



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**Δ.Π.Μ.Σ. ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**

Τομέας Δομοστατικής

Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

**Ανάπτυξη Υστερητικού
Προσομοιώματος Ινών με Βάση τις
Μετακινήσεις**

Μεταπτυχιακή Εργασία

Γκιμούσης Ηλίας

**Επιβλέπων : Βλάσιος Κ. Κουμούσης
Καθηγητής ΕΜΠ**

Αθήνα
Οκτώβριος 2012

Περιεχόμενα

1 Κεφάλαιο	1
1.1 Γενικά στοιχεία	3
1.2 Αντικείμενο της εργασίας.....	6
1.3 Διάρθρωση της εργασίας	6
2 Κεφάλαιο	9
2.1 Γενικά Στοιχεία	11
2.2 Η έννοια της υστέρησης.....	13
βρόχος υστέρησης.	15
2.3 Το Παράλληλο προσομοίωμα Bouc-Wen	15
2.4 Σχολιασμός των παραμέτρων του προσομοιώματος	18
2.5 Συμπεράσματα	21
3 Κεφάλαιο	23
3.1 Γενικά στοιχεία	25
3.2 Στοιχεία δοκού συγκεντρωμένης πλαστικότητας	26
3.3 Στοιχεία δοκού κατανεμημένης πλαστικότητας	28
3.3.1 Προσομοίωση ιών	29
3.3.2 Στοιχείο ιών με βάση τις μετακινήσεις.....	31
3.3.3 Αριθμητική ολοκλήρωση.....	37
3.3.4 Στοιχείο ιών με βάση τις δυνάμεις.....	39
3.4 Υστερητικό στοιχείο δοκού	55
3.4.1 Ανάπτυξη καταστατικών σχέσεων.	55
3.4.2 Βασικές σχέσεις επίλυσης.....	57
3.4.3 Εξισώσεις κίνησης	59
3.5 Συμπεράσματα	60
4 Κεφάλαιο	61
4.1 Γενικά Στοιχεία	63

4.2	Διατύπωση εξισώσεων ισορροπίας	63
4.3	Επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων	69
4.4	Βήματα ανάλυσης της προτεινόμενης μεθόδου	74
4.5	Συμπεράσματα	76
5	Κεφάλαιο	77
5.1	Στατική ανάλυση μεταλλικού προβόλου	79
5.2	Δυναμική ανάλυση πλαισίου από ωπλισμένο σκυρόδεμα	83
5.3	Δυναμική ανάλυση πολυόροφου πλαισίου	87
5.4	Συμπεράσματα	91
6	Κεφάλαιο	93
6.1	Συμπεράσματα	95
6.2	Προτάσεις βελτίωσης του προσομοιώματος	96
	Βιβλιογραφικές Αναφορές	97

Ευχαριστίες

Τελειώνοντας με τη μεταπτυχιακή μου εργασία θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που συνέβαλαν στην πραγματοποίησή της. Οι παρακάτω γραμμές αν και γράφονται τελευταίες αξίζει να τοποθετούν στην αρχή.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Βλάση Κουμούση για το μεγάλο ενδιαφέρον του, την αμέριστη στήριξη και την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπο μου. Πέρα από την άρτια επιστημονική του καθοδήγηση, η δημιουργία κλίματος οικειότητας συνέβαλε ουσιαστικά στην άριστη συνεργασία μας, αποτέλεσμα της οποίας είναι η παρούσα εργασία.

Στη συνέχεια θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλη την ερευνητική ομάδα και ειδικότερα στον διδάκτωρ Ε.Μ.Π. Σάββα Τριανταφύλλου. Η καίριες παρεμβάσεις και η προθυμία του όποτε κλήθηκε να βοηθήσει, ήταν ουσιαστικές για την περάτωση της εργασίας. Η συμβολή του τόσο σε θέματα θεωρητικής κατανόησης όσο και σε πρακτικά ζητήματα προγραμματισμού υπήρξε καθοριστικής σημασίας. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτωρ Ε.Μ.Π. Αριστοτέλη Χαραλαμπίκη για την επίλυση αποριών και την παροχή σημαντικού βιβλιογραφικού υλικού.

Θα ήταν παράληψη μου να μην ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτωρ Ε.Μ.Π. και φίλο Ματθαίο Αντωνίνη με τον οποίο μοιραζόμαστε τον ίδιο χώρο γραφείου στο εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών. Δεν είναι μόνο η δημιουργία άριστου κλίματος συνύπαρξης, κάτι τόσο αναγκαίο σε οποιοδήποτε χώρο εργασίας, αλλά και η άμεση προθυμία του να συζητήσει κάθε απορία και ερώτησή μου.

Επίσης, αξίζει να αναφέρω τους μεταπτυχιακούς φοιτητές και φίλους Βαγγέλη Ηλία και Χρήστο Σοφιανό για τους κοινούς προβληματισμούς που μοιραστήκαμε κατά την κοινή διεξαγωγή των εργασιών μας σε παρεμφερή θέματα.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά το Ίδρυμα Μποδοσάκη για την παροχή υποτροφίας κατά τη διάρκεια που διήρκησε η εκτέλεση της εργασίας αυτής. Στις δύσκολες οικονομικές συγκυρίες που διανύουμε η οικονομική αυτή υποστήριξη συνέβαλε στην αντιμετώπιση του όλου εγχειρήματος με όλη τη σοβαρότητα και αφοσίωση που χρειάζεται και όχι ως αναγκαία υποχρέωση για την απόκτηση του μεταπτυχιακού διπλώματος.

Περίληψη

Η ανάγκη για ρεαλιστική εκτίμηση της ανελαστικής συμπεριφοράς των κατασκευών σε περιοχές με υψηλή σεισμική επικινδυνότητα έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αποδοτικών μη-γραμμικών Πεπερασμένων Στοιχείων δοκού, ικανών να περιγράψουν την ανελαστική και υστερητική συμπεριφορά των υλικών. Μία κατηγορία αυτών των προσομοιωμάτων είναι αυτά της κατανεμημένης πλαστικότητας των οποίων η διατομή διακριτοποιείται σε ένα πλήθος ινών που υπακούουν στην παραδοχή της επιπεδότητας. Επομένως, αυτά τα στοιχεία είναι ικανά να προσομοιώνουν πολύπλοκες διατομές με πολλά περιέχομενα υλικά σε πλήρη συνάφεια μέσω της μεμονωμένης μονοαξονικής καταστατικής συμπεριφοράς της κάθε ίνας. Στη συγκεκριμένη εργασία η υστερητική αυτή συμπεριφορά υπακούει στο υστερητικό μοντέλο Bouc-Wen. Ακουλουθώντας αυτή τη διατύπωση, η τάση κάθε ίνας διαχωρίζεται σε ένα μειωμένο ελαστικό μέρος και ένα υστερητικό. Ολοκληρώνοντας όλες τις τάσεις των ινών ανάλογα με τη συνεισφορά τους στο εμβαδόν της διατομής, προκύπτουν οι δράσεις της στον άξονα αναφοράς που συνήθως επιλέγεται να είναι το κέντρο μάζας. Στη συνέχεια, η ολοκλήρωση των ιδιοτήτων των διατομών κατά μήκος του στοιχείου προσδιορίζει τη συνολική συζευγμένη αξονική και καμπτική συμπεριφορά του. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στο διπλασιασμό των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας, καθώς νέα υστερητικά μεγέθη εμφανίζονται. Ο διαχωρισμός της συμπεριφοράς του στοιχείου σε ελαστική και υστερητική προκαλεί επίσης και την ανεξάρτητη αντιμετώπιση τους στην επίλυση. Σύμφωνα με την ελαστική συνεισφορά των διατομών μορφώνεται το συνολικό μειωμένο ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, ενώ οι υστερητικές συνεισφορές των διατομών οδηγούν στο σχηματισμό του διανύσματος των υστερητικών επικόμβιων δράσεων. Αυτή η μεθοδολογία καταλήγει, λοιπόν, σε μία διαδικασία εύρεσης της κατάστασης του στοιχείου που αποτελείται από δύο μέρη. Αυτά είναι ο προσδιορισμός των μειωμένων ελαστικών και υστερητικών δράσεων του στοιχείου, ενώ το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας του παραμένει σταθερό. Η μεθοδολογία αυτή εισάγεται στην αριθμητική μέθοδο Newton-Raphson για την επίλυση του συνολικού μη-γραμμικού συστήματος της κατασκευής. Τέλος, πραγματοποιούνται διάφορες αριθμητικές επιλύσεις φορέων που πιστοποιούν την αποδοτικότητα και την εγκυρότητα του προτεινόμενου προσομοιώματος

Abstract

The need for robust structural response estimation in seismic prone regions has led to the development of detailed beam-column elements capable of tracking their inherent hysteretic behavior. A subset of these models are the distributed plasticity beam elements whose cross sections are discretized into fibers which as a bundle obey the plane section - remain plane, Euler-Bernoulli assumption. Consequently, they are capable of describing complex cross sections with different materials at full bond, as each fiber obeys its own axial constitutive relation. In this work the uniaxial hysteretic behavior of the fibers is based on the Bouc-Wen hysteretic model with kinematic hardening. Following such notion, every fibre's stress is decomposed in an elastic and hysteretic part. By integrating all fiber contributions at a cross section along the element, the total coupled actions at the center of mass are evaluated. In the next step, numerical integration of the control sections along the element's length determines its overall coupled axial and flexural behavior. This procedure leads to the emergence of additional nodal hysteretic stress resultant measures, doubling the total elemental degrees of freedom. The decomposition of the elemental behavior in the elastic and the hysteretic one, that describes the material non-linearity, can be treated separately. The elastic elemental stiffness relations are assembled to form a system of linear global equations of motion, while the hysteretic nodal forces form a global hysteretic load vector. This approach leads to an element state determination which consists of two parts, namely the calculation of the reduced elastic nodal forces and the hysteretic ones, while the total stiffness matrix remains constant. The proposed method in the elemental level is then introduced in the general numerical Newton-Raphson scheme for solving the global non-linear system of equations. Numerical results are presented to validate the proposed method, which verify further the accuracy and efficiency of the entire computational scheme.

1 Κεφάλαιο

Εισαγωγή

1.1 Γενικά στοιχεία

Για πολλά χρόνια στο σχεδιασμό των κατασκευών επικρατούσε η ελαστική ανάλυση. Τα πλεονεκτήματά της είναι η απλότητά της καθώς και ο μικρός υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται για την επίλυση. Βασικό μειονέκτημά της όμως είναι ότι δεν προσεγγίζει την πραγματική συμπεριφορά των φορέων με συνέπεια την υπερδιαστασιολόγηση των διατομών. Η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσε τη δυνατότητα στον Μελετητή Μηχανικό να μπορεί να επιλύσει πολύπλοκα προσομοιώματα σε μικρότερο χρόνο καθώς και να είναι σε θέση να διαχειριστεί το μεγάλο όγκο των αποτελεσμάτων. Έτσι άρχισαν να αναπτύσσονται προσομοιώματα τα οποία προσεγγίζουν μεν σε μακροσκοπικό επίπεδο τη συμπεριφορά των κατασκευών, δίνουν δε αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια όσον αφορά τις αποκρίσεις τους.

Τα τελευταία χρόνια ωστόσο, οι μη-γραμμικές αναλύσεις έχουν αρχίσει να ενσωματώνονται στους σύγχρονους κανονισμούς σχεδιασμού και αποτίμησης των κατασκευών. Τέτοιοι κανονισμοί είναι ο Ελληνικός Κανονισμός Ενισχύσεων και Επεμβάσεων (ΚΑΝΕΠΕ), ο Ευρωκώδικας 8 (EC8) για τον αντισεισμικό σχεδιασμό κατασκευών και τα πρότυπα της ASCE για τη σεισμική αποκατάσταση υπάρχοντων δομημάτων. Παράλληλα, νέες φιλοσοφίες σχεδιασμού εμφανίζονται, όπως ο σχεδιασμός με βάση τις μετακινήσεις και ο σχεδιασμός με βάση τις επιτελεστικότητες.

Στην πράξη η στατική μη-γραμμική ανάλυση προτιμάται της δυναμικής, λόγω της έμφυτης πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η δεύτερη και του αρκετά μεγαλύτερου υπολογιστικού κόστους που τη συνοδεύει. Επίσης, η έντονη εξάρτηση της δυναμικής απόκρισης των κατασκευών στη μορφή της χρονοϊστορίας του σεισμού κάνει δυσχερή την ένταξη της δυναμικής ανάλυσης στους κανονισμούς σχεδιασμού καθώς θα απαιτούνταν ένα πλήθος αναλύσεων, τέτοιο ώστε να παράγεται ένα αξιόπιστο στατιστικό δείγμα αποκρίσεων.

Γενικά, τα είδη των μη-γραμμικοτήτων που εμφανίζονται στις κατασκευές πολιτικού μηχανικού είναι δύο ειδών. Η μη-γραμμικότητα υλικού που οφείλεται στην ελαστοπλαστική συμπεριφορά των υλικών και η μη-γραμμικότητα της γεωμετρίας που σχετίζεται με την αλλαγή στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του φορέα καθώς αυτός παραμορφώνεται υπό αυξανόμενα φορτία. Ανάλογα με το είδος του φορέα και της φόρτισης, αυτές οι μη-γραμμικότητες μπορούν να αποδειχθούν αρκετά κρίσιμες αλλάζοντας σημαντικά την απόκριση του.

Η προσομοίωση γενικά των κατασκευών πολιτικού μηχανικού αν και στην πραγματικότητα είναι τρισδιάστατες, γίνονται με με ραβδόμορφα Πεπερασμένα Στοιχεία τα οποία προσομοιώνουν ολόκληρα τα δομικά στοιχεία (δοκούς, υποστυλώματα, και τοιχία). Ενίοτε, για περισσότερη ακρίβεια, τα ραβδόμορφα στοιχεία ορίζονται και σαν υποτμήματα του δομικού μέλους. Η χρήση τέτοιων στοιχείων, όμως, δεν είναι συμβατή με την προσομοίωση επαφανεικών φορέων (πλάκες, κελύφοι) και τρισδιάστατων δομικών στοιχείων (κόμβοι).

Παρ' όλα αυτά, τα ραβδόμορφα στοιχεία, πέραν του καθαρού τεχνικού προβήματος (έλλειμα υπολογιστικής μνήμης και χαμηλής υπολογιστικής ταχύτητας), το οποίο εξελίσσεται διαρκώς προς το καλύτερο, έχουν εδραιωθεί σε όλη τη διάρκεια εξέλιξης του αντισεισμικού σχεδιασμού και της ανάλυσης των κατασκευών. Οι λόγοι που συντελούν σε αυτό είναι οι εξής:

- Είναι ευκολότερο να τα διαχειριστεί ο αναλυτής/μηχανικός, λόγω των σημαντικά λιγότερων βαθμών ελευθερίας που καλείται να ορίσει και συνεπώς να ελέγξει, ειδικά όταν πρόκειται για μη γραμμική ανάλυση.
- Αποδίδουν κατά την ανάλυση απευθείας πληροφόρηση των τιμών των εναπτικών μεγεθών που αφορούν το δομοστατικό σχεδιασμό, έτσι που να είναι ευθέως ελεγχόμενα κατά τη διαστασιολόγηση των δομικών στοιχείων.
- Παρέχουν ευκολότερη διαχείριση του προσομοιώματος για το σχεδιασμό της κατασκευής, χωρίς απαραίτητα αυτό να συνεπάγεται και αντίστοιχη μείωση στην ακρίβεια των εξαγόμενων αποτελεσμάτων.

Σε ότι αφορά τη μεθοδολογία της ανελαστικής προσομοίωσης, τα στοιχεία δοκού χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

- Στα στοιχεία διακεκριμένης ή συγκεντρωμένης πλαστικότητας όπου η ανελαστική συμπεριφορά προσομοιώνεται μόνο στα άκρα του στοιχείου μέσω πλαστικών αρθρώσεων. Η κάθε πλαστική άρθρωση περιγράφεται από απλοϊκά ή μη καταστατικά προσομοιώματα.
- Στα στοιχεία κατανεμημένης πλαστικότητας όπου η ανελαστική συμπεριφορά δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένες διατομές αλλά δίνεται η δυνατότητα εξάπλωσης της τόσο κατά μήκος, όσο και καθ' ύψος του στοιχείου.

Πιο συγκεκριμένα τα προσομοιώματα πλαστικών αρθρώσεων ή φαινομενολογικά βασίζονται στην επέκταση της θεωρίας της κλασικής πλαστικότητας όπως αυτή εφαρμόζεται στα μεταλλικά υλικά. Ανάλογα αν το ραβδωτο μέλος είναι δοκός ή υποστύλωμα ορίζονται και διαφορετικές ιδιότητες στην πλαστική άρθρωση σύμφωνα με το πλήθος των εντατικών μεγεθών που αλληλεπιδρούν.

Τα προσομοιώματα δοκών παρακολουθούν τη μη-γραμμική απόκριση και οριακή καμπτική αντίσταση της διατομής στο κάθε άκρο με βάση τα χαρακτηριστικά της και τις ιδιότητες των υλικών της. Γενικά, περιλαμβάνουν δύο θεωρήσεις, τα προσομοιώματα εν σειρά και εν παραλλήλω. Γενικά η πρώτη κατηγορία δίνει τη δυνατότητα περιγραφής γενικευμένων βρόχων υστέρησης οποιουδήποτε σχήματος σε κάθε άκρο, γεγονός που τα καθιστά τα πλέον ευέλικτα για την προμείωση μελών από ωπλισμένο σκυρόδεμα.

Τα προσομοιώματα υποστυλωμάτων ενσωματώνουν στην οριακή αντοχή της διατομής και την επαλληλία με το αξονικό φορτίο, υπό τη μορφή μιας επιφάνειας επαλληλίας. Έτσι, θεωρείται μία επιφάνεια αστοχίας στο χώρο των τάσεων ή των γενικευμένων τάσεων, δηλαδή των εντατικών μεγεθών. Για τον υπολογισμό της δυσκαμψίας των στοιχείων αυτών εφαρμόζεται η θεωρία της κινηματικής κράτυνσης των Prager και Hodge ή η θεωρία των πολλαπλών μετακινούμενων-διογκούμενων επιφανειών αστοχίας του Mroz, ώστε να είναι δυνατή η προσομοίωση πολλαπλών επιφανειών διαρροής, όπως απαιτεί το Ω/Σ. Μέσα στην επιφάνεια αστοχίας θεωρείται ελαστική συμπεριφορά, ενώ πάνω στην επιφάνεια πλαστική. Γενικά, θεωρείται ο νόμος διαρροής κατά τη διεύθυνση της κάθετης προς την εφαπτόμενη πάνω στην επιφάνεια.

Όσον αφορά τα στοιχεία κατανεμημένης πλαστικότητας αυτά περιλαμβάνουν περισσότερες των δύο διατομών ελέγχου στο μήκος τους. Επίσης όταν κάθε διατομή δεν περιγράφεται από μία επιφάνεια αστοχίας, αλλά διακριτοποιείται σε διαμήκεις ίνες, τότε προκύπτουν τα στοιχεία ινών. Κάθε ίνα ακολουθεί το δικό της αξονικό, μη-γραμμικό νομο τάσεων-παραμορφώσεων. Μέσω αυτής της θεώρησης η αλληλεπίδραση των εντατικών μεγεθών και η σταδιακή διαρροή της διατομής προκύπτει μέσω της ολοκλήρωσης των τάσεων στην επιφάνεια της διατομής. Η δυσκαμψία και οι επικόμβιες δράσεις του στοιχείου υπολογίζονται μέσω της ολοκλήρωσης των ιδιοτήτων των διατομών κατά μήκος με τη χρήση συναρτήσεων συναρμογής. Ανάλογα με το είδος των συναρτήσεων αυτών τα στοιχεία αυτά διαχωρίζονται σε στοιχεία μετατοπίσεων και δυνάμεων. Στα πρώτα χρησιμοποιούνται συναρτήσεις σχήματος μετατοπίσεων, ενώ στα δεύτερα δυνάμεων σύμφωνα με την ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών μεγεθών.

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στα στοιχεία ινών κατανεμημένης πλαστικότητας με βάση τις μετακινήσεις και επιχειρείται μία προσπάθεια ενσωμάτωσης υστερητικών προσομοιωμάτων σε αυτή τη μεθοδολογία. Πιο συγκεκριμένα, επιλέχθηκε το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen με βάση τη δυνατότητα που παρέχει να προσομοιώνει ποικίλους βρόχους υστέρησης με τη χρήση μιας μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Ο πυρήνας της ανάλυσης των προσομοιωμάτων ινών είναι ο νόμος τάσεων-παραμορφώσεων του υλικού που αντιπροσωπεύει η κάθε ίνα. Ο καταστατικός νόμος αυτός εκφράζεται, λοιπόν, σύμφωνα με τη θεώρηση του μοντέλου Bouc-Wen. Αφού γίνει αυτό το βήμα, στη συνέχεια ακολουθείται η κλασική διαδικασία των στοιχείων ινών και η δυσκαμψία μαζί με τις επικόμβιες δράσεις του στοιχείου υπολογίζονται μέσω ολοκλήρωσεων του πεδίου των τάσεων στον όγκο του στοιχείου.

Αφού αναπτυχθεί η διαδικασία εύρεσης της κατάστασης του στοιχείου, στη συνέχεια αυτή μπορεί να ενσωματωθεί σε οποιοδήποτε αριθμητικό σχήμα επίλυσης του μη-γραμμικού συστήματος της συνολικής κατασκευής. Στην συγκεκριμένη εργασία επιλέχθηκε η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson για την επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων και η μέθοδος Newmark για την επίλυση του δυναμικού προβλήματος. Η επαλήθευση της εγκυρότητας του προτεινόμενου στοιχείου ελέγχεται μέσω αριθμητικών εφαρμογών, τα αποτελέσματα των οποίων τίθενται σε σύγκριση με άλλο αξιόπιστο λογισμικό.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Εκτός από το παρόν κεφάλαιο 1 η εργασία αποτελείται από συνολικά 6 κεφάλαια και καθένα από αυτά περιλαμβάνει τα εξής.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται και εξηγείται το φαινόμενο της υστέρησης ενώ διατυπώνονται αναλυτικά οι σχέσεις του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen. Η ερμηνεία των μαθηματικών σχέσεων δίνεται μέσω απλών μηχανικών αναλόγων όπου το δεδομένο εισόδου της συνάρτησης είναι η παραμόρφωση ενώ το εξαγόμενο αποτέλεσμα είναι η δύναμη. Στη συνέχεια σχολιάζονται οι παράμετροι του μοντέλου και επεξηγείται η επίδραση τους στο σχήμα των βρόχων υστέρησης έτσι ώστε να διερευνηθούν οι τιμές που πρέπει να πάρουν ώστε ο προκύπτων βρόχος να είναι αντιπροσωπευτικός της συμπεριφοράς του υλικού προς προσομοίωση.

Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται εκτενώς με χρονολογική σειρά τα σημαντικότερα προσομοιώματα δοκού που έχουν χρησιμοποιηθεί στην ανελαστική ανάλυση των κατασκευών. Αρχικά αναφέρονται τα στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας και στη συνέχεια της κατανεμημένης. Η αρχή γίνεται με τα στοιχεία των μετατοπίσεων και έπειτα τα στοιχεία των δυνάμεων. Αναλύονται διεξοδικά οι σχέσεις των προσομοιωμάτων και τα βήματα των αλγορίθμων επίλυσης, ενώ ταυτόχρονα σχολιάζονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθοδολογίας. Στο τέλος του κεφαλαίου αναφέρεται και το υστερητικό στοιχείο της κλασικής δοκού, το οποίο αποτελεί και βάση για την επέκταση του στο στοιχείο δοκού ινών.

Το κεφάλαιο 4 είναι το βασικό κεφάλαιο όπου αναπτύσσεται η προτεινόμενη μεθοδολογία. Ξεκινώντας από τη σχέση τάσης-παραμόρφωσης της κάθε ίνας, αυτή διατυπώνεται σε όρους προσομοιώματος Bouc-Wen και στη συνέχεια μέσω ολοκληρώσεων στον όγκο του στοιχείου προκύπτουν οι επικόμβιες δράσεις και η δυσκαμψία του. Αναλύονται πλήρως τα βήματα της εύρεσης της κατάστασης του στοιχείου και στη συνέχεια περιγράφονται οι μέθοδοι επίλυσης των μη-γραμμικών εξισώσεων του συστήματος της κατασκευής. Ο συνδυασμός τους με την προτεινόμενη μεθοδολογία είναι και το τελικό αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας στην μεταπτυχιακή εργασία.

Στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιούνται οι αριθμητικές αναλύσεις που πιστοποιούν την εγκυρότητα της μεθοδολογίας. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων γίνεται με το ευρέως χρησιμοποιούμενο λογισμικό Opensees και ο βαθμός ταύτισης προκύπτει εξαιρετικά ικανοποιητικός. Οι φορείς προς επίλυση είναι είτε μεταλλικοί είτε από ωπλισμένο σκυρόδεμα και η πολυπλοκότητα τους κυμαίνεται από απλό πρόβολο μέχρι πολυόροφο πλαίσιο. Τα αποτελέσματα περιλαμβάνουν τόσο συνολικές αποκρίσεις, όσο και βρόχους υστέρησης εντατικών και τασικών μεγεθών, καθώς και κατανομές τάσεων και παραμορφώσεων στους φορείς.

Στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται τα συνολικά συμπεράσματα της εργασίας και προτείνονται κάποια σημεία για εξέλιξη και βελτίωση του υπάρχοντος προσομοιώματος.

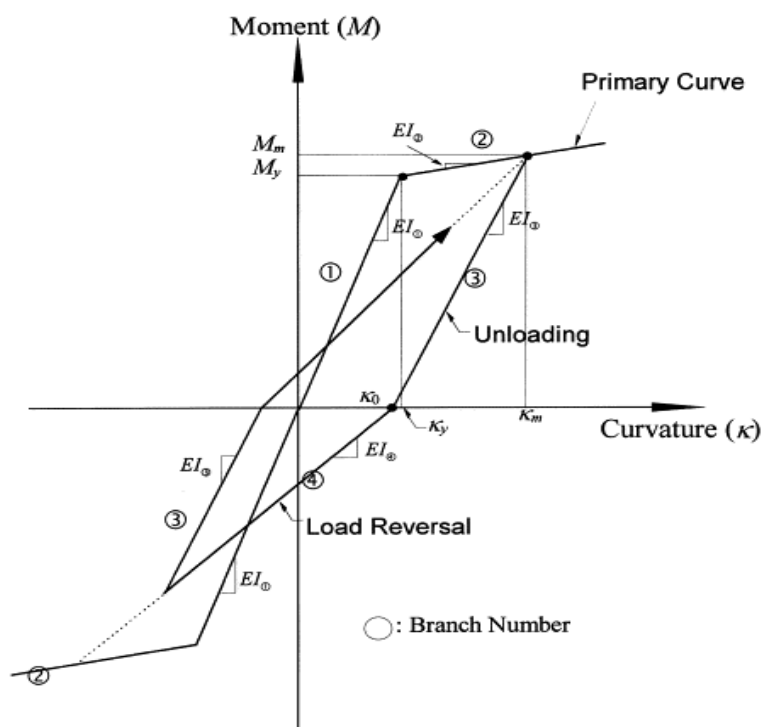
2 Κεφάλαιο

Υστέρηση Τύπου Bous-Wen

2.1 Γενικά Στοιχεία

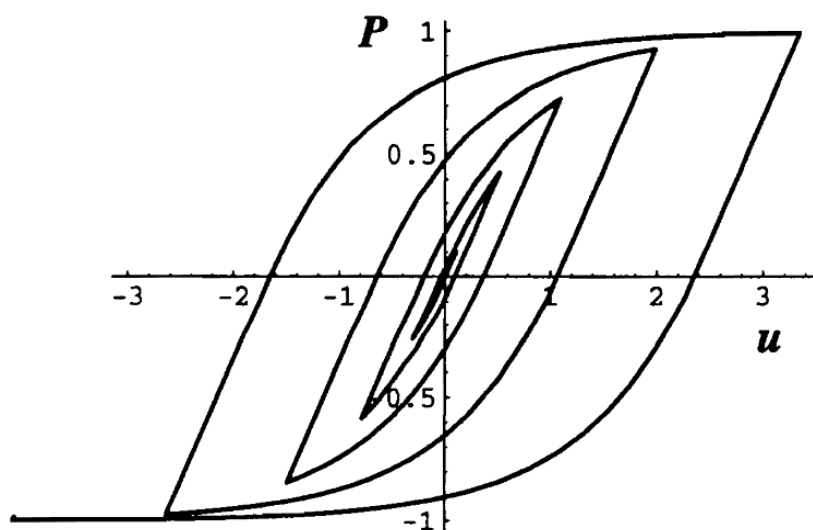
Ένα πολύ σημαντικό στοιχείο μιας μη γραμμικής ελαστοπλαστικής ανάλυσης είναι το μοντέλο υστέρησης το οποίο χρειάζεται για την προσομοίωση της ανακυκλιζόμενης συμπεριφοράς των δομικών μελών. Τα τελευταία χρόνια έχει συντελεστεί μεγάλη πρόοδος στην προσέγγιση και μοντελοποίηση του φαινομένου της υστέρησης. Έχουν αναπτυχθεί διάφορα υστερητικά μοντέλα τα οποία διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα πολυγραμμικά (polygonal hysteretic models - PHM) και τα ομαλά (smooth hysteretic models - SHM).

Τα πολυγραμμικά προσομοιώματα θεωρούν πολυγραμμική συμπεριφορά των υλικών και γενικά προηγούνται χρονικά των ομαλών. Σε αυτά η συμπεριφορά του υλικού χωρίζεται σε κατά τμήματα γραμμικά στάδια, που συνήθως είναι η αρχική ελαστική περιοχή, η διαρροή, η ρηγμάτωση, η μείωση της δυσκαμψίας και της αντοχής και το κλείσιμο των ρωγμών. Παραδείγματα αποτελούν τα μοντέλα των Clough(1966), Takeda (Takeda et al. 1970), Park (Park et al. 1987) και το προσομοίωμα Q-hyst (1979). Ένα παράδειγμα πολυγραμμικού υστερητικού προσομοιώματος παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1 και πιο συγκεκριμένα το προσομοίωμα Q-hyst (Saiidi M. and Sozen M. 1979).



Σχ. 2.1: Παράδειγμα πολυγραμμικού προσομοιώματος (Q-hyst)

Αντίθετα τα ομαλά υστερητικά προσομοιώματα βασίζονται στη συνεχή αλλαγή της δυσκαμψίας εξαιτίας της διαρροής και σε έντονες αλλαγές εξαιτίας της αποφόρτισης. Τα προσομοιώματα αυτά αντιμετωπίζουν φαινομενολογικά το φαινόμενο της υστέρησης. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνουν υπόψη τους μηχανισμούς που δημιουργούν την υστέρηση σε μικροσκοπικό επίπεδο αλλά αντίθετα δίνουν έμφαση στα μακροσκοπικά αποτελέσματα. Συνεπώς, έχουν τη δυνατότητα προσομοίωσης διαφορετικών τύπων υστερητικής συμπεριφοράς χρησιμοποιώντας μία απλή ομαλή υστερητική συνάρτηση με ένα σύνολο παραμέτρων που καθορίζονται από το χρήστη. Μετά τον Massing (1925) και τον Preisac (1935) ο Bouc παρουσίασε το δικό του μοντέλο για μονοβάθμιο υστερητικό σύστημα (1967). Στη συνέχεια προτάθηκαν αρκετές τροποποιήσεις του μοντέλου όπως το μοντέλο Bouc-Wen (Wen, 1976, 1980), το μοντέλο Baber-Noori (Baber and Wen 1980, Baber et al. 1986), το προσομοίωμα του Foliente (1993) και το μοντέλο του Reinhorn (Silvaselvan and Reinhorn, 2000).



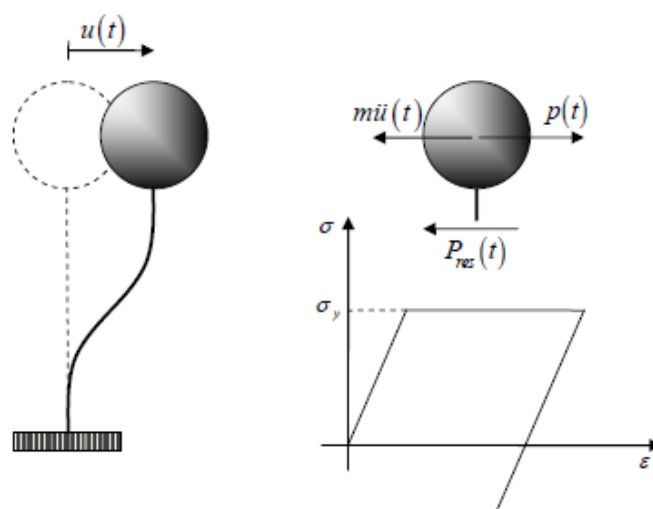
Σχ. 2.2: Παράδειγμα φαινομενολογικού προσομοιώματος (Foliente)

Τα τελευταία χρόνια τα προσομοιώματα τύπου Bouc-Wen έχουν αποδειχθεί πολύ αποδοτικά ώστε να εκφράζουν ένα μεγάλο εύρος υστερητικής συμπεριφοράς που περιλαμβάνει φαινόμενα απομείωσης της αντοχής και της δυσκαμψίας, καθώς και φαινομένων στένωσης σε οπλισμένο σκυρόδεμα, σε δομικό χάλυβα, σε συνδέσεις κτλ. Η μορφή των εξελικτικών εξισώσεων σε όρους ρυθμών μεταβολής είναι ικανή να εκφράσει σε επίπεδο εντατικών μεγεθών την υστερητική συμπεριφορά των δομικών μελών. Αυτό διευκολύνει την άμεση ενσωμάτωση μεθόδων ταυτοποίησης παραμέτρων για τα διάφορα

μέλη ή συνδέσεις, καταλήγοντας με αυτόν τον τρόπο σε ένα πιο αποδοτικό τρόπο ανάλυσης συγκρινόμενα με τις καταστατικές σχέσεις σε επίπεδο τάσεων-παραμορφώσεων που απαιτούν οι κλασικές μέθοδοι των Πεπερασμένων Στοιχείων.

2.2 Η έννοια της υστέρησης

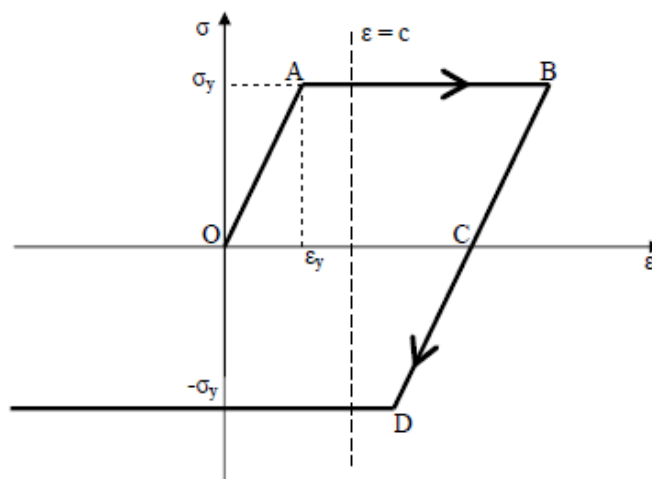
Για να εξηγήσουμε το φαινόμενο της υστέρησης ας εξετάσουμε τον παρακάτω μονοβάθμιο ταλαντωτή ο οποίος έχει ένα μη-γραμμικό νόμο υλικού όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.3.



Σχ. 2.3: Μονοβάθμιος, μη-γραμμικός ταλαντωτής υπό ανακυκλιζόμενη διέγερση.

Η απόκριση του παραπάνω συστήματος σε όρους τάσεων παραμορφώσεων παρουσιάζεται εκτενέστερα στο παρακάτω σχήμα. Όταν η διέγερση έχει τέτοια ένταση ώστε να προκαλείται ελαστική απόκριση η τάση που αναπτύσσεται είναι μικρότερη της τάσης διαρροής σ_y και η συμπεριφορά του υλικού περιγράφεται σύμφωνα με τον νόμο του Hooke σύμφωνα με τη σχέση (2.1). Συνεπώς υπάρχει αντιστοιχία 1:1 μεταξύ του δεδομένου (παραμόρφωσης) και αποτελέσματος (τάση).

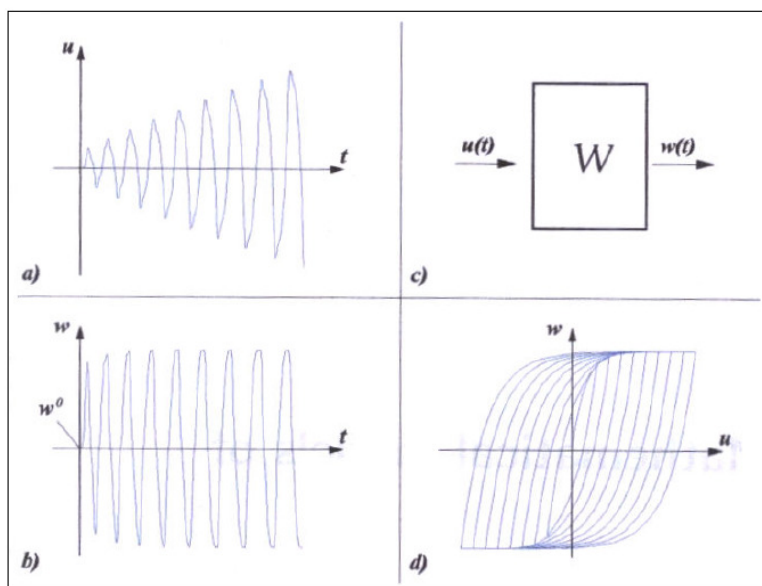
$$\sigma(\epsilon) = E \cdot \epsilon, \quad |\sigma| < \sigma_y \quad (2.1)$$



Σχ. 2.4: Υστερητικός βρόχος.

Ωστόσο, υπάρχουν τουλάχιστον δύο πιθανές καταστάσεις τάσης $\sigma \in [\sigma_y, -\sigma_y]$ που αντιστοιχούν στην ίδια αυθαίρετη παραμόρφωση $\varepsilon = c, c \in [\varepsilon_y, +\infty)$, μεγαλύτερη από την παραμόρφωση διαρροής ε_y . Έτσι δεν υπάρχει κάποια συνάρτηση τάσης $\sigma(\varepsilon)$ η οποία να μπορεί με μοναδικό τρόπο να αντιστοιχήσει την τρέχουσα παραμορφωσιακή κατάσταση στην τρέχουσα εντατική κατάσταση, ακόμα και για την απλουστευμένη περίπτωση ενός ελαστικού- απολύτως πλαστικού υλικού. Η μαθηματική θεωρία της υστέρησης προσπαθεί να ορίσει μια κατάλληλη συνάρτηση εξόδου $\sigma = \sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, δεδομένης μιας συνάρτησης εισόδου $\varepsilon = \varepsilon(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ (Σχήμα 2.5) έτσι ώστε η μεταξύ τους σχέση $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ για κοινές χρονικές στιγμές να συμπίπτει με το γράφημα του σχήματος 2.4.

Έτσι, το πρόβλημα της υστέρησης ισοδυναμεί με το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης ενός τελεστή, στην προκειμένη περίπτωση λεγόμενου και ως υστερητικού τελεστή $W[In](t)$, όπου $In : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση χρονοϊστορίας μετατοπίσεων, παραμορφώσεων κ.τ.λ. Από φυσικής πλευράς, το συναρτησιακό αυτό πρέπει να είναι ανεξάρτητο του ρυθμού μεταβολής καθώς η υστερητική ενέργεια που συσσωρεύεται σε διαδοχικούς κύκλους φόρτισης και αποφόρτισης δεν εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων εισόδου και εξόδου. Επίσης πρέπει να είναι μονότονο κατά τμήματα, αφού όπως είναι φανερό στο σχήμα 2.4 ότι στα τμήματα (OAB) είναι μονότονα αυξανόμενη η τάση σε σχέση με τη μετατόπιση και στο τμήμα (BCD) είναι μονότονα φθίνουσα. Τέλος, το συναρτησιακό πρέπει να έχει κάποια μνήμη που στα μαθηματικά καλύπτεται από τη σχέση αιτιότητας.



Σχ. 2.5: α)Συνάρτηση εισόδου, β)Συνάρτηση εξόδου, γ)Υστερητικός τελεστής, δ) βρόχος υστέρησης.

Είναι προφανές από την προσέγγιση που περιγράφηκε σε αυτή την παράγραφο ότι η έννοια της υστέρησης αντιμετωπίζεται με μαθηματικά εργαλεία τα οποία δεν εξετάζουν τη φύση των συναρτήσεων εισόδου και εξόδου που απαρτίζουν τον υστερητικό βρόχο. Γι αυτό το λόγο η θεωρία αυτή ανήκει στη φαινομενολογική προσέγγιση του φαινομένου της υστέρησης.

2.3 Το Παράλληλο προσομοίωμα Bouc-Wen

Ο Bouc (1967) μελέτησε την απόκριση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή μάζας m . Σύμφωνα με τις έννοιες που έχουν περιγραφεί στην παράγραφο (2.2), κατέληξε στη σχέση:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u}{dt^2} + P_{res}(t) = p(t) \\ \frac{dP_{res}}{dt} = \frac{dz}{dt} = [A - \beta z \operatorname{sgn}(du)] \frac{du}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

Τροποποιήσεις της αρχικής διατύπωσης του Bouc εισήχθησαν μεταγενέστερα από τον Wen (1976, προσομοίωμα Bouc-Wen). Το προσομοίωμα αυτό περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + P_{res} = p(t) \\ P_{res} = \alpha Ku + z \\ \dot{z} = (1 - \alpha)K \left[A - |z|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})) \right] \cdot \dot{u} \end{cases} \quad (2.3)$$

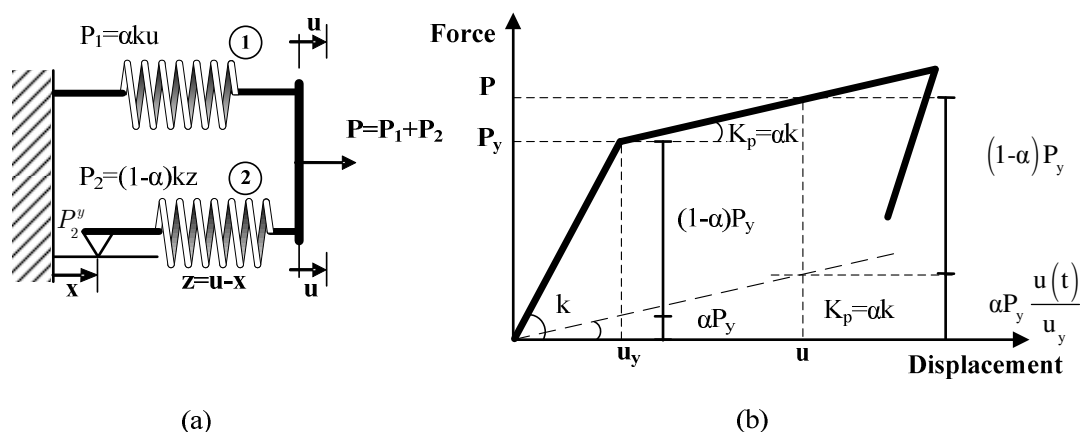
όπου c είναι η σταθερά απόσβεσης ιξώδους χαρακτήρα, P_{res} είναι η δύναμη επαναφοράς Bouc-Wen, α είναι ο λόγος μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, K είναι η ελαστική δυσκαμψία του ταλαντωτή ενώ τα A , β , γ είναι παράμετροι του προσομοιώματος. Η παράμετρος A έχει αποδειχθεί ότι είναι περιττή και θα θεωρηθεί ίση με τη μονάδα. Όπως υποδηλώνει η εξίσωση (2.3) η δύναμη επαναφοράς διαχωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι γραμμικό με ενεργή δυσκαμψία ίση με την μετελαστική δυσκαμψία του υλικού και το δεύτερο μέρος είναι υστερητικό με το z να είναι η δύναμη επαναφοράς η οποία εμπεριέχει τη μνήμη του μη γραμμικού συστήματος. Σ' αυτήν την εργασία χρησιμοποιείται μια παραλλαγή αυτής της διατύπωσης όπου το z θεωρείται ότι είναι η υστερητική μετατόπιση του συστήματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι σχέσεις (2.3) αναδιατυπώνονται στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + P_{res} = p(t) \\ P_{res} = \alpha Ku + (1 - \alpha)Kz \\ \dot{z} = \left[1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})) \right] \cdot \dot{u} \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου το z_y είναι η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου.

Με την παραπάνω διατύπωση και θεωρώντας ψευδοστατικό πρόβλημα για λόγους απλότητας, το προσομοίωμα μπορεί να απεικονιστεί ως ένας εν παραλλήλω συνδυασμός ενός γραμμικού ελατηρίου (Ελατήριο #1) και ενός μη γραμμικού στοιχείου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6(α). Το μη γραμμικό στοιχείο αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο (Ελατήριο #2) και έναν ολισθητήρα, συνδεδεμένα εν σειρά. Έτσι, εισάγεται ένα διβάθμιο σύστημα, στο οποίο ορίζουμε ως u τη συνολική μετατόπιση και ως z τη σχετική μετατόπιση του ελατηρίου 2. Για λόγους συμβιβαστού των μετακινήσεων, η μετατόπιση του ολισθητήρα, αν υπάρχει, καθορίζεται από τη διαφορά ($x = u - z$).

Όσο η δύναμη η οποία επενεργεί πάνω στον ολισθητήρα είναι μικρότερη από ένα άνω όριο (x_y), δεν υπάρχει ολίσθηση κι έτσι $x=0$ και η σχετική μετατόπιση είναι ίση με τη συνολικά επιβαλλόμενη. Σε μια τέτοια περίπτωση, το σύστημα συμπεριφέρεται ελαστικά με συνδυασμένη στιβαρότητα k , επειδή τα ελατήρια 1 και 2 δίνουν μια ελαστική στιβαρότητα αk και $(1-\alpha)k$ αντίστοιχα, με το α να είναι ο λόγος της ανελαστικής προς την ελαστική στιβαρότητα.



Σχ. 2.6: α) Μέλη που απαρτίζουν το προσομοίωμα Bouc-Wen, β) Σχέση δύναμης-μετατόπισης.

Όταν το άνω όριο του ολισθητήρα ξεπερνιέται, συμβαίνει ολίσθηση και η σχετική μετατόπιση στο ελατήριο 2 παραμένει σταθερή και συμβολίζεται ως z_y . Όλα αυτά τα στάδια συνοψίζονται στην παρακάτω σχέση δύναμης μετατόπισης:

$$P_{res} = P_1 + P_2 = \alpha k u + (1 - \alpha) k z \quad (2.5)$$

Όπου για το z ισχύει:

$$z = \begin{cases} u, & x \leq x_y \\ z_y, & x > x_y \end{cases} \quad (2.6)$$

Καθώς στις συνήθεις περιπτώσεις η εσωτερική μεταβλητή x δεν είναι ούτε εύκολο να μετρηθεί, ούτε προκύπτει θεωρητικά, αντί αυτής, χρησιμοποιείται η συνολική μετατόπιση στην οποία λαμβάνει χώρα η ολίσθηση, δηλαδή η μετατόπιση διαρροής του συστήματος. Αυτή μπορεί εύκολα να προκύψει από μια δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού ή εφαρμόζοντας ένα κριτήριο διαρροής κι έτσι η σχέση (2.6) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$z = \begin{cases} u, & u \leq u_y \\ u_y, & u > u_y \end{cases} \quad (2.7)$$

Ο Wen το 1980 πρότεινε την ακόλουθη σχέση με σκοπό να εξομαλύνει τη μετάβαση από την ελαστική (χωρίς ολίσθηση) στην ανελαστική απόκριση (με ολίσθηση) του συστήματος:

$$\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t)) = \dot{u}(A - h_1 h_2) \quad (2.8)$$

Όπου:

$$h_1 = \left| \frac{z}{z_y} \right|^n, \quad h_2 = (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})) \quad (2.9)$$

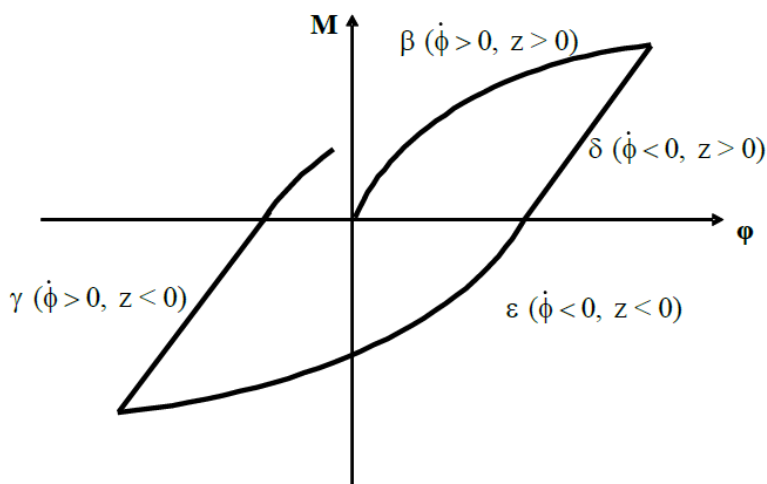
Το h_1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μονοαξονικό κριτήριο διαρροής και το h_2 ως ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ανακυκλιζόμενης φόρτισης, ενώ στην παραπάνω σχέση, το σύμβολο (\cdot) σημαίνει παραγώγιση ως προς το χρόνο. Αντίστοιχα με τη σχέση (2.8) στην περίπτωση ενός μονοβάθμιου συστήματος που καταπονείται μόνο καμπτικά, η ροπή εκφράζεται συνάρτηση της καμπυλότητας με βάση τη σχέση:

$$M(t) = \alpha EI \varphi(t) + (1 - \alpha) EI z_b(t) \quad (2.10)$$

και η εξίσωση του Bouc-Wen σε όρους καμπυλοτήτων γίνεται:

$$\dot{z}_b = \left[1 - \left| \frac{z_b}{z_{by}} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{\varphi})) \right] \cdot \dot{\varphi} \quad (2.11)$$

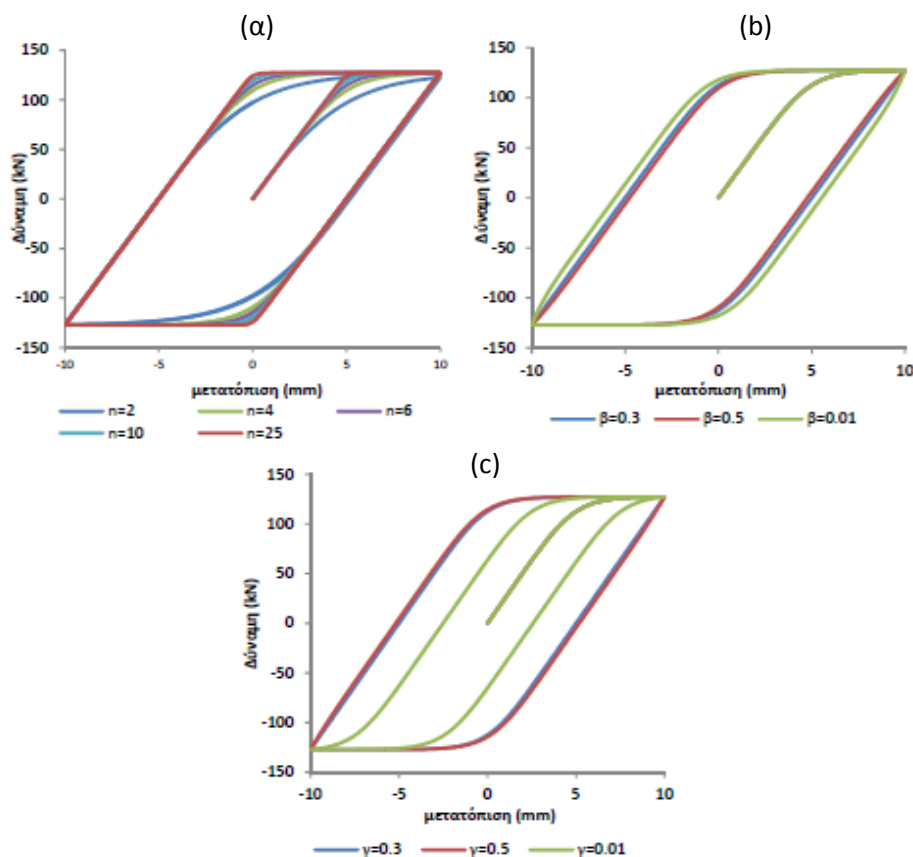
Οι τέσσερις διακριτές περιοχές του βρόχου υστέρησης ροπών-καμπυλοτήτων και τα πρόσημα των μεγεθών $z, \dot{\varphi}$ σε καθεμία από αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση φόρτισης τα δύο μεγέθη είναι ομόσημα, ενώ στην περίπτωση αποφόρτισης είναι εταιρόσημα.



Σχ. 2.7: Οι τέσσερις περιοχές του βρόχου υστέρησης.

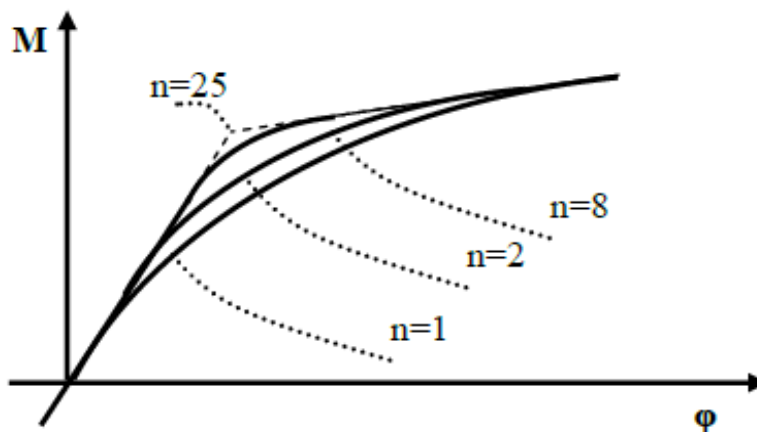
2.4 Σχολιασμός των παραμέτρων του προσομοιώματος

Στις σχέσεις (2.9) και (2.11) η παράμετρος n ελέγχει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή, ενώ οι όροι β και γ οι οποίοι εισάγονται στη σχέση είναι συντελεστές σχήματος που επηρεάζουν το σχήμα του βρόχου υστέρησης. Στο σχήμα 2.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα επιρροής των παραμέτρων αυτών στο σχήμα του βρόχου από μία αριθμητική εφαρμογή ενός μονοβάθμιου συστήματος.



Σχ. 2.8: α) Μεταβολή βρόχου καθώς μεταβάλλεται το n, β) Μεταβολή βρόχου καθώς μεταβάλλεται το β, γ) Μεταβολή βρόχου καθώς μεταβάλλεται το γ.

Επίσης, όπως έχει αποδειχθεί από τους Erlicher και Point (2004) ότι για συμπεριφορά με μείωση της δυσκαμψίας, που είναι σύνηθες φαινόμενο στην πρακτική του μηχανικού πρέπει να ισχύει: $\beta + \gamma = 1$. Επίσης οι Erlicher και Burshi (2004) απέδειξαν ότι για τις ίδιες παραμέτρους θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός $-\beta \leq \gamma \leq \beta$ έτσι ώστε να ισχύει ένα θερμοδυναμικώς αποδεκτό προσομοίωμα.



Σχ. 2.9: Επίδραση του συντελεστή n στην μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9 για μικρές τιμές του n προκύπτει αρκετά ομαλή μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο, ενώ για μεγάλες τιμές αυτή η μετάβαση γίνεται απότομη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι μια μικρή τιμή της παραμέτρου n , έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζεται ολίσθηση πριν ακόμα τη μετατόπιση διαρροής z_y . Αυτό είναι προφανές αν θεωρήσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $sign(\dot{z})=1$ (κατάσταση φόρτισης στο θετικό ημιεπίπεδο) κι έτσι η σχέση (2.8) γίνεται:

$$\dot{z}(t) = \dot{u}(t) \left[1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma) \right] \quad (2.12)$$

Στην ελαστική περιοχή και με βάση τη σχέση (2.7) πρέπει η υστερητική μετατόπιση να είναι ίση με τη συνολική μετακίνηση. Συνεπώς:

$$z = u \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{u} \Rightarrow \left[1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma) \right] = 1 \Rightarrow z = 0 \quad (2.13)$$

Η εξίσωση όμως (2.13) δεν μπορεί να ισχύει, καθώς τότε θα σήμαινε ότι και η μετατόπιση θα ήταν μηδέν. Συνεπώς ο ρόλος του εκθέτη n είναι να κρατάει τον λόγο $\left| \frac{z}{z_y} \right|$ αρκετά μικρό έτσι ώστε ολόκληρη η ποσότητα που πολλαπλασιάζεται με την μετατόπιση να τείνει στη μονάδα: $1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma) \rightarrow 1$. Η απόκλιση της ποσότητας αυτής από τη μονάδα, η οποία γίνεται πιο έντονη για μικρές τιμές του n είναι που προκαλεί μικροολίσθηση του συστήματος πριν τη διαρροή.

Παρόλα αυτά, είναι προφανές ότι μια τέτοια διατύπωση είναι ικανή να προσομοιώσει οποιαδήποτε μονοαξονική συμπεριφορά που εισάγεται στα πλαίσια της κλασικής πλαστικότητας, αφού ενσωματωθεί σε μια απλή εξίσωση το κριτήριο διαρροής, ο νόμος της πλαστικής ροής και ο ρυθμός μεταβολής της φόρτισης. Σημειώνεται ότι ο όρος που ορίζεται εδώ ως μετατόπιση διαρροής είναι μια φαινομενολογική ποσότητα που υποδηλώνει τη μετατόπιση από την οποία ξεκινά η πλαστική παραμόρφωση. Αυτή η ποσότητα μαζί με τους όρους β , γ και n μπορούν να εκτιμηθούν με διάφορες μεθόδους ταυτοποίησης.

2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι ιδιότητες της υστέρησης με βάση την εφαρμογή της στη μηχανική και ακολούθως διατυπώνεται η έκφραση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Στη συνέχεια, εξάγεται ένας γενικός τύπος του προσομοιώματος σε όρους εντατικών μεγεθών. Οι ίδιες ακριβώς σχέσεις μπορούν να επεκταθούν και σε όρους τάσεων- ανηγμένων παραμορφώσεων. Η δυνατότητα του προσομοιώματος να μπορεί να ενσωματώνει διάφορα είδη διαρροής και τύπους κράτυνσης καθιστά δυνατή την περιγραφή διάφορων τύπων υστερητικών βρόχων που αναπαριστούν καταστατικές συμπεριφορές των υλικών. Η διατύπωση αυτή μπορεί αν εισαχθεί στα προσομοιώματα δοκού που χρησιμοποιούνται στην ανελαστική ανάλυση πλαισιωτών κατασκευών, όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια.

3 Κεφάλαιο

Πεπερασμένα Στοιχεία Δοκού για την
Ανελαστική Ανάλυση Κατασκευών

3.1 Γενικά στοιχεία

Οι κατασκευές που βρίσκονται σε σεισμικές περιοχές όπου αναμένεται να εκδηλωθούν ισχυρά σεισμικά γεγονότα δε θα συμπεριφερθούν ελαστικά αλλά θα αναπτύξουν μία ελαστοπλαστική συμπεριφορά ανάλογα με την ένταση του σεισμού. Οι σύγχρονοι κτηριακοί κανονισμοί αναφέρουν την ανάγκη η κατασκευή να έχει επαρκής ικανότητα ανάπτυξης πλαστικών παραμορφώσεων για την περίπτωση που θα συμβεί μία έντονη σεισμική διέγερση. Συνεπώς, η ελαστική απόκριση δεν επιδιώκεται από τον αντισεισμικό σχεδιασμό παρά μόνο σε ασθενής σεισμούς. Η απόκριση της κατασκευής κάθε φορά εξαρτάται από την ένταση και τα συχνотικά χαρακτηριστικά του σεισμικού επιταχυνσιογραφήματος, τον τύπο του εδάφους θεμελίωσης και τις ιδιότητες των δομικών μελών που την απαρτίζουν.

Η σεισμική αποτίμηση υφιστάμενων κατασκευών και ο αντισεισμικός σχεδιασμών νέων πολλές φορές απαιτούν όχι μόνο την εύρεση της αρχικής δυσκαμψίας και της αντοχής στην πρώτη διαρροή των μελών, αλλά τον προσδιορισμό της μέγιστης αντοχής, της μετελαστικής δυσκαμψίας και της πλαστιμότητας όλου του δομήματος και κάθε μέλους ξεχωριστά. Για να καταστεί αυτό δυνατό, μη-γραμμικά αποδοτικά προσομοιώματα πρέπει να ληφθούν υπόψιν στην προσομοίωση των δομικών μελών και ρεαλιστικές μέθοδοι ανάλυσης χρειάζεται να εκτελεστούν. Αν και η δυναμική, ανελαστική ανάλυση είναι αυτή που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα και αποκαλύπτει την αλληλεπίδραση των δομικών μελών, στην κοινή πρακτική έχει επικρατήσει η μη-γραμμική στατική ανάλυση. Οι απαιτήσεις του σεισμού εισέρχονται εκ των υστέρων μέσω του σεισμικού φάσματος και με προσεγγιστικές διαδικασίες προκύπτει η μετατόπιση εκείνη που αναμένεται να αναπτυχθεί στην κατασκευή. Όσον αφορά τις ιδιότητες των υλικών, αυτές έχουν αποτυπωθεί πειραματικά από πλήθος πειραμάτων πάνω στα οποία στη συνέχεια βασίζονται μαθηματικές σχέσεις που να περιγράφουν την έμφυτη παρατηρούμενη υστερητική συμπεριφορά.

Για την προσομοίωση πλαισιωτών κατασκευών έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα που διαφέρουν ως προς την ακρίβεια προσομοίωσης μέσω της ενσωμάτωσης μέρους των φυσικών μηχανισμών που παρατηρούνται πειραματικά και κατ' επέκταση ως προς το υπολογιστικό κόστος. Αυτά χωρίζονται σε τρεις κύριες κατηγορίες με βάση την πολυπλοκότητα τους και τη λεπτομέρεια προσομοίωσης.

- *Μακρομοντέλα/ Στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας.*

Τα στοιχεία αυτά προσομοιώνουν την πλαστικότητα σε εντατικά μεγέθη δύναμης-μετατόπισης μέσω μη γραμμικών ελατηρίων που βρίσκονται στα άκρα του στοιχείου και συνδέονται με το εσωτερικό του τμήμα που θεωρείται ελαστικό. Συνεπώς, η μη γραμμική συμπεριφορά περιορίζεται σε προκαθορισμένες θέσεις, τις γνωστές και ως πλαστικές αρθρώσεις. Οι μη-γραμμικές αυτές σχέσεις πολλές φορές περιέχουν ένα πλήθος παραμέτρων να προσδιοριστούν και να τεθούν από το χρήστη ως δεδομένα.

- *Στοιχεία κατανεμημένης πλαστικότητας/ Στοιχεία ινών.*

Η πλαστικότητα δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένες θέσεις αλλά ελέγχεται σε διάφορες θέσεις στο εσωτερικό του στοιχείου, τις διατομές ελέγχου. Οι διατομές αυτές περιγράφονται είτε από καταστατικές σχέσεις της κλασικής πλαστικότητας είτε διακριτοποιούνται περεταίρω σε διαμήκεις ίνες. Γίνεται έτσι δυνατή η παρακολούθηση της εξάπλωσης της πλαστικότητας και καθ' ύψος της διατομής.

- *Λεπτομερή πεπερασμένα στοιχεία.*

Τα συνδεόμενα μέλη καθώς και οι κόμβοι προσομοιώνονται από ένα μεγάλο πλήθος πεπερασμένων στοιχείων όπου η γεωμετρική μη-γραμμικότητα και οι καταστατικές σχέσεις είναι ενσωματωμένες σε όρους τάσεων-παραμορφώσεων. Επίσης, διάφορα ειδικά θέματα που αφορούν την εξάπλωση των διακριτών ρωγμών, τη συνάφεια οπλισμού-σκυροδέματος, ερπυστικά φαινόμενα κτλ μπορούν να ληφθούν υπόψιν με αρκετά λεπτομερή μοντελοποίηση.

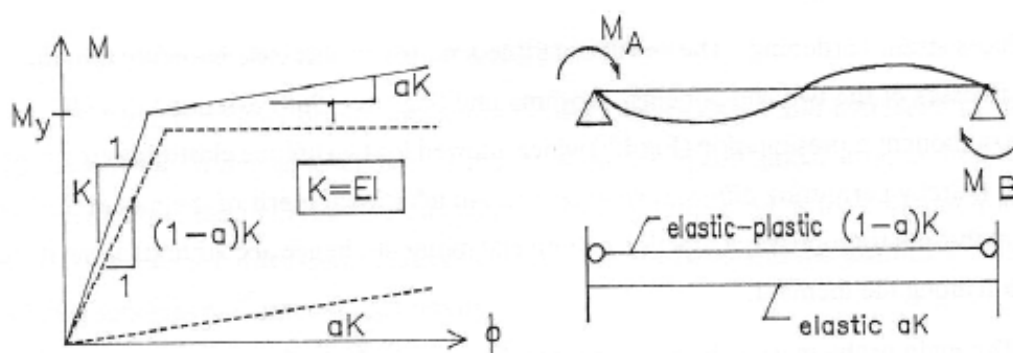
Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζονται τα μοντέλα της 2^{ης} κατηγορίας αφού κρίνονται ως τα καταλληλότερα για τη μη γραμμική προσομοίωση κατασκευών καθώς αποτελούν ικανοποιητικό συμβιβασμό ανάμεσα στην ακρίβεια και την απλότητα. Τα μοντέλα πλαστικών αρθρώσεων περιέχουν πολλές παραδοχές και παραμέτρους και μία ρεαλιστική προσομοίωση απαιτεί την ακριβή ταυτοποίησή τους. Αντίθετα, τα μικροσκοπικά μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων ξεφεύγουν από τους σκοπούς της σεισμικής αποτίμησης κατασκευών λόγω του τεράστιου αριθμού βαθμών ελευθερίας που εισάγουν. Οι δυνατότητες τους εκδηλώνονται όταν χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση τοπικών φαινομένων λεπτομερειών, όπως συμπεριφορά μεμονωμένων κόμβων.

3.2 Στοιχεία δοκού συγκεντρωμένης πλαστικότητας

Όταν πλαισιωτές κατασκευές υπόκεινται σε σεισμικές διεγέρσεις, οι μέγιστες τιμές των εντατικών μεγεθών αναμένονται να αναπτυχθούν στις άκρες των δοκών και των

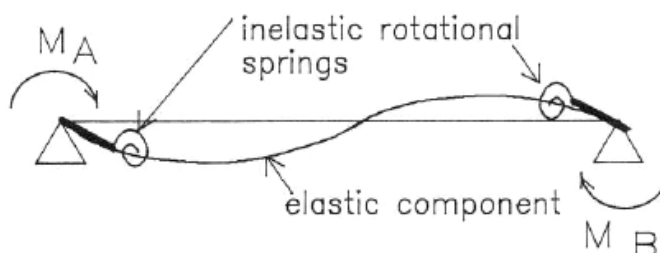
υποστηλωμάτων. Συνεπώς, οι πρώτες προσπάθειες προσομοίωσης της ανελαστικής συμπεριφοράς ήταν σε όρους μηδενικού μήκους πλαστικών αρθρώσεων μέσω μη γραμμικών ελατηρίων στα άκρα των δομικών μελών. Σύμφωνα με την εκάστοτε διατύπωση τα ελατήρια αυτά συνδέονται είτε παράλληλα, είτε εν σειρά με το υπόλοιπο μέλος.

Αρχικά, Οι Clough et al. εισήγαγαν το προσομοίωμα του Σχήματος 3.1 το οποίο επιτρέπει διγραμμική θεώρηση ροπών-καμπυλοτήτων. Το μη γραμμικό σύστημα υποδιαιρείται σε δύο ιδεατά παράλληλα στοιχεία, ένα ελαστικό-απόλυτα πλαστικό και ένα άλλο ελαστικό. Το πρώτο αποδίδει τη διαρροή ενώ το δεύτερο τη σκλήρυνση. Λόγω της παράλληλης διατύπωσης, το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου είναι το άθροισμα των δυσκαμψιών των δύο μελών.



Σχ. 3.1: Παράλληλο προσομοίωμα Clough et al.

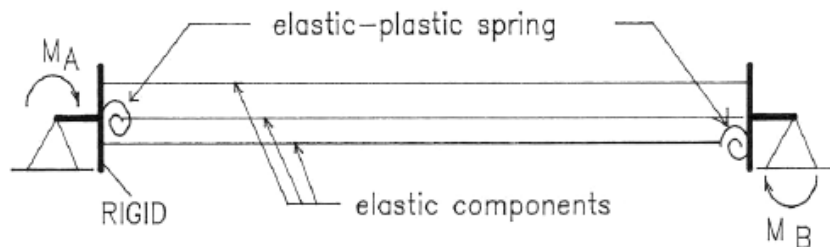
Στη συνέχεια ο Takizawa (1976) γενίκευσε αυτό το μοντέλο ώστε να ενσωματώνει πολυγραμμικές μονοτονικές συμπεριφορές ώστε να περιγράφεται το φαινόμενο της ρηγμάτωσης σε φορείς ωπλισμένου σκυροδέματος. Στο μοντέλο αυτό (Σχ. 3.2), επίσης, έγινε υπόθεση παραβολικής ευκαμψίας κατά μήκος του στοιχείου.



Σχ. 3.2: Προσομοίωμα κατανεμημένης ευκαμψίας Takizawa.

Το πρώτο εν σειρά μη-γραμμικό προσομοίωμα προτάθηκε από τον Giberson (1967). Στην αρχική του μορφή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 αποτελείται από ένα γραμμικώς ελαστικό στοιχείο και από δύο μη-γραμμικά στροφικά ελατήρια τοποθετημένα στα δύο άκρα του. Οι ανελαστικές παραμορφώσεις όλου του μέλους συγκεντρώνονται στα δύο ελατήρια. Το

προσομοίωμα αυτό είναι πιο γενικό και αποδοτικό από το αντίστοιχο των Clough et al. καθώς μπορεί να περιγράψει πολύπλοκους υστερητικούς νόμους με την επιλογή των κατάλληλων σχέσεων ροπών-καμπυλοτήτων στα δύο ελατήρια. Το γεγονός αυτό το καθιστά προτιμότερο για την φαινομενολογική αναπαράσταση της υστερητικής συμπεριφοράς.



Σχ. 3.3: Προσομοίωμα εν σειρά του Giberson.

Τα προσομοιώματα πλαστικών αρθρώσεων παρουσιάζουν γενικά τα εξής μειονεκτήματα. Οι παράμετροι που περιέχονται δεν εξαρτώνται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής αλλά και από την κατάσταση φόρτισης και την ιστορία παραμορφώσεων, περιορίζοντας έτσι τη γενικότητά τους. Επίσης, η σωστή επιλογή των παραμέτρων αυτών πρέπει να βασίζεται σε έγκυρους μεθόδους ταυτοποίησης με βάση πειραματικά δεδομένα. Το φαινόμενο της εξάρτησης της καμπτικής αντοχής από το αξονικό φορτίο σε κατάσταση μονοαξονικής ή διαξονικής κάμψης έχει αντιμετωπιστεί σε αυτά τα μοντέλα σύμφωνα με θεωρίες της κλασικής πλαστικότητας. Έτσι, κάθε πλαστική άρθρωση περιγράφεται από μία επιφάνεια διαρροής και ένα συντηρημένο νόμο ροής. Γενικά, τα μοντέλα αυτά αποτελούν απλοποίηση της πραγματικότητας όπου η πλαστικότητα εξαπλώνεται σταδιακά κατά μήκος του στοιχείου με την αύξηση των εντατικών μεγεθών. Παρ' όλα αυτά τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν είναι το μειωμένο υπολογιστικό κόστος και οι απαιτήσεις αποθήκευσης δεδομένων καθώς και η αυξημένη αριθμητική ευστάθεια των υπολογιστικών μεθόδων επίλυσης.

3.3 Στοιχεία δοκού κατανεμημένης πλαστικότητας

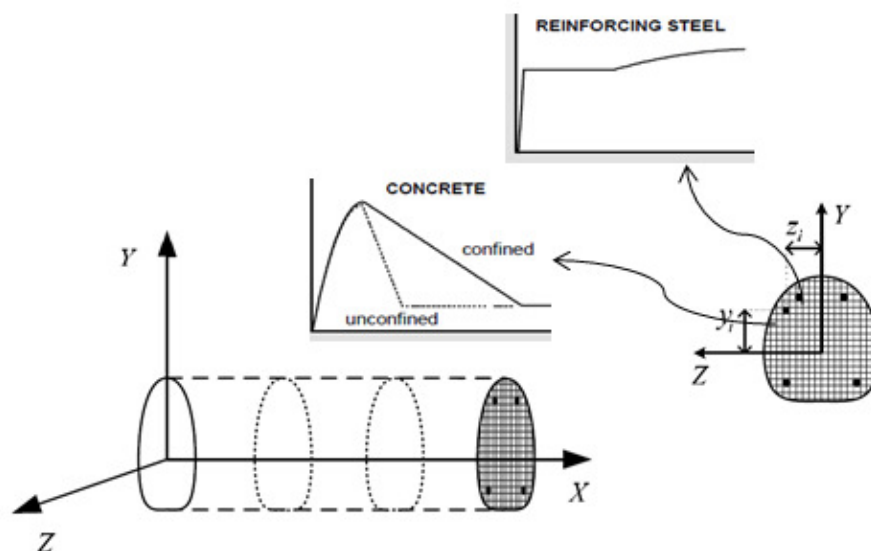
Μία πιο ακριβής προσομοίωση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς γίνεται με τη χρήση μη-γραμμικών στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας. Σε αντίθεση με τα μοντέλα συγκεντρωμένης πλαστικότητας η μη-γραμμικότητα του υλικού μπορεί να λάβει χώρα σε οποιαδήποτε διατομή μέσα στο μήκος του στοιχείου και η συνολική συμπεριφορά του προκύπτει μέσω ολοκλήρωσης με βάρη της απόκρισης όλων των διατομών του. Στην πράξη, επειδή τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται αριθμητικά, η ολοκληρωταία συνάρτηση διακριτοποιείται και συνεπώς απαιτείται η γνώση της απόκρισης των διατομών σε

συγκεκριμένες μόνο θέσεις ελέγχου. Για την εύρεση της απόκρισης αυτής των διατομών ελέγχου οι άγνωστες ποσότητες είναι είτε οι παραμορφώσεις είτε οι δυνάμεις που προκύπτουν μέσω συναρτήσεων σχήματος από τις επικόμβιες μετατοπίσεις και δυνάμεις του στοιχείου αντίστοιχα. Οι καταστατικές σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά της διατομής προκύπτουν μέσω της κλασικής θεωρίας της πλαστικότητας ή διακριτοποιώντας περεταίρω τη διατομή σε ίνες, όπως στην περίπτωση των στοιχείων ινών. Τέλος, μία κοινή παραδοχή σε αυτά τα προσομοιώματα είναι ότι οι διατομές είναι επίπεδες πριν την παραμόρφωση και παραμένουν επίπεδες μετά από αυτήν. Αυτή η Euler-Bernoulli παραδοχή της κλασικής θεωρίας δοκού επιβάλλει τη γραμμική κατανομή των παραμορφώσεων στη διατομή.

Στη συνέχεια θα περιγραφούν οι δύο τύποι στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας με βάση το προσομοίωμα ινών και θα αναφερθούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τους.

3.3.1 Προσομοίωση ινών

Η μη-γραμμική προσομοίωση μελών γίνεται πιο αποδοτική όταν οι διατομές ελέγχου διακριτοποιούνται σε έναν αριθμό διαμήκων ινών όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.4.



Σχ. 3.4: Διακριτοποίηση δοκού σε διατομές ελέγχου και ίνες.

Στο παραπάνω σχήμα γίνονται φανερές οι δύο φάσεις διακριτοποίησης ενός στοιχείου δοκού από ωπλισμένο σκυρόδεμα. Αρχικά το μέλος χωρίζεται σε μεμονωμένες διατομές ελέγχου και στη συνέχεια κάθε διατομή διακριτοποιείται σε ένα πλήθος ινών. Κάθε μία από αυτές χαρακτηρίζεται από τις γεωμετρικές της συντεταγμένες (z, y) στο σύστημα αναφοράς

και το εμβαδόν της A_{fib} . Κάθε ίνα αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό της διατομής και περιγράφεται από ένα συγκεκριμένο μονοαξονικό καταστατικό νόμο τάσεων-παραμορφώσεων του συγκεκριμένου υλικού. Η καταστατική σχέση της διατομής δεν θεωρείται εκ των προτέρων γνωστή αλλά υπολογίζεται από τη συμβολή της κάθε ίνας. Συνεπώς, σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης αποτελεί η εύρεση της δυσκαμψίας της διατομής και των αντιδράσεων της όταν ασκείται σε αυτή ένα παραμορφωσιακό πεδίο.

Σύμφωνα με την παραδοχή Euler-Bernoulli με γνωστές την παραμόρφωση ε_0 και τις δύο καμπυλότητες φ_z, φ_y στο κέντρο βάρους της διατομής, η αξονική παραμόρφωση σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής υπολογίζεται σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y \quad (3.1)$$

Οι συντεταγμένες των ινών μπορούν να συγκεντρωθούν στο διάνυσμα $\mathbf{l}(y, z) = \{-y \ z \ 1\}$ με διάσταση σειρών όσες και οι ίνες της διατομής. Οπότε η σχέση (3.1) γράφεται διανυσματικά για όλες τις ίνες στην εξής μορφή:

$$\varepsilon(y, z) = \mathbf{l}(y, z) \cdot \begin{bmatrix} \varphi_z \\ \varphi_y \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon(y, z) = \mathbf{l}(y, z) \cdot \mathbf{d}(x) \quad (3.2)$$

Η καταστατική μονοαξονική σχέση τάσεων παραμορφώσεων γράφεται μέσω του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας του υλικού E_{tan} που βρίσκεται στη θέση της ίνας i .

$$\sigma(y, z) = E_{tan}(y, z) \cdot \varepsilon(y, z) \quad (3.3)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών έργων στη διατομή έχουμε:

$$\int_A \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dA = \{\delta d\}^T \cdot \{D\} \Rightarrow \{D\} = \int_A \mathbf{l}^T(y, z) \cdot E_{tan}(y, z) \cdot \mathbf{l}(y, z) dA \cdot \{d\} \quad (3.4)$$

Όπου $\{D\} = [M_z \ M_y \ N]^T$ είναι οι αντιδράσεις της διατομής. Από τη σχέση (3.4) μπορούμε να εξαγάγουμε τη σχέση της δυσκαμψίας και των αντιδράσεων της διατομής. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{k}(x) = \int_{A(x)} \mathbf{l}^T(y, z) \cdot E_{tan}(x, y, z) \cdot \mathbf{l}(y, z) dA \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D}(x) = \int_{A(x)} \mathbf{l}^T(y, z) \cdot \sigma(x, y, z) dA \quad (3.6)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα για να υπολογιστούν απαιτείται η εφαρμογή μιας αριθμητικής μεθόδου. Η διακριτοποίηση σε n πεπερασμένο αριθμό ινών του χωρίου της διατομής αποσκοπεί σε αυτόν ακριβώς τον σκοπό. Συνεπώς, εφαρμόζοντας κανόνα ολοκλήρωσης στο κέντρο της κάθε ίνας, τα παραπάνω ολοκληρώματα μετατρέπονται σε πεπερασμένο άθροισμα των ιδιοτήτων καθεμίας ίνας i .

$$\mathbf{k}(x) = \sum_{i=1}^{n(x)} \mathbf{I}^T(x, y_i, z_i) \cdot (E_{\tan} A)_i \cdot \mathbf{l}(x, y_i, z_i) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{D}(x) = \sum_{i=1}^{n(x)} \mathbf{I}^T(x, y_i, z_i) \cdot (\sigma A)_i \quad (3.8)$$

Η σχέση (3.7) στην περίπτωση αλληλεπίδρασης μονοαξονικής κάμψης με αξονικής αναπτύσσεται ως εξής:

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n(x)} (E_{\tan} \cdot A)_i & -\sum_{i=1}^{n(x)} (E_{\tan} \cdot A)_i \cdot y_i \\ -\sum_{i=1}^{n(x)} (E_{\tan} \cdot A)_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^{n(x)} (E_{\tan} \cdot A)_i \cdot y_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Επειδή στη διατύπωση της μεθόδου των δυνάμεων, όπως θα περιγράψουμε στη συνέχεια, αναγκαία είναι η γνώση της ευκαμψίας της διατομής, αυτή υπολογίζεται ως το αντίστροφο της δυσκαμψίας.

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{k}(x)^{-1} \quad (3.10)$$

Η ακρίβεια των παραπάνω αριθμητικών ολοκληρώσεων εξαρτάται από τον αριθμό και τη θέση των ινών στη διατομή. Λίγες ίνες τείνουν να υποεκτιμήσουν τη συμπεριφορά της διατομής, ενώ αντίθετα πολύ λεπτομερής διακριτοποίηση αυξάνει υπερβολικά το υπολογιστικό κόστος χωρίς να προσθέτει ουσιαστική ακρίβεια. Επίσης, η επιλογή αυτής της μεθόδου ολοκλήρωσης σε σύγκριση με μεθόδους ανώτερης τάξης, όπως οι μέθοδοι ολοκλήρωσης Gauss, παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα σε διατομές ωπλισμένου σκυροδέματος όπου η κατανομή των τάσεων και της δυσκαμψίας είναι ασυνεχής.

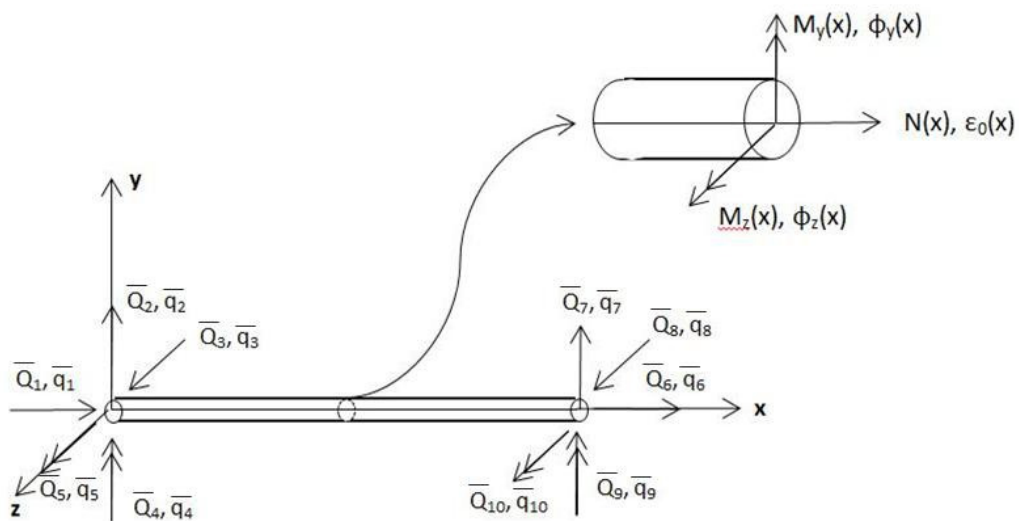
3.3.2 Στοιχείο ινών με βάση τις μετακινήσεις

Έχοντας ήδη ορίσει στο προηγούμενο υποκεφάλαιο την καταστατική σχέση της διατομής με βάση τις ιδιότητες και την παραμόρφωση που βρίσκεται η κάθε ίνα, στη συνέχεια γίνεται ο προσδιορισμός της κατάστασης του στοιχείο δοκού. Αυτό περιλαμβάνει την

εύρεση της δυσκαμψίας και των επικόμβιων αντιδράσεων του ανάλογα με το βαθμό πλαστικοποίησης του.

Αρχικά θα γίνει η περιγραφή των στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας με βάση τις μετακινήσεις. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση γνωστά μεγέθη του στοιχείου θεωρούνται οι επικόμβιες μετακινήσεις του σε κάθε βήμα της επίλυσης και ζητούμενο είναι η εύρεση των επικόμβιων δυνάμεων που αντιστοιχούν σε αυτές, καθώς και η δυσκαμψία του. Η διατύπωση του βασίζεται στην κλασική μέθοδο της δυσκαμψίας των πεπερασμένων στοιχείων, όπου το πεδίο των μετατοπίσεων προσεγγίζεται μέσω Ερμητιανών συναρτήσεων σχήματος.

Το γενικό τρισδιάστατο στοιχείο δοκού με όλους τους αξονικούς και καμπτικούς βαθμούς ελευθερίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5. Γενικά οι δύο στρεπτικοί βαθμοί ελευθερίας παραλείπονται καθώς θεωρείται ότι η στρέψη είναι γραμμικώς ελαστική και ασύζευκτη με την αξονική και καμπτική εντατική κατάσταση. Συνεπώς, οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου είναι δέκα.



Σχ. 3.5: Βαθμοί ελευθερίας στοιχείου δοκού στο τοπικό σύστημα.

Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, για την απλοποιημένη περίπτωση μονοαξονικής κάμψης (κάμψη περί τον άξονα z) τα διανύσματα των μετατοπίσεων και δυνάμεων του στοιχείου είναι.

$$\bar{\mathbf{q}} = \left\{ \bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \bar{q}_5 \quad \bar{q}_6 \quad \bar{q}_7 \quad \bar{q}_{10} \right\} \quad (3.11)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \left\{ \bar{Q}_1 \quad \bar{Q}_2 \quad \bar{Q}_5 \quad \bar{Q}_6 \quad \bar{Q}_7 \quad \bar{Q}_{10} \right\}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων (Bathe 2007) το πεδίο των μετατοπίσεων στο εσωτερικό του στοιχείου δοκού δύο διαστάσεων προσεγγίζεται με γραμμικές συναρτήσεις για την αξονική και τριτοβάθμιες συναρτήσεις σχήματος για την εγκάρσια μετατόπιση. Επομένως, σε μία θέση x στο εσωτερικό του στοιχείου οι μετατοπίσεις εκφράζονται σε σχέση με τις επικόμβιες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_3(x) & N_4(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (3.12)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L}, & N_2(x) &= \frac{x}{L} \\ N_3(x) &= 2\frac{x^3}{L^3} - 3\frac{x^2}{L^2} + 1, & N_4(x) &= \frac{x^3}{L^2} - 2\frac{x^2}{L} + x \\ N_5(x) &= -2\frac{x^3}{L^3} + 3\frac{x^2}{L^2}, & N_6(x) &= \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{aligned}$$

Οι γενικευμένες παραμορφώσεις του στοιχείου είναι η αξονική παραμόρφωση και η καμπυλότητα. Αυτές με βάση τις υποθέσεις των μικρών μετατοπίσεων και της επιπεδότητας της διατομής υπολογίζονται σε κάθε θέση x του στοιχείου σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{d}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0(x) \\ \varphi_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{a}(x) \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (3.13)$$

Όπου:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(x) &= \begin{bmatrix} N_1'(x) & 0 & 0 & N_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_3''(x) & N_4''(x) & 0 & N_5''(x) & N_6''(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{a}(x) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{L} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων για τον προσδιορισμό του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου και των επικόμβιων δράσεων.

$$\int_0^L \{\delta d\}^T \cdot \{D\} dx = \{\delta q\}^T \cdot \{Q\} \Rightarrow \{Q\} = \left(\int_0^L \mathbf{a}^T(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{a}(x) dx \right) \cdot \{q\} \quad (3.15)$$

Όπου $\mathbf{k}(x)$ είναι το μητρώο δυσκαμψίας της διατομής του μέλους που βρίσκεται στη θέση x και έχει υπολογιστεί στην παράγραφο 3.3.1. Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τόσο το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, όσο και η σχέση σύμφωνα με την οποία υπολογίζεται το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων. Συνεπώς, έχουμε:

$$\mathbf{K}(x) = \int_0^L \mathbf{a}^T(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{a}(x) dx \quad (3.16)$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^L \mathbf{a}^T(x) \cdot \mathbf{D}(x) dx \quad (3.17)$$

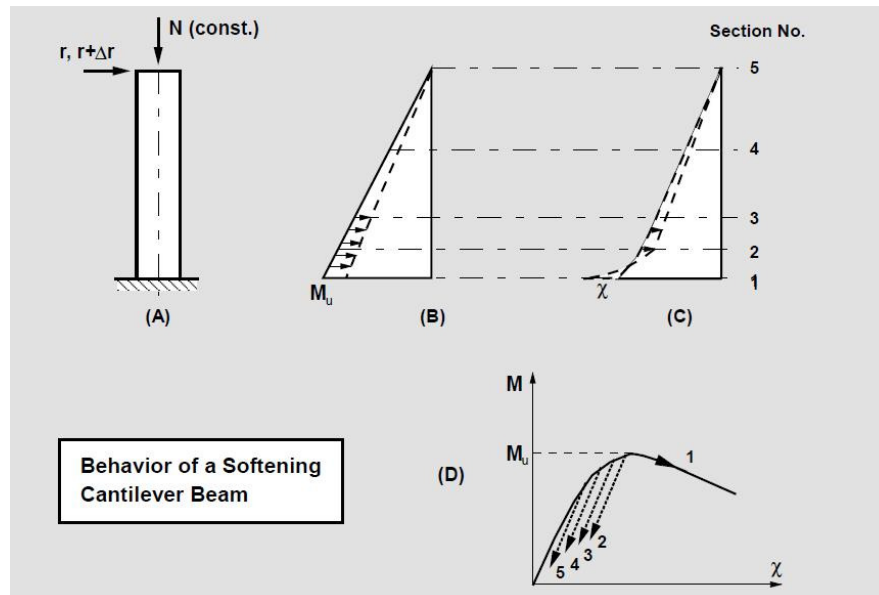
Από τη σχέση (3.17) γίνεται φανερό ότι η ισορροπία στο στοιχείο δεν ικανοποιείται πλήρως αλλά ως μέσος όρος. Μάλιστα ο μέσος όρος αυτός είναι σταθμισμένος λόγω των βαρών που εμπεριέχονται στην αριθμητική επίλυση του παραπάνω ολοκληρώματος, όπως θα περιγραφεί εκτενώς στη συνέχεια. Το γεγονός αυτό της μη ικανοποίησης της ισορροπίας αποτελεί ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου.

Όλες οι σχέσεις που περιγράφησαν σε αυτό το υποκεφάλαιο, μαζί με τις σχέσεις που αναφέρονται στη διατομή της παραγράφου 3.3.1 περιλαμβάνονται στη διαδικασία προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου, δηλαδή στην εύρεση της δυσκαμψίας του και των επικόμβιων δράσεων. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε κάθε βήμα και επανάληψη οποιασδήποτε μεθόδου μη-γραμμικής επίλυσης του πολυβάθμιου συστήματος της κατασκευής. Στόχος είναι μέσα από τον προσδιορισμό της ανανεωμένης δυσκαμψίας και των επικόμβιων δράσεων του στοιχείου, ο υπολογισμός της συνολικής δυσκαμψίας της κατασκευής και του συνολικού διανύσματος των εσωτερικών δράσεων. Στη συνέχεια, λοιπόν, θα αναφερθούν τα βήματα του αλγορίθμου ενός κλασικού στοιχείου των μετακινήσεων όπως αυτά πραγματοποιούνται σε μία τυπική επανάληψη μιας διαδικασίας επίλυσης Newton-Raphson.

Από την αμέσως προηγούμενη επίλυση του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι γνωστό το νέο διάνυσμα των ολικών επικόμβιων μετατοπίσεων \mathbf{q} . Στη συνέχεια ακολουθούνται τα επόμενα βήματα:

- 1) *Εύρεση των ανανεωμένων παραμορφώσεων $\mathbf{d}(x)$ στο εσωτερικό του στοιχείου από τη σχέση (3.13).*
- 2) *Υπολογισμός των αξονικών παραμορφώσεων $\varepsilon(y, z)$ κάθε ίνας μέσω της σχέσης (3.2).*
- 3) *Εύρεση της ορθής τάσης $\sigma(y, z)$ (σχέση (3.3)) και της εφαπτομενικής δυσκαμψίας της E_{\tan}*
- 4) *Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών $\mathbf{D}(x)$ που ασκούνται στη διατομή από τη σχέση (3.8).*
- 5) *Υπολογισμός επίσης του ανανεωμένου μητρώου δυσκαμψίας της διατομής $\mathbf{k}(x)$ από τη σχέση (3.7).*
- 6) *Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου $\mathbf{K}(x)$ μέσω της σχέσης (3.16).*
- 7) *Τέλος, υπολογίζονται οι επικόμβιες δράσεις \mathbf{Q} του στοιχείου από τη σχέση (3.17).*

Το σημαντικότερο μειονέκτημα της μεθόδου των μετακινήσεων είναι η αδυναμία της να προβλέψει την πραγματική κατανομή της καμπυλότητας στο στοιχείο. Αυτό συμβαίνει επειδή η χρήση κυβικών συναρτήσεων σχήματος για το πεδίο των μετατοπίσεων σημαίνει και γραμμική κατανομή της καμπυλότητας σε αυτό, όπως γίνεται φανερό από της συναρτήσεις σχήματος της εξίσωσης (3.14). Ενώ στη γραμμική περιοχή η υπόθεση αυτή είναι ακριβής, όταν μία περιοχή της δοκού πλαστικοποιηθεί η καμπυλότητα κατανέμεται εντόνως μη-γραμμικά σε αυτήν. Συνεπώς για τη ρεαλιστική προσομοίωση απαιτείται επιμερισμός του στοιχείου σε μικρότερα στοιχεία, δηλαδή μεγαλύτερη διακριτοποίηση. Αυτό, όχι μόνο αυξάνει το υπολογιστικό κόστος, αλλά προκαλεί και διάφορα προβλήματα σύγκλισης.



Σχ. 3.6: Συμπεριφορά φορτιζόμενου προβόλου.

Επίσης, η μη τήρηση της ισορροπίας γίνεται εντονότερη σε περιπτώσεις όπου ο νόμος του υλικού της διατομής παρουσιάζει καθοδικό κλάδο μετά τη μέγιστη αντοχή (softening). Η συμπεριφορά αυτή είναι ιδιαίτερα συνήθης σε διατομές ωπλισμένου σκυροδέματος. Η παραβίαση της ισορροπίας γίνεται κατανοητή αν λογιστούμε τον πρόβολο του σχήματος 3.6. Για εκείνο το σημείο της φόρτισης όπου η διατομή της βάσης θα περάσει στον φθίνοντα κλάδο του διαγράμματος ροπών-καμπυλοτήτων συμβαίνει η παραβίαση της ισορροπίας. Για δεδομένη αύξηση των επικόμβιων μετατοπίσεων η διατομή της βάσης θα αποφορτιστεί σε αυτό το βήμα. Στις υπόλοιπες διατομές, όμως που βρίσκονται στον ανοδικό κλάδο του καταστατικού διαγράμματος, η αύξηση της καμπυλότητας προκαλεί και αύξηση της ροπής. Το γεγονός αυτό, όμως, αντιβαίνει στη συνθήκη ισορροπίας καθώς η διατομές αυτές θα έπρεπε να αποφορτιστούν ελαστικά για να επιτευχθεί εσωτερική ισορροπία με τη διατομή της βάσης.

Για να αντιμετωπιστούν όλα τα παραπάνω μειονεκτήματα προτάθηκαν εκ των υστέρων τα μη-γραμμικά στοιχεία δοκού με βάση τη μέθοδο των δυνάμεων ή μέθοδος ευκαμψίας, όπου η ισορροπία απαιτείται με αυστηρό τρόπο στο εσωτερικό του στοιχείου.

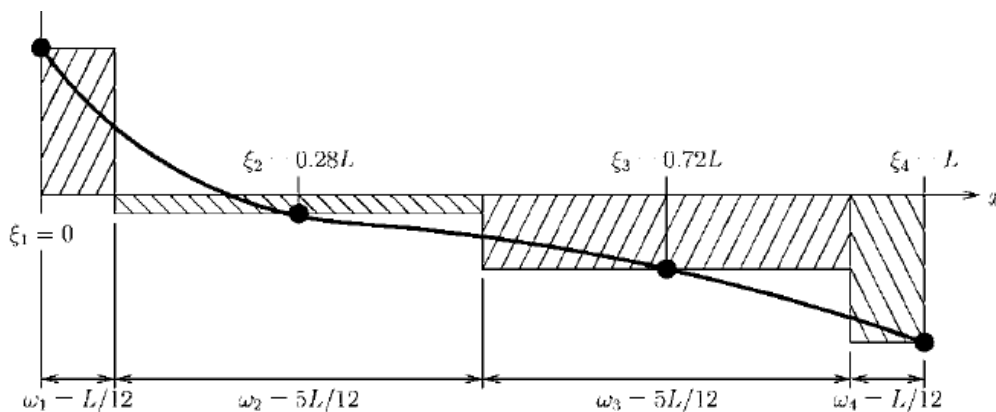
3.3.3 Αριθμητική ολοκλήρωση

Όλα τα ολοκληρώματα που αφορούν την κατά μήκος ολοκλήρωση στο στοιχείο όπως αυτά των σχέσεων (3.16) και (3.17) καθώς και αυτά που θα οριστούν στη μέθοδο των δυνάμεων υπολογίζονται αριθμητικά σύμφωνα με τη μέθοδο Gauss-Lobatto. Η γενική σχέση ολοκλήρωσης μίας συνάρτησης $f(x)$ σύμφωνα με κάποια μέθοδο Gauss είναι η ακόλουθη:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{a+b}{2}\right) d\xi \Rightarrow \quad (3.18)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \xi_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

Όπου ο δείκτης i δηλώνει τη διατομή ελέγχου και w_i είναι ο αντίστοιχος παράγοντας βάρους. Ο δείκτης ξ δηλώνει τη θέση της διατομής ελέγχου στο τροποποιημένο διάστημα $[-1, 1]$. Οι τιμές των δεικτών w_i και ξ είναι δεδομένες για κάθε είδος ολοκλήρωσης και για κάθε αριθμό σημείων n . Συνεπώς, οι διατομές ελέγχου στο εσωτερικό του στοιχείου βρίσκονται στις θέσεις ξ που ορίζει η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto. Οι παραπάνω παράμετροι ολοκλήρωσης συγκεντρώνονται στον πίνακα 3.1 και αναπαριστώνται γραφικά στο παρακάτω σχήμα για τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης.



Σχ. 3.7: Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Lobatto για τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης.

Αριθμός σημείων ολοκλήρωσης n	Θέση σημείων ολοκλήρωσης ξ_i	Συντελεστές βάρους w_i	Αριθμός σημείων ολοκλήρωσης n	Θέση σημείων ολοκλήρωσης ξ_i	Συντελεστές βάρους w_i
1	-	-	6	± 1.0	0.066667
				± 0.765055	0.378475
				± 0.285232	0.554858
2	± 1.0	1.0	7	± 1.0	0.047619
				± 0.830224	0.276826
				± 0.468849	0.431745
3	± 1.0 0.0	0.333333 1.333333	8	± 1.0	0.035714
				± 0.87174	0.210704
				± 0.5917	0.341123
4	± 1.0 ± 0.447214	0.166667 0.833333	9	± 0.209299	0.412459
				± 1.0	0.027778
				± 0.899758	0.165495
5	± 0.654654 0.0	0.544444 0.711111	10	± 0.677186	0.274539
				± 0.363117	0.346429
				0.0	0.371519
5	± 1.0 ± 0.654654 0.0	0.1 0.544444 0.711111	10	± 1.0	0.022222
				± 0.919534	0.133306
				± 0.738774	0.224889
5	± 0.654654 0.0	0.544444 0.711111	10	± 0.477925	0.292043
				± 0.165279	0.327540

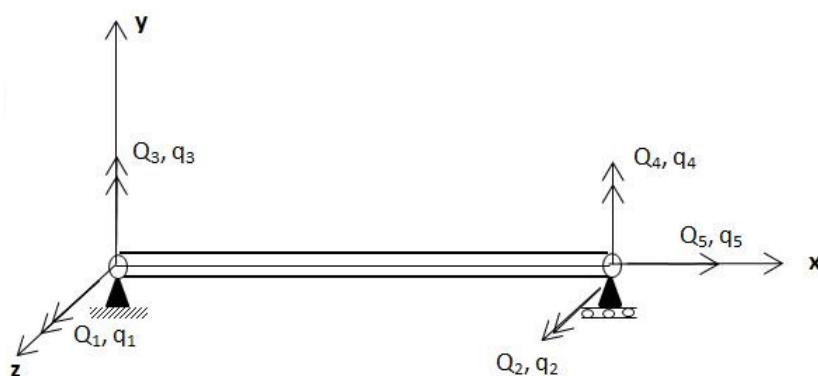
Πίνακας 3.1: Θέσεις και συντελεστές βάρους της αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto.

Η μέθοδος αυτή με n σημεία ολοκλήρωσης είναι ακριβής για πολυώνυμο μέχρι $2 \cdot n - 3$ βαθμού. Σύμφωνα με τη σχέση (3.17) το πολυώνυμο που προκύπτει στο εσωτερικό του ολοκληρώματος είναι 2^{ou} βαθμού λόγω του γινομένου της γραμμικής κατανομής της ροπής και την υπόθεση της γραμμικής κατανομής της καμπυλότητας στις συναρτήσεις σχήματος $a(x)$. Συνεπώς, τρία σημεία ολοκλήρωσης αρκούν για να περιγράψουν με ακρίβεια το γραμμικό πρόβλημα. Για τη μη-γραμμική περίπτωση ο αριθμός του πρέπει να αυξηθεί στα πέντε με επτά. Επίσης, η μέθοδος αυτή είναι ανώτερη της κλασικής μεθόδου ολοκλήρωσης Gauss καθώς ορίζει διατομές ελέγχου και στα δύο άκρα του στοιχείου, περιοχές όπου αναμένονται οι μέγιστες ροπές για επικόμβια πλευρικά φορτία και συνεπώς οι μέγιστες πλαστικές παραμορφώσεις.

3.3.4 Στοιχείο ινών με βάση τις δυνάμεις

Βασικό στοιχείο της μεθόδου των δυνάμεων είναι η χρήση συναρτήσεων σχήματος που αναπαριστούν την κατανομή της ευκαμψίας στο εσωτερικό της δοκού και συνεπώς αφορούν την κατανομή των εντατικών μεγεθών στο εσωτερικό και όχι των μετατοπίσεων. Ως γνωστά μεγέθη θεωρούνται οι επικόμβιες δράσεις και ζητούμενο είναι η εύρεση του μητρώου δυσκαμψίας της διατομής μέσω της αντιστροφής του μητρώου ευκαμψίας και των ισορροπούμενων εσωτερικών επικόμβιων δράσεων.

Από τις συνολικές δέκα επικόμβιες δυνάμεις $\bar{\mathbf{Q}}$ του σχήματος 3.5 πέντε είναι ανεξάρτητες λόγω της ύπαρξης πέντε εξισώσεων ισορροπίας για το στοιχείο, καθώς έχουν παραληφθεί οι στρεπτικοί βαθμοί ελευθερίας. Για τη γενική περίπτωση του χωρικού στοιχείου ως ανεξάρτητα μεγέθη επιλέγονται αυτά που προκαλούν παραμόρφωση χωρίς κίνηση στερεού σώματος και παρουσιάζονται στο σχήμα 3.8.



Σχ. 3.8: Ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας στοιχείου δοκού στο τοπικό σύστημα

Στην απλοποιημένη περίπτωση της μονοαξονικής κάμψης αυτά είναι οι δύο στροφές και ροπές στα άκρα καθώς και η αξονική παραμόρφωση και ένταση. Τα τρία αυτά ανεξάρτητα μεγέθη συγκεντρώνονται στα διανύσματα \mathbf{Q}, \mathbf{q} της δύναμης και της μετατόπισης αντίστοιχα.

$$\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ q_5\}^T \tag{3.19}$$

$$\mathbf{Q} = \{Q_1 \ Q_2 \ Q_5\}^T$$

Τα διανύσματα των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεγεθών συνδέονται μέσω του μητρώου ισορροπίας \mathbf{T} ως εξής:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{q}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{Q}}$$

Όπου το μητρώο \mathbf{T} ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Για να παραχθούν συναρτήσεις σχήματος δυνάμεων πρέπει να υποθεθεί η κατανομή των εντατικών μεγεθών χωρίς να παραβιάζεται ισορροπία. Επειδή στο σύνολο σχεδόν των μη-γραμμικών αναλύσεων τα εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία είναι πλευρικά και επικόμβια, η ροπή θεωρείται ότι κατανέμεται γραμμικά στο εσωτερικό του στοιχείου και η αξονική ομοιόμορφα. Συνεπώς το διάνυσμα της ροπής και αξονικής σε ένα σημείο στη θέση x του στοιχείου εκφράζεται σε σχέση με τις επικόμβιες ροπές και αξονικές ως εξής:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{Q} \quad (3.22)$$

Όπου $\mathbf{b}(x)$ είναι το μητρώο που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος δυνάμεων και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L} - 1 & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών δυνάμεων προκύπτει:

$$\int_0^L \{\delta \mathbf{D}\}^T \cdot \{d\} dx = \{\delta \mathbf{Q}\}^T \cdot \{q\} \Rightarrow \{q\} = \left(\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \right) \cdot \{Q\} \quad (3.24)$$

Από την οποία σχέση προκύπτει το συνολικό μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου δοκού σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{F}(x) = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \quad (3.25)$$

Όπου $\mathbf{f}(x)$ είναι η ευκαμψία της διατομής όπως ορίζεται ως το αντίστροφο μητρώο της δυσκαμψίας σύμφωνα με τη σχέση (3.10). Σε επίπεδο διατομής ισχύει λοιπόν:

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{D}(x) \quad (3.26)$$

Επίσης, από τη σχέση (3.24) προκύπτουν και οι επικόμβιες μετατοπίσεις σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{d}(x) dx \quad (3.27)$$

Γενικά λόγω της μη απόλυτης τήρησης της συμβιβαστότητας της μεθόδου, οι μετατοπίσεις που προκύπτουν από τη σχέση (3.27) διαφέρουν από τις αρχικές επικόμβιες μετατοπίσεις \mathbf{q} και για να γίνει ταύτιση τους απαιτείται επαναληπτική διαδικασία.

Σύμφωνα με την διατύπωση αυτή, όπως γίνεται φανερό από τις σχέσεις (3.22) και (3.23) η διατήρηση της ισορροπίας γίνεται με αυστηρό τρόπο ανεξάρτητα από την κατάσταση του στοιχείου, δηλαδή το εύρος της εξάπλωσης της πλαστικοποίησης και τους νόμους των περιεχομένων υλικών. Με άλλα λόγια, για οποιαδήποτε μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού, ακόμα και αν αυτό παρουσιάζει φθίνοντα κλάδο μετά τη μέγιστη αντοχή του, οι θεωρούμενες κατανομές των δυνάμεων είναι ακριβής, όσο βέβαια δεν ασκούνται φορτία στο εσωτερικό του μέλους.

Ένα από τα πρώτα στοιχεία δυνάμεων που διατυπώθηκαν για να αντιμετωπίσουν το φαινόμενο της μη τήρησης της ισορροπίας σε περιπτώσεις που εμφανίζεται αρνητική κλίση στον καταστατικό νόμο της διατομής προτάθηκε από τους Zeris και Mahin (1988). Στη διαδικασία εύρεσης της κατάστασης στοιχείου χρησιμοποιούνται συναρτήσεις σχήματος τόσο μετακινήσεων όσο και δυνάμεων. Πιο συγκεκριμένα, αφού γίνει η εύρεση των επαυξητικών επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου $\Delta \mathbf{q}^i$ ακολουθούνται τα εξής βήματα:

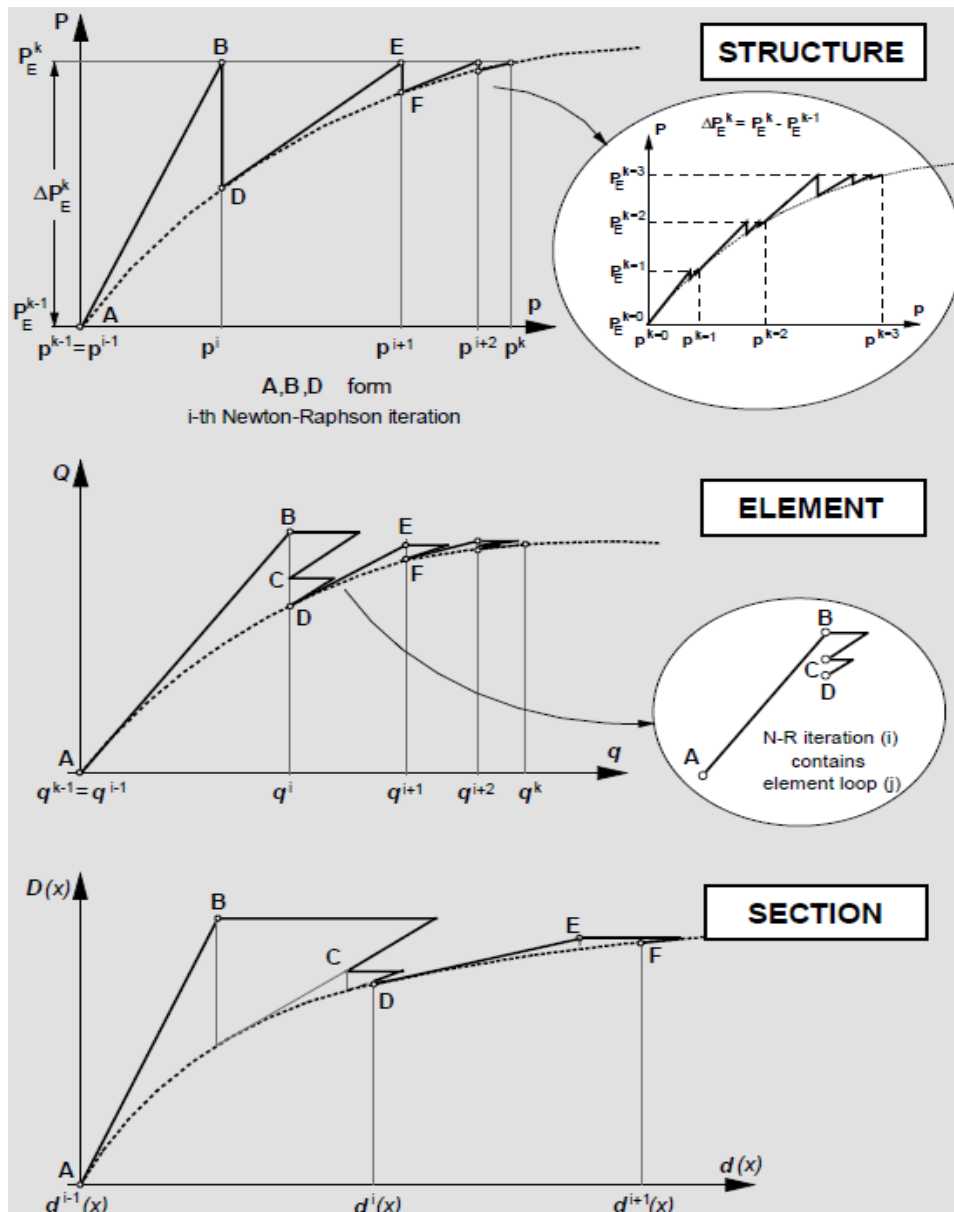
- 1) *Εύρεση των επαυξητικών παραμορφώσεων $\Delta\mathbf{d}(0)$, $\Delta\mathbf{d}(L)$ στα δύο άκρα του στοιχείου, όπου αναμένεται να φτάσουν πρώτα στην περιοχή αρνητικής δυσκαμψίας σύμφωνα με τη σχέση (3.13) για επαυξητικά μεγέθη.*
- 2) *Τα αντίστοιχα εντατικά μεγέθη $\Delta\mathbf{D}(0)$, $\Delta\mathbf{D}(L)$ υπολογίζονται σύμφωνα με τη διαδικασία διακριτοποίησης της διατομής σε ίνες (σχέσεις: (3.2), (3.3), (3.8)) και ακολουθώντας μία διαδικασία συμβάν προς συμβάν.*
- 3) *Τα εντατικά μεγέθη στις εσωτερικές διατομές ελέγχου του στοιχείου υπολογίζονται σύμφωνα με τη διατήρηση της ισορροπίας με τα μεγέθη των δύο ακραίων διατομών. (γραμμική κατανομή για τις ροπές και ημιάθροισμα των δύο ακραίων τιμών για το αξονικό φορτίο).*
- 4) *Οι επαυξητικές εσωτερικές παραμορφώσεις υπολογίζονται σύμφωνα με μία επαναληπτική διαδικασία με δεδομένα τα εντατικά μεγέθη.*
- 5) *Τέλος, υπολογίζονται οι νέες ευκαμψίες και δυσκαμψίες των διατομών και του στοιχείου, καθώς και οι νέες επικόμβιες δράσεις.*

Σύμφωνα με την παραπάνω μέθοδο ικανοποιείται η ισορροπία στο εσωτερικό του στοιχείου αλλά όχι η συμβιβαστότητα σύμφωνα με την αυστηρή έννοια. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν χρησιμοποιείται η εξίσωση (3.13) για την εύρεση των μετατοπίσεων των εσωτερικών διατομών. Επίσης, αν και το προκείμενο μοντέλο παράγει αποδοτικά αποτελέσματα δεν βασίζεται σε μία γενικευμένη θεωρία, αλλά προσπαθεί με αυθαίρετες κυρίως αλγοριθμικές ενέργειες, να αντιμετωπίσει το πρόβλημα έλλειψης ισορροπίας σε περιπτώσεις της αρνητικής δυσκαμψίας.

Ένα σημαντικό ζήτημα της μεθόδου των δυνάμεων είναι η ενσωμάτωση τους σε υπάρχοντα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων τα οποία βασίζονται στη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας. Σύμφωνα με αυτή γίνεται μόρφωση του μητρώου δυσκαμψίας και υπολογίζονται οι μετατοπίσεις για το δεδομένο επίπεδο έντασης των εξωτερικών φορτίων. Από τις δεδομένες πλέον αυτές μετατοπίσεις της κατασκευής υπολογίζονται οι επικόμβιες μετατοπίσεις του κάθε στοιχείου και ακολουθεί η εύρεση της κατάστασης του, δηλαδή της δυσκαμψίας του και των επικόμβιων παραμενουσών δράσεων του. Η διαδικασία αυτή στη μέθοδο των δυνάμεων δεν είναι τόσο άμεση όπως στη μέθοδο των μετατοπίσεων, αφού δεν είναι δυνατή η εύρεση των επικόμβιων δράσεων μέσω της ολοκλήρωσης των εντατικών μεγεθών της κάθε διατομής.

Επίσης, όταν προσδιοριστούν οι δυνάμεις που ασκούνται σε μία διατομή στο εσωτερικό του στοιχείου από τις επικόμβιες δράσεις, ακολουθεί η εύρεση της τάσης κάθε ίνας. Το πρόβλημα αυτό όμως είναι υπερστατικό για περισσότερες από δύο ίνες καθώς υπάρχουν μόνο δύο εξισώσεις ισορροπίας στην περίπτωση μονοαξονικής κάμψης. Η υπόθεση μιας κατανομής των τάσεων μέσα στη διατομή αναιρεί το πρόβλημα, ωστόσο δημιουργείται ένα ακόμα. Αυτό εγγυάται στο γεγονός ότι οι καταστατικοί νόμοι των ινών είναι διατυπωμένοι ως αποκλειστική συνάρτηση των παραμορφώσεων. Συνεπώς για δεδομένη τάση δεν μπορεί να υπολογισθεί απ' ευθείας η αντίστοιχη παραμόρφωση. Μία λύση είναι η γραμμικοποίηση της καταστατικής σχέσης της διατομής και ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων από τα τωρινά εντατικά μεγέθη και την ευκαμψία του προηγούμενου βήματος. Έτσι, με βάση τις παραμορφώσεις τις διατομής υπολογίζονται στη συνέχεια οι τάσεις και οι δυσκαμψίες των ινών από τις κανονικές σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

Αρκετές προσπάθειες έχουν γίνει για τη διατύπωση στοιχείων με βάση τις δυνάμεις που να αντιμετωπίζουν τις παραπάνω δυσκολίες. Το στοιχείο που επικράτησε προτείνοντας μια ενιαία μεθοδολογία επίλυσης και μπορεί να εισαχθεί σε υπάρχοντες κώδικες που βασίζονται στη μέθοδο της άμεσης δυσκαμψίας είναι το προσομοίωμα των Spacone et al. (1996). Κύριο πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι η εξασφάλιση τόσο της ισορροπίας όσο και της συμβιβαστότητας, ενώ η προσέγγιση εγγυάται στο γεγονός ότι γραμμικοποιείται η καταστατική σχέση της διατομής.



Σχ. 3.9: Σχηματική αναπαράσταση των σταδίων επίλυσης πλαισιωτής κατασκευής με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Η γενική εξωτερική μέθοδος επίλυσης της συνολικής κατασκευής είναι δεδομένη και μπορεί να είναι οποιαδήποτε, με πιο διαδεδομένη τη μέθοδο Newton-Raphson. Η διαδικασία τροποποιείται μόνο ως προς τον προσδιορισμό της κατάστασης του στοιχείου που πραγματοποιείται μέσω της ανάλυση της διατομής του. Τα τρία στάδια της μη γραμμικής επίλυσης μίας πλαισιωτής κατασκευής με στοιχεία δοκού που ορίζονται με βάσει τις δυνάμεις παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 3.9 ενώ τα αλγοριθμικά βήματα αναφέρονται στη συνέχεια.

Μέσα στη i -στή επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για την κατασκευή ο προσδιορισμός της κατάστασης του στοιχείου οργανώνεται ως ακολούθως:

- 1) *Εύρεση των επαυξητικών $\Delta \mathbf{q}^i$ και ανανέωση των συνολικών επικόμβιων \mathbf{q}^i μετακινήσεων του στοιχείου.*

Από την επίλυση του συνολικού γραμμικοποιημένου συστήματος της κατασκευής προκύπτει το διάνυσμα των μετακινήσεων στο καθολικό σύστημα. Οι επικόμβιες μετακινήσεις του κάθε στοιχείου λαμβάνονται μετασχηματίζοντας τις ολικές μετατοπίσεις στο τοπικό σύστημα του στοιχείου και απαλείφοντας τις κινήσεις στερεού σώματος σύμφωνα με τη σχέση (3.20). Οι συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις υπολογίζονται πλέον ως:

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i+1} + \Delta \mathbf{q} \quad (3.28)$$

Οι μετακινήσεις αυτές μένουν αμετάβλητες μέχρι το επόμενο βήμα $i+1$ της μεθόδου Newton-Raphson, εξασφαλίζοντας με αυτόν τον τρόπο την συμβιβαστικότητα στο στοιχείο.

- 2) *Εκκίνηση της επαναληπτικής διαδικασίας προσδιορισμού της κατάστασης του στοιχείου. 1^ο βήμα ($j=1$).*

- 3) *Προσδιορισμός των επαυξητικών δυνάμεων του στοιχείου.*

Οι επαυξητικές επικόμβιες δυνάμεις του στοιχείου $\Delta \mathbf{Q}^j$ υπολογίζονται με βάση τη δυσκαμψία του προηγούμενου επαναληπτικού βήματος \mathbf{K}^{j-1} .

$$\Delta \mathbf{Q}^j = \mathbf{K}^{j-1} \cdot \Delta \mathbf{q}^j \quad (3.29)$$

Όταν $j=1$ είναι $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}^{i-1}$ και $\Delta \mathbf{q}^1 = \Delta \mathbf{q}^i$ όπου η κατάσταση $i-1$ αντιστοιχεί στο τέλος της προηγούμενης επανάληψης Newton-Raphson. Για $j>1$ το διάνυσμα $\Delta \mathbf{q}^j$ είναι οι υπολειμματικές παραμορφώσεις όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια.

- 4) *Ανανέωση των ολικών επικόμβιων δυνάμεων.*

$$\mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}^{i+1} + \Delta \mathbf{Q} \quad (3.30)$$

Όταν $j=1$ είναι $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{Q}^{i-1}$ όπου η κατάσταση $i-1$ αντιστοιχεί στο τέλος της προηγούμενης επανάληψης Newton-Raphson.

5) Προσδιορισμός των εντατικών μεγεθών όλων των διατομών ελέγχου του στοιχείου.

Οι επαυξητικές δυνάμεις στον άξονα αναφοράς της διατομής $\Delta \mathbf{D}^j(x)$ υπολογίζονται από τις συναρτήσεις σχήματος δυνάμεων $\mathbf{b}(x)$. Στη συνέχεια ανανεώνονται και οι συνολικές δυνάμεις της διατομής $\mathbf{D}^j(x)$.

$$\Delta \mathbf{D}^j(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q}^j \quad (3.31)$$

$$\mathbf{D}^j(x) = \mathbf{D}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^j(x) \quad (3.32)$$

6) Υπολογισμός των παραμορφώσεων της διατομής.

Αρχικά υπολογίζονται οι επαυξητικές παραμορφώσεις της διατομής $\Delta \mathbf{d}^j(x)$. Αυτές προκύπτουν από τις παραμορφώσεις που οφείλονται στις επαυξητικές δυνάμεις $\Delta \mathbf{D}^j(x)$ μέσω της ευκαμψίας του προηγούμενου βήματος $\mathbf{f}^{j-1}(x)$, προσθέτοντας επίσης τις παραμένουσες παραμορφώσεις της διατομής του προηγούμενου βήματος $\mathbf{r}^{j-1}(x)$. Στην πρώτη επανάληψη δεν υπάρχουν παραμένουσες παραμορφώσεις ($\mathbf{r}^0(x) = 0$), καθώς θεωρείται στο τέλος κάθε επανάληψης Newton-Raphson οι παραμένουσες παραμορφώσεις σε όλες τις διατομές έχουν εξαλειφθεί, ικανοποιώντας με αυτόν τον τρόπο τη συμβιβαστικότητα. Ο υπολογισμός τους περιγράφεται στο βήμα (12) παρακάτω.

$$\Delta \mathbf{d}^j(x) = \mathbf{r}^{j-1}(x) + \mathbf{f}^{j-1}(x) \cdot \Delta \mathbf{D}^j(x) \quad (3.33)$$

Επίσης, ανανεώνονται οι συνολικές παραμορφώσεις του τωρινού βήματος.

$$\mathbf{d}^j(x) = \mathbf{d}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{d}^j(x) \quad (3.34)$$

7) Υπολογισμός των παραμορφώσεων των ινών της διατομής.

Αρχικά υπολογίζονται οι επαυξητικές παραμορφώσεις σε κάθε ίνα και στη συνέχεια ανανεώνεται το διάνυσμα των ολικών παραμορφώσεων του τωρινού βήματος.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j(x) = \mathbf{I}(x, y, z) \cdot \Delta \mathbf{d}^j(x) \quad (3.35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(x) = \boldsymbol{\varepsilon}^{j-1}(x) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^j(x) \quad (3.36)$$

8) Υπολογισμός της ορθής τάσης κάθε ίνας και του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας σύμφωνα με τον αντίστοιχο νόμο τάσεων παραμορφώσεων.

9) Υπολογισμός του νέου εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας της διατομής από τη συμβολή της κάθε ίνας σύμφωνα με τη σχέση (3.7).

Έχοντας υπολογίσει το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας $\mathbf{k}^j(x)$ της διατομής στη συνέχεια υπολογίζεται και το μητρώο ευκαμψίας $\mathbf{f}^j(x)$ με απλή αντιστροφή σύμφωνα με τη σχέση (3.10).

10) Προσδιορισμός των εσωτερικών αντιδράσεων της διατομής.

Τα εντατικά μεγέθη της διατομής που οφείλονται στο συγκεκριμένο επίπεδο παραμόρφωσης $\mathbf{D}_R^j(x)$ υπολογίζονται σύμφωνα με την άθροιση της συνεισφοράς των ινών από τη σχέση (3.8).

11) Υπολογισμός των μη ισορροπούμενων δυνάμεων της διατομής.

Οι μη ισορροπούμενες δυνάμεις υπολογίζονται ως η διαφορά μεταξύ των δυνάμεων που ασκούνται στη διατομή $\mathbf{D}^j(x)$ και των εσωτερικών αντιδράσεων της $\mathbf{D}_R^j(x)$.

$$\mathbf{D}_U^j(x) = \mathbf{D}^j(x) - \mathbf{D}_R^j(x) \quad (3.37)$$

12) Υπολογισμός των παραμενουσών παραμορφώσεων της διατομής.

Οι μη ισορροπούμενες δυνάμεις της διατομής και η ευκαμψία της του τρέχοντος βήματος δίνουν τις παραμένουσες παραμορφώσεις της.

$$\mathbf{r}^j(x) = \mathbf{f}^j(x) \cdot \mathbf{D}_U^j(x) \quad (3.38)$$

13) Προσδιορισμός των μητρώων ευκαμψίας και δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού.

Υπολογίζεται πρώτα το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου \mathbf{F}^j σύμφωνα με τη σχέση (3.25) και στη συνέχεια αντιστρέφεται για να υπολογιστεί το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου $\mathbf{K}^j = [\mathbf{F}^j]^{-1}$.

14) Έλεγχος αριθμητικής σύγκλισης του στοιχείου.

Στην περίπτωση που σε όλες τις διατομές του στοιχείου οι μη ισορροπούμενες δυνάμεις είναι μικρότερες από ένα επίπεδο ανοχής, το στοιχείο θεωρείται ότι έχει συγκλίνει. Τότε οι επικόμβιες δράσεις και το μητρώο δυσκαμψίας του τελευταίου βήματος θεωρούνται

ακριβή και τροφοδοτούνται στον εξωτερικό βρόχο του αλγορίθμου επίλυσης της κατασκευής. Τίθεται δηλαδή $\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}^j$ και $\mathbf{K}^j = \mathbf{K}^j$ και η διαδικασία συνεχίζεται στο βήμα (15).

Αν πάλι κάποιες από τις διατομές δεν έχουν συγκλίνει, οι υπολειπόμενες παραμορφώσεις των διατομών ολοκληρώνονται και δίνουν τις συνολικές επικόμβιες μη ισορροπούμενες παραμορφώσεις του στοιχείου σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{s}^j(x) = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{r}^j(x) dx \quad (3.39)$$

Σε αυτό το σημείο γίνεται μετάβαση στην επόμενη επανάληψη και ο δείκτης j γίνεται $j+1$. Ως νέες επαυξητικές μετακινήσεις του στοιχείου ορίζονται οι μη ισορροπούμενες και τα βήματα (3) έως (14) επαναλαμβάνονται μέχρι να επέλθει σύγκλιση.

$$\Delta \mathbf{q}^{j+1} = -\mathbf{s}^j \quad (3.40)$$

15) Υπολογισμός του συνολικού διανύσματος των εσωτερικών επικόμβιων δράσεων του στοιχείου και του ανανεωμένου εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας του.

Το βήμα αυτό δεν σχετίζεται με την εύρεση κατάστασης του στοιχείου αλλά ανήκει στη γενική εξωτερική μεθοδολογία επίλυσης της κατασκευής. Από κάθε στοιχείο έχουν υπολογιστεί με τη μέθοδο των δυνάμεων οι επικόμβιες δράσεις και το μητρώο δυσκαμψίας και απλά γίνεται συγκέντρωση τους στο τελικό διάνυσμα και μητρώο του όλου φορέα αντίστοιχα.

Στη συνέχεια διατυπώθηκε ένα νέο προσομοίωμα με βάσει τις δυνάμεις από τους Neuenhofer και Filippou όπου δεν απαιτούνται επαναλήψεις για το στοιχείο μέσα σε κάθε επανάληψη Newton-Raphson αλλά οι μη ισορροπούμενες δυνάμεις του στοιχείου προστίθενται στις συνολικές επικόμβιες δυνάμεις της επόμενης επανάληψης. Συνεπώς, όλο το σύστημα συγκλίνει μαζί με το πέρας των ολικών επαναλήψεων και δεν απαιτείται σταδιακή σύγκλιση (πρώτα το στοιχείο και μετά όλη η κατασκευή). Τα βήματα της μεθόδου αυτής για μία τυπική i επανάληψη Newton-Raphson αναφέρονται παρακάτω.

1) *Εύρεση των επαυξητικών $\Delta \mathbf{q}^i$ μετακινήσεων του στοιχείου.*

Οι μετακινήσεις αυτές προκύπτουν από την επίλυση του γραμμικοποιημένου συστήματος της κατασκευής και έπειτα από μετατροπή στο τοπικό σύστημα του στοιχείου και την αφαίρεση των βαθμών ελευθερίας που αφορούν κίνηση στερεού σώματος.

- 2) Προσδιορισμός των επικόμβιων επαυξητικών δυνάμεων $\Delta \mathbf{Q}^i$.

Οι επαυξητικές δυνάμεις υπολογίζονται από τις επαυξητικές μετακινήσεις και την δυσκαμψία του στοιχείου από την προηγούμενη επανάληψη.

$$\Delta \mathbf{Q}^i = \mathbf{K}^{i-1} \cdot \Delta \mathbf{q} \quad (3.41)$$

- 3) Υπολογισμός των επαυξητικών δράσεων στις διατομές ελέγχου.

$$\Delta \mathbf{D}^i(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q}^i + \tilde{\mathbf{D}}^{i-1} \quad (3.42)$$

Όπου το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{D}}^{i-1}(x)$ περιλαμβάνει τις μη ισορροπούμενες δυνάμεις της διατομής από την προηγούμενη επανάληψη Newton-Raphson και υπολογίζεται στο βήμα (14).

- 4) Υπολογισμός των επαυξητικών και των ολικών παραμορφώσεων της διατομής.

Αυτές υπολογίζονται από τις επαυξητικές δυνάμεις της διατομής και την ευκαμψία της από την προηγούμενη επανάληψη.

$$\Delta \mathbf{d}^i(x) = \mathbf{f}^{i-1}(x) \cdot \Delta \mathbf{D}^i(x) \quad (3.43)$$

$$\mathbf{d}^i(x) = \mathbf{d}^{i-1}(x) + \Delta \mathbf{d}^i(x) \quad (3.44)$$

- 5) Υπολογισμός των παραμορφώσεων των ινών της διατομής.

Υπολογίζονται οι ολικές παραμορφώσεις σε κάθε ίνα σύμφωνα με τη σχέση:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(x) = \mathbf{l}(x, y, z) \cdot \mathbf{d}^i(x) \quad (3.45)$$

- 6) Υπολογισμός της ορθής τάσης κάθε ίνας και του εφαπτομενικού μέτρου ελαστικότητας σύμφωνα με τον αντίστοιχο νόμο τάσεων παραμορφώσεων.

- 7) Υπολογισμός του νέου εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας της διατομής από τη συμβολή της κάθε ίνας σύμφωνα με τη σχέση (3.7).

Έχοντας υπολογίσει το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας $\mathbf{k}^i(x)$ της διατομής στη συνέχεια υπολογίζεται και το μητρώο ευκαμψίας $\mathbf{f}^i(x)$ με απλή αντιστροφή σύμφωνα με τη σχέση (3.10).

8) Προσδιορισμός των εσωτερικών αντιδράσεων της διατομής.

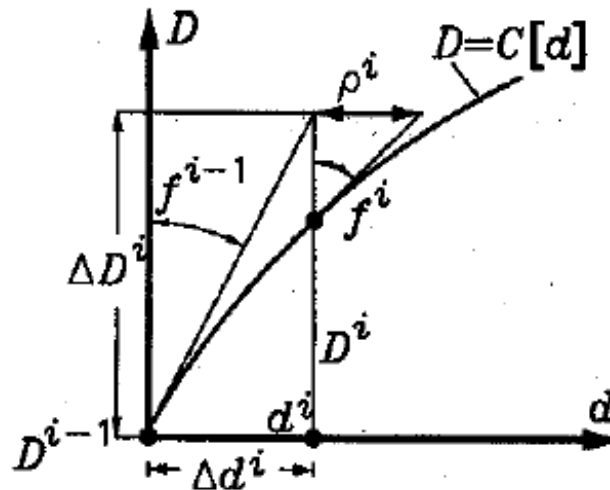
Τα εντατικά μεγέθη της διατομής που οφείλονται στο συγκεκριμένο επίπεδο παραμόρφωσης $\mathbf{D}^i(x)$ υπολογίζονται σύμφωνα με την άθροιση της συνεισφοράς των ιών από τη σχέση (3.8).

9) Υπολογισμός των μη ισορροπούμενων παραμορφώσεων της διατομής.

Οι μη ισορροπούμενες παραμορφώσεις οφείλονται στην μη τήρηση της ισορροπίας από τις δυνάμεις της διατομής $\mathbf{D}^i(x)$ και υπολογίζονται με την τρέχουσα ευκαμψία της διατομής.

$$\boldsymbol{\rho}^i = \mathbf{f}^i(x) \cdot (\mathbf{D}^{i-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^i(x) - \mathbf{D}^i(x)) \quad (3.46)$$

Σχηματικά ο υπολογισμός τους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχ. 3.10: Παραμένουσες παραμορφώσεις της διατομής.

10) Προσδιορισμός των μητρώων ευκαμψίας και δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού.

Υπολογίζεται πρώτα το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου \mathbf{F}^i σύμφωνα με τη σχέση (3.25) και στη συνέχεια αντιστρέφεται για να υπολογιστεί το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου $\mathbf{K}^i = [\mathbf{F}^i]^{-1}$

11) Υπολογίζονται οι παραμένουσες μετακινήσεις του στοιχείου δοκού.

$$\mathbf{s}^i(x) = \int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \boldsymbol{\rho}^i(x) dx \quad (3.47)$$

12) Υπολογίζονται οι παραμένουσες επικόμβιες δυνάμεις του στοιχείου.

Οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται από τις παραμένουσες μετακινήσεις του στοιχείου και την τρέχουσα δυσκαμψία του.

$$\mathbf{Q}_R^i = \mathbf{K}^i \cdot \mathbf{s}^i \quad (3.48)$$

13) Εύρεση των συνολικών επικόμβιων δράσεων του στοιχείου.

Οι συνολικές αυτές δράσεις προκύπτουν αν αφαιρεθούν οι μη ισορροπούμενες επικόμβιες δυνάμεις.

$$\mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}^{i-1} + \Delta \mathbf{Q}^i - \mathbf{Q}_R^i \quad (3.49)$$

14) Υπολογισμός των μη ισορροπούμενων δυνάμεων της διατομής.

Οι εσωτερικές δυνάμεις που υπολογίστηκαν στο βήμα (8) δεν βρίσκονται σε ισορροπία με αυτές που προκύπτουν αν γίνει παρεμβολή στο εσωτερικό του στοιχείου των νέων επικόμβιων δυνάμεων που υπολογίστηκαν στο βήμα (13). Συνεπώς οι μη ισορροπούμενες δράσεις υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\tilde{\mathbf{D}}^i(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{Q}(x) - \mathbf{D}^i(x) \quad (3.50)$$

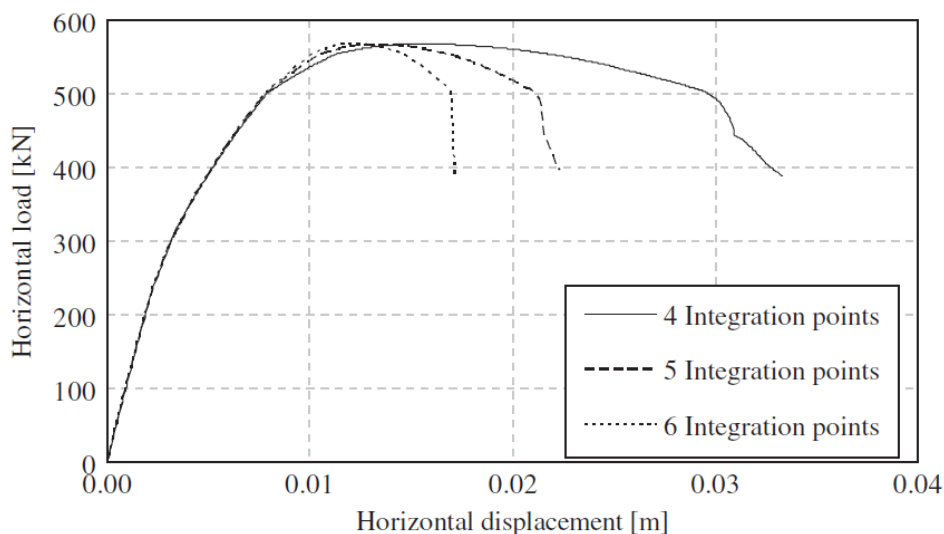
Οι μη ισορροπούμενες δυνάμεις αυτές πρέπει να διορθωθούν στην επόμενη ολική επανάληψη σύμφωνα με τη σχέση (3.42).

Η διαφορά αυτής της μεθόδου από την προηγούμενη αποτυπώνεται στη σχέση (3.49). Με την τροποποίηση των επικόμβιων δυνάμεων μέσα στην ολική επανάληψη με τον όρο των υπολειπόμενων δυνάμεων $-\mathbf{Q}_R^i$ επανακαθίσταται η συμβιβαστικότητα και η επαναληπτική διαδικασία σε επίπεδο στοιχείου είναι περιττή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μοντέλα, η απόλυτη ικανοποίηση της ισορροπίας στο εσωτερικό του στοιχείου δεν προσθέτει σφάλμα και επομένως δεν απαιτείται επιμέρους διακριτοποίηση του στοιχείου όπως στην περίπτωση της μεθόδου των μετακινήσεων. Συνεπώς ένα μόνο στοιχείο δοκού δεν είναι αρκετό για την προσομοίωση του δομικού μέλους, διατηρώντας με αυτόν τον τρόπο στο ελάχιστο τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής.

Μειονέκτημα των στοιχείων δυνάμεων, κοινό και στα στοιχεία μετατοπίσεων, είναι η έλλειψη της αντικειμενικότητας σε περιπτώσεις που ο νόμος του υλικού παρουσιάζει φθιτό

κλάδο μετά τη μέγιστη αντοχή. Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση του στοιχείου εξαρτάται αρκετά από τα χαρακτηριστικά διακριτοποίησης, όπως από τον αριθμό των διατομών ελέγχου και το μήκος αναφοράς που τους αντιστοιχεί. Συγκεκριμένα, επειδή οι μεγάλες παραμορφώσεις συγκεντρώνονται σε μία διατομή ελέγχου κυρίως, η συνολική απόκριση του στοιχείου εξαρτάται από το βάρος του σημείου ολοκλήρωσης που προέρχεται από τον αριθμητικό κανόνα. Στην περίπτωση νόμου υλικού με κράτυνση, το στοιχείο συγκλίνει σε μοναδική λύση με την αύξηση των σημείων ολοκλήρωσης. Όταν, όμως, υπάρχει φθίνων κλάδος η συγκέντρωση αυτή της παραμόρφωσης σε μία διατομή ελέγχου αναιρεί τη μοναδική λύση. Συνεπώς, οι συνολικές επικόμβιες μετατοπίσεις και δυνάμεις εξαρτώνται από τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης, προκαλώντας έτσι μη αντικειμενική συμπεριφορά. Στο σχήμα 3.11 είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης το μήκος του στοιχείου που ελέγχει το πρώτο σημείο ολοκλήρωσης μειώνεται και συνεπώς αυξημένες καμπυλότητες χρειάζονται για να επιτευχθεί η ίδια οριζόντια μετακίνηση κορυφής. Επομένως η αντοχή του στοιχείου μειώνεται γρήγορα, καθώς η αρνητική δυσκαμψία της πρώτης διατομής αυξάνεται με αυξανόμενο ρυθμό.



Σχ. 3.11: Μη αντικειμενική συμπεριφορά στοιχείου δυνάμεων.

Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα της μη αντικειμενικότητας πρέπει το μήκος που αντιστοιχεί στη διατομή ελέγχου στα άκρα να παραμένει σταθερό και να είναι ίσο με το θεωρητικό μήκος της πλαστικής άρθρωσης. Η ιδέα αυτή εφαρμόστηκε από τους Scott και Fenves (2006) οι οποίοι πρότειναν ένα στοιχείο δυνάμεων με σταθερό μήκος πλαστικών αρθρώσεων στα δύο άκρα (L_{pl}, L_{pl}) υπολογιζόμενο από γνωστές σχέσεις, ενώ το ενδιάμεσο

τμήμα να παραμένει γραμμικώς ελαστικό. Η εξίσωση συμβιβαστότητας που συνδέει τις εσωτερικές παραμορφώσεις με τις επικόμβιες μετακινήσεις γράφεται στην εξής μορφή:

$$\mathbf{q} = \int_0^{L_{pl}} \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{d}(x) dx + \int_{L_{pl}}^{L-L_{pl}} \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{d}(x) dx + \int_{L-L_{pl}}^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{d}(x) dx \quad (3.51)$$

Η παραπάνω σχέση για να ολοκληρωθεί αριθμητικά γράφεται στη μορφή:

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{d}(x) \Big|_{x=\xi_i} \right) \cdot w_i + \mathbf{F}_{int}^e \cdot \mathbf{Q} \quad (3.52)$$

Όπου ξ_i και w_i είναι οι θέσεις και τα αντίστοιχα βάρη των N_p σημείων ολοκλήρωσης στην περιοχή των πλαστικών αρθρώσεων. Το μητρώο ευκαμψίας του ελαστικού, εσωτερικού τμήματος του στοιχείου \mathbf{F}_{int}^e υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathbf{F}_{int}^e = \int_{L_{pl}}^{L-L_{pl}} \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{b}(x) dx \quad (3.53)$$

Όπου $\mathbf{f}^e(x)$ είναι η ελαστική ευκαμψία μίας διατομής στη θέση x στο εσωτερικό του μεσαίου ελαστικού τμήματος. Παρομοίως με τη σχέση (3.52) υπολογίζεται και το μητρώο ευκαμψίας του στοιχείου σύμφωνα με τη σχέση:

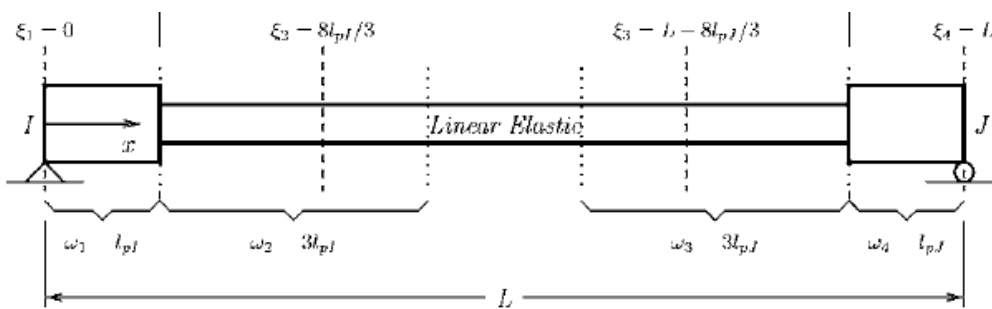
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) \Big|_{x=\xi_i} \right) \cdot w_i + \mathbf{F}_{int}^e \quad (3.54)$$

Η αντιμετώπιση της μη αντικειμενικότητας γίνεται με εφαρμογή κατάλληλης μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης που να ικανοποιεί τα εξής κριτήρια:

- 1) Να περιλαμβάνει διατομές ελέγχου στα δύο άκρα του στοιχείου όπου τα εντατικά μεγέθη ροπών αναμένεται να έχουν τη μέγιστη τιμή τους.
- 2) Να ολοκληρώνει με ακρίβεια δευτεροβάθμιες συναρτήσεις, έτσι ώστε να αποτυπώνεται με ακρίβεια η γραμμική κατανομή της καμπυλότητας.

- 3) Να ολοκληρώνει τις παραμορφώσεις στις περιοχές των πλαστικών αρθρώσεων με μία διατομή ελέγχου σε αυτές έτσι ώστε τα βάρη w_i που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.52) και (3.54) να συμπίπτουν με το μήκος πλαστικών αρθρώσεων.

Προκειμένου να ικανοποιήσουν τις παραπάνω απαιτήσεις οι Scott και Fenves κατέληξαν στην τροποποιημένη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss-Radau δύο σημείων για κάθε πλαστική περιοχή (Σχήμα 3.12). Οι θέσεις των σημείων ολοκλήρωσης είναι $\xi = \left[0, \frac{8}{3}L_{pI}, L - \frac{8}{3}L_{pJ}, L \right]$, ενώ τα αντίστοιχα βάρη τους είναι $\left[L_{pI}, 3L_{pI}, 3L_{pJ}, L_{pJ} \right]$.



Σχ. 3.12: Στοιχείο δυνάμεων Scott και Fenves με θεώρηση πλαστικών αρθρώσεων και αριθμητική ολοκλήρωση Gauss-Radau.

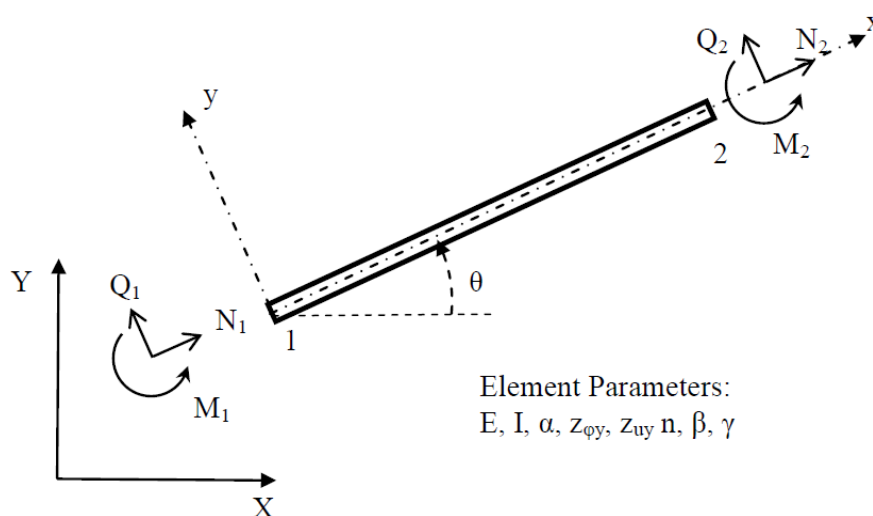
Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η μη-γραμμική συμπεριφορά των πλαστικών αρθρώσεων ελέγχεται από τις δύο ακραίες διατομές ελέγχου, ενώ οι δύο εσωτερικές βρίσκονται στην περιοχή του γραμμικώς ελαστικού στοιχείου. Συνεπώς για τον υπολογισμό του ελαστικού μητρώου ευκαμψίας του εσωτερικού τμήματος του στοιχείου η σχέση (3.53) μετατρέπεται στην ακόλουθη:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}^e = \left(\mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^e(x) \cdot \mathbf{b}(x) \Big|_{x=\frac{8}{3}L_{pI}} \right) \cdot 3L_{pI} + \int_{4L_{pI}}^{L-4L_{pJ}} \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{b}(x) dx + \left(\mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^e(x) \cdot \mathbf{b}(x) \Big|_{x=\frac{8}{3}L_{pJ}} \right) \cdot 3L_{pJ} \quad (3.55)$$

3.4 Υστερητικό στοιχείο δοκού

Το στοιχείο αυτό προτάθηκε από τους Triantafyllou και Koumouisis (2011) και εισάγει την υστέρηση κατά Bouc-Wen στην κλασική διατύπωση των πεπερασμένων στοιχείων. Συνεπώς η μη-γραμμικότητα του υλικού γίνεται με υστερητικό μοντέλο σε επίπεδο όμως καταστατικών σχέσεων του υλικού και όχι μέσω μη-γραμμικών ελατηρίων. Γενικά το προσομοίωμα αυτά μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στα στοιχεία συγκεντρωμένης πλαστικότητας καθώς ελέγχει τις ακραίες διατομές του στοιχείου μέσω των υστερητικών συναρτήσεων. Εισάγονται, λοιπόν, νέοι υστερητικοί βαθμοί ελευθερίας οι οποίοι υπόκεινται στις εξελικτικές εξισώσεις τύπου Bouc-Wen. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας θεωρούνται ως υστερητικές καμπυλότητες και υστερητικές αξονικές παραμορφώσεις. Με βάση την αρχή των δυνατών έργων παράγεται μία σχέση για τα ελαστοπλαστικά υστερητικά μητρώα ακαμψίας, η οποία μαζί με τις εξελικτικές εξισώσεις αρκούν για να περιγράψουν πλήρως τη συμπεριφορά του στοιχείου. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο άμεσης δυσκαμψίας μορφώνονται το μητρώο μάζας και το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής, καθώς και μέρος του μητρώου ακαμψίας και του υστερητικού μητρώου και τέλος μορφώνονται οι εξισώσεις κίνησης. Το σύστημα των εξισώσεων, δηλαδή οι γραμμικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδο κατασκευής και οι μη γραμμικές υστερητικές εξισώσεις σε επίπεδο στοιχείου, έρχεται σε μορφή χώρου κατάστασης (state space form) για να επιλυθεί ταυτόχρονα. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η γραμμικοποίηση των εξισώσεων στο καθολικό επίπεδο της κατασκευής.

3.4.1 Ανάπτυξη καταστατικών σχέσεων.



Σχ. 3.13: Υστερητικό στοιχείο δοκού.

Οι επικόμβιες δυνάμεις του πρισματικού στοιχείου δοκού, το οποίο είναι μέρος μιας πλαισιωτής κατασκευής φαίνονται στο σχήμα 3.13.

Η ανελαστικές σχέση ροπών-καμπυλοτήτων και αξονικών δυνάμεων-ορθών παραμορφώσεων σε μία διατομή σε απόσταση x από το άκρο, ακολουθεί τον παρακάτω νόμο σύμφωνα με το παράλληλο προσομοίωμα του Bouc-Wen.

$$M(x,t) = \alpha_b EI \varphi(x,t) + (1 - \alpha_b) EI z_b(x,t) \quad (3.56)$$

$$N(x,t) = \alpha_u EA \varepsilon(x,t) + (1 - \alpha_u) EA z_u(x,t) \quad (3.57)$$

Όπου $M(x,t)$ είναι η εσωτερική ροπή, φ η καμπυλότητα, ε η αξονική παραμόρφωση E και I το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της διατομής αντίστοιχα, A είναι το εμβαδόν της διατομής, $z_b(x,t)$ το υστερητικό κομμάτι της καμπυλότητας και $z_u(x,t)$ το υστερητικό κομμάτι της αξονικής παραμόρφωσης. Η παράμετροι μετελαστικής προς ελαστικής δυσκαμψίας α_b και α_u εξαρτώνται από το υλικό της κατασκευής και μπορούν να προσδιορισθούν μετά από κατάλληλες δοκιμές. Επίσης αν δεν υπάρχουν λεπτομερείς πληροφορίες για αυτές τις παραμέτρους, τότε μπορούν να πάρουν την ίδια τιμή. Αν τεθούν ίσες με τη μονάδα τότε το στοιχείο θα συμπεριφερθεί ελαστικά και δεν θα ληφθεί υπόψη η υστερητική συμπεριφορά.

Τα υστερητικά μεγέθη δίνονται μέσω των ακόλουθων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{z}_b(x,t) = \dot{\varphi} \left[1 - \left| \frac{z_b}{\varphi} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_b \dot{\varphi})) \right] \quad (3.58)$$

$$\dot{z}_u(x,t) = \dot{\varepsilon} \left[1 - \left| \frac{z_u}{\varepsilon} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z_u \dot{\varepsilon})) \right] \quad (3.59)$$

Η καμπυλότητα και η αξονική παραμόρφωση των σχέσεων (3.56) και (3.57) είναι τα πραγματικά μεγέθη που εμφανίζονται στην απόκριση του στοιχείου και συνεπώς εκφράζονται μέσω των συναρτήσεων σχήματος παραμορφώσεων με τις επικόμβιες μετατοπίσεις.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{q} \quad (3.60)$$

Αντίθετα τα υστερητικά μεγέθη στο εσωτερικό του στοιχείου δεν έχουν φυσικό νόημα και για να προσδιοριστούν πρέπει να στηριχθούν σε ισορροπία. Θεωρώντας μόνο την ύπαρξη ροπής και αξονικής δύναμης σε κάθε άκρο του στοιχείου, η ροπή και αξονική στη θέση x στο εσωτερικό του στοιχείου δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} N(x,t) \\ M(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση αντικατασταθούν οι σχέσεις (3.56) και (3.57) προκύπτει για τις υστερητικές καμπυλότητες και αξονικές η ίδια σχέση.

$$\begin{bmatrix} z_u(x,t) \\ z_b(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_u^1 \\ z_u^2 \\ z_b^1 \\ z_b^2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

3.4.2 Βασικές σχέσεις επίλυσης

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχή των δυνατών έργων και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.56) και (3.57) ύστερα από υπολογισμούς προκύπτει η ακόλουθη θεμελιώδης μητρική σχέση του στοιχείου:

$$\{Q\} = [K_{el}] \{q\} + [K_h] \{z\} \quad (3.63)$$

Όπου $[K_{el}]$ είναι ο ελαστικός όρος της δυσκαμψίας με τους συντελεστές απομειώσεις α , ενώ $[K_h]$ είναι ο υστερητικός όρος με τους συντελεστές $(1-\alpha)$. Το διάνυσμα $\{z\} = \{z_u^1, z_u^2, z_b^1, z_b^2\}$ αφορά της υστερητικές παραμορφώσεις στα δύο άκρα του στοιχείου. Τα παραπάνω δύο μητρώα δίνονται από τους εξής τύπους:

$$[K_{el}] = \begin{bmatrix} \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12a_b EI}{L^3} & \frac{6a_b EI}{L^2} & 0 & -\frac{12a_b EI}{L^3} & \frac{6a_b EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6a_b EI}{L^2} & \frac{4a_b EI}{L} & 0 & -\frac{6a_b EI}{L^2} & \frac{2a_b EI}{L} \\ -\frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 & \frac{a_u EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12a_b EI}{L^3} & -\frac{6a_b EI}{L^2} & 0 & \frac{12a_b EI}{L^3} & -\frac{6a_b EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6a_b EI}{L^2} & \frac{2a_b EI}{L} & 0 & -\frac{6a_b EI}{L^2} & \frac{4a_b EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$[K_h] = \begin{bmatrix} \frac{-(1-a_u)EA}{2} & \frac{-(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(1-a_b)EI}{L} & \frac{(1-a_b)EI}{L} \\ 0 & 0 & -(1-a_b)EI & 0 \\ \frac{-(1-a_u)EA}{2} & \frac{-(1-a_u)EA}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-a_b)EI}{L} & -\frac{(1-a_b)EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -(1-a_b)EI \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Οι υστερητικές εξισώσεις των σχέσεων περιγράφουν επαρκώς τη μη γραμμική συμπεριφορά του στοιχείου δοκού. Επίσης οι υστερητικές εξισώσεις βασίζονται στις ταχύτητες των παραμορφώσεων των κόμβων του κάθε στοιχείου και έτσι αντιμετωπίζονται ξεχωριστά και παράλληλα σε επίπεδο στοιχείου για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα επικόμβιων ταχυτήτων. Αυτό είναι και ένα σημαντικό βήμα στην ενσωμάτωση των εξισώσεων των υστερητικών προσομοιωμάτων στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι η μεθοδολογία που αναφέρθηκε μπορεί να εφαρμοσθεί με οποιοδήποτε ομαλό υστερητικό προσομοίωμα. Αυτό συμβαίνει γιατί η επιλογή του προσομοιώματος δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κίνησης αφού οι υστερητικές εξισώσεις εισάγονται σε επίπεδο στοιχείου.

3.4.3 Εξισώσεις κίνησης

Η δυναμική εξίσωση κίνησης ενός πολυβάθμιου συστήματος, έπειτα από τον διαχωρισμό της μειωμένης ελαστικής και της υστερητικής δυσκαμψίας, είναι:

$$[M]_s \{\ddot{U}\} + [C]_s \{\dot{U}\} + [K_{el}]_s \{U\} + [K_h]_s \{Z\} = \{P(t)\} \quad (3.66)$$

Όπου $[M]_s$ είναι το μητρώο μάζας, $[C]_s$ είναι το μητρώο απόσβεσης και $[K_{el}]_s$ είναι το μητρώο μειωμένης ελαστικής δυσκαμψίας. Τα παραπάνω μητρώα είναι τετραγωνικά με διαστάσεις $(n_f \times n_f)$, όπου n_f είναι οι συνολικοί βαθμοί ελευθερίας του συστήματος. $[K_h]_s$ είναι το υστερητικό μητρώο της κατασκευής το οποίο είναι ορθογωνικό διαστάσεων $(n_f \times 4n_{el})$ όπου n_{el} είναι το πλήθος των στοιχείων. Ακόμα $\{P(t)\}$ είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων με $(n_f \times 1)$ στοιχεία. Τέλος τα διανύσματα $\{U\}$ και $\{Z\}$ έχουν διαστάσεις $(n_f \times 1)$ και $(4n_{el} \times 1)$ αντίστοιχα.

Η δυναμική εξίσωση κίνησης (3.66) μπορεί να γραφτεί σε μορφή χώρου κατάστασης (state-space form) ως $2n_f$ μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

$$\{\dot{x}\} = G(\{x\}) + \{P(t)\} \quad (3.67)$$

Όπου το διάνυσμα $\{x\}$ ορίζεται ως:

$$\{x\}^T = [\{U\}^T \quad \{\dot{U}\}^T \quad \{Z\}^T] \quad (3.68)$$

και το μητρώο $G(\{x\})$ ορίζεται ως:

$$G(\{x\}) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ [M]^{-1}[K_{el}] & [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K_h] \\ 0 & \gamma(\{\dot{U}\}, \{Z\}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Όπου $\gamma(\{\dot{U}\}, \{Z\})$ περιέχει τις μη-γραμμικές υστερητικές εξισώσεις του Bouc-Wen.

3.5 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφησαν όλα τα σημαντικότερα μη-γραμμικά προσομοιώματα δοκού για την ανελαστική ανάλυση πλαισιωτών κατασκευών. Η αναφορά τους έγινε με χρονολογική σειρά, ενώ η γεωμετρική μη-γραμμικότητα παραλείφθηκε σε όλες τις περιπτώσεις, καθώς μπορεί να περιγραφεί με τον ίδιο ενιαίο τρόπο σε κάθε μοντέλο.

Η χρήση, τέτοιων προσομοιωμάτων είναι πολύ σημαντική στην αντισεισμική μηχανική όπου η ρεαλιστική ενσωμάτωση της ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς καθορίζει τη συνολική απόκριση της κατασκευής. Ο συμβιβασμός που γίνεται είναι σε επίπεδο παράλειψης τοπικών φαινομένων που δέχεται κάθε τοπικό μέλος ανάλογα με το υλικό του. Η ενσωμάτωση τους αυξάνει υπερβολικά το υπολογιστικό κόστος και ξεφεύγει από τους σκοπούς μίας δυναμικής ανάλυσης μίας υπαρκτής κατασκευής.

Τα πλεονεκτήματα της προσομοίωσης ινών να περιγράφει τη συμπεριφορά της διατομής με ακρίβεια, λόγω της ενσωμάτωσης στην ανάλυση όλων των περιεχομένων υλικών και των καταστατικών ιδιοτήτων τους, την έχει καταστήσει ως την καταλληλότερη στην ανελαστική προσομοίωση δοκών και υποστυλωμάτων. Επίσης, ο συνδυασμός της με τα στοιχεία με βάση τις δυνάμεις, που εξασφαλίζουν ακρίβεια με λιγότερους εισαγόμενους βαθμούς ελευθερίας, τα τοποθετούν στην αιχμή της επιστημονικής έρευνας.

Πολύ πρόσφατα, το υστερητικό προσομοίωμα δοκού έχει αναδείξει σημαντικά πλεονεκτήματα σχετικά με το κλασικό πεπερασμένο στοιχείο δοκού, λόγω της ενσωμάτωσης της μη-γραμμικότητας υλικού σε επίπεδο στοιχείου. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να επεκταθεί αυτή η λογική και στα στοιχεία ινών. Λόγω της απλότητας του, επιλέγεται το στοιχείο ινών με βάση τις μετακινήσεις και η πορεία ενσωμάτωσης του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

4 Κεφάλαιο

Ανάπτυξη Υστερητικού Προσομοιώματος Ινών

4.1 Γενικά Στοιχεία

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφησαν τα σημαντικότερα προσομοιώματα για την ανελαστική ανάλυση πλαισιωτών φορέων. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα στοιχεία ινών που προσφέρουν ρεαλιστική περιγραφή της διατομής του στοιχείου, περιορίζοντας το υπολογιστικό κόστος σε λογικά πλαίσια. Επίσης, η περιγραφή των καταστατικών σχέσεων των υλικών σε επίπεδο τάσεων παραμορφώσεων συντελεί στη γενικότητα αυτών των προσομοιωμάτων και στην ανεξαρτησία τους από υποθέσεις προσομοίωσης. Τέτοιες υποθέσεις θα γινόταν στην περίπτωση που η διατομή περιγραφόταν από μία επιφάνεια διαρροής και ένα νόμο πλαστικής ροής, όπου ο έλεγχος της διαρροής θα έπρεπε να γίνει σε κάποιο σημείο στο εσωτερικό της διατομής. Η προσομοίωση της διατομής σε ίνες, ωστόσο, παρακολουθώντας τη συμπεριφορά της καθεμίας ίνας είναι σε θέση να δώσει την κατανομή των τάσεων στη διατομή και κατ' επέκταση την εξάπλωση της πλαστικοποίησης σε αυτήν. Επίσης, τα φαινόμενα αλληλεπιδράσεων των εντατικών μεγεθών λαμβάνονται αυτόματα υπ' όψη μέσω της ολοκλήρωσης του πεδίου των τάσεων στη διατομή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται προφανές ότι το δομικό συστατικό στοιχείο των προσομοιωμάτων ινών είναι η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων. Συνεπώς, αυτό είναι και το σημείο παρέμβασης, δηλαδή η έκφραση του νόμου τάσεων-παραμορφώσεων θα γίνει σε όρους προσομοίωσης κατά Bouc-Wen. Στη συνέχεια, ακολουθώντας την κλασική διατύπωση της μεθόδου των μετακινήσεων, θα παραχθούν οι αρχικά οι σχέσεις της διατομής και στη συνέχεια του στοιχείου. Τέλος, θα διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας όλου του συστήματος και θα προταθεί η αριθμητική διαδικασία επίλυσης τους.

4.2 Διατύπωση εξισώσεων ισορροπίας

Σύμφωνα με τη διαδικασία προσομοίωσης ινών, η συνολική κατασκευή διακριτοποιείται και επιλύεται σε τρία στάδια.

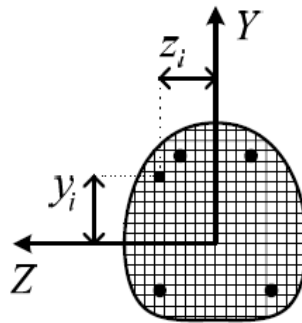
- 1) *Διακριτοποίηση της διατομής του στοιχείου σε ίνες και προσδιορισμός της δυσκαμψίας και των εντατικών μεγεθών της.*
- 2) *Διακριτοποίηση του στοιχείου δοκού σε διατομές ελέγχου και υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας και των επικόμβιων δράσεων του.*

- 3) Διακριτοποίηση της όλης κατασκευής σε στοιχεία δοκού και παραγωγή του συνολικού μητρώου δυσκαμψίας και του διανύσματος των εσωτερικών δράσεων σύμφωνα με τη συμβολή του κάθε στοιχείου.

Στα παρακάτω περιγράφονται εκτενώς καθένα από τα παραπάνω στάδια που θα οδηγήσουν στην τελική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας σύμφωνα με την προτεινόμενη διατύπωση.

4.2.1 Εύρεση κατάστασης διατομής

Σύμφωνα με το σχήμα 4.1 μία διατομή αυθαίρετης γεωμετρίας διακριτοποιείται σε ένα πεπερασμένο πλήθος ινών σε πλήρη συνάφεια μεταξύ τους. Τα κύρια χαρακτηριστικά τους είναι το υλικό που περιγράφουν και οι ιδιότητές του καθώς και οι συντεταγμένες τους σχετικά με ένα αυθαίρετο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς. Το σύστημα αυτό θεωρείται το κέντρο βάρους της διατομής, όπου δηλαδή ασκούνται τα εντατικά μεγέθη.



Σχ. 4.1: Διακριτοποίηση διατομής σε ίνες.

Θεωρώντας την επιπεδότητα των διατομών, η αξονική παραμόρφωση στο κέντρο της κάθε ίνας εκφράζεται συναρτήσει της αξονικής παραμόρφωσης ε_0 και των δύο καμπυλοτήτων φ_z, φ_y της διατομής που ασκούνται στο κέντρο βάρους της σύμφωνα με τη σχέση:

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_0 - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y \quad (4.1)$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας τη διατύπωση του παράλληλου προσομοιώματος του Bouc-Wen που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2, η ορθή τάση κάθε ίνας διαχωρίζεται σε ένα ελαστικό και ένα υστερητικό μέρος:

$$\sigma(y, z) = \alpha_i \cdot \sigma^{el} + (1 - \alpha_i) \cdot \sigma^h \quad (4.2)$$

Όπου α_i είναι ο λόγος του μετελαστικού προς το ελαστικό μέτρο δυσκαμψίας του υλικού i που αναφέρεται η συγκεκριμένη ίνα. Ακόμα, σ^{el} είναι η ελαστική τάση και ισούται με $\sigma^{el} = E_i \cdot \varepsilon(y, z)$ και σ^h είναι το υστερητικό μέρος της τάσης που ισούται με $\sigma^h = E_i \cdot z$, με z να είναι η υστερητική παραμόρφωση της ίνας. Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, η εξίσωση (4.2) γράφεται για κάθε ίνα ως:

$$\sigma = \alpha_i \cdot E_i \cdot \varepsilon + (1 - \alpha_i) \cdot E_i \cdot z \quad (4.3)$$

Η υστερητική παραμόρφωση z εξελίσσεται στο χρόνο σύμφωνα με τη μη-γραμμική διαφορική εξίσωση του Bouc-Wen:

$$\dot{z}(t) = \left[1 - \left| \frac{z(t)}{z_y} \right|^n (\beta_i + \gamma_i \cdot \text{sgn}(z(t) \cdot \dot{\varepsilon})) \right] \cdot \dot{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Έχοντας ήδη περιγράψει τη σχέση των τάσεων κάθε ίνας, η ολοκλήρωσή τους στο χωρίο της διατομής παράγει τα εντατικά μεγέθη της. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση μονοαξονικής κάμψης με αξονική δύναμη, τα εντατικά μεγέθη της διατομής προκύπτουν από τις εξής ολοκληρώσεις.

$$N = \iint_A \sigma dA \quad (4.5)$$

$$M = - \iint_A \sigma \cdot y dA \quad (4.6)$$

Σε αυτό το σημείο είναι που γίνεται χρήσιμη η διακριτοποίηση της διατομής σε n ίνες, καθώς τα παραπάνω ολοκληρώματα μετατρέπονται σε πεπερασμένο άθροισμα της συμβολής της κάθε ίνας. Συνεπώς, οι σχέσεις (4.5) και (4.6) μετατρέπονται σε:

$$N = \sum_{i=1}^n (\sigma A)_i \quad (4.7)$$

$$M = \sum_{i=1}^n (\sigma A)_i \cdot y_i \quad (4.8)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.3) στις παραπάνω σχέσεις και διατυπώνοντας σε μητρωϊκή μορφή διαχωρίζοντας επίσης το ελαστικό από το υστερητικό μέρος έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -y_1 & \dots & -y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \cdot E_i \cdot A_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_i \cdot E_i \cdot A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -y_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varphi_z \end{Bmatrix} + \dots \\ &+ \dots \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -y_1 & \dots & -y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1-a_i) \cdot E_i \cdot A_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (1-a_i) \cdot E_i \cdot A_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Η παραπάνω σχέση διατυπώνεται σε κομψότερη μορφή ως εξής:

$$\{D\} = [I]^T \cdot [C_{el}] \cdot [I] \cdot \{d\} + [I]^T \cdot [C_h] \cdot \{z\} \quad (4.10)$$

Όπου $[I]$ είναι το γεωμετρικό μητρώο που περιέχει τη θέση της κάθε ίνας, $[C_{el}]$ είναι το διαγώνιο μητρώο ελαστικότητας της διατομής με τους μειωμένους όρους με τους συντελεστές μετελαστικής προς ελαστικής δυσκαμψίας. Τέλος $[C_h]$ είναι το υστερητικό καταστατικό μητρώο της διατομής.

Στη σχέση (4.10) ο πρώτος προσθετός αναφέρεται στο ελαστικό μέρος των εντατικών μεγεθών και ο δεύτερος όρος στο υστερητικό μέρος τους. Συνεπώς η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\{D\} = [k_{el}] \cdot \{d\} + \{p_{hys}\} \quad (4.11)$$

Όπου $[k_{el}]$ είναι η μειωμένη ελαστική δυσκαμψία της κατασκευής και $\{p_{hys}\}$ είναι το διάνυσμα των υστερητικών εντατικών μεγεθών τις διατομής τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$[k_{el}] = [I]^T \cdot [C_{el}] \cdot [I] \quad (4.12)$$

$$\{p_{hys}\} = [I]^T \cdot [C_h] \cdot \{z\} \quad (4.13)$$

4.2.2 Εύρεση κατάστασης στοιχείου

Για τον υπολογισμό των επικόμβιων δράσεων και της δυσκαμψίας του στοιχείου δοκού εφαρμόζεται η αρχή των δυνατών μετατοπίσεων. Σύμφωνα με αυτή, το έργο των εξωτερικών δυνάμεων επί κάποιων δυνατών μετατοπίσεων, ισούται με το έργο των

εσωτερικών δυνάμεων επί των δυνατών παραμορφώσεων που προκύπτουν από τις δυνατές επικόμβιες μετακινήσεις. Λαμβάνοντας υπ' όψη και τη σχέση (4.11) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_0^L \{\delta d\}^T \cdot \{D\} dx &= \{\delta q\}^T \cdot \{Q\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^L \{\delta d\}^T \cdot \left([k_{el}] \cdot \{d\} + \{p_{hys}\} \right) dx &= \{\delta q\}^T \cdot \{Q\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Έπειτα από την εκτέλεση των πράξεων και τη θεώρηση ότι οι εσωτερικές παραμορφώσεις $\{d\}$ κατανομονται ως τριτοβάθμιες συναρτήσεις σύμφωνα με τις κλασικές συναρτήσεις σχήματος ($\{d\} = [a] \cdot \{q\}$), καταλήγουμε στη γενική μη γραμμική σχέση του στοιχείου:

$$\{Q\} = [K_{el}] \cdot \{q\} + \{P_{hys}\} \quad (4.15)$$

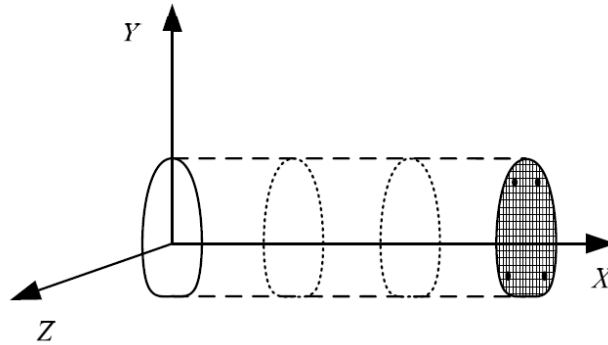
Όπου $[K_{el}]$ είναι η μειωμένη ελαστική δυσκαμψία του στοιχείου και υπολογίζεται από τις μειωμένες ελαστικές δυσκαμψίες των εσωτερικών διατομών σύμφωνα με τη σχέση:

$$[K_{el}] = \int_0^L [a]^T \cdot [k_{el}] \cdot [a] dx \quad (4.16)$$

Ακόμα, $\{P_{hys}\}$ είναι το διάνυσμα των υστερητικών επικόμβιων δράσεων του στοιχείου δοκού και υπολογίζεται από την εξής εξίσωση που το συνδέει με το διάνυσμα των υστερητικών εντατικών μεγεθών των διατομών:

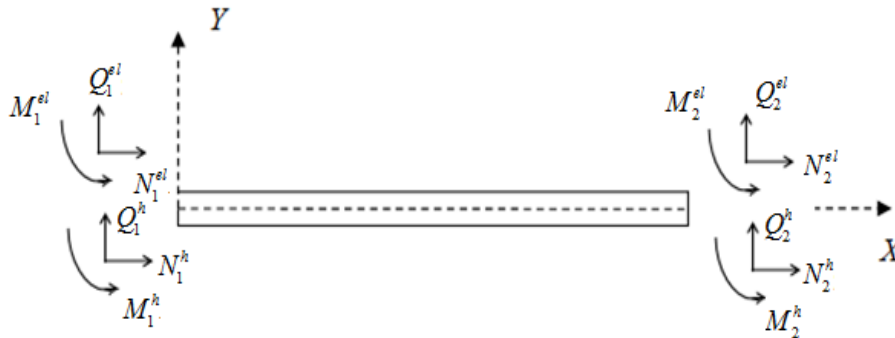
$$\{P_{hys}\} = \int_0^L [a]^T \cdot \{p_{hys}\} dx \quad (4.17)$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω δύο ολοκληρωμάτων πραγματοποιείται έπειτα από εφαρμογή της αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Lobatto όπως αυτή περιγράφηκε στο υποκεφάλαιο (3.3.3). Συνεπώς, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2, διατομές ελέγχου τοποθετούνται στις θέσεις που ορίζονται τα σημεία της αριθμητικής διαδικασίας, μετατρέποντας έτσι τα ολοκληρώματα σε πεπερασμένα αθροίσματα με συντελεστές βάρους.



Σχ. 4.2: Διακριτοποίηση του μέλους σε διατομές ελέγχου.

Σύμφωνα με τη σχέση (4.15) ο διαχωρισμός των επικόμβιων δράσεων σε ελαστικό και υστερητικό μέρος σημαίνει και των διπλασιασμό των βαθμών ελευθερίας του στοιχείου. Οι συνολικοί νέοι βαθμοί ελευθερίας (ελαστικοί και υστερητικοί) παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Επομένως, η εύρεση της κατάστασης του στοιχείου περιλαμβάνει δύο μέρη. Πρώτο είναι ο υπολογισμός της μειωμένης ελαστικής δυσκαμψίας του στοιχείου, σύμφωνα με τη σχέση (4.16) και δεύτερο είναι ο προσδιορισμός του διανύσματος των επικόμβιων, υστερητικών δράσεων από τη σχέση (4.17).



Σχ. 4.3: Βαθμοί ελευθερίας υστερητικού στοιχείου δοκού.

4.2.3 Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας

Για ένα πολυβάθμιο σύστημα η δυναμική εξίσωση ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως προς τις επικόμβιες μετακινήσεις $\{U\}$, ταχύτητες $\{\dot{U}\}$ και επιταχύνσεις $\{\ddot{U}\}$ σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$[M_s] \cdot \{\ddot{U}\} + [C_s] \cdot \{\dot{U}\} + \{P_{int}\} = \{P(t)\} \quad (4.18)$$

Όπου $[M_s]$ είναι το συνολικό μητρώο μάζας του συστήματος, $[C_s]$ είναι το μητρώο απόσβεσης, $\{P_{int}\}$ είναι το συνολικό διάνυσμα των επικόμβιων εσωτερικών δράσεων και $\{P(t)\}$ είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων.

Στην παραπάνω εξίσωση ισορροπίας αν εφαρμοστεί η σχέση (4.15) για κάθε στοιχείο και στη συνέχεια μορφωθούν τα ολικά μητρώα και διανύσματα σύμφωνα με τη συμβολή του καθενός, καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$[M_s] \cdot \{\ddot{U}\} + [C_s] \cdot \{\dot{U}\} + [K_s] \cdot \{U\} + \{P_{HYS}\} = \{P(t)\} \quad (4.19)$$

Όπου $[K_s]$ είναι το ολικό μειωμένο ελαστικό μητρώο της κατασκευής και $\{P_{HYS}\}$ είναι το ολικό διάνυσμα των υστερητικών επικόμβιων δράσεων της κατασκευής.

Η παραπάνω μορφή της εξίσωσης κίνησης και ο διαχωρισμός των εσωτερικών δράσεων σε ελαστικό και υστερητικό μέρος ορίζει τη μη-γραμμική συμπεριφορά να συγκεντρώνεται εξ ολοκλήρου στο υστερητικό διάνυσμα. Συνεπώς, το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας μορφώνεται μία και μόνο φορά στην αρχή της ανάλυσης και παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια αυτής. Επαναληπτικές στρατηγικές επίλυσης, λοιπόν, πρέπει να εφαρμοστούν ώστε να γραμμικοποιούν το υστερητικό διάνυσμα. Επίσης το στατικό πρόβλημα ορίζεται ως υποπερίπτωση του δυναμικού για μηδενική μάζα και απόσβεση. Συνεπώς η στατική εξίσωση ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως:

$$[K_s] \cdot \{U\} + \{P_{HYS}\} = \{P\} \quad (4.20)$$

4.3 Επίλυση των μη-γραμμικών εξισώσεων

Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα που έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής, έχει περιγραφεί πως υπολογίζονται οι εσωτερικές δράσεις του συστήματος από την ολοκλήρωση των τάσεων στον όγκο του φορέα. Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα γίνει αναφορά στις μεθόδους επίλυσης του γενικού μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων που διέπει την όλη κατασκευή.

4.2.4 Επίλυση στατικού συστήματος

Η εξίσωση ισορροπίας του φορέα εκφράζει την ισορροπία των εξωτερικά επιβαλλόμενων δράσεων $\{P_t\}$ και των εσωτερικών δράσεων $\{F_t\}$ που υπολογίζονται από τη σχέση (4.20).

Επομένως η εξίσωση ισορροπίας μπορεί να γραφεί:

$$\{F_t\} = \{P_t\} \quad (4.21)$$

Η παραπάνω σχέση δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα ως προς τις μετατοπίσεις $\{u_t\}$ οπότε απαιτείται μία επαυξητική διαδικασία. Στο στατικό πρόβλημα η μεταβλητή t δεν έχει το νόημα του χρόνου, αλλά αναφέρεται στο αντίστοιχο επαυξητικό βήμα φόρτισης. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει τη λύση τη χρονική στιγμή t , στο επόμενο προσαυξητικό βήμα Δt η εξίσωση ισορροπίας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[K] \cdot \{\Delta u_t\} = \{P_{t+\Delta t}\} - \{F_t\} \quad (4.22)$$

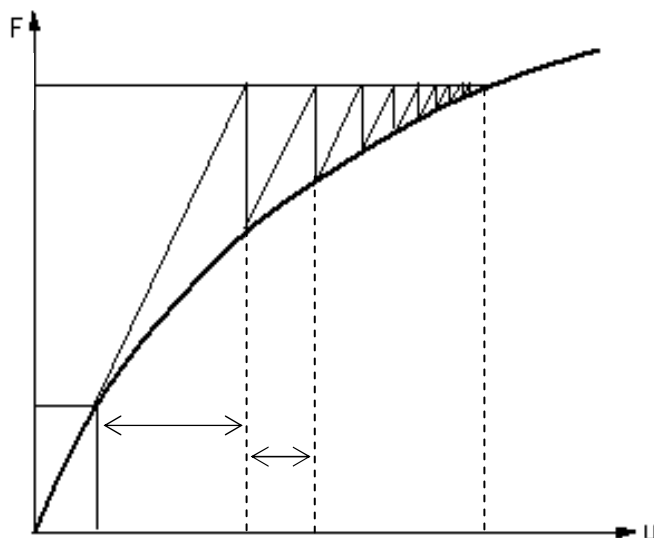
Όπου $\{P_{t+\Delta t}\}$ είναι το εξωτερικό φορτίο τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$, $\{F_t\}$ είναι το διάνυσμα των εσωτερικών δράσεων την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή και $[K]$ είναι το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι αυτό το μητρώο είναι το πραγματικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής και όχι το απομειωμένο με τους συντελεστές α της σχέσεις (4.20).

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι αποδεκτή μόνο όταν το βήμα φόρτισης ΔP είναι αρκετά μικρό, διαφορετικά εισάγονται σημαντικά λάθη τα οποία είναι αθροιστικά, αφού σε κάθε βήμα προστίθεται το σφάλμα από το προηγούμενο. Για να γίνει εφικτός ο περιορισμός και ο έλεγχος του σφάλματος σε ανεκτά όρια, σε κάθε επαυξητικό βήμα φόρτισης εισάγονται διορθωτικές επαναλήψεις. Η εξίσωση ισορροπίας κατά τη j -οστή διορθωτική επανάληψη του βήματος φόρτισης είναι:

$$[K] \cdot \{\Delta u^j\} = \{P_{t+\Delta t}\} - \{F_{t+\Delta t}^{j-1}\} \quad (4.23)$$

Όπως παρατηρείται στην παραπάνω εξίσωση το μητρώο δυσκαμψίας είναι σταθερό σε όλα τα επαυξητικά βήματα. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson χρησιμοποιώντας την αρχική ελαστική δυσκαμψία. Σε διαφορετική διατύπωση, υπολογίζεται το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας σε κάθε επανάληψη, μέθοδος που προσφέρει ταχύτερη σύγκλιση. Το υπολογιστικό κόστος των δύο μεθόδων είναι σχετικό καθώς η μία κάνει πολλές επαναλήψεις με μειωμένο υπολογιστικό κόστος η καθεμία, ενώ η

άλλη μέθοδος εκτελεί λιγότερες επαναλήψεις με μεγαλύτερο ωστόσο χρόνο περαίωσης της καθεμίας.



Σχ. 4.4 Μέθοδος Newton-Raphson αρχικής δυσκαμψίας.

Στο τέλος κάθε επανάληψης ελέγχεται αν έχει επιτευχθεί σύγκλιση. Υπάρχουν διάφορα κριτήρια σύγκλισης τόσο ως προς τον έλεγχο των μη ισορροπούμενων δυνάμεων, όσο και ως προς τον έλεγχο των υπολογιζόμενων επαυξητικών μετατοπίσεων να είναι μικρότερα από μία αριθμητική ποσότητα ανοχής. Ένα κριτήριο που συνδυάζει και τα δύο και γενικά προτιμάται είναι ο έλεγχος του έργου των μη ισορροπούμενων δυνάμεων με τις επαυξητικές μετατοπίσεις της κάθε επανάληψης.

$$W_{err} = (P_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t}^j) \cdot \Delta u^j \quad (4.24)$$

4.2.5 Επίλυση δυναμικού συστήματος

Η δυναμική εξίσωση ισορροπίας στη γενική της μορφή είναι:

$$[M] \cdot \{\ddot{U}\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K] \cdot \{U\} = \{P(t)\} \quad (4.25)$$

Οι μέθοδοι που είναι κατάλληλοι για την επίλυση του παραπάνω συστήματος σε περιπτώσεις μη-γραμμικών προβλημάτων ανήκουν στην κατηγορία των μεθόδων της άμεσης ολοκλήρωσης αφού η σχέση (4.25) υπολογίζεται σε κάθε χρονικό βήμα. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται στις ρητές (*explicit methods*) και στις μη-ρητές (*implicit methods*). Η διαφορά τους έγκειται στη χρονική στιγμή στην οποία αναφέρεται η ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης. Σε μια ρητή μέθοδο ολοκλήρωσης προκειμένου να υπολογιστεί η

απόκριση της χρονικής στιγμής $t + \Delta t$ χρησιμοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας της χρονικής στιγμής t . Αντίθετα στις μη-ρητές μεθόδους χρησιμοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας της χρονικής στιγμής $t + \Delta t$. Η κύρια διαφορά τους εστιάζεται στο μέγεθος του επιτρεπόμενου βήματος. Οι ρητές μέθοδοι έχουν εξ' ορισμού μεγαλύτερη ακρίβεια, αλλά για να είναι η λύση πάντοτε ευσταθής απαιτείται πολύ μικρό βήμα ολοκλήρωσης. Αντίθετα οι μη-ρητές μέθοδοι επιτρέπουν τη χρήση μεγαλύτερου βήματος και άρα λιγότερων βημάτων ολοκλήρωσης, αλλά συχνά συνοδεύονται από σφάλματα που επηρεάζουν κυρίως το εύρος και το μήκος περιόδου της απόκρισης. Γενικά οι μη-ρητές μέθοδοι είναι προτιμότερες με πιο γνωστή από αυτές τη μέθοδο Newmark. Παρακάτω παρουσιάζεται η μέθοδος αυτή.

Η μέθοδος Newmark βασίζεται στη διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Γίνονται οι παρακάτω υποθέσεις για την εύρεση της ταχύτητας και της μετατόπισης στο χρονικό βήμα $t + \Delta t$.

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + [(1-\gamma)\{\ddot{u}_t\} + \gamma\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}]\Delta t \quad (4.26)$$

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \{\dot{u}_t\}\Delta t + [(0.5-\beta)\{\ddot{u}_t\} + \beta\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}]\Delta t^2 \quad (4.27)$$

Οι παράμετροι β και γ καθορίζουν την κατανομή της επιτάχυνσης μέσα σε ένα χρονικό βήμα και μπορούν να πάρουν τιμές ώστε να ελέγχεται η ευστάθεια και η ακρίβεια της ολοκλήρωσης. Τυπικά για να εξασφαλίζεται η ακρίβεια της μεθόδου οι τιμές που επιλέγονται είναι $\gamma=0.5$ και $1/6 \leq \beta \leq 1/4$. Όταν το β λαμβάνεται ίσο με $1/6$ η διαδικασία είναι γνωστή ως μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης όπου η μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα βήμα είναι σταθερή.

Η εξίσωση ισορροπίας για ένα πρόβλημα δυναμικής μη-γραμμικής ανάλυσης γράφεται σε επαυξητική μορφή:

$$[K]\{\Delta u\} = \{P_{t+\Delta t}\} - \{F_t\} - ([M]\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} + [C]\{\dot{u}_{t+\Delta t}\}) \quad (4.28)$$

Αν στη σχέση (4.28) αντικατασταθούν οι σχέσεις (4.26) και (4.27) προκύπτει:

$$[\hat{K}] \cdot \{\Delta u\} = \{\hat{P}\} - \{F_t\} \quad (4.29)$$

Όπου:

$$[\hat{K}] = [K] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] \quad (4.30)$$

$$\{\hat{P}\} = \{P_{t+\Delta t}\} + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}[M] + \frac{\gamma}{\beta}[C] \right) \{\dot{u}_t\} + \left(\frac{1}{2\beta}[M] + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [C] \right) \{\ddot{u}_t\} \quad (4.31)$$

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται μεγάλο βήμα ολοκλήρωσης Δt ή το φορτίο σε ένα βήμα είναι μεγάλο, τότε στο πλαίσιο της εξίσωσης (4.29) εκτελούνται διορθωτικές επαναλήψεις τύπου Newton-Raphson. Έτσι, για τη διορθωτική επανάληψη j , η εξίσωση ισορροπίας γράφεται:

$$[K]\{\Delta u^j\} = \{P_{t+\Delta t}\} - \{F_t^{j-1}\} - ([M]\{\ddot{u}_{t+\Delta t}^j\} + [C]\{\dot{u}_{t+\Delta t}^j\}) \quad (4.32)$$

Γενικά στη μη γραμμική δυναμική ανάλυση η επίδραση της μη-γραμμικότητας στις εσωτερικές δυνάμεις δεν είναι τόσο μεγάλη όσο στη στατική. Αυτό συμβαίνει επειδή στο ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας, όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.30), συνεισφέρουν τόσο η μάζα όσο και η απόσβεση, περιορίζοντας έτσι τη συμβολή του εφαπτομενικού μητρώου στιβαρότητας. Η συμπεριφορά αυτή έχει ως αποτέλεσμα σε ένα δυναμικό πρόβλημα να απαιτούνται λιγότερες διορθωτικές επαναλήψεις.

Σε κάθε διορθωτική επανάληψη υπολογίζεται η νέα επιτάχυνση από τη σχέση:

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}^j\} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\{u_{t+\Delta t}^{j-1}\} - \{u_t\} + \{\Delta u^j\}) - \frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{u}_t\} + \{\ddot{u}_t\} \quad (4.33)$$

Η οποία στη συνέχεια εισάγεται στην εξίσωση της σχέσης (4.32). Η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να επέλθει σύγκλιση.

Αφού επιτευχθεί σύγκλιση και οι επαυξητικές μετατοπίσεις του βήματος είναι πλέον γνωστές, υπολογίζονται οι συνολικές μετατοπίσεις για το βήμα $t + \Delta t$ και από την σχέση (4.26) προκύπτει το διάνυσμα των ταχυτήτων. Τονίζεται ότι σε κάθε διορθωτική επανάληψη για τον υπολογισμό των συνολικών μετατοπίσεων $\{u_t^j\}$, προστίθενται πάντα οι συνολικές μετατοπίσεις για την τρέχουσα επανάληψη $\{\Delta u^j\}$ στις μετατοπίσεις $\{u_t^0\}$ τις αρχής του βήματος και όχι οι επαυξητικές μετατοπίσεις κάθε διορθωτικής επανάληψης στις μετατοπίσεις της προηγούμενης επανάληψης u_t^{j-1} . Αυτό οφείλεται στο ότι οι μετατοπίσεις u_t^{j-1} δεν αντιστοιχούν σε σημείο ισορροπίας και η χρησιμοποίησή τους για τον υπολογισμό των συνολικών μετατοπίσεων σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να εισάγει σημαντικό σφάλμα στη διαδικασία ολοκλήρωσης.

4.4 Βήματα ανάλυσης της προτεινόμενης μεθόδου

Στα παρακάτω συνοψίζονται συνολικά τα βήματα της ανάλυσης σύμφωνα με το προτεινόμενο στοιχείο. Η διαδικασία εύρεσης κατάστασης του στοιχείου στην παρούσα εργασία επαναλαμβάνεται σε κάθε επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson. Ωστόσο είναι ανεξάρτητη από το αριθμητικό σχήμα επίλυσης των εξισώσεων κίνησης και μπορεί να ενσωματωθεί σε οποιοδήποτε.

- 1) *Αρχικοί υπολογισμοί. Υπολογισμός απομειωμένου ελαστικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής $[K_s]$.*

Το βήμα αυτό γίνεται μόνο στην αρχή της διαδικασίας και δεν επαναλαμβάνεται σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας. Αρχικά υπολογίζονται οι δυσκαμψίες των χαρακτηριστικών διατομών ελέγχου από τη σχέση (4.12) και στη συνέχεια οι δυσκαμψίες των μελών σύμφωνα με την (4.16). Τέλος μορφώνεται το συνολικό απομειωμένο ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας σύμφωνα με τη συμβολή του κάθε μέλους.

- 2) *Εύρεση από την προηγούμενη επανάληψη σε κάθε μέλος των επικόμβιων επαυξητικών μετατοπίσεων $\{\Delta d^j\}$ καθώς και του ολικού μεγέθους της $\{d\}$.*

- 3) *Υπολογισμός των παραμορφώσεων στις διατομές ελέγχου κάθε μέλους.*

Στο βήμα αυτό οι παραμορφώσεις υπολογίζονται από τις θεωρούμενες συναρτήσεις σχήματος μετατοπίσεων σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{d\} = [a] \cdot \{q\} \quad (4.34)$$

- 4) *Προσδιορισμός των αξονικών παραμορφώσεων των ινών κάθε διατομής ελέγχου.*

Η αξονική παραμόρφωση κάθε ίνας υπολογίζεται με βάση την παραδοχή της επιπεδότητας της διατομής από τις παραμορφώσεις στο κέντρο βάρους της διατομής σύμφωνα με τη σχέση (4.1).

- 5) *Προσδιορισμός των υστερητικών παραμορφώσεων της κάθε ίνας.*

Σε αυτό το σημείο επιλύεται η μη-γραμμική διαφορική εξίσωση (4.4). Ο πιο συμφέρον τρόπος είναι η επίλυση της με επαναληπτική διαδικασία. Σύμφωνα με αυτή υπολογίζεται αρχικά η μεταβολή της αξονικής παραμόρφωσης ανάμεσα στην τρέχουσα και στην

προηγούμενη επανάληψη και διαιρείται με τον αριθμό των συνολικών επαναλήψεων που έχει υποτεθεί.

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon^j - \varepsilon^{j-1}}{m} \quad (4.35)$$

Σε κάθε μία επανάληψη υπολογίζεται η αλγεβρική εξίσωση:

$$dz^m = \left[1 - \left| \frac{z^{m-1}}{z_y'} \right|^n (\beta_i + \gamma_i \cdot \text{sgn}(z^{m-1} \cdot d\varepsilon)) \right] \cdot d\varepsilon \quad (4.36)$$

Τέλος, ανανεώνεται η υστερητική παραμόρφωση.

$$z^m = z^{m-1} + dz^m \quad (4.37)$$

Στην πρώτη επανάληψη είναι $z^0 = z^{j-1}$, δηλαδή ως αρχική συνθήκη χρησιμοποιείται η ολική υστερητική παραμόρφωση της προηγούμενης επανάληψης Newton-Raphson. Αξίζει να σημειωθεί ότι με αυτόν τον τρόπο επίλυσης της μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, δεν είναι αναγκαία η γνώση του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης της ίνας $\dot{\varepsilon}$ η οποία θα προερχόταν από της επικόμβιες ταχύτητες του στοιχείου $\{\dot{u}\}$. Συνεπώς διευκολύνεται η χρήση της μεθόδου σε στατικά προβλήματα όπου δεν χρειάζεται κατ' ανάγκη να γίνεται υπολογισμός των ταχυτήτων παραμόρφωσης.

- 6) Υπολογισμός των υστερητικών εντατικών μεγεθών $\{p_{hys}\}$ της κάθε διατομής ελέγχου σύμφωνα με τη σχέση (4.13).
- 7) Ολοκλήρωση κατά μήκος του στοιχείου και υπολογισμός των επικόμβιων υστερητικών δράσεων $\{P_{hys}\}$ του στοιχείου σύμφωνα με τη σχέση (4.17).
- 8) Προσδιορισμός του συνολικού διανύσματος των υστερητικών δράσεων της κατασκευής $\{P_{hys}\}$ από τη συμβολή των επιμέρους στοιχείων.
- 9) Υπολογισμός των ολικών εσωτερικών δράσεων της κατασκευής $\{F^j\}$ σύμφωνα με την εξίσωση (4.20).

10) Εκτέλεση επόμενων βημάτων της μεθόδου *Newton-Raphson*.

Στη συνέχεια ακολουθείται η κανονική διαδικασία της μεθόδου *Newton-Raphson*, υπολογίζονται οι μη ισορροπούμενες δράσεις και προσδιορίζεται αν έχει επέλθει σύγκλιση μέσα στο βήμα φόρτισης.

4.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε η παρουσίαση του προτεινόμενου προσομοιώματος ινών. Η γενική διαδικασία που ακολουθείται είναι γενικά ίδια με το κλασικό στοιχείο μετατοπίσεων. Το προσομοίωμα εισάγεται σε οποιαδήποτε αριθμητική μέθοδο επίλυσης του γενικού συστήματος της κατασκευής και χρησιμεύει στον υπολογισμό των εσωτερικών δράσεων.

Το διαφορετικό σημείο επέρχεται στον προσδιορισμό των τάσεων κάθε ίνας, όπου εδώ γίνεται μέσω υστερητικών συναρτήσεων τύπου *Bouc-Wen*. Η εισαγωγή ωστόσο του υστερητικού νόμου τροποποιεί την συνολική διαδικασία προσδιορισμού των εσωτερικών δράσεων του στοιχείου. Αυτό συμβαίνει λόγω του διαχωρισμού της τάσης σε ελαστικό και υστερητικό μέρος, ο οποίος διαχωρισμός επεκτείνεται μέσω των υπολογισμών και στα εντατικά μεγέθη των διατομών και στις επικόμβιες δράσεις. Το ελαστικό μέρος υπολογίζεται αυτόματα σε κάθε επανάληψη ενώ το υστερητικό προκύπτει από τις επιμέρους ολοκληρώσεις στον όγκο του στοιχείου.

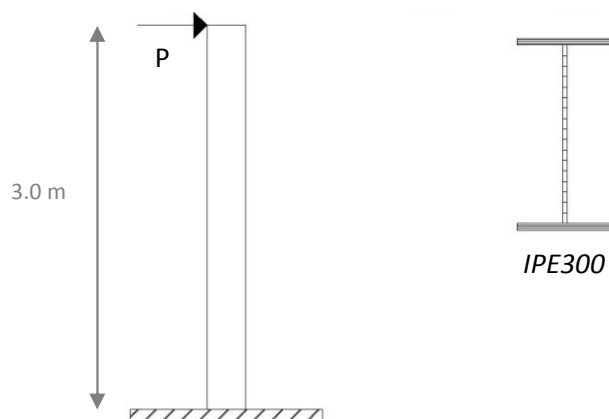


5 Κεφάλαιο

Παραδείγματα

5.1 Στατική ανάλυση μεταλλικού προβόλου

Σαν πρώτο παράδειγμα ανάλυσης θεωρούμε το απλούστερο στατικό σύστημα, δηλαδή ένα κατακόρυφο πρόβολο ο οποίος ωθείται πλευρικά με συγκεντρωμένο φορτίο στην κορυφή του. Το φορτίο αυξάνεται τμηματικά έως ότου εμφανιστούν σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις. Ο φορέας θεωρείται μεταλλικός με διατομής IPE300 και η γεωμετρία παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και η διακριτοποίηση της διατομής σε λωρίδες/ίνες. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε περίπτωση μονοαξονικής κάμψης, δηλαδή σε επίπεδο πρόβλημα με συμμετρική διατομή, η διακριτοποίηση μπορεί να γίνει με λωρίδες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα λοιπόν χρησιμοποιήθηκαν 25 συνολικά λωρίδες, 4 σε κάθε πέλμα και 17 στο ύψος του κορμού. Επίσης όλο το μήκος του προβόλου προσομοιώθηκε με ένα στοιχείο που περιγράφεται με τις ακραίες μετατοπίσεις με 7 σημεία ολοκλήρωσης κατά το μήκος του.



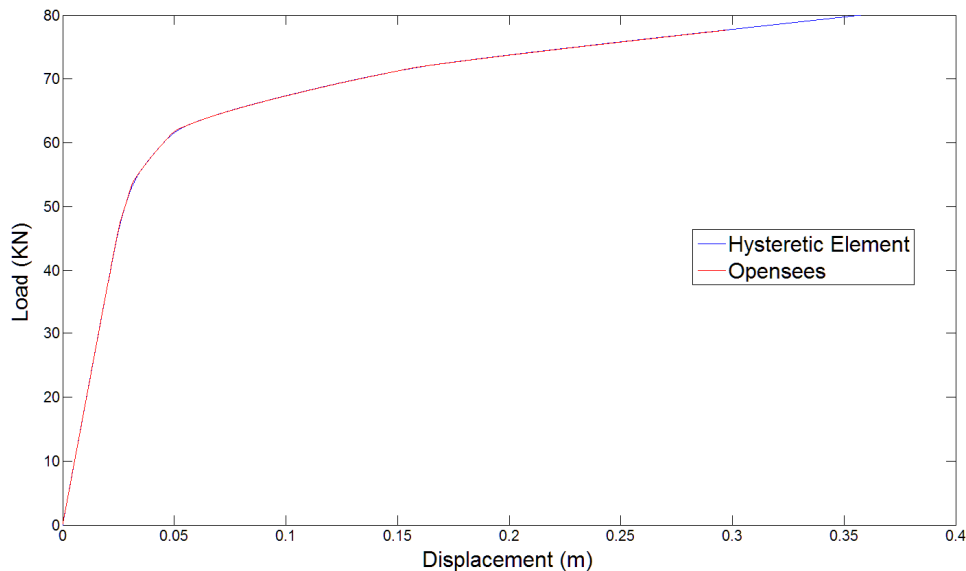
Σχ. 5.1: Γεωμετρία και διατομή προβόλου

Όσον αφορά τις παραμέτρους του χάλυβα, αυτός θεωρήθηκε κατηγορίας S235 με διγραμμικό διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων και κράτυνση 2%. Συνεπώς, οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen ώστε αυτό να περιγράψει με ακρίβεια τη διγραμμική αυτή συμπεριφορά, τέθηκαν: $n=25$, $\alpha=0.02$. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον πίνακα 5.1.

Χαρακτηριστικά χάλυβα	
E (KN/m ²)	210000000
f_y (KN/m ²)	235000
Παράμετροι Bouc-Wen	
n	25
β	0.5
γ	0.5

Πιν. 5.1: Παράμετροι ανάλυσης για το χάλυβα.

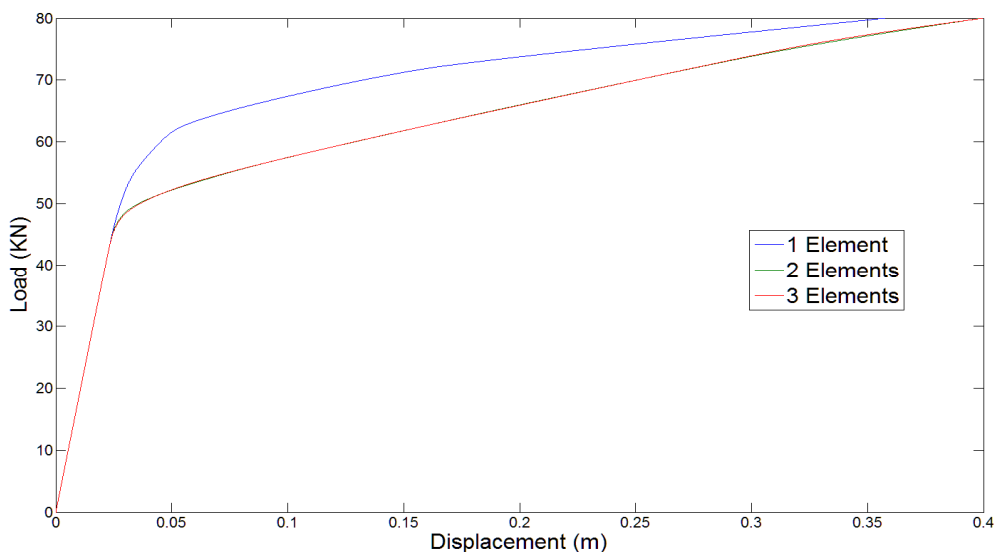
Η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε με το λογισμικό Opensees. Οι διακριτοποίηση της διατομής έγινε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο και χρησιμοποιήθηκε επίσης το στοιχείο μετατοπίσεων του Opensees με 7 σημεία ολοκλήρωσης. Ως μέθοδος αριθμητικής επίλυσης επιλέχθηκε η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson με έλεγχο μετατοπίσεων και με επαυξητικό βήμα 1mm. Οι δύο μη-γραμμικές καμπύλες που προκύπτουν, παρουσιάζονται στο επόμενο γράφημα.



Σχ. 5.2: Καμπύλες μη-γραμμικής, στατικής απόκρισης πρόβολου.

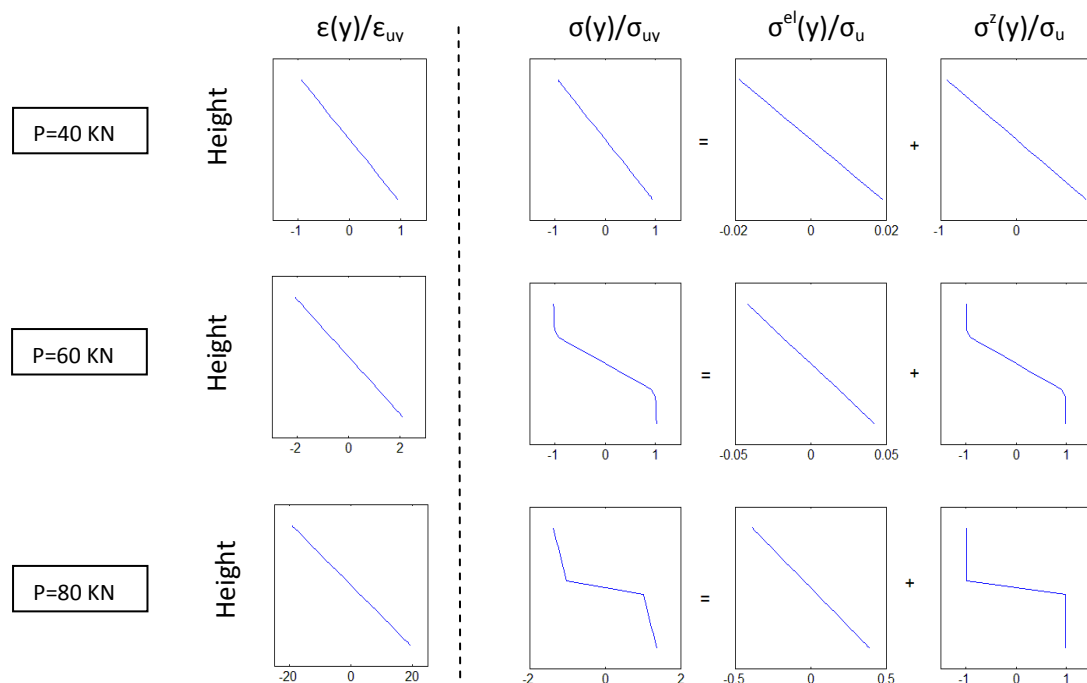
Όπως γίνεται φανερό υπάρχει απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων. Αυτό είναι απόλυτα λογικό μιας και το προτεινόμενο προσομοίωμα περιγράφει απλώς τον καταστατικό νόμο του υλικού με διαφορετικό τρόπο, διατηρώντας τις γενικές αρχές της μεθοδολογίας. Από τη στιγμή, λοιπόν, που η διακριτοποίηση του φορέα είναι πανομοιότυπη οι δύο μεθοδολογίες παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Έχοντας αναφέρει στο κεφάλαιο 3 το μειονέκτημα του στοιχείου των μετατοπίσεων να αδυνατεί να προσομοιώσει τη μη-γραμμική κατανομή της καμπυλότητας με ένα μόνο στοιχείο, πραγματοποιήθηκαν άλλες δύο αναλύσεις όπου το μέλος υποδιαιρείται σε περισσότερα στοιχεία. Έτσι, αρχικά προστίθεται ένας κόμβος σε απόσταση 0.5m από την πάκτωση και στη συνέχεια προστίθεται επιπλέον ένας κόμβος σε απόσταση 0.25m από την πάκτωση, διαιρώντας τον πρόβολο σε ε στοιχεία. Τα αποτελέσματα κάθε περίπτωσης παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 5.3: Αποτελέσματα αναλύσεων προβόλου με ενδιάμεσους κόμβους.

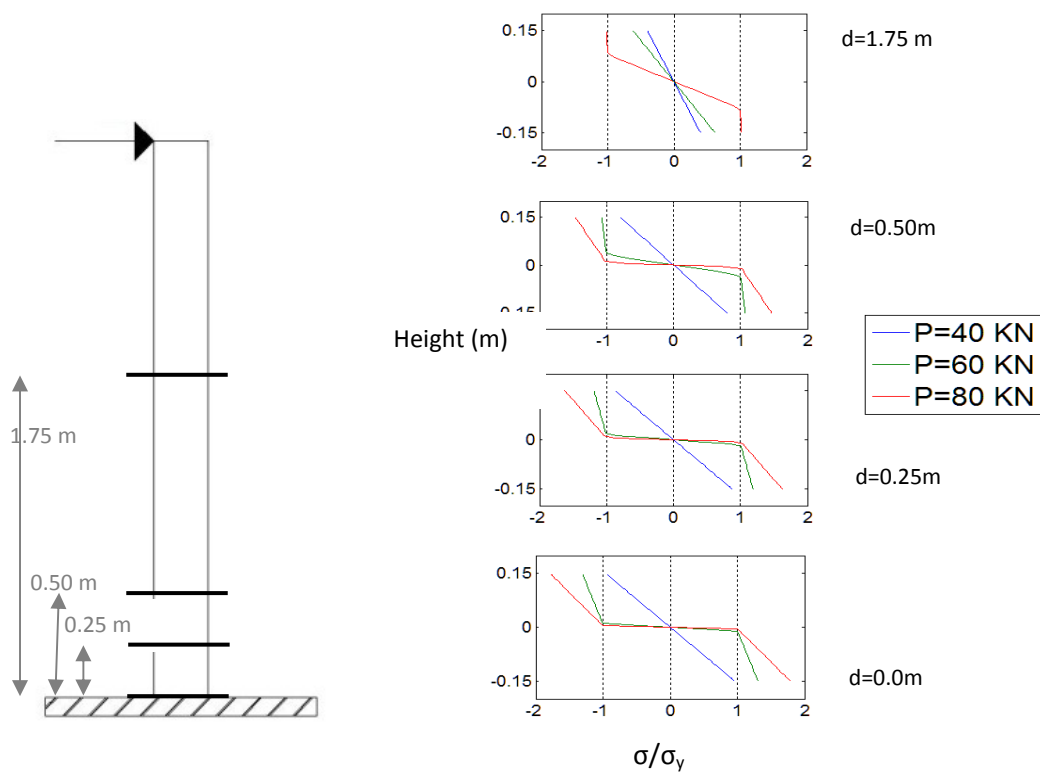
Όπως γίνεται αμέσως αντιληπτό, η λύση συγκλίνει αμέσως με την προσθήκη ενός κόμβου κοντά στην πάκτωση όπου αναμένεται η καμπυλότητα να κατανεμηθεί μη-γραμμικά στην ανελαστική περιοχή. Είναι, επίσης φανερό πόσο υπερεκτιμάται η αντοχή του φορέα στην περίπτωση που δεν υποδιαιρεθεί το μέλος, λόγω του ότι οι υπολογιζόμενες καμπυλότητες προκύπτουν μικρότερες των πραγματικών.



Σχ.5.4: Κατανομή των παραμορφώσεων και των τάσεων καθ' ύψος της διατομής του προβόλου για τρία επίπεδα φόρτισης.

Το πλεονέκτημα των στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας είναι η δυνατότητα τους να παρακολουθούν την εξάπλωση της πλαστικοποίησης ανάλογα με το επίπεδο φόρτισης, τόσο καθ' ύψος της διατομής όσο και κατά μήκος. Στο προηγούμενο γράφημα 5.4 παρουσιάζεται αυτή κατανομή των τάσεων και των παραμορφώσεων καθ' ύψος της διατομής της πάκτωσης του προβόλου. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και ο διαχωρισμός των τάσεων σε ελαστικό και υστερητικό μέρος σύμφωνα με τη σύμβαση του Bouc-Wen. Το υστερητικό μέρος αποδίδει μία ελαστική-απόλυτα πλαστική συμπεριφορά και η κράτνυση αποδίδεται από το ελαστικό μέρος. Επομένως, η πραγματική κατανομή προκύπτει όταν προστεθούν οι δύο αυτές καταστάσεις.

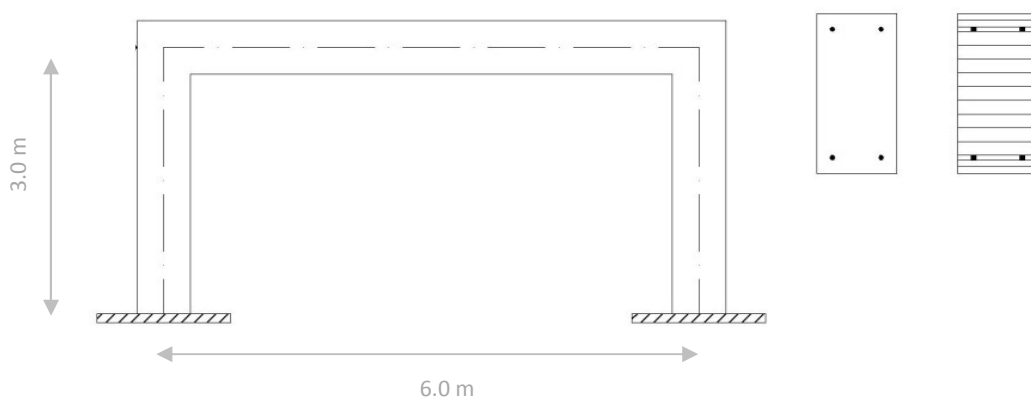
Η εξάπλωση της πλαστικοποίησης καταμήκος της διατομής παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα. Για τρία επίπεδα φόρτισης σχεδιάζονται οι κατανομές των τάσεων σε τέσσερα σημεία κατά μήκος τπυ στοιχείου. Το πρώτο σημείο είναι στην πάκτωση και τα υπόλοιπα σε αποστάσεις 0.25m, 0.50m και 1.75 από αυτήν.



Σχ.5.5: Κατά μήκος κατανομή των τάσεων του προβόλου.

5.2 Δυναμική ανάλυση πλαισίου από ωπλισμένο σκυρόδεμα

Στο επόμενο παράδειγμα αναλύεται επίπεδο πλαίσιο από ωπλισμένο σκυρόδεμα όταν υποβάλλεται σε εδαφική επιτάχυνση ημιτονοειδούς μορφής. Η διατομή του είναι ορθογωνική 0.60m x 0.30m με τέσσερις ράβδους σπλισμού στις γωνίες, ενώ θεωρείται επικάλυψη 0.05m. Συνολικά χρησιμοποιούνται 25 λωρίδες για τη διακριτοποίηση της διατομής από τις οποίες οι 4 αναπαριστούν τις ράβδους του σπλισμού. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου και της διατομής φαίνονται στο σχήμα 5.6.



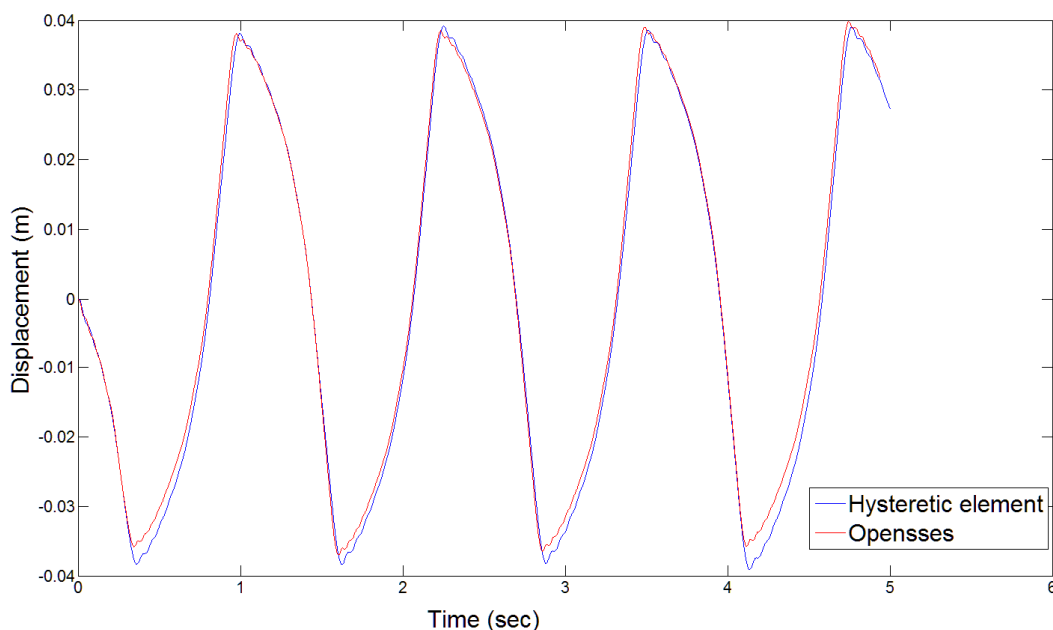
Σχ. 5.6: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά πλαισίου από Ω/Σ.

Για τα χρησιμοποιούμενα υλικά χρησιμοποιήθηκαν διγραμμοί νόμοι τάσεων παραμορφώσεων. Για το μεν σκυρόδεμα θεωρήθηκε μηδενική κράτυνση, ενώ για το χάλυβα θεωρήθηκε κράτυνση 2%. Η ποιότητα του σκυροδέματος επιλέχθηκε να είναι C20/25 και ο χάλυβας S500. Οι ιδιότητες των υλικών, καθώς και οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen που παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον επόμενο πίνακα.

Χαρακτηριστικά Σκυροδέματος	
E (KN/m ²)	210000000
f_y (KN/m ²)	500000
n	25
β	0.5
γ	0.5
Χαρακτηριστικά Χάλυβα	
E (KN/m ²)	30000000
f_y (KN/m ²)	20000
n	25
β	0.5
γ	0.5

Πιν 5.2: Παράμετροι ανάλυσης για το σκυρόδεμα και το χάλυβα.

Η εξίσωση της εδαφικής επιτάχυνσης είναι $\ddot{u}(t) = 300 \cdot \sin(5 \cdot t)$. Όσον αφορά την επίλυση της εξίσωσης κίνησης, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newmark με $\gamma = 0.5$ και $\beta = 0.25$, ενώ θεωρήθηκε και ιξώδης απόσβεση τύπου Rayleigh με $\xi = 0.05$. Τα αποτελέσματα της δυναμικής ανάλυσης τέθηκαν σε σύγκριση με το λογισμικό Opensses, όπου τόσο η διακριτοποίηση του φορέα όσο και οι παράμετροι ανάλυσης επιλέχθηκαν έτσι ώστε να ταυτίζονται με αυτές του προτεινόμενου στοιχείου. Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζεται η χρονοϊστορία του κόμβου σύνδεσης δοκού-υποστυλώματος όπως αυτή προέκυψε και με τις δύο μεθοδολογίες.

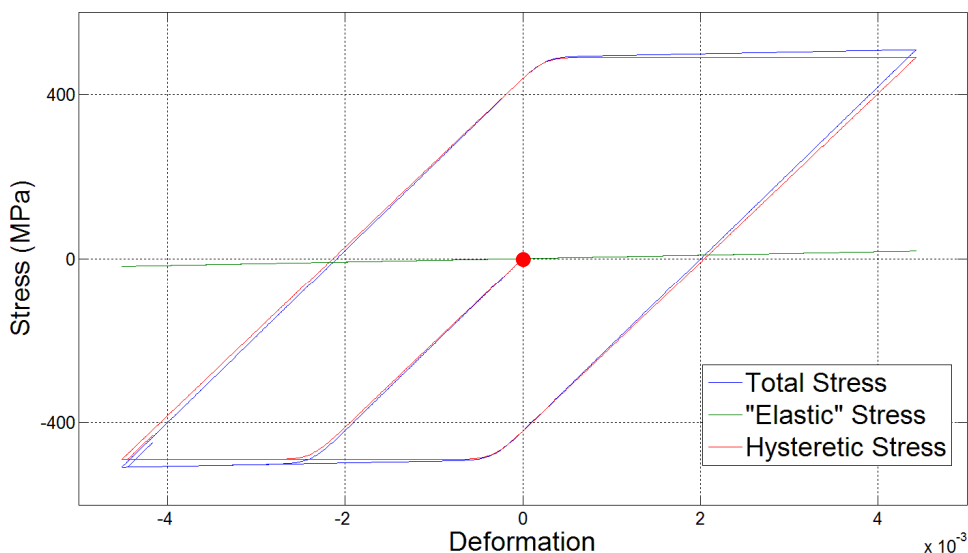


Σχ. 5.7: Χρονοϊστορία μετακινήσεων κόμβου δοκού-υποστυλώματος.

Όπως παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα βρίσκονται σε περίπου απόλυτη ταύτιση, αποδεικνύοντας ότι το προτεινόμενο μοντέλο είναι αρκετά αξιόπιστο. Συνεπώς, όταν η γενική μέθοδος επίλυσης και οι παράμετροι τους είναι ίδιες, οι δύο διαφορετικές μέθοδοι εύρεσης της κατάστασης του στοιχείου συμβάλουν στην παραγωγή των ίδιων αποτελεσμάτων.

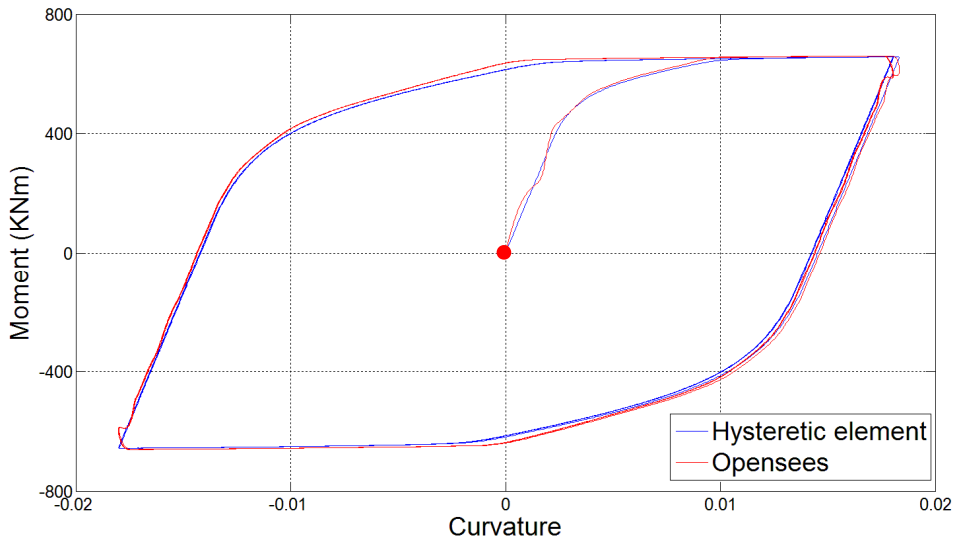
Το δομικό συστατικό της ανάλυσης του στοιχείου ινών είναι η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων της κάθε ίνας. Στην προτεινόμενη μεθοδολογία, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4, η σχέση αυτή εκφραζόμενη σε όρους του μοντέλου Bouc-Wen διαχωρίζεται σε ένα μειωμένο ελαστικό τμήμα και ένα υστερητικό. Στο επόμενο γράφημα παρουσιάζεται αυτός ο διαχωρισμός στην τάση της μίας ράβδου σπλισμού που βρίσκεται στη διατομή της πάκτωσης του υποστυλώματος. Η συνολική τάση σε κάθε χρονική στιγμή προκύπτει ως το άθροισμα της μειωμένης ελαστικής και της υστερητικής, ενώ η ανηγμένη παραμόρφωση

είναι η πραγματική σε κάθε περίπτωση. Είναι εμφανές, όπως ορίζει εξάλλου και η θεωρία, ότι η κράτυνση του χάλυβα οφείλεται στο ελαστικό τμήμα της τάσης, ενώ το υστερητικό τμήμα ακολουθεί μία ελαστική-απόλυτως πλαστική συμπεριφορά με δυσκαμψία το 98% της πραγματικής για τον δεδομένο συντελεστή $\alpha = 0.02$.



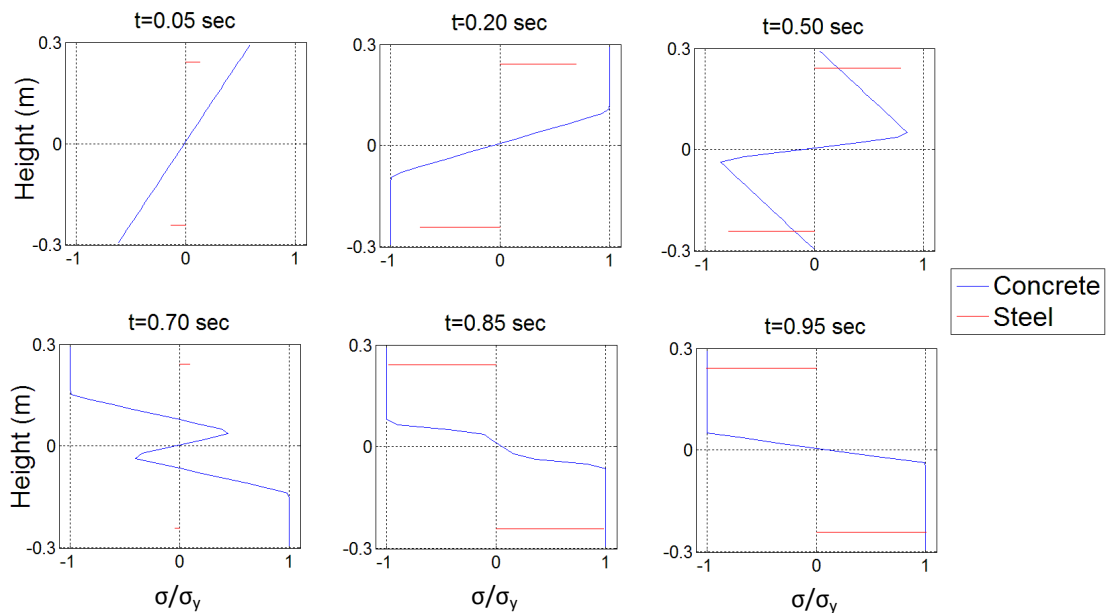
Σχ. 5.8: Βρόχοι τάσεων-παραμορφώσεων του χάλυβα οπλισμού στη διατομή της πάκτωσης του υποστυλώματος του πλαισίου από Ω/Σ.

Τέτοιοι βρόχοι υστέρησης, όπως του σχήματος 5.8, αναπτύσσονται σε κάθε ίνα μίας διατομής ελέγχου. Σε κάθε χρονική στιγμή αν ολοκληρωθούν οι τάσεις των ινών στο χωρίο της διατομής προκύπτουν τα εντατικά μεγέθη της. Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροπών καμπυλοτήτων της διατομής της πάκτωσης του υποστυλώματος. Παράλληλα, συγκρίνεται με το αντίστοιχο διάγραμμα όπως προέκυψε από το λογισμικό OpenSees και παρατηρείται σχεδόν ταύτιση τους, γεγονός που ενισχύει την επικύρωση του προτεινόμενου προσομοιώματος. Το σημαντικό σημείο παρατήρησης είναι η ομαλότητα των βρόχων στους κλάδους φόρτισης, όταν γίνεται μετάβαση από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή. Αυτό συμβαίνει λόγω της σταδιακής διαρροής όλο και περισσότερων ινών με την αύξηση της φόρτισης και της εξάπλωσης της πλαστικής ζώνης στο εσωτερικό της διατομής.



Σχ. 5.9: Υστερητικοί βρόχοι ροπών-καμπυλοτήτων στη διατομή της πάκτωσης του υποστυλώματος στο πλαίσιο από Ω/Σ.

Τέλος, στο σχήμα 5.10 παρουσιάζεται για την ίδια διατομή της πάκτωσης η μεταβολή της κατανομής των τάσεων καθ' ύψος στα τρία στάδια φόρτισης, ελαστικής αποφόρτισης και αρνητικής επαναφόρτισης. Οι τάσεις του σκυροδέματος και του χάλυβα κανονικοποιούνται ως προς την αντίστοιχη τάση διαρροής τους για να είναι κατανοητό πότε διαρρέει κάθε υλικό.



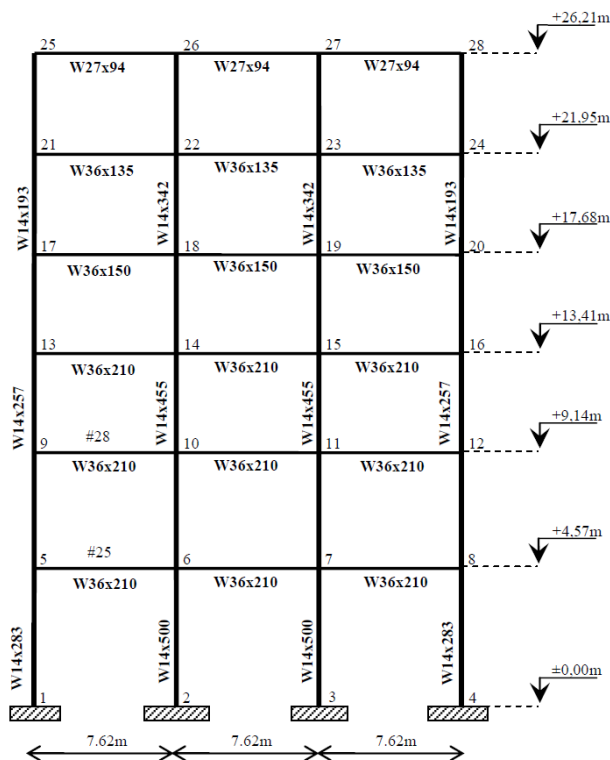
Σχ. 5.10: Κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής της πάκτωσης κατά την απόκριση του πλαισίου από Ω/Σ.

Τη χρονική στιγμή $t = 0.05\text{sec}$ ολόκληρη η διατομή παραμένει ελαστική. Αργότερα, τη χρονική στιγμή $t = 0.20\text{sec}$ παρατηρείται ότι αρκετές ίνες του σκυροδέματος έχουν

διαρρεύσει, ενώ οι τάσεις στον χάλυβα εξακολουθούν να είναι ελαστικές. Στη συνέχεια η διατομή αποφορτίζεται από τις εξωτερικές ίνες προς τις εσωτερικές. Οι ακραίες ίνες που είχαν περάσει στην πλαστική περιοχή τώρα επιστρέφουν στην ελαστική και η κατανομή των τάσεων παίρνει τη μορφή του σχήματος για $t = 0.50\text{sec}$. Έπειτα, λόγω της φόρτισης στην αντίθετη κατεύθυνση, όλες οι ίνες τείνουν να αναπτύξουν τάση διαρροής αντίθετου προσήμου. Καθώς η φόρτιση αυξάνει συνεχώς, επέρχεται η κατάσταση της χρονικής στιγμής $t = 0.85\text{sec}$ όπου διαρρέει ο χάλυβας των οπλισμών. Τέλος, στο μέγιστο της φόρτισης, για $t = 0.95\text{sec}$ ο χάλυβας, λόγω της κράτυνσης, ξεπερνά την τάση διαρροής του ενώ η πλαστικές ζώνες στο σκυρόδεμα έχουν εξαπλωθεί αρκετά και τείνουν να εξαλείψουν τον ελαστικό πυρήνα.

5.3 Δυναμική ανάλυση πολυόροφου πλαισίου

Σε αυτό το παράδειγμα αναλύεται το πολυόροφο πλαίσιο του επόμενου σχήματος. Το πλαίσιο αυτό ανήκει σε πραγματική κατασκευή και μάλιστα στο νοσοκομείο Woodland Hills Hospital στην Καλιφόρνια. Το πλαίσιο είναι μεταλλική κατασκευή και οι χρησιμοποιούμενες διατομές καθώς και οι διαστάσεις του φορέα παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης τα αδρανειακά χαρακτηριστικά των ορόφων καταγράφονται στον πίνακα 5.3.



Σχ. 5.11: Ο φορέας του πολυόροφου πλαισίου.

Όροφος	Μάζες (tn)
1	402.8
2	231.2
3	180.4
4	180.4
5	180.4
6	182.1

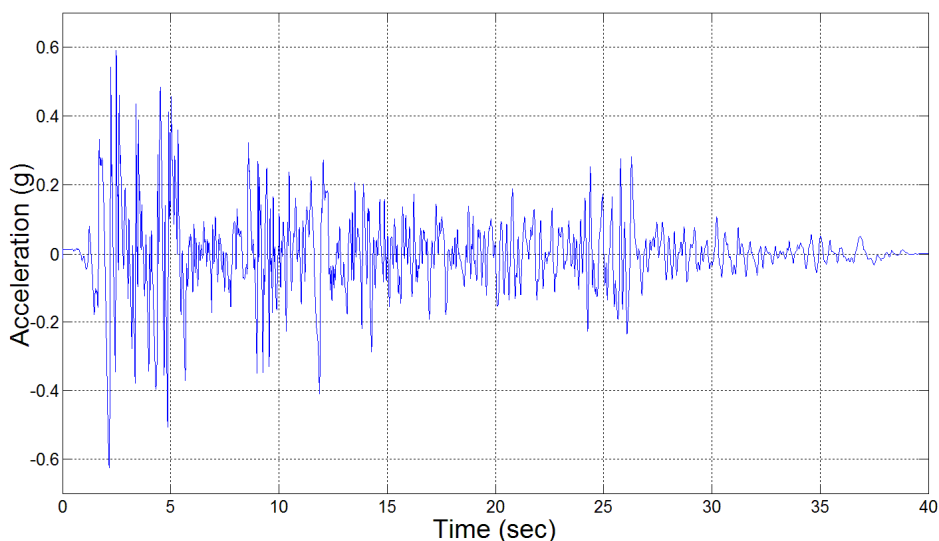
Πιν. 5.3: Μάζες ορόφων.

Όσον αφορά το χάλυβα, το καταστατικό διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων του θεωρείται διγραμμικό με τάση διαρροής $f_y = 248 \text{ MPa}$ και κράτυνση 1%. Οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα.

Παράμετρος	Τιμή
N	25
α	0.001
β	0.5
γ	0.5
f_y	248 (MPa)

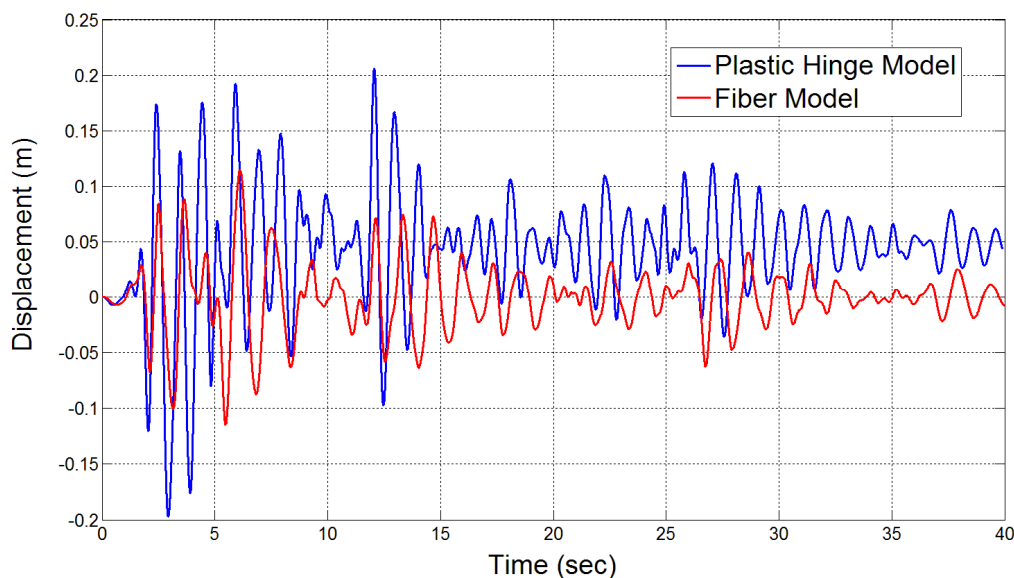
Πιν. 5.4: Παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen.

Το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού που επιλέχθηκε είναι αυτό του El_Centro πολλαπλασιασμένο με συντελεστή 2. Το γράφημα του τροποποιημένου σεισμού στο χρόνο παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 5.12: Κλιμακούμενο επιταχυνσιογράφημα του σεισμού El_Centro.

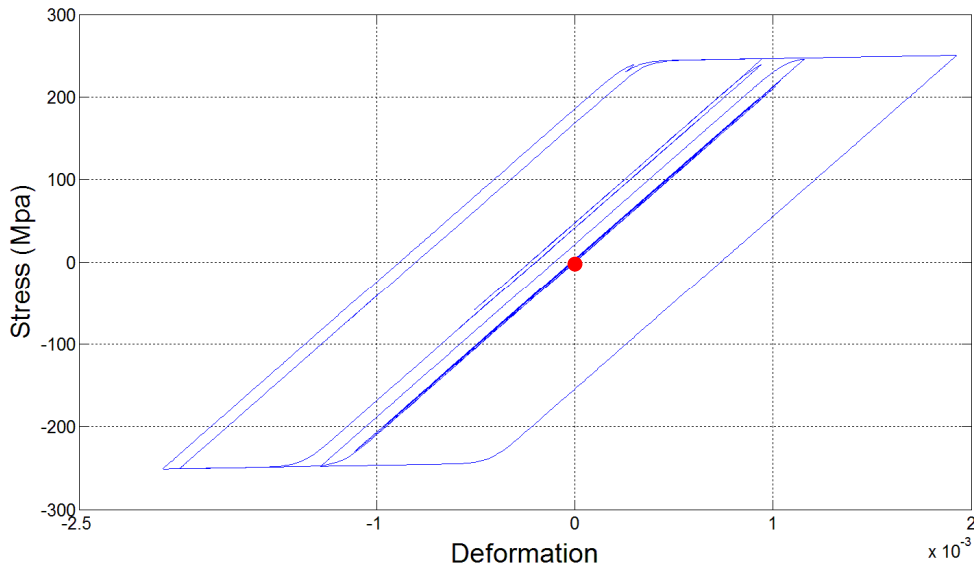
Το αποτέλεσμα της προκύπτουσας μετατόπισης κορυφής συναρτήσει του χρόνου παρουσιάζεται στο επόμενο γράφημα. Στο ίδιο σχήμα γίνεται σύγκριση με το αποτέλεσμα που προκύπτει από το κλασικό υστερητικό στοιχείο δοκού, δηλαδή με ένα στοιχείο πλαστικών αρθρώσεων στα άκρα.



Σχ. 5.13 Χρονοϊστορία μετατόπισης κορυφής υστερητικού στοιχείου ινών και υστερητικού στοιχείου πλαστικών αρθρώσεων.

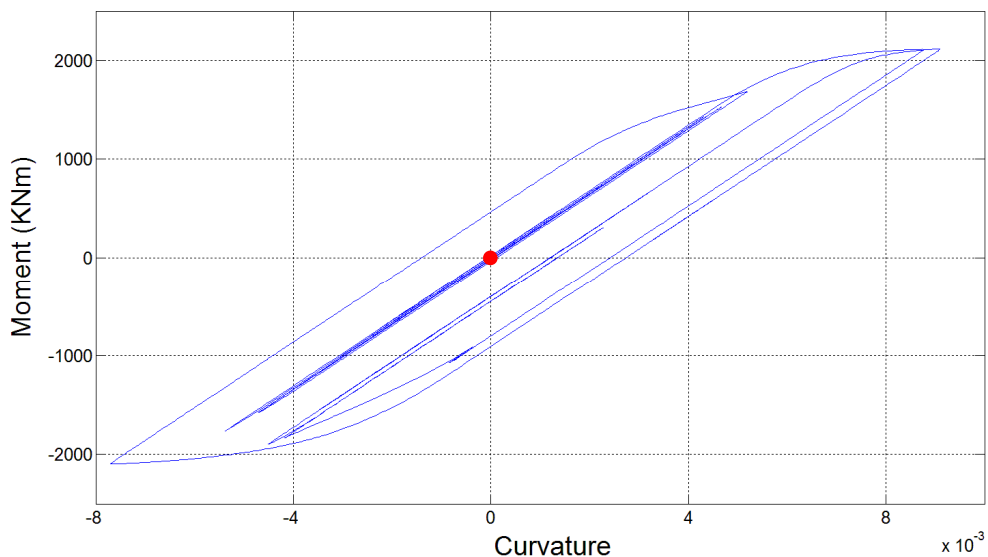
Η διαφορά που παρατηρείται οφείλεται στο γεγονός ότι στο μοντέλο πλαστικών αρθρώσεων η διαρροή όλης της διατομής γίνεται ακαριαία όταν πλαστικοποιηθεί η άνω ίνα του πέλματος. Συνεπώς, αφού η πλαστικοποίηση επέρχεται νωρίτερα, ο φορέας συνολικά αναπτύσσει μεγαλύτερες μετατοπίσεις και λόγω της εκτενέστερης πλαστικοποίησης αποκλίνει από τη θέση ισορροπίας και στο τέλος της φόρτισης ισορροπεί σε νέα θέση.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται ο βρόχος υστέρησης τάσης-παραμόρφωσης της εξωτερικής ίνας του άνω πέλματος της μεταλλικής διατομής που βρίσκεται στην πάκτωση στον κόμβο 1 του πλαισίου.



Σχ. 5.14: Υστερητικός βρόχος τάσης-παραμόρφωσης της ακραίας ίνας της διατομής στην πάκτωση του υποστρώματος 1-5.

Έπειτα από την ολοκλήρωση σε κάθε χρονική στιγμή όλων των τάσεων των ινών της διατομής προκύπτουν τα εντατικά μεγέθη της. Για την ίδια διατομή της πάκτωσης, λοιπόν, παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα ο βρόχος υστέρησης της ροπής συναρτήσει της καμπυλότητας. Παρατηρείται, ότι αντίθετα με το διάγραμμα των τάσεων, ο βρόχος δεν αποτελείται από γραμμικά τμήματα. Ο ομαλός μεταελαστικός κλάδος της ροπής οφείλεται στη σταδιακή πλαστικοποίηση των ινών καθ' ύψος, αφού δεν υποτίθεται συγκεκριμένο σημείο διαρροής για τα εντατικά μεγέθη στα προσομοιώματα ινών.



Σχ. 5.15: Υστερητικός βρόχος ροπών-καμπυλοτήτων της διατομής στην πάκτωση του υποστηλώματος 1-5.

5.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ελέγχθηκε η αξιοπιστία του προτεινόμενου προσομοιώματος να παράγει ρεαλιστικά αποτελέσματα. Η σύγκριση έγινε με το ευρέως χρησιμοποιούμενο λογισμικό Orpensees και οι αποκρίσεις των φορέων που ελέγχθηκαν ήταν πανομοιότυπες. Αυτό είναι λογικό αφού η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι μόνο η έκφραση του νόμου τάσεων-παραμορφώσεων εκφράζεται με διαφορετικό τρόπο και οι υπόλοιπες διαδικασίες επίλυσης είναι ίδιες για τις δύο μεθόδους.

Συνεπώς, το υστερητικό στοιχείο ινών παρουσιάζει όλα τα πλεονεκτήματα των στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας που προκύπτουν από τη σταδιακή διαρροή όλο και περισσότερων ινών στις διατομές ελέγχου. Έτσι αποτυπώνεται η πραγματική συμπεριφορά του μέλους μέσω της ομαλής μετάβασης του από την ελαστική στην πλαστική περιοχή. Τέτοια προσομοίωση, λοιπόν, εκμεταλλεύεται όλο το απόθεμα αντοχής της διατομής μέσω του ελαστικού της πυρήνα, προκαλώντας μειωμένες αποκρίσεις σε σχέση με τα στοιχεία πλαστικών αρθρώσεων. Παράλληλα, το προσομοίωμα εμπεριέχει και το γνωστό μειονέκτημα όλων των στοιχείων μετατοπίσεων δηλ. αυτό της μη τήρησης της ισορροπίας. Επομένως απαιτείται η προσομοίωση του μέλους δοκού με περισσότερα του ενός στοιχεία μετατοπίσεων. Αυτή η περίπτωση ελέγχθηκε στο παράδειγμα του προβόλου, όπου η προσθήκη ενός κόμβου κοντά στην πάκτωση ήταν ικανή να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα.



6 Κεφάλαιο

Συμπεράσματα-Προτάσεις

6.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία έγινε μία πρώτη προσπάθεια να ενσωματωθεί η ιδέα της υστέρησης, εκφραζόμενη μέσα από υστερητικά μοντέλα, στην κλασική μεθοδολογία ενός στοιχείου ινών. Ο καταστατικός νόμος τάσεων-παραμορφώσεων της κάθε ίνας διατυπώθηκε σύμφωνα με το προσομοίωμα Bouc-Wen και έπειτα από ολοκληρώσεις τόσο στο χωρίο της διατομής, όσο και κατά μήκος του στοιχείου προέκυψαν τα μητρώα δυσκαμψίας και οι επικόμβιες δράσεις του στοιχείου. Η ενσωμάτωση της μεθοδολογίας στις κλασικές μεθόδους Newton-Raphson και Newmark για την επίλυση του μη-γραμμικού, ολικού συστήματος της κατασκευής έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πλαισιωτούς φορείς. Γενικά, τα πρώτα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι τα εξής:

- Προκύπτει ότι η δυνατότητα του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen να περιγράφει με μία συνάρτηση όλες τις καταστάσεις φόρτισης, κράτυνσης και αποφόρτισης της κάθε ίνας, προσφέρει αμεσότητα στη διατύπωση της εύρεσης των τάσεων της διατομής. Στην κλασική διατύπωση ένας απλός, διγραμμικός, καταστατικός νόμος υλικού περιγράφεται από μία αρχική δυσκαμψία, ένα σημείο διαρροής και ένα μέτρο κράτυνσης. Σε αυτή την περίπτωση για μία επαυξητική παραμόρφωση, προκειμένου να βρεθεί η νέα τάση, πρέπει να βρεθεί αρχικά η αντίστοιχη ελαστική επαυξητική τάση. Έπειτα, γίνεται η σύγκριση με τη συνολική τάση του προηγούμενου βήματος ώστε να διαπιστωθεί αν η ίνα βρίσκεται στον ελαστικό κλάδο, στον πλαστικό ή σε αποφόρτιση και ανάλογα με την περίπτωση υπολογίζεται η νέα συνολική τάση.
- Παρ' όλο που η μη-γραμμική εξίσωση του Bouc-Wen εκφράζεται συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης, αν για την αριθμητική επίλυση της χρησιμοποιηθεί η επαναληπτική μέθοδος Euler, δεν είναι αναγκαίος ο υπολογισμός της μέσω των επικόμβιων ταχυτήτων. Η μεταβολή της παραμόρφωσης υπολογίζεται απλά ως η διαφορά ανάμεσα στις τιμές του τρέχοντος και του προηγούμενου βήματος. Η ευκολία αυτή επιτρέπει την εισαγωγή της μεθόδου απευθείας σε στατικά προβλήματα, καθώς η στατική περίπτωση δεν είναι ανάγκη να επιλυθεί ως δυναμική με την αριθμητική ολοκλήρωση της δυναμικής εξίσωσης ισορροπίας.
- Το προτεινόμενο προσομοίωμα παρουσιάζει όλα τα χαρακτηριστικά των στοιχείων κατανεμημένης πλαστικότητας, δηλαδή παρέχει την πληροφορία της κατανομής των τάσεων καθ' ύψος της διατομής και κατά μήκος του στοιχείου, καθώς και την εξέλιξη της

με το χρόνο. Γενικά, η δυνατότητα προσομοίωσης της σταδιακής εξάπλωσης της πλαστικότητας διαφοροποιεί την απόκριση της κατασκευής σε σχέση με τα κλασικά στοιχεία πλαστικών αρθρώσεων και μάλιστα προκαλεί την αύξηση της αντοχής της.

6.2 Προτάσεις βελτίωσης του προσομοιώματος

Στη συγκεκριμένη εργασία έχει γίνει μία αρχική προσπάθεια ενσωμάτωσης των υστερητικών μοντέλων στα στοιχεία ινών. Υπάρχουν αρκετά περιθώρια για περαιτέρω έρευνα και εξέλιξη του υπάρχοντος προσομοιώματος. Κάποιες βασικές κατευθύνσεις έρευνας που μπορούν να ακολουθηθούν είναι οι εξής:

- Διερεύνηση επίλυσης του συνολικού μη-γραμμικού συστήματος της κατασκευής ώστε να γίνει εκμετάλλευση της παραγόμενης εξίσωσης ισορροπίας στην αυτούσια μορφή της: $[K_s] \cdot \{U\} + \{P_{HYS}\} = \{P\}$. Σε αυτή τη σχέση, επειδή το μητρώο δυσκαμψίας παραμένει σταθερό, η μη-γραμμικότητα συγκεντρώνεται στο διάνυσμα των υστερητικών δράσεων. Συνεπώς, μία επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson που να γραμμικοποιεί μόνο το διάνυσμα των υστερητικών δράσεων θα ήταν προτιμότερη.
- Εισαγωγή των φαινομένων απομείωσης αντοχής και δυσκαμψίας στο προσομοίωμα του Bouc-Wen. Η ενέργεια αυτή αφορά μόνο τη διατύπωση της μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης έτσι ώστε να θεωρεί τις απομειώσεις λόγω ανακύκλισης στις ιδιότητες των υλικών και μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί χωρίς να αλλάξει η υπόλοιπη μεθοδολογία επίλυσης. Επίσης, οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να γραφούν έτσι ώστε να περιγράφουν ασύμμετρους βρόχους υστέρησης. Με αυτόν τον τρόπο θα γίνει ρεαλιστικότερη προσομοίωση του κάθε υλικού ανάλογα με τη φύση του.
- Ενσωμάτωση περισσότερων υστερητικών προσομοιωμάτων. Το μοντέλο του Bouc-Wen ανήκει στην κατηγορία των ομαλών και ανεξάρτητων του ρυθμού μεταβολής υστερητικών προσομοιωμάτων. Η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι γενική και ισχύει για κάθε υστερητικό προσομοίωμα που ανήκει στην παραπάνω κατηγορία. Συνεπώς, μπορεί να επεκταθεί και να περιέχει περισσότερους νόμους υστέρησης κατάλληλους για κάθε υλικό.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] Bouc R., (1967). "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis", Proceedings of the Fourth Conference on Non-linear oscillation, Prague, Czechoslovakia.
- [2] Clough R. W., Benuska K. L. and Wilson E. L. "Inelastic earthquake response of tall buildings." Proc., 3rd World Conf. on Earthquake Engineering, Wellington, New Zealand, 1965.
- [3] Giberson, M. F. "The response of nonlinear multistory structures subjected to earthquake excitation." PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 1967.
- [4] Spacone E., Filippou F. C. and Taucer, F. F "Fibre beamcolumn model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation." Earthquake Engrg. and Struct. Dyn., 25(7), 711–725, 1996.
- [5] Bathe K.J. " Finite Element Procedures" , Prentice Hall Engineering, Science, Mathematics, New York, 2007.
- [6] Spacone E., Ciampi V. and Filippou F. C. "Mixed formulation of nonlinear beam finite element." Comput. Struct., 58, 71–83, 1996.
- [7] Neuenhofer A. and Filippou F. C. "Evaluation of nonlinear frame finite-element models." J. Struct. Eng., 123_7_, 958–966, 1997.
- [8] Coleman J. and Spacone E. "Localization issues in force-based frame elements." J. Struct. Eng., 127_11_, 1257–1265, 2001.
- [9] M.H. Scott and G.L. Fenves "Plastic Hinge Integration Methods for Force-Based Beam–Column Elements." Journal of Structural Engineering © ASCE, February 2006.
- [10] S. Triantafyllou and V. Koumousis, "Small and Large Displacement Dynamic Analysis of Frame Structures Based on Hysteretic beam Elements" Journal Of Engineering Mechanics, Volume 138, Issue 1, Pages 36-49, July 2011.
- [11] S. Triantafyllou and V. Koumousis, "An inelastic Timoshenko beam element with axial-shear flexural interaction" Computational Mechanics, Volume 48, Issue 6, Pages 713-727, December 2011.
- [12] Wen, Y.K., "Method of random vibration of hysteretic systems", Journal of Engineering Mechanics Division, 102, pp. 249-263, 1976.
- [13] Sivaselvan M. V., Reinhorn A. M. Hysteretic Models for deteriorating inelastic structures, Journal of Engineering Mechanics 126 (6), pp. 633-640, 2000.

- [14] A.E. Charalampakis, V.K. Koumouisis, "Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load" *Advances in Engineering Software*, 39, 923–936, 2008.
- [15] McKenna F., Fenves G., Scott, M.: "Open system for earthquake engineering simulation". University of California, 2000.
- [16] I.A. Gkimouisis, V.K. Koumouisis, "A Hysteretic Displacement Based Fibre Beam Element." *The Eleventh International Conference on Computational Structures Technology (CST2012)*, Dubrovnik, Croatia, September 2012.
- [17] S. Triantafyllou, "Hysteretic Finite Elements and Macro-Elements for the Non-Linear Dynamic Analysis of Structures." *Doctoral Thesis, NTUA*, 2011.
- [18] Ε. Χατζή, Σ. Τριανταφύλλου, Διπλωματική Εργασία Ε.Μ.Π. (2004), "Ανελαστική Ανάλυση Πολυωρόφων Κριτίων από Ω.Σ με Υστερητικό Προσομοίωμα κατά Bouc-Wen".
- [19] Χ. Ζέρης, Σημειώσεις για το μάθημα "Μη-γραμμικά Προσομοιώματα Φορέα Ω/Σ και χάλυβα. " Διατμητικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών: :Δομοστατικός και Ανάλυση των Κατασκευών."
- [20] Χ. Σοφιανός, Διπλωματική Εργασία Ε.Μ.Π. (2012), " Υστερητικό Στοιχείο Δοκού με Απομειούμενα Προσομοιώματα Τύπου Bouc-Wen."