



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**ΤΟ ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ
ΤΗΣ QED**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΝΩΛΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :

Γ.ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΑΣ

ΑΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΜΠ

23 Οκτωβρίου 2012

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από δύο μέρη όπως φαίνεται και από τον τίτλο της: Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED. Το πρώτο, το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής, αφορά στη μελέτη των στοιχειωδών σωματιδίων καθώς και στη μελέτη των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Επίσης αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο αυτά αποκτούν μάζα μέσα από το μηχανισμό Higgs. Το δεύτερο κομμάτι, η επανακανονικοποίηση της QED, αναφέρεται στο πως τα διαγράμματα Feynman ανώτερης τάξης ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων, οδηγούν στον επαναορισμό των φυσικών μεγεθών των σωματιδίων. Επίσης, αναλύεται το πως τα διαγράμματα αυτά τελικά οδηγούν στην περιγραφή παρατηρήσιμων φαινομένων, οι προβλέψεις των οποίων επιβεβαιώνονται πειραματικά.

This thesis consists of two parts as the title declares: The standard model of physics and renormalization of QED. The first part, the standard model of physics, is related to the elementary particles and how they interact with each other. It's also described how these particles gain mass through the Higgs mechanism. The second part, the renormalization of QED, refers to how the higher-order Feynman diagrams of electromagnetic interactions lead to the redefinition of the particles' physical quantities. Moreover, it's analyzed how these diagrams eventually lead to the description of observable phenomena. Also, it's emphasized that the predicted results that arise have already been confirmed by conducted experiments.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αρχικά οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τους δύο καθηγητές του ΕΜΠ, Δρ. Ζουπάνο Γεώργιο και Δρ. Τράκα Νίκο για την επίβλεψη και καθοδήγηση της διπλωματικής εργασίας.

Στο πρώτο κομμάτι, στη μελέτη του καθιερωμένου προτύπου, η καθοδήγηση έγινε από τον Δρ. Ζουπάνο, στον οποίο αποδίδεται η μύησή μου σε αυτό το χώρο της φυσικής αφού η παρακολούθηση του μαθήματός του στάθηκε εφελκτήριο για να ασχοληθώ με το θέμα αυτό. Επίσης, οφείλω να τον ευχαριστήσω για τη συνεχή προσπάθεια της διεύρυνσης των γνώσεων μου στον κλάδο αυτό μέσα από επιμορφωτικές συναντήσεις.

Στο δεύτερο κομμάτι, στην επανακανονικοποίηση της QED, τα ηνία της επίβλεψης ανέλαβε ο Δρ. Τράκας, τον οποίο ευχαριστώ για την καθοδήγηση και την άμεση ανταπόκριση σε όποιες δυσκολίες ανέκυψαν κατά την κατανόηση του θέματος από πλευράς μου.

Φυσικά δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω το Δρ. Κουτσούμπα Γεώργιο ο οποίος τυπικά ανέλαβε την επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας όταν προέκυψαν διαδικαστικά προβλήματα στα οποία και διαδραμάτισε καταλυτικό ρόλο στην αντιμετώπισή τους.

Στην ομαλή διεξαγωγή της εργασίας αλλά και της παρουσίασης σημαντικό ρόλο έπαιξε και η άψογη και άμεση συνεργασία και συνεννόηση μεταξύ των τριών καθηγητών.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής Δρ. Κεχαγιά Α. και Δρ. Ήργες Ν. για τη συνεισφορά τους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το οικογενειακό και φιλικό μου περιβάλλον και ιδιαίτερα τη σύντροφό μου για την ψυχολογική και πρακτική στήριξη καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει τίτλο: *Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής και επανακανονικοποίηση της QED*. Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο παρατίθενται εισαγωγικά στοιχεία τα οποία είναι απαραίτητα μαθηματικά και εννοιολογικά εργαλεία για την κατανόηση του κυρίως θέματος. Έπειτα εδραιώνει το κλίμα και το σκεπτικό που επικρατούσε στην επιστημονική κοινότητα τα χρόνια λίγο πριν την αρχή της κατασκευής του καθιερωμένου προτύπου. Στο δεύτερο κεφάλαιο, ξεδιπλώνεται το μαθηματικό εργαλείο της αναλυτικής μηχανικής πάνω στο οποίο πάτησαν οι επιστήμονες ώστε να περάσουν σε μια θεωρία πεδίου μέσω της λαγκρατζιανής διατύπωσης. Έπειτα στο ίδιο κεφάλαιο, περιγράφεται το πως οι μετασχηματισμοί ομάδων επηρεάζουν τις λαγκρατζιανές που περιγράφουν τα πεδία. Στο επόμενο κεφάλαιο περιέχεται ο τρόπος με τον οποίο χτίζεται το καθιερωμένο πρότυπο και πως τα στοιχειώδη σωματίδια αποκτούν μάζα μέσω του μηχανισμού Higgs. Στη συνέχεια περιγράφεται η μελέτη των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων, δηλαδή η περιγραφή δύο διαφορετικών αλληλεπιδράσεων ως μία ενιαία. Στο τέταρτο κεφάλαιο, το κέντρο βάρους μεταφέρεται αποκλειστικά στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, πως υπολογίζονται τα αναλλοίωτα πλάτη τους και πως αυτά εξάγονται -πέρα από υπολογιστικά- μέσω των κανόνων Feynman. Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύεται η διαδικασία κατά την οποία στον υπολογισμό των αναλλοίωτων πλατών συνεισφέρουν διαγράμματα μεγαλύτερης τάξης, ($\mathcal{O}(e^4)$). Για να υπολογιστούν οι συνεισφορές αυτές χρησιμοποιήθηκαν μη τετριμμένες διαδικασίες οι οποίες έπειτα από επίπονες πράξεις έδωσαν σημαντικά αποτελέσματα και θεωρητικές προβλέψεις (γύρω στα μέσα του προηγούμενου αιώνα). Το σημαντικότερο αποτέλεσμα είναι η επανακανονικοποίηση του φορτίου σύμφωνα με την οποία συμπεραίνουμε ότι το πραγματικό φορτίο με το οποίο αλληλεπιδρά το ηλεκτρόνιο είναι διαφορετικό από αυτό που εμπεριέχεται στις κυματικές εξισώσεις περιγραφής σωματιδίων. Τέλος, παρατίθενται κάποια φαινόμενα (μετατόπιση Lamb, ανώμαλη μαγνητική ροπή) τα οποία προκύπτουν αφού συμπεριληφθούν τα διαγράμματα μεγαλύτερης τάξης, δίνοντας προβλέψεις οι οποίες έρχονται σε πρωτοφανή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγικά στοιχεία - Φορμαλισμός	7
1.1	Μη σχετικιστική κβαντομηχανική	8
1.2	Στοιχεία ειδικής σχετικότητας	11
1.3	Η Εξίσωση Klein-Gordon	16
1.4	Αντιμετώπιση των προβλημάτων της Klein-Gordon	18
1.5	Η εξίσωση του Dirac	19
1.5.1	Διατηρούμενο ρεύμα	23
1.5.2	Λύσεις της εξίσωσης Dirac	24
2	Θεωρία πεδίου	31
2.1	Αρχή της ελάχιστης δράσης	31
2.2	Λανγκρατζιανή διατύπωση σε θεωρία πεδίων	34
2.3	Θεώρημα Noether, συμμετρίες και νόμοι διατήρησης	37
2.4	Εκτεταμένοι και τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας	42
2.5	Συμμετρίες και θεωρία ομάδων	47
2.6	Αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας	52
2.6.1	Ο $U(1)$ τοπικός μετασχηματισμός	52
2.6.2	Ο $SU(2)$ τοπικός μετασχηματισμός	53
2.6.3	Ο $SU(3)$ μετασχηματισμός	58
2.7	Συμπεράσματα	61
3	Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής	63
3.1	Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας-Κρυμμένη συμμετρία	63
3.1.1	Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας	64
3.1.2	Αυθόρμητο σπάσιμο εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας	68
3.1.3	Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας-μηχανισμός Higgs- αβελιανή περίπτωση	71
3.1.4	Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας-μηχανισμός Higgs- Μη αβελιανή περίπτωση	76
3.2	Οι θεωρίες βαθμίδας του Καθιερωμένου Προτύπου	81
3.2.1	Η συμμετρία $U(1)_Y$	81
3.2.2	Η συμμετρία $SU(2)_L$	82
3.2.3	Η συμμετρία $SU(3)_c$	84

3.3	Οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις - Το μοντέλο των Weinberg-Salam	85
3.4	Φερμιονικές μάζες - ανάμιξη γενιών	101
3.5	Εύρεση γωνίας Cabibbo συναρτήσει των φυσικών μαζών των κουάρκ	107
3.6	Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις	109
3.7	Συμπεράσματα	112
4	Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)	113
4.1	Μη σχετικιστική χρονοεξαρτώμενη θεωρία διαταραχών	113
4.2	Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων χωρίς σπιν	119
4.2.1	“Ηλεκτρόνιο” σε η/μ πεδίο A^μ	119
4.2.2	Σκέδαση “ηλεκτρονίου”-“μιονίου”	121
4.3	Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων με σπιν 1/2	123
4.3.1	Ηλεκτρόνιο σε η/μ πεδίο A^μ	123
4.3.2	Η σκέδαση Moller $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$	124
4.3.3	Σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου	126
4.4	Κανόνες Feynman και η επέκταση $i\epsilon$	128
5	Επανακανονικοποίηση	133
5.1	Διορθώσεις ανώτερης τάξης	133
5.2	Το διάγραμμα ιδίας ενέργειας φωτονίου - Η πόλωση του κενού	135
5.3	Το διάγραμμα ιδίας ενέργειας του ηλεκτρονίου	150
5.4	Η διόρθωση της κορυφής	159
5.5	Ταυτότητες Ward	164
5.6	Η μετατόπιση Lamb & η ανώμαλη μαγνητική ροπή	165
5.7	Επανακανονικοποίηση	170
5.8	Θωράκιση φορτίου στην QED και “σταθερά” ζεύξης της	175
5.9	Περίληψη-Συμπεράσματα	177

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά στοιχεία - Φορμαλισμός

1.1 Μη σχετικιστική κβαντομηχανική

Γνωρίζουμε ότι η κλασική φυσική διέπεται από τη σχέση

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

η οποία συνδέει την κινητική ενέργεια με την ορμή ενός σωματιδίου. Είναι γνωστό ότι στην κβαντομηχανική τα φυσικά μεγέθη ισοδυναμούν με ερμιτιανούς τελεστές, οι ιδιοτιμές τους δηλαδή είναι πραγματικοί αριθμοί (όπως οφείλουν αφού οι ιδιοτιμές τους αντιστοιχούν σε αποτελέσματα μετρήσεων). Οπότε αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (1.1) τα μεγέθη με τους αντίστοιχους τελεστές

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

και αυτοί δράσουν πάνω σε μια (μιγαδική στη γενική περίπτωση) κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{x}, t)$ παίρνουμε την διαφορική εξίσωση του Schrodinger η οποία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου στο μικρόκοσμο:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{x}, t) + i \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

Ο τελεστής

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \quad (1.5)$$

ονομάζεται χαμιλτονιανή και οι ιδιοτιμές του αποτελούν τις δυνατές τιμές της ενέργειας. Στην περίπτωση αυτή, όπου $V(\vec{r}) = 0$, ο τελεστής ονομάζεται ελεύθερη χαμιλτονιανή, H_0 . Η (1.4) μπορεί να γραφτεί λοιπόν σαν

$$\hat{H} \Psi = \hat{E} \Psi \quad (1.6)$$

Οι τελεστές που χρησιμοποιούνται στην κβαντομηχανική και δρουν πάνω στις κυματοσυναρτήσεις είναι -κατά πλειοψηφία- διαφορικοί και επιπλέον γραμμικοί. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη δράση τους πάνω σε έναν γραμμικό συνδυασμό κυματοσυναρτήσεων, ο τελεστής μεταφέρεται σε κάθε συνάρτηση του συνδυασμού ξεχωριστά. Δηλαδή, για τον τελεστή \hat{A} , θα ισχύει:

$$\hat{A}(c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2) = c_1 (\hat{A} \Psi_1) + c_2 (\hat{A} \Psi_2) \quad (1.7)$$

Συνεπώς, η (1.4) είναι γραμμική με άμεση συνέπεια - μεγάλης φυσικής σημασίας - το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της εξίσωσης Schrodinger, είναι επίσης λύση της.¹

¹Τραχανάς, Σ., Κβαντομηχανική II : Θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι, κβαντικοί υπολογιστές¹ 2008.

Πρέπει να αποδειχτεί ότι η κυματοσυνάρτηση Ψ :

$$\Psi(\vec{x}, t) = c_1\Psi_1(\vec{x}, t) + c_2\Psi_2(\vec{x}, t) \quad (1.8)$$

είναι λύση της (1.4), αν οι Ψ_1 και Ψ_2 αποτελούν επίσης λύσεις της. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Schrodinger της μορφής,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}_0\Psi \quad (1.9)$$

την (1.8) έπεται ότι,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) = \hat{H}_0(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) \quad (1.10)$$

και τώρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας καταλήγουμε:

$$c_1\left(i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right) + c_2\left(i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right) = c_1(\hat{H}_0\Psi_1) + c_2(\hat{H}_0\Psi_2) \quad (1.11)$$

όπου η τελευταία εξίσωση ισχύει αφού οι Ψ_1 και Ψ_2 αποτελούν (από εκφώνηση) λύσεις της εξίσωσης Schrodinger. Πέρα από τη γραμμικότητα που αποτελεί μία κοινή ιδιότητα της εξίσωσης Schrodinger και της κυματικής εξίσωσης - η οποία είναι το κλασικό ανάλογο της πρώτης - τις δυο αυτές εξισώσεις τις χωρίζουν δυο μεγάλες διαφορές.

1. Οι συντελεστές της εξίσωσης του Schrodinger είναι μιγαδικοί αριθμοί, ενώ η κυματική εξίσωση είναι καθαρά πραγματική.
2. Η κλασική εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης ως προς το χρόνο ενώ η αντίστοιχη στην κβαντομηχανική είναι πρώτης τάξης.

Η μιγαδική φύση της εξίσωσης του Schrodinger δείχνει πως δεν αφορά παρατηρήσιμα κύματα, αλλά αντιπροσωπεύει ένα "κύμα πιθανότητας", αφού το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της κυματοσυνάρτησης $\rho = |\Psi|^2$ δίνει την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου (πυκνότητα πιθανότητας) να βρεθεί το σωματίδιο σε μια περιοχή του χώρου. Το γεγονός αυτό αποτελεί τη στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης. Εδώ ο χρόνος παραλείπεται αφού όσον αφορά την ερμηνεία αυτή, δεν συνιστά κάποιο σημαντικό ρόλο, απλά μια παράμετρο (παραλείποντας το χρόνο εννοούμε κάποιο στιγμιότυπο της κυματοσυνάρτησης).

Η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί στο στοιχείο όγκου d^3x είναι:

$$P = |\Psi|^2 d^3x \quad (1.12)$$

και συνεπώς η ολική πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί σε ολόκληρο το χώρο είναι:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^3x \quad (1.13)$$

Φυσικά, η ολική πιθανότητα, εφόσον ερμηνεύουμε τη κβαντομηχανική στατιστικά οφείλει να είναι ίση με τη μονάδα :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^3x = 1 \quad (1.14)$$

Η συνθήκη αυτή ονομάζεται κανονικοποίηση και για να έχει νόημα θα πρέπει αναγκαιώς το ολοκλήρωμα να συγκλίνει, ή αλλιώς, η Ψ να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

Όσον αφορά την πυκνότητα πιθανότητας, μεταβάλλεται συναρτήσεως του χρόνου. Οπότε, όταν σε κάποια περιοχή αυξάνεται η πιθανότητα, σε κάποια άλλη μειώνεται ώστε η ολική πιθανότητα να παραμένει αμετάβλητη. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι έχουμε μεταφορά πιθανότητας. Το κλασικό ανάλογο αυτής της συμπεριφοράς είναι η κίνηση ενός συμπιεστού υγρού, όπου κάθε μεταβολή στην πυκνότητα μάζας σε μια περιοχή του χώρου, επιφέρει και μια αντισταθμιστική εισροή ή εκροή ρευστού από τη συνοριακή επιφάνεια ². Το ισοζύγιο ανάμεσα στη μεταβολή της πυκνότητας της μάζας και της ροής από τη συνοριακή επιφάνεια δίνεται από την εξίσωση συνέχειας.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.15)$$

Οπότε αναλογικά όπως η παραπάνω μεταβολή της πυκνότητας της μάζας επιφέρει μεταβολή στη ροή του υγρού, έτσι και η μεταβολή της πυκνότητας πιθανότητας επιφέρει μεταβολή στη ροή της πιθανότητας - ένα ρεύμα πιθανότητας j . Το ρεύμα αυτό υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την (1.4) με το $(i\Psi)^*$ και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στο γινόμενο της συζυγούς της (1.4) επί το $(i\Psi)$. Δηλαδή :

$$\begin{aligned} (i\Psi)^* \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)}_{(1.4)} + (i\Psi) \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* - i \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right)}_{(1.4)^*} &= 0 \\ \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \frac{i}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \frac{i}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) - \frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(-\frac{i}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \right)}_{\vec{j}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Συγκρίνοντας λοιπόν την (1.16) με την εξίσωση συνέχειας (1.15) προκύπτει η έκφραση για το ρεύμα πιθανότητας :

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \quad (1.17)$$

²Τραχανάς, Σ., Κβαντομηχανική II : Θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι, κβαντικοί υπολογιστές¹ 2008.

1.2 Στοιχεία ειδικής σχετικότητας

Το γεγονός ότι τα στοιχειώδη σωματίδια κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες καθιστά απαραίτητη την εισαγωγή του φορμαλισμού της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας και τη συγχώνευσή της με την κβαντομηχανική.

Το 1905 ο Einstein υπέθεσε ότι η αρχή της ισοδυναμίας (Ταυτοτικά πειράματα που διαζάγονται σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα.³) ισχύει για τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα όπως αυτά περιγράφονται από τις εξισώσεις Maxwell. Θεώρησε δηλαδή ότι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα η ταχύτητα του φωτός παραμένει σταθερή και ίση με c , πράγμα το οποίο έχει αποδειχθεί από το πείραμα των Michelson-Morley (1887).

Πριν από αυτή τη θεώρηση, επικρατούσε ο ισχυρισμός του Νεύτωνα περί πρόσθεσης των ταχυτήτων. Πιο συγκεκριμένα αν υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο έχει σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (ΑΣΑ) ταχύτητα $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ και σε ένα άλλο το οποίο κινείται με ταχύτητα v κατά το θετικό άξονα των x σε σχέση με το πρώτο, έχει ταχύτητα $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$. Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου:

$$\begin{aligned} - x' &= x - vt \\ - y' &= y \\ - z' &= z \\ - t' &= t \end{aligned}$$

η σχέση των ταχυτήτων στον άξονα x θα είναι:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v \quad (1.18)$$

Οπότε οι συνιστώσες της ταχύτητας που μειτριούνται στο δεύτερο ΑΣΑ θα είναι σε σχέση με αυτές του πρώτου:

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι οι εξισώσεις του Maxwell είναι έγκυρες μόνο για ένα ΑΣΑ, αφού προβλέπουν μόνο μία ταχύτητα για το φως. Για ένα άλλο αδρανειακό σύστημα η ταχύτητα του φωτός θα προέκυπτε εκ νέου από την παραπάνω πρόσθεση των ταχυτήτων.

³Hartle J.B., An Introduction to Einstein's General Relativity 2003

Όμως ο Einstein λοιπόν δε συμπεριέλαβε στη θεωρία του τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, (οι οποίοι υπεισέρχονται στη Νευτώνεια μηχανική και οδηγούν στην πρόσθεση των ταχυτήτων) αλλά εισήγαγε μια σύνδεση των αδρανειακών συστημάτων που είναι συνεπής με την αρχή της ισοδυναμίας, καταργώντας την ιδέα περί απόλυτου χρόνου του Νεύτωνα. Η σύνδεση αυτή είναι γνωστή ως μετασχηματισμοί Lorentz.

Στη θεωρία της σχετικότητας, για να καθοριστεί ένα σημείο (για παράδειγμα σε καρτεσιανές συντεταγμένες) είναι απαραίτητες 4 συντεταγμένες, οι 3 χωρικές και ο χρόνος $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, αφού όπως προαναφέρεται, ο χρόνος δεν είναι ίδιος σε όλα τα αδρανειακά συστήματα. Αυτή η τετραδιάστατη ενοποίηση ορίζει ένα χώρο που ονομάζεται χωρόχρονος (του Minkowski). Οι μετασχηματισμοί Lorentz αναμιγνύουν λοιπόν το χώρο και το χρόνο δύο αδρανειακών συστημάτων σε σχετική κίνηση. Πριν την ανάπτυξη και τη μελέτη των μετασχηματισμών αυτών, είναι φρόνιμο να προηγηθεί μια σύντομη περιγραφή για τη σχετικιστική διατύπωση.

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Το 4-διάνυσμα της θέσης ορίζεται:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \quad (1.19)$$

και η μετατόπιση για απειροστά διαστήματα ως:

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz) = (cdt, d\vec{x}) \quad (1.20)$$

Διανύσματα που φέρουν πάνω δείκτες ονομάζονται συναλλοιώτα.

Επίσης ορίζονται και 4-διανύσματα με κάτω δείκτες, που λέγονται ανταλλοιώτα:

$$dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) = (dx^0, -dx^1, -dx^2, -dx^3) = (cdt, -dx, -dy, -dz) \quad (1.21)$$

Διαφορετικοί παρατηρητές δε συμφωνούν στις παραπάνω συντεταγμένες, όμως συμφωνούν για το αναλλοίωτο μήκος, το οποίο για απειροστές μεταβολές είναι:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.22)$$

το οποίο προκύπτει από τις εξισώσεις (1.20) και (1.21) ως εξής:

$$ds^2 = dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu \equiv dx_\mu dx^\mu \quad (1.23)$$

Στην τελευταία ισότητα θεωρείται ότι το σύμβολο της άθροισης είναι περιττό, αφού οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται (σύμβαση Einstein).

Ο ορισμός των 4-διανυσμάτων (1.20) και (1.21), δεν είναι τυχαίος αλλά τέτοιος, ώστε να συνδέονται μεταξύ τους με τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ ο οποίος είναι ένας 4×4 διαγώνιος και συμμετρικός πίνακας $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ και μάλιστα ο αντίθετός του υπάρχει (μη μηδενική ορίζουσα) και είναι ο ίδιος πίνακας: $(g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Ο τρόπος που λειτουργεί ο παραπάνω τανυστής και συνδέει δυο 4-διανύσματα A^μ και A_μ είναι ο εξής:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.25)$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (1.26)$$

Συμπερασματικά, η μετρική αυτή χρησιμοποιείται για να ανεβοκατεβαίνουν οι δείκτες των 4-διανυσμάτων.

Επίσης για τον μετρικό τανυστή ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$g^{\nu\rho} g_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.27)$$

Όπως και στον 3-διάστατο χώρο, έτσι και στον 4-διάστατο χώρο Minkowski, ορίζεται το εσωτερικό (ή αλλιώς βαθμωτό) γινόμενο δύο 4-διανυσμάτων a, b :

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \equiv a_\mu b^\mu \quad (1.28)$$

Όλοι οι παρατηρητές συμφωνούν με το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, είναι δηλαδή ένα αναλλοίωτο γινόμενο. Ένα τέτοιο αναλλοίωτο γινόμενο αποτελεί και η εξίσωση (1.22). Γενικότερα για να σχηματιστεί μια αναλλοίωτη ποσότητα (ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz) θα πρέπει για κάθε άνω δείκτη να υπάρχει και ο αντίστοιχος κάτω.

Συνεχίζοντας την ανάλυση πάνω στους μετασχηματισμούς Lorentz, ο Einstein τους χρησιμοποίησε στο πρόβλημα όπου ένα ΑΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα v κατά το θετικό άξονα των x σε σχέση με ένα άλλο ΑΣΑ Σ , (ο Lorentz ενώ είχε αντιληφθεί ότι οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου δεν ήταν επαρκείς και ενώ είχε βγάλει τους ομώνυμους μετασχηματισμούς δεν κατάφερε να θεμελιώσει την ειδική θεωρία της σχετικότητας) για να περιγράψει τη σχέση των συντεταγμένων τους. Αυτοί είναι:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

όπου τα β, γ είναι:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Επίσης, αντικαθιστώντας το β με $-\beta$ και εναλλάσσοντας τα x με x' , προκύπτουν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz. Αυτό γιατί θεωρούμε τώρα το ισοδύναμο πρόβλημα ότι το ΑΣΑ Σ' είναι ακίνητο ενώ το ΑΣΑ Σ κινείται με ίση και αντίθετη ταχύτητα ($-v$) ως προς το Σ' .

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 &= \gamma(\beta x'^0 + x'^1) \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= x'^3 \end{aligned}$$

Στο χώρο που μελετούμε, για να συνιστά ένα σύνολο 4 ποσοτήτων ένα 4-διάνυσμα, θα πρέπει να μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες του x^μ κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz⁴. Στην απαίτηση αυτή υπακούνε

- ενέργεια και οι χωρικές συνιστώσες της ορμής:

$$p^\mu \equiv (E/c, \vec{p}) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (1.29)$$

- η χρονική και η χωρική παράγωγος

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα της παραγώγου (με τον δείκτη επάνω) ∂^μ , είναι αυτό που συμπεριλαμβάνει τις αρνητικές χωρικές συνιστώσες. Αυτό συμβαίνει διότι αυτό είναι το τετραδιάνυσμα που μετασχηματίζεται με τον ευθύ μετασχηματισμό Lorentz, όπως δηλαδή μετασχηματίζεται και το x^μ . Το συναλλοίωτο τετραδιάνυσμα ∂_μ (με τις θετικές χωρικές συνιστώσες) μετασχηματίζεται σύμφωνα με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz, όπως δηλαδή το x_μ . Πράγματι, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_0} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} = \gamma \left(\beta \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

⁴Ζουπάνος Γ. Σημειώσεις του μαθήματος Στοιχειώδη Σωματίδια II

Με απλή σύγκριση φαίνεται η αντιστοιχία με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Lorentz. Παρομοίως προκύπτει ότι το ∂^μ αντιστοιχεί στον ευθύ μετασχηματισμό.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι γνωστοί ως ωθήσεις (boosts). Κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς, επαληθεύεται ότι τα διαστήματα ds^2 παραμένουν αναλλοίωτα. Γενικότερα, το εσωτερικό γινόμενο δύο 4-διανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο κλασικό όριο $v/c \ll 1$ οι μετασχηματισμοί αυτοί ανάγονται στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, όπως αναμενόταν. Όμως, οι μετασχηματισμοί Lorentz δεν αρκούνται στις ωθήσεις που περιγράφονται παραπάνω. Εξ' ορισμού, οι μετασχηματισμοί Lorentz είναι αντιστρεπτοί γραμμικοί μετασχηματισμοί των συντεταγμένων που σέβονται την ισότητα στοιχείου μήκους $ds = ds'$ για δύο ΑΣΑ, Σ και Σ' .⁵ Γενικά ένας μετασχηματισμός Lorentz περιγράφεται από τη γραμμική σχέση

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (1.31)$$

Ενδεικτικά, για τις ωθήσεις Lorentz το Λ_ν^μ είναι:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Ο πίνακας αυτός δεν είναι διαγώνιος, πράγμα το οποίο επιβεβαιώνει το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz μπλέκουν το χρόνο και το χώρο δυο αδρανειακών συστημάτων.

Αληθεύει ότι εκτός από το στοιχείο μήκους, οι θεμελιώδεις νόμοι έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα Lorentz (τα συστήματα αναφοράς που έχουν μια ομοιόμορφη σχετική ταχύτητα)⁶, ότι είναι δηλαδή Lorentz αναλλοίωτοι.

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο της 4-ορμής ενός σωματιδίου με το εαυτό της, $p^\mu p_\mu$ δίνει:

$$p^\mu p_\mu = (E, \underbrace{p_x, p_y, p_z}_{\vec{p}}) (E, \underbrace{-p_x, -p_y, -p_z}_{-\vec{p}}) = E^2 - p^2 = m^2 \quad (1.33)$$

Επομένως η ποσότητα που μένει αμετάβλητη σε όλα τα συστήματα αναφοράς είναι η μάζα ηρεμίας ενός σωματιδίου - αποτελεί αναλλοίωτη ποσότητα.

⁵Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική: Μια εισαγωγή στη βασική δομή της ύλης, 2008, σελ.38-39

⁶Halzen F., Martin D.A., QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course In Modern Physics

1.3 Η Εξίσωση Klein-Gordon

Το πέρασμα στη σχετικότητα δεν επηρεάζει μόνο το συμβολισμό αλλά και τον τρόπο που συμπεριφέρεται η φύση στις ταχύτητες αυτές. Επομένως η εξίσωση του Schrodinger πλέον είναι ανίκανη να περιγράψει την κίνηση των σωματιδίων αφού αποτελεί μια μη σχετικιστική κυματική εξίσωση. Όπως στη μη σχετικιστική κβαντομηχανική, όπου το σημείο εκκίνησης ήταν η (μη σχετικιστική) σχέση ορμής και ενέργειας (εξίσωση (1.1)), έτσι και εδώ, ξεκινάμε από τη σχετικιστική σχέση ενέργειας και ορμής

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (1.34)$$

και αντικαθιστώντας στη θέση της ενέργειας και της ορμής τους αντίστοιχους κβαντομηχανικούς τελεστές (εξισώσεις (1.2) και (1.3)) παίρνουμε (με $\hbar = c = 1$):

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Psi = m^2 \Psi \quad (1.35)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση Klein-Gordon και περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου με μάζα αδρανείας m , και ταχύτητα κοντά σε αυτή του φωτός. Όπως προαναφέρεται η τετραορμή ενός σωματιδίου είναι:

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad (1.36)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση της τετραορμής τις εξισώσεις (1.2) και (1.3), προκύπτει:

$$p^\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -i \vec{\nabla} \right) = i \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) = i \partial^\mu \quad (1.37)$$

και ορίζοντας επίσης τον τελεστή του D'Alembert:

$$\square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (1.38)$$

η Klein-Gordon γίνεται:

$$(\square^2 + m^2) \Psi = 0 \quad (1.39)$$

Πολλάπλασιάζοντάς την με τον όρο $-i\Psi^*$ και αφαιρώντας την έπειτα από το γινόμενο της μιγαδικής συζυγούς της επί τον όρο $-i\Psi$, παράγεται το σχετικιστικό ανάλογο της εξίσωσης (1.16) (της εξίσωσης συνέχειας):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\underbrace{i \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right)}_{\rho} \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\underbrace{-i(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*)}_{\vec{j}} \right] = 0 \quad (1.40)$$

Η τετράδα των ποσοτήτων πιθανότητα και ρεύμα πιθανότητας (ρ, \vec{j}) μετασχηματίζονται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζονται οι συνιστώσες του x^μ . Οπότε συνιστούν ένα τετραδιάνυσμα στο

χώρο Minkowski:

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\rho, \vec{j}) = \left(i \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right), -i(\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \right) \\ &= i(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Προφανώς η παραπάνω εξίσωση, ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας στη συναλλοίωτη μορφή της.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.42)$$

Εκ κατασκευής η εξίσωση Klein-Gordon για ένα ελεύθερο σωματίδιο έχει λύσεις τα επίπεδα κύματα της μορφής:

$$\Psi(t, \vec{x}) = N e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)} = N e^{-ipx} \quad (1.43)$$

Από την εξίσωση (1.40) υπολογίζεται η πυκνότητα πιθανότητας καθώς και το ρεύμα πιθανότητας:

$$\begin{aligned} \rho &= 2E|N|^2 \\ \vec{j} &= 2\vec{p}|N|^2 \end{aligned}$$

τα οποία γράφονται πιο συνοπτικά:

$$j^\mu = 2p^\mu |N|^2 \quad (1.44)$$

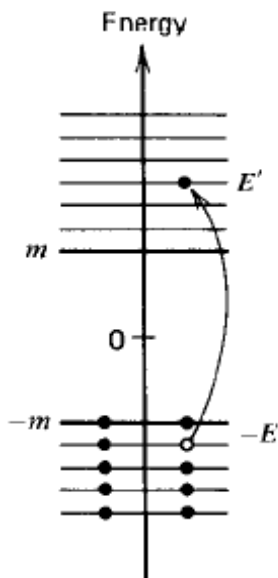
Όπως φαίνεται το πρόσημο της πυκνότητας πιθανότητας είναι αυτό της ιδιοτιμής της ενέργειας. Αν αντικαταστήσουμε την (1.43) στην (1.39) βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας προκύπτουν, ως αναμενόμεν, από τη σχετικιστική σχέση ενέργειας - ορμής:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (1.45)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μπορεί να παίρνει είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές. Επομένως σύμφωνα με την εξίσωση (1.44) η πυκνότητα πιθανότητας μπορεί να είναι επίσης θετική ή αρνητική, ανάλογα με την ενέργεια. Αυτό όμως οδηγεί σε αδιέξοδο γιατί αφένός είναι δυνατό να γίνουν μεταπτώσεις σε όλο και χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες και αφετέρου η αρνητική πυκνότητα πιθανότητας δεν μπορεί να ερμηνευτεί φυσικά. Επίσης, για να προσπεραστεί το πρόβλημα αυτό δε γίνεται απλά να αγνοήσουμε τις αρνητικές ενέργειες, γιατί πρέπει να υφίσταται πλήρες σύνολο καταστάσεων, πράγμα το οποίο περιλαμβάνει και τις ανεπιθύμητες τιμές. Η Klein-Gordon, παρουσιάζει κι άλλο πρόβλημα ως κβαντική κυματική εξίσωση, ότι η εξίσωση είναι δευτέρας τάξης ως προς το χρόνο. Αυτό καθιστά απαραίτητη τη γνώση όχι μόνο της κυματοσυνάρτησης τη χρονική στιγμή μηδεν, αλλά και της πρώτης παραγώγου της. Αυτό όμως αντιβαίνει με την αρχή της κβαντομηχανικής ότι ο μοναδιακός τελεστής της χρονικής εξέλιξης απαιτεί τη γνώση μόνο της κυματοσυνάρτησης για $t = 0$ και τις ιδιοτιμές της ενέργειας για να δώσει την κατάσταση του συστήματος κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η εξίσωση κύματος που παράγεται από τη σύνθεση κβαντομηχανικής και σχετικότητας παρουσιάζει προβλήματα και δυσκολίες στη φυσική ερμηνεία της.

1.4 Αντιμετώπιση των προβλημάτων της Klein-Gordon

Προσπαθώντας να υπερνικήσει τα προβλήματα αυτά, ο Dirac το 1927 εφηύρε μια σχετικιστική κυματική εξίσωση η οποία είναι γραμμική ως προς τη χωρική και τη χρονική παράγωγο, στην οποία θα επεκταθούμε παρακάτω. Κατάφερε να ξεπεράσει το πρόβλημα της αρνητικής πυκνότητας πιθανότητας και σαν να μην έφτανε αυτό, η εξίσωση περιέγραφε σωματίδια με σπιν 1/2. Επίσης, κατάφερε να ελιχθεί στο πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών επικαλούμενος την απαγορευτική αρχή του Pauli. (Δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο φερμιόνια που να περιγράφονται από την ίδια ακριβώς κβαντική κατάσταση). Υπέθεσε ότι όλες οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι κατειλημμένες, θεώρησε δηλαδή το κενό σαν μια άπειρη θάλασσα από ηλεκτρόνια αρνητικής ενέργειας. Έτσι κατάφερε να ξεπεράσει το πρόβλημα ότι τα ηλεκτρόνια θα μπορούσαν να μεταπίπτουν σε όλο και χαμηλότερες καταστάσεις, αφού δεν μπορούν να καταλάβουν μια ήδη κατειλημμένη ενεργειακή στάθμη (απαγορευτική αρχή).



Αν όμως κάποιο από τα αρνητικής ενέργειας ηλεκτρόνιο ($-E$) διεγερθεί σε μια θετική ενεργειακή στάθμη (E), τότε δημιουργείται μια οπή στη "θάλασσα" των αρνητικής ενέργειας ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται στην εικόνα. Η απουσία του σωματιδίου (ηλεκτρονίου) αρνητικού φορτίου και αρνητικής ενέργειας μεταφράζεται σαν παρουσία ενός αντισωματιδίου (ποζιτρόνιο) θετικού φορτίου και θετικής ενέργειας. Οπότε, στην ουσία αυτό το φαινόμενο ερμηνεύεται σαν παραγωγή ζεύγους σωματιδίων $e^-(E') + e^+(E)$ όπου προφανώς απαιτείται $E + E' \geq 2m$.

Ενώ μετά τις ανακαλύψεις του Dirac είχε σταματήσει η προσπάθεια υπερπήδησης των εμποδίων της εξίσωσης Klein-Gordon, οι Pauli και Weisskopf (1934) κατάφεραν να προσδώσουν φυσική ερμηνεία στο αρνητικό πρόσημο της πυκνότητας πιθανότητας. Εισάγοντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $-e$, μετέτρεψαν την πυκνότητα πιθανότητας σε πυκνότητα φορτίου και το ρεύμα πιθανότητας σε ηλεκτρονιακό ρεύμα:

$$j^\mu = -ie(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) \quad (1.46)$$

Πλέον το γεγονός ότι το $\rho = j^0$ μπορεί να είναι αρνητικό δεν αποτελεί σφάλμα. Θεωρήσαν δηλαδή ότι οι λύσεις με αρνητική ενέργεια ενός σωματιδίου με αρνητικό φορτίο, μπορούν να θεωρηθούν σα λύσεις θετικής ενέργειας και αντίθετου (θετικού) φορτίου. Ενώ η θεωρία της οπής του Dirac δεν μπορούσε

να εξηγήσει την περίπτωση των μποζονίων, όπου δεν ισχύει η απαγορευτική αρχή, η εξήγηση των Pauli και Weisskopf μπορεί.

Λίγο αργότερα ο Stuckelberg (1941) και ο Feynman (1948) χειρίστηκαν τις αρνητικές ενέργειες υποστηρίζοντας πως η αρνητική λύση αντιστοιχεί σε σωματίδιο που ταξιδεύει αντίθετα στο χρόνο ή σε ένα αντισωματίδιο θετικής ενέργειας που ταξιδεύει κανονικά στο χρόνο.⁷ Για παράδειγμα, το j^μ για ένα ηλεκτρόνιο ενέργειας E , ορμής \vec{p} και φορτίου $-e$ είναι:

$$j^\mu(e^-) = -2e|N|^2(E, \vec{p}) \quad (1.47)$$

Υπολογίζουμε το ίδιο για το αντισωματίδιο, ίδιας ενέργειας και ορμής και φορτίου $(+e)$

$$j^\mu(e^+) = +2e|N|^2(E, \vec{p}) = -2e|N|^2(-E, -\vec{p}) \quad (1.48)$$

παρατηρούμε ότι αντιστοιχεί σε j^μ για ηλεκτρόνιο ενέργειας $-E$ και ορμής $-\vec{p}$. Οπότε, γενικά για ένα σύστημα, η εκπομπή (απορρόφηση) αντισωματιδίου τετραορμής p^μ αντιστοιχεί σε απορρόφηση (εκπομπή) σωματιδίου τετραορμής $-p^\mu$.⁸

1.5 Η εξίσωση του Dirac

Η εξίσωση Klein-Gordon εκτός των άλλων προβλημάτων που παρουσίαζε δεν μπορούσε να περιγράψει σωματίδια που διαθέτουν μη μηδενικό σπιν. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, ο Dirac ήθελε να προσεγγίσει το πρόβλημα καταστρώνοντας μια σχετικιστική κυματική εξίσωση η οποία να δίνει θετική πυκνότητα πιθανότητας. Γι'αυτό υποστήριξε την ύπαρξη μιας εξίσωσης η οποία να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Να είναι γραμμική ως προς τη χρονική παράγωγο (για θετική ρ)
2. Να είναι γραμμική ως προς τις χωρικές παραγώγους για να είναι σχετικιστικά αναλλοίωτη
3. Οι κυματοσυναρτήσεις να που θα προκύπτουν να ικανοποιούν και την εξίσωση Klein-Gordon.

Από τις δύο πρώτες προϋποθέσεις εξάγεται μια γενική εξίσωση, η οποία έχει τη μορφή:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-i\vec{a} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \Psi \quad (1.49)$$

⁷Halzen F., Martin D.A. Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, 1984, p.77

⁸Aitchison I.J.R, Hey A.J.G, Gauge Theories In Particle Physics, p.96

Όμως πρέπει (τρίτη προϋπόθεση), να ικανοποιείται η (1.35), οπότε υψώνουμε τους τελεστές της (1.43) στο τετράγωνο, και έπειτα ακολουθεί μεταξύ τους σύγκριση. Με τη διαδικασία αυτή θα ληφθούν όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τις αρχικά αυθαίρετες ποσότητες που παρουσιάζονται στη γενική εξίσωση.

$$\begin{aligned}
\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi &= (-i\vec{a}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)(-i\vec{a}\cdot\vec{\nabla} + \beta m) \\
&= -\sum_{i=1}^3 a_i^2 \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial x^i)^2} - \sum_{i,j=1/i>j}^3 (a_i a_j + a_j a_i) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j} \\
&\quad + im \sum_{i=1}^3 (a_i \beta + \beta a_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \Psi
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Συγκρίνοντας λοιπόν με την Klein-Gordon

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (x^i)^2} + m^2 \Psi \tag{1.51}$$

είναι προφανές πως μόνο ο πρώτος και τελευταίος όρος του δεξιού μέλους της (1.50) θα πρέπει να επιζούν, ενώ οι δύο ενδιάμεσοι θα πρέπει να μηδενίζονται, επομένως για τα a_1, a_2, a_3, β ισχύει:

- Τα τετράγωνα των συντελεστών δίνουν μονάδα:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \beta^2 = 1 \tag{1.52}$$

- Όλοι οι συντελεστές αντιμετατίθενται μεταξύ τους.

$$a_i \beta + \beta a_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.53}$$

$$a_i a_j + a_j a_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \& \quad i \neq j \tag{1.54}$$

Επειδή οι συντελεστές a_i, β δε μετατίθενται δε μπορούν να θεωρηθούν αριθμοί. Ο Dirac πρότεινε ότι πρέπει να θεωρηθούν πίνακες οι οποίοι θα δρουν πάνω σε μια κυματοσυνάρτηση Ψ , η οποία θα έχει κάποιες συνιστώσες σε μορφή στήλης. Οι κυματοσυναρτήσεις αυτές ονομάζονται σπίνορες (του Dirac). Αξίζει να σημειωθεί ότι εφ' όσον η κάθε συνιστώσα του σπίνορα υπακούει στην ίδια κυματική εξίσωση, οι φυσικές καταστάσεις που θα περιγράφουν θα βρίσκονται στην ίδια ενεργειακή κατάσταση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παρουσία ενός είδους εκφυλισμού, η άρση του οποίου συνδέεται με ένα νέο κβαντικό μέγεθος, το σπίν. Για τους πίνακες a_i, β ισχύουν τα κάτωθι:

- a_i, β είναι ερμιτιανοί έτσι ώστε να ικανοποιείται η απαίτηση ότι η Χαμιλτονιανή της εξίσωσης Dirac είναι ερμιτιανός τελεστής (εξαγωγή ιδιοτιμών οι οποίες $\in \mathbb{R}$).

- Από την (1.54) πολλαπλασιάζοντας με a_i^{-1} προκύπτει: $a_j = -a_i^{-1}a_ja_i$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(a_j) &= -\text{Tr}(a_i^{-1}a_ja_i) = -\text{Tr}(a_ja_i^{-1}a_i) = -\text{Tr}(a_j) \\ \Rightarrow \text{Tr}(a_j) &= 0\end{aligned}\quad (1.55)$$

και αντίστοιχα ακολουθώντας ίδια διαδικασία, πολλαπλασιάζοντας την (1.53) με a_i^{-1} από τα αριστερά, προκύπτει: $\beta = -a_i^{-1}\beta a_i$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\beta) &= -\text{Tr}(a_i^{-1}\beta a_i) = -\text{Tr}(\beta a_i^{-1}a_i) = -\text{Tr}(\beta) \\ \Rightarrow \text{Tr}(\beta) &= 0\end{aligned}\quad (1.56)$$

Στις παραπάνω αποδείξεις χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Οπότε οι (1.55) και (1.56) υποδεικνύουν ότι οι a_i, β είναι πίνακες μηδενικού ίχνους.

- Οι ιδιοτιμές των πινάκων a_i, β είναι ± 1 , πράγμα το οποίο προκύπτει άμεσα από την (1.52).
- Ισχύει ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών του. Εφ'όσον οι ιδιοτιμές των πινάκων a_i, β είναι ± 1 και το ίχνος μηδέν, σημαίνει ότι:

$$\text{Tr}(a_i) = 0 = k * 1 + \ell * (-1) \rightarrow k = \ell$$

Δηλαδή, όσες φορές υπάρχει η ιδιοτιμή 1 τόσες πρέπει να υπάρχει και η ιδιοτιμή -1 για να μηδενίζεται το ίχνος. Αυτό ισχύει μόνο όταν ο αριθμός των ιδιοτιμών είναι άρτιος, ή ισοδύναμα, όταν η διάστασή του είναι άρτια, αφού $D = k + \ell = 2k$. (Πιο απλά αυτό αποδεικνύεται αν πάρουμε τις ορίζουσες των γινομένων των πινάκων που εμφανίζονται στην (1.54) ((1.53) αντίστοιχα), δηλαδή: $\det(a_i a_j) = \det(-a_j a_i) = (-1)^D \det(a_j a_i)$, όπου D η διάσταση. Επομένως η διάσταση των πινάκων a_i, β είναι άρτια.)

- Η μικρότερη πιθανή διάσταση των πινάκων είναι $D = 4$. Για $D = 2$ υπάρχουν μόνο τρεις αντιμετατιθέμενοι πίνακες, οι πίνακες του Pauli σ_i . Συνεπώς, η μικρότερη διάσταση τεσσάρων πινάκων που ικανοποιούν την άλγεβρα (1.54), είναι $D = 4$.⁹

Οι (1.52) – (1.54) ιδιότητες των πινάκων γράφονται συνοπτικά:

$$\begin{aligned}\{a_i, \beta\} &= 0 \\ \{a_i, a_j\} &= 2\delta_{ij}\mathbf{1} \\ \beta^2 &= \mathbf{1}\end{aligned}\quad (1.57)$$

⁹Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική, Μια Εισαγωγή στη Βασική Δομή της Ύλης, 2008, σελ.47

όπου $\mathbf{1}$ είναι ο 4×4 ταυτοτικός πίνακας. Η επιλογή των a_i, β δεν είναι μοναδική. Κατά γενική ομολογία τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα από την επιλογή αυτή. Μια συμβατική επιλογή των τεσσάρων πινάκων είναι η αναπαράσταση Dirac-Pauli: (οι υπόλοιπες μπορούν να προκύψουν από αυτήν με μοναδιαίους μετασχηματισμούς.)

$$a_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

όπου I ο ταυτοτικός 2×2 πίνακας, $\mathbf{0}$ ο μηδενικός πίνακας ίδιας διάστασης και σ_i οι πίνακες του Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

Αφού οι πίνακες a_i, β προέκυψαν 4×4 αυτό σημαίνει πως και οι σπίνορες θα είναι αναγκαστικά διάνυσματα στήλης με τέσσερις συνιστώσες (το γεγονός αυτό δεν καθιστά την τετράδα αυτή ως τετραδιάνυσμα-μια τετράδα αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz). Αυτό φαίνεται ανεπιθύμητο εκ πρώτης όψεως, αφού ένα σωματίδιο με σπιν $1/2$ (αφού αυτά υποτίθεται ότι περιγράφει η εξίσωση του Dirac) έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (σπιν πάνω και σπιν κάτω) και όχι τέσσερις. Οι δύο παραπάνω που περισσεύουν, τελικά όχι μόνο δεν είναι ανεπιθύμητοι, αλλά ανοίγουν ένα νέο παράθυρο στη θεωρητική φυσική, την ταυτόχρονη περιγραφή του αντίστοιχου αντισωματιδίου.

Η εξίσωση (1.49), ως σχετικιστική κυματική εξίσωση, μπορεί να γραφτεί σε συναλλοίωτη μορφή. Πολλαπλασιάζοντάς την λοιπόν με τον πίνακα β από τα αριστερά, παίρνουμε:

$$i\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\beta \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \beta m \Psi \quad (1.60)$$

Αν φέρουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος, και θεωρήσουμε τις τέσσερις ποσότητες $(\beta, \beta \vec{a})$ σαν ένα τετραδιάνυσμα (παρ'όλο που δε μετασχηματίζονται σαν ένα), τότε η παραπάνω μπορεί να γραφτεί σαν εσωτερικό γινόμενο στο χώρο Minkowski:

$$i \underbrace{(\beta, \beta \vec{a})}_{\gamma^\mu} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)}_{\partial_\mu} \Psi - m \beta \Psi = 0 \quad (1.61)$$

Θέτοντας $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \vec{a})$ και συνδυάζοντάς την με την (1.30) (για $c = 1$), προκύπτει η εξίσωση του Dirac σε συναλλοίωτη μορφή:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (1.62)$$

Ορίζοντας $\gamma^\mu \partial_\mu \equiv \not{\partial}$ και αντίστοιχα $\gamma^\mu p_\mu \equiv \not{p}$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$(i \not{\partial} - m)\Psi = 0 \Rightarrow (\not{p} - m)\Psi = 0 \quad (1.63)$$

Από τον ορισμό των γ -πινάκων και σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των πινάκων a_i, β (εξισώσεις (1.52), (1.53)) προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητές τους:

1. $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$
2. $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$
3. $(\gamma^0)^2 = I$
4. $\gamma^{k\dagger} = (\beta a^k)^\dagger = a^k \beta = -\gamma^k$
5. $(\gamma^k)^2 = \beta a^k \beta a^k = -I$

όπου $k = 1, 2, 3$.

1.5.1 Διατηρούμενο ρεύμα

Για την εύρεση του διατηρούμενου ρεύματος ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που μας έδωσε το διατηρούμενο ρεύμα της Klein-Gordon. Εδώ όμως δεν αρκεί να θεωρήσουμε τη μιγαδική συζυγή εξίσωση της (1.60), αλλά την ερμιτιανή συζυγή, εφ' όσον πλέον η κυματική εξίσωση δουλεύει με πίνακες και όχι με μιγαδικούς αριθμούς. Αυτή είναι:

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} - m\Psi \right)^\dagger &= 0 \\ -i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k) - m\Psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Με απώτερο σκοπό τη διατήρηση της αναλλοίωτης μορφής της εξίσωσης, πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά με το γ^0 . Οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} (-\gamma^k \gamma^0) - m\Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \quad (1.65)$$

Από την πρώτη ιδιότητα των γ -πινάκων, ισχύει ότι:

$$\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0 \quad (1.66)$$

Συνδυάζοντας την (1.65) με την (1.66), προκύπτει:

$$-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} (\gamma^0 \gamma^k) - m\Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \quad (1.67)$$

Θεωρώντας τον πίνακα γραμμή $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$, παίρνουμε την εξίσωση:

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad (1.68)$$

Τώρα η εξίσωση συνέχειας $\partial_\mu j^\mu = 0$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την (1.62) με $\bar{\Psi}$ από αριστερά και έπειτα προσθέτοντας το γινόμενο της (1.68) επί Ψ από δεξιά:

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + i(\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + m\bar{\Psi}\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi &= 0 \\ \partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Προφανώς, συγκρίνοντας με την εξίσωση συνέχειας $\partial_\mu j^\mu = 0$ προκύπτει ότι το τετραδιάνυσμα του ρεύματος πιθανότητας είναι:

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (1.70)$$

Επομένως, η πυκνότητα πιθανότητας ρ θα είναι:

$$\rho = j^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{(\gamma^0)^2=I} \Psi = \Psi^\dagger\Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2 \quad (1.71)$$

Δηλαδή, αντιπροσωπεύει πάντα μια θετική ποσότητα, όπως ακριβώς ήθελε ο Dirac εξάρχής - ανεξαρτησία από το πρόσημο της ενέργειας. Ακολουθώντας λοιπόν τη συνταγή των Pauli-Weisskopf, εισάγοντας πολλαπλασιαστικά το φορτίο στην έκφραση του ρεύματος πιθανότητας

$$j^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (1.72)$$

παίρνουμε το 4-διάνυσμα της πυκνότητας του ηλεκτρονιακού ρεύματος.

1.5.2 Λύσεις της εξίσωσης Dirac

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε για ένα ελεύθερο σωματίδιο ιδιοκαταστάσεις, οι οποίες θα είναι της μορφής

$$\Psi = \omega e^{-ip \cdot x} \quad (1.73)$$

όπου το ω αποτελεί ένα σπίνορα τεσσάρων συνιστώσεων. Είναι βολικό να θεωρήσουμε επίσης το σπίνορα ω αποτελούμενο από δύο σπίνορες δύο συνιστώσεων ο καθένας.

$$\omega = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Εισάγοντας την (1.73) στην (1.49), βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της ενέργειας. Δηλαδή,

$$H\omega e^{-ipx} = (\vec{a}\vec{p} + \beta m)\omega e^{-ipx} = E\omega e^{-ipx} \quad (1.75)$$

1) Για ακίνητο σωματίδιο $\vec{p} = 0$ η (1.75) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \beta m \omega &= E \omega \Rightarrow \beta m \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E\varphi \\ E\chi \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} mI & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -mI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E\varphi \\ E\chi \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{bmatrix} mI\varphi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -mI\chi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E\varphi \\ E\chi \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{cases} E\varphi = mI\varphi \\ E\chi = -mI\chi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = m, m \\ E = -m, -m \end{cases} & \quad (1.76)
 \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι λοιπόν: $E = m, m, -m, -m$. Από την (1.75) παίρνουμε τις ιδιοκαταστάσεις που αντιστοιχούν σε κάθε περίπτωση:

E=m Οι δύο πρώτες λύσεις απευθύνονται στο σωματίδιο (ηλεκτρόνιο) θετικής ενέργειας με ιδιοκαταστάσεις:

$$\begin{aligned}
 E\varphi &= mI\varphi \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \varphi = m\varphi \\
 \Rightarrow \varphi^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \omega^{(1),(2)} &= \begin{bmatrix} \varphi^{(1),(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.77)
 \end{aligned}$$

E=-m ενώ οι άλλες δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας απευθύνονται στο αντισωματίδιο (ποζιτρόνιο) θετικής ενέργειας με ιδιοκαταστάσεις:

$$\begin{aligned}
 E\chi &= -mI\chi \Rightarrow \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \chi = m\chi \\
 \Rightarrow \chi^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \omega^{(3),(4)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi^{(1),(2)} \end{bmatrix} \quad (1.78)
 \end{aligned}$$

2) Για σωματίδιο με $\vec{p} \neq 0$ η (1.75) γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \vec{p} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} m \right) \omega = E\omega \\
\Rightarrow & \left(\begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{bmatrix} \right) \omega = E\omega \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \vec{\sigma}\vec{p} \cdot \chi = (E - m)\varphi \\ \vec{\sigma}\vec{p} \cdot \varphi = (E + m)\chi \end{cases} \quad (1.79)
\end{aligned}$$

Επιλύοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις ως προς φ και χ αντίστοιχα, προκύπτουν:

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m} \chi \quad (1.80)$$

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} \varphi \quad (1.81)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση:

$$(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2 I \quad (1.82)$$

και αντικαθιστώντας την (1.80) στην (1.81) βρίσκουμε τις αναμενόμενες ιδιοτιμές της ενέργειας:

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m} \chi \Rightarrow \chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^2}{(E - m)(E + m)} \chi \\
\Rightarrow & (E - m)(E + m)\chi = \vec{p}^2 \chi \Rightarrow E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (1.83)
\end{aligned}$$

Σε παρόμοια εξίσωση ιδιοτιμών θα καταλήγαμε αν αντικαθιστούσαμε αντίστροφα.

Συνοψώς, με βάση την εξίσωση (1.74) οι δύο λύσεις για κάθε ιδιοτιμή της ενέργειας θα είναι:

$E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: Οι δύο λύσεις θετικής ενέργειας είναι:

$$\omega^{(1),(2)} = N \begin{bmatrix} \varphi^{(1),(2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \varphi^{(1),(2)} \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

$E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: Οι δύο λύσεις αρνητικής ενέργειας είναι:

$$\omega^{(3),(4)} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m} \chi^{(1),(2)} \\ \chi^{(1),(2)} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

όπου N είναι και στις δύο περιπτώσεις ένας συντελεστής κανονικοποίησης. Στην ανάλυση που προηγήθηκε αποδείχθηκε ότι και στις δύο περιπτώσεις (ακίνητου και κινούμενου σωματιδίου), στην κάθε ιδιοτιμή της ενέργειας αντιστοιχούν δύο ιδιοκαταστάσεις. Αυτό καταδεικνύει την παρουσία εκφυλισμού, τάξης 2. Συνεπάγεται λοιπόν, πως θα υπάρχει κάποιο επιπλέον μέγεθος του οποίου ο (ερμιτιανός) τελεστής θα μετατίθεται με τη χαμιλτονιανή του Dirac και τον τελεστή της ορμής, έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του να αποτελούν έναν καλό κβαντικό αριθμό ο οποίος θα μας διακρίνει τις δύο λύσεις, δηλαδή, θα αίρει τον εκφυλισμό. Η παρουσία των πινάκων του Pauli στους α -πίνακες της χαμιλτονιανής, καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι σ -πίνακες υπεισέρχονται στις εκφράσεις του σπίνορα στις εξισώσεις (1.84), (1.85), μας καθοδηγεί να υποπτευθούμε ότι ένα μέγεθος που σχετίζεται με το σπιν είναι το κβαντικό μέγεθος που ψάχνουμε.

Στην περίπτωση μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής, ορίζεται ένα μέγεθος που ονομάζεται ελικότητα, ως η προβολή του σπιν στην κατεύθυνση κίνησης του σωματιδίου. Ο ερμιτιανός τελεστής που αντιστοιχεί στο μέγεθος αυτό είναι:

$$\lambda = \vec{s}\hat{p} = \vec{s}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.86)$$

όπου \vec{s} ο τελεστής του σπιν για σωματίδια με σπιν $1/2$:

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad (1.87)$$

Συνεπώς, ο τελεστής της ελικότητας, παίρνει τη μορφή:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.88)$$

Αυτό σημαίνει ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, για ένα σωματίδιο που κινείται στον άξονα z , και έχει ορμή $\vec{p} = (0, 0, p)$, η ιδιοκατάσταση $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (σπιν πάνω) αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

ενώ με παρόμοιο υπολογισμό η ιδιοκατάσταση $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (σπιν κάτω), υπολογίζεται ότι αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -\frac{1}{2}$. Έχει επικρατήσει η σύμβασή ότι η θετική ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε ένα δεξιόστροφο σωματίδιο, ενώ η αρνητική σε ένα αριστερόστροφο.

Όμως για την ανάλυση πάνω στο διαχωρισμό των λύσεων της εξίσωσης του Dirac, ο τελεστής της ελικότητας όπως τον ορίσαμε στην εξίσωση (1.88), δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει τις λύσεις, αφού είναι μεγέθους 2×2 και δρα σε

διάνυσμα στήλη 2 συνιστώσεων, ενώ οι σπίνορες Dirac αποτελούνται από 4 συνιστώσες. Επομένως, επεκτείνουμε τον ορισμό του τελεστή της ελικότητας στις τέσσερις διαστάσεις, για να γίνει χρήσιμο εργαλείο στη σχετικιστική κβαντομηχανική την οποία μελετάμε (και να τον χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στην περίπτωση κινουμένου σωματιδίου):

$$\lambda = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.90)$$

όπου $\vec{\Sigma}$, ορίζεται γενικεύοντας, ανάλογα με τον \vec{s} , ο τελεστής του σπιν μεγέθους 4×4 .

$$\vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

Για τον τελεστή αυτόν ισχύει η μεταθετική σχέση:

$$\left[\frac{1}{2} \Sigma_x, \frac{1}{2} \Sigma_y \right] = i \frac{1}{2} \Sigma_z \quad (1.92)$$

καθώς και $(\frac{1}{2} \vec{\Sigma})^2 = \frac{3}{4} \mathbf{1}$. Αυτές είναι ιδιότητες που αναμένονται από έναν τελεστή στροφορμής μεγέθους $1/2$, όπως από αυτόν της τροχιακής. Ο τελεστής αυτός (1.91) είναι κατάλληλος να μας διαχωρίσει τις δυο λύσεις στο σύστημα μάζας ηρεμίας του σωματιδίου (όπου δηλαδή $\vec{p} = 0$), πράγμα που σημαίνει ότι δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή της ελικότητας (απαραίτητη γίνεται η χρήση στο σύστημα κινουμένου σωματιδίου). Στην περίπτωση αυτή ο μεταθέτης του με τη χαμιλτονιανή ($H_D = \vec{a} \cdot \overbrace{\vec{p}}^= + \beta m \rightarrow H_D = \beta m$) είναι μηδέν:

$$\begin{aligned} \left[H_D, \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} mI\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -mI\vec{\sigma} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{\sigma}mI & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}mI \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.93)$$

οπότε αποτελεί το κβαντομηχανικό μέγεθος που αναζητούμε. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι το σπιν είναι ευθυγραμμισμένο στον άξονα z :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \omega^{(1)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \omega^{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.94)$$

Ο τελεστής του σπιν καταφέρει να άρει τον εκφυλισμό των καταστάσεων με ενέργεια $E = m$.

Όμως εάν θεωρήσουμε την περίπτωση σωματιδίου που διαθέτει μη μηδενική ορμή και άρα βρίσκεται εν κινήσει, παρατηρούμε πως ο τελεστής αυτός του σπιν δεν μετατίθεται με τη χαμιλτονιανή του προβλήματος ($H_D = \vec{a}\vec{p} + \beta m$) και άρα παύει να είναι ο κβαντικός αριθμός που ψάχνουμε:

$$\left[H_D, \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \right] = \frac{1}{2}[\vec{a}\vec{p}, \vec{\Sigma}] + \frac{1}{2}\overbrace{[\beta m, \vec{\Sigma}]}^{=0} = \frac{1}{2}[\vec{a}\vec{p}, \vec{\Sigma}] \neq 0 \quad (1.95)$$

Το μέγεθος που μετατίθεται με τη χαμιλτονιανή και καταφέρει να άρει και τον εκφυλισμό είναι η ελικότητα, όπως την ορίσαμε στην εξίσωση (1.90) Οπότε παρομοίως με παραπάνω, θεωρώντας ένα σωματίδιο που κινείται στον άξονα z με ορμή $\vec{p} = (0, 0, p)$, για τις δύο λύσεις $\omega^{(1),(2)}$ ισχύει:

$$\lambda\omega^{(1),(2)} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{bmatrix} \varphi^{(1),(2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\varphi^{(1),(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(1),(2)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\varphi^{(1),(2)} \end{bmatrix} \quad (1.96)$$

Αναλυτικά για την κάθε λύση $\omega^{(1)}$ και $\omega^{(2)}$, θα ισχύει:

$\omega^{(1)}$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(1)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\varphi^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\omega^{(2)}$:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(2)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m}\varphi^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

Είναι εμφανές λοιπόν πως ο τελεστής της ελικότητας καταφέρει να διαχωρίσει τις εκφυλισμένες καταστάσεις σε μια με σπιν πάνω (θετική ελικότητα) και μία με σπιν κάτω (αρνητική ελικότητα). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως στις εξισώσεις (1.94), (1.96) οι τελεστές του σπιν και της της ελικότητας αντίστοιχα, σπάνε τον εκφυλισμό που διέπουν τους σπίνορες $\omega^{(3),(4)}$ και διαχωρίζουν τις καταστάσεις στην κάθε περίπτωση ($E = -m, E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$).

Οι λύσεις αρνητικής ενέργειας, θεωρούμε ότι είναι αυτές που σχετίζονται με

το αντισωματίδιο (ποζιτρόνιο). Όμως επειδή όλα τα ελεύθερα σωματίδια και αντισωματίδια πρέπει να μεταφέρουν θετική ενέργεια και ορμή, αλλάζουμε τα πρόσημά τους ($-E, -\vec{p} \equiv -p^\mu$) έτσι ώστε οι λύσεις αρνητικής ενέργειας να επανερμηνευθούν σα λύσεις θετικής ενέργειας αντισωματιδίων. Η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση θα είναι λοιπόν:

$$\Psi = \omega^{(3),(4)}(-E, -\vec{p})e^{-i(-p)x} = \omega^{(3),(4)}(-E, -\vec{p})e^{ipx} \quad (1.98)$$

Στη μορφή αυτή καλούμε τους σπίνορες, σπίνορες v :

$$\begin{aligned} v^{(1)}(E, \vec{p}) &= \omega^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(-\vec{p})}{-E-m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(\vec{p})}{E+m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{bmatrix} \\ v^{(2)}(E, \vec{p}) &= \omega^{(3)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(-\vec{p})}{-E-m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma}(\vec{p})}{E+m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.99)$$

Οπότε γενικά η κυματοσυνάρτηση γράφεται:

$$\Psi = v^{(2,1)}(E, \vec{p})e^{ipx} \quad (1.100)$$

Συνοπώς η εξίσωση του Dirac (1.62), για την περιγραφή αντισωματιδίων γίνεται:

$$(-\not{p} - m)u(-E, -\vec{p}) = 0 \Rightarrow (\not{p} + m)v(E, \vec{p}) = 0 \quad (1.101)$$

Στην αντιστοίχιση σωματιδίου με αρνητικές λύσεις σε αντισωματίδιο, μένει μόνο να εξετάσουμε τι συμβαίνει με το σπιν. Όπως η απουσία ενός ηλεκτρονίου αρνητικής ενέργειας ισοδυναμεί με την παρουσία μιας θετικά φορτισμένης εκδοχής ηλεκτρονίου θετικής ενέργειας, ο Dirac παρομοίως ερμήνευσε την απουσία ενός σπιν πάνω ηλεκτρονίου αρνητικής ενέργειας ισοδύναμη με την παρουσία ενός σπιν κάτω ποζιτρονίου θετικής ενέργειας. Η ισοδυναμία αυτή καταδεικνύεται στον τρόπο που αντιστοιχίσαμε τους σπίνορες $v^{(1),(2)}$ με τους αρνητικής ενέργειας $\omega^{(4),(3)}$ στην εξίσωση (1.99), ώστε οι σπίνορες με δείκτη (1) να αντιστοιχούν σε σπιν πάνω σωματίδια ενώ οι σπίνορες με δείκτη (2) να αντιστοιχούν σε σωματίδια με σπιν κάτω. Αφού εν τέλει στη θεώρηση αντισωματιδίου αντιστρέφεται τόσο η ορμή όσο και το σπιν, αυτό σημαίνει πως η ελικότητα αποτελεί ένα μέγεθος που παραμένει αναλλοίωτο.

Καθίσταται προφανές πλέον, ότι η θεωρία του Dirac δεν αποτελεί θεωρία περιγραφής ενός σωματιδίου. Αυτό γιατί αν διεγερθεί κάποιο ηλεκτρόνιο αρνητικής ενέργειας (από τα άπειρα που αποτελούν το κενό) σε μια θετική ενεργειακή στάθμη, τότε έχουμε την παρουσία δύο σωματιδίων: του προαναφερθέντος ηλεκτρονίου αλλά και της θετικά φορτισμένης οπής (ποζιτρονίου) μέσα στο κενό (ή απλούστερα, έχουμε δύο σωματίδια από δίδυμη γένεση). Ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης του προβλήματος των αρνητικών λύσεων για τα φερμιόνια, αναδεικνύει την ανάγκη για την κατάρθρωση μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Κεφάλαιο 2

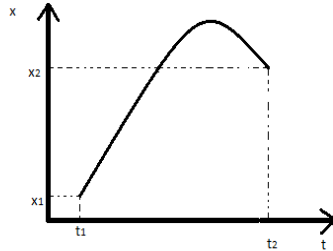
Θεωρία πεδίου

2.1 Αρχή της ελάχιστης δράσης

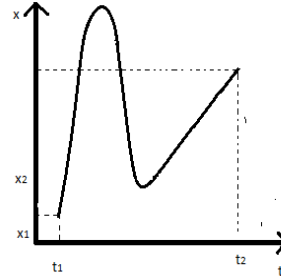
Το 18ο αιώνα, στον τομέα της κλασικής μηχανικής, στην περιγραφή της κίνησης ενός υλικού σημείου, δεσπόζουσα θέση κατέχει η Νευτώνεια μηχανική. Ξεκινώντας λοιπόν από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σημείο αυτό, από τους νόμους του Νεύτωνα εξάγονται οι εξισώσεις κίνησής του, οι οποίες παρέχουν πληροφορίες για την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο αυτό. Ταυτόχρονα όμως, επωάζεται μια καινούρια ιδέα η οποία θα οδηγήσει σε μια εναλλακτική, μαθηματικά πιο ευέλικτη, διατύπωση ανεξάρτητη από τους νευτώνικούς νόμους από την οποία θα εξάγεται η εξίσωση της κίνησης για ένα σημειακό αντικείμενο. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ιδέα αυτή δεν αναπτύχθηκε με σκοπό να ανατρέψει τη νευτώνεια μηχανική. Επίσης, δε βασίζεται σε πειραματικές ενδείξεις ή αποτελέσματα αλλά αποτελεί ένα οικοδόμημα που συνίσταται από βασικές έννοιες και μαθηματικές διεργασίες των μεγάλων ευρωπαίων μαθηματικών της εποχής. Η ιδέα έχει καταγωγή την αρχή του Fermat, ότι το φως διαδίδεται από τον πιο σύντομο δρόμο. Αυτό έστρωσε το δρόμο προς νέα ερωτήματα όπως, πρώτον, ποια είναι η διαδρομή (από τις άπειρες δυνατές) που επιλέγει ένα σώμα να ακολουθήσει μέσα σε ένα μέσο και δεύτερον, αν υπάρχει κάποια ευρύτερη περιγραφή της κίνησης από την οποία να απορρέουν οι μαθηματικές προτάσεις των νόμων του Νεύτωνα.

Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα, θα χρειαστεί να μελετήσουμε το πείραμα κατά το οποίο ένα σωματίδιο ρίπεται κατακόρυφα και εκτελεί ελεύθερη κίνηση ανάμεσα σε δύο θέσεις, μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$, όπως φαίνεται στο πρώτο διάγραμμα. Η τροχιά αυτή είναι η πραγματική.

Έστω τώρα, σε επανάληψη της ρίψης, ότι το σώμα αυτό ξεκινάει και καταλήγει στις ίδιες θέσεις όπως πριν και στις ίδιες χρονικές στιγμές, όμως εκτελεί διαφορετική κίνηση - δηλαδή διαγράφει διαφορετική τροχιά, όπως φαίνεται στο δεύτερο διάγραμμα. Η τροχιά αυτή είναι φανταστική.

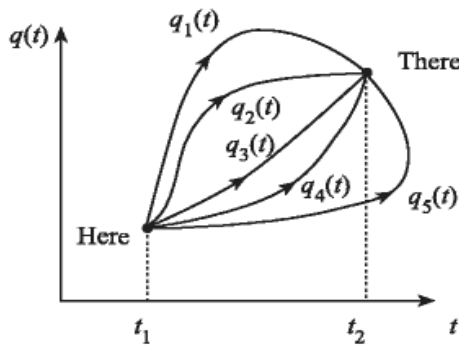


Πραγματική τροχιά
σωματιδίου



Φανταστική τροχιά
σωματιδίου

Αν υπολογίσουμε την ποσότητα της κινητικής ενέργειας μειωμένη κατά τη δυναμική ενέργεια και έπειτα την ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο με άκρα τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 για τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις, θα βρούμε ότι για τη φανταστική τροχιά η τιμή θα βγαίνει μεγαλύτερη. Αυτό θα συμβαίνει και για οποιαδήποτε άλλη φανταστική τροχιά επιλέξουμε. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται δράση και η πραγματική τροχιά είναι αυτή που την ελαχιστοποιεί. Για παράδειγμα, για να βρούμε την πραγματική τροχιά στην οποία ταξιδεύει ένα σωματίδιο αρκεί να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές τροχιές (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) και να διαπιστώσουμε ποια είναι αυτή που ελαχιστοποιεί τη δράση.



Πιθανές τροχιές σωματιδίου ανάμεσα σε δυο χρονικές στιγμές. Η αρχή της ελάχιστης δράσης (για μεταβολές που συντελούνται στη φύση, η δράση που απαιτείται είναι πάντα η ελάχιστη δυνατή), φιλτράρει τις υποψήφιες τροχιές και εξάγει την πραγματική.

Η διαδικασία αυτή για την εύρεση της πραγματικής τροχιάς είναι αρκετά επίπονη και φυσικά κάθε άλλο παρά πρακτική. Ευτυχώς υπάρχει άλλη μέθοδος την οποία και ακολουθούμε. Πριν αναλύσουμε τη μέθοδο αυτή ας εξετάσουμε λίγο την ποσότητα, από την ολοκλήρωση της οποίας, προκύπτει η δράση. Η μαθηματική έκφραση της δράσης είναι η κάτωθι:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.1)$$

όπου $q(t)$ η θέση του σωματιδίου και $\dot{q}(t)$ η ταχύτητά του. Η συνάρτηση L , που εξαρτάται από τις παραπάνω ποσότητες, ονομάζεται λανγκρατζιανή. Στις απλές εφαρμογές (όπως παραπάνω στη ρίψη σωματιδίου σε βαρυτικό πεδίο), όπου έχουμε διατηρητικό σύστημα, η λανγκρατζιανή ορίζεται ως το αποτέλεσμα της αφαίρεσης της δυναμικής ενέργειας από την κινητική, ($L = T - V$).

Επανερχόμαστε λοιπόν στην αναζήτηση μιας μεθόδου που να μας επιτρέπει να αποφύγουμε τη διερεύνηση όλων των πιθανών σεναρίων που είναι πιθανό να πραγματοποιήσει το σωματίδιο. Η εναλλακτική αυτή προσέγγιση γίνεται μέσω του λογισμού των μεταβολών και οι Euler-Langrange καταφέρνουν να φτάσουν σε μια μαθηματική διατύπωση κατά την οποία μπορεί να γίνει πρόβλεψη των θέσεων που θα καταλάβει ένα σωματίδιο στο μέλλον.

Όταν μελετούμε τη συνάρτηση μιας ποσότητας, όπως η θερμοκρασία, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο, μια από τις ιδιότητες του ακρότατου μας λέει ότι αν μετακινηθούμε από το σημείο αυτό με μεταβολή πρώτης τάξης, τότε η απόκλιση της συνάρτησης από το ελάχιστο είναι μόλις δεύτερης τάξης. Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της καμπύλης, μια μεταβολή πρώτης τάξης, αλλάζει την τιμή της συνάρτησης επίσης σε πρώτη τάξη. Όμως, σε ελάχιστο μια μικρή μεταβολή δεν μεταβάλλει την τιμή της συνάρτησης σε προσέγγιση πρώτης τάξης. Βέβαια στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε μια απλή συνάρτηση που εξαρτάται από το χρόνο (όπως η θερμοκρασία) αλλά συνάρτηση της συνάρτησης $q(t)$ (ένα συναρτησιακό της $q(t)$).

Βασιζόμενοι στο παραπάνω επιχειρήμα, οι δύο επιστήμονες συνέχισαν στην εύρεση της πραγματικής τροχιάς. Δηλαδή, υπέθεσαν (αναλογικά όσον αφορά την περίπτωση της απλής συνάρτησης-θερμοκρασίας) ότι αν απαιτήσουμε την πραγματική καμπύλη, τότε η καμπύλη που διαφέρει μόλις λίγο από αυτή δε θα δημιουργεί αλλαγή στη δράση σε προσέγγιση πρώτης τάξης. Δηλαδή, θεωρώντας μια μεταβολή: $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t)$, η αλλαγή αυτή στη δράση δίνεται από τη σχέση:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη:

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d(\delta q(t))}{dt} \quad (2.3)$$

η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d(\delta q(t))}{dt} \right) dt \quad (2.4)$$

και ολοκληρώνοντας το δεύτερο όρο κατά μέλη προκύπτει:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} \quad (2.5)$$

Δεδομένου όμως ότι όλες οι πιθανές τροχιές ξεκινούν και καταλήγουν τη στιγμή t_1 και t_2 αντίστοιχα, σημαίνει ότι $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Οπότε η μεταβολή της δράσης θα είναι τώρα :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) dt = 0 \quad (2.6)$$

Αφού όμως η παραπάνω εξίσωση πρέπει να ισχύει για κάθε αυθαίρετη μεταβολή, αυτό σημαίνει πως η παρένθεση πρέπει να είναι αυτή που μηδενίζεται :

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad (2.7)$$

Αυτή αποτελεί την περίφημη εξίσωση κίνησης Euler-Langrange, η λύση της οποίας είναι η πραγματική τροχιά του σωματιδίου.

Μια απλή εφαρμογή με την οποία φαίνεται η χρησιμότητα της παραπάνω εξίσωσης, είναι να θεωρήσουμε τη λαγκρατζιανή ενός σωματιδίου σε ένα βαρυτικό πεδίο, δηλαδή: $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ και όπου $q = x$ και να την αντικαταστήσω στην εξίσωση Euler-Langrange. Αυτομάτως προκύπτει :

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} - \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.8)$$

Κάνοντας τις πράξεις :

$$-\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 2m\dot{x} \quad (2.9)$$

και καταλήγουμε στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα :

$$F = m\ddot{x} \quad (2.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόλις αποδείξαμε ότι οι νόμοι του Νεύτωνα που αποτελούν αξιώματα στη νευτώνεια φυσική, μέσω της λαγκρατζιανής αντιμετώπισης απορρέουν αβίαστα από την εξίσωση των Euler-Langrange. Τέλος, πολύ σημαντικό πλεονέκτημα της λαγκρατζιανής διατύπωσης είναι ότι δεν είμαστε υποχρεωμένοι να θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς¹.

2.2 Λανγκρατζιανή διατύπωση σε θεωρία πεδίων

Για να προσεγγίσουμε την περιγραφή ενός πεδίου με κάποια εξίσωση παρόμοια της Euler-Langrange, θα ξεκινήσουμε μελετώντας ένα σύστημα που αποτελείται από N μάζες και θα το επεκτείνουμε στο όριο όπου $N \rightarrow \infty$, (για παράδειγμα μια χορδή). Δηλαδή, ένα σύστημα που έχει ένα πολύ μεγάλο νούμερο διακριτών βαθμών ελευθερίας (σημειακές μάζες), θα το προσεγγίσουμε σαν ένα σύστημα "συνεχούς βαθμού ελευθερίας", δηλαδή ένα πεδίο,

¹Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική: Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης, 2008, σελ.73

για το οποίο η μετατόπιση θα δίνεται για οποιοδήποτε σημείο από τη συνεχή συνάρτηση $\phi(\vec{x}, t)$. Στην περίπτωση αυτή του συνεχούς, η δράση θα είναι:

$$S = \int L dt \quad (2.11)$$

όπου

$$L = \int \mathcal{L} dx \quad (2.12)$$

όπου η ποσότητα \mathcal{L} ονομάζεται λαγκρατζιανή πυκνότητα. (με αυτή θα δουλεύουμε από εδώ και πέρα όσον αφορά στα πεδία, και θα αναφερόμαστε σε αυτή απλά ως λαγκρατζιανή). Όπως αναφέρεται παραπάνω στην περίπτωση του διακριτού η λαγκρατζιανή εξαρτάται από τη μετατόπιση και από τη χρονική της παράγωγο. Στην περίπτωση του συνεχούς (πεδίο) η λαγκρατζιανή εξαρτάται από τα παραπάνω αλλά εξαρτάται και από τη χωρική παράγωγο της μετατόπισης. Δηλαδή:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \quad (2.13)$$

ή αλλιώς σε σχετικιστική διατύπωση:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right) = \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu\phi\right) \quad (2.14)$$

Συνεπώς η (2.11) θα είναι:

$$S = \int \mathcal{L}\left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dt dx \quad (2.15)$$

Για να καταλήξουμε στην εξίσωση πεδίου Euler-Langrange, (E-L) ξεκινάμε πάλι από την ίδια θεμελιώδη αρχή ότι στην πραγματική διαδρομή η μεταβολή της δράσης θα είναι 0. Εργαζόμαστε σε μια διάσταση για λόγους ευκολίας και στο τέλος θα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα στις τρεις διαστάσεις. Θεωρώντας λοιπόν τη μεταβολή $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$, η μεταβολή στη δράση από την εξίσωση (2.15) θα είναι:

$$\delta S = \int dt \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \delta(\partial\phi/\partial x) \right] dx = 0 \quad (2.16)$$

Σπάζοντας το άθροισμα εντός του ολοκληρώματος σε επι μέρους ολοκληρώματα, προκύπτει:

$$\delta S = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi dt dx + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} dt dx + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \delta(\partial\phi/\partial x) dt dx = 0 \quad (2.17)$$

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψη ότι:

$$\delta\dot{\phi} = \frac{\partial\phi'}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi + \delta\phi) - \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial\phi'}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + \delta\phi) - \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} \quad (2.19)$$

η (2.17) γίνεται:

$$\delta S = \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi dt dx + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi dt dx + \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} \delta\phi dt dx \quad (2.20)$$

και εκτελώντας παραγοντική ολοκλήρωση του $\partial(\delta\phi)/\partial t$ (δεύτερος όρος) ως προς t και παρομοίως του $\partial(\delta\phi)/\partial x$ (τρίτος όρος) ως προς x γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi dt dx + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\phi) \right] - \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} (\delta\phi) dt dx \\ &+ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta\phi) \right] - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} (\delta\phi) dt dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

και διώχνοντας (χωρίς να προκαλείται κάποιο πρόβλημα στην περίπτωση αυτή) τους επιφανειακούς όρους, προκύπτει:

$$\delta S = \int dt \int dx \delta\phi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right) \right] = 0 \quad (2.22)$$

Επειδή το $\delta\phi$ είναι αυθαίρετο, για το μηδενισμό της παραπάνω εξίσωσης απαιτείται η παρένθεση εντός του ολοκληρώματος να μηδενίζεται. Συνεπώς, προκύπτει η εξίσωση πεδίου Euler-Langrange.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Επεκτείνοντας στις 3-διαστάσεις, όπου $\partial/\partial x \rightarrow \vec{\nabla}$, η E-L θα'ναι:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \vec{\nabla} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Για σχετικιστικά πεδία η παραπάνω εξίσωση στην αναλλοίωτη μορφή της γράφεται ως:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \quad (2.25)$$

Οπότε, για κάθε περίπτωση θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια σχετικιστικά αναλλοίωτη λαγκρατζιανή πυκνότητα για κάποιο πεδίο ϕ και μέσω της εξίσωσης E-L, θα παίρνουμε κάθε φορά την αντίστοιχη εξίσωση κίνησης.

Επί παραδείγματι, αντικαθιστώντας την αναλλοίωτη λαγκρατζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.26)$$

Θα καταλήξουμε στην εξίσωση κίνησης του πεδίου αυτού:

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται (για διευκόλυνση στον υπολογισμό των παραγωγίσεων):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.27)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους που υπεισέρχονται στην εξίσωση E-L:

- $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi} \left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) = m^2\phi \quad (2.28)$$

- $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)} \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) \right) = \partial^\mu\phi \quad (2.29)$$

Η τελευταία παραγωγή προέκυψε αβίαστα υπολογίζοντας ξεχωριστά το χρονικό και το χωρικό κομμάτι:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} \left(\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 \right) = \partial_0\phi = \partial^0\phi \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_i\phi)} \left(-\frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 \right) = -\partial_i\phi = \partial^i\phi \quad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας στη σχετικιστική εξίσωση E-L (2.25) τα αποτελέσματα των παραγωγίσεων από τις (2.28) και (2.29), προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = m^2\phi \quad (2.32)$$

η οποία είναι η σχετικιστική εξίσωση κίνησης σωματιδίου μάζας m , χωρίς σπιν, που μελετήθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, η Klein-Gordon.

2.3 Θεώρημα Noether, συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Η γερμανίδα μαθηματικός Emmy Noether θεωρείται μια από τις μεγαλύτερες γυναικείες προσωπικότητες στον τομέα των μαθηματικών. Το ομώνυμο θεώρημα που δημοσίευσε το 1915 την ανέδειξε και ως σπουδαία μορφή της θεωρητικής φυσικής. Με το θεώρημα της αυτό καταφέρνει να συνδέσει τις δυναμικές συμμετρίες που διέπουν ένα σύστημα με νόμους διατήρησης (διατηρούμενες ποσότητες). Το θεώρημα λέει ότι κάθε συμμετρία της φύσης συνεπάγεται ένα νόμο διατήρησης, και αντίστροφα, κάθε νόμος διατήρησης αποκαλύπτει την ύπαρξη κάποιας υποκείμενης συμμετρίας². Με άλλα λόγια

²Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική: Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης, 2008, σελ.23

το θεώρημα της Noether δηλώνει ότι αν η λαγκρατζιανή ενός φυσικού συστήματος δεν επηρεάζεται από μεταβολές (στο σύστημα συντεταγμένων από το οποίο περιγράφεται), τότε θα υπάρχει και ένας αντίστοιχος νόμος διατήρησης. Για παράδειγμα, αν η λαγκρατζιανή είναι ανεξάρτητη από τη θέση της αρχής των αξόνων τότε το σύστημα διατηρεί την ορμή του με την πάροδο του χρόνου. Αν είναι ανεξάρτητη από την αρχική χρονική στιγμή, τότε η διατηρούμενη ποσότητα είναι η ενέργεια και αν είναι ανεξάρτητη από τη γωνία μέτρησης, τότε διατηρείται η στροφορμή.

Το θεώρημα αυτό δεν αρκείται στο να συνδέσει τις παραπάνω συμμετρίες με κάποια διατηρούμενη ποσότητα, αλλά έχει γενικότερη ισχύ. Αυτό γιατί μας πληροφορεί ότι αν ένας μετασχηματισμός (έστω συνεχής) του συστήματος συντεταγμένων ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη, τότε απαραίτητα θα υπάρχει μια ποσότητα που να διατηρείται. Η ακριβής αυτή ποσότητα μπορεί να μην είναι γνωστή αλλά παρ' όλα ταύτα, είναι γνωστό ότι υπάρχει. Επίσης, υπάρχουν και κάποιες πρόσθετες συμμετρίες, οι διακριτές συμμετρίες, των οποίων οι μετασχηματισμοί είναι διακριτοί (χρήση ακεραίων αριθμών και όχι παραγματικών). Μια χαρακτηριστική τέτοια συμμετρία είναι η συμμετρία αναστροφής χώρου, της οποίας ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός (± 1), η ομοτιμία, διατηρείται (εκτός από την περίπτωση των ασθενών αλληλεπιδράσεων).

Για να αναδείξουμε τη χρησιμότητα του παραπάνω θεωρήματος, αρχικά ας μελετήσουμε συμμετρίες μιας κλασικής λαγκρατζιανής. Έπειτα θα περάσουμε και σε λαγκρατζιανή πυκνότητα σωματιδιακής θεωρίας πεδίου.

Έστω λοιπόν, η μεταβολή $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t)$ στην $L(q, \dot{q})$, όπου $\delta q(t) = \epsilon F(q(t))$. Η $F(q(t))$ είναι μια τυχαία συνάρτηση που καθορίζεται κάθε φορά από τη μεταβολή που θέλουμε να επιβάλουμε και ϵ μια απειροστή ποσότητα. Εξετάζουμε αρχικά εάν η λαγκρατζιανή παραμένει αμετάβλητη κάτω από αυτή τη μεταβολή. Αν ναι, αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για ένα μετασχηματισμό συμμετρίας. Αποδεικνύεται παρακάτω ότι με τη βοήθεια της αναλλοιώτητας της L ($\delta L = 0$) και της (2.23), προκύπτει μια σταθερή ποσότητα Q ως προς το χρόνο η οποία αποτελεί ένα διατηρούμενο φορτίο. Κατ'αρχήν, η μεταβολή της $L(q, \dot{q})$ με την εφαρμογή της (2.18) είναι:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}(\delta q) = 0 \quad (2.33)$$

και λαμβάνοντας υπ'όψη την (2.23) έχουμε:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = 0 \quad (2.34)$$

από την οποία συμπύσσοντας παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right)}_{\epsilon Q} = 0 \quad (2.35)$$

Θέτοντας την ποσότητα εντός της παρένθεσης ίση με ϵQ , διαπιστώνουμε πως αυτή αποτελεί ένα διατηρούμενο φορτίο, μια ποσότητα δηλαδή αναλλοίωτη στο πέρασμα του χρόνου. Και επειδή $\delta q = q(t) + \epsilon F(q(t)) - q(t) = \epsilon F(q(t))$, το διατηρούμενο φορτίο προκύπτει:

$$\begin{aligned}\epsilon Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon F \\ \Rightarrow Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} F\end{aligned}\quad (2.36)$$

Εφαρμογή της παραπάνω γενικής μεθόδου αποτελεί η εξαγωγή του νόμου διατήρησης της ορμής ενός συστήματος του οποίου η λαγκρατζιανή εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα και όχι από τη θέση, δηλαδή $L = L(\dot{q})$. Μ'αλλα λόγια, η λαγκρατζιανή αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \epsilon$ (έχει δηλαδή συμμετρία μετατόπισης στη θέση), όπου ϵ κάποια σταθερά και η συνάρτηση $F(q(t)) = 1$. Επειδή $\delta q = q(t) + \epsilon - q(t) = \epsilon$, η σταθερά της κίνησης θα είναι και λόγω της (2.36):

$$\begin{aligned}\epsilon Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon \\ \Rightarrow Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p\end{aligned}\quad (2.37)$$

(όπου σύμφωνα με τη χαμιλτονιανή μηχανική, χρησιμοποιήθηκε ότι η γενικευμένη ορμή είναι $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Επίσης, η χαμιλτονιανή ορίζεται ως $H(p, q) = p\dot{q} - L$).

Με παρόμοια επιχειρηματολογία οδηγούμαστε σε αντίστοιχα αποτελέσματα στην περίπτωση που τώρα εργαζόμαστε με τη λαγκρατζιανή πυκνότητα ενός πεδίου. Βέβαια εδώ οι συμμετρίες, οι μετασχηματισμοί των οποίων αφήνουν τη λαγκρατζιανή αμετάβλητη, συνεπάγονται την ύπαρξη διατηρούμενων ρευμάτων $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, δηλαδή

$$\partial_\mu j^\mu = 0\quad (2.38)$$

Είναι ωστόσο προφανές, ότι η ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος, συνεπάγεται την ύπαρξη ενός διατηρούμενου φορτίου, το οποίο ορίζεται:

$$Q(t) = \int_V j_0(t, \vec{x}) d^3x = \int_V \rho(t, \vec{x}) d^3x\quad (2.39)$$

Όμως ο μηδενισμός το εσωτερικού γινομένου της (2.38) είναι η γνωστή εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\quad (2.40)$$

Παίρνοντας λοιπόν τη χρονική παράγωγο της (2.39), έχουμε:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial j^0}{\partial t} d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = - \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}\quad (2.41)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε στο δεύτερο βήμα την εξίσωση συνέχειας και στο τρίτο το θεώρημα απόκλισης του διανυσματικού λογισμού. Επειδή θεωρούμε ότι για πολύ μεγάλο όγκο V το ρεύμα μηδενίζεται στην επιφάνεια A που περι- κλείει τον όγκο V , δεν υπάρχει ρεύμα που να ρέει διαμέσου της επιφάνειας κι επομένως το παραπάνω επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Έτσι προκύ- πτει ότι το φορτίο Q είναι ανεξάρτητο από το χρόνο, δηλαδή είναι μια ποσότητα που διατηρείται.

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.42)$$

Θεωρούμε λοιπόν (σε αντιστοιχία με την περίπτωση της κλασικής λαγκρατζια- νής) μια μεταβολή του πεδίου $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$. Θεωρώντας ότι $\delta\phi(x) = \epsilon H(\phi(x))$, όπου $H(\phi(x))$ είναι μια συνάρτηση που καθορίζεται κάθε φορά από το είδος της μεταβολής που επιβάλουμε και ϵ μια απειροστή ποσότητα. Με εργαλεία την αναλλοιώτητα της $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ (πρόκειται δηλαδή για μετασχηματισμό συμμετρίας) και την εξίσωση E-L (2.25), η μεταβολή της $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ θα δίνει:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = 0 \quad (2.43)$$

Όμως, λόγω του ότι

$$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\phi' - \partial_\mu\phi = \partial_\mu\phi + \partial_\mu\delta\phi - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi) \quad (2.44)$$

η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = 0 \quad (2.45)$$

Μέσω της εξίσωσης (2.25), συνεπάγεται ότι:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = 0 \quad (2.46)$$

Συμπτύσσοντας τους δύο όρους ως παράγωγο γινομένου η παραπάνω γίνεται:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right]}_{\epsilon j^\mu} = 0 \quad (2.47)$$

Αντικαθιστώντας το $\delta\phi = \epsilon H(\phi(x))$ και ορίζοντας την ποσότητα εντός της πα- ρένθεσης ίση με ϵj^μ , παίρνουμε το διατηρούμενο ρεύμα (αφού καταλήξαμε σε μια εξίσωση της μορφής $\partial_\mu j^\mu = 0$):

$$\begin{aligned} \epsilon j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\epsilon H \\ \Rightarrow j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}H \end{aligned} \quad (2.48)$$

Όταν δεν πρόκειται για μετασχηματισμό συμμετρίας, δηλαδή η μεταβολή της λαγκρατζιανής δεν είναι μηδέν, πάλι μπορούμε να εξαγάγουμε ένα διατηρούμενο ρεύμα. Γενικότερα, επιτρέπεται η δράση να αλλάζει για έναν επιφανειακό όρο, αφού η παρουσία του όρου αυτού δε θα επηρέαζε την εξαγωγή της εξίσωσης κίνησης E-L. Επομένως η λάνγκρατζιανή θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από μια 4-μεταβολή:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{I}^\mu \quad (2.49)$$

για κάποιο τυχαίο \mathcal{I}^μ ³. Η μεταβολή της λαγκρατζιανής θα είναι:

$$\delta \mathcal{L} = \alpha \partial_\mu \mathcal{I}^\mu \neq 0 \quad (2.50)$$

Οπότε από την (2.47) και δεδομένου ότι το διατηρούμενο ρεύμα υπάρχει και ικανοποιεί την εξίσωση $\partial_\mu j^\mu = 0$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] \\ \Rightarrow j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - \mathcal{I}^\mu \end{aligned} \quad (2.51)$$

Εφαρμογή της παραπάνω επεξεργασίας, αποτελεί να θεωρήσουμε μια μεταβολή της μορφής $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ (μετατόπιση στο χωρόχρονο), όπου το ϵ^μ είναι ένα απειροστό και σταθερό 4-διάνυσμα. Η μεταβολή αυτή επιφέρει την εξής μεταβολή στο πεδίο:

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu + \epsilon^\mu) \approx \phi(x^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x^\mu) \quad (2.52)$$

Με την επιβολή αυτής της μεταβολής, υποθέτουμε ότι η λαγκρατζιανή $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ θα μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο (επειδή είναι και αυτή βαθμωτή όπως η μεταβολή των πεδίων). Συνεπώς:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \epsilon^\nu \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}) \quad (2.53)$$

Στο παράδειγμα αυτό, η μεταβολή της λαγκρατζιανής βγαίνει μη μηδενική (επομένως δεν πρόκειται για κάποιον μετασχηματισμό συμμετρίας):

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (\epsilon^\nu \delta_\nu^\mu \mathcal{L}) \quad (2.54)$$

Επομένως σύμφωνα με την εξίσωση (2.51), το διατηρούμενο ρεύμα θα είναι:

$$\begin{aligned} \epsilon^\nu j_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \epsilon^\nu \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \\ \Rightarrow j_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Συνεπώς θα υπάρχει και ένα διατηρούμενο φορτίο:

$$p_\nu = \int j_\nu^0 d^3x \quad (2.56)$$

Το διατηρούμενο αυτό φορτίο είναι η 4-ορμή και γι'αυτό το διατηρούμενο ρεύμα λέμε πως ορίζει τον ταυοστή ενέργειας-ορμής.

³Peskin and Schroeder: Introduction to quantum field theory, p.17

2.4 Εκτεταμένοι και τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας

Πολύ σημαντικό ρόλο για τη διατύπωση μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου παίζουν οι μετασχηματισμοί βαθμίδας. Η σημαντικότητά τους θα εκδηλωθεί αργότερα στην περιγραφή των αλληλεπιδράσεων που συμβαίνουν στη φύση. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναλύσουμε το πως μέσω των θεωριών βαθμίδας, μας παρέχεται ένας ενιαίος φορμαλισμός που περιγράφει τις κβαντικές θεωρίες πεδίου του ηλεκτρομαγνητισμού, των ασθενών αλλά και ισχυρών αλληλεπιδράσεων και το πως από αυτές συνάγεται ένα συλλογικό μοντέλο, το καθιερωμένο πρότυπο.

Εδώ προς το παρόν θα μελετήσουμε εκτεταμένους και τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας πάνω σε κάποιες ενδεικτικές λαγκκρατζιανές και θα ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Ξεκινώντας, θεωρούμε τη λαγκκρατζιανή (πυκνότητα) ενός ελεύθερου σωματιδίου Dirac, μάζας m :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi} \quad (2.57)$$

στην οποία επιβάλουμε το μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi \quad (2.58)$$

ο οποίος επιφέρει ταυτόχρονα τις παρακάτω μετατροπές:

- $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\bar{\psi}$
- $\partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = e^{i\alpha}\partial_\mu\psi$

Οι μετασχηματισμοί αυτού του είδους είναι γνωστοί σαν εκτεταμένοι μετασχηματισμοί βαθμίδας (global gauge transformations), επειδή η παράμετρος α στο εκθετικό είναι σταθερή και αυτό υπονοεί ότι ο μετασχηματισμός γίνεται παντού ταυτόχρονα. Εξετάζουμε τι συμβαίνει μετά την επιβολή του μετασχηματισμού στην παραπάνω λαγκκρατζιανή:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= i(e^{-i\alpha}\bar{\psi})\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\alpha}\psi) - m(e^{i\alpha}\psi)(e^{-i\alpha}\bar{\psi}) \\ &= \underbrace{e^{-i\alpha}e^{i\alpha}}_{=1} \underbrace{(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi})}_{=\mathcal{L}} = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός την αφήνει αναλλοίωτη (πρόκειται για μετασχηματισμό συμμετρίας). Το γεγονός αυτό, ότι δηλαδή $\delta\mathcal{L} = 0$, μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε ότι θα προκύπτει κάποιο ρεύμα Noether και κατέπεκταση κάποιο διατηρούμενο φορτίο. Για να τα υπολογίσουμε θεωρούμε τον απειροστό μετασχηματισμό της (2.58), που δίνεται από τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor: $\psi \rightarrow \psi' = (1 + i\alpha)\psi$, και τον ενσωματώνουμε στη σχέση της μεταβολής της λαγκκρατζιανής, στη σχέση δηλαδή (2.43). Οι

μεταβολές των πεδίων στην περίπτωση αυτή θα είναι: $\delta\psi = \psi' - \psi = i\alpha\psi$ και $\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}' - \bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$. Τονίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή όμως θέλει λίγη παραπάνω προσοχή, αφού πέρα από το πεδίο ψ , εμπλέκεται και το πεδίο $\bar{\psi}$. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να γίνει άθροιση σε όλα τα εμπλεκόμενα πεδία:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\psi}) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}(-i\alpha\bar{\psi}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}(-i\alpha\partial_\mu\bar{\psi}) \\ &= i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\psi + i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\psi + -i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}\bar{\psi} + -i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\partial_\mu\bar{\psi} \quad (2.60)\end{aligned}$$

Με απώτερο σκοπό να σχηματιστεί η εξίσωση E-L μέσα στην παραπάνω εξίσωση ώστε να λιγοστεύουν οι όροι, για το δεύτερο και τέταρτο όρο ισχύει:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right) &= \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\psi \\ \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\psi &= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right) - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \quad (2.61)\end{aligned}$$

Ομοίως πράττουμε και για το πεδίο $\bar{\psi}$ και αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\psi + i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right) - i\alpha\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \\ &\quad - i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}\bar{\psi} - i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}\right) + i\alpha\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi} \quad (2.62)\end{aligned}$$

Τα ζευγάρια πρώτος-τρίτος όρος και τέταρτος-έκτος μηδενίζονται λόγω της εξίσωσης E-L (2.25). Συνεπώς προκύπτει:

$$\partial_\mu\left(\underbrace{i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - i\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}}_{j^\mu}\right) = 0 \quad (2.63)$$

Οπότε το διατηρούμενο ρεύμα θα είναι:

$$j^\mu = i\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}\right) \quad (2.64)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τη δοθείσα λαγκρατζιανή (2.57), υπολογίζεται το συσχετισμένο ρεύμα Noether. Οι παραγωγίσεις δίνουν αναλυτικά:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi}) = i\bar{\psi}\gamma^\mu \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}(i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi}) = 0 \quad (2.65)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω παραγωγίσεις στο παραπάνω ρεύμα που καταλήξαμε, το υπολογίζουμε:

$$j^\mu = -\alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.66)$$

Αποτέλεσμα το οποίο βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με αυτό της εξίσωσης (1.72) (αν αντιστοιχίσουμε τη σταθερά α με το ηλεκτρικό φορτίο), το οποίο υπολογίστηκε ακολουθώντας διαφορετική μεθοδολογία.

Για να βρούμε το διατηρούμενο φορτίο που προκύπτει αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$Q = \int j^0 d^3x \quad (2.67)$$

Θέτοντας λοιπόν την πρώτη (χρονική) συνιστώσα του 4-διανύσματος του ρεύματος στο ολοκλήρωμα και αν $\alpha = e$, υπολογίζουμε, ενθουμούμενοι ότι $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ και ότι από τις ιδιότητες των γ -πινάκων $(\gamma^0)^2 = I$:

$$Q = \int -e \bar{\psi} \gamma^0 \psi d^3x = -e \int \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi d^3x = -e \underbrace{\int \psi^\dagger \psi d^3x}_{=1} = -e \quad (2.68)$$

Δηλαδή, αποδείξαμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι το διατηρούμενο φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου $-e$, το οποίο είναι ανεξάρτητο από το χρόνο.

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(-e)}{dt} = 0 \quad (2.69)$$

Όπως αναφέρεται και παραπάνω η "καθολικότητα" των εκτεταμένων μετασχηματισμών, του είδους (2.58), οφείλεται στο γεγονός ότι στο εκθετικό η παράμετρος α είναι σταθερή και δεν εξαρτάται από τη θέση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση κατά την οποία η παράμετρος α εξαρτάται από τη θέση και τη χρονική στιγμή (4-διάνυσμα της θέσης) $\alpha = \alpha(x)$ (όπου στο πρόβλημα αυτό το x θεωρείται το x^μ , απλά παραλείπεται το μ για λόγους συντομίας). Κάτι τέτοιο συνάδει περισσότερο και με το πνεύμα της σχετικότητας. Αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας.

Επιβάλλοντας τον τοπικό μετασχηματισμό $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$, επιφέρονται και οι παρακάτω μετασχηματισμοί (local gauge transformations).

- $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}$
- $\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \psi + ie^{i\alpha(x)}\psi \partial_\mu \alpha$

Ο τελευταίος όρος του παραπάνω μετασχηματισμού χαλάει την αναλλοiotτητα

της λαγκρατζιανής που επικρατούσε στην εκτεταμένη περίπτωση :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\psi'\bar{\psi}' \\
&= ie^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu\left(e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha\right) - e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}m\psi\bar{\psi} \\
&= ie^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha - m\psi\bar{\psi} \\
&= \underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi}}_{\mathcal{L}} - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \\
&= \mathcal{L} - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \\
\Rightarrow \delta\mathcal{L} &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Ενώ το παραπάνω αποτέλεσμα εκφράζει ρητά τη μη αναλλοιότητα της λαγκρατζιανής, εμείς θέλουμε η συμμετρία βαθμίδας που αντιστοιχούσε στην εκτεταμένη περίπτωση να επεκτείνεται και στην τοπική. Από μια σύγχρονη οπτική γωνία η συμμετρία βαθμίδας (αναλλοιότητα λαγκρατζιανής) δεν είναι συμπτωματική αλλά θεμελιώδης αρχή της φυσικής. Κάτω από αυτές λοιπόν τις συνθήκες, απαιτούμε αξιωματικά η λαγκρατζιανή να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς. Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις έτσι ώστε ο όρος που περισσεύει, να εξαφανίζεται. Έτσι, στη λαγκρατζιανή (2.57) επιβάλουμε την εξής μετατροπή :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \tag{2.71}$$

Με τη μετατροπή αυτή ορίζουμε μία παράγωγο η οποία κάτω από το μετασχηματισμό φάσης παραμένει αναλλοίωτη, γι' αυτό και ονομάζεται αναλλοίωτη παράγωγος. Αυτή μετασχηματίζεται ακριβώς όπως το πεδίο :

$$D_\mu \rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi \tag{2.72}$$

Στην (2.71) το e είναι κάποια ελεύθερη παράμετρος (που θα την ταυτοποιήσουμε αργότερα με το ηλεκτρικό φορτίο) και το A_μ είναι το διανυσματικό πεδίο βαθμίδας (μποζόνιο) το οποίο μετασχηματίζεται ως εξής :

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{2.73}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην (2.57) την αναλλοίωτη παράγωγο στη θέση της απλής, επιτυγχάνουμε την αναλλοιότητα της λαγκρατζιανής :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= i\bar{\psi}'\gamma^\mu(D_\mu\psi)' - m\psi'\bar{\psi}' \\
&= ie^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi - me^{i\alpha(x)}e^{-i\alpha(x)}\psi\bar{\psi} \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\psi\bar{\psi} = \mathcal{L} \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν κατορθώσαμε όλο το μηχανισμό "ακύρωσης" του περιττού όρου της (2.70) να το θάψουμε μέσα στην αναλλοίωτη παράγωγο. Συνεπώς η νέα

βελτιωμένη λαγκρατζιανή που περιγράφει ένα σωματίδιο Dirac μάζας m (και ταυτόχρονα τηρεί την αναλλοιώτητα) είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi} + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned}\quad (2.75)$$

Συνεπώς, κερδίζοντας την πολυπόθητη αναλλοιώτητα κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς έπρεπε να πληρώσουμε το τμήμα: την εισαγωγή ενός διανυσματικού πεδίου (πεδίου βαθμίδας) το οποίο συζευγνύεται με το σωματίδιο Dirac (με το σπινόρά του ψ για την ακρίβεια), όπως φανερώνει ο τελευταίος όρος της (2.75). Η μορφή αυτή βέβαια της λαγκρατζιανής δεν είναι ακόμα η τελική.

Για να είναι το A_μ ένα διανυσματικό πεδίο που διαδίδεται, (για παράδειγμα ένα φυσικό φωτονικό πεδίο) θα πρέπει να υπακούει και αυτό με τη σειρά του σε κάποια ελεύθερη λαγκρατζιανή (που ως γνωστό αποτελείται από ένα κινητικό και ένα δυναμικό όρο). Προκειμένου να παραμένει αναλλοίωτη η λαγκρατζιανή κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς, θα πρέπει το πεδίο να είναι άμαζο, δηλαδή να μην περιέχει όρους μάζας $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, οι οποίοι δεν παραμένουν αναλλοίωτοι (δυναμικοί όροι). Θα πρέπει λοιπόν στη λαγκρατζιανή μας απλά να εισάγουμε έναν αναλλοίωτο κινητικό όρο, (σε αναλογία με τον κινητικό όρο $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$ της (2.26)), ο οποίος θα είναι επίσης αναλλοίωτος και ως προς το μετασχηματισμό του πεδίου (2.73). Επομένως, ο μοναδικός υποψήφιος που θα μπορεί να περιέχει είναι ο τανυστής δύναμης πεδίου.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.76)$$

Συνεπώς η πλήρης λαγκρατζιανή του συστήματός μας θα είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.77)$$

Ο πρώτος όρος είναι η ελεύθερη λαγκρατζιανή του ηλεκτρονίου, ο δεύτερος όρος υποδηλώνει την αλληλεπίδραση του ηλεκτρονίου (μέσω του ρεύματός του) με το διανυσματικό πεδίο (φωτονιακό πεδίο) και ο τρίτος είναι η ελεύθερη λαγκρατζιανή διανυσματικού πεδίου (του φωτονιακού πεδίου) όπου επικρατεί όπως προείπαμε μόνο ο κινητικός όρος.

Συμπερασματικά, η τοπική μεταβολή της φάσης, δημιουργεί διαφορές φάσης οι οποίες θα ήταν παρατηρήσιμες αν δεν εξαλείφονταν. Η εξαφάνιση των διαφορών αυτών συνέβη με την εισαγωγή ενός νέου πεδίου, του φωτονικού πεδίου A_μ . Το πεδίο βαθμίδας προκύπτει άμαζο, αποτέλεσμα σε πλήρη αντιστοιχία με τη φύση, όπου η μάζα του φωτονίου όντως είναι μηδεν.

Τελικά, επιβάλλοντας την αναλλοιώτητα της λαγκρατζιανής ελεύθερου φερμιονίου στην περίπτωση τοπικών μετασχηματισμών, οδηγηθήκαμε στη θεωρία πεδίου αλληλεπιδράσεων της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

Η παραπάνω ανάλυση αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης μεθοδολογίας. Γενικότερα λοιπόν, εάν ένα σωματίδιο φέρει κάποιο διαφορετικό φορτίο και η λανγκραντζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διαφορετικούς τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, τότε θα προκύπτουν διανυσματικά πεδία (διανυσματικά πεδία βαθμίδας) και τα αντίστοιχα σωματίδια (τα κβάντα του εκάστοτε πεδίου με σπιν 1) που ονομάζονται μποζόνια βαθμίδας, τα οποία θα είναι οι φορείς κάποιων διαφορετικών αλληλεπιδράσεων.

Κινούμενοι λοιπόν σε αυτό το γενικό πλαίσιο -κάνοντας ουσιαστικά μια εισαγωγή για το κεφάλαιο που ακολουθεί- για κάποιο τυχαίο πεδίο ψ θα ισχύει:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad (2.78)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός μετασχηματισμός συμμετρίας (θα αφήνει την αντίστοιχη \mathcal{L} αναλλοίωτη) που επιβάλλεται πάνω στο πεδίο. Επομένως, πρέπει να ορίσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + igA_\mu)\psi \quad (2.79)$$

(όπου g η σταθερά σύζευξης) που θα μετασχηματίζεται όπως το πεδίο:

$$D_\mu \rightarrow (D_\mu\psi)' = U(D_\mu\psi) \quad (2.80)$$

το οποίο πεδίο βαθμίδας θα μετασχηματίζεται στη γενική περίπτωση:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (2.81)$$

Ενδεικτικά, αν εξειδικεύσουμε και αντικαταστήσουμε $U = e^{i\alpha(x)}$ και $g = q$ εξάγεται πάλι ο μετασχηματισμός βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$.

2.5 Συμμετρίες και θεωρία ομάδων

Το κομμάτι της άλγεβρας που αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για τη μελέτη της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων και ειδικότερα για τη συστηματική μελέτη των συμμετριών είναι η θεωρία ομάδων. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε εδώ με το χτίσιμο ενός πλαισίου μέσα στο οποίο θα γενικεύσουμε την έννοια της συμμετρίας κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Κατ'αρχήν, για να μπορεί ένα σύνολο να θεωρείται ομάδα, πρέπει να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις.

- Κλειστότητα: $\Pi_i\Pi_j = \Pi_k$, δηλαδή το γινόμενο δύο στοιχείων του συνόλου είναι στοιχείο του συνόλου.
- Ταυτοτικότητα: Υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο I , έτσι που $I\Pi_i = \Pi_i I = \Pi_i$ για όλα τα στοιχεία Π_i

- Αντίστροφο: Για κάθε στοιχείο Π_i υπάρχει το αντίστροφό του Π_i^{-1} , έτσι που $\Pi_i \Pi_i^{-1} = \Pi_i^{-1} \Pi_i = I$
- Προσεταιριστικότητα: Ισχύει $\Pi_i(\Pi_j \Pi_k) = (\Pi_i \Pi_j) \Pi_k$ ⁴

Ενδεικτικά, εξετάζουμε την περίπτωση του συνόλου των παραγόντων φάσης $U = e^{i\alpha(x)}$, με διμελή πράξη τον πολλαπλασιασμό, αν όντως είναι ομάδα, αν δηλαδή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις:

- $U(\alpha_1)U(\alpha_2) = e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2} = e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} = U(\alpha_1 + \alpha_2)$
- $U(0) = I$
- $U^{-1}(\alpha) = U(-\alpha) : U(\alpha)U^{-1}(\alpha) = U^{-1}(\alpha)U(\alpha) = e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = I$
- $U(\alpha_1)[U(\alpha_2)U(\alpha_3)] = [U(\alpha_1)U(\alpha_2)]U(\alpha_3)$

Όπως αποδεικνύεται λοιπόν, όντως είναι ομάδα και ονομάζεται ομάδα $U(1)$.

Εάν τα στοιχεία μιας ομάδας χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα της μεταθετικότητας:

$$\Pi_i \Pi_j = \Pi_j \Pi_i \quad (2.82)$$

τότε η ομάδα ονομάζεται αβελιανή. Αν η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει, τότε ονομάζεται μη αβελιανή. Η $U(1)$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι αβελιανή:

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2} = e^{i\alpha_2}e^{i\alpha_1} = U(\alpha_2)U(\alpha_1) \quad (2.83)$$

Ισχύει επίσης ότι αν κάποιοι μετασχηματισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς συμμετρίας ενός συστήματος, τότε τα στοιχεία Π είναι ερμιτιανοί τελεστές.⁵

Εκτός από την παραπάνω διάκριση των ομάδων σε αβελιανές-μη αβελιανές, αυτές διακρίνονται και σε δυο άλλες μεγάλες κατηγορίες, τις συνεχείς και διακριτές.

1)Συνεχείς ομάδες

Οι ομάδες, τα στοιχεία Π_i των οποίων εξαρτώνται από μια ή περισσότερες συνεχείς παραμέτρους ονομάζονται συνεχείς. Έστω ότι έχουμε n συνεχείς παραμέτρους $\epsilon_\alpha(x)$, όπου $\alpha = 1, 2, \dots, n$, τότε για τα στοιχεία της ομάδας γράφουμε

$$\Pi(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = \exp \left(i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_\alpha F_\alpha \right) \quad (2.84)$$

όπου F_α είναι οι γεννήτορες της ομάδας του εκάστοτε μετασχηματισμού. Στην περίπτωση που έχουμε μετασχηματισμούς συμμετρίας, όπως προαναφέρεται,

⁴Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική: Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης, 2008, σελ.87

⁵Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή Φυσική: Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης, 2008, σελ.88

τα στοιχεία Π της ομάδας είναι μοναδιακοί τελεστές. Αυτή η μοναδιακότητα των τελεστών, συνεπάγεται την ερμιτιανότητα των γεννητόρων.

Λόγου χάρη, η ομάδα (ο μοναδιακός τελεστής) που εκφράζει τη συμμετρία μετατοπίσεων στο χρόνο με στοιχεία

$$\Pi = e^{-i(t+t_0)H} \quad (2.85)$$

έχει ως γεννήτορα τον ερμιτιανό τελεστή της χαμιλτονιανής H .

Όταν οι παράμετροι ϵ_α παίρνουν απειροστές τιμές ($\epsilon_\alpha \ll 1$), τότε η (2.84) αναπτύσσεται κατά Taylor:

$$\Pi(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = I + i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon_\alpha F_\alpha \quad (2.86)$$

Στη γενική περίπτωση, οι γεννήτορες της ομάδας δε μετατίθεται μεταξύ τους και αυτό εκδηλώνει την μη αβελιανότητα της ομάδας. Γενικά ισχύει:

$$[F_\alpha, F_\beta] = i f_{abc} F_c \quad (2.87)$$

όπου οι συντελεστές f_{abc} καλούνται σταθερές δομής της ομάδας. Αν από τους συνολικά n γεννήτορες οι k μετατίθενται μεταξύ τους τότε ο αριθμός αυτός k ονομάζεται βαθμός της ομάδας.

2) Διακριτές ομάδες

Οι ομάδες, τα στοιχεία των οποίων χαρακτηρίζονται από έναν δείκτη που παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, ονομάζονται διακριτές. Χαρακτηριστικές είναι η ομάδα της ομοτιμίας καθώς και η ομάδα της συζυγίας φορτίου.

Οι ομάδες οι οποίες κυρίως μας αφορούν και μας ανοίγουν το δρόμο για το καθιερωμένο πρότυπο είναι οι ομάδες πινάκων. Οι πιο συνηθισμένες είναι οι ομάδες μοναδιακών πινάκων $n \times n$ που αποτελούν την μοναδιακή ομάδα $U(n)$ (μοναδιακοί: $U^\dagger = U^{-1}$). Επιπλέον μια πολύ σημαντική ομάδα είναι η ειδική μοναδιακή ομάδα $SU(n)$, η οποία απαρτίζεται από όλους τους μοναδιακούς πίνακες διάστασης $n \times n$ και ταυτόχρονα έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα ($\det U = 1$).

Συνεχίζοντας, άλλη χρήσιμη ομάδα είναι αυτή που συνίσταται από όλους τους πραγματικούς μοναδιακούς πίνακες διάστασης $n \times n$ και ονομάζεται ορθογώνια ομάδα $O(n)$ (ορθογώνιοι: $R^T = R^{-1}$). Αναλογικά με το παραπάνω ζευγάρι ομάδων, προκύπτει μια άλλη ομάδα που αποτελείται από όλους τους ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα ίση με τη μονάδα ($\det U = 1$) και ονομάζεται ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n)$. Η ομάδα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει τις στροφές σε ένα χώρο n διαστάσεων. Παραδείγματος χάρη, η $SO(2)$ είναι η ομάδα που περιγράφει τις στροφές στο επίπεδο.

Η κάθε ομάδα από τις παραπάνω έχει συγκεκριμένο αριθμό γεννητόρων και συγκεκριμένο αριθμό παραμέτρων οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τον αριθμό n . Ο παρακάτω πίνακας περιέχει συνοπτικά τις πληροφορίες αυτές:

Ομάδα	παράμετροι	γεννήτορες
μοναδιακή $U(n)$	n^2	n^2
ειδική μοναδιακή $SU(n)$	$n^2 - 1$	$n^2 - 1$
ορθογώνια $O(n)$	$n(n - 1)/2$	$n(n - 1)/2$
ειδική ορθογώνια $SO(n)$	$n(n - 1)/2$	$n(n - 1)/2$

Συνήθως στη φυσική, τα στοιχεία που απαρτίζουν μια ομάδα G , είναι τελεστές που δρουν σε ένα χώρο Hilbert. Αν εκλεγεί κατάλληλη βάση στο χώρο αυτό, τα στοιχεία της ομάδας αναπαρίστανται από έναν πίνακα⁶. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο σ της ομάδας G αντιστοιχεί σε έναν πίνακα M_σ . Το σημαντικό είναι ότι η απεικόνιση αυτή σέβεται τη διμελή πράξη της ομάδας. Δηλαδή, αν τ, ω δυο διαφορετικά στοιχεία της ομάδας τα οποία αντιστοιχούν στους πίνακες M_τ, M_ω αντίστοιχα, τότε:

$$\sigma\tau = \omega \Rightarrow M_\sigma M_\tau = M_\omega \quad (2.88)$$

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι για κάθε ομάδα G μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές αναπαραστάσεις. Θεμελιώδη αναπαράσταση έχουμε εάν η ομάδα G είναι μια ομάδα πινάκων.

Επιπλέον, υπάρχουν ομάδες οι οποίες είναι δομικά ίδιες ή αλλιώς ισόμορφες. Για να γίνει κατανοητό, δίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 1 Ισομορφισμός $\phi : G \rightarrow G'$ είναι ένας ομομορφισμός ένα προς ένα και επί της G' . Ο συνήθης συμβολισμός είναι ο $G \simeq G'$.

Ορισμός 2 Ομομορφισμός: Μια απεικόνιση ϕ μιας ομάδας G σε μια ομάδα G' λέγεται ομομορφισμός αν: $\phi(a, b) = \phi(a)\phi(b)$ για κάθε $a, b \in G$.

Ενδεικτικά θα αποδείξουμε ότι $SO(2) \simeq U(1)$.

Απόδειξη

- Αν $\theta \in SO(2)$, ορίζουμε την απεικόνιση $\phi = e^{i\theta}$ για την οποία $\phi : SO(2) \rightarrow U(1)$.
- Αν $\phi(\theta_1) = \phi(\theta_2)$, τότε $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, άρα $\theta_1 = \theta_2$. Επομένως η ϕ είναι 1-1.
- Η απεικόνιση είναι και επί, αφού λόγω της ταυτότητας του Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ μπορούμε να γράψουμε το μιγαδικό αυτό αριθμό σε μορφή

⁶Βέργαδος Ι.Δ., Θεωρία ομάδων μέρος α: Διακρίσιμες ομάδες και εφαρμογές, Εκδόσεις Συμεών, σελ.53

⁷Frleigh B.John: Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σελ.136,147

πίνακα 2×2 πραγματικών αριθμών. Αυτός θα είναι :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

- Αν $\theta_1, \theta_2 \in SO(2)$, θα ισχύει:

$$\phi(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \phi(\theta_1) \phi(\theta_2) \quad (2.90)$$

Συμπεπώς $SO(2) \simeq U(1)$.

Ακόμα σημαντικότερη καταδεικνύεται από τον άνωθεν ισομορφισμό, η τοπική ισοδυναμία δύο άλλων ομάδων: $SU(2) \approx SO(3)$. Αυτή η ισοδυναμία καταφέρνει να συνδέσει την ειδική ορθογώνια ομάδα περιστροφών $SO(3)$, η οποία έχει ως γεννήτορες τους τελεστές στροφορμής, με την ειδική μοναδιακή ομάδα $SU(2)$. Οπότε αυτό θα μας επιτρέψει να βρούμε τη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SU(2)$, μέσω της γενικότερης θεωρίας στροφορμών. Τα στοιχεία της ομάδας $SO(3)$ είναι:

$$R(\theta) = e^{-i\theta \vec{\eta} \vec{j}} \quad (2.91)$$

όπου \vec{j} η γενικευμένη στροφορμή. Αν $\vec{j} = 0, 1/2, 1$, παίρνουμε αναπαράσταση διάστασης 1,2,3 αντίστοιχα. Ειδικά για $\vec{j} = 1/2$ παίρνουμε:

$$R(\theta) = e^{-i\theta \vec{\eta} \vec{\sigma}/2} \quad (2.92)$$

Όπως φαίνεται από τους ερμιτιανούς πίνακες 2×2 του *Pauli*, προκύπτουν οι μοναδιακοί πίνακες 2×2 $R(\theta)$. Επίσης, επειδή τα ίχνη των πινάκων του *Pauli* είναι μηδέν και ταυτόχρονα λόγω του ότι ισχύει η ιδιότητα $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$, προκύπτει ότι $\det R(\theta) = 1$. Συμπερασματικά, βρήκαμε τη θεμελιώδη αναπαράσταση 2×2 της ομάδας $SU(2)$.

Οι γεννήτορες της $SU(2)$ μπορούν να προκύψουν και αλλιώς, με πιο μαθηματικά άμεσο τρόπο. Αρχικά θεωρούμε έναν τυχαίο μοναδιακό πίνακα:

$$U = e^{iH} \Rightarrow H^\dagger = H \quad (2.93)$$

(Προαναφέρεται ότι η μοναδιακότητα των στοιχείων συνεπάγεται την ερμιτιανότητα των γεννητόρων) Από την ιδιότητα $\det U = e^{\text{Tr}H} = 1 \Rightarrow \text{Tr}(H) = 0$. Λόγω των δυο τελευταίων συνθηκών ο πίνακας 2×2 μπορεί να γραφτεί:

$$H = \begin{bmatrix} a & b + ic \\ b - ic & -a \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$H = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\sigma_z} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\sigma_x} - c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}}_{\sigma_y} \quad (2.95)$$

Συνεπώς κάθε ερμιτιανός και άιχνος πίνακας H εκφράζεται ως συνάρτηση των τριών βασικών πινάκων Pauli. Παρατηρούμε ότι

$$[s_i, s_j] = 2i\varepsilon_{ijk}s_k \quad (2.96)$$

όπου $s_i = \frac{1}{2}\sigma_i$. Λόγω και της πιο πάνω αντιστοιχίας των ομάδων $SO(3)$ και $SU(2)$, εύκολα συμπεραίνεται ότι οι παραπάνω πίνακες είναι οι γεννήτορες της ομάδας $SU(2)$ ⁸, με σταθερές δομής τον αντισυμμετρικό τανυστή $f_{abc} = \varepsilon_{ijk}$.

2.6 Αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

Αφού λοιπόν κατορθώσαμε να εξηγήσουμε τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις μέσω του μοναδιακού μετασχηματισμού που επιφέρουν τα στοιχεία της ομάδας $U(1)$, θα επιχειρήσουμε τώρα να κάνουμε το ίδιο και με τις άλλες δύο αλληλεπιδράσεις που κυριαρχούν στο μικρόκοσμο των στοιχειωδών σωματιδίων, την ασθενή και την ισχυρή. Θα προσπαθήσουμε δηλαδή να ερμηνεύσουμε τις αλληλεπιδράσεις αυτές σαν αποτελέσματα που επιφέρονται έπειτα από την επιβολή τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας. Οι μετασχηματισμοί αυτοί αντιστοιχούν σε ομάδες, τις ειδικές μοναδιακές ομάδες $SU(2)$ και $SU(3)$ αντίστοιχα. Πριν από αυτό, θα ήταν φρόνιμο να συνοψίσουμε όσα έχουμε δει για την αβελιανή θεωρία βαθμίδας $U(1)$, και έπειτα να προχωρήσουμε στην εξαγωγή των μη αβελιανών.

2.6.1 Ο $U(1)$ τοπικός μετασχηματισμός

Επειδή οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi \quad (2.97)$$

δεν είναι μετασχηματισμοί συμμετρίας, μας αναγκάζουν να εισαγάγουμε ένα διανυσματικό πεδίο βαθμίδας, τέτοιο ώστε να προκύπτει μια συναλλοίωτη παράγωγος

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.98)$$

(q είναι η σταθερά ζεύξης της θεωρίας βαθμίδας $U(1)$, δηλαδή το φορτίο του ηλεκτρονίου) η οποία να μετασχηματίζεται ακριβώς όπως το πεδίο:

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{i\alpha(x)}(D_\mu\psi) \quad (2.99)$$

Το πεδίο που εισάγαμε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.100)$$

⁸Βεργαδος Ι.Α., Θεωρία ομάδων μέρος β': Συνεχείς ομάδες και άλγεβρες Lie -εφαρμογές, Εκδόσεις Συμμεών, σελ.292

Η λαγκρατζιανή του πεδίου είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.101)$$

όπου για το $F_{\mu\nu}$ ισχύει

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.102)$$

και έχει μόνο κινητικό όρο καθώς ο φορέας της αλληλεπίδρασης αυτής είναι άμαζος. Τελικά, η αλληλεπίδραση ενός σπινωριακού πεδίου ύλης με το πεδίο A_μ , δίνεται από τη λαγκρατζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.103)$$

2.6.2 Ο $SU(2)$ τοπικός μετασχηματισμός

Η επόμενη περίπτωση είναι αυτή της μη αβελιανής θεωρίας βαθμίδας $SU(2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι ένα σπινωριακό πεδίο του οποίου η λαγκρατζιανή είναι η (2.57). Κατά τα γνωστά, κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, για το πεδίο θα ισχύει:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\theta_i(x)\tau_i/2}\psi, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.104)$$

Η ομάδα $SU(2)$, σύμφωνα με τον πίνακα του προηγούμενου υποκεφαλαίου, έχει $n^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ παραμέτρους και γεννήτορες. Οπότε σύμφωνα με την (2.84), $\theta_i(x)$ είναι οι παράμετροι και $\tau_i/2$ οι γεννήτορες της ομάδας. Οι γεννήτορες αποδείχθηκε παραπάνω ότι είναι οι πίνακες του Pauli, για τους οποίους ισχύει η μεταθετική σχέση (2.96).

Ο μετασχηματισμός του πεδίου (2.104), επιφέρει αυτομάτως τις εξής μεταβολές:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\theta_i(x)\tau_i/2}\bar{\psi} \quad (2.105)$$

$$(\partial_\mu\psi) \rightarrow (\partial_\mu\psi)' = i\theta_i(x)\frac{\tau_i}{2}e^{i\theta_i(x)\tau_i/2}\psi + e^{i\theta_i(x)\tau_i/2}\partial_\mu\psi \quad (2.106)$$

Συνεπώς όπως είναι αναμενόμενο, ο πρώτος όρος της (2.106) που προκύπτει από την παραγωγή κατά παράγοντες, θα δημιουργεί πρόβλημα στην αναλλοιότητα της \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi)' - m\psi'\bar{\psi}' \\ &= e^{-i\theta_i(x)\tau_i/2}\bar{\psi}i\gamma^\mu\left(i\theta_i(x)\frac{\tau_i}{2}\psi + \partial_\mu\psi\right)e^{i\theta_i(x)\tau_i/2} - e^{i\theta_i(x)\tau_i/2}e^{-i\theta_i(x)\tau_i/2}m\psi\bar{\psi} \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi\bar{\psi} - \bar{\psi}\gamma^\mu\theta_i(x)\frac{\tau_i}{2}\psi \\ &= \mathcal{L} - \bar{\psi}\gamma^\mu\theta_i(x)\frac{\tau_i}{2}\psi \\ \Rightarrow \delta\mathcal{L} &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\theta_i(x)\frac{\tau_i}{2}\psi \end{aligned} \quad (2.107)$$

Επομένως, έπειτα από αξιωματική απαίτηση της αναλλοιώτητας της \mathcal{L} , καταφεύγουμε στην αναβάθμιση της παραγώγου σε συναλλοίωτη μορφή.

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (2.108)$$

η οποία κατά τα γνωστά μετασχηματίζεται όπως το πεδίο :

$$(D_\mu \psi) \rightarrow (D_\mu \psi)' = U D_\mu \psi = e^{i\theta_i(x)\tau_i/2} D_\mu \psi \quad (2.109)$$

Στην (2.108), g είναι η σταθερά ζεύξης μιας θεωρίας βαθμίδας $SU(2)$, ενώ όπως φαίνεται κρίθηκε απαραίτητη η εισαγωγή τριών πεδίων βαθμίδας W_μ^i τα οποία αντιστοιχούν στους τρεις γεννήτορες της ομάδας. Ο υπολογισμός των πεδίων βαθμίδας γίνεται αντικαθιστώντας την (2.108) στην (2.109):

$$\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} \tau_i W_\mu^i \right) \psi' = U \left[\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} \tau_i W_\mu^i \right) \psi \right] \quad (2.110)$$

Αφού $\psi' = U\psi$ και $\partial_\mu \psi' = \partial_\mu(U\psi) = (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi)$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) + \frac{ig}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U\psi &= U(\partial_\mu \psi) + \frac{ig}{2} U(\tau_i W_\mu^i)\psi \\ \Rightarrow (\partial_\mu U) + \frac{ig}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U &= \frac{ig}{2} U(\tau_i W_\mu^i) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση από αριστερά με U^{-1} , έχουμε:

$$(\partial_\mu U)U^{-1} + \frac{ig}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U U^{-1} = \frac{ig}{2} U(\tau_i W_\mu^i)U^{-1} \quad (2.112)$$

από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα που μας δίνει την πληροφορία για το νόμο μετασχηματισμού των πεδίων βαθμίδας.

$$\frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \rightarrow \frac{\tau_i}{2} W_\mu^{i'} = U \left(\frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \right) U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (2.113)$$

Τώρα, θεωρώντας τις παραμέτρους του μετασχηματισμού βαθμίδας, απειροστές: $\theta_i(x) \ll 1$, βρίσκουμε το νόμο μετασχηματισμού του πεδίου (για απειροστές μεταβολές). Αρχικά αναπτύσσουμε το U , και κρατάμε μέχρι και τον όρο πρώτης τάξης

$$U = e^{i\theta_i(x)\tau_i/2} \approx 1 + i\theta_i(x) \frac{\tau_i}{2} \quad (2.114)$$

έπειτα παίρνουμε μια πολύ μικρή μεταβολή των πεδίων βαθμίδας

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^i + \delta W_\mu^i \quad (2.115)$$

και τέλος υπολογίζουμε ξεχωριστά τα δύο μέλη της (2.109):

Πρώτο μέλος:

$$\begin{aligned}
(D_\mu \psi)' &= D'_\mu \psi' \approx (\partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i)(1 + i\theta_j(x) \frac{\tau_j}{2})\psi \\
&= \left[\partial_\mu \psi + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \psi + i \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu (\theta_j \psi) - g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta_j \frac{\tau_j}{2} \psi \right] \\
&= \partial_\mu \psi + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \psi + ig \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \psi + i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta_j) \psi + i \frac{\tau_j}{2} \theta_j \partial_\mu \psi \\
&\quad - g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta_j \frac{\tau_j}{2} \psi \tag{2.116}
\end{aligned}$$

Δεύτερο μέλος:

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_i \tau_i / 2} (D_\mu \psi) &\approx \left(1 + i\theta_i \frac{\tau_i}{2} \right) \left(\partial_\mu + ig \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \right) \psi \\
&= \partial_\mu \psi + ig \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \psi + i\theta_i \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu \psi - g \frac{\tau_i}{2} \theta_i \tau_j W_\mu^j \psi \tag{2.117}
\end{aligned}$$

τα εξισώνουμε

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \psi + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \psi + ig \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \psi + i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta_j) \psi + i \frac{\tau_j}{2} \theta_j \partial_\mu \psi - g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta_j \frac{\tau_j}{2} \psi \\
= \partial_\mu \psi + ig \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \psi + i\theta_i \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu \psi - g \frac{\tau_i}{2} \theta_i \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \psi \tag{2.118}
\end{aligned}$$

και αφού απαλείψουμε τους ίδιους όρους, λύνουμε ως προς τον όρο που περιέχει το $\delta W_\mu^i \psi$:

$$\begin{aligned}
ig \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \psi &= -i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta_j) \psi + g \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta_j \frac{\tau_j}{2} \psi - g \frac{\tau_i}{2} \theta_i \tau_j W_\mu^j \psi \\
&= -i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta_j) \psi + \frac{g}{4} (\tau_i W_\mu^i \theta_j \tau_j - \tau_i \theta_i \tau_j W_\mu^j) \psi \\
&= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta_i) \psi + \frac{g}{4} (\tau_j W_\mu^j \theta_i \tau_i - \tau_i \theta_i \tau_j W_\mu^j) \psi \\
&= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta_i) \psi + \frac{g}{4} \theta_i W_\mu^j (\tau_j \tau_i - \tau_i \tau_j) \psi \\
&= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta_i) \psi - \frac{g}{4} \theta_i W_\mu^j 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k \psi \\
&= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta_i) \psi - i \frac{g}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_j W_\mu^k \tau_i \psi \tag{2.119}
\end{aligned}$$

Και τώρα βρίσκουμε το $\delta W_\mu^i \psi$:

$$\delta W_\mu^i = -\frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i - \varepsilon_{ijk} \theta_j W_\mu^k \tag{2.120}$$

Συνεπώς, αν επιβάλουμε απειροστούς τοπικούς μετασχηματισμούς, τα πεδία βαθμίδας θα μετασχηματιστούν ως εξής:

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^{i'} = W_\mu^i - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i(x) - \varepsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \tag{2.121}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να βρούμε την ελεύθερη λαγκρατζιανή των τριών διανυσματικών πεδίων βαθμίδας που προέκυψαν και έπειτα να χτίσουμε την αναλλοίωτη λαγκρατζιανή του αρχικού σπινωριακού πεδίου Dirac. Πρέπει λοιπόν να βρούμε τον τανυστή που γενικεύει τον (2.102), αφού και σε αυτήν την περίπτωση ψάχνουμε μια λαγκρατζιανή στην οποία να μην περιέχεται δυναμικός όρος αλλά μόνο αναλλοίωτος (κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(2)$) κινητικός όρος. Ο όρος αυτός θα πρέπει επίσης να μην επηρεάζεται από το μετασχηματισμό του πεδίου (2.121).

Για να βρούμε τον τανυστή που επεκτείνει τον $F_{\mu\nu}$, χρησιμοποιούμε το μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων. Κάνουμε αρχικά μια παράκαμψη, δουλεύοντας για την περίπτωση $U(1)$ και έπειτα κάνουμε την αντιστοίχιση για την περίπτωση $SU(2)$. Υπολογίζουμε το μεταθέτη:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\mu) \\
&= \partial_\mu\partial_\nu + iq\partial_\mu A_\nu + iqA_\mu\partial_\nu - q^2 A_\mu A_\nu \\
&\quad - \partial_\nu\partial_\mu - iq\partial_\nu A_\mu - iqA_\nu\partial_\mu + q^2 A_\nu A_\mu \\
&= g_{\mu\nu}\partial^\nu\partial_\nu + iq\partial_\mu A_\nu + iqg_{\mu\nu}A^\nu\partial_\nu - q^2 g_{\mu\nu}A^\nu A_\nu \\
&\quad - g_{\mu\nu}\partial_\nu\partial^\nu - iq\partial_\nu A_\mu - iqg_{\mu\nu}A^\mu\partial_\mu + q^2 g_{\mu\nu}A^\mu A_\mu \\
&= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&\Rightarrow [D_\mu, D_\nu] = iqF_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Επειδή για το μετασχηματισμό της αναλλοίωτης παραγώγου ισχύει ότι

$$(D_\mu\psi)' = U(D_\mu\psi) = UD_\mu U^{-1}U\psi \Rightarrow D'_\mu = UD_\mu U^{-1} \tag{2.123}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο μεταθέτης των μετασχηματισμένων συναλλοίωτων παραγώγων θα είναι:

$$\begin{aligned}
[D'_\mu, D'_\nu] &= [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] \\
&= UD_\mu U^{-1}UD_\nu U^{-1} - UD_\nu U^{-1}UD_\mu U^{-1} \\
&= UD_\mu D_\nu U^{-1} - UD_\nu D_\mu U^{-1} \\
&= U[D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu]U^{-1} \\
&= U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} = iqUF_{\mu\nu}U^{-1}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Από όπου και άμεσα προκύπτει ότι:

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{2.125}$$

Μέσω λοιπόν της (2.124), επαληθεύουμε χωρίς πολύ κόπο, αν και λίγο καθυστερημένα, ότι για $U = e^{i\theta(x)}$ η ελεύθερη λαγκρατζιανή του φωτονικού πεδίου (2.101) παραμένει αναλλοίωτη.

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}UF_{\mu\nu}U^{-1}UF^{\mu\nu}U^{-1} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L} \tag{2.126}$$

Οπότε, αναλογικά, για τους μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(2)$ γίνονται οι κατάλληλες μετατροπές ώστε να υπολογίσουμε τον τανυστή $W_{\mu\nu}^i$ που γενικεύει τον $F_{\mu\nu}$ και κατέπεκταση τη λαγκρατζιανή των πεδίων που αρμόζει στην περίπτωση αυτή. Οπότε, κατά αντιστοιχία λοιπόν με την (2.122), με συναλλοίωτη παράγωγο την (2.108) προκύπτει ότι:

$$[D_\mu, D_\nu] = ig \frac{\tau_i}{2} W_{\mu\nu}^i \quad (2.127)$$

όπου ο τανυστής $W_{\mu\nu}^i$ βρίσκεται υπολογίζοντας αναλυτικά τον παραπάνω μεταθέτη:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i)(\partial_\nu + ig \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j) \\ &\quad - (\partial_\nu + ig \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j)(\partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu + ig \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu W_\nu^j + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \partial_\nu - g^2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu - ig \frac{\tau_i}{2} \partial_\nu W_\mu^i - ig \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \partial_\mu + g^2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \\ &= ig \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu W_\nu^j + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \partial_\nu - ig \frac{\tau_i}{2} \partial_\nu W_\mu^i - ig \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \partial_\mu \\ &\quad - g^2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j + g^2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu W_\nu^i + ig \frac{\tau_i}{2} g_{\mu\nu} W_\mu^i \partial^\mu - ig \frac{\tau_i}{2} \partial_\nu W_\mu^i - ig \frac{\tau_i}{2} g_{\mu\nu} W^{\mu i} \partial_\mu \\ &\quad - \frac{g^2}{4} g_{\mu\nu} W^{\nu i} W_\nu^j \tau_i \tau_j + \frac{g^2}{4} g_{\mu\nu} W_\nu^j W^{\nu i} \tau_j \tau_i \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - \frac{g^2}{4} g_{\mu\nu} (W^{\nu i} W_\nu^j \tau_i \tau_j - W^{\nu i} W_\nu^j \tau_j \tau_i) \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - \frac{g^2}{4} W_\mu^i W_\nu^j (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i) \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - \frac{g^2}{4} W_\mu^i W_\nu^j 2i \varepsilon_{ijk} \tau_k \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - ig^2 \frac{\tau_i}{2} \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ &= ig \frac{\tau_i}{2} \underbrace{(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k)}_{W_{\mu\nu}^i} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Οπότε, με τον τρόπο αυτό βρήκαμε πως ορίζονται τα διανυσματικά πεδία βαθμίδας $W_{\mu\nu}^i$:

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (2.129)$$

Σε σύγκριση με τον (2.102) παρατηρούμε ότι στον τανυστή $W_{\mu\nu}^i$ υπεισέρχεται ακόμη ένας όρος. Αυτό δεν είναι ούτε τυχαίο ούτε παραβλέψιμο, αλλά θα το αναλύσουμε παρακάτω αφού βρούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα και για την ειδική ομάδα $SU(3)$.

Η λαγκρατζιανή λοιπόν που θα περιγράψει τα διανυσματικά πεδία που ανέκυψαν θα είναι αντίστοιχη με την (2.101):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \quad (2.130)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο μεταθέτης $[D'_\mu, D'_\nu]$ σύμφωνα με τις (2.122)-(2.125) είναι:

$$\begin{aligned} [D'_\mu, D'_\nu] &= U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} = igU\frac{\tau_i}{2}W_{\mu\nu}^iU^{-1} \\ &= igU\frac{\tau_i}{2}U^{-1}UW_{\mu\nu}^iU^{-1} = ig\frac{\tau'_i}{2}W_{\mu\nu}^{i'} \\ \Rightarrow W_{\mu\nu}^{i'} &= UW_{\mu\nu}^iU^{-1} \end{aligned} \quad (2.131)$$

εύκολα φαίνεται πως η λαγκρατζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους $SU(2)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^{i'} W^{\mu\nu i'} = -\frac{1}{4}(UW_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}U^{-1}UW^{\mu\nu i}U^{-1}) \\ &= -\frac{1}{4}UW_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}U^{-1} = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.132)$$

Συνεπώς η λαγκρατζιανή που δίνει την αλληλεπίδραση των διανυσματικών πεδίων βαθμίδας (W_{μ}^i) της $SU(2)$ με ένα σπινωριακό πεδίο ύλης ψ θα είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} + \bar{\psi}iD_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.133)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο αυτήν της εξίσωσης (2.108)

Η θεωρία βαθμίδας $SU(2)$ συνδέεται άμεσα με την περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2.6.3 Ο $SU(3)$ μετασχηματισμός

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία για τη μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας $SU(3)$, άμεσα εξάγονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα (π.χ. τα πεδία βαθμίδας). Προς αποφυγή επαναλήψεων, όπου κρίνεται απαραίτητο οι ενδιάμεσες πράξεις θα παραλείπονται. Χρησιμοποιώντας πάλι ένα σπινωριακό πεδίο του οποίου η λαγκρατζιανή είναι η (2.57), κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας ισχύει ότι:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\theta_i(x)\lambda_i/2}\psi, \quad i = 1, 2 \dots 8 \quad (2.134)$$

Η ομάδα $SU(3)$, έχει $n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ παραμέτρους και γεννήτορες. Οπότε σύμφωνα με την (2.84), $\theta_i(x)$ είναι οι παράμετροι και $\lambda_i/2$ οι γεννήτορες της ομάδας. Οι γεννήτορες της ομάδας είναι οκτώ πίνακες 3×3 , άιχνοι, γραμμικώς ανεξάρτητοι και είναι γνωστοί ως οι πίνακες του Gell-Mann, οι οποίοι

γενικεύουν τους 2×2 πίνακες του Pauli και υπακούουν στην εξής μεταθετική σχέση:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \quad (2.135)$$

Οι πίνακες του Gell-Mann είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.136)$$

και οι μη μηδενικές σταθερές δομής είναι:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{147} &= f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Ο μετασχηματισμός του πεδίου (2.134), επιφέρει τις εξής μεταβολές:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\lambda_i(x)\tau_i/2} \bar{\psi} \quad (2.138)$$

$$(\partial_\mu \psi) \rightarrow (\partial_\mu \psi)' = i\theta_i(x) \frac{\lambda_i}{2} e^{i\theta_i(x)\lambda_i/2} \psi + e^{i\theta_i(x)\lambda_i/2} \partial_\mu \psi \quad (2.139)$$

Ο πρώτος όρος της (2.139) χαλάει την αναλλοιώτητα της \mathcal{L} , περισεύει δηλαδή ένας όρος:

$$\delta \mathcal{L} = -\bar{\psi} \gamma^\mu \theta_i(x) \frac{\lambda_i}{2} \psi \quad (2.140)$$

Όπως λοιπόν πράξαμε και στην περίπτωση της $SU(2)$, έτσι και εδώ θεωρώντας σα θεμελιώδη απαίτηση της φύσης την αναλλοιώτητα της λαγκρανζιανής, αναβαθμίζουμε την παράγωγο σε συναλλοιώτη.

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i \quad (2.141)$$

έτσι ώστε να μετασχηματίζεται όπως το πεδίο:

$$(D_\mu \psi) \rightarrow (D_\mu \psi)' = U D_\mu \psi = e^{i\theta_i(x)\lambda_i/2} D_\mu \psi \quad (2.142)$$

Στην (2.141), g είναι η σταθερά ζεύξης της θεωρίας βαθμίδας $SU(3)$ και G_μ^i είναι τα οκτώ πεδία βαθμίδας (λόγω των 8 γεννητόρων) τα οποία αναγκαστικά

εισάγαμε ως τίμημα για τη συναλλοίωτη παράγωγο και κατ' επέκταση για την αναλλοιότητα της λαγκρατζιανής. Ο υπολογισμός των πεδίων βαθμίδας γίνεται αντικαθιστώντας την (2.141) στην (2.142) και πέρνοντας απειροστή μεταβολή των παραμέτρων, καταλήγουμε:

$$\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\tau_i W_\mu^{i'}\right)\psi' = U \left[\left(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\tau_i W_\mu^i\right)\psi\right] \quad (2.143)$$

Επαναλαμβάνοντας ακριβώς τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε για τη διαδικασία εύρεσης των πεδίων βαθμίδας της $SU(2)$, βρίσκουμε ότι τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται ως εξής:

$$G_\mu^i \rightarrow G_\mu^{i'} = G_\mu^i - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i(x) - f_{ijk}\theta^j(x)G_\mu^k \quad (2.144)$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την ελεύθερη λαγκρατζιανή των οκτώ διανυσματικών πεδίων βαθμίδας που προέκυψαν και έπειτα να χτίσουμε την αναλλοίωτη λαγκρατζιανή του αρχικού σπινωριακού πεδίου Dirac. Κατά τα γνωστά ψάχνουμε μια λαγκρατζιανή στην οποία να μην περιέχεται δυναμικός όρος αλλά μόνο αναλλοίωτος (κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(3)$) κινητικός όρος. Ο όρος αυτός θα πρέπει επίσης να μην επηρεάζεται από το μετασχηματισμό του πεδίου (2.144).

Όπως και στην περίπτωση της προηγούμενης μη αβελιανής θεωρίας βαθμίδας, χρησιμοποιούμε το μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων και ο ταυυστής του πεδίου προκύπτει.

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - gf_{ijk}G_\mu^j G_\nu^k \quad (2.145)$$

Η ζητούμενη ελεύθερη λαγκρατζιανή που περιγράφει λοιπόν τα διανυσματικά πεδία θα είναι κατ' αντιστοιχία με την (2.130)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} \quad (2.146)$$

Συνεπώς, για την αλληλεπίδραση των πεδίων βαθμίδας G_μ^i της $SU(3)$ με ένα σπινωριακό πεδίο Dirac ψ θα είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.147)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο αυτήν της εξίσωσης (2.141).

Όπως είδαμε ότι από τη θεωρία βαθμίδας $U(1)$ προκύπτει η θεωρία αλληλεπίδρασης του ηλεκτρομαγνητισμού, κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED), αντίστοιχα από τη θεωρία βαθμίδας $SU(3)$ προκύπτει η θεωρία που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, η κβαντική χρωμοδυναμική (QCD). Η εξίσωση (2.147) είναι η λαγκρατζιανή που δίνει την αλληλεπίδραση σπινωριακού πεδίου, δηλαδή των κουαρκ, με τα πεδία βαθμίδας, τα γκλουόνια. Τα κουάρκ χαρακτηρίζονται από έναν κβαντικό αριθμό που ονομάζεται χρώμα.

Το κάθε κουάρκ διαφορετικής γεύσης (διαφορετικού είδους) λοιπόν μπορεί να εμφανιστεί σε τρεις διαφορετικές καταστάσεις (τρία διαφορετικά χρώματα κόκκινο, μπλε, πράσινο). Παρ'όλο που το κάθε κουάρκ διαφορετικής γεύσης έχει διαφορετική μάζα, το ίδιο κουάρκ διαφορετικού χρώματος φέρει την ίδια μάζα. Επομένως η κάθε κυματοσυνάρτηση που περιγράφει ένα κουάρκ στην ουσία είναι ένα διάνυσμα-στήλη τριών συνιστωσών (για τριπλέτα). Βέβαια, όπως είπαμε, η (2.147) περιγράφει την αλληλεπίδραση των κουάρκ με τα μποζόνια βαθμίδας, αντικαθιστώντας όμως κάθε φορά τη μάζα του κουάρκ που μελετούμε (6 συνολικά διαφορετικές λαγκρατζιανές, αφού κουάρκ διαφορετικής γεύσης έχουν διαφορετική μάζα).

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r \quad \bar{\psi}_b \quad \bar{\psi}_g) \quad (2.148)$$

Στη λαγκρατζιανή βέβαια του σπινωριακού πεδίου που περιγράφει ένα κουάρκ (φερμιόνιο με σπιν 1/2) (2.57) δεν επιφέρεται κάποια αλλαγή, απλά τώρα το ψ δεν είναι ένας σπινόρας Dirac αλλά, μια τριπλέτα που το κάθε στοιχείο της είναι ένας σπινόρας.

2.7 Συμπεράσματα

Όπως φάνηκε στο τελευταίο υποκεφάλαιο, για να εξάγουμε τα πεδία βαθμίδας της $SU(3)$ δε χρειάστηκε επιπλέον εργασία. Το μόνο που χρειάστηκε ήταν να γενικεύσουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην περίπτωση της $SU(2)$. Ανάλογα λοιπόν, μπορούμε να εξάγουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για οποιαδήποτε θεωρία $SU(n)$. Γενικά, όλες αυτές οι μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας ονομάζονται θεωρίες Yang-Mills επειδή οι δυο αυτοί επιστήμονες ήταν οι πρώτοι που έγραψαν την $SU(2)$.

Όπως είδαμε στις (2.129) και (2.145), στους ορισμούς των τανυστών πεδίου των θεωριών βαθμίδας $SU(2)$ και $SU(3)$ αντίστοιχα υπάρχει ένας όρος παραπάνω συγκριτικά με τον τανυστή πεδίου της $U(1)$, στην (2.102). Η φυσική σημασία των παραπάνω όρων έγκειται στην παρακάτω διαφορά.

Για τη θεωρία $U(1)$ με λαγκρατζιανή την (2.101), από τις εξισώσεις Euler-Langrange απορρέουν οι εξισώσεις Maxwell.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.149)$$

Όμως για τις θεωρίες $SU(2)$ και $SU(3)$ με λαγκρατζιανή την (2.130) και (2.146) αντίστοιχα, οι εξισώσεις Euler-Langrange δίνουν:

$$\partial_\nu W^{\mu\nu i} = g_2 \varepsilon_{ijk} W_\nu^j W^{\mu\nu k} \quad (2.150)$$

$$\partial_\nu G^{\mu\nu i} = g_3 f_{ijk} G_\nu^j G^{\mu\nu k} \quad (2.151)$$

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι, η χαρακτηριστική διαφορά που υπάρχει ανάμεσα σε μια αβελιανή και μια μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας γίνεται τώρα φανερό

από το δεύτερο μέλος των παραπάνω εξισώσεων. Αντίθετα με ότι ισχύει για ένα αβελιανό πεδίο, ένα μη αβελιανό πεδίο ζευγνύεται με τον εαυτό του, ενεργώντας σαν πηγή του εαυτού του. Με άλλα λόγια, αντίθετα με ένα αβελιανό πεδίο που δεν μεταφέρει το ίδιο φορτίο και δεν ενεργεί σαν πηγή του εαυτού του (όπως πχ συμβαίνει με το φωτόνιο), ένα μη αβελιανό πεδίο μεταφέρει αντίστοιχο φορτίο και ενεργεί σαν πηγή του εαυτού του (αυτό που συμβαίνει με τα W και G)⁹.

Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό εξάγαμε λανγκραντζιανές που δίνουν την αλληλεπίδραση φερμιονίων με τα μποζόνια βαθμίδας, τα οποία προέκυψαν άμαζα ώστε οι λανγκραντζιανές να παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς. Στο κεφάλαιο που έπεται αφ' ενός θα δούμε πως από τις θεωρίες βαθμίδας που αναλύσαμε παραπάνω καταφέρνουμε να χτίσουμε ένα ενιαίο μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων της φύσης και αφ' ετέρου θα δούμε το μηχανισμό με τον οποίο τα διανυσματικά μποζόνια αποκτούν μάζα.

⁹Βαγιονάκης Ε.Κ., Σωματιδιακή φυσική: Μια εισαγωγή στη βασική δομή της ύλης, 2008, σελ.97-98

Κεφάλαιο 3

Το καθιερωμένο πρότυπο της φυσικής

3.1 Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας-Κρυμμένη συμμετρία

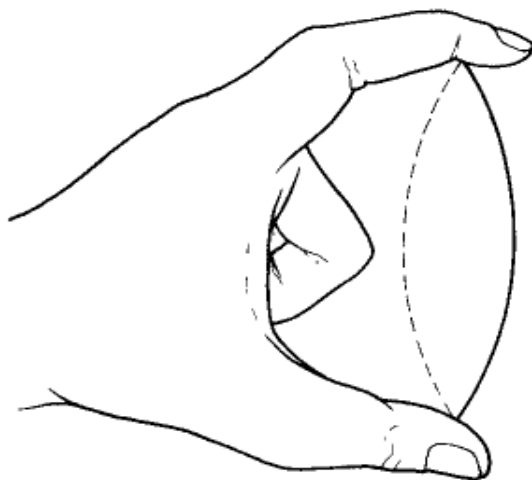
Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε πως τα πεδία βαθμίδας που εισάγαμε στη λανγκραντζιανή έπρεπε να είναι άμαζα ώστε να μην καταστρέφεται η αναλλοιωτότητά της. Όσον αφορά το φωτόνιο και τα γκλουόνια, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα αφού η απαίτηση να είναι άμαζα συμπίπτει με τα πειραματικά αποτελέσματα. Όμως, αναδύεται ένα μεγάλο πρόβλημα αφού όπως είδαμε για τη διατήρηση της αναλλοιωτότητας θα πρέπει και τα πεδία βαθμίδας της $SU(2)$ να είναι άμαζα, πράγμα το οποίο αντιτίθεται στο πείραμα που μας λέει ότι τα μποζόνια αυτά έχουν μάζα της τάξης των $100 GeV$, μάζα καθόλου αμελητέα. Το πρώτο πράγμα λοιπόν που τίθεται υπό αμφισβήτηση είναι η ad hoc απαίτηση της αναλλοιωτότητας. Δηλαδή, γιατί να μην εισάγουμε έναν όρο μάζας $m^2 W_\mu W^\mu$ στη λαγκραντζιανή και ας αγνοήσουμε το σπάσιμο της συμμετρίας ως προς τους τοπικούς μετασχηματισμούς; Η απάντηση είναι ότι αν πράξουμε έτσι και εισάγουμε τον όρο μάζας, αντιμετωπίζουμε μη επανακανονικοποιησιμες αποκλίσεις που καθιστούν τη θεωρία άχρηστη, αφού μια θεωρία για να είναι συνεπής και να δίνει προβλέψεις για το πείραμα, πρέπει να είναι επανακανονικοποιήσιμη. Δηλαδή, ένας συνεπής χειρισμός των απειριών που εμφανίζονται σε μια θεωρία πεδίου στους όρους ανώτερης τάξης της θεωρίας διαταραχών, απορροφώντας τους σε ένα πεπερασμένο αριθμό παραμέτρων. Συμπερασματικά, το να βάλουμε "με το χέρι" έναν όρο μάζας και να αμελήσουμε την άρση της αναλλοιωτότητας, οδηγεί σε αδιέξοδο. Υπάρχει όμως άλλος τρόπος εισαγωγής του όρου μάζας χωρίς να σπάει η αναλλοιωτότητα της λαγκραντζιανής; Η απάντηση είναι καταφατική και η εισαγωγή του απαραίτητου όρου μάζας στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις συμβαίνει μέσω του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας, με το μηχανισμό Higgs .

Έστω ένα φυσικό σύστημα το οποίο διέπεται από κάποια συμμετρία. Ό-

ταν η βασική κατάσταση -δηλαδή το κενό- (και οι λύσεις της θεωρίας) παύει να υπακούει στη συμμετρία αυτή, τότε έχουμε σπάσιμο της συμμετρίας. Ο προσδιορισμός αυθόρμητο προσδίδεται επειδή το σπάσιμο της συμμετρίας συμβαίνει χωρίς να έχει επέμβει κάποιος εξωτερικός παράγοντας. Επομένως, αφού η βασική κατάσταση έχει πάψει να υπακούει στην αρχική συμμετρία, ολόκληρο το σύστημα δε διέπεται πια από τη συμμετρία αυτή. Με άλλα λόγια, αν έχουμε κάποιο σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, περιγράφεται από κάποια αρχική λαγκρατζιανή και υπακούει σε κάποια συμμετρία, μετά από το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας το σύστημα αυτό περνάει σε μια άλλη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας όπου η λαγκρατζιανή πια δεν υπακούει στην αρχική συμμετρία. Η αρχική συμμετρία είναι πλέον "κρυμμένη" στην αυθαίρετη επιλογή της νέας, ασύμμετρης, θεμελιώδους κατάστασης. Τέτοια παραδείγματα υπάρχουν αρκετά στη φύση και θα αναφερθούν παρακάτω όπου κατηγοριοποιούμε τα αυθόρμητα σπασίματα συμμετρίας ανάλογα με το αν είναι διακριτή ή συνεχής η αρχική συμμετρία.

3.1.1 Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας

Σε μακροσκοπική κλίμακα, στην καθημερινή ζωή, αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας παρατηρείται στο σύστημα όπου ένας χάρακας πιέζεται από το δείκτη και τον αντίχειρα ενός χεριού, όπως φαίνεται στην εικόνα.



Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας ενός χάρακα που δέχεται στα άκρα του θλιπτική δύναμη. Η δύναμη αυτή θα το αναγκάσει να μεταπηδήσει σε μια άλλη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας.

Όταν η δύναμη που ασκούν τα δάχτυλα στα άκρα του χάρακα φτάσουν μια οριακή τιμή, τότε ο χάρακας λυγίζει προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά. Ο χάρακας έχει μόνο αυτές τις δύο επιλογές και το ποια τελικά θα επιλέξει δεν παίζει κανένα ρόλο αφού και οι δύο καταστάσεις είναι ισοδύναμες και αποτελούν καταστάσεις ελάχιστης ενέργειας. Η αρχική διακριτή συμμετρία λοιπόν ως προς το αν κοιτάμε το σύστημα από τα αριστερά ή από τα δεξιά σπάει αυθόρμητα και το νέο σύστημα δεν υπακούει σ'αυτή.

Έστω τώρα ένα σύστημα που περιγράφεται από τη λαγκρατζιανή ενός

πραγματικού βαθμωτού πεδίου

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right) \quad \lambda > 0 \quad (3.1)$$

Η λαγκρατζιανή αυτή υπακούει στη διακριτή συμμετρία

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi \quad (3.2)$$

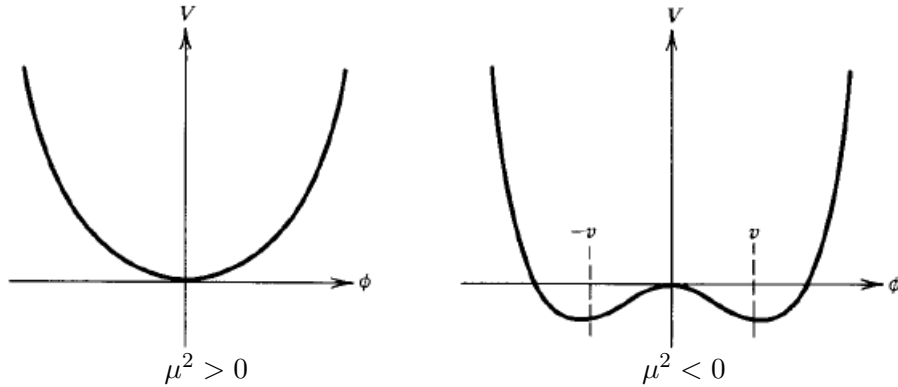
γεγονός το οποίο φαίνεται με απλή αντικατάσταση στην (3.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi')^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi'^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi'^4\right) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(-\phi'))^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2(-\phi')^2 + \frac{1}{4}\lambda(-\phi')^4\right) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right) = \mathcal{L} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Το δυναμικό της λαγκρατζιανής (3.1) είναι

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (3.4)$$

και η μορφή του εξαρτάται από το αν η σταθερά μ^2 παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποσότητα μ^2 δεν είναι απαραίτητα το τετράγωνο μιας πραγματικής μάζας, αλλά μια παράμετρος. Η γραφική παράσταση του δυναμικού σε κάθε περίπτωση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τώρα μελετούμε τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις ξεχωριστά αναζητώντας το ελάχιστο του δυναμικού (ή αλλιώς τη θεμελιώδη κατάσταση ή πιο απλά, το κενό), έτσι ώστε να αναπτύξουμε τα πεδία γύρω από τις τιμές αυτές, για να ορίσουμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή τα σωματίδια της θεωρίας.

Αν $\mu^2 > 0$: Στην περίπτωση αυτή, η λαγκρατζιανή (3.1) περιγράφει ένα βαθμωτό πεδίο μάζας μ . Εύκολα μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με τη λαγκρατζιανή της εξίσωσης Klein-Gordon (2.26). Βέβαια στη λαγκρατζιανή (3.1) υπάρχει και ένας όρος ϕ^4 ο οποίος φανερώνει την ύπαρξη

μιας κορυφής τεσσάρων σωματιδίων με σταθερά σύζευξης λ . Με άλλα λόγια, το πεδίο ϕ είναι ένα πεδίο που αλληλεπιδρά και με τον εαυτό του. Υπολογίζουμε το ελάχιστο του δυναμικού για να βρούμε σε ποια τιμή του ϕ είναι η θεμελιώδης κατάσταση.

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} \mu^2 + \lambda \phi^4 \right) = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0$$

$$\phi (\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \quad \text{ή} \quad \phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (3.5)$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή $\lambda > 0$ και $\mu^2 > 0$, η τελευταία ισότητα απορρίπτεται και το κενό της θεωρίας μας βρίσκεται στο $\phi = 0$ (όπως φαίνεται και στο αριστερό γράφημα της παραπάνω εικόνας). Η θεμελιώδης αυτή κατάσταση σέβεται τη διακριτή συμμετρία κατοπτρισμού $\phi \rightarrow -\phi$.

Av $\mu^2 < 0$: Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς ξεφεύγει από τετριμμένα αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα που βρήκαμε στην (3.5) κατά την ελαχιστοποίηση του δυναμικού και το αποκλείσαμε στην προηγούμενη περίπτωση, τώρα είναι μια λύση αποδεκτή

$$\phi = \pm v \quad \text{όπου} \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (3.6)$$

ενώ η λύση $\phi = 0$ δεν ελαχιστοποιεί τώρα το δυναμικό, όπως φαίνεται και στο δεξιό γράφημα της παραπάνω εικόνας.

Για να ορίσουμε το φάσμα της θεωρίας, μελετούμε τι συμβαίνει στην περιοχή του ελαχίστου όπου $\phi = v$ παίρνοντας μικρές κβαντικές διακυμάνσεις (διαταραχές) $\eta(x)$ γύρω του, δηλαδή

$$\phi(x) = v + \eta(x) \quad (3.7)$$

Φυσικά, λόγω του ότι το αρχικό μας σύστημα διέπεται από τη διακριτή συμμετρία $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$, θα μπορούσαμε ισοδύναμα να πάρουμε τις διακυμάνσεις γύρω από το άλλο ελάχιστο, όπου $\phi = -v$, αφού ούτως ή άλλως το σύστημα θα καταλήξει αμερόληπτα είτε στη μία κατάσταση είτε

στην άλλη. Αντικαθιστώντας στη λαγκρατζιανή (3.1) την (3.7) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\partial_\mu(v + \eta))^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 (v + \eta)^2 + \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu v + \partial_\mu \eta)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 v^2 + \mu v \eta + \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \lambda (v^4 + 4v^3 \eta + 6v^2 \eta^2 + 4v \eta^3 + \eta^4) \right) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \left(\frac{1}{2} \mu^2 v^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \underline{\mu^2 \eta v} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \lambda v^4 + \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \underline{\lambda v^3 \eta} + \frac{3}{2} \lambda v^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \underline{\lambda v^2 \eta^2} - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \text{σταθ.} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Ο όρος που περιέχει το πεδίο υψωμένο στο τετράγωνο αποτελεί τον όρο μάζας του πεδίου. Συγκρίνοντας τη λαγκρατζιανή (2.26):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{3.9}$$

με τη λαγκρατζιανή (3.8) στην οποία καταλήξαμε παραπάνω, παρατηρούμε πως πλέον ο όρος μάζας έχει το ίδιο πρόσημο (στην αρχική λαγκρατζιανή δεν ίσχυε κάτι τέτοιο) και ταυτοποιώντας τους όρους παίρνουμε:

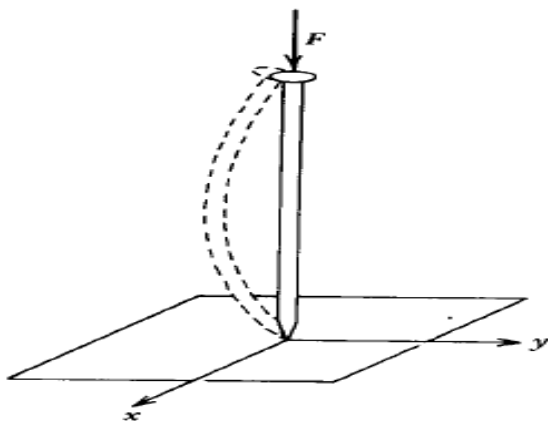
$$\frac{1}{2} m_\eta^2 = \lambda v^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.10}$$

Συνεπώς φαίνεται ότι στην περίπτωση αυτή όπου η παράμετρος μ^2 είναι αρνητική, η λαγκρατζιανή μας περιγράφει ένα φυσικό πεδίο με μάζα $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$ (γεγονός το οποίο δε φαινόταν στην αρχική λαγκρατζιανή (3.1)). Όπως προαναφέρεται, οι υψηλότερης τάξης όροι του πεδίου η αντιπροσωπεύουν αλληλεπιδράσεις του πεδίου με τον εαυτό του. Εξετάζουμε τώρα αν στην λαγκρατζιανή της (3.8), ισχύει ακόμα η αρχική συμμετρία αντιστροφής χώρου $\phi \rightarrow -\phi$. Αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό στην (3.8), διαπιστώνουμε ότι, λόγω του όρου $-\lambda v \eta^3$, δεν την αφήνει αναλλοίωτη και επομένως η αρχική συμμετρία αποτελεί παρελθόν. Στην πραγματικότητα παρ' όλο που η αρχική λαγκρατζιανή σέβεται τη συμμετρία, ενώ η δεύτερη όχι, οι δύο αυτές είναι ισοδύναμες. Δηλαδή, αν μπορούσαμε να λύσουμε τις δύο λαγκρατζιανές επακριβώς, θα παίρναμε ταυτοτικά αποτελέσματα και θα ήταν προφανές ότι οι δυο τους περιγράφουν την ίδια φυσική. Όμως αυτό δε γίνεται και έτσι αναγκαζόμαστε να δουλέψουμε με διαταραχές γύρω από τα ελάχιστα της ενέργειας. Αν χρησιμοποιούσαμε την αρχική λαγκρατζιανή (3.1), θα βρίσκαμε ότι η διαταρακτική σειρά δε συγκλίνει γιατί προσπαθούμε να αναπτύξουμε γύρω από το ασταθές σημείο $\phi = 0$. Το σωστό είναι να

χρησιμοποιήσουμε τη (3.8) αναπτύσσοντας ως προς το πεδίο $\eta(x)$ γύρω από το σταθερό κενό $\phi = v^1$. Συμπερασματικά, καταλήξαμε λοιπόν στο ότι το πεδίο ϕ έχει μάζα. Σ' αυτόν τον τρόπο γέννησης, ή ακόμα καλύτερα, αποκάλυψης της μάζας του πεδίου αναφερόμαστε με τον όρο αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.

3.1.2 Αυθόρμητο σπάσιμο εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας

Στην καθημερινή ζωή, αυθόρμητο σπάσιμο συνεχούς συμμετρίας παρατηρείται στην περίπτωση κατά την οποία πιέζουμε στα άκρα μια βελόνα όπως φαίνεται στην εικόνα.



Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας μιας βελόνας που δέχεται στα άκρα του θλιπτική δύναμη. Η δύναμη αυτή θα το αναγκάσει να μεταπηδήσει σε μια άλλη κατάσταση ελάχιστης ενέργειας.

Όταν η θλιπτική δύναμη που ασκείται ξεπεράσει μια οριακή τιμή, τότε η βελόνα θα λυγίσει προς κάποια κατεύθυνση (όχι απλά δεξιά ή αριστερά όπως στην περίπτωση του χάρακα). Η επιλογή είναι αυθαίρετη, και δεν υποκινείται από κάποιον παράγοντα. Επίσης η κατεύθυνση στην οποία μπορεί να βρεθεί λυγίζοντας η βελόνα μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Όλες οι πιθανές αυτές καταστάσεις αποτελούν τις νέες καταστάσεις ελάχιστης ενέργειας (τα νέα κενά).

Έστω λοιπόν τώρα ένα σύστημα που αποτελείται από ένα βαθμωτό μιγαδικό πεδίο $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$, ή ισοδύναμα από δύο πραγματικά ϕ_1, ϕ_2 , και περιγράφεται από τη λαγκρατζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.11)$$

η οποία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον εκτεταμένο μετασχηματισμό φάσης $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi$, δηλαδή, έχει μια $U(1)$ εκτεταμένη συμμετρία. Μελετώντας τη λαγκρατζιανή αυτή θα αγνοήσουμε τελείως την τριμμένη περίπτωση όπου η παράμετρος μ^2 είναι θετική (κατά τα γνωστά προκύπτει ότι η παράμετρος μ^2 ερμηνεύεται σαν (μάζα)²) και θα περάσουμε κατευθείαν στην περίπτωση όπου $\lambda > 0$ και $\mu^2 < 0$.

¹ Ζουπάνος Γ.: Σημειώσεις του μαθήματος Στοιχειώδη Σωματίδια II

Η λαγκρατζιανή (3.11) γράφεται αλλιώς στην παρακάτω μορφή:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_1)^2 + (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (3.12)$$

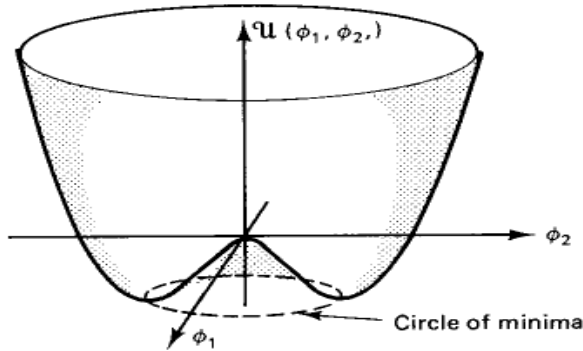
Όπως πράξαμε και στην αντίστοιχη περίπτωση της διακριτής συμμετρίας, ελαχιστοποιούμε το δυναμικό

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.13)$$

για να βρούμε ποιές είναι οι τιμές των πεδίων στις οποίες βρίσκεται (το ευσταθές) κενό.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2) = \phi^* [\mu^2 + 2\lambda (\phi^* \phi)] = 0 \\ \phi^* &= 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = \phi^* \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \\ \Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 &= -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Όπως φαίνεται ο μηδενισμός της παραγώγου του δυναμικού δίνει πως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που αποτελούν θεμελιώδεις καταστάσεις, είναι ένας κύκλος που βρίσκεται στο επίπεδο ϕ_1, ϕ_2 και έχει ακτίνα ίση με v , όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



Το γράφημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση του δυναμικού για το σύστημα ενός μιγαδικού, βαθμωτού πεδίου. Το σχήμα του θυμίζει ένα αναποδογυρισμένο μεξικάνικο καπέλο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, τώρα παίρνουμε δυο τιμές που να ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου: $\phi_1 = v$ και $\phi_2 = 0$. Όπως και στην περίπτωση της διακριτής συμμετρίας, αναπτύσσουμε γύρω από το κενό παίρνοντας μικρές διακυμάνσεις:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x)] \quad (3.15)$$

και αντικαθιστώντας στη λαγκρατζιανή (3.11), έχουμε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \left[\partial_\mu \left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right) \right]^* \partial_\mu \left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right) \\
&- \left[\mu^2 \left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right)^* \left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
&- \lambda \left[\left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right)^* \left(\frac{v + \eta(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{2} [\partial_\mu(\eta(x) + i\xi(x))]^* \partial_\mu(\eta(x) + i\xi(x)) - \frac{\mu^2}{2} [v^2 + v\eta(x) \\
&+ iv\xi(x) + v\eta(x) + \eta^2(x) + \eta(x)i\xi(x) - iv\xi(x) - i\xi(x)\eta(x) + \xi^2(x)] \\
&- \frac{\lambda}{4} [v^2 + v\eta(x) + iv\xi(x) + v\eta(x) + \eta^2(x) \\
&+ i\eta(x)\xi(x) - iv\xi(x) - i\xi(x)\eta(x) + \xi^2(x)]^2 \\
&= \frac{1}{2} [\partial_\mu\eta(x) - i\partial_\mu\xi(x)] [\partial_\mu\eta(x) + i\partial_\mu\xi(x)] - \frac{\mu^2}{2} (v^2 + 2v\eta(x) \\
&+ \eta^2(x) + \xi^2(x)) - \frac{\lambda}{4} [v^2 + 2v\eta(x) + \eta^2(x) + \xi^2(x)]^2 \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu\eta(x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu\xi(x))^2 - \frac{\mu^2}{2} v^2 - \mu^2 v\eta(x) \\
&- \frac{\mu^2}{2} \eta^2(x) - \frac{\mu^2}{2} \xi^2(x) - \frac{\lambda}{4} [v^4 + 4v^3\eta(x) + 4v^2\eta^2(x) + 2v^2\eta^2(x) \\
&+ 2v^2\xi^2(x) + 4v\eta^3(x) + 4v\eta(x)\xi^3(x) + \eta^4(x) + 2\eta^2(x)\xi^2(x) + \xi^4(x)] \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu\eta(x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu\xi(x))^2 + \mu^2\eta^2(x) + \text{σταθ.} + 3,4\epsilon\varsigma \text{ δυνάμεις των } \eta, \xi
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Η λαγκρατζιανή στην οποία καταλήξαμε δε σέβεται την αρχική συμμετρία η οποία έσπασε έπειτα από την αυθαίρετη επιλογή κενού. Για τη λαγκρατζιανή αυτή, παρατηρούμε πως ο τρίτος όρος είναι όρος πραγματικής μάζας, αφού έχει τη μορφή $-\frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2(x)$. Επομένως, η μάζα του πεδίου $\eta(x)$ θα είναι :

$$-\frac{1}{2}m_\eta^2 = \mu^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.17}$$

Για το πεδίο $\xi(x)$, παρατηρούμε πως στη λαγκρατζιανή υφίσταται κινητικός όρος αλλά απουσιάζει όρος της μορφής $-\frac{1}{2}m_\xi^2\xi^2(x)$. Αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για ένα άμαζο πεδίο. Αυτό εξηγείται αν λογαριάσουμε ότι το πεδίο $\xi(x)$ κείται στην εφαπτομένη του κύκλου (3.14), στον οποίο το δυναμικό είναι σταθερό. Το αποτέλεσμα αυτό που προέκυψε αποτελεί ένα παράδειγμα ενός γενικότερου φαινομένου που ονομάζεται θεώρημα Goldstone: Από το αυθόρμητο σπάσιμο συνεχούς συμμετρίας αναδύεται ένα άμαζο σωματίδιο που ονομάζεται σωματίδιο Goldstone. Είναι αλήθεια ότι η προσθήκη ενός ακόμα

βαθμωτού πεδίου προκαλεί σύγχυση και αποπροσανατολίζει από τον αρχικό στόχο, ο οποίος ήταν με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας να διαπιστώσουμε πως παίρνουν μάζα τα μποζόνια στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Όπως είναι λογικό η εισαγωγή ενός άμαζου (και μάλιστα μη παρατηρήσιμου) σωματιδίου θολώνει το τοπίο. Εν τέλει όμως επέρχεται ολική ανατροπή, καθώς αναβαθμίζοντας τη συμμετρία σε τοπική, καταφέρνουμε να απαλλαγούμε από τα ανεπιθύμητα μποζόνια Goldstone.

3.1.3 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας-μηχανισμός Higgs-αβελιανή περίπτωση

Περνάμε τώρα στη μελέτη του σπασίματος τοπικής συμμετρίας βαθμίδας. Αρχικά θα δουλέψουμε με την αβελιανή συμμετρία $U(1)$ και αργότερα θα επεκτείνουμε την ανάλυση και στη μη αβελιανή περίπτωση της $SU(2)$. Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην παράγραφο §2.6.1, για να γίνει η λαγκρατζιανή (3.11) αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό $U(1) : \phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$, θα πρέπει να εισαγάγουμε το άμαζο πεδίο βαθμίδας A^μ και να αναβαθμίσουμε την παράγωγο σε αναλλοίωτη:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (3.18)$$

όπου το πεδίο A_μ μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (3.19)$$

Επομένως, επιβάλλοντας τους μετασχηματισμούς στην (3.11) η gauge-αναλλοίωτη λαγκρατζιανή που προκύπτει θα είναι:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.20)$$

Αν η παράμετρος μ^2 είναι θετική τότε αποκτούμε τη λαγκρατζιανή της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής ενός βαθμωτού σωματιδίου μάζας μ . Το φερμιονικό ανάλογο αυτής της λαγκρατζιανής είναι το αποτέλεσμα που είχαμε βρει στο προηγούμενο κεφάλαιο για τους τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$, συγκεκριμένα στην εξίσωση (2.103). Παρ' όλα αυτά, θα επιλέξουμε $\mu^2 < 0$, μιας και θέλουμε να προκύψουν οι μάζες από το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Όπως πράξαμε και στην περίπτωση της εκτεταμένης συμμετρίας, μεταφέρουμε το σύστημα σε μια πραγματική κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, αναπτύσσουμε το πεδίο γύρω από μια τιμή του κενού και αντικαθιστούμε την

(3.15) στη λαγκρατζιανή (3.20).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v + \eta - i\xi)(\partial_\mu - ieA_\mu)(v + \eta + i\xi)}_{\mathcal{L}'_{kin}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{\mu^2}{2}(v + \eta - i\xi)(v + \eta + i\xi) - \frac{\lambda}{4}[(v + \eta - i\xi)(v + \eta + i\xi)]^2}_{\mathcal{L}'_{pot}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}'_{bos}} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Σπάμε τώρα τη λαγκρατζιανή \mathcal{L}' σε τρία κομμάτια για να γίνει πιο εύκολη η μελέτη της.

- Ο δυναμικός όρος \mathcal{L}'_{pot} θα δώσει τα αποτελέσματα που πήραμε και στην περίπτωση του σπασίματος της εκτεταμένης συμμετρίας, αφού η αναβάθμιση της παραγώγου δεν επιφέρει κάποια αλλαγή. Συνεπώς το δυναμικό της λαγκρατζιανής

$$\mathcal{L}'_{pot} = \frac{\mu^2}{2}(v + \eta - i\xi)(v + \eta + i\xi) + \frac{\lambda}{4}[(v + \eta - i\xi)(v + \eta + i\xi)]^2 \tag{3.22}$$

θα δώσει μετά από πράξεις έναν όρο που φέρει μάζα και μια σειρά από όρους αλληλεπίδρασης και σταθερών.

$$\mathcal{L}'_{pot} = \mu^2\eta^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda} - \lambda v(v\eta - \eta^3 - \eta\xi^3) - \frac{\lambda}{4}\eta^4 - \frac{\lambda}{2}\eta^2\xi^2 \tag{3.23}$$

- Ο όρος \mathcal{L}'_{bos} παραμένει ανεπηρέαστος από το μετασχηματισμό.
- Ο κινητικός όρος \mathcal{L}'_{kin} είναι αυτός που διαφοροποιεί τα αποτελέσματα από την εκτεταμένη περίπτωση, αφού αποτελείται από όρους οι οποίοι περιέχουν την τροποποιημένη παράγωγο. Κάνουμε λοιπόν τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{kin} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v + \eta - i\xi)(\partial_\mu - ieA_\mu)(v + \eta + i\xi) \\
&= \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta - i\partial^\mu\xi + ievA^\mu + ieA^\mu\eta + eA^\mu\xi) \cdot \\
&\quad (\partial_\mu\eta + i\partial_\mu\xi - ievA_\mu - ieA_\mu\eta + eA_\mu\xi) \\
&= \frac{1}{2}((\partial^\mu\eta)(\partial_\mu\eta) + i\partial^\mu\eta\partial_\mu\xi - ievA_\mu\partial^\mu\eta - ieA_\mu\eta\partial^\mu\eta) \\
&\quad + e\partial^\mu\eta A_\mu\xi - i\partial^\mu\xi\partial_\mu\eta + (\partial^\mu\xi)(\partial_\mu\xi) - ev\partial^\mu\xi A_\mu \\
&\quad - e\partial^\mu\xi A_\mu\eta - ie\partial^\mu\xi A_\mu\xi + ievA^\mu\partial_\mu\eta + e^2v^2 A^\mu A_\mu \\
&\quad - evA^\mu\partial_\mu\xi + e^2vA^\mu A_\mu\eta + ie^2vA^\mu A_\mu\xi + ieA_\mu\partial^\mu\eta \\
&\quad - e\partial_\mu\xi A^\mu\eta + e^2vA^\mu A_\mu\eta + e^2A^\mu A_\mu\eta^2 + ie^2A^\mu A_\mu\eta\xi \\
&\quad + eA^\mu\xi\partial_\mu\eta + ie\partial_\mu\xi A^\mu\xi - ie^2vA^\mu A_\mu\xi - ie^2A^\mu A_\mu\xi\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^2 A^\mu A_\mu \xi^2 \\
& = \frac{1}{2} [(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + (\partial^\mu \xi)(\partial_\mu \xi)] + e A_\mu \xi \partial^\mu \eta - e v A_\mu \partial^\mu \xi \\
& - e A_\mu \eta \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + e^2 v A^\mu A_\mu \eta + \frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu \eta^2 \\
& + \frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu \xi^2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Συνθέτοντας πάλι τα κομμάτια, η λαγκρατζιανή του συστήματος είναι :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' & = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + e \partial^\mu \eta A_\mu \xi \\
& - e v \partial^\mu \xi A_\mu - e \partial^\mu \xi A_\mu \eta + e^2 v A^\mu A_\mu \eta \\
& + \frac{1}{2} A^\mu A_\mu \eta^2 + \frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu \xi^2 - \mu^2 \eta^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \\
& - \lambda v (v \eta - \eta^3 - \eta \xi^3) - \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{\lambda}{2} \eta^2 \xi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Κρατώντας λοιπόν μόνο τους όρους που μας ενδιαφέρουν, παίρνουμε την τελική μορφή της λαγκρατζιανής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' & = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu - \mu^2 \eta^2 - e v A_\mu \partial^\mu \xi \\
& - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{inter.terms} + \text{const.}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ερμηνεύοντας την παραπάνω λαγκρατζιανή διαπιστώνουμε ότι το σωματιδιακό της φάσμα είναι ένα άμαζο μποζόνιο Goldstone ξ , ένα βαθμωτό μποζόνιο η που έχει μάζα και ένα πολυπόθητο μαζικό διανυσματικό μποζόνιο A_μ . Οι μάζες τους είναι:

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright \quad \frac{1}{2} m_\eta^2 & = -\mu^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \\
\blacktriangleright \quad \frac{1}{2} m_A^2 & = \frac{1}{2} e^2 v^2 \Rightarrow m_A = e v
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Μέσα λοιπόν από την παραπάνω διαδικασία καταφέραμε να αναδείξουμε τη μάζα του πεδίου βαθμίδας A_μ , αλλά ακόμα αντιμετωπίζουμε πρόβλημα από την παρουσία του άμαζου μποζονίου Goldstone. Όμως το μποζόνιο αυτό δεν είναι το μόνο πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε. Στη λαγκρατζιανή παρατηρείται και ο "περίεργος" όρος $-e v \partial_\mu \xi A^\mu$. Αν προσπαθήσουμε να τον ερμηνεύσουμε σαν αλληλεπίδραση, τότε πρόκειται για μια διαδικασία κατά την οποία το ξ μετατρέπεται σε A . Όμως ο όρος αυτής της μορφής, διγραμμικός σε δύο διαφορετικά πεδία, δείχνει ότι έχουμε ταυτοποιήσει λανθασμένα τα σωματίδια από τη λαγκρατζιανή (3.26).

Επιπλέον, υπάρχει ακόμα ένα πρόβλημα το οποίο μας υποδεικνύει ότι πρέπει να αναθεωρήσουμε τη λαγκρατζιανή μας. Αν μετρήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας της αρχικής μας λαγκρατζιανής (3.20) είναι συνολικά τέσσερις. Δύο για τα ϕ, ϕ^* και δύο εγκάρσιες συνιστώσες για το άμαζο μποζόνιο

βαθμίδας A_μ . Αν μετρήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας της λαγκρατζιανής (3.26) διαπιστώνουμε ότι έχουμε συνολικά πέντε. Δύο λόγω των η, ξ και τρεις οι βαθμοί ελευθερίας πόλωσης του μποζονίου A_μ , αφού πέρα από τους δύο που είχε λόγω των εγκάρσιων συνιστωσών, αποκτώντας μάζα, αποκτά αυτόματα έναν τρίτο (διαμήκη) βαθμό ελευθερίας. Όμως η αύξηση των βαθμών ελευθερίας είναι αδύνατο να οφείλεται σε μια απλή αλλαγή στις μεταβλητές των πεδίων. Αυτό σημαίνει πως έχουμε ερμηνεύσει λάθος τους όρους της λαγκρατζιανής καθώς κάθε πεδίο δεν αντιστοιχεί σε ξεχωριστό σωματίδιο και πως πρέπει να την απαλλάξουμε από κάποιο σωματίδιο. Το ποιο σωματίδιο θα είναι αυτό και ο τρόπος κατά τον οποίο χειριζόμαστε τη λαγκρατζιανή ώστε να απομείνουν τα σωματίδια που πρέπει, είναι η ακόλουθη.

Παρατηρούμε ότι οι διακυμάνσεις γύρω από το κενό μας μπορούν να γραφτούν:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v} \quad (3.28)$$

Στο σημείο αυτό, αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε στην αρχική λαγκρατζιανή (3.20) με ένα διαφορετικό σύνολο πραγματικών πεδίων $h(x), \theta(x), A_\mu(x)$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)e^{i\theta} \quad (3.29)$$

Γνωρίζουμε ότι η αρχική λαγκρατζιανή (3.20), παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $U(1)$. Επομένως κάνουμε ένα μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi \quad (3.30)$$

και λόγω της (3.29), ο μετασχηματισμός θα είναι:

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h)e^{i\theta}e^{-i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h) \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

Αυτή είναι μια πολύ συγκεκριμένη επιλογή της βαθμίδας όπου το $\theta(x)$ επιλέχθηκε έτσι ώστε το πεδίο h να είναι πραγματικό. Περιμένουμε λοιπόν αποτελέσματα τα οποία να είναι ανεξάρτητα από το πεδίο θ . Θα προκύψει λοιπόν η παρακάτω λαγκρατζιανή.

$$\mathcal{L}'' = \underbrace{(\partial^\mu + ieA'^\mu)\phi'^* (\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi'}_{\mathcal{L}''_{kin}} - \underbrace{\mu^2\phi'\phi'^* - \lambda(\phi'\phi'^*)^2}_{\mathcal{L}''_{pot}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}''_{bos}} \quad (3.32)$$

Όπως έχουμε επαναλάβει και παραπάνω, σπάμε τη λαγκρατζιανή \mathcal{L}'' σε τρία κομμάτια για να τη μελετήσουμε καλύτερα.

- Ο δυναμικός όρος \mathcal{L}_{pot} θα δώσει :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{pot}'' &= \mu^2 \phi' \phi'^* - \lambda (\phi' \phi'^*)^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 (v+h)(v+h) + \frac{\lambda}{4} [(v+h)(v+h)]^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 v^2 + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \mu^2 v h + \frac{\lambda}{4} [v^2 + 2vh + h^2]^2 \\
&= \frac{1}{2} \mu^2 \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \frac{\lambda}{4} [v^4 + 4v^2 h^2 + 4v^3 h \\
&\quad + h^4 + 2h^2 v^2 + 4vh^3] \\
&= -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{1}{2} \mu^2 h^2 + \frac{\lambda \mu^4}{4 \lambda^2} + \lambda v^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{1}{4} \lambda h^4 + \frac{\lambda}{2} h^2 v^2 + \lambda v h^3 \\
&\quad + \frac{\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{\lambda}{4} h^4 + \lambda v h^3 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

- ο όρος που αντιπροσωπεύει το πεδίο βαθμίδας \mathcal{L}_{bos}'' παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τους $U(1)$ μετασχηματισμούς.
- Το κομμάτι που περιέχει τους κινητικούς όρους θα γίνει :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin}'' &= \frac{1}{2} \left[\partial^\mu + ie \left(A^\mu + \frac{1}{ev} \partial^\mu \theta \right) \right] (v+h) \left[\partial_\mu - ie \left(A_\mu + \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta \right) \right] (v+h) \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial^\mu v + \partial^\mu h + ie A^\mu v + ie A^\mu h + ie \frac{1}{ev} \partial^\mu \theta v + ie \frac{1}{ev} \partial^\mu \theta h \right] \\
&\quad \cdot \left[\partial_\mu v + \partial_\mu h - ie A_\mu v - ie A_\mu h - ie \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta v - ie \frac{1}{ev} \partial_\mu \theta h \right]
\end{aligned}$$

κρατώντας μόνο τα γινόμενα που χρειάζονται για εξοικονόμηση χώρου

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} e^2 A^\mu A_\mu h^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} (ie A^\mu h) (-ie A_\mu v) + \frac{1}{2} ie A^\mu v (-ie A_\mu h) \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} e A^\mu A_\mu h^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} e^2 v A^\mu A_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v A^\mu h A_\mu \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} e A^\mu A_\mu h^2 + e^2 v A^\mu A_\mu h \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Συνοπώς, ενώνοντας τα κομμάτια παίρνουμε την ολική λαγκρατζιανή

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{tot}'' &= \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} e A^\mu A_\mu h^2 + e^2 v A^\mu A_\mu h \\
&\quad + \mu^2 h^2 - \lambda v^3 h - \frac{\lambda}{4} h^4 - \lambda v h^3 - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Πράγματι, όπως αποδείχθηκε, η θεωρία μας είναι ανεξάρτητη από το σωματίδιο θ , δηλαδή, το σωματίδιο Goldstone έχει εξαφανιστεί. Ας δούμε πάλι αναλυτικά το φάσμα των σωματιδίων που ανέκυψαν: Ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο h και ένα διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ των οποίων οι μάζες είναι:

$$m_A = ev \quad \text{και} \quad m_h = \sqrt{-2\mu^2} \quad (3.36)$$

Απαλλαγμένοι λοιπόν από το πεδίο που με την παρουσία του έδινε ένα βαθμό ελευθερίας παραπάνω από ότι έπρεπε, οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος πλέον είναι τέσσερις, τρεις του διανυσματικού μποζονίου βαθμίδας A_μ και ένας του βαθμωτού πεδίου h (όπως επιζητούσαμε). Ο παραπάνω βαθμός ελευθερίας που περίσσευε στη \mathcal{L}' είναι κίβδηλος αφού απλά αντιστοιχεί στην ελευθερία επιλογής να κάνουμε έναν μετασχηματισμό βαθμίδας.

Οι δύο εκφράσεις της λαγκρατζιανής (3.26) και (3.35) είναι ισοδύναμες, περιγράφουν δηλαδή το ίδιο σύστημα, απλά η ταυτοποίηση των φυσικών σωματιδίων μπορούσε να γίνει μόνο μέσω της δεύτερης. Σε αυτήν, το would-be goldstone boson $\xi(x)$ (όπως καλείται), έχει απορροφηθεί από το διανυσματικό μποζόνιο βαθμίδας και έχει αναλάβει το ρόλο της τρίτης και διαμήκουσ καταστάσεως πόλωσης. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται μηχανισμός Higgs, και το φυσικό βαθμωτό σωματίδιο h που παραμένει στη θεωρία μας ονομάζεται μποζόνιο Higgs.

Αυτός είναι λοιπόν ο μηχανισμός κατά τον οποίο τα μποζόνια μιας αβελιανής θεωρίας βαθμίδας αποκτούν μάζα. Παρακάτω θα επεκταθούμε και στη μη αβελιανή περίπτωση της $SU(2)$, από την οποία περιμένουμε να προκύψουν οι μάζες των τριών διανυσματικών μποζονίων.

3.1.4 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας-μηχανισμός Higgs-Μη αβελιανή περίπτωση

Παρομοίως με την παραπάνω μεθοδολογία, θα κινηθούμε για να μελετήσουμε το αυθόρμητο σπάσιμο μη αβελιανής συμμετρίας. Τα αποτελέσματα θα μας χρησιμεύσουν στα μετέπειτα υποκεφάλαια όπου θα ξεδιπλωθεί το καθιερωμένο πρότυπο.

Για την $SU(2)$ θεωρία βαθμίδας ξεκινάμε λοιπόν με τη λαγκρατζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.37)$$

όπου ϕ είναι μια μιγαδική δυάδα από βαθμωτά πεδία:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Γνωρίζουμε πλέον (από την περίπτωση της $U(1)$), ότι πρέπει να πάρουμε τη λαγκρατζιανή που είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς $SU(2)$ μετασχηματισμούς, δηλαδή, να προσαρμόσουμε την (3.37) αναβαθμίζοντας την

παράγωγο από απλή σε συναλλοίωτη (εξίσωση 2.108)

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (3.39)$$

και έπειτα εισάγοντας στη λαγκρατζιανή μας τη λαγκρατζιανή των πεδίων βαθμίδας, τα οποία μετασχηματίζονται (εξίσωση 2.121) κατά τον εξής τρόπο :

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^{i'} = W_\mu^i - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i(x) - \varepsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (3.40)$$

και τον τανυστή πεδίου $W_{\mu\nu}^i$ να ορίζεται (εξίσωση 2.129) ως

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \varepsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (3.41)$$

Επομένως επιβάλλοντας αυτές τις βελτιώσεις στην (3.37), αυτή γίνεται :

$$\mathcal{L}' = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \quad (3.42)$$

Αν πάρουμε την περίπτωση που η παράμετρος μ^2 είναι θετική, τότε θα πρόκειται για μια λαγκρατζιανή η οποία περιγράφει ένα σύστημα τεσσάρων πραγματικών, βαθμωτών πεδίων ϕ_i , καθένα από τα οποία έχει μάζα μ και αλληλεπιδρά με τα τρία άμαζα μποζόνια βαθμίδας W_μ^i . Η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον, συνεπώς δε θα σχοληθούμε περαιτέρω.

Η περίπτωση με την οποία θα ασχοληθούμε ενδελεχώς είναι εκείνη κατά την οποία η παράμετρος μ^2 είναι αρνητική. Ακολουθώντας τη γνωστή πλέον διαδικασία, βρίσκουμε την καινούρια κατάσταση ελαχίστης ενέργειας όπου συνεχίζουμε με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Συνεπώς η δυναμική ενέργεια

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (3.43)$$

παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^\dagger{}^2 \phi = 0 \Rightarrow \phi^\dagger (\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0 \\ \phi^\dagger &= 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \\ \phi^\dagger \phi &\equiv \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ελαχίστων του συστήματος μας είναι όπως φαίνεται μια τετραδιάστατη σφαίρα (μια υπερσφαίρα). Ένα από τα άπειρα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση της υπερσφαίρας είναι το :

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \quad (3.45)$$

Η επιλογή του σημείου έγινε καθαρά με κριτήριο την ελαχιστοποίηση των πράξεων. Συνεπώς, επειδή το πεδίο ϕ είναι μια δυάδα, το κενό μας γράφεται:

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Αν εκτελούσαμε λοιπόν στην τύχη μικρές διαταραχές γύρω από το κενό, το πεδίο μαζί με τη διαταραχή θα ήταν:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1(x) + i\eta_2(x) \\ v + \eta_3(x) + i\eta_4(x) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Όμως πλέον είμαστε σε θέση να "πονηρευτούμε" ότι αν πάρουμε τυχαία τη διαταραχή, δε θα είναι εύκολο να απαλλαγούμε καθοριστικά από τα άμαζα μποζόνια Goldstone. Γι'αυτό και υπολογίζουμε την ακόλουθη ποσότητα, (όπου τα πεδία θ_i, h είναι πραγματικά)

$$\phi(x) = e^{i\tau_i\theta_i(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + h(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

και η οποία δεν είναι καθόλου τυχαία, αλλά είναι μια ποσότητα η οποία αποτελεί τον $SU(2)$ μετασχηματισμό συμμετρίας. Έτσι αν αφού κάνουμε τις πράξεις καταλήξουμε σε ένα πεδίο ϕ όπου τα τέσσερα αυτά πραγματικά πεδία θα είναι ανεξάρτητα και θα παραμετροποιούν πλήρως τη διαταραχή γύρω από το κενό ϕ_0 τότε η επιλογή μας είναι έγκυρη και μετά κάνοντας ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, ο οποίος γίνεται χωρίς κάποιο τίμημα - η λαγκρατζιανή μας παραμένει πλέον αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας-, τα δύο εκθετικά θα αλληλοανααιρεθούν και στο τέλος το διαταραγμένο πεδίο μας θα είναι:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Ας εκτελέσουμε με τη σειρά από την αρχή τις πράξεις. Δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε απειροστές διαταραχές, υπολογίζουμε το πεδίο που δίνει η (3.48). (Δεν ξεχνάμε ότι όταν μετασχηματίζεται το πεδίο, μετασχηματίζεται και το μποζόνιο βαθμίδας σύμφωνα με τη σχέση (2.81))

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{i\tau_i\theta_i(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + h(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \simeq (1 + i\tau_i\theta_i(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \theta_1 + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \theta_2 \right. \\ &\quad \left. + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta_3 \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - \theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + h - i\theta_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

όπου στο τελευταίο γινόμενο κρατήσαμε μόνο τους όρους πρώτης τάξης. Βλέπουμε λοιπόν από το παραπάνω αποτέλεσμα ότι τα τέσσερα πεδία είναι όντως ανεξάρτητα και παραμετροποιούν πλήρως τις αποκλίσεις από το κενό. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή των πεδίων στη λαγκρατζιανή \mathcal{L}' , και εφαρμόζοντας το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας σε αυτή, τότε, θα είχαμε την εμφάνιση ανεπιθύμητων μποζονίων Goldstone. Γι'αυτό όπως προαναφέραμε θα κάνουμε ένα μετασχηματισμό $SU(2)$ βαθμίδας στο πεδίο (3.48), με αποτέλεσμα να μη μείνει ίχνος πεδίου θ_i :

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \phi' &= U\phi = Ue^{i\tau_i\theta_i(x)/v} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\tau_i\theta_i(x)/v} e^{i\tau_i\theta_i(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.51)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα πεδίο ϕ χωρίς κανένα θ_i πεδίο, όπως ακριβώς το "προβλέψαμε". Τώρα, το μόνο που μένει για να πάρουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας μας, είναι να αντικαταστήσουμε την (3.48) στην έκφραση της \mathcal{L}' , ενθουμούμενοι ότι η ποσότητα $W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}$ παραμένει αναλλοίωτη και ότι η συναλλοίωτη παράγωγος θα είναι $D_\mu\phi = U^{-1}D'_\mu\phi'$. Οπότε λαγκρατζιανή στη μοναδιαία βαθμίδα θα είναι:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= (U^{-1}D'_\mu\phi')^\dagger (U^{-1}D^\mu\phi') - \frac{\mu^2}{2}(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\ &= (D'_\mu\phi')^\dagger (U^{-1})^\dagger U^{-1} (D^\mu\phi') - \frac{\mu^2}{2}(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\ &= (D'_\mu\phi')^\dagger (D^\mu\phi') - \frac{\mu^2}{2}(v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \eta)^4 - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\ &= (\partial_\mu\phi' + ig\frac{1}{2}\tau_i W_\mu^i\phi')^\dagger (\partial^\mu\phi' + ig\frac{1}{2}\tau_i W^{\mu i}\phi') - \frac{\mu^2}{2}(v + h)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + h)^4 \\ &\quad - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}\end{aligned}\quad (3.52)$$

Γνωρίζουμε ότι οι όροι της λαγκρατζιανής που φέρουν μάζα είναι οι τετραγωνικοί ως προς ένα κάθε φορά πεδίο. Βλέπουμε ότι από την παραπάνω σχέση

έναν τέτοιο όρο είναι :

$$\begin{aligned}
& \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi_0' \right)^\dagger \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi_0' \right) = \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi_0 \right)^\dagger \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi_0 \right) + \dots \\
& \Rightarrow \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi \right)^\dagger \left(ig \frac{1}{2} \tau_i W_\mu^i \phi \right) = \\
& \frac{g^2}{8} \left[\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + W_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + W_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\
& = \frac{g^2}{8} \begin{pmatrix} v(W_\mu^{1\dagger} - iW_\mu^{2\dagger}) & vW_\mu^{3\dagger} \\ v(W_\mu^1 - iW_\mu^2) & vW_\mu^3 \end{pmatrix} \\
& = \frac{g^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2] \tag{3.53}
\end{aligned}$$

και δίνει ότι η μάζα κάθε μποζονίου είναι

$$\frac{1}{2} m_w^2 = \frac{g^2 v^2}{8} \Rightarrow m_w = \frac{1}{2} g v \tag{3.54}$$

Ο δεύτερος όρος που μας δίνει όρο μάζας και μάλιστα του βαθμωτού μποζονίου προκύπτει από τους δυναμικούς όρους της λαγκρατζιανής.:

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \frac{\mu^2}{2} (v+h)^2 + \frac{\lambda}{4} (v+h)^4 \\
&= \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{\lambda}{4} h^4 + \lambda v h^3 \tag{3.55}
\end{aligned}$$

από όπου μας δίνεται ότι η μάζα του μποζονίου higgs είναι:

$$\frac{1}{2} m_h^2 = -\mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.56}$$

Συμπερασματικά, η λαγκρατζιανή που προκύπτει από το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $SU(2)$, περιγράφει τρία διανυσματικά πεδία βαθμίδας και ένα βαθμωτό πεδίο h τα οποία έχουν όλα μάζα. Αυτό που έχει συμβεί εδώ είναι ότι τα πεδία βαθμίδας έχουν απορροφήσει τα μποζόνια Goldstone, αποκτώντας έτσι μάζα. Οι βαθμοί ελευθερίας που θα οφείλονταν στα τρία πεδία $\theta(x)$ έχουν ενσωματωθεί στα διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας σαν μια τρίτη (διαμήκη) κατάσταση πόλωσης. Με αυτό τον τρόπο λοιπόν, μέσω του μηχανισμού higgs, τα πεδία της βαθμίδας $SU(2)$ αποκτούν μάζα.

Ανακεφαλαιώνοντας, ο μηχανισμός Higgs μας επιτρέπει να απαλασσόμαστε από τα άμαζα μποζόνια. Βέβαια, το βασικό μας πρόβλημα παραμένει να είναι το γεγονός ότι πρέπει τις μάζες που κατάφεραν να πάρουν τα σωματίδια να τις ενσωματώσουμε στη θεωρία μας κρατώντας την επανακανονικοποιήσιμη. Θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε στη λαγκρατζιανή τους όρους μάζας με το χέρι και να σπάσουμε τη συμμετρία της. Όμως, όπως είδαμε, δεν το πράξαμε για να μη χάσει η θεωρία μας την ικανότητα να δίνει προβλέψεις. Με

το αυθόρμητο σπάσιμο η συμμετρία δεν εξαφανίζεται αλλά είναι κατά κάποιο τρόπο κρυμμένη στη νέα κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Λόγω αυτού του πλεονεκτήματος, πιστεύεται ότι μέσω των θεωριών βαθμίδας ίσως αποτυπωθεί ένα πλάνο για όλες τις σωματιδιακές αλληλεπιδράσεις. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα μπορούμε στην καρδιά του καθιερωμένου προτύπου, όπου οι ασθενείς και οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις χτίζονται από μια θεωρία βαθμίδας τεσσάρων πεδίων, του φωτονίου και των τριών διανυσματικών μποζονίων W^\pm, Z^0 . Με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας τα μποζόνια της ασθενούς αλληλεπίδρασης κερδίζουν μάζα, ενώ ένα πεδίο παραμένει άμαζο, το φωτόνιο. Μια τέτοια θεωρία θα είναι επανακανονικοποιήσιμη και θα περιέχει ένα (ή και παραπάνω) βαθμωτά μποζόνια Higgs, αλλά κανένα Goldstone.

3.2 Οι θεωρίες βαθμίδας του Καθιερωμένου Προτύπου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι με τη χρήση εσωτερικών συμμετριών βαθμίδας (συμμετρίες που δεν επηρεάζουν τον εξωτερικό χωρόχρονο) και την ταυτόχρονη απαίτηση η λαγκρατζιανή να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς, προέκυψαν τα πεδία βαθμίδας που περιγράφουν τις αντίστοιχες αλληλεπιδράσεις. Συνολικά οι συμμετρίες που απαιτούνται για την περιγραφή όλων των γνωστών στοιχειωδών σωματιδίων και των αλληλεπιδράσεών τους είναι τρεις (άρα θα χρειαστούμε τρεις θεωρίες βαθμίδας) και η ένωσή τους μας δίνει το καθιερωμένο πρότυπο. Ας τις εξετάσουμε αναλυτικά:

3.2.1 Η συμμετρία $U(1)_Y$

Η πρώτη συμμετρία είναι μια συμμετρία $U(1)$, η οποία ως γνωστό είναι μια εσωτερική συμμετρία. Η συμμετρία αυτή, δεν είναι η ίδια που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο από την οποία οδηγηθήκαμε στην QED θεωρία. Φυσικά, οι δυο αυτές συμμετρίες συνδέονται μέσω φυσικών επιχειρημάτων, μια σύνδεση που θα αναλύσουμε παρακάτω. Το πεδίο βαθμίδας που αντιστοιχεί στη συμμετρία μας θα το ονομάσουμε B_μ (σε αντιστοιχία με το πεδίο φωτονίου A_μ) και τον κβαντικό αριθμό της θα τον ονομάσουμε υπερφορτίο και θα συμβολίζεται με Y (σε αντιστοιχία με τον κβαντικό αριθμό του φορτίου q). Για να γίνεται σαφές σε ποια συμμετρία αναφερόμαστε, τη συμβολίζουμε ως $U(1)_Y$. Ο τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας είναι:

$$\psi \rightarrow \psi' = U_Y \psi = e^{i\frac{Y}{2}\theta(x)} \quad (3.57)$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος θα είναι:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (3.58)$$

3.2.2 Η συμμετρία $SU(2)_L$

Η δεύτερη συμμετρία είναι μια εσωτερική συμμετρία βαθμίδας $SU(2)$ η οποία συνδέεται (πάλι μέσω φυσικών επιχειρημάτων) τόσο με τις ασθενείς όσο και με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις.

Αρχικά μια εσωτερική συμμετρία $SU(2)$ με κβαντικό αριθμό το ισχυρό ισοτοπικό σπιν, χρησιμοποιείται στον τομέα της πυρηνικής φυσικής ώστε να ξεχωρίζει τις δύο καταστάσεις ενός νουκλεονίου: την κατάσταση του πρωτονίου και την κατάσταση του νετρονίου. Επειδή οι μάζες του πρωτονίου και του νετρονίου είναι σχεδόν ίδιες, τα δυο σωματίδια μπορούν να θεωρηθούν σαν εκφυλισμένες καταστάσεις με ίδια ενέργεια (μάζα). Οι ισχυρές πυρηνικές αλληλεπιδράσεις αδυνατούσαν να ξεχωρίσουν τις δυο αυτές καταστάσεις. Έτσι, ως προς κάποια συμμετρία $SU(2)$ το νουκλεόνιο $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, αποτελούσε τη θεμελιώδη αναπαράσταση με ισχυρό ισοτοπικό σπιν $T = 1/2$, όπου το πρωτόνιο αντιστοιχούσε στην $T_3 = 1/2$ συνιστώσα, ενώ στην $T_3 = -1/2$ συνιστώσα αντιστοιχούσε το νετρόνιο. Η ιδέα αυτή αποτελεί επέκταση της συμπεριφοράς του ηλεκτρονίου απουσία μαγνητικού πεδίου όπου οι δυο διαφορετικές καταστάσεις του ηλεκτρονίου με σπιν πάνω και σπιν κάτω είναι εκφυλισμένες.

Παρομοίως, με το ίδιο σκεπτικό, ως προς την ίδια συμμετρία $SU(2)$, τα πιόνια π^\pm, π^0 αποτελούσαν την $T = 1$ αναπαράσταση του ισχυρού ισοτοπικού σπιν. Έτσι, η κατάσταση του πιονίου γραφόταν σα μια τριπλέτα $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$, όπου τα στοιχεία της αντιστοιχούσαν στις τρεις συνιστώσες $T_3 = \pm 1, 0$ ορίζοντας τις καταστάσεις:

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2), \quad \pi^0 = \pi_3 \quad (3.59)$$

σαν τις ηλεκτρικά φορτισμένες καταστάσεις.

Εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία $SU(2)$ σα συμμετρία βαθμίδας για την περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Για να συμβεί αυτό πρέπει να εισάγουμε τον κβαντικό αριθμό ασθενούς ισοτοπικού σπιν T . Είναι γνωστό ότι ο κβαντικός αριθμός της ομοτιμίας διατηρείται σε όλες τις αλληλεπιδράσεις εκτός από τις ασθενείς. Σε αυτήν την παραβίαση της ομοτιμίας βασίζεται η συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων ως προς τον κβαντικό αριθμό του ασθενούς ισοτοπικού σπιν. Με τη βοήθεια των προβολικών τελεστών ξεχωρίζουμε τις κυματοσυναρτήσεις σε αριστερόστροφο και δεξιόστροφο μέρος.

- Οι δεξιόστροφες συνιστώσες των σωματιδίων ύλης (λεπτονίων και κουαρκς)

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (3.60)$$

αποτελούν τετριμμένες $T = 0$ αναπαράστασεις :

$$f_R^{(i)} : \begin{array}{ccc} e_R^- & u_R & d_R \\ \mu_R^- & c_R & s_R \\ t_R^- & t_R & b_R \\ \equiv & \equiv & \equiv \\ \ell_R^{(i)} & U_R^{(i)} & D_R^{(i)} \end{array} \quad T = 0 \quad (3.61)$$

- Οι αριστερόστροφες συνιστώσες των φερμιονίων

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (3.62)$$

αποτελούν τις $T = 1/2$ αναπαράστασεις (εδώ έχουμε χωρίσει τα λεπτόνια από τα κουαρκς):

$$\begin{aligned} \ell_L^{(i)} &\equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \\ Q_L^{(i)} &\equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \end{aligned} \quad T = \frac{1}{2} \quad (3.63)$$

όπου σε κάθε διπλέτα το πάνω στοιχείο είναι η συνιστώσα $T_3 = 1/2$, ενώ η κάτω είναι $T_3 = -1/2$. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν τρεις οικογένειες κουαρκ και τρεις λεπτονίων (αριστερόστροφων).

Τα πεδία βαθμίδας W_μ^i της $SU(2)$ συμμετρίας βαθμίδας αποτελούν την $T = 1$ αναπαράστασή της.

$$W_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad T = 1 \quad (3.64)$$

και οι ηλεκτρικά φορτισμένες καταστάσεις θα είναι:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad W_\mu^0 = W_\mu^3 \quad (3.65)$$

Μιας και η συμμετρία βαθμίδας $SU(2)$ είναι συνδεδεμένη με τις αριστερόστροφες συνιστώσες των πεδίων ύλης, συμβολίζουμε τη συμμετρία $SU(2)_L$, της οποίας ο τοπικός μετασχηματισμός είναι:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\frac{\tau_i}{2}\theta_i(x)}\psi \quad (3.66)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (3.67)$$

Παρακάτω θα γίνει κατανοητό το πώς η συμμετρία $SU(2)_L$ συνδέεται με τις ασθενείς και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις.

Προς το παρόν, πρέπει να καταστήσουμε σαφή τη σχέση των κβαντικών αριθμών των τριών συμμετριών $U(1)_Q, U(1)_Y, SU(2)_L$. Το ηλεκτρικό φορτίο συνδέεται με το ασθενές ισότοπικό σπιν και το υπερφορτίο με τη σχέση:

$$Q = \frac{T_3}{2} + \frac{Y}{2} \quad (3.68)$$

όπου η συμμετρία $U(1)_Q$ μετασχηματίζει ένα πεδίο:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{iQ\theta(x)}\psi \quad (3.69)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iQeA_\mu \quad (3.70)$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο μετασχηματισμός αυτός δινόταν στην εξίσωση (2.98). Εκεί έλειπε στη διόρθωση της παραγώγου ο παράγοντας Q . Αυτό γιατί μελετούσαμε μόνο το ηλεκτρονιακό πεδίο για το οποίο $Q = 1$. Επειδή όμως εμείς πλέον θέλουμε να ενσωματώσουμε όλα τα πεδία των λεπτονίων και των κουάρκ, απαιτείται η παρουσία του Q .

Συμπερασματικά, το γινόμενο των δυο συμμετριών βαθμίδας που αναλύονται στα δυο τελευταία υποκεφάλαια $SU(2)_L \times U(1)_Y$, αποτελεί το πρώτο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου και περιγράφει τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το μεγαλείο της θεωρίας αυτής θα ξεδιπλωθεί αμέσως παρακάτω, μετά την παρεμβολή της τρίτης συμμετρίας στην οποία οφείλουμε να αναφερθούμε.

3.2.3 Η συμμετρία $SU(3)_c$

Η τρίτη συμμετρία είναι μια συμμετρία βαθμίδας $SU(3)$, η οποία είναι επίσης μια εσωτερική συμμετρία βαθμίδας που σχετίζεται με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Ο κβαντικός αριθμός της συμμετρίας αυτής είναι το χρώμα και χαρακτηρίζει μόνο τα κουάρκ. Το κάθε κουάρκ αποτελεί ένα γραμμικό συνδυασμό από τρία χρώματα, σχηματίζοντας έτσι τη θεμελιώδη αναπαράσταση ως προς την $SU(3)$. Οπότε για κάθε οικογένεια κουαρκ (για δεξιόστροφα και αριστερόστροφα σωματίδια) έχουμε:

$$u_R \equiv (u_1, u_2, u_3)_R, \quad d_R \equiv (d_1, d_2, d_3)_R$$

$$f_{qL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}_L \quad (3.71)$$

Τα οκτώ πεδία που αντιστοιχούν στη συμμετρία αυτή είναι τα οκτώ γκλουονία G_μ^i $i = 1, 2, \dots, 8$, και η αντίστοιχη θεωρία βαθμίδας ονομάζεται κβαντική χρωμοδυναμική (QCD). Συμβολίζεται με $SU(3)_c$ και διατυπώθηκε ως θεωρία

βαθμίδας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Αποτελεί το δεύτερο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου. Τα συνηθισμένα αδρόνια απαρτίζονται από συνδυασμούς των κουάρκς τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω των γκλουονίων. Κάθε κουάρκ φέρει χρώμα, αλλά οι τελικοί συνδυασμοί προκύπτουν άχρωμοι.

Για τα κουάρκ υπάρχουν τρία βασικά χρώματα (τρεις καταστάσεις), το κόκκινο, το πράσινο και το μπλε. Η πρόσθεση των τριών βασικών χρωμάτων δίνει λευκό χρώμα. Σε κάθε βασικό χρώμα αντιστοιχεί το συμπληρωματικό του χρώμα με την ιδιότητα [βασικό χρώμα]+[συμπληρωματικό χρώμα]=λευκό. Αναλογικά, η πρόσθεση τριών συμπληρωματικών χρωμάτων, γαλάζιο (αντι-κόκκινο), ματζέντα (αντι-πράσινο) και κίτρινο (αντι-μπλέ) δίνει πάλι λευκό χρώμα. Για τα μεσόνια έχουμε τους συνδυασμούς $1/\sqrt{3}q_i\bar{q}_i$ ενώ για τα βαρυόνια $1/\sqrt{6}\epsilon_{ijk}q_iq_jq_k$.

Συνεπώς η συμμετρία αυτή χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, με μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi = e^{i\lambda_i/2\theta_i(x)} \quad (3.72)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig_3 \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i \quad (3.73)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω τρία υποκεφάλαια, μπορούμε να πούμε ότι οι θεωρίες βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου δίνονται από το γινόμενο $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ με συνολική συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i - ig_3 \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i \quad (3.74)$$

Η εξίσωση αυτή συνοψίζει και τα τρία είδη αλληλεπιδράσεων. Η λαγκρατζιανή του καθιερωμένου προτύπου (πριν την εφαρμογή του μηχανισμού Higgs, δηλαδή παραλείποντας τους όρους μάζας) γράφεται:

$$L_{SM} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \sum_f \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f \quad (3.75)$$

όπου το άθροισμα που περιέχεται στην εξίσωση είναι πάνω σε όλα τα φερμιόνια ύλης, με την προϋπόθεση ότι οι όροι της συναλλοίωτης παραγωγής δρουν πάντα σε φερμιόνια ίδιας αναπαράστασης, έτσι ώστε η λαγκρατζιανή να είναι μια αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα.

3.3 Οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις - Το μοντέλο των Weinberg-Salam

Ας εξετάσουμε αρχικά το πρώτο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου, τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Για την ακρίβεια, η ηλεκτρασθενής αλληλεπίδραση είναι η ενοποιημένη περιγραφή δύο (από τις συνολικά τέσσερις)

θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων. Παρ'όλο που οι δύο αυτές δυνάμεις εμφανίζονται στο φυσικό μας κόσμο με πολύ διαφορετική συμπεριφορά, στην ουσία αποτελούν τις δύο πλευρές του ίδιου νομίσματος. Δηλαδή, πέρα από ένα ενεργειακό κατώφλι της τάξης των 100GeV , πρόκειται για μια ενιαία δύναμη η οποία όμως κάτω από το κατώφλι αυτό έχει δύο διαφορετικές εκφάνσεις - γεγονός που έχει αποδειχθεί πειραματικά.

Η λαγκρατζιανή που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλη}} + \mathcal{L}_{kin}^{\text{gauge}} - V(\phi) + \mathcal{L}_{Yuk} \quad (3.76)$$

η οποία είναι αρκετά σύνθετη, γι'αυτό και είναι προτιμότερο να ασχληθούμε με κάθε όρο ξεχωριστά. Μέσα από αυτήν την ανάλυση θα λάβουμε πολλές πληροφορίες (όπως τη μάζα φυσικού πεδίου Higgs, τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων, μάζες φερμιονίων κ.ά.). Ο όρος $\mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλη}}$ εμπεριέχει τους κινητικούς όρους των φερμιονίων του καθιερωμένου προτύπου. Οι αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων γίνονται μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου, που είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - ig_1\frac{Y}{2}B_\mu \quad (3.77)$$

όπου το $Y/2$ βρίσκεται κάθε φορά από την εξίσωση (3.68). Συνεπώς:

Η $\mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλη}}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^{\text{ύλη}} &= \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6}B_\mu \right) Q_L^{(i)} \\ &+ i\bar{\ell}_L^{(i)}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{2}B_\mu \right) \ell_L^{(i)} \\ &+ i\bar{\ell}_R^{(i)}\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_1 B_\mu) \ell_R^{(i)} \\ &+ i\bar{U}_R^{(i)}\gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_1 B_\mu) U_R^{(i)} \\ &+ i\bar{D}_R^{(i)}\gamma^\mu (\partial_\mu + i\frac{g_1}{3}B_\mu) D_R^{(i)} \\ &+ \underbrace{|\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2}B_\mu|^2}_{(D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Η $\mathcal{L}_{kin}^{\text{gauge}}$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2\varepsilon_{ijk}\theta^j(x)W_\mu^k)^2 \\ &- \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ο δυναμικός όρος με τη σειρά του θα δίνεται:

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad \mu^2 > 0 \quad (3.80)$$

Ο τελευταίος όρος \mathcal{L}_{Yuk} είναι :

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum f_\ell^{(ij)} \bar{\ell}_L^{(i)} \phi \ell_R^{(j)} + f_U^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \tilde{\phi} U_R^{(j)} + f_D^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \phi D_R^{(j)} + h.c. \quad (3.81)$$

και είναι υπεύθυνος για τη "γέννηση" των φερμιονικών μαζών. Δηλαδή περιγράφει τη σύζευξη ανάμεσα στο βαθμωτό πεδίο Higgs και στα (άμαζα ακόμα) φερμιονικά πεδία. Στο μεθεπόμενο κεφάλαιο θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο συμβαίνει το φαινόμενο αυτό.

Κατά τα γνωστά, προχωράμε στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Έπειτα από τους διάφορους όρους της λαγκρατζιανής θα πάρουμε διάφορα χρήσιμα αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας σαν το βαθμωτό πεδίο μας τη διπλέτα

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

- Ξεκινάμε την ανάλυση για το δυναμικό όρο της λαγκρατζιανής μας $V(\phi)$. Κατά τα γνωστά, προχωράμε στο αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας και βρίσκουμε τη νέα κατάσταση ελάχιστης ενέργειας.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^{\dagger 2} \phi = 0 \Rightarrow \phi^\dagger (-\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0 \\ \phi^\dagger &= 0 \quad \text{ή} \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \\ \phi^\dagger \phi &\equiv \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Όπως έχουμε ξαναδεί, ο γεωμετρικός τόπος των ελαχίστων του συστήματος μας είναι μια τετραδιάστατη σφαίρα (μια υπερσφαίρα). Ένα από τα άπειρα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση της υπερσφαίρας είναι το:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \quad (3.84)$$

Επομένως, επειδή το πεδίο ϕ είναι μια διπλέτα, το κενό μας γράφεται :

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Διαταράσσουμε το σύστημα γύρω από το κενό μας, οπότε το πεδίο θα είναι:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

και αντικαθιστώντας το στην (3.80) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \right]^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2} (0 \ v + \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[(0 \ v + \eta) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \right]^2 \\
&= -\frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4
\end{aligned}$$

και κρατώντας μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς το πεδίο η , δηλαδή τους όρους μάζας, παίρνουμε την έκφραση :

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \eta^2 = -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} v^2 \eta^2 \\
&= -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{v^2} \eta^2 = -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \eta^2 = \mu^2 \eta^2 \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Οπότε, ταυτοποιώντας παίρνουμε: $\frac{1}{2} m_h^2 = \mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{2\mu}$. Αυτή είναι η μάζα του βαθμωτού πεδίου Higgs.

- Από τον τελευταίο όρο της (3.78) θα πάρουμε τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων. Στην περίπτωση μας το υπερφορτίο είναι ίσο με τη μονάδα. Όποτε υπολογίζουμε το $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \equiv D$:

$$\begin{aligned}
D &= \phi^\dagger (\partial_\mu + i g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu) (\partial^\mu - i g_2 \frac{\tau^i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu) \phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ v + \eta) (\partial_\mu + i g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i g_1 \frac{1}{2} B_\mu) \\
&\quad (\partial^\mu - i g_2 \frac{\tau^i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (0 \ v + \eta) |g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{1}{2} g_1 B_\mu|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κρατήσαμε μόνο όρους που δεν περιέχουν παράγωγο. Κρατώντας επίσης και εδώ μόνο τους τετραγωνικούς όρους ως προς τα τέσσερα πεδία βαθμίδας θα βρούμε τις μάζες τους. Οι όροι που "μπλέκουν" τα πεδία με το βαθμωτό πεδίο για την ώρα μας αφήνουν αδιάφορους. Επομένως η παραπάνω εξίσωση θα γίνει:

$$D = \frac{v^2}{2} (0 \ 1) |g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{1}{2} g_1 B_\mu|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

Για ευκολία υπολογίζω το άθροισμα των πινάκων ξεχωριστά και έπειτα θα το ενσωματώσω στην παραπάνω σχέση.

$$\begin{aligned}\tau^i W_\mu^i &= \tau^1 W_\mu^1 + \tau^2 W_\mu^2 + \tau^3 W_\mu^3 = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{g_1}{2} B_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.90)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (3.88) τον πίνακα που μόλις βρήκαμε, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}D &= \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 (W_\mu^1)^2 + g_2^2 (W_\mu^2)^2 + g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 (B_\mu)^2 - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B_\mu)\end{aligned}\quad (3.91)$$

Αξιώνω ότι πρέπει η έκφραση D με την οποία ασχολούμαστε να είναι:

$$D = M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (3.92)$$

Δηλαδή, πρέπει να παίρνουμε μια έκφραση κατά την οποία, εν αντιθέσει με την (3.91), να έχουμε μόνο τετραγωνικούς όρους των πεδίων. Η παρουσία μη τετραγωνικού όρου φανερώνει ότι ο πίνακας μαζών δεν είναι διαγώνιος. Οπότε απαιτώντας η (3.91) να γραφεί στη μορφή της (3.92), στην ουσία διαγωνοποιούμε τον πίνακα των μαζών, ώστε να εξαλείψουμε τους μη τετραγωνικούς όρους και να πάρουμε τις προβλέψεις των μαζών που μας δίνει ο μηχανισμός.

Από τη σύγκριση των δυο παραπάνω εξισώσεων, παίρνουμε:

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g_2^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] \quad (3.93)$$

Ορίζοντας λοιπόν,

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (3.94)$$

(κάνοντας ουσιαστικά μια αλλαγή μεταβλητών) η (3.93) γίνεται :

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} \quad (3.95)$$

Συνεπώς η μάζα των φυσικών μποζονίων W_μ^\pm είναι :

$$M_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \Rightarrow M_W = \frac{gv}{2} \quad (3.96)$$

Επίσης από τις (3.91) και (3.92) προκύπτει ότι θα πρέπει :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 (B_\mu)^2 - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B^\mu) \\ &= \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)^2 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Προκειμένου να γράψουμε την παραπάνω έκφραση σε γινόμενο πινάκων θεωρούμε ότι τα πεδία W_μ^3, B_μ αποτελούν τα στοιχεία μιας διπλέτας : $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$. Συνεπώς, η (3.97) γράφεται ισοδύναμα :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)(g_2 W^{\mu 3} - g_1 B^\mu) \\ &= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε ένα πίνακα στήλη δύο πεδίων Z_μ, A_μ τα οποία αποτελούν τα φυσικά πεδία. Με άλλα λόγια τα δυο αυτά πεδία είναι αυτά τα οποία θα προκύψουν αφού απαλλαγούμε από τους μη τετραγωνικούς όρους της (3.97). Απαιτούμε λοιπόν το μεσαίο πίνακα (που είναι ο πίνακας M που δίνει τις μάζεις) της εξίσωσης (3.98) να είναι διαγώνιος και μάλιστα το στοιχείο M_{22} να είναι 0, αφού ως γνωστό το φωτόνιο είναι ένα μποζόνιο άμαζο.

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

Από τη διαγωνοποίηση λοιπόν του πίνακα M της (3.98) θα πάρουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} \underbrace{\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}}_{part1} \underbrace{\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}}_{part2 \equiv U M U^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix}}_{part3} \end{aligned} \quad (3.100)$$

όπου U είναι ένας μοναδιακός πίνακας. Μια εύκολη επιλογή ενός τέτοιου πίνακα είναι ο πίνακας στροφών -με θετική γωνία στροφής-, δηλαδή:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Υπολογίζω τα τρία κομμάτια της (3.100) ξεχωριστά. Για το πρώτο έχουμε:

1ο κομμάτι

$$\begin{aligned} (W_\mu^3 \quad B_\mu) U &= (W_\mu^3 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= (\cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu \quad \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu) \end{aligned} \quad (3.102)$$

2ο κομμάτι

$$\begin{aligned} M' &\equiv \frac{v^2}{8} U^{-1} M U = \frac{v^2}{8} U^{-1} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} U \\ &= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ο παραπάνω πολλαπλασιασμός πινάκων δίνει τον εξής πίνακα γραμμένο στα στοιχεία του:

$$\begin{aligned} M'_{11} &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos^2 \theta + 2g_1 g_2 \sin \theta \cos \theta + g_1^2 \sin^2 \theta) \\ M'_{12} &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos \theta \sin \theta - g_1 g_2 \cos^2 \theta + g_1 g_2 \sin^2 \theta - g_1^2 \cos \theta \sin \theta) \\ M'_{21} &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \sin \theta \cos \theta + g_1 g_2 \sin^2 \theta - g_1^2 \sin \theta \cos \theta - g_1 g_2 \cos^2 \theta) \\ M'_{22} &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \sin^2 \theta - 2g_1 g_2 \sin \theta \cos \theta + g_1^2 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (3.103)$$

3ο κομμάτι

$$\begin{aligned} U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta W^{\mu 3} + \sin\theta B^\mu \\ \sin\theta W^{\mu 3} + \cos\theta B^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Σύμφωνα όμως με την (3.99) πρέπει όλα τα στοιχεία του πίνακα M' να είναι μηδέν, εκτός από το στοιχείο M'_{11} . Επίσης, από την απαίτηση αυτή

του μηδενισμού των τριών στοιχείων πίνακα παίρνουμε πληροφορίες για τη γωνία θ .

$$\begin{aligned}
M'_{12} = M'_{21} = 0 &\Rightarrow \\
g_2 \sin \theta (g_2 \cos \theta + g_1 \sin \theta) - g_1 \cos \theta (g_2 \cos \theta + g_1 \sin \theta) &= 0 \Rightarrow \\
(g_2 \cos \theta + g_1 \sin \theta)(g_2 \sin \theta - g_1 \cos \theta) &= 0 \Rightarrow \\
\tan \theta = \frac{g_1}{g_2} & \quad (3.105)
\end{aligned}$$

Η γωνία αυτή είναι γνωστή σα γωνία *Weinberg* ή αλλιώς σα γωνία μίξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων, συμβολίζεται με θ_w και πειραματικά δίνεται έχει βρεθεί ότι $\sin^2 \theta_w \approx 0.23$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από το μηδενισμό του στοιχείου M'_{22} , γι' αυτό και οι πράξεις παραλείπονται.

Επίσης, από τη σύγκριση των εξισώσεων (3.99) και (3.100), συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} U = (3.100).part1 \quad (3.106)$$

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = (3.100).part3 \quad (3.107)$$

και από τα αποτελέσματα που βρήκαμε από τις (3.102) και (3.104), οι παραπάνω εξισώσεις θα μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
Z_\mu &= \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \\
A_\mu &= \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \quad (3.108)
\end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα των σχέσεων (3.108) και (3.94) αποτελούν τις σχέσεις που συνδέουν τα φυσικά πεδία W_μ^\pm, Z_μ, A_μ με τα πεδία βαθμίδας $W_\mu^{1,2}, W_\mu^3, B_\mu$, αντίστοιχα. Αν λάβουμε υπ' όψη ότι η (3.105) σε συνδυασμό με την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, μας δίνει το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας *Weinberg*, συναρτήσει των σταθερών σύζευξης g_1, g_2 . Δηλαδή:

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.109)$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.110)$$

Έτσι, οι εξισώσεις των φυσικών πεδίων (3.108) θα είναι:

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.111)$$

$$A_\mu = \frac{g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (3.112)$$

Τέλος, όπως είδαμε νωρίτερα, το στοιχείο M'_{11} του πίνακα M' από την εξίσωση (3.103) μας δίνει το τετράγωνο της μάζας του φυσικού μποζονίου Z_μ :

$$\begin{aligned} M_Z^2 &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos^2 \theta_W + 2g_1 g_2 \sin \theta_W \cos \theta_W + g_1^2 \sin^2 \theta_W) \\ &= \frac{v^2}{8} (g_2 \cos \theta_W + g_1 \sin \theta_W)^2 \\ &= \frac{v^2}{8} \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \right) \Rightarrow M_Z = \frac{1}{2} \frac{v}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \end{aligned} \quad (3.113)$$

Από την εξίσωση (3.100) παρατηρούμε ότι ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ αποβάλλεται κι έτσι η μάζα του φυσικού μποζονίου Z_μ θα είναι:

$$M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad (3.114)$$

και η μάζα του φωτονίου ίση με μηδέν, $M_A = 0$. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που προέκυψε αλλά δεν αποτελεί πρόβλεψη απλά μια επιβεβαίωση ότι η απαίτηση η μάζα του φωτονίου να είναι μηδέν είναι συνεπής. Τέλος, άλλη μια παρατήρηση για τις μάζες των μποζονίων είναι ότι διαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις (3.96) και (3.114) προκύπτει:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \Rightarrow M_W = \cos \theta_w M_Z \quad (3.115)$$

Η ανισότητα αυτή των μαζών των μποζονίων προκύπτει από την ανάμιξη των W_μ^3 και B_μ . Στο όριο όπου $\theta_w = 0$, οι μάζες εξισώνονται $M_Z = M_W$.

- Τώρα, μέσω των κινητικών όρων των φερμιονίων που δίνονται από τη λαγκρατζιανή (3.78) θα βρούμε τα φορτισμένα αλλά και τα αφόρτιστα (ουδέτερα ρεύματα). Οι όροι της λαγκρατζιανής που θα χρησιμοποιηθή-

σουμε είναι :

$$\mathcal{L}'_{kin}{}^{\text{ύλνς}} = \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6} B_\mu \right) Q_L^{(i)} \quad (3.116)$$

$$+ i\bar{\ell}_L^{(i)} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{2} B_\mu \right) \ell_L^{(i)} \quad (3.117)$$

$$+ i\bar{\ell}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_1 B_\mu) \ell_R^{(i)} \quad (3.118)$$

$$+ i\bar{U}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{2}{3} g_1 B_\mu) U_R^{(i)} \quad (3.119)$$

$$+ i\bar{D}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu + i\frac{g_1}{3} B_\mu) D_R^{(i)} \quad (3.120)$$

Υπολογίζω ξεχωριστά τους διάφορους όρους του αθροίσματος. Για τα ασθενή *isospin*-ρεύματα της $SU(2)$ θα πάρουμε τους όρους (3.116) και (3.117), χωρίς να συμπεριλάβουμε τους όρους αλληλεπίδρασης με το B_μ . Αυτοί θα είναι:

Όρος (3.116)

$$\begin{aligned} & \frac{g_2}{2} \bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \tau^i W_\mu^i Q_L^{(i)} \\ &= \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^1 W_\mu^1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^2 W_\mu^2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^3 W_\mu^3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &= \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &= \frac{g_2}{2} (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^1 \\ &+ \frac{g_2}{2} (i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^2 \\ &+ \frac{g_2}{2} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^3 \end{aligned} \quad (3.121)$$

Όρος (3.117) Παρομοίως:

$$\begin{aligned}
& \frac{g_2}{2} \bar{\ell}_L^{(i)} \gamma^\mu \tau^i W_\mu^i \ell_L^{(i)} \\
&= \frac{g_2}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L) W_\mu^1 \\
&+ \frac{g_2}{2} (i \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L) W_\mu^2 \\
&+ \frac{g_2}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^3 \quad (3.122)
\end{aligned}$$

και στα δύο αποτελέσματα δουλεύουμε μόνο με την πρώτη οικογένεια των κουάρκ και των λεπτονίων. Κανονικά, τα παραπάνω αποτελέσματα είναι πλήρη όταν προσθέσω τους αντίστοιχους όρους και των άλλων οικογενειών.

Εφ'όσον η λαγκρατζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση των μποζονίων της ασθενούς αλληλεπίδρασης με τα φερμιόνια γράφεται:

$$\mathcal{L} = g_2 j^{\mu i} W_\mu^i = g_2 j^{\mu 1} W_\mu^1 + g_2 j^{\mu 2} W_\mu^2 + g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 \quad (3.123)$$

Θα πρέπει τώρα να ταυτοποιήσουμε το άθροισμα των αποτελεσμάτων (3.121) και (3.122) με την παραπάνω εξίσωση (3.123). Συνεπώς τα ρεύματα $j^{\mu 1}, j^{\mu 2}, j^{\mu 3}$ θα δίνονται:

$$j^{\mu 1} = \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (3.124)$$

$$j^{\mu 2} = \frac{1}{2} (i \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - i \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + i \bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (3.125)$$

$$j^{\mu 3} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) \quad (3.126)$$

Όμως, όπως υποδεικνύει η εξίσωση (3.94), η παραπάνω λαγκρατζιανή γράφεται:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ch} + \mathcal{L}_{unch} \quad \text{όπου}$$

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} (j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-) \quad \text{δηλαδή} \quad j^{\mu\pm} = j^{\mu 1} \pm i j^{\mu 2} \quad (3.127)$$

(τη \mathcal{L}_{unch} θα τη μελετήσουμε αμέσως μετά.) Οπότε, τα φορτισμένα ρεύματα θα είναι σύμφωνα με την εξίσωση (3.127):

$$\begin{aligned}
j^{\mu+} &= \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \\
&\quad - \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L - \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \Rightarrow \\
j^{\mu+} &= \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^{\mu-} &= \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \\
&\quad + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L - \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \Rightarrow \\
j^{\mu-} &= \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad (3.128)
\end{aligned}$$

Η \mathcal{L}_{unch} εμπεριέχει την αλληλεπίδραση του $j^{\mu 3}$ με το W_μ^3 αλλά επίσης και την αλληλεπίδραση του Υ(υπερφορτίου)-ρεύματος της $U(1)$ με το B_μ , όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\mathcal{L}_{unch} = g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} B_\mu \quad (3.129)$$

ενώ η (3.129) στη φυσική βάση γράφεται:

$$\mathcal{L}_{unch}^{nb} = e j_{em}^\mu A_\mu + \frac{g_2}{\cos \theta_w} j_o^\mu Z_\mu^o \quad (3.130)$$

Πριν συνεχίσουμε, πρέπει από τη $\mathcal{L}_{\acute{\alpha}\lambda\eta\varsigma}$ (3.116) ως (3.120), να συμπεριλάβουμε όλους τους όρους αλληλεπίδρασης που περιέχουν το B_μ , όπως είναι λογικό αφού ψάχνουμε ρεύματα που προκύπτουν από τη θεωρία $U_Y(1)$ (της οποίας το μποζόνιο βαθμίδας είναι το B_μ).

όςος (3.116)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu Q_L^{(i)} &= (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &= \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu B_\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu B_\mu d_L) \\ &= \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) B_\mu \end{aligned} \quad (3.131)$$

όςος (3.117)

$$\begin{aligned} -\bar{\ell}_L^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu \ell_L^{(i)} &= (\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &= -\frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu B_\mu \nu_L^e + \bar{e}_L \gamma^\mu B_\mu e_L) \\ &= -\frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) B_\mu \end{aligned} \quad (3.132)$$

όςος (3.118)

$$\begin{aligned} -\ell_R^{(i)} \gamma^\mu g_1 B_\mu \ell_R^{(i)} &= -g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R \\ &= -g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu \end{aligned} \quad (3.133)$$

όςος (3.119)

$$\begin{aligned} \bar{U}_R^{(i)} \gamma^\mu \frac{2}{3} g_1 B_\mu U_R^{(i)} &= \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_R \gamma^\mu B_\mu u_R \\ &= \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_R \gamma^\mu u_R B_\mu \end{aligned} \quad (3.134)$$

όςος (3.120)

$$\begin{aligned} -\bar{D}_R^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{3} B_\mu D_R^{(i)} &= -\frac{g_1}{3} d_R \gamma^\mu B_\mu d_R \\ &= -\frac{g_1}{3} d_R \gamma^\mu d_R B_\mu \end{aligned} \quad (3.135)$$

Οπότε, όπως φαίνεται από την (3.129), η συνολική έκφραση για το ρεύμα $j^{\mu Y}$ είναι:

$$j^{\mu Y} = \frac{1}{2}(\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{v}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R \gamma^\mu d_R) \quad (3.136)$$

Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.107) από αριστερά επί U , βρίσκουμε δυο χρήσιμες εκφράσεις των πεδίων βαθμίδας W_μ^3, B_μ συναρτήσει των φυσικών πεδίων Z_μ, A_μ :

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$W_\mu^3 = \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu \quad (3.137)$$

$$B_\mu = -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu \quad (3.138)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δυο παραπάνω εκφράσεις των πεδίων βαθμίδας στην (3.129), τότε θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{unch} &= g_2 j^{\mu 3} (\cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu) + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} (-\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu) \\ &= (g_2 j^{\mu 3} \sin\theta + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} \cos\theta) A_\mu + (g_2 j^{\mu 3} \cos\theta - \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} \sin\theta) Z_\mu \end{aligned} \quad (3.139)$$

Επειδή το A_μ αποτελεί το πεδίο του φωτονίου, οι εκφράσεις $g_2 \sin\theta j^{\mu 3}$ και $g_1 \cos\theta$ θα πρέπει να συμπίπτουν με την έκφραση $e j^{\mu 3} A_\mu$ του ηλεκτρομαγνητισμού που δίνει την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονιακού ρεύματος με ένα φωτόνιο. Ταυτοποιώντας παίρνουμε ότι

$$e = g_2 \sin\theta = g_1 \cos\theta \quad (3.140)$$

κι έτσι η (3.139) γίνεται μέσω της (3.140):

$$\mathcal{L}_{unch} = (e j^{\mu 3} + \frac{e}{2} j^{\mu Y}) A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta} \left(\cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2} j^{\mu Y} \right) Z_\mu \quad (3.141)$$

Ταυτοποιώντας λοιπόν την εξίσωση (3.141) με τη λαγκρατζιανή των ουδέτερων ρευμάτων στη φυσική βάση της εξίσωσης (3.130) βρίσκουμε δυο

εκφράσεις για το ουδέτερο και το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα.

$$j_{em}^\mu = j^{\mu 3} + \frac{1}{2}j^{\mu Y} \quad \text{και} \quad (3.142)$$

$$j_o^\mu = \cos^2 \theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2 \theta}{2} j^{\mu Y} \quad (3.143)$$

Λύνοντας την (3.142) ως προς το $j^{\mu Y}$, η (3.143) γίνεται :

$$\begin{aligned} j_o^\mu &= \cos^2 \theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2 \theta}{2} 2(j_{em}^\mu - j^{\mu 3}) \Rightarrow \\ j_o^\mu &= \cos^2 \theta j^{\mu 3} - \sin^2 \theta j_{em}^\mu + \sin^2 \theta j^{\mu 3} \Rightarrow \\ j_o^\mu &= j^{\mu 3} - \sin^2 \theta j_{em}^\mu \end{aligned} \quad (3.144)$$

Οπότε, έχουμε βρει δύο εξισώσεις για το αφόρτιστο ρεύμα, τις (3.143) και (3.144). Τέλος, αν αντικαταστήσουμε στην (3.143) τα αποτελέσματα (3.126) και (3.136) βρίσκουμε το ουδέτερο ρεύμα που αντιστοιχεί :

$$\begin{aligned} j_o^\mu &= \frac{\cos^2 \theta}{2} (\bar{v}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) \\ &\quad - \frac{\sin^2 \theta}{4} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{v}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \\ &\quad - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{4}{3}\bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3}\bar{d}_R \gamma^\mu d_R) \end{aligned} \quad (3.145)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, από τη λαγκρατζιανή που αποτελείται από τους κινητικούς όρους των φερμιονίων καταφέραμε να βρούμε τα φορτισμένα και τα ουδέτερα ρεύματα που δημιουργούνται λόγω της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης.

- Τέλος, από τον όρο (3.81) της συνολικής λαγκρατζιανής (3.76), θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο αποκτούν μάζα τα φερμιόνια στο καθιερωμένο πρότυπο. Η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή όπου τα μποζόνια λαμβάνουν τη μάζα δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε το μηχανισμό Higgs. Έτσι μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας $SU(2)_L x U(1)_Y$ θα ανακύψουν οι όροι μάζας των φερμιονίων.

Η μορφή των όρων αλληλεπίδρασης φερμιονίων-βαθμωτών πεδίων είναι γνωστή σαν αλληλεπίδραση Yukawa, και οι σταθερές σαν σταθερές ζεύξης Yukawa. Έτσι, για την πρώτη οικογένεια λεπτονίων (ομοίως και για τις άλλες δύο), χρησιμοποιώντας πάλι τη γνωστή διπλέτα (3.82) για το βαθμωτό μας πεδίο, γράφουμε τη λαγκρατζιανή :

$$\mathcal{L}_{Yuk}^\ell = f_e^{(11)} \left[(\bar{v}^e \quad \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (\phi^- \quad \bar{\phi}^0) \begin{pmatrix} v^e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \quad (3.146)$$

Ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία ελαχιστοποίησης του δυναμικού για την εύρεση του νέου κενού και μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας παίρνουμε μια διαταραχή $H(x)$ - το φυσικό πεδίο Higgs- γύρω από την αναμενόμενη τιμή του κενού v . Το πεδίο μας θα είναι τώρα:

$$\phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (3.147)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας το διαταραγμένο πεδίο ϕ , στη λαγκρατζιανή (3.146), θα καταλήξουμε στην εξαγωγή όρου μάζας:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^\ell &= \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0 \quad v + H) \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L(v + H)e_R + \bar{e}_R(v + H)e_L] \\ &= \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \frac{f_e^{(11)}}{\sqrt{2}} H [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] \end{aligned} \quad (3.148)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης (3.148) είναι όρος μάζας και αυτή προκύπτει:

$$m_e = \frac{f_e^{(11)} v}{\sqrt{2}} \quad (3.149)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $m_e \bar{e}e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$, το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται:

$$\mathcal{L}_{Yuk}^\ell = m_e \bar{e}e + \frac{m_e}{v} m_e \bar{e}e H \quad (3.150)$$

Ο δεύτερος όρος της τελευταίας εξίσωσης, (3.150), παρουσιάζει μια σύζευξη του ηλεκτρονίου με το βαθμωτό πεδίο Higgs. Επειδή όμως η σταθερά σύζευξης m_e/v είναι πολύ μικρή και συνεπώς δε παράγει κάποιο ανιχνεύσιμο φαινόμενο στις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Αντίστοιχα αποτελέσματα θα προκύπτουν και για τις άλλες δύο οικογένειες λεπτονίων (για την ακρίβεια για τα άλλα δύο φορτισμένα λεπτόνια).

Οι μάζες των κουάρκ αναδεικνύονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως αυτές των φορτισμένων λεπτονίων. Αρχικά θα ασχοληθούμε με την παραγωγή μάζας των κάτω στοιχείων των οικογενείων των κουάρκ (d, s, b) και έπειτα με την παραγωγή μάζας των (u, c, t), αφού για αυτή την περίπτωση πρέπει να σημειώσουμε κάποια αλλαγή.

$$\mathcal{L}_{Yuk}^d = f_d^{(11)} \left[(\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^o \end{pmatrix} d_R + \bar{d}_R (\phi^- \quad \bar{\phi}^o) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \quad (3.151)$$

Μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας προκύπτουν οι μάζες των κουάρκ με την αρνητική συνιστώσα ($-1/2$) ισοσπίν, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία από την οποία προέκυψε η μάζα του ηλεκτρονίου στην ακριβώς προηγούμενη περίπτωση. Οπότε :

$$\mathcal{L}_{Yuk}^d = \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] + \frac{f_d^{(11)}}{\sqrt{2}} H [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] \quad (3.152)$$

Πάλι, ο πρώτος όρος μας δίνει τη μάζα του d κουάρκ

$$m_d = \frac{f_d^{(11)} v}{\sqrt{2}} \quad (3.153)$$

Επομένως, η (3.152) γράφεται στη μορφή

$$\mathcal{L}_{Yuk}^d = m_d \bar{d} d + \frac{m_d}{v} \bar{d} d H \quad (3.154)$$

Τα κουάρκ με θετική συνιστώσα ισοσπίν αποκτούν μάζα με τον ίδιο μηχανισμό μόνο που εδώ εισέρχεται ένα νέο στοιχείο. Για τη δημιουργία μάζας των κουαρκ u, c, t , μέσω του πεδίου ϕ , φτιάχνουμε μια νέα διπλέτα για πεδίο Higgs.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= i\tau_2 \phi^* = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{o*} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 - i\phi_4 \\ -(\phi_1 - i\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^o \\ -\phi^- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.155)$$

Το πεδίο $\tilde{\phi}$ μετασχηματίζεται κάτω από τους $SU(2)_L x U(1)_Y$ μετασχηματισμούς ακριβώς το ίδιο με τη μόνη διαφορά ότι έχει αντίθετο ασθενές υπερφορτίο, $Y = -1$. Γι'αυτό και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να χτίσουμε μια gauge-αναλλοίωτη συνεισφορά στη λαγκρατζιανή. Κατασκευάζουμε λοιπόν τη λαγκρατζιανή από όπου θα πάρουμε τις μάζες των u, c, t κουαρκ και μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας θα έχουμε.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^u &= f_u^{(11)} \left[(\bar{u} \ \bar{d})_L \begin{pmatrix} \bar{\phi}^o \\ -\phi^- \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R (\phi^o \ -\phi^+) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[(\bar{u} \ \bar{d})_L \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R (v + H \ 0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{f_u^{(11)} v}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] + \frac{f_u^{(11)}}{\sqrt{2}} [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] H \end{aligned} \quad (3.156)$$

Συνεπώς, ο όρος μάζας προκύπτει

$$m_u = \frac{f_u^{(11)} v}{\sqrt{2}} \quad (3.157)$$

και η παραπάνω λαγκρατζιανή (3.156) θα είναι

$$\mathcal{L}_{Yuk}^u = m_u \bar{u}u + \frac{m_u}{v} \bar{u}uH \quad (3.158)$$

Συμπερασματικά, η συνολική λαγκρατζιανή των φερμιονίων των οικογενειών

$$f_{e-L} = \begin{pmatrix} \nu^e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad f_{uL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (3.159)$$

θα είναι

$$\mathcal{L}_{f,H} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} \bar{e}eH + \frac{m_d}{v} \bar{d}dH + \frac{m_u}{v} \bar{u}uH \quad (3.160)$$

Οι σταθερές σύζευξης $f_\ell^{(11)}$, $f_d^{(11)}$, $f_u^{(11)}$, οι οποίες εμπλέκονται στις εκφράσεις των μαζών είναι αυθαίρετες, επομένως οι μάζες δεν μπορούν να προβλεφθούν. Επίσης οι όροι στις λαγκρατζιανές που υποδεικνύουν την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με το πεδίο Higgs συζευγνύονται με σταθερά η οποία εξαρτάται από τη μάζα. Συνεπώς, είναι προφανές ότι τα βαρύτερα φερμιόνια αλληλεπιδρούν ισχυρότερα με το βαθμωτό πεδίο H .

3.4 Φερμιονικές μάζες - ανάμιξη γενιών

Στην περίπτωση των λεπτονίων η σύζευξη με το μποζόνιο W^\pm πραγματοποιείται μόνο εντός μιας συγκεκριμένης οικογένειας. Πιο συγκεκριμένα, στη φύση πραγματοποιούνται αλληλεπιδράσεις του είδους

$$\begin{aligned} e^- &\rightarrow \nu_e + W^- \\ \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + W^- \\ \tau^- &\rightarrow \nu_\tau + W^- \end{aligned}$$

αλλά δεν έχει παρατηρηθεί κάποια αλληλεπίδραση του τύπου

$$e^- \not\rightarrow \nu_\tau + W^-$$

που σημαίνει ότι στη φύση δεν απαντώνται αλληλεπιδράσεις κατά τις οποίες αναμιγνύονται οι οικογένειες. Το φαινόμενο αυτό αποτυπώνεται μαθηματικά με τη διατήρηση του λεπτονικού αριθμού ηλεκτρονίου, μιονίου και ταυ αντίστοιχα.

Παρά την παρόμοια κατηγοριοποίηση των κουάρκ σε τρεις οικογένειες (διπλέτες), η σύζευξη τους με το W δε σέβεται το ξεχωριστό των οικογενειών. Δεν υπάρχει δηλαδή η διατήρηση κάποιου αριθμού που να απαγορεύει την ανάμιξη των γενιών. Ενδεικτικά, η διάσπαση β^- ($n \rightarrow p + e^- + \nu_e$) κατά την οποία ένα νετρόνιο μετατρέπεται σε ένα πρωτόνιο, σε επίπεδο κουάρκ γράφεται:

$$d \rightarrow u + W^-$$

Η διάσπαση αυτή όπως φαίνεται υπακούει τη διατήρηση της οικογένειας, όπως ακριβώς συνέβαινε και στην περίπτωση των λεπτονίων. Ωστόσο, υπάρχουν και κάποιες ασθενείς αλληλεπιδράσεις όπως η διάσπαση του Λ , $\Lambda \rightarrow p + e^- + \nu_e$, η οποία σε επίπεδο κουάρκ γράφεται

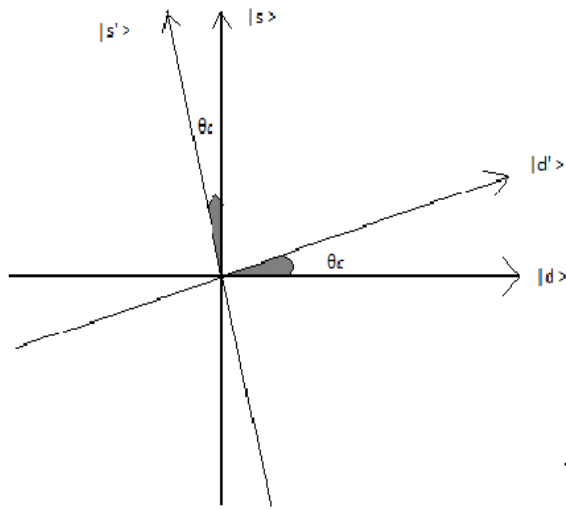
$$s \rightarrow u + W^-$$

και αποτελεί απόδειξη ότι στις W^\pm ασθενείς αλληλεπιδράσεις δε διατηρείται η γεύση.

Στην προηγούμενη υποπαράγραφο, καταλήξαμε στις εξισώσεις (3.128) και (3.145) οι οποίες μας πληροφορούν ότι τα ασθενή ρεύματα (φορτισμένα και α-φορτιστο) δεν επιτρέπουν τη σύζευξη μεταξύ δύο κουάρκ διαφορετικής γεύσης. Αυτό συνέβη γιατί, όπως φαίνεται και στην (3.160), ο τρόπος που γράψαμε τη λαγκρατζιανή είναι τέτοιος ώστε να εννοείται ότι ο πίνακας μαζών είναι διαγώνιος στη βάση των ρευμάτων, πράγμα που δεν ισχύει αφού όπως είδαμε παραπάνω η ανάμιξη των οικογενειών έχει παρατηρηθεί πειραματικά. Αυτό σημαίνει ότι ενώ δουλεύουμε στη βάση των ρευμάτων, έχουμε υπολογίσει τις μάζες σαν να ήτανε στη δική τους φυσική βάση. Οπότε αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να διαφοροποιήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας (στη φυσική βάση των μαζών) από αυτές της αλληλεπίδρασης (στη βάση των ρευμάτων). Με τις ιδιοκαταστάσεις της πρώτης περιγράφουμε ένα κουάρκ όταν διαδίδεται ελεύθερο, ενώ με της δεύτερης περιγράφουμε το κουάρκ κατά την αλληλεπίδραση. Η εναλλαγή ανάμεσα σε αυτά τα δυο είδη καταστάσεων γίνεται μέσω του πίνακα Cabibo-Kombayashi-Maskawa. Ο πίνακας αυτός είναι μοναδιακός και δίνει τις απαραίτητες πληροφορίες για τη δύναμη των διασπάσεων που αλλάζουν τη γεύση.

Ας πάρουμε όμως τις ανακαλύψεις με την ιστορική τους σειρά. Τη χρονική περίοδο κατά την οποία έχουν ανακαλυφθεί μόνο οι δύο πρώτες οικογένειες κουαρκ, ο Cabibo πρότεινε (1963) ότι τα d και s κουάρκ που λαμβάνουν μέρος στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις αναμιγνύονται και μάλιστα έχουν μια στροφή ανάμιξης θ_c . Με άλλα λόγια η γωνία αυτή, σχετίζεται με την πιθανότητα παραδείγματος χάρη το u κουάρκ να διασπάται στο d ή στο s . Δηλαδή, το κουάρκ που αλληλεπιδρά με το u μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων δεν είναι μόνο το d ή το s αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός τους.

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad \text{και} \quad s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad (3.161)$$



Η γωνία Cabibo αντιπροσωπεύει τη στροφή του διανύσματος της ιδιοκατάστασης της μάζας στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της μάζας σε ένα διάνυσμα της ασθενούς ιδιοκατάστασης στη βάση των ασθενών καταστάσεων. Η γωνία είναι $\theta_c = 13.04$

Η γωνία Cabibo αντιπροσωπεύει τη στροφή του διανύσματος της ιδιοκατάστασης της μάζας στο διανυσματικό χώρο που σχηματίζεται από τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας σε ένα διάνυσμα της ασθενούς ιδιοκατάστασης που σχηματίζεται από τις ασθενείς καταστάσεις. Η γωνία είναι $\theta_c = 13.04$

Οπότε αν συμβολίσουμε με $\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}$ τις ιδιοκαταστάσεις των ασθενών αλληλεπιδράσεων (τις ιδιοκαταστάσεις στο χώρο των ρευμάτων) για τις $T_3 = -\frac{1}{2}$ συνιστώσες των κουάρκ των δύο οικογενειών, η σύνδεση τους με τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας $\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$ (τις ιδιοκαταστάσεις στο φυσικό χώρο), θα είναι η (3.161) γραμμένη με τη μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (3.162)$$

Συνεπώς, το W συζευγνύεται με τις "στραμμένες κατά Cabibo" καταστάσεις $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$ ακριβώς όπως πράττει και με τα λεπτονικά ζευγάρια. Επομένως οι συζεύξεις με τα φυσικά κουάρκ θα είναι:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos\theta_c + s \sin\theta_c \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d \sin\theta_c + s \cos\theta_c \end{pmatrix}$$

Ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι ότι η στροφή (3.163) δεν επηρεάζει τη δομή των ασθενών ρευμάτων. Αν πάρουμε λοιπόν την έκφραση που έχουμε βρει ωστόσο για το ουδέτερο ρεύμα, (3.145), συμπεριλαμβάνοντας μόνο τους όρους

που μας ενδιαφέρει στο παρόν εδάφιο,

$$j_o^\mu = \frac{\cos^2 \theta}{2} (\bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{s}_L \gamma^\mu d_L + \bar{s}_L \gamma^\mu s_L) - \frac{\sin^2 \theta}{4} \left(\bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{s}_L \gamma^\mu d_L + \bar{s}_L \gamma^\mu s_L - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R - \frac{2}{3} \bar{s}_R \gamma^\mu s_R \right) \quad (3.163)$$

και αντικαταστήσουμε $d \rightarrow d'$ και $s \rightarrow s'$ τότε αποδεικνύεται ότι η έκφραση θα παραμείνει αναλλοίωτη:

$$j_o^\mu = \frac{\cos^2 \theta_w}{2} [(\bar{d}_L \cos \theta_c + \bar{s}_L \sin \theta_c) \gamma^\mu (d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c) + (-\bar{d}_L \sin \theta_c + \bar{s}_L \cos \theta_c) \gamma^\mu (-d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c)] + \frac{\sin^2 \theta_w}{4} [(\bar{d}_L \cos \theta_c + \bar{s}_L \sin \theta_c) \gamma^\mu (d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c) + (-\bar{d}_L \sin \theta_c + \bar{s}_L \cos \theta_c) \gamma^\mu (-d_L \sin \theta_c + s_L \cos \theta_c) - \frac{2}{3} (\bar{d}_R \cos \theta_c + \bar{s}_R \sin \theta_c) \gamma^\mu (d_R \cos \theta_c + s_R \sin \theta_c) - \frac{2}{3} (-\bar{d}_R \sin \theta_c + \bar{s}_R \cos \theta_c) \gamma^\mu (-d_R \sin \theta_c + s_R \cos \theta_c)] \quad (3.164)$$

$$= \frac{\cos^2 \theta_w}{2} [\cos^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \sin^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu s_L + \sin \theta_c \cos \theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu d + \sin \theta_c \cos \theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu s_L + \sin^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \cos^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu s_L - \sin \theta_c \cos \theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu s - \sin \theta_c \cos \theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu d] + \frac{\sin^2 \theta_w}{4} [\dots] = j_o^\mu \quad (3.165)$$

όπου επίσης η παράσταση που παραλείψαμε προφανώς δίνει αναλλοίωτο αποτέλεσμα. Η απουσία μεταβάσεων ουδέτερων ρευμάτων αλλαγής του κβαντικού αριθμού της γεύσης (*FCNC*) αποτελεί, εκτός από θεωρητική πρόβλεψη, πειραματική απόδειξη.

Οι Glashow- Hλιόπουλος- Μαϊανι διατύπωσαν τον ομώνυμο (*GIM*) μηχανισμό, ο οποίος περιγράφει το πώς καταπιέζονται η μετάβαση μέσω ουδέτερων ρευμάτων καθώς και οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις με μεταβολή της παραδοξότητας ίση με 2 ($\Delta S = 2$). Οι τρεις επιστήμονες, από τα πειράματα γνωρίζαν δύο σημαντικά πράγματα. Πρώτον, ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις στις οποίες αλλάζει η γεύση (εδώ συγκεκριμένα η παραδοξότητα), αλλάζει μόνο κατά μία μονάδα και δεύτερον ότι οι επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις κατα τις οποίες παρατηρείται $\Delta(\text{flavour}) = 1$ λαμβάνουν χώρα μόνο μέσω μεταβάσεων φορτισμένων ρευμάτων. Επειδή όμως τα παρατηρούμενα φορτισμένα ρεύματα δε συμφωνούσαν με τη θεωρία, στηρίχθηκαν στην απουσία των μεταβάσεων ουδέτερων ρευμάτων αλλαγής του κβαντικού αριθμού της γεύσης (*FCNC*) και διατύπωσαν ότι οι στραμμένες καταστάσεις των κουάρκ d, s κατά γωνία

Cabibo (εξισώσεις (3.161)), με την εισαγωγή ενός τέταρτου κουάρκ, διορθώνουν το ρεύμα και οι υπολογισμοί δίνουν το παρατηρούμενο. Ενώ αρχικά η εισαγωγή ενός τέταρτου κουάρκ παραξένεψε την επιστημονική κοινότητα, τέσσερα χρόνια μετά την πρόβλεψη, η ανακάλυψη του κουάρκ c επιβεβαίωσε την εγκυρότητα του μηχανισμού.

Στο καθιερωμένο πρότυπο η παρουσία τρίτης οικογένειας κουάρκ αναδεικνύει την ανάγκη για την ύπαρξη ενός 3×3 μοναδιακού πίνακα (ως επέκταση του 2×2 πίνακα στην περίπτωση δύο οικογενειών) ο οποίος περιέχει πληροφορίες για την δύναμη των ασθενών διασπάσεων αλλαγής γεύσης. Όπως έχουμε δει παραπάνω οι ιδιοκαταστάσεις των κουάρκ στη φυσική βάση (όταν διαδίδονται ελεύθερα) δε συμμετέχουν ατόφιος στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Ο μοναδιακός μετασχηματισμός (πίνακας) που εξηγεί αυτό το "κακοταίριασμα" και συνδέει τις κβαντικές ιδιοκαταστάσεις των δυο βάσεων φυσικής-ρευμάτων, αντιπροσωπεύεται από τον πίνακα Cabibo-Kombayashi-Maskawa. Συμβατικά, επιλέγουμε τα κουάρκ u, c, t ως τις καθαρές καταστάσεις και τα d, s, b είναι τα κουάρκ των οποίων οι καταστάσεις αναμιγνύονται μέσω του μετασχηματισμού:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.166)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης τα στοιχεία του διανύσματος αποτελούνται από τα "ταίρια" των πάνω-είδους κουάρκ στη βάση των ρευμάτων και στο δεξί μέλος βρίσκεται ο πίνακας μετασχηματισμού πολλαπλασιασμένος από ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι τα ίδια όμως στη φυσική βάση.

Για να παραμετροποιήσουμε τον παραπάνω πίνακα (3.166), είναι απαραίτητο να βρούμε τον αριθμό παραμέτρων του πίνακα που εμφανίζονται στα πειράματα και άρα έχουν μεγάλη φυσική σημασία. Έχοντας λοιπόν N_g οικογενειες ($2N_g$ γεύσεις), τότε:

- Ένας $N \times N$ μοναδιακός πίνακας ($U^\dagger U = 1$) απαιτεί N_g^2 πραγματικές παραμέτρους να προσδιοριστούν. (Κανονικά απαιτεί $2N_g^2$ αλλά λόγω μοναδιακότητας ανάγεται σε N_g^2).
- $2N_g - 1$ είναι οι σχετικές φάσεις μεταξύ των πεδίων των διάφορων κουάρκ. Συνεπώς οι πραγματικά παρατηρήσιμες παράμετροι, ανεξάρτητες από την επιλογή βάσης, θα είναι: $N_g^2 - (2N_g - 1) = (N_g - 1)^2$.
- Από αυτές οι $N_g(N_g - 1)/2$ είναι γωνίες περιστροφής και λέγονται γωνίες ανάμιξης των οικογενειών.
- Οι υπόλοιπες $(N_g - 1)(N_g - 2)/2$ είναι μιγαδικές φάσεις οι οποίες είναι υπεύθυνες για την παραβίαση της συμμετρίας CP .

Οπότε για $N_g = 3$ προκύπτουν τα απαραίτητα στοιχεία για την παραμετροποίηση του πίνακα $C - K - M$. Επίσης, παρακάτω παραθέτουμε και

τα αποτελέσματα για τις περιπτώσεις $N_g = 1$ και $N_g = 2$ από όπου θα προκύψουν ένα τετριμμένο αποτέλεσμα και το αποτέλεσμα που πήραμε παραπάνω από το μηχανισμό Cabibbo-GIM, αντίστοιχα.

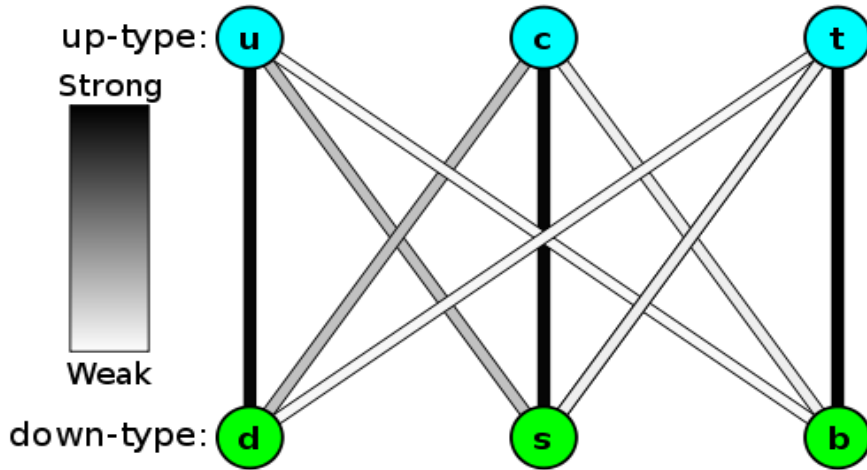
Οι τρεις περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες.

- Για $N_g = 1 \rightarrow (N_g - 1) = 0$, που σημαίνει ότι δεν παίρνουμε καμία πραγματική παράμετρο γεγονός το οποίο συνεπάγεται μόνο $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ σύνδεση χωρίς ανάμιξη οικογενειών.
- Για $N_g = 2 \rightarrow (N_g - 1)^2 = 1$, που σημαίνει ότι έχουμε μία πραγματική παράμετρο, τη γωνία Cabibbo, θ_c . Ο μετασχηματισμός που προκύπτει είναι ο πίνακας στην εξίσωση (3.162).
- Για $N_g = 3 \rightarrow (N_g - 1)^2 = 4$, που σημαίνει ότι έχουμε $N_g(N_g - 1)/2 = 3$ τρεις πραγματικές γωνίες περιστροφής και $(N_g - 1)(N_g - 2)/2 = 1$ μια μιγαδική φάση. Έτσι η καθιερωμένη παραμετροποίηση του πίνακα μετασχηματισμού χρησιμοποιεί τις τρεις γωνίες του Euler και τη γωνία δ_{13} .

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta_{13}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}s_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\
 &\hspace{20em} (3.167)
 \end{aligned}$$

όπου, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ και δ_{13} παραμετροποιεί τη CP. Οι γωνίες $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ ονομάζονται γωνίες μίξης. Προφανώς, η θ_{12} είναι η γωνία Cabibbo θ_c .

Ανακεφαλαιώνοντας, αν αντικαταστήσουμε στην (3.166) τον πίνακα της (3.167) τότε παίρνουμε τους γραμμικούς συνδυασμούς των κάτω-είδους κουάρκ όταν αλληλεπιδρούν ασθενώς. Τα στοιχεία του πίνακα CKM δίνει τα διαφορετικά κανάλια τα οποία ακολουθεί η διάσπαση του κάθε κουάρκ. Η ένταση με την οποία πραγματοποιείται το κάθε κανάλι φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Έικονική αναπαράσταση των διαφορετικών τρόπων διάσπασης των 6 κουάρκ με τις μάζες να αυξάνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά

3.5 Εύρεση γωνίας Cabibbo συναρτήσει των φυσικών μαζών των κουάρκ

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που μπορούμε να εξάγουμε για τη γωνία Cabibbo, το οποίο βοηθάει στην προσέγγιση της τιμής της, είναι να δίνεται συναρτήσει των μαζών των κουάρκ, που μπορούμε να τις βρούμε πειραματικά. Έτσι λοιπόν, στην περίπτωση όπου υπάρχουν μόνο δυο οικογένειες κουάρκ ($N_g = 2$)

$$f_{uL} = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L \quad \text{και} \quad f_{dL} = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \quad (3.168)$$

με αντίστοιχους πίνακες μαζών στη βάση των ρευμάτων:

$$M_U = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n & n' \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

Η λαγκρατζιανή που εμπεριέχει τους όρους μάζας των κουάρκ στη βάση των αλληλεπιδράσεων είναι:

$$\mathcal{L} = (\bar{d}_0 \quad \bar{s}_0)_L M_D \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R + (\bar{u}_0 \quad \bar{c}_0)_L M_U \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_R + h.c. \quad (3.170)$$

Τώρα ορίζουμε κάποιους συμβολισμούς προς αποφυγή συγχυσεων:

- P_L, P_R : Τα ιδιοδιανύσματα των "στραμμένων" κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$P_L = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_L \quad \text{και} \quad P_R = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R \quad (3.171)$$

- N_L, N_R : Τα ιδιοδιανύσματα των "στραμμένων" κουάρκ της πρώτης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$N_L = \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_L \quad \text{και} \quad N_R = \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_R \quad (3.172)$$

- p_L, p_R : Τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη φυσική βάση

$$p_L = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \quad \text{και} \quad p_R = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_R \quad (3.173)$$

- n_L, n_R : Τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της πρώτης οικογένειας στη φυσική βάση

$$n_L = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L \quad \text{και} \quad n_R = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_R \quad (3.174)$$

- U_p, V_p : Πίνακες στροφής Cabibbo της εξίσωσης (3.162) για τα κουάρκ της δεύτερης οικογένειας. Για τους δυο αυτούς πίνακες ισχύει $U_p = V_p$ και αφού είναι μοναδιακοί $U_p^{-1} = V_p^{-1} = U_p^\dagger = V_p^\dagger$.
- U_N, V_N : Αντίστοιχοι πίνακες στροφής Cabibbo για τα κουάρκ της πρώτης οικογένειας. Για τους δυο αυτούς πίνακες ισχύει $U_N = V_N$ και αφού είναι μοναδιακοί $U_N^{-1} = V_N^{-1} = U_N^\dagger = V_N^\dagger$.

Οπότε σύμφωνα με όσα μελετήσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, οι διπλές των κουάρκ των δύο διαφορετικών βάσεων θα δίνονται ως εξής:

$$P_L = U_p p_L \quad P_R = V_p p_R \quad (3.175)$$

$$N_L = U_N n_L \quad N_R = V_N n_R \quad (3.176)$$

Η λαγκρατζιανή (3.170) γράφεται συνεπώς σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{P}_L M_D P_R + \bar{N}_L M_U N_R \\ &= \bar{P}_L U_p U_p^{-1} M_D V_p V_p^{-1} P_R + \bar{N}_L U_N U_N^{-1} M_U V_N V_N^{-1} N_R \\ &= \bar{p}_L (U_p^{-1} M_D V_p) p_R + \bar{n}_L (U_N^{-1} M_U V_N) n_R \end{aligned} \quad (3.177)$$

Οι δύο όροι της τελευταίας εξίσωσης που βρίσκονται εντός παρενθέσεων, συμπίπτουν με τη διαγωνοποίηση των πινάκων των μαζών. Ο πίνακας που θα προκύψει μετά τους πολλαπλασιασμούς θα απαιτήσουμε να είναι διαγώνιος. Για τον πρώτο υπογραμμισμένο όρο της λαγκρατζιανής (3.177) έχουμε:

$$\begin{aligned} U_p^{-1} M_D V_p &= U_p^{-1} M_D U_p = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.178)$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση για οικονομία θέσαμε $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Τώρα επιβάλλουμε την απαίτηση ο πίνακας αυτός να είναι διαγώνιος, δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2scm + s^2m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2m' \end{pmatrix} \quad (3.179)$$

Εξισώνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο πινάκων και αφού λύσουμε το σύστημα προκύπτει ότι

$$\tan^2 \theta_1 = \frac{m_d}{m_s} \quad (3.180)$$

Παρομοίως, ο δεύτερος υπογραμμισμένος όρος της λαγκρατζιανής θα δώσει:

$$\tan^2 \theta_2 = \frac{m_u}{m_c} \quad (3.181)$$

Πλέον, για τη γωνία Cabibbo παίρνουμε:

$$\begin{aligned} U &= U_p^\dagger U_N = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1c_2 + s_1s_2 & c_1s_2 - s_1c_2 \\ s_1c_2 - s_2c_1 & s_1s_2 + c_1c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1-2} & -s_{1-2} \\ s_{1-2} & c_{1-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.182)$$

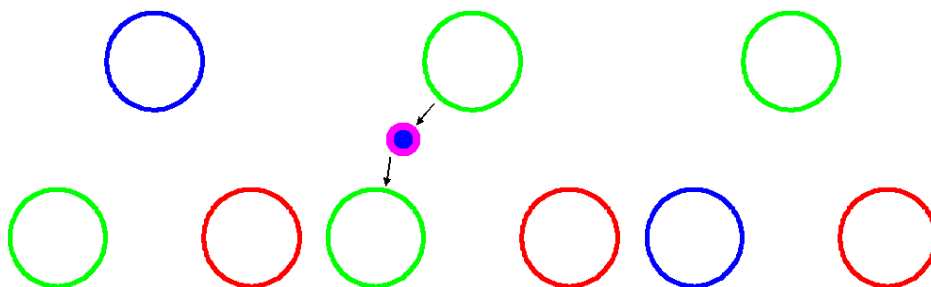
Επομένως η γωνία Cabibbo, γνωρίζοντας τις μάζες των κουάρκ υπολογίζεται $\theta_c = \theta_1 - \theta_2 \approx 13^\circ$

3.6 Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις που μελετήσαμε παραπάνω αποτελούν το ένα μόνο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου. Το δεύτερο, και τελευταίο, είναι αυτό των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Η λαγκρατζιανή που δίνει την αλληλεπίδραση των κουάρκ με τα γκλουόνια είναι:

$$\mathcal{L}_{si} = -\frac{g_3}{2} \bar{q}_\alpha \gamma^\mu \lambda_i^{\alpha\beta} q_\beta G_\mu^i \quad i = 1, \dots, 8 \quad (3.183)$$

όπου $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, τα τρία χρώματα ενός οποιουδήποτε κουάρκ. Κατά τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, το χρώμα ενός κουάρκ μπορεί να αλλάξει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το γκλουόνιο έχει την ιδιότητα να μεταφέρει χρώμα, το οποίο αποτελείται από μια μονάδα χρώματος και μια αντιχρώματος (το χρώμα διατηρείται όπως το ηλεκτρικό φορτίο). Παραδείγματος χάρη, έστω ένα αδρόνιο που αποτελείται από τρία κουάρκ τα οποία φέρουν το καθένα από ένα βασικό χρώμα. Το κουάρκ που έχει χρώμα μπλε, μπορεί να αλλάξει χρώμα και να γίνει πράσινο, εκπέμποντας ένα γκλουόνιο το οποίο θα φέρει μπλε και αντι-πράσινο (ματζέντα) χρώμα. Το γκλουόνιο αυτό θα απορροφήθει από ένα άλλο κουάρκ χρώματος πράσινου και θα αποκτήσει μπλε χρώμα, με αποτέλεσμα το αδρόνιο να παραμένει άχρωμο. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στις παρακάτω εικόνες.



Απεικόνιση της ανταλλαγής ενός γκλουονίου εντός ενός αδρονίου και αλλαγής χρώματος των δυο κουάρκ. Το αδρόνιο παραμένει άχρωμο.

Το γεγονός ότι τα γκλουόνια μεταφέρουν χρώμα σημαίνει ότι ζευγνύονται μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση αυτή αντιακτοπρίζει τη μη αβελιανότητα της θεωρίας βαθμίδας $SU(3)_c$, φαινόμενο που το συναντήσαμε και στα διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας της ασθενούς αλληλεπίδρασης (αφού και στην περίπτωση αυτή η θεωρία βαθμίδας $SU(2)_L$ είναι μη αβελιανή). Αντίθετα, το φωτόνιο δε μεταφέρει ηλεκτρικό φορτίο με αποτέλεσμα τη μη σύζευξη του με τον εαυτό του. Αυτό είναι αποτέλεσμα της αβελιανότητας της θεωρίας βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού $U(1)_Q$.

Όπως έχουμε αναφέρει, τα αδρόνια (βαρυόνια και μεσόνια) αποτελούν καταστάσεις που δε φέρουν χρώμα και ονομάζονται μονές καταστάσεις χρώματος. Τα κουάρκ και τα γκλουόνια παραμένουν διαρκώς σε δέσμιες καταστάσεις γι' αυτό δεν είναι δυνατό να παρατηρηθούν σαν ελεύθερα σωματίδια. Το φαινόμενο αυτό είναι το φαινόμενο του εγκλωβισμού.

Η δημιουργία των μονών καταστάσεων χρώματος αποτελεί αντικείμενο για περαιτέρω μελέτη. Στην κβαντική χρωμοδυναμική έχουμε συνολικά 3 χρώματα και συνεπώς, στη θεμελιώδη αναπαράσταση, τα κουάρκ είναι τριπλέτες. Η βασική λοιπόν κατάσταση έχει τρεις συνιστώσες και άρα υπάρχουν δυο τρόποι για να φτιάξουμε μονές καταστάσεις, σε αντίθεση με την περίπτωση της $SU(2)$, όπου μια μονή κατάσταση του σπιν προκύπτει από το συνδυασμό των σπιν δυο σωματιδίων σε μια αντισυμμετρική κατάσταση συνολικού σπιν ίσου με μηδεν $\chi_{0,0} = 1/\sqrt{2}(\chi_{\uparrow}^{(1)} \chi_{\downarrow}^{(2)} - \chi_{\downarrow}^{(1)} \chi_{\uparrow}^{(2)})$. Ο πρώτος λοιπόν συνδυασμός είναι ο $1/\sqrt{3}q_i^{(1)} \bar{q}_i^{(2)}$. Παρατηρούμε ότι ο συμμετρικός αυτός συνδυασμός είναι ένα άθροισμα από τρεις καταστάσεις κουάρκ-αντικουάρκ και αποτελεί τα μεσόνια. Ο δεύτερος συνδυασμός είναι ο $1/\sqrt{6}(\varepsilon_{ijk} q_i^{(1)} q_j^{(2)} q_k^{(3)})$ και αποτελεί τον αντισυμμετρικό συνδυασμό ο οποίος περιέχει μόνο καταστάσεις κουάρκ (καθόλου αντικουάρκ) και αντιστοιχεί στα σωματίδια που λεγονται βαρυόνια. Έτσι λοιπόν, ξεκινώντας από το φαινόμενο του εγκλωβισμού καταλήξαμε στο γεγονός ότι υπάρχουν μόνο δυο είδη αδρονικών καταστάσεων που είναι άχρωμες, τα μεσόνια και τα βαρυόνια.

Είναι σημαντικό, μελετώντας την αλληλεπίδραση των κουάρκ με τα γκλουόνια, να μελετήσουμε το μεταξύ τους δυναμικό, δηλαδή το δυναμικό της κβαντικής χρωμοδυναμικής (ανάλογο του δυναμικό της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής). Οι πειραματικές μελέτες δέσμιων καταστάσεων μεσονίων αποτελούμενα από ζευγάρια βαρέων κουάρκ (σύστημα κουαρκόνιουμ, σε αντιστοιχία με το ποζιτρόνιουμ) έχουν δείξει ότι η αλληλεπίδραση $q\bar{q}$ σε μικρές αποστάσεις θα είναι το ίδιο με το δυναμικό Coulomb αντίθετων φορτίων της QED , με τη διαφορά ότι η σταθερά της λεπτής υφής $\alpha = e^2/4\pi$ θα αντικαθίσταται από μια άλλη σταθερά $f\alpha_3 = g_3^2/4\pi$:

$$V_{q\bar{q}}(r) = -f \frac{\alpha_3}{r} \quad (3.184)$$

όπου f ένας παράγοντας χρώματος ο οποίος εξαρτάται από τη χρωματική κατάσταση των δυο αλληλεπιδρόντων κουάρκ. Ο παράγοντας αυτός προκύπτει θετικός όταν τα κουάρκ βρίσκονται στη μονή κατάσταση χρώματος. Συνεπώς το δυναμικό προκύπτει αρνητικό και αυτό σημαίνει ότι τα κουάρκ έλκονται πιο ισχυρά όταν βρίσκονται στη μονή κατάσταση χρώματος.

Στην περίπτωση μεγάλων αποστάσεων, το δυναμικό αλληλεπίδρασης των δυο σωματιδίων είναι γραμμικό:

$$V_{q\bar{q}}(r) = br \quad (3.185)$$

Η γραμμικότητα του δυναμικού κωδικοποιεί το φαινόμενο του εγκλωβισμού (απαιτείται άπειρη ενέργεια διαχωρισμού κουάρκ-αντικουάρκ). Το φαινόμενο αυτό ευθύνεται για το γεγονός ότι δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε ελεύθερα κουάρκ ή γκλουόνια και έχει ως συνέπεια, η ενέργεια που παρέχεται στην περίπτωση μιας σύγκρουσης να οδηγείται σε σχηματισμό αδρονίων, μια διαδικασία γνωστή ως αδρανοποίηση. Έτσι, σε μια σύγκρουση υψηλής ενέργειας δεν πρόκειται να παρατηρήσουμε κουάρκ ή γκλουόνια σε ελεύθερη μορφή, αλλά πίδακες αδρονίων, στα οποία υποβόσκει η ύπαρξη των κουάρκ και γκλουονίων.

Κατά τη σύγκρουση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου μεγάλης ενέργειας παρατηρούνται δυο διαφορετικά κανάλια από τα οποία παίρνουμε εν τέλει πίδακες αδρονίων:

$$e^+ e^- \rightarrow q \bar{q} \rightarrow jj \quad (3.186)$$

$$e^+ e^- \rightarrow q \bar{q} G \rightarrow jjj \quad (3.187)$$

Η παρουσία του γκλουονίου στην αλληλεπίδραση (3.187), προέρχεται από ένα από τα κουάρκ της τελικής κατάστασης. Η κατανομή των τριών πινάκων δίνεται έγκυρα από την κβαντική χρωμοδυναμική με αποτέλεσμα την έμμεση επιβεβαίωση των γκλουονίων και των αλληλεπιδράσεών τους με τα κουάρκ, όπως περιγράφονται από την κβαντική χρωμοδυναμική με σταθερά ζεύξης α_3 η οποία ταυτίζεται με τη σταθερά των ισχυρών αλληλεπιδράσεων α_s .

Πέρα από το φαινόμενο του εγκλωβισμού, μια ακόμη πιο καθοριστική ιδιότητα της κβαντικής χρωμοδυναμικής στάθηκε η ασυμπτωτική ελευθερία. Ξεκινώντας τη συζήτηση για την ιδιότητα αυτή (περισσότερα θα δούμε στο μεθεπόμενο κεφάλαιο), πρέπει να διευκρινήσουμε ότι οι σταθερές που ζεύξης των τριών αλληλεπιδράσεων που μελετήσαμε, δεν είναι στην πραγματικότητα σταθερές, αλλά εξαρτώνται από την κλίμακα ενεργειών στην οποία τις μελετούμε (ή αλλιώς, από την απόσταση). Για να μελετηθεί το φαινόμενο αυτό χρησιμοποιούμε όρους υψηλότερης τάξης της θεωρίας διαταραχών. Η ασυμπτωτική ελευθερία είναι λοιπόν μια ιδιότητα κατά την οποία όσο αυξάνεται η ενέργεια, δηλαδή μικραίνει η απόσταση, οι δεσμοί μεταξύ των κουάρκ γίνονται συνεχώς ασθενέστεροι (ασυμπτωτικά). Συνεπώς, στη δομή του αδρονίου, τα κουάρκ βρίσκονται τόσο κοντά, που λόγω της ιδιότητας αυτής, είναι σχεδόν ελεύθερα. Βέβαια, όσο απομακρύνονται τα κουάρκ, τόσο δυναμώνει η μεταξύ τους έλξη.

3.7 Συμπεράσματα

Αυτή ήταν η περιγραφή του καθιερωμένου προτύπου της φυσικής $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$. Από τους όρους των λανγκρατζιανών πυκνοτήτων που αναλύσαμε παραπάνω προκύπτουν χρήσιμες πληροφορίες (σύμφωνα με τους κανόνες του Feynman) για τις αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων. Επίσης, τα πειραματικά αποτελέσματα, επιβεβαιώνουν προβλέψεις από το καθιερωμένο πρότυπο, με αποτέλεσμα να χρίζεται ως μια πολύ επιτυχημένη θεωρία της φυσικής. Βέβαια, στην τρέχουσα μορφή του, περιέχει έναν αρκετά μεγάλο αριθμό αυθαίρετων παραμέτρων. Είναι αλήθεια πως η μορφή αυτή δε θα είναι η τελευταία λέξη στην προσπάθεια για μια ενοποιημένη θεωρία πάνω στις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της φύσης.

Για φυσικές θεωρίες πέρα από το καθιερωμένο πρότυπο, μόνο οι ενδείξεις για μάζα των νετρίνων δείχνουν προς αυτή την κατεύθυνση. Αν τα νετρίνα έχουν μη μηδενική φυσική μάζα τότε, όπως αναμένεται, θα υπάρχει ένας αντίστοιχος με τον πίνακα K-C-M πίνακας μίξης για τα λεπτόνια. Η φυσική δε σταματά να εξελίσσεται και με το πείραμα σαν οδηγό οι επιστήμονες κατευθύνονται προς την αποσαφήνισή της.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε την θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, μέσω της οποίας θα μπορέσουμε να μελετήσουμε την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση πραγματικών -και φανταστικών- σωματιδίων.

Κεφάλαιο 4

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (*QED*)

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πλάτος σκέδασης κάποιων αλληλεπιδράσεων και το πως αυτό προκύπτει. Έπειτα θα αναλύσουμε τους κανόνες Feynman για το πως εξάγουμε τις απαραίτητες πληροφορίες από τα διαγράμματα, αλλά και το πως βρίσκουμε το αναλλοίωτο πλάτος μέσω των όρων της λαγκρατζιανής.

4.1 Μη σχετικιστική χρονοεξαρτώμενη θεωρία διαταραχών

Ένα από τα βασικά προβλήματα της κβαντομηχανικής είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας μετάβασης από μια αρχική κατάσταση ϕ_i σε μια τελική κατάσταση ϕ_f . Τις πιθανότητες αυτές τις συμβολίζουμε με $|T_{fi}|^2$. Τέτοιες μεταβάσεις δε συμβαίνουν αυθόρμητα, αλλά προκύπτουν όταν στο φυσικό σύστημα που μελετάμε επιδράσει μια χρονοεξαρτημένη διαταραχή $V(\vec{r}, t)$. Η διαταραχή αυτή "ταρακουνάει" το σύστημα, έτσι ώστε ενώ αυτό βρισκόταν στην αρχική κατάσταση ϕ_i , να υπάρχει κάποια πιθανότητα να παραμείνει σε αυτή, αλλά να υπάρχουν και μη αμελητέες πιθανότητες να βρεθεί σε κάποια από τις άλλες καταστάσεις του συστήματος, τις ψ_n . Επομένως έστω ότι γνωρίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης Schrodinger του αδιατάρακτου συστήματος.

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \quad \text{με} \quad \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn} \quad (4.1)$$

όπου έχουμε κανονικοποιήσει τις λύσεις σε ένα κουτί όγκου V . Η χρονική εξάρτηση των κυματοσυναρτήσεων ϕ_n προκύπτει αν εφαρμόσουμε πάνω τους το μοναδιακό τελεστή της χρονικής εξέλιξης $U = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$:

$$\tilde{\phi}_n = \phi_n(\vec{r})U = \phi_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \quad (4.2)$$

όπου όπως φαίνεται η χρονική εξέλιξη των ιδιοσυναρτήσεων αυτών χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη ιδιοτιμή της ενέργειας. Συνεπώς, οι ιδιοσυναρτήσεις $\tilde{\phi}(\vec{r}, t)$ ικανοποιούν την (εξαρτημένη από το χρόνο) εξίσωση Schrodinger :

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = H_0(\vec{r})\tilde{\phi} \quad (4.3)$$

Επανερχόμαστε τώρα στον αρχικό μας στόχο, που είναι να λύσουμε την εξίσωση Schrodinger

$$(H_0 + V(\vec{r}, t))\psi(\vec{r}, t) = i\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4.4)$$

όπου $\psi(\vec{r}, t)$ είναι οι άγνωστες ακριβείς λύσεις του διαταραγμένου συστήματος. Τις κυματοσυναρτήσεις αυτές, μπορούμε να γράψουμε τις σε γραμμικό συνδυασμό των γνωστών λύσεων $\tilde{\phi}_n(\vec{r}, t)$ του αδιατάρακτου συστήματος.

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t)\tilde{\phi}_n(\vec{r}, t) \quad (4.5)$$

Με στόχο να βρούμε τους συντελεστές $a_n(t)$, αντικαθιστούμε την (4.5) στην (4.4) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_n a_n \tilde{\phi}_n \right) &= H_0 \sum_n a_n \tilde{\phi}_n + V \sum_n a_n \tilde{\phi}_n \Rightarrow \\ i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \tilde{\phi}_n + \sum_n a_n i\hbar \frac{\partial \tilde{\phi}_n}{\partial t} &= \sum_n a_n H_0 \tilde{\phi}_n + \sum_n a_n V \tilde{\phi}_n \Rightarrow \\ i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \tilde{\phi}_n &= \sum_n a_n V \tilde{\phi}_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

όπου στο τελευταίο βήμα δυο όροι εξαφανίστηκαν λόγω της (4.6). Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\tilde{\phi}_f^*$ την (4.3) και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \int d^3x \tilde{\phi}_f^* \tilde{\phi}_n &= \sum_n a_n \int d^3x \tilde{\phi}_f^* V \tilde{\phi}_n \Rightarrow \\ i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} \int d^3x \tilde{\phi}_f^* \tilde{\phi}_n &= \sum_n a_n e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} \int d^3x \tilde{\phi}_f^* V \tilde{\phi}_n \Rightarrow \\ i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} \delta_{fn} &= \sum_n a_n V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} \Rightarrow \\ i\hbar \frac{da_f}{dt} &= \sum_n a_n V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} \end{aligned} \quad (4.7)$$

όπου έγινε η αντικατάσταση

$$V_{fn} = \int d^3x \tilde{\phi}_f^* V \tilde{\phi}_n \quad (4.8)$$

Για να εκπληρώσουμε τον αρχικό μας στόχο που ήταν ο προσδιορισμός της πιθανότητας μετάβασης, απομένει απλώς να υπολογίσουμε το συντελεστή $a_f(t)$. Δυστυχώς ο συντελεστής αυτός δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς αλλά μόνο με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Σε προσέγγιση μηδενικής τάξης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή του συντελεστή παραμένει ίδια, ακριβώς όπως ήταν πριν τη διαταραχή, δηλαδή

$$a_n^{(0)}(t) = \delta_{kn} \quad (4.9)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στο δεξιό μέλος της (4.7), μπορούμε να προσδιορίσουμε την προσέγγιση πρώτης τάξης.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_f^{(1)}}{dt} &= \sum_n a_n^{(0)} V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t/\hbar} = \sum_n \delta_{kn} V_{fn} e^{-i(E_k - E_f)t/\hbar} \Rightarrow \\ i\hbar \frac{da_f^{(1)}}{dt} &= V_{fk} e^{-i(E_k - E_f)t/\hbar} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Αν υποθέσουμε ότι ακριβώς πριν την εφαρμογή του δυναμικού V (τη στιγμή $t = -T/2$) το σύστημα βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση i της μη διαταραγμένης χαμιλτονιανής. Αυτό σημαίνει ότι

$$a_i(-T/2) = 1 \quad \text{και} \quad a_k(-T/2) = 0 \quad \text{για} \quad k \neq i \quad (4.11)$$

Επομένως

$$\frac{da_f^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} e^{-i(E_i - E_f)t/\hbar} \quad (4.12)$$

Τώρα δεδομένου ότι το δυναμικό είναι ανίσχυρο και προσωρινό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες παραμένουν έγκυρες για όλο το χρόνο. Επομένως ολοκληρώνοντας την (4.12) παίρνουμε:

$$a_f(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T/2}^t dt' \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} \quad (4.13)$$

και πιο συγκεκριμένα, για τη χρονική στιγμή $t = T/2$ μετά από το πέρασμα της διαταραχής θα έχουμε:

$$T_{fi} \equiv a_{fi}(T/2) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x [\phi_f(\vec{r}) e^{-iE_f t}(\vec{r})]^* V(\vec{r}, t) [\phi_i(\vec{r}) e^{-iE_i t}] \quad (4.14)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γράφεται σε συναλλοίωτη μορφή:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) \quad (4.15)$$

Είναι προφανές πως το τετράγωνο της ποσότητας T_{fi} μεταφράζεται σαν την πιθανότητα που έχει το σύστημα (π.χ. ένα σωματίδιο) να μεταβεί από μια

αρχική κατάσταση i σε μια τελική f . Θεωρώντας την περίπτωση η οποία είναι χρονοανεξάρτητη $V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$, τότε η (4.13) γράφεται:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} = -\frac{2\pi i}{\hbar} V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (4.16)$$

Η δ-συνάρτηση εκφράζει το γεγονός ότι η ενέργεια του συστήματος διατηρείται κατά τη μετάβαση από την αρχική στην τελική κατάσταση. Αυτό σημαίνει ότι αφού $\Delta E = 0$, σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, η μετάβαση $i \rightarrow f$ συμβαίνει σε άπειρο χρόνο. Συνεπώς η ποσότητα T_{fi}^2 που θα μας έδινε την πιθανότητα είναι ανούσια. Για το λόγο αυτό ορίζουμε την ποσότητα του ρυθμού μετάβασης πιθανότητας

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \quad (4.17)$$

Τετραγωνίζουμε λοιπόν την (4.16) για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μετάβασης πιθανότητας.

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^2 |V_{fi}|^2}{\hbar^2 T} [\delta(E_f - E_i)]^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi |V_{fi}|^2}{\hbar^2 T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων συνήθως ασχολούμαστε με συστήματα τα οποία ξεκινούν από μια συγκεκριμένη αρχική κατάσταση (διακριτού φάσματος) και καταλήγουν σε ένα σύνολο τελικών καταστάσεων (συνεχές φάσμα). Έστω λοιπόν ότι $\rho(E_f)$ είναι η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων και συνεπώς $\rho(E_f)dE_f$ είναι ο αριθμός των καταστάσεων στο ενεργειακό διάστημα $E_f, E_f + dE_f$. Ολοκληρώνοντας πάνω στην πυκνότητα αυτή και επιβάλλοντας τη διατήρηση της ενέργειας, παίρνουμε το ρυθμό μετάβασης:

$$\begin{aligned} W_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \Rightarrow \\ W_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{fi}|^2 \rho(E_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση ονομάζεται ο χρυσός κανόνας του Fermi.

Για να βελτιώσουμε την παραπάνω προσέγγιση για το πλάτος T_{fi} , εισάγουμε στο δεξί μέλος της (4.10) την εξίσωση (4.13) και παίρνουμε:

$$\frac{da_f}{dt} = \dots + \frac{(-i)^2}{\hbar} \left[\sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-T/2}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \right] V_{fn} e^{i(E_f - E_n)t} \quad (4.20)$$

όπου οι τελείες υποκαθιστούν το αποτέλεσμα της προσέγγισης πρώτης τάξης. Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο την παραπάνω διαφορική εξίσωση, παίρνουμε για το πλάτος:

$$T_{fi} = \dots - \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_n)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i)t'} \quad (4.21)$$

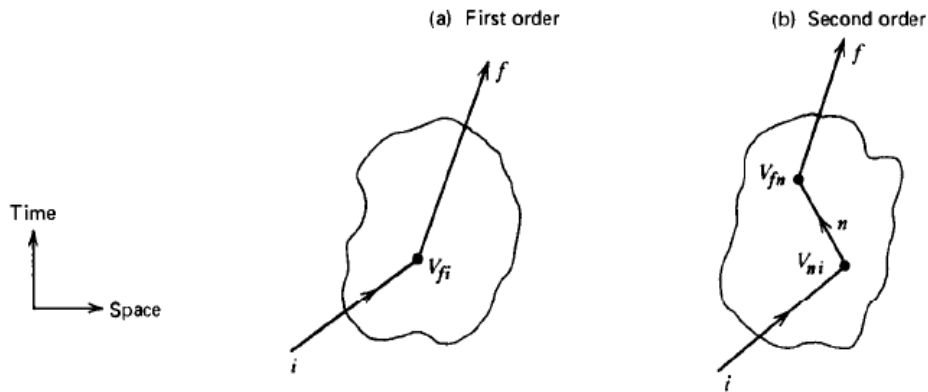
Για να αποκτήσει το ολοκλήρωμα πάνω στο t' νόημα, πρέπει να συμπεριλάβουμε έναν όρο στο εκθετικό που εμπλέκει μια μικρή θετική παράμετρο, την οποία και αφήνουμε να μηδενιστεί μετά την ολοκλήρωση. Περισσότερες λεπτομέρειες για τον όρο αυτό θα δώσουμε παρακάτω. Επομένως το ολοκλήρωμα υπολογίζεται:

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t'} = i \frac{e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t}}{E_i - E_n + i\varepsilon} \quad (4.22)$$

Η διόρθωση δεύτερης τάξης για το πλάτος θα προκύπτει:

$$T_{fi} = \dots - \frac{2\pi i}{\hbar} \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{fi}}{E_i - E_n + i\varepsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (4.23)$$

Οι δυο πρώτοι όροι που προκύπτουν για το πλάτος (4.16) και (4.23), όπως τους υπολογίσαμε, παριστάνονται γραφικά ως εξής:

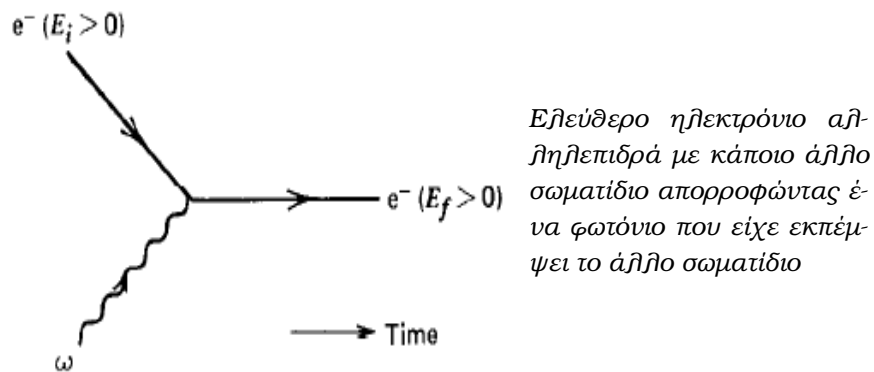


Πρώτης και δεύτερης τάξης συνεισφορές για τη μετάβαση $i \rightarrow f$

Όπως φαίνεται και στην εικόνα, για κάθε κορυφή αλληλεπίδρασης έχουμε έναν παράγοντα τύπου V_{ni} και για τη διάδοση για κάθε ενδιάμεση κατάσταση, έχουμε έναν παράγοντα τύπου $1/(E_i - E_n)$. Οι ενδιάμεσες καταστάσεις είναι εικονικές από την άποψη ότι η ενέργεια δε διατηρείται, αλλά οπωσδήποτε διατηρείται η ενέργεια ανάμεσα στην αρχική και τελική κατάσταση ($E_i = E_f$), όπως φαίνεται από τη δέλτα συνάρτηση. Αποτελεί καίριο ζήτημα να χειριζόμαστε κατ' αυτόν τον τρόπο σχετικιστικά σωματίδια αλλά και τα αντισωματίδιά τους.

Επειδή δεν μπορούμε απλά να αγνοήσουμε την ύπαρξη των αντισωματιδίων, πρέπει να βρούμε μια συνταγή η οποία να περιλαμβάνει τα αντισωματίδια (τις αρνητικής ενέργειας λύσεις των εκάστοτε κυματικών εξισώσεων) και ταυτόχρονα να είναι συνεπής με τη διατήρηση της ενέργειας.

Γενικά, ενδιαφερόμαστε για την σκέδαση ενός σωματιδίου από το πεδίο που δημιουργεί ένα άλλο σωματίδιο και όχι σκέδαση σωματιδίου από στατικό φορτίο, όπως αυτό που αναλύσαμε παραπάνω. Η διαδικασία αυτή ανάμεσα σε ηλεκτρόνια γίνεται με την εκπομπή και απορρόφηση φωτονίων. Έστω ένα ηλεκτρόνιο ότι απορροφά ένα φωτόνιο όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

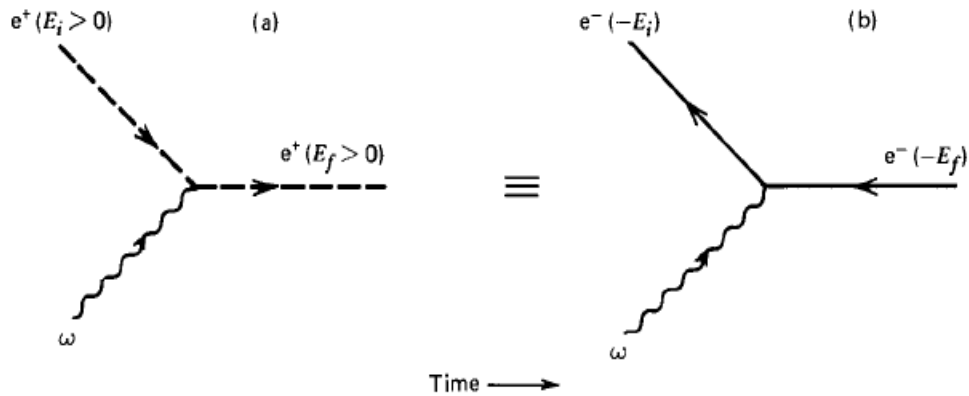


Το δυναμικό της αλληλεπίδρασης θα έχει χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$ λόγω του εισερχόμενου φωτονίου ενέργειας ω . Συνεπώς (αφού δεν έχουμε εξασφαλίσει ακόμα την αναλλοιώτητα) το πλάτος μετάβασης T_{fi} θα είναι ανάλογο:

$$T_{fi} \sim \int (e^{-iE_f t})^* e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi\delta(E_f - \omega - E_i) \quad (4.24)$$

που δίνει ότι η ενέργεια διατηρείται $E_f = E_i + \omega$.

Προφανώς, ακριβώς το ίδιο επιχειρήμα θα ακολουθήσουμε για το αντισωματίδιο, το ποζιτρόνιο. Επειδή όμως θέλουμε να υπολογίζουμε το πλάτος μετάβασης συναρτήσει μόνο καταστάσεων του ηλεκτρονίου, χειριζόμαστε το αντισωματίδιο θετικής ενέργειας σαν σωματίδιο αρνητικής ενέργειας που κινείται ανάποδα στο χρόνο (προσέγγιση των Feynman-Stueckelberg), όπως ακριβώς φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Το πλάτος σκέδασης λοιπόν για την περίπτωση του ποζιτρονίου θα ναί:

$$T_{fi} \sim \int (e^{-i(-E_i)t})^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E_f)t} = 2\pi\delta(-E_i - \omega + E_f) \quad (4.25)$$

από όπου εξάγεται ότι πάλι η ενέργεια διατηρείται:

$$E_f = E_i + \omega \quad (4.26)$$

όπως ακριβώς και απαιτείται.

Ο γενικός κανόνας λοιπόν είτε δουλεύουμε με σωματίδια είτε με αντισωματίδια, είναι να σχηματίσουμε το στοιχείο πίνακα V_{fi} σύμφωνα με το διάγραμμα Feynman, σύμφωνα δηλαδή με το ποια σωματίδια εισέρχονται και εξέρχονται σε μια κορυφή.

$$V_{fi} = \int \phi_{\xi\epsilon\rho\chi}^* V \phi_{\epsilon\iota\sigma\epsilon\rho\chi} d^4x \quad (4.27)$$

4.2 Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων χωρίς σπιν

Έστω ότι ο κόσμος μας δεν είναι ακριβώς έτσι όπως τον γνωρίζουμε, αλλά υπάρχουν λεπτόνια τα οποία δε φέρουν καθόλου σπιν. Τα λεπτόνια αυτά θα ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon, και υποθέτουμε ότι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ηλεκτρομαγνητικά. Αρχικά, μελετούμε ένα τέτοιο φανταστικό σύστημα, για να γίνει πιο ομαλή η μετάβαση στις πραγματικές αλληλεπιδράσεις δυο φορτισμένων λεπτονίων που φέρουν σπιν 1/2. Επίσης, σκοπός μας είναι να ανακαλύψουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα από τη θεωρία διαταραχών, που βρήκαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Ένα ηλεκτρόνιο που στερείται σπιν, ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon (1.35).

4.2.1 "Ηλεκτρόνιο" σε η/μ πεδίο A^μ

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει στο δεύτερο κεφάλαιο, για να παραμείνει αναλλοίωτη η λαγκρανζιανή κάτω από $U(1)$ μετασχηματισμό, αναγκαστήκαμε να

αναβαθμίσουμε την παράγωγο σε συναλλοίωτη Συνεπώς, αντικαθιστώντας το μετασχηματισμό αυτό στην η εξίσωση Klein-Gordon γίνεται:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -V\phi \quad (4.28)$$

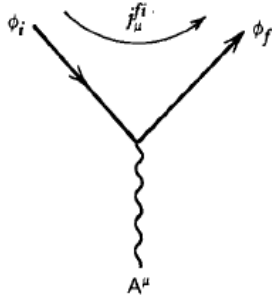
όπου η ηλεκτρομαγνητική διαταραχή είναι:

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \quad (4.29)$$

Η παράμετρος e που χαρακτηρίζει το δυναμικό συνδέεται με τη σταθερά της λεπτής υφής

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad (4.30)$$

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών, το δυναμικό αναπτύσσεται σε δυνάμεις του α . Η συνεισφορά της χαμηλότερης τάξης μπορεί να θεωρηθεί μια καλή προσέγγιση. Έτσι, μπορούμε να αμελήσουμε τον e^2 όρο και να πάρουμε, σύμφωνα με την (4.15), μια έκφραση του πλάτους σε συναλλοίωτη μορφή για τη σκέδαση ενός "ηλεκτρονίου", από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση $\phi_i \rightarrow \phi_f$, από ένα ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό A^μ .



Η σκέδαση του "ηλεκτρονίου" από ένα δυναμικό A^μ , όπως φαίνεται υπακούει στο γενικό κανόνα (4.27) (όσον αφορά στο χωρικό κομμάτι) και επομένως το πλάτος θα είναι:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \\ &= i \int \phi_f^* ie(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i d^4x \end{aligned} \quad (4.31)$$

Στο δεύτερο όρο στην εξίσωση (4.31), η παράγωγος δρα και στο A^μ και στο ϕ_i . Έτσι, εκτελούμε παραγοντική ολοκλήρωση και διώχνοντας τον επιφανειακό όρο που προκύπτει (το δυναμικό μηδενίζεται για $t \rightarrow \pm\infty$), το πλάτος θα γράφεται στη μορφή:

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (4.32)$$

όπου έχουμε ορίσει την ποσότητα j_μ^{fi} :

$$j_\mu^{fi} \equiv -ie(\phi_f^* (\partial_\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i) \quad (4.33)$$

να είναι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα για τη μετάβαση $i \rightarrow f$. Αυτό γιατί η ποσότητα αυτή ταυτοποιήθηκε με την ποσότητα που ονομάσαμε (ορίσαμε) ως ρεύμα στο πρώτο κεφάλαιο, στην εξίσωση (1.17). Αν λοιπόν θεωρήσουμε σα λύση την κυματοσυνάρτηση μορφής:

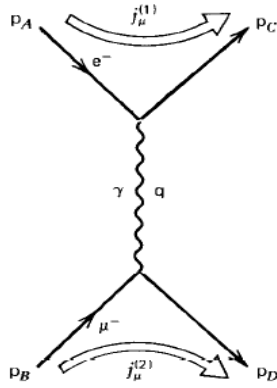
$$\phi_i(x) = N_i e^{-ip_i x} \quad (4.34)$$

και αντικαταστήσουμε στην έκφραση του ρεύματος (4.33), παίρνουμε:

$$j_{\mu}^{fi} = -eN_iN_f(p_i + p_f)_{\mu}e^{i(p_f - p_i)x} \quad (4.35)$$

4.2.2 Σκέδαση "ηλεκτρονίου"- "μιονίου"

Τώρα θα μελετήσουμε τη σκέδαση $e\mu$, θεωρώντας ότι πρόκειται για σωματίδια χωρίς σπιν. Πρόκειται λοιπόν για μια αλληλεπίδραση που δεν παρατηρείται στη φύση. Το διάγραμμα Feynman της αλληλεπίδρασης είναι:



Η σκέδαση του "ηλεκτρονίου" από ένα δυναμικό A^{μ} , το οποίο σχετίζεται με το "μιονικό ρεύμα".

Η 4-ορμή του φωτονίου είναι
 $q = p_C - p_A = p_D - p_B$

Ο συσχετισμός του μιονικού ρεύματος και του A^{μ} βρίσκεται από τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού. Από την εξίσωση του Maxwell, ισχύει:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu} &\Rightarrow \partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = j^{\nu} \Rightarrow \\ \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} = j^{\nu} &\Rightarrow \\ \square^2A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu}) = j^{\nu} &\Rightarrow \square^2A^{\nu} = j^{\nu} \end{aligned} \quad (4.36)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη Lorenz $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ η οποία μας γλιτώνει από περιττούς βαθμούς ελευθερίας. Πολλαπλασιάζοντας την (4.36) με e^{iqx} και ολοκληρώνοντας, παίρνουμε:

$$\int d^4x e^{iqx} \square^2 A^{\nu} = \int d^4x j^{\nu} e^{iqx} \quad (4.37)$$

Εκτελώντας στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους δυο φορές παραγοντική ολοκλήρωση και απορρίπτοντας τους επιφανειακούς όρους:

$$\begin{aligned} (iq)^2 \int A^{\nu} e^{iqx} d^4x &= \int j^{\nu} e^{iqx} d^4x \\ A^{\nu}(q) &= -\frac{1}{q^2} j^{\nu}(q) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Από την εξίσωση (4.32) το πλάτος της αλληλεπίδρασης είναι:

$$T_{fi} = -i \int j_{\mu}^{(1)} A^{\mu} d^4x \quad (4.39)$$

Αντικαθιστώντας το ρεύμα (4.35) στην έκφραση του πλάτους, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= ieN_A N_C (p_A + p_C)_\mu \int e^{iqx} A^\mu(x) d^4x \\
&= ieN_A N_C (p_A + p_C)_\mu A^\mu(q) d^4x \\
&= ieN_A N_C (p_A + p_C)_\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^\mu(q) \\
&= ieN_A N_C (p_A + p_C)_\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) \int j^\mu e^{iqx} d^4x \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Το ρεύμα που σχετίζεται με το χωρίς-σπιν μίονιο έχει την ίδια μορφή με το ηλεκτρονικό της έκφρασης (4.35):

$$j_{(2)}^\mu = -eN_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B)x} \quad (4.41)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.41) στην (4.40):

$$T_{fi} = -i \int [-eN_A N_C (p_A + p_C)_\mu e^{iqx}] \left(-\frac{1}{q^2}\right) [-eN_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{iqx}] d^4x \quad (4.42)$$

$$= -i \int j_\mu^{(1)} \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_{(2)}^\mu d^4x \quad (4.43)$$

Η τελευταία σχέση είναι γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας σε αυτού του είδους τις αλληλεπιδράσεις.

Αν στη σχέση (4.42) εκτελέσουμε την ολοκλήρωση, προκύπτει:

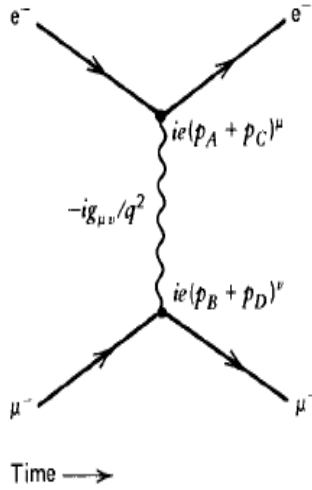
$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathfrak{M} \quad (4.44)$$

όπου για το \mathfrak{M} :

$$-i\mathfrak{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie(p_B + p_D)^\nu) \quad (4.45)$$

Στην εξίσωση (4.44) η δ-συνάρτηση εκφράζει τη διατήρηση της 4-ορμής και καταδεικνύει ποια είναι η 4-ορμή του διαδότη. Γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο της 4-ορμής με τον εαυτό της δίνει m^2 . Παρατηρούμε όμως ότι $q^2 = m^2 \neq 0$, όπως θα έπρεπε καθώς γνωρίζουμε ότι το φωτόνιο είναι άμαζο. Για το λόγο αυτό λέμε ότι το φωτόνιο είναι εικονικό ή αλλιώς "off-mass shell".

Το \mathfrak{M} ορίζεται σαν το αναλλοίωτο πλάτος και το γεγονός αυτό μας παρέχει ένα πολύ χρήσιμο μηχανισμό: Μπορούμε να υπολογίζουμε τα αναλλοίωτα πλάτη οποιασδήποτε σκέδασης, χωρίς να επαναλαμβάνουμε τους παραπάνω υπολογισμούς μόνο και μόνο σχετίζοντας τους παράγοντες κατά τους οποίους συνεισφέρει κάθε στοιχείο στην κάθε αλληλεπίδραση (στο κάθε διάγραμμα Feynman). Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η σκέδαση που μελετήσαμε, αλλά έχει αναγραμμένους τους παράγοντες αυτούς.



Ο παράγοντας των στοιχείων της αλληλεπίδρασης:

- Φωτονικός διαδότης: $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$
- Κορυφή (πάνω): $ie(p_A + p_C)^\mu$
- Κορυφή (κάτω): $ie(p_B + p_D)^\nu$

Η κάθε κορυφή περιέχει τη σύζευξη e του ηλεκτρομαγνητισμού αλλά και ένα δείκτη (4-διάνυσμα) για συνδέεται με τους δείκτες του φωτονίου. Τελικά, με αυτό τον τρόπο οι δείκτες “κλείνουν” και συνεπώς το πλάτος είναι αναλλοίωτο κατά Lorentz.

Οπότε, πλέον όποτε συναντούμε σε κάποιο διάγραμμα τα ίδια στοιχεία, απλά αυτά θα συνεισφέρουν πολλαπλασιαστικά στο αναλλοίωτο πλάτος. Αυτό έχει περισσότερο νόημα στο παρακάτω κεφάλαιο, στο οποίο θα μελετήσουμε αλληλεπιδράσεις πραγματικών σωματιδίων (λεπτονίων με σπιν 1/2). Έτσι, θα ορίσουμε τις συνεισφορές των στοιχείων και θα υπολογίζουμε το πραγματικό $-i\mathcal{M}$ της αλληλεπίδρασης χωρίς καθόλου κόπο.

4.3 Ηλεκτροδυναμική σωματιδίων με σπιν 1/2

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις των λεπτονίων και φωτονίων. Αυτή ακριβώς η θεωρία αλληλεπιδράσεων είναι η κβαντική ηλεκτροδυναμική. Ουσιαστικά, θα ξαναπεράσουμε τη διαδικασία του προηγούμενου υποκεφαλαίου, αυτή τη φορά όμως για σωματίδια με σπιν 1/2 που περιγράφονται από την εξίσωση Dirac. Θα καταλήξουμε λοιπόν στους αντίστοιχους κανόνες Feynman.

4.3.1 Ηλεκτρόνιο σε η/μ πεδίο A^μ

Ένα σωματίδιο που έχει σπιν 1/2, όπως έχουμε δει, περιγράφεται από την εξίσωση Dirac. Κατά τα γνωστά για να παραμείνει η λαγκρατζιανή αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς $U(1)$, πρέπει να αναβαθμίσουμε την παράγωγο με την ταυτόχρονη εισαγωγή ενός διανυσματικού πεδίου A^μ .

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = \gamma^0 V \psi \quad (4.46)$$

όπου η ηλεκτρομαγνητική διαταραχή είναι:

$$\gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu \quad (4.47)$$

Σύμφωνα με τη συναλλοίωτη σχέση για το πλάτος (4.15) που βρήκαμε από τη θεωρία διαταραχών:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i d^4x \\ &= ie \int \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (4.48)$$

όπου $j_\mu^{fi} \equiv -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i$ και αν θεωρήσουμε σα λύση της εξίσωσης Dirac την κυματοσυνάρτηση $\psi = u(\vec{p}) e^{-ipx}$ τότε το ρεύμα που ορίσαμε θα γίνει:

$$j_\mu^{fi} = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i)x} \quad (4.49)$$

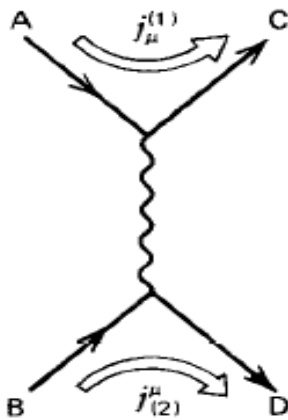
Αυτό θεωρείται το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα μετάβασης για τις καταστάσεις $i \rightarrow f$. Το αντίστοιχο ρεύμα που βρήκαμε στην περίπτωση που θεωρήσαμε φερμιόνια χωρίς σπιν δίνεται από την (4.35). Για την περίπτωση αυτή δείξαμε ότι αντιστοιχούν κάποιοι κανόνες Feynman, που περιγράφουν την αλληλεπίδραση. Εδώ, από το ρεύμα που βρήκαμε απορρέουν αντίστοιχοι κανόνες. Ο παράγοντας της κορυφής σκέδασης είναι τώρα ένας 4×4 πίνακας στο χώρο του σπιν και κείται ανάμεσα στη στήλη $u^{(s)}(p_i)$ και τη γραμμή $\bar{u}^{(r)}(p_f)$. Οι σπίνορες αυτοί περιγράφουν εισερχόμενο και εξερχόμενο ηλεκτρόνιο αντίστοιχα ορμής p_i, p_f και κατάσταση σπιν s, r .

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της §4.2.2, με τα ίδια ακριβώς βήματα (εξισώσεις (4.36)-(4.45)), καταλήγουμε στο αναλλοίωτο πλάτος της αλληλεπίδρασης:

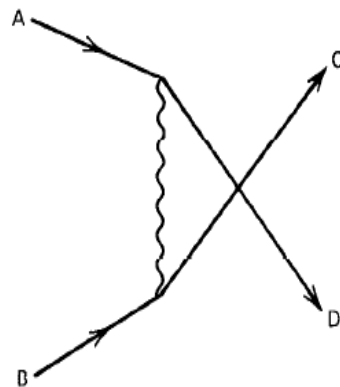
$$-i\mathcal{M} = (ie \bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q})) \quad (4.50)$$

4.3.2 Η σκέδαση Moller $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο διαγράμματα Feynman που περιγράφουν την αλληλεπίδραση.



Διάγραμμα (α)



Διάγραμμα (β)

Για το διάγραμμα (α), ακολουθώντας τα βήματα που κάναμε στην περίπτωση που δεν είχαμε σπιν, καταλήγουμε σε μια έκφραση για το πλάτος μετάβασης:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int j_{\mu}^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{\mu}^{(2)}(x) d^4x \\ &= -i(-e\bar{u}_C \gamma_{\mu} u_A) \left(-\frac{1}{q^2} \right) (-e\bar{u}_D \gamma^{\mu} u_B (2\pi)^4) \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \end{aligned} \quad (4.51)$$

όπου αν θεωρήσουμε όπως πριν ότι

$$T_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \mathfrak{M} \quad (4.52)$$

το αναλλοίωτο πλάτος για το διάγραμμα αυτό θα είναι:

$$-i\mathfrak{M} = (ie\bar{u}_C \gamma^{\mu} u_A) \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie\bar{u}_D \gamma^{\nu} u_B) \quad (4.53)$$

Το αποτέλεσμα έρχεται σε συμφωνία με αυτό που βρίσκουμε αν βρούμε το πλάτος συνεισφέροντας πολλαπλασιαστικά με τους παράγοντες όπως τους ορίσαμε παραπάνω.

Για να βρούμε το αναλλοίωτο πλάτος για το δεύτερο διάγραμμα αρκεί απλά να κάνουμε την ανταλλαγή $C \rightarrow D$ (με ένα σχετικό πλην, μιας και μιλάμε για ανταλλαγή ταυτοτικών φερμιονίων). Οποτε το συνολικό πλάτος στο οποίο συνεισφέρουν και τα δυο διαγράμματα θα είναι:

$$\mathfrak{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C \gamma^{\mu} u_A)(\bar{u}_D \gamma^{\nu} u_B)}{(p_A - p_C)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D \gamma^{\mu} u_A)(\bar{u}_C \gamma_{\mu} u_B)}{(p_A - p_D)^2} \quad (4.54)$$

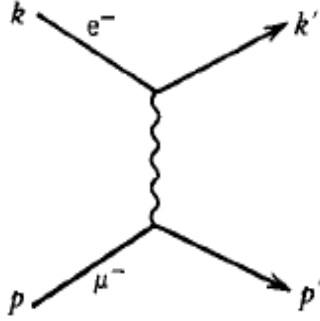
Για να βρούμε το τετράγωνο του πλάτους (ποσότητα που εμπλέκεται με τη διαφορική διατομή) στη μη πολωμένη περίπτωση, όπου δε γνωρίζουμε την κατάσταση των σπιν στο πείραμα, θα πρέπει:

$$|\mathfrak{M}|^2 \rightarrow |\overline{\mathfrak{M}}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{all\ states} |\mathfrak{M}|^2 \quad (4.55)$$

όπου s_A και s_B είναι οι καταστάσεις σπιν των εισερχομένων σωματιδίων. Στο μη σχετικιστικό όριο, οι καταστάσεις του σπιν δεν αλλάζουν έπειτα από μια αλληλεπίδραση. Αυτό συμβαίνει διότι, στις χαμηλές ταχύτητες, τα ηλεκτρόνια αλληλεπιδρούν κυρίως με το ηλεκτρικό τους πεδίο, το οποίο είναι ανίκανο να αλλάξει τα σπιν. Στις μεγάλες ενέργειες, το μέγεθος της ταχύτητας καθιστά ικανή την αλληλεπίδραση μέσω μαγνητικού πεδίου, το οποίο μπορεί να αναποδογυρίσει τα σπιν. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό του τετραγώνου του πλάτους θα πρέπει να γίνει άθροιση πάνω και στις έξι πιθανές αλλαγές του σπιν.

4.3.3 Σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου

Στη σκέδαση αυτή περιγράφεται από το ακόλουθο διάγραμμα Feynman:



Διάγραμμα Feynman για την αλληλεπίδραση $e^- \mu^-$. Στην περίπτωση αυτή που δεν έχουμε ταυτοτικά σωματίδια, το διάγραμμα αυτό είναι το μόνο που συνεισφέρει στο πλάτος σκέδασης. Τα αποτελέσματα που θα βρούμε γενικεύονται σε όλες τις παρόμοιες καταστάσεις.

Το αναλλοίωτο πλάτος προκύπτει από τους κανόνες Feynman:

$$\mathfrak{M} = -e^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \quad (4.56)$$

Για να βρούμε στην περίπτωση αυτή το τετράγωνο του πλάτους, χρησιμοποιούμε την (4.55) μόνο που για λόγους ευκολίας, χωρίζουμε την άθροιση σε δύο: μια πάνω στα ηλεκτρόνια και μια πάνω στα μίονια.

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon} \quad (4.57)$$

όπου οι δύο τένσορες είναι:

$$L_e^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{e\text{ spins}} [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^\dagger \quad (4.58)$$

$$L_{\mu\nu}^{muon} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu\text{ spins}} [\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)] [\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p)]^\dagger \quad (4.59)$$

Οι υπολογισμοί αν και φαίνονται πολύ δύσκολοι (εως απαγορευτικοί), χρησιμοποιώντας τις τεχνικές για το χειρισμό των ιχνών, θα απλοποιηθούν.

Εφ'όσον, για τη δεύτερη παρένθεση στην έκφραση για τον τένσορα του ηλεκτρονίου ισχύει:

$$\begin{aligned} [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^\dagger &= [u^\dagger(k') \gamma^0 \gamma^\nu u(k)]^\dagger \\ [u^\dagger(k) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^{0\dagger} u(k')] &= [u^\dagger(k) \gamma^0 \gamma^\nu u(k')] \\ &= [\bar{u}(k) \gamma^\nu u(k')] \end{aligned} \quad (4.60)$$

που σημαίνει ότι απλά αναστρέφεται η σειρά των παραγόντων του γινομένου, μπορούμε να γράψουμε το γινόμενο πινάκων σε γινόμενο των στοιχείων τους.

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s'} \bar{u}_\alpha^{(s')}(k') \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_s u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k) \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^{(s')}(k') \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s'} u_\delta^{(s')}(k') \bar{u}_\alpha^{(s')}(k') \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_s u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k) \gamma_{\gamma\delta}^\nu \end{aligned} \quad (4.61)$$

Γενικά, για τους σπίνορες $u^{(s)}, \bar{u}^{(s)}$ ισχύει η σχέση πληρότητας:

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m \quad (4.62)$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m \quad (4.63)$$

Επομένως, η (4.61), λόγω της σχέσης πληρότητας γίνεται:

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{k}' + m)_{\delta\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\not{k} + m)_{\beta\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^{\nu} \quad (4.64)$$

Συνεπώς, ο τένσορας γίνεται ένα ίχνος γινομένου των 4×4 πινάκων.

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}((\not{k}' + m) \gamma^{\mu} (\not{k} + m) \gamma^{\nu}) \quad (4.65)$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα παίρνουμε και για το μιονικό τένσορα.

$$L_{\mu\nu}^{muon} = \frac{1}{2} \text{Tr}((\not{p}' + M) \gamma_{\mu} (\not{p} + M) \gamma_{\nu}) \quad (4.66)$$

Για να τους υπολογίσουμε, χρησιμοποιούμε θεωρήματα ιχνών των 4×4 πινάκων:

$$\begin{aligned} \text{Tr}1 &= 4 \\ \text{Tr}(A + B) &= \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \\ \text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \dots \gamma_{\alpha}) &= 0, \quad \text{Αν αριθμός } \gamma_{\mu} \text{ πινάκων: περιττός} \\ \text{Tr}(\not{a} \not{b}) &= 4ab \\ \text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) &= 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)] \\ \text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma_{\mu}) &= 4 \\ \text{Tr}(\gamma_{\mu} \not{a} \gamma^{\mu}) &= -2 \not{a} \\ \text{Tr}(\gamma_{\mu} \not{a} \not{b} \gamma^{\mu}) &= 4ab \\ \text{Tr}(\gamma_{\mu} \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^{\mu}) &= -2 \not{c} \not{b} \not{a} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Επομένως, οι υπολογισμοί για τους δύο τένσορες γίνονται πλέον απευθείας. Πρώτα για του ηλεκτρονίου, από την (4.65) υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{k}' \gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\nu} + m \not{k}' \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + m \not{k} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + m^2 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{k}' \gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\nu}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(m^2 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) \\ &= 2(k'^{\mu} k^{\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} - (k'k - m^2)g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

και έπειτα για του μιονίου από την (4.66) παρομοίως προκύπτει:

$$L_{\mu\nu}^{muon} = 2(p'_{\mu} p_{\nu} + p'_{\nu} p_{\mu} - (p'p - M^2)g_{\mu\nu}) \quad (4.69)$$

Επομένως, μέσω των εξισώσεων (4.68) και (4.69) υπολογίζουμε το τετράγωνο του πλάτους από την εξίσωση (4.57):

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [(k'p')(kp) + (k'p)(kp') - m^2p'p - M^2k'k + 2m^2M^2] \quad (4.70)$$

4.4 Κανόνες Feynman και η επέκταση $i\epsilon$

Όταν δίνεται η λαγκρατζιανή ενός συστήματος, τότε από τους διάφορους όρους της μπορούμε να εξαγάγουμε πληροφορίες για τις αλληλεπιδράσεις που συμβαίνουν, να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα Feynman που αντιστοιχούν και τελευταίο αλλά εξ' ίσου σημαντικό, να υπολογίσουμε το αναλλοίωτο πλάτος.

Έστω η λαγκρατζιανή:

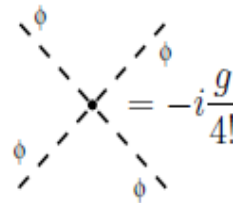
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{4!} \phi^4 \quad (4.71)$$

- Η ελεύθερη (κινητική) λαγκρατζιανή καθορίζει τον αριθμό των σωματιδίων της θεωρίας και των διαδοτών τους. Εδώ έχουμε μόνο ένα βαθμωτό πεδίο ϕ .
- Η Λαγκρατζιανή αλληλεπίδρασης (όροι με τρία ή παραπάνω πεδία) ορίζουν πιθανές κορυφές αλληλεπιδράσεων.

Για την εύρεση του αναλλοίωτου πλάτους, υπάρχουν κανόνες που συσχετίζουν τους όρους της λαγκρατζιανής με παράγοντες συνεισφοράς στο πλάτος. Φυσικά για να γίνει η συσχέτιση αυτή πρέπει πρώτα οι όροι της λαγκρατζιανής να μεταφραστούν σε διαγράμματα Feynman.

- Ο παράγοντας συνεισφοράς της κορυφής είναι ο όρος αλληλεπίδρασης επί i , στερούμενος των πεδίων που κουβαλάει.

$$i\mathcal{L}_I = -i \frac{g}{4!} \phi^4 \Rightarrow$$



- Ο διαδότης είναι ο αντίστροφος του τελεστή κίνητικης ενέργειας (που ορίζεται από την ελεύθερη εξίσωση κίνησης) στο χώρο των ορμών, πολλαπλασιασμένος επί i .

$$\mathcal{L}_{free} \xrightarrow{E-L} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (4.72)$$

Πηγαίνουμε λοιπόν στο χώρο των ορμών $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$ και τέλος αντιστρέφουμε:

$$(p^2 - m^2)\phi = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \phi \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} \Rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2}$$

Στην πραγματικότητα ο σωστός παράγοντας για το διαδότη είναι:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (4.73)$$

Για τον απειροστό φανταστικό όρο $i\epsilon$ θα μιλήσουμε αργότερα πιο αναλυτικά.

- Οι εξωτερικές γραμμές των διαγραμμάτων απεικονίζονται από το κατάλληλο διάνυσμα πόλωσης ή σπίνορα:

particle	Feynman rule
ingoing fermion	u
outgoing fermion	\bar{u}
ingoing antifermion	\bar{v}
outgoing antifermion	v
ingoing photon	ϵ^μ
outgoing photon	$\epsilon^{\mu*}$
ingoing scalar	1
outgoing scalar	1

Οπότε για τη ϕ^4 θεωρία που μελετάμε το αναλλοίωτο πλάτος είναι:

$$-i\mathcal{M} = -i\frac{g}{4!} \quad (4.74)$$

Αν τώρα ασχοληθούμε με τη λαγκρατζιανή που περιγράφει την QED , όπως την έχουμε υπολογίσει σε προηγούμενο κεφάλαιο:

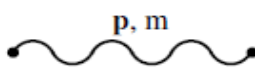
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} + e \not{A}) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (4.75)$$

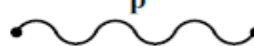
βρίσκουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Με παρόμοια λοιπόν διαδικασία με πριν, ο ηλεκτρονιακός διαδότης θα είναι:

$$\begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array} = \frac{i \sum_{\sigma} u(\mathbf{p}, \sigma) \bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)}{p^2 - m^2} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$$

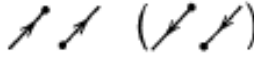


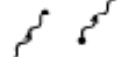


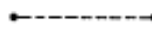
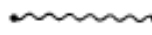
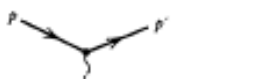

Όπως φαίνεται ο ηλεκτρονιακός διαδότης είναι ίσος με το διαδότη βαθμωτού πεδίου (που βρήκαμε για το ϕ) πολλαπλασιασμένος με το άθροισμα πάνω στα σπιν.

Είναι ευχάριστο το γεγονός ότι αυτό γενικεύεται σε όλους τους σωματιδιακούς διαδότες:

massive:  $= \frac{-i \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right)}{p^2 - m^2}$

massless:  $= \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2}$.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα μας αρκούν για να μπορούμε να υπολογίζουμε το αναλλοίωτο πλάτος για όλα τα πιθανά διαγράμματα Feynman πρώτης τάξης. Οι κανόνες αυτοί συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα¹:

External Lines		
Spin 0 boson (or antiboson)		1
Spin 1/2 fermion (in, out)		u, \bar{u}
antifermion (in, out)		\bar{v}, v
Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\nu^*$
Internal Lines—Propagators (need +iε prescription)		
Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Spin 1/2 fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
Vertex Factors		
Photon—spin 0 (charge -e)		$ie(p + p')^\mu$
Photon—spin 1/2 (charge -e)		$ie\gamma^\mu$
<p><i>Loops:</i> $\int d^4k / (2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ-matrices</p> <p><i>Identical Fermions:</i> -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^+$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+</p>		

¹Halzen F., Martin D.A., QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course In Modern Physics, p.149

Για μεγαλύτερης τάξης διαγράμματα εκτός από τους παραπάνω, υπεισέρχονται και κάποιοι άλλοι κανόνες:

- Γενικά γνωρίζουμε ότι η 4-ορμή σε κάθε κορυφή διατηρείται. Όμως σε κάποια διαγράμματα περιέχονται εσωτερικές ορμές οι οποίες είναι ακαθόριστες. Για οποιαδήποτε 4-ορμή που δε συνδέεται λοιπόν με κάποια διατήρηση (π.χ. μια ορμή p που κυκλοφορεί γύρω από ένα βρόχο), επειδή αυτή μπορεί να πάρει κάθε τιμή (μιας και δεν είναι παρατηρήσιμη), παίρνουμε το ολοκλήρωμα σε όλες τις πιθανές τιμές.
- Σε διαγράμματα όπου εμφανίζονται φερμιονικοί βρόχοι πολλαπλασιάζουμε το αναλλοίωτο πλάτος με έναν όρο $(-1)^{\nu}$, όπου ν ο αριθμός των βρόχων αυτών. Αυτό έχει να κάνει με το γεγονός ότι ανάμεσα σε δυο όρους που διαφέρουν αν εναλλάξουμε ταυτόσημα φερμιόνια (π.χ. ένα ηλεκτρόνιο θετικής ενέργειας και ένα αρνητικής), πρέπει να υπάρχει ένα σχετικό πλην.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διαγράμματα Feynman υψηλότερης τάξης όπου θα πρέπει να εφαρμόσουμε τους παραπάνω κανόνες.

H συνταγή $i\varepsilon$

Οι διαδότες στο χώρο των μετατοπίσεων είναι συναρτήσεις Green για την εξίσωση $K - G$. Αυτό σημαίνει ότι είναι συναρτήσεις $G(x, y)$ που ικανοποιούν:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right)G(x, y) = -\delta(x - y) \quad (4.76)$$

Κάνοντας μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε:

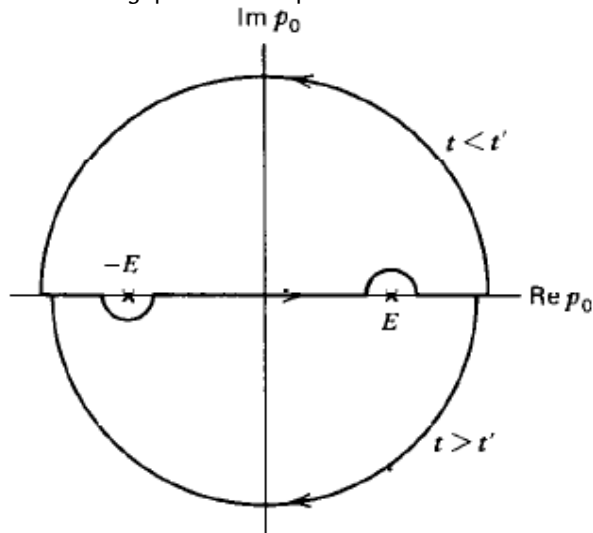
$$(-p^2 + m^2)G(p) = -1 \quad (4.77)$$

και εφόσον η εξίσωση $xf(x) = 1$, έχει λύσεις τις $f(x) = 1/x \pm i\varepsilon$, όπου $\varepsilon \rightarrow 0$. Παρακάτω εξετάζουμε τη σωστή επιλογή του προσήμου. Η λύση για την περίπτωσή μας είναι:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 \pm i\varepsilon} \quad (4.78)$$

όπου $p(x - y)$ το εσωτερικό γινόμενο (4-διανυσμάτων): $p^0(x^0 - y^0) - \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})$. Οι διαφορετικές επιλογές της διαδρομής ολοκλήρωσης στην παραπάνω έκφραση, οδηγεί σε διαφορετικές μορφές του διαδότη. Η επιλογή της διαδρομής συνήθως εκφράζεται σε όρους του ολοκληρώματος p_0 . Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει λοιπόν δυο πόλους $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, οπότε διαφορετικές επιλογές στο πως να τους αποφύγουμε οδηγούν σε διαφορετικούς διαδότες. Η

επιλογή μας με την οποία δουλεύουμε είναι η διαδρομή του Feynman κατά την οποία η διαδρομή περνάει κάτω από τον αρνητικό πόλο και πάνω από το θετικό όπως φαίνεται στην εικόνα.



Η διαδρομή μετατοπίζεται γύρω από τους πόλους. Μια ισοδύναμη συνταγή είναι να μετατοπίσουμε τους πόλους απειροστά και να αφήσουμε τη διαδρομή ανέπαφη. Η εισαγωγή του $i\epsilon$ μετατοπίζει τους πόλους λίγο κάτω και λίγο πάνω αντίστοιχα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε διαγράμματα Feynman ψηλότερης τάξης από τα οποία απορρέουν αποτελέσματα τα οποία ανταποκρίνονται σε πραγματικά φαινόμενα που έχουν καταγραφεί πειραματικά. Επίσης, θα γίνει εμφανές, το γεγονός ότι οι σταθερές ζεύξης που υπολογίσαμε για τις αλληλεπιδράσεις στο τρίτο κεφάλαιο, κατ' ευφημισμό ονομάζονται έτσι, αφού είναι ποσότητες που μεταβάλλονται ανάλογα με τις συνθήκες του πειράματος.

Κεφάλαιο 5

Επανακανονικοποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επανακανονικοποίηση, μια διαδικασία κατά την οποία οι διορθώσεις ανώτερης τάξης στη θεωρία διαταραχών κατορθώνουν να απαλλάξουν τη θεωρία μας από απειρισμούς, να δώσει πολύ εύστοχες προβλέψεις και να μας δείξει πως οι "σταθερές" ζεύξης που μελετήσαμε παραπάνω παίρνουν τιμές ανάλογες της ενέργειας. Ο τρόπος αυτός απαλλαγής των απειριών στηρίζεται σε μη τετριμμένους υπολογισμούς ιχνών και ολοκληρωμάτων και αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία στην οποία απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή.

5.1 Διορθώσεις ανώτερης τάξης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το πλάτος της σκέδασης του ηλεκτρονίου από ένα πεδίο A^μ δίνεται από την εξίσωση :

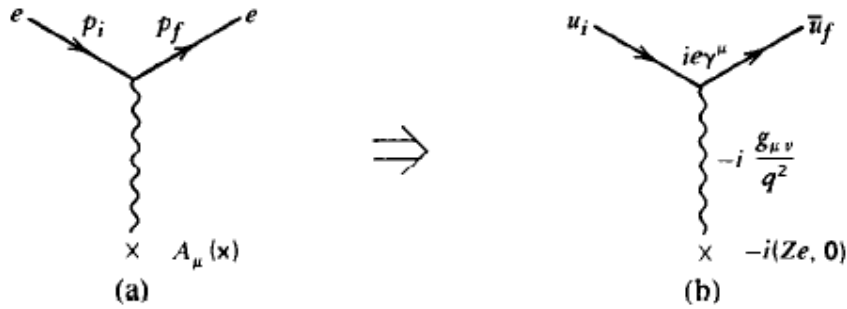
$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (5.1)$$

Το αναλλοίωτο πλάτος το υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι αυτό που δίνεται στην εξίσωση (4.50)

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q})) \quad (5.2)$$

όπου το $j^\nu(\vec{q})$ είναι το ρεύμα που σχετίζεται με την πηγή που παράγει το πεδίο A^μ , (ένα άλλο σωματίο, ένας πυρήνας).

Αν ψάχνουμε το αναλλοίωτο πλάτος για τη σκέδαση Rutherford κατά την οποία ένα ηλεκτρόνιο σκεδάζεται από ένα στατικό φορτίο (έστω από έναν πυρήνα),



επεξεργαζόμαστε τη σχέση (5.2), αντικαθιστώντας όπου $j^\nu(\vec{q})$ το ρεύμα που δημιουργεί ο στατικός πυρήνας φορτίου Ze :

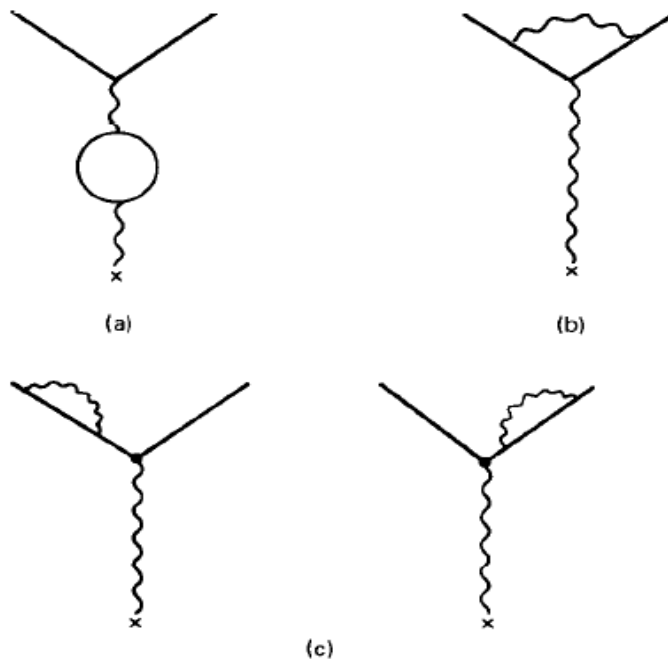
$$\left. \begin{array}{l} j^0(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) = Ze\delta(x) \\ \vec{j}(\vec{x}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow j^\nu = (Ze\delta(\vec{x}), \vec{0})$$

Επομένως η σχέση (5.2) θα γίνει:

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= (ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu 0}}{q^2} \right) (-ij^0(\vec{q})) \\ &= (ie\bar{u}_f\gamma^0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2} \right) (-iZe \int \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\vec{x}} d^3x) \\ &= (ie\bar{u}_f\gamma^0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2} \right) (-iZe) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό καταλήξαμε στο αναλλοίωτο πλάτος σκέδασης τάξης $\mathcal{O}(e^2)$.

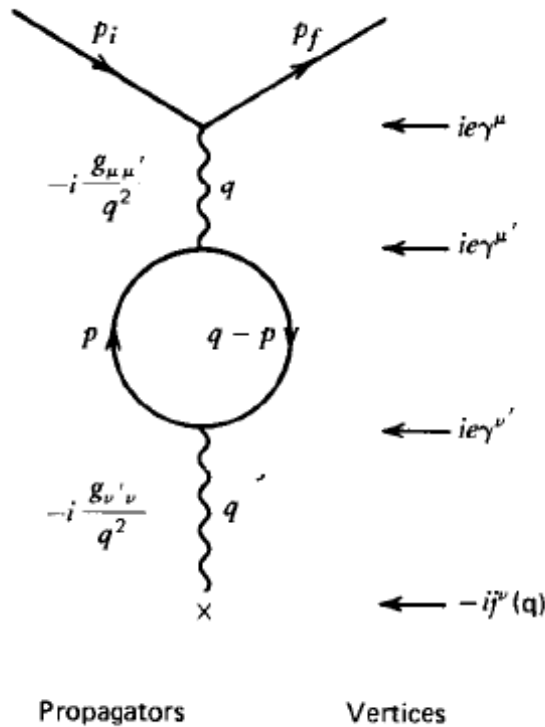
Για να λάβουμε πιο ακριβή αποτελέσματα, (αποτελέσματα που προσεγγίζουν καλύτερα τις μετρήσεις του πειράματος), θα πρέπει να υπολογίσουμε τον όρο ακόμα μεγαλύτερης τάξης στη θεωρία διαταραχών. Με την εισαγωγή όμως ενός παραπάνω όρου (του $\mathcal{O}(e^4)$) στη θεωρία μας, θα πρέπει να εισαγάγουμε και στο διάγραμμα Feynman τον όρο αυτόν *γραφικά*. Τα διαγράμματα που αντιστοιχούν στην προσθήκη των όρων μεγαλύτερης τάξης είναι:



Το διάγραμμα (a) απεικονίζει την ιδιοενέργεια του φωτονίου όπου παρατηρείται ο σχηματισμός ενός φερμιονικού βρόχου, ενώ τα διαγράμματα (c) την ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου όπου ένα ηλεκτρόνιο εκπέμπει ένα φωτόνιο και το απορροφά πριν την αλληλεπίδραση. Στο διάγραμμα (b) επηρεάζεται η κορυφή της αλληλεπίδρασης λόγω της εκπομπής και επαναπορρόφησης ενός εικονικού φωτονίου κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης. Ο υπολογισμός των πλατών σκέδασης των διαγραμμάτων οδηγεί σε απειρισμούς και γι'αυτό πρέπει κάπως να τους εξαφανίσουμε. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται επανακανονικοποίηση. Θα αναλύσουμε τις τρεις περιπτώσεις ξεχωριστά παρακάτω αφού παρουσιάζουν ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον.

5.2 Το διάγραμμα ίδιας ενέργειας φωτονίου - Η πόλωση του κενού

Αρχικά ξεκινάμε με τη μελέτη του διαγράμματος (a). Το πλάτος σκέδασης προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των συνεισφορών των στοιχείων του διαγράμματος, όπως αυτές δίνονται στον πίνακα με τους κανόνες Feynman του προηγούμενου κεφαλαίου.



Στο διάγραμμα αυτό φαίνεται πως το εικονικό φωτόνιο ορμής q περνά σε δίδυμη γένεση και μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου. Έπειτα, τα δυο αυτά σωματίδια εξαυλώνονται σε ένα φωτόνιο το οποίο έχει την ίδια ορμή q με το αρχικό. Το φερμιονικό ζεύγος, δημιουργεί ένα βρόχο μέσα στον οποίο κυκλοφορεί η ακαθόριστη ορμή p . Το φαινόμενο αυτό θα οδηγήσει στην τροποποίηση του νόμου του Coulomb που προκύπτει από το "γυμνό" (από βρόχους) διάγραμμα.

Εφαρμόζοντας τους κανόνες Feynman που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παίρνουμε το αναλλοίωτο πλάτος της αλληλεπίδρασης :

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= (-1)^1 (ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \right) \\
 &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left((ie\gamma^{\mu'})_{\alpha\beta} \frac{i(\not{p} + m)_{\beta\lambda}}{p^2 - m^2} (ie\gamma^{\nu'})_{\lambda\tau} \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)_{\tau\alpha}}{(q-p)^2 - m^2} \right) \\
 &\times \left(-i\frac{g_{\nu\nu'}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q})) \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Το πλάτος αυτό προέκυψε κατά τα γνωστά πολλαπλασιάζοντας τους παράγοντες συνεισφοράς των στοιχείων του παραπάνω διαγράμματος. Ο μόνος μη τετριμμένος παράγοντας είναι αυτός της δεύτερης γραμμής. Εκεί αναγκάζομαστε να πάρουμε το ολοκλήρωμα, επειδή η ορμή p δεν είναι καθορισμένη και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στο μηδέν και το άπειρο. Η συνάρτηση προς ολοκλήρωση περιέχει τους φερμιονικούς παράγοντες που προκύπτουν από το βρόχο (έχουμε πάρει άθροιση σε όλες τις καταστάσεις του σπιν μιας και έχουμε μη πολωμένες καταστάσεις) και τις δύο κορυφές όπου γίνεται η ανταλλαγή ορμής. Το γινόμενο πινάκων έχει μετασχηματιστεί σε γινόμενο των στοιχείων τους, το οποίο μπορεί να γραφτεί σε μορφή ίχνους των

πινάκων.

$$\begin{aligned}
 -i\mathfrak{M} &= (-1)^1 (ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\nu'}}{q^2} \right) \\
 &\times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left((ie\gamma^{\mu'}) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (ie\gamma^{\nu'}) \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)}{(q-p)^2 - m^2} \right) \\
 &\times \left(-i \frac{g_{\nu\nu'}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q})) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

Ουσιαστικά, η προσθήκη της (5.5) στην (5.2) μπορεί να θεωρηθεί ως μία τροποποίηση του διαδότη του πλάτους χαμηλότερης τάξης:

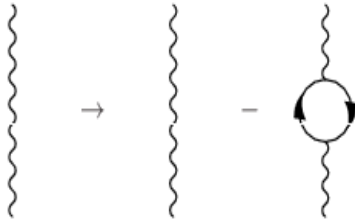
$$\begin{aligned}
 -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} &\rightsquigarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \left(-i \frac{g_{\mu\mu'}}{q^2} \right) I^{\mu'\nu'} \left(-i \frac{g_{\nu'\nu}}{q^2} \right) \\
 &\rightsquigarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} I_{\mu\nu} \frac{-i}{q^2} \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

όπου το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα $I_{\mu\nu}(q^2)$ στο βρόχο είναι:

$$I_{\mu\nu}(q^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ (ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (ie\gamma_\nu) \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)}{(q-p)^2 - m^2} \right\} \quad (5.7)$$

$$I_{\mu\nu}(q) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ (ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p} - m} (ie\gamma_\nu) \frac{i}{\not{q} - \not{p} - m} \right\} \quad (5.8)$$

Η τροποποίηση αυτή του διαδότη παριστάνεται γραφικά:



Η διόρθωση αυτή τάξης $\mathcal{O}(e^4)$ υπολογίζεται μια φορά και έπειτα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα σε οποιοδήποτε διάγραμμα Feynman χρειάζεται.

Είναι δυσάρεστο το γεγονός ότι οι συνεισφορές των κλειστών βρόχων, δηλαδή οι διορθώσεις μέσω όρων $\mathcal{O}(e^4)$, αποκλίνουν για $|p| \rightarrow \infty$.

Το ολοκλήρωμα της (5.8) περιέχει δυο ηλεκτρονιακούς όρους και επομένως με τις τετραγωνικές δυνάμεις της ορμής στους παρονομαστές, το ολοκλήρωμα αποκλίνει τετραγωνικά.

Υποθέτοντας ότι το φωτόνιο της αλληλεπίδρασης είναι πραγματικό (δηλαδή $q^2 = 0$) θα πρέπει εξαιτίας των διατηρούμενων ρευμάτων (εξίσωση συνέχειας) να ισχύει ότι:

$$q^\mu I_{\mu\nu}(q) = 0 \quad (5.9)$$

Εισάγοντας στην (5.9) την (5.8), παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
q^\mu I_{\mu\nu} &= -e^2 \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \not{A} \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{A} - \not{p} - m + i\varepsilon} \\
&= -e^2 \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - \not{A} - m + i\varepsilon} [(\not{p} - m) - (\not{p} - \not{A} - m)] \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \\
&= -e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\frac{1}{\not{p} - \not{A} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right) \gamma_\nu \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα συνεχίζει να αποκλίνει και ο υπολογισμός του παραμένει ασαφής. Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε, στον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θεωρούμε ένα cut-off στις υψηλές ορμές και επομένως :

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(q, m^2) \rightarrow I_{\mu\nu}(q) &= I_{\mu\nu}(q, m^2) + \sum_i C_i(M_i^2) I_{\mu\nu}(q, M_i^2) \\
&\equiv \sum_i c_i I_{\mu\nu}(q, m_i^2) \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Στην εξίσωση αυτή το M_i^2 είναι μεγάλες τιμές μάζας και τα C_i είναι επιλεγμένα έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να συγκλίνει. Η διαδικασία αυτή με τη χρήση του cut-off δεν είναι μοναδική, αλλά την υιοθετούμε για να ξεπεράσουμε το μαθηματικό πρόβλημα. Η θεωρία που χτίζουμε δε θεωρείται επιτυχής εάν τα αποτελέσματα μας εξαρτώνται από οποιαδήποτε από τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε για την "αποκοπή". Όπως και να 'χει, η ύπαρξη αποκλινοσών ποσοτήτων μας οδηγεί στο να υποπτευθούμε την ύπαρξη προβλήματος στη θεωρία για μεγάλες ορμές ή αλλιώς, για μικρές αποστάσεις. Σημειώνεται επίσης ότι η μέθοδος της "αποκοπής", έχει το προταίρημα να διατηρεί την gauge-συνθήκη της (5.9). Η απόδειξη ότι το $I_{\mu\nu}$ υπόκειται στην gauge-συνθήκη, γίνεται, ανυψώνοντας τους παρανομαστές των διαδοτών σε εκθετικούς όρους σύμφωνα με την ταυτότητα :

$$\frac{i}{k - m + i\varepsilon} = \frac{i(k + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = (k + m) \int_0^\infty dz e^{iz(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (5.12)$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω πολύ χρήσιμης ταυτότητας, αποδεικνύεται

η διατήρηση της gauge- συνθήκης. Έχουμε ξεκινώντας απ'την (5.8):

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(q^2) &= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{q} - \not{p} - m + i\varepsilon} \right\} \\
&= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i((\not{q} - \not{p}) + m)}{(q-p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \\
&= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p} + m) \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right. \\
&\quad \left. \gamma_\nu (\not{q} - \not{p} + m) \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2((q-p)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \right\} \\
&= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2((q-p)^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\
&\quad \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{q} - \not{p} + m) \right\} \\
&= e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2(p'^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\
&\quad \underbrace{\text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p}' + m) \right\}}_{\text{Όρος του ίχνους: } T} \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Έστω T το μέρος που αφορά το ίχνος:

$$\begin{aligned}
T &= \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p}' + m) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}' + \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu m + \gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p}' + \gamma_\mu m \gamma_\nu m \right\} \\
&= \text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}' \} + \text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu m \} + \text{Tr} \{ \gamma_\mu m \gamma_\nu \not{p}' \} + \text{Tr} \{ \gamma_\mu m \gamma_\nu m \}
\end{aligned}$$

Εδώ ο δεύτερος και ο τρίτος όρος είναι μηδέν, αφού είναι ίχνη γινομένων περιττού αριθμού πινάκων γ_μ . Οπότε συνεχίζουμε τους υπολογισμούς και η παραπάνω έκφραση του ίχνους γίνεται:

$$\begin{aligned}
T &= \text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}' \} + m^2 \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} \\
&= 4(p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - (p \cdot p') g^{\mu\nu}) + 4m^2 g^{\mu\nu} \\
&= p^\mu (p - q)^\nu + p^\nu (p - q)^\mu - g^{\mu\nu} (p^2 - p \cdot q - m^2) \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του ίχνους της (5.14) στο ολοκλήρωμα της

(5.13), βρίσκουμε:

$$I_{\mu\nu} = 4e^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} p^\mu (p-q)^\nu + p^\nu (p-q)^\mu - g^{\mu\nu} (p^2 - p \cdot q - m^2) \times \exp \left[iz_1 (p^2 - m^2 + i\varepsilon) + iz_2 ((q-p)^2 - m^2 + i\varepsilon) \right] \quad (5.15)$$

Συμπληρώνουμε το ανάπτυγμα τετραγώνου στο εκθετικό, αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε:

$$l = p - \frac{qz_2}{z_1 + z_2} = p - q + \frac{qz_1}{z_1 + z_2}$$

οπότε αντικαθιστούμε όπου

$$p^\mu = l^\mu + \frac{q^\mu z_2}{z_1 + z_2}$$

και όπου

$$p'^\mu = (p-q)^\mu = l^\mu - \frac{q^\mu z_1}{z_1 + z_2}$$

Στην (5.15) λοιπόν, επιβάλλουμε το μετασχηματισμό των συντεταγμένων:

$$I_{\mu\nu} = 4e^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left(l^\mu + \frac{q^\mu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) + \left(l^\nu + \frac{q^\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \cdot \left(l^\mu - \frac{q^\mu z_1}{z_1 + z_2} \right) - g^{\mu\nu} \left[\left(l_\nu + \frac{q_\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) - m^2 \right] \right\} \cdot \exp \left\{ iz_1 \left[\left(l + \frac{qz_2}{z_1 + z_2} \right)^2 - m^2 \right] + iz_2 \left[\left(l - \frac{qz_1}{z_1 + z_2} \right)^2 - m^2 \right] \right\} \quad (5.16)$$

Ονομάζουμε Ε τον παράγοντα με το εκθετικό και εκτελούμε τις πράξεις. Έτσι

έχουμε:

$$\begin{aligned}
E &= \exp \left\{ iz_1 \left(l^2 + \frac{2lqz_2}{z_1 + z_2} + \frac{q^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)^2} - m^2 \right) + iz_2 \left(l^2 - \frac{2lqz_1}{z_1 + z_2} + \frac{q^2 z_1^2}{(z_1 + z_2)^2} - m^2 \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ iz_1 l^2 + iz_1 \frac{2lqz_2}{z_1 + z_2} + iz_1 \frac{q^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)^2} - iz_1 m^2 \right. \\
&\quad \left. + iz_2 l^2 - iz_2 \frac{2lqz_1}{z_1 + z_2} + iz_2 \frac{q^2 z_1^2}{(z_1 + z_2)^2} - iz_2 m^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ iz_1 l^2 + iz_1 \frac{q^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)^2} - iz_1 m^2 + iz_2 l^2 + iz_2 \frac{q^2 z_1^2}{(z_1 + z_2)^2} - iz_2 m^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) + iq^2 z_1 z_2 \left(\frac{z_2}{(z_1 + z_2)^2} + \frac{z_1}{(z_1 + z_2)^2} \right) - im^2(z_1 + z_2) \right\} \\
&= \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) + \frac{iq^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - im^2(z_1 + z_2) \right\} \\
&= \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} \cdot \exp \left\{ i \left(\frac{q^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m^2(z_1 + z_2) \right) \right\} \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Στην (5.16) αντικαθιστούμε την (5.17) στην οποία ο δεύτερος παράγοντας είναι ανεξάρτητος από το l . Αυτό σημαίνει ότι θα βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Εκτελώντας λοιπόν τις πράξεις, η (5.16) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= 4e^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \exp \left\{ i \left(\frac{q^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m^2(z_1 + z_2) \right) \right\} \\
&\quad \cdot \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left(l^\mu + \frac{q^\mu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(l^\nu + \frac{q^\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \cdot \left(l^\mu - \frac{q^\mu z_1}{z_1 + z_2} \right) \right. \\
&\quad \left. - g^{\mu\nu} \left[\left(l_\nu + \frac{q_\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) - m^2 \right] \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Ονομάζουμε \mathfrak{E} το μέρος της παραπάνω εξίσωσης που αποτελείται από όλες τις

γραμμές εκτός της πρώτης :

$$\begin{aligned}
\Xi &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left\{ \left(l^\mu + \frac{q^\mu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) \right. \right. \\
&\quad + \left. \left(l^\nu + \frac{q^\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \cdot \left(l^\mu - \frac{q^\mu z_1}{z_1 + z_2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - g^{\mu\nu} \left[\left(l_\nu + \frac{q_\nu z_2}{z_1 + z_2} \right) \left(l^\nu - \frac{q^\nu z_1}{z_1 + z_2} \right) - m^2 \right] \right\} \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ i l^2 (z_1 + z_2) \right\} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left\{ l^\mu l^\nu - l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q^\mu l^\nu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - q^\mu q^\nu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right. \right. \\
&\quad + l^\nu l^\mu - l^\nu q^\mu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q^\nu l^\mu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - q^\nu q^\mu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \\
&\quad \left. \left. - g^{\mu\nu} \left[l_\nu l^\nu - l_\nu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q_\nu l^\nu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - q_\nu q^\nu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} - m^2 \right] \right\} \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ i l^2 (z_1 + z_2) \right\} \\
&= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left\{ l^\mu l^\nu - l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q^\mu l^\nu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - q^\mu q^\nu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right. \right. \\
&\quad + l^\nu l^\mu - l^\nu q^\mu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q^\nu l^\mu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - q^\nu q^\mu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \\
&\quad \left. \left. - l^\mu l^\nu + l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + g^{\mu\nu} q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + g^{\mu\nu} m^2 \right\} \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ i l^2 (z_1 + z_2) \right\} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \left\{ l^\nu l^\mu - l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + q^\mu l^\nu \frac{z_2}{z_1 + z_2} - 2q^\mu q^\nu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} - l^\nu q^\mu \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right. \right. \\
&\quad + q^\nu l^\mu \frac{z_2}{z_1 + z_2} + l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} + 2g^{\mu\nu} q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} - g^{\mu\nu} q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + g^{\mu\nu} m^2 \left. \right\} \\
&\quad \cdot \exp \left\{ i l^2 (z_1 + z_2) \right\} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [1, l^\mu, l^\mu l^\nu] = \frac{1}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2} \left[1, 0, \frac{g^{\mu\nu}}{2(z_1 + z_2)} \right] \quad (5.22)$$

υπολογίζω όλα τα ολοκληρώματα της (5.21):

- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} l^\nu l^\mu \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = \frac{1}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2} \frac{ig^{\mu\nu}}{2(z_1 + z_2)}$$
- $$- \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = 0$$
- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} q^\mu l^\nu \frac{z_2}{z_1 + z_2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = 0$$
- $$- \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} 2q^\mu q^\nu \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = - \frac{2q^\mu q^\nu z_1 z_2}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2 (z_1 + z_2)^2}$$
- $$- \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} l^\nu q^\mu \frac{z_1}{z_1 + z_2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = 0$$
- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} q^\nu l^\mu \frac{z_2}{z_1 + z_2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = 0$$
- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} l^\mu q^\nu \frac{z_1}{z_1 + z_2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = 0$$
- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} 2g^{\mu\nu} q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = \frac{2g^{\mu\nu} q^2 z_1 z_2}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2 (z_1 + z_2)^2}$$
- $$- \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^{\mu\nu} q^2 \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = - \frac{g^{\mu\nu} q^2 z_1 z_2}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2 (z_1 + z_2)^2}$$
- $$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} g^{\mu\nu} m^2 \exp \left\{ il^2(z_1 + z_2) \right\} = m^2 \frac{g^{\mu\nu}}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2}$$

Οπότε ο όρος Ξ της (5.21) γίνεται τώρα :

$$\begin{aligned}\Xi &= \frac{1}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2} \left(\frac{i g^{\mu\nu}}{2(z_1 + z_2)} - \frac{2q^\mu q^\nu z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + \frac{2g^{\mu\nu} q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} - \frac{g^{\mu\nu} q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + g^{\mu\nu} m^2 \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 i (z_1 + z_2)^2} \left(2(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + g^{\mu\nu} \left[\frac{-i}{2(z_1 + z_2)} - \frac{q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + m^2 \right] \right)\end{aligned}\quad (5.23)$$

Επιστρέφουμε στην (5.18) και βάζουμε όπου Ξ την ποσότητα που βρήκαμε στην (5.23). Το $I_{\mu\nu}$ θα είναι πλέον :

$$\begin{aligned}I_{\mu\nu} &= -i \sum_i c_i \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty \frac{dz_2}{(z_1 + z_2)^2} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left(\frac{q^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2 (z_1 + z_2) \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 2(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + g_{\mu\nu} \left[\frac{-i}{2(z_1 + z_2)} - \frac{q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} + m_i^2 \right] \right\}\end{aligned}\quad (5.24)$$

Μιας και η πιο γενική μορφή ενός δευτεροβάθμιου τένσορα που μπορεί να σχηματιστεί μόνο από το 4-διάνυσμα q^μ , λόγω της *gauge*-απαιτήσης, είναι :

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -g_{\mu\nu} A(q^2) + q_\mu q_\nu B(q^2) \quad (5.25)$$

οι όροι της (5.24) που είναι ανάλογοι του $(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu)$ αυτομάτως επιζούν, ενώ όπως θα αποδείξουμε οι τρεις τελευταίοι όροι της (5.24) (αυτοί που είναι

ανάλογοι του $g_{\mu\nu}$), όχι:

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 + z_2)^2} \sum_i c_i \left[m_i^2 - \frac{i}{z_1 + z_2} - \frac{q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right] \\
& \quad \times \left\{ \exp i \left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2 (z_1 + z_2) \right] \right\} \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda dz_1 \lambda dz_2}{(\lambda z_1 + \lambda z_2)^2} \sum_i c_i \left[m_i^2 - \frac{i}{\lambda z_1 + \lambda z_2} - \frac{q^2 \lambda z_1 \lambda z_2}{(\lambda z_1 + \lambda z_2)^2} \right] \\
& \quad \times \left\{ \exp i \left[q^2 \frac{\lambda z_1 \lambda z_2}{\lambda z_1 + \lambda z_2} - m_i^2 (\lambda z_1 + \lambda z_2) \right] \right\} \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 + z_2)^2} \sum_i c_i \left[m_i^2 - \frac{i}{\lambda(z_1 + z_2)} - \frac{q^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \right] \\
& \quad \times \left\{ \exp i \lambda \left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2 (z_1 + z_2) \right] \right\} \\
& = i \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2}{\lambda(z_1 + z_2)^3} \sum_i c_i \times \left\{ \exp i \lambda \left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2 (z_1 + z_2) \right] \right\} \\
& = i \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\frac{dz_1}{\lambda} \frac{dz_2}{\lambda}}{\lambda \left(\frac{z_1}{\lambda} + \frac{z_2}{\lambda} \right)^3} \sum_i c_i \left\{ \exp i \lambda \left[q^2 \frac{\frac{z_1}{\lambda} \frac{z_2}{\lambda}}{\frac{z_1}{\lambda} + \frac{z_2}{\lambda}} - m_i^2 \left(\frac{z_1}{\lambda} + \frac{z_2}{\lambda} \right) \right] \right\} \\
& \hspace{20em} (5.26)
\end{aligned}$$

όπου αρχικά θέσαμε το μετασχηματισμό $z_i \rightarrow \lambda z_i$. Έπειτα, παίρνοντας τον αντίθετο μετασχηματισμό $\lambda z_i \rightarrow z_i$, παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από το λ και συνεπώς η (5.26) είναι ίση με μηδέν. Οπότε, πλέον ικανοποιείται πλήρως η gauge-συνθήκη. Συνεχίζουμε επομένως στον υπολογισμό του ρεύματος $I_{\mu\nu}$ της (5.24) με όσους όρους απέμειναν.

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(q) & = \frac{2i\alpha}{\pi} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 + z_2)^4} z_1 z_2 \\
& \quad \times \sum_i c_i \exp \left\{ i \left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2 (z_1 + z_2) \right] \right\} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta \left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda} \right) \quad (5.28)$$

και αντικαθιστώντας την στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.27), έχουμε :

$$I_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 + z_2)^4} z_1 z_2 \delta\left(1 - \frac{z_1 + z_2}{\lambda}\right) \\ \times \sum_i c_i \exp\left\{i\left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2(z_1 + z_2)\right]\right\} \quad (5.29)$$

Απαιτώντας, όπως πριν, τη βάρθρωση $z_i \rightarrow \lambda z_i$, έχουμε διαδοχικά :

$$I_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda dz_1 \lambda dz_2}{(\lambda z_1 + \lambda z_2)^4} \lambda z_1 \lambda z_2 \\ \times \delta\left(1 - \frac{\lambda z_1 + \lambda z_2}{\lambda}\right) \sum_i c_i \exp\left\{i\left[q^2 \frac{\lambda z_1 \lambda z_2}{\lambda z_1 + \lambda z_2} - m_i^2(\lambda z_1 + \lambda z_2)\right]\right\} \quad (5.30)$$

$$I_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 + z_2)^4} z_1 z_2 \delta\left(1 - (z_1 + z_2)\right) \\ \times \sum_i c_i \exp\left\{i\lambda\left[q^2 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m_i^2(z_1 + z_2)\right]\right\} \quad (5.31)$$

Όπως φαίνεται από τα όρια του ολοκληρώματος, πρέπει $z_i > 0$. Επιπλέον αφού πρέπει λόγω του περιορισμού της δέλτα συνάρτησης να ισχύει $z_1 + z_2 = 1$, θα πρέπει αναγκαστικά $z_1, z_2 \in [0, 1]$.

Επίσης από τη δέλτα συνάρτηση προκύπτει και ότι $z_1 = 1 - z_2 (\equiv z)$. Οπότε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στις δύο μεταβλητές z_1, z_2 ανάγεται σε μονό, της μεταβλητής z . Εισάγουμε τις τροποποιήσεις αυτές στην εξίσωση (5.31) και παίρνουμε :

$$I_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \times \sum_i c_i \exp\left\{i\lambda[q^2 z(1-z) - m_i^2]\right\} \quad (5.32)$$

Η ολοκλήρωση πάνω στο λ , δυστυχώς αποκλίνει λογαριθμικά. Ο υπολογισμός του γίνεται με μια διαδικασία "αποκοπής" (cut-off). Από την (5.11), επιλέγοντας $C_1 = -1$, $C_i = 0$ για $i > 1$ έτσι ώστε να αποκόψουμε τον απειρισμό

με M πολύ μεγάλη μάζα, ισχύει:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= I_{\mu\nu}(m^2) - I_{\mu\nu}(M^2) \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\left\{i\lambda[q^2z(1-z) - m^2]\right\} \\
&\quad - \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\left\{i\lambda[q^2z(1-z) - M^2]\right\} \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\left\{i\lambda[q^2z(1-z) - m^2]\right\} \\
&\quad - \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\{-i\lambda M^2\} \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left(\int_0^1 dz(1-z)z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \exp\{i\lambda[q^2z(1-z) - m^2]\} - \exp(-i\lambda M^2) \right) \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left(\int_0^1 dz(1-z)z \ln \frac{M^2}{m^2 - q^2z(1-z)} \right) \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα κάναμε χρήση της ταυτότητας:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} (\exp(ia\lambda) - \exp(ib\lambda)) = \ln \frac{b}{a} \tag{5.34}$$

Απομονώνουμε το λογαριθμικό για να εκτελέσουμε κάποιες πράξεις:

$$\begin{aligned}
&\ln \frac{M^2}{m^2(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z))} = \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z))} \right) \\
&= \ln \frac{M^2}{m^2} + \ln \frac{1}{1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z)} = \ln \frac{M^2}{m^2} - \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην (5.33) και αντικαθιστώντας την (5.35) σε αυτήν, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left[\int_0^1 dz(1-z)z \ln \frac{M^2}{m^2} - \int_0^1 dz(1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \right] \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left[\ln \frac{M^2}{m^2} \left(\left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 \right) - \int_0^1 dz(1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \right] \\
&= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left[\frac{1}{6} \ln \frac{M^2}{m^2} - \int_0^1 dz(1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \right] \\
&= \frac{2i\alpha}{6\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left[\ln \frac{M^2}{m^2} - 6 \int_0^1 dz(1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \right] \\
&= \frac{i\alpha}{3\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2) \left[\ln \frac{M^2}{m^2} - 6 \int_0^1 dz(1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z) \right) \right] \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Όπως έχουμε ξαναδεί, ο φωτονιακός διαδότης γράφεται σαν το άθροισμα δύο όρων:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} I_{\mu\nu}(q) \frac{-i}{q^2} \quad (5.37)$$

Εισάγοντας την (5.37) στην (5.36) και ταυτόχρονα διώχνοντας τους όρους που είναι ανάλογοι στα q_μ και q_ν (αφού αυτοί εξαφανίζονται λόγω της διατήρησης του ρεύματος ($q_\mu j^\mu = 0$) στην ηλεκτρονιακή κορυφή της αλληλεπίδρασης) έχουμε:

$$\begin{aligned} & -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} \left(-\frac{i\alpha}{3\pi} g_{\mu\nu} q^2 \right) \left[\ln \frac{M^2}{m^2} - 6 \int_0^1 dz (1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2} z(1-z) \right) \right] \frac{-i}{q^2} \\ & = -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz (1-z)z \ln \left(1 - \frac{q^2}{m^2} z(1-z) \right) \right] \frac{-i}{q^2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Η έκφραση της (5.38) αφορά διαδότη με διορθώσεις τάξης α ή αλλιώς τάξης e^2 (οι συνολικές διορθώσεις στο πλάτος σκέδασης θα είναι τάξης α^2 ή e^4 αντίστοιχα) και αποτελεί γενικό αποτέλεσμα όποτε ένα φωτόνιο σχηματίζει ηλεκτρονιακό βρόχο ανάμεσα σε δυο διατηρούμενα ρεύματα.

Κάνουμε έλεγχο για τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις:

1. $q^2 \rightarrow 0$

Στο όριο αυτό ο διαδότης αλλάζει μόνο κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα Z_3 , όπως φαίνεται απ'την εξίσωση (5.38), ο οποίος ορίζεται:

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} \quad (5.39)$$

κι έτσι το αναλλοίωτο πλάτος για σκεδάσεις Coulomb (όπως το πλάτος της (5.3) για τη σκέδαση Rutherford) με μικρή μεταφορά ορμής θα είναι:

$$i\mathcal{M} = \frac{ie^2 \bar{u} \gamma_0 u}{q^2} \rightarrow ie^2 \frac{\bar{u} \gamma_0 u}{q^2} \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} \right) = \frac{ie_R^2 \bar{u} \gamma_0 u}{q^2} \quad (5.40)$$

Συμπεραίνουμε ότι η παράμετρος e^2 που εμφανίζεται στην εξίσωση Dirac δεν είναι $4\pi/137$ αλλά κατά τι μεγαλύτερη, αφού η παράμετρος e_R^2 είναι η παράμετρος που μετρούμε $4\pi/137$. Η παράμετρος e_R^2 ονομάζεται επανακανονικοποιημένο φορτίο και e ονομάζεται το γυμνό φορτίο. Σε κάθε διαδικασία όπου ανταλλάσσεται ένα φωτόνιο, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας Z_3 θα είναι παρών:

$$e_R^2 \equiv Z_3 e^2 = e^2 \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} \right) \quad (5.41)$$

ανεξάρτητα από τη μεταφορά ορμής. Συνεπώς, θα ισχύει η ίδια επανακανονικοποίηση του ηλεκτρονιακού φορτίου που προκύπτει από την στατική πόλωση του κενού. Επομένως, η απόκλιση στον υπολογισμό τάξης e^2 , εξαφανίζεται αν γράψουμε το αναλλοίωτο πλάτος (ή την ενεργό διατομή) με όρους του παρατηρήσιμου φορτίου e_R^2 . Οι παρατηρήσιμες q -εξαρτώμενες διορθώσεις προέρχονται από τον τελευταίο όρο της (5.38), ο οποίος εξαφανίζεται στο στατικό όριο $q^2 \rightarrow 0$. Η συνεισφορά του είναι πεπερασμένη και ανεξάρτητη από τη διαδικασία αποκοπής. Μόνο η σχέση μεταξύ του e και e_R εμπεριέχει την εξάρτηση από τη διαδικασία "αποκοπής".

2. $|q^2/m^2| \ll 1$

Στο όριο χαμηλής μεταφοράς της ορμής, ο λογαριθμικός παράγοντας στον τελευταίο όρο της (5.38) γίνεται:

$$\ln \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \approx -\frac{q^2 z(1-z)}{m^2 - i\varepsilon} \quad (5.42)$$

Επομένως η ποσότητα $I(q^2)$ θα είναι:

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \quad (5.43)$$

Οπότε, αν ανατρέξουμε πάλι στη σκέδαση Rutherford, το αναλλοίωτο πλάτος της (εξίσωση (5.3)) θα γίνει:

$$-i\mathfrak{M} = (ie\bar{u}\gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe) \quad (5.44)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση του επανακανονικοποιημένου φορτίου (5.41), τότε το παραπάνω πλάτος παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} -i\mathfrak{M} &= (ie_R\bar{u}\gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe_R) \Rightarrow \\ -i\mathfrak{M} &= (ie_R\bar{u}\gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left(1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe_R) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Παρομοίως και σε αυτήν την περίπτωση οι απειρισμοί έχουν απορροφηθεί στην πειραματικά μετρούμενη ποσότητα του φορτίου του ηλεκτρονίου. Αυτό σημαίνει ότι η έκφραση του πλάτους είναι πεπερασμένη και ότι δεν υπάρχει πουθενά η πολύ μεγάλη μάζα που θέσαμε ως "cut-off".

3. $|q^2/m^2| \gg 1$

Στο όριο των μεγάλων ορμών, δηλαδή για αλληλεπιδράσεις σε μικρές

αποστάσεις παρατηρούμε ότι ο λογαριθμικός παράγοντας στον τελευταίο όρο της (5.38) γίνεται:

$$\ln \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \approx \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \quad (5.46)$$

και επομένως η ποσότητα $I(q^2)$ θα γίνει:

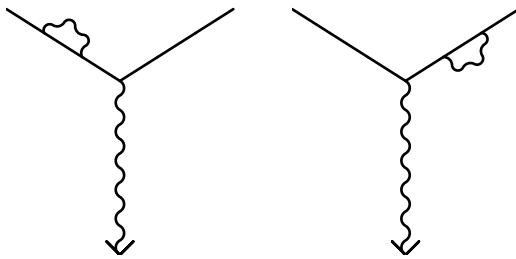
$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{3\pi} \frac{-q^2}{m^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{-q^2} \quad (5.47)$$

Μετά τον καθορισμό του "cut-off" (εξίσωση (5.11)) υποπτευθήκαμε πως θα εμφανιζόταν κάποιο πρόβλημα στο όριο των μεγάλων ορμών. Στην εξίσωση (5.47) φαίνεται ότι η υποψία αυτή επαληθεύεται, καθώς το αποτέλεσμα μας εξαρτάται από τη σταθερά αποκοπής και όπως φαίνεται για $M^2 \rightarrow \infty$ η ποσότητα αποκλίνει λογαριθμικά. Επίσης, όταν το εικονικό φωτόνιο έχει ορμή που ξεπερνά το $4m^2$, η διόρθωση του διαδότη γίνεται μιγαδική.

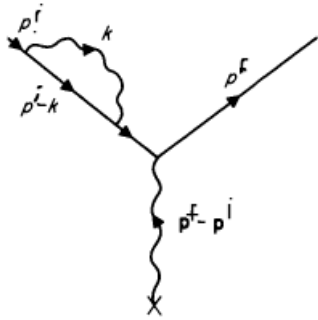
Όπως έχουμε ξαναφέρει αν στα αποτελέσματά μας υπεισέρχεται η μεγάλη αυτή ποσότητα που χρησιμοποιήσαμε για τη διαδικασία της αποκοπής, τότε η θεωρία μας δε θεωρείται επιτυχής και στο αποτέλεσμα μας δεν υπάρχει καμία φυσική σημασία.

5.3 Το διάγραμμα ίδιας ενέργειας του ηλεκτρονίου

Σειρά έχει η μελέτη των διαγραμμάτων (c). Το αναλλοίωτο πλάτος σκέδασης προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των συνεισφορών των στοιχείων του εκάστοτε διαγράμματος, όπως αυτές δίνονται στον πίνακα με τους κανόνες Feynman του προηγούμενου κεφαλαίου. Θα μελετήσουμε το ένα από τα δύο αφού το δεύτερο δεν παρουσιάζει κάποια διαφοροποίηση.



Όπως η διόρθωση της ίδιας ενέργειας του φωτονίου τροποποιεί το διαδότη του φωτονίου, έτσι και η διόρθωση της ίδιας ενέργειας του ηλεκτρονίου τροποποιεί (διορθώνει) την κυματοσυνάρτηση του εισερχομένου (ή εξερχομένου για το άλλο) ηλεκτρονίου.



Συνεπώς αν θεωρήσουμε ότι οι ορμές συμπεριφέρονται όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε το αναλλοίωτο πλάτος σκέδασης είναι:

$$-i\mathfrak{M} = \bar{u}_f(ie\gamma^\mu)\Sigma(p_i)u_i \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q})) \quad (5.48)$$

όπου η διόρθωση $\Sigma(p)$ είναι:

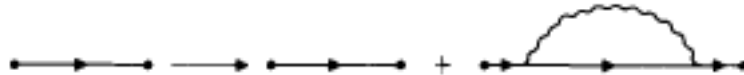
$$-i\Sigma(p_i) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}_i - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \quad (5.49)$$

Η εξίσωση (5.49) αποκλίνει μιας και στον παρονομαστή έχουμε ως το πολύ τρίτες δυνάμεις ως προς k . Η παράμετρος λ είναι μια μικρή φωτονιακή μάζα που υποθέσαμε ώστε να γλιτώσουμε από τις ανεπιθύμητες υπέρυθρες αποκλίσεις.

Παρομοίως με το φωτονιακό διαδότη, ο ηλεκτρονιακός τροποποιείται και αυτός αντίστοιχα:

$$\frac{i}{\not{p}_i - m} \rightarrow \frac{i}{\not{p}_i - m} + \frac{i}{\not{p}_i - m} (-i\Sigma(p_i)) \frac{i}{\not{p}_i - m} \quad (5.50)$$

Η γραφική αναπαράσταση της τροποποίησης του διαδότη:



Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα η οποία ισχύει για δυο τελεστές A,B:

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots \quad (5.51)$$

Ξαναγράφω την (5.50):

$$\frac{i}{\not{p}_i - m} \rightarrow \frac{i}{\not{p}_i - m - \Sigma(p_i)} \quad (5.52)$$

Το αριστερό μέλος λοιπόν της εξίσωσης αφορά το εισερχόμενο, μη αλληλεπιδρών ηλεκτρόνιο, ενώ το δεξιό αφορά το αλληλεπιδρών.

Ξεκινάμε λοιπόν το υπολογισμό του $\Sigma(p_i)$ επαναλαμβάνοντας τα βήματα που ακολουθήσαμε και στον υπολογισμό του $I_{\mu\nu}$. Συνεπώς αν στην (5.49)

εφαρμόσουμε την ταυτότητα (5.12), θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
-i\Sigma(p) &= (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \\
&= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)} \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \\
&\quad \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2((\not{p} - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)} \gamma^\nu \\
&= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)} \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2((\not{p} - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\
&\quad \underbrace{\text{Tr}(\gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu)}_{\text{ίχνος πινάκων: } T} \tag{5.53}
\end{aligned}$$

όπου το ίχνος προέκυψε μετατρέποντας το γινόμενο πινάκων σε γινόμενο των στοιχείων τους όπως πράξαμε και στην (5.13), (διαδικασία γνωστή ως το τρικ του Cashimir). Υπολογίζω ξεχωριστά το παραπάνω ίχνος:

$$\begin{aligned}
T &= \text{Tr}(\gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu) \\
&= \text{Tr}(\gamma_\nu \not{p} \gamma^\nu - \gamma_\nu \not{k} \gamma^\nu + \gamma_\nu m \gamma^\nu) \\
&= \text{Tr}(\gamma_\nu \not{p} \gamma^\nu) - \text{Tr}(\gamma_\nu \not{k} \gamma^\nu) + \text{Tr}(\gamma_\nu m \gamma^\nu) \\
&= -2 \not{p} + 2 \not{k} + 4m = 2[2m - (\not{p} - \not{k})] \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Επιστρέφουμε στην (5.53) αντικαθιστώντας της την (5.54).

$$\begin{aligned}
-i\Sigma(p_i) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k 2[2m - (\not{p} - \not{k})] \\
&\quad \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)} \int_0^\infty dz_2 e^{iz_2((\not{p} - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\
&= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k 2[2m - (\not{p} - \not{k})] \\
&\quad \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 e^{i[z_1(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon) + z_2((\not{p} - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)]} \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Αποσκοπώντας στην συμπλήρωση τετραγώνου κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων:

$$l = k - \frac{p_i z_2}{z_1 + z_2} = k - p_i + \frac{p_i z_1}{z_1 + z_2}$$

Οπότε θα αντικαταστήσουμε στις ποσότητές μας:

$$k = l + \frac{p_i z_2}{z_1 + z_2} \quad \text{και} \quad k - p_i = l - \frac{p_i z_1}{z_1 + z_2} \tag{5.56}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην (5.55), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p_i) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4l 2[2m - (\not{p} - \not{k})] \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \\
 &\quad \underbrace{\exp i \left[z_1 \left(\left(l + \frac{p_i z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 - \lambda^2 \right) + z_2 \left(\left(\frac{p_i z_1}{z_1 + z_2} - l \right)^2 + m^2 \right) \right]}_{\text{Εκθετικό E}}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Υπολογίζω ξεχωριστά το παραπάνω εκθετικό:

$$\begin{aligned}
 E &= \exp \left[iz_1 \left(l^2 + \frac{2lp_i z_2}{z_1 + z_2} + \frac{p_i^2 z_2^2}{(z_1 + z_2)^2} - \lambda^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. iz_2 \left(\frac{p_i^2 z_1^2}{(z_1 + z_2)^2} - \frac{2p_i z_1 l}{z_1 + z_2} + l^2 - m^2 \right) \right] \\
 &= \exp \left[iz_1 l^2 + \frac{2ilp_i z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \frac{iz_1 z_2^2 p_i^2}{(z_1 + z_2)^2} - i\lambda^2 z_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{ip_i^2 z_1^2 z_2}{(z_1 + z_2)^2} - \frac{2ilz_2 z_1 p_i}{z_1 + z_2} + iz_2 l^2 - im^2 z_2 \right] \\
 &= \exp [il^2(z_1 + z_2)] \exp \left[i \left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} (z_1 + z_2) - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1 \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το εκθετικό της (5.58) στην (5.57), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p_i) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 e^{i \left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1 \right)} \\
 &\quad \int d^4l 2 \left[2m - \left(\frac{\not{p}_i z_1}{z_1 + z_2} - \not{l} \right) \right] e^{il(z_1 + z_2)} \\
 &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 e^{i \left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1 + z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1 \right)} \\
 &\quad \left[\int d^4l 4m e^{il(z_1 + z_2)} - \int d^4l \frac{2 \not{p}_i z_1}{z_1 + z_2} e^{il(z_1 + z_2)} \int d^4l 2 \not{l} e^{il(z_1 + z_2)} \right]
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (5.22) για να υπο-

Λογίσουμε τα ολοκληρώματα της (5.59). Μετά τον υπολογισμό θα γίνει:

$$\begin{aligned}
-i\Sigma(p_i) &= e^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 e^{i\left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1+z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1\right)} \\
&\quad \frac{1}{16\pi^2 i (z_1+z_2)^2} \left(4m - \frac{2\not{p}z_1}{z_1+z_2}\right) \Rightarrow \\
\Sigma(p_i) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dz_1 dz_2}{(z_1+z_2)^2} \left[2m - \frac{\not{p}z_1}{z_1+z_2}\right] e^{i\left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1+z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1\right)}
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (5.28) στην (5.60), η τελευταία γίνεται:

$$\begin{aligned}
\Sigma(p_i) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1+z_2)^2} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\gamma}\right) \\
&\quad \left(2m - \frac{\not{p}z_1}{z_1+z_2}\right) e^{i\left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1+z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1\right)}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $z_i \rightarrow z'_i = \gamma z_i$, η (5.61) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\Sigma(p_i) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} \frac{\gamma dz_1 \gamma dz_2}{(\gamma z_1 + \gamma z_2)^2} \delta\left(1 - \frac{\gamma z_1 + \gamma z_2}{\gamma}\right) \\
&\quad \left(2m - \frac{\not{p}z_1}{\gamma z_1 + \gamma z_2}\right) e^{i\left(\frac{p_i^2 \gamma z_1 \gamma z_2}{\gamma z_1 + \gamma z_2} - m^2 \gamma z_2 - \lambda^2 \gamma z_1\right)} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1+z_2)^2} \delta(1 - (z_1+z_2)) \\
&\quad \left(2m - \frac{\not{p}z_1}{z_1+z_2}\right) e^{i\gamma\left(\frac{p_i^2 z_1 z_2}{z_1+z_2} - m^2 z_2 - \lambda^2 z_1\right)}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Εξάιτίας της δέλτα-συνάρτησης παίρνουμε $z_1 + z_2 = 1$. Ωστόσο, από τα άκρα του ολοκληρώματος βλέπουμε ότι $z_1, z_2 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι $z_1, z_2 \in [0, 1]$. Λαμβάνοντας τα στοιχεία αυτά υπόψη η σχέση (5.62) θα γίνει:

$$\Sigma(p_i) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz_2 (2m - \not{p}z_1(1-z_2)) \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{i\gamma(p_i^2(1-z_2)z_2 - m^2 z_2 - \lambda^2(1-z_2))} \tag{5.63}$$

Το ολοκλήρωμα πλέον παρατηρούμε είναι μιας μεταβλητής $z_2 \equiv z$:

$$\Sigma(p_i) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}z_1(1-z)) \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{i\gamma(p_i^2(1-z)z - m^2 z - \lambda^2(1-z) + i\varepsilon)}}_{J(p_i, m, \lambda)} \tag{5.64}$$

Το ολοκλήρωμα $J(p_i, m, \lambda)$ αποκλίνει λογαριθμικά. Για το λόγο αυτό καταφεύγουμε στη διαδικασία της "αποκοπής", αποτραβώντας την ποσότητα

$J(p_i, m, \Lambda)$, όπου Λ μια πολύ μεγάλη μάζα. Η πράξη αυτή είναι αντίστοιχη αυτής στην περίπτωση της πόλωσης του κενού στην αρχή της έκφρασης (5.33):

$$\Sigma(p_i, m, \lambda) \rightarrow \Sigma(p_i) = \Sigma(p_i, m, \lambda) - \Sigma(p_i, m, \Lambda) \quad (5.65)$$

Το ολοκλήρωμα $J(p_i, m, \Lambda)$ θα είναι:

$$J(p_i, m, \Lambda) = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{i\gamma(p_i^2(1-z)z - m^2z - \lambda^2(1-z) + i\varepsilon)} \approx \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{-i\gamma\Lambda(1-z)} \quad (5.66)$$

Επομένως η διόρθωση $\Sigma(p_i)$, σύμφωνα με τις σχέσεις (5.64), (5.66), (5.65) θα είναι:

$$\begin{aligned} \Sigma(p_i) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{i\gamma(p_i^2(1-z)z - m^2z - \lambda^2(1-z) + i\varepsilon)} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} e^{-i\gamma\Lambda} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \\ &\quad \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma} \left(e^{i\gamma(p_i^2z(1-z) - m^2z - \lambda^2(1-z))} - e^{-i\gamma\Lambda^2(1-z)} \right) \end{aligned} \quad (5.67)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα (5.34) η έκφραση (5.67) θα γίνει:

$$\Sigma(p_i) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p_i^2z(1-z) - i\varepsilon} \quad (5.68)$$

Απομονώνουμε το λογαριθμικό κομμάτι, ως το ορίσουμε L , για να εφαρμόσουμε κάποιες ιδιότητες και να το φέρουμε στη μορφή που μας βολεύει:

$$\begin{aligned} L &= \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p_i^2z(1-z)} \\ &= \ln \left(\frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z^2 + \lambda^2(1-z)} \cdot \frac{m^2z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p_i^2(1-z)z} \right) \\ &= \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z^2} + \ln \frac{m^2z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p_i^2(1-z)z} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την έκφραση της (5.69) στην (5.68), παίρνουμε:

$$\Sigma(p_i) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2z^2} \quad (5.70)$$

$$+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \ln \frac{m^2z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2z + \lambda^2(1-z) - p_i^2z(1-z)} \quad (5.71)$$

Παίρνουμε μόνο τον όρο (5.70), ως τον ονομάσουμε O_1 και κάνουμε τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}
O_1 &= \frac{m\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2 z^2} - \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \int_0^1 dz (1-z) \ln \frac{\Lambda^2(1-z)}{m^2 z^2} \\
&= \frac{m\alpha}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \frac{1}{4} \left(5 + 2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} + \frac{\alpha m}{\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{5}{4} \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i - \frac{\alpha}{4\pi} \not{p}_i \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \\
&\approx \frac{3\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p}_i) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \\
&= \frac{3\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p}_i - m) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας τώρα στην (5.71) και αντικαθιστώντας την (5.72), θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\Sigma(p_i) &= \frac{3\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p}_i - m) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \ln \frac{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p_i^2 z(1-z)} \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση (5.73) έχουμε καταφέρει να περιορίσουμε την παρουσία της μεγάλης μάζας Λ στους δύο πρώτους όρους οι οποίοι θα υποβληθούν στη διαδικασία επανακανονικοποίησης. Το ολοκλήρωμα δεν περιέχει τη μάζα αυτή και επομένως είναι πεπερασμένο. Μετά την επανακανονικοποίηση θα καταλήξουμε σε μια πεπερασμένη διόρθωση $\Sigma(p_i)$. Το ολοκλήρωμα, ως το

ονομάσουμε I, υπολογίζεται για $p^2 - m^2 \ll m\lambda$:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2m - \not{p}_i(1-z)) \ln \frac{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p_i^2 z(1-z)} \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} \int_0^1 dz \ln \frac{m^2 z}{m^2 - p_i^2(1-z)} - \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \int_0^1 dz \ln \frac{m^2 z}{m^2 - p_i^2(1-z)} \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} \int_0^1 dz \ln m^2 z - \frac{\alpha m}{\pi} \int_0^1 dz \ln (m^2 - p_i^2(1-z)) \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \int_0^1 dz (1-z) \ln m^2 z + \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \int_0^1 dz (1-z) \ln (m^2 - p_i^2(1-z)) \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} \left(-1 + \ln m^2 - \left(-1 + \frac{m^2 \ln m^2}{p_i^2} \right) - \frac{(m^2 - p_i^2) \ln(m^2 - p_i^2)}{p_i^2} \right) \\
&\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \left(\frac{1}{4}(-3 + 2 \ln m^2) \right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \not{p}_i \frac{-2m^2 p_i^2 + p_i^4 - 2m^4 \ln m^2 + 2(m^4 - p_i^4) \ln(m^2 - p_i^2)}{4p_i^4} \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} \left(-\frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \ln m^2 + \frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \ln(m^2 - p_i^2) \right) \\
&\quad - \frac{\alpha}{4\pi} \not{p}_i \left(-\frac{p_i^2 - m^2}{p_i^2} + \ln m^2 \frac{p_i^4 - m^4}{p_i^4} + \frac{m^4 - p_i^4}{p_i^4} \ln(m^2 - p_i^2) \right) \\
&= \frac{\alpha m}{\pi} \frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} \not{p}_i \frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \left(1 + \frac{m^2 + p_i^2}{p_i^2} \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Αντικαθιστώντας πίσω στην (5.73) το αποτέλεσμα από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της (5.74), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\Sigma(p_i) &= \frac{3\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p}_i - m) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \\
&\quad + \frac{\alpha m}{\pi} \frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} \not{p}_i \frac{m^2 - p_i^2}{p_i^2} \left(1 + \frac{m^2 + p_i^2}{p_i^2} \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Κοντά στο "mass-shell", όπου $p^2 \approx m^2$ (αλλά $p^2 - m^2 \gg m\lambda$), με την προϋπόθεση ότι το Σ βρίσκεται δίπλα σε κάποιον σπίνορα ελεύθερου σωματιδίου:

$$\Sigma(p_i) \cong \frac{3a}{4\pi} m \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p}_i - m) \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 4 \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} \right) \tag{5.76}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $p_i^2 \rightarrow m^2$ έχουμε λογαριθμική ανωμαλία. Για τιμές της ορμής $p_i^2 > m^2$, το Σ γίνεται μιγαδικό και ανταποκρίνεται στην ύπαρξη της διαδικασίας διάσπασης εικονικού ηλεκτρονίου σε ηλεκτρόνιο και φωτόνιο (σε αναλογία με ότι συμβαίνει και στο φωτονιακό διαδότη).

Ορμώμενοι από την (5.76), γράφουμε τη διόρθωση $\Sigma(p_i)$ του διαδότη ως εξής:

$$\Sigma(p_i) = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + C(p_i)](\not{p}_i - m) \quad (5.77)$$

όπου έχουμε θεωρήσει:

$$\delta m = \frac{3\alpha m}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \quad (5.78)$$

και

$$Z_2^{-1} - 1 + C(p_i) \cong \frac{\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 4 \ln \frac{m^2 - p_i^2}{m^2} \right)$$

Το $C(p)$ διαλέγεται έτσι ώστε για $\not{p}_i = m$, να μηδενίζεται. Επομένως, δεν περιέχει καμία εξάρτηση από τη σταθερά αποκοπής Λ . Συνεπώς, για $\not{p}_i = m$ γίνεται:

$$Z_2^{-1} - 1 = \frac{a}{4\pi} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 2 \ln \frac{m^2}{\lambda^2} \right) \quad (5.79)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας την (5.77), η τροποποίηση του διαδότη (5.52) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p}_i - m - \Sigma(p_i)} &= \frac{i}{\not{p}_i - m - (\delta m - [Z_2^{-1} - 1 + C(p_i)])(\not{p}_i - m)} \\ &= \frac{iZ_2}{(\not{p}_i - m)[1 + Z_2C(p_i)] - Z_2\delta m} \\ &= \frac{iZ_2}{(\not{p}_i - m - \delta m)[1 + C(p_i)]} + O(a^2) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Ταυτοποιούμε $m_{ph} = m + \delta m$ ως τη φυσική μάζα του ηλεκτρονίου. Όπως φαίνεται, η παράμετρος m που εμφανίζεται στην εξίσωση Dirac δεν αποτελεί κάποια φυσική ποσότητα, αλλά αποτελεί μια μη μετρήσιμη ποσότητα, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την παράμετρο του γυμνού φορτίου που μελετήσαμε παραπάνω. Λόγω της αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονιακού πεδίου με το ηλεκτρομαγνητικό, η πραγματική μάζα του ηλεκτρονίου m_{ph} διαφέρει από τη μάζα m του μη αλληλεπιδρόντος λεπτονίου. Η m_{ph} ονομάζεται επανακανονικοποιημένη μάζα.

Παρ'όλο που η διόρθωση της μάζας είναι μια πεπερασμένη ποσότητα, συγκριτικά με τη μάζα αποκοπής Λ είναι εξαιρετικά μικρή. Γι'αυτό, με σκοπό να απαλλαγούμε από τη διόρθωση αυτή της μάζας, καταφεύγουμε στο να ξαναγράψουμε την εξίσωση Dirac σε όρους της φυσικής μάζας και να θεωρήσουμε τη διαφορά λόγω της διόρθωσης σαν έναν επιπλέον όρο αλληλεπίδρασης. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} (i \not{\partial} - m_{ph})\psi(x) = 0 &\Rightarrow (i \not{\partial} - m - \delta m)\psi(x) = 0 \Rightarrow \\ (i \not{\partial} - m)\psi(x) - \delta m\psi(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

Συμπεώς, η χρήση της φυσικής μάζας στην εξίσωση Dirac, αποζημιώνεται από τον counter-term μάζας $-\delta m\psi(x)$. Όπως φαίνεται η εισαγωγή της φυσικής μάζας στην Dirac, αναδεικνύει ένα παραπάνω όρο αλληλεπίδρασης της μορφής



Δηλαδή, μεταφράζοντας την αλληλεπίδραση, καταλαβαίνουμε ότι σε κάθε γράφημα δύο γραμμών ενός διαγράμματος Feynman, πρέπει να συνεισφέρει πολλαπλασιαστικά στο αναλλοίωτο πλάτος ένας όρος $i\delta m$, όπως ακριβώς συνεισφέρει για κάθε κορυφή ένας παράγοντας $ie\gamma^\mu$.

Πάντως στο όριο $p_i^2 \rightarrow m_{ph}^2$, όπου ισχύει ότι $C(p_i) = 0$, ο counter-term που βρήκαμε ακυρώνει τον πρώτο όρο της διόρθωσης (5.76). Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με την (5.80), ότι ο ηλεκτρονικός διαδότης μεταβάλλεται μόνο κατά έναν παράγοντα Z_2 .

$$\frac{i}{\not{p}_i - m} \rightarrow \frac{iZ_2}{\not{p}_i - m} \quad (5.82)$$

Ο παράγοντας Z_2 είναι αντίστοιχος με τον παράγοντα Z_3 που επανακανονικοποιεί το φορτίο (5.41) στην περίπτωση της διόρθωσης του φωτονιακού διαδότη. Παρομοίως και εδώ, ο παράγοντας αυτός μπορεί να απορροφηθεί από τον επαναορισμό του φορτίου που εμφανίζεται στις κορυφές σε οποιοδήποτε άκρο της ηλεκτρονιακής γραμμής στο διάγραμμα Feynman:

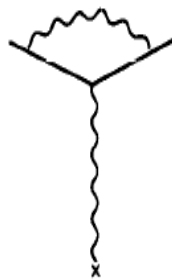
$$e'_R = Z_2 e \quad (5.83)$$

Παρ' όλα αυτά, αυτό δεν είναι απαραίτητο μιας, και όπως θα δούμε παρακάτω στην περίπτωση της διόρθωσης του διαγράμματος (b), η αντίστοιχη διόρθωση αλληλοαναιρείται με τούτη. Τέλος, δεν μπορούμε κιόλας να περιμένουμε ο παράγοντας Z_2 να έχει μεγάλη φυσική σημασία, εφ'όσον περιέχει την μάζα αποκοπής Λ .

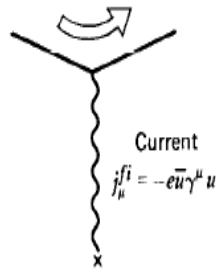
5.4 Η διόρθωση της κορυφής

Σειρά έχει η μελέτη του διαγραμμάτος (b). Το αναλλοίωτο πλάτος θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό των συνεισφορών των στοιχείων του διαγράμματος, όπως αυτές δίνονται στον πίνακα με τους κανόνες Feynman του προηγούμενου κεφαλαίου.

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις οι βρόχοι τροποποίησαν το φωτονιακό και ηλεκτρονικό διαδότη αντίστοιχα, έτσι και στην περίπτωση αυτή, το φωτόνιο που εκπέμπεται πριν τη σκέδαση και απορροφάται μετά θα τροποποιεί τη συνεισφορά της κορυφής και κατέπεκταση το ηλεκτρονιακό ρεύμα. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

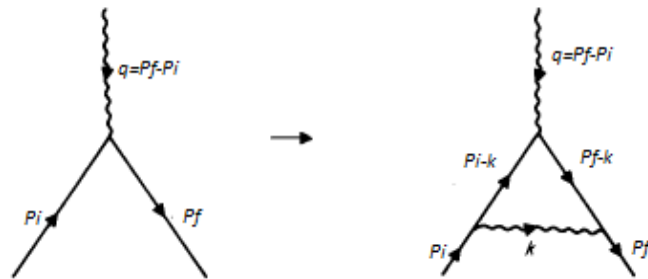


modifies



Στο διάγραμμα αυτό εμφανίζεται βρόχος ο οποίος τροποποιεί το ηλεκτρονιακό ρεύμα της κορυφής.

Επομένως, σύμφωνα με τη συμπεριφορά των ορμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



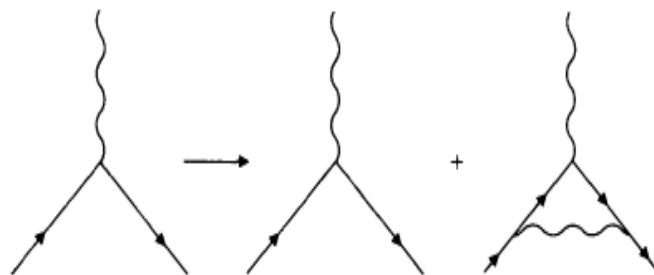
το αναλλοίωτο πλάτος σύμφωνα με τους κανόνες Feynman θα είναι:

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}_f (ie\Gamma^\mu(p_i, p_f)) u_i \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) j^\nu(q) \quad (5.84)$$

όπου η τροποποίηση της κορυφής της αλληλεπίδρασης είναι:

$$-ie\gamma^\mu \rightarrow -ie\Gamma^\mu(p_i, p_f) \rightarrow -ie\gamma^\mu - ie\Lambda^\mu(p_i, p_f) \quad (5.85)$$

και σχηματικά:



και ο διορθωτικός παράγοντας $\Lambda(p_i, p_f)$ είναι, πάλι σύμφωνα με τους κανόνες Feynman:

$$\Lambda(p_i, p_f) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}_i - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_f - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\nu \quad (5.86)$$

Η ορμή που κυκλοφορεί γύρω από το βρόχο πάλι δεν είναι περιορισμένη, επομένως το ολοκλήρωμα αποκλίνει κι έτσι πρέπει να καταφύγουμε πάλι στη

διαδικασία της επανακανονικοποίησης. Επιπροσθέτως, προσδώσαμε στο φωτόνιο μια πολύ μικρή μάζα λ , με σκοπό να αποφύγουμε τις πιθανές υπέρυθρες αποκλίσεις. Το ολοκλήρωμα της (5.86) γίνεται:

$$\Lambda(p_i, p_f) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu (\not{p}_i - \not{k} + m) \frac{i}{\not{p}_i - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu (\not{p}_f - \not{k} + m) \frac{i}{\not{p}_f - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\nu \quad (5.87)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα (5.12) το ολοκλήρωμα της (5.87) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Lambda(p_i, p_f) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 e^{iz_1(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)} \gamma^\nu (\not{p}_i - \not{k} + m) \int_0^\infty dz_2 \\ &\quad e^{iz_2((\not{p}_i - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)} \gamma^\mu (\not{p}_f - \not{k} + m) \int_0^\infty dz_3 e^{iz_3((\not{p}_f - \not{k})^2 - m^2 + i\varepsilon)} \gamma_\nu \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int_0^\infty dz_3 \\ &\quad \exp [iz_1(k^2 - \lambda^2) + iz_2((\not{p}_i - \not{k})^2 - m^2) + iz_3((\not{p}_f - \not{k})^2 - m^2)] \\ &\quad \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p}_i - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p}_f - \not{k} + m) \gamma_\nu] \end{aligned} \quad (5.88)$$

Υπολογίζουμε το ίχνος με βάση τις ιδιότητες που έχουμε καταγράψει στο προηγούμενο κεφάλαιο και το ολοκλήρωμα της (5.88) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Lambda(p_i, p_f) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int_0^\infty dz_3 \\ &\quad \exp [iz_1(k^2 - \lambda^2) + iz_2((\not{p}_i - \not{k})^2 - m^2) + iz_3((\not{p}_f - \not{k})^2 - m^2)] \\ &\quad 4 \left[\gamma_\mu \left((p_i - k)(p_f - k) - \frac{k^2}{2} \right) + (p_i + p_f + k)_\mu \not{k} - m k_\mu \right] \end{aligned} \quad (5.89)$$

Επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό των προηγούμενων διορθώσεων:

- Αλλαγή συντεταγμένων
- Υπολογισμός του εκθετικού και απομόνωση του όρου που είναι ανεξάρτητος από τη νέα μεταβλητή
- Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που προκύπτουν πάνω σε όλες τις ορμές με τη βοήθεια των σχέσεων (5.22)
- Χρήση της ταυτότητας (5.28)
- Διαδικασία αποκοπής για να σταματήσει το ολοκλήρωμα να αποκλίνει με τη βοήθεια μιας πολύ μεγάλης μάζας Λ

Βρίσκουμε ότι η διόρθωση $\Lambda(p_i, p_f)$ θα είναι :

$$\begin{aligned}
\Lambda(p_i, p_f) &= \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\mu \left[\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \mathcal{O}(1) \right] \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \gamma_\mu \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 dz_2 dz_3 \delta \left(1 - \sum_{i=1}^3 z_i \right) \\
&\cdot \ln \frac{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1}{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1 - q^2 z_2 z_3 - i\varepsilon} \\
&- \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dz_1 dz_2 dz_3 \delta \left(1 - \sum_{i=1}^3 z_i \right) \\
&\cdot \frac{\gamma_\nu [\not{p}_i(1-z_2) - \not{p}_f z_3 + m] \gamma_\mu [\not{p}_f(1-z_3) - \not{p}_i z_2 + m] \gamma^\nu}{m^2(1-z_1)^2 + \lambda^2 z_1 - q^2 z_2 z_3 - i\varepsilon} \quad (5.90)
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να λιγοστέψουμε τους όρους του αριθμητή του τελευταίου όρου της παραπάνω έκφρασης (5.90), αντιμεταθέτοντας τα \not{p}_i και \not{p}_f στις δυο άκρες, όπου και θα δράσουν πάνω στους ηλεκτρονιακούς σπινόρες, μιας και διόρθωση Λ_μ εγκλωβίζεται ανάμεσα σε αυτούς. Με χρήση λοιπόν και του αναπτύγματος Gordon:

$$\bar{u}_i(p_i) \gamma_\mu u(p_f) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p_f) \left((p_f + p_i)^2 + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu \right) u(p_i) \quad (5.91)$$

ο τελευταίος όρος της (5.90) γίνεται:

$$-\gamma_\mu \left[2m^2(1-4z_1+z_1^2) + 2q^2(1-z_2)(1-z_3) \right] - 2mz_1z_2[A, \gamma_\mu] \quad (5.92)$$

Η ολοκλήρωση πάνω στα z_i είναι δύσκολη και μακροσκελής διαδικασία (ωστόσο το αποτέλεσμα έχει υπολογισθεί και υπάρχει σε κάποιες πηγές) και για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε στη μελέτη των δύο ορίων $|q|^2 \ll m^2$ και $|q|^2 \gg m^2$. Αυτά δίνουν (μόνο για τον τρίτο όρο της (5.90)):

- Για $|q|^2 \ll m^2$:

$$\gamma_\mu + \Lambda(p_i, p_f) \cong \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) \right] + \frac{\alpha}{8m\pi} [A, \gamma_\mu] \quad (5.93)$$

- Για $|q|^2 \gg m^2$:

$$\gamma_\mu + \Lambda(p_i, p_f) \cong \gamma_\mu \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{m}{\lambda} \left(\ln \frac{(-q^2)}{m^2} - 1 + \mathcal{O} \left(\frac{m^2}{q^2} \right) \right) \right] \quad (5.94)$$

Όταν μελετήσαμε τη διόρθωση στην περίπτωση της πόλωσης του κενού, για την περίπτωση μικρής μεταφοράς ορμής $|q|^2 \ll m^2$, είδαμε το πως αυτή συνεισφέρει στην τροποποίηση κάποιων αλληλεπιδράσεων, όπως για παράδειγμα

της σκέδασης Rutherford, όπως φαίνεται στην εξίσωση (5.45). Εισάγοντας το αποτέλεσμα αυτό, σε εκείνο που πήραμε στην εξίσωση (5.93) βλέπουμε ότι το φαινόμενο της πόλωσης του κενού προσθέτει μια σταθερά $-1/5$ στη σταθερά $-3/8$ της (5.93). Οι άλλοι όροι της που έχουν να κάνουν με την υπέρυθρη απόκλιση και με τη μαγνητική ροπή δεν επηρεάζονται από την εισαγωγή αυτή.

Αναπτύσσουμε τώρα το $\Lambda^\mu(p_i, p_f)$ σαν άθροισμα ενός όρου της αλληλεπίδρασης μηδενικής μεταφοράς ενέργειας (ευθεία σκέδαση) $q = p_i - p_f \rightarrow 0$ και ενός της διαφοράς τους:

$$\Lambda^\mu(p_i, p_f) = \Lambda^\mu(p, p) + (\Lambda^\mu(p_i, p_f) - \Lambda^\mu(p, p)) \equiv \Lambda^\mu(p, p) + \Lambda_c^\mu(p_i, p_f) \quad (5.95)$$

Ξεχωρίζουμε λοιπόν το άπειρο κομμάτι από το πεπερασμένο θεωρώντας πως το άπειρο εμπεριέχεται εξ' ολοκλήρου στο $\Lambda^\mu(p, p)$. Όταν κατασκευάζουμε την ευθεία σκέδαση, προφανώς δεν έχουμε στη διάθεσή μας το τετραδιάνυσμα ορμής q^μ . Αυτό σημαίνει ότι το $\Lambda^\mu(p, p)$ θα μπει να κατασκευαστεί αποκλειστικά από όρους ανάλογους των γ^μ και p^μ :

$$\bar{u}(p)\Lambda^\mu(p, p)u(p) = A\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) + Bp^\mu\bar{u}(p)u(p) \quad (5.96)$$

Λόγω του αναπτύγματος Gordon για το ρεύμα Dirac (5.91), το οποίο για $p_i = p_f = p$ δίνει:

$$m\bar{u}_f(p)\gamma^\mu u_i(p) = p^\mu\bar{u}_f(p)u_i(p) \quad (5.97)$$

η εξίσωση (5.96) θα γίνει:

$$\bar{u}(p)\Lambda^\mu(p, p)u(p) = L\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \quad (5.98)$$

Επομένως η εξίσωση (5.95) θα γραφτεί:

$$\Lambda^\mu(p_i, p_f) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p_i, p_f) \quad (5.99)$$

Το σκεπτικό με το οποίο κινούμασταν ώστε να φτάσουμε στην (5.99), είναι ότι στο όριο $\Lambda \rightarrow \infty$ αφενός να επανακτούμε την QED και αφετέρου, παρ' όλο που η ποσότητα L θα απειρίζεται, ο όρος $\Lambda_c^\mu(p_i, p_f)$ να παραμένει πεπερασμένος και κατ' επέκταση να παραμένει πεπερασμένη η $\Lambda^\mu(p_i, p_f)$.

Επομένως θέτοντας (κατά σύμβαση) ότι:

$$Z_1 = (1 + L)^{-1} \Rightarrow Z_1^{-1} = 1 + L \Rightarrow Z_1^{-1} - 1 = L \quad (5.100)$$

η εξίσωση (5.98) θα πάρει τη μορφή:

$$\bar{u}(p)\Lambda^\mu(p, p)u(p) = (Z_1^{-1} - 1)\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) \quad (5.101)$$

όπου όπως και η L , η ποσότητα Z_1 είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τις μάζες $m^2 (= p^2)$, λ^2 και από τη σταθερά αποκοπής Λ (που απαιτείται για να είναι πεπερασμένη η διόρθωση).

5.5 Ταυτότητες Ward

Ωστόσο, όσον αφορά την ποσότητα Z_1 που χρησιμοποιήσαμε στην (5.101), κρίνεται μη αναγκαίο να την υπολογίσουμε. Αυτό διότι εαν συγκρίνουμε την (5.86) για $p_i = p_f = p$ με την (5.49) παρατηρούμε ότι:

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} \quad (5.102)$$

όπου έγινε χρήση της ταυτότητας

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\frac{1}{\not{p} - m} \right) = \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m} \quad (5.103)$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει την πληροφορία ότι η παραγωγήσις ενός ελεύθερου διαδότη ως προς την ορμή ισοδυναμεί με την εισαγωγή ενός φωτονίου μηδενικής ενέργειας στη γραμμή (εικόνα (α)). Προφανώς μπορούμε να συσχετίσουμε τη διόρθωση της κορυφής για $q = 0$ με το διάγραμμα ίδιας ενέργειας και αυτό ακριβώς υποδεικνύει η εξίσωση (5.102), (εικόνα (β)):

(a) $-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\longrightarrow \right) = \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} q=0 \text{---} \\ \gamma_\mu \end{array} \longrightarrow$

(b) $-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\text{---} \right) = \text{---} \begin{array}{c} \text{---} q=0 \text{---} \\ \gamma_\mu \end{array} \text{---}$

Εκτελώντας την παραγωγήσις που υπαγορεύει η εξίσωση (5.102), βρίσκουμε:

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu(p, p)u(p) = (Z_2^{-1} - 1)\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) \quad (5.104)$$

και συγκρίνοντάς την με την εξίσωση (5.101) προκύπτει ότι

$$Z_1 = Z_2 \quad (5.105)$$

Επίσης η (5.85) δίνει ότι:

$$\begin{aligned} -ie\gamma^\mu &\rightarrow -ie\gamma^\mu - ie\Lambda^\mu(p_i, p_f) = -ie\gamma^\mu - ieL\gamma^\mu \\ &= -ie\gamma^\mu(1 + L) = -i(Z_1^{-1}e\gamma^\mu) \end{aligned} \quad (5.106)$$

δηλαδή, ότι το φορτίο χρειάζεται μια περεταίρω επανακανονικοποίηση πέρα από αυτές που πράξαμε στις προηγούμενες περιπτώσεις:

$$e_R'' = Z_1^{-1}e \quad (5.107)$$

Επομένως, από (5.41), (5.83), (5.107) προκύπτει ότι η τελική μορφή του επανακανονικοποιημένου φορτίου είναι:

$$e_R = \sqrt{Z_3 Z_2 Z_1^{-1}} e \quad (5.108)$$

έκφραση η οποία μέσω της (5.105) γίνεται:

$$e_R = \sqrt{Z_3} e \quad (5.109)$$

Το αποτέλεσμα αυτό που βρήκαμε είναι πολύ σημαντικό. Κατ' αρχήν, εκτελώντας την παραπάνω ανάλυση θεωρήσαμε ότι στον επαναορισμό του ηλεκτρονιακού φορτίου συνεισφέρουν διορθωτικοί παράγοντες και από τα τρία διαφορετικά είδη διορθώσεων. Αν λοιπόν επαναλάβουμε τον υπολογισμό των διορθώσεων για τα γραφήματα a , b , c για την περίπτωση σκέδασης ενός μιονίου από έναν πυρήνα, τότε θα πρέπει να βρούμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Αυτό γιατί, ενώ στη διόρθωση λόγω της πόλωσης του κενού το είδος του σωματιδίου δεν παίζει κάποιο ρόλο, στις άλλες δύο περιπτώσεις η μάζα του σωματιδίου υπεισέρχεται στους διορθωτικούς παράγοντες. Αυτό όμως έρχεται σε σύγκρουση με τα πειραματικά αποτελέσματα τα οποία μας δίνουν ότι το ηλεκτρόνιο και το μιονίο έχουν ακριβώς το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο. Η συμφωνία της θεωρίας με το πείραμα εξασφαλίζεται μέσω της εξίσωσης (5.105), κατά την οποία η τροποποίηση του φορτίου λόγω του γραφήματος b και η αντίστοιχη τροποποίηση λόγω του γραφήματος c αλληλοεξουδετερώνονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η (5.109) να αποτελεί την πλήρη απάντηση για τον επαναορισμό του φορτίου και δηλαδή, ο παράγοντας επανακανονικοποίησης δίνεται εξόλοκληρου από την (5.41). Συνεπώς, το φορτίο του ηλεκτρονίου και του μιονίου είναι ίδια (καθολικότητα της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης) αφού το μόνο διάγραμμα που συνεισφέρει είναι αυτό της πόλωσης του κενού, στο οποίο δεν υπεισέρχεται κάπου η μάζα (το είδος) του σωματιδίου. Η αλληλοαναίρεση αυτή επαναλαμβάνεται σε όλες τις μεγαλύτερες τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Η ιδιότητα αυτή ανάμεσα στα διαγράμματα b , c αντικατοπτρίζει μια πολύ βασική ιδιότητα των θεωριών πεδίου που ονομάζεται ταυτότητα Ward.

5.6 Η μετατόπιση Lamb & η ανώμαλη μαγνητική ροπή

Η παρουσία των παραπάνω βρόχων και η επανακανονικοποίηση του φορτίου δεν αποτελούν απλώς θεωρητικά κατασκευάσματα, αλλά οι προβλέψεις και τα φαινόμενα που υπεισέρχονται έχουν εξακριβωθεί πειραματικά. Δύο μεγάλες επιτυχίες της θεωρίας είναι η μετατόπιση Lamb ανάμεσα σε δύο αρχικά εκφυλισμένες στάθμες του υδρογόνου και η παρουσία ενός διορθωτικού όρου στη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου που ονομάζεται ανώμαλη μαγνητική ροπή.

Μετατόπιση Lamb

Όταν πια φαινόταν ότι για τις ενεργειακές στάθμες του υδρογόνου ήταν τα πάντα γνωστά, οι Lamb και Retherford το 1947 αποφάσισαν να ελέγξουν τα αποτελέσματα της θεωρίας του Dirac. Χρησιμοποίησαν λοιπόν τεχνικές με μικροκύματα (που ήταν διαθέσιμες από τις κατασκευές των ραντάρ) και κατέληξαν πως η εμφάνιση μιας ενεργειακής διαφοράς στη χαμηλότερη στάθμη του διεγερμένου ατόμου του υδρογόνου δεν μπορούσε να εξηγηθεί με κανέναν τρόπο χωρίς την εισαγωγή νέας φυσικής, της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Ας

τα πάρουμε όμως με τη σειρά.

Από την εξίσωση (5.45):

$$-i\mathfrak{M} = (ie_R \bar{u} \gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe_R) \quad (5.110)$$

ο πρώτος όρος που είναι ανάλογος του $|\vec{q}|^{-2}$, σχετίζεται με το δυναμικό Coulomb. Ο συσχετισμός αυτός απορρέει από το μετασχηματισμό:

$$\frac{1}{|\vec{q}|^2} = \int d^3x e^{i\vec{q}\vec{x}} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \quad (5.111)$$

Επομένως λαμβάνοντας την παραπάνω εξίσωση (5.111), περνώντας τώρα από το χώρο των ορμών στο χώρο των μετατοπίσεων, αναδεικνύεται το δυναμικό Coulomb στη συνηθισμένη του μορφή:

$$V_1(r) = -\frac{Ze_R^2}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{1}{|\vec{q}|^2} = -\frac{Ze_R^2}{4\pi r} \quad (5.112)$$

Ο δεύτερος όρος της (5.45) αντιπροσωπεύει την επίδραση του κβαντικού φαινομένου του e^-e^+ βρόχου κατά τη διάδοση του ανταλασσόμενου φωτονίου. Αυτός περιέχει επίσης έναν παράγοντα $|\vec{q}|^2$ αντίστοιχο με αυτόν του πρώτου όρου. Επίσης, αφού στο χώρο των συντεταγμένων $|\vec{q}|^2 \rightarrow \nabla^2$ ο δεύτερος όρος θα αντιστοιχεί σε ένα δυναμικό της μορφής:

$$V_2(r) = -\frac{e_R^2}{60m^2\pi^2} \left(\nabla^2 \frac{Ze_R^2}{4\pi r} \right) \quad (5.113)$$

Λόγω της σχέσης για τη δέλτα συνάρτηση

$$-\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \delta(\vec{r}) \quad (5.114)$$

ο όρος του δυναμικού της εξίσωσης (5.113) θα γίνει:

$$V_2(r) = -\frac{Ze_R^4}{60m^2\pi^2} \delta(\vec{r}) \quad (5.115)$$

Συνοψώς το ολικό δυναμικό αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου με τον πυρήνα θα αποτελείται από τους δύο όρους των (5.112), (5.115) και θα είναι:

$$V(r) = -\frac{Ze_R^2}{4\pi r} - \frac{Ze_R^4}{60m^2\pi^2} \delta(\vec{r}) \quad (5.116)$$

Στην έκφραση αυτή του δυναμικού, όταν $q^2 \rightarrow 0$, το ηλεκτρόνιο «βλέπει» από μεγάλη απόσταση το στατικό φορτίο του πυρήνα Ze_R και αλληλεπιδρά μαζί του μέσω της αλληλεπίδρασης Coulomb. Η αλληλεπίδραση εκφράζεται μέσω του πρώτου όρου της εξίσωσης (5.116). Το e_R αποτελεί το γνωστό

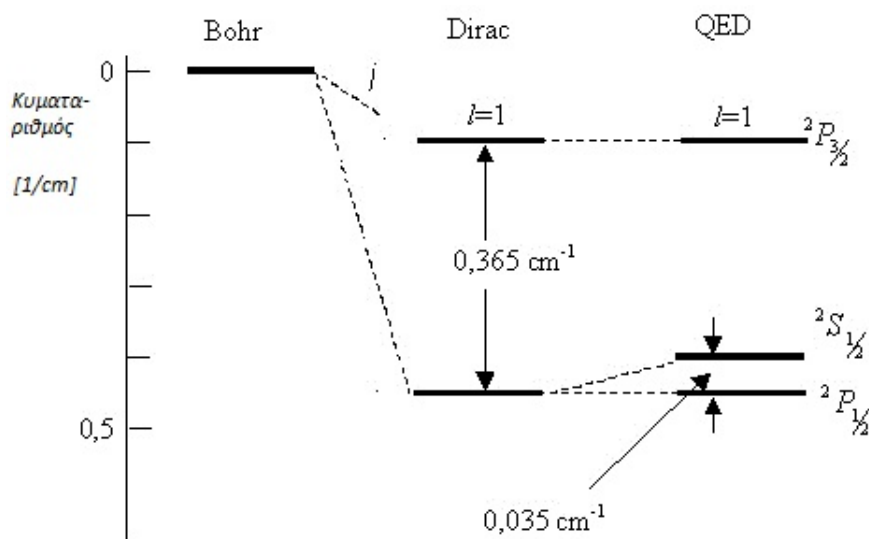
ηλεκτρονιακό φορτίο το οποίο μετράται πειραματικά στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Καθώς όμως η ορμή $-q^2$ αυξάνει και το ηλεκτρόνιο πλησιάζει περισσότερο τον πυρήνα, διαπερνά το νέφος εικονικών ζευγών e^-e^+ που τον περιτριγυρίζει. Αυτό λοιπόν εντείνει την αλληλεπίδραση (οι δυο όροι έχουν ίδιο πρόσημο) με τον δεύτερο όρο να εκφράζει το φαινόμενο αυτό. Επομένως, η παρουσία του βρόγχου προσδίδει μια επιπλέον ελκτική δύναμη ανάμεσα στο ηλεκτρόνιο και τον πυρήνα. Η παραπάνω αλληλεπίδραση είναι ανιχνεύσιμη και έχει καθιερωθεί και πειραματικά.

Αν θέσουμε $Z = 1$ τότε πρόκειται για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-πρωτονίου, η οποία λαμβάνει χώρα στο εσωτερικό του ατόμου του υδρογόνου. Η (5.116) λοιπόν αφορά στην περίπτωση αυτή τη δέσμια κατάσταση του ατόμου Η συμπεριλαμβανομένης και της επιπλέον έλξης όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα στο σύννεφο των ζευγών e^-e^+ το οποίο θωρακίζει το φορτίο του πυρήνα. Το φαινόμενο αυτό αντιπροσωπεύεται σε χαμηλότερη τάξη από το $\delta(\vec{r})$ δυναμικό και συνεισφέρει στα ενεργειακά επίπεδα E_{nl} του ατόμου του υδρογόνου. Το μέγεθος του υπολογίζεται με εφαρμογή απλής κβαντικής μηχανικής, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να χειριστούμε το δεύτερο όρο της (5.116) σαν διαταραχή. Έτσι, αποκτούμε τη συνεισφορά στη μετατόπιση Lamb .

$$\begin{aligned}\Delta E_{nl} &= -\frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2} |\Psi_{nl}(0)|^2 \delta_{l0} \\ &= -\frac{8a_R^3}{15\pi n^3} R_y \delta_{l0}\end{aligned}\quad (5.117)$$

όπου η Ψ_{nl} είναι οι κυματοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου και $R_y = m\alpha_R^2/2$ είναι η σταθερά του Rydberg . Το δ_{l0} προκύπτει επειδή το $\delta(\vec{r})$ δυναμικό μπορεί μόνο να διαταράξει μόνο τα ενεργειακά επίπεδα που περιγράφονται από κυματοσυναρτήσεις που είναι πεπερασμένες στη θέση $\vec{r} = 0$, δηλαδή αυτές για τις οποίες ισχύει $l = 0$ (s -τροχιακά, στα p -τροχιακά η αρχή των αξόνων δε συμπεριλαμβάνεται). Η διαταραχή λοιπόν θα ανυψώσει κατά ένα ενεργειακό διάστημα τη στάθμη $2s_{1/2}$, ενώ θα αφήσει αδιατάρακτη την $2p_{1/2}$.

Αν δε συμπεριλάβουμε καθόλου τις διορθώσεις ανώτερης τάξης (πόλωση του κενού, ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου και διόρθωση της κορυφής), οι δύο αυτές στάθμες είναι εκφυλισμένες. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται πειραματικά μετρώντας τη συνολική μετατόπιση Lamb , ανάμεσα στα επίπεδα $2s_{1/2}$ και $2p_{1/2}$, η οποία έχει βρεθεί $1057MHz$. Η εξίσωση λοιπόν (5.117), συνεισφέρει κατά $-27MHz$ (το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι μετατοπίζει την στάθμη προς τα κάτω) στην ολική μετατόπιση Lamb, στην οποία όπως φαίνεται συνεισφέρουν περισσότερο τα άλλα διαγράμματα $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Δηλαδή, το δυναμικό λόγω της πόλωσης του κενού (5.116) συμβάλει κατά ένα μικρό, αλλά μετρήσιμο, ποσοστό στη συνολική άρση του εκφυλισμού. Το φαινόμενο αυτό απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα :



Τελικά καταλήγουμε ότι η αλληλεπίδραση του ηλεκτρονίου με τον πυρήνα εξαρτάται από την απόσταση (ορμή). Για παράδειγμα, το άτομο του υδρογόνου αποτελεί δέσμια κατάσταση λόγω της ανταλλαγής φωτονίων του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου του πυρήνα. Η δύναμη Coulomb κρατά τα δυο σωματίδια σε κάποια απόσταση η οποία κατά μέσο όρο είναι ίση με την ακτίνα του Bohr. Σύμφωνα με την κβαντική ηλεκτροδυναμική, το ηλεκτρόνιο αποκλίνει από αυτή την απόσταση λόγω (ανάμεσα και σε άλλους λόγους) της συνεχούς εμφάνισης ζευγών e^-e^+ . Μπορούμε ποιοτικά να θεωρήσουμε ότι τα εικονικά ηλεκτρόνια έλκονται από τον πυρήνα, ενώ τα ποζιτρόνια απωθούνται (πόλωση του κενού). Έτσι τα εικονικά ηλεκτρόνια θωρακίζουν τον πυρήνα όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται μακριά και η έλξη μειώνεται. Ωστόσο, ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στην s -στάθμη, θα εισχωρήσει στο νέφος αυτό και εν τέλει θα το διαπεράσει ώστε να καταφέρει να «δει» ολόκληρο το φορτίο του πυρήνα. Συνεπώς, η ελκτική δύναμη όσο το ηλεκτρόνιο προσεγγίζει τον πυρήνα, ενισχύεται.

Ανώμαλη Μαγνητική Ροπή

Όπως αναλύσαμε παραπάνω, ο βρόχος της πόλωσης του κενού αποτελεί ένα μόνο κλάσμα της συνολικής άρσης του εκφυλισμού των σταθμών με ίδια συνολική στροφορμή $2s_{1/2}$ και $2p_{1/2}$. Η συνολική μετατόπιση Lamb βρίσκεται αν συνυπολογίσουμε και τις συνεισφορές και των άλλων διαγραμμάτων που περιέχουν βρόχους. Όμως, εκτός από την παραπάνω μετατόπιση, διαγράμματα που εμπεριέχουν βρόχους, συγκεκριμένα αυτό που ο βρόχος σχηματίζεται γύρω από την κορυφή, αποτελεί αιτία και για την παρουσία ενός άλλου φαινομένου, της μεταβολής της μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου. Για το όριο $|q|^2 \ll m^2$ η διόρθωση στην κορυφή δίνεται από την (5.93). Την ζαναγράφουμε παρεμβalόμενη ανάμεσα στους σπίνορες ώστε να πάρουμε ουσιαστικά

την τροποποίηση του ηλεκτρονιακού ρεύματος της κορυφής (5.85):

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \rightarrow -e\bar{u}_f \left\{ \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) \right] + \frac{\alpha}{8m\pi} [\not{A}, \gamma_\mu] \right\} u_i \quad (5.118)$$

Ο πρώτος όρος της (5.118) δίνει μια συνεισφορά στη μετατόπιση Lamb. Ο υπολογισμός της δυστυχώς είναι μακροσκελής και απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή, γι' αυτό και θα τον παρακάμψουμε. Ο δεύτερος όρος της (5.118) παρουσιάζει ενδιαφέρον, το οποίο γίνεται εμφανές αν υπολογίσουμε το μεταθέτη του.

$$\begin{aligned} [\not{A}, \gamma_\mu] &= [\gamma_\nu q^\nu, \gamma_\mu] = \gamma_\nu [q^\nu, \gamma_\mu] + [\gamma_\nu, \gamma_\mu] q^\nu \\ &= \gamma_\nu q^\nu \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu q^\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu = \gamma_\nu q^\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu q^\nu \\ &= (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) q^\nu = -2i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \end{aligned} \quad (5.119)$$

αφού ισχύει ότι:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (5.120)$$

Επομένως η (5.118) θα γίνει:

$$-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i \rightarrow -e\bar{u}_f \left\{ \gamma_\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right) \right] - \left[\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{2m} i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \right\} u_i \quad (5.121)$$

Παρατηρώντας την έκφραση του ρεύματος Dirac του αναπτύγματος Gordon, εξίσωση (5.91), γίνεται σαφές ότι το ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά μέσω του ηλεκτρικού του φορτίου (πρώτος όρος) αλλά και μέσω της μαγνητικής του ροπής (δεύτερος όρος), αφού το $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$ αντιπροσωπεύει τη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \quad (5.122)$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{S} \quad (5.123)$$

όπου όπως έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ και ο γυρομαγνητικός λόγος $g = 2$. Συγκρίνοντας λοιπόν την (5.121) με την (5.91) διαπιστώνουμε ότι ο δεύτερος όρος της (5.121) προσδίδει έναν παραπάνω όρο αλληλεπίδρασης με τη μαγνητική ροπή. Από τις εξισώσεις (5.121), (5.91), (5.122), βρίσκουμε ότι η μαγνητική ροπή θα είναι:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \vec{\sigma} \quad (5.124)$$

ή αλλιώς ο γυρομαγνητικός λόγος θα είναι:

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} \quad (5.125)$$

Το ηλεκτρόνιο λοιπόν έχει μια ανώμαλη μαγνητική ροπή $\alpha/2\pi$ η οποία προ-
στίθεται σε αυτήν του Dirac. Η μετατόπιση αυτή της μαγνητικής ροπής ερμη-
νεύεται σε μια μετατόπιση του παράγοντα g , η οποία δίνεται στην παρακάτω
μορφή:

$$a_e \equiv \frac{g - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.00116 \quad (5.126)$$

Αυτό το αποτέλεσμα το εξήγαγε πρώτος ο Schwinger το 1948 και αποτελεί μια
πρόβλεψη η οποία επιβεβαιώθηκε πειραματικά το ίδιο έτος, μιας και έδειξε
ότι:

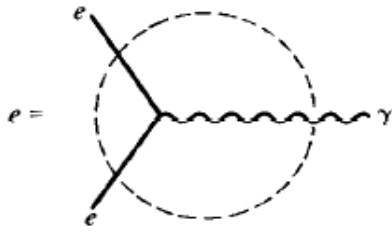
$$a_e^{exp} = 0.00119 \pm 0.00005 \quad (5.127)$$

Λαμβάνοντας υπόψη διαγράμματα μεγαλύτερων τάξεων διόρθωσης, η θεωρη-
τική πρόβλεψη ταυτίζεται με τα πειραματικά αποτελέσματα. Όσον αφορά στην
περίπτωση του μιονίου, πάλι προκύπτει διόρθωση στη μαγνητική ροπή και αν
συμπεριλάβουμε μεγαλύτερης τάξης διορθώσεις, η θεωρητική τιμή συγκλίνει
σε αυτήν του πειράματος.

Το γεγονός ότι ο θρίαμβος της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής να εξηγήσει την
ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου επεκτείνεται και στην περίπτωση
του μιονίου, αποτελεί περειαίρω απόδειξη ότι ο χειρισμός των απειριών που
ακολουθήσαμε όντως είναι σωστός. Μια δεύτερη τρανή απόδειξη της εγκυρό-
τητας της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής αποτελεί η πειραματική επιβεβαίωση
της μετατόπισης Lamb. Το ουσιαστικό μήνυμα που μας δίνει η QED μέσα
από τις παραπάνω εφαρμογές της, είναι ότι το κενό δεν είναι ποτέ άδειο.

5.7 Επανακανονικοποίηση

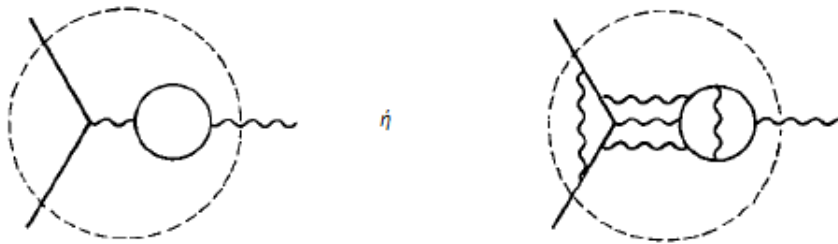
Είναι γεγονός ότι η διαδικασία χειρισμού των απειρισμών, παρ'όλο που δίνει
προβλέψεις που συμφωνούν με το πείραμα, απαιτεί λίγη παραπάνω προσο-
χή. Επιστρέφουμε στη σχέση που διέπει όλη την παραπάνω ανάλυση, εξίσωση
(5.41). Η σχέση αυτή μας λέει ότι η ποσότητα που ονομάζαμε φορτίο του
ηλεκτρονίου -αυτή που εμφανίζεται στα χαμηλότερης τάξης Feynman πλάτη-
αλλάζει από μεγαλύτερης τάξης αλληλεπιδράσεις. Το φορτίο λοιπόν είναι άλλο
από αυτο που νομίζαμε ότι ήταν και βέβαια άλλο από το φορτίο που μετράται
στα πειράματα. Ας το θέσουμε αλλιώς, το φορτίο σχετίζεται με τη σύζευξη
ηλεκτρονίου-φωτονίου, η οποία συμβολίζεται:



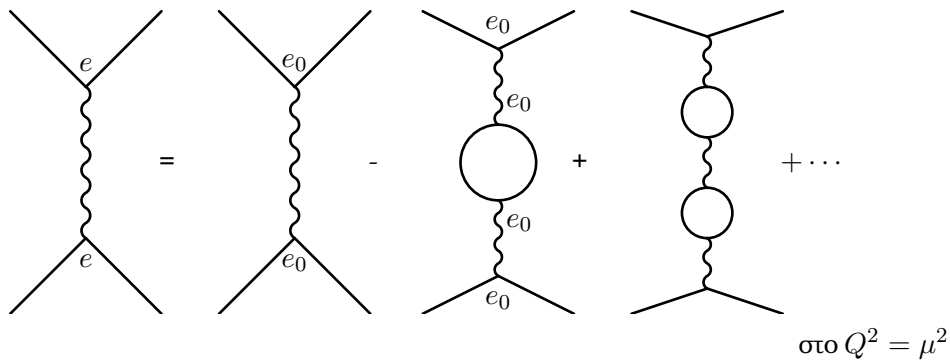
Στην εικόνα στα αριστερά αβλήα και στις παρακάτω, περιγράφονται αβλήη-λεπιδράσεις από τις οποίες παίρνουμε το φορτίο του ηλεκτρονίου.

$$(5.128)$$

Αλλά αυτό είναι παράλογο, αφού το φορτίο σχετίζεται επίσης και με τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις:



Στην πραγματικότητα το φορτίο δεν είναι κάποια από τις παραπάνω αλληλεπιδράσεις (ούτε κάποια άλλη), αλλά είναι όλες οι αλληλεπιδράσεις μαζί. Επομένως, από εδώ και πέρα θα ονομάζουμε e_0 το φορτίο που προκύπτει από την σύζευξη ηλεκτρονίου-φωτονίου της εικόνας (5.128) και e το φορτίο που προκύπτει από το συνυπολογισμό όλων των διαγραμμάτων (πρώτης και μεγαλύτερης τάξης). Οπότε, συνοψίζουμε την κατάσταση αυτή γράφοντας:

$$q^2 \equiv -Q^2 = -\mu^2:$$


Οι τελείες αντιπροσωπεύουν διαγράμματα με όλες τις πιθανές τροποποιήσεις στο διαδότη. Εδώ λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις τροποποιήσεις στο φωτονιακό διαδότη, αφού όπως είδαμε, οι άλλες αλληλοεξουδετερώνονται λόγω της ταυ-

τότητας Ward. Επίσης η εναλλαγή στο πρόσημο, οφείλεται στο γεγονός ότι για κάθε ένα φερμιονικό βρόχο, αντιστοιχεί και ένα πλήν (από κανόνες Feynman). Το φορτίο e είναι αυτό που μετράται στα πειράματα (π.χ. σκέδαση δύο χαμηλής ενέργειας ηλεκτρονίων) και δίνει το γνωστό $e^2/4\pi \approx 1/137$. Το «γυμνό» φορτίο e_0 σχετίζεται με το φορτίο e , για μια συγκεκριμένη τιμή της ορμής $q^2 \equiv -Q^2 = -\mu^2$, από τη σχέση:

$$e^2 = e_0^2[1 - I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0^4)] \quad (5.129)$$

όπου το $I(q^2)$ είναι η διόρθωση τάξης $O(e_0^2)$, και αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα των υπολογισμών του ενός βρόχου. Αποτετραγωνίζοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει:

$$e = e_0[1 - \frac{1}{2}I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0^4)] \quad (5.130)$$

το οποίο διαγραμματικά απεικονίζεται:

Η παραπάνω διαγραμματική εξίσωση (δ.εξ.1) γράφεται σε όλες τις ανώτερες τάξεις:

$$e = e_0(1 + e_0^2 A_1(Q^2) + e_0^4 A_2(Q^2) + \dots)_{\text{στο } Q^2 = \mu^2} \quad (5.131)$$

όπου $-q^2 \equiv Q^2$. Προφανώς το $A_1(Q^2)$ σχετίζεται με $I(-Q^2)$, και είναι άπειρη ποσότητα. Το ίδιο συμβαίνει και με τις ποσότητες $A_i(Q^2)$, $i > 1$, πράγμα το οποίο δεν προξενεί κανένα πρόβλημα, με την προϋπόθεση βέβαια ότι τα παρατηρήσιμα μεγέθη είναι πεπερασμένα.

Εκτελούμε το παράδειγμα της σκέδασης ηλεκτρονίου-μιονίου στις 90° (διαλέγουμε τη γωνία αυτή ώστε η παρατηρήσιμη ποσότητα μας, η διαφορική ενεργός διατομή, να εξαρτάται μόνο από την ορμή.). Υπολογίζουμε το πλάτος σε όρους μόνο του γυμνού φορτίου e_0 . Το πλάτος θα είναι:

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{M}(e_0^2) &= \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \dots \\
&= e_0^2[F_1(Q^2) + e_0^2 F_2(Q^2) + O(e_0^4)] \quad \text{στο } Q^2 \quad (5.132)
\end{aligned}$$

Για να πάρουμε αληθινά αποτελέσματα θα πρέπει να υπολογίσουμε και τους όρους μεγαλύτερης τάξης που κρύβονται στα αποσιωποητικά. Εδώ θα δείξουμε απλά τις τεχνικές απαλλαγής από τους απειρισμούς, για παράδειγμα του όρου με τον ένα βρόγχο. Γενικά όλοι οι όροι του γυμνού φορτίου απειρίζονται. Εδώ εφαρμόζουμε τη μέθοδο της επανακανονικοποίησης, όπου εκφράζουμε τώρα το πλάτος με όρους του e^2 . Λύνοντας ως προς το γυμνό φορτίο τη διαγραμματική εξίσωση 1, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} \left[1 + \frac{1}{2} \text{Diagram 3} + O(e^4) \right] \quad \text{δ.εξ.2} \\
&\text{στο } Q^2 = \mu^2
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για να αντικαταστήσουμε τις e_0 κορυφές στο πλάτος $\mathfrak{M}(e_0^2)$ (διαγραμματική εξίσωση (5.132)). Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε να έχουμε μια έκφραση του πλάτους συναρτήσει μόνο του πραγματικού φορτίου e .

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{M}(e^2) &= \text{diagram 1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \text{diagram 2} - \text{diagram 3} + O(e^6) \\
&= e^2[F_1'(Q^2) + e^2 F_2'(Q^2) + O(e^4)] \quad (5.133)
\end{aligned}$$

στο Q^2 στο $Q^2 = \mu^2$ στο Q^2

Οι δύο πρώτοι οροι προήλθαν από τον πρώτο όρο της (5.132) ενώ στον δεύτερο της απλά αντικαταστήσαμε όπου e_0 το e - η διαφορά τους αποκρύπτεται στο $O(e^6)$. Έπειτα, η εξίσωση (5.133) μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned}
-i\mathfrak{M}(e^2) &= \text{diagram 1} - \left\{ \text{diagram 2} - \text{diagram 3} \right\} + O(e^6) \\
&= e^2[F_1'(Q^2) + e^2 F_2'(Q^2) + O(e^4)] \quad (5.134)
\end{aligned}$$

at Q^2 at Q^2 at $Q^2 = \mu^2$

Στην εξίσωση αυτή βλέπουμε πως έχουμε πετύχει αυτό ακριβώς που θέλαμε. Προέκυψε μια έκφραση για το αναλλοίωτο πλάτος που δεν περιέχει το γυμνό φορτίο e_0 αλλά το φορτίο e , του οποίου η τιμή προσδιορίστηκε πειραματικά για $Q^2 = \mu^2$. Κάνοντας το βλέπουμε ότι τίποτα δε φεύγει και τίποτα δεν προστίθεται, απλά ξαναπαραμετρηκόψαμε την αρχική έκφραση του πλάτους. Οπότε:

$$\mathfrak{M}(e^2) = \mathfrak{M}(e_0^2) \quad (5.135)$$

Η διαφορά είναι ότι το πλάτος με το e_0^4 περιέχει απειρισμό ενώ το πλάτος με το φορτίο e^4 , όχι. Βλέπουμε στο τελευταίο διάγραμμα ότι ο όρος e^4 έχει χωριστεί σε δύο όρους, ο ένας περιέχει το βρόγχο Q^2 και ο άλλος $Q^2 = \mu^2$ των οποίων τα πρόσημα είναι ανάποδα. Αυτό εξασφαλίζει τον αφανισμό των απειριών. Το εφαρμόζουμε για την περίπτωση της εξίσωσης (5.47), δηλαδή για το όριο μεγάλης μεταφοράς ορμής:

$$\sim \left(\frac{a}{3\pi} \ln \left(\frac{M^2}{Q^2} \right) - \frac{a}{3\pi} \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \right) = \frac{a}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{Q^2} \right) \quad (5.136)$$

Απότι βλέπουμε η διαφορά των δύο όρων είναι πεπερασμένη. Δεν εξαρτάται από τη σταθερά αποκοπής που έχουμε επιβάλλει. Έτσι η εξίσωση (5.134) σε αντιδιαστολή με την (5.132), ορίζει τα παρατηρήσιμα μεγέθη σε πεπερασμένες ποσότητες.

5.8 Θωράκιση φορτίου στην QED και "σταθερά" ζεύξης της

Στα προηγούμενα κεφάλαια με τη μελέτη των θεωριών βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου, προέκυψαν κάποιες σταθερές αλληλεπίδρασης οι οποίες ουσιαστικά καταδεικνύουν την ισχύ του κάθε είδους αλληλεπίδρασης (g_i , οι σταθερές που εμφανίστηκαν στην αναβάθμιση της παραγωγού σε συναλλοιώτη). Για τον ηλεκτρομαγνητισμό η ισχύς αυτή είναι e (φορτίο ηλεκτρονίου) ή ισοδύναμα ίση με τη σταθερά της λεπτής υφής $\alpha = e^2/4\pi$ η οποία είναι ίση με $1/137$. Ο αριθμός αυτός ισχύει μόνο για χαμηλές ενέργειες.

Όμως, στα πλαίσια της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, όπως είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο, το ηλεκτρονιακό φορτίο επαναορίζεται από την πόλωση του κενού. Οπότε, αυτό σημαίνει ότι θα επηρεάζεται και η σταθερά σύζευξης - σταθερά της λεπτής υφής- πράγμα το οποίο δεν την καθιστά πλέον σταθερά. Παρακάτω, παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίον επηρεάζεται η «σταθερά» σύζευξης της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης.

Η εμφάνιση λοιπόν φερμιονικών βρόχων που επαναλαμβάνεται στις διορθώσεις της θεωρίας διαταραχών, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \left(1 - \text{Diagram} + \left[\text{Diagram} \right]^2 - \dots \right) \quad \text{δ.εξ.3}$$

Το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς είναι:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} \left(\frac{1}{1 + \text{Diagram}} \right) \quad \text{δ.εξ.4}$$

Οπότε επαναορίζουμε το φορτίο συμπεριλαμβάνοντας όλους τους βρόχους.

Συνοπώς από τη δ.εξ.4 και την εξίσωση (5.130) προκύπτει η εξίσωση:

$$e^2(Q^2) = e_0^2 \left(\frac{1}{1 + I(q^2)} \right) \quad (5.137)$$

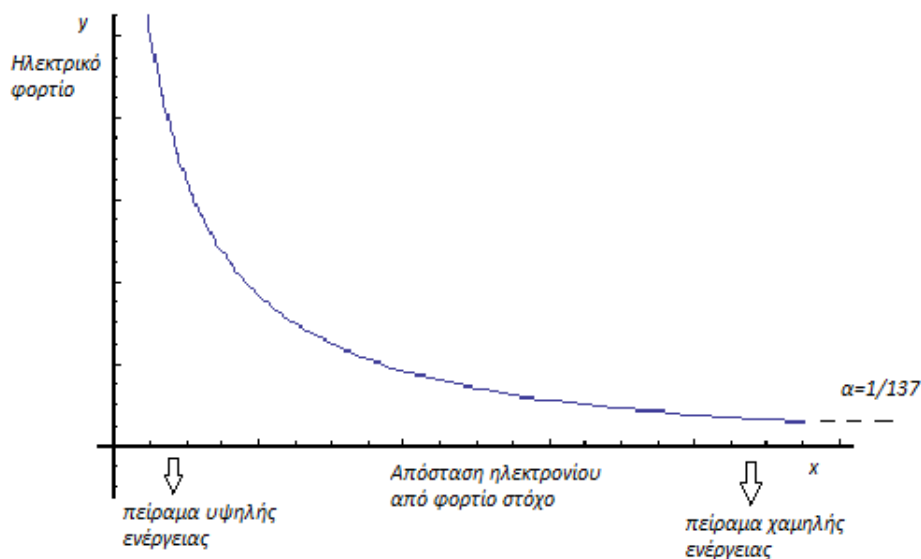
Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι το φορτίο που μετράται πειραματικά, εξαρτάται από το Q^2 του πειράματος. Το $\alpha(Q^2) \equiv e^2(Q^2)/4\pi$ αναφέρεται ως το η μεταβαλλόμενη σταθερά σύζευξης «running coupling constant». Στο όριο για μεγάλες ορμές, από τις (5.47) και (5.137), έχουμε:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)} \quad (5.138)$$

Για να εξαλείψουμε την εξάρτηση του $\alpha(Q^2)$ από το M , επιλέγουμε μια μάζα επανακανονικοποίησης (μάζα αναφοράς), μ . Αφαιρούμε από το $\alpha(Q^2)$ το $\alpha(\mu^2)$ και βρίσκουμε:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad (5.139)$$

Η παραπάνω εξίσωση περιέχει μόνο πεπερασμένες, μετρήσιμες ποσότητες. Το «running coupling constant», $\alpha(Q^2)$, περιγράφει το πως το ενεργό φορτίο εξαρτάται από το διαχωρισμό των δυο φορτισμένων σωματιδίων. Με την άθροιση όλων των τάξεων της θεωρίας διαταραχών, αποκτούμε τη θωράκιση φορτίου της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Όσο το Q^2 αυξάνεται, το φωτόνιο βλέπει όλο και περισσότερο φορτίο, μέχρι κάποια πολύ μεγάλη τιμή του Q^2 (αλλά ακόμα πεπερασμένη) όπου η σύζευξη $\alpha(Q^2)$ γίνεται άπειρη. Παρ'όλα αυτά, εισάγοντας αριθμητικές τιμές, βλέπουμε ότι η απόκλιση του α με το Q^2 , είναι αρκετά μικρή. Εννοείται ότι όσο το Q^2 αυξάνεται, συνεισφέρουν και άλλοι βρόχοι.



Εξάρτηση του φορτίου από την απόσταση (ορμή) του πειράματος. Ο άξονας x πηγαίνει από τις μεγάλες ενέργειες προς τις μικρές, δηλαδή όσο αυξάνεται η απόσταση μειώνεται η ορμή. Αντίθετα στον άξονα y οι τιμές του φορτίου πηγαίνουν κανονικά κατά αύξουσα σειρά.

5.9 Περίληψη-Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύσαμε πως για να υπολογίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το αναλλοίωτο πλάτος μιας αλληλεπίδρασης, πρέπει να συμπεριλάβουμε διορθώσεις ανώτερης τάξης από τη θεωρία διαταραχών, πράγμα το οποίο εκφράζεται μέσω διαγραμμμάτων Feynman ανώτερης τάξης τα οποία περιέχουν βρόχους. Κατά τον συνυπολογισμό των βρόχων για το πλάτος σκέδασης παρατηρούνται απειρισμοί από τους οποίους απαλασσόμαστε μέσω της διαδικασίας της αποκοπής, επιβάλλοντας μια πολύ μεγάλη μάζα η οποία τείνει στο άπειρο. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι να θάψουμε τελικά τους απειρισμούς μέσα στις παραμέτρους της αλληλεπίδρασης έτσι ώστε οι παρατηρήσιμες ποσότητες να παραμένουν πεπερασμένες. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να πάρουμε προβλέψεις από τη θεωρία και να τις επιβεβαιώσουμε ή να τις απορρίψουμε από το πείραμα. Ο επαναορισμός του ηλεκτρονιακού φορτίου μέσα από τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης, μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι η ισχύς της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης εξαρτάται από την ορμή (ή αλλιώς από την απόσταση) του σκεδαζόμενου σωματιδίου. Επειδή λόγω της πόλωσης του κενού εικονικά ζεύγη e^-e^+ θωρακίζουν το στόχο, όσο μεγαλύτερη η ορμή του σκεδαζόμενου σωματιδίου, τόσο περισσότερο εισχωρεί σε αυτό το νέφος και έτσι τόσο περισσότερο «βλέπει» τον πυρήνα, αυξάνοντας έτσι την ένταση της αλληλεπίδρασης.

Βιβλιογραφία

- [1] Francis Halzen-Alan D.Martin:Quarks and Leptons
- [2] Bjorken-Drell:Relativistic Quantum Mechanics
- [3] Thorsten Ohl:Drawing Feynman Diagrams with Latex and Metafont
- [4] Aitchison I J R & Hey A J G: Gauge Theories In Particle Physics Volume 1: From Relativistic Quantum Mechanics To QED
- [5] Mandl F. & Shaw G.: Quantum Field Theory
- [6] Sakurai J.J.: Advanced Quantum Mechanics
- [7] John C.Collins: Renormalization, An Introduction To Renormalization, The Renormalization Group, and the operator-product expansion
- [8] Greiner W., Reinhardt J.: Quantum Electrodynamics
- [9] Peskin & Schroeder: An Introduction To Quantum Field Theory
- [10] Thaller Bernd: The Dirac Equation
- [11] Griffiths D.: An Introduction To Elementary Particles
- [12] Feynman, Leighton & Sands: Feynman Lectures On Physics Volumes 1,2,3
- [13] Hartle J.B.: An Introduction To Einstein's General Relativity
- [14] www.wikipedia.org
- [15] physics4u.wordpress.com
- [16] users.sch.gr
- [17] Ζουπάνος Γιώργος: Σημειώσεις Του Μαθήματος «Στοιχειώδη Σωματίδια II»
- [18] Τράκας Νίκος: Σημειώσεις Του Μαθήματος «Θεωρητική Φυσική»

- [19] Βαγιονάκης Ε.Κωνσταντίνος:Σωματιδιακή Φυσική, Μια Εισαγωγή Στη Βασική Δομή Της Ύλης
- [20] Τραχανάς Στέφανος:Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Μια Στοιχειώδης Εισαγωγή Στη Μεγάλη Σύνθεση
- [21] Βέργαδος Ι.Δ.:Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής ΙΙΙ, Θεωρία Ομάδων
- [22] John B. Fraleigh: Εισαγωγή Στην Άλγεβρα
- [23] Ανδρέας Κ. Θεοφίλου: Τα Μαθηματικά Της Κβαντικής Μηχανικής
- [24] Τσιπολίτης Γιώργος: Διαλέξεις Μαθήματος «Στοιχειώδη Σωματίδια Ι»
- [25] Μπανάτσος Διονύσιος: Σημειώσεις Κβαντικής Μηχανικής
- [26] Στέφανος Τραχανάς: Κβαντομηχανική ΙΙ, Θεμελιώδεις Αρχές Και Μέθοδοι, Κβαντικοί Υπολογιστές
- [27] J.L. Martin: Γενική Σχετικότητα, Μια Βασική Εισαγωγή Για Φυσικούς
- [28] Αναστάσιος Γ. Μαυραγάνης: Αναλυτική Δυναμική, Αρχές Και Μέθοδοι