



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών**  
**και Φυσικών Επιστημών**  
**Τομέας Μηχανικής**

**Διπλωματική Εργασία**  
**« Το άνω μηριαίο οστό**  
**θεωρούμενο ως συνεχώς**  
**ανομοιογενές υλικό »**



**ΚΑΚΟΥΤΣΗΣ ΦΙΛΙΠΠΟΣ**

Επιβλέπων Καθηγητής:  
**Δημήτριος Ευταξινόπουλος**  
Επίκουρος Καθηγητής Μηχανικής Ε.Μ.Π

Αθήνα  
Οκτόβριος 2012

## Πρόλογος

Η παρούσα πτυχιακή εργασία με τίτλο «**Το άνω μηριαίο οστό θεωρούμενο ως συνεχώς ανομοιογενές υλικό**» εκπονήθηκε με σκοπό την απόκτηση του τίτλου του Πτυχίου μου στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων του ΕΜΠ.

Στην εκπόνηση και συγγραφή της παρούσης διπλωματικής εργασίας συνέβαλαν διάφορα πρόσωπα, τα οποία αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω.

Ένα, λοιπόν, μεγάλο ευχαριστώ στον Δρα. Δημήτριο Ευταξιόπουλο, Επίκουρο Καθηγητή Μηχανικής του Ε.Μ.Π., επιβλέποντα της πτυχιακής μου εργασίας, για την συνεχή καθοδήγηση, για τις κατευθύνσεις που μου έδωσε, τις πολύτιμες συμβουλές του αλλά και την αρωγή του σε όλες τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν. Και ένα μεγάλο συγνώμη αν τον άγχωσα, θύμωσα ή τον πίεσα ψυχολογικά.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ψυχολογική και οικονομική υποστήριξη και την υπομονή που έδειξε όλον αυτόν τον καιρό.

## Περίληψη

Σκοπός της πτυχιακή εργασίας είναι ο ανασχηματισμός του άνω ανθρώπινου μηριαίου οστού από αξονικές τομογραφία και η μοντελοποίηση της μηχανικής συμπεριφοράς του με πεπερασμένα στοιχεία θεωρούμενο ως συνεχώς ανομοιογενές υλικό

Η εργασία αυτή περιλαμβάνει:

✓ Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, την ανατομία του πάνω μηριαίου οστού καθώς και τις μηχανικές του συμπεριφοράς. Γίνεται επίσης αναφορά στα είδη των οστών, μεταξύ των οποίων περιγράφεται το φλοιώδες και το σπογγώδες ενός συνηθισμένου οστού.

✓ Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, γίνεται μια περιληπτική περιγραφή της Μεθόδου των Πεπερασμένων στοιχείων.

✓ Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται αναλυτική περιγραφή της διαδικασίας μοντελοποίησης και διακριτοποίησης του οστού του άνω μηρού, χρησιμοποιώντας σύγχρονα υπολογιστικά εργαλεία.

✓ Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα καθώς και κάποια συμπεράσματα από τα αποτελέσματα της ανάλυσης του άνω μηριαίου οστού.

## Abstract

The aim of the thesis is the reconstruction of the upper human femur from CT scans and the modeling of its mechanical behavior via the finite element considering it as continuously inhomogeneous material

This work includes:

- The anatomy of the upper femur and its mechanical behavior in the first chapter. Reference is also made to the types of bone, including the described cortical and cancellous bone.
- In the second chapter is a brief description of the finite element method.
- In the third chapter a detailed description of the modeling and discretization of the upper thigh bone, using modern computational tools.
- In the fourth chapter, the results and some conclusions from the analysis of the upper femur.



3.2.2 Διαδικασία Διακριτοποίηση .....	48
3.3 Έλεγχος Μοντέλου .....	55
Κεφάλαιο 4ο: Πειραματικά Μοντέλα .....	58
4.1 Περιγραφή του προγράμματος FreeFem++ .....	58
4.2 Μεταβολικοί Τύποι.....	60
4.3 Αποτελέσματα .....	63
4.4 Ερμηνεία Αποτελεσμάτων.....	84
Γενικά Συμπεράσματα – Μελλοντική Έρευνα .....	85
Βιβλιογραφία.....	86

## Εμβιομηχανική

Ένα πλήθος ερευνών έχουν πραγματοποιηθεί προκειμένου να κατανοηθούν βαθιά οι καταστάσεις φόρτισης του μηρού και του μυοσκελετικού συστήματος. Η κατάσταση φόρτισης του μηρού έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και έρευνας για πολλά χρόνια. Το 1638 ο Γαλιλέος ασχολήθηκε με τη μηχανική των μακρών οστών και ανέλυσε αδρά την ανατομική δομή του μηρού. Η βάση της μελέτης και της περιγραφικής του ανάλυσης απέδειξαν τη σχέση ανάμεσα στις αρχές της Μηχανικής και στο σχήμα των οστών.

Με επιτυχία, η εσωτερική ανατομία και όχι η μακροσκοπική ανατομία των οστών έχουν αποτελέσει το κύριο αντικείμενο μελέτης στις αναλύσεις Εμβιομηχανικής του μηρού. Σκεπτόμενος την περιγραφή της αρχιτεκτονικής του σπογγώδους του άνω μηρού από τον Meyers (1867), ο Wolf (1870) δημοσίευσε τις ιδέες του γύρω από τις τιμές των μηχανικών μεγεθών και την ανατομία των οστών. Αποκαλύφθηκε ότι οι δομές δεν είναι άσχετες με τον προσανατολισμό των εφαρμοζόμενων φορτίων, αλλά έχουν σχεδιαστεί ώστε να παραλαμβάνουν με επιτυχία τα φορτία αυτά. Ο Wolf (1892) χρησιμοποίησε την εργασία του Culmann (1866), όπου η σχέση της δομής του σπογγώδους οστού με τη διεύθυνση των εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων, ερμηνεύεται με χρήση της Μηχανικής. Αποδεχόμενος ο Wolf ότι το οστό είχε τη βέλτιστη δομή, ήταν φανερό ότι μπορούσε να ερμηνεύσει ότι η οστική αρχιτεκτονική ήταν αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τα μηχανικά αίτια μπορούσαν να καθορίσουν τον τρόπο ανάπτυξης του οστού. Στην εργασία του ο Wolf από το 1892 θεμελίωσε ακριβώς ότι οι οστικές δομές δεν ήταν από μόνες τους καθορισμένες από γενετικούς παράγοντες αλλά είχαν δεχτεί και την επίδραση των καταστάσεων φόρτισης. Παρόλο που ο Wolf περιέγραψε την προσαρμοστικότητα του οστού στα μηχανικά αίτια, ο Koch (1917) ήταν ο πρώτος που δοκίμασε να προσδιορίσει τη εντατική κατάσταση στο μηρό υπολογίζοντας τις τάσεις και τις παραμορφώσεις.

Στη δημοσίευσή του ο Koch ανέλυσε πλήρως την ανατομία του μηρού υπολογίζοντας την επιφάνεια του οστού και την ροπή αδράνειας του. Ο Koch κατόρθωσε να υπολογίσει τις αξονικές και τις διατμητικές δυνάμεις, καθώς και τις καμπτικές ροπές και τις διευθύνσεις εφαρμογής των κύριων τάσεων στο μηρό χρησιμοποιώντας τη θεωρία δοκών. Η κατεύθυνση των υπολογιζόμενων κύριων τάσεων συμφωνούσε καλά με την αρχιτεκτονική του σπογγώδους οστού, που υιοθετήθηκε κατά τον Wolf το 1892. Η ανάλυση του Koch ήταν ικανή να εξηγήσει τις καμπυλότητες του μηρού στο εμπρόσθιο επίπεδο αλλά δε συμπεριέλαβε τη δράση των μυϊκών δυνάμεων. Ο Grunewald (1920) και ο Marique (1945) δημοσίευσαν παρόμοιες μελέτες σχετικά με το περιβάλλον φόρτισης του μηρού. Οι Evans και Lissner (1948) και ο Frankel (1960) χρησιμοποίησαν ένα προστατευτικό στρώμα για να ερευνήσουν πειραματικά την εντατική κατάσταση του φορτισμένου οστού.

Ο Pauwels ήταν ένας από τους πρώτους μελετητές που ασχολήθηκε με την επίδραση των μυών στη φόρτιση του μηρού (αναλυτικές μελέτες το 1950 και φωτοελαστικά πειράματα το 1951). Εκτός από αυτό, ο Pauwels εδραίωσε την άποψη ότι ο μηρός φορτίζεται με καμπτική ροπή, η οποία δρα μαζί με τη θλίψη (1973). Απορρίπτοντας τις μελέτες του Pauwels, ο Torodls (1969) θεώρησε ότι η επίδραση των μυϊκών φορτίσεων στη μηχανική συμπεριφορά του μηρού δεν ήταν τόσο σημαντική όσο ήταν αυτή του σωματικού βάρους. Ο Torodls δημοσίευσε μια μέθοδο για τον υπολογισμό των τάσεων στο μηρό χρησιμοποιώντας θεωρία δοκών. Δυστυχώς, στο άρθρο του δεν καταγράφηκαν δεδομένα σχετικά με εντατικές καταστάσεις, δυνάμεις, τάσεις και ροπές. Ο Rybicki (1972) δημοσίευσε μια δουλειά σχετικά με την επίδραση των μυών στην εντατική κατάσταση του μηρού. Ο Rybicki χρησιμοποίησε την περιγραφή της ανατομίας του μηρού από τον Koch, για να αναλύσει τις τάσεις του μηρού όταν το πόδι βρίσκεται σε κίνηση.

Ο Ghista (1976) δημοσίευσε μια εκτενή μαθηματική περιγραφή των τάσεων εσωτερικά στο πόδι κατά την κίνηση. Οι μυϊκές δυνάμεις προσδιορίστηκαν με την εφαρμογή αντίστροφου



δυναμικού υπολογισμού των φορτίσεων στα κέντρα των αρθρώσεων. Για την ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας σε ένα τμήμα του άκρου, ο Ghista απλοποίησε το μοντέλο του, έτσι ώστε μόνο τρεις μύες και τρεις δυνάμεις στις επαφές των αρθρώσεων να δρουν κάθε στιγμή. Μετά από την απλοποίηση αυτή, η μέθοδός του επέτρεψε τον υπολογισμό των εσωτερικών τάσεων του οστού χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των δυνάμεων και τις γεωμετρικές ιδιότητες του μηρού.

Οι Raftopoulos και Qassem (1987) δημοσίευσαν μια μέθοδο για τον υπολογισμό των τάσεων σε μια τρισδιάστατη καμπύλη, σύνθετη δοκό. Ακόμα, οι Raftopoulos, Qassem μετασχημάτισαν τη σύνθετη δοκό σε μια ομογενή δοκό αλλάζοντας την επιφάνεια και τις ροπές αδρανείας του δύσκαμπτου υλικού. Ο Salathe (1989) εφάρμοσε τη θεωρία της δοκού (beam theory) για να προσδιορίσει τις τάσεις και τις παραμορφώσεις των μακρών οστών. Θεωρώντας μια κατανεμημένη φόρτιση κατά μήκος του κύριου άξονα του μακρού οστού, υπολόγισε τις εσωτερικές δυνάμεις και τις ροπές. Αφού ο Salathe χρησιμοποίησε στοιχεία σχετικά με την κάμψη, τη στρέψη και τη διάτμηση και θεώρησε τις ελαστικές ιδιότητες, υπολόγισε τις τάσεις και τις παραμορφώσεις του πέμπτου μετατάρσιου. Λόγω διαφορών σχετικά με την ανατομία και το μέγεθος ανάμεσα στο πέμπτο μετατάρσιο και στο μηρό, οι πληροφορίες της κατάστασης ισορροπίας του πέμπτου μετατάρσιου δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μηρό.

Στηριζόμενοι στη βιβλιογραφία σχετικά με την εμβιομηχανική του μηρού, αναφέραμε κάποια στοιχεία παραπάνω, αλλά δεν υπάρχει μια ολοκληρωμένη περιγραφή των εσωτερικών δυνάμεων του μηρού, που να περιλαμβάνει τις δυνάμεις που ασκούν οι επαφές των μυών στο οστό. Επίσης, δεν έχει αναφερθεί ένα ολοκληρωμένο διάγραμμα ελευθέρου σώματος του μηρού. Θα μπορούσε να θεωρηθεί αναγκαία μια μελέτη των καταστάσεων φόρτισης του μηρού. Πειραματικές τεχνικές και αναλύσεις στηριζόμενες στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστεί η εντατική κατάσταση του μηρού. Θα ακολουθήσει μια σύντομη αναφορά στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και σε μερικές εφαρμογές της.

## Κεφάλαιο 1ο: Μηριαίο Οστό – Ισχίο

### 1.1 Εισαγωγή

Τα οστά στον ανθρώπινο οργανισμό είναι ιδιαίτερα ενεργά όργανα με βασικές τους λειτουργίες την προστασία και στήριξη των εσωτερικών οργάνων, την παροχή περιοχών πρόσφυσης των μυών, τη δημιουργία στερεών αρθρούμενων μονάδων και τη διευκόλυνση της δράσης των μυών και της κίνησης ολόκληρου του σώματος.

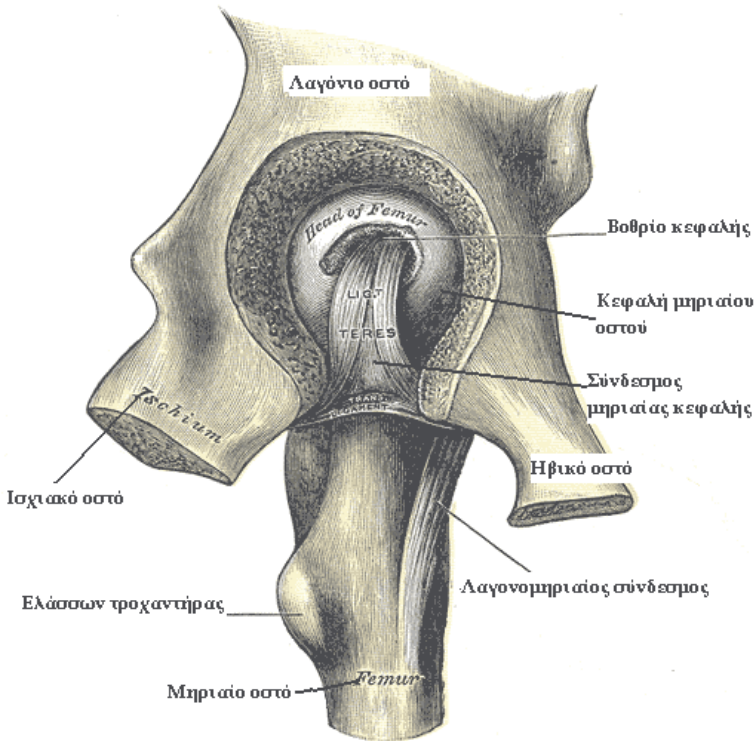
Αποτελούνται από εξειδικευμένους κυτταρικούς πληθυσμούς, οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για τη συνεχή συντήρηση και ανακατασκευή τους. Ιδιαίτερο γνώρισμα των οστών είναι η οστική ανακατασκευή, διεργασία υπεύθυνη για την προοδευτική αλλαγή της μορφής των οστών κατά την ανάπτυξη, για το ισοζύγιο ασβεστίου στο σώμα και για τη συντήρηση και την προσαρμογή των οστών στο μηχανικό ερέθισμα.

Οι μηχανικές ιδιότητες των οστών παρουσιάζουν πολλές ιδιαιτερότητες που γίνονται εμφανείς στην καθημερινή κλινική πράξη των επιστημόνων που ασχολούνται με τη θεραπεία καταγμάτων, με τα μεταβολικά νοσήματα των οστών και με την τοποθέτηση διαφόρων οστικών εμφυτευμάτων [1].

### 1.2 Άρθρωση του ισχίου

Το οστό του ισχίου ή ανώνυμο οστό (innominate bone) αποτελείται από τρία μέρη: το λαγόνιο οστό, το ισχιακό οστό (ischium) και το ηβικό οστό, τα οποία είναι διακριτά το ένα από το άλλο σε νεαρό άτομο, αλλά ενώνονται στον ενήλικα (Σχήμα 1.1). Η ένωση των τριών τμημάτων συμβαίνει μέσα και γύρω από μια μεγάλη, σε σχήμα κυπέλλου, αρθρική

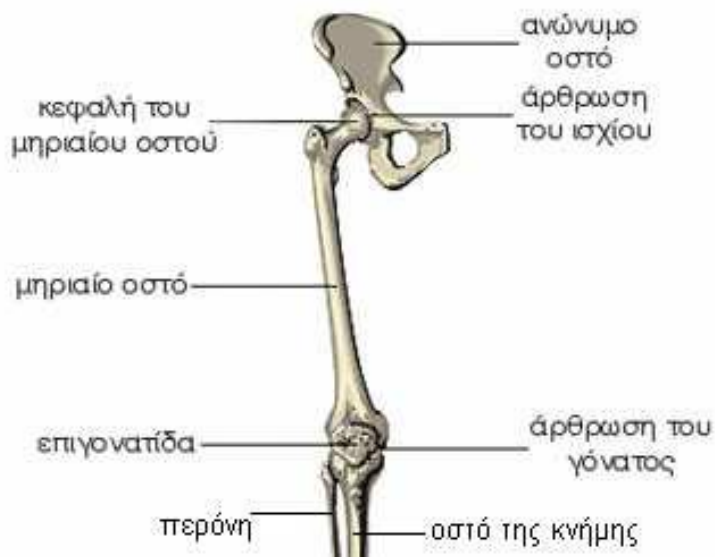
κοιλότητα, την κοτύλη, η οποία βρίσκεται κοντά στη μεσαία και εξωτερική επιφάνεια του οστού. Τα δύο ανώνυμα οστά, αριστερό και δεξιό, συνδέονται μεταξύ τους μπροστά στην ηβική σύμφυση και πίσω με το ιερό οστό σχηματίζοντας την πύελο ή λεκάνη.



**Σχήμα 1.1:** Οβελιαία όψη ανώνυμου και μηριαίου οστού

Η άρθρωση του ισχίου είναι μια αρθρική άρθρωση, η οποία αποτελείται από μια στρογγυλή κυρτή επιφάνεια (τμήμα σφαίρας), που είναι η κεφαλή του μηριαίου οστού, και από μια κοίλη, σφαιροειδής επιφάνεια, που είναι η κοτύλη της πύελο (Σχήμα 1.2). Η βασική της λειτουργία είναι να υποστηρίξει το βάρος του σώματος τόσο σε στατικές όσο και σε δυναμικές στάσεις. Και οι δύο επιφάνειες της άρθρωσης καλύπτονται από ένα στιβαρό, με λιπαντικές ιδιότητες,

στρώμα, τον αρθρωτό υάλινο χόνδρο. Η άρθρωση του ισχίου ταξινομείται ως μια άρθρωση σφαίρας-υποδοχής (ball-socket joint), η οποία αποτελεί τη βασική σύνδεση μεταξύ των οστών του κάτω άκρου και του αξονικού σκελετού, του κορμού και της λεκάνης. Λόγω της κατασκευής της θεωρείται σταθερή. Σε αυτό συμβάλλει το σχήμα τόσο του άνω άκρου του μηριαίου όσο και η κοτύλη της λεκάνης. Στη σταθερότητα συμβάλλουν και οι μυϊκές μάζες που περικλείουν την άρθρωση. Η ινώδης κάψουλα της άρθρωσης του ισχίου επιτρέπει στην άρθρωση να έχει τη δεύτερη μεγαλύτερη εμβέλεια κινήσεων, αλλά και να στηρίζει το βάρος του σώματος, τα χέρια και το κεφάλι.



**Σχήμα 1.2:** Άρθρωση ισχίου

Η άρθρωση του ισχίου παρουσιάζει τρεις βαθμούς ελευθερίας κινήσεων. Το φυσιολογικό εύρος κίνησης περιλαμβάνει κάμψη  $0^{\circ}$ - $140^{\circ}$ , έκταση  $0^{\circ}$ - $15^{\circ}$ , απαγωγή  $0^{\circ}$ - $45^{\circ}$ , προσαγωγή  $0^{\circ}$ - $30^{\circ}$ , έξω στροφή  $0^{\circ}$ - $40^{\circ}$  και έσω στροφή  $0^{\circ}$ - $50^{\circ}$ . Στην περιοχή του ισχίου δρα μια πολύπλοκη συνεργία μεγάλων και μικρών μυϊκών ομάδων. Οι μύες που προκαλούν κίνηση στο ισχίο χωρίζονται σε πέντε κατηγορίες

ανάλογα με τον προσανατολισμό τους γύρω από την άρθρωση του ισχίου:

- στη κατηγορία των εκτεινόντων μυών, η οποία περιλαμβάνει το μείζονα γλουτιαίο (gluteus maximus) μυ και τένοντες του ποδιού
- στη κατηγορία των στροφέων μυών, η οποία περιλαμβάνει τον έσω και έξω θυρεοειδή (obturator internus και externus) μυ, τον ανώτερο και κατώτερο δίδυμο (gemellus) μυ, τον απιοειδή (piriformis) και τον τετράγωνο μηριαίο (quadratus femoris) μυ
- στην κατηγορία των προσαγωγών μυών, στην οποία περιλαμβάνεται ο κτενίτης (pectineus) μυς, ο βραχύς, ο μακρύς και ο μέγας προσαγωγός μυς
- στη κατηγορία των καμπτήρων μυών, στην οποία χαρακτηριστικός είναι ο λαγονοψοϊτής (iliopsoas) μυς, ο οποίος αποτελεί συνδυασμό τριών μυών (μέγιστος και ελάχιστος ψόας (psoas) και λαγόνιος μυς (iliacus))
- στη κατηγορία των απαγωγών μυών, η οποία περιλαμβάνει το μέσο γλουτιαίο και τον ελάχιστο γλουτιαίο μυ

Οι μοχλοβραχίονες των μυών αυτών, κυρίως των απαγωγών, μπορούν να αλλάξουν ανάλογα με τη θέση του άκρου στο χώρο. Επίσης, αλλάζουν σε παθολογικές καταστάσεις του ισχίου. Οι μοχλοβραχίονες αυτοί είναι πολύ σημαντικοί για την κατανομή των φορτίων στο ισχίο τόσο σε παθολογικές όσο και σε φυσιολογικές καταστάσεις. Γενικά, τα συνολικά φορτία που δέχεται η άρθρωση του ισχίου είναι σχετικά μικρά σε στατική κατάσταση διποδικής στήριξης (το ένα τρίτο περίπου του σωματικού βάρους), ενώ κατά τη διάρκεια του βηματισμού τα φορτία κυμαίνονται από 2 ως 7 φορές το σωματικό βάρος.

Η άρθρωση του ισχίου ενισχύεται από τρεις κύριους συνδέσμους:

1. Τον ισχυρό λαγονομηριαίο σύνδεσμο, ή σύνδεσμο του Bigelow, ο οποίος στην πρόσοψη της άρθρωσης

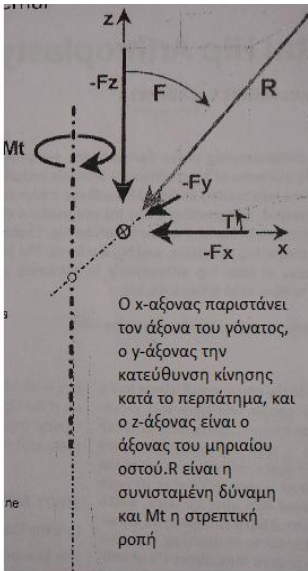
συνδέει την πύελο με το μηριαίο οστό. Ο σύνδεσμος αυτός αντιστέκεται σε υπερβολική έκταση της άρθρωσης του ισχίου και θεωρείται ο πιο ισχυρός σύνδεσμος στο ανθρώπινο σώμα.

2. Τον ηβομηριαίο σύνδεσμο, ο οποίος συνδέει το ηβικό οστό με το μηριαίο και ενισχύει το κάτω τμήμα της κάψουλας της άρθρωσης του ισχίου.
3. Τον ισchioμηριαίο (ischiofemoral) σύνδεσμο, που συνδέει το ισχιακό τμήμα του άκρου της κοτύλης με το μηριαίο οστό και ενισχύει το πρόσθιο τμήμα κάψουλας της άρθρωσης του ισχίου.

Η παροχή αίματος στην άρθρωση του ισχίου γίνεται από την έσω περικαμπτική μηριαία αρτηρία (medial circumflex femoral artery) και από την έξω περικαμπτική μηριαία αρτηρία, οι οποίες αποτελούν διακλαδώσεις της εν τω βάθει μηριαίας αρτηρίας. Η εν τω βάθει μηριαία αρτηρία αποτελεί με τη σειρά της διακλάδωση της μηριαίας αρτηρίας. Υπάρχει, επίσης, μικρή συνεισφορά από μια μικρή αρτηρία στο μικρό σύνδεσμο της μηριαίας κεφαλής (ligamentum teres), η οποία αποτελεί διακλάδωση του πρόσθιου τμήματος της θυρεοειδούς αρτηρίας. Η παροχή αίματος αυτής της αρτηρίας γίνεται πολύ σημαντική προκειμένου να αποφευχθεί η αγγειακή νέκρωση της μηριαίας κεφαλής, όταν η παροχή αίματος από την έσω και έξω περικαμπτική μηριαία αρτηρία διακόπτεται.

### 1.3 Στατικές φορτίσεις ισχίου

Κατά τις διάφορες δραστηριότητες του ανθρώπου, γίνεται συνδυασμός των πιο πάνω κινήσεων του ισχίου. Όταν ο άνθρωπος στέκεται και στα δυο του πόδια, τα δυο ισχία δέχονται τα 2/3 του βάρους του σώματος (ΒΣ), αφού το 1/3 του βάρους οφείλεται στα πόδια. Η έλξη των μυών αντισταθμίζει τη δύναμη του βάρους. Οι σχετικοί μύες δέχονται πάνω από 4ΒΣ. Το φορτίο είναι ακόμα μεγαλύτερο κατά το τρέξιμο ή το πήδημα. Όταν στέκεται στο ένα



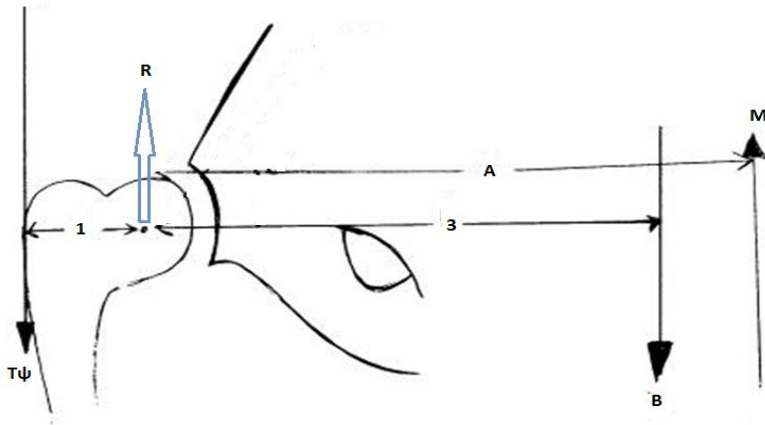
πόδι(μονόποδη στήριξη), το ισχίο δέχεται τα 5/6 του βάρους του σώματος.

Η ανθρώπινη λεκάνη, κατά τη μονόποδη στήριξη, αποτελεί ουσιαστικά ένα μοχλό, με άξονα περιστροφής τη μηριαία κεφαλή.(ζυγός του Pauwels)

Στα άκρα του μοχλού ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος(B) που ασκείται προς τα έξω πάνω από την μηριαία κεφαλή και η δύναμη(T) που ασκείται από τους γλουτιαίους που δρουν σε γωνία 60 από το οριζόντιο επίπεδο.Ο

λόγος των βραχιόνων του μοχλού είναι 1:3.

Αν για παράδειγμα, έχουμε βάρος σώματος 78kg, τότε το ισχίο σε μονόποδη στήριξη δέχεται  $B=65g$  N. Μέσω της ισορροπίας δυνάμεων και ροπών,  $T\psi \times 1 = 65 \times 3$ , άρα  $T\psi=195g$  N. Συνεπώς η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο ισχίο ( $R=T\psi+B$ ) είναι  $R=260g$  N. Που είναι μεγαλύτερη από 3 φορές το βάρος σώματος (BΣ).



Στην περίπτωση όμως που κατά τη μονόποδη στήριξη, γίνεται χρήση μαστουιού στο αντίθετο χέρι, το φορτίο που ασκείται στο ισχίο μειώνεται και γίνεται ίσο με το βάρος του σώματος (1ΒΣ). Αντίθετα αν το μαστούι κρατιέται από το ίδιο χέρι με το ισχίο που φορτίζεται, το φορτίο γίνεται 2ΒΣ.

Σε αυτή την περίπτωση, από την ισορροπία δυνάμεων και ροπών προκύπτει:

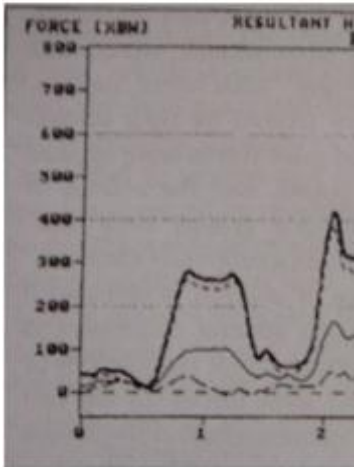
$$T\psi \times 1 + M \times A = B \times 3$$

$$R = B + T\psi - M$$

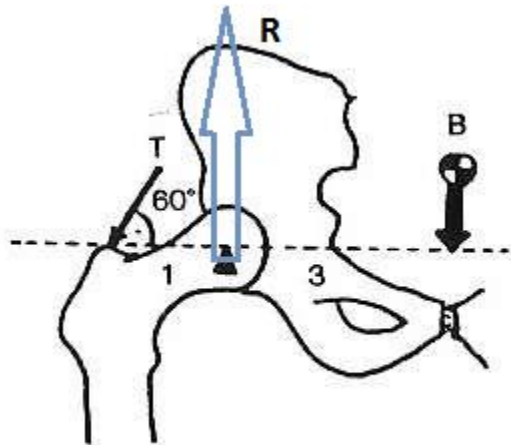
Άρα τώρα τόσο η  $R$ , όσο και η  $T\psi$  μειώνονται. Αν το μαστούι τοποθετηθεί στο άλλο χέρι, η ροπή αν και πιο μικρή, θα είναι αντίθετης φοράς και θα μειώνει αντί να αυξάνει την  $T\psi$ . Ασφαλώς η συνισταμένη δύναμη στο ισχίο πάλι θα μειώνεται, αλλά η μείωση θα είναι μικρότερη.

Η χρήση δεκανικιών μειώνει τις δυνάμεις που ασκούνται στο ισχίο κατά 30%.





Δυνάμεις που αναπτύσσονται  
στραβοπατήματος(μεταξύ :



### Δυναμικές φορτίσεις ισχίου

Κατά το περπάτημα, οι δυνάμεις που ασκούνται στο ισχίο εξαρτώνται από την ταχύτητα. Κυμαίνονται μεταξύ 3BΣ στο άκρο που είναι σε επαφή με το έδαφος σε αργό ρυθμό και 4.5BΣ σε ταχύτητα 5 km/h. Κατά τη φάση αιώρησης το φορτίο στο αντίστοιχο ισχίο είναι κάτω από 1BΣ. Κατά το τροχάδην αυτές οι δυνάμεις φτάνουν μέχρι και 5BΣ. Η πιο μεγάλη συνιστώσα της δύναμης είναι η  $F_z$  κατά μήκος του άξονα του μηριαίου οστού. Αξίζει να αναφερθεί ότι σε περίπτωση παραπατήματος οι δυνάμεις φτάνουν μέχρι και 8.7BΣ.! Γενικά η σταθερότητα κατά το περπάτημα εξασφαλίζει τις χαμηλότερες δυνάμεις, ίσως ελαχιστοποιώντας τη δράση ανταγωνιστικών μυών.

Κατά το ανεβοκατέβασμα σκάλας η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο ισχίο κυμαίνεται μεταξύ 2-3,5BΣ., με λίγο μεγαλύτερη τιμή κατά το κατέβασμα. Παρόλο που το

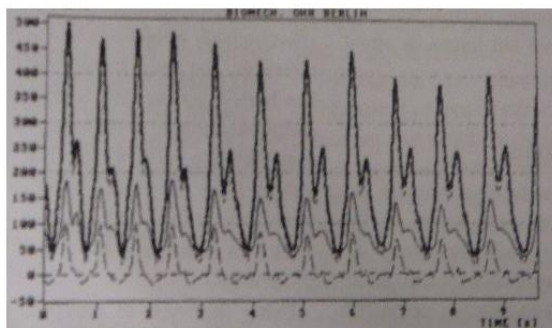
διάνυσμα δυνάμεων σε αυτή την κίνηση παραμένει σχετικά σταθερό, προκαλούνται αρκετά μεγάλες στρεπτικές ροπές.

Όταν κάποιος σηκώνεται από την καρέκλα, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο ισχίο είναι παρόμοιες με το περπάτημα, ενώ μειώνονται αισθητά αν τα χέρια υποβοηθούν την κίνηση. Με την κίνηση αυτή, αναπτύσσονται στρεπτικές ροπές που τείνουν να περιστρέψουν την κεφαλή του μηριαίου μέσα στην κοτύλη.

Κατά την ποδηλασία παρατηρούνται πολύ χαμηλές δυνάμεις στο ισχίο, γύρω στο 0.85BΣ. Βέβαια σε περιπτώσεις μεγάλης επιτάχυνσης, μπορεί να φτάσουν μέχρι και 2.7 BΣ που εξακολουθούν όμως να είναι χαμηλότερες από τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά το περπάτημα! Συνεπώς η ποδηλασία προτείνεται ανεπιφύλακτα σε άτομα με προβλήματα στο ισχίο.

Αξίζει να αναφερθεί ότι κατά το περπάτημα χωρίς παπούτσια παρατηρούνται οι χαμηλότερες δυνάμεις στο ισχίο! Τα παπούτσια αυξάνουν τόσο τις δυνάμεις όσο και τις στρεπτικές ροπές στο ισχίο, ενώ η χρήση μαλακών σόλων δεν βελτιώνει την κατάσταση. Επίσης τα μαλακά πατώματα αυξάνουν τις δυνάμεις στο ισχίο.

Κρατώντας κάτι στο ένα χέρι, αυξάνονται οι δυνάμεις στο αντίθετο ισχίο ενώ μειώνονται στο κοντινό. Για παράδειγμα κρατώντας ένα αντικείμενο βάρους 0.25BΣ στο αριστερό χέρι, η δύναμη στο δεξί ισχίο είναι 66% μεγαλύτερη από το αριστερό ισχίο.



Δυνάμεις κατά τη διάρκεια βαδίσματος και τρεξίματος (επιβράδυνση από 7 km/h - 4.2 km/h) .Οι δυνάμεις εκφράζονται ως ποσοστά του ΒΣ

Τα πιο πάνω δεδομένα για τις δυνάμεις που ασκούνται στο ισχίο, μπορούμε να τα πάρουμε είτε με *in vivo* και *in vitro* πειραματικές μετρήσεις, είτε με μαθηματικά μοντέλα και προτυποποιήσεις σε υπολογιστικά μηχανικά προγράμματα.

Οι *in vitro* μετρήσεις, έγιναν κυρίως σε πτωματικά δοκίμια, ζωικά δείγματα και συνθετικά υλικά που έχουν παρόμοιες μηχανικές ιδιότητες με τα οστά.

Οι *in vivo* έγιναν μέσω ενδοπροθέσεων που περιείχαν ηλεκτρονικά όργανα μέτρησης των φορτίων στις αρθρώσεις. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν συσκευές ίδιων διαστάσεων με τις ενδοπροθέσεις που θα έμπαιναν κανονικά στον ασθενή, οι οποίες όμως είχαν ενσωματωμένους μετρητές παραμορφώσεων, ενωμένους με ένα «πομπό». Έτσι καθώς το συγκεκριμένο άτομο έκανε διάφορες κινήσεις, καταγράφονταν οι δυνάμεις που αναπτύσσονταν.

Τα μαθηματικά μοντέλα, για απλές στατικές περιπτώσεις βασίζονται σε θεμελιώδεις εξισώσεις της μηχανικής, σε διαγράμματα ελευθέρου σώματος, στους νόμους του Νεύτωνα κλπ. Σ' αυτές τις περιπτώσεις όμως γίνονται πολλές παραδοχές και απλοποιήσεις, όπως ότι το οστόύν είναι στερεό σώμα, οι δυνάμεις ασκούνται σε ένα μόνο σημείο, οι

δυνάμεις από πολλούς μύες απλοποιούνται και γίνονται μια μόνο δύναμη κλπ. Τα μοντέλα αυτά συνήθως υπολογίζουν πιο μεγάλες δυνάμεις από αυτές που προκύπτουν με τις in vivo μετρήσεις. Για πιο σύνθετες εντατικές καταστάσεις και πιο ακριβή αποτελέσματα, έχουν αναπτυχθεί υπολογιστικές μέθοδοι όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων που με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, μας δίνει σχετικά εύκολα ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα. Πιο κάτω παρουσιάζεται χρωματικά η κατανομή των τάσεων στην κεφαλή του μηριαίου οστού και στην κοτύλη, κατά το βάδισμα, την ανάβαση και κατάβαση σκάλας, όπως προέκυψαν από ένα υπολογιστικό πρόγραμμα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

#### **1.4 Ανατομία μηριαίου οστού**

Το μηριαίο οστό είναι το μεγαλύτερο και πιο ισχυρό οστό του ανθρώπινου σκελετού και από το μήκος του εξαρτάται το ύψος του ανθρώπου. Είναι σχεδόν τέλεια κυλινδρικό στο μεγαλύτερο τμήμα του.



**Σχήμα 1.3:** Πρόσθια και οπίσθια όψη δεξιού μηριαίου οστού

Το μέσο ανθρώπινο μηριαίο οστό είναι περίπου 48cm σε μήκος, περίπου 2,34cm σε διάμετρο και μπορεί να αντέξει μέχρι 30 φορές το βάρος ενός ενήλικου. Στην όρθια του στάση δεν είναι κατακόρυφο, αλλά κλίνει βαθμιαία προς τα κάτω και προς τα μέσα προκειμένου να φέρει την άρθρωση του γονάτου κοντά στη γραμμή βαρύτητας του σώματος. Η γωνία κλίσης ποικίλλει σε διαφορετικά άτομα και είναι



μεγαλύτερη στις γυναίκες απ' ότι στους άνδρες, εξ αιτίας του μεγαλύτερου πλάτους της λεκάνης που έχουν οι γυναίκες. Το μηριαίο οστό, όπως και τα άλλα μακριά οστά, διαιρείται στο κυρίως σώμα, στο άνω και στο κάτω άκρο.

Τα βασικά μέρη του *άνω άκρου* του μηριαίου οστού είναι η κεφαλή, ο αυχένος και οι δύο τροχαντήρες, ο μείζων και ο ελάσσων (Σχήμα 1.4).

**Σχήμα 1.4:** Άνω άκρο του μηριαίου οστού

Η *κεφαλή* έχει σχήμα σφαιροειδές, μεγαλύτερο από ημισφαίριο. Κατευθύνεται προς τα πάνω, προς τα μέσα και λίγο εμπρόσθια. Το μεγαλύτερο τμήμα της κυρτότητας της

είναι προς τα πάνω και προς τα εμπρός. Η επιφάνειά της είναι λεία και επικαλύπτεται από υάλινο χόνδρο εκτός από μία ωοειδή κοιλότητα, το *βοθρίο* (fovea capitis femoris). Το βοθρίο βρίσκεται προς τα κάτω και πίσω από το κέντρο της κεφαλής και προσδέεται με το σύνδεσμο της μηριαίας κεφαλής.

Ο *αυχένας* έχει σχήμα επιπεδοποιημένης πυραμίδας. Ο *αυχένας* συνδέει την κεφαλή με τη διάφυση του οστού. Ο μέσος άξονας του *αυχένα* σχηματίζει μεγάλη γωνία (900-1350) με αυτόν της διάφυσης. Η γωνία είναι πιο μεγάλη στη νηπιακή ηλικία και μειώνεται συνεχώς κατά τη διάρκεια ανάπτυξης του ανθρώπου. Στο μέσο ενήλικα άνθρωπο, ο *αυχένας* σχηματίζει γωνία 1250 με τη διάφυση, αλλά το γεγονός αυτό ποικίλλει αντιστρόφως ανάλογα με την ανάπτυξη της λεκάνης και το ύψος του κάθε ανθρώπου. Είναι μικρότερη σε βραχεία απ' ό,τι σε μακρά οστά και όταν η λεκάνη είναι πλατιά. Μετά την πλήρη ανάπτυξη του ατόμου η γωνία συνήθως δεν υπόκειται σε άλλη αλλαγή, ακόμα και στα γηρατειά του. Επίσης, ο *αυχένας* του μηριαίου σχηματίζει γωνία 25 μοιρών ως προς το μετωπιαίο επίπεδο. Τέλος, η κάψουλα της άρθρωσης του ισχίου επικαλύπτει την κεφαλή και τον *αυχένα* του μηριαίου οστού και προσδέεται στη βάση του *αυχένα*.

Οι τροχαντήρες είναι τμήματα οστού που προεξέχουν, οι οποίοι παρέχουν δραστικότητα στους μύες, που περιστρέφουν τον μηρό στον άξονά του. Ο *μείζων τροχαντήρας* είναι μια μεγάλη, ανώμαλη, τετράπλευρη προεξοχή, η οποία βρίσκεται στην ένωση του *αυχένα* με το άνω τμήμα της διάφυσης. Έχει δύο επιφάνειες και τέσσερα σύνορα (Σχήμα 1.5). Η πλευρική-έξω επιφάνεια (lateral surface), τετραγωνικής μορφής, είναι πλατιά, τραχεία, κυρτή και χαρακτηρίζεται από ένα διαγώνιο κοίλωμα (impression), το οποίο εξυπηρετεί την εισαγωγή του τένοντα του μέσου γλουτιαίου μυ (gluteus medius). Κάτω και πίσω από αυτό το διαγώνιο κοίλωμα παρεμβάλλεται ένας σάκος (bursa) μεταξύ του οστού και του τένοντα του μέγιστου γλουτιαίου μυ (gluteus maximum). Η μέση-έσω επιφάνεια (medial surface), μικρότερου μεγέθους από την πλευρική, παρουσιάζει στη

βάση του μια βαθειά κοιλότητα, τον τροχαντήριο βόθρο, για την εισαγωγή του τένοντα του εξωτερικού θυρεοειδή μυ (obturator externus) και πάνω και μπροστά από αυτή ένα κοίλωμα για την εισαγωγή του εσωτερικού θυρεοειδή μυ (obturator internus) και του δίδυμου (gemelli) μυ. Το ανώτερο σύνορο (superior border) είναι παχύ και ανώμαλο και χαρακτηρίζεται από ένα κοίλωμα για την εισαγωγή του απιοειδή (piriformis) μυ, μυς που βρίσκεται στη γλουτιαία περιοχή του κάτω άκρου. Το κατώτερο σύνορο αντιστοιχεί στη γραμμή ένωσης της βάσης του τροχαντήρα με την πλευρική επιφάνεια της διάφυσης και χαρακτηρίζεται από μια προεξέχουσα κρούστα για την εισαγωγή του άνω τμήματος του έξω πλατύ μυ (vastus lateralis). Το πρόσθιο σύνορο (anterior border) επιτρέπει εισαγωγή στο πλευρικό τμήμα του ελάχιστου γλουτιαίου μυ (gluteus minimus). Τέλος, το οπίσθιο σύνορο προεξέχει πολύ.

Ο *ελάσσων τροχαντήρας* είναι μια κωνική προεξοχή, η οποία ποικίλλει σε μέγεθος σε διαφορετικά άτομα. Προεξέχει στο χαμηλότερο και πίσω τμήμα της βάσης του μηριαίου αυχένα. Από την κορυφή του τρία ξεχωριστά σύνορα εκτείνονται. Η κορυφή (summit) του τροχαντήρα είναι τραχεία και σε αυτή γίνεται η εισαγωγή του τένοντα του μέγιστου μυ της ψόας (psaos major).

Η προεξοχή, μεταβλητού μεγέθους, που υπάρχει στην ένωση του άνω τμήματος του αυχένα με το μείζονα τροχαντήρα ονομάζεται *φύμα* του μηριαίου οστού. Είναι το σημείο συνάντησης 5 μυών: του ελάχιστου γλουτιαίου μυ (gluteus minimus), του έξω πλατύ μυ, του εσωτερικού θυρεοειδή και του ανώτερου και κατώτερου δίδυμου μυ.



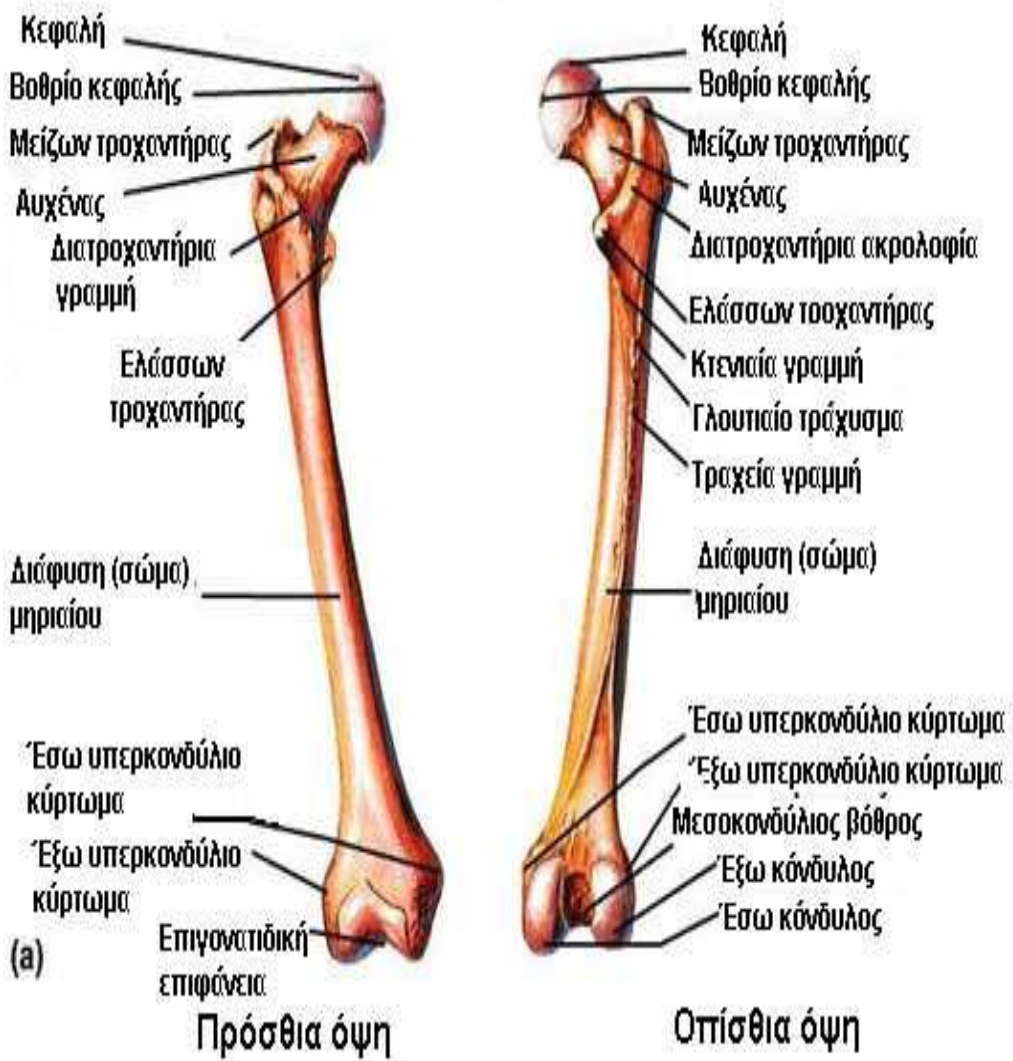


**Σχήμα 1.5:** α) Απαγωγικοί μύες στο μείζονα τροχαντήρα, β) Μύες που προκαλούν στροφή στο μείζονα Τροχαντήρα

Η γραμμή που εκτείνεται πλάγια προς τα κάτω και προς το μέσον από το φύμα ονομάζεται *διατροχαντήρια γραμμή* (intertrochanteric line). Το πάνω τμήμα της είναι τραχύ και παρέχει σύνδεση στο λαγονομηρικό (iliofemoral) σύνδεσμο της άρθρωσης του ισχίου. Το κάτω της τμήμα προεξέχει λιγότερο. Η γραμμή που εκτείνεται πλάγια προς τα κάτω και προς το μέσον από την κορυφή του μείζονα τροχαντήρα στην οπίσθια επιφάνεια του αυχένα ονομάζεται *διατροχαντήρια ακρολοφία* (intertrochanteric crest).

Η *διάφυση*, το σώμα του μηριαίου οστού, έχει σχήμα σχεδόν κυλινδρικό. Η μυελώδης κοιλότητα μέσα στη διάφυση περιέχει το μυελό των οστών. Το σχήμα της διάφυσης είναι περισσότερο πλατύ προς τα πάνω από ότι στο κέντρο, ενώ προς τα κάτω είναι πλατύ και σε κάποιο βαθμό επίπεδο. Η διάφυση είναι, επίσης, κυρτή μπροστά και κοίλη προς τα πίσω. Διαθέτει τρία σύνορα, τα οποία διαχωρίζουν τρεις επιφάνειες.

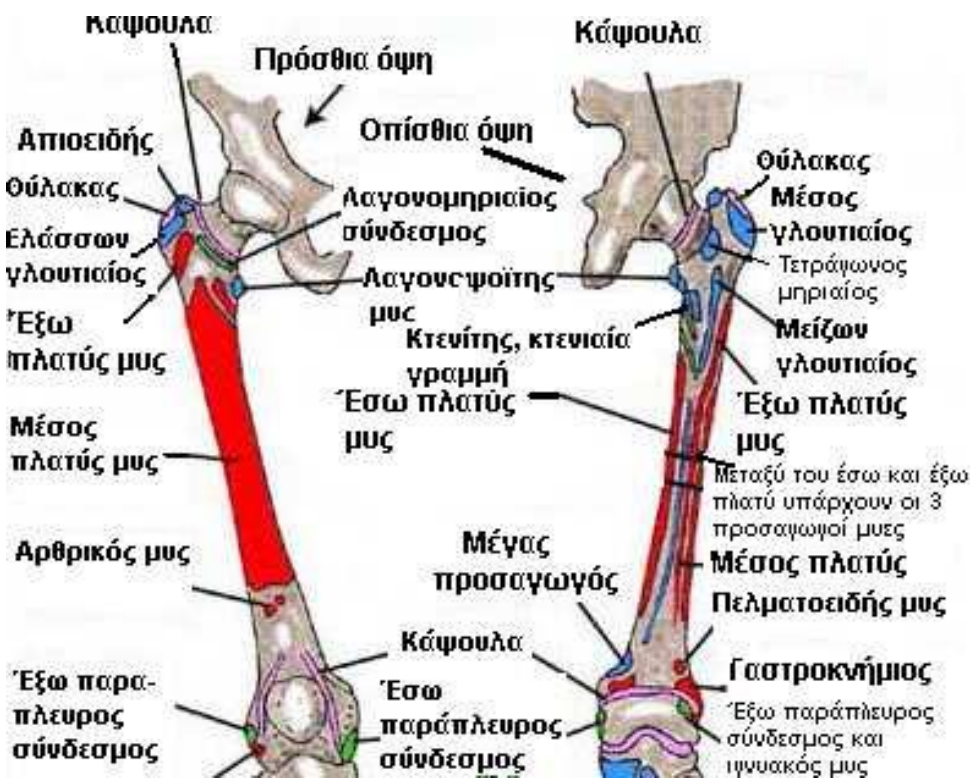
Ένα ευδιάκριτο σύνορο της διάφυσης είναι η *τραχεία γραμμή* (linea aspera), η οποία είναι διαμήκης (Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6: α) Πρόσθια και β) Οπίσθια όψη δεξιού μηριαίου οστού

Προς τα πάνω η τραχεία γραμμή προεκτείνεται σε τρεις κορυφογραμμές. Η έξω κορυφογραμμή είναι πολύ τραχεία και εκτείνεται σχεδόν κάθετα προς τα πάνω στη βάση του μείζονα τροχαντήρα. Αποκαλείται *γλουτιαίο τράχυσμα* (gluteal tuberosity) και σε αυτή προσδένεται τμήμα του μέγιστου γλουτιαίου μυ.

Το πάνω τμήμα του τράχυσματος συχνά επιμηκώνεται σε μια τραχεία ακρολοφία στην οποία συνήθως αναπτύσσεται ένα στρογγυλό εξόγκωμα, ο *τρίτος τροχαντήρας*. Η ενδιάμεση κορυφογραμμή ή *κτενιαία γραμμή* (rectineal line) συνεχίζεται στη βάση του ελάσσονα τροχαντήρα και σε αυτή προσδένεται ο κτενίτης μυς (Σχήμα 1.7). Μεταξύ της έξω και της ενδιάμεσης κορυφογραμμής εισάγεται τμήμα του λαγόνιου μυ. Προς τα κάτω η τραχεία γραμμή προεκτείνεται σε δύο κορυφογραμμές, στην έξω και έσω.



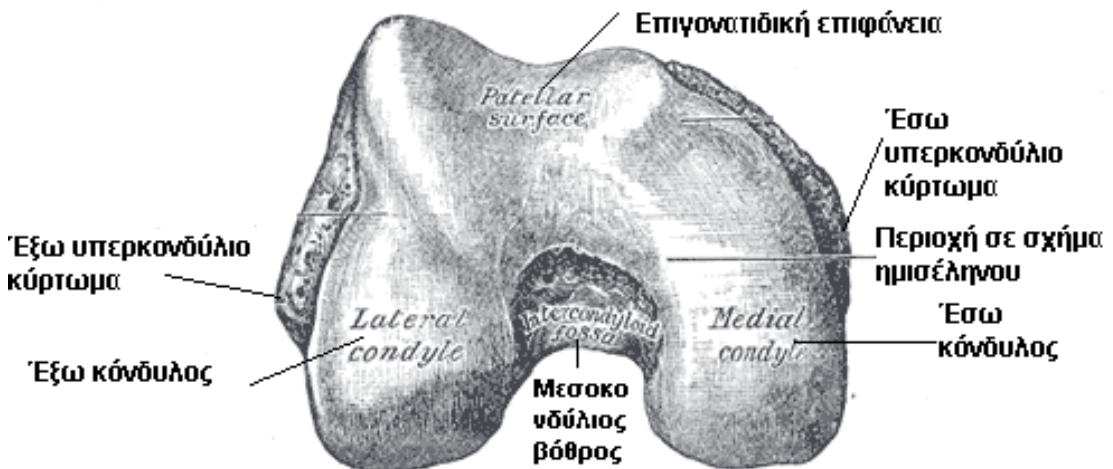
Σχήμα 1.7: Μύες στο μηριαίο οστό

Μεταξύ αυτών των δύο, η έξω προεξέχει περισσότερο και κατεβαίνει ως την κορυφή του έξω κονδύλου. Αντίθετα, η έσω καταλήγει προς τα κάτω στην κορυφή του έσω κονδύλου σε ένα μικρό εξόγκωμα, το φύμα προσαγωγής, το οποίο επιτρέπει εισαγωγή του τένοντα του μεγάλου προσαγωγού.

Τα άλλα δύο σύνορα της διάφυσης δε διακρίνονται εύκολα. Το έξω σύνορο εκτείνεται από την πρόσθια-κατώτερη γωνία του μείζονα τροχαντήρα στο πρόσθιο άκρο του έξω κονδύλου. Το έσω σύνορο εκτείνεται από τη διατροχαντήρια γραμμή στο πρόσθιο άκρο του έσω κονδύλου.

Η πρόσθια επιφάνεια της διάφυσης περιλαμβάνει το τμήμα που βρίσκεται μεταξύ του έσω και έξω συνόρου. Η έξω επιφάνεια της διάφυσης περιλαμβάνει το τμήμα μεταξύ του έξω συνόρου και της τραχείας γραμμής, ενώ η έσω επιφάνεια περιλαμβάνει το τμήμα μεταξύ του έσω συνόρου και της τραχείας γραμμής.

Το κάτω άκρο, μεγαλύτερο από το άνω, έχει περίπου κυβική μορφή, αλλά η εγκάρσια διάμετρός του είναι μεγαλύτερη από την πρόσθιο-οπίσθιά του. Αποτελείται από δύο μακρόστενες προεξοχές που λέγονται κόνδυλοι (Σχήμα 1.8).



Σχήμα 1.8: Κάτω άκρο δεξιού μηριαίου οστού

Προς τα εμπρός, οι κόνδυλοι προεξέχουν λίγο και ξεχωρίζουν ο ένας από τον άλλο από μια λεία, ρηχή, αρθρωτή κοιλότητα, η οποία ονομάζεται *επιγονατιδική επιφάνεια*. Προς τα πίσω, προεξέχουν σημαντικά και το διάστημα μεταξύ τους σχηματίζει ένα βαθύ χάσμα, τον *μεσοκονδύλιο βόθρο*. Ο *έξω κόνδυλος* προεξέχει περισσότερο και έχει πιο ευρεία εγκάρσια και πρόσθια-οπίσθια διάμετρο, ενώ ο *έσω κόνδυλος* είναι πιο μακρύτερος. Όταν το μηριαίο οστό βρίσκεται στη φυσιολογική πλάγια του θέση οι χαμηλότερες επιφάνειες των δύο κονδύλων εκτείνονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Οι κόνδυλοι δεν είναι τελείως παράλληλοι μεταξύ τους. Οι αντίθετές τους επιφάνειες είναι μικρές, κοίλες και σχηματίζουν τα τοιχώματα του μεσοκονδύλιου βόθρου. Ο βόθρος περιορίζεται πάνω από τη *μεσοκονδύλια γραμμή* και κάτω από το κεντρικό τμήμα του οπίσθιου περιθωρίου της επιγονατιδικής επιφάνειας. Πάνω από κάθε κόνδυλο υπάρχει μια ανύψωση το *υπερκονδύλιο κύρτωμα*. Το έσω υπερκονδύλιο κύρτωμα είναι μια μεγάλη προεξοχή στην οποία προσδένεται ο παράπλευρος σύνδεσμος του οστού της κνήμης και της άρθρωσης του γονάτου. Το έξω υπερκονδύλιο κύρτωμα προεξέχει λιγότερο από το έσω και σε αυτό προσδένεται ο περονιαίος παράπλευρος σύνδεσμος της άρθρωσης του γονάτου [2].

## 1.5 Είδη οστών

Τα οστά διακρίνονται σε διαφορετικές κατηγορίες, με βάση το σχήμα τους, καθώς και το μέγεθος και την κατανομή των διαστημάτων σε αυτά.

### Με ιδιαίτερο γνώρισμα το σχήμα τους.

- i. Επιμήκη ή αυλοειδή οστά: για παράδειγμα, το βραχιόνιο και το μηριαίο οστό. Τα επιμήκη οστά εγκλείουν μια αυλοειδή κοιλότητα, που είναι γεμάτη από μυελό των οστών.
- ii. Πλατιά οστά: Στα πλατιά οστά ανήκει το ινιακό. Τα πλατιά οστά εγκλείουν πολλές άδειες κοιλότητες, που είναι κόλποι ή κυψέλες.

- iii. Βραχέα οστά: Ως βραχέα οστά, αναφέρονται τα οστά του καρπού και του ταρσού. Αυτά τα οστά είναι λιγότερο κυλινδρικά από τα υπόλοιπα.
- iv. Οστά ακανόνιστου σχήματος: Τέτοιου είδους οστά είναι ο καρπός και η ποδο-κνημική άρθρωση.
- v. Οστά που δεν ανήκουν σε καμιά από τις παραπάνω κατηγορίες: Σ' αυτό το είδος οστών ανήκουν οι πλευρές.

**Με ιδιαίτερο γνώρισμα το μέγεθος και την κατανομή των διαστημάτων στα οστά.**

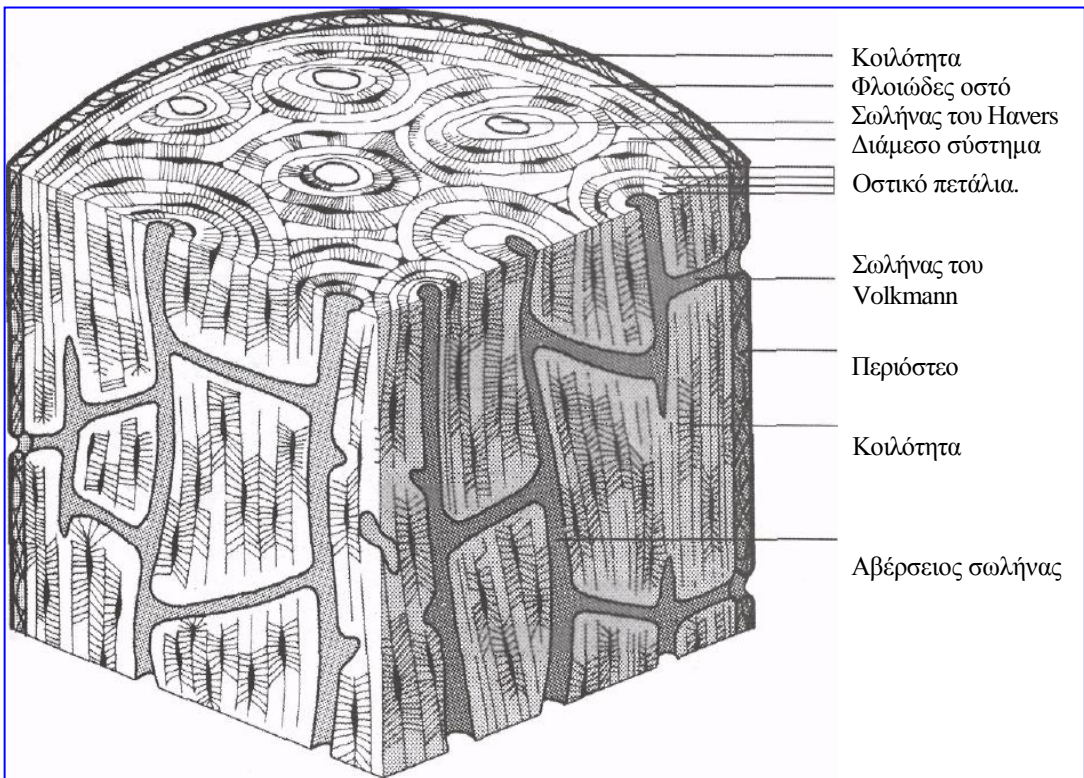
- α) Φλοιώδη οστά
- β) Σπογγώδη οστά

**1.5.1 Φλοιώδη οστά**

Το φλοιώδες οστό αποτελείται από παράλληλες οστικές δοκίδες, οι οποίες στα μακριά οστά βρίσκονται παράλληλα προς τον επιμήκη άξονα. Κάθε δοκίδα αποτελείται από ομόκεντρες οστικές στοιβάδες ή πετάλια, που βρίσκονται γύρω από έναν κεντρικό σωλήνα, που περιέχει αιμοφόρα αγγεία, λεμφαγγεία και νεύρα. Αυτοί οι νευρο-αγγειακοί σωλήνες ονομάζονται Αβέρσιοι σωλήνες (σωλήνες Havers), οι οποίοι μαζί με τα (περιφερειακά) συγκεντρικά τους οστικά πετάλια σχηματίζουν τα Αβέρσεια συστήματα ή τους οστέωνες. Οι νευρο-αγγειακοί σωλήνες επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω των σωλήνων Volkmann, που διατρύπουν τις δοκίδες λοξά ή σε ορθή γωνία προς τους Αβέρσειους σωλήνες. Κάθε Αβέρσειο σύστημα ξεκινάει ως ευρύς σωλήνας, στην περιφέρεια του οποίου οι οστεοβλάστες σχηματίζουν οστικά πετάλια. Μέσω της εναπόθεσης αλλεπάλληλων οστικών πεταλίων η διάμετρος των Αβέρσειων σωλήνων ελαττώνεται, ενώ οι οστεοβλάστες εγκλωβίζονται ως οστεοκύτταρα μέσα στα βοθρία. Έτσι, τα οστεοκύτταρα βρίσκονται οργανωμένα σε ομοκεντρικούς δακτυλίσκους στο εσωτερικό των πεταλίων.



Λόγω της συνεχούς εναπόθεσης και απορρόφησης του οστού, δημιουργούνται ολοκληρωμένα νεοσχηματιζόμενα Αβέρσεια συστήματα ανάμεσα στα μερικά απορροφημένα συστήματα, που έχουν σχηματιστεί. Τα υπολείμματα των πεταλιών που δεν περιβάλλουν τους Αβέρσειους σωλήνες, σχηματίζουν ακανόνιστα διάμεσα συστήματα μεταξύ των ανέπαφων Αβέρσειων συστημάτων.

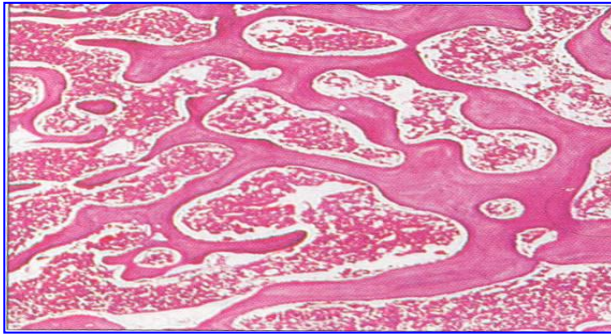


Σχήμα.1.9 : Δομή Φλοιώδης ιστού

### 1.5.2 Σπογγώδη οστό

Το σπογγώδες οστό αποτελείται από ένα δίκτυο οστικών δοκίδων, που διαχωρίζονται από ένα λαβύρινθο διαστημάτων, τα οποία επικοινωνούν μεταξύ τους και περιέχουν μυελό των οστών. Το σπογγώδες οστό συνήθως δεν περιέχει Αβέρσεια συστήματα.

Οι δοκίδες επενδύονται από μια λεπτή στοιβάδα, που χαρακτηρίζεται ενδόστεο, το οποίο περιέχει οστεοπρογονικά κύτταρα, οστεοβλάστες και οστεοκλάστες.



Σχήμα1.10 : Δομή Σπογγώδης Ιστού

#### **Διαφορές μεταξύ του φλοιώδους και του σπογγώδους οστού.**

1. Σπογγώδες οστό εντοπίζεται κυρίως στα άκρα των μακρών οστών (επιφύσεις), ενώ φλοιώδες κυρίως στα κεντρικά μέρη (διαφύσεις).
2. Στο σπογγώδες οστό η διάταξη είναι πιο αραιή. Σ' αυτό δε σχηματίζονται Αβέρσεια συστήματα. Μεταξύ των οστικών δοκίδων σχηματίζονται κοιλότητες, στο εσωτερικό των οποίων υπάρχει μυελός των οστών.
3. Το σπογγώδες οστό είναι πολύ λιγότερο ανθεκτικό από το φλοιώδες, διότι στο σπογγώδες μικρή ποσότητα οστού κατανέμεται σε δεδομένο όγκο.



## **Κοινά χαρακτηριστικό των φλοιωδών και των σπογγώδων οστών**

Στα δυο είδη οστών, οι οστικές δοκίδες έχουν συγκεκριμένη αρχιτεκτονική, δηλαδή είναι προσανατολισμένες έτσι ώστε να δέχονται το βάρος και τις μηχανικές πιέσεις κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

### **1.6 Αρχιτεκτονική του μηριαίου οστού**

Σύμφωνα με τη μαθηματική ανάλυση του Koch [3], σε κάθε τμήμα του μηριαίου οστού υπάρχει αξιοσημείωτη προσαρμογή της εσωτερικής δομής του οστού στις μηχανικές απαιτήσεις που οφείλονται στη φόρτιση που δέχεται η μηριαία κεφαλή. Τα διάφορα τμήματα του μηριαίου οστού σχηματίζουν μια μοναδική μηχανική δομή, η οποία προσαρμόζεται ικανοποιητικά για αποδοτική, οικονομική μετάδοση των φορτίσεων από την κοτύλη της πυέλου ως το οστό της κνήμης. Το μηριαίο οστό ακολουθεί τους νόμους της μηχανικής που ισχύουν για ελαστικά σώματα υπό πίεση. Οι ακόλουθοι δύο νόμοι για τη δομή του οστού θεωρείται ότι περιγράφουν το μηριαίο οστό :

- Η εσωτερική δομή και η εξωτερική μορφή του ανθρώπινου οστού προσαρμόζονται σε μεγάλο βαθμό με τις μηχανικές συνθήκες που ισχύουν για κάθε σημείο στο οστό.
- Η εσωτερική αρχιτεκτονική του φυσιολογικού οστού καθορίζεται από συγκεκριμένες απαιτήσεις των νόμων της μηχανικής και μαθηματικών για την παραγωγή μέγιστης αποδοτικότητας με μέγιστη οικονομία στο υλικό.

Από αρχιτεκτονικής πλευράς υπάρχουν δύο μορφές οστίτου οστού: το εξωτερικό, φλοιώδες και συμπαγές οστό και το εσωτερικό, σπογγώδες και δοκιδώδες οστό. Η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ σπογγώδους και φλοιώδους

οστού είναι το αυξημένο πορώδες του σπογγώδους. Η διάφυση του μηριαίου οστού αποτελείται από ένα εξωτερικό κύλινδρο φλοιώδους οστού που περιβάλλει το μυελικό αυλό και έχει μικρή ποσότητα σπογγώδους οστού. Στις μεταφύσεις του μηριαίου οστού το πάχος του φλοιώδους οστού λεπτύνεται και μεγάλη ποσότητα σπογγώδους οστού καταλαμβάνει τη μυελική κοιλότητα (Σχήμα 1.11).

Το άνω τμήμα του μηριαίου οστού, ως τον ελάσσονα τροχαντήρα, περιέχει κυρίως σπογγώδες οστό και παρουσιάζει δύο ξεχωριστά συστήματα οστικών δοκίδων, τα οποία είναι διευθετημένα σε καμπύλες τροχιές. Το πρώτο είναι αυτό των έσω πλάγιων δοκίδων και το άλλο των έξω πλάγιων δοκίδων. Το έσω σύστημα έχει την αρχή του στην έσω πλευρά της μηριαίας διάφυσης και ακολουθεί καμπύλη πορεία προς τα πάνω στην αντίθετη πλευρά του οστού. Το έξω σύστημα ξεκινάει από το έξω τμήμα της διάφυσης και κατευθύνεται προς τα πάνω και μέσα για να καταλήξει στην άνω επιφάνεια του μείζονα τροχαντήρα, του αυχένα και της κεφαλής (Σχήμα 1.12). Το έσω σύστημα κυρίως υποβαστάζει τα συμπιεστικά φορτία, ενώ το έξω σύστημα ενισχύει την ατοχή του οστού στις φορτίσεις εφελκυσμού.



**Σχήμα 1.11:** Μετωπιαία διαμήκη του αριστερού μηριαίου οστού τομή



**Σχήμα 1.12:** Μετωπιαία διαμήκη τομή του άνω τμήματος του μηριαίου οστού

## 1.7 Τύποι μηχανικής φόρτισης / καταπόνησης του μηριαίου οστού

Κατά τη διάρκεια της καθημερινής δραστηριότητας και κάτω από συνθήκες αυξημένων μηχανικών καταπονήσεων, το μηριαίο οστό, όπως και τα άλλα οστά του ανθρώπινου σκελετού, δέχεται τη δράση δυνάμεων και ροπών. Η μηχανική συμπεριφορά του μηριαίου οστού εξαρτάται από την αντοχή του, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του, την ηλικία του, καθώς και από τον τύπο, την ταχύτητα και τη συχνότητα φόρτισης. Οι δυνάμεις και οι ροπές επιδρούν πάνω στο οστό προς διάφορες κατευθύνσεις και προκαλούν διαφορετικού τύπου φορτίσεις όπως: εφελκυσμό, θλίψη, κάμψη, στρέψη ή και συνδυασμούς τους.

### **Εφελκυσμός**

Η εφαρμογή εφελκυστικών δυνάμεων στο μηριαίο οστό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη συμμετρικών εσωτερικών τάσεων και παραμορφώσεων. Οι μέγιστες τιμές τους εμφανίζονται σε επίπεδο κάθετο προς αυτό της εφαρμογής των εφελκυστικών δυνάμεων. Υπό την επίδραση των δυνάμεων αυτών, το οστό επιμηκύνεται και λεπτύνεται.

### **Θλίψη (συμπίεση)**

Όταν εφαρμόζονται συμπιεστικές δυνάμεις στο οστό, το αποτέλεσμα είναι η ανάπτυξη συμμετρικών εσωτερικών τάσεων και παραμορφώσεων. Υπό την επίδραση των δυνάμεων αυτών, το οστό βραχύνεται και διευρύνεται. Η εφαρμογή των συμπιεστικών φορτίων μπορεί να προκαλέσει κάταγμα στο άνω τριτημόριο του μηριαίου οστού, το οποίο αποτελείται κυρίως από σπογγώδες οστό.

### **Διάτμηση**

Κατά την εφαρμογή διατμητικών δυνάμεων, φορτία ασκούνται παράλληλα προς ένα από τους επιμήκεις άξονες του οστού. Την ίδια στιγμή, αναπτύσσονται εσωτερικές διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις, η διεύθυνση των οποίων σχηματίζει, με την επιφάνεια του οστού, αρχικά ορθή γωνία και στη συνέχεια οξεία γωνία, καθώς η εφαρμογή των

φορτίων συνεχίζεται. Κάταγμα από διατμητικές τάσεις παρατηρείται στους μηριαίους κονδύλους του οστού. Οι κάμπτικές δυνάμεις αναγκάζουν το οστό να κάμφθει γύρω από έναν άξονα. Όταν το οστό κάμπεται, υφίσταται ένα συνδυασμό εφελκυστικών και συμπιεστικών δυνάμεων εκατέρωθεν του ουδέτερου άξονα . Κατάγματα στο μηριαίο οστό λόγω κάμψης συμβαίνουν συχνά. Επειδή ο φλοιός του μηριαίου οστού είναι λιγότερος ανθεκτικός σε διάταση, η καταγματική γραμμή ξεκινά από την περιοχή που εφαρμόζονται οι δυνάμεις που προκαλούν διάταση.

### **Στρέψη**

Η εφαρμογή στροφικών καταπονήσεων στο οστό τείνει να το περιστρέψει γύρω από ένα άξονα, ενώ στο εσωτερικό του αναπτύσσονται στροφικές ροπές. Επίσης, αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις σε επίπεδα κάθετα και παράλληλα προς τον άξονα στρέψης, καθώς και συμπιεστικές και διατμητικές πιέσεις και παραμορφώσεις σε επίπεδα διαγώνια προς τον ίδιο άξονα.

Γενικά, στην κλινική πράξη τα περισσότερα κατάγματα προκαλούνται από συνδυασμό καταπονήσεων. Η φόρτιση του μηριαίου οστού γίνεται δυναμικά, με την εφαρμογή μεταβαλλόμενων δυνάμεων, όπως για παράδειγμα στη βάδιση. Σε λίγες περιπτώσεις η φόρτιση είναι σταθερή, όπως για παράδειγμα στην ορθοστάτηση. Το μηριαίο οστό όταν καταπονείται με υψηλό ρυθμό εφαρμογής φορτίων είναι πιο δύσκαμπτο, έχει μεγαλύτερη αντοχή και απορροφά μεγαλύτερο ποσόν ενέργειας πριν υποστεί κάταγμα [1].

Όσον αφορά στο φλοιώδες μηριαίο οστό ενήλικων, στον ακόλουθο πίνακα (Πίνακας 1) παρουσιάζονται τυπικές αντοχές του, υπό διαφορετικές συνθήκες φόρτισης.

Τρόπος φόρτισης	Μέγιστη αντοχή [MPa]
<b>Διαμήκης διεύθυνση</b>	
Εφελκυσμός	133
Θλίψη	193
Διάτμηση	68
<b>Εγκάρσια διεύθυνση</b>	
Εφελκυσμός	51
Θλίψη	133

**Πίνακας 1.1:** Αντοχή φλοιώδους μηριαίου οστού

Η αντοχή του οστού εξαρτάται από τον τύπο της φόρτισης και από τη διεύθυνσή της. Η αντοχή σε θλίψη είναι μεγαλύτερη από την αντοχή σε εφελκυσμό και για τις δύο διευθύνσεις φόρτισης, ενώ, για τη διαμήκη συνθήκη φόρτισης, η αντοχή σε θλίψη είναι σχεδόν τριπλάσια της αντοχής σε διάτμηση [1].

## Κεφάλαιο 2ο: Πεπερασμένα Στοιχεία

### 2.1 Ιστορική εξέλιξη της Μεθόδου των

#### Πεπερασμένων Στοιχείων

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) προέρχεται από τις απαιτήσεις για επίλυση σύνθετων προβλημάτων ελαστικότητας και δομικής ανάλυσης στην αεροναυπηγική και δομική μηχανική. Αποτελεί μία εξέλιξη των μητρικών μεθόδων. Το αρχικό στάδιο ανάπτυξης της μεθόδου εντοπίζεται στη δεκαετία του 1940 και στις εργασίες των Alexander Hrennikoff και Richard Courant.

Βασικό κοινό χαρακτηριστικό αυτών των πρωτοποριακών εργασιών είναι η διακριτοποίηση ενός συνεχούς χώρου σε ένα σύνολο διακριτών υποχώρων. Στις δεκαετίες 1960-70, η (ΜΠΣ) εμφανίζεται σε προβλήματα ελαστικότητας, ρευστών, μεταφοράς θερμότητας και σε μη γραμμικά προβλήματα. Παράλληλα, εμφανίζεται το NASTRAN, το αρχαιότερο εν ζωή εμπορικό πρόγραμμα ανάλυσης κατασκευών με την (ΜΠΣ). Τη δεκαετία του 1980, η (ΜΠΣ) βρίσκει ευρεία εφαρμογή από μηχανικούς, σε πανεπιστήμια και σε μικρές επιχειρήσεις, γεγονός που οφείλεται στην ανάπτυξη των προσωπικών υπολογιστών. Η διαθεσιμότητα γραφικού περιβάλλοντος για την ευκολότερη ανάπτυξη μοντέλων και για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων συμβάλλει καθοριστικά στη διάδοση της (ΜΠΣ). Στη δεκαετία του 1990, η μέθοδος εφαρμόζεται σε πολύπλοκα προβλήματα ρευστομηχανικής, σε συζευγμένα προβλήματα πολλαπλών πεδίων και περιοχών (coupled multidisciplinary analysis) και στην επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας σε παράλληλους υπολογιστές. Η ολοκλήρωση της μεθόδου σε περιβάλλοντα CAD (Computer Aided Design) και CAM (Computer Aided Manufacturing) γίνεται σχεδόν τέλεια. Την σημερινή εποχή, υπάρχει πληθώρα προγραμμάτων ανάλυσης κατασκευών με την (ΜΠΣ), όπως τα ABAQUS, ADINA, ALGOR, ANSYS, COSMOS/M, DYTRAN, MARC, NISA, LSDYNA3D, LUSAS, MSC/NASTRAN, SOLVIA κ.ά.

## 2.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων-

### Περιγραφή της μεθόδου

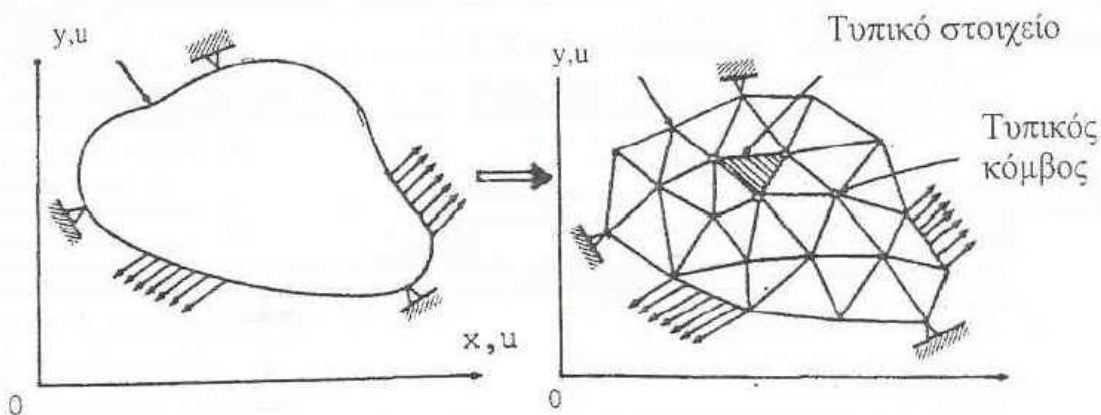
Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method, FEM) είναι μια μέθοδος προσεγγιστικής και αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων συνεχούς μέσου (μηχανικής στερεού, ρευστομηχανικής, προβλημάτων πεδίου) αυθαίρετης γεωμετρίας, οριακών συνθηκών και φορτίσεων. Χρησιμοποιείται για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε μερικές διαφορικές εξισώσεις, καθώς και σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Η προσεγγιστική λύση βασίζεται στην ολική απαλοιφή της διαφορικής εξίσωσης, σε προβλήματα στερεής κατάστασης, ή στην αναγωγή των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα προσεγγιστικό σύστημα συνήθη διαφορικών εξισώσεων, το οποίο λύνεται με τη χρήση καθιερωμένων αριθμητικών τεχνικών όπως η μέθοδος του Euler και η μέθοδος Runge-Kutta. Η μέθοδος βασίζεται στο συνδυασμό μεταβλητών μεθόδων και τοπικών προσεγγίσεων που ισχύουν σε περιορισμένη περιοχή του μέσου, στο πεπερασμένο στοιχείο, για τη διακριτοποίηση του προβλήματος. Η επανάληψη της τοπικής διακριτοποίησης στον υπόλοιπο χώρο του μέσου συνεπάγεται τη διακριτοποίηση του προβλήματος και την προσεγγιστική λύση με τεχνικές γραμμικής άλγεβρας. Με τον όρο διακριτοποίηση εννοούμε την προσέγγιση ενός φυσικού συστήματος, που διαθέτει άπειρο πλήθος, βαθμών ελευθερίας, από ένα υποκατάστατο μοντέλο, το οποίο διαθέτει πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας.

Η ανάλυση με τη (ΜΠΣ) επιτυγχάνεται με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου επιλύονται συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά της εκάστοτε δομής. Θεμελιώδες βήμα για την ανάλυση και μελέτη μιας δομής με τη (ΜΠΣ) είναι η τμηματοποίηση της δομής σε πεπερασμένο αριθμό τμημάτων, τα οποία ονομάζονται στοιχεία. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται μέσα σε κάθε στοιχείο είναι απλές, συνήθως κάποιες πολυωνυμικές εκφράσεις. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται μεταξύ τους σε συγκεκριμένα



σημεία, τα οποία ονομάζονται κόμβοι. Το σύνολο των κόμβων και των στοιχείων μετά την τμηματοποίηση αποτελεί το πλέγμα της ανάλυσης.

Κάθε κόμβος, ανάλογα με το είδος της κατασκευής, χαρακτηρίζεται από κάποιες δυνατές μετατοπίσεις που ονομάζονται βαθμοί ελευθερίας του κόμβου. Στην περίπτωση διδιάστατης ανάλυσης μιας κατασκευής, ένας κόμβος είναι δυνατό να μετατοπίζεται κατά και να περιστρέφεται περί καθένα από τους άξονες  $x$ ,  $y$ , ενώ στην περίπτωση τριών διαστάσεων οι επιπλέον δυνατές



μετατοπίσεις είναι αυτές του άξονα  $z$ . Σε μία τρισδιάστατη κατασκευή, κάθε σημείο, οπότε και κάθε κόμβος, έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, ενώ στη διδιάστατη κατασκευή έχει δύο βαθμούς και στα δικτυώματα ένα. Στις καμπτόμενες κατασκευές για να προσδιοριστεί η θέση του στοιχείου δεν επαρκεί το βέλος, αλλά χρειάζεται και η κλίση. Οπότε, για παράδειγμα, στα πλαίσια κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, που είναι οι μετατοπίσεις κατά τους άξονες  $x$ ,  $y$  και η στροφή του κόμβου γύρω από τον άξονα  $z$ . Η γνώση του συνόλου των κόμβων και των βαθμών ελευθερίας καθιστά δυνατό τον υπολογισμό του συνόλου των δυνατών μετατοπίσεων για όλη την κατασκευή. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον τρόπο στήριξης της υπό εξέταση δομής, καθώς αυτός, ανάλογα με το είδος του, δεσμεύει κάποιους βαθμούς ελευθερίας.

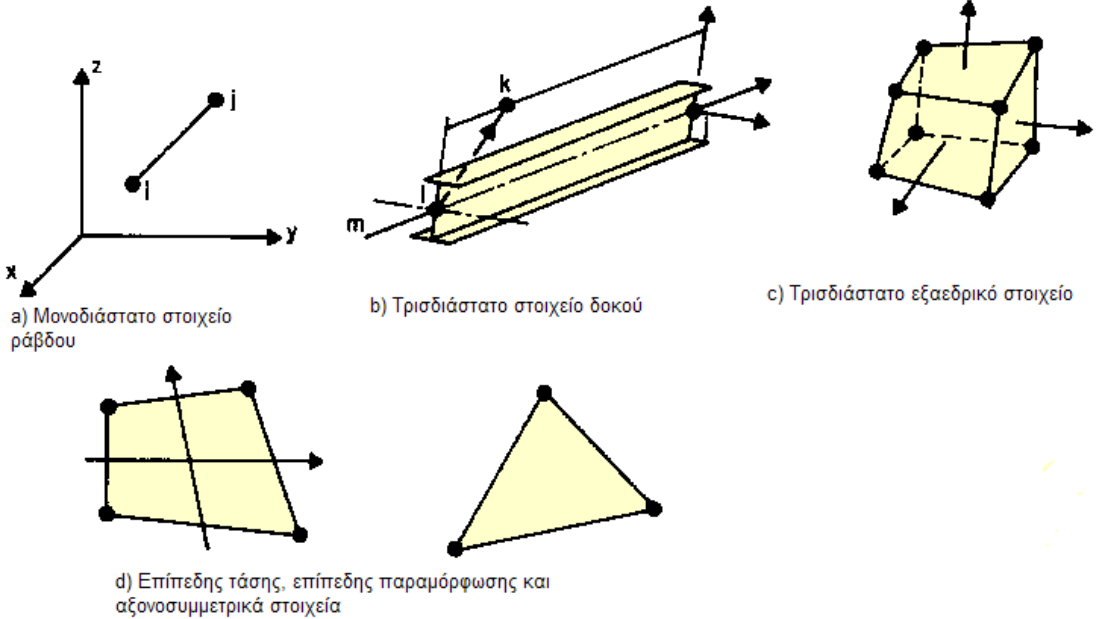
### Σχήμα 2.1: Διακριτοποίηση σώματος σε πεπερασμένα στοιχεία

Κάθε πεπερασμένο στοιχείο δεν παύει να έχει την ίδια ελαστική συμπεριφορά με το αρχικό σώμα. Το πλεονέκτημα από αυτή την υποδιαίρεση είναι ότι το στοιχείο έχει πεπερασμένο μέγεθος και απλούστερη μορφή. Οι ιδιότητες αυτές επιτρέπουν την προσεγγιστική μελέτη της έντασης του στοιχείου. Συνεπώς, γνωρίζοντας τις μετατοπίσεις των κόμβων ενός στοιχείου, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί παρεμβολή για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων κάθε σημείου του στοιχείου. Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των παραμορφώσεων και ύστερα των τάσεων. Έχοντας αυτά τα στοιχεία, μπορεί να γίνει εφαρμογή των Ενεργειακών θεωρημάτων (Αρχή Δυνατών Έργων), τα οποία δίνουν  $kn$  εξισώσεις από τις οποίες προσδιορίζονται οι  $kn$  άγνωστες μετατοπίσεις των κόμβων, όπου  $n$  ο συνολικός αριθμός των κόμβων της κατασκευής και  $k$  ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας κάθε κόμβου. Πλεονεκτήματα της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι:

- i. Οι συναρτήσεις παρεμβολής είναι απλούστερες.
- ii. Οι ολοκληρώσεις γίνονται σε κάθε στοιχείο χωριστά, συνεπώς, στις απλές περιπτώσεις, το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα με αναλυτικό τρόπο, ενώ στις πιο σύνθετες είναι δυνατή η χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης.
- iii. Η ανάλυση και μελέτη μιας κατασκευής με τη μέθοδο αυτή πλεονεκτεί σε σχέση με άλλες μεθόδους, διότι καθιστά εφικτή για το χρήστη την μεταβολή των διαστάσεων και των εφαρμοζόμενων δυνάμεων της εκάστοτε κατασκευής και να παρακολουθεί σε τακτά χρονικά διαστήματα την εξέλιξη των τάσεων και παραμορφώσεων [4].

### 2.3 Διατυπώσεις-είδη πεπερασμένων στοιχείων

Ένα βασικό αρχικό μέλημα του Μηχανικού όταν αυτός αναλάβει την ανάπτυξη ενός μοντέλου, είναι η επιλογή των κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων με τον κατάλληλο αριθμό κόμβων.



Σχήμα 2.2: Πεπερασμένα στοιχεία

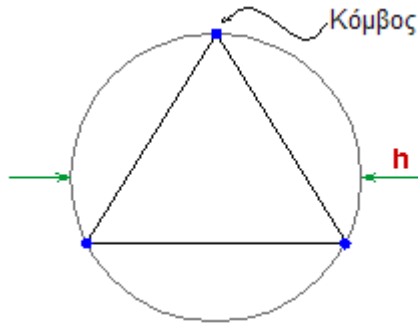
Στη συνέχεια αναφέρονται τα πιο συνηθισμένα πεπερασμένα στοιχεία, στα οποία τμηματοποιούνται οι προς μελέτη δομές.

- Ευθεία ή καμπύλα μονοδιάστατα στοιχεία (1D), τα οποία διαθέτουν φυσικές ιδιότητες όπως αξονική, καμπτική και στρεπτική δυσκαμψία. Αυτό το είδος στοιχείου είναι ιδανικό για τη μοντελοποίηση ράβδων, δοκών, συρμάτων, δικτυωμάτων, πλαισίων. Τα ευθεία στοιχεία συνήθως έχουν δύο κόμβους, ένα σε κάθε άκρο, ενώ τα καμπύλα στοιχεία απαιτούν το λιγότερο τρεις κόμβους.
- Διδιάστατα στοιχεία (2D) για καμπτική δράση (πλάκες, κελύφη) και/ή δράση μεμβράνης (επίπεδη τάση, επίπεδη

- παραμόρφωση). Μπορεί να έχουν μια ποικιλία από σχήματα, όπως επίπεδα ή καμπύλα τρίγωνα και τετράγωνα. Οι κόμβοι συνήθως τοποθετούνται στις γωνίες του στοιχείου. Στην περίπτωση που απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, επιπλέον κόμβοι μπορεί να τοποθετηθούν κατά μήκος των ακμών του στοιχείου ή ακόμα και μέσα στο στοιχείο.
- Στοιχεία σε σχήμα τόρου για αξονοσυμμετρικά προβλήματα, όπως λεπτές και παχιές πλάκες, κελύφη, στερεά. Η διατομή των στοιχείων αυτών είναι ίδια με τους προηγούμενους τύπους: μονοδιάστατη για λεπτές πλάκες και κελύφη και δισδιάστατη για στερεά, παχιές πλάκες και κελύφη.
- Τρισδιάστατα στοιχεία (3D) για τη μοντελοποίηση τρισδιάστατων στερεών, όπως εξαρτήματα μηχανής. Αλλιώς λέγονται στοιχεία όγκου. Συνηθισμένα σχήματα στοιχείων είναι τα τετράεδρα και τα εξαέδρα. Οι κόμβοι τοποθετούνται στις κορυφές και πιθανότατα μέσα στο στοιχείο. Τα στοιχεία μπορούν να έχουν φυσικές ιδιότητες όπως πάχος, συντελεστής θερμικής διαστολής, πυκνότητα, μέτρο ελαστικότητας, μέτρο διάτμησης και λόγος Poisson. Κατά την μοντελοποίηση των κατασκευών υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί συνδυασμός όλων αυτών των στοιχείων, αρκεί στα επί μέρους στοιχεία να συμπίπτουν οι κόμβοι. Οι κοινοί κόμβοι έχουν τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας.

Τα πεπερασμένα στοιχεία διαφέρουν μεταξύ τους από πολλές απόψεις. Για την ανάλυση με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά τους είναι το σχήμα του στοιχείου και ο βαθμός παρεμβολής του. Ο βαθμός παρεμβολής του στοιχείου αναφέρεται στο βαθμό του πολυωνύμου που εμφανίζεται στη συνάρτηση μορφής του στοιχείου. Ο βαθμός του πολυωνύμου ονομάζεται  $p$ , ενώ η διάσταση του πολυωνύμου αποκαλείται  $h$ . Η διάσταση  $h$

είναι συνήθως η διάμετρος του μικρότερου κύκλου, ή μικρότερης σφαίρας στην περίπτωση τρισδιάστατου στοιχείου, ο οποίος περιβάλλει το στοιχείο (περιγεγραμμένος κύκλος). Κάθε στοιχείο έχει διάσταση  $h$  και βαθμό  $p$  [5].



**Σχήμα 2.3:** Περιγεγραμμένος κύκλος διαμέτρου  $h$  που περιβάλλει τριγωνικό δισδιάστατο στοιχείο

Το πλήθος των στοιχείων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος είναι αποτέλεσμα της κρίσης του μηχανικού. Ο ισχύων γενικός κανόνας είναι ότι όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων ή όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός πολωνύμου της συνάρτησης μορφής, τόσο ακριβέστερη είναι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και τόσο πιο δαπανηρή η επίλυση.

Για δομική ανάλυση, τα εμπορικά προγράμματα χρησιμοποιούν συνήθως μητρική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων, η οποία μπορεί επιπλέον να ταξινομηθεί σε δύο βασικές προσεγγίσεις: στη συνήθως χρησιμοποιούμενη μέθοδο μετατόπισης ή δυσκαμψίας (displacement or stiffness method) και στη μέθοδο δύναμης ή ευκαμψίας (force or flexibility method). Με τη μέθοδο μετατόπισης το πρόγραμμα μετασχηματίζει τις διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν ένα στοιχείο της δομής, στη μορφή  $F_{loc} = K_{loc} \cdot U_{loc}$ , για στατική ανάλυση, όπου  $K_{loc}$  το μητρώο δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου,  $F_{loc}$  το μητρώο

των κομβικών δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχείο και  $U_{loc}$  το μητρώο μετατοπίσεων των κόμβων του πεπερασμένου στοιχείου. Συνεπώς, στη γενικότερη περίπτωση μιας κατασκευής, η οποία αποτελείται από πολλά στοιχεία και βαθμούς ελευθερίας, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή μητρώων  $F_{glob} = K_{glob} \cdot U_{glob}$ , όπου  $K_{glob}$  είναι  $kn \times kn$  μητρώο. Το λογισμικό πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση μας είναι το FreeFem++.

## Κεφάλαιο 3ο: Μοντελοποίηση – Διακριτοποίηση

### 3.1 Μοντελοποίηση

#### 3.1.1 Περιβάλλον απεικόνισης και ανάλυσης ιατρικού οπτικού υλικού Slicer4.

Το 3D Slicer4 αποτελεί ένα πρόγραμμα ανοιχτού κώδικα που έχει στόχο την απεικόνιση (visualization), ανάλυση και σύνθεση, ιατρικού οπτικού υλικού. Χρησιμοποιείται σήμερα σε μεγάλη ποικιλία ιατρικών εφαρμογών όπως σε περιπτώσεις αυτισμού, καρκίνου του προστάτη, νευροχειρουργικής, καρδιοαγγειακών παθήσεων και φυσικά ορθοπεδικής εμβιομηχανικής.

Στο περιβάλλον Slicer μπορεί κάποιος να κάνει την επεξεργασία αρχείων DICOM (Digital Imaging and COmmunications in Medicine), δηλαδή αρχείων ιατρικών απεικονίσεων, όπως τα αποτελέσματα μαγνητικού ή αξονικού τομογράφου σε ηλεκτρονική μορφή. Ακόμα μπορεί να κατασκευάσει τρισδιάστατα μοντέλα από την επεξεργασία των εικόνων DICOM μέσα από τη βιβλιοθήκη προγραμμάτων κατάτμησης (segmentation) και καταγραφής (registration) εικόνων ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit). Επίσης, μπορεί να απεικονίσει τα τρισδιάστατα μοντέλα, μέσα από τη βιβλιοθήκη προγραμμάτων απεικόνισης VTK (Visualization Toolkit). Ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο αποτελεί η δυνατότητα του Slicer για αυτόματη κατάτμηση των DICOM σε περιοχές διαφορετικών ιστών, αλλά και η δυνατότητα για χειροκίνητη κατάτμηση σε περιοχές διαφορετικών ιστών.

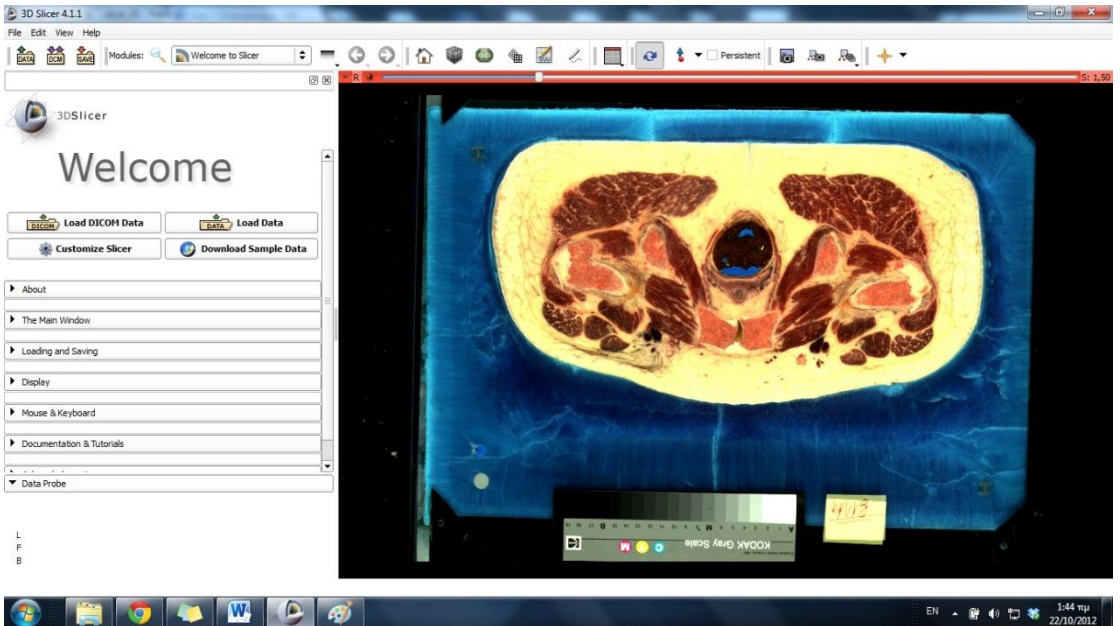
#### 3.1.2 Διαδικασία Μοντελοποίησης

Σκοπός αυτής της πτυχιακής όπως προαναφέρθηκε είναι η δημιουργία ενός μοντέλου του μηριαίου οστού θεωρούμενο ως ανομοιογενές σε όλο του τον όγκο. Για να γίνει αυτό

εφικτό χρησιμοποιήσαμε 450 έγχρωμες τομογραφίες ανθρώπινου σώματος.

Για να μπορέσουμε να απομονώσουμε τον οστίτη ιστό από τις τομογραφίες χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα ανοικτού λογισμικού Slicer 4. Λόγω του ότι ήταν αδύνατο να επεξεργαστούμε τις τομογραφίες όλες μαζί αναγκαστήκαμε και τις χωρίσαμε σε δεκάδες.

Με την εντολή File → Add Volume επιλέγαμε το φάκελο που ήταν η δεκάδα που θέλαμε να επεξεργαστούμε και την φορτώνουμε στο πρόγραμμα. (Σχήμα.3.1) Η τομογραφίες φορτώθηκαν στο κόκκινο χρώμα που είναι το εγκάρσιο (οριζόντιο) επίπεδο.



**Σχήμα.3.1** : Το πρόγραμμα Slicer 4 και ο τρόπος που φαίνεται η τομογραφία.

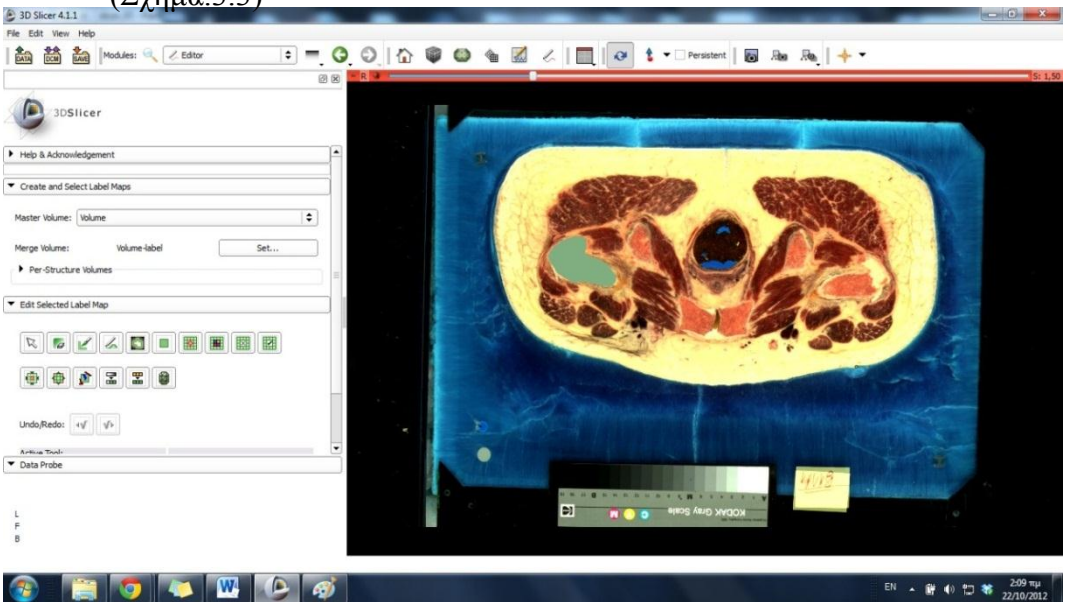
Στη συνέχεια με την εντολή Vector to Sxalar Volume μετατρέπαμε τις φωτογραφίες σε ασπρόμαυρες ούτως ώστε να μπορέσουμε να σκιαγραφήσουμε την περιοχή που θέλαμε. (Σχήμα.3.2)





Σχήμα.3.2 : Η τομογραφία μετατράπηκε σε μαυρόασπρη

Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του προγράμματος Editor σκιαγραφήσαμε την περιοχή που θέλαμε να απομονώσουμε, έχοντας σαν αναφορά μας την έγχρωμη τομογραφία. (Σχήμα.3.3)



Σχήμα3.3 : Η σκιαγραφημένη περιοχή της τομογραφίας με χρώμα πράσινο

Με τον τρόπο αυτό δημιουργούσαμε ένα διαδοχικό χάρτη (Label-Map). Αποθηκεύαμε και τις μαυρόασπρες εικόνες αλλά και τον χάρτη σε ένα αρχείο. Στη συνέχεια με το πρόγραμμα `teem-unu` και την εντολή

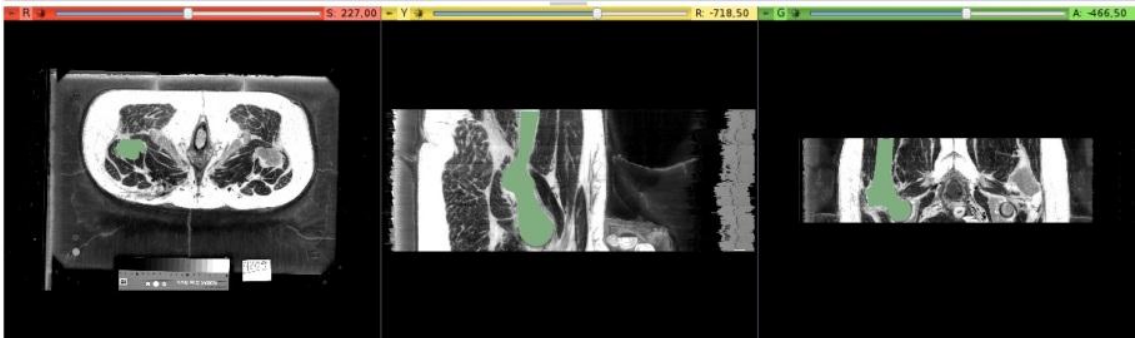
```
teem-unu join -i @volume_label.txt -a 2 -o  
Volume_Label.nrrd
```

ενώσαμε όλα Label-map και φτιάξαμε ένα αρχείο `nrrd`. (@volume\_label.txt είναι ένα αρχείο κείμενου που φτιάξαμε με όλα τα ονόματα των Label-map που θέλαμε να ενώσουμε).

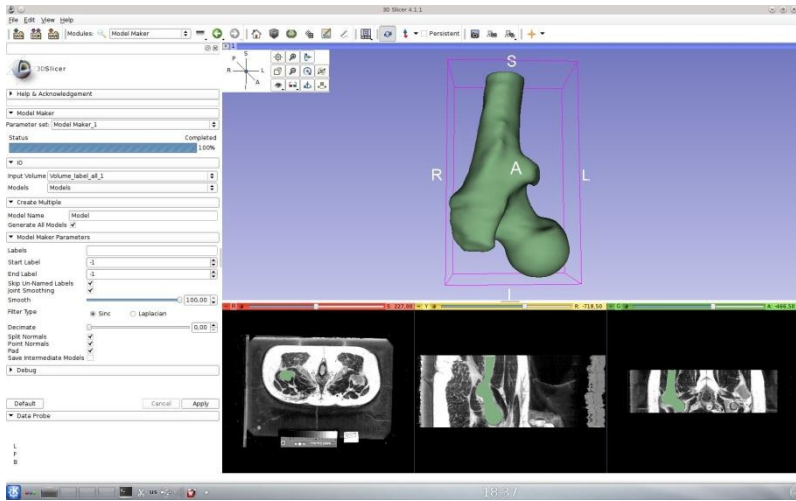
Με την ίδια εντολή ενώσαμε και όλες τις μαυρόασπρες τομογραφίες.

```
teem-unu join -i @volume.txt -a 2 -o  
Volume_new_1.nrrd
```

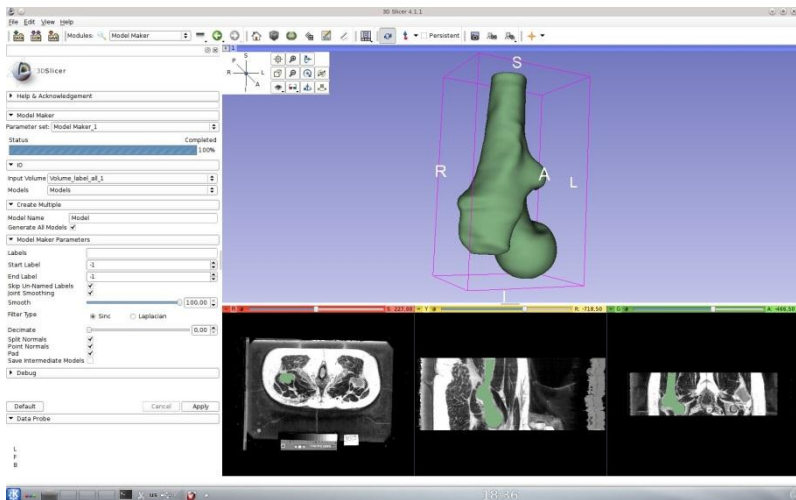
Στη συνέχεια φορτώσαμε το αρχείο `nrrd` στο Slicer σαν ένα Label-Map και με το πρόγραμμα Model Maker δημιουργήσαμε ένα όγκο με όλα τα Label-Map που είχαμε σκιαγραφήσει. Αποθηκεύσαμε αυτό τον όγκο σαν ένα αρχείο `stl` για να μπορέσουμε να διακριτοποιήσουμε τον όγκο μας. (Σχήμα.3.4)



Σχήμα.3.4 : Το αρχείο `Volume_new` φορτωμένο στο Slicer μαζί με το συνολικό `Lapel-Map(Volume_Label)`. Στο slicer το κόκκινο χρώμα είναι το εγκάρσιο επίπεδο, με κίτρινο το οβελιαίο και με πράσινο το στεφανιαίο επίπεδο.



Σχήμα.3.4 : Το μοντέλο όπως το έβγαλε το πρόγραμμα Slicer4.



## 3.2 Διακριτοποίηση

### 3.2.1 Περιβάλλον διακριτοποίησης επιφανειών και όγκων Gmsh

Για την διακριτοποίηση χρησιμοποιήσαμε το προγράμματα ελεύθερου κώδικα Gmsh (Geuzaine C. and Remacle J.-F.). Το Gmsh αποτελεί ένα αυτόματο δημιουργό δισδιάστατου και τρισδιάστατου πλέγματος με αυξημένες ικανότητες απεικόνισης του. Το Gmsh παρέχει στο χρήστη 4 βασικές λειτουργίες:

- Τη δημιουργία ενός μοντέλου μέσω εντολών δημιουργίας γεωμετρίας, όπως ορισμούς κόμβων, γραμμών, κύκλων, επιφανειών και όγκων. Είναι ένα ιδιαίτερα εύχρηστο μέσο για την κατασκευή απλών σχημάτων και σωμάτων, αρκεί κάποιος να γνωρίζει την ακριβή γεωμετρία τους.
- Τη διακριτοποίηση ενός μοντέλου είτε κατασκευασμένου στο ίδιο το Gmsh είτε από εξωτερικό πρόγραμμα. Έχει τη δυνατότητα κατασκευής πλέγματος σε μοντέλα 1D, 2D και 3D. Ακόμα υπάρχουν ρουτίνες που βοηθούν στην περαιτέρω βελτίωση έως τελειοποίηση του πλέγματος. Στην περίπτωση των δικών μας μοντέλων χρειάστηκε η κατασκευή μόνο του 3D πλέγματος και της βελτίωσης του στη συνέχεια. Αυτό συνέβη επειδή το Slicer εξάγει απευθείας διακριτοποιημένο το επιφανειακό πλέγμα, το οποίο δε μεταβάλλεται παρά μόνο με την εντολή refine, η οποία κατασκευάζει πλέγματα πολύ μεγάλου αριθμού πεπερασμένων στοιχείων. Φυσικά αυτά τα πλέγματα δε μας ενδιαφέρουν στα πλαίσια της μεταπτυχιακής εργασίας.
- Την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πάνω στα παραχθέντα διακριτοποιημένα μοντέλα. Προς το παρόν

αυτή η λειτουργία δεν είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική, αφού το GetDP (2009), δηλαδή ο επιλυτής που είναι ενσωματωμένος στο Gmsh, βρίσκεται σε στάδιο κατασκευής. Έχουν λυθεί επιτυχώς ηλεκτροστατικά και ηλεκτροδυναμικά προβλήματα και η έρευνα που γίνεται είναι προς αυτή την κατεύθυνση. Εκτιμάται όμως ότι σε σύντομο χρονικό διάστημα θα είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί η δυνατότητα αυτή και στην επίλυση άλλων διαφορικών εξισώσεων, όπως είναι οι εξισώσεις της ελαστικότητας.

- Τη δυνατότητα επεξεργασίας των αποτελεσμάτων, ώστε να έχουμε μια πλήρη εικόνα του κατασκευασμένου πλέγματος, αλλά και τη δυνατότητα να το παρουσιάσουμε επιτυχώς, με εμφάνιση εικόνων των τομών, ακόμα και animation.

### 3.2.2 Διαδικασία Διακριτοποίηση

Δημιουργήσαμε ένα αρχείο geo με της εντολές και τις παραμέτρους που θέλαμε για να μπορέσουμε να διακριτοποιήσουμε τον όγκο μας.

#### **test.geo**

```
Mesh.RemeshParametrization=4; //(0) harmonic  
(1) conformal  
Mesh.RemeshAlgorithm=1; //(0) nosplit (1)  
automatic (2) split metis  
  
Mesh.CharacteristicLengthFactor=0.5; // Πόσα  
μεγάλα θα είναι τα στοιχεία μας (από 0.6-0.1  
στο πρόβλημα μας)  
Mesh.Algorithm3D = 4; //Frontal (4)  
Delaunay(1)  
Merge "Model_1_1.stl"; // Ο όγκος που  
φτιάξαμε μέσω Slicer
```

```
//CreateTopology;

Compound Surface(100)={1};
Surface Loop(300)={100};
Volume(301)={300};

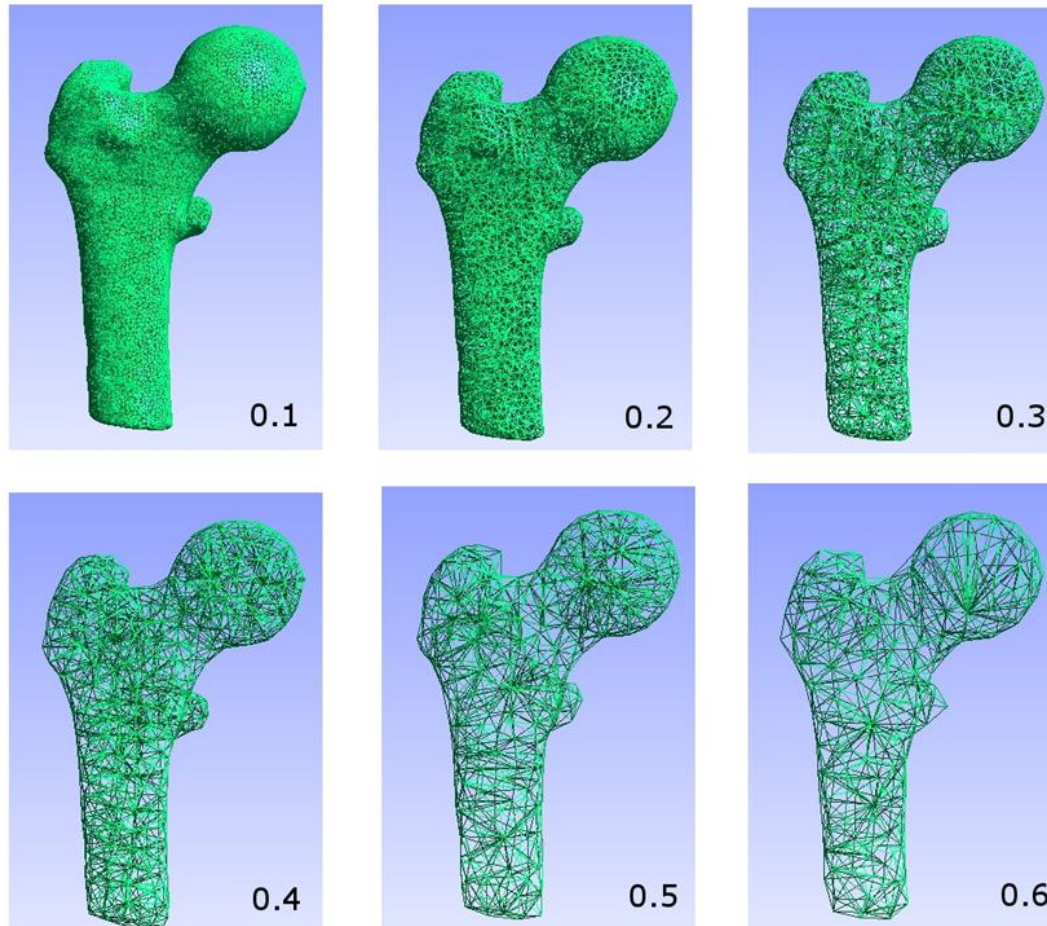
Physical Surface(101)={100};
Physical Volume(302)={301};
```

Με την εντολή `gmsht -2 -3 test6.geo` έτρεξε το αρχείο `geo` και έτσι διακριτοποιήσαμε τον όγκο μας. Στην συνέχεια ανοίξαμε το καινούργιο αρχείο που μας έβγαλε η διακριτοποίηση (`test.msh`) με το πρόγραμμα `Gmsh` και το αποθηκεύσαμε ξανά σαν ένα αρχείο `mesh`, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στο πρόγραμμα `Freefem++` για να γίνει επίλυση πεπερασμένων στοιχείων, και σε ένα αρχείο `vtk` το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στο πρόγραμμα `Paraview`.

Διακριτοποιήσαμε 6 φορές τον όγκο αλλάζοντας τον αριθμό της μεταβλητής `Mesh.CharacteristicLengthFactor` από 0.1 - 0.6 αλλάζοντας έτσι τα στοιχεία που αποτελούσαν το μοντέλου μας. Για 0.1 έχουμε 20 001 στοιχεία ενώ για 0.6 έχουμε 259 στοιχεία. (Σχήμα.3.5, Πινάκας.3.1)

<b>Mesh.CharacteristicLengthFactor</b>	<b>Αριθμός Στοιχείων</b>
0,1	20 001
0,2	3 568
0,3	1 231
0,4	661
0,5	385
0,6	259

Πινάκας.3.1 : Πινάκας στο οποίο φαίνονται ο Αριθμός των στοιχείων σε κάθε διακριτοποίηση



Σχήμα.3.5: Εικόνες από το Gmsh με το μοντέλο μας με διαφορετικό αριθμό στοιχείων.

Όπως διαπιστώσαμε το μοντέλο που μας δημιουργήσε το Slicer και μαυροασπρες εικόνες μας είχαν διαφορετικό πρόσημο στις συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Στο μοντέλο μας ήταν αρνητικό ενώ στις τομογραφίες ήταν θετικό το πρόσημο και έτσι δε θα μπορούσαμε να πάρουμε το χρώμα των στοιχείων. Επειδή χρησιμοποιήσαμε ανοικτό λογισμικό και ανοικτό κώδικα, ανοίξαμε το μοντέλο μας με ένα επεξεργαστή κειμένου και μπορέσαμε έτσι να αλλάξουμε το πρόσημο του μοντέλου μας από αρνητικό σε θετικό, και έτσι τομογραφίες και μοντέλο ταυτίστηκαν.

Για να αποθηκεύσουμε για κάθε στοιχείο το αριθμό του χρώματος της μαυρόασπρης τομογραφίας κάνοντας έτσι ένα ανομοιογενές μοντέλο χρησιμοποιήσαμε την εντολή `vtk test33.tcl` και με το αρχείο `test33.tcl` καταφέραμε να δημιουργήσουμε ένα καινούργιο αρχείο `vtk`, το οποίο θα έχει σε κάθε στοιχείο αποθήκευσε ένα διαφορετικό αριθμό χρώματος, αριθμός που υπήρχε στις μαυρόασπρες τομογραφίες.

### **test33.tcl**

```
package require vtk
#package require vtkinteraction

# create pipeline
#
vtkStructuredPointsReader reader
    reader SetFileName "Volume_new_1.vtk"
#    reader SetScalarsName "nrrd93776
unsigned_char"
    reader Update

vtkUnstructuredGridReader reader1
    reader1 SetFileName "test6_1.vtk"
    reader1 Update

# The vtkProbeFilter takes two inputs. One
is a dataset to use as the probe
# geometry (SetInputConnection); the other
is the data to probe
```



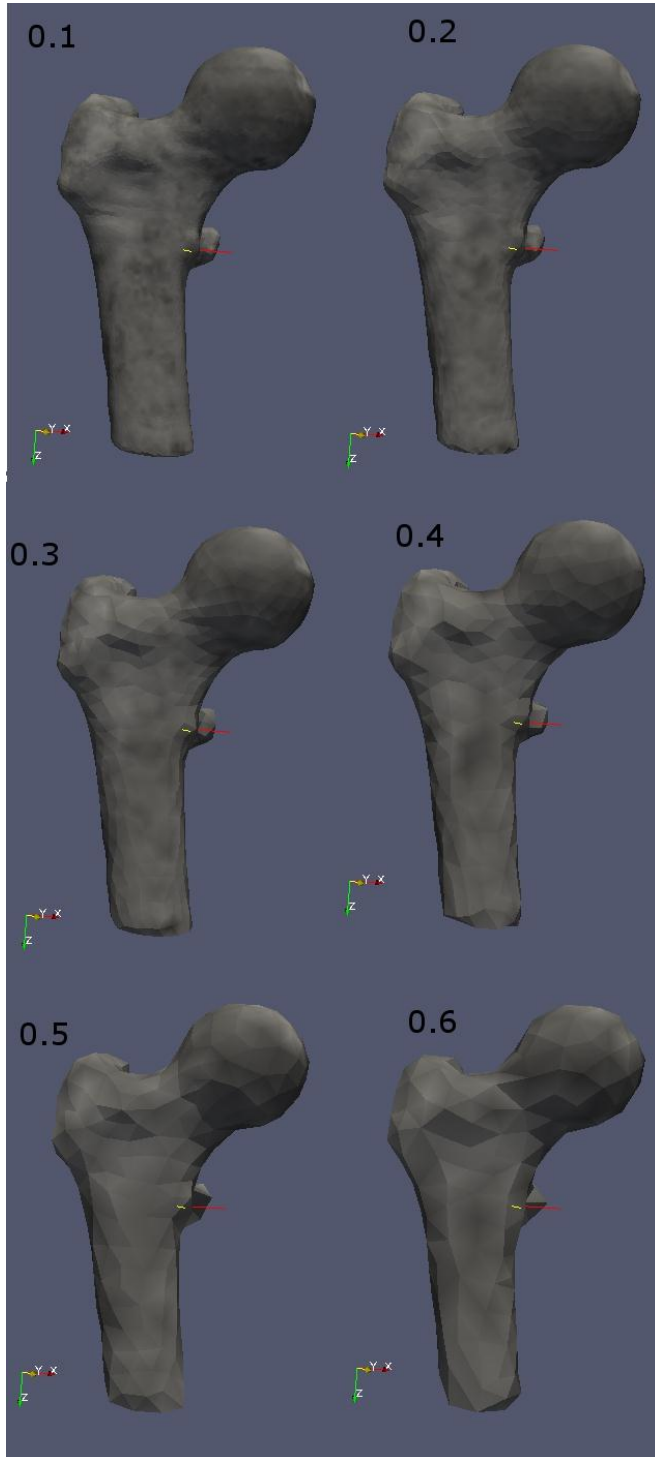
```

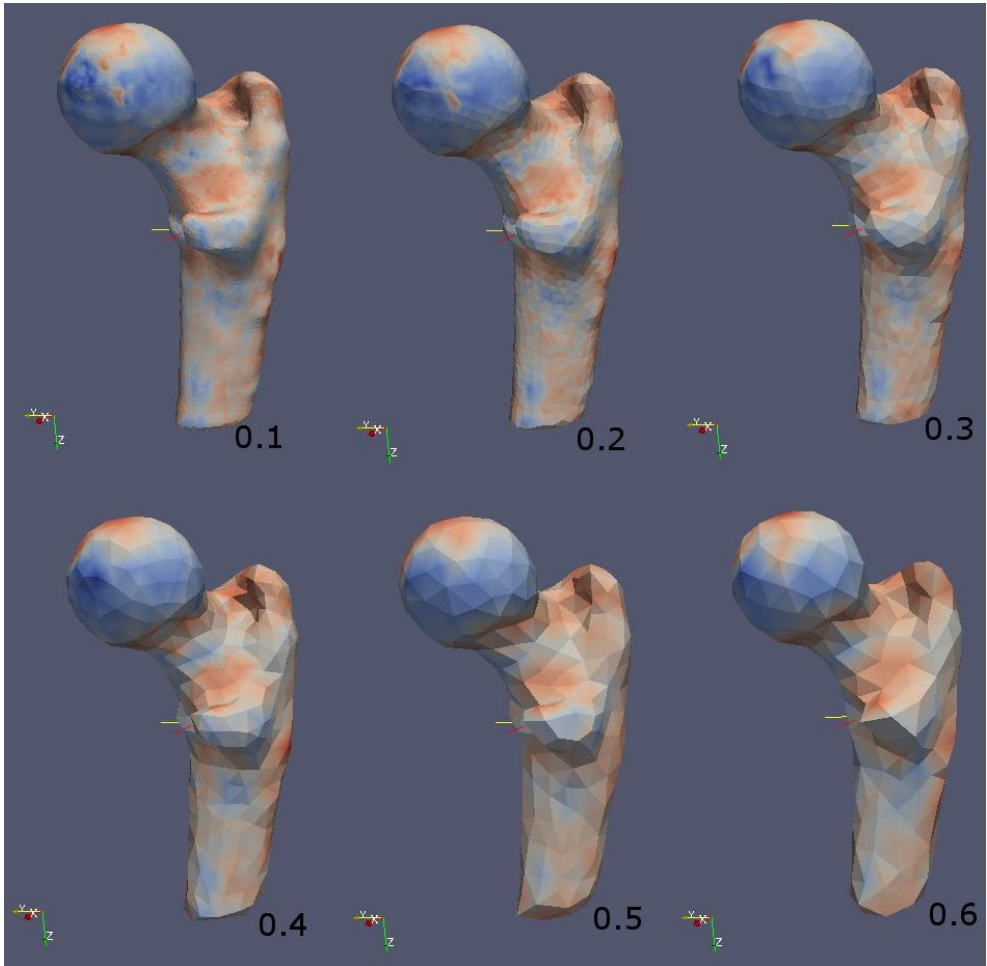
# (SetSourceConnection). The output dataset
# structure (geometry and
# topology) of the probe is the same as the
# structure of the input. The
# probing process generates new data values
# resampled from the source.
vtkProbeFilter probe
    probe SetInputConnection [reader1
GetOutputPort]
    probe SetSourceConnection [reader
GetOutputPort]

vtkUnstructuredGridWriter wSP
    wSP SetInputConnection [probe
GetOutputPort]
    wSP SetFileName "test6_col_1.vtk"
# 35 wSP SetTensorsName "pointload"
# wSP SetScalarsName "nrrd93776
unsigned_char"
    wSP Update
# 38
# 39 vtkDataSetReader rSP
# 40 rSP SetFileName "wSP.vtk"
# 41 rSP SetTensorsName "pointload"
# 42 rSP SetScalarsName
"effective_stress"
# 43 rSP Updat

```

Στην συνέχεια ανοίξαμε το καινούργιο αρχείο vtk με το πρόγραμμα Paraview. Το Paraview είναι ένα πρόγραμμα ανοιχτού κώδικα, απεικόνισης τρισδιάστατων μοντέλων και ανάλυσής τους. Το πρόγραμμα αυτό σου δίνει την δυνατότητα να αποθηκεύσεις τα δεδομένα του μοντέλου σε ένα αρχείο κειμένου. Με την εντολή File→Save Data αποθηκεύσαμε τα αρχεία μας σε ένα csv αρχείο με όλα τα δεδομένα κάθε στοιχείου, από το οποίο θα περνάμε το χρώμα κάθε στοιχείου και θα το αποθηκεύαμε ξεχωριστά σε ένα αρχείο κειμένου. Με αυτό τον τρόπο μπορέσαμε να αποθηκεύσουμε όλα τα χρώματα του κάθε στοιχείου σε ένα αρχείο κειμένου με το όνομα Scalar.txt. (Σχήμα.3.6)





Σχήμα.3.6: Τα μοντέλα μας όπως τα βλέπουμε στο πρόγραμμα ParaView.  
Μπορούμε να διακρίνουμε τις αποχρώσεις του μαύρου στην πρώτη  
εικόνα ενώ στη δεύτερη την βλέπουμε με χρώμα.

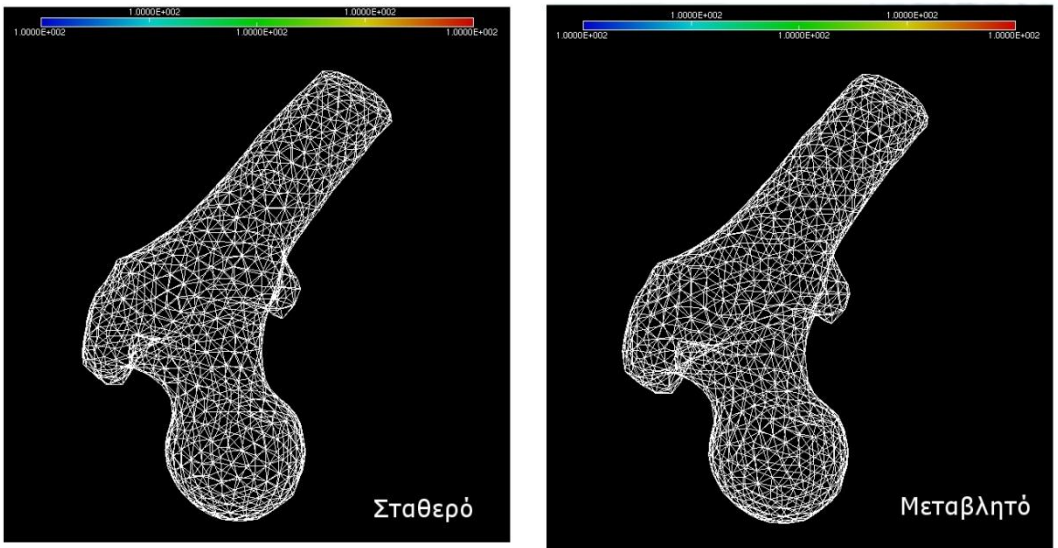
Έτσι είχαμε το μοντέλο μας στο αρχείο test6.mesh και τα  
χρώματα κάθε στοιχείου στο αρχείο Scalar.txt.

### 3.3 Έλεγχος Μοντέλου

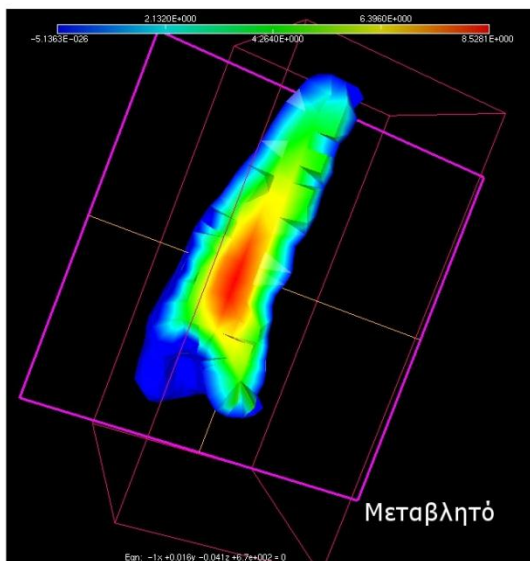
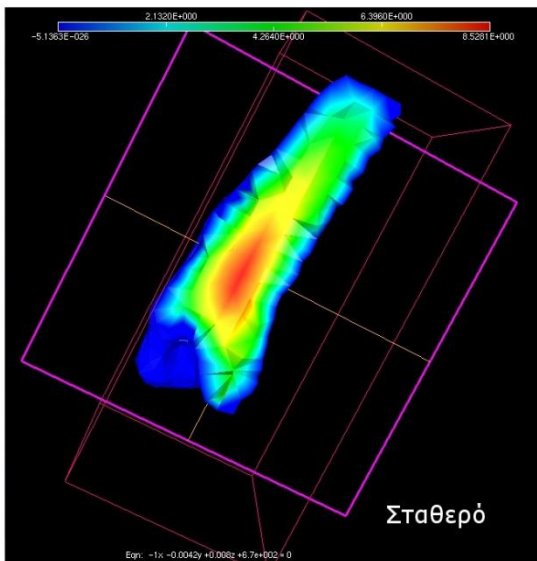
Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό αποτελεσμάτων και πειραματικών αποτελεσμάτων, κάναμε ένα έλεγχο για να διαπιστώσουμε κατά πόσο τα χρώματα διαβάστηκαν σωστά και πως θα επηρέαζαν τα αποτελέσματα μας.

Έτσι για το 0.3 τρέξαμε 2 διαφορετικά προγράμματα στο ένα θα διάβαζε χρώματα από ένα αρχείο κειμένου που φτιάξαμε εμείς το οποίο είχε σταθερό αριθμό χρώματος (100) και στο άλλο βάλαμε εμείς τον αριθμό του χρώματος σαν σταθερά στο πρόγραμμα ίσο με 100.

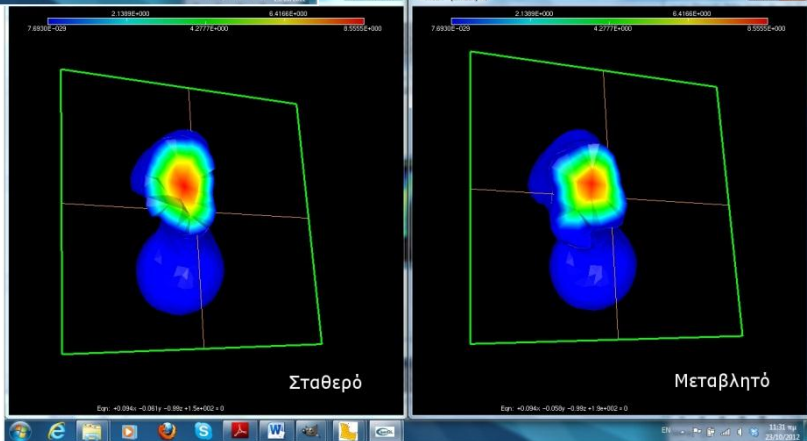
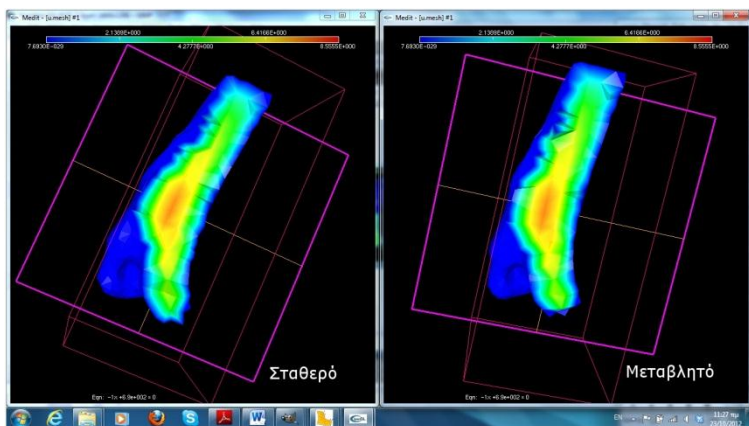
Όπως παρατηρήσαμε και στα 2 αυτά προγράμματα τα αποτελέσματα ήταν ακριβώς τα ίδια, (Σχήμα.3.7-3.9) έτσι προχωρήσαμε στα επόμενα πειράματα. Ενώ βλέπουμε ότι για 0.3 στο ανομοιογενές μας μοντέλο (διαβάζει χρώματα από ένα αρχείο) έχει βασικές διαφορές (Σχήμα.3.10) , όπως θα εξηγήσουμε και αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.



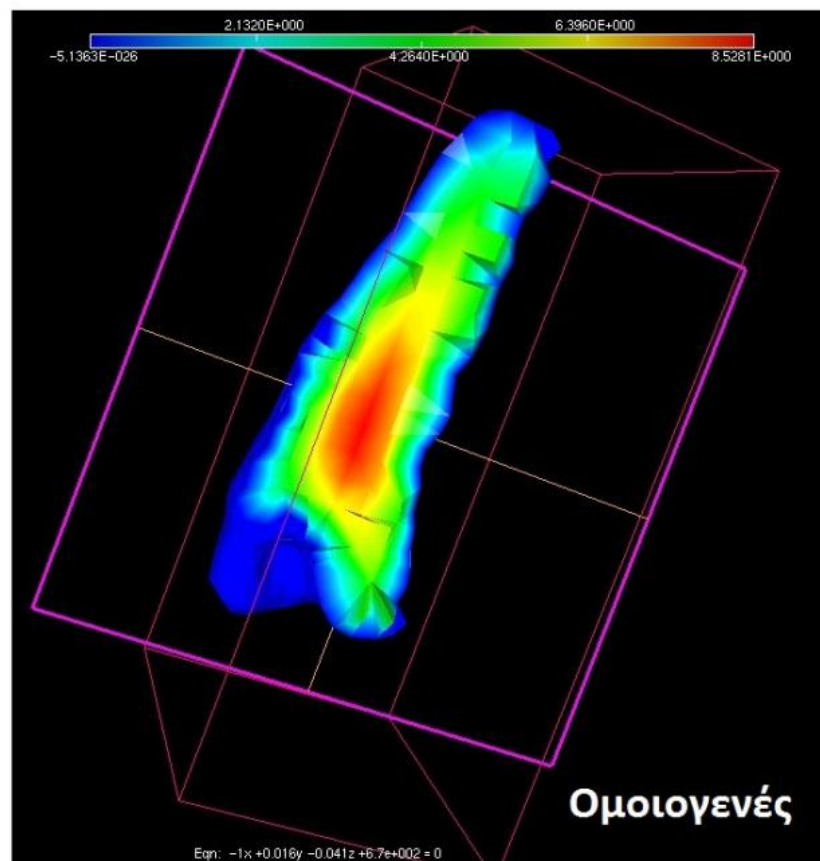
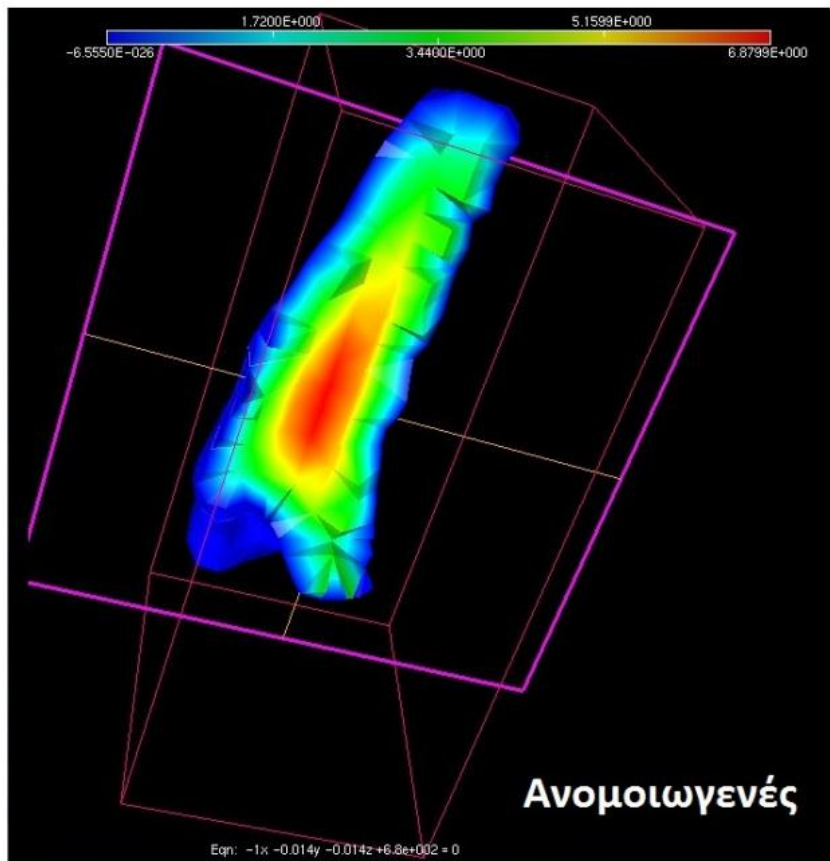
Σχήμα.3.7 : Το χρώμα και στα 2 μοντέλα είναι σταθερό ίσο με 100. Αριστερά είναι το μοντέλο που βάλαμε σταθερά στο πρόγραμμα ενώ δεξιά το μοντέλο που διάβαζε τα χρώματα από το αρχείο txt.



Σχήμα.3.8 : Το  $u_3$  και στα 2 μοντέλα



Σχήμα.3.9 : Το  $u$  (μετατόπιση) στα 2 μοντέλα.



Σχήμα.3.10 : Το  $u_3$  σε ανομοιογενές αλλά και σε ομοιογενές μοντέλο.

## Κεφάλαιο 4ο: Πειραματικά Μοντέλα

### 4.1 Περιγραφή του προγράμματος FreeFem++

Η πιο πρόσφατη έκδοση του FreeFem, FreeFem++ αποτελεί ένα υψηλού επιπέδου προγραμματιστικό περιβάλλον ανάπτυξης για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων (Partial differential equations (PDE)). Αποτελεί ένα ιδανικό εργαλείο για τη διδασκαλία της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και τη γρήγορη επίλυση σύνθετων εφαρμογών της Φυσικής και της Μηχανικής. Το FreeFem++ μπορεί να παρεμβάλει αυτόματα συναρτήσεις σ' ένα κάναβο πεπερασμένων στοιχείων. Το προγραμματιστικό περιβάλλον του FreeFem++ χρησιμοποιεί τριγωνικά ή τετράεδρα πεπερασμένα στοιχεία, συμπεριλαμβανομένων των ασυνεχών στοιχείων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι πολλά προβλήματα της Φυσικής, της Μηχανικής και των Μαθηματικών περιγράφονται με μια ή περισσότερες διαφορικές εξισώσεις, προκειμένου να επιλυθούν με το FreeFem++.

Το FreeFem++ είναι ένα ολοκληρωμένο υπολογιστικό περιβάλλον, που χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τη δική του υψηλού επιπέδου προγραμματιστική γλώσσα. Είναι υψηλά προσαρμοστικό και χρησιμοποιεί στην επίλυση προβλημάτων υψηλού βαθμού συναρτήσεις πεπερασμένων στοιχείων.

Τα χαρακτηριστικά του FreeFem++ είναι μερικά από τα παρακάτω:

- Μεταβολική διατύπωση προβλημάτων με χρήση διανυσμάτων και πινάκων εφόσον είναι αναγκαίο
- Διευκολύνει τον χρήστη να λύσει προβλήματα πολυδιάστατα και πολλών μεταβλητών και γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα μέσα από ένα πλήθος επαναλήψεων και ένα σύνολο γραμμικών προβλημάτων
- Χρησιμοποιεί μεγάλη ποικιλία από πεπερασμένα στοιχεία (παραδείγματος χάριν στοιχεία *Lagrange*, ασυνεχή *P0*, συνεχή και ασυνεχή *P1*, *P2* στοιχεία)
- Χρησιμοποιεί μεγάλη ποικιλία γραμμικών άμεσων και επαναληπτικών λυτών (*LU*, *Cholesky*, *CROUT*, *CG*, *GMRES*, *UMFPACK*) και λυτών που χρησιμοποιούν ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
- Αποθηκεύει τα αποτελέσματα σε μορφές *.txt*, *.sol*, *.bb* και *.mesh*.
- Τα αποτελέσματα *.mesh* απεικονίζονται χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα *Medit*, τα οποία εμφανίζονται στην επιφάνεια εργασίας, γράφοντας στο τερματικό την εντολή *ffmedit.όνομα αρχείου.mesh*.

Κάποιος αναγνώστης μπορεί να φορτώσει το FreeFem++ στον υπολογιστή του μέσα από την ιστοσελίδα <http://www.freefem.org/ff++/>. Ο αναγνώστης μπορεί να φορτώσει το FreeFem++ σε περιβάλλον Linux Windows, MacOS X.



## 4.2 Μεταβολικοί Τύποι

### ➤ Εξίσωση Poisson

Έστω μια δοσμένη συνάρτηση  $f(x, y, z)$ , να βρεθεί μια συνάρτηση  $u(x, y, z)$  που να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y, z) &= f(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in V, \\ f(x, y, z) &= 1 \quad \forall (x, y, z) \in V, \\ u(x, y, z) &= 2 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega \\ \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Η επιφάνεια  $\Omega$  είναι και στην περίπτωση του δοκιμαστικού κύβου που χρησιμοποιήθηκε και σε αυτή των μοντέλων, το σύνολο της εξωτερικής επιφάνειας τους. Ο όγκος  $V$  είναι είτε στην περίπτωση του κύβου είτε σε αυτή των μοντέλων το σύνολο του όγκου τους.

### ➤ Εξισώσεις ελαστικότητας

Ο μεταβολικός τύπος των εξισώσεων της ελαστικότητας για το διάνυσμα των μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$  είναι ο εξής:

$$\int_V [2G\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + \lambda\varepsilon_{ii}(\mathbf{u})\varepsilon_{jj}(\mathbf{v})] = \int_{\Omega} \mathbf{f} * \mathbf{v} + \int_V \mathbf{g} * \mathbf{v}$$

όπου  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  το διάνυσμα των μετατοπίσεων,  
 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  το διάνυσμα της συνάρτησης βάρους,

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{οι σταθερές του}$$

Lame,

$E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $\nu$  ο λόγος Poisson,

$\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]$  το διάνυσμα των τάσεων στην επιφάνεια  $\Omega$ ,

$\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]$  το διάνυσμα των δυνάμεων ανά μονάδα όγκου στον όγκο  $V$  και

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων.

Για την εύρεση των τάσεων χρησιμοποιείται ο γενικευμένος νόμος Hooke για ισότροπα υλικά:

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{yy} = 2G \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{zz} = 2G \frac{\partial u_3}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{xy} = G \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{yz} = G \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{xz} = G \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right),$$

Στη συνέχεια είναι αρκετά εύκολο και γρήγορο για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή να υπολογιστούν εκτός από τις μετατοπίσεις και άλλα μεγέθη της ελαστικότητας:

➤ Μέτρο μετατοπίσεων:

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

➤ Παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}, \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}$$

➤ Τάσεις:

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz}$$

➤ Κύριες Παραμορφώσεις:

Οι κύριες παραμορφώσεις ορίζονται ως οι τρεις πραγματικές ρίζες ( $\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{p3}$ ) της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\rho}^3 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) * \varepsilon_{\rho}^2 \\ & + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2) * \varepsilon_{\rho} \\ & - (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2) \\ & = 0 \end{aligned}$$

➤ Κύριες Τάσεις:

Οι κύριες τάσεις ορίζονται ως οι τρεις πραγματικές ρίζες  $(\sigma_{\rho 1}, \sigma_{\rho 2}, \sigma_{\rho 3})$  της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} & \sigma_{\rho}^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) * \sigma_{\rho}^2 \\ & + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{xz}^2) * \sigma_{\rho} \\ & - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{xz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 \\ & - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

➤ Μέγιστες διατμητικές Παραμορφώσεις:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{max1} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\rho 1} - \varepsilon_{\rho 3}), \varepsilon_{max2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\rho 2} - \varepsilon_{\rho 3}), \varepsilon_{max3} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\rho 1} - \varepsilon_{\rho 2}) \end{aligned}$$

➤ Μέγιστες διατμητικές Τάσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_{max1} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\rho 3}), \sigma_{max2} = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho 2} - \sigma_{\rho 3}), \sigma_{max3} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\rho 2}) \end{aligned}$$

➤ Τάση Von-Mises:

$$\sqrt{(\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\rho 2})^2 + (\sigma_{\rho 2} - \sigma_{\rho 3})^2 + (\sigma_{\rho 1} - \sigma_{\rho 3})^2}$$

➤ Πυκνότητα Ενέργειας Παραμόρφωσης:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sigma_{xx} * \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} * \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} * \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} * \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} * \varepsilon_{yz} \\ & + \sigma_{xz} * \varepsilon_{xz}) \end{aligned}$$

### 4.3 Αποτελέσματα

Για τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων μας χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα file23.edp.

1. Φόρτωση των προγραμμάτων που θα χρειαστούν και ορισμός όλων των μεταβλητών :

```
load "msh3"  
//φόρτωση του msh3, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα  
εισαγωγής τρισδιάστατου μοντέλου στη συνέχεια του  
προγράμματος
```

```
load "medit"  
//φόρτωση του medit, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα  
γραφικής αναπαράστασης των αποτελεσμάτων του  
προγράμματος  
mesh3 Th("test6.mesh");  
//εισαγωγή του διακριτοποιημένου μοντέλου μας από το  
Gmsh. Για κάθε διακριτοποίηση από 0.1 – 0.6  
δημιουργήσαμε διαφορετικό φάκελο, έτσι μπορέσαμε να  
τρέξουμε το ίδιο πρόγραμμα για όλες τις διακριτοποιήσεις.
```

```
fespace Vh(Th, P2);  
//ορισμός του είδους των πεπερασμένων στοιχείων. (2ας  
τάξης)
```

```
fespace Ph(Th, P1);  
//ορισμός του είδους των πεπερασμένων στοιχείων (1ης  
τάξης)
```

```
//όλες μας οι μεταβλητές  
Vh u, u1, u2, u3, v1, v2, v3, Ep, Rho, Rho1;  
Ph  
s11, s22, s33, s12, s23, s13, e11, e22, e33, e12, e13,  
e23, Energy, Energy0, Von, Von1, Von2, Von3, A, B, C,  
Q, R, A1, B1, C1, Q1, R1, AA, BB, CC, Thx, Thy, Thz,  
VarGray;  
Ph<complex>  
s1, e1, s2, s3, e2, e3, ss1, ss2, ee1, ee2, D, D1;
```

```

Thx=x; //ορισμός των αξόνων.
Thy=y;
Thz=z;

ifstream file("scalar.txt");
//Εισαγωγή του αρχείου κειμένου στο οποίο έχουμε
αποθηκεύσει τα χρώματα του κάθε στοιχείου.

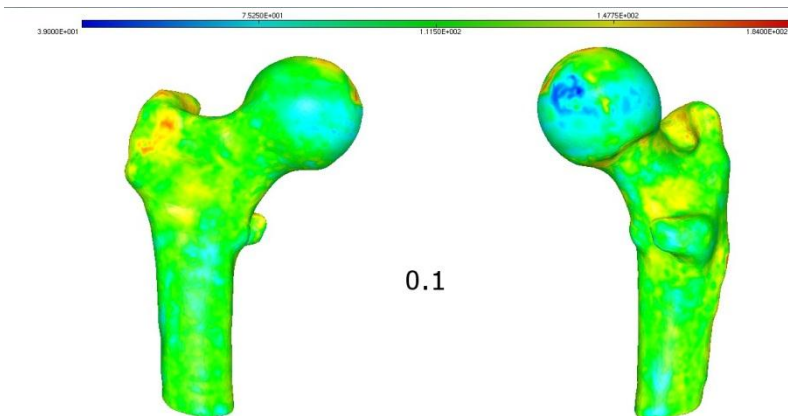
int i;
//Δημιουργία ενός βρόγχου ο οποίος διαβάζει το κάθε χρώμα
και το αντιστοιχεί στο κάθε στοιχείο.

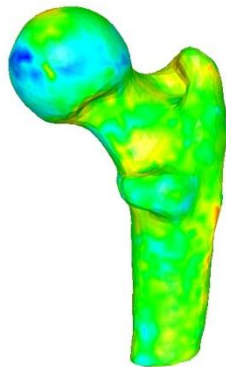
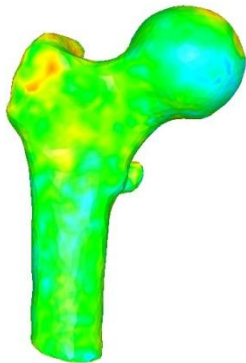
for (i=0;i<Th.nv;i++) {
    file >> VarGray[][i];
    // cout << VarGray[][i] << " " <<
    Th(i).label << " " << Th(i).x << " " <<
    Th(i).y << " " << Th(i).z << endl;
}

//γραφική αναπαράσταση των μοντέλων μας με τα χρώματα
και το αριθμό κάθε χρώματος. (Σχήμα.4.1)
savesol ("VarGray.sol", Th, VarGray, order=1);
exec("copy test6.mesh VarGray.mesh");
exec("ffmedit VarGray.mesh");
...

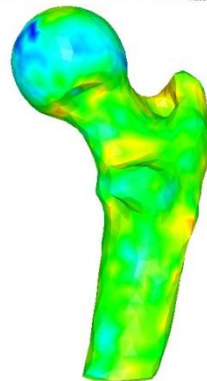
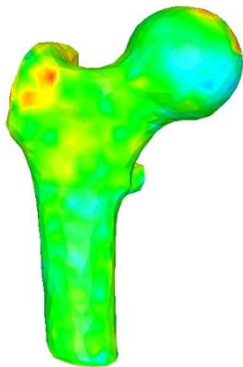
```

Σχήμα.4.1: Γραφική αναπαράσταση των μοντέλων μας με τα χρώματα

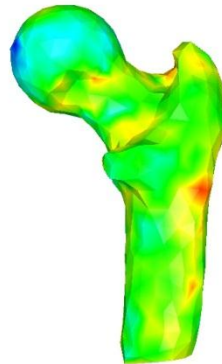
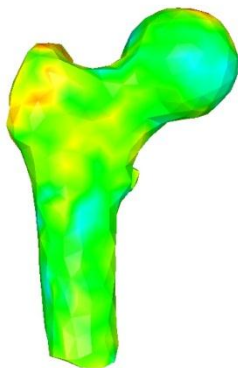




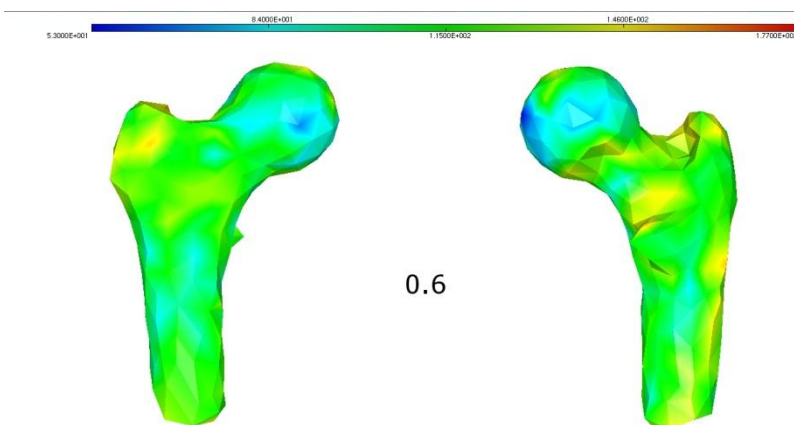
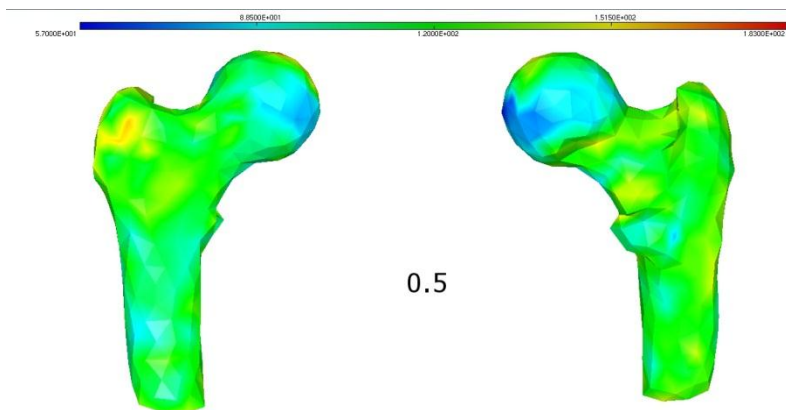
0.2



0.3



0.4



Διακριτοποιήσεις	Εύρος Τιμών Αποχρώσεων του μαύρου	
	Ελάχιστο	Μέγιστο
0,1	39	184
0,2	45	182
0,3	46	180
0,4	42	174
0,5	57	183
0,6	53	177

Πίνακας.4.1 : Συνοπτικός Πίνακας των εύρων τιμών των αποχρώσεων του μαύρου

```

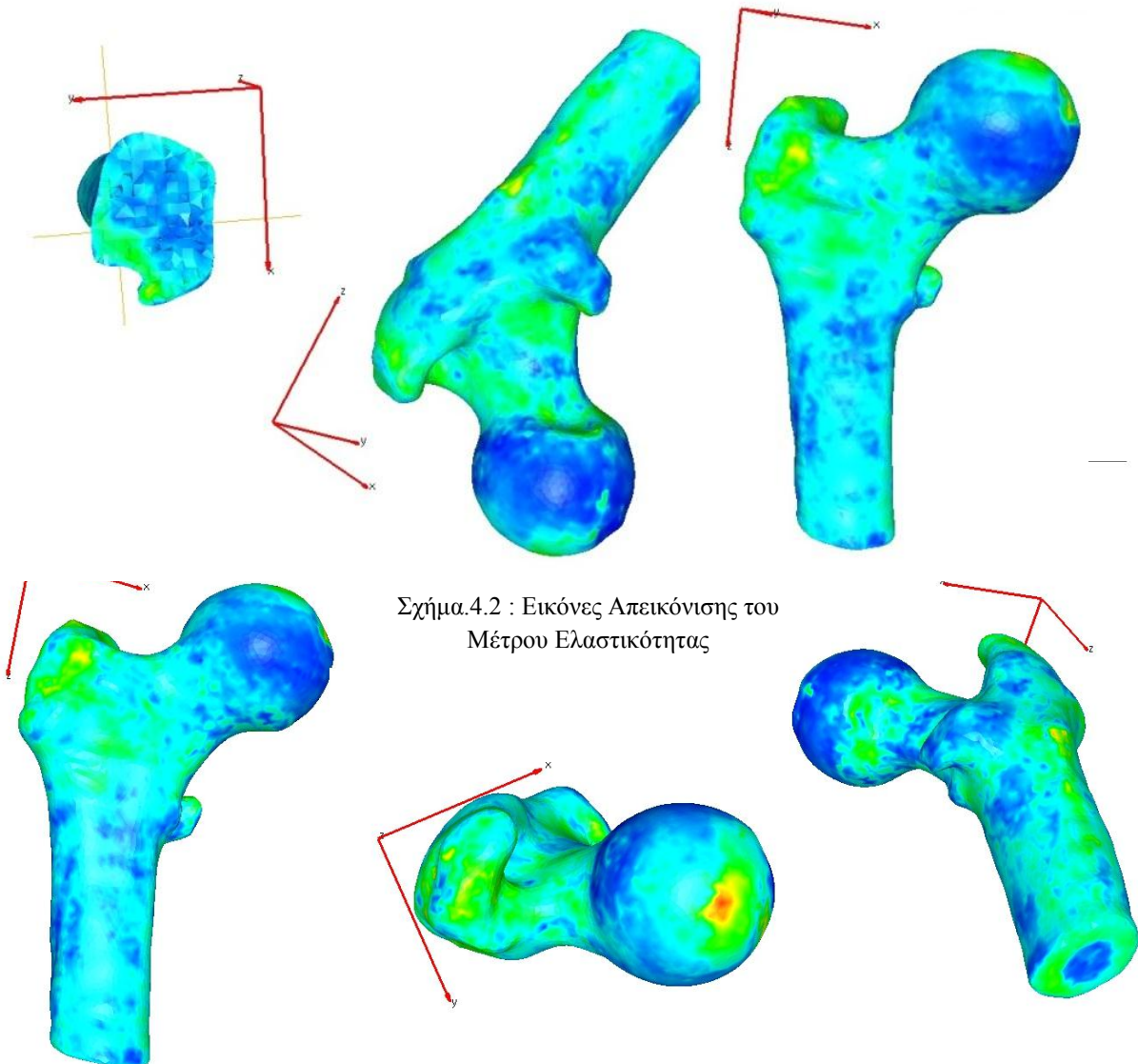
...
Rho=VarGray/100.;
//Υπολογισμός της πυκνότητας σε gr/cm^3
Rho1= Rho*10^-6; // Μετατροπή σε Kg/mm^3
Ep=2065 * Rho^3.09;
//Υπολογισμός του Μέρου Ελαστικότητας σε MPascal

```

```

//γραφική απεικόνιση του μέτρου Ελαστικότητας
save sol ("Ep.sol", Th, Ep, order=1);
exec ("copy test6.mesh Ep.mesh");
exec ("ffmedit Ep.mesh"); ...

```



Σχήμα.4.2 : Εικόνες Απεικόνισης του Μέρου Ελαστικότητας



```

...
//Ορισμός του κυρίου προβλήματος της ελαστικότητας
macro epsilon(u1,u2,u3)
[dx(u1),dy(u2),dz(u3),(dy(u1)+dx(u2))/sqrt(2
.), (dz(u1)+dx(u3))/sqrt(2.), (dz(u2)+dy(u3))/
sqrt(2.)] // EOM
macro div(u1,u2,u3) (dx(u1)+dy(u2)+dz(u3))

// EOM

real nu=0.3;
real g=9.81; // m/s^2

// Πρόβλημα της ελαστικότητας (έλεγχος διάτμησης)
ασκούμενη η βαρυντική δύναμη.
solve
Elasticity([u1,u2,u3],[v1,v2,v3],solver=CG)=
int3d(Th)((Ep*nu/((1.+nu)*(1.-
2.*nu)))*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3)+2.*(Ep/
(2.*(1.+nu)))*(epsilon(u1,u2,u3)'*epsilon(v1
,v2,v3)))
-int3d(Th,1)(Rho1*g*v3)
+on(1,u1=0,u2=0,u3=0);

// Εξισώσεις

```

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \Rightarrow \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) * w_i * dV = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} w_i = \frac{\partial (\sigma_{ij} w_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} w_i dV = \int_V \frac{\partial (\sigma_{ij} w_i)}{\partial x_j} dV$$

$$- \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \int_S \sigma_{ij} w_i n_j dS - \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV$$

$$= \int_S T_i^\mu w_i dS - \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{\kappa\kappa} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{\kappa\kappa} &= \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} \right) = \lambda \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) dV &= \\ \int_V \left[ \lambda \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_{\kappa}}{\partial x_{\kappa}} + \mu \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV & \end{aligned}$$

Μεταβολική Διατύπωση:

$$- \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV + \int_S T_i^{\mu} w_i dS + \int_V f_i w_i dV = 0$$

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dV - \int_V f_i w_i dV = 0$$

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

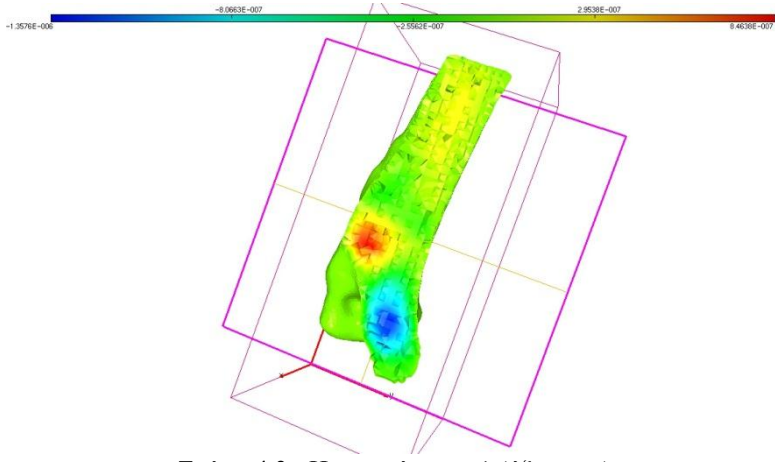
$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

//Υπολογισμός των μετατοπίσεων

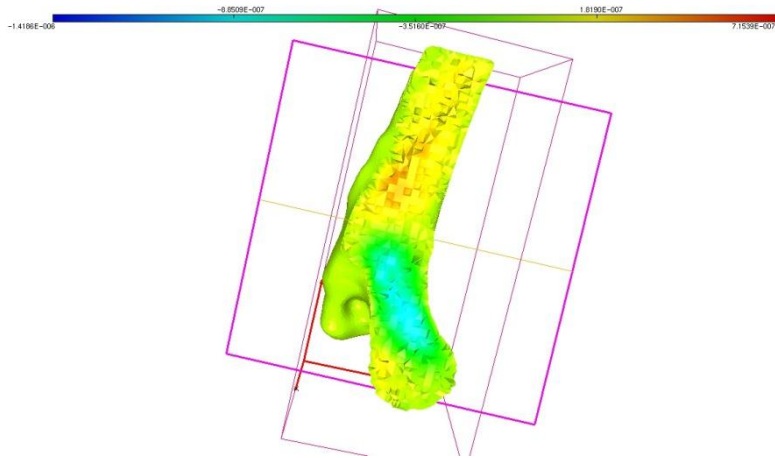
```
savesol("u1.sol", Th, u1, order=1);
exec("copy test6.mesh u1.mesh");
exec("ffmedit u1.mesh");
```

```
savesol("u2.sol", Th, u2, order=1);
exec("copy test6.mesh u2.mesh");
exec("ffmedit u2.mesh");
```

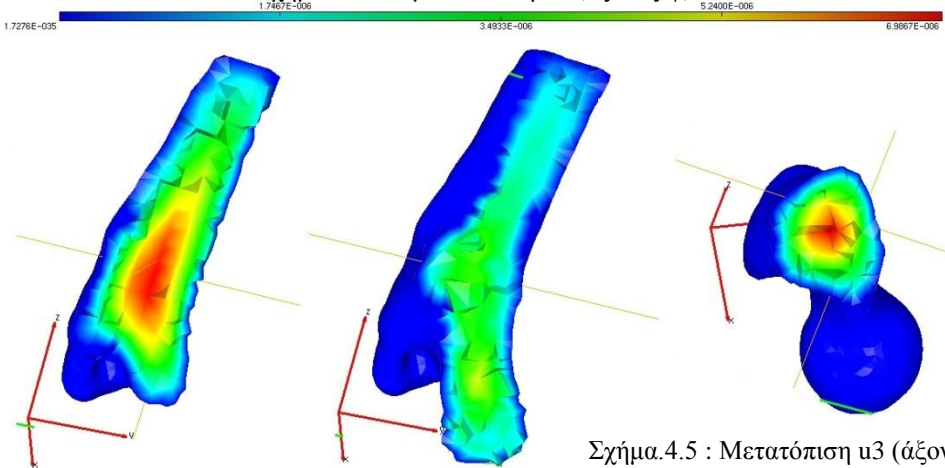
```
savesol("u3.sol", Th, u3, order=1);
exec("copy test6.mesh u3.mesh");
exec("ffmedit u3.mesh");
```



Σχήμα.4.3 : Η μετατόπιση  $u_1$  (άξονας x)



Σχήμα.4.4 : Η μετατόπιση  $u_2$  (άξονας y)



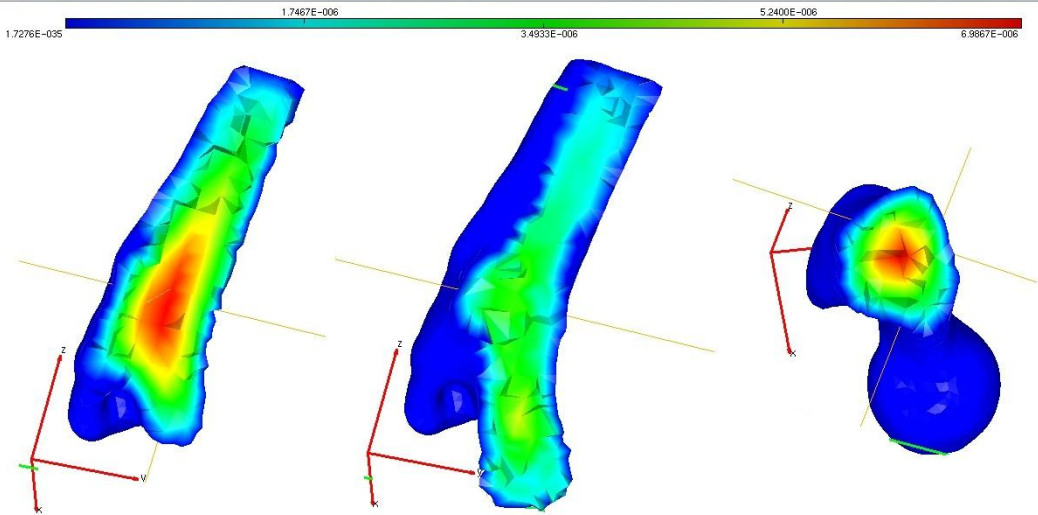
Σχήμα.4.5 : Μετατόπιση  $u_3$  (άξονας z)

```

...
u=((u1^2.)+(u2^2.)+(u3^2.))^0.5;

savesol("u.sol",Th,u,order=1);
exec("copy test6.mesh u.mesh");
exec("ffmedit u.mesh"); ...

```



Fun: -1x+7e+002 = 0

Σχήμα.4.6 : Η συνολική μετατόπιση u

```

//Υπολογισμός των παραμορφώσεων
e11=dx(u1);
e22=dy(u2);
e33=dz(u3);
e12=(dy(u1)+dx(u2))/2.;
e13=(dz(u1)+dx(u3))/2.;
e23=(dz(u2)+dy(u3))/2.;

savesol("e11.sol",Th,e11,order=1);
exec("copy test6.mesh e11.mesh");
//exec("ffmedit e11.mesh");

```

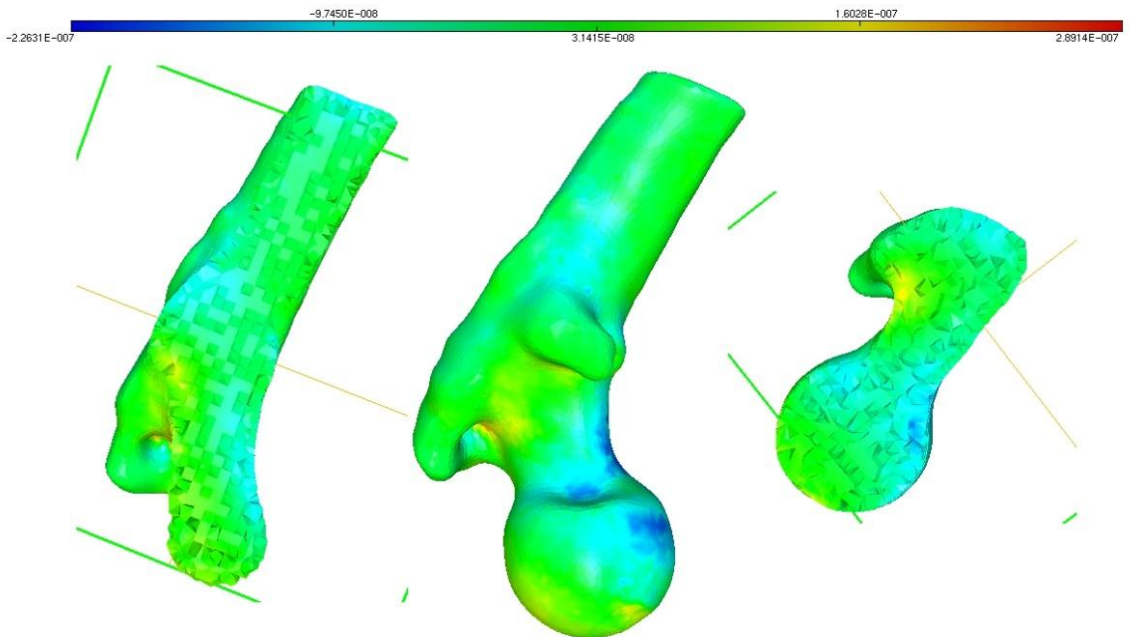
```
savesol("e22.sol",Th,e22,order=1);  
exec("copy test6.mesh e22.mesh");  
//exec("ffmedit e22.mesh");
```

```
savesol("e33.sol",Th,e33,order=1);  
exec("copy test6.mesh e33.mesh");  
exec("ffmedit e33.mesh");
```

```
savesol("e12.sol",Th,e12,order=1);  
exec("copy test6.mesh e12.mesh");  
//exec("ffmedit e12.mesh");
```

```
savesol("e23.sol",Th,e23,order=1);  
exec("copy test6.mesh e23.mesh");  
//exec("ffmedit e23.mesh");
```

```
savesol("e13.sol",Th,e13,order=1);  
exec("copy test6.mesh e13.mesh");  
//exec("ffmedit e13.mesh");
```



Σχήμα.4.7 : Γραφικά το e33

//Υπολογισμός των τάσεων

```
s11=2.*(Ep/(2.*(1.+nu)))*dx(u1)+(Ep*nu/((1.+  
nu)*(1.-2.*nu)))*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3));  
s22=2.*(Ep/(2.*(1.+nu)))*dy(u2)+(Ep*nu/((1.+  
nu)*(1.-2.*nu)))*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3));  
s33=2.*(Ep/(2.*(1.+nu)))*dz(u3)+(Ep*nu/((1.+  
nu)*(1.-2.*nu)))*(dx(u1)+dy(u2)+dz(u3));  
s12=(Ep/(2.*(1.+nu)))*(dy(u1)+dx(u2));  
s23=(Ep/(2.*(1.+nu)))*(dz(u2)+dy(u3));  
s13=(Ep/(2.*(1.+nu)))*(dz(u1)+dx(u3));
```

```
savesol("s11.sol",Th,s11,order=1);  
exec("copy test6.mesh s11.mesh");
```

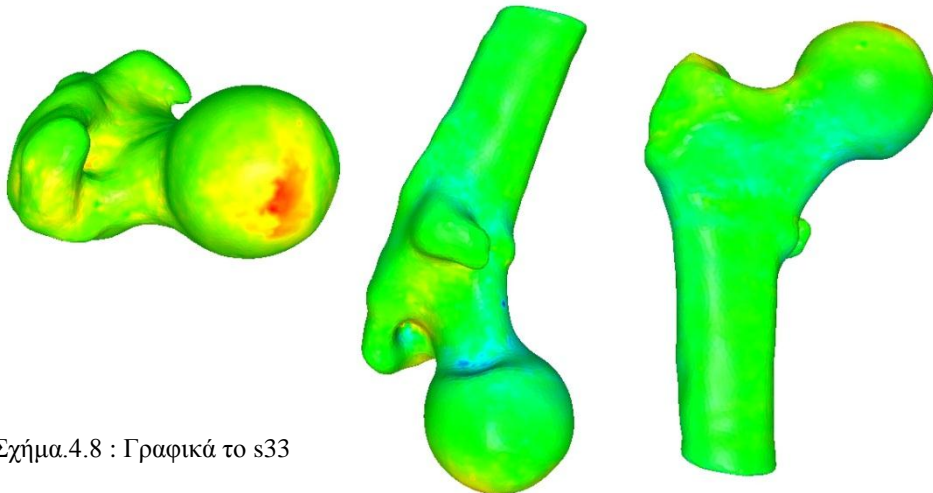
```
savesol("s22.sol",Th,s22,order=1);  
exec("copy test6.mesh s22.mesh");
```

```
savesol("s33.sol",Th,s33,order=1);  
exec("copy test6.mesh s33.mesh");  
exec("ffmedit s33.mesh");
```

```
savesol("s12.sol",Th,s12,order=1);  
exec("copy test6.mesh s12.mesh");
```

```
savesol("s23.sol",Th,s23,order=1);  
exec("copy test6.mesh s23.mesh");
```

```
savesol("s13.sol",Th,s13,order=1);  
exec("copy test6.mesh s13.mesh");
```



Σχήμα.4.8 : Γραφικά το s33

//Υπολογισμός σημαντικών μεγεθών για τον μετέπειτα υπολογισμό κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων

A=-(s11+s22+s33);

B=s11\*s22+s22\*s33+s33\*s11-(s12)^2.-(s23)^2.-(s13)^2.;

C=-(s11\*s22\*s33+2\*s12\*s13\*s23-s11\*(s23)^2.-s22\*(s13)^2.-s33\*(s12)^2.);

Q=(1./3.)\*B-(1./9.)\*A^2.;

R=(1./6.)\*(B\*A-3\*C)-(1./27.)\*A^3;

D=Q^3.+R^2.;

A1=-(e11+e22+e33);

B1=e11\*e22+e22\*e33+e33\*e11-(e12)^2.-(e23)^2.-(e13)^2.;

C1=-(e11\*e22\*e33+2\*e12\*e13\*e23-e11\*(e23)^2.-e22\*(e13)^2.-e33\*(e12)^2.);

Q1=(1./3.)\*B1-(1./9.)\*A1^2.;

R1=(1./6.)\*(B1\*A1-3\*C1)-(1./27.)\*A1^3;

D1=Q1^3.+R1^2.;

Ph D1r=real(D1),D1i=imag(D1);

savesol("A.sol",Th,A,order=1);

exec("copy test6.mesh A.mesh");

//exec("ffmedit A.mesh");

savesol("B.sol",Th,B,order=1);

exec("copy test6.mesh B.mesh");

//exec("ffmedit B.mesh");

savesol("C.sol",Th,C,order=1);

exec("copy test6.mesh C.mesh");

//exec("ffmedit C.mesh");

savesol("Q.sol",Th,Q,order=1);

exec("copy test6.mesh Q.mesh");

//exec("ffmedit Q.mesh");

savesol("R.sol",Th,R,order=1);

exec("copy test6.mesh R.mesh");

//exec("ffmedit R.mesh");

```
savesol("D1r.sol",Th,D1r,order=1);
exec("copy test6.mesh D1r.mesh");
//exec("ffmedit D1r.mesh");
```

```
savesol("D1i.sol",Th,D1i,order=1);
exec("copy test6.mesh D1i.mesh");
//exec("ffmedit D1i.mesh");
```

*//Υπολογισμός σημαντικών μεγεθών για τον μετέπειτα υπολογισμό κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων*

```
ss1=(R+D^0.5)^(1./3.);
ss2=(R-D^0.5)^(1./3.);
```

```
ee1=(R1+D1^0.5)^(1./3.);
ee2=(R1-D1^0.5)^(1./3.);
```

Ph

```
ss1r=real(ss1),ss1i=imag(ss1),ss2r=real(ss2)
,ss2i=imag(ss2),ee1r=real(ee1),ee1i=imag(ee1)
),ee2r=real(ee2),ee2i=imag(ee2);
```

```
savesol("ss1r.sol",Th,ss1r,order=1);
exec("copy test6.mesh ss1r.mesh");
//exec("ffmedit ss1r.mesh");
```

```
savesol("ss1i.sol",Th,ss1i,order=1);
exec("copy test6.mesh ss1i.mesh");
//exec("ffmedit ss1i.mesh");
```

```
savesol("ss2r.sol",Th,ss2r,order=1);
exec("copy test6.mesh ss2r.mesh");
//exec("ffmedit ss2r.mesh");
```

```
savesol("ss2i.sol",Th,ss2i,order=1);
exec("copy test6.mesh ss2i.mesh");
//exec("ffmedit ss2i.mesh");
```

```
savesol("ee1r.sol",Th,ee1r,order=1);
exec("copy test6.mesh ee1r.mesh");
```



```

//exec("ffmedit ee1r.mesh");

savesol("eeli.sol",Th,eeli,order=1);
exec("copy test6.mesh eeli.mesh");
//exec("ffmedit eeli.mesh");

savesol("ee2r.sol",Th,ee2r,order=1);
exec("copy test6.mesh ee2r.mesh");
//exec("ffmedit ee2r.mesh");

savesol("ee2i.sol",Th,ee2i,order=1);
exec("copy test6.mesh ee2i.mesh");
//exec("ffmedit ee2i.mesh");

//Υπολογισμός κυρίων τάσεων και παραμορφώσεων
s1=ss1+ss2-A/3.;
s2=-(ss1+ss2)/2.-A/3.+0.5i*(3^0.5)*(ss1-ss2);
s3=-(ss1+ss2)/2.-A/3.-0.5i*(3^0.5)*(ss1-ss2);

e1=ee1+ee2-A1/3.;
e2=-(ee1+ee2)/2.-A1/3.+0.5i*(3^0.5)*(ee1-
ee2);
e3=-(ee1+ee2)/2.-A1/3.-0.5i*(3^0.5)*(ee1-
ee2);

Ph
Tmax,Gmax,s1r=real(s1),s1i=imag(s1),s2r=real
(s2),s2i=imag(s2),s3r=real(s3),s3i=imag(s3),
e1r=real(e1),e1i=imag(e1),e2r=real(e2),e2i=i
mag(e2),e3r=real(e3),e3i=imag(e3);

savesol("s1r.sol",Th,s1r,order=1);
exec("copy test6.mesh s1r.mesh");
//exec("ffmedit s1r.mesh");

savesol("s1i.sol",Th,s1i,order=1);
exec("copy test6.mesh s1i.mesh");
//exec("ffmedit s1i.mesh");

savesol("s2r.sol",Th,s2r,order=1);
exec("copy test6.mesh s2r.mesh");
//exec("ffmedit s2r.mesh");

```

```

savesol("s2i.sol",Th,s2i,order=1);
exec("copy test6.mesh s2i.mesh");
//exec("ffmedit s2i.mesh");

savesol("s3r.sol",Th,s3r,order=1);
exec("copy test6.mesh s3r.mesh");
//exec("ffmedit s3r.mesh");

savesol("s3i.sol",Th,s3i,order=1);
exec("copy test6.mesh s3i.mesh");
//exec("ffmedit s3i.mesh");

savesol("e1r.sol",Th,e1r,order=1);
exec("copy test6.mesh e1r.mesh");
//exec("ffmedit e1r.mesh");

savesol("e1i.sol",Th,e1i,order=1);
exec("copy test6.mesh e1i.mesh");
//exec("ffmedit e1i.mesh");

savesol("e2r.sol",Th,e2r,order=1);
exec("copy test6.mesh e2r.mesh");
//exec("ffmedit e2r.mesh");

savesol("e2i.sol",Th,e2i,order=1);
exec("copy test6.mesh e2i.mesh");
//exec("ffmedit e2i.mesh");

savesol("e3r.sol",Th,e3r,order=1);
exec("copy test6.mesh e3r.mesh");
//exec("ffmedit e3r.mesh");

savesol("e3i.sol",Th,e3i,order=1);
exec("copy test6.mesh e3i.mesh");
//exec("ffmedit e3i.mesh");

//int size=slr.n;
//cout << " nb of dof = " << size << endl;

```

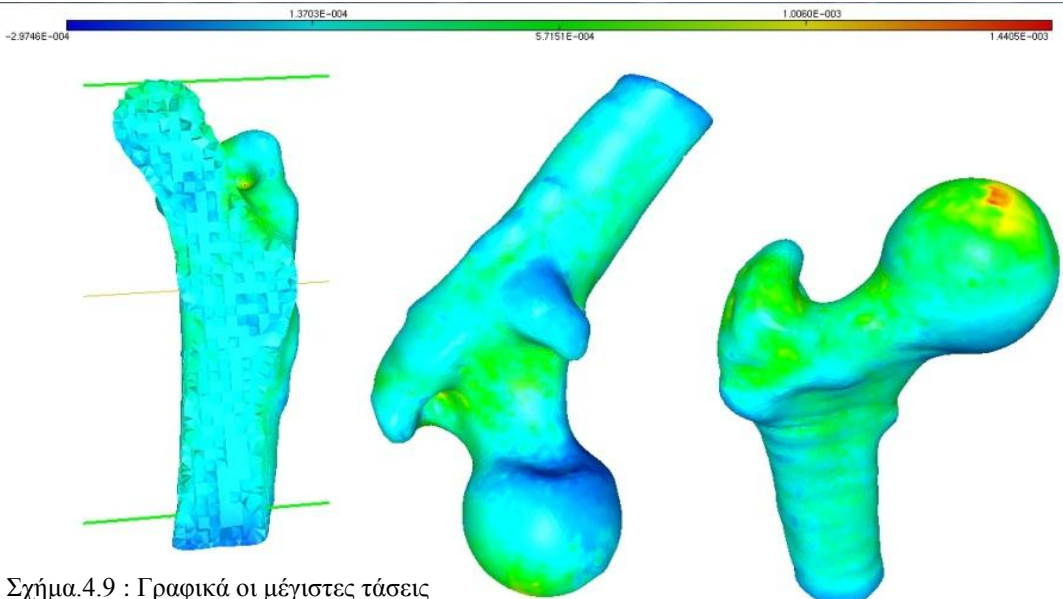
//Υπολογισμός μέγιστων και ελάχιστων τάσεων.

Ph smax, smin, smed;

```
for (i=0;i<slr.n;i++) {  
    if (slr[][i] <= s2r[][i])  
        {smax[][i]=s2r[][i];  
         smin[][i]=slr[][i];}  
    else  
        {smax[][i]=slr[][i];  
         smin[][i]=s2r[][i];}  
  
    if (s3r[][i] >= smax[][i])  
        {smed[][i]=smax[][i];  
         smax[][i]=s3r[][i];}  
    else if (s3r[][i] < smax[][i] && s3r[][i]  
 > smin[][i])  
        {smed[][i]=s3r[][i];}  
    else if (s3r[][i] < smin[][i])  
        {smed[][i]=smin[][i];  
         smin[][i]=s3r[][i];}  
}
```

```
savesol("smax.sol",Th,smax,order=1);  
exec("copy test6.mesh smax.mesh");  
exec("ffmedit smax.mesh");
```

```
savesol("smed.sol",Th,smed,order=1);  
exec("copy test6.mesh smed.mesh");  
//exec("ffmedit smed.mesh");
```

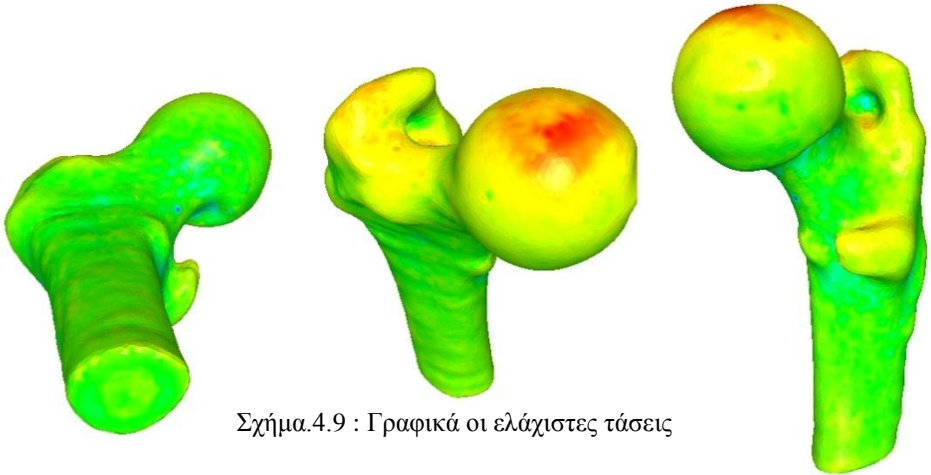


Σχήμα.4.9 : Γραφικά οι μέγιστες τάσεις

```

savesol ("smin.sol", Th, smin, order=1);
exec ("copy test6.mesh smin.mesh");
exec ("ffmedit smin.mesh");

```



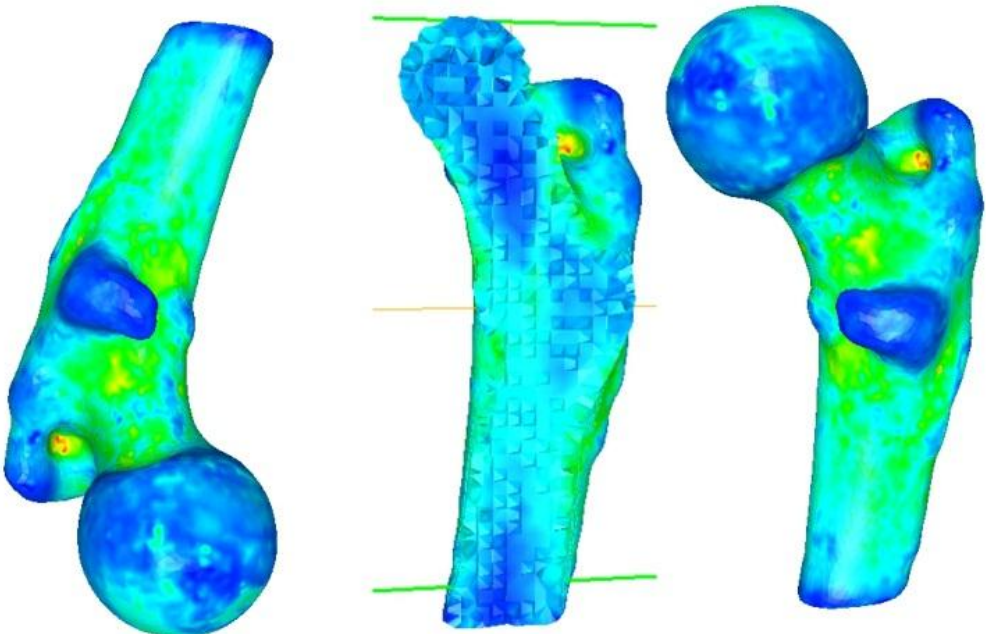
Σχήμα.4.9 : Γραφικά οι ελάχιστες τάσεις

//Υπολογισμός της πρώτης μέγιστης διατμητικής τάσης  
 $T_{max} = 0.5 * (s_{max} - s_{min})$  ;

```

savesol ("Tmax.sol", Th, Tmax, order=1);
exec ("copy test6.mesh Tmax.mesh");
exec ("ffmedit Tmax.mesh");

```



Σχήμα.4.10 : Γραφικά η πρώτη μέγιστη διατμητική τάση  $T_{max}$ .

```

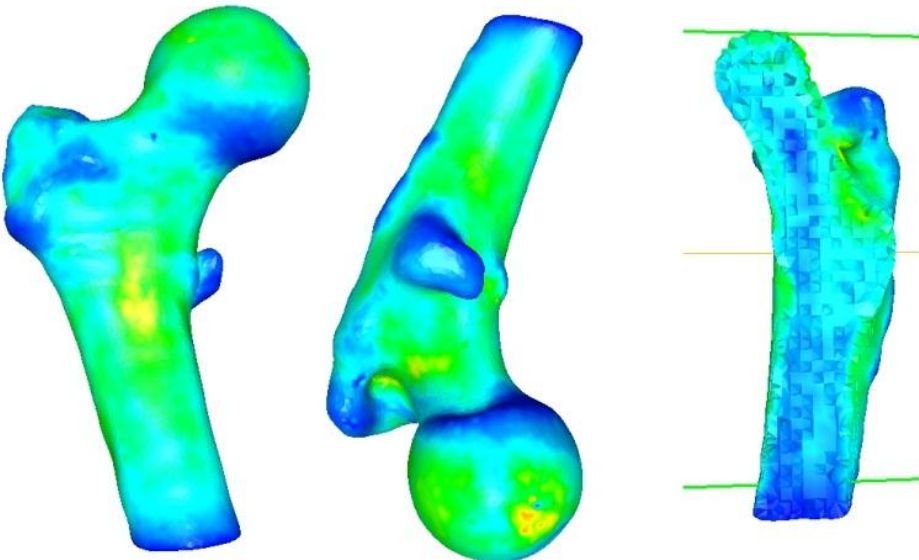
//Υπολογισμός μέγιστων και ελάχιστων παραμορφώσεων
Ph emax, emin, emed;
for (i=0;i<elr.n;i++) {
  if (e1r[][i] <= e2r[][i])
    {emax[][i]=e2r[][i];
     emin[][i]=e1r[][i];}
  else
    {emax[][i]=e1r[][i];
     emin[][i]=e2r[][i];}

  if (e3r[][i] >= emax[][i])
    {emed[][i]=emax[][i];
     emax[][i]=e3r[][i];}
  else if (e3r[][i] < emax[][i] && e3r[][i]
  > emin[][i])
    {emed[][i]=e3r[][i];}
  else if (e3r[][i] < emin[][i])
    {emed[][i]=emin[][i];
     emin[][i]=e3r[][i];}
}

savesol("emax.sol",Th,emax,order=1);
exec("copy test6.mesh emax.mesh");
exec("ffmedit emax.mesh");

savesol("emed.sol",Th,emed,order=1);
exec("copy test6.mesh emed.mesh");
//exec("ffmedit emed.mesh");

```

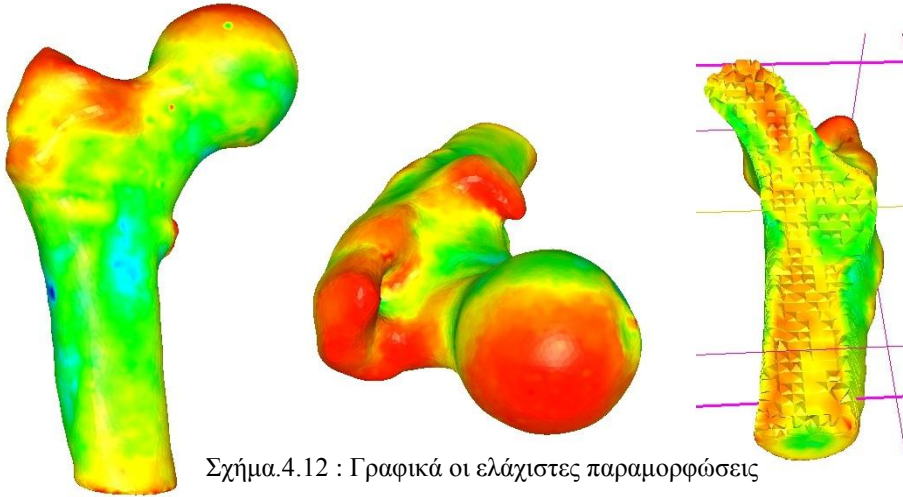


Σχήμα.4.11 : Γραφικά οι μέγιστες παραμορφώσεις

```

savesol ("emin.sol", Th, emin, order=1);
exec ("copy test6.mesh emin.mesh");
exec ("ffmedit emin.mesh");

```



Σχήμα.4.12 : Γραφικά οι ελάχιστες παραμορφώσεις

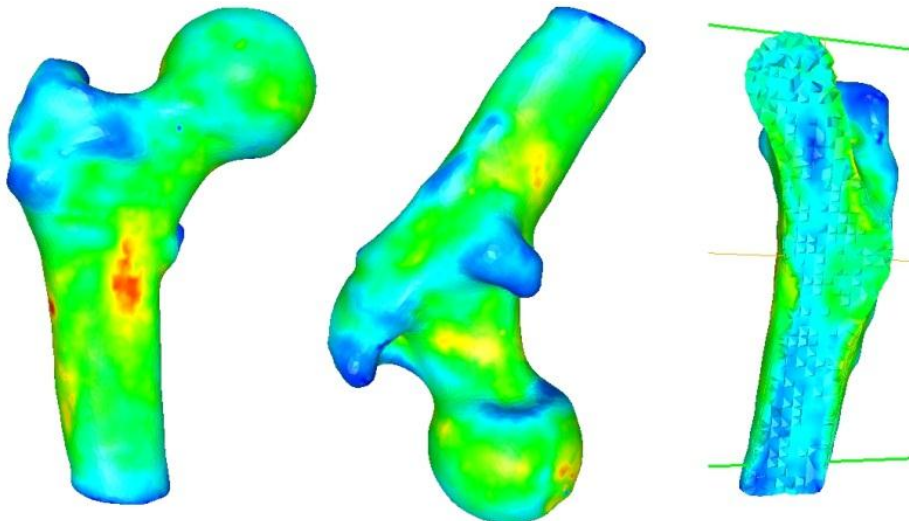
//Υπολογισμός της πρώτης μέγιστης διατμητικής παραμόρφωσης

Gmax=0.5\*(emax-emin);

```

savesol ("Gmax.sol", Th, Gmax, order=1);
exec ("copy test6.mesh Gmax.mesh");
exec ("ffmedit Gmax.mesh");

```



Σχήμα.4.13 : Γραφικά η μέγιστη διατμηματική παραμόρφωση

```
AA=-(smax+smed+smin);  
BB=smax*smed+smed*smin+smax*smin;  
CC=-(smax*smed*smin);
```

```
savesol("AA.sol",Th,AA,order=1);  
exec("copy test6.mesh AA.mesh");  
exec("ffmedit AA.mesh");
```

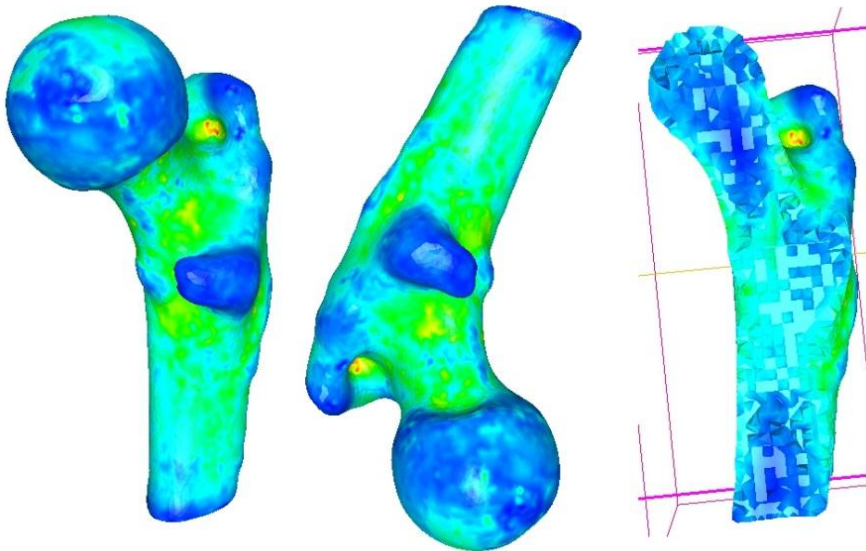
```
savesol("BB.sol",Th,BB,order=1);  
exec("copy test6.mesh BB.mesh");  
exec("ffmedit BB.mesh");
```

```
savesol("CC.sol",Th,CC,order=1);  
exec("copy test6.mesh CC.mesh");  
exec("ffmedit CC.mesh");
```

//Υπολογισμός τάσης Von-Mises

```
Von=(((smax-smed)^2.+(smed-smin)^2.+(smax-  
smin)^2.)/2.)^0.5;
```

```
savesol("Von.sol",Th,Von,order=1);  
exec("copy test6.mesh Von.mesh");  
exec("ffmedit Von.mesh");
```



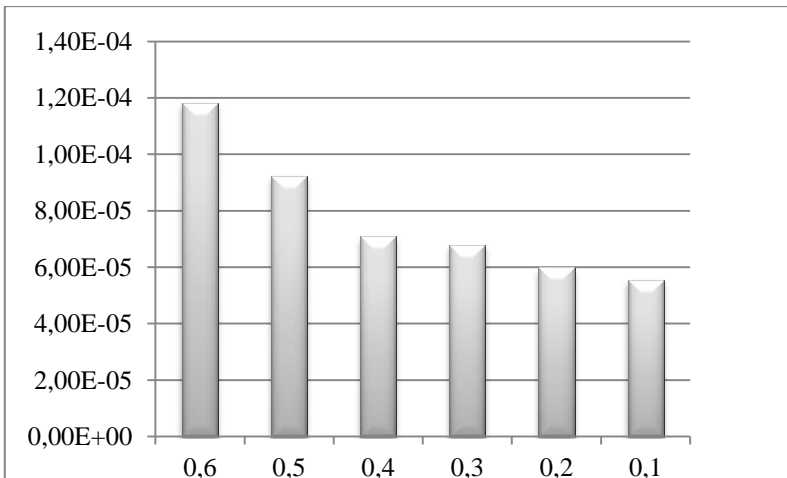
Σχήμα.4.14 : Γραφικά η τάση τάσης Von-Mises

```
//Υπολογισμός πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης  
Energy0=0.5*(s11*e11+s22*e22+s33*e33)+s12*e1  
2+s13*e13+s23*e23;
```

```
savesol("Energy0.sol",Th,Energy0,order=1);  
exec("copy test6.mesh Energy0.mesh");  
exec("ffmedit Energy0.mesh");
```

```
//Υπολογισμός πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης  
Energy= int3d(Th,1)(Energy0);
```

```
savesol("Energy.sol",Th,Energy,order=1);  
end;
```

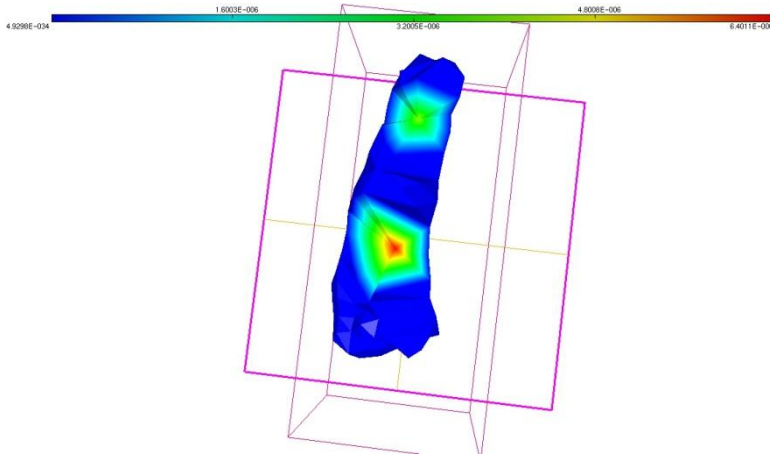


Σχήμα.4.15 : Γραφική παράσταση της Ενεργείας Παραμόρφωσης.



#### 4.4 Ερμηνεία Αποτελεσμάτων

Έχουμε προσέξει ότι όσο περισσότερα στοιχεία έχουμε στο μοντέλο μας τόσο πιο ομαλά μεταβάλλονται τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα στο σχεδιάγραμμα της μετατόπισης για διακριτοποίηση 0.5 βλέπουμε ότι δεν είναι συνεχή τα αποτελέσματα (Σχήμα.4.16) σε αντίθεσή με την μετατόπιση για διακριτοποίηση 0.1 (Σχήμα.4.6)



Σχήμα.4.16 : Η μετατόπιση  $u$  για διακριτοποίηση 0.5

Βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα της Ενέργειας Παραμόρφωσης  $\sigma'$  ολόκληρο τον όγκο του οστού συγκλίνει προς ένα όριο όσο περισσότερο αυξάνουμε τα στοιχεία του μοντέλου μας. (Σχήμα.4.15). Αυτό γίνεται ενώ αλλάζουν τόσο ο όγκος (λόγω της μεταβολής του μεγέθους των στοιχείων) όσο και το τοπικό μέτρο ελαστικότητας. Η σύγκλιση αυτή αποτελεί ένδειξη ότι η μηχανική ανάλυση έγινε σωστά.

Από τις μέγιστες τάσεις και παραμορφώσεις παρατηρούμε όπως ήταν και αναμενόμενο ότι το άνω μέρος της κεφαλής και του αυχένα εφελκύνονται ενώ το κάτω μέρος της κεφαλής και του αυχένα θλίβονται.

## Γενικά Συμπεράσματα – Μελλοντική Έρευνα

Όπως έχουμε προαναφέρει το μοντέλο του άνω μηριαίου οστού έχει επιλυθεί θεωρούμενο ως συνεχώς ανομοιογενές υλικό, που είναι πολύ πιο κοντά στα πραγματικό μηριαίο οστό. Βέβαια ως εξωτερική δύναμη απλοποιημένα θεωρήσαμε μόνο τη βαρυτική.

Σαν μελλοντική έρευνα θα μπορούσε στο μοντέλο που φτιάξαμε να ασκηθούν πραγματικές δυνάμεις όπως έχουν καταμετρηθεί για να δούμε πως κατανέμονται οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στο κόκκαλο. Επίσης θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν και άλλα οστά, θεωρούμενα ως συνεχώς ανομοιογενή υλικά και να ασκηθούν και σε αυτά κάποιες δυνάμεις για να δούμε την αλληλεπίδραση του σπογγώδους με το φλοιώδες οστό. Καθώς επίσης και να γίνουν κάποιες μετρήσεις σε κάποιες ιατρικές τεχνικές προσθετικών υλικών, όπως αρθροπλαστικές επεμβάσεις, σπονδυλοδεσίες, ενδομυελικοί ύλοι, για να δούμε την επίδραση του σπογγώδους οστού.

Για να γίνει βελτίωση του μοντέλου μας θα μπορούσε να γίνει μια πιο εκτενής έρευνα και να προστεθεί επίσης και ο τανυστής πλέξης (fabric tensor) ο οποίος μας δίνει πληροφορίες για την γεωμετρία, τον προσανατολισμό και τις διαστάσεις των δοκίδων.

Επίσης με αυτό τον τρόπο μπορεί να γίνει μια εφαρμογή στους αξονικούς τομογράφους, στους οποίους να υπολογίζεται το τοπικό μέτρο ελαστικότητας έτσι ώστε οι γιατροί να έχουν μια εκτίμηση των αναμενόμενων μηχανικών ιδιοτήτων.

## Βιβλιογραφία

- [1] Χρ. Προβατίδη, Πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος :  
ΕΜΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ και ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ,  
Αθήνα, 2004
- [2] H. Grey, Anatomy of the human body, Philadelphia :Lea &  
Fabiger, 1918, published online May 2000 by Bartleby.com.
- [3] J. C. KOCH, The Laws of Bone Architecture, Am. Jour. Anat.,  
1917, xxi, published online May 2000 by Bartleby.com.
- [4] Γ. Τσαμασφόρος, Μηχανική Παραμορφώσιμων σωμάτων II,  
εκδόσεις Συμμετρία.
- [5] ALGOR Development Staff, The Eight-Node Hexahedral  
"Brick" Element in Finite Element Analysis,  
[http://www.algor.com/news\\_pub/tech\\_white\\_papers/eight\\_node/default.asp](http://www.algor.com/news_pub/tech_white_papers/eight_node/default.asp).
- [6] Anatomy of the Human Body. Gray, H. (1918), Lea & Febiger,  
Philadelphia
- [7] Biomechanics of the Locomotor Apparatus: Contributions on  
the Functional Anatomy of the Locomotor Apparatus.  
Pauwels F (1980) Berlin: Springer Verlag.
- [8] Biomechanics of the Normal and Diseased Hip.  
Pauwels, F. (1976) Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New  
York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–  
Tokyo.
- [9] Die graphische Statik. CULMANN, C. (1866), Zurich
- [10] Die Architectur der Spongiosa. Archivfur Anatomie,  
Physiologie und wissenschaftliche MEYER, G. H. von (1867)  
Medicine, 34, 615
- [11] Evans, F. G Magazine: *Amer. J. Phys. Anthropol.*, **11**,  
413 (1953)
- [12] Site on the web: [www.elsevier.com/locate/injury/](http://www.elsevier.com/locate/injury/)
- [13] FreeFem++ (2009): Pironneau O., Hecht F., Morice J.  
Universit'e Pierre et Marie Curie Laboratoire Jacques-Louis  
Lions Site on the web: <http://www.freefem.org/ff++index.htm>
- [14] GetDP (2009) Site on the web: <http://www.geuz.org/getdp>
- [15] Gmsh (2009) Site on the web: <http://www.geuz.org/gmsh>
- [16] ITK (Insight Segmentation and Registration Toolkit, 2009)  
Site on the web: <http://www.itk.org>

- [17] Mechanical factors for internal fixation of the femoral neck. Frankel VH Magazine: Acta Orthop Scand. 1959; 29: 21–42
- [18] Mechanical Properties of Bone. Charles C Thomas, Evans, F.G., 1973 Springfield, Illinois, USA.
- [19] Medit (2009) Site on the web: <http://www.ann.jussieu.fr/~frey/logiciels/Docmedit.dir/index.html>
- [20] Netgen (2009) Site on the web: <http://www.hpfem.jku.at/netgen>
- [21] On the mathematical analysis of stress in the human femur. Rybicki, E. F., Simonen, F. A. and Weis, E. B. (1972) Magazine: J.Biomech. 5, 203 – 215.
- [22] Slicer Site on the web: <http://www.slicer.org>
- [23] Tetgen (2009) Site on the web: <http://www.tetgen.berlios.de/reference.html>
- [24] Visible Human Project (2009) Site on the web: [http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible\\_human.html](http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html)
- [25] Liang Peng, 2005, Comparison of isotropic and orthotropic material property assignments on femoral finite element models under two loading conditions
- [26] Cinzia Zannoni, 1998, Material properties assignment to finite element models of bone structures: a new method