



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ (Δ.Δ.Π.Μ.Σ.)

“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”

Υπολογιστική ανάλυση της λειτουργικής  
διασύνδεσης εγκεφαλογραφικών χρονοσειρών  
με θεωρίες πληροφορίας μερικής  
κατευθυνόμενης συνάφειας (Partial Directed  
Coherence).

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καραγεωργόπουλος Γ. Δημήτριος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΣΙΕΤΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

Αθήνα 2012



Αφιερώνεται στη γυναίκα μου

Μαργαρίτα



# Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών κ. Κωνσταντίνο Σιέττο για την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το εν λόγω αντικείμενο και για την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής αυτής εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την Φωτεινή Πρωτόπαπα για την ουσιαστική βοήθεια της που μου πρόσφερε κάθε φορά που την χρειαζόμουν.



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	7
Περίληψη.....	9
Abstract .....	11
1. Φυσιολογία νευρώνων .....	13
1.1 Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα.....	14
1.2 Οι νευρώνες.....	15
1.3 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος.....	16
1.4 Λειτουργία των νευρώνων.....	17
1.4.1 Δυναμικό Ηρεμίας (Resting Potential) .....	19
1.4.2 Δυναμικό Ενέργειας (Action Potential) .....	19
1.4.3 Νευρική ώση.....	20
1.4.3 Μετασυναπτικό Δυναμικό (Post Synaptic Potential).....	20
2. Τεχνικές απεικόνισης εγκεφαλικής δραστηριότητας.....	21
2.1 Εισαγωγή .....	22
2.2 Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG) .....	22
2.3 Μαγνητοεγκεφαλογραφία (MEG).....	24
2.4 Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (fMRI) .....	25
2.5 Εγκεφαλικοί ρυθμοί.....	28
3. Εισαγωγή στην φασματική εκτίμηση.....	29
3.1 Εισαγωγή .....	30
3.2 Στοχαστικές Διεργασίες (Stochastic Processes).....	30
3.3 Ο μετασχηματισμός Fourier.....	32
3.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier .....	33
3.4.1 Γραμμικότητα.....	33
3.4.2 Ολίσθηση στον χρόνο.....	33
3.4.3 Ολίσθηση στη συχνότητα .....	33
3.4.4 Το Θεώρημα της Συνέλιξης (Convolution Theorem).....	34
3.4.5 Το θεώρημα του Parseval (Parseval's Theorem).....	34

3.5 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT) .....	34
3.6 Φασματικής πυκνότητας ισχύος (Power Density Spectrum) .....	35
3.7. Μη παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος .....	37
3.7.1 Περιοδόγραμμα (Periodogramm) και Κορρελόγραμμα (Correlogramm) .....	37
3.7.2 Η μέθοδος του Welch .....	38
3.8 Παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος .....	39
3.8.1 Το Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης (MultiVariate AutoRegressive Model).....	39
3.8.2 Η μέθοδος του Yule-Walker .....	40
3.8.3 Η μέθοδος του Burg .....	41
3.8.4 Επιλογή της τάξης του AR μοντέλου.....	42
4. Ανάλυση νευροφυσιολογικών σημάτων .....	43
4.1 Εισαγωγή.....	44
4.2 Αιτιότητα κατά Granger (Granger Causality).....	45
4.3 Συνάφεια (Coherence).....	47
4.4 Μερική Συνάφεια (Partial Coherence).....	48
4.5 Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Directed Coherence).....	49
4.6 Μερική Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Partial Directed Coherence).....	52
5. Εφαρμογή της μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας σε προσομοιωμένα σήματα.57	
5.1 Εισαγωγή.....	58
5.2 Θεωρητικό Παράδειγμα .....	58
5.3 Συμπεράσματα - Μελλοντικές Προοπτικές .....	67
Βιβλιογραφία.....	69



# Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η μελέτη της λειτουργικής διασύνδεσης των εγκεφαλογραφικών χρονοσειρών με θεωρίες πληροφοριών Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας (Partial Directed Coherence). Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής αρχικά παρουσιάζονται βασικά στοιχεία φυσιολογίας νευρώνων. Ο τρόπος λειτουργίας των νευρώνων και μεταφοράς της πληροφορίας αναλύονται διεξοδικά καθώς και οι τεχνικές απεικόνισης αυτής της εγκεφαλικής δραστηριότητας.

Στη συνέχεια και αφού κάνουμε μία ανασκόπηση στα στοχαστικά σήματα και τον Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier αναφερόμαστε στο υπολογισμό του Φάσματος Ισχύος (Power Spectrum). Το φάσμα ισχύος είναι ακρογωνιαίος λίθος στη μελέτη των εγκεφαλογραφικών σημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων, γι αυτό τον λόγο στην συγκεκριμένη εργασία αναλύουμε τόσο τις μη παραμετρικές μεθόδους εκτίμησης του, δηλαδή τις μεθόδους αυτές στις οποίες εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται απευθείας από τη χρονοσειρά (περιοδόγραμμα (periodogram), κορρελόγραμμα (correlogram) και μέθοδος του Welch), όσο και τις παραμετρικές μεθόδους κατά τις οποίες η εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται μέσα από την εκτίμηση των παραμέτρων ενός MVAR μοντέλου που προσαρμόζεται στη χρονοσειρά (μέθοδος Yule-Walker και μέθοδος του Burg).

Ακολουθεί η ανάλυση των εγκεφαλογραφικών σημάτων με θεωρίες πληροφορίας μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας. Ως μέθοδος η μερική κατευθυνόμενη συνάφεια αποτελεί μια από τις νεότερες μεθόδους για την ανάλυση της λειτουργικής διασύνδεσης νευροφυσιολογικών χρονοσειρών, η οποία κάνει χρήση παραμετρικών μεθόδων με βάση AR μοντέλα. Πρώτη φορά εισήχθη ως έννοια από τον Luiz Baccala το 2001 (Baccala & Sameshima, 2001). Για την σωστή και ολοκληρωμένη επισκόπηση του θέματος στην αρχή αναφέρουμε τα διάφορα μεγέθη συνάφειας από τα οποία προήλθε η PDC και στη συνέχεια αναλύουμε τις διάφορες μορφές της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας.

Τέλος στο τελευταίο προχωράμε σε εφαρμογή της μεθόδου σε προσομοιωμένα δεδομένα σημάτων με γνωστά μοτίβα συνδεσιμότητας για να αξιολογήσουμε την απόδοση των διαφόρων μέτρων της συνάφειας.



# Abstract

The purpose of this thesis is to study the functional connectivity of neurophysiological data with the use of partial directed coherence. This thesis consists of five chapters. In the first and second chapter, an introduction to the brain's physiology is presented. In the third chapter we give a brief review of the stochastic signals theory and Discrete Fourier Transformation and continue with the estimation of the Power Spectrum. Because of the importance of the Power Spectrum in the study of the functional connectivity of neurophysiological signals, we analyze both non-parametric and parametric methods of the power spectrum estimation.

In the fourth chapter we analyze the method of Partial Directed Coherence. This relatively new method was introduced as a concept from Luiz Baccala in 2001 (Baccala & Sameshima, 2001). We also present the methods of Coherence, Partial Coherence and Directed Coherence.

Finally, in order to evaluate the performance of the different coherence measures we apply the method to signals with known patterns of connectivity.



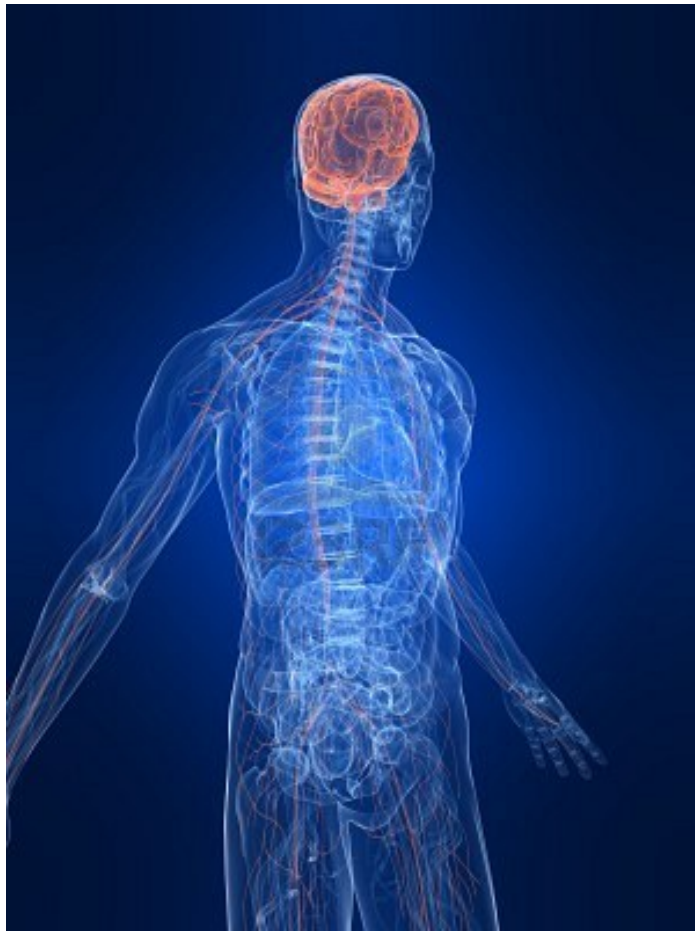
# 1. Φυσιολογία νευρώνων

---

- 1.1 Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα
  - 1.2 Οι νευρώνες
  - 1.3 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος
  - 1.4 Λειτουργία των νευρώνων
    - 1.4.1 Δυναμικό Ηρεμίας (Resting Potential)
    - 1.4.2 Δυναμικό Ενέργειας (Action Potential)
    - 1.4.3 Νευρική Ώση
-

## 1.1 Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα

Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα αποτελείται από το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα (ΚΝΣ) και το Περιφερειακό Νευρικό Σύστημα (ΠΝΣ). Τα δύο (2) συστήματα διαχωρίζονται ανατομικά αλλά συνδέονται λειτουργικά. Το ΚΝΣ είναι απαρτίζεται από δύο (2) κύρια μέρη: τον εγκέφαλο και το νωτιαίο μυελό. Το ΠΝΣ αποτελείται από ένα σύνολο περιφερειακών νευρών, τα οποία έχουν ως σκοπό την μεταφορά των διαφόρων ερεθισμάτων - πληροφοριών του περιβάλλοντος στο ΚΝΣ προς επεξεργασία.



Εικόνα 1-1: Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα.

Πηγή: [www.123rf.com](http://www.123rf.com)

Υπάρχουν δύο (2) διαφορετικές κατηγορίες κυττάρων στο νευρικό σύστημα: τα νευρικά κύτταρα (ή νευρώνες) και τα νευρογλοιακά κύτταρα (ή νευρογλοία) (Kandel et al., 2000). Τα τελευταία αν και υπάρχουν σε πολύ μεγαλύτερους αριθμούς σε σχέση με τους νευρώνες δεν παίζουν κανέναν απολύτως ρόλο στην μετάδοση ή στην επεξεργασία της πληροφορίας. Αντιθέτως, από όσο γνωρίζουμε, περιορίζονται σε καθαρά υποστηρικτικούς ρόλους και ως εκ τούτου δεν θα μας απασχολήσουν περαιτέρω.

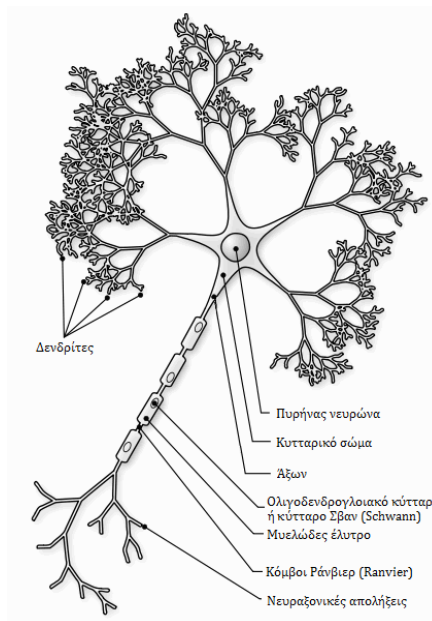
## 1.2 Οι νευρώνες

Οι νευρώνες αποτελούν την βασική μονάδα του νευρικού συστήματος. Με την βοήθεια αυτών μπορεί ο άνθρωπος να λαμβάνει πληροφορίες, να τις μεταδίδει, να τις επεξεργάζεται αλλά και να τις μετατρέπει σε συμπεριφορά.

Αν και υπάρχουν διάφοροι τύποι νευρώνων, οι οποίοι διαφέρουν πολύ ως προς την μορφή, ένας τυπικός νευρώνας αποτελείται από τέσσερις μορφολογικά διακριτές περιοχές: το κυτταρικό σώμα, τους δενδρίτες, τον νευράξονα και τα προσυναπτικά τελικά κομβία (Εικόνα 1-2).

Στο κυτταρικό σώμα ανήκει ο πυρήνας αλλά και άλλα βασικά συστατικά του κυττάρου με αποτέλεσμα να θεωρείται το κέντρο μεταβολισμού αυτού. Από το κυτταρικό σώμα εκφύονται οι δενδρίτες και ο νευράξονας. Οι δενδρίτες διακλαδίζονται όμοια με τα κλαδιά ενός δένδρου και συμβάλλουν στην λήψη σημάτων από άλλους νευρώνες. Ο νευράξονας είναι υπεύθυνος για την μετάδοση της πληροφορίας - σήματος από τον προσυναπτικό νευρώνα στους μετασυναπτικούς νευρώνες. Πρόκειται για μια σωληνοειδή κατασκευή η οποία εδράζεται στο κυτταρικό σώμα σε μια περιοχή που ονομάζεται εκφυτικός κώνος. Ο εκφυτικός κώνος είναι το σημείο εκκίνησης του κυτταρικού σήματος (δυναμικό ενέργειας) για το οποίο θα μιλήσουμε αργότερα.

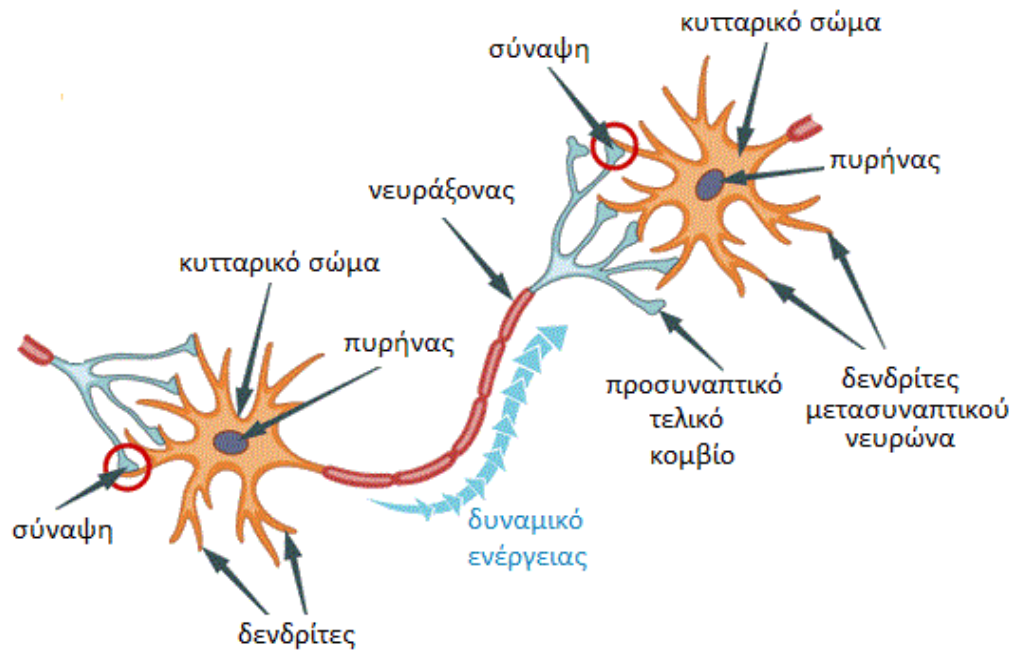
Ο νευράξονας μονώνεται με την βοήθεια του μυελώδους ελύτρου. Αυτό με την σειρά του διακόπτεται σε τακτικά διαστήματα από περιοχές που τις ονομάζουμε κόμβους Ranvier. Τέλος οι νευράξονες διαιρούνται σε αρκετούς κλάδους μεταφέροντας έτσι πληροφορίες σε διαφορετικούς στόχους.



Εικόνα 1-2: Ένας νευρώνας με τα κύρια μορφολογικά στοιχεία του.

Πηγή: [www.foundalis.com](http://www.foundalis.com)

Για να διασφαλισθεί η διάδοση της πληροφορίας από τον ένα νευρώνα (προσυναπτικός νευρώνας) στον επόμενο (μετασυναπτικός νευρώνας) πρέπει να σχηματιστούν συνάψεις μεταξύ των προσυναπτικών τελικών κομβίων του προσυναπτικού νευρώνα και των δενδριτών του μετασυναπτικού νευρώνα. Αν λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι κάθε νευρώνας σχηματίζει κατά μέσο όρο πάνω από χίλιες (1000) συνάψεις ενώ δέχεται ακόμα περισσότερες καταλαβαίνουμε ότι δημιουργούνται διατάξεις, εξαιρετικά περίπλοκες, οι οποίες επιτρέπουν την ταχύτερη μεταφορά σημάτων - πληροφοριών.



Εικόνα 1-3: Συνάψεις ενός νευρώνα.

Πηγή: andreeasanatomy.blogspot.gr

### 1.3 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος

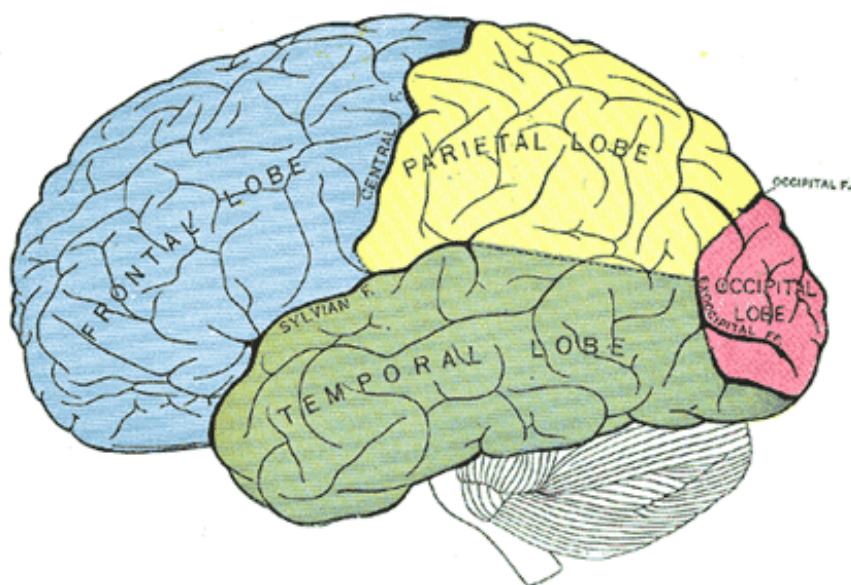
Ο εγκέφαλος είναι το πιο σημαντικό όργανο του ανθρώπινου νευρικού συστήματος. Περιλαμβάνει το 98% των νευρώνων που υπάρχουν στον άνθρωπο (περίπου 100 δισεκατομμύρια νευρώνες).

Από ανατομικής πλευράς ο εγκέφαλος είναι χωρισμένος σε δύο ημισφαίρια, το αριστερό και το δεξί. Ο φλοιός τους, που διακρίνεται για τις έντονες πτυχώσεις, διαιρείται λειτουργικά σε τέσσερις (4) λοβούς, τον μετωπιαίο (frontal), τον βρεγματικό (parietal), τον ινιακό (occipital) και τέλος τον κροταφικό λοβό (temporal lobe).

Αν και συγκεκριμένες λειτουργίες αποδίδονται σε κάθε λοβό ξεχωριστά, αρκετές δραστηριότητες απαιτούν την συνεργία περισσότερων περιοχών και στα δύο ημισφαίρια. Για παράδειγμα, μολονότι ο ινιακός λοβός είναι ουσιαστικός για την οπτική διεργασία υπάρχουν τμήματα των βρεγματικών, των κροταφικών και των



μετωπιαίων λοβών και των δύο (2) ημισφαιρίων που επεξεργάζονται επίσης πολύπλοκα οπτικά ερεθίσματα. Πιο συγκεκριμένα ο μετωπιαίος λοβός συνδέεται με τον σχεδιασμό και την εκτέλεση συμπεριφορών που προκύπτουν από μάθηση και πρόθεση. Επίσης είναι η έδρα πολλών ανασταλτικών λειτουργιών. Ο βρεγματικός λοβός με την αναγνώριση και αντίληψη ερεθισμάτων καθώς επίσης και με τον προσανατολισμό. Ο ινιακός λοβός συνδέεται με την οπτική αναγνώριση και αντίληψη του χώρου και τέλος ο κροταφικός λοβός συνδέεται με την ακουστική αντίληψη, τις δεκτικές συνιστώσες του λόγου, την οπτική μνήμη, την δηλωτική (των γεγονότων) μνήμη και τα συναισθήματα.



Εικόνα 1-4: Οι λοβοί του εγκεφάλου  
Πηγή: [www.homebusinessandfamilylife.com](http://www.homebusinessandfamilylife.com)

## 1.4 Λειτουργία των νευρώνων

Πως καταφέρνει όμως ο εγκέφαλος να εκτελεί όλες αυτές τις ανωτέρου επιπέδου διεργασίες; Το κλειδί βρίσκεται στον τρόπο οργάνωσης και επικοινωνίας των νευρώνων, ως ολοκληρωμένο σύστημα διαχείρισης πληροφοριών και λήψης αποφάσεων. Για να το κατανοήσουμε όμως αυτό θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε τον τρόπο λειτουργίας των ίδιων των νευρώνων.

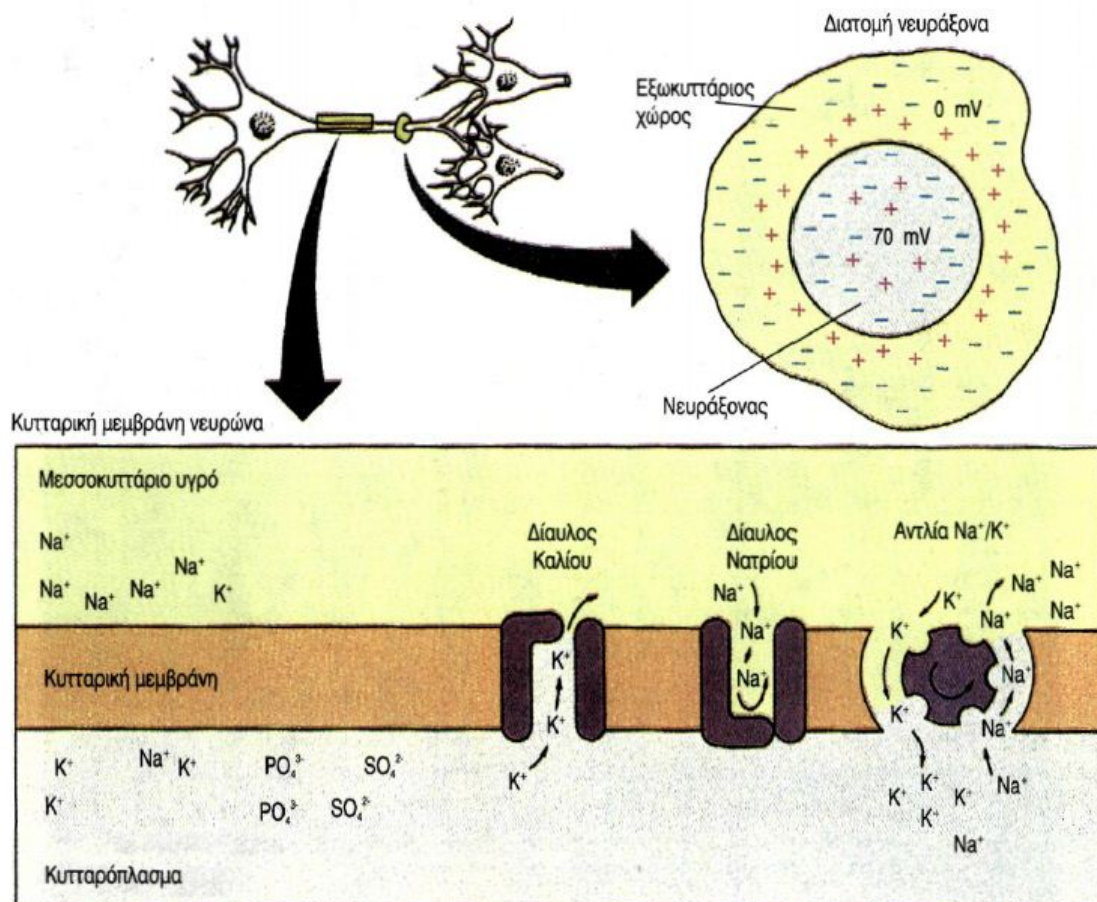
Όπως είπαμε τα νευρικά κύτταρα αποτελούν τις βασικές μονάδες λήψης και αποστολής πληροφοριών. Οι νευρώνες επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ηλεκτρικών και χημικών σημάτων. Πιο συγκεκριμένα τα χημικά σήματα, που δέχονται οι δενδρίτες από τους άξονες που τους προσεγγίζουν, μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα, τα οποία προστίθενται ή αφαιρούνται από άλλα ηλεκτρικά σήματα που λαμβάνονται από όλες τις άλλες συνάψεις, συμβάλλοντας έτσι στην απόφαση αν το σήμα θα μεταδοθεί περαιτέρω. Στη περιοχή του εκφυτικού κώνου βρίσκεται η ζώνη εκκίνησης. Εφόσον ληφθεί η απόφαση να μεταδοθεί το σήμα δημιουργείται ένα σήμα τύπου όλων ή ουδέν.

Αυτό σημαίνει ότι μόνο δύο χαρακτηριστικά του μεταδιδόμενου σήματος συντελούν στην αγωγή πληροφοριών, ο αριθμός των δυναμικών ενεργείας και τα χρονικά διαλλείματα μεταξύ αυτών. Τα ηλεκτρικά σήματα στη συνέχεια οδεύουν από τους άξονες προς τις συνάψεις και τους δενδρίτες του επόμενου νευρώνα και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

Σύμφωνα με τον Ramon y Cajal ισχύουν δύο πολύ σημαντικές αρχές όσον αφορά στη μετάδοση των πληροφοριών μεταξύ των νευρώνων

Πρώτον, η Αρχή της Δυναμικής Πόλωσης, η οποία μας πληροφορεί ότι τα σήματα εντός ενός νευρικού κυττάρου άγονται πάντα προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, δηλαδή ξεκινάει από τους δενδρίτες στο κυτταρικό σώμα και από εκεί κατευθύνεται προς την ζώνη εκκίνησης του εκφυτικού κώνου, όπου δημιουργείται το δυναμικό ενέργειας, το οποίο και μεταφέρεται μέσω του νευράξονα στα προσυναπτικά τελικά κομβία.

Δεύτερον, η Αρχή της Εξειδίκευσης της Σύνδεσης, με βάση την οποία δεν υπάρχει κυτταροπλασματική συνέχεια μεταξύ των νευρώνων. Επίσης δεν υπάρχει σχηματισμός τυχαίων δικτύων.



Εικόνα 1-5: Κατανομή ιόντων στη μεμβράνη του νευρώνα στο δυναμικό αδρανείας.

Πηγή: <http://digitalschool.minedu.gov.gr/courses/DSGL-A105/>

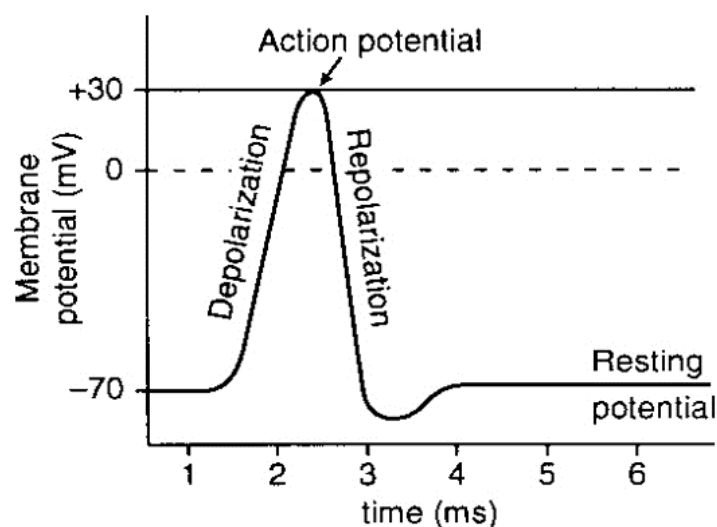
### 1.4.1 Δυναμικό Ηρεμίας (Resting Potential)

Όλα τα νευρωνικά κύτταρα διατηρούν μία διαφορά δυναμικού της τάξης των  $-40$  έως  $-80$  mV κατά μήκος της κυτταρικής τους μεμβράνης όταν βρίσκονται σε κατάσταση ηρεμίας. Η διαφορά αυτή, που ονομάζεται *δυναμικό ηρεμίας*, προκύπτει επειδή στην εξωτερική επιφάνεια της μεμβράνης ενός νευρικού κυττάρου που βρίσκεται σε ηρεμία υπάρχει υψηλή συγκέντρωση ιόντων νατρίου ( $\text{Na}^+$ ) ενώ στην εσωτερική επιφάνεια υπάρχει περίσσεια ιόντων καλίου ( $\text{K}^+$ ) και λοιπόν κατιόντων. Αυτή η άνιση κατανομή των ιόντων επιτυγχάνεται με την βοήθεια της αντλίας  $\text{Na}^+/\text{K}^+$  και διατηρείται για όσο χρόνο το κύτταρο δεν δέχεται ερεθίσματα ή δέχεται ερεθίσματα με ένταση μικρότερη από την ένταση κατωφλίου. Η ένταση κατωφλίου διαφέρει από νευρώνα σε νευρώνα όπως διαφέρει και το δυναμικό ηρεμίας.

### 1.4.2 Δυναμικό Ενέργειας (Action Potential)

Όταν λοιπόν ένας νευρώνας δεχθεί σε κάποιο σημείο του ένα ερέθισμα, που είναι μεγαλύτερο από το ένταση κατωφλίου, τότε για περίπου 1 msec αυξάνεται η διαπερατότητα της μεμβράνης, χάρη στους διαύλους νατρίου που ανοίγουν, με αποτέλεσμα τα  $\text{Na}^+$  να εισρέουν μαζικά στον νευρώνα. Αυτή η απότομη εισροή ιόντων νατρίου προκαλεί και αλλαγή του δυναμικού εντός της κυτταρικής μεμβράνης που φτάνει πλέον τα  $+30$ mV. Αυτή η φάση ονομάζεται *αποπόλωση* (depolarization).

Στη συνέχεια και εξαιτίας της απότομης μεταβολής του δυναμικού στο εσωτερικό της μεμβράνης ανοίγουν οι διάυλοι  $\text{K}^+$  με αποτέλεσμα να εκρέουν μαζικά ιόντα καλίου εκτός της κυτταρικής μεμβράνης. Η συγκεκριμένη διαδικασία ονομάζεται *επαναπόλωση* (repolarization) και στο τέλος αυτής το δυναμικό στο εσωτερικό της μεμβράνης του νευρικού κυττάρου έχει επανέλθει στα  $-70$  mV. Τότε αναλαμβάνουν οι αντλίες  $\text{Na}^+/\text{K}^+$  να αποκαταστήσουν το δυναμικό στα επίπεδα ηρεμίας.

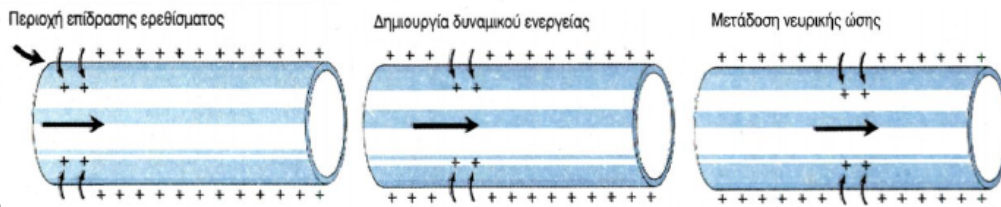


Εικόνα 1-6: Γραφική παράσταση του δυναμικού ενέργειας.

Πηγή: <http://www.answers.com/topic/action-potential>

### 1.4.3 Νευρική ώση

Οι σύντομες μεταβολές στο δυναμικό της μεμβράνης (δυναμικό ενεργείας) αποτελούν το ερέθισμα για αντίστοιχες αλλαγές σε γειτονικές περιοχές της μεμβράνης. Με αυτό τον τρόπο το δυναμικό ενεργείας μεταδίδεται κατά μήκος του νευράξονα με ένα κύμα εκπόλωσης (πάντα προς μία κατεύθυνση κατά την αρχή της δυναμικής πόλωσης του Ramon y Cahal) που αποτελεί την *νευρική ώση*.

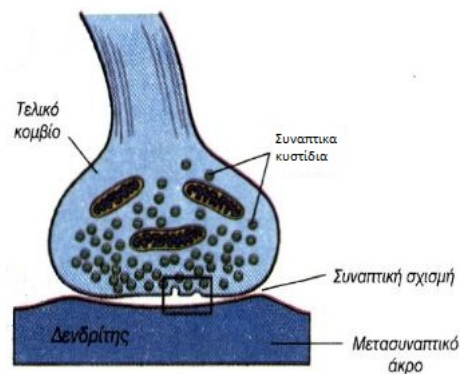


Εικόνα 1-7: Νευρική ώση

Πηγή: <http://digitalschool.minedu.gov.gr/courses/DSGL-A105/>

### 1.4.3 Μετασυναπτικό Δυναμικό (Post Synaptic Potential)

Όταν το δυναμικό ενέργειας φτάσει στα τελικά συναπτικά κομβία (περιοχές απόληξης του νευρώνα) διεγείρει την απελευθέρωση χημικών διαβιβαστών από τα συναπτικά κυστίδια. Η απελευθέρωση των χημικών διαβιβαστών λειτουργεί ως σήμα εξόδου. Όπως το σήμα εισόδου έτσι και το σήμα εξόδου είναι διαβαθμισμένο. Η ποσότητα του νευροδιαβιβαστή που απελευθερώνεται είναι ανάλογη με τον αριθμό και την συχνότητα των δυναμικών ενέργειας του νευράξονα (Kandel et al., 2000). Ο νευροδιαβιβαστής που απελευθερώνεται από τον προσυναπτικό νευρώνα διαχέεται μέσω της συνοπτικής σχισμής στα μόρια του υποδοχέα που βρίσκεται στους δενδρίτες του μετασυναπτικού νευρώνα.



Εικόνα 1-8: Νευρικά κυστίδια.

Πηγή: <http://digitalschool.minedu.gov.gr/courses/DSGL-A105/>

Η προσκόλληση των νευρικών διαβιβαστών στην μεμβράνη του μετασυναπτικού νευρώνα προκαλούν με την σειρά τους μετασυναπτικό δυναμικό, το οποίο διαχωρίζεται σε διεγερτικό (EPSP) ή ανασταλτικό (APSP) ανάλογα με το είδος των υποδοχέων στο μετασυναπτικό κύτταρο.

# 2. Τεχνικές απεικόνισης εγκεφαλικής δραστηριότητας

---

2.1 Εισαγωγή

2.2 Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG)

2.3 Μαγνητοεγκεφαλογραφία (MEG)

2.4 Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (fMRI)

2.5 Εγκεφαλικοί ρυθμοί

---

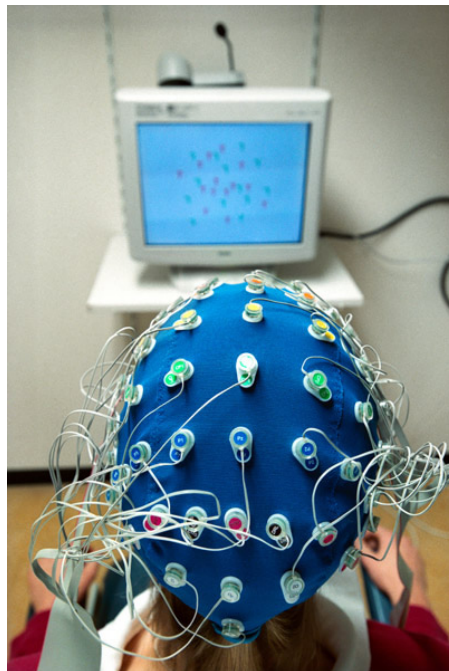
## 2.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η αρχιτεκτονική του νευρικού συστήματος, αν και περίπλοκη, ακολουθεί σχετικά απλές αρχές λειτουργίας, οργάνωσης και ανάπτυξης. Ακόμα όμως και έτσι στη περίπτωση του ανθρώπινου εγκεφάλου των 100 δισεκατομμυρίων διασυνδεδεμένων νευρώνων είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι ούτε αυτό μας αρκεί για να κατανοήσουμε στο πλήρες εύρος την εγκεφαλική λειτουργία.

Μέχρι πρόσφατα ακουμάσταν σε νεκροτομικά ευρήματα, με την πρόοδο όμως της επιστήμης, μας έχει επιτραπεί η επισκόπηση του νευρικού συστήματος μέσω μη παρεμβατικών μεθόδων στον ζωντανό άνθρωπο. Τρεις από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές απεικόνισης της εγκεφαλικής λειτουργίας είναι η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (ΗΕΓ) (Electroencephalography (EEG)), Μαγνητοεγκεφαλογραφία (ΜΕΓ) (Magnetoencephalography (MEG)) και τέλος η Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (ΛΑΜΣ) (Functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI)).

## 2.2 Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG)

Η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία αποτελεί μια από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους καταγραφής της εγκεφαλικής δραστηριότητας. Πρόκειται στην ουσία για μια νευροφυσιολογική μέτρηση της ηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου με την χρήση επικρανιακών ηλεκτροδίων. Ως μέθοδος θεμελιώθηκε από τον Hans Berger με μία σειρά άρθρων μεταξύ του 1929 και του 1936.



Εικόνα 2-1: Κάσκα επικρανιακών ηλεκτροδίων που χρησιμοποιείται κατά την διάρκεια ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων

Πηγή: <http://www.lsa.umich.edu>

Πρόκειται για μη παρεμβατική μέθοδο που καταγράφει και απεικονίζει αθροιστικά τις μεταβολές των μετασυναπτικών δυναμικών ενός μεγάλου πλήθους νευρώνων. Ο φυσιολογικός μηχανισμός που καθιστά εφικτή αυτή την τεχνική καταγραφής είναι αυτός της συναπτικής διέγερσης των κορυφαίων δενδριτών που βρίσκονται στην επιφάνεια (φλοιό) του εγκεφάλου. Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο η απελευθέρωση ενός νευροδιαβιβαστή σε μια σύναψη ως αποτέλεσμα της αγωγής ενός προσυναπτικού δυναμικού ενέργειας ενεργοποιεί χημικά ελεγχόμενους ιοντικούς διαύλους στη μεμβράνη του μετασυναπτικού νευρώνα μεταβάλλοντας με αυτό τον τρόπο την πόλωσή της. Η ενεργοποίηση διαύλων που επιτρέπουν την εισροή θετικών ιόντων οδηγεί σε εκπόλωση της μεμβράνης δημιουργώντας διεγερτικά μετασυναπτικά δυναμικά ενώ η είσοδος αρνητικών φορτίων προκαλεί υπερπόλωση και προκαλεί ανασταλτικά μετασυναπτικά δυναμικά. (Kandel et al., 2000) Και στις δύο περιπτώσεις πρόκειται για διαβαθμισμένα (βαθμωτά) δυναμικά, δηλαδή το πλάτος τους είναι ευθέως ανάλογο της έντασης του ερεθίσματος,

Το άθροισμα αυτών των μετασυναπτικών δυναμικών (που είναι μικρότερα των 100mV) αποτελεί το σήμα εισόδου για τα ηλεκτρόδια του EEG. Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι εξαιτίας της απόστασης που παρεμβάλλεται ανάμεσα στα ηλεκτρόδια και τον φλοιό του εγκεφάλου οι μετρήσεις μας καθίστανται επιρρεπείς σε θορύβους. Επιπλέον αυτή η ίδια απόσταση που μας απαγορεύει να εξάγουμε συγκεκριμένα τοπογραφικά συμπεράσματα ως προς την ενεργοποίηση των εγκεφαλικών περιοχών. Παρόλα αυτά οι κλινικοί επιστήμονες έχουν θεσπίσει συγκεκριμένα πρότυπα ως προς την τεχνική τοποθέτησης των επικρανιακών ηλεκτροδίων, όπως είναι το 10-20 ή το 10-20-20 που μας επιτρέπουν να εξάγουμε ασφαλή τοπογραφικά συμπεράσματα.



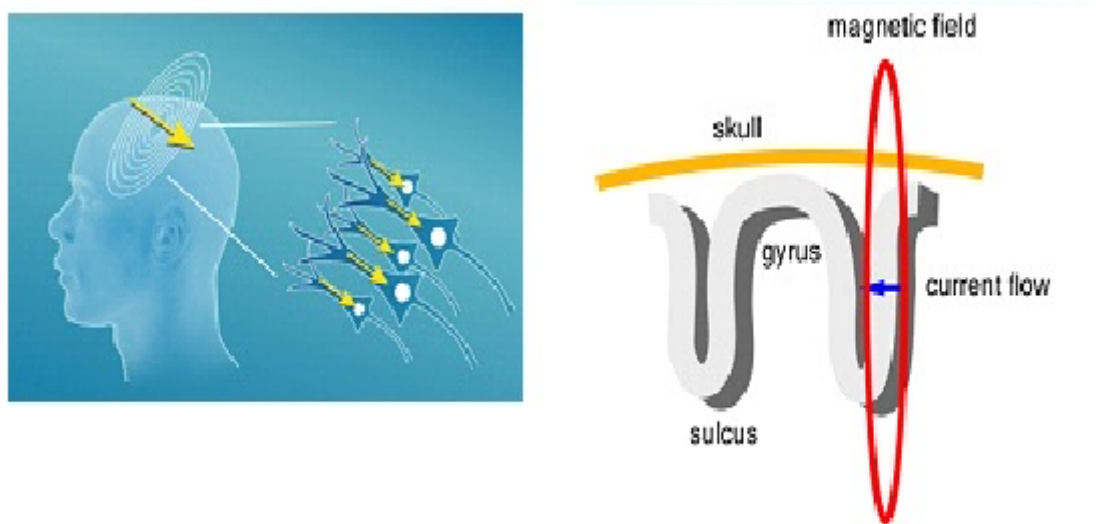
Εικόνα 2-2: Εγκεφαλικά σήματα από EEG

Πηγή: <http://en.wikipedia.org/wiki/Electroencephalography>

Επισημαίνεται ότι η χρήση της στον κλάδο της νευρολογίας είναι ευρύτατη εξαιτίας της απλότητας της εφαρμογής της (δεν απαιτεί δαπανηρό εξοπλισμό) καθώς επίσης και της ικανότητας να δίνει άμεσα αποτελέσματα - απαντήσεις όσον αφορά στην ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου (της τάξης των msec).

### 2.3 Μαγνητοεγκεφαλογραφία (MEG)

Η Μαγνητοεγκεφαλογραφία αποτελεί μια πιο σύγχρονη προσέγγιση του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος. Εκμεταλλεύεται τον ίδιο νευροφυσιολογικό μηχανισμό με την EEG, αν και για τον εντοπισμό της εγκεφαλικής λειτουργίας εκμεταλλεύεται τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται κάθετα ως προς τα επαγόμενα ιοντικά ρεύματα και τα αντίστοιχα μετασυναπτικά δυναμικά.



Εικόνα 2-3: Επαγόμενα μαγνητικά πεδία στον εγκέφαλο

Πηγή: <http://www.ctf.com/whyctf.html>

Για πρώτη φορά μετρήθηκαν σήματα MEG στο πανεπιστήμιο του Illinois από τον David Cohen το 1968, όπου ανίχνευσε εγκεφαλικά μαγνητικά πεδία με την βοήθεια πηνίων χαλκού. Σήμερα πλέον χρησιμοποιούμε αισθητήρες τεχνολογίας SQUID (superconducting quantum interference device) που στηρίζονται σε υπεραγώγιμα ηλεκτρικά κυκλώματα που μας βοηθάνε να εντοπίζουμε ακόμα και τα πιο ασθενή ηλεκτρομαγνητικά πεδία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Κατ' ελάχιστον απαιτούνται 300 αισθητήρες προκειμένου να έχουμε την πλήρη κάλυψη του ανθρώπινου κρανίου.

Δυστυχώς εξαιτίας του ότι τα μετρούμενα σήματα είναι της τάξης των 10 fT, την στιγμή που μόνο το μαγνητικό πεδίο της γης έχει ισχύ 0,5 mT, απαιτείται να υπάρχει ισχυρή μαγνητική θωράκιση του χώρου στον οποίο βρίσκεται η διάταξη MEG. Όπως είναι πλέον κατανοητό τέτοιου είδους συσκευές έχουν μεγάλο κόστος κτήσης και χρήσης σε σχέση με τις συσκευές EEG. Παρόλα αυτά η χρήση της μαγνητοεγκεφαλογραφίας μας προσφέρει καλύτερα τοπογραφικά δεδομένα -



πληροφορίες ως προς την εγκεφαλική λειτουργία, με λιγότερο θόρυβο, σε σχέση με την ηλεκτρογραφία.

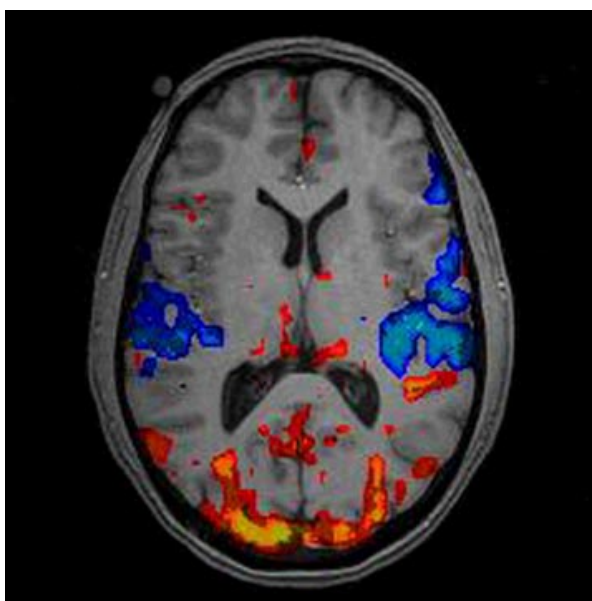


Εικόνα 2-4: Διάταξη MEG

Πηγή: <http://www.ctf.com/whycmf.html>

#### 2.4 Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (fMRI)

Μία από τις σύγχρονες μεθόδους εγκεφαλικής απεικόνισης είναι η Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (ή fMRI). Το fMRI χρησιμοποιείται τόσο για έρευνες σχετικά με τις λειτουργίες του εγκεφάλου, όσο και ως μέθοδος απεικόνισης για τους εγκεφάλους ασθενών ή ατόμων με ψυχικές διαταραχές.



Εικόνα 2-5: Λειτουργική Απεικόνιση Εγκεφάλου με MRI.

Πηγή: [scientopia.org](http://scientopia.org)

Ο όρος λειτουργική απεικόνιση προκύπτει εξαιτίας της δυνατότητας που μας δίνει η συγκεκριμένη μέθοδος να απεικονίσουμε τις περιοχές του εγκεφάλου οι οποίες ενεργοποιούνται σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (π.χ. κατά τη διάρκεια ενός οπτικού ερεθίσματος).

Η τεχνική του fMRI βασίζεται στο γεγονός πως οι νευρώνες, όπως όλα τα κύτταρα του σώματός μας, χρειάζονται ενέργεια για να λειτουργήσουν. Έτσι, όταν θέλουμε να κάνουμε κάποια συγκεκριμένη πράξη, όπως π.χ. να μιλήσουμε, να πιάσουμε ένα αντικείμενο ή να ψάξουμε κάτι στο οπτικό μας πεδίο, οι νευρώνες που βρίσκονται στην περιοχή του εγκεφάλου που είναι υπεύθυνη για αυτού του είδους τις ενέργειες ενεργοποιούνται. Αυτό σημαίνει πως ζητάνε αυτόματα επιπλέον αίμα, ώστε να αναπληρώσουν την ενέργεια που χάσανε κατά την ενεργοποίησή τους. Το οξυγόνο το μεταφέρουν οι αιμοσφαιρίνες των ερυθροκυττάρων από γειτονικά τριχοειδή αγγεία. Η τοπική αντίδραση στην σε αυτή την κατανάλωση οξυγόνου είναι μια αύξηση της ροής αίματος στις περιοχές αυξημένης νευρωνικής δραστηριότητας, που συμβαίνει με καθυστέρηση περίπου 1-5 δευτερόλεπτα. Αυτή η αιμοδυναμική απόκριση γίνεται μέγιστη μετά τα 4-5 δευτερόλεπτα και στη συνέχεια επιστρέφει στην φυσιολογική τιμή (συχνά ξεπερνώντας την ελαφρώς). Αυτή η απόκριση έχει ως συνέπεια τοπικές αλλαγές στις σχετικές συγκεντρώσεις οξυαιμοσφαιρίνης και δεοξυαιμοσφαιρίνης, και αλλαγή του όγκου του αίματος στην περιοχή μαζί με αυτή την αύξηση ροής.

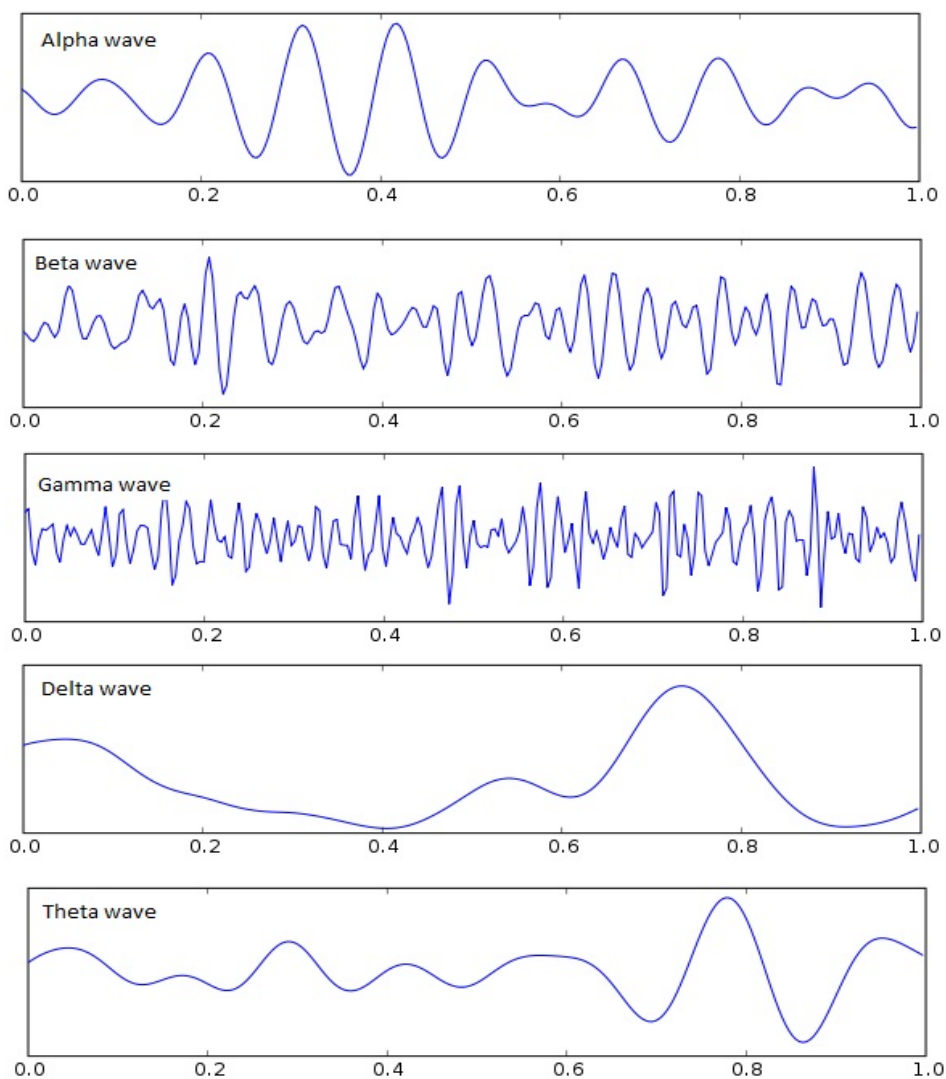
Η αιμοσφαιρίνη όμως είναι διαμαγνητικό υλικό όταν είναι οξυγονωμένη, ενώ είναι παραμαγνητικό υλικό όταν αποξυγονωθεί. Το σήμα μαγνητικού συντονισμού του αίματος αλλάζει επομένως ελαφρώς ανάλογα με το επίπεδο οξυγόνωσης. Αυτά τα διαφορετικά σήματα μπορούν να ανιχνευθούν με χρήση κατάλληλων μαγνητικών πεδίων, μέσω μίας τεχνικής που ονομάζεται αντίθεση BOLD (blood-oxygen-level-dependent contrast).



Εικόνα 2-6: Διάταξη fMRI.

Πηγή: [www.wired.com](http://www.wired.com)

Χάρη στο fMRI μπορούμε να έχουμε μία σχετικά λεπτομερή απεικόνιση του εγκεφάλου η οποία είναι αρκετά καλή ώστε οι ειδικοί να μπορέσουν να βγάλουν συμπεράσματα σχετικά με ποιες εγκεφαλικές περιοχές σχετίζονται με συγκεκριμένες δραστηριότητες ή δυσλειτουργίες. Ωστόσο εξαιτίας του ίδιου του νευροφυσιολογικού μηχανισμού που προκαλεί την αιμάτωση των νευρικών κυττάρων υπάρχει μία καθυστέρηση περίπου 6 sec όσον αφορά στην απεικόνιση της εγκεφαλικής λειτουργίας του εγκεφάλου, πράγμα που σημαίνει ότι χρονικά μπορεί να έχουμε αποκλίσεις στην ακρίβεια που υπερβαίνουν αυτές των EEG και MEG κατά πολύ. Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι απαιτείται η μαγνητική θωράκιση του χώρου όπου εδράζεται η διάταξη fMRI για τους ίδιους ακριβώς λόγους που απαιτείται η μαγνητική θωράκιση στην περίπτωση των διατάξεων MEG.



Εικόνα 2-7: Εγκεφαλικοί Ρυθμοί.

Πηγή: <http://en.wikipedia.org/wiki/Electroencephalography>

## 2.5 Εγκεφαλικοί ρυθμοί

Από την ανάλυση που έχει προκύψει στα δεδομένα που λαμβάνουμε από κάθε μία από τις παρακάτω μεθόδους (χρονοσειρές) έχουν αναγνωριστεί και αναφέρονται στη βιβλιογραφία πέντε διακριτοί τύποι ρυθμοί εγκεφαλικής δραστηριότητας : άλφα, θήτα, γάμμα, δέλτα και θήτα. Η διάκριση μεταξύ τους γίνεται με βάση το φασματικό τους περιεχόμενο, χωρίς όμως να υπάρχει απόλυτη συμφωνία για τα όρια και το εύρος κάθε περιοχής.

Κάθε ένας από τους παραπάνω εγκεφαλικούς ρυθμούς έχει συνδυαστεί με διάφορα επίπεδα εγρήγορσης χαλάρωσης, ύπνου κτλ. Επιπλέον η εμφάνισή τους σχετίζεται πολλές φορές και με την ηλικία του ατόμου, όπως θα δούμε και παρακάτω. Πιο συγκεκριμένα:

*Άλφα ρυθμός:* Πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις στη συχνотική περιοχή 8 - 13Hz. Αναφέρονται επίσης ως κύματα *Berger* προς τιμή του θεμελιωτή του ΗΕΓ. Ο α ρυθμός εντοπίζεται κύρια στον ινιακό λοβό ενώ είμαστε ξύπνιοι, σε χαλάρωση και με τα μάτια κλειστά, αντιπροσωπεύοντας κατά κάποιο τρόπο τη δραστηριότητα του οπτικού φλοιού απουσία εξωτερικών ερεθισμάτων

*Βήτα ρυθμός :* Με τον όρο αυτό χαρακτηρίζεται η εγκεφαλική ηλεκτρομαγνητική δραστηριότητα που καταγράφεται σε συχνότητες 12 - 30Hz και εμφανίζεται όταν είμαστε ξύπνιοι σε κατάσταση εγρήγορσης .

*Γάμμα ρυθμός :* Κατ' αναλογία με τον β ρυθμό, οι ταλαντώσεις τύπου γ (30 -80Hz) κυριαρχούν στο εγκέφαλο σε φάσεις λειτουργικής εγρήγορσης.

*Δέλτα ρυθμός :* Πρόκειται για μεγάλου πλάτους ( $\approx 75\mu V$ ) και χαμηλής συχνότητας ( $\leq 4\text{Hz}$ ) ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις που φυσιολογικά καταγράφονται στους ενήλικες κατά τα στάδια του ύπνου ενώ σε κατάσταση εγρήγορσης μόνο σε παιδιά ηλικίας κάτω των 13 ετών.

*Θήτα ρυθμός :* Ο ρυθμός αυτός καταγράφεται στις συχνότητες 4 - 8Hz και προκαλείται από τη συγχρονισμένη πυροδότηση πολλών νευρώνων, που εντοπίζονται στην περιοχή του ιππόκαμπου. Φυσιολογικά στους ενήλικες είναι υπαρκτός σε κάποια στάδια του ύπνου.

# 3. Εισαγωγή στην φασματική εκτίμηση

---

- 3.1 Εισαγωγή
  - 3.2 Στοχαστικές Διεργασίες (Stochastic Processes)
  - 3.3 Ο μετασχηματισμός Fourier
  - 3.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier
    - 3.4.1 Γραμμικότητα
    - 3.4.2 Ολίσθηση στον Χρόνο
    - 3.4.2 Ολίσθηση στην Συχνότητα
    - 3.4.4 Το Θεώρημα της Συνέλιξης (Convolution Theorem)
    - 3.4.5 Το Θεώρημα του Parseval (Parseval's Theorem)
  - 3.5 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT)
  - 3.6 Φασματική πυκνότητα ισχύος (Power Density Spectrum)
  - 3.7 Μη παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος
    - 3.7.1 Περιοδόγραμμα (Periodogram) και Κορρελόγραμμα (Correlogramm)
    - 3.7.2 Η μέθοδος του Welch
  - 3.8 Παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος
    - 3.8.1 Το Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης (MultiVariate AutoRegressive Model)
    - 3.8.2 Η μέθοδος του Yule-Walker
    - 3.8.3 Η μέθοδος του Burg
    - 3.8.4 Επιλογή της τάξης του AR μοντέλου
-

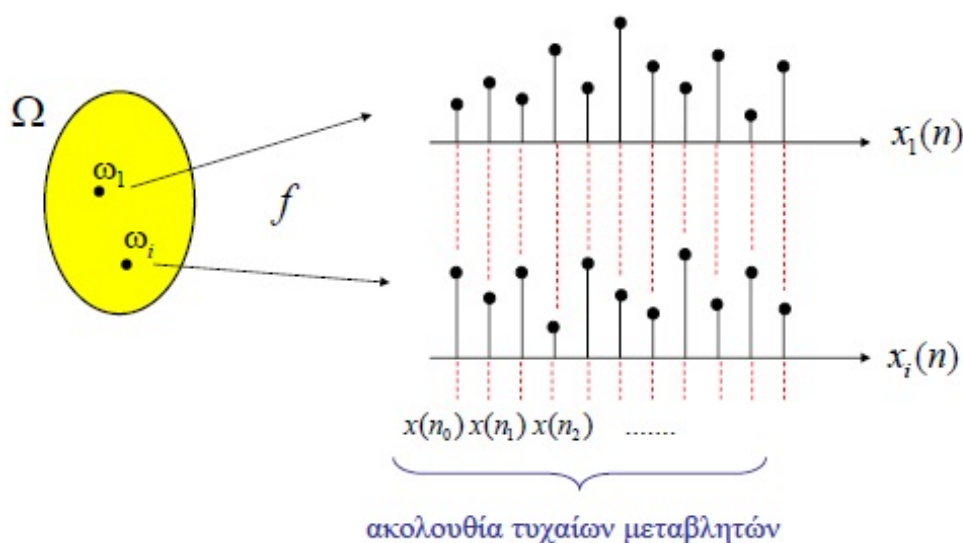
### 3.1 Εισαγωγή

Η πολυπλοκότητα της εγκεφαλικής δραστηριότητας επιτρέπει τη μελέτη της ως μια στοχαστική διαδικασία κάτι που άλλωστε επιβεβαιώνεται και από τη μορφή των σημάτων τόσο των EEG δεδομένων όσο και των δεδομένων που προκύπτουν από τις υπόλοιπες μεθόδους (MEG και fMRI) . Από τη στιγμή που στο EEG παίρνουμε πολλαπλά σήματα στην έξοδο ουσιαστικά έχουμε να κάνουμε με ένα στοχαστικό μοντέλο πολλών μεταβλητών (MultiVariate system).

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε τα μαθηματικά εκείνα εργαλεία που επιτρέπουν την ανάλυση και την επεξεργασία ενός στοχαστικού σήματος.

### 3.2 Στοχαστικές Διεργασίες (Stochastic Processes)

Ως τυχαία διαδικασία (random process) ή στοχαστική διαδικασία (stochastic process) ορίζουμε μια συλλογή από σήματα, δηλαδή συναρτήσεις στο χρόνο, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος. Δηλαδή, δοθέντος ενός δειγματικού χώρου  $\Omega = (\omega_i)_{i=1}^M$  , σε κάθε συμβάν  $\omega_i$  αντιστοιχεί ένα σήμα  $x(t; \omega_i)$ , το οποίο έχει πιθανότητα  $\Pr\{\omega_i\}$ . Κάθε μια από τις συναρτήσεις ονομάζεται συνάρτηση δείγμα (sample function) ή πραγματοποίηση (realization) της τυχαίας διαδικασίας. Για κάθε χρονική στιγμή  $t_0$ , έχουμε  $N$  διαφορετικές πιθανές τιμές  $x(t_0; \omega_i)$ . Οι τιμές αυτές συμβολίζονται γενικά  $x(t_0)$  και αποτελούν στην ουσία μια τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή μιας τυχαίας διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή. Άρα, μια τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές,  $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots\}$ , και γενικά γράφουμε  $\{x(t), t \in D\}$ .



Εικόνα 3-1: Διακριτή τυχαία διαδικασία.

Πηγή: <http://xanthippi.ceid.upatras.gr/courses/courses/courses.php#5>

Όταν αναφερόμαστε σε τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου το σύνολο  $D$  ταυτίζεται με το σύνολο των ακεραίων και γράφουμε  $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ . Συνεπώς, μια διακριτή τυχαία διαδικασία είναι μια αντιστοίχιση των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου (εκβάσεις ενός πειράματος) σε μια συλλογή από σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες διακριτών τυχαίων μεταβλητών).

Σε κάθε τυχαία μεταβλητή της ακολουθίας αντιστοιχεί μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (probability distribution function):

$$F_{x(n)}(a) = \Pr\{x(n) \leq a\} \quad (1)$$

και μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function):

$$f_{x(n)}(a) = \frac{d}{da} F_{x(n)}(a) \quad (2)$$

Για να χαρακτηρίσουμε όμως πλήρως την τυχαία διαδικασία χρειαζόμαστε την από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint probability distribution function), η οποία μας δίνει πληροφορίες για το πώς οι τυχαίες μεταβλητές συνδέονται μεταξύ τους :

$$F_{x(n_0), x(n_1), \dots, x(n_N)}(a_0, a_1, \dots, a_N) = \Pr\{x(n_0) \leq a_0, x(n_1) \leq a_1, \dots, x(n_N) \leq a_N\} \quad (3)$$

Για κάθε  $n$  μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά του τυχαίου σήματος  $x(n)$ . Έτσι λοιπόν ορίζουμε ως μέσο όρο της τυχαίας διαδικασίας την ντετερμινιστική ακολουθία:

$$m_x(n) = E\{x(n)\} \quad (4)$$

και ως διασπορά της τυχαίας διαδικασίας την ντετερμινιστική ακολουθία:

$$\sigma_x^2(n) = E\{[x(n) - m_x(n)]^2\} \quad (5)$$

Τα παραπάνω  $1^{ns}$  τάξη στατιστικά μεγέθη αποτελούν τους μέσους συνόλου (ensemble averages) και γενικά εξαρτώνται και τα δύο από την τιμή του  $n$ .

Συνεχίζοντας την αναφορά μας στους μέσους όρους συνόλων ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$r_{xx}(k, l) = E\{x(k)x^*(l)\} \quad (6)$$

και τη συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς (autocovariance function) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$c_{xx}(k, l) = E\{[x(k) - m_x(k)][x(l) - m_x(l)]^*\} = c_{xx}(k, l) = r_x(k, l) - m_x(k)m_x^*(l) \quad (7)$$

Τέλος στην περίπτωση ύπαρξης δύο τυχαίων διαδικασιών  $x(n)$  και  $y(n)$  ορίζουμε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation function):

$$r_{xy}(k, l) = E\{x(k)y^*(l)\} \quad (8)$$

και την συνάρτηση ετεροσυνδιασποράς (cross-covariance function):

$$c_{xy}(k, l) = E\{[x(k) - m_x(k)][y(l) - m_y(l)]^*\} = c_{xy}(k, l) = r_{xy}(k, l) - m_x(k)m_y^*(l) \quad (9)$$

### 3.3 Ο μετασχηματισμός Fourier

Απώτερος σκοπός της ενασχόλησης μας με τα νευροφυσιολογικά σήματα είναι η ανάλυση τους, έτσι ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα χρήσιμα για την κατανόηση των φυσικών διεργασιών. Μία από τις πιο γνωστές μεθόδους ανάλυσης ενός σήματος είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Αποτελεί γενίκευση της σειράς Fourier για μη περιοδικά σήματα. Είναι στην ουσία μία αυστηρώς ορισμένη μαθηματική διεργασία η οποία αποσυνθέτει μία τυχούσα συνάρτηση ή κυματομορφή σε άθροισμα απείρων περιοδικών ημιτονοειδών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων. Προσδιορίζει λοιπόν τις διάφορες ημιτονοειδείς συχνότητες και τα αντίστοιχα πλάτη τους, βοηθώντας μας να μεταφερθούμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων, και να εντοπίσουμε χαρακτηριστικά του σήματος που δεν είναι εμφανή όταν κάνουμε χρονική αναπαράσταση του αυτού. Η γέννηση και οι ρίζες του μετασχηματισμού Fourier οφείλονται στον Γάλλο φυσικο-μαθηματικό Jean Baptiste Fourier ο οποίος υιοθέτησε για πρώτη φορά την ανάλυση μιας σύνθετης συνάρτησης σε άθροισμα συναρτήσεων απλών συχνοτήτων για να μελετήσει φαινόμενα διάδοσης της θερμότητας.

Ως μετασχηματισμό Fourier μίας συνάρτησης  $x(t)$  ορίζουμε την μιγαδική συνάρτηση  $X(\omega)$ :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

Όμοια και εκ του ορισμού προκύπτει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (11)$$

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις οι εξισώσεις (10) και (11) ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.



### 3.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier παρουσιάζει ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την ανάλυση σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Η απόδειξή τους, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, γίνεται εύκολα, με αφετηρία τον ορισμούς

#### 3.4.1 Γραμμικότητα

Εάν  $x_1(t) \xrightarrow{F} X_1(\omega)$  και  $x_2(t) \xrightarrow{F} X_2(\omega)$  τότε:

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \xrightarrow{F} \alpha_1 X_1(\omega) + \alpha_2 X_2(\omega) \quad (12)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσότερων σημάτων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των μετασχηματισμών Fourier του κάθε σήματος.

#### 3.4.2 Ολίσθηση στον χρόνο

Εάν  $x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$  τότε:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{F} e^{j\omega t_0} X(\omega) \quad (13)$$

Η ιδιότητα αυτή σημαίνει ότι, εάν ένα σήμα μετατοπιστεί στο πεδίο του χρόνου κατά  $t_0$ , τότε το φάσμα του μέτρου του παραμένει αναλλοίωτο. Αυτό που αλλάζει κατά  $-\omega t_0$  είναι το φάσμα της φάσης. Γίνεται φανερό, επομένως, ότι το περιεχόμενο των συχνοτήτων ενός σήματος εξαρτάται μόνον από τη μορφή του και όχι από τη θέση του. Από μαθηματική άποψη, αυτό εκφράζεται ως εξής: η ολίσθηση (μετατόπιση) στο πεδίο του χρόνου κατά  $t_0$ , ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του φάσματος επί  $e^{j\omega t_0}$  στο πεδίο της συχνότητας.

#### 3.4.3 Ολίσθηση στη συχνότητα

Εάν  $x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$  τότε:

$$e^{j\omega t_0} x(t) \xrightarrow{F} X(\omega - \omega_0) \quad (14)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, ο πολλαπλασιασμός μιας ακολουθίας  $x(t)$  επί  $e^{j\omega t_0}$  ισοδυναμεί με την ολίσθηση (μετατόπιση) του φάσματος  $X(\omega)$  κατά  $\omega_0$ .

### 3.4.4 Το Θεώρημα της Συνέλιξης (Convolution Theorem)

Έστω δύο ακολουθίες δεδομένων  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  και μια τρίτη η οποία ορίζεται ως η συνέλιξη των δύο πρώτων:

$$x(t) = \int_t x_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * x_2(t) \quad (15)$$

τότε το φάσμα  $X(f)$  δίνεται από το γινόμενο των φασμάτων των  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$ .

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \quad (16)$$

Το θεώρημα της συνέλιξης είναι από τα πλέον σημαντικά εργαλεία στην ανάλυση γραμμικών συστημάτων. Ουσιαστικά μας λέει ότι η συνέλιξη δύο ακολουθιών στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με το γινόμενο των φασμάτων τους στο πεδίο της συχνότητας.

### 3.4.5 Το θεώρημα του Parseval (Parseval's Theorem)

Ένα από τα θεμελιώδη θεωρήματα πάνω στο οποίο στηρίζεται η ανάλυση των σημάτων είναι το θεώρημα του Parseval, σύμφωνα με το οποίο

εάν  $x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$  τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (17)$$

Το θεώρημα του Parseval αναφέρεται στη διατήρηση της συνολικής ενέργειας του σήματος κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

## 3.5 Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT)

Πρέπει να σημειωθεί όμως ότι κατά την ανάλυση των νευροφυσιολογικών σημάτων ασχολούμαστε με ψηφιακά σήματα. Ψηφιακό σήμα σημαίνει ότι έχουμε μία διακριτή ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος) και ως εκ τούτου και τα σήματα μας δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια ακολουθία τιμών.

$$x(n), 0 \leq n \leq N-1 \quad (18)$$

Πολλές φορές η ανάλυση στο πεδίο του χρόνου δεν μας παρέχει τις πληροφορίες που θέλουμε και για αυτό χρειάζεται να κάνουμε ανάλυση και στον χώρο των συχνοτήτων. Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) είναι ο πρακτικός τρόπος υπολογισμού του συχνοτικού περιεχομένου μιας πεπερασμένης ακολουθίας (Lyons, 2004). Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ισχύει ότι για πεπερασμένη ακολουθία δειγμάτων  $x_0, x_1, \dots, x_{L-1}$  ο DFT δίδεται από τον τύπο:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (19)$$

ή ισοδύναμα

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)] \quad (20)$$

Από το παραπάνω τύπο καταλαβαίνουμε ότι οποιοδήποτε  $X(k)$  είναι άθροισμα  $N$  όρων ενός διακριτού σήματος εισόδου  $x(n)$  με ένα συνημίτονο και ένα ημίτονο των οποίων η συχνότητα ισούται με

$$f_{analysis}(k) = kf_s / N \quad (21)$$

Φυσικά μπορούμε να πάμε από τον χώρο των συχνοτήτων πίσω στο χώρο του χρόνου με παρόμοιο τρόπο, δηλαδή:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi nm/N} \quad (22)$$

ή ισοδύναμα

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi nm/N) + j \sin(2\pi nm/N)] \quad (23)$$

Η σπουδαιότητα του μετασχηματισμού αυτού έγκειται στην ύπαρξη ενός πολύ γρήγορου υπολογιστικού αλγόριθμου, Fast Fourier Transform (ή FFT), με την βοήθεια του οποίου είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον DFT μιας ακολουθίας σε χρόνο πολύ μικρότερο από αυτόν που θα απαιτούσε ο απευθείας υπολογισμός μέσω του ορισμού (Cooley & Tuckey, 1965), (Cooley et al., 1967). Πιο συγκεκριμένα για τον υπολογισμό του DFT μιας ακολουθίας  $N$  δειγμάτων χρειαζόμαστε  $N^2$  πολλαπλασιασμούς ενώ για τον υπολογισμό του FFT της ίδιας ακολουθίας απαιτούνται μόλις  $N \log_2 N$  πολλαπλασιασμοί.

### 3.6 Φασματική πυκνότητα ισχύος (Power Density Spectrum)

Η ανάλυση Fourier είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή και ανάλυση διακριτού χρόνου σημάτων. Ο μετασχηματισμός Fourier όμως παίζει σημαντικό ρόλο και στην μελέτη τυχαίων διαδικασιών. Όπως ξέρουμε μία τυχαία διαδικασία αποτελείται από ένα σύνολο σημάτων διακριτού χρόνου και άρα δε μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της διαδικασίας (Stoica & Moses, 1997). Παρόλα αυτά όπως θα δούμε παρακάτω είναι δυνατό να αναπτύξουμε μία αναπαράσταση της διαδικασίας στο χώρο των συχνοτήτων αν εκφράσουμε τον μετασχηματισμό Fourier με όρους ενός μέσου συνόλου (ensemble average) (Hayes, 1996).

Έστω ότι το σήμα  $x(n)$  θεωρείται ότι είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Ονομάζουμε φασματική πυκνότητα ισχύος (power spectral density ή PSD) ή φάσμα ισχύος (power spectrum) μιας στάσιμης υπό την ευρεία έννοια στοχαστική διεργασίας διακριτού χρόνου  $x(n)$  τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (Hayes, 1996):

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{xx}(k) e^{jk\omega} \Rightarrow r_{xx}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) e^{-jk\omega} d\omega \quad (24)$$

Συνήθως θεωρούμε ότι:

$$\omega \in [-\pi, \pi] \text{ ή } f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (25)$$

Ο παραπάνω ορισμός προκύπτει από το θεώρημα Wiener - Khintchine.

Ένας δεύτερος ορισμός του φάσματος ισχύος δίδεται από τον τύπο (Hayes, 1996):

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\} \quad (26)$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον πρώτο ορισμό (24) υπό την προϋπόθεση ότι  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} |n| |r_{xx}(n)| = 0$ , δηλαδή ότι η ακολουθία αυτοσυσχέτισης εξασθενεί επαρκώς γρήγορα (Proakis & Manolakis, 1996).

Λόγω της σημασίας του φάσματος ισχύος στη μελέτη χρονοσειράς έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι εκτίμησης του. Συνήθως τις μεθόδους αυτές τις χωρίζουμε σε δύο κύριες κατηγορίες, τις μη παραμετρικές μεθόδους εκτίμησης, όπου η εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται απευθείας από τη χρονοσειρά (σήμα), και τις παραμετρικές μεθόδους κατά τις οποίες η εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται μέσα από την εκτίμηση των παραμέτρων του MVAR μοντέλου που προσαρμόζεται στη χρονοσειρά. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα εξετάσουμε δύο από τις πιο διαδεδομένες μη παραμετρικές μεθόδους υπολογισμού του φάσματος ισχύος (PSD), το περιοδόγραμμα - κορρελόγραμμα και την μέθοδο του Welch. καθώς και δύο εκ των παραμετρικών μεθόδων οι οποίες βασίζονται στην εκτίμηση των παραμέτρων του AR μοντέλου, τη μέθοδο Yule-Walker και τη μέθοδο Burg.

### 3.7. Μη παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος

#### 3.7.1 Περιοδόγραμμα (Periodogramm) και Κορρελόγραμμα (Correlogramm)

Το περιοδόγραμμα βασίζεται στην εξίσωση (26). Επειδή όμως στην πράξη δεν υπάρχουν δεδομένα με άπειρο μήκος θεωρώντας ένα πεπερασμένο σύνολο δεδομένων μήκους  $N$  τότε από τον παραπάνω ορισμό αν αφαιρέσουμε το όριο και την αναμενόμενη τιμή καταλήγουμε στην εκτίμηση του περιοδογράμματος.

$$P_{xx_{PER}}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(\omega)|^2 \quad (27)$$

όπου  $X(\omega)$  είναι ο DFT του σήματος  $x(n)$ . Το περιοδόγραμμα εμφανίστηκε το 1898 (από τον Arthur Schuster) ως μέθοδος εύρεσης κρυφής περιοδικότητας σε χρονικές σειρές.

Η αντίστοιχη και ισοδύναμη εκτίμηση από τον ορισμό της (24) είναι η εκτίμηση του κορρελογράμματος:

$$P_{xx_{COR}}(\omega) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}(n) e^{-j\omega n} \quad (28)$$

όπου το  $\hat{r}_{xx}$  είναι η εκτίμηση αυτοσυσχέτισης για διαφορά  $n$ . Υπό αυτή την έννοια η εκτίμηση της PSD γίνεται εκτίμηση αυτοσυσχέτισης. Για την περίπτωση μιας εργοδικής ως προς  $r_{xx}$  διαδικασίας ισχύει:

$$\hat{r}_{xx}(n) = \begin{cases} 0 & |k| \geq N \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n+k) x^*(n) & k=0,1,\dots,N-1 \\ \hat{r}_{xx}^*(-k) & k=-N+1,-N+2,\dots,-1 \end{cases} \quad (29)$$

Στη πράξη και οι δύο τύποι (27) και (28) αποτελούν μία κακή εκτίμηση του PSD. Η αιτία είναι ότι οι διακυμάνσεις και των δύο εκτιμήσεων είναι ψηλές, κάτι που οφείλεται στο ότι και τα δύο υπολογίζονται από μία και μόνο υλοποίηση μιας τυχαίας διαδικασίας. Επιπλέον εμφανίζεται αυξημένη φασματική διαρροή ως απόρροια του πεπερασμένου μήκους του σήματος. Η φασματική διαρροή οδηγεί και σε αντίστοιχη απώλεια διακριτικής ικανότητας. Η διακριτική ικανότητα (resolution) του εκτιμητή φάσματος είναι η ελάχιστη απόσταση (στη συχνότητα) μεταξύ δύο τυχαίων διαδικασιών στενής ζώνης (narrowband), ώστε να μπορούν να αναγνωριστούν από τη μέθοδο εκτίμησης του φάσματος. Γενικότερα για να μπορέσουμε να ξεχωρίσουμε δυο γειτονικές συχνότητες θα πρέπει η απόστασή τους να είναι μεγαλύτερη από το εύρος του κυρίου λοβού.

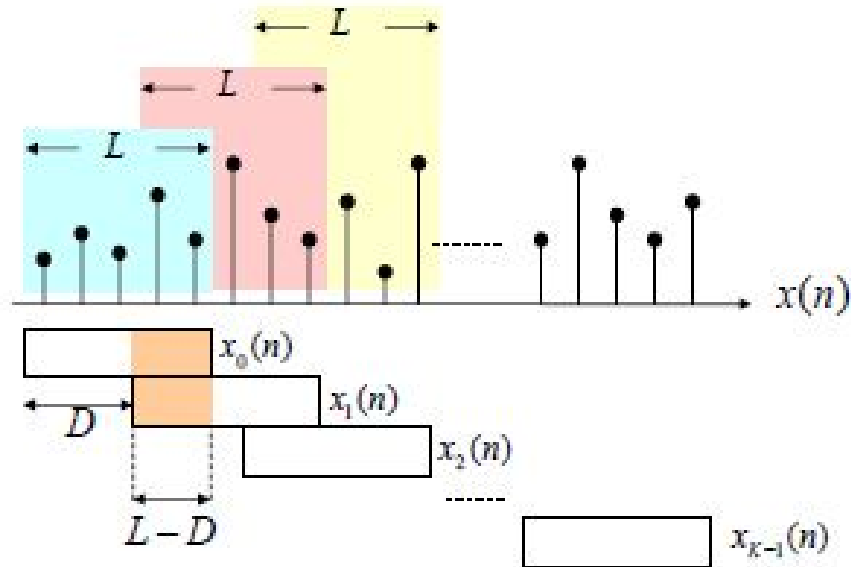
### 3.7.2 Η μέθοδος του Welch

Η μέθοδος που εισήγαγε ο Welch (Welch, 1967) έχει δύο σημαντικά στοιχεία. Πρώτον, διαχώρισε το σήμα  $x(n)$  με μήκος  $N$  σε  $K$  τμήματα, όπου το κάθε ένα έχει μήκος  $L$ . Όμως τα τμήματα μπορούν να επικαλύπτονται (overlapping).

Έτσι τα τμήματα των δεδομένων συμβολίζονται ως εξής:

$$x_m(n) = x(n + mD) \quad \begin{cases} n = 0, 1, \dots, L-1 \\ m = 0, 1, \dots, K-1 \end{cases} \quad (30)$$

όπου  $mD$  είναι το σημείο έναρξης για την  $m$  ακολουθία. Παρατηρούμε ότι εάν  $D=L$ , τότε τα τμήματα δεν επικαλύπτονται (Μέθοδος Barlett). Εάν  $D=L/2$  τότε υπάρχει 50% επικάλυψη μεταξύ διαδοχικών τμημάτων.



Εικόνα 3-2: Το περιοδόγραμμα του Welch.

Πηγή: [http://xanthippi.ceid.upatras.gr/courses/stochastic\\_signals/stochastic.php](http://xanthippi.ceid.upatras.gr/courses/stochastic_signals/stochastic.php)

Έπειτα, ένα γενικό παράθυρο εφαρμόζεται σε κάθε ακολουθία, οπότε δημιουργείται ένα σύνολο από τροποποιημένα περιοδογράμματα. Στην συνέχεια από αυτά εξάγεται ο μέσος όρος (Hayes, 1996). Η εφαρμογή των παραθύρων στο πεδίο του χρόνου πριν τον υπολογισμό του FFT έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της στάθμης των πλευρικών λοβών (sidelobes), δηλαδή, της φασματικής διαρροής.

Window	Sidelobe level (dB)	Resolution $(\Delta\omega)_{3dB}$ 3 dB Bandwidth
Rectangular, $w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	-13	$0.89(2\pi/N)$
Bartlett, $w(n) = \begin{cases} \frac{N- n }{N}, &  n  \leq N \\ 0, &  n  > N \end{cases}$	-27	$1.28(2\pi/N)$
Hanning, $w(n) = \begin{cases} 0.5 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	-32	$1.44(2\pi/N)$
Hamming, $w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	-43	$1.30(2\pi/N)$
Blackman, $w(n) = \begin{cases} .42 - .5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + .08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	-58	$1.68(2\pi/N)$

Εικόνα 3-3: Διάφορα είδη παραθύρων που χρησιμοποιούνται κατά το DSP.

Πηγή: [www.ceid.upatras.gr](http://www.ceid.upatras.gr)

Ο εκτιμητής του φάσματος του Welch δίδεται από τον τύπο:

$$P_{xx_{WELCH}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{m=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{L-1} |w(n)x(n+mD)e^{-j\omega n}|^2 \quad (31)$$

όπου  $U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2$ . Η  $U$  ονομάζεται σταθερά κανονικοποίησης. Γενικά πρέπει να γίνει κανονικοποίηση του αποτελέσματος για να ληφθεί υπόψη η απώλεια ισχύος λόγω του παραθύρου  $w(n)$ .

### 3.8 Παραμετρικές μέθοδοι υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας ισχύος

#### 3.8.1 Το Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης (MultiVariate AutoRegressive Model)

Όπως έχουμε αναφέρει και στην εισαγωγή, η πολυπλοκότητα της εγκεφαλικής δραστηριότητας επιτρέπει τη μελέτη της ως μια στοχαστική διαδικασία κάτι που άλλωστε επιβεβαιώνεται και από τη μορφή των σημάτων του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (EEG). Από τη στιγμή που στο EEG παίρνουμε πολλαπλά σήματα στην έξοδο ουσιαστικά έχουμε να κάνουμε με ένα στοχαστικό μοντέλο πολλών μεταβλητών. Σε ένα στοχαστικό μοντέλο πολλών μεταβλητών υπάρχει επιρροή των χρονικά προηγούμενων τιμών μιας μεταβλητής στην τρέχουσα τιμή μιας άλλης. Το βάθος χρόνου που εξετάζεται εξαρτάται από την τάξη του μοντέλου. Το μεγάλο πλεονέκτημα των εν λόγω μεθόδων είναι ότι μας δίνουν τη δυνατότητα να καθορίσουμε την ροή της πληροφορίας ανάμεσα στις περιοχές του εγκεφάλου. Αυτή η διαδικασία επιτυγχάνεται με την υλοποίηση διάφορων υπολογιστικών μεθόδων οι βασικότερες εκ των οποίων θα μας απασχολήσουν στο κεφάλαιο 4.

Προτού προχωρήσουμε όμως στην επεξήγηση των παραπάνω υπολογιστικών μεθόδων κρίνεται απαραίτητο να εξηγήσουμε το μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης πολλών μεταβλητών.

Έστω πως παίρνουμε από  $k$  κανάλια (εξόδους) τα αντίστοιχα σήματα. Τα σήματα στην έξοδο καταγράφονται χρονικά ως:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)) \quad (32)$$

Το MVAR μοντέλο στη γενική του μορφή εκφράζεται ως εξής:

$$x(t) = \sum_{q=1}^p A(q)x(t-q) + E(t) \quad (33)$$

όπου  $x(t)$  είναι τα δεδομένα μας στην έξοδο σε χρόνο  $t$ ,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))^T \quad (34)$$

ενώ για κάθε κανάλι  $k$  και για  $n$  χρονικές τιμές δειγματοληψίας ισχύει:

$$x_k(t) = (x_k(t_1), x_k(t_2), \dots, x_k(t_n))^T \quad (35)$$

$E(t)$  είναι το διάνυσμα του λευκού θορύβου με μορφή παρόμοια αυτής του  $x(t)$ , δηλαδή  $E(t) = (E_1(t), E_2(t), \dots, E_k(t))^T$ , ενώ οι  $A_q = A_q(1), A_q(2), \dots, A_q(p)$  είναι τετραγωνικοί πίνακες  $k \times k$  που περιγράφουν τους συντελεστές του μοντέλου. Για κάθε  $q$ , από 1 μέχρι  $p$  έχουν την μορφή:

$$A_q = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι όροι  $A_{ij}$  είναι διαφορετικοί για κάθε  $q$  και ότι ισχύει ότι  $A(0) = I$ . Τέλος το  $q$  συμβολίζει το βήμα της διαδικασίας, το  $p$  την τάξη του MVAR μοντέλου και το  $k$  το αριθμός των καναλιών. Για τον υπολογισμό των συντελεστών παλινδρόμησης υπάρχουν δύο κύριες μέθοδοι, η μέθοδος του Yule-Walker και η μέθοδος του Burg.

### 3.8.2 Η μέθοδος του Yule-Walker

Στη μέθοδο Yule-Walker υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση από τα δεδομένα και την χρησιμοποιούμε για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους του AR μοντέλου και ως εκ τούτου και την φασματική πυκνότητα ισχύος του. Σε αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιούμε τον τύπο με την απόκλιση της αυτοσυσχέτισης:

$$r_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*(n)x(n+k) \quad (37)$$



για να εξασφαλιστεί ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένος. Το αποτέλεσμα είναι ένα σταθερό AR μοντέλο. Εάν και η σταθερότητα δεν είναι ένα κρίσιμο στοιχείο στον υπολογισμό του φάσματος της ισχύς είναι πολύ πιθανόν ένα σταθερό AR μοντέλο να έχει την καλύτερη παρουσίαση των δεδομένων. Οι AR παράμετροι υπολογίζονται από την επίλυση της κανονικής εξίσωσης αυτοσυσχέτισης (Proakis & Manolakis, 1996):

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}^*(1) & \cdots & r_{xx}^*(p-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_q(1) \\ A_q(2) \\ \vdots \\ A_q(p) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Το φάσμα της ισχύος υπολογίζεται ως εξής:

$$P_{xx}^{YW}(f) = \frac{\sigma_E^2}{\left| 1 + \sum_{q=1}^p A(q) e^{-j2\pi fq} \right|^2} \quad (39)$$

όπου  $\sigma_E^2$  είναι η ελάχιστη τετραγωνική μέση τιμή που υπολογίζεται για  $p$  τάξης πρόβλεψη και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\sigma_E^2 = r_{xx}(0) \prod_{q=1}^p \left[ 1 - |A_q(q)|^2 \right] \quad (40)$$

### 3.8.3 Η μέθοδος του Burg

Το σύνολο των Burg AR εκτιμητών χρησιμοποιεί τη μέθοδο Burg για να ταιριάζει ένα μοντέλο αυτοσυσχέτισης (AR) στα δεδομένα εισόδου με την ελαχιστοποίηση των τετραγώνων (least squares) των προς τα εμπρός (forward) και προς τα πίσω (backward) σφαλμάτων πρόβλεψης, περιορίζοντας τις παραμέτρους του AR για να ικανοποιήσει την Levinson-Durbin παλινδρόμηση (recursion). Η είσοδος είναι ένα σύνολο διαδοχικών χρονικών δειγμάτων, το οποίο υποτίθεται ότι είναι η έξοδος ενός AR συστήματος το οποίο έχει σαν είσοδο λευκό θόρυβο (Proakis & Manolakis, 1996). Η μέθοδος υπολογίζει την ομαλοποιημένη εκτίμηση των AR παραμέτρων του συστήματος,  $A(q)$ , ανεξάρτητα για κάθε διαδοχική είσοδο. Από τους υπολογισμούς των AR παραμέτρων, καταλήγουμε στην εξής σχέση για την εύρεση του φάσματος ισχύος:

$$P_{xx}^{BU}(f) = \frac{\hat{E}_q}{\left| 1 + \sum_{q=1}^p A(q) e^{-j2\pi fq} \right|^2} \quad (41)$$

όπου  $\hat{E}_q$  είναι το συνολικό ελαχιστοποιημένο σφάλμα και  $A(k)$  είναι οι AR παράμετροι που ονομάζονται και συντελεστές αντανάκλασης (reflecting coefficients) από την

τεχνική Levinson-Durbin. Γενικά η μεθόδος του Burg προσφέρει ένα σταθερό AR μοντέλο και υπολογίζεται εύκολα.

### 3.8.4 Επιλογή της τάξης του AR μοντέλου

Το πρώτο βήμα για την επίλυση του MVAR μοντέλου είναι η εκτίμηση της τάξης του μοντέλου παλινδρόμησης (model order). Το κύριο πρόβλημα στον προσδιορισμό της τάξης μοντέλου είναι ο συμβιβασμός (trade-off) μεταξύ της προσαρμογής (απομένουσα διακύμανση σφάλματος) και της πολυπλοκότητας του μοντέλου. Έστω ότι μία χρονοσειρά προσαρμόζεται σε μία AR διαδικασία τάξης  $p$ . Αν η χρησιμοποιούμενη τάξη  $p$  είναι μικρότερη από την πραγματική τάξη του μοντέλου τότε η απομένουσα διακύμανση σφάλματος αυξάνεται. Αν η τάξη  $p$  είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την πραγματική τάξη τότε η απομένουσα διακύμανση σφάλματος δεν αναμένεται να μειώνεται σημαντικά με αύξηση της τάξης. Έχουν προταθεί πάρα πολλά κριτήρια για την εύρεση της τάξης ενός τέτοιου μοντέλου. Τα πιο σημαντικά είναι το Final Prediction Error - FPE Criterion (Akaike, 1969), το Akaike Information Criterion - AIC (Akaike, 1974), Bayesian Information Criterion - BIC (Schwarz, 1978) και τέλος το Minimum Description Length - MDL (Proakis & Manolakis, 1996)

Για  $n$  μεταβλητές θα έχουμε:

$$FPE(p) = \frac{n+p}{n-p} \sigma_E^2 \quad (42)$$

$$AIC(p) = \ln(\det(\sigma_E^2)) + \frac{2p}{n} \quad (43)$$

$$BIC(p) = \ln(\det(\sigma_E^2)) + \frac{\ln(n)p}{n} \quad (44)$$

$$MDL(p) = n \log(\sigma_E^2) + p \log(n) \quad (45)$$

όπου  $\sigma_E^2$  είναι η διακύμανση του εναπομείναντος σφάλματος. Για κάθε ένα από τα παραπάνω κριτήρια η τάξη του μοντέλου είναι η τιμή  $p$  για την οποία η συνάρτηση του κριτηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή.

# 4. Ανάλυση νευροφυσιολογικών σημάτων

---

4.1 Εισαγωγή

4.2 Αιτιότητα κατά Granger (Granger Causality)

4.3 Συνάφεια (Coherence)

4.4 Μερική Συνάφεια (Partial Coherence)

4.5 Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Directed Coherence)

4.6 Μερική Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Partial Directed Coherence)

---

## 4.1 Εισαγωγή

Ένας από τους πιο συνηθισμένους τρόπους για την απόκτηση πληροφοριών σχετικά με τα νευροφυσιολογικά συστήματα είναι να μελετήσει κανείς τα χαρακτηριστικά του σήματος (-ων) που καταγράφονται από αυτά χρησιμοποιώντας παραμετρικές τεχνικές ανάλυσης χρονοσειρών (Galka, 2000). Η εξέλιξη της επιστήμης και της τεχνολογίας έχει δώσει τη δυνατότητα στους μελετητές να διεξάγουν ένα διαρκώς αυξανόμενο αριθμό από πειράματα κατά την οποία καταγράφονται ταυτόχρονα πολλά νευροφυσιολογικά σήματα. Η εκτίμηση της διασύνδεσης μεταξύ των σημάτων αυτών μπορεί να δώσει νέες πληροφορίες σε σχέση με τη λειτουργία των συστημάτων που τα παράγουν.

Ένα από τα παλαιότερα και πιο κλασικά μέτρα αλληλεξάρτησης μεταξύ των δύο χρονοσειρών στον τομέα του χρόνου είναι η ετεροσυσχέτιση. Οι πρώτες προσεγγίσεις ως προς την ετεροσυσχέτιση δύο ταυτόχρονα μετρούμενων σημάτων EEG έγιναν πριν από περίπου μισό αιώνα (Brazier and Barlow (1956), Brazier and Casby (1952)).

Ουσιαστικά η συνάρτηση της ετεροσυσχέτισης μετρά τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  συναρτήσει του χρόνου υστέρησης ( $\tau$ ) μεταξύ των δύο σημάτων. Σε γενικές γραμμές μία τέτοια χρονική υστέρηση μπορεί να αντανακλά μια αιτιώδη (causal) σχέση μεταξύ των σημάτων. Ειδικότερα, εάν το  $x$  προκαλεί το  $y$ , κάποιος μπορεί, θεωρητικά πάντα μιλώντας, να εντοπίσει μια καθυστέρηση (delay) από το πρώτο σήμα στο δεύτερο.

Έστω  $x(t)$  και  $y(t)$  δύο σήματα που έχουν κανονικοποιηθεί έτσι ώστε να έχουν μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διακύμανση. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης δίδεται από τον τύπο:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{k=1}^{N-\tau} x(k+\tau)y(k) \quad (46)$$

όπου  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός των δειγμάτων και  $\tau$  ο χρόνος υστέρησης μεταξύ των σημάτων (Pereda et al., 2005). Η συγκεκριμένη συνάρτηση κυμαίνεται από το  $-1$  (πλήρης αντίστροφη γραμμική συσχέτιση) μέχρι το  $1$  (πλήρης γραμμική συσχέτιση), με το  $r_{xy}(\tau)=0$  να υποδηλώνει την πλήρη έλλειψη γραμμικής αλληλεξάρτησης για μια δεδομένη χρονική υστέρηση  $\tau$ . Το πρόσημο της  $r_{xy}$  υποδεικνύει την κατεύθυνση της συσχέτισης. Έτσι αν  $r_{xy} < 0$  συνεπάγεται αντίστροφη συσχέτιση δηλαδή μια τάση και των δύο σημάτων να έχουν παρόμοιες απόλυτες τιμές, αλλά με αντίθετα πρόσημα, ενώ αν  $r_{xy} > 0$  συνεπάγεται άμεση συσχέτιση, δηλαδή, μια τάση και των δύο σημάτων να έχουν παρόμοιες απόλυτες τιμές, αλλά με αντίθετα πρόσημα. Η τιμή του  $\tau$  για το οποίο μεγιστοποιείται η συνάρτηση λαμβάνεται συνήθως ως εκτίμηση της μεταξύ των σημάτων συσχέτισης, υπό την παραδοχή ότι αυτά σχετίζονται γραμμικά. Αυτό

ωστόσο δεν είναι απαραίτητα πάντα σωστό, δεδομένου ότι οι εσωτερικοί βρόγχοι (loops) καθυστέρησης ή οι αποστάσεις από τις πηγές είναι συχνά άγνωστοι και ως εκ τούτου συχνά οδηγούμαστε σε λανθασμένες ερμηνείες (Quiroga et al., 2000).

## 4.2 Αιτιότητα κατά Granger (Granger Causality)

Στην νευροφυσιολογία, ένα θέμα μεγάλου ενδιαφέροντος είναι το κατά πόσον υπάρχει μια αιτιώδης σχέση μεταξύ των δύο περιοχών του εγκεφάλου. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι, σε θέση να υποδείξει την καθυστέρηση στην σύζευξη, αλλά το να υπολογίζεις την αιτιότητα από τη χρονική καθυστέρηση δεν είναι πάντα απλό. Αυτό ενθάρρυνε τους ερευνητές να αναπτύξουν νέες μεθόδους προσαρμοσμένες σε αυτό τον σκοπό.

Η σημασία της εύρεσης της χρονικής σειράς των γεγονότων στο συμπέρασμα των αιτιωδών σχέσεων αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τον μεγάλο μαθηματικό Norbert Wiener, ο οποίος όρισε την αιτιότητα σε ένα στατιστικό πλαίσιο, ως εξής: για δύο ταυτόχρονα μετρούμενα σήματα, εάν κάποιος μπορεί να προβλέψει το πρώτο σήμα καλύτερα ενσωματώνοντας πληροφορίες από το παρελθόν του δεύτερου σήματος από ό, τι χρησιμοποιώντας μόνο πληροφορίες από την πρώτο σήμα, τότε το δεύτερο σήμα μπορεί να ονομαστεί αιτιώδες του πρώτου σήματος. Αυτός ο γενικός ορισμός μοντελοποιήθηκε μαθηματικά από τον Νομπελίστα Clive Granger στο πλαίσιο της γραμμικής στοχαστικής μοντελοποίησης της ανάλυσης χρονοσειρών (Granger, 1969). Όπως και ο Wiener, ο Granger υποστήριξε ότι αν το σήμα  $x$  επηρεάζει το σήμα  $y$  τότε προσθέτοντας προηγούμενες χρονικά τιμές της πρώτης μεταβλητής στην παλινδρόμηση της δεύτερης θα βελτιώσει την πρόβλεψη της  $y$ , η οποία μπορεί να εκτιμηθεί συγκρίνοντας την εφαρμογή (fitting) των μοντέλων αυτοπαλινδρόμησης (AR models) με τα σήματα.

Έστω  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$ , δύο χρονοσειρές. Υποθέτουμε ότι η χρονική δυναμική των  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  μπορεί να αναπαρασταθεί από το μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης δύο μεταβλητών.:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{j=1}^p a_{11,j} x_1(t-j) + \sum_{j=1}^p a_{12,j} x_2(t-j) + E_1(t) \\ x_2(t) &= \sum_{j=1}^p a_{21,j} x_1(t-j) + \sum_{j=1}^p a_{22,j} x_2(t-j) + E_2(t) \end{aligned} \tag{47}$$

όπου  $p$  είναι η τάξη του μοντέλου,  $E_1$  και  $E_2$  οι αβεβαιότητες ή αλλιώς ο θόρυβος που συσχετίζεται με το μοντέλο, και εν προκειμένω εξαρτάται από τις τελευταίες τιμές και των δύο σημάτων, και  $A$  ο πίνακας που περιέχει τους συντελεστές του μοντέλου.

Αν η διακύμανση του  $E_1$  (ή του  $E_2$ ) μειωθεί από τον συνυπολογισμό των όρων του  $x_2$  (ή του  $x_1$  αντιστοίχως) στην πρώτη (ή στην δεύτερη) εξίσωση, τότε λέγεται ότι το

$x_2$  προκαλεί (G-causes) το  $x_1$ . Υποθέτοντας ότι τα  $x_1$  και  $x_2$  πληρούν τα κριτήρια της στασιμότητας (δηλαδή διατηρούν αμετάβλητη την μέση τιμή και την συνδιακύμανση), το μέγεθος αυτής της αλληλεπίδρασης μπορεί να μετρηθεί από την αναλογία των διακυμάνσεων των σφαλμάτων πρόβλεψης (Seth, 2010):

$$G_{2 \rightarrow 1} = \ln \frac{\text{var}(E_{1R(12)})}{\text{var}(E_{1U})} \quad (48)$$

όπου το  $E_{1R(12)}$  προκύπτει από το μοντέλο μέσω της διαγραφής των  $A_{12,j}$ , για κάθε  $j$  και το  $E_{1U}$  προέρχεται από το πλήρες μοντέλο.

Αν το παρελθόν του  $x_2$  δεν βελτιώνει την πρόβλεψη του  $x_1$  τότε το μέτρο της αιτιότητας κατά Granger θα είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Οποιαδήποτε βελτίωση στην πρόβλεψη του  $x_1$  εξαιτίας της συμπερίληψης του  $x_2$  οδηγεί σε μείωση του  $\text{var}(E_{1U})$  αυξάνοντας έτσι την αιτιότητα. Η αιτιότητας κατά Granger για την αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή από το  $x_1$  στο  $x_2$  ορίζεται αναλόγως. Αν και οι δύο αιτιότητες  $G_{2 \rightarrow 1}$  και  $G_{1 \rightarrow 2}$  έχουν μεγάλα μέτρα τότε θα υπάρχει μία αμφίδρομη σύζευξη ή μία σχέση ανατροφοδότησης μεταξύ των σημάτων.

Για την περίπτωση που έχουμε περισσότερα από δύο σήματα (έστω στην περίπτωση μας τρία και θέλουμε να μετρήσουμε αν το παρελθόν του  $x_2$  βελτιώνει την πρόβλεψη του  $x_1$ , υπό την παρουσία πάντα των υπολοίπων σημάτων (στη περίπτωση μας του  $x_3$ ) φτιάχνουμε την μήτρα συνδιακύμανσης του θορύβου  $\Sigma$  (49), όπου τα  $E_{iU}$  προκύπτουν από το MVAR μοντέλο μας αν συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές μας.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{var}(E_{1U}) & \text{cov}(E_{1U}, E_{2U}) & \text{cov}(E_{1U}, E_{3U}) \\ \text{cov}(E_{2U}, E_{1U}) & \text{var}(E_{2U}) & \text{cov}(E_{2U}, E_{3U}) \\ \text{cov}(E_{3U}, E_{1U}) & \text{cov}(E_{3U}, E_{2U}) & \text{var}(E_{3U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Αντίστοιχα δημιουργούμε έναν νέο πίνακα  $\rho$ , ο οποίος στην ουσία είναι η μήτρα συνδιακύμανσης του θορύβου αφού πρώτα έχουμε απαλείψει την παρουσία του σήματος  $x_2$  (50).

$$\rho = \begin{bmatrix} \text{var}(E_{1R(12)}) & \text{cov}(E_{1R(12)}, E_{3R(32)}) \\ \text{cov}(E_{3R(32)}, E_{1R(12)}) & \text{var}(E_{3R(32)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Έτσι λοιπόν η αιτιότητα κατά Granger θα δίδεται από τον τύπο (Seth, 2010):

$$G_{2 \rightarrow 1|3} = \ln \frac{\text{var}(\rho_{11})}{\text{var}(\Sigma_{11})} \quad (51)$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα της αιτιότητας κατά Granger στο πεδίο του χρόνου προϋποθέτει ότι τα δεδομένα μας μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα MVAR μοντέλο. Στη περίπτωση που τα δεδομένα μας έχουν την μορφή ενιαίων - μεγάλων δοκιμών (trials) χρησιμοποιείται η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων ενώ στη περίπτωση που διαθέτουμε πολλές επαναλήψεις σχετικά μικρών δοκιμών χρησιμοποιούμε την μέθοδο Yule-Walker (Pereda et al., 2005). Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, κάθε δοκιμή (trial) θεωρείται ως μια ανεξάρτητη υλοποίηση μιας στατιστικής διεργασίας, και στη συνέχεια οι παράμετροι του MVAR μοντέλου υπολογίζονται μέσω στατιστικής επεξεργασίας των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Φυσικά η εκτίμηση ενός μοντέλου MVAR απαιτεί ως παράμετρο την τάξη (order) του μοντέλου ( $p$ ). να περιλαμβάνουν, π.χ., η σειρά μοντέλο. Αν η τάξη του μοντέλου είναι πολύ μικρή τότε μπορεί να οδηγηθούμε σε μία κακή αναπαράσταση των δεδομένων, ενώ αν είναι πολύ μεγάλη μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα υπολογισμού του μοντέλου. Δύο κριτήρια που εφαρμόζονται για τον υπολογισμό της τάξης του μοντέλου MVAR είναι: το Akaike Information Criterion (43) και το Bayesian Information Criterion (44).

Το BIC εφαρμόζεται πιο συχνά για εφαρμογή σε νευρωνικά συστήματα επειδή αντισταθμίζει για τον μεγάλο αριθμό των δεδομένων που βρίσκονται συνήθως σε νευρωνικά σύνολα δεδομένων (Pereda et al., 2005).

### 4.3 Συνάφεια (Coherence)

Γενικά ως συνάφεια ορίζουμε την γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων. Για δύο σήματα  $x$  και  $y$  η συνάφεια τους δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|}{\sqrt{|S_{xx}(f)||S_{yy}(f)|}} \quad (52)$$

όπου με  $S$  συμβολίζουμε τις φασματικές πυκνότητες ισχύος (PSD) των δύο σημάτων, και πιο συγκεκριμένα (Andrew & Pfurtscheller, 1996):

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n(f) \\ S_{yy}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n(f) \\ S_{xy}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n(f) Y_n^*(f) \end{aligned} \quad (53)$$

Στην περίπτωση του MVAR μοντέλου μας για δυο κανάλια  $i$  και  $j$  η συνάφεια δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma_{ij}(f) = \frac{|S_{ij}(f)|}{\sqrt{|S_{ii}(f)||S_{jj}(f)|}} \quad (54)$$

Η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μπορεί να γίνει τόσο με παραμετρικές (Hannan, 1970) όσο και με μη παραμετρικές μεθόδους (Andrew & Pfurtscheller, 1996).

Καθώς η παραπάνω συνάρτηση παίρνει μιγαδικές τιμές, συχνά χρησιμοποιούμε το τετράγωνο αυτής  $|\Gamma_{ij}(f)|^2$  προκειμένου να καθορίσουμε την ισχύ της συσχέτισης δυο σημάτων σε ένα σύστημα πολλών μεταβλητών (Bendat & Piersol, 2000). Η συνάφεια, ως μέτρο, κυμαίνεται μεταξύ του 0 και του 1. Για μια δεδομένη συχνότητα  $f_0$ , η  $\Gamma_{xy}^2(f_0) = 0$  υποδηλώνει ότι οι δραστηριότητες των σημάτων σε αυτή τη συχνότητα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ στην περίπτωση που  $\Gamma_{xy}^2(f_0) = 1$  σημαίνει ότι τα σήματα  $x$  και  $y$  έχουν τη μέγιστη γραμμική συσχέτιση για αυτή την συχνότητα.

Η συνάφεια ως μέτρο αλληλεξάρτησης μεταξύ των EEG σημάτων εφαρμόστηκε για πρώτη φορά πριν από 40 χρόνια (Adey, Walter, et al., 1967). Μία από τις πρωτοπόρες προσπάθειες ήταν να αποδειχτούν τη συνεχή φάσματα συνάφειας του EEG ενός αστροναύτη κατά τη διάρκεια της πτήσης του Gemini GT-7 (Adey, Kado, et al., 1967). Εντούτοις ως μέτρο σύγκρισης δύο σημάτων παρουσιάζει σημαντικά μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι πως δεν είναι κατευθυνόμενη, δηλαδή δεν υποδεικνύει την κατεύθυνση της συσχέτισης. Δεν μπορεί δηλαδή να μας δείξει ποιο σήμα επηρεάζει το άλλο παρά μόνο αν υπάρχει και σε τι βαθμό σχέση μεταξύ των δυο σημάτων. Το δεύτερο σημαντικό της μειονέκτημα σχετικά με το πόσο επηρεάζει ένα σήμα ένα άλλο είναι ότι η συγκεκριμένη μέθοδος δεν μπορεί να αναγνωρίσει εάν το σήμα επηρεάζεται άμεσα από το άλλο ή διαμέσου κάποιου τρίτου σήματος. Όταν φυσικά έχουμε να συγκρίνουμε δυο απλά σήματα ο παραπάνω προβληματισμός δεν έχει νόημα όμως στην περίπτωση της ανάλυσης εγκεφαλογραφικών σημάτων είναι πάρα πολύ σημαντικός. Αυτό το κενό έρχεται να καλύψει η Μερική Συνάφεια (Partial coherence).

#### 4.4 Μερική Συνάφεια (Partial Coherence)

Η Μερική Συνάφεια (Partial Coherence) για τα σήματα  $\{x \ y \ z\}$ , δίδεται από τον τύπο (Bendat & Piersol, 2000):

$$\Pi_{xy|z} = \frac{|S_{xy|z}(f)|}{\sqrt{|S_{xx|z}(f)||S_{yy|z}(f)|}} \quad (55)$$

όπου με  $S$  συμβολίζουμε τις φασματικές πυκνότητες ισχύος (PSD) των δύο σημάτων  $x$  και  $y$ , αφού πρώτα αφαιρέσουμε όλες τις γραμμικές επιδράσεις από τις υπόλοιπες διεργασίες (στη περίπτωση μας το σήμα  $z$ ) και πιο συγκεκριμένα (Bendat & Piersol, 2000):



$$\begin{aligned}
S_{xx|z}(f) &= S_{xx}(f) - S_{xz}(f)S_{zz}^{-1}(f)S_{xz}(f) \\
S_{xy|z}(f) &= S_{xy}(f) - S_{xz}(f)S_{zz}^{-1}(f)S_{yz}(f) \\
S_{yy|z}(f) &= S_{yy}(f) - S_{yz}(f)S_{zz}^{-1}(f)S_{yz}(f)
\end{aligned} \tag{56}$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι με τον όρο μερική συνάφεια  $\Pi_{xy|z}$  εννοούμε το κλάσμα της συνάφειας μεταξύ των  $x$  και  $y$  που δεν μοιράζεται με  $z$ . Έτσι, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τρία σήματα που εμφανίζουν πλήρη συνάφεια και λάβουμε την μερική συνάφεια των οποιονδήποτε δύο σημάτων ως προς το εναπομείναν τρίτο σήμα, τότε ο εκτιμητής μας θα τείνει στο μηδέν.

Η Μερική Συνάφεια (Partial coherence) δυο σημάτων  $i$  και  $j$  του MVAR μοντέλου μας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Pi_{ij} = \frac{P_{ij}(f)}{\sqrt{P_{ii}(f)P_{jj}(f)}} \tag{57}$$

όπου το στοιχείο  $P_{ij}(f)$  είναι ο ανάστροφος πίνακας του  $S(f)$ . Καθώς η παραπάνω συνάρτηση παίρνει μιγαδικές τιμές, συχνά χρησιμοποιούμε το τετράγωνο αυτής  $|\Pi_{ij}(f)|^2$  προκειμένου να καθορίσουμε την ισχύ της συσχέτισης μεταξύ δυο σημάτων αφού προηγουμένως έχει αφαιρεθεί η επιρροή όλων των άλλων σημάτων του MVAR μοντέλου μας (Bendat & Piersol, 2000). Σε κάθε περίπτωση πάντως με την μερική συνάφεια δεν λαμβάνουμε πληροφορίες για την κατεύθυνση της συσχέτισης.

Στην νευροφυσιολογία, η μερική συνάφεια εφαρμόστηκε για πρώτη φορά για τον εντοπισμό επιληπτικών εστιών με τρία ηλεκτρόδια (Gersch, 1970). Μέχρι σήμερα, η μερική συνάφεια έχει εφαρμοστεί για τη διερεύνηση της αιτιότητας της πληροφορίας μεταξύ διάφορων νευρικών σημάτων (βλ. Cohen M. I. (1995), Sun (2004)). Ωστόσο, μια πρόσφατη μελέτη δείχνει ότι το μέτρο της μερικής συνάφειας είναι πολύ ευαίσθητο στο θόρυβο (Albo, 2004), πράγμα που σημαίνει ότι εάν τα υπό εξέταση σήματα έχουν διαφορετικό λόγο σήματος προς θόρυβο (signal-to-noise ratio), το μέτρο της μερικής συνάφειας τείνει να εντοπίσει το σήμα με τον υψηλότερο λόγο ως αυτό που έχει τη μεγαλύτερη επιρροή, ανεξάρτητα από το πραγματική διεύθυνση της υποκείμενης σύνδεσης.

#### 4.5 Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Directed Coherence)

Η κατευθυνόμενη συνάφεια (DC) αποτελεί ένα σχετικά νέο μέτρο εκτίμησης της συσχέτισης μεταξύ χρονοσειρών που εισήχθη από τον Baccalla (Baccala et al., 1998). Ως θεωρία στηρίζεται στο γεγονός ότι μία AR διαδικασία μπορεί να αναπαρασταθεί ως έξοδος ενός γραμμικά ανεξάρτητου μετακινούμενου φίλτρου με είσοδο λευκό θόρυβο μοναδιαίας διασποράς.

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k)U(n-k) \quad (58)$$

όπου  $U(n) = [u_1(n), u_2(n), \dots, u_M(n)]^T$  είναι ο πίνακας του λευκού θορύβου για τα  $M$  κανάλια και  $H(k)$  είναι η διαστάσεων  $M \times M$  απόκριση του φίλτρου ή συνάρτηση μεταφοράς. Επιπλέον ξέρουμε από την εξίσωση (33) ότι για τις MVAR διαδικασίες ισχύει:

$$Y(n) = \sum_{k=1}^p A(k)Y(n-k) + U(n) \quad (59)$$

όπου  $A(k)$  είναι πίνακες διαστάσεων  $M \times M$  που περιέχουν τους συντελεστές του AR μοντέλου για κάθε χρονική υστέρηση (time lag)  $k$ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο πίνακας της διεργασίας εισόδου (input process)  $U(n)$ , που καλείται και innovation matrix, θεωρούμε ότι αποτελείται από λευκό και ασυσχέτιστο θόρυβο, δηλαδή ισχύει ότι ο πίνακας συσχέτισης του  $U(n)$ ,  $R_U(k) = E[U(n)U^T(n-k)]$  είναι μηδενικός για κάθε χρονική υστέρηση  $k > 0$ , ενώ για  $k = 0$  ισούται με τον πίνακα συνδιασποράς  $\Sigma = \text{cov}(U(n))$  (Faes & Nollo, 2011).

Η φασματική απεικόνιση των συναρτήσεων (58) και (59) δίνεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier:

$$Y(f) = H(f)U(f) \quad (60)$$

$$Y(f) = A(f)Y(f) + U(f) \quad (61)$$

όπου  $H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k)e^{-j2\pi f k T}$  και  $A(f) = \sum_{k=1}^p A(k)e^{-j2\pi f k T}$ .

Αν συγκρίνουμε τις δύο παραπάνω αναπαραστάσεις στο πεδίο των συχνοτήτων καταλαβαίνουμε ότι ο πίνακας μεταφοράς (transfer matrix) συνδέεται με τον πίνακα των συντελεστών (coefficient matrix) με την σχέση:

$$H(f) = [I - A(f)]^{-1} = \bar{A}(f)^{-1} \quad (62)$$

Η παραπάνω σχέση μας βοηθά να ορίσουμε την φασματική πυκνότητα  $S(f)$  και τον αντίστροφο αυτής  $P(f)$  για μία MVAR διαδικασία (Kay, 1988):

$$S(f) = H(f)\Sigma H^H(f) \quad (63)$$

$$P(f) = \bar{A}(f)\Sigma\bar{A}^H(f) \quad (64)$$

και άρα το  $(i - j)$  στοιχείο του πίνακα  $S(f)$  και  $P(f)$  μπορούν να αναπαρασταθούν ως εξής:

$$S_{ij}(f) = h_i(f) \Sigma h_j^H(f) \quad (65)$$

$$P_{ij}(f) = \bar{a}_i(f) \Sigma \bar{a}_j^H(f) \quad (66)$$

εφόσον ισχύει ότι  $S(f) = [h_1(f), \dots, h_M(f)]$  και  $\bar{A}(f) = [\bar{a}_1(f), \dots, \bar{a}_M(f)]$ .

Υπό την προϋπόθεση ότι οι λευκοί θόρυβοι του σήματος εισόδου είναι ασυσχέτιστοι ακόμα και όταν  $k = 0$ , η συνδιασπορά αυτών  $\text{cov}(U(n))$  παίρνει την μορφή διαγώνιου πίνακα,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i^2)$ , ενώ ο αντίστροφος πίνακας  $\Sigma^{-1}$  θα είναι και αυτός διαγώνιος  $\Sigma^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)$ . όπου  $\sigma_i^2$  είναι η διακύμανση του  $u_i$ . Σε αυτή και μόνο την περίπτωση οι εξισώσεις (65) και (66) λαμβάνουν την μορφή:

$$S(f) = \sum_{m=1}^M \sigma_m^2 H_{im}(f) H_{jm}^*(f) \quad (67)$$

$$P(f) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} \bar{A}_{mi}^*(f) \bar{A}_{mj}(f) \quad (68)$$

Η σημασία των παραπάνω παραγοντοποιήσεων (factorizations) είναι ότι μας δίνει την δυνατότητα να αποσυνθέσουμε τα μέτρα σύνδεσης και άμεσης σύνδεσης στο χώρο των συχνοτήτων που έχουμε δει ως τώρα (Coherence και Partial Coherence αντίστοιχα) και να εξάγουμε πληροφορίες ως προς την κατεύθυνση της σύνδεσης. Αντικαθιστώντας έτσι τις εξισώσεις (65) και (67) στην εξίσωση (54):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= \frac{h_i(f) \Sigma h_j^H(f)}{\sqrt{h_i(f) \Sigma h_i^H(f)} \sqrt{h_j(f) \Sigma h_j^H(f)}} = \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_m H_{im}(f)}{\sqrt{S_{ii}(f)}} \frac{\sigma_m H_{jm}^*(f)}{\sqrt{S_{jj}(f)}} \\ &= \sum_{m=1}^M \gamma_{im}(f) \gamma_{jm}(f) \end{aligned} \quad (69)$$

όπου ο τελευταίος περιέχει την κατευθυνόμενη συνάφεια (Directed Coherence ή DC). Έτσι λοιπόν η DC από το  $y_j$  στο  $y_i$  δίδεται από τον τύπο (Baccala et al., 1998):

$$\gamma_{ij}(f) = \frac{\sigma_j H_{ij}(f)}{\sqrt{\sum_{m=1}^M \sigma_m^2 |H_{im}(f)|^2}} \quad (70)$$

Επιπλέον για την Directed Coherence ισχύει ότι  $0 \leq |\gamma_{ij}(f)|^2 \leq 1$ , όπου το 0 σημαίνει απουσία οποιασδήποτε σύνδεσης του  $y_j$  με το  $y_i$  και το 1 σημαίνει ότι υπάρχει

απόλυτη σύνδεση και τέλος ότι  $\sum_{m=1}^M |\gamma_{ij}(f)|^2 = 1$ .

## 4.6 Μερική Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Partial Directed Coherence)

Η μερική κατευθυνόμενη συνάφεια (PDC) αποτελεί μια εξέλιξη της κατευθυνόμενης συνάφειας η οποία για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε από τους Baccala και Sameshima το 2001 (Baccala & Sameshima, 2001). Ως μέθοδος βασίστηκε και αυτή στην μοντελοποίηση χρονοσειρών με την βοήθεια ενός αυστηρώς αιτιατού (causal) MVAR μοντέλου (υπό την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη του μόνο επιρροές του παρελθόντος ( $k > 0$ ) και όχι στιγμιαίες επιρροές από το σήμα  $j$  στο σήμα  $i$ , επιρροές δηλαδή που συμβαίνουν στιγμιαία ( $k = 0$ )).

Έτσι λοιπόν το μέτρο της PDC από το σήμα  $j$  στο σήμα  $i$  δίδεται από τον τύπο (Supp, 2007):

$$\pi_{ij}(f) = \frac{\bar{A}_{ij}(f)}{\sqrt{\sum_{m=1}^M |\bar{A}_{mj}(f)|^2}} \quad (71)$$

Η μερική κατευθυνόμενη συνάφεια από το  $j$  στο  $i$  αντιπροσωπεύει την σχετική ροή πληροφοριών μίας δεδομένης πηγής, του σήματος  $j$ , σε σχέση με κάποιο σήμα  $i$ , σε σύγκριση με όλες τις συνδέσεις του  $j$  προς άλλα σήματα. Ουσιαστικά δείχνει πόσο επηρεάζει η πληροφορία που μεταδίδεται άμεσα από το κανάλι  $j$  στο κανάλι  $i$  την τιμή του καναλιού  $i$ . Σε αυτή την τιμή δεν λαμβάνεται υπόψη η πληροφορία που ξεκινάει από το  $j$  και μέσω άλλου καναλιού καταλήγει στο  $i$ , ούτε την πληροφορία που μεταδίδεται από άλλα κανάλια και περνάει μέσω του  $j$  και καταλήγει στο  $i$ . Εκ του ορισμού λοιπόν, και για δεδομένη πηγή  $j$  προκύπτουν οι έξης δύο ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για όλα τα  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ :

$$0 \leq |\pi_{ij}(f)|^2 \leq 1 \quad (72)$$

$$\sum_{i=1}^k |\pi_{ij}(f)|^2 = 1 \quad (73)$$

Γενικά ο PDC είναι σε θέση να ανιχνεύσει μόνο τις άμεσες αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο χρονοσειρών εντός ενός δικτύου από αλληλεπιδράσεις.

Μια σημαντική βελτίωση του δείκτη αυτού είναι η γενικευμένη PDC (gPDC) εισήχθη από τους ίδιους συγγραφείς (Baccala et al., 2007) και δίδεται από τον τύπο (Faes & Nollo, 2010):

$$\tilde{\pi}_{ij}(f) = \frac{\frac{1}{\sigma_i} \bar{A}_{ij}(f)}{\sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{1}{\sigma_m^2} |\bar{A}_{mj}(f)|^2}} \quad (74)$$

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις (64) και (68) στην εξίσωση (57), όπως ακριβώς κάναμε και στην περίπτωση της κατευθυνόμενης συνάφειας. Με την εισαγωγή της gPDC καταφέρνουμε να κρατήσουμε το αναλλοίωτο των αξόνων, μια σημαντική ιδιότητα κυρίως στην περίπτωση όπου έχουμε μεγάλη απόκλιση στο μέγεθος των σημάτων εισόδου  $U(n)$  (Faes & Nollo, 2010).

Οι δύο παραπάνω τύποι της μερικής κατευθυνόμενης συνάφεια (PDC και gPDC) στηρίζονται σε ένα αυστηρά αιτιατό MVAR μοντέλο, υπό την έννοια ότι δεν εξετάζουμε καθόλου την στιγμιαία αιτιότητα κατά Granger αλλά λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο επιδράσεις χρονικής υστέρησης (time lag  $k > 0$ ). Αντί λοιπόν του παραπάνω μοντέλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση μας ένα εκτεταμένο MVAR μοντέλο (extended MVAR model) στο οποίο θα λαμβάνονται υπόψη και οι στιγμιαίες επιδράσεις ( $k = 0$ ). Σε αντιστοιχία λοιπόν με την συνάρτηση (59) θα ισχύει (Faes & Nollo, 2010):

$$Y(n) = \sum_{k=0}^p B(k)Y(n-k) + W(n) \quad (75)$$

όπου  $W(n) = [w_1(n), w_2(n), \dots, w_M(n)]^T$  αποτελείται από ασυσχέτιστο λευκό θόρυβο με μηδενική μέση τιμή, του οποίου ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\Lambda$  είναι διαγώνιος,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i^2)$ . Στην εκτεταμένη απεικόνιση ενός MVAR μοντέλου η απουσία συσχέτισης μεταξύ του θορύβου που αποτελεί και το σήμα εισόδου  $w_i$  εξασφαλίζεται από την παρουσία στιγμιαίων επιδράσεων (Faes & Nollo, 2010). Πράγματι η συνάρτηση (59) που προσδιορίζει ένα αυστηρά αιτιατό MVAR μοντέλο μετατρέπεται στη συνάρτηση (75) που προσδιορίζει το εκτεταμένο MVAR μοντέλο αν μεταφέρουμε τον όρο  $B(0)Y(n)$  από την δεξιά στην αριστερή μεριά της εξίσωσης (75) και μετά πολλαπλασιάσουμε με τον όρο  $L^{-1} = [I - B(0)]$ . Έτσι λοιπόν θα ισχύει:

$$A(k) = L^{-1}B(k) = [I - B(0)]^{-1} B(k) \quad (76)$$

$$U(n) = LW(n) \quad (77)$$

$$\Sigma = L\Lambda L^T \quad (78)$$

Η φασματική απεικόνιση του εκτεταμένου MVAR μοντέλου θα δίνεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier από τον τύπο:

$$B(f) = B(0) + \sum_{k=1}^p B(k)e^{-j2\pi f k T} \quad (79)$$

οπότε και σε αναλογία πάντα με τους ορισμούς της PDC και της gPDC λαμβάνουμε τον ορισμό της εκτεταμένης μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (extended PDC ή ePDC) ο οποίος ισχύει μόνο στην περίπτωση εκτεταμένων MVAR μοντέλων και δίδεται από τον τύπο (Faes & Nollo, 2010):

$$\chi_{ij}(f) = \frac{\frac{1}{\lambda_i} \bar{B}_{ij}}{\sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{1}{\lambda_m^2} |\bar{B}_{mj}|^2}} \quad (80)$$

όπου  $\lambda_i^2$  συμβολίζει την διακύμανση του σήματος εισόδου - θορύβου  $w_i$  και  $\bar{B}_{ij}(f) = \delta_{ij} - B_{ij}(0) - \sum_{k=1}^p B_{ij}(k) e^{j2\pi f k T}$ . Ουσιαστικά η ePDC αντιπροσωπεύει την σχετική ροή πληροφοριών μίας δεδομένης πηγής, του σήματος  $j$ , σε σχέση με κάποιο σήμα  $i$ , σε σύγκριση με όλες τις συνδέσεις του  $j$  προς άλλα σήματα υπό την παρουσία επιδράσεων μηδενικής και μη υστέρησης. Ουσιαστικά δείχνει πόσο επηρεάζει η πληροφορία που μεταδίδεται άμεσα από το κανάλι  $j$  στο κανάλι  $i$  την τιμή του καναλιού  $i$  στη περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με ένα εκτεταμένο MVAR μοντέλο.

Τέλος στη περίπτωση που θέλουμε να εξετάσουμε την αιτιότητα μόνο των υστερούμενων επιδράσεων ( $k > 0$ ), στην περίπτωση ενός εκτεταμένου MVAR μοντέλου στο οποίο υπάρχουν και στιγμιαίες επιδράσεις, χρησιμοποιούμε την μερική κατευθυνόμενη συνάφεια πληροφορίας (information PDC ή iPDC) η οποία ορίζεται ως εξής (Faes & Nollo, 2010):

$$\tilde{\chi}_{ij}(f) = \frac{\frac{1}{\lambda_i} \tilde{B}_{ij}}{\sqrt{\sum_{m=1}^M \frac{1}{\lambda_m^2} |\tilde{B}_{mj}|^2}} \quad (81)$$

όπου  $\tilde{B}_{ij}(f) = \bar{B}_{ij}(f) + B_{ij}(0)$ . Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειωθεί ότι όταν δεν υπάρχουν στιγμιαίες επιδράσεις στο σύστημα μας τότε οι gPDC, ePDC και iPDC συμπίπτουν.

Οι παραπάνω εξισώσεις προϋποθέτουν κατ' αρχήν ότι τα δεδομένα μας μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα MVAR μοντέλο. Συνηθέστερα και μιλώντας πάντα για νευροφυσιολογικά δεδομένα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο Nuttall Strand (τροποποιημένη μέθοδος του Burg). Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, κάθε δοκιμή (trial) θεωρείται ως μια ανεξάρτητη υλοποίηση μιας στατιστικής διεργασίας, και στη συνέχεια οι παράμετροι του MVAR μοντέλου υπολογίζονται μέσω στατιστικής επεξεργασίας των παραπάνω αποτελεσμάτων. Φυσικά η εκτίμηση ενός μοντέλου MVAR απαιτεί ως παράμετρο την τάξη (order) του μοντέλου ( $p$ ). να περιλαμβάνουν, π.χ., η σειρά μοντέλο. Γενικά αν η τάξη του μοντέλου είναι πολύ μικρή τότε μπορεί να οδηγηθούμε σε μία κακή αναπαράσταση των δεδομένων, ενώ αν είναι πολύ μεγάλη μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα υπολογισμού του μοντέλου. Δύο κριτήρια που εφαρμόζονται για τον υπολογισμό της τάξης του μοντέλου MVAR είναι: το Akaike

Information Criterion (AIC) και το Bayesian Information Criterion (BIC) (Baccala & Sameshima, 2001).





# 5. Εφαρμογή της μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας σε προσομοιωμένα σήματα

---

5.1 Εισαγωγή

5.2 Θεωρητικό παράδειγμα

5.3 Συμπεράσματα - Μελλοντικές Προοπτικές

---

## 5.1 Εισαγωγή

Σημαντικό ρόλο ως προς την αξιολόγηση της μεθόδου της μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας αποτελεί η εφαρμογή της σε προσομοιωμένα δεδομένα ώστε να εξεταστεί η εγκυρότητα της. Χρησιμοποιώντας λοιπόν προσομοιωμένες MVAR διαδικασίες με εκ των προτέρων γνωστά μοτίβα συνδεσιμότητας, με και χωρίς στιγμιαίες επιδράσεις, όπως αυτά αναλύονται στα άρθρα των Baccala and Sameshima (2001) και Faes and Nollo (2010) γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα αποτελέσματα που πρέπει να περιμένουμε. Παράλληλα αξιολογούμε και την απόδοση των μέτρων της συνάφειας, μερικής συνάφειας και κατευθυνόμενης συνάφειας όπως ορίζονται από ένα αυστηρά αιτιατό MVAR μοντέλο (υπό την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη του μόνο επιρροές του παρελθόντος ( $k > 0$ )). Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε το eMVAR Toolbox των Nollo και Faes. Το εν λόγω toolbox μπορεί κανείς να το κατεβάσει δωρεάν στην διεύθυνση <http://www.science.unitn.it/~nollo/research/sigpro/eMVAR.html>.

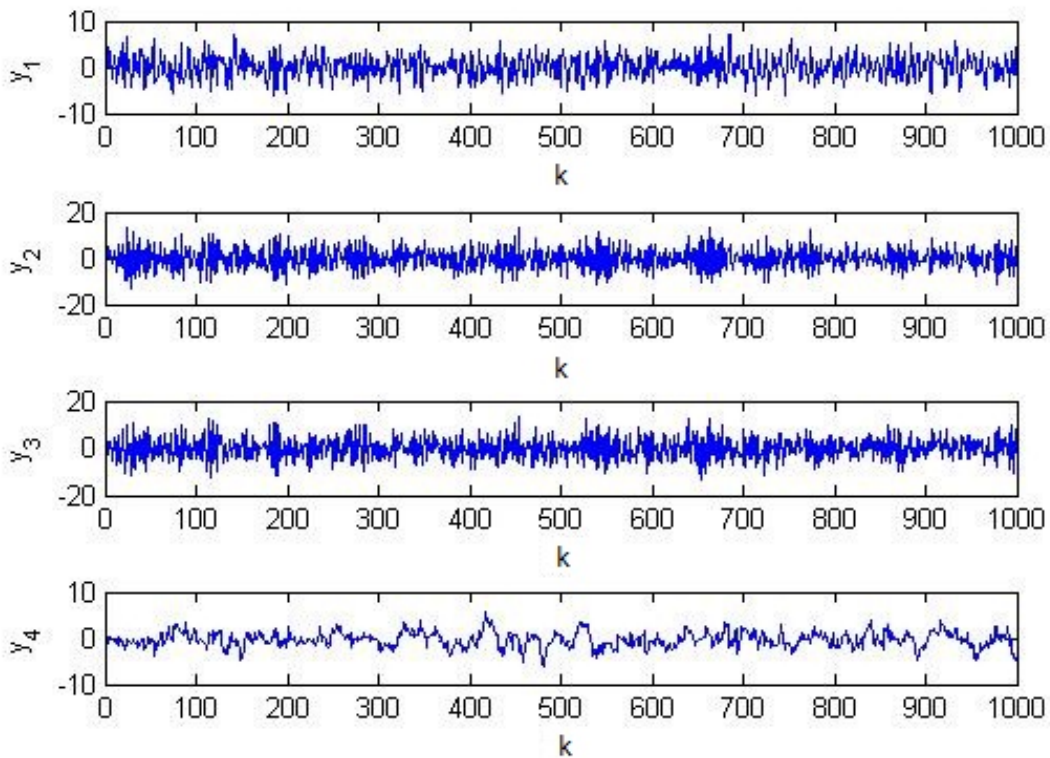
## 5.2 Θεωρητικό Παράδειγμα

Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των διάφορων μέτρων της συνάφειας με την βοήθεια της παρακάτω MVAR διαδικασίας:

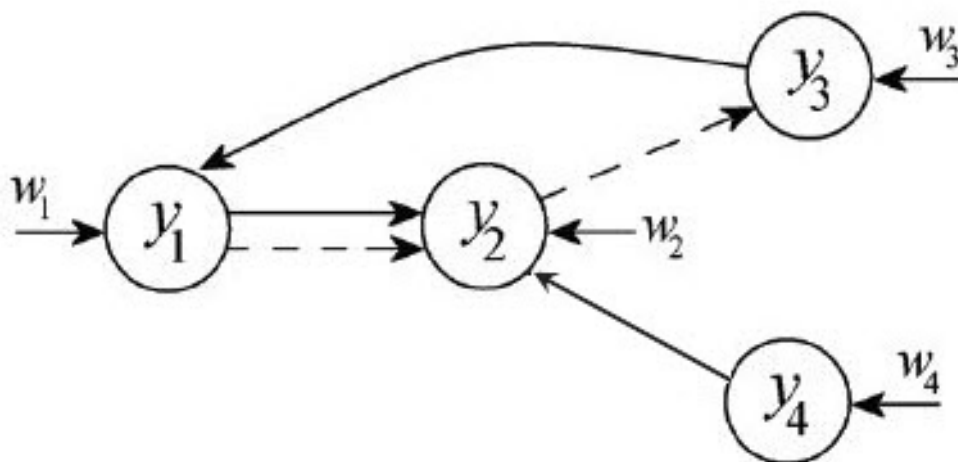
$$\begin{cases} y_1(k) = 2\rho_1 \cos(2\pi f_1) y_1(k-1) - 0.4y_3(k-1) - \rho_1^2 y_1(k-2) \\ \quad + 0.3y_3(k-2) + w_1(k) \\ y_2(k) = y_1(k) + 0.2y_1(k-1) + 0.6y_4(k-1) - \rho_2^2 y_2(k-2) + w_2(k) \\ y_3(k) = 0.8y_2(k) + w_3(k) \\ y_4(k) = 0.8y_4(k-1) + w_4(k) \end{cases} \quad (82)$$

όπου  $\rho_1 = 0.95$ ,  $f_1 = 0.125$ ,  $\rho_2 = 0.8$  και όπου τα σήματα εισόδου  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  είναι πλήρως ασυσχέτιστες διαδικασίες λευκού θορύβου με διακύμανση ίση με 1 για το  $w_1$  και το  $w_4$ , ίση με 2 για το  $w_2$  και ίση με 8 για το  $w_3$ . Οι χρονοσειρές που δημιουργούνται από την εξίσωση (82) εμφανίζονται στην Εικόνα 4-1. Οι συζεύξεις και οι κατευθύνσεις της αιτιότητας όπως προκύπτουν από το παραπάνω MVAR μοντέλο εμφανίζονται στην Εικόνα 4-2. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα οι στιγμιαίες επιδράσεις (instantaneous effects) εμφανίζονται με διακεκομμένη γραμμή ενώ οι επιδράσεις υστέρησης (lagged effects) εμφανίζονται με συνεχή μαύρη γραμμή. Τα δεδομένα τα επεξεργαστήκαμε με την βοήθεια του eMVAR Toolbox. Η επιλογή της τάξης του μοντέλου έγινε με την βοήθεια του AIC ενώ για την εκτίμηση του AR μοντέλου χρησιμοποιήσαμε τον αλγόριθμο Nuttall Strand. Όπως φαίνεται και στις εικόνες που ακολουθούν (Εικόνες 4-5 έως και 4-11) οι αποκλίσεις μεταξύ πραγματικών και

εκτιμώντων μεγεθών ήταν αμελητέες, ώστε να μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι η επιλογή του AIC ως κριτήριο για την επιλογή της τάξης  $p$  του AR μοντέλου και του Nuttall Strand αλγόριθμου (modified Burg method) για την εύρεση των συντελεστών του AR μοντέλου ήταν σωστή.

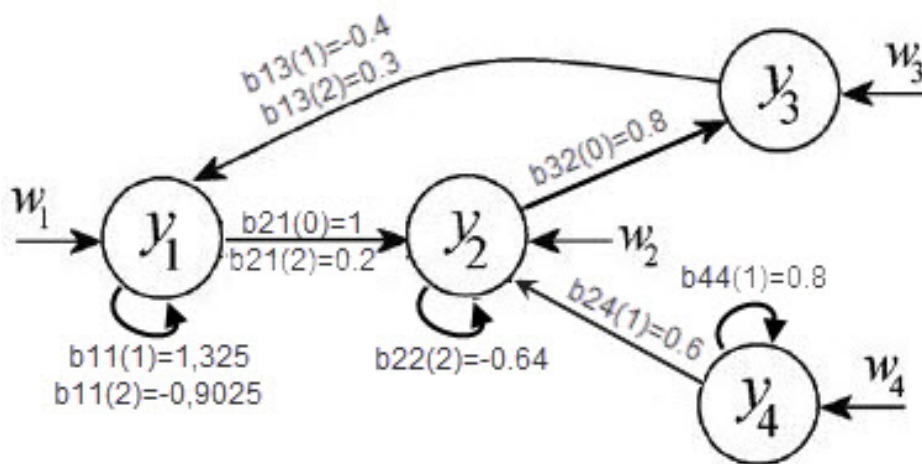


Εικόνα 4-1: Οι χρονοσειρές του MVAR μοντέλο (εξίσωση (82)).

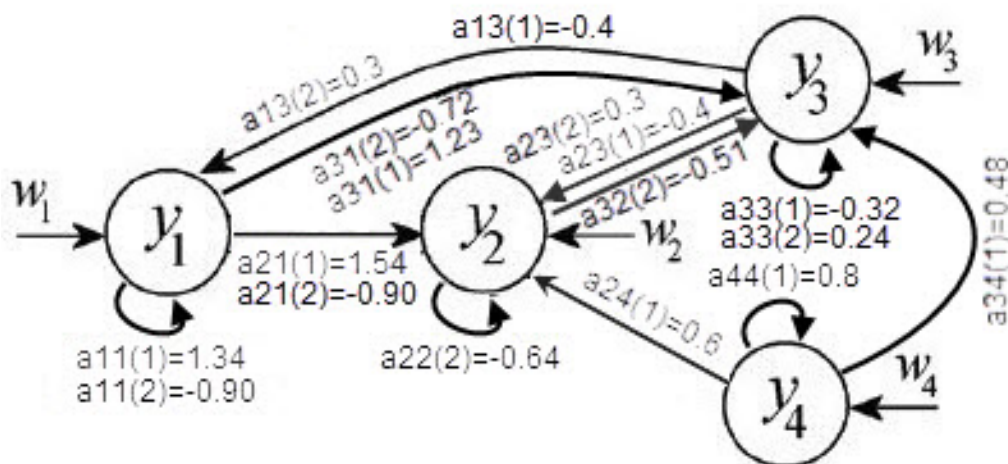


Εικόνα 4-2: Το MVAR μοντέλο (εξίσωση (82)).

Στο συγκεκριμένο θεωρητικό παράδειγμα βρήκαμε πρώτα το εκτεταμένο MVAR μοντέλο. Στη συνέχεια για την εύρεση του αυστηρά αιτιατού (strictly causal) MVAR μοντέλου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (76), (77) και (78). Παρατηρήσαμε ότι η εν λόγω MVAR διαδικασία περιγράφεται ιδανικότερα από το εκτεταμένο MVAR μοντέλο της Εικόνας 4-3 (εκτεταμένο MVAR μοντέλο), στο οποίο η χρήση των συντελεστών των υστερούμενων επιδράσεων καθώς και αυτών των στιγμιαίων επιδράσεων μας επιτρέπει την πανομοιότυπη αναπαραγωγή τόσο των εξισώσεων του MVAR μοντέλου (εξίσωση (82)) όσο και του προτύπου της διασύνδεσης (Εικόνα 4-2). Αντίθετα αν χρησιμοποιήσουμε ένα αυστηρά αιτιατό μοντέλο ως αποτέλεσμα θα έχουμε τον υπολογισμό επιπλέον άμεσων διασυνδέσεων μεταξύ των καναλιών (Εικόνα 4-4). Εξαρχής ξέρουμε όμως ότι οι περισσότερες εξ αυτών δεν υπάρχουν και ως εκ τούτου οδηγούμαστε σε μία τελείως λανθασμένη εκτίμηση της αιτιότητας κατά Granger στο πεδίο των συχνοτήτων.

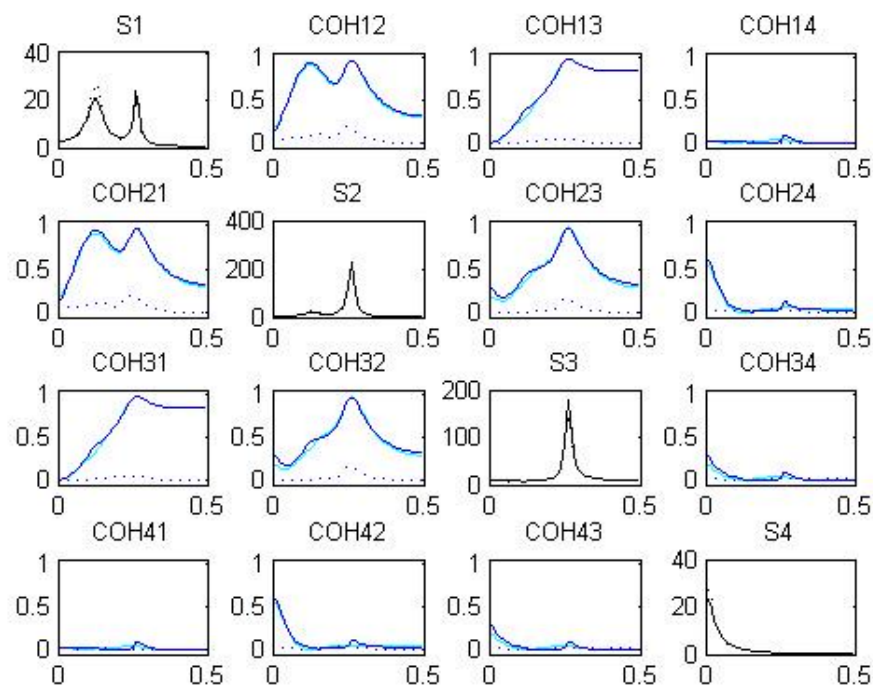


Εικόνα 4-3: Απεικόνιση του εκτεταμένου MVAR μοντέλου (εξίσωση (82)).

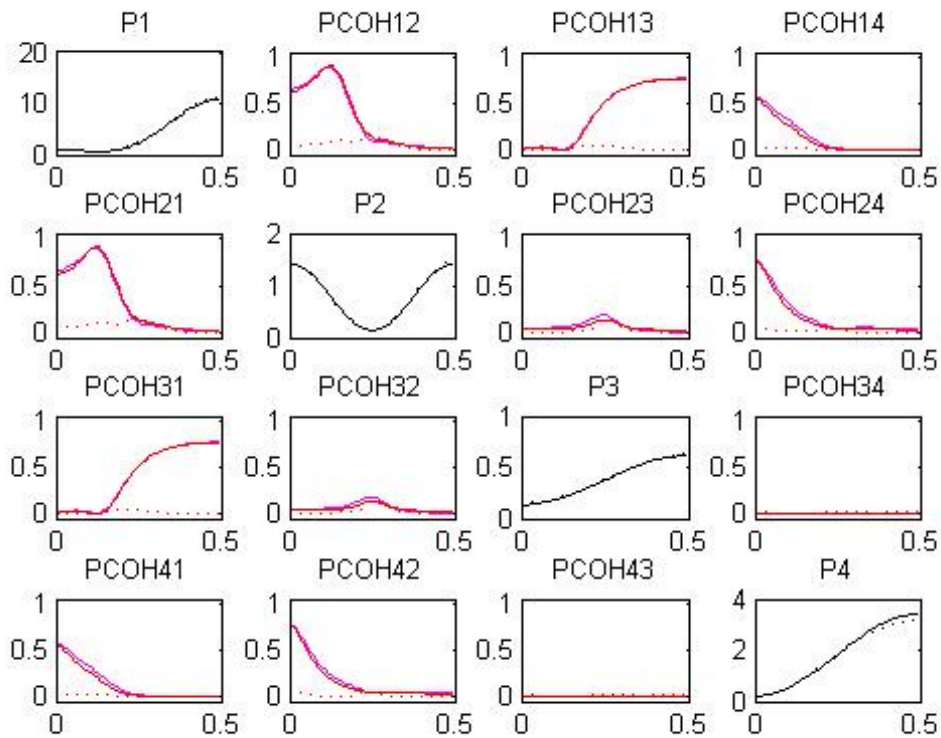


Εικόνα 4-4: Απεικόνιση του αυστηρά αιτιατού MVAR μοντέλου (εξίσωση (82)).

Έχοντας κάνει αυτούς τους υπολογισμούς καταφέραμε και υπολογίσαμε την Συνάφεια (Εικόνα 4-5) καθώς και την Μερική Συνάφεια (Εικόνα 4-6) του αυστηρά αιτιατού μοντέλου. Αυτό που παρατηρήσαμε στις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις (Εικόνες 4-5 και 4-6) είναι ότι αν και έχουμε χρησιμοποιήσει το αυστηρά αιτιατό MVAR μοντέλο για την αναπαράσταση της Συνάφειας και της Μερικής Συνάφειας, εντούτοις αυτές μπορούν να εξηγηθούν μόνο με την βοήθεια του εκτεταμένου (extended) MVAR μοντέλου. Για παράδειγμα το  $COH_{34}$  όπως και το  $PCOH_{34}$  είναι σχεδόν μηδενικό, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχει καμία σύζευξη μεταξύ του  $y_4$  και  $y_3$ , κάτι που δεν ισχύει σύμφωνα με την αναπαράσταση του αυστηρά αιτιατού MVAR μοντέλου, αλλά ισχύει σύμφωνα με την αναπαράσταση του εκτεταμένου MVAR μοντέλου. Αυτού του είδους οι αποκλίσεις υπάρχουν εξαιτίας της αδυναμίας του αυστηρά αιτιατού MVAR μοντέλου να περιγράψει τις στιγμιαίες επιδράσεις των εξισώσεων (82).

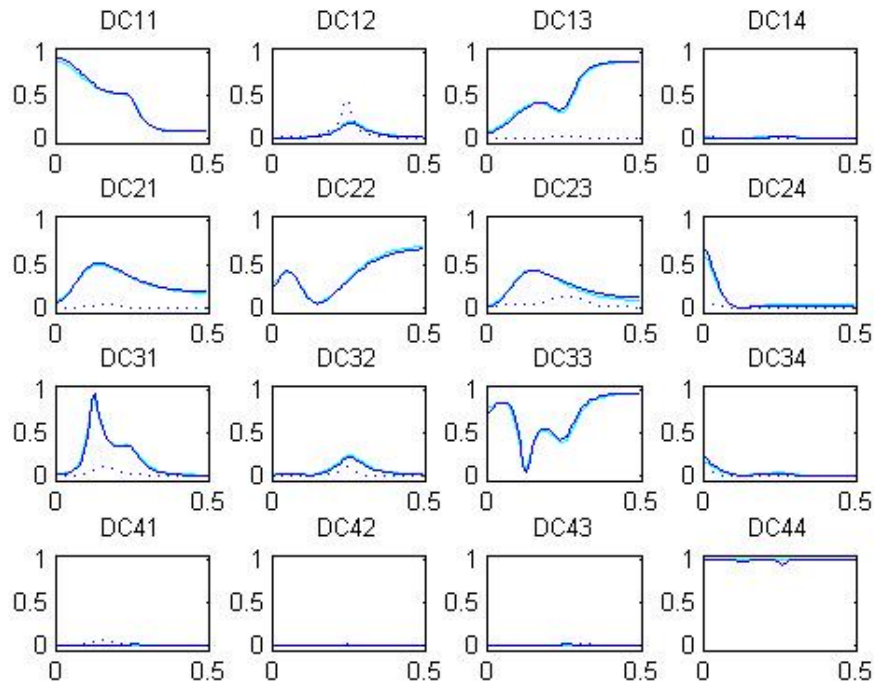


Εικόνα 4-5: Απεικόνιση της συνάφειας  $\Gamma_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . Στη διαγώνιο εμφανίζεται η ισχύς του φάσματος  $S_{ii}(f)$  (γαλάζιο: πραγματική  $\Gamma_{ij}(f)$ , μπλε: εκτιμώμενη  $\Gamma_{ij}(f)$  και μπλε διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)



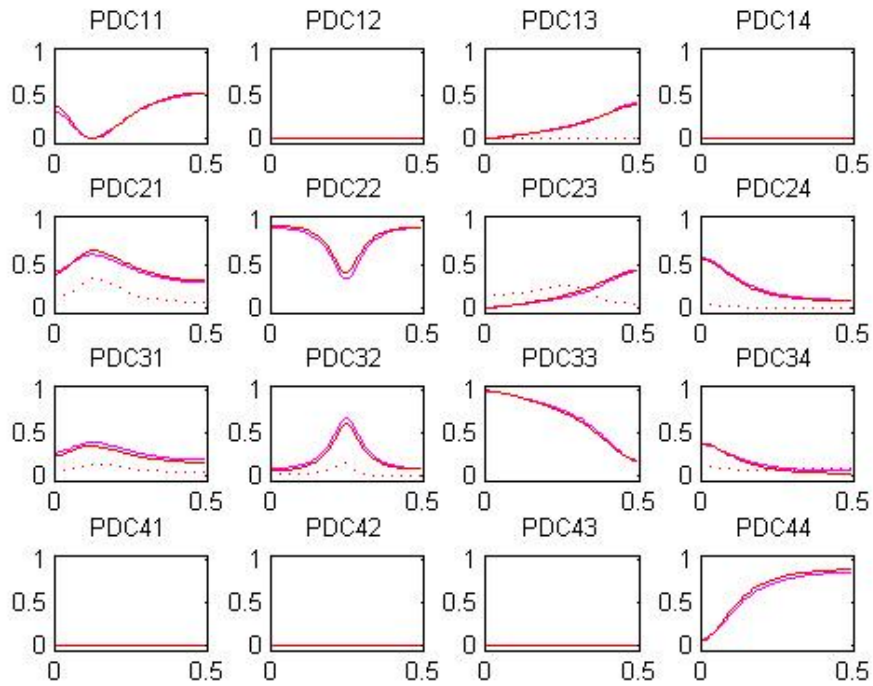
Εικόνα 4-6: Απεικόνιση της μερικής συνάφειας  $\Pi_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . Στη διαγώνιο εμφανίζεται ο αντίστροφος της ισχύος του φάσματος  $P_{ii}(f)$  (μωβ: πραγματική  $\Pi_{ij}(f)$ , κόκκινο: εκτιμώμενη  $\Pi_{ij}(f)$  και κόκκινο διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)

Τα προβλήματα γίνονται ακόμα μεγαλύτερα καθώς μελετάμε την Κατευθυνόμενη Συνάφεια. Όπως βλέπουμε και στην περίπτωση αυτή υπάρχουν αποκλίσεις εξαιτίας της αδυναμίας του αυστηρά αιτιατού MVAR μοντέλου να περιγράψει τις στιγμιαίες επιδράσεις των εξισώσεων (82). Παρατηρούμε ότι οι συζεύξεις, όπως έχουν επιβληθεί εξαιτίας των εξισώσεων (82) ( $y_1 \Rightarrow y_2, y_2 \Rightarrow y_3, y_4 \Rightarrow y_2, y_3 \Rightarrow y_1$ ) δεν είναι οι μοναδικές που εμφανίζονται στην αναπαράσταση της Εικόνας 4-7.

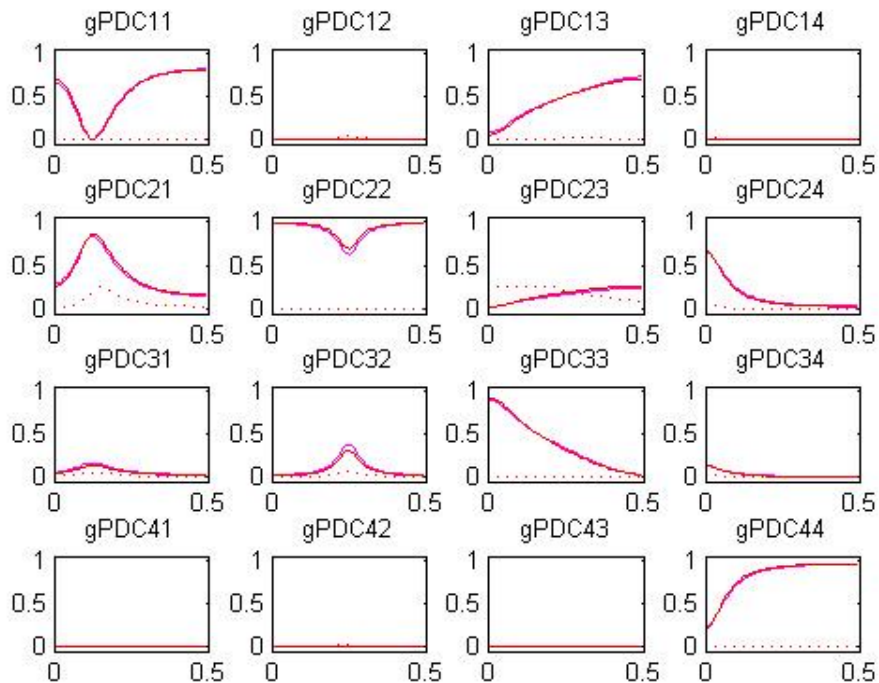


Εικόνα 4-7: Απεικόνιση της συνάφειας  $\gamma_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . (γαλάζιο: πραγματική  $\gamma_{ij}(f)$ , μπλε: εκτιμώμενη  $\gamma_{ij}(f)$  και μπλε διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)

Τέλος προχωρήσαμε σε αναπαράσταση των μέτρων της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας και πιο αναλυτικά της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας ( $\pi_{ij}(f)$ ) ή PDC (Εικόνα 4-8), της Γενικευμένης Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας ( $\tilde{\pi}_{ij}(f)$ ) ή gPDC (Εικόνα 4-9), της Εκτεταμένης Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας ( $\chi_{ij}(f)$ ) ή ePDC (Εικόνα 4-10) και τέλος της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας Πληροφορίας ( $\tilde{\chi}_{ij}(f)$ ) ή iPDC (Εικόνα 4-11). Οι δύο πρώτες υπολογίστηκαν με την βοήθεια του αυστηρά αιτιατού MVAR μοντέλου ενώ οι δύο τελευταίες με την βοήθεια του εκτεταμένου MVAR μοντέλου. Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι στη περίπτωση των PDC και gPDC συναντάμε τα ίδια προβλήματα με αυτά που συναντήσαμε στη Κατευθυνόμενη Συνάφεια εξαιτίας των εγγενών αδυναμιών των αυστηρά αιτιατών MVAR μοντέλων. Ωστόσο η gPDC δείχνει βελτιωμένη έναντι της PDC επειδή συμπεριλαμβάνει και τις τυχόν αποκλίσεις της διακύμανσης του θορύβου στον υπολογισμό της. Αντίθετα στην περίπτωση των ePDC και iPDC βλέπουμε την σωστή αναπαράσταση της MVAR διαδικασίας με και χωρίς τις στιγμιαίες επιδράσεις. Τέλος στην Εικόνα 4-12 αναπαραστήσαμε και τα τέσσερα μέτρα της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας στο ίδιο διάγραμμα για καλύτερη αντίληψη των σχετικών μεγεθών.

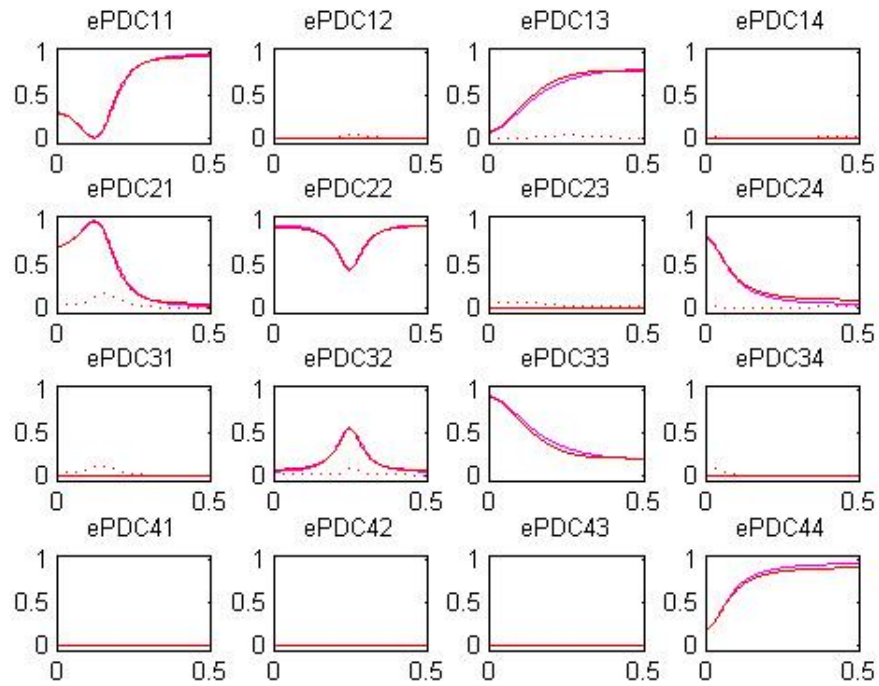


Εικόνα 4-8: Απεικόνιση της PDC  $\pi_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . (μωβ: πραγματική  $\pi_{ij}(f)$ , κόκκινο: εκτιμώμενη  $\pi_{ij}(f)$  και κόκκινο διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)

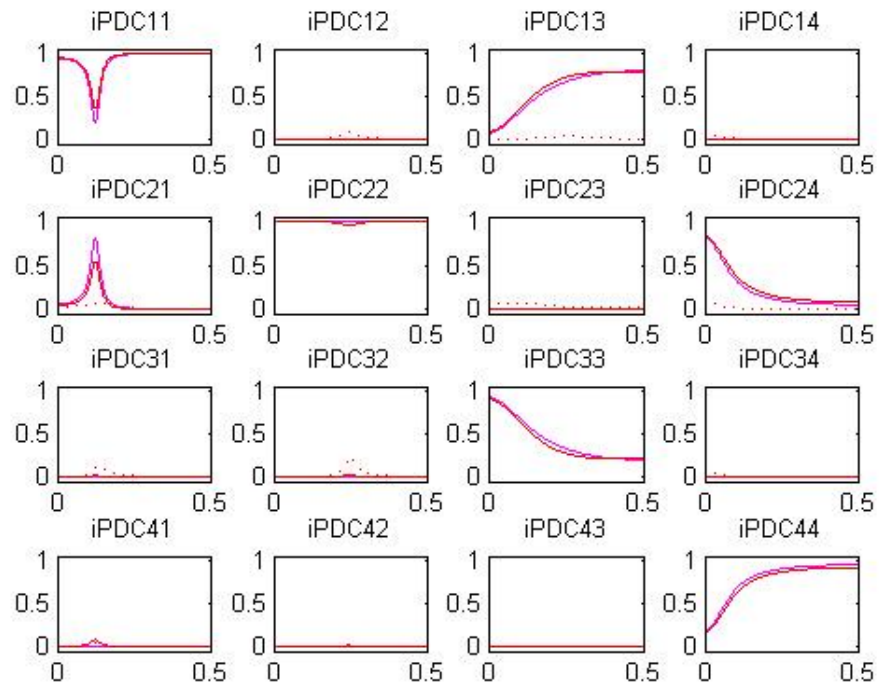


Εικόνα 4-9: Απεικόνιση της gPDC  $\tilde{\pi}_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . (μωβ: πραγματική  $\tilde{\pi}_{ij}(f)$ , κόκκινο: εκτιμώμενη  $\tilde{\pi}_{ij}(f)$  και κόκκινο διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)

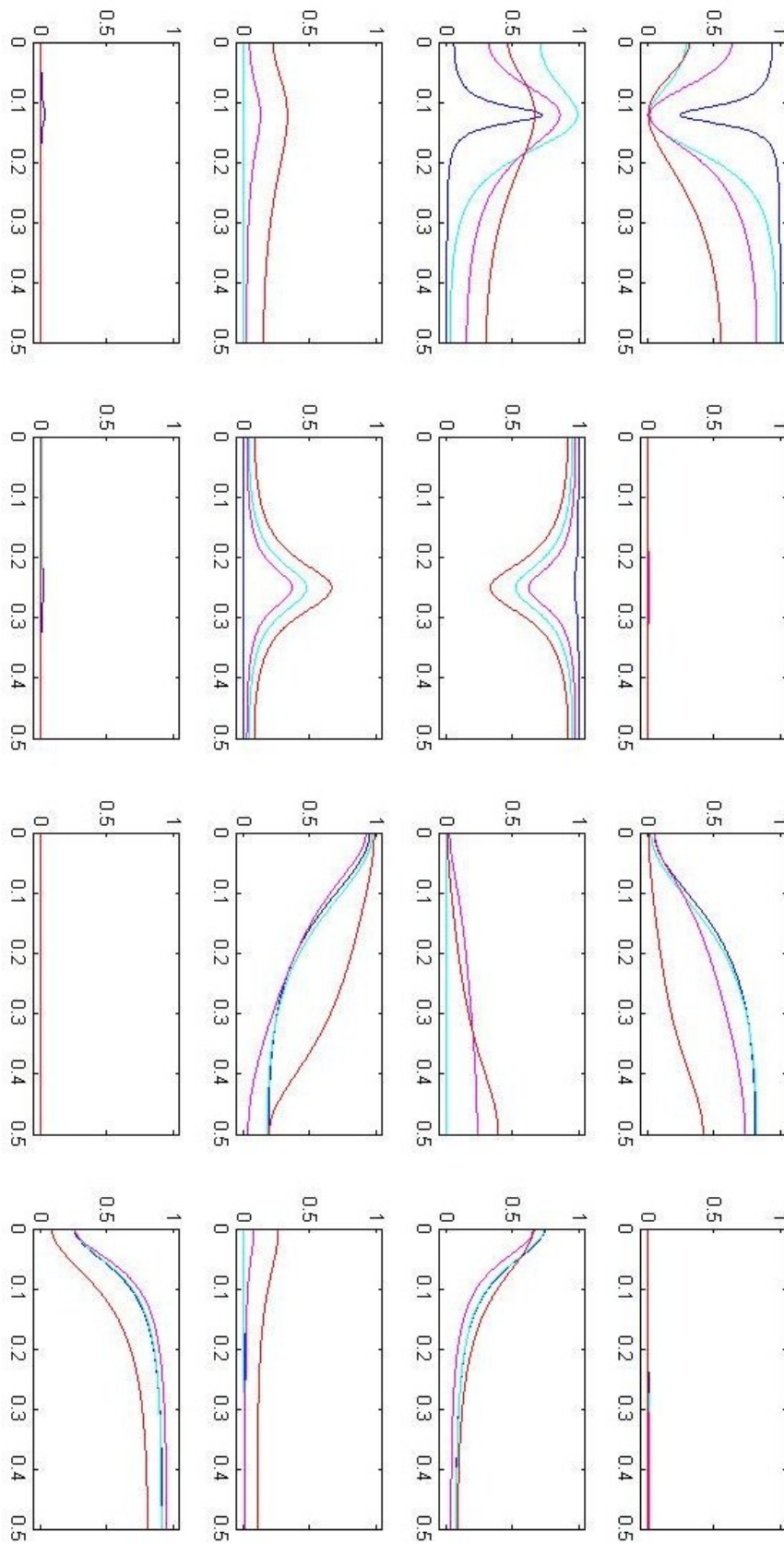




Εικόνα 4-10: Απεικόνιση της ePDC  $x_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . (μωβ: πραγματική  $x_{ij}(f)$ , κόκκινο: εκτιμώμενη  $x_{ij}(f)$  και κόκκινο διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)



Εικόνα 4-11: Απεικόνιση της iPDC  $\tilde{x}_{ij}(f)$  μεταξύ  $y_j$  και  $y_i$ . (μωβ: πραγματική  $\tilde{x}_{ij}(f)$ , κόκκινο: εκτιμώμενη  $\tilde{x}_{ij}(f)$  και κόκκινο διακεκομμένο: κατώφλι σημαντικότητας)



Εικόνα 4-12: Συνδυασμένη απεικόνιση των μέτρων της Μερικής Κατευθυνόμενης Συνάφειας (μωβ: gPDC, κόκκινο: PDC, μπλε: iPDC, γαλάζιο: ePDC)

### 5.3 Συμπεράσματα - Μελλοντικές Προοπτικές

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν η μελέτη της διασύνδεσης χρονοσειρών με θεωρίες πληροφορίας μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας. Η συγκεκριμένη μέθοδος μελετήθηκε με την βοήθεια προσομοιωμένων δεδομένων και ελέγχτηκε ως προς την ορθότητα των παραγόμενων αποτελεσμάτων για ένα απλό μοντέλο τεσσάρων νευρώνων. Παράλληλα μελετήθηκαν και τα υπόλοιπα μέτρα συνάφειας (Συνάφεια, Μερική Συνάφεια και Κατευθυνόμενη Συνάφεια).

Η εύρεση του Φάσματος Ισχύος των προσομοιωμένων δεδομένων έγινε με την βοήθεια παραμετρικών μεθόδων. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε τον Nutall Strand αλγόριθμο για τον υπολογισμό των συνιστωσών του AR μοντέλου, ενώ για την επιλογή της τάξης του μοντέλου χρησιμοποιήσαμε το Akaike Information Criterion. Με βάση τα αποτελέσματα μας μπορούμε να πούμε ότι η εκτίμηση AR μοντέλου μας ήταν πολύ κοντά στο πραγματικό AR μοντέλο, γεγονός που μας κάνει να πιστεύουμε ότι αυτός ο συνδυασμός είναι ιδανικός για την πρόβλεψη MVAR μοντέλων.

Ένα πρόβλημα που προέκυψε κατά την εφαρμογή ενός αυστηρώς αιτιατού MVAR μοντέλου για την πρόβλεψη των συνιστωσών αυτού, είναι ότι δημιουργήθηκαν αρκετές νέες συζεύξεις μεταξύ των καναλιών εξαιτίας της αδυναμίας του μοντέλου να αναγνωρίσει τις στιγμιαίες επιδράσεις, τις οποίες ως εκ τούτου τις προσθέτει στον πίνακα συνδιακύμανσης του θορύβου του μοντέλου (σήμα εισόδου). Παρατηρήσαμε ωστόσο ότι η Συνάφεια (Coherence) και η Μερική Συνάφεια (Partial Coherence) δεν επηρεάστηκαν από το συγκεκριμένο γεγονός. Αντίθετα η Κατευθυνόμενη Συνάφεια (Directed Coherence) έδειξε ότι επηρεάστηκε από την ύπαρξη των στιγμιαίων επιδράσεων, καθώς εμφανίστηκαν στο διάγραμμα διασυνδέσεις που εξ αρχής ξέρουμε ότι δεν υπάρχουν.

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι στη περίπτωση των PDC και gPDC συναντάμε τα ίδια προβλήματα με αυτά που συναντήσαμε στη DC εξαιτίας των εγγενών αδυναμιών των αυστηρά αιτιατών MVAR μοντέλων. Ωστόσο η gPDC δείχνει βελτιωμένη έναντι της PDC επειδή συμπεριλαμβάνει και τις αποκλίσεις της διακύμανσης του θορύβου στον υπολογισμό της. Αντίθετα στην περίπτωση των ePDC και iPDC βλέπουμε την σωστή αναπαράσταση της MVAR διαδικασίας με και χωρίς τις στιγμιαίες επιδράσεις.

Η παρούσα εργασία δημιουργεί σε αρκετά σημεία προοπτικές για μελλοντική εργασία πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Μια ενδιαφέρουσα προοπτική είναι η ανάλυση εγκεφαλογραφικών δεδομένων με την μέθοδο της εκτεταμένης μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (ePDC) καθώς και την μέθοδο της μερικής κατευθυνόμενης συνάφειας (iPDC) προκειμένου να γίνει υπολογιστική ανάλυση της λειτουργικής διασύνδεσης των εγκεφαλογραφικών σημάτων.



# Βιβλιογραφία

- Adey, Kado, & Walter. (1967). Analysis of brain wave records from Gemini flight GT-7 by computations to be used in a thirty day primate flight. [J]. *Life Sci Space Res*, 5, 65-93.
- Adey, Walter, Crandall, & Elul. (1967). The cooperative behavior of neuronal populations during sleep and mental tasks. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 23(1), 88.
- Akaike, H. (1969). Power spectrum estimation through autoregressive model fitting. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21(1), 407-419.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723.
- Albo, Z., Di Prisco, G.V., Chen, Y., Rangarajan, G., Truccolo, W., Feng, J., Vertes, R.P., Ding, M. (2004). Is partial coherence a viable technique for identifying generators of neural oscillations? *Biol Cybern*, 90(5), 318-326.
- Andrew, C., & Pfurtscheller, G. (1996). Event-related coherence as a tool for studying dynamic interaction of brain regions. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 98(2), 144-148. doi: 10.1016/0013-4694(95)00228-6
- Baccala, & Sameshima. (2001). Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination. *Biol Cybern*, 84(6), 463-474.
- Baccala, Sameshima, Ballester, Valle, & Timo-Iaria. (1998). Studying the interaction between brain structures via directed coherence and granger causality. *Applied Sig. Process.*, vol. 5, 40-48.
- Baccala, Sameshima, & Takahashi. (2007). *Generalized Partial Directed Coherence*. Paper presented at the 2007 15th International Conference on Digital Signal Processing.
- Bendat, J. S., & Piersol, A. G. (2000). *Random data : analysis and measurement procedures* (3rd ed.). New York: Wiley.
- Brazier, M. A., & Barlow, J. S. (1956). Some applications of correlation analysis to clinical problems in electroencephalography. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 8(2), 325-331.
- Brazier, M. A., & Casby, J. U. (1952). Cross-correlation and autocorrelation studies of electroencephalographic potentials. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 4(2), 201-211.
- Cohen M. I., Y., Q.F, Huang, W. X. (1995). Preferential correlations of a medullary neuron's activity to different sympathetic outflows as revealed by partial coherence analysis. *J Neurophysiol*, 74, 474-478.
- Cooley, J. W., Lewis, P. A. W., Welch, P. D., & Thomas J. Watson IBM Research Center. (1967). *The Fast Fourier transform algorithm and its applications* ([Rev. ed.]). Yorktown Heights, N.Y.: IBM Watson Research Center.
- Cooley, J. W., & Tuckey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297-301. doi: <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1>
- Faes, & Nollo. (2010). Extended causal modeling to assess Partial Directed Coherence in multiple time series with significant instantaneous interactions. *Biol Cybern*, 103(5), 387-400. doi: 10.1007/s00422-010-0406-6

- Faes, & Nollo. (2011). *Multivariate Frequency Domain Analysis of Causal Interactions in Physiological Time Series*: InTech.
- Galka, A. (2000). *Topics in nonlinear time series analysis : with implications for EEG analysis*. Singapore ; River Edge, N.J.: World Scientific.
- Gersch, W. (1970). Spectral analysis of EEG's by autoregressive decomposition of time series. *Math Biosci*, 7(1-2), 205-222. doi: 10.1016/0025-5564(70)90049-0
- Granger, C. W. J. (1969). Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*, 37(3), 424.
- Hannan, E. J. (1970). *Multiple time series: Wiley series in probability and mathematical statistics*, Wiley, New York.
- Hayes, M. H. (1996). *Statistical digital signal processing and modeling*. New York: John Wiley & Sons.
- Kandel, E. R., Schwartz, J. H., & Jessell, T. M. (2000). *Principles of neural science* (4th ed.). New York: McGraw-Hill, Health Professions Division.
- Kay, S. M. (1988). *Modern spectral estimation : theory and application*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
- Lyons, R. G. (2004). *Understanding digital signal processing* (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PIR.
- Pereda, E., Quiroga, R. Q., & Bhattacharya, J. (2005). Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Prog Neurobiol*, 77(1-2), 1-37.
- Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (1996). *Digital signal processing : principles, algorithms, and applications* (3rd ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Quiroga, R. Q., Arnhold, J., & Grassberger, P. (2000). Learning driver-response relationships from synchronization patterns. *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*, 61(5 Pt A), 5142-5148.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461-464.
- Seth, A. K. (2010). A MATLAB toolbox for Granger causal connectivity analysis. *J Neurosci Methods*, 186(2), 262-273. doi: 10.1016/j.jneumeth.2009.11.020
- Stoica, P., & Moses, R. L. (1997). *Introduction to spectral analysis*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
- Sun, F. T., Miller, L.M., D'Esposito, M. (2004). Measuring interregional functional connectivity using coherence and partial coherence analyses of fMRI data. *Neuroimage*, 21(2), 647-658.
- Welch, P. D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE Trans. Audio & Electroacoust.*, AU-15, 70-73.