
Génie Civil et Construction
ÉCOLE POLYTECHNIQUE NATIONALE D'ATHÈNES

Un périple au cœur des
Structures Plissées

Anna A. Ikonomou

Directeur de thèse: Prof. Dr. Leonidas Stavridis



Cover photo by Emre Ayaroglu, taken on November 19, 2008 using a Nikon E7900. Work under license, free to share, copy, adapt and distribute. (creativecommons.org/licenses/by/3.0)

*Origami structure designed by Roman Diaz and Daniel Naranjo. Folded from 37*37cm MC treated tissue. Finished with MC.
Diagrams: Origami for Interpreters - Roman Diaz*

À MES PARENTS

Je tiens à remercier chaleureusement le professeur de l'École Polytechnique Nationale d'Athènes, Dr. Leonidas T. Stavridis, directeur de ma thèse de master, pour ses conseils scientifiques, le temps qu'il m'a consacré ainsi que pour son soutien et sa patience tout au long de la réalisation de ce projet. Un grand merci également à tous ceux qui m'ont soutenue d'une façon ou d'une autre au cours de cet effort.

Table des matières

	TABLE DES MATIÈRES.....	6
1.	Introduction	11
	Un regard rapide sur quelques structures plissées	13
	En deux mots	17
2.	La théorie de Karl Girkmann	19
2.1	La théorie « en chiffres » (telle qu'elle est présentée par K. Girkmann)	20
	2.1.1 En général	20
	2.1.2 La théorie	21
	2.1.3 Le calcul du système porteur articulé	23
	2.1.4 Structure plissée à nœuds rigides	26
2.2	ÉLUCIDATION DE LA THÉORIE EN IMAGES 3D (fichier pdf).....	32
3.	La toiture plissée 'Sezana'	33
3.1	La structure 'Sezana' résolue avec la méthode de Girkmann	37
	3.1.1 Modélisation du système porteur, des charges et du matériel	37
	3.1.2 Calcul du système porteur (selon le procédé et les hypothèses de Girkmann)	40
3.2	La structure 'Sezana' résolue avec la méthode des déplacements imposés	46
	Courte démonstration de la logique de la méthode	46
	3.2.1 Calcul du système porteur	52
	3.2.2 Étude paramétrique	57

HISTOIRE D'UN PLI



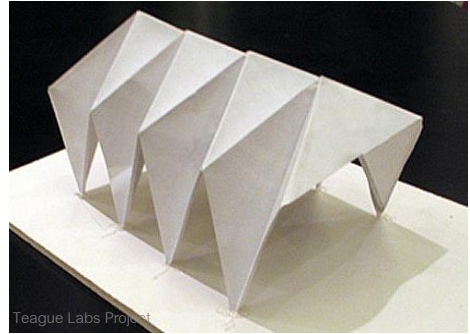
Évaluation du travail par Albers.
Cours préliminaire, 1928-1929
Photo par Umbo
© The Joseph and
Anni Albers Foundation

J'ai gardé un souvenir vif du premier jour des cours préliminaires. Joseph Albers entra dans la pièce, portant une pile de journaux dans les bras et s'adressant à nous, il lança : « Mesdemoiselles et jeunes hommes, nous ne sommes pas riches, mais pauvres. Nous ne pouvons pas nous permettre de gaspiller les matériaux et le temps. (...) Tout art commence par un matériau, et par conséquent nous devons d'abord rechercher ce dont notre matériau est capable. Nous allons tout d'abord expérimenter sans chercher à fabriquer un produit. (...) L'économie de la forme dépend du matériau avec lequel nous travaillons. Notez qu'on obtient souvent plus en faisant moins. Nos études doivent conduire à une pensée constructive. (...) Je veux que chacun prenne un journal et tente de faire de celui-ci quelque chose de plus. Je veux que vous respectiez le matériau et que vous l'utilisiez d'une manière qui ait un sens – en préservant ses qualités inhérentes. Si vous pouvez le faire sans outils, c'est-à-dire sans ciseaux, couteau ou colle, c'est encore mieux. »

Il y avait des masques... des bateaux... des châteaux.... des avions et toutes sortes de petites figurines amusantes.
..de plier le journal dans le sens de la longueur si bien que celui-ci se tenait debout comme un paravent.
..parce qu'il rendait un matériau pliable rigide, si rigide qu'il pouvait se tenir sur sa partie la plus ténue : le bord du papier.

Hannes Beckmann, ancien élève de Joseph Albers, décrit cette expérience dans l'article "Formative Years" dans Bauhaus and Bauhaus People en 1970

..... Il montra du doigt une étude **d'une extrême simplicité** faite par un jeune architecte hongrois qui s'était contenté..
..... Il fit remarquer le sens du matériel et son utilisation judicieuse. Le pliage était un procédé naturel pour le papier..
..... Il mit aussi l'accent sur le fait qu'un journal posé sur la table ne laissait apparaître que l'un de ses côtés, l'autre côté étant caché.
Maintenant que le journal se tenait debout, ses deux côtés étaient devenus visuellement actifs.



Qu'il soit processus d'élaboration d'une ligne, d'une surface ou d'un volume, le pli s'éternise dans un mouvement de retournement constant et d'exploration, à l'infini, de l'espace et de ses lignes.

Extrait de l'essai "Infinite Folds" de Joana Neves

Introduction

Structures plissées : structures d'une statique et d'une esthétique admirables

Ces structures spatiales, qui évoquent l'art traditionnel de pliage japonais origami, sont construites à partir d'un principe simple : le pli qui rigidifie une surface mince. Comme pour le papier, les plis confèrent aux structures une ossature. Ce principe permet de concevoir des structures stables d'une grande inertie due au volume résultant des plis. Celles-ci sont à même de couvrir de grandes surfaces sans appuis intermédiaires et elles sont à la fois légères et d'une grande richesse formelle et spatiale, leur capacité de portance dérivant de leur forme et non de leur masse.

Le principe du plissage ne confère pas seulement aux structures une « finesse » statique particulière, elle leur donne aussi une grâce et une « souplesse » surprenantes. Ce n'est pas étonnant qu'elles soient considérées comme un lien entre les mathématiques et les arts. Ces structures non seulement passionnent au plus haut

point l'ingénieur, qui voit en elles des systèmes porteurs optimaux, elles fascinent aussi l'architecte auquel elles donnent la possibilité d'appliquer ses talents de sculpteur et de s'adonner au développement des formes dans l'espace, jouant avec les volumes et la lumière.

Les structures de Pier Nervi, célèbre ingénieur et pionnier indéniable dans le domaine des structures plissées, illustrent à merveille ce lien indissoluble entre l'architecture et l'ingénierie civile. Nervi pensait que l'architecture et l'ingénierie étaient les deux facettes de la même science. Selon lui, une statique simple et sans détours - expression des lois de la nature qui régissent l'équilibre des forces, la déformation des volumes et le comportement des matériaux - se traduisait sur le plan esthétique par une harmonie et une élégance des formes. Les formes données par Nervi à ses structures n'étaient donc pas le fruit d'une inspiration architecturale du moment ou d'une mode mais elles étaient, au contraire, dictées par les lois de la nature. Le résultat : des structures intemporelles et des formes dont l'harmonie n'est pas sans rappeler celle des chefs-d'œuvre du monde naturel.

De nos jours, la méthode des éléments finis permet d'analyser facilement les structures plissées, comme d'ailleurs tous les types de systèmes porteurs, mais sans pour autant nous aider à bien comprendre leur fonctionnement structural. Et pourtant, en l'absence d'une analyse approfondie, le choix de la forme est fait au hasard, privant l'ingénieur de la possibilité d'exploiter les potentialités exceptionnelles de ces structures.

Pour pouvoir aboutir à une forme optimale, il est donc fortement conseillé d'avoir recours à des méthodes analytiques – *sur le papier, pourquoi pas ?* –. Dans cet esprit, pour aborder l'étude des structures plissées, nous allons en premier lieu examiner les méthodes élaborées par les pionniers de l'analyse de ces structures, qui nous permettront d'appréhender la structure plissée comme une structure composée d'éléments fondamentaux dont le comportement nous est familier.

Nous allons, d'une part, présenter les méthodes analytiques qui permettent de résoudre les systèmes porteurs et, d'autre part, tenter de pénétrer dans la logique sous-tendant ces méthodes. Pour ce faire, nous allons décomposer et représenter de façon graphique les systèmes porteurs réels qui « se cachent » derrière les hypothèses de calcul. Un voyage iconographique composé d'une succession d'images 3D retracera les étapes de portance des charges et l'évolution de la déformation. Grâce à cette démarche de visualisation, non seulement nous atteindrons une connaissance approfondie du fonctionnement des systèmes porteurs mais nous découvrirons également les limites des méthodes de calculs.

Nous mettrons ensuite en pratique nos théories analytiques en prenant pour exemple un toit plissé construit en 1962 par Aristarchos Ikononou, une des premières structures plissées de l'époque en Grèce. Nous aurons ainsi l'occasion d'observer le comportement de la structure et de comparer les résultats des calculs obtenus par les différentes méthodes entre eux mais aussi avec les résultats obtenus par un logiciel d'éléments finis.

Les analyses seront effectuées à l'aide d'un logiciel permettant au lecteur de modifier n'importe quelle caractéristique de la structure, ce qui facilitera la bonne compréhension du système-porteur ainsi que de la méthode d'analyse mais rendra également possible l'optimisation en rapport avec les exigences spatiales, la statique, l'esthétique et enfin l'économie.

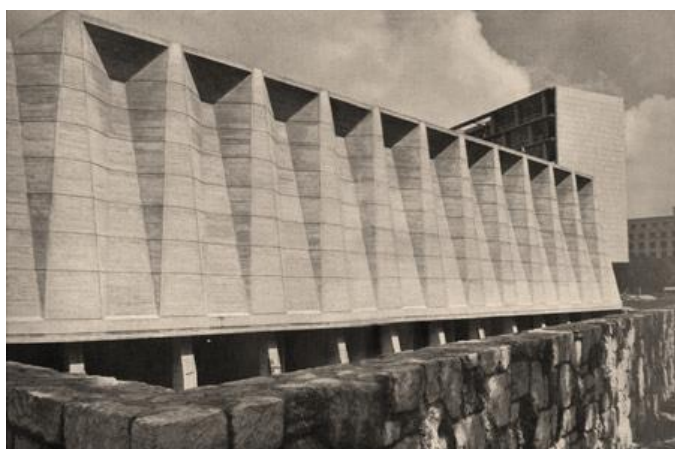
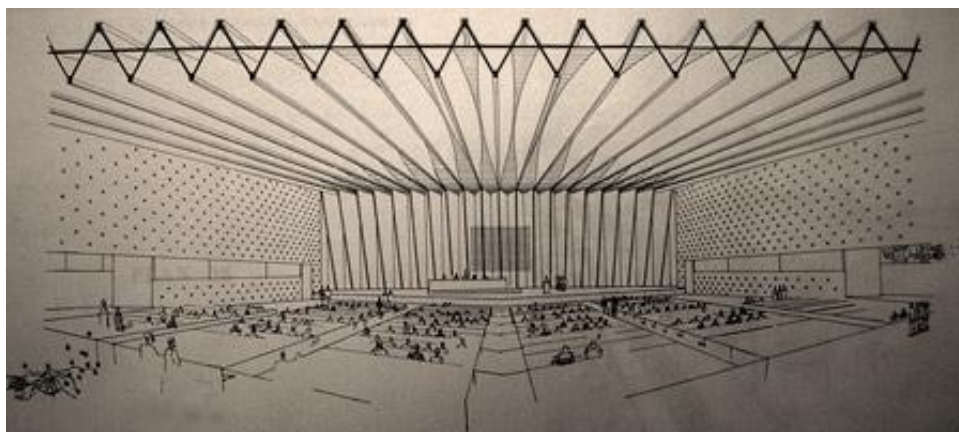
un regard rapide sur quelques structures plissées

Bâtiment des Conférences de l'UNESCO - Paris 1953

Pier Luigi Nervi, architecte & ingénieur
Bernard Zehrfuss, architecte
Marcel Breuer, architecte

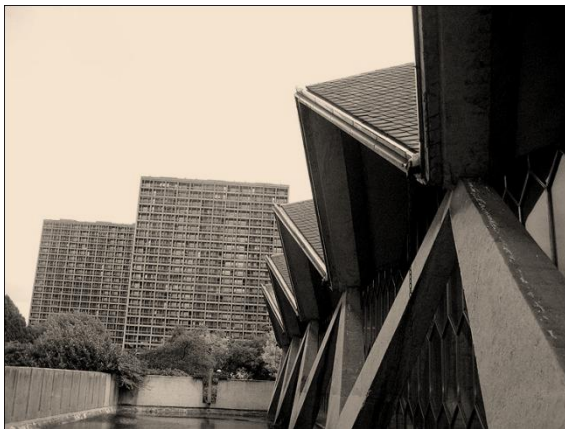
« TRIOMPHE DU BÉTON : le Bâtiment des Conférences, aux murs de béton cannelé, au toit « en accordéon », offre un exemple frappant du parti extraordinaire tiré du béton par les architectes de la Maison de l'Unesco. Ce bâtiment est un double portique qui s'appuie sur six piliers au centre. Le poids total du bâtiment est d'environ 3000 tonnes. En son point le plus haut, il atteint 14 m. »

Le Courrier de l'Unesco
Novembre 1958



Photos : Lucien Hervé

Église St. Pierre et St. Paul - Liège 1972



Groupe EGAU

Charles Carlier, architecte

Hyacinthe Lhoest, architecte

Jules Mozin, architecte

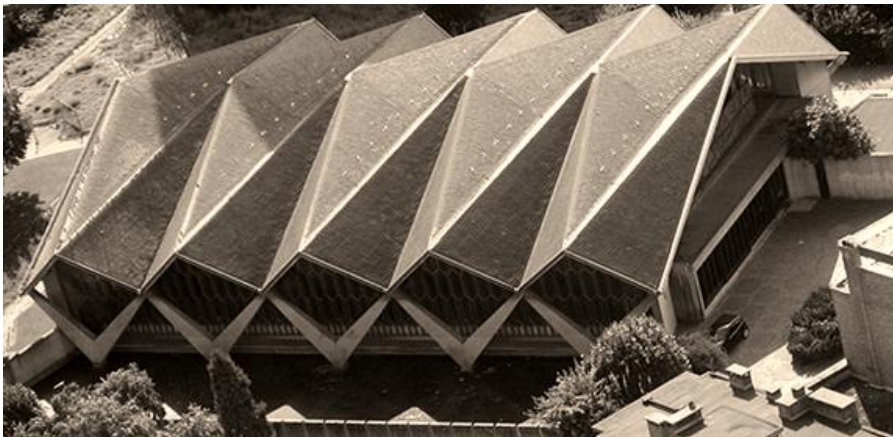


Photo :
Homme et Ville, 2007

Abri d'avions - Andersen Air Force Base - USA 1978



Yee Precast Design Group Ltd.

Portée libre : 73 m

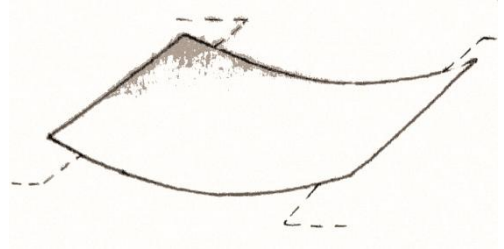
Hauteur maximale : 18.6 m

Utilisation de préfabrication in situ.

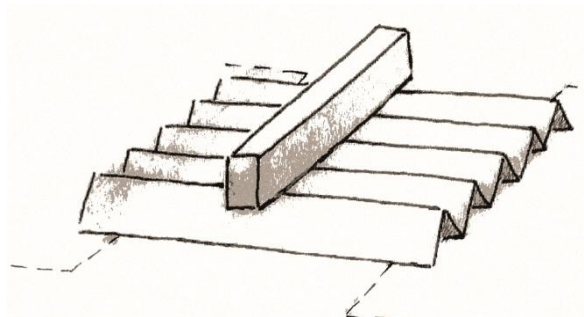
Des économies de l'ordre de 55%
en béton et 40% en quantités
d'armatures ont été réalisées.

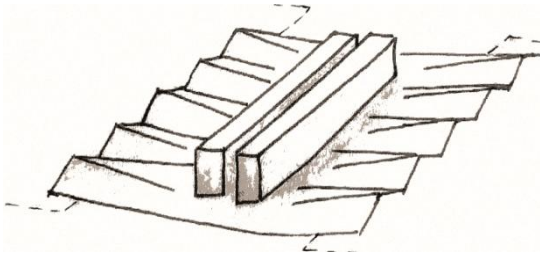


*La transformation d'une feuille de papier de masse négligeable en système porteur efficace est une parfaite illustration du fonctionnement ainsi que de l'efficacité des structures plissées pour la couverture d'un espace.
(représentation graphique adaptée du livre de René Vittone « Bâtir : manuel de la construction »)*



en deux mots...

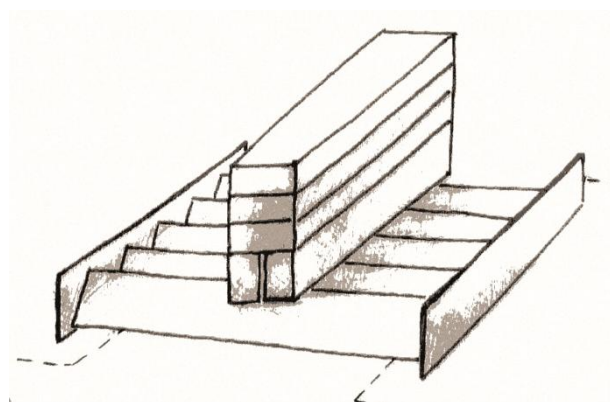




Une structure plissée est constituée de parois minces. Sa section peut être ouverte ou fermée. Les parois travaillent, dans le sens de la portée, comme des poutres (dont $h \gg b$) inclinées, liées l'une à l'autre aux points des arêtes et, dans le sens transversal, comme des dalles inclinées formant une dalle plissée continue.

Les parois subissent des moments de flexion en dehors de leur plan (comme des dalles) afin que les charges réparties sur la surface entière de la structure se concentrent aux points des arêtes. Par la suite, les charges sont assumées dans les plans des parois adjacentes et sollicitent celles-ci dans leurs plans comme des poutres simplement appuyées sur les diaphragmes d'extrémités.

Les structures plissées de grande taille sont habituellement construites en béton armé. Quant au bois, étant donné que la fabrication de plaques de grandes dimensions n'est pas envisageable, il est réservé à des structures plus petites ou des structures de forme spatiale plus complexe (motif de pliage tridimensionnel) où la superficie du module initial répété est petite. L'acier se prête peu à ces structures à cause des problèmes de stabilité, auxquels on peut toutefois faire face en utilisant des éléments de treillis. Ajoutons que les tôles nervurées ou profilées peuvent être aussi considérées comme des structures plissées.

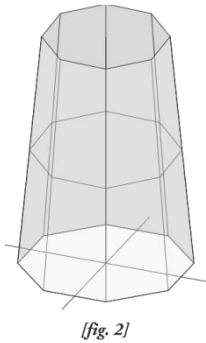
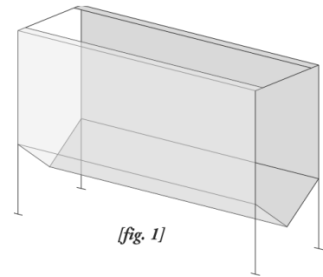


La Théorie de Karl Girkmann

2.1 La théorie « en chiffres » (telle qu'elle est présentée par K. Girkmann)

2.1.1 En général

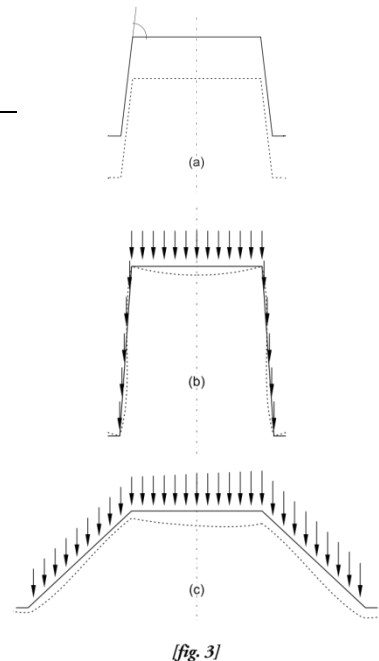
Une structure plissée est une structure tridimensionnelle composée de parois minces et planes. Les parois individuelles qui, grâce à la construction en béton armé, sont jointes l'une à l'autre monolithiquement, ont une forme rectangulaire ou trapézoïdale et, par conséquent, on peut diviser les structures plissées en structures prismatiques et en structures pyramidales. Les figures 1, 2 et 4 présentent quelques applications pratiques de structures plissées. Plus précisément, la figure 1 montre un fossé, la figure 4 un toit plissé et la figure 2 une tour de refroidissement. Ces structures sont caractérisées comme bilatérales (avec des joints simples), puisque deux parois seulement se rencontrent sur toutes les arêtes intérieures. Comme pour les coques, les charges externes sont transférées aux diaphragmes supportants transversaux, anneaux de pied etc., par des efforts agissant dans le plan des parois principalement. Les parois sont alors sollicitées essentiellement dans leur plan comme des disques (diaphragmes). En dehors des effets de disque, des effets de dalles (flexion en dehors du plan des parois) apparaissent constamment, car les charges - poids propre, neige, vent, pressions internes, etc. - comprennent des composantes latérales qui agissent perpendiculairement au plan des parois. Le calcul exact d'une structure plissée exige un temps relativement long. Pourtant, lorsque les déplacements relatifs des points de la structure plissée sont relativement petits, une simplification importante de la procédure est envisageable.



Ici, on peut distinguer trois cas extrêmes :

<i>petits</i> << <i>GRANDS</i>		(a)	(b)	(c)
Déplacements des arêtes	relatifs	<i>petits</i>	<i>petits</i>	<i>GRANDS</i>
Déplacements des arêtes	absolus	<i>GRANDS</i>	<i>petits</i>	<i>GRANDS</i>
Flèches des parois (dalles)		<i>petits</i>	<i>GRANDS</i>	<i>GRANDS</i>

(a) Les déplacements relatifs des points des arêtes sont relativement petits et les flèches des parois individuelles sont petites par rapport aux déplacements absolus des points des arêtes. Dans ce cas, la structure plissée se comporte comme une poutre en flexion avec section plissée, et les lois de répartition de Navier sont approximativement applicables pour les contraintes dues à la flexion. C'est le cas quand les parois individuelles sont petites en largeur et que leurs plans ne forment pas des angles trop petits (cela résulte en une section avec un moment d'inertie relativement petit) et également quand des diaphragmes transversaux d'extrémité qui soutiennent et assurent la forme de la section sont disponibles.

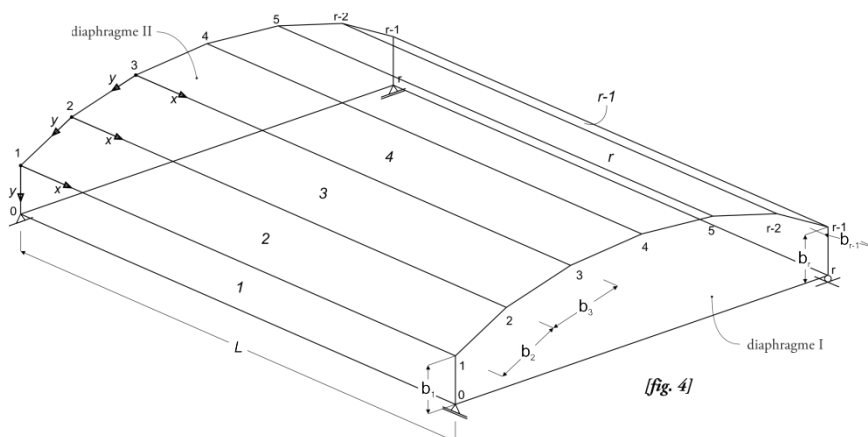


(b) Les déplacements relatifs des points des arêtes sont petits et, en même temps, les déplacements absolus de ces points sont faibles par rapport aux flèches des dalles qui apparaissent entre les arêtes. Dans ce cas, la structure plissée se comporte comme une dalle continue sur appuis rigides le long des arêtes, mais libre en rotation, où les forces des supports sont menées par elle-même (à savoir la structure plissée), c'est-à-dire par les parois individuelles se comportant comme des poutres.

De telles structures existent en grande partie dans les bunkers plissés dont les sections ont de grands moments d'inertie. Dans un tel cas, on peut simuler le comportement de la structure approximativement, sans considérer l'influence de la flexion des dalles. C'est-à-dire qu'après avoir proportionnellement distribué les charges sur les arêtes, on peut ensuite considérer les parois individuelles comme des poutres à liaison articulée le long des arêtes se sollicitant en flexion autour de leur axe fort.

(c) Les flèches des dalles individuelles et les déplacements relatifs et absolus des points des arêtes sont du même ordre de grandeur. Dans ce cas, un calcul exact doit être effectué. Ceci est particulièrement nécessaire quand il s'agit de structures plissées ouvertes dont les plans des parois forment des petits angles et dont les supports (les diaphragmes transversaux qui soutiennent) se situent à des distances relativement plus grandes.

Par la suite, on étudiera exclusivement les structures plissées bilatérales et prismatiques.



2.1.2 La théorie

Hypothèses de calcul :

Pour la toiture de la figure 4, une procédure générale de calcul est développée sur la base des hypothèses suivantes :

- La structure plissée repose sur les diaphragmes frontaux transversaux I et II qui sont rigides dans leur plan, tandis que leur rigidité transversale à leur plan est négligeable.
- Les parois individuelles sont considérées comme des structures détachées reposant « au-dessus » des diaphragmes transversaux et peuvent seulement transmettre des efforts de cisaillement au niveau des plans des diaphragmes transversaux.
- L'épaisseur d des parois individuelles est petite par rapport aux dimensions des autres côtés et reste inchangée à l'intérieur de chaque paroi.

- La largeur b des parois est petite par rapport à leur longueur L .
- Les charges de surface des parois intermédiaires sont transportées principalement par flexion hors du plan aux arêtes et ensuite, via un comportement de disque (solicitation dans le plan de la paroi), sont dirigées vers les diaphragmes I et II. Seule une partie négligeable de la charge est transférée aux diaphragmes par flexion hors du plan dans la direction longitudinale. On peut donc négliger les moments de torsion autant que les moments de flexion et les efforts tranchants exercés sur les sections transversales des parois intermédiaires qui sont produits par la flexion des parois hors du plan dans la direction longitudinale. (Note: Cette hypothèse de Girkmann perd de sa valeur quand les angles formés par les plans des parois deviennent trop petits puisque les composantes des charges dans les plans des parois augmentent significativement (pour aboutir à ∞ pour angles nuls, surface plane) et par conséquent, les charges préfèrent être transférées par flexion hors du plan dans la direction longitudinale en sollicitant les parois comme des dalles.)
- Les parois externes sont traitées comme des dalles appuyées sur trois côtés.
- On fera le calcul pour $\nu=0$ (coefficient de Poisson).

Chaque paroi n est soumise à une charge p uniforme et verticale. On simule la charge par une série Fourier.

$$p_n \approx P_n(x) = \sum_m \bar{p}_{n,m} \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad \bar{p}_{n,m} = \frac{1}{m} \frac{4p_n}{\pi}, \quad m=1,3,5... \tag{1}$$

$$p_n \approx P_n(x) = \frac{4p_n}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{L} = \frac{4p_n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4p_n}{\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{4p_n}{\pi} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots$$

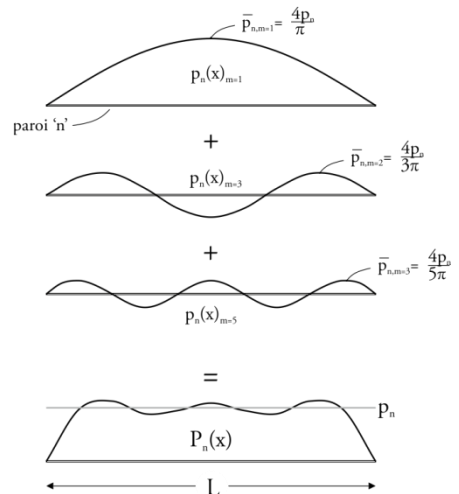
Chaque terme de charge $p_n(x)$, ainsi que la somme $P_n(x)$, sont variables pour x et symétriques par rapport à $x = l/2$ avec une distribution uniformément répartie sur la largeur de la paroi.

Pour cette recherche, on va faire les calculs pour un terme de la charge quelconque. Ainsi la charge verticale va avoir une distribution sinusoïdale dans le sens longitudinal :

$$p_n(x) = \bar{p}_n \sin ax, \quad \bar{p}_n = \frac{1}{m} \frac{4p_n}{\pi}, \quad a = \frac{m\pi}{L} \tag{2}$$

(A partir de là, pour des raisons de simplicité, on va omettre l'index m des équations.)

Après avoir fait nos calculs pour plusieurs valeurs de m , on va additionner les résultats afin de « capter » le comportement réel de la structure soumise aux 'vraies' charges $p_n (\approx P_n(x))$.



[fig. 5]

Le calcul de la structure de multiples fois statiquement indéterminée est fait en utilisant un système fondamental (extérieurement statiquement déterminé - isostatique), qui est dérivé du système unifié (hyperstatique) donné en insérant des articulations (charnières) le long des arêtes. Ce système porteur fondamental sera désormais nommé « système porteur articulé ».

2.1.3 Le calcul du système porteur articulé

On numérote les arêtes : 0,1,2 ..., n ,... r et les parois : 1,2 ..., n ,... r (fig. 4). Les détails des angles d'inclinaison, les largeurs des parois, etc. sont déduits de la figure 6a qui représente une section transversale de la structure plissée. Sur le plan moyen de chaque paroi et sur chaque arête ayant le plus grand numéro de série, on définit un système de coordonnées (x,y,z) 'main droite' dont le début se situe sur le diaphragme transversal I et dont l'axe x coïncide avec l'arête ayant le plus grand numéro de série (fig. 4). Les parois individuelles sont soumises par unité de leur plan moyen aux charges verticales qui leur correspondent.

$$p_1 = \bar{p}_1 \sin ax, \quad p_2 = \bar{p}_2 \sin ax, \quad \dots \quad (3)$$

On suppose que ces charges restent inchangées le long de la largeur des parois.

On va maintenant remplacer les charges

réparties sur les surfaces des parois par des charges linéaires appliquées le long des arêtes (fig. 6b) :

$$P_1 = p_1 b_1 + \frac{1}{2} p_2 b_2, \quad P_2 = \frac{1}{2} (p_2 b_2 + p_3 b_3), \quad P_3 = \frac{1}{2} (p_3 b_3 + p_4 b_4), \quad \dots \quad (4)$$

et en posant,

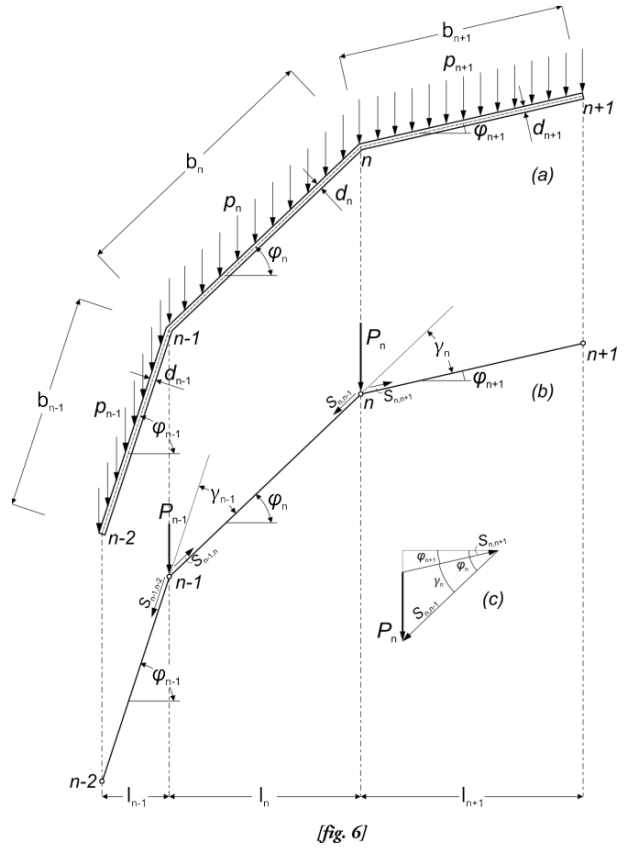
$$\bar{P}_1 = \bar{p}_1 b_1 + \frac{1}{2} \bar{p}_2 b_2, \quad \bar{P}_2 = \frac{1}{2} (\bar{p}_2 b_2 + \bar{p}_3 b_3), \quad \bar{P}_3 = \frac{1}{2} (\bar{p}_3 b_3 + \bar{p}_4 b_4), \quad \dots \quad (5)$$

on a :

$$P_1 = \bar{P}_1 \sin ax, \quad P_2 = \bar{P}_2 \sin ax, \quad \text{etc.} \quad (6)$$

Ensuite, on décompose la charge linéaire appliquée sur l'arête n , P_n en deux composantes, dans les directions des parois avoisinantes n et $n+1$ (fig. 6c) :

$$\left. \begin{aligned} S_{n,n-1} &= P_n \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n} = \bar{S}_{n,n-1} \sin ax \\ S_{n,n+1} &= P_n \frac{\cos \varphi_n}{\sin \gamma_n} = \bar{S}_{n,n+1} \sin ax \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



où on a posé :

$$\bar{S}_{n,n-1} = \bar{P}_n \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n}, \quad \bar{S}_{n,n+1} = \bar{P}_n \frac{\cos \varphi_n}{\sin \gamma_n} \quad (8)$$

Par conséquent, une charge linéaire q_n - définie par unité de longueur de la paroi - est déduite des composantes $S_{n,n-1}$ et $S_{n-1,n}$ des forces P_n et P_{n-1} appliquées sur les arêtes, de la façon suivante :

$$q_n = S_{n,n-1} - S_{n-1,n} = P_n \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n} - P_{n-1} \frac{\cos \varphi_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} \quad (9)$$

et en posant,

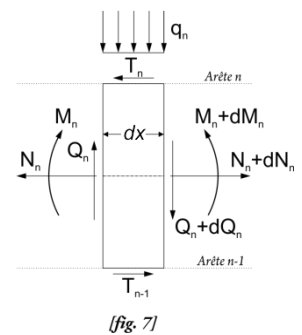
$$\bar{q}_n = \bar{P}_n \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n} - \bar{P}_{n-1} \frac{\cos \varphi_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} \quad (10)$$

on obtient :

$$q_n = \bar{q}_n \sin \alpha x \quad (11)$$

Les charges q_n sollicitent les parois dans leur plan. Ainsi des contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} se développent. Les efforts σ_x doivent, par hypothèse, être négligeables pour $x=0$ et $x=L$ car on a supposé que les diaphragmes transversaux sont totalement souples dans la direction transversale à leur plan. Cela résulte en un comportement des parois semblable à celui des poutres. Mais comme les parois avoisinantes sont reliées et, par conséquent, ne peuvent pas être déformées de façon indépendante, des efforts rasants sont transférés d'une paroi - poutre - à l'autre le long des arêtes.

En tenant en compte du fait que les largeurs b_n des parois sont petites par rapport à leur longueur L , on peut calculer les parois selon l'hypothèse Bernoulli : les sections normales à la fibre neutre restent normales et ne se déforment pas. On va alors calculer les parois comme des poutres avec portée L et sections $b_n \times d_n$. Ainsi, les contraintes normales σ_y sont négligées, les contraintes normales σ_x sont réparties sur les sections de façon linéaire en fonction de leur hauteur et, par conséquent, les contraintes τ_{xy} ont une répartition parabolique. On peut « remplacer » l'ensemble des contraintes σ_x sur une section ($x=cste$) d'une paroi n par un moment de flexion M_n et un effort normal N_n . De même, les contraintes de cisaillement τ_{xy} sur la même section sont équivalentes à un effort tranchant transversal Q_n .



Enfin, en représentant les efforts rasants définis par unité de longueur de paroi qui sont transférés des parois reliées le long des arêtes $n-1$ et n à la paroi n par T_{n-1} et T_n respectivement, on peut former les conditions d'équilibre d'une tranche infinitésimale dx de la paroi n (fig 7). Ainsi, les accroissements dQ_n , dN_n et dM_n sont déduits :

$$dQ_n = -q_n dx, \quad dN_n = (T_n - T_{n-1})dx, \quad dM_n = Q_n dx - \frac{1}{2}(T_n - T_{n-1})b_n dx \quad (12)$$

où q_n est donné par (9).

En présument une distribution de T analogue à celle de Q et en tenant en compte des conditions de limites $M_n = N_n = 0$ pour $x=0, L$ ainsi que de la symétrie, on obtient en dérivant :

$$Q_n = \bar{Q}_n \cos ax, \quad N_n = \bar{N}_n \sin ax, \quad M_n = \bar{M}_n \sin ax, \quad T_n = \bar{T}_n \cos ax \quad (13)$$

où $\bar{Q}_n, \bar{N}_n, \bar{M}_n, \bar{T}_n$ ont des valeurs constantes.

D'après les équations (12) et (13) :

$$\bar{Q}_n = \frac{1}{a} \bar{q}_n, \quad \bar{N}_n = \frac{1}{a} (\bar{T}_n - \bar{T}_{n-1}), \quad \bar{M}_n = \frac{1}{a} \bar{Q}_n - \frac{b_n}{2a} (\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}) \quad (14)$$

Le long de chaque arête intermédiaire n , les parois reliées n et $n+1$ doivent subir les mêmes déformations spécifiques ε_x . Si $\nu=0$ (coefficient Poisson) d'après la loi constitutive du matériel, les contraintes σ_x le long des arêtes sont également identiques. On a ainsi :

$$\frac{N_n}{b_n d_n} - \frac{6M_n}{b_n^2 d_n} = \frac{N_{n+1}}{b_{n+1} d_{n+1}} + \frac{6M_{n+1}}{b_{n+1}^2 d_{n+1}} \quad (15)$$

À l'aide des équations (13) et (14) et en substituant N et M dans (15), on obtient :

$$\frac{\bar{T}_{n-1}}{F_n} + 2\bar{T}_n \left(\frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} \right) + \frac{\bar{T}_{n+1}}{F_{n+1}} = \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_n}{F_n b_n} + \frac{\bar{q}_{n+1}}{F_{n+1} b_{n+1}} \right) \quad (16)$$

où $F_n = b_n d_n$ et $F_{n+1} = b_{n+1} d_{n+1}$ sont les aires des sections transversales des parois n et $n+1$.

Des relations similaires peuvent être obtenues pour des parois avec des épaisseurs à variation linéaire. On peut formuler autant d'équations (16) que le nombre d'arêtes intermédiaires. C'est aussi le nombre des efforts rasants T_n , puisque les arêtes $n=0$ et $n=r$ sont libres et doivent donc être aussi « libres d'efforts ». Les efforts T_n peuvent ainsi être calculés par les équations (13) et (16). En connaissant ces efforts, on peut ensuite déterminer les efforts M_n, N_n et Q_n sur les sections des parois n à l'aide des équations (13) et (14). En plus, les mouvements des points des arêtes peuvent être facilement déterminés : chaque paroi n , sous l'effet des charges q_n et des efforts rasants T_{n-1} et T_n , subit dans son plan des flèches v_n , qu'on peut calculer avec l'aide de l'équation différentielle de la ligne élastique.

$$EJ_n \frac{d^2 v_n}{dx^2} = -M_n = -\frac{1}{a} \left[\bar{Q}_n - \frac{1}{2} b_n (\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}) \right] \sin ax \quad (17)$$

où $J_n = d_n b_n^3 / 12$

En respectant les exigences $v=0$ aux bords pour $x=0, L$ et en dérivant deux fois par rapport à x , on obtient :

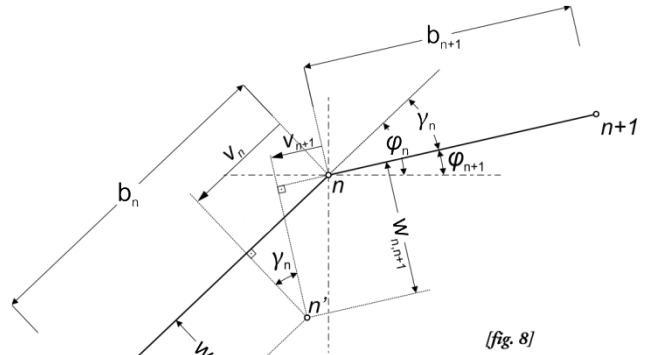
$$v_n = \bar{v}_n \sin ax \quad (18)$$

où

$$\bar{v}_n = \frac{1}{EJ_n a^3} \left[\bar{Q}_n - \frac{b_n}{2} (\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}) \right]$$

et si, en plus, on substitue la valeur de Q_n obtenue par (14) dans la formule (18), on obtient :

$$\bar{v}_n = \frac{1}{EJ_n a^4} \left[\bar{q}_n - (\bar{T}_n + \bar{T}_{n-1}) \frac{ab_n}{2} \right] \quad (19)$$



On peut, en fonction des flèches v_n et des relations géométriques des parois démontrées dans la figure 8, calculer les déplacements $w_{n,n-1}$ et $w_{n,n+1}$ de l'arête n .

$$w_{n,n-1} = v_n \cot \gamma_n - \frac{v_{n+1}}{\sin \gamma_n}, \quad w_{n,n+1} = \frac{v_n}{\sin \gamma_n} - v_{n+1} \cot \gamma_n \quad (20)$$

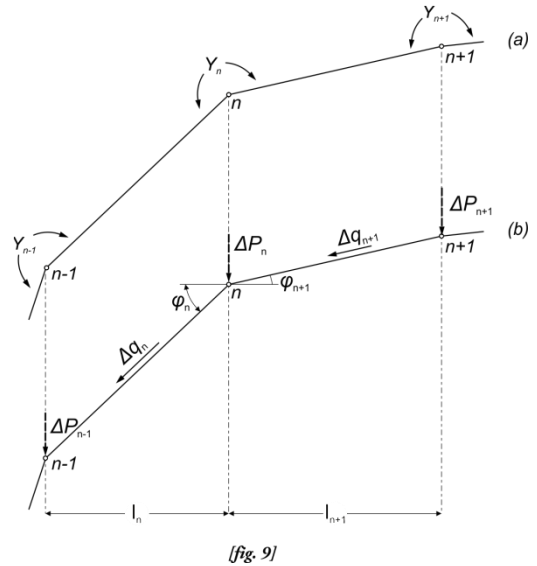
2.1.4 Structure plissée à nœuds rigides

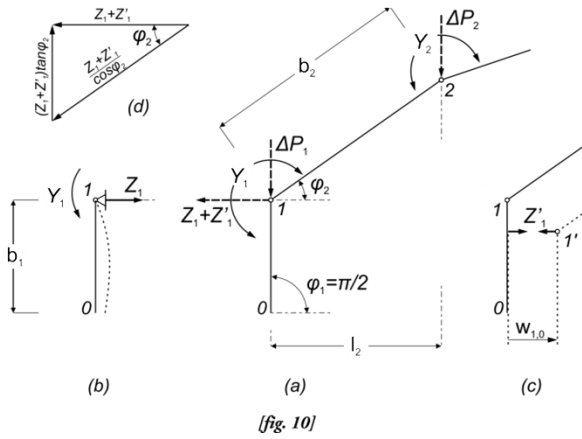
Les parois individuelles sont liées l'une à l'autre le long des arêtes intermédiaires de manière à être rigides en flexion, de façon à ce que des moments de flexion soient transférés d'une paroi à l'autre. On désigne ces moments de flexion par Y_n ($n=1,2,3,\dots,r-1$) et on suppose qu'ils agissent comme des actions extérieures sur le système articulé fondamental. Ainsi, pour des raisons d'équilibre, des charges ΔP_n « apparaissent » sur les arêtes (fig. 9b) :

$$\Delta P_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{l_2}, \quad \Delta P_{r-1} = \frac{Y_{r-2} - Y_{r-1}}{l_{r-1}} \quad (21)$$

et pour les autres arêtes :

$$\Delta P_n = \frac{Y_{n-1} - Y_n}{l_n} + \frac{Y_{n+1} - Y_n}{l_{n+1}} \quad (22)$$





De plus, sous l'influence des moments de flexion Y_1 et Y_{r-1} sur les dalles externes que l'on considère comme simplement appuyées sur les trois cotés, des forces horizontales supplémentaires Z_1 et Z_{r-1} apparaissent le long des arêtes 1 et $r-1$ (fig. 10b). De surcroît, à la suite de la déformation de la structure plissée, les points de ces arêtes se déplacent perpendiculairement au plan moyen des dalles et, résultant de la mobilisation de la rigidité des dalles, des réactions Z_1' et Z_{r-1}' apparaissent aussi (fig. 10c).

En décomposant les charges nodales ΔP dans les directions des parois avoisinantes n et $n+1$, on aboutit selon l'équation (9) à des charges linéaires Δq_n . Mais, particulièrement pour les parois 1 et 2 ainsi que pour $r-1$ et r , on doit aussi prendre en compte les composantes des forces Z et Z' (fig. 10d). On obtient ainsi pour les parois 1 et 2 :

$$\Delta q_1 = \Delta P_1 - (Z_1 + Z_1') \tan \varphi_2, \quad \Delta q_2 = \Delta P_2 \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_2} + \frac{Z_1 + Z_1'}{\cos \varphi_2} \quad (23)$$

Des expressions similaires sont également valables pour les charges Δq des parois $r-1$ et r . Pour les parois intermédiaires restantes, on détermine par l'équation (9) les charges indépendantes de Z et Z' :

$$\Delta q_n = \Delta P_n \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n} - \Delta P_{n-1} \frac{\cos \varphi_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}}, \quad n = 3, 4 \dots r-2 \quad (24)$$

Les inconnues hyperstatiques Y , Z et Z' et les charges des parois Δq qui s'ensuivent, résultent d'une distribution de charge sinusoïdale. Ainsi, on forme les approches :

$$\begin{aligned} Y_n &= \bar{Y}_n \sin ax, & Z_1 &= \bar{Z}_1 \sin ax, & Z_{r-1} &= \bar{Z}_{r-1} \sin ax, \\ Z_1' &= \bar{Z}_1' \sin ax, & Z_{r-1}' &= \bar{Z}_{r-1}' \sin ax, & \Delta q_n &= \Delta \bar{q}_n \sin ax \end{aligned} \quad (25)$$

où \bar{Y}_n , \bar{Z}_1 , \bar{Z}_{r-1} , \bar{Z}_1' , et $\Delta \bar{q}_n$ sont des valeurs fixes à déterminer.

À l'aide des équations (21), (22), (25), (23) et (24), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{q}_1 &= \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{l_2} - (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_1') \tan \varphi_2, \\ \Delta \bar{q}_2 &= \left(\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{l_2} + \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_2}{l_3} \right) \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_2} + \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_1'}{\cos \varphi_2}, \\ \Delta \bar{q}_n &= \left(\frac{\bar{Y}_{n-1} - \bar{Y}_n}{l_n} + \frac{\bar{Y}_{n+1} - \bar{Y}_n}{l_{n+1}} \right) \frac{\cos \varphi_{n+1}}{\sin \gamma_n} - \left(\frac{\bar{Y}_{n-2} - \bar{Y}_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{\bar{Y}_n - \bar{Y}_{n-1}}{l_n} \right) \frac{\cos \varphi_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

Dans le système « unifié », les charges suivantes correspondent aux parois individuelles :

$$q_n + \Delta q_n = (\bar{q}_n + \Delta \bar{q}_n) \sin ax \quad (27)$$

De même, aux efforts rasants de la structure articulée s'ajoutent les efforts ΔT_n :

$$T_n + \Delta T_n = (\bar{T}_n + \Delta \bar{T}_n) \cos ax \quad (28)$$

Et l'équation (19) cède la place à l'équation suivante :

$$\bar{v}_n = \frac{1}{EJ_n a^4} \left[\bar{q}_n + \Delta \bar{q}_n - (\bar{T}_n + \Delta \bar{T}_n + \bar{T}_{n-1} + \Delta \bar{T}_{n-1}) \frac{ab_n}{2} \right] \quad (29)$$

On peut calculer les variations $\Delta \bar{T}$ à partir de l'équation (16), après avoir remplacé \bar{q} par $\Delta \bar{q}$. À l'aide de (26) les grandeurs $\Delta \bar{T}_n$ sont ainsi exprimées en fonction des grandeurs inconnues $\bar{Y}_n, \bar{Z}_1, \bar{Z}_{r-1}, \bar{Z}'_1$ et \bar{Z}'_{r-1} . Il suffit de calculer en plus les valeurs de \bar{T}_n à l'aide de (16), \bar{q}_n à l'aide de (10) ainsi que $\Delta \bar{q}_n$ à l'aide de (26) et de tout introduire ensuite dans l'équation (29) pour obtenir les déplacements \bar{v}_n de la structure plissée « unifiée » en fonction des valeurs inconnues $\bar{Y}_n, \bar{Z}_1, \bar{Z}_{r-1}, \bar{Z}'_1$ et \bar{Z}'_{r-1} .

$$\bar{v}_n = f_n \left(\bar{Y}_n, \bar{Z}_1, \bar{Z}_{r-1}, \bar{Z}'_1, \bar{Z}'_{r-1} \right) \quad (30)$$

On peut aussi exprimer les forces Z et Z' en fonction des moments de flexion Y et des déplacements v , de sorte que l'équation (30) comprenne uniquement les valeurs inconnues Y . Les forces Z_1 et Z_{r-1} sont ainsi déterminées en fonction des moments des bords Y_1 et Y_{r-1} .

$$Z_1 = Y_1 \rho, \quad \bar{Z}_1 = \bar{Y}_1 \rho \quad (31)$$

en désignant par ρ l'expression :

$$\rho = \frac{a}{2} \frac{3 \text{Sinh}^2 ab_1 - a^2 b_1^2}{3 \text{Sinh} ab_1 \text{Cosh} ab_1 + ab_1} \quad (32)$$

L'inclinaison du bord de la surface élastique de la paroi 1 le long de l'arête 1 est aussi calculée en fonction du moment Y_1 .

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=0, Y} = Y_1 \kappa = \bar{Y}_1 \kappa \sin ax \quad (33)$$

en désignant par κ l'expression :

$$\kappa = \frac{1}{2a \cdot (Ed_1^3 / 12)} \cdot \frac{3 \text{Cosh}^2 ab_1 + a^2 b_1^2 + 1}{3 \text{Sinh} ab_1 \text{Cosh} ab_1 + ab_1} \quad (34)$$

Des relations similaires peuvent être formées pour Z_{r-1} et pour l'inclinaison du bord de la surface élastique de la paroi r le long de l'arête $r-1$.

On va maintenant calculer les déplacements $w_{1,0}$ de la paroi 1 en utilisant l'équation (20). Avec $n=1$ et en prenant en compte l'équation (18), on obtient :

$$w_{1,0} = v_1 \cot \gamma_1 - \frac{v_2}{\sin \gamma_1} = \left(\bar{v}_1 \cot \gamma_1 - \frac{\bar{v}_2}{\sin \gamma_1} \right) \sin ax \quad (35)$$

Ce déplacement du bord de la dalle est accompagné d'une charge linéaire le long du bord :

$$Z_1' = \left(\bar{v}_1 \cot \gamma_1 - \frac{\bar{v}_2}{\sin \gamma_1} \right) \rho_1 \sin ax = \bar{Z}_1 \sin ax \quad (36)$$

où :

$$\rho_1 = \frac{K_1 a^3}{2} \frac{9 \text{Sh}^2 ab_1 - a^2 b_1^2}{3 \text{Sh} ab_1 \text{Cosh} ab_1 + ab_1} \quad (37)$$

Sous l'effet de cette charge, une inclinaison du bord de la surface élastique de la paroi 1 le long de l'arête 1 se produit :

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=0, Z'} = - \left(\bar{v}_1 \cot \gamma_1 - \frac{\bar{v}_2}{\sin \gamma_1} \right) \rho \sin ax \quad (38)$$

Des relations similaires peuvent être formées pour Z_{r-1}' et pour l'inclinaison de la paroi r .

Si maintenant on substitue les relations obtenues pour Z et Z' à l'équation (30), on obtient :

$$\bar{v}_n = f_n(Y_n) \quad (39)$$

On peut formuler r équations de ce genre. Elles contiennent r déplacements inconnus \bar{v}_n et $r-1$ moments inconnus \bar{Y}_n . Il nous reste encore $r-1$ équations à formuler.

L'hypothèse, selon laquelle les angles formés par les parois avoisinantes ne subissent aucun changement lors de la déformation de la structure plissée, constitue la base pour la formulation des équations qui manquent afin de déterminer les valeurs inconnues Y . Ainsi, pour la production de ces rapports géométriques, on examine le changement de forme que subissent les parois n et $n+1$ du système fondamental articulé qui se rencontrent sur l'arête n (fig. 11).

Angles de rotation des parois avoisinantes sur l'arête n :

1. Sous l'effet des charges p_n et p_{n+1} réparties sur les surfaces des parois et en considérant les simplifications $m_x = m_{xy} = q_x = 0$ (comportement de la paroi comme une poutre dans la direction y), on obtient :

$$w_{n,n-1} = \frac{p_n b_n^2 l_n}{24EJ_n'} = \frac{p_n b_n^2 l_n}{2Ed_n^3}, \quad w_{n,n+1} = \frac{p_{n+1} b_{n+1}^2 l_{n+1}}{2Ed_{n+1}^3} \quad (40)$$

2. Sous l'effet des moments nodaux Y , on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n,n-1} &= \frac{b_n}{6EJ_n'} (2Y_n + Y_{n-1}) = \frac{2b_n}{Ed_n^3} (2Y_n + Y_{n-1}), \\ \psi_{n,n+1} &= \frac{2b_{n+1}}{Ed_{n+1}^3} (2Y_n + Y_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

3. A cause des déplacements des points des arêtes, des angles de rotation ϑ_n et ϑ_{n+1} apparaissent et produisent un accroissement de l'angle γ_n (fig. 11) :

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1}{b_{n+1}} (w_{n+1,n} - w_{n,n+1}) - \frac{1}{b_n} (w_{n,n-1} - w_{n-1,n}) \quad (42)$$

(L'hypothèse des petits déplacements a été assumée : $\sin a \approx a$.)

À l'aide des équations (20) et (18), on obtient :

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1} - \vartheta_n &= \\ &\left\{ \frac{1}{b_{n+1}} \left[\bar{v}_{n+1} (\cot \gamma_{n+1} + \cot \gamma_n) - \frac{\bar{v}_{n+2}}{\sin \gamma_{n+1}} - \frac{\bar{v}_n}{\sin \gamma_n} \right] - \right. \\ &\left. \frac{1}{b_n} \left[\bar{v}_n (\cot \gamma_n + \cot \gamma_{n-1}) - \frac{\bar{v}_{n+1}}{\sin \gamma_n} - \frac{\bar{v}_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} \right] \right\} \sin \alpha x \end{aligned} \quad (43)$$

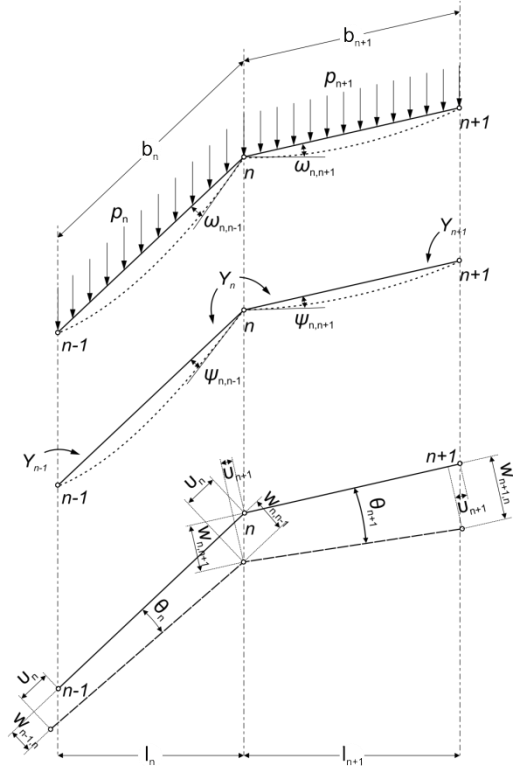
La condition d'invariabilité des angles se formule ainsi :

$$w_{n,n-1} + w_{n,n+1} + \psi_{n,n-1} + \psi_{n,n+1} + \vartheta_{n+1} - \vartheta_n = 0 \quad (44)$$

En introduisant les relations des angles (40), (41) et (43) dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_n b_n^2 l_n}{2d_n^3} + \frac{\bar{P}_{n+1} b_{n+1}^2 l_{n+1}}{2d_{n+1}^3} + \frac{2b_n}{d_n^3} (2\bar{Y}_n + \bar{Y}_{n-1}) + \frac{2b_{n+1}}{d_{n+1}^3} (2\bar{Y}_n + \bar{Y}_{n+1}) + \frac{E}{b_{n+1}} \left[\bar{v}_{n+1} (\cot \gamma_{n+1} + \cot \gamma_n) - \frac{\bar{v}_{n+2}}{\sin \gamma_{n+1}} - \frac{\bar{v}_n}{\sin \gamma_n} \right] \\ - \frac{E}{b_n} \left[\bar{v}_n (\cot \gamma_n + \cot \gamma_{n-1}) - \frac{\bar{v}_{n+1}}{\sin \gamma_n} - \frac{\bar{v}_{n-1}}{\sin \gamma_{n-1}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Cette équation est valable pour les arêtes $n=2,3 \dots r-2$.



[fig. 11]

2.2 Éluclation de la théorie en images 3D

*Un voyage iconographique
au cœur des structures plissées*

Voir fichier PDF sur CD

La Toiture Plissée 'Sezana'



Le toit plissé fait partie d'un bâtiment qui a été construit pour couvrir un espace commercial appartenant à Jacques Sezana dans le port du Pirée. Il s'agit d'un toit en béton armé de forme plissée couvrant une ouverture de 13 m de manière très économique - plus économique que les méthodes classiques.

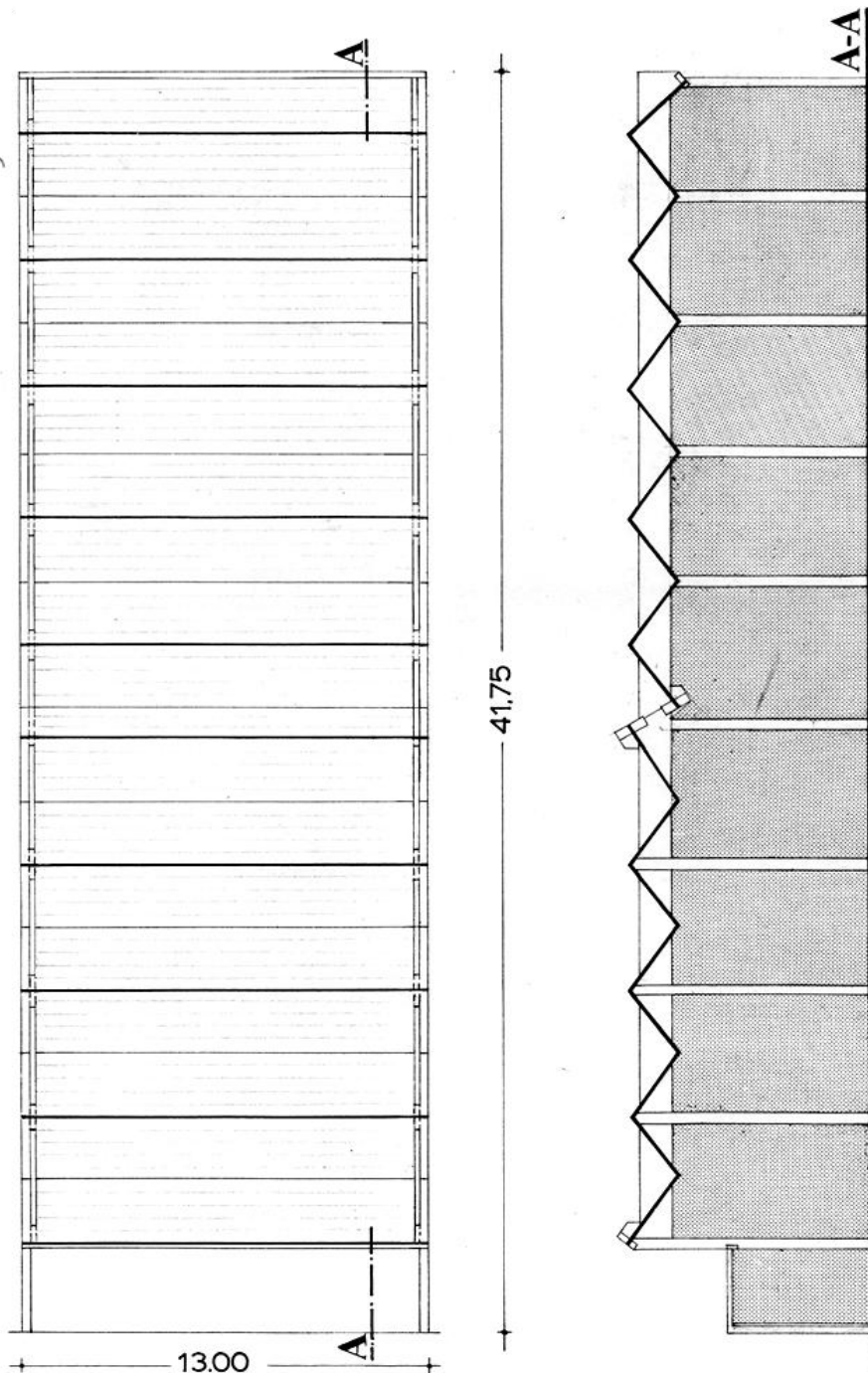
Phase de construction - 1962



L'étude statique, effectuée par Aristarchos Ikonomou, se base sur la théorie des structures plissées de Girkmann : Flachentragwerke et a été effectuée à l'aide d'un ordinateur.

Le système porteur plissé, qui couvre une surface de 13x42 mètres, est porté par deux poutres parallèles aux murs du périmètre d'une longueur de 42 mètres. L'épaisseur des dalles est de 12 cm. Au milieu des 42 mètres, une baie vitrée interrompt la continuité de la structure plissée.





La toiture est composée de deux parties. Nous allons en étudier la première partie. La deuxième partie est inversée horizontalement et comprend deux parois supplémentaires.

La sollicitation de la structure plissée est « perturbée » sur les bords et se régularise au fur et à mesure que l'on se rapproche des parois du centre. L'étude de la 1ère partie illustre suffisamment ce principe, comme les résultats obtenus le démontrent, et l'étude détaillée de la seconde partie est donc pratiquement superflue.

Aujourd'hui - 2011

.. la toiture plissée vue du haut



*Ouverture
dans le toit
laissant place
à une baie
vitrée*



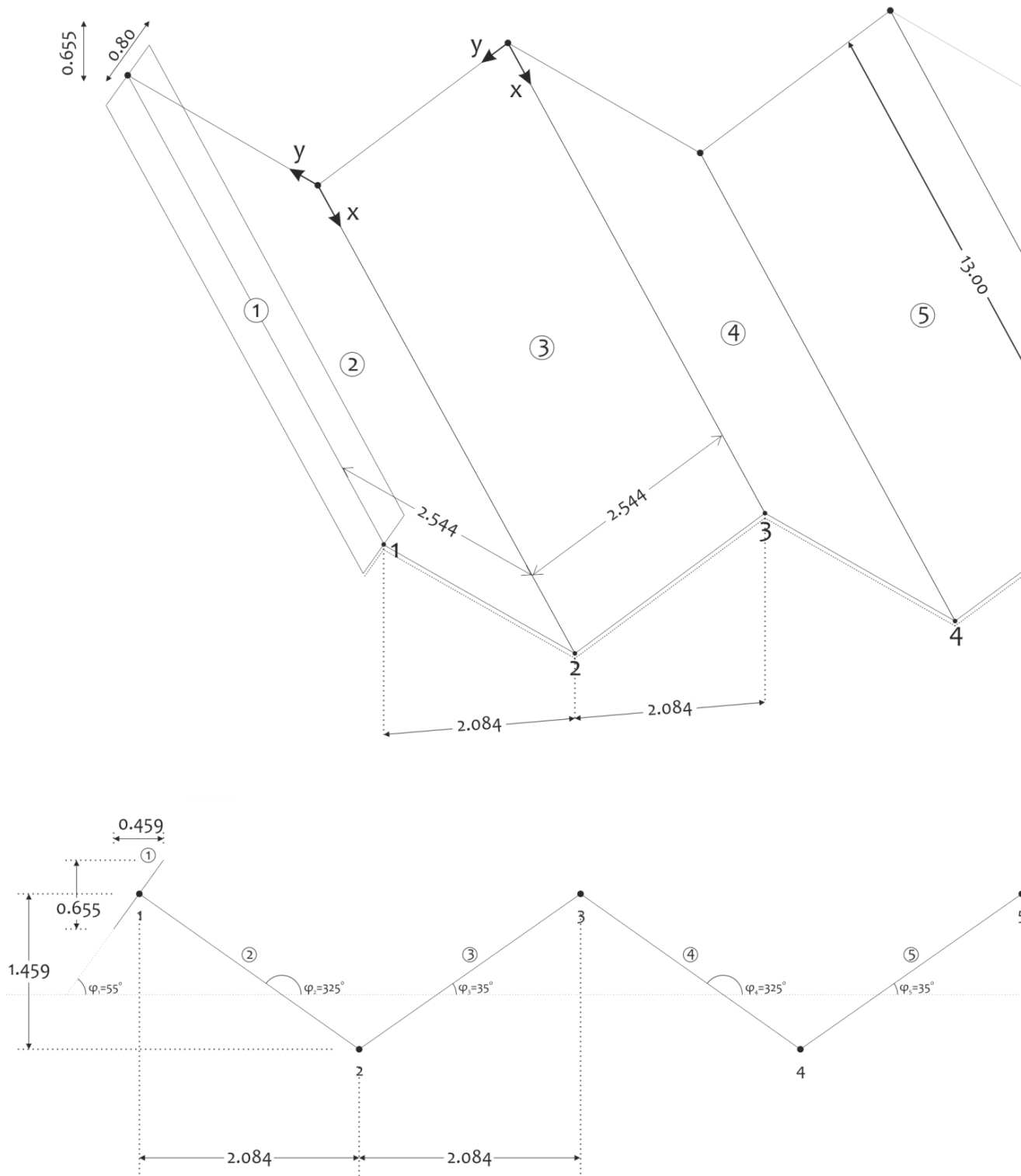
*Vue de la
terrasse du
bâtiment voisin*

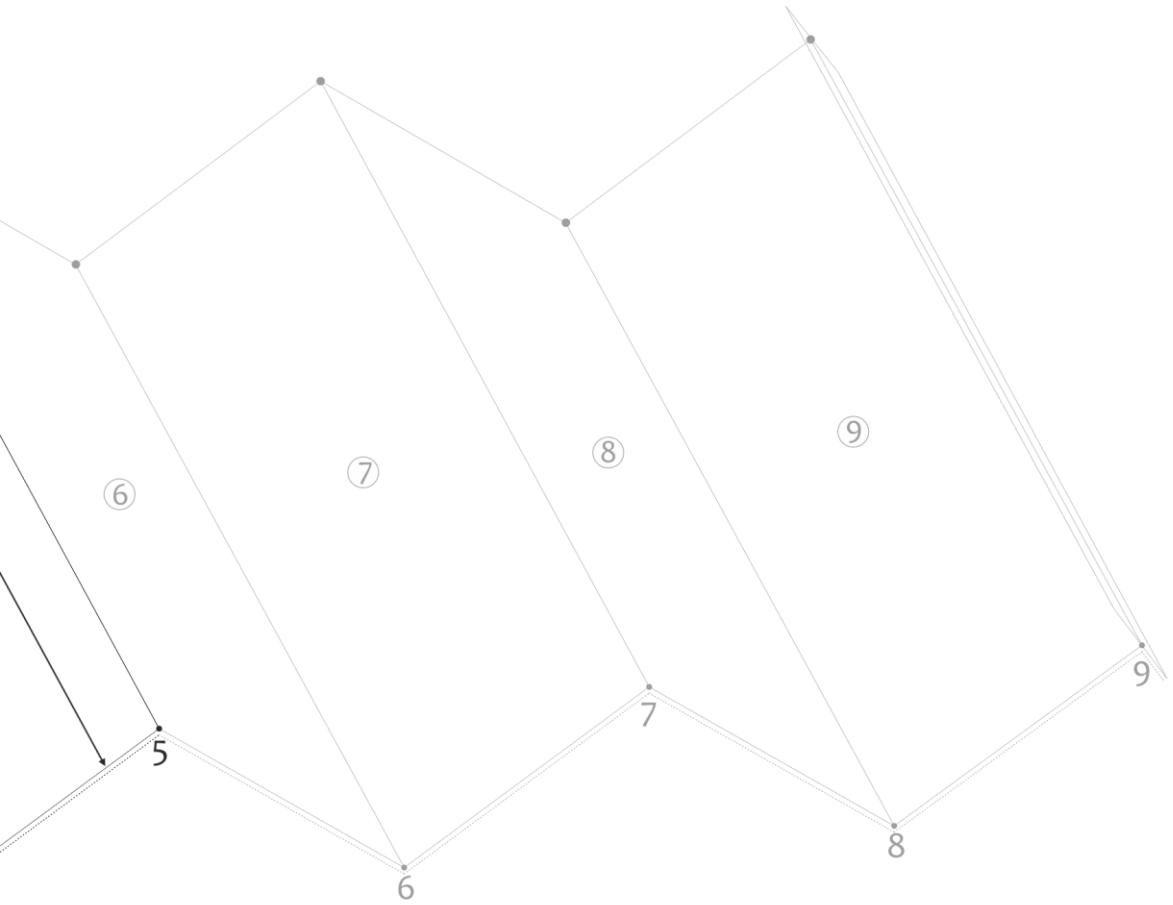


*Murs frontaux
triangulaires mitoyens
(poutres parallèles)*

3.1 La structure 'Sezana' résolue avec la méthode de Girkmann

3.1.1 Modélisation du système porteur, des charges et du matériel





Unités :

Distance : *m* - Poids : *kN*

Géométrie de la structure et propriétés d'inertie des sections :

$L = 13 \text{ m}$

$l_1 = 0.459 \text{ m}, l_{2-6} = 2.084 \text{ m}$

$\varphi_1 = 55^\circ, \varphi_{2,4,6} = 325^\circ, \varphi_{3,5} = 35^\circ$

$\gamma_1 = \varphi_1 - \varphi_2 = -270^\circ$

$\gamma_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = 290^\circ$

$\gamma_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = -290^\circ$

$\gamma_4 = \varphi_4 - \varphi_5 = 290^\circ$

$\gamma_5 = \varphi_5 - \varphi_6 = -290^\circ$

Pari 1 : $b_1 = 0.8 \text{ m}, d_1 = 0.2 \text{ m}, F_1 = 0.16 \text{ m}^2, W_1 = 0.021333 \text{ m}^3, J_1 = 0.00853333 \text{ m}^4$ *flexion autour de l'axe fort

Autres parois : $b = 2.5441 \text{ m}, d = 0.12 \text{ m}, F = 0.3053 \text{ m}^2, W = 0.129439 \text{ m}^3, J = 0.16465000 \text{ m}^4$ *flexion autour de l'axe fort

Matériel :

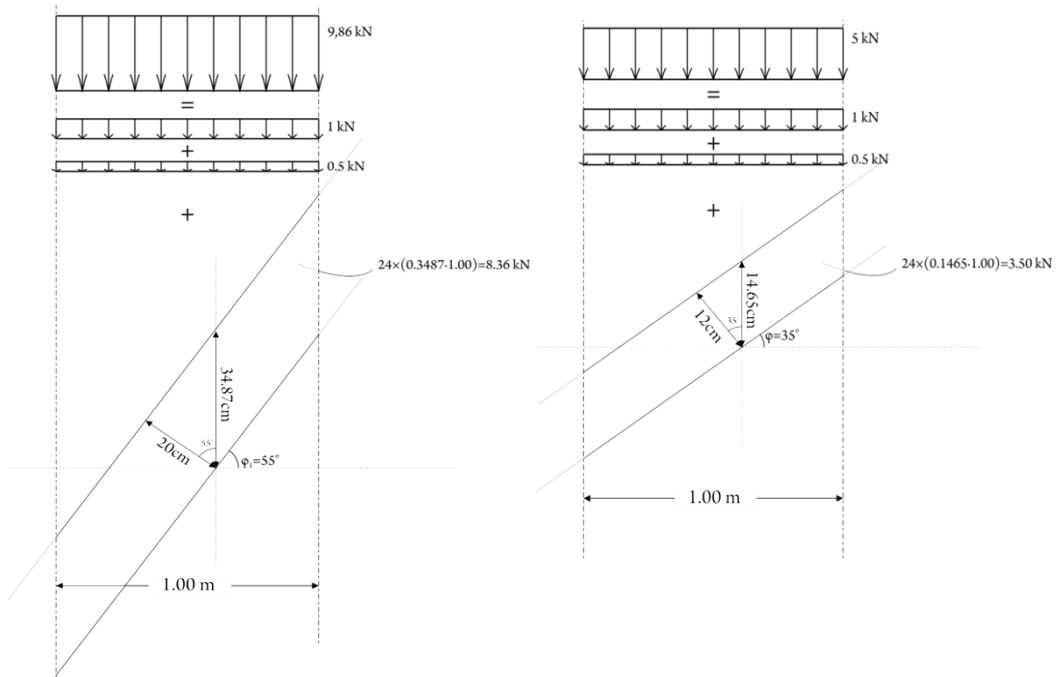
$E = 21\,000\,000 \text{ kN/m}^2, \rho = 24 \text{ kN/m}^3$ *propriétés du béton armé utilisé à l'époque

Charges :

Poids total = poids propre + isolation + neige

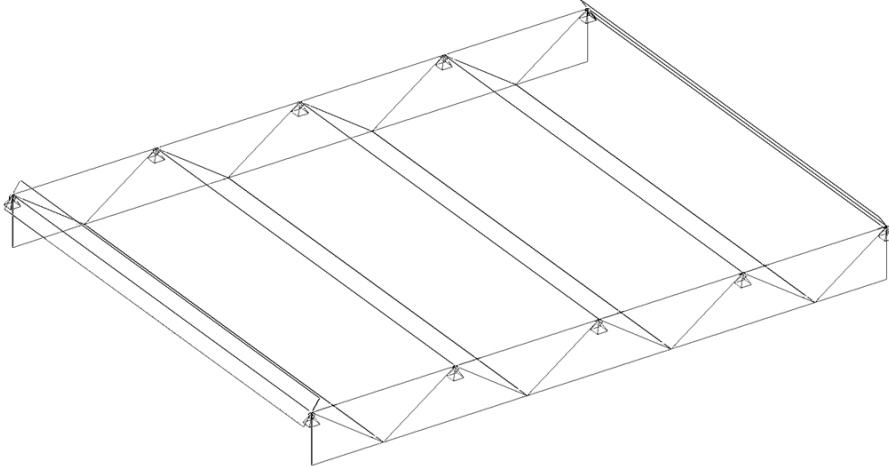
Pari 1 : $p_1 = 9.86 \text{ kN/m}^2$ (projection horizontale)

Parois 2,3,4,5 : $p = 5 \text{ kN/m}^2$ (projection horizontale)



Conditions d'appui :

La structure plissée repose sur des diaphragmes frontaux transversaux, qui sont rigides dans leur plan, tandis que leur rigidité transversale est négligeable. Nous étudions ces diaphragmes comme des poutres continues. (largeur des poutres : 20 cm, hauteur des poutres : 1 m, distance entre appuis séquentiels : 4,168 m)



3.1.2 Calcul du système porteur (selon le procédé et les hypothèses de Girkmann)

(Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel Wolfram Mathematica)

Représentation de la charge uniforme par une série Fourier :

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \sin a_m x, \quad a_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m=1,3,5$$

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \left(\sin a_1 x + \frac{1}{3} \sin a_3 x + \frac{1}{5} \sin a_5 x \right)$$

$$p(x) = \bar{p} \sin a_1 x + \left(\frac{1}{3} \bar{p} \right) \sin a_3 x + \left(\frac{1}{5} \bar{p} \right) \sin a_5 x$$

CALCUL PARTIEL POUR M=1

Voyons ce qui provoque la partie de la charge $\bar{p} \sin a_1 x$, $a_1 = \pi/L = \pi/13 = 0.242 \text{ m}^{-1}$

A. Calcul du système porteur articulé

Charges verticales réparties sur les surfaces des parois :

(définies par unité de surface en projection horizontale)

$$\bar{p}_1 = (4/\pi)9.86 = 12.55 \text{ kN/m}^2$$

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_3 = \bar{p}_4 = \bar{p}_5 = (4/\pi)5.00 = 6.37 \text{ kN/m}^2$$

Charges linéaires appliquées sur les arêtes :

$$\bar{P}_1 = 12.55 \cdot 0.4590 + 6.37 \cdot 2.084/2 = 12.40 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_3 = \bar{P}_4 = \bar{P}_5 = 6.37 \cdot 2.084 = 13.28 \text{ kN/m}$$

Charges linéaires qui sollicitent les parois dans leur plan :

(définies par unité de longueur de la paroi)

$$\bar{q}_1 = \bar{P}_1 \frac{\cos \varphi_2}{\sin \gamma_1} = 12.40 \frac{\cos(325^\circ)}{\sin(-270^\circ)} = +10.16 \text{ kN/m}$$

$$\bar{q}_2 = \bar{P}_2 \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_2} - \bar{P}_1 \frac{\cos \varphi_1}{\sin \gamma_1} = 13.28 \frac{\cos(35^\circ)}{\sin(290^\circ)} - 12.40 \frac{\cos(55^\circ)}{\sin(-270^\circ)} = -18.69 \text{ kN/m}$$

$$\bar{q}_3 = \bar{P}_3 \frac{\cos \varphi_4}{\sin \gamma_3} - \bar{P}_2 \frac{\cos \varphi_2}{\sin \gamma_2} = 13.28 \frac{\cos(325^\circ)}{\sin(-290^\circ)} - 13.28 \frac{\cos(325^\circ)}{\sin(290^\circ)} = +23.15 \text{ kN/m}$$

$$\bar{q}_4 = \bar{P}_4 \frac{\cos \varphi_5}{\sin \gamma_4} - \bar{P}_3 \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_3} = 13.28 \frac{\cos(35^\circ)}{\sin(290^\circ)} - 13.28 \frac{\cos(35^\circ)}{\sin(-290^\circ)} = -23.15 \text{ kN/m}$$

$$\bar{q}_5 = \phantom{\bar{q}_4} = +23.15 \text{ kN/m}$$

Efforts rasants le long des arêtes :

— Arête '5' —

$T_5 = 0$ (dû à la symétrie)

— Arête '1' —

Contraintes normales au milieu de la paroi 1 :

Dues à la flexion de la paroi : \emptyset

Dues à la tension axiale de la paroi : $\bar{\sigma}_{N_{-1,1}} = \frac{\bar{N}_1}{F_1} = \frac{1}{a} \frac{\bar{T}_1}{F_1}$

Contraintes normales au bord gauche de la paroi 2 :

Dues à la flexion de la paroi : $\bar{\sigma}_{M_{-2,1}} = \frac{\bar{M}_2}{W_2} = \frac{1}{W_2} \left(\frac{1}{a^2} \bar{q}_2 - \frac{b_2}{2a} (\bar{T}_2 + \bar{T}_1) \right)$

Dues à la tension axiale de la paroi : $\bar{\sigma}_{N_{-2,1}} = \frac{\bar{N}_2}{F_2} = \frac{1}{a} \frac{(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{F_2}$

Égalité des contraintes normales : $\bar{\sigma}_{N_{-1,1}} = \bar{\sigma}_{M_{-2,1}} + \bar{\sigma}_{N_{-2,1}} \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{\bar{T}_1}{F_1} = \frac{1}{a} \frac{(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{F_2} + \frac{1}{W_2} \left(\frac{1}{a^2} \bar{q}_2 - \frac{b_2}{2a} (\bar{T}_2 + \bar{T}_1) \right)$

— Arêtes '2,3,4' —

$$\frac{\bar{T}_1}{F_2} + 2\bar{T}_2 \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) + \frac{\bar{T}_3}{F_3} = \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_2}{F_2 b_2} + \frac{\bar{q}_3}{F_3 b_3} \right)$$

$$\frac{\bar{T}_2}{F_3} + 2\bar{T}_3 \left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} \right) + \frac{\bar{T}_4}{F_4} = \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_3}{F_3 b_3} + \frac{\bar{q}_4}{F_4 b_4} \right)$$

$$\frac{\bar{T}_3}{F_4} + 2\bar{T}_4 \left(\frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_5} \right) + \emptyset = \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_4}{F_4 b_4} + \frac{\bar{q}_5}{F_5 b_5} \right)$$

Résolution d'équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\bar{T}_1}{F_1} &= \frac{1}{a} \frac{(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{F_2} + \frac{1}{W_2} \left(\frac{1}{a^2} \bar{q}_2 - \frac{b_2}{2a} (\bar{T}_2 + \bar{T}_1) \right) \\ \frac{\bar{T}_1}{F_2} + 2\bar{T}_2 \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) + \frac{\bar{T}_3}{F_3} &= \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_2}{F_2 b_2} + \frac{\bar{q}_3}{F_3 b_3} \right) \\ \frac{\bar{T}_2}{F_3} + 2\bar{T}_3 \left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} \right) + \frac{\bar{T}_4}{F_4} &= \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_3}{F_3 b_3} + \frac{\bar{q}_4}{F_4 b_4} \right) \\ \frac{\bar{T}_3}{F_4} + 2\bar{T}_4 \left(\frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_5} \right) + \emptyset &= \frac{3}{a} \left(\frac{\bar{q}_4}{F_4 b_4} + \frac{\bar{q}_5}{F_5 b_5} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \bar{T}_1 &= -36.12 \text{ kN/m} \\ \bar{T}_2 &= +15.50 \text{ kN/m} \\ \bar{T}_3 &= -4.13 \text{ kN/m} \\ \bar{T}_4 &= +1.03 \text{ kN/m} \end{aligned} \right.$$

B. Calcul du système porteur avec nœuds rigides

Charges supplémentaires linéaires qui sollicitent les parois dans leur plan :

$$Z_1' = 0, Z_1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{q}_1 &= \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{l_2} \frac{\cos \varphi_2}{\sin \gamma_1} \\ \Delta \bar{q}_2 &= \left(\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{l_2} + \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_2}{l_3} \right) \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_2} - \left(\frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{l_2} \right) \frac{\cos \varphi_1}{\sin \gamma_1} \\ \Delta \bar{q}_3 &= \left(\frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3}{l_3} + \frac{\bar{Y}_4 - \bar{Y}_3}{l_4} \right) \frac{\cos \varphi_4}{\sin \gamma_3} - \left(\frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{l_2} + \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_2}{l_3} \right) \frac{\cos \varphi_2}{\sin \gamma_2} \\ \Delta \bar{q}_4 &= \left(\frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_4}{l_4} + \frac{\bar{Y}_5 - \bar{Y}_4}{l_5} \right) \frac{\cos \varphi_5}{\sin \gamma_4} - \left(\frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3}{l_3} + \frac{\bar{Y}_4 - \bar{Y}_3}{l_4} \right) \frac{\cos \varphi_3}{\sin \gamma_3} \\ \Delta \bar{q}_5 &= \left(\frac{\bar{Y}_4 - \bar{Y}_5}{l_5} + \frac{\bar{Y}_4 - \bar{Y}_3}{l_5} \right) \frac{\cos \varphi_6}{\sin \gamma_5} - \left(\frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_4}{l_4} + \frac{\bar{Y}_5 - \bar{Y}_4}{l_5} \right) \frac{\cos \varphi_4}{\sin \gamma_4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\Delta \bar{q}_i\} = \{f(\bar{Y}_i)\}$$

Efforts rasants supplémentaires le long des arêtes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\Delta \bar{T}_1}{F_1} &= \frac{1}{a} \frac{(\Delta \bar{T}_2 - \Delta \bar{T}_1)}{F_2} + \frac{1}{W_2} \left(\frac{1}{a^2} \Delta \bar{q}_2 - \frac{b_2}{2a} (\Delta \bar{T}_2 + \Delta \bar{T}_1) \right) \\ \frac{\Delta \bar{T}_1}{F_2} + 2\Delta \bar{T}_2 \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) + \frac{\Delta \bar{T}_3}{F_3} &= \frac{3}{a} \left(\frac{\Delta \bar{q}_2}{F_2 b_2} + \frac{\Delta \bar{q}_3}{F_3 b_3} \right) \\ \frac{\Delta \bar{T}_2}{F_3} + 2\Delta \bar{T}_3 \left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} \right) + \frac{\Delta \bar{T}_4}{F_4} &= \frac{3}{a} \left(\frac{\Delta \bar{q}_3}{F_3 b_3} + \frac{\Delta \bar{q}_4}{F_4 b_4} \right) \\ \frac{\Delta \bar{T}_3}{F_4} + 2\Delta \bar{T}_4 \left(\frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_5} \right) + \emptyset &= \frac{3}{a} \left(\frac{\Delta \bar{q}_4}{F_4 b_4} + \frac{\Delta \bar{q}_5}{F_5 b_5} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\Delta \bar{T}_i\} = \{f(\bar{Y}_i)\}$$

Déplacements au milieu des parois :

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{1}{EJ_1 a^4} [\bar{q}_1 + \Delta \bar{q}_1] \\ \bar{v}_2 &= \frac{1}{EJ_2 a^4} \left[\bar{q}_2 + \Delta \bar{q}_2 - \left(\bar{T}_2 + \Delta \bar{T}_2 + \bar{T}_1 + \Delta \bar{T}_1 \right) \frac{ab_2}{2} \right] \\ \bar{v}_3 &= \frac{1}{EJ_3 a^4} \left[\bar{q}_3 + \Delta \bar{q}_3 - \left(\bar{T}_3 + \Delta \bar{T}_3 + \bar{T}_2 + \Delta \bar{T}_2 \right) \frac{ab_3}{2} \right] \\ \bar{v}_4 &= \frac{1}{EJ_4 a^4} \left[\bar{q}_4 + \Delta \bar{q}_4 - \left(\bar{T}_4 + \Delta \bar{T}_4 + \bar{T}_3 + \Delta \bar{T}_3 \right) \frac{ab_4}{2} \right] \\ \bar{v}_5 &= \frac{1}{EJ_5 a^4} \left[\bar{q}_5 + \Delta \bar{q}_5 - \left(\bar{T}_5 + \Delta \bar{T}_5 \right) \frac{ab_5}{2} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{\bar{v}_i\} = \{f(\bar{Y}_i)\}$$

Obligation de maintien de la valeur initiale de l'angle au nœud 1 :

Calcul de la rotation de la paroi 1 :

$$Y_1 = \bar{Y}_1 \sin ax$$

$$M_t(x) = M_t\left(\frac{L}{2}\right) + \int_x^{L/2} Y_1 dx = 0 + \bar{Y}_1 \int_x^{L/2} \sin ax dx = -\frac{\bar{Y}_1}{a} \left[\cos\left(a\frac{L}{2}\right) - \cos ax \right] = \frac{\bar{Y}_1}{a} \cos ax$$

$$d\varphi = \frac{M_t(x)}{I_t G} dx \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_t(x)}{I_t G} dx = \varphi_0 + \frac{\bar{Y}_1}{a I_t G} \int_0^x \cos ax dx \stackrel{x=0 \leftrightarrow \varphi=0}{=} \frac{\bar{Y}_1}{a^2 I_t G} \sin ax = \frac{1}{a^2 I_t G} Y_1$$

$$I_{t,1} = \eta_3 b^3 h = 0.281 \cdot 0.20^3 \cdot 0.80 = 1.7984 \cdot 10^{-3} m^4$$

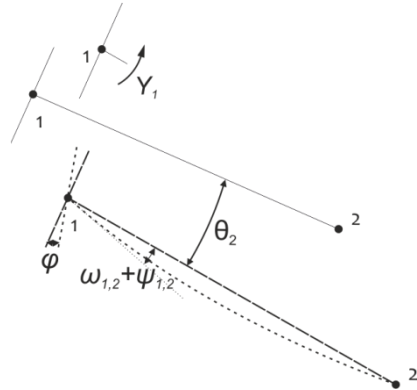
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{21000000}{2(1+0,15)} \approx 9000000 kN/m^2$$

n=1

$$w_{1,2} + \psi_{1,2} + \vartheta_2 + \phi = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{\bar{p}_2 \frac{l_2}{b_2} b_2^2 l_2}{2d_2^3} + \frac{2b_2}{d_2^3} (2\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2)$$

$$+ \frac{E}{b_2} \left[\bar{v}_2 (\cot \gamma_2 + \cot \gamma_1) - \frac{\bar{v}_3}{\sin \gamma_2} - \frac{\bar{v}_1}{\sin \gamma_1} \right] + E \frac{1}{a^2 I_t G} \bar{Y}_1 = 0$$



Obligation de maintien des valeurs initiales des angles aux nœuds 2,3,4,5 :

(Nous allons ainsi obtenir les valeurs inconnues des Y .)

$$\mathbf{n=2} : w_{2,1} + w_{2,3} + \psi_{2,1} + \psi_{2,3} + \vartheta_3 - \vartheta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{\bar{p}_2 \frac{l_2}{b_2} b_2^2 l_2}{2d_2^3} + \frac{\bar{p}_3 \frac{l_3}{b_3} b_3^2 l_3}{2d_3^3} + \frac{2b_2}{d_2^3} (2\bar{Y}_2 + \bar{Y}_1) + \frac{2b_3}{d_3^3} (2\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3) + \frac{E}{b_3} \left[\bar{v}_3 (\cot \gamma_3 + \cot \gamma_2) - \frac{\bar{v}_4}{\sin \gamma_3} - \frac{\bar{v}_2}{\sin \gamma_2} \right] - \frac{E}{b_2} \left[\bar{v}_2 (\cot \gamma_2 + \cot \gamma_1) - \frac{\bar{v}_3}{\sin \gamma_2} - \frac{\bar{v}_1}{\sin \gamma_1} \right] = 0$$

$$\mathbf{n=3} : w_{3,2} + w_{3,4} + \psi_{3,2} + \psi_{3,4} + \vartheta_4 - \vartheta_3 = 0 \Rightarrow$$

$$A_3 = \frac{\bar{p}_3 \frac{l_3}{b_3} b_3^2 l_3}{2d_3^3} + \frac{\bar{p}_4 \frac{l_4}{b_4} b_4^2 l_4}{2d_4^3} + \frac{2b_3}{d_3^3} (2\bar{Y}_3 + \bar{Y}_2) + \frac{2b_4}{d_4^3} (2\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4) + \frac{E}{b_4} \left[\bar{v}_4 (\cot \gamma_4 + \cot \gamma_3) - \frac{\bar{v}_5}{\sin \gamma_4} - \frac{\bar{v}_3}{\sin \gamma_3} \right] - \frac{E}{b_3} \left[\bar{v}_3 (\cot \gamma_3 + \cot \gamma_2) - \frac{\bar{v}_4}{\sin \gamma_3} - \frac{\bar{v}_2}{\sin \gamma_2} \right] = 0$$

$$\mathbf{n=4} : w_{4,3} + w_{4,5} + \psi_{4,3} + \psi_{4,5} + \vartheta_5 - \vartheta_4 = 0 \Rightarrow$$

$$A_4 = \frac{\bar{p}_4 \frac{l_4}{b_4} b_4^2 l_4}{2d_4^3} + \frac{\bar{p}_5 \frac{l_5}{b_5} b_5^2 l_5}{2d_5^3} + \frac{2b_4}{d_4^3} (2\bar{Y}_4 + \bar{Y}_3) + \frac{2b_5}{d_5^3} (2\bar{Y}_4 + \bar{Y}_5) + \frac{E}{b_5} \left[\bar{v}_5 (\cot \gamma_5 + \cot \gamma_4) + \frac{\bar{v}_6}{\sin \gamma_5} - \frac{\bar{v}_4}{\sin \gamma_4} \right] - \frac{E}{b_4} \left[\bar{v}_4 (\cot \gamma_4 + \cot \gamma_3) - \frac{\bar{v}_5}{\sin \gamma_4} - \frac{\bar{v}_3}{\sin \gamma_3} \right] = 0; (\bar{v}_6 = -\bar{v}_5)$$

$$\mathbf{n=5} : w_{5,4} + \psi_{5,4} - \vartheta_5 = 0 \Rightarrow$$

$$A_5 = \frac{\bar{p}_5 \frac{l_5}{b_5} b_5^2 l_5}{2d_5^3} + \frac{2b_5}{d_5^3} (2\bar{Y}_5 + \bar{Y}_4) - \frac{E}{b_5} \left[\bar{v}_5 (\cot \gamma_5 + \cot \gamma_4) + \frac{\bar{v}_6}{\sin \gamma_5} - \frac{\bar{v}_4}{\sin \gamma_4} \right] = 0; (\bar{v}_6 = -\bar{v}_5)$$

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \\ A_4 = 0 \\ A_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{Y}_1 = 2.274^* \\ \bar{Y}_2 = -9.283 \\ \bar{Y}_3 = -0.003 \\ \bar{Y}_4 = -2.913 \\ \bar{Y}_5 = -1.948 \end{cases} \text{ kNm/m}$$

* Y_1 s'oppose à la rotation de la paroi 2 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre causée par les déplacements de ces bords qui prévaut sur la rotation dans l'autre sens due au fléchissement en tant que dalle sous la charge répartie.

Charges supplémentaires des parois :

$$\{\Delta\bar{q}_1, \Delta\bar{q}_2, \Delta\bar{q}_3, \Delta\bar{q}_4, \Delta\bar{q}_5\} = \{-4.54, -5.54, 3.62, 3.48, 0.81\} \text{ kN/m}$$

Efforts rasants supplémentaires le long des arêtes :

$$\{\Delta\bar{T}_1, \Delta\bar{T}_2, \Delta\bar{T}_3, \Delta\bar{T}_4\} = \{-8.34, -2.37, 8.47, 3.12\} \text{ kN/m}$$

Efforts intérieurs :

$$\{\bar{Q}\} = \begin{pmatrix} 23.24 \\ -100.24 \\ 110.76 \\ -81.40 \\ 99.16 \end{pmatrix} \text{ kN/m}, \quad \{\bar{M}\} = \begin{pmatrix} 96.19 \\ -249.90 \\ 366.40 \\ -381.51 \\ 388.48 \end{pmatrix} \text{ kNm}, \quad \{\bar{N}\} = \begin{pmatrix} -183.99 \\ 238.34 \\ -36.41 \\ -0.75 \\ -17.18 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Déplacements des parois à $x=L/2$:

$$\{\bar{v}\} = \begin{pmatrix} 9.1911 \\ -1.2376 \\ 1.8145 \\ -1.8894 \\ 1.9239 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

CALCUL PARTIEL POUR $M=3$

Voyons ce qui provoque la partie de la charge $(1/3)\bar{p} \sin a_3 x$, $a_3 = 3\pi/L = 3\pi/13 = 0.725 \text{ m}^{-1}$

Efforts intérieurs :

$$\{\bar{Y}\} = \begin{pmatrix} -0.441 \\ -0.901 \\ -0.731 \\ -0.778 \\ -0.763 \end{pmatrix} \text{ kNm/m}, \quad \{\bar{Q}\} = \begin{pmatrix} 4.42 \\ -8.78 \\ 10.88 \\ -10.55 \\ 10.66 \end{pmatrix} \text{ kN/m}, \quad \{\bar{M}\} = \begin{pmatrix} 6.10 \\ -7.98 \\ 12.61 \\ -14.13 \\ 14.49 \end{pmatrix} \text{ kNm}, \quad \{\bar{N}\} = \begin{pmatrix} -5.65 \\ 8.04 \\ -2.90 \\ 0.68 \\ -0.17 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Déplacements des parois à $x=L/2$:

$$\{\bar{v}\} = \begin{pmatrix} 0.0648 \\ -0.0044 \\ 0.0069 \\ -0.0078 \\ 0.0080 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

CALCUL PARTIEL POUR M=5

Voyons ce qui provoque la partie de la charge $(1/5)\bar{p} \sin a_5 x$, $a_5 = 5\pi/L = 5\pi/13 = 1.208 m^{-1}$

Efforts intérieurs :

$$\{\bar{Y}\} = \begin{Bmatrix} -0.385 \\ -0.485 \\ -0.454 \\ -0.463 \\ -0.460 \end{Bmatrix} kNm/m, \quad \{\bar{Q}\} = \begin{Bmatrix} 1.65 \\ -3.12 \\ 3.86 \\ -3.82 \\ 3.83 \end{Bmatrix} kN/m, \quad \{\bar{M}\} = \begin{Bmatrix} 1.36 \\ -1.70 \\ 2.70 \\ -3.05 \\ 3.13 \end{Bmatrix} kNm, \quad \{\bar{N}\} = \begin{Bmatrix} -1.20 \\ 1.72 \\ -0.64 \\ 0.16 \\ -0.03 \end{Bmatrix} kN$$

Déplacements des parois à $x=L/2$:

$$\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} 0.0052 \\ -0.0003 \\ 0.0005 \\ -0.0006 \\ 0.0006 \end{Bmatrix} mm$$

SOMMES

$$Y_n = \bar{Y}_n \sin ax, \quad Q_n = \bar{Q}_n \cos ax, \quad N_n = \bar{N}_n \sin ax, \quad M_n = \bar{M}_n \sin ax, \quad v_n = \bar{v}_n \sin ax,$$

$$\{Y\} \sum_{m=1,3,5} = \{\bar{Y}\}_{m=1} \sin a_1 x + \{\bar{Y}\}_{m=3} \sin a_3 x + \{\bar{Y}\}_{m=5} \sin a_5 x$$

$$\{Q\} \sum_{m=1,3,5} = \{\bar{Q}\}_{m=1} \cos a_1 x + \{\bar{Q}\}_{m=3} \cos a_3 x + \{\bar{Q}\}_{m=5} \cos a_5 x$$

$$\{N\} \sum_{m=1,3,5} = \{\bar{N}\}_{m=1} \sin a_1 x + \{\bar{N}\}_{m=3} \sin a_3 x + \{\bar{N}\}_{m=5} \sin a_5 x$$

$$\{M\} \sum_{m=1,3,5} = \{\bar{M}\}_{m=1} \sin a_1 x + \{\bar{M}\}_{m=3} \sin a_3 x + \{\bar{M}\}_{m=5} \sin a_5 x$$

$$\{v\} \sum_{m=1,3,5} = \{\bar{v}\}_{m=1} \sin a_1 x + \{\bar{v}\}_{m=3} \sin a_3 x + \{\bar{v}\}_{m=5} \sin a_5 x$$

	x=L/2	x=0,L	x=0,L	x=L/2	x=L/2	x=L/2	x=L/2	x=L/2
$[v]_{mm}$	$[Y]_{kNm/m}$	$[Q]_{kN}$	$[Q_y^*]$	$[N]_{kN}$	$[N^*]$	$[M]_{kNm}$	$[M_z^*]$	$[M_y^*]$
9.13	2.330	29.3	29	-179.6	-171	91.5	76	0.1
-1.23	-8.867	-112.1	-112	232.0	228	-243.6	-242	2.2
1.80	0.274	125.5	125	-34.2	-39	356.5	356	0.4
-1.88	-2.597	-95.8	-94	-1.3	-7	-370.4	-369	1.6
1.92	-1.646	113.7	105	-17.0	-12	377.1*	372	1.2

* Résultats d'analyse avec MEF (logiciel : Scia Engineer) - modèle monté sur colonnes ($q_5 L^2/8=384 kNm$)

Contraintes normales aux bords des parois à $x=L/2$:

$$\{\sigma_{1o} \sigma_{1u}\} = \{0.3165, -0.5409\} kN/cm^2$$

$$\{\sigma_{2o} \sigma_{2u}\} = \{-0.1122, 0.2642\} kN/cm^2$$

$$\{\sigma_{3o} \sigma_{3u}\} = \{0.2642, -0.2866\} kN/cm^2$$

$$\{\sigma_{4o} \sigma_{4u}\} = \{-0.2866, 0.2858\} kN/cm^2$$

$$\{\sigma_{5o} \sigma_{5u}\} = \{0.2858, -0.2969\} kN/cm^2$$

3.2 La structure résolue avec la méthode des déplacements imposés

Nous allons faire ici une courte démonstration de la logique de cette méthode. L'approche utilisée par la suite pour faciliter la compréhension est similaire à celle adoptée dans l'analyse avec images de la théorie de Girkmann (voir fichier pdf sur CD). Nous ne nous étendrons donc pas sur le sujet et ne donnerons pas d'explications détaillées puisque cela est déjà fait dans l'analyse iconographique de Girkmann.

Nous considérons donc ici également la structure plissée comme la superposition imaginaire d'un système porteur qui est constitué de poutres parallèles à la direction longitudinale simplement appuyées à $x=0, L$ (s.p.II-bleu) et d'un système porteur constitué de dalles plissées continues fonctionnant dans la direction transversale (s.p.I-rose). Là encore, nous isolons la « dalle » de la « poutre » (découplage des fonctions). Seulement que cette fois nous n'interrompons pas la continuité de la dalle le long des arêtes.

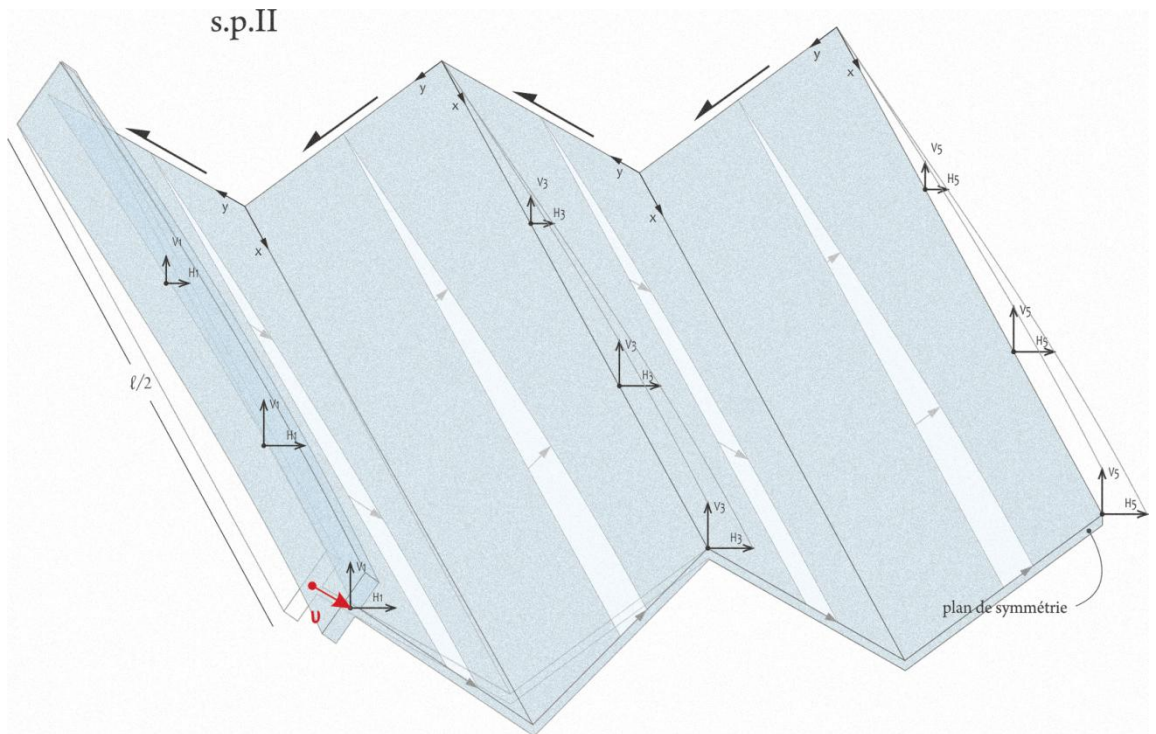
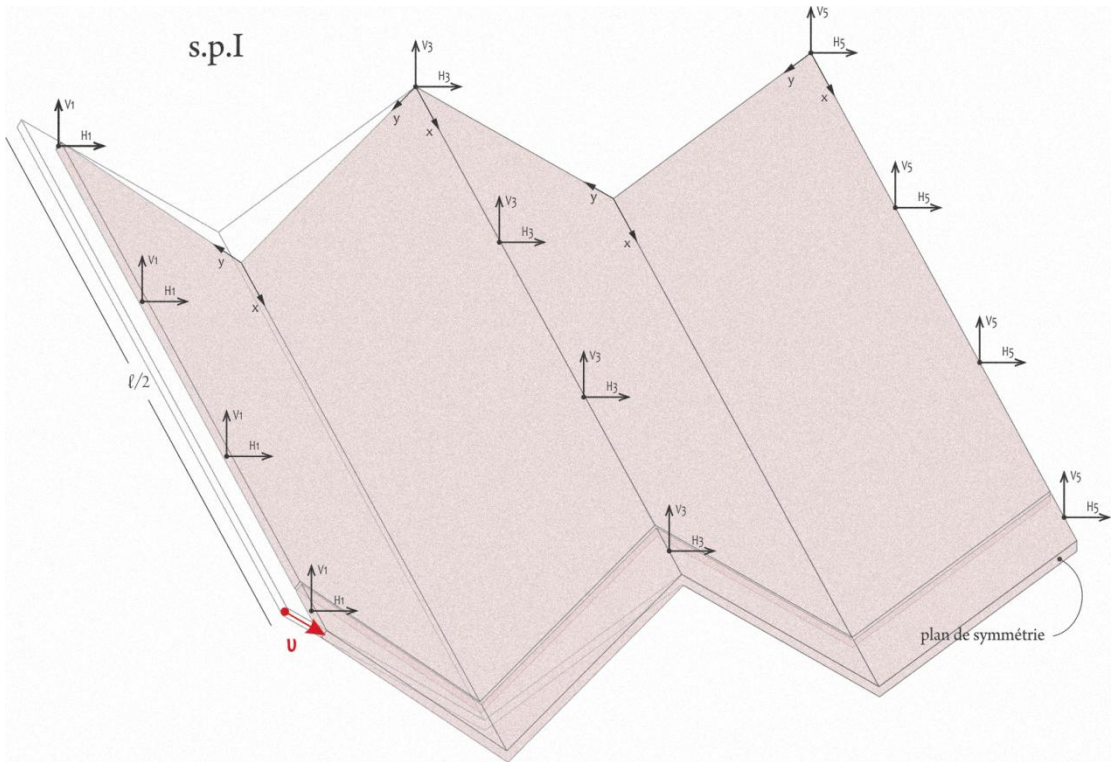
Nous soutenons la dalle plissée ainsi que la poutre plissée le long de chaque seconde arête. Nous empêchons à la fois le déplacement horizontal et vertical.

Fonctionnement du système porteur plissé I (s.p.I) : comportement de dalle

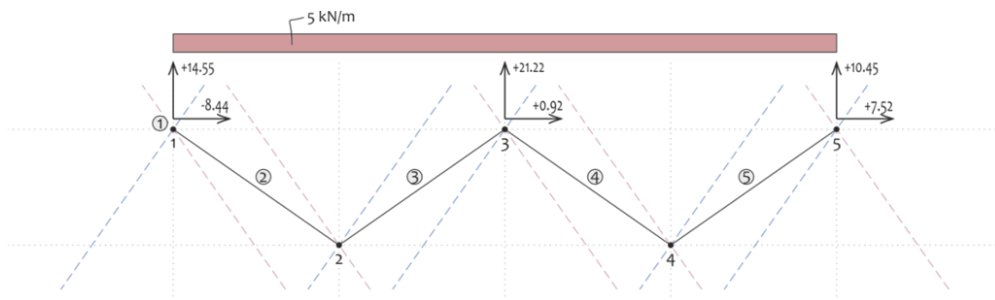
Les dalles fonctionnent dans la direction transversale comme des poutres continues. Les charges de la dalle sont ainsi « transférées » aux appuis linéaires intermédiaires le long des arêtes. La dalle fonctionne (réagit) de la même manière quand un déplacement quelconque parallèle à l'un de ses plans ($v_i // y_i$ - voir image à la page suivante) lui est imposé. Il est évident que le système porteur, sous l'action des forces externes (si celles-ci sont présentes) et des forces qui se développent selon le cas au niveau des appuis, est en équilibre : $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$. (Ces relations sont valables pour toute bande transversale d'une largeur quelconque ainsi que pour l'ensemble du système porteur.)

Fonctionnement du système porteur plissé II (s.p.II) : comportement de poutre

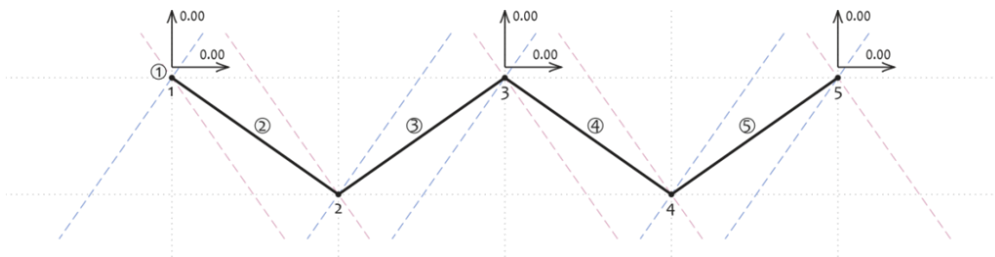
Cette structure, composée de poutres simplement appuyées sur les diaphragmes d'extrémité, est incapable de porter des charges perpendiculaires à son plan puisque la rigidité des poutres dans cette direction est faible, donc négligeable. (Ce travail est accompli par la dalle.) Sous l'imposition d'un déplacement $v_i (//y_i)$, cette structure fonctionne comme un système de poutres parallèles à x simplement appuyées à $x=0$ et $x=L$, qui respectent l'exigence des déformations spécifiques communes le long des arêtes. Les charges linéaires introduites par les appuis le long des arêtes, qui « apparaissent » lors du déplacement, sont assumées dans les plans des parois et équilibrent avec les réactions de supports aux extrémités des poutres ($x=0, x=L$ - voir image à la page suivante). Nous supposons une distribution parabolique dans le sens longitudinal de ces charges.



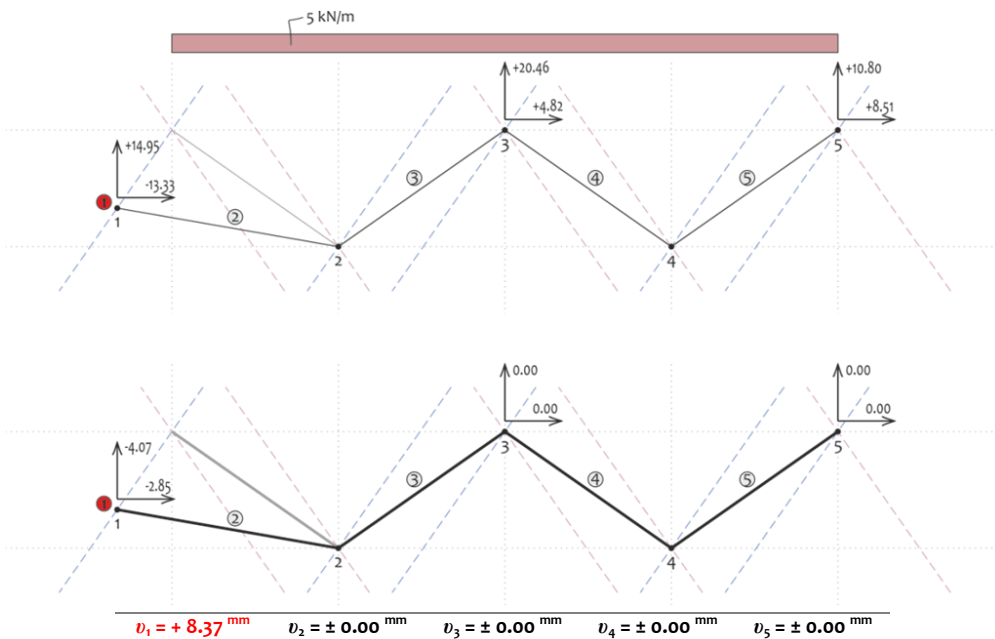
Nous allons maintenant appliquer la somme des charges externes au système porteur I (s.p.I). Des réactions apparaissent le long des appuis. Pour l'instant, aucun déplacement des points des arêtes n'a lieu.

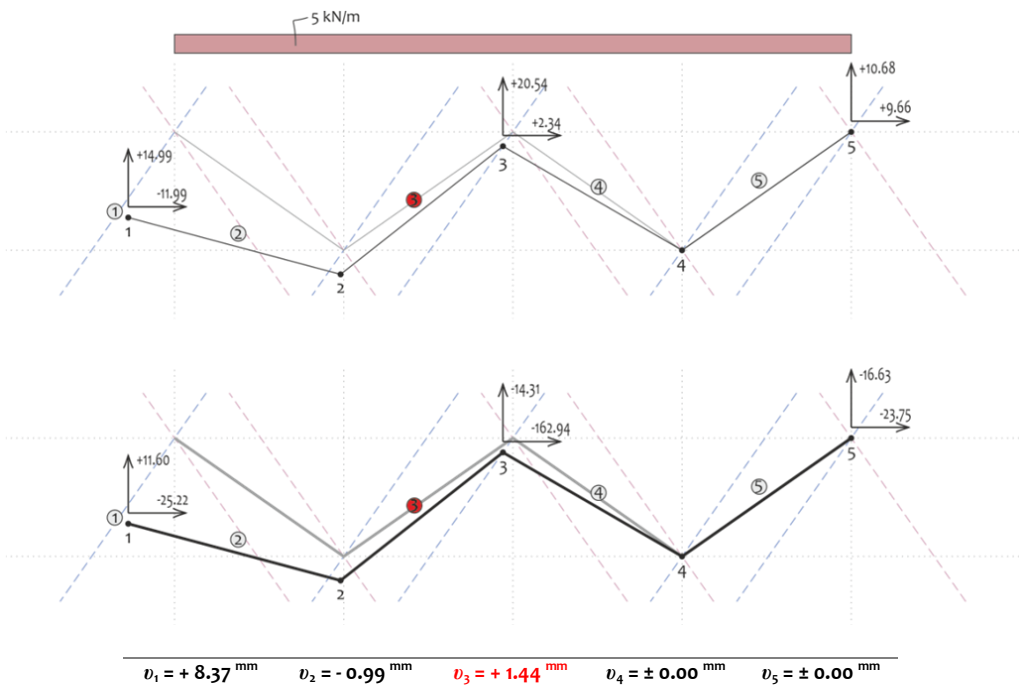
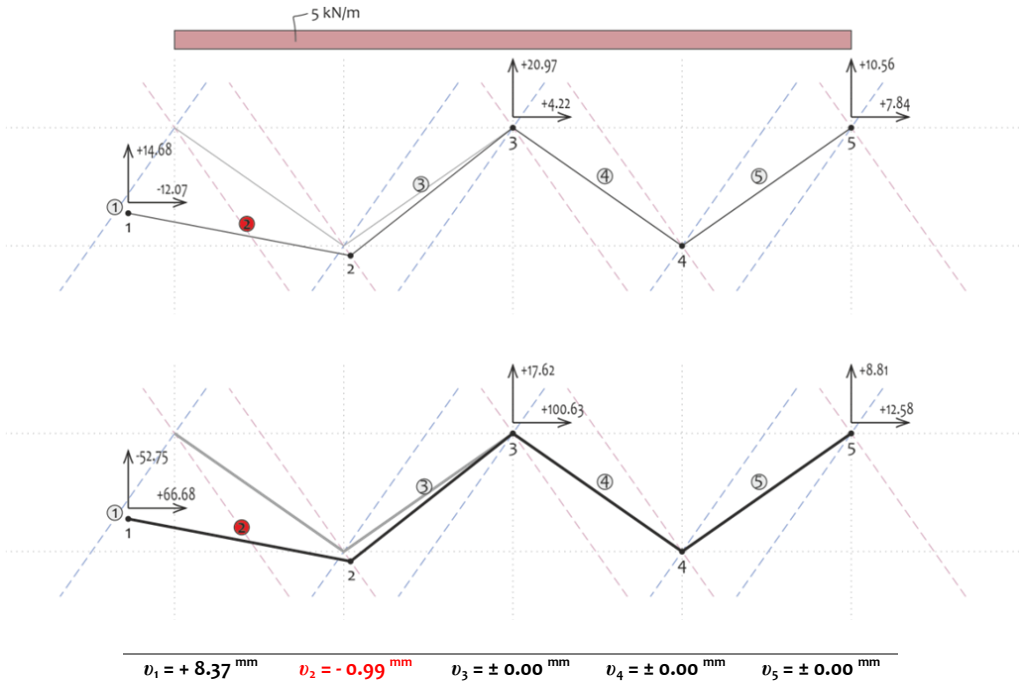


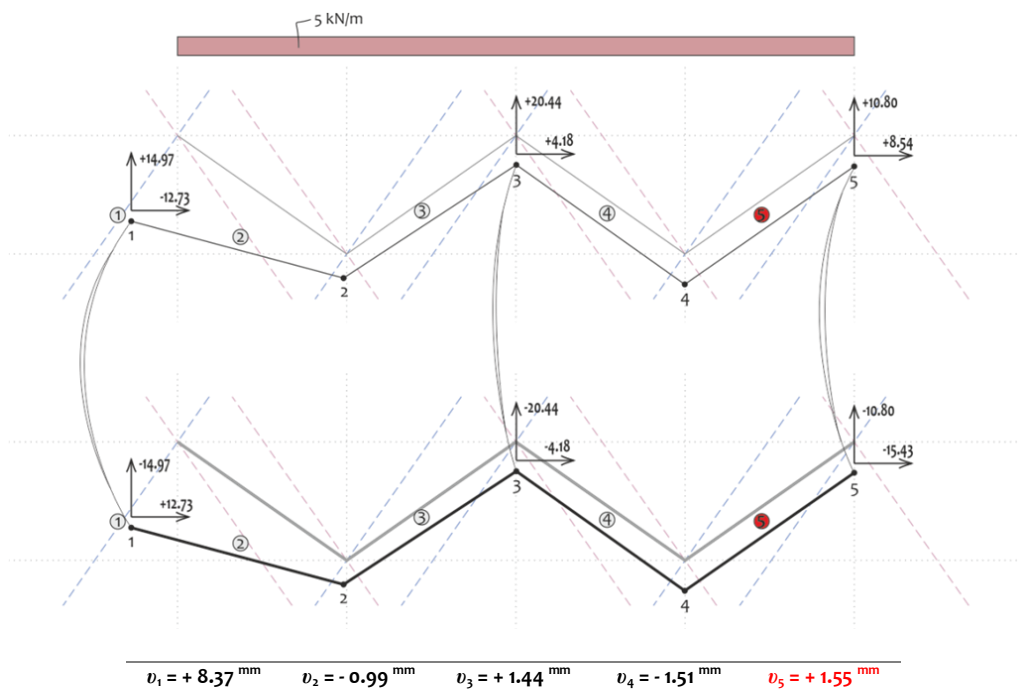
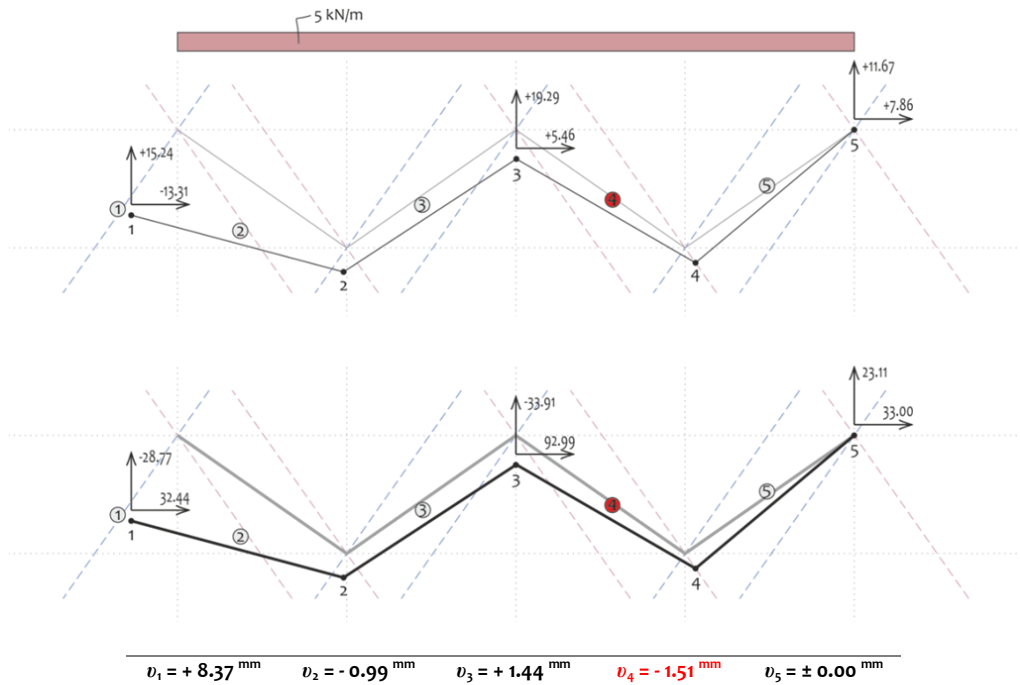
Le système porteur II (s.p.II) est pour le moment libre de tension et de déformation.



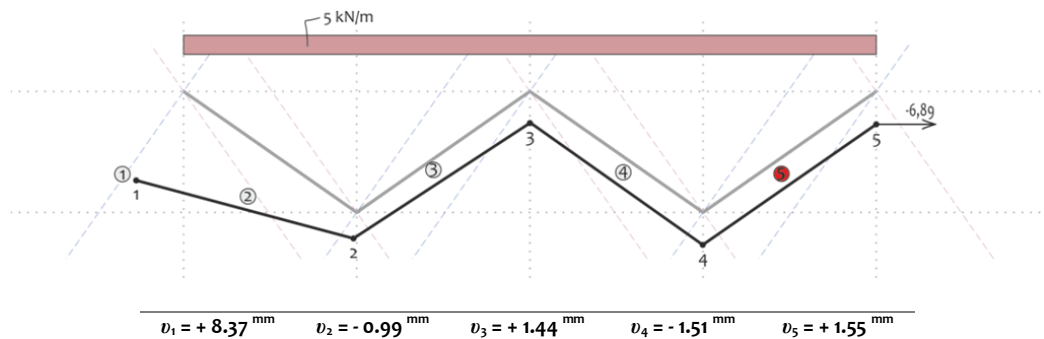
Nous allons maintenant faire des expériences en imposant aux deux systèmes porteurs des déplacements v_i , identiques pour les deux systèmes, parallèles à y_i . Aussi bien s.p.I que s.p.II réagissent à ces déplacements, comme examiné ci-dessus. Notre objectif est d'introduire des déplacements tels, que les réactions aux appuis le long des arêtes prennent la même valeur mais un signe opposé pour les deux systèmes porteurs. (Il est évident que c'est l'introduction de forces le long des appuis qui est responsable des déplacements.)







Si nous retirons les appuis et unissons les deux systèmes porteurs le long des arêtes, rien ne changera ! Des forces seront transférées aux positions des arêtes, et chaque s.p. jouera le rôle de support de l'autre. Ainsi, on « boucle » les deux entités et on retrouve le système porteur « double » réel.



La structure ainsi déformée assume les charges externes *sans appuis intermédiaires*. Ainsi, nous pouvons conclure qu'il s'agit bien de la déformation réelle de la structure sous charges externes. Pour obtenir la sollicitation (efforts intérieurs) de la structure, il suffit de superposer les sollicitations de s.p.1 et s.p.2. (Note : Il est évident qu'en raison de la rigidité axiale, V et H se partagent entre les arêtes du haut et du bas.)

Il faut souligner qu'en raison des différentes formes de répartition de V et H considérées pour les deux systèmes porteurs (s.p.I-uniforme, s.p.II-parabolique), il est impossible d'effectuer ce 'bouclage' sur toute la longueur des arêtes. Nous choisissons ainsi d'égaliser les valeurs des réactions d'appuis au milieu de la portée à $x=L/2$. Après avoir obtenu de cette façon les valeurs de V et H , nous chargeons le s.p.II avec les réactions d'appuis du s.p.I (distribution uniforme selon x) et nous recalculons ainsi les efforts intérieurs de la poutre plissée. Nous pourrions, si souhaité, arriver à une approche plus précise à l'aide d'une méthode itérative, ou en effectuant des calculs partiels en utilisant des séries Fourier comme dans la méthode de Girkmann.

Les calculs suivants ont été effectués à l'aide du logiciel Excel. Nous avons préféré cette option à celle d'un programme de statique, parce qu'elle nous permet d'obtenir une solution directe par rapport à certains paramètres que nous pouvons modifier (si souhaité). Cela est possible en raison de la simplicité des calculs de cette méthode d'analyse. Par contre, ce serait irréalisable si, par exemple, nous avions choisi la méthode des éléments finis pour analyser notre système porteur !

Imaginons, par conséquent, que nous sommes au stade du dimensionnement. Nous pouvons facilement faire des expériences avec différentes géométries et choisir la géométrie optimale. C'est d'ailleurs l'un des atouts majeurs de cette méthode (ainsi que de celle de Girkmann) en comparaison avec la méthode des éléments finis où chaque changement de géométrie conduit à une redéfinition de la géométrie (processus fastidieux). Personne ne nous empêche d'ailleurs, après avoir sélectionné la géométrie optimale, de faire un calcul plus détaillé, formant un modèle d'éléments finis.

Ainsi, dans le fichier Excel qui se trouve dans le CD qui accompagne le livre, le lecteur peut modifier presque tous les paramètres, il peut facilement intervenir sur les caractéristiques géométriques de la structure ainsi que sur les charges externes, observer l'évolution de la sollicitation et de la déformation et constater les résultats concernant les efforts intérieurs, les contraintes, les déplacements, etc. mais aussi les besoins en armature et en béton. Le processus du calcul en entier est visible au lecteur. Un espace d'expérimentation est aussi disponible afin d'appréhender le comportement des deux s.p. séparément. A la fin du chapitre, des diagrammes montrant l'évolution de différentes valeurs en fonction des caractéristiques géométriques de la structure seront présentés.

3.2.1 Calcul du système porteur

(Pour toutes les caractéristiques de la structure, voir pages 37-39)

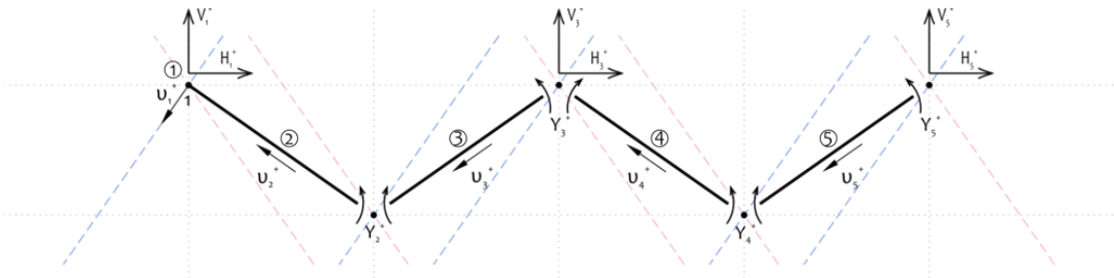
Unités : Distance : m - Poids : kN

A. Calcul de la dalle plissée

Caractéristiques de la section activée :

$b = 1 m$ (bande de largeur unitaire), $h = 0.12 m$ (hauteur de la dalle), $I = 0.000144 m^4$

Signes positifs :



Système porteur soumis aux charges externes réparties :

Pour une bande de $1m$ de largeur :

Réactions des appuis		Efforts intérieurs	
V_1	$14.54 kN$	Y_2	$-2.29 kNm$
H_1	$-8.44 kN$	Y_3	$-1.68 kNm$
V_3	$21.22 kN$	Y_4	$-1.85 kNm$
H_3	$0.92 kN$	Y_5	$-1.79 kNm$
V_5	$10.45 kN$		
H_5	$7.52 kN$		

Remarque : $Y_1=0$: la paroi-nervure 1 est ignorée 'en tant que dalle', vu ses petites dimensions. Pourtant sa rigidité torsionnelle qui n'est pas prise en compte (l'arête 1 est considérée comme simplement appuyée) n'est pas négligeable. C'est la raison pour laquelle la méthode de Girkmann se rapproche davantage du comportement des parois du bord.

Dans une solution approximative, nous pourrions ne pas tenir compte du tout des réactions de la dalle plissée dues aux déplacements des points de ses arêtes et ne considérer que les réactions résultant de la prise en charge des charges externes que nous appliquerons directement ensuite sur le système des poutres. Nous éviterions ainsi la démarche pénible de trouver la position d'équilibre déformée des deux systèmes porteurs.

Mais comme nous l'avons remarqué auparavant, et cela sera confirmé par les calculs par la suite, le « froissement » de la dalle modifie sensiblement les réactions dues aux charges extérieures. Nous obtenons donc une modification de l'ordre de 3-4 % pour V et de 10 à 350 % pour H , tandis que les valeurs absolues de V et H dues à v_i dépassent les $4 kN$. Notons aussi que l'état de contrainte de la dalle elle-même est considérablement altéré, puisque, comme nous le verrons par la suite, Y subit une modification de l'ordre de 15 à 230 %.

Réponse du système porteur I à l'imposition de déplacements unitaires v_i :

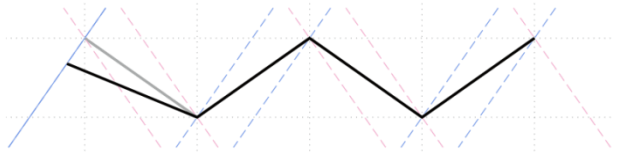
Remarque : l'hypothèse des petits déplacements a été assumée.

(résultats obtenus en kN et kNm respectivement en substituant les valeurs des déplacements en mm)

Réactions des appuis Efforts intérieurs * Notons que $\Sigma H=0, \Sigma V=0$ dans chaque cas.

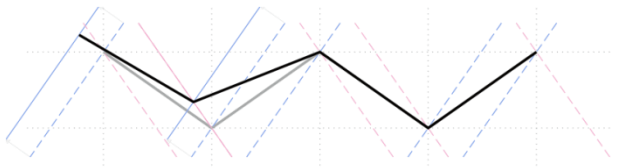
$v_1 = 1 \text{ mm}$ - $v_2, v_3, v_4, v_5 = 0$

V_1	$0.049 \cdot v_1$	Y_2	$-0.751 \cdot v_1$
H_1	$-0.584 \cdot v_1$	Y_3	$0.202 \cdot v_1$
V_3	$-0.090 \cdot v_1$	Y_4	$-0.058 \cdot v_1$
H_3	$0.465 \cdot v_1$	Y_5	$0.029 \cdot v_1$
V_5	$0.042 \cdot v_1$		
H_5	$0.119 \cdot v_1$		



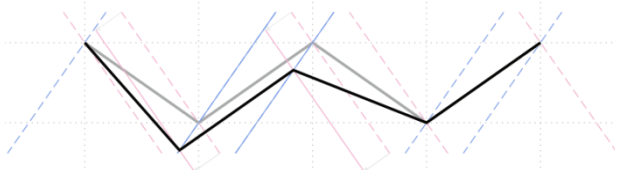
$v_2 = 1 \text{ mm}$ - $v_1, v_3, v_4, v_5 = 0$

V_1	$0.276 \cdot v_2$	Y_2	$-1.288 \cdot v_2$
H_1	$-1.277 \cdot v_2$	Y_3	$1.150 \cdot v_2$
V_3	$-0.513 \cdot v_2$	Y_4	$-0.328 \cdot v_2$
H_3	$0.601 \cdot v_2$	Y_5	$0.164 \cdot v_2$
V_5	$0.237 \cdot v_2$		
H_5	$0.675 \cdot v_2$		



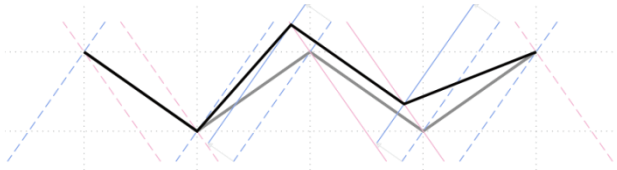
$v_3 = 1 \text{ mm}$ - $v_1, v_2, v_4, v_5 = 0$

V_1	$0.214 \cdot v_3$	Y_2	$0.523 \cdot v_3$
H_1	$0.053 \cdot v_3$	Y_3	$0.892 \cdot v_3$
V_3	$-0.295 \cdot v_3$	Y_4	$-1.107 \cdot v_3$
H_3	$-1.307 \cdot v_3$	Y_5	$0.554 \cdot v_3$
V_5	$0.081 \cdot v_3$		
H_5	$1.254 \cdot v_3$		



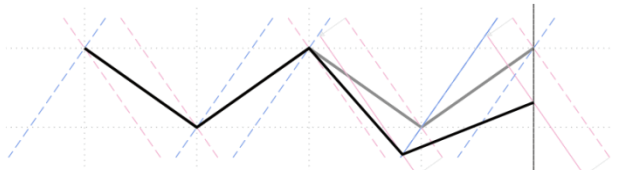
$v_4 = 1 \text{ mm}$ - $v_1, v_2, v_3, v_5 = 0$

V_1	$-0.170 \cdot v_4$	Y_2	$0.923 \cdot v_4$
H_1	$0.875 \cdot v_4$	Y_3	$-0.707 \cdot v_4$
V_3	$0.826 \cdot v_4$	Y_4	$-1.077 \cdot v_4$
H_3	$-2.066 \cdot v_4$	Y_5	$2.030 \cdot v_4$
V_5	$-0.657 \cdot v_4$		
H_5	$1.191 \cdot v_4$		



$v_5 = 1 \text{ mm}$ - $v_1, v_2, v_3, v_4 = 0$

V_1	$-0.177 \cdot v_5$	Y_2	$0.185 \cdot v_5$
H_1	$0.379 \cdot v_5$	Y_3	$-0.738 \cdot v_5$
V_3	$0.738 \cdot v_5$	Y_4	$-0.215 \cdot v_5$
H_3	$-0.822 \cdot v_5$	Y_5	$1.599 \cdot v_5$
V_5	$-0.561 \cdot v_5$		
H_5	$0.443 \cdot v_5$		



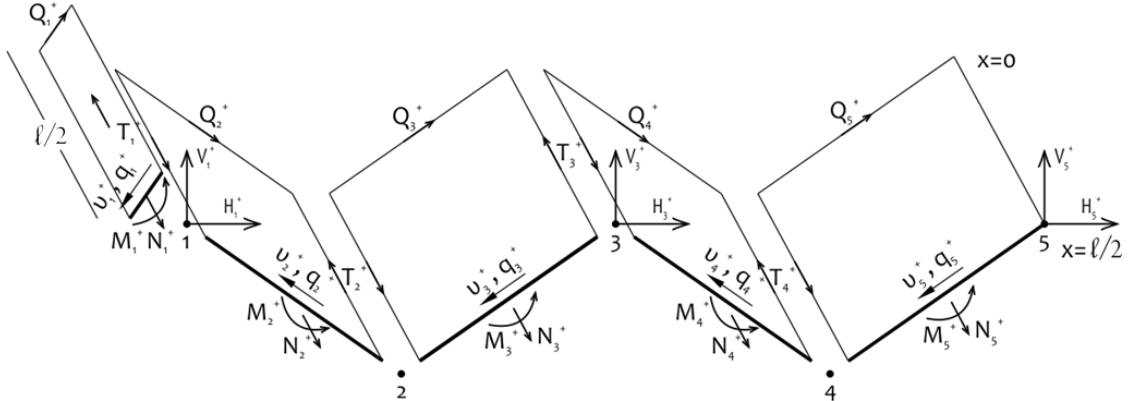
B. Calcul de la poutre plissée

Caractéristiques des sections activées :

// Poutre 1 : $b = 0.20 \text{ m}$, $h = 0.80 \text{ m}$, $A = 0.16 \text{ m}^2$, $I = 0.008533 \text{ m}^4$, $W = 0.02133 \text{ m}^3$

// Poutres 2,3,4,5 : $b = 0.12 \text{ m}$, $h = 2.544 \text{ m}$, $A = 0.30528 \text{ m}^2$, $I = 0.16465 \text{ m}^4$, $W = 0.129439 \text{ m}^3$

Signes positifs :



Le long de chaque arête intermédiaire n , les parois reliées n et $n+1$ doivent subir les mêmes déformations spécifiques ε_x . Cela donne :

$$\begin{aligned}
 T_1 \left(\frac{1}{A_1} + \frac{4}{A_2} \right) + T_2 \frac{2}{A_2} &= \left(\frac{M_{q2}}{W_2} \right) & T_2 \frac{1}{A_3} + 2T_3 \left(\frac{1}{A_3} + \frac{1}{A_4} \right) + T_4 \frac{1}{A_4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_{q3}}{W_3} + \frac{M_{q4}}{W_4} \right) \\
 T_1 \frac{1}{A_2} + 2T_2 \left(\frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} \right) + T_3 \frac{1}{A_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_{q2}}{W_2} + \frac{M_{q3}}{W_3} \right) & T_3 \frac{1}{A_4} + 2T_4 \left(\frac{1}{A_4} + \frac{1}{A_5} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_{q4}}{W_4} + \frac{M_{q5}}{W_5} \right)
 \end{aligned}$$

M_{q_i} : moment qui équilibre la charge paraboliquement répartie de chaque poutre q_i , résultant de l'analyse dans le plan des parois des réactions réparties des appuis.

T : effort rasant transféré d'une paroi à l'autre (correspondant à la demi-longueur de la paroi.)

$$\begin{vmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.321402 & -0.086230 & 0.023517 & -0.007839 \\ 0.229768 & 0.254726 & -0.069471 & 0.023157 \\ -0.061271 & 0.246527 & 0.254366 & -0.084789 \\ 0.015318 & -0.061632 & 0.231209 & 0.315998 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_{q2} \\ M_{q3} \\ M_{q4} \\ M_{q5} \end{vmatrix}$$

$$9.84EJ_1 v_1 = M_{q1} L^2$$

(Remarque : calcul des flèches pour charges linéaires avec distribution parabolique.)

$$9.84EJ_2 v_2 = (M_{q2} - 1.272(T_1 + T_2)) L^2$$

$$9.84EJ_3 v_3 = (M_{q3} - 1.272(T_2 + T_3)) L^2$$

$$9.84EJ_4 v_4 = (M_{q4} - 1.272(T_3 + T_4)) L^2$$

$$9.84EJ_5 v_5 = (M_{q5} - 1.272(T_4 + 0)) L^2$$

$$\begin{vmatrix} M_{q1} \\ M_{q2} \\ M_{q3} \\ M_{q4} \\ M_{q5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10433,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1511505 & 1367273 & 820364 & 273455 \\ 0 & 1367273 & 2299707 & 1621430 & 540477 \\ 0 & 820364 & 1621430 & 2019820 & 807499 \\ 0 & 273455 & 540477 & 807499 & 671844 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{vmatrix}$$

Réponse du système porteur II à l'imposition de déplacements unitaires v_i :

(résultats obtenus en kNm , kN/m et kN respectivement en substituant les valeurs des déplacements en mm)

Efforts intérieurs		Charges sollicitant les parois		Réactions des appuis	
$v_1 = 1 \text{ mm} - v_2, v_3, v_4, v_5 = 0$					
M_{q1}	$10.43 \cdot v_1$	q_1	$0.59 \cdot v_1$	V_1	$-0.49 \cdot v_1$
M_{q2}	$0 \cdot v_1$	q_2	$0 \cdot v_1$	H_1	$-0.34 \cdot v_1$
M_{q3}	$0 \cdot v_1$	q_3	$0 \cdot v_1$	V_3	$0 \cdot v_1$
M_{q4}	$0 \cdot v_1$	q_4	$0 \cdot v_1$	H_3	$0 \cdot v_1$
M_{q5}	$0 \cdot v_1$	q_5	$0 \cdot v_1$	V_5	$0 \cdot v_1$
				H_5	$0 \cdot v_1$
$v_2 = 1 \text{ mm} - v_1, v_3, v_4, v_5 = 0$					
M_{q1}	$0.00 \cdot v_2$	q_1	$0.00 \cdot v_2$	V_1	$49.25 \cdot v_2$
M_{q2}	$1511.51 \cdot v_2$	q_2	$85.86 \cdot v_2$	H_1	$-70.33 \cdot v_2$
M_{q3}	$1367.27 \cdot v_2$	q_3	$77.67 \cdot v_2$	V_3	$-17.82 \cdot v_2$
M_{q4}	$820.36 \cdot v_2$	q_4	$46.60 \cdot v_2$	H_3	$-101.79 \cdot v_2$
M_{q5}	$273.45 \cdot v_2$	q_5	$15.53 \cdot v_2$	V_5	$-8.91 \cdot v_2$
				H_5	$-12.72 \cdot v_2$
$v_3 = 1 \text{ mm} - v_1, v_2, v_4, v_5 = 0$					
M_{q1}	$0.00 \cdot v_3$	q_1	$0.00 \cdot v_3$	V_1	$44.55 \cdot v_3$
M_{q2}	$1367.27 \cdot v_3$	q_2	$77.67 \cdot v_3$	H_1	$-63.62 \cdot v_3$
M_{q3}	$2299.71 \cdot v_3$	q_3	$130.63 \cdot v_3$	V_3	$-22.10 \cdot v_3$
M_{q4}	$1621.43 \cdot v_3$	q_4	$92.10 \cdot v_3$	H_3	$-182.46 \cdot v_3$
M_{q5}	$540.48 \cdot v_3$	q_5	$30.70 \cdot v_3$	V_5	$-17.61 \cdot v_3$
				H_5	$-25.15 \cdot v_3$
$v_4 = 1 \text{ mm} - v_1, v_2, v_3, v_5 = 0$					
M_{q1}	$0.00 \cdot v_4$	q_1	$0.00 \cdot v_4$	V_1	$26.73 \cdot v_4$
M_{q2}	$820.36 \cdot v_4$	q_2	$46.60 \cdot v_4$	H_1	$-38.17 \cdot v_4$
M_{q3}	$1621.43 \cdot v_4$	q_3	$92.10 \cdot v_4$	V_3	$12.98 \cdot v_4$
M_{q4}	$2019.82 \cdot v_4$	q_4	$114.74 \cdot v_4$	H_3	$-169.43 \cdot v_4$
M_{q5}	$807.50 \cdot v_4$	q_5	$45.87 \cdot v_4$	V_5	$-26.31 \cdot v_4$
				H_5	$-37.57 \cdot v_4$
$v_5 = 1 \text{ mm} - v_1, v_2, v_3, v_4 = 0$					
M_{q1}	$0.00 \cdot v_5$	q_1	$0.00 \cdot v_5$	V_1	$8.91 \cdot v_5$
M_{q2}	$273.45 \cdot v_5$	q_2	$15.53 \cdot v_5$	H_1	$-12.72 \cdot v_5$
M_{q3}	$540.48 \cdot v_5$	q_3	$30.70 \cdot v_5$	V_3	$8.70 \cdot v_5$
M_{q4}	$807.50 \cdot v_5$	q_4	$45.87 \cdot v_5$	H_3	$-62.72 \cdot v_5$
M_{q5}	$671.84 \cdot v_5$	q_5	$38.16 \cdot v_5$	V_5	$-21.89 \cdot v_5$
				H_5	$-31.26 \cdot v_5$

Rétraction des appuis → Détermination de v_i :

$$\Sigma V_i H_{i,dalle} = - \Sigma V_i H_{i,poutre} \Rightarrow$$

v_1	8.37 mm	u_1	-3.97 mm	v_1	-7.37 mm	-7.50 mm MEF*
v_2	-0.99 mm	u_2	-0.27 mm	v_2	-2.10 mm	
v_3	1.44 mm	u_3	0.04 mm	v_3	-2.55 mm	
v_4	-1.51 mm	u_4	-0.02 mm	v_4	-2.65 mm	
v_5	1.55 mm	u_5	0.00 mm	v_5	-2.68 mm	

Remarque : flèches pour charges linéaires avec répartition parabolique.
Une augmentation de 20% se produit si on présume une répartition uniforme.

Nous avons donc : (a) les efforts intérieurs de la dalle plissée :

Y_2	-7.666 kNm
Y_3	0.091 kNm
Y_4	-2.313 kNm
Y_5	-1.500 kNm

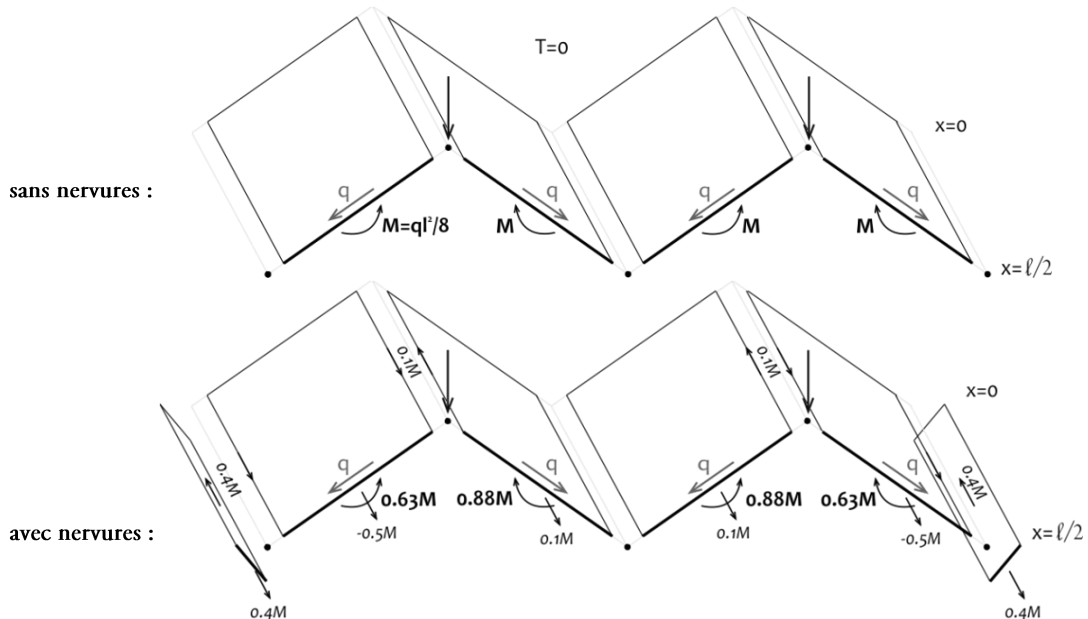
et (b) les efforts intérieurs de la poutre plissée calculée de nouveau pour une répartition uniforme de q :

	x=0,L	x=0,L	x=L/2	$\int_0-L/2$	x=L/2	x=L/2	x=L/2	x=L/2	x=L/2
[q] kN/m	[Q] kN	[Q _y [*]]	[M _q] kNm**	[T] kN	[N] kN	[N [*]]	[M] kNm**	[M _z [*]]	[[M _y] [*]]
4.96	32.3	29	104.9	-176.9	-176.9	-171	104.9	76	0.1
-19.01	-123.6	-112	-401.6	48.9	225.8	228	-238.9	-242	2.2
20.37	132.4	125	430.2	14.9	-34.0	-39	349.0	356	0.4
-15.26	-99.2	-94	-322.4	18.5	3.6	-7	-364.9	-369	1.6
18.83	122.4	105	397.8	0.0	-18.5	-12	374.3	372	1.2

* Résultats d'analyse avec MEF (logiciel : Scia Engineer) - modèle monté sur colonnes

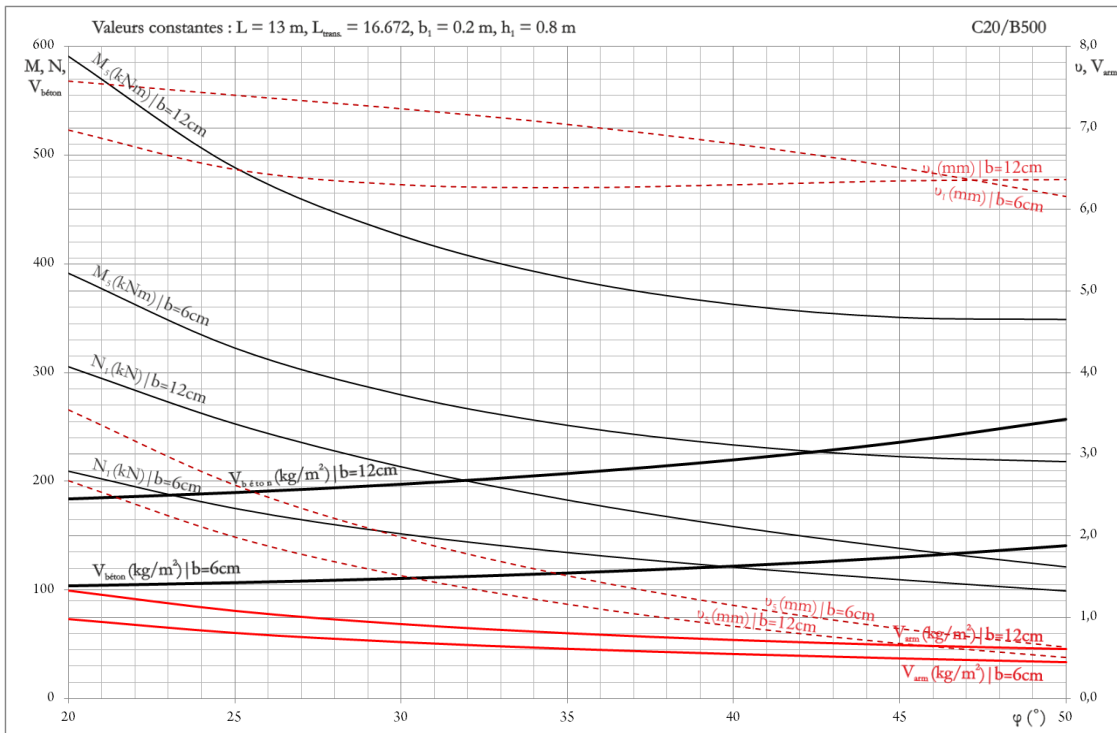
**Remarque : ci-dessous est représenté schématiquement le rôle joué par les nervures du bord dans la limitation de la sollicitation et de la déformation d'une simple structure plissée. Dû à la présence des nervures, un renforcement substantiel de la partie inférieure de la section plissée globale se produit. (Des arêtes articulées ont été assumées.)

Géométrie : $A_0=0.1$, $A=0.25$, $W=0.104$, $h=2,5$



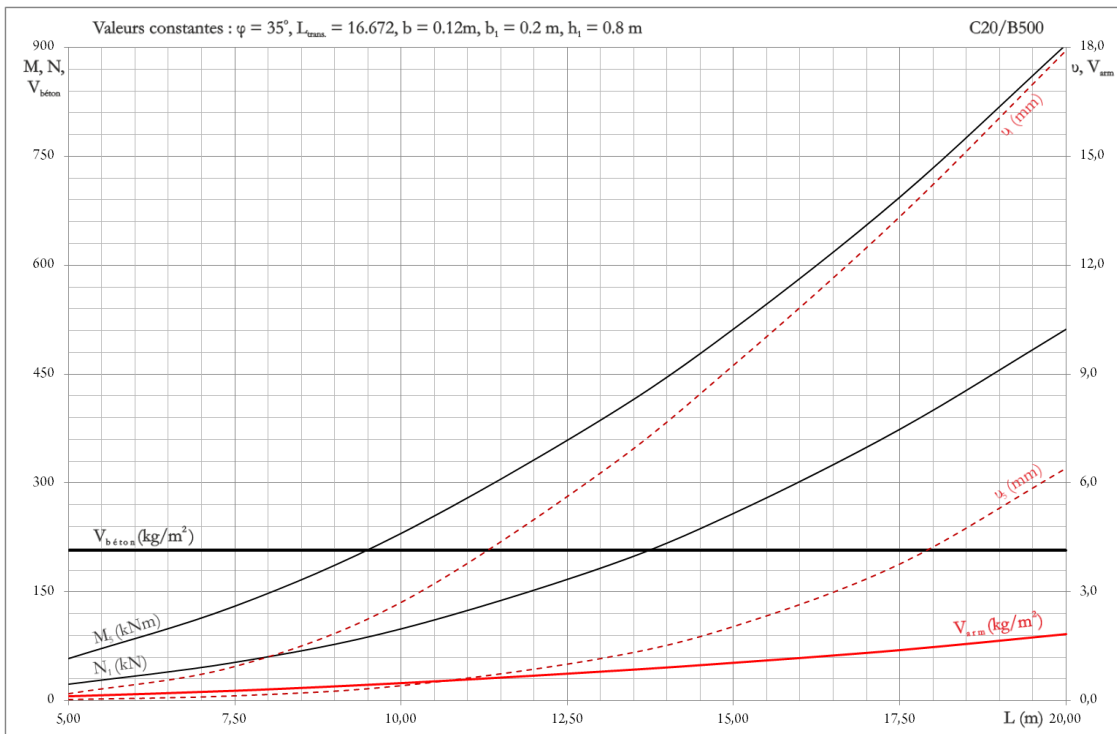
3.2.2 Étude Paramétrique

Diag. 1 : Variation de l'angle φ et de l'épaisseur des parois b

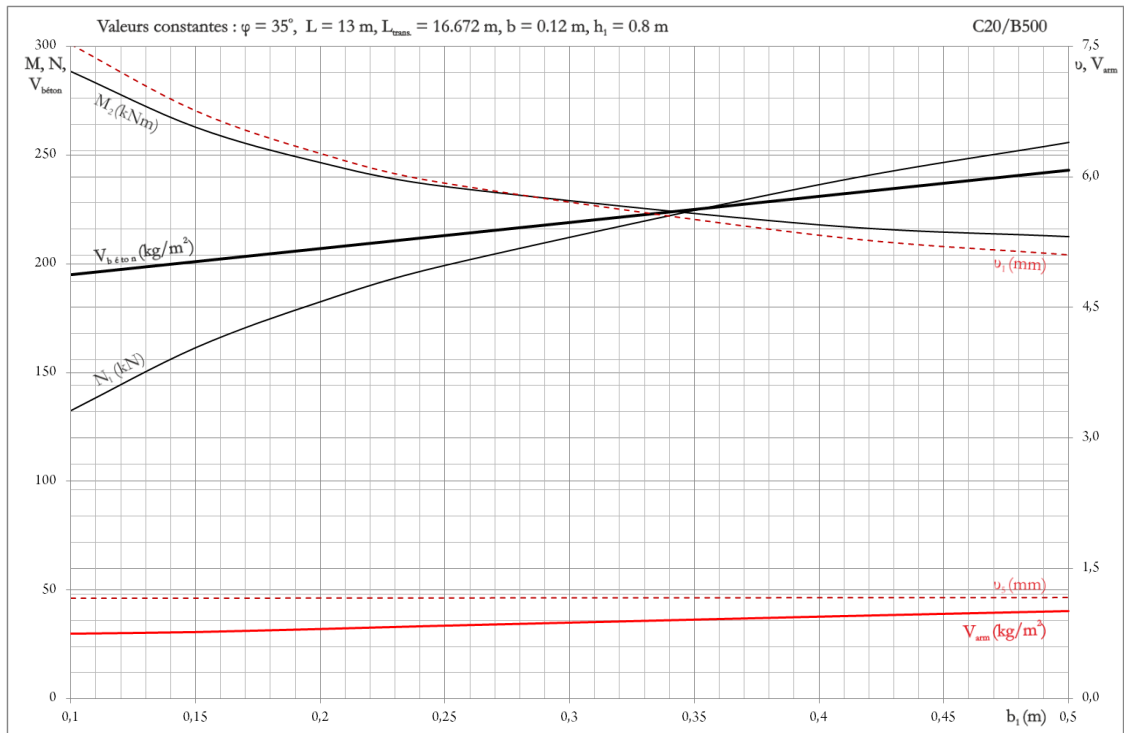


Note : le poids de l'armature principale et du béton est calculé par unité d'aire horizontale.

Diag. 2 : Variation de la portée principale L



Diag. 3 : Variation de l'épaisseur de la paroi 1



(pour plus d'informations, voir le fichier excel)

Références

- [1] K. GIRKMANN, *Flächentragwerk*, (Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und faltwerke), 5ème édition, Springer-Verlag, Vienne, 1959.
- [2] A. IKONOMOU, *Étude statique de la toiture plissée de Jacques Sezana*, Athènes, 1962.
- [3] R. VITTONI, *Bâtir : manuel de la construction*, 2ème édition, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2010.
- [4] R. WALTHER en collaboration avec J. TRELEANI, *Construire en béton*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1993.
- [5] Y. WEINAND, H. BURI, *ORIGAMI – Folded Plate Structures, Architecture*, Laboratory for timber constructions IBOIS, École Polytechnique Fédérale Lausanne, Lausanne.
- [6] Portail « MATHÉMATIQUES À GENÈVE », icp.ge.ch/dip/mathsl/, *Pliages et architecture*