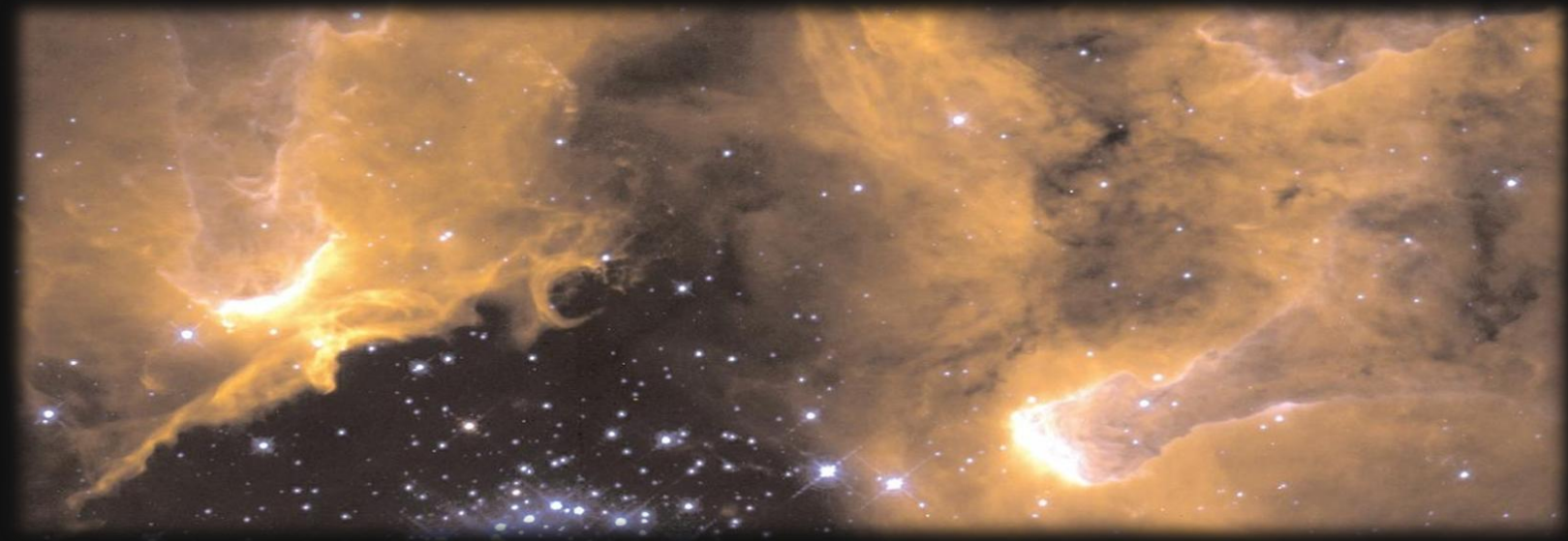


Διπλωματική Εργασία

Το Πληθωριστικό Σύμπαν

Ειρήνη Χατζαρά

Επιβλέπων: Κεχαγιάς Αλέξανδρος



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2012

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου, Αλέξανδρο Κεχαγιά, για την ανάθεση της διπλωματικής αυτής εργασίας και για τη καθοδήγηση και τη βοήθειά του μέχρι να ολοκληρωθεί.

Ευχαριστώ το Βασίλη Κονιδάρη που μου μετέδωσε τα δύο βασικότερα εφόδια για την ενασχόληση με τη Φυσική: αγάπη και μέθοδο.

Ευχαριστώ την αδερφή μου για την υπομονή και τη στήριξη.

Τέλος, ευχαριστώ τον Alexandre Duca, για όλα.

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη του Πληθωριστικού Κοσμολογικού Μοντέλου και η αναγκαιότητα της εισαγωγής του ως συμπλήρωμα του Καθιερωμένου Μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης.

Επιγραμματικά, πρόκειται για μια σύντομη περίοδο του πρώιμου Σύμπαντος κατά την οποία το Σύμπαν πέρασε μια «έξαρση» διαστολής, δηλαδή, ο παράγοντας κλίμακάς του αυξήθηκε κατά έναν τεράστιο αριθμό τάξεων μεγέθους.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια αναδρομή στις θεωρήσεις του χώρου και χρόνου πριν την εισαγωγή της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Στη συνέχεια αναπτύσσεται η Ειδική Σχετικότητα καθώς και κάποια «εργαλεία» όπως το διάγραμμα Minkowski και ο κώνος φωτός, που είναι χρήσιμα για τη μετέπειτα μελέτη του χωροχρόνου.

Στο δεύτερο μέρος γίνεται μια εισαγωγή στην ανάλυση τανυστών καθώς τα τανυστικά μεγέθη, λόγω της αναλλοιώτητάς τους σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς είναι απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη της Γενικής Σχετικότητας. Πριν περάσουμε, λοιπόν, στη μελέτη της αναπτύσσονται όλες οι τανυστικές ποσότητες που χρησιμοποιούνται σε αυτή.

Στο τρίτο μέρος μελετάμε τη βαρύτητα ως γεωμετρία και αναφερόμαστε στα κλασικά πειράματα για την επιβεβαίωση της ΓΣ. Αφού καταλήξουμε στο πώς η καμπυλότητα του χωροχρόνου επιδρά στην ύλη αλλά και στο πώς η μετρική ανταποκρίνεται στην ύλη, εξάγουμε τη μετρική για το χωρόχρονο γύρω από σφαιρική μάζα καθώς και τη λύση Schwarzschild.

Το τέταρτο μέρος είναι αφιερωμένο στο κοσμολογικό μοντέλο του Big Bang. Αφού παρουσιάσουμε τις ενδείξεις για την ομογένεια και τη ισοτροπία του Σύμπαντος, εξάγουμε με βάση τις συμμετρίες λόγω των δύο αυτών χαρακτηριστικών τη μετρική Robertson-Walker και στη συνέχεια τις εξισώσεις Friedmann, από όπου προκύπτουν οι καθιερωμένες κοσμολογικές λύσεις.

Στο πέμπτο και τελευταίο μέρος, εισάγουμε το Πληθωριστικό Σενάριο, ως την απάντηση στις ανεπάρκειες του μοντέλου του Big Bang. Διερευνούμε το πεδίο inflation και στη συνέχεια παρουσιάζουμε το μοντέλο του χαοτικού πληθωρισμού.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of the Inflationary Model and its introduction as an essential add-on to the Standard Big Bang Model.

Briefly, inflation is a short period of the early universe, during which the universe underwent a “burst” of expansion and, as a result, the scale factor had an increase of a huge number of orders of magnitude.

In the first part of this thesis we look back at the conception of time and space before the General Theory of Relativity (GR). Then the Special Theory of Relativity is developed, as well as some “tools” like Minkowski diagram and the light cones that will be proved useful for our later study of spacetime.

In the second part we make an introduction to tensor analysis, since tensor quantities are a necessary tool for the study of GR due to their invariance. So, before we move on to GR we develop all the tensor quantities that we will be using.

In the third part we study gravity as geometry, and we explain the classic experiments for the GR. Afterwards, we study how matter is influenced by the curvature of spacetime and how the metric responds to matter. Finally, we construct the metric of spacetime around a spherical mass and develop the Schwarzschild solution.

The fourth part is dedicated to the cosmological model of Big Bang. After presenting the homogeneity and isotropy indications we construct based on the symmetries assumed by those indications, the Robertson-Walker metric and later on the Friedmann equations, from which we get the standard cosmic solutions.

In the fifth and final part, we introduce the Inflationary Scenario, as the answer to Big Bang’s inadequacies. We investigate the inflaton field and we develop the model of Chaotic Inflation.

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	13
Μέρος 1. ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ	15
Κεφάλαιο 1. ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ, ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ	17
1.1. Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ NEWTON	17
1.2. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ MACH	17
1.3. Ο ΑΙΘΕΡΑΣ ΚΑΙ Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟ ΤΟΥΣ MICHELSON - MORLEY	21
Κεφάλαιο 2. ΕΙΔΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ	22
2.1. ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	22
2.2. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	23
2.3. ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MINKOWSKI	24
2.4. ΔΙΑΣΤΗΜΑ	25
2.5. ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ	27
2.6. Ο ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ	28
2.7. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ	28
Μέρος 2. ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	32
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	34
Κεφάλαιο 3. ΒΑΘΜΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ, ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ	35
3.1. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ (ΒΑΘΜΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ)	35
3.2. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)	36
3.2.1. Ανταλλοίωτα διανύσματα	36
3.2.2. Συναλλοίωτα διανύσματα	37
3.2.3. Ο νόμος μετασχηματισμού	38
3.3. ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ	38
Κεφάλαιο 4. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ	40
4.1. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ - ΣΥΝΔΕΣΗ	40
4.2. Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ RIEMANN - CHRISTOFFEL	43
4.3. Ο ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ	44

4.3.1. Μειτρική σύνδεση. Ανύψωση και καταβίβαση δεικτών.	45
4.3.2. Τα σύμβολα Christoffel	46
4.3.3. Γεωδαισιακές καμπύλες σε χώρους Riemann	47
4.3.4. Η ταυτότητα Bianchi	48
4.3.5. Ο τανυστής Einstein	49
Μέρος 3. ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ : Η ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΩΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	51
Κεφάλαιο 5. ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	54
5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	54
5.2. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΗΣ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΑΖΑΣ	55
5.3. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ	56
5.4. ΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΗΣ ΓΘΣ	57
5.4.1. Μετατόπιση προς το ερυθρό λόγω της βαρύτητας	57
5.4.2. Εκτροπή φωτονίων από τον Ήλιο	58
5.4.3. Η μετατόπιση του περιηλίου του Ερμή	60
Κεφάλαιο 6. ΒΑΡΥΤΗΤΑ	62
6.1. ΑΠΟ ΤΟ NEWTON ΣΤΟΝ EINSTEIN	62
6.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ EINSTEIN	65
6.3. Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ	69
Κεφάλαιο 7. Ο ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΜΑΖΑ	71
7.1. ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ	71
7.2. Η ΛΥΣΗ SCWARZSCHILD	73
Μέρος 4. ΤΟ ΘΕΡΜΟ BIG BANG	76
Κεφάλαιο 8. Η ΗΧΩ ΕΝΟΣ ΚΑΥΤΟΥ ΠΑΡΕΛΘΟΝΤΟΣ	79
8.1. Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΤΩΝ ΓΑΛΑΞΙΩΝ	79
8.2. Η ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ	80
Κεφάλαιο 9. ΤΟ ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΣΥΜΠΛΑΝ	82
9.1. Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΧΗ	82
9.1.1. ΟΙ ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΤΡΟΠΙΑ	82
Χαρτογραφώντας την ύλη	82
Χαρτογραφώντας την Ακτινοβολία	84
9.1.2. ΟΙ ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ	85
Κεφάλαιο 10. ΤΟ ΔΙΑΣΤΕΛΛΟΜΕΝΟ ΣΥΜΠΛΑΝ	87
10.1. Η ΘΕΡΜΗ ΜΕΓΑΛΗ ΕΚΡΗΞΗ	87
10.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	87

10.2.1. Η μετρική Robertson-Walker	87
10.3. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ FRIEDMANN	89
10.3.1. Τα Σύμπαντα Friedmann	90
10.4. ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	91
10.4.1. Κρίσιμη πυκνότητα και παράμετρος πυκνότητας	92
10.4.2. Χαρακτηριστικές κλίμακες και ορίζοντες	93
10.4.3. Ορίζοντες γεγονότων	93
10.4.4. Μετατόπιση προς το ερυθρό και Θερμοκρασία	94
10.4.5. Ο νόμος της διαστολής	94
10.5. ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΕΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ	95
10.5.1. Το γεμάτο κονιορτό (σκόνη) Σύμπαν	95
10.5.2. Το γεμάτο ακτινοβολία Σύμπαν	96
10.5.3. Το Σύμπαν του Einstein και του de Sitter	97
Μέρος 5. ΤΟ ΠΛΗΘΩΡΙΣΤΙΚΟ ΣΥΜΠΑΝ	99
Κεφάλαιο 11. ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΓΡΙΦΟΥΣ ΤΟΥ ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ	101
11.1. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ	101
11.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ	103
11.3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΩΝ ΜΙΚΡΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ	105
Κεφάλαιο 12. Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΘΕΩΡΙΑΣ	106
12.1. ΤΟ ΠΛΗΘΩΡΙΣΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ	106
12.1.1. Πώς μπορεί να γίνει η βαρύτητα απωστική;	107
12.2. Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ ΣΤΟΥΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟΥΣ ΓΡΙΦΟΥΣ	109
12.2.1. Ο πληθωρισμός λύνει το πρόβλημα της επιπεδότητας	110
12.2.2. Ερμηνεύει την ομοιογένεια λόγω της αύξησης του μεγέθους του ορίζοντα	110
12.3. ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΔΙΑΣΤΕΛΛΟΜΕΝΟ ΣΥΜΠΑΝ	110
12.4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ SLOW-ROLL	111
12.5. ΤΟ ΣΥΜΠΑΝ ΤΟΥ DE SITTER	112
Κεφάλαιο 13. ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ	113
13.1. ΧΑΟΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ	113
Παράρτημα Α	115
ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ	117
Bibliography	121

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης έχει τις ρίζες της στους υπολογισμούς του Alexander Friedmann, ο οποίος το 1922 έδειξε ότι οι εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας επιτρέπουν μια διαστελλόμενη λύση που ξεκινά από μία ιδιομορφία. Οι ενδείξεις για τη Μεγάλη Έκρηξη είναι πλέον συντριπτικές. Η διαστολή του Σύμπαντος παρατηρήθηκε αρχικά στις αρχές της δεκαετίας του 1920 από τον Vesto Melvin Slipher, και κωδικοποιήθηκε το 1929 από τον Edwin Hubble στη μορφή που σήμερα γνωρίζουμε σαν “Νόμο του Hubble”: κατά μέσο όρο, κάθε μακρινός γαλαξίας απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα ανάλογη της απόστασής του. Το 1965, οι Arno Penzias και Robert Wilson ανίχνευσαν ένα υπόβαθρο από μικροκυματική ακτινοβολία να κατακλύζει τη Γη από όλες τις κατευθύνσεις - ακτινοβολία που θεωρείται η μετάλαμψη της πρωταρχικής θερμής πυκνής διάπυρης σφαίρας. Σήμερα γνωρίζουμε, (βασισμένοι σε δεδομένα από τους δορυφόρους COBE και WMAP) ότι το φάσμα αυτής της ακτινοβολίας υποβάθρου συμφωνεί με εξαιρετική ακρίβεια με το θερμικό φάσμα που αναμένεται για την ακτινοβολία της θερμής ύλης στο πρώιμο Σύμπαν. Επιπλέον, οι υπολογισμοί της πυρηνοσύνθεσης στο πρώιμο Σύμπαν δείχνουν ότι η θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης όχι μόνο συμφωνεί αλλά μπορεί και να ερμηνεύσει τις ποσότητες των ισότοπων των ελαφρών στοιχείων.

Παρά τις τεράστιες επιτυχίες της Θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης, υπάρχει σημαντικός λόγος να πιστεύουμε ότι αυτή είναι ελλειπής στην παραδοσιακή της μορφή. Παρά την ονομασία της, στην πραγματικότητα δεν είναι σε καμία περίπτωση η θεωρία μιας έκρηξης. Είναι μόνο η θεωρία των *επακόλουθων* μιας έκρηξης. Περιγράφει κομψά πώς το Σύμπαν διαστέλλεται και ψύχεται και πώς η ύλη συγκεντρώθηκε για να σχηματίσει άστρα και γαλαξίες. Αλλά η θεωρία δεν λέει τίποτα για τη φυσική πίσω από την πρωταρχική έκρηξη. Δεν δίνει κανένα στοιχείο για το τί εξεράγη, τί το προκάλεσε να εκραγεί ή τί συνέβη πριν εκραγεί. Η Θεωρία του Πληθωριστικού Σύμπαντος, από την άλλη, παρέχει πιθανές απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα και ακόμα περισσότερα. Ο πληθωρισμός δεν υποκαθιστά τη Θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, αντιθέτως, προσθέτει μια σύντομη προϊστορία, που ακολουθείται κομψά από την παραδοσιακή περιγραφή.

Μέρος 1

ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ, ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

1.1. Η ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ NEWTON

“Ένα αδιατάρακτο σώμα κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα”. Ο πρώτος Νόμος του Newton υπήρξε ένας θρίαμβος, σε ένα περιβάλλον όπου δεν υπάρχουν αδιατάρακτα σώματα και σταθερές ταχύτητες και όπου καμιά τροχιά δεν είναι ευθεία γραμμή. Για να αλλάξει η ταχύτητα, χρειάζεται μια δύναμη, και οι άλλοι νόμοι της κίνησης αναλαμβάνουν να χαρακτηρίσουν τις φυσικές δυνάμεις. Πειραματικά, οι καλύτεροι έλεγχοι των νέων θεωριών παρέχονταν από την ουράνια μηχανική, όπου οι δυνάμεις τριβής είναι ασθενικές και οι παρατηρήσεις των αστρονόμων είχαν αποκτήσει ακρίβεια χωρίς προηγούμενο. Ο Johannes Kepler, ιδιαίτερα, είχε συνοψίσει τις κινήσεις των πλανητών σε λίγους εμπειρικούς νόμους (έναν από τους οποίους αναγνωρίζουμε σήμερα ως τη διατήρηση της στροφορμής) και ο Newton μπόρεσε να αποδείξει ότι αυτοί οι νόμοι ήταν πλήρως συμβατοί με έναν νόμο αντιστρόφου τετραγώνου για τη βαρυτική δύναμη.

Μία από τις συνέπειες της νέας μηχανικής ήταν ένα είδος σχετικότητας: κανείς παρατηρητής δεν μπορεί να προσδιορίσει την ταχύτητά του με απόλυτο τρόπο: η ταχύτητα είναι πάντοτε σχετική ως προς κάτι ή κάποιον. Στις μέρες μας είμαστε εξοικειωμένοι με το γεγονός αυτό· μέσα σε ένα αεροσκάφος που πετά χωρίς κραδασμούς, δεν αντιλαμβανόμαστε την ταχύτητά μας χωρίς να κοιτάξουμε έξω από το παράθυρο και καταφέρνουμε να πιούμε τον καφέ μας στον αέρα το ίδιο καλά όπως στο έδαφος. Το ίδιο το έδαφος, φυσικά, κινείται με αξιόλογη ταχύτητα καθώς η Γη περιστρέφεται.

1.2. Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ MACH

Ισχύουν οι νόμοι του Newton σε όλα τα συστήματα αναφοράς; Έχουν εκφραστεί μόνο για μια “προνομιούχα” τάξη συστημάτων που ονομάζονται *αδρανειακά συστήματα αναφοράς*, δηλαδή σε ελεύθερη πτώση και μη περιστρεφόμενα. Οπότε το ερώτημα που προκύπτει είναι τί μορφή παίρνουν σε άλλα, μη αδρανειακά συστήματα. Ας διερευνήσουμε την κατάσταση του δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα για ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' , ομοιόμορφα επιταχυνόμενο με επιτάχυνση a ως προς ένα αδρανειακό σύστημα S . Θα υποθέσουμε, για απλοποίηση, ότι οι παρατηρητές αρχικοποιούν τα ρολόγια τους όταν ταυτίζεται η θέση τους και ότι η σχέση μεταξύ των συστημάτων είναι:

$$x = x' + s, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (1.2.1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε από την πρώτη εξίσωση ότι:

$$\dot{x} = \dot{x}' + \dot{s} \quad (1.2.2)$$

και παραγωγίζοντας ξανά:

$$\ddot{x} = \ddot{x}' + \ddot{s} = \ddot{x}' + a \quad (1.2.3)$$

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά τον άξονα x υπό την επίδραση μιας δύναμης $F = (F, 0, 0)$ τότε ο δεύτερος νόμος του Newton γίνεται:

$$F = m\ddot{x} = m\ddot{x}' + ma \quad (1.2.4)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως προς τον παρατηρητή S' ως:

$$F - ma = m\ddot{x}' \quad (1.2.5)$$

Έτσι, συγκρινόμενος με τον S , ο παρατηρητής S' παρατηρεί μια *μείωση* της δύναμης πάνω στο σωματίδιο κατά έναν παράγοντα ma . Αυτή η επιπλέον δύναμη ονομάζεται *αδρανειακή δύναμη*. Το ερώτημα που εγείρεται, λοιπόν, είναι ποιά είναι η φυσική προέλευση των αδρανειακών δυνάμεων. Η νευτώνεια θεωρία δεν κάνει απόπειρα να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα. Αντιθέτως, η θεωρία του Mach κάνει.

Ας θέσουμε ένα ακόμα θεμελιώδες ερώτημα. Αν οι νόμοι του Newton ισχύουν μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τότε πως ανιχνεύουμε τα αδρανειακά συστήματα; Ο Newton συνειδητοποίησε ότι αυτό είναι ένα θεμελιώδες ερώτημα και επιχείρησε να το απαντήσει με ένα ιδιοφυές πείραμα σκέψης, το περίφημο *πείραμα με τον κουβά*.

"Γεμίστε ένα κουβά με νερό, πιάστε τον από το χερούλι και περιστρέψτε τον πάνω από το κεφάλι σας. Αν το κάνετε σωστά θα παραμείνετε στεγνοί. Μια μυστηριώδης δύναμη μοιάζει να κρατάει το νερό μέσα στον αναποδογυρισμένο κουβά. Οι επιστήμονες είναι ακόμη αβέβαιοι για την προέλευση αυτής της δύναμης". Η δύναμη αυτή ονομάζεται φυγόκεντρος, και με αυτά τα λόγια ο Paul Davis περιγράφει το νοητικό πείραμα του Newton με τον κουβά. Ο Newton πίστευε πως η αδράνεια είναι εγγενής ιδιότητα της ύλης κι εκδηλώνεται όποτε η ύλη επιταχύνεται, σχετικά με τον απόλυτο χώρο. Μπορούμε να σκεφτούμε τον χώρο γύρω από το επιταχυνόμενο σώμα σαν να αντιδράει ώστε να παράγει αδρανειακές δυνάμεις (π.χ. τη φυγόκεντρη δύναμη του παραπάνω παραδείγματος). Ο Newton περιέγραψε το νοητικό του πείραμα ως εξής: Έστω ένας κουβάς με νερό κρεμασμένος από ένα μακρύ σκοινί. Περιστρέφουμε τον κουβά έτσι ώστε το σκοινί να τυλιχτεί γερά. Ύστερα, αφού αφήσουμε τον κουβά, το σκοινί ξετυλίγεται στην αντίθετη φορά.

- (1) Η επιφάνεια του νερού στην αρχή θα είναι *επίπεδη*, όπως όταν ο κουβάς ήταν ακίνητος.
- (2) Καθώς αυτός μεταδίδει σιγά σιγά την κίνησή του στο νερό, μέσω φαινομένων τριβής, θα το κάνει να περιστρέφεται αισθητά, και να ανεβαίνει προς τα τοιχώματά του, αποκτώντας έτσι μια κοίλη επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα (1.2.1). Αυτή η συμπεριφορά του νερού δείχνει την τάση του να απομακρύνεται από τον άξονα περιστροφής και δεν εξαρτάται από την σχετική κίνησή του ως προς άλλα σώματα.

- (3) Σταδιακά, ο κουβάς θα επιβραδύνει και θα σταματήσει, αλλά το νερό θα συνεχίσει να περιστρέφεται για ένα διάστημα, με την επιφάνειά του να παραμένει κοίλη.
- (4) Τελικά, το νερό θα επιστρέψει στην ακίνητη, επίπεδη κατάσταση του.

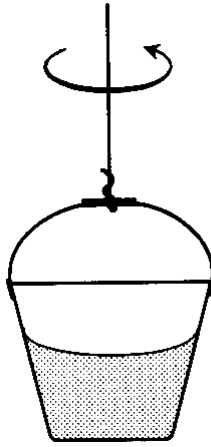


FIGURE 1.2.1. Ο κουβάς και το νερό σε απόλυτη περιστροφή.

Η εξήγηση του Newton ήταν ότι η καμπυλότητα της επιφάνειας του νερού προκύπτει από φυγοκεντρικά φαινόμενα εξαιτίας της περιστροφής του **νερού** σε σχέση με τον απόλυτο χώρο. Αυτή η καμπυλότητα δεν συνδέεται με τοπικές θεωρήσεις, όπως για παράδειγμα την περιστροφή του κουβά..

Αυτή η έννοια του απόλυτου χώρου αμφισβητήθηκε τόσο από τον “μεγάλο αντίπαλο” και σύγχρονο του Newton, Leibnitz, όσο και από τους μεταγενέστερους Berkeley και Mach. Ο τελευταίος, διατύπωσε την *αρχή του Mach*, παρότι η ονομασία δόθηκε από τον Einstein, το 1918. Σε ό,τι αφορά το νοητικό πείραμα του Newton με το κουβά, ο Mach αντέτεινε πως ο κουβάς θα πρέπει να περιστρέφεται σε σχέση με κάτι αλλιώς πώς θα μπορούσε κάποιος να πει ότι περιστρέφεται; Σύμφωνα με τα δικά του λόγια:

“Η συμπεριφορά των υλικών σωμάτων σε σχέση με τη Γη ανάγεται στη συμπεριφορά της Γης σε σχέση με τα ουράνια σώματα. Αν λέγαμε ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε καλύτερα τη συμπεριφορά τους με διαφορετικό τρόπο, θα κάναμε λάθος. Όταν, επομένως, λέμε ότι ένα σώμα διατηρεί αναλλοίωτη την κατεύθυνση και την ταχύτητά του στο χώρο, η θεώρησή μας είναι λίγο - πολύ μια αναφορά σε ολόκληρο το Σύμπαν. Αυτή η θεώρηση δείχνει ότι δεν είναι απαραίτητο ο νόμος της αδράνειας να αναφέρεται σε έναν απόλυτο χώρο.”

Αυτό δηλαδή που πρότεινε ο Mach είναι ότι τα μακρινά αστέρια θα είναι και υπαίτια για την επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε σχέση με αυτά. Εξού και η αρχή του Mach: “Η μάζα εκεί προκαλεί την αδράνεια εδώ”.

Ο Einstein έδωσε ιδιαίτερη βαρύτητα στις απόψεις του Mach περί σχετικότητας της κίνησης (η ειδική θεωρία της σχετικότητας θεωρείται εφαρμογή της αρχής του Mach). Μάλιστα, σ’ ένα γράμμα του προς τον Mach, του είπε τα εξής:

"Φαίνεται ότι η αδράνεια οφείλεται σ' ένα είδος αλληλεπίδρασης μεταξύ σωμάτων, σύμφωνα με τις σκέψεις σας πάνω στο πείραμα του Newton με τον κουβά... Αν κάποιος θέσει σε περιστροφή ένα βαρύ κέλυφος ύλης σχετικά με τα ακίνητα άστρα γύρω από έναν άξονα που περνάει από το κέντρο του, μία δύναμη Coriolis θα αναπτυχτεί στο εσωτερικό του κελυφους."

Η προηγούμενη διαπίστωση του Einstein είναι γνωστή ως το φαινόμενο των Lense-Thirring (Lense-Thirring effect). Προβλέπει ότι η περιστροφή ενός κελυφους (σφαιρική κατασκευή) θα συμπαρασύρει στην κίνησή του ένα αντικείμενο τοποθετημένο μέσα στο κέλυφος (χωρίς να εφάπτονται μεταξύ τους τα δύο αντικείμενα). Με άλλα λόγια, η περιστροφή θα προκαλέσει μια μετατόπιση του συστήματος αναφοράς του κελυφους σε σχέση με το υπόβαθρο, (τα αστέρια ή το έδαφος) εξ ου και η εναλλακτική ονομασία του φαινομένου "frame- drugging effect".

Το φαινόμενο των Lense-Thirring μένει να επαληθευτεί, αφού οι μετρήσιμες επιπτώσεις του είναι ανεπαίσθητες. Επίσης, σε όλη την προηγούμενη συζήτηση θεωρήσαμε ότι η αλληλεπίδραση των αντικειμένων με τα "μακρινά αστέρια" γίνεται ακαριαία. Πώς προλαβαίνει η δράση μακρινών αντικειμένων να προκαλέσει την αδράνεια των σωμάτων την ίδια χρονική στιγμή; Ίσως τελικά η εξήγηση να έρχεται όχι από τα μακρινά αστέρια, αλλά από τα αθέατα σωματίδια που υπάρχουν μέσα στον κοντινό μας ελεύθερο χώρο, και τα οποία θα μπορούσαν να αφήσουν μετρήσιμα χνάρια. Τη δεκαετία του 1970, ο Unruh, διαπίστωσε πως ένας επιταχυνόμενος παρατηρητής μέσα στον απόλυτο χώρο (κβαντικό κενό) θα αντιληφθεί να κατακλύζεται από ένα λουτρό θερμικής ακτινοβολίας, δημιουργούμενη από το πλήθος των σωματιδίων που κατοικούν εκεί (ένα φαινόμενο ανάλογο με τον αέρα που μας "χτυπάει" καθώς κινούμαστε με το αυτοκίνητο).

Στη συνέχεια, ο Haisch μαζί με τους Ruthorff και Rueda, χρησιμοποίησαν την ιδέα του "κβαντικού αφρού" που διαπερνά όλο το χώρο ώστε να εξηγήσουν την προέλευση της αδράνειας. Μάλιστα, υπολόγισαν το αποτέλεσμα για την περίπτωση ενός ηλεκτρικά φορτισμένου σώματος και διαπίστωσαν ότι πάνω στο σώμα, καθώς αυτό κινείται, ασκείται μια δύναμη αντίστασης ανάλογη με την επιτάχυνσή του, όπου, προφανώς, ο συντελεστής αναλογίας θα είναι η μάζα του σώματος.

Αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι ακριβής, τότε έχουμε μια σαφή περιγραφή της αδράνειας και του πώς η μάζα αποδίδεται στα σώματα, όχι εξ αποστάσεως, αλλά χάρη στο γειτονικό τους περιβάλλον. Πράγματι, ακόμη κι αν το κβαντικό κενό δεν υφίσταται ή αν δεν έχει τόση σημασία σε σχέση με την αδράνεια των σωμάτων, και πάλι τα βαρυτικά πεδία με τα οποία αλληλεπιδρά ένα σώμα βρίσκονται στην περιοχή του σώματος, αλλιώς αυτό δεν μπορεί να αλληλεπιδράσει μαζί τους. Σε κάθε περίπτωση πάντως, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας το εξής: αυτό που εμείς παρατηρούμε και κατανοούμε για τον κόσμο δεν ταυτίζεται απαραίτητα με αυτό που παρατηρεί και αντιλαμβάνεται κάποιος άλλος. Αν εμείς, λόγω χάρη, περιστρεφόμαστε κάτω από τον νυχτερινό ουρανό και βλέπουμε τ' αστέρια να περιστρέφονται, αυτό δεν σημαίνει ότι και κάποιος άλλος που δεν χορεύει βλέπει τα αστέρια να περιστρέφονται!

1.3. Ο ΑΙΘΕΡΑΣ ΚΑΙ Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΟΥ ΑΠΟ ΤΟΥΣ MICHELSON - MORLEY

Φαίνεται ότι ήταν πρώτος ο Descartes (1596-1650) εκείνος που εισήγαγε στην επιστήμη την έννοια ενός υλικού που διαπερνά τα πάντα, του *αιθέρα*, και αποτελεί τον φορέα όλων των μέχρι τότε ακατανόητων αλληλεπιδράσεων. Τα σώματα που βρίσκονται σε επαφή μπορούν να αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο, αλλά απαιτούνταν ο αιθέρας (σήμερα το αποκαλούμε πεδίο!) να είναι το ενδιάμεσο της σελήνης και την παλίρροιας, για παράδειγμα.

Στη συνέχεια ο Newton έπαιξε με την ιδέα ενός αιθέρα με περίεργες ελαστικές ιδιότητες, προκειμένου να “ερμηνεύσει” τη βαρύτητα. Στους σύγχρονους του, όπως ο Hooke και ο Huyghens, η βασική λειτουργία του αιθέρα ήταν να μεταφέρει την ακτινοβολία. Ο *φωτοφόρος αιθέρας* τους εξελίχθηκε στον ακρογωνιαίο λίθος της θεωρίας του Maxwell.

Η μεγάλη επιτυχία της θεωρίας του Maxwell από το 1860 περίπου, έκανε τον αιθέρα κεντρικό αντικείμενο μελέτης και συζητήσεων της φυσικής του 19ου αιώνα. Υπήρχε μεγάλη πίεση στους πειραματικούς να τον ανιχνεύσουν άμεσα. Συγκεκριμένα, έγιναν προσπάθειες να καθοριστεί η ταχύτητα της περιστρεφόμενης Γης μέσω του αιθέρα, μετρώντας τον “άνεμο του αιθέρα” ή την “αιθερική μετατόπιση” στο εργαστήριο. Το καλύτερο από όλα αυτά τα πειράματα ήταν αυτό των Michelson - Morley το 1887.

Το 1881 ο Albert Michelson πραγματοποίησε ένα πείραμα (που το βελτίωσε αργότερα με τον Morley) για να δει πόσο γρήγορα κινούνται το εργαστήριό του ως προς τον αιθέρα. Η βασική ιδέα ήταν ότι η ταχύτητα (και επομένως ο χρόνος) διάνυσης ενός οπτικού δρόμου σε ένα συμβολόμετρο έπρεπε να εξαρτάται από τον προσανατολισμό του δρόμου ως προς τη ροή του αιθέρα. Όταν το πείραμα πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά, καμιά ροή αιθέρα δεν ανιχνεύτηκε. Φυσικά, αυτό θα μπορούσε να σημαίνει απλώς ότι το εργαστήριο ήταν προς στιγμήν και κατά σύμπτωση σε ηρεμία ως προς τον αιθέρα. Η λύση ήταν να περιμένουν έξι μήνες, οπότε η Γη θα διένυε το αντιδιαμετρικό σημείο της τροχιάς της με μια εύκολα παρατηρήσιμη ταχύτητα -έως και 60 km/sec - ως προς τον αιθέρα, που και πάλι όμως δεν ανιχνεύτηκε. Με το πέρασμα των χρόνων βελτιωμένες τεχνικές έχουν οδηγήσει στο άνω όριο των 5 cm/sec για την ενδεχόμενη ταχύτητα της αιθερικής ροής, και έχει γίνει γενικά αποδεκτό ότι η αιθερική ροή δεν υφίσταται.

Όλες οι προσπάθειες να παρατηρηθεί η παρουσία κάποιου αιθέρα έχουν αποτύχει. Επιπλέον, “η ταχύτητα του φωτός πρέπει να είναι η ίδια, σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, για οποιονδήποτε παρατηρητή, οποιαδήποτε και αν είναι η σχετική κίνηση δύο παρατηρητών”.

Τέλος, όλες οι ταχύτητες είναι σχετικές, γεγονός που εναρμονίζεται με το πνεύμα του Newton και του Γαλιλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΙΔΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η Ειδική Σχετικότητα (ΕΣ) είναι ένα παράδειγμα φυσικής θεωρίας η οποία είναι μαθηματικό μοντέλο. Αυτοί που την εισήγαγαν πείστηκαν για τις μεγάλες δυνατότητές της από την αρχική της πολύ καλή ερμηνεία του πραγματικού κόσμου και την κομψότητά της. Το μεγαλύτερο μέρος της ανάπτυξης της προέκυψε περισσότερο από μαθηματικά παρά από εργαστήριο. Κι όμως, παρήχθησαν πολύ σημαντικές προβλέψεις (διαστολή χρόνου, $E = mc^2$, κλπ) οι οποίες με την πάροδο του εικοστού αιώνα επικυρώθηκαν μία προς μία.

Η Ειδική Σχετικότητα βασίζεται στην έννοια των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, όπως και η νευτώνεια μηχανική. Η γεωμετρία σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι Ευκλείδεια και ισχύει ο πρώτος Νόμος του Newton: η βαρύτητα θεωρείται ότι είναι απύσχα στην ΕΣ. Ας φανταστούμε πολλά τέτοια συστήματα με όλους τους δυνατούς προσανατολισμούς των αξόνων τους και κινούμενα με σταθερές ταχύτητες (αλλά χωρίς περιστροφή) σχετικά το ένα με το άλλο (με περιορισμό, όλες οι σχετικές ταχύτητες μεταξύ των συστημάτων να είναι μικρότερες του c). Στη Νευτώνεια θεωρία όλα τα συστήματα “μοιράζονται” έναν καθολικό (απόλυτο) χρόνο και συνδέονται μέσω των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου. Η κρίσιμη *μαθηματική* ανακάλυψη που κατέστησε την ΕΣ δυνατή ήταν ότι αν κάποιος είναι διατεθειμένος να ξεχάσει την έννοια του απόλυτου χρόνου (όπως ο Einstein!) τότε προκύπτει ένα ολοκαίνουριο σύνολο μετασχηματισμών, που επιτρέπουν την Ευκλείδεια γεωμετρία και τον πρώτο Νόμο του Newton σε όλα τα συστήματα αναφοράς και ταυτόχρονα ικανοποιούν την αρχή της σχετικότητας. Αυτοί είναι οι *μετασχηματισμοί Lorentz*. Η παραπάνω τρισδιάστατη εικόνα των συστημάτων αναφοράς, έλαβε μια καινούρια ερμηνεία από τον μαθηματικό Minkowski περί το 1907. Σύμφωνα με αυτόν, η “ταινία” του Σύμπαντος έχει διαιρεθεί στα ξεχωριστά καρέ της και αυτά έχουν τοποθετηθεί το ένα πάνω στο άλλο, για να αποτελέσουν τον τετραδιάστατο χωρόχρονο, τα σημεία του οποίου ονομάζονται *γεγονότα*. Όσο πιο ψηλά βρισκόμαστε στη στοιβα, τόσο αργότερα βρισκόμαστε στο χρόνο. Η ΕΣ, λοιπόν, είναι η θεωρία χώρου και χρόνου σε ένα κόσμο που αποτελείται από συστήματα αναφοράς σχετισμένα μεταξύ τους με μετασχηματισμούς Lorentz.

2.1. ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ένα γεγονός διαισθητικά σημαίνει κάτι που συμβαίνει σε μια επαρκώς μικρή περιοχή του χώρου για ένα μικρό χρονικό διάστημα. Μαθηματικά, εξειδικεύουμε αυτή την έννοια, θεωρώντας τη ένα σημείο του χώρου και μία στιγμή του χρόνου. Οτιδήποτε συμβαίνει στο Σύμπαν είναι ένα γεγονός ή μια συλλογή γεγονότων. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα τρένο που ταξιδεύει από ένα σταθμό P σε ένα σταθμό R και αναχωρεί στις 10:00 και φτάνει στις 11:00. Μπορούμε να το

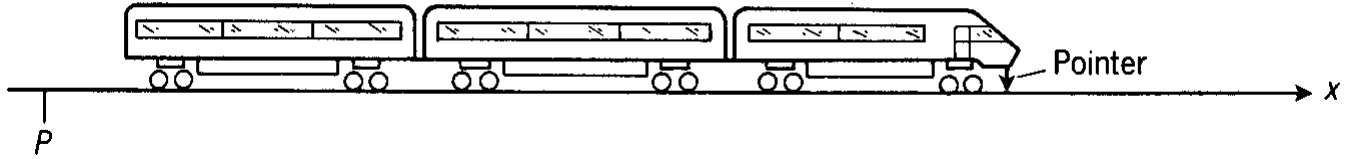


FIGURE 2.1.1. Τρένο που ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή.

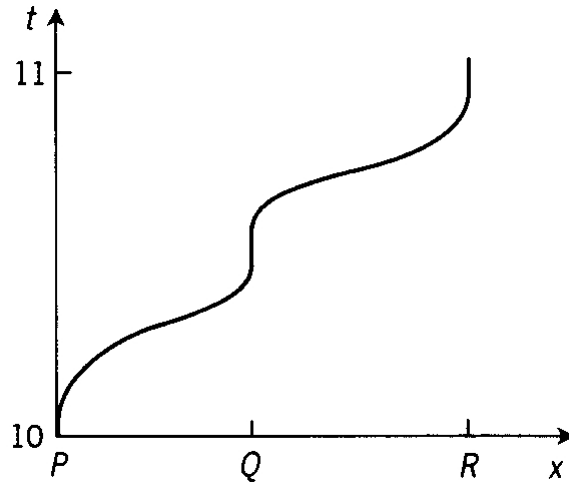


FIGURE 2.1.2. Χωροχρονικό διάγραμμα του pointer του τρένου.

απεικονίσουμε με τον ακόλουθο τρόπο: αν υποθέσουμε, για απλοποίηση, ότι το τρένο ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή (Σχήμα (2.1.1)), τότε μπορούμε να απεικονίσουμε την κίνηση με ένα χωροχρονικό διάγραμμα (space-time diagram, Σχήμα (2.1.2)) στο οποίο σχεδιάζουμε τη θέση ενός καθορισμένου σημείου του τρένου (pointer), ως προς το χρόνο. Η καμπύλη ονομάζεται ιστορία ή *κοσμική γραμμή* του σημείου. Θα ονομάσουμε *παρατηρητές* εκείνους που είναι εφοδιασμένοι με ένα ρολόι και ένα χάρακα. Αναμένουμε ένα ρολόι σε ένα διέρχομενο σταθμό του τρένου, να συμφωνεί με την ένδειξη του δικού μας ρολογιού. Ένα από τα βασικά σημεία του νευτώνειου πλαισίου είναι ότι δύο παρατηρητές, έχοντας συγχρονίσει τα ρολόγια τους, πάντα συμφωνούν ως προς το χρόνο ενός γεγονότος, ανεξάρτητα από τη σχετική τους κίνηση. Αυτό υπονοεί ότι για όλους τους παρατηρητές ο χρόνος είναι μια *απόλυτη* έννοια. Προκειμένου να ορίσει ένα γεγονός στο χώρο, ο παρατηρητής μπορεί να επιλέξει μια βολική αρχή στο χώρο μαζί με ένα σύστημα τριών Καρτεσιανών αξόνων. Θα αναφερόμαστε στο ρολόι, το χάρακα και τους άξονες του παρατηρητή ως το *σύστημα αναφοράς* (Σχήμα (2.1.3)).

2.2. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Το αρνητικό αποτέλεσμα του πειράματος των Michelson και Morley σχετικά με την κίνηση της Γης μέσα σε έναν αιθέρα, όπως επίσης και τα άλλα αποτελέσματα που αναπτύχθηκαν, μπορούν να

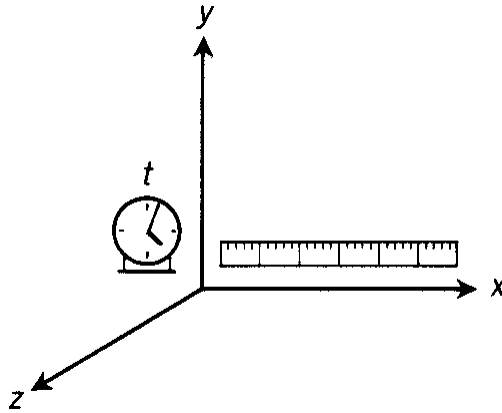


FIGURE 2.1.3. Σύστημα αναφοράς του παρατηρητή.

γίνουν κατανοητά μόνο όταν κάνουμε μια επαναστατική αλλαγή στον τρόπο που σκεφτόμαστε. Η νέα αρχή που χρειαζόμαστε είναι απλή και ξεκάθαρη:

Η ταχύτητα της διάδοσης του φωτός (στο κενό) είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της φωτεινής πηγής ή του δέκτη.

Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια για όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με ομοιόμορφη κίνηση σε σχέση με την πηγή. Σε αυτή τη νέα παραδοχή πρέπει να προστεθεί μια παλαιότερη:

Ο χώρος είναι ισότροπος και ομοιόμορφος. Οι θεμελιώδεις νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι για δύο οποιουδήποτε παρατηρητές που βρίσκονται σε ομοιόμορφη σχετική κίνηση.

Όλες οι τεράστιες συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας ξεκινούν από αυτές τις παραδοχές.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ή τα φωτόνια, δεν είναι τα μόνα που έχουν ταχύτητα ανεξάρτητη από την κίνηση της πηγής. Οι φυσικοί πιστεύουν, και διαθέτουν γι' αυτό σοβαρά στοιχεία, ότι υπάρχουν και άλλα σωματίδια, ειδικότερα το νετρίνο και το αντινετρίνο, που έχουν ταχύτητες ίσες με την ταχύτητα c . Εδώ όμως θα ασχοληθούμε με φωτόνια, γιατί είναι πιο εύκολο να πειραματιζόμαστε με αυτά.. Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα φωτεινό κύμα, από μια σημειακή πηγή. Το μέτωπο κύματος (η ισοφασική επιφάνεια) θα είναι μια σφαίρα αν η παρατήρηση γίνεται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο η πηγή είναι ακίνητη. Σύμφωνα ωστόσο με τη νέα μας αρχή, το μέτωπο κύματος θα είναι ξανά μια σφαίρα, όταν το βλέπουμε από ένα άλλο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται σε ομοιόμορφη κίνηση σε σχέση με την πηγή. Αλλιώς θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε, από το σχήμα του μετώπου του κύματος, ότι η πηγή κινείται. Η θεμελιώδης παραδοχή ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της πηγής, μας αποκλείει τη δυνατότητα να κρίνουμε από το σχήμα του μετώπου του κύματος αν η πηγή βρίσκεται σε ομαλή κίνηση ή όχι.

2.3. ΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MINKOWSKI

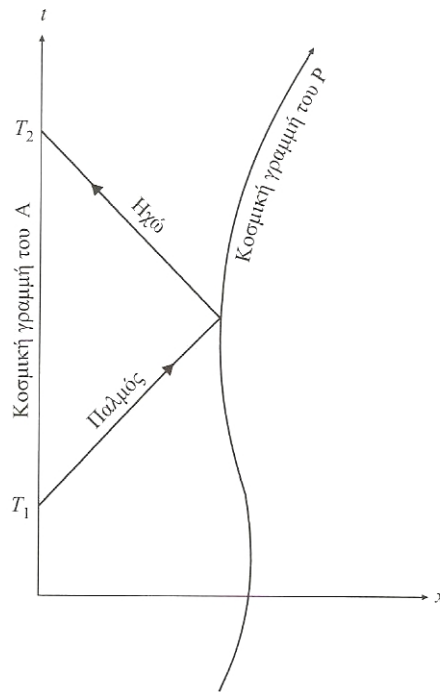


FIGURE 2.3.1. Το διάγραμμα Minkowski.

Το διάγραμμα Minkowski είναι ένα σχεδιάγραμμα των γεγονότων που παρατηρούνται από έναν αδρανειακό παρατηρητή A ¹. Όντας τετραδιάστατο, είναι δύσκολο να σχεδιαστεί, και θα πρέπει να αρκεστούμε σε μερικές (ατελείς) αναπαραστάσεις του. Πάντως, ακόμη και τα μερικά διαγράμματα (συνήθως προβολές στις 2 διαστάσεις) μας βοηθούν πραγματικά. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μόνο εκείνα τα αντικείμενα που σε όλους τους χρόνους παραμένουν πάνω σε μια σταθερή ευθεία που διέρχεται από τον A , δηλαδή κινούνται μόνο ακτινικά προς ή από τον A , κατά μήκος π.χ. του άξονα x . Η πορεία των γεγονότων αποδίδεται τότε εύκολα σε ένα σχεδιάγραμμα με άξονες x και t . Ένα παράδειγμα δείχνεται στο Σχήμα (2.3.1). Η κίνηση του αντικειμένου P παριστάνεται από την κοσμική γραμμή του P . Οι κοσμικές γραμμές των ραδιοπαλμών είναι οι ευθείες $x \pm ct = \text{const}$, και η κοσμική γραμμή του παρατηρητή A είναι ο άξονας t ($x = 0$).

2.4. ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ας αναρωτηθούμε για το πώς δύο παρατηρητές εποπτεύουν το κοινό τους περιβάλλον. Ας υποθέσουμε ότι δύο αδρανειακοί παρατηρητές, οι A και B , παρατηρούν το ίδιο γεγονός P (Σχήμα 2.4.1), ενώ O είναι το γεγονός της σύμπτωσης των αρχών των χωροχρονικών συντεταγμένων τους. Μπορούμε να φανταστούμε τον A να εκπέμπει έναν παλμό ραντάρ στον (δικό του) χρόνο T_1 . Στη συνέχεια ο παλμός αυτός προσπερνάει τον B (στον δικό του χρόνο T_2), ανακλάται στο P , παρατηρείται ξανά από τον B (T_3), και τελικά επιστρέφει πίσω στον A (T_4). Ο παρατηρητής A χρησιμοποιεί τους τύπους ραδιοεντοπισμού $x = c(T_2 - T_1)/2$ και $t = (T_2 + T_1)/2$ για να υπολογίσει τις δικές του συντεταγμένες για το γεγονός της ανάκλασης στο P , ενώ το ίδιο κάνει και ο B , οπότε:

¹Ένας αδρανειακός παρατηρητής είναι ένας παρατηρητής σε ελεύθερη πτώση και μη περιστρεφόμενος.

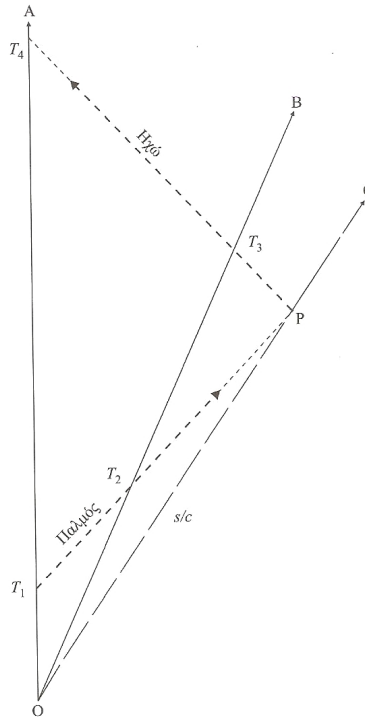


FIGURE 2.4.1. Ένα γεγονός P όπως το βλέπουν δύο αδρανειακοί παρατηρητές A, B.

$$x_A = c(T_4 - T_1)/2 \quad (2.4.1)$$

$$x_B = c(T_3 - T_2)/2 \quad (2.4.2)$$

$$t_A = (T_4 + T_1)/2 \quad (2.4.3)$$

$$t_B = (T_3 + T_2)/2 \quad (2.4.4)$$

Έχει σημασία να αναγνωρίσουμε ότι δεν συντρέχει κανένας λόγος ο προσδιορισμός συντεταγμένων (ενός γεγονότος) που κάνει ο A, να συμπίπτει με τον αντίστοιχο προσδιορισμό που κάνει ο B..

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις για να απαλείψουμε τις μεταβλητές T_1 , T_2 , T_3 , T_4 . Έτσι οδηγούμαστε στη σχέση:

$$c^2 t_A^2 - x_A^2 = c^2 t_B^2 - x_B^2 \quad (2.4.5)$$

Πρόκειται για μία όντως αξιοσημείωτη σχέση. Το αριστερό της μέλος δεν αναφέρεται καθόλου στο παρατηρητή B, και το δεξί μέλος καθόλου στον A. Η σχετική ταχύτητα των δύο παρατηρητών δεν εμφανίζεται καθόλου. Αυτό μας υποχρεώνει να συμπεράνουμε ότι η έκφραση:

$$c^2 t^2 - x^2 \equiv s^2 \quad (2.4.6)$$

έχει την ίδια τιμή για κάθε αδρανειακό παρατηρητή του οποίου η κοσμική γραμμή περνάει από το γεγονός O . Πρόκειται λοιπόν για μια πολύ σημαντική ποσότητα, αφού είναι κάτι για το οποίο όλοι αυτοί οι παρατηρητές συμφωνούν: το s είναι το (χωροχρονικό) διάστημα ανάμεσα στα γεγονότα O και P .

Το διάστημα s μπορεί να είναι πραγματικό, μηδέν ή καθαρά φανταστικό, ανάλογα με το πρόσημο του αριστερού μέλους. Όταν είναι πραγματικό, υπάρχει ένας αδρανειακός παρατηρητής C του οποίου η κοσμική γραμμή περνάει και από τα δύο γεγονότα O και P . Τότε όμως, $x_c = 0$ και $s = ct_c$, κι έτσι το s/c είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των γεγονότων O και P , όπως αυτό μετριέται από το ρολόι του C . Βρήκαμε λοιπόν μια απλή παρατηρησιακή ερμηνεία για το πραγματικό διάστημα. Πρόκειται για την εφαρμογή μιας γενικής αρχής, που ισχύει παντού στην καθιερωμένη θεωρία της σχετικότητας:

το διάστημα κατά μήκος μιας κοσμικής γραμμής μετριέται απευθείας από το ρολόι που την έχει ως κοσμική γραμμή του.

Αυτή η ερμηνεία του του διαστήματος ως ιδιοχρόνου (όπως αποκαλείται) του κινούμενου ρολογιού είναι θεμελιώδης. Στη συνέχεια οι κοσμικές γραμμές θα περιγράφονται συχνά από την παραμετρική τους αναπαράσταση με παράμετρο τον ιδιοχρόνο τ . Οι τέσσερις συντεταγμένες ενός τυπικού γεγονότος πάνω στην κοσμική γραμμή θα δίνονται ως τέσσερις κατάλληλες συναρτήσεις του τ .

Ο ιδιοχρόνος (proptime) είναι κάτι το ίδιο της κοσμικής γραμμής που εξετάζουμε, μια ιδιότητα του παρατηρητή που ακολουθεί τη συγκεκριμένη κοσμική γραμμή.

Πολύ πιο γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάστημα ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε γεγονότα P_1 και P_2 στον πλήρη (1+3)διάστατο χωρόχρονο Minkowski. Υποθέστε ότι κάποιος αδρανειακός παρατηρητής υπολογίζει τους χρόνους και τις θέσεις δύο γεγονότων: (t_1, x_1, y_1, z_1) και (t_2, x_2, y_2, z_2) . Τότε μπορεί να δειχθεί ότι η έκφραση:

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad (2.4.7)$$

παίρνει την ίδια τιμή, όποιος και αν είναι ο αδρανειακός παρατηρητής που την υπολογίζει, και συνεπώς αναφέρεται στα δύο γεγονότα αυτά καθαυτά: το s είναι το διάστημα ανάμεσα στα γεγονότα.

2.5. ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ

Το διάγραμμα Minkowski το εισαγάγαμε αρχικά απλώς ως ένα σχεδιάγραμμα γεγονότων στον χώρο και στον χρόνο: όντας διαστατικά διαφορετικοί, ο χώρος και ο χρόνος δεν αναμενόταν να αναμιχθούν. Ωστόσο, στην έκφραση (2.4.7) όντως αναμειγνύονται, και η ταχύτητα του φωτός c παίζει τον ρόλο ενός παράγοντα μετατροπής που συνδέει τις μονάδες μήκους και χρόνου.

Οι συνέπειες είναι εκτενέστερες. Το διάγραμμα δεν είναι πια μια απλή γραφική αναπαράσταση. Είναι μια τετραδιάστατη δομή που έχει αποκτήσει μια *μετρική* (όπως ονομάζεται), συναρμοσμένη από αυτό το δίκτυο διαστημάτων ανάμεσα σε ζεύγη γεγονότων. Προς το παρόν ο χωρόχρονος της

Ειδικής Σχετικότητας είναι επίπεδος, αλλά η καινούργια δομή ενέχει τη δυνατότητα εισαγωγής της *καμπυλότητας*, κάτι που βρίσκεται στη βάση της θεωρίας του Einstein για τη βαρύτητα.

Συνηθίζεται να γράφουμε τη μετρική σε διαφορετική μορφή, αναφερόμενοι σ ένα ζεύγος γειτονικών γεγονότων των οποίων οι συντεταγμένες διαφέρουν κατά μικρά dt , dx , dy , dz . Το διάστημα ds ανάμεσα σ ένα τέτοιο ζεύγος δίνεται από την έκφραση:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.5.1)$$

2.6. Ο ΚΩΝΟΣ ΦΩΤΟΣ

Θεωρούμε ένα τυχαίο γεγονός P . Ο κώνος φωτός (ή μηδενικός κώνος) στο P είναι η τριδιάστατη συλλογή όλων των γεγονότων Q για τα οποία το διάστημα $s(P, Q)$ είναι μηδέν. Η εξίσωση αυτής της υπερεπιφάνειας (όταν το P ληφθεί ως αρχή των συντεταγμένων) είναι:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (2.6.1)$$

(Το Σχήμα (2.6.1) δείχνει την τομή της πλήρους επιφάνειας που προκύπτει θέτοντας $z = 0$, και επαρκεί για να κάνει πρόδηλα τα κύρια χαρακτηριστικά της.) Ο κώνος φωτός διαιρεί τον υπόλοιπο χωρόχρονο σε τρεις περιοχές:

- (1) Το μέλλον του P - όλα εκείνα τα γεγονότα Q για τα οποία το $s(P, Q)$ είναι πραγματικό, και $t(Q) > 0$.
- (2) Το παρελθόν του P - τα γεγονότα Q για τα οποία το $s(P, Q)$ είναι πραγματικό, και $t(Q) < 0$.
- (3) Το αλλού του P - γεγονότα Q για τα οποία το $s(P, Q)$ είναι φανταστικό.

Ο ίδιος ο κώνος έχει ένα μελλοντικό και ένα παρελθοντικό τμήμα.

Η δομή του κώνου φωτός έχει σημαντικές συνέπειες για την *αισιότητα*. Εφόσον η ταχύτητα c φαίνεται να αποτελεί ένα ανώτατο όριο ταχύτητας με την οποία μπορούν να διαδοθούν επιδράσεις, καμιά κοσμική γραμμή που περνάει από το P δεν μπορεί ποτέ να βρεθεί στο αλλού του P . Συνεπώς, φαινόμενα στο P δεν μπορούν να επηρεάσουν φαινόμενα στο Q εκτός και αν το Q βρίσκεται στο μέλλον του P (ή τουλάχιστον στο μελλοντικό τμήμα του κώνου φωτός στο P). Ομοίως, εάν το Q πρόκειται να επηρεάσει το P με οποιονδήποτε τρόπο, θα πρέπει να βρίσκεται στο παρελθόν του P .

2.7. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

Η Αρχή της Ειδικής Σχετικότητας, υποστηρίζει ότι οι νόμοι της φύσης είναι αναλλοίωτοι υπό μια συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών που ονομάζονται *μετασχηματισμοί Lorentz*. Για να τους εξάγουμε θα διερευνήσουμε τη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αδρανειακών συστημάτων. Τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν σε αυτή την παράγραφο βασίζονται σε τρία αξιώματα:

- (1) Ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται χωρίς να του ασκούνται δυνάμεις έχει σταθερή ταχύτητα σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
- (2) Η ταχύτητα του φωτός σχετικά με οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ίση με c ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.
- (3) Η γεωμετρία του χώρου είναι Ευκλείδεια σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

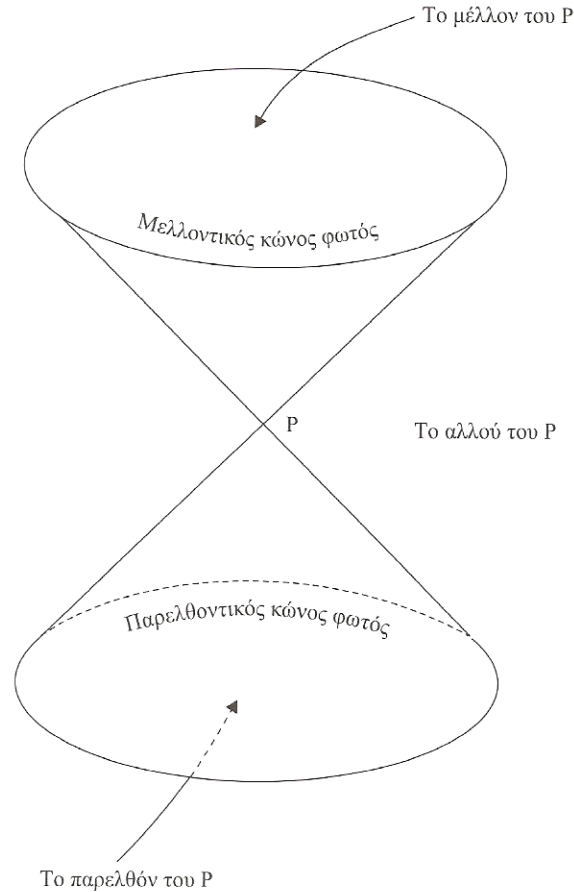


FIGURE 2.6.1. Ο κώνος φωτός ενός γεγονότος P.

Το στοιχείο γραμμής καθορίζει τη γεωμετρία του χωροχρόνου της ΕΣ σε όρους τεσσάρων ορθογώνιων συντεταγμένων (t, x, y, z) ορίζοντας ένα αδρανειακό σύστημα. Η αρχή της σχετικότητας υπονοεί ότι το στοιχείο γραμμής πρέπει να παίρνει την ίδια μορφή για τις ορθογώνιες συντεταγμένες (t', x', y', z') οποιουδήποτε άλλου συστήματος. Οι νόμοι μετασχηματισμού που συνδέουν τα δύο συστήματα πρέπει, λοιπόν, να διατηρούν τη μορφή:

$$ds^2 = (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.7.1)$$

και επί της ουσίας καθορίζονται από αυτή την απαίτηση. Είναι οι *μετασχηματισμοί Lorentz*.

Θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς ανάλογους των περιστροφών, οι οποίοι θα συνδέουν τα ct και x , ενώ θα αφήνουν αναλλοίωτα τα y και z . Καθώς επίσης και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα αντικατασταθούν από υπερβολικές εξαιτίας του μη-Ευκλείδειου χαρακτήρα του χωροχρόνου. Συγκεκριμένα:

$$ct' = (\cosh\theta)(ct) - (\sinh\theta)x \quad (2.7.2)$$

$$x' = (-\sinh\theta)(ct) + (\cosh\theta)x \quad (2.7.3)$$

$$y' = y \quad (2.7.4)$$

$$z' = z \quad (2.7.5)$$

όπου η παράμετρος θ μπορεί να πάρει τιμές από $-\infty$ μέχρι $+\infty$. Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός διατηρεί το στοιχείο γραμμής (2.7.1):

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= -(cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 \\ &= -[\cosh\theta(cdt) - \sinh\theta(dx)]^2 \\ &\quad + [-\sinh\theta(cdt) + \cosh\theta(dx)]^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Το Σχήμα (2.7.1) δείχνει τις νέες συντεταγμένες (ct', x') σχεδιασμένες πάνω στους αρχικούς άξονες (ct, x) . Η ομοιότητα με την περιστροφή είναι εμφανής αλλά υπάρχουν σημαντικές διαφορές. Ένα σωματίδιο σε κατάσταση ηρεμίας στην αρχή των αξόνων ($x' = 0$) στις συντεταγμένες (ct', x') έχει ως κοσμική γραμμή τον άξονα ct' . Σε συντεταγμένες (ct, x) , αυτό το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά τον άξονα x . Η ταχύτητα u βρίσκεται για $x' = 0$ από τη σχέση (2.7.3), με αποτέλεσμα:

$$u = ct \tanh\theta \quad (2.7.7)$$

Ένα σωματίδιο σε ηρεμία, σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του x' , κινείται στην κατεύθυνση x με την ίδια ταχύτητα στις συντεταγμένες (ct, x) . Ο μετασχηματισμός από (t, x, y, z) σε (t', x', y', z') είναι, λοιπόν, από ένα αδρανειακό σύστημα σε ένα άλλο που κινείται ομοιόμορφα ως προς το πρώτο κατά τον άξονα x με ταχύτητα u . Τέτοιοι μετασχηματισμοί ονομάζονται *μετασχηματισμοί Lorentz*.

Αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.7.7) για να απαλείψουμε το θ , και με λίγη άλγεβρα, καταλήγουμε στα εξής:

$$t' = \gamma(t - ux/c^2) \quad (2.7.8)$$

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (2.7.9)$$

$$y' = y \quad (2.7.10)$$

$$z' = y \quad (2.7.11)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \quad (2.7.12)$$

ο αντίστροφος μετασχηματισμός προκύπτει με αλλαγή από u σε $-u$:

$$t = \gamma(t' + ux'/c^2) \quad (2.7.13)$$

$$x = \gamma(x' + ut') \quad (2.7.14)$$

$$y = y' \quad (2.7.15)$$

$$z = z' \quad (2.7.16)$$

Όταν το $u/c \ll 1$ οι μετασχηματισμοί Lorentz περιορίζονται στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

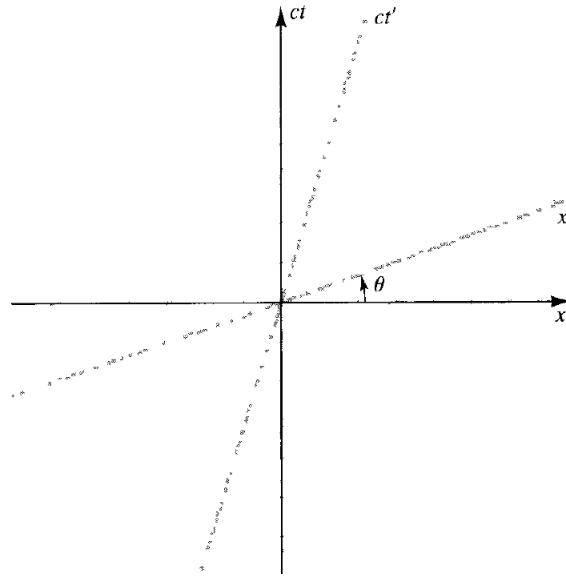


FIGURE 2.7.1. Αλλαγή συντεταγμένων σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα. Εδώ φαίνεται το πλέγμα των συντεταγμένων (ct', x') , όπως τις ορίσαμε παραπάνω, σχεδιασμένο στο σύστημα συντεταγμένων (ct, x) . Οι (ct', x') δεν είναι ορθογώνιες στην ευκλείδεια γεωμετρία της σελίδας, αλλά είναι ορθογώνιες στη γεωμετρία του χωροχρόνου. Οι άξονες (ct', x') πρέπει να είναι ορθογώνιοι όσο και οι (ct, x) αφού δεν υπάρχει διαχωρισμός ανάμεσα σε δύο αδρανειακά συστήματα.

Μέρος 2

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα μοντέλα της Μαθηματικής Φυσικής οι διάφορες ποσότητες περιγράφονται με τη βοήθεια βαθμωτών, διανυσματικών και τανυστικών μεταβλητών. Η τελευταία κατηγορία, οι τανυστές, αποτελούν ουσιαστική γενίκευση των διανυσμάτων και η χρήση τους προδίδει μεγαλύτερη ευελιξία και ακρίβεια στην ανάλυση φυσικών καταστάσεων. Η άλγεβρα και ο λογισμός τανυστών αποτελεί επίσης τμήμα της διαφορικής γεωμετρίας με εφαρμογές στην ανάλυση επιφανειών και γενικά χώρων με μη-Ευκλείδεια γεωμετρία. Με δεδομένο ότι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δεν αντιμετωπίζει τη βαρύτητα ως δύναμη, αλλά την ερμηνεύει ως το αποτέλεσμα της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας του χωροχρόνου, για τη μελέτη της είναι απαραίτητη μια εισαγωγή τανυστικής ανάλυσης. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της χρήσης τανυστών στη Σχετικότητα, προέρχεται από το γεγονός ότι η μορφή των τανυστικών εξισώσεων είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή. Η ιδιότητα αυτή βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με την αρχή της ισοδυναμίας των συστημάτων αναφοράς της θεωρίας του Einstein και απλοποιεί κατά πολύ τις τεχνικές δυσκολίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΘΜΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ, ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ένα βαθμωτό μέγεθος είναι μια ποσότητα που για να οριστεί (σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων) απαιτεί μόνο έναν αριθμό. Από την άλλη, ένα διάνυσμα (που σε πρώτη φάση ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα) για να οριστεί χρειάζεται τρεις αριθμούς, δηλαδή τις συνιστώσες του ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Βαθμωτά μεγέθη και διανύσματα, είναι ειδικές περιπτώσεις ενός γενικότερου αντικειμένου που ονομάζεται *τανυστής τάξεως n* , του οποίου ο ορισμός σε κάθε δεδομένο σύστημα συντεταγμένων απαιτεί 3^n αριθμούς, οι οποίοι και σε αυτή την περίπτωση ονομάζονται συνιστώσες του τανυστή. Στην πραγματικότητα τα βαθμωτά μεγέθη είναι είναι τανυστές μηδενικής τάξης με $3^0 = 1$ συνιστώσα και τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξεως με $3^1 = 3$ συνιστώσες. Φυσικά, ένας τανυστής n τάξης είναι πολλά περισσότερα από ένα σύνολο 3^n αριθμών. Η κυριότερη ιδιότητά του είναι ο *μετασχηματισμός* των συνιστωσών του, δηλαδή το πως σχετίζονται οι συνιστώσες σε ένα σύστημα συντεταγμένων με εκείνες σε ένα άλλο. Η ακριβής μορφή του μετασχηματισμού είναι απόρροια της φυσικής ή της γεωμετρικής ερμηνείας του τανυστή.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα νόμο που περιλαμβάνει τις συνιστώσες a, b, c, \dots διαφόρων φυσικών ποσοτήτων ως προς κάποιο τρισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων K . Τότε, είναι εμπειρικά αποδεδειγμένο ότι ο νόμος έχει την ίδια μορφή όταν γράφεται συναρτηθεί των συνιστωσών a', b', c', \dots των ίδιων ποσοτήτων ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων K' που είναι μετατοπισμένο σε σχέση με το K (ομογενής χώρος) ή περιστραμμένο σε σχέση με το K (ισότροπος χώρος). Με άλλα λόγια, οι σωστά διατυπώμενοι φυσικοί νόμοι είναι “αναλλοίωτοι υπό μετατοπίσεις ή περιστροφές”.

3.1. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΤΑΞΗΣ (ΒΑΘΜΩΤΑ ΜΕΓΕΘΗ)

Ας εμβαθύνουμε λίγο στον ορισμό που δώσαμε στην εισαγωγή: με τον όρο βαθμωτό μέγεθος εννοούμε μια ποσότητα που ορίζεται μοναδικά για κάθε σύστημα συντεταγμένων με ένα συγκεκριμένο αριθμό (την τιμή του) ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος αν το σύστημα αλλάξει. Έτσι, αν ϕ είναι η τιμή ενός βαθμωτού μεγέθους σε ένα σύστημα συντεταγμένων και $\bar{\phi}$ σε ένα άλλο τότε $\bar{\phi} = \phi$. Το σύνολο κάποιων βαθμωτών μεγεθών ονομάζεται *πεδίο* και είναι εφοδιασμένο με τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του *πολλαπλασιασμού*.

3.2. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ (ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)

Για να καθορίσουμε ένα διάνυσμα χρειαζόμαστε τρεις αριθμούς εν αντιθέσει με την περίπτωση των βαθμωτών μεγεθών. Βέβαια, ένα διάνυσμα είναι πολλά περισσότερα από ένα σύνολο $3^1 = 3$ βαθμωτών μεγεθών. Για παράδειγμα, η κατάσταση ενός ιδανικού αερίου είναι πλήρως καθορισμένη από δύο αριθμούς, ας πούμε την πυκνότητα και τη θερμοκρασία, οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι υπό οποιαδήποτε μεταβολή του συστήματος συντεταγμένων. Από την άλλη, η μετατόπιση σε ένα επίπεδο επίσης καθορίζεται από δύο αριθμούς οι οποίοι όμως μετασχηματίζονται σύμφωνα με κάποιο νόμο όταν αλλάζουμε σύστημα συντεταγμένων.

3.2.1. Ανταλλοίωτα διανύσματα.

Το πρότυπο για τους ανταλλοίωτους τανυστές είναι το διάνυσμα που σχηματίζεται θεωρώντας το ολικό διαφορικό μιας μεταβλητής σε ένα σύστημα συντεταγμένων ως προς ένα άλλο παραδεκτό σύστημα. Είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής πρώτης τάξεως. Για να το δούμε πιο αριθμητικά ας χρησιμοποιήσουμε Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \quad (3.2.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.2.2)$$

Το διαφορικό dx εκφρασμένο με όρους r και θ είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής τάξης 1:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \quad (3.2.3)$$

Αν διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με το διαφορικό dt τότε παίρνουμε τη γνωστή μας έκφραση για το διάνυσμα της ταχύτητας:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (3.2.4)$$

Η σχέση αυτή επίσης αντιστοιχεί σε έναν ανταλλοίωτο τανυστή τάξης 1. Η αντίστοιχη έκφραση για το $\frac{dr}{dt}$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3.2.5)$$

Σε τανυστικό συμβολισμό ένας ανταλλοίωτος τανυστής τάξης 1 μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \quad (3.2.6)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το νόμο μετασχηματισμού ανταλλοίωτων διανυσμάτων στην περίπτωση αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων. Επίσης το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέπτος, οδηγεί στη σχέση:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j \quad (3.2.7)$$

Εξ ορισμού κάθε διάνυσμα που μετασχηματίζεται σύμφωνα με τους νόμους (3.2.6), (3.2.7) είναι ανταλλοίωτο.

3.2.2. Συναλλοίωτα διανύσματα.

Από τις έννοιες του βαθμωτού μεγέθους και του ανταλλοίωτου διανύσματος προκύπτει και αυτή του συναλλοίωτου διανύσματος. Συγκεκριμένα, έστω ότι B^i είναι οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος. Οι ποσότητες A_i θα ορίζουν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος αν (και μόνο αν) το άθροισμα $A_i B^i$ συμπεριφέρεται ως βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτο κατά τη μετάβαση από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο. Το πρότυπο ενός συναλλοίωτου τανυστή είναι το συναλλοίωτο διάνυσμα που προκύπτει παίρνοντας την μερική παράγωγο ενός βαθμωτού μεγέθους, δηλαδή ο τελεστής απόκλισης ($\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$). Ο κανόνας της αλυσίδας για τις μερικές παραγώγους είναι το υπόδειγμα για αυτό τον τύπο μετασχηματισμού. Είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξης 1. Για να παρουσιάσουμε την έννοια του συναλλοίωτου διανύσματος θα χρησιμοποιήσουμε το βαρυτικό δυναμικό σε Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες

$$V = -G \frac{Mm}{r} \quad (3.2.8)$$

όπου:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.2.9)$$

$$\vartheta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3.2.10)$$

Η δύναμη στην κατεύθυνση x είναι $F_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, όπου:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} \quad (3.2.11)$$

Για ένα σωματίδιο M σε τροχιά γύρω από ένα σώμα m , $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$, επίσης $\frac{\partial V}{\partial r} = G \frac{Mm}{r^2}$ και $\frac{dr}{dx} = \cos\vartheta$ οπότε η Σχέση (3.2.11) γίνεται:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = G \frac{Mm}{r^2} \cos\vartheta = F_x \quad (3.2.12)$$

Σε τανυστικό συμβολισμό ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξης 1 μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j \quad (3.2.13)$$

Με χρήση του τανυστή Kronecker, $\delta_i^j = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$ η παραπάνω σχέση οδηγεί στην:

$$B_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{B}_j \quad (3.2.14)$$

Οι Σχέσεις (3.2.13), (3.2.14) αποτελούν και τον ορισμό ενός συναλλοίωτου διανύσματος.

3.2.3. Ο νόμος μετασχηματισμού.

Τι συμβαίνει στα διανύσματα όταν αλληιάζουμε συντεταγμένες;

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι απλή: δεν τους συμβαίνει τίποτα. Οι συνιστώσες ενός διανύσματος στο χώρο μετασχηματίζονται σύμφωνα με κάποιον νόμο που διασφαλίζει ότι οι νέες συνιστώσες πάντοτε καθορίζουν το ίδιο διάνυσμα. Κι αυτό γιατί τα διανύσματα δεν χρειάζονται σύστημα συντεταγμένων για την ύπαρξή τους. Αντιθέτως, οι συνιστώσες τους εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε. Έστω ένα διάνυσμα x στη βάση (e_1, e_2, e_3) :

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \sum_{i=1}^3 x^i e_i = x^i e_i \quad (3.2.15)$$

Ο τύπος μετάβασης από άλλη βάση είναι:

$$e_i = \sum_{j=1}^3 T_i^j \bar{e}_j = T_i^j \bar{e}_j$$

Αντικαθιστώντας στη Σχέση (3.2.15):

$$x = x^i (T_i^j \bar{e}_j) = T_i^j x^i \bar{e}_j = \bar{x}^j \bar{e}_j$$

όπου:

$$\bar{x}^j = T_i^j x^i \quad (3.2.16)$$

Αυτός είναι και ο τύπος που συνδέει τις συνιστώσες του x στη νέα βάση με τις συνιστώσες στην αρχική.

3.3. ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Τα τανυστικά μεγέθη αποτελούν γενίκευση των βαθμωτών και των διανυσματικών. Συγκεκριμένα, σε ένα χώρο n διαστάσεων, τα βαθμωτά χαρακτηρίζονται από $n^0 = 1$ συνιστώσες, τα διανυσματικά από $n^1 = n$ συνιστώσες και ένας τανυστής τάξης m από n^m συνιστώσες. Μαζί με τα βαθμωτά και τα διανυσματικά μεγέθη, οι τανυστές 2ης τάξης έχουν την ευρύτερη εφαρμογή στη φυσική. Σε ένα χώρο n διαστάσεων θεωρούμε τα συναλλοίωτα διανύσματα u_i και v_j με $i, j = 1, 2, \dots, n$. Οι ποσότητες T^{ij} θα ορίζουν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή δεύτερης τάξης, αν και μόνο αν το άθροισμα $T^{ij} u_i v_j$ είναι βαθμωτό μέγεθος. Το γεγονός αυτό και η Σχέση (3.2.13), βεβαιώνουν ότι κατά την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων, οι συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή 2ης τάξης υπακούουν στο μετασχηματισμό (αφού αν A^i, B^j είναι δύο συναλλοίωτα διανύσματα, τότε οι n^2 ποσότητες $A^i B^j$ θεωρούνται συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου τανυστή τάξης 2):

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} T^{kl} \quad (3.3.1)$$

Με ανάλογο τρόπο τα ανταλλοίωτα διανύσματα u^i, v^j χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστεί ο νόμος μετασχηματισμού συναλλοίωτων τανυστών 2ης τάξης. Συγκεκριμένα, αν T_{ij} είναι οι συνιστώσες του τανυστή, το άθροισμα $T_{ij} u^i v^j$ θα πρέπει να συμπεριφέρεται ως βαθμωτό μέγεθος.

Στην περίπτωση αυτή, και με τη λογική που ακολουθήσαμε πριν, η (3.2.14) οδηγεί σε ένα μετασχηματισμό της μορφής:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} T_{kl} \quad (3.3.2)$$

Τέλος, οι ποσότητες T_i^j ορίζουν τις συνιστώσες ενός μικτού τανυστή 2ης τάξης όταν το άθροισμα $T_i^j u^i v_j$ αποτελεί βαθμωτό μέγεθος. Τότε, καταλήγουμε στην:

$$\bar{T}_i^j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T_k^l \quad (3.3.3)$$

Η τελευταία σχέση προσδιορίζει τον τρόπο μεταβολής μικτών τανυστών 2ης τάξης μέσα από έναν γενικό μετασχηματισμό της μορφής $y^i = y^i(x^j)$.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τους νόμους μεταβολής τανυστών ανώτερων της 2ης τάξης. Γενικά, αν $T_{ij\dots}^{pq\dots}$ είναι ένας (m, k) τανυστής σε ένα χώρο n διαστάσεων, έχουμε:

$$\bar{T}_{\bar{i}\bar{j}\dots}^{p\bar{q}\dots} = \left(\frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^i} \right) \left(\frac{\partial x^f}{\partial \bar{x}^j} \right) \dots \left(\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^s} \right) \dots T_{ef\dots}^{ps\dots} \quad (3.3.4)$$

με $i, j, p, q, e, f, r, s, \dots = 1, 2, \dots, n$.

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΧΩΡΩΝ

4.1. ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ - ΣΥΝΔΕΣΗ

Μελετώντας τη συμπεριφορά των συναλλοίωτων τανυστών, φτάνουμε στο πρόβλημα της παραγωγιστής τους. Η προσπάθεια επίλυσής του, οδηγεί στην εισαγωγή ενός νέου “σεναρίου”, της *παράλληλης μεταφοράς*.

Αλλά ας ξεκινήσουμε τη μελέτη από την αρχή. Γνωρίζουμε ότι αν σε κάθε πεδίο ενός χώρου ορίσουμε ένα διάνυσμα, τότε ορίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο. Κατ’ αντιστοιχία, αν ορίσουμε έναν τανυστή τάξης m σε ένα χώρο, τότε θα έχουμε ορίσει ένα τανυστικό πεδίο.

Ορίσαμε προηγουμένως ότι η παράγωγος ενός βαθμωτού μεγέθους είναι οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος. Αυτή είναι η μόνη περίπτωση στην οποία η παράγωγος ενός τανυστικού πεδίου είναι τανυστής. Γενικά η παραγωγή ενός τανυστικού πεδίου δεν ορίζει ένα νέο τανυστικό πεδίο. Ο λόγος είναι πως το διαφορικό ενός τανυστή είναι πρακτικά ίσο με τη διαφορά τανυστών που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χωροχρόνου. Αλλά σε διαφορετικά σημεία, οι τανυστές μετασχηματίζονται με διαφορετικό τρόπο γιατί οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι συναρτήσεις της θέσης.

Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά ποιο τρόπο είναι δυνατός ο ορισμός ενός νέου τανυστικού πεδίου από την παραγωγή ενός αρχικού, αν υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες του αρχικού τανυστή είναι *συνεχείς* και *διαφορίσιμες* συναρτήσεις.

Αποδεικνύεται ότι αν το ϕ είναι ένα αναλλοίωτο πεδίο, τότε το $\partial\phi/\partial x^i$ είναι ένα συναλλοίωτο διάνυσμα. Ποια είναι όμως η συμπεριφορά ενός συναλλοίωτου διανύσματος όταν αυτό παραγωγιστεί; Έστω A_i ένα τέτοιο διάνυσμα:

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \quad (4.1.1)$$

Παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη ως προς \bar{x}^j , οπότε παίρνουμε:

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k \quad (4.1.2)$$

Η ύπαρξη του όρου $\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k$ υποδεικνύει ότι το $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ δεν μετασχηματίζεται ως τανυστής.

Για να κατανοήσουμε την εισαγωγή της παράλληλης μετατόπισης θα κάνουμε μία πιο γεωμετρική διερεύνηση: ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά σημεία P, P' με συντεταγμένες $x^i, x^i + dx^i$ και έστω $A_i, A_i + dA_i$ τα αντίστοιχα διανύσματα ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου στα σημεία αυτά. Εφόσον οι συντελεστές στο νόμο μετασχηματισμού τανυστών διαφέρουν από σημείο σε σημείο, τα δύο διανύσματα θα μετασχηματίζονται διαφορετικά και άρα η διαφορά τους, το dA_i , *δεν είναι*

διάνυσμα. Παρόλα αυτά:

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \quad (4.1.3)$$

Αφού το πρώτο μέλος δεν είναι διάνυσμα και ο όρος dx^j του δεύτερου μέλους είναι, τότε αναγκαστικά η παράγωγός του $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} \equiv A_{i,j}$, που διερευνούμε δεν είναι τανυστής. Για να ορίσουμε το $A_{i,j}$, λοιπόν, είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε τις τιμές που υποθέτονται από το διανυσματικό πεδίο A_i σε δυο γειτονικά αλλά διακριτά σημεία και όπως αποδείξαμε μια τέτοια σύγκριση δεν οδηγεί σε τανυστή. Έτσι οδηγούμαστε φυσικά στην έννοια της παράλληλης μεταφοράς.

Αντί να ακολουθήσουμε την προηγούμενη διαδικασία στα σημεία P, P' , τώρα θα μετατοπίσουμε το διάνυσμα A_i καθεαυτό από το P στο P' (Σχήμα (4.1.1)). Με αυτόν τον τρόπο η σύγκριση γίνεται μεταξύ δυο ανταλλοίωτων διανυσμάτων ορισμένων στο ίδιο σημείο, οπότε και η διαφορά τους είναι επίσης ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα. Επειδή στη γενική περίπτωση ενός n -διάστατου χώρου, οι κατευθύνσεις των αξόνων στα δυο σημεία θα διαφέρουν, οι συνιστώσες του διανύσματος θα διαφέρουν επίσης. Οι συνιστώσες, λοιπόν, του μετατοπισμένου διανύσματος συμβολίζονται με $A_i + \delta A_i$. Τώρα μπορούμε να συγκρίνουμε το διάνυσμα αυτό με το διάνυσμα $A_i + dA_i$ του συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου αφού και τα δύο ορίζονται στο ίδιο σημείο και η διαφορά τους θα είναι διάνυσμα! Αναμένουμε, λοιπόν, ότι η (4.1.3) θα είναι πλέον της μορφής:

$$dA_i - \delta A_i = A_{i,j} dx^j \quad (4.1.4)$$

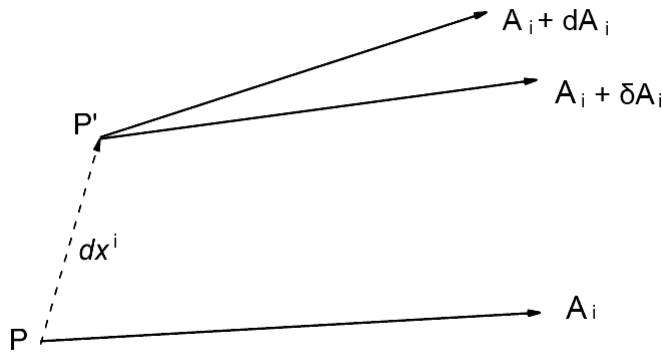


FIGURE 4.1.1. Η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος A_i .

όπου $A_{i,j}$ η ενδεδειγμένη αντικατάσταση του $A_{i,j}$. Εδώ, το πρώτο μέλος της σχέσης είναι διάνυσμα για αυτό και το $A_{i,j}$ είναι ένας συναλλοίωτος τανυστής για τον οποίο θα χρησιμοποιούμε τον όρο *συναλλοίωτη παράγωγος του A_i* . Με τη μέθοδο που περιγράφηκε, “μετατοπίσαμε” το πρόβλημα ορισμού της παραγωγής τανυστή στο πρόβλημα ορισμού παράλληλης μεταφοράς ενός διανύσματος.

Αυτό που θα πρέπει να ορίσουμε στη συνέχεια, είναι η μορφή του $A_{i,j}$. Έχουμε την ευχέρεια να ορίσουμε την παράλληλη μεταφορά του A_i με όποιον τρόπο θεωρούμε βολικότερο. Έστω, λοιπόν, ότι βρισκόμαστε σε Ευκλείδειο χώρο και \bar{A}_i είναι οι συνιστώσες του A_i σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Τότε από τους κανόνες μετασχηματισμού των συναλλοίωτων διανυσμάτων, έχουμε:

$$A_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{A}_j, \quad \bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \quad (4.1.5)$$

Εκτελώντας την παράλληλη μεταφορά του A_i από το σημείο P στο P' , οι Καρτεσιανές του συντεταγμένες δεν θα αλλάξουν, δηλαδή:

$$\delta \bar{A}_i = 0 \quad (4.1.6)$$

Τότε η πρώτη εκ των (4.1.5) θα δώσει:

$$\delta A_i = \delta \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) \bar{A}_j + 0 = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} dx^k \bar{A}_j \quad (4.1.7)$$

Με αντικατάσταση της δεύτερης εκ των (4.1.5):

$$\delta A_i = \Gamma_{ik}^l A_l dx^k \quad (4.1.8)$$

όπου $\Gamma_{ik}^l = \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *σύνδεση* (affinity) και ορίζει μια συνδετική σχέση μεταξύ των σημείων του χώρου στον οποίο βρισκόμαστε, έτσι ώστε να του προσδώσει μια δομή που να επιτρέπει την εκτέλεση πράξεων της θεωρίας τανυστών. Επιστρέφοντας, λοιπόν, στη (4.1.4) μπορούμε να γράψουμε:

$$dA_i - \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j - \Gamma_{ij}^k A_k dx^j = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k \right) dx^j \quad (4.1.9)$$

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι η μορφή του $A_{i;j}$ είναι:

$$A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k A_k \quad (4.1.10)$$

Κατά συνέπεια η συναλλοίωτη παράγωγος (κλίση) ενός συναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου αποτελεί ένα τανυστή 2ης τάξης. Ουσιαστικά, λοιπόν, μετατατρέψαμε το μη-τανυστικό μέγεθος $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} \equiv A_{i;j}$ σε τανυστή 2ης τάξης. Παρατηρούμε από τη σχέση αυτή ότι αν οι συνιστώσες της σύνδεσης εξαφανίζονται σε κάποια περιοχή του χώρου, η συναλλοίωτη παράγωγος ταυτίζεται με την μερική στην περιοχή αυτή.

Ο νόμος μετασχηματισμού της σύνδεσης προκύπτει θεωρώντας το μετασχηματισμό της (4.1.8) ως προς ένα \bar{x} -σύστημα αναφοράς: $\bar{A}_{i;j} = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{\Gamma}_{ij}^k \bar{A}_k$. Καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^l = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} \Gamma_{st}^r + \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \quad (4.1.11)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι χωρίς την ύπαρξη του δεύτερου όρου στο δεξιό μέλος της εξίσωσης, η σύνδεση θα μετασχηματιζόταν ως τανυστής 3ης τάξης. Έτσι, ο νόμος μετασχηματισμού είναι γραμμικός ως προς τις συνιστώσες της σύνδεσης αλλά δεν είναι ομογενής όπως ένας νόμος μετασχηματισμού τανυστών. Αυτό συνεπάγεται ότι αν όλα τα στοιχεία μιας σύνδεσης είναι μηδενικά ως προς ένα σύστημα αναφοράς, δεν είναι αναγκαστικά μηδενικά ως προς ένα άλλο σύστημα. Πάντως, γενικά δεν θα υπάρχει σύστημα αναφοράς στο οποίο οι συνιστώσες της σύνδεσης θα μηδενίζονται

σε κάποια περιοχή του χώρου, αν και αποδεικνύεται ότι αν η Γ_{ij}^k είναι μια συμμετρική σύνδεση, τότε υπάρχει πάντοτε ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο οι συνιστώσες της μηδενίζονται. Το θεώρημα αυτό παίζει κεντρικό ρόλο στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Αν η Γ_{ij}^k είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες της σε ένα σύστημα αναφοράς ($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$), τότε είναι συμμετρική σε κάθε σύστημα, όπως αποδεικνύεται και με χρήση της (4.1.11):

$$\bar{\Gamma}_{ji}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} \Gamma_{st}^r + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^{lk}}{\partial x^r} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \Gamma_{ts}^r + \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} = \bar{\Gamma}_{ij}^k \quad (4.1.12)$$

4.2. Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ RIEMANN - CHRISTOFFEL

Ο τανυστής καμπυλότητας αποτελεί θεμελιώδες μέγεθος της γεωμετρίας Riemann διότι καθορίζει με μοναδικό τρόπο την καμπυλότητα ενός χώρου. Εκφράζει την “εσωτερική” γεωμετρία ενός χώρου, ανεξάρτητα αν ο τελευταίος αποτελεί υποσύνολο κάποιου χώρου ανώτερη διάστασης. Η γεωμετρική ερμηνεία και η σημασία του τανυστή καμπυλότητας προκύπτει όταν το τυχαίο ανταλλοίωτο διάνυσμα με συνιστώσες A^i μεταφερθεί παράλληλα κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C .

Αν βρισκόμαστε σε Ευκλείδειο χώρο και επιλέξουμε Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, τότε με παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος με συνιστώσες A^i ορισμένο σε ένα σημείο \mathcal{Q} , έχουμε $\Delta A^i = 0$ για μια τυχαία μετατόπιση από το \mathcal{Q} . Επειδή το A^i είναι αυθαίρετο διάνυσμα, συμπεραίνουμε από την (4.1.8) ότι $\Gamma_{jk}^i = 0$ ως προς αυτό το σύστημα σε κάθε σημείο του χώρου. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το A^i ξεκινάει από το \mathcal{Q} και μεταφέρεται παράλληλα κατά μήκος της C , όταν επιστρέψει στο \mathcal{Q} , θα έχει συνιστώσες $A^i + \Delta A^i$, όπου $\Delta A^i = 0$. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, το διάνυσμα δεν αλλάζει.

Από την άλλη, αν βρισκόμαστε σε έναν χώρο, τα στοιχεία του οποίου συσχετίζονται μέσω της σύνδεσης, δεν είναι πλέον εφικτό να επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο οι συνιστώσες της σύνδεσης να εξαφανίζονται σε κάθε σημείο. Έτσι, κατά την παράλληλη μεταφορά οι συνιστώσες θα αλλάζουν οπότε δεν είναι επιτρεπτό να θεωρήσουμε ότι κατά την επιστροφή του στο αρχικό σημείο το διάνυσμα δε θα έχει αλλάξει. Αν υπολογίσουμε το ΔA^i , όταν το A^i μεταφέρεται παράλληλα σε μια κλειστή καμπύλη C , καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\Delta A^i = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{hk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \right) A^j a^{kl} \quad (4.2.1)$$

όπου:

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{hk}^r + \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \quad (4.2.2)$$

είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann - Christoffel.

Από τη συστολή των δεικτών i και l του τανυστή R_{jkl}^i , προκύπτει ο τανυστής Ricci ο οποίος συμβολίζεται με R_{jk} . Δηλαδή:

$$R_{jk} = R_{jki}^i \quad (4.2.3)$$

Από τις συμμετρίες του τανυστή Riemann, όπως προκύπτουν από τον ορισμό του, (4.2.2):

$$R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \quad (4.2.4)$$

και:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \quad (4.2.5)$$

συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής Ricci είναι η μοναδική τανυστική ποσότητα που μπορεί να δημιουργηθεί μέσω της συστολής του τανυστή Riemann - Christoffel.

Με παραπέρα συστολή του τανυστή Ricci και με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή (τον οποίο θα μελετήσουμε παρακάτω), οδηγούμαστε στο βαθμωτό μέγεθος Ricci:

$$R = R_i^i = g^{ij} R_{ji} \quad (4.2.6)$$

το οποίο προσδιορίζει τη “μέση” καμπυλότητα ενός χώρου Riemann.

Ο μηδενισμός του τανυστή Riemann - Christoffel $R_{ijkl} = 0$, σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος, ενώ ο μηδενισμός του τανυστή Ricci, $R_{\mu\nu} = 0$, σημαίνει ότι ο χώρος είναι κενός ύλης - ενέργειας. Επομένως, η εξίσωση $R_{\mu\nu} = 0$ από μόνη της δε σημαίνει ότι ο χώρος δεν είναι καμπύλος. Με βάση αυτή τη διαπίστωση θα μπορούσαμε να εξηγήσουμε το λόγο για τον οποίο η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δεν είναι συμβατή με χώρους τριών διαστάσεων. Ο λόγος είναι ότι σε χώρους τριών διαστάσεων ο τανυστής Riemann έχει $3^2(3^2 - 1)/12 = 6$ ανεξάρτητες συνιστώσες, αλλά τόσες έχει και ο τανυστής Ricci $3(3 + 1)/2 = 6$, επομένως ο μηδενισμός του τανυστή Ricci θα συνεπάγεται και μηδενισμό του τανυστή Riemann που σημαίνει ότι όπου δεν υπάρχει ύλη, η καμπυλότητα είναι μηδενική. Στις 4 διαστάσεις ο τανυστής Ricci έχει 10 ανεξάρτητες συνιστώσες ενώ ο τανυστής Riemann 20, επομένως ο μηδενισμός του τανυστή Ricci δεν συνεπάγεται και μηδενισμό του τανυστή Riemann.

4.3. Ο ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ

Η βασική ιδέα της διαφορικής γεωμετρίας ήταν πως μια εσωτερική περιγραφή του χώρου θα μπορούσε να επιτευχθεί με τη μέτρηση αποστάσεων μέσα στο φυσικό χώρο. Οι χώροι στους οποίους έχει καθορισθεί ένας τρόπος μέτρησης αποστάσεων λέγονται *μετρικοί χώροι*. Για τη μέτρηση αυτή, χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων x^i , ώστε να ορίσουμε τα σημεία και να καθορίσουμε το *στοιχείο γραμμής*, που δίνει την απόσταση ds^2 , μεταξύ δύο κοντινών σημείων που διαχωρίζονται από στοιχειώδη διαστήματα dx^i .

Εκφράζοντας τον μετρικό τανυστή ως προς τα διανύσματα βάσης $\{e_i\}$:

$$g_{ij} = e_i e_j \quad (4.3.1)$$

Ο μετρικός τανυστής g_{ij} συσχετίζει τη στοιχειώδη μέτρηση μήκους ds με τις επιλεγμένες συντεταγμένες $\{dx^i\}$:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{12} (dx^1 dx^2) \quad (4.3.2)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

με το μετρικό τανυστή να απεικονίζεται σαν ένας 2×2 πίνακας.

Ιστορικά, από τα βασικότερα προβλήματα του τανυστικού λογισμού ήταν η εύρεση μιας τανυστικής ποσότητας η οποία να είναι συνάρτηση του μετρικού τανυστή g_{ij} και κάποιων παραγώγων του, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m \partial x^n}$, κλπ. Μια λύση του προβλήματος αυτού είναι ο τανυστής Riemann - Christoffel R_{ijkl} .

4.3.1. Μετρική σύνδεση. Ανύψωση και καταβίβαση δεικτών.

Ας θεωρήσουμε ότι ο χώρος μας είναι Riemannian. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διάστημα ds μεταξύ δυο γειτονικών σημείων x^i και $x^i + dx^i$ ορίζεται, όπως είδαμε πριν, από την εξίσωση:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.3.4)$$

όπου τα n^2 στοιχεία g_{ij} ορίζονται σε κάποιο σύστημα αναφοράς σε όλα τα σημεία του χώρου μας. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε τα g_{ij} συμμετρικά. Μια τέτοια σχέση μεταξύ όλων των ζευγών γειτονικών σημείων ονομάζεται *μετρική σύνδεση* και η έκφραση (4.3.4) για το ds^2 ονομάζεται *μετρική*.

Για οποιαδήποτε δύο γειτονικά σημεία, το ds^2 θα θεωρείται η αναλλοίωτη ποσότητά τους και η g_{ij} θα πρέπει να μετασχηματίζεται έτσι ώστε αυτό να ισχύει. Αφού το $dx^i dx^j$ είναι αυθαίρετος συμμετρικός τανυστής, η μετρική σύνδεση g_{ij} είναι συμμετρική και το ds^2 είναι αναλλοίωτο αποδεικνύεται ότι ο g_{ij} είναι τανυστής. Ονομάζεται θεμελιώδης συναλλοίωτος τανυστής.

Στην περίπτωση που ο χώρος μας είναι Ευκλείδειος, μπορούν να οριστούν ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες y^i και σε ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς $g_{ij} = \delta_{ij}$. Έστω ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα με συνιστώσες A^i σε ένα γενικό καμπυλόγραμμο σύστημα x και B^i σε ένα σύστημα y .

Στο Καρτεσιανό σύστημα, όπου δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τα ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα διανύσματα είναι φυσικό να ορίζουμε ως εξής τις συναλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος:

$$B_i = B^i \quad (4.3.5)$$

Στο σύστημα x , έστω A_i οι συνιστώσες του συναλλοίωτου τανυστή B_i . Τότε:

$$A_i = g_{ij} A^j \quad (4.3.6)$$

αφού είναι τανυστική εξίσωση και ισχύει στο σύστημα y όπου παίρνει τη μορφή $B_i = \delta_{ij} B^j = B^i$.

Σε μη Καρτεσιανό σύστημα η (4.3.6) χρησιμεύει στον ορισμό των συναλλοίωτων συνιστωσών ενός διανύσματος του οποίου οι ανταλλοίωτες συνιστώσες είναι A^i . Η διαδικασία μετατροπής των ανταλλοίωτων συνιστωσών ενός διανύσματος σε συναλλοίωτες ονομάζεται *καταβίβαση των δεικτών*.

Αν το B_i είναι συναλλοίωτο διάνυσμα, η ανταλλοίωτη έκφρασή του καθορίζεται από τη διαδικασία *ανύψωσης των δεικτών* με τη βοήθεια του θεμελιώδους ανταλλοίωτου διανύσματος:

$$B^i = g^{ij} B_j \quad (4.3.7)$$

Η ίδια μέθοδος εφαρμόζεται και σε τανυστές 2ης και ανώτερης τάξης. Για παράδειγμα με χρήση του μετρικού τανυστή g_{ij} , ο ανταλλοίωτος τανυστής A^{ij} μετατρέπεται σε μικτό:

$$A_i^j = g_{ik} A^{kj} \quad (4.3.8)$$

και στη συνέχεια σε συναλλοίωτο:

$$A_{ij} = g_{jk} A_i^k \quad (4.3.9)$$

Στην ειδική περίπτωση που ο μετρικός τανυστής του χώρου μπορεί να γραφεί στην διαγώνια μορφή $diag[1, 1, \dots, 1]$, δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των συναλλοίωτων και ανταλλοίωτων συνιστωσών γιατί συμπίπτουν.

4.3.2. Τα σύμβολα Christoffel.

Ιστορικά, ένα από τα βασικά προβλήματα του τανυστικού λογισμού ήταν η εύρεση μιας ποσότητας που να είναι συνάρτηση του μετρικού τανυστή g_{ij} και κάποιων παραγώγων του. Μια λύση του προβλήματος αυτού είναι ο τέταρτης τάξης τανυστής Riemann - Cristoffel. Για να τον κατανοήσουμε θα πρέπει να εισάγουμε τα σύμβολα Cristoffel. Τα σύμβολα Christoffel είναι συγκεκριμένοι συνδυασμοί των μερικών παραγώγων των θεμελιωδών τανυστών g_{ij} και g^{ij} . Τα ίδια δεν είναι τανυστές αλλά χρησιμεύουν στη δημιουργία σημαντικών τανυστικών εξισώσεων. Στην παράγραφο (4.1) είδαμε ότι η συναλλοίωτη παραγωγή τανυστών οδήγησε στον ορισμό μιας νέας ποσότητας, της σύνδεσης. Οι χώροι Riemann είναι εφοδιασμένοι με μια ειδική σύνδεση, η οποία συνδέεται απευθείας με τον μετρικό τανυστή και είναι τα σύμβολα Christoffel. Ας επιχειρήσουμε να τα εξάγουμε εδώ.

Ας θεωρήσουμε το μετρικό τανυστή g_{ij} ο οποίος ικανοποιεί το νόμο μετασχηματισμού:

$$\bar{g}_{ij} = g_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \quad (4.3.10)$$

Ορίζουμε την ποσότητα:

$$(i, j, k) = \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} g_{rs} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{rs} \quad (4.3.11)$$

και σχηματίζουμε το συνδυασμό όρων $\frac{1}{2} [(r, s, t) + (s, t, r) - (t, r, s)]$ που δίνει αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{g}_{rs}}{\partial \bar{x}^t} + \frac{\partial \bar{g}_{st}}{\partial \bar{x}^r} - \frac{\partial \bar{g}_{tr}}{\partial \bar{x}^s} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right] \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} + g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x_i^2}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^t} \quad (4.3.12)$$

Σ' αυτή την εξίσωση, η ποσότητα που βρίσκεται ανάμεσα στις αγκύλες ονομάζεται *σύμβολο Christoffel πρώτου τύπου* και συμβολίζεται ως εξής:

$$[ik, j] = [ki, j] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right] \quad (4.3.13)$$

Η εξίσωση (4.3.12) αποτελεί το νόμο μετασχηματισμού για ένα σύμβολο Christoffel πρώτου τύπου και μπορεί να διατυπωθεί και ως:

$$\overline{[rt, s]} = [ik, j] \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} + g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial x_i^2}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^t} \quad (4.3.14)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το σύμβολο Christoffel δεν μετασχηματίζεται σαν τανυστής, είναι όμως συμμετρικό ως προς την εναλλαγή των δεικτών i, k . Με βάση όσα προαναφέραμε μπορούμε να εξάγουμε τα *σύμβολα Christoffel δεύτερου τύπου* -που συμβολίζονται με $\left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\}$ - από τον ορισμό του πρώτου τύπου, ουσιαστικά μέσω της ανύψωσης του δείκτη i :

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} = g^{ir} [ik, r] = \frac{1}{2} g^{ir} \left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} \right] \quad (4.3.15)$$

Σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, με χρήση των συμβόλων Christoffel, μπορούμε να δημιουργήσουμε πιο πολύπλοκους κανόνες παραγωγίσης προκειμένου να διασφαλίσουμε το αναλλοίωτο της παραγώγου. Οι κανόνες αυτοί ονομάζονται *κανόνες συναλληλοποίησης παραγωγίσης* και εγγυώνται ότι η ίδια η παράγωγος θα είναι τανυστής και εκφράζονται ως εξής:

$$A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} A_k \quad (4.3.16)$$

$$A^i_{;j} = \frac{\partial A^i}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} A^k \quad (4.3.17)$$

Έτσι, λοιπόν, η παραγωγή μιας μόνο συνιστώσας απαιτεί να συμπεριλάβουμε και όλες τις υπόλοιπες συνιστώσες του διανύσματος στον υπολογισμό μας.

4.3.3. Γεωδαισιακές καμπύλες σε χώρους Riemann.

Σε ένα n -διάστατο χώρο Riemann, θεωρούμε καμπύλη C με εξίσωση $x^i = x^i(s)$, όπου s είναι η φυσική της παράμετρος. Η τελευταία ονομάζεται ίδιον μήκος της C και δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$s = \int_p^{p'} ds \quad (4.3.18)$$

μεταξύ των σημείων P και P' της καμπύλης. Με δεδομένο ότι το γραμμικό στοιχείο του χώρου ($ds^2 = g^{ij} dx^i dx^j$) ορίζει το στοιχειώδες μήκος τόξου κατά μήκος της C , συμπεραίνουμε ότι:

$$u_i u^i = 1 \quad (4.3.19)$$

όπου $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ είναι το (μοναδιαίο) εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο P με κατεύθυνση τη μετατόπιση προς το P' κατά μήκος της καμπύλης C .

Στην περίπτωση που η $x^i = x^i(s)$ είναι γεωδαισιακή, η εξίσωσή της παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (4.3.20)$$

Είναι προφανές ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ της γεωδαισιακής είναι μοναδιαίο, ενώ αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιεί και τη συνθήκη:

$$u^j \nabla_j u_i = 0 \quad (4.3.21)$$

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι, από όλες τις καμπύλες που ενώνουν δύο σημεία ενός χώρου Riemann, η γεωδαισιακή έχει το μικρότερο μήκος.

Στο τετραδιάστατο χωρόχρονο της Σχετικότητας το ίδιο μήκος δεν είναι πάντοτε το προτιμητέο στοιχειώδες μήκος τόξου κατά μήκος μιας καμπύλης. Αντί του ιδίου μήκους, πολλές φορές χρησιμοποιείται ο *ιδιοχρόνος* (τ) ο οποίος αποτελεί τη φυσική παράμετρο των χρονοειδών καμπύλων και ορίζεται από τη σχέση:

$$d\tau^2 = -g_{ij} dx^i dx^j \quad (4.3.22)$$

Στην περίπτωση αυτή, η παραμετρική εξίσωση είναι της μορφής $x^i = x^i(\tau)$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα ($u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$) ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$u^i u^i = -1 \quad (4.3.23)$$

Επίσης, αν η εν λόγω καμπύλη είναι γεωδαισιακή, τότε επιπλέον έχουμε:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \quad (4.3.24)$$

και:

$$u^j \nabla_j u_i = 0 \quad (4.3.25)$$

4.3.4. Η ταυτότητα Bianchi.

Αν επιλέξουμε ένα σύστημα αναφοράς που να είναι γεωδαισιακό σε ένα σημείο x^i , τότε στο σημείο αυτό το $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ θα μηδενίζεται, με αποτέλεσμα να μηδενίζονται εκεί και τα δύο σύμβολα Christoffel. Έτσι, όλες οι συνιστώσες της σύνδεσης θα μηδενίζονται στο σημείο και οι συναλλοίωτες παράγωγοι θα ταυτίζονται με τις μερικές. Στο σύστημα αναφοράς αυτό, λοιπόν:

$$\begin{aligned} B^i_{jkl;m} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\Gamma^i_{rk} \Gamma^r_{jl} - \Gamma^i_{rl} \Gamma^r_{hk} + \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m \partial x^l} \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

εφόσον τα Γ^i_{jk} (αλλά όχι και οι παράγωγοί τους απαραίτητα) μηδενίζονται στο συγκεκριμένο σημείο. Με κυκλική εναλλαγή των δεικτών k, l, m στην παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε:

$$B^i_{jlm;k} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jm}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k \partial x^m} \quad (4.3.27)$$

$$B^i_{jmk;l} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{jm}}{\partial x^l \partial x^k} \quad (4.3.28)$$

Με άθροιση των (4.3.26), (4.3.27), (4.3.28) δημιουργούμε την παρακάτω ταυτότητα:

$$B_{jkl;m}^i + B_{jlm;k}^i + B_{jmk;l}^i = 0 \quad (4.3.29)$$

Αλλά αυτή είναι μια τανυστική εξίσωση και εφόσον αποδείχτηκε αληθής στο γεωδαισιακό σύστημα αναφοράς, πρέπει να ισχύει σε κάθε σύστημα. Ακόμα, επειδή το επιλεγμένο σημείο είναι ένα τυχαίο σημείο, η εξίσωση ισχύει σε όλα τα σημεία του χώρου. Είναι η ταυτότητα *Bianchi*.

4.3.5. Ο τανυστής Einstein.

Πριν αναφερθούμε στον τανυστή Einstein, ας ορίσουμε δυο χρήσιμες έννοιες, την απόκλιση και τη λαπλασιανή. Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου A^i , ορίζεται ως $div A \equiv A_{;i}^i$. Από τον ορισμό και τον κανόνα της συναλλοίωτης παραγώγισης (4.3.16) και (4.3.17), έχουμε:

$$A_{;i}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} i \\ j i \end{matrix} \right\} A^j \quad (4.3.30)$$

το οποίο αποδεικνύεται ίσο με:

$$\begin{aligned} A_{;i}^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i) \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

όπου g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή g_{ij} .

Η απόκλιση ενός συναλλοίωτου διανύσματος A_i ορίζεται ως η απόκλιση του συζυγή του, ανταλλοίωτου τανυστή:

$$A_{;i}^i = g^{ij} A_{j;i} \quad (4.3.32)$$

Η λαπλασιανή, λοιπόν, ενός βαθμωτού μεγέθους V από την κλίση του οποίου πήραμε το διανυσματικό πεδίο $\left(A_i = \frac{\partial V}{\partial x^i} \right)$ είναι:

$$\Delta V = div grad V \equiv g^{ij} A_{j;i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j} \right) \quad (4.3.33)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης αποτελεί τη μορφή που παίρνει η Λαπλασιανή ενός βαθμωτού V , σε γενικευμένο χώρο Riemann. Σε Ευκλείδιο, n -διάστατο χώρο, με χρήση ορθογώνιων συντεταγμένων, $g^{ij} = \delta^{ij}$, $g = 1$, οπότε:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^i} \quad (4.3.34)$$

που είναι η γνωστή μορφή της Λαπλασιανής.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση του τανυστή Ricci, προκειμένου τελικά να οδηγηθούμε στον τανυστή Einstein. Θα εκμεταλλευτούμε την αντισυμμετρικότητα του B_{ijkl} ως προς τους δυο πρώτους και δυο τελευταίους δείκτες, και με καταβίβαση των δεικτών τις ταυτότητας Bianchi (4.3.29), προκύπτει:

$$B_{ijkl;m} - B_{ijml;k} - B_{jlmk;l} = 0 \quad (4.3.35)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $g^{il} g^{jk}$:

$$\begin{aligned}
g^{jk} B_{jkl;m}^l - g^{jk} B_{jml;k}^l - g^{il} B_{imk;l}^k &= 0 \iff^{(4.2.3)} \\
g^{jk} R_{jk;m} - g^{jk} R_{jm;l} - g^{il} R_{im;l} &= 0 \iff \\
R_{;m} - 2R_{m;k}^k &= 0 \iff \\
R_{m;k}^k &= \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Αυτή είναι η *απόκλιση του τανυστή Ricci*.

Αν τώρα θεωρήσουμε το μικτό τανυστή:

$$R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R \tag{4.3.37}$$

Η απόκλιση του θα είναι:

$$\begin{aligned}
R_{j;i}^i - \frac{1}{2} \delta_j^i \frac{\partial R}{\partial x^i} \\
= R_{j;i}^i - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^j} \\
= 0
\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο *τανυστής Einstein*. Οι συναλλοιώτες και ανταλλοιώτες συνιστώσες του είναι αντίστοιχα:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \quad G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \tag{4.3.38}$$

Ο τανυστής Einstein προσδιορίζει, μέσω των Εξισώσεων Πεδίου της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, την καμπυλότητα σε κάποιο σημείο του χωροχρόνου, λόγω της παρουσίας ύλης (με τη μορφή μάζας ή ενέργειας) στο σημείο εκείνο. Το βαρυτικό πεδίο θεωρείται αποτέλεσμα της καμπύλωσης του χώρου λόγω της ύλης και η αλληλεπίδραση γεωμετρίας και ύλης περιγράφεται από τις εξισώσεις Einstein:

$$G_{ij} = \kappa T_{ij} \tag{4.3.39}$$

όπου $\kappa = 8\pi G$ είναι η βαρυτική σταθερά και T_{ij} ο (συμμετρικός) τανυστής ενέργειας-ορμής της ύλης. Ο τελευταίος περιγράφει την κατανομή της ενεργειακής πυκνότητας της ύλης στον χώρο. Να σημειωθεί επίσης ότι με χρήση των εξισώσεων πεδίου, η καθαρά γεωμετρική ταυτότητα $G_{ij;j} = 0$ οδηγεί στους νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής.

Μέρος 3

ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ : Η ΒΑΡΥΤΗΤΑ ΩΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο μικροσκοπικό Σύμπαν των απαρχών, η βαρύτητα δεν διαθέτει ακόμα κανέναν πλανήτη, κανένα άστρο ή γαλαξία για να ασκήσει επάνω τους τη δύναμή της. Εντούτοις, αυτή η δύναμη βρίσκεται ήδη εκεί, αλληλεπιδρώντας με τα στοιχειώδη σωματίδια που εξαρτώνται από την ηλεκτρομαγνητική και την πυρηνική δύναμη. Αυτό ακριβώς μας εμποδίζει να μάθουμε τι συνέβη πριν από τα 10^{-43} δευτερόλεπτα: η βαρύτητα υψώνει έναν ανυπέρβλητο φραγμό σε κάθε έρευνα. Πέρα από τον “Τοίχο του Planck” βρίσκεται το απόλυτο μυστήριο. 10^{-43} δευτερόλεπτα. Είναι η Εποχή του Planck, σύμφωνα με την όμορφη έκφραση των φυσικών. Είναι επίσης το απώτατο όριο των γνώσεών μας, το τέλος του ταξιδιού μας προς τις απαρχές. Πίσω από αυτό τον τοίχο, κρύβεται μια πραγματικότητα πέρα από κάθε φαντασία. Κάτι που ίσως να μην μπορέσουμε ποτέ να καταλάβουμε, ένα μυστικό που οι φυσικοί δεν τολμούν καν να φανταστούν πως κάποτε θα το ξεδιαλύνουν. Μερικοί δοκίμασαν να ρίξουν μια ματιά προς την άλλη πλευρά του τοίχου, αλλά δεν μπόρεσαν να πουν τίποτα το κατανοητό σχετικά με ό,τι νόμισαν πως είδαν. Μια μέρα, συναντήθηκα με έναν από αυτούς τους φυσικούς. Δήλωνε πως στα νεανικά του χρόνια, οι εργασίες του, του επέτρεψαν να φτάσει ως την εποχή του Planck και να ρίξει ένα φευγαλέο βλέμμα προς τη μεριά πίσω από τον τοίχο. Κι όταν τον ρωτούσαν σχετικά, μουρμούριζε πως είχε διακρίνει μια πραγματικότητα που φέρνει ίλιγγο: η ίδια η δομή του διαστήματος είχε καταβυθιστεί σε ένα βαρυτικό κώνο τέτοιας έντασης, ώστε ο χρόνος μετέπιπτε από το μέλλον στο παρελθόν για να εκραγεί, στα βάθη του κώνου, σε μια μυριάδα από στιγμές ίσες με την αιωνιότητα. (...)

- Igor Bogdanov, Dieu et la Science

ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

5.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επιτυχία της Ειδικής Σχετικότητας, έκανε εμφανές το γεγονός ότι η Νευτώνεια θεωρία της βαρύτητας δεν μπορούσε πλέον να είναι ακριβώς σωστή. Η Νευτώνεια βαρυτική αλληλεπίδραση είναι στιγμιαία. Το μέτρο της βαρυτικής δύναμης \vec{F}_{12} πάνω σε μια μάζα m_1 εξαιτίας μιας δεύτερης μάζας m_2 δίνεται από τη σχέση:

$$F_{12} = \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2} \quad (5.1.1)$$

όπου $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ είναι οι θέσεις των μαζών την *ίδια χρονική στιγμή*. Αλλά στην Ειδική Σχετικότητα, η θεώρηση του ταυτόχρονου είναι διαφορετική σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Άρα ο νόμος του Newton, θα μπορούσε να είναι αληθής σε ένα μόνο σύστημα αναφοράς, με αποτέλεσμα το σύστημα αυτό να ξεχωρίζει από όλα τα υπόλοιπα, γεγονός που αντιτίθεται με την αρχή της σχετικότητας, όπως θα δούμε παρακάτω.

Η Ειδική Σχετικότητα, λοιπόν, απορρίπτει τη Νευτώνεια θεώρηση ενός προνομιούχου παρατηρητή, σε ηρεμία, σε έναν απόλυτο χώρο και για τον οποίο υποτίθεται ότι οι φυσικοί νόμοι παίρνουν την απλούστερη μορφή τους. Αντ' αυτού υποθέτει ότι οι νόμοι αυτοί θα είναι πανομοιότυποι για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές που βρίσκονται σε ομοιόμορφη μετατόπιση ο ένας ως προς τον άλλο. Έτσι, παρόλο που απορρίπτεται η ύπαρξη ενός προνομιούχου παρατηρητή, η ύπαρξη μιας *τάξης* τέτοιων παρατηρητών είναι αποδεκτή.

Αυτό φαίνεται να συνεπάγεται ότι, αν όλη η ύλη στο Σύμπαν εξαφανιζόταν, εκτός από έναν παρατηρητή και το εργαστήριό του, αυτός θα μπορούσε να διακρίνει τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς από τα μη - αδρανειακά από την απλοποιημένη μορφή που παίρνουν τα φυσικά φαινόμενα στα πρώτα σε σχέση με τα δεύτερα. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο φυσικός χώρος δεν θεωρείται πλέον απλώς ένα αφηρημένο μαθηματικό μέγεθος, κατάλληλο για τον ορισμό σχέσεων απόστασης μεταξύ φυσικών σωμάτων, αλλά μια αυθύπαρκτη οντότητα με εσωτερική δομή, επαρκή για τον ορισμό αδρανειακών συστημάτων αναφοράς.

Παρόλα αυτά, όλα τα διαθέσιμα στοιχεία υποδεικνύουν ότι ο φυσικός χώρος δεν μπορεί να καθοριστεί παρά μόνο σε όρους μέτρησης αποστάσεων μεταξύ φυσικών σωμάτων. Ο ισχυρισμός ότι, αυτός υπάρχει ανεξαρτήτως μετρήσεων απόστασης μεταξύ υλικών σωμάτων, μπορεί να θεμελιωθεί μόνο εάν καθοριστεί μια μέθοδος ανίχνευσης της ύπαρξής του χωρίς τη χρήση τέτοιων μετρήσεων. Αυτό δεν έχει επιτευχθεί ποτέ και για αυτό το λόγο θα υποθέσουμε ότι οι ειδικές ιδιότητες των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, συσχετίζονται με την κατανομή της ύλης στο Σύμπαν και

δεν είναι ένδειξη μιας έμφυτης δομής του φυσικού χώρου, όταν τον θεωρούμε χωρίς την ύλη που περιέχει.

Η σκέψη που μπορούμε να κάνουμε πάνω σε αυτό, είναι ότι τελικά όλοι οι φυσικοί νόμοι μπορούν να εκφραστούν με μορφές ανεξάρτητες από το εκάστοτε σύστημα αναφοράς. Αυτή είναι η *γενική αρχή της σχετικότητας*. Όλοι οι παρατηρητές θα θεωρούνται ισότιμοι και, χρησιμοποιώντας τους ίδιους φυσικούς νόμους, θα καταλήγουν σε πανομοιότυπα συμπεράσματα ως προς την εξέλιξη οποιουδήποτε φυσικού συστήματος. Η τοπική φυσική διέπεται από την Ειδική Σχετικότητα. Η συνολική δομή μπορεί, εντούτοις, να στρεβλωθεί από τη βαρύτητα.

5.2. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΗΣ ΚΑΙ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΜΑΖΑΣ

Η μάζα ενός αντικειμένου μπορεί να οριστεί από το δεύτερο νόμο του Newton. Αυτό το πετυχαίνουμε εφαρμόζοντας την ίδια δύναμη σε διαφορετικές μάζες και μετρώντας τις αντίστοιχες επιταχύνσεις. Έτσι:

$$M_1 a_1 = F = M_2 a_2 \Rightarrow$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad (5.2.1)$$

Αν δεχτούμε ότι $M_1 = 1$, τότε η μάζα M_2 είναι τελείως καθορισμένη. Τη μάζα που ορίσαμε με αυτόν τον τρόπο, την ονομάζουμε μάζα αδράνειας (ή αδρανειακή μάζα) και τη συμβολίζουμε με M_{in} . Μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε τη μάζα, μετρώντας τη δύναμη βαρύτητας που ασκείται σε αυτήν από κάποιο άλλο σώμα, όπως π.χ. από τη Γη:

$$\frac{GM_\beta M_\Gamma}{R_\Gamma^2} = F \quad (5.2.2)$$

$$M_\beta = \frac{FR_\Gamma^2}{GM_\Gamma} \quad (5.2.3)$$

Τη μάζα που ορίζουμε με το δεύτερο τρόπο την ονομάζουμε μάζα βαρύτητας (ή βαρυτική μάζα) και τη συμβολίζουμε με M_β . Στην Εξίσωση (5.2.3) η μάζα και η ακτίνα της Γης έχουν γραφεί ως M_Γ και R_Γ αντίστοιχα.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι για όλα τα σώματα, ο λόγος της αδρανειακής μάζας προς τη βαρυτική είναι ο ίδιος. Αυτό έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά μέσα στα όρια ακρίβειας των μετρήσεων. (Μπορούμε να θεωρούμε ότι η σταθερά G έχει προσδιοριστεί όπως π.χ. με το πείραμα του Cavendish, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης, δηλαδή με αναφορά στη μάζα αδράνειας). Το πιο απλό πείραμα για να επιβεβαιώσει κανείς την παραπάνω πρόταση, είναι να ελέγξει αν όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση. Για τη πτώση ενός σώματος (1), που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, μπορούμε να γράψουμε:

$$M_{a1} a_1 = \frac{GM_\Gamma M_{\beta 1}}{R_\Gamma^2} \quad (5.2.4)$$

και για την πτώση ενός άλλου σώματος (2):

$$M_{\alpha 2} a_2 = \frac{GM_{\Gamma} M_{\beta 2}}{R_{\Gamma}^2} \quad (5.2.5)$$

Διαιρώντας τις Εξ. (5.2.4) και (5.2.5) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{M_{\alpha 1} a_1}{M_{\alpha 2} a_2} = \frac{M_{\beta 1}}{M_{\beta 2}} \quad (5.2.6)$$

ή

$$\frac{M_{\alpha 1}}{M_{\beta 1}} = \frac{M_{\alpha 2}}{M_{\beta 2}} \frac{a_2}{a_1} \quad (5.2.7)$$

Έχει όμως διαπιστωθεί ότι στο κενό όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση. Μπορούμε δηλαδή να πούμε, μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος, ότι $a_1 = a_2$. Επομένως, έχουμε για το λόγο της μάζας αδράνειας προς τη μάζα βαρύτητας:

$$\frac{M_{\alpha 1}}{M_{\beta 1}} = \frac{M_{\alpha 2}}{M_{\beta 2}} \quad (5.2.8)$$

Αφού ο λόγος αυτός είναι σταθερός, μπορούμε να τον θεωρήσουμε ίσο με τη μονάδα, τροποποιώντας κατάλληλα την τιμή της σταθεράς G , καταλήγωντας έτσι στην ισοδυναμία αδρανειακής και βαρυτικής μάζας.

5.3. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Αυτό που διακρίνει τη Γενική από την Ειδική Σχετικότητα είναι η *Αρχή της Ισοδυναμίας*. Το έναυσμα για τη διατύπωση της αρχής της ισοδυναμίας αποτελεί η παρατήρηση του Γαλιλαίου ότι όλα τα αντικείμενα επιταχύνονται με τον ίδιο ρυθμό σε ένα βαρυτικό πεδίο. Η εξήγηση του Newton για το γεγονός αυτό βασίζεται στις εξισώσεις του για τη δυναμική:

$$F = ma \quad (5.3.1)$$

και για τη βαρύτητα:

$$F = G \frac{Mm}{R^2} \quad (5.3.2)$$

(για μια μεγάλη, σφαιρική G_{Γ} , ακτίνας R). Έτσι, ο Newton θα έθετε:

$$ma = G \frac{Mm}{R^2} \quad (5.3.3)$$

και απαλείφοντας το m θα έβρισκε:

$$a = g \quad (5.3.4)$$

όπου το βαρυτικό πεδίο $g = G \frac{M}{R^2}$ είναι ανεξάρτητο της μάζας m . Δεν έχει σημασία αν το αντικείμενο που πέφτει είναι ένα αυτοκίνητο, μια μπάλα ή ένα φυσίκι. Όλα επιταχύνονται με τον ίδιο ρυθμό $a = g$ υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου g της G_{Γ} (5.3.1α).

Για τον Newton αυτό αποτελούσε απλώς μια αξιοσημείωτη συνέπεια των εξισώσεών του, χωρίς περιθώρια περαιτέρω ερμηνείας. Για τον Einstein, τα πειραματικά δεδομένα (τα οποία, όπως έχει

αποδειχτεί σήμερα από τα πειράματα των *Eötvös*, *Braginski* και *Dicke* ισχύουν με πολύ μεγάλη ακρίβεια) ήταν τόσο σημαντικά που άξιζε να αναχθούν σε ένα αξίωμα που υπερέβαινε τις εξισώσεις του Newton.

Σύμφωνα με “την ευτυχέστερη σκέψη της ζωής” του Einstein, το βαρυτικό πεδίο έχει μόνο μια σχετική ύπαρξη. *Διότι για έναν παρατηρητή σε ελεύθερη πτώση από την οροφή ενός σπιτιού δεν υπάρχει -τουλάχιστον στο άμεσο περιβάλλον του- βαρυτικό πεδίο.* Έτσι, λοιπόν, αν δεχτούμε την αρχή της ισοδυναμίας, θα έπρεπε να μπορούμε, αντί να θεωρήσουμε ότι τα αντικείμενα πέφτουν υπό την επίδραση του γήινου βαρυτικού πεδίου, να υποθέσουμε ότι είναι ακίνητα στο χώρο, αλλά ιδωμένα από έναν παρατηρητή σε έναν μεγάλο ανελκυστήρα ο οποίος επιταχύνεται προς τα επάνω πλησιάζοντας προς αυτά (5.3.1β). Εάν η επιτάχυνση a του ανελκυστήρα είναι αριθμητικά ίση με το g , το βαρυτικό πεδίο της Γης, δε θα έπρεπε να έχει καμιά φυσική διαφορά ανάμεσα στις περιγραφές των δύο παρατηρητών. Ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα σε αυτόν το μεγάλο ανελκυστήρα μπορεί κάλλιστα να φαντάζεται ότι στέκεται σε στέρεο έδαφος και ότι εκείνο που κάνει το αυτοκίνητο, το φυσίκι και τη μπάλα να πέφτουν προς αυτόν με τους ίδιους ακριβώς ρυθμούς είναι το βαρυτικό πεδίο της Γης. *Τα φαινόμενα που οφείλονται στην επιταχυνόμενη κίνηση, αντισταθμίζονται ακριβώς από εκείνα που οφείλονται στις δυνάμεις βαρύτητας.* Σύμφωνα με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται τα πράγματα, θα θεωρούσε επίσης ότι είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι νόμοι της βαρύτητας και της κίνησης είναι τέτοιοι ώστε να εξαλείφεται οποιαδήποτε εξάρτηση από τη μάζα, το σχήμα, τις χημικές ιδιότητες, κ.λ.π. Για τον Einstein, εντούτοις, που κατασκεύασε τον ανελκυστήρα, το γεγονός αυτό δεν είναι τίποτα το αξιοθαύμαστο, αλλά το πιο φυσικό πράγμα στον κόσμο.

Εάν πράγματι δεν υπάρχει κανένας τρόπος να διακρίνουμε μεταξύ τους τις δύο καταστάσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα (5.3.1), τότε κατά τον Einstein, η βαρύτητα θα πρέπει να μπορεί να κάμψει το φως, διότι είναι φανερό ότι σύμφωνα με τον παρατηρητή στον ανελκυστήρα το φως θα καμφθεί (Σχήμα 5.3.2). Το φως το οποίο κινείται σε ευθεία γραμμή σύμφωνα με έναν αδρανειακό παρατηρητή έξω από τον ανελκυστήρα μπαίνει στον ανελκυστήρα από το επάνω μέρος του αριστερού παραθύρου. Αφού μεσολαβήσει ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα για να διασχίσει τον ανελκυστήρα κατά πλάτος, εξέρχεται από αυτόν από το κάτω μέρος του δεξιού παραθύρου. Ο αδρανειακός παρατηρητής αποδίδει το γεγονός απλώς στην κίνηση του ανελκυστήρα στο χρονικό διάστημα που μεσολάβησε. Στο δικό του σύστημα αναφοράς, το φως ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή και ο ανελκυστήρας επιταχύνεται. Ο παρατηρητής στον ανελκυστήρα, όμως, θεωρεί ότι ζει στο βαρυτικό πεδίο της Γης, και ότι το φως που μπαίνει από το επάνω μέρος του ενός από τα δύο παράλληλα παράθυρα κάμπτεται από τη βαρύτητα με αποτέλεσμα να ακολουθεί μια καμπύλη τροχιά η οποία καταλήγει κοντά στη βάση του άλλου παραθύρου. Έτσι, πιστεύει ότι η βαρύτητα μπορεί να κάμψει το φως. Και οι δύο έχουν δίκιο. Και οι δύο περιγραφές είναι εξίσου αποδεκτές.

5.4. ΤΑ ΚΛΑΣΙΚΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΗΣ ΓΘΣ

5.4.1. Μετατόπιση προς το ερυθρό λόγω της βαρύτητας.

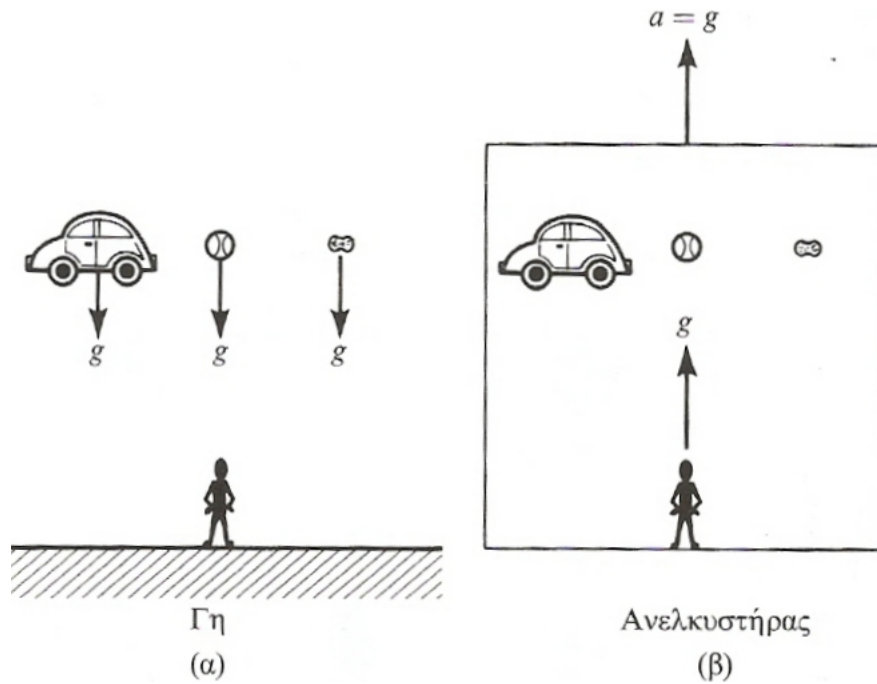


FIGURE 5.3.1. Η αρχή της ισοδυναμίας. Σύμφωνα με αυτή, ένας παρατηρητής στον χώρο ο οποίος επιταχύνεται προς τα πάνω με $a = g$, μέσω ενός ανελκυστήρα, αντιλαμβάνεται τα ίδια φυσικά φαινόμενα που θα αντιλαμβανόταν και αν βρισκόταν στη Γη υποκείμενος σε βαρυτικό πεδίο g .

Ένα φωτόνιο με συχνότητα f που διαφεύγει από ένα άστρο και απομακρύνεται σε άπειρη απόσταση, βρίσκεται να έχει συχνότητα:

$$f' = f \left(1 - \frac{GM_A}{R_A c^2} \right) \quad (5.4.1)$$

όπου M_A η μάζα και R_A η ακτίνα του άστρου. Τώρα το φωτόνιο χάνει ενέργεια καθώς ξεφεύγει από το πεδίο βαρύτητας του άστρου. Το χρώμα φωτός του οποίου η συχνότητα μειώνεται, μεταβάλλεται, και στο ορατό φάσμα μετατοπίζεται προς την περιοχή του ερυθρού. Γι αυτό το λόγο, το φαινόμενο είναι γνωστό ως *μετατόπιση προς το ερυθρό λόγω της βαρύτητας*.

Οι λευκοί νάνοι χαρακτηρίζονται από μεγάλη τιμή του λόγου M_A/R_A και επομένως η αντίστοιχη μετατόπιση προς το ερυθρό λόγω της βαρύτητας είναι σχετικά μεγάλη. Για τον Σείριο Β, η υπολογιζόμενη ποσοστιαία μετατόπιση είναι:

$$\frac{\Delta f}{f} = -5.9 \times 10^{-5} \quad (5.4.2)$$

ενώ η πειραματική τιμή είναι -6.6×10^{-5} . Η διαφορά οφείλεται στην αβεβαιότητα που υπεισέρχεται στον καθορισμό των M_A και R_A .

5.4.2. Εκτροπή φωτονίων από τον Ήλιο.

Η εκτροπή φωτός από σώματα μεγάλης μάζας είναι σήμερα ένα επαρκώς τεκμηριωμένο φαινόμενο. Η πρόβλεψη αυτή του Einstein τεκμηριώθηκε το 1919 σε μια σημαντικότερη ερευνητική

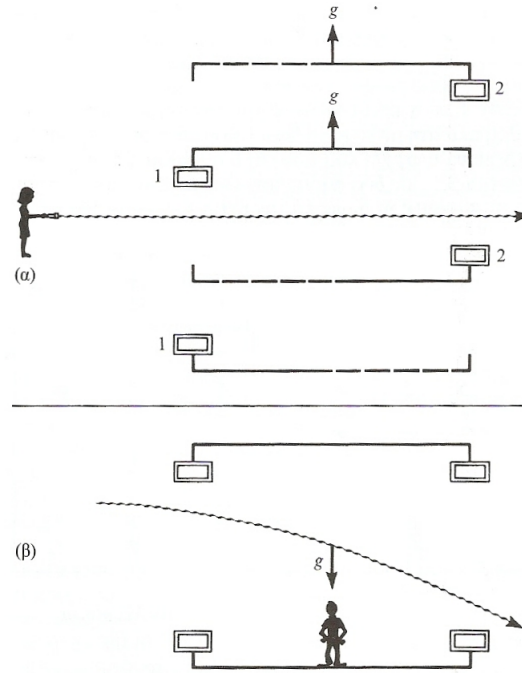


FIGURE 5.3.2. Δύο απόψεις του ίδιου πειράματος σχετικά με τη διάδοση του φωτός: (α) σύμφωνα με έναν αδρανειακό παρατηρητή, (β) σύμφωνα με έναν παρατηρητή μέσα στον επιταχυνόμενο ανελκυστήρα

αποστολή με επικεφαλής τον Eddington, στην οποία παρατηρήθηκε η εκτροπή αστρικού φωτός από τον Ήλιο κατά τη διάρκεια μιας έκλειψης.

Έστω ότι το φωτόνιο έχει μάζα M_Φ . Το φωτόνιο περνά κοντά στον Ήλιο, σε μια ελάχιστη απόσταση r_0 από το κέντρο του, όπως δείχνει το Σχήμα (5.4.1). Υποθέτουμε εκ των προτέρων ότι η απόκλιση είναι πολύ μικρή, οπότε το r_0 μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά σταθερό, ανεξάρτητο από την απόκλιση. Η δύναμη F_x κάθετα στην κίνηση του φωτονίου στη θέση (r_0, y) είναι:

$$F_x = -GM_A M_\Phi \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.4.3)$$

όπου το y μετριέται από το σημείο ρ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η τελική τιμή της συνιστώσας u_x της ταχύτητας του φωτονίου κάθετα στην κίνηση, βρίσκεται από τη σχέση:

$$M_\Phi u_x = \int F_x dt = \int F_x \frac{dy}{u_y} \approx \frac{1}{c} \int F_x dy \quad (5.4.4)$$

οπότε:

$$u_x \approx -\frac{GM_A r_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \approx -\frac{2GM_A}{cr_0} \quad (5.4.5)$$

Αν το r_0 είναι ίσο με την ακτίνα του Ήλιου, η αντίστοιχη γωνιακή απόκλιση θα είναι τελικά:

$$\tan \phi \approx \phi \approx \frac{|u_x|}{c} \approx \frac{2GM_A}{R_A c^2} \text{ rad} \quad (5.4.6)$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε $\phi = 0.87''$. Μια πιο προσεγγισμένη ανάλυση οδηγεί στη διπλάσια τιμή, δηλαδή $1.75''$. Αυτή η τιμή έχει επιβεβαιωθεί από παρατηρήσεις, με ακρίβεια 20%.

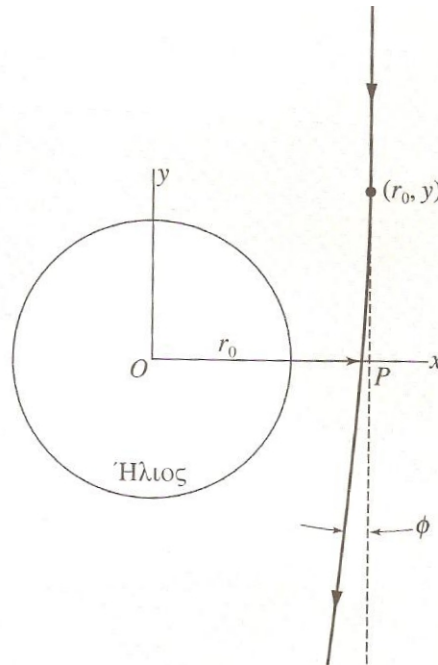


FIGURE 5.4.1. Εκτροπή φωτονίου από το πεδίο βαρύτητας του Ήλιου

Βέβαια, έχουν γίνει ακριβέστερα πειράματα εκτροπής και χρονομέτρησης της ραδιοεκπομπής από κβάζαρ των οποίων το φως διέρχεται κοντά από τον Ήλιο. Τα πειράματα αυτά, έχουν το πλεονέκτημα ότι δεν χρειάζεται να περιμένουμε μια ηλιακή έκλειψη. Σε ένα συναφές φαινόμενο, τον “βαρυτικό φακό”, θεωρείται ότι οφείλεται η μορφή ενός πρόσφατα ανακαλυφθέντος “διπλού κβάζαρ”, οι δύο συνιστώσες του οποίου έχουν σχεδόν πανομοιότυπη εμφάνιση.

5.4.3. Η μετατόπιση του περιηλίου του Ερμή.

Η πραγματική τροχιά του Ερμή φαίνεται στο Σχήμα (5.4.2), με υπερβολική εκκεντρότητα και μετατόπιση ανά περιφορά. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στο ότι ο λόγος v^2/c^2 δεν είναι μηδενικός. Για να υπολογίσουμε το λόγο, υποθέτουμε ότι η τροχιά είναι κυκλική, με ακτίνα ίση με το μεγάλο ημιάξονα. Έτσι βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας και την περίοδο T :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \approx 4.8 \times 10^4 \text{ m/s} \quad (5.4.7)$$

$$\frac{v}{c} \approx 1.6 \times 10^{-4} \quad (5.4.8)$$

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 2.6 \times 10^{-8} = \frac{\delta\theta}{2\pi} \quad (5.4.9)$$

άρα:

$$\delta\theta \approx 0.03'' \quad (5.4.10)$$

Συνήθως η γωνία δίνεται σε δευτερόλεπτα ανά αιώνα. Η περίοδος είναι 0.24 έτη. Επομένως η αναμενόμενη τάξη μεγέθους του αποτελέσματος θα είναι:

$$\delta\theta = \frac{100}{0.24} \times 0.03 \approx 13'' \quad (5.4.11)$$

Η πειραματική τιμή είναι 42.9", ενώ η ΓΘΣ προβλέπει 43.0". Η τιμή αυτή συμφωνεί με την πειραματική, μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος.

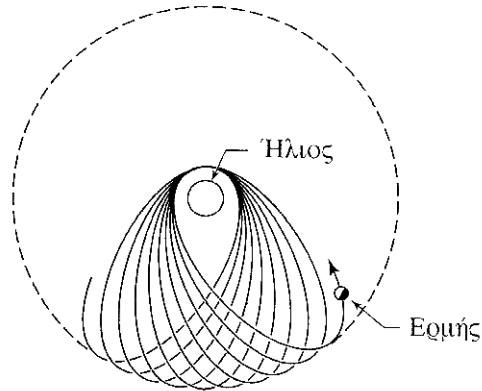


FIGURE 5.4.2. Η μετακίνηση του περιηλίου του Ερμή, που εξηγείται από τη ΓΘΣ. Το επίπεδο της τροχιάς συμπίπτει με το φύλλο του χαρτιού. Για ευκολία, η εκκεντρότητα της τροχιάς και η μετατόπιση ανά περιφορά, έχουν μεγαλοποιηθεί κατά πολύ. Χωρίς τη μετατόπιση η εικόνα θα ήταν απλώς μια στάσιμη έλλειψη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΑΡΥΤΗΤΑ

6.1. ΑΠΟ ΤΟ NEWTON ΣΤΟΝ EINSTEIN

Έχοντας τα μαθηματικά εργαλεία, είμαστε έτοιμοι να εξετάσουμε τη φυσική της βαρύτητας, όπως περιγράφεται από τη Γενική Σχετικότητα. Η διαδικασία αυτή θα έχει δύο σκέλη: πώς το βαρυτικό πεδίο επηρεάζει τη συμπεριφορά της ύλης, και πώς η ύλη καθορίζει το βαρυτικό πεδίο. Στη Νευτώνεια βαρύτητα, αυτά τα δύο στοιχεία αποτελούνται από την έκφραση για την επιτάχυνση ενός σώματος σε ένα βαρυτικό δυναμικό Φ :

$$a = -\nabla\Phi \quad (6.1.1)$$

και τη διαφορική εξίσωση του Poisson για το δυναμικό, συναρτήσει της πυκνότητας μάζας ρ και τη βαρυτική σταθερά του Newton, G :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (6.1.2)$$

Στη Γενική Σχετικότητα, θα υπάρχουν αντίστοιχες εκφράσεις για την περιγραφή του πώς η καμπυλότητα του χωροχρόνου επιδρά στη μάζα, ώστε να εκδηλωθεί ως βαρύτητα καθώς και του πώς η ενέργεια και η ορμή επιδρούν στο χωρόχρονο ώστε να καμπυλωθεί. Πριν φτάσουμε σε αυτές, όμως, ας βρούμε έναν απλό τρόπο να γενικεύσουμε φυσικούς νόμους στα πλαίσια του καμπύλου χωροχρόνου.

Θα γυρίσουμε στην Αρχή της Ισοδυναμίας (§.3): “Σε αρκετά μικρές περιοχές του χωροχρόνου, οι νόμοι της φυσικής ανάγονται σε αυτούς της Ειδικής Σχετικότητας. Είναι αδύνατο να ανιχνεύσουμε την ύπαρξη ενός βαρυτικού πεδίου μέσω τοπικών πειραμάτων.” Η αρχή της ισοδυναμίας γεννάται από την ιδέα ότι η βαρύτητα είναι *καθολική*. Επηρεάζει όλα τα σωματίδια (και όλες της μορφές ενέργειας - ορμής) με τον ίδιο τρόπο. Το χαρακτηριστικό της καθολικότητας οδήγησε τον Einstein να προτείνει ότι αυτό που αισθανόμαστε ως βαρύτητα είναι μια εκδήλωση της καμπυλότητας του χωροχρόνου. Η ιδέα είναι ότι κάτι τόσο καθολικό θα μπορούσε απλούστατα να περιγραφεί ως ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό του υποβάθρου στο οποίο διαδίδονται τα υλικά πεδία, σε αντίθεση με τη θεώρηση μιας συμβατικής δύναμης. Παράλληλα, η ταύτιση του χωροχρόνου με μια καμπυλωμένη πολλαπλότητα υποστηρίζεται από την εξής ομοιότητα: δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε τοπικά τη βαρύτητα, με τον ίδιο τρόπο που μπορούμε να βρούμε τοπικά αδρανειακές συντεταγμένες ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$ σε ένα σημείο ρ) σε μια πολλαπλότητα.

Έχοντας κάνει αυτή τη σκέψη, οδηγούμαστε σε μια απλή συνταγή για τη γενίκευση φυσικών νόμων στον καμπύλο χωρόχρονο, γνωστή ως *αρχή του minimal-coupling* η οποία στην πιο τολμηρή μορφή της είναι:

- (1) Θεωρούμε ένα φυσικό νόμο, ο οποίος είναι αληθής σε αδρανειακές συντεταγμένες στον επίπεδο χωρόχρονο.
- (2) Τον γράφουμε σε αναλλοίωτη (τανυστική) μορφή.
- (3) Ισχυριζόμαστε ότι ο νόμος που έχουμε ως αποτέλεσμα παραμένει αληθής στον καμπύλο χωρόχρονο.

Πρακτικά, λοιπόν, σε έναν νόμο στον επίπεδο χώρο αντικαθιστούμε τη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ με την πιο γενική $g_{\mu\nu}$ καθώς και τις μερικές παραγώγους ∂_μ με τις συναλλοίωτες ∇_μ .

Ένα παράδειγμα είναι η κίνηση σωματιδίων σε ελεύθερη πτώση. Στον επίπεδο χώρο αυτά κινούνται σε ευθείες γραμμές. Στις εξισώσεις, αυτό εκφράζεται ως ο μηδενισμός της δεύτερης παραγώγου της παραμετρικής καμπύλης $x^\mu(\lambda)$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (6.1.3)$$

Αυτό, σε γενικές συντεταγμένες, δεν είναι τανυστική εξίσωση. Παρόλο που το $dx^\mu/d\lambda$ είναι οι συνιστώσεις ενός καλά ορισμένου διανύσματος, οι συνιστώσεις $d^2 x^\mu/d\lambda^2$ δεν είναι, αν και η (6.1.3) δείχνει σαν τανυστική εξίσωση. Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (6.1.4)$$

Σύμφωνα με την αρχή του minimal-coupling, για να το γενικεύσουμε σε καμπύλο χώρο, απλώς αντικαθιστούμε τη μερική παράγωγο με τη συναλλοίωτη:

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \quad (6.1.5)$$

Η κατάλληλη, λοιπόν, εκδοχή της Νευτώνειας σχέσης (6.1.3) είναι η γεωδαισιακή εξίσωση:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (6.1.6)$$

Στη Γενική Σχετικότητα, λοιπόν, τα ελεύθερα σωματίδια κινούνται σε γεωδαισιακές καμπύλες.

βέβαια, το να γενικεύουμε μια εξίσωση από επίπεδο σε καμπύλο χωρόχρονο δεν είναι ισοδύναμο με το να θεωρούμε ότι το αποτέλεσμα περιγράφει βαρύτητα. Για να το θεωρήσουμε, μπορούμε να δείξουμε πως ταιριάζουν στη γενικευμένη εικόνα τα συνήθη αποτελέσματα της Νευτώνειας βαρύτητας. Ορίζουμε το Νευτώνειο όριο με τρεις απαιτήσεις: τα σωματίδια κινούνται αργά (σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός), τα βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές (έτσι ώστε να μπορεί να θεωρεί διαταραχή του επίπεδου χώρου), και στατικό (δε μεταβάλλεται με το χρόνο). Ας δούμε την επίδραση αυτών των υποθέσεων στη γεωδαισιακή εξίσωση, θεωρώντας τον ιδιόχρονο τ ως παράμετρο.

“Κινούνται αργά” σημαίνει ότι:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (6.1.7)$$

οπότε η γεωδαισιακή εξίσωση γίνεται:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (6.1.8)$$

Τα σύμβολα Christoffel απλοποιούνται στην περίπτωση μας, αφού το πεδίο είναι στατικό ($\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$):

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_{\lambda} g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} g_{00}\end{aligned}\quad (6.1.9)$$

Η τρίτη μας υπόθεση, ότι το πεδίο είναι ασθενές, μας επιτρέπει να αναλύσουμε τη μετρική στην Minkowski συν μια μικρή διαταραχή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (6.1.10)$$

Δουλεύουμε σε αδρανειακές συντεταγμένες, οπότε η $\eta_{\mu\nu}$ είναι η κανονική μορφή της μετρικής. Άλλωστε, δεν έχει νόημα η έννοια της “μικρής” διαταραχής $h_{\mu\nu}$ σε αυθαίρετες συντεταγμένες. Με ανύψωση των δεικτών της (6.1.10), βρίσκουμε ότι στην πρώτη τάξη του h :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (6.1.11)$$

όπου $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$. Έτσι τα σύμβολα Christoffel γίνονται:

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} h_{00} \quad (6.1.12)$$

Η γεωδαισιακή εξίσωση είναι λοιπόν:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_{\lambda} h_{00} \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 \quad (6.1.13)$$

Αφού $\partial_0 h_{00}$, η $\mu = 0$ συνιστώσα της είναι:

$$\frac{d^2 t}{dt^2} = 0 \quad (6.1.14)$$

Δηλαδή, το dt/dt είναι σταθερό. Για να εξετάσουμε τις χωροειδείς (spacelike) συνιστώσες της (6.1.13), έχουμε υπόψιν ότι οι χωροειδείς συνιστώσες της $\eta^{\mu\nu}$ είναι αυτές ενός 3×3 μοναδιαίου διανύσματος. Οπότε η γεωδαισιακή γίνεται:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 \partial_i h_{00} \quad (6.1.15)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\left(\frac{dt}{dt} \right)^2$:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \quad (6.1.16)$$

Αν συγκρίνουμε αυτή την εξίσωση με την 6.1.1, βλέπουμε ότι είναι η ίδια αν θέσουμε:

$$h_{00} = -2\Phi \quad (6.1.17)$$

ή

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \quad (6.1.18)$$

Δείξαμε έτσι, ότι η καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι επαρκής για την περιγραφή της βαρύτητας στο Νευτώνειο όριο, εφόσον η μετρική παίρνει τη μορφή (6.1.18).

Έχουμε, λοιπόν, πλέον το κατάλληλο εργαλείο για να καταλήξουμε στην εξίσωση πεδίου για τη μετρική στη γενική σχετικότητα.

6.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ EINSTEIN

Έτσι όπως οι εξισώσεις Maxwell καθορίζουν πως τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία ανταποκρίνονται σε φορτία και ρεύματα, η εξίσωση πεδίου του Einstein καθορίζει πως η μετρική ανταποκρίνεται στην ύλη.

Σύμφωνα με τις ιδέες του Newton, το βαρυτικό πεδίο σε οποιαδήποτε περιοχή του χωροχρόνου καθορίζεται από την κατανομή της ύλης. Στη Νευτώνεια βαρύτητα η πηγή εισάγεται με πολύ απλό τρόπο, με την εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (6.2.1)$$

όπου $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ είναι η Λαπλασιανή. Αυτό υποδεικνύει ότι ο μετρικός τανυστής της χωροχρονικής πολλαπλότητας (η οποία όπως είπαμε συνδέεται στενά με το βαρυτικό πεδίο) θα πρέπει να είναι υπολογίσιμος όταν είναι γνωστή η κατανομή ύλης στο χωρόχρονο. Έτσι, αναζητούμε μια τανυστική ποσότητα που να περιγράφει αυτή την κατανομή ύλης ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς στο χωρόχρονο την οποία στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να συνδέσουμε με το μετρικό τανυστή. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής T_{ij} είναι ο ιδανικός υποψήφιος για την ποσότητα που αναζητούμε. Επίσης, ο μετρικός τανυστής θα αντικαταστήσει το βαρυτικό δυναμικό, ακολουθώντας τη λογική της προηγούμενης παραγράφου, όπου συσχετίσαμε μια διαταραχή της μετρικής με το νευτώνειο δυναμικό, έτσι ώστε να αναπαράγουμε τη βαρύτητα. Η νέα εξίσωση, λοιπόν, θα έχει τη γενική μορφή:

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (6.2.2)$$

Εφόσον ο τανυστής ενέργειας-ορμής έχει οριστεί μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ο ορισμός του πρέπει να επεκταθεί σε ένα γενικό σύστημα στο χωροχρόνο. Θα το κάνουμε με τον εξής τρόπο: θα ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς με συντεταγμένες y^ρ , στην περιοχή ενός σημείου P στο χωρόχρονο, το οποίο είναι γεωδαισιακό στο σημείο αυτό (η μετρική του εκεί παίρνει την ευκλείδεια μορφή στο P). Αυτό το σύστημα αντιστοιχεί σε ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα στο οποίο οι συντεταγμένες y^ρ θα συμπεριφέρονται σαν συντεταγμένες Minkowski.

Αν $T_{\mu\nu}^{(0)}$ είναι οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής στο σύστημα-y στο σημείο P, οι συνιστώσες του στο γενικό σύστημα-x (με συντεταγμένες x^ρ), στο ίδιο σημείο μπορούν να καθοριστούν από τις κατάλληλες τανυστικές εξισώσεις μετασχηματισμού. Έτσι, ο συναλλοίωτος τανυστής ενέργειας-ορμής θα έχει συνιστώσες $T_{\mu\nu}$ στο σύστημα-x δίνεται από:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} T_{\rho\sigma}^{(0)} \quad (6.2.3)$$

Εφόσον συναλλοίωτοι και ανταλλοίωτοι τανυστές, ταυτίζονται σε Καρτεσιανούς άξονες, οι $T_{\rho\sigma}^{(0)}$ μπορούν να θεωρηθούν συνιστώσες ενός συναλλοίωτου τανυστή στο σύστημα y και οι συνιστώσες του τανυστή αυτού θα δίνονται από την εξίσωση:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} T_{\rho\sigma}^{(0)} \quad (6.2.4)$$

Αυτοί οι μετασχηματισμοί μπορούν να λάβουν χώρα σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, δημιουργώντας έτσι για το σύστημα x ένα τανυστικό πεδίο ενέργειας-ορμής καθ' ολοκληρίαν στο συνεχές.

Ας θεωρήσουμε την τανυστική εξίσωση:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.5)$$

Σε συντεταγμένες y^ρ σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, αυτό απλοποιείται σε:

$$\partial_\nu T_{\mu\nu}^{(0)} = 0 \quad (6.2.6)$$

δηλαδή στις εξισώσεις διατήρησης ενέργειας και ορμής για τη συνολική κατανομή μάζας-ενέργειας. Όντας έγκυρη σε ένα σύστημα, η εξίσωση (6.2.5), είναι έγκυρη σε όλα τα συστήματα. Έτσι, η απόκλιση του τανυστή ενέργειας-ορμής μηδενίζεται. Αν, λοιπόν, αυτός ο τανυστής συσχετιστεί με το μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$, η σχέση θα πρέπει να έχει τέτοια μορφή ώστε να υπονοείται η εξίσωση (6.2.5). Τώρα:

$$\partial_\rho g^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.7)$$

και τελικά:

$$\partial_\nu g^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.8)$$

Ο νόμος:

$$T^{\mu\nu} = \kappa g^{\mu\nu} \quad (6.2.9)$$

όπου κ είναι μια παγκόσμια σταθερά, θα ήταν ικανοποιητικός ως προς τα παραπάνω. Παρόλα αυτά, σε μια περιοχή όπου η μάζα και η ενέργεια θα ήταν απύουσες, έτσι ώστε $T^{\mu\nu} = 0$, αυτό θα υπονοούσε ότι:

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.10)$$

το οποίο είναι προφανώς λανθασμένο. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με τη Νευτώνεια θεωρία, αν ρ είναι η πυκνότητα της ύλης, το βαρυτικό πεδίο μπορεί να εξαχθεί από μια συνάρτηση δυναμικού Φ που να ικανοποιεί την εξίσωση (6.1.2). Από τον ορισμό όμως του τανυστή ενέργειας-ορμής, η συνιστώσα του T_{44} περιλαμβάνει την πυκνότητα ύλης ($T_{44} = -c^2\rho$), οπότε είναι λογικό να περιμένουμε ότι το άλλο μέλος της εξίσωσης που περιγράφει το νέο νόμο της βαρύτητας, θα μας παρέχει όρους που μπορούν να έχουν μια προσεγγιστική ερμηνεία ως $\nabla^2\Phi$. Έτσι, περιμένουμε την ύπαρξη ενός συναλλοίωτου τανυστή δεύτερης τάξεως, που να περιλαμβάνει παραγώγους δεύτερας τάξεως της $g_{\mu\nu}$ και ο οποίος να έχει μηδενική απόκλιση στην οποία να μπορεί να θεωρηθεί ανάλογος ο $T^{\mu\nu}$.

Ευτυχώς, υπάρχει μια ποσότητα, η οποία είναι μη μηδενική και προκύπτει από δεύτερες παραγώγους (και πρώτες παραγώγους) της μετρικής: ο τανυστής Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$. Ο τανυστής Riemann “κατασκευάζεται” από τα σύμβολα Christoffel και τις πρώτες παραγώγους τους, οπότε ο $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$

περιέχει δεύτερες παραγώγους της $g_{\mu\nu}$. Δεν έχει το σωστό αριθμό δεικτών, αλλά με τη συστολή του μπορούμε να σχηματίσουμε τον τανυστή Ricci ο οποίος τους έχει (και είναι συμμετρικός).

Σ' αυτή τη φάση, θα ήταν δελεαστικό να υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου είναι

$$R^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (6.2.11)$$

για κάποια σταθερά κ . Στην πραγματικότητα, ο Einstein πρότεινε κάποια στιγμή αυτή την εξίσωση. Δυστυχώς όμως, υπάρχει το πρόβλημα της διατήρησης της ενέργειας. Αν θέλουμε να διατηρήσουμε την (6.2.5), τότε θα προέκυπτε:

$$R^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (6.2.12)$$

το οποίο δεν ισχύει σε αυθαίρετη γεωμετρία αφού, όπως είδαμε στο προηγούμενο μέρος:

$$\partial_\nu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu R \quad (6.2.13)$$

Η επόμενη επιλογή μας, είναι ο τανυστής Einstein, που κατέχει τα ζητούμενα χαρακτηριστικά. Γι αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (6.2.14)$$

όπου κ είναι μια σταθερά αναλογίας την οποία θα πρέπει να συσχετίσουμε με την G . Η εξίσωση (6.2.14) εκφράζει το *Νόμο του Einstein για τη βαρύτητα*. Με καταβίβαση των δεικτών, μπορεί να εκφραστεί με δύο εναλλακτικές μορφές:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = -\kappa T^\mu_\nu \quad (6.2.15)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (6.2.16)$$

Με συστολή της εξίσωσης (6.2.15), προκύπτει ότι:

$$R = \kappa T \quad (6.2.17)$$

όπου $T = T^\mu_\mu$. Με χρήση αυτού, ο Νόμος του Einstein για τη βαρύτητα μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right) \quad (6.2.18)$$

Αφού η απόκλιση της $g^{\mu\nu}$ είναι μηδενική, μια πιθανή εναλλακτική του Νόμου (6.2.14) είναι:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (6.2.19)$$

όπου Λ είναι μια σταθερά. Ο Νόμος (6.2.14) δίνει αποτελέσματα που συμφωνούν με τα παρατηρησι-ακά δεδομένα σε περιοχές του χώρου γαλαξιακών διαστάσεων, οπότε είναι σίγουρο πως, ακόμα και αν το Λ δεν είναι μηδενικό, είναι πολύ μικρό. Παρόλα αυτά, ο επιπλέον όρος εισήχθη σε κάποιες κοσμολογικές έρευνες.

Ας διερευνήσουμε αν η εξίσωση στην οποία οδηγηθήκαμε προβλέπει τη Νευτώνεια βαρύτητα με τις απαιτήσεις που είχαμε και προηγουμένως: τα σωματίδια κινούνται αργά (σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός), τα βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές (έτσι ώστε να μπορεί να θεωρεί διαταραχή του επίπεδου χώρου), και στατικό (δε μεταβάλλεται με το χρόνο). Θεωρούμε ένα τέλειο ρευστό, πηγή ενέργειας-ορμής για την οποία:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (6.2.20)$$

όπου U^μ είναι η τετρα-ταχύτητα του ρευστού και ρ , p οι πυκνότητες ενέργειας και ορμής στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο Νευτώνειο όριο μπορούμε να παραλείψουμε την πίεση, καθώς σε γενικές γραμμές, η πίεση ενός σώματος θεωρείται σημαντική όταν τα σωματίδια που το αποτελούν ταξιδεύουν με ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός. Ουσιαστικά θεωρούμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής κονιορτού (dust) σταθερής ταχύτητας:

$$T_{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu \quad (6.2.21)$$

Το “ρευστό” το οποίο θεωρούμε, είναι κάποιο σώμα μεγάλης μάζας, όπως η Γη ή ο Ήλιος. Θα δουλέψουμε στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του ρευστού, στο οποίο

$$v^\mu = (v^0, 0, 0, 0) \quad (6.2.22)$$

Η χρονοειδής συνιστώσα μπορεί να προσδιοριστεί με χρήση της συνθήκης κανονικοποίησης, $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$. Στο όριο του ασθενούς πεδίου, και σε συμφωνία με τις (6.1.10), (6.1.11):

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad (6.2.23)$$

$$g^{00} = -1 - h_{00} \quad (6.2.24)$$

Στη συνέχεια, σε πρώτης τάξεως προσέγγιση του $h_{\mu\nu}$, παίρνουμε:

$$v^0 = 1 + \frac{1}{2} h_{00} \quad (6.2.25)$$

Βέβαια, στο δικό μας επίπεδο προσέγγισης μπορούμε απλώς να θεωρήσουμε ότι $v^0 = 1$ και αντίστοιχα $v_0 = -1$, καθώς θα ενσωματώσουμε την τετρα-ταχύτητα στην (6.2.21), και η ενεργειακή πυκνότητα ρ ήδη θεωρείται μικρή. Τότε:

$$T_{00} = \rho \quad (6.2.26)$$

και όλες οι άλλες συνιστώσες μηδενίζονται. Σε αυτό το όριο η ενέργεια ηρεμίας $\rho = T_{00}$ θα είναι πολύ μεγαλύτερη των υπολοίπων όρων του $T_{\mu\nu}$, γι αυτό θα εστιάσουμε στη $\mu = 0$, $\nu = 0$ συνιστώσα της (6.2.18). Το ίχνος στην προσέγγισή μας θα είναι:

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00} = -\rho \quad (6.2.27)$$

Αντικαθιστώντας το στην (6.2.15):

$$R_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho \quad (6.2.28)$$

Αυτή είναι μια εξίσωση που συσχετίζει τις παραγώγους της μετρικής με την πυκνότητα ενέργειας. Για να βρούμε τη σαφή έκφραση σε όρους μετρικής, θεωρούμε $R_{00} = R_{0\beta 0}^{\beta}$. Αφού $R_{000}^0 = 0$, χρειαζόμαστε μόνο το R_{0i0}^i . Έχουμε:

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\beta}^i \Gamma_{00}^{\beta} - \Gamma_{0\beta}^i \Gamma_{j0}^{\beta} \quad (6.2.29)$$

Ο δεύτερος όρος είναι μια παράγωγος ως προς το χρόνο, η οποία μηδενίζεται για στατικά πεδία. Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι της μορφής $(\Gamma)^2$, και εφόσον το Γ είναι σε προσέγγιση πρώτης τάξεως στη διαταραχή της μετρικής, αυτοί συνεισφέρουν μόνο σε δεύτερη τάξη, οπότε μπορούν να παραλειφθούν. Μας έχει μείνει το $R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i$. Από αυτό παίρνουμε:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0i0}^i \\ &= \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\beta} (\partial_0 g_{\beta 0} + \partial_0 g_{0\beta} - \partial_{\beta} g_{00}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Αν συγκρίνουμε με την (6.2.28), θα συμπεράνουμε ότι η 00 συνιστώσα της (6.2.16) στο Νευτώνειο όριο προβλέπει:

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho \quad (6.2.31)$$

Εφόσον η (6.1.17) θέτει $h_{00} = -2\Phi$, αυτή είναι η εξίσωση Poisson, αν θέσουμε $\kappa = 8\pi G$.

Άρα η επιλογή μας για τον τανυστή του Einstein ταιριάζει. Με την κανονικοποίηση που επιλέξαμε, έτσι ώστε να προσεγγίσουμε σωστά το Νευτώνειο όριο, μπορούμε να παρουσιάσουμε την **εξίσωση του Einstein** για τη Γενική Σχετικότητα:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (6.2.32)$$

Αυτό που εκφράζει, είναι το πώς η καμπυλότητα του χωροχρόνου αντιδρά στην παρουσία ενέργειας και ορμής.

6.3. Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της Γενικής Σχετικότητας είναι ότι η πηγή του βαρυτικού πεδίου είναι ο συνολικός τανυστής ενέργειας-ορμής. Στη μη-βαρυτική φυσική, μετρήσιμες είναι μόνο οι μεταβολές στην ενέργεια από μία κατάσταση σε άλλη. Για παράδειγμα, η κίνηση ενός σωματιδίου με δυναμική ενέργεια $V(x)$ είναι ακριβώς η ίδια με ένα σωματίδιο ενέργειας $V(x) + V_0$ για οποιαδήποτε σταθερά V_0 . Παρόλα αυτά, στη βαρύτητα ενδιαφέρει η τιμή της ενέργειας, όχι οι διαφορές μεταξύ καταστάσεων.

Αυτή η συμπεριφορά ανοίγει την πιθανότητα της *ενέργειας κενού*: μια πυκνότητα ενέργειας, χαρακτηριστική του κενού χώρου. Μια ιδιότητα που θέλουμε να επιδεικνύει το κενό, είναι ότι δεν έχει προτιμώμενη κατεύθυνση: ακόμα και αν ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι αναλλοίωτος υπό μετασχηματισμό Lorentz σε τοπικά αδρανειακές συντεταγμένες, θα είναι δυνατό να υπάρχει

μη μηδενική πυκνότητα ενέργειας. Η αναλλοιώτητα Lorentz σημαίνει ότι ο αντίστοιχος τανυστής ενέργειας-ορμής θα πρέπει να είναι ανάλογος της μετρικής:

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(vac)} = -\rho_{vac}\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (6.3.1)$$

αφού ο μόνος τανυστής, αναλλοίωτος υπό μετασχημό Lorentz, είναι ο $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Αυτό γενικεύεται από αδρανειακές συντεταγμένες σε αυθαίρετες:

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \quad (6.3.2)$$

Συγκρίνοντάς το με τον τανυστή ενέργειας-ορμής τέλειου ρευστού $T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu}$, βλέπουμε ότι το κενό μοιάζει με ένα τέλειο ρευστό με μια ισότροπη πίεση με αντίθετο πρόσημο από την πυκνότητα ενέργειας:

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (6.3.3)$$

Η πυκνότητα ενέργειας θα πρέπει να είναι σταθερή στο χωρόχρονο, εφόσον μια απόκλιση δε θα ήταν αναλλοίωτη υπό μετασχημό Lorentz.

Αν διαχωρίσουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής στο μέρος της ύλης $T_{\mu\nu}^{(M)}$ και στο μέρος του κενού $T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$, η εξίσωση του Einstein είναι:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (6.3.4)$$

Σύντομα, αφού εισήγαγε τη ΓΘΣ, ο Einstein προσπάθησε να βρει ένα στατικό κοσμολογικό μοντέλο, εφόσον αυτό φαινόταν να υπονοούν οι σύγχρονες του αστρονομικές παρατηρήσεις. Το αποτέλεσμα ήταν το στατικό σύμπαν Einstein. Για την επίλυση της εξίσωσης πεδίου με μια πηγή ύλης, στα πλαίσια αυτής της στατικής κοσμολογίας, ήταν απαραίτητη η εισαγωγή ενός νέου όρου, που ονομάστηκε *κοσμολογική σταθερά*, Λ , η οποία εισήχθη ως:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (6.3.5)$$

Συγκρίνοντάς τη με την εξίσωση (6.3.4), βλέπουμε ότι η κοσμολογική σταθερά είναι ισοδύναμη με την εισαγωγή μιας πυκνότητας ενέργειας κενού:

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (6.3.6)$$

Ο ΧΩΡΟΧΡΟΝΟΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΜΑΖΑ

Οι εξισώσεις του Einstein είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν τη γενική επίλυσή τους. Εν τούτοις, αν θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές λογικές συμμετρίες, προερχόμενες από φυσικές παραδοχές τότε είναι δυνατή η εύρεση λύσεων που μπορούν να αναπαριστούν το χωρόχρονο πέριξ και εντός αστρικών αντικειμένων που παρατηρούμε. Τέτοιες παραδοχές είναι για παράδειγμα ότι η πηγή του πεδίου είναι σφαιρικά συμμετρική ή αξονικά συμμετρική, είτε ότι ο χωρόχρονος είναι επίπεδος μακριά από την πηγή.

Με βάση αυτά, έχουν δοθεί σημαντικές λύσεις των εξισώσεων Einstein, η σημαντικότερη εκ των οποίων είναι η απλούστερη, η σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση Schwarzschild.

7.1. ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Ο Schwarzschild αναζήτησε τη μετρική $g_{\mu\nu}$ που αντιπροσωπεύει το στατικό, σφαιρικά συμμετρικό βαρυτικό πεδίο στον κενό χώρο που περιβάλλει κάποιο σφαιρικό αντικείμενο μεγάλης μάζας, όπως ένα άστρο. Έτσι, ένα καλό σημείο εκκίνησης για εμάς, θα είναι η κατασκευή της γενικότερης μορφής της μετρικής για ένα στατικό χωρόχρονο, χωρικά ισότροπο.

Ας ορίσουμε αρχικά το *στατικό* χωρόχρονο: είναι ένας χωρόχρονος ο οποίος για μία χρονοειδή συντεταγμένη x^0 έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) όλες οι συνιστώσες $g_{\mu\nu}$ είναι ανεξάρτητες της x^0 .
- (2) το στοιχείο γραμμής είναι αναλλοίωτο υπό το μετασχηματισμό $x^0 \rightarrow -x^0$.

Ένας χωρόχρονος που ικανοποιεί την πρώτη αλλά όχι και τη δεύτερη ιδιότητα ονομάζεται *σταθερός*.

Έτσι, ξεκινώντας από τη γενική έκφραση για το στοιχείο γραμμής:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.1.1)$$

θα αναζητήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ όπου η μετρική $g_{\mu\nu}$ θα είναι στατική και *ισότροπη*, δηλαδή όπου το ds^2 εξαρτάται μόνο από τις υπό περιστροφές αναλλοίωτες χωροειδείς συντεταγμένες x^i .

Θα υποθέσουμε προσεγγιστικά, ότι οι συντεταγμένες (t, x, y, z) ενός γεγονότος στο βαρυτικό πεδίο που θα θεωρήσουμε, μπορούν να ερμηνευτούν φυσικά ως χρόνος και ορθογώνιες καρτεσιανές. Στη συνέχεια, θα αναζητήσουμε μία μετρική, η οποία εκφράζεται σε αυτές τις συντεταγμένες, θα είναι form invariant (μορφικά αναλλοίωτη, δηλαδή οι $\bar{g}_{\mu\nu}$ δεν είναι οι ίδιες συναρτήσεις ως προς \bar{x}^μ με τις $g_{\mu\nu}$ ως προς x^μ) ως προς την ομάδα μετασχηματισμών που μπορούν να

ερμηνευτούν φυσικά ως περιστροφές των αξόνων $Oxyz$ -το t δεν μετασχηματίζεται-. Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι οι χωρικές συντεταγμένες x^i μπορούν να οριστούν έτσι ώστε η μετρική $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$ να είναι form invariant υπό την ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών $\bar{x} = A\bar{x}$ όπου $\bar{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$, $\bar{\bar{x}} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)^T$ και $AA^T = I$. Μια τέτοια μετρική είναι *σφαιρικά συμμετρική* ως προς το O .

Τα αναλλοίωτα μεγέθη έως δευτέρου βαθμού ως προς τα διαφορικά των συντεταγμένων θα είναι για αυτή την ομάδα μετασχηματισμών:

$$\bar{x} \cdot \bar{x} \equiv r^2, \quad d\bar{x} \cdot d\bar{x}, \quad \bar{x} \cdot d\bar{x}$$

δηλαδή:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3, \quad (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (7.1.2)$$

τα οποία στις πολικές συντεταγμένες:

$$x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \vartheta$$

θα είναι:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \rightarrow r^2 \quad (7.1.3)$$

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 \rightarrow r dr \quad (7.1.4)$$

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \rightarrow dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (7.1.5)$$

Καταλήγουμε στο ότι τα μεγέθη:

$$r \quad dr, \quad d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (7.1.6)$$

είναι αναλλοίωτα. Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενικότερη μετρική με σφαιρική συμμετρία:

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dt dr - C(t, r) dr^2 - D(t, r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (7.1.7)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το r με τη νέα συντεταγμένη r' σύμφωνα με την εξίσωση μετασχηματισμού $\bar{r}^2 = D(t, r)$:

$$ds^2 = A(t, \bar{r}) dt^2 - B(t, \bar{r}) dt d\bar{r} - C(t, \bar{r}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (7.1.8)$$

Εισάγουμε επίσης μια νέα χρονοειδή συντεταγμένη \bar{t} που ορίζεται:

$$d\bar{t} = \Phi(t, \bar{r}) \left[A(t, \bar{r}) dt - \frac{1}{2} B(t, \bar{r}) d\bar{r} \right] \quad (7.1.9)$$

όπου $\Phi(t, r)$ είναι ένας παράγοντας ολοκλήρωσης που κάνει το δεξί μέλος ακριβές διαφορικό. Τετραγωνίζοντας, παίρνουμε:

$$d\bar{t}^2 = \Phi^2 \left(A^2 dt^2 - AB dt d\bar{r} + \frac{1}{4} B^2 d\bar{r}^2 \right) \quad (7.1.10)$$

από το οποίο βρίσκουμε:

$$A dt^2 - B dt d\bar{r} = \frac{1}{A\Phi^2} d\bar{t}^2 - \frac{B}{4A} d\bar{r}^2 \quad (7.1.11)$$

Έτσι, ορίζοντας τις νέες συναρτήσεις $\bar{A} = 1/(A\Phi^2)$ και $\bar{B} = C + B/(4A)$ η μετρική μας διαγωνοποιείται και παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \bar{A}(\bar{t}, \bar{r}) d\bar{t}^2 - \bar{B}(\bar{t}, \bar{r}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2) \quad (7.1.12)$$

Δεν χρειάζεται να διατηρήσουμε τα bars στις μεταβλητές, οπότε μπορούμε να γράψουμε τη μετρική ως:

$$ds^2 = A(t, r) dt^2 - B(t, r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.1.13)$$

Το τελικό βήμα για να φτάσουμε στη γενικότερη σταθερή ισότροπη μετρική είναι τετριμμένο. Απαιτούμε να είναι οι μετρικές συναρτήσεις $g_{\mu\nu}$ ανεξάρτητες της χρονοειδούς συντεταγμένης, που απλά σημαίνει ότι τα A και B πρέπει να είναι συναρτήσεις μόνο του r:

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.1.14)$$

7.2. Η ΛΥΣΗ SCWARZSCHILD

Οι συναρτήσεις $A(r)$ και $B(r)$ στη γενική στατική, ισότροπη μετρική καθορίζονται λύνοντας τις εξισώσεις πεδίου Einstein. Μας ενδιαφέρει η γεωμετρία του χωροχρόνου στο εξωτερικό μιας σφαιρικής κατανομής μάζας, οπότε πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις στο κενό, απαίτηση η οποία ικανοποιείται από το μηδενισμό του τανυστή Ricci:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (7.2.1)$$

Ο τανυστής Ricci μπορεί να γραφεί ως:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (7.2.2)$$

Η συσχετισμένη συνοχή (affine connection), όπως έχουμε αναλύσει, εκφράζεται ως προς τη μετρική $g_{\mu\nu}$ ως:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (7.2.3)$$

Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, λοιπόν, θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες της μετρικής $g_{\mu\nu}$ με χρήση του στοιχείου γραμμής (7.1.14). Οι μη μηδενικές συνιστώσες των $g_{\mu\nu}$ και $g^{\mu\nu}$ είναι:

$$\begin{aligned} g_{00} &= A(r) & g^{00} &= 1/A(r) \\ g_{11} &= -B(r) & g^{11} &= -1/B(r) \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= -1/r^2 \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta & g^{33} &= -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι ανταλλοιώτες συνιστώσες της μετρικής είναι απλά οι αντίστροφες των συναλλοιώτων, εφόσον η μετρική είναι διαγωνοποιημένη.

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στην (7.2.3) βρίσκουμε τις εκφράσεις που δίνονται στον πίνακα (1), με όλες τις υπολοιπες συνιστώσες να μηδενίζονται:

$\Gamma^0_{00} = 0$		
$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}g^{i\rho}\partial_\rho g_{00}$	\Rightarrow	$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dA(r)}{dr}$
$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_i g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho i} - \partial_\rho g_{0i}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_i g_{00}$	\Rightarrow	$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr}$
$\Gamma^0_{ij} = 0$		
$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}g^{i\rho}(\partial_i g_{\rho i} + \partial_i g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ii}) = \frac{1}{2}g^{ii}\partial_i g_{ii}$	\Rightarrow	$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr}$
$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})$	\Rightarrow	$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B(r)}$
$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33}$	\Rightarrow	$\Gamma^1_{33} = -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)}$
$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22}$	\Rightarrow	$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33}$	\Rightarrow	$\Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33}$	\Rightarrow	$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33}$	\Rightarrow	$\Gamma^3_{32} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1. Οι συνιστώσες της (7.2.3) για τη γενική, στατική, ισότροπη μετρική

Συνοπτικά, μόνο 9 από τις 40 ανεξάρτητες συνιστώσες της σύνδεσης είναι μη-μηδενικές :

$$\begin{array}{lll} \Gamma^0_{01} = A'/(2A) & \Gamma^1_{00} = A'/(2B) & \Gamma^1_{11} = B'/(2B) \\ \Gamma^1_{22} = -r/B & \Gamma^1_{33} = -(r \sin^2 \theta) & \Gamma^2_{12} = 1/r \\ \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^3_{13} = 1/r & \Gamma^3_{23} = \cot \theta \end{array}$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα στην (7.2.3) έτσι ώστε να καταλήξουμε στις συνιστώσες $R_{\mu\nu}$ του τανυστή Ricci. Οι μη-διαγώνιες συνιστώσες του είναι μηδενικές, οπότε βρίσκουμε ότι οι διαγώνιες είναι:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} \quad (7.2.4)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} \quad (7.2.5)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (7.2.6)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (7.2.7)$$

Έτσι, οι εξισώσεις πεδίου στο κενό προκύπτουν με την εξίσωση των εκφράσεων (7.2.4-7.2.7) με το μηδέν. Από τις τέσσερις εξισώσεις, βέβαια, οι τρεις πρώτες μας είναι χρήσιμες καθώς η τέταρτη κατά ένα μέρος της, επαναλαμβάνει την πληροφορία που περιλαμβάνεται στην τρίτη.

Προσθέτουμε την (7.2.5) με την (7.2.4), πολλαπλασιασμένη με B/A . Προκύπτει:

$$A'B + AB' = 0 \quad (7.2.8)$$

δηλαδή:

$$(AB)' = 0 \quad (7.2.9)$$

άρα $AB = \text{σταθ.} = a$. Αντικαθιστώντας με $B = a/A$ στην (7.2.6) έχουμε $A + rA' = a$, το οποίο μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d(rA)}{dr} = a \quad (7.2.10)$$

Με ολοκλήρωση, η εξίσωση αυτή δίνει $rA = a(r + k)$, όπου k είναι μια άλλη σταθερά ολοκλήρωσης. Έτσι, οι συναρτήσεις $A(r)$ και $B(r)$ δίνονται από:

$$A(r) = a \left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1} \quad (7.2.11)$$

Φαίνεται ότι η σταθερά ολοκλήρωσης k πρέπει να αντιπροσωπεύει με κάποιο τρόπο τη μάζα που παράγει το βαρυτικό πεδίο. Μπορούμε να προσδιορίσουμε το k (και το a) θεωρώντας το όριο του ασθενούς πεδίου, στο οποίο απαιτούμε:

$$\frac{A(r)}{c^2} \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (7.2.12)$$

όπου Φ είναι το νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό. Επιπρόσθετα, στο ασθενές πεδίο, το r μπορεί να ταυτιστεί σε πολύ καλή προσέγγιση ως ακτινική απόσταση. Για μια σφαιρικά συμμετρική μάζα M , λοιπόν, έχουμε $\Phi = -GM/r$, οπότε $k = -2GM/c^2$ και $a = c^2$. Τελικά, η *μετρική Schwarzschild* για τον κενό χωρόχρονο στο εξωτερικό ενός σφαιρικού σώματος μάζας M είναι (για μονάδες $c = 1$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (7.2.13)$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μετρική για να διερευνήσουμε τη φυσική στη γειτονιά ενός σφαιρικού αντικειμένου μάζας M , και συγκεκριμένα τις τροχιές σωματιδίων και φωτονίων σε ελεύθερη πτώση. Η μετρική ισχύει μέχρι την επιφάνεια της σφαίρας, από όπου δεν ισχύουν πλέον οι εξισώσεις πεδίου στον κενό χώρο. Προφανώς η συνάρτηση απειρίζεται στο $r = 2\mu$, το οποίο είναι γνωστό ως *ακτίνα Schwarzschild*.

Μέρος 4

ΤΟ ΘΕΡΜΟ BIG BANG

(...) υπάρχει μόνο η Πρώτη Αρχή, εκεί, μες στο μηδέν, δύναμη άπειρη κι απεριόριστη δίχως αρχή και τέλος. Εκείνη την αρχέγονη στιγμή, αυτή η εξωλογική δύναμη, η όλο κραταιότητα, μοναξιά, αρμονία και τελειότητα, ίσως να μην έχει πρόθεση να δημιουργήσει το οτιδήποτε. Αρκείται στον ίδιο τον εαυτό της. Και κατόπιν δημιουργείται “κάτι”. Τι; Δεν ξέρω. Ένας στεναγμός του Τίποτα. Ίσως ένα είδος συμβάντος του μηδενός, μια διακύμανση του κενού: σε μια φανταστική στιγμή, ο Δημιουργός έχοντας επίγνωση πως είναι ο Ων μες στην ολότητα του τίποτα, θα αποφασίσει να δημιουργήσει έναν καθρέφτη για την ίδια του την ύπαρξη. Η ύλη, το σύμπαν: είναι οι αντανakλάσεις της συνείδησής του, η τελειωτική ρήξη με την ωραία αρμονία του αρχέγονου μηδενός.

Jean Guiton - Dieu et la Science

Η ΗΧΩ ΕΝΟΣ ΚΑΥΤΟΥ ΠΑΡΕΛΘΟΝΤΟΣ

Αν και στη δεκαετία του '20 διατυπώθηκαν όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της Κοσμολογίας που θεωρεί τη Μεγάλη Έκρηξη ως αρχή του Σύμπαντος, χάρη στις εργασίες των Friedmann, Lemaitre και Hubble, η πρόοδος κατά τη διάρκεια των δεκαετιών που ακολούθησαν ήταν αργή. Το 1948 μια λογική, εναλλακτική θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης προτάθηκε από τους Bondi, Gold και Hoyle. Γνωστή με το όνομα **θεωρία σταθεράς κατάστασης**, εισήγαγε την *απόλυτη κοσμολογική αρχή*, σύμφωνα με την οποία το Σύμπαν κατά μέσο όρο δεν είναι μόνο ομογενές και ισότροπο (Κοσμολογική Αρχή) αλλά και χρονικά αμετάβλητο.

Ακόμα και ο Einstein είχε υποκύψει στη γοητεία ενός Σύμπαντος το οποίο κατά μέσο όρο δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, πριν από την παρατηρησιακή ανακάλυψη της διαστολής του από τον Hubble. Το 1965 όμως, η ανακάλυψη της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου από τους Penzias και Wilson ήταν αυτή που έδωσε τη “χαριστική βολή” στη θεωρία σταθεράς κατάστασης. Ας δούμε όμως συγκεκριμένα τις δύο ανακαλύψεις που εδραίωσαν τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης ως το κυρίαρχο κοσμολογικό μοντέλο.

8.1. Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΤΩΝ ΓΑΛΑΞΙΩΝ

Ο Hubble ήταν ο πρώτος που κατάφερε να αναλύσει το Νεφέλωμα της Ανδρομέδας σε διακρισίμους αστέρες. Παρατηρώντας τη φαινόμενη λαμπρότητα (ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας στο κάτοπτρο του τηλεσκοπίου ανά μονάδα χρόνου) και εκτιμώντας την απόλυτη λαμπρότητα (ολική ενέργεια που εκπέμπεται από έναν αστέρα ανά μονάδα χρόνου) των Κηφείδων του Νεφελώματος της Ανδρομέδας μπόρεσε να προσδιορίσει την απόστασή τους, κάνοντας χρήση του κανόνα ότι η φαινόμενη είναι ανάλογη της απόλυτης λαμπρότητας και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Έχοντας μετρήσει τέτοιες αποστάσεις ο Hubble πρότεινε την ιδέα πως όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται από τη Γη -και άρα από το δικό μας γαλαξία- με μια ταχύτητα \bar{v} ανάλογη της απόστασης που τους χωρίζει \bar{r} , δηλαδή:

$$\bar{v} = H \cdot \bar{r} \quad (8.1.1)$$

όπου η ποσότητα H ονομάζεται *σταθερά Hubble*. Είναι σταθερά υπό την έννοια ότι δεν εξαρτάται από το μέτρο ή τη φορά του \bar{r} , αν και μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο.

Είναι εντυπωσιακό ότι η εξίσωση Hubble δεν είναι παρά μια μαθηματική συνέπεια της κοσμολογικής αρχής, η οποία λέει ότι το σύμπαν θα πρέπει να φαίνεται το ίδιο σε παρατηρητές οποιουδήποτε γαλαξία, σε όποια διεύθυνση και αν κοιτάζουν. Τότε αναπόφευκτα η σχετική ταχύτητα κάθε δύο γαλαξιών θα πρέπει να είναι ανάλογη της σχετικής τους απόστασης.

Ας θεωρήσουμε τρεις γαλαξίες A, B, C σε μια ευθεία χάριν απλότητας, όπως δείχνει το Σχήμα (8.1.1). Έστω ότι απόσταση μεταξύ A και B είναι ίση η απόσταση μεταξύ B και C. Όποια κι αν είναι η ταχύτητα του B όπως παρατηρείται από τον A, η κοσμολογική αρχή απαιτεί ότι ο C θα πρέπει να έχει την ίδια σχετική ταχύτητα ως προς τον B. Αλλά ο C, που βρίσκεται σε διπλάσια απόσταση από τον A από ότι ο B, κινείται δύο φορές πιο γρήγορα σε σχέση με τον A από ότι ο B.

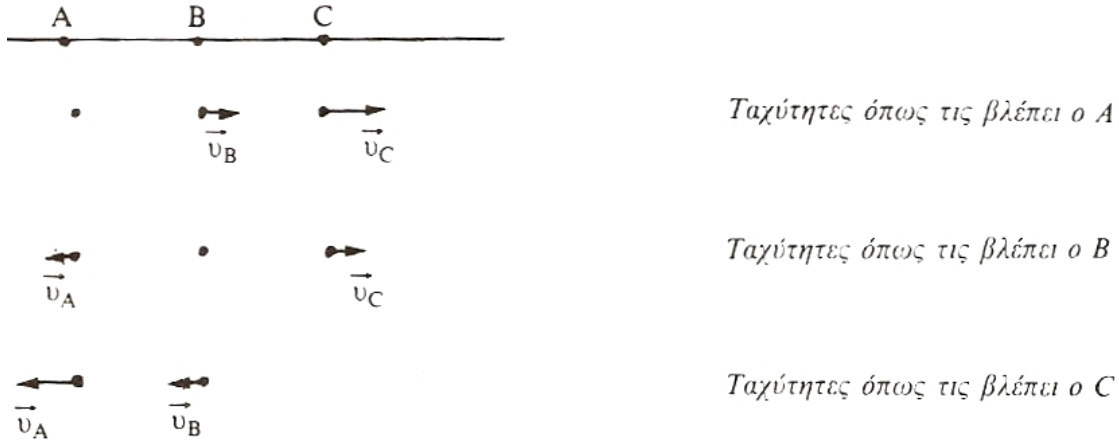


FIGURE 8.1.1. Η σχετική ταχύτητα των γαλαξιών είναι ανάλογη της σχετικής τους απόστασης.

8.2. Η ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

Το πρώιμο Σύμπαν είναι ένα θερμό πλάσμα ακτινοβολίας και ύλης. Τα φωτόνια είναι ένα βασικό συστατικό της νηπιακής ηλικίας του Σύμπαντος, στην αρχική φάση δε, είναι σε συνεχή αλληλεπίδραση με την ύλη εκπεμπόμενα και απορροφώμενα από αυτή. Ο χρόνος όμως κυλάει, το Σύμπαν διαστέλλεται και ταυτόχρονα η θερμοκρασία του συνεχώς πέφτει. Φτάνουμε έτσι σε μια εποχή όπου το Σύμπαν είναι περίπου $t = 10000 \text{ yrs}$ και αρκετα κρύο, με θερμοκρασία $T \approx 3000 \text{ K}$. Στο μεσοδιάστημα, καθώς η θερμοκρασία πέφτει, έχουν σχηματιστεί οι πρώτοι σταθεροί πυρήνες και τώρα σχηματίζονται τα πρώτα άτομα των στοιχείων. Ηλεκτρικά όμως, τα άτομα είναι ουδέτερα και έτσι η αλληλεπίδραση των φωτονίων της ακτινοβολίας με αυτά είναι ασθενέστερη από πριν. Από εκείνη τη στιγμή μπορούμε να λέμε ότι η ακτινοβολία αποδεσμεύεται από την ύλη και ότι παύει πλέον να αλληλεπιδρά με αυτή. Η εποχή όπου τα φορτισμένα πυρηνικά ιόντα και τα ηλεκτρόνια σχημάτισαν ουδέτερα άτομα ονομάζεται *εποχή αποσύνδεσης φωτονίων* (photon-decoupling time). Τα ελεύθερα θερμικά φωτόνια επιβίωσαν ως η *Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου* (CMB) που ανιχνεύουμε σήμερα και υπακούουν σε φάσμα ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

Κατά την εποχή της αποσύνδεσης η θερμική ενέργεια των φωτονίων μόλις φτάνει κάτω από την ενέργεια κατωφλίου που απαιτείται για τον ιονισμό των μόλις σχηματισμένων ατόμων. Η επικρατούσα αντίδραση κατά την περίοδο των ιόντων είναι:



η οποία σταματά να συμβαίνει από το δεξί στο αριστερό μέλος όταν η ενέργεια των φωτονίων γίνεται μικρότερη της ενέργειας ιονισμού. Όλα τα φορτισμένα ηλεκτρόνια και ιόντα συνδέονται μεταξύ τους ως σταθερά, ουδέτερα άτομα.

Θα περιμέναμε φυσικά η θερμοκρασία κατά την αποσύνδεση $k_B T_\gamma = O(eV)$ να είναι συγκρίσιμη με την τυπική ατομική ενέργεια σύνδεσης. Στην πραγματικότητα, ένας λεπτομερής υπολογισμός δίνει:

$$k_B T_\gamma \approx 0.26 \text{ eV} \quad (8.2.2)$$

Απλοποιώντας τη σταθερά Boltzmann k_B , αυτή η ενέργεια αντιστοιχεί σε θερμοκρασία φωτονίων:

$$T_\gamma \approx 3000 \text{ K} \quad (8.2.3)$$

Σύντομα, μετά την αποσύνδεση, το Σύμπαν γίνεται διαπερατό στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Από εκεί και πέρα, τα φωτόνια μπορούν να ταξιδεύουν ελεύθερα στο Σύμπαν, έχοντας το φάσμα μέλανος σώματος που έμεινε αμετάβλητο κατά τη διαστολή. Αυτά τα φωτόνια, ψύχθηκαν σύμφωνα με το νόμο $T \propto a^{-1}$. Έτσι, η κοσμολογία Big Bang προβλέπει ότι τα πρωταρχικά φωτόνια θα είναι διάχυτα σε ολόκληρο το Σύμπαν και ακολουθούν το φάσμα μέλανος σώματος με τωρινή θερμοκρασία:

$$T_{\gamma,0} \approx 2.7 \text{ K} \quad (8.2.4)$$

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι η ανακάλυψη της ακτινοβολίας αυτής θα ήταν δικαιολογημένα μία από τις μεγαλύτερες στιγμές της σύγχρονης κοσμολογίας, ισοδύναμη με την ανακάλυψη του Hubble. Η στιγμή αυτή ήρθε, το 1964, όταν οι φυσικοί A. Penzias και R. Wilson συνέλαβαν με την κεραία τους μια ακτινοβολία με το προβλεπόμενο μήκος κύματος. Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες της ακτινοβολίας που συνέλαβαν, και κυρίως η ισοτροπία και η ομογένειά της έδειχναν ξεκάθαρα ότι αυτή δεν μπορούσε να προέρχεται από μια εντοπισμένη πηγή στο χώρο, αλλά θα έπρεπε να είναι ομοιόμορφα διάχυτη σε όλο το σύμπαν.

ΤΟ ΙΣΟΤΡΟΠΟ ΣΥΜΠΑΝ

9.1. Η ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΧΗ

Η Κοσμολογία είναι η μελέτη της δομής και συμπεριφοράς του Σύμπαντος σε μεγάλη κλίμακα. Όταν κοιτάζουμε το νυχτερινό ουρανό, παρατηρούμε ότι τα άστρα είναι ομαδοποιημένα σε μια κατανομή μεγάλης πυκνότητας, το Γαλαξία μας. Σε λίγο μεγαλύτερη κλίμακα βλέπουμε ότι ο Γαλαξίας μας ανήκει σε μια μικρή ομάδα γαλαξιών, όπου μάλιστα μαζί με τον γειτονικό του γαλαξία της Ανδρομέδας κυριαρχούν σε μάζα. Σε ακόμα μεγαλύτερη κλίμακα βλέπουμε ότι η ομάδα αυτή είναι μέρος ενός γιγαντιαίου συμπλέγματος γαλαξιών, συγκεντρωμένο στον αστερισμό της Παρθένου. Σε μικρή κλίμακα η ύλη είναι κατανομημένη με πολύ ανομοιόμορφο τρόπο, όμως καθώς το μελετάμε σε όλο και μεγαλύτερες κλίμακες, η κατανομή δείχνει όλο και πιο ομοιόμορφη. Οι παρατηρήσεις, μάλιστα, υποδεικνύουν πως για κάθε δεδομένη στιγμή, οι γαλαξίες είναι κατά μέσο όρο ομοιόμορφα διασκορπισμένοι στο Σύμπαν. Αυτό σημαίνει πως αν θεωρήσουμε ένα μέρος του Σύμπαντος συγκριτικά μεγαλύτερο από την τυπική απόσταση μεταξύ γειτονικών γαλαξιών (τάξη μεγέθους $10^6 ly$), τότε για δεδομένο χρόνο, η πυκνότητα γαλαξιών σε αυτό το μέρος είναι περίπου η ίδια με την πυκνότητα οποιουδήποτε άλλου μέρους με τον ίδιο όγκο. Αυτό είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι το Σύμπαν είναι *ισότροπο*. Αν επίσης δεν έχει προτιμώμενο κέντρο, η ισοτροπία συνεπάγεται *ομογένεια*. Έχουμε, λοιπόν, καλούς φυσικούς λόγους να μελετάμε απλά κοσμολογικά μοντέλα στα οποία το Σύμπαν θεωρείται ομογενές και ισότροπο. Υποθέτουμε δηλαδή, ότι ισχύει η *κοσμολογική αρχή*, σύμφωνα με την οποία **για δεδομένο χρόνο, το Σύμπαν δείχνει το ίδιο από όλες τις θέσεις στο χώρο και όλες οι κατευθύνσεις στο χώρο, σε κάθε σημείο είναι ισοδύναμες.**

9.1.1. ΟΙ ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΙΣΟΤΡΟΠΙΑ.

Χαρτογραφώντας την ύλη.

Τις τελευταίες δεκαετίες συγκεντρώθηκαν πολλές ενδείξεις που υποστηρίζουν την προηγούμενη άποψη για την μεγάλη κλίμακας δομή. Μία από τις βασικότερες προκύπτει από τις διάφορες έρευνες για τους γαλαξίες, σε μεγάλη κλίμακα. Από τις πιο πρόσφατες είναι η two Degree Field Survey (2dF) και η Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Η έρευνα 2dF μας παρείχε μια λεπτομερή εικόνα της κατανομής των γαλαξιών και των συμπλεγμάτων σε δύο περιοχές σχήματος “pizza slice”, η καθεμία περίπου με 60 μοίρες εύρος και μερικές μοίρες πάχος, που εκτείνονται σε αποστάσεις έως περίπου $2 \times 10^9 ly$ (Σχήμα 9.1.1). Καταγράφηκαν και πιο μακρινοί γαλαξίες, αλλά το δείγμα δεν ήταν αντιπροσωπευτικό καθώς περιορίστηκε από τη φωτεινότητα των παρατηρούμενων πηγών.

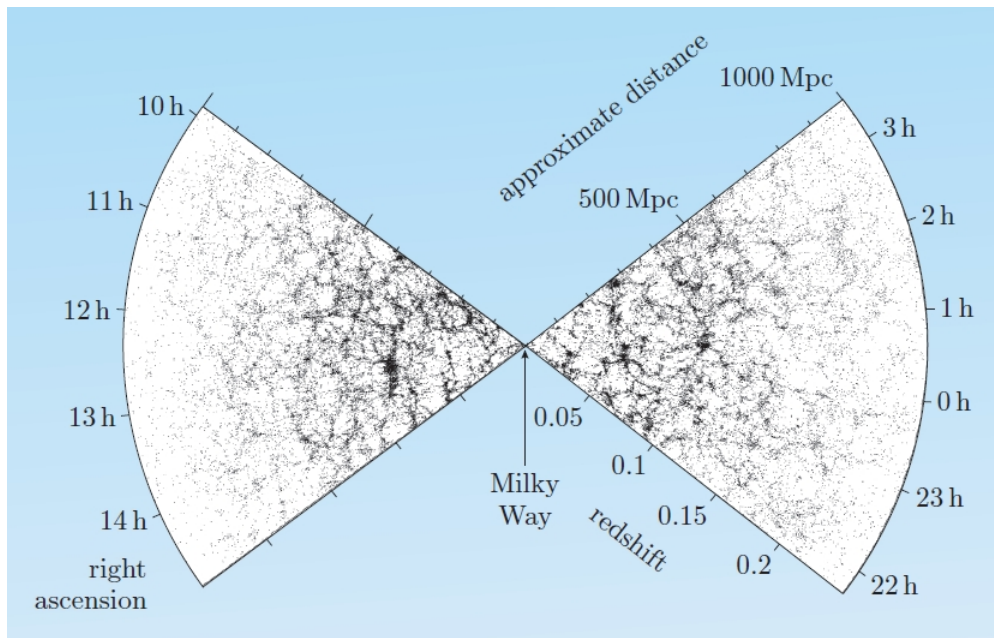


FIGURE 9.1.1. Η κατανομή γαλαξιών, σύμφωνα με την έρευνα 2dF

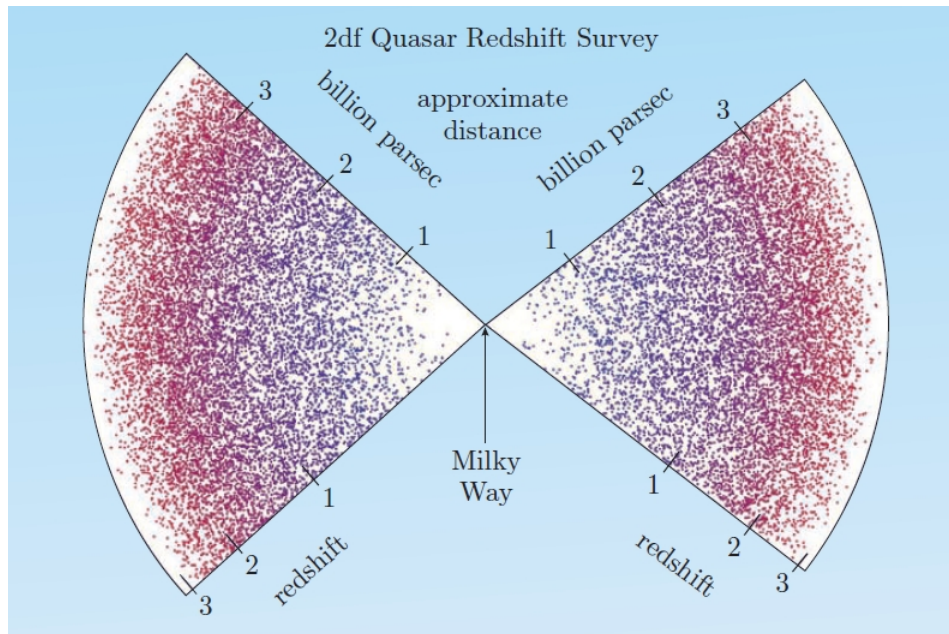


FIGURE 9.1.2. Η κατανομή των quasars σύμφωνα με την έρευνα 2dF

Ένα ειδικό μέρος της έρευνας 2dF αφιερώθηκε στα κβάζαρς (quasars), έτσι ώστε να αποκτήσουμε γνώση και για τα πιο απομακρυσμένα μέρη του Σύμπαντος. Τα quasars είναι κατ' εξοχήν δραστήριοι γαλαξιακοί πυρήνες με πολύ μεγάλη φωτεινότητα, που πιστεύεται ότι προκύπτει από την απελευθέρωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας από ύλη η οποία πέφτει σε μια supermassive μελανή οπή. Αποδεχόμενοι ότι δεν έχει τίποτα το ιδιαίτερο η θέση μας στο Σύμπαν, η ισότροπη

κατανομή κβάρσας που παρατηρούμε είναι ένδειξη ότι αυτά κατανέμονται ισότροπα συνολικά στο χώρο και αυτό είναι επαρκές για να επιβεβαιώσει ότι είναι κατανεμημένα έτσι για δεδομένο χρόνο.

Βλέποντας την Εικόνα (9.1.2) η κατανομή μπορεί να μη δείχνει ομογενής, αλλά αυτό είναι γιατί οι αποστάσεις είναι τόσο ιλιγγιώδεις που τα περισσότερα quasars που καταγράφονται αντιστοιχούν σε σημαντικά πιο πρώιμες εποχές της εξέλιξης του Σύμπαντος, όταν ο μέσος αριθμός quasars ανά μονάδα όγκου ήταν πολύ διαφορετικός από τον τωρινό. Η κατανομή αυτή, λοιπόν, μας παρέχει ενδείξεις της κοσμικής εξέλιξης, όπως επίσης ενδείξεις της ομογένειας και της ισοτροπίας.

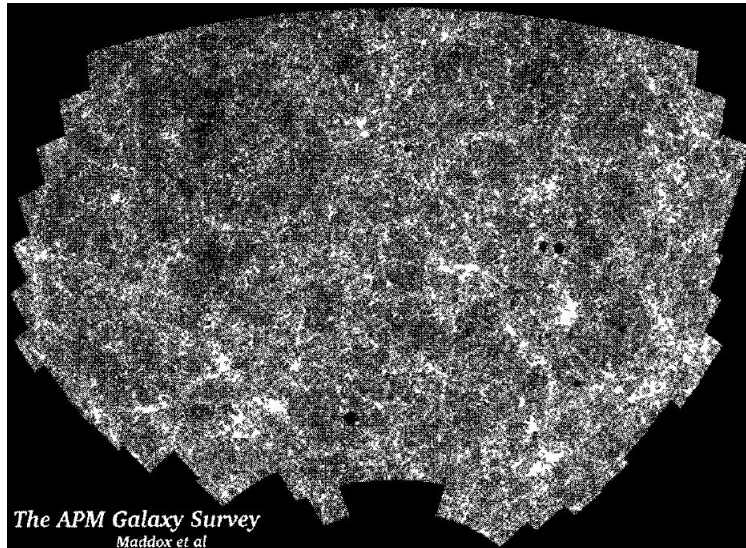


FIGURE 9.1.3. The APM Galaxy Survey

Τέλος, ένας χάρτης των γωνιακών θέσεων των γαλαξιών δίνει ένα χάρτη του σημερινού Σύμπαντος. Η Εικόνα (9.1.3) δείχνει το χάρτη των γαλαξιών της έρευνας A(utomatic) P(ate) M(achine). Μια μεγάλη περιοχή του ουρανού χωρίστηκε σε μικρότερες και στην κάθε μία μετρήθηκε ο αριθμός γαλαξιών με φωτεινότητα από συγκεκριμένη τιμή και πάνω. Η κλίμακα του γκρι αντιπροσωπεύει τον αριθμό αυτό. Η δομή που παρουσιάζεται στην εικόνα έχει προέλθει από την επίδραση της βαρύτητας. Όμως σε μεγάλες κλίμακες η εικόνα αυτή είναι σχεδόν η ίδια προς κάθε κατεύθυνση, δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι το Σύμπαν είναι ισότροπο.

Χαρτογραφώντας την Ακτινοβολία.

Ένα δεύτερο, ισχυρότερο στοιχείο ως προς την ισοτροπία προέρχεται από τις παρατηρήσεις της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB). Αυτή είναι θερμική ακτινοβολία, που σημαίνει ότι μπορεί να χαρακτηριστεί από τη θερμοκρασία της, η οποία στην περίπτωση της CMB είναι περίπου 2.7 K. Η CMB ανακαλύφθηκε στα μέσα της δεκαετίας του '60 και έχει μελετηθεί πάρα πολύ έκτοτε, πιο πρόσφατα από το Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), ένα εξειδικευμένο διαστημικό παρατηρητήριο, το οποίο παρήγαγε τα πρώτα του αποτελέσματα το 2003.

Η CMB έχει προέλευση από το πρώιμο Σύμπαν, και πολλές φορές, εκλαϊκευμένα περιγράφεται ως “η ηχώ του Big Bang”. Καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, ύλη και ακτινοβολία ψύχονται. Μερικές

εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια μετά το Big Bang, η θερμοκρασία μειώθηκε αρκετά ώστε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να δημιουργήσουν με τους πυρήνες ουδέτερη -διαπερατή από την ακτινοβολία- ύλη (κυρίως υδρογόνο και ήλιο). Το φως εκπέμφθηκε την εποχή που η θερμοκρασία ήταν περίπου 3000 K και ταξιδεύει προς εμάς έκτοτε, αποτελώντας τη μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου. Η διαστολή έψυξε την ακτινοβολία μέχρι τη θερμοκρασία 2.73 K. Ένας χάρτης της θερμοκρασίας του CMBR είναι η καλύτερη εικόνα του Big Bang που μπορούμε να έχουμε.

Οι πιο χρήσιμοι χάρτες είναι αυτοί που κατασκευάζονται συναρτήσει της γωνιακής θέσης. Στην παρακάτω εικόνα (9.1.4) βλέπουμε μια σειρά από τρεις χάρτες σε διαφορετικές θερμοκρασιακές κλίμακες. Η πρώτη, απολύτως ομογενής, δείχνει την κατανομή θερμοκρασίας με ανάλυση της τάξεως αρκετά πάνω από 1 mK. Η δεύτερη είναι της τάξεως του mK. Απεικονίζει μια κατανομή που μπορεί να αποδοθεί στο φαινόμενο Doppler εξαιτίας της σχετικής, σε ένα σύστημα αναφοράς, κίνησης στο οποίο η ακτινοβολία είναι εντελώς ισότροπη. Η επίδραση της κίνησης αυτή, αφαιρείται στον τρίτο χάρτη, που είναι της τάξεως μK . Στο κέντρο της εικόνας μπορούμε να δούμε την κατανομή ακτινοβολίας του δικού μας Γαλαξία. Προφανώς το πρώιμο Σύμπαν ήταν εξαιρετικά ισότροπο. Οι διακυμάνσεις, βέβαια, είναι πολύ σημαντικές επειδή έχουν προκύψει από τις αρχικές διακυμάνσεις της πυκνότητας που με την πάροδο του χρόνου και με την επίδραση της βαρυτικής έλξης έγιναν οι σημερινές νησίδες ύλης.

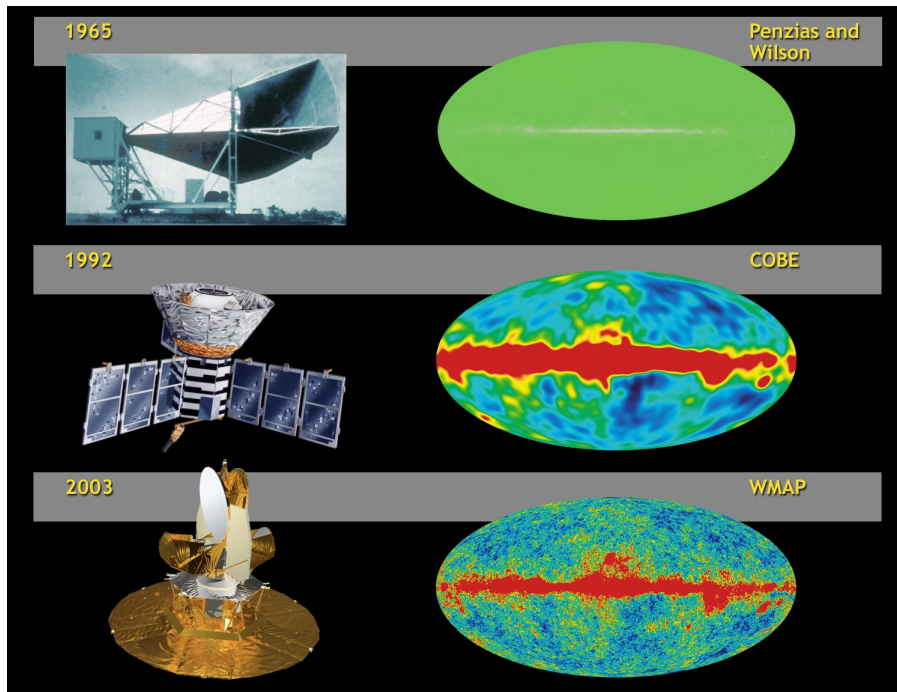


FIGURE 9.1.4. Η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου, σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασιακές κλίμακες.

9.1.2. ΟΙ ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ.

Ένα ισότροπο Σύμπαν (το ίδιο σε κάθε κατεύθυνση) δεν είναι απαραίτητα ομογενές (το ίδιο σε κάθε σημείο). Θα μπορούσαμε να είμαστε στο κέντρο ενός σύμπαντος όπου η πυκνότητα των

γαλαξιών μειώνεται γρήγορα απομακρυνόμενοι από εμάς και παρόλα αυτά η κατανομή τους να φαίνεται ισότροπη. Παρόλα αυτά ένας τρισδιάστατος χάρτης της κατανομής στο χώρο αποκαλύπτει ότι η κατανομή των γαλαξιών είναι κατά προσέγγιση ομογενής σε κλίμακες απόστασης πάνω από μερικές εκατοντάδες *megaparsecs*. Το να κατασκευαστεί ένας τέτοιος χάρτης, σημαίνει ανίχνευση μεγάλων αποστάσεων και το μόνο ενδεικτικό μέγεθος είναι η μετατόπιση προς το ερυθρό. Χρειάζεται το φάσμα και τη θέση πολλών χιλιάδων γαλαξιών και καθώς συνεχίζεται η έρευνα πρέπει να ανιχνεύονται όλο και περισσότεροι γαλαξίες καθώς ο αριθμός τους αυξάνεται εις τον κύβο από την μεταξύ μας απόσταση. Οι έρευνες που γίνονται για την κατασκευή του χάρτη αυτού είναι η 2dF και η Sloan Digital Sky Survey που αναφέραμε πιο πριν. Παρόλο που σε μικρές κλίμακες υπάρχουν συγκεντρώσεις και κενά, σε μεγάλες κλίμακες η κατανομή είναι περίπου ίδια παντού. Αυτό είναι ένδειξη ότι το Σύμπαν είναι ομογενές σε μεγάλες κλίμακες και δεν φαίνεται να βρισκόμαστε σε κάποιο ιδιαίτερο σημείο μέσα σε αυτό.

ΤΟ ΔΙΑΣΤΕΛΛΟΜΕΝΟ ΣΥΜΠΑΝ

10.1. Η ΘΕΡΜΗ ΜΕΓΑΛΗ ΕΚΡΗΞΗ

Το μοντέλο του Θερμού Big Bang (HBB) βασίζεται σε δύο υποθέσεις, ότι το Σύμπαν έχει διασταλεί και σταδιακά ψυχθεί από μια αρχική κατάσταση άπειρης θερμοκρασίας και πυκνότητας και ότι, σε μεγάλες κλίμακες, το σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο. Και οι δύο υποθέσεις αιτιολογούνται από τις παρατηρήσεις της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB), η οποία είναι κατάλοιπο από την προηγούμενη θερμή εποχή. Η κατανομή του CMB στο παρατηρήσιμο σύμπαν είναι ομογενής και ισότροπη, και είναι ενιαία με ακρίβεια 1 προς 10^4 σε γωνιακές κλίμακες από $10''$ έως 180° .

Παρόλο που η ύλη είναι κατανεμημένη λιγότερο ομοιογενώς από το CMB, αναμένεται ότι σε πολύ μεγάλη κλίμακα είναι ομογενής. Ο μεγάλος βαθμός ανομοιογένειας που παρατηρείται σε μικρές κλίμακες (συγκέντρωση ύλης σε νησίδες, δηλαδή άστρα, γαλαξίες και συστήματα γαλαξιών) ερμηνεύεται ως ανωμαλίες που επεκτάθηκαν υπό την επίδραση της βαρύτητας.

Το μοντέλο αυτό είναι εξαιρετικά επιτυχημένο, καθώς είναι σε θέση να προβλέψει τα ακόλουθα παρατηρησιακά δεδομένα :

- (1) Τη διαστολή του σύμπαντος από τον Hubble
- (2) Την ύπαρξη και το φάσμα της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου
- (3) Την αφθονία ελαφρών στοιχείων
- (4) Ότι η προβλεπόμενη ηλικία του σύμπαντος είναι συγκρίσιμη με τις μετρήσεις της ηλικίας αντικειμένων μέσα σε αυτό
- (5) Ότι δεδομένων των ανωμαλιών του CMBR, υπάρχει ικανοποιητική εξήγηση για την ανάπτυξη της δομής στο σύμπαν

10.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10.2.1. Η μετρική Robertson-Walker.

Η θεωρία του Θερμού Big Bang βασίζεται στην *Κοσμολογική Αρχή*, που υποστηρίζει ότι το Σύμπαν θα πρέπει να φαίνεται το ίδιο σε όλους τους παρατηρητές του. Αυτό μας λέει ότι το Σύμπαν πρέπει να είναι ομογενές (ίδιο σε κάθε σημείο του) και ισότροπο (με σφαιρική συμμετρία ως προς κάποιο σημείο). Κι αυτό με τη σειρά του μας λέει ποια μετρική θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του. Η συμμετρία του ομογενούς και ισότροπου χωρόχρονου μελετήθηκε από τους Friedmann, Robertson και Walker (FRW) και κωδικοποιείται με την μετρική Robertson-Walker. Ας επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε αυτή τη μετρική. Θα χειριστούμε τους γαλαξίες ως

σημειακές μάζες που απαρτίζουν ένα “γαλαξιακό αέριο” και μάλιστα, θα υποθέσουμε ότι το αέριο αυτό έχει τη συμπεριφορά τέλειου ρευστού. Το σύστημα αναφοράς μας καθορίζεται από ρολόγια που κινούνται μαζί με το αέριο, δείχνοντας όλα χρόνο x^0 . Οι χωρικές συντεταγμένες του κάθε ρολογιού δεν αλλάζουν, οπότε το σύστημα θεωρείται “συν-κινούμενο” (co-moving) με το αέριο. Βλέποντας το σύμπαν υπό οποιοδήποτε από τα ρολόγια, αυτό φαίνεται ισότροπο, δηλαδή είναι αδύνατο να εντοπίσουμε κάποια διεύθυνση με ειδικές ιδιότητες.

Ας θεωρήσουμε το μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ σε αυτό το σύστημα x^ρ . Έστω ότι εκτελούμε ένα μετασχηματισμό των χωρικών συντεταγμένων, εναλλάσσοντας τα ρολόγια ενώ αφήνουμε αμετάβλητες τις ενδείξεις τους. Ο μετασχηματισμός θα έχει τη μορφή:

$$\bar{x}^0 = x^0, \quad \bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3) \quad (10.2.1)$$

Ο μετασχηματισμένος μετρικός τανυστής θα είναι $\bar{g}_{\mu\nu}$, οπότε ο μετασχηματισμός των χωρικών συντεταγμένων γίνεται:

$$\bar{g}_{0i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^i} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^i} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} g_{0j} \quad (10.2.2)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι οι συνιστώσες g_{0i} συμπεριφέρονται σαν ένα συναλλοίωτο διάνυσμα ως προς το χωρικό μετασχηματισμό καθορίζοντας έτσι μια συγκεκριμένη διεύθυνση σε κάθε σημείο του χώρου. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας για ισοτροπία, γι αυτό και καταλήγουμε στο ότι $g_{0i} = 0$ σε κάθε σημείο του χώρου. Έτσι,

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (10.2.3)$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε τα γεγονότα ενός ρολογιού, όταν οι ενδείξεις του είναι x^0 και $x^0 + dx^0$. Αν dt είναι ο *ιδιόχρονος*¹ μεταξύ των δύο γεγονότων και εφόσον οι χωρικές συντεταγμένες του ρολογιού δεν αλλάζουν, η μετρική (10.2.3) δείχνει ότι:

$$-dt^2 = g_{00} (dx^0)^2 \quad (10.2.4)$$

Αυτή η εξίσωση καθορίζει τη σχέση μεταξύ του κοσμικού χρόνου x^0 και του ιδιοχρόνου dt και πρέπει να είναι ανεξάρτητη του παρατηρητή, εφόσον όλοι είναι ισοδύναμοι. Συμπεραίνουμε ότι η g_{00} μπορεί να εξαρτάται μόνο από το x^0 από το οποίο μπορούμε με μετασχηματισμό να φτάσουμε σε ένα νέο κοσμικό χρόνο t , σύμφωνα με το μετασχηματισμό:

$$t = \int \sqrt{(-g_{00})} dx^0 \quad (10.2.5)$$

έτσι ώστε η (10.2.3) να απλοποιηθεί στην:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (10.2.6)$$

Χρησιμοποιώντας, τέλος, την υπόθεσή μας για ισοτροπία μπορούμε να εισάγουμε τη μετρική για χώρους σταθερής καμπυλότητας (αναλυτικά η εξαγωγή της στο Παράρτημα Α') :

¹Πρόκειται για μια πολύ σημαντική ποσότητα, αφού είναι κάτι για το οποίο όλοι οι παρατηρητές συμφωνούν. Σύμφωνα με τη γενική αρχή, το διάστημα κατά μήκος μιας κοσμικής γραμμής μετριέται απευθείας από το ρολόι που την έχει ως κοσμική γραμμή του.

$$ds^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (10.2.7)$$

όπου r , θ , ϕ οι πολικές συντεταγμένες. Η σταθερά k αναφέρεται στη χωρική καμπυλότητα, όπου αρνητική, μηδενική και θετική τιμή αντιστοιχεί σε ανοιχτό, επίπεδο και κλειστό σύμπαν αντίστοιχα. Συνήθως οι δυνατές τιμές περιορίζονται στις $k = +1, 0, -1$ καθώς το μέτρο κάθε μη μηδενικής καμπυλότητας γίνεται ίσο με τη μονάδα με επανορισμό του *συντελεστή κλίμακας* $a(t)$ ². Όταν $k = +1$ το σύμπαν είναι κλειστό και έχει πεπερασμένο όγκο, αλλιώς είναι ανοιχτό και έχει άπειρο όγκο.

Τελικά από τη (10.2.3) και με βάση τα προηγούμενα, καταλήγουμε στη μετρική Robertson-Walker -που αποδεικνύεται ότι συμφωνεί αρκετά με την παρατηρούμενη δομή μεγάλης κλίμακας του Σύμπαντος- :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (10.2.8)$$

10.3. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ FRIEDMANN

Ξεκινάμε με την εξίσωση πεδίου Einstein, την οποία συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και η οποία δείχνει πως εξελίσσεται η μετρική σε ένα βαρυτικό πεδίο με μια κοσμολογική σταθερά:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (10.3.1)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Ricci, G η βαρυτική σταθερά και $T_{\mu\nu}$ τανυστής ενέργειας-ορμής. Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης, αναπαριστά τη γεωμετρία ενώ το δεξί την πηγή της βαρύτητας.

Η εξίσωση του Einstein μας λέει πώς η παρουσία ύλης καμπυλώνει το χωρόχρονο, και γι αυτό θα πρέπει να περιγράψουμε την ύλη με προσοχή. Όπως είπαμε και νωρίτερα, θεωρούμε ότι τα συστατικά του σύμπαντος είναι οι γαλαξίες, τους οποίους αντιμετωπίζουμε σαν σημειακές μαζες ενός “γαλαξιακού αερίου” με συμπεριφορά τέλειου ρευστού. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής σ’ αυτή την περίπτωση για μια τυχαία μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu\nu} - pg_{\mu\nu} \quad (10.3.2)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας και p η πίεση και $u_{\mu\nu}$ η ταχύτητα του ρευστού. Εφόσον σε σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το ρευστό, η ταχύτητα είναι $u_{\mu} = (1, \vec{0})$. Με αντικατάσταση

²Ο συντελεστής κλίμακας μετράει το φυσικό μέγεθος του Σύμπαντος. Η μορφή του $a(t)$ εξαρτάται από το υλικό που περιέχεται σε αυτό.

βρίσκουμε:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p \frac{\alpha^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p\alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\alpha^2 r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \quad (10.3.3)$$

Η εξίσωση του Einstein σε συνδυασμό με τη μετρική Robertson-Walker για μια πηγή ιδανικού ρευστού οδηγούν στο βασικό σύνολο κοσμικών εξισώσεων, τις *εξισώσεις Friedmann*.

Η $\mu\nu = 00$ συνιστώσα της εξίσωσης Einstein γίνεται “η πρώτη εξίσωση Friedmann”:

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (10.3.4)$$

ενώ η $\mu\nu = 11$ γίνεται η “εξίσωση της επιτάχυνσης”:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (10.3.5)$$

Οι εξισώσεις αυτές, σε συνδυασμό με την εξίσωση ρευστού είναι οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του σύμπαντος:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho + p) = 0 \quad (10.3.6)$$

Η εξίσωση αυτή, προκύπτει με έναν άμεσο τρόπο, αν εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η γενική σχετικότητα κωδικοποιεί τη διατήρηση ενέργειας:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (10.3.7)$$

Από το σετ των τεσσάρων εξισώσεων, μόνο η χρονική συνιστώσα δίνει μη-τετριμμένη εξίσωση. Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Christoffel, η εξίσωση διατήρησης γράφεται:

$$\frac{d}{dx^{\mu}} (T_{\nu}^{\mu}) + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0 \quad (10.3.8)$$

Για τη $\nu = 0$ συνιστώσα, τα σύμβολα Christoffel είναι:

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (10.3.9)$$

οπότε αντικαθιστώντας καταλήγουμε στην εξίσωση (10.3.6).

10.3.1. Τα Σύμπαντα Friedmann.

Η θερμοκρασία του σύμπαντος είναι ένα μέγεθος που παίζει σημαντικό ρόλο στις διεργασίες που συμβαίνουν κάθε στιγμή σ’ αυτό, μιας και από αυτή εξαρτάται η μέση κινητική ενέργεια των συστατικών της ύλης του. Τη στιγμή ακριβώς της Μεγάλης Έκρηξης η ύλη του σύμπαντος έχει άπειρη θερμοκρασία. Στη συνέχεια όμως καθώς διαστέλλεται η θερμοκρασία πέφτει συνεχώς, ακριβώς όπως πέφτει η θερμοκρασία ενός οποιουδήποτε ρευστού που εκτονώνεται. Για να μπορέσουμε, αποδεχόμενοι το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης, να κάνουμε κάποιους ποσοτικούς υπολογισμούς, και συγκεκριμένα να βρούμε το ρυθμό διαστολής του σύμπαντος και τη σχέση ανάμεσα στη θερμοκρασία του και το χρόνο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους τρόπους. Το υπόβαθρο

θα είναι τα κοσμολογικά πρότυπα του Friedmann που είναι ομογενείς και ισότροπες λύσεις των εξισώσεων του Einstein. Για $\Lambda = 0$, από την εξίσωση (10.3.4) προκύπτουν τα εξής (Σχήμα 10.3.1):

- (1) $k > 0$: Ο γαλαξίας δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο μιας και εκεί η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται ενώ η κινητική του ενέργεια παραμένει πάντα θετική. Έτσι την αρχική διαστολή θα πρέπει ν' ακολουθήσει συστολή και το σύμπαν ξανακαταρρέει στο σημείο $R = 0$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το σύμπαν είναι *κλειστό*.
- (2) $k < 0$: Τώρα ο γαλαξίας μπορεί να διαφύγει στο άπειρο, πράγμα που σημαίνει ότι το σύμπαν θα διαστέλλεται συνεχώς. Ένα τέτοιο σύμπαν λέγεται *ανοιχτό*.
- (3) $k = 0$: Στην περίπτωση αυτή ο γαλαξίας έχει την ελάχιστη δυνατή ταχύτητα διαφυγής. Το σύμπαν διαστέλλεται και πάλι επ' άπειρον, ονομάζεται δε, *κρίσιμο* ή (χωρικά) *επίπεδο* σύμπαν. Από την εξίσωση (10.3.5) βρίσκουμε ότι η κρίσιμη ταχύτητα διαφυγής \dot{a} είναι ίση με:

$$\dot{a}_\Delta = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{\frac{1}{2}} a \quad (10.3.10)$$

και είναι ανεξάρτητη από τη μάζα m του γαλαξία.

Άρα, ο λόγος της ταχύτητας R ενός γαλαξία προς την ταχύτητα διαφυγής a_Δ είναι ίσος με:

$$\frac{\dot{a}}{\dot{a}_\Delta} = H \left(\frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10.3.11)$$

και είναι ανεξάρτητος του a . Συνεπώς, το κατά πόσον ο γαλαξίας θα διαφύγει τελικά στο άπειρο εξαρτάται από τις ποσότητες H και ρ . Από την εξίσωση αυτή, βλέπουμε ότι η κρίσιμη ταχύτητα διαφυγής ($\dot{a}/\dot{a}_\Delta = 1$) αντιστοιχεί στην κρίσιμη πυκνότητα $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα αναφορικά με τη συμπεριφορά του σύμπαντος μπορούν να εξαχθούν και από την παράμετρο Ω .

Η εξίσωση Friedmann τότε γράφεται:

$$(\Omega - 1) H^2 = \frac{k}{a^2} \quad (10.3.12)$$

Συνεπώς οι περιπτώσεις $\Omega > 1$, $\Omega = 1$, $\Omega < 1$ αντιστοιχούν στις περιπτώσεις $k > 0$, $k = 0$, $k < 0$. Άρα η $\Omega > 1$ αντιστοιχεί σε κλειστό σύμπαν, η $\Omega = 1$ σε επίπεδο σύμπαν, και τέλος η $\Omega < 1$ σε ανοιχτό Σύμπαν.

10.4. ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Στο αρκετά απλοποιημένο μοντέλο του σύμπαντος που συζητήσαμε παραπάνω, ολόκληρη η ιστορία του καθορίζεται από ένα σύνολο *κοσμολογικών παραμέτρων*. Συγκεκριμένα, αν κάποιος καθορίσει τις ισοδύναμες πυκνότητες μάζας $\rho_m(t_*)$, $\rho_r(t_*)$ και ρ_Λ σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, τότε η τιμή της κάθε πυκνότητας (άρα και η συνολική πυκνότητα), είναι καθορισμένη για κάθε κοσμικό χρόνο t . Γι αυτό, ο προσδιορισμός τους επαρκεί για τον προσδιορισμό του παράγοντα κλίμακας $a(t)$ για οποιοδήποτε κοσμικό χρόνο t . Η πιο λογική σκέψη είναι να θεωρήσουμε ότι το t_* είναι ο τωρινός κοσμικός χρόνος t_0 , έτσι το κοσμολογικό μοντέλο καθορίζεται πλήρως από τις

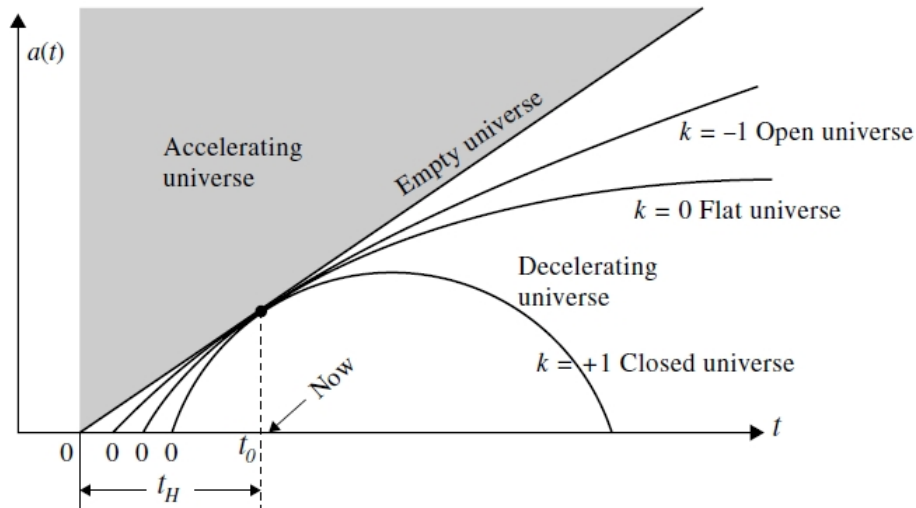


FIGURE 10.3.1. Η εξέλιξη του σύμπαντος για διάφορες τιμές της παραμέτρου k .

ποσότητες:

$$\rho_{m,0}, \quad \rho_{r,0}, \quad \rho_{\Lambda,0} \quad (10.4.1)$$

10.4.1. Κρίσιμη πυκνότητα και παράμετρος πυκνότητας.

Είναι, βέβαια, πρακτικό και σύνηθες στην κοσμολογία, να δουλεύουμε με όρους εναλλακτικών, βαθμωτών ποσοτήτων, που ονομάζονται *παράμετροι πυκνότητας*. Ορίζονται με βάση την *κρίσιμη πυκνότητα*. Η κρίσιμη πυκνότητα ρ_C ορίζεται ως η πυκνότητα που δίνει επίπεδο Σύμπαν $k = 0$, απουσία κοσμολογικής σταθεράς. Με βάση αυτά η εξίσωση Friedmann δίνει:

$$\rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (10.4.2)$$

Οι πυκνότητες $\rho_i(t)$ (όπου το i υποκαθιστά τα “ m ”, “ r ” ή “ Λ ”) μετρώνται σαν ποσοστά ως προς ρ_C :

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_C(t)} \quad (10.4.3)$$

ή

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t) \quad (10.4.4)$$

Η ποσότητα $\Omega_i(t)$ είναι γνωστή ως παράμετρος πυκνότητας, και μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε τύπο υλικού, όπως και η συνολική πυκνότητα. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε την παράμετρο πυκνότητας (10.4.4) γίνεται σαφής όταν την χρησιμοποιούμε για να ξαναγράψουμε τη δεύτερη από τις κοσμολογικές εξισώσεις Friedmann (10.3.5). Αν τη διαιρέσουμε με R^2 και ορίσουμε την παράμετρο Hubble $H = \dot{a}/a$, βρίσκουμε:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (10.4.5)$$

και ορίζοντας την παράμετρο πυκνότητας καμπυλότητας:

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (10.4.6)$$

καταλήγουμε στην πιο κομψή σχέση:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (10.4.7)$$

Με μια μικρή διερεύνηση, τα κοσμολογικά μοντέλα με θετική χωρική καμπυλότητα ($k = 1$), η παράμετρος Ω_k είναι αρνητική. Επιπλέον, αν η κοσμολογική σταθερά είναι αρνητική, και η παράμετρος Ω_Λ είναι αρνητική σε σχέση με τις Ω_m και Ω_r που είναι πάντα θετικές.

Από την (10.4.5) βλέπουμε ότι οι τιμές των Ω_m , Ω_r , Ω_Λ καθορίζουν τη χωρική καμπυλότητα του σύμπαντος με έναν απλό τρόπο:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow \text{"ανοιχτό"}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow \text{"επίπεδο"}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow \text{"κλειστό"}$$

Πολύ συχνά, τέλος, χρησιμοποιείται και ακόμα μία παράμετρος πυκνότητας, η *παράμετρος συνολικής πυκνότητας*:

$$\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \quad (10.4.8)$$

Έτσι, για να είναι ένα κοσμολογικό μοντέλο χωρικά επίπεδο, απαιτούμε $\Omega = 1$ που αντιστοιχεί σε συνολική ισοδύναμη πυκνότητα μάζας ίση με την κρίσιμη πυκνότητα $\rho_C = \frac{3H^2}{8\pi G}$.

10.4.2. Χαρακτηριστικές κλίμακες και ορίζοντες.

Το σύμπαν του Θερμού Big Bang έχει δυο χαρακτηριστικές κλίμακες:

- (1) Ο χρόνος Hubble (ή μήκος): H^{-1}
- (2) Η κλίμακα καμπυλότητας: $a |k|^{-1/2}$

Η πρώτη από αυτές αναφέρεται στην εξέλιξη του $a(t)$ και η δεύτερη την απόσταση μέχρι την οποία το Σύμπαν μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει επίπεδη (ευκλείδεια) γεωμετρία. Όπως είναι γραμμένες αναφέρονται σε φυσική κλίμακα. Για μετατροπή στην co-moving κλίμακα θα πρέπει να διαιρέσουμε με το $a(t)$. Ο λόγος αυτών των δύο δίνει μια εκτίμηση της συνολικής πυκνότητας. Από την εξίσωση Friedmann βρίσκουμε:

$$\sqrt{|\Omega - 1|} = \frac{H^{-1}}{a |k|^{-1/2}} \quad (10.4.9)$$

10.4.3. Ορίζοντες γεγονότων.

Πόσο μεγάλο είναι το Σύμπαν; Η απάντηση εξαρτάται από το εκάστοτε μοντέλο που μελετάμε. Όμως η σημαντικότερη ερώτηση είναι άλλη: πόσο μεγάλο είναι το παρατηρήσιμο Σύμπαν; Μια βασική ιδιότητα του Σύμπαντος είναι ότι έχει ορίζοντες: μπορούμε να έχουμε πληροφορίες μόνο από γεγονότα που περιορίζονται από το Big Bang και τον παρελθοντικό μας κώνο φωτός, αφού ακόμα και το φως μπορεί να έχει ταξιδέψει κατά μια πεπερασμένη (φυσική) ακτίνα $d_{hor}(t)$ από την αρχική στιγμή t_i , όταν το Σύμπαν έγινε διαπερατό από φωτόνια:

$$d_{hor}(t) = a(t)r_{hor}(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}$$

Είμαστε παρατηρητές που ζούμε σε χρόνο t_0 μετά το Big Bang. Η ακτίνα της περιοχής που είναι σήμερα “ορατή” σε εμάς είναι $d_{hor}(t_0)$.

10.4.4. Μετατόπιση προς το ερυθρό και Θερμοκρασία.

Η μετατόπιση προς το ερυθρό “μετράει” τη διαστολή του Σύμπαντος αφού καθώς διαστέλλεται η συχνότητα των φωτονίων μειώνεται και το μήκος κύματος αυξάνεται ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας $a(t)$:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_{emission}} = \frac{a(t_0)}{a(t_{emission})} \quad (10.4.10)$$

Η μετατόπιση προς το ερυθρό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει και χρόνο και απόσταση. Ως χρόνο, αναφέρεται στο χρόνο κατά τον οποίο θα έπρεπε να εκπεμφθεί το φως ώστε να έχει μετατόπιση z . Ως απόσταση, αναφέρεται στην *παρούσα* απόσταση από ένα αντικείμενο από το οποίο λαμβάνεται ακτινοβολία με μετατόπιση z . Καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, ψύχεται με βάση το νόμο:

$$T \propto \frac{1}{a(t)} \quad (10.4.11)$$

Δηλαδή η θερμοκρασία μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με τον παράγοντα κλίμακας. Αν το Σύμπαν, λοιπόν, ξεκίνησε όταν το $a = 0$, η θερμοκρασία του ξεκίνησε από το άπειρο, και αυτό ψύχθηκε κατά τη διαστολή.

10.4.5. Ο νόμος της διαστολής.

Οι κατανομές γαλαξιών και ακτινοβολίας εξομαλύνονται, προσεγγίζονται ως ένα *κοσμολογικό ρευστό*. Κάθε μεμονωμένος γαλαξίας μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σωματίδιο μέσα σε αυτό, και εντοπίζεται από τρεις συντεταγμένες x^i σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Η ταχύτητά του $\frac{dx^i}{dt}$ πρέπει να εξαλείφεται με τις προσεγγίσεις των FRW μοντέλων, αλλιώς θα είχε δική του κατεύθυνση και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση της ισοτροπίας.

Η διαστολή του Σύμπαντος σημαίνει ότι η φυσική απόσταση μεταξύ ενός ζεύγους γαλαξιών, αυξάνεται με το χρόνο. Όμως με βάση αυτά που είπαμε πριν, αν δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις, τότε ένας μεμονωμένος γαλαξίας σε ηρεμία θα πρέπει να έχει τις ίδιες συντεταγμένες (r, θ, ϕ) συνέχεια. Οι συντεταγμένες x^i είναι, λοιπόν, *co-moving*.

Αν το $a(t)$ αυξάνεται με το χρόνο, τότε η μετρική περιγράφει ένα διαστελλόμενο Σύμπαν. Η σχέση φυσικής και co-moving απόστασης είναι:

$$d_{\text{physical}} = a(t) \times d_{\text{comoving}}$$

Ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος εξαρτάται από τις ιδιότητες της ύλης μέσα σε αυτό. Το γεγονός αυτό, ορίζεται από την πυκνότητα ενέργειας $\rho(t)$ και την πίεση $p(t)$. Τα ρ και p συχνά συνδέονται με μια καταστατική εξίσωση που δίνει το p συναρτήσει του ρ ³. Αυτή μπορεί να είναι περίπλοκη, για παράδειγμα να περιλαμβάνει συνδυασμό ακτινοβολίας και μη σχετικιστικής ύλης. Κάποιοι μάλιστα τύποι συστατικών ίσως να μην μπορούν να περιγραφούν καν από μια καταστατική εξίσωση.

10.5. ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΕΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Προκειμένου να διερευνήσουμε πως εξελίσσεται το Σύμπαν, πρέπει να έχουμε υπόψιν τι υπάρχει μέσα σε αυτό. Θα πρέπει να καθορίσουμε δηλαδή, τη σχέση μεταξύ πυκνότητας μάζας και πίεσης. Αυτή η σχέση είναι η καταστατική εξίσωση, της οποίας η γενική μορφή είναι $p = \gamma\rho$ και για την οποία θα θεωρήσουμε στο σημείο αυτό, δύο πιθανότητες.

Ύλη: όταν μιλάμε για ύλη, εννοούμε εν συντομία μη σχετικιστική ύλη, και αναφερόμαστε σε οποιονδήποτε τύπο υλικού που έχει αμελητέα πίεση, $p = 0$. Ένα σύμπαν μηδενικής πίεσης είναι η πιο απλουστευμένη υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε και είναι μια καλή προσέγγιση για του γαλαξίες καθώς αλληλεπιδρούν μόνο βαρυτικά. Πιο συχνά χρησιμοποιείται ο όρος “σκόνη” αντί για ύλη.

Ακτινοβολία: Η κινητική ενέργεια των φωτονίων οδηγεί σε μια πίεση ακτινοβολίας, που όπως θα αποδειχτεί είναι $p = \rho/3$.

Όταν $k = \Lambda = 0$, λοιπόν, οι εξισώσεις Friedmann και ρευστού λύνονται για τις κλασικές καταστατικές εξισώσεις: $p = \rho/3$ και $p = 0$, οδηγώντας στις καθιερωμένες κοσμολογικές λύσεις:

10.5.1. Το γεμάτο κονιορτό (σκόνη) Σύμπαν.

Ο κονιορτός είναι μια κατανομή ύλης, σε όλη την έκταση της οποίας η πίεση είναι μηδέν. Ξεκινάμε, λοιπόν, λύνοντας την εξίσωση ρευστού για την καταστατική εξίσωση $p = 0$ για τη σκόνη:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0 \Rightarrow \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= 0 \end{aligned} \tag{10.5.1}$$

Η ολοκλήρωση της τελευταίας, μας δείχνει ότι το ρa^3 είναι σταθερό. Δηλαδή:

$$\rho \propto a^{-3} \tag{10.5.2}$$

³Εργαζόμαστε σε μονάδες όπου $\hbar = c = 1$.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν μας εκπλήσσει, αφού ουσιαστικά μας λέει ότι η πυκνότητα ύλης είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου του σύμπαντος. Αν μάλιστα λύσουμε την εξίσωση για τον παρόντα χρόνο t_0 , όπου θεωρούμε τον παράγοντα κλίμακας $a_0 = 1$ και την τωρινή πυκνότητα ρ_0 , βρίσκουμε τη σταθερά αναλογίας και έχουμε: $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση Friedmann για $k = 0$, βρίσκουμε ότι:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{1}{a} \quad (10.5.3)$$

η επίλυση της οποίας δίνει:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (10.5.4)$$

Σε αυτό το σύμπαν η διαστολή δεν σταματά, αλλά ο ρυθμός διαστολής μειώνεται με ρυθμό:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (10.5.5)$$

Παρά την επίδραση της βαρύτητας, η ύλη στο Σύμπαν δεν καταλήγει σε Σύνθλιψη αλλά διαστέλλεται για πάντα.

10.5.2. Το γεμάτο ακτινοβολία Σύμπαν.

Στην περίπτωση αυτή, ξέρουμε από την ακτινοβολία μέλανος σώματος ότι, για ιδανικό σχετικιστικό αέριο, η ακτινοβολία εξασκεί πίεση p :

$$p = \frac{a}{3} T^4 \quad (10.5.6)$$

και αντί για πυκνότητα ύλης έχουμε πυκνότητα ενέργειας ρ :

$$\rho = aT^4 \quad (10.5.7)$$

Άρα η καταστατική εξίσωση στην περίπτωση της ακτινοβολίας είναι $p = \frac{\rho}{3}$, με αποτέλεσμα η εξίσωση ρευστού να γίνεται:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad (10.5.8)$$

Επιλύοντάς την, όπως στην περίπτωση της σκόνης, καταλήγουμε στο ότι:

$$\rho \propto a^{-4} \quad (10.5.9)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad \rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (10.5.10)$$

Αυτή είναι η δεύτερη κλασική κοσμολογική λύση. Παρατηρούμε ότι το σύμπαν διαστέλλεται πιο αργά στην περίπτωση της ακτινοβολίας σε σχέση με της σκόνης, σαν συνέπεια της επιβράδυνσης που προκαλείται από την πίεση.

Αν εξετάσουμε πιο προσεκτικά τη σχέση της μείωσης της πυκνότητας ακτινοβολίας ως προς τον όγκο, βλέπουμε ότι μειώνεται ανάλογα με την τέταρτη δύναμη του παράγοντα κλίμακας. Την τρίτη δύναμη την προσδιορίσαμε ως την αύξηση του όγκου που πολύ φυσικά οδηγεί στη μείωση της πυκνότητας. Η τέταρτη δύναμη, όμως, προκύπτει από ένα άλλο φαινόμενο, τη μεταβολή του

μήκους κύματος του μεγίστου της θερμικής εκπομπής ως προς τη θερμοκρασία της ακτινοβολίας T , σύμφωνα με το νόμο μετατόπισης του Wien: $\lambda_{max}T = const$. Αφού το μήκος κύματος είναι ανάλογο του a , $\lambda_{max} \propto a$, έπεται ότι καθώς το σύμπαν διαστέλλεται η θερμοκρασία της ακτινοβολίας μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $T \propto a^{-1}$ που εξηγεί την προέλευση της τέταρτης δύναμης. Αυτό είναι το φαινόμενο της *κοσμολογικής μετατόπισης προς το ερυθρό*, που χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση αποστάσεων.

10.5.3. Το Σύμπαν του Einstein και του de Sitter.

Η πρώτη λύση στις εξισώσεις Friedmann, βέβαια δόθηκε από τον ίδιο τον Einstein, πριν τις παρατηρήσεις του Hubble, όταν επικρατούσε η πεποίθηση ότι κάθε εύλογο μοντέλο έπρεπε να είναι στατικό, δηλαδή το a να είναι σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι όχι μόνο το $\dot{a} = 0$, αλλά και το $\ddot{a} = 0$. Έτσι από τις δύο εξισώσεις Friedmann καταλήγουμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνο εάν η σχέση πυκνότητας και πίεσης είναι:

$$p = -\frac{1}{3}\rho \quad (10.5.11)$$

και εάν υπάρχει μη μηδενική χωρική καμπυλότητα:

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (10.5.12)$$

Επειδή η ενεργειακή πυκνότητα και πίεση πρέπει να έχουν αντίθετα πρόσημα, οι δύο παραπάνω συνθήκες δεν μπορούν να ικανοποιηθούν αν θεωρήσουμε μόνο ύλη ή ακτινοβολία. Αυτό έδωσε στον Einstein το κίνητρο να εισάγει την κοσμολογική σταθερά. Οι συνθήκες της “στατικότητας” ικανοποιούνται από ένα συνδυασμό ύλης και ενέργειας κενού, με:

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_m \quad (10.5.13)$$

Ακολουθώντας το προτεινόμενο μοντέλο του Einstein, ο de Sitter πρότεινε ένα άλλο, ίσης ιστορικής σημασίας. Θεώρησε ένα ομογενές, επίπεδο σύμπαν, χωρίς ύλη και ακτινοβολία στην οποία η πυκνότητα του χωρίς πίεση “κονιορτού” είναι σταθερή, $\rho(t) = \rho_0$. Η εξίσωση Friedmann σε αυτή την περίπτωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi}{3M_{pl}^2}\rho_\Lambda \Rightarrow \\ \dot{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda}a = const \end{aligned} \quad (10.5.14)$$

Η λύση, λοιπόν, της εξίσωσης είναι ένα εκθετικά διαστελλόμενο Σύμπαν.

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (10.5.15)$$

Για αρχική συνθήκη θεωρούμε ότι για χρόνο $t = t_0$ ο παράγοντας κλίμακας έχει μια γνωστή τιμή a_0 . Η λύση τότε μπορεί να γραφεί ως:

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}}(t - t_0)\right) \quad (10.5.16)$$

Σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος Hubble είναι ανεξάρτητη του χρόνου εφόσον:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}} \quad (10.5.17)$$

Τελικά:

$$a(t) = a_0 \exp(H(t - t_0)) \quad (10.5.18)$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με ένα ρευστό με καταστατική εξίσωση $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Η εξίσωση ρευστού τότε δίνει $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi m_{pl}^2}$.

Αυτού του είδους το κοσμολογικό μοντέλο είναι γνωστό ως *Σύμπαν δε Σιττερ*. Ήταν το δεύτερο μοντέλο που προτάθηκε και το πρώτο που περιγράφει ένα διαστελλόμενο Σύμπαν. Προτάθηκε από τον Ωιλλεμ δε Σιττερ το 1917. Εφόσον δεν περιλαμβάνει ύλη ή ακτινοβολία, δεν είναι κατάλληλο για την περιγραφή του σημερινού Σύμπαντος, αλλά χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει μια υποθετική περίοδο του πολύ πρώιμου Σύμπαντος, γνωστή ως *πληθωριστική περίοδο*. Μπορεί επίσης να περιγράψει το μέλλον του Σύμπαντος, όταν η συνεχιζόμενη διαστολή θα έχει μειώσει την πυκνότητα ύλης και ακτινοβολίας σε τέτοιο βαθμό, που θα θεωρείται αμελητέα σε σχέση με τη (σταθερή) πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας.

Μέρος 5

ΤΟ ΠΛΗΘΩΡΙΣΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΝ

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΓΡΙΦΟΥΣ ΤΟΥ ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Με βάση τη σύγχρονη σκοπιά, η σημαντικότερη ιδιότητα του πληθωρισμού είναι να παράγει ιδιομορφίες στο Σύμπαν, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν στην διαμόρφωση δομής. Παρόλα αυτά, ιστορικά, το κίνητρο για την εισαγωγή του ήταν αρκετά διαφορετικό και αφορούσε το ερώτημα, εάν οι αρχικές συνθήκες που απαιτούνται για το Θερμό Big Bang είναι πιθανές ή όχι. Το Καθιερωμένο Μοντέλο παρουσίασε μια πολύ επιτυχημένη αυτοτελή εικόνα για την εξέλιξη και τη σύνθεση του Σύμπαντος: τη διαστολή και ψύξη μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, τη δημιουργία των ελαφρών στοιχείων, τη δημιουργία γαλαξιών από ανομοιογένειες σε ένα διαστελλόμενο Σύμπαν. Παρόλα αυτά, το μοντέλο δεν παρέχει σαφή εικόνα για τη φύση της ίδιας της Μεγάλης Έκρηξης. Υποθέτει ότι η συνολική ύλη υπήρξε από τις απαρχές. Υποθέτει επίσης συγκεκριμένες, πολύ ακριβείς αρχικές συνθήκες που χρειάζονται εξήγηση.

Η πληθωριστική κοσμολογία είναι μια προσπάθεια να δώσει την εξήγηση αυτή, για μια εξαιρετικά μικρή χρονική στιγμή μετά την $t = 0$ κοσμική ιδιομορφία. Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, το Σύμπαν είχε μια “έξαρση” διαστολής, κατά την οποία ο παράγοντας κλίμακας αυξήθηκε περισσότερο από 30 τάξεις μεγέθους, όπως φαίνεται στο Σχήμα (11.0.1). Σε αυτή την πληθωριστική διεργασία, όλη η ύλη και η ενέργεια θα μπορούσαν να έχουν δημιουργηθεί κυριολεκτικά από το τίποτα. Στη συνέχεια, το Σύμπαν ακολούθησε την πορεία της αδιαβατικής διαστολής και ψύξης όπως περιγράφεται από το Καθιερωμένο Μοντέλο. Το Σχήμα (11.0.1) καθιστά σαφές επίσης, ότι το παρατηρήσιμο Σύμπαν προέρχεται από μία οντότητα 10^{-30} φορές μικρότερη από αυτή που προβλέπεται στο μη-πληθωριστικό σενάριο.

11.1. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Το Σύμπαν μας, όπως έχουμε αναλύσει, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις είναι πολύ ομογενές και ισότροπο. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να πούμε ότι είναι “υπερβολικά ομογενές και ισότροπο”. Ας θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σημεία του Σύμπαντος, το καθένα εκτός του ορίζοντα του άλλου. Είναι τόσο απομακρυσμένα, που οποιοδήποτε σήμα που στάλθηκε από το ένα σημείο κατά την απαρχή του Σύμπαντος, δεν μπορεί να έχει φτάσει στο άλλο. Παρόλα αυτά, έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Αυτό υποδεικνύει ότι τα δύο σημεία βρίσκονταν σε θερμική επαφή κάποια στιγμή στο παρελθόν. Πως όμως είναι δυνατόν κάτι τέτοιο;

Το πρόβλημα του ορίζοντα μπορεί να διατυπωθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια αν θεωρήσουμε την ισοτροπία της ακτινοβολίας CMB. Το Σύμπαν έχει πεπερασμένη ηλικία και έτσι, ακόμα και το φως έχει διανύσει πεπερασμένη απόσταση έως μια δεδομένη στιγμή. Η απόσταση αυτή, ονομάζεται παρατηρήσιμο Σύμπαν και αποτελεί την περιοχή που μπορούμε ουσιαστικά να «δούμε». Το βασικό

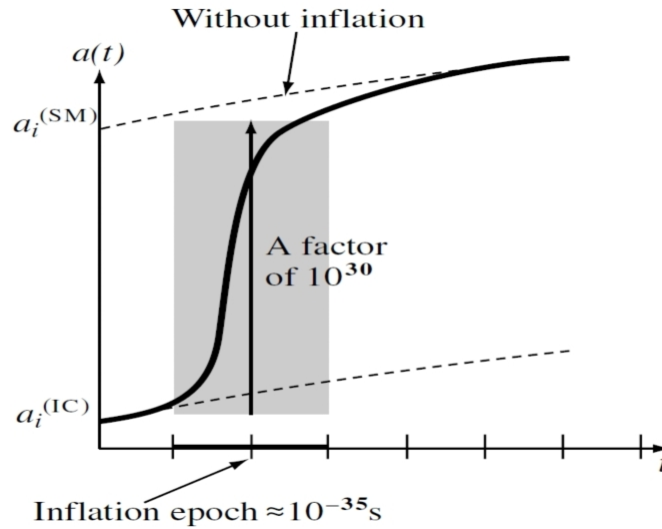


FIGURE 11.0.1. Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του παράγοντα κλίμακας. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιπροσωπεύουν τα Καθιερωμένα FRW Μοντέλα. Η καμπύλη αντιστοιχεί στο Πληθωριστικό Μοντέλο και μετά από χρόνο 10^{-35} sec ταυτίζεται με το Καθιερωμένο Μοντέλο.

χαρακτηριστικό της ακτινοβολίας CMB είναι η ισοτροπία της, δηλαδή το φως που λαμβάνουμε από όλες τις πλευρές του παρατηρήσιμου Σύμπαντος έχει περίπου την ίδια θερμοκρασία. Βρίσκεται δηλαδή σε θερμική ισορροπία. Εφόσον όμως το φως που λαμβάνουμε από ένα σημείο του ουρανού ταξιδεύει προς εμάς από το στιγμή της αποσύζευξης από την ύλη, δεν είχε το χρόνο να έχει αλληλεπιδράσει με αυτό που λαμβάνουμε από ένα σημείο στην αντίθετη πλευρά του ουρανού, οπότε δε θα μπορούσε να αποδοθεί εκεί η θερμοκρασιακή ομοιομορφία.

Ας δούμε το ζήτημα πιο ποσοτικά. Η τωρινή ομογενής, ισότροπη έκταση του Σύμπαντος είναι τουλάχιστον τόση όση η τωρινή κλίμακα ορίζοντα, $ct_0 \sim 10^{28} \text{ cm}$. Αρχικά το μέγεθος αυτής της περιοχής ήταν μικρότερο κατά το λόγο των αντίστοιχων παραγόντων κλίμακας $\frac{a_i}{a_0}$. Υποθέτοντας ότι η ανομοιογένεια δεν μπορεί να εξαλειφθεί από τη διαστολή, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι το μέγεθος της ομογενούς, ισότροπης περιοχής από την οποία ξεκίνησε το Σύμπαν σε χρόνο $t = t_i$ ήταν μεγαλύτερη του:

$$l_i \sim ct_0 \frac{a_i}{a_0} \quad (11.1.1)$$

Συγκρίνοντάς το με το μέγεθος μιας αιτιατά συνδεδεμένης περιοχής $l_c \sim ct_i$:

$$\frac{l_i}{l_c} = \frac{t_0}{t_i} \frac{a_i}{a_0} \quad (11.1.2)$$

Μια πρόχειρη εκτίμηση του λόγου αυτού προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι η αρχέγονη ακτινοβολία κυριαρχεί σε χρόνο $t_i = t_{pl}$ και τότε η θερμοκρασία είναι $T_i = T_{pl} \sim 10^{32} \text{ K}$. Έτσι:

$$\frac{a_i}{a_0} \simeq \frac{T_0}{T_{pl}} \simeq 10^{-32} \Rightarrow \frac{l_i}{l_c} \simeq \frac{10^{17}}{10^{-43}} 10^{-32} \simeq 10^{-28} \quad (11.1.3)$$

Άρα σε χρόνο Planck το μέγεθος του Σύμπαντος ξεπερνά την κλίμακα αιτιότητας κατά 28 τάξεις μεγέθους που σημαίνει ότι η ενεργειακή πυκνότητα σε 10^{84} αιτιακά ασύνδετες περιοχές είναι ομοιόμορφα κατανομημένη με διακυμάνσεις που δεν ξεπερνούν το $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-4}$. Όμως εφόσον κανένα σήμα δεν διαδίδεται ταχύτερα από το φως καμία φυσική διεργασία δεν μπορεί να είναι υπεύθυνη για μια τόσο αφύσικα καλορυθμισμένη κατανομή.

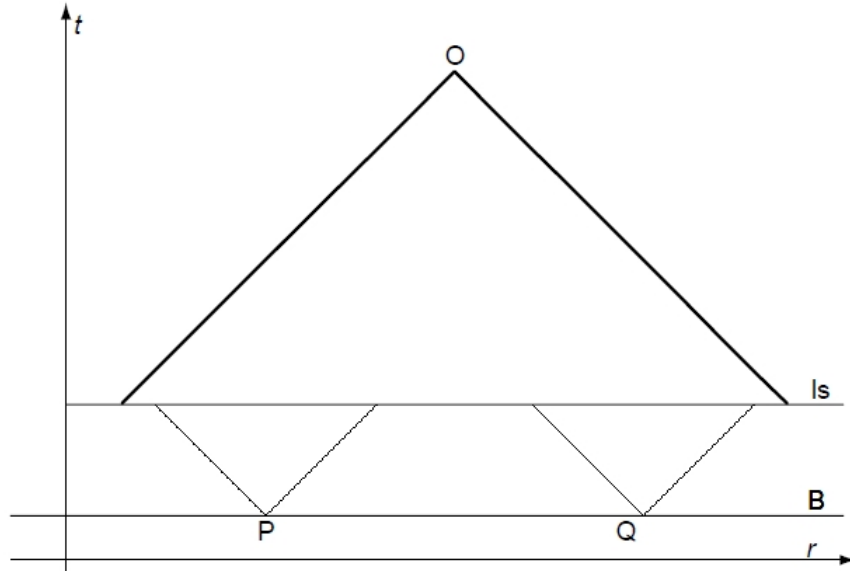


FIGURE 11.1.1. Το πρόβλημα του ορίζοντα σε ένα Σύμπαν FRW - ένα ενδεικτικό διάγραμμα σε comoving συντεταγμένες. Η γραμμή B αντιστοιχεί στο Big Bang ενώ η Is στην αποσύζευξη από την ύλη. Το O αντιστοιχεί σε σημερινό παρατηρητή. Ο παρελθοντικός κώνος φωτός του O καταλαμβάνει πολύ μεγαλύτερο όγκο στο $t = t_{Is}$ σε σχέση με τον όγκο οποιουδήποτε κώνου φωτός που εκπέμφθηκε κατά το Big Bang (δύο από τους οποίους αντιστοιχούν στα P και Q). Έτσι, οι διαφορετικές περιοχές που βλέπουμε σήμερα, είναι αδύνατο να έχουν αλληλεπιδράσει αιτιατά πριν την εκπομπή της ακτινοβολίας CMB, παρόλα αυτά η θερμοκρασία του CMB που προέρχεται από αυτές έχει την ίδια θερμοκρασία.

11.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ

Ας υποθέσουμε ότι με κάποιο τρόπο η ύλη έχει κατανομηθεί με τον απαιτούμενο τρόπο. Το επόμενο ερώτημα που προκύπτει αφορά τις αρχικές ταχύτητες. Αυτές πρέπει να ακολουθούν το νόμο του Hubble, αλλιώς η αρχική ομογένεια γρήγορα διαταράσσεται. Και μάλιστα πρέπει να συμβαίνει σε τόσες πολλές αιτιατά ασύνδετες περιοχές που το πρόβλημα του ορίζοντα περιπλέκεται ακόμα περισσότερο. Έστω όμως ότι τον ακολουθούν όλες οι περιοχές. Ας ελέγξουμε με πόση ακρίβεια πρέπει να επιλεγούν οι αρχικές ταχύτητες για μια συγκεκριμένη κατανομή μάζας. Θεωρούμε ένα σφαιρικό νέφος ύλης και συγκρίνουμε την ολική του ενέργεια με την κινητική ενέργεια E^k λόγω της διαστολής Hubble. Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της θετικής κινητικής και της αρνητικής

-λόγω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης- δυναμικής ενέργειας:

$$E^{tot} = E^k + E^p = E_0^k + E_0^p \quad (11.2.1)$$

Η κινητική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας:

$$\frac{E_i^k}{E_0^k} = \left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}\right)^2 \Rightarrow E_i^k = E_0^k \left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}\right)^2 \quad (11.2.2)$$

Άρα:

$$\frac{E_i^{tot}}{E_0^k} = \frac{E_i^k + E_i^p}{E_0^k} = \frac{E_0^k + E_0^p}{E_0^k} \left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}\right)^2 \quad (11.2.3)$$

Και εφόσον $E_0^k \simeq |E_0^k|$ και $\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0} \leq 10^{-28}$, ο παραπάνω λόγος γίνεται $\frac{E_i^{tot}}{E_0^k} \leq 10^{-56}$.

Αυτό σημαίνει ότι για μια συγκεκριμένη κατανομή πυκνότητας ενέργειας οι αρχικές ταχύτητες Hubble πρέπει να προσαρμοστούν έτσι ώστε η τεράστια αρνητική ενέργεια λόγω βαρύτητας της ύλης να αντισταθμιστεί από τη θετική ενέργεια με ακρίβεια $10^{-54}\%$. Κι εκεί ακριβώς έγκειται το πρόβλημα της επιπεδότητας. Μια πολύ μικρή παρέκκλιση στις αρχικές ταχύτητες που ξεπερνάει το ποσοστό αυτό οδηγεί σε Σύμπαν που είτε συνθλίβεται είτε «αδειάζει» πολύ σύντομα.

Στη Γενική Σχετικότητα το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί μέσω της παραμέτρου πυκνότητας $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$. Μετασχηματίζουμε την εξίσωση Friedmann ως εξής:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow a^2 H^2 = a^2 \frac{8\pi G}{3}\rho - k \quad (11.2.4)$$

$$\text{Και επειδή } \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}:$$

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(Ha)^2} \quad (11.2.5)$$

Αν το Σύμπαν είναι επίπεδο ($\Omega = 1$), τότε παραμένει έτσι. Αλλιώς ο παράγοντας πυκνότητας μεταβάλλεται. Το πρόβλημα της επιπεδότητας είναι ότι το Ha είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου, κατά την επικράτηση της ακτινοβολίας ή της ύλης. Από παρατηρησιακά δεδομένα γνωρίζουμε ότι τώρα το Ω_0 είναι πολύ κοντά στη μονάδα, γεγονός που δείχνει ότι σε προγενέστερες εποχές πρέπει σχεδόν να ταυτίζονταν με τη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, για να έχει προκύψει η τωρινή κατάσταση του Σύμπαντος, τότε και σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\frac{\Omega_i - 1}{\Omega_0 - 1} = \frac{(Ha)_0^2}{(Ha)_i^2} \Rightarrow \Omega_i - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{(Ha)_0^2}{(Ha)_i^2} \leq 10^{-56} \quad (11.2.6)$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αρχικά το Ω πρέπει να ήταν τόσο κοντά στη μονάδα ώστε αν η πυκνότητα ρ ήταν μεγαλύτερη από $\rho_c (1 + 10^{-55})$ το Σύμπαν θα είχε καταρρεύσει χιλιάδες χρόνια πριν. Αν ήταν μικρότερη από $\rho_c (1 + 10^{-55})$ το Σύμπαν σήμερα θα ήταν ανοιχτό με μια αμελητέα πυκνότητα ενέργειας. Η προϋπόθεση του πολύ καλού συντονισμού του αρχικού όρου καμπυλότητας με ακρίβεια 1 προς 10^{55} είναι «μη φυσική». Η «μη φυσικότητα» αυτή στις απαιτούμενες αρχικές συνθήκες είναι το πρόβλημα της επιπεδότητας.

11.3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΩΝ ΜΙΚΡΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Αν και το Σύμπαν είναι ομογενές σε κοσμολογικές αποστάσεις, είναι τελείως ανομοιογενές σε μικρές σχετικά αποστάσεις όπου τοπικές συμπυκνώσεις της ύλης μας δίνουν τα διάφορα συστήματα γαλαξιών, τους ίδιους τους γαλαξίες, τα άστρα, κλπ. Για να φτάσει κανείς στις σημερινές συμπυκνώσεις της ύλης που αντιστοιχούν στα παραπάνω ουράνια σώματα, σίγουρα χρειάζεται κάποιες αρχικές ανομοιογένειες οι οποίες έδρασαν με τη βοήθεια του βαρυτικού τους πεδίου σαν “πυρήνες” συγκέντρωσης της ύλης. Θα πρέπει, λοιπόν, να κατανοήσει κανένας πως οι μικρές ανομοιογένειες, της τάξης του $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^{-4}$, (ώστε να μην προκαλούν διαταραχές στην ακτινοβολία CMB) προκάλεσαν

στην εξέλιξη του Σύμπαντος ανομοιογένειες της τάξης $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 1$ ακόμα και $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 10^5$.

Για να θεωρηθεί επιτυχημένη μια θεωρία, λοιπόν, πρέπει να εξηγεί την κατάσταση του παρατηρηθέντος Σύμπαντος μέσω ενός φυσικού μηχανισμού που παράγει τέτοιες ανομοιογένειες και όχι να τις εισάγει με ειδικό τρόπο.

Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

12.1. ΤΟ ΠΛΗΘΩΡΙΣΤΙΚΟ ΣΕΝΑΡΙΟ

Τα προβλήματα που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχνουν καθαρά ότι στο αρχικό μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης χρειάζεται να γίνουν κάποιες δραστικές επεμβάσεις. Είναι πάντως προφανές ότι οποιοδήποτε και αν είναι το νέο μοντέλο που θα προκύψει από τις επεμβάσεις αυτές και το οποίο θα προσπαθήσει να απαντήσει στα παραπάνω προβλήματα, δεν μπορεί παρά να ενσωματώνει όλες εκείνες τις χαρακτηριστικές επιτυχίες του προτύπου της Μεγάλης Έκρηξης, οι οποίες άλλωστε το καθιέρωσαν. Ο Alan Guth πρότεινε τον **πληθωρισμό** το 1981 ως λύση σε όλα αυτά τα προβλήματα. Η θεωρία του πληθωρισμού δεν αποτελεί αντικατάσταση του μοντέλου του Big Bang, αλλά προσθήκη. Ο πληθωρισμός ξεκινά σε κάποια πολύ αρχική στιγμή χωρίς να «ακυρώνει» καμιά από τις επιτυχημένες προβλέψεις του μοντέλου αυτού. Ορίζεται ως μια περίοδος κατά την οποία ο παράγοντας κλίμακας a επιταχύνεται:

$$\text{Inflation} \iff \ddot{a} > 0 \quad (12.1.1)$$

Κάποιες φορές περιγράφεται ως μια ταχεία διαστολή, παρόλο που το ως προς τι θεωρείται ταχεία δεν είναι πολύ σαφές. Υπάρχει μια ισοδύναμη έκφραση για τη συνθήκη του πληθωρισμού που επιδέχεται μια πιο γεωμετρική ερμηνεία:

$$\text{Inflation} \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0 \quad (12.1.2)$$

Επειδή $\frac{H^{-1}}{a}$ είναι το comoving μήκος Hubble -η πιο σημαντική χαρακτηριστική κλίμακα του διαστελλόμενου Σύμπαντος-, η συνθήκη για τον πληθωρισμό είναι ότι αυτό πρέπει να μειώνεται με το χρόνο. Αν θεωρήσουμε comoving συντεταγμένες (που κινούνται μαζί με τη διαστολή), το παρατηρήσιμο Σύμπαν γίνεται μικρότερο κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού επειδή η χαρακτηριστική κλίμακα καταλαμβάνει όλο και μικρότερο μέγεθος σχετικά με τις comoving συντεταγμένες καθώς προχωρά ο πληθωρισμός. Σε όλες τις υπόλοιπες φάσεις το $\frac{H^{-1}}{a}$ αυξάνεται, όπως φαίνεται και στο Σχήμα (12.1.1). Αυτό είναι το χαρακτηριστικό - κλειδί του πληθωρισμού. Παρόλο που η διαστολή του Σύμπαντος είναι πολύ γρήγορη η χαρακτηριστική του κλίμακα γίνεται μικρότερη, σε σχέση με τη διαστολή αυτή.

Υποθέτοντας ότι μια εποχή πληθωρισμού είναι απαραίτητη υπό μία έννοια, πως μπορούμε να την επιτύχουμε φυσικά; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έγκειται στο πεδίο της σωματιδιακής φυσικής υψηλών ενεργειών. Η ιδρυτική ιδέα των περισσότερων μοντέλων πληθωρισμού είναι ότι

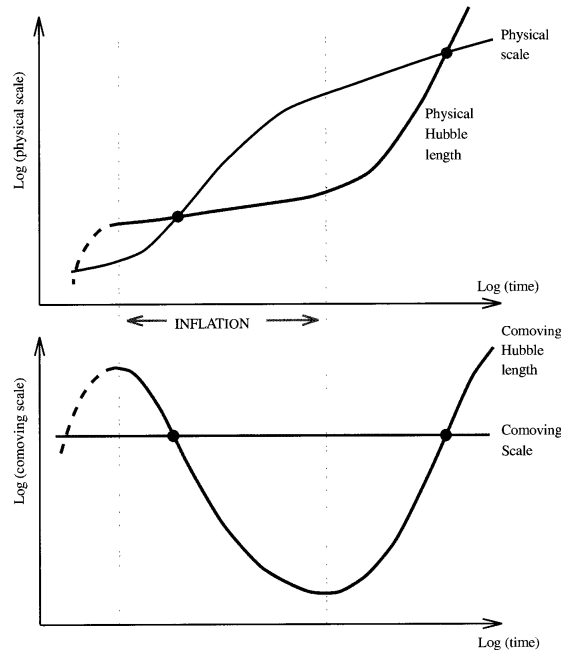


FIGURE 12.1.1. Δύο όψεις της συμπεριφοράς του παράγοντα κλίμακας σχετικά με το μήκος Hubble (κλίμακα οριζοντια). Το comoving μήκος Hubble μειώνεται κατά τον πληθωρισμό και αυξάνεται στις υπόλοιπες περιόδους. Το πάνω σχεδιάγραμμα δείχνει τις φυσικές συντεταγμένες, ενώ το κάτω τις comoving. Οι κατακόρυφοι άξονες καλύπτουν πολλές δυνάμεις του 10 σε κλίμακα.

στα πρώιμα στάδια του Σύμπαντος υπήρξε μια εποχή κατά την οποία η ενεργειακή πυκνότητα της κατάστασης κενού ενός βαθμωτού πεδίου $\rho_v \approx V(\phi)$ είναι η κυρίαρχη συνεισφορά στην ενεργειακή πυκνότητα. Η συνθήκη για τον πληθωρισμό ικανοποιείται από ένα μεγάλο εύρος πεδίων. Η πιο κλασική είναι η de Sitter διαστολή που προκύπτει όταν το Σύμπαν κυριαρχείται από μια κοσμολογική σταθερά, η οποία όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίνει:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (12.1.3)$$

Παρόλα αυτά τα πιο ρεαλιστικά μοντέλα προκύπτουν από αυτή την εξιδανικευμένη περίπτωση, εφόσον ο πληθωρισμός πρέπει να τελειώσει αρκετά νωρίς, ώστε να ισχύουν οι επιτυχημένες προβλέψεις του Καθιερωμένου Μοντέλου.

Όπως είδαμε ο λόγος $\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_o}$ -που ορίζει τον αριθμό των αιτιατά ασύνδετων περιοχών αλλά και την ακρίβεια των αρχικών ταχυτήτων- είναι πολύ μεγάλος, αν η βαρύτητα είναι πάντα ελκτική οπότε και επιβραδύνει τη διαστολή. Η συνέπεια αυτή μπορεί να αποφευχθεί μόνο εάν υποθέσουμε ότι κατά τη διάρκεια μιας περιόδου διαστολής η βαρύτητα λειτουργήσει ως «απωστική» δύναμη και άρα επιτάχυνε τη διαστολή. Τότε $\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_o} < 1$ και η δημιουργία του Σύμπαντος από μια και μόνο αιτιατά συνδεδεμένη περιοχή καθίσταται δυνατή.

12.1.1. Πώς μπορεί να γίνει η βαρύτητα απωστική;

Σύμφωνα με τον ορισμό του πληθωρισμού, $\ddot{a} > 0$. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν εφαρμόσουμε τη συνθήκη αυτή στη δεύτερη εξίσωση Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a \quad (12.1.4)$$

Για να ικανοποιήσουμε τον ορισμό του πληθωρισμού, θα πρέπει $\rho + 3p < 0$, και επειδή πάντα υποθέτουμε ότι $\rho > 0$, είναι απαραίτητο το p να είναι αρνητικό για να ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, ένα υλικό με την ιδιότητα της αρνητικής πίεσης.

Είδαμε ήδη, ότι μια κοσμολογική σταθερά που οφείλεται σε μη μηδενική ενέργεια κενού οδηγεί σε επιταχυνόμενη διαστολή. Όμως αποτυγχάνει να δώσει εξήγηση για τον πληθωρισμό σε μια πρώιμη φάση, για τον απλό λόγο ότι οποιαδήποτε περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής στο πρώιμο Σύμπαν πρέπει να τελειώσει. Έτσι η ενέργεια κενού που οδηγεί στον πληθωρισμό πρέπει να είναι δυναμική. Για να υπονοήσουμε μια χρονοεξαρτώμενη “κοσμολογική σταθερά” απαιτούμε ένα πεδίο με τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς με το κενό, δηλαδή ένα βαθμωτό πεδίο που περιγράφει σωματίδια μηδενικού spin, το οποίο ονομάζεται inflaton και συμβολίζεται με ϕ . Μετασχηματίζεται ως βαθμωτό μέγεθος, και είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου (σε ομογενές Σύμπαν). Το χαρακτηριστικό του είναι η δυναμική ενέργεια που μετατοπίζεται προς το ελάχιστο πολύ αργά καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται και αυτό αντιστοιχεί σε μια καταστατική εξίσωση με αρνητική πίεση.

Η εξέλιξη του ισότροπου βαθμωτού πεδίου inflaton καθορίζεται από τη Λαγκρανζιανή:

$$L_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \Rightarrow$$

$$L_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (12.1.5)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός, ενώ ο δεύτερος το “ενεργό δυναμικό”. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα δίνει τον ταυστή ενέργειας-ορμής -μέσω του θεωρήματος Noether- ο οποίος χαρακτηρίζεται από μια ενεργό πίεση p_ϕ και μια ενεργό πυκνότητα ενέργειας ρ_ϕ :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L_\phi \Rightarrow$$

$$T_{\mu\nu} = -p_\phi g_{\mu\nu} + (p_\phi + \rho_\phi)u_\mu u_\nu \quad (12.1.6)$$

όπου το u_μ , u_ν είναι η τετρα-ταχύτητα του ρευστού:

$$u_\mu = g_{\mu\rho}u^\rho = g_{\mu\rho}\frac{dx^\rho}{ds} \quad (12.1.7)$$

όπου $x^\rho(s)$ είναι η κοσμική γραμμή ενός στοιχείου του ρευστού. Μας ενδιαφέρει η θεμελιώδης κατάσταση του πεδίου $p_\phi = 0$, γιατί η μηδενική κατάσταση του πεδίου αντιστοιχεί σε ένα ιδανικό ρευστό με ενεργειακή πυκνότητα:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (12.1.8)$$

και πίεση:

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (12.1.9)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις οι πρώτοι όροι αντιστοιχούν σε κινητική ενέργεια και οι δεύτεροι σε δυναμική. Ο όρος $V(\phi)$ είναι το δυναμικό του βαθμωτού πεδίου και προς το παρόν θα το χειριστούμε σαν μια ελεύθερη συνάρτηση. Διαφορετικά πληθωριστικά μοντέλα αντιστοιχούν σε διαφορετικές επιλογές δυναμικού. Αυτό που θέλουμε να επιτύχουμε προκειμένου η βαρύτητα να γίνει απωστική είναι μια καταστατική εξίσωση $p_\phi \simeq -\rho_\phi$. Από τις (12.1.8), (12.1.9) φαίνεται ότι για να γίνει αυτό πρέπει $\dot{\phi} \rightarrow 0$, δηλαδή $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$.

Επειδή $p = -\rho + \dot{\phi}^2$, η καταστατική εξίσωση χαρακτηρίζεται από την κινητική ενέργεια $\dot{\phi}^2$ η οποία πρέπει να είναι πολύ μικρότερη της δυναμικής. Η διατήρηση αυτής της σχέσης για τουλάχιστον 75 $e - folds$ καθιστά ένα μοντέλο επιτυχημένο οπότε προκύπτει η ανάγκη να μελετήσουμε τη μορφή του $V(\phi)$.

12.2. Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ ΣΤΟΥΣ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟΥΣ ΓΡΙΦΟΥΣ

Στο Σχήμα (12.2.1) βλέπουμε πώς αλλάζει η εικόνα του επιβραδυνόμενου σύμπαντος Friedmann με την προσθήκη του πληθωρισμού.. Η εξίσωση Friedmann για την περίπτωση αυτή είναι:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \quad (12.2.1)$$

Στο όριο $\dot{\phi} \rightarrow 0$, έχουμε:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) = const. \quad (12.2.2)$$

έτσι ώστε το Σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (12.2.3)$$

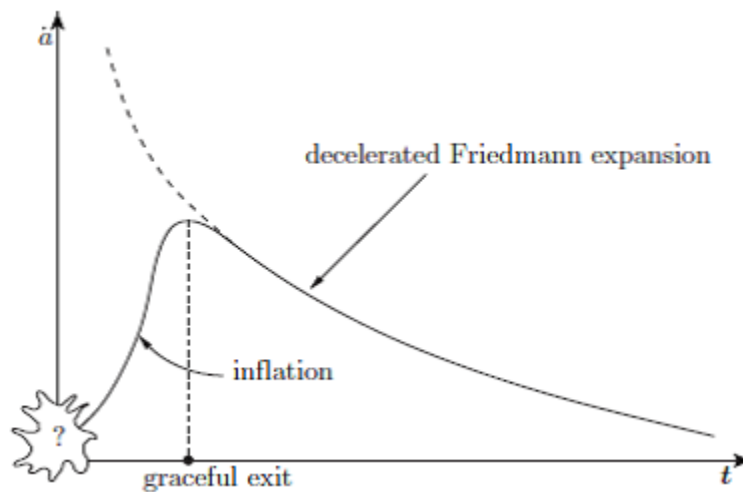


FIGURE 12.2.1. Πως η εισαγωγή του πληθωρισμού αλλάζει την εικόνα του Καθιερωμένου Μοντέλου.

Βέβαια, απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία του είναι να αρχίζει και να τελειώνει αρκετά νωρίς ώστε να μην επηρεαστούν οι επιτυχημένες προβλέψεις του Καθιερωμένου Μοντέλου. Ακόμα για να διατηρηθεί η ομοιογένεια πρέπει να υπάρχει ένας μηχανισμός «ομαλής εξόδου» στη φάση της επιβράδυνσης.

12.2.1. Ο πληθωρισμός λύνει το πρόβλημα της επιπεδότητας.

Αφού επιταχύνει τη διαστολή, οι μικρές αρχικές ταχύτητες των συνδεδεμένων περιοχών γίνονται πολύ μεγάλες. Έτσι οδηγεί την παράμετρο πυκνότητας προς τη μονάδα, και προβλέποντας ότι το Σύμπαν είναι χωρικά επίπεδο, σε συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Κατά την πληθωριστική φάση η κρίσιμη πυκνότητα είναι $\rho_c = 3H^2/8\pi$ και άρα από την εξίσωση Friedmann:

$$\Omega(t) - 1 \propto ke^{-2Ht} \quad (12.2.4)$$

Άρα πολύ σύντομα ο πληθωρισμός οδηγεί σε $\Omega = 1$.

12.2.2. Ερμηνεύει την ομοιογένεια λόγω της αύξησης του μεγέθους του ορίζοντα.

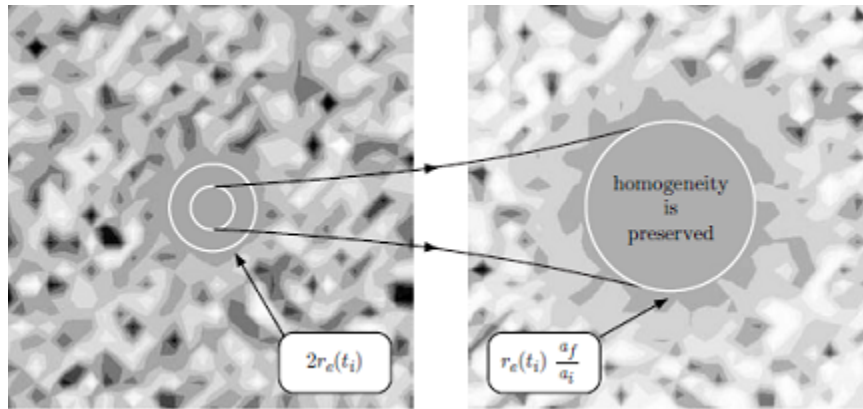


FIGURE 12.2.2. Πως ερμηνεύεται η ομογένεια από το πληθωριστικό μοντέλο.

Η αύξηση του σε μια πληθωριστική περίοδο που διαρκεί για ένα διάστημα μεταξύ t_s και t_f είναι:

$$\Delta d_{hor} = e^{Ht_f} \int_{t_s}^{t_f} dt' e^{-Ht'} = \frac{e^{H\Delta t} - 1}{H}$$

Άρα ο ορίζοντας αυξάνει εκθετικά κατά την περίοδο αυτή. Έτσι ολόκληρο το παρατηρήσιμο Σύμπαν μπορεί να έχει προέλθει από μια μικρή ομοιογενή περιοχή, ανεξάρτητα του τι συνθήκες επικρατούν έξω από την περιοχή αυτή (Σχήμα 12.2.2).

12.3. ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΒΑΘΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΔΙΑΣΤΕΛΛΟΜΕΝΟ ΣΥΜΠΑΝ

Ο ταυσιτής ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$, εκτός από όρους λόγω του πεδίου ϕ , περιέχει όρους που αντιστοιχούν σε αλληλεπιδρώντα σωματίδια, που μπορούν να ερμηνευτούν ως θερμικές διεγέρσεις

πάνω από το ελάχιστο του δυναμικού, με ενεργειακή πυκνότητα ρ και πίεση p . Σε αυτή την περίοδο έχουμε $p = \rho/3$. Οι εξισώσεις Friedmann γίνονται, λοιπόν:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_\phi + \rho) - \frac{k}{a^2} \quad (12.3.1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G[\rho_\phi + \rho + 3(p_\phi + p)]a = \frac{8}{3}\pi G[V(\phi) - \dot{\phi}^2 - \rho]a \quad (12.3.2)$$

Η εξέλιξη του ϕ προκύπτει ξεκινώντας από την εξίσωση ρευστού $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ και αντικαθιστώντας τις (12.1.8), (12.1.9):

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$$

$$\frac{1}{2}2\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = -3H\dot{\phi}^2$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (12.3.3)$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι να βρούμε τις λύσεις των (12.3.3) και (12.3.1) για ένα βαθμωτό πεδίο και στη συνέχεια να μελετάμε τη συμπεριφορά του πεδίου για τη γενική περίπτωση ενός δυναμικού $V(\phi)$.

12.4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ SLOW-ROLL

Η καθιερωμένη τακτική προσέγγισης του πληθωρισμού είναι η λεγόμενη slow-roll προσέγγιση. Η εξίσωση (12.3.3) είναι παρόμοια με αυτή που περιγράφει μια μπάλα που κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης $-\frac{\partial V}{\partial \phi}$ ενάντια σε μια πηγή τριβής που περιγράφεται από τον όρο που είναι ανάλογος με το $3\frac{\dot{\phi}}{a}$. Στη συνήθη έκφραση, λέμε ότι το ϕ “κυλάει προς τα κάτω” στο δυναμικό, προς ένα ελάχιστο ϕ_0 .

Ας θεωρήσουμε δυναμικά τα οποία έχουν ένα μεγάλο διάστημα (ϕ_i, ϕ_f) με $\phi_b < \phi_i \leq \phi \leq \phi_f < \phi_0$, στο οποίο το V παραμένει περίπου σταθερό. Αυτή η ιδιότητα εξασφαλίζει μια πολύ αργή εξέλιξη του ϕ προς το ϕ_0 και συνήθως ονομάζεται *φάση slow-rolling* επειδή σε αυτό το διάστημα ο κινητικός όρος $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ είναι αμελητέος σε σχέση με το δυναμικό $V(\phi)$. Ένα εντελώς επίπεδο δυναμικό θα έκανε τον πληθωρισμό να συνεχίζεται επ’ άπειρον, δεδομένου ότι κυριαρχεί η ενεργειακή πυκνότητα που βρίσκεται αποθηκευμένη στην επίπεδη κατεύθυνση. Η κατεύθυνση του inflation παρόλα αυτά δεν είναι εντελώς επίπεδη αλλά έχει ένα δυναμικό $V(\phi)$ με κάποια κλίση. Μια πληθωριστική φάση επιτυγχάνεται όταν ο ρυθμός διαστολής ικανοποιεί $\ddot{a} > 0$.

Ο slow-roll πληθωρισμός, λοιπόν, υποθέτει ότι η δυναμική ενέργεια υπερσχύει της κινητικής ενέργειας του inflaton: $\dot{\phi}^2 \leq V(\phi)$ και $\dot{\phi} \ll V'(\phi)$. Έτσι, κατά την προσέγγιση αυτή, ένας όρος σε κάθε εξίσωση κίνησης μπορεί να αμεληθεί ώστε να τις αφήσει στην πιο απλοποιημένη μορφή:

$$3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (12.4.1)$$

και

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{pl}^2} V(\phi) \quad (12.4.2)$$

Αυτή η προσεγγιστική λύση είναι έγκυρη αν ικανοποιούνται οι slow-roll συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για την απλοποίηση των εξισώσεων:

$$|\ddot{\phi}| \ll |V| \quad (12.4.3)$$

$$|\dot{\phi}| \ll 3H\dot{\phi} \sim |V_{;\phi}| \quad (12.4.4)$$

Και με όρους του δυναμικού και των παραγώγων του:

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{;\phi}}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (12.4.5)$$

$$|\eta(\phi)| = \left| M_{pl}^2 \frac{V_{;\phi\phi}}{V} \right| \ll 1 \quad (12.4.6)$$

Όταν δηλαδή το δυναμικό ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες -που λένε ουσιαστικά ότι η κλίση και η καμπυλότητα του δυναμικού πρέπει να είναι αρκετά μικρές-, η slow-roll προσέγγιση είναι έγκυρη. Οι συνθήκες αυτές μας διευκολύνουν να καταλάβουμε πού θα μπορούσε να συμβεί ο πληθωρισμός για ένα συγκεκριμένο δυναμικό.

12.5. ΤΟ ΣΥΜΠΑΝ ΤΟΥ DE SITTER

Το Σύμπαν του de Sitter έχει κεντρικό ρόλο στην κατανόηση του πληθωρισμού. Στην πραγματικότητα, στα περισσότερα κοσμολογικά σενάρια, ο πληθωρισμός δεν είναι παρά μια de Sitter φάση με ένα time-translation σπάσιμο συμμετρίας. Για να βρούμε τη μετρική του ξεκινάμε από την ειδική περίπτωση για την οποία λύνονται οι εξισώσεις Einstein.

Θεωρούμε ένα ομογενές, επίπεδο FRW Σύμπαν στο οποίο η πυκνότητα του χωρίς πίεση “κοινιού” είναι σταθερή, $\rho(t) = \rho_0$. Η εξίσωση Friedmann σε αυτή την περίπτωση γίνεται:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_0 + \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_0 + \frac{\Lambda}{3}} = const \quad (12.5.1)$$

Η λύση, λοιπόν, της εξίσωσης $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H$ είναι ένα εκθετικά διαστελλόμενο Σύμπαν:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (12.5.2)$$

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

13.1. ΧΑΟΤΙΚΟΣ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ

Ας θεωρήσουμε το απλούστερο μοντέλο ενός βαθμωτού πεδίου ϕ με μάζα m και δυναμική ενέργεια $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Εφόσον η συνάρτηση αυτή έχει ελάχιστο στο $\phi = 0$, θα περίμενε κανείς ότι το πεδίο θα ταλαντώνεται κοντά στο ελάχιστο αυτό. Και αυτό ισχύει αν δεν συνυπολογίσουμε την διαστολή του Σύμπαντος.

Αν συνυπολογίσουμε τη διαστολή, έχουμε την εξίσωση $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0$. Ο όρος $3H\dot{\phi}$ που εμφανίζεται στην εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή παίζει το ρόλο του παράγοντα τριβής: $\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi$. Η εξίσωση Friedmann γράφεται $H^2 = \frac{4\pi}{3}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)$. Με μια μικρή διερεύνηση βλέπουμε πως αν το ϕ ήταν αρχικά μεγάλο, η παράμετρος Hubble, H , θα ήταν επίσης μεγάλη. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι ο όρος της τριβής θα ήταν πολύ μεγάλος και έτσι το βαθμωτό πεδίο κινούταν πολύ αργά, σαν μια μπάλα σε ένα παχύρευστο υγρό. Έτσι σε αυτή τη φάση η ενεργειακή πυκνότητα του πεδίου -σε αντίθεση με την κανονική ύλη- παραμένει σχεδόν σταθερή και η διαστολή του Σύμπαντος συνέχιστηκε με πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα από ότι στο Καθιερωμένο Μοντέλο. Εξ αιτίας της ταχύτερης ανάπτυξης του παράγοντα κλίμακας του Σύμπαντος και την αργή κίνηση του ϕ , σύντομα μετά έχουμε $\dot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$, $\phi^2 \ll m^2\phi^2$ οπότε οι εξισώσεις γίνονται:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m\phi}{\sqrt{6}} \quad (13.1.1)$$

$$\dot{\phi} = -m\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (13.1.2)$$

Η πρώτη εξίσωση δείχνει ότι αν το πεδίο ϕ αλλάζει αργά, το μέγεθος του σύμπαντος μεγαλώνει κατά περίπου e^{Ht} . Αυτό το στάδιο του πληθωρισμού τελειώνει όταν το πεδίο ϕ γίνεται πολύ μικρότερο από $M_{pl} = 1$. Η λύση στις εξισώσεις αυτές δείχνει ότι μετά από μια μεγάλη περίοδο πληθωρισμού το Σύμπαν, αρχικά γεμάτο με το πεδίο $\phi \gg 1$, μεγαλώνει εκθετικά, $a = a_0 e^{\phi^2/4}$.

Οι συνθήκες slow-roll είναι:

$$\epsilon = \eta = \frac{M_{pl}^2}{4\pi\phi^2} \quad (13.1.3)$$

Άρα μπορεί να επακολουθήσει ο πληθωρισμός αν $|\phi| > \frac{M_{pl}}{\sqrt{4\pi}}$ και οι εξισώσεις λύνονται δίνοντας

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{mM_{pl}}{\sqrt{12\pi}}t \quad (13.1.4)$$

$$a(t) = a_i \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m}{M_{pl}} \left(\phi_i t - \frac{m M_{pl}}{\sqrt{48\pi}} t^2 \right) \right] \quad (13.1.5)$$

Έτσι, ο πληθωρισμός δεν απαιτεί μια αρχική κατάσταση θερμικής ισορροπίας, υπερψύξης και φαινομένου σήραγγας από το ψευδοκενό. Μπορεί να είναι τόσο απλός όσο η θεωρία ενός αρμονικού ταλαντωτή. Όταν διαπιστώθηκε για πρώτη φορά αυτό, έγινε κατανοητό ότι ο πληθωρισμός δεν είναι απλά ένα τέχνασμα για τη διόρθωση των προβλημάτων του Καθιερωμένου Μοντέλου, αλλά μια γενική κοσμολογική θεωρία.

Παράρτημα Α

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ

Σε δεδομένη κοσμολογική εποχή, η κατάσταση του κοσμολογικού μας μοντέλου πρέπει να είναι ομογενής και ισότροπη. Δηλαδή, ο τρισδιάστατος χώρος στον οποίο είναι κατασκευασμένο το μοντέλο πρέπει να έχει αυτές τις ιδιότητες. Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι ένας δισδιάστατος χώρος αυτού του τύπου, ένθετος (embedded) στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, ενώ είναι προφανές ότι μια τρισδιάστατη υπερ-σφαίρα ένθετη στον τετραδιάστατο, θα έχει όλα τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε.

Επίσης, όπως η απλή σφαίρα περιλαμβάνει το επίπεδο ως ειδική περίπτωση όταν η ακτίνα της γίνεται άπειρη, μια υπερ-σφαίρα άπειρης ακτίνας θα αντιστοιχεί στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, που είναι μια απλή περίπτωση ομογενούς και ισότροπου χώρου. Επιπλέον, θα θεωρήσουμε και μια τρίτη κατηγορία χώρων οι οποίοι, σε αντίθεση με τη την υπερ-σφαιρα, έχουν άπειρο όγκο. Αυτοί οι τύποι χώρου έχουν όλοι σταθερά βαθμωτά μεγέθη Ricci R και γι αυτό είναι *χώροι σταθερής καμπυλότητας*. Επίσης, όλοι αυτοί οι χώροι έχουν θετικά ορισμένες μετρικές, ώστε η γεωμετρία τους να είναι Ευκλείδεια σε αρκετά μικρές περιοχές. Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν άλλοι χώροι Riemann με τέτοιες μετρικές, που να είναι ομογενείς και ισότροπες.

Έστω (x, y, z, u) ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες στον τετραδιάστατο χώρο. Τότε μία υπερσφαίρα ακτίνας S έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = S^2 \quad (13.1.6)$$

Εφόσον το u ορίζεται ως προς τα x, y, z από αυτή την εξίσωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύστημα αναφοράς για τα σημεία της υπερεπιφάνειας αρχικά επιμερίζοντας τις συντεταγμένες (x, y, z) στο σημείο με συντεταγμένες (x, y, z, u) στο Καρτεσιανό σύστημα. Εφόσον τα x, y, z είναι μικρά σε σχέση με το S , θα συμπεριφέρονται προσεγγιστικά σαν ορθογώνιες Καρτεσιανές συντεταγμένες στον τρισδιάστατο χώρο και μπορούμε να ορίσουμε φαινομενικά σφαιρικές, πολικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) με τις συνήθεις εξισώσεις μετασχηματισμού:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (13.1.7)$$

Οι εξισώσεις (13.1.6), (13.1.7) δίνουν:

$$u^2 = S^2 - r^2 \quad (13.1.8)$$

από το οποίο βρίσκουμε με παραγωγήιση:

$$du^2 = \frac{r^2}{u^2} dr^2 = \frac{r^2}{S^2 - r^2} dr^2 \quad (13.1.9)$$

Έτσι, η απόσταση ds μεταξύ των σημείων (x, y, z, u) και $(x + dx, y + dy, z + dz, u + du)$ πάνω στην υπερσφαιράρα δίνεται από:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \\ &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + r^2 dr^2 / (S^2 - r^2) \\ ds^2 &= \frac{S^2}{S^2 - r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (13.1.10)$$

Αυτή είναι μια μετρική για τον υπερσφαιρικό τρισδιάστατο χώρο Riemann. Προφανώς, για $1/S^2 = 0$, η μετρική απλοποιείται σε αυτή για τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, σε κανονικές σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.

Αν από αυτή τη μετρική υπολογίσουμε το βαθμωτό μέγεθος Ricci, θα βρεθεί σταθερό και ίσο με $-6/S^2$. Είναι προφανές ότι αν το S^2 αντικατασταθεί με το $-S^2$, το R θα μείνει σταθερό με τιμή $6/S^2$ και ο χώρος θα παραμείνει ομογενής και ισότροπος. Αυτός είναι ο τρίτος τύπος τέτοιου χώρου. Η μετρική του είναι:

$$ds^2 = \frac{S^2}{S^2 + r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (13.1.11)$$

Εφόσον αυτοί οι χώροι είναι ομογενείς και ισότροποι, ως πόλος $r = 0$ μπορεί να θεωρηθεί οποιοδήποτε σημείο και οι άξονες από τους οποίους μετρώνται τα θ και ϕ μπορούν να θεωρηθούν οποιοδήποτε ζεύγος κάθετων διευθύνσεων. Αν το r είναι μικρό σε σχέση με το S , τότε και οι δύο μετρικές (13.1.10) και (13.1.11) προσγγίζουν τη σφαιρική πολική μετρική για Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο, υπονοώντας ότι οι χώροι είναι Ευκλείδειοι σε μικρές περιοχές.

Ας θεωρήσουμε τον κύκλο $r = \text{const}$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ στο χώρο με μετρική (13.1.10). Η απόσταση δύο γειτονικών σημείων ϕ , $\phi + d\phi$ στον κύκλο προκύπτει ότι είναι, από τη μετρική $ds = r d\phi$ και η περιφέρεια του κύκλου $2\pi r$. Κατά μία ακτίνα του κύκλου $d\theta = d\phi = 0$, η απόσταση μεταξύ των σημείων r , $r + dr$ είναι:

$$ds = \frac{S dr}{\sqrt{S^2 - r^2}} \quad (13.1.12)$$

Με ολοκλήρωση από το $r = 0$ μέχρι το r , το μήκος της ακτίνας προκύπτει:

$$\rho = S \sin^{-1} (r/S) \quad (13.1.13)$$

Έτσι, $r = S \sin(\rho/S)$ και η περιφέρεια c είναι:

$$c = 2\pi S \sin(\rho/S) \quad (13.1.14)$$

Μια μορφή της μετρικής που θα μας φανεί πού χρήσιμη προκύπτει αν συνδυάσουμε τις μετρικές (13.1.10), (13.1.11) στην:

$$ds^2 = S^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (13.1.15)$$

όπου $k = 1$ οδηγεί στην (13.1.10) και $k = -1$ στην (13.1.11). Η ειδική Ευκλείδεια περίπτωση επίσης συμπεριλαμβάνεται, επιτρέποντας στο k να παίρνει την τιμή 0.

Bibliography

- [1] S. CARROLL, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [2] M. A. R. CHARLES KITTEL, WALTER D. KNIGHT, *Berkeley Physics Course, Volume 1, MECHANICS*, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1973.
- [3] Y. CHOQUET-BRUHAT, *General Relativity and the Einstein Equations*, Oxford University Press, 2009.
- [4] R. D' INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press Inc., 1992.
- [5] T. P. DALIA S. GOLWIRTH, *Initial conditions for inflation*, Physics Reports, (1991).
- [6] A. H. GUTH, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problem*, Physical Review D, 23 (1981).
- [7] J. B. HARTLE, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Benjamin Cummings, 2003.
- [8] K. D. KOKKOTAS, *General Theory of Relativity*, 2008.
- [9] D. F. LAWDEN, *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*, John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [10] N. D. M. DALARSSON, *Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*, Elsevier Academic Press, 2005.
- [11] A. L. M. HOBSON, G. EFSTATHIOU, *General Relativity, An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [12] J. L. MARTIN, *General Relativity. A first course for physicists*, Pearson Education Limited, 1995.
- [13] E. PAPANTONOPOULOS, *The Physics of the Early Universe*, Springer, 2005.
- [14] B. F. SCHUTZ, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, 2009.
- [15] R. A. SHARIPOV, *Quick Introduction to Tensor Analysis*, Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki.
- [16] F. H. SHU, *The Physical Universe: An introduction to Astronomy*, University Science Books, 1990.
- [17] C. TSAGKAS, *Elements of Tensor Analysis and Riemannian Geometry*, Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki.