



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ Μ.Κ. & Α.Ε.  
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΔΟΥΦΟΡΟΥ-ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ  
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟ ΧΩΡΙΣ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΟΦΕΛΟΥΣ  
ΕΞΟΙΚΟΝΟΜΗΣΗΣ ΠΡΩΘΗΤΙΚΟΥ ΚΑΥΣΙΜΟΥ**

Στυλιανός Γ. Ανδρέου

*Επιβλέπων Καθηγητής: Ε. Γ. Παπαδόπουλος*

ΑΘΗΝΑ 2012

*Χόρευε πάνω στο φτερό του καρχαρία...*

*N. Καββαδίας*

## Περίληψη

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Εργασία πραγματεύεται τη δυναμική ανάλυση του συστήματος δορυφόρος-στρεφόμενο προσάρτημα. Το σύστημα που φέρει εννέα (9) βαθμούς ελευθερίας αναλύεται αρχικά ως ένα θεωρητικό δυναμικά συζευγμένο σύστημα δυο στερεών σωμάτων. Οι εξισώσεις κίνησης του εξάγονται αναλυτικά με την μέθοδο της διαφορικής σχέσης των Euler-Lagrange και ολοκληρώνονται αριθμητικά στο περιβάλλον του MatLab/Simulink. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχο μοντέλο που καταστρώνεται στο λογισμικό δυναμικής προσομοίωσης MSC Adams και πραγματοποιούνται οι μεταξύ τους συγκρίσεις.

Ακολούθως, γίνεται το πέρασμα στην τεχνολογική υλοποίηση του θεωρητικού μοντέλου που πλέον παριστά σύστημα δορυφόρου και στρεφομένου προσαρτήματος. Γίνεται παρουσίαση και ανάλυση δυο τέτοιων συστημάτων, όπου το μεν πρώτο αφορά δορυφόρο και προσάρτημα-κεραία με τυπικό μηχανισμό κίνησης, ενώ το δεύτερο φέρει τον αντίστοιχο μηχανισμό που έχει σχεδιαστεί στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου του ΕΜΠ και δύναται να λειτουργεί χωρίς μεταφορά αντιδράσεων. Για τα δυο συστήματα υπολογίζονται οι δυναμικές τους εξισώσεις, προσομοιώνονται και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα μοντέλα του MSC Adams.

Τέλος, το προσάρτημα καλείται να εκτελέσει κάποια κίνησης κατάδειξης στόχου. Προς τούτο, ευρίσκεται η κατάλληλη τροχιά που το οδηγεί στο σωστό προσανατολισμό και εφαρμόζεται αναλογο-διαφορικός έλεγχος με βάση το δυναμικό μοντέλο, τέτοιος ώστε να προσδίδει την απαιτούμενη ροπή κίνησης. Οι αντιδράσεις που αναπτύσσονται κατά την κίνηση αυτή επάγονται στο φέροντα δορυφόρο και τον διαταράσσουν, γι' αυτό μελετώνται τρία είδη εξισορρόπησης του: (i) άμεση εξισορρόπηση με προωθητές, (ii) εξισορρόπηση μετά το πέρας των διαταραχών με προωθητές και (iii) εξισορρόπηση με σφονδύλους αντίδρασης. Η μελέτη εστιάζει στη δυνατότητα χρήσης του μηχανισμού κίνησης χωρίς αντιδράσεις και στην εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου που αυτός θα επέφερε εάν χρησιμοποιείτο έναντι των τυπικών μηχανισμών κίνησης.

# Abstract

This Master Thesis deals with the dynamic analysis of the satellite-rotating appendage system. The system which is described by its nine (9) degrees of freedom is first theoretically analyzed as a multibody dynamic system concerning two rigid bodies attached at a common point. The governing equations are extracted analytically by employing the Euler-Lagrange methodology and are numerically integrated via MatLab / Simulink. The obtained results are then compared to the corresponding model obtained in the dynamic simulation software MSC Adams and comparisons between them are done.

Subsequently, the theoretical model gives place to its technological implementation which is defined as a satellite and a rotating appendage attached to it. Two such systems are considered and analyzed. The first one implements a satellite and a typically driven rotating antenna, while the second carries the corresponding reactionless mechanism which was designed at NTUA's Control Systems Lab. For both systems, their dynamic equations are derived, simulated and compared to the MSC Adams corresponding models.

Finally, the rotating appendage is set to perform a pointing motion. Thus, appropriate trajectory planning is accomplished and a Proportional-Differential model based controller is implemented in order to provide the required joint torques. The reactions which occur during pointing are transmitted to the satellite and its attitude is changed. To tackle this effect three types of satellite stabilization are studied: (i) real time stabilization with thrusters, (ii) stabilization with thrusters upon disturbances end (iii) stabilization with reaction wheels. The study focuses on the possibility of employing this reactionless mechanism and studies the propellant savings that would be obtained in contrast with typical actuators.

## Ευχαριστίες

Πρώτιστα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Ε. Παπαδόπουλο για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο συναρπαστικό αντικείμενο όπως είναι το διάστημα και ιδιαίτερα, με την έντονα απαιτητική δυναμική ανάλυση που κρύβεται πίσω απ' αυτό. Η ανταλλαγή απόψεων, οι συμβουλές και οι καίριες υποδείξεις του κατά τις εβδομαδιαίες συναντήσεις μας υπήρξαν εξαιρετικά εκπαιδευτικές και συνέτειναν καταλυτικά στην ολοκλήρωση της ανά χείρας μεταπτυχιακής εργασίας.

Θερμές ευχαριστίες οφείλω επίσης να εκφράσω και στους συναδέλφους μου στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου. Η άψογη συνεργασία μας, η βοήθεια τους αλλά και η καλή τους παρέα κατέστησαν την καθημερινή δουλειά στο εργαστήριο παραγωγική και συνάμα εξαιρετικά ευχάριστη.

Τέλος, οι μεγαλύτερες των ευχαριστιών μου απευθύνονται στην οικογένεια μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, που για όλα αυτά τα χρόνια τους στερήσα πολλά προκειμένου να περηγηθώ στο δύσβατο δρόμο της εκπαίδευσης. Οι προσπάθειες τους υπήρξαν άοκνες και η παρούσα εργασία αφιερώνεται σ' αυτούς.

# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	3
Abstract.....	4
Ευχαριστίες.....	5
Περιεχόμενα.....	6
Κατάλογος Σχημάτων .....	9
Κατάλογος Πινάκων.....	12
Κατάλογος Συμβόλων.....	13
<b>1 Εισαγωγή .....</b>	<b>15</b>
1.1 Σκοπός εργασίας .....	17
1.5 Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	18
1.6 Δομή εργασίας .....	19
<b>2 Κινηματική, δυναμική και τεχνολογίες διαστημικών εφαρμογών .....</b>	<b>21</b>
2.1 Θέση και προσανατολισμός στερεού σώματος.....	22
2.2 Διαφορική κινηματική και στατική .....	25
2.2.1 Γωνιακή ταχύτητα.....	26
2.2.2 Γραμμική ταχύτητα .....	27
2.2.3 Ιακωβιανή και συσχέτιση κινηματικής-στατικής.....	28
2.3 Δυναμική στερεών σωμάτων .....	30
2.4 Δυναμική συμπεριφορά δορυφόρων και τεχνολογίες σταθεροποίησης .....	34
2.5 Μηχανισμοί κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων .....	37
<b>3 Δυναμική Ανάλυση Ελεύθερα Αιωρούμενου Σώματος με Στρεφόμενο Προσάρτημα .....</b>	<b>40</b>
3.1 Δυναμική κατά Lagrange.....	41
3.2 Υλοποίηση στο MatLab/Simulink .....	45
3.3 Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams .....	47

3.4	Ανάπτυξη εικονικής προσομοίωσης μέσω MatLab 3D animation .....	52
<b>4</b>	<b>Εφαρμογή Δυναμικής Ανάλυσης σε Δορυφόρο με Στρεφόμενο</b>	
	<b>Προσάρτημα .....</b>	<b>54</b>
4.1	Δυναμική συστήματος δορυφόρος - τυπικά επενεργούμενο στρεφόμενο προσάρτημα (ΤΕΣΠ).....	55
4.1.1	Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams για σύστημα δορυφόρος-ΤΕΣΠ .....	58
4.2	Δυναμική συστήματος δορυφόρος - επενεργούμενο χωρίς μεταφορά αντιδράσεων στρεφόμενο προσάρτημα (ΕΧΜΑΣΠ) .....	64
4.2.1	Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams για σύστημα δορυφόρος-ΕΧΜΑΣΠ.....	67
<b>5</b>	<b>Οδήγηση Προσαρτήματος.....</b>	<b>73</b>
5.1	Εξαγωγή επιθυμητών γωνιών στροφής από διάνυσμα στόχο .....	74
5.2	Σχεδιασμός τροχιάς .....	76
5.3	Έλεγχος προσαρτήματος βασιζόμενος στο δυναμικό του μοντέλο .....	78
5.3.1	Εφαρμογή ελέγχου σε υπο-επενεργούμενο προσάρτημα.....	81
<b>6</b>	<b>Έλεγχος προσανατολισμού δορυφόρου και εξοικονόμηση</b>	
	<b>προωθητικού καυσίμου.....</b>	<b>87</b>
6.1	Έλεγχος Bang - Bang με προωθητές.....	87
6.1.1	Επαναφορά δορυφόρου κατά την διάρκεια διαταραχών .....	89
6.1.2	Επαναφορά δορυφόρου μετά την διαταραχή .....	94
6.2	Έλεγχος με σφονδύλους αντίδρασης.....	97
6.2.1	Αρχική διαστασιολόγηση σφονδύλων.....	98
6.2.2	Απόρριψη στροφορμής σφονδύλων.....	101
<b>7</b>	<b>Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία .....</b>	<b>106</b>
7.1	Συμπεράσματα.....	106
7.2	Μελλοντική Εργασία.....	107
	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>108</b>
	<b>Παράρτημα Α .....</b>	<b>111</b>
	Αναλυτικός υπολογισμός ολικής κινητικής ενέργειας .....	111

<b>Παράρτημα Β</b> .....	<b>114</b>
Υπολογισμός όρου $C_2 = \frac{\partial T_{tot}}{\partial \mathbf{q}}$ .....	114
<b>Παράρτημα Γ</b> .....	<b>117</b>
Αναλυτικός υπολογισμός γενικής δυναμικής εξίσωσης στο Maple.....	117
<b>Παράρτημα Δ</b> .....	<b>128</b>
Συναρτήσεις επίλυσης MatLab.....	128



# Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1-1: Εξέλιξη των καταγεγραμμένων διαστημικών απορριμμάτων [12]. .....	16
Σχήμα 2.1-1: (α) Θέση και προσανατολισμός στερεού σώματος (β) στοιχειώδης περιστροφή γύρω από τον άξονα $z$ . .....	22
Σχήμα 2.1-2: Γωνίες στροφής Euler κατά $x$ - $y$ - $z$ . .....	25
Σχήμα 2.2-1: (α) Στιγμαία στροφή πλαισίου $\{I\}$ ως προς $\{O\}$ , (β) Στιγμαία κίνηση Σώματος 1 ως προς το πλαίσιο $\{O\}$ .....	26
Σχήμα 2.4-1: Διάγραμμα συστήματος ελέγχου δορυφόρων. ....	35
Σχήμα 2.4-2: Δορυφόρος σταθεροποιούμενος σε 3-άξονες. ....	36
Σχήμα 2.5-1: Μηχανισμός κίνησης κεραίας HGAMA του δορυφόρου Rosetta.....	37
Σχήμα 2.5-2: Μηχανισμός κίνησης κεραίας (α) τύπου $az-e/$ και (β) τύπου $x-y$ . [7] .....	38
Σχήμα 2.5-3: (α) Ολική κατασκευαστική διαμόρφωση και (β) σύστημα επενεργητών μηχανισμού κίνησης κεραίας χωρίς αντιδράσεις ΕΑΕ-ΕΜΠ. ....	38
Σχήμα 3.1-1: Γενική περίπτωση συστήματος 9 β.ε.....	40
Σχήμα 3.2-1. Υλοποίηση δυναμικού συστήματος στο Simulink. ....	46
Σχήμα 3.3-1: Δυναμικό μοντέλο στο MSC Adams.....	48
Σχήμα 3.3-2: Ροπές επενέργειας στο Σώμα 2 - είσοδοι .....	49
Σχήμα 3.3-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams.....	50
Σχήμα 3.3-4: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams.....	50
Σχήμα 3.3-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams ..	51
Σχήμα 3.3-6: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams ..	51
Σχήμα 3.4-1: Simulink μοντέλο για εικονική απεικόνιση. ....	52
Σχήμα 3.4-2: Το εικονικό περιβάλλον κίνησης του συστήματος.....	53
Σχήμα 3.4-3: Στιγμιότυπο ταυτόχρονης απεικόνισης των δυο animation.....	53
Σχήμα 4-1: Σύστημα Δορυφόρου-Στρεφόμενου Προσαρτήματος (κεραία).....	54
Σχήμα 4.1-1: Τυπικός μηχανισμός χονδρικής οδήγησης κεραίας. ....	55
Σχήμα 4.1-2: Διάγραμμα ελευθέρου σώματος για σύστημα με μεταφορά αντιδράσεων διαμέσου της άρθρωσης τους. ....	57

Σχήμα 4.1.1-1: Δυναμικό μοντέλο <i>δορυφόρος-ΤΕΣΠ</i> στο MSC Adams.....	59
Σχήμα 4.1.1-2: Ροπές επενέργειας στο <i>ΤΕΣΠ</i> - είσοδοι.....	60
Σχήμα 4.1.1-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	61
Σχήμα 4.1.1-4: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	61
Σχήμα 4.1.1-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	62
Σχήμα 4.1.1-6: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	62
Σχήμα 4.1.1-7: Δυνάμεις εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο. ....	63
Σχήμα 4.1.1-8: Ροπές εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο. ....	64
Σχήμα 4.2-1: Μηχανισμός κίνησης κεραίας δορυφόρου χωρίς μεταφορά αντιδράσεων ..	65
Σχήμα 4.2-1: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για σύστημα χωρίς μεταφορά αντιδράσεων.....	66
Σχήμα 4.2.1-1: Ροπές επενέργειας στο <i>ΤΕΣΠ</i> - είσοδοι.....	69
Σχήμα 4.2.1-2: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	69
Σχήμα 4.2.1-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	70
Σχήμα 4.2.1-4: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	70
Σχήμα 4.2.1-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams .....	71
Σχήμα 4.2.1-6: Δυνάμεις εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο για <i>ΕΧΜΑΣΠ</i> και <i>ΤΕΣΠ</i> .....	71
Σχήμα 4.1.1-7: Ροπές εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο για <i>ΕΧΜΑΣΠ</i> και <i>ΤΕΣΠ</i> .....	72
Σχήμα 5-1: Κατάδειξη στόχου από κεραία.....	73
Σχήμα 5.1-1: Το διάνυσμα στόχος όπως φαίνεται από τα πλαίσια αναφοράς. ....	74
Σχήμα 5.2-1: Σχεδιασμός τροχιάς με κυβικό πολυώνυμο .....	77
Σχήμα 5.3-1: Ροπές αρθρώσεων ισοδύναμες με τυχαία ροπή στο σώμα.....	79
Σχήμα 5.3-2: Δομικό διάγραμμα model based PD ελέγχου. ....	80
Σχήμα 5.3.1-1: Παρακολούθηση τροχιάς με model based PD έλεγχο. ....	85
Σχήμα 5.3.1-2: Σφάλμα παρακολούθησης τροχιάς.....	85
Σχήμα 5.3.1-3: Ροπή ελέγχου για κατάδειξη στόχου . ....	86
Σχήμα 5.3.1-4: Χρονικές παράγωγοι γωνιών επενέργειας για κατάδειξη στόχου.....	86

Σχήμα 6.1-1: (α) Τυπική διάταξη προωθητών, (β) Προωθητής υδραζίνης 1N [w1, w2]....	88
Σχήμα 6.1-2: (α) Φαινόμενο chattering, (β) Έλεγχος με νεκρή ζώνη και υστέρηση [2].....	89
Σχήμα 6.1.1-1: Εισαγωγή ροπής με προωθητές. ....	90
Σχήμα 6.1.1-2: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για ΤΕΣΠ και (β) για ΕΧΜΑΣΠ <sub>10%</sub> . ....	91
Σχήμα 6.1.1-3: Simulink μοντέλο για την άμεση απόρριψη διαταραχών με προωθητές σε ένα άξονα.....	92
Σχήμα 6.1.1-4: Εξέλιξη μεταβλητής σφάλματος προσανατολισμού κατά την διάρκεια άμεσης εξισορρόπησης δορυφόρου.....	92
Σχήμα 6.1.1-5: Παλμοί ώσης για άμεση εξισορρόπηση δορυφόρου.....	93
Σχήμα 6.1.2-1: Simulink μοντέλο για επαναφορά με προωθητές μετά τη διαταραχή. ....	96
Σχήμα 6.1.2-2: Παλμοί ώσης για εξισορρόπηση δορυφόρου μετά τη διαταραχή. ....	96
Σχήμα 6.1.2-3: Απόκριση συστήματος για επαναφορά με προωθητές μετά από διαταραχή (Επάνω: ΤΕΣΠ, Κάτω: ΕΧΜΑΣΠ). ....	97
Σχήμα 6.2-1: (α) Έλεγχος δορυφόρου με σφονδύλους αντίδρασης, (β) Μικρός σφόνδυλος αντίδρασης χωρίς κάλυμμα [w6, w13]. ....	98
Σχήμα 6.2.1-1: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για ΤΕΣΠ και (β) για ΕΧΜΑΣΠ <sub>10%</sub> . ....	100
Σχήμα 6.2.2-1: Συσσώρευση στροφορμής συναρτήσει του χρόνου .....	101
Σχήμα 6.2.2-2: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για ΕΧΜΑΣΠ <sub>5%</sub> και (β) για ΕΧΜΑΣΠ <sub>15%</sub> . ....	103
Σχήμα 7.2-1: Ο επίπεδος διαστημικός εξομοιωτής του ΕΑΕ-ΕΜΠ.....	107

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3.3-1: Παράμετροι προσομοίωσης γενικής περίπτωσης .....	49
Πίνακας 4.1.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης περίπτωσης δορυφόρος - <i>ΤΕΣΠ</i> .....	60
Πίνακας 4.2.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης περίπτωσης δορυφόρος - <i>ΕΧΜΑΣΠ</i> ..	68
Πίνακας 5.3.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης για μελέτη οδήγησης προσαρτήματος.....	84
Πίνακας 6.1.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης για άμεση εξισορρόπηση με προωθητές.....	91
Πίνακας 6.1.2-1: Παράμετροι προσομοίωσης για εξισορρόπηση με προωθητές μετά τη διαταραχή .....	95
Πίνακας 6.2.2-1: Μεγέθη υπολογισμού ετήσιας εξοικονόμησης προωθητικού .....	104

# Κατάλογος Συμβόλων

(παρουσιάζονται κατά σειρά εμφάνισης στην εργασία)

${}^0\mathbf{p}$	διάνυσμα θέσης εκφρασμένο ως προς το πλαίσιο $\{O\}$
$\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$	μοναδιαία διανύσματα
${}^0\mathbf{R}_1$	πίνακα περιστροφής πλαισίου $\{1\}$ ως προς το πλαίσιο $\{O\}$
${}^0\boldsymbol{\omega}_1$	γωνιακή αυτή ταχύτητα
${}^0\mathbf{v}_1$	γραμμική ταχύτητα <i>Σώματος 1</i> εκφρασμένη στο πλαίσιο $\{O\}$
$\mathbf{J}$	Ιακωβιανή συστήματος
$\mathbf{f}$	εξωτερικές δυνάμεις
$\mathbf{n}$	εξωτερικές ροπές
$\boldsymbol{\tau}$	διάνυσμα εισόδου δυνάμεων/ροπών
$\delta W$	δυνατό έργο
$L$	Λαγκραζιανή (Lagrangian) συστήματος
$T$	κινητική ενέργεια
$U$	δυναμική ενέργεια
${}^i\mathbf{I}_i$	τανυστής αδρανείας <i>Σώματος i</i> , εκφρασμένος στο πλαίσιο $\{i\}$
$\mathbf{q}$	διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών
$\theta$	γωνίες προσανατολισμού (Euler) <i>Σώματος 1</i>
$\varphi$	γωνίες προσανατολισμού του <i>Σώματος 2</i> (σχετικές ως προς τις $\theta$ )
$\tilde{\mathbf{q}}$	διάνυσμα γενικευμένων μεταβλητών
$\tilde{\mathbf{F}}$	διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων
$S$	Ιακωβιανή μήτρα που συνδέει την γωνιακή ταχύτητα με τις χρονικές παράγωγους των γωνιών προσανατολισμού (Euler) $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$

$m_1, m_2$	μάζες Σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα
$\mathbf{1}_3$	μοναδιαίο 3×3 μητρώο
$\mathbf{M}$	γενικευμένο μητρώο μάζας
$\mathbf{C}$	γενικευμένο μητρώο μη γραμμικών όρων
$\mathbf{M}_{std}, \mathbf{C}_{std}, \mathbf{F}_{std}$	μητρώα γενικευμένης μάζας, μη γραμμικών όρων, δυνάμεων για περίπτωση τυπικά επενεργούμενου προσαρτήματος
$\mathbf{F}_R$	δυνάμεις αντίδρασης που αναπτύσσονται στο δορυφόρο
$\mathbf{n}_R$	ροπές αντίδρασης που αναπτύσσονται στον δορυφόρο
$\mathbf{M}_{RM}, \mathbf{C}_{RM}, \mathbf{F}_{RM}$	μητρώα γενικευμένης μάζας, μη γραμμικών όρων, δυνάμεων για περίπτωση επενεργούμενου χωρίς αντιδράσεις προσαρτήματος
${}^{des}\varphi_i$	επιθυμητή γωνία άρθρωσης για κάθε ένα άξονα
$\varphi_i^{ini}$	αρχική θέση της άρθρωσης
$\varphi_i^f$	τελική επιθυμητή γωνία άρθρωσης
$\tau_c$	ροπή επενέργησης (control torque)
$\tilde{\mathbf{M}}'_2, \tilde{\boldsymbol{\phi}}'_1, \tilde{\mathbf{V}}'_2, \boldsymbol{\tau}'$	μητρώα γενικευμένης μάζας, γενικευμένων μεταβλητών, μη γραμμικών όρων, ροπών επενέργησης για την περίπτωση διαμέρισης του επενεργούμενου τμήματος
$\mathbf{e}(t)$	σφάλμα παρακολούθησης (tracking error)
$u_i$	ροπή προερχόμενη από τους προωθητές
$I_{sp}$	ειδική ώθηση (specific impulse)
$g$	επιτάχυνση της βαρύτητας
$\dot{m}_{p_i}$	ρυθμός κατανάλωσης προωθητικού
${}^{\max}d$	μέγιστη μεταφερόμενη στον δορυφόρο ροπή αντίδρασης
$H$	στροφορμή των σφονδύλων αντίδρασης

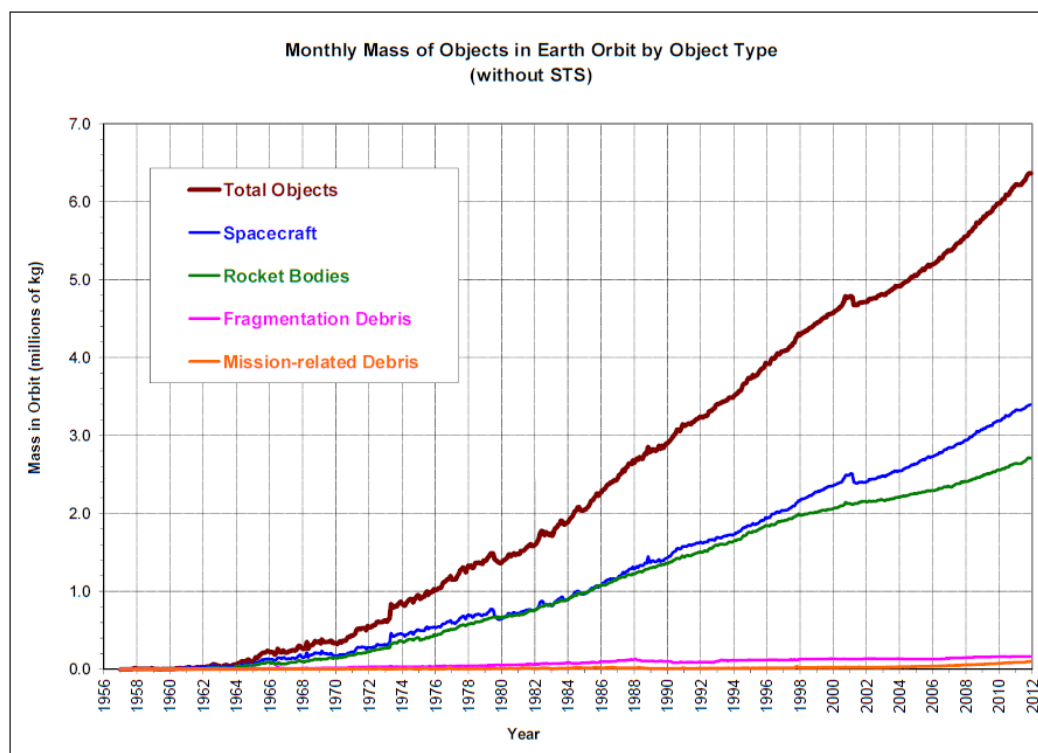
# 1 Εισαγωγή

Όταν τον Οκτώβριο του 1957 τα σήματα του Sputnik1 έφταναν στη Γή, ένα από τα αισθήματα που διαχεόταν στην ανθρωπότητα ήταν και αυτό της ανησυχίας. Η τότε καθοδηγούμενη από πολιτικούς λόγους ανησυχία για την κατάκτηση του διαστήματος, ξαναγεννιέται στη σύγχρονη εποχή για την αντιμετώπιση πλέον του προβλήματος της υπέρχρησης του διαστημικού χώρου. Ο φρενήρης ρυθμός με τον οποίο εξελίχθηκε η διαστημική δραστηριότητα (βλπ. Σχήμα 1-1) επέφερε τη συσσώρευση ανενεργών αντικειμένων σε τροχιά, απορρίμματα προηγούμενων αποστολών που κινούνται με υψηλές ταχύτητες και απειλούν τους εν χρήσει δορυφόρους. Τα διαστημικά απορρίμματα (space debris) όπως καλούνται, δημιουργούν μια νέα πρόκληση στους φορείς που ασχολούνται με το διάστημα μια και όσο ο αριθμός τους αυξάνει, τόσο αυξάνει και ο κίνδυνος σύγκρουσης με ενεργούς δορυφόρους που θα επιφέρει παραπέρα παραγωγή και συσσώρευση απορριμμάτων.

Στην προσπάθεια να διαρραγεί αυτός ο φαύλος κύκλος, οι προσπάθειες εστιάζονται στους τομείς άμβλυνσης της παραγωγής τους, παρακολούθησης και ενδεχόμενα της απομάκρυνσης κάποιων εξ αυτών. Το ζήτημα της παρακολούθησης διαστημικών απορριμμάτων ήδη αντιμετωπίζεται από τις διαστημικές υπηρεσίες του πλανήτη με επίγειους σταθμούς εντοπισμού-καταγραφής, αλλά και με ανιχνευτές σε τροχιά. Κάποιες πρώιμες προσπάθειες γίνονται επίσης και για την ανάπτυξη συστημάτων και τεχνικών ικανών να συλλαμβάνουν και να απομακρύνουν κάποια από τα απορρίμματα που βρίσκονται σε τροχιά. Το αντικείμενο της παρούσας μελέτης είναι η άμβλυνση του προβλήματος μέσω της επέκτασης της διάρκειας ζωής των δορυφόρων όπως αυτή μπορεί να προέλθει εξοικονομώντας μη ανανεώσιμο προωθητικό καύσιμο.

Ξεκινώντας με τη θεώρηση πως για κάθε διαστημικό σκάφος ανεξάρτητα απ' την χρήση του, η απαίτηση να ευρίσκεται στη σωστή θέση με το σωστό προσανατολισμό είναι πάντα δεδομένη, εισάγεται η έννοια της σταθεροποίησης (stabilization). Πρόκειται για τη διαδικασία κατά την οποία ο δορυφόρος ανακτά την επιθυμητή στάση του παρά τις διαταραχές που μπορεί να υφίσταται, μέσω κάποιας παθητικής ή ενεργητικής μεθόδου. Οι διαταραχές που στο διαστημικό περιβάλλον είναι δυνατό να προέρχονται από ομάδα είτε εξωγενών είτε ενδογενών παραγόντων, εισάγονται στον δορυφόρο ως ροπές και προκαλούν ανεπιθύμητες στροφές του συστήματος συντεταγμένων του. Κάθε επιταχυνόμενη κίνηση εκάστου από τα προσαρτήματα

(appendages) που φέρει ένας δορυφόρος, αποτελεί μια ιδιαίτερα σημαντική πηγή διαταραχών που πρέπει να αντισταθμίζεται προκειμένου να διατηρηθεί η επιθυμητή στάση. Συνεπώς, επιβάλλεται κάθε ενεργητικά σταθεροποιούμενος δορυφόρος να εκτελέσει κατάλληλες κινήσεις επαναφοράς χρησιμοποιώντας τους επενεργητές του. Σε κάθε όμως περίπτωση, επενέργηση σημαίνει τελικά και κάποια μικρή ή μεγαλύτερη κατανάλωση προωθητικού καύσιμου, του οποίου η εξάντληση σηματοδοτεί και το τέλος της ζωής του δορυφόρου. Η σύζευξη αυτή μεταξύ κίνησης προσαρτήματος και κατανάλωσης καυσίμου είναι ένα αντικείμενο που χρήζει συστηματικής μελέτης. Έτσι, θα μπορούσαν να εξαχθούν συμπεράσματα για το κατά πόσο ενδεχόμενη χρήση μηχανισμών κίνησης στρεφομένων προσαρτημάτων χωρίς αντιδράσεις, μπορεί να μειώσει το απαιτούμενο προωθητικό καύσιμο, να επεκτείνει την διάρκεια ζωής των δορυφόρων και να αμβλύνει τελικά το πρόβλημα των διαστημικών απορριμμάτων.



Σχήμα 1-1: Εξέλιξη των καταγεγραμμένων διαστημικών απορριμμάτων [12].



## 1.1 Σκοπός εργασίας

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας όπως καταδεικνύει και ο τίτλος αυτής είναι η δυναμική ανάλυση του συστήματος δορυφόρος-στρεφόμενο προσάρτημα και η μελέτη της δυνατότητας αξιοποίησης του μηχανισμού κίνησης άνευ αντιδράσεων του ΕΑΕ-ΕΜΠ για εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου. Η κίνηση στο διαστημικό χώρο και κατ' επέκταση η σχετική με αυτή δυναμική, κυριαρχείται από το στοιχείο της μη-ύπαρξης «ακλόνητης βάσης». Το γεγονός αυτό την διαφοροποιεί ουσιαστικά από την μελέτη επίγειων εφαρμογών μιας και ως τέτοια συνηθίζεται να θεωρείται η Γη. Ως εκ τούτου, η δυναμική ανάλυση που αναπτύσσεται στηρίζεται στη θεώρηση ελεύθερα αιωρούμενων σωμάτων ως προς κάποιο αδρανειακό πλαίσιο και λαμβάνεται υπόψη η κεφαλαιώδους σημασίας για τις διαστημικές εφαρμογές Αρχή Διατήρησης της (Ορμής) Στροφορμής.

Η διερεύνηση δεν περιορίζεται σε απλή παράθεση στοιχείων μηχανικής για στερεά σώματα αλλά εξειδικεύεται και εφαρμόζεται στην απτή τεχνολογική περίπτωση του συστήματος δορυφόρος-στρεφόμενο προσάρτημα. Επιπλέον, μέσω της ανάλυσης αυτής, εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με την ελάττωση των διαταραχών που προκαλεί στον φέροντα δορυφόρο πιθανή χρήση του αναπτυχθέντος στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου (ΕΑΕ-ΕΜΠ) μηχανισμού κίνησης στρεφόμενου προσαρτήματος έναντι των τυπικών μηχανισμών οδήγησης. Για κάθε επιμέρους αναλυόμενο μοντέλο εξάγονται οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης του και επιλύονται αριθμητικά, ενώ τα προκύπτοντα αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχα μοντέλα που αναπτύσσονται στο λογισμικό δυναμικής προσομοίωσης MSC Adams.

Το προσάρτημα θα πρέπει να μπορεί να ταυτίζεται με επιθυμητό - τυχαίο - διάνυσμα στόχο και για τούτο σχεδιάζεται κατάλληλη τροχιά και νόμος ελέγχου που το οδηγούν στην κατάδειξη του στόχου. Οι συνέπειες όμως της κάθε κίνησης, που δεν είναι άλλες από την εισαγωγή διαταραχών στο φέροντα δορυφόρο ως αποτέλεσμα της αρχής δράσης-αντίδρασης και των αδρανειακών επιταχύνσεων προκαλούν την εκτροπή του δορυφόρου από τον βασικό προσανατολισμό του. Ένα ακόμη ζητούμενο λοιπόν που διερευνάται είναι το κατά πόσο πιθανή εφαρμογή του μηχανισμού κίνησης στρεφόμενου προσαρτήματος χωρίς μεταφορά αντιδράσεων, μπορεί να μειώσει (κυρίως) την κατανάλωση προωθητικού καυσίμου που απαιτείται προκειμένου ο δορυφόρος μέσω του συστήματος ελέγχου του να επαναπροσανατολιστεί. Οι κινήσεις εξισορρόπησης θεωρούνται ότι εκτελούνται από σύστημα σταθεροποίησης δορυφόρου σε τρεις άξονες με επενεργητές προωθητές ή/και σφονδύλους αντίδρασης. Για κάθε περίπτωση επενέργησης μελετώνται οι ενέργειες μείωσης του

προερχόμενου από τις διαταραχές σφάλματος προσανατολισμού και ευρίσκεται το καύσιμο που αυτές καταναλώνουν.

## 1.5 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η ιδέα της χρήσης δορυφόρων για σκοπούς επικοινωνίας, πρωτοπαρουσιάστηκε το 1945, όταν ο συγγραφέας επιστημονικής φαντασίας Arthur C. Clarke, πρότεινε την τοποθέτηση σε γεωσταθερή τροχιά και κατάλληλα προσανατολισμένο σε σχέση με τη Γη, ενός μηχανικού συστήματος. Από εκείνη τη στιγμή, μια τεράστια βιβλιογραφία έχει παραχθεί για πάμπολλες πτυχές των ζητημάτων που σχετίζονται με την κίνηση των διαστημικών οχημάτων, όπως για την τροχιακή τους κίνηση και τους σχετικούς ελιγμούς, τις διαταραχές και σωρεία άλλων. Η σχετική θεωρία έχει συνοψιστεί σε πολλά βιβλία που ασχολούνται εξειδικευμένα με την κίνηση και τον έλεγχο διαστημικών σκάφων. Ένα κλασικό βιβλίο έχει γραφεί από τον Hughes [9] που επικεντρώνεται στην θεμελίωση της δυναμικής που διέπει την στάση των δορυφόρων. Από μια πιο τεχνολογική άποψη, ιδίως σε σχέση με διαστημικά οχήματα σημαντικά είναι τα βιβλία των Sidi, Wertz και Chobotov [19, 23, 4].

Σημαντική βιβλιογραφία έχει αναπτυχθεί και γύρω από το κομμάτι μηχανολογίας του διαστήματος. Κλασικό σύγγραμμα αποτελεί αυτό των Fortescue και Stark [7] που παρουσιάζει όλα τα σχετικά ζητήματα από την πρόωση μέχρι τις επικοινωνίες. Σχετικό επίσης σύγγραμμα είναι και αυτό του Ellery που πραγματεύεται τα ρομπότ διαστημικών εφαρμογών [6].

Πέρα από τα εξειδικευμένα στις ιδιότητες των διαστημικών συστημάτων πονήματα που αναφέρονται παραπάνω, ιδιαίτερα σημαντικά είναι και τα βιβλία που εστιάζονται στις μηχανικές ιδιότητες των στερεών σωμάτων. Θεμελιώδους σημασίας είναι η εργασία στην κλασική μηχανική του Goldstein [8]. Ενώ στην αναλυτική δυναμική συναντώνται τα συγγράμματα των Meirovitch [10] και Shabana [16, 17] όπου ο μεν πρώτος παρουσιάζει την κατά Newton-Euler και Lagrange δυναμική για στερεό σώμα, ενώ ο δεύτερος εστιάζει στα συστήματα πολλών σωμάτων.

Τα σχετικά με τη ρομποτική συγγράμματα περιλαμβάνουν τη μελέτη του προσανατολισμού σωμάτων, τις γωνίες Euler, τη διαφορική κινηματική, το σχεδιασμό τροχιάς και τους εν χρήσει νόμους έλεγχου. Η σχετική βιβλιογραφία είναι ευρεία αλλά

για την συγγραφή της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκαν τα βιβλία των Sicilliano et al., Craig, Spong et al., Tsai όπως αναφέροντα στα [18, 5, 20, 22].

Τέλος, πολλές πληροφορίες λήφθηκαν από δημοσιεύσεις [3, 11, 14, 15, 25] , από τις ιστοσελίδες [w3, w11] της Ευρωπαϊκής και Αμερικανικής διαστημικής υπηρεσίας (NASA, ESA), εταιριών που εμπλεκόμενων με τη διαστημική αγορά [w2, w12, w16] καθώς και πανεπιστημίων του εξωτερικού όπου διδάσκονται σχετικά αντικείμενα [w7-w9, w14, w17]. Σημειώνεται επίσης πως εκτενής περιγραφή για τον μηχανισμό κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων χωρίς μεταφορά αντιδράσεων του ΕΑΕ-ΕΜΠ αν και σε μια προηγούμενη εκδοχή του υπάρχει στο [26].

## 1.6 Δομή εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία δομείται σε έξι κεφάλαια. Αναλυτικά το περιεχόμενο έχει ως ακολούθως:

Στο Κεφάλαιο 1 εισάγεται ο σκοπός και το αντικείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας, ενώ παρατίθεται σύντομη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το αντικείμενο της δυναμικής ανάλυσης της συμπεριφοράς διαστημικών συστημάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες στα σχετικά με την κινηματική και δυναμική στερεών σωμάτων θέματα. Παρατίθενται οι επικρατούσες περιγραφές για τον προσανατολισμό, τη γραμμική και περιστροφική ταχύτητα καθώς και για τις δυο θεμελιώδεις μορφές εξαγωγής δυναμικών εξισώσεων, αυτές των Newton-Euler και Euler-Lagrange. Ακόμα, παρουσιάζονται συνοπτικά στοιχεία αναφορικά με την σημερινή πρακτική στις διαστημικές εφαρμογές και το πως ο παρουσιαζόμενος μηχανισμός κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων δορυφόρου του ΕΑΕ-ΕΜΠ μπορεί να αμβλύνει το πρόβλημα των διαστημικών απορριμμάτων-σκουπιδιών.

Στο Κεφάλαιο 3 θεμελιώνεται το δυναμικό πρόβλημα δυο ελεύθερα αιωρούμενων στερεών σωμάτων που συνδέονται μέσω σφαιρικής άρθρωσης και το ένα εξ αυτών υφίσταται σωματόδετες ροπές. Εξάγονται τα κινηματικά τους μεγέθη και η αναλυτική διανυσματική δυναμική τους εξίσωση με εφαρμογή της μεθοδολογίας Euler-Lagrange. Εκτελούνται προσομοιώσεις σε MatLab/Simulink και τα αποτελέσματα συγκρίνονται και επιβεβαιώνονται μέσω του αντίστοιχου μοντέλου στο λογισμικό MSC Adams.

Το Κεφάλαιο 4 αφορά την εξειδίκευση της πιο πάνω γενικής δυναμικής ανάλυσης σε συγκεκριμένο σύστημα δορυφόρου και στρεφόμενου σχετικά ως προς αυτόν προσαρτήματος. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις τεχνολογικής εφαρμογής, όπου στην μεν πρώτη το προσάρτημα στρέφεται από ένα τυπικό μηχανισμό κίνησης και στην δεύτερη από τον προαναφερθέντα μηχανισμό κίνησης άνευ αντιδράσεων. Για τις δυο περιπτώσεις εξάγονται οι αντίστοιχες δυναμικές εξισώσεις, ολοκληρώνονται αριθμητικά και τα αποτελέσματα συγκρίνονται και πάλι με τα σχετικά μοντέλα Adams.

Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθεται η διερεύνηση σχετικά με τον έλεγχο του προσαρτήματος και του δορυφόρου. Ευρίσκονται μέσω αντίστροφης κινηματικής οι γωνίες στροφής των αρθρώσεων προκειμένου η κεραία να ταυτιστεί με τυχαίο σημείο στόχο, σχεδιάζεται η τροχιά και καταστρώνεται νόμος ελέγχου τύπου αναλογο-διαφορικός με βάση το μοντέλο (model based PD) ικανός να οδηγεί κατάλληλα το προσάρτημα. Ο νόμος αυτός ελέγχου λαμβάνει υπόψη και αντιμετωπίζει μέσω διαμέρισης των μητρώων δυναμικής, το γεγονός ότι το προσάρτημα είναι υπο-επενεργούμενο κατά ένα βαθμό ελευθερίας.

Ακολούθως, στο Κεφάλαιο 6, για την τυχαία κίνηση του προσαρτήματος και τις διαταραχές που αυτή επιφέρει στον δορυφόρο μελετώνται τρεις μέθοδοι επαναπροσανατολισμού του: (i) άμεση εξισορρόπηση με προωθητές, (ii) εξισορρόπηση μετά το πέρας των διαταραχών με προωθητές και (iii) εξισορρόπηση με σφονδύλους αντίδρασης. Για κάθε μέθοδο μελετάται η εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου που είναι δυνατό να επέλθει με ενδεχόμενη χρησιμοποίηση του μηχανισμού κίνησης χωρίς αντιδράσεις ακόμα και αν αυτός φέρει ένα σχετικά μεγάλο κατασκευαστικό σφάλμα.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 παρατίθενται τα συνολικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την παρούσα εργασία και παρουσιάζεται η μελλοντική εργασία που ενδέχεται να ακολουθήσει.

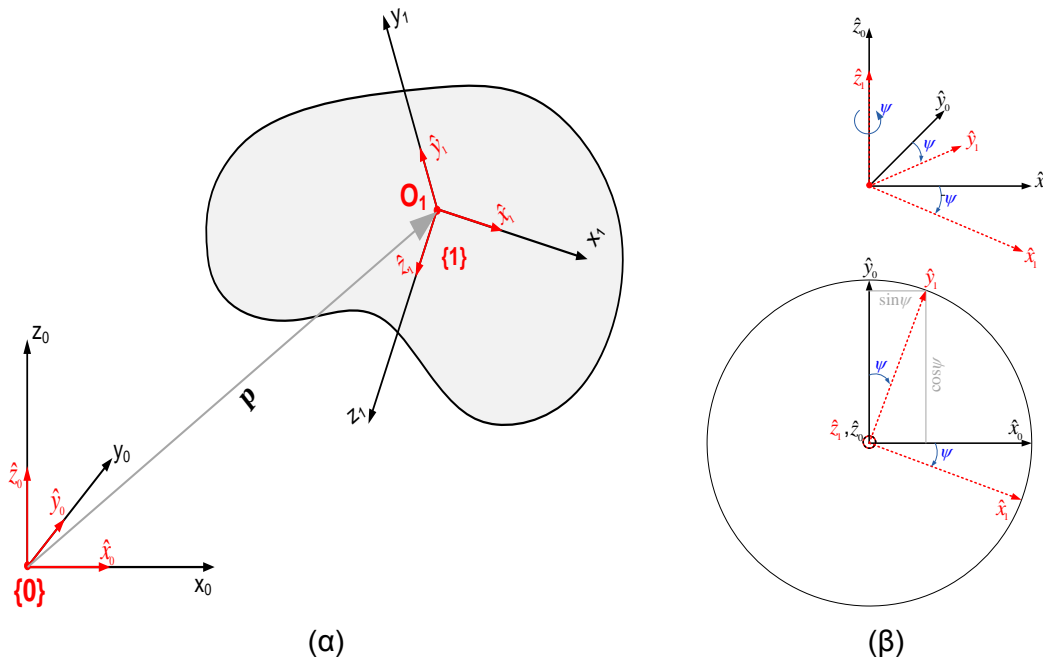
## 2 Κινηματική, δυναμική και τεχνολογίες διαστημικών εφαρμογών

Οι μέθοδοι της μη γραμμικής ανάλυσης φυσικών και μηχανικών συστημάτων που υπόκεινται σε μεγάλες μετακινήσεις (translations) και στροφές (rotations), γνώρισαν μεγάλη ανάπτυξη τις προηγούμενες δεκαετίες εξαιτίας των μεγάλων δυνατοτήτων που προσέφεραν οι Η/Υ και οι αριθμητικές τεχνικές που εύκολα υλοποιούνται σ' αυτούς. Όλες αυτές οι μέθοδοι στηρίζονται στην αντικατάσταση των πραγματικών συστημάτων από ισοδύναμα που αποτελούνται από διακριτά σώματα γνωστών παραμέτρων. Μηχανισμοί, οχήματα, ρομποτικοί βραχίονες, διαστημικές κατασκευές και πληθώρα άλλων εφαρμογών μοντελοποιούνται ως συστήματα πολλών σωμάτων (multibody systems) που συνδέονται μεταξύ τους μέσω τυποποιημένων αρθρώσεων και υπόκεινται σε δυνάμεις και ροπές. Οι δυναμικές εξισώσεις αυτών των συστημάτων είναι έντονα μη γραμμικές και στις πλείστες των περιπτώσεων δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά σε κλειστή μορφή, εξ ου και η αξία των αριθμητικών μεθόδων των Η/Υ.

Κάθε σύστημα σωμάτων θα πρέπει να περιγράφεται από μετρήσιμες ποσότητες που μπορούν να το χαρακτηρίσουν όπως είναι οι μετακινήσεις, οι ταχύτητες και επιταχύνσεις. Τα διανυσματικά αυτά μεγέθη θα πρέπει με τη σειρά τους να μετρώνται ως προς κάποιο πλαίσιο αναφοράς προκειμένου να ορίζεται με σαφήνεια η έννοια του χώρου και προς τούτο προδίδονται σε συγκεκριμένα σημεία επί των σωμάτων συστήματα συντεταγμένων, ενώ συνήθως θεωρείται και κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Στις υποενότητες που ακολουθούν δίδονται συνοπτικά στοιχεία σχετικά με την περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού, την κινηματική και την δυναμική των στερεών σωμάτων, καθώς και της Αρχής των Δυνατών Έργων που χρησιμοποιείται προκειμένου να εξαχθούν οι γενικευμένες δυνάμεις που αντιστοιχούν στις γενικευμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιήθηκαν στην εκάστοτε περίπτωση. Επίσης παρουσιάζονται συνοπτικά στοιχεία σχετικά με την δυναμική συμπεριφορά των δορυφόρων, τις μεθοδολογίες εξισορρόπησης και τις τεχνολογίες κίνησης προσαρτημάτων συμπεριλαμβανομένου και του μηχανισμού κίνησης άνευ αντιδράσεων του ΕΑΕ-ΕΜΠ.

## 2.1 Θέση και προσανατολισμός στερεού σώματος

Ένα στερεό σώμα ορίζεται στο χώρο περιγράφοντας τη θέση και τον προσανατολισμό του -ή συνοπτικά τη στάση (pose) του- ως προς κάποιο πλαίσιο αναφοράς. Παρατηρώντας το Σχήμα 2.1-1α, διακρίνεται το τρισσορθόγωνιο σύστημα συντεταγμένων  $O-x_0y_0z_0$  και τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$  αυτού.



Σχήμα 2.1-1: (α) Θέση και προσανατολισμός στερεού σώματος (β) στοιχειώδης περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$ .

Η θέση ενός σημείου  $O_1$  επί του εικονιζόμενου στερεού σώματος ως προς το σύστημα αναφοράς  $O-x_0y_0z_0$  δίδεται από τη σχέση:

$$\mathbf{p} = {}^0p_x\hat{x}_0 + {}^0p_y\hat{y}_0 + {}^0p_z\hat{z}_0 \quad (2.1-1)$$

όπου τα  ${}^0p_x\hat{x}_0$ ,  ${}^0p_y\hat{y}_0$  και  ${}^0p_z\hat{z}_0$  δηλώνουν τις προβολές του  $\mathbf{p}$  στα  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$  και  $\hat{z}_0$  αντίστοιχα. Είναι ακόμα δυνατό, το σύνολο των  ${}^0p_x, {}^0p_y$  και  ${}^0p_z$  να γραφούν ως ένα διάνυσμα  $(3 \times 1)$  που περιγράφουν το  $\mathbf{p}$  ως προς το πλαίσιο  $\{O\}$  κατά τρόπο:

$${}^0\mathbf{p} = \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} \quad (2.1-2)$$

Για την περιγραφή του προσανατολισμού γίνεται επίσης εκμετάλλευση του σωματόδετου συστήματος αναφοράς  $\{1\}$  του οποίου τα μοναδιαία διανύσματα εκφράζονται ως προς το πλαίσιο  $\{O\}$ . Η σχέσεις λοιπόν που εκφράζουν τα  $\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1$  διαδοχικά ως προς το  $O-x_0, y_0, z_0$  θα είναι:

$${}^0\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^T \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1^T \hat{y}_0 \\ \hat{x}_1^T \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{x}_1, \hat{x}_0) \\ \cos(\hat{x}_1, \hat{y}_0) \\ \cos(\hat{x}_1, \hat{z}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix} \quad (2.1-3a)$$

$${}^0\hat{y}_1 = \begin{bmatrix} \hat{y}_1^T \hat{x}_0 \\ \hat{y}_1^T \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1^T \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{y}_1, \hat{x}_0) \\ \cos(\hat{y}_1, \hat{y}_0) \\ \cos(\hat{y}_1, \hat{z}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix} \quad (2.1-3b)$$

$${}^0\hat{z}_1 = \begin{bmatrix} \hat{z}_1^T \hat{x}_0 \\ \hat{z}_1^T \hat{y}_0 \\ \hat{z}_1^T \hat{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{z}_1, \hat{x}_0) \\ \cos(\hat{z}_1, \hat{y}_0) \\ \cos(\hat{z}_1, \hat{z}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1-3c)$$

Το σύνολο  $\begin{bmatrix} {}^0\hat{x}_1^T & {}^0\hat{y}_1^T & {}^0\hat{z}_1^T \end{bmatrix}$  περιγράφει τον προσανατολισμό του σωματόδετου πλαισίου  $\{1\}$  και άρα του ίδιου του σώματος ως προς το πλαίσιο  $\{O\}$ . Ενώ τα τρία αυτά διανύσματα ορίζουν τον  $(3 \times 3)$  γενικό πίνακα περιστροφής:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{x}_1^T & {}^0\hat{y}_1^T & {}^0\hat{z}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1-4)$$

Ο πίνακας αυτός είναι ορθογώνιος, έχει μοναδιαία ορίζουσα και άρα διατηρεί τα μήκη, καθώς επίσης φέρει και την πολύ χρήσιμη ιδιότητα ο αντίστροφος (inverse) και ανάστροφος (transpose) του να ισούνται. Χρησιμοποιείται τόσο για να περιγράψει τον προσανατολισμό του πλαισίου  $\{1\}$  ως προς το  $\{O\}$  όσο και για να μετασχηματίζει τις συνιστώσες ενός διανύσματος εκφρασμένου ως προς το  $\{O\}$  στις συνιστώσες του ως προς το  $\{1\}$  κατά την σχέση:

$${}^0\mathbf{p} = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{p} \quad (2.1-5)$$

Όπου με  ${}^1\mathbf{p}$  συμβολίζεται το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  εκφρασμένο στο πλαίσιο  $\{1\}$  και με  ${}^0\mathbf{p}$  συμβολίζεται το  $\mathbf{p}$  εκφρασμένο στο  $\{O\}$ .

Προχωρώντας, για λόγους απλοποίησης θεωρείται πως η περιστροφή δεν είναι γενική αλλά εκτελείται μόνο γύρω από τον z-άξονα όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1.-1β. Τότε, ο πίνακας  $\mathbf{R}_z(\vartheta)$  για την στοιχειώδη αυτή περιστροφή θα είναι:

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\hat{x}_1^T & {}^0\hat{y}_1^T & {}^0\hat{z}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\psi) \quad (2.1-6a)$$

Όπου η σήμανση  $c\psi, s\psi$  αντιστοιχεί στα συνημίτονα  $\cos\psi$  και ημίτονα  $\sin\psi$  κατά τη συνήθη πρακτική.

Με την ίδια συλλογιστική ορίζονται και οι στοιχειώδεις πίνακες περιστροφής γύρω και από τους άλλους δυο άξονες, οι οποίοι είναι:

$$\mathbf{R}_y(\phi) = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \quad (2.1-6b)$$

$$\mathbf{R}_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix} \quad (2.1-6c)$$

Είναι λοιπόν σαφές, ότι για να περιγραφεί μια γενική περιστροφή απαιτούνται να καθοριστούν τα εννέα στοιχεία  $r_{ij}$  του πίνακα. Τα στοιχεία όμως αυτά πόρρω απέχουν από το να είναι ανεξάρτητα. Ιδιαίτερα αν ληφθεί υπόψη ότι κάθε στερεό σώμα φέρει μόνο τρεις περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας (β.ε), τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι μόνο τα τρία εκ των εννέα στοιχείων  $r_{ij}$  θα είναι ανεξάρτητα και άρα μόνο τρεις μεταβλητές αρκούν για να καθορίσουν προσανατολισμό. Πράγματι, οι σχέσεις ορθογωνιότητας του  $\mathbf{R}$  μητρώου επιβάλλουν ότι:

$$r_{ij}^2 = 1 \quad , \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.1-7a)$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0 \quad , \quad i \neq j \quad (2.1-7b)$$

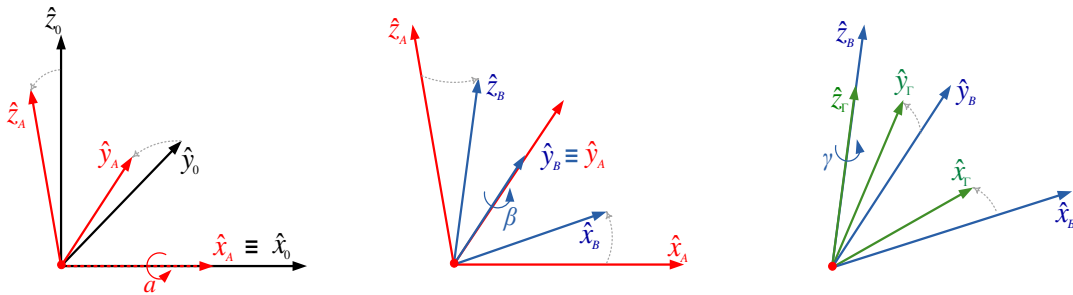
Πρόκειται για έξι ανεξάρτητες σχέσεις με εννέα αγνώστους, γεγονός που καθορίζει πως μόνο τρεις μεταβλητές είναι ελεύθερες. Συνεπώς, έχει φανεί ότι είναι δυνατό με μόνο τρεις ανεξάρτητες ποσότητες να καθορίζεται πλήρως ο προσανατολισμός ενός στερεού σώματος στο χώρο. Αν λοιπόν θεωρηθεί το σετ τριών γωνιών  $[\vartheta \ \phi \ \psi]^T$



και μια οποιαδήποτε αλληλουχία τριών στοιχειωδών περιστροφών εξασφαλίζοντας παράλληλα ότι δεν εκτελούνται δύο διαδοχικές περιστροφές γύρω από παράλληλους άξονες, τότε 12 διαφορετικές ομάδες γωνιών από το σύνολο των 27 πιθανών συνδυασμών δημιουργούν μια τριάδα Euler γωνιών. Οι δημοφιλέστεροι συνδυασμοί Euler γωνιών είναι οι ZYZ και ZYX (Roll-Pitch-Yaw). Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί -μιας και είναι βολικό για κατασκευαστικούς λόγους- το σετ XYZ γωνιών Euler που προκύπτει από τις περιστροφές γύρω από διαδοχικούς άξονες  $x$ - $y$ - $z$  και ορίζει το εξής  $\mathbf{R}$  μητρώο:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\vartheta) \mathbf{R}_y(\phi) \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1-8a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\phi c\psi & -s\phi s\psi & s\phi \\ s\vartheta s\phi c\psi + c\vartheta s\psi & -s\vartheta s\phi s\psi + c\vartheta c\psi & -s\vartheta c\phi \\ -c\vartheta s\phi c\psi + s\vartheta s\psi & c\vartheta s\phi s\psi + s\vartheta c\psi & c\vartheta c\phi \end{bmatrix} \quad (2.1-8b)$$



Σχήμα 2.1-2: Γωνίες στροφής Euler κατά  $x$ - $y$ - $z$ .

## 2.2 Διαφορική κινηματική και στατική

Έχοντας ορίσει τη θέση και τον προσανατολισμό ενός σώματος όταν αυτό βρίσκεται σε ισορροπία η μελέτη επεκτείνεται στην αναπαράσταση της κίνησης αυτού. Τα διανύσματα πλέον δύνανται να συναρτώνται με τον χρόνο ως προς κάποιο πλαίσιο αναφοράς ή/και να παραμένουν αναλλοίωτα ως προς κάποιο άλλο. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν οι σχέσεις που περιγράφουν τη γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος, θα γίνει η διαφόριση του πίνακα περιστροφής, θα

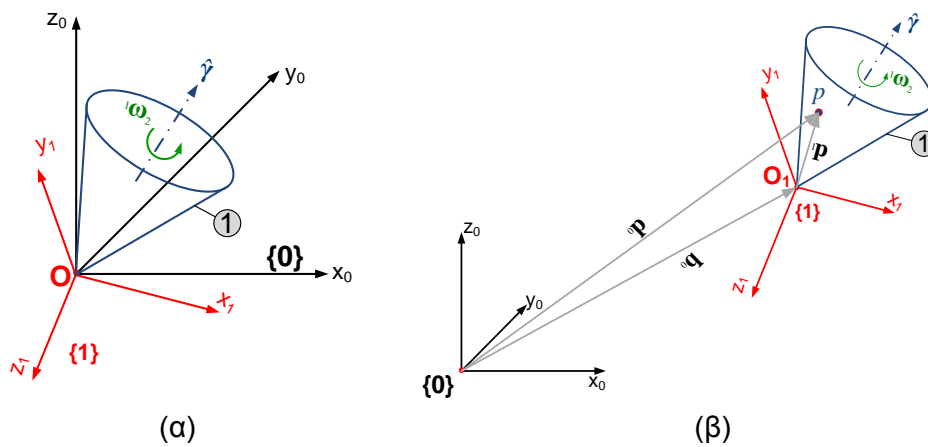
εισαχθεί η οντότητα του Ιακωβιανού μητρώου και θα γίνει η συσχέτιση μεταξύ κινηματικής και στατικής (kineto-static duality).

### 2.2.1 Γωνιακή ταχύτητα

Είναι γνωστό ότι η γραμμική ταχύτητα περιγράφει το λόγο μεταβολής της θέσης ενός σημείου στο χώρο και η γωνιακή ταχύτητα το λόγο μεταβολής του προσανατολισμού στερεού σώματος. Παρατηρώντας το Σχήμα 2.2-1α, το σωματόδετο επί του Σώματος 1 πλαίσιο  $\{1\}$  περιστρέφεται ως προς  $\{O\}$  γύρω από τον άξονα  $\gamma$  με ταχύτητα  $\|{}^0\omega_1\|$ . Η γωνιακή αυτή ταχύτητα είναι διανυσματική και εκφράζεται ως:

$${}^0\omega_1 = \hat{\gamma}\dot{q} \quad (2.2.1-1)$$

Όπου  $\hat{\gamma}$  το μοναδιαίο διάνυσμα του στιγμιαίου άξονα περιστροφής και  $\dot{q}$  το μέτρο της γωνιακής μεταβολής.



Σχήμα 2.2-1: (α) Στιγμιαία στροφή πλαισίου  $\{1\}$  ως προς  $\{O\}$ , (β) Στιγμιαία κίνηση Σώματος 1 ως προς το πλαίσιο  $\{O\}$ .

Ένα ακόμα σημαντικό θέμα που απασχολεί την διαφορική κινηματική και συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα είναι αυτό της παραγώγισης του πίνακα περιστροφής. Συγκεκριμένα, ζητείται η εύρεση του  $\dot{\mathbf{R}}(t)$  για δεδομένο  $\mathbf{R}(t)$ . Προς τούτο, υπενθυμίζεται ο ορισμός της παραγώγου που για την προκείμενη περίπτωση είναι:

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbf{R}(\Delta q) - \mathbf{1}_3}{\Delta t} \right\} \mathbf{R}(t) \quad (2.2.1-2)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{R}(t + \Delta t)$  προκύπτει από τον αρχικό μετά από στοιχειώδη περιστροφή του κατά γωνία  $\Delta q$  γύρω από τον άξονα  $\hat{\gamma}$  ως εξής:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}_{\hat{\gamma}}(\Delta q) \mathbf{R}(t) \quad (2.2.1-3a)$$

$$\mathbf{R}_{\hat{\gamma}}(\Delta q) = \hat{\gamma}^\times \Delta q \quad (\Delta q \text{ μικρό}) \quad (2.2.1-3b)$$

Επομένως η Εξ. 2.2.1-2 γίνεται:

$$\dot{\mathbf{R}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta q}{\Delta t} \right) \hat{\gamma}^\times \mathbf{R}(t) = \dot{q} \hat{\gamma}^\times \mathbf{R}(t) = \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{R}(t) \quad (2.2.1-4a)$$

Άρα, η γενική διατύπωση θα είναι:

$${}^0 \dot{\mathbf{R}}(t) = ({}^0 \boldsymbol{\omega}_1)^\times {}^0 \mathbf{R} \quad (2.2.1-4b)$$

Η σήμανση  $(\bullet)^\times$  δηλώνει πράξη εξωτερικού γινομένου ή σχηματισμό ενός ψευδο-συμμετρικού (skew-symmetric) μητρώου από τα στοιχεία του αντίστοιχου διανύσματος (βλπ. §3.1).

## 2.2.2 Γραμμική ταχύτητα

Συνεχίζοντας με την γραμμική ταχύτητα και με αναφορά στο Σχήμα 2.2-1β παρατηρείται το Σώμα 1 το οποίο εκτελεί στιγμιαία περιστροφή και μετακίνηση ως προς το πλαίσιο  $\{O\}$ . Η θέση του εικονιζόμενου διανύσματος θέσης  ${}^0 \mathbf{p}$  δίνεται ως:

$${}^0 \mathbf{p} = {}^0 \mathbf{q} + {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{p} \quad (2.2.2-1)$$

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας του Σώματος 1 θεωρείται καταρχήν ο λόγος μεταβολής του δευτέρου όρου στο δεξί μέλος της πιο πάνω εξίσωσης που είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{p}) &= {}^0 \mathbf{R}_1 \frac{d}{dt} ({}^1 \mathbf{p}) + \frac{d}{dt} ({}^0 \mathbf{R}_1) {}^1 \mathbf{p} \\ &= {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{v}_p + {}^0 \dot{\mathbf{R}}_1 {}^1 \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.2.2-2)$$

όπου με έχει  ${}^1\mathbf{v}_p$  σημειωθεί η γραμμική ταχύτητα του  $P$  ως προς  $\{O\}$ . Ενώ, με χρήση της Εξ. 2.2.1-4 η ανωτέρω εξίσωση ξαναγράφεται ως:

$$\frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p}) = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{v}_p + ({}^0\boldsymbol{\omega}_1)^\times {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p} \quad (2.2.2-3)$$

Ακόμα, διαφορίζοντας τον όρο  ${}^0\mathbf{q}$  λαμβάνεται η γραμμική ταχύτητα κίνησης της αρχής των αξόνων  $O_1$  ως προς το  $\{O\}$  που θα συμβολίζεται κατ' αναλογία ως  ${}^0\mathbf{v}_1$ . Συνεπώς, η γενική εξίσωση που περιγράφει την γραμμική κίνηση του σημείου  $P$  ως προς  $\{O\}$  θα είναι τελικά:

$${}^0\mathbf{v}_p = \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{p}) = {}^0\mathbf{v}_1 + {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{v}_p + ({}^0\boldsymbol{\omega}_1)^\times {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{p} \quad (2.2.2-4)$$

### 2.2.3 Ιακωβιανή και συσχέτιση κινηματικής-στατικής

Ένα ακόμα πολύ σημαντικό στοιχείο που εμφανίζεται στην διαφορική κινηματική είναι αυτό της *Ιακωβιανής*. Πρόκειται για ένα γραμμικό μετασχηματισμό μεταβλητό στο χρόνο που συσχετίζει τις ταχύτητες αρθρώσεων-επενέργησης με τις Καρτεσιανές ταχύτητες. Για τον ορισμό της θα θεωρηθεί ένα σετ από  $m$  εξισώσεις (συνήθως 3 ή 6 για μόνο γωνιακή/γραμμική ταχύτητα ή και για τις δυο αντίστοιχα) όπου έκαστη εξ αυτών θα είναι συνάρτηση των  $n$  ανεξάρτητων μεταβλητών του συστήματος.

$$\chi_i = g_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (2.2.3-1)$$

Η παραγωγήιση αυτών ως προς το χρόνο θα είναι:

$$\nu_i = \frac{\partial g_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial g_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial g_i}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial q_n} \dot{q}_n \quad (2.2.3-2)$$

που γράφεται και μητρικά ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial q_1} & \frac{\partial g_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.2.3-3a)$$

ή απλούστερα ως:

$$\mathbf{v}_{m \times 1} = \mathbf{J}_{m \times n} \dot{\mathbf{q}}_{n \times 1} \quad (2.2.3-4b)$$

Το μητρώο  $\mathbf{J}$  είναι η Ιακωβιανή του συστήματος και μέσω αυτού μπορεί να παρατηρηθεί πως η διαφορική μεταβολή των  $\mathbf{q}$  επηρεάζει τη μεταβολή των  $\mathbf{v}$ . Μπορεί να χαρτογραφηθεί δηλαδή το πώς μια κίνηση που γίνεται από τους επενεργητές μεταβάλλει την χωρική (Καρτεσιανή) κίνηση του συστήματος.

Μια ακόμα συσχέτιση που εκπληρώνεται μέσω του Ιακωβιανού μητρώου είναι και αυτή των Καρτεσιανών δυνάμεων/ροπών που ασκούνται στο σύστημα με τις ισοδύναμες που θα ασκούσαν οι επενεργητές. Δεδομένου λοιπόν του διανύσματος των δυνάμεων/ροπών που ασκούνται από το περιβάλλον:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T \quad \mathbf{n}^T]^T \quad (2.2.3-5)$$

Ζητείται να ευρεθεί ποιο είναι το ισοδύναμο διάνυσμα εισόδου δυνάμεων/ροπών από τους επενεργητές:

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_n]^T \quad (2.2.3-6)$$

Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με την Αρχή Δυνατών Έργων (Virtual Work Principle - ΑΔΕ) που επιτάσσει ότι ένα σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία αν το δυνατό έργο μηδενίζεται για κάθε αυθαίρετη δυνατή μετατόπιση η οποία είναι συμβατή με τους γεωμετρικούς περιορισμούς. Στην περίπτωση αυτή το δυνατό έργο είναι:

$$\delta W = \underbrace{\tau_1 \delta q_1 + \dots + \tau_n \delta q_n}_{\boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q}} - \mathbf{f}^T \delta \boldsymbol{\chi} - \mathbf{n}^T \delta \boldsymbol{\phi} \hat{\gamma} \quad (2.2.3-7a)$$

που για την επίτευξη στατικής ισορροπίας θα πρέπει να είναι:

$$\delta W = 0 \quad (2.2.3-7b)$$

Άρα, εξισώνοντας τους όρους στο δεξί τμήμα της (2.2.3-7a) λαμβάνεται:

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\chi} \\ \delta \phi \hat{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (2.2.3-8)$$

Ενώ από τον προηγούμενο ορισμό της Ιακωβιανής οι όροι των Καρτεσιανών δυνατών μεταβολών  $\delta \boldsymbol{\chi}, \delta \phi \hat{\boldsymbol{\gamma}}$  συσχετίζονται με τις δυνατές μεταβολές των αρθρώσεων  $\delta \mathbf{q}$  κατά τρόπο:

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\chi} \\ \delta \phi \hat{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (2.2.3-9)$$

Και αντικαθιστώντας στην (2.2.3-8) προκύπτει:

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (2.2.3-10)$$

που πρέπει να ισχύει για κάθε δυνατή μεταβολή  $\delta \mathbf{q}$ . Ως εκ τούτου, θα ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{\tau}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}^T \mathbf{J} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}^T = \mathbf{F}^T \mathbf{J} \quad (2.2.3-11a)$$

ή εκτελώντας αναστροφή, λαμβάνεται τελικά:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (2.2.3-11b)$$

Η σχέση αυτή είναι αντίστοιχη της (2.2.3-4b) και δίδει την συσχέτιση καρτεσιανών δυνάμεων/ροπών με τις δυνάμεις/ροπές επενέργειας όπως και αυτή δίδει τη συσχέτιση καρτεσιανών μεταβολών με τις μεταβολές των αρθρώσεων. Η αντιστοίχιση αυτή έχει επικρατήσει να καλείται συσχέτιση κινηματικής-στατικής.

### 2.3 Δυναμική στερεών σωμάτων

Η δυναμική ανάλυση στερεών σωμάτων (ή/και κατασκευών που μοντελοποιούνται ως τέτοια) αφορά την εξαγωγή των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την απόκριση των σωμάτων. Οι εξισώσεις αυτές καλούνται *εξισώσεις κίνησης* και παρουσιάζουν τον ρυθμό μεταβολής των μεταβλητών του συστήματος συναρτήσει των δυνάμεων/ροπών που εισάγουν οι επενεργητές. Η εύρεση των δυναμικών εξισώσεων πραγματοποιείται με τις δυο κλασσικές (18<sup>ος</sup> αι.) μεθόδους της μηχανικής, συγκεκριμένα τη διατύπωση Newton–Euler και τη διατύπωση Euler-Lagrange.

Η πρώτη εξ αυτών, προέρχεται από την τροποποίηση του δεύτερου νόμου του Newton όπως αυτή πραγματοποιήθηκε από τον Euler για την κίνηση στερεών σωμάτων και η οποία περιγράφει τα δυναμικά συστήματα από την άποψη των δυνάμεων/ροπών και της ορμής/στροφορμής. Οι εξισώσεις τους λαμβάνουν υπόψη όλες τις δυνάμεις και ροπές που επενεργούν στα επιμέρους σώματα, συμπεριλαμβανομένων και των δυνάμεων/ροπών στις συνδέσεις. Κατά συνέπεια, πρόσθετες αριθμητικές πράξεις πρέπει να εκτελούνται προκειμένου να υπολογίζονται και οι δυνάμεις/ροπές που προέρχονται από κινηματικούς περιορισμούς, ενώ αυτές δεν συμπεριλαμβάνονταν στους αρχικούς αγνώστους του προβλήματος. Το γεγονός αυτό καθιστά την εφαρμογή αυτής της μεθοδολογίας ιδιαίτερα δύσκολη σε συστήματα πολλών σωμάτων.

Στην κατά Euler-Lagrange (E-L) διατύπωση η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από την άποψη του έργου και της ενέργειας, χρησιμοποιώντας γενικευμένες μεταβλητές-συντεταγμένες. Έτσι, όλες οι άεργες δυνάμεις/ροπές καθώς και οι δυνάμεις/ροπές που προέρχονται από τους κινηματικούς περιορισμούς εξαλείφονται αυτόματα με αποτέλεσμα οι προκύπτουσες εξισώσεις να είναι γενικά πιο συμπαγείς και να προσφέρουν μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τις γενικευμένες επενεργούσες δυνάμεις και τις γενικευμένες μεταβλητές. Επιπλέον προσόν αυτής της μεθόδου είναι και το γεγονός ότι ο υπολογισμός εκτελείται κατά πιο συστηματικό τρόπο από ότι στην κατά Newton-Euler μέθοδο. Για τους λόγους αυτούς, στην παρούσα εργασία οι δυναμικές εξισώσεις θα εξαχθούν χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία E-L και προς τούτο θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση.

Θεωρούνται οι γενικευμένες συντεταγμένες  $q_1, \dots, q_n$  οι οποίες περιγράφουν πλήρως κάποιο δυναμικό σύστημα. Επίσης, θεωρείται πως το υπό συζήτηση σύστημα έχει αποθηκευμένη κινητική  $T$  και δυναμική  $U$  ενέργεια. Τότε, η Λαγκραζιανή (Lagrangian) του συστήματος  $L$  ορίζεται ως:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3-1)$$

Παρατηρείται ότι η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνο των γενικευμένων μεταβλητών  $q_i$  ενώ η κινητική συναρτάται των  $q_i$  και των χρονικών παραγώγων αυτών  $\dot{q}_i$ . Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος αθροίζονται οι δυο συνιστώσες αυτής, όπου η μεν πρώτη αφορά τη γραμμική ταχύτητα και η δεύτερη τη γωνιακή ταχύτητα σύμφωνα με την εξίσωση:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} + \frac{1}{2} \sum_i^n \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.3-2)$$

όπου,  $\mathbf{v}_{c_i}$ : η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος  $i$ ,  $m_i$ : η μάζα αυτού,  $\boldsymbol{\omega}_i$ : η γωνιακή ταχύτητα και  $\mathbf{I}_i$  ο τανυστής αδρανείας του ίδιου σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του. Η πιο πάνω εξίσωση ισχύει για οποιοδήποτε πλαίσιο αναφοράς. Όμως αν πρόκειται να εκφραστεί ως προς το αδρανειακό πλαίσιο, τότε θα πρέπει να ληφθεί πρόνοια οι ταχύτητες να μετασχηματιστούν ως προς αυτό σύμφωνα με τα διαμειφθέντα στην προηγούμενη ενότητα και ο τανυστής αδρανείας να μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$${}^0\mathbf{I}_i = {}^0\mathbf{R}_i \mathbf{I}_i {}^0\mathbf{R}_i^T \quad (2.3-3)$$

Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε κάθε άκαμπτο σώμα  $i$  είναι η ποσότητα του απαιτούμενου έργου προκειμένου να ανυψωθεί το κέντρο μάζας του σώματος από κάποια στάθμη αναφοράς στην τρέχουσα θέση υπό την επίδραση της βαρύτητας. Αν θεωρηθεί ως πλαίσιο αναφοράς το αδρανειακό, τότε το απαιτούμενο έργο για ανύψωση σώματος  $i$  κατά διάνυσμα  ${}^0\mathbf{p}_{c_i}$ , αποθηκεύει στο σώμα δυναμική ενέργεια ίση με  $-m_i \mathbf{g}^T {}^0\mathbf{p}_{c_i}$ . Συνεπώς, αν πρόκειται για σύστημα πολλών σωμάτων η ολική δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$U(\mathbf{q}) = -\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T {}^0\mathbf{p}_{c_i} \quad (2.3-4)$$

Έχοντας λοιπόν καθορίσει την κινητική και δυναμική ενέργεια, υπολογίζεται η Λαγκραζιανή σύμφωνα με την Εξ. (2.3-1) και βάσει αυτής θα ευρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος σύμφωνα με τη διαφορική σχέση:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad , \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.3-5a)$$

Που εκφράζεται και σε διανυσματική μορφή εφόσον οριστούν τα  $\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_n]^T$  και  $\mathbf{F} = [f_1 \ \dots \ f_n]^T$  ως:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (2.3-5b)$$

Με  $f_i$  συμβολίζονται οι γενικευμένες δυνάμεις-μη συντηρητικές (non conservative) που αντιστοιχούν σε κάθε γενικευμένη μεταβλητή  $q_i$ . Ως γενικευμένες δυνάμεις



θεωρούνται όλες οι δυνάμεις και ροπές που δρουν στο σύστημα εκτός από τις βαρυτικές και τις αδρανειακές. Το διάνυσμα τους  $\mathbf{F} = [f_1 \ \cdots \ f_n]^T$  καθορίζεται σύμφωνα με την Αρχή Δυνατών Έργων (Virtual Work Principle - ΑΔΕ) σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{q} \quad (2.3-6)$$

Ας θεωρηθεί αρχικά ότι στο σύστημα ασκούνται δυνάμεις και ροπές από τους επενεργητές του καθώς και εξωτερικές δυνάμεις. Τότε, το  $n$ -διάστατο διάνυσμα ροπών επενέργειας  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \cdots \ \tau_n]^T$  και το  $6$ -διάστατο διάνυσμα  $\mathbf{F}_{ext} = [\mathbf{f}_{ext} \ \mathbf{n}_{ext}]^T$  των ολικών εξωτερικών δυνάμεων και ροπών, θα παράγουν δυνατό έργο ίσο με:

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_{ext}^T \delta \mathbf{p} \quad (2.3-7)$$

Όπου το  $\delta \mathbf{p}$  υποδηλεί το  $6$ -διάστατο διάνυσμα  $[\delta \boldsymbol{\chi}^T \ \delta \phi \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T]^T$  των δυνατών μετατοπίσεων του σημείου εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης. Συμφώνα με τη Εξ. (2.2.3-9) το  $\delta \mathbf{p}$  αντικαθίσταται με  $\mathbf{J} \delta \mathbf{q}$  και εξισώνοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις λαμβάνεται το σχετικό διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων ως:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (2.3-8)$$

Αν βέβαια δεν υφίστανται εξωτερικές δυνάμεις/ροπές τότε το  $\mathbf{F}$  ισούται με  $\boldsymbol{\tau}$ . Ενώ, αν πέραν των εξωτερικών δυνάμεων/ροπών υφίσταται και ιξώδης τριβή ανάλογη της σχετικής ταχύτητας των εν επαφή σωμάτων τύπου  $-b_i \dot{q}_i$ , τότε το δυνατό έργο θα είναι:

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}_{ext}^T \delta \mathbf{p} - \mathbf{f}_r^T \delta \mathbf{q} \quad (2.3-9)$$

όπου με  $\mathbf{f}_r = [b_1 \dot{q}_1 \ \cdots \ b_n \dot{q}_n]^T$  έχει σημειωθεί το διάνυσμα ιξώδους τριβών στις αρθρώσεις και το σύμβολο του μείον έχει εισαχθεί για να φανερώνει πως η διεύθυνση των τριβών είναι πάντα αντίθετη της ταχύτητας. Εάν και πάλι η σχέση αυτή εξισωθεί με την (2.3-6) λαμβάνεται το νέο διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{f}_r \quad (2.3-8)$$

## 2.4 Δυναμική συμπεριφορά δορυφόρων και τεχνολογίες σταθεροποίησης

Ένας δορυφόρος από πρακτική άποψη μπορεί και να θεωρηθεί ως μια διαστημική κατασκευή που προορίζεται να φέρει όργανα ή κατά μια πιο αφαιρετική όψη ως μια βάση στερέωσης ωφέλιμου φορτίου (payload). Θα πρέπει λοιπόν να διατηρεί ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό (attitude) ενόσω βρίσκεται σε τροχιά, για να επιτυγχάνεται κατ' επέκταση ο ακριβής προσανατολισμός κάποιας κεραίας προς τη Γη ή το όποιο αντικείμενο παρατηρείται, των ηλιακών συλλεκτών προς τον Ήλιο καθώς και όλων των άλλων προσαρτημάτων. Στην απαίτηση για διατήρηση της συμπεριφοράς του δορυφόρου αντιστρατεύονται τόσο οι ίδιες οι εσωτερικές διαταραχές που εισάγονται από τις επιταχύνσεις επιμέρους τμημάτων, όσο και οι παρεμβολές που δέχεται από το περιβάλλον όπως είναι η βαρύτητα της Γης, η αεροδυναμική αντίσταση, τα μαγνητικά πεδία, ο ηλιακός άνεμος κ.α.. Καθίσταται λοιπόν αναγκαίο, μέσω κάποιας παθητικής ή ενεργητικής μεθόδου να επιτυγχάνεται η διαρκής σταθεροποίηση του δορυφόρου.

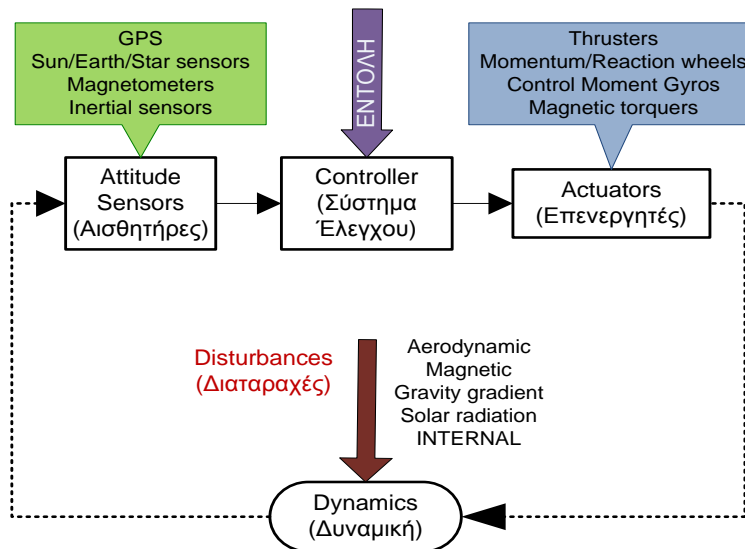
Τα παθητικά σύστημα βασίζονται στη διατήρηση της ευστάθειας της αρχικής κατάστασης του δορυφόρου. Για τη σταθεροποίηση του δορυφόρου εφαρμόζονται τεχνικές που στηρίζονται στην ευθυγράμμιση ως προς κάποιο πεδίο και οι κυριότερες εξ αυτών είναι:

- η σταθεροποίηση μέσω της βαθμίδας βαρύτητας (gravity gradient stabilization)
- η σταθεροποίηση μέσω του μαγνητικού πεδίου (magnetic field stabilization)

Καθώς επίσης και τεχνικές που εκμεταλλεύονται την «ακαμψία» που εμφανίζει ένα στρεφόμενο σώμα-γυροσκοπική ευστάθεια. Πρόκειται για μεθόδους:

- σταθεροποίησης μέσω ιδιοπεριστροφής (spin stabilization)
- σταθεροποίησης μέσω διπλής ιδιοπεριστροφής (dual spin stabilization)

Αντίθετα, σε ένα ενεργητικά σταθεροποιούμενο σκάφος ο προσανατολισμός ελέγχεται και στους τρεις άξονες (3-axis stabilization) μέσω κλειστού βρόχου. Η απόρριψη των διαταραχών υλοποιείται με μια στρατηγική όπως αυτή που εικονίζεται στο Σχήμα 2.4-1, όπου ο ελεγκτής λαμβάνει πληροφορίες από τους διάφορους αισθητήρες και στέλνει κατάλληλα σήματα στους επενεργητές προκειμένου να επηρεάσει επιθυμητά τη δυναμική συμπεριφορά του δορυφόρου.



Σχήμα 2.4-1: Διάγραμμα συστήματος ελέγχου δορυφόρων.

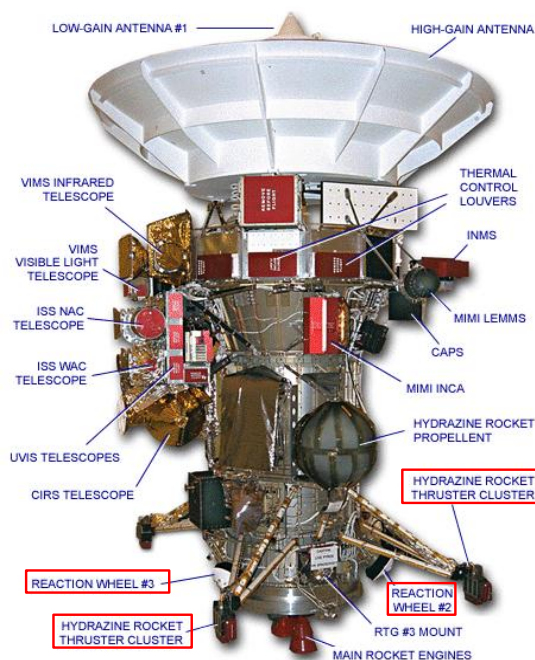
Τα σήματα εισαγωγής στο σύστημα ελέγχου του δορυφόρου προέρχονται από μετρήσεις προσανατολισμού και εκτελούνται από τους διάφορους αισθητήρες. Πρόκειται για πακέτα πληροφοριών -συνήθως τρεις Euler γωνίες- που συσχετίζουν τους άξονες του δορυφόρου με κάποια στάθμη αναφοράς και εκτελούν συγκρίσεις ή δίνουν απόλυτες τιμές σε αλληλοσυμπληρούμενη βάση. Οι αισθητήρες από τους οποίες λαμβάνονται οι απόλυτες τιμές προσανατολισμού συνήθως λειτουργούν αναγνωρίζοντας τη διεύθυνση κάποιου διανύσματος και οι κυριότεροι εξ αυτών είναι:

- Αισθητήρες ανίχνευσης διεύθυνσης του Ήλιου (Sun sensors)
- Αισθητήρες ανίχνευσης διεύθυνσης της Γής (Earth sensors)
- Αισθητήρες ανίχνευσης διεύθυνσης Άστρων (Star sensors)
- Μαγνητόμετρα (magnetometers)
- Παγκόσμιο Γεωδαιτικό Σύστημα (GPS)

Ενώ οι αισθητήρες που δίδουν τις σχετικές μετρήσεις προσανατολισμού, στηρίζονται στην μεταβολή κάποιου μεγέθους και για την λειτουργία τους (συνεχής) απαιτείται τακτική βαθμονόμηση (calibration) μέσω των απόλυτων αισθητήρων. Την καρδιά των διαφορικών αισθητήρων αποτελούν τα γυροσκόπια τα οποία στην κλασική τους έκδοση φέρουν στρεφόμενη μάζα και λειτουργούν με βάση την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής. Τα γυροσκόπια μαζί με τα σχετικά ηλεκτρονικά και το λογισμικό ανάλυσης ενσωματώνονται σε ολοκληρωμένα συστήματα μέτρησης για τρεις άξονες τα γνωστά IMUs (Inertial Measurement Unit).

Εφόσον η μέτρηση του σφάλματος προσανατολισμού έχει εκπληρωθεί με τη βοήθεια κάποιου/ων από τους παραπάνω αισθητήρες ο υπολογιστής ελέγχου (On-Board

Computer) μέσω κάποιου αλγόριθμου ελέγχου εξαγεί τις κατάλληλες εντολές ελέγχου στους επενεργητές για να περιστραφεί το σκάφος στην επιθυμητή στάση.



Σχήμα 2.4-2: Δορυφόρος σταθεροποιούμενος σε 3-άξονες.  
Δορυφόρος Cassini–Huygens [w10]

Οι εν χρήση επενεργητές είναι κυρίως:

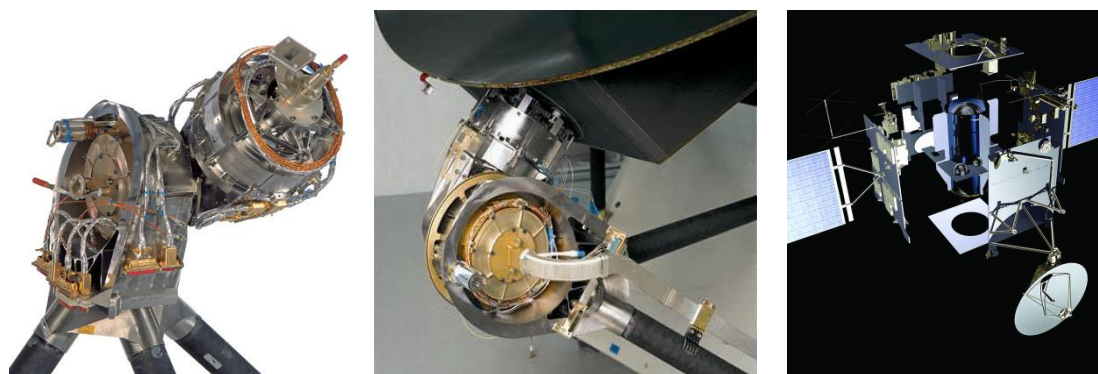
- Συστήματα ανταλλαγής στροφορμής. Υλοποιούνται με σφόνδυλο του οποίου η στροφορμή μεταβάλλεται με τη βοήθεια ηλεκτροκινητήρα. Τέτοια συστήματα είναι:
  - οι σφόνδυλοι αδράνειας (momentum wheel)
  - οι σφόνδυλοι αντίδρασης (reaction wheel)
  - οι γυροσκοπικοί επενεργητές (Control Moment Gyro - CMG) που μπορούν να παρέχουν ροπή σε κάθε διεύθυνση.
- Μαγνητικοί επενεργητές. Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος από πηνία και τη συνεπακόλουθη δημιουργία τοπικού μαγνητικού πεδίου που η αλληλεπίδραση του με το μαγνητικό πεδίο του πλανήτη γύρω από τον οποίο εκτελείται η τροχιά προκαλεί μια ροπή που αξιοποιείται ανάλογα με τις ανάγκες ελέγχου του δορυφόρου
- Συστήματα προώθησης. Λειτουργούν μέσω εκκένωσης κάποιου προωθητικού (propellant) και αποτελούν την σταθερότερη τεχνολογική λύση μιας και η χρήση τους μπορεί να συνδυαστεί με άλλες μεθόδους (βλπ. §6.2).

## 2.5 Μηχανισμοί κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων

Οι μηχανισμοί κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων εμφανίζονται σε μια ευρεία ποικιλία τύπων και μεγεθών ανάλογα με την εφαρμογή για την οποία προορίζονται. Στην τρέχουσα ενότητα θα παρουσιαστούν κάποια χονδρικά στοιχεία που αφορούν την γενική τεχνολογική υλοποίηση που απαντάται στην διαστημική βιομηχανία για μηχανισμούς κίνησης κεραίας (Antenna Pointing Mechanism-APM). Επίσης, θα παρουσιαστεί και θα αναλυθεί συνοπτικά ο αντίστοιχος μηχανισμός του ΕΑΕ- ΕΜΠ που φέρει την ιδιότητα να κινείται χωρίς τη μεταφορά αντιδράσεων.

Η χρήση APM συνίσταται σε μια ή περισσότερες από τις πιο κάτω καταστάσεις:

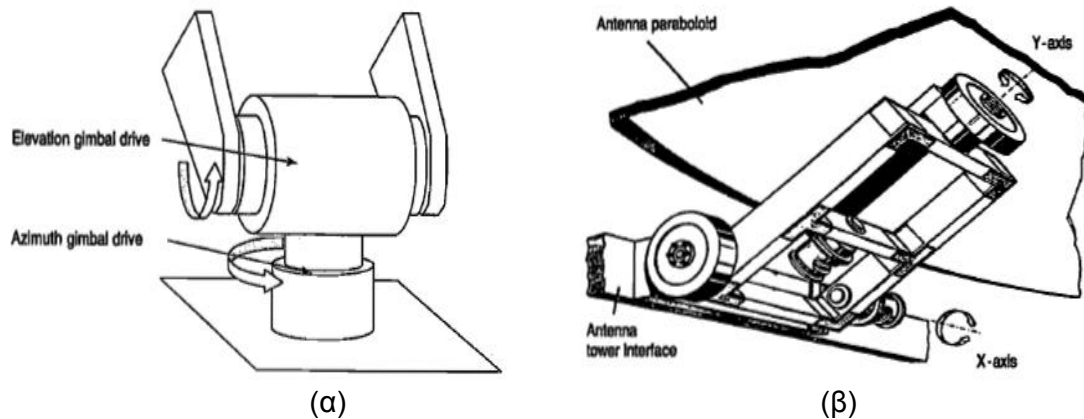
- *σταθερή κατάδειξη*, διατήρηση της ευθυγράμμισης με οποιαδήποτε προκαθορισμένη γωνία και στους δύο άξονες.
- *επισημάνση νέου στόχου*, κίνηση σε νέες γωνίες που προκύπτουν από επιθυμητό στόχο
- *ανίχνευση*, συνεχής παρακολούθηση κινούμενου στόχου



Σχήμα 2.5-1: Μηχανισμός κίνησης κεραίας HGAMA του δορυφόρου Rosetta.

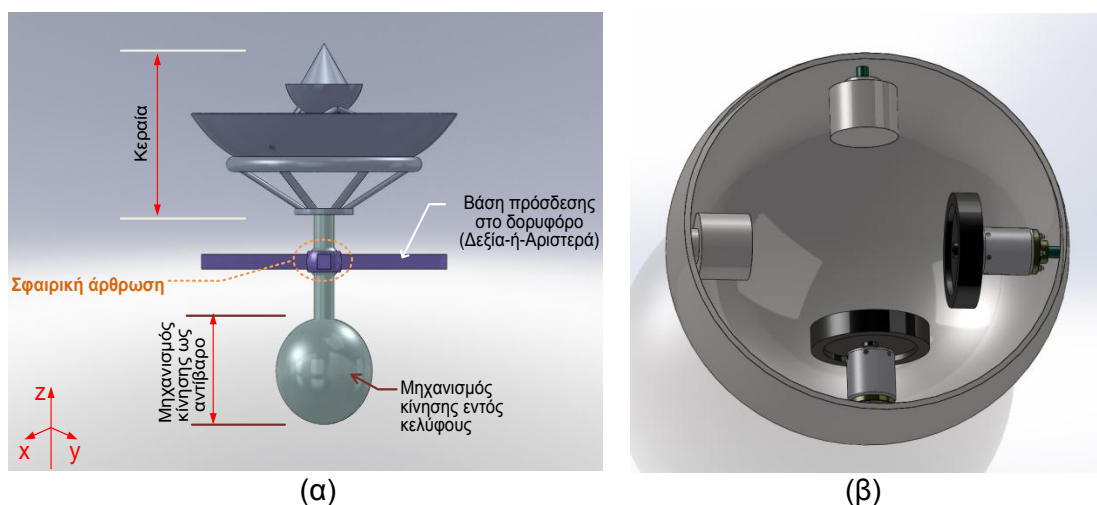
Για την εκτέλεση των κινήσεων αυτών πρέπει οι μηχανισμοί να φέρουν δυο επενεργούμενους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας (β.ε.) που συνήθως εμφανίζονται σε κάθετη μεταξύ τους διεύθυνση οδηγώντας σε δυο δυνατές διαμορφώσεις. Η πρώτη διαμόρφωση καλείται *az-el* (*azimuth-elevation*) και σε αυτήν η ανύψωση της κεραίας εκτελείται κατά τον οριζόντιο άξονα (*gimbal axis*), που και αυτός με τη σειρά του στηρίζεται-στρέφεται στον κάθετο άξονα. Η διαμόρφωση αυτή, που φαίνεται στο Σχήμα 2.5-2α είναι πολύ κοινή και για κεραίες επίγειων σταθμών. Η δεύτερη διαμόρφωση ονομάζεται *x-y* και αποτελεί ουσιαστικά αντιστροφή των αξόνων της προηγούμενης διάταξης. Έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να αναπτύσσει (*deploy*) κεραίες που βρίσκονται στο πλάι του δορυφόρου αφού αν επί του εικονιζόμενου στο Σχήμα 2.5-2β άξονα *-y*, η κεραία τοποθετηθεί σε επαρκή απόσταση από τον *x*- άξονα

τότε η διάταξη λειτουργεί και ως βραχίονας έκτασης.



Σχήμα 2.5-2: Μηχανισμός κίνησης κεραίας (α) τύπου *az-el* και (β) τύπου *x-y*. [7]

Αντίθετα με τους τυπικούς μηχανισμούς κίνησης που φαίνονται πιο πάνω και οι οποίοι απλά ενσωματώνουν δυο στροφικούς επενεργητές σε κάθετη διάταξη, ο μηχανισμός κίνησης του ΕΑΕ-ΕΜΠ είναι ένα ολοκληρωμένο σύστημα κίνησης και αντιστάθμισης. Η διάταξη των (δυο) κινητήρων παραμένει στην προηγούμενη σταυρωτή διάταξη αλλά σε επίπεδο κάθετο ως προς τον άξονα συμμετρίας της κεραίας. Διαφοροποιείται όμως ουσιαστικά ως προς το ότι οι επενεργητές δεν συζευγνύονται άμεσα με το προσάρτημα-κεραία αλλά η κίνηση λαμβάνεται από την αντίδραση στην μεταβολή των στροφών των κινητήρων κατά την τεχνική των τροχών αντίδρασης (*reaction wheels*). Επίσης, ιδιαίτερο γνώρισμα του εν λόγω μηχανισμού αποτελεί και το γεγονός ότι εκμεταλλευόμενος τη μάζα του συστήματος κίνησης εξισορροπεί αυτή της κεραίας με αποτέλεσμα να διατηρεί το ολικό κέντρο μάζας ακλόνητο στο κέντρο της σφαιρικής άρθρωσης που φαίνεται στο Σχήμα 2.5-3α.



Σχήμα 2.5-3: (α) Ολική κατασκευαστική διαμόρφωση και (β) σύστημα επενεργητών μηχανισμού κίνησης κεραίας χωρίς αντιδράσεις ΕΑΕ-ΕΜΠ.

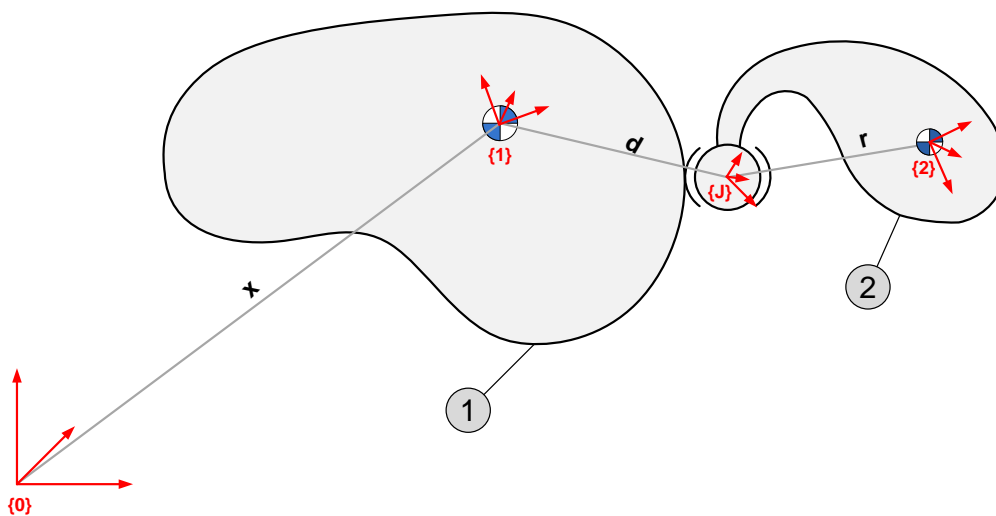
Αναλυτικότερα, το σύστημα αυτό χτίζεται πάνω σε μια σφαιρική άρθρωση (ball-and-socket joint) κατά τρόπο ώστε όλα τα κινούμενα μέρη να συνδέονται με το εσωτερικό τμήμα (ball) αυτής, αφήνοντας το αντίστοιχο εξωτερικό τμήμα (socket) να λειτουργεί ως βάση στήριξης του συστήματος. Η κεραία τοποθετείται σε κολόνα στήριξης στο επάνω μέρος αφήνοντας στην αντιδιαμετρική κάτω θέση το σφαιρικό κέλυφος (housing), όπου εντός του βρίσκεται εγκλεισμένο το σύστημα επενέργειας. Το εικονιζόμενο στο Σχήμα 2.3-5β σύστημα επενέργειας φέρει δυο κινητήρες στις διευθύνσεις  $x-y$  που συνδέονται με το στάτη τους στο κέλυφος για να μεταφέρουν την εξ-αντιδράσεως κίνηση. Συγκεκριμένα, όταν ο δρομέας -με τον σφόνδυλο που ζεύγνυται στην άτρακτο του για αύξηση της αδράνειας του- εκάστου κινητήρα, στρέφεται κατά την μια διεύθυνση ο στάτης αυτού θα κινείται κατά την αντίθετη φορά και θα περιστρέφει το κέλυφος με το οποίο είναι συνδεδεμένος. Η στροφή του κελύφους αναγκάζει και υπόλοιπο τμήμα της κατασκευής να περιστρέφεται περί το κέντρο της σφαιρικής άρθρωσης, διαγράφοντας τοξο-κυκλική τροχιά. Εφαρμογή συνδυασμένης δράσης και των δύο κινητήρων καθιστά δυνατή τη χάραξη οιασδήποτε τροχιάς σε ημισφαιρικό χώρο, δίδοντας την δυνατότητα κατάδειξης-παρακολούθησης στόχου (tracking-pointing).

Η ιδιόμορφη αυτή σύνθεση, καθιστά το μηχανισμό ικανό να κινείται χωρίς να μεταφέρει δυνάμεις και ροπές αντίδρασης. Η απόρριψη δυνάμεων γίνεται εφικτή διατηρώντας σταθερό για κάθε κίνηση διάνυσμα γραμμικής ορμής μέσω σταθεροποίησης του ολικού κέντρου μάζας στο κέντρο της σφαιρικής άρθρωσης. Συγκεκριμένα, στο εσωτερικό του σφαιρικού κελύφους η μάζα των δυο κινητήρων αντισταθμίζεται από τα δυο συμπαγή τμήματα υλικού που βρίσκονται συμμετρικά τους και είναι τέτοια ώστε να μεταφέρουν το κέντρο μάζας του συστήματος επενέργειας στο κέντρο του κελύφους. Ταυτόχρονα όμως η ίδια μάζα του συστήματος επενέργειας λειτουργεί ως αντιστάθμισμα της μάζας της κεραίας και μεταφερθεί το κέντρο μάζας της κατασκευής στο κέντρο της σφαιρικής άρθρωσης. Ενώ, η εξισορρόπηση ροπών γίνεται εφικτή κινηματικά μιας και ο μηχανισμός αναπτύσσεται σε σφαιρική άρθρωση-βάση που δεν περιορίζει κανένα περιστροφικό βαθμό ελευθερίας και ως εκ τούτου δεν αναπτύσσει ροπές αντίδρασης.

### 3 Δυναμική Ανάλυση Ελεύθερα Αιωρούμενου Σώματος με Στρεφόμενο Προσάρτημα

Η συνήθης μηχανολογική πρακτική ορίζει πως για τη μελέτη ενός συγκεκριμένου ζητήματος η ανάλυση ξεκινά από τη γενική περίπτωση και ακολούθως εξειδικεύεται. Κατά συνέπεια, στο παρόν κεφάλαιο θα οριστεί η γενική περίπτωση του δυναμικού προβλήματος και θα εξαχθεί με χρήση της κατά Lagrange δυναμικής η εξίσωση που χαρακτηρίζει το σύστημα.

Η γενική λοιπόν περίπτωση, αφορά δυο στερεά-άκαμπτα σώματα (rigid bodies) που ακουμπούν -αρθρώνονται κατά την έννοια σφαιρικής άρθρωσης (ball joint)- στο κοινό σημείο  $J$ . Η τοπολογία αυτή αποτελεί τυπικό δείγμα όπου ένα ελεύθερα αιωρούμενο (free floating) αντικείμενο -π.χ. δορυφόρος- συνδέεται με ένα προσάρτημα (appendage) το οποίο μπορεί να περιστραφεί γύρω από το σημείο άρθρωσης  $J$ , επενεργούμενο από κινητήρες που ευρίσκονται επ' αυτού (body fixed).



Σχήμα 3.1-1: Γενική περίπτωση συστήματος 9 β.ε.

Το εικονιζόμενο στο Σχήμα 3.1-1 σύστημα, έχει 9 βαθμούς ελευθερίας (β.ε.) και ειδικότερα:

- Για το Σώμα 1: υφίστανται 6 β.ε. ή αναλυτικότερα 3 στροφικοί (rotational) + 3 μεταφορικοί (translational)
- Για το Σώμα Body 2: υφίστανται μόνο 3 β.ε. που είναι και όλοι στροφικοί



Ενώ τα πλαίσια αναφοράς (reference frames) που εμφανίζονται τοποθετούνται και χαρακτηρίζονται ως ακολούθως:

$\{0\}$  : Αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς (inertial reference frame)

$\{1\}$  : Σωματόδετο (body fixed) επί του κέντρου μάζας του Σώματος 1

$\{2\}$  : Σωματόδετο επί του κέντρου μάζας του Σώματος 2

$\{J\}$  : Σωματόδετο επί του κέντρου της σφαιρικής άρθρωσης

### 3.1 Δυναμική κατά Lagrange

Προκειμένου να εκπονηθεί η κατά Lagrange δυναμική θα πρέπει ως πρώτο βήμα να οριστούν οι γενικευμένες μεταβλητές που προσδιορίζουν τη θέση και προσανατολισμό των μελών του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, στο υπό μελέτη σύστημα ορίζονται 9 γενικευμένες μεταβλητές όσοι και οι β.ε. αυτού. Οι μεταβλητές κατατάσσονται σε διάνυσμα (generalized coordinates vector) ικανό να περιγράψει πλήρως την ανά στιγμή στάση (pose) των δυο σωμάτων. Το  $\tilde{\mathbf{q}}$  διάνυσμα είναι λοιπόν:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}}^{\text{Body1}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{Trans}} \\ \overbrace{\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{matrix}}^{\text{Body1}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{Rot}} \\ \overbrace{\begin{matrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{matrix}}^{\text{Body2}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}^{\text{Rot}} \end{array} \right]^T = \left[ \mathbf{x}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T \quad \boldsymbol{\varphi}^T \right]^T \quad (3.1-1)$$

Σημειώνεται ότι οι γωνίες  $\boldsymbol{\varphi}$  είναι οι γωνίες προσανατολισμού του Σώματος 2 και μετρώνται σχετικά ως προς τις  $\boldsymbol{\theta}$ .

Έχοντας ορίσει τα μεγέθη που ορίζουν θέση και προσανατολισμό του συστήματος, είναι πλέον δυνατό να γίνει ο υπολογισμός των ταχυτήτων των δυο σωμάτων. Αναλυτικότερα, υπολογίζονται για το Σώμα 1 η γραμμική ταχύτητα:

$${}^0\mathbf{v}_1 = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.1-2a)$$

και η γωνιακή του ταχύτητα:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_1 = {}^0\mathbf{R}_1^{-1}\boldsymbol{\omega}_1 = {}^0\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.1-2b)$$

Ενώ, για το Σώμα 2 η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται:

$$\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= {}^0\boldsymbol{\omega}_1 + {}^0\boldsymbol{\omega}_2^1 \\
{}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= {}^0\boldsymbol{\omega}_1 + {}^0\mathbf{R}_2\mathbf{S}_2\dot{\boldsymbol{\phi}} \\
&= {}^0\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_2\mathbf{S}_2\dot{\boldsymbol{\phi}} \\
{}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= {}^0\mathbf{R}_1 \underbrace{\left[ \mathbf{S}_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^1\mathbf{R}_2\mathbf{S}_2\dot{\boldsymbol{\phi}} \right]}_{{}^1\boldsymbol{\omega}_2} = {}^0\mathbf{R}_1{}^1\boldsymbol{\omega}_2
\end{aligned} \tag{3.1-3a}$$

και η γραμμική ταχύτητα του ευρίσκεται ως:

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{v}_2 &= {}^0\mathbf{v}_1 + \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{d}) + \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{r}) \\
&= {}^0\mathbf{v}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 \frac{d}{dt}({}^1\mathbf{d}) + \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_1) {}^1\mathbf{d} + {}^0\mathbf{R}_2 \frac{d}{dt}({}^2\mathbf{r}) + \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{R}_2) {}^2\mathbf{r} \\
&= {}^0\mathbf{v}_1 + {}^0\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{d} + {}^0\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{r} \\
&= {}^0\mathbf{v}_1 + \left( {}^0\mathbf{R}_1{}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{d} \right) + \left( {}^0\mathbf{R}_2{}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0\mathbf{R}_2{}^2\mathbf{r} \right)
\end{aligned} \tag{3.1-3b}$$

Οπότε τελικά:

$${}^0\mathbf{v}_2 = {}^0\mathbf{v}_1 + {}^0\mathbf{R}_1{}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{d} + {}^0\mathbf{R}_2{}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{r} \tag{3.1-3c}$$

Η σήμανση  $(\bullet)^\times$  που χρησιμοποιήθηκε υποδηλεί το σχηματισμό ενός ψευδο-συμμετρικού (skew-symmetric) μητρώου  $\boldsymbol{\omega}^\times$  από τα στοιχεία του διανύσματος  $\boldsymbol{\omega}$  κατά το μοτίβο:

$$\boldsymbol{\omega}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1-4}$$

Επίσης, ο πίνακας  $\mathbf{S}$  παριστά μια Ιακωβιανή (Jacobian type) μήτρα που συνδέει την γωνιακή ταχύτητα με τις χρονικές παράγωγους των γωνιών προσανατολισμού (Euler)  $\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\phi}}$  κατά τρόπο:

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{S}_1\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{3.1-5a}$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{S}_2\dot{\boldsymbol{\phi}} \tag{3.1-5b}$$

με τα στοιχεία των  $\mathbf{S}_1$  και  $\mathbf{S}_2$  είναι ακριβώς αντίστοιχα. Προκειμένου για τον  $\mathbf{S}_1$  αυτά διατάσσονται ως:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.1-5b)$$

Τέλος, παρατηρείται ότι τα δυο σώματα χαρακτηρίζονται πλήρως από τις μάζες τους  $m_1$ ,  $m_2$  και από τους τανυστές αδρανείας τους οι οποίοι έχουν την μορφή:

$${}^i I_i = \begin{bmatrix} I_{1_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1_{zz}} \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \quad (3.1-6)$$

Η διαγώνια αυτή μορφή έχει χρησιμοποιηθεί υπό τη σύμβαση ότι το κάθε ένα από τα δυο σωματόδετα συστήματα συντεταγμένων  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  έχουν τοποθετηθεί κατά τρόπο ώστε να ταυτίζονται με τους κύριους αδρανειακούς άξονες εκάστου σώματος.

Με βάση τα πιο πάνω και αφού ταχύτητες, μάζες και αδράνεις έχουν οριστεί καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός της ολικής κινητικής ενέργειας  $T_{tot}$  του συστήματος. Η  $T_{tot}$  αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών των δυο σωμάτων όπου και αυτές με τη σειρά τους επιμερίζονται σε μεταφορική και περιστροφική συνιστώσα. Ως εκ τούτου λαμβάνονται:

$$T_{tot} = T_{1_{Trans}} + T_{2_{Trans}} + T_{1_{Rot}} + T_{2_{Rot}} \quad (3.1-7a)$$

ή αναλυτικότερα:

$$T_{tot} = \frac{1}{2} m_1 {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 {}^0 \mathbf{v}_2^T {}^0 \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_1^T {}^0 \mathbf{I}_1 {}^0 \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_2^T {}^0 \mathbf{I}_2 {}^0 \boldsymbol{\omega}_2 \quad (3.1-7b)$$

Ενώ, είναι δυνατό η εξίσωση να γραφεί και υπό την ιδιαίτερα χρήσιμη μητρική μορφή ως:

$$T_{tot} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.1-8)$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος παρατίθεται στο Παράρτημα Α και το αποτέλεσμα των αλγεβρικών πράξεων παρατίθεται στη Εξ. (3.1-9):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \mathbf{1}_3 & -m_2 {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{d} \times \mathbf{S}_1 & -m_2 {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{S}_2 \\ m_2 \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{d} \times {}^0 \mathbf{R}_1^T & \mathbf{S}_1^T \mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2 \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2 \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 - m_2 \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{d} \times {}^1 \mathbf{R}_2 {}^2 \mathbf{r} \times \mathbf{S}_2 \\ m_2 \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{r} \times {}^0 \mathbf{R}_2^T & \mathbf{S}_2^T \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 - m_2 \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{r} \times {}^1 \mathbf{R}_2^T {}^1 \mathbf{d} \times \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1-9a)$$

$$T_{tot} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{x}} & \dot{\boldsymbol{\theta}} & \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} {}^0\dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \quad (3.1-9b)$$

Με την ολοκλήρωση των υπολογισμών για την κινητική ενέργεια και δεδομένου πως δυναμική ενέργεια είναι μηδενική λόγω της θεώρησης πως το σύστημα βρίσκεται σε χώρο μηδενικής βαρύτητας (διάστημα), επόμενο καθοριστικό βήμα είναι η εφαρμογή της σχέσης Euler-Lagrange (E-L) προκειμένου να εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Συγκεκριμένα, όπως έχει ήδη αναφερθεί η σχέση των E-L ορίζει πως:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T_{tot}}{\partial \mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.1-10)$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια έχει την τετραγωνική μορφή  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$ , τότε εύκολα μπορεί να υπολογιστεί ότι:

$$\frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.1-11a)$$

και η χρονική παράγωγος αυτού προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \underset{c_1}{\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1 \quad (3.1-11b)$$

Αναφορικά με τον δεύτερο όρο του αριστερού τμήματος της Εξ. (3.1-10) αυτός σημειώνεται ως  $\mathbf{C}_2$ :

$$\frac{\partial T_{tot}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C}_2 \quad (3.1-11c)$$

και για τον υπολογισμό του (Παράρτημα Β) έχει δημιουργηθεί κατάλληλος κώδικας στο περιβάλλον του λογισμικού Maple15 (Παράρτημα Γ) προκειμένου να εξαχθεί αργότερα -βλπ. §3.2- και σε MatLab/Simulink όπου οι εξισώσεις κίνησης θα ολοκληρωθούν αριθμητικά.

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις Εξ. (3.1-11) στην (3.1-10), λαμβάνεται η κλασσική μορφή των δυναμικών εξισώσεων κίνησης:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2}_{\mathbf{C}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{F}}$$

$$\mathbf{M}_{9 \times 9} \ddot{\mathbf{q}}_{9 \times 1} + \mathbf{C}_{9 \times 1} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.1-12)$$

Οι γενικευμένες μη-συντηρητικές (non-conservative) δυνάμεις που αντιστοιχούν στις γενικευμένες μεταβλητές  $\tilde{\mathbf{q}}$  και παριστάνονται με το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{F}}$  μπορούν να υπολογιστούν όπως ειπώθηκε προηγουμένα με τη βοήθεια της Αρχής Δυνατών Έργων.

Συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι το δυνατό έργο που παράγεται από το σύνολο των δυνάμεων και ροπών που δρουν επί ενός συστήματος δίδεται από τη σχέση:

$$\delta W = \tau_1 \delta q_1 + \dots + \tau_n \delta q_n - \mathbf{f}^T \delta \mathbf{x} - \mathbf{n}^T \delta \phi \hat{\gamma} \quad (3.1-13a)$$

Στην προκείμενη περίπτωση, που εξωτερικές δυνάμεις  $\mathbf{f}$  και ροπές  $\mathbf{n}$  δεν υφίστανται, το δυνατό έργο «παράγεται» μόνο από το εσωτερικό γινόμενο των ροπών των επενεργητών επί των αντίστοιχων γωνιών στροφής. Άρα:

$$\delta W = \tau_1 \delta q_1 + \dots + \tau_n \delta q_n \quad (3.1-13b)$$

Ακόμα, επειδή στο υπό εξέταση σύστημα θεωρείται ότι το Σώμα 2 –προσάρτημα– είναι υπο-επένεργόμμενο και μόνο στους δυο από τους τρεις άξονες στροφής φέρει κινητήρες, το δυνατό έργο περιορίζεται ακόμα παραπάνω στις συνιστώσες των  $\tau_{2_1}$  και  $\tau_{2_2}$ . Συνεπώς, το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων  $\tilde{\mathbf{F}}$  έχει τελικά τη μορφή:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & [\tau_{2_1} & \tau_{2_2} & 0]^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.1-14)$$

### 3.2 Υλοποίηση στο MatLab/Simulink

Στην προηγούμενη ενότητα εξήχθη η δυναμική εξίσωση κίνησης του συστήματος (3.1-12) και η οποία εδώ θα επιλυθεί αριθμητικά προκειμένου να ληφθούν δεδομένα για τη θέση και προσανατολισμό έκαστου σώματος.

Μετασχηματίζοντας την Εξ. (3.1-12) και επιλύοντας ως προς τις δεύτερες χρονικές παραγώγους των γενικευμένων μεταβλητών λαμβάνεται:

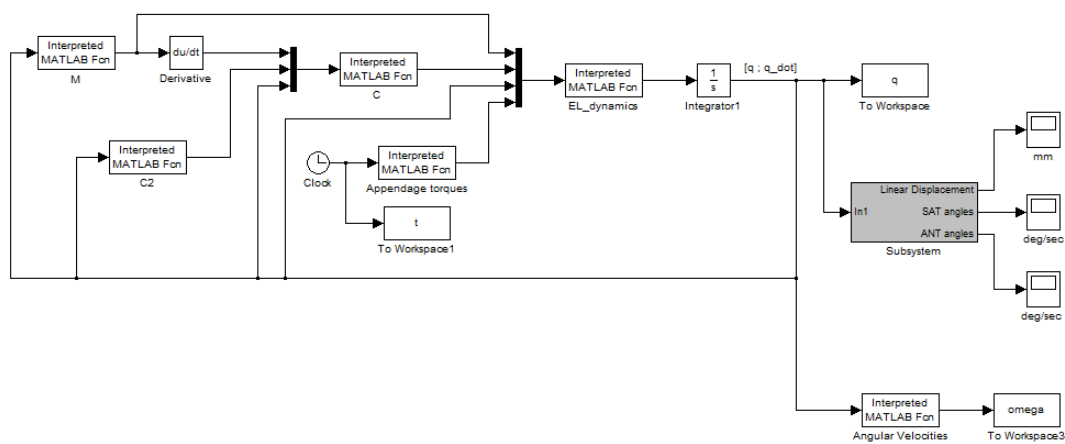
$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{C}) \quad (3.2-1)$$

Η εξίσωση αυτή παριστά ένα σύστημα 9 διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ας</sup> τάξης έντονα μη γραμμικό, που για την ολοκλήρωσή τους πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποια από τις γνωστές μεθόδους αριθμητικής επίλυσης. Η υλοποίηση αυτή επιλέγεται να γίνει στο περιβάλλον του MatLab/Simulink το οποίο αποτελεί ένα ιδανικό εργαλείο μοντελοποίησης δυναμικών συστημάτων. Η δυναμικές εξισώσεις γράφονται σε .mfile και εισάγονται στο Simulink ως Interpreted MatLab Functions προκειμένου να εκτελεστεί η αριθμητική ολοκλήρωσή τους. Προς τούτο και για σκοπούς προγραμματιστικούς, το σύστημα διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ας</sup> τάξης υποβιβάζεται σε 1<sup>ης</sup> τάξης μέσω χρήσης ενδιάμεσης μεταβλητής σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{out_1} \quad (3.2-2a)$$

$$\mathbf{q}_{out_2} = \dot{\mathbf{q}}_{out_1} \quad (3.2-2b)$$

Τελικά το Simulink μοντέλο που υλοποιεί το εν λόγω σύστημα κατασκευάζεται με την εικονιζόμενη στο Σχήμα 3.2-1 αρχιτεκτονική.



Σχήμα 3.2-1. Υλοποίηση δυναμικού συστήματος στο Simulink.

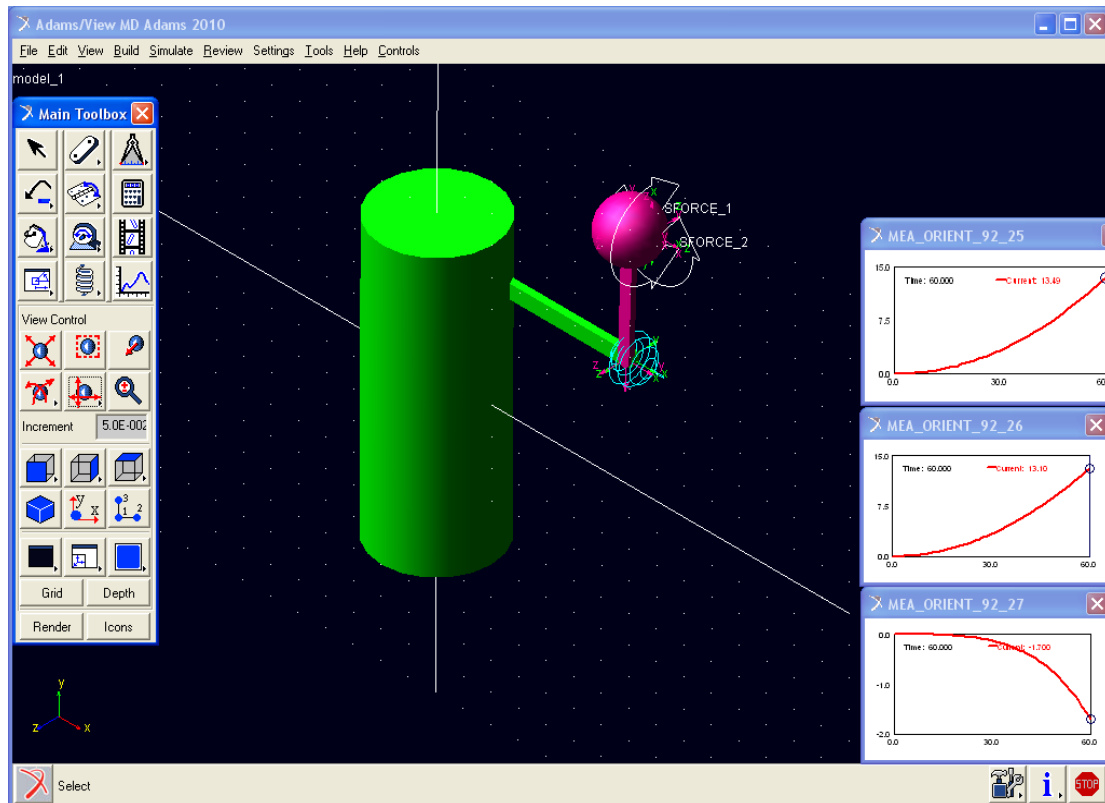
Η υλοποίηση αυτή εξασφαλίζει τη δυνατότητα για τροποποιήσεις σε όλα τα επιμέρους τμήματα διατηρώντας στον πυρήνα τη δυναμική ανάλυση που προηγήθηκε. Συνεπώς, είναι δυνατό να εισάγεται οποιαδήποτε είσοδος (δυνατότητα προσθήκης ελέγχου –βλπ. Κεφ. 5) στο σύστημα και να παρατηρείται η/και να επεξεργάζεται περαιτέρω η έξοδος. Όλες οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν στις προσομοιώσεις, καταγράφονται στο Παράρτημα Δ μαζί με τις σχετικές συναρτήσεις που υλοποιούν όλες τις παραπάνω εξισώσεις.

### 3.3 Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams

Στις ενότητες που προηγήθηκαν παρουσιάστηκε η κατάστρωση και η ολοκλήρωση των δυναμικών εξισώσεων που χαρακτηρίζουν το σύστημα δυο σωμάτων, 9 β.ε., που συνδέονται μέσω σφαιρικής άρθρωσης. Η πιο πάνω διαδικασία στο εξής θα καλείται *αναλυτική δυναμική λύση* για να αντιδιασταλεί με το δυναμικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στο λογισμικό MSC Adams το οποίο παρουσιάζεται εδώ και θα χρησιμοποιείται ως μέσο σύγκρισης-επαλήθευσης.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου στο λογισμικό δυναμικής προσομοίωσης MD Adams/View ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται σύντομα από τα παρακάτω στάδια:

- Αρχικά, αναπτύχθηκε η γεωμετρία του μοντέλου με βάση κυρίως τυποποιημένα στερεά (κύλινδρο, σφαίρα, σύνδεσμο) και λογική Boolean για την σύνθεση τους.
- Τα στερεά σώματα που δημιουργήθηκαν στο προηγούμενο στάδιο συνδέονται μεταξύ τους με ιδεατές αρθρώσεις (idealized joints) ανάλογα με τους επιθυμητούς β.ε. που ζητείται να φέρει κάθε σύστημα σωμάτων. Εν προκειμένω υφίσταται μόνο η σφαιρική άρθρωση που συνδέει τα δυο σώματα και απεικονίζεται στο Σχ. 3.3-1.
- Ακολούθως, εισάγονται οι ροπές που θα ασκούνται από τους κινητήρες. Στο παρόν μοντέλο εφαρμόζονται ροπές σε δυο άξονες και οι οποίες είναι τύπου «μεταξύ δυο σημείων-between two bodies». Η ρύθμιση αυτή επιτρέπει την μοντελοποίηση τόσο της εκμεταλλεύσιμης ροπής όσο και της ροπής αντίδρασης.
- Τέλος, ρυθμίζονται οι παράμετροι προσομοίωσης και το μοντέλο τίθεται σε λειτουργία για κάποιο χρονικό διάστημα



Σχήμα 3.3-1: Δυναμικό μοντέλο στο MSC Adams.

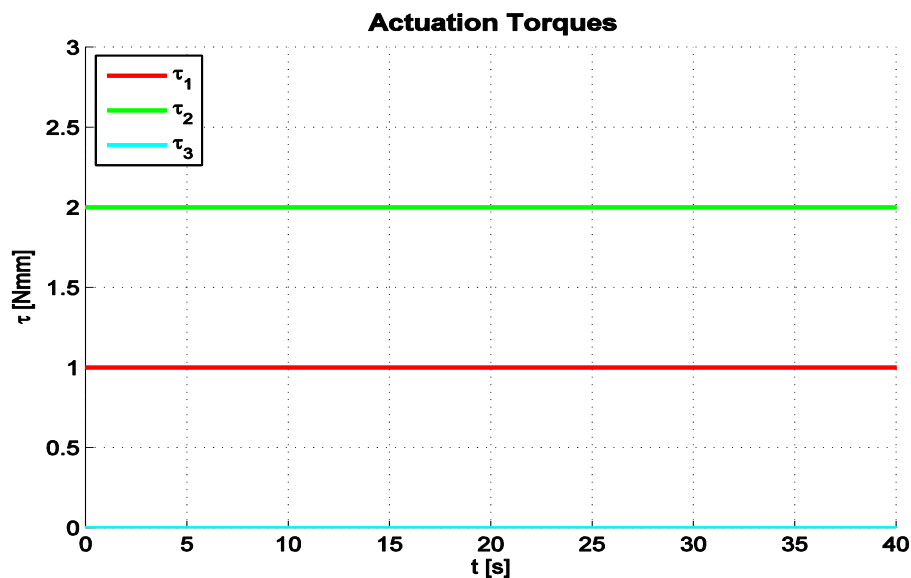
Τα αποτελέσματα που εξάγονται από την προσομοίωση στο MSC Adams είναι δυνατό να απεικονίζονται τόσο ως γραφικές παραστάσεις όσο και να καταγράφονται σε αρχεία με βάση το χρόνο για περαιτέρω επεξεργασία. Έτσι λοιπόν, γίνεται κατορθωτό να εισάγονται τα δεδομένα αποτελεσμάτων στην MatLab όπου θα αντιπαραβάλλονται με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης του Simulink και θα γίνονται οι απαραίτητες συγκρίσεις.

Οι τιμές για τις διάφορες παραμέτρους που εμπλέκονται στις προσομοιώσεις και είναι ταυτόσημες τόσο για την αναλυτική δυναμική του MatLab/Simulink όσο και για το μοντέλο Adams καταγράφονται στον Πίνακα 3.3-1 που ακολουθεί. Ακόμα, σημειώνεται πως η ροπή επενέργησης  $\tau_{3 \times 1}$  που ασκείται στο Σώμα 2 και εμφανίζεται στο διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων  $\tilde{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \tau_{3 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$  θεωρήθηκε σταθερή (βλπ. Σχήμα 3.3-2) και ίση με  $\tau_{3 \times 1}^T = [1.0 \quad 2.0 \quad 0]^T \text{ Nmm}$ .



Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Αδράνεια Σώματος 1	${}^1I_1 = \begin{bmatrix} 2,824 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 2,28 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,738 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$
Αδράνεια Σώματος 2	${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 7,84 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 7,84 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,58 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$
Μάζα Σώματος 1	$m_1 = 1050 \text{ kg}$
Μάζα Σώματος 2	$m_2 = 20 \text{ kg}$
Διάνυσμα $\mathbf{r}$	$\mathbf{r} = [25 \ 15 \ 200]^T \text{ mm}$
Διάνυσμα $\mathbf{d}$	$\mathbf{d} = [300 \ 50 \ 150]^T \text{ mm}$
Χρόνος προσομοίωσης $t$	$t = 40 \text{ s}$

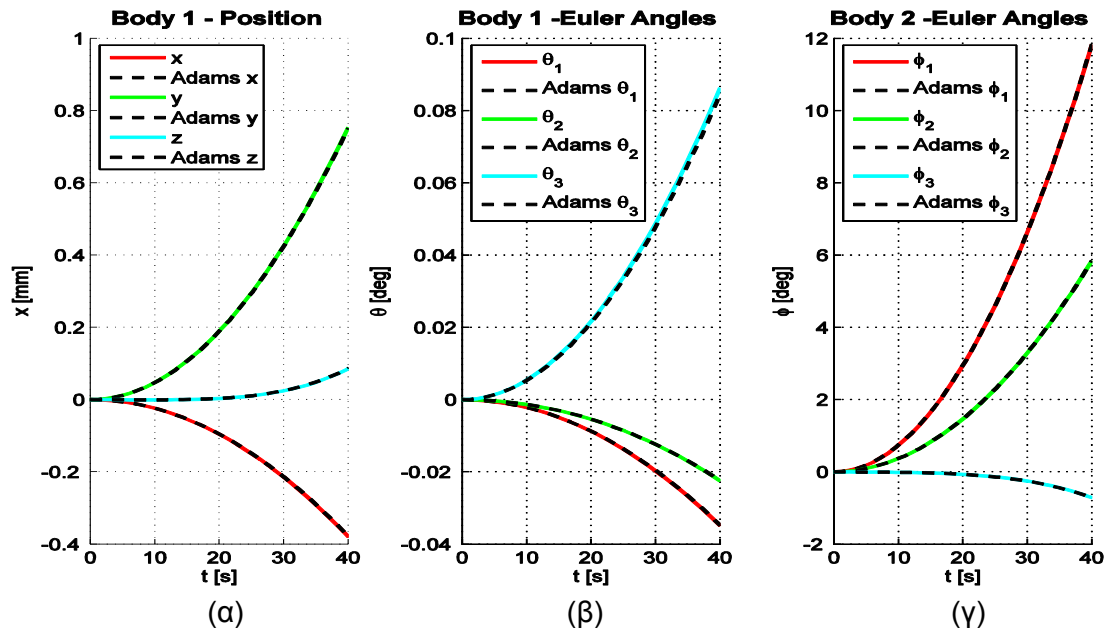
Πίνακας 3.3-1: Παράμετροι προσομοίωσης γενικής περίπτωσης



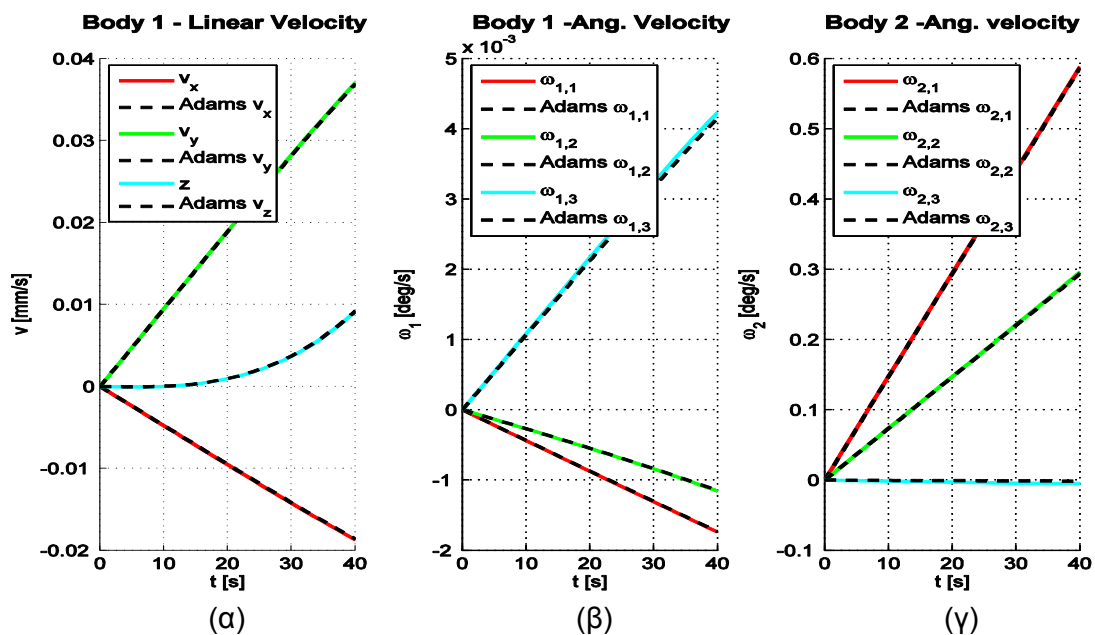
Σχήμα 3.3-2: Ροπές επενέργησης στο Σώμα 2 - είσοδοι

Στο Σχήμα 3.3-3 παρατίθενται επί των ίδιων αξόνων τα αποτελέσματα για τη θέση, τον προσανατολισμό του Σώματος 1 καθώς και για τον προσανατολισμό του Σώματος 2 που λήφθηκαν από τις προσομοιώσεις. Ενώ, στο Σχήμα 3.3-4,

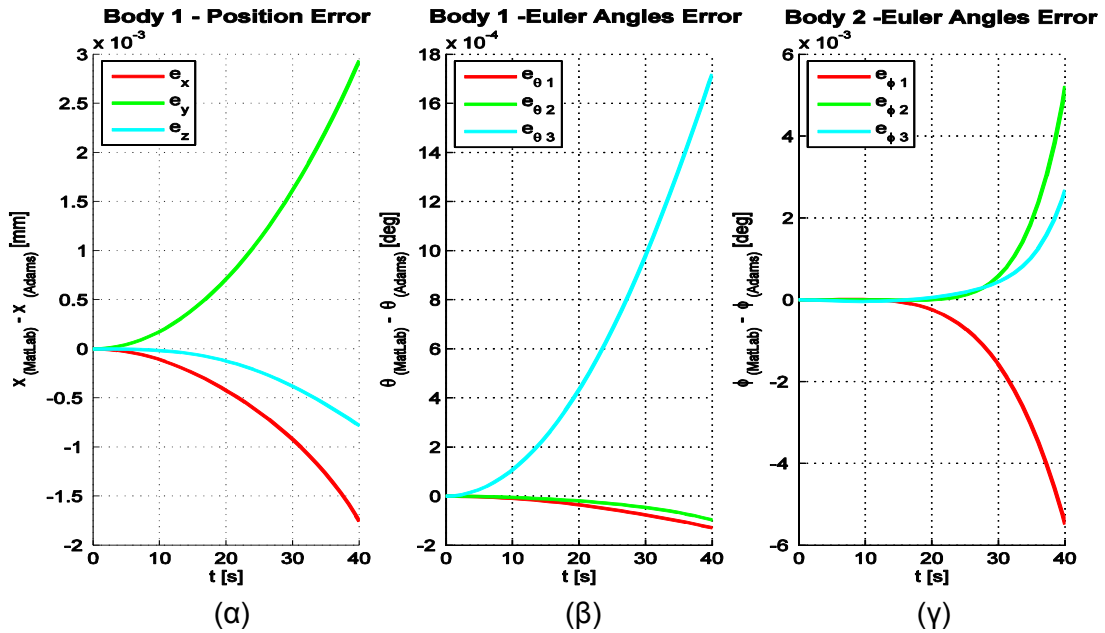
παρουσιάζονται η γραμμική ταχύτητα, η γωνιακή ταχύτητα του Σώματος 1 και η γωνιακή ταχύτητα του Σώματος 2. Ακολουθώντας, στα Σχήματα 3.3-5 και 3.3-6 παρουσιάζεται η εξέλιξη του σφάλματος προϊόντος του χρόνου για τα προηγούμενα μεγέθη.



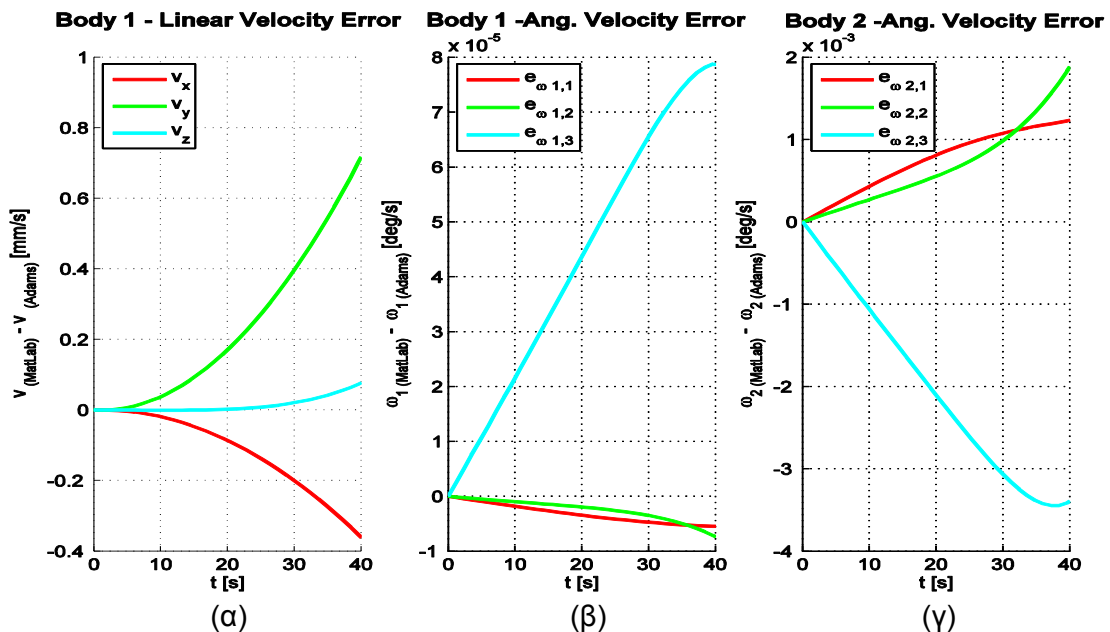
Σχήμα 3.3-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams για (α) θέση Σώματος 1, (β) προσανατολισμό Σώματος 1 και (γ) προσανατολισμό Σώματος 2.



Σχήμα 3.3-4: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams για (α) ταχύτητα, (β) γωνιακή ταχύτητα Σώματος 1 και (γ) γωνιακή ταχύτητα Σώματος 2.



Σχήμα 3.3-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams για (α) θέση Σώματος 1, (β) προσανατολισμό Σώματος 1 και (γ) προσανατολισμό Σώματος 2.



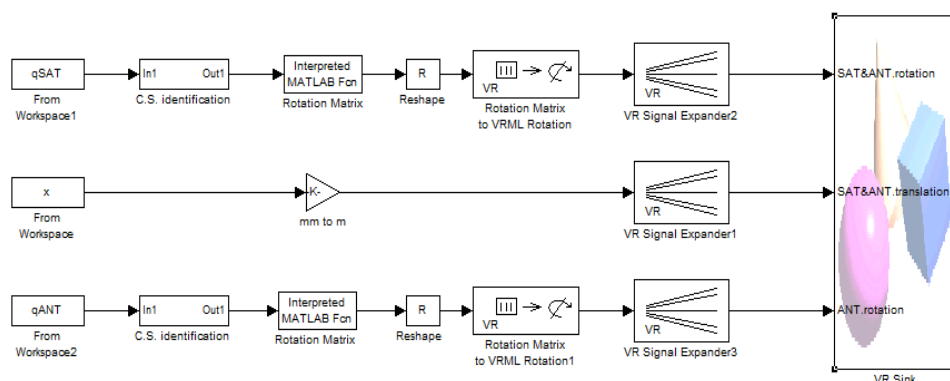
Σχήμα 3.3-6: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου MSC Adams για (α) ταχύτητα Σώματος 1, (β) γωνιακή ταχύτητα Σώματος 1 και (γ) γωνιακή ταχύτητα Σώματος 2.

Παρατηρώντας τα σχήματα αυτά, διαπιστώνεται η ταύτιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των αποκρίσεων που λαμβάνονται από την αναλυτική λύση και το Adams μοντέλο. Το σφάλμα σύγκλισης για όλες τις περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα μικρό και κινείται στα επίπεδα του  $10^{-3}$ .

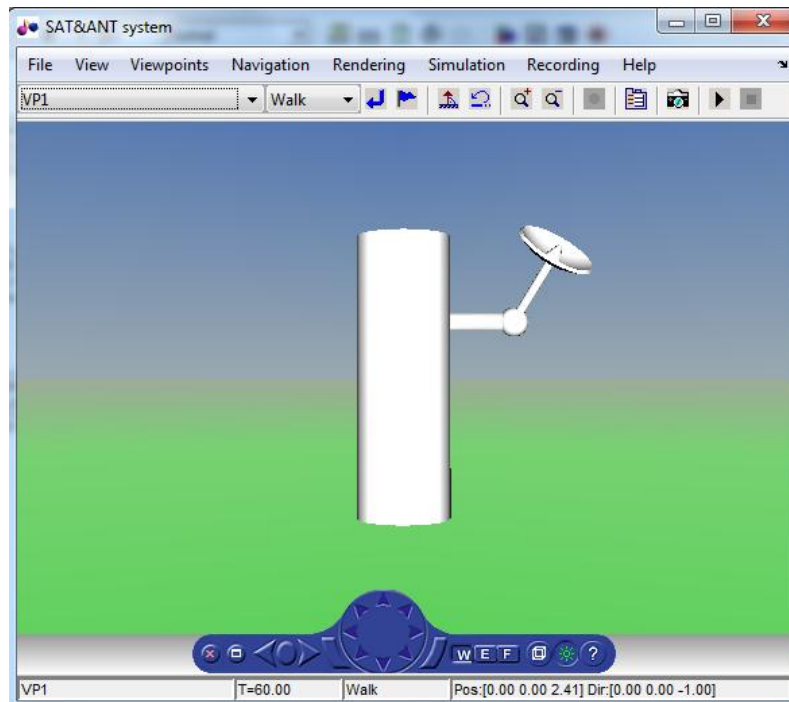
### 3.4 Ανάπτυξη εικονικής προσομοίωσης μέσω MatLab 3D animation (VRML)

Ως επόμενο βήμα στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την δυναμική ανάλυση πραγματοποιείται μια ακόμα προσομοίωση και σύγκριση. Πρόκειται για τη δημιουργία εικονικού περιβάλλοντος όπου θα παρουσιάζεται σε τρισδιάστατη κίνηση η συμπεριφορά του συστήματος. Η δημιουργία του εικονικού κόσμου γίνεται στο περιβάλλον MatLab μέσω του Simulink 3D Animation, όπου τα αντικείμενα αναπαριστώνται με το πρότυπο της VRML (Virtual Reality Modeling Language). Η αναλυτική παρουσίαση της δημιουργίας εικονικών κόσμων ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εργασίας όμως συνοπτικά αναφέρεται πως η ανάπτυξη του εν λόγω περιβάλλοντος προσομοίωσης στηρίχθηκε στη:

- Κατασκευή των σωμάτων στο λογισμικό σχεδίασης (CAD) SolidWorks το οποίο δίδει τη δυνατότητα άμεσης μετατροπής τους (parts και assembly) σε VRML.
- Επεξεργασία μέσω του V-Realm Builder των σωμάτων προκειμένου να τοποθετηθούν σε εικονικό περιβάλλον, να δηλωθούν τα συστήματα συντεταγμένων τους και να οριστούν οι δυνατότητες κίνησης τους.
- Εισαγωγή στο Simulink του VRML μοντέλου με χρήση του εργαλείου (block) VR Sink.
- Καθορισμός όλων των προπαρασκευαστικών εργαλείων και εντολών προκειμένου τα αποτελέσματα από απλά αριθμητικά δεδομένα καταχωρημένα σε πίνακες να μετατραπούν σε κατάλληλες εισόδους που καθορίζουν την κίνηση του τρισδιάστατου εικονικού μοντέλου.

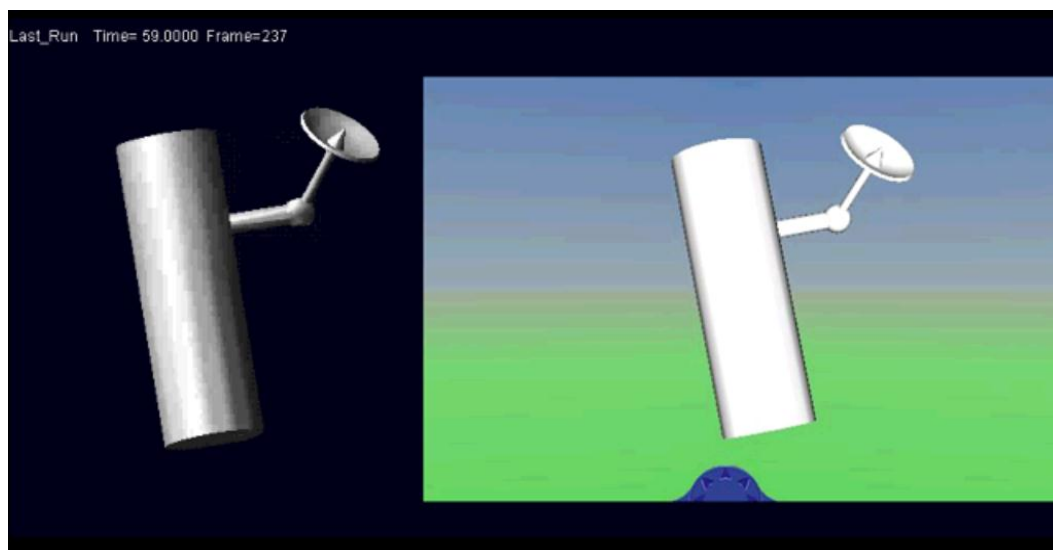


Σχήμα 3.4-1: Simulink μοντέλο για εικονική απεικόνιση.



Σχήμα 3.4-2: Το εικονικό περιβάλλον κίνησης του συστήματος.

Σύμφωνα με την πρακτική που εγκαινιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα και το παρόν προϊόν προσομοίωσης συγκρίνεται με το αντίστοιχο μοντέλο του MSC Adams προκειμένου να διαπιστωθεί και οπτικά η συνάφεια των δυο μεθόδων. Προς τούτο, η εικονική απεικόνιση δεδομένης κίνησης καταγράφεται σε αρχεία βίντεο (.avi) τόσο στο Simulink όσο και στο Adams/Postprocessor. Τα δυο αυτά βίντεο συντίθενται (overlay) τελικά σε κοινό βίντεο που απεικονίζει ταυτόχρονα την κίνηση όπως αυτή προκύπτει από την προσομοίωση (animation) μέσω των δυο μεθόδων.



Σχήμα 3.4-3: Στιγμιότυπο ταυτόχρονης απεικόνισης των δυο animation.

## 4 Εφαρμογή Δυναμικής Ανάλυσης σε Δορυφόρο με Στρεφόμενο Προσάρτημα

Στο Κεφάλαιο 3 που προηγήθηκε, έγινε η ανάλυση για σύστημα δυο σφαιρικά αρθρωμένων σωμάτων που αλληλεπιδρούν καθώς το δεύτερο στέφεται υπό την επίδραση ενός διανύσματος ροπών. Στο παρόν κεφάλαιο, το γενικό δυναμικό μοντέλο που αναπτύχθηκε εξειδικεύεται προκειμένου να μοντελοποιήσει τη δυναμική συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος που λάνθανε προηγουμένα και που όπως αναφέρθηκε δεν είναι άλλο από το σύστημα *δορυφόρος-στρεφόμενο προσάρτημα*.



Σχήμα 4-1: Σύστημα Δορυφόρου-Στρεφόμενου Προσαρτήματος (κεραία)  
Τηλεπικοινωνιακός δορυφόρος DFH-3 (ή ChinaSat-6) [w15]

Προς το σκοπό της περαιτέρω συγκεκριμενοποίησης των μοντέλων και για να επιτευχθεί μεταγενέστερα η εξαγωγή άλλων συμπερασμάτων, στις ενότητες που ακολουθούν θα γίνει ο διαχωρισμός του γενικού συστήματος σε:

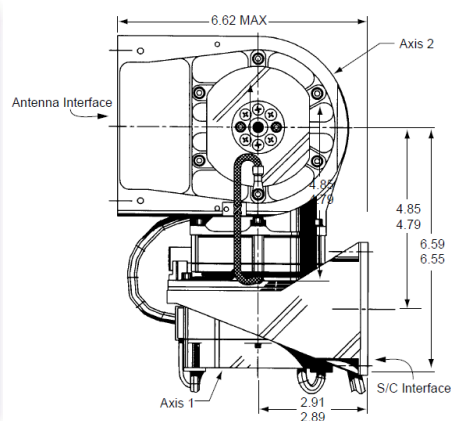
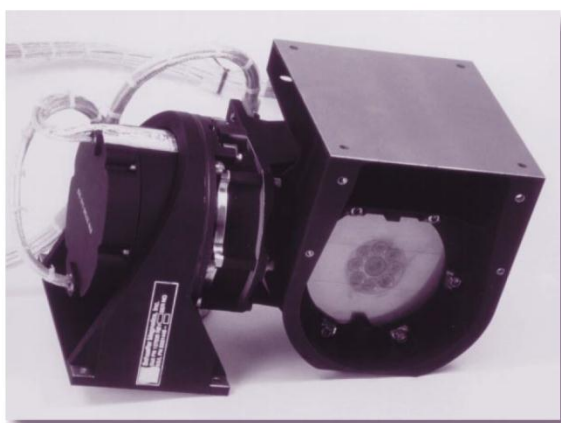
- Σύστημα: Δορυφόρος - Τυπικά Επενεργούμενο Στρεφόμενο Προσάρτημα (*ΤΕΣΠ*, δείκτης *std* για τις εξισώσεις)
- Σύστημα: Δορυφόρος – Επενεργούμενο Χωρίς Μετάδοση Αντιδράσεων Στρεφόμενο Προσάρτημα (*ΕΧΜΑΣΠ*, δείκτης *RM* για τις εξισώσεις)

Οι δυο αυτές μορφές αντικατοπτρίζουν η μεν πρώτη την κλασική περίπτωση όπου ένας δορυφόρος σε ελεύθερη αιώρηση (*free floating*) - με απενεργοποιημένο δηλαδή το σύστημα ελέγχου του (*AOCS* – *Attitude and Orbital Control System*) –

διαταράσσεται από την κίνηση ενός στρεφόμενου προσαρτήματος όπου πλέον τυπικά μπορεί να θεωρηθεί πως πρόκειται για κεραία. Ενώ η δεύτερη μορφή συστήματος επικεντρώνεται στη μελέτη της συμπεριφοράς του δορυφόρου εάν η προσαρτημένη σ' αυτόν κεραία φέρει σύστημα επενέργειας που δεν μεταφέρει ροπές και δυνάμεις αντίδρασης [26].

#### 4.1 Δυναμική συστήματος δορυφόρος - τυπικά επενεργούμενο στρεφόμενο προσάρτημα (ΤΕΣΠ)

Ξεκινώντας με τη περίπτωση του συστήματος δορυφόρος – ΤΕΣΠ, η διαφοροποίηση με το γενικό μοντέλο έγκειται στην μετατροπή των κινηματικών χαρακτηριστικών του Σώματος 2 και συγκεκριμένα στους β.ε. αυτού, από τρεις σε δυο. Με άλλα λόγια, το μοντέλο τροποποιείται ως προς την άρθρωση του προσαρτήματος, το οποίο πλέον συνδέεται με το φέρον σώμα μέσω συνδέσμου τύπου Cardan (universal joint) που υποβαθμίζει κατά ένα β.ε. τη σφαιρική άρθρωση. Η τροποποίηση αυτή είναι απότοκο της διαμόρφωσης που φέρουν οι τυπικοί μηχανισμοί που οδηγούν προσαρτήματα δορυφόρων και συγκεκριμένα κεραίες. Στο Σχήμα 4.1-1 φαίνεται ένας μηχανισμός οδήγησης κεραιών για χονδρική κατάδειξη στόχου (coarse APM) και ο οποίος δύναται να περιστρέφεται σε δύο κάθετους μεταξύ τους άξονες.



Σχήμα 4.1-1: Τυπικός μηχανισμός χονδρικής οδήγησης κεραίας.  
Antenna Pointing Mechanism (MOOG Type 33) [w16]

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ροπές είναι ελεύθερα διανύσματα και άρα το σημείο εφαρμογής τους δεν έχει σημασία, τότε αυτό που ουσιαστικά μεταβάλλει η χρήση ενός τέτοιου μηχανισμού από το γενικό μοντέλο είναι το ότι αποκόπτει την κίνηση

κατά τον τρίτο άξονα. Συνεπώς, οι στροφές γύρω από τους δυο πρώτους άξονες παραμένουν αναλλοίωτες, ενώ η στροφή γύρω από τον τρίτο άξονα -εξωτερικό γινόμενο των δυο καθέτων- δεν υφίσταται για το προσάρτημα. Το γεγονός αυτό, μεταβάλλει βέβαια και την γενική δυναμική εξίσωση αφού την υποβιβάζει από τους 9 στους 8 β.ε. και άρα τα μητρώα της 3.1-12 πρέπει να μειωθούν αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, από το γενικευμένο μητρώο μάζας  $\mathbf{M}$  που ορίστηκε στην Εξ. (3.1-9a) αποκόπτονται η ενάτη γραμμή και στήλη:

$$\mathbf{M}_{std} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{18} & \cancel{M_{19}} \\ M_{21} & \ddots & & \vdots & \cancel{M_{29}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{81} & \cdots & \cdots & M_{88} & \cancel{M_{89}} \\ \cancel{M_{91}} & \cancel{M_{92}} & \cdots & \cancel{M_{98}} & \cancel{M_{99}} \end{bmatrix} \quad (4.1-1a)$$

για να οριστεί το  $\mathbf{M}_{std}$  μητρώο που αφορά την περίπτωση του συστήματος δορυφόρος – ΤΕΣΠ και είναι:

$$\mathbf{M}_{std} \square \mathbf{M}((1:8), (1:8)) \quad (4.1-1b)$$

$$\mathbf{M}_{std} \square \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{18} \\ M_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{81} & \cdots & \cdots & M_{88} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (4.1-1c)$$

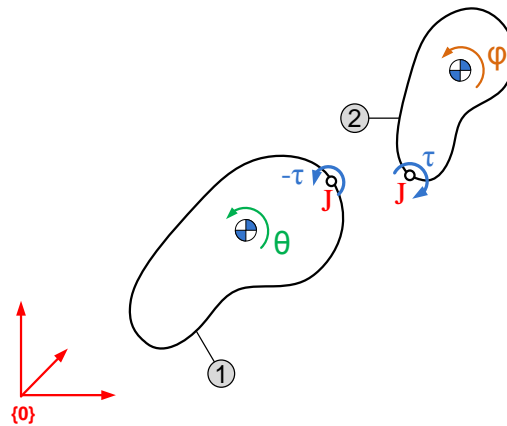
Αντίστοιχα, από τα διανύσματα μη-γραμμικών όρων  $\mathbf{C}$ , γενικευμένων δυνάμεων  $\tilde{\mathbf{F}}$  και δευτέρων χρονικών παραγώγων των γενικευμένων μεταβλητών  $\ddot{\mathbf{q}}$ , αποκόπτονται οι τελευταίες γραμμές αυτών για να προκύψουν τα διανύσματα που περιγράφουν την υπό εξέταση περίπτωση.

$$\mathbf{C}_{std} \square \mathbf{C}(1:8) \quad , \quad \mathbf{F}_{std} \square \tilde{\mathbf{F}}(1:8) \quad , \quad \ddot{\mathbf{q}}_{std} \square \ddot{\mathbf{q}}_{std}(1:8) \quad (4.1-2a)$$

$$\mathbf{C}_{std} \square \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad , \quad \mathbf{F}_{std} \square \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad , \quad \ddot{\mathbf{q}}_{std} \square \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_8 \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (4.1-2b)$$



Αναφορικά με το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων  $\mathbf{F}_{std}$  αξίζει να σημειωθεί πως σύμφωνα με τα διαμειφθέντα στην Ενότητα 3.1 αυτό λαμβάνει για την γενική περίπτωση τη μορφή  $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$  (βλπ. Εξ. 3.1-14) και εν προκειμένω χάνει τη τελευταία του γραμμή δίδοντας το  $\mathbf{F}_{std} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{2 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$ . Εμβαθύνοντας στη μελέτη του ζητήματος των αντιδράσεων, στο Σχήμα 4.1-2 παρουσιάζεται το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για σύστημα δυο σωμάτων με μεταφορά αντιδράσεων διαμέσου της άρθρωσης τους.



Σχήμα 4.1-2: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για σύστημα με μεταφορά αντιδράσεων διαμέσου της άρθρωσης τους.

Εάν θεωρηθεί ότι ο μηχανισμός κίνησης εφαρμόζει ροπές επενέργησης  $\tau$  στο Σώμα 2, τότε διαμέσου της άρθρωσης  $J$  στο Σώμα 1 μεταφέρονται ως αντιδράσεις ροπές  $-\tau$ . Εφαρμόζοντας λοιπόν την Α.Δ.Ε. -και αφού δεν υφίστανται εξωτερικές δυνάμεις και ροπές- λαμβάνεται:

$$\delta W = -\boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\tau}^T \delta(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varphi}) \quad (4.1-3a)$$

Η άθροιση γωνιών προσανατολισμού  $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varphi}$  υφίσταται λόγω του γεγονότος ότι γωνίες  $\boldsymbol{\varphi}$  μετρώνται σχετικά με τις  $\boldsymbol{\theta}$ . Εν συνεχεία, επεκτείνεται η παραπάνω εξίσωση και τελικά προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \delta W &= \cancel{-\boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta}} + \cancel{\boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\varphi} \\ \delta W &= \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \quad (4.1-3b)$$

και άρα το διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων του συστήματος *δορυφόρος-ΤΕΣΠ* θα είναι:

$$\mathbf{F}_{std} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (4.1-4)$$

Η Εξ. (4.1-4) επιβεβαιώνει την προηγούμενη μορφή του διανύσματος γενικευμένων δυνάμεων όπως προέκυψε εκπονώντας την κατά Lagrange δυναμική του συστήματος. Έχει δηλαδή διαφανεί ένα από τα πλεονεκτήματα της εν λόγω μεθόδου που δεν είναι άλλο από το γεγονός ότι η μελέτη των εσωτερικών δυνάμεων που στην δυναμική ανάλυση του συστήματος δεν ενδιέφερε, αυτή είχε ήδη συμπεριληφθεί ενδογενώς.

Έχοντας ορίσει τα μητρώα ενδιαφέροντος, η καινούργια εξίσωση κίνησης που χαρακτηρίζει το δυναμικό σύστημα δορυφόρος-ΤΕΣΠ είναι:

$$\mathbf{M}_{std}(\mathbf{q}_{std})\ddot{\mathbf{q}}_{std} + \mathbf{C}_{std}(\mathbf{q}_{std}, \dot{\mathbf{q}}_{std}) = \mathbf{F}_{std} \quad (4.1-5)$$

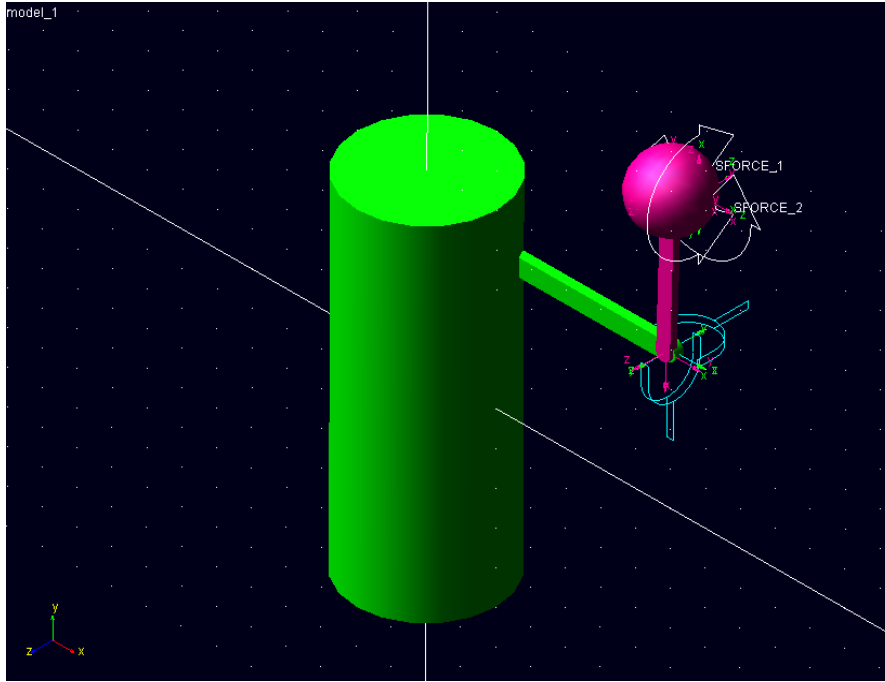
Ενώ η προς επίλυση-ολοκλήρωση διαφορική εξίσωση κίνησης αντίστοιχη της (3.2-1) είναι:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{std} = \mathbf{M}_{std}^{-1}(\mathbf{F}_{std} - \mathbf{C}_{std}) \quad (4.1-6)$$

από την οποία, ομοίως με τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.2 θα προκύψουν με αριθμητική ολοκλήρωση σε MatLab/Simulink τα κινηματικά μεγέθη για το δορυφόρο και το ΤΕΣΠ.

#### 4.1.1 Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams για σύστημα δορυφόρος-ΤΕΣΠ

Ως συνέχεια της προηγούμενα ακολουθούμενης διαδικασίας, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την αναλυτική δυναμική με την ολοκλήρωση της Εξ. (4.1-3) θα συγκριθούν με το αντίστοιχο μοντέλο του λογισμικού MSC Adams. Αφού όπως αναφέρθηκε, η μοναδική αλλαγή μεταξύ γενικής περίπτωσης και μοντέλου δορυφόρος-ΤΕΣΠ συνίσταται στη χρήση συνδέσμου τύπου Cardan αντί σφαιρικής άρθρωσης, έτσι και στο Adams μοντέλο θα υλοποιηθεί η σχετική τροποποίηση. Συνεπώς, στην θέση όπου υπήρχε το ball joint πλέον τίθεται ένας universal joint (βλπ. Σχ. 4.1.1-1) και χωρίς καμία περαιτέρω αλλαγή δημιουργείται το προς σύγκριση μοντέλο.



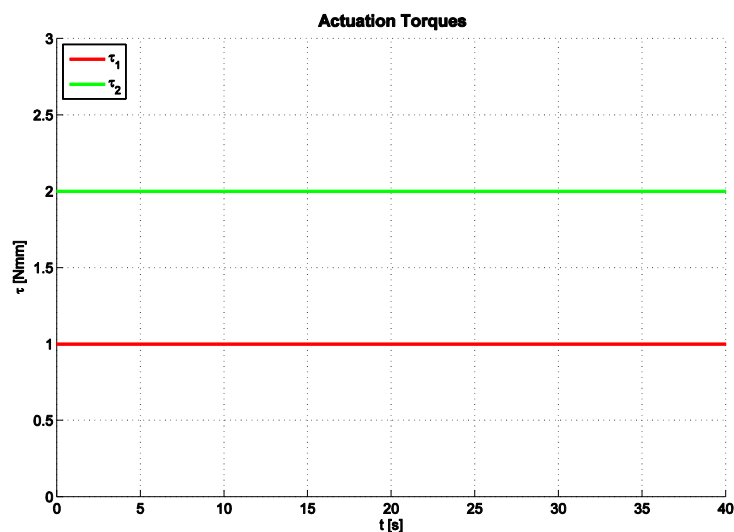
Σχήμα 4.1.1-1: Δυναμικό μοντέλο δορυφόρος-ΤΕΣΠ στο MSC Adams.

Ακολούθως, τα αρχεία αποτελεσμάτων εξαγονται από το MSC Adams και συγκρίνονται με τα αντίστοιχα του Simulink. Για τις προσομοιώσεις αυτές, οι διάφορες παράμετροι που λαμβάνουν χώρα στις εξισώσεις καταγράφονται στον Πίνακα 4.1.1-1 και οι οποίες βέβαια είναι ίδιες τόσο για αναλυτική δυναμική και όσο και για το μοντέλο Adams. Η ροπή επενέργησης-είσοδος που εφαρμόζεται στους δύο άξονες του στρεφόμενου προσαρτήματος  $\tau_{2 \times 1}$ , εικονίζεται στο Σχήμα 4.1.1-2 και έχει τιμή για όλη την διάρκεια της προσομοίωσης  $\tau_{2 \times 1}^T = [1.0 \quad 2.0]^T \text{ Nmm}$  δημιουργώντας το  $\mathbf{F}_{std} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \tau_{2 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$  διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων.

Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Αδράνεια Σώματος 1	${}^1I_1 = \begin{bmatrix} 2,824 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 2,28 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,738 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$
Αδράνεια Σώματος 2	${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 7,84 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 7,84 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,58 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$

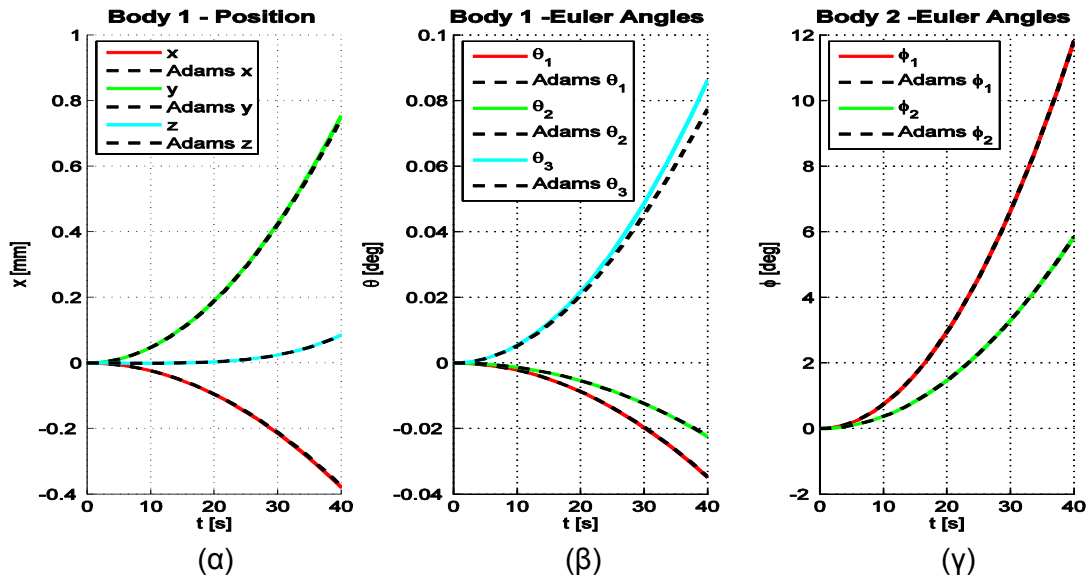
Μάζα Σώματος 1	$m_1 = 1050kg$
Μάζα Σώματος 2	$m_2 = 20kg$
Διάνυσμα $\mathbf{r}$	$\mathbf{r} = [25 \ 15 \ 200]^T mm$
Διάνυσμα $\mathbf{d}$	$\mathbf{d} = [300 \ 50 \ 150]^T mm$
Χρόνος προσομοίωσης $t$	$t = 40s$

Πίνακας 4.1.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης περίπτωσης δορυφόρος - ΤΕΣΠ

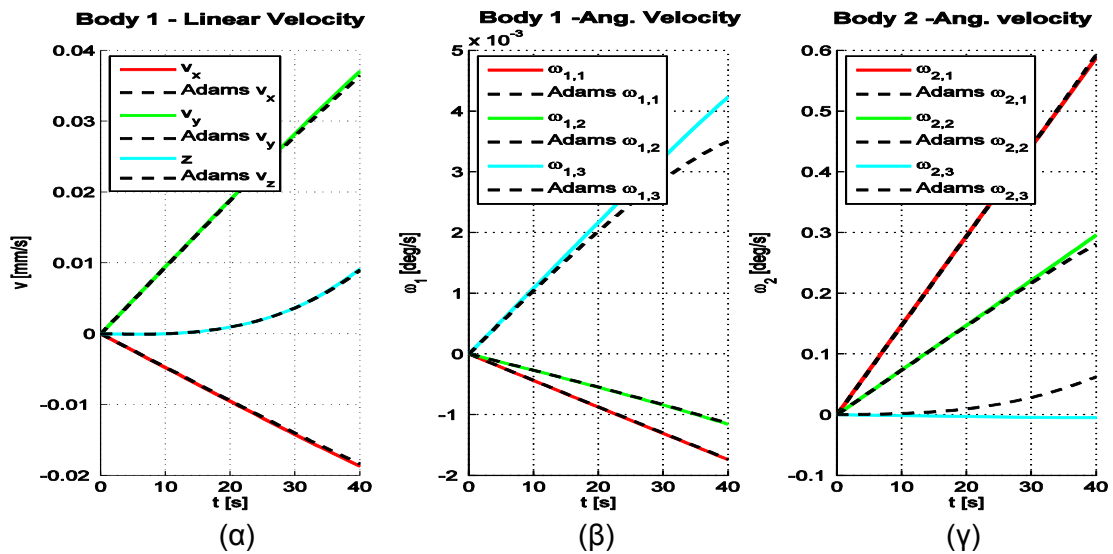


Σχήμα 4.1.1-2: Ροπές επενέργειας στο ΤΕΣΠ - είσοδοι

Στο Σχήμα 4.1.1-3 παρατίθενται επί των ιδίων αξόνων τα αποτελέσματα για τη θέση, το προσανατολισμό του Σώματος 1 καθώς και το προσανατολισμό του Σώματος 2 που λήφθηκαν από το την αναλυτική δυναμική και το Adams μοντέλο, για την ανωτέρω είσοδο. Ενώ, στο Σχήμα 4.1.1-4 παρουσιάζονται η γραμμική ταχύτητα, η γωνιακή ταχύτητα του Σώματος 1-δορυφόρος και η γωνιακή ταχύτητα του Σώματος 2-ΤΕΣΠ. Σημειώνεται πως οι γωνιακές ταχύτητες που παρουσιάζονται εξήχθησαν κατά τα προαναφερθέντα, μέσω δηλαδή των Ιακωβιανών  $\mathbf{S}$  και κατά την Εξ. 3.1-5.

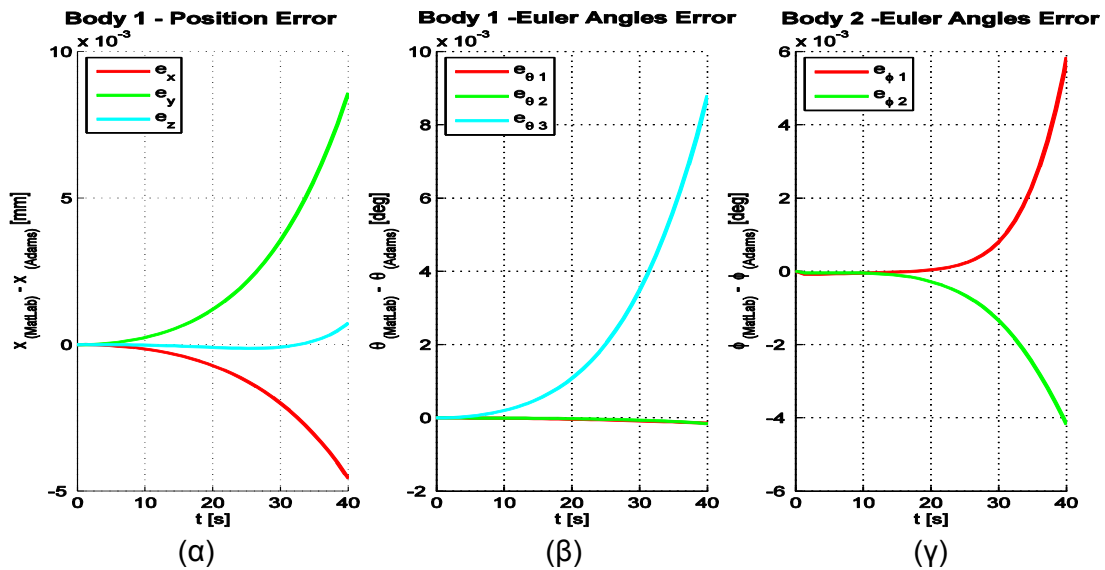


Σχήμα 4.1.1-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) θέση δορυφόρου, (β) προσανατολισμό δορυφόρου και (γ) προσανατολισμό ΤΕΣΠ.

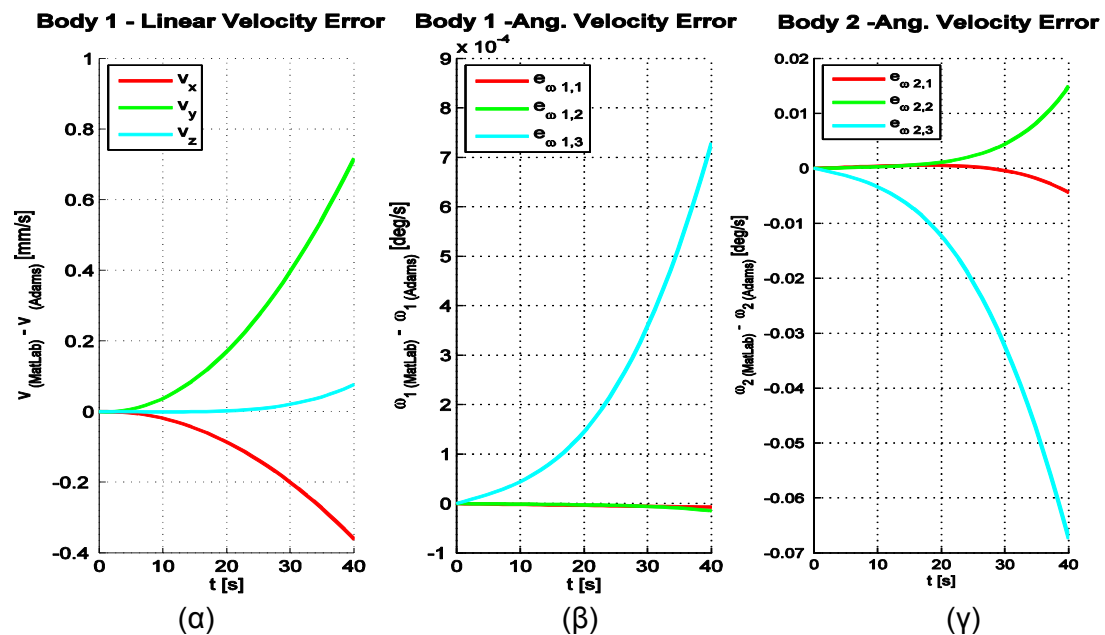


Σχήμα 4.1.1-4: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) ταχύτητα δορυφόρου, (β) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) γωνιακή ταχύτητα ΤΕΣΠ.

Επιπρόσθετα, στα Σχήματα 4.1.1-5 και 4.1.1-6 παρουσιάζεται η εξέλιξη του σφάλματος προϊόντος του χρόνου για τα μεγέθη που απεικονίζονται στα Σχήματα 4.1.1-2 και 4.1.1-3 αντίστοιχα. Παρατηρώντας τα εν λόγω σχήματα, καθίσταται και πάλι σαφές ότι η συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων που παρήχθησαν με τις αναλυτικές εξισώσεις και από το αντίστοιχο μοντέλο Adams για την περίπτωση του συστήματος δορυφόρος-ΤΕΣΠ είναι πάρα πολύ καλή αφού το σφάλμα σε καμία περίπτωση δεν υπερβαίνει το  $10^{-3}$ .



Σχήμα 4.1.1-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) θέση δορυφόρου, (β) προσανατολισμό δορυφόρου και (γ)προσανατολισμό ΤΕΣΠ.



Σχήμα 4.1.1-6: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) ταχύτητα δορυφόρου, (β) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) γωνιακή ταχύτητα (γ) ΤΕΣΠ.

Τέλος, σχετικά με τον υπολογισμό δυνάμεων/ροπών αντίδρασης αναφέρεται πως αυτός εκτελείται έμμεσα μέσω των επιταχύνσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο. Συγκεκριμένα, γνωρίζοντας από την επίλυση της δυναμικής εξίσωσης το διάνυσμα των επιταχύνσεων  $\ddot{q}$  (αναφορά στην γενική περίπτωση), είναι ιδιαίτερα απλό μέσω πολλαπλασιασμού με την μάζα και τον τανυστή αδρανείας να

υπολογιστούν αντίστοιχα δυνάμεις και ροπές. Αναλυτικότερα, από τα τρία πρώτα στοιχεία του  $\ddot{\mathbf{q}}$  λαμβάνονται οι γραμμικές επιταχύνσεις:

$$\ddot{\mathbf{q}}(1:3) = \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.1.1-1a)$$

Και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό με την μάζα ευρίσκονται οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο δορυφόρο:

$$\mathbf{F}_R = m_1 \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.1.1-1b)$$

Ακολούθως, εξάγοντας τα στοιχεία 4 έως 6 του  $\ddot{\mathbf{q}}$  απομονώνονται οι δεύτερες χρονικές παράγωγοι των γωνιών προσανατολισμού του δορυφόρου:

$$\ddot{\mathbf{q}}(4:6) = \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1.1-2a)$$

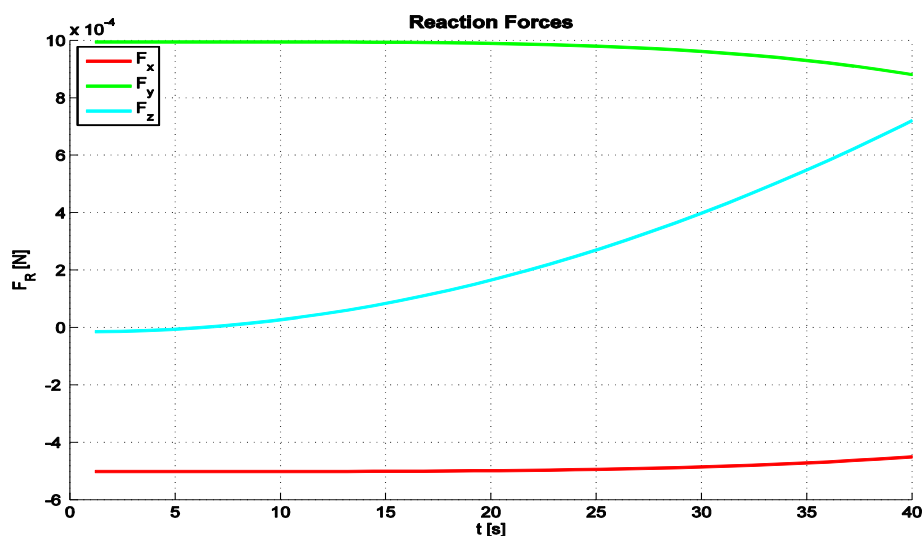
οι οποίες καθ' όμοιο τρόπο με την Εξ. (3.1-5) οδηγούν στις γωνιακές επιταχύνσεις μέσω της Ιακωβιανής  $\mathbf{S}_1$ :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{S}_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1.1-2b)$$

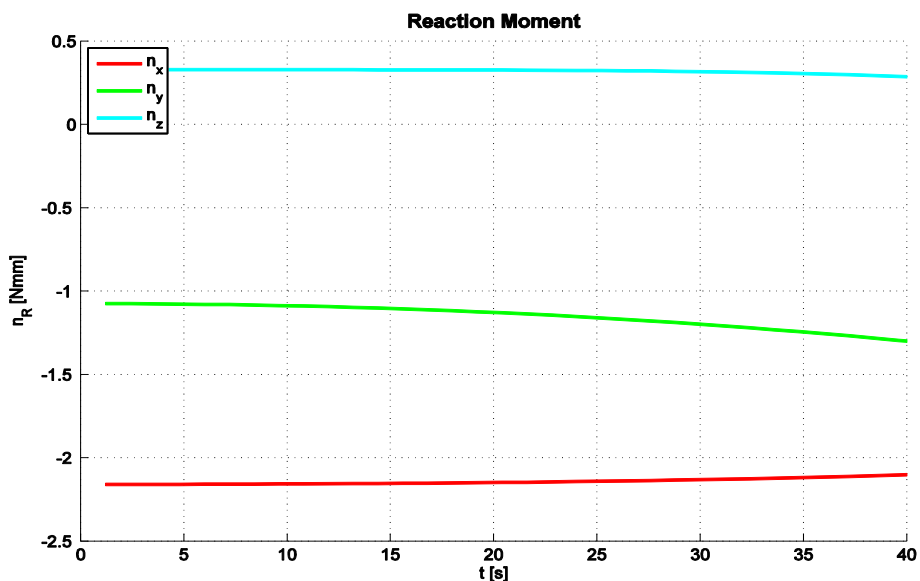
Οπότε, εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστοιχο τανυστή αδρανείας λαμβάνονται οι ροπές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο:

$$\mathbf{n}_R = \mathbf{I}_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1.1-2c)$$

Όλα τα ανωτέρω εκτελούνται σε ένα Interpreted Function στο MatLab/Simulink και τα σχετικά αποτελέσματα απεικονίζονται γραφικά στα Σχήματα 4.1.1-6 και 4.1.1-7 για τις δυνάμεις και ροπές αντίστοιχα.



Σχήμα 4.1.1-7: Δυνάμεις εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο.

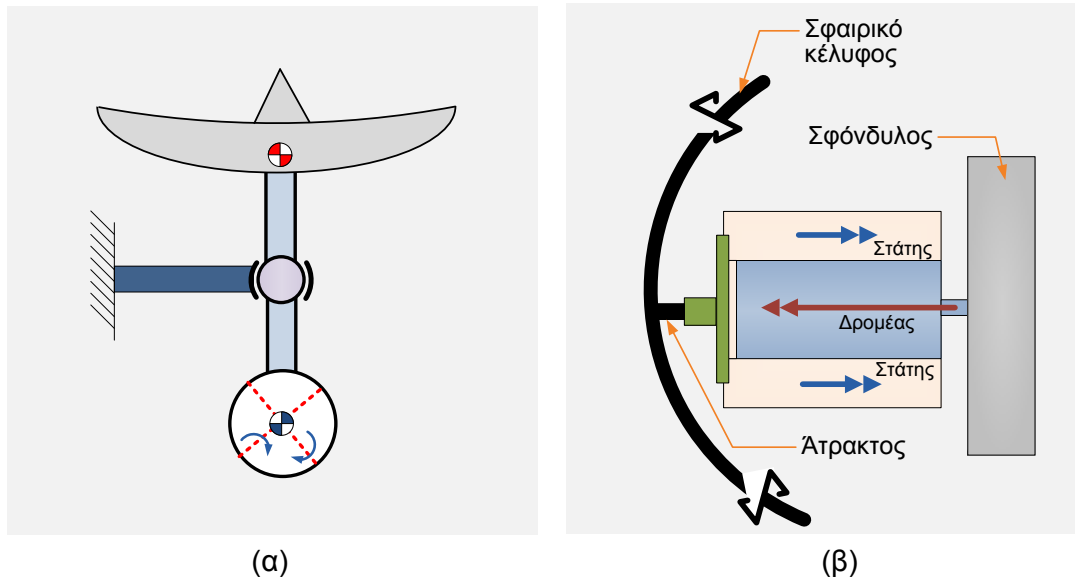


Σχήμα 4.1.1-8: Ροπές εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο.

## 4.2 Δυναμική συστήματος δορυφόρος - επενεργούμενο χωρίς μεταφορά αντιδράσεων στρεφόμενο προσάρτημα (ΕΧΜΑΣΠ)

Κατά την εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου έγινε ο διαχωρισμός μεταξύ δυο μεθόδων επενέργησης για το περιστρεφόμενο προσάρτημα του δορυφόρου και σημειώθηκε πως η δεύτερη μέθοδος -πέραν της τυπικής- αφορά την επενέργηση χωρίς μετάδοση αντιδράσεων. Το σύστημα επενέργησης που δύναται να στρέφει το προσάρτημα (κεραία) χωρίς να μεταφέρει δυνάμεις και ροπές αντίδρασης (ΕΧΜΑΣΠ) στον φέροντα δορυφόρο αφορά τον μηχανισμό που παρουσιάζεται στο [26] και ο οποίος σχεδιάστηκε στο Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΑΕ-ΕΜΠ). Βέβαια, η δυναμική ανάλυση και τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε μηχανισμό που χαρακτηρίζεται ως *μηχανισμός άνευ αντιδράσεων* (reactionless).





Σχήμα 4.2-1: Μηχανισμός κίνησης κεραίας δορυφόρου χωρίς μεταφορά αντιδράσεων  
 (α) Ολική κατασκευαστική διαμόρφωση και (β) Σύστημα επενέργειας.

Η θεωρία για την ανάπτυξη μηχανισμών άνευ αντιδράσεων στηρίζεται στη διατήρηση του θεμελιώδους μεγέθους της ορμής σε σταθερή (μηδενική) τιμή. Το γεγονός αυτό επιβάλλει ότι:

$$\mathbf{F}_B = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \dot{\xi}_{CM}) \xrightarrow{\mathbf{F}_B=0} \frac{d}{dt}(m \cdot \dot{\xi}_{CM}) = 0 \Rightarrow \dot{\xi}_{CM} = 0 \Rightarrow \xi_{CM} = const \quad (4.2-1)$$

Δηλαδή, προκειμένου η δύναμη εξ αντιδράσεως  $\mathbf{F}_B$  να είναι μηδενική, θα πρέπει η ορμή  $\mathbf{p}$  να μην μεταβάλλεται ως προς το χρόνο και άρα η θέση του κέντρου μάζας του σώματος  $\xi_{CM}$  ως προς το σημείο «βάσης» να παραμένει ακλόνητη. Η μοναδική δυνατότητα για να υλοποιηθεί η συνθήκη αυτή είναι το  $\xi_{CM}$  να γίνει μηδενικό, να μεταφερθεί με άλλα λόγια το κέντρο μάζας στο σημείο άρθρωσης με τη βάση. Μεταφορά του κέντρου μάζας πραγματοποιείται προσθέτοντας κάποια επιπρόσθετη μάζα σε προέκταση αντιδιαμετρικά του αρχικού κέντρου μάζας, γι' αυτό ακριβώς και ο μηχανισμός που αναπτύχθηκε στο ΕΑΕ-ΕΜΠ φέρει το τμήμα που λειτουργεί ως αντίβαρο.

Εφαρμογή των παραπάνω στο υπό εξέταση σύστημα και αναφερόμενοι στο Σχήμα 3.1-1 η συνθήκη αυτή θα επέβαλλε ότι το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  που ορίζει τη θέση του κέντρου μάζας του από το σημείο άρθρωσης, θα έπρεπε να μεταφερόταν στο σημείο  $J$  και άρα να λάβει μηδενική τιμή:

$$\mathbf{r}_{RM} = \mathbf{0} \quad (4.2-2)$$

Συνεπεία του γεγονότος αυτού είναι τα μητρώα μάζας  $\mathbf{M}_{RM}$  και μη γραμμικών όρων  $\mathbf{C}_{RM}$  να απλοποιούνται σημαντικά μιας και απαλείφονται οι όροι που περιέχουν το  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Ορίζονται λοιπόν τα απλοποιημένα μητρώα:

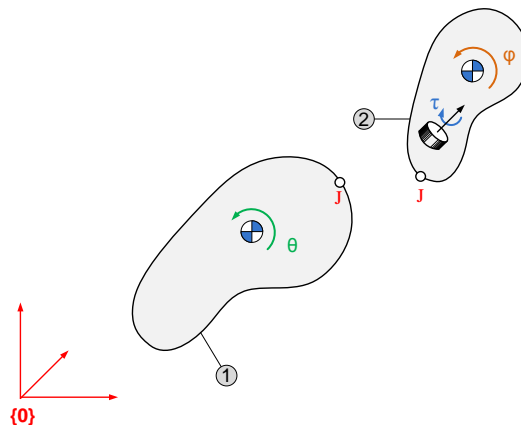
$$\mathbf{M}_{RM} = \mathbf{M}_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \quad (4.2-3a)$$

$$\mathbf{C}_{RM} = \mathbf{C}_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \quad (4.2-3b)$$

Επίσης, λαμβανομένου υπόψη πώς και οι ροπές επενέργησης δεν μεταφέρονται ως ροπές αντίδρασης στο φέρον σώμα τότε διαφοροποίηση προκύπτει και ως προς το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Αναλυτικότερα, υπενθυμίζεται πώς το διάνυσμα αυτό προέκυψε με βάση την Αρχή Δυνατών Έργων (βλπ.-§3.1) ως:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.2-4)$$

μιας και οι ροπές επενέργησης στις αρθρώσεις (joint torques) είναι οι μόνες που μπορούν να παράγουν δυνατό έργο. Για την εύρεση του αντίστοιχου διανύσματος στην περίπτωση συστήματος δορυφόρος-*ΕΧΜΑΣΠ* θα γίνει και πάλι εκμετάλλευση της ίδιας αρχής. Παρατηρώντας το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για σύστημα δυο σωμάτων χωρίς μεταφορά αντιδράσεων που εικονίζεται στο Σχήμα 4.2-1, διαπιστώνεται ότι οι κινούσες  $\tau$  ροπές μοντελοποιούνται ως πηγές ροπές. Η αντιστοίχιση αυτή είναι απότοκο που γεγονός ότι οι ροπές στο *ΕΧΜΑΣΠ* παράγονται εσωτερικά και δεν μεταβιβάζονται στο *Σώμα 1- δορυφόρο*.



Σχήμα 4.2-1: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος για σύστημα χωρίς μεταφορά αντιδράσεων.

Συνεπώς, η Α.Δ.Ε. θα δίδει για την προκειμένη περίπτωση:

$$\delta W_{RM} = \boldsymbol{\tau}^T \delta(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varphi}) \quad (4.3-7a)$$

ή:

$$\delta W_{RM} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\varphi} \quad (4.3-7b)$$

που συνεπάγει ότι το διάνυσμα γενικευμένων δυνάμεων για το σύστημα δορυφόρος-ΕΧΜΑΣΠ έχει τη μορφή:

$$\mathbf{F}_{RM} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (4.3-8)$$

και κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα λαμβάνει τη μορφή:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{RM} = \mathbf{M}_{RM}^{-1} (\mathbf{F}_{RM} - \mathbf{C}_{RM}) = \mathbf{M}_{RM}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} - \mathbf{C}_{RM} \right) \quad (4.3-9)$$

#### 4.2.1 Σύγκριση αναλυτικής δυναμικής και μοντέλου MSC Adams για σύστημα δορυφόρος-ΕΧΜΑΣΠ

Έχοντας εξάγει αναλυτικά την δυναμική εξίσωση και για το μοντέλο δορυφόρος-ΕΧΜΑΣΠ, η γνωστή διαδικασία ανάπτυξης μοντέλου στο MSC Adams και σύγκρισης των αποτελεσμάτων του με τα αντίστοιχα του Simulink ακολουθείται και εδώ. Κατά συνέπεια, θα πρέπει στο Adams μοντέλο να γίνουν οι αλλαγές που αφορούν τα διανύσματα θέσης κέντρου μάζας και γενικευμένων δυνάμεων.

Ξεκινώντας με τη μοντελοποίηση ροπών επενέργησης χωρίς μεταφορά αντιδράσεων αυτή είναι ιδιαίτερα απλή στο Adams μιας και το μόνο που απαιτείται να γίνει είναι αυτές να οριστούν ως «σωματόδετες ροπές ενός σώματος – On one body, Moving with body» σε αντιδιαστολή με τις «between two bodies» της Ενότητας 3.3 που μετέφεραν και τις αντιδράσεις τους.

Ενώ, η αλλαγή για το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του Σώματος 2 θα γίνει με μια παραδοχή. Συγκεκριμένα, προκειμένου να θεωρηθεί και κάποιο κατασκευαστικό σφάλμα στην ζυγοστάθμιση του μηχανισμού ικανό να δημιουργεί δυναμική σύζευξη (dynamic coupling) μεταξύ των δυο σωμάτων, το  $\mathbf{r}_{RM}$  διάνυσμα δεν τίθεται μηδενικό αλλά πολύ μικρό. Αναλυτικότερα, σημειώνεται πως στην μοντελοποίηση αυτή το

κέντρο μάζας του ΕΧΜΑΣΠ δεν βρίσκεται ακριβώς στο σημείο άρθρωσης  $J$  όπως θα προέτασσε η συνθήκη εξισορρόπησης, αλλά σε θέση που αντιστοιχεί στο 10% του αρχικού  $\mathbf{r}$ , δηλαδή:

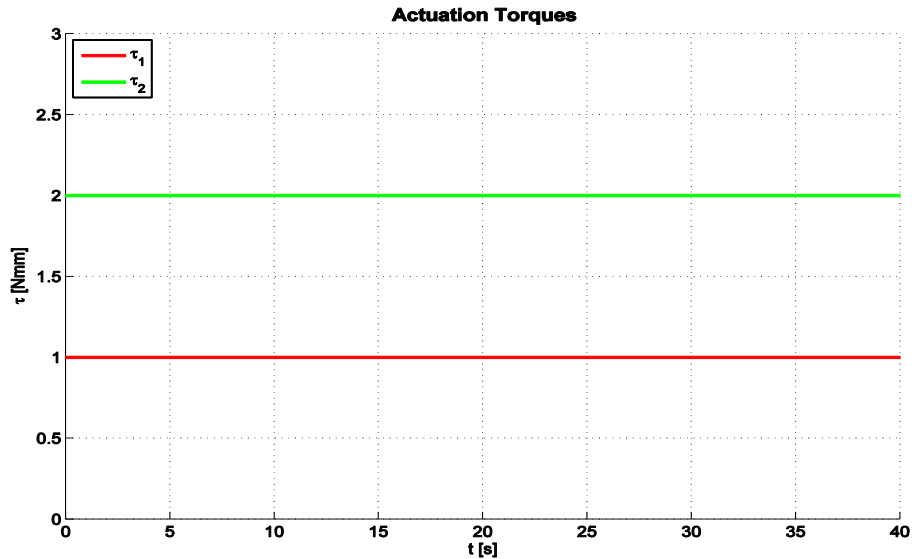
$${}^{s.e.}\mathbf{r}_{RM} \neq [0 \ 0 \ 0]^T \xrightarrow[10\% \text{ structural error}]{\text{misalignment}} {}^{s.e.}\mathbf{r}_{RM} = 10\% \mathbf{r} \quad (4.2.1-1)$$

Το πιο πάνω κατασκευαστικό σφάλμα όπως αναφέρθηκε είναι ικανό να συζεύγει τη δυναμική μεταξύ των δυο σωμάτων, αφού καθώς το προσάρτημα επιταχύνει, αδρανειακές μαζικές δυνάμεις παράγονται και μέσω της άρθρωσης μεταφέρονται στο δορυφόρο ως μικρές δυνάμεις και ροπές αντίδρασης.

Είναι προφανές πως η ανωτέρω παραδοχή υλοποιείται και στο αναλυτικό μοντέλο που ολοκληρώνεται στο MatLab/Simulink και που όπως προηγούμενα έτσι και τώρα συγκρίσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ των αποκρίσεων από τα Simulink και Adams. Η τιμή του  ${}^{s.e.}\mathbf{r}_{RM}$  καθώς και όλες οι άλλες τιμές των διαφόρων παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν στις προσομοιώσεις των Simulink και Adams φαίνονται στον Πίνακα 4.2.1-1 που ακολουθεί. Το διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων που στην περίπτωση του συστήματος δορυφόρος-ΕΧΜΑΣΠ έχει τη μορφή  $\mathbf{F}_{RM} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T & \boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T \end{bmatrix}^T$  θα φέρει ως συνιστώσα υπο-μητρώα, τα διάνυσματα ροπής  $\boldsymbol{\tau}_{3 \times 1}^T = [1.0 \ 2.0 \ 0]^T \text{ Nmm}$  που εικονίζονται στο Σχήμα 4.2.1-1.

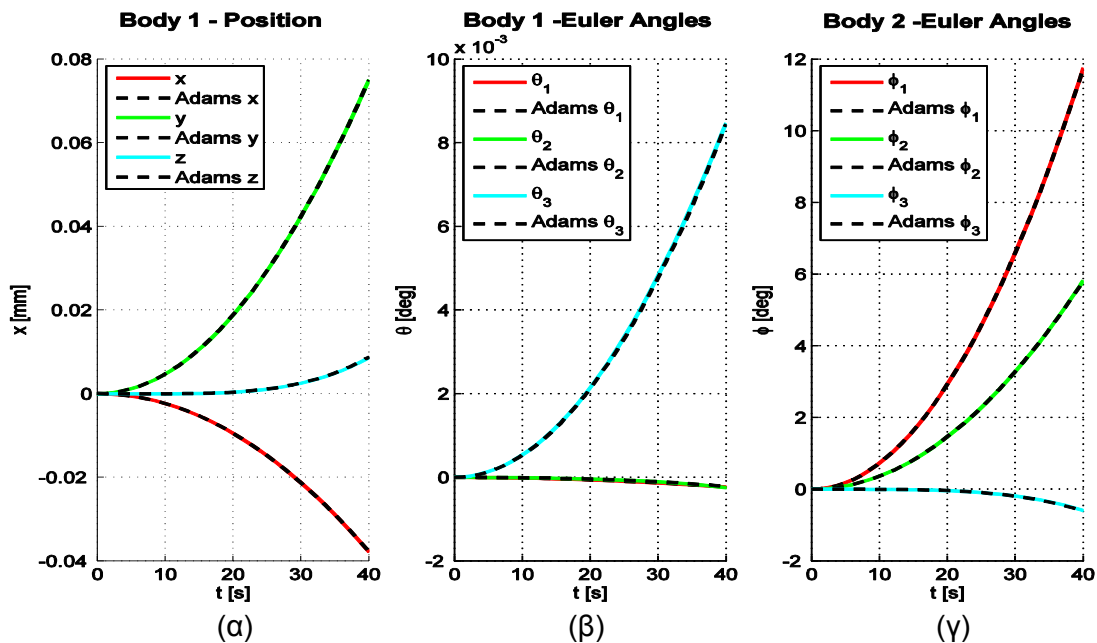
Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Αδράνεια Σώματος 1	${}^1I_1 = \begin{bmatrix} 2,824 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ 0 & 2,28 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,738 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$
Αδράνεια Σώματος 2	${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 7,84 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 7,84 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,58 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ kgmm}^2$
Μάζα Σώματος 1	$m_1 = 1050 \text{ kg}$
Μάζα Σώματος 2	$m_2 = 20 \text{ kg}$
Διάνυσμα $\mathbf{r}$	${}^{s.e.}\mathbf{r}_{RM} = [2,5 \ 1,5 \ 20]^T \text{ mm}$
Διάνυσμα $\mathbf{d}$	$\mathbf{d} = [300 \ 50 \ 150]^T \text{ mm}$
Χρόνος προσομοίωσης $t$	$t = 40 \text{ s}$

Πίνακας 4.2.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης περίπτωσης δορυφόρος - ΕΧΜΑΣΠ

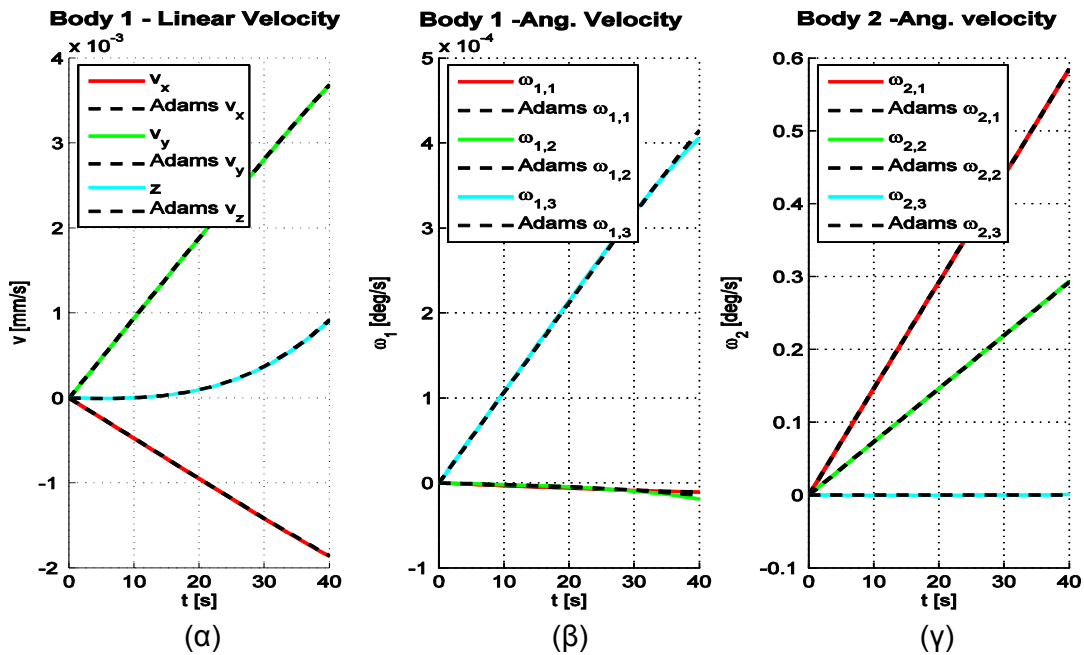


Σχήμα 4.2.1-1: Ροπές επενέργησης στο ΤΕΣΠ - εισοδοί

Στο Σχήμα 4.2.1-2 παρατίθεται η απόκριση για τη θέση και τον προσανατολισμό του δορυφόρου καθώς και για τον προσανατολισμό του ΕΧΜΑΣΠ όπως προέκυψαν για τις πιο πάνω εισόδους. Επίσης, στο Σχήμα 4.2.1-3 παρουσιάζονται η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του ΕΧΜΑΣΠ.

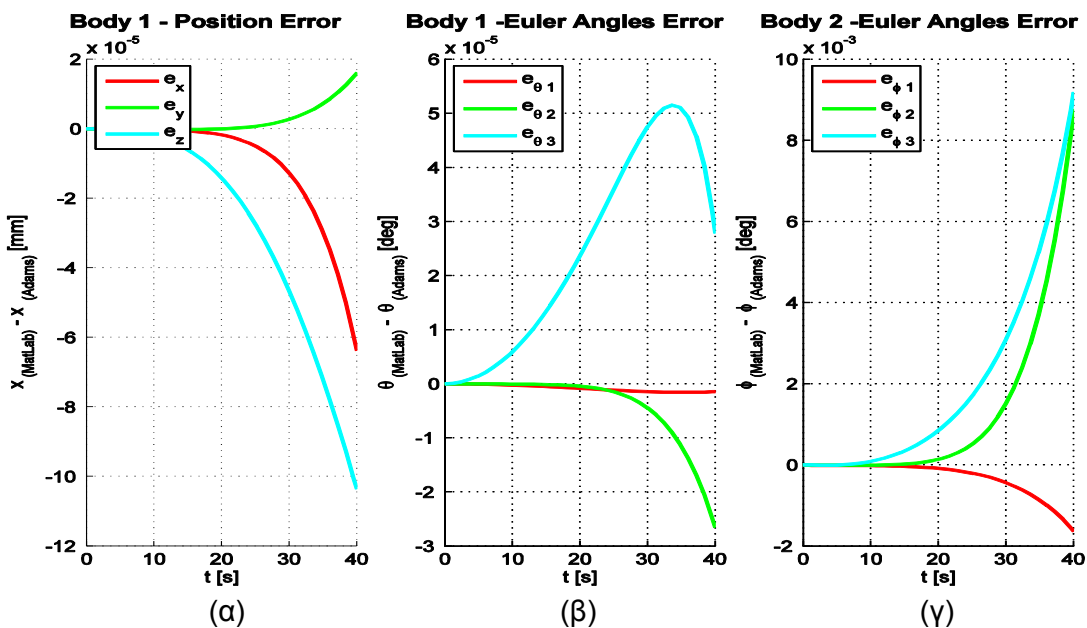


Σχήμα 4.2.1-2: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) θέση δορυφόρου, (β) προσανατολισμό δορυφόρου και (γ) προσανατολισμό ΕΧΜΑΣΠ.

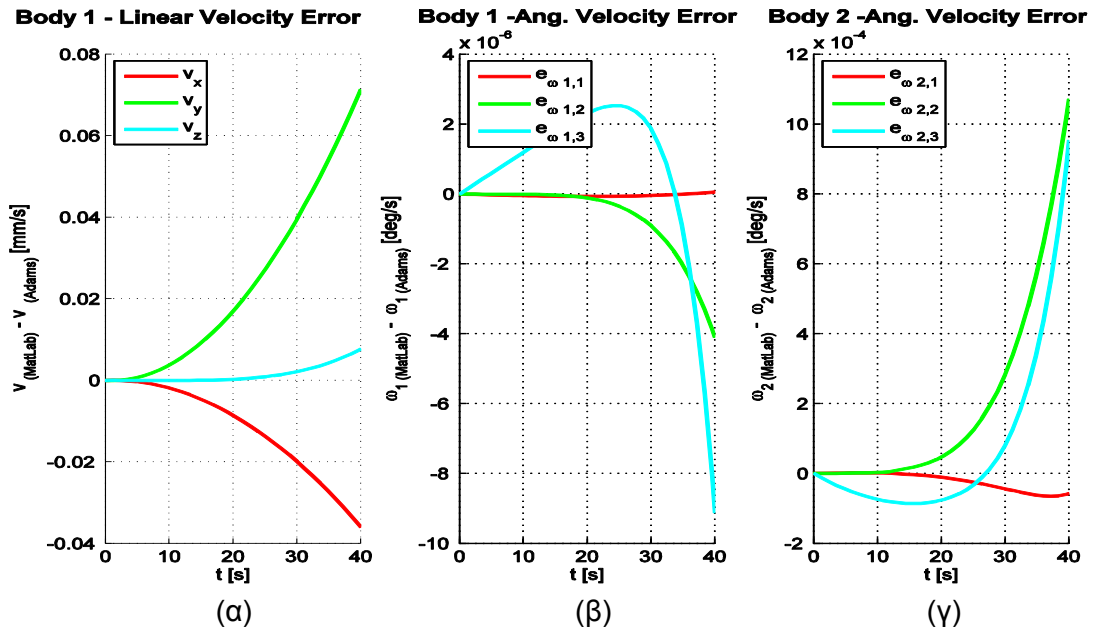


Σχήμα 4.2.1-3: Σύγκριση απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) ταχύτητα δορυφόρου, (β) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) γωνιακή ταχύτητα ΕΧΜΑΣΠ.

Ακολούθως, στα Σχήματα 4.2.1-4 και 4.2.1-5 παρουσιάζεται η εξέλιξη του σφάλματος εν σχέση με την αναλυτική λύση και το μοντέλο Adams για τα μεγέθη που απεικονίζονται στα Σχήματα 4.2.1-3 και 4.2.1-4 αντίστοιχα. Από αυτά, διαπιστώνεται και πάλι η άριστη σύγκλιση μεταξύ των αποκρίσεων και επιβεβαιώνεται η ορθότητα των εξισώσεων κίνησης που εξήχθησαν μέσω της αναλυτικής δυναμικής.

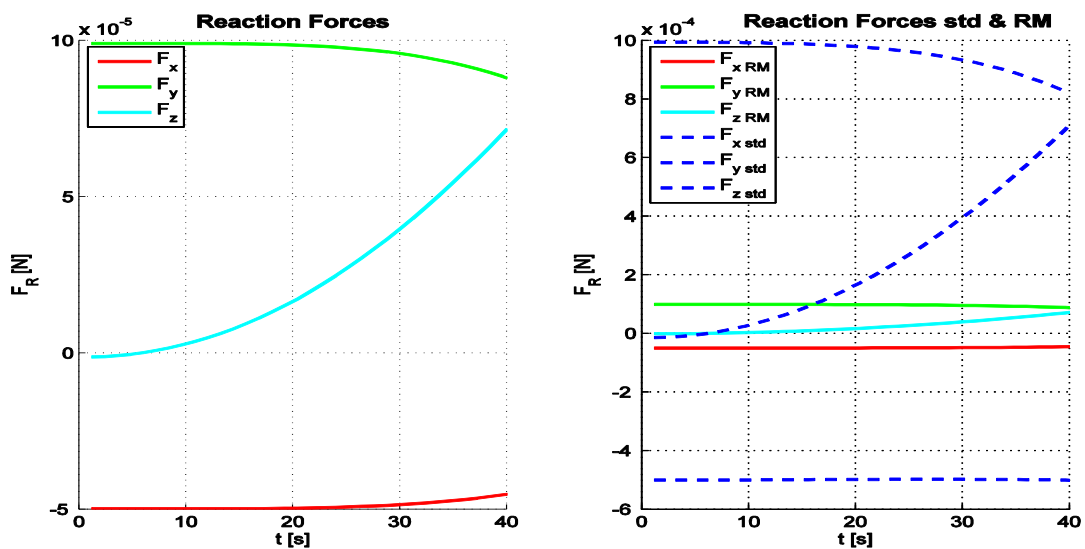


Σχήμα 4.2.1-4: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) θέση δορυφόρου, (β) προσανατολισμό δορυφόρου και (γ) προσανατολισμό ΕΧΜΑΣΠ.

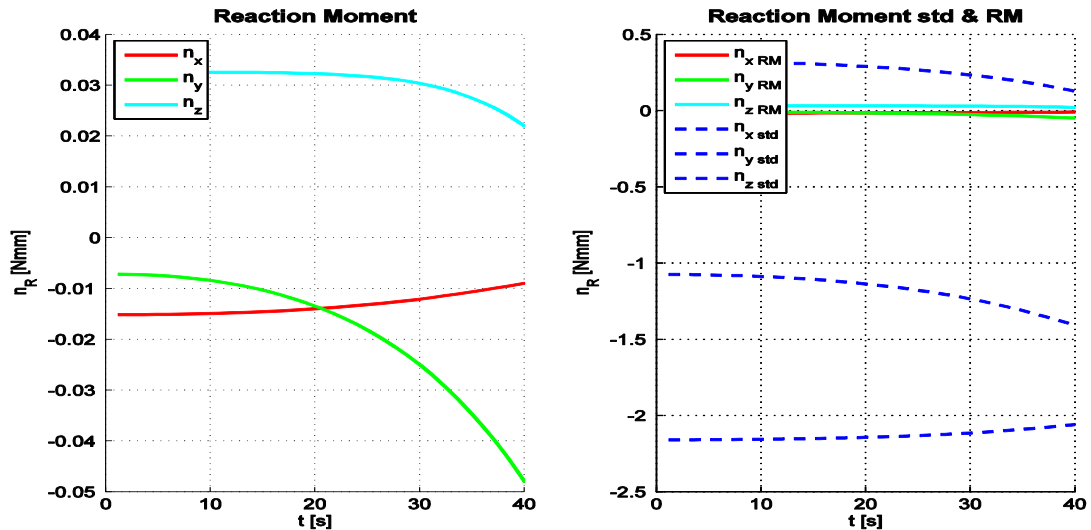


Σχήμα 4.2.1-5: Σφάλμα μεταξύ απόκρισης αναλυτικής λύσης και μοντέλου Adams για (α) ταχύτητα δορυφόρου, (β) γωνιακή ταχύτητα δορυφόρου και (γ) γωνιακή ταχύτητα (γ) ΕΧΜΑΣΠ.

Τέλος, στα Σχήματα 4.2.1-6 και 4.2.1-7 παρουσιάζονται αντίστοιχα οι δυνάμεις και ροπές αντίδρασης που αναπτύσσονται στον δορυφόρο τόσο για την περίπτωση ΕΧΜΑΣΠ όσο και για την περίπτωση ΤΕΣΠ, επί των ίδιων αξόνων για λόγους σύγκρισης.



Σχήμα 4.2.1-6: Δυνάμεις εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο για ΕΧΜΑΣΠ και ΤΕΣΠ.



Σχήμα 4.1.1-7: Ροπές εξ αντιδράσεων που αναπτύσσονται στον δορυφόρο για *EXMASP* και *TESPI*.

Τα δυο ανωτέρω σχήμα καταδεικνύουν την μεγάλη διαφορά που υφίσταται μεταξύ των δυο μεθόδων ενεργοποίησης ως προς τις αναπτυσσόμενες αντιδράσεις. Η ελάττωση αυτή των αντιδράσεων κατά περίπου μια τάξη μεγέθους παρόλο το μεγάλο κατασκευαστικό σφάλμα που έχει θεωρηθεί είναι ξεκάθαρη ένδειξη της υπεροχής του *EXMASP*. Η υπέροχη στην καταστολή των αντιδράσεων όπως θα φανεί σε κατοπινό στάδιο της μελέτης, είναι η αιτία που καθιστά δυνατή την εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου από τον δορυφόρο μέσω της συνεπακόλουθης μείωσης των κινήσεων εξισορρόπησης.

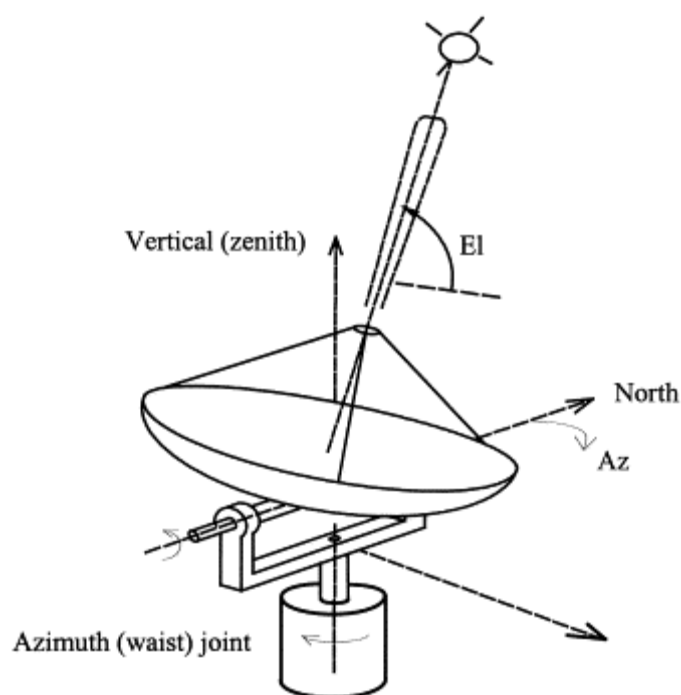


## 5 Οδήγηση Προσαρτήματος

Η έως τώρα ανάλυση επικεντρώθηκε στη θεώρηση πως το σύστημα δυο σωμάτων (και οι δυο εφαρμογές του) κινούνται υπό την επίδραση μιας τυχαίας ροπής εισόδου και αυτό που ενδιέφερε ήταν η εξαγωγή των γενικευμένων μεταβλητών των σωμάτων. Στο παρόν κεφάλαιο το ζήτημα μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση της αναζήτησης κατάλληλης ροπής που θα οδηγεί κατά επιθυμητό τρόπο το σύστημα. Το ζήτημα λοιπόν της οδήγησης του συστήματος επικεντρώνεται αποκλειστικά στον έλεγχο του προσαρτήματος αφού η οδήγηση του δορυφόρου (spacecraft attitude control) ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εργασίας.

Βαίνοντας προς το σκοπό της υλοποίησης της οδήγησης του προσαρτήματος, το ζήτημα επιμερίζεται σε τρία συγκεκριμένα βήματα που πρέπει να μελετηθούν. Συγκεκριμένα στις ενότητες που ακολουθούν ευρίσκονται:

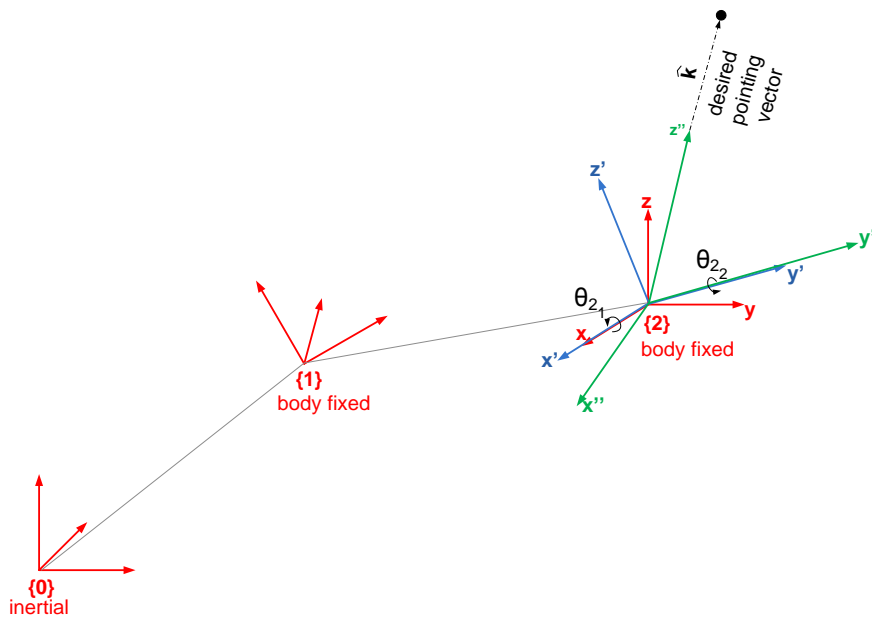
1. Οι επιθυμητές γωνίες επενέργησης (joint-actuation angles) προκειμένου να καταδειχθεί κάποιο σημείο στόχος.
2. Ο σχεδιασμός τροχιάς (trajectory planning) από τις παρούσες στις επιθυμητές γωνίες.
3. Οι ροπές ελέγχου (control torques) που απαιτούνται για να ακολουθηθεί τροχιά.



Σχήμα 5-1: Κατάδειξη στόχου από κεραία.

## 5.1 Εξαγωγή επιθυμητών γωνιών στροφής από διάνυσμα στόχο

Εάν υποτεθεί ότι το προσάρτημα είναι μια κεραία που πρέπει να στραφεί για να καταδείξει ένα σημείο στόχο στον ουράνιο θόλο, τότε από το κέντρο μάζας αυτής και μέχρι το σημείο αυτό ορίζεται ένα διάνυσμα κατεύθυνσης με το οποίο πρέπει σε δεδομένο χρόνο να ταυτιστεί η κεραία. Το διάνυσμα που στο Σχήμα 5.1-1 σημειώνεται ως  $\hat{\mathbf{k}}$  θα καλείται *διάνυσμα στόχος* και μπορεί να παίρνει τυχαίες τιμές σε κάποιο εύρος που καθορίζεται από τις κατασκευαστικές παραμέτρους του μηχανισμού οδήγησης της κεραίας.



Σχήμα 5.1-1: Το διάνυσμα στόχος όπως φαίνεται από τα πλαίσια αναφοράς.

Με βάση το αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς τη κεραία έχει ταυτιστεί με το διάνυσμα στόχο  $\hat{\mathbf{k}}$  εάν ικανοποιείται η συνθήκη:

$${}^0\mathbf{R}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)\hat{\mathbf{z}}_2 = \hat{\mathbf{k}} \quad (5.1-1)$$

Ενώ προβαίνοντας σε ένα αριστερό πολλαπλασιασμό με  ${}^0\mathbf{R}_1^T$  τότε η συνθήκη μετασχηματίζεται ως προς το πλαίσιο αναφοράς του δορυφόρου. Οπότε:

$$\Leftrightarrow \cancel{{}^0\mathbf{R}_1^T(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}_x(\varphi_1)\mathbf{R}_y(\varphi_2)\hat{\mathbf{z}}_2 = {}^0\mathbf{R}_1^T(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{k}} = {}^1\mathbf{R}_0\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}' \quad (5.1-2a)$$

Και αφού το  $\hat{\mathbf{z}}_2$  αποτελεί μοναδιαίο διάνυσμα του  $z$  (διαμήκη) άξονα της κεραίας, είναι:

$$\Rightarrow \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \hat{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{k}}' \quad (5.1-2b)$$

Η σύνθεση των στοιχειωδών περιστροφών  $\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y$  δίδει:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \\ 0 & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_2) & 0 & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_2 \quad (5.1-3a)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_2 \quad (5.1-3b)$$

Και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό με το  $\hat{\mathbf{z}}_2$  προκύπτει τελικά:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & 0 & \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2)\sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1) & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (5.1-3c)$$

Ακολουθώντας, εξισώνοντας το αριστερό μέλος της Εξ. (5.1-2b) με το  $\hat{\mathbf{k}}'$  διάνυσμα μπορούν μέσω αντίστροφης κινηματικής (inverse kinematics) να εξαχθούν οι επιθυμητές γωνίες επενέργησης. Συγκεκριμένα λαμβάνεται η διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}'_1 \\ \hat{\mathbf{k}}'_2 \\ \hat{\mathbf{k}}'_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\varphi_2) = \hat{\mathbf{k}}'_1 \\ -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) = \hat{\mathbf{k}}'_2 \\ \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) = \hat{\mathbf{k}}'_3 \end{cases} \quad (5.1-4a)$$

η οποία περιλαμβάνει τρεις διακριτές εξισώσεις ικανές μέσω τριγωνομετρικής επίλυσης να καθορίσουν τις γωνίες επενέργησης  $\varphi_1, \varphi_2$ . Ξεκινώντας με την επάνω εξίσωση, μέσω αντίστροφης εξάγεται:

$$s_{\varphi_2} = \hat{\mathbf{k}}'_1 \Rightarrow \begin{cases} \phi_{2,1} = \sin^{-1}(\hat{\mathbf{k}}'_1) \\ \phi_{2,2} = \pi - \phi_{2,1} \end{cases} \quad (5.1-4b)$$

που δίδει τις δυο παραπληρωματικές λύσεις  $\phi_{2,1}$  και  $\phi_{2,2}$ . Ακολουθώντας μέσω των δυο επόμενων σχέσεων προσδιορίζεται η  $\varphi_1$ :

$$\left. \begin{array}{l} -s_{\varphi_1} c_{\varphi_2} = \hat{\mathbf{k}}'_2 \\ c_{\varphi_1} c_{\varphi_2} = \hat{\mathbf{k}}'_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_{\varphi_1} = -\frac{\hat{\mathbf{k}}'_2}{c_{\varphi_2}} \\ c_{\varphi_1} = \frac{\hat{\mathbf{k}}'_3}{c_{\varphi_2}} \end{array} \right\} \xrightarrow{c_{\varphi_2} \neq 0} \varphi_1 = A \tan 2(s_{\varphi_1}, c_{\varphi_1}) \quad (5.1-4c)$$

Παρατηρώντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι υπάρχουν δυο ζεύγη λύσεων ανάλογα με το τεταρτημόριο που θα επιλεγεί να κείνται η γωνία, κατ' αντιστοιχία με τις δυο διαμορφώσεις αγκώνας επάνω/κάτω (elbow up/down) που παρατηρείται στους ρομποτικούς βραχίονες. Στην υπό εξέταση περίπτωση θα θεωρηθεί πως η γωνία  $\varphi_2$  ευρίσκεται στο α' τεταρτημόριο και ως εκ τούτου  $\varphi_{2,1} \square \varphi_{2,1}$ , ενώ η  $\varphi_2$  υπολογίζεται μέσω της Εξ. (5.1-4c). Με την εξαγωγή των δυο αυτών γωνιών έχει πλέον οριστεί η στροφή ανά άξονα που πρέπει να εκτελέσει η κεραία προκειμένου να στοχεύσει το επιθυμητό σημείο στόχο.

## 5.2 Σχεδιασμός τροχιάς

Η εύρεση των γωνιών στροφής δίνει απάντηση στο ερώτημα «που» πρέπει να στραφεί η κεραία και απομένει να καθοριστεί το «πως» θα στραφεί. Πρέπει να λοιπόν να καθοριστεί πως η κεραία θα οδηγηθεί -για κάθε άξονα- από μια αρχική γωνία στην επιθυμητή σε κάποιο δεδομένο χρόνο. Η διαδικασία επιλογής συναρτήσεων του χρόνου που περιγράφουν την εξέλιξη των μεταβλητών αρθρώσεων καλείται σχεδιασμός τροχιάς και είναι το αντικείμενο της παρούσης ενότητας.

Με δεδομένες την τελική γωνία στην οποία απαιτείται να στραφεί σε κάθε ένα από τους δυο άξονες της η κεραία και θεωρώντας πως η αρχική θέση αυτής καθώς και ο χρόνος που δίδεται προκειμένου να ολοκληρωθεί η κίνηση είναι γνωστά, είναι δυνατό να σχεδιαστεί η τροχιά που θα περιγράψει την εξέλιξη των μεταβλητών των αρθρώσεων. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζεται μέθοδος παραγωγής τροχιάς στο χώρο των αρθρώσεων με σχεδιασμό τροχιάς με κυβικό πολυώνυμο (3<sup>ου</sup> βαθμού) και η οποία δίνει μια πολύ ομαλή τροχιά, αφού η επιτάχυνση είναι γραμμική αν μειονεκτεί ως προς το ότι είναι υπολογιστικά σχετικά επίπονη.

Ξεκινώντας το σχεδιασμό, καθορίζεται ότι η γωνία άρθρωσης για κάθε ένα από τους δυο άξονες να είναι:

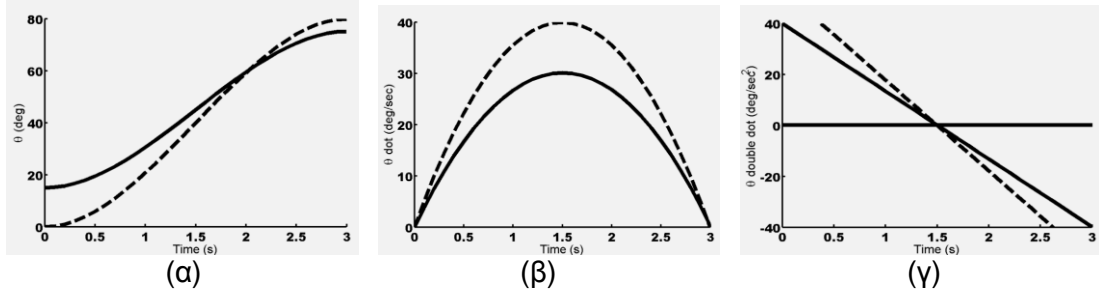
$${}^{des}\varphi_i = \alpha_3^i t^3 + \alpha_2^i t^2 + \alpha_1^i t + \alpha_0^i \quad , \quad i=1,2 \quad (5.2-1)$$

Και ως εκ τούτου το προφίλ ταχύτητας θα είναι παραβολικό, συγκεκριμένα:

$${}^{des}\dot{\varphi}_i = 3\alpha_3^i t^2 + 2\alpha_2^i t + \alpha_1^i \quad (5.2-2)$$

Ενώ η επιτάχυνση γραμμική:

$${}^{des}\ddot{\varphi}_i = 6\alpha_3^i t + 2\alpha_2^i \quad (5.2-3)$$



Σχήμα 5.2-1: Σχεδιασμός τροχιάς με κυβικό πολυώνυμο  
Προφίλ: (α) γωνίας, (β) γωνιακής ταχύτητας, (γ) γωνιακής επιτάχυνσης.

Οι τέσσερις σταθερές που εμφανίζονται στις πιο πάνω εξισώσεις ( $\alpha_3^i \dots \alpha_0^i$ ) υπολογίζονται σε κάθε άξονα για μια συγκεκριμένη τροχιά εάν είναι γνωστά η αρχική θέση της άρθρωσης ( $\varphi_i^{ini}$ ), η τελική επιθυμητή γωνιά άρθρωσης ( $\varphi_i^f$ ), όπως επίσης οι αντίστοιχες αρχικές και τελικές γωνιακές χρονικές μεταβολές αυτών (συνήθως τίθενται μηδενικές -  $\dot{\varphi}_i^{ini} = \dot{\varphi}_i^f = 0$ ).

$$t = t_0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0^i = \varphi_i^{ini} \\ \alpha_1^i = \dot{\varphi}_i^{ini} = 0 \end{cases} \quad (5.2-4a)$$

$$t = t_f^i \Rightarrow \begin{cases} t_f^{i^2} (a_2^i + a_3^i t_f^i) = \varphi_i^f - \varphi_i^{ini} \\ t_f^i (2a_2^i + 3a_3^i t_f^i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2^i = \frac{3}{t_f^{i^2}} (\varphi_i^f - \varphi_i^{ini}) \\ a_3^i = -\frac{2}{t_f^i} (\varphi_i^f - \varphi_i^{ini}) \end{cases} \quad (5.2-4b)$$

Οι συντελεστές αυτοί στην υπό διερεύνηση εφαρμογή υπολογίζονται σε πραγματικό χρόνο κάθε φορά που εισάγεται μια γωνία επενέργειας (βλπ. §5.1), αντικαθιστώνται στις Εξισώσεις 5.2-1 έως 5.2-3 δίνοντας την χρονοσειρά με τις επιθυμητές γωνίες, ταχύτητες και επιταχύνσεις καθορίζοντας τελικά το «πως» θα κινηθεί το προσάρτημα-κεραία.

### 5.3 Έλεγχος προσαρτήματος βασιζόμενος στο δυναμικό του μοντέλο

Μέχρι το σημείο αυτό, έχουν καθοριστεί οι επιθυμητές γωνίες επενέργησης στις οποίες πρέπει να στραφεί η κεραία για να καταδείξει κάποιο στόχο όπως επίσης και η τροχιά που θα ακολουθηθεί προκειμένου η κεραία να φτάσει σ' αυτές από την παρούσα θέση της. Αφού λοιπόν το «που» και το «πως» ορίστηκαν απομένει να εξαχθεί η ροπή που πρέπει να αποδοθεί στην κεραία για να εκτελεστεί η σχεδιασθείσα κίνηση. Η ροπή θα αποδίδεται μέσω ενός συστήματος ελέγχου το οποίο θα βασίζεται στο δυναμικό μοντέλο και θα είναι τύπου αναλογικό-διαφορικού τύπου (Proportional-Derivative (PD) model based controller).

Βαίνοντας προς την υλοποίηση αυτού του τύπου ελέγχου, το πρώτο βήμα είναι η κατάστρωση του δυναμικού μοντέλου που χαρακτηρίζει το στρεφόμενο προσάρτημα. Για την περιγραφή του υπό εξέταση μοντέλου η εξίσωση του Euler για την τρισδιάστατη στροφή άκαμπτου σώματος αρκεί για να παραγάγει το δυναμικό σύστημα. Η εξίσωση αυτή δηλώνει πως ένα σώμα με τανυστή αδρανείας  $\mathbf{I}$  που υφίσταται ροπή (moment)  $\mathbf{n}$  στρέφεται κατά τρόπο που περιγράφεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \quad (5.3-1)$$

όπου,  $\boldsymbol{\omega}$  είναι η γωνιακή ταχύτητα του άκαμπτου σώματος και  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  η γωνιακή επιτάχυνση του. Σημειώνεται πως όλοι οι όροι της πιο πάνω εξίσωσης θεωρούνται ως προς το σωματόδετο σύστημα συντεταγμένων που εν προκειμένω προσδένεται επί του κέντρου μάζας του προσαρτήματος και που σύμφωνα με τα Σχήματα 3.1-1 και 5.1-1 σημαίνεται ως  $\{2\}$ .

Προχωρώντας, υπενθυμίζεται πως η γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}_2$  έχει συναρτηθεί με τις χρονικές παραγώγους των γωνιών προσανατολισμού (Euler angles)  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_2$  μέσω του της Ιακωβιανής  $\mathbf{S}_2$  σύμφωνα με την Εξ. (3.1-5a) που επαναλαμβάνεται και εδώ:

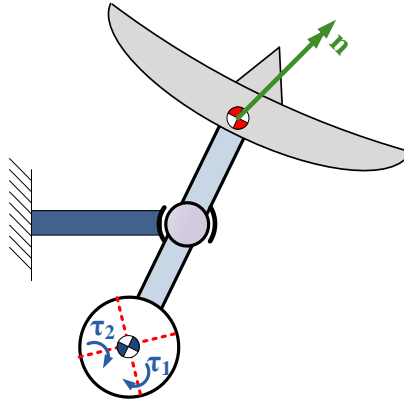
$$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.3-2)$$

Διαφορίζοντας ως προς το χρόνο την εξίσωση αυτή, προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) = \mathbf{S}_2 \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\mathbf{S}}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.3-3)$$

Και όπως μπορεί δείχτηκε με την βοήθεια της Αρχής Δυνατών Έργων, οι ροπές αρθρώσεων-επενέργησης (joint torques)  $\boldsymbol{\tau}$  που ισοδυναμούν με τυχαία ροπή στο σώμα (endpoint moment)  $\mathbf{n}$  δίνονται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}^T \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} = \mathbf{S}^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (5.3-4)$$



Σχήμα 5.3-1: Ροπές αρθρώσεων ισοδύναμες με τυχαία ροπή στο σώμα.

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (5.3-3) έως (5.3-4) στην θεμελιώδη εξίσωση του Euler (5.3-1) λαμβάνεται:

$$\mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{I}_2 (\mathbf{S}_2 \ddot{\boldsymbol{\phi}}) + \mathbf{I}_2 (\dot{\mathbf{S}}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) + (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \times \mathbf{I}_2 (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) = \mathbf{S}_2^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (5.3-5)$$

Ακολούθως, εκτελείται ένας αριστερός πολλαπλασιασμός με  $\mathbf{S}_2^T$  για να καταστεί το  $\mathbf{M}_2$  μητρώο θετικά ορισμένο (positive definite):

$$\underbrace{\mathbf{S}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2}_{\mathbf{M}_2} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \underbrace{\mathbf{S}_2^T \left[ \mathbf{I}_2 (\dot{\mathbf{S}}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) + (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \times \mathbf{I}_2 (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \right]}_{\mathbf{V}_2} = \cancel{\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2^{-T}} \boldsymbol{\tau} \quad (5.3-6)$$

Με τον τρόπο αυτό εξήχθη η κλασσική μορφή δυναμικής εξίσωσης για το μοντέλο:

$$\mathbf{M}_2(\boldsymbol{\phi}) \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{V}_2(\dot{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.3-7)$$

και η οποία θα χρησιμοποιηθεί στη σχεδίαση του ελεγκτή.

Εάν λοιπόν, οριστεί ροπή επενέργειας (control torque)  $\boldsymbol{\tau}_c$  η οποία θα είναι συνάρτηση της κατάστασης (state) του προσαρτήματος υπό τη μορφή:

$$\boldsymbol{\tau}_c = \hat{\mathbf{M}}_2(\boldsymbol{\phi}) \hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}} + \hat{\mathbf{V}}_2(\dot{\boldsymbol{\phi}}, \boldsymbol{\phi}) \quad (5.3-8)$$

και υποθέτοντας ότι:  $\mathbf{M}_2 = \hat{\mathbf{M}}_2$ ,  $\mathbf{V}_2 = \hat{\mathbf{V}}_2$  (ακριβής γνώση των παραμέτρων, ακριβής γραμμικοποίηση - exact linearization) το σύστημα κλειστού βρόχου (closed loop) περιγράφεται ως εξής:

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\boldsymbol{\phi}}_2 + \mathbf{V}_2 = \hat{\mathbf{M}}_2 \hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}} + \hat{\mathbf{V}}_2 \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}} \quad (5.3-9)$$

Συνάγεται λοιπόν, ότι με αυτή τη μορφή ελέγχου επιτυγχάνεται το αξιοσημείωτο γεγονός το «νέο» σύστημα να είναι γραμμικό και αποσυζευγμένο κατά την έννοια των τριών μεταβλητών των αρθρώσεων. Δηλαδή, κάθε είσοδος  $\hat{\phi}_k$  σχεδιάζεται προκειμένου να ελέγξει ένα βαθμωτό γραμμικό σύστημα.

Επιπρόσθετα, αν η  $\hat{\phi}$  σχεδιαστεί να ελέγχει ένα 2<sup>ος</sup> τάξης γραμμικό σύστημα, η προφανής επιλογή είναι να τεθεί:

$$\hat{\ddot{\phi}} = -\mathbf{K}_D \hat{\dot{\phi}} - \mathbf{K}_P \hat{\phi} + \mathbf{r} \quad (5.3-10)$$

όπου τα  $\mathbf{K}_P$  και  $\mathbf{K}_D$  είναι διαγώνια μητρώα των οποίων τα στοιχεία στην διαγώνιο αποτελούν κέρδη για τη θέση και την ταχύτητα αντίστοιχα. Συνεπώς, ο αναλογο-διαφορικός (PD) ελεγκτής υλοποιείται ως:

$$\ddot{\phi} + \mathbf{K}_D \dot{\phi} + \mathbf{K}_P \phi = \mathbf{r} \quad (5.3-11)$$

Ενσωματώνοντας στην είσοδο αναφοράς  $\mathbf{r}(t)$  τα όσα διαμειφθήκαν στην προηγούμενη ενότητα για το σχεδιασμό τροχιάς  $t \rightarrow (\ddot{\phi}(t), \dot{\phi}(t), \phi_{des}(t))$  λαμβάνεται:

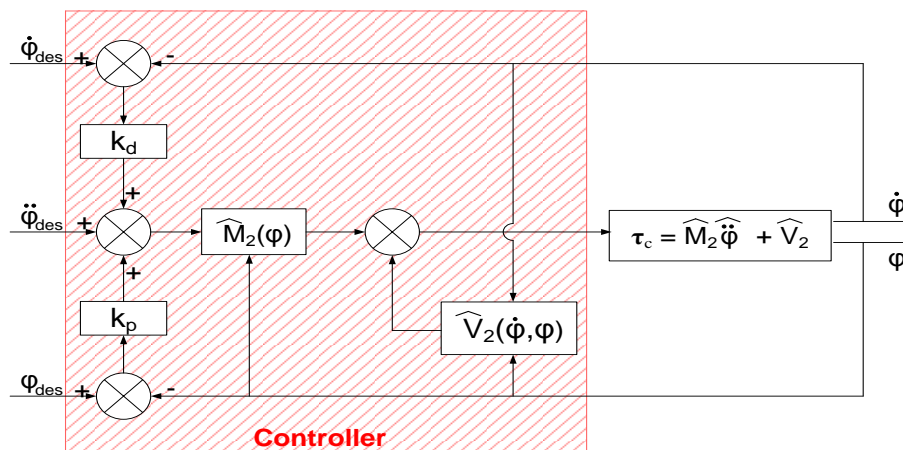
$$\mathbf{r}(t) = \ddot{\phi} + \mathbf{K}_D \dot{\phi} + \mathbf{K}_P \phi_{des} \quad (5.3-12)$$

Οπότε τελικά εξάγεται η σχέση για την PD ροπή ελέγχου με βάση το δυναμικό μοντέλο που είναι:

$$\boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{V}_2 + \mathbf{M}_2 [\ddot{\phi}_{des} + \mathbf{K}_D (\dot{\phi}_{des} - \dot{\phi}) + \mathbf{K}_P (\phi_{des} - \phi)] \quad (5.3-13)$$

Και άρα το σφάλμα παρακολούθησης (tracking error) που ορίζεται ως:  $\mathbf{e}(t) = \phi_{des} - \phi$  ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (5.3-14)$$



Σχήμα 5.3-2: Δομικό διάγραμμα model based PD ελέγχου.



### 5.3.1 Εφαρμογή ελέγχου σε υπο-επενεργούμενο προσάρτημα

Στην ενότητα που προηγήθηκε έγινε η διατύπωση του PD βασισμένου στο δυναμικό μοντέλο ελεγκτή για την γενική περίπτωση ενός στρεφόμενου άκαμπτου σώματος. Ωστόσο, η θεωρία που παρουσιάστηκε στηρίζεται σε μια κρίσιμη παραδοχή, ότι δηλαδή το σώμα-προσάρτημα είναι πλήρως επενεργούμενο (fully actuated). Μολαταύτα, αυτή η παραδοχή δεν αντιπροσωπεύει το υπό εξέταση το οποίο χαρακτηρίζεται ως υπο-επενεργούμενο (under-actuated), μιας και μόνο οι δυο πρώτες εκ των τριών γωνιών προσανατολισμού του ελέγχονται. Ενώ η τρίτη γωνία, επηρεάζεται από τη δυναμική σύζευξη με αποτέλεσμα να εμφανίζει και αυτή μια στροφή γύρω από τον άξονα της, απότοκο του γυροσκοπικού φαινομένου.

Προκειμένου να ξεπεραστεί η ιδιομορφία αυτή εκτελείται μια διαμέριση (partitioning) στη μητρική δυναμική εξίσωση κατά τρόπο ώστε να διαχωριστεί το επενεργούμενο από το μη-επενεργούμενο τμήμα. Συγκεκριμένα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{211} & M_{212} \\ M_{221} & M_{222} \\ M_{231} & M_{232} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix}}_{\hat{\phi}} + \underbrace{\begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \\ V_{23} \end{bmatrix}}_{\hat{v}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tau} \quad (5.3.1-1a)$$

$$\mathbf{M}'_{211} = \begin{bmatrix} M_{211} & M_{212} \\ M_{221} & M_{222} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}'_{212} = \begin{bmatrix} M_{213} \\ M_{223} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}'_{221} = \begin{bmatrix} M_{231} & M_{232} \end{bmatrix}, \quad M'_{222} = M_{233}$$

$$\ddot{\phi}'_1 = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\phi}'_2 = \ddot{\phi}_3, \quad \mathbf{V}'_{21} = \begin{bmatrix} \hat{V}_{21} \\ \hat{V}_{22} \end{bmatrix}, \quad V'_{22} = \hat{V}_{23}, \quad \tau' = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.1-1b)$$

Οπότε και λαμβάνεται η «τροποποιημένη» δυναμική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{211} & \mathbf{M}'_{212} \\ \mathbf{M}'_{221} & M'_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}'_1 \\ \ddot{\phi}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_{21} \\ V'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.1-2)$$

όπου η επάνω γραμμή αντιπροσωπεύει το επενεργούμενο τμήμα και η κάτω την (τρίτη) μη-επενεργούμενη γωνία προσανατολισμού.

Εκτελώντας τις πράξεις γραμμικής άλγεβρας λαμβάνονται οι δυο ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mathbf{M}'_{211} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{M}'_{212} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_2 + \mathbf{V}'_{21} = \boldsymbol{\tau}' \quad (5.3.1-3a)$$

$$\mathbf{M}'_{221} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{M}'_{222} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_2 + \mathbf{V}'_{22} = 0 \quad (5.3.1-3b)$$

Από τις οποίες η 5.3.1-3b επιλύεται ως προς  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}'_2$  :

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}'_2 = \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \left( -\mathbf{V}'_{22} - \mathbf{M}'_{221} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 \right) \quad (5.3.1-4)$$

και αντικαθίσταται στη 5.3.1-3a για να απομονωθούν οι επενεργούμενοι όροι:

$$\mathbf{M}'_{211} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{M}'_{212} \left[ \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \left( -\mathbf{V}'_{22} - \mathbf{M}'_{221} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 \right) \right] + \mathbf{V}'_{21} = \boldsymbol{\tau}' \quad (5.3.1-5)$$

Στη συνέχεια εκτελούνται και πάλι οι αλγεβρικές πράξεις οπότε και η δυναμική εξίσωση του επενεργούμενου τμήματος μετασχηματίζεται στη κλασσική της μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{211} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 - \mathbf{M}'_{212} \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \mathbf{M}'_{221} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 - \mathbf{M}'_{212} \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \mathbf{V}'_{22} + \mathbf{V}'_{21} = \boldsymbol{\tau}' \\ \underbrace{\left( \mathbf{M}'_{211} - \mathbf{M}'_{212} \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \mathbf{M}'_{221} \right)}_{\tilde{\mathbf{M}}'_2} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \underbrace{\left( \mathbf{V}'_{21} - \mathbf{M}'_{212} \mathbf{M}'_{222}{}^{-1} \mathbf{V}'_{22} \right)}_{\tilde{\mathbf{V}}'_2} = \boldsymbol{\tau}' \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}'_2(\varphi_1, \varphi_2) \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \tilde{\mathbf{V}}'_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \boldsymbol{\tau}' \quad (5.3.1-6)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η αντίστοιχη μειωμένη μορφή της εξίσωσης 5.3-7 που περιέγραψε το πλήρως επενεργούμενο 3β.ε. σώμα. Συνεπώς η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην εκεί περίπτωση για σχεδίαση του model based PD ελέγχου μεταφέρεται και στην προκειμένη περίπτωση. Ως εκ τούτου, τίθεται καθ' ομοίωση ροπή ελέγχου  $\boldsymbol{\tau}'_c$  :

$$\boldsymbol{\tau}'_c = \hat{\tilde{\mathbf{M}}}'_2 \hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}'_1 + \hat{\tilde{\mathbf{V}}}'_2 \quad (5.3.1-7)$$

Που χαρακτηρίζεται και πάλι από το γεγονός ότι:

$$\hat{\tilde{\mathbf{M}}}'_2 = \tilde{\mathbf{M}}'_2, \quad \hat{\tilde{\mathbf{V}}}'_2 = \tilde{\mathbf{V}}'_2 \quad (5.3.1-8a)$$

και άρα:

$$\hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}'_1 = \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1. \quad (5.3.1-8b)$$

Η  $\hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}'_1$  θα τεθεί ξανά τέτοια ώστε να δημιουργεί γραμμικό έλεγχο 2<sup>ος</sup> τάξης:

$$\hat{\ddot{\boldsymbol{\phi}}}'_1 = -\mathbf{K}'_p \boldsymbol{\phi}'_1 - \mathbf{K}'_D \dot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{r}' \quad (5.3.1-9)$$

Και ο PD έλεγχος υλοποιείται κατά τα γνωστά:

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{K}'_{D, 2 \times 2} \dot{\boldsymbol{\phi}}'_1 + \mathbf{K}'_{P, 2 \times 2} \boldsymbol{\phi}'_1 = \mathbf{r}' \quad (5.3.1-10)$$

Τέλος, ενσωματώνοντας και τα επιθυμητά μεγέθη στην είσοδο αναφοράς  $\mathbf{r}'(t)$ :

$$\mathbf{r}'(t) = \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} + \mathbf{K}'_D \dot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} + \mathbf{K}'_P \boldsymbol{\phi}'_{1,des} \quad (5.3.1-11)$$

επιτυγχάνεται η παρακολούθηση της τροχιάς. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται πως επιθυμητή κίνηση ορίζεται μόνο για τις δυο πρώτες γωνίες αρθρώσεων-προσανατολισμού και γι' αυτό τα μεγέθη της πιο πάνω εξίσωσης έχουν διάσταση 2 ( $2 \times 1$  ή  $2 \times 2$  διαγώνια για τα μητρώα κερδών).

Συνοψίζοντας, η ροπή ελέγχου για το επενεργούμενο τμήμα έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\tau}'_c = \tilde{\mathbf{V}}'_2 + \tilde{\mathbf{M}}'_2 \left[ \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} + \mathbf{K}'_D (\dot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} - \dot{\boldsymbol{\phi}}'_1) + \mathbf{K}'_P (\boldsymbol{\phi}'_{1,des} - \boldsymbol{\phi}'_1) \right] \quad (5.3.1-12)$$

Και οι επενεργούμενες γωνίες θα προκύπτουν ως:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}'_1 = \tilde{\mathbf{M}}'^{-1}_2 (\boldsymbol{\tau}'_c - \tilde{\mathbf{V}}'_2) \quad (5.3.1-13a)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 = \tilde{\mathbf{M}}'^{-1}_2 \left\{ \tilde{\mathbf{Y}}'_2 + \tilde{\mathbf{M}}'_2 \left[ \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} + \mathbf{K}'_D (\dot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} - \dot{\boldsymbol{\phi}}'_1) + \mathbf{K}'_P (\boldsymbol{\phi}'_{1,des} - \boldsymbol{\phi}'_1) \right] - \tilde{\mathbf{Y}}'_2 \right\} \quad (5.3.1-13b)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1 = \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} + \mathbf{K}'_D (\dot{\boldsymbol{\phi}}'_{1,des} - \dot{\boldsymbol{\phi}}'_1) + \mathbf{K}'_P (\boldsymbol{\phi}'_{1,des} - \boldsymbol{\phi}'_1) \quad (5.3.1-13c)$$

Ενώ, η τρίτη (μη-επενεργούμενη) γωνία θα λαμβάνεται από την από την Εξ. (5.3.1-4), που επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$\ddot{\phi}'_2 = M'^{-1}_{222} (-V'_{22} - \mathbf{M}'_{221} \ddot{\boldsymbol{\phi}}'_1) \quad (5.3.1-14)$$

Εφόσον όλα τα βήματα για την οδήγηση του προσαρτήματος έχουν θεμελιωθεί θεωρητικά, απομένει η αριθμητική εφαρμογή τους στο υπό μελέτη σύστημα. Προς τούτο, θεωρείται το τυχαίο το διάνυσμα στόχος  $\hat{\mathbf{k}}' = [0,5000 \quad -0,2241 \quad 0,8365]^T$  το οποίο σύμφωνα με τις Εξ. (5.1-4b,c) θα δίνουν γωνίες επενέργειας  $\phi_1, \phi_2$  ίσες με  $30^\circ$  και  $15^\circ$  αντίστοιχα. Ο σχεδιασμός τροχιάς λοιπόν θεωρεί ότι το προσάρτημα θα πρέπει να κινηθεί από την αρχική του θέση που ορίζεται στο χώρο των αρθρώσεων ως:

$$\phi_1^{ini} = \phi_2^{ini} = 0^\circ \quad (5.3.1-15a)$$

στην τελική επιθυμητή θέση, όπως αυτή προκύπτει από το διάνυσμα στόχο και είναι:

$$\varphi_1^f = 30^\circ \quad (5.3.1-15b)$$

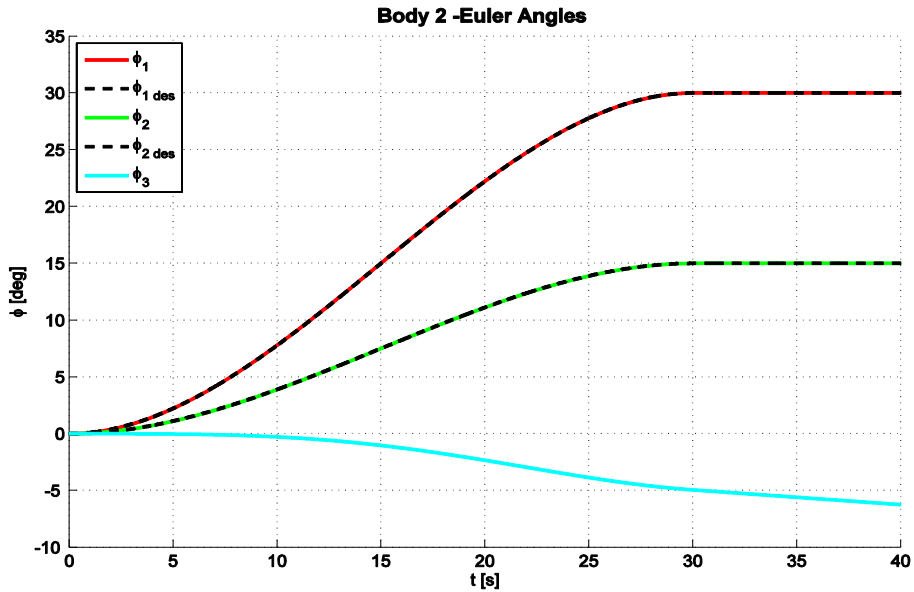
$$\varphi_2^f = 15^\circ \quad (5.3.1-15c)$$

Ο χρόνος αποπεράτωσης ορίζεται στα  $30s$  και με την ολοκλήρωση της κατάδειξης του στόχου το σενάριο κίνησης προβλέπει το προσάρτημα να παραμείνει ακίνητο στην τελική του θέση. Η κίνηση αυτή προσομοιώνεται σύμφωνα με τις παραμέτρους που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3.1-1, προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με την ικανότητα παρακολούθησης στόχου μέσω του υπό εξέταση PD βασισμένου στο δυναμικό μοντέλο έλεγχου.

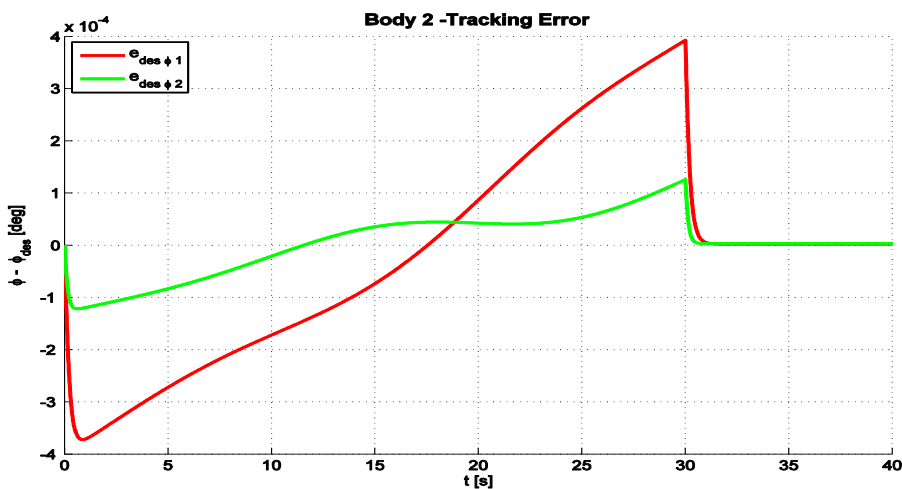
Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Αδράνεια προσαρτήματος	${}^2I_2 = \begin{bmatrix} 7,84 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 7,84 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 1,58 \cdot 10^6 \end{bmatrix} kgmm^2$
Διάνυσμα στόχος	$\hat{\mathbf{k}}' = [0,5000 \quad -0,2241 \quad 0,8365]^T$
Αρχικές γωνίες επενέργειας	$\varphi_1^{ini} = \varphi_2^{ini} = 0^\circ$
Τελικές γωνίες επενέργειας	$\varphi_1^f = 30^\circ \quad , \quad \varphi_2^f = 15^\circ$
Χρόνος αποπεράτωσης $t_f$	$t_f = 30s$
Αναλογικό κέρδος $\mathbf{K}_p$	$\mathbf{K}_p = diag([25 \quad 60])$
Διαφορικό κέρδος $\mathbf{K}_D$	$\mathbf{K}_D = 2\sqrt{\mathbf{K}_p}$
Χρόνος προσομοίωσης $t$	$t = 40s$

Πίνακας 5.3.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης για μελέτη οδήγησης προσαρτήματος

Στο Σχήμα 5.3.1-1 παρουσιάζεται η κίνηση του προσαρτήματος υπό την επενέργεια του εφαρμοζόμενου model based PD ελέγχου στους ίδιους άξονες με την επιθυμητές γωνίες. Παρατηρώντας το σχήμα αυτό, διαπιστώνεται ξεκάθαρα η ικανότητα πιστής παρακολούθησης τροχιάς μέσω του ελέγχου. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται σαφέστερα και από την αποτύπωση του σφάλματος παρακολούθησης που φαίνεται στο Σχήμα 5.3.1-2 και το οποίο σε καμία περίπτωση δεν ξεπερνάει το όριο του  $4 \cdot 10^{-4}$  της μοίρας.

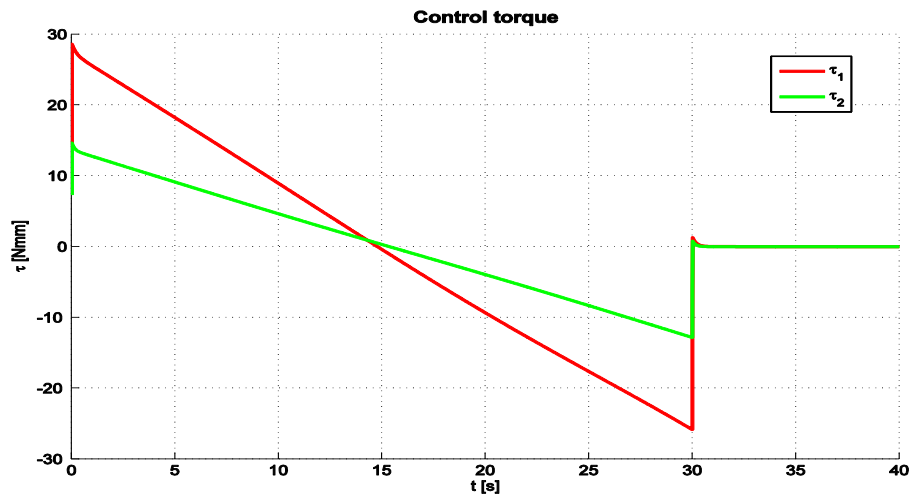


Σχήμα 5.3.1-1: Παρακολούθηση τροχιάς με model based PD έλεγχο.



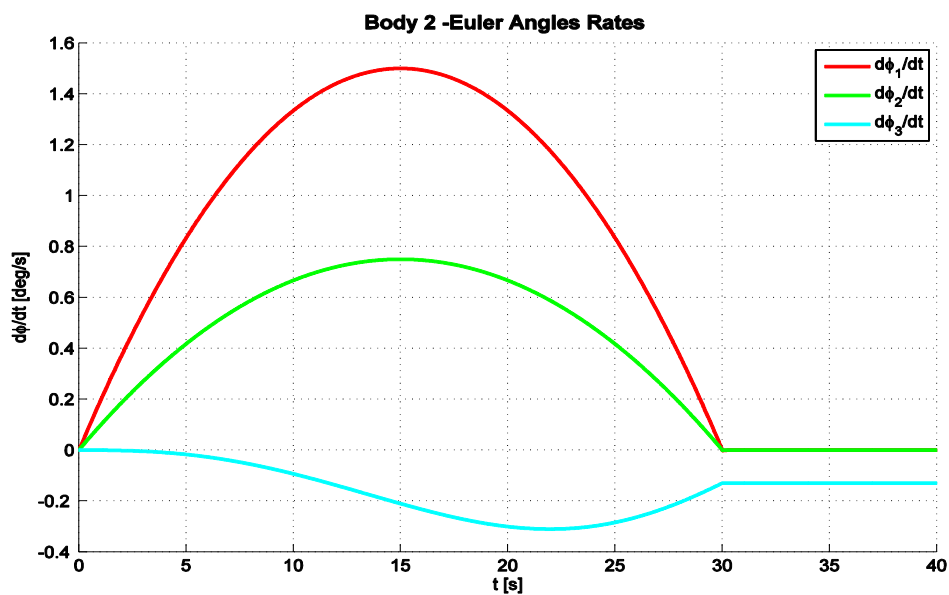
Σχήμα 5.3.1-2: Σφάλμα παρακολούθησης τροχιάς.

Σημειώνεται πως η κίνηση γύρω από τον τρίτο ( $z$ ) άξονα και η οποία γίνεται εμφανής μέσω της  $\phi_3$  γωνίας που εικονίζεται στο πιο πάνω σχήμα, είναι όπως έχει ήδη αναφερθεί απότοκο της δυναμική σύζευξης -γυροσκοπικό φαινόμενο- που διέπει τις εξισώσεις κίνησης. Η στροφή αυτή είναι εν γένει μικρή, χαμηλής ταχύτητας (βλπ. Σχήμα 5.3.1-4) και σίγουρα δεν επηρεάζει λειτουργικά την κατάδειξη στόχου, μιας και αφορά στροφή γύρω από το διαμήκη άξονα του αξονοσυμμετρικού προσαρτήματος-κεραία. Η κίνηση αυτή σε πραγματικές συνθήκες πιθανό να αυτο-ακυρώνεται στατιστικά από κάποια αντίθετη μετέπειτα κίνηση στους άλλους δυο άξονες, ενώ δεδομένη θεωρείται και η πέδηση της, λόγω των τριβών στην άρθρωση που αναπόφευκτα θα υπάρχουν.



Σχήμα 5.3.1-3: Ροπή ελέγχου για κατάδειξη στόχου .

Ακολούθως, στο Σχήμα 5.3.1-3 παρουσιάζεται η ροπή που εφαρμόζεται από τους δυο κινητήρες προκειμένου να πραγματοποιηθεί η εν λόγω κίνηση. Σύμφωνα με την θεωρία για την παραγωγή κυβικού πολυωνύμου θέσης (στροφής) πρέπει να εφαρμόζεται γραμμική επιτάχυνση και ως εκ τούτου γραμμική ροπή. Όπως φαίνεται από το ανωτέρω σχήμα η ροπή ελέγχου λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της ( $\tau_1^{\max} = 28,6Nmm$  και  $\tau_2^{\max} = 14,6Nmm$ ) στην εκκίνηση, φθίνει γραμμικά μέχρι να μηδενιστεί στο μέσο του χρόνου αποπεράτωσης ( $15s$ ) και ακολούθως λαμβάνει αυξανόμενα αρνητικές τιμές προκειμένου στο τέλος του χρόνου αποπεράτωσης της κίνησης, το προσάρτημα να φθάσει στην τελική του θέση με μηδενική ταχύτητα (βλπ. Σχήμα 5.3.1-4).



Σχήμα 5.3.1-4: Χρονικές παράγωγοι γωνιών επενέργησης για κατάδειξη στόχου.

## 6 Έλεγχος προσανατολισμού δορυφόρου και εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου

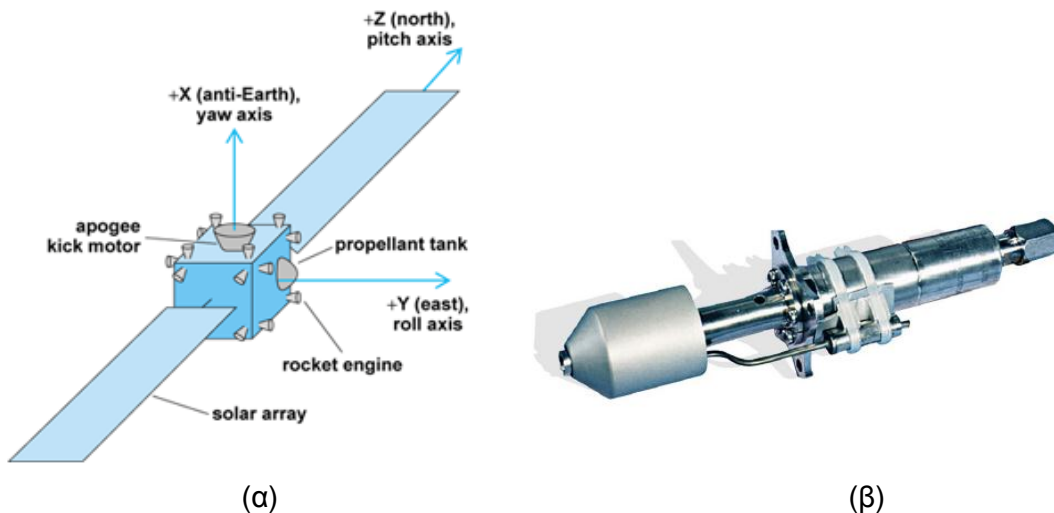
Με ανασκόπηση της έως τώρα παρουσιασθείσας διερεύνησης, γίνεται αντιληπτό πως επί του παρόντος στο σύστημα *δορυφόρος-προσάρτημα*, το κινούν αίτιο ήταν οι ροπές που ασκούνταν στο προσάρτημα με τον δορυφόρο να θεωρείται ως ελεύθερο σώμα. Στο παρόν κεφάλαιο η θεώρηση αυτή μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση του επενεργούμενου δορυφόρου. Αναλυτικότερα, το προσάρτημα δέχεται συγκεκριμένη ροπή επενέργειας και επιταχύνεται με αποτέλεσμα να μεταφέρει αντιδράσεις στον φέροντα δορυφόρο κατά τα γνωστά, όμως πλέον οι αντιδράσεις αυτές αντισταθμίζονται από τους επενεργητές του δορυφόρου προκειμένου αυτός να παραμένει στον επιθυμητό του προσανατολισμό (*orbital station-keeping*).

Το κεφάλαιο αυτό επικεντρώνεται στις συνέπειες που ανακύπτουν από την περιστροφική κίνηση του προσαρτήματος και ιδιαίτερα στην κατανάλωση προωθητικού καυσίμου (*propellant*) για την επαναφορά του δορυφόρου. Διερευνώνται οι περιπτώσεις χρήσης *ΤΕΣΠ* και *ΕΧΜΑΣΠ* -βλπ. Κεφάλαιο 4- σε δορυφόρο που ελέγχεται με προωθητές και σφόνδυλους αντίδρασης και εξάγονται συμπεράσματα για τις δυνατότητες εξοικονόμησης προωθητικού καυσίμου εφόσον χρησιμοποιηθεί ο προτεινόμενος άνευ αντιδράσεων μηχανισμός κίνησης ακόμα και αν αυτός φέρει κατασκευαστικά λάθη.

### 6.1 Έλεγχος Bang-Bang με προωθητές

Όπως έχει λεχθεί, στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί το ζήτημα της επαναφοράς του δορυφόρου σε επιθυμητό προσανατολισμό. Πρόκειται για ένα ευρύ αντικείμενο που συγκεντρώνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Προς τούτο, διάφορες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί από την πρώιμη διαστημική εποχή έως σήμερα. Στην παρούσα εργασία το ενδιαφέρον εστιάζεται σε δορυφόρους με σταθεροποίηση και στους τρεις άξονες που είναι πολύ συνήθης σε όλες τις μοντέρνες εφαρμογές. Ο έλεγχος, αν και πρόκειται για τρισδιάστατο σύστημα, γίνεται ανεξάρτητα σε κάθε άξονα μιας και οι ταχύτητες κίνησης είναι τόσο αργές και οι μετατοπίσεις μικρές που μπορεί να θεωρηθεί πως πρόκειται για αποσυζευγμένο σύστημα.

Η πρώτη περίπτωση επενεργούμενου δορυφόρου που διερευνάται είναι αυτή του σε τρεις άξονες ελεγχόμενου δορυφόρου μέσω προωθητών και η οποία είναι χαρακτηριστική για μικρούς δορυφόρους. Οι προωθητές παρέχουν ισχυρή ώση σε ελάχιστο χρόνο και λειτουργούν με την καύση και εκκένωση καυσίμου, συνήθως υδραζίνης ( $N_2H_4$ ). Χρησιμοποιούνται τόσο ως αποκλειστικά μέσα για τον έλεγχο του δορυφόρου όσο και ως βοηθητικά για την απόρριψη στροφορμής -βλπ. §6.2.2- σε δορυφόρους που ελέγχονται από σφονδύλους αντίδρασης. Το πλέον χαρακτηριστικό στοιχείο του ελέγχου με προωθητές είναι η τύπου ανοικτό-κλειστό (bang-bang ή on-off) λειτουργία τους μιας και αναλογική χρήση τους δεν είναι δυνατή λόγω ταχύτητας απόκρισης και πιθανής φραγής του ακροφυσίου από πάγο. Αυτός ο τύπος λειτουργίας οδηγεί σε ταλαντώσεις (limit cycle) γύρω το σημείο αποκατάστασης ή ακόμα και κροτάλισμα (chattering) ένα φαινόμενο που καταναλώνει πολύ καύσιμο και φθείρει τους προωθητές.



Σχήμα 6.1-1: (α) Τυπική διάταξη προωθητών, (β) Προωθητής υδραζίνης 1N [w1, w2].

Έτσι, όταν μια συστάδα προωθητών λάβει σήμα για καύση τότε για κάποιο χρονικό διάστημα δίδει ακαριαία ένα παλμό πλήρους ώσης που διαρκεί όσο υπάρχει εντολή. Το σήμα ελέγχου προέρχεται συνήθως μετρώντας μια μεταβλητή σφάλματος και συγκρίνοντας την με κάποια επιθυμητή τιμή. Συνεπώς για αποφυγή των παραπάνω επιλέγεται ο έλεγχος να είναι τύπου αναλογο-διαφορικός (PD) για να εισάγει υστέρηση και η μαθηματική περιγραφή του θα είναι:

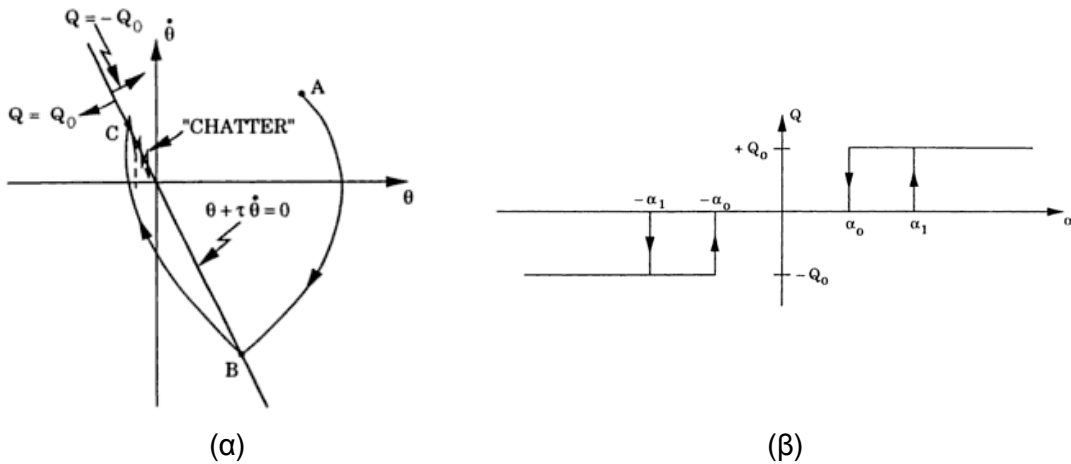
$$u_i = \begin{cases} u_{\max} & : & k_p e + k_D \dot{e} > f_t \\ 0 & : & -f_t \leq k_p e + k_D \dot{e} < f_r \\ -u_{\max} & : & k_p e + k_D \dot{e} < -f_r \end{cases} \quad (6.1-1a)$$



όπου:

$$e = \theta_{i,des} - \theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.1.1-b)$$

η μεταβλητή ελέγχου και οι  $f_t, f_{tr}$  τα όρια ενεργοποίησης που εισάγουν ένα νεκρό διάστημα (deadband) το οποίο μαζί με την υστέρηση αποτρέπουν την εμφάνιση του chattering.



Σχήμα 6.1-2: (α) Φαινόμενο chattering, (β) Έλεγχος με νεκρή ζώνη και υστέρηση [2].

### 6.1.1 Επαναφορά δορυφόρου κατά την διάρκεια διαταραχών

Θεωρείται δορυφόρος που ελέγχεται σύμφωνα με την πιο πάνω παράγραφο με τους προωθητές του και οι οποίοι αποδίδουν ώση σύμφωνα με την Εξ. (6.1.-1) για να εξουδετερώσουν άμεσα τις διαταραχές  $d_i$ , που εισάγονται από την κίνηση του προσαρτήματος σε κάθε ένα από τους τρεις ( $i=1,2,3$ ) άξονες. Συνεπώς, σε κάθε χρονική στιγμή ο δορυφόρος σε κάθε κατεύθυνση του υφίσταται μια ροπή διαταραχής  $d_i$  και την οποία προσπαθεί να αντισταθμίσει με την  $u_i$  ροπή που προέρχεται από τους προωθητές, δημιουργώντας τελικά το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$I_{ii} \ddot{\theta}_i = u_i + d_i \quad (6.1.1-1)$$

Χάριν ευκολίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί πως ο επιθυμητός προσανατολισμός  $\theta_{i,des}$  είναι μηδέν και άρα η μεταβλητή σφάλματος θα είναι:

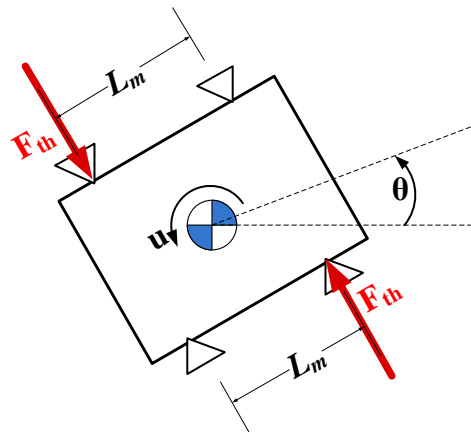
$$e_i = \theta_{i,des} - \theta_i \quad (6.1.1-2)$$

Οπότε η Εξ. (6.1.1-1) μεταπίπτει στη μορφή:

$$-I_{ii}\ddot{e}_i = u_i + d_i \Rightarrow \ddot{e}_i = -\frac{u_i + d_i}{I_{ii}} \quad (6.1.1-3)$$

που περιγράφει τη δυναμική του δορυφόρου ως προς την μεταβλητή σφάλματος.

Σημειώνεται εδώ πως η ροπή επενέργειας  $u_i$  που εμφανίζεται στις εξισώσεις δεν είναι φυσικά άμεσα αποδόσιμη από τους προωθητές αλλά αποτέλεσμα της δράσης μέσω εκκένωσης αερίων από αυτούς και της αντίδρασης από το περιβάλλον σε συνδυασμό με κάποιο μοχλόβραχίονα  $L$  που δημιουργείται από την έκκεντρη ως προς το κέντρο μάζας του δορυφόρου (βλπ. Σχ. 6.1.1-1) τοποθέτησή τους.

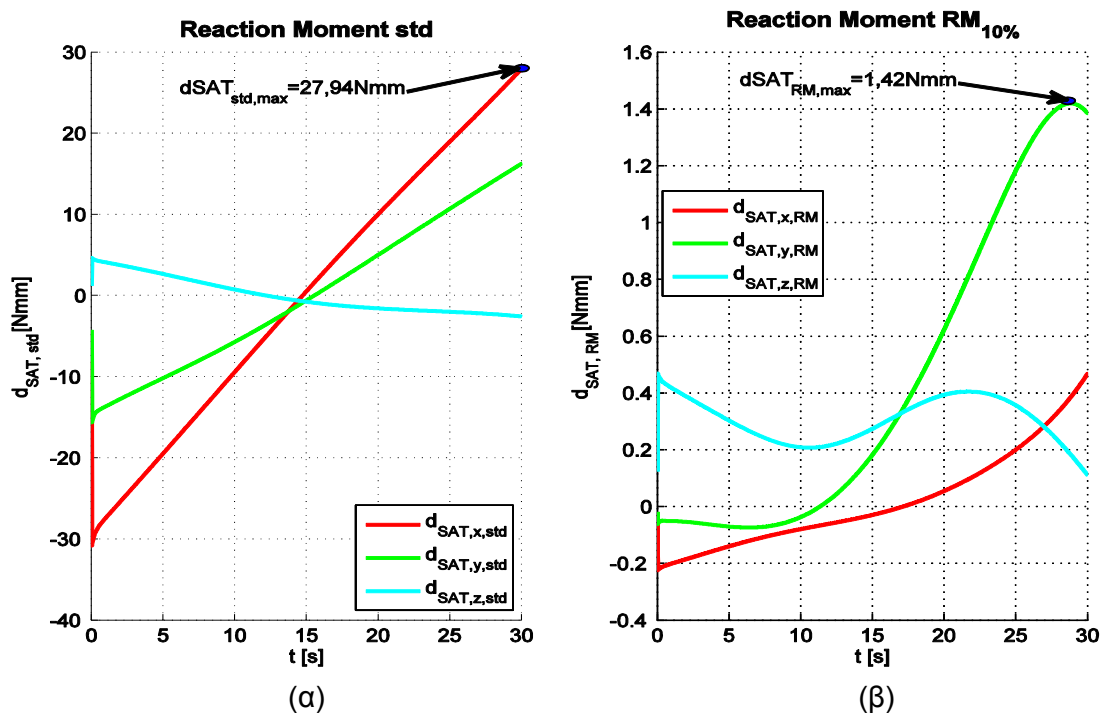


Σχήμα 6.1.1-1: Εισαγωγή ροπής με προωθητές.

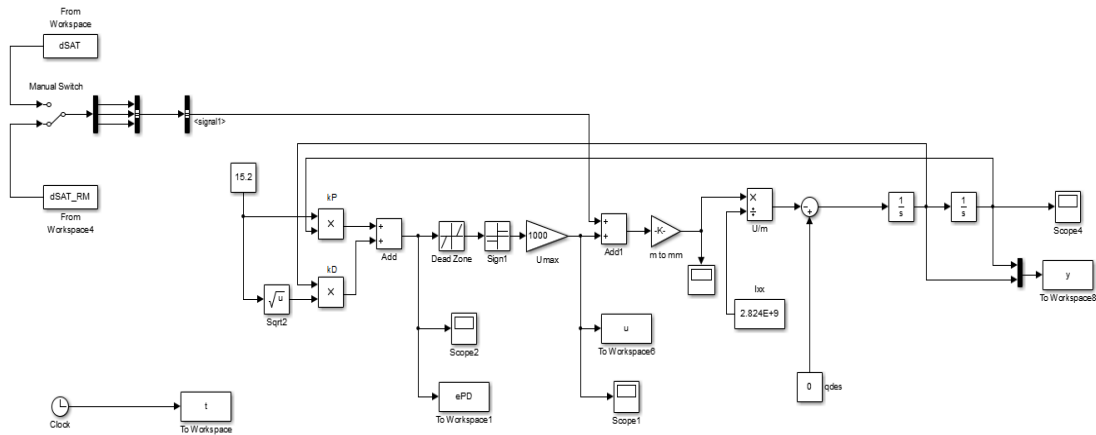
Η Εξ. (6.1.1-3) υλοποιείται και πάλι στο περιβάλλον του MatLab/Simulink με σκοπό να μελετηθεί η κατανάλωση καυσίμου για station keeping εφόσον οι διαταραχές προέρχονται στη μια περίπτωση από ΤΕΣΠ και στην άλλη από ΕΧΜΑΣΠ με κατασκευαστικό σφάλμα ζυγοστάθμισης 10%. Η διαδικασία προσομοίωσης εκτελείται με βάσει της παραμέτρους που φαίνονται στον Πίνακα 6.1.1-1 και θεωρεί πως τόσο το ΤΕΣΠ όσο και το ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub> καλούνται να υλοποιήσουν το σενάριο κίνησης της Ενότητας 5.3.1, να στραφούν δηλαδή από 0° σε 30° και από 0° σε 15° ταυτόχρονα, γύρω τους άξονες  $x$  και  $y$  σε χρόνο 30s. Κατά την κίνηση αυτή για τις δυο περιπτώσεις προσαρτήματος, καταγράφονται σε πίνακα χρονοσειράς (timeseries array) οι διαταραχές που φαίνονται στο Σχήμα 6.1.1-2 και εισάγονται στο Simulink μοντέλο του Σχήματος 6.1.1-3. Εκεί, σε κάθε χρονική στιγμή μέσω του PD Bang-Bang ελέγχου γίνεται προσπάθεια να εφαρμόσει κατάλληλη ροπή εξισορρόπησης που θα φέρνει τον δορυφόρο στην επιθυμητή θέση (home).

Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Κίνηση Προσαρτήματος	$\varphi_1^{ini} = \varphi_2^{ini} = 0^\circ$
	$\varphi_1^f = 30^\circ$ , $\varphi_2^f = 15^\circ$
	$t_f = 30s$
Αναλογικό κέρδος: $K_p$	άξονας $x$ $k_{p,x} = 15,2$
	άξονας $y$ $k_{p,y} = 7,5$
	άξονας $z$ $k_{p,z} = 1,5$
Διαφορικό κέρδος: $K_D$	$K_D = \sqrt{K_p}$ για κάθε άξονα
Όρια ενεργοποίησης νεκρού διαστήματος (deadband)	Άνω όριο $+0,1^\circ$
	Κάτω όριο $-0,1^\circ$
Ειδική ώση: $I_{sp}g$	$I_{sp}g = 2,2 \cdot 10^3 m/s$
Δύναμη ώσης $F_{th}$	$F_{th} = 1N$
Μοχλοβραχίονας: $L_m$	$L_m = 1,0m$
Χρόνος προσομοίωσης: $t$	$t = 30s$

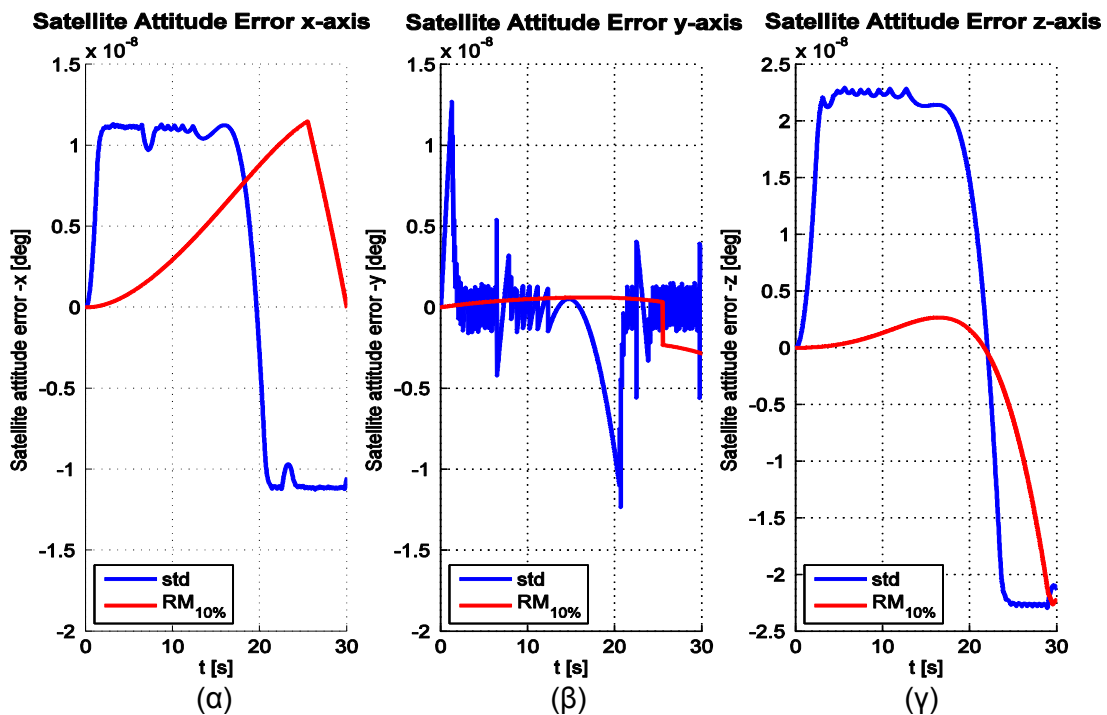
Πίνακας 6.1.1-1: Παράμετροι προσομοίωσης για άμεση εξισορρόπηση με προωθητές



Σχήμα 6.1.1-2: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για ΤΕΣΠ και (β) για ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub>.



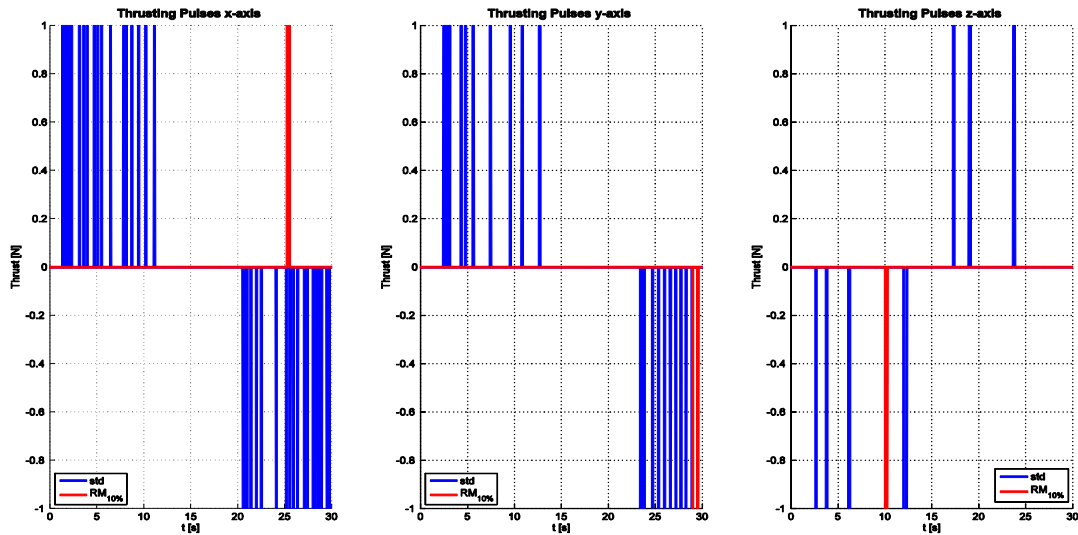
Σχήμα 6.1.1-3: Simulink μοντέλο για την άμεση απόρριψη διαταραχών με προωθητές σε ένα άξονα.



Σχήμα 6.1.1-4: Εξέλιξη μεταβλητής σφάλματος προσανατολισμού κατά την διάρκεια άμεσης εξισορρόπησης δορυφόρου (α)  $x$ -άξονας , (β)  $y$ -άξονας και (γ)  $z$ -άξονας

Στο Σχήμα 6.1.1-4 παρουσιάζεται η εξέλιξη της μεταβλητής σφάλματος προσανατολισμού κατά την διάρκεια της άμεσης εξισορρόπησης του δορυφόρου όπως αυτή προκύπτει από την Εξ. (6.1.1-3). Παρατηρώντας τις γραφικές αυτές παραστάσεις, διαπιστώνεται αφενός μεν η ικανότητα των προωθητών να διατηρούν το σφάλμα σε πολύ χαμηλά επίπεδα ( $10^{-8} \text{ deg}$ ) και αφετέρου η πολύ πιο έντονη κινητικότητα του δορυφόρου όταν το προσάρτημα είναι τύπου *TEΣΠ*.

Με την λήξη των 30s της προσομοίωσης, υπολογίζεται μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης το εμβαδό που περικλείεται κάτω από το σύνολο των παλμών ώσης (βλπ. Σχήμα 6.1.1-4) που εκκενώθηκαν από τους προωθητές. Από την ολοκλήρωση μπορούν να εξαχθούν ποσοτικά αποτελέσματα για το προωθητικό καύσιμο που καταναλώθηκε.



Σχήμα 6.1.1-5: Παλμοί ώσης για άμεση εξισορρόπηση δορυφόρου.

Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό του καταναλωθέντος προωθητικού θα πρέπει να θεωρηθεί το μέγεθος της ειδικής ώσης  $I_{sp}$  (specific impulse) που χαρακτηρίζει τους προωθητές και μέσω αυτού θα ευρεθεί ο ρυθμός ροής του προωθητικού καυσίμου  $\dot{m}_p$  (propellant mass flow rate) που θα ολοκληρωθεί ως προς το χρόνο. Τα προλεχθέντα μεγέθη συνδέονται με την ώση μέσω της σχέσης:

$$F_{th} = \dot{m}_p I_{sp} g \quad (6.1.1-4)$$

όπου η ειδική ώση λαμβάνεται [w2] ίση με:  $I_{sp} g = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$  για προωθητές υδραζίνης 1N και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Και αφού η ροπή είναι το γινόμενο δύναμης (ώσης) και του αντίστοιχου μοχλοβραχίονα:  $L_m = 1,0 \text{ m}$ :

$$u_i = F_{th} \times L_m \quad (6.1.1-5)$$

Τότε, λύνοντας την 6.1.1-4 λαμβάνεται για τον ρυθμό κατανάλωσης προωθητικού σε κάθε άξονα:

$$\dot{m}_{p_i} = \frac{F_{th}}{I_{sp}g} = \frac{u_i}{I_{sp}gL_m} \quad (6.1.1-6)$$

Ακολουθώντας, ολοκληρώνοντας την πιο πάνω σχέση και αθροίζοντας την κατανάλωση και για τους τρεις άξονες λαμβάνεται η ολική κατανάλωση προωθητικού καυσίμου που απαιτήθηκε για την διατήρηση του δορυφόρου στην μηδενική του θέση καθώς αυτός διαταρασσόταν από την περιστροφή του προσαρτήματος. Είναι λοιπόν:

$$m_p = \sum_{i=1}^3 \left( \int_{t_0}^{t_f} \frac{u_i}{I_{sp}gL_m} dt \right) \quad (6.1.1-7)$$

Εκτελώντας προσομοίωση με χρήση *ΤΕΣΠ* και με χρήση *ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub>* όπως προνοούσε το σενάριο κίνησης και υπολογίζοντας την κατανάλωση προωθητικού σύμφωνα με τα πιο πάνω, αποκαλύπτεται το μέγεθος της εξοικονόμησης που θα επέφερε μελλοντική χρήση των *ΕΧΜΑΣΠ* σε δορυφόρους. Όπως αναμενόταν και από την παρατήρηση του Σχήματος 6.1.1-5 το όφελος ως προς την εξοικονόμηση προωθητικού καυσίμου από χρήση *ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub>* φτάνει το σημαντικότερο ποσοστό του 80,71% εν συγκρίσει με χρήση *ΤΕΣΠ*.

### 6.1.2 Επαναφορά δορυφόρου μετά την διαταραχή

Ως συνέχεια των διαμειφθέντων στην προηγούμενη παράγραφο ακόμα ένα συναφές σενάριο διερευνάται προκειμένου να επιβεβαιωθούν σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό τα αποτελέσματα για την εξοικονόμηση καυσίμου. Στην περίπτωση αυτή το σενάριο κίνησης του προσαρτήματος παραμένει το ίδιο, όπως επίσης και ο τύπος επενέργειας του δορυφόρου και αυτό που διαφοροποιείται είναι η στιγμή έναρξης της διαδικασίας εξισορρόπησης. Συγκεκριμένα, τώρα δεν υφίσταται εξισορρόπηση διαταραχών κατά την διάρκεια τους αλλά μετά το πέρας τους. Ο δορυφόρος δηλαδή –κατά το ρεαλιστικότερο σενάριο- όσο εκτελείται κίνηση παραμένει αδρανής (απενεργοποιημένο σύστημα ελέγχου- AOCs off, free floating mode) και με το πέρας της κίνησης του προσαρτήματος, αρχίζει να εκτελεί μανούβρες χρησιμοποιώντας τους προωθητές του προκειμένου να επανέλθει στην αρχική του θέση (station keeping maneuvers).

Άρα λοιπόν, το προσάρτημα-κεραία ολοκληρώνει την κίνηση της Ενότητας 5.3.1 και φέρνει τον φέροντα δορυφόρο σε διαταραγμένο προσανατολισμό. Η τελικές τιμές για

τις γωνιές προσανατολισμού του δορυφόρου και οι χρονικές παράγωγοι αυτών αποτελούν τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες θα εκκινήσει η διαδικασία εξισορρόπησης. Συγκεκριμένα θα είναι :

$$\theta_i|_{t=0} = \theta_i^0 \quad (6.1.2-1a)$$

$$\dot{\theta}_i|_{t=0} = \dot{\theta}_i^0 \quad (6.1.2-1b)$$

Και άρα το δυναμικό σύστημα αντίστοιχο του 6.1.1-3 είναι:

$$I_{ii}\ddot{\theta}_i = u_i \quad (6.1.2-2a)$$

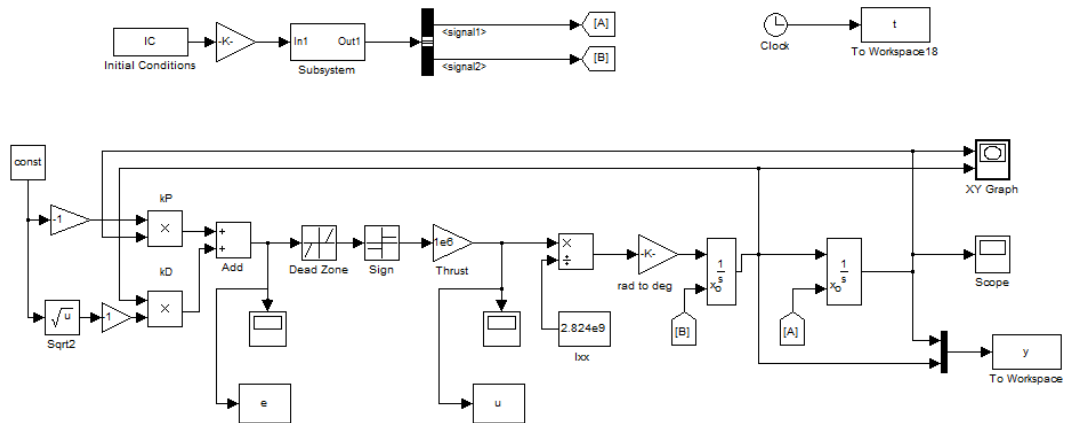
$$e_i = \theta_{i,des}^0 - \theta_i \quad (6.1.2-2b)$$

$$-I_{ii}\ddot{e}_i = u_i \Rightarrow \ddot{e}_i = -\frac{u_i}{I_{ii}} \quad (6.1.2-2c)$$

Που περιγράφει ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών και το οποίο ολοκληρώνεται αριθμητικά στο Simulink (βλπ. Σχήμα 6.1.2-1) για τις δυο περιπτώσεις προσαρτημάτων σύμφωνα με τις παραμέτρους που φαίνονται στον Πίνακα 6.1.2-1.

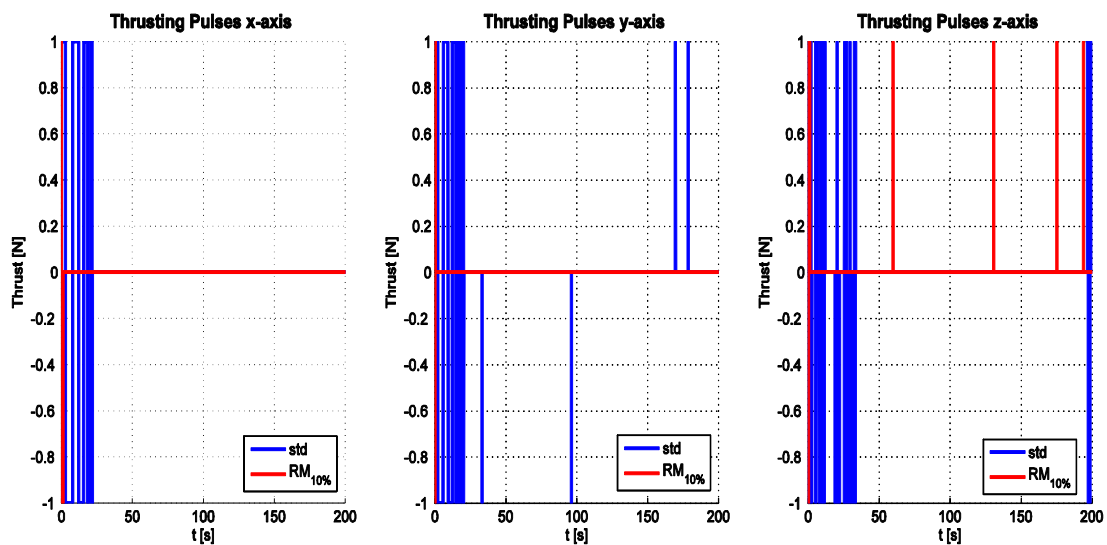
Παράμετρος προσομοίωσης	Τιμή
Αρχικές Συνθήκες σύστημα δορυφόρος -ΤΕΣΠ	$\theta_{std}^0 = [-0,0875 \quad -0,0589 \quad 0,1724]^T \text{ deg}$
	$\dot{\theta}_{std}^0 = [-1,1721 \cdot 10^{-6} \quad 2,34 \cdot 10^{-7} \quad 2,1801 \cdot 10^{-6}]^T \text{ deg/s}$
Αρχικές Συνθήκες σύστημα δορυφόρος - ΕΧΜΑΣΠ <sub>10%</sub>	$\theta_{RM}^0 = [-6,8495 \cdot 10^{-4} \quad -0,0015 \quad 0,0458]^T \text{ deg}$
	$\dot{\theta}_{RM}^0 = [-1,0777 \cdot 10^{-5} \quad 3,2323 \cdot 10^{-4} \quad 0,0030]^T \text{ deg/s}$
Αναλογικό κέρδος: $K_p$	άξονας $x$ $k_{p,x} = 25$
	άξονας $y$ $k_{p,y} = 75$
	άξονας $z$ $k_{p,z} = 25$
Διαφορικό κέρδος: $K_D$	$K_D = \sqrt{K_p}$ για κάθε άξονα
Ειδική ώση: $I_{sp}g$	$I_{sp}g = 2,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
Δύναμη ώσης $F_{th}$	$F_{th} = 1N$
Μοχλοβραχίονας: $L_m$	$L_m = 1,0m$
Χρόνος προσομοίωσης: $t$	$t = 30s$

Πίνακας 6.1.2-1: Παράμετροι προσομοίωσης για εξισορρόπηση με προωθητές μετά τη διαταραχή



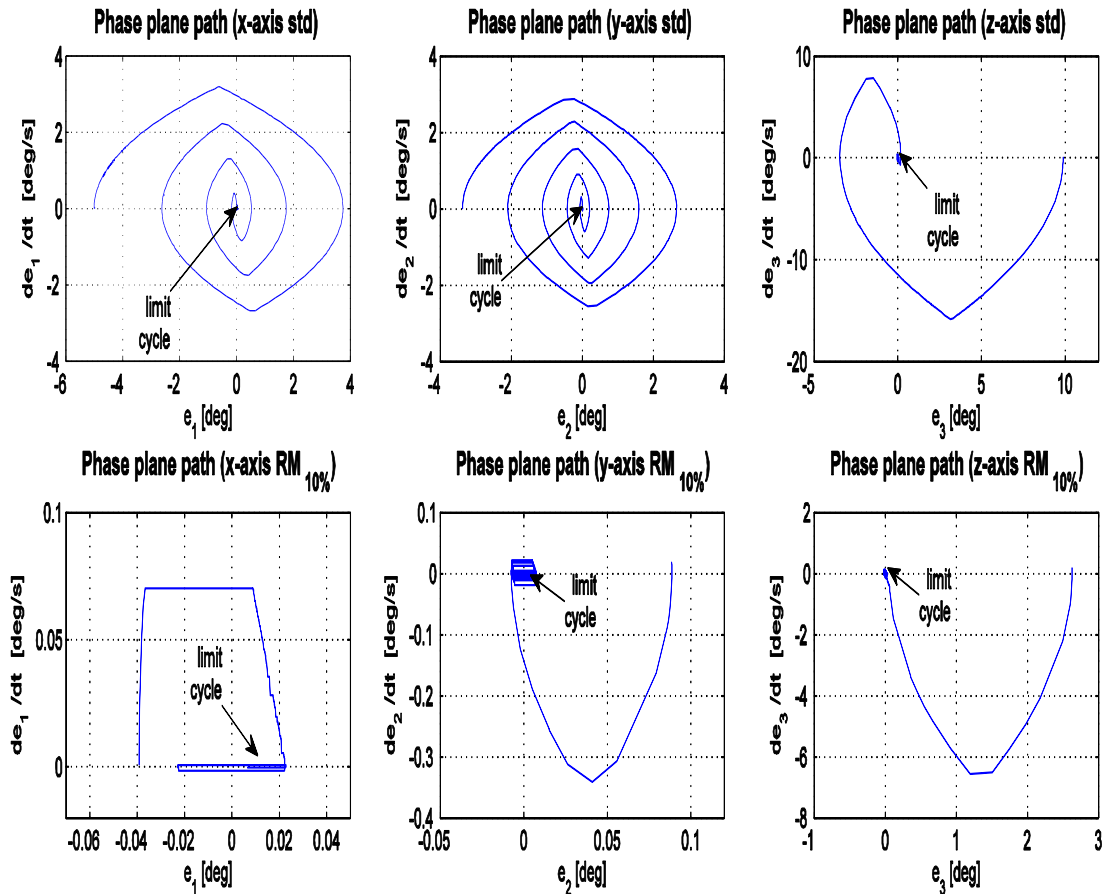
Σχήμα 6.1.2-1: Simulink μοντέλο για επαναφορά με προωθητές μετά τη διαταραχή.

Στο Σχήμα 6.1.2-3 παρουσιάζονται τα προκύπτοντα διαγράμματα απόκρισης φάσης (phase plane). Συγκρίνοντας τα επάνω διαγράμματα που αφορούν την περίπτωση του συστήματος *δορυφόρος-TEΣΠ*, με τα κάτω που αφορούν το αντίστοιχο σύστημα με *EXΜΑΣΠ<sub>10%</sub>*, διαπιστώνεται ότι προκειμένου οι γωνίες προσανατολισμού του δορυφόρου να οδηγηθούν στη ζητούμενη "μηδενική" τους θέση και με μηδενική χρονική παράγωγο, απαιτείται και πάλι να εκτελεστούν πολύ περισσότερες κινήσεις για το σύστημα με *TEΣΠ*. Οι κινήσεις αυτές επιτυγχάνονται προφανώς μέσω των παλμών ώσης που αποδίδουν οι προωθητές. Οι παλμοί αυτοί για τα δυο υπό εξέταση συστήματα εικονίζονται στο Σχήμα 6.1.2-2 από όπου δεικνύεται με ακόμα μεγαλύτερη σαφήνεια η υπεροχή του συστήματος που φέρει *EXΜΑΣΠ* ως προς την μειωμένη κατανάλωση προωθητικού.



Σχήμα 6.1.2-2: Παλμοί ώσης για εξισορρόπηση δορυφόρου μετά τη διαταραχή.





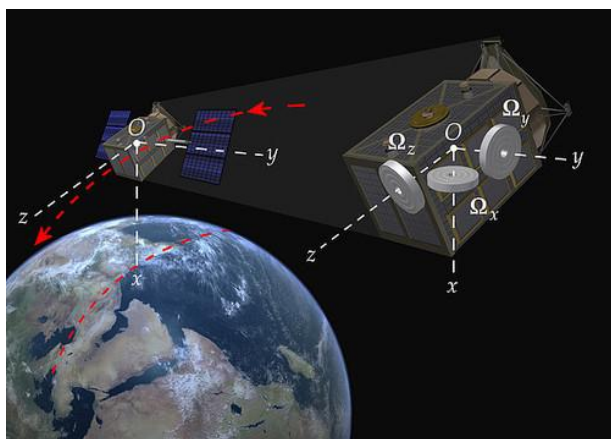
Σχήμα 6.1.2-3: Απόκριση συστήματος για επαναφορά με προωθητές μετά από διαταραχή (Επάνω: *ΤΕΣΠ*, Κάτω: *ΕΧΜΑΣΠ*).

Από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων σύγκρισης μεταξύ των περιπτώσεων χρήσης *ΤΕΣΠ* και *ΕΧΜΑΣΠ*<sub>10%</sub> υπολογίζεται η κατανάλωση προωθητικού σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράφηκε προηγούμενα. Τα συμπεράσματα είναι και πάλι πολύ συγκεκριμένα και καταδεικνύουν πως το μέγεθος της εξοικονόμησης με χρήση *ΕΧΜΑΣΠ*<sub>10%</sub> σε σύγκριση με το *ΤΕΣΠ* φτάνει το ποσοστό του 97,18%.

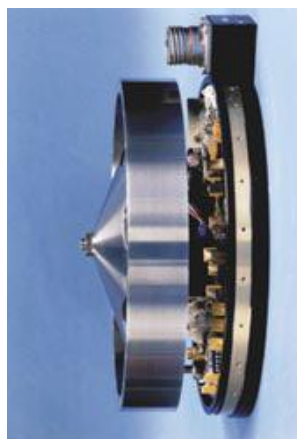
## 6.2 Έλεγχος με σφονδύλους αντίδρασης

Η πρότερη διερεύνηση για τις επιπτώσεις στην εξοικονόμηση καυσίμου συνεχίζεται με την μελέτη ακόμα μιας πολύ διαδομένης μορφής ελέγχου των δορυφόρων, αυτής που εδράζεται στη χρήση σφονδύλων αντίδρασης (ΣΑ). Ο έλεγχος αυτού του τύπου είναι πολύ διαδεδομένος σε δορυφόρους που κινούνται σε υψηλές γήινες τροχιές (high Earth orbit) και επιτελείται χρησιμοποιώντας τρεις -ή τέσσερις για λόγους ασφαλείας (redundancy)- σφονδύλους αντίδρασης. Κάθε ΣΑ φέρει έναν

ηλεκτροκινητήρα που συνδέεται με ένα σφόνδυλο και περιστρέφεται σε σταθερές στροφές, όταν απαιτηθεί η απόδοση ροπής σε κάποιο άξονα τότε ο σφόνδυλος επιταχύνεται και αναγκάζει το διαστημικό σκάφος να γυρίσει με αντίθετη φορά κατά την αναλογία που επιτάσσει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής. Βέβαια, το εύρος λειτουργίας δεν είναι απεριόριστο με αποτέλεσμα όταν ξεπεραστεί το όριο στροφών του κινητήρα ή μέγιστης αποδιδόμενης στροφορμής να υφίσταται συνθήκη κορεσμού (saturation). Στην περίπτωση αυτή εκτελείται περιστροφή του δορυφόρου μέσω των προωθητών για να απορριφθεί (de-spinning / de-saturation) η συμμαζεμένη (accumulated) στροφορμή. Συνεπώς, και στην περίπτωση αυτή η μη μεταφορά διαταραχών είναι μείζονος σημασίας μιας και περιορίζει τη συσσώρευση μη-κυκλικής (secular) στροφορμής, που αθροιζόμενη οδηγεί σε κορεσμό τους ΣΑ και ως εκ τούτου περιορίζει και την απαίτηση για κατανάλωση προωθητικού για απο-κορεσμό των ΣΑ.



(α)



(β)

Σχήμα 6.2-1: (α) Έλεγχος δορυφόρου με σφονδύλους αντίδρασης, (β) Μικρός σφόνδυλος αντίδρασης χωρίς κάλυμμα [w6, w13].

### 6.2.1 Αρχική διαστασιολόγηση σφονδύλων

Η αξία χρήσης μηχανισμών κίνησης προσαρτημάτων δορυφόρων χωρίς αντιδράσεις έχει ήδη διαφανεί από τα αποτελέσματα αναφορικά την εξοικονόμηση καυσίμου όταν ο δορυφόρος σταθεροποιείται μόνο μέσω των προωθητών του. Έχει επίσης λεχθεί πως το πλεονέκτημα των *EXMASΠ* δεν περιορίζεται στην προηγούμενη περίπτωση αφού και όταν η σταθεροποίηση εκτελείται με ΣΑ υπάρχει απαίτηση για παραγωγή ώσης προκειμένου να απομακρύνονται από κατάσταση κορεσμού οι ΣΑ. Πέραν όμως του κέρδους σε προωθητικό καύσιμο που επέρχεται μέσω μείωσης της

αναγκαιότητας για απόρριψη μη-κυκλικής στροφορμής και η οποία θα ποσοτικοποιηθεί στην επόμενη ενότητα, υπάρχει και το όφελος που αποκομίζεται από την ελαττωμένη μάζα που θα έχουν οι ΣΑ συνεπεία των μικρότερων διαταραχών που θα υφίσταται ο δορυφόρος.

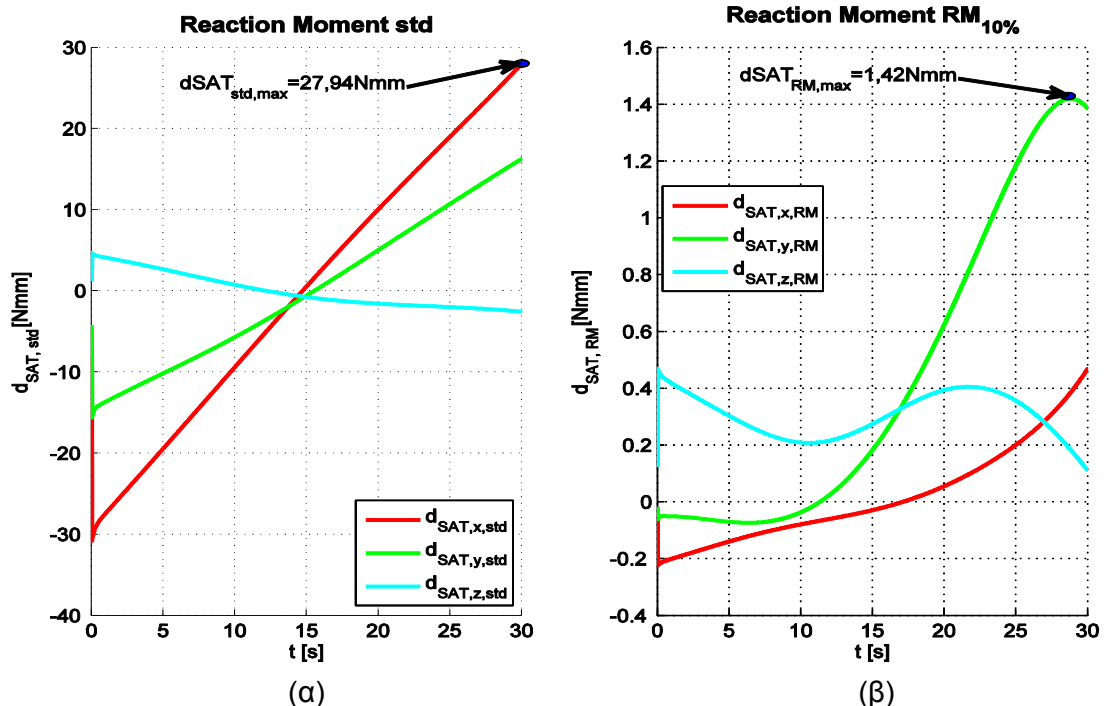
Η μεθοδολογία μελέτης του συστήματος σταθεροποίησης του δορυφόρου μέσω ΣΑ στηρίζεται, αντίθετα με την ως τώρα διαδικασία, στην στατιστική ανάλυση δεδομένων που προέκυψαν από τις προηγούμενες προσομοιώσεις. Συγκεκριμένα, το μέγεθος ενδιαφέροντος είναι η μέγιστη τιμή της ροπής διαταραχής. Ως εκ τούτου, από τον πίνακα δεδομένων που λήφθηκε από την στροφή της κεραίας κατά το σενάριο κίνησης που ορίστηκε στις προηγούμενες ενότητες, εξάγεται η μέγιστη τιμή της αναπτυσσόμενης ροπής αντίδρασης. Η τιμή αυτή προφανώς αντιστοιχεί στη χειρότερη ροπή διαταραχής που υφίσταται ο φέροντας δορυφόρος και είναι αυτή που καλούνται να απορροφήσουν οι ΣΑ.

Μια διάταξη ελέγχου με ΣΑ μπορεί να αποσβένει ενεργά τις εσωτερικά και εξωτερικά αναπτυσσόμενες διαταραχές μέσω προσωρινής μεταβολής της αποθηκευμένης σε αυτούς στροφορμής. Στην υπό εξέταση περίπτωση, ως διαταραχή λαμβάνεται μόνο η προερχόμενη από το προσάρτημα ροπή αντίδρασης μιας και τόσο οι εσωτερικά όσο και οι προερχόμενες από το περιβάλλον διαταραχές (λόγω βαρυτικού και μαγνητικού πεδίου, ηλιακής ακτινοβολίας, αεροδυναμικών δυνάμεων κ.α.) είναι σαφώς μικρότερες και μπορούν να αμεληθούν. Κατά συνέπεια το πρόβλημα της αντιστάθμισης, τίθεται ως ζήτημα εκλογής κατάλληλου μεγέθους ΣΑ τέτοιων ώστε να είναι ικανοί να αντισταθμίζουν τον κλονισμό που προέρχεται από την κεραία.

Επαναφέροντας το δεδομένο σενάριο κίνησης που εγκαινιάστηκε στην Ενότητα 5.3.1 για κίνηση της κεραίας (από τις  $0^\circ$  στις  $30^\circ$  και από τις  $0^\circ$  στις  $15^\circ$  σε  $30s$ ), η μέγιστη μεταφερόμενη στον δορυφόρο ροπή αντίδρασης όπως αυτή ευρίσκεται από το Σχήμα 6.2.1-1 (επαναλαμβάνεται από §6.1.1) είναι για τους δύο τύπους προσαρτημάτων:

$$ΤΕΣΠ: \quad \max d^{std} = 27,94 \cdot 10^{-3} Nm \quad (6.2.1-1a)$$

$$ΕΧΜΑΣΠ_{10\%}: \quad \max d^{RM} = 1,42 \cdot 10^{-3} Nm \quad (6.2.1-1b)$$



Σχήμα 6.2.1-1: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για ΤΕΣΠ και (β) για ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub>.

Η μέγιστη αυτή ροπή θα πρέπει να αποθηκεύεται στους ΣΑ για τουλάχιστον 24ώρες προκειμένου να απαιτείται ο απο-κορεσμός τους μόνο μια φορά ημερησίως. Συνεπώς, η ημερήσια αποθηκευτική ικανότητα (capacity) σε στροφορμή των ΣΑ θα πρέπει να είναι για τις δυο περιπτώσεις:

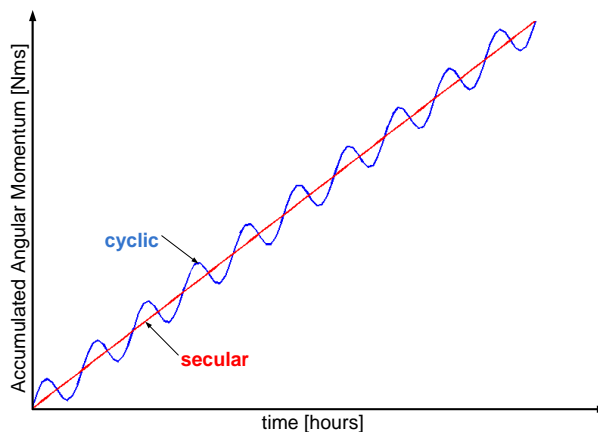
$$ΤΕΣΠ: \quad H_{day}^{std} \cong 27,94 \cdot 10^{-3} \times 24 \times 3600 / 60 = 40,23 Nms \quad (6.2.1-2a)$$

$$ΕΧΜΑΣΠ_{10\%}: \quad H_{day}^{RM} \cong 1,42 \cdot 10^{-3} \times 24 \times 3600 / 60 = 2,04 Nms \quad (6.2.1-2a)$$

Παρατηρώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα εύκολα διαπιστώνεται ότι ένας δορυφόρος εξοπλισμένος με ΕΧΜΑΣΠ<sub>10%</sub> (ακόμα και με το δεδομένο του 10% κατασκευαστικού σφάλματος) απαιτεί ΣΑ με μόνο ένα περίπου εικοστό αποθηκευτική ικανότητα και άρα με σημαντικά μειωμένη μάζα. Η σημαντικότερη αυτή μείωση της μάζας των ΣΑ -όπως θα φανεί στην αμέσως επόμενη ενότητα- είναι ιδιαίτερα σημαντική, αφού κάθε εκτόξευσιμο kg έχει βαρύ οικονομικό κόστος.

## 6.2.2 Απόρριψη στροφορμής σφονδύλων

Με την εκλογή καταλλήλων ΣΑ είναι δυνατό η σταθεροποίηση του δορυφόρου να γίνεται ενεργά μέσω της μεταβολής της αποθηκευμένης σε αυτούς στροφορμής, όπως έχει ήδη ειπωθεί. Όμως, δεν είναι ολόκληρο το ποσοστό της αναπτυσσόμενης κατά τη διάρκεια των διαταραχών στροφορμής, κυκλικής (cyclic) φύσεως και άρα δεν αυτό-ακυρώνεται με το πέρασμα του χρόνου κατά ημιτονοειδή τρόπο. Αντίθετα, το ποσοστό που είναι μη-κυκλικής (secular) φύσεως στροφορμής, συσσωρεύεται συνεχώς και είναι αυτό που οδηγεί τους ΣΑ σε κορεσμό. Στο γεγονός αυτό στηρίχθηκε η προηγούμενη υπόθεση πως χρήση ΕΧΜΑΣΠ θα μετέφερε μηδαμινές διαταραχές στο δορυφόρο και άρα μικρότερο ποσοστό μη-κυκλικής στροφορμής, οδηγώντας τελικά σε εξοικονομήσεις προωθητικού καυσίμου που είναι απαραίτητο για την εκτέλεση κίνησης από-κορεσμού.



Σχήμα 6.2.2-1: Συσσώρευση στροφορμής συναρτήσει του χρόνου

Η μη-κυκλική στροφορμή μπορεί να θεωρηθεί μόνο στατιστικά ως ποσοστό επί της συνολικής στροφορμής που μεταφέρεται στο δορυφόρο. Θεωρώντας λοιπόν πως αυτό το ποσοστό κυμαίνεται στο 20% [24], τότε με βάση τις τιμές των (6.2.1-2) λαμβάνεται για την ημερήσια μη-κυκλική στροφορμή των δυο συστημάτων κίνησης προσαρτήματος:

$$ΤΕΣΠ: \quad {}^{\text{sec}}H_{\text{day}}^{\text{std}} \cong 0,2 \times 40,23 = 8,05 \text{ Nms} \quad (6.2.2-1a)$$

$$ΕΧΜΑΣΠ_{10\%}: \quad {}^{\text{sec}}H_{\text{day}}^{\text{RM}} \cong 0,2 \times 2,04 = 0,41 \text{ Nms} \quad (6.2.2-1b)$$

Αν οι πιο πάνω τιμές αναχθούν σε ετήσια βάση τότε με παρόμοια συλλογιστική όπως αυτή που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 6.1.1 μπορεί να βρεθεί το προωθητικό καύσιμο που θα απαιτείται κάθε χρόνο για την εκτέλεση μανουβρών από-κορεσμού των ΣΑ.

Συγκεκριμένα, στην Εξ. (6.1.1-6) είχε δοθεί ο ρυθμός ροής μάζας προωθητικού, που απαιτείται προκειμένου να αποδοθεί ροπή  $u$  στο δορυφόρο. Η εξίσωση αυτή επαναλαμβάνεται εδώ:

$$\dot{m}_p = \frac{u}{I_{sp} g L_m} \quad (6.2.2-3a)$$

Αν η εξίσωση αυτή δεν θεωρηθεί διαφορικά ως προς το χρόνο, αλλά ως προς πεπερασμένα μεγέθη, μπορεί να υπολογιστεί το προωθητικό καύσιμο για κάποιο δεδομένο χρονικό διάστημα. Θα είναι λοιπόν:

$$\Delta m_p = \frac{u}{I_{sp} g L_m} \Delta t \quad (6.2.2-3b)$$

Και αφού η ροπή είναι η χρονική παράγωγος της στροφορμής τότε με την ίδια συλλογιστική μπορεί να ληφθεί ότι:

$$\frac{dH}{dt} = u \Rightarrow \frac{\Delta H}{\Delta t} = u \Leftrightarrow u \Delta t = \Delta H \quad (6.2.2-3c)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (6.2.2-3b) ευρίσκεται τελικά η μάζα προωθητικού καυσίμου που καταναλίσκεται σε δεδομένο χρονικό διάστημα:

$$\Delta m_p = \frac{\Delta H}{I_{sp} g L_m} \quad (6.2.2-3d)$$

Ο χρόνος όπως ειπώθηκε αντιστοιχεί σε ένα Γήινο έτος (365 ημέρες) και άρα η τελική μορφή της εξίσωσης κατανάλωσης προωθητικού καυσίμου για τον από-κορεσμό των ΣΑ σε ετήσια βάση θα είναι:

$${}^{year} m_p = \frac{{}^{sec} H_{day}^{std} \times 365}{I_{sp} g L_m} \quad (6.2.2-3e)$$

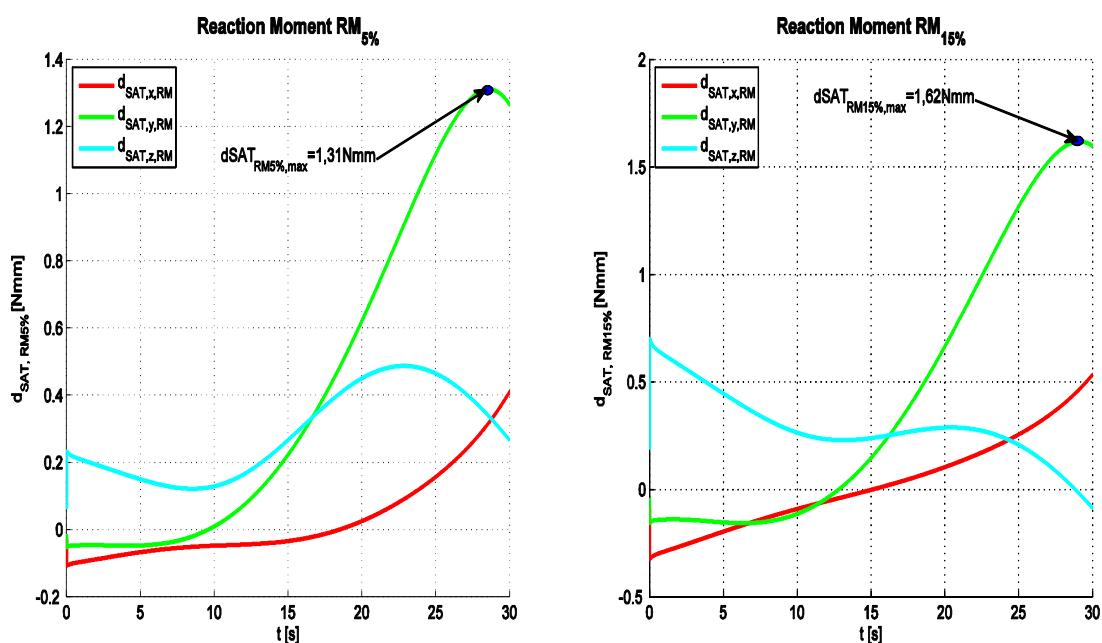
Εφαρμόζοντας την πιο πάνω εξίσωση στα δεδομένα που χαρακτηρίζουν τους δυο τύπους προσαρτήματος λαμβάνεται:

$$TEΣΠ: \quad {}^{year} m_p^{std} = \frac{{}^{sec} H_{day}^{std} \times 365}{I_{sp} g L_m} = \frac{8,05 \times 365}{230 \times 9,81 \times 1,0} = 1,30 kg \quad (6.2.2-4a)$$

$$ΕΧΜΑΣΠ_{10\%}: \quad {}^{year} m_p^{RM} = \frac{{}^{sec} H_{day}^{RM} \times 365}{I_{sp} g L_m} = \frac{0,41 \times 365}{230 \times 9,81 \times 1,0} = 0,07 kg \quad (6.2.2-4b)$$

Από τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύεται μια ετήσια εξοικονόμηση της τάξης του 95,31% με χρήση μηχανισμού κίνησης προσαρτήματος χωρίς μεταφορά αντιδράσεων.

Βεβαίως, το ποσοστό αυτό δύναται να αυξηθεί ακόμα περαιτέρω μιας και κατά τη συνήθη πρακτική έχει θεωρηθεί και ένα αρκετά μεγάλο κατασκευαστικό σφάλμα ζυγοστάθμισης. Συγκεκριμένα, για λόγους σύγκρισης εκτελούνται προσομοιώσεις με *EXMASΠ* που φέρει κατασκευαστικό σφάλμα 5% και 15%. Από τις καμπύλες των ροπών αντίδρασης που φαίνονται στο Σχήμα 6.2.2-2 εξάγονται οι μέγιστες τιμές αυτών.

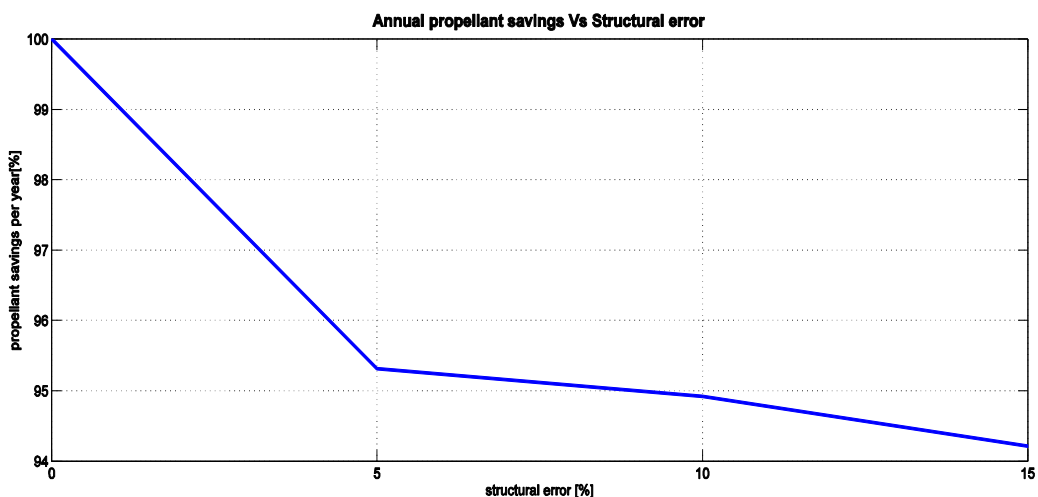


Σχήμα 6.2.2-2: Διαταραχές που αναπτύσσονται στον δορυφόρο (α) για *EXMASΠ*<sub>5%</sub> και (β) για *EXMASΠ*<sub>15%</sub>.

Με βάση τις τιμές που εξήχθηκαν, οι προηγούμενοι υπολογισμοί για την εξοικονόμηση προωθητικού που μπορεί να επιτευχθεί μέσω ελάττωσης των κινήσεων απόρριψης στροφορμής επαναλαμβάνονται για τις περιπτώσεις *EXMASΠ*<sub>5%</sub> και *EXMASΠ*<sub>15%</sub>. Στον Πίνακα 6.2.2-1 που ακολουθεί καταγράφονται τα αποτελέσματα για τα μεγέθη υπολογισμού καθώς και για οι ποσοστιαίες ετήσιες εξοικονομήσεις προωθητικού που είναι δυνατό να επιτευχθούν για τις εν λόγω περιπτώσεις *EXMASΠ*.

Μέγεθος Υπολογισμού	Τύπος προσαρτήματος			
	ΤΕΣΠ	ΕΧΜΑΣΠ <sub>5%</sub>	ΕΧΜΑΣΠ <sub>10%</sub>	ΕΧΜΑΣΠ <sub>15%</sub>
$d^{\max}$ [Nmm]	27,94	1,31	1,42	1,62
$H_{day}$ [Nms]	40,23	1,89	2,04	2,33
${}^{\text{sec}}H_{day}$ [Nms]	8,05	0,38	0,41	0,47
${}^{\text{year}}m_p$ [kg]	1,30	0,06	0,07	0,08
$\frac{{}^{\text{year}}m_p^{\text{std}} - {}^{\text{year}}m_p}{{}^{\text{year}}m_p^{\text{std}}} \times 100\%$		95,31%	94,92%	94,21%

Πίνακας 6.2.2-1: Μεγέθη υπολογισμού ετήσιας εξοικονόμησης προωθητικού



Σχήμα 6.2.2-3: Σχέση ετήσιας εξοικονόμησης προωθητικού και κατασκευαστικού σφάλματος

Τα αποτελέσματα των εξοικονομήσεων προωθητικού εν σχέση με την τιμή του θεωρούμενου κατασκευαστικού σφάλματος παρουσιάζονται γραφικά στο Σχήμα 6.2.2-3. Παρατηρώντας το σχήμα αυτό, εύκολα διαπιστώνεται ότι η σχέση μεταξύ του σφάλματος και της εξοικονόμησης είναι γραμμική. Τα δυο ποσοστά όπως ήταν αναμενόμενο συνδέονται με σχέση αντίστροφης αναλογίας αν και οι διακυμάνσεις παραμένουν πολύ μικρές. Όσο μικρότερο κατασκευαστικό σφάλμα θεωρηθεί, τόσο μεγαλύτερες εμφανίζονται να είναι οι εξοικονομήσεις προωθητικού καυσίμου διατηρώντας όμως ένα εύρος γύρω στο 95%. Είναι βεβαίως προφανές πως αν πρόκειται για ΕΧΜΑΣΠ χωρίς κατασκευαστικό σφάλμα, τότε το ποσοστό εξοικονόμησης θα είναι 100% αφού η κίνηση του προσαρτήματος δεν θα μετέφερε



αντιδράσεις στο δορυφόρο, δεν θα τον διατάρασσε και άρα δεν θα υπήρχε απαίτηση για οποιασδήποτε μορφής κίνησης εξισορρόπησης.

Σημειώνεται ακόμα, πως σε όλα όσα έχουν μέχρι τώρα παρουσιαστεί σε σχέση με την εξοικονόμηση καυσίμου κεντρικό ζητούμενο ήταν ο υπολογισμός της μείωσης που μπορεί να επέλθει στην κατανάλωση εάν σε δορυφόρο χρησιμοποιηθεί μηχανισμός κίνησης τύπου *EXMASΠ*. Πέρα όμως από τη θεώρηση εξοικονόμησης δεδομένου καυσίμου και άρα επέκτασης της διάρκειας ζωής του δορυφόρου, το ζήτημα μπορεί να παρουσιαστεί και από την πλευρά της εξ αρχής μεταφοράς μικρότερης ποσότητας καυσίμων σε τροχιά. Εφαρμογή δηλαδή των *EXMASΠ* σε δορυφόρους, θα μίκρυνε την ποσότητα προωθητικού καυσίμου που θα πρέπει να κουβαλά ο δορυφόρος για δεδομένη διάρκεια ζωής και άρα θα μειωνόταν το κόστος εκτόξευσης.

Αναλυτικότερα, μπορεί να λεχθεί πως αν και το σύστημα προωθητών δεν έχει διαστασιολογηθεί, κάνοντας μια συντηρητική προσέγγιση όπου θεωρείται πως το υγρό καύσιμο αποτελεί το 85% [24] της μάζας του συνόλου του συστήματος, μπορούν να εξαχθούν σχετικά συμπεράσματα. Ειδικότερα, θεωρώντας πως ο δορυφόρος προβλέπεται να έχει διάρκεια ζωής 15 χρόνια, τότε  $19,52kg (=15 \times 1,30)$  υγρού καυσίμου πρέπει να φορτωθεί σε αυτόν κατά την εκτόξευση του αν φέρει *ΤΕΣΠ*. Αντίθετα, αν ο δορυφόρος φέρει *EXMASΠ*<sub>10%</sub>, τότε η ποσότητα καυσίμου για την 15ετία είναι  $1,05kg (=15 \times 0,07)$ . Ανάγοντας τις πιο πάνω τιμές κατά τον παράγοντα  $\frac{1}{0,85}$ , τότε παρατηρείται πως το σύστημα πρόωσης θα έχει στην μια περίπτωση μάζα ίση με  $22,96kg$  και την άλλη περίπτωση  $1,24kg$ . Συνεπώς, η ελάττωση κατά  $21,72kg (=22,96 - 1,24)$  της μάζας του συστήματος πρόωσης μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως δυνατότητα αύξησης της διάρκειας ζωής του δορυφόρου με ΣΑ, είτε ως μείωση του κόστους εκτόξευσης κατά  $478k\$ (=21,72 \times 22k\$$  που κοστίζει (launch cost) το κάθε εκτοξεύσιμο  $kg^1$ ). Το κέρδος αυτό είναι ακόμα μεγαλύτερο αν συνυπολογιστεί πως και η μάζα των ΣΑ θα είναι μειωμένη αφού οι απαιτήσεις για παροχή στροφορμής είναι σαφέστατα μικρότερες με ενδεχόμενη χρήση *EXMASΠ*, γεγονός που φανερώνει πως η μάζα των σφονδύλων αυτών θα είναι σαφώς μικρότερη.

---

<sup>1</sup> launch cost: \$10,000 per pound, ( 1 pound = 0.453 kilograms) [w11]

## 7 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

### 7.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα μελέτη ασχολήθηκε με την ανάλυση του συστήματος δορυφόρος-στρεφόμενο προσάρτημα. Το ζήτημα αντιμετωπίστηκε εκκινώντας από το απλό θεωρητικό μοντέλο των δυο ελεύθερα αιωρούμενων στερεών σωμάτων που αγγίζουν σε ένα σημείο και αλληλεπιδρούν μέσω εσωτερικών δυνάμεων και ροπών. Για το σύστημα αυτό εξήχθησαν οι δυναμικές εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή, ολοκληρώθηκαν αριθμητικά στο περιβάλλον του MatLab/Simulink και τα αποτελέσματα τους συγκρίθηκαν και επιβεβαιώθηκαν μέσω του αντίστοιχου μοντέλου που δημιουργήθηκε στο λογισμικό MSC Adams.

Σε συνέχεια της προηγούμενης ανάλυσης η μελέτη επικεντρώθηκε στην εξειδίκευση των μοντέλων προκειμένου να καλύψουν το τεχνολογικό ζήτημα της επίδρασης ενός στρεφόμενου προσαρτήματος στον φέροντα δορυφόρο. Χρησιμοποιήθηκαν ως αντικείμενα σύγκρισης ένας δορυφόρος που φέρει ένα τυπικό μηχανισμό κίνησης για την κεραία προσάρτημα και δορυφόρος που φέρει τον αντίστοιχο μηχανισμό κίνησης για κεραία που αναπτύχθηκε στο ΕΑΕ-ΕΜΠ και μπορεί να λειτουργεί χωρίς αντιδράσεις. Για τις δυο περιπτώσεις δόθηκαν οι εξισώσεις κίνησης τους και εκτελέστηκαν προσομοιώσεις τόσο μέσω των αναλυτικών σχέσεων όσο και μέσω των μοντέλων Adams. Ακολούθως εκτελέστηκε προγραμματισμός τροχιάς για το προσάρτημα τέτοιος που να του επιτρέπει να εκτελεί πιστή κατάδειξη στόχου και καταστρώθηκε ο νόμος ελέγχου που του παρέχει τις απαιτούμενες ροπές κίνησης. Ο έλεγχος που υλοποιήθηκε είναι τύπου αναλογο-διαφορικός βασισμένος στο δυναμικό μοντέλο και λαμβάνει υπόψη του το γεγονός πως το σύστημα είναι υποεπιπενεργούμενο.

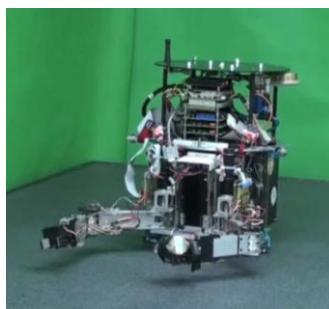
Με βάση τα προηγούμενα, η έρευνα εστιάστηκε στην στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει ο δορυφόρος προκειμένου να αντιμετωπίζει τις διαταραχές που μεταφέρονταν σε αυτόν από την επιταχυνόμενη περιστροφή του προσαρτήματος. Θεωρήθηκαν τρεις μέθοδοι επανασταθεροποίησης: (i) άμεση εξισορρόπηση με προωθητές, (ii) εξισορρόπηση μετά το πέρας των διαταραχών με προωθητές και (iii) εξισορρόπηση με σφονδύλους αντίδρασης. Οι τρεις μέθοδοι εφαρμόστηκαν τόσο για την περίπτωση που το προσάρτημα εκτελεί την προδιαγραμμένη κίνηση μέσω του τυπικού μηχανισμού κίνησης, όσο και για την περίπτωση που η ίδια κίνηση εκτελείται από τον άνευ αντιδράσεων μηχανισμό και υπό την υπόθεση πως αυτός φέρει κατασκευαστικό σφάλμα. Οι σχετικές προσομοιώσεις κατέδειξαν την ανωτερότητα ως

προς την κατανάλωση προωθητικού καυσίμου του άνευ αντιδράσεων μηχανισμού. Με χρήση αυτού και δορυφόρου που σταθεροποιείται άμεσα με προωθητές μπορεί να επιτευχθεί 80% εξοικονόμηση προωθητικού. Ενώ, για τα πιο ρεαλιστικά σενάρια όπου ο δορυφόρος σταθεροποιείται είτε με τους προωθητές του μετά την διαταραχή, είτε με σφονδύλους αντίδρασης, η άμεση εξοικονόμηση προωθητικού στην πρώτη περίπτωση και η έμμεση λόγω ελάττωσης των απαιτούμενων κινήσεων απόρριψης στροφορμής ξεπερνούν το 95%.

## 7.2 Μελλοντική Εργασία

Η μελλοντική εργασία που ενδέχεται να ακολουθήσει αφορά ολοκλήρωση και περαιτέρω αξιολόγηση του υπό συζήτηση μηχανισμού κίνησης. Ποιο συγκεκριμένα, ως προς την ολοκλήρωση, μελλοντικά θα μπορούσε η δυναμική ανάλυση να επεκταθεί στην περίπτωση που το συστήματος φέρει περισσότερα του ενός στρεφόμενα προσαρτήματα. Να εξαχθούν δηλαδή παραμετρικές εξισώσεις που θα καλύπτουν την περίπτωση όπου ο δορυφόρος συνδέεται με  $n$ -προσαρτήματα και να μελετηθεί η αντίστοιχη εξοικονόμηση καυσίμου που μπορεί να επιτευχθεί. Ακόμα, θα άξιζε να μελετηθεί και από τεχνο-οικονομικής άποψης η δυνατότητα ενσωμάτωσης μηχανισμών κίνησης στρεφόμενων προσαρτημάτων χωρίς αντιδράσεις σε δορυφόρους.

Αναφορικά με την παραπέρα αξιολόγηση του μηχανισμού, μελλοντικά θα μπορούσε να κατασκευαστεί πειραματική διάταξη για τους εν λόγω μηχανισμούς και να ενσωματωθεί στον διαστημικό εξομοιωτή του ΕΜΠ προκειμένου να υλοποιηθούν στις δυο διαστάσεις το μοντέλο που παρουσιάστηκε θεωρητικά. Εκεί θα είναι δυνατό να γίνονται και μετρήσεις στον πραγματικό πλέον κόσμο και να εξαχθούν ασφαλέστερα συμπεράσματα ως προς την κατανάλωση του διοξειδίου του άνθρακα  $\text{CO}_2$  που επέχει ρόλο προωθητικού στον εξομοιωτή.



Σχήμα 7.2-1: Ο επίπεδος διαστημικός εξομοιωτής του ΕΑΕ-ΕΜΠ

## Βιβλιογραφία

- [1] Avanzini G., *Lecture Notes for the Courses Spaceflight Dynamics 5 (M.En.), Spaceflight Dynamics 2(M.Sc)*, Academic Year 2009-10, University of Glasgow.
- [2] Bryson A., *Control of Spacecraft and Aircraft*, Princeton University Press, 1994.
- [3] Cheng C-H, and Shu S-L, “Application of GA-based neural network for attitude control of a satellite”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 14, Issue 4, June 2010, pp. 241–249.
- [4] Chobotov V.A., *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*, Krieger Publishing Company, 1991.
- [5] Craig J.J., *Εισαγωγή στη Ρομποτική, Μηχανική & Έλεγχος*, 3η Έκδοση, Τζιόλα, 2009.
- [6] Ellery A., *An Introduction to Space Robotics*, Springer, 2000.
- [7] Fortescue P. and Stark J., *Spacecraft Systems Engineering*, Wiley, 2003.
- [8] Goldstein H., Poole C., Safko J., *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Addison-Wesley, 2001.
- [9] Hughes P.C. *Spacecraft Attitude Dynamics*, Dover Publications Inc., 2004.
- [10] Meirovitch L., *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [11] Nanos K., and Papadopoulos E., “On the Use of Free-floating Space Robots in the Presence of Angular Momentum”, *Intelligent Service Robotics*, DOI 10.1007/s11370-010-0083-2, Vol. 4, No 1, January 2011, pp. 3-15.
- [12] NASA, *Orbital Debris Quarterly News*, vol. 16, Issue 2, April 2012.
- [13] Parliamentary (The) Office of Science and Technology, *Space debris*, postnote March 2010, no. 355.
- [14] Quinn R.D., and Chang Y.K., “Dynamics of Open-chained Systems of Rigid Bodies”, *Journal of Applied Mechanics*, August 1991.
- [15] Rekleitis G., and Papadopoulos E., “On On-Orbit Passive Object Handling by Cooperating Space Robotic Servicers”, *Proc. IROS '11*, September 25-30, 2011, San Fransisco, CA, USA.
- [16] Shabana A. A., *Computational Dynamic*, 3rd Edition, Wiley, 2010.

- [17] Shabana A. A., *Dynamics of Multibody Systems*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2010.
- [18] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L. and Oriolo G, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Springer, 2010.
- [19] Sidi M. J., *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1997.
- [20] Spong M. W., Hutchinson S. and Vidyasagar M., *Robot Modeling and Control*, Wiley, 2005.
- [21] Thomson W.T. *Introduction to Space Dynamics*, Dover Publications Inc., 1986.
- [22] Tsai L-W, *Robot Analysis, The mechanics of serial and parallel manipulators*, Wiley, 1999.
- [23] Wertz J. R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers, 1980.
- [24] Wertz J. R. and Larson W., *"Space Mission Analysis and Design"*, 2nd Edition, Microcosm Inc., 1997.
- [25] Zhang L-J, Li Y-Q, and Guo Y-Q, "Dynamic Analysis of Spherical 5R Manipulator", *IEEE Int. Conference on Mechatronics and Automation 2009*.
- [26] Ανδρέου Σ., *Ανάπτυξη Μηχανισμού Κίνησης Κεραίας Δορυφόρου Χωρίς Μετάδοση Δυνάμεων και Ροπών Αντίδρασης*, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Μηχ. Μηχ. ΕΜΠ, Αθήνα 2010.
- [27] Νατσιάβας Σ. *Εφαρμοσμένη Δυναμική*, Εκδόσεις Ζήτη, 1994.
- [28] Παπαδόπουλος Ε. και Κυριακόπουλος Κ., *Συστήματα Ευφυούς Ελέγχου & Ρομποτική*, Εκδόσεις ΕΜΠ, 2004.

## **Ιστοσελίδες**

- [w1] <http://accessscience.com/search.aspx?topic=ENG:AERO:PROP&term=Rocket+propulsion>
- [w2] <http://cs.astrium.eads.net/sp/brochures/thrusters/1N%20Thruster.pdf>
- [w3] [http://earth.esa.int/pub/ESA\\_DOC/GOCE/GOCE-Mass-Properties-COG-data.GOC](http://earth.esa.int/pub/ESA_DOC/GOCE/GOCE-Mass-Properties-COG-data.GOC)
- [w4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Attitude\\_control\\_\(spacecraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Attitude_control_(spacecraft))

- [w5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Specific\\_impulse](http://en.wikipedia.org/wiki/Specific_impulse)
- [w6] <http://fineartamerica.com/products/illustration-of-the-reaction-wheel-walter-myers-poster.html?currencyid=CAD>
- [w7] [http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-851-satellite-engineering-fall-2003/lecture-notes/l9\\_acs.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-851-satellite-engineering-fall-2003/lecture-notes/l9_acs.pdf)
- [w8] [http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-851-satellite-engineering-fall-2003/projects/portfolio\\_nadir2.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-851-satellite-engineering-fall-2003/projects/portfolio_nadir2.pdf)
- [w9] <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-12-introduction-to-robotics-fall-2005/lecture-notes/>
- [w10] <http://pds-rings.seti.org/cassini/diagram.html>
- [w11] <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/weekly/5Page60.pdf>
- [w12] <http://www.boeing.com/defense-space/space/satellite/MissionBook.pdf>
- [w13] [http://www.daviddarling.info/encyclopedia/R/reaction\\_wheel.html](http://www.daviddarling.info/encyclopedia/R/reaction_wheel.html)
- [w14] <http://www.ee.imperial.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html>, Brookes M., "The Matrix Reference Manual", [online], 2011
- [w15] <http://www.fas.org/spp/guide/china/comm/dfh-3.htm>
- [w16] [http://www.moog.com/literature/Space\\_Defense/Spacecraft/Spacecraft\\_Mechanisms\\_Product\\_Catalog.pdf](http://www.moog.com/literature/Space_Defense/Spacecraft/Spacecraft_Mechanisms_Product_Catalog.pdf)
- [w17] <http://www-robotics.cs.umass.edu/~gruppen/603/slides/DynamicsII.pdf>

# Παράρτημα Α

## Αναλυτικός υπολογισμός ολικής κινητικής ενέργειας

Κινητική ενέργεια έχει παρουσιαστεί στην εξίσωση 3.1-7 και είναι:

$$T_{tot} = \frac{1}{2} m_1 {}^0\mathbf{v}_1^T {}^0\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 {}^0\mathbf{v}_2^T {}^0\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_1^T {}^0\mathbf{I}_1 {}^0\boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_2^T {}^0\mathbf{I}_2 {}^0\boldsymbol{\omega}_2$$

Αφού οι ταχύτητες έχουν ήδη υπολογιστεί, τότε κάθε τμήμα κινητικής ενέργειας που αντιστοιχεί στους όρους του δεξιού μέλους της πιο πάνω εξίσωσης ευρίσκεται αναλυτικά.

Περιστροφική κινητική ενέργεια Σώματος 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_1^T {}^0\mathbf{I}_1 {}^0\boldsymbol{\omega}_1 &= \frac{1}{2} ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1)^T {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{I}_1 {}^0\mathbf{R}_1^T ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1) \\ &= \frac{1}{2} {}^1\boldsymbol{\omega}_1^T \cancel{{}^0\mathbf{R}_1^T} \cancel{{}^0\mathbf{R}_1} {}^1\mathbf{I}_1 \cancel{{}^0\mathbf{R}_1^T} \cancel{{}^0\mathbf{R}_1} {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} {}^1\boldsymbol{\omega}_1^T {}^1\mathbf{I}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}})^T {}^1\mathbf{I}_1 (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Περιστροφική κινητική ενέργεια Σώματος 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^0\boldsymbol{\omega}_2^T {}^0\mathbf{I}_2 {}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= \frac{1}{2} ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_2)^T ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2)^2 \mathbf{I}_2 ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2)^T ({}^0\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_2) \\ &= \frac{1}{2} {}^1\boldsymbol{\omega}_2^T \cancel{{}^0\mathbf{R}_1^T} \cancel{{}^0\mathbf{R}_1} {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \cancel{{}^0\mathbf{R}_1^T} \cancel{{}^0\mathbf{R}_1} {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \frac{1}{2} {}^1\boldsymbol{\omega}_2^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}})^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^1\mathbf{R}_2^T) {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T \cancel{{}^1\mathbf{R}_2^T} \cancel{{}^1\mathbf{R}_2} {}^2\mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T) (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\quad \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 \cancel{{}^1\mathbf{R}_2^T} \cancel{{}^1\mathbf{R}_2} \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 \cancel{{}^1\mathbf{R}_2^T} \cancel{{}^1\mathbf{R}_2} \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\quad \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2^2 \mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}}) \end{aligned}$$

Μεταφορική κινητική ενέργεια Σώματος 1:

$$\frac{1}{2} m_1 {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}}$$

Μεταφορική κινητική ενέργεια Σώματος 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 {}^0 \mathbf{v}_2^T {}^0 \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left( {}^0 \mathbf{v}_1 + {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right)^T \left( {}^0 \mathbf{v}_1 + {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left( {}^0 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^T + \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0 \mathbf{R}_2^T \right) \left( {}^0 \mathbf{v}_1 + {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left( {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 + {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 + \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \cancel{{}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \mathbf{R}_1} {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \cancel{{}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \mathbf{R}_2} {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left( {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 + {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} + {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 - \cancel{\mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d}} - \mathbf{d}^T {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \cancel{{}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \mathbf{R}_1} {}^1 \mathbf{R}_2 {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times {}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \mathbf{v}_1 - \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \cancel{{}^1 \mathbf{R}_2^T {}^0 \mathbf{R}_1} {}^1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{d} - \mathbf{r}^T {}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \cancel{{}^2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}} \right) \end{aligned}$$

Η πιο πάνω σχέση απλοποιείται σημαντικά εάν εισαχθούν οι εξής ταυτότητες [w14] από την γραμμική άλγεβρα:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

που ισχύουν για κάθε  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

Οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 {}^0 \mathbf{v}_2^T {}^0 \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \mathbf{R}_1 \left( \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \times \mathbf{d} + \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \mathbf{R}_2 \left( \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{d}^T \left( \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \times {}^0 \mathbf{R}_1^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{d}^T \left( \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \times {}^1 \mathbf{R}_2 \left( \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right) \times \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{r}^T \left( \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right) \times {}^0 \mathbf{R}_2^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{r}^T \left( \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right) \times {}^1 \mathbf{R}_2^T \left( \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \times \mathbf{d} \right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην σχέση της ολικής κινητικής ενέργειας λαμβάνεται:



$$\begin{aligned}
T_{tot} &= \frac{1}{2} m_1 {}^0 \mathbf{v}_1^T {}^0 \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 {}^0 \mathbf{v}_2^T {}^0 \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_1^T {}^0 \mathbf{I}_1 {}^0 \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2} {}^0 \boldsymbol{\omega}_2^T {}^0 \mathbf{I}_2 {}^0 \boldsymbol{\omega}_2 \\
&= \frac{1}{2} \left[ m_1 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} + m_2 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} + m_2 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \mathbf{R}_1^{-1} (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}})^\times \mathbf{d} + m_2 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \mathbf{R}_2 (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}})^\times \mathbf{r} \right. \\
&\quad - m_2 \mathbf{d}^T {}^1 (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}})^\times {}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} - m_2 \mathbf{d}^T {}^1 (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}})^\times {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}})^\times \mathbf{r} \\
&\quad - m_2 \mathbf{r}^T {}^2 (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}})^\times {}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} - m_2 \mathbf{r}^T {}^2 (\mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}})^\times {}^1 \mathbf{R}_2^T {}^1 (\mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}})^\times \mathbf{d} \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad \left. + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right]
\end{aligned}$$

Όπου και πάλι χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες:

$$(\mathbf{ab})^\times \mathbf{c} = -\mathbf{c}^\times \mathbf{ab}$$

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{ab})^\times = -\mathbf{b}^T \mathbf{a}^T \mathbf{c}^\times$$

που ισχύουν για όλα τα  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{c}$ , είναι δυνατό να γίνουν περαιτέρω απλοποιήσεις στην ολική κινητική ενέργεια:

$$\begin{aligned}
T_{tot} &= \frac{1}{2} \left[ m_1 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} + m_2 {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} - {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T m_2 {}^0 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{d}^\times \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 - {}^0 \dot{\mathbf{x}}^T m_2 {}^0 \mathbf{R}_2 \mathbf{r}^\times \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right. \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d}^\times {}^0 \mathbf{R}_1^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d}^\times {}^1 \mathbf{R}_2 \mathbf{r}^\times \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{\phi}} m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r}^\times {}^0 \mathbf{R}_2^T {}^0 \dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}^T m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r}^\times {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{d}^\times \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad \left. + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2 \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right]
\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να μετατραπεί στη πολύ βολική μητρική μορφή:

$$T_{tot} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{x}} & \dot{\boldsymbol{\theta}} & \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \mathbf{1}_3 & -m_2 {}^0 \mathbf{R}_1 \mathbf{d}^\times \mathbf{S}_1 & -m_2 {}^0 \mathbf{R}_2 \mathbf{r}^\times \mathbf{S}_2 \\ m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d}^\times {}^0 \mathbf{R}_1^T & \mathbf{S}_1^T \mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1^T {}^1 \mathbf{R}_2^{-2} \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 - m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d}^\times {}^1 \mathbf{R}_2 \mathbf{r}^\times \mathbf{S}_2 \\ m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r}^\times {}^0 \mathbf{R}_2^T & \mathbf{S}_2^T \mathbf{I}_2 {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 - m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r}^\times {}^1 \mathbf{R}_2^T \mathbf{d}^\times \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0 \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix}$$

## Παράρτημα Β

Υπολογισμός όρου  $C_2 = \frac{\partial T_{tot}}{\partial \underline{\mathbf{q}}}$

Η ολική κινητική ενέργεια έχει υπολογιστεί στο Παράρτημα Α και επαναλαμβάνεται εδώ στην αναλυτική της μορφή:

$$\begin{aligned}
 T_{tot} = \frac{1}{2} & \left[ m_1 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + m_2 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^T m_2 {}^0\mathbf{R}_1 \mathbf{d} \times \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\mathbf{x}}^T m_2 {}^0\mathbf{R}_2 \mathbf{r} \times \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right. \\
 & + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d} \times {}^0\mathbf{R}_1^T \dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\theta}}^T m_2 \mathbf{S}_1^T \mathbf{d} \times {}^1\mathbf{R}_2 \mathbf{r} \times \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \\
 & + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r} \times {}^0\mathbf{R}_2^T \dot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}^T m_2 \mathbf{S}_2^T \mathbf{r} \times {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{d} \times \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \\
 & + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{I}_1 \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} \\
 & \left. + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 {}^1\mathbf{R}_2^T \mathbf{S}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{S}_1^T {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{S}_2^T {}^2\mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2 \dot{\boldsymbol{\phi}} \right]
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να εκφραστεί σε μια ακόμη μορφή πέραν της μητρικής που παρουσιάστηκε προηγούμενα. Είναι λοιπόν δυνατό οι δεκατρείς όροι της πιο πάνω εξίσωσης να συμπυκνωθούν υπό μορφή αθροίσματος ως:

$$T_{tot} = \sum_{k=1}^{13} T_k(\underline{\mathbf{q}})$$

Και αφού το διάνυσμα μεταβλητών  $\underline{\mathbf{q}}$  είναι:

$$\underline{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{x} & \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}^T$$

Τότε με βάση την πιο πάνω σήμανση, ο όρος της ολικής κινητικής ενέργειας ως προς τις μεταβλητές του συστήματος  $\frac{\partial T_{tot}}{\partial \underline{\mathbf{q}}}$  που εμφανίζεται στην εξίσωση Euler-

Lagrange και έχει ονομαστεί ως  $C_2$ , μπορεί να γραφεί ως διάνυσμα όπου κάθε στοιχείο του θα εκφράζεται και πάλι υπό μορφή αθροίσματος. Συγκεκριμένα:

$$C_2 = \frac{\partial T_{tot}}{\partial \underline{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{x}_1} & \sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \boldsymbol{\theta}} & \sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix}^T$$

Όπου να σημειωθεί ότι για λόγους απλοποίησης της γραφής ο δείκτης που δηλώνει το αδρανειακό πλαίσιο αναφοράς του  ${}^0\mathbf{x}_1$  θα παραλείπεται και πλέον το απλό  $\mathbf{x}_1$  θα ταυτίζεται με το  ${}^0\mathbf{x}_1$ .

Η έκφραση του  $C_2$  περιέχει ως στοιχεία τις παραγώγους του βαθμωτού μεγέθους  $T_{tot}$  ως προς τα διανύσματα  $\mathbf{x}_1$ ,  $\theta$  και  $\varphi$ . Ως εκ τούτου, για κάθε ένα από τους δεκατρείς όρους της  $\sum_{k=1}^{13} \partial T_k$  θα πρέπει να εκτελεστούν τρεις διανυσματικές διαφορίσεις, μια για κάθε διάνυσμα του  $\mathbf{q} = [{}^0\mathbf{x} \quad \theta \quad \varphi]^T$  και απ' εκεί και πέρα άλλα τρεις βαθμωτές διαφορίσεις για κάθε ένα εκ των τριών στοιχείων των  $\mathbf{x}_1$ ,  $\theta$  και  $\varphi$  κατά την μέθοδο που φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{\sum_{k=1}^{13} \partial T_k}{\partial \mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{tot}}{\partial x} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial y} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \parallel \quad \frac{\sum_{k=1}^{13} \partial T_k}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad \parallel \quad \frac{\sum_{k=1}^{13} \partial T_k}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{tot}}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \varphi_3} \end{bmatrix}$$

Προκειμένου όμως να αποφευχθούν όσο το δυνατό περισσότερες αλγεβρικές πράξεις, καταστρώνεται ο κάτωθι πίνακας στον οποίο εκτελούνται οι αρχικές διανυσματικές διαφορίσεις  $\sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{x}_1}$ ,  $\sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \theta}$ , και  $\sum_{k=1}^{13} \frac{\partial T_k}{\partial \varphi}$  για να διαφανεί ποιες εξ αυτών είναι μηδενικές και να επιταχυνθεί η διαδικασία με τις βαθμωτές διαφορίσεις. Είναι λοιπόν:

$k$	$\frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{x}_1}$	$\frac{\partial T_k}{\partial \theta}$	$\frac{\partial T_k}{\partial \varphi}$
$k=1$	$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial T_1}{\partial \varphi} = 0$
$k=2$	$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = \mathbf{C}_{\theta, T_2}$	$\frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0$
$k=3$	$\frac{\partial T_3}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_3}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial T_3}{\partial \varphi} = \mathbf{C}_{\varphi, T_3}$
$k=4$	$\frac{\partial T_4}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_4}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial T_4}{\partial \varphi} = \mathbf{C}_{\varphi, T_4}$

$k=5$	$\frac{\partial T_5}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_5}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_5}$	$\frac{\partial T_5}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_5}$
$k=6$	$\frac{\partial T_6}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_6}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_6}$	$\frac{\partial T_6}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_6}$
$k=7$	$\frac{\partial T_7}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_7}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$	$\frac{\partial T_7}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$
$k=8$	$\frac{\partial T_8}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_8}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_8}$	$\frac{\partial T_8}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$
$k=9$	$\frac{\partial T_9}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_9}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_9}$	$\frac{\partial T_9}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_9}$
$k=10$	$\frac{\partial T_{10}}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_{10}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{10}}$	$\frac{\partial T_{10}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$
$k=11$	$\frac{\partial T_{11}}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_{11}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{11}}$	$\frac{\partial T_{11}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{11}}$
$k=12$	$\frac{\partial T_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_{12}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{12}}$	$\frac{\partial T_{12}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{12}}$
$k=13$	$\frac{\partial T_{13}}{\partial \mathbf{x}_1} = 0$	$\frac{\partial T_{13}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{13}}$	$\frac{\partial T_{13}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{13}}$

Με βάση το πίνακα αυτό είναι πλέον απλούστερο να συμπληρωθεί το  $\mathbf{C}_2$  μητρώο αφού προκύπτει με άθροιση των μη μηδενικών στοιχείων του πίνακα. Είναι λοιπόν:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \left[ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_2} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{23}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_5} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_6} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_8} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_9} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{10}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{11}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{12}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_{13}} \right]_{3 \times 1} \\ \left[ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_3} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_4} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_5} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_6} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_9} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{11}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{12}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_{13}} \right]_{3 \times 1} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

Και οι απαιτούμενες διαφορίσεις  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}, T_k}$ ,  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varphi}, T_k}$  (βαθμωτό ως προς διάνυσμα εκτελούνται με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού Maple15 (βλπ. Παράρτημα Γ) το οποίο παρέχει και τη δυνατότητα άμεσης εξαγωγής κώδικα για MatLab.

## Παράρτημα Γ

### Αναλυτικός υπολογισμός γενικής δυναμικής εξίσωσης στο Maple

`with(LinearAlgebra); with(CodeGeneration);`

(1)

$$q1 := \begin{bmatrix} q_{11}(t) \\ q_{12}(t) \\ q_{13}(t) \end{bmatrix};$$

(2)

$$q2 := \begin{bmatrix} q_{21}(t) \\ q_{22}(t) \\ q_{23}(t) \end{bmatrix};$$

(3)

$$x1 := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix};$$

(4)

$$ROI_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{11}(t)) & -\sin(q_{11}(t)) \\ 0 & \sin(q_{11}(t)) & \cos(q_{11}(t)) \end{bmatrix};$$

(5)

$$ROI_y := \begin{bmatrix} \cos(q_{12}(t)) & 0 & \sin(q_{12}(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_{12}(t)) & 0 & \cos(q_{12}(t)) \end{bmatrix};$$

(6)

$$ROI_z := \begin{bmatrix} \cos(q_{13}(t)) & -\sin(q_{13}(t)) & 0 \\ \sin(q_{13}(t)) & \cos(q_{13}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(7)

`ROI := simplify(Multiply(Multiply(ROI_x, ROI_y), ROI_z));`

`[[cos(q12(t))cos(q13(t)), -cos(q12(t))sin(q13(t)), sin(q12(t))]]`

`[sin(q11(t))sin(q12(t))cos(q13(t)) + cos(q11(t))sin(q13(t)), -sin(q11(t))sin(q12(t))sin(q13(t))`

`+ cos(q11(t))cos(q13(t)), -sin(q11(t))cos(q12(t))]`

(8)

`[-cos(q11(t))sin(q12(t))cos(q13(t)) + sin(q11(t))sin(q13(t)), cos(q11(t))sin(q12(t))sin(q13(t))`

`+ sin(q11(t))cos(q13(t)), cos(q11(t))cos(q12(t))]]`

$$R12x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{21}(t)) & -\sin(q_{21}(t)) \\ 0 & \sin(q_{21}(t)) & \cos(q_{21}(t)) \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$R12y := \begin{bmatrix} \cos(q_{22}(t)) & 0 & \sin(q_{22}(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_{22}(t)) & 0 & \cos(q_{22}(t)) \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$R12z := \begin{bmatrix} \cos(q_{23}(t)) & -\sin(q_{23}(t)) & 0 \\ \sin(q_{23}(t)) & \cos(q_{23}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$R12 := \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(R12x, R12y), R12z));$$

$$\begin{aligned} & [[\cos(q_{22}(t)) \cos(q_{23}(t)), -\cos(q_{22}(t)) \sin(q_{23}(t)), \sin(q_{22}(t))] \\ & [\sin(q_{21}(t)) \sin(q_{22}(t)) \cos(q_{23}(t)) + \cos(q_{21}(t)) \sin(q_{23}(t)), -\sin(q_{21}(t)) \sin(q_{22}(t)) \sin(q_{23}(t)) \\ & + \cos(q_{21}(t)) \cos(q_{23}(t)), -\sin(q_{21}(t)) \cos(q_{22}(t))] \\ & [-\cos(q_{21}(t)) \sin(q_{22}(t)) \cos(q_{23}(t)) + \sin(q_{21}(t)) \sin(q_{23}(t)), \cos(q_{21}(t)) \sin(q_{22}(t)) \sin(q_{23}(t)) \\ & + \sin(q_{21}(t)) \cos(q_{23}(t)), \cos(q_{21}(t)) \cos(q_{22}(t))] ] \end{aligned} \quad (12)$$

$$R02 := \text{simplify}(\text{Multiply}(R01, R12));$$

(13)

$$S1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(q_{12}(t)) \\ 0 & \cos(q_{11}(t)) & -\sin(q_{11}(t)) \cdot \cos(q_{12}(t)) \\ 0 & \sin(q_{11}(t)) & \cos(q_{11}(t)) \cdot \cos(q_{12}(t)) \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$S2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(q_{22}(t)) \\ 0 & \cos(q_{21}(t)) & -\sin(q_{21}(t)) \cdot \cos(q_{22}(t)) \\ 0 & \sin(q_{21}(t)) & \cos(q_{21}(t)) \cdot \cos(q_{22}(t)) \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$DqI := \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} q_{11}(t) \\ \frac{d}{dt} q_{12}(t) \\ \frac{d}{dt} q_{13}(t) \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$Dq2 := \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} q_{21}(t) \\ \frac{d}{dt} q_{22}(t) \\ \frac{d}{dt} q_{23}(t) \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$d1 := \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$Skd := \begin{bmatrix} 0 & -d1(3) & d1(2) \\ d1(3) & 0 & -d1(1) \\ -d1(2) & d1(1) & 0 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r2 := \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$Skr := \begin{bmatrix} 0 & -r2(3) & r2(2) \\ r2(3) & 0 & -r2(1) \\ -r2(2) & r2(1) & 0 \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v01 := \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1(t) \\ \frac{d}{dt} y_1(t) \\ \frac{d}{dt} z_1(t) \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$\omega11 := \text{simplify}(\text{Multiply}(S1, Dq1));$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} q_{11}(t) + \sin(q_{12}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{13}(t) \right) \\ \cos(q_{11}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{12}(t) \right) - \sin(q_{11}(t)) \cos(q_{12}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{13}(t) \right) \\ \sin(q_{11}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{12}(t) \right) + \cos(q_{11}(t)) \cos(q_{12}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{13}(t) \right) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$\omega01 := \text{simplify}(\text{Multiply}(R01, \omega11));$

$$a22 := \text{simplify}(\text{Multiply}(S2, Dq2));$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} q_{21}(t) + \sin(q_{22}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{23}(t) \right) \\ \cos(q_{21}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{22}(t) \right) - \sin(q_{21}(t)) \cos(q_{22}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{23}(t) \right) \\ \sin(q_{21}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{22}(t) \right) + \cos(q_{21}(t)) \cos(q_{22}(t)) \left( \frac{d}{dt} q_{23}(t) \right) \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$a12 := \text{simplify}(\text{Multiply}(R12, a22) + a11);$$

$$a02 := \text{simplify}(\text{Multiply}(R01, a12) + a01);$$

$$v02 := \text{simplify}(v01 + \text{CrossProduct}(a01, d1) + \text{CrossProduct}(a02, r2));$$

$$I1 := \begin{pmatrix} I_{S_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{S_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{S_3} \end{pmatrix}; \quad (25)$$

$$I2 := \begin{pmatrix} I_{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{A_3} \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$$\Gamma_{1 \text{ Transv}} := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), v01)\right);$$

$$\Gamma_{1 \text{ Rot}} := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(a11), I1), a11)\right);$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2 \text{ Rot}} := & \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), R12), I2), \\ & \text{Transpose}(R12)), S1), Dq1)) + \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), I2), \\ & S2), Dq2)) + \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), R12), I2), S2), \\ & Dq2)) + \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), I2), \\ & \text{Transpose}(R12)), S1), Dq1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2 \text{ Transv}} := & \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), v01)) + \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), R01), \\ & \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S1, Dq1), \text{Transpose}(d1)))) + \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), R02), \\ & \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S2, Dq2), \text{Transpose}(r2)))) - \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(d1), \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S1, \\ & Dq1), \text{Multiply}(R01, v01)))) - \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(d1), \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S1, Dq1), \text{Multiply}(R12, \\ & \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S2, Dq2), r2)))) - \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(r2), \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S2, Dq2), \\ & \text{Multiply}(\text{Transpose}(R02), v01)))) - \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(r2), \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S2, Dq2), \end{aligned}$$



$\text{Multiply}(\text{Transpose}(R12), \text{CrossProduct}(\text{Multiply}(S1, Dq1), d1))))):$

$T := \text{simplify}(\Gamma_{1\text{Trans}} + \Gamma_{2\text{Trans}} + \Gamma_{1\text{Rot}} + \Gamma_{2\text{Rot}}):$

$T1 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), v01)\right):$

$T2 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), I1), S1), Dq1)\right):$

$T3 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), R12), I2), \text{Transpose}(R12)), S1), Dq1)\right):$

$T4 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), I2), S2), Dq2)\right):$

$T5 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), R12), I2), S2), Dq2)\right):$

$T6 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), I2), \text{Transpose}(R12)), S1), Dq1)\right):$

$T7 := \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), v01)):$

$T8 := -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), R01), Skd), S1), Dq1)):$

$T9 := -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(v01), R02), Skr), S2), Dq2)):$

$T10 := \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), Skd), \text{Transpose}(R01)),$

$v01)):$

$T11 := -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq1), \text{Transpose}(S1)), Skd),$

$R12), Skr), S2), Dq2)):$

$T12 := +\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), Skr), \text{Transpose}(R02)),$

$v01)):$

$$T13 := -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(Dq2), \text{Transpose}(S2)), Skr), \text{Transpose}(R12)), Skd), S1), Dq1)) :$$

$$M11 := \text{MatrixScalarMultiply}( (m_1 + m_2), \text{IdentityMatrix}(3) ) :$$

$$M12 := -m_1 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(R01, Skd), S1)) :$$

$$M13 := m_1 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(R02, Skr), S12)) :$$

$$M21 := m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S1), Skd), \text{Transpose}(R01))) :$$

$$M22 := \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S1), I1), S1))$$

$$+ \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S1), R12), I2), \text{Transpose}(R12)), S1)) :$$

$$M23 := \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S1), R12), I2), S2)) - \text{simplify}(m_2$$

$$\cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S1), Skd), R12), Skr), S2)) :$$

$$M31 := m_2 \cdot \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S2), Skr), \text{Transpose}(R02))) :$$

$$M32 := \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S2), I2), R12), \text{Transpose}(S1))) - \text{simplify}(m_2$$

$$\cdot \text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S2), Skr), \text{Transpose}(R12)), Skd), S1)) :$$

$$M33 := \text{simplify}(\text{Multiply}(\text{Multiply}(\text{Transpose}(S2), I2), S2)) :$$

$$M := \text{Matrix}([ [M11, M12, M13], [M21, M22, M23], [M31, M32, M33] ]) :$$

$$T1s := \text{subs}\left(\left[\frac{d}{dt} x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt} y_1(t) = Dy_1, \frac{d}{dt} z_1(t) = Dz_1\right], T1\right) :$$

$$T2s := \text{subs}\left(\left[q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, \frac{d}{dt} q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt} q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt} q_{13}(t) = DqS_3\right], T2\right) :$$

$$T3s := \text{subs}\left(\left[q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt} q_{11}(t) = DqS_1,$$

$$\frac{d}{dt} q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt} q_{13}(t) = DqS_3\right], T3\right) :$$

$$T4s := \text{subs}\left(\left\{q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T4\right):$$

$$T5s := \text{subs}\left(\left\{q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqS_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T5\right):$$

$$T6s := \text{subs}\left(\left\{q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqS_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T6\right):$$

$$T7s := \text{subs}\left(\left\{\frac{d}{dt}x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt}y_1(t) = Dx_2, \frac{d}{dt}z_1(t) = Dx_3\right\}, T7\right):$$

$$T8s := \text{subs}\left(\left\{\frac{d}{dt}x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt}y_1(t) = Dx_2, \frac{d}{dt}z_1(t) = Dx_3, q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqS_3\right\}, T8\right):$$

$$T9s := \text{subs}\left(\left\{\frac{d}{dt}x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt}y_1(t) = Dx_2, \frac{d}{dt}z_1(t) = Dx_3, q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T9\right):$$

$$T10s := \text{subs}\left(\left\{\frac{d}{dt}x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt}y_1(t) = Dx_2, \frac{d}{dt}z_1(t) = Dx_3, q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqA_3\right\}, T10\right):$$

$$T11s := \text{subs}\left(\left\{q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqS_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T11\right):$$

$$T12s := \text{subs}\left(\left\{\frac{d}{dt}x_1(t) = Dx_1, \frac{d}{dt}y_1(t) = Dx_2, \frac{d}{dt}z_1(t) = Dx_3, q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T12\right):$$

$$T13s := \text{subs}\left(\left\{q_{11}(t) = qS_1, q_{12}(t) = qS_2, q_{13}(t) = qS_3, q_{21}(t) = qA_1, q_{22}(t) = qA_2, q_{23}(t) = qA_3, \frac{d}{dt}q_{11}(t) = DqS_1, \frac{d}{dt}q_{12}(t) = DqS_2, \frac{d}{dt}q_{13}(t) = DqS_3, \frac{d}{dt}q_{21}(t) = DqA_1, \frac{d}{dt}q_{22}(t) = DqA_2, \frac{d}{dt}q_{23}(t) = DqA_3\right\}, T13\right):$$

$$Cq1T2 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T2s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T2s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T2s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T2, resultname = "Cq1T2")

```
Cq1T2 = [-IS(2) * cos(qS(1)) * DqS(2) ^ 2 * sin(qS(1)) +
IS(2) * DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) - 0.2e1 * IS(2) *
cos(qS(1)) ^ 2 * DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) + IS(2) *
cos(qS(2)) ^ 2 * DqS(3) ^ 2 * cos(qS(1)) * sin(qS(1)) +
IS(3) * DqS(2) ^ 2 * cos(qS(1)) * sin(qS(1)) - IS(3) *
DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) + 0.2e1 * IS(3) * cos(qS(1)) ^
2 * DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) - IS(3) * cos(qS(1)) *
cos(qS(2)) ^ 2 * DqS(3) ^ 2 * sin(qS(1)) DqS(3) * (IS(1) *
DqS(1) * cos(qS(2)) + IS(1) * DqS(3) * cos(qS(2)) *
sin(qS(2)) + IS(2) * cos(qS(1)) * DqS(2) * sin(qS(1)) *
sin(qS(2)) - IS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) * sin(qS(2)) +
IS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) * cos(qS(1)) ^ 2 * sin(qS(2)) -
IS(3) * cos(qS(1)) * DqS(2) * sin(qS(1)) * sin(qS(2)) -
IS(3) * cos(qS(1)) ^ 2 * cos(qS(2)) * DqS(3) * sin(qS(2)))
0];
```

$$Cq1T3 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T3s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T3s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T3s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T3, resultname = "Cq1T3")

$$Cq2T3 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T3s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T3s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T3s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T3, resultname = "Cq2T3")

$$Cq2T4 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T4s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T4s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T4s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T4, resultname = "Cq2T4")

$$Cq1T5 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_1} T5s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_2} T5s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_3} T5s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T5, resultname = "Cq1T5")

$$Cq2T5 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T5s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T5s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T5s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T5, resultname = "Cq2T5")

$$Cq1T6 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_1} T6s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_2} T6s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_3} T6s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T6, resultname = "Cq1T6")

$$Cq2T6 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T6s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T6s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T6s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T6, resultname = "Cq2T6")

$$Cq1T8 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_1} T8s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_2} T8s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_3} T8s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T8, resultname = "Cq1T8")

$$Cq1T9 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_1} T9s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_2} T9s \\ \frac{\partial}{\partial q\mathcal{S}_3} T9s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq1T9*, *resultname* = "Cq1T9")

$$Cq2T9 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T9s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T9s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T9s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq2T9*, *resultname* = "Cq2T9")

$$Cq1T10 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T10s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T10s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T10s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq1T10*, *resultname* = "Cq1T10")

$$Cq1T11 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T11s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T11s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T11s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq1T11*, *resultname* = "Cq1T11")

$$Cq2T11 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T11s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T11s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T11s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq2T11*, *resultname* = "Cq2T11")

$$Cq1T12 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T12s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T12s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T12s \end{pmatrix} \right) :$$

*Matlab* ( *Cq1T12*, *resultname* = "Cq1T12")

$$Cq2T12 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T12s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T12s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T12s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T12, resultname = "Cq2T12")

$$Cq1T13 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qS_1} T13s \\ \frac{\partial}{\partial qS_2} T13s \\ \frac{\partial}{\partial qS_3} T13s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq1T13, resultname = "Cq1T13")

$$Cq2T13 := \text{simplify} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial qA_1} T13s \\ \frac{\partial}{\partial qA_2} T13s \\ \frac{\partial}{\partial qA_3} T13s \end{pmatrix} \right) :$$

Matlab (Cq2T13, resultname = "Cq2T13")

Cq1 := simplify(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Cq1T2, Cq1T3), Cq1T5), Cq1T6), Cq1T8), Cq1T9), Cq1T10), Cq1T11), Cq1T12), Cq1T13)) :

Cq2 := simplify(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Add(Cq2T3, Cq2T4), Cq2T5), Cq2T6), Cq2T9), Cq2T11), Cq2T12), Cq2T13)) :

C2 := Vector([0, 0, 0, Cq1, Cq2]) :

# Παράρτημα Δ

## Συναρτήσεις επίλυσης MatLab

### ➤ Μητρώο μάζας **M**

```
function M = EL_M_f(x)
%% Input variables
qS = x(4:6);
qA = x(7:9);
%
%% Set constants
IS = diag([2.824E+009 2.28E+009 1.738E+008]);
IA = diag([7.84E+6 7.84E+6 1.58E+6]);

m = [1050 20];

r = [25 15 200]; %r = [2.5 1.5 20];
d = [300 50 150];
%
%% Define Matrices
Skr = [ 0 -r(3) r(2);
        r(3) 0 -r(1);
        -r(2) r(1) 0];

Skd = [ 0 -d(3) d(2);
        d(3) 0 -d(1);
        -d(2) d(1) 0];

S1 = [1 0 sin(qS(2));
      0 cos(qS(1)) -sin(qS(1))*cos(qS(2));
      0 sin(qS(1)) cos(qS(1))*cos(qS(2))];

S2 = [1 0 sin(qA(2));
      0 cos(qA(1)) -sin(qA(1))*cos(qA(2));
      0 sin(qA(1)) cos(qA(1))*cos(qA(2))];

R01 = [cos(qS(2))*cos(qS(3)) -
        cos(qS(2))*sin(qS(3))
        sin(qS(2));
        sin(qS(1))*sin(qS(2))*cos(qS(3))+cos(qS(1))*sin(qS(3)) -
        sin(qS(1))*sin(qS(2))*sin(qS(3))+cos(qS(1))*cos(qS(3)) -
        sin(qS(1))*cos(qS(2));
        -cos(qS(1))*sin(qS(2))*cos(qS(3))+sin(qS(1))*sin(qS(3))
        cos(qS(1))*sin(qS(2))*sin(qS(3))+sin(qS(1))*cos(qS(3))
        cos(qS(1))*cos(qS(2));];

R12 = [cos(qA(2))*cos(qA(3)) -
        cos(qA(2))*sin(qA(3))
        sin(qA(2));
        sin(qA(1))*sin(qA(2))*cos(qA(3))+cos(qA(1))*sin(qA(3)) -
        sin(qA(1))*sin(qA(2))*sin(qA(3))+cos(qA(1))*cos(qA(3)) -
        sin(qA(1))*cos(qA(2));
        -cos(qA(1))*sin(qA(2))*cos(qA(3))+sin(qA(1))*sin(qA(3))
        cos(qA(1))*sin(qA(2))*sin(qA(3))+sin(qA(1))*cos(qA(3))
        cos(qA(1))*cos(qA(2));];
```



```

R02 = R01 * R12;
%
%% Assemble M matrix
M11 = (m(1)+m(2))*eye(3);
M12 = -m(2)*R01*Skd*S1;
M13 = -m(2)*R02*Skr*S2;
M21 = m(2)*S1'*Skd*R01';
M22 = S1'*IS*S1 + S1'*R12*IA*R12'*S1;
M23 = S1'*R12*IA*S2 - m(2)*S1'*Skd*R12*Skr*S2;
M31 = m(2)*S2'*Skr*R02';
M32 = S2'*IA*R12*S1' - m(2)*S2'*Skr*R12'*Skd*S1;
M33 = S2'*IA*S2;

M = reshape([ M11 M12 M13;
              M21 M22 M23;
              M31 M32 M33],81,1);

```

### ➤ Υπο-μητρώο μη γραμμικών όρων $C_2$

```

function C2 = EL_C2_f(x)
%% Input variables
qS = x(4:6);
qA = x(7:9);
Dx = x(10:12);
DqS = x(13:15);
DqA = x(16:18);
%
%% Set constants
IS = diag([2.824E+009 2.28E+009 1.738E+008]);
IA = diag([7.84E+6 7.84E+6 1.58E+6]);

m = [1050 20];

r = [25 15 200]; %r = [2.5 1.5 20];
d = [300 50 150];
%%
Cq1T2 = [-IS(2) * cos(qS(1)) * DqS(2) ^ 2 * sin(qS(1)) + IS(2) *
DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) - 0.2e1 * IS(2) * cos(qS(1)) ^ 2 *
DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) + IS(2) * cos(qS(2)) ^ 2 * DqS(3) ^ 2 *
cos(qS(1)) * sin(qS(1)) + IS(3) * DqS(2) ^ 2 * cos(qS(1)) *
sin(qS(1)) - IS(3) * DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) + 0.2e1 * IS(3) *
cos(qS(1)) ^ 2 * DqS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) - IS(3) * cos(qS(1)) *
cos(qS(2)) ^ 2 * DqS(3) ^ 2 * sin(qS(1)) DqS(3) * (IS(1) * DqS(1) *
cos(qS(2)) + IS(1) * DqS(3) * cos(qS(2)) * sin(qS(2)) + IS(2) *
cos(qS(1)) * DqS(2) * sin(qS(1)) * sin(qS(2)) - IS(2) * cos(qS(2)) *
DqS(3) * sin(qS(2)) + IS(2) * cos(qS(2)) * DqS(3) * cos(qS(1)) ^ 2 *
sin(qS(2)) - IS(3) * cos(qS(1)) * DqS(2) * sin(qS(1)) * sin(qS(2)) -
IS(3) * cos(qS(1)) ^ 2 * cos(qS(2)) * DqS(3) * sin(qS(2))) 0];

```

[...] παραλείπονται οι λοιποί όροι

```

Cq1T3 = [...
Cq1T5 = [...
Cq1T6 = [...
Cq1T8 = [...
Cq1T9 = [...
Cq1T10 = [...
Cq1T11 = [...

```

```

Cq1T12 = [...
Cq1T13 = [...
Cq2T3 = [...
Cq2T4 = [...
Cq2T5 = [...
Cq2T6 = [...
Cq2T9 = [...
Cq2T11 = [...
Cq2T12 = [...
Cq2T13 = [...

Cq1 = Cq1T2 + Cq1T3 + Cq1T5 + Cq1T6 + Cq1T8 + Cq1T9 + Cq1T10 + Cq1T11
+ Cq1T12 + Cq1T13;
Cq2 = Cq2T3 + Cq2T4 + Cq2T5 + Cq2T6 + Cq2T9 +Cq2T11 + Cq2T12 +
Cq2T13;
%%
C2 = [zeros(3,1); Cq1'; Cq2'];

```

### ➤ Μητρώο μη γραμμικών όρων $C$

```

function C = EL_C_f(x)
%% Input variables
Mdot = reshape(x(1:81),9,9);
C2 = x(82:90);
Dx = x(100:102);
DqS = x(103:105);
DqA = x(106:108);
%
%%
C1 = Mdot*[Dx; DqS; DqA];

C = C1 - C2;

```

### ➤ Μητρώο γενικευμένων δυνάμεων $\tilde{F}$

```

function q_out = EL_f(x)
%% Set variables (input from Mux)
M = reshape(x(1:81),9,9);
C = x(82:90);
q = x(91:99);
q_dot = x(100:108);%convert 2nd order ODE to 1st order
tq = x(109:111);
%
%% Define Matrices
qS = q(4:6);
qA = q(7:9);
%
S1 = [1          0          sin(qS(2));
      0 cos(qS(1)) -sin(qS(1))*cos(qS(2));
      0 sin(qS(1)) cos(qS(1))*cos(qS(2))];

S2 = [1          0          sin(qA(2));
      0 cos(qA(1)) -sin(qA(1))*cos(qA(2));
      0 sin(qA(1)) cos(qA(1))*cos(qA(2))];

```

```

R12 = [cos(qA(2))*cos(qA(3)) -cos(qA(2))*sin(qA(3)) sin(qA(2));
       sin(qA(1))*sin(qA(2))*cos(qA(3))+cos(qA(1))*sin(qA(3)) -
       sin(qA(1))*sin(qA(2))*sin(qA(3))+cos(qA(1))*cos(qA(3)) -
       sin(qA(1))*cos(qA(2));
       -cos(qA(1))*sin(qA(2))*cos(qA(3))+sin(qA(1))*sin(qA(3))
       cos(qA(1))*sin(qA(2))*sin(qA(3))+sin(qA(1))*cos(qA(3))
       cos(qA(1))*cos(qA(2));];

%
%% Force vector
%F = [zeros(3,1); tq; tq];
F = [zeros(6,1); tq];
%
%% Theta_double_dot equation
q_ddot = M^-1*(F-C);
%
q_out(10:18) = q_ddot;
q_out(1:9) = q_dot;

```

## ➤ Σχεδιασμός τροχιάς

```

function qA_des = EL_qAdes_f(t)

%% Input time
time = t;
%% Desired pointing vector
k =[0.5; 0.2241; 0.8365]; % (arbitrary)
%
R01 = [cos(qS(2))*cos(qS(3))           -
cos(qS(2))*sin(qS(3))
sin(qS(2));
sin(qS(1))*sin(qS(2))*cos(qS(3))+cos(qS(1))*sin(qS(3)) -
sin(qS(1))*sin(qS(2))*sin(qS(3))+cos(qS(1))*cos(qS(3)) -
sin(qS(1))*cos(qS(2));
-cos(qS(1))*sin(qS(2))*cos(qS(3))+sin(qS(1))*sin(qS(3))
cos(qS(1))*sin(qS(2))*sin(qS(3))+sin(qS(1))*cos(qS(3))
cos(qS(1))*cos(qS(2));];
%
k0 = R01'*k;
%convert pointing vector to joint angles
q_phi = asin(k0(1)); %phi angle (around y)
q_theta = atan2(-k0(2)/cos(q_phi), k0(3)/cos(q_phi)); %theta angle
% (around x)

%
% -----
%%                               Trajectory Planning
%                               3rd Order Polynomial
% -----
%% properties
%
tf = 30; %final time
qf_theta = q_theta; %desired final joint angle 'theta'
qf_phi = q_phi; %desired final joint angle 'phi'
qi_theta = 0; %initial joint angle 'theta' (assumed=0)
qi_phi = 0; %initial joint angle 'phi' (assumed=0)
if time<=tf
    a0_1 = qi_theta;
    a0_2 = qi_phi;
    a1_1 =0;
    a1_2 =0;
    a2_1 = 3/tf^2*(qf_theta-qi_theta);
    a2_2 = 3/tf^2*(qf_phi-qi_phi);
    a3_1 = -2/tf^3*(qf_theta-qi_theta);
    a3_2 = -2/tf^3*(qf_phi-qi_phi);
    %
    qA_des(1) = a0_1 + a1_1*time + a2_1*time^2 + a3_1*time^3;
    qA_des(2) = a0_2 + a1_2*time + a2_2*time^2 + a3_2*time^3;
else
    qA_des(1:2)=[qf_theta;qf_phi];
end

```

## ➤ Νόμος ελέγχου

```

function tqC = EL_tqC_f(x)
%% Input variables
% qS = x(4:6);
qA = x(7:9); %ANT angles
% Dx = x(10:12);
% DqS = x(13:15);
DqA = x(16:18); %ANT angles rates
qA_des = x(19:20); % desired joint angles
DqA_des = x(21:22); % 1st time derivatives of desired joint angles
DDqA_des = x(23:24); % 2nd time derivatives of desired joint angles
t=x(25);
%
%% Inertia
IA = diag([7.84E+6 7.84E+6 1.58E+6]);
%
%% Determine M matrix
M=S2_f(qA)'*IA*S2_f(qA);
%
%% Determine V matrix
V=S2_f(qA)'*IA*S2_dot_f(qA,DqA)*DqA+...
    S2_f(qA)'*(cross((S2_f(qA)*DqA),(IA*S2_f(qA)*DqA)));
%
%% Define Proportional and Derivative gains
Kp = [25; 60]; % P gain
Kd = 2*sqrt(Kp); % D gain
%
%% Partitioning
M_11 = [M(1,1) M(1,2); M(2,1) M(2,2)];
M_12 = [M(1,3); M(2,3)];
M_21 = [M(3,1) M(3,2)];
M_22 = M(3,3);
M_2x2 = M_11-M_12*M_22^-1*M_21;
%
V_1 = [V(1); V(2)];
V_2 = V(3);
V_2x1 = V_1-M_12*M_22^-1*V_2;
%
%% calculate control torque
tqC_2x1 = V_2x1+M_2x2*(DDqA_des+Kd.*(DqA_des-DqA(1:2))+Kp.*(qA_des-
qA(1:2)));
tqC = [tqC_2x1; 0];
%
%% -----
% S2 Jacobians Subfunctions
% -----
%define Exyz matrix by subfunction E_f
function S2 = S2_f(qA)
S2 =[1 0 sin(qA(2));
0 cos(qA(1)) -sin(qA(1))*cos(qA(2));
0 sin(qA(1)) cos(qA(1))*cos(qA(2))];
%%
%define E_dot matrix by subfunction E_dot
function S2_dot = S2_dot_f(qA,DqA)
S2_dot=[0 0 DqA(2)*cos(qA(2));...
0 -DqA(1)*sin(qA(1)) DqA(2)*sin(qA(2))*sin(qA(1))-...
DqA(1)*cos(qA(2))*cos(qA(1));
0 DqA(1)*cos(qA(1)) -DqA(2)*sin(qA(2))*cos(qA(1))-...
DqA(1)*cos(qA(2))*sin(qA(1))];

```

➤ Υπολογισμός προωθητικού καυσίμου μέσω ολοκλήρωσης εμβαδού παλμών

```
%% Constants
Isp = 2.2e3;
Lm = 1.0;
%
%% create matrix
%
U=[t u u1 u2];          %for standard actuation pulses
U_RM10=[t u u1 u2];    %for reactionless actuation pulses
%
%% Propellant mass by integration over time
%% standard
propmass_x = abs(trapz(U(:,1),abs(U(:,2))))/Isp/Lm;
%
propmass_y = abs(trapz(U(:,1),abs(U(:,3))))/Isp/Lm;
%
propmass_z = abs(trapz(U(:,1),abs(U(:,4))))/Isp/Lm;
%%
propmassTOTAL_std = propmass_x+propmass_y+propmass_z;
fprintf('Propellant mass consumed STANDARD=%8.7fg\n',
propmassTOTAL_std);
%
%% reactionless
propmass_x = abs(trapz(U_RM10(:,1),abs(U_RM10(:,2))))/Isp/Lm;
%
propmass_y = abs(trapz(U_RM10(:,1),abs(U_RM10(:,3))))/Isp/Lm;
%
propmass_z = abs(trapz(U_RM10(:,1),abs(U_RM10(:,4))))/Isp/Lm;
%%
propmassTOTAL_RM = propmass_x+propmass_y+propmass_z;
fprintf('Propellant mass consumed REACTIONLESS=%8.7fg\n',
propmassTOTAL_RM);
%
%% comparison
savings=(propmassTOTAL_std-propmassTOTAL_RM)/propmassTOTAL_std*100;
fprintf('Propellant savings =%4.2f%%\n', savings);
```

➤ Υπολογισμός προωθητικού καυσίμου για απόρριψη στροφορμής από ΣΑ

```
%% Constants
Isp = 2.2e3;
Lm = 1.0;
%
%
maxd = max(max(Reactions_STD(:,4:6)));
maxd_RM = max(max(Reactions_RM10(:,4:6)));
%
Hday = maxd*1e-3 *24* 3600/60;
Hday_RM = maxd_RM*1e-3* 24* 3600/60;
%
secHday = 0.2*Hday;
secHday_RM = 0.2*Hday_RM;
%
year_mp = secHday *365 /Isp /Lm;
year_mp_RM = secHday_RM *365 /Isp /Lm;
%
savings=(year_mp-year_mp_RM)/year_mp*100;;
fprintf('Propellant savings =%4.2f%%\n', savings);
%
year15_mp = 15*year_mp;
year15_mp_RM = 15*year_mp_RM;
%
mass = year15_mp* 1/0.85;
mass_RM = year15_mp_RM* 1/0.85;
%
mass_saving = mass - mass_RM;
cost_saving =mass_saving*22;
```