



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

# **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ  
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΕ ΚΟΚΚΩΔΗ  
ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ**

**ΑΝΔΡΕΑΣ ΔΟΜΗΝΙΚΟΣ ΛΙΟΛΙΟΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:  
Α. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ**

Αθήνα 2012



## Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή.....	6
1.1 Ιστορία Σύνθετων Υλικών .....	6
1.1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών .....	7
1.2 Εποξειδικές ρητίνες .....	8
1.2.1 Γενικά - ορισμός .....	8
1.2.2. Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών .....	9
1.3 Σύνθετα υλικά-Εγκλείσματα στις εποξειδικές ρητίνες .....	11
1.3.1 Γενικά - Ορισμοί .....	11
1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό .....	12
1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση των σύνθετων υλικών .....	12
1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών. ....	13
1.4.1 Γενική περιγραφή .....	13
1.4.2 Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό.....	14
1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites).....	16
2. Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών .....	17
2.1 Ελαστικές Σταθερές ( $\nu, E$ ) .....	18
2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας ( $E$ ) κοκκωδών σύνθετων υλικών.....	19
2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα .....	20
2.1.3 Περιορισμοί Θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών.....	24
2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού.....	26
2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών .....	26
2.2.1 Τάση Θραύσης.....	26
2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών. ....	31
2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή. 31	
2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα.....	33
3. Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης.....	35
3.1.1 Εισαγωγή .....	35
3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία .....	37

3.1.3	Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης .....	39
3.1.4	Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) $T_g$ .....	41
4.	Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων .....	42
4.1	Γενικά .....	42
4.2	Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 1 .....	43
4.3	Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 2 .....	47
4.4	Γεωμετρικοί περιορισμοί .....	51
4.4.1	Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 1 .....	51
4.4.2	Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 2 .....	52
5.	Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης .....	53
5.1	Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου οκταφασικού μοντέλου .....	53
5.2	Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση .....	59
5.2.1	Γραμμικό Μοντέλο .....	60
5.2.2	Παραβολικό Μοντέλο .....	61
5.2.3	Εκθετικό Μοντέλο .....	62
5.2.4	Υπερβολικό Μοντέλο .....	63
5.2.5	Λογαριθμικό Μοντέλο .....	64
5.3	Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα .....	66
6.	Ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων .....	78
6.1	Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου .....	78
6.2	Οκταφασικό μοντέλο .....	79
6.3	Μέτρο ελαστικότητας για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως .....	104
7.	Σύγκριση με άλλα μοντέλα .....	118
7.1	Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία .....	118
7.2	Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα .....	123
8.	Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας .....	129
8.1	Προσεγγιστικός Υπολογισμός .....	129
8.2	Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εννιαφασικού μοντέλου .....	130
8.3	Προσεγγιστικός Υπολογισμός Μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού ..	138
8.4	Σύγκριση με άλλα μοντέλα .....	153
9.	Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής $\alpha_c$ .....	161
9.1	Θεωρητικός Υπολογισμός Θερμικής Διαστολής $\alpha_c$ .....	161

9.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα .....	174
9.2.1 Τύποι συντελεστή θερμικής διαστολής $\alpha_c$ .....	174
9.2.2 Εφαρμογή των Μοντέλων και των Θεωρητικών Σχέσεων .....	176
9.3 Γενικά συμπεράσματα .....	180
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	181

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου που θα βασίζεται στην θεωρία ελαστικότητας και θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας  $E_c$ , καθώς και τον λόγο Poisson  $\nu_c$  ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 $\mu$ m, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Γι αυτό θα προχωρήσουμε σταδιακά. Θα αναπτύξουμε αρχικά το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπ' όψιν την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων. Αυτό μας οδηγεί σε πενταφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο, δημιουργούνται δύο πιθανά κυβικά πενταφασικά μοντέλα.

Παρόλο που η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου, δηλαδή θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα δύο μοντέλα, η διάταξη των μορίων του σιδήρου στο υλικό επηρεάζει τα αποτελέσματα μας. Αυτό συμβαίνει διότι δημιουργεί αφ' ενός γεωμετρικούς περιορισμούς σχετικά με το ποιά είναι η μέγιστη δυνατή περιεκτικότητα που μπορεί να αναπτυχθεί για κόκκους του μεγέθους που εξετάζουμε σε κυβική διάταξη, ενώ αφ' ετέρου επηρεάζει την τελική τιμή του  $E_c$  και του  $\nu_c$  που θα προσδιορίσουμε, διότι μεταβάλλονται αναλόγως με την διάταξη των κόκκων σιδήρου, τα πάχη των φάσεων.

Αυτό είναι ούτως ή αλλιώς αναμενόμενο, αφού μιλάμε για μοντέλα. Η διάταξη των κόκκων στην μήτρα είναι στην πραγματικότητα τυχαία και ακανόνιστη. Κάποιο μοντέλο λοιπόν αναμένουμε να προσεγγίζει περισσότερο την πραγματικότητα, ενώ κάποιο άλλο όχι τόσο.

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως, η ύπαρξη της οποίας έχει αποδειχθεί πειραματικά, σε κάθε σύνορο μεταξύ της μήτρας μας και του εγκλείσματος. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας έγινε επίσης και ανάπτυξη της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως καθώς και διαφορετικές προσεγγίσεις του τρόπου μεταβολής αυτής, συναρτήσει της ακτίνας του ισοδύναμου σφαιρικού μας μοντέλου το οποίο χρησιμοποιήσαμε και το αναπτύξαμε μέσω της θεωρίας ελαστικότητας.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το εγκλείσμα, οδηγούμαστε σε ένα οκταφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε ενδιάμεσα από το εγκλείσμα και την μήτρα.

Τελικά εξετάζοντας την επίδραση των γειτονικών κόκκων ταυτόχρονα με την επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως, προκύπτουν δύο οκταφασικά μοντέλα τα όποια και συγκρίναμε με ήδη υπάρχοντα μοντέλα από την διεθνή βιβλιογραφία εν σχέσει με πειραματικά δεδομένα που είχαμε στην διάθεση μας από το εργαστήριο της αντοχής των υλικών. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι πολύ ικανοποιητικά, αφού τα δύο

μας μοντέλα προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα με ακρίβεια εφάμιλλη του μοντέλου Coupto, το οποίο θεωρείται έως τώρα ίσως το καλύτερο μοντέλο που έχει αναπτυχθεί.

Ένα δεύτερο σκέλος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός **προσεγγιστικού μοντέλου** που θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας  $E_c$ , καθώς και τον λόγο Poisson  $\nu_c$  ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 $\mu$ m, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Το προσεγγιστικό αυτό μοντέλο θα το επιτύχουμε σταδιακά. Αρχικά θεωρούμε πως θα αναπτύξουμε το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπ' όψιν την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων. Αυτό μας οδηγεί σε πενταφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο, δημιουργούνται 2 πιθανά κυβικά πενταφασικά μοντέλα. Όπως και παραπάνω επειδή η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα δύο μοντέλα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το έγκλεισμα, για λόγους απλοποίησης οδηγούμαστε σε ένα εννιαφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε ενδιάμεσα από το έγκλεισμα και την μήτρα. Τελικά το εννιαφασικό μοντέλο το συγκρίναμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών.

Τέλος στην εργασία αυτή αναπτύξαμε όπως και προηγουμένως ένα μοντέλο το οποίο θα μπορεί να προσδιορίσει τον συντελεστή θερμικής διαστολής  $\alpha$  ενός σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 $\mu$ m λαμβάνοντας υπ' όψιν μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος. Τελικά το οκταφασικό μοντέλο που καταλήγουμε το συγκρίνουμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα.

## 1.Εισαγωγή

### 1.1 Ιστορία Σύνθετων Υλικών

Ο όρος σύνθετο υλικό απλοποιητικά σημαίνει ότι δύο ή περισσότερα υλικά συνδυαζόμενα μακροσκοπικά μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο υλικό που συνήθως παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από εκείνες των αρχικών υλικών κάτι που συχνά ακόμη μπορεί να εμφανίζει και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε.

Με βάση αυτό τον απλό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι ο άνθρωπος επινόησε και χρησιμοποίησε σύνθετα υλικά από τα πολύ παλιά χρόνια. Έτσι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν το άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου μπορούν να συνδυασθούν κατάλληλα ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την υγρασία. Επίσης στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία εμφανίσθηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου «δεμένο» με ασφαλτο. Οι Ασύριοι έφτιαξαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη ασφαλτο. Στον Μεσαίωνα κατασκευάσθηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πιο πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής / βάρους και ακαμψίας / βάρους χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές στις οποίες το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα, όπως π.χ. σε αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα βήματα της ζωής του είχε «δισθανθεί» ότι συνδυάζοντας δύο ή περισσότερα υλικά μπορούσε να κατασκευάσει ένα τρίτο «σύνθετο υλικό», που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των σύνθετων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα διά μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19<sup>ου</sup> αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λπ., ούτε σε ποιότητα, ούτε σε μεθόδους κατασκευής. Η πραγματικά αλματώδης εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20<sup>ο</sup> αιώνα και θα μπορούσαμε να πούμε τα τελευταία 30 χρόνια και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης: της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.



### 1.1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) που αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Οι δομικές αυτές μονάδες είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμα τους και τον πυρήνα τους, αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής πάνω στις ιδιότητές τους ήταν άγνωστες ως πριν λίγες δεκαετίες.

Ευθύς μόλις ανακαλύφθηκε ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη οργανωμένες αλυσίδες μικρότερων μορίων, ο άνθρωπος κατόρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών – πράγμα που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο - αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή, που δεν απαντώνται στη φύση. Τα τελευταία αυτά είναι και τα πιο ενδιαφέροντα από τη σκοπιά των σύνθετων υλικών. Το αποτέλεσμα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών, τεράστιας σπουδαιότητας σήμερα, που παράγουν μια τρομακτική ποικιλία από πλαστικές ύλες, συνθετικές υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

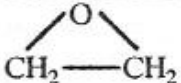
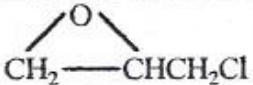
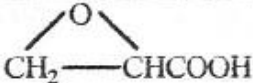

Ένα πολυμερές υλικό ικανοποιεί τον ορισμό του σύνθετου υλικού, που δόθηκε στην §1.1 σε μικροσκοπική κλίμακα γιατί αποτελείται από δομικές μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά που συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές του.

## 1.2 Εποξειδικές ρητίνες

### 1.2.1 Γενικά - ορισμός

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξειδία τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξειδίο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξειδίου του αιθυλενίου
	επιχλωροϋδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Σχήμα 1.1 συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση, το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

### **1.2.2. Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών**

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (low viscosity), καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα τη εύκολη κατεργασία τους.
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων). κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. . Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση. . Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες , ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα,πέτρακαιξύλο.
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι Περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.

- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).

2. Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλει στεγανότητας.

3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα

4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated retins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.

5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την Κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.

6. Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μήτρων, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetcome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγραμόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.
- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.
- Για την υγραμόνωση πισινών και δεξαμενών.
- Για την υγραμόνωση υπόγειων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λπ.

Μειονέκτημα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

### **1.3 Σύνθετα υλικά-Εγκλείσματα στις εποξειδικές ρητίνες**

#### **1.3.1 Γενικά - Ορισμοί**

Στην κατηγορία των σύνθετων υλικών ανήκουν τα πολυμερή και οι ρητίνες με εγκλείσματα. Ένα υλικό χαρακτηρίζεται ως σύνθετο εξεταζόμενο μακροσκοπικά όταν σχηματίζεται από τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διαφορετικές από τα αρχικά υλικά που το δημιουργήσαν. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επιμέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές από αυτά. Τις περισσότερες φορές τα αρχικά υλικά του συνθέτου αντιδρούν χημικά μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει μια νέα φάση. Με τον όρο “φάση” εννοούμε κάθε ομογενές τμήμα του σύνθετου υλικού. Με τον όρο “ενδιάμεση φάση” στα σύνθετα υλικά εννοούμε την περιοχή μεταξύ των ορίων των φάσεων που

εμφανίζει διαφορετικές φυσικές ιδιότητες από τα αρχικά υλικά. Τα σύνθετα υλικά μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από μια συνεχή μήτρα με μια ή περισσότερες διάχυτες φάσεις (τα εγκλείσματα). Το απλούστερο σύνθετο υλικό αποτελείται από δύο υλικά από τα οποία το ένα είναι η μήτρα (matrix) και το δεύτερο το έγκλεισμα (filler).

### **1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό**

Για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού θα πρέπει να αναφέρουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- τη συγκέντρωση και την κατανομή συγκέντρωσης των σωματιδίων
- το σχήμα των σωματιδίων
- το μέγεθος και την κατανομή μεγέθους των σωματιδίων
- το προσανατολισμό των σωματιδίων
- την τοπολογία των σωματιδίων

Η συμπεριφορά ενός σύνθετου υλικού εξαρτάται σημαντικά από περιεκτικότητα των αρχικών υλικών. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού με μια ή περισσότερες φάσεις, διάχυτες μέσα σε μια συνεχή είναι:

α) το είδος των υλικών των διάχυτων φάσεων (εγκλεισμάτων)

β) η γεωμετρία της διάχυτης φάσης

γ) το είδος του υλικού που χρησιμοποιείται ως μήτρα.

### **1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση των σύνθετων υλικών**

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη φύση μήτρας και των συστατικών πρόσμειξης των εγκλεισμάτων ως εξής:

1. Διάκριση ως προς την προέλευση της μήτρας:

- σύνθετα με πλαστική μήτρα
- σύνθετα με μεταλλική μήτρα.

2. Διάκριση ως προς τη μορφή του εγκλείσματος:

- έγκλεισμα με μορφή ινών
- έγκλεισμα με μορφή κόκκων έγκλεισμα με μορφή φύλλων

## **1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.**

### **1.4.1 Γενική περιγραφή**

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015μ. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό σε μια πιο στερεή μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Τα εγκλείσματα Πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμειξη.

#### 1.4.2 Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες, γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται και η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε εγκλείσμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- Συστολή

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε εγκλείσμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ. το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία, τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά. Τα εγκλείσματα επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητα τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος σύνθετου υλικού.

- Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.



- Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση δεν είναι γραμμική.

- Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- Θερμική αγωγιμότητα

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών. Μεγάλες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών, συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- Αντοχή στη συμπίεση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- Συμπεριφορά στην κάμψη

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- Σκληρότητα επιφάνειας - Αντίσταση στην τριβή

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση τριβής.

### 1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από κόκκους ενός υλικού μέσα σε μήτρα ενός άλλου. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή όχι, όπως και η μήτρα. Έτσι, από αυτή την άποψη, έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς.

#### A. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το σκυρόδεμα (όχι το οπλισμένο). Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας.

Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό να προκύψει, ένα σύνθετο υλικό αυτού του είδους.

#### B. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευαστεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας. Παράδειγμα, τέτοιου υλικού είναι εγκλείσμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με εγκλείσμα από μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

#### Γ. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό εγκλείσμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα.

Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

#### Δ. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα προκύπτοντα υλικά ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δύο ειδών ανάλογα με το εγκλείσμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου

πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην Κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα. Έτσι το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κλπ. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

## 2. Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών

### 2.1 Ελαστικές Σταθερές ( $\nu, E$ )

Από τη μηχανική γνωρίζουμε ότι εφόσον τα φορτία δεν υπερβαίνουν μια ορισμένη τιμή, οι παραμόρφωσης που προκαλούν είναι ανάλογες των τάσεων. Η αναλογία αυτή στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

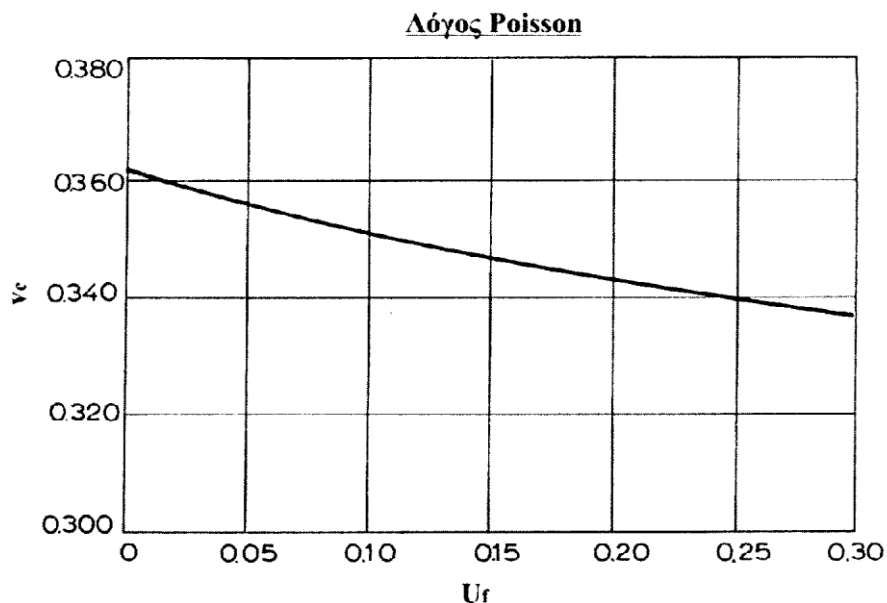
$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (2.1)$$

που είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου του Hooke. Η σχέση αυτή, είναι γραμμική και γι' αυτό τα υλικά για τα οποία ισχύει ονομάζονται και γραμμικά.

Ο συντελεστής αναλογίας  $E$  ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Εξάλλου η αρχική επιμήκυνση μιας ράβδου που εφελκύεται, συνοδεύεται πάντοτε από κάποια πλευρική συστολή. Έχει αποδειχθεί ότι τα πηλίκια των ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, προς την ανοιγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό  $\nu$ , σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται λόγος του Poisson ή συντελεστής εγκάρσιας συστολής. Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = \varepsilon_x / \varepsilon_z = -\varepsilon_y / \varepsilon_z \quad (2.2)$$

Η γραφική παράσταση του λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων φαίνεται στο διάγραμμα [2.1] που ακολουθεί:



Σχήμα 2.1 Γραφική παράσταση λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά

Δεδομένου ότι οι ανοιγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί δικαιολογεί το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.2) αφού ο λόγος του Poisson εκφράζεται με ένα θετικό αριθμό, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος από 1/2 ο λόγος αυτός για όλα τα υλικά παίρνει οριακά την τιμή 1/2 όταν αυτά δεν καταπονούνται με φορτία μέσα στην ελαστική περιοχή, στην περιοχή δηλαδή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke, αλλά με φορτία μεγαλύτερα, που βρίσκονται δηλαδή στην πλαστική περιοχή.

Η παράμετρος  $\Delta V/V$  (ανοιγμένη μεταβολή του όγκου ή μέτρο διογκώσεως) σχετίζεται με τον λόγο του Poisson [1], με βάση τη σχέση:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.3)$$

Όπου  $\rho = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  είναι η υδροστατική συνιστώσα των τάσεων

### **2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών**

Από πολλούς ερευνητές αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Τα μοντέλα αυτά και οι εξισώσεις που προέκυψαν, είναι άλλοτε απλά και άλλοτε πολύπλοκα ανάλογα με τις παραδοχές που ο καθένας χρησιμοποίησε.

Εδώ αναφερόμαστε σε ορισμένα από αυτά τα μοντέλα.

### 2.1.1.1 Το μοντέλο του Counto [2]

Το μοντέλο για τα σύνθετα υλικά δύο φάσεων το οποίο προτάθηκε από τον Counto προϋποθέτει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στον κόκκο και τη μήτρα. Το μέτρο του σύνθετου υλικού, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1-U_f^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{(1-U_f^{1/2})U_f E_m + E_f} \quad (2.4)$$

Αυτό το μοντέλο προβλέπει τα μέτρα ελαστικότητας και συμφωνεί με μια ευρεία σειρά από πειραματικά δεδομένα, κυρίως για υλικά από σκυρόδεμα.

### 2.1.1.2 Το μοντέλο του Paul [3]

Στην προσεγγιστική λύση του Paul τα συστατικά (οι φάσεις) του σύνθετου υλικού, υποτίθεται ότι είναι στην κατάσταση μακροσκοπικώς ομοιογενούς τάσης. Η πρόσφυση υποτίθεται ότι υπάρχει στην ενδιάμεση επιφάνεια ενός κυβικού εγκλείσματος, το οποίο είναι μέσα σε κυβική μήτρα. Όταν μια ομοιόμορφη τάση εφαρμοστεί στο σύνορο, το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού δίνεται από τη σχέση:

$$E_c = E_m \left\{ \frac{1+(m-1)U_f^{2/3}}{1+(m-1)(U_f^{2/3}-U_f)} \right\} \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επίσης τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους, που δε μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς.

Για τα σύνθετα υλικά όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί. Με

βάση αυτή την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα ήταν ο Einstein [4], όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διασπαρμένων σε κάποιο

Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f) \quad (2.6)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε εγκλείσμα και για περιπτώσεις πλήρους συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο τέλεια συνοχή εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας - σωματιδίων, κατά τη διάρκεια φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας - σωματιδίου.

Προϋπόθεση για την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το εγκλείσμα είναι σκληρότερο υλικό από τη μήτρα. Ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος για την εξίσωση και όχι το βάρος του. Τέλος το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση. Συνέχισαν την έρευνα οι Guth και Smallwood [5, 6] προτείνοντας την εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \quad (2.7)$$

Αργότερα συνέχισε ο Kerner [7] με τη σχέση

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\frac{U_f G_f}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}}{\frac{U_f G_m}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}} \quad (2.8)$$

Όπου G, το μέτρο διάτμησης και ν, ο λόγος Poisson.

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η εξίσωση (2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-\nu_m)}{8-10\nu_m} \quad (2.9)$$

Στην πραγματικότητα δεν ισχύει η προϋπόθεση συνοχής μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε παραπάνω παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίζεται θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου.

Ο Einstein [4], κατά τις παρατηρήσεις που έκανε το 1906 και αναφέρονται παραπάνω κατέληξε πως όταν μεταξύ του αιωρήματος στερεών σφαιρών και του Νευτώνιου υγρού δεν υπάρχει τέλεια συνοχή ισχύει η εξίσωση:

$$E_c = E_m(1+U_f) \quad (2.10)$$

Εάν τα σωματίδια είναι φυσαλίδες αέρα ή βρίσκονται μέσα σε κενά τότε η εξίσωση Kerner γράφεται:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-\nu_m)}{7-5\nu_m} \quad (2.11)$$

Τέλος, ο Takahashi [8] πρότεινε την παρακάτω πιο σύνθετη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1-\nu_m)U_f \frac{E_f(1-2\nu_m) - E_m(1-\nu_f) + 10(1+\nu_m) - E_m(1+\nu_f)}{E_f(1+\nu_m) + 2E_m(1-2\nu_f) + 2E_f(4-5\nu_m)(1+\nu_m) + E_m(7-5\nu_m)(1+\nu_f)} \quad (2.12)$$

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και αυτό οφείλεται στο ότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού.

Για την περίπτωση ενάρξεως των συσσωματωμάτων ο Mooney [9] διέτυπωσε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp\left(\frac{2.5U_f}{1-S \cdot U_f}\right) \quad (2.13)$$



Όπου S ορίζεται από τη σχέση :

$$S = \text{φαινόμενος όγκος εγκλείσματος/πραγματικός όγκος εγκλείσματος}$$

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις το κυμαίνεται από 1.2 μέχρι 2.

Μια άλλη Θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van-Dyck [10] περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{kU_f}{1 - S \cdot U_f} \quad (2.14)$$

όπου k και S είναι με τιμές 1.25 και 1.20 αντίστοιχα.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη, πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης που έχει μελετηθεί προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκωδών εγκλεισμάτων. Ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και k, είναι μια παράμετρος που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης:

$$E_c = E_f U_f k + E_m U_m + E_i U_i \quad (2.15)$$

Καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε μελέτη του καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη [11,12], όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο-φάση μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας.

Επίσης μια άλλη εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας σύνθετου υλικού με εγκλείσματα πρότειναν αργότερα οι E.Sideridis, P.S. Theocaris [13]:

$$\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} = \frac{2\lambda^2 U_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \frac{U_f (1-\lambda)^2 (1+\nu_m) + 2(\lambda U_f - 1)^2 (1-2\nu_m)}{1-U_f} \quad (2.16)$$

Όπου τα ν και c δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:  $1/\nu_c = U_f/\nu_f + U_m/\nu_m$

### 2.1.3 Περιορισμοί Θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι στην ανασκόπηση δεν έγινε καμιά προσπάθεια για να συζητηθούν οι προσεγγίσεις, αλλά να δειχθεί ένας αριθμός σε χρήσιμες θεωρητικές υποθέσεις που περιγράφουν τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων . Για τη λεπτομερή συζήτηση των θεωριών γίνεται αναφορά στους Hashin και Hill [14,15].

Στην πράξη τα εγκλείσματα κόκκων δεν μπορούν τελείως να αποχωριστούν το ένα από το άλλο και η ενίσχυση του στοιχείου μπορεί να είναι σε μικρή κλίμακα, στην πραγματικότητα είναι ένα συσσωμάτωμα από μικρούς κόκκους. Έτσι λοιπόν ως απάντηση στο εφαρμοζόμενο φορτίο, η τάση θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόκκους και τα συσσωματώματα και η παραδοχή τάση ή ομοιόμορφη επιμήκυνση (παραμόρφωση) είναι καθαρά υπεραπλούστευση.

Οι θεωρίες που ασχολούνται με συστήματα εγκλεισμάτων δέχονται ότι τα μέτρα ελαστικότητας για δεδομένο εγκλείσμα και μήτρα εξαρτώνται μόνο από την περιεκτικότητα σε όγκο του εγκλείσματος και όχι από το μέγεθος των κόκκων . Όμως γενικά το μέτρο αυξάνει όσο το μέγεθος των κόκκων μειώνεται. Οι Lewis και Nielsen [16] παραδέχονται ότι όσο το μέγεθος του κόκκου μειώνεται η επιφάνεια των κόκκων αυξάνεται παρέχοντας ένα πιο ενεργό επιφανειακό δεσμό μεταξύ των δύο φάσεων . Αυτό θα μπορούσε να συνοδευτεί από μια κλίση για την αύξηση συσσωρευσης των κόκκων (συσσωματώματα). Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών μπορούν επίσης να μεταβάλλονται., όταν αλλάζει το σχήμα (μορφή) κόκκου, Ο Biische [17, 18] παρατήρησε ότι διαφορετικές μορφές εγκλεισμάτων καταλήγουν σε διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα έντονο με μεγαλύτερους ή μη σφαιρικούς (μη σφαιροειδείς) κόκκους όπου ένας προτιμώμενος προσανατολισμός θα μπορούσε να τροποποιήσει τη συμπεριφορά παραμόρφωσης.

Ο Wu [19] απέδειξε Θεωρητικά ότι κόκκοι σε μορφή δίσκου έδωσαν καλύτερη ενίσχυση από βελονοειδούς ή σφαιρικής μορφής κόκκους, αλλά αγνόησε την ανισοτροπία η οποία συνδέεται με τη χρήση μη σφαιρικών κόκκων σε σύνθετα υλικά.

Ο Chow [20] έχει ασχοληθεί με πρόβλημα για ευθυγραμμισμένους ελλειψοειδείς κόκκους και προέβλεψε το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Οι επιδράσεις από το μέγεθος του εγκλείσματος και από την επιφάνεια του εγκλείσματος αγνοήθηκαν. Όμως είναι απίθανο στην πράξη ότι τα εγκλείσματα μπορούν να διαταχθούν ομοιόμορφα με τρόπο που παραδέχεται ο Chow έτσι ώστε η πειραματική επιβεβαίωση των δύο θεωριών να είναι απαραίτητη.

Η κατανομή του μεγέθους των κόκκων επηρεάζει την περιεκτικότητα του εγκλείσματος στη μήτρα. Μίγματα από κόκκους με διαφορετικό μέγεθος εγκλεισμάτων μπορούν να διαταχθούν πιο πυκνά από εγκλείσματα ενός μεγέθους διότι τα μικρά εγκλείσματα μπορούν να γεμίσουν το χώρο μεταξύ των στενά διατεταγμένων μεγάλων εγκλεισμάτων και να σχηματίσουν συσσωματώματα. Αυτοί οι

κόκκοι που συσσωματώνονται είναι ικανοί να μεταφέρουν ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας για την ίδια περιεκτικότητα που προβλέπεται από τις περισσότερες θεωρίες.

Αυτή η επίδραση δημιουργείται όπου υπάρχει μια διαφορετική ενισχυτική ικανότητα άμμου, όπως έχει παρατηρηθεί από τους Ahmed και Jones [21]. Μια εμπειρική τροποποίηση στην εξίσωση Kerner η οποία περιλαμβάνει ένα συντελεστή αλληλεπίδρασης εγκλείσματος προτάθηκε από τον Dickie [22]. Κάθε μια από τις εξισώσεις εμφανίζεται ικανοποιητική στο να περιγράφει τα δεδομένα των διαφόρων ερευνητών.

Πρέπει να σημειωθεί το σχόλιο από τον Christensen [23] επάνω στην εξίσωση του Kerner, ότι το σαφές σφάλμα σ' αυτή την εξίσωση δεν μπορεί να δειχθεί λόγω της συντομίας της παραγωγίσεως. Αυτό συνεπώς δημιουργεί αμφιβολίες στην εξίσωση του Kerner και στις επακόλουθες τροποποιήσεις.

Οι περισσότερες από τις θεωρίες οι οποίες εξηγούν την ενισχυτική δράση των εγκλεισμάτων παραδέχονται τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στα εγκλείσματα και την πολυμερική μήτρα. Η περίπτωση της ελλιπούς προσφύσεως ήταν στην- ελαστική περιοχή, όπως συζητήθηκε από τους Sato και Furukawa [24]. Αυτοί παραδέχονται ότι οι συνδεδεμένοι κόκκοι λειτουργούν ως οπές και προβλέπουν μείωση στα μέτρα ελαστικότητας με την αύξηση της περιεκτικότητας σε εγκλείσμα.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μη συνδεδεμένοι κόκκοι δεν λειτουργούν εντελώς ως οπές, επειδή αυτοί συγκρατούν τη μήτρα από την κατάρρευση. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας συστήματος εγκλεισμάτων πρέπει να αυξάνει με την αύξηση περιεκτικότητας του εγκλείσματος, η οποία είναι η γενικώς αναμενόμενη συμπεριφορά.

Μια μεταβολή στην πρόσφυση μήτρας - εγκλεισμάτων έχει μικρότερη επίδραση στα μέτρα ελαστικότητας από ότι στην αντοχή. Το τελευταίο είναι περισσότερο εξαρτώμενο από την κατεργασία της επιφάνειας [24]. Στην πραγματικότητα ο βαθμός πρόσφυσης δεν φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας όσο οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στις φάσεις δεν υπερβαίνονται από την εφαρμοζόμενη τάση.

Οι Spanoudakis και Young [24] εξέτασαν εγκλείσματα γυαλιού σε εποξειδική ρητίνη και βρήκαν ότι οι καλύτερες συνολικές μηχανικές ιδιότητες αποκτήθηκαν από σύνθετα υλικά που περιείχαν κόκκους οι οποίοι είχαν εμβαπτιστεί σε ουσία (coupling agent) προς αύξηση της προσφύσεως μήτρας - εγκλείσματος.

Είναι ξεκάθαρο από τις προηγούμενες αναφορές ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων είναι μια λεπτομερειακή συνάρτηση της μικροδομής, όπως επίσης και της ποιότητας πρόσφυσης μεταξύ των δύο φάσεων.

#### **2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού.**

Η Θεωρητική μελέτη που ακολουθεί βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές: .Οι φάσεις του σύνθετου υλικού (έγκλεισμα και μήτρα) είναι ελαστικά ισότροπα και ομογενή υλικά.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο (μακροσκοπικώς ισότροπο υλικό).
- Το έγκλεισμα αποτελείται από κόκκους που έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων είναι αρκετά μικρή, έτσι ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών να μπορεί να αμεληθεί.

Για τον προσδιορισμό των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας ( $E_c$ ) του σύνθετου υλικού, θα εφαρμόσουμε την θεωρία της ελαστικότητας στον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό όγκο του συνθέτου, όπου θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού.

### **2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών**

Όπως έχει επισημανθεί από τον Nielsen [25] οι θεωρίες για την αντοχή των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα είναι ολιγότερο αναπτυγμένες από αυτές για τα μέτρα ελαστικότητας. Εκτός από την περίπτωση για ελαστικό (rubber) με εγκλείσματα, υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί.

#### **2.2.1 Τάση Θραύσης**

##### **2.2.1.1 Μοντέλο του Broutman**

Στην προσέγγιση του Broutman [26], υποτίθεται ότι το σύνθετο υλικό αστοχεί όταν ένα στοιχείο υποστεί θραύση ως αποτέλεσμα μιας συγκεντρώσεως τάσεως γύρω από το έγκλεισμα. Έπεται ότι η αντοχή πύπτει ταχέως με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων εγκλεισμάτων και παραμένει βασικά σε αυτό το επίπεδο με περαιτέρω προσθήκες εγκλεισμάτων.

Με αυτήν την υπόθεση αυτοί χρησιμοποίησαν την ανάλυση για πεπερασμένα στοιχεία για να μοντελοποιήσουν το σύνθετο υλικό και συσχέτισαν τα αποτελέσματα με τις πειραματικές αντοχές υλικού με εγκλείσματα από σφαίρα γυαλιού μέσα σε θερμοσκληρυνόμενη ρητίνη.

Οι θεωρητικές προβλέψεις δεν έχουν καλή σύμπτωση με τα πειραματικά δεδομένα διότι το μοντέλο αγνοεί αλληλεπίδραση κόκκων . Επιπλέον τα σύνθετα υλικά είναι πιθανόν να μην έχουν αστοχήσει ως αποτέλεσμα της αστοχίας του πρώτου στοιχείου.

### 2.2.1.2 Ο νόμος των δυνάμεων (The power law)

Η δεύτερη προσέγγιση υποθέτει ότι η αντοχή σύνθετου υλικού προσδιορίζεται από την (υπάρχουσα) έκταση της φέρουσας φορτίο μήτρας λόγω της παρουσίας του εγκλείσματος [27,28].

Στην περίπτωση μιας πτωχής προσφύσεως ανάμεσα στη μήτρα και το έγκλεισμα και της απουσίας συγκέντρωσης τάσεως στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας, η αντοχή περιγράφεται από το νόμο δυνάμεως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - aU_f^n) \quad (2.17)$$

όπου  $\sigma_{cu}$  και  $\sigma_{mu}$  οι αντοχές (τάσεις θραύσεως) του συνθέτου και της μήτρας αντιστοίχως,  $a$  και  $n$  είναι σταθερές εξαρτώμενες από το υποτιθέμενο σχήμα κόκκου και την ταξινόμηση στο μοντέλο του συνθέτου.

Ο Nielsen [27] έχει εισηγηθεί έναν παράγοντα συγκεντρώσεως τάσεως,  $K$  με προτεινόμενη τιμή την 0,5. Για κυβικούς κόκκους μέσα σε κυβική μήτρα η Εξ. μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - U_f^{2/3}) K \quad (2.18)$$

Οι Nicolais και Narkis [28] θεώρησαν μια κυβική μήτρα ενισχυμένη με ομοιόμορφους διασκορπισμένους κόκκους όπου υποτίθεται ότι η θραύση γίνεται στην ελάχιστη εγκάρσια διατομή συνεχούς φάσεως. Η σχέση για την αντοχή δίνεται ως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - 1,21U_f^{2/3}) \quad (2.19)$$

Ο Piggott και Leidner [29] υποστήριξαν ότι η υποτιθέμενη ομοιόμορφη κατανομή των εγκλεισμάτων σε πάρα πολλά μοντέλα είχε μικρή πιθανότητα επιτεύξεως στην πράξη και προτείνουν μια εμπειρική σχέση:

$$\sigma_{cu} = K\sigma_{mu} - bU_f \quad (2.20)$$

όπου K: συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων και 1 μια σταθερά εξαρτώμενη από την πρόσφυση κόκκου - μήτρας.

Ο Landon [30] πρότεινε μια εξίσωση όμοια:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1-U_f)KU_f d \quad (2.21)$$

όπου d είναι η μέση διάμετρος κόκκου και K είναι η κλίση στο διάγραμμα εφελκυστικής αντοχής μέσης διαμέτρου κόκκου.

### 2.2.1.3 Η εξίσωση των Leidner – Woodhams

Μια απλούστερη αλλά πιο λεπτομερής προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τον Leidner [31] όπου το μοντέλο του σύνθετου υλικού αποτελείται από σφαιρικούς κόκκους μέσα σε μη ελαστική μήτρα. Για να εφαρμοστεί η θεωρία ενισχύσεως το μέγεθος κόκκου θα προσεγγισθεί στον κύλινδρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί η κατανομή τάσεων στο έγκλεισμα στο σημείο θραύσεως.

Στην περίπτωση μη καλώς συνδεδεμένων κόκκων, η μεταβίβαση τάσεως ανάμεσα στον κόκκο και την μήτρα υποτίθεται ότι γίνεται ως αποτέλεσμα του συνδυασμού της τριβής μεταξύ κόκκου - μήτρας και των παραμενουσών θλιπτικών τάσεων οι οποίες ενεργούν επάνω στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας.

Στην περίπτωση από καλά συνδεδεμένους κόκκους οι τάσεις μεταβιβάζονται δια μέσου μηχανισμού διάτμησης. Η μέγιστη τάση είναι στο κόκκο, συνεπώς εξαρτάται από την αντοχή του δεσμού κόκκου - μήτρας.

Η τελική εφελκυστική τάση (αντοχή) του συνθέτου ελήφθη απλά ως το άθροισμα του μεγίστου φορτίου που αναλαμβάνεται από την μήτρα και από το έγκλεισμα και δίνεται ως:

$$\sigma_{cu} = (\sigma_a + 0,83\tau_m) + \sigma_a K(1-U_f) \quad (2.22)$$

για καλή πρόσφυση μεταξύ των δύο φάσεων και

$$\sigma_{cu} = 0,83\sigma_{th} a U_f + k\sigma_{mu} (1-U_f) \quad (2.23)$$

στην περίπτωση μη προσφύσεως μεταξύ των δύο φάσεων. Τα  $\sigma_a$  και  $\sigma_{mu}$  είναι η αντοχή του ενδιάμεσου επιφανειακού δεσμού και η αντοχή της μήτρας αντιστοίχως,  $T_m$  είναι η αντοχή σε διάτμηση της μήτρας,  $K$  είναι ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων,  $k$  είναι μια παράμετρος η οποία εξαρτάται από το μέγεθος των κόκκων, και είναι η θλιπτική θερμική τάση η οποία ενεργεί επάνω στο σύνορο του κόκκου και  $\alpha$  είναι ο συντελεστής τριβής.

Υπήρξαν προσπάθειες για τον συσχετισμό της αντοχής των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους με την διάμετρο  $d$  των εγκλεισμάτων. Για παράδειγμα: ο Hojo [32, 33] έχει βρει ότι η αντοχή εποξειδικής ρητίνης με εγκλείσματα πυριτίου ελαττώνεται όταν το μέγεθος κόκκου αυξάνει ακολουθώντας μια σχέση της μορφής:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} k d^{-1/2} \quad (2.24)$$

όπου  $k$  είναι σταθερά και  $d$  είναι η μέση διάμετρος κόκκου.

Ο Schrage [34] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις προηγούμενες

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} \exp(-rU_f) \quad (2.25)$$

με  $r=2.66$  που βρέθηκε πειραματικά.

Το μειονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι είναι ακριβώς για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων. Η Εξ.(2.26) είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore [35] για την περίπτωση των πορωδών συστημάτων:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fo} \exp(-aP) \quad (2.26)$$

όπου  $\sigma_{fo}$  είναι η αντοχή της μήτρας χωρίς πόρους,  $a$  μια σταθερά και  $P$  η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε πόρους.

#### **2.2.1.4 Περιορισμοί των θεωρητικών μοντέλων σχετικά με την αντοχή των σύνθετων υλικών.**

Το μέγεθος των κόκκων επηρεάζει πολύ την αντοχή σε εφελκυσμό των συστημάτων. Γενικά η αντοχή σε εφελκυσμό αυξάνει με την ελάττωση του μεγέθους. Η αύξηση της ενδιάμεσης επιφάνειας μεταξύ δύο φάσεων παρέχει έναν πολύ αποτελεσματικό δεσμό στην επιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων και θεωρείται ότι είναι πολύ

σημαντικός παράγων. Το μέγεθος κόκκου είναι επίσης σχετικό με την εξάρτηση από το μέγεθος της ατέλειας του υλικού.

Ο Goodier [1] έχει αποδείξει ότι το τασικό πεδίο κοντά σ' έναν κόκκο, είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του κόκκου. Όμως ο όγκος του πολυμερούς που υφίσταται συγκέντρωση τάσεων, αυξήθηκε με την αύξηση στο μέγεθος του κόκκου, άρα η πιθανότητα εύρεσης μιας μεγάλης ατέλειας αυξάνει με την αύξηση του μεγέθους του κόκκου.

Η επίδραση από την διεπιφανειακή (λεπτή επιφάνεια μεταξύ δύο φάσεων) πρόσφυση επί της αντοχής μπορεί να δικαιολογηθεί με όμοιο τρόπο εφόσον ένας αδύναμος δεσμός μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας θα δράσει ως μια υπάρχουσα ατέλεια που θα παράγει μια κοιλότητα ίση με το μέγεθος της.

Η μορφή (σχήμα) εγκλείσματος αναμένεται να παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων. Όταν έχουμε εγκλείσματα τα οποία δεν έχουν Κανονική μορφή η εξασθένηση της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων οφείλεται σε μεγάλη συγκέντρωση τάσεων που συζευγνύεται με επίδραση μεγέθους. Σε στρογγυλεμένες ρωγμές και εγκλείσματα, η συγκέντρωση τάσης είναι ολιγότερο σημαντική παρά σε εγκλείσματα με οξείες (κοπτερές) γωνίες.

Η προαναφερθείσα αναφορά αποδεικνύει καθαρά ότι αυτά τα υπάρχοντα μοντέλα για την πρόβλεψη της αντοχής θέτουν ένα άνω όριο στην αντοχή ενός συστήματος εγκλεισμάτων.

Όταν γίνεται πρόβλεψη της αντοχής ενός υλικού με έγκλεισμα με την χρησιμοποίηση του νόμου των δυνάμεων (power law) η εκλογή των κατάλληλων σταθερών επηρεάζεται από το σχήμα των κόκκων και την διάταξη τους μέσα στο γεωμετρικό μοντέλο. Επιπλέον η συγκέντρωση τάσεων θα χαμηλώσει αυτές τις τιμές κατά ακαθόριστη ποσότητα.

Απ' την άλλη, στις αναλύσεις των Leidner και Woodhams [31], οι θερμικές τάσεις ( $\sigma_{th}$ ) και της αντοχής του δεσμού μήτρας - κόκκου σε είναι δύσκολο να μετρηθούν για πραγματικά σύνθετα υλικά. Στις πολύ χαμηλές περιεκτικότητες κατ' όγκο  $U_f$  μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις για τις θερμικές τάσεις, αλλά σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες κατ' όγκο  $U_f$  οι υπολογισμοί περιπλέκονται από την παρουσία γειτονικών κόκκων.



## 2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών.

Παρακάτω αναφέρονται τα διάφορα Θεωρητικά μοντέλα που έχουν προβλεφθεί από τους διάφορους ερευνητές για την Παραμόρφωση θραύσης.

ο Smith [36] πρότεινε τον παρακάτω τύπο με  $\varepsilon_c$  και  $\varepsilon_m$  την παραμόρφωση θραύσης του σύνθετου και της μήτρας αντίστοιχα:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - 1,106 U_f^{1/3}) \quad (2.27)$$

Ο Bueche [17, 18] πρότεινε μια αντίστοιχη εξίσωση χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - U_f^{1/3}) \quad (2.28)$$

Ο Nielsen [25, 27] πρότεινε την εξίσωση που έχει την ίδια μορφή με την παραπάνω εξίσωση:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m (1 - U_f^{1/3}) \quad (2.29)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη Θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεων - παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, των συσσωματωμάτων του μεγέθους των σωματιδίων, του μέτρου πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στην μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών.

## 2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή.

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινωδών υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσης συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων του υλικού, αν και η βασικότερη επιδίωξη μας είναι η βελτίωση των φυσικοχημικών ιδιοτήτων.

Ανάλογα με την αποτελεσματικότητα τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά (είναι εκείνα που προκαλούν ενίσχυση) και σε αδρανή (είναι εκείνα που δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν μόνο αλλαγή χρωματισμού και μείωση του κόστους).

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητα τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο δομική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς. Έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μέγεθος, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων.

Με τον όρο κινητική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του σύνθετου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετιστεί με την ενέργεια  $W$  θραύσης του πολυμερούς. Μετριέται από το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη τάσεων - παραμορφώσεων. Όπου  $L_b$  το μήκος του δοκιμίου στη θραύση  $L_0$  το αρχικό μήκος και  $\sigma$  η επιβαλλόμενη τάση.

$$W = \int_{L_0}^{L_b} \sigma dL \quad (2.30)$$

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου με την παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση.

Έτσι τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή της ελάττωσης εξαρτάται από τη φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των σύνθετων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλείσματος. Ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού είναι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μηχανική αντοχή του σύνθετου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε εγκλείσμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού, σαν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους.

Παράλληλα η αντοχή του σύνθετου υλικού αυξάνει με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, με τη βέλτιστη (Optimum) περιεκτικότητα όπου προκαλείται κορεσμός των κέντρων προσρόφησης μακρομορίων επάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.

#### **2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα.**

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματος τους. Η αλλαγή όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή των παραμορφώσεων). Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με νέες διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους:

α. Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (πχ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).

β. Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων του στοιχειώδους κύβου οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή σχήματος επιτυγχάνεται και από ορθές, και από διατμητικές τάσεις και άρα παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που προσφέρεται από τη μηχανή επιβολής των φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμορφώσεων, η οποία αποτελείται από δύο προσθετούς, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται ενέργεια μεταβολής όγκου και έναν που αντιστοιχεί σε αλλαγές σχήματος ή στρέβλωση του υλικού και καλείται στροφική ενέργεια. Προφανώς το άθροισμα των δύο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμορφώσεων που αποθηκεύτηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη  $\sigma$ - $\epsilon$  και τον άξονα των παραμορφώσεων παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας των παραμορφώσεων που έχει αποθηκευτεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από αρχή της φορτίσεως μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι  $\sigma$  και η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\epsilon$ . Όταν το ζεύγος ( $\sigma, \epsilon$ ) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως  $\Theta$  του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεων καλείται στερρότητα (toughness) του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

### 3. Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης.

#### 3.1.1 Εισαγωγή

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών από πολυμερή είναι η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των κόκκων των εγκλεισμάτων, όπως επίσης και η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων. Η προσρόφηση των πολυμερικών μορίων εντός των κόκκων, είναι η κυρία αιτία για την δημιουργία διαφορετικών διαμορφώσεων των μακρομορίων στα περίχωρα των κόκκων. Η αλλαγή της μορφής των μακρομορίων προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι η παρουσία εγκλεισμάτων μέσα στην πολυμερική μήτρα καταλήγει σε μια ατέλεια του πολυμερικού δικτύου.

Είναι γνωστό [37-43] ότι οι ιδιότητες κατά την χαλάρωση των πολυμερικών σύνθετων υλικών επηρεάζονται πολύ από την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων και η διαλογή πληροφοριών οι οποίες αφορούν την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος.

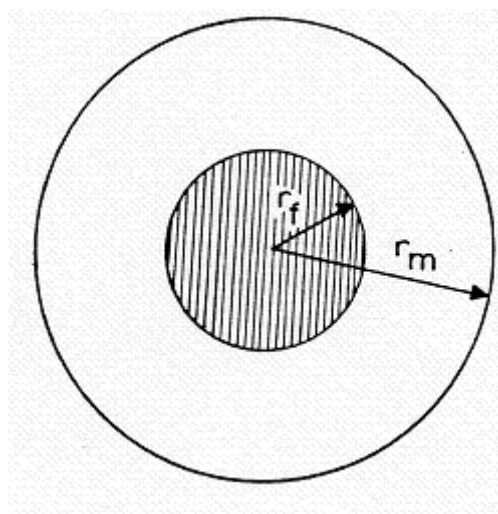
Όμως, η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, μεταξύ άλλων, από την πειραματική μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται στις δοκιμές και αυτό διότι κάθε μία από τις πειραματικές μεθόδους χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Έτσι, κάθε μέθοδος τείνει να επιδείξει έναν ιδιαίτερο τύπο μοριακών κινήσεων ως συνέπεια των παραπάνω διαφορών τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους είναι συχνά διαφορετικά, όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι οι διαφορετικές τιμές για την θερμοκρασία μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση,  $T_g$ , οι οποίες λαμβάνονται από διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, όπως η θερμιδομετρία, διαστολομετρία, δυναμικές μετρήσεις κ.λπ. [44,45].

Επίσης, υπάρχουν διαφορές όσον αφορά την επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων,  $U_f$ , στην θερμοκρασία  $T_g$  [46]. Αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα των κόκκων, αυξάνεται και η  $T_g$ , και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι όμως βρήκαν ότι η  $T_g$  δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιεκτικότητα [47,48,49]. Μετρήσεις διαστολομετρίας οι οποίες έγιναν [50] σε ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους μετάλλου έδειξαν ότι οι τιμές της  $T_g$  εξαρτώνται πολύ από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η  $T_g$  ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα.

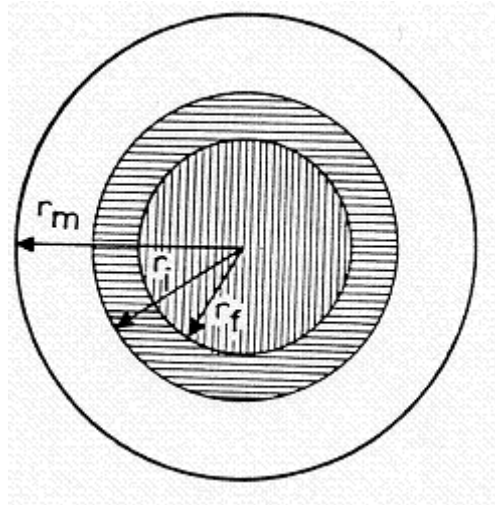
Στην περίπτωση μετρήσεων θερμοδομετρίας ή διαστολομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στη θέση των μεταβατικών θερμοκρασιών, είναι ο ρυθμός θέρμανσης. Έχει παρατηρηθεί [51,52,53] ότι, σε μετρήσεις D.S.C, η εξάρτηση από τον ρυθμό θέρμανσης,  $H_r$ , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως  $15^\circ\text{C}$  να μπορούν να παρατηρηθούν στις μεταβατικές θερμοκρασίες του πολυμερούς.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και κόκκων σιδήρου [54]. Η επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων και της διαμέτρου αυτών στην θερμική συμπεριφορά των δοκιμίων του σύνθετου υλικού έχει μελετηθεί εκτενώς. Έχει διερευνηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης επί της  $T_g$  και έχει υπολογισθεί το πάχος και ο όγκος της ενδιάμεσης φάσης με βάση αυτές τις θερμικές μετρήσεις. Επίσης, έχουν γίνει ορισμένα πειράματα μικρότερης έκτασης (μία διάμετρος κόκκων) με δοκίμια εποξειδικής ρητίνης και κόκκους αλουμινίου για την διερεύνηση της επίδρασης της περιεκτικότητας, ρυθμού θέρμανσης και τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης.

Ένα μοντέλο με τρεις φάσεις, εγκλείσμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση, το οποίο προκύπτει από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 3.1), με την ενδιάμεση φάση να έχει μεταβαλλόμενες ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, συντελεστής θερμικής διαστολής), έχει χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και συντελεστή θερμικής διαστολής του σύνθετου υλικού, με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας (Σχήμα 3.2). Οι θεωρητικοί τύποι, οι οποίοι προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του μοντέλου, δύνανται να συγκριθούν με άλλους θεωρητικούς τύπους της βιβλιογραφίας καθώς επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 3.1 Μοντέλο Διφασικό (Εγκλείσμα-Μήτρα)



Σχήμα 3.2 Μοντέλο Τριφασικό (Εέγκλεισμα-ενδιάμεση φάση-μήτρα)

### 3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάστηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Η μήτρα των σύνθετων υλικών, ήταν σε όλες τις περιπτώσεις εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384, και με ιξώδες 15000cP στους 25°C, πολυμεριζομένη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη. Εξ' άλλου, χρησιμοποιήθηκαν κόκκοι σκόνης σιδήρου ως εξής (Πίνακας 3.1):

Μέγεθος κόκκου (mm)	Ειδικός όγκος (cm <sup>3</sup> /100gr)	Φαινόμενη πυκνότητα (gr/cm <sup>3</sup> )
0,15	38-41	2,60-2,40

Πίνακας 3.1

Οι ιδιότητες των υλικών του σύνθετου υλικού μας είναι όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα 3.2.

## Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	$\lambda$ $\mu$ $M$	$N/m^2$ $N/m^2$	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	$E$	$N/m^2$	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	$K$	$N/m^2$	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	$\nu$	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	$\rho$	$gr/cm^3$	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	$a$	$C^{-1}$	$15,00 \times 10^{-6}$	$60,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 3.2

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας  $E$  και  $\nu$  έχουν μετρηθεί κατά την διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους  $20^\circ C$  και σε χρόνο 15sec από την αρχή του πειράματος. Πρέπει να διευκρινισθεί ότι με  $a$  συμβολίζουμε τον συντελεστή θερμικής διαστολής για θερμοκρασίες κάτω της υαλώδους θερμοκρασίας  $T_g$ .

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμίων, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους  $30^\circ C$  περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατώνουμε το μίγμα, και στην συνέχεια το τοποθετούμε σε θάλαμο κενού, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρος τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στην συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σ'ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων  $250 \times 250 \times 50mm$ , το οποίο σφραγίσθηκε με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ νέου ανάδευση του μίγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατόν ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επί 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διάρκειας 7 ημερών ως εξής:

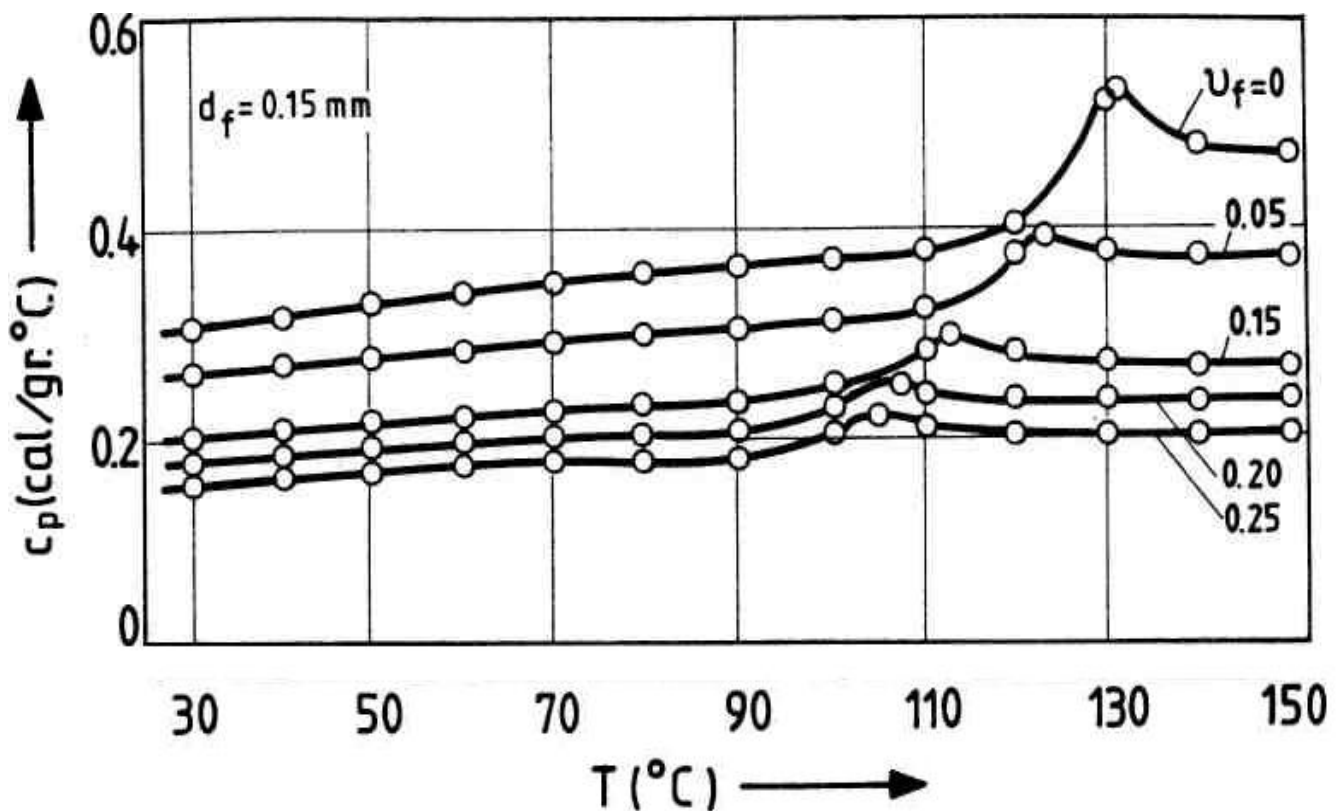
Εισήχθη σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά  $5^\circ C/h$ , στη συνέχεια να παραμείνει σταθερά στους  $100^\circ C$  και τέλος να ελαττώνεται κατά  $1^\circ C/h$  έως την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.



Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σ'ένα διάστημα που το σύνθετο υλικό να μη παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά. Δοκίμια με διάμετρο 4mm και πάχους 1-1,50mm κόπηκαν από κάθε υλικό με διαφορετική περιεκτικότητα και διάμετρο κόκκων του μετάλλου. Οι μετρήσεις έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή (DSC) Du-Pont 900. Η τοποθέτηση των δοκιμίων έγινε όταν η συσκευή ήταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και μετά η αύξηση της θερμοκρασίας έγινε με σταθερό ρυθμό. Για να μελετηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ρυθμοί θέρμανσης (5,10 και 205° C/min). Η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβάλλεται από 5% έως 25%.

### 3.1.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης

Η μεταβολή της ειδικής θερμότητας ( $C_p$ ) με την θερμοκρασία για κόκκους σιδήρου με  $d_f=150\mu\text{m}$ , εξετάζεται για πέντε περιεκτικότητες ( $U_f=0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25$ ) με ρυθμό θέρμανσης  $H_r=5^\circ\text{C}/\text{min}$ . Από το (Σχήμα 3.3) παρατηρούμε όχι μόνο μια μεταβολή στην θέση της μεταβατικής περιοχής, η οποία εκδηλώνεται με μια απότομη μεταβολή στην ειδική θερμότητα, αλλά επίσης και μια μείωση της  $\Delta C_p$  στην υαλώδη μεταβατική περιοχή όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα του εγκλείσματος.



Σχήμα 3.3 (Μεταβολή ειδικής θερμότητας για κόκκους σιδήρου)

Όταν η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα επίσης αυξάνεται, έτσι ώστε ο αριθμός των μακρομορίων, τα οποία συμμετέχουν στην διαδικασία της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας  $T_g$  ελαττώνεται. Αυτό είναι ισοδύναμο με μια αύξηση του όγκου της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δηλαδή υπάρχει μια σχέση μεταξύ της  $\Delta C_p$  και του όγκου της ενδιάμεσης φάσης [55], η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (3.1)$$

όπου  $\Delta C_p^f$  και  $\Delta C_p^0$  είναι τα άλματα (απότομη μεταβολή) της ειδικής θερμότητας στην μεταβατική περιοχή για το ενισχυμένο και μη ενισχυμένο πολυμερές αντιστοίχως, ενώ  $\lambda$  είναι μία σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με την περιεκτικότητα του εγκλείσματος  $U_f$  ώστε να ληφθή υπόψιν η συνεισφορά του όγκου της ενδιάμεσης φάσης στην θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Εάν  $r_f$ ,  $r_i$ ,  $r_m$  συμβολίζουν τις εξωτερικές ακτίνες του εγκλείσματος, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντιστοίχως, τότε οι όγκοι των τριών φάσεων δίνονται ως εξής:

$$U_f = \frac{r_f^3}{r_m^3} \quad (3.2)$$

$$U_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3} \quad (3.3)$$

$$U_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3} \quad (3.4)$$

$$\text{με } U_f + U_i + U_m = 1$$

Για να προσδιορισθεί η ακτίνα του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ενδιάμεση φάση εκφράζουμε αυτό ως  $r_i = r_f + \Delta r_i$ , όπου  $\Delta r_i$  το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και χρησιμοποιούμε την σχέση η οποία δίνεται από τον Lipatov.

$$\frac{(r_f + \Delta r_i)^3}{r_f^3} - 1 = \frac{\lambda U_f}{1 - U_f} \quad (3.5)$$

### 3.1.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) $T_g$ .

Όταν ένα πολυμερές θερμαίνεται η ψύχεται, υφίσταται ορισμένα είδη μεταβατικών καταστάσεων οι οποίες δημιουργούν μεταβολές στις φυσικές ιδιότητες του. Μία από τις σημαντικότερες είναι η υαλώδης μεταβατική θερμοκρασία ή η θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως ενός άμορφου πολυμερούς το οποίο μεταβάλλεται από ένα στερεό ως ύαλο υλικό σε μαλακό υλικό όταν αυτό θερμανθεί.

$U_f$	$\Delta r_i (\mu m)$	$U_i$
0,05	0,30	0,0013
0,10	1,06	0,0040
0,15	2,12	0,0130
0,20	3,53	0,0280
0,25	5,00	0,0500

Πίνακας 3.3

## **4. Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων**

### **4.1 Γενικά**

Τα μικροδομικά, γεωμετρικά μοντέλα μελέτης των μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα , βασίζονται κυρίως στις εξής παραδοχές :

- Μια τυπική γεωμετρική δομή υιοθετείται για την εξομοίωση της διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο. Συνήθως μία σφαίρα ή ένας κύλινδρος.
- Οι υπολογισμοί που γίνονται κατά τη μελέτη του μοντέλου , είναι βασισμένοι στη συνήθη γεωμετρία και τοπολογία.

Τα μοντέλα αυτά μπορεί να είναι είτε επίπεδα , είτε τρισδιάστατα-ηλιοκεντρικά.

Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι το βασικό δομικό κύτταρο του σύνθετου υλικού έχει κυβική μορφή , ενώ τα εγκλείσματα κατανέμονται με διάφορους τρόπους στο χώρο γύρω από τον δομικό κύβο, δίνοντας έτσι διαφορετικά κυβικά μοντέλα κάθε φορά .

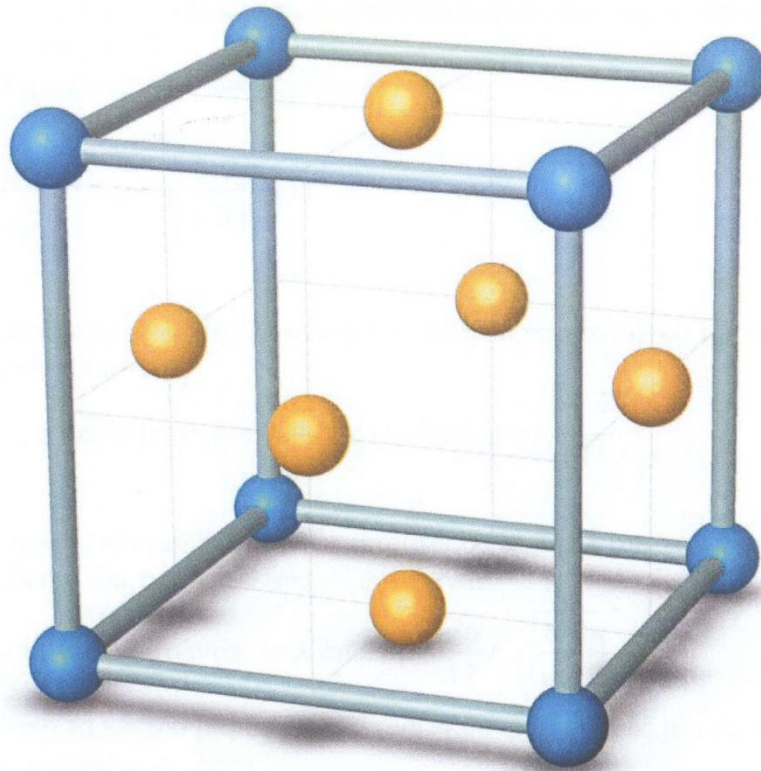
Τέλος καθένα από αυτά τα μοντέλα θα προσομοιώνεται με ένα αντίστοιχο σφαιρικό πολυφασικό μοντέλο για λόγους απλούστευσης της κατανομής των τάσεων στο δομικό κύτταρο, και άρα απλούστευσης των υπολογισμών (λόγω και της σφαιρικής συμμετρίας).

## 4.2 Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 1

Πρώτο βήμα είναι η θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται οι κόκκοι (σφαιρικά εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας. Θεωρούμε λοιπόν ότι **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός Κύβου** ακμής  $\lambda$  και **6 σφαιρικά εγκλείσματα** τα μέσα των πλευρών τους. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

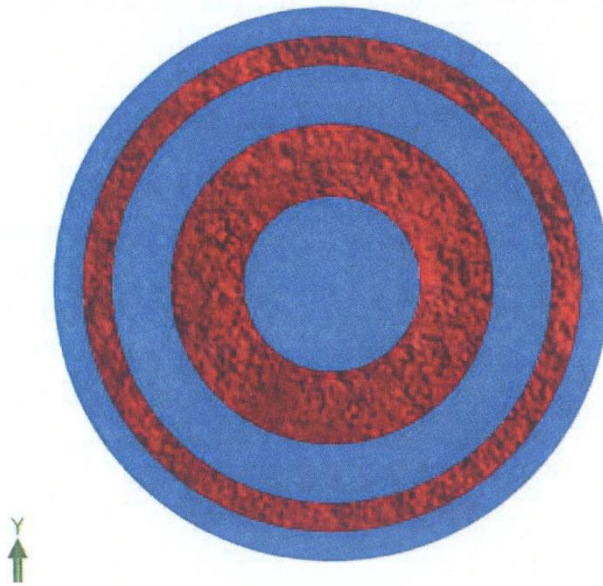
Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα "ισοδύναμο" σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο Κύβος αυτός ακμής  $\lambda$ , ο οποίος περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής  $2\lambda$ , δημιουργώντας έτσι το δομικό "κύτταρο" του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ' όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού.



Σχήμα 4.1Κυβικό μοντέλο 1

Τον κύβο ακμής  $2\lambda$  θα τον ανάγουμε σε ένα πενταφασικό μοντέλο αποτελούμενο από πέντε ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας  $a$ ,  $b$ , και  $c, d$  και  $e$  αντίστοιχα ( $a < b < c < d < e$ ).



Σχήμα 4.2 Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 1 με αντίστοιχο σφαιρικό (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση, που τις αποτελούν ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική  $b$  και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $c$  και εξωτερική  $d$ , αντιπροσωπεύουν το υλικό του εγκλείσματος. Η σφαίρα ακτίνας  $a$  (πρώτη φάση) και οι σφαιρικοί φλοιοί, με εσωτερική ακτίνα  $b$  και εξωτερική  $c$  (τρίτη φάση) και με εσωτερική ακτίνα  $d$  και εξωτερική  $e$  (πέμπτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο της μήτρας.

Ο όγκος του κύβου ακμής  $2\lambda$  θα είναι:

$$V_{2\lambda} = (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = 8\lambda^3$$

**Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα  $U_f$  των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους  $r_f$ . Για τον κύβο ακμής  $2\lambda$  η  $U_f$  θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου και τις 6 σφαίρες που βρίσκονται στο κέντρο των πλευρών του κύβου, προς τον όγκο του Κύβου ακμής  $2\lambda$ , δηλαδή:**

$$U_f = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_f^3 + 6 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{7}{3\lambda^3} \pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{7\pi}{3U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής  $2\lambda$  στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας  $e$ , ισχύει λοιπόν:

$$8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi e^3 \Rightarrow e = \lambda \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow e = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{14}{U_f}}$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής  $\lambda$ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Κύβου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει

$$\text{μήκος } \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Αν ονομάσουμε  $w$  αυτήν την απόσταση, το  $w$  αντιπροσωπεύει την

απόσταση του κέντρου βάρους του Κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έως τα μέσα των πλευρών του κύβου, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$v = \lambda / 2$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από την μήτρα.

Η φάση 2 αποτελείται από τα 6 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της δεύτερης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 6 \frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (b^3 - a^3) = 6r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες  $a$ , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα  $v$ . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - v^3) = \frac{4}{3}\pi(v^3 - a^3) \Rightarrow (b^3 + a^3) = 2v^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$a = \sqrt[3]{v^3 - 3r_f^3}$$

Και

$$b = \sqrt[3]{v^3 + 3r_f^3}$$

Η φάση 4 αποτελείται από τα 8 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της δεύτερης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(d^3 - c^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (d^3 - c^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(d^3 - w^3) = \frac{4}{3}\pi(w^3 - c^3) \Rightarrow (d^3 + c^3) = 2w^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$d = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c, d και e συναρτήσει των γνωστών μεγεθών  $U_f$  και  $r_f$ . Για να δούμε πως κατανέμονται οι ακτίνες a, b, c, d και e στο σφαιρικό μοντέλο βλέπουμε την τομή του στο παρακάτω σχήμα.

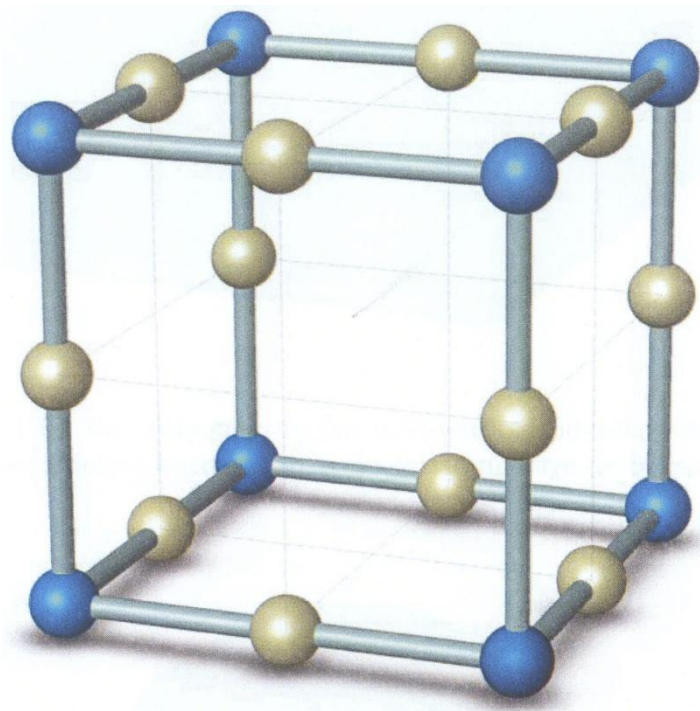


### 4.3 Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 2

Θεωρούμε ότι **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός Κύβου** ακμής  $\lambda$  και **12 σφαιρικά εγκλείσματα στα μέσα των ακμών του κύβου**. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

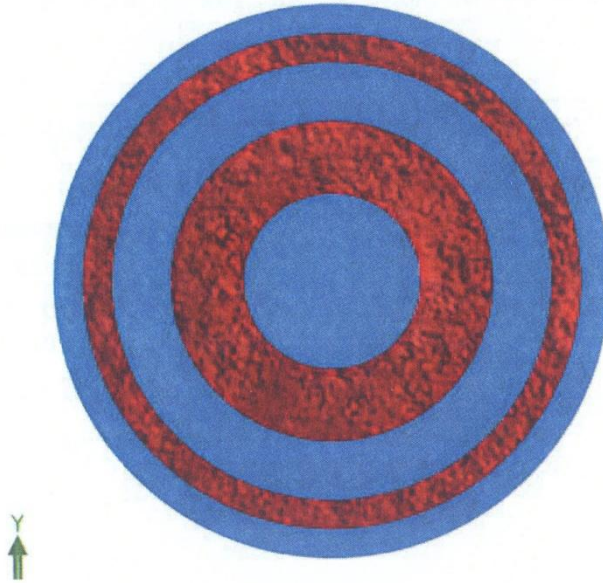
Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα “ισοδύναμο” σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο Κύβος αυτός ακμής  $\lambda$ , ο οποίος περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής  $2\lambda$ , δημιουργώντας έτσι το δομικό “κύτταρο” του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ’ όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού.



Σχήμα 4.3 Κυβικό μοντέλο 2

Τον κύβο ακμής  $2\lambda$  θα τον ανάγουμε σε ένα πενταφασικό μοντέλο αποτελούμενο από πέντε ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας  $a$ ,  $b$ , και  $c, d$  και  $e$  αντίστοιχα ( $a < b < c < d < e$ ).



Σχήμα 4.4 Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 2 με αντίστοιχο σφαιρικό χωρίς ενδιάμεση φάση (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η δεύτερη και η τέταρτη φάση, που τις αποτελούν ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική  $b$  και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα  $c$  και εξωτερική  $d$ , αντιπροσωπεύουν το υλικό του εγκλείσματος. Η σφαίρα ακτίνας  $a$  (πρώτη φάση) και οι σφαιρικοί φλοιοί, με εσωτερική ακτίνα  $b$  και εξωτερική  $c$  (τρίτη φάση) και με εσωτερική ακτίνα  $d$  και εξωτερική  $e$  (πέμπτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο της μήτρας.

Ο όγκος του κύβου ακμής  $2\lambda$  θα είναι:

$$V_{2\lambda} = (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = 8\lambda^3$$

Για τον κύβο ακμής  $2\lambda$  ή  $U_f$  θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου και τις 12 σφαίρες που βρίσκονται στα μέσα των ακμών του κύβου, προς τον όγκο του Κύβου ακμής  $2\lambda$ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_f^3 + 12 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{10}{3\lambda^3} \pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{10\pi}{3U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής  $2\lambda$  στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας  $e$ , ισχύει λοιπόν:

$$8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi e^3 \Rightarrow e = \lambda \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow e = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{U_f}}$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής  $\lambda$ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Κύβου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει

$$\text{μήκος } \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αν ονομάσουμε  $w$  αυτήν την απόσταση, το  $w$  αντιπροσωπεύει την

απόσταση του κέντρου βάρους του Κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έως τα μέσα των ακμών του κύβου, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$\rho = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από την μήτρα.

Η φάση 2 αποτελείται από τα 12 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της δεύτερης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) = 12 \frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (b^3 - a^3) = 12r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα  $\rho$ . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(b^3 - \rho^3) = \frac{4}{3}\pi(\rho^3 - a^3) \Rightarrow (b^3 + a^3) = 2\rho^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$b = \sqrt[3]{\rho^3 + 6r_f^3}$$

Και

$$a = \sqrt[3]{\rho^3 - 6r_f^3}$$

Η φάση 4 αποτελείται από τα 8 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της δεύτερης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(d^3 - c^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (d^3 - c^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w. Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(d^3 - w^3) = \frac{4}{3}\pi(w^3 - c^3) \Rightarrow (d^3 + c^3) = 2w^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$d = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a, b, c, d και e συναρτήσει των γνωστών μεγεθών  $U_f$  και  $r_f$ . Για να δούμε πως κατανέμονται οι ακτίνες a, b, c, d και e στο σφαιρικό μοντέλο βλέπουμε την τομή του στο παρακάτω σχήμα.

## 4.4 Γεωμετρικοί περιορισμοί

Στο παρών κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν από το κάθε κυβικό μοντέλο, λόγω της διάταξης των μορίων του σιδήρου που θεωρούμε κάθε φορά. Επειδή η ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσεως γίνεται μέσα στην περιοχή της μήτρας, γι αυτό άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και σαν αλλοιωμένη μήτρα, δεν προσθέτει κάποιον επιπλέον γεωμετρικό περιορισμό σχετικά με τις μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες που μπορεί να έχουμε στο κάθε μοντέλο. Για αυτό και θα τους εξετάσουμε στα πενταφασικά μοντέλα μας, αγνοώντας την επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως.

### 4.4.1 Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 1

$$a > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{6U_f} r_f^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{18} \Leftrightarrow U_f < 0,305432$$

$$c > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{18} \Leftrightarrow U_f < 1,19$$

$$b < c \Leftrightarrow b^3 < c^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 3r_f^3 < w_2^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{6U_f} r_f^3 + 3r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \left[ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow U_f < 0,549275$$

$$d < e \Leftrightarrow d^3 < e^3 \Leftrightarrow w_2^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{14}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{14\pi}{6U_f} r_f^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{14}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \frac{14 \left[ 6 - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right]}{24} \Leftrightarrow U_f < 2,3$$

$$\mathbf{U_f < 0,305432}$$

#### 4.4.2 Πενταφασικό κυβικό μοντέλο 2

$$a > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{6U_f} r_f^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{36} \Leftrightarrow U_f < 0,617067$$

$$c > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 1,70$$

$$b < c \Leftrightarrow b^3 < c^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 6r_f^3 < w_2^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{6U_f} r_f^3 + 6r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \left[ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \right] \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow U_f < 0,309934$$

$$d < e \Leftrightarrow d^3 < e^3 \Leftrightarrow w_2^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{20}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{20\pi}{6U_f} r_f^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{20}{U_f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_f < \frac{20 \left[ 6 - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \right]}{24} \Leftrightarrow U_f < 3,29$$

**$U_f < 0,309934$**

Άρα τελικά οι μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο είναι :

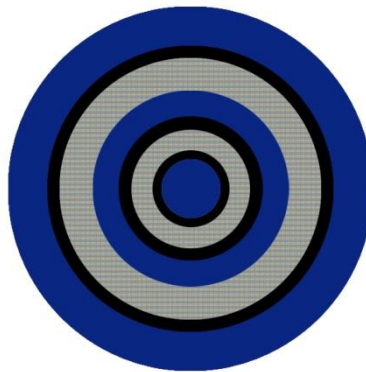
	Κυβικό Μοντέλο 1	Κυβικό Μοντέλο 2
Μέγιστη Δυνατή Περιεκτικότητα $U_f$	30,54 %	30,99

Πίνακας 4.1

## 5. Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης

### 5.1 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου οκταφασικού μοντέλου

Το οκταφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 3 και 6) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 1,5 και 8). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2,4 και 7).



Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί  $E_2, E_4, E_7$  και  $\nu_2, \nu_4, \nu_7$  χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας  $E_c$  του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson  $\nu_c$ .

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι :

$$E_3 = E_6 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_1 = E_5 = E_8 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

Αν με  $U_f$  συμβολίσουμε την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος με  $U_i$  την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και  $U_m$  την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της μήτρας τότε θα ισχύει,

$$U_f = U_3 + U_6$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_7$$

Και

$$U_m = U_1 + U_5 + U_8$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις τρεις περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,3}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1-U_f-U_i} = K$$

$$U_2 = K \cdot U_1 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} \Rightarrow (r_2^3 - r_1^3) = k r_1^3 \Rightarrow$$

$$r_2 = r_1(k+1)^{1/3}$$

$$U_4 = K \cdot U_5 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} \Rightarrow (r_4^3 - r_3^3) = k(r_5^3 - r_4^3) \Rightarrow$$

$$r_4 = \sqrt[3]{\frac{K r_5^3 + r_3^3}{K+1}}$$

$$U_7 = K \cdot U_8 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_7^3 - r_6^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_8^3 - r_7^3)}{\frac{4}{3}\pi r_8^3} \Rightarrow (r_7^3 - r_6^3) = k(r_8^3 - r_7^3) \Rightarrow$$

$$r_7 = \sqrt[3]{\frac{K r_8^3 + r_6^3}{K+1}}$$

Για τις κατά όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_1^3}{R_8^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_8^3}$$



$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_3^3 - R_2^3}{R_8^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_4^3 - R_3^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_4^3 - R_3^3}{R_8^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_5^3 - R_4^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_6^3)} = \frac{R_5^3 - R_4^3}{R_6^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_6^3 - R_5^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_6^3 - R_5^3}{R_8^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_7^3 - R_6^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_7^3 - R_6^3}{R_8^3}$$

$$U_8 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_8^3 - R_7^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_8^3)} = \frac{R_8^3 - R_7^3}{R_8^3}$$

Οι ακτίνες των φάσεων 2, 3, 5,6 και 8 βρίσκονται στο κεφάλαιο 4 για κάθε κυβικό μοντέλο όπου πλέον οι ακτίνες με ονομασία a,b,c,d και e αντιστοιχούν στις ακτίνες  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_5$ ,  $r_6$  και  $r_8$ .

Τελικά έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$a = \sqrt[3]{\frac{v^3 - 3r_f^3}{K+1}}$$

$$b = \sqrt[3]{v^3 - 3r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{v^3 + 3r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{Kr_5^3 + r_3^3}{K+1}}$$

$$e = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

$$f = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

$$g = \sqrt[3]{\frac{Kr_8^3 + r_6^3}{K+1}}$$

$$h = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{14}{u_f}}$$

Από τον πίνακα 3.3, σε κάθε σύσταση  $U_f$  αντιστοιχεί μια σύσταση  $U_i$  για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

$U_f(\%)$	$U_i(\%)$
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,02
0,25	0,05

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών ( $U_f$ ,  $U_i$ ) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε  $\mu\text{m}$  :

### Κυβικό Μοντέλο 1:

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>U<sub>i</sub></b>	<b>R<sub>1</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>2</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>3</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>4</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>5</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>6</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>7</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>8</sub>(<math>\mu</math>m)</b>
<b>0,05</b>	0,0013	186,2111	186,2961153	207,9844	208,2949	337,6228	347,2169	347,5052	490,6599
<b>0,1</b>	0,004	137,303	137,5070028	172,481	173,1392	263,996	279,2408	279,9474	389,4371
<b>0,15</b>	0,013	108,8982	109,4591279	156,6316	158,2483	227,0411	247,0504	249,0633	340,2046
<b>0,2</b>	0,02	86,64661	87,38093379	147,3373	149,2911	202,9213	227,2173	230,0549	309,0964
<b>0,25</b>	0,05	63,98169	65,47017146	141,145	144,9831	185,1502	213,4287	220,0064	286,9397

Πίνακας 4.3

Ενώ η **περιεκτικότητα** της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>U<sub>i</sub></b>	<b>U<sub>1</sub></b>	<b>U<sub>2</sub></b>	<b>U<sub>3</sub></b>	<b>U<sub>4</sub></b>	<b>U<sub>5</sub></b>	<b>U<sub>6</sub></b>	<b>U<sub>7</sub></b>	<b>U<sub>8</sub></b>
<b>0,05</b>	0,0013	0,054661	0,0000749	0,021429	0,000342	0,249296	0,028571	0,000883	0,644743
<b>0,1</b>	0,004	0,043826	0,00019565	0,042857	0,000998	0,223639	0,057143	0,002806	0,628535
<b>0,15</b>	0,013	0,032798	0,000509401	0,064286	0,003053	0,196584	0,085714	0,009437	0,607618
<b>0,2</b>	0,02	0,022028	0,000564818	0,085714	0,004366	0,170272	0,114286	0,015069	0,587701
<b>0,25</b>	0,05	0,011087	0,000791895	0,107143	0,009976	0,139662	0,142857	0,039232	0,549252

Πίνακας 4.4

## Κυβικό Μοντέλο 2:

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>U<sub>i</sub></b>	<b>R<sub>1</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>2</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>3</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>4</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>5</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>6</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>7</sub>(<math>\mu</math>m)</b>	<b>R<sub>8</sub>(<math>\mu</math>m)</b>
<b>0,05</b>	0,0013	306,0565	306,1962	323,2299	323,3256	381,907	389,4695	389,799	552,6047
<b>0,1</b>	0,004	235,3147	235,6644	262,8038	262,9936	300,0273	312,0378	312,8572	438,6027
<b>0,15</b>	0,013	197,99	199,0097	234,7969	235,2121	259,3396	275,0905	277,4571	383,1547
<b>0,2</b>	0,02	172,6521	174,1153	217,8651	218,2714	233,0651	252,1675	255,5492	348,1192
<b>0,25</b>	0,05	151,3767	154,8984	206,2921	206,8189	213,928	236,1268	244,0614	323,1652

Πίνακας 4.5

Ενώ η **περιεκτικότητα** της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>U<sub>i</sub></b>	<b>U<sub>1</sub></b>	<b>U<sub>2</sub></b>	<b>U<sub>3</sub></b>	<b>U<sub>4</sub></b>	<b>U<sub>5</sub></b>	<b>U<sub>6</sub></b>	<b>U<sub>7</sub></b>	<b>U<sub>8</sub></b>
<b>0,05</b>	0,0013	0,169887	0,000233	0,03	0,000178	0,129789	0,02	0,000889	0,649023
<b>0,1</b>	0,004	0,154431	0,000689	0,06	0,000467	0,104501	0,04	0,002844	0,637069
<b>0,15</b>	0,013	0,137977	0,002143	0,09	0,001223	0,078744	0,06	0,009634	0,620279
<b>0,2</b>	0,02	0,121992	0,003128	0,12	0,001374	0,053593	0,08	0,015498	0,604415
<b>0,25</b>	0,05	0,102779	0,007341	0,15	0,001998	0,027969	0,1	0,040661	0,569252

Πίνακας 4.6

## 5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, το οποίο δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου.

Γενικώς, το μέτρο ελαστικότητας  $E_i$  και ο λόγος Poisson  $\nu_i$  της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο  $n$  βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα  $r$ .

Δηλαδή:

$$E_i(r) = f(r) \text{ και } \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots, \quad \nu_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

όπου  $r_f \leq r \leq r_i$

Στην μελέτη αυτή, για απλουστευτικούς λόγους, λαμβάνουμε υπ' όψιν την γραμμική, την υπερβολική, την λογαριθμική και την παραβολική και εκθετική μεταβολή των  $E_i(r)$  και  $\nu_i(r)$ .

Θεωρούμε ότι  $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$  και  $\nu_f \leq \nu_i(r) \leq \nu_m$ , όταν  $r_f \leq r \leq r_i$ . Οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\text{Στο } r = r_f : E_i(r) = \eta E_f \text{ και } \nu_i(r) = \xi \nu_f$$

$$\text{Στο } r = r_i : E_i(r) = E_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m$$

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα  $E_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με την μήτρα είναι ίσα με  $E_m$  και  $\nu_m$  αντιστοίχως, ενώ στο όριο αυτής με το εγκλείσμα είναι τμήμα των  $E_f$  και  $\nu_f$  αντιστοίχως, που εκφράζεται με τους συντελεστές  $\eta$  και  $\xi$ . Όμως, για να εκτιμήσουμε την μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα  $E_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  στο όριο αυτής με το εγκλείσμα είναι ίσα με  $E_f$  και  $\nu_f$  αντιστοίχως, δηλαδή ότι  $\eta = \xi = 1$ .

### 5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα  $E_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br \text{ και } \nu_i(r) = A' + B'r \text{ με } r_f \leq r \leq r_i$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει:

$$A = nE_f + \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f} r_f$$

$$B = \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει ότι

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (A + Br) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[ A \frac{r^3}{3} + B \frac{r^4}{4} \right]_{r_f}^{r_i}$$

Όπου  $dV$  ο όγκος της στοιχειώδους περιοχής της ενδιάμεσης φάσης ίσος με:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Επομένως προκύπτει:

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[ \frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) \right]$$

## 5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα  $E_i(r)$  και  $\nu_i(r)$  μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = Ar^2 + Br + C \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = A'r^2 + B'r + C' \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η  $E_i(r)$  παρουσιάζει ελάχιστο και η  $\nu_i(r)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $r = r_i$ . Δηλαδή:

$$\text{Στο } r = r_i: \frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{και} \quad \frac{d\nu_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2\nu_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$A = \frac{nE_f - E_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = - \frac{(nE_f - E_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = \frac{nE_f r_i^2 + E_m r_f - 2E_m r_f r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει όπως και παραπάνω ότι

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[ \frac{A}{5} (r_i^5 - r_f^5) + \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{C}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right]$$

### 5.2.3 Εκθετικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το  $E_i(r)$  μεταβάλλεται ως εξής:

$$E = Ae^{Br}$$

Με τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες βρίσκουμε:

$$E_m = Ae^{Br_i}$$

$$nE_f = Ae^{Br_f}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{E_m}{nE_f} = e^{B(r_i - r_f)} \Rightarrow \ln \left( \frac{E_m}{nE_f} \right) = B (r_i - r_f) \Rightarrow$$

Άρα:

$$B = \frac{\ln \left( \frac{E_m}{nE_f} \right)}{r_i - r_f}$$

και

$$A = \frac{E_m}{e^{Br_i}}$$



Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E_i(r)$  θα ισχύει ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A e^{Br} 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{4\pi}{V_i} A \int_{r_f}^{r_i} e^{Br} 4r^2 dr \Rightarrow$$

και τελικά προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i B^3} 4\pi A [e^{Br_i} (Br_i(Br_i - 2) + 2) - e^{Br_f} (Br_f(Br_f - 2) + 2)]$$

#### 5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το  $E_i(r)$  μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A και B:

$$B = \frac{r_i r_f}{r_i - r_f} (nE_f - E_m)$$

$$A = nE_f - \frac{B}{r_f}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E_i(r)$  θα ισχύει όπως και για τις προηγούμενες προσεγγίσεις ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV$$

Οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} \left( A + \frac{B}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br) dr$$

⇒

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[ \frac{A}{3} r^3 + \frac{B}{2} r^2 \right]_{r_f}^{r_i}$$

Άρα τελικά :

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[ \frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{B}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right]$$

### 5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το  $E_i(r)$  μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A \ln\left(\frac{B}{r}\right)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες προκύπτουν οι τιμές των σταθερών ίσες με :

$$A = \frac{nE_f - E_m}{\ln \frac{r_i}{r_f}}$$

$$B = r_i e^{\frac{E_m}{A}}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E_i(r)$  θα ισχύει

$$\begin{aligned}
E_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln\left(\frac{B}{r}\right) 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A (\ln B - \ln r) 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln B 4\pi r^2 dr - \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln r 4\pi r^2 dr
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \frac{r_i^3 - r_f^3}{3} - \frac{4\pi A}{V_i} \left[ \frac{3r^3 \ln r - r^3}{9} \right]_{r_f}^{r_i}$$

⇒

$$E_i = \frac{4\pi A \ln B}{V_i} \frac{(r_i^3 - r_f^3)}{3} - \frac{4\pi A}{9V_i} (3r_i^3 \ln r_i - r_i^3 - 3r_f^3 \ln r_f + r_f^3)$$

Και στις πέντε παραπάνω προσεγγίσεις που εξετάσαμε η διαδικασία για την εύρεση των  $v_i$  και  $E_i$  είναι ακριβώς η ίδια όπως άλλωστε εξηγήσαμε ήδη, γι αυτό και οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ακριβώς όπως είναι και για τα  $v_i$ . Αυτό που αλλάζει μόνο είναι οι τιμές των συντελεστών που έχουμε βάλει ( οι τιμές των A και B δηλαδή) και οι οποίες προσδιορίζονται με βάση τις οριακές τιμές του λόγου Poisson στα όρια των δύο φάσεων.

Οι τιμές των  $E_i$  και  $v_i$  της ενδιάμεσου φάσεως, για κάθε ακτίνα, καθώς και η μορφή της συνάρτησής τους σε σχέση με την ακτίνα  $r$  του ισοδύναμου οκταφασικού μας μοντέλου, σχεδιάστηκαν για την φάση 4, το κυβικό μοντέλο 1 και για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως, δηλαδή για  $n=\xi=0,2$ ,  $n=\xi=0,4$ ,  $n=\xi=0,6$ ,  $n=\xi=0,8$ ,  $n=\xi=1$ , και φαίνονται στους πίνακες και τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν.

### 5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα

r (μm)	E (Gra) (Γραμμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
208,02	38,15	75,95	113,75	151,55	189,35
208,05	34,30	67,90	101,50	135,10	168,70
208,08	30,45	59,85	89,25	118,65	148,05
208,11	26,60	51,80	77,00	102,20	127,40
208,14	22,75	43,75	64,75	85,75	106,75
208,17	18,90	35,70	52,50	69,30	86,10
208,20	15,05	27,65	40,25	52,85	65,45
208,23	11,20	19,60	28,00	36,40	44,80
208,26	7,35	11,55	15,75	19,95	24,15
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας 5.1

r (μm)	E (Gra) (Παραβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
208,02	34,69	68,71	102,73	136,75	170,77
208,05	28,14	55,02	81,90	108,78	135,66
208,08	22,37	42,95	63,53	84,10	104,69
208,11	17,36	32,48	47,60	62,72	77,84
208,14	13,13	23,63	34,13	44,63	55,13
208,17	9,66	16,38	23,10	29,82	36,54
208,20	6,97	10,75	14,53	18,31	22,09
208,23	5,04	6,72	8,40	10,08	11,76
208,26	3,89	4,31	4,73	5,15	5,57
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

Πίνακας 5.2

r (μm)	E (Gra) (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	42,00	84,0	126,00	168,00	210,00
208,02	38,14	75,9	114,00	152,00	189,00
208,05	34,29	67,9	101,00	135,00	169,00
208,08	30,43	59,8	89,2	119,00	148,00
208,11	26,58	51,8	77,0	102,00	127,00
208,14	22,74	43,7	64,7	85,7	107,00
208,17	18,88	35,7	52,5	69,2	86,0
208,20	15,04	27,6	40,2	52,8	65,4
208,23	11,19	19,6	28,0	36,4	44,8
208,26	7,345	11,5E	15,7	19,9	24,1
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50E	3,50

Πίνακας 5.3

r (μm)	E (Gra) (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
208,02	38,15	75,94	113,74	151,54	189,34
208,05	34,30	67,89	101,49	135,08	168,68
208,08	30,44	59,84	89,23	118,62	148,02
208,11	26,59	51,79	76,98	102,17	127,36
208,14	22,74	43,73	64,73	85,72	106,71
208,17	18,89	35,69	52,48	69,27	86,06
208,20	15,04	27,64	40,23	52,82	65,42
208,23	11,20	19,59	27,99	36,38	44,78
208,26	7,35	11,54	15,74	19,94	24,14
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

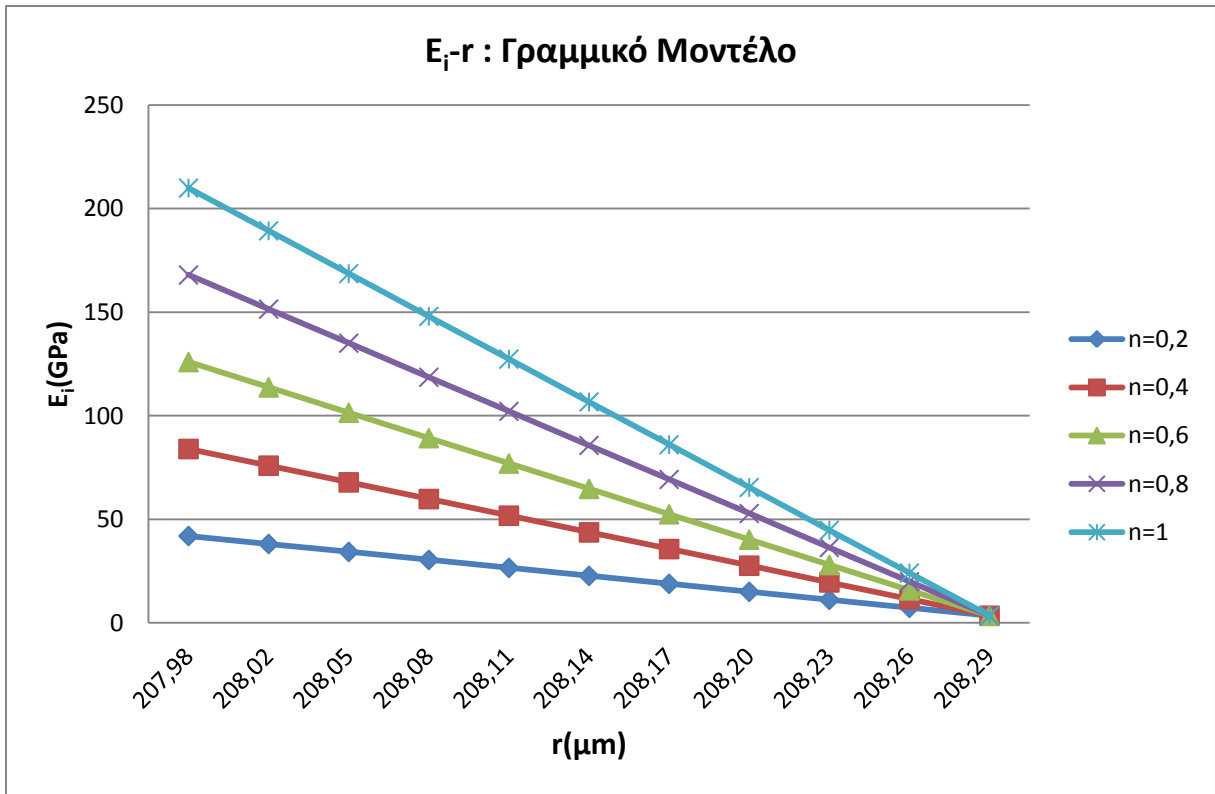
Πίνακας 5.4

r (μm)	E (GPa) (Εκθετικό)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
208,02	32,76	61,13	88,05	114,07	139,45
208,05	25,55	44,49	61,53	77,46	92,60
208,08	19,93	32,38	43,00	52,59	61,49
208,11	15,54	23,56	30,05	35,71	40,83
208,14	12,12	17,15	21,00	24,25	27,11
208,17	9,46	12,48	14,68	16,47	18,00
208,20	7,38	9,08	10,26	11,18	11,95
208,23	5,75	6,61	7,17	7,59	7,94
208,26	4,49	4,81	5,01	5,15	5,27
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

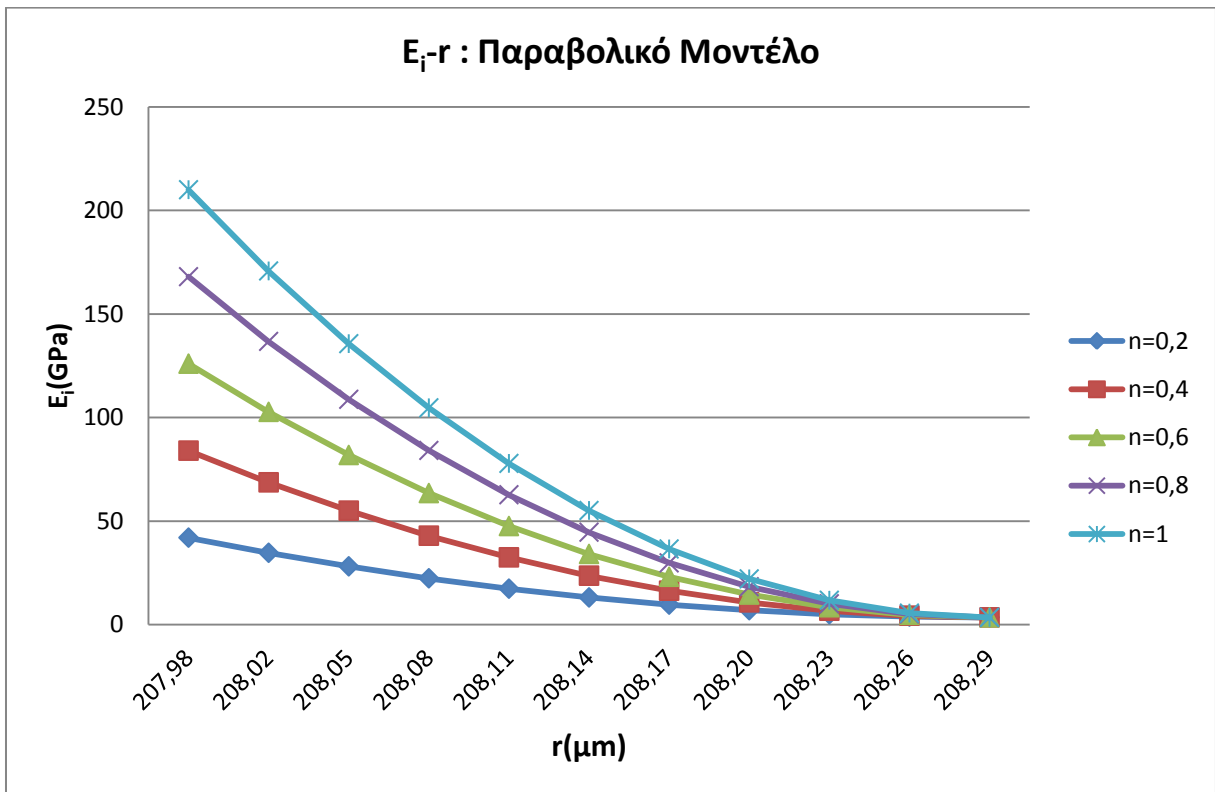
Πίνακας 5.5

r (μm)	E(GPa) ( για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
207,98	210,00	210,00	210,00	210,00	210,00
208,02	189,35	170,77	189,32	189,34	139,45
208,05	168,70	135,66	168,65	168,68	92,60
208,08	148,05	104,69	147,99	148,02	61,49
208,11	127,40	77,84	127,33	127,36	40,83
208,14	106,75	55,13	106,67	106,71	27,11
208,17	86,10	36,54	86,03	86,06	18,00
208,20	65,45	22,09	65,39	65,42	11,95
208,23	44,80	11,76	44,75	44,78	7,94
208,26	24,15	5,57	24,1	24,14	5,27
208,29	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

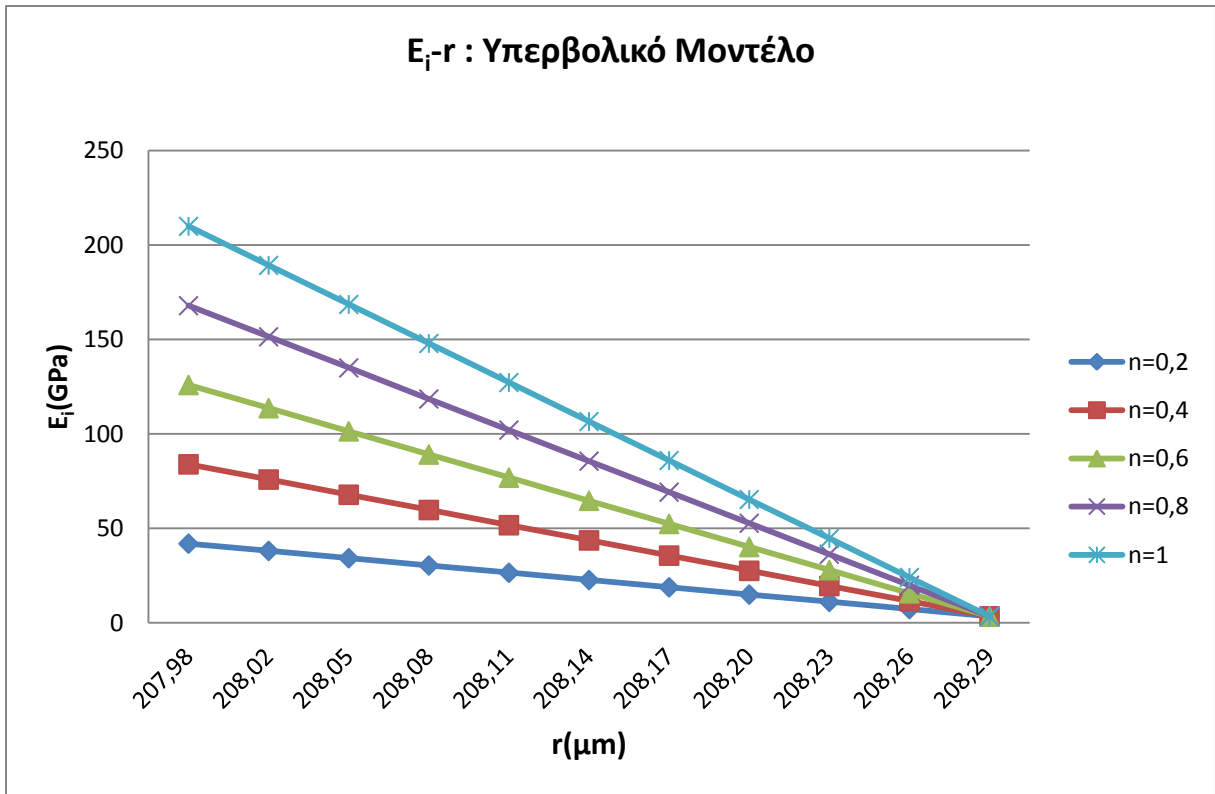
Πίνακας 5.6



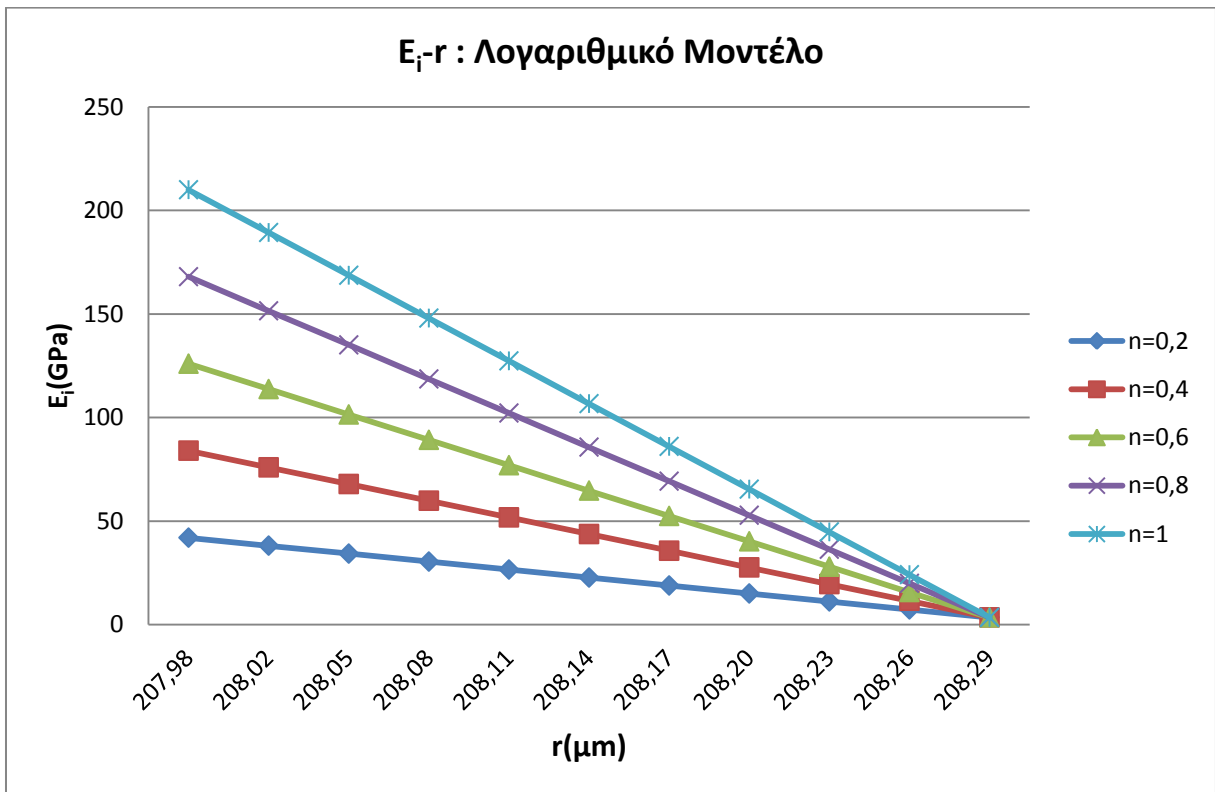
Διάγραμμα 5.1



Διάγραμμα 5.2

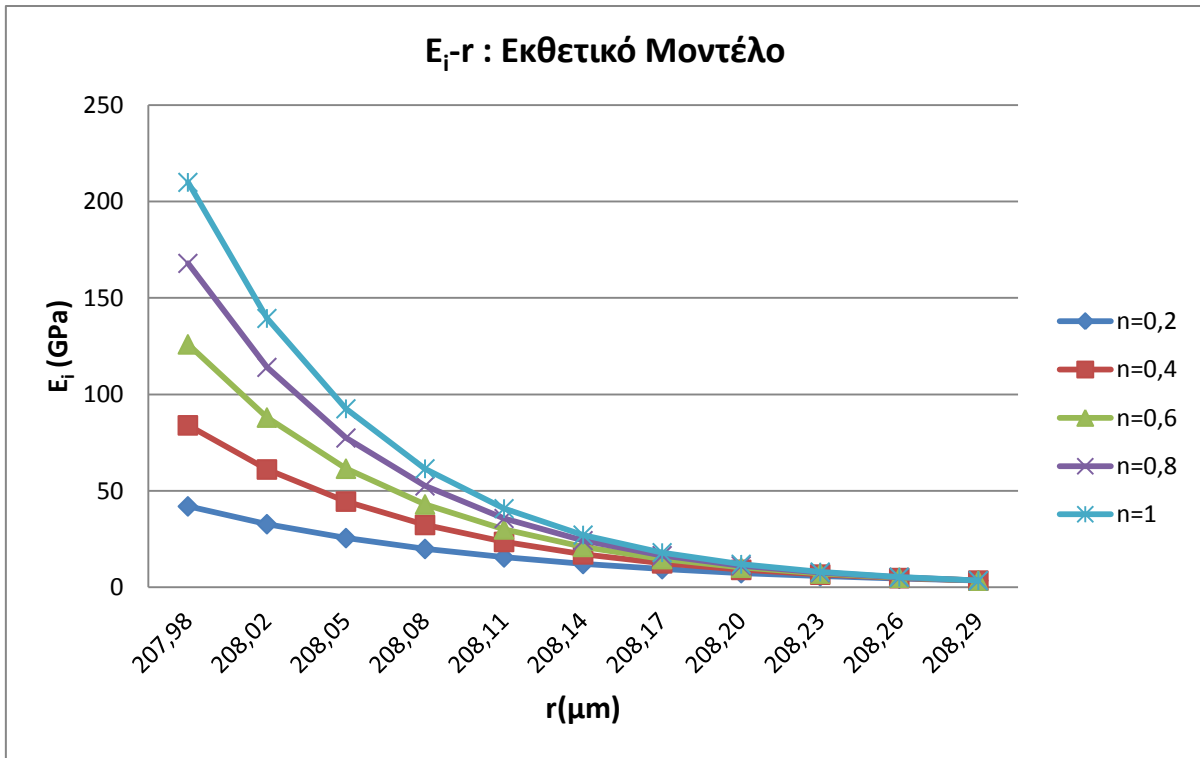


Διάγραμμα 5.3

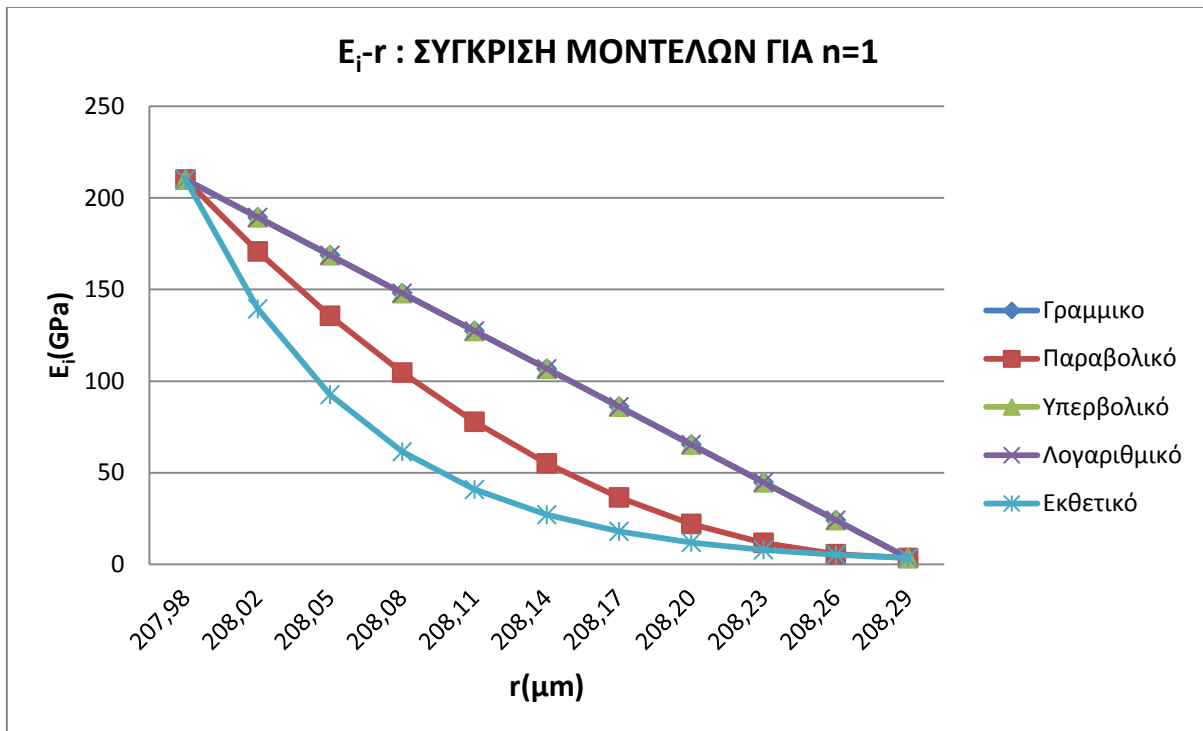


Διάγραμμα 5.4





Διάγραμμα 5.5



Διάγραμμα 5.6

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή των  $E$  πέφτει καθώς αυξάνεται η ακτίνα  $r$ . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενης της ακτίνας  $r$ , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

r ( $\mu\text{m}$ )	$\nu$ (Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
208,02	0,088	0,140	0,193	0,245	0,297
208,05	0,118	0,165	0,211	0,258	0,304
208,08	0,149	0,189	0,230	0,270	0,311
208,11	0,179	0,214	0,248	0,283	0,318
208,14	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
208,17	0,239	0,262	0,286	0,309	0,332
208,20	0,269	0,287	0,304	0,322	0,339
208,23	0,300	0,311	0,323	0,334	0,346
208,26	0,330	0,336	0,341	0,347	0,353
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.7

r ( $\mu\text{m}$ )	$\nu$ (Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
208,02	0,115	0,162	0,209	0,256	0,303
208,05	0,167	0,204	0,241	0,278	0,315
208,08	0,212	0,240	0,269	0,297	0,326
208,11	0,251	0,272	0,293	0,314	0,335
208,14	0,284	0,299	0,313	0,328	0,342
208,17	0,312	0,321	0,330	0,340	0,349
208,20	0,333	0,338	0,343	0,348	0,354
208,23	0,348	0,350	0,353	0,355	0,357
208,26	0,357	0,358	0,358	0,359	0,359
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.8

r (μm)	ν (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
208,02	0,088	0,140	0,193	0,245	0,297
208,05	0,118	0,165	0,211	0,258	0,304
208,08	0,149	0,189	0,230	0,270	0,311
208,11	0,179	0,214	0,248	0,283	0,318
208,14	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
208,17	0,239	0,262	0,286	0,309	0,332
208,20	0,269	0,287	0,304	0,322	0,339
208,23	0,300	0,311	0,323	0,334	0,346
208,26	0,330	0,336	0,341	0,347	0,353
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

Πίνακας 5.9

r (μm)	ν (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
208,02	0,088	0,140	0,193	0,245	0,297
208,05	0,118	0,165	0,211	0,258	0,304
208,08	0,149	0,189	0,230	0,270	0,311
208,11	0,179	0,214	0,248	0,283	0,318
208,14	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
208,17	0,239	0,262	0,286	0,309	0,332
208,20	0,269	0,287	0,304	0,322	0,339
208,23	0,300	0,311	0,323	0,334	0,346
208,26	0,330	0,336	0,341	0,347	0,353
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

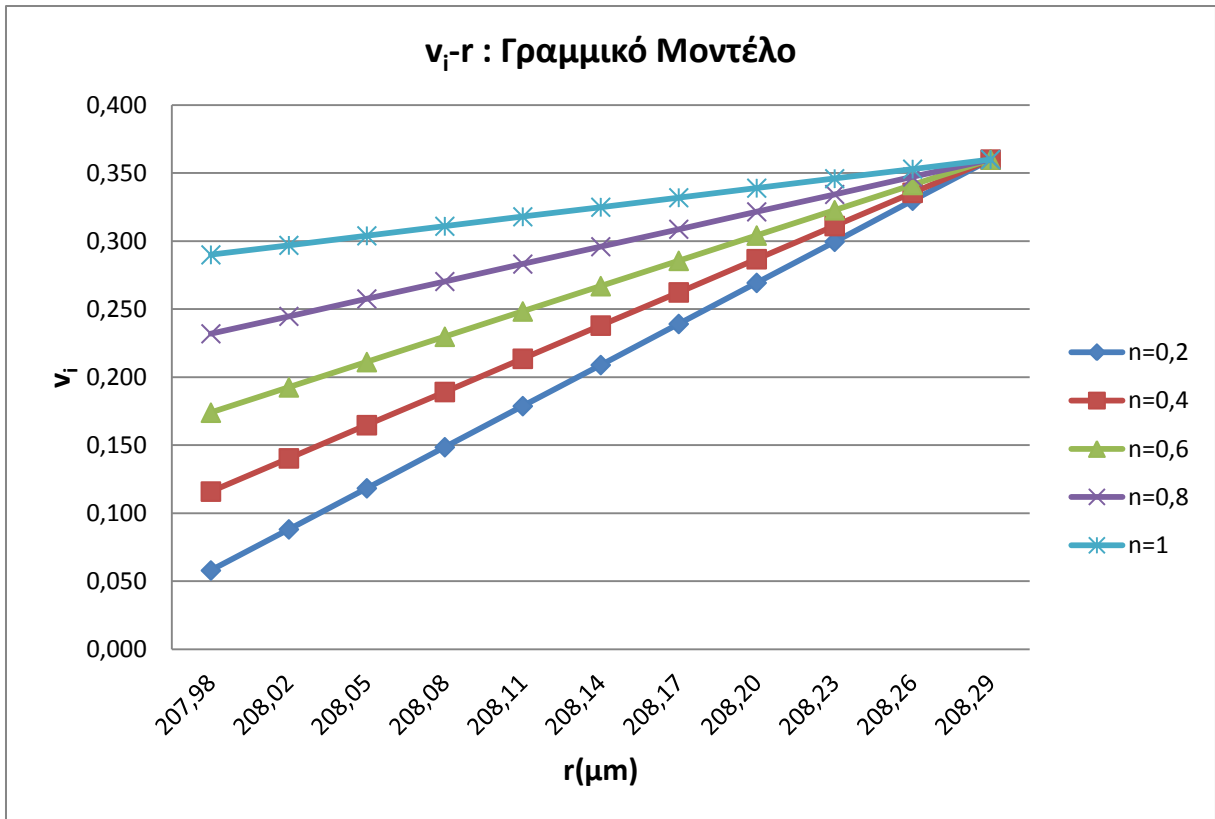
Πίνακας 5.10

r (μm)	ν (Εκθετικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
207,98	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
208,02	0,070	0,130	0,187	0,242	0,296
208,05	0,084	0,145	0,201	0,253	0,303
208,08	0,100	0,163	0,216	0,265	0,309
208,11	0,120	0,182	0,233	0,277	0,316
208,14	0,144	0,204	0,250	0,289	0,323
208,17	0,173	0,229	0,269	0,302	0,330
208,20	0,208	0,256	0,289	0,316	0,337
208,23	0,250	0,287	0,311	0,330	0,345
208,26	0,300	0,321	0,335	0,345	0,352
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

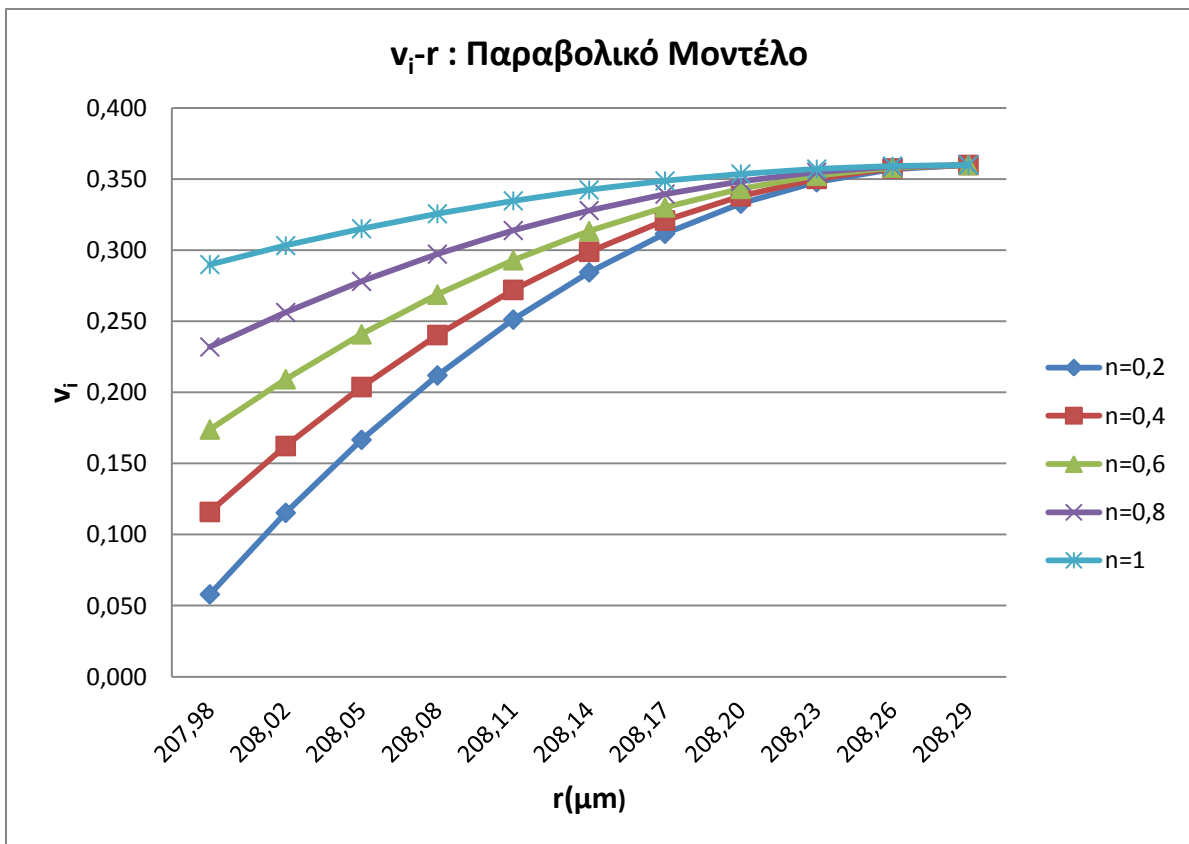
Πίνακας 5.11

r (μm)	ν ( για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
207,98	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290
208,02	0,297	0,303	0,297	0,297	0,296
208,05	0,304	0,315	0,304	0,304	0,303
208,08	0,311	0,326	0,311	0,311	0,309
208,11	0,318	0,335	0,318	0,318	0,316
208,14	0,325	0,342	0,325	0,325	0,323
208,17	0,332	0,349	0,332	0,332	0,330
208,20	0,339	0,354	0,339	0,339	0,337
208,23	0,346	0,357	0,346	0,346	0,345
208,26	0,353	0,359	0,353	0,353	0,352
208,29	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

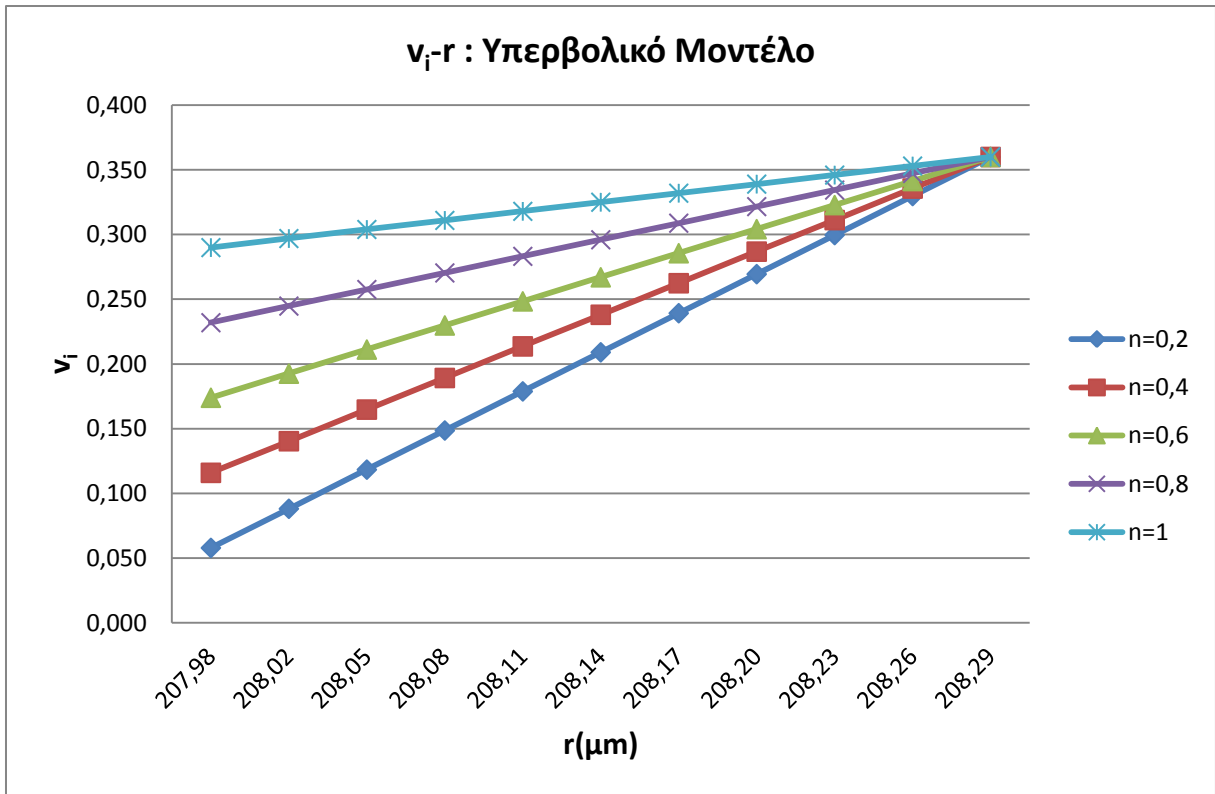
Πίνακας 5.12



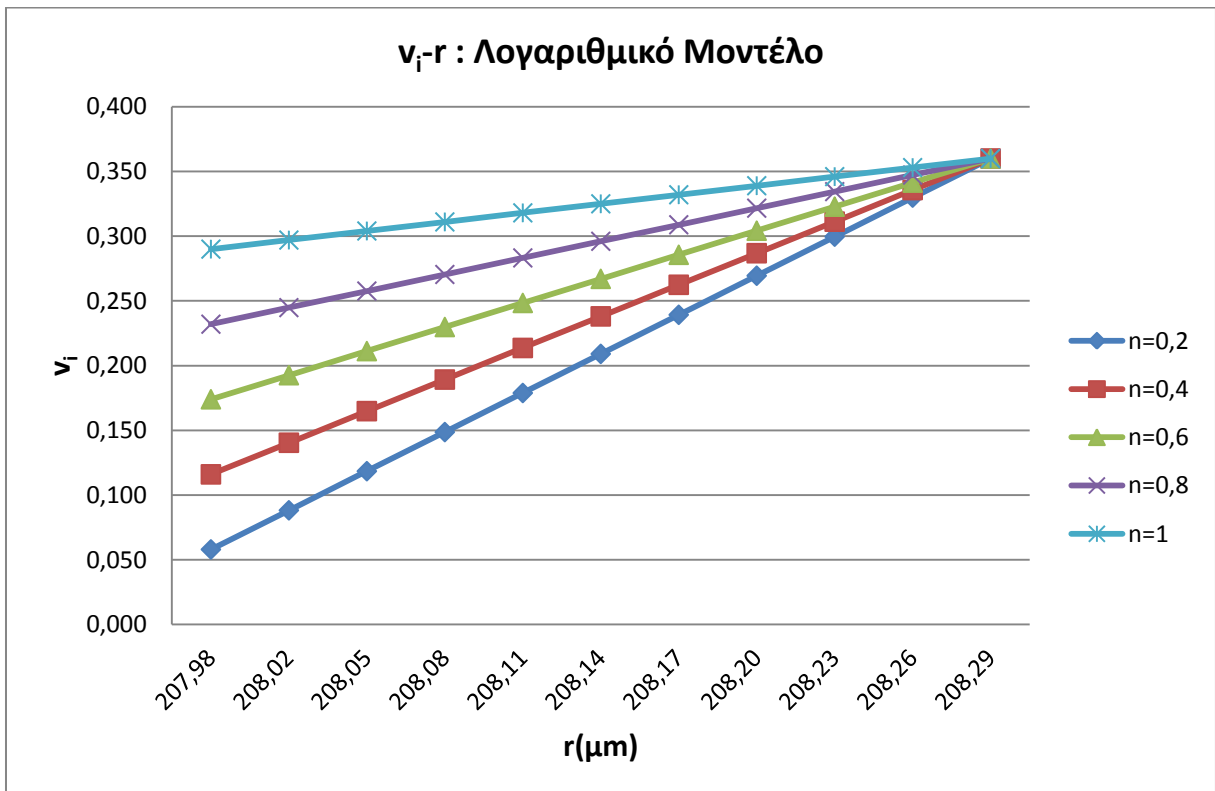
Διάγραμμα 5.7



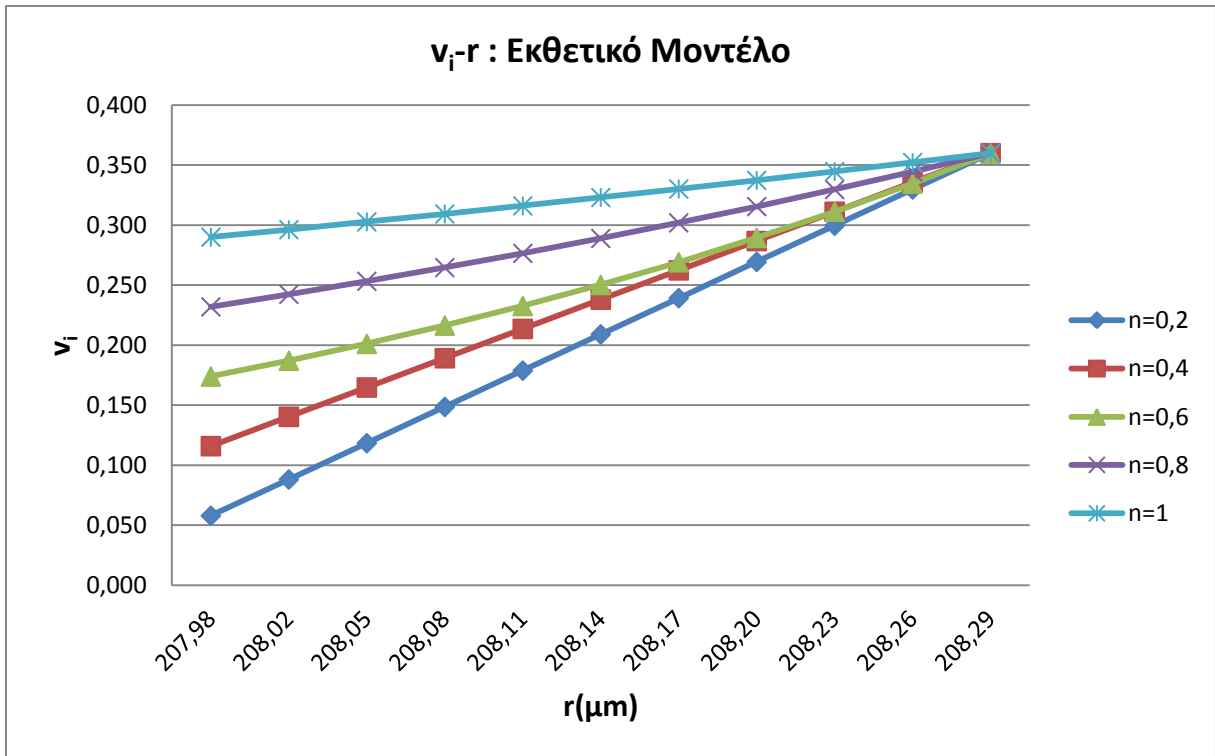
Διάγραμμα 5.8



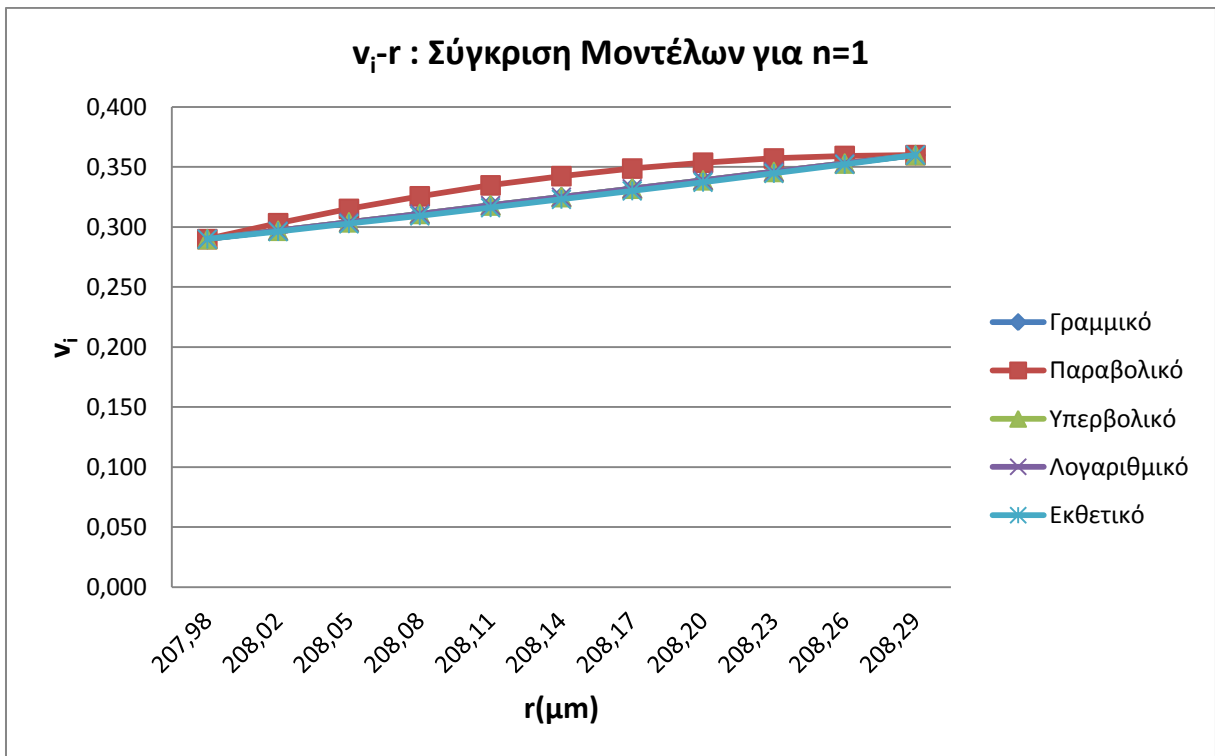
Διάγραμμα 5.9



Διάγραμμα 5.10



Διάγραμμα 5.11



Διάγραμμα 5.12

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή του  $v$  αυξάνει καθώς αυξάνεται η ακτίνα  $r$ . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενης της ακτίνας  $r$ , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

## 6. Ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων

### 6.1 Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου

Η μοντελοποίηση του πραγματικού σύνθετου υλικού για να γίνει η μελέτη του με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας βασίζεται στις εξής παραδοχές :

- Το έγκλεισμα (filler) αποτελείται από κόκκους οι οποίοι έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα και είναι όλοι του ίδιου μεγέθους με διάμετρο  $d_f = 150\mu\text{m}$  .
- Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων



## 6.2 Οκταφασικό μοντέλο

Θεωρούμε το οκταφασικό, σφαιρικό μοντέλο.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση  $P_7$ . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 7ης και 8ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια πίεση που την καλούμε  $P_6$ . Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 7ης και 6ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_5$ , λόγω αλληλεπίδρασης 6ης και 5ης φάση, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_4$ , λόγω αλληλεπίδρασης 5ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_3$ , λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_2$ , λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 2ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_1$  και λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 1ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_0$ .

Η τασική συνάρτηση  $\Phi$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, που περιγράφει το πρόβλημα μας είναι:

$$\Phi = K_1 / r + K_2 r^2$$

Κάθε μια από τις οκτώ φάσεις έχει τη δική της τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = A / r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C / r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = E / r + Fr^2$$

$$\Phi_4 = H / r + Jr^2$$

$$\Phi_5 = L / r + Mr^2$$

$$\Phi_6 = N / r + Or^2$$

$$\Phi_7 = P / r + Rr^2$$

$$\Phi_8 = Q / r + Ur^2$$

Στην θέση  $r=0$  πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για  $r=0$  πρέπει  $A=0$ .

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την σχέση :

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

Όπου  $G$  το μέτρο διάτμησης

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις  $\varphi$  και  $\theta$  είναι μηδενικές:

$$u_\varphi = u_\theta = 0$$

$$u_{r1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r3} = \frac{-\frac{E}{r^2} + 2Fr}{2G_3}$$

$$u_{r4} = \frac{-\frac{H}{r^2} + 2Jr}{2G_4}$$

$$u_{r5} = \frac{-\frac{L}{r^2} + 2Mr}{2G_5}$$

$$u_{r6} = \frac{-\frac{N}{r^2} + 2Or}{2G_6}$$

$$u_{r7} = \frac{-\frac{P}{r^2} + 2Rr}{2G_7}$$

$$u_{r8} = \frac{-\frac{Q}{r^2} + 2Ur}{2G_8}$$

Οι Παραμορφώσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

άρα

$$\varepsilon_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\varphi 1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon_{\varphi 2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2E}{r^3} + 2F\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \varepsilon_{\varphi 3} = \left(-\frac{E}{r^3} + 2F\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2H}{r^3} + 2J\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \varepsilon_{\varphi 4} = \left(-\frac{H}{r^3} + 2J\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2L}{r^3} + 2M\right)\left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \varepsilon_{\phi 5} = \left(-\frac{L}{r^3} + 2M\right)\left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2N}{r^3} + 2O\right)\left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \varepsilon_{\phi 6} = \left(-\frac{N}{r^3} + 2O\right)\left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2P}{r^3} + 2R\right)\left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\phi 7} = \left(-\frac{P}{r^3} + 2R\right)\left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{r8} = \left(\frac{2Q}{r^3} + 2U\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \varepsilon_{\phi 8} = \left(-\frac{Q}{r^3} + 2U\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

Από το βιβλίο «Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων Ι» του Τσαμασφύρου [56]

Έχουμε την εξής σχέση για τις ορθές τάσεις :

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

Όπου

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_{\phi} + \varepsilon_{\theta}$$

Άρα προκύπτουν :

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}\end{aligned}$$

$$\sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\varphi 2} + \varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[ \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[ \frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] \Rightarrow$$

$$\frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D = \sigma_{r2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\frac{E_2}{1+\nu_2} \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[ \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} [2D + 4D] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi 2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{-C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi 2}$$

Αντίστοιχα έχουμε και τα υπόλοιπα:

$$\sigma_{r3} = \frac{2E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \frac{-E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2H}{r^3} + \frac{2J(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta4} = \frac{-H}{r^3} + \frac{2J(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2L}{r^3} + \frac{2M(1+\nu_5)}{1-2\nu_5}$$

$$\sigma_{\theta5} = \frac{-L}{r^3} + \frac{2M(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \sigma_{\varphi5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2N}{r^3} + \frac{2O(1+\nu_6)}{1-2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta6} = \frac{-N}{r^3} + \frac{2O(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi6}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2R(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta7} = \frac{-P}{r^3} + \frac{2R(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi7}$$

$$\sigma_{\theta8} = \frac{-Q}{r^3} + \frac{2U(1+\nu_8)}{1-2\nu_8} = \sigma_{\varphi8}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{2Q}{r^3} + \frac{2U(1+\nu_8)}{1-2\nu_8}$$

Συνοριακές συνθήκες τάσεων:

Για

$$r=a: \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = -P_0$$

$$r=b: \sigma_{r2} = \sigma_{r3} = -P_1$$

$$r=c: \sigma_{r3} = \sigma_{r4} = -P_2$$

$$r=d: \sigma_{r4} = \sigma_{r5} = -P_3$$

$$r=e: \sigma_{r5} = \sigma_{r6} = -P_4$$

$$r=f: \sigma_{r6} = \sigma_{r7} = -P_5$$

$$r=g: \sigma_{r7} = \sigma_{r8} = -P_6$$

$$r=h: \sigma_{r8} = -P_7$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες στις σχέσεις τάσεων που υπολόγισα έχω:

$$B = \frac{P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)}$$

$$\frac{2C}{a^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_0$$

$$\frac{2C}{b^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_1$$

$$\Rightarrow C = \frac{(P_1 - P_0)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$C = \frac{(P_1 - P_0)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$\frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D(a^3 - b^3) = P_1 b^3 - P_0 a^3 \Rightarrow$$

$$D = \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1 - 2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1 + \nu_2)}$$

$$\frac{2E}{b^3} + 2F \frac{(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} = -P_1$$

$$\frac{2E}{c^3} + 2F \frac{(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} = -P_2$$

$$\Rightarrow 2E\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^3}\right) = P_2 - P_1 \Rightarrow$$

$$E = \frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)}$$

$$\frac{2(1 + \nu_3)}{1 - 2\nu_3} F(c^3 - b^3) = P_1 b^3 - P_2 c^3 \Rightarrow$$

$$F = \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1 - 2\nu_3)}{2(c^3 - b^3)(1 + \nu_3)}$$

Συμμετρικά προκύπτει :

$$H = \frac{(P_3 - P_2)d^3 c^3}{2(d^3 - c^3)}$$

$$I = \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1 - 2\nu_4)}{2(d^3 - c^3)(1 + \nu_4)}$$

$$L = \frac{(P_4 - P_3)e^3 d^3}{2(e^3 - d^3)}$$

$$M = \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)(1 - 2\nu_5)}{2(e^3 - d^3)(1 + \nu_5)}$$

$$N = \frac{(P_5 - P_4)f^3 e^3}{2(f^3 - e^3)}$$

$$O = \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)(1 - 2\nu_6)}{2(f^3 - e^3)(1 + \nu_6)}$$



$$P = \frac{(P_6 - P_5)g^3 f^3}{2(g^3 - f^3)}$$

$$R = \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)(1 - 2\nu_7)}{2(g^3 - f^3)(1 + \nu_7)}$$

$$Q = \frac{(P_7 - P_6)h^3 g^3}{2(h^3 - g^3)}$$

$$U = \frac{(h^3 P_6 - g^3 P_7)(1 - 2\nu_8)}{2(h^3 - g^3)(1 + \nu_8)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των μετατοπίσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$u_{r1} = -\frac{P_0(1 - 2\nu_1)}{E_1} r \quad (6.1)$$

$$u_{r2} = -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r \quad (6.2)$$

$$u_{r3} = -\frac{(P_2 - P_1)b^3 c^3 (1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} r \quad (6.3)$$

$$u_{r4} = -\frac{(P_3 - P_2)c^3 d^3 (1 + \nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^2} + \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)(1 - 2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4} r \quad (6.4)$$

$$u_{r5} = -\frac{(P_4 - P_3)d^3 e^3 (1 + \nu_5)}{2(e^3 - d^3)E_5} \frac{1}{r^2} + \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)(1 - 2\nu_5)}{(e^3 - d^3)E_5} r \quad (6.5)$$

$$u_{r6} = -\frac{(P_5 - P_4)e^3 f^3 (1 + \nu_6)}{2(f^3 - e^3)E_6} \frac{1}{r^2} + \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)(1 - 2\nu_6)}{(f^3 - e^3)E_6} r \quad (6.6)$$

$$u_{r7} = -\frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3 (1 + \nu_7)}{2(g^3 - f^3)E_7} \frac{1}{r^2} + \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)(1 - 2\nu_7)}{(g^3 - f^3)E_7} r \quad (6.7)$$

$$u_{r8} = -\frac{(P_7 - P_6)g^3 h^3 (1 + \nu_8)}{2(h^3 - g^3)E_8} \frac{1}{r^2} + \frac{(g^3 P_6 - h^3 P_7)(1 - 2\nu_8)}{(h^3 - g^3)E_8} r \quad (6.8)$$

Συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων:

$$\text{Για } r=a: \quad u_{r1}=u_{r2}$$

$$r=b: \quad u_{r2}=u_{r3}$$

$$r=c: \quad u_{r3}=u_{r4}$$

$$r=d: \quad u_{r4}=u_{r5}$$

$$r=e: \quad u_{r5}=u_{r6}$$

$$r=f: \quad u_{r6}=u_{r7}$$

$$r=g: \quad u_{r7}=u_{r8}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.1) και (6.2) για  $u_{r1}$  και  $u_{r2}$  για  $r = a$  έχω:

$$\begin{aligned} u_{r1} = u_{r2} &\Rightarrow -\frac{P_0(1-2\nu_1)}{E_1}a = -\frac{(P_1-P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + \frac{(a^3P_0-b^3P_1)(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2P_0(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 + (P_1-P_0)b^3(1+\nu_2)E_1 - 2(a^3P_0-b^3P_1)(1-2\nu_2)E_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2P_0(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 + b^3E_1P_1 + b^3\nu_2E_1P_1 - b^3\nu_2E_1P_0 - P_0b^3E_1 - 2a^3E_1P_0 + 4a^3\nu_2E_1P_0 + 2b^3E_1P_1 - \\ &\quad -4b^3\nu_2E_1P_1 = 0 \\ &\Rightarrow 3b^3E_1(1-\nu_2)P_1 - 2P_0(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 - [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)]EP_0 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_1[3b^3(1-\nu_2)E_1] = P_0[2(b^3-a^3)(1-2\nu_1)E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)E_1]] \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_0 = \mu P_1 \Rightarrow \mu = \frac{3b^3(1-\nu_2)E_1}{\{2(b^3-a^3)(1-2\nu_1)E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)]\}E_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{r_2} = u_{r_3} &\Rightarrow -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+v_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{b^2} + \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2v_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r = -\frac{(P_2 - P_1)b^3c^3(1+v_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{b^2} + \\
&\frac{(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2v_3)}{(c^3 - b^3)E_3} b \Rightarrow -(P_1 - P_0)a^3b^3(1+v_2)(c^3 - b^3)E_3 + 2b^3(c^3 - b^3)(a^3P_0 - b^3P_1)(1-2v_2)E_3 + \\
&+ 2(b^3 - a^3)(P_2 - P_1) - b^3c^3(1+v_3)E_2 - 2(b^3 - a^3)b^3(b^3P_1 - c^3P_2)(1-2v_3)E_2 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a^3c^3 - a^3b^3 + a^3c^3 - a^3b^3v_2)E_3(P_0 - P_1) + 2(a^3P_0 - b^3P_1)(c^3 - b^3 - 2c^3v_2 + 2b^3v_2)E_3 \\
&+ (P_2 - P_1)(b^3c^3 - a^3c^3 + b^3c^3v_2 - a^3c^3v_2)E_2 - 2(b^3P_1 - c^3P_2)(b^3 - a^3 - 2b^3v_3 + 2a^3v_3)E_2 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a^3c^3P_0 - a^3b^3P_0 - a^3c^3v_2E_3P_0 - a^3b^3v_2E_3P_0 + 2a^3c^3E_3P_0 - 2a^3b^3E_3P_0 - 2a^3c^3v_2E_3P_0 + 2a^3b^3v_2E_3P_0) \\
&- (-a^3c^3E_3P_1 + a^3b^3E_3P_1 - a^3c^3v_2E_1 + P_1 + a^3b^3v_2E_3P_1 - 2b^3c^3E_3P_1 + 2b^6E_3P_1 + 4b^3c^3v_2E_3P_1 - 4b^6v_2E_3P_1) + \\
&(-b^3c^3E_2P_1 + a^3c^3E_2P_1 - b^3c^3v_3E_2P_1 + a^3c^3v_3E_2P_1 - 2b^6E_2P_1 + 2a^3b^3E_2P_1 + 4b^6v_3E_2P_1 \\
&- 4a^3b^3v_3E_2P_1) + (b^3c^3E_2P_2 - a^3c^3E_2P_2 + b^3c^3v_3E_2P_2 - a^3c^3v_3E_2P_2 + 2b^3c^3E_2P_2 - 2a^3c^3E_2P_2 \\
&- 4b^3c^3v_3E_2P_2 + 4a^3c^3v_3E_2P_2) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow [3a^3c^3 - 3a^3b^3 - a^3c^3 - v_2 + a^3b^3v_2]E_3P_0 + (-a^3c^3 + a^3b^3 - a^3c^3v_2 \\
&+ a^3b^3v_2 - 2b^3c^3 + 2b^6 + 4b^3c^3v_2 - 4b^6v_2)E_3P_1 + (-b^3c^3 + a^3c^3 - b^3c^3v_3 + \\
&a^3c^3v_3 - 2b^6 + 2a^3b^3 + 4b^6v_3 - 4a^3b^3v_3)E_2P_1 + (3b^3c^3 - 3a^3c^3 - 3b^3c^3v_3 + 3a^3c^3v_3)E_2P_2 = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P_0E_3[3a^3c^3(1-v_2) - 3a^3b^3(1-v_2) + E_3P_1] + \\
&E_3P_1[-a^3c^3(1+v_2) + a^3b^3(1+v_2) - 2b^3(c^3 - b^3) + 4b^3v_2(c^3 - b^3)] \\
&E_2P_1[(1+v_3)(a^3c^3 - b^3c^3) + (1-2v_3)(2b^6 + 2a^3b^3(1-2v_3))] \\
&E_2P_2[3b^3c^3(1-v_3) - 3a^3c^3(1-v_3)] = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_0E_3(1-v_2)(3a^3c^3 - 3a^3b^3) + E_3P_1[(1+v_2)(-a^3c^3 + a^3b^3) + (c^3 - b^3)(4b^3v_2 - 2b^3)] + \\
&E_2P_1[(1+v_3)(a^3c^3 - b^3c^3) + (1-2v_3)(2b^6 + 2a^3b^3(1-2v_3))] + \\
&E_2P_2[(3b^3c^3(1-v_3) - 3a^3c^3(1-v_3))] = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P_0[3a^3(c^3 - b^3)(1-v_2)E_3] + P_2[3c^3(1-v_3)(b^3 - a^3)E_2] + \\
&P_1[a^3(1+v_2) + 2b^3(1-2v_2)(b^3 - c^3)E_3] + [c^3(1+v_3) + 2b^3(1-2v_3)(a^3 - b^3)E_2] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow P_0 = \mu P_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_2(3c^3(1-v_3)(b^3 - a^3)E_2 = P_1 \begin{bmatrix} a^3(1+v_2) + 2b^3(1-2v_2)(c^3 - b^3)E_3 \\ +(c^3(1+v_3) + 2b^3(1-2v_3))(b^3 - a^3)E_2 \\ -\mu a^3(c^3 - b^3)(1-v_2)E_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_1 = \lambda P_2 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{3c^3(1-v_3)(b^3 - a^3)E_2}{(a^3(1+v_2) + 2b^3(1-2v_2))(c^3 - b^3)E_3 + (c^3(1+v_3) + 2b^3(1-2v_3))(b^3 - a^3)E_2 - 3\mu a^3(c^3 - b^3)(1-v_2)E_3}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις(6.3) και (6.4) για  $u_{r2}$  και  $u_{r3}$  για  $r = c$  έχω:

$$\begin{aligned} & P_1[3b^3(d^3 - c^3)(1-v_3)E_4] + P_3[3d^3(1-v_4)(c^3 - b^3)E_3] = \\ & = P_2[b^3(1+v_3) + 2c^3(1-2v_3)](d^3 - c^3)E_4 + [d^3(1+v_4) + 2c^3(1-2v_4)(c^3 - b^3)E_3] \Rightarrow \\ & \Rightarrow P_1 = \lambda_2 P_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_3[3d^2(1-v_4)(c^3 - b^3)E_3] = P_2 \begin{bmatrix} (b^3(1+v_3) + 2c^3(1-2v_3))(d^3 - c^3)E_4 \\ (d^3(1+v_4) + 2c^3(1-2v_4))(c^3 - b^3)E_3 \\ -3\lambda_1 b^3(d^3 - c^3)(1-v_3)E_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 = \lambda_2 P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3d^2(1-v_4)(c^3 - b^3)E_3}{(b^3(1+v_3) + 2c^3(1-2v_3))(d^3 - c^3)E_4 + (d^3(1+v_4) + 2c^3(1-2v_4))(c^3 - b^3)E_3 - 3\lambda_1 b^3(d^3 - c^3)(1-v_3)E_4}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.4) και (6.5) για  $r=d$  έχουμε

$$\Rightarrow P_3 = \lambda_3 P_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{3e^2(1-v_5)(d^3 - c^3)E_4}{(c^3(1+v_4) + 2d^3(1-2v_4))(e^3 - d^3)E_5 + (e^3(1+v_5) + 2d^3(1-2v_5))(d^3 - c^3)E_4 - 3\lambda_2 c^3(e^3 - d^3)(1-v_4)E_5}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.5) και (6.6) για  $r=e$  :

$$\Rightarrow P_4 = \lambda_4 P_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \frac{3f^2(1-v_6)(e^3 - d^3)E_5}{(d^3(1+v_5) + 2e^3(1-2v_5))(f^3 - e^3)E_6 + (f^3(1+v_6) + 2e^3(1-2v_6))(e^3 - d^3)E_5 - 3\lambda_3 d^3(f^3 - e^3)(1-v_5)E_6}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.6) και (6.7) για r=f:

$$\Rightarrow P_5 = \lambda_5 P_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_5 = \frac{3g^2(1-v_7)(f^3 - e^3)E_6}{(e^3(1+v_6) + 2f^3(1-2v_6))(g^3 - f^3)E_7 + (g^3(1+v_7) + 2f^3(1-2v_7))(f^3 - e^3)E_6 - 3\lambda_4 e^3(g^3 - f^3)(1-v_6)E_7}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.7) και (6.8) για r=g:

$$\Rightarrow P_6 = \lambda_6 P_7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_6 = \frac{3h^2(1-v_8)(g^3 - f^3)E_7}{(f^3(1+v_7) + 2g^3(1-2v_7))(h^3 - g^3)E_8 + (h^3(1+v_8) + 2g^3(1-2v_8))(g^3 - f^3)E_7 - 3\lambda_5 f^3(h^3 - g^3)(1-v_7)E_8}$$

Για να υπολογίσω το μέτρο ελαστικότητας  $E_c$  του σύνθετου υλικού, Θεωρώ ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των οκτώ φάσεων από τις οποίες αποτελείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_7^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) dV_2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) dV_4 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) dV_5 + \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) dV_6 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) dV_7 + \frac{1}{2} \int_{V_8} (\sigma_{r8} \varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8} \varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8} \varepsilon_{\varphi8}) dV_8 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Όπου

$$K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$$

Είναι το μέτρο διόγκωσης σύνθετου υλικού και :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των τάσεων:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\varphi1} = -2 \frac{(1+\nu_1) P_0(1-2\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{1}{1+\nu_1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} = \frac{2}{r^3} (P_1 - P_0) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{r2} &= \frac{(P_1 - P_0) a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta2} = \sigma_{\varphi2} &= \frac{-C}{r^3} + 2D \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} = \frac{-1}{r^3} (P_1 - P_0) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)} \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{\theta2} = \sigma_{\varphi2} &= -\frac{(P_1 - P_0) a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{(P_2 - P_1) b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \sigma_{\varphi3} = -\frac{(P_2 - P_1) b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{(P_3 - P_2) c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{\theta4} = \sigma_{\varphi4} = -\frac{(P_3 - P_2) c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{c^3 P_2 - d^3 P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{(P_4 - P_3) d^3 e^3}{e^3 - d^3} \frac{1}{r^3} + \frac{d^3 P_3 - e^3 P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\sigma_{\theta5} = \sigma_{\varphi5} = -\frac{(P_4 - P_3) d^3 e^3}{e^3 - d^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{d^3 P_3 - e^3 P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{(P_5 - P_4) e^3 f^3}{f^3 - e^3} \frac{1}{r^3} + \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\sigma_{\theta6} = \sigma_{\varphi6} = -\frac{(P_5 - P_4) e^3 f^3}{f^3 - e^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{e^3 P_4 - f^3 P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3}{g^3 - f^3} \frac{1}{r^3} + \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\sigma_{\theta7} = \sigma_{\varphi7} = -\frac{(P_6 - P_5)f^3 g^3}{g^3 - f^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{f^3 P_5 - g^3 P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{(P_7 - P_6)g^3 h^3}{h^3 - g^3} \frac{1}{r^3} + \frac{g^3 P_6 - h^3 P_7}{h^3 - g^3}$$

$$\sigma_{\theta8} = \sigma_{\varphi8} = -\frac{(P_7 - P_6)g^3 h^3}{h^3 - g^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{g^3 P_6 - h^3 P_7}{h^3 - g^3}$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = 2 \frac{-P_0(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)} \frac{(1+\nu_1)}{E_1} = -P_0 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left[ \frac{2C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[ \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{r2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left[ \frac{-C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[ -\frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{2}{2} \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3} \frac{1}{1+\nu_2} \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \frac{(P_1 - P_0)a^3 b^3 (1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2 r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3 P_0 - b^3 P_1}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{r3} = \frac{(P_2 - P_1)b^3 a^3 (1+\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3 r^3} + \frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{b^3 P_1 - c^3 P_2}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = \frac{(P_3 - P_2)c^3 b^3 (1+\nu_4)}{2(c^3 - b^3)E_4 r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_4} \frac{b^3 P_2 - c^3 P_3}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{r4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3b^3(1+v_4)}{(d^3 - c^3)E_4r^3} + \frac{1-2v_4}{E_3} \frac{c^3P_2 - d^3P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = \frac{(P_3 - P_2)c^3d^3(1+v_4)}{2(d^3 - c^3)E_4r^3} + \frac{1-2v_4}{E_3} \frac{c^3P_2 - d^3P_3}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{r5} = \frac{(P_4 - P_3)d^3c^3(1+v_5)}{(e^3 - d^3)E_5r^3} + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{d^3P_3 - e^3P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = \frac{(P_4 - P_3)d^3e^3(1+v_5)}{2(e^3 - d^3)E_5r^3} + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{d^3P_3 - e^3P_4}{e^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{r6} = \frac{(P_5 - P_4)e^3f^3(1+v_6)}{(f^3 - e^3)E_6r^3} + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{e^3P_4 - f^3P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\varphi6} = \frac{(P_5 - P_4)e^3f^3(1+v_6)}{2(f^3 - e^3)E_6r^3} + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{e^3P_4 - f^3P_5}{f^3 - e^3}$$

$$\varepsilon_{r7} = \frac{(P_6 - P_5)f^3g^3(1+v_7)}{(g^3 - f^3)E_7r^3} + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{f^3P_5 - g^3P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{\theta7} = \varepsilon_{\varphi7} = \frac{(P_6 - P_5)f^3g^3(1+v_7)}{2(g^3 - f^3)E_7r^3} + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{f^3P_5 - g^3P_6}{g^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{r8} = \frac{(P_7 - P_6)g^3h^3(1+v_8)}{(h^3 - g^3)E_8r^3} + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{g^3P_6 - h^3P_7}{h^3 - g^3}$$

$$\varepsilon_{\theta8} = \varepsilon_{\varphi8} = \frac{(P_7 - P_6)g^3h^3(1+v_8)}{2(h^3 - g^3)E_8r^3} + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{g^3P_6 - h^3P_7}{h^3 - g^3}$$



Θα υπολογίσω τα επιμέρους γινόμενα:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\varphi1} = -P_0$$

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = -P_0 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r1}\sigma_{r1} + \varepsilon_{\theta1}\sigma_{\theta1} + \varepsilon_{\varphi1}\sigma_{\varphi1} = 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta2}\sigma_{\theta2} + \varepsilon_{\varphi2}\sigma_{\varphi2} = \left( \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \right) \left( \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \right) +$$

$$2 \left( -\frac{(P_1 - P_0)a^3b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \right) \left( \frac{(P_1 - P_0)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_0 - b^3P_1}{b^3 - a^3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(P_1 - P_0)a^3b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)r^3}$$

$$- 2 \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)(P_1 - P_0)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)^2} \frac{1}{r^3} + 2 \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)}{(b^3 - a^3)^2} = \sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta2}\sigma_{\theta2} + \varepsilon_{\varphi2}\sigma_{\varphi2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta2}\sigma_{\theta2} + \varepsilon_{\varphi2}\sigma_{\varphi2} = \frac{3}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2}$$

$$\frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} = A_1$$

$$\frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{(a^3P_0 - b^3P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2} = B_1$$

$$\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{\theta3}\sigma_{\theta3} + \varepsilon_{\varphi3}\sigma_{\varphi3} = \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 b^6 c^6 (1+\nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2}$$

$$\frac{(P_2 - P_1)^2 b^6 c^6 (1+\nu_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} = \Gamma_1$$

$$\frac{1-2\nu_3}{E_3} \frac{(b^3P_1 - c^3P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2} = \Delta_1$$

$$\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \varepsilon_{\theta4}\sigma_{\theta4} + \varepsilon_{\varphi4}\sigma_{\varphi4} = \frac{3}{2} \frac{(P_3 - P_2)^2 d^6 c^6 (1+\nu_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1-2\nu_4}{E_4} \frac{(c^3P_2 - d^3P_3)^2}{(d^3 - c^3)^2}$$

$$\frac{(P_3 - P_2)^2 d^6 c^6 (1+\nu_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4} = E_1$$

$$\frac{1-2\nu_4}{E_4} \frac{(c^3P_2 - d^3P_3)^2}{(d^3 - c^3)^2} = Z_1$$

$$\sigma_{r_5}\varepsilon_{r_5} + \varepsilon_{\theta_5}\sigma_{\theta_5} + \varepsilon_{\varphi_5}\sigma_{\varphi_5} = \frac{3}{2} \frac{(P_4 - P_3)^2 e^6 d^6 (1 + v_5)}{(e^3 - d^3)^2 E_5} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3)^2}$$

$$\frac{(P_4 - P_3)^2 e^6 d^6 (1 + v_5)}{(e^3 - d^3)^2 E_5} = H_1$$

$$\frac{1 - 2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3)^2} = \Theta_1$$

$$\sigma_{r_6}\varepsilon_{r_6} + \varepsilon_{\theta_6}\sigma_{\theta_6} + \varepsilon_{\varphi_6}\sigma_{\varphi_6} = \frac{3}{2} \frac{(P_5 - P_4)^2 f^6 e^6 (1 + v_6)}{(f^3 - e^3)^2 E_6} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3 - e^3)^2}$$

$$\frac{(P_5 - P_4)^2 f^6 e^6 (1 + v_6)}{(f^3 - e^3)^2 E_6} = I_1$$

$$\frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3 - e^3)^2} = K_1$$

$$\sigma_{r_7}\varepsilon_{r_7} + \varepsilon_{\theta_7}\sigma_{\theta_7} + \varepsilon_{\varphi_7}\sigma_{\varphi_7} = \frac{3}{2} \frac{(P_6 - P_5)^2 g^6 f^6 (1 + v_7)}{(g^3 - f^3)^2 E_7} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3 - f^3)^2}$$

$$\frac{(P_6 - P_5)^2 g^6 f^6 (1 + v_7)}{(g^3 - f^3)^2 E_7} = \Lambda_1$$

$$\frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3 - f^3)^2} = M_1$$

$$\sigma_{r_8}\varepsilon_{r_8} + \varepsilon_{\theta_8}\sigma_{\theta_8} + \varepsilon_{\varphi_8}\sigma_{\varphi_8} = \frac{3}{2} \frac{(P_7 - P_6)^2 h^6 g^6 (1 + v_8)}{(h^3 - g^3)^2 E_8} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_8}{E_8} \frac{(g^3 P_6 - h^3 P_7)^2}{(h^3 - g^3)^2}$$

$$\frac{(P_7 - P_6)^2 h^6 g^6 (1 + v_8)}{(h^3 - g^3)^2 E_8} = N_1$$

$$\frac{1 - 2v_8}{E_8} \frac{(g^3 P_6 - h^3 P_7)^2}{(h^3 - g^3)^2} = \Xi_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P_7^2(1-2v_c)h^3}{E_c} &= 3P_0^2 \frac{1-2v_1}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} A_1 \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) + B_1(b^3 - a^3) - \frac{1}{2} \Gamma_1 \left( \frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \Delta_1(c^3 - b^3) - \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3} \right) + \\ &+ Z_1(d^3 - c^3) - \frac{1}{2} H_1 \left( \frac{1}{e^3} - \frac{1}{d^3} \right) + \Theta_1(e^3 - d^3) - \frac{1}{2} I_1 \left( \frac{1}{f^3} - \frac{1}{e^3} \right) + K_1(f^3 - e^3) - \frac{1}{2} \Lambda_1 \left( \frac{1}{g^3} - \frac{1}{f^3} \right) + M_1(g^3 - f^3) \\ &- \frac{1}{2} N_1 \left( \frac{1}{h^3} - \frac{1}{g^3} \right) + \Xi_1(h^3 - g^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{3P_7^2(1-2v_c)}{E_c} r^2 dr &= \int_0^a 3P_0^2 \frac{1-2v_1}{E_1} r^2 dr + \int_a^b \left( \frac{3}{2} A_1 \frac{1}{r^6} + 3B_1 \right) r^2 dr + \int_b^c \left( \frac{3}{2} \Gamma_1 \frac{1}{r^6} + 3\Delta_1 \right) r^2 dr \\ &+ \int_c^d \left( \frac{3}{2} E_1 \frac{1}{r^6} + 3Z_1 \right) r^2 dr + \int_d^e \left( \frac{3}{2} H_1 \frac{1}{r^6} + 3\Theta_1 \right) r^2 dr + \int_e^f \left( \frac{3}{2} I_1 \frac{1}{r^6} + 3K_1 \right) r^2 dr + \int_f^g \left( \frac{3}{2} \Lambda_1 \frac{1}{r^6} + 3M_1 \right) r^2 dr \\ &+ \int_g^h \left( \frac{3}{2} N_1 \frac{1}{r^6} + 3\Xi_1 \right) r^2 dr \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{P_7^2(1-2v_c)h^3}{E_c} &= 3P_0^2 \frac{1-2v_1}{E_1} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^a + \frac{3}{2} A_1 \int_a^b r^{-4} dr + 3B_1 \int_a^b r^2 dr + \frac{3}{2} \Gamma_1 \int_b^c r^{-4} dr + 3\Delta_1 \int_b^c r^2 dr + \\ &\frac{3}{2} E_1 \int_c^d r^{-4} dr + 3Z_1 \int_c^d r^2 dr + \frac{3}{2} H_1 \int_d^e r^{-4} dr + 3\Theta_1 \int_d^e r^2 dr + \frac{3}{2} I_1 \int_e^f r^{-4} dr + 3K_1 \int_e^f r^2 dr + \frac{3}{2} \Lambda_1 \int_f^g r^{-4} dr + 3M_1 \int_f^g r^2 dr + \\ &+ \frac{3}{2} N_1 \int_g^h r^{-4} dr + 3\Xi_1 \int_g^h r^2 dr \\ \Rightarrow \frac{P_7^2(1-2v_c)h^3}{E_c} &= 3P_0^2 \frac{1-2v_1}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} \frac{(P_1 - P_0)^2 a^6 b^6 (1+v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3 - a^3)^2} (b^3 - a^3) \\ &- \frac{1}{2} \frac{(P_2 - P_1)^2 b^6 c^6 (1+v_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \left( \frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3 - b^3)^2} (c^3 - b^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_3 - P_2)^2 d^6 c^6 (1+v_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4} \left( \frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3} \right) \\ &+ \frac{1-2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)^2}{(d^3 - c^3)^2} (d^3 - c^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_4 - P_3)^2 e^6 d^6 (1+v_5)}{(e^3 - d^3)^2 E_5} \left( \frac{1}{e^3} - \frac{1}{d^3} \right) + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3 - d^3)^2} (e^3 - d^3) \\ &- \frac{1}{2} \frac{(P_5 - P_4)^2 f^6 e^6 (1+v_6)}{(f^3 - e^3)^2 E_6} \left( \frac{1}{f^3} - \frac{1}{e^3} \right) + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3 - e^3)^2} (f^3 - e^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_6 - P_5)^2 g^6 f^6 (1+v_7)}{(g^3 - f^3)^2 E_7} \left( \frac{1}{g^3} - \frac{1}{f^3} \right) \\ &+ \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3 - f^3)^2} (g^3 - f^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_7 - P_6)^2 h^6 g^6 (1+v_8)}{(h^3 - g^3)^2 E_8} \left( \frac{1}{h^3} - \frac{1}{g^3} \right) + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{(g^3 P_6 - h^3 P_7)^2}{(h^3 - g^3)^2} (h^3 - g^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2P_7^2(1-2v_c)h^3}{E_c} &= 2P_0^2 \frac{1-2v_1}{E_1} a^3 + \frac{(P_1-P_0)^2 a^3 b^3 (1+v_2)}{(b^3-a^3)E_2} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)^2}{(b^3-a^3)} 2 \\
&+ \frac{(P_2-P_1)^2 b^3 c^3 (1+v_3)}{(c^3-b^3)^2 E_3} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right) + \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)^2}{(c^3-b^3)} (c^3-b^3) 2 \\
&+ \frac{(P_3-P_2)^2 d^3 c^3 (1+v_4)}{(d^3-c^3)^2 E_4} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3}\right) + \frac{1-2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_2 - d^3 P_3)^2}{(d^3-c^3)} (d^3-c^3) 2 \\
&+ \frac{(P_4-P_3)^2 e^3 d^3 (1+v_5)}{(e^3-d^3)^2 E_5} \left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{d^3}\right) + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_3 - e^3 P_4)^2}{(e^3-d^3)} (e^3-d^3) 2 \\
&+ \frac{(P_5-P_4)^2 f^3 e^3 (1+v_6)}{(f^3-e^3)^2 E_6} \left(\frac{1}{f^3} - \frac{1}{e^3}\right) + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{(e^3 P_4 - f^3 P_5)^2}{(f^3-e^3)} (f^3-e^3) 2 \\
&+ \frac{(P_6-P_5)^2 g^3 f^3 (1+v_7)}{(g^3-f^3)^2 E_7} \left(\frac{1}{g^3} - \frac{1}{f^3}\right) + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{(f^3 P_5 - g^3 P_6)^2}{(g^3-f^3)} (g^3-f^3) 2 \\
&+ \frac{(P_7-P_6)^2 h^3 g^3 (1+v_8)}{(h^3-g^3)^2 E_8} \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{g^3}\right) + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{(g^3 P_6 - h^3 P_7)^2}{(h^3-g^3)} (h^3-g^3) 2
\end{aligned}$$

Ισχύει :

$$U_1 = \frac{a^3}{h^3}$$

$$U_2 = \frac{b^3 - a^3}{h^3}$$

$$U_3 = \frac{c^3 - b^3}{h^3}$$

$$U_4 = \frac{d^3 - c^3}{h^3}$$

$$U_5 = \frac{e^3 - d^3}{h^3}$$

$$U_6 = \frac{f^3 - e^3}{h^3}$$

$$U_7 = \frac{g^3 - f^3}{h^3}$$

$$U_8 = \frac{h^3 - g^3}{h^3}$$

$$P_0 = \mu P_1, P_1 = \lambda_1 P_1, P_2 = \lambda_2 P_3, P_3 = \lambda_3 P_4, P_4 = \lambda_4 P_5, P_5 = \lambda_5 P_6, P_6 = \lambda_6 P_7$$

$$P_0 = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 P_7$$

$$\frac{P_0}{P_7} = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_1}{P_7} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_2}{P_7} = \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_3}{P_7} = \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_4}{P_7} = \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_5}{P_7} = \lambda_5 \lambda_6,$$

$$\frac{P_6}{P_7} = \lambda_6,$$

$$U_1 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 = 1$$

$$\frac{a^3}{h^3} = U_1, \frac{b^3}{h^3} = U_1 + U_2, \frac{c^3}{h^3} = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$\frac{d^3}{h^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4, \frac{e^3}{h^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5,$$

$$\frac{f^3}{h^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6, \frac{g^3}{h^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{2(\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2(1-2\nu_1)a^3}{h^3E_1} + \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2a^3b^3(1+2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_2)(a^3\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - b^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2}{E_2(b^3-a^3)h^3} &+ \frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2b^3c^3(1+2\nu_3)}{(c^3-b^3)E_3h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_3)(b^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - c^3\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2}{E_3(c^3-b^3)h^3} &+ \frac{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2c^3d^3(1+2\nu_4)}{(d^3-c^3)E_4h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_4)(c^3\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - d^3\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2}{E_4(d^3-c^3)h^3} &+ \frac{(\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2d^3e^3(1+2\nu_5)}{(e^3-d^3)E_5h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_5)(d^3\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - e^3\lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2}{E_5(e^3-d^3)h^3} &+ \frac{(\lambda_5\lambda_6 - \lambda_4\lambda_5\lambda_6)^2e^3f^3(1+2\nu_6)}{(f^3-e^3)E_6h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_6)(e^3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 - f^3\lambda_5\lambda_6)^2}{E_6(f^3-e^3)h^3} &+ \frac{(\lambda_6 - \lambda_5\lambda_6)^2f^3g^3(1+2\nu_7)}{(g^3-f^3)E_7h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_7)(f^3\lambda_5\lambda_6 - g^3\lambda_6)^2}{E_7(g^3-f^3)h^3} &+ \frac{(1-\lambda_6)^2g^3h^3(1+2\nu_8)}{(h^3-g^3)E_8h^3} + \\
\frac{2(1-2\nu_8)(g^3\lambda_6 - h^3)^2}{E_8(h^3-g^3)h^3} &
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι ο εξής :

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{U_6}{\nu_6} + \frac{U_7}{\nu_7} + \frac{U_8}{\nu_8}
\tag{6.13}$$

Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα και αποτελέσματα για τη μέγιστη επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως, δηλαδή για  $n=\xi=1$  και παραβολική μεταβολή της ενδιάμεσης φάσης.

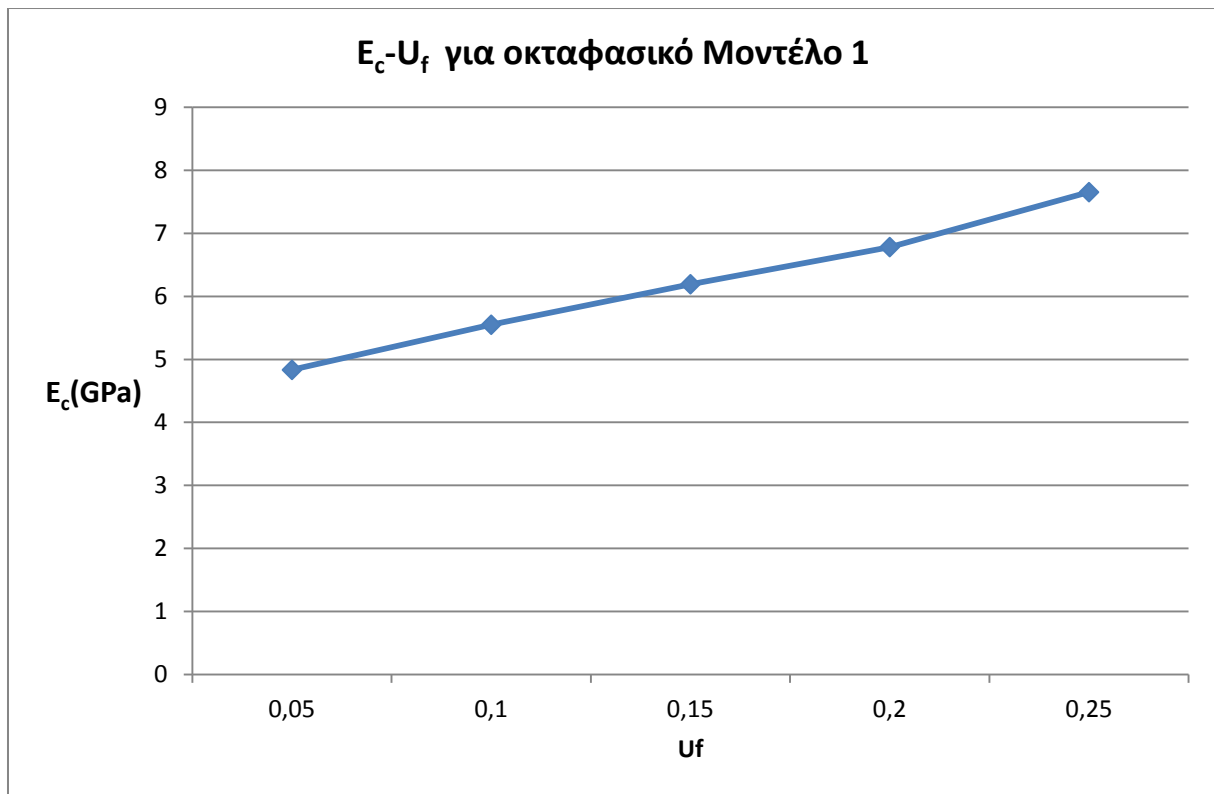
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>E<sub>c</sub> για 8φασικό Μοντέλο 1 (GPa)</b>	<b>E<sub>c</sub> για 8φασικό Μοντέλο 2 (GPa)</b>
0.05	4,83	4,89
0.1	5,55	5,56
0.15	6,19	6,16
0.2	6,78	6,73
0.25	7,65	7,60

Πίνακας 6.1

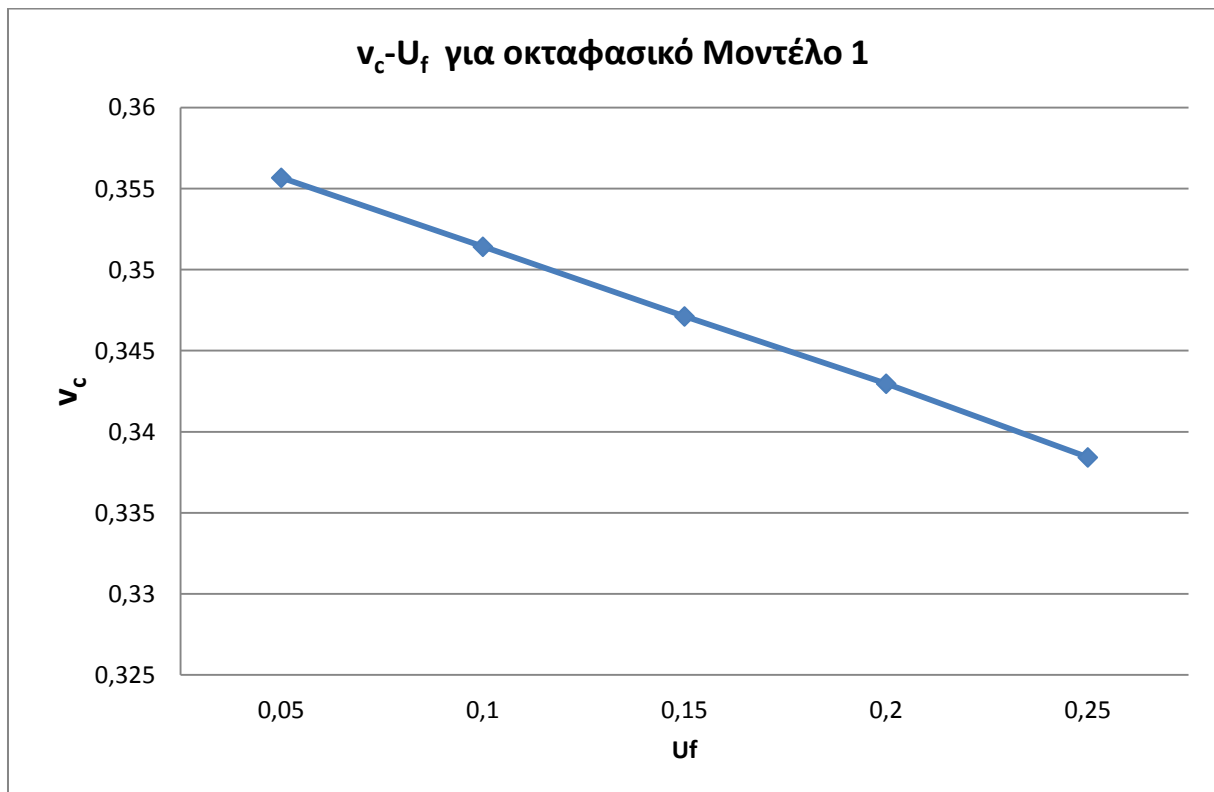
<b>U<sub>f</sub></b>	<b>v<sub>c</sub> για 8φασικό Μοντέλο 1</b>	<b>v<sub>c</sub> για 8φασικό Μοντέλο 2</b>
0.05	0,3556753	0,3556753
0.1	0,3514202	0,3514202
0.15	0,3471205	0,3471205
0.2	0,3429706	0,3429706
0.25	0,3384237	0,3384240

Πίνακας 6.2

## Οκταφασικό κυβικό μοντέλο 1



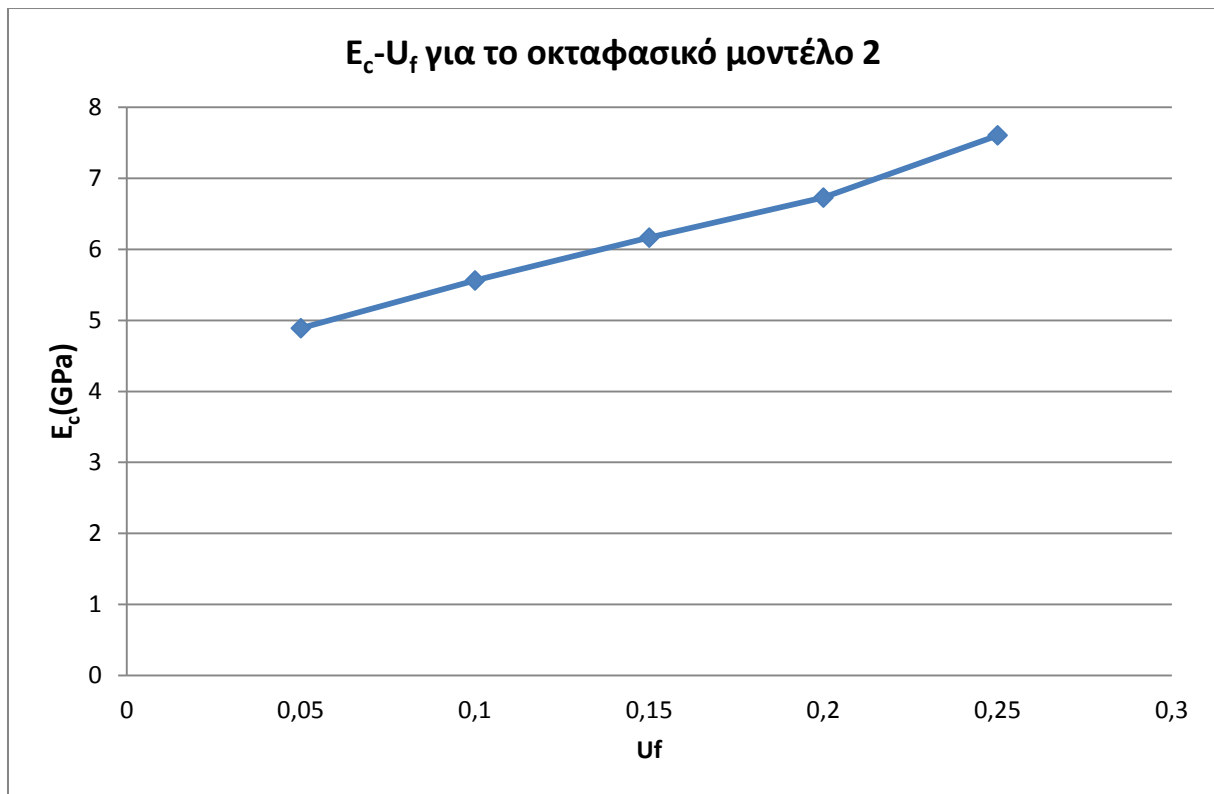
Διάγραμμα 6.1



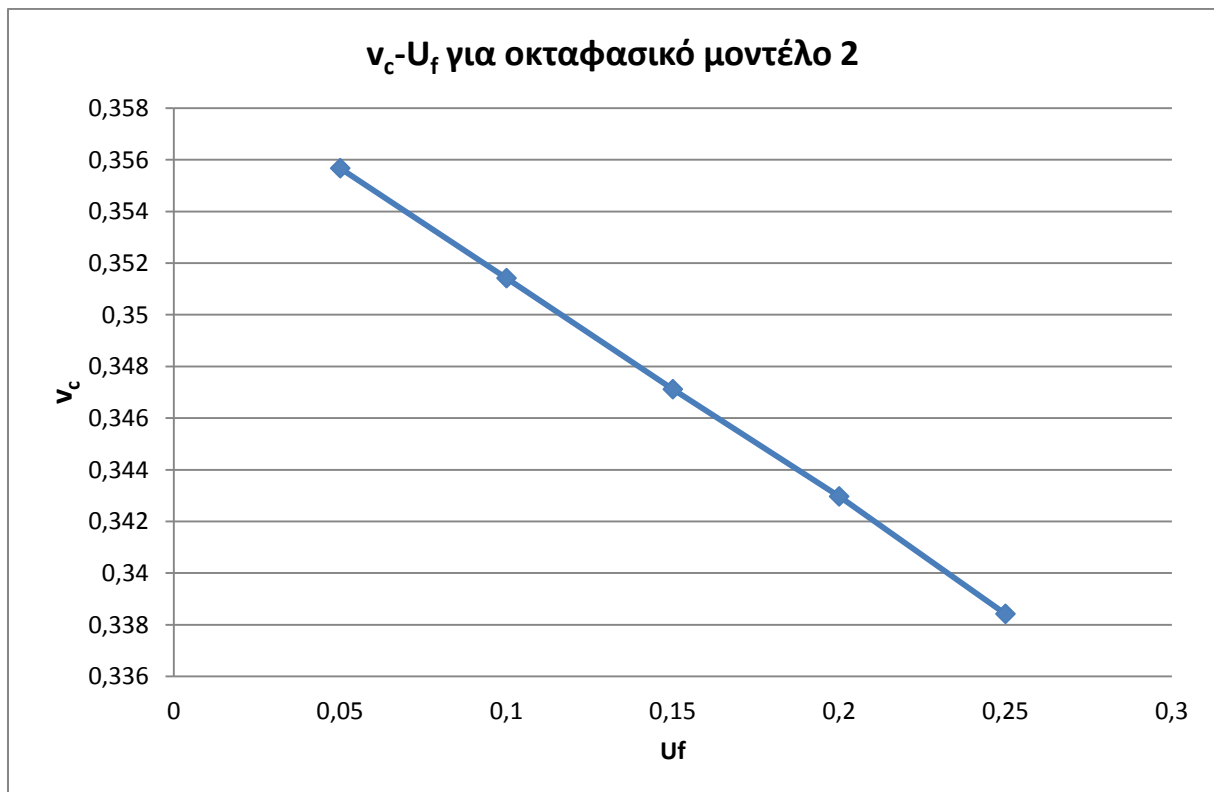
Διάγραμμα 6.2



## Οκταφασικό κυβικό μοντέλο 2



Διάγραμμα 6.3



Διάγραμμα 6.4

### 6.3 Μέτρο ελαστικότητας για διαφορετική επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως

Στη συνέχεια παραθέτουμε πίνακες και διαγράμματα του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson του σύνθετου υλικού για διαφορετική επίδραση των ελαστικών σταθερών της ενδιαμέσου φάσεως, η οποία γίνεται μέσω του συντελεστή  $n$ , δηλαδή για  $n=0,2$ ,  $n=0,4$ ,  $n=0,6$ ,  $n=0,8$ . Η επίδραση αυτή είναι πολύ πιο σημαντική στο μέτρο ελαστικότητας  $E_i(r)$  όπου η διαφορά μεταξύ των μέτρων του εγκλείσματος και της μήτρας είναι πολύ μεγάλη ( $E_f=60E_m$ ) έν σχέσει με την διαφορά των λόγων Poisson  $\nu_f$  και  $\nu_m$  των δύο φάσεων.

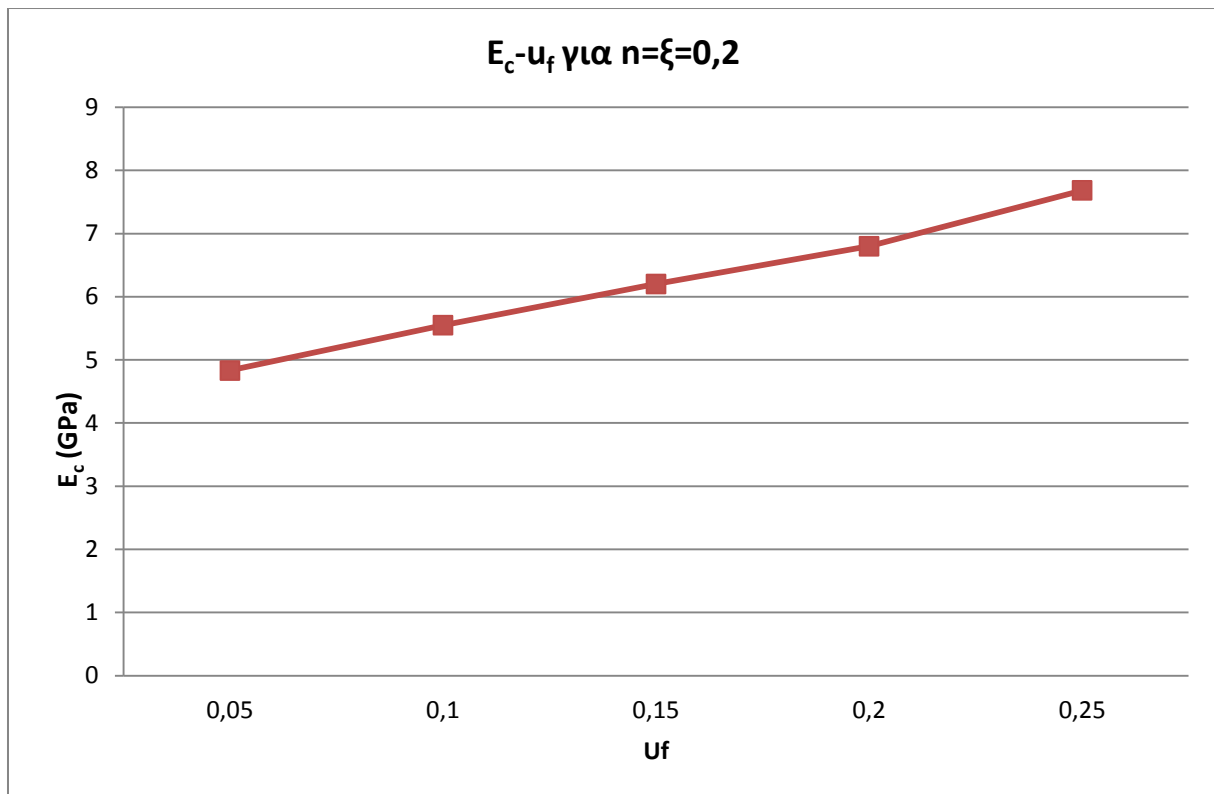
$U_f$	$E_c$ κυβικού μοντέλου 1 (Gpa)				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	4,83096	4,83162	4,83200	4,83245	4,83305
0,10	5,54941	5,55023	5,54963	5,54907	5,54882
0,15	6,20104	6,20355	6,19966	6,19528	6,19161
0,2	6,79865	6,80435	6,79739	6,78886	6,78099
0,25	7,68441	7,71298	7,69802	7,67535	7,65230

Πίνακας 6.3

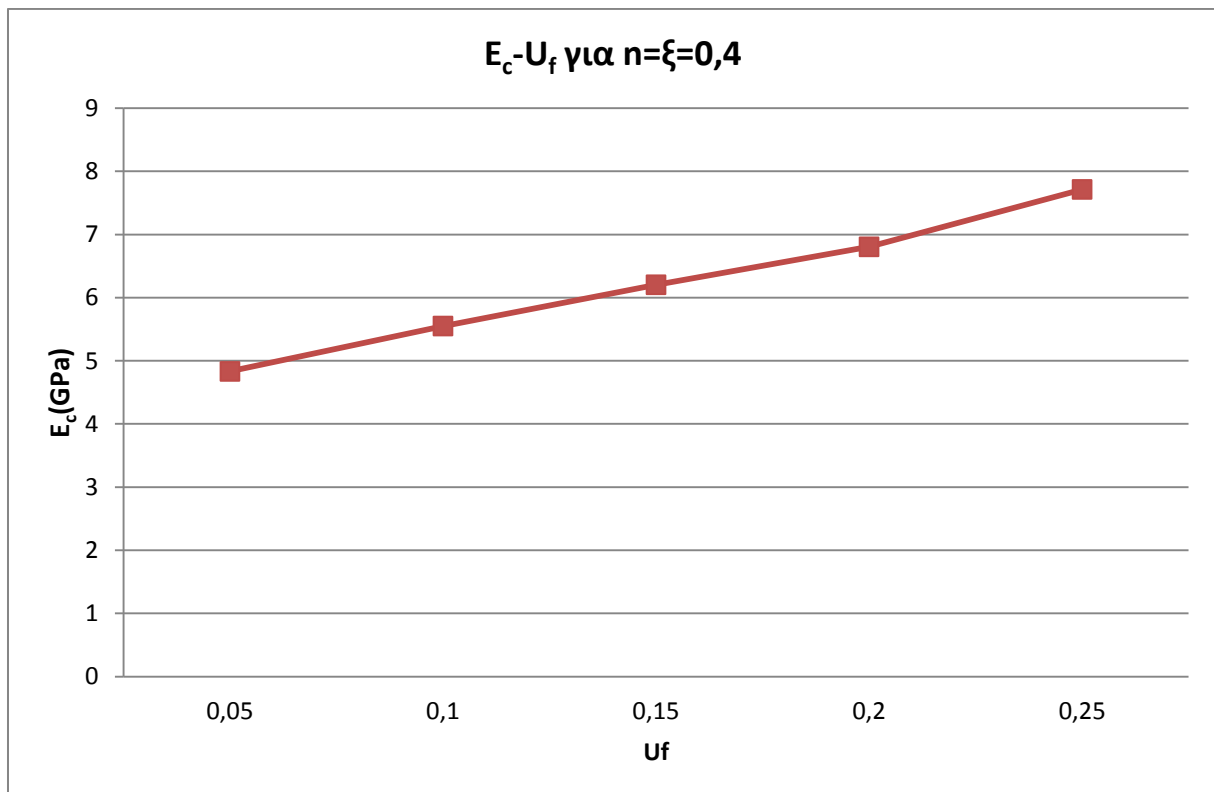
$U_f$	$\nu_c$ κυβικού μοντέλου 1				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	0,3555299	0,35557381	0,35557381	0,35564561	0,355675338
0,10	0,35098443	0,35111588	0,35111588	0,35133105	0,351420169
0,15	0,34574916	0,34616182	0,34616182	0,34683931	0,347120531
0,2	0,34091923	0,34153536	0,34153536	0,34254889	0,342970589
0,25	0,33352036	0,33498142	0,33498142	0,33740547	0,338423677

Πίνακας 6.4

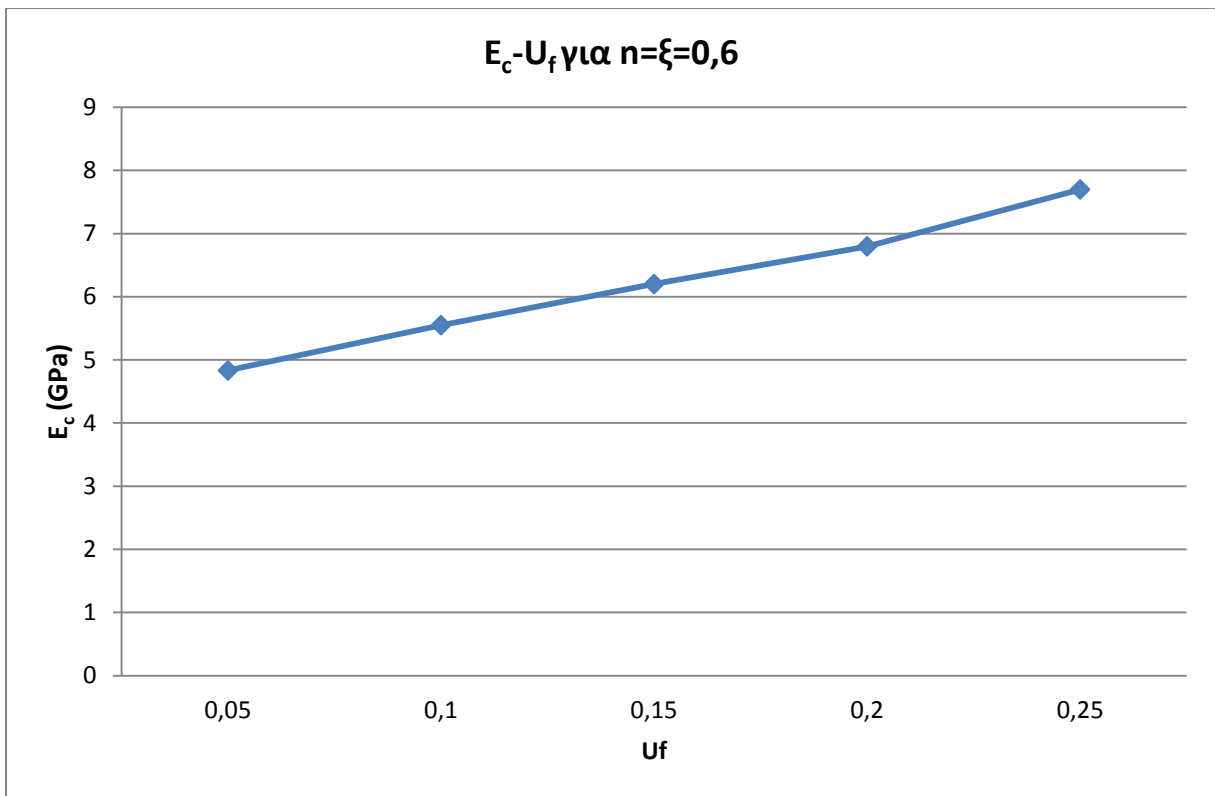
## Οκταφασικό Κυβικό Μοντέλο 1



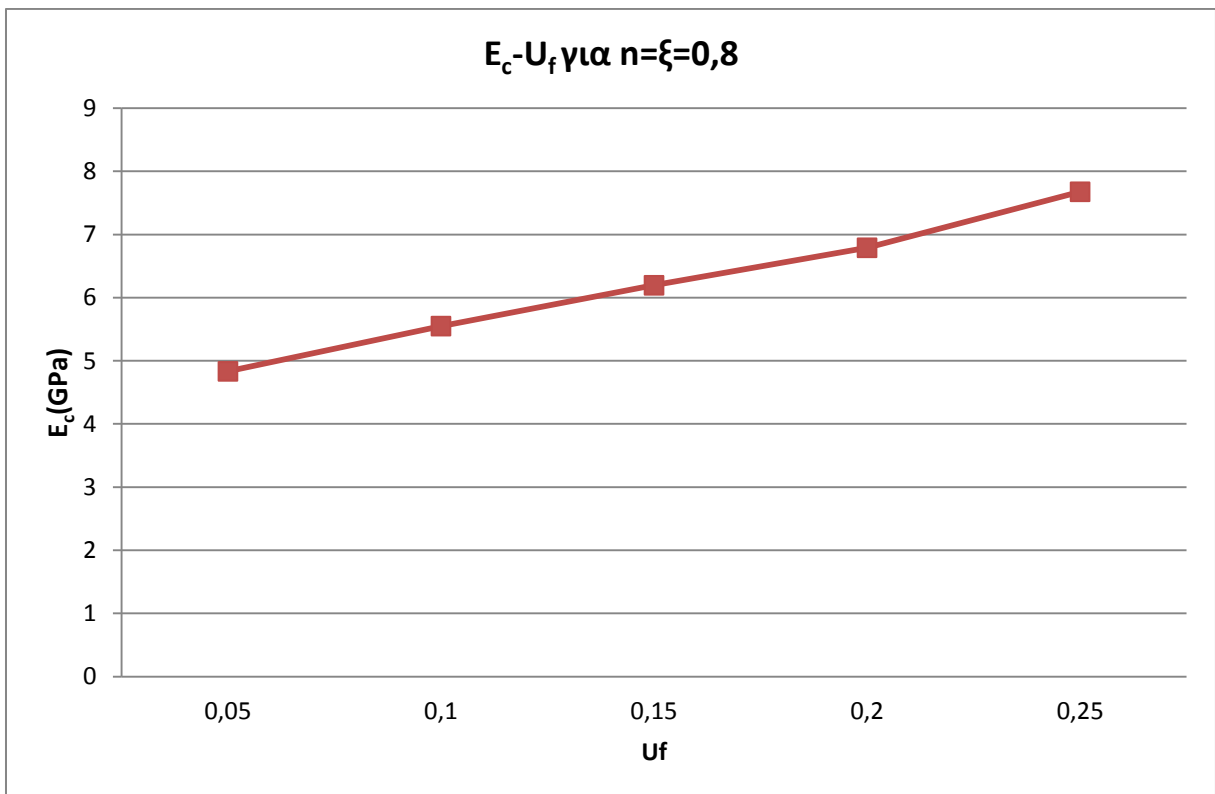
Διάγραμμα 6.5



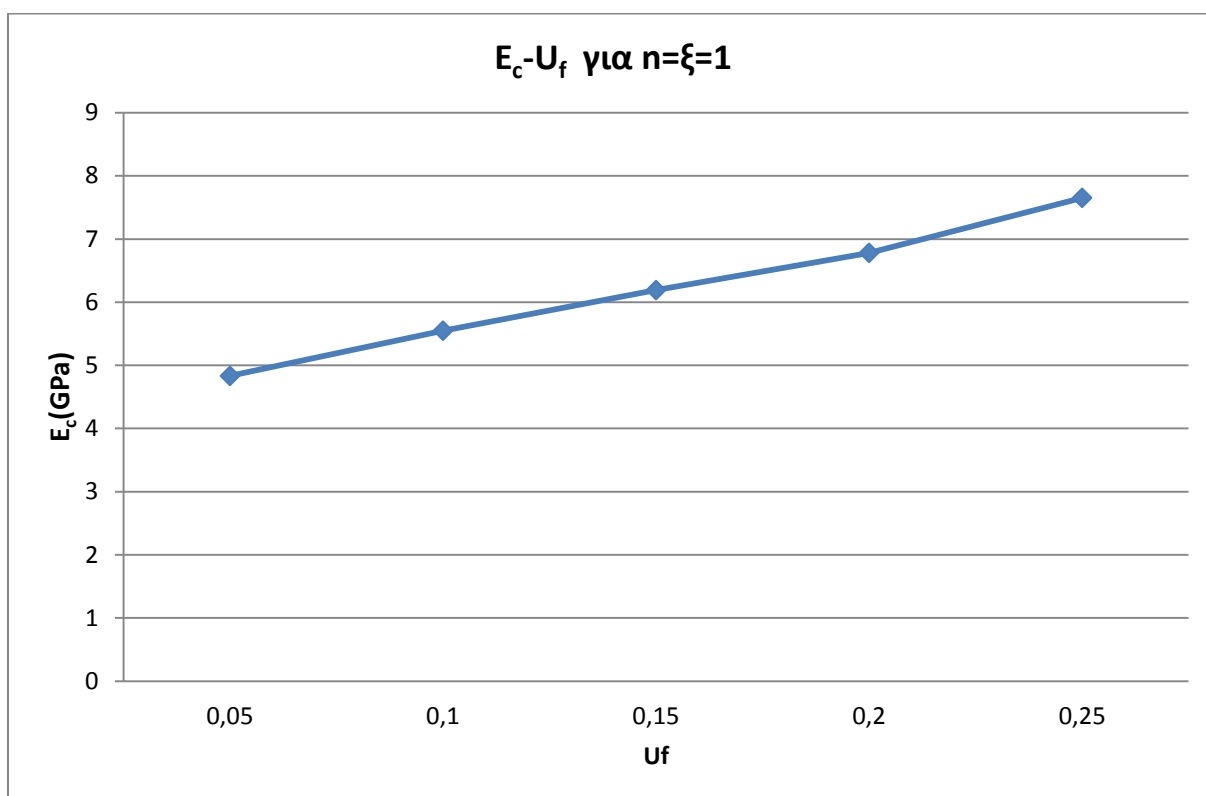
Διάγραμμα 6.6



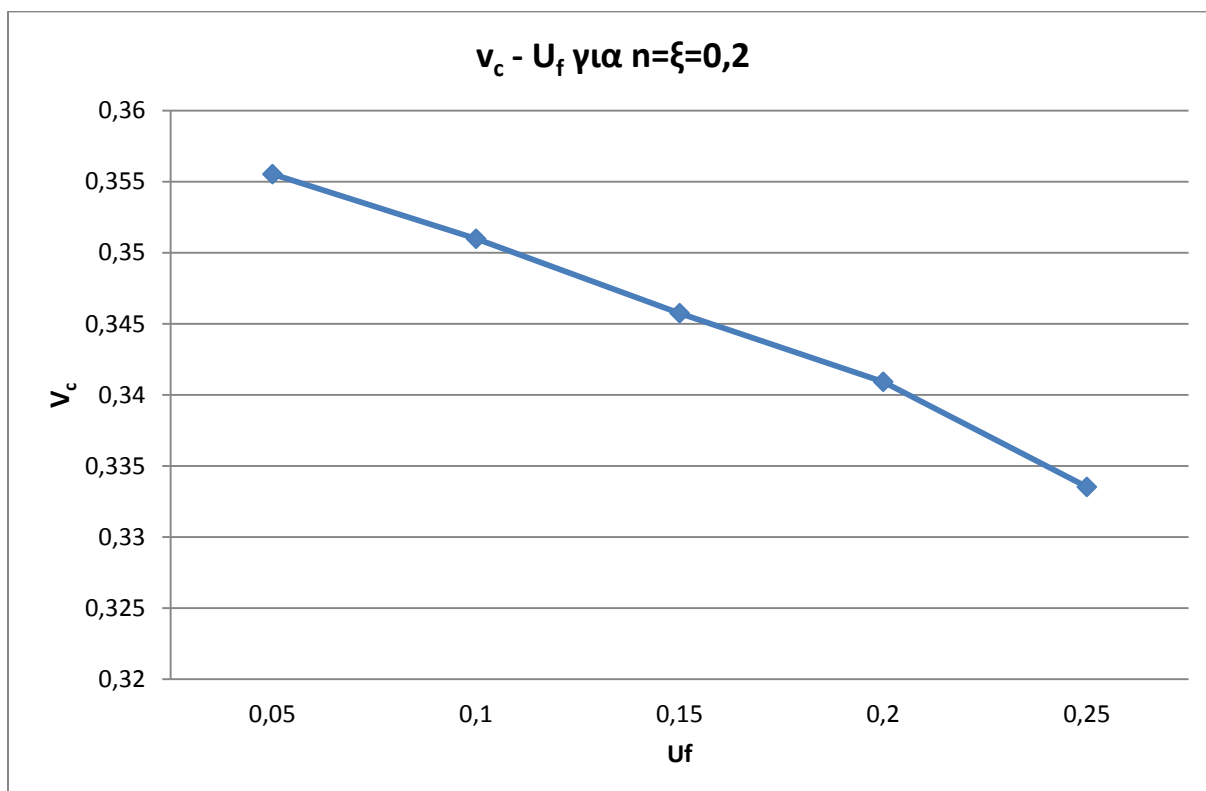
Διάγραμμα 6.7



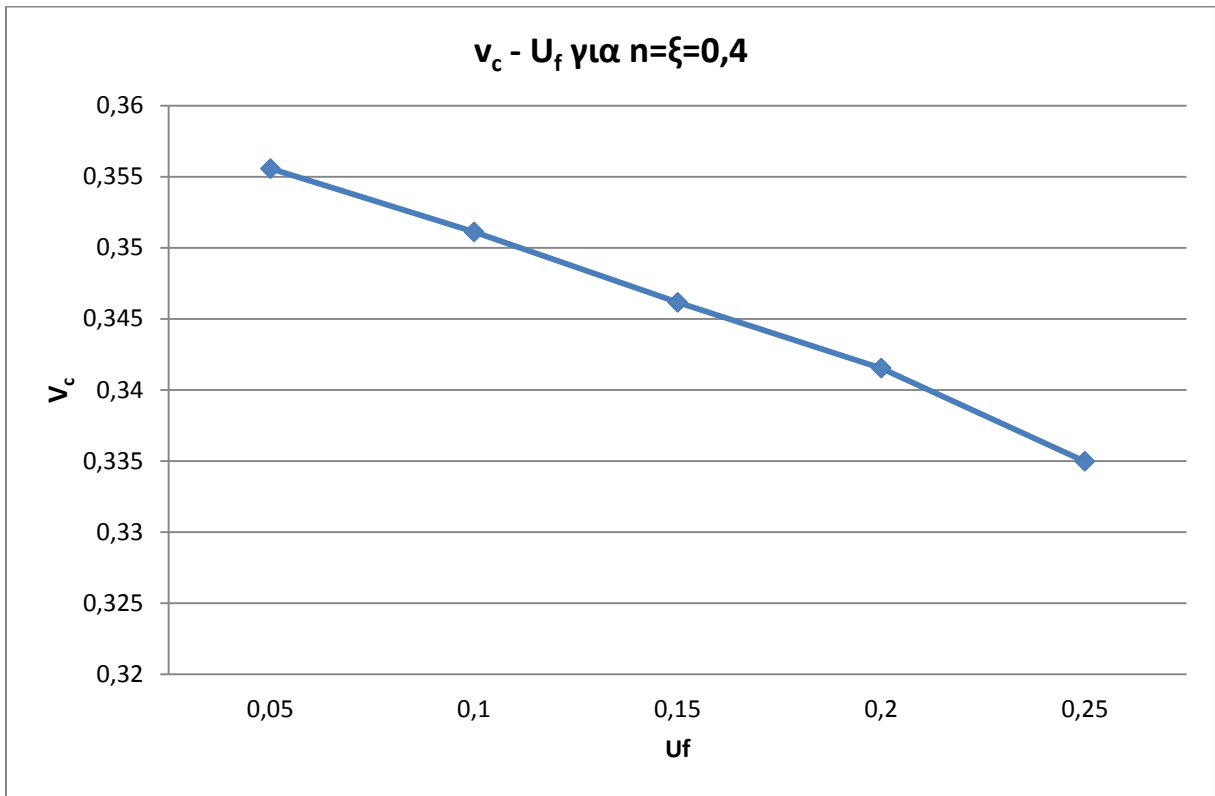
Διάγραμμα 6.8



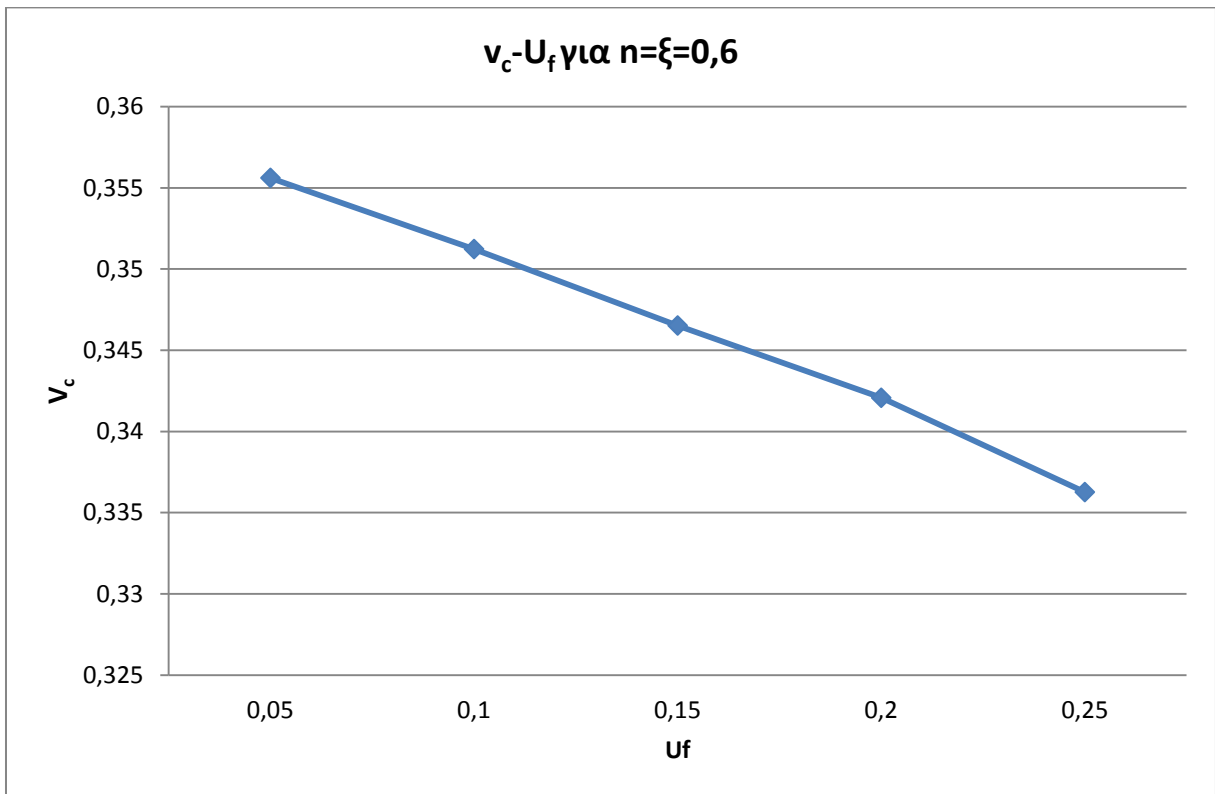
Διάγραμμα 6.9



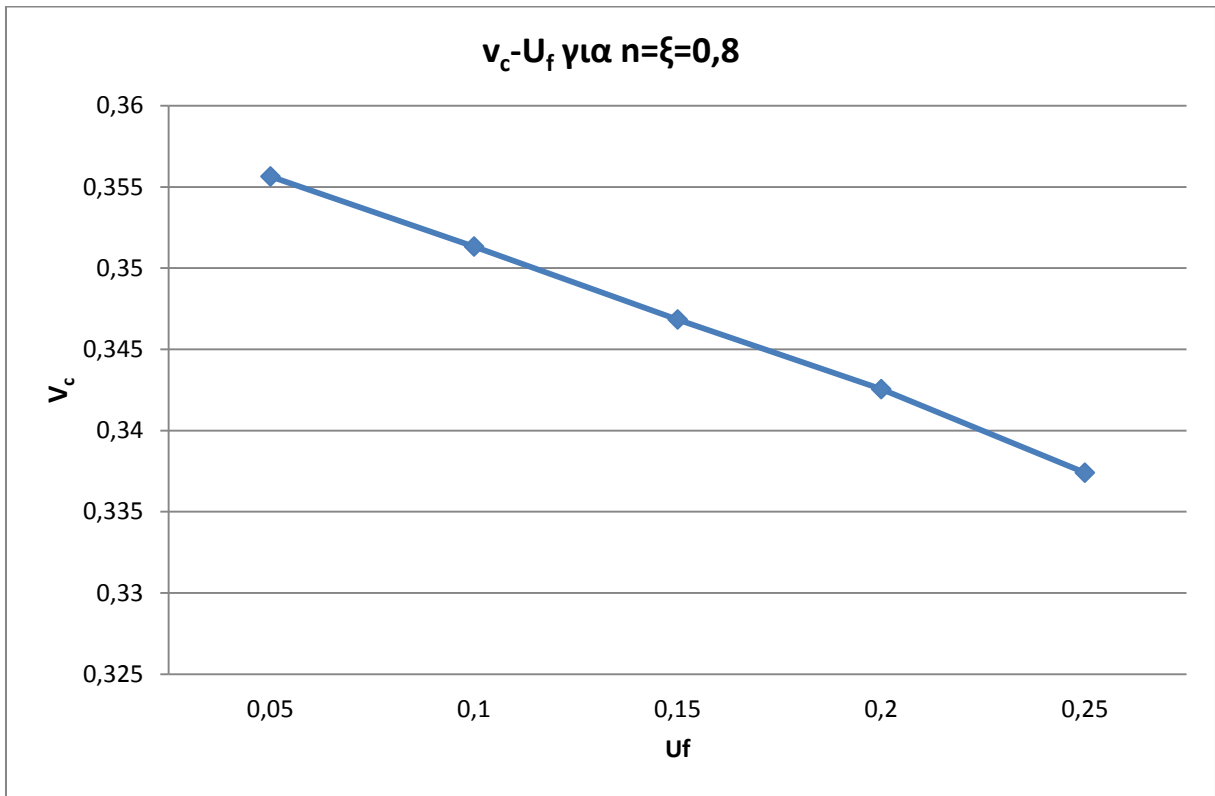
Διάγραμμα 6.10



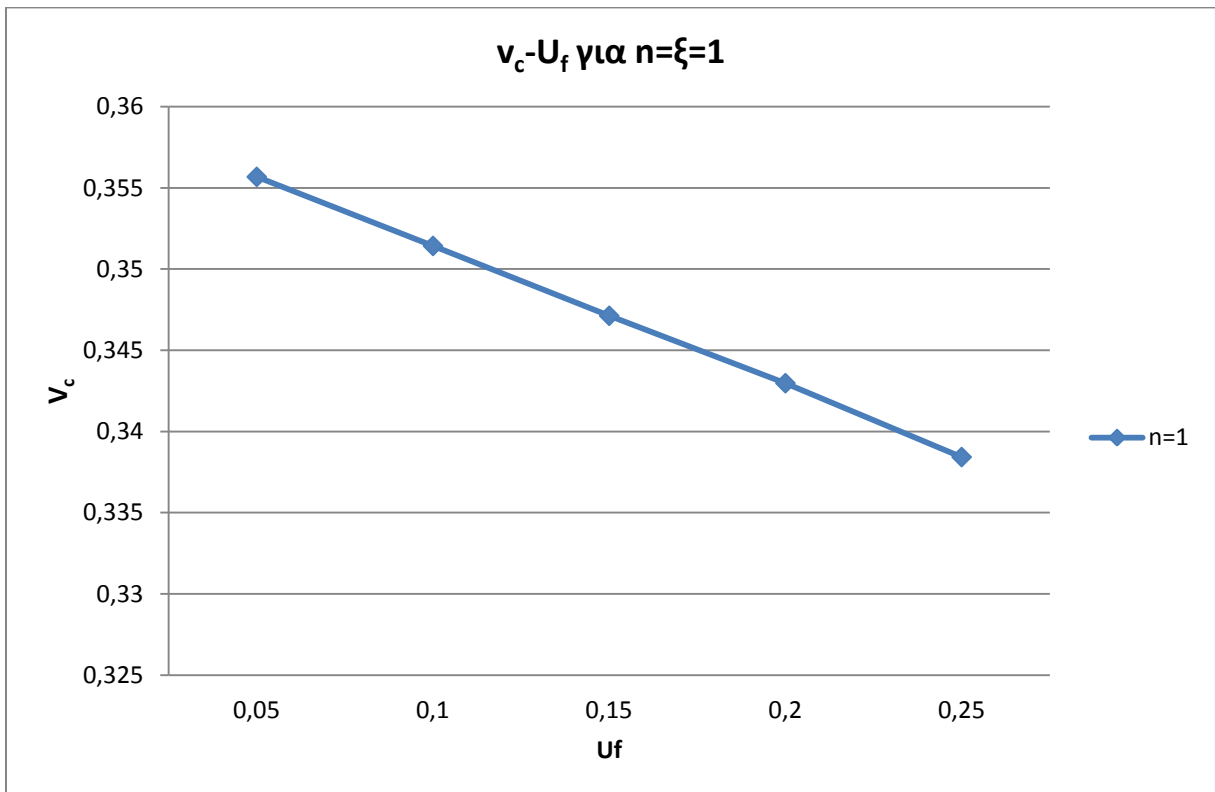
Διάγραμμα 6.11



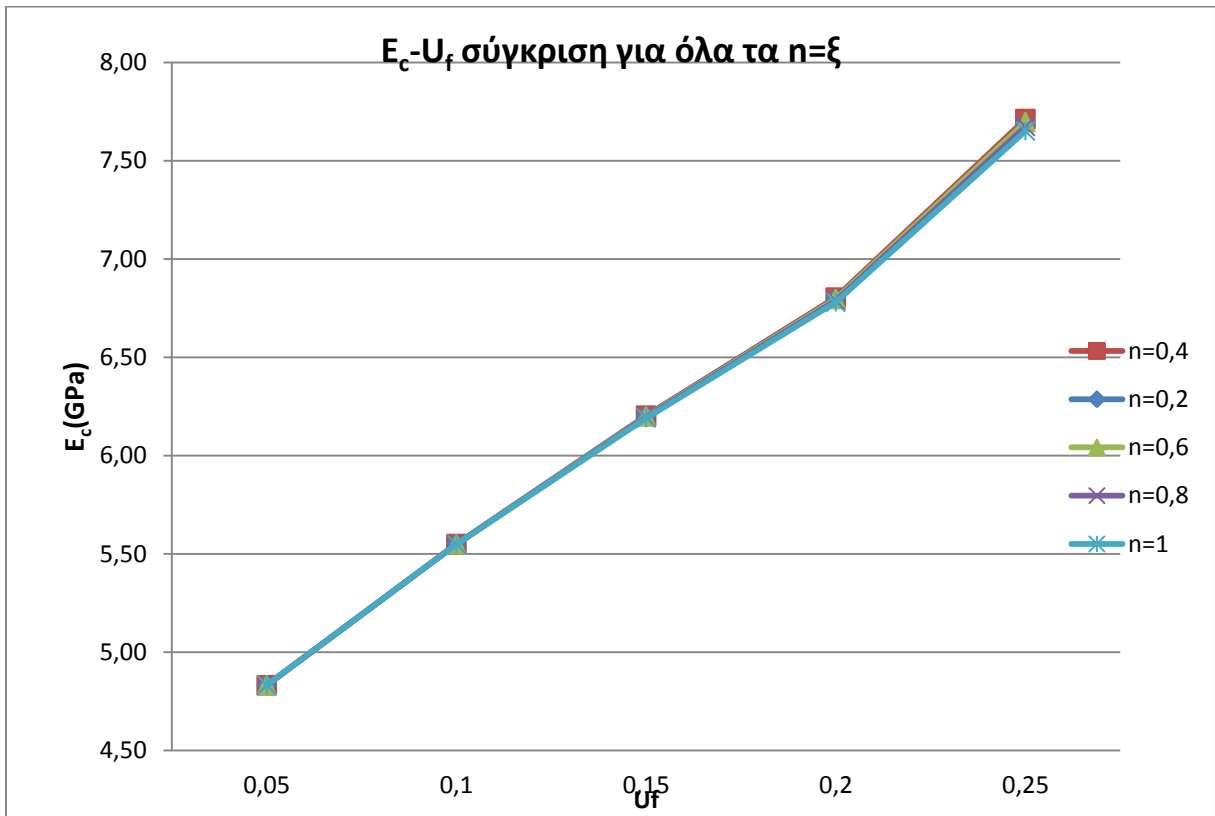
Διάγραμμα 6.12



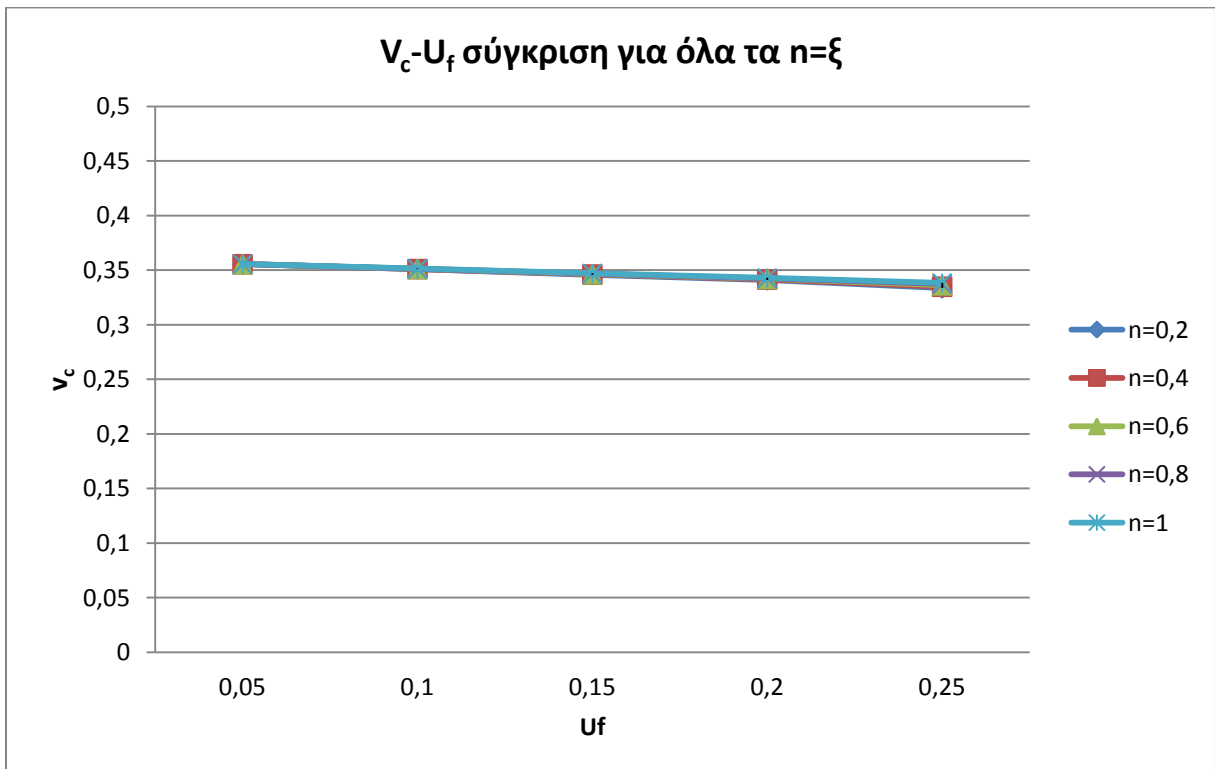
Διάγραμμα 6.13



Διάγραμμα 6.14



Διάγραμμα 6.15



Διάγραμμα 6.16



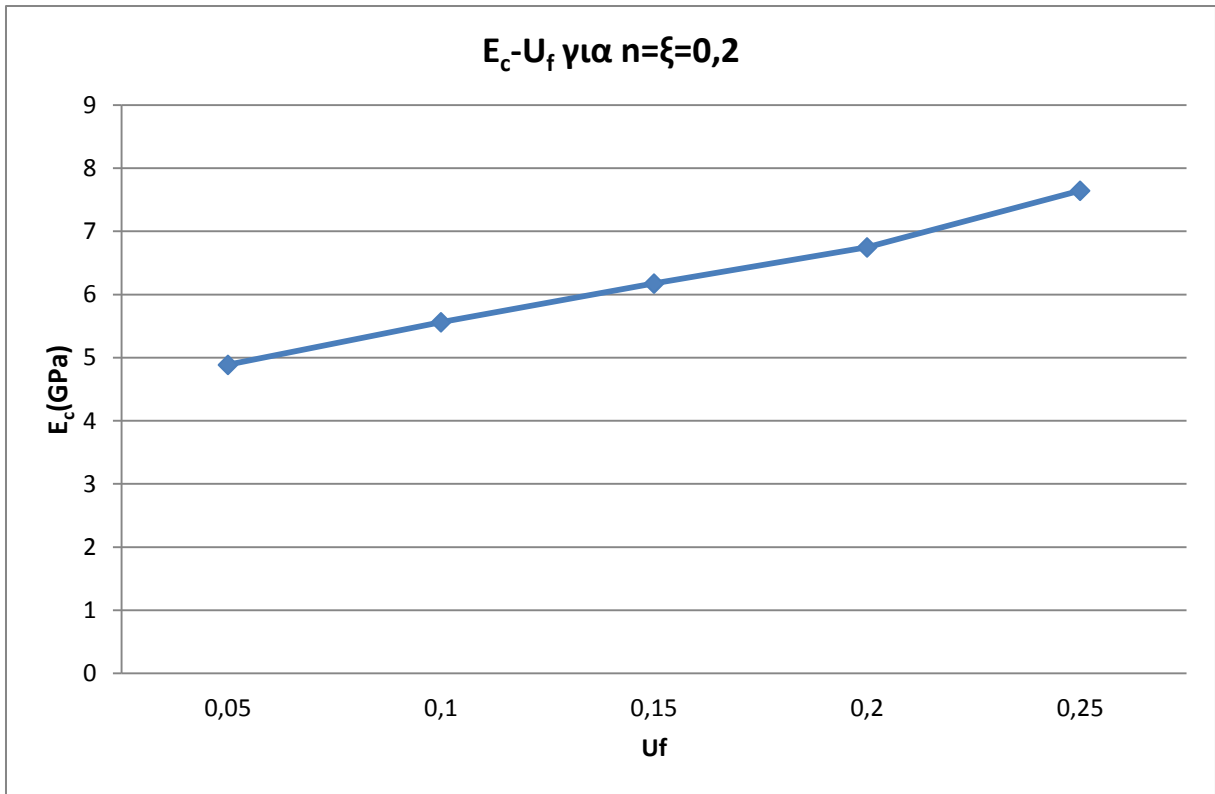
## Οκταφασικό κυβικό Μοντέλο 2

$U_f$	$E_c$ κυβικού μοντέλου 2 (Gpa)				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	4,887425	4,888125	4,888538	4,88903	4,889671
0,10	5,56215	5,563002	5,562382	5,56178	5,561486
0,15	6,174615	6,177241	6,173183	6,168543	6,16455
0,2	6,747649	6,753481	6,746047	6,736821	6,728128
0,25	7,644677	7,673777	7,656738	7,631145	7,604761

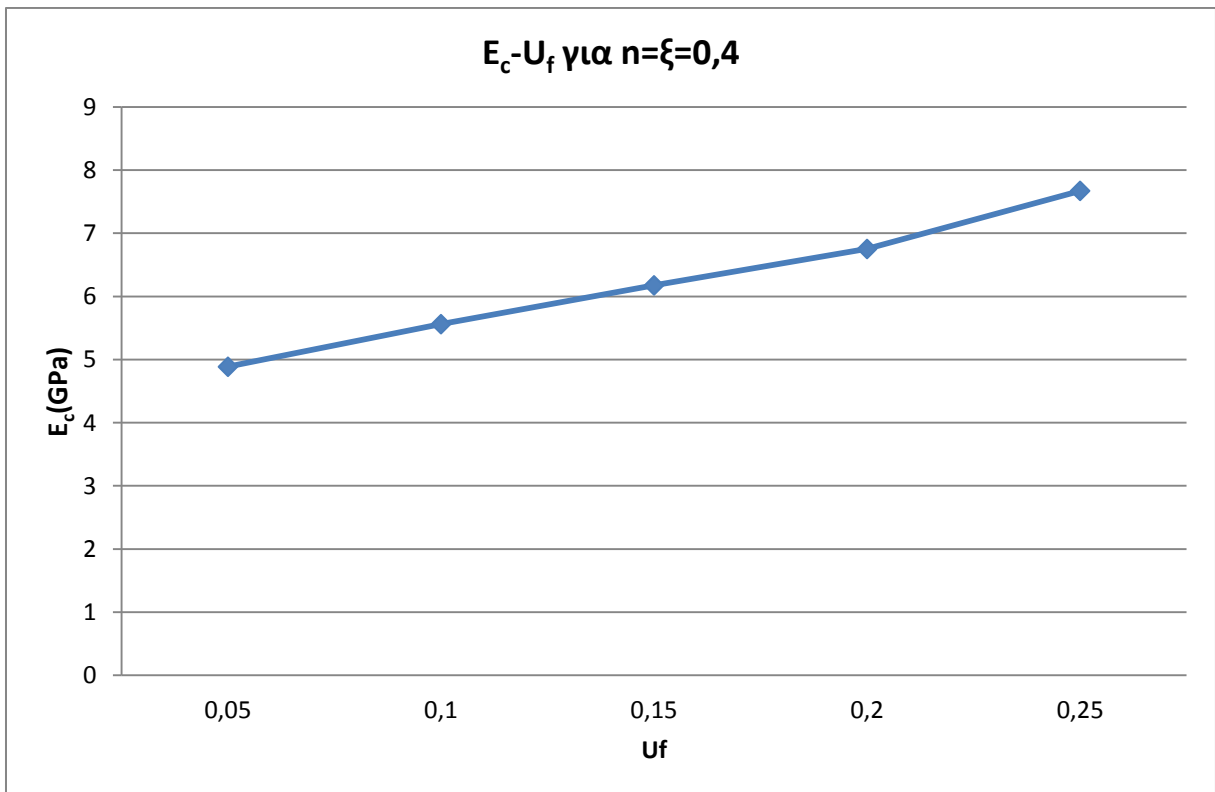
Πίνακας 6.5

$U_f$	$\nu_c$ κυβικού μοντέλου 2				
	$n=\xi=0,2$	$n=\xi=0,4$	$n=\xi=0,6$	$n=\xi=0,8$	$n=\xi=1$
0,05	0,35553	0,355574	0,355612	0,355646	0,355675
0,10	0,350984	0,351116	0,35123	0,351331	0,35142
0,15	0,345749	0,346162	0,346522	0,346839	0,34712
0,2	0,340919	0,341535	0,342074	0,342549	0,342971
0,25	0,33352	0,334981	0,336266	0,337405	0,338424

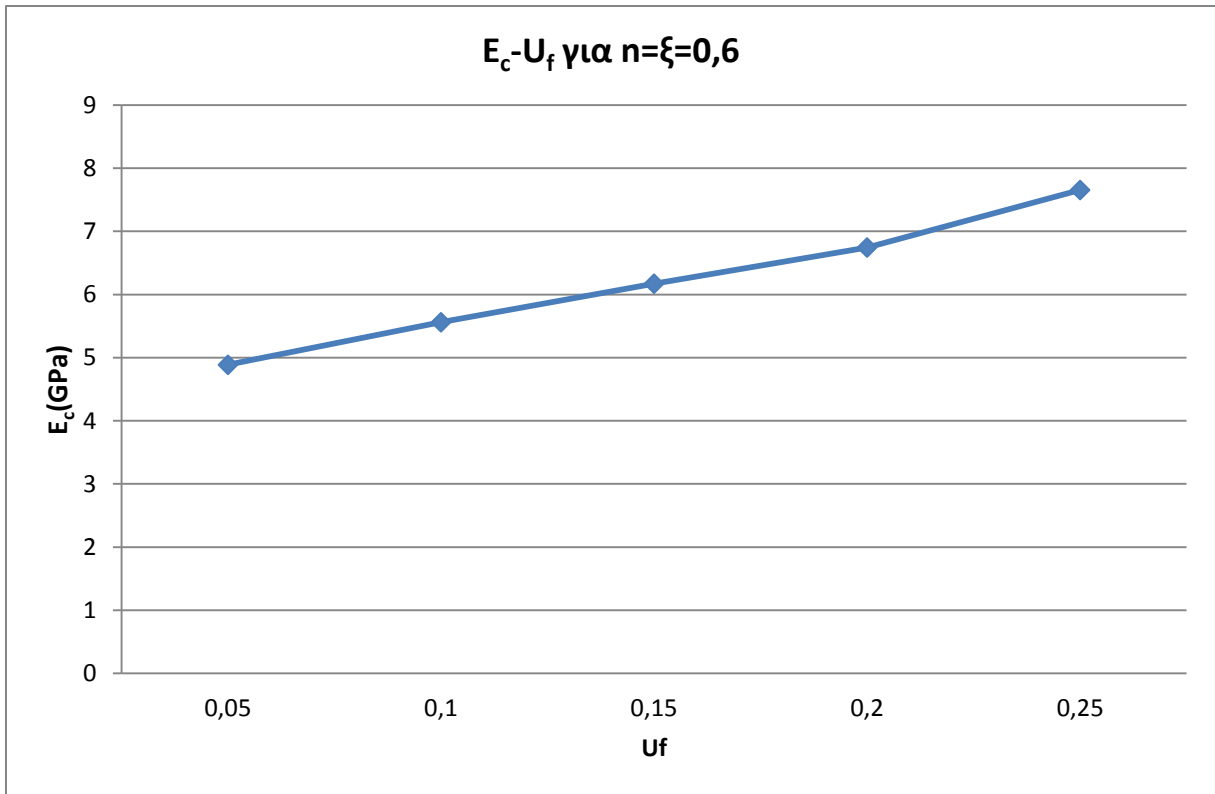
Πίνακας 6.6



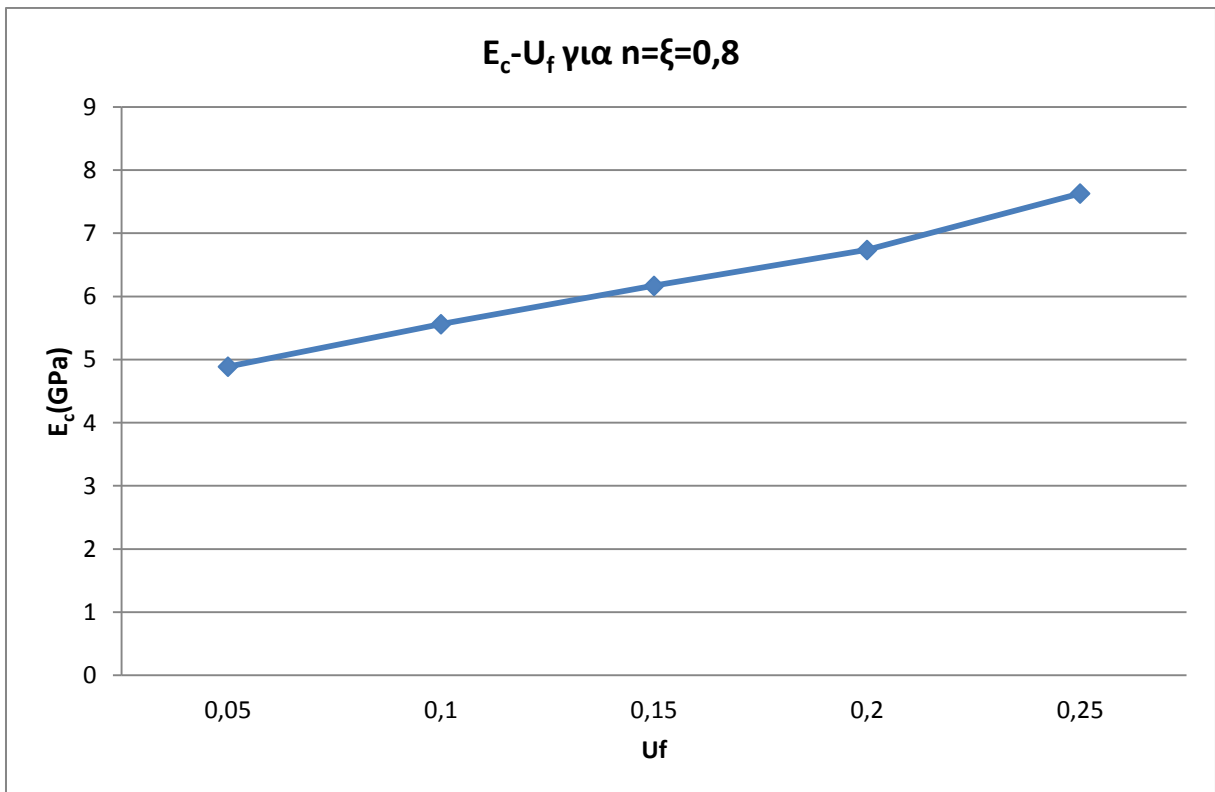
Διάγραμμα 6.17



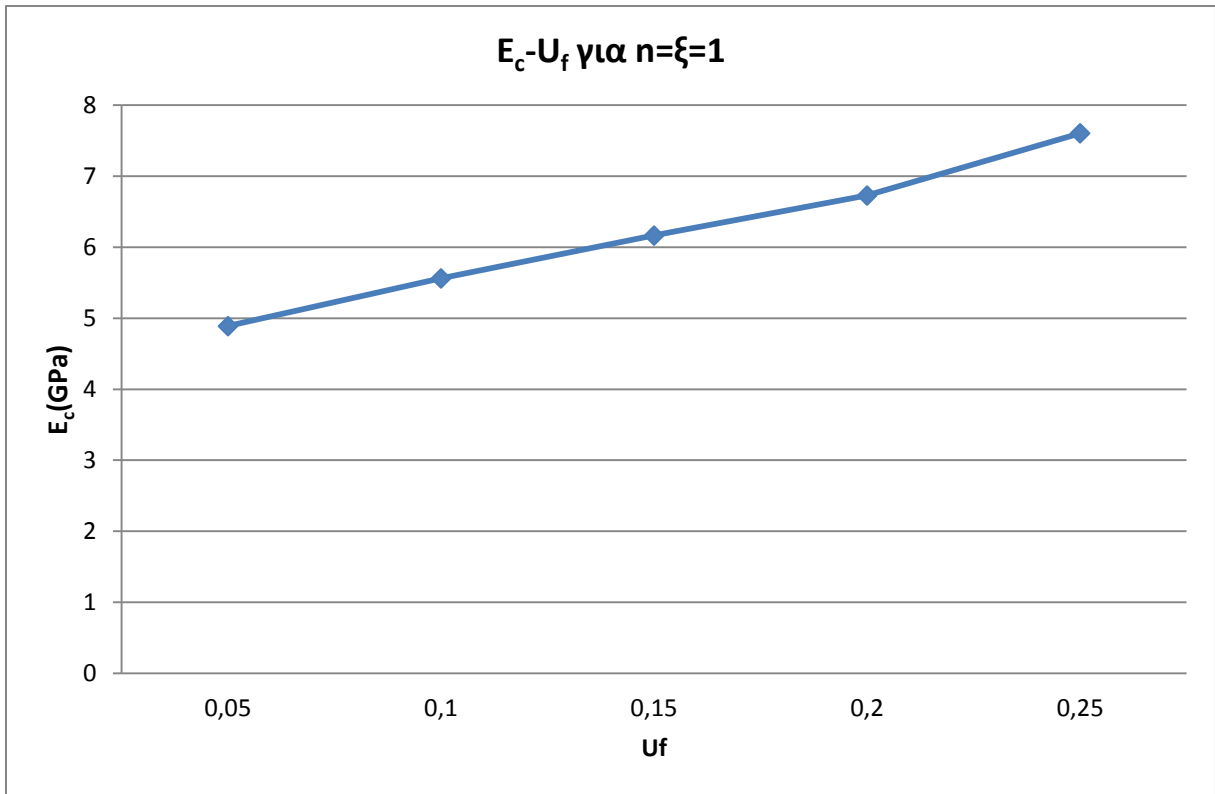
Διάγραμμα 6.18



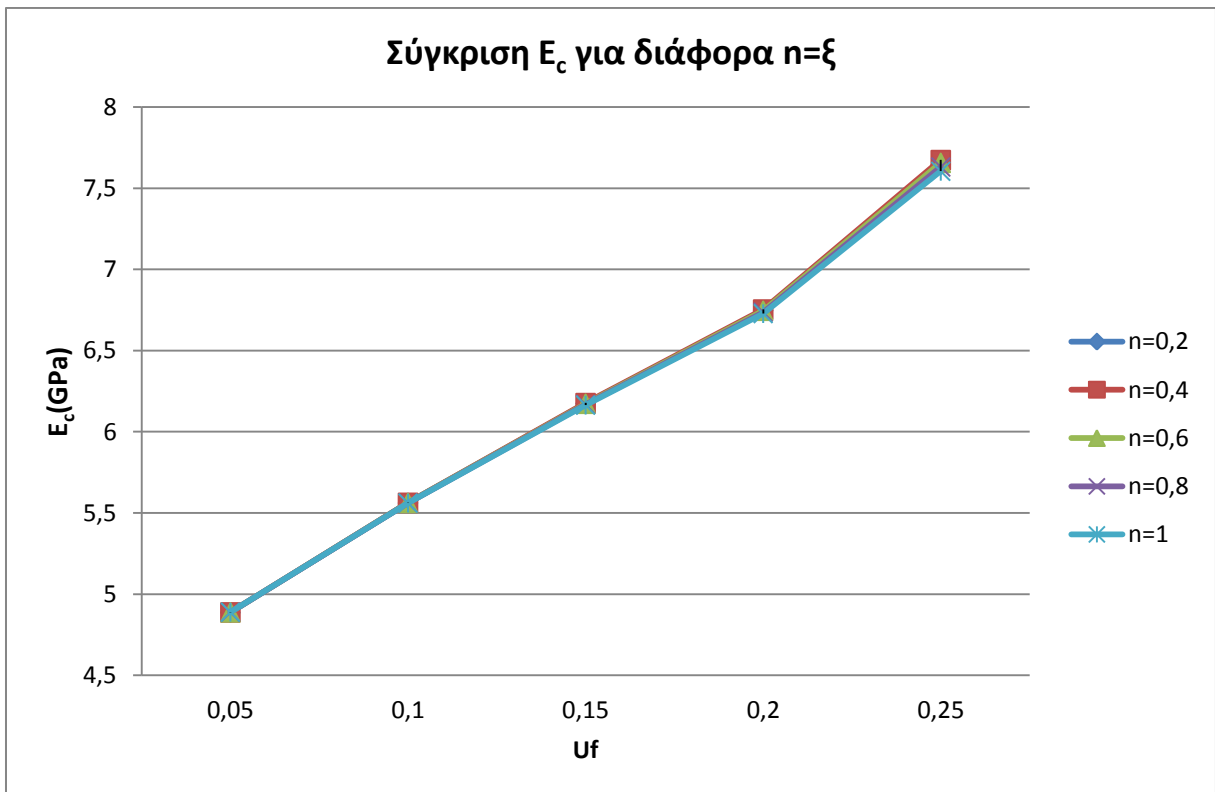
Διάγραμμα 6.19



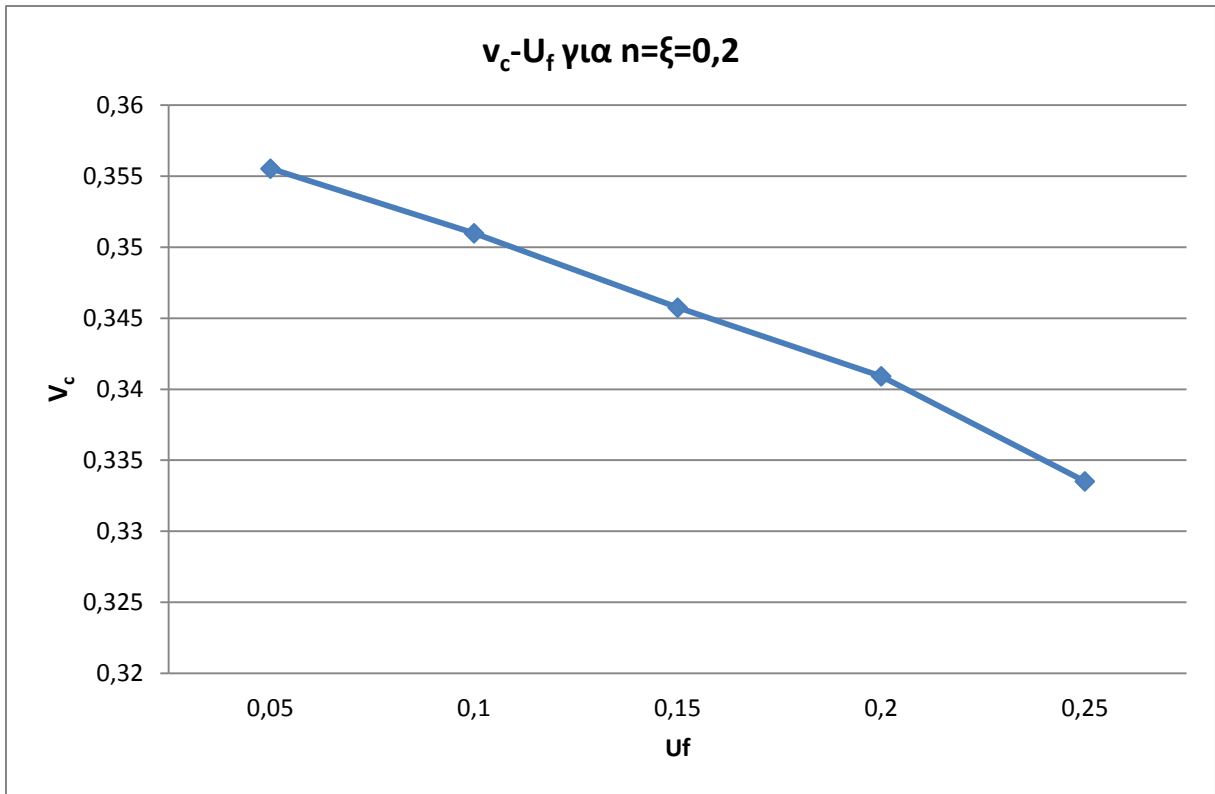
Διάγραμμα 6.20



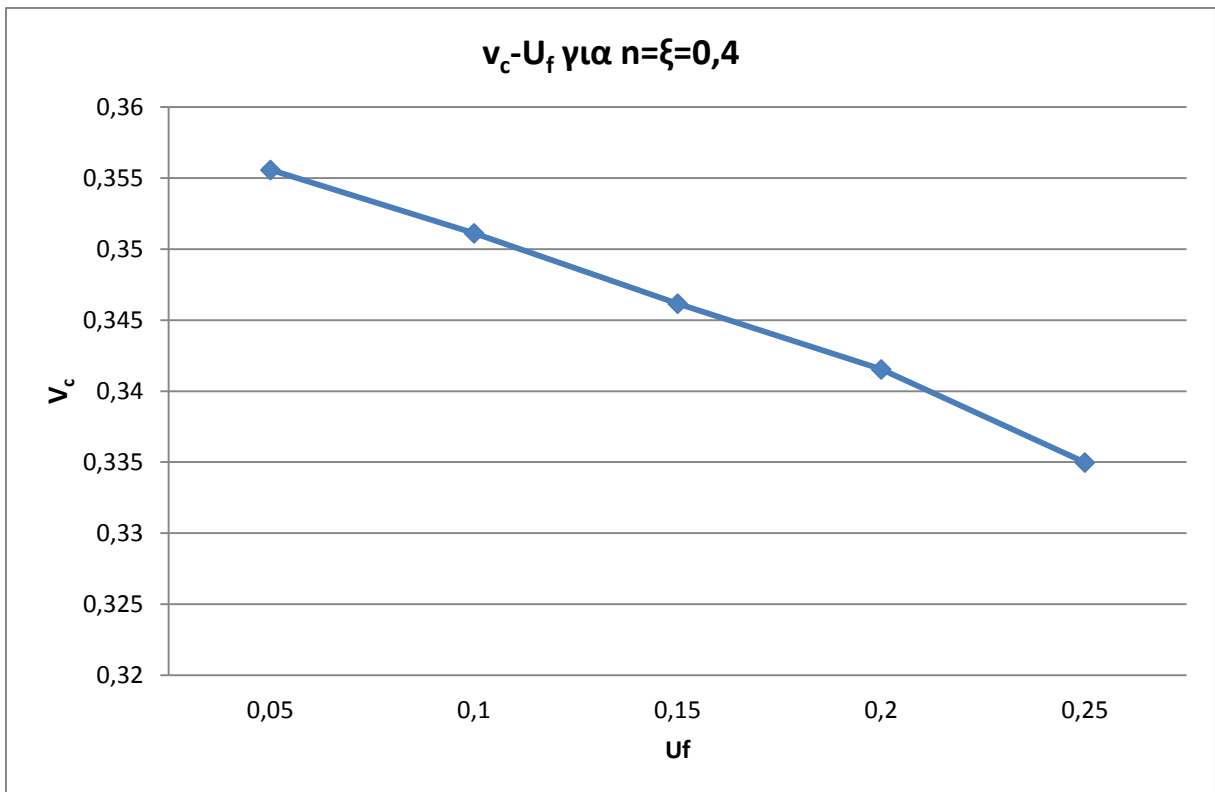
Διάγραμμα 6.21



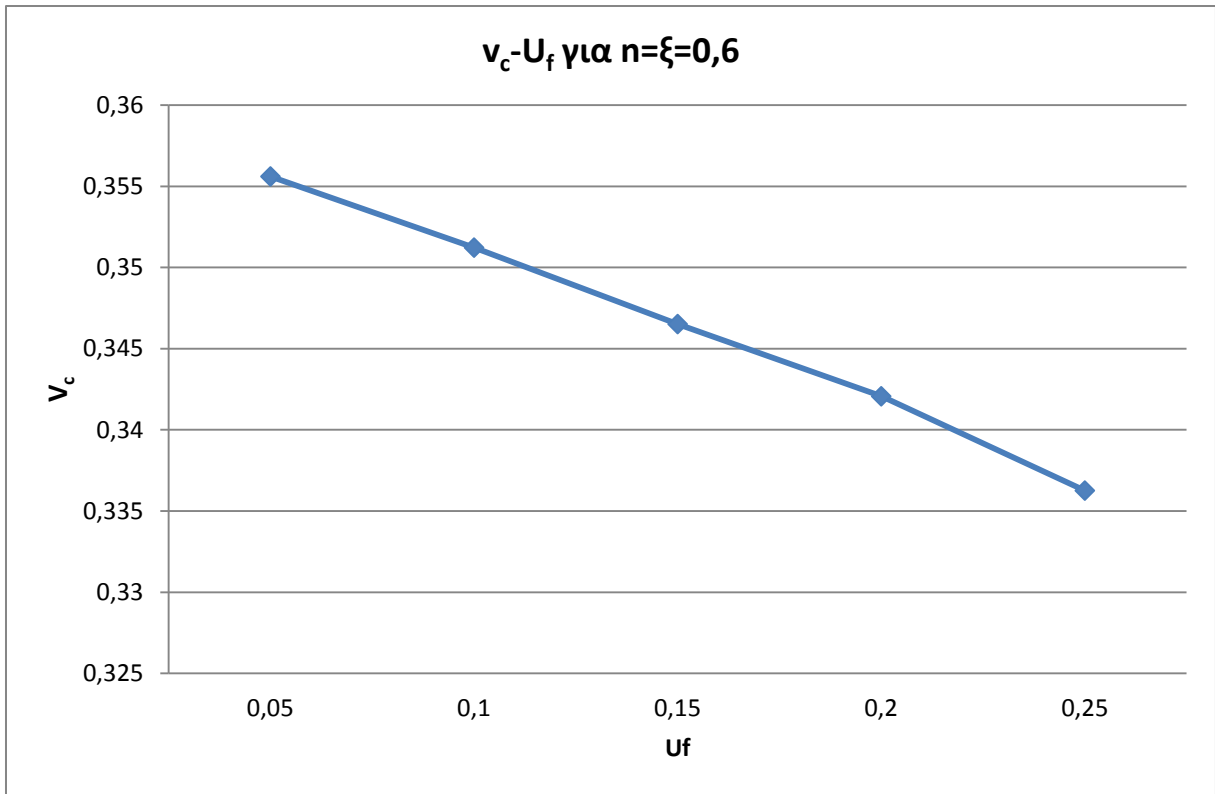
Διάγραμμα 6.22



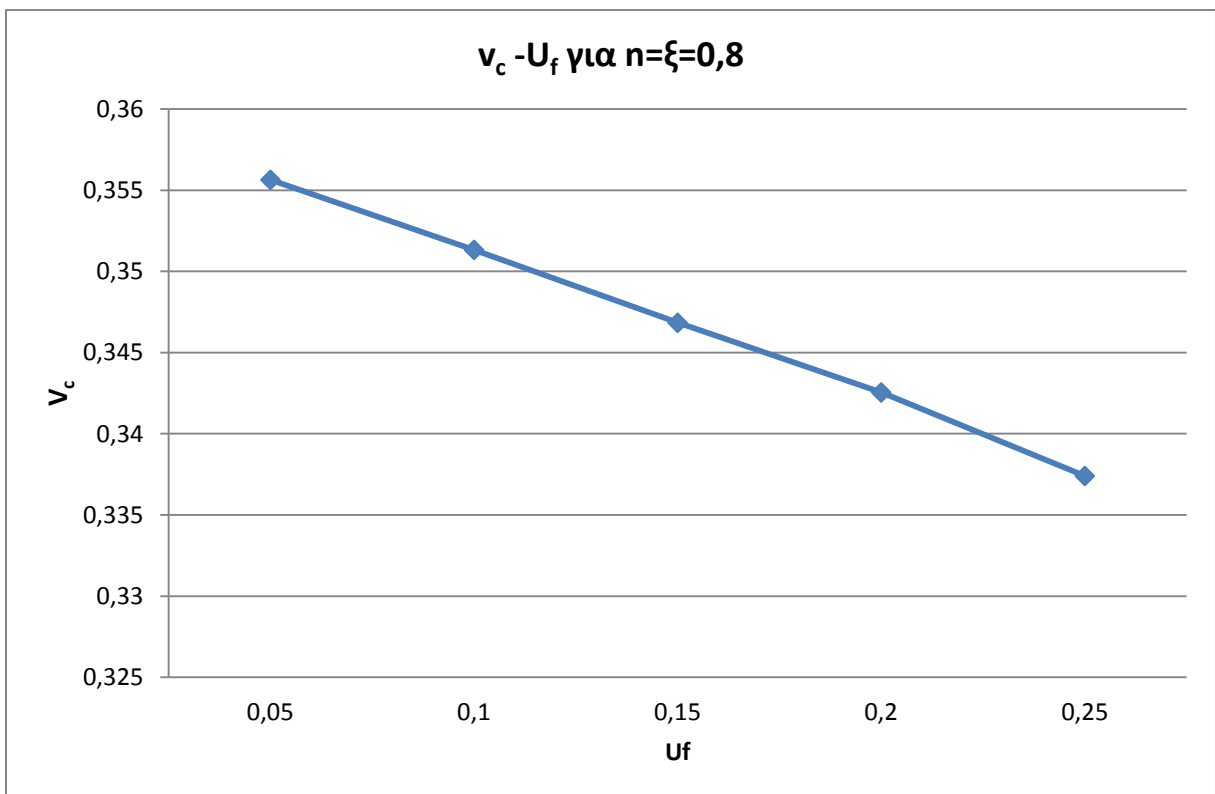
Διάγραμμα 6.23



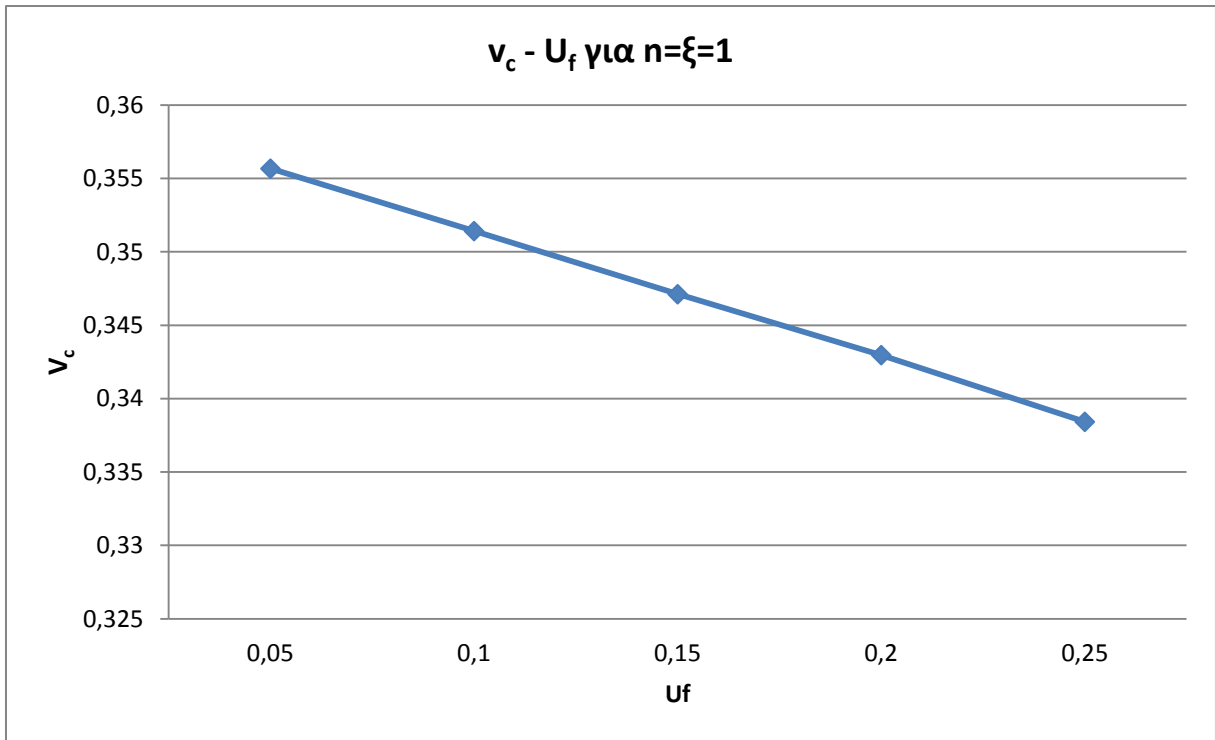
Διάγραμμα 6.24



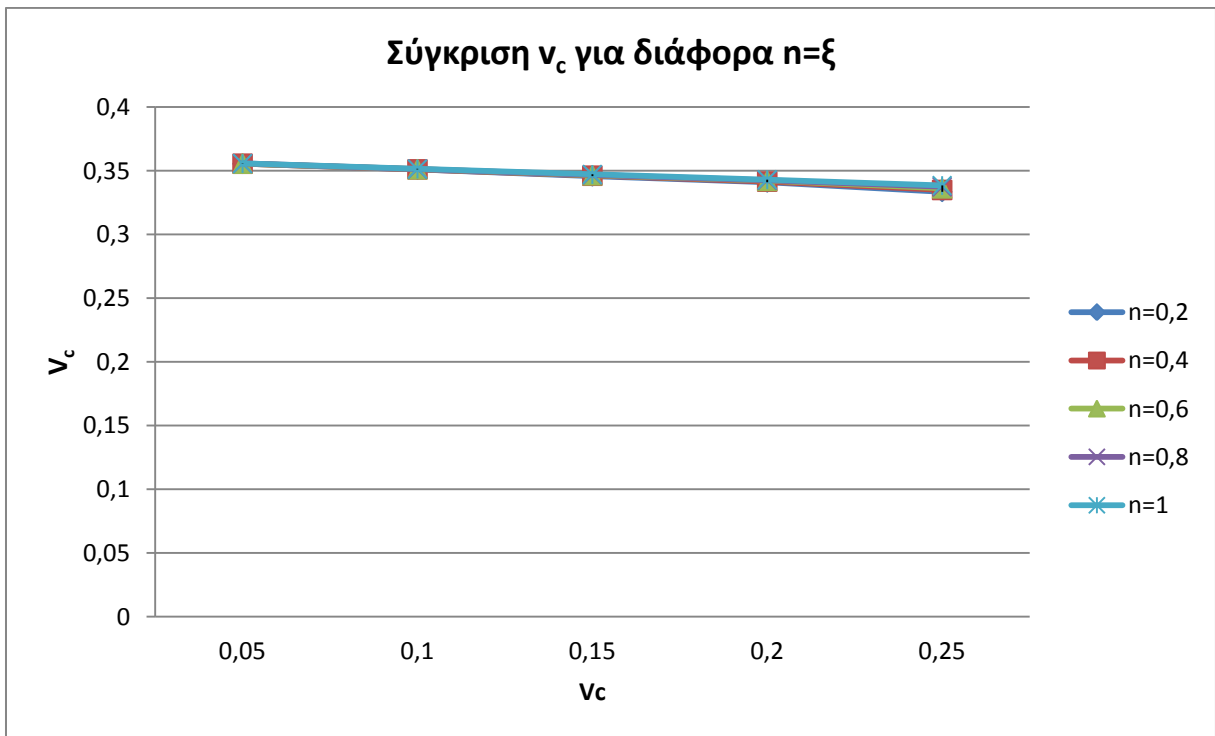
Διάγραμμα 6.25



Διάγραμμα 6.26



Διάγραμμα 6.27



Διάγραμμα 6.28

Τελικά από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε κατά πόσο το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος Poisson εξαρτώνται από τον βαθμό επίδρασης της ενδιάμεσου φάσεως.

## 7. Σύγκριση με άλλα μοντέλα

### 7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά οκταφασικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση χρησιμοποιήσαμε πειραματικά δεδομένα από πειράματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών.

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα έχουν ως μήτρα εποξειδική ρητίνη τύπου DGEBA (Dyglycidyl Ether Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384 και με ιξώδες 15000P στους 25°C, πολυμεριζόμενα εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη.

Τα υλικά παρασκευάζονται ως εξής:

Το προ-πολυμερές θερμαίνεται σε θερμοκρασία πάνω από τους 30°C ώστε να μειωθεί το ιξώδες του και στη συνέχεια σε κατάλληλη ποσότητα αυτού προστίθεται κονιοποιημένος σίδηρος με διάμετρο κόκκων 150 μm. Το μίγμα αφού ανακατευτεί πλήρως τοποθετείται σε θάλαμο χαμηλής πίεσης για περίπου 15 λεπτά για απομαγνητισμό.

Στη συνέχεια τοποθετείται σε ορθογώνιο καλούπι από plexiglass, με κατάλληλο όγκο και σχήμα, επενδυμένο με σιλικόνη ώστε να μην κολλήσει.

Έπειτα κλείνεται έτσι ώστε να είναι δυνατό να περιστραφεί, για να αποτραπεί η κατακάθιση των εγκλεισμάτων σιδήρου και να προκύψει όσο το δυνατό ομοιογενές υλικό. Ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται για να «πήξει» το υλικό, για θερμοκρασία 20°C είναι 20-25 λεπτά, χρόνος ο οποίος μειώνεται ελαφρά από την παρουσία εγκλεισμάτων. Μετά την πάροδο των 20-25 λεπτών το ανακάτεμα δεν είναι πλέον απαραίτητο.

Το καλούπι απομακρύνεται 24 ώρες αργότερα και το χυτό υποβάλλεται σε θερμική επεξεργασία που περιλαμβάνει:

- Αύξηση της θερμοκρασίας με ρυθμό 5°C/h, σταθερή διατήρηση στους 100°C



- Τελική μείωση σε θερμοκρασία περιβάλλοντος με ρυθμό 1°C/h.

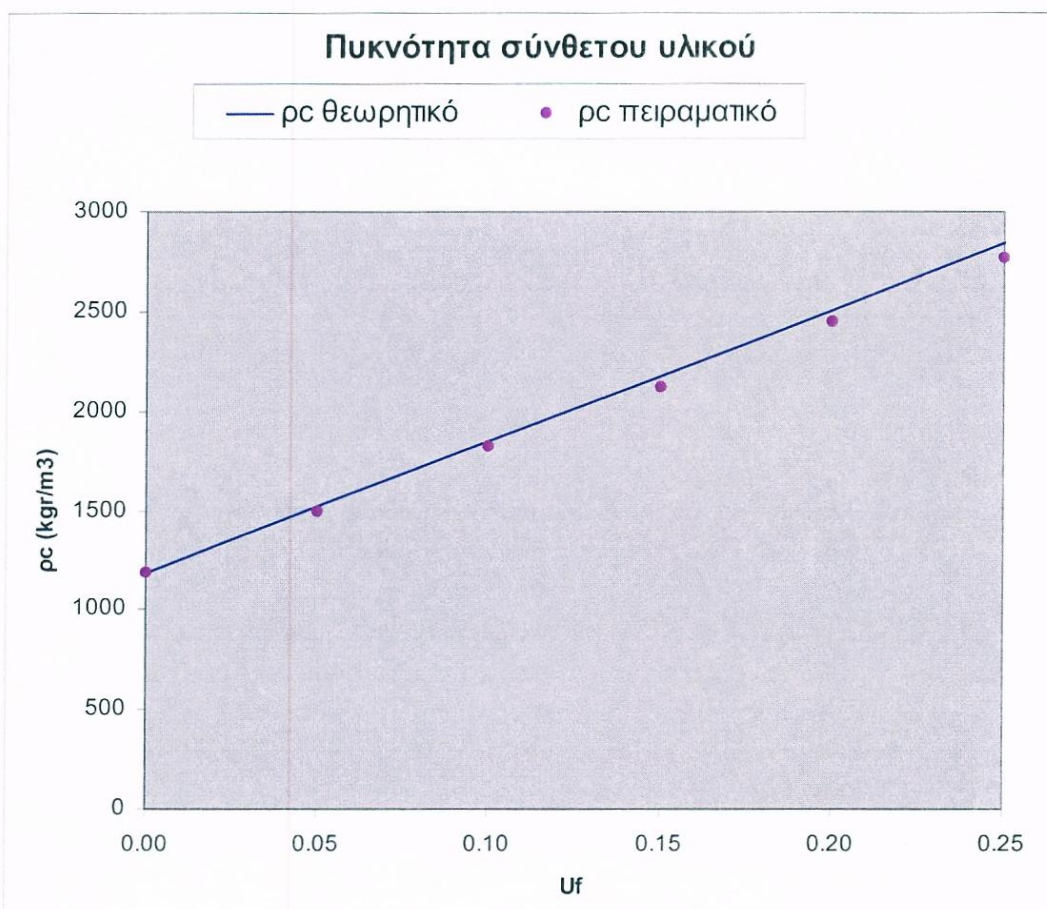
Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε πλήρη πολυμερισμό του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί ως μήτρα και επομένως οι ιδιότητες του τελικού προϊόντος είναι οι επιθυμητές.

Στα επεξεργασμένα δοκίμια γίνεται μέτρηση της πυκνότητας και η τιμή αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη θεωρητική που προκύπτει από τη σχέση:

$$\rho_c = \rho_f U_f + \rho_m U_m$$

Τα αποτελέσματα από αυτή τη μέτρηση φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί. Οι πυκνότητες δίδονται σε kg/m<sup>3</sup>:

Uf (%)	0	5	10	15	20	25
$\rho_c$ θεωρητικό	1190	1520,5	1851	2181,5	2512	2842,5
$\rho_c$ πειραματικό	1190	1500	1820	2120	2450	2770

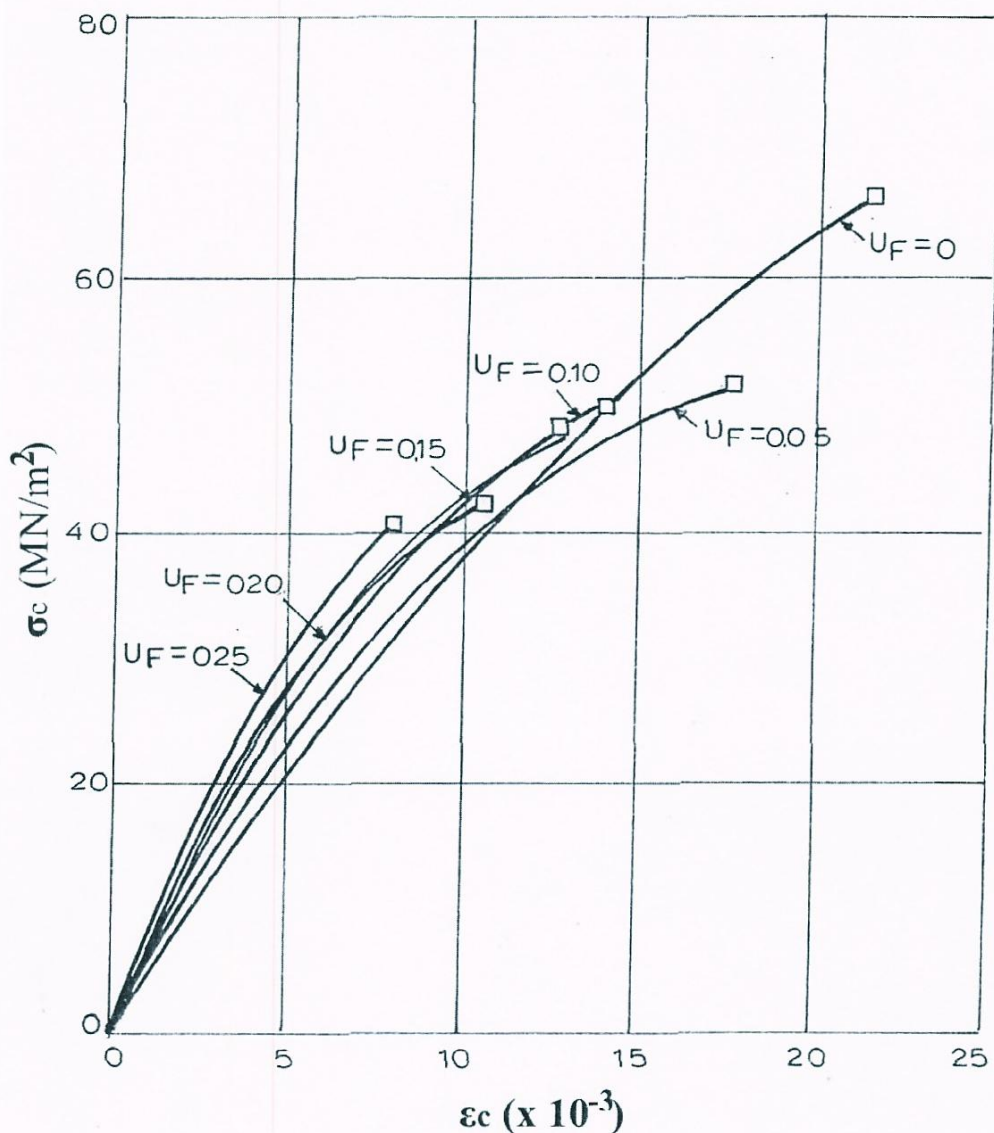


Σχήμα 7.1 Πυκνότητα σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας του σε εγκλείσματα

Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά μας αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση από τα θεωρητικά, οπότε το υλικό μας μπορεί να θεωρηθεί συμπαγές και χωρίς ατέλειες (ασυνέχειες, κενά αέρος κ.λπ.).

Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του κοκκώδους σύνθετου υλικού έγιναν πειράματα εφελκυσμού με συσκευή τύπου instron σε θερμοκρασία δωματίου. 5 δοκίμια διαστάσεων 45x6x3mm χρησιμοποιήθηκαν για κάθε περιεκτικότητα. Η ταχύτητα φόρτισης  $c$  ήταν 0,1 cm/min.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου.



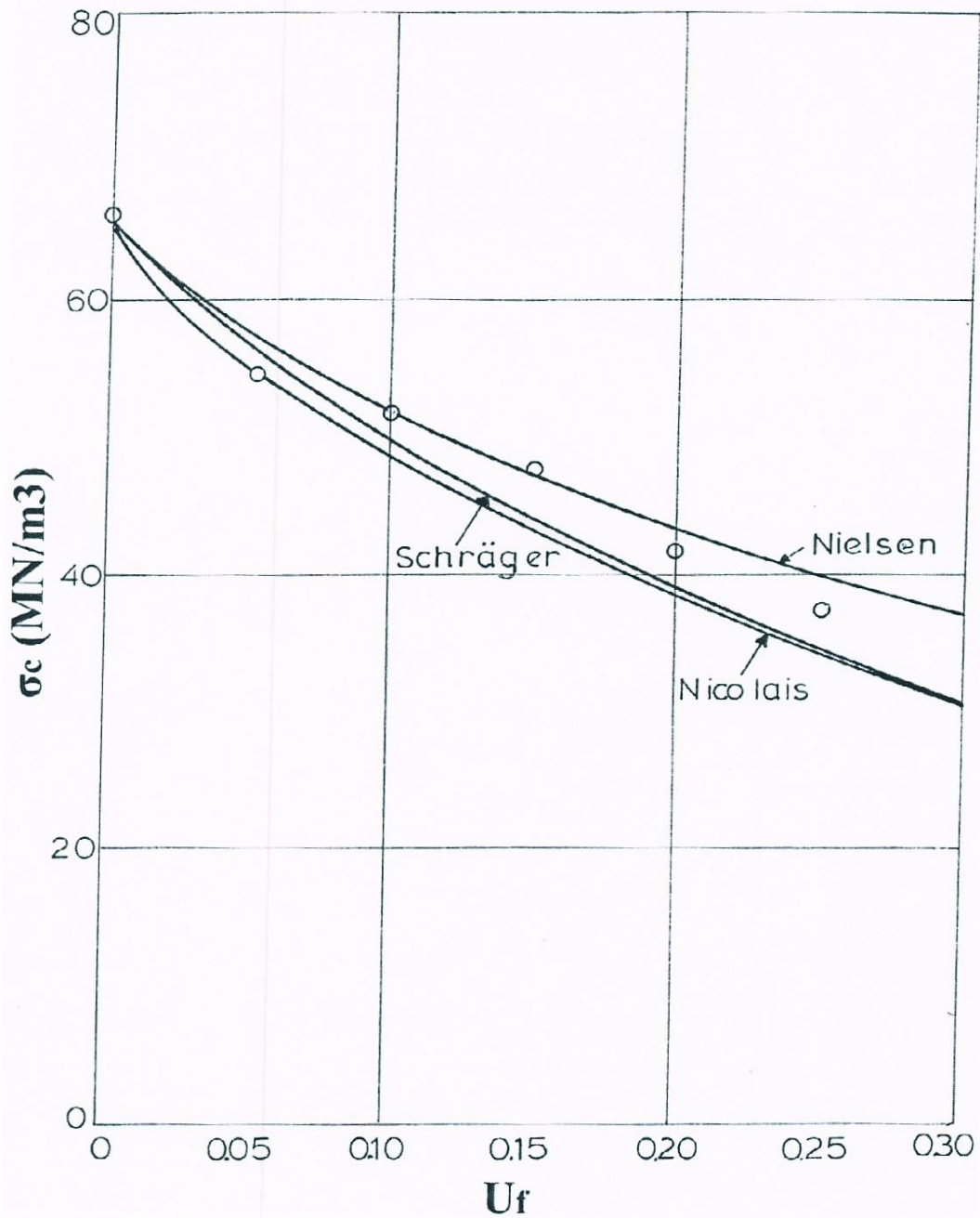
Σχήμα 7.2 καμπύλες τάσεων – παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου

Από τις καμπύλες αυτές φαίνεται η επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε σίδηρο στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού. Η μορφή των καμπυλών αυτών δείχνει ότι γενικά τα σύνθετα αυτά υλικά εμφανίζουν μη γραμμικότητα. Επειδή η μήτρα είναι βισκοελαστικό υλικό η μη γραμμική συμπεριφορά η οποία παρατηρείται δύναται να οφείλεται σε παράγοντες εξαρτώμενους από το χρόνο. Είναι φανερό ότι ελαστική συμπεριφορά παρατηρείται μόνο στο αρχικό τμήμα τάσεων παραμορφώσεων.

Από τις ίδιες καμπύλες φαίνεται ότι καθώς αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, προκύπτει μια πλέον ελαστική συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το έγκλεισμα είναι καθαρά ελαστικό υλικό και η παρουσία του αποδυναμώνει την βισκοελαστική συμπεριφορά της μήτρας.

Τέλος μετρήθηκε η τάση θραύσης για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως  $c=0,1\text{cm/min}$ . Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

## ΤΑΣΕΙΣ ΘΡΑΥΣΗΣ

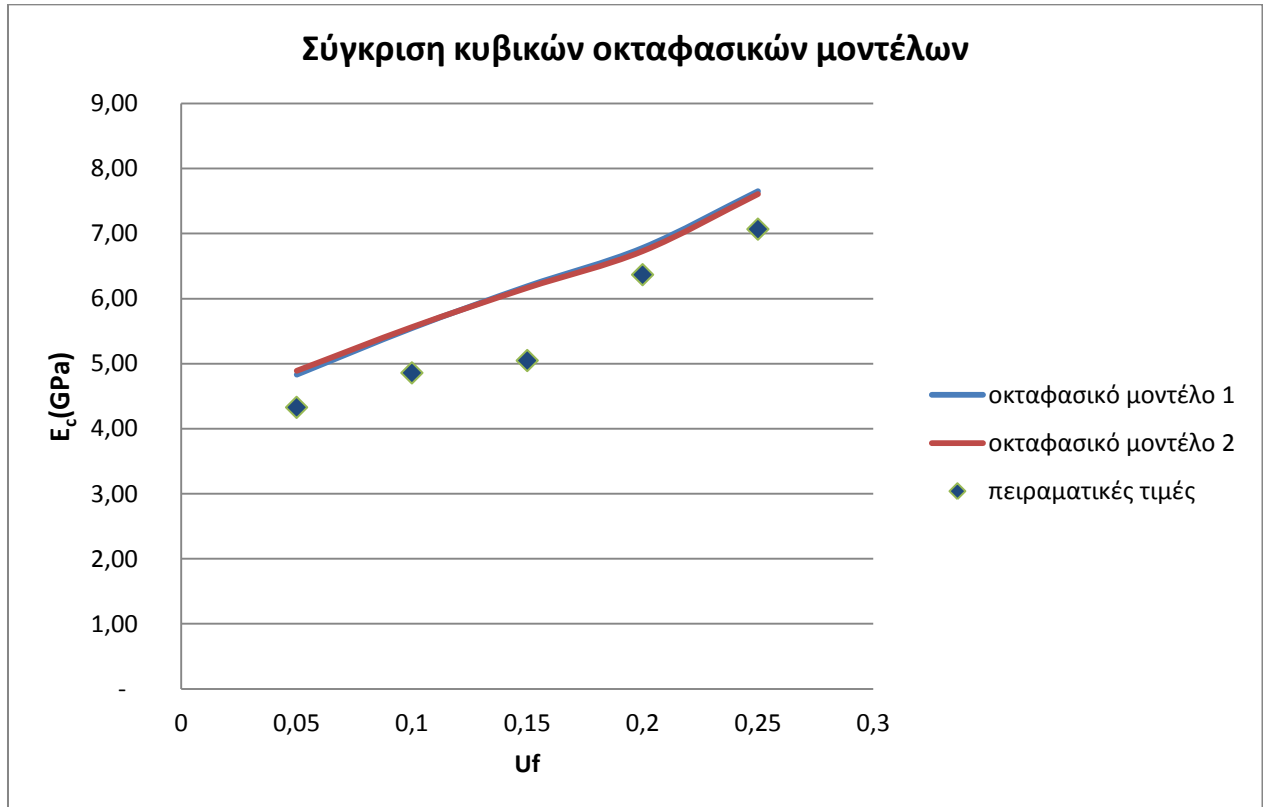


Σχήμα 7.3 τάση θραύσης σύνθετου υλικού για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως  $c=0,1\text{cm/min}$

Η κάποια διασπορά η οποία εμφανίζεται στα αποτελέσματα βρίσκεται μέσα στα όρια των θεωρητικών καμπυλών των Nielsen, Nicolais και Schragger.

## 7.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

-Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας  $E_c$  των κυβικών μοντέλων



Διάγραμμα 7.1

$U_f$	Πειραματικά	Κυβικό 1	Κυβικό 2
	$E_c$ (Gpa)	$E_c$ (Gpa)	$E_c$ (Gpa)
0,05	4,33	4,83	4,89
0,1	4,86	5,55	5,56
0,15	5,05	6,19	6,16
0,2	6,37	6,78	6,73
0,25	7,07	7,65	7,60

Πίνακας 7.1

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[ 1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου  $y$  η πρόβλεψη του μεγέθους  $y$  (για εμάς  $E_c$ ) στην τιμή  $x_i$  ( $U_i$ ).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

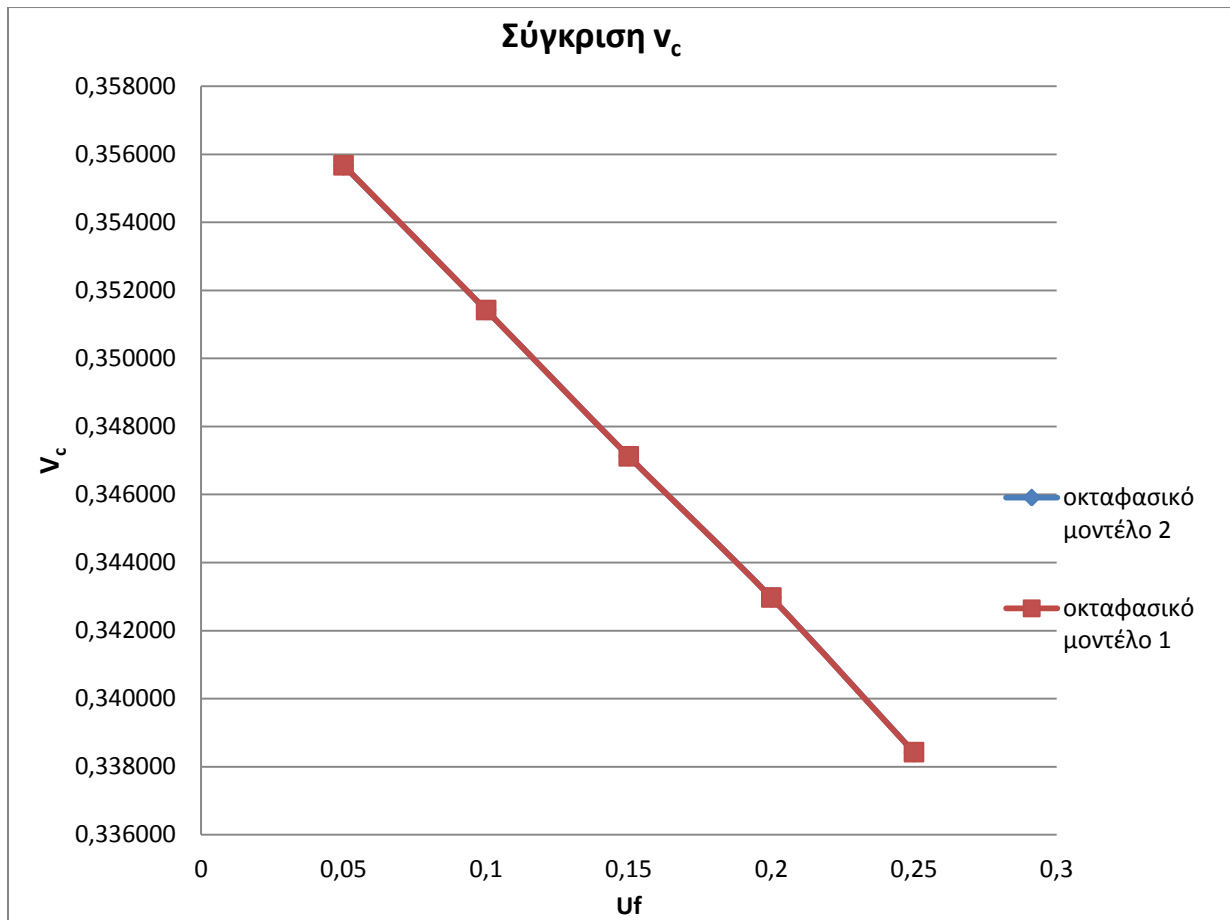
Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο κυβικών μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελεστής Προσαρμογής
$r_1$	97,68%
$r_2$	97,69%

Πίνακας 7.2

Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται το ίδιο καλά και από τα δύο κυβικά μοντέλα.

-Υπολογισμός λόγου Poisson των κυβικών μοντέλων

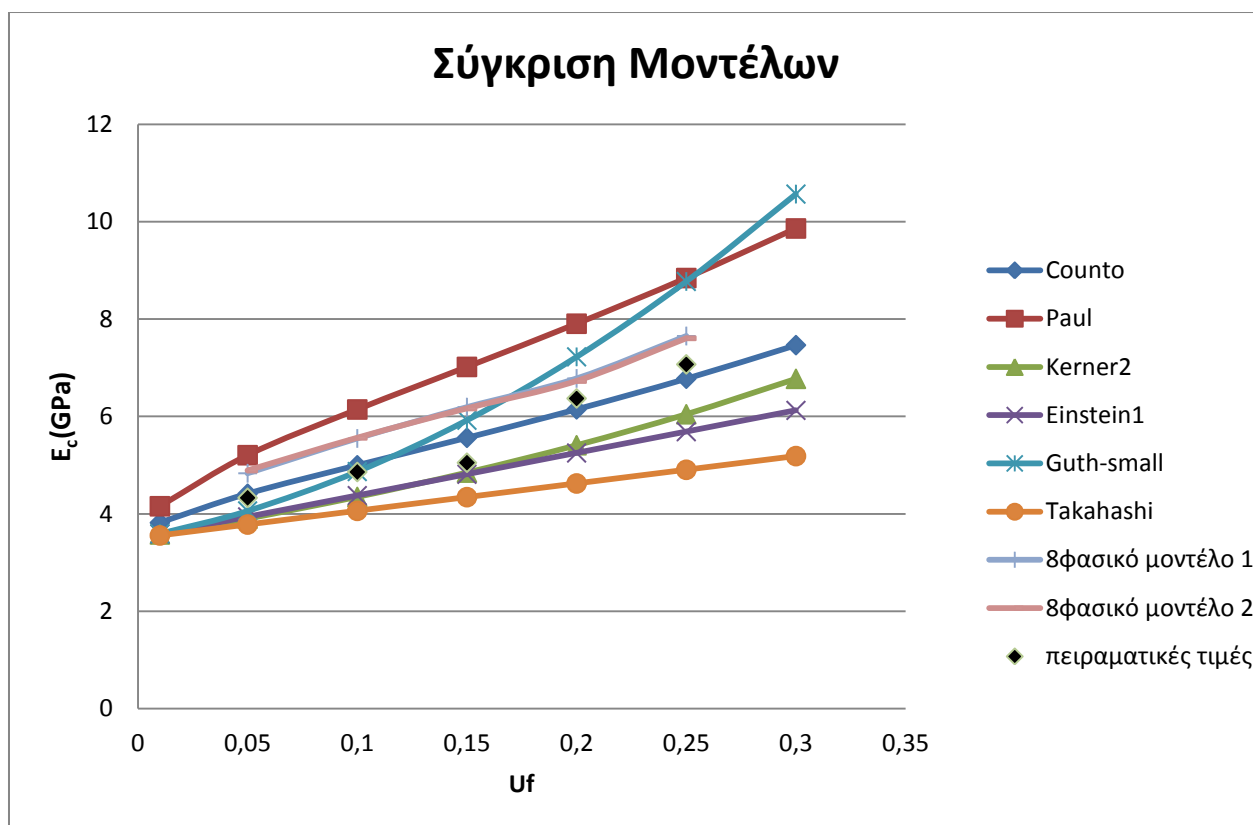


Διάγραμμα 7.2

Uf	Κυβικό 1	Κυβικό 2
	νc	νc
0,05	0,355675	0,355675
0,1	0,35142	0,351420
0,15	0,347121	0,347120
0,2	0,342971	0,342971
0,25	0,338424	0,338424

Πίνακας 7.3

Για την τιμή του  $\nu_c$  παρατηρούμε ότι και τα δύο διαγράμματα συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί το εύρος μεταβολής του  $\nu_c$ , είναι πολύ μικρό, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα δύο κυβικά μοντέλα



Διάγραμμα 7.3

	Counto	Paul	Kerner2	Einstein	Guth-small	Takahashi
U <sub>f</sub>	E <sub>c</sub> (Gpa)	E <sub>c</sub> (Gpa)	E <sub>c</sub> (Gpa)	E <sub>c</sub> (Gpa)	E <sub>c</sub> (Gpa)	E <sub>c</sub> (Gpa)
0,01	3,82	4,16	3,58	3,59	3,59	3,56
0,05	4,41	5,20	3,90	3,94	4,06	3,78
0,1	5,00	6,14	4,35	4,38	4,87	4,06
0,15	5,56	7,02	4,85	4,81	5,92	4,34
0,2	6,15	7,90	5,41	5,25	7,22	4,62
0,25	6,78	8,84	6,05	5,69	8,77	4,91
0,3	7,46	9,86	6,77	6,13	10,57	5,19

Πίνακας 7.3

Το διάγραμμα 7.3 αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Είναι η γραφική παράσταση του οκταφασικού κυβικού μοντέλου 1 και 2 σε σχέση με διαγράμματα που έχουν προτείνει στο παρελθόν σπουδαίοι επιστήμονες.



Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το  $E_c$  που αυξάνουν αυξανόμενη της περιεκτικότητας του εγκλείσματος.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάποια μοντέλα άλλων ερευνητών έχουν μεγάλη απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Τη μεγαλύτερη απόκλιση την παρουσιάζει το μοντέλο του Takahashi και ακολουθείται από το μοντέλο Paul και το μοντέλο του Einstein. Το μοντέλα Kerner 2 και Guth-Smallwood δίνει καλύτερα αποτελέσματα όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο προκύπτει το μοντέλο Counto για το υλικό μας. Το μοντέλο μας αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου  $d=150\mu\text{m}$  και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμα μας είναι λίγο χειρότερο από το μοντέλο του Counto, το οποίο αποτέλεσε έως σήμερα ένα από τα καλύτερα μοντέλα για το σύνθετο υλικό που εξετάζουμε.

Αυτό επιβεβαιώνεται και μαθηματικά, εάν υπολογίσουμε την τιμή του  $r$  για κάθε ερευνητή, οπότε προκύπτει:

Ερευνητής	$r$ (%)
COUNTO	99,74
ΚΥΒΙΚΟ ΟΚΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	<b>97,68</b>
ΚΥΒΙΚΟ ΟΚΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	<b>97,69</b>
GUTH-SMALLWOOD	97,41
KERNER 2	97,07
EINSTEIN	95,69
PAUL	92,39
TAKAHASHI	85,88

Η απόκλιση των θεωρητικών μας προβλέψεων για το  $E_c$  από τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φουσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρα, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Τα θεωρητικά μοντέλα προβλέπουν τέλεια γεωμετρικά σχήματα (σφαιρικοί κόκκοι) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία.

## **8 . Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας**

### **8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός**

Εδώ θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το θεωρητικό μας μοντέλο μέσω κάποιων παραδοχών ώστε να έχουμε μια πλέον συμπαγή έκφραση.

Θα θεωρήσουμε ένα εννιαφασικό μοντέλο το οποίο θα αποτελείται από εννέα φάσεις αντί για οκτώ οι οποίες ήταν οι φάσεις στα κυβικά μοντέλα που αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια για λόγους απλούστευσης.

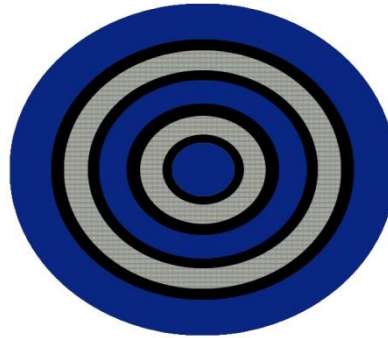
Στο προσεγγιστικό μοντέλο που όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το σύνθετο υλικό αποτελείται από εννέα φάσεις οι οποίες απεικονίζουν τα εγκλείσματα, τη μήτρα και την ενδιάμεση φάση.

Η θεωρητική ανάλυση βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Τα εγκλείσματα και η μήτρα είναι ελαστικά, ισότροπα και ομοιογενή υλικά, ενώ η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής και έχει μεταβλητές ιδιότητες κατά την ακτινική διεύθυνση.
- Τα εγκλείσματα έχουν σχήμα σφαιρικό.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να δύναται να θεωρηθεί ως μακροσκοπικά ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι εφαρμοζόμενες καταπονήσεις στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να διατηρείται η γραμμικότητα στις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

## 8.2 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εννιαφασικού μοντέλου

Το εννιαφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 3 και 6) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 1,5 και 9). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2,4,6 και 8).



Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί  $E_2, E_4, E_6, E_8$  και  $\nu_2, \nu_4, \nu_6, \nu_8$  χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας  $E_c$  του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson  $\nu_c$ .

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι :

$$E_3 = E_7 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_1 = E_5 = E_9 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

Αν με  $U_f$  συμβολίσουμε την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος με  $U_i$  την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και  $U_m$  την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της μήτρας τότε θα ισχύει,

$$U_f = U_3 + U_7$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_6 + U_8$$

Και

$$U_m = U_1 + U_5 + U_9$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,3}} = \frac{U_{i,4}}{U_{m,4}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1-U_f-U_i} = K$$

$$U_2 = K \cdot U_1 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_2^3 - r_1^3) = k r_1^3 \Rightarrow r_2 = r_1(k+1)^{1/3}$$

$$U_4 = K \cdot U_5 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_4^3 - r_3^3) = k(r_5^3 - r_4^3) \Rightarrow r_4 = \sqrt[3]{\frac{k r_5^3 + r_3^3}{k+1}}$$

$$U_6 = K \cdot U_5 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_6^3 - r_5^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_6^3 - r_5^3) = k(r_5^3 - r_4^3) \Rightarrow r_6 = \sqrt[3]{r_5^3(k+1) - d^3 k}$$

$$U_8 = K \cdot U_9 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_8^3 - r_7^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_9^3 - r_8^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_8^3 - r_7^3) = k(r_9^3 - r_8^3) \Rightarrow r_8 = \sqrt[3]{\frac{K r_9^3 + r_7^3}{K+1}}$$

$$U_2 + U_4 + U_6 + U_8 = U_i$$

Για τις κατά όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_1^3}{R_9^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_9^3}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_3^3 - R_2^3}{R_9^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_4^3 - R_3^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_4^3 - R_3^3}{R_9^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_5^3 - R_4^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_5^3 - R_4^3}{R_9^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_6^3 - R_5^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_6^3 - R_5^3}{R_9^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_7^3 - R_6^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_7^3 - R_6^3}{R_9^3}$$

$$U_8 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_8^3 - R_7^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_8^3 - R_7^3}{R_9^3}$$

$$U_9 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_9^3 - R_8^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_9^3 - R_8^3}{R_9^3}$$

Οι ακτίνες των φάσεων 2, 3, 6,7 και 9 βρίσκονται στο κεφάλαιο 4 για κάθε κυβικό μοντέλο όπου πλέον οι ακτίνες με ονομασία a,b,c,d και e αντιστοιχούν στις ακτίνες  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$  και  $\Gamma_9$ .

Τελικά έχουμε τις εξής σχέσεις:

### Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1

$$a = \sqrt[3]{\frac{v^3 - 3r_f^3}{K+1}}$$

$$b = \sqrt[3]{v^3 - 3r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{v^3 + 3r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{u_i i^3 + 2c^3 - b^3 + a^3 - h^3 + g^3}{2}}$$

$$e = \sqrt[3]{\frac{f^3 + d^3 k}{(k+1)}}$$

$$f = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

$$g = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{g^3 + i^3 k}{(k+1)}}$$

$$i = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{14}{u_f}}$$

## Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2

$$a = \sqrt[3]{\frac{\rho^3 - 3r_f^3}{K+1}}$$

$$b = \sqrt[3]{\rho^3 - 6r_f^3}$$

$$c = \sqrt[3]{\rho^3 + 6r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{u_i i^3 + 2c^3 - b^3 + a^3 - h^3 + g^3}{2}}$$

$$e = \sqrt[3]{\frac{f^3 + d^3 k}{(k+1)}}$$

$$f = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

$$g = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{g^3 + i^3 k}{(k+1)}}$$

$$i = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{20}{u_f}}$$



Από τον πίνακα 3.3, σε κάθε σύσταση  $U_f$  αντιστοιχεί μια σύσταση  $U_i$  για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

$U_f(\%)$	$U_i(\%)$
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,02
0,25	0,05

Πίνακας 8.1

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών ( $U_f$ ,  $U_i$ ) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε  $\mu\text{m}$  :

**Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1**

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	<b>i</b>
0.05	186,21	186,30	207,98	208,14	337,50	337,62	347,22	347,51	490,66
0.1	137,30	137,51	172,48	172,81	263,71	264,00	279,24	279,95	389,44
0.15	108,90	109,46	156,63	157,44	226,27	227,04	247,05	249,06	340,20
0.2	86,65	87,38	147,34	148,32	201,89	202,92	227,22	230,05	309,10
0.25	63,98	65,47	141,14	143,09	182,91	185,15	213,43	220,01	286,94

Πίνακας 8.2

<b>U<sub>f</sub></b>	<b>U<sub>1</sub></b>	<b>U<sub>2</sub></b>	<b>U<sub>3</sub></b>	<b>U<sub>4</sub></b>	<b>U<sub>5</sub></b>	<b>U<sub>6</sub></b>	<b>U<sub>7</sub></b>	<b>U<sub>8</sub></b>	<b>U<sub>9</sub></b>
0.05	0,05466	0,00007	0,02143	0,00017	0,24913	0,00034	0,02857	0,00088	0,64474
0.1	0,04383	0,00020	0,04286	0,00050	0,22314	0,00100	0,05714	0,00281	0,62854
0.15	0,03280	0,00051	0,06429	0,00153	0,19508	0,00303	0,08571	0,00944	0,60762
0.2	0,02203	0,00056	0,08571	0,00218	0,16814	0,00431	0,11429	0,01507	0,58770
0.25	0,01109	0,00079	0,10714	0,00499	0,13501	0,00964	0,14286	0,03923	0,54925

Πίνακας 8.3

### Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2

$U_f$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
0.05	310,49	310,63	323,23	323,27	381,84	381,91	389,47	389,80	552,60
0.1	242,67	243,03	262,80	262,89	299,88	300,03	312,04	312,86	438,60
0.15	208,07	209,14	234,80	234,95	259,00	259,34	275,09	277,46	383,15
0.2	185,48	187,05	217,87	217,96	232,71	233,07	252,17	255,55	348,12
0.25	166,91	170,79	206,29	206,23	213,43	213,93	236,13	244,06	323,17

Πίνακας 8.4

$U_f$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$	$U_8$	$U_9$
0.05	0,17738	0,00024	0,02250	0,00008	0,12971	0,00018	0,02000	0,00089	0,64902
0.1	0,16936	0,00076	0,04500	0,00020	0,10430	0,00047	0,04000	0,00284	0,63707
0.15	0,16013	0,00249	0,06750	0,00044	0,07831	0,00122	0,06000	0,00963	0,62028
0.2	0,15124	0,00388	0,09000	0,00031	0,05329	0,00137	0,08000	0,01550	0,60441
0.25	0,13778	0,00984	0,11250	0,00025	0,02820	0,00201	0,10000	0,04066	0,56925

Πίνακας 8.5

### 8.3 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

Για την εύρεση των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού, θα εφαρμοστεί, όπως και πριν, η θεωρία ελαστικότητας στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου των πέντε ομόκεντρων σφαιρών, το οποίο θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζεται μια εξωτερική πίεση  $P_0$ . Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του εφαρμοζομένου εξωτερικού φορτίου, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις μόνο της ακτίνας  $r$ , μη εξαρτώμενες από τις γωνίες  $\theta$  και  $\varphi$ .

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την τασική συνάρτηση

$$\Phi_1 = A/r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C/r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = E/r + Fr^2$$

$$\Phi_4 = H/r + Jr^2$$

$$\Phi_5 = L/r + Mr^2$$

$$\Phi_6 = N/r + Or^2$$

$$\Phi_7 = P/r + Rr^2$$

$$\Phi_8 = Q/r + Ur^2$$

$$\Phi_9 = S/r + Tr^2$$

Στην θέση  $r=0$  πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για  $r=0$  πρέπει  $A=0$ .

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την σχέση :

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις  $\phi$  και  $\theta$  είναι μηδενικές:

$$u_\phi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι :

$$u_{r1} = \frac{Br}{G_1} = \frac{Br2(1+\nu_1)}{E_1}$$

$$u_{r2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2} = \left( -\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2}$$

$$u_{r3} = \frac{-\frac{E}{r^2} + 2Fr}{2G_3} = \left( -\frac{E}{r^2} + 2Fr \right) \frac{(1+\nu_3)}{E_3}$$

$$u_{r4} = \frac{-\frac{H}{r^2} + 2Jr}{2G_4} = \left( -\frac{H}{r^2} + 2Jr \right) \frac{(1+\nu_4)}{E_4}$$

$$u_{r5} = \frac{-\frac{L}{r^2} + 2Mr}{2G_5} = \left( -\frac{L}{r^2} + 2Mr \right) \frac{(1+\nu_5)}{E_5}$$

$$u_{r6} = \frac{-\frac{N}{r^2} + 2Or}{2G_6} = \left( -\frac{N}{r^2} + 2Or \right) \frac{(1+\nu_6)}{E_6}$$

$$u_{r7} = \frac{-\frac{P}{r^2} + 2Rr}{2G_7} = \left( -\frac{P}{r^2} + 2Rr \right) \frac{(1+\nu_7)}{E_7}$$

$$u_{r8} = \frac{-\frac{Q}{r^2} + 2Ur}{2G_8} = \left( -\frac{Q}{r^2} + 2Ur \right) \frac{(1+\nu_8)}{E_8}$$

$$u_{r9} = \frac{-\frac{S}{r^2} + 2Tr}{2G_9} = \left( -\frac{S}{r^2} + 2Tr \right) \frac{(1+\nu_9)}{E_9}$$

Οι παραμορφώσεις είναι :

$$\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\varphi 1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon_{\varphi 2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2E}{r^3} + 2F\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \varepsilon_{\varphi 3} = \left(-\frac{E}{r^3} + 2F\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2H}{r^3} + 2J\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \varepsilon_{\varphi 4} = \left(-\frac{H}{r^3} + 2J\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2L}{r^3} + 2M\right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \varepsilon_{\varphi 5} = \left(-\frac{L}{r^3} + 2M\right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2N}{r^3} + 2O\right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \varepsilon_{\phi 6} = \left(-\frac{N}{r^3} + 2O\right)\left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2P}{r^3} + 2R\right)\left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\phi 7} = \left(-\frac{P}{r^3} + 2R\right)\left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{r8} = \left(\frac{2Q}{r^3} + 2U\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \varepsilon_{\phi 8} = \left(-\frac{Q}{r^3} + 2U\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{r9} = \left(\frac{2S}{r^3} + 2T\right)\left(\frac{1+\nu_9}{E_9}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 9} = \varepsilon_{\phi 9} = \left(-\frac{S}{r^3} + 2T\right)\left(\frac{1+\nu_9}{E_9}\right)$$

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\varphi2} + \varepsilon_{\theta2}) = \\ \sigma_{r2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[ \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] = \\ &= \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[ \frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] = \\ &= \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow \sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \\ \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta2}) = \\ &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[ \left( \frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left( -\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] = \\ &= -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} [2D + 4D] = \\ &= -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow \sigma_{\theta2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi2} \\ \sigma_{\theta2} &= \frac{-C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\varphi2}\end{aligned}$$

Αντίστοιχα έχουμε και τα υπόλοιπα:

$$\sigma_{r3} = \frac{2E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \frac{-E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2H}{r^3} + \frac{2J(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta4} = \frac{-H}{r^3} + \frac{2J(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2L}{r^3} + \frac{2M(1+\nu_5)}{1-2\nu_5}$$



$$\sigma_{\theta 5} = \frac{-L}{r^3} + \frac{2M(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \sigma_{\varphi 5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2N}{r^3} + \frac{2O(1+\nu_6)}{1-2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta 6} = \frac{-N}{r^3} + \frac{2O(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi 6}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2R(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta 7} = \frac{-P}{r^3} + \frac{2R(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi 7}$$

$$\sigma_{\theta 8} = \frac{-Q}{r^3} + \frac{2U(1+\nu_8)}{1-2\nu_8} = \sigma_{\varphi 8}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{2Q}{r^3} + \frac{2U(1+\nu_8)}{1-2\nu_8}$$

$$\sigma_{\theta 9} = \frac{-S}{r^3} + \frac{2T(1+\nu_9)}{1-2\nu_9} = \sigma_{\varphi 9}$$

$$\sigma_{r9} = \frac{2S}{r^3} + \frac{2T(1+\nu_9)}{1-2\nu_9}$$

Στη μελέτη αυτή, λαμβάνουμε υπ' όψιν την παραβολική μεταβολή των  $Ei(r)$  και  $vi(r)$  (κεφάλαιο 5), η οποία θεωρείται η πλέον αντιπροσωπευτική.

Οι οριακές συνθήκες τις οποίες λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Στο  $r=a \Rightarrow Ei(r)=Em$  και  $vi(r)=vm$
- Στο  $r=b \Rightarrow Ei(r)=\eta Ef$  και  $vi(r)=\eta vf$
- Στο  $r=c \Rightarrow Ei(r)=\eta Ef$  και  $vi(r)=\eta vf$
- Στο  $r=d \Rightarrow Ei(r)=Em$  και  $vi(r)=vm$
- Στο  $r=e \Rightarrow Ei(r)=Em$  και  $vi(r)=vm$
- Στο  $r=f \Rightarrow Ei(r)=\eta Ef$  και  $vi(r)=\eta vf$
- Στο  $r=g \Rightarrow Ei(r)=\eta Ef$  και  $vi(r)=\eta vf$
- Στο  $r=h \Rightarrow Ei(r)=Em$  και  $vi(r)=vm$

Ακόμη όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια η τελική τιμή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού εξαρτάται σε πολύ μικρό βαθμό από το  $\eta$  και έτσι για λόγους απλοποίησης θεωρούμε το  $\eta=1$ .

Οπότε προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες τάσεων:

**Για  $r=a$  :  $\sigma_{r,1}=\sigma_{r,2}$  και  $u_{r,1}=u_{r,2}$  δηλ.**

$$\frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \Rightarrow \frac{2B(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

$$\frac{Br2(1+\nu_1)}{E_1} = \left( -\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2} \Rightarrow \frac{Ba2(1+\nu_m)}{E_m} = \left( -\frac{C}{a^2} + 2Da \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

**Για  $r=b$  :  $\sigma_{r,2}=\sigma_{r,3}$  και  $u_{r,2}=u_{r,3}$**

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \frac{2E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} \Rightarrow$$

$$\frac{2C}{b^3} + \frac{2D(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} = \frac{2E}{b^3} + \frac{2F(1+\nu_f)}{1-2\nu_f}$$

και

$$\left( -\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2} = \left( -\frac{E}{r^2} + 2Fr \right) \frac{(1+\nu_3)}{E_3} \Rightarrow$$

$$\left( -\frac{C}{b^2} + 2Db \right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f} = \left( -\frac{E}{b^2} + 2Fb \right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f}$$

**Για  $r=c$  :  $\sigma_{r,3}=\sigma_{r,4}$  και  $u_{r,3}=u_{r,4}$**

$$\frac{2E}{r^3} + \frac{2F(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \frac{2H}{r^3} + \frac{2J(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} \Rightarrow$$

$$\frac{2E}{c^3} + \frac{2F(1+\nu_m)}{1-2\nu_f} = \frac{2H}{c^3} + \frac{2J(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

και

$$\left(-\frac{E}{r^2} + 2Fr\right) \frac{(1+v_3)}{E_3} = \left(-\frac{H}{r^2} + 2Jr\right) \frac{(1+v_4)}{E_4} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{E}{c^2} + 2Fc\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{H}{c^2} + 2Jc\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

**Για  $r=d$  :  $\sigma_{r,4}=\sigma_{r,5}$  και  $u_{r,4}=u_{r,5}$**

$$\frac{2H}{r^3} + \frac{2J(1+v_4)}{1-2v_4} = \frac{2L}{r^3} + \frac{2M(1+v_5)}{1-2v_5} \Rightarrow$$

$$\frac{2H}{d^3} + \frac{2J(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2L}{d^3} + \frac{2M(1+v_m)}{1-2v_m}$$

**και**

$$\left(-\frac{H}{r^2} + 2Jr\right) \frac{(1+v_4)}{E_4} = \left(-\frac{L}{r^2} + 2Mr\right) \frac{(1+v_5)}{E_5} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{H}{d^2} + 2Jb\right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{L}{d^2} + 2Md\right) \frac{(1+v_m)}{E_m}$$

**Για  $r=e$  :  $\sigma_{r,5}=\sigma_{r,6}$  και  $u_{r,5}=u_{r,6}$**

$$\frac{2L}{r^3} + \frac{2M(1+v_5)}{1-2v_5} = \frac{2N}{r^3} + \frac{2O(1+v_6)}{1-2v_6} \Rightarrow$$

$$\frac{2L}{d^3} + \frac{2M(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2N}{d^3} + \frac{2O(1+v_m)}{1-2v_m}$$

**και**

$$\left(-\frac{L}{r^2} + 2Mr\right) \frac{(1+v_5)}{E_5} = \left(-\frac{N}{r^2} + 2Or\right) \frac{(1+v_6)}{E_6} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{L}{e^2} + 2M * e\right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{N}{e^2} + 2O * e\right) \frac{(1+v_m)}{E_m}$$

**Για  $r=f$  :  $\sigma_{r,6}=\sigma_{r,7}$  και  $u_{r,6}=u_{r,7}$**

$$\frac{2N}{r^3} + \frac{2O(1+v_6)}{1-2v_6} = \frac{2P}{r^3} + \frac{2R(1+v_7)}{1-2v_7} \Rightarrow$$

$$\frac{2N}{f^3} + \frac{2O(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2N}{f^3} + \frac{2O(1+v_f)}{1-2v_f}$$

**και**

$$\left(-\frac{N}{r^2} + 2Or\right) \frac{(1+v_6)}{E_6} = \left(-\frac{P}{r^2} + 2Rr\right) \frac{(1+v_7)}{E_7} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{N}{f^2} + 2Of\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{P}{f^2} + 2Of\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

**Για  $r=g$  :  $\sigma_{r,7}=\sigma_{r,8}$  και  $u_{r,7}=u_{r,8}$**

$$\frac{2P}{r^3} + \frac{2R(1+v_7)}{1-2v_7} = \frac{2Q}{r^3} + \frac{2U(1+v_8)}{1-2v_8} \Rightarrow$$

$$\frac{2P}{g^3} + \frac{2R(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2Q}{g^3} + \frac{2U(1+v_f)}{1-2v_f}$$

**και**

$$\left(-\frac{P}{r^2} + 2Rr\right) \frac{(1+v_7)}{E_7} = \left(-\frac{Q}{r^2} + 2Ur\right) \frac{(1+v_8)}{E_8} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{P}{g^2} + 2Rg\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{Q}{g^2} + 2Ug\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

**Για  $r=h$  :  $\sigma_{r,8}=\sigma_{r,9}$  και  $u_{r,8}=u_{r,9}$**

$$\frac{2Q}{r^3} + \frac{2U(1+v_8)}{1-2v_8} = \frac{2S}{r^3} + \frac{2T(1+v_9)}{1-2v_9} \Rightarrow$$

$$\frac{2Q}{h^3} + \frac{2U(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2S}{h^3} + \frac{2T(1+v_m)}{1-2v_m}$$

**και**

$$\left(-\frac{Q}{r^2} + 2Ur\right) \frac{(1+\nu_8)}{E_8} = \left(-\frac{S}{r^2} + 2Tr\right) \frac{(1+\nu_9)}{E_9} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{Q}{h^2} + 2Uh\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{S}{h^2} + 2Th\right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f}$$

Για  $r=i$ :  $\sigma_{r9} = -P_0$

$$\frac{2S}{i^3} + \frac{2T(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = -P_0$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτουν οι εξής λύσεις των σταθερών:

A,C,E,H,L,N,P,Q,S=0

$$B,D,F,J,M,O,R,U,T = \frac{-P_0(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των τάσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = -P_0$$

$$\sigma_{r,2} = \sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = \frac{2(1+\nu_{i,1})}{(1-2\nu_{i,1})} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,3} = \sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,4} = \sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = \frac{2(1+\nu_{i,2})}{(1-2\nu_{i,2})} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,5} = \sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = \frac{2(1+\nu_m)}{(1-2\nu_m)} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r,5} = \sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = -P_0$$

$$\sigma_{r,6} = \sigma_{\theta,6} = \sigma_{\varphi,6} = \frac{2(1+\nu_{i,3})}{(1-2\nu_{i,3})} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,7} = \sigma_{\theta,7} = \sigma_{\varphi,7} = \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \left( -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r8} = \sigma_{\theta8} = \sigma_{\varphi8} = \frac{2(1+v_{i,4})}{(1-2v_{i,4})} \left( -P_0 \frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)} \right)$$

$$\sigma_{r9} = \sigma_{\theta9} = \sigma_{\varphi9} = \frac{2(1+v_m)}{(1-2v_m)} \left( -P_0 \frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)} \right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r9} = \sigma_{\theta9} = \sigma_{\varphi9} = -P_0$$

Και στις παραμορφώσεις έχω:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = -P_0 \frac{1-2v_m}{E_m}$$

$$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,1})}{E_{i,1}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_f)}{E_f(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r4} = \varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,2})}{E_{i,2}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r5} = \varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m}$$

$$\varepsilon_{r6} = \varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\varphi6} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,3})}{E_{i,3}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r7} = \varepsilon_{\theta7} = \varepsilon_{\varphi7} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_f)}{E_f(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r8} = \varepsilon_{\theta8} = \varepsilon_{\varphi8} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,4})}{E_{i,4}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r9} = \varepsilon_{\theta9} = \varepsilon_{\varphi9} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m}$$

Για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας  $E_c$  του κοκκώδους σύνθετου υλικού θα εφαρμοσθεί η συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο σφαιρικό εννιαφασικό μοντέλο. Δηλαδή ότι η ενέργεια παραμορφώσεως των εννέα φάσεων, του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_0^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_0^a (\sigma_{r1}\varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1}\varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1}\varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2}\varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2}\varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_b^c (\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3}\varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3}\varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_c^d (\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4}\varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4}\varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_d^e (\sigma_{r5}\varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5}\varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5}\varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_e^f (\sigma_{r6}\varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6}\varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6}\varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_f^g (\sigma_{r7}\varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7}\varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7}\varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_g^h (\sigma_{r8}\varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8}\varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8}\varepsilon_{\varphi8}) r^2 dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int_h^i (\sigma_{r9}\varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9}\varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9}\varepsilon_{\varphi9}) r^2 dr \end{aligned}$$

Όπου

$$K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$$

Είναι το μέτρο διόγκωσης σύνθετου υλικού και :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^i \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr &= \int_0^a (\sigma_{r1}\varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1}\varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1}\varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr + \int_a^b (\sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2}\varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2}\varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr \\ &+ \int_b^c (\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3}\varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3}\varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr + \int_c^d (\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4}\varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4}\varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr + \\ &+ \int_d^e (\sigma_{r5}\varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5}\varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5}\varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr + \int_e^f (\sigma_{r6}\varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6}\varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6}\varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr \\ &+ \int_f^g (\sigma_{r7}\varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7}\varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7}\varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr + \int_g^h (\sigma_{r8}\varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8}\varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8}\varepsilon_{\varphi8}) r^2 dr + \\ &+ \int_h^i (\sigma_{r9}\varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9}\varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9}\varepsilon_{\varphi9}) r^2 dr \end{aligned}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_0^i \frac{3P_0^2(1-2v_c)}{E_c} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2v_c)}{E_c} \int_0^i r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2v_c)}{E_c} \frac{i^3}{3} = \frac{P_0^2(1-2v_c)i^3}{E_c}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a (\sigma_{r1}\varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1}\varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1}\varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr &= \int_0^a 3(-P_0) \left( \frac{1-2v_m}{E_m(1+v_m)} (-P_0) \right) r^2 dr = \\ &= \frac{3P_0^2(1-2v_m)}{(1+v_m)} \int_0^a r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2v_m)a^3}{(1+v_m)3} = \frac{P_0^2(1-2v_m)a^3}{(1+v_m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_c^d (\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3}\varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3}\varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr &= \int_c^d 3 \frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_{i,2})(1-2v_m)}{E_{i,2}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\ &= 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_a^b \frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2} r^2 dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_b^c (\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3}\varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3}\varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr &= \int_b^c 3 \frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_f)(1-2v_m)}{E_f(1+v_m)} \right) r^2 dr \\ &= P_0^2 \frac{(1+v_f)^2}{(1-2v_f)} \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2 E_f} (c^3 - b^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_c^d (\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4}\varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4}\varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr &= \int_c^d 3 \frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_{i,2})(1-2v_m)}{E_{i,2}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\ &= 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_a^b \frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2} r^2 dr \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \int_d^e (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr = \int_d^e 3(-P_0) \left( \frac{1-2v_m}{E_m(1+v_m)} (-P_0) \right) r^2 dr = \\
& = \frac{3P_0^2(1-2v_m)}{(1+v_m)} \int_d^e r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2v_m)(e^3 - d^3)}{(1+v_m)3} = \frac{P_0^2(1-2v_m)}{(1+v_m)} (e^3 - d^3) \\
& \int_e^f (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr = \int_e^f 3 \frac{2(1+v_{i,3})}{(1-2v_{i,3})} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_{i,3})(1-2v_m)}{E_{i,3}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_e^f \frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,3})^2} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_f^g (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr = \int_f^g 3 \frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_f)(1-2v_m)}{E_f(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = P_0^2 \frac{(1+v_f)^2}{(1-2v_f)} \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2 E_f} (g^3 - f^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_g^h (\sigma_{r8} \varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8} \varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8} \varepsilon_{\varphi8}) r^2 dr = \int_g^h 3 \frac{2(1+v_{i,4})}{(1-2v_{i,4})} \left( -P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left( -P_0 \frac{(1+v_{i,4})(1-2v_m)}{E_{i,4}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_g^h \frac{(1+v_{i,4})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,4})^2} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_h^i (\sigma_{r9} \varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9} \varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9} \varepsilon_{\varphi9}) r^2 dr = \int_h^i 3(-P_0) \left( \frac{1-2v_m}{E_m(1+v_m)} (-P_0) \right) r^2 dr = \\
& = \frac{3P_0^2(1-2v_m)}{(1+v_m)} \int_h^i r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2v_m)(i^3 - h^3)}{(1+v_m)3} = \frac{P_0^2(1-2v_m)}{(1+v_m)} (i^3 - h^3)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned} \frac{P_0^2(1-2\nu_c)i^3}{E_c} &= \frac{P_0^2(1-2\nu_m)a^3}{(1+\nu_m)} + 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_a^b \frac{(1+\nu_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,2})^2} r^2 dr + \\ P_0^2 \frac{(1+\nu_f)^2}{(1-2\nu_f)} \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} E_f (c^3 - b^3) &+ 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_a^b \frac{(1+\nu_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,2})^2} r^2 dr + \\ \frac{P_0^2(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)} (e^3 - d^3) &+ 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_e^f \frac{(1+\nu_{i,3})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,3})^2} r^2 dr + \\ P_0^2 \frac{(1+\nu_f)^2}{(1-2\nu_f)} \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} E_f (g^3 - f^3) &+ 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_g^h \frac{(1+\nu_{i,4})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,4})^2} r^2 dr + \\ \frac{P_0^2(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)} (i^3 - h^3) & \end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι:

$$V_c = \nu_m u_1 + \nu_{i,1} u_2 + \nu_f u_3 + \nu_{i,2} u_3 + \nu_m u_5 + \nu_{i,3} u_6 + \nu_f u_7 + \nu_{i,4} u_8 + \nu_m u_9$$

#### 8.4 Σύγκριση με άλλα μοντέλα

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση που υπολογίσθηκαν με την προσεγγιστική μέθοδο χρησιμοποιούμε τα ίδια πειραματικά δεδομένα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 7. Κάνουμε τη διαδικασία και για τις δύο περιπτώσεις κατανομής των κόκκων σε αντιστοιχία με τα κυβικά μοντέλα του κεφαλαίου 6.

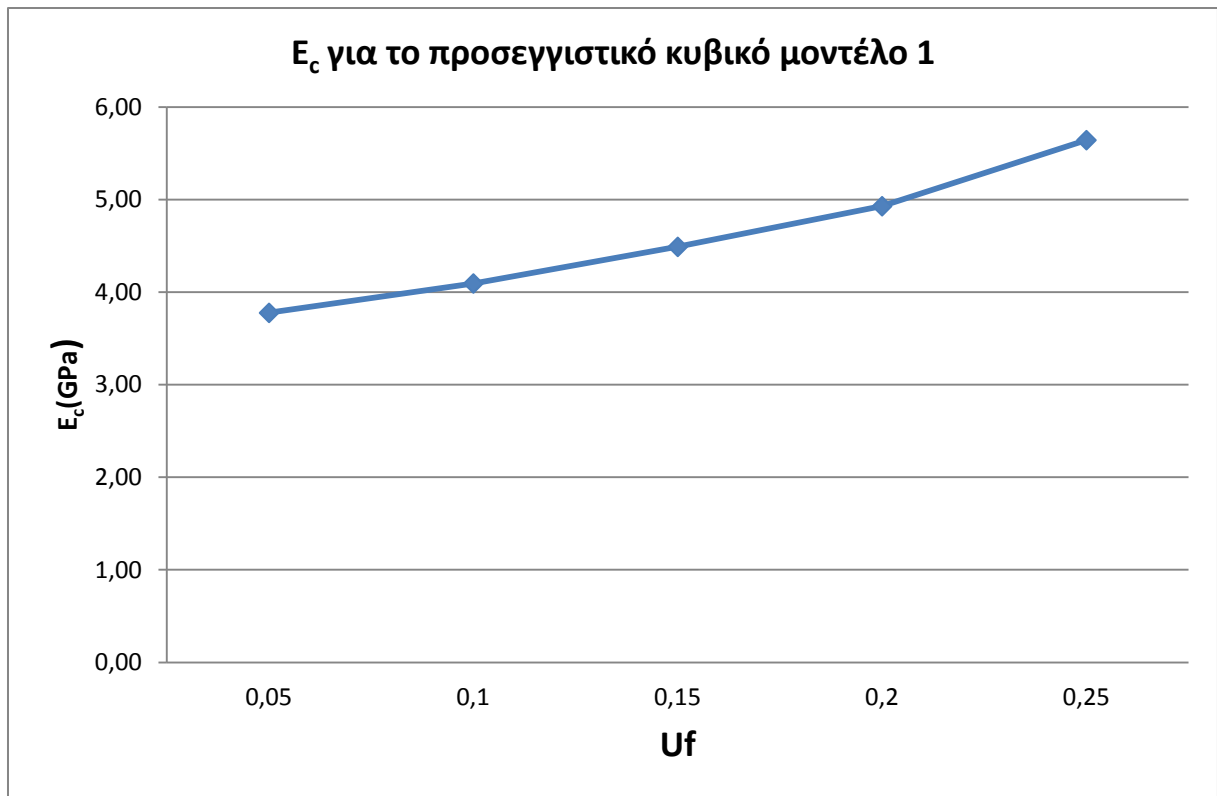
Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες και διαγράμματα των αποτελεσμάτων των υπολογισμών του προσεγγιστικού θεωρητικού υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας.

$U_f$	$E_c$ για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο1 (GPa)	$E_c$ για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο2 (GPa)
0.05	3,778	3,7347
0.1	4,095	3,9995
0.15	4,491	4,3271
0.2	4,930	4,6821
0.25	5,644	5,2605

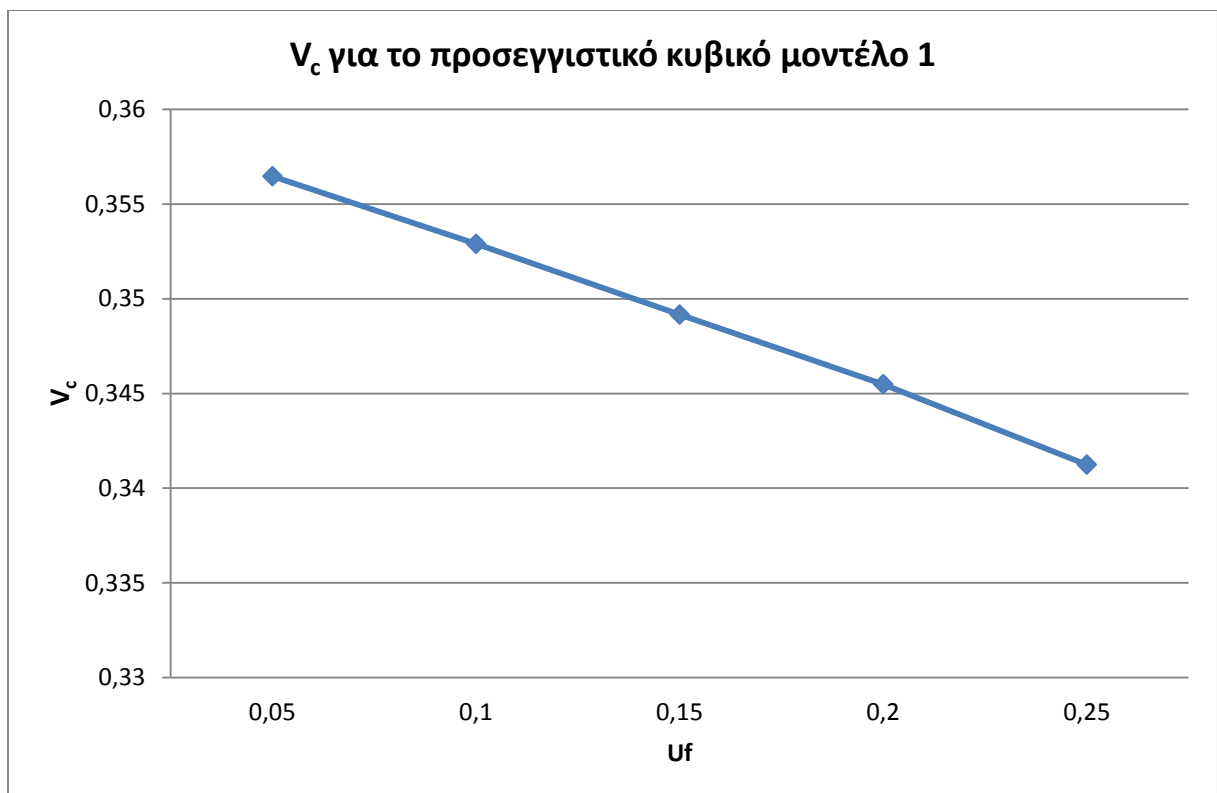
Πίνακας 8.6

$U_f$	$V_c$ για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1	$V_c$ για προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2
0.05	0,356466	0,356992
0.1	0,352895	0,353951
0.15	0,349163	0,350755
0.2	0,345487	0,347612
0.25	0,341243	0,343924

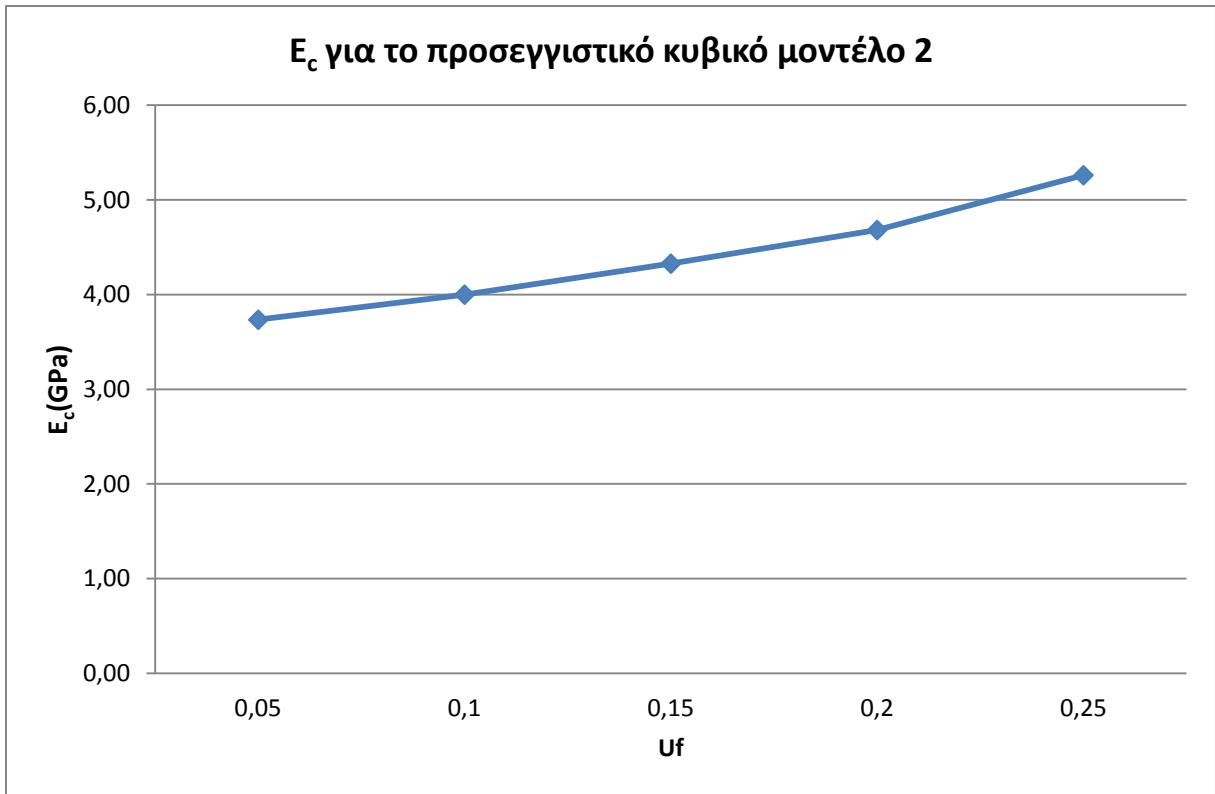
Πίνακας 8.7



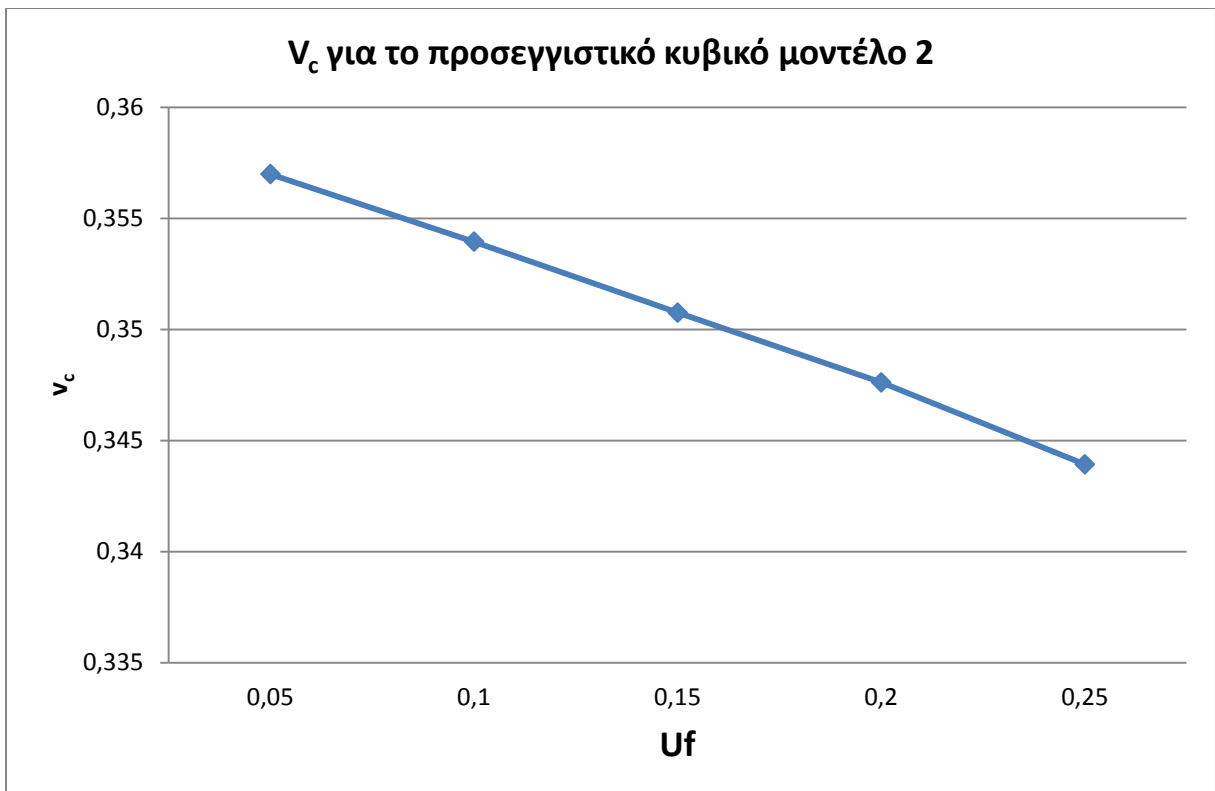
Διάγραμμα 8.1



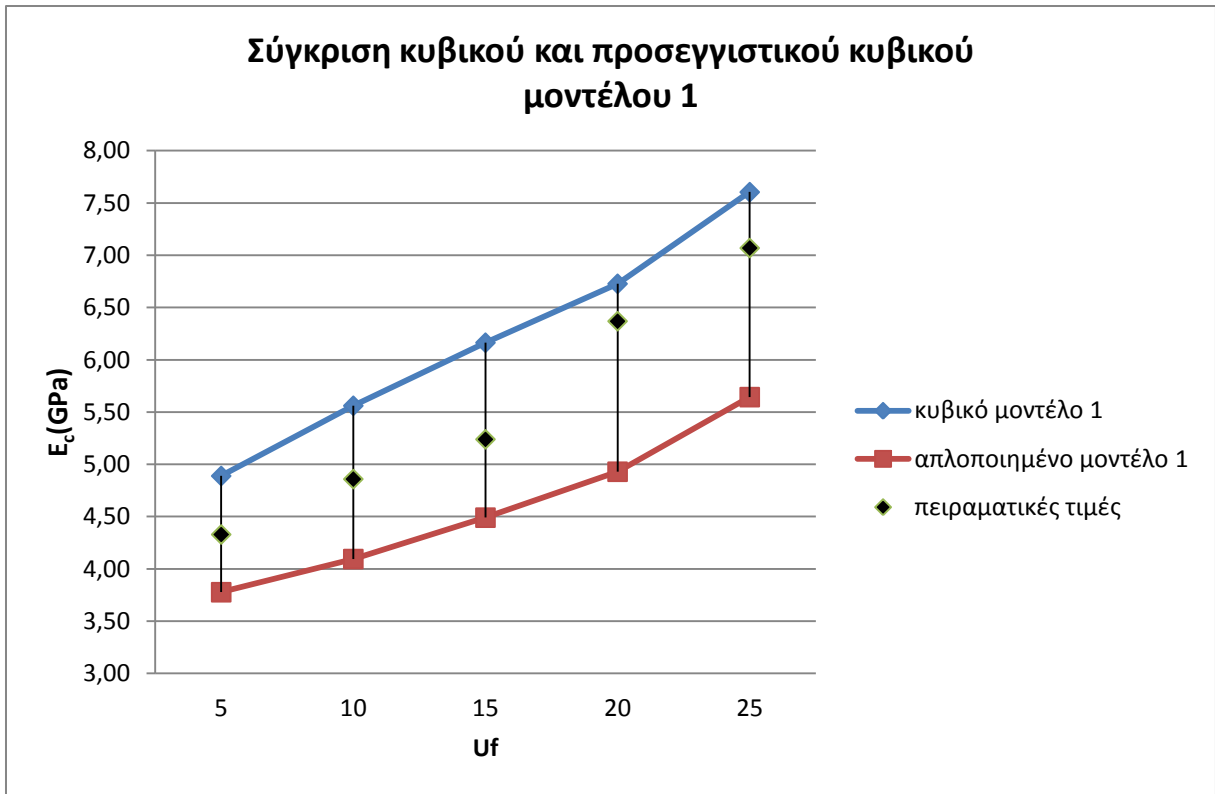
Διάγραμμα 8.2



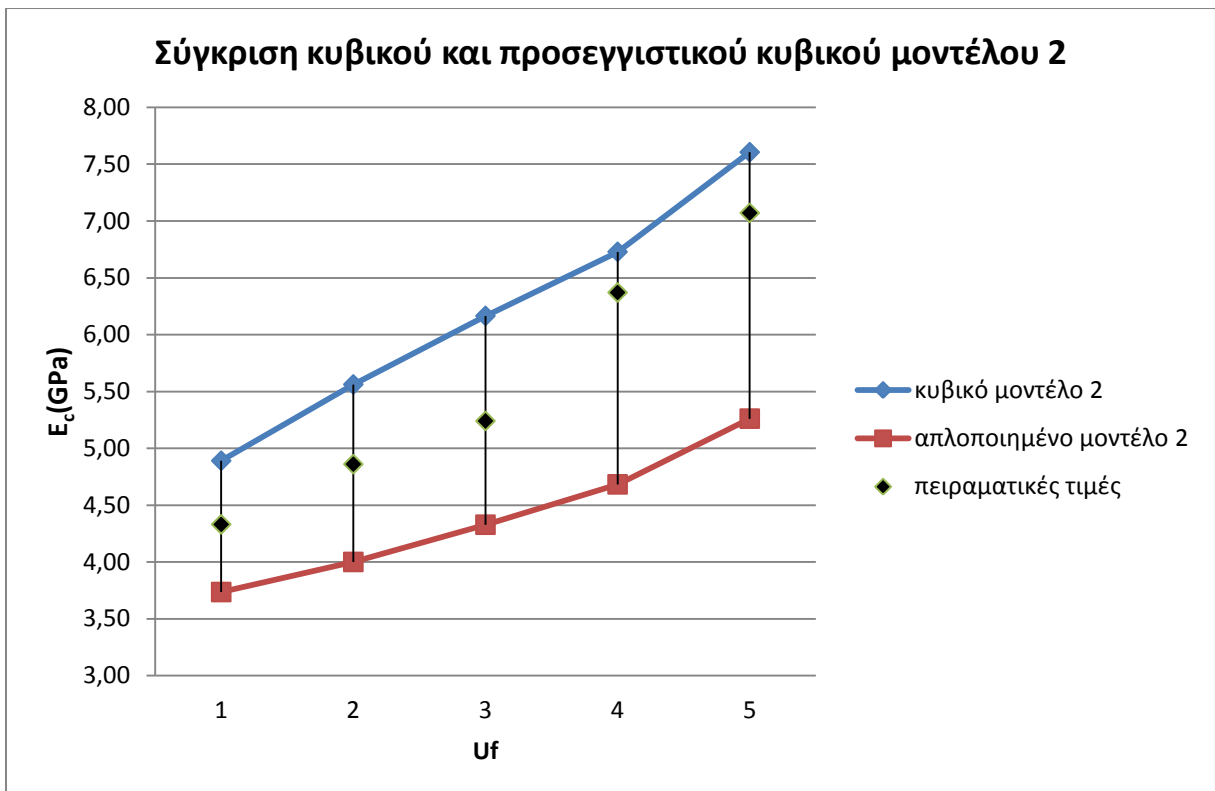
Διάγραμμα 8.3



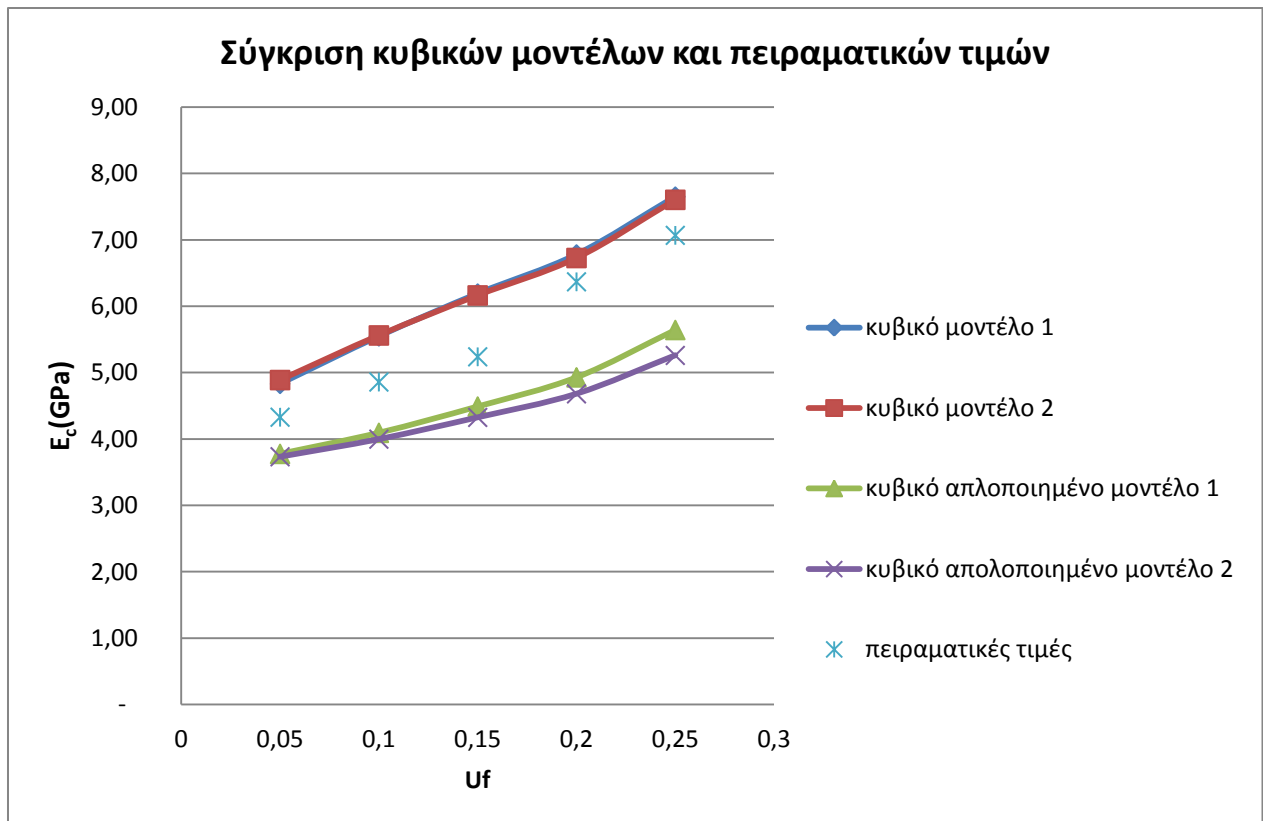
Διάγραμμα 8.4



Διάγραμμα 8.5



Διάγραμμα 8.6



Διάγραμμα 8.7

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[ 1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου  $y$  η πρόβλεψη του μεγέθους  $y$  (για εμάς  $E_c$ ) στην τιμή  $x_i$  ( $U_i$ ).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο απλοποιημένων μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

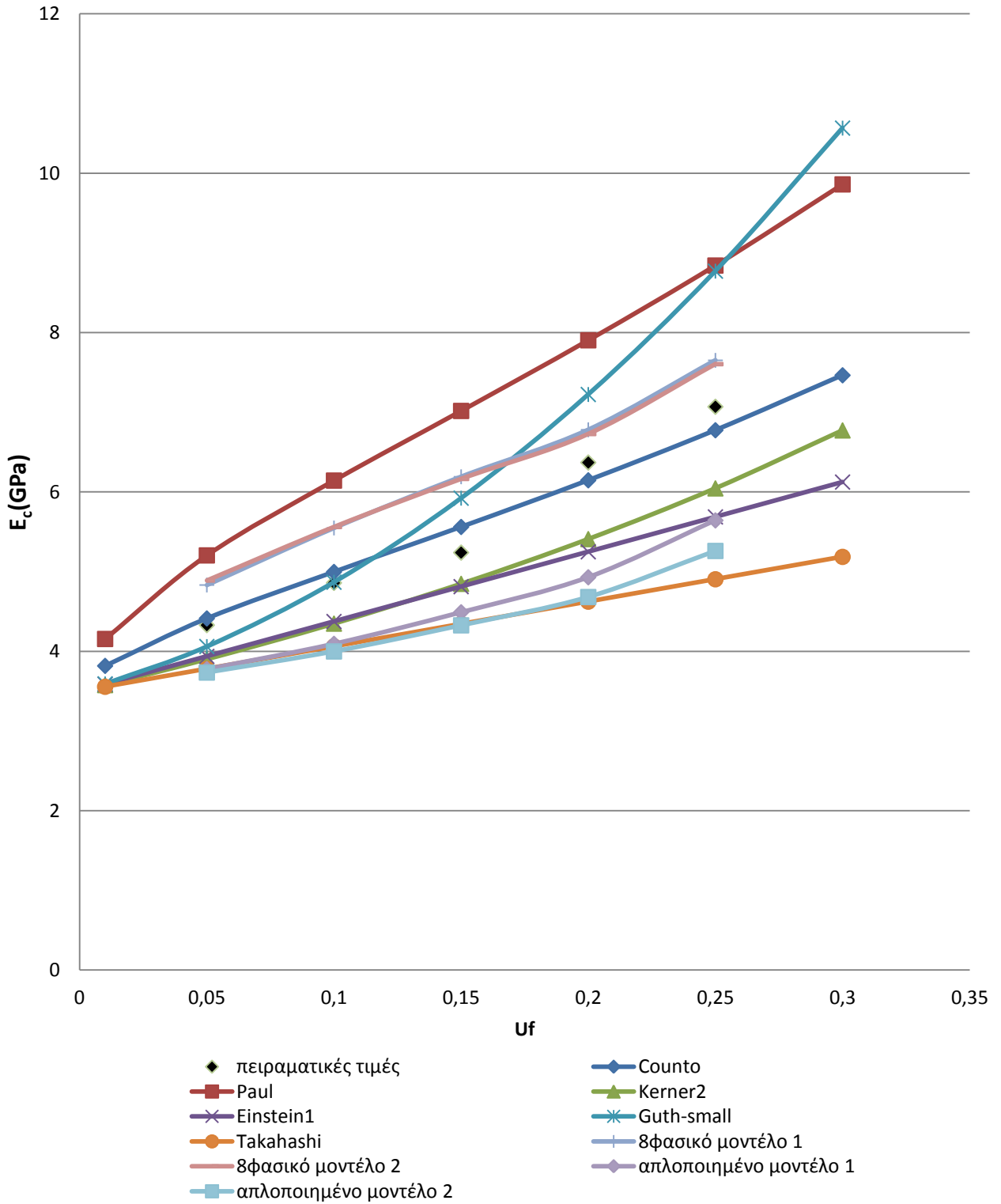
	Συντελεστής Προσαρμογής
$r_1$	92,63%
$r_2$	88,40%

Διάγραμμα 8.8

Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται καλύτερα από το πρώτο προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο.



## Σύγκριση διαφορετικών μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας



Διάγραμμα 8.9

$U_f$	κυβικό μοντέλο 1	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1	κυβικό μοντέλο 2	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές τιμές
0,05	4,83	3,778	4,89	3,735	4,33
0,1	5,55	4,095	5,56	3,999	4,86
0,15	6,19	4,491	6,16	4,327	5,24
0,2	6,78	4,930	6,73	4,682	6,37
0,25	7,65	5,644	7,60	5,260	7,07

Διάγραμμα 8.6

$U_f$	Counto	Paul	Kerner2	Einstein1	Guth-small	Takahashi	Counto
0,05	4,4136	5,2045	3,9019	3,9375	4,0609	3,781	4,4136
0,1	4,9973	6,1437	4,3485	4,375	4,8685	4,062	4,9973
0,15	5,5617	7,0174	4,8476	4,8125	5,9229	4,3431	5,5617
0,2	6,147	7,9041	5,4091	5,25	7,224	4,6241	6,147
0,25	6,7751	8,8419	6,0455	5,6875	8,7719	4,9051	6,7751

Πίνακας 8.7

Στο διάγραμμα 8.9 παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου  $E_c$  συναρτήσει της κατ' όγκον περιεκτικότητας  $U_f$  όπου οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας οι οποίες προκύπτουν από τα δύο μοντέλα μας συγκρίνονται με τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από μοντέλα (θεωρητικές εκφράσεις) άλλων ερευνητών της βιβλιογραφίας, με τα δύο κυβικά μοντέλα των προηγούμενων κεφαλαίων ως επίσης και με τα πειραματικά αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι τα προσεγγιστικά μοντέλα παρουσιάζουν μεγαλύτερη απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και το μοντέλο Counto σε σχέση με τα δύο κυβικά μοντέλα που αναλύσαμε στο 8<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Προφανώς οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές οδήγησαν σ' αυτό το αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το  $E_c$  που αυξάνουν αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος. Το μοντέλο μας αποτελεί μια καλή και συνοπτική προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου  $d=150\mu\text{m}$  και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμα μας είναι ικανοποιητικό διότι είναι συμπαγές σαν τύπος και δίνει τιμές πολύ κοντά στις πειραματικές αλλά και σε αυτές των μοντέλων άλλων μεγάλων ερευνητών.

## 9.Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής $\alpha_c$

### 9.1 Θεωρητικός Υπολογισμός Θερμικής Διαστολής $\alpha_c$

Θεωρούμε και πάλι τα δύο σφαιρικά μοντέλα που περιγράφονται στο κεφάλαιο 4. Τα οκταφασικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από δύο περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 3 και 6) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 1,5 και 8). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2,4 και 7).

Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί  $E_2, E_4, E_7$  και  $\nu_2, \nu_4, \nu_7$  προσδιορίστηκαν στο κεφάλαιο 6 όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία του σύνθετου υλικού κατά  $\Delta T$ . Εξαιτίας αυτής της θερμοκρασιακής μεταβολής εμφανίζονται εσωτερικές τάσεις στο υλικό. Έστω  $P_6$  η πίεση που ασκείται στο σύνορο 7ης και 8ης φάσης. Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 7ης και 6ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_5$ , λόγω αλληλεπίδρασης 6ης και 5ης φάση, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_4$ , λόγω αλληλεπίδρασης 5ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_3$ , λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_2$ , λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 2ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_1$  και λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 1ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη  $P_0$ .

Οι παραμορφώσεις ως προς τη διεύθυνση  $\theta$  σύμφωνα και με τους προηγούμενους θεωρητικούς υπολογισμούς δίνονται από τους τύπους:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = -P_0(1-2\nu_1)$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon_{\phi 2} = \frac{-(P_1 - P_0)b^3 a^3 (1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{(a^3 P_0 - b^3 P_1)(1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2}$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \frac{-(P_2 - P_1)c^3 b^3 (1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{(b^3 P_1 - c^3 P_2)(1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3}$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \frac{-(P_3 - P_2)d^3c^3(1 + \nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^3} + \frac{(c^3P_2 - d^3P_3)(1 - 2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4}$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \frac{-(P_4 - P_3)e^3d^3(1 + \nu_5)}{2(e^3 - d^3)E_5} \frac{1}{r^3} + \frac{(d^3P_3 - e^3P_4)(1 - 2\nu_5)}{(e^3 - d^3)E_5}$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \frac{-(P_5 - P_4)f^3e^3(1 + \nu_6)}{2(f^3 - e^3)E_6} \frac{1}{r^3} + \frac{(e^3P_4 - f^3P_5)(1 - 2\nu_6)}{(f^3 - e^3)E_6}$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \frac{-(P_6 - P_5)g^3f^3(1 + \nu_7)}{2(g^3 - f^3)E_7} \frac{1}{r^3} + \frac{(f^3P_5 - g^3P_6)(1 - 2\nu_7)}{(g^3 - f^3)E_7}$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \frac{P_6g^3 \left[ h^3(1 + \nu_8) + 2r^3(1 - 2\nu_8) \right]}{2(h^3 - g^3)E_8r^3}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

Για  $r=a$  :  $\varepsilon_{\theta 1} = \alpha_1 \Delta T$

$r=b$  :  $\varepsilon_{\theta 2} = \alpha_2 \Delta T$

$r=c$  :  $\varepsilon_{\theta 3} = \alpha_3 \Delta T$

$r=d$  :  $\varepsilon_{\theta 4} = \alpha_4 \Delta T$

$r=e$  :  $\varepsilon_{\theta 5} = \alpha_5 \Delta T$

$r=f$  :  $\varepsilon_{\theta 6} = \alpha_6 \Delta T$

$r=g$  :  $\varepsilon_{\theta 7} = \alpha_7 \Delta T$

$r=h$  :  $\varepsilon_{\theta 8} = \alpha_8 \Delta T$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\varepsilon_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 1} = (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 3} - \varepsilon_{\theta 2} = (\alpha_3 - \alpha_2) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 4} - \varepsilon_{\theta 3} = (\alpha_4 - \alpha_3) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 5} - \varepsilon_{\theta 4} = (\alpha_5 - \alpha_4) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 6} - \varepsilon_{\theta 5} = (\alpha_6 - \alpha_5) \Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 7}-\varepsilon_{\theta 6}=(\alpha_7-\alpha_6)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 8}-\varepsilon_{\theta 7}=(\alpha_8-\alpha_7)\Delta T$$

Ισχύει :

$$U_1 = \frac{a^3}{h^3}$$

$$U_2 = \frac{b^3 - a^3}{h^3}$$

$$U_3 = \frac{c^3 - b^3}{h^3}$$

$$U_4 = \frac{d^3 - c^3}{h^3}$$

$$U_5 = \frac{e^3 - d^3}{h^3}$$

$$U_6 = \frac{f^3 - e^3}{h^3}$$

$$U_7 = \frac{g^3 - f^3}{h^3}$$

$$U_8 = \frac{h^3 - g^3}{h^3}$$

Ύστερα από πράξεις έχουμε :

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T = \frac{P_0 \left\{ (U_1 + U_2)(1 + \nu_2) + 2U_1(1 - 2\nu_2) \right\} E_1 + 2U_2(1 - 2\nu)E_2}{2U_2E_1E_2} - P_1 3(U_1 + U_2)(1 - \nu_2)E_1$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2)\Delta T = \frac{P_1 \left\{ U_2E_2 \left[ (U_1 + U_2 + U_3)(1 + \nu_3) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2\nu_3) \right] + \right.}{E_3U_3 \left[ U_1(1 + \nu_2) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2\nu_2) \right]} - P_0E_3U_3 3U_1(1 - \nu_2) - P_2E_2U_2 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - \nu_3)}{2U_3U_2E_2E_3}$$

$$(\alpha_4 - \alpha_3)\Delta T = \frac{P_2 \left\{ U_3E_3 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + \nu_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2\nu_4) \right] + \right.}{E_4U_4 \left[ (U_1 + U_2)(1 + \nu_3) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2\nu_3) \right]} - P_1E_4U_4 3(U_1 + U_2)(1 - \nu_3) - P_3E_3U_3 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - \nu_4)}{2U_4U_3E_4E_3}$$

$$(a_5 - a_4)\Delta T = \frac{P_3 \left\{ U_4 E_4 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_5) \right] + \right. \\ \left. E_5 U_5 \left[ (U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_4) \right] \right\} - P_2 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_4) - P_4 E_4 U_4 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_5)}{2U_5 U_4 E_5 E_4}$$

$$(a_6 - a_5)\Delta T = \frac{P_4 \left\{ U_5 E_5 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_6) \right] + \right. \\ \left. E_6 U_6 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_5) \right] \right\} - P_3 E_6 U_6 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_5) - P_5 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)}{2U_5 U_6 E_5 E_6}$$

$$(a_7 - a_6)\Delta T = \frac{P_5 \left\{ U_6 E_6 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + \right. \\ \left. E_7 U_7 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right] \right\} - P_4 E_7 U_7 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6) - P_6 E_6 U_6 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - v_7)}{2U_7 U_6 E_7 E_6}$$

$$(a_8 - a_7)\Delta T = \frac{P_6 \left\{ U_7 E_7 \left[ (1 + v_8) + 2(1 - U_8)(1 - 2v_8) \right] + \right. \\ \left. E_8 U_8 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_7) + 2(1 - U_8)(1 - 2v_7) \right] \right\} - P_5 E_8 U_8 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_7)}{2U_7 U_8 E_7 E_8}$$

Θέτω τους εξής συντελεστές :

$$A = \left[ (U_1 + U_2)(1 + v_2) + 2U_1(1 - 2v_2) \right] E_1 + 2U_2(1 - 2v_1)E_2$$

$$B = 3(U_1 + U_2)(1 - v_2)E_1$$

$$\Gamma = U_2 E_2 \left[ (U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_3) \right] + E_3 U_3 \left[ U_1(1 + v_2) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_2) \right]$$

$$\Delta = 3E_3 U_3 (U_1)(1 - v_2)$$

$$Z = 3E_2 U_2 (U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_3)$$

$$H = U_3 E_3 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_4) \right] + E_4 U_4 \left[ (U_1 + U_2)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_3) \right]$$

$$\Theta = 3E_4 U_4 (U_1 + U_2)(1 - v_3)$$

$$I = 3E_3 U_3 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_4)$$

$$K = U_4 E_4 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_5) \right] + E_5 U_5 \left[ \frac{(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_4)}{2} \right]$$

$$\Lambda = 3E_5 U_5 (U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_4)$$

$$M = 3E_4 U_4 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_5)$$

$$N = U_5 E_5 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_6) \right] + E_6 U_6 \left[ \frac{(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_5)}{2} \right]$$

$$\Xi = 3E_6 U_6 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_5)$$

$$O = 3E_5 U_5 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)$$

$$\Pi = U_6 E_6 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + E_7 U_7 \left[ (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right]$$

$$P = 3E_7 U_7 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6) \quad \Sigma = 3E_6 U_6 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - v_7)$$

$$Y = U_7 E_7 \left\{ [(1 + v_8) + 2(1 - U_8)(1 - 2v_8)] + E_8 U_8 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_7) + 2(1 - U_7)(1 - 2v_7) \right\}$$

$$\Phi = 3E_8 U_8 (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_7)$$

Άρα προκύπτει:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) 2\Delta T U_2 U_1 E_2 E_1 = AP_0 - BP_1 \quad (1)$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2) 2\Delta T U_2 U_3 E_2 E_3 = \Gamma P_1 - \Delta P_0 - ZP_2 \quad (2)$$

$$(\alpha_4 - \alpha_3) 2\Delta T U_3 U_4 E_4 E_3 = HP_2 - \Theta P_1 - IP_3 \quad (3)$$

$$(\alpha_5 - \alpha_4) 2\Delta T U_4 U_5 E_4 E_5 = KP_3 - \Lambda P_2 - MP_4 \quad (4)$$

$$(\alpha_6 - \alpha_5) 2\Delta T U_5 U_6 E_5 E_6 = NP_4 - \Xi P_3 - OP_4 \quad (5)$$

$$(\alpha_7 - \alpha_6) 2\Delta T U_6 U_7 E_6 E_7 = \Pi P_5 - PP_4 - \Sigma P_6 \quad (6)$$

$$(\alpha_8 - \alpha_7) 2\Delta T U_8 U_7 E_7 E_8 = YP_6 - \Phi P_5 \quad (7)$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει :

$$P_6 = \frac{2\Delta T}{Y - \frac{\Pi - \frac{\text{PO}}{\text{EM}}}{\text{N} - \frac{\text{LI}}{\text{K} - \frac{\Theta Z}{\text{H} - \frac{\Delta B}{\Gamma - \frac{A}}{P}}}}} \left\{ \begin{array}{l} (a_8 - a_7)U_7U_8E_7E_8 + \\ \frac{\Phi}{\text{PO}} ((a_7 - a_6)U_6U_7E_7E_6 + \\ \text{N} - \frac{\text{EM}}{\text{LI}} \\ \text{K} - \frac{\text{LI}}{\Theta Z} \\ \text{H} - \frac{\Theta Z}{\Delta B} \\ \Gamma - \frac{\Delta B}{A} \\ \text{P} \\ \frac{\text{EM}}{\text{LI}} ((a_6 - a_5)U_6U_5E_5E_6 + \\ \text{K} - \frac{\text{LI}}{\Theta Z} \\ \text{H} - \frac{\Theta Z}{\Delta B} \\ \Gamma - \frac{\Delta B}{A} \\ \Xi \\ \frac{\text{LI}}{\text{K} - \frac{\Theta Z}{\text{H} - \frac{\Delta B}{\Gamma - \frac{A}}{\Lambda}}}} ((a_5 - a_4)U_5U_4E_5E_4 + \\ \frac{\Lambda}{\Theta Z} ((a_4 - a_3)U_4U_3E_4E_3 + \\ \text{H} - \frac{\Theta Z}{\Delta B} \\ \Gamma - \frac{\Delta B}{A} \\ \frac{\Theta Z}{\Gamma - \frac{\Delta B}{A}} ((a_3 - a_2)U_2E_2E_3 + \frac{\Lambda}{A} (a_2 - a_1)U_2E_2E_1)))))) \end{array} \right\}$$

Και τελικά

$$\alpha_c = \alpha_8 - \frac{(P_6 h^3 3(1 - \nu_8))}{2(d^3 - c^3)E_8 \Delta T}$$



Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, το οποίο δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Όπως και στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο και εδώ χρησιμοποιούμε διαφορετικές μεταβολές του μέτρου ελαστικότητας, του λόγου Poisson και του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Για το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson ισχύουν οι ίδιες τιμές όπως στο κεφάλαιο 5 για το κάθε ένα από τα δύο οκταφασικά κυβικά μοντέλα.

Για τον συντελεστή θερμικής διαστολής για την δεύτερη ενδιάμεση φάση του κυβικού οκταφασικού μοντέλου 1, δηλαδή την τέταρτη φάση του οκταφασικού κυβικού μοντέλου 1 έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα για διαφορετική μεταβολή και διαφορετική επίδραση  $n$ . Θεωρούμε και πάλι την ενδιάμεση φάση σαν αλλοιωμένη μήτρα.

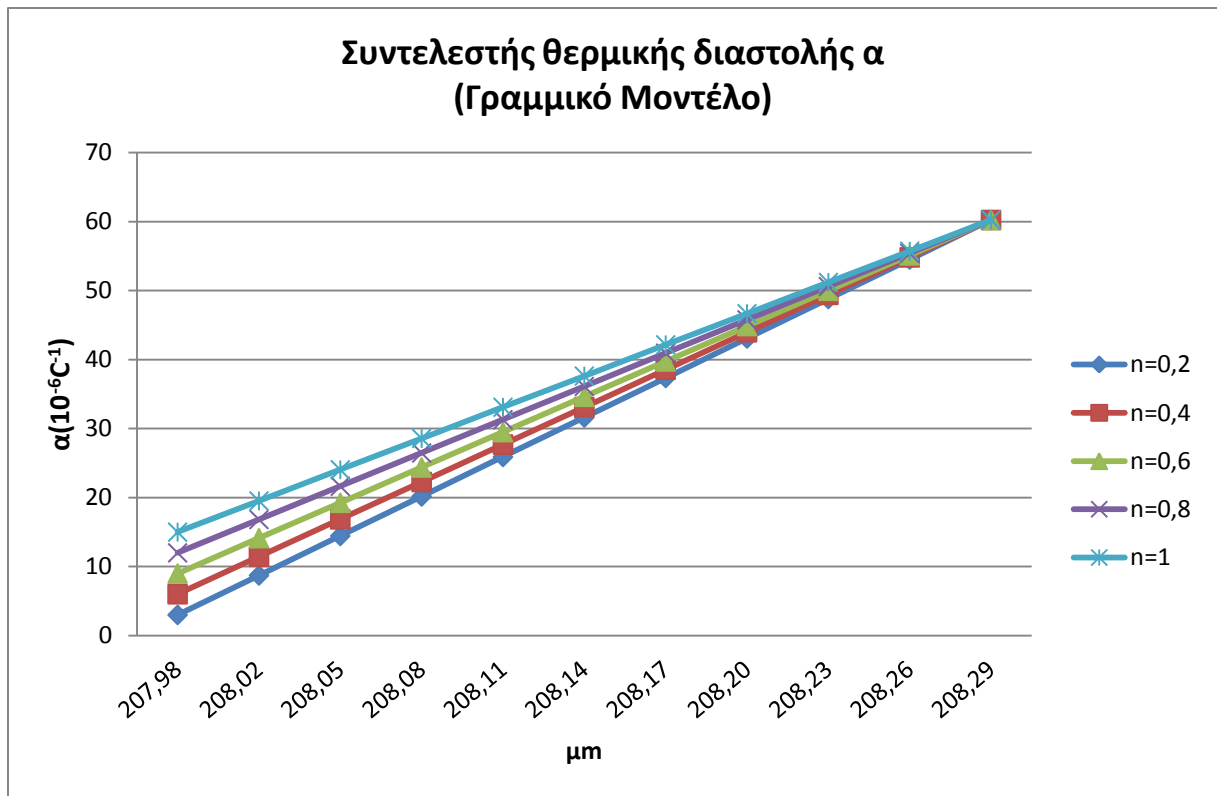
r ( $\mu\text{m}$ )	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	3	6	9	12	15
208,02	8,726	11,426	14,126	16,826	19,526
208,05	14,452	16,852	19,252	21,652	24,052
208,08	20,178	22,278	24,378	26,478	28,578
208,11	25,904	27,704	29,504	31,304	33,104
208,14	31,63	33,13	34,63	36,13	37,63
208,17	37,356	38,556	39,756	40,956	42,156
208,20	43,082	43,982	44,882	45,782	46,682
208,23	48,808	49,408	50,008	50,608	51,208
208,26	54,534	54,834	55,134	55,434	55,734
208,29	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

r ( $\mu\text{m}$ )	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	3	6	9	12	15
208,02	13,8794	16,3094	18,7394	21,1694	23,5994
208,05	23,6135	25,5336	27,4536	29,3736	31,2936
208,08	32,2026	33,6726	35,1426	36,6126	38,0826
208,11	39,6464	40,7264	41,8064	42,8864	43,9664
208,14	45,9449	46,695	47,445	48,195	48,945
208,17	51,0984	51,5784	52,0584	52,5384	53,0184
208,20	55,1066	55,3766	55,6466	55,9166	56,1866
208,23	57,9696	58,0896	58,2096	58,3296	58,4496
208,26	59,6874	59,7174	59,7474	59,7774	59,8074
208,29	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

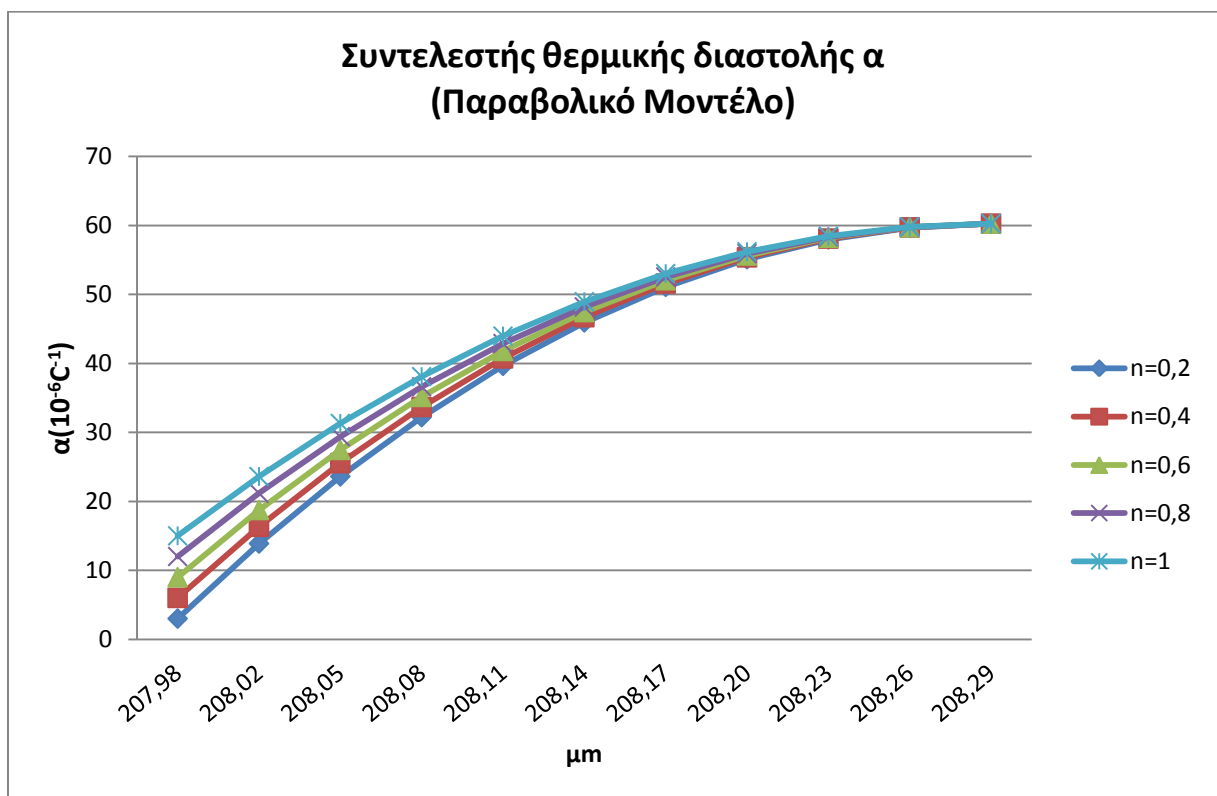
r ( $\mu\text{m}$ )	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Υπερβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	3	6	9	12	15
208,02	8,73369199	11,43328899	14,13289	16,83248	19,53208
208,05	14,46567261	16,86495627	19,26424	21,66352	24,06281
208,08	20,19594262	22,29500256	24,39406	26,49312	28,59218
208,11	25,92450279	27,7234286	29,52235	31,32128	33,12021
208,14	31,65135389	33,15023511	34,64912	36,148	37,64688
208,17	37,37649668	38,5754228	39,77435	40,97328	42,1722
208,20	43,09993192	43,99899242	44,89805	45,79711	46,69617
208,23	48,82166038	49,42094467	50,02023	50,61951	51,2188
208,26	54,54168282	54,84128029	55,14088	55,44048	55,74007
208,29	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

r ( $\mu\text{m}$ )	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	3	6	9	12	15
208,02	8,72984523	11,42964377	14,12944	16,82924	19,52903938
208,05	14,45883529	16,85847717	19,25812	21,65776	24,05740281
208,08	20,18697042	22,28650044	24,38603	26,48556	28,58509049
208,11	25,91425089	27,71371382	29,51318	31,31264	33,11210261
208,14	31,64067695	33,14011755	34,63956	36,139	37,63843937
208,17	37,36624885	38,56571189	39,76517	40,96464	42,16410099
208,20	43,09096685	43,99049705	44,89003	45,78956	46,68908767
208,23	48,81483121	49,4144733	50,01412	50,61376	51,21339959
208,26	54,53784217	54,83764087	55,13744	55,43724	55,73703697
208,29	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

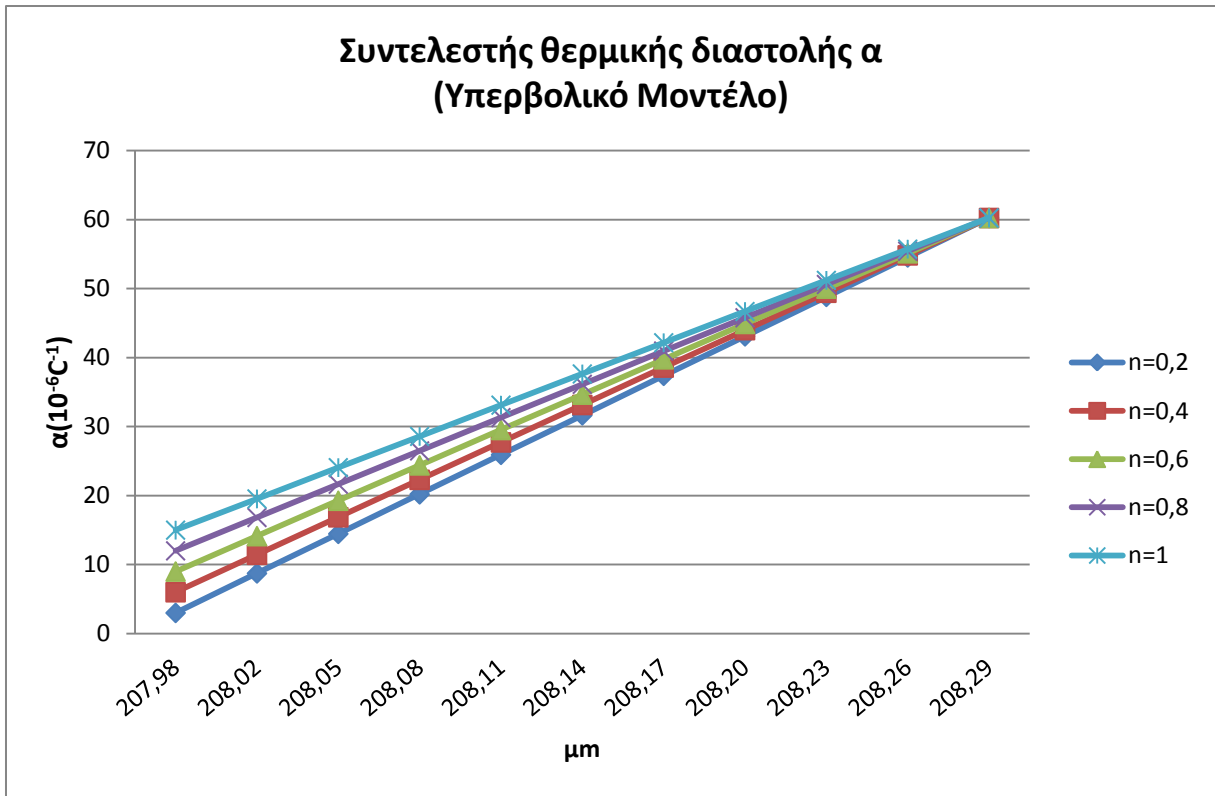
r ( $\mu\text{m}$ )	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$ (Εκθετικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
207,98	3	6	9	12	15
208,02	8,72984523	11,42964377	14,12944	16,82924	19,52903938
208,05	14,45883529	16,85847717	19,25812	21,65776	24,05740281
208,08	20,18697042	22,28650044	24,38603	26,48556	28,58509049
208,11	25,91425089	27,71371382	29,51318	31,31264	33,11210261
208,14	31,64067695	33,14011755	34,63956	36,139	37,63843937
208,17	37,36624885	38,56571189	39,76517	40,96464	42,16410099
208,20	43,09096685	43,99049705	44,89003	45,78956	46,68908767
208,23	48,81483121	49,4144733	50,01412	50,61376	51,21339959
208,26	54,53784217	54,83764087	55,13744	55,43724	55,73703697
208,29	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26



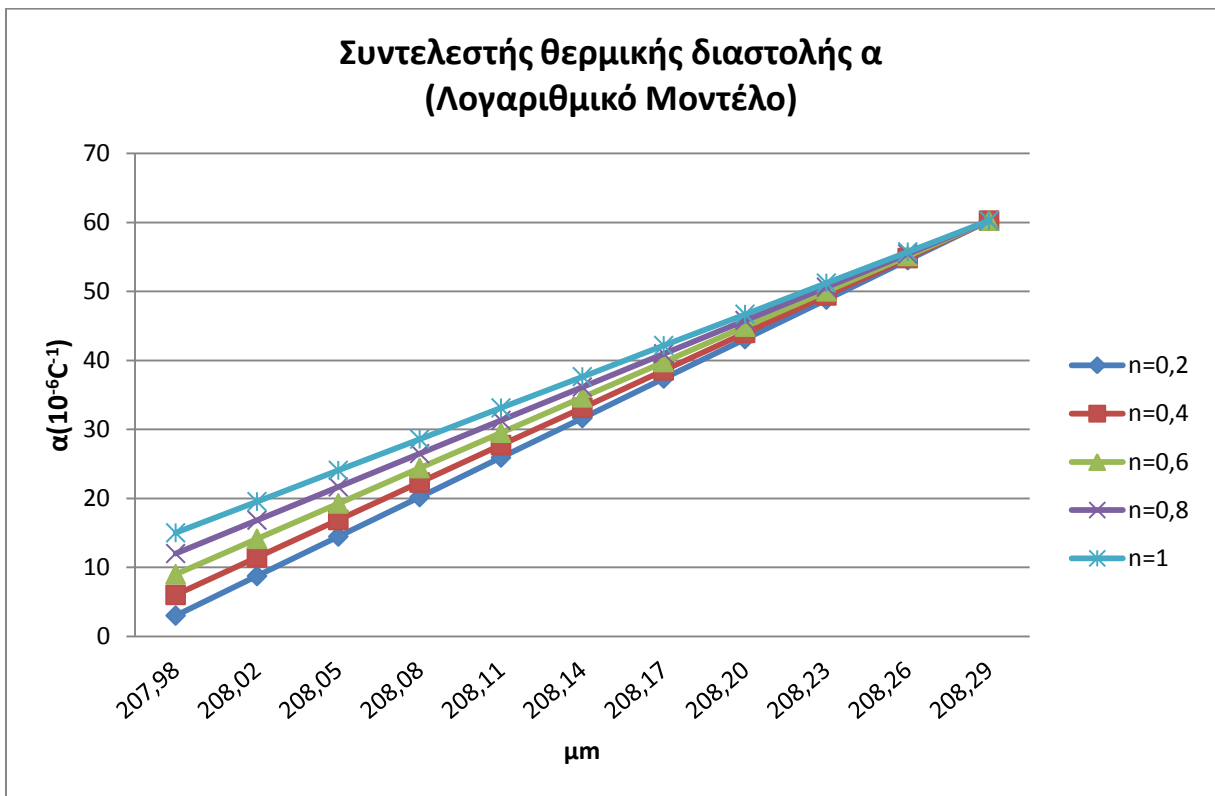
Διάγραμμα 9.1



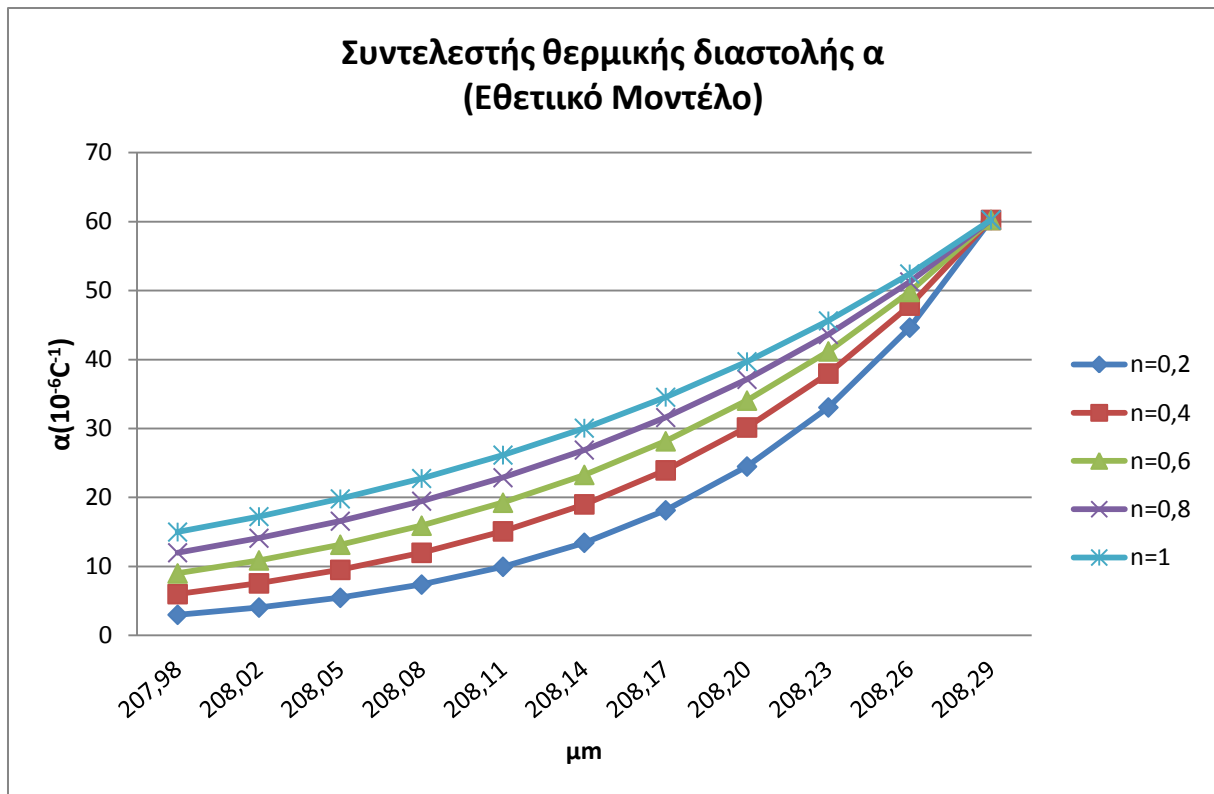
Διάγραμμα 9.2



Διάγραμμα 9.3



Διάγραμμα 9.4



Διάγραμμα 9.5

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε πως ο η τιμή του συντελεστή θερμικής διαστολής αυξάνεται ανάλογα με την ακτίνα. Αυτό είναι και αναμενόμενο διότι όσο αυξάνει η ακτίνα απομακρύνεται από την περιοχή του εγκλείσματος και φτάνει στην περιοχή της μήτρας .

## 9.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

### 9.2.1 Τύποι συντελεστή θερμικής διαστολής $\alpha_c$

Στις παρακάτω σχέσεις το σύμβολο  $\gamma$  εκφράζει το συντελεστή κυβικής διαστολής ο οποίος για ένα ομογενές και ισότροπο υλικό, συνδέεται με το συντελεστή γραμμικής διαστολής  $\alpha$  με τη σχέση

$$\gamma = 3\alpha$$

#### Εξίσωση Kerner[56]:

$$\gamma_c = U_f \gamma_f + U_m \gamma_m + U_m \nu_f (\gamma_m - \gamma_c) q$$

Όπου η παράμετρος  $q$  δίνεται από τη σχέση :

$$q = \frac{\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f}}{\frac{U_f}{K_f} + \frac{U_m}{K_m} + 3 \frac{1}{4G_m}}$$

Και  $K$  το μέτρο διόγκωσης.

#### Εξίσωση Blackburn[57]:

$$\gamma_c = \gamma_f + \frac{\frac{3}{2}(1-\nu_f)U_m(\gamma_m - \gamma_f)}{\frac{1}{2}(1+\nu_f) + U_m(1-2\nu_f) + (1-2\nu_m)\frac{E_f}{E_m}U_f}$$

#### Εξίσωση Tummala-Friedberg[58]:

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$



Όπου

$$q = \frac{\frac{1 + \nu_m}{2E_m}}{\frac{1 + \nu_m}{2E_m} + \frac{1 - 2\nu_f}{E_f}}$$

**Εξίσωση Wang-Kwei[59]:**

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$

Όπου

$$q = \frac{\frac{3E_f}{E_m} U_f}{\frac{E_f}{E_m} [2U_f(1 - 2\nu_m) + (1 + \nu_m)] + 2U_m(1 - 2\nu_f)}$$

**Εξίσωση Turner[60]:**

$$\gamma_c = \frac{U_m \gamma_m k_m + U_f \gamma_f k_f}{U_m k_m + U_f k_f}$$

**Εξίσωση Fahmi-Ragai[61]:**

$$a_c = a_m - \frac{3U_f(a_m - a_f)(1 - \nu_m)}{2(1 - 2\nu_f)(1 - U_f) \frac{E_m}{E_f} + 2U_f(1 - 2\nu_m) + (1 + \nu_m)}$$

## 9.2.2 Εφαρμογή των Μοντέλων και των Θεωρητικών Σχέσεων

Η εφαρμογή των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα κοκκώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη και κόκκους σιδήρου.

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των παραπάνω υλικών παρατίθενται στον παρακάτω Πίνακα.

### Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	$\lambda$	$N/m^2$	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$
	$\mu$	$N/m^2$		$1,30 \times 10^9$
	$M$			
Μέτρο Ελαστικότητας	$E$	$N/m^2$	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	$K$	$N/m^2$	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	$\nu$	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	$\rho$	$gr/cm^3$	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	$a$	$C^{-1}$	$15,00 \times 10^{-6}$	$60,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 9.1

Η διάμετρος των σφαιρικών εγκλεισμάτων σιδήρου είναι ίση με  $150\mu m$ , άρα λοιπόν η ακτίνα  $r_f$ , της οποίας η τιμή απαιτείται στους υπολογισμούς είναι:

$$r_f = 75\mu m$$

Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

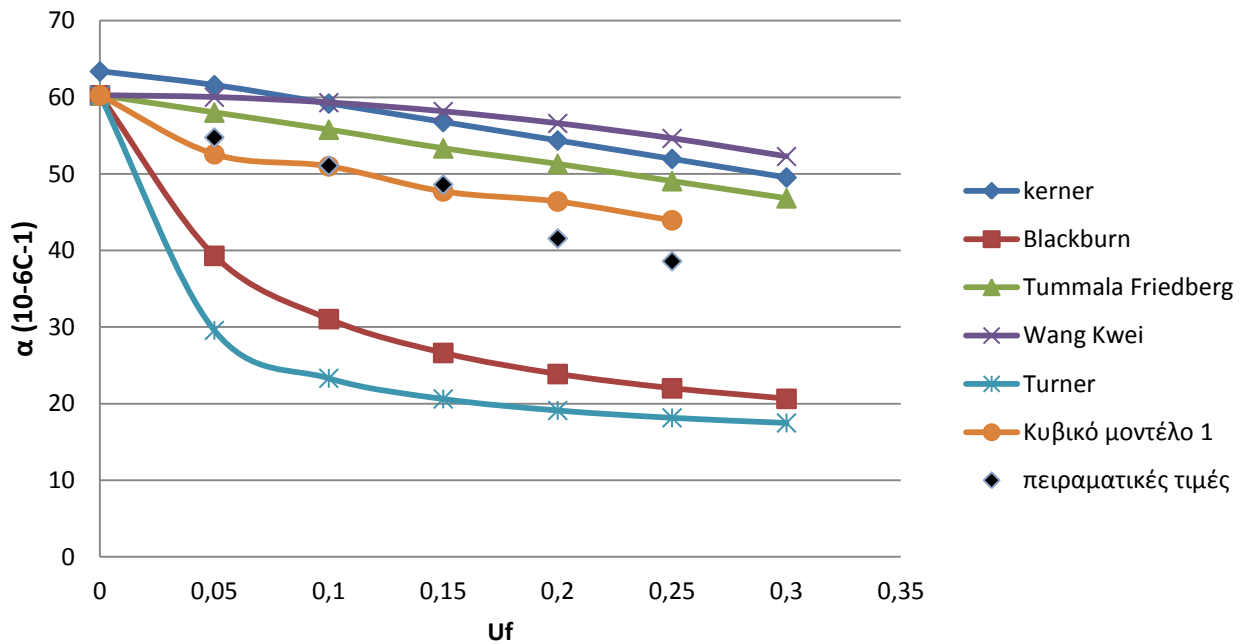
$U_f$	Κυβικό Μοντέλο 1 $\alpha(10^{-6}C^{-1})$	Κυβικό Μοντέλο 2 $\alpha(10^{-6}C^{-1})$
<b>0,05</b>	52,57729397	49,05585333
<b>0,1</b>	51,00058411	52,04357414
<b>0,15</b>	47,72110087	52,66967153
<b>0,2</b>	46,40545075	-447,4782858
<b>0,25</b>	43,95051271	46,90375567

Πίνακας 9.2

$\alpha (10^{-6}C^{-1})$	Κατ' όγκον περιεκτικότητα $U_f$						
	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
<b>Kerner</b>	63,39	61,59	59,19	56,78	54,37	51,96	49,54
<b>Blackburn</b>	60,26	39,31	31,05	26,63	23,88	22,01	20,64
<b>Tummala Friedberg</b>	60,26	58,02	55,78	53,34	51,30	49,06	46,82
<b>Wang-Kwei</b>	60,26	60,02	59,31	58,16	56,60	54,64	52,28
<b>Turner</b>	60,26	29,58	23,32	20,62	19,12	18,16	17,49
<b>Fahmi-Ragai</b>	60,26	57,16	54,18	51,31	48,54	45,88	42,01
<b>Πειραματικά αποτελέσματα</b>	-	54,76	51,09	48,61	41,57	38,6	-

Πίνακας 9.3

### Σύγκριση διαφορετικών σχέσεων για τον υπολογισμό του θερμικού συντελεστή διαστολής $\alpha_c$



Διάγραμμα 9.6

Το διάγραμμα 9.6 αποτελεί τον πυρήνα αυτού του κεφαλαίου. Είναι η γραφική παράσταση του κυβικού μοντέλου 1 σε σχέση με διαγράμματα που έχουν προτείνει στο παρελθόν σπουδαίοι επιστήμονες.

Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το  $\alpha_c$  που μειώνονται αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλεισματος.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάποια μοντέλα άλλων ερευνητών έχουν μεγάλη απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Τη μεγαλύτερη απόκλιση την παρουσιάζει το μοντέλο του Turner και ακολουθείται από το μοντέλο του Blackburn. Το μοντέλα Kerner και Tummala Friedberg δίνει καλύτερα αποτελέσματα όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο προκύπτει το κυβικό μοντέλο 1 που αναπτύξαμε σε αυτή την εργασία για το υλικό αυτό.

Το κυβικό μοντέλο 1 αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου  $d=150\mu\text{m}$  και μήτρα εποξειδική ρητίνη, σε αντίθεση με το κυβικό μοντέλο 2 που αναπτύξαμε το οποίο δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε και εδώ από τη στατιστική τον δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ερευνητής	r (%)
Fahmi-Ragai	0,9821
Tummala Friedberg	0,9668
Kerner	0,9422
Wang-Kwei	0,9298
Blackburn	0,2102
Turner	0,1203
<b>Κυβικό μοντέλο 1</b>	<b>0,9907</b>

Πίνακας 9.7

Και εδώ βλέπουμε πως το κυβικό μοντέλο 1 έχει τον μεγαλύτερο δείκτη προσαρμογής από όλα τα υπόλοιπα θεωρητικά μοντέλα όπως παρατηρήσαμε και παραπάνω στο διάγραμμα.

### 9.3 Γενικά συμπεράσματα

Σ' αυτήν την εργασία έγινε η θεωρητική μελέτη προσδιορισμού του μέτρου ελαστικότητας , του λόγου Poisson και του συντελεστή θερμικής διαστολής κοκκώδους σύνθετου υλικού λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κόκκων αλλά και της ενδιάμεσου φάσεως.

Για το σκοπό αυτό θεωρήσαμε ότι η κατανομή των εγκλεισμάτων στο χώρο , εν σχέσει με τη μήτρα είναι συγκεκριμένη και μοντελοποιείται με τη μορφή κύβου με δύο πιθανούς τρόπους ενώ θεωρήσαμε και την ύπαρξη μιας τρίτης φάσης (εκτός της μήτρας και των εγκλεισμάτων) η οποία συνδυάζει χαρακτηριστικά και των δυο άλλων φάσεων και καλείται ενδιάμεση φάση (*Interface*). Έπειτα αντιστοιχίσαμε το κυβικό μοντέλο σε αντίστοιχο σφαιρικό ώστε να απλουστευτούν οι υπολογισμοί.

Αρχικά υπολογίσαμε τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης  $E_i$  που έδινε το καθένα από τα δύο κυβικά μοντέλα και συγκρίναμε τα αποτελέσματα που έδωσε το κάθε μοντέλο. Έπειτα υπολογίσαμε το μέτρο ελαστικότητας , τον λόγο Poisson και τον συντελεστή θερμικής διαστολής του σύνθετου υλικού  $E_c, \nu_c$  και  $\alpha_c$  όπως αυτό προέκυψε από τη διαφορετική τιμή του  $E_i$  που έδωσε το κάθε κυβικό μοντέλο και συγκρίναμε τα αποτελέσματα τόσο μεταξύ τους, όσο και με πειραματικά δεδομένα αλλά και με αποτελέσματα άλλων επιστημόνων.

Το μέτρο ελαστικότητας που υπολογίσαμε από τα δύο κυβικά μοντέλα που αναπτύξαμε δίνουν απόλυτα ικανοποιητικές τιμές οι οποίες βρίσκονται πολύ κοντά στις πειραματικές και σε αυτές που δίνει η θεωρητική σχέση του Counto που θεωρείται ως η καλύτερη. Ο συντελεστής θερμικής διαστολής που υπολογίστηκε από το κυβικό μοντέλο 1 που αναπτύξαμε έχει την καλύτερη σύγκλιση εν συγκρίσει με τα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών ως προς τις πειραματικές τιμές που είχαμε στην διάθεση μας.

Αντιθέτως, οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές δεν ευνόησαν το προσεγγιστικό μοντέλο που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson του κοκκώδους σύνθετου υλικού το οποίο παρ' ότι συμπαγές και συντομότερο είχε μέτρια σύγκλιση με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και με το μοντέλο Counto.

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τα αποτελέσματα από τα διάφορα μοντέλα που αναπτύξαμε.

$U_f$	Κυβικό Μοντέλο 1		Κυβικό Μοντέλο 2		Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 1	Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές Τιμές	
	$E_c$	$\alpha_c$	$E_c$	$\alpha_c$	$E_c$	$E_c$	$E_c$	$\alpha_c$
<b>0,05</b>	4,83	52,58	4,89	49,05	3,778	3,735	4,33	54,76
<b>0,1</b>	5,55	51,00	5,56	52,04	4,095	3,999	4,86	51,09
<b>0,15</b>	6,19	47,77	6,16	52,67	4,491	4,327	5,24	48,61
<b>0,2</b>	6,78	46,40	6,73	-447,4	4,930	4,682	6,37	41,57
<b>0,25</b>	7,65	43,95	7,60	46,90	5,644	5,260	7,07	38,6

Πίνακας 9.8

## **BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill (1983).
2. Counto, Mag. Concr. Res 16 (1964) 129.
3. Paul, Trans Amer. Inst. Mech. Eng. 36 (1960) 218.
4. A. Einstein, "Über die von Molekularkinetischen theorie der. Warme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann Physic, Vol. 17, p. 549, (1905), "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Ann Physic, Vol 19, p. 289, (1906), "Berichtigung zu meiner Arbeit Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Vol. 34, p. 591, (1911).
5. Guth, J. Appl. Phys 15 (1945) 20.
6. H. M. Smallwood, "Limiting Law of the Reinforcement of Rubber", Jnl. Appl. Phys, Vol. 15, pp. 758-762, (1944).
7. E. H. Kerner, "The Elastic and Thermoelastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. 698, pp. 808-813, (1956).
8. K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa and K. Tanaka, "Analysis of the 10. Effect of Intefacial Slippage on the Elastic Moduli of a Particle - Filled 11. Polymer", Jnl. Pol. Phys. Ed., Vol. 16, pp. 415-421, (1978).
9. M Mooney, "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical 13. Particles", Jnl. Colloid Sci. Vol. 6, pp. 162-169, (1951).
10. H. Eilers and Van Dyck, kolloid Z, Vol. 97, pp. 313-318, (1941).
11. P. S. Theocharis, "The Mesophase and its influence on the Mechanical 16. Behaviour of Composites", Advances in Polymer Science 66, Springer - 17. Verlag Berlin, pp. 149-186, (1985).
12. P. S. Theocharis, "The Adhesion Quality and the Extent of the Mesophase in Particulates", Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 204 2331, (1984).
13. P. S. Theocharis and E. Sideridis, Journal of Applied Polymer Science, 20. Vol. 29, 2997-3011 (1984).
14. Z. Hashin and B. W. Rosen, J. Appl. Mech. 31 (1964) 223.
15. R. Hill, J. Mech, Phys. Solids 13 (1965) 213.
16. T .Lewis and L. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 14 (1970) 1449.
17. F. Bueche, "Molecular Basis for the Mullins Effect", Jnl. Appl. Polym. Sci., Vol. 4, pp. 107-114,(1960).
18. A. M. Bueche, J. Polym. Sci. 25 (1957) 139.
19. T. T. Wu, Int. J. Solids Struc. 2 (1966) I.
20. T. S. Chow, J. Polym. Phys. 16 (1978) 959.
21. S. Ahmed and F. R. Jones, Composites 19 (1988) 277.
22. R. A. Dickie, J. Appl. Polym. Sci., 17 (1973) 454.
23. R. M. Christensen, "Mechanics of Composite Materials", (Wiley New York, 1979).
24. Y. Sato and Furukawa, "A Molecular Theory of Filler Reinforcement

32. based upon the conception of the internal Deformation”, Rubber Chem. Technol., Vol. 35, pp. 857-862, (1962).
33. J. Spanoudakis and R. J. Young, J. Mater. Sci. 19 (1984) 487.
34. L. E. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 10 (1966) 97.
35. J. Broutman and R. H. Krock, “Modern Composite Materials” (Addison Wesley), Reading, Mass, (1967).
36. L. F. Nielsen, J. Compos. Mater. 1 (1967) 100.
37. L. Nicolais and M. Narkis, *ibid* 11 (1971) 194.
38. M. R. Piggott and J. Leidner, J. Appl. Polym. Sci. 18 (1974) 1619.
39. G. Landon, G. Lewis and G. Boden, J. Mater. Sci. 12 (1977) 1605.
40. J. Leidner and R. T. Woodhams, J. Appl. Polym. Sci. 18 (1974) 1639.
41. H. Hojo and W. Toyoshima, 31st ANTEC, SPE Montreal, Canada (1973)
42. (Technomic, 1973), p. 163.
43. H. Hojo, W. Tanura and N. Kawanura, Polym. Eng. Sci. 14 (1974) 604.
44. M. Schragger, Jnl, Appl. Pol. Sci., Vol 32, p 2379 (1978)
45. Passmore, J. Appl. Polym. Sci., 17 (1989).
46. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, J. Appl. Polym. Sci., 18, p. 1213 (1974).
47. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, Adsorption of Polymer, New York, (1974).
48. Yu.S. Lipatov, Plaste Kautschuk, 10, p. 738 (1973).
49. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, Vysokomol, Soedin, B10, p. 848 (1968).
50. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, Vysokomol, Soedin, 8, p. 592, (1966).
51. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, J. Appl. Polym. Sci., 16, p. 2131 (1972).
52. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787 (1976).
53. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239 (1979).
54. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, p. 1044 (1980).
55. R.F. Landel and T.L. Smith, American Rocket Society Jnl., p. 599 (1961).
56. S. Turner, Appl. Mat. Res., p. 10, (1965).
57. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143 (1965).
58. C.A. Kumins and J. Roteman, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527 (1963).
59. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689 (1977).
60. S. Strella and P.F. Erhardt, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373 (1969).
61. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 569 (1963).
62. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 1281 (1963).
63. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).



66. Yu.S. Lipatov, Physical Chemistry of Filled Polymers, Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No 2, Originally Published "Khimiya", Moscow, (1977).
67. Γ.Ι. Τσαμασφύρος, Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι, Εκδόσεις Συμμετρία 1991
68. Kerner E.H.,(1956),Proc.Phys.Soc. 69B:808
69. Artur C.,Coulson JA,(1964), J.Appl.Phys. 11:5104
70. Tummala RR.,Friedberg AL.,(1970),J. Appl.Phys. 11:5104
71. Wang TT., Kwei TK.,(1969) J.Polym.Sc.A-2, 7:889.
72. Turner PS, (1946) J. Res.NBS 37:239.
73. Fahmi AA.,Ragai Al.,(1970)J.Appl. Phys. 41:5108.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αιμίλιο Σιδερίδη για την υποδειγματική συνεργασία και για την άριστη επιστημονική καθοδήγηση κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την υποστήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.