leq ||u_1^* + u_2^*|| \cdot ||u||, \quad \forall u \in X \\
\Rightarrow 2||u_1^*|| &\leq ||u_1^* + u_2^*|| \\
\Leftrightarrow ||u_1^*|| &\leq 2^{-1}||u_1^* + u_2^*||, \qquad \forall u_i^* \in X_i^*, i = 1, 2
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $||u_1^*|| = ||u_2^*||$ και X^* αυστηρά κυρτός χώρος Banach.
Οπότε, με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (6.1), για $i = 1, 2$ παίρνουμε:

$$||u_1^* + u_2^*|| \geq ||u_1^*|| + ||u_2^*||$$

Επομένως, $u_1^* = u_2^*$, άρα ο τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μονότιμος.

- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι demicontinuous.

  Έστω $u_n \to u$ στον X, καθώς $n \to \infty$.
  Αρκεί να δείξουμε ότι $Au_n \rightharpoonup Au$, καθώς $n \to \infty$.
  Από την στιγμή που ισχύει ότι:

$$||Au_n|| = sup\{\tfrac{\langle Au_n, u_n\rangle}{||u_n||}\} = sup\{\tfrac{||u_n||^2}{||u_n||}\} = ||u_n||$$

και

$$u_n \to u, \text{ στον } X, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$||Au_n|| = ||u_n|| \to ||u||, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Δηλαδή, η ακολουθία $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ είναι φραγμένη στον X^*.
Όμως ο X^* ειναι ανακλαστικός χώρος Banach, άρα υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(Au_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X^*.

Επομένως,

$$\begin{aligned}
Au_{n_k} &\rightharpoonup u^*, \qquad k \to \infty, u^* \in X^* \\
\Rightarrow \langle Au_{n_k}, v\rangle &\to \langle u^*, v\rangle, \qquad k \to \infty, \forall v \in X \\
\Rightarrow \langle u^*, v\rangle &= lim_{k\to\infty}\langle Au_{n_k}, v\rangle, \quad \forall v \in X
\end{aligned}$$

Οπότε, $\forall v \in X$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\langle u^*, v\rangle = lim_{k\to\infty}\langle Au_{n_k}, v\rangle &\leq lim_{k\to\infty}||Au_{n_k}|| \cdot ||v|| \\
&= lim_{k\to\infty}||u_n|| \cdot ||v|| \\
&= ||u|| \cdot ||v||
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle u^*, v\rangle \le ||u|| \cdot ||v|| \tag{6.2}$$

Επιπλέον,

$$\langle u^*, u\rangle = lim_{k\to\infty}\langle Au_{n_k}, u_n\rangle = lim_{k\to\infty}||u_n||^2 = ||u||^2 \tag{6.3}$$

Τελικά λοιπόν, καταλήγουμε στο ότι

$$u^* = Au$$

Δηλαδή,

$$Au_{n_k} \rightharpoonup Au = u^*, \text{ με } u_n \to u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Από Κριτήριο Συγκλισης όλη η ακολουθία $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο Au, $(Au_n \rightharpoonup Au)$, καθώς $n \to \infty$, επομένως, ο τελεστής $A : X \to X^*$ είναι demicontinuous.

- Θα δείξουμε ότι:

$$lim_{t\to 0}\frac{2^{-1}||u+th||^2 - 2^{-1}||u||^2}{t} = \langle Au, h\rangle, \ \forall h \in X$$

Όντως, $\forall u, v \in X$ έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle = \langle Av, v\rangle - \langle Av, u\rangle &= ||v||^2 - \langle Av, u\rangle \\ &\ge ||v||^2 - ||Av|| \cdot ||u|| \\ &= ||v||^2 - ||v|| \cdot ||u||\end{aligned} \tag{6.4}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}-2||u|| \cdot ||v|| &= (||u|| - ||v||)^2 - ||u||^2 - ||v||^2 \\ \Leftrightarrow -||v|| \cdot ||u|| &= 2^{-1}\{(||u|| - ||v||)^2 - ||u||^2 - ||v||^2\} \\ &\ge -2^{-1}(||u||^2 + ||v||^2)\end{aligned} \tag{6.5}$$

Επομένως, η σχέση (6.4) λόγω της (6.5) γίνεται:

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle &\ge ||v||^2 - ||v|| \cdot ||u|| \\ &\ge ||v||^2 - 2^{-1}(||u||^2 + ||v||^2) \\ &= 2^{-1}||v||^2 - 2^{-1}||u||^2\end{aligned} \tag{6.6}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}||u|| \cdot ||v|| &= 2^{-1}||u||^2 + 2^{-1}||v||^2 - 2^{-1}(||u|| - ||v||)^2 \\ \Leftrightarrow 2^{-1}||v||^2 &= ||u|| \cdot ||v|| - 2^{-1}||u||^2 + 2^{-1}(||u|| - ||v||)^2 \\ &\ge ||u|| \cdot ||v|| - 2^{-1}||u||^2\end{aligned} \tag{6.7}$$

Τελικά λοιπόν, η σχέση (6.6) λόγω της (6.7) γίνεται:

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle &\geq 2^{-1}||v||^2 - 2^{-1}||u||^2 \\ &\geq ||u||\cdot||v|| - 2^{-1}||u||^2 - 2^{-1}||v||^2 \\ &= ||u||\cdot||v|| - ||u||^2\end{aligned} \tag{6.8}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle Au, v-u\rangle &= \langle Au, v\rangle - \langle Au, u\rangle \\ &= \langle Au, v\rangle - ||u||^2 \\ &\leq ||Au||\cdot||v|| - ||u||^2 \\ &= ||u||\cdot||v|| - ||u||^2\end{aligned} \tag{6.9}$$

Άρα η σχέση (6.8) λόγω της (6.9) γίνεται:

$$\langle Av, v-u\rangle \geq ||u||\cdot||v|| - ||u||^2 \geq \langle Au, v-u\rangle \tag{6.10}$$

Έστω ότι $v = u + th,\ h \in X, t \in \mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ήδη ότι:

$$\begin{aligned}&\langle Au, v-u\rangle \leq 2^{-1}||v||^2 - 2^{-1}||u||^2 \leq \langle Av, v-u\rangle \\ &\Leftrightarrow t\langle Au, h\rangle \leq 2^{-1}||u+th||^2 - 2^{-1}||u||^2 \leq t\langle A(u+th), h\rangle\end{aligned} \tag{6.11}$$

Ο A είναι demicontinuous, δηλαδή ισχύει ότι,

$$\langle A(u+th), h\rangle \to \langle Au, h\rangle, \text{ καθώς } t \to 0 \quad (\star)$$

Επομένως,από τη σχέση (6.11) και τη σχέση $(\star)$ καταλήγουμε στο ότι:

$$lim_{t\to 0}\tfrac{2^{-1}||u+th||^2 - 2^{-1}||u||^2}{t} = \langle Au, h\rangle,\ \forall h \in X.$$

- Θα δείξουμε ότι $Au = \phi'(u)$, με $\phi' = \partial\phi$, το οποίο θα μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{J} = A$.
  Από υπόθεση, $\phi(u) = 2^{-1}||u||^2$.
  Επομένως,

  $$\phi'(u) = lim_{t\to 0}\frac{2^{-1}||u+th||^2 - 2^{-1}||u||^2}{t} = \langle Au, h\rangle,\ \forall h \in X$$

  Άρα, όντως $Au = \phi'(u) = \partial\phi(u) = \mathcal{J}u,\ \forall u \in X$.
  Οπότε, $\mathcal{J} = A$.
- Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $u \longmapsto ||u||$ είναι διαφορίσιμη κατά Gateaux στον $X\backslash\{0\}$.
  Παρατηρούμε ότι $||u|| = (2\phi(u))^{\frac{1}{2}}$, άρα από τον κανόνα της αλυσίδας ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής.

- Η $\phi(u) = 2^{-1}||u||^2$ είναι άρτια, άρα η $\mathcal{J} = \phi' = \partial\phi$ είναι περιττή.
- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι πιεστικός και φραγμένος. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

  $$\exists M > 0 \text{ τ.ω. } \forall u \in X \text{ να ισχύει ότι } ||\mathcal{J}u||_{X^*} \leq M||u||_X$$

  και

  $$lim_{||u||\to\infty} \tfrac{\langle \mathcal{J}u,u\rangle}{||u||} = \infty, \ \forall u \in X.$$

  Αρχικά θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{J}$ είναι πιεστικός. Πράγματι,

  $$lim_{||u||\to\infty} \frac{\langle \mathcal{J}u,u\rangle}{||u||} = lim_{||u||\to\infty} \frac{||u||^2}{||u||} = \infty$$

  Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι ο $\mathcal{J}$ είναι φραγμένος.
  Από την στιγμή που $||\mathcal{J}u|| = ||u||$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε:

  $$||\mathcal{J}u|| = ||u|| \leq M||u||$$

  Άρα ο $\mathcal{J}$ είναι φραγμένος τελεστής.
- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μονότονος.
  Πράγματι, $\forall u, v \in X$

  $$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u - v\rangle &= \langle \mathcal{J}u, u\rangle + \langle \mathcal{J}v, v\rangle - \langle \mathcal{J}u, v\rangle - \langle \mathcal{J}v, u\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 - \langle \mathcal{J}u, v\rangle - \langle \mathcal{J}v, u\rangle \\ &\geq ||u||^2 + ||v||^2 - ||\mathcal{J}u|| \cdot ||v|| - ||\mathcal{J}v|| \cdot ||u|| \qquad (6.12) \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v|| \\ &= (||u|| - ||v||)^2 \geq 0\end{aligned}$$

  Άρα, ο τελεστής $\mathcal{J}$ είναι μονότονος.
- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι επί.

  Ο $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μονότονος, πιεστικός και demicontinuous τελεστής σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach X, οπότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος Minty-Browder ικανοποιούνται και έτσι ο τελετής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι επί.
- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μεγιστικά μονότονος.
  Για την απόδειξη του παραπάνω θα μας χρειαστεί η παρακάτω Πρόταση:

  Πρόταση 6.2. *Έστω X πραγματικός, ανακλαστικός χώρος Banach και $A : X \to X^*$ ένας μονότονος, hemicontinuous τελεστής.*
  Τότε, ο A και ο $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι μεγιστικά μονότονοι τελεστές.

  Επομένως, με βάση την Πρόταση (6.2) ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μεγιστικά μονότονος.

ii. Έστω X αυστηρά κυρτός χώρος Banach.

- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι αυστηρά μονότονος.
  Έστω $\langle \mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u - v\rangle = 0,\ \forall u, v \in X$.

  Θέτουμε όπου v το $\frac{u+v}{2}$ και έχουμε:

$$\langle \mathcal{J}u - \mathcal{J}(\frac{u+v}{2}), \frac{u-v}{2}\rangle = 0 \tag{6.13}$$

  Στην συνέχεια, θέτουμε όπου u το $\frac{u+v}{2}$, οπότε:

$$\langle \mathcal{J}(\frac{u+v}{2}) - \mathcal{J}v, \frac{u-v}{2}\rangle = 0 \tag{6.14}$$

  Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (6.13),(6.14),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{J}u - \mathcal{J}(\frac{u+v}{2}), \frac{u-v}{2}\rangle + \langle \mathcal{J}(\frac{u+v}{2}) - \mathcal{J}v, \frac{u-v}{2}\rangle \\ &\geq (||u|| - ||\frac{u+v}{2}||)^2 + (||\frac{u+v}{2}|| - ||v||)^2 \\ &\Rightarrow ||u|| = ||\frac{u+v}{2}|| = ||v|| \end{aligned} \tag{6.15}$$

  Όμως ο X είναι αυστηρά κυρτός χώρος Banach, άρα από την σχέση (6.15) συμπεραίνουμε ότι $u = v$.
  Επομένως, ο $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι αυστηρά μονότονος τελεστής.
- Αφού ο $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι αυστηρά μονότονος και επί τελεστής συμπεραίνουμε ότι ο $\mathcal{J}$ είναι $1-1$.
- Θα δείξουμε ότι ο $\mathcal{J}^{-1} : X^* \to X$ είναι η duality map του X^*.
  Από υπόθεση ο X είναι ανακλαστικός χώρος Banach, δηλαδή $X^{**} = X$.
  Έστω $\tilde{\mathcal{J}} : X^* \to X$ είναι η duality map του X^*.
  Τότε,

$$\langle \tilde{\mathcal{J}}u^*, u^*\rangle_{X^*} = ||u^*||^2 \text{ και } ||\tilde{\mathcal{J}}u^*|| = ||u^*||,\ \forall u^* \in X^*$$

  Όμως, $\langle u, u^*\rangle_{X^*} = \langle u^*, u\rangle_X,\ \forall u \in X, u^* \in X^*$.
  Επομένως,

$$\tilde{\mathcal{J}}(u^*) = \mathcal{J}^{-1}(u^*) \Rightarrow \mathcal{J}^{-1} = \tilde{\mathcal{J}}.$$

- Έστω ότι $\langle \mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle \to 0$, καθώς $n \to \infty$.
  Θα δείξουμε ότι $u_n \rightharpoonup u$, καθώς $n \to \infty$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle &= \langle \mathcal{J}u_n, u_n\rangle + \langle \mathcal{J}u, u\rangle - \langle \mathcal{J}u_n, u\rangle - \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle \\ &= ||u_n||^2 + ||u||^2 - \langle \mathcal{J}u_n, u\rangle - \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle \\ &= (||u_n|| - ||u||)^2 + 2||u_n|| \cdot ||u|| - \langle \mathcal{J}u_n, u\rangle - \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle \\ &= (||u_n|| - ||u||)^2 + (||u_n|| \cdot ||u|| - \langle \mathcal{J}u_n, u\rangle) + (||u_n|| \cdot ||u|| - \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle) \end{aligned}$$

Άρα,

$$(||u_n|| - ||u||)^2 + (||u_n|| \cdot ||u|| - \langle \mathcal{J}u_n, u\rangle) + (||u_n|| \cdot ||u|| - \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle) \geq 0$$

Από υπόθεση, $\langle \mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle \to 0$, καθώς $n \to \infty$.
Επομένως έχουμε,

$$||u_n|| \to ||u|| \text{ και } \langle \mathcal{J}u, u_n\rangle \to ||u||^2, \text{ καθώς } n \to \infty, \quad (\star)$$

Ο X είναι ανακλαστικός χώρος Banach, οπότε αφού η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον X υπάρχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τ.ω.

$$u_{n_k} \rightharpoonup v, \text{ καθώς } k \to \infty$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $u = v$.

$$u_{n_k} \rightharpoonup v, \text{ καθώς } k \to \infty \Rightarrow \langle \mathcal{J}u, u_{n_k}\rangle \to \langle \mathcal{J}u, v\rangle, \text{ καθώς } k \to \infty$$

Όμως, από την σχέση $(\star)$ ισχύει ότι: $\langle \mathcal{J}u, u_n\rangle \to ||u||^2$, καθώς $n \to \infty$.
Άρα,

$$\langle \mathcal{J}u, v\rangle = ||u||^2$$

Όμως,

$$\begin{aligned} &||u||^2 = \langle \mathcal{J}u, v\rangle \leq ||\mathcal{J}u|| \cdot ||v|| \\ \Leftrightarrow\ &||u||^2 \leq ||\mathcal{J}u|| \cdot ||v|| \\ \Leftrightarrow\ &||u||^2 \leq ||u|| \cdot ||v|| \\ \Leftrightarrow\ &||u|| \leq ||v|| \end{aligned} \tag{6.16}$$

Από την άλλη μεριά,

$$||v|| \leq \underline{lim}_{n\to\infty} ||u_n|| = ||u|| \tag{6.17}$$

Από τις σχέσεις (6.16),(6.17) καταλήγουμε στο ότι:

$$\langle \mathcal{J}u, v\rangle = ||u||^2 \text{ και } ||v|| = ||\mathcal{J}u||$$

Όμως,

$$v = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}u) \text{ και } ||v|| = ||\mathcal{J}u||.$$

Άρα,

$$v = u$$

Τελικά λοιπόν,

$$u_n \rightharpoonup u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

- Εάν επιπλέον ο X είναι τοπικά ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach και από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι:

$$u_n \rightharpoonup u \text{ και } ||u_n|| \to ||u||, \text{ καθώς } n \to \infty$$

  Τότε,

$$u_n \to u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

iii. Έστω X^* τοπικά ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach.

- Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι συνεχής.
  Έστω

$$u_n \to u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

  Τότε, έχουμε ότι:

$$||u_n|| \to ||u||, \text{ καθώς } n \to \infty \Rightarrow ||\mathcal{J}u_n|| \to ||\mathcal{J}u||, \text{ καθώς } n \to \infty \quad (\star)$$

  Επομένως, από την σχέση $(\star)$ και από το $(i.)$, σύμφωνα με το οποίο ο $\mathcal{J}$ είναι demicontinuous αν ο χώρος Banach X^* είναι τοπικά ομοιόμορφα κυρτός συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathcal{J}u_n \to \mathcal{J}u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

- Έχουμε δείξει ότι ο $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι συνεχής και $\mathcal{J} = \phi'$, άρα η G-παράγωγος ϕ' είναι στην πραγματικότητα F-παράγωγος.
  Από τον κανόνα της αλυσίδας, $||u|| = (2\phi(u))^{\frac{1}{2}}$, συμπεραίνουμε ότι η νόρμα $u \mapsto ||u||$ είναι F-παραγωγίσιμη στον $X - \{0\}$.

iv. Από τις ιδιότητες $(ii), (iii)$ της duality map προκύπτει ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι ομοιομορφισμός.

v. Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach.

- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι συνεχής σε φραγμένα σύνολα.
  Έστω $S = \{u \in X : ||u|| = 1\}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο S.
  Εάν δεν ήταν θα υπήρχε $\epsilon > 0$ και δύο ακολουθίες $(u_n), (v_n)$ με $||u_n|| = ||v_n|| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε:

$$||u_n - v_n|| \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty \text{ και } ||\mathcal{J}u_n - \mathcal{J}v_n|| \geq \epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Για κάθε $u, v \in X$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} ||\mathcal{J}u + \mathcal{J}v|| \cdot ||u|| &\geq \langle \mathcal{J}u + \mathcal{J}v, u \rangle \\ &= \langle \mathcal{J}u, u \rangle + \langle \mathcal{J}v, v \rangle + \langle \mathcal{J}v, u - v \rangle \\ &\geq ||u||^2 + ||v||^2 - ||v|| \cdot ||u - v|| \end{aligned} \tag{6.18}$$

Θέτουμε $u = u_n$ και $v = v_n$, οπότε:

$$||2^{-1}(\mathcal{J}u_n + \mathcal{J}v_n)|| \geq 1 - 2^{-1}||u_n - v_n|| \tag{6.19}$$

Η σχέση (6.19) έρχεται σε αντίθεση με την ομοιόμορφη κυρτότητα του χώρου X^*,(αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $||\mathcal{J}u_n|| = ||\mathcal{J}v_n|| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$). Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\mathcal{J}(\lambda w) = \lambda \mathcal{J}w, \ \forall w \in X, \ \lambda > 0$.

$$\begin{aligned} ||\mathcal{J}u - \mathcal{J}v|| &= ||||u||\mathcal{J}(||u||^{-1}u) - ||v||\mathcal{J}(||v||^{-1}v)|| \\ &\leq ||u|| \cdot ||\mathcal{J}(||u||^{-1}u) - \mathcal{J}(||v||^{-1}v)|| \\ &+ |||u|| - ||v||| \cdot ||\mathcal{J}(||v||^{-1}v)||| \end{aligned}$$

και από την ομοιόμορφη συνέχεια του $\mathcal{J}$ στο S προκύπτει ότι ο $\mathcal{J}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε φραγμένα σύνολα εκτός της γειτονιάς του $u = 0$. Άρα ο $\mathcal{J}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε φραγμένο σύνολο αφού ο $\mathcal{J}$ είναι συνεχής στο $u = 0$ και $\mathcal{J}(0) = 0$.

- Θέτουμε $\psi(u) = ||u||$ και $\phi(u) = 2^{-1}||u||^2$, τότε $\psi(u) = (2\phi(u))^{\frac{1}{2}}$ και $\phi'(u) = \mathcal{J}u, \ \forall u \in X$.
  Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι:
  $$\psi'(u) = \tfrac{\mathcal{J}u}{||u||}, \ \forall u \neq 0$$
  Για αυτό η F-παράγωγος ψ' είναι ομοιόμορφα συνεχής σε καθε υποσύνολο του $X - \{0\}$.

$\square$

Παράδειγμα 6.1. *Έστω $X = \mathbb{R}^n$ και $C = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \neq \varnothing, \text{κλειστά}\}$. Τότε, η μετρική προβολή $p(\cdot, C)$ είναι μονότονος τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω $y_i \in p(x_i, C)$, με $i = 1, 2$. Εξ' ορισμού της μετρικής προβολής ισχύει ότι:

$$||x_1 - y_1|| \leq ||x_1 - y_2|| \text{ και } ||x_2 - y_2|| \leq ||x_2 - y_1||$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} ||x_1 - y_1||^2 - ||x_1 - y_2||^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1 - y_1, x_1 - y_1 \rangle - \langle x_1 - y_2, x_1 - y_2 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1, x_1 - y_1 \rangle + \langle x_1, y_2 - x_1 \rangle - \langle y_1, x_1 \rangle + \langle y_1, y_1 \rangle + \langle y_2, x_1 \rangle - \langle y_2, y_2 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1, y_2 - y_1 \rangle + \langle y_1, y_1 \rangle - \langle y_2, y_2 \rangle - \langle y_1, x_1 \rangle + \langle y_2, x_1 \rangle &\leq 0 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} ||x_2 - y_2||^2 - ||x_2 - y_1||^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_2 - y_2, x_2 - y_2 \rangle - \langle x_2 - y_1, x_2 - y_1 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_2, x_2 - y_2 \rangle + \langle x_2, y_1 - x_2 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle - \langle y_2, x_2 \rangle - \langle y_1, y_1 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle -x_2, y_2 - y_1 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle - \langle y_1, y_1 \rangle - \langle y_2, x_2 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle &\leq 0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (6.18) και (6.19) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle - \langle y_1, x_1 \rangle + \langle y_2, x_1 \rangle - \langle y_2, x_2 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle - \langle y_1 + y_2, x_1 + x_2 \rangle - \langle y_1 + y_2, x_1 + x_2 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1 - x_2, y_2 - y_1 \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle &\geq 0 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Άρα, η απεικόνιση $p(\cdot, C)$ είναι μονότονη.

□

6.3 Ιδιότητες Πλεινότιμων Μονότονων Τελεστών

Πρόταση 6.3. *Έστω H ένας χώρος Hilbert. Ο τελεστής $A : H \to 2^H$ είναι μονότονος εάν και μόνο εάν $||x - y + \lambda(u - v)|| \geq ||x - y||,\ \forall [x, u], [y, v] \in Gr(A)$ και για κάθε $\lambda > 0$.*
Δηλαδή, ο τελεστής $A : H \to 2^H$ είναι μονότονος εάν και μόνο εάν ο τελεστής $(I + \lambda A)^{-1}$ είναι non-expansive.

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$

Έστω $A : H \to 2^H$ μονότονος τελεστής. Θα δείξουμε ότι ο $(I + \lambda A)^{-1}$ είναι non-expansive.
Από την στιγμή που ο A είναι μονότονος ισχύει ότι:

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0,\ \forall [x, u], [y, v] \in Gr(A) \tag{6.23}$$

Λόγω της σχέσης (6.22) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&||x - y + \lambda(u - v)||^2 = ||x - y||^2 + \lambda^2||u - v||^2 + 2\lambda\langle u - v, x - y\rangle \\
\Rightarrow\ &||x - y + \lambda(u - v)||^2 \geq ||x - y||^2 \\
\Leftrightarrow\ &||x - y + \lambda(u - v)|| \geq ||x - y||,\ \forall [x, u], [y, v] \in Gr(A),\ \forall \lambda > 0
\end{aligned}$$

Άρα, ο τελεστής $(I + \lambda A)^{-1}$ είναι non-expansive.

$(\Leftarrow)$
Έστω ότι ο τελεστής $(I+\lambda A)^{-1}$ είναι non-expansive. Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A : H \to 2^H$ είναι μονότονος.

$$\begin{aligned}
||x - y + \lambda(u - v)|| &\geq ||x - y|| \\
\Leftrightarrow ||x - y|| + \lambda(u - v)||^2 &\geq ||x - y||^2 \\
\Leftrightarrow ||x - y||^2 + \lambda^2||u - v||^2 + 2\lambda\langle u - v, x - y\langle &\geq ||x - y||^2 \\
\Leftrightarrow \lambda^2||u - v||^2 + 2\lambda\langle u - v, x - y\rangle &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \lambda||u - v||^2 + 2\langle u - v, x - y\rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

Καθώς $\lambda \to 0$ έχουμε ότι $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0,\ \forall [x, u], [y, v] \in Gr(A)$.
Επομένως, ο A είναι μονότονος τελεστής.

□

Πρόταση 6.4. ***(Συνθήκη για μεγιστικά μονότονους τελεστές)*** *Έστω $A : X \to 2^{X^*}$ ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής σε έναν πραγματικό χώρο Banach X. Τότε, για κάθε $x \in D(A)$ το σύνολο Ax, με $Ax \neq \varnothing$, είναι κυρτό και w^*-κλειστό στον X^*.*

Απόδειξη. Έστω $x_0^*, x_1^* \in Ax,\ x, y \in D(A)$.
Θέτουμε $x_t^* = (1-t)x_0^* + tx_1^*,\ \forall t \in [0,1]$.
Θα δείξουμε ότι το Ax είναι κυρτό, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $x_t^* \in Ax$.

$$
\begin{aligned}
\langle x_t^* - y^*, x - y\rangle &= \langle (1-t)x_0^* + tx_1^* - y^*, x - y\rangle \\
&= \langle (1-t)x_0^*, x - y\rangle + \langle tx_1^*, x - y\rangle + \langle y^*, y - x\rangle \\
&= (1-t)\langle x_0^*, x - y\rangle + t\langle x_1^*, x - y\rangle + \langle y^*, y - x\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$\langle x_t^* - y^*, x - y\rangle \geq 0,\ \forall [y, y^*] \in Gr(A).$$

Όμως, ο A είναι μεγιστικά μονότονος τελεστής, άρα έπεται ότι

$$[x_t^*, x] \in Gr(A), \text{ δηλαδή } x_t^* \in Ax.$$

Τελικά λοιπόν το Ax είναι κυρτό σύνολο.
Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι το Ax είναι w^*-κλειστό στον X^*.
Έστω $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in Ax$ τ.ω. $x_n^* \rightharpoonup x^*$, με $x^* \in X^*$, καθώς $n \to \infty$ $\quad (\star)$
Ο $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονος, άρα ο A είναι μονότονος και λαμβάνοντας υπόψην επίσης την σχέση $(\star)$ έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&\langle x_n^* - y^*, x - y\rangle_X \geq 0,\ \forall [y, y^*], [x_n^*, x] \in Gr(A) \\
&\langle x^* - y^*, x - y\rangle_X \geq 0,\ \forall [y, y^*] \in Gr(A).
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

Όμως, ο A είναι μεγιστικά μονότονος από υπόθεση, άρα $[x^*, x] \in Gr(A)$.
Επομένως, $x^* \in Ax$ και άρα το Ax είναι w^*-κλειστό στον X^*.

□

Πρόταση 6.5. *Έστω X πραγματικός, ανακλαστικός χώρος Banach. Ένας τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονος εάν και μόνο εάν ο αντίστροφος του $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι μεγιστικά μονότονος.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει από τα παρακάτω:

$$Gr(A^{-1}) = \{[x^*, x] \in X^* \times X : [x, x^*] \in Gr(A)\}$$

και

$$\langle x^*, x\rangle_X = \langle x, x^*\rangle_{X^*},\ \forall \langle x, x^*\rangle \in X \times X^*.$$

□

Ορισμός 6.3. *Έστω X ένας πραγματικός, ανακλαστικός χώρος Banach και ένας τελεστής $B : X \to 2^{X^*}$. Ο B καλείται ψευδομονότονος εάν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ για την οποία ισχύουν τα εξής:*

i. $u_n \rightharpoonup u$, *καθώς* $n \to \infty$

ii. $\overline{lim}_{n\to\infty}\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0$

ισχύει ότι:

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \underline{lim}_{n\to\infty}\langle Bu_n, u_n - v\rangle,\ \forall v \in X.$$

Πόρισμα 6.1. *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό σύνολο σε έναν πραγματικό, ανακλαστικό χώρο Banach X.*
Έστω επίσης μία μεγιστικά μονότονη απεικόνιση $A : C \to 2^{X^*}$ και μία ψευδομονότονη, φραγμένη και demicontinuous απεικόνιση $B : C \to X^*$.
Εάν μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται:

i. *Το C είναι φραγμένο*

ii. *Το C δεν είναι φραγμένο και ο B είναι A-πιεστικός, δηλαδή:*

$$\exists u_0 \in C \bigcap D(A) : \tfrac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{||u||} \to \infty, \text{ καθώς } ||u|| \to \infty, \text{ στο } C$$

Τότε,

$$R(A + B) = X^*$$

Δηλαδή, για κάθε $b \in X^*$ η εξίσωση $b \in Au + Bu$ έχει λύση.

Πόρισμα 6.2. *Έστω C ένα μη κενό, κλειστό, κυρτό υποσύνολο ενός πραγματικού χώρου Banach X, με X,X^* αυστηρά κυρτοί χώροι.*
Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $A : C \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονη.
Τότε, για κάθε $\lambda > 0$ ο αντίστροφος τελεστής

$$(A + \lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$$

είναι μονότιμος, demicontinuous και μεγιστικά μονότονος, με $R(A + \lambda\mathcal{J}) = X^*$, όπου η απεικόνιση $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι η duality map του X.

Απόδειξη. Έστω $\lambda > 0$

- Θα δείξουμε ότι ο $(A + \lambda\mathcal{J})$ είναι επί, δηλαδή $R(A + \lambda\mathcal{J}) = X^*$.
  Από την Πρόταση (6.1) η duality map $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μονότιμη, αυστηρά μονότονη, demicontinuous και φραγμένη.
  Επίσης, ισχύει ότι $\langle\mathcal{J}u, u - u_0\rangle \geq ||u||^2 - ||u|| \cdot ||u_0||$, επομένως έπεται ότι,

$$lim_{||u||\to\infty}\frac{\langle\mathcal{J}u, u - u_0\rangle}{||u||} = \infty,\ \forall u_0 \in X$$

  Επομένως, από Πόρισμα (6.1) έχουμε ότι $R(A + \lambda\mathcal{J}) = X^*$.

- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$ είναι μονότιμος.
  Έστω $u, v \in (A+\lambda\mathcal{J})^{-1}(b)$.
  Θέτουμε $c = b - \lambda\mathcal{J}u$ και $d = b - \lambda\mathcal{J}v$, με $c \in Au$ και $d \in Av$.

$$\begin{aligned} 0 = \langle b-b, u-v\rangle &= \langle c+\lambda\mathcal{J}u - d - \lambda\mathcal{J}v, u-v\rangle \\ &= \langle c+\lambda\mathcal{J}u - (d+\lambda\mathcal{J}v), u-v\rangle \\ &= \langle c-d, u-v\rangle + \lambda\langle\mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u-v\rangle \end{aligned} \tag{6.25}$$

  Όμως, από υπόθεση, ο $A : C \to 2^{X^*}$ είναι μονότονος τελεστής και $x \in Au$, $d \in Av$, άρα $\langle c-d, u-v\rangle \geq 0,\ \forall u, v \in (A+\lambda\mathcal{J})^{-1}(b)$

  Επομένως, από την σχέση (6.23), με $\lambda > 0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\lambda\langle\mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u-v\rangle \leq 0 \\ \Rightarrow &\langle\mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u-v\rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

  Όμως, $\mathcal{J} : X \to X^*$ αυστηρά μονότονη απεικόνιση, άρα αναγκαστικά $u = v$.
  Τελικά λοιπόν, ο τελεστής $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι μονότιμος.

- Θα δείξουμε ότι ο $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$ είναι μονότονος.

  Αφού οι τελεστές $A, \mathcal{J}$ είναι μονότονοι και ο $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι μονότονος.

- Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$ είναι τοπικά φραγμένος. Πράγματι, αφου ο $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι μονότονος $\Rightarrow$ ο $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι τοπικά φραγμένος.

- Θα δείξουμε ότι ο $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$ είναι demicontinuous.
  Έστω $b_n \to b$ στον X^*, καθώς $n \to \infty$.
  Θέτουμε $u_n = (A+\lambda\mathcal{J})^{-1}(b_n)$ και $u = (A+\lambda\mathcal{J})^{-1}(b)$.
  Οπότε,

$$b_n \to b, \text{ καθώς } n \to \infty$$

$$\Rightarrow Au_n + \lambda\mathcal{J}u_n \to Au + \lambda\mathcal{J}u, \text{ καθώς } n \to \infty \qquad (\star)$$

  Επίσης, αφού ο $(A+\lambda\mathcal{J}u)^{-1}$ είναι τοπικά φραγμένος $\Rightarrow$ η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τοπικά φραγμένη ακολουθία στον X.
  Επιπλέον,

$$\langle Au_n + \lambda\mathcal{J}u_n - (Au + \lambda\mathcal{J}u), u_n - u\rangle = \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle + \lambda\langle\mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle \tag{6.27}$$

  Όμως, από σχέση $(\star)$:$\langle Au_n + \lambda\mathcal{J}u_n - (Au + \lambda\mathcal{J}u)\rangle \to 0$, καθώς $n \to \infty$.
  Άρα,

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle + \lambda\langle\mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u\rangle \to \infty, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Από υπόθεση, οι $A, \mathcal{J}$ είναι μονότονοι τελεστές, επομένως οι όροι του αθροίσματος είναι μη αρνητικοί και έτσι:

$$\langle \mathcal{J}u_n - \mathcal{J}u, u_n - u \rangle \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Επομένως, από Πρόταση (6.1*ii*.) ισχύει ότι $u_n \rightharpoonup u$, καθώς $n \to \infty$ και έτσι ο τελεστής $(A + \lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι demicontinuous.

- Τέλος, από την στιγμή που ο τελεστής $(A + \lambda\mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$ είναι μονότονος και demicontinuous σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach X, οι υποθέσεις της Πρότασης (6.2) ικανοποιούνται, άρα ο τελεστής $(A + \lambda\mathcal{J})^{-1}$ είναι μεγιστικά μονότονος.

□

Θεώρημα 6.1. *(**Rockafellar** 1970)*
Έστω X ένας πραγματικός, ανακλαστικός χώρος Banach, με X, X^* αυστηρά κυρτοί χώροι. Τότε, η μονότονη απεικόνιση:

$$A : X \to 2^{X^*}$$

είναι μεγιστικά μονότονη εάν και μόνο εάν

$$R(A + \mathcal{J}) = X^*, \text{ όπου } \mathcal{J} : X \to X^* \text{ είναι η duality map του } X.$$

Απόδειξη.
(⇒)
Εάν η απεικόνιση $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονη, τότε από το Πόρισμα (6.2) ισχύει ότι: $R(A + \mathcal{J}) = X^*$, (με $\lambda = 1$).

(⇐)
Αντίστροφα, έστω $A : X \to 2^{X^*}$ μονότονη απεικόνιση και έστω επίσης ότι $R(A + \mathcal{J}) = X^*$. Από το Πόρισμα (6.2) ο τελεστής

$$(A + \mathcal{J})^{-1} : X^* \to X$$

είναι μονότονος και demicontinuous, άρα μεγιστικά μονότονος.
Από την Πρόταση (6.5) η αντίστροφη απεικόνιση:

$$A + \mathcal{J} : X \to 2^{X^*}$$

είναι επίσης μεγιστικά μονότονη.

Θα δείξω ότι ο τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονος.
Από υπόθεση, ο A είναι μονότονος, επομένως αν $(u, u^*) \in X \times X^*$ έχουμε ότι:

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0, \ \forall [v, v^*] \in Gr(A) \tag{6.28}$$

Θέτουμε $w^* = v^* + \mathcal{J}v \in R(A + \mathcal{J}) \quad (\star)$

Οπότε, $v^* = w^* - \mathcal{J}v \in R(A)$ και έτσι η σχέση $(\star)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} &\langle u^* - w^* + \mathcal{J}v, u - v\rangle \geq 0,\ \forall [v, w^*] \in Gr(A + \mathcal{J}) \\ \Leftrightarrow &\langle u^* - (w^* - \mathcal{J}v), u - v\rangle \geq 0,\ \forall [v, w^*] \in Gr(A + \mathcal{J}) \end{aligned} \tag{6.29}$$

Επιπλέον, η $\mathcal{J} : X \to X^*$ είναι μονότονη απεικόνιση, οπότε έχουμε

$$\langle \mathcal{J}u - \mathcal{J}v, u - v\rangle \geq 0,\ \forall v \in X$$

Όμως, από την $(\star) \Rightarrow \mathcal{J}v = w^* - v^*$.
Άρα,

$$\langle \mathcal{J}u - w^* + v^*, u - v\rangle \geq 0,\ \forall [v, w^*] \in Gr(A + \mathcal{J}) \tag{6.30}$$

Με πρόσθεση των σχέσεων $(6.29), (6.30)$ κατά μέλη παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\langle u^* - w^* + \mathcal{J}v + \mathcal{J}u - w^* + v^*, u - v\rangle \geq 0 \\ &\qquad \Leftrightarrow \langle u^* + \mathcal{J}u - w^*, u - v\rangle \geq 0,\ \forall [v, w^*] \in Gr(A + \mathcal{J}) \end{aligned}$$

Όμως, ο τελεστής $(A + \mathcal{J})$ είναι μεγιστικά μονότονος τελεστής, άρα

$$u^* + \mathcal{J}u \in (A + \mathcal{J})u \Rightarrow u^* \in Au. \tag{6.31}$$

Οπότε, η απεικόνιση $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονη.

□

Πρόταση 6.6. *Κάθε μονότονη απεικόνιση $A : X \to 2^{X^*}$ σε έναν χώρο Banach X είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε εσωτερικό σημείο του $D(A)$.*

Απόδειξη.

- *Ισχυρισμός:*

  Έστω $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$, με $inf_{n,u}\langle u_n^*, u\rangle > -\infty,\ \forall u \in \mathcal{U}$,
  με $\mathcal{U} \subset X$ ανοικτό.
  Τότε,

  $$sup_{n\in\mathbb{N}}||u_n^*|| < \infty$$

  Απόδειξη Ισχυρισμού:
  Έστω $r > 0$ και ορίζουμε την μπάλα $\mathcal{B} = \{v \in X : ||v|| < r\}$.
  Θέτουμε $u = u_0 + v$.
  Τότε, από υπόθεση $inf_{n\in\mathbb{N}}\langle u_n^*, u_0 + v\rangle > -\infty,\ \forall v \in \mathcal{B}$, με u_0 δοσμένο.
  Αφού $0_X \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι:

  $$inf_{n,v}\langle u_n^*, v\rangle > -\infty \text{ και } inf_{n,v}\langle u_n^*, -v\rangle > -\infty$$

Οπότε,
$$inf_{n,v}\langle u_n^*, \pm v\rangle > -\infty,\ \forall v \in \mathcal{B} \tag{6.32}$$

Από την σχέση (6.30) προκύπτει ότι $sup_{n,v}|\langle u_n^*, v\rangle| < \infty,\ \forall v \in \mathcal{B}$.

Επομένως,

$$||u_n^*|| = sup\frac{|\langle u_n^*, v\rangle|}{||v||} < \infty \Rightarrow sup_{n\in\mathbb{N}}||u_n^*|| < \infty$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον X^*.

- *Ισχυρισμός:*

  Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, (u_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ τ.ω. $u_n \to 0$ και $||u_n^*|| \to \infty$, καθώς $n \to \infty$ (δηλαδή έστω ότι η $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη στον X^*).
  Τότε, $\forall r > 0\ \exists v \in X$, με $||v|| \leq r$ τέτοιο ώστε:

  $$\underline{lim}_{n\to\infty}\langle u_n^*, u_n - v\rangle = -\infty$$

  Απόδειξη Ισχυρισμού:

  Έστω $\exists r > 0$ τ.ω. $\underline{lim}_{n\to\infty}\langle u_n^*, u_n - v\rangle > -\infty,\ \forall v \in \mathcal{B} = \{v \in X : ||v|| \leq r\}$.
  Τότε,

  $$\mathcal{B} = \cup_{k=1}^{\infty} B_k, \text{ όπου } B_k = \{v \in \mathcal{B} : \langle u_n^*, u_n - v\rangle \geq -k,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

  Το σύνολο B_k είναι κλειστό $\forall k = \{1, ..., \infty\}$
  Οπότε, από την 2η μορφή του Θεωρήματος Baire υπάρχει τουλάχιστον ένα B_k με μη κενό εσωτερικό, δηλαδή

  $$\exists k_0 : B_{k_0}^{\circ} \neq \varnothing$$

  Άρα,
  $$inf_{n,v}\langle u_n^*, u\rangle > -\infty,\ \forall u \in B_{k_0}$$

  Το τελευταίο, από το 1ο βήμα, μας κάνει να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση.
  Άρα τελικά, αν η ακολουθία $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη ισχύει ότι:
  $\forall r > 0,\ \exists v \in X$, με $||v|| \leq r$ τέτοιο ώστε:

  $$\underline{lim}_{n\to\infty}\langle u_n^*, u_n - v\rangle = -\infty$$

- Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε την Πρόταση με εις άτοπον απαγωγή. Έστω λοιπόν ότι ο A δεν είναι τοπικά φραγμένος τελεστής σε ένα δοσμένο σημείο $u \in intD(A)$.
  Τότε, υπάρχει ακολουθία σημείων $[u_n, u_n^*] \in Gr(A)$ τέτοια ώστε:

  $$u_n \to u \text{ και } ||u_n^*|| \to \infty, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι $u = 0$.
Διαλέγουμε ένα $r > 0$ τέτοιο ώστε η μπάλα $\mathcal{B} = \{v \in X : ||v|| \leq r\} \subseteq D(A)$.
Από το 2ο βήμα της απόδειξης $\exists r > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\underline{lim}_{n\to\infty}\langle u_n^*, u_n - v\rangle = -\infty \tag{6.33}$$

Για δοσμένο $[v, v^*] \in Gr(A)$ και την μονοτονία του τελεστή A καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned}&\langle u_n^* - v^*, u_n - v\rangle \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow \langle u_n^*, u_n - v\rangle \geq \langle v^*, u_n - v\rangle,\ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Το τελευταίο είναι άτοπο από την σχέση (6.31)

□

Παρατήρηση 6.1. *Από τον ορισμό των $A, R(A)$ η εξίσωση $b \in Au$, $u \in X$ έχει λύση για κάθε δοσμένο $b \in X^*$ εάν και μόνο εάν $R(A) = X^*$.*

Θεώρημα 6.2. ***(Browder 1968)***
Έστω $A : X \to 2^{X^*}$ ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής σε έναν πραγματικό ανακλαστικό χώρο Banach X. Τότε, $R(A) = X^*$ εάν και μόνο εάν ο τελεστής $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι τοπικά φραγμένος.

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$
Έστω $R(A) = X^*$.
Αφού ο τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονος, τότε και ο $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι μεγιστικά μονότονος, άρα από Πρόταση 6.6 ο τελεστής A^{-1} είναι τοπικά φραγμένος.

$(\Leftarrow)$
Αντίστροφα, έστω ότι ο $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι τοπικά φραγμένος.
Θα δείξουμε ότι $R(A) = X^*$.
Για να αποδειχτεί το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $R(A) \neq \varnothing$ και $R(A)$ κλειστό και ανοικτό ταυτόχρονα.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι $R(A) \neq \varnothing$.
  Επειδή ο τελεστής $A : X \to 2^{X^*}$ είναι μεγιστικά μονότονος, ο $A \neq \varnothing$ και άρα $R(A) \neq \varnothing$.
- Θα δείξουμε ότι το $R(A)$ είναι κλειστό.
  Αρκεί να δείξουμε ότι αν $(u_n^*) \in R(A)$, με $u_n^* \to u^*$, καθώς $n \to \infty$, όπου $u_n^* \in Au_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $u^* \in R(A)$.
  Από υπόθεση, ο A είναι μεγιστικά μονότονος$\Rightarrow$ ο A είναι μονότονος $\Rightarrow$

$$\forall [v, v^*] \in Gr(A),\ \forall n \in \mathbb{N}, \langle u_n^* - v^*, u_n - v\rangle \geq 0 \tag{6.34}$$

Αφού ο A^{-1} είναι τοπικά φραγμένος τελεστής, η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R(A)$ είναι τοπικά φραγμένη.
Όμως, ο X είναι ανακλαστικός χώρος Banach, άρα υπάρχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τ.ω.

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \text{ καθώς } n \to \infty$$

Η σχέση (6.32) λόγω της τελευταίας γίνεται :

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0, \ \forall [v, v^*] \in Gr(A)$$

και αφού ο A είναι μεγιστικά μονότονος, τότε $u^* \in Au$ ε.ω.$u^* \in R(A)$.
Επομένως, το $R(A)$ είναι κλειστό.

- Θα δείξουμε ότι το $R(A)$ είναι ανοικτό.
  Δηλαδή, αρκεί να δείξω ότι υπάρχει ανοικτή μπάλα $\mathcal{B}$ τ.ω. $\mathcal{B} \subseteq R(A)$.
  Έστω $u^* \in R(A)$ ε.ω. $u^* \in Au$ για κάποιο $u \in D(A)$.
  Από την μονοτονία του A συμπεραίνουμε ότι $u = 0$.
  Στην συνέχεια, επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε ο $A^{-1} : X^* \to 2^X$ νε είναι τοπικά φραγμένος στην μπάλα $\mathcal{B} = \{v^* \in X^* : ||v^* - u^*|| < r\}$.
  Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αν $||v^* - u^*|| < \frac{r}{2}$, τότε $v^* \in R(A)$.
  Αρχικά λοιπόν, εφοδιάζουμε τον χώρο Banach X με μια ισοδύναμη νόρμα τέτοια ώστε οι X, X^* να είναι αυστηρά κυρτοί.
  Έστω

  $$v^* : ||v^* - u^*|| < \tfrac{r}{2}, \text{ δηλαδή } v^* \in \mathcal{B} \quad (\star).$$

  Τότε, οι υποθέσεις του Πορίσματος (6.2) ικανοποιούνται, άρα $\forall \lambda > 0$ η εξίσωση:

  $$v^*_\lambda + \lambda \mathcal{J} u_\lambda = v^*, \text{ με } v^* \in Au_\lambda$$

  έχει μία λύση u_λ.
  Από την μονοτονία του A έχουμε ότι:

  $$\begin{aligned} 0 \leq \langle v^*_\lambda - u^*, u_\lambda - u\rangle &= \langle v^* - \lambda\mathcal{J}u_\lambda - u^*, u_\lambda - u\rangle \\ &= \langle v^* - u^*, u_\lambda - u\rangle + \langle -\lambda\mathcal{J}u_\lambda, u_\lambda - u\rangle \\ &= \langle v^* - u^*, u_\lambda\rangle + \langle -\lambda\mathcal{J}u_\lambda, u_\lambda\rangle \\ &= \langle v^* - u^*, u_\lambda\rangle - \lambda\langle \mathcal{J}u_\lambda, u_\lambda\rangle \geq 0, \ \forall\lambda > 0, \ u = 0 \end{aligned}$$

  Επομένως,

  $$\begin{aligned} 0 \leq \langle v^* - \lambda\mathcal{J}u_\lambda - u^*, u_\lambda - u\rangle &= \langle v^* - u^*, u_\lambda\rangle - \lambda\langle \mathcal{J}u_\lambda, u_\lambda\rangle \\ &\leq ||v^* - u^*|| \cdot ||u_\lambda|| - \lambda||\mathcal{J}u_\lambda|| \cdot ||u_\lambda|| \\ &= ||v^* - u^*|| \cdot ||u_\lambda|| - \lambda||u_\lambda||^2 \\ \Leftrightarrow \lambda||u_\lambda||^2 &\leq ||v^* - u^*|| \cdot ||u_\lambda|| \\ \Leftrightarrow \lambda||u_\lambda|| &\leq ||v^* - u^*|| < \frac{r}{2}, \ \forall\lambda > 0. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Επίσης, για $v_\lambda^* \in Au_\lambda$ έχουμε:

$$\begin{aligned} v_\lambda^* + \lambda \mathcal{J} u_\lambda &= v^* \\ \Leftrightarrow \lambda \mathcal{J} u_\lambda &= v^* - v_\lambda^* \\ \Leftrightarrow \lambda ||\mathcal{J} u_\lambda|| &= ||v^* - v_\lambda^*|| \\ \Leftrightarrow ||v^* - v_\lambda^*|| &= \lambda ||u_\lambda|| < \frac{r}{2},\ \forall \lambda > 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} ||v_\lambda^* - u^*|| &= ||v_\lambda^* - v^* + v^* - u^*|| \\ &\leq ||v_\lambda^* - v^*|| + ||v^* - u^*|| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,\ \forall \lambda > 0 \end{aligned}$$

Άρα, $||v_\lambda^* - u^*|| < r,\ \forall \lambda > 0$ και αφού ο $A^{-1} : X^* \to 2^X$ είναι φραγμένος στην μπάλα $\mathcal{B} = \{v^* \in X^* : ||v^* - u^*|| < r\}$, τότε :

$$u_\lambda \in (A^{-1}) v_\lambda^*$$

Οπότε, η ακολουθία $(u_\lambda)_\lambda$ είναι φραγμένη και από την σχέση (6.34) προκύπτει ότι:

$$||v^* - v_\lambda^*|| = \lambda ||u_\lambda|| \longrightarrow 0, \text{ καθώς } \lambda \to 0$$

Επομένως,

$$v_\lambda^* \to v^*, \text{ καθώς } \lambda \to 0$$

Όμως, το $R(A)$ έχουμε ήδη δείξει ότι είναι κλειστό και $v_\lambda^* \in R(A)$, άρα και $v^* \in R(A)$.
Άρα, $\mathcal{B} \subset R(A) \Rightarrow R(A)$ ανοικτό.

Τελικά, δείξαμε ότι ισχύει ότι $R(A) = X^*$.

$\square$

Πόρισμα 6.3. *Έστω $A : X \to 2^{X^*}$ ένας μεγιστικά μονότονος και ασθενώς πιεστικός τελεστής σε έναν πραγματικό, ανακλαστικό χώρο Banach X.*
Τότε,

$$R(A) = X^*.$$

Απόδειξη. Ο A είναι ασθενώς πιεστικός, άρα ο A^{-1} είναι τοπικά φραγμένος.
Επομένως, από το Θεώρημα (6.2) ισχύει ότι $R(A) = X^*$. $\square$

Θεώρημα 6.3. ***(Κύριο Θεώρημα των Ασθενώς Πιεστικών Μονότονων Τελεστών)***
Έστω $A : X \to 2^{X^*}$ ένας μονότονος, hemicontinuous και ασθενώς πιεστικός τελεστής σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach X.
Τότε,

$$R(A) = X^*$$

Απόδειξη. Από Πρόταση (6.2) ο A είναι μεγιστικά μονότονος τελεστής, επομένως οι υποθέσεις του Πορίσματος (6.3) ικανοποιούνται και άρα ο A είναι επί τελεστής. Οπότε, όντως ισχύει ότι $R(A) = X^*$.

□

Βιβλιογραφία

[1] H. Brezis, Συναρτησιακή Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. Αθήνα 1997.

[2] Petr Habala, Petr Hajek, Vaclav Zizler, Introduction to Banach Spaces, Matfyzpress 1996.

[3] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Αθήνα 1997.

[4] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications I-Fixed Point Theorems, Springer-Verlag 1986.

[5] E.Zeidler, Non Linear Functional Analysis and its Applications II/A, Linear Monotone Operators, Springer-Verlag 1990.

[6] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag 1990.

[7] Scouchuan Hu, Nikolas S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis Volume I-Theory, Springer 1997.

[8] Elliot H.Lieb-Michael Loss, Analysis, American Mathematical Society 1997.

[9] L. Debnath, P. Mikusinski, Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press 1999.

[10] D.H.Griffel,Applied Functional Analysis, Dover Publications, INC Mineola New York.

[11] L.Tartar, An Introduction to Sobolev Spaces and Interpollation Spaces, Springer 2007.

[12] R.Adams, Sobolev Spaces, Academic Press 1975.