

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ



ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ ΜΩΥΣΙΔΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΒΛΑΣΗΣ ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2012

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ

Για άλλη μια φορά θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον κ. Βλάση Κουμούση, καθηγητή του Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τη συνεχή καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια του, για το ενδιαφέρον και την άμεση ανταπόκριση στα διάφορα προβλήματα που προέκυπταν καθώς και για το πλούσιο βιβλιογραφικό υλικό που μου παρείχε.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της μεταπτυχιακής εργασίας είναι οι μέθοδοι πολλαπλών κλιμάκων στην επίλυση ελαστοπλαστικών προβλημάτων επίπεδης έντασης. Σχεδόν όλα τα βιομηχανικά και τεχνητά υλικά, όπως επίσης και τα φυσικά υλικά, που χαρακτηρίζονται από πολλαπλές κλίμακες, παρουσιάζουν ανομοιογένεια σε κάποια συγκεκριμένη κλίμακα, η οποία έχει σημαντικό αντίκτυπο στην παρατηρούμενη μακροσκοπική συμπεριφορά τους. Ο καθορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των υλικών αυτών μέσω της διενέργειας απλών πειραματικών μετρήσεων σε έναν αριθμό δειγμάτων υλικού διαφορετικών διαστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη διάφορους δρόμους φόρτισης είναι ένα μάλλον ανέφικτο έργο. Από την άλλη μεριά, η απευθείας αριθμητική επίλυση των προβλημάτων πολλαπλής κλίμακας είναι δύσκολη ακόμα και με την εμφάνιση των υπερυπολογιστών, γιατί απαιτείται ένα τεράστιο ποσό μνήμης του υπολογιστή και μεγάλος χρόνος επεξεργασίας. Για τους παραπάνω λόγους, υπάρχει μια επιτακτική ανάγκη για την ανάπτυξη εξειδικευμένων στρατηγικών προσομοίωσης, των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η extended multiscale finite element method (EMsFEM, Zhang, Wu, Lü και Fu) και η υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξεως (Kouznetsova). Αφού οριστεί το πεδίο εφαρμογής και οι περιορισμοί της κάθε μίας και παρουσιαστεί η μεθοδολογία τους, επιλύονται παραδείγματα που αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητά τους.

ABSTRACT

This master thesis deals with the multiscale methods for the solution of elastoplastic plane stress problems. Almost all the industrial materials, as well as natural materials, which are characterized by multiple scales, are heterogeneous at a certain scale, which has significant impact on the observed macroscopic behavior. The determination of the macroscopic properties of these materials by performing simple experimental measurements on a number of material samples of different dimensions, taking into account different loading paths is a rather unfeasible task. On the other hand, the direct numerical solution of multiscale problems is difficult even with the advent of the most

powerful computers, because it requires a huge amount of computer memory and high processing time. For these reasons, there is a pressing need to develop specific modeling strategies which nowadays constitutes the field of multiscale methods. Hence, in this thesis, some specific aspects are addressed namely the extended multiscale finite element method (EMsFEM, Zhang, Wu, Lü and Fu) and the computational homogenization of first order. First the limitations of each method are described and their methodology is presented. Numerical examples are presented that demonstrate the efficiency of the aforementioned multiscale methods.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	v
ABSTRACT	v
Περιεχόμενα	vii
κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
κεφάλαιο 2. Στοιχεία μηχανικής του παραμορφώσιμου σώματος και κλασική θεωρία της πλαστικότητας	5
2.1. Η έννοια της τάσεως	7
2.1.1. Η τάση ως τανυστής	8
2.1.2. Οι εξισώσεις ισοροπίας των τάσεων	9
2.2. Η έννοια της παραμορφώσεως	10
2.2.1. Η παραμόρφωση ως τανυστής	11
2.2.2. Οι εξισώσεις του συμβιβαστού των παραμορφώσεων	12
2.3. Οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων-Νόμος του Hooke	13
2.4. Η μετελαστική συμπεριφορά των υλικών	14
2.4.1. Ελαστικές και πλαστικές παραμορφώσεις	14
2.4.2. Η αστοχία των υλικών	15
2.4.3. Η θεωρία της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων ή κριτήριο αστοχίας του von Mises (1913)	17
2.5. Η συμπεριφορά των υλικών μετά τη διαρροή	18
2.5.1. Φόρτιση και αποφόρτιση στο χώρο των τάσεων	20
2.6. Κλασική θεωρία πλαστικότητας	21
2.6.1. Εξισώσεις Levy-Mises	22
2.6.2. Εξισώσεις Prandtl-Reuss	23
2.7. Η θεωρία της πλαστικής ροής	24
2.8. Παράρτημα – Στοιχεία της μηχανικής του συνεχούς	27
2.8.1. Κινηματική	27
2.8.2. Η κλίση της παραμόρφωσης (deformation gradient)	28
2.8.3. Ορισμός τροπών (ανηγμένων παραμορφώσεων) σε πεπερασμένες παραμορφώσεις	29
2.8.4. Έκφραση τανυστή τροπής συναρτήσει της μετατόπισης	30
2.8.5. Τάσεις	31

κεφάλαιο 3. Πλαστικότητα και Πεπερασμένα Στοιχεία.....	33
3.1. Εισαγωγή	35
3.2. Ενημέρωση των τάσεων (stress updating).....	36
3.3. Το τυπικό ελαστοπλαστικό μητρώο για ένα ελαστικό/ απολύτως πλαστικό υλικό που υπακούει στο κριτήριο διαρροής του Von Mises και υφίσταται επίπεδη ένταση.....	38
3.4. Μη συσχετισμένη (συναρτημένη) πλαστικότητα (non-associative plasticity)	40
3.5. Εισαγωγή της κράτνσης (hardening)	41
3.5.1. Ισότροπη κράτνση με βάση την ανηγμένη παραμόρφωση (isotropic strain hardening).....	41
3.5.2. Ισότροπη κράτνση με βάση το έργο (isotropic work hardening/“εργοσκλήρυνση”).....	43
3.5.3. Κινηματική κράτνση (kinematic hardening)	44
3.6. Πλαστικότητα κατά Von Mises στις τρεις διαστάσεις	47
3.7. Ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων	49
3.7.1. Προσδιορισμός του σημείου τομής της επιφάνειας διαρροής (crossing the yield surface).....	51
3.7.2. Δύο εναλλακτικές διαδικασίες πρόλεξης (predictors).....	53
3.7.3. Επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής	55
3.7.4. Υποδιαίρεση της προσαύξησης σε περισσότερα βήματα (sub-incrementation)	55
3.7.5. Γενικευμένοι αλγόριθμοι του τραπεζίου ή του μέσου σημείου	56
3.7.6. Ο αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler (backward-Euler return)	58
3.8. Το συνεπές εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο (consistent tangent modular matrix)	59
κεφάλαιο 4. Προσομοίωση και Επίλυση Προβλημάτων σε Πολλαπλές Κλίμακες (Multiscale Modeling).....	61
4.1. Εισαγωγή	63
4.2. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων και Προσομοίωση σε Πολλαπλές Κλίμακες	64
4.3. Εφαρμογή της EMsFEM.....	65
4.3.1. Η κατασκευή των συναρτήσεων βάσης (base functions).....	67
4.3.2. Γραμμικές Συνοριακές Συνθήκες	68

4.3.3. Η Τροποποιημένη Τεχνική Υπερ-δειγματοληψίας (modified oversampling technique).....	71
4.3.4. Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες (EMsFEM-P)	73
4.3.5. Περιοδικές συνοριακές συνθήκες συνδυασμένες με την τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας (oversampling technique/EMsFEM-OP)	74
4.4. Ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας ενός στοιχείου στη μακροκλίμακα (equivalent stiffness matrix of a coarse element)	75
4.5. Υπολογισμοί στο επίπεδο της μακροκλίμακας.....	76
4.6. Αναγωγή στη μικροκλίμακα και υπολογισμός των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων (downscaling computation)	77
4.7. Ο αλγόριθμος της ελαστοπλαστικής ανάλυσης στη προσομοίωση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.....	78
4.7.1. Αντιμετώπιση των επικόμβιων δυνάμεων στη μικροκλίμακα	78
4.7.2. Προσαυξητικός επαναληπτικός αλγόριθμος Newton-Raphson	81
4.7.3. Διάγραμμα ροής του προγράμματος για την ελαστοπλαστική ανάλυση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων	83
κεφάλαιο 5. Υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξεως	87
5.1. Εισαγωγή	89
5.2. Βασικές παραδοχές	89
5.3. Ορισμός του προβλήματος σε επίπεδο μικροκλίμακας	92
5.4. Σύζευξη της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας.....	95
5.4.1. Παραμόρφωση.....	95
5.4.2. Τάση	96
5.4.3. Συνεπές εφαπτομενικό μητρώο	97
5.5. Διαδικασία επίλυσης.....	99
5.6. Συμπεράσματα	101
κεφάλαιο 6. Παραδείγματα-Αριθμητικές εφαρμογές.....	103
6.1. Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην ελαστική ανάλυση των κατασκευών (EMsFEM).....	105
6.1.1. Πρώτη εφαρμογή.....	105
6.1.2. Δεύτερη εφαρμογή	111
6.2. Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην ελαστοπλαστική ανάλυση των κατασκευών	114
6.3. Εφαρμογές υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως	117
6.3.1. Πρώτη εφαρμογή.....	117

κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα.....	121
Βιβλιογραφία.....	125

κεφάλαιο 1. *Εισαγωγή*

Σχεδόν όλα τα βιομηχανικά και τεχνητά υλικά (π.χ. κυψελοειδή υλικά / honeycomb materials), όπως επίσης και τα φυσικά υλικά (π.χ. εμβιοϋλικά, Σχήμα 1-1), που χαρακτηρίζονται από πολλαπλές κλίμακες, παρουσιάζουν ανομοιογένεια σε κάποια συγκεκριμένη κλίμακα, η οποία έχει σημαντικό αντίκτυπο στην παρατηρούμενη μακροσκοπική συμπεριφορά τους. Ο καθορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των υλικών αυτών μέσω της διενέργειας απλών πειραματικών μετρήσεων σε έναν αριθμό δειγμάτων υλικού διαφορετικών διαστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη διάφορους δρόμους φόρτισης είναι ένα μάλλον ανέφικτο έργο. Από την άλλη μεριά, η απευθείας αριθμητική επίλυση των προβλημάτων πολλαπλής κλίμακας είναι δύσκολη ακόμα και με την εμφάνιση των υπερ-υπολογιστών, γιατί απαιτείται ένα τεράστιο ποσό μνήμης του υπολογιστή και μεγάλος χρόνος επεξεργασίας. Για τους παραπάνω λόγους, υπάρχει μια επιτακτική ανάγκη για την ανάπτυξη εξειδικευμένων στρατηγικών προσομοίωσης, των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων. Η μεταπτυχιακή εργασία διαρθρώνεται ως εξής:

Στο 2^ο κεφάλαιο, αρχικά, συνοψίζονται ορισμένα στοιχεία από τη Θεωρία της Ελαστικότητας και τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος. Συγκεκριμένα, υπενθυμίζονται οι έννοιες των τάσεων, της ανηγμένης παραμόρφωσης και αναφέρονται οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων, συμβιβαστού των παραμορφώσεων και οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Στη συνέχεια, εξετάζεται η μετελαστική συμπεριφορά των υλικών, όπου παρουσιάζονται κριτήρια αστοχίας υλικών και στοιχεία από την κλασική θεωρία της Πλαστικότητας και από τη θεωρία της Πλαστικής Ροής. Τέλος, στο παράρτημα δίνονται ορισμένα στοιχεία για τον ταυστή της κλίσης της παραμόρφωσης (gradient tensor) και για τους Piola – Kirchhoff (P-K) ταυστές τάσης.

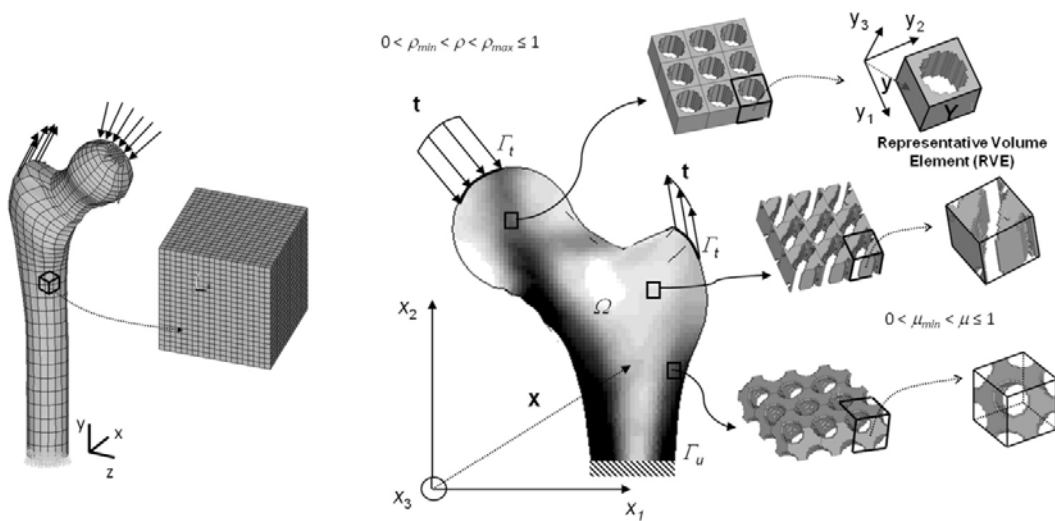
Το 3^ο κεφάλαιο επικεντρώνεται σε αυτές τις πτυχές της πλαστικότητας που αφορούν τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης. Αρχικά, εξάγεται η έκφραση του τυπικού ελαστοπλαστικού μητρώου και διατυπώνονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την κρατυνόμενη συμπεριφορά (ισότροπη και κινηματική). Έπειτα, αφού παρουσιαστούν οι τεχνικές της ολοκλήρωσης των διαφορικών εξισώσεων του νόμου της πλαστικής ροής (πίσω ολοκλήρωση κατά Euler / εμπρός ολοκλήρωση κατά Euler), δίνεται η έκφραση του εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου το οποίο είναι συνεπές με τον αλγόριθμο της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler.

Στο 4^ο κεφάλαιο, αναπτύσσεται η extended multiscale finite element method (EMsFEM) των Zhang, Wu, Lü και Fu [9], [10], [11]. Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, περιγράφεται η διαδικασία της μόρφωσης των συναρτήσεων βάσης, η οποία προϋποθέτει την επιλογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών (γραμμικών ή περιοδικών). Στο ίδιο κεφάλαιο, εξάγεται το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας και παρουσιάζεται η διαδικασία της αναγωγής στη μικροκλίμακα από την μακροκλίμακα. Στο τέλος του κεφαλαίου αναπτύσσεται ο αλγόριθμος της ελαστοπλαστικής ανάλυσης με βάση τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

Στο 5^ο κεφάλαιο παρατίθεται η υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξεως που αναπτύχθηκε από την Kouznetsova [6]. Καταρχήν, αναλύονται οι βασικές παραδοχές της μεθόδου, οι οποίες υπαγορεύουν και το πεδίο εφαρμογής της. Το επόμενο ζήτημα που αντιμετωπίζεται στο κεφάλαιο αυτό είναι η σύζευξη της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας σε επίπεδο τάσεων και παραμορφώσεων. Τελικά, εξάγεται η μορφή του συνεπούς καταστατικού μητρώου για κάθε σημείο Gauss και παρουσιάζεται ο

αλγόριθμος της μεθόδου σε προβλήματα που δε λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα.

Στο 6^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται παραδείγματα που αφορούν προβλήματα επίπεδης έντασης. Η επίλυση τους με τη βοήθεια των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων καταδεικνύει την ισχύ και την ακρίβεια των μεθόδων αυτών μέσω της σύγκρισης με τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τη επίλυση των ίδιων παραδειγμάτων με το Femap ή το Abaqus.



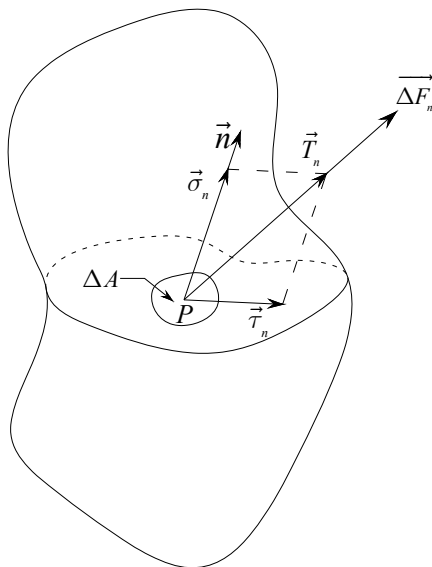
Σχήμα 1-1 Προσομοίωμα πολλαπλών κλιμάκων οστού (Multiscale modeling of bone tissue with surface and permeability control, Pedro Gonçalves Coelho, Paulo Rui Fernandes, Helder Carriço Rodrigues, Journal of Biomechanics)

**κεφάλαιο 2. Στοιχεία μηχανικής του
παραμορφώσιμου
σώματος και κλασική
θεωρία της
πλαστικότητας**

2.1. Η έννοια της τάσεως

Δύο είναι οι βασικοί τύποι δυνάμεων που μπορεί να εξασκούνται σε ένα σώμα, οι επιφανειακές και οι μαζικές [15]. Οι πρώτες εμφανίζονται όταν ένα σώμα έρχεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα, ενώ οι δυνάμεις του δεύτερου τύπου δρουν σε κάθε σημείο της μάζας του σώματος μέσω κάποιου πεδίου δυνάμεων.

Ας θεωρηθεί στοιχειώδης επιφάνεια ΔA στη γειτονιά τυχόντος σημείου P , στο εσωτερικό ή στην επιφάνεια ενός υλικού σώματος B κι έστω \vec{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που χαρακτηρίζει την επιφάνεια ΔA . Έστω, επίσης, $\vec{\Delta F}_n$ η συνισταμένη δύναμη που δρα στην επιφάνεια αυτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-1.



Σχήμα 2-1 Αυθαίρετη επιφάνεια ΔA και η επί αυτής συνισταμένη δύναμη $\vec{\Delta F}_n$

Ως διάνυσμα της συνισταμένης τάσεως ορίζεται η ποσότητα:

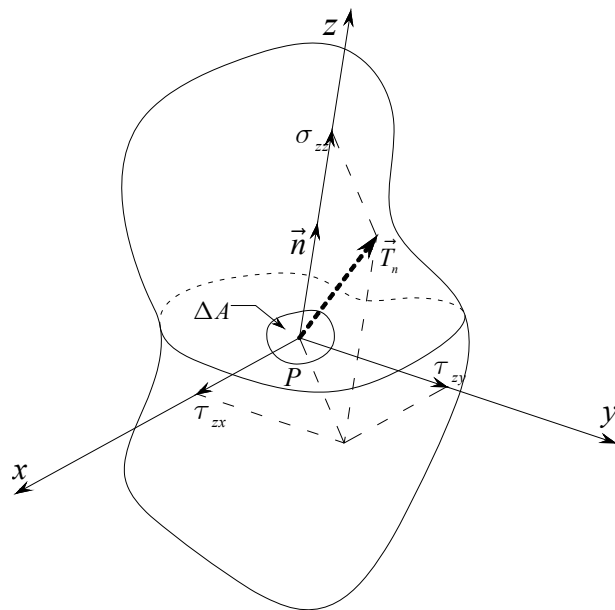
$$\vec{T}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow \alpha_0} \frac{\vec{\Delta F}_n}{\Delta A} \quad (2.1)$$

όπου α_0 το κάτω όριο της υποδιαιρέσεως της στοιχειώδους επιφάνειας για το οποίο εξακολουθεί να έχει νόημα η μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι η συνισταμένη τάση \vec{T}_n είναι συνάρτηση τόσο της θέσεως του σημείου P όσο και του προσανατολισμού της επιφάνειας ΔA . Ακόμα δηλαδή και αν το σημείο P παραμείνει σταθερό και απλώς στραφεί η επιφάνεια ΔA , το διάνυσμα \vec{T}_n θα πάρει διαφορετική τιμή.

Είναι προφανές ότι η συνισταμένη τάση \vec{T}_n μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη στην επιφάνεια ΔA , την $\vec{\sigma}_n$, και μία εφαπτομενική στην επιφάνεια ΔA , την $\vec{\tau}_n$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-1. Η $\vec{\sigma}_n$ καλείται συνισταμένη **ορθή τάση** ενώ η $\vec{\tau}_n$ καλείται συνισταμένη **διατμητική τάση**.

2.1.1. Η τάση ως τανυστής

Αν τώρα η επιφάνεια ΔA αναφερθεί σε δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς P_{xyz} , τέτοιο ώστε η θετική z-διεύθυνση να ταυτίζεται με τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου \vec{n} της επιφάνειας ΔA , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-2, τότε η συνισταμένη τάση \vec{T}_n αναλύεται σε τρεις καρτεσιανές συνιστώσες σ_{zz} , σ_{zx} και σ_{zy} (ή και σ_{zz} , τ_{zx} και τ_{zy} σύμφωνα με άλλο συμβολισμό) κατά τους άξονες z , x και y , αντίστοιχα.

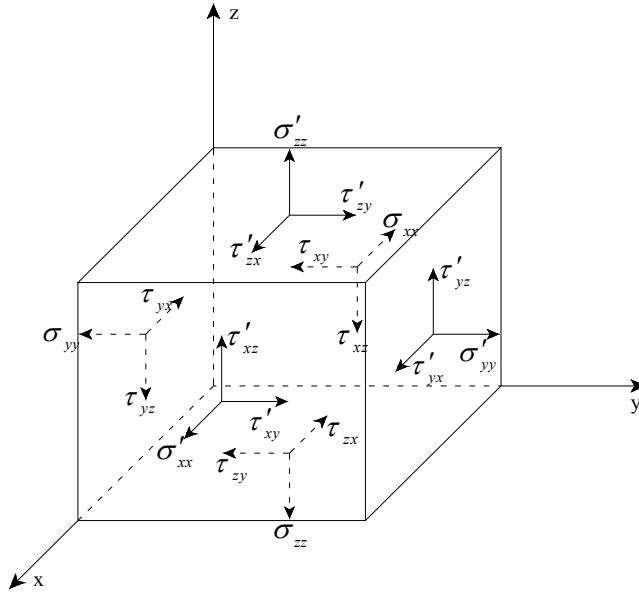


Σχήμα 2-2 Καρτεσιανή απεικόνιση της συνισταμένης τάσεως \vec{T}_n

Αν αυτή η διαδικασία επαναληφθεί με επιφάνειες προσανατολισμένες κατά τους άξονες x και y , αντίστοιχα, λαμβάνονται δύο ακόμα τριάδες καρτεσιανών συνιστωσών, οι σ_{xx} , τ_{xy} και τ_{xz} και σ_{yy} , τ_{yx} και τ_{yz} , αντίστοιχα. Συνηθίζεται οι τρεις αυτές τριάδες καρτεσιανών συνιστωσών να παρουσιάζονται με τη μορφή μητρώου ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με} \\ \text{εξωτερική κάθετο //x-άξονα} \\ \longrightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με} \\ \text{εξωτερική κάθετο //y-άξονα} \\ \longrightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με} \\ \text{εξωτερική κάθετο //z-άξονα} \end{array}$$

Οι εννέα αυτές καρτεσιανές συνιστώσες της τάσεως γίνονται αντιληπτές καλύτερα αν σχεδιασθούν στις πλευρές ενός στοιχειώδους κύβου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-3:



Σχήμα 2-3 Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τάσεως στις πλευρές ενός στοιχειώδους κυβικού στοιχείου

Οι εννέα συνιστώσες της τάσεως διατεταγμένες σε μητρωϊκή μορφή απαρτίζουν το λεγόμενο τανυστή των τάσεων σ_{ij} , ο οποίος συμβολίζεται ως εξής:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j \quad (2.3)$$

2.1.2. Οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων

Με βάση το Σχήμα 2-3, ας θεωρήσουμε την ισορροπία του κυβικού στοιχείου κατά τον άξονα x . Προφανώς, θα ισχύει:

$$\sigma'_{xx} dydz + \tau'_{yx} dx dz + \tau'_{zx} dy dx - \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dy dx + F_x dx dy dz = 0 \quad (2.4)$$

όπου dx , dy , dz είναι οι διαστάσεις του κυβικού στοιχείου και F_x είναι η συνιστώσα μαζική δύναμη κατά τον άξονα x ανά μονάδα όγκου. Θεωρώντας όμως ότι οι διαστάσεις του στοιχειώδους κύβου τείνουν στο μηδέν μπορεί να γραφεί:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \quad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.5) στην εξίσωση (2.4) και διαιρώντας με τον στοιχειώδη όγκο $dx dy dz$, λαμβάνεται:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.6)$$

Ομοίως, θεωρώντας την ισορροπία κατά τους άξονες y και z , λαμβάνονται και οι επόμενες δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.8)$$

Οι εξισώσεις (2.6), (2.7) και (2.8) αποτελούν τις λεγόμενες εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων και πρέπει να ικανοποιούνται από οποιαδήποτε θεωρητικής ή πειραματικής λαμβανόμενη κατανομή των τάσεων.

2.2. Η έννοια της παραμορφώσεως

Στην περίπτωση που ένα σύστημα εξωτερικών φορτίσεων ασκηθεί σε ένα υλικό σώμα, τα διάφορα σημεία του σώματος θα κινηθούν. Η μετακίνηση ενός τυχαίου σημείου $P(x, y, z)$ είναι προφανώς διανυσματική ποσότητα και καλείται **μετατόπιση**. Αν τώρα οι μετατοπίσεις διαφόρων σημείων ενός σώματος είναι διαφορετικές μεταξύ τους, κάθε μία από αυτές θα αντιπροσωπεύεται από το δικό της μοναδικό διάνυσμα μετατοπίσεως, το οποίο μπορεί να αναλύεται σε τρεις καρτεσιανές συνιστώσες:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

κατά τους άξονες x , y και z αντίστοιχα.

Η κίνηση ενός σώματος γενικά θεωρείται ότι αποτελείται από τρία τμήματα:

- i. Μεταφορά του σώματος ως στερεού (απαραμόρφωτου) σώματος
- ii. Περιστροφή του σώματος ως στερεού σώματος και
- iii. Σχετικές μετατοπίσεις των υλικών σημείων του σώματος μεταξύ τους.

Οι δύο πρώτες κινήσεις (μεταφορά και περιστροφή) είναι γνωστές ως κινήσεις του (απολύτως) στερεού σώματος. Η τρίτη περίπτωση αντιστοιχεί στην παραμόρφωση του σώματος και είναι ιδιότητα όλων των πραγματικών σωμάτων. Οι μετακινήσεις της κατηγορίας αυτής είναι σχετικά μικρές σε αντίθεση με τις δύο πρώτες που μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλες ή μικρές. Είναι προφανές ότι για την παραμόρφωση ενός

σώματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη των μετακινήσεων της τρίτης αυτής κατηγορίας ή με άλλα λόγια τα διανύσματα μετατοπίσεως των διαφόρων σημείων του σώματος να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

2.2.1. Η παραμόρφωση ως τανυστής

Ορίζουμε ως μέση ορθή παραμόρφωση ε_{ss} κατά μήκος τυχόντος ευθύγραμμου τμήματος ΔS (επί τυχούσης καμπύλης) του απαραμόρφωτου σώματος τη σχετική ως προς το αρχικό αυτό μήκος αλλαγή μήκους του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S} \quad (2.10)$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση ορθή παραμόρφωση κατά τους άξονες x , y και z δίνονται από τους τύπους:

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{yy} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1 \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{zz} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} - 1 \quad (2.13)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ως διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} την αλλαγή της γωνίας μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων κάθετων μεταξύ τους, στην αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία. Αποδεικνύεται ότι:

$$\gamma_{xy} = \arcsin \left(\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})} \right) \quad (2.14)$$

$$\gamma_{yz} = \arcsin \left(\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz})} \right) \quad (2.15)$$

$$\gamma_{zx} = \arcsin \left(\frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \varepsilon_{zz})(1 + \varepsilon_{xx})} \right) \quad (2.16)$$

Οι εξισώσεις (2.11)-(2.16) συνδέουν τις ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις με το πεδίο των μετατοπίσεων, δηλαδή με τις θέσεις των σημείων ενός σώματος στην αρχική (απαραμόρφωτη) και στην τελική (παραμορφωμένη) θέση του. Ωστόσο, στην πλειονότητα των εφαρμογών του μηχανικού οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις είναι πάρα πολύ μικρές, ώστε τόσο τα γινόμενα των παραγώγων της μετατοπίσεως όσο και τα τετράγωνά τους να μπορούν να αγνοηθούν, συγκρινόμενα με τις παραγώγους των μετατοπίσεων καθ' εαυτές. Στην περίπτωση αυτή, οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 2\varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 2\varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 2\varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Οι εννέα συνιστώσες της παραμορφώσεως, διατεταγμένες σε μητρωική μορφή, απαρτίζουν το λεγόμενο τανυστή των ανηγμένων παραμορφώσεων ε_{ij} , ο οποίος συμβολίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j \quad (2.19)$$

2.2.2. Οι εξισώσεις του συμβιβαστού των παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις (2.17) παρέχουν τον τανυστή των παραμορφώσεων αν είναι δεδομένο το πεδίο των μετατοπίσεων. Η αντίστροφη διαδικασία προφανώς δεν είναι εφικτή. Δηλαδή, ο προσδιορισμός του πεδίου των μετατοπίσεων, αν είναι δεδομένος ο τανυστής των παραμορφώσεων (σύστημα έξι εξισώσεων με τρεις προσδιοριστέες συναρτήσεις), δε μπορεί να επιτευχθεί αν δεν θεθούν ορισμένοι περιορισμοί, όπως για παράδειγμα να μην υπάρχουν κενά στο φορτιζόμενο σώμα μετά την παραμόρφωσή του. Οι εξισώσεις που εξασφαλίζουν την επίλυση του αντίστροφου αυτού προβλήματος καλούνται εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων και είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων αποτελούν τη δεύτερη ομάδα εξισώσεων (μετά τις εξισώσεις ισορροπίας), που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας και μηχανικής του παραμορφώσιμου σώματος.

2.3. Οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων- Νόμος του Hooke

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθεί η τελευταία ομάδα εξισώσεων που χρησιμοποιείται στην επίλυση των προβλημάτων της Ελαστικότητας και της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Σώματος, οι καταστατικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι άλλες παρά οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα από συγκεκριμένο υλικό. Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν μια ιδιαιτερότητα συγκρινόμενες τόσο με τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων όσο και με τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων: οι καταστατικές εξισώσεις δε μπορούν να προκύψουν θεωρητικώς.

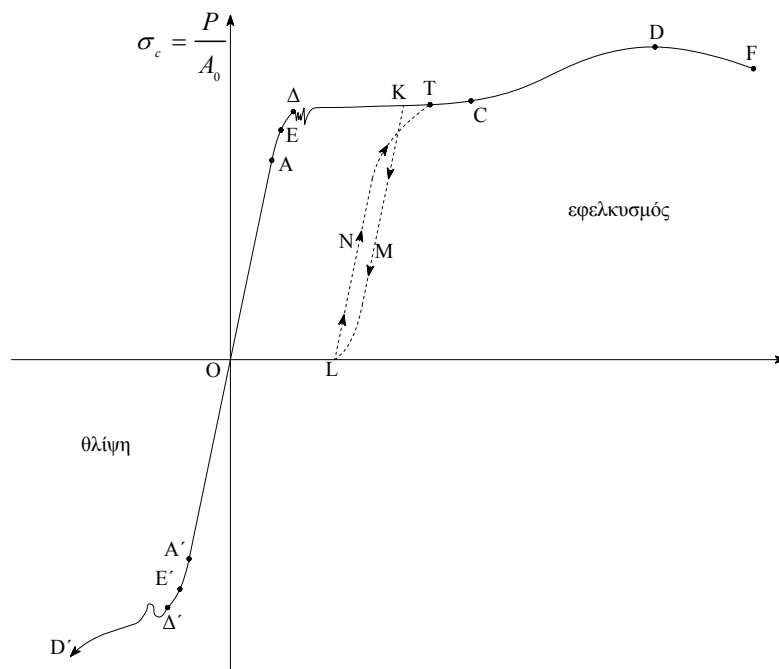
Στην απλούστερη περίπτωση, δηλαδή της φορτίσεως στην αρχική ελαστική περιοχή, όπου τα φαινόμενα θεωρούνται αντιστρεπτά και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων είναι γραμμικές και επιπλέον με την εκμετάλλευση επιχειρημάτων συμμετρίας και υποθέτοντας ότι το υλικό του καταπονούμενου σώματος είναι ομογενές και ισότροπο, οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται ως:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] \\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{zx}
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

2.4. Η μετελαστική συμπεριφορά των υλικών

2.4.1. Ελαστικές και πλαστικές παραμορφώσεις

Στο διάγραμμα που φαίνεται στο Σχήμα 2-4 παρουσιάζονται οι πληροφορίες που αφορούν τη συμπεριφορά ενός όλκιμου υλικού, όπως αυτή προκύπτει από ένα πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού και θλίψης. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στη συμβατική τάση σ_c (φορτίο διαιρεμένο με την αρχική διατομή A_0 του δοκιμίου) ενώ ο οριζόντιος στη συμβατική παραμόρφωση e (την επιμήκυνση Δl διαιρεμένη με το αρχικό μήκος μετρήσεως l_0 του δοκιμίου).



Σχήμα 2-4 Τυπικό διάγραμμα συμβατικών τάσεων-συμβατικών παραμορφώσεων όλκιμου μεταλλικού υλικού

Το σημείο A του διαγράμματος αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας (σημείο πέραν του οποίου παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke) και το οποίο κείται κατά τι χαμηλότερα από το όριο ελαστικότητας E, πέραν του οποίου οι μεταβολές καθίστανται μη αντιστρεπτές. Στη συνέχεια, εμφανίζεται η περιοχή διαρροής (yield plateau) ΔC, όπου η παραμόρφωση αυξάνει με ανεπαίσθητη αύξηση της επιβαλλόμενης τάσεως και κατόπιν η περιοχή κρατύνσεως στην οποία η αύξηση των παραμορφώσεων συνοδεύεται από σχετικά σημαντική αύξηση των τάσεων. Στην περιοχή της θλίψεως το διάγραμμα είναι πανομοιότυπο με αυτό της περιοχής εφελκυσμού τουλάχιστον μέχρι το όριο διαρροής του υλικού. Η τάση που αντιστοιχεί στο τμήμα ΔC καλείται τάση ή όριο διαρροής (yield limit or yield stress) και σε μερικά υλικά δεν χαρακτηρίζεται από ευθύγραμμο τμήμα.

Αν το φορτίο αφαιρεθεί αφού η τάση έχει ξεπεράσει την τάση διαρροής, το υλικό ακολουθεί εν γένει μια ευθύγραμμη καμπύλη αποφορτίσεως (KML στο Σχήμα 2-4) και το τμήμα (OL) αντιστοιχεί στη μόνιμη ή παραμένουσα παραμόρφωση. Αν το υλικό επαναφορτιστεί η καμπύλη φορτίσεως διαφέρει ελάχιστα από την αρχική (τμήμα LNT στο Σχήμα 2-4). Μοιάζει δηλαδή το υλικό να διατηρεί, να «θυμάται», τις ελαστικές του ιδιότητες και μάλιστα να αυξάνει κατά τι το όριο ελαστικότητάς του εις βάρος της ικανότητάς του να δέχεται πλαστικές παραμορφώσεις. Το φαινόμενο αυτό καλείται εργοσκλήρυνση (strain hardening) και γενικά έχει «προσανατολισμό». Ως συνέπεια επομένως της πλαστικής παραμορφώσεως τα υλικά, έστω και αν αρχικά είναι ισότροπα, καθίστανται ανισότροπα. Η ανισοτροπία αυτή καλείται παραμορφωσιακή ανισοτροπία (strain anisotropy) και ένα από τα αποτελέσματά της είναι το φαινόμενο Bauschinger, δηλαδή η ελάττωση της αντοχής ενός υλικού κατά μία διεύθυνση, αν έχει προηγηθεί πλαστική παραμόρφωση κατά την αντίθετη διεύθυνση. Για παράδειγμα, πλαστικός εφελκυσμός μιας ράβδου έχει ως αποτέλεσμα σημαντική πτώση της τάσεως διαρροής σε επακόλουθη θλίψη της ίδιας ράβδου.

2.4.2. Η αστοχία των υλικών

Τα παραπάνω αφορούσαν μονοαξονικές φορτίσεις. Είναι ωστόσο, ιδιαίτερα σημαντικό να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των υλικών υπό σύνθετες εντατικές καταστάσεις. Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η γνώση των συνθηκών που χαρακτηρίζουν την αλλαγή της μηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού και τη μετάβασή του από την ελαστική κατάσταση στην κατάσταση διαρροής. Ενώ στο πείραμα του απλού μονοαξονικού εφελκυσμού κατά τον άξονα x μία συνθήκη της μορφής $\sigma_{xx} > \sigma_{\Delta}$ όπου σ_{Δ} είναι μια σταθερή τάση ίση με την τάση διαρροής (σημείο Δ στο Σχήμα 2-4) είναι αρκετή για να περιγράψει την αστοχία του υλικού, κάτι τέτοιο δεν είναι προφανές στην περίπτωση σύνθετων πολυαξονικών εντατικών καταστάσεων. Η σχέση αυτή που ικανοποιείται κατά τη στιγμή της μεταβάσεως του υλικού από την ελαστική κατάσταση (αντιστρεπτά φαινόμενα) στην κατάσταση διαρροής (μη αντιστρεπτά φαινόμενα) ονομάζεται κριτήριο αστοχίας ή συνθήκη πλαστικότητας.

Στη σύνθετη εντατική κατάσταση αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αστοχία εξαρτάται από όλες τις τρεις κύριες τάσεις σ_1 , σ_2 και σ_3 . Έχουν αναπτυχθεί διάφορα κριτήρια αστοχίας τα οποία προσδιορίζουν τον κατάλληλο εκείνο συνδυασμό των κυρίων τάσεων για τον οποίο επέρχεται η αστοχία. Αυτά έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά:

i. Ισοτροπία

Αν δεχτούμε ότι το υλικό παρουσιάζει ταυτότητα ιδιοτήτων σε όλες τις διευθύνσεις, τότε η συνθήκη αστοχίας πρέπει να είναι μια συμμετρική συνάρτηση των κυρίων τάσεων:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \quad (2.22)$$

όπου K μία σταθερά που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο υλικό και η οποία είναι συνδεδεμένη με το όριο διαρροής.

ii. Ανεξαρτησία από το σύστημα αναφοράς

Η αστοχία ως φυσικό φαινόμενο δε μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς για τον τανυστή των τάσεων. Επομένως, η συνθήκη (2.22) θα πρέπει να εκφράζεται συναρτήσει των αναλλοιώτων του τανυστή των τάσεων:

$$f[I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K \quad (2.23)$$

iii. Ανεξαρτησία της αστοχίας από την υδροστατική πίεση

Έχει αποδειχθεί πειραματικά από τον Bridgeman (1952), ότι στην πλειονότητα των ισότροπων υλικών η επιβολή υδροστατικής πίεσης, οσοδήποτε μεγάλης δε μπορεί να επιφέρει αστοχία, δεδομένου ότι η συμβολή της στην αλλαγή σχήματος του υλικού είναι αμελητέα. Επομένως, από την εξίσωση (2.23) μπορεί να παραλειφθεί η πρώτη αναλλοιώτος $I_1(T_\sigma)$, που δεν είναι παρά το τριπλάσιο της υδροστατικής πίεσης. Άρα, η συνάρτηση που περιγράφει την αστοχία μπορεί να γραφεί ως:

$$f[I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K \quad (2.24)$$

ή και ως:

$$f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = K \quad (2.25)$$

όπου $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$ η δεύτερη και τρίτη αναλλοιώτος του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων.

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.25) θα είναι η εξίσωση ενός κυλινδρικού πρίσματος στο χώρο των κυρίων τάσεων, του οποίου ο άξονας είναι η γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Έχουν διατυπωθεί αρκετά γενικά κριτήρια όπως το κριτήριο της μέγιστης ορθής τάσεως, της μέγιστης ορθής παραμορφώσεως, της πυκνότητας της ενέργειας παραμορφώσεων, της μέγιστης διατμητικής τάσεως, της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας παραμορφώσεων, της εσωτερικής τριβής κλπ. Παρακάτω, αναφέρεται αναλυτικότερα το κριτήριο αστοχίας Von Mises.

2.4.3. Η θεωρία της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων ή κριτήριο αστοχίας του von Mises (1913)

Σύμφωνα με τη θεωρία της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων ή το κριτήριο διαρροής του Von Mises, η αστοχία ενός όλκιμου υλικού που βρίσκεται κάτω από την επίδραση σύνθετης εντατικής καταστάσεως $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, επέρχεται όταν η πυκνότητα της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων, που αναπτύσσεται στο υλικό με αυτήν την εντατική κατάσταση, γίνει ίση με την αντίστοιχη πυκνότητα της στροφικής ενέργειας που αναπτύσσεται κατά τη διαρροή του ίδιου υλικού από καθαρό εφελκυσμό.

Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία της ελαστικότητας, το συνολικό έργο των παραμορφώσεων U που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις, αποταμιεύεται στο σώμα ως ελαστική ενέργεια. Η ενέργεια αυτή είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας που απαιτείται για τη στρέβλωση του σώματος U_d και της ενέργειας που απαιτείται για τη μεταβολή του όγκου του σώματος U_v . Δηλαδή:

$$U = U_d + U_v \quad (2.26)$$

Είναι δε:

$$U = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (2.27)$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις με τη βοήθεια του νόμου του Hooke, η εξίσωση (2.27) γράφεται ως:

$$U = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \quad (2.28)$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος Poisson του υλικού. Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι η ενέργεια για τη μεταβολή του όγκου είναι:

$$U_v = \frac{p\Theta}{2} \quad (2.29)$$

όπου p είναι η υδροστατική συνιστώσα του τανυστή των τάσεων και Θ η ανηγμένη διόγκωση, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \text{και} \quad \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.30)$$

Συνδυασμός των σχέσεων (2.29) και (2.30) με το νόμο του Hooke δίνει για την ανηγμένη ανά μονάδα όγκου ενέργεια μεταβολής όγκου:

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2.31)$$

και για την ανηγμένη ανά μονάδα όγκου ενέργεια στρεβλώσεως:

$$U_d = \left(\frac{1+\nu}{3E} \right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (2.32)$$

Εισάγοντας το μέτρο διατμήσεως G η εξίσωση (2.32) γίνεται:

$$U_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2.33)$$

Στην περίπτωση της διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό ($\sigma_1 = \sigma_\Delta$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) θα ισχύει:

$$U_d = \frac{1}{12G} 2\sigma_\Delta^2 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_\Delta^2 \quad (2.34)$$

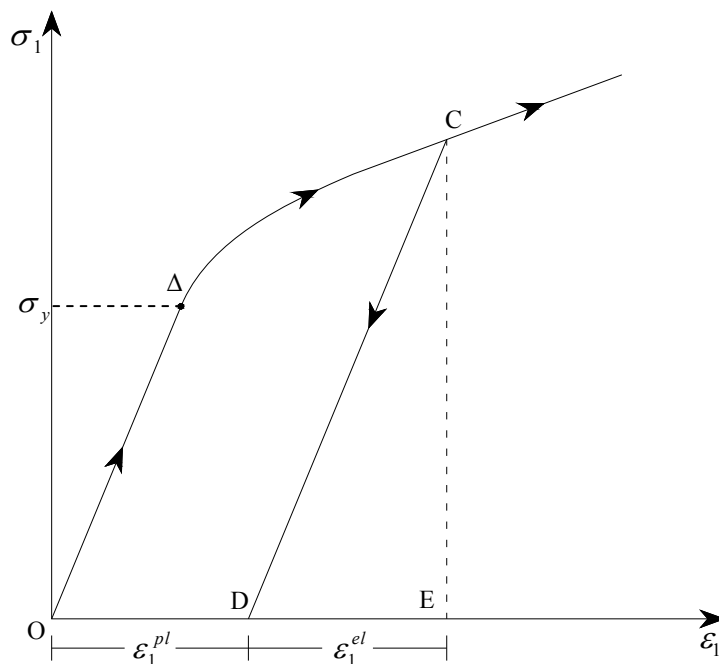
Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.32), (2.33) και (2.34) προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το κριτήριο αστοχίας των όλκιμων υλικών, σύμφωνα με τη θεωρία της στροφικής ενέργειας:

$$\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = \sigma_\Delta^2 \quad (2.35)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_\Delta^2 \quad (2.36)$$

2.5. Η συμπεριφορά των υλικών μετά τη διαρροή

Μετά την ικανοποίηση της συνθήκης αστοχίας, το υλικό εισέρχεται σε μια νέα φάση της μηχανικής του συμπεριφοράς, με βασικό γνώρισμα τη μη αντιστρεπτότητα των φαινομένων που την συνοδεύουν. Από το σημείο δηλαδή της αστοχίας και μετά, οι παραμορφώσεις δεν είναι αντιστρεπτές αλλά είναι εν γένει το άθροισμα μιας ελαστικής (αντιστρέψιμης) συνιστώσας και μιας μη αντιστρέψιμης, η οποία καλείται πλαστική παραμόρφωση. Ουσιαστικά, αν ικανοποιηθεί το κριτήριο αστοχίας, η τρέχουσα τάση είναι ένα στιγμιαίο όριο ελαστικότητας που εξαρτάται από την προηγηθείσα πλαστική παραμόρφωση και το οποίο διαχωρίζει την περαιτέρω φόρτιση (που συνοδεύεται από επιπλέον πλαστική παραμόρφωση) από την αποφόρτιση (που χαρακτηρίζεται από καθαρά ελαστική συμπεριφορά), όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-5 για την περίπτωση μονοαξονικού εφελκυσμού.



Σχήμα 2-5 Φόρτιση-αποφόρτιση σε μονοαξονικό εφελκυσμό

Στην περίπτωση σύνθετων εντατικών καταστάσεων, είναι σαφώς πιο δύσκολη η διάκριση μεταξύ των εννοιών της φόρτισης και της περαιτέρω πλαστικής παραμόρφωσης. Γι' αυτό, εισάγεται η έννοια της επιφανείας φόρτισης (ή επιφάνεια ροής), η οποία ορίζεται ως η επιφάνεια εκείνη στο χώρο των τάσεων σ_{ij} που για μια δεδομένη κατάσταση του υλικού διαχωρίζει τις περιοχές της ελαστικής και της πλαστικής παραμορφώσεως. Η αρχή των συντεταγμένων αντιστοιχεί στην κατάσταση μηδενικών τάσεων. Κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, η επιφάνεια φόρτισης υφίσταται διόγκωση, μετατόπιση και στρέβλωση στο χώρο των τάσεων. Θα αναφερθούν παρακάτω δύο απλά προσομοιώματα κράτυνσης: η ισότροπη και η κινηματική.

Η ισότροπη κράτυνση θεωρεί ότι η επιφάνεια φορτίσεως είναι μια ομοιόμορφη επέκταση της αρχικής επιφανείας διαρροής και ότι η ισότροπη απόκριση του υλικού παραμένει αμετάβλητη κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης. Έτσι, το κέντρο της αρχικής επιφανείας διαρροής και των επιφανειών φόρτισης παραμένει το ίδιο και αμελείται η ανισότροπη επίδραση που προκαλείται από την παραμόρφωση. Αγνοώντας την επίδραση της υδροστατικής πίεσης, η σχέση:

$$F[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma), \kappa] = f[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] - \kappa = 0 \quad (2.37)$$

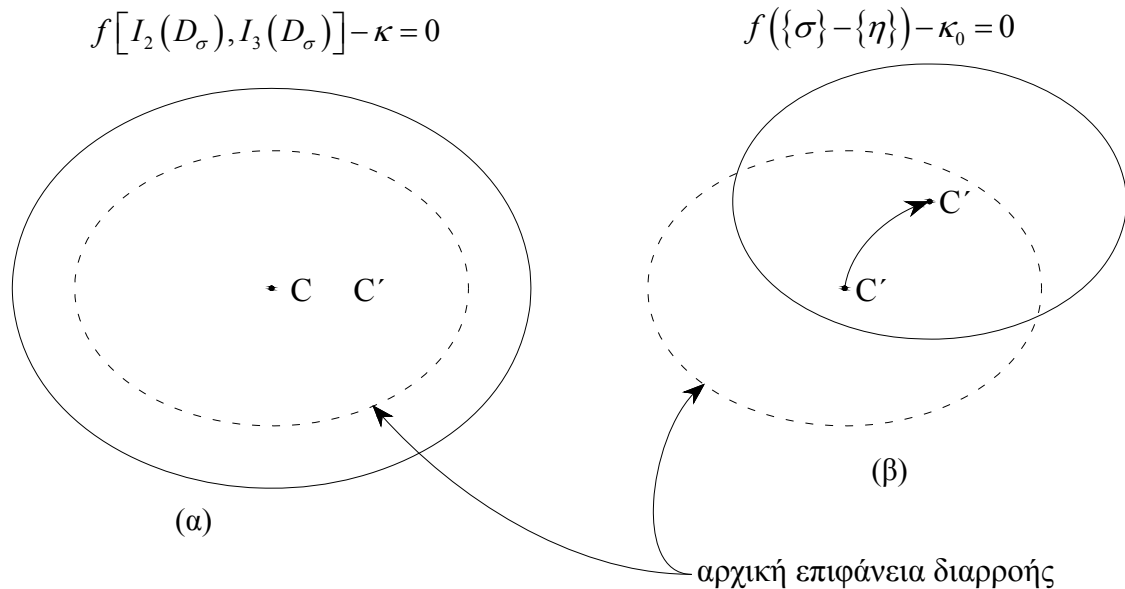
περιγράφει μαθηματικά την ισότροπη κρατυνόμενη συμπεριφορά, όπου κ είναι μια αύξουσα συνάρτηση και $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$ η δεύτερη και η τρίτη αναλλοίωτος του αποκλίνοντος ταυνοστή των τάσεων. Για τα απολύτως πλαστικά υλικά, το κ παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, έτσι ώστε η επιφάνεια

φόρτισης είναι σταθερή σε μέγεθος και θέση (ταυτίζεται με την αρχική επιφάνεια διαρροής) (Σχήμα 2-6(α)).

Η ισότροπη κράτυνση είναι η ευκολότερη στη χρήση αλλά δε μπορεί να προβλέψει το φαινόμενο Bauschinger, το οποίο παρατηρείται πειραματικά. Για να ληφθεί υπόψη το παραπάνω φαινόμενο, ο Prager (1956) πρότεινε την κινηματική κράτυνση. Αυτή υποθέτει ότι η επιφάνεια φόρτισης μετατοπίζεται ως στερεό σώμα στο χώρο των τάσεων κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης. Ως αποτέλεσμα, το σχήμα των επιφανειών φόρτισης παραμένει ίδιο με αυτό της αρχικής επιφάνειας διαρροής (Σχήμα 2-6(β)). Αυτό το προσομοίωμα κρατυνόμενης συμπεριφοράς μπορεί να γραφεί ως:

$$F(\{\sigma\} - \{\eta\}) = f(\{\sigma\} - \{\eta\}) - \kappa_0 = 0 \quad (2.38)$$

όπου το $\{\eta\}$ είναι γνωστό ως διάνυσμα εσωτερικών τάσεων (back stress).



Σχήμα 2-6 (α) Ισότροπη κράτυνση (β) Κινηματική κράτυνση

2.5.1. Φόρτιση και αποφόρτιση στο χώρο των τάσεων

Έστω $F(\{\sigma\}) = f(\{\sigma\}) - \kappa_0 = 0$ η επιφάνεια φόρτισης. Στο χώρο των τάσεων, η διεύθυνση του διανύσματος $\partial f / \partial \{\sigma\}$ είναι στη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n

στην επιφάνεια φόρτισης. Έτσι, το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} < 0$ ¹ αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων προς το εσωτερικό της επιφάνειας φόρτισης, το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} > 0$ αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων προς το εξωτερικό της επιφάνειας φόρτισης και το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} = 0$ αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων η οποία είναι εφαπτομενική στην επιφάνεια φόρτισης. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
 F(\{\sigma\}) < 0 &\rightarrow (\text{ελαστική παραμόρφωση}) \\
 F(\{\sigma\}) = 0, \quad dF = f(\{\sigma\} + \{d\sigma\}) - f(\{\sigma\}) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} > 0 &\rightarrow (\text{φόρτιση}) \\
 F(\{\sigma\}) = 0, \quad dF = f(\{\sigma\} + \{d\sigma\}) - f(\{\sigma\}) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} = 0 &\rightarrow (\text{ουδέτερη φόρτιση}) \\
 F(\{\sigma\}) = 0, \quad dF = f(\{\sigma\} + \{d\sigma\}) - f(\{\sigma\}) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} < 0 &\rightarrow (\text{αποφόρτιση})
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

2.6. Κλασική θεωρία πλαστικότητας

Από πειράματα συνάγεται το συμπέρασμα ότι η πλαστική παραμόρφωση έχει τα εξής χαρακτηριστικά [1]:

- 1) Η πλαστική παραμόρφωση συσχετίζεται με την καταστροφή ενέργειας και ως εκ τούτου είναι μη αντιστρέψιμη. Αυτό μπορεί να φανεί στο Σχήμα 2-5. Κατά την αποφόρτιση στο C, μόνο ένα μέρος της ανηγμένης παραμόρφωσης (DE) μπορεί να ανακτηθεί ενώ το υπόλοιπο μέρος (OD) παραμένει όταν αφαιρεθεί το φορτίο. Η ενέργεια που αντιπροσωπεύεται από το τρίγωνο DCE είναι η ανακτώμενη ελαστική ενέργεια, ενώ το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη OACD αναπαριστά την ενέργεια που καταστρέφεται, προκαλώντας την πλαστική παραμόρφωση OD. Συνεπώς, η πλαστική παραμόρφωση είναι η μόνιμη παραμόρφωση μετά την αποφόρτιση. Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνολική ανηγμένη παραμόρφωση OE σε ένα αυθαίρετο σημείο C στην πλαστική περιοχή είναι το άθροισμα της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης OD και της ελαστικής DE: $\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$. Αυτός ο προσθετικός νόμος μπορεί να γενικευθεί για μια τριδιάστατη εντατική κατάσταση:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}
 \tag{2.40}$$

¹ $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij}$

Η παραπάνω σχέση είναι μια βασική υπόθεση που χρησιμοποιείται στην κλασική θεωρία της πλαστικότητας, καλείται «προσθετική αποσύνθεση» (additive decomposition) του τανυστή των τάσεων και πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω σχέση είναι αληθής για τις περιπτώσεις των απειροστών ανηγμένων παραμορφώσεων.

- 2) Εξαιτίας αυτού του χαρακτηριστικού της (καταστροφή ενέργειας), η πλαστική παραμόρφωση εξαρτάται από την ιστορία/διαδρομή της φόρτισης. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης. Αυτό οδηγεί στην απαίτηση οι καταστατικές εξισώσεις για την πλαστική παραμόρφωση να εκφράζονται σε μορφή παραγώγων (rate form) ή σε μορφή απειροστών μεταβολών (incremental form).
- 3) Η πλαστική παραμόρφωση θεωρείται ότι είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας παραμορφώσεως. Αυτό σημαίνει ότι οι καταστατικές εξισώσεις για την πλαστική παραμόρφωση πρέπει να μην εξαρτώνται από το χρόνο και ως εκ τούτου η έκφραση με μορφή παραγώγων είναι ισοδύναμη με την έκφραση σε μορφή απειροστών μεταβολών.

2.6.1. Εξισώσεις Levy-Mises

Η πρώτη προσπάθεια να διατυπωθεί μια σχέση τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για την πλαστική παραμόρφωση έγινε από τον Saint-Venant(1870). Εργάστηκε στην επίπεδη πλαστική παραμόρφωση χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Tresca και μηδενική κράτυνση. Για πρώτη φορά πρότεινε ότι οι κύριοι άξονες της μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης συμπίπτουν με τους άξονες των κυρίων τάσεων. Η ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ^{el} αμελήθηκε έτσι ώστε η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ^{pl} να ισούται με την ολική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ . Η γενίκευση της ιδέας του Saint-Venant για την τριδιάστατη περίπτωση έγινε από τον Levy (1870) και ανεξάρτητα από τον Mises (1913). Η θεωρία πλαστικότητας των Levy-Mises, βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Η ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ^{el} είναι τόσο μικρή ώστε μπορεί να αμεληθεί.
2. Η μεταβολή της ανηγμένης παραμόρφωσης $d\epsilon$, ή ισοδύναμα ο ρυθμός μεταβολής $\dot{\epsilon}$, είναι ομοαξονική με την τάση σ .

Οι κύριοι άξονες της τάσης σ συμπίπτουν με αυτούς του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων S . Συνεπώς, η εξίσωση Levy-Mises είναι η εξής:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} S \quad \text{ή} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} S_{ij} \quad \text{ή} \quad \frac{\dot{\epsilon}_{xx}}{S_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{S_{yy}} = \frac{\dot{\epsilon}_{zz}}{S_{zz}} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{S_{xy}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yz}}{S_{yz}} = \frac{\dot{\epsilon}_{zx}}{S_{zx}} = \dot{\lambda} \quad (2.41)$$

Η παράμετρος $\dot{\lambda}$ προσδιορίζεται από το κριτήριο διαρροής. Ο Mises πρότεινε ότι το κριτήριο von Mises είναι πιο κατάλληλο για αυτή τη θεωρία σε σχέση με το κριτήριο του Tresca που χρησιμοποιούσε ο Saint-Venant. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/2}{\sigma_y^2}} \quad (2.42)$$

2.6.2. Εξισώσεις Prandtl-Reuss

Οι εξισώσεις Levy-Mises που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι χρήσιμες για να υπολογίσουμε την πλαστική παραμόρφωση για τα περισσότερα μεταλλικά υλικά, όπου η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση ε^{pl} είναι πολύ μεγαλύτερη από την ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση ε^{el} . Όταν το μέγεθος της ε^{el} είναι συγκρίσιμο με αυτό της ε^{pl} , αναμένεται ότι αν αμεληθεί η ε^{el} θα υπάρξει σημαντικό σφάλμα. Ο Prandtl (1927) και ο Reuss (1930) πρότεινε σχέσεις παρόμοιες με τις εξισώσεις Levy-Mises. Η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόογη ενώ η ελαστική παραμόρφωση προκαλεί μεταβολή του όγκου όπως επίσης και μεταβολή σχήματος. Η διαφορική μορφή του αποκλίνοντος τανυστή των ανηγμένων παραμορφώσεων, που αναφέρεται στην μεταβολή του σχήματος είναι η εξής:

$$\dot{\varepsilon}'^{el} = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} \quad \text{ή} \quad \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^{el} = \frac{1}{2G}\dot{S}_{ij} \quad \text{ή} \quad d\varepsilon'^{el} = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} \quad \text{ή} \quad d\varepsilon'_{ij}{}^{el} = \frac{1}{2G}d\dot{S}_{ij} \quad (2.43)$$

Οι άξονες του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης ακόμα θεωρείται ότι συμπίπτουν με τους άξονες του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων \mathbf{S} κι έτσι:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}\mathbf{S} \quad \text{ή} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}{}^{pl} = \dot{\lambda}S_{ij} \quad (2.44)$$

Πάλι, το $\dot{\lambda}$ είναι μια παράμετρος και μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο διαρροής. Επιπλέον, το $\dot{\lambda}$ πρέπει να είναι μια πρώτης τάξεως ομογενής συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης $\dot{\varepsilon}$ για να διασφαλιστεί ότι η καταστατική εξίσωση είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας παραμορφώσεως. Παρατηρώντας ότι το $\dot{\varepsilon}^{pl}$ (εξίσωση (2.44)) είναι εκ φύσεως αποκλίνων τανυστής, αφού η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόογη, ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της αλλαγής σχήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\varepsilon}' = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} + \dot{\lambda}\mathbf{S} \quad \text{ή} \quad \dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{S}_{ij} + \dot{\lambda}S_{ij} \quad (2.45)$$

Με βάση το κριτήριο διαρροής von Mises προκύπτει ότι

$$\dot{\lambda} = \frac{3S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{2\sigma_y^2} \quad (2.46)$$

το οποίο είναι όντως μια πρώτης τάξεως ομογενής συνάρτηση του $\dot{\varepsilon}$.

2.7. Η θεωρία της πλαστικής ροής

Η γενική μαθηματική επεξεργασία για την καταστατική εξίσωση για την πλαστική ροή προτάθηκε από τον Mises το 1928. Παρατήρησε ότι στη θεωρία ελαστικότητας ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων συσχετίζεται με την τάση $\{\sigma\}$ μέσω μιας συνάρτησης πλαστικού δυναμικού, τη συμπληρωματική ενέργεια U_c (θεώρημα ελάχιστης ολικής συμπληρωματικής ενέργειας):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.47)$$

Γενικεύοντας και εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στη θεωρία πλαστικότητας, ο Mises πρότεινε ότι υπάρχει μια συνάρτηση πλαστικού δυναμικού $Q(\{\sigma\})$ ή $Q(\sigma_{ij})$ και η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση μπορεί να εξαχθεί με παρόμοιο τρόπο όπως η σχέση (2.47):

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \quad \text{ή} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.48)$$

όπου $\dot{\lambda}$ είναι ένας θετικός βαθμωτός συντελεστής αναλογίας. Η θεωρία πλαστικότητας που βασίζεται στο νόμο ροής της εξίσωσης (2.48) καλείται πλαστική θεωρία δυναμικού (plastic potential theory). Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις πάνω στην εξίσωση (2.48):

- 1) Κάθε εντατική κατάσταση $\{\sigma\}$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο στον εξα-διάστατο χώρο των τάσεων. Το πλαστικό δυναμικό $Q(\sigma_{ij}) = C$ αναπαριστά μια επιφάνεια και η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο. Η γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης (2.48) είναι ότι το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης είναι κάθετο στην επιφάνεια $Q(\sigma_{ij}) = C$. Γι' αυτό, η εξίσωση (2.48) αναφέρεται επίσης και ως νόμος της καθετότητας (normality rule) στην πλαστική θεωρία και μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \text{grad}(Q(\{\sigma\})) \quad (2.49)$$

- 2) Για τα ισότροπα υλικά, η $Q(\sigma_{ij})$ είναι μια συνάρτηση των αναλλοιώτων του τανυστή των τάσεων:

$$Q = Q(I_1, I_2, I_3) \quad (2.50)$$

- 3) Εξαιτίας της υπόθεσης της μη συμπίεστότητας της πλαστικής παραμόρφωσης, η αντίστοιχη επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού πρέπει να είναι ένα κυλινδρικό πρίσμα (χωρίς απαραίτητα να έχει κυκλική διατομή) του οποίου, στο χώρο των κυρίων τάσεων, ο άξονας να είναι η γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Το βασικό σημείο στην εφαρμογή της πλαστικής θεωρίας δυναμικού είναι να προσδιορίσουμε το πλαστικό δυναμικό Q . Μια συνήθης προσέγγιση στη θεωρία της πλαστικότητας είναι να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση του πλαστικού δυναμικού ταυτίζεται με τη συνάρτηση διαρροής $\Phi(\sigma_{ij})$, οπότε:

$$\{\dot{\varepsilon}^{pl}\} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \quad (2.51)$$

δηλαδή το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Η παραπάνω θεώρηση καλείται συσχετισμένος νόμος πλαστικής ροής (associated flow rule).

Σύμφωνα με το 2) χαρακτηριστικό της πλαστικής παραμόρφωσης (παράγραφος 2.6), οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για την πλαστική ροή πρέπει να είναι σε διαφορική μορφή. Για να εξαχθούν οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις (και να προσδιοριστεί η παράμετρος $\dot{\lambda}$) είναι απαραίτητο να τεθούν ορισμένες συνθήκες. Οι ακόλουθες τέσσερις δόθηκαν από τον Prager (1949):

- 1) Συνέχεια (continuity). Η ουδέτερη φόρτιση δεν προκαλεί πλαστική παραμόρφωση.
- 2) Μοναδικότητα (uniqueness). Για μια δεδομένη απειροστή αύξηση του επιφανειακού φορτίου που εφαρμόζεται σε ένα σώμα, οι προκύπτουσες αυξήσεις στην τάση και την ανηγμένη παραμόρφωση είναι μοναδικές. Αυτή η συνθήκη περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$\{\dot{\sigma}\} : \{\dot{\varepsilon}^{pl}\} > 0 \quad \text{ή} \quad d\{\sigma\} : d\{\varepsilon^{pl}\} > 0 \quad (2.52)$$

- 3) Μη αντιστρεψιμότητα (irreversibility). Απαιτείται η αύξηση του πλαστικού έργου να είναι θετική:

$$\{\sigma\} : \{\dot{\varepsilon}^{pl}\} > 0 \quad \text{ή} \quad \{\sigma\} : d\{\varepsilon^{pl}\} > 0 \quad (2.53)$$

- 4) Συνέπεια (consistency). Κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης η εντατική κατάσταση (ή το σημείο στο χώρο των τάσεων) πρέπει να παραμένει πάνω στην επιφάνεια φόρτισης. Με άλλα λόγια, η φόρτιση από μια κατάσταση πλαστικής παραμόρφωσης πρέπει να οδηγεί σε άλλη κατάσταση πλαστικής παραμόρφωσης.

Έστω κριτήριο διαρροής της μορφής $\Phi = \Phi(\{\sigma\}, \{\eta\}, \kappa)$, όπου $\{\eta\}$ το διάνυσμα εσωτερικών τάσεων και κ η παράμετρος που χαρακτηρίζει την ισότροπη κράτυνση. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα πλαστική κατάσταση παριστάνεται από την εντατική κατάσταση $\{\sigma\}$ και τις παραμέτρους $\{\eta\}$ και κ . Τότε, ικανοποιείται η συνθήκη διαρροής:

$$\Phi(\{\sigma\}, \{\eta\}, \kappa) = 0 \quad (2.54)$$

Τώρα, ας θεωρήσουμε την πλαστική παραμόρφωση που προκαλείται από την απειροστή αύξηση $d\{\sigma\}$. Η εντατική κατάσταση γίνεται $\sigma + d\{\sigma\}$ και εξαιτίας της πλαστικής παραμόρφωσης τα $\{\eta\}$ και κ γίνονται $\{\eta\} + d\{\eta\}$ και $\kappa + d\kappa$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη συνθήκη της συνέπειας (consistency condition), και η νέα εντατική κατάσταση πρέπει να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια φόρτισης και συνεπώς να ικανοποιείται το κριτήριο διαρροής:

$$\Phi(\{\sigma\} + d\{\sigma\}, \{\eta\} + d\{\eta\}, \kappa + d\kappa) = 0 \quad (2.55)$$

Δεδομένου ότι το $d\{\sigma\}$ είναι απειροστό και συνεπώς και τα $d\{\eta\}$ και $d\kappa$, η εξίσωση (2.55) μπορεί να αναπτυχθεί:

$$\begin{aligned} & \Phi(\{\sigma\} + d\{\sigma\}, \{\eta\} + d\{\eta\}, \kappa + d\kappa) = \\ & = \Phi(\{\sigma\}, \{\eta\}, \kappa) + \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} + \frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} : d\{\eta\} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} : d\kappa \end{aligned} \quad (2.56)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.56) με τις σχέσεις (2.54) και (2.55), λαμβάνουμε τη συνθήκη συνέπειας:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} + \frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} : d\{\eta\} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} : d\kappa = 0 \quad (2.57)$$

2.8. Παράρτημα - Στοιχεία της μηχανικής του συνεχούς

2.8.1. Κινηματική

Σώμα B με όριο ∂B σε χρόνο $t = t_0$ «μεταμορφώνεται» σε σώμα β με όριο $\partial\beta$ σε χρόνο $t = \tau$ [12]. Τυχόν σημείο P του B μετατοπίζεται σε σημείο p του β . Η αναφορά θα γίνεται ως προς σταθερό καρτεσιανό σύστημα αξόνων με βάση τα μοναδιαία διανύσματα \underline{e}_i (ή \underline{e}_A). Οι μικροί λατινικοί δείκτες θα αναφέρονται στην τρέχουσα γεωμετρική κατάσταση του παραμορφώσιμου σώματος, ενώ οι κεφαλαίοι δείκτες θα αναφέρονται σε κατάσταση αρχική. Εάν \underline{X} και \underline{x} είναι οι συντεταγμένες του P και p , αντιστοίχως, τότε:

$$\underline{X} = X_A \underline{e}_A \quad (2.58)$$

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i \quad (2.59)$$

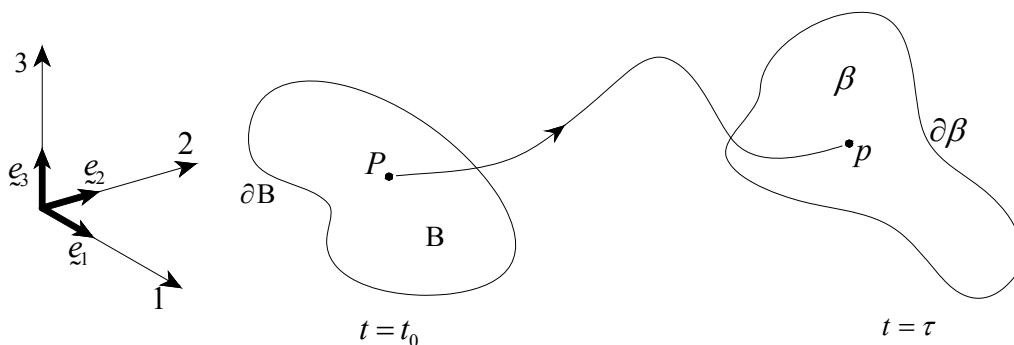
(και οι δύο σχέσεις αναφέρονται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων)

και η κίνηση καθορίζεται από τη σχέση (υλική διατύπωση / material or Lagrangian Formulation):

$$\underline{x} = \underline{\mathcal{X}}(\underline{X}, t) \quad \dot{\eta} \quad x_i = \mathcal{X}_i(X_A, t) \quad (2.60)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μοναδική αντίστροφη σχέση (χωρική διατύπωση / spatial or Eulerian Formulation):

$$\underline{X} = \underline{\mathcal{X}}^{-1}(\underline{x}, t) \quad \dot{\eta} \quad X_A = \mathcal{X}_i^{-1}(x_i, t) \quad (2.61)$$

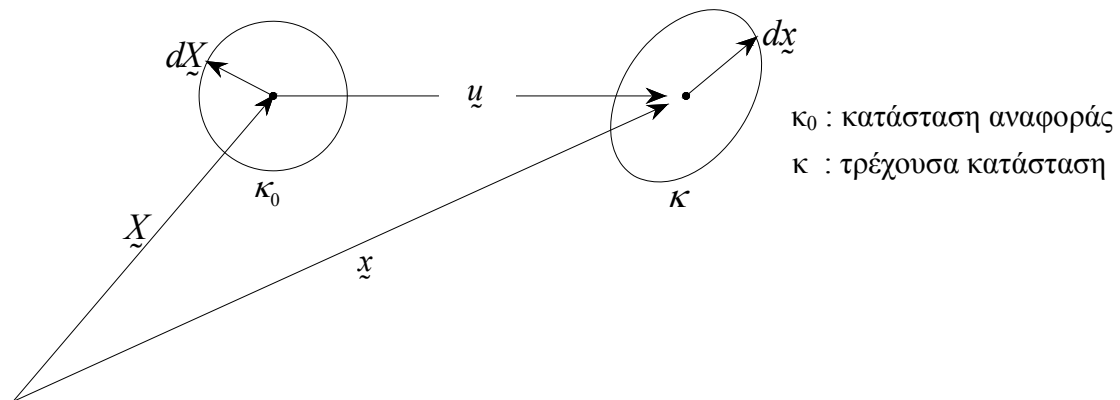


Σχήμα 2-7 Θέση ενός σώματος στην κατάσταση αναφοράς και στην τρέχουσα θέση

Τα X_A ονομάζονται υλικές ή συνδεδεμένες συντεταγμένες (material or connected coordinates). Κατά την κίνηση τα X_A δεν αλλάζουν διότι αντιπροσωπεύουν ένα συγκεκριμένο υλικό σημείο (για αυτό και το όνομα υλικές συντεταγμένες), του οποίου την κίνηση παρακολουθούμε με την αλλαγή των τρεχουσών συντεταγμένων x_i συναρτήσει του χρόνου t .

2.8.2. Η κλίση της παραμόρφωσης (deformation gradient)

Κατά την μελέτη της παραμόρφωσης εστιάζουμε την προσοχή μας σε δύο σταθερές διαμορφώσεις και δεν λαμβάνουμε υπόψη τη συγκεκριμένη αλληλουχία μέσω της οποίας καταλήξαμε στην τελική παραμορφωμένη κατάσταση – διαμόρφωση από την αρχική απαραμόρφωτη.



Σχήμα 2-8 Η κλίση της παραμόρφωσης

Με βάση το Σχήμα 2-8, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (2.62)$$

$$\underline{x} + d\underline{x} = \underline{x}(\underline{X} + d\underline{X}, t) \quad (2.63)$$

Μετά από συνδυασμό των σχέσεων (2.62) και (2.63), προκύπτει η έκφραση του τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης \underline{F} :

$$d\underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} d\underline{X} = \underline{F} d\underline{X} \quad (2.64)$$

ή με δείκτες:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} dX_K = x_{i,K} dX_K = F_{iK} dX_K \quad (2.65)$$

Το διάνυσμα της μετατόπισης ορίζεται ως:

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} \quad (2.66)$$

Με βάση τη σχέση (2.62), η μετατόπιση \underline{u} μπορεί να εκφραστεί είτε ως συνάρτηση του \underline{x} είτε ως συνάρτηση του \underline{X} .

2.8.3. Ορισμός τροπών (ανηγμένων παραμορφώσεων) σε πεπερασμένες παραμορφώσεις

Με αναφορά στις καταστάσεις κ_0 και κ , το μήκος γραμμικού στοιχείου $d\underline{X}$ και $d\underline{x}$, αντίστοιχα, ορίζεται από:

$$(dS)^2 = dX_A dX_A = d\underline{X} d\underline{X} \quad (2.67)$$

και

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = d\underline{x} d\underline{x} \quad (2.68)$$

Η αλλαγή μήκους επομένως, εκφράζεται από:

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= dx_i dx_i - dX_A dX_A = x_{i,A} dX_A x_{i,B} dX_B - \delta_{AB} dX_A dX_B \\ &= (F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB}) dX_A dX_B = \left((F^T)_{Ai} F_{iB} - \delta_{AB} \right) dX_A dX_B \\ &= [C_{AB} - \delta_{AB}] dX_A dX_B = 2E_{AB} dX_A dX_B \end{aligned} \quad (2.69)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} \rightarrow \text{δεξιός τανυστής παραμόρφωσης (GREEN's)} \quad (2.70)$$

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) \rightarrow \text{LAGRANGIAN τανυστής τροπής} \quad (2.71)$$

2.8.4. Έκφραση τανυστή τροπής συναρτήσεως της μετατόπισης

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις ισχύουν οι παρακάτω εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
 \underline{u} &= \underline{x} - \underline{X} = u_i e_i = u_A e_A, \quad (e_i \equiv e_A) \\
 x_A &= X_A + u_A, \quad u_i = x_i - X_i \\
 u_{i,j} &= x_{i,j} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} \\
 u_{i,j} &= x_{i,j} - X_{i,j} = \delta_{ij} - (F^{-1})_{ij} = \delta_{ij} - X_{i,j}
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Έτσι, προκύπτει η έκφραση του τανυστή τροπής συναρτήσεως της μετατόπισης:

$$\begin{aligned}
 E_{AB} &= \frac{1}{2} (x_{r,A} x_{r,B} - \delta_{AB}) = \frac{1}{2} [(u_{r,A} + \delta_{rA})(u_{r,B} + \delta_{rB}) - \delta_{AB}] \\
 &= \frac{1}{2} (u_{r,A} u_{r,B} + u_{r,A} \delta_{rB} + u_{r,B} \delta_{rA} + \delta_{rA} \delta_{rB} - \delta_{AB}) \\
 &= \frac{1}{2} (u_{A,B} + u_{B,A} + u_{R,A} u_{R,B})
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Εάν η κλίση της παραμόρφωσης $\partial u_i / \partial X_j \ll 1$, τότε:

$$E_{AB} \rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.74}$$

Εάν ισχύει ταυτόχρονα ότι $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$ και $\underline{u} \ll 1$, τότε:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} \text{ (γνωστή τροπή)} \tag{2.75}$$

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γραφούν και σε μητρωϊκή μορφή:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = [\mathbf{I} + \mathbf{D}]d\mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση $\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}]$:

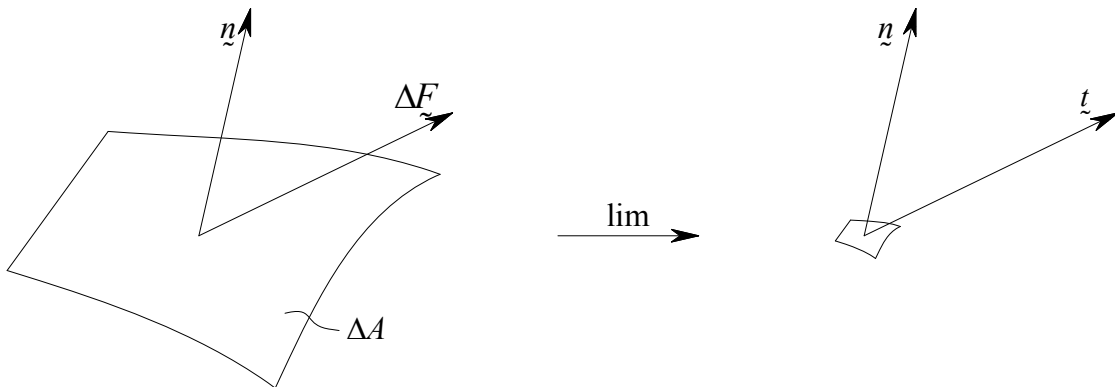
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

2.8.5. Τάσεις

Οι δυνάμεις επιφάνειας (ή τάση) εξασκούνται επί στοιχείου επιφάνειας σώματος (εσωτερικού ή εξωτερικού) και ορίζονται κατά την παραδοχή του Cauchy από τη σχέση:

$$\underline{t} = \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ \underline{n}: \text{σταθερό}}} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} \quad (2.78)$$

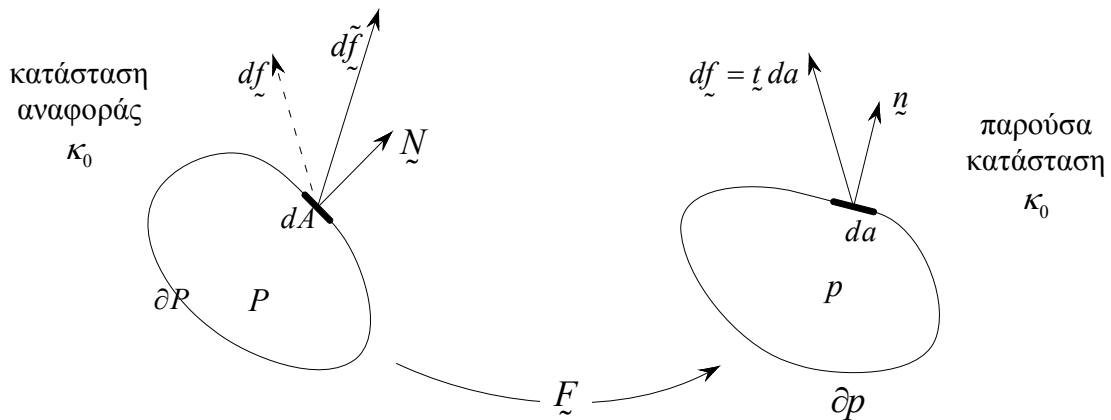
όπου υποτίθεται πως υπάρχει το όριο.



Σχήμα 2-9 Ο τανυστής των τάσεων

Η παραδοχή του Cauchy για την ύπαρξη του διανύσματος τάσης \underline{t} οδήγησε τελικά στην έννοια του τανυστή τάσης $\underline{\sigma}$, που λέγεται και «αληθής τάση» ή «πραγματική τάση» ή «τάση του Cauchy» (οι δύο πρώτες ονομασίες γιατί «μετράει» τη δύναμη ανά επιφάνεια στην παρούσα κατάσταση του παραμορφωμένου σώματος.

Στις μεγάλες παραμορφώσεις, όπου η κατάσταση αναφοράς είναι γεωμετρικά τελείως διαφορετική από την παρούσα κατάσταση, παρουσιάζεται η ανάγκη ορισμού τάσης σε αναφορά με την κατάσταση αναφοράς. Αυτό εισάγει την έννοια των Piola – Kirchhoff (P-K) τανυστών τάσης ως εξής:



Σχήμα 2-10 Piola – Kirchhoff (P-K) τανυστές τάσης

$$d\tilde{f} = \underline{t} da = \underline{\sigma} \underline{n} da = \underline{P} \underline{N} dA$$

$$d\tilde{f} = \underline{F}^{-1} df, \text{ όπως ακριβώς } d\tilde{X} = \underline{F}^{-1} dx, \text{ και τελικά:}$$

$$d\tilde{f} = \underline{S} \underline{N} dA = \underline{F}^{-1} df = \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{n} da = \underline{F}^{-1} \underline{P} \underline{N} dA$$

Ενθυμούμενοι τώρα ότι $d\tilde{a} = \underline{n} da$, $d\tilde{A} = \underline{N} dA$ και $d\tilde{a} = J \underline{F}^{-T} d\tilde{A}$, όπου $J = \det(\underline{F})$, έχουμε:

$$J \underline{\sigma} = \underline{F} \underline{P}^T = \underline{P} \underline{F}^T = \underline{F} \underline{S} \underline{F}^T \quad (2.79)$$

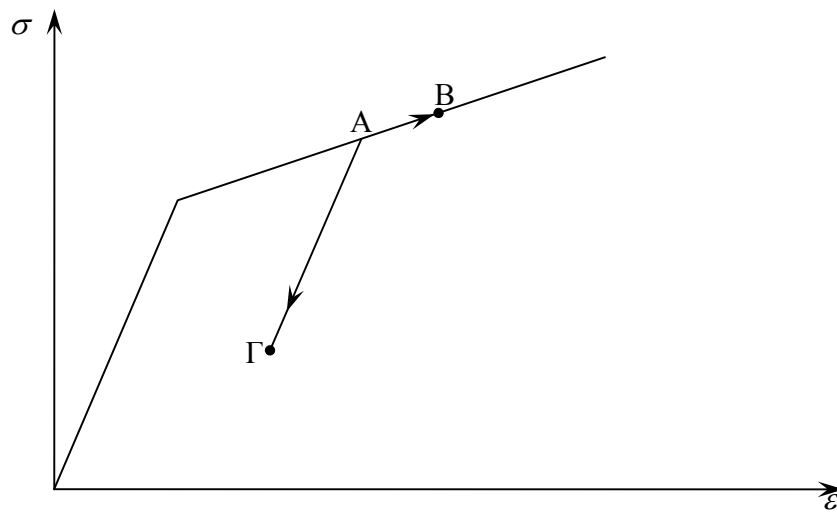
όπου $\underline{\sigma}$ είναι ο τανυστής της αληθούς τάσης, \underline{P} ο 1^{ος} P-K τανυστής τάσης και \underline{S} ο 2^{ος} P-K τανυστής τάσης.

κεφάλαιο 3. *Πλαστικότητα και Πεπερασμένα Στοιχεία*

3.1. Εισαγωγή

Ο κύριος σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να επικεντρωθεί σε αυτές τις πτυχές της πλαστικότητας που αφορούν τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης [2]. Συγκεκριμένα, θα αναφερόμαστε στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αν και πολλές από τις αρχές και έννοιες έχουν επίσης εφαρμογή και σε άλλες διαδικασίες διακριτοποίησης, όπως οι πεπερασμένες διαφορές.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε στο κριτήριο διαρροής του Von Mises, αν και μεγάλο μέρος των ιδεών θα είναι γενικό και εφαρμόσιμο και σε άλλες συναρτήσεις διαρροής. Επιπρόσθετα, οι νόμοι πλαστικής ροής θα θεωρηθούν συσχετισμένοι. Επειδή οι νόμοι πλαστικής ροής είναι από τη φύση τους σε διαφορική μορφή, τα ελαστοπλαστικά προβλήματα πρέπει αυστηρά να επιλύονται χρησιμοποιώντας μικρά βήματα, στο καθένα από τα οποία θα απαιτείται η ικανοποίηση της ισορροπίας (equilibrium steps). Ασχέτως της ακρίβειας με την οποία, μέσα σε κάθε προσαύξηση (του φορτίου), θα ικανοποιείται ο νόμος της πλαστικής ροής και ασχέτως του πόσο κοντά θα διατηρείται η λύση στην επιφάνεια διαρροής, η λύση θα βρίσκεται σε ισορροπία μόνο στο τέλος της κάθε προσαύξησης, μετά τις επαναλήψεις για την ικανοποίηση της ισορροπίας (equilibrium iterations). Παρ' όλα αυτά, ακόμα και με μεγάλα βήματα έχουν συχνά προκύψει αρκετά αποδεκτές λύσεις.



Σχήμα 3-1 Μονοδιάστατη σχέση τάσης-ανηγμένης παραμόρφωσης

Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις στην επίλυση ελαστοπλαστικών προβλημάτων με βάση το Σχήμα 3-1. Αφού έχει επιτευχθεί η ισορροπία στο σημείο A της καμπύλης ενεργών τάσεων/ανηγμένων παραμορφώσεων, στο επόμενο βήμα μπορεί να συνεχιστεί η πλαστική ροή μέχρι το σημείο B, ή διαφορετικά, να υπάρξει ελαστική αποφόρτιση μέχρι του σημείου Γ. Σαφώς, οι δύο δρόμοι έχουν πολύ διαφορετικές δυσκαμψίες. Εάν είναι γνωστό ότι τα φορτία πρόκειται να αντιστραφούν στο σημείο A, δε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί το ελαστοπλαστικό μητρώο στιβαρότητας για το επόμενο προσαυξητικό

βήμα, αλλά, αντί αυτού, πρέπει να χρησιμοποιηθεί το ελαστικό μητρώο στιβαρότητας. Ωστόσο, λόγω της απουσίας πρότερης γνώσης για την αντιστροφή της φόρτισης, θα υποθεθεί ότι η πλαστική ροή θα συνεχιστεί και ότι η εφαπτομενική δυσκαμψία σχετίζεται με το δρόμο AB. Εντούτοις, ακόμα και για μονοτονικά αυξανόμενα φορτία, ορισμένες περιοχές της κατασκευής μπορούν να αποφορτιστούν. Σε τέτοιες περιπτώσεις, γενικά εναπόκειται στην επαναληπτική διαδικασία να ανακαλύψει αυτές τις περιοχές που αποφορτίζονται. Όμως, αν υπάρξει η υποψία ότι εμφανίζεται μεγάλη αποφόρτιση, μπορεί να είναι επωφελέες να χρησιμοποιηθεί το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας.

Γενικά, υπάρχουν τρεις ξεχωριστοί ρόλοι για τους πλαστικούς αλγορίθμους ενός κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Αυτοί οι ρόλοι είναι:

- (1) ο σχηματισμός του τυπικού εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου (tangent modular matrix) για να χρησιμοποιηθεί στο προσαυξητικό εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας (tangent stiffness matrix) της κατασκευής ή για να χρησιμοποιηθεί στην ολοκλήρωση των νόμων των τάσεων/ανηγμένων παραμορφώσεων ((3) παρακάτω)
- (2) ο σχηματισμός ενός συνεπούς (consistent) εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου για να χρησιμοποιηθεί στις επαναλήψεις Newton- Raphson
- (3) η ολοκλήρωση των νόμων τάσεων/ανηγμένων παραμορφώσεων για να ενημερωθούν οι τάσεις.

Έτσι, με μη γραμμικότητα υλικού, το εφαπτομενικό μητρώο της κατασκευής παίρνει τη μορφή:

$$[K_t] = \int [B]^T [C_t] [B] dV + \text{initial stress matrix} \quad (3.1)$$

όπου $[C_t]$ είναι το τυπικό εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = [C_t] \quad (3.2)$$

Το μητρώο αρχικών τάσεων στον τύπο (3.1) υπάρχει μόνο αν περιλαμβάνεται και γεωμετρική μη γραμμικότητα.

Εάν υιοθετηθούν συγκεκριμένοι τύποι ενημέρωσης της τάσης, είναι δυνατόν να εξαχθεί ένα συνεπές καταστατικό μητρώο $[C_{tc}]$, το οποίο είναι συνεπές με την αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται για την ενημέρωση των τάσεων. Σε σύγκριση με τη χρήση του τυπικού εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου, το συνεπές εφαπτομενικό οδηγεί σε αισθητά ταχύτερη σύγκλιση όταν χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος Newton-Raphson για τις επαναλήψεις ισορροπίας.

3.2. Ενημέρωση των τάσεων (stress updating)

Λόγω της διαφορετικής μορφής των νόμων της πλαστικής ροής, είναι σχεδόν αναπόφευκτο το γεγονός ότι οι διαδικασίες επίλυσης που βασίζονται στη μέθοδο της προσαυξητικής πρόβλεξης (πρόβλεψης) /διόρθωσης θα οδηγήσουν σε κάποιο σφάλμα.

Αυτό το σφάλμα δε θα σχετίζεται με τη μη ικανοποίηση της ισορροπίας, αλλά θα προκαλείται από τα σφάλματα στην ολοκλήρωση του νόμου πλαστικής ροής και τη σχέση του με τη συνολική προσαυξητική/επαναληπτική διαδικασία επίλυσης. Οι περισσότεροι αναλυτές υποθέτουν ένα γραμμικό δρόμο ανηγμένων παραμορφώσεων μέσα σε μία προσαύξηση. Ακόμα και αν ικανοποιείται ακριβώς η ισορροπία τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος μιας προσαύξησης, ή χρησιμοποιούνται και υπο-προσαυξήσεις (sub-increments) για να βοηθήσουν στην ολοκλήρωση των νόμων με μεγαλύτερη ακρίβεια, η λύση δε θα συμφωνεί απόλυτα με μια λύση στην οποία η ίδια η προσαύξηση θα κατακερματιζόταν σε έναν αριθμό μικρότερων προσαυξήσεων, για κάθε μία από τις οποίες θα εξασφαλιζόταν με ακρίβεια η ισορροπία.

Τα σφάλματα θα σχετίζονται πολύ με την εφαρμοζόμενη διαδικασία για την ενημέρωση των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων. Σε σχέση με την προσαυξητική/επαναληπτική διαδικασία, είναι δυνατοί δύο διακριτοί αλγόριθμοι:

(Α) Χρησιμοποιώντας τις ανηγμένες παραμορφώσεις που προκύπτουν από την κάθε επανάληψη μέσα στην προσαύξηση (iterative strains)

- (1) Υπολογισμός των επαναληπτικών μετατοπίσεων $\delta \mathbf{p}$, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τη σχέση $\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}$.
- (2) Υπολογισμός των επαναληπτικών ανηγμένων παραμορφώσεων δε από τις επαναληπτικές μετατοπίσεις $\delta \mathbf{p}$.
- (3) Υπολογισμός των επαναληπτικών τάσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση $\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t(\boldsymbol{\sigma}) \delta \boldsymbol{\epsilon}$ ή, κατά προτίμηση, ολοκληρώνοντας τις διαφορικές εξισώσεις.
- (4) Ενημέρωση των τάσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_0 + \delta \boldsymbol{\sigma}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}_0$ είναι οι παλιές τάσεις πριν την τρέχουσα επανάληψη.

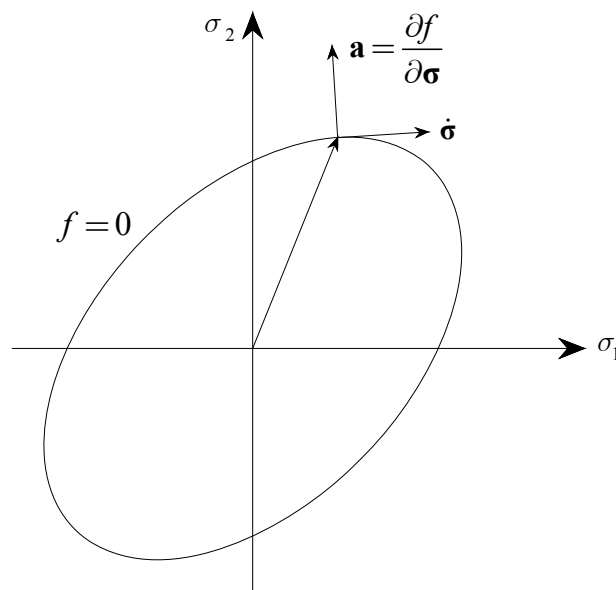
(Β) Χρησιμοποιώντας τις ανηγμένες παραμορφώσεις που προκύπτουν από το προηγούμενο βήμα της προσαύξησης (incremental strains)

- (1) Υπολογισμός των επαναληπτικών μετατοπίσεων $\delta \mathbf{p}$, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα τη σχέση $\delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}$.
- (2) Ενημέρωση των προσαυξητικών μετατοπίσεων (από την τελευταία κατάσταση ισορροπίας, στην οποία έχει επιτευχθεί σύγκλιση) χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Delta \mathbf{p}_n = \Delta \mathbf{p}_0 + \delta \mathbf{p}$, όπου $\Delta \mathbf{p}_0$ είναι οι προσαυξητικές μετατοπίσεις στο τέλος της τελευταίας επανάληψης.
- (3) Υπολογισμός των προσαυξητικών ανηγμένων παραμορφώσεων $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ από τις προσαυξητικές μετατοπίσεις $\Delta \mathbf{p}$.
- (4) Υπολογισμός των προσαυξητικών τάσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \boldsymbol{\epsilon}$ ή, κατά προτίμηση, ολοκληρώνοντας τις διαφορικές εξισώσεις.
- (5) Ενημέρωση των τάσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}$, όπου $\boldsymbol{\sigma}_0$ είναι οι παλιές τάσεις στο τέλος της τελευταίας προσαύξησης.

Η στρατηγική Α δεν προτείνεται γιατί μπορεί να οδηγήσει σε πλαστή αποφόρτιση κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων.

3.3. Το τυπικό ελαστοπλαστικό μητρώο για ένα ελαστικό/απολύτως πλαστικό υλικό που υπακούει στο κριτήριο διαρροής του Von Mises και υφίσταται επίπεδη ένταση

Υπό μία έννοια, η κατάσταση επίπεδης έντασης είναι μία από τις πιο πολύπλοκες εντατικές καταστάσεις. Παρ' όλα αυτά, η επίπεδη ένταση θα χρησιμοποιηθεί για να εισάγει τους υπολογισμούς της πλαστικότητας, απλά διότι εμπλέκει τις λιγότερες συνιστώσες. Ωστόσο, ο πρωταρχικός σκοπός είναι να αναπτυχθεί ένας γενικός τύπος του μητρώου και επίσης διανυσματικές και τανυστικές εξισώσεις που θα έχουν εφαρμογή και σε πιο γενικές εντατικές καταστάσεις.



Σχήμα 3-2 Το κριτήριο διαρροής του Von Mises στους άξονες των κυρίων τάσεων, σε συνθήκες επίπεδης έντασης

Θα ξεκινήσουμε με την απλή εκδοχή της συνάρτησης διαρροής του Von Mises στην επίπεδη ένταση:

$$f = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2)} - \sigma_y = \sigma_e - \sigma_y \quad (3.3)$$

όπου σ_e είναι η ενεργός τάση (effective stress) και σ_y η τάση διαρροής. Σε συνδυασμό με την σχέση (3.3), ο νόμος της πλαστικής ροής των Prandtl-Reuss είναι:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \dot{\lambda} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{p,xx} \\ \dot{\varepsilon}_{p,yy} \\ \dot{\varepsilon}_{p,xy} \end{pmatrix} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sigma_e} \begin{pmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \\ 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} \\ 6\tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{a} είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής και $\dot{\lambda}$ είναι μια θετική σταθερά, που συχνά αναφέρεται ως πλαστικός πολλαπλασιαστής του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης (plastic strain-rate multiplier). Με το συμβολισμό που χρησιμοποιούμε, το $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ είναι στήλη-διάνυσμα. Στην εξίσωση (3.4) και γενικά σε αυτό το κεφάλαιο, ο ρυθμός μεταβολής συμβολίζεται με μια τελεία. Ωστόσο, δεν λαμβάνονται υπόψη δυναμικά φαινόμενα, δηλαδή έχουμε έναν ψευδο-χρόνο κι έτσι οι σημασμένες με τελεία ποσότητες μπορούν απλά να θεωρηθούν ως μικρές μεταβολές, οι οποίες συμβολίζονται και ως δs (αυστηρά, $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dt$, αλλά συχνά θα αναφερόμαστε στο $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ως μικρή μεταβολή). Επιπρόσθετα στην (3.4), οι μεταβολές στις τάσεις συσχετίζονται με τις μεταβολές στις ανηγμένες παραμορφώσεις μέσω:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} \\ \dot{\sigma}_{yy} \\ \dot{\tau}_{xy} \end{pmatrix} = [\mathbf{C}] \left(\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{p,xx} \\ \dot{\varepsilon}_{p,yy} \\ \dot{\varepsilon}_{p,xy} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (3.5)$$

όπου, θεωρώντας ισότροπη ελαστικότητα,

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Η εξίσωση (3.5) συνδέει τις μικρές μεταβολές στις τάσεις (ή πιο αυστηρά το ρυθμό μεταβολής της τάσης) με τις μικρές μεταβολές στην ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση (ή πιο αυστηρά το ρυθμό μεταβολής της ελαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης), $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$. Πολλές φορές, ο δείκτης t θα παραλείπεται από τις συνολικές μεταβολές στις ανηγμένες παραμορφώσεις.

Ένας αρνητικός πλαστικός πολλαπλασιαστής $\dot{\lambda}$ θα υποδήλωνε πλαστική αποφόρτιση από την επιφάνεια διαρροής. Το τελευταίο δεν μπορεί να συμβεί και, συνεπώς, κάθε αρνητικό $\dot{\lambda}$ θα πρέπει να αντικατασταθεί από το μηδέν, έτσι ώστε να πραγματοποιείται ελαστική αποφόρτιση.

Για να συμβεί πλαστική ροή, οι τάσεις πρέπει να παραμένουν πάνω στην επιφάνεια διαρροής και συνεπώς:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (3.7)$$

Στην εξίσωση (3.7) υιοθετήθηκε μια διατύπωση που θα χρησιμοποιηθεί συχνά σε αυτό το κεφάλαιο και δόθηκε τόσο η διανυσματική όσο και η ταυνοστική μορφή, αν και μόνο η πρώτη σχετίζεται απευθείας με τους ακριβείς τύπους στις σχέσεις (3.4)-(3.6). Γενικά, δε θα χρησιμοποιούνται δείκτες για να υποδηλώσουν την τάξη του ταυνοστή. Θα είναι προφανές από το περιεχόμενο ποιος τύπος χρησιμοποιείται. Συγκεκριμένα, η χρήση του συμβόλου ":" θα υποδηλώνει την ταυνοστική μορφή ενώ η χρήση του συμβόλου "T" θα συνεπάγεται τη χρήση διανύσματος.

Η κατάσταση που περιγράφεται από τη σχέση (3.7) απεικονίζεται στο Σχήμα 3-2 και δείχνει ότι, για πλαστική ροή, οι μεταβολές στην τάση, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, στιγμιαία κινούνται εφαπτομενικά στην επιφάνεια με το $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα \mathbf{a} . Συνεπώς, το διάνυσμα \mathbf{a} είναι κάθετο στην επιφάνεια και ο νόμος της πλαστικής ροής (σχέση (3.4)) επικαλείται την καθετότητα.

Προκειμένου να οριστεί ο πλαστικός πολλαπλασιαστής, $\dot{\lambda}$, η εξίσωση (3.5) προ-πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα πλαστικής ροής \mathbf{a}^T και, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.7), προκύπτει:

$$\dot{\lambda} = \frac{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}}{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\mathbf{a}\}} = \frac{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a}} \quad (3.8)$$

Συνεπώς, αντικατάσταση στη σχέση (3.5) δίνει:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [C_t] \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = [C] \left[[I] - \frac{\{\mathbf{a}\} \{\mathbf{a}\}^T [C]}{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\mathbf{a}\}} \right] \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \left(\mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a}} (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.9)$$

όπου $[C_t]$ είναι το εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο (tangential modular matrix) (ή ταυνοστής τετάρτης τάξεως), το οποίο δεν είναι συνάρτηση μόνο του E και του ν αλλά επίσης, μέσω του \mathbf{a} , και συνάρτηση της τρέχουσας εντατικής κατάστασης, $\boldsymbol{\sigma}$. Αυτό το μητρώο μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί στις εκφράσεις των πεπερασμένων στοιχείων ($[K_t] = \int [B]^T [C_t] [B] dV$) για να σχηματίσει το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας (tangential stiffness matrix) της κατασκευής.

3.4. Μη συσχετισμένη (συναρτημένη) πλαστικότητα (non-associative plasticity)

Πριν εισαχθεί η κράτυνση, πρέπει να γίνει μια περιεκτική αναφορά στη μη συσχετισμένη πλαστικότητα, η οποία έχει σχέση κυρίως με τα γεωυλικά όπως τα εδάφη. Για τέτοια υλικά, τα πειράματα καταδεικνύουν ότι η διεύθυνση της πλαστικής ροής δεν είναι συνήθως κάθετη στην επιφάνεια διαρροής, f . Εντούτοις, μπορεί να θεωρηθεί ως κάθετη σε μία δεύτερη συνάρτηση, g , γνωστή ως πλαστικό δυναμικό. Τότε, προκύπτει ότι στη θέση της (3.4), $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} (\partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}) = \dot{\lambda} \mathbf{b}$ αντί του $\dot{\lambda} \mathbf{a}$, όπου, εκτός εάν η

πλαστικότητα είναι συσχετισμένη, $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$. Με αυτή τη διαφορά, η βασική διατύπωση μοιάζει με αυτήν της προηγούμενης παραγράφου, αλλά στη θέση της (3.8) προκύπτει:

$$\dot{\lambda} = \frac{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}}{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\mathbf{b}\}} = \frac{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{b}} \quad (3.10)$$

ενώ στη θέση της σχέσης (3.9):

$$[C_t] = [C] \left([I] - \frac{\{\mathbf{b}\} \{\mathbf{a}\}^T [C]}{\{\mathbf{a}\}^T [C] \{\mathbf{b}\}} \right) \quad (3.11)$$

Ακολουθεί ότι για τη μη συσχετισμένη πλαστικότητα, το μητρώο $[C_t]$ είναι γενικά μη συμμετρικό.

3.5. Εισαγωγή της κράτνσης (hardening)

Αν και οι έννοιες της κράτνσης θα εισαχθούν με ειδική αναφορά στην πλαστικότητα σε συνθήκες επίπεδης έντασης, στην οποία έχουμε ήδη αναφερθεί, οι έννοιες αυτές είναι εξίσου έγκυρες και σε γενικότερες εντατικές καταστάσεις, όπως η πλαστικότητα σε τρεις διαστάσεις. Πράγματι, οι εξισώσεις που περιγράφουν την κρατυνόμενη συμπεριφορά παραμένουν ίδιες ακόμα και σε τέτοιες γενικές καταστάσεις. Το μόνο στοιχείο που αφορά ειδικά την πλαστικότητα σε συνθήκες επίπεδης έντασης είναι η ακριβής μορφή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης.

3.5.1. Ισότροπη κράτνση με βάση την ανηγμένη παραμόρφωση (isotropic strain hardening)

Η κράτνση μπορεί να εισαχθεί αντικαθιστώντας τη σταθερή τάση διαρροής, σ_y , στην εξίσωση (3.3) με μια μεταβλητή τάση, $\sigma_y(\varepsilon_{ps})$, έτσι ώστε:

$$f = \sigma_e - \sigma_y(\varepsilon_{ps}) \quad (3.12)$$

Η μεταβλητή τάση διαρροής τώρα είναι συνάρτηση της ισοδύναμης πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης (equivalent plastic strain):

$$\varepsilon_{ps} = \sum \delta \varepsilon_{ps} = \int \dot{\varepsilon}_{ps} \quad (3.13)$$

(άλλοι συμβολισμοί για την ισοδύναμη πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση: $\bar{\varepsilon}_p, \varepsilon_e^p$)

η οποία συσσωρεύεται από τους ρυθμούς μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης:

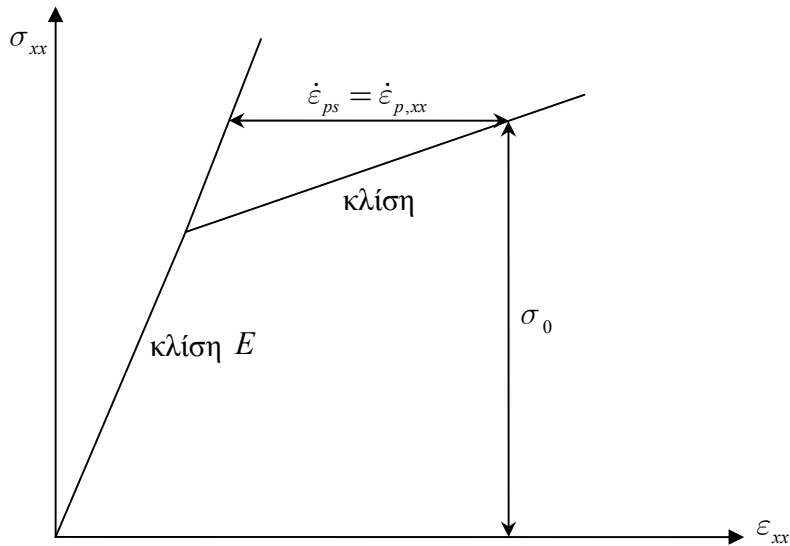
$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_{p,xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{p,yy}^2 + \dot{\varepsilon}_{p,xx} \dot{\varepsilon}_{p,yy} + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{p,xy}^2 \right)} \quad (3.14)$$

Κάτω από μονοαξονική ένταση σ_{xx} , $\dot{\epsilon}_{p,yy} = \dot{\epsilon}_{p,zz} = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{p,xx}$, έτσι ώστε να μην υπάρχει πλαστική ογκομετρική μεταβολή και $\dot{\epsilon}_{ps} = \dot{\epsilon}_{p,xx}$, ενώ $\sigma_e = \sigma_y = \sigma_{xx}$. Κατά συνέπεια, η σχέση μεταξύ σ_y και ϵ_{ps} μπορεί να ληφθεί από τη σχέση μονοαξονικής τάσης/πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να υπολογιστεί το $\partial\sigma_y/\partial\epsilon_{ps}$, το οποίο, από το Σχήμα 3-3, δίνεται από:

$$H' = \frac{\partial\sigma_y}{\partial\epsilon_{ps}} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\epsilon_{p,xx}} = \frac{E_t}{1 - E_t/E} \quad (3.15)$$

Από τη στιγμή που θα εισαχθεί η κράτυνση, η συνθήκη της συνέπειας (consistency condition) στην εξίσωση (3.7) τροποποιείται ως εξής:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon_{ps}} \dot{\epsilon}_{ps} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H' \dot{\epsilon}_{ps} = 0 \quad (3.16)$$



Σχήμα 3-3. Μονοαξονική σχέση τάσεων ανηγμένων παραμορφώσεων με γραμμική κράτυνση

Αντικατάσταση από τη σχέση (3.4) στην εξίσωση (3.14) δίνει:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \dot{\lambda} = B(\{\sigma\}) \dot{\lambda} \quad (3.17)$$

Για το κριτήριο διαρροής του Von Mises, $B(\boldsymbol{\sigma})=1$, αλλά για άλλα κριτήρια αυτό μπορεί να μην είναι μονάδα. Αντικαθιστώντας από τη σχέση (3.17) στην (3.16) προκύπτει:

$$\dot{f} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H' B \dot{\lambda} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - A' \dot{\lambda} = 0 \quad (3.18)$$

Έπειτα, προ-πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.5) με $\{a\}^T$ και αντικαθιστώντας στην (3.18), προκύπτει:

$$\dot{\lambda} = \frac{\{a\}^T [C] \{\dot{\epsilon}\}}{\{a\}^T [C] \{b\} + A'} = \frac{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon}}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{b} + A'} \quad (3.19)$$

ενώ η εξίσωση (3.9) αντικαθίσταται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= [C_t] \{\dot{\epsilon}\} = [C] \left([I] - \frac{\{a\} \{a\}^T [C]}{\{a\}^T [C] \{a\} + A'} \right) \{\dot{\epsilon}\} \\ &= \left(\mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a} + A'} (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \right) : \dot{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Για την περίπτωση της γραμμικής κράτνσης, η παράμετρος A' είναι (μέσω του H' στη σχέση (3.15)) μια απλή μετρήσιμη σταθερά. Για τη μη γραμμική κράτνση, το A' καθώς και το σ_y μεταβάλλεται ανάλογα με το ϵ_{ps} (και πιθανώς και με άλλες ποσότητες).

Η ισοδύναμη πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί ως μία εσωτερική μεταβλητή, καθώς είναι εσωτερικό μέγεθος της απόκρισης. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ορολογία, μόνο τα άμεσα μετρούμενα μεγέθη, όπως οι ολικές τάσεις και οι ολικές ανηγμένες παραμορφώσεις, είναι εξωτερικά. Ωστόσο, οι πλαστικές ανηγμένες παραμορφώσεις είναι απαραίτητες για να οριστεί η απόκριση του σώματος, γιατί η κρατυνόμενη συμπεριφορά είναι συνάρτηση αυτής της εσωτερικής μεταβλητής.

3.5.2. Ισότροπη κράτνση με βάση το έργο (isotropic work hardening/“εργοσκλήρυνση”)

Η κράτνση η οποία είναι συνάρτηση του πλαστικού έργου έχει γενικότερη εφαρμογή σε σχέση με την κράτνση που είναι συνάρτηση της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης. Με την “εργοσκλήρυνση”, η εξίσωση (3.12) αντικαθίσταται από τη σχέση:

$$f = \sigma_e - \sigma_y(W_p) \quad (3.21)$$

όπου W_p είναι το πλαστικό έργο, το οποίο δίνεται από την εξίσωση:

$$W_p = \int \sigma_0 \dot{\epsilon}_{p0} = \int \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \int \dot{\lambda} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{a\} \quad (3.22)$$

όπου $\dot{\epsilon}_{p0}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της μονοδιάστατης πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης και ο ρυθμός μεταβολής του πλαστικού έργου είναι:

$$\dot{W}_p = \sigma_0 \dot{\epsilon}_{p0} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{a\} \quad (3.23)$$

Αντί των εξισώσεων (3.16) ή (3.18) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \dot{f} &= \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial W_p} \dot{W}_p = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_y}{\partial W_p} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = \\
 &= \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{p0}} \frac{\partial \varepsilon_{p0}}{\partial W_p} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} \\
 &= \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{H'}{\sigma_y} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - A' \dot{\lambda} = 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

όπου

$$A' = \frac{H' \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{a}}{\sigma_y} = \frac{H' \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{a}}{\sigma_y} \tag{3.25}$$

είναι η σταθερά κράτυνσης που χρησιμοποιείται στις εξισώσεις (3.19) και (3.20). Εάν η συνάρτηση διαρροής μπορεί να γραφεί σε παρόμοια μορφή με την εξίσωση (3.3), έτσι ώστε η f να είναι μια ομογενής συνάρτηση πρώτης τάξεως, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_y \tag{3.26}$$

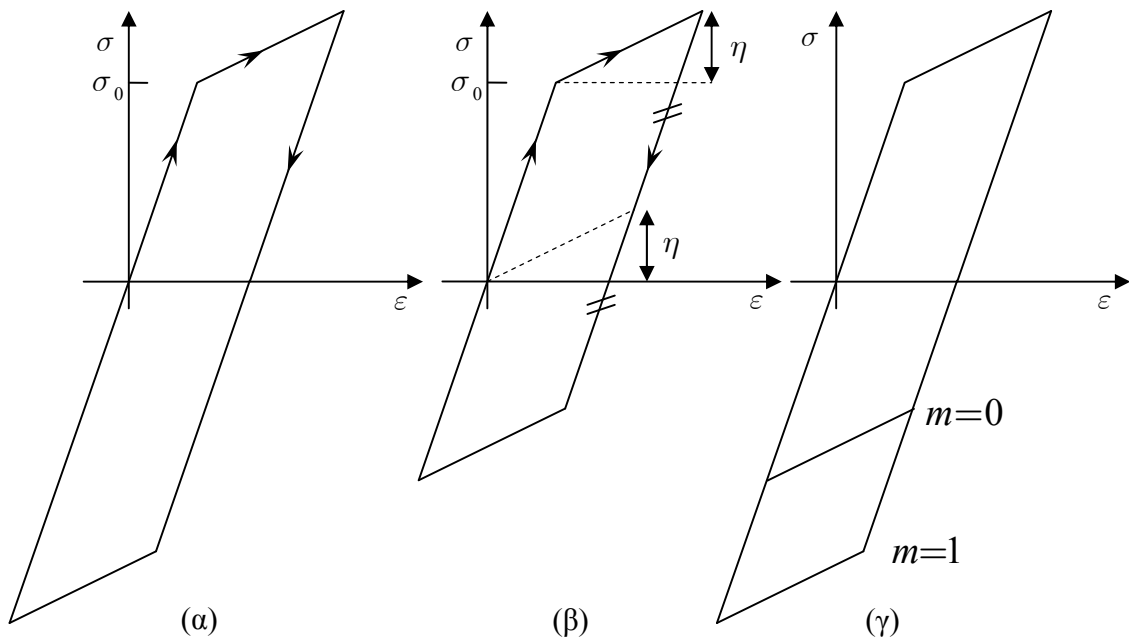
Έτσι, $A' = H'$ (εξίσωση (3.15)) και για τη συνάρτηση διαρροής του Von Mises (με $B=1$, εξίσωση (3.17)), οι διατυπώσεις της κράτυνσης με βάση την ανηγμένη πλαστική παραμόρφωση και με βάση το πλαστικό έργο συμπίπτουν. Αυτό δε συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις.

3.5.3. Κινηματική κράτυνση (kinematic hardening)

Για σεισμικά προβλήματα ή για περιπτώσεις κόπωσης μικρού αριθμού κύκλων φόρτισης (low-cycle fatigue), η προκαλούμενη ανακυκλιζόμενη φόρτιση μπορεί να συνεπάγεται σχετικά μικρές πλαστικές ανηγμένες παραμορφώσεις [3]. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το φαινόμενο Bauschinger μπορεί να είναι σημαντικό. Υποθέτοντας μια γραμμική κράτυνση, αυτό το φαινόμενο απεικονίζεται στο Σχήμα 3-4 για ένα μονοαξονικό πρόβλημα. Εδώ, η διαρροή σε εφελκυσμό έχει μειώσει τη θλιπτική αντοχή έτσι ώστε:

$$(\sigma - \eta) = \sigma_e = \pm \sigma_y \tag{3.27}$$

όπου το η είναι μια “κινηματική μετακίνηση” του κέντρου της επιφάνειας διαρροής, ενώ το σ_y παραμένει σταθερό.



Σχήμα 3-4. (α) Ισότροπη, (β) Κινηματική και (γ) μικτή κράτωση

Το φαινόμενο Bauschinger δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί με τις μεθόδους των παραγράφων 3.5.1 και 3.5.2 που περιλαμβάνουν την ισότροπη κράτωση. Κατά συνέπεια ο Prager εξήγαγε ένα κινηματικό προσομοίωμα, το οποίο, για το κριτήριο διαρροής του Von Mises υποθέτει μια μετατόπιση της κυλινδρικής επιφάνειας διαρροής. Ακολουθεί ότι η συνάρτηση διαρροής μπορεί να γραφεί απλώς αντικαθιστώντας τις τάσεις σ στην τυπική συνάρτηση του Von Mises με $\tilde{\sigma} = \sigma - \eta$, όπου ο τανυστής η (ακολουθούσα ή υποστηρικτική τάση / back stress) ορίζει το κέντρο της επιφάνειας διαρροής στην τρέχουσα διαμόρφωσή της. Συνεπώς:

$$f = \sigma_e(\tilde{\sigma}) - \sigma_y = \sigma_e(\sigma - \eta) - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{((s - \eta') : (s - \eta'))} - \sigma_y \quad (3.28)$$

Η σχέση στο δεξί σκέλος της (3.28) έχει σχέση με το κριτήριο διαρροής του Von Mises με το s να είναι ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων και η' το αποκλίνον τμήμα του η . Ο τανυστής η είναι γνωστός ως τανυστής των υποστηρικτικών ή εσωτερικών τάσεων (back stresses) (και σχετίζεται με το βαθμωτό μέγεθος η στη σχέση (3.27)).

Ο Prager υπέθεσε ότι η επιφάνεια διαρροής κινείται στη διεύθυνση των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων έτσι ώστε:

$$\dot{\eta} = C_p \dot{\epsilon}_p = C_p \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = C_p \dot{\lambda} \mathbf{a} = C_p \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_y} (s - \eta') \quad (3.29)$$

όπου η τελική σχέση έχει εφαρμογή ειδικά στην επιφάνεια διαρροής του Von Mises. Στη σχέση (3.29) έχουμε χρησιμοποιήσει τον τυπικό νόμο πλαστικής ροής για το $\dot{\epsilon}_p$, όπου

$\mathbf{a} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$. Από τη σχέση (3.28), το \mathbf{a} είναι ίσο με $-\partial f / \partial \boldsymbol{\eta}$. Επειδή, για τη συνάρτηση διαρροής του Von Mises, οι πλαστικές ανηγμένες παραμορφώσεις $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ δεν έχουν ογκομετρική συνιστώσα ($\varepsilon_{p,ii} = 0$), από τη σχέση (3.28), για το νόμο εξέλιξης της κράτυνσης του Prager, $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}'$. Συνεπώς, μετακινείται το κέντρο της επιφάνειας διαρροής χωρίς μετακίνηση στη διεύθυνση της μέσης τάσης.

Το προσομοίωμα του Prager μπορεί να οδηγήσει σε ασυνέπειες όταν εφαρμόζεται σε υποχώρους της τάσης, όπως στην περίπτωση της επίπεδης έντασης, εκτός εάν αναδιατυπωθεί ειδικά για τον αντίστοιχο υποχώρο.

Οι ασυνέπειες αυτές μπορούν να αποφευχθούν υιοθετώντας το προσομοίωμα του Ziegler, σύμφωνα με τον οποίο:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = C_z \dot{\lambda} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) \quad (3.30)$$

Για την περίπτωση της πλαστικότητας Von Mises στις τρεις διαστάσεις οι δύο διατυπώσεις οδηγούν στα ίδια αποτελέσματα. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.30) με το κριτήριο Von Mises, το κέντρο της επιφάνειας διαρροής θα έχει μια συνιστώσα κίνησης στη διεύθυνση της μέσης τάσης.

Από τη σχέση (3.28), η συνθήκη της συνέπειας γράφεται:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0 \quad (3.31)$$

Για τη συνάρτηση διαρροής Von Mises, ο τανυστής $\mathbf{a} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ παίρνει την ίδια μορφή όπως στην περίπτωση χωρίς κράτυνση. Χρησιμοποιώντας το νόμο εξέλιξης των εσωτερικών τάσεων του Prager, μετά από συνδυασμό των σχέσεων (3.29) και (3.31), προκύπτει:

$$\dot{f} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - C_p \dot{\lambda} \mathbf{a} : \mathbf{a} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{3}{2} C_p \dot{\lambda} = 0 \quad (3.32)$$

Η τελευταία σχέση στη (3.32) ισχύει μόνο για τη συνάρτηση διαρροής του Von Mises. Εάν συνδυαστεί ο νόμος εξέλιξης των εσωτερικών τάσεων του Ziegler (σχέση (3.30)) με τη σχέση (3.31), εξάγεται:

$$\dot{f} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - C_z \dot{\lambda} \mathbf{a} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - C_z \dot{\lambda} \sigma_y = 0 \quad (3.33)$$

όπου, ξανά, η τελευταία έκφραση σχετίζεται αποκλειστικά με το κριτήριο του Von Mises.

Από τη σχέση (3.32) προκύπτει ότι $C_p = \frac{2}{3} H'$ και από τη σχέση (3.33) εξάγεται ότι $C_z = \frac{H'}{\sigma_y}$, όπου $H' = \frac{E_t}{1 - E_t/E}$ (σχέση (3.15)).

3.6. Πλαστικότητα κατά Von Mises στις τρεις διαστάσεις

Για τη γενική περίπτωση στον τρισδιάστατο χώρο, το κριτήριο διαρροής του Von Mises είναι:

$$\begin{aligned}
 f &= \sigma_e - \sigma_y = \sqrt{3}\sqrt{J_2} - \sigma_y \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]} - \sigma_y \\
 &= \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} - \sigma_y \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{L} \mathbf{s}} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_y
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

και

$$\mathbf{s}^T = \{s_x, s_y, s_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \tag{3.36}$$

είναι οι συνιστώσες του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων.

Για την τρισδιάστατη πλαστικότητα, ο ρυθμός μεταβολής της ισοδύναμης πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_{ps} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{p,xx}^2 + \dot{\epsilon}_{p,yy}^2 + \dot{\epsilon}_{p,zz}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{p,xy}^2 + \dot{\gamma}_{p,yz}^2 + \dot{\gamma}_{p,zx}^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\mathbf{\epsilon}}_p : \dot{\mathbf{\epsilon}}_p)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\mathbf{\epsilon}}_p : \dot{\mathbf{\epsilon}}_p)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

όπου $\dot{\mathbf{\epsilon}}_p$ είναι οι συνιστώσες του αποκλίνοντος τανυστή των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων. Οι ελαστικές τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.39)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (3.34), παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^T &= \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
&= \frac{1}{2\sigma_e} \left\{ (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}), (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}), (2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}), 6\tau_{xy}, 6\tau_{yz}, 6\tau_{zx} \right\} \quad (3.40) \\
&= \frac{3}{2\sigma_e} \{s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}\} = \frac{3}{2\sigma_e} (\mathbf{L}\mathbf{s})^T = \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{s}}
\end{aligned}$$

ή χρησιμοποιώντας τανυστικό συμβολισμό:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \frac{3}{2\sigma_e} \mathbf{s} \quad (3.41)$$

Όπως στην (3.4), $\dot{\varepsilon}_p = \lambda \mathbf{a}$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (3.37):

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} (\mathbf{a}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} (\mathbf{a} : \mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_e} (\mathbf{s}^T \mathbf{L} \mathbf{s})^{1/2} = \dot{\lambda} \quad (3.42)$$

Με αυτούς τους νέους ορισμούς για τα $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{C} και \mathbf{a} , από μια παρόμοια διαδικασία με αυτή των προηγούμενων παραγράφων προκύπτουν η σχέση (3.19) για το $\dot{\lambda}$ και η σχέση (3.20) για το \mathbf{C}_t .

3.7. Ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων

Μερικά θέματα σε σχέση με την ολοκλήρωση του νόμου πλαστικής ροής έχουν ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 3.2. Εάν οι προσανξήσεις των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων ήταν πολύ μικρές, θα ήταν δυνατό η επίλυση να προχωρήσει αποτελεσματικά εφαρμόζοντας τους παραπάνω εφαπτομενικούς τύπους, αφού πρώτα αντικατασταθούν όροι όπως $\dot{\epsilon}$ από όρους όπως $\delta\epsilon$, και χρησιμοποιώντας τη στρατηγική B για την ανανέωση των ανηγμένων παραμορφώσεων. Ωστόσο, οι μεταβολές των ανηγμένων παραμορφώσεων και οι επακόλουθες μεταβολές των τάσεων $\delta\epsilon$ θα είναι απειροστές με αποτέλεσμα να συσσωρεύονται σφάλματα. Συνεπώς, μια διαδικασία εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler (forward Euler procedure) χωρίς διόρθωση στο επίπεδο του κάθε σημείου Gauss θα οδηγούσε σε μια μη ασφαλή απομάκρυνση από την επιφάνεια διαρροής και σε παραβίαση του κριτηρίου διαρροής.

Πριν από την αντιμετώπιση του προβλήματος των προσανξήσεων πεπερασμένου μεγέθους, πρέπει να σημειωθεί ότι, ακόμα και αν οι προσανξήσεις ήταν απειροστές, θα ήταν υπολογιστικά μη αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί το εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο \mathbf{C}_t , για να υπολογιστεί η μεταβολή της τάσης $\delta\sigma$. Αντί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (3.20), θα ήταν πιο αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί ξεχωριστά η εξίσωση (3.19) για να υπολογιστεί το $\dot{\lambda}$ και έπειτα, γνωρίζοντας το $\mathbf{a} = \partial f / \partial \sigma$, να υπολογιστεί το $\delta\sigma$ από το γενικό τύπο στη σχέση (3.5). Με τις απειροστές προσανξήσεις στις ανηγμένες παραμορφώσεις, θα ήταν απαραίτητο μόνο να ανανεωθεί η ισοδύναμη πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση ϵ_{ps} , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.13) και (3.14) (ή (3.17)), πριν την επόμενη προσανξήση.

Ωστόσο, οι προσανξήσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων $\delta\epsilon$ θα είναι απειροστές με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατόν να αντικατασταθούν όροι όπως το $\dot{\epsilon}$ από όρους όπως το $\Delta\epsilon$, αν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $\delta\epsilon$ όπου αυτό είναι πολύ μικρό. Οπότε, για το κριτήριο διαρροής του Von Mises, μπορούμε να προσθέσουμε έναν όρο υψηλότερης τάξης και έτσι η σχέση (3.7) αντικαθίσταται από τη σχέση:

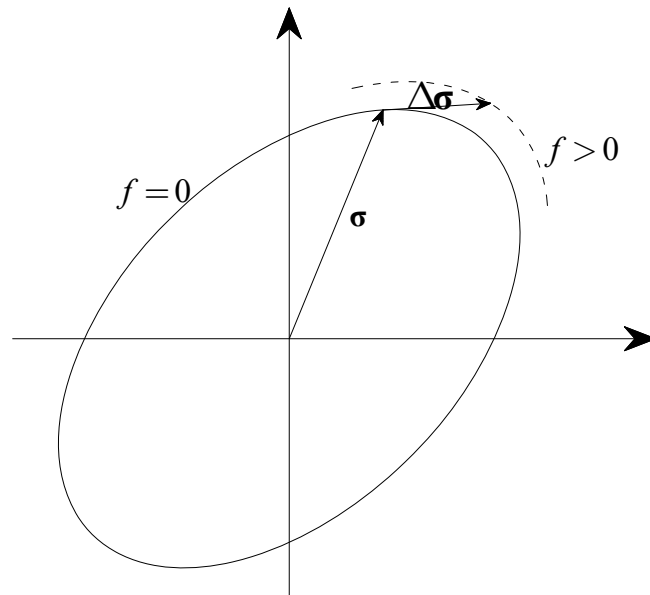
$$\Delta f = \mathbf{a}^T \Delta \sigma + \frac{1}{2} \Delta \sigma^T \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} \Delta \sigma = \mathbf{a} : \Delta \sigma + \frac{1}{2} \Delta \sigma : \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} : \Delta \sigma \quad (3.43)$$

όπου από τη διαφορίση της (3.40) προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{a}^T \mathbf{a} = \frac{1}{2\sigma_e} \mathbf{A} - \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad (3.44)$$

Είναι προφανές ότι η παράλειψη του όρου δευτέρας τάξεως στη σχέση (3.43) θα οδηγήσει σε σφάλμα. Αργότερα, θα αναφερθούν οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν την πληροφορία της δευτέρας τάξεως.

Εάν απλώς υπολογιστεί το $\mathbf{a} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ στην αρχή της προσαύξησης και χρησιμοποιηθεί η σχέση (3.19) για να υπολογιστεί το $\Delta \lambda$, υιοθετείται η διαδικασία εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler (forward Euler scheme), η οποία είναι βέβαιο ότι θα οδηγήσει σε τάσεις οι οποίες κείνται εκτός της επιφάνειας διαρροής στο τέλος της προσαύξησης (Σχήμα 3-5). Αν δεν εφαρμοστεί κάποια διαδικασία ώστε να επιστρέψουν οι τάσεις στην επιφάνεια διαρροής ή να παραμείνουν τουλάχιστον αρκετά κοντά στην επιφάνεια, είναι σίγουρο ότι θα συσσωρευτούν σφάλματα και το φορτίο κατάρρευσης, γενικά, θα υπερεκτιμηθεί.



Σχήμα 3-5 Συσσώρευση σφάλματος από την εφαρμογή της διαδικασίας εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler

Υπάρχουν τρεις εναλλακτικές διαδικασίες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν, είτε μεμονωμένα είτε σε συνδυασμό, για να υπερκεραστεί το πρόβλημα. Αυτές είναι οι εξής:

- (1) Προσθήκη στη διαδικασία εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler ενός αλγορίθμου επιστροφής στην επιφάνεια διαρροής
- (2) Χρήση της μεθόδου της διαίρεσης της προσαύξησης σε περισσότερα τμήματα (υπο-προσαυξήσεις/sub-increments)
- (3) Χρήση διαδικασίας πίσω ολοκλήρωσης ή ολοκλήρωσης μέσου σημείου κατά Euler (backward or mid-point Euler scheme)

Σε κάθε περίπτωση ο στόχος είναι να ανανεωθούν οι τάσεις σε κάποιο σημείο Gauss δεδομένων: (α) των προηγούμενων τάσεων, ανηγμένων παραμορφώσεων και ισοδύναμων πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων και (β) των τρεχόντων ανηγμένων παραμορφώσεων. Για όλες τις διαδικασίες το πρώτο βήμα είναι να χρησιμοποιηθεί μία

ελαστική σχέση για να ανανεωθούν οι τάσεις. Αν αυτές οι ανανεωμένες τάσεις βρεθούν να κείνται εντός της επιφάνειας διαρροής, το υλικό στο συγκεκριμένο σημείο Gauss θεωρείται ότι είτε έχει παραμείνει ελαστικό είτε έχει αποφορτιστεί ελαστικά από την επιφάνεια διαρροής. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν υπάρχει ανάγκη να ολοκληρωθούν οι διαφορικές εξισώσεις. Αντιθέτως, εάν οι ελαστικές τάσεις είναι εκτός της επιφάνειας διαρροής, χρειάζεται να υιοθετηθεί μία από τις διαδικασίες ολοκλήρωσης.

Από τις παραπάνω μεθόδους, η πιο «δημοφιλής» και αυξανόμενα χρησιμοποιούμενη φαίνεται να είναι η πίσω ολοκλήρωση κατά Euler. Αυτό συμβαίνει γιατί, για το κριτήριο του Von Mises, λαμβάνει μια συγκεκριμένη απλή μορφή και, επιπρόσθετα, επιτρέπει τη δημιουργία ενός συνεπούς εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου (consistent tangent modular matrix), το οποίο διασφαλίζει τετραγωνική σύγκλιση (quadratic convergence) στις συνολικές επαναλήψεις της κατασκευής όταν εφαρμόζεται η πλήρης μέθοδος Newton Raphson. Παρ' όλα αυτά, για κάποια πιο σύνθετα κριτήρια διαρροής, όταν αυτά συνδυάζονται με πολύπλοκους νόμους κράτυνσης, η πίσω ολοκλήρωση κατά Euler είναι δύσκολο να εφαρμοστεί, οπότε τεχνικές όπως της υποδιαίρεσης της προσάυξης σε περισσότερα βήματα μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικές.

3.7.1. Προσδιορισμός του σημείου τομής της επιφάνειας διαρροής (crossing the yield surface)

Ένας αριθμός διαδικασιών ολοκλήρωσης, αλλά όχι όλες, απαιτούν τον προσδιορισμό της τομής του διανύσματος των ελαστικών τάσεων με την επιφάνεια διαρροής (Σχήμα 3-6(α)). Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_\chi + a\Delta\boldsymbol{\sigma}_e) = 0 \quad (3.45)$$

όπου οι αρχικές τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_\chi$ είναι τέτοιες ώστε

$$f(\boldsymbol{\sigma}_\chi) = f_\chi < 0 \quad (3.46)$$

ενώ, θέτοντας $a = 1$ οι ελαστικές τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_\chi + \Delta\boldsymbol{\sigma}_e$ δίνουν:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_B) = f(\boldsymbol{\sigma}_\chi + a\Delta\boldsymbol{\sigma}_e) > 0 \quad (3.47)$$

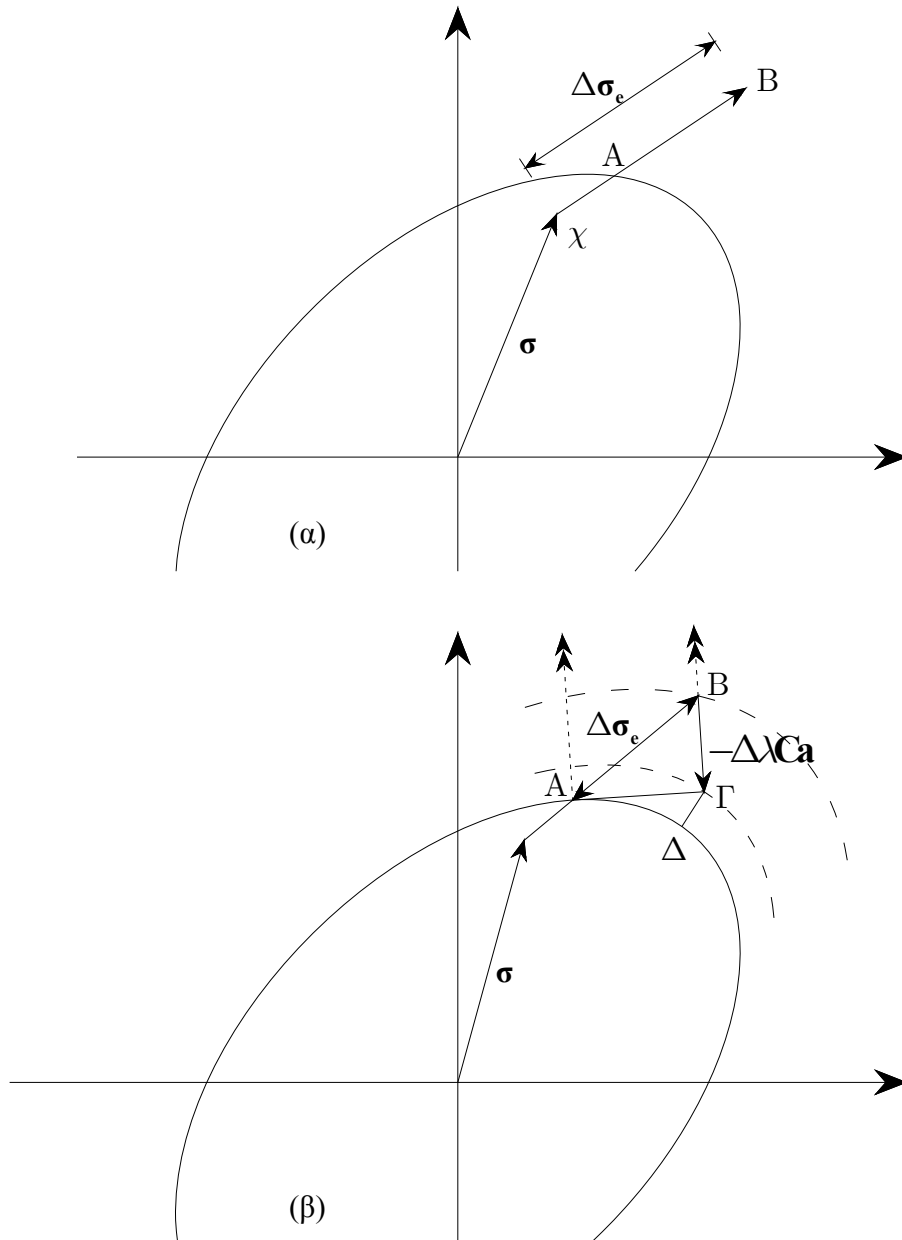
Για κάποιες επιφάνειες διαρροής αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ακριβώς. Για παράδειγμα, με τη συνάρτηση διαρροής του Von Mises μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μητρώο \mathbf{A} της σχέσης (3.44) για να επαναδιατυπωθεί η συνάρτηση με την τετραγωνική μορφή ως εξής:

$$f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_y^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.48)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις $\boldsymbol{\sigma}_\chi + a\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$ στην εξίσωση (3.48) προκύπτει:

$$f_2 = a^2 \sigma_e (\Delta\boldsymbol{\sigma}_e)^2 + a \Delta\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_\chi + \sigma_e (\boldsymbol{\sigma}_\chi)^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.49)$$

όπου οι όροι σ_e είναι απλώς οι όροι της ισοδύναμης τάσης στη σχέση (3.34). Τελικά, αναζητείται μια θετική λύση της (3.49) (εξίσωση δευτέρου βαθμού).



Σχήμα 3-6 Η διαδικασία εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler: (α) προσδιορισμός του σημείου τομής (β) εφαπτομενική κίνηση από το A στο Γ (και στη συνέχεια διόρθωση στο Δ)

Διαφορετικά, για μια οποιαδήποτε συνάρτηση διαρροής μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια σειρά Taylor (της οποίας έχουν αποκοπεί οι όροι ανώτερης τάξεως) με το a να είναι η μοναδική μεταβλητή, η οποία μπορεί να υπολογιστεί μέσω μιας αριθμητικής επαναληπτικής διαδικασίας. Μια τέτοια διαδικασία ξεκινά με μία αρχική εκτίμηση:

$$a_0 = \frac{-f_x}{f_B - f_x} \quad (3.50)$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιεί τη σειρά Taylor:

$$f_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial a} \delta a = f_0 + \mathbf{a}^T \Delta \sigma_e \delta a = 0 \quad (3.51)$$

Έτσι, δίνεται μια πρώτη μεταβολή στο a , η δa_0 . Κατά την εφαρμογή της (3.51), η f_0 υπολογίζεται από τις τάσεις $\sigma = \sigma_x + a_0 \Delta \sigma_e$. Έπειτα, το βαθμωτό μέγεθος a ενημερώνεται από τη σχέση $a_1 = a_0 + \delta a_0$ ενώ μια δεύτερη επανάληψη θα συνεπαγόταν:

$$\delta a_1 = \frac{-1}{\mathbf{a}^T \Delta \sigma_e} f_1 \quad (3.52)$$

όπου το \mathbf{a} και το f_1 θα υπολογίζονταν στο a_1 . Έχοντας υπολογίσει το σημείο τομής $\sigma_x + a \Delta \sigma_e$, το υπόλοιπο τμήμα της προσαύξεσης της ανηγμένης παραμόρφωσης, το οποίο είναι $(1-a) \Delta \sigma$, αντιμετωπίζεται με μεθόδους ελαστοπλαστικής ανάλυσης.

3.7.2. Δύο εναλλακτικές διαδικασίες πρόλεξης (predictors)

Έχει ήδη αναφερθεί ότι είναι απαραίτητη κάποια επαναληπτική αριθμητική διαδικασία για να επιστρέψουν οι τάσεις στην επιφάνεια διαρροής μετά από μία αρχική πρόλεξη (πρόβλεψη). Η τυπική διαδικασία πρόλεξης είναι η εμπρός ολοκλήρωση κατά Euler, η οποία προκύπτει από τη σχέση (3.5), αντικαθιστώντας τους ρυθμούς μεταβολής με Δs έτσι ώστε:

$$\Delta \sigma = \mathbf{C} \Delta \varepsilon - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} = \Delta \sigma_e - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (3.53)$$

όπου κινούμαστε από το σημείο τομής A (Σχήμα 3-6(β)). Το $\Delta \sigma_e$ τώρα είναι η ελαστική προσαύξεση μετά την προσέγγιση της επιφάνειας διαρροής (δηλαδή $(1-a) \Delta \sigma_e$ στη σχέση (3.45) ή στο Σχήμα 3-6(α)). Σε σχέση με το Σχήμα 3-6(β):

$$\sigma_T = \sigma_A + \Delta \sigma_e - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} = \sigma_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (3.54)$$

Η σχέση μπορεί να ερμηνευτεί ως η επιβολή ενός ελαστικού βήματος από το σημείο τομής, η οποία ακολουθείται από μια πλαστική επιστροφή, η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια διαρροής στο A.

Μια εναλλακτική διαδικασία (Σχήμα 3-7) χρησιμοποιεί την κάθετο στο ελαστικό δοκιμαστικό σημείο B και έτσι αποφεύγει τον προσδιορισμό του σημείο τομής A. Μια ανάπτυξη σε σειρά Taylor πρώτης τάξης περί του σημείου B δίνει:

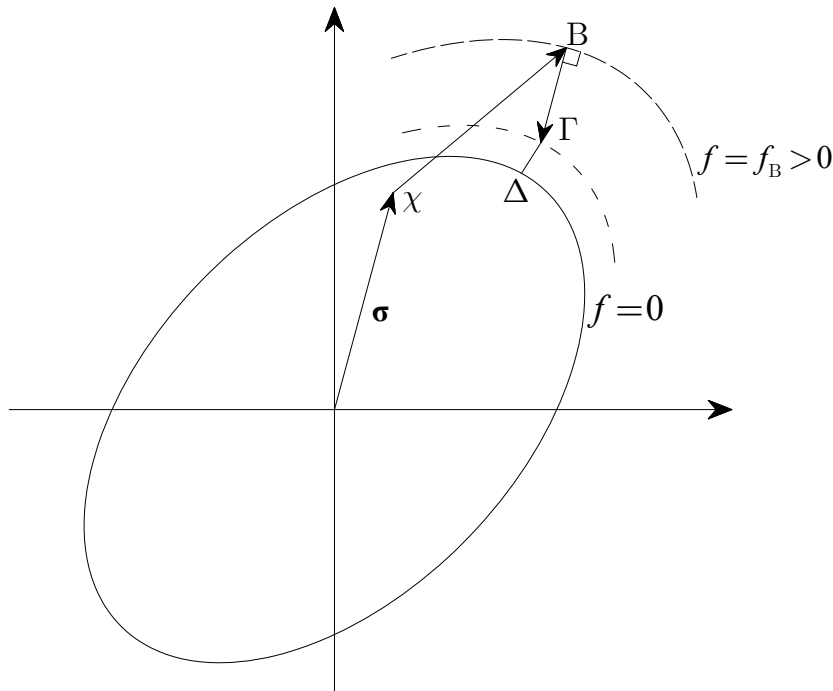
$$f = f_B + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}} \Delta \varepsilon_{ps} = f_B - \Delta \lambda \mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B - \Delta \lambda A' \quad (3.55)$$

όπου η παράμετρος κράτυνσης A' έχει οριστεί στις εξισώσεις (3.15) και (3.18) (με $B=1$). Η εξίσωση (3.55) έχει χρησιμοποιήσει την προσυζητική μορφή της εξίσωσης (3.5) με $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, γιατί η συνολική ανηγμένη παραμόρφωση $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ έχει ήδη εφαρμοστεί καθώς οι τάσεις μετακινήθηκαν από το σημείο χ στο σημείο B (Σχήμα 3-7). Εάν η νέα τιμή της συνάρτησης διαρροής f πρέπει να είναι μηδενική, η εξίσωση (3.55) δίνει:

$$\Delta \lambda = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B + A'_B} = \frac{f_B}{\mathbf{a}_B : \mathbf{C} : \mathbf{a}_B + A'_B} \quad (3.56)$$

όπου το \mathbf{a} και το A' υπολογίζονται στο σημείο B και οι τελικές τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_C$ δίνονται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma}_\Gamma = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_B \quad (3.57)$$



Σχήμα 3-7 Μια εναλλακτική διαδικασία πρόλεξης (με διόρθωση στο Δ)

Αυτή η μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή της διαδικασίας πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler αν και, σε αντίθεση με την πλήρη πίσω ολοκλήρωση, οι τελικές τάσεις στο Γ δεν κείνται πάντα επί της επιφάνειας διαρροής

3.7.3. Επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής

Γενικά, και οι δύο προηγούμενες μέθοδοι οδηγούν σε τάσεις οι οποίες βρίσκονται εκτός της επιφάνειας διαρροής. Οπότε, σε αυτήν τη φάση είναι απλό να διορθωθούν αναλογικά οι τάσεις στο Γ με ένα συντελεστή r , μέχρι η συνάρτηση διαρροής να μηδενιστεί. Ωστόσο, αυτή η τεχνική επηρεάζει και το ελαστικό τμήμα των τάσεων, οπότε δε συνίσταται. Μια εναλλακτική τεχνική αποτελεί επέκταση της προηγούμενης διαδικασίας πίσω ολοκλήρωσης.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση, οι συνολικές ανηγμένες παραμορφώσεις διατηρούνται σταθερές, ενώ εισάγονται πρόσθετες πλαστικές ανηγμένες παραμορφώσεις με σκοπό να απομειώσουν τις τάσεις, ώστε αυτές να βρεθούν πάνω στην επιφάνεια διαρροής. Για αυτό το λόγο, η εξίσωση (3.57) μπορεί να εφαρμοστεί ξανά στο σημείο Γ (Σχήμα 3-6(β)) έτσι ώστε:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Delta} = \boldsymbol{\sigma}_{\Gamma} - \delta\lambda_{\Gamma} \mathbf{Ca}_{\Gamma} \quad (3.58)$$

όπου

$$\delta\lambda_{\Gamma} = \frac{f_{\Gamma}}{\mathbf{a}^T \mathbf{Ca} + A'} \Big|_{\Gamma} \quad (3.59)$$

Αν η προκύπτουσα τιμή της συνάρτησης διαρροής δεν είναι επαρκώς μικρή στο σημείο Δ , μπορεί να εφαρμοστεί περαιτέρω απομείωση. Η τελική διαδικασία οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\lambda_0 \mathbf{Ca}_0 - \delta\lambda_B \mathbf{Ca}_B - \delta\lambda_{\Gamma} \mathbf{Ca}_{\Gamma} \quad (3.60)$$

όπου, για την εμπρός ολοκλήρωση (Σχήμα 3-6(β)) το \mathbf{a}_0 είναι η κάθετος στο σημείο τομής A, ενώ για την πίσω ολοκλήρωση κατά Euler (Σχήμα 3-7) το \mathbf{a}_0 είναι η κάθετος στο σημείο B.

3.7.4. Υποδιαίρεση της προσάυξης σε περισσότερα βήματα (sub-incrementation)

Αντί να εισάγεται κάποια τεχνητή επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής, τα σφάλματα που προκύπτουν από τη διαδικασία εμπρός ολοκλήρωσης μπορούν σημαντικά να περιοριστούν με την υποδιαίρεση της προσάυξης σε περισσότερα βήματα (sub-incrementation). Χρησιμοποιώντας αυτήν την τεχνική, η προσάυξη ανηγμένη παραμόρφωση διαιρείται σε m βήματα, $q\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ το καθένα, όπου $q=1/m$, και στη συνέχεια εφαρμόζεται η τυπική διαδικασία της εμπρός ολοκλήρωσης (σε επίπεδο σημείου Gauss) σε κάθε βήμα.

3.7.5. Γενικευμένοι αλγόριθμοι του τραπεζίου ή του μέσου σημείου

Υπάρχει ένας αριθμός διαφορετικών αλγορίθμων ολοκλήρωσης οι οποίοι μπορούν να συμπεριληφθούν στον γενικευμένο αλγόριθμο:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pl}) = \boldsymbol{\sigma}_B - \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} \quad (3.61)$$

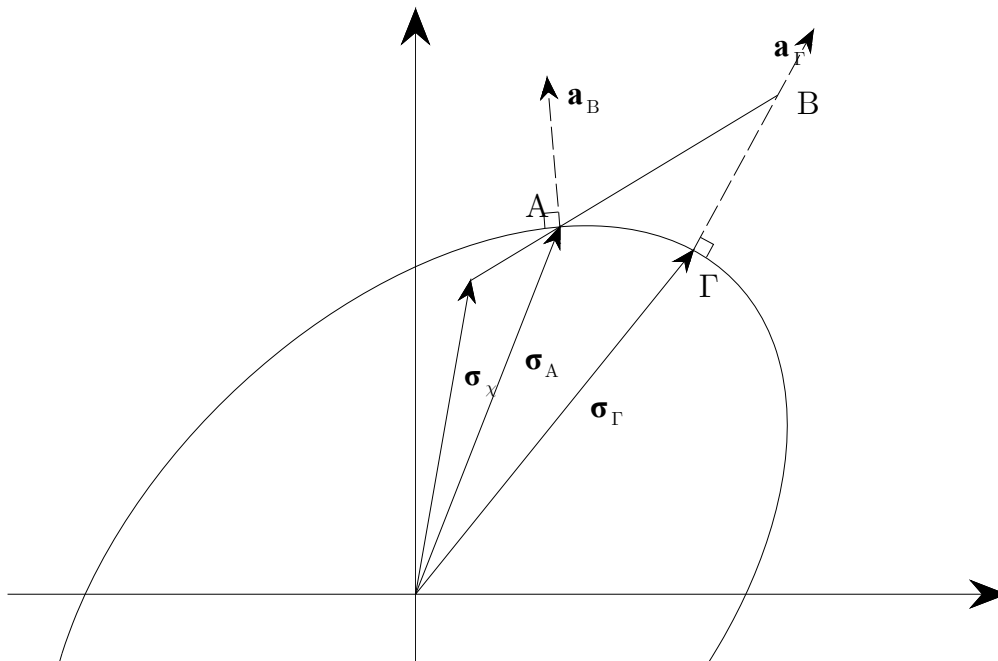
$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \Delta\lambda[(1-\beta)\mathbf{a}_A + \beta\mathbf{a}_C] \quad (3.62)$$

ή

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pl} = \Delta\lambda[a((1-\beta)\boldsymbol{\sigma}_A + \beta\boldsymbol{\sigma}_C)] \quad (3.63)$$

$$f_C = \sigma_{e,C}(\boldsymbol{\sigma}_C) - \sigma_{y,C}(\varepsilon_{ps,C}) = \sigma_{e,C}(\boldsymbol{\sigma}_C) - \sigma_{y,C}(\varepsilon_{ps,B} + \Delta\varepsilon_{ps}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{pl})) \quad (3.64)$$

όπου, στο Σχήμα 3-8, το A είναι το σημείο έναρξης και C είναι το τελικό σημείο στην επιφάνεια διαρροής. Εάν $\beta=0$, οι εξισώσεις (3.62) και (3.63) ταυτίζονται και προκύπτει ο εφαπτομενικός αλγόριθμος της εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, αυτός ο αλγόριθμος δεν εξασφαλίζει απευθείας ότι οι τάσεις ικανοποιούν το κριτήριο διαρροής και συνεπώς δεν επαληθεύεται η εξίσωση (3.64).



Σχήμα 3-8 Γενικευμένες διαδικασίες ολοκλήρωσης και πίσω ολοκλήρωση κατά Euler. Τα διανύσματα ροής (flow vectors) \mathbf{a}_A και \mathbf{a}_C

Εάν $\beta=1$, προκύπτει ο αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler (“backward-Euler” algorithm) ή του «πλησιέστερου σημείου» (“closest point” algorithm). Μια ελαφρώς τροποποιημένη εκδοχή αυτού του αλγορίθμου αναλύθηκε στην παράγραφο 3.7.2. Εντούτοις, σε αντίθεση με τον αλγόριθμο στο Σχήμα 3-6(β), η πλήρης διαδικασία πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler εμπλέκει το διάνυσμα \mathbf{a}_C , το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής στην τελική θέση C, για την οποία οι τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_C$ επαληθεύουν τη σχέση (3.64). Εκτός ειδικών περιπτώσεων, το \mathbf{a}_C δεν μπορεί άμεσα να υπολογιστεί από τα δεδομένα στο A ή στο B (Σχήμα 3-8). Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια επαναληπτική διαδικασία σε επίπεδο των σημείων Gauss ώστε να επιλυθούν οι μη γραμμικές εξισώσεις (3.61)-(3.64). Η διαδικασία αυτή θα περιγραφεί αναλυτικότερα στην επόμενη παράγραφο.

Για $0 < \beta < 1$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε η εξίσωση (3.62) είτε η (3.63) για την πλαστική ροή. Στην πρώτη περίπτωση, προκύπτει ο γενικευμένος κανόνας του τραπεζίου ενώ στη δεύτερη προκύπτει ένας γενικευμένος κανόνας του μέσου σημείου. Για $\beta = \frac{1}{2}$, η πρώτη διαδικασία συμπίπτει με τη διαδικασία της μεσοκαθέτου (mean-normal procedure) των Rice και Tracey, η οποία επινοήθηκε για το τρισδιάστατο κριτήριο διαρροής του Von Mises με τέλεια πλαστικότητα. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει μια απλή τροποποίηση στη διαδικασία της εμπρός ολοκλήρωσης κατά Euler. Συγκεκριμένα:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2} \Delta \lambda (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B) \quad (3.65)$$

όπου \mathbf{a}_B είναι το κάθετο διάνυσμα στη διευρυμένη επιφάνεια διαρροής στη δοκιμαστική ελαστική θέση B (Σχήμα 3-7). Η σχέση αυτή συνδυάζεται με τη συνθήκη:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B)^T \Delta \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.66)$$

στη θέση της διαφορικής μορφής της σχέσης (3.7). Για το τρισδιάστατο κριτήριο διαρροής του Von Mises στην τέλεια πλαστικότητα, αυτή η διαδικασία εξασφαλίζει ότι οι τελικές τάσεις κείνται επί της επιφάνειας διαρροής και δεν απαιτούνται επαναλήψεις στο επίπεδο των σημείων Gauss.

Για το κριτήριο διαρροής του Von Mises με γραμμική κράτυνση, ο γενικευμένος κανόνας του τραπεζίου (σχέση (3.62)) και του μέσου σημείου (σχέση (3.63)) ταυτίζονται. Πάντως, έχει βρεθεί ότι για μεγάλα βήματα, ο αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler ($\beta=1$) είναι καλύτερος. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι μόνο με $\beta=1$, δεν είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί το σημείο τομής της ελαστικής πρόλεξης με την επιφάνεια διαρροής, δηλαδή για $\beta < 1$, το $\boldsymbol{\sigma}_A$ στην εξίσωση (3.61) πρέπει να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής, ενώ για $\beta=1$ το $\boldsymbol{\sigma}_A$ δεν απαιτείται (Σχήμα 3-8).

3.7.6. Ο αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler (backward-Euler return)

Ο αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler βασίζεται στην εξίσωση:

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\lambda \mathbf{C}\mathbf{a}_C \quad (3.67)$$

η οποία μπορεί να προκύψει από τις σχέσεις (3.61), (3.62) και (3.63) με $\beta=1$. Μια αρχική εκτίμηση για το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}_C$ μπορεί να δοθεί από τη δεύτερη μέθοδο της παραγράφου 3.7.2. Γενικά, αυτή η αρχική εκτίμηση δε θα ικανοποιεί τη συνάρτηση διαρροής και θα απαιτούνται περαιτέρω επαναλήψεις διότι το κάθετο διάνυσμα στο δοκιμαστικό σημείο B (Σχήμα 3-7) δε θα είναι σε κάθε περίπτωση ίσο με το τελικό κάθετο διάνυσμα. Προκειμένου να εξαχθεί ένας τέτοιος επαναληπτικός βρόχος, ορίζεται ένα διάνυσμα \mathbf{r} που θα αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ του τρέχοντος διανύσματος των τάσεων και των τάσεων που προκύπτουν από τον αλγόριθμο πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, δηλαδή:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta\lambda \mathbf{C}\mathbf{a}_C) \quad (3.68)$$

και στη συνέχεια πραγματοποιούνται επαναλήψεις ώστε το διάνυσμα \mathbf{r} να γίνει (σχεδόν) μηδενικό ενώ, παράλληλα, θα επαληθεύεται το κριτήριο διαρροής, $f=0$.

Η εξίσωση (3.68) μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor (της οποίας αποκόπτονται οι όροι ανώτερης τάξεως), με τις δοκιμαστικές ελαστικές τάσεις $\boldsymbol{\sigma}_B$ να διατηρούνται σταθερές. Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτει ένα νέο υπόλοιπο r_n , όπου:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} \mathbf{C}\mathbf{a} + \Delta\lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.69)$$

το $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ είναι η μεταβολή του διανύσματος $\boldsymbol{\sigma}$ και το $\dot{\lambda}$ είναι η μεταβολή στο $\Delta\lambda$. Θέτοντας $r_n=0$, προκύπτει:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left(\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \dot{\lambda} \mathbf{C}\mathbf{a}) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{a} \quad (3.70)$$

Επίσης, αναπτύσσεται σε σειρά Taylor και η συνάρτηση διαρροής (3.64), οπότε προκύπτει:

$$f_{C,n} = f_{C,0} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = f_{C,0} + \mathbf{a}_C^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + A'_C \dot{\lambda} = 0 \quad (3.71)$$

και λύνοντας ως προς $\dot{\lambda}$ (και παραλείποντας το δείκτη C) εξάγεται:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{a} + A'} \quad (3.72)$$

Συνεπώς, η σχέση (3.70) μπορεί να επιλυθεί για να δώσει την επαναληπτική μεταβολή της τάσης $\dot{\sigma}$. Επίσης, από την σχέση (3.17), η επαναληπτική μεταβολή στην ισοδύναμη πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση είναι:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = B(\{\sigma\})\dot{\lambda} \quad (3.73)$$

όπου για πολλές συναρτήσεις διαρροής ισχύει $B(\{\sigma\})=1$.

3.8. Το συνεπές εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο (consistent tangent modular matrix)

Οι Simo και Taylor και οι Runesson και Samuelsson διατύπωσαν ένα εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο το οποίο είναι πλήρως συνεπές με τον αλγόριθμο πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler. Η χρήση του συνεπούς εφαπτομενικού καταστατικού μητρώου έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνεται η ταχύτητα σύγκλισης, αν χρησιμοποιείται αλγόριθμος Newton Raphson, και να μειώνεται ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτείται για τη σύγκλιση.

Ο τυπικός αλγόριθμος της πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση (3.67) ως:

$$\sigma = \sigma_B - \Delta\lambda C\mathbf{a} \quad (3.74)$$

από όπου παραλείπεται ο δείκτης C , που σχετίζεται με την τρέχουσα διαμόρφωση που έχει προκύψει μετά την επιστροφή στην επιφάνεια διαρροής (Σχήμα 3-8). Έτσι, μια μεταβλητή που δεν έχει δείκτη θεωρείται ότι αναφέρεται σε αυτήν τη διαμόρφωση. Ο δείκτης B στη σχέση (3.74) υποδηλώνει ότι οι τάσεις σ_B είναι οι ελαστικές δοκιμαστικές τάσεις (Σχήμα 3-8). Η παραγωγή της σχέσης (3.74) δίνει:

$$\dot{\sigma} = C\dot{\epsilon} - \dot{\lambda}C\mathbf{a} - \Delta\lambda C \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (3.75)$$

Από την εξίσωση (3.75), προκύπτει:

$$\dot{\sigma} = -\left(\mathbf{I} + \Delta\lambda C \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \sigma}\right)^{-1} C(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda}\mathbf{a}) = -\mathbf{Q}^{-1}C(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda}\mathbf{a}) = \mathbf{R}(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda}\mathbf{a}) \quad (3.76)$$

όπου το μητρώο \mathbf{Q} έχει εμφανιστεί και πριν στη σχέση (3.70).

Για να παραμένει το διάνυσμα των τάσεων στην επιφάνεια διαρροής, πρέπει το \dot{f} να μηδενιστεί και έτσι από τη σχέση (3.18) προκύπτει:

$$\dot{f} = \mathbf{a}^T \dot{\sigma} - A'\dot{\lambda} = \mathbf{a}^T \mathbf{R}\dot{\epsilon} - \dot{\lambda}\mathbf{a}^T \mathbf{R}\mathbf{a} - A'\dot{\lambda} = 0 \quad (3.77)$$

Η παραπάνω σχέση επιλύεται ως προς $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{R}}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + A'} \dot{\mathbf{e}} \quad (3.78)$$

και εισάγεται στη σχέση (3.76). Έτσι, προκύπτει:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + A'} \right) \dot{\mathbf{e}} \quad (3.79)$$

Σε αντίθεση με το συνεπές εφαπτομενικό μητρώο, το τυπικό εφαπτομενικό καταστατικό μητρώο προκύπτει θέτοντας $\Delta \lambda = 0$ στην εξίσωση (3.75). Σε αυτήν την περίπτωση, δε χρησιμοποιείται το μητρώο $\partial \mathbf{a} / \partial \boldsymbol{\sigma}$.

**κεφάλαιο 4. Προσομοίωση και
Επίλυση Προβλημάτων
σε Πολλαπλές Κλίμακες
(Multiscale Modeling)**

4.1. Εισαγωγή

Σχεδόν όλα τα βιομηχανικά και τεχνητά υλικά, όπως επίσης και τα φυσικά υλικά, παρουσιάζουν ετερογένεια σε κάποια συγκεκριμένη κλίμακα. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν συστήματα μεταλλικών κραμάτων, πολυκρυσταλλικά υλικά, σύνθετα και πολυμερή υλικά, πορώδη και ρηγματωμένα μέσα, βιοϋλικά και πολλά υλικά που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές της ηλεκτρονικής. Αυτή η ετερογένεια έχει σημαντικό αντίκτυπο στην παρατηρούμενη μακροσκοπική συμπεριφορά των πολυφασικών αυτών υλικών. Πολλά από τα φαινόμενα που συμβαίνουν σε μακροσκοπικό επίπεδο έχουν την απαρχή τους στη φυσική και τη μηχανική της υποκείμενης μικροδομής. Η συνολική συμπεριφορά των ετερογενών υλικών εξαρτάται ισχυρά από το μέγεθος, το σχήμα, τη χωρική κατανομή και τις ιδιότητες των στοιχείων που απαρτίζουν τη μικροδομή και των αντίστοιχων διεπιφανειών τους. Η μορφολογία της μικροδομής και οι ιδιότητές της μπορεί επίσης να μεταβάλλονται υπό την επίδραση μιας μακροσκοπικής θερμομηχανικής φόρτισης. Κατά συνέπεια, αυτές οι επιρροές της μικροδομής είναι σημαντικές για την επεξεργασία και την αξιοπιστία των υλικών και των παραγόμενων προϊόντων.

Ο καθορισμός των συνολικών μακροσκοπικών χαρακτηριστικών των ετερογενών μέσων είναι ένα ουσιώδες πρόβλημα σε πολλές εφαρμογές του μηχανικού. Η μελέτη της σχέσης μεταξύ των φαινομένων της μικροδομής και της μακροσκοπικής συμπεριφοράς όχι μόνο καθιστά δυνατή την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των υπαρχόντων πολυφασικών υλικών, αλλά και παρέχει ένα εργαλείο σχεδιασμού της μικροδομής ενός υλικού, έτσι ώστε η προκύπτουσα μακροσκοπική συμπεριφορά να παρουσιάζει τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά. Μια επιπρόσθετη πρόκληση για την προσομοίωση σε πολλαπλές κλίμακες (multiscale modeling) προέρχεται από τις συνεχείς τεχνολογικές ανακαλύψεις, π.χ. τη μείωση του μεγέθους των προϊόντων, την ανάπτυξη έξυπνων υλικών που έχουν εφαρμογές στην ηλεκτρονική και την αυξανόμενη πολυπλοκότητα των διαδικασιών μορφοποίησης-έλασης (forming operations). Στις εφαρμογές μικρού μεγέθους, η επίδραση της μικροδομής δε μπορεί πια να θεωρηθεί αμελητέα σε σχέση με το μέγεθος του στοιχείου, οδηγώντας έτσι στα, όπως αποκαλούνται, φαινόμενα κλίμακας (size effects). Τα υλικά που χρησιμοποιούνται στην ηλεκτρονική συνήθως περιλαμβάνουν στοιχεία με μεγάλες θερμομηχανικές αναντιστοιχίες σε συνδυασμό με εξαιρετικά πολύπλοκες διασυνδέσεις. Επιπρόσθετα, οι προχωρημένες διαδικασίες έλασης αναγκάζουν ένα υλικό να υφίσταται σύνθετες διαδρομές φόρτισης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ποικίλει η απόκριση της μικροδομής και εύκολα προκαλεί τη μεταβολή της μικροδομής. Από την οπτική της οικονομίας (χρόνου και κόστους), η διενέργεια απλών πειραματικών μετρήσεων σε έναν αριθμό δειγμάτων υλικού διαφορετικών διαστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη διάφορες ιδιότητες όσον αφορά στη γεωμετρία και στις φυσικές φάσεις, διάφορες αναλογίες όγκων και δρόμους φόρτισης είναι ένα μάλλον ανέφικτο έργο. Συνεπώς, υπάρχει μια επιτακτική ανάγκη για στρατηγικές προσομοίωσης που παρέχουν μια καλύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ μικρο-μακροδομής και μικρο-μακρο-ιδιοτήτων στα πολυφασικά υλικά.

Από την άλλη μεριά, η απευθείας αριθμητική επίλυση των προβλημάτων πολλαπλής κλίμακας είναι δύσκολη ακόμα και με την εμφάνιση των υπερ-υπολογιστών [4]. Η κύρια δυσκολία της απευθείας επίλυσης είναι το μέγεθος του υπολογισμού. Απαιτείται ένα τεράστιο ποσό μνήμης του υπολογιστή και μεγάλος χρόνος επεξεργασίας (CPU time), και όλα αυτά μπορούν πολύ εύκολα να υπερβούν τα όρια των σημερινών υπολογιστικών

δυνατοτήτων. Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως κάποιο βαθμό με την παράλληλη επεξεργασία (parallel computing), παρόλο που το μέγεθος του προβλήματος αυτού καθ' αυτού παραμένει αμείωτο. Κάθε φορά που κάποιος έχει τη δυνατότητα να επιλύσει όλα τα μικρής κλίμακας χαρακτηριστικά ενός φυσικού προβλήματος, οι απευθείας λύσεις παρέχουν ποσοτική πληροφορία των φυσικών διεργασιών σε όλες τις κλίμακες. Άλλωστε, από την άποψη της εφαρμογής, συχνά είναι αρκετό να προβλέψουμε τις μακροσκοπικές ιδιότητες των συστημάτων με πολλαπλές κλίμακες. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η ανάγκη να αναπτυχθεί μια μέθοδος η οποία αποτυπώνει όλες τις επιδράσεις της μικροκλίμακας στη μακροκλίμακα, χωρίς να απαιτείται η πλήρης επίλυση της μικροκλίμακας.

4.2. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων και Προσομοίωση σε Πολλαπλές Κλίμακες

Τις τελευταίες δεκαετίες, έχει αναπτυχθεί ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων προσομοίωσης σε πολλαπλές κλίμακες μέσα στα πλαίσια της ελαστικότητας ή της ελαστοπλαστικής θεωρίας για τα ετερογενή/ανομοιογενή υλικά (heterogeneous materials). Η μακροσκοπική απόκριση είναι δυνατόν να προβλεφθεί ως αποτέλεσμα της λύσης, αναλυτικής ή αριθμητικής, ενός προβλήματος συνοριακών τιμών στο μικροσκοπικό επίπεδο. Για την αναλυτική προσέγγιση, ο Eshelby εξέτασε το σχήμα της ανομοιογένειας μέσω του τανυστή Eshelby και πρότεινε μια ισοδύναμη μέθοδο ενσωμάτωσης. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε περαιτέρω και από άλλους συγγραφείς.

Αν και τα αναλυτικά προσομοιώματα μπορούν να προβλέψουν με αρκετή ακρίβεια τις ισοδύναμες ιδιότητες των υλικών για κατασκευές που έχουν σχετικά απλές γεωμετρίες, δύσκολα μπορούν να περιγράψουν την εξέλιξη των μικροσκοπικών τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων σε πιο πολύπλοκες κατασκευές, στις οποίες είναι απαραίτητη η γνώση των μικροσκοπικών αυτών μεγεθών. Για να παρακαμφτούν αυτές οι δυσκολίες, έχουν προταθεί διάφορες αριθμητικές μέθοδοι ομογενοποίησης, όπως: (α) asymptotic computational homogenization method, (β) multilevel finite element method, (γ) heterogeneous multiscale method, (δ) Voronoi cell method, (ε) RVE (Representative volume element) method. Αξιοσημείωτη μεταξύ των παραπάνω μεθόδων είναι η asymptotic computational homogenization method, στην οποία εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για να υπολογίσει τις ομογενοποιημένες παραμέτρους του υλικού όπως επίσης να εκτιμήσει τις μικροσκοπικές μεταβλητές από τη μακροσκοπική απόκριση.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων σε πολλαπλές κλίμακες (multiscale finite element method / MsFEM) αναπτύχθηκε για την επίλυση δευτέρας τάξεως ελλειπτικών προβλημάτων συνοριακών τιμών. Η κύρια ιδέα της μεθόδου αυτής είναι η αριθμητική κατασκευή των συναρτήσεων βάσης, οι οποίες αποτυπώνουν την πληροφορία της μικροκλίμακας σε κάθε "υπερ-στοιχείο" (coarse element/στοιχείο της διακριτοποίησης στη μακροκλίμακα), επιλύοντας τοπικά προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet. Η MsFEM έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για την αριθμητική προσομοίωση της ροής και της μεταφοράς σε δύο φάσεις σε ιδιαίτερες ανομοιογενή πορώδη υλικά και έχει επεκταθεί και στην επίλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί αρκετές παρόμοιες μέθοδοι όπως οι: multiscale finite volume method και

finite volume multiscale finite element method. Ωστόσο, δεν υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία για τεχνικές επίλυσης με την MsFEM για προβλήματα διανυσματικών πεδίων στην υπολογιστική μηχανική των στερεών, όπου πρέπει να ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα διαστολής και συστολής του αρχικού όγκου (δηλαδή το φαινόμενο του Poisson) στην κατασκευή των αριθμητικών συναρτήσεων βάσης.

Στη συνέχεια, ο Zhang ανέπτυξε την coupling multiscale finite element method για την ανάλυση της στερεοποίησης ενός ανομοιογενούς κορεσμένου πορώδους μέσου. Στο πνεύμα της μεθόδου αυτής, ο ίδιος ανέπτυξε την extended multiscale finite element method (EMsFEM), για την ελαστική και ελαστοπλαστική ανάλυση πλεγμάτων από δικτυώματα. Το σημαντικό χαρακτηριστικό της τελευταίας μεθόδου είναι οι πρόσθετοι όροι σύζευξης (coupling terms) στις αριθμητικές συναρτήσεις βάσης για την παρεμβολή του πεδίου μετατοπίσεων, οι οποίοι εισάγονται με σκοπό να συνυπολογιστεί και το φαινόμενο της αμοιβαίας σύζευξης μεταξύ διαφορετικών διευθύνσεων σε πολυδιάστατα προβλήματα. Αριθμητικές δοκιμές δείχνουν πως η εισαγωγή αυτών των όρων μπορεί να βελτιώσει σημαντικά την ακρίβεια της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων.

Οι συνοριακές συνθήκες για την κατασκευή των αριθμητικών συναρτήσεων βάσης στην MsFEM έχουν μεγάλη επιρροή στην αποτύπωση της πληροφορίας στη μακροκλίμακα. Εάν οι τοπικές συνοριακές συνθήκες για τις συναρτήσεις βάσης δεν αντανακλούν τη φύση των υποκείμενων ανομοιογενειών, τόσο η MsFEM όσο και η EMsFEM μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα. Αυτά τα σφάλματα πολλές φορές συνδέονται με τη σωστή επιλογή του μεγέθους του στοιχείου στη μακροκλίμακα. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των μεταβλητών στη μικροκλίμακα, αφού πρώτα έχει επιλυθεί το πρόβλημα στη μακροκλίμακα (downscaling computation), μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί στην EMsFEM και η πραγματική πληροφορία των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων στη μικροκλίμακα μπορεί να αποκτηθεί ταυτόχρονα όπως επίσης και η μακροσκοπική απόκριση. Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους ομογενοποίησης, το πρόβλημα της μικροκλίμακας στη νέα μέθοδο επιλύεται πλήρως σε κάθε στοιχείο της μακροκλίμακας και όχι στα σημεία Gauss του.

4.3. Εφαρμογή της EMsFEM

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ο σκοπός της μεθόδου αυτής είναι να επιλύσει προβλήματα της μηχανικής, τα οποία χαρακτηρίζονται από πολλαπλές κλίμακες και είναι δυσεπίλυτα χρησιμοποιώντας τις απευθείας αριθμητικές μεθόδους. Η κύρια διαφορά μεταξύ της τυπικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων και της EMsFEM είναι η κατασκευή των συναρτήσεων βάσης. Οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται στην τυπική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κατασκευάζονται σύμφωνα με τις συντεταγμένες των κομβικών σημείων των στοιχείων. Το άγνωστο πεδίο στο εσωτερικό του στοιχείου παρεμβάλλεται μέσω των συναρτήσεων σχήματος, έτσι ώστε οι παράμετροι όπως η αγωγιμότητα, το μέτρο ελαστικότητας και η διαπερατότητα να παραμένουν σταθερές σε κάθε στοιχείο. Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση που λαμβάνεται έχει νόημα μόνο εάν το μέγεθος της διακριτοποίησης είναι μικρότερο από το μέγεθος των ανομοιογενειών. Αυτό θα δημιουργήσει πάρα πολλούς βαθμούς ελευθερίας για προβλήματα με ιδιότητες σε πολλαπλές κλίμακες, με αποτέλεσμα η επίλυσή τους να

γίνει πολύ δύσκολη. Από την άλλη μεριά, οι συναρτήσεις βάσης της EMsFEM κατασκευάζονται αριθμητικά και μπορούν να λάβουν υπόψη τις ετερογένειες του μέσου σε κάθε στοιχείο στη μακροκλίμακα. Σημαντικά χαρακτηριστικά της μικροκλίμακας μπορούν να ενσωματωθούν σε αυτές τις συναρτήσεις βάσης. Έτσι, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρειάζεται να εφαρμοστεί μόνο στη διακριτοποίηση της μακροκλίμακας, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα μειωμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας στο υπολογιστικό προσομοίωμα.

Ας θεωρήσουμε μια κατασκευή σε δύο διαστάσεις από ανομοιογενές υλικό το οποίο καταλαμβάνει την περιοχή Ω και έχει το σύνορο Γ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-1 [11]. Το σύνορο έχει δεσμεύσεις σε κάποια περιοχή, όπου καθορίζονται οι μετατοπίσεις. Επίσης, σε κάποιο τμήμα του συνόρου εφαρμόζεται κατανομημένη δύναμη ανά μήκος (traction). Η εξίσωση ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{D}:\mathbf{E}(\mathbf{u})) &= \bar{\mathbf{f}}, & \text{στο } \Omega \\ \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{T}}, & \text{στο } \Gamma_\sigma \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, & \text{στο } \Gamma_u \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου \mathbf{D} είναι ο τετάρτης τάξης τανυστής της στιβαρότητας που σχετίζεται με τις ιδιότητες του υλικού, $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ είναι ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων που δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (4.2)$$

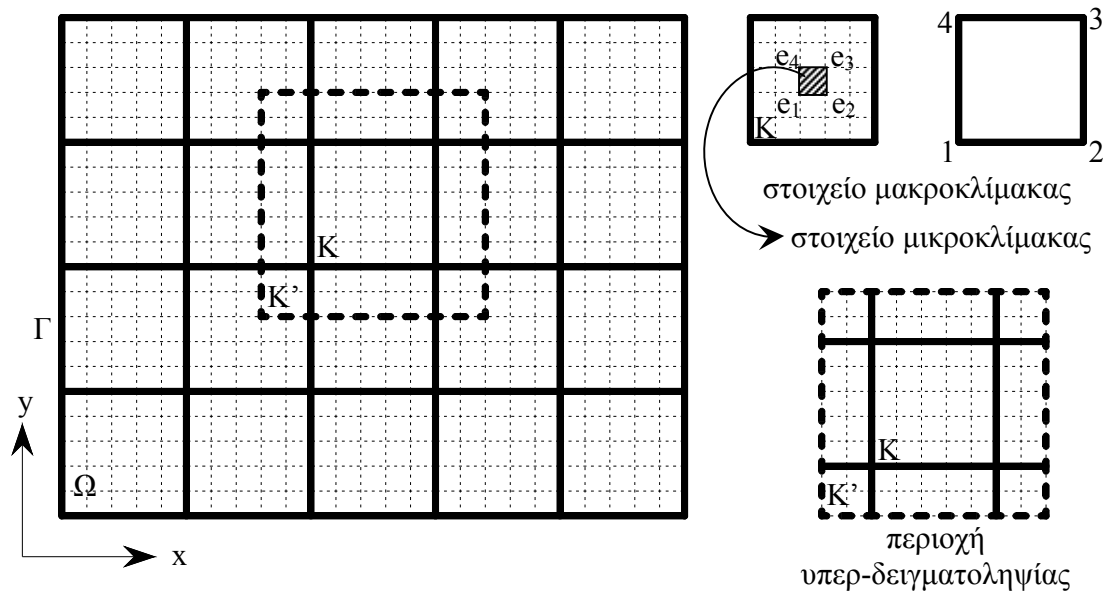
και \mathbf{u} το διάνυσμα των μετατοπίσεων. $\boldsymbol{\sigma}$ είναι το διάνυσμα των τάσεων, το οποίο έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]^T$. $\bar{\mathbf{f}}$ είναι το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων, $\bar{\mathbf{f}} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y]^T$. Γ_σ και Γ_u είναι το τμήμα του συνόρου όπου επιβάλλεται φόρτιση και μετατόπιση αντίστοιχα. \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Η εφαρμογή της μεθόδου περιλαμβάνει δύο σκέλη. Στο πρώτο (micro-scale computation) κατασκευάζονται οι συναρτήσεις βάσης του κάθε στοιχείου της μακροκλίμακας (coarse element) ανεξάρτητα, επιλύοντας τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας στη μικροκλίμακα (sub-grids), και μετά εξάγονται τα ισοδύναμα μητρώα στιβαρότητας των στοιχείων στη μακροκλίμακα. Στο δεύτερο σκέλος (macro-scale computation), αφού έχουν υπολογιστεί τα ισοδύναμα μητρώα στιβαρότητας των “υπερ-στοιχείων” (coarse elements), διενεργείται η ανάλυση με την κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε επίπεδο μακροκλίμακας.

4.3.1. Η κατασκευή των συναρτήσεων βάσης (base functions)

Προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι ετερογένειες σε ένα στοιχείο στη μακροκλίμακα, πρέπει οι συναρτήσεις σχήματος να κατασκευαστούν ξεχωριστά για κάθε διεύθυνση. Στα προβλήματα δύο διαστάσεων, δημιουργούνται ξεχωριστά δύο τύποι συναρτήσεων βάσης για την παρεμβολή του πεδίου μετατοπίσεων. Ο ένας χρησιμοποιείται για την παρεμβολή των μετατοπίσεων στη διεύθυνση x και ο άλλος για τη διεύθυνση y .



Σχήμα 4-1 Σχηματική περιγραφή της μεθόδου προσομοίωσης σε πολλαπλές κλίμακες

Για παράδειγμα, ας πάρουμε ένα στοιχείο της μακροκλίμακας (Σχήμα 4-1). Το στοιχείο καταλαμβάνει μια περιοχή \mathbf{K} , $\mathbf{K} \subset \Omega$. Οι συναρτήσεις βάσης κατασκευάζονται επιλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας στην περιοχή \mathbf{K} με κάποιες συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Από τις εξισώσεις (4.1) και (4.2), μπορεί να εξαχθεί η γενική έκφραση για την επίλυση των συναρτήσεων βάσης για το πρόβλημα δύο διαστάσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{N}_i &= 0 & \text{στο } \mathbf{K} \\ \mathbf{N}_i(x, y) & & i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου το \mathbf{L} είναι ο τελεστής της ελαστικότητας και ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{L}\mathbf{u} = \text{div}\left(\mathbf{D}:\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)\right)$. Το m είναι ο αριθμός των κόμβων ενός στοιχείου στη μακροκλίμακα (χρησιμοποιούνται 4 κόμβοι).

Για το πρόβλημα βαθμωτού πεδίου, η εξίσωση (4.4) λύνεται με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$N_i = N_i^0, \quad \text{στο } \partial K \quad (4.5)$$

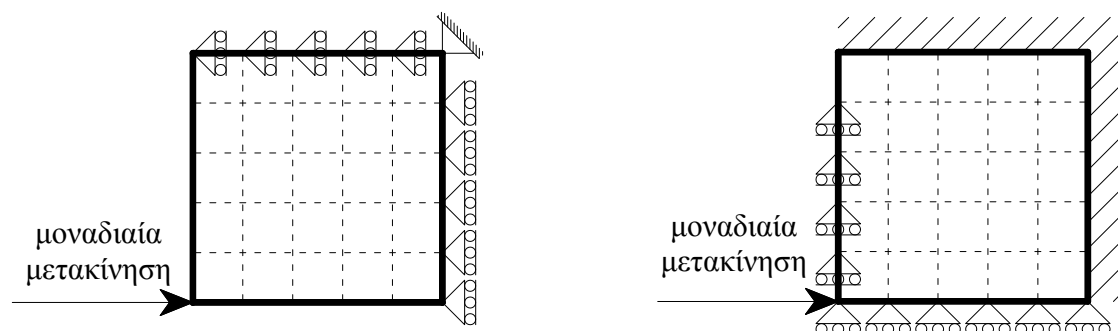
όπου N_i είναι η συνάρτηση βάσης του κόμβου i του δικτύου στη μακροκλίμακα και ικανοποιεί τη σχέση $N_{i|j} = \delta_{ij}$, ($i, j = 1, 2, \dots, m$), όπου $N_{i|j} = N_i(x_j, y_j)$. Το N_i^0 είναι η συνοριακή τιμή που επιβάλλεται για την κατασκευή της συνάρτησης βάσης N_i .

Για το πρόβλημα του διανυσματικού πεδίου δύο διαστάσεων, το N_i έχει δυο συνιστώσες, δηλαδή τα N_i^x και N_i^y , τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν ξεχωριστά λύνοντας τις εξισώσεις (4.4) και (4.5). Το N_i^x χρησιμοποιείται για την παρεμβολή των μετατοπίσεων κατά τη διεύθυνση x και το N_i^y χρησιμοποιείται κατά τη διεύθυνση y . Σε μερικές περιπτώσεις οι συναρτήσεις βάσεις μπορούν να εξαχθούν και αναλυτικά.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η επιλογή των συνοριακών συνθηκών για την κατασκευή των συναρτήσεων βάσης έχει μεγάλη επίδραση στην ακρίβεια της λύσης με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Ακολουθώς, εισάγονται διαφορετικά είδη συνοριακών συνθηκών.

4.3.2. Γραμμικές Συνοριακές Συνθήκες

Ας θεωρήσουμε την κατασκευή του N_1^x , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-2. Για τις γραμμικές συνοριακές συνθήκες, εφαρμόζεται μια μοναδιαία μετατόπιση στον κόμβο 1 κατά τη θετική διεύθυνση x και οι τιμές μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των συνόρων 12 και 14, ακριβώς όπως στις γραμμικές συναρτήσεις σχήματος στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ταυτόχρονα, οι κόμβοι στα σύνορα 34 και 23 δεσμεύονται κατά τη διεύθυνση x . Για να αποφύγουμε τη μετακίνηση στερεού σώματος, οι μετακινήσεις του κόμβου 3 τίθενται μηδενικές και στις δύο διευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, λαμβάνεται το εσωτερικό πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου της μακροκλίμακας λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας (4.4) και (4.5) με την κλασική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, λαμβάνεται η αριθμητική συνάρτηση βάσης $N_{1,xx}$, ενώ οι υπόλοιπες συναρτήσεις βάσης παράγονται με τον ίδιο τρόπο.

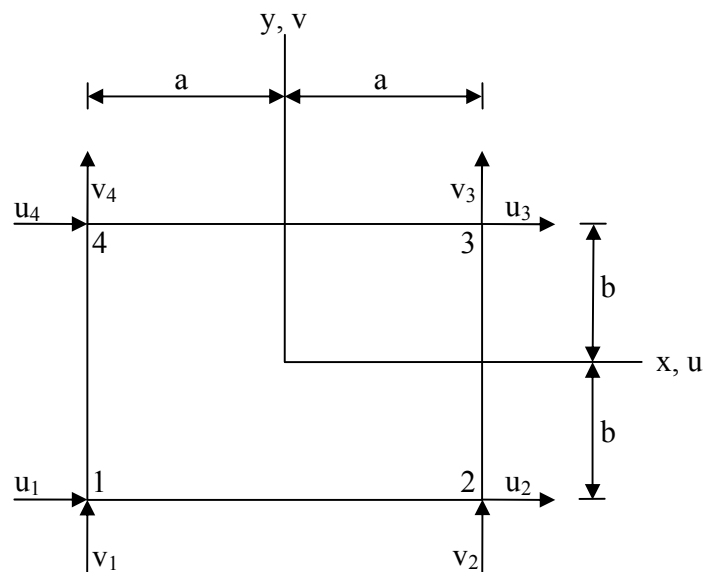


Σχήμα 4-2 Οι αριθμητικές μέθοδοι κατασκευής των συναρτήσεων βάσης: (α) συνοριακές δεσμεύσεις I, (β) συνοριακές δεσμεύσεις II

Μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις βάσης που παρήχθησαν παραπάνω ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{i=1}^4 N_{i,xx} = 1$ και $\sum_{i=1}^4 N_{i,yy} = 1$. Συγκεκριμένα, για τα ομογενή υλικά, οι τιμές των συναρτήσεων βάσης είναι ίσες με τις τυπικές γραμμικές συναρτήσεις σχήματος του ορθογώνιου τετρακομβικού στοιχείου. Για παράδειγμα, σε σχέση με το Σχήμα 4-3, προκύπτει η ακόλουθη σχέση (όταν το υλικό είναι ομογενές)

$$N_i = N_{i,xx} = N_{i,yy} = \frac{(a+x_0)(b+y_0)}{4ab} \quad (4.6)$$

όπου $x_0 = x_i x/a$, $y_0 = y_i y/b$ και N_i είναι η συνάρτηση σχήματος για τον κόμβο i .



Σχήμα 4-3 Ορθογώνιο τετρακομβικό στοιχείο

Παρ' όλα αυτά, όταν υπάρχουν πιο περίπλοκες συνοριακές συνθήκες και φορτίσεις, η ακρίβεια της παραπάνω μεθόδου δεν είναι ικανοποιητική. Ως εκ τούτου, ακολουθεί μια τροποποίηση της μεθόδου, η οποία φαίνεται στο Σχήμα 4-2(β), έτσι ώστε οι συναρτήσεις βάσης να εξάγονται με πιο ακριβή τρόπο. Το σημαντικό σημείο είναι οι πρόσθετοι όροι που εισάγονται στις συναρτήσεις βάσης, έτσι ώστε να συνυπολογιστεί το φαινόμενο αμοιβαίας σύζευξης μεταξύ των διαφορετικών διευθύνσεων στα προβλήματα πολλών διαστάσεων.

Σε αντίθεση με τις συνοριακές συνθήκες που φαίνονται στο Σχήμα 4-2(α), στη βελτιωμένη μέθοδο κατασκευής οι κόμβοι των συνόρων δεσμεύονται όλοι κατά τη διεύθυνση y , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-2(β). Για τις γραμμικές συνοριακές συνθήκες, επιβάλλεται μια μοναδιαία μετακίνηση στον κόμβο 1 κατά τη θετική διεύθυνση x και οι τιμές μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών 12 και 14, ακριβώς όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Σε αντίθεση με το τι συμβαίνει στη CMsFEM, στην EMsFEM εισάγεται ο όρος $N_{i,yy}$, ο οποίος είναι ένας πρόσθετος όρος σύζευξης και αποτελεί το πεδίο μετακίνησης κατά τη διεύθυνση y στο εσωτερικό του στοιχείου, που

οφείλεται στη μοναδιαία μετακίνηση του κόμβου i κατά τη διεύθυνση x . Έτσι, λαμβάνονται οι συναρτήσεις βάσης $N_1^x = \{N_{1,xx} \quad N_{1,yx}\}$.

Μπορεί να επαληθευτεί ότι οι συναρτήσεις βάσης που κατασκευάστηκαν παραπάνω ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 N_{i,xx} = 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^4 N_{i,yy} = 1 \\ \sum_{i=1}^4 N_{i,yx} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^4 N_{i,xy} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Από τη στιγμή που θα παραχθούν οι συναρτήσεις βάσης, το πεδίο της μετατόπισης μέσα σε ένα στοιχείο της μακροκλίμακας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_{i,xx} u'_i + \sum_{i=1}^4 N_{i,xy} u'_i \quad (4.8)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_{i,yy} v'_i + \sum_{i=1}^4 N_{i,yx} v'_i \quad (4.9)$$

Οι εξισώσεις (4.8) και (4.9) μπορούν να εκφραστούν σε μια πιο ενοποιημένη μορφή ως:

$$\{u\} = [N] \{u'_E\} \quad (4.10)$$

όπου $[N]$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων βάσης του στοιχείου στη μακροκλίμακα, $\{u\}$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων των κόμβων στο δίκτυο διακριτοποίησης στη μικροκλίμακα και $\{u'_E\}$ είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων των κόμβων της μακροκλίμακας. Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n\}^T \\ \mathbf{N} &= [\mathbf{R}_1^T \quad \mathbf{R}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{R}_n^T]^T \\ \mathbf{u}'_E &= \{u'_1 \quad v'_1 \quad u'_2 \quad v'_2 \quad u'_3 \quad v'_3 \quad u'_4 \quad v'_4\}^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου

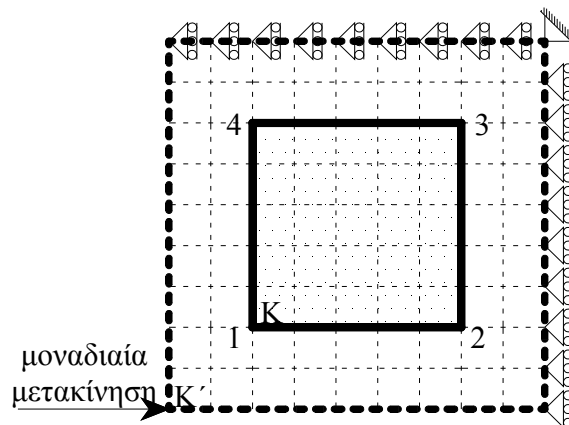
$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} N_{1,xx}(i) & N_{1,xy}(i) & N_{2,xx}(i) & N_{2,xy}(i) & N_{3,xx}(i) & N_{3,xy}(i) & N_{4,xx}(i) & N_{4,xy}(i) \\ N_{1,yx}(i) & N_{1,yy}(i) & N_{2,yx}(i) & N_{2,yy}(i) & N_{3,yx}(i) & N_{3,yy}(i) & N_{4,yx}(i) & N_{4,yy}(i) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

και n είναι ο συνολικός αριθμός των κόμβων στο δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων της μικροκλίμακας.

4.3.3. Η Τροποποιημένη Τεχνική Υπερ-δειγματοληψίας (modified oversampling technique)

Είναι προφανές ότι οι συνοριακές συνθήκες των συναρτήσεων βάσης πρέπει να αντανακλούν την ταλάντωση/διακύμανση της λύσης κατά μήκος του συνόρου των στοιχείων σε επίπεδο μικροκλίμακας. Όταν επιλέγονται οι γραμμικές συνοριακές συνθήκες για να εξαχθούν οι συναρτήσεις βάσεως, οι συνθήκες αυτές επιβάλλουν πολύ αυστηρούς περιορισμούς στην παραμόρφωση των εξωτερικών στοιχείων σε επίπεδο μικροκλίμακας. Αυτοί οι τεχνητοί περιορισμοί έχουν ως αποτέλεσμα να υπερεκτιμάται το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας, ειδικά για τα πολύ ανομοιογενή υλικά. Η τεχνική υπερ-δειγματοληψίας έχει προταθεί για την εξαγωγή πιο αξιόπιστων συναρτήσεων βάσης στην MsFEM.



Σχήμα 4-4 Η τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας

Ας θεωρήσουμε μία ευρύτερη περιοχή K' η οποία καλύπτει το υπερ-στοιχείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-4. Το $\Delta 1234$ είναι το πρωταρχικό στοιχείο και $\Delta 1'2'3'4'$ είναι το στοιχείο της υπερ-δειγματοληψίας. Αρχικά, εξάγονται οι προσωρινές συναρτήσεις βάσης $\psi_{j'}$, ($j' = 1', 2', 3', 4'$), του στοιχείου υπερ-δειγματοληψίας με τις γραμμικές συνοριακές συνθήκες που φαίνονται στο Σχήμα 4-4 (εδώ, λαμβάνεται ως παράδειγμα η $\psi_{1',xx}$), οι οποίες είναι ίδιες ακριβώς με αυτές στο Σχήμα 4-2(α) χωρίς θεώρηση των πρόσθετων όρων σύζευξης. Στη συνέχεια, οι προσωρινές συναρτήσεις βάσης φ_i του πρωταρχικού στοιχείου (της μακροκλίμακας) κατασκευάζονται μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού των $\psi_{j'}$, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\varphi_{i,xx} &= \sum_{j=1}^4 c_{ij}^x \psi_{j',xx} \\ \varphi_{i,yy} &= \sum_{j=1}^4 c_{ij}^y \psi_{j',yy}\end{aligned}\tag{4.13}$$

όπου c_{ij}^x και c_{ij}^y είναι σταθερές οι οποίες ορίζονται από τη συνθήκη $\varphi_{i,xx}|_j = \delta_{ij}$ και $\varphi_{i,yy}|_j = \delta_{ij}$, αντίστοιχα. Οι προσωρινές συναρτήσεις βάσης φ_i που εξάγονται ικανοποιούν τις σχέσεις: $\sum_{i=1}^4 \varphi_{i,xx} = 1$ και $\sum_{i=1}^4 \varphi_{i,yy} = 1$.

Εάν οι προσωρινές συναρτήσεις βάσης $\varphi_{i,xx}$ και $\varphi_{i,yy}$ χρησιμοποιηθούν απευθείας ως οι τελικές συναρτήσεις βάσης του ζητούμενου στοιχείου της μακροκλίμακας, δηλαδή $N_{i,xx} = \varphi_{i,xx}$ και $N_{i,yy} = \varphi_{i,yy}$, τότε η μέθοδος ονομάζεται ως CMsFEM-O.

Η μέθοδος αυτή έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως. Ωστόσο, η ακρίβειά της μπορεί να μην είναι ικανοποιητική σε ορισμένες περιπτώσεις και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι πρόσθετοι όροι σύζευξης στις εξισώσεις (4.8) και (4.9) δεν περιλαμβάνονται στις συναρτήσεις βάσης.

Για να βελτιώσουμε τη CMsFEM-O, οι τιμές των προσωρινών συναρτήσεων βάσης φ_i στα σύνορα του στοιχείου μπορούν να οριστούν ως συνοριακές συνθήκες (oscillatory boundary conditions) του $\Delta 1234$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-4. Τότε, οι τελικές συναρτήσεις βάσης για το στοιχείο της μακροκλίμακας μπορούν να παραχθούν με βάση τις συνοριακές συνθήκες που δίνονται στο Σχήμα 4-2(β). Χωρίς βλάβη της γενικότητας. Οι συναρτήσεις $\mathbf{N}_i^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yy}\}$ μπορούν να εξαχθούν λύνοντας το παρακάτω πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{N}_i^x &= 0 && \text{στο } \mathbf{K} \\ N_{i,xx}(x,y) &= \varphi_{i,xx}, \quad N_{i,yy}(x,y) = 0 && \text{στο } \partial\mathbf{K} \\ i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.14)$$

Έτσι, εάν χρησιμοποιηθούν ως τελικές συναρτήσεις βάσης του ζητούμενου στοιχείου οι συναρτήσεις που λαμβάνονται από τη επίλυση των εξισώσεων (4.14), η μέθοδος ονομάζεται EMsFEM-O.

Είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι εάν η περιοχή υπερ-δειγματοληψίας που θα χρησιμοποιηθεί είναι τόσο όση και η περιοχή που καταλαμβάνει και το ζητούμενο στοιχείο της μακροκλίμακας, τότε η τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας δε λειτουργεί. Σε αυτήν την περίπτωση, οι συναρτήσεις βάσης κατασκευάζονται απευθείας με τις γραμμικές συνοριακές συνθήκες, όπως περιγράφονται στην παράγραφο 4.3.2.

Γενικά, για την ανάλυση ανομοιογενών υλικών, η τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας βελτιώνει την ακρίβεια της EMsFEM. Καθώς αυξάνεται το μέγεθος της περιοχής υπερ-δειγματοληψίας, τα αποτελέσματα που λαμβάνονται προσεγγίζουν τις τιμές αναφοράς που προκύπτουν από την απευθείας μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, αρκετές φορές παρουσιάζουν και πάλι μεγάλο σφάλμα, ακόμα και με μεγάλη περιοχή υπερ-δειγματοληψίας. Αυτό συμβαίνει ειδικά στις κατασκευές των οποίων η μακροκλίμακα πλησιάζει τη μικροκλίμακα του προβλήματος. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω δυσκολιών προτείνεται η μέθοδος των περιοδικών συνοριακών συνθηκών, που αναλύεται στην επόμενη παράγραφο.

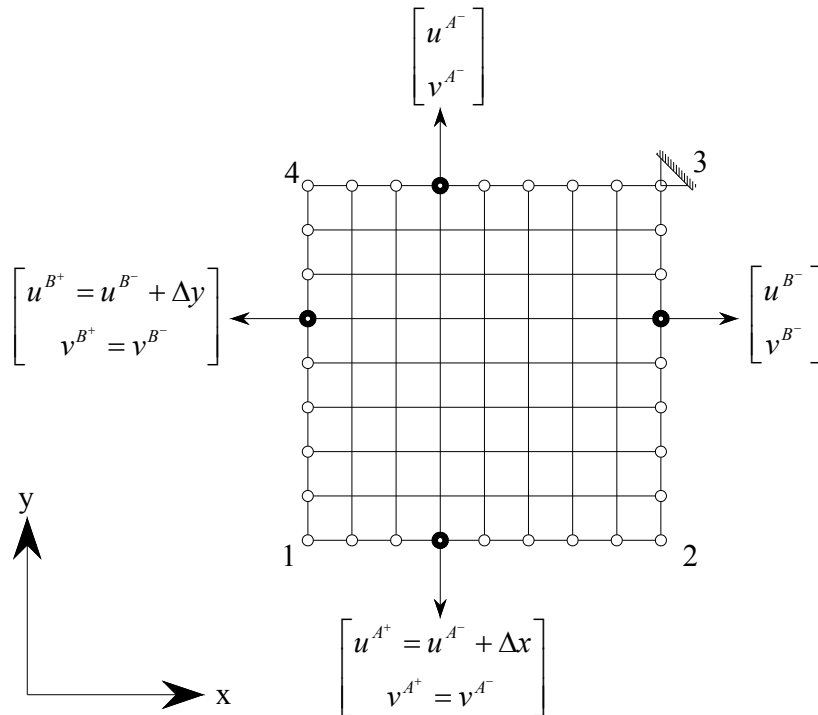
4.3.4. Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες (EMsFEM-P)

Ας θεωρήσουμε μια κατασκευή που αποτελείται από μια περιοδική διάταξη επαναλαμβανόμενων αντιπροσωπευτικών στοιχείων (representative volume elements-RVEs). Δεδομένου ότι η παραπάνω περιοδική κατασκευή αναπαριστά ένα συνεχές φυσικό σώμα, τα σύνορα των γειτονικών αντιπροσωπευτικών στοιχείων (RVEs) θα πρέπει να ικανοποιούν δύο συνθήκες συνέχειας, της μετακίνησης και των τάσεων. Με βάση τα παραπάνω αναπτύχθηκαν οι Περιοδικές Συνοριακές Συνθήκες για την πρόβλεψη της μακροσκοπικής μηχανικής απόκρισης των σύνθετων υλικών,

Η γενική έκφραση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών μπορεί να δοθεί ως εξής:

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j + v_i, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.15)$$

όπου ε_{ij}^0 είναι ο μέσος όρος των ανηγμένων παραμορφώσεων, x_j είναι ένα διάνυσμα θέσης από ένα σημείο αναφοράς σε ένα σημείο στο σύνορο και v_i μπορεί να θεωρηθεί η τοπική διακύμανση κατά μήκος των επιφανειών του συνόρου, η οποία είναι άγνωστη και εξαρτώμενη από το ασκούμενο φορτίο.



Σχήμα 4-5 Περιοδικές συνοριακές συνθήκες για την κατασκευή της συνάρτησης βάσης $N_{1,xx}$

Στη λογική των παραπάνω συνοριακών συνθηκών, οι Zhang, Wu, Lü και Fu υποθέτουν ότι η τοπική περιοδικότητα της μορφολογίας είναι εφαρμόσιμη και στην EMsFEM για περιοδικές κατασκευές. Ας θεωρήσουμε έναν αντιπροσωπευτικό όγκο (RVE-unit cell), με κορυφές 1, 2, 3, 4 οι οποίες διασυνδέονται μέσω των συνόρων Γ_{12} ,

Γ_{23} , Γ_{43} και Γ_{14} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-5. Αντί των επιβαλλόμενων μετατοπίσεων που χρησιμοποιούνται στις γραμμικές συνοριακές συνθήκες, εφαρμόζονται κινηματικοί περιορισμοί στα σύνορα για να διασφαλίσουν την περιοδικότητα του προσομοιώματος στην παραμορφωμένη διαμόρφωση.

Ας παρακολουθήσουμε για παράδειγμα την κατασκευή των συναρτήσεων $\mathbf{N}_1^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yy}\}$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-5, οι συνοριακές συνθήκες για ένα ζευγάρι των αντίστοιχων κόμβων (A^+, A^-) στις απέναντι πλευρές Γ_{12} και Γ_{43} μπορούν να δοθούν από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} u^{A^+} - u^{A^-} &= \Delta x \\ v^{A^+} &= v^{A^-} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Παρόμοια, οι συνοριακές συνθήκες για ένα ζευγάρι των αντίστοιχων κόμβων (B^+, B^-) στις απέναντι πλευρές Γ_{14} και Γ_{23} μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\begin{aligned} u^{B^+} - u^{B^-} &= \Delta y \\ v^{B^+} &= v^{B^-} \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου Δx και Δy είναι δεδομένες σταθερές, των οποίων οι τιμές στον κόμβο 1 τίθενται ίσες με τη μονάδα και μηδενίζονται στους κόμβους 2 και 4. Για τους υπόλοιπους κόμβους, οι τιμές των Δx και Δy μεταβάλλονται γραμμικά κατά μήκος των πλευρών Γ_{12} και Γ_{14} , αντίστοιχα. Οι μετακινήσεις του κόμβου 3 δεσμεύονται και κατά τις δύο διευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας τους κινηματικούς περιορισμούς που περιγράφηκαν παραπάνω, μπορεί να βρεθεί το συνολικό πεδίο των μετατοπίσεων σε ένα στοιχείο της μακροκλίμακας επιλύοντας τις εξισώσεις ισορροπίας (4.4) με τη βοήθεια των κλασικών πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, λαμβάνονται οι συναρτήσεις βάσης $\mathbf{N}_1^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yy}\}$.

4.3.5. Περιοδικές συνοριακές συνθήκες συνδυασμένες με την τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας (oversampling technique/EMsFEM-OP)

Στη βάση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών και της τεχνικής της υπερ-δειγματοληψίας, που εισήχθησαν παραπάνω, προτείνεται στο σημείο αυτό από τους Zhang, Wu, Lü και Fu η μέθοδος των γενικευμένων περιοδικών συνοριακών συνθηκών για τυχαία ανομοιογενή υλικά. Αρχικά, χρησιμοποιείται μόνο η τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας για να εξαχθούν οι συνοριακές συνθήκες (oscillatory boundary conditions). Ακολούθως, βάσει των παραπάνω συνοριακών συνθηκών, εξάγονται και εφαρμόζονται στο ζητούμενο στοιχείο της μακροκλίμακας οι κινηματικοί περιορισμοί, για να υπολογιστούν οι απαιτούμενες συναρτήσεις βάσης, οι οποίες είναι διαφορετικές από τις συναρτήσεις που προκύπτουν από την τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας, όπου οι συνοριακές συνθήκες (oscillatory boundary conditions) επιβάλλονται άμεσα στο ζητούμενο στοιχείο (χωρίς να τεθούν κινηματικοί περιορισμοί).

Ας πάρουμε για παράδειγμα την κατασκευή των συναρτήσεων $\mathbf{N}_1^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yx}\}$. Η αριθμητική διαδικασία έχει ως εξής:

- (1) Χρησιμοποιείται η τεχνική υπερ-δειγματοληψίας για να αποκτήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (oscillatory boundary conditions) για τις συναρτήσεις βάσης, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3.3. Με βάση το Σχήμα 4-5, οι μετακινήσεις κατά τη διεύθυνση x ενός ζεύγους κόμβων (A^+, A^-) στις απέναντι πλευρές είναι u'_{A^+} και u'_{A^-} , αντίστοιχα.
- (2) Με τις συνοριακές συνθήκες (oscillatory b. c.) που παρήχθησαν παραπάνω εξάγονται οι κινηματικές δεσμεύσεις και εφαρμόζονται στο ζητούμενο στοιχείο της μακροκλίμακας, δηλαδή για τους αντίστοιχους κόμβους (A^+, A^-) οι κινηματικές δεσμεύσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{aligned} u^{A^+} - u^{A^-} &= u'_{A^+} - u'_{A^-} \\ v^{A^+} - v^{A^-} &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

(οι κινηματικές δεσμεύσεις για τους κόμβους (B^+, B^-) μπορούν να προκύψουν αντίστοιχα)

- (3) Χρησιμοποιώντας τις κινηματικές δεσμεύσεις που περιγράφηκαν πάνω, κατασκευάζονται οι συναρτήσεις βάσης $\mathbf{N}_1^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yx}\}$ για το στοιχείο της μακροκλίμακας.

4.4. Ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας ενός στοιχείου στη μακροκλίμακα (equivalent stiffness matrix of a coarse element)

Αφού παραχθούν οι συναρτήσεις βάσης, μπορεί να εξαχθεί και το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου στη μακροκλίμακα. Ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο στοιχείο e (της μικροκλίμακας), το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός “υπερ-στοιχείου” (στοιχείο της μακροκλίμακας), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-1. Το στοιχείο της μικροκλίμακας έχει τους κόμβους e_1, e_2, e_3 και e_4 . Η ενέργεια παραμορφώσεως του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [K_e] \{u_e\}, \quad [K_e] = \int_{\Omega_e} [B_e]^T [D_e] [B_e] t d\Omega_e \quad (4.19)$$

όπου $\{u_e\}$ είναι το διάνυσμα μετακινήσεων του στοιχείου e , $[K_e]$ είναι το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, t είναι το πάχος του στοιχείου, $[B_e]$ και $[D_e]$ είναι το μητρώο παραμορφώσεως και το καταστατικό μητρώο (ελαστικότητας), αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.10)-(4.12), προκύπτει:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{G}_e \mathbf{u}'_E, \quad \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e1} \\ \mathbf{R}_{e2} \\ \mathbf{R}_{e3} \\ \mathbf{R}_{e4} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

όπου \mathbf{G}_e είναι ένα μητρώο μετασχηματισμού το οποίο εκφράζει τη σχέση αντιστοίχισης μεταξύ των διανυσμάτων μετακίνησης των κόμβων της μικροκλίμακας και των κόμβων της μακροκλίμακας. Η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου τώρα γράφεται ως εξής:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_E\}^T \{\mathbf{G}_e\}^T [\mathbf{K}_e] \{\mathbf{G}_e\} \{\mathbf{u}'_E\} \quad (4.21)$$

Αθροίζοντας την ενέργεια παραμόρφωσης από όλα τα στοιχεία της μικροκλίμακας που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός «υπερ-στοιχείου» (στοιχείου της μακροκλίμακας), προκύπτει η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης του «υπερ-στοιχείου» ως εξής:

$$\Pi_E = \sum_{e=1}^p \Pi_e = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}'_E\}^T \left(\sum_{e=1}^p \{\mathbf{G}_e\}^T [\mathbf{K}_e] \{\mathbf{G}_e\} \right) \{\mathbf{u}'_E\} \quad (4.22)$$

όπου p είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της μικροκλίμακας μέσα σε ένα στοιχείο της μακροκλίμακας. Με αυτόν τον τρόπο, η συνολική ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου της μακροκλίμακας μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του διανύσματος των μετακινήσεων τεσσάρων κόμβων της μακροκλίμακας.

Συνεπώς, το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου της μακροκλίμακας μπορεί να εκφραστεί από τον ακόλουθο τύπο:

$$[\mathbf{K}_E] = \sum_{e=1}^p [\mathbf{K}'_E], \quad [\mathbf{K}'_E] = \{\mathbf{G}_e\}^T [\mathbf{K}_e] \{\mathbf{G}_e\} \quad (4.23)$$

4.5. Υπολογισμοί στο επίπεδο της μακροκλίμακας

Στην προηγούμενη παράγραφο, αναφέρθηκε η διαδικασία υπολογισμού του ισοδύναμου μητρώου στιβαρότητας ενός συγκεκριμένου στοιχείου της μακροκλίμακας που περιέχεται στην κατασκευή. Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να προκύψουν όλα τα ισοδύναμα μητρώα στιβαρότητας των στοιχείων. Στη συνέχεια, είναι εύκολο να εφαρμοστεί η παραδοσιακή μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στο δίκτυο διακριτοποίησης της μακροκλίμακας, γεγονός το οποίο συνεπάγεται σημαντική μείωση των βαθμών ελευθερίας.

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας της συνολικής κατασκευής δίνεται από τη σχέση:

$$[K] = \sum_{i=1}^M [a^i]^T [K_E^i] [a^i] \quad (4.24)$$

όπου τα $[a^i]$ είναι ένα μητρώο Bool που εντάσσει το μητρώο δυσκαμψίας του κάθε στοιχείου στο καθολικό μητρώο της κατασκευής, M είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της μακροκλίμακας και το $[K_E^i]$ λαμβάνεται από την εξίσωση (4.23). Το διάνυσμα των μακροσκοπικών μετακινήσεων προκύπτει από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$[K]\{U\} = \{F_{ext}\} \quad (4.25)$$

όπου $\{F_{ext}\}$ είναι ένα διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων, επιβαλλόμενων στην κατασκευή.

4.6. Αναγωγή στη μικροκλίμακα και υπολογισμός των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων (downscaling computation)

Η σχέση μεταξύ μικροκλίμακας και μακροκλίμακας προκύπτει μέσω των συναρτήσεων βάσης, οι οποίες κατασκευάζονται αριθμητικά και μπορούν να απεικονίσουν τις ετερογένειες στη μικροκλίμακα στο εσωτερικό του κάθε στοιχείου της μακροκλίμακας. Αξιοποιώντας αυτήν τη σχέση, η αναγωγή στη μικροκλίμακα (downscaling computation) μπορεί να πραγματοποιηθεί εύκολα και οι πραγματικές τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις στη μικροκλίμακα μπορούν να υπολογιστούν ταυτόχρονα με τη μακροσκοπική απόκριση της συνολικής κατασκευής.

Ας εξετάσουμε το στοιχείο e της μικροκλίμακας. Αφού επιλυθεί η σχέση (4.25) και υπολογιστούν οι μακροσκοπικές μετατοπίσεις, μπορούν να εξαχθούν και οι επικόμβιες μετακινήσεις του e μέσω της εξίσωσης (4.20). Έπειτα, είναι εύκολο να υπολογίσουμε την ανηγμένη παραμόρφωση και την τάση του στοιχείου μέσω των παρακάτω σχέσεων:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{u}'_E, \quad \mathbf{T}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{G}_e \quad (4.26)$$

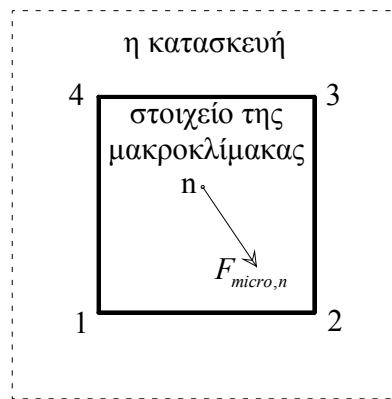
και

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{S}_e \mathbf{u}'_E, \quad \mathbf{S}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e \mathbf{G}_e \quad (4.27)$$

Στην πράξη, τα μητρώα \mathbf{T}_e και \mathbf{S}_e του στοιχείου μπορούν να αποθηκευτούν σε μια βάση δεδομένων και με αυτόν τον τρόπο λαμβάνονται εύκολα οι τάσεις και οι ανηγμένες παραμορφώσεις στη μικροκλίμακα.

4.7. Ο αλγόριθμος της ελαστοπλαστικής ανάλυσης στη προσομοίωση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων

Σε αυτήν την παράγραφο, αναπτύσσεται η διαδικασία της ελαστοπλαστικής ανάλυσης ανομοιογενών υλικών βασισμένη στην EMsFEM και δίνεται το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου.



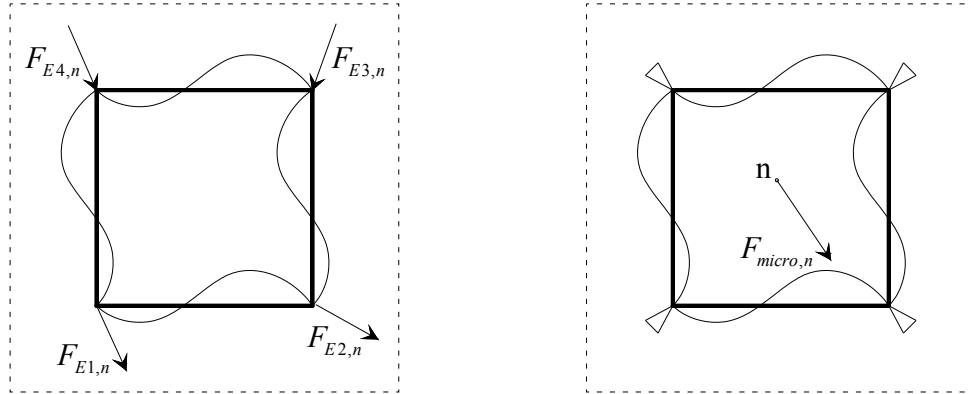
Σχήμα 4-6 Μια επιβαλλόμενη δύναμη στον κόμβο n του δικτύου διακριτοποίησης της μικροκλίμακας ενός «υπερ-στοιχείου» που περιέχεται μέσα στην κατασκευή

4.7.1. Αντιμετώπιση των επικόμβιων δυνάμεων στη μικροκλίμακα

Όπως μπορούμε να δούμε από την έως τώρα ανάλυση, τα προβλήματα τελικά λύνονται στη μακροκλίμακα αφού πρώτα έχουν υπολογιστεί τα ισοδύναμα μητρώα δυσκαμψίας των «υπερ-στοιχείων». Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξωτερικές δυνάμεις $\{F_{ext}\}$ στον τύπο (4.25) πρέπει να εφαρμόζονται στους κόμβους της μακροκλίμακας. Ωστόσο, είναι αναπόφευκτο ότι κάποιες εξωτερικές δυνάμεις θα δρουν σε κόμβους του δικτύου διακριτοποίησης της μικροκλίμακας στο εσωτερικό των «υπερ-στοιχείων». Από την άλλη μεριά, όταν λαμβάνεται υπόψη η μη γραμμικότητα του υλικού στη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, παράλληλα με την εμφάνιση πλαστικής παραμόρφωσης, καθώς αυξάνεται το βήμα φόρτισης, εμφανίζονται και επικόμβιες δυνάμεις στα δίκτυα διακριτοποίησης της μικροκλίμακας, οι οποίες δε μπορούν να ισορροπηθούν. Γι' αυτό είναι απαραίτητο να βρεθεί μια μέθοδος ώστε να αντικατασταθούν οι επικόμβιες δυνάμεις της μικροκλίμακας από ισοδύναμες δυνάμεις που εφαρμόζονται στους κόμβους της μακροκλίμακας. Αυτή η μέθοδος πρέπει ταυτόχρονα να διασφαλίζει ότι η συνολική απόκριση του φορέα (σε επίπεδο μακροκλίμακας) και οι τοπικές τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις της μικροκλίμακας θα παραμένουν αμετάβλητες.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-6, μία δύναμη $F_{micro,n}$ εφαρμόζεται στον κόμβο n του δικτύου διακριτοποίησης της μικροκλίμακας ενός «υπερ-στοιχείου», που περιέχεται στην κατασκευή. Σύμφωνα με τη μέθοδο που προτείνουν οι Zhang, Wu, Lü και Fu, οι επικόμβιες δυνάμεις σε επίπεδο μικροκλίμακας αντιμετωπίζονται ως ο συνδυασμός ισοδύναμων δυνάμεων, που ασκούνται στους κόμβους της μακροκλίμακας της

κατασκευής, και «δυνάμεων διαταραχής» της μικροκλίμακας (microscopic perturbed forces), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-7. Πιο συγκεκριμένα, οι ισοδύναμες δυνάμεις, που ασκούνται στους κόμβους της μακροκλίμακας της κατασκευής, χρησιμοποιούνται για να λύσουν το πεδίο των μακροσκοπικών μετατοπίσεων (Σχήμα 4-7(α)) και οι «δυνάμεις διαταραχής» της μικροκλίμακας χρησιμοποιούνται για να υπολογιστούν οι τοπικές τάσεις και ανηγμένες παραμορφώσεις σε επίπεδο μικροκλίμακας (Σχήμα 4-7(β)).



Σχήμα 4-7 Μέθοδος αντικατάστασης δύναμης που ασκείται στον κόμβο n του δικτύου διακριτοποίησης της μικροκλίμακας ενός «υπερ-στοιχείου»: (α) ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους των στοιχείων της μακροκλίμακας, (β) δεσμεύσεις για τον υπολογισμό «δυνάμεων διαταραχής» της μικροκλίμακας

Για να εξαχθούν οι ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους των στοιχείων της μακροκλίμακας, εφαρμόζεται η αρχή των δυνατών έργων. Με βάση το Σχήμα 4-6 και το Σχήμα 4-7(α), το στοιχείο της μακροκλίμακας βρίσκεται σε ισορροπία, εάν το δυνατό έργο των δυνάμεων της μικροκλίμακας ισούται με το δυνατό έργο των δυνάμεων της μακροκλίμακας για κινηματικά αποδεκτό πεδίο μετατοπίσεων. Το παραπάνω μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\delta U = \mathbf{F}_{micro,n} \delta \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_{E,n} \delta \mathbf{u}'_E \quad (4.28)$$

όπου $\mathbf{F}_{micro,n}$ είναι η ασκούμενη δύναμη στον κόμβο n του δικτύου διακριτοποίησης της μακροκλίμακας, $\delta \mathbf{u}_n$ είναι το διάνυσμα της δυνατής μετακίνησης του κόμβου n , $\delta \mathbf{u}'_E$ είναι το διάνυσμα της δυνατής μετακίνησης των κόμβων ενός στοιχείου της μακροκλίμακας και $\mathbf{F}_{E,n}$ είναι οι ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους ενός στοιχείου της μακροκλίμακας, οι οποίες γράφονται σε μητρική μορφή:

$$\mathbf{F}_{E,n} = [F_{E1,n} \quad F_{E2,n} \quad F_{E3,n} \quad F_{E4,n}] \quad (4.29)$$

όπου $F_{Ei,n} = [F_{Ei,x,n} \quad F_{Ei,y,n}] (i=1,2,3,4)$.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (4.10)-(4.12), προκύπτει:

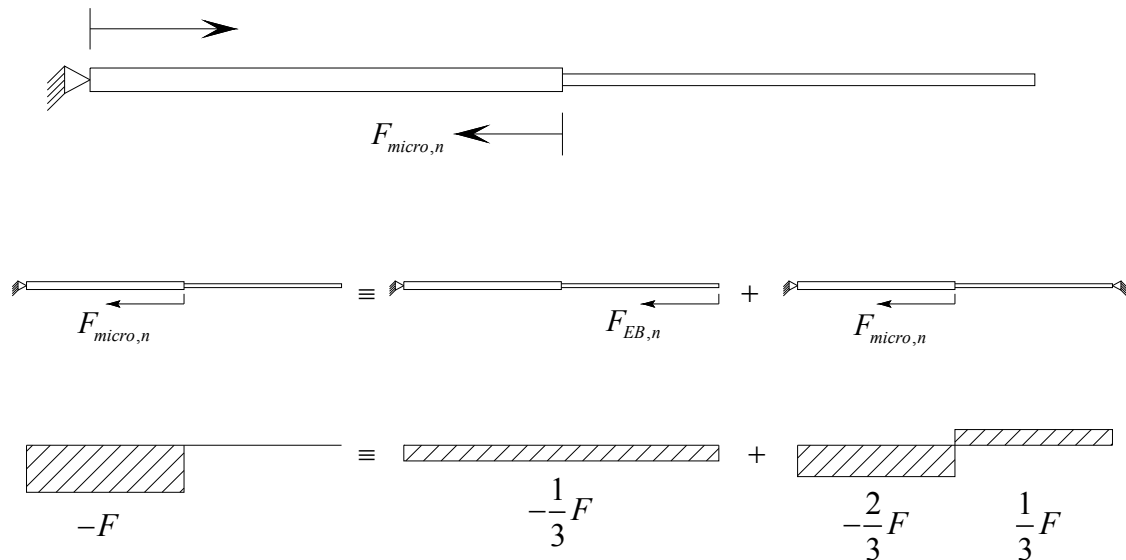
$$\mathbf{u}_n = \mathbf{R}_n \mathbf{u}'_E \quad (4.30)$$

όπου \mathbf{R}_n είναι ένα τμήμα της αριθμητικής συνάρτησης βάσης. Στη συνέχεια, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.28) και (4.30), εξάγεται η παρακάτω σχέση για τις ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους των στοιχείων της μακροκλίμακας:

$$\mathbf{F}_{E,n} = \mathbf{F}_{micro,n} \mathbf{R}_n \quad (4.31)$$

Όσον αφορά στον υπολογισμό των «δυνάμεων διαταραχής» της μικροκλίμακας (microscopic perturbed forces), αν έχουν χρησιμοποιηθεί οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες, τότε δεσμεύονται οι τέσσερις ακραίοι κόμβοι του στοιχείου της μακροκλίμακας κατά τη διεύθυνση x και y , ενώ στους υπόλοιπους κόμβους του συνόρου επιβάλλονται περιοδικές δεσμεύσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-7(β). Τελικά, το αποτέλεσμα των «δυνάμεων διαταραχής» λαμβάνεται με τη συμβατική ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με τις συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν.

Ακολουθεί ένα μονοδιάστατο παράδειγμα σε μέλη δικτύματος, το οποίο προσπαθεί να δώσει μια εποπτική εικόνα της μεθόδου που αναλύθηκε σε αυτήν την παράγραφο [10]. Χάριν απλότητας, ας υποθέσουμε ότι η κατασκευή αποτελείται από ένα μόνο «υπερ-στοιχείο», το οποίο αποτελείται από δύο στοιχεία δικτύματος με διαφορετικές διατομές (Σχήμα 4-8). Είναι προφανές ότι οι κόμβοι A , n και B είναι κόμβοι της μικροκλίμακας, ενώ οι κόμβοι A και B είναι ταυτόχρονα και κόμβοι στη μακροκλίμακα της κατασκευής. Το αριστερό άκρο της κατασκευής, A , είναι δεσμευμένο κατά την αξονική διεύθυνση και στον κόμβο της μικροκλίμακας, n , ασκείται δύναμη $F_{micro,n}$. Οι ράβδοι έχουν ίδιο μέτρο ελαστικότητας και ίσο μήκος, ενώ η μία έχει διπλάσιο εμβαδόν διατομής από την άλλη.



Σχήμα 4-8 Παράδειγμα της μεθόδου αντιμετώπισης των επικόμβιων δυνάμεων στη μικροκλίμακα σε μονοαξονική κατασκευή από δίκτυματα: (α) η διαδικασία της ισοδύναμης μεθόδου και συνοριακές συνθήκες, (β) η κατανομή των αξονικών δυνάμεων των στοιχείων της μικροκλίμακας

Είναι εύκολο να κατασκευαστεί η αριθμητική συνάρτηση βάσης του «υπερ-στοιχείου»:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τη σχέση (4.31), μπορούμε να υπολογίσουμε τις ισοδύναμες δυνάμεις στο επίπεδο της μακροκλίμακας:

$$F_{E,A,n} = 2/3 F_{micro,n}, \quad F_{E,B,n} = 1/3 F_{micro,n}$$

Επίσης, οι «δυνάμεις διαταραχής» της μικροκλίμακας, που προκύπτουν από την ύπαρξη της $F_{micro,n}$, μπορούν να ληφθούν, όταν δεσμευτούν οι ακραίοι κόμβοι A και B . Η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 4-8(α). Στο Σχήμα 4-8(β), φαίνεται η κατανομή των αξονικών δυνάμεων των στοιχείων της μακροκλίμακας, μετά την επιβολή της κάθε δύναμης (θετική τιμή του διαγράμματος αξονικών δυνάμεων υποδηλώνει εφελκυσμό και αρνητική τιμή υποδηλώνει θλίψη). Συνεπώς, από το Σχήμα 4-8, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η κατανομή των αξονικών δυνάμεων του κάθε στοιχείου δικτύματος, όπως λαμβάνεται από την EMsFEM, είναι συνεπής με την πραγματική κατανομή. Παράλληλα, είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως και η απόκριση της συνολικής κατασκευής (μετατοπίσεις), η οποία προκύπτει από τις ισοδύναμες δυνάμεις στη μακροκλίμακα, είναι ίδια με την πραγματική.

4.7.2. Προσαυξητικός επαναληπτικός αλγόριθμος Newton-Raphson

Όσον αφορά την αριθμητική διαδικασία επίλυσης στην EMsFEM για τα ελαστοπλαστικά προβλήματα, χρησιμοποιείται μια υπολογιστική στρατηγική δύο σταδίων-κλιμάκων [9]. Αναλυτικότερα, η μακροκλίμακα χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η μακροσκοπική προσαύξηση στη μετατόπιση, ενώ η μικροκλίμακα χρησιμοποιείται για να προκύψει η εξέλιξη των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων. Ο σύνδεσμος μεταξύ των δύο κλιμάκων είναι οι αριθμητικές συναρτήσεις βάσης.

Σύμφωνα και με την παράγραφο 4.7.1, οι προσωρινές προσαυξήσεις των τάσεων της μικροκλίμακας στην EMsFEM μπορούν να αντιμετωπιστούν ως το αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο ξεχωριστών πραγμάτων, δηλαδή:

$$d\tilde{\sigma} = d\Sigma + d\hat{\sigma} \quad (4.32)$$

όπου $d\Sigma$ είναι η προσαύξηση της τάσης, την οποία συνεπάγεται η προσαύξηση των μετατοπίσεων ΔU σε επίπεδο μακροκλίμακας, και $d\hat{\sigma}$ είναι η προσαύξηση της τάσης η οποία οφείλεται στο τοπικό φαινόμενο των «δυνάμεων διαταραχής» σε επίπεδο μικροκλίμακας. Πρέπει να σημειωθεί ότι το διάνυσμα $d\hat{\sigma}$ είναι μηδενικό για το πρώτο

επαναληπτικό βήμα, αφού σε αυτό δεν υπάρχουν δυνάμεις της μικροκλίμακας που δεν μπορούν να ισορροπηθούν.

Για να περιγράψουμε την εξέλιξη των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων, εισάγουμε μια παράμετρο φόρτισης t , $0 \leq t \leq T$. Στη συνέχεια, το διάστημα φόρτισης $[0, T]$ διακριτοποιείται σε κάποια μη αλληλεπικαλυπτόμενα διαστήματα, $[0, T] = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι τιμές των μεταβλητών ε_n^{pl} , σ_n , ξ_n και U_n δίνονται στο βήμα φόρτισης t_n . Στη συνέχεια, μπορούν να υπολογιστούν οι μεταβλητές στο βήμα t_{n+1} , χρησιμοποιώντας τον παρακάτω προσαναζητικό αλγόριθμο των πεπερασμένων στοιχείων στο διάστημα $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

(α) Για το πρόβλημα στο επίπεδο της μακροκλίμακας, εισάγουμε την προσαναζητική παράμετρο φόρτισης $\zeta_{n+1} = (n+1)\Delta t/T$ και υποθέτουμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις ενεργούν στους κόμβους της μακροκλίμακας. Συνεπώς, έχουμε:

$$\Delta U = [{}^\tau \mathbf{K}]^{-1} \Delta \mathbf{F}, \quad (t_n \leq \tau \leq t_{n+1}) \quad (4.33)$$

όπου

$$\Delta \mathbf{F} = (\zeta_{n+1} - \zeta_n) \mathbf{F}_{ext} \quad (4.34)$$

και

$$[{}^\tau \mathbf{K}] = \sum_{i=1}^M [a^i]^T [{}^\tau \mathbf{K}_E^i] [a^i] \quad (4.35)$$

όπου $[{}^\tau \mathbf{K}_E^i]$ είναι το ισοδύναμο μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου i της μακροκλίμακας και M είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της μακροκλίμακας της κατασκευής.

Όπως γνωρίζουμε, στη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου εξάγεται από τις αριθμητικές συναρτήσεις βάσης, των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από τις ιδιότητες του υλικού των στοιχείων της μικροκλίμακας στο εσωτερικό του κάθε «υπερ-στοιχείου» της μακροκλίμακας. Για τα προβλήματα μη γραμμικότητας υλικού, το καταστατικό μητρώο $[D]$ στην εξίσωση (4.4) και το $[D_e]$ στην (4.19) μεταβάλλονται μαζί με τη μεταβολή των μετατοπίσεων σε επίπεδο μακροκλίμακας. Με άλλα λόγια, η σχέση (4.33) αποτελεί ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση αυτού του προβλήματος, όπως η μέθοδος των επαναλήψεων Newton-Raphson (N-R), η τροποποιημένη μέθοδος των επαναλήψεων Newton-Raphson (mN-R) και η μέθοδος των επαναλήψεων με βάση το αρχικό μητρώο δυσκαμψίας. Για τη μέθοδο N-R, απαιτείται οι αριθμητικές συναρτήσεις βάσης να ανανεώνονται σε κάθε επανάληψη του κάθε βήματος και να ξανασηματίζεται το ισοδύναμο καθολικό μητρώο στιβαρότητας. Από την άλλη, η

μέθοδος mN-R απαιτεί οι αριθμητικές συναρτήσεις βάσης και το ισοδύναμο καθολικό μητρώο στιβαρότητας να ανανεώνονται στην αρχή του κάθε προσαυξητικού βήματος. Έτσι, αποφεύγει τη δαπανηρή επανάληψη της κατασκευής των συναρτήσεων βάσης και του σχηματισμού του ισοδύναμου μητρώου δυσκαμψίας. Ωστόσο, απαιτούνται περισσότερα επαναληπτικά βήματα μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση. Η μέθοδος των επαναλήψεων με βάση το αρχικό μητρώο δυσκαμψίας μπορεί να θεωρηθεί ως μια υποπερίπτωση της μεθόδου mN-R, στην οποία οι συναρτήσεις βάσης και το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζονται μια φορά στην ελαστική κατάσταση και παραμένουν αμετάβλητα για τα επόμενα προσαυξητικά βήματα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, αν και η μέθοδος των επαναλήψεων με βάση την αρχική δυσκαμψία αποφεύγει να υπολογίσει το ισοδύναμο μητρώο, αποφεύγοντας έτσι ένα σημαντικό υπολογιστικό κόστος, ορισμένες φορές συναντά προβλήματα σύγκλισης. Με την υπόθεση ενός ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού, η διαδικασία μπορεί να συγκλίνει με πολύ αργό ρυθμό ή ακόμα και να αποτυγχάνει να συγκλίνει. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούν να εφαρμοστούν οι άλλες μέθοδοι.

(β) Για το πρόβλημα της μικροκλίμακας, οι άγνωστες μεταβλητές στο βήμα t_{n+1} μπορούν να υπολογιστούν βάσει του αλγορίθμου της «πίσω ολοκλήρωσης κατά Euler»:

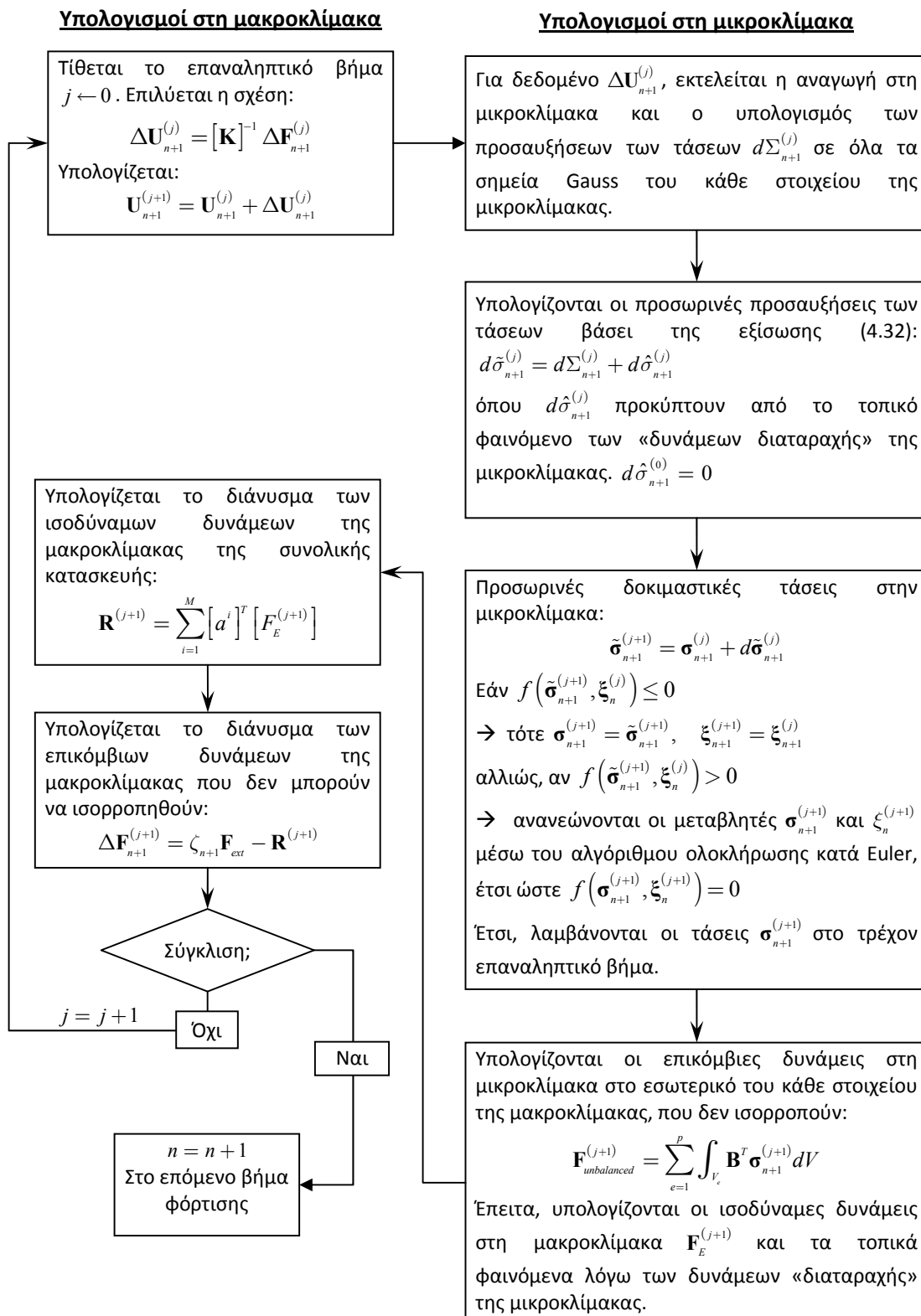
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta\varepsilon \\
 \varepsilon_{n+1}^{pl} &= \varepsilon_n^{pl} + \Delta\lambda_{n+1} r_{n+1} \\
 \xi_{n+1} &= \xi_n + \Delta\xi \\
 \sigma_{n+1} &= [D^e] : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{pl}) \\
 f_{n+1} &= f(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

όπου $\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ και ξ είναι ένα διάνυσμα μιας εσωτερικής μεταβλητής που ελέγχει την κράτυνση του υλικού. Περισσότερες λεπτομέρειες για τα παραπάνω υπάρχουν στο κεφάλαιο 3.

4.7.3. Διάγραμμα ροής του προγράμματος για την ελαστοπλαστική ανάλυση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων

Το πρόγραμμα ελαστοπλαστικής ανάλυσης με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων αποτελείται από τα ακόλουθα δύο τμήματα:

- (1) Προεπεξεργασία. Σε αυτό το τμήμα, κατασκευάζονται οι αριθμητικές συναρτήσεις βάσης του καθενός στοιχείου της μακροκλίμακας και εξάγεται το αντίστοιχο ισοδύναμο μητρώο στιβαρότητας στην ελαστική κατάσταση. Σημειωτέον είναι ότι για τα ετερογενή υλικά με περιοδική μικροδομή οι αριθμητικές συναρτήσεις βάσης υπολογίζονται μια φορά για ένα αντιπροσωπευτικό «υπερ-στοιχείο» (RVE).



Σχήμα 4-9 Διάγραμμα ροής του προγράμματος για την ελαστοπλαστική ανάλυση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων

(2) Το τμήμα των επαναλήψεων. Το μη γραμμικό σύστημα επιλύεται προσαναζητικά χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο της αρχικής δυσκαμψίας. Ο αλγόριθμος συγκλίνει όταν υπάρχει ισορροπία ταυτόχρονα και σε επίπεδο μικροκλίμακας και μακροκλίμακας. Χρησιμοποιείται ο παρακάτω συμβολισμός: $x_n^{(j)}$, στον οποίο το n συμβολίζει την προσάυξηση του φορτίου και το (j) υποδηλώνει τον αριθμό της επανάληψης. Ποσότητες χωρίς τον πάνω δεξιά δείκτη, δηλαδή x_n , συμβολίζουν τα αποτελέσματα στο βήμα φόρτισης n , αφού έχει επιτευχθεί η σύγκλιση. Υποθέτοντας ότι οι τιμές των μεταβλητών ε_n^{pl} , σ_n , ξ_n και \mathbf{U}_n είναι γνωστά στο χρόνο t_n , για το διάστημα $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, έχουμε $\varepsilon_{n+1}^{pl(0)} = \varepsilon_n^{pl}$, $\sigma_{n+1}^{(0)} = \sigma_n$, $\xi_{n+1}^{(0)} = \xi_n$, $\mathbf{U}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{U}_n$ και $\Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(0)} = (\zeta_{n+1} - \zeta_n) \mathbf{F}_{ext}$. Στο Σχήμα 4-9 φαίνεται το διάγραμμα ροής του προγράμματος για την ελαστοπλαστική ανάλυση με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων.

**κεφάλαιο 5. Υπολογιστική
ομογενοποίηση πρώτης
τάξεως**

5.1. Εισαγωγή

Η υπολογιστική ομογενοποίηση είναι μια τεχνική που ανήκει στην ευρύτερη ομάδα των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων [6]. Αυτή βασίζεται ουσιαστικά στον υπολογισμό της τοπικής μακροσκοπικής απόκρισης από την υποκείμενη μικροδομή μέσω της κατάλληλης κατασκευής και επίλυσης ενός προβλήματος συνοριακών τιμών σε επίπεδο μικροκλίμακας.

Οι βασικές αρχές της κλασικής υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξης έχουν εξελιχθεί σταδιακά από τις έννοιες που έχουν χρησιμοποιηθεί σε άλλες μεθόδους ομογενοποίησης και μπορούν να ενταχθούν στον αλγόριθμο των τεσσάρων βημάτων που διατυπώθηκε από τον Sequet (1985):

(α) καθορισμός του αντιπροσωπευτικού όγκου της μικροκλίμακας (RVE), στον οποίο θεωρείται ότι η καταστατική συμπεριφορά των συστατικών του στοιχείων είναι γνωστή,

(β) η διατύπωση των συνοριακών συνθηκών της μικροκλίμακας βάσει των γνωστών μεταβλητών της μικροκλίμακας και η εφαρμογή τους στον αντιπροσωπευτικό όγκο (RVE) (μετάβαση από τη μακροκλίμακα στη μικροκλίμακα)

(γ) υπολογισμός των άγνωστων μεταβλητών της μακροκλίμακας από την ανάλυση του παραμορφωμένου αντιπροσωπευτικού όγκου (μετάβαση από τη μικροκλίμακα στη μακροκλίμακα)

(δ) υπολογισμός της αριθμητικής σχέσης μεταξύ των γνωστών και των αγνώστων μεταβλητών της μακροκλίμακας.

Μεταξύ των πολλών πλεονεκτικών χαρακτηριστικών της τεχνικής της υπολογιστικής ομογενοποίησης αξίζει να αναφερθούν τα παρακάτω:

(α) δεν απαιτούνται ακριβείς παραδοχές για τη μορφή της μακροσκοπικής τοπικής καταστατικής απόκρισης, αφού η μακροσκοπική καταστατική συμπεριφορά λαμβάνεται από την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών της μικροκλίμακας

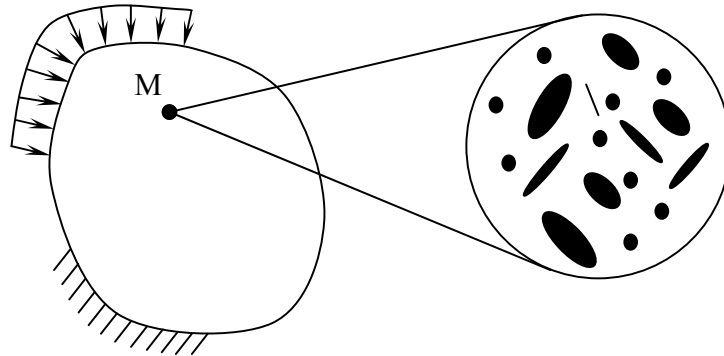
(β) το μακροσκοπικό καταστατικό μητρώο εξάγεται από το συνολικό μητρώο στιβαρότητας του αντιπροσωπευτικού όγκου στη μικροκλίμακα μέσω στατικής συμπύκνωσης

(γ) η μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει μεγάλες παραμορφώσεις και στροφές.

5.2. Βασικές παραδοχές

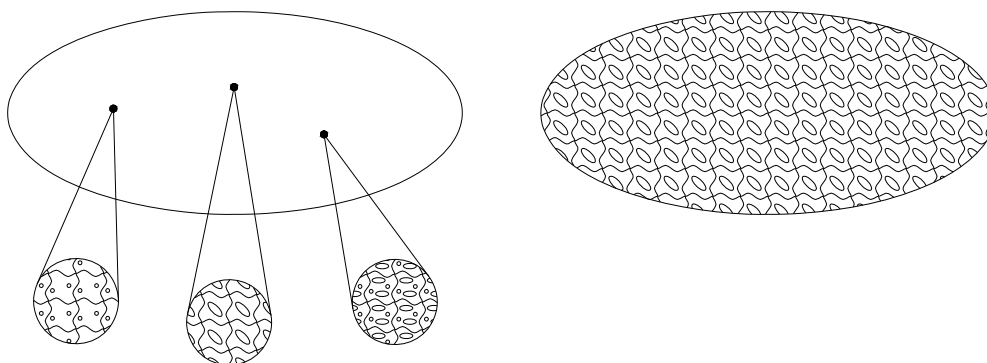
Το υπό θεώρηση υλικό θεωρείται πως είναι μακροσκοπικά επαρκώς ομοιογενές αλλά ετερογενές σε επίπεδο μικροκλίμακας (η μορφολογία συντίθεται από διακριτά συστατικά στοιχεία όπως κοιλότητες). Αυτό απεικονίζεται Σχήμα 5-1. Η κλίμακα μήκους της μακροκλίμακας είναι πολύ μεγαλύτερη από τις μοριακές διαστάσεις, έτσι ώστε η προσέγγιση με βάση τη μηχανική του συνεχούς να έχει νόημα για κάθε συστατικό στοιχείο. Ταυτόχρονα, στα πλαίσια της αρχής του διαχωρισμού των κλιμάκων, η κλίμακα

μήκους της μικροκλίμακας πρέπει να είναι μικρότερη από το χαρακτηριστικό μέγεθος του δείγματος της μακροκλίμακας.



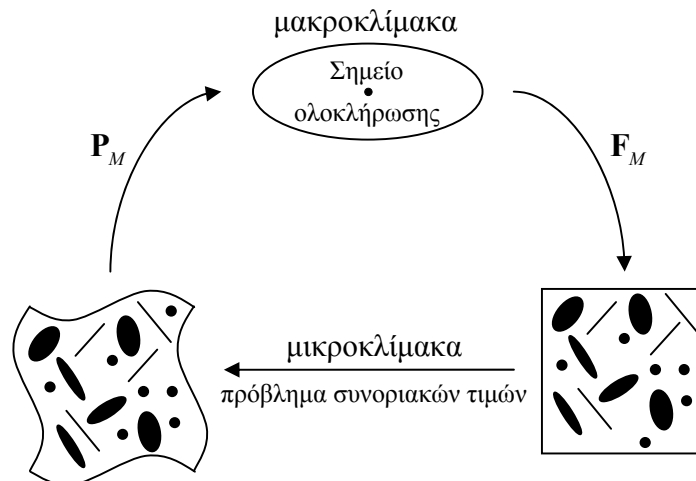
Σχήμα 5-1 Ομοιογενής μακροδομή και ετερογενής μικροδομή που αντιστοιχεί στο σημείο M

Οι περισσότερες μέθοδοι ομογενοποίησης βασίζονται στην υπόθεση της καθολικής περιοδικότητας της μικροδομής, προτείνοντας ότι ολόκληρο το μακροσκοπικό δοκίμιο αποτελείται από αντιπροσωπευτικούς όγκους που επαναλαμβάνονται στο χώρο. Στην προσέγγιση της υπολογιστικής ομογενοποίησης προτείνεται η πιο ρεαλιστική υπόθεση της τοπικής περιοδικότητας, δηλαδή η μικροδομή μπορεί να έχει διαφορετικές μορφολογίες που αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία της μακροκλίμακας, ενώ η ίδια επαναλαμβάνεται σε μια μικρή περιοχή πέριξ του μεμονωμένου μακροσκοπικού σημείου. Η έννοια της τοπικής και της καθολικής περιοδικότητας αποτυπώνεται στο Σχήμα 5-2. Η υπόθεση της τοπικής περιοδικότητας που υιοθετείται στην υπολογιστική ομογενοποίηση επιτρέπει την προσομοίωση της επίδρασης της μη ομοιόμορφης κατανομής της μικροδομής στην απόκριση σε επίπεδο μακροκλίμακας.



Σχήμα 5-2 Σχηματική αναπαράσταση της μακροδομής με (α) τοπική (β) καθολική περιοδικότητα στη μικροδομή

Κατά τη διαδικασία της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως, για κάθε υλικό σημείο της μακροδομής (δηλαδή για τα σημεία ολοκλήρωσης του δικτύου διακριτοποίησης σε επίπεδο μακροκλίμακας, όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων) υπολογίζεται ο μακροσκοπικός τανυστής της κλίσης της παραμόρφωσης \mathbf{F}_M (deformation gradient tensor). Από εδώ και στο εξής, ο δείκτης “M” αναφέρεται σε ποσότητα της μακροκλίμακας και ο δείκτης “m” συμβολίζει ποσότητα της μικροκλίμακας. Ο τανυστής της παραμόρφωσης \mathbf{F}_M για ένα μακροσκοπικό σημείο χρησιμοποιείται στη συνέχεια για να διαμορφώσει τις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες επιβάλλονται στον αντιπροσωπευτικό όγκο (RVE) που έχει αντιστοιχηθεί στο σημείο αυτό. Μετά την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών για τον αντιπροσωπευτικό όγκο, υπολογίζεται ο μακροσκοπικός τανυστής των τάσεων \mathbf{P}_M εξάγοντας το μέσο όρο του προκύπτοντος πεδίου των τάσεων στον όγκο του αντιπροσωπευτικού στοιχείου. Κατά συνέπεια, προκύπτει εύκολα η αριθμητική σχέση τάσεων- παραμόρφωσης στο μακροσκοπικό σημείο. Επιπρόσθετα, εξάγεται το τοπικό μακροσκοπικό συνεπές εφαπτομενικό μητρώο από τη δυσκαμψία της μικροδομής. Η παραπάνω διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 5-3.

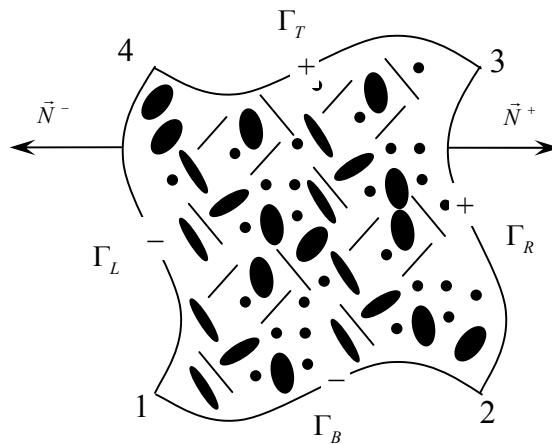


Σχήμα 5-3 Πορεία υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως

Η διαδικασία που παρουσιάστηκε παραπάνω έχει ως σημείο αναφοράς την παραμόρφωση, δηλαδή σε επίπεδο τοπικής μακροκλίμακας, δεδομένου του τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης \mathbf{F}_M , ορίζεται η τάση \mathbf{P}_M και το καταστατικό μητρώο δυσκαμψίας, βάσει της απόκρισης της μικροκλίμακας. Επίσης, είναι δυνατή και η εφαρμογή μιας διαδικασίας που έχει ως σημείο αναφοράς την τάση (δηλαδή δεδομένης της τοπικής τάσης της μακροκλίμακας, εξάγεται η παραμόρφωση). Ωστόσο, μια τέτοια διαδικασία δεν μπορεί άμεσα να ενσωματωθεί στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (με έλεγχο της επιβαλλόμενης δύναμης), η οποία συνήθως χρησιμοποιείται για την επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών σε επίπεδο μακροκλίμακας.

5.3. Ορισμός του προβλήματος σε επίπεδο μικροκλίμακας

Οι φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες της μικροδομής προσδιορίζονται από ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου (RVE). Ένα παράδειγμα τυπικού διδιάστατου αντιπροσωπευτικού όγκου απεικονίζεται στο Σχήμα 5-4. Η επιλογή του αντιπροσωπευτικού στοιχείου είναι μια αρκετά δύσκολη διαδικασία. Το αντιπροσωπευτικό στοιχείο πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο, ώστε να αναπαριστά τη μικροδομή, χωρίς να εισάγει ανύπαρκτες ιδιότητες, όπως ανισοτροπία, και ταυτόχρονα θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό, ώστε η υπολογιστική προσομοίωση να είναι αποτελεσματική.



Σχήμα 5-4 Σχηματική απεικόνιση ενός τυπικού διδιάστατου αντιπροσωπευτικού στοιχείου (RVE)

Το πεδίο παραμόρφωσης του αντιπροσωπευτικού όγκου σε ένα σημείο με διάνυσμα αρχικής θέσης \vec{X} (στην κατάσταση αναφοράς – απαραμόρφωτη κατάσταση V_0) και με διάνυσμα πραγματικής θέσης \vec{x} (στην τρέχουσα/παραμορφωμένη κατάσταση V) περιγράφεται από τον τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης στη μικροκλίμακα $\mathbf{F}_m = (\nabla_{0m} \vec{x})^T$ ¹, όπου ο τελεστής κλίσης ∇_{0m} λαμβάνεται σε σχέση με την κατάσταση αναφοράς.

Ο αντιπροσωπευτικός όγκος είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Αυτό αποτυπώνεται μαθηματικά από την εξίσωση ισορροπίας σε όρους του τανυστή τάσης Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}_m$, ή εναλλακτικά, σε όρους του πρώτου Piola-Kirchhoff τανυστή των τάσεων, $\mathbf{P}_m = \det(\mathbf{F}_m) \boldsymbol{\sigma}_m (\mathbf{F}_m)^{-T}$, σύμφωνα με τις σχέσεις (παρалаλείποντας τις δυνάμεις μάζας):

¹ $\mathbf{F}_{m,iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}$

$$\nabla_m \sigma_m = \vec{0} \text{ στο } V, \text{ ή } \nabla_m \mathbf{P}_m^T = \vec{0} \text{ στο } V_0^1 \quad (5.1)$$

όπου ∇_m είναι ο τελεστής κλίσης σε σχέση με την τρέχουσα διαμόρφωση του αντιπροσωπευτικού όγκου.

Η μηχανική συμπεριφορά των συστατικών της μικροδομής περιγράφεται από συγκεκριμένους καταστατικούς νόμους, που ορίζουν για κάθε συστατικό της μικροδομής μια σχέση τάσης – παραμόρφωσης, η οποία εξαρτάται από το χρόνο και την ιστορία της φόρτισης:

$$\sigma_m^{(a)}(t) = \mathcal{F}_\sigma^{(a)} \left\{ \mathbf{F}_m^{(a)}(\tau), \tau \in [0, t] \right\}, \text{ ή } \mathbf{P}_m^{(a)}(t) = \mathcal{F}_P^{(a)} \left\{ \mathbf{F}_m^{(a)}(\tau), \tau \in [0, t] \right\} \quad (5.2)$$

όπου t δηλώνει τον τρέχοντα χρόνο, $a=1, \dots, N$ με N τον αριθμό των διακριτών συστατικών της μικροδομής.

Η μετάβαση από τη μακροκλίμακα στη μικροκλίμακα πραγματοποιείται επιβάλλοντας το μακροσκοπικό τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης \mathbf{F}_M στη μικροδομή του αντιπροσωπευτικού όγκου μέσω μιας συγκεκριμένης προσέγγισης. Ο απλούστερος τρόπος είναι να υποθεθεί ότι τα συστατικά της μικροδομής υφίστανται μια σταθερή παραμόρφωση που ταυτίζεται με τη μακροσκοπική. Στη βιβλιογραφία, η παραπάνω προσέγγιση είναι γνωστή ως η υπόθεση Taylor (ή Voigt). Μια άλλη απλή στρατηγική είναι να υποθεθεί μια ίδια σταθερή τάση (και επιπρόσθετα ίδια στροφή) σε όλα τα συστατικά (Sachs (or Reuss) assumption). Αυτές οι απλοποιημένες μέθοδοι δεν απαιτούν τη λεπτομερή προσομοίωση της μικροδομής. Συνεπώς, παρέχουν πολύ προσεγγιστικές εκτιμήσεις των συνολικών ιδιοτήτων των υλικών. Η υπόθεση του Taylor συνήθως υπερεκτιμά τη συνολική δυσκαμψία, ενώ η υπόθεση Sachs οδηγεί σε υποεκτίμηση της δυσκαμψίας.

Πιο ακριβείς στρατηγικές μέσης τιμής, οι οποίες απαιτούν την επίλυση του λεπτομερούς προβλήματος συνοριακών τιμών της μικροδομής, μεταφέρουν τις δεδομένες μακροσκοπικές μεταβλητές στη μικροδομή του αντιπροσωπευτικού όγκου μέσω συνοριακών συνθηκών. Συνήθως, χρησιμοποιούνται τρεις τύποι συνοριακών συνθηκών οι οποίες είναι οι εξής: (α) οι καθορισμένες μετακινήσεις, (β) οι καθορισμένες επιφανειακές τάσεις και (γ) η καθορισμένη περιοδικότητα.

Στην περίπτωση συνοριακών συνθηκών καθορισμένης μετακίνησης, το διάνυμα θέσης ενός σημείου του συνόρου του αντιπροσωπευτικού όγκου στην παραμορφωμένη κατάσταση δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{x} = \mathbf{F}_M \vec{X} \text{ με } \vec{X} \text{ στο } \Gamma_0 \quad (5.3)$$

όπου το Γ_0 συμβολίζει το απαραμόρφωτο σύνορο του αντιπροσωπευτικού όγκου. Αυτή η συνθήκη επιβάλλει μια γραμμική απεικόνιση του συνόρου του αντιπροσωπευτικού όγκου.

¹ $\nabla_m \sigma_m = \vec{0} \leftrightarrow \sigma_{ij,j}^m = 0$

Για τις συνοριακές συνθήκες τάσης επιβάλλεται:

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma}_M \vec{n} \text{ στο } \Gamma \text{ ή } \vec{p} = \mathbf{P}_M \vec{N} \text{ στο } \Gamma_0 \quad (5.4)$$

όπου \vec{n} και \vec{N} είναι τα κάθετα διανύσματα στα τρέχοντα (Γ) και στα αρχικά (Γ_0) σύνορα του αντιπροσωπευτικού όγκου, αντίστοιχα. Ωστόσο, δεν είναι κατάλληλες να εφαρμοστούν στην υπολογιστική ομογενοποίηση όταν αυτή γίνεται με βάση την παραμόρφωση.

Λόγω της υπόθεσης της περιοδικότητας της μικροδομής, που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.2, εισάγονται οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες περιοδικότητας για τον αντιπροσωπευτικό όγκο διατυπώνονται στη γενική τους μορφή ως εξής:

$$\vec{x}^+ - \vec{x}^- = \mathbf{F}_M (\vec{X}^+ - \vec{X}^-) \quad (5.5)$$

$$\vec{p}^+ = -\vec{p}^- \quad (5.6)$$

Η σχέση (5.5) επιβάλλει τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες, ενώ η σχέση (5.6) επιβάλλει αντισυμμετρικά διανύσματα τάσεων στο σύνορο του αντιπροσωπευτικού όγκου. Οι πλευρές Γ_0^- και Γ_0^+ του συνόρου του αντιπροσωπευτικού όγκου ορίζονται έτσι ώστε $\vec{N}^- = \vec{N}^+$ στα αντίστοιχα σημεία των Γ_0^- και Γ_0^+ (Σχήμα 5-4).

Για τον διδιάστατο αντιπροσωπευτικό όγκο, που φαίνεται στο Σχήμα 5-4, η περιοδική συνθήκη (5.5) μπορεί να αναδιατυπωθεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{x}_R &= \vec{x}_L + \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \\ \vec{x}_T &= \vec{x}_B + \vec{x}_4 - \vec{x}_1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου τα \vec{x}_L , \vec{x}_R , \vec{x}_B και \vec{x}_T δηλώνουν το διάνυσμα θέσης στο αριστερό, το δεξιό, το κάτω και το άνω σύνορο του αντιπροσωπευτικού όγκου, αντίστοιχα. Τα \vec{x}_i , $i=1,2,4$ είναι τα διανύσματα θέσης των γωνιακών σημείων 1, 2 και 4 στην παραμορφωμένη κατάσταση. Αυτά τα διανύσματα θέσης επιβάλλονται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{x}_i = \mathbf{F}_M \vec{X}_i, \quad i=1,2,4 \quad (5.8)$$

Είναι δυνατή η εφαρμογή και άλλων περιοδικών συνθηκών με τη μόνη γενική απαίτηση να αυτές να είναι συνεπείς με τα θεωρήματα μέσης τιμής (averaging theorems). Τα θεωρήματα μέσης τιμής, που εφαρμόζονται για τη σύζευξη της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

5.4. Σύζευξη της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας

Η σύζευξη μεταξύ της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας γίνεται βάσει θεωρημάτων υπολογισμού μέσης τιμής.

5.4.1. Παραμόρφωση

Η πρώτη από τις σχέσεις υπολογισμού μέσης τιμής αφορά στη σύζευξη των κινηματικών ποσοτήτων της μικροκλίμακας και της μακροκλίμακας. Έτσι, γίνεται η παραδοχή ότι ο τανυστής της κλίσης της μακροσκοπικής παραμόρφωσης \mathbf{F}_M είναι ίσος με τη μέση τιμή του τανυστή της κλίσης της παραμόρφωσης στον όγκο του αντιπροσωπευτικού στοιχείου \mathbf{F}_m :

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{F}_m dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0} \bar{x} \bar{N} d\Gamma_0 = \frac{1}{V_0} \int \{x\} \{N\}^T d\Gamma_0 \quad (5.9)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα της απόκλισης για να μετασχηματίσει το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στον απαραμόρφωτο όγκο του αντιπροσωπευτικού στοιχείου σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα.

Η επαλήθευση ότι η χρήση των συνοριακών συνθηκών καθορισμένης μετατόπισης (5.3) οδηγεί όντως στην επαλήθευση της σχέσης (5.9) είναι προφανής. Αντικατάσταση της σχέσης (5.3) στη σχέση (5.9) και χρήση του θεωρήματος της απόκλισης, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\nabla_{0m} \bar{X} = I$, δίνει:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0} (\mathbf{F}_M \bar{X}) \bar{N} d\Gamma_0 = \frac{1}{V_0} \mathbf{F}_M \int_{\Gamma_0} \bar{X} \bar{N} d\Gamma_0 = \frac{1}{V_0} \mathbf{F}_M \int_{V_0} (\nabla_{0m} \bar{X})^T dV_0 = \mathbf{F}_M$$

Η επαλήθευση για τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες (5.5) ακολουθεί την ίδια διαδικασία εκτός από το ότι το σύνορο του αντιπροσωπευτικού όγκου διαχωρίζεται σε Γ_0^- και Γ_0^+ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_M &= \frac{1}{V_0} \left\{ \int_{\Gamma_0^+} \bar{x}^+ \bar{N}^+ d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0^-} \bar{x}^- \bar{N}^- d\Gamma_0 \right\} = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0^+} (\bar{x}^+ - \bar{x}^-) \bar{N}^+ d\Gamma_0 \\ &= \frac{1}{V_0} \mathbf{F}_M \int_{\Gamma_0^+} (\bar{X}^+ - \bar{X}^-) \bar{N}^+ d\Gamma_0 = \frac{1}{V_0} \mathbf{F}_M \int_{\Gamma_0} \bar{X} \bar{N} d\Gamma_0 = \mathbf{F}_M \end{aligned}$$

5.4.2. Τάση

Παρόμοια, η σχέση υπολογισμού της μέσης τιμής για τον πρώτο Piola-Kirchhoff τανυστή των τάσεων \mathbf{P}_M είναι η εξής:

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{P}_m dV_0 \quad (5.10)$$

Προκειμένου να εκφραστεί ο πρώτος Piola-Kirchhoff τανυστής των τάσεων συναρτήσει ποσοτήτων της μικροκλίμακας που ορίζονται στην επιφάνεια του αντιπροσωπευτικού όγκου, χρησιμοποιείται η ακόλουθη σχέση (λαμβάνοντας υπόψη ότι την ισορροπία στη μικροκλίμακα, $\nabla_{0m} \mathbf{P}_m^T = \vec{0}$, και την ισότητα $\nabla_{0m} \vec{X} = I$):

$$\mathbf{P}_m = (\nabla_{0m} \mathbf{P}_m^T) \vec{X} + \mathbf{P}_m (\nabla_{0m} \vec{X}) = \nabla_{0m} (\mathbf{P}_m^T \vec{X}) \quad (5.11)$$

Αρχικά, η αντικατάσταση της σχέσης (5.11) στη σχέση (5.10), η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης και ο ορισμός του διανύσματος της πρώτης Piola-Kirchhoff τάσης, $\vec{p} = \vec{N} \mathbf{P}_m^T$, δίνουν:

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \nabla_{0m} (\mathbf{P}_m^T \vec{X}) dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0} \vec{N} \mathbf{P}_m^T \vec{X} d\Gamma_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\Gamma_0} \vec{p} \vec{X} d\Gamma_0 \quad (5.12)$$

Μετά την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών του αντιπροσωπευτικού όγκου, υπολογίζεται η μακροσκοπική τάση \mathbf{P}_M από το ολοκλήρωμα (5.12). Για την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών προκαθορισμένης μετακίνησης το ολοκλήρωμα (5.12) οδηγεί στη σχέση:

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^{N_p} \vec{f}_i \vec{X}_i \quad (5.13)$$

όπου \vec{f}_i είναι οι προκύπτουσες εξωτερικές δυνάμεις στους κόμβους του συνόρου, \vec{X}_i τα διανύσματα θέσης των κόμβων αυτών στην απαραμόρφωτη κατάσταση και N_p ο αριθμός των κόμβων στο σύνορο. Εφαρμόζοντας τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες (5.7) και (5.8) για το δισδιάστατο αντιπροσωπευτικό στοιχείο που φαίνεται στο Σχήμα 5-4, μπορεί να επαληθευτεί ότι μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις στους τρεις κόμβους στους οποίους επιβάλλεται μια καθορισμένη μετακίνηση συνεισφέρουν στο επιφανειακό ολοκλήρωμα (5.12):

$$\mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1,2,4} \vec{f}_i \vec{X}_i \quad (5.14)$$

5.4.3. Συνεπές εφαπτομενικό μητρώο

Πρώτα, ως θεωρήσουμε την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών στις οποίες καθορίζονται πλήρως οι μετακινήσεις των συνοριακών κόμβων (σχέση (5.3)). Το ολικό σύστημα των εξισώσεων της μικροκλίμακας αναδιατάσσεται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{pp} & \underline{K}_{pf} \\ \underline{K}_{fp} & \underline{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta u}_p \\ \underline{\delta u}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\delta f}_p \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

όπου $\underline{\delta u}_p$ και $\underline{\delta f}_p$ είναι οι στήλες με τις μετακινήσεις και τις εξωτερικές δυνάμεις των συνοριακών κόμβων και $\underline{\delta u}_f$ είναι η στήλη με τις μετακινήσεις των υπόλοιπων (εσωτερικών) κόμβων. Τα \underline{K}_{pp} , \underline{K}_{pf} , \underline{K}_{fp} και \underline{K}_{ff} είναι τα αντίστοιχα τμήματα του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του αντιπροσωπευτικού όγκου. Η εξίσωση (5.15) μπορεί να επαναδιατυπωθεί έτσι ώστε να προκύψει το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας \underline{K}_M , το οποίο συσχετίζει τις μετακινήσεις των κόμβων του συνόρου με τις δυνάμεις στους κόμβους αυτούς:

$$\underline{K}_M \underline{\delta u}_p = \underline{\delta f}_p, \quad \mu\epsilon \quad \underline{K}_M = \underline{K}_{pp} - \underline{K}_{pf} (\underline{K}_{ff})^{-1} \underline{K}_{fp} \quad (5.16)$$

Στη συνέχεια εξετάζεται η περίπτωση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών για το διδιάστατο αντιπροσωπευτικό στοιχείο που φαίνεται στο Σχήμα 5-4. Έτσι, χρησιμοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στη μορφή (5.7) και (5.8). Παρακάτω, θεωρείται ότι η διακριτοποίηση των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται έτσι ώστε η κατανομή των κόμβων στις απέναντι πλευρές του αντιπροσωπευτικού στοιχείου να είναι ίσες. Στη διακριτοποιημένη μορφή, οι σχέσεις (5.7) μπορούν εύκολα να γραφούν ως $\underline{\delta u}_d = \underline{C}_{di} \underline{\delta u}_i$, όπου $\underline{\delta u}_i$ είναι οι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας (που θα κρατηθούν στο σύστημα) και $\underline{\delta u}_d$ είναι οι εξαρτημένοι βαθμοί ελευθερίας (που θα απαλειφθούν από το σύστημα). Συνεπώς, το σύστημα των εξισώσεων αναδιατάσσεται και επιμερίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{ii} & \underline{K}_{id} \\ \underline{K}_{di} & \underline{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\delta u}_i \\ \underline{\delta u}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\delta r}_i \\ \underline{\delta r}_d \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

και στη συνέχεια συμπυκνώνεται σε ένα σύστημα όπου διατηρούνται μόνο οι ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας:

$$\begin{aligned} \underline{K}^* \underline{\delta u}_i &= \underline{\delta r}^* & \mu\epsilon \quad \underline{K}^* &= \underline{K}_{ii} + \underline{K}_{id} \underline{C}_{di} + (\underline{C}_{di})^T \underline{K}_{di} + (\underline{C}_{di})^T \underline{K}_{dd} \underline{C}_{di} \\ & & \underline{\delta r}^* &= \underline{\delta r}_i + (\underline{C}_{di})^T \underline{\delta r}_d \end{aligned} \quad (5.18)$$

Έπειτα, το σύστημα (5.18) επιμερίζεται περαιτέρω, όπως και στη σχέση (5.15), σε τμήματα που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας με καθορισμένη μετακίνηση $\underline{\delta u}_p$ (οι οποίοι στην περίπτωση αυτή είναι οι τρεις γωνιακοί κόμβοι των οποίων οι μετακινήσεις καθορίζονται σύμφωνα με τη σχέση (5.8)) και στους υπόλοιπους

(ελεύθερους) βαθμούς ελευθερίας. Με δf_p^* συμβολίζονται οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στους βαθμούς ελευθερίας δu_p :

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{pp}^* & \underline{K}_{pf}^* \\ \underline{K}_{fp}^* & \underline{K}_{ff}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_p \\ \delta u_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta f_p^* \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας \underline{K}_M^* στην περίπτωση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών:

$$\underline{K}_M^* \delta u_p = \delta f_p^*, \quad \mu\epsilon \quad \underline{K}_M^* = \underline{K}_{pp}^* - \underline{K}_{pf}^* (\underline{K}_{ff}^*)^{-1} \underline{K}_{fp}^* \quad (5.20)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το \underline{K}_M^* είναι ένα μητρώο $[6 \times 6]$ στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Τελικά, η προκύπτουσα σχέση μετακινήσεων – δυνάμεων (σχέση (5.16) στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών καθορισμένης μετακίνησης ή σχέση (5.20) στην περίπτωση των περιοδικών συνοριακών συνθηκών) πρέπει να μετασχηματιστεί για να καταλήξουμε σε μια σχέση που θα συσχετίζει τη μεταβολή στους ταυστές της μακροσκοπικής τάσης και της παραμόρφωσης:

$$\delta \mathbf{P}_M = {}^4 \mathbf{C}_M^P : \delta \mathbf{F}_M^T \quad (5.21)$$

όπου ο τετάρτης τάξεως ταυστής ${}^4 \mathbf{C}_M^P$ συμβολίζει το απαιτούμενο συνεπές εφαπτομενικό μητρώο στο επίπεδο του μακροσκοπικού σημείου ολοκλήρωσης.

Προκειμένου να αποκτήσουμε αυτό το καταστατικό εφαπτομενικό μητρώο από το συμπυκνωμένο μητρώο δυσκαμψίας \underline{K}_M (ή \underline{K}_M^*), αρχικά, οι σχέσεις (5.16) και (5.20) ξαναγράφονται στην παρακάτω μορφή:

$$\sum_j \underline{K}_M^{(ij)} \delta \vec{u}_{(j)} = \delta \vec{f}_{(i)} \quad (5.22)$$

όπου οι δείκτες i και j παίρνουν τις τιμές $i, j = 1, \dots, N_p$ για τις συνοριακές συνθήκες καθορισμένης μετακίνησης (N_p είναι ο αριθμός των συνοριακών κόμβων) και $i, j = 1, 2, 4$ για τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες στο διδιάστατο στοιχείο που φαίνεται στο Σχήμα 5-4. Στη σχέση (5.22), οι συνιστώσες των ταυστών $\underline{K}_M^{(ij)}$ βρίσκονται στο μητρώο \underline{K}_M (για τις συνοριακές συνθήκες μετατόπισης) ή στο μητρώο \underline{K}_M^* (για τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες) στις σειρές και τις στήλες των βαθμών ελευθερίας στους κόμβους i και j . Στη συνέχεια, η έκφραση των επικόμβιων δυνάμεων (5.22) αντικαθίσταται στη σχέση (5.13) ή (5.14) για τη μακροσκοπική τάση:

$$\delta \mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \sum_i \sum_j (\underline{K}_M^{(ij)} \delta \vec{u}_{(j)}) \vec{X}_{(i)} \quad (5.23)$$

Αντικατάσταση της εξίσωσης $\delta \bar{u}_{(j)} = \bar{X}_{(j)} \delta F_M^T$ στη σχέση (5.23) δίνει:

$$\delta \mathbf{P}_M = \frac{1}{V_0} \sum_i \sum_j \left(\bar{X}_{(i)} \underline{K}_M^{(ij)} \bar{X}_{(j)} \right)^{LC} : \delta F_M^T \quad (5.24)$$

όπου ο δείκτης LC για έναν τανυστή τετάρτης τάξεως 4T ορίζεται ως $T_{ijkl}^{LC} = T_{jikl}$. Τελικά, συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.24) και (5.21) το συνεπές καταστατικό εφαπτομενικό μητρώο προσδιορίζεται ως εξής:

$${}^4\mathbf{C}_M^P = \frac{1}{V_0} \sum_i \sum_j \left(\bar{X}_{(i)} \underline{K}_M^{(ij)} \bar{X}_{(j)} \right)^{LC} \quad (5.25)$$

5.5. Διαδικασία επίλυσης

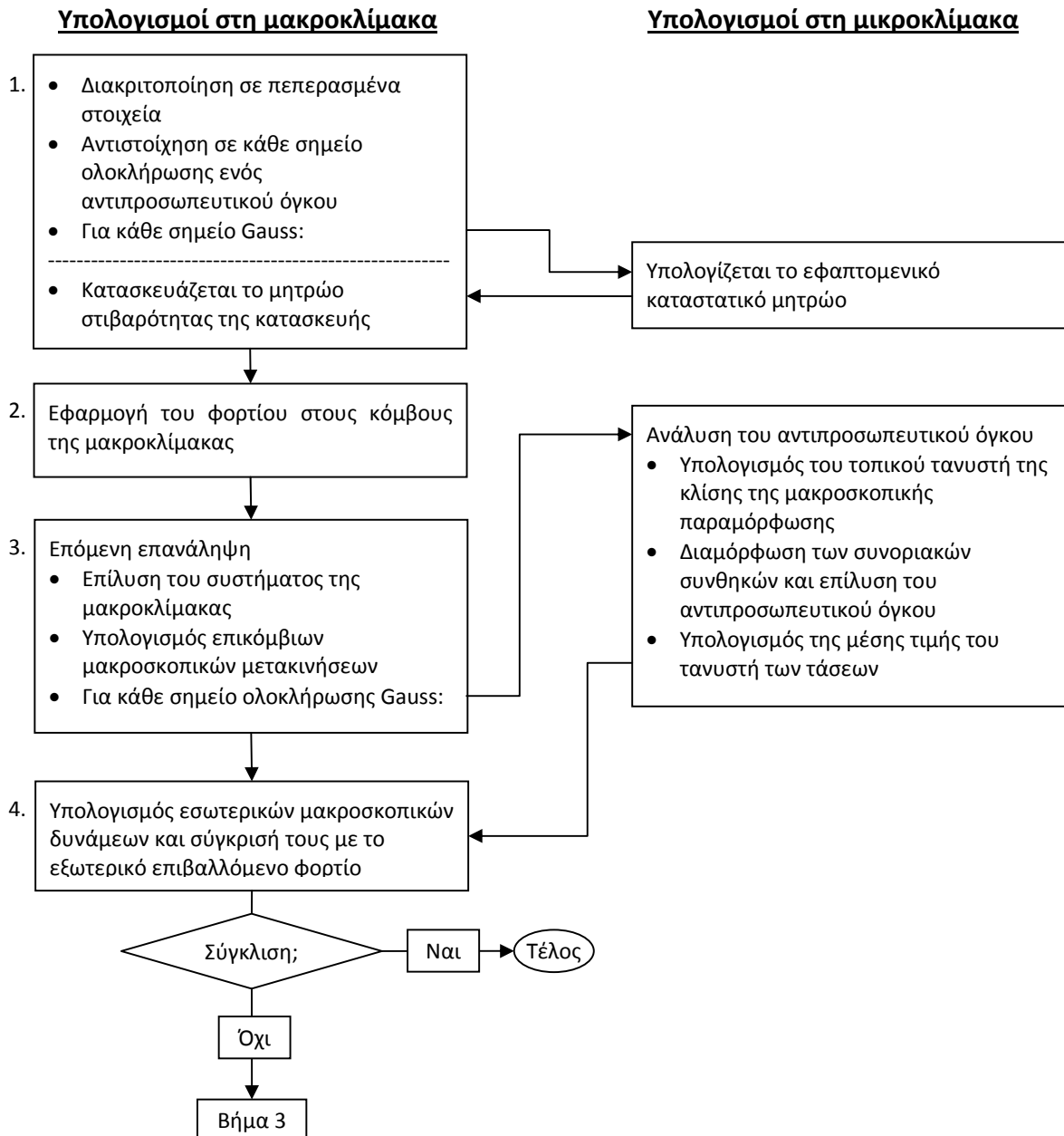
Με βάση τα παραπάνω, η εφαρμογή της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως μπορεί να περιγραφεί από τα ακόλουθα διαδοχικά βήματα.

Η κατασκευή η οποία αναλύεται διακριτοποιείται σε πεπερασμένα στοιχεία. Σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης της μακροκλίμακας έχει αντιστοιχηθεί ένας διακριτοποιημένος αντιπροσωπευτικός όγκος, ο οποίος παρέχει τον τοπικό μακροσκοπικό τανυστή των τάσεων \mathbf{P}_M , που ανήκει σε έναν συγκεκριμένο τοπικό τανυστή μακροσκοπικών παραμορφώσεων \mathbf{F}_M . Η γεωμετρία του αντιπροσωπευτικού όγκου βασίζεται στη μορφολογία της μικροδομής του υπό θεώρηση υλικού.

Από το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του αντιπροσωπευτικού όγκου εξάγεται το συνεπές καταστατικό εφαπτομενικό μητρώο ${}^4\mathbf{C}_M^P$ από τη σχέση (5.25). Αφού η διαδικασία αυτή γίνει για κάθε σημείο ολοκλήρωσης, διαμορφώνεται το καθολικό μητρώο της κατασκευής σε επίπεδο μακροκλίμακας. Στη συνέχεια, επιβάλλεται το εξωτερικό φορτίο και προκύπτουν οι επικόμβιες μακροσκοπικές μετακινήσεις. Από τις τελευταίες, για κάθε σημείο ολοκλήρωσης, υπολογίζεται ο τοπικός τανυστής της κλίσης της μακροσκοπικής παραμόρφωσης, \mathbf{F}_M . Ο τανυστής \mathbf{F}_M χρησιμοποιείται για να διαμορφώσει τις συνοριακές συνθήκες που θα εφαρμοστούν στον αντίστοιχο αντιπροσωπευτικό όγκο (στη συγκεκριμένη εργασία εφαρμόστηκαν οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες, σχέσεις (5.7) και (5.8)).

Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών του αντιπροσωπευτικού όγκου με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (παράγραφος 5.3) παρέχει το πεδίο των τάσεων και των ανηγμένων παραμορφώσεων στο στοιχείο της μικροδομής. Χρησιμοποιώντας τις προκύπτουσες δυνάμεις στους κόμβους όπου επιβλήθηκαν καθορισμένες μετακινήσεις, υπολογίζεται η μέση τιμή του πρώτου Piola-Kirchhoff τανυστή των τάσεων \mathbf{P}_M στον αντιπροσωπευτικό όγκο σύμφωνα με τη σχέση (5.14) και αποδίδεται στο σημείο ολοκλήρωσης της μακροκλίμακας ως η τοπική μακροσκοπική τάση.

Όταν η ανάλυση όλων των αντιπροσωπευτικών όγκων ολοκληρωθεί, ο τανυστής των τάσεων είναι διαθέσιμος σε κάθε μακροσκοπικό σημείο ολοκλήρωσης. Έτσι, μπορούν να υπολογιστούν οι εσωτερικές μακροσκοπικές δυνάμεις. Εάν αυτές βρίσκονται σε ισορροπία με την εξωτερική φόρτιση, έχει επιτευχθεί σύγκλιση. Αν δεν υπάρχει σύγκλιση, η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί και να βρεθούν νέες εκτιμήσεις των επικόμβιων μετακινήσεων της μακροκλίμακας.



Σχήμα 5-5 Διάγραμμα ροής του προγράμματος για την ελαστική ανάλυση με τη μέθοδο της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως

5.6. Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάστηκε η στρατηγική της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξης, η οποία παρέχει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τη μακροσκοπική απόκριση ανομοιογενών υλικών, λαμβάνοντας υπόψη τα ακριβή χαρακτηριστικά της μικροδομής. Όταν χρησιμοποιείται η μεθοδολογία αυτή δεν απαιτείται ο καθορισμός της ομογενοποιημένης μακροσκοπικής καταστατικής συμπεριφοράς, το οποίο είναι αρκετά δύσκολο για περίπλοκη μικροδομή. Αντιθέτως, η καταστατική συμπεριφορά στα σημεία ολοκλήρωσης της μακροκλίμακας καθορίζεται από τη μέση τιμή των αποτελεσμάτων της λεπτομερούς προσομοίωσης της μικροδομής. Αυτό το χαρακτηριστικό δίνει τη δυνατότητα της εφαρμογής της μεθόδου σε έντονα μη γραμμικά προβλήματα γεωμετρίας.

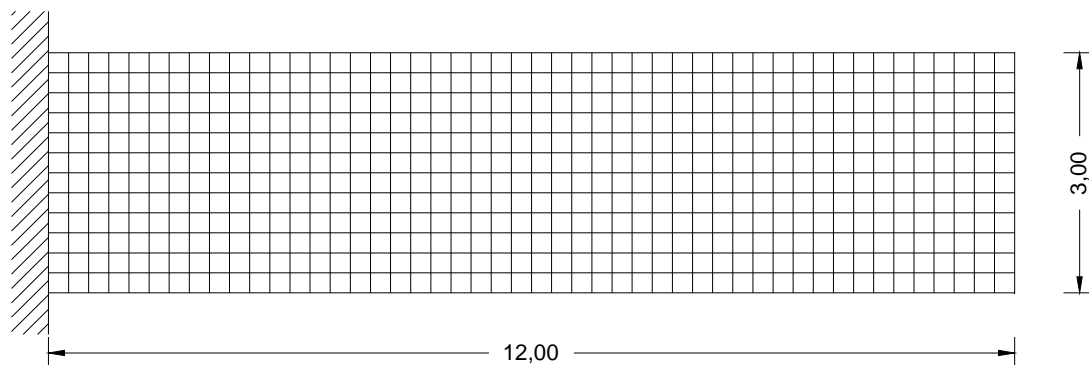
Παρά τα ελκυστικά χαρακτηριστικά, υπάρχουν και οι περιορισμοί της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως. Οι αδυναμίες της μεθόδου προέρχονται από τη θεμελιώδη παραδοχή ότι η κλίμακα μήκους της μικροκλίμακας είναι αμελητέα σε σύγκριση με την κλίμακα μήκους της μακροκλίμακας. Εξαιτίας της ιδέας του διαχωρισμού των κλιμάκων είναι δικαιολογημένο να υποθέσουμε ομοιομορφία στο πεδίο παραμόρφωσης του αντιπροσωπευτικού όγκου. Ως αποτέλεσμα, μπορούν να προσομοιωθούν ικανοποιητικά μόνο απλές μορφές παραμόρφωσης (δηλαδή εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση και ο συνδυασμός τους). Επιπλέον, οι διαστάσεις των ανομοιογενειών της μικροδομής δεν επηρεάζουν τη διαδικασία του υπολογισμού της μέσης τιμής. Αυξάνοντας την κλίμακα του συνόλου της μικροδομής, αυτό οδηγεί σε αποτελέσματα που ταυτίζονται. Αυτό δεν αποτελεί έκπληξη, αφού η προσέγγιση της πρώτης τάξεως είναι σε απόλυτη συμφωνία με την τυπική θεωρία της μηχανικής του συνεχούς, όπου ένα υλικό σημείο προσδιορίζεται με έναν απειροστό όγκο. Αυτός ο απειροστός χαρακτήρας εμφανίζεται ακριβώς και στη συμπεριφορά των αντιπροσωπευτικών όγκων, οι οποίοι θεωρούνται ως μακροσκοπικά υλικά σημεία. Αυτό σημαίνει ότι το μέγεθος της μικροδομής δεν μπορεί να συσχετιστεί με αυτό της μακροκλίμακας. Επιπλέον, η υπόθεση της ομοιομορφίας της μακροσκοπικής παραμόρφωσης σε έναν αντιπροσωπευτικό όγκο δεν είναι έγκυρη σε ζώνες όπου η κλίση (gradient) του πεδίου παραμόρφωσης είναι μεγάλη.

**κεφάλαιο 6. Παραδείγματα-
Αριθμητικές εφαρμογές**

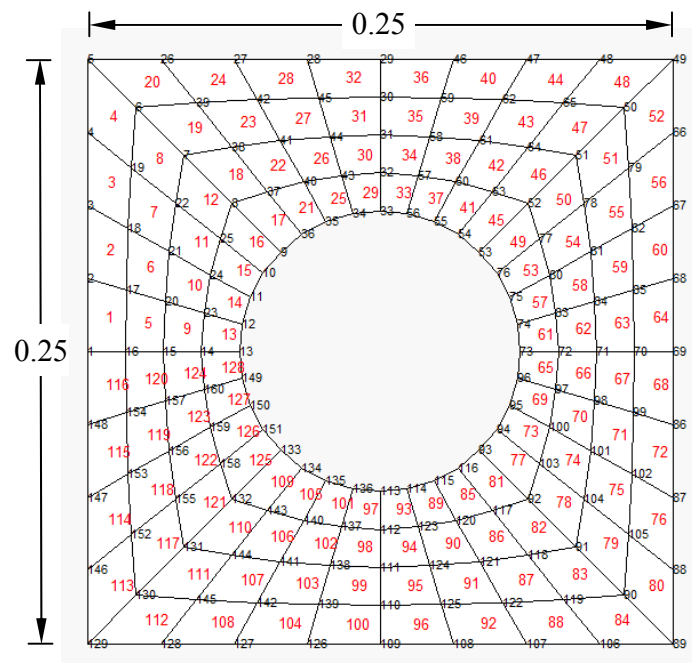
6.1. Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην ελαστική ανάλυση των κατασκευών (EMsFEM)

6.1.1. Πρώτη εφαρμογή

Ας θεωρήσουμε μια πορώδη κατασκευή η οποία συντίθεται από 12×48 επαναλαμβανόμενα στοιχεία της μακροκλίμακας (Σχήμα 6-1). Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων της μικροδομής του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας φαίνεται στο Σχήμα 6-2.



Σχήμα 6-1 Το δίκτυο διακριτοποίησης της πορώδους κατασκευής σε επίπεδο μακροκλίμακας

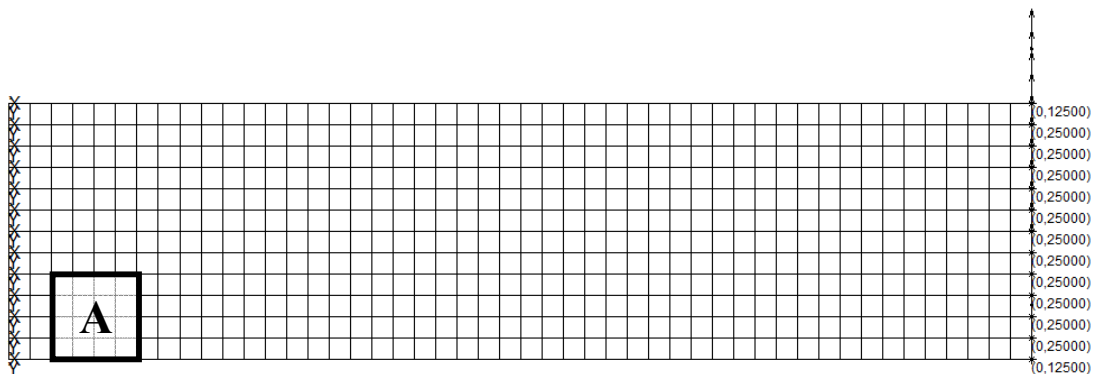


Σχήμα 6-2 Η μικροδομή του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας

Οι ιδιότητες των υλικών είναι οι ακόλουθες:

- Μέτρο ελαστικότητας Young: $E = 1 \times 10^8$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.3$
- Πάχος: $t = 1$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι συνοριακές συνθήκες (X: δέσμευση κατά τη διεύθυνση x και Y: δέσμευση κατά τη διεύθυνση y) καθώς και η φόρτιση της κατασκευής:



Σχήμα 6-3 Φόρτιση και συνοριακές συνθήκες της κατασκευής

Για την επίλυση της κατασκευής αυτής εφαρμόζονται τέσσερις μέθοδοι:

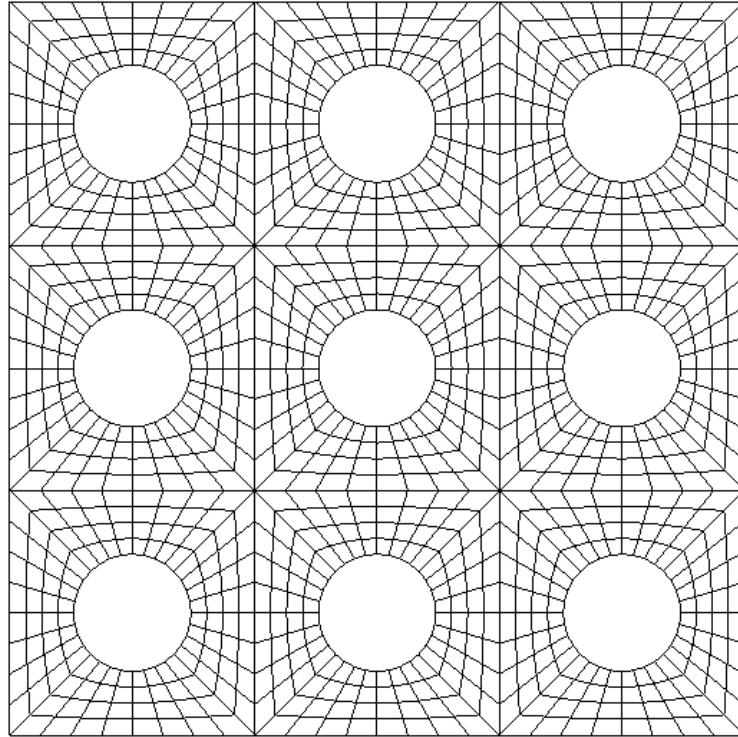
- EMsFEM: γραμμικές συνοριακές συνθήκες
- EMsFEM-O: γραμμικές συνοριακές συνθήκες σε συνδυασμό με την τεχνική υπερ-δειγματοληψίας
- EMsFEM-P: περιοδικές συνοριακές συνθήκες
- EMsFEM-OP: περιοδικές συνοριακές συνθήκες σε συνδυασμό με την τεχνική υπερ-δειγματοληψίας

Για τις μεθόδους που εφαρμόζουν την τεχνική της υπερ-δειγματοληψίας, η περιοχή της δειγματοληψίας αποτελείται από 3×3 επαναλαμβανόμενα στοιχεία της μακροκλίμακας (Σχήμα 6-4).

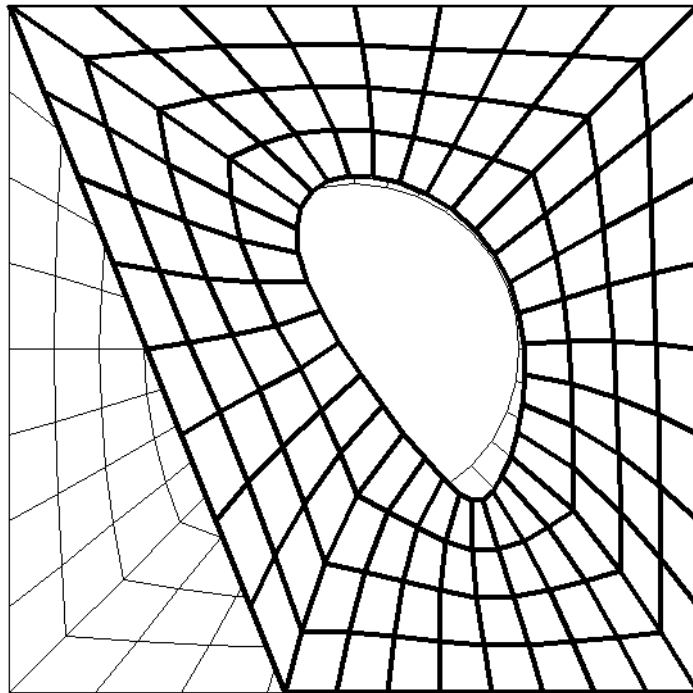
Στο Σχήμα 6-5 φαίνεται η κατασκευή της συνάρτησης βάσης $\mathbf{N}_1^x = \{N_{1,xx}, N_{1,yx}\}$ με τη χρήση των γραμμικών συνοριακών συνθηκών (EMsFEM) ενώ στο Σχήμα 6-6 εφαρμόζονται οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες (EMsFEM-P). Για την εφαρμογή των μεθόδων EMsFEM-O και EMsFEM-OP απαιτείται η επίλυση της περιοχής υπερ-δειγματοληψίας (Σχήμα 6-7). Οι συναρτήσεις βάσης που προκύπτουν στη συνέχεια είναι σχεδόν όμοιες με τις αντίστοιχες τους χωρίς την εφαρμογή της τεχνικής της υπερ-δειγματοληψίας.

Για να διερευνηθεί η αξιοπιστία των παραπάνω μεθόδων συγκρίνονται οι μετακινήσεις κατά τη διεύθυνση y των κόμβων της άνω ίνας με τις μετακινήσεις που

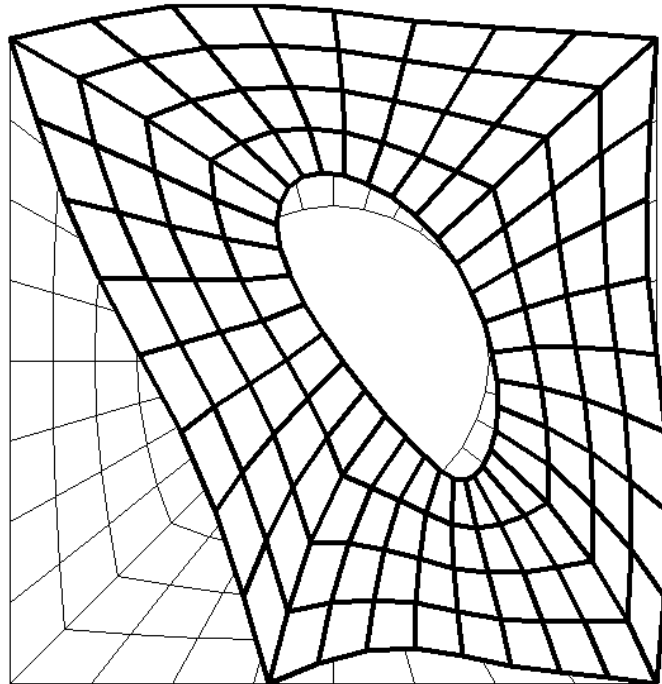
προκύπτουν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Femap Nastran). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-8.



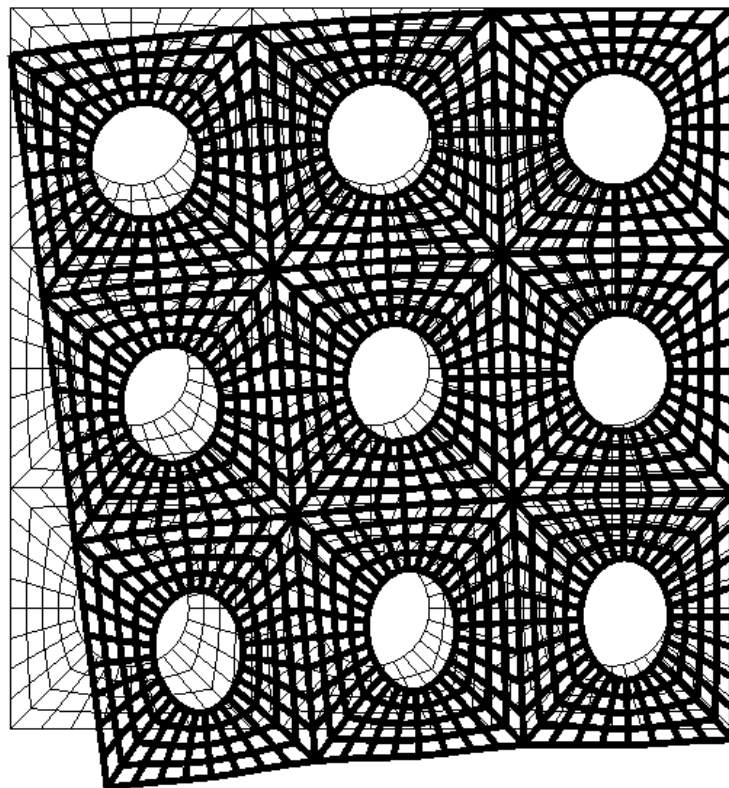
Σχήμα 6-4 Περιοχή υπερ-δειγματοληψίας



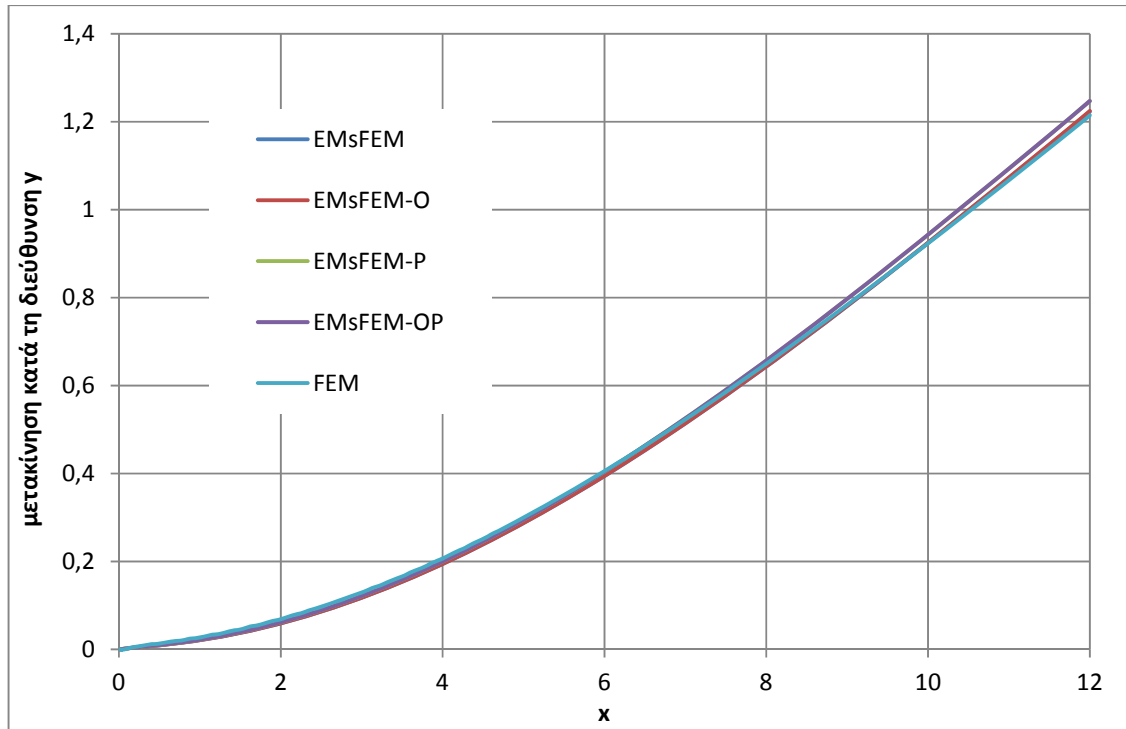
Σχήμα 6-5 Γραμμικές συνοριακές συνθήκες (EMsFEM)



Σχήμα 6-6 Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

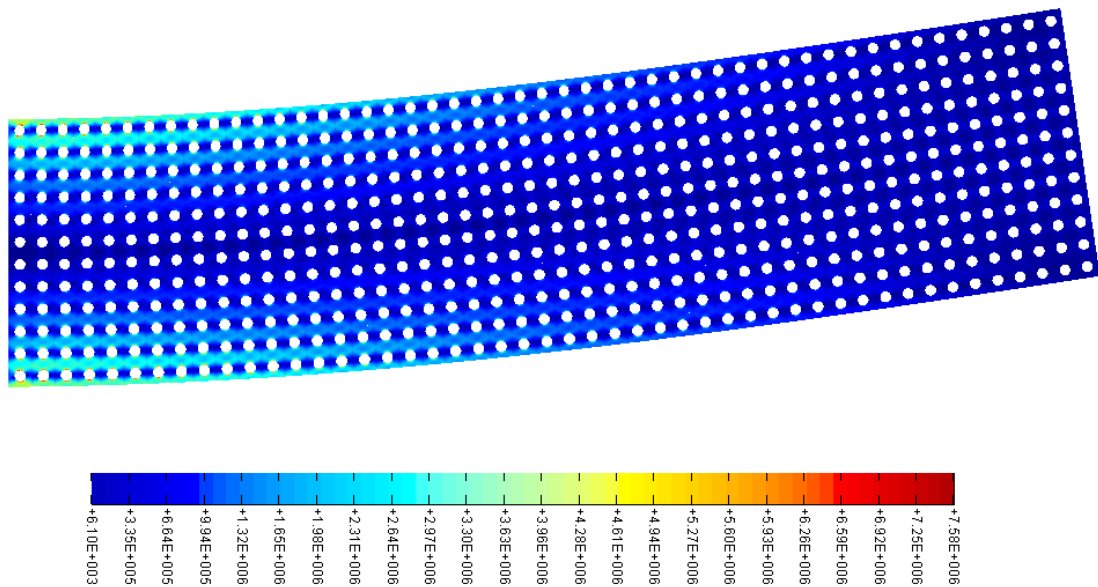


Σχήμα 6-7 Εφαρμογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών και επίλυση της περιοχής υπερ-δειγματοληψίας

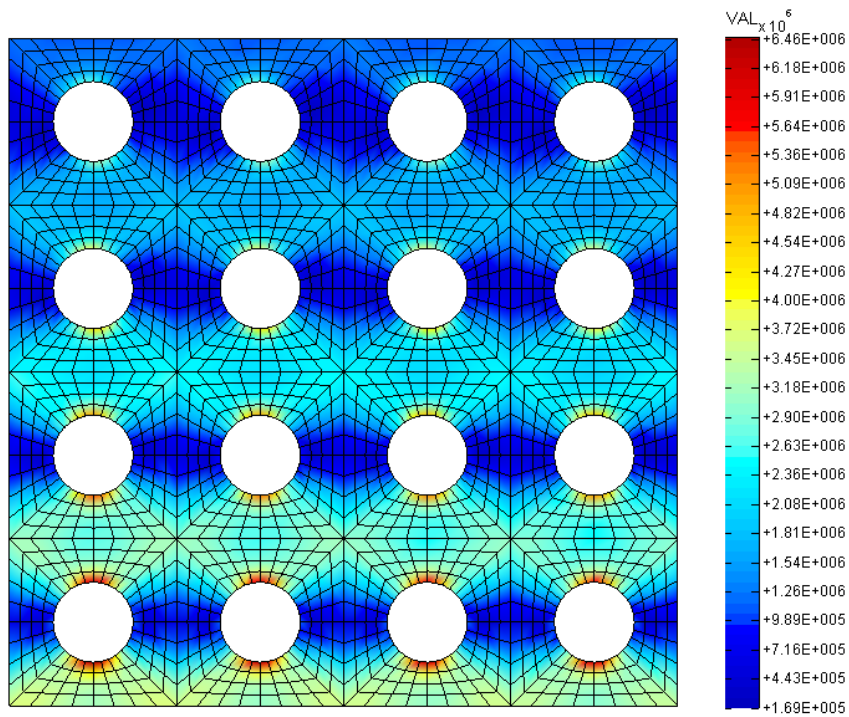


Σχήμα 6-8 Μετακινήσεις των κόμβων της άνω ίνας της κατασκευής κατά τη διεύθυνση γ

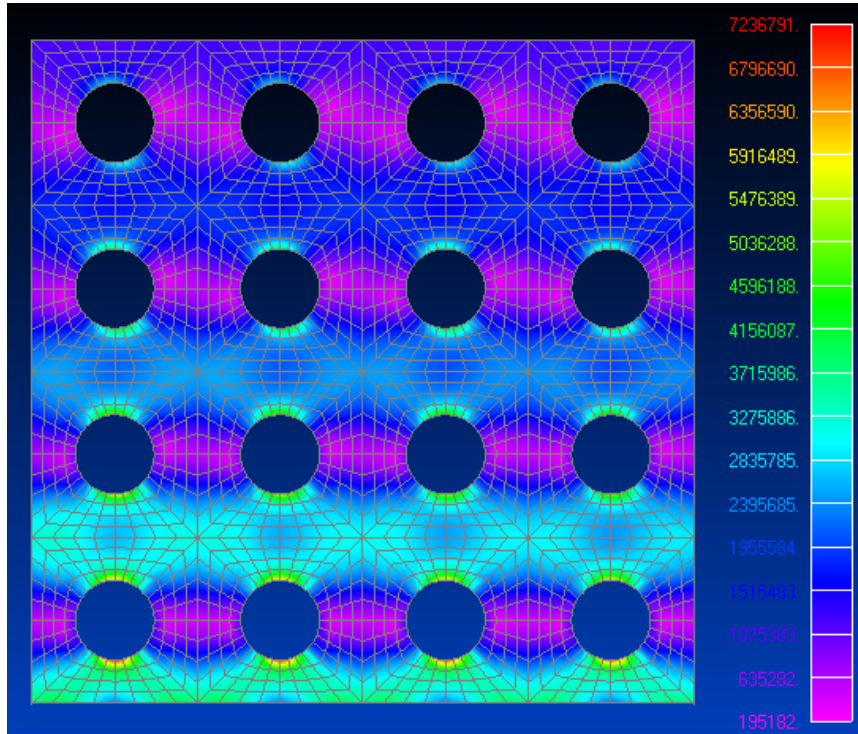
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα και των τεσσάρων μεθόδων βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 6-10 και στο Σχήμα 6-11 συγκρίνονται οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων Von Mises στο επίπεδο της μικροκλίμακας για τα στοιχεία της περιοχής Α, όπως αυτή ορίζεται στο Σχήμα 6-3.



Σχήμα 6-9 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων στην παραμορφωμένη κατάσταση



Σχήμα 6-10 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων

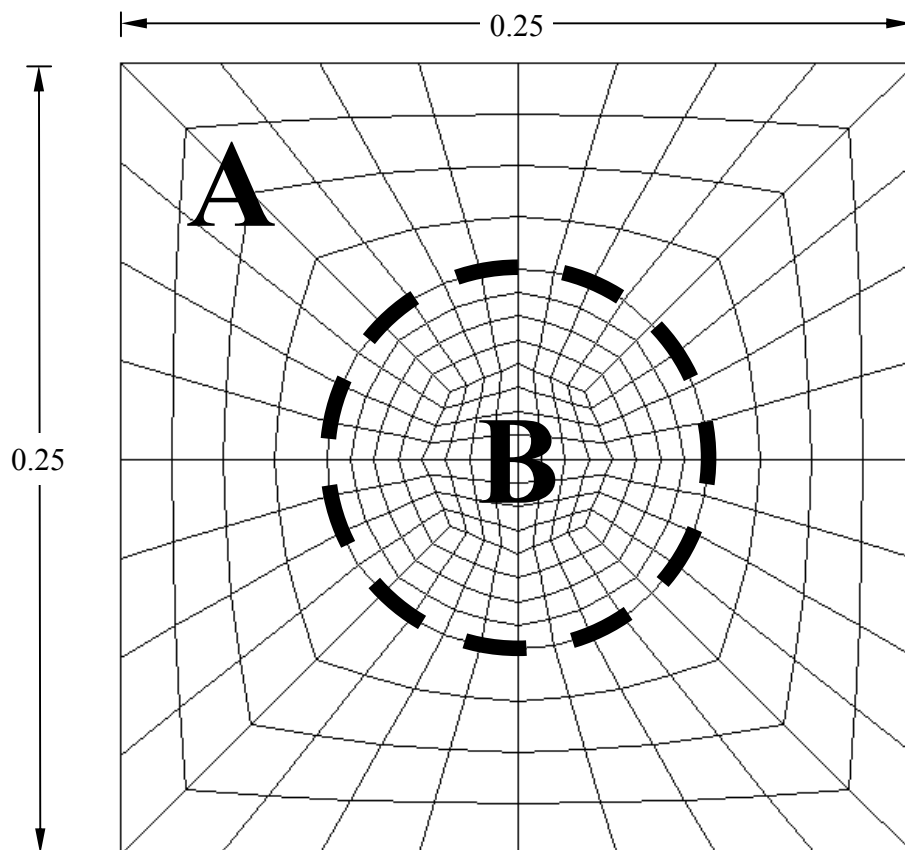


Σχήμα 6-11 Κατανομές τάσεων της μικροκλίμακας όπως προέκυψαν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Femur Nastran)

6.1.2. Δεύτερη εφαρμογή

Στη δεύτερη εφαρμογή, εξετάζεται και πάλι η κατασκευή της πρώτης εφαρμογής (Σχήμα 6-1), η οποία στην παρούσα εφαρμογή έχει διαφορετική μικροκλίμακα. Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων της μικροδομής του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας φαίνεται στο Σχήμα 6-12. Σε αυτό το σχήμα, η περιοχή η οποία περικλείεται από τη διακεκομμένη γραμμή αποτελείται από υλικό που έχει μέτρο ελαστικότητας ίσο με το ένα δέκατο του μέτρου ελαστικότητας του υλικού της υπόλοιπης περιοχής. Οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση είναι όπως και στην 1^η εφαρμογή (Σχήμα 6-3). Αναλυτικότερα:

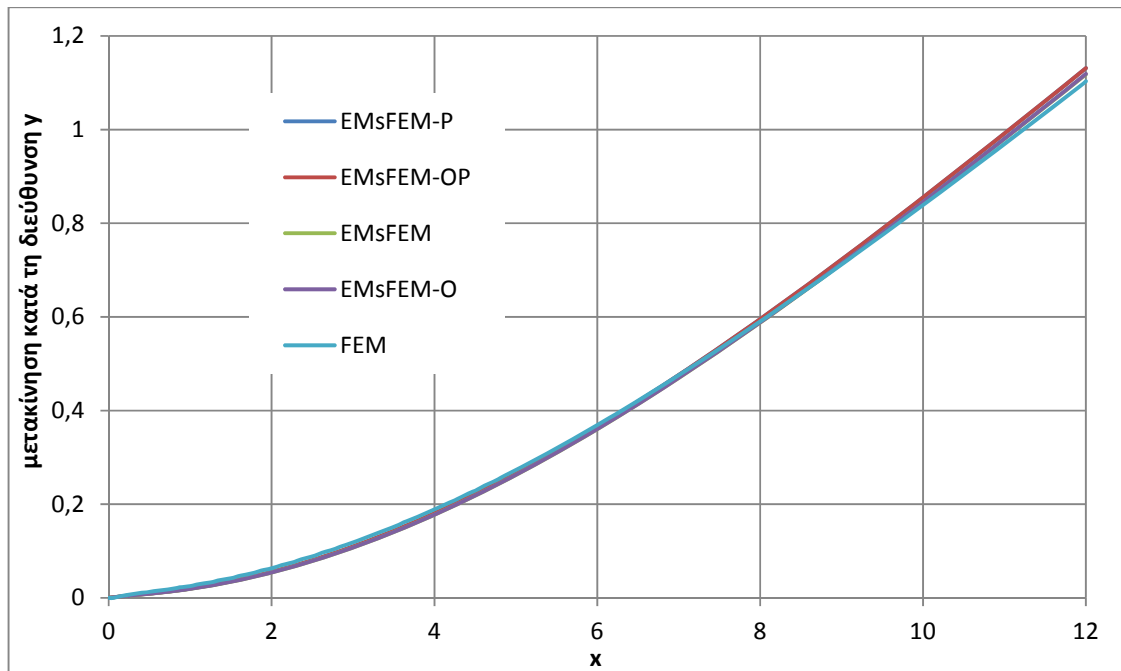
- Μέτρο ελαστικότητας Young περιοχής A: $E = 1 \times 10^8$
- Μέτρο ελαστικότητας Young περιοχής B: $E = 1 \times 10^7$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.3$
- Πάχος: $t = 1$



Σχήμα 6-12 Η μικροδομή του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας της 2^{ης} εφαρμογής

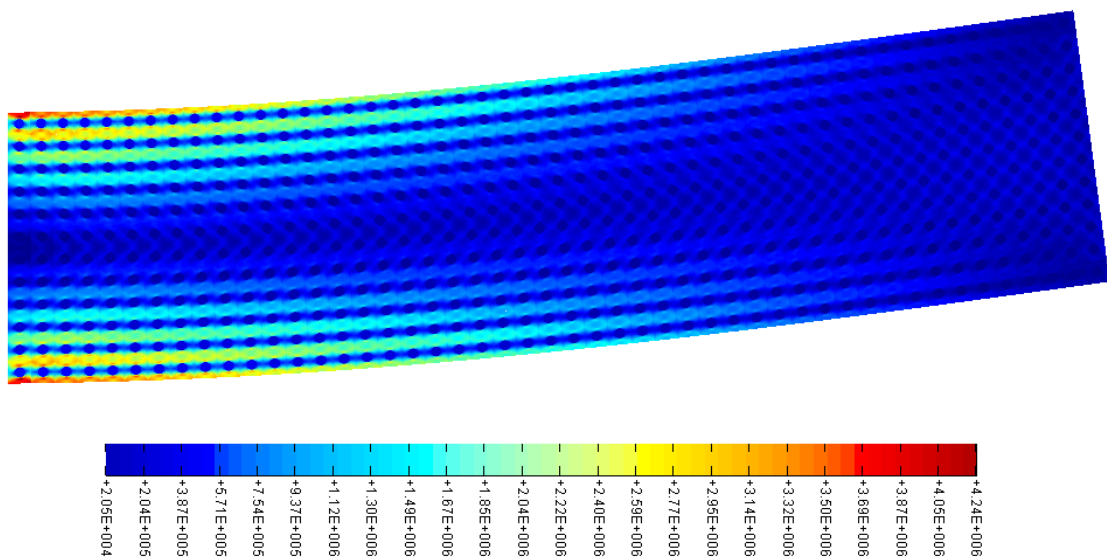
Για να διερευνηθεί η αξιοπιστία των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων (EMsFEM) συγκρίνονται οι μετακινήσεις κατά τη διεύθυνση y των κόμβων της άνω ίνας με τις μετακινήσεις που προκύπτουν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων (Femap Nastran). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-13.

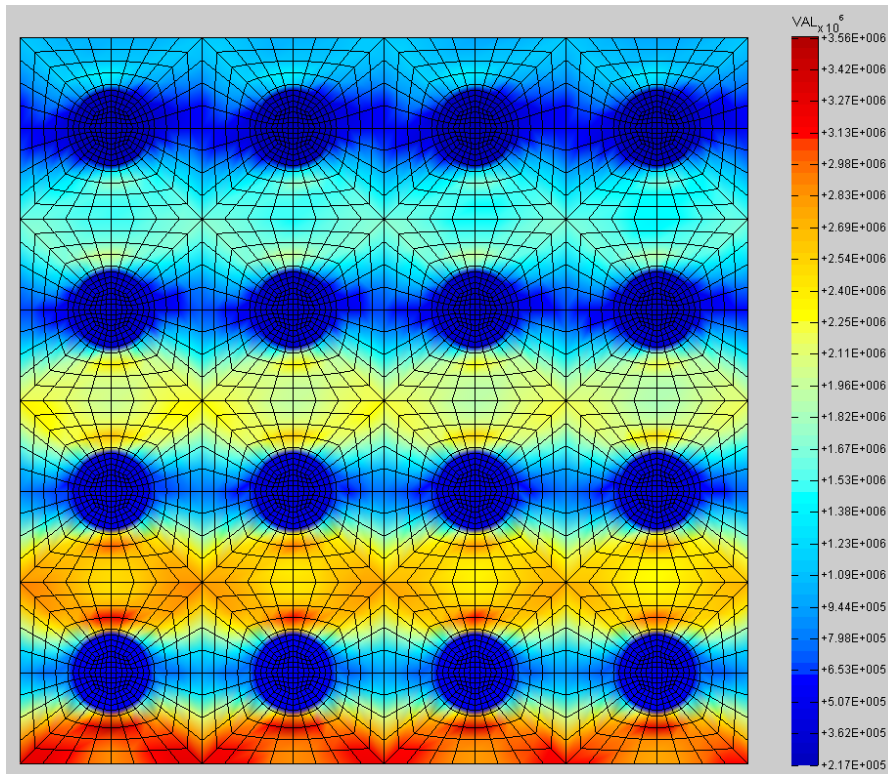


Σχήμα 6-13 Μετακινήσεις των κόμβων της άνω ίνας της κατασκευής κατά τη διεύθυνση y

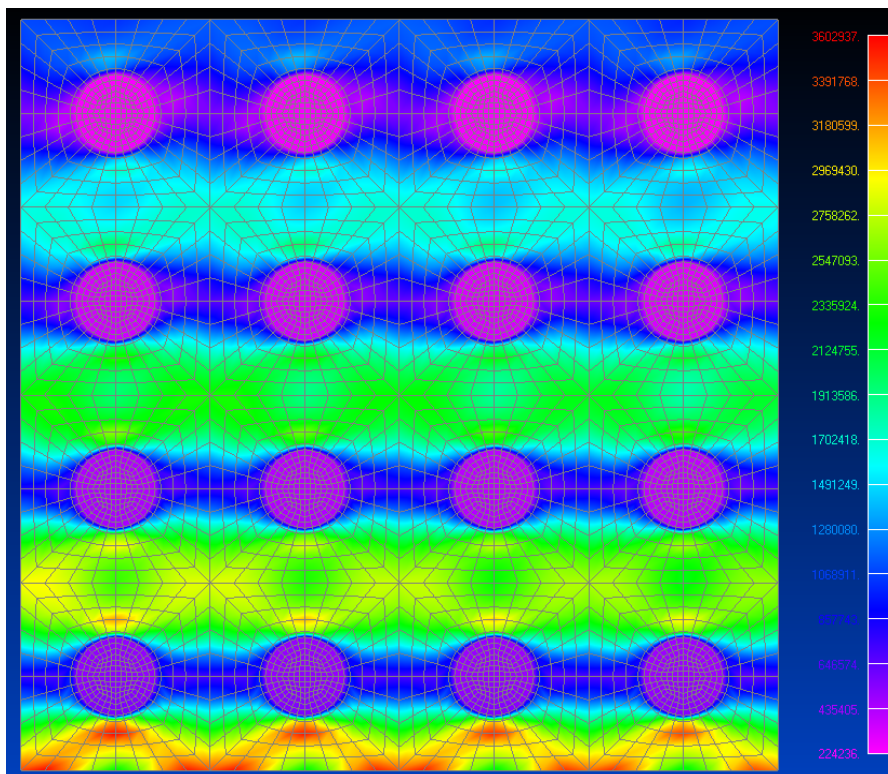
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα και των τεσσάρων μεθόδων βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 6-15 και στο Σχήμα 6-16 συγκρίνονται οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων Von Mises στο επίπεδο της μικροκλίμακας για τα στοιχεία της περιοχής Α, όπως αυτή ορίζεται στο Σχήμα 6-3.



Σχήμα 6-14 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων στην παραμορφωμένη κατάσταση



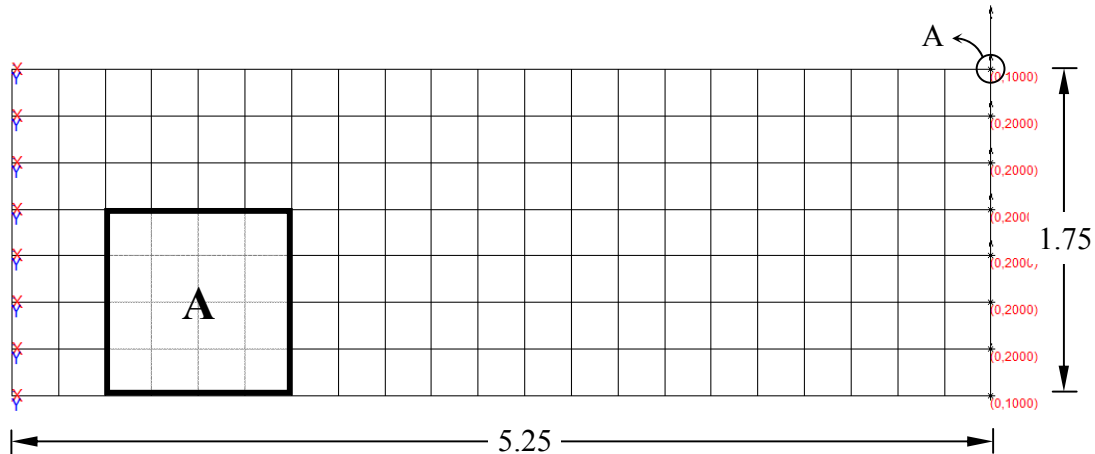
Σχήμα 6-15 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων



Σχήμα 6-16 Κατανομές τάσεων της μικροκλίμακας όπως προέκυψαν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Femap Nastran)

6.2. Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην ελαστοπλαστική ανάλυση των κατασκευών

Ας θεωρήσουμε μια πορώδη κατασκευή η οποία συντίθεται από 7×21 επαναλαμβανόμενα στοιχεία της μακροκλίμακας (Σχήμα 6-17). Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων της μικροδομής του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας φαίνεται στο Σχήμα 6-2.



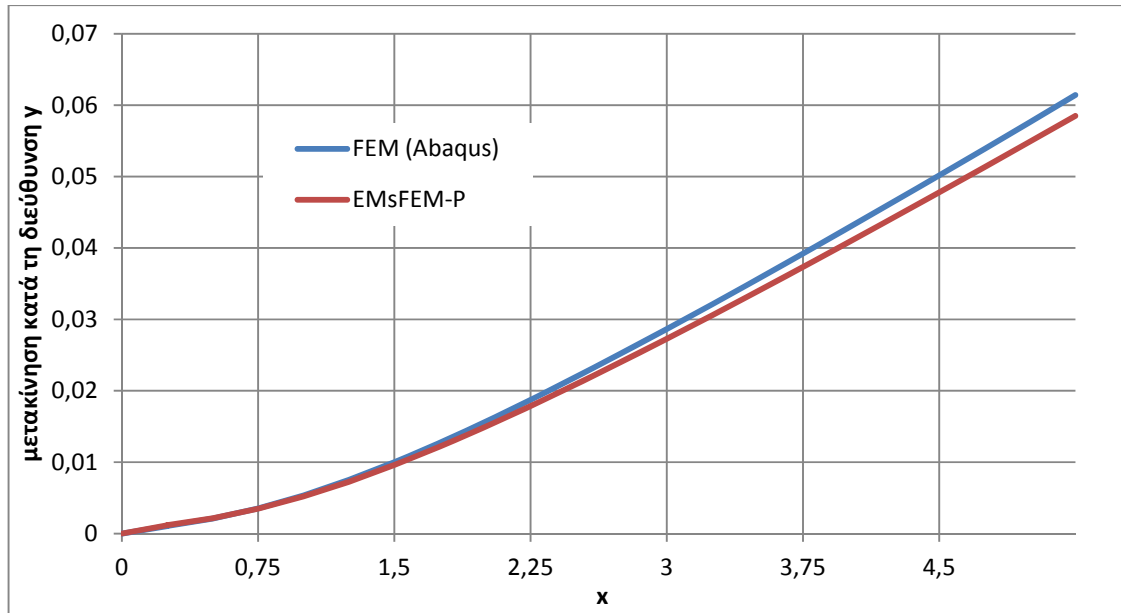
Σχήμα 6-17 Το δίκτυο διακριτοποίησης της πορώδους κατασκευής σε επίπεδο μακροκλίμακας, οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση

Οι ιδιότητες των υλικών είναι οι ακόλουθες:

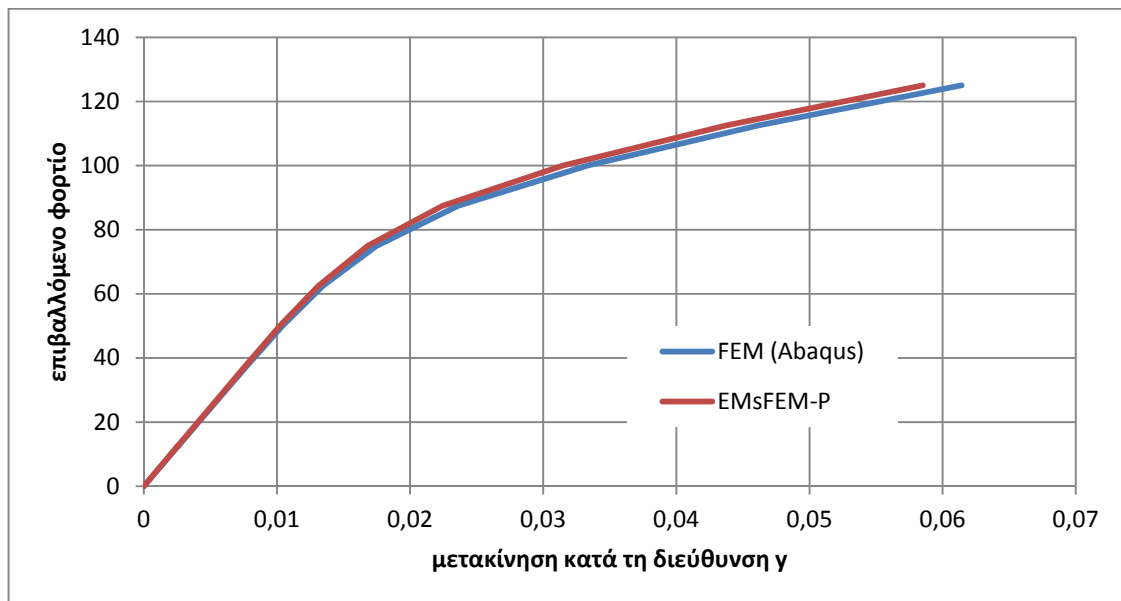
- Μέτρο ελαστικότητας Young: $E = 1 \times 10^8$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.3$
- Εφαπτομενικό μέτρο πλαστικού κλάδου: $E_t = 1 \times 10^7$
- Τάση διαρροής: $\sigma_y = 1 \times 10^5$
- Πάχος: $t = 1$

Για την επίλυση της κατασκευής αυτής εφαρμόζονται οι περιοδικές συνοριακές συνθήκες (EMsFEM-P) και συγκρίνονται οι μετακινήσεις κατά τη διεύθυνση y των κόμβων της άνω ίνας με τις μετακινήσεις που προκύπτουν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Abaqus). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 6-18. Επίσης, συγκρίνεται η μετακίνηση του κόμβου A (Σχήμα 6-17, ακραίος άνω δεξιά κόμβος) συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου (Σχήμα 6-19).

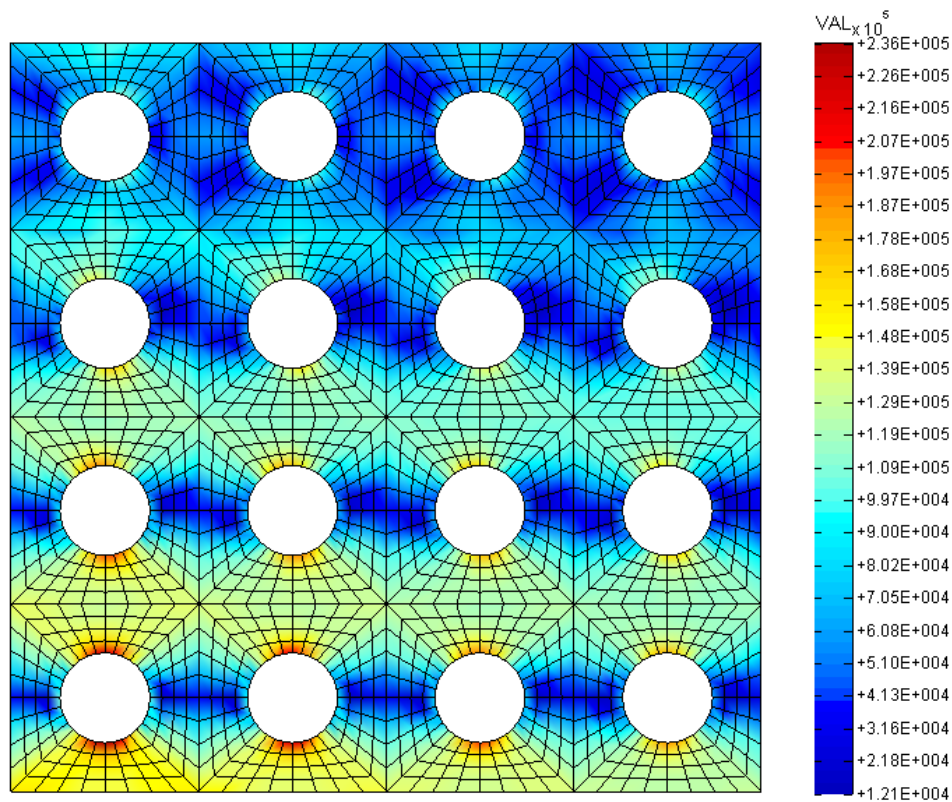
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα και των τεσσάρων μεθόδων βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 6-20 και στο Σχήμα 6-21 συγκρίνονται οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων Von Mises στο επίπεδο της μικροκλίμακας για τα στοιχεία της περιοχής A, όπως αυτή ορίζεται στο Σχήμα 6-17.



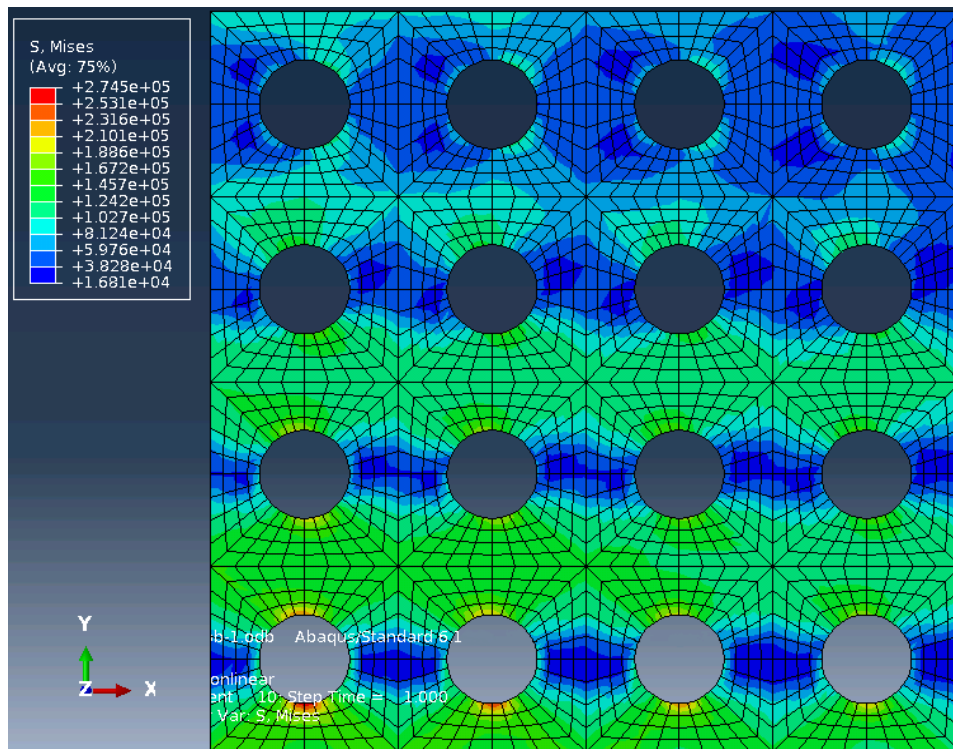
Σχήμα 6-18 Μετακινήσεις των κόμβων της άνω ίνας της κατασκευής κατά τη διεύθυνση y



Σχήμα 6-19 Μετακίνηση κόμβου A κατά τη διεύθυνση y συναρτήσει του επιβαλλόμενου φορτίου



Σχήμα 6-20 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων

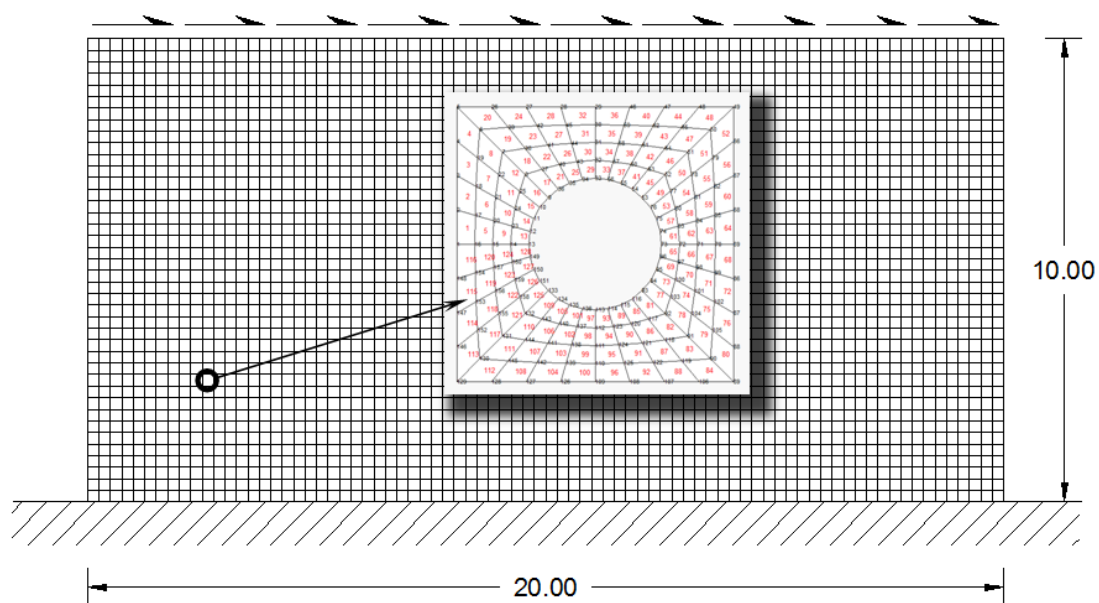


Σχήμα 6-21 Κατανομές τάσεων της μικροκλίμακας όπως προέκυψαν από την επίλυση με την παραδοσιακή μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Abaqus)

6.3. Εφαρμογές υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξεως

6.3.1. Πρώτη εφαρμογή

Ας θεωρήσουμε μια πορώδη κατασκευή η οποία συντίθεται από 40×80 επαναλαμβανόμενα στοιχεία της μακροκλίμακας (Σχήμα 6-22). Η κάτω ίνα της κατασκευής είναι πακτωμένη ενώ στην άνω ίνα επιβάλλεται κατανεμημένο φορτίο μέτρου 8×10^5 . Το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων της μικροδομής του κάθε επαναλαμβανόμενου στοιχείου της μακροκλίμακας φαίνεται στο Σχήμα 6-2.



Σχήμα 6-22 Μακροκλίμακα της κατασκευής, συνοριακές συνθήκες και φόρτιση

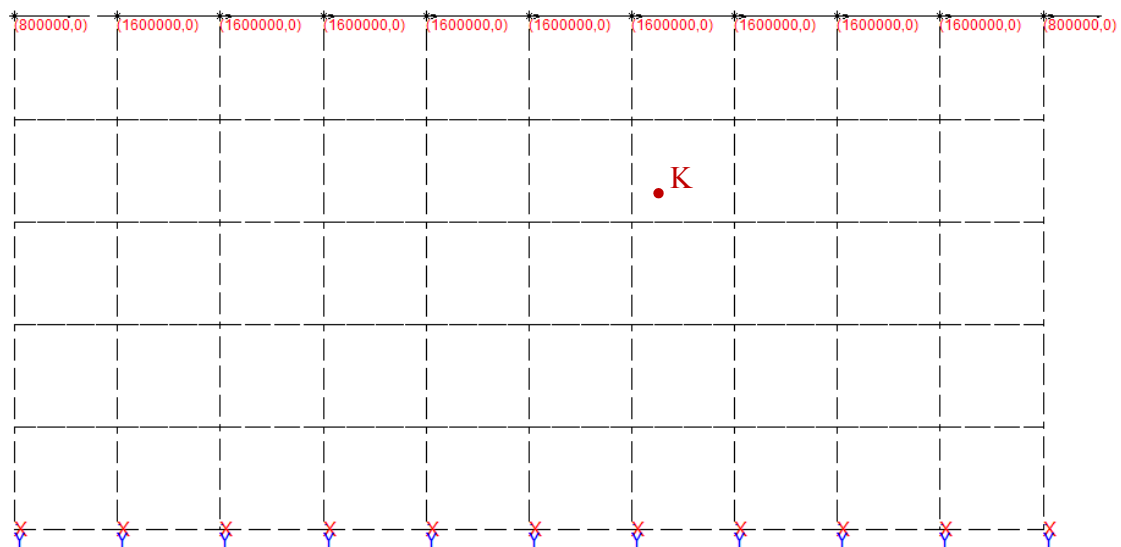
Οι ιδιότητες των υλικών είναι οι ακόλουθες:

- Μέτρο ελαστικότητας Young: $E = 1 \times 10^8$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.3$
- Πάχος: $t = 1$

Για την επίλυση της κατασκευής αυτής εφαρμόζονται δύο μέθοδοι:

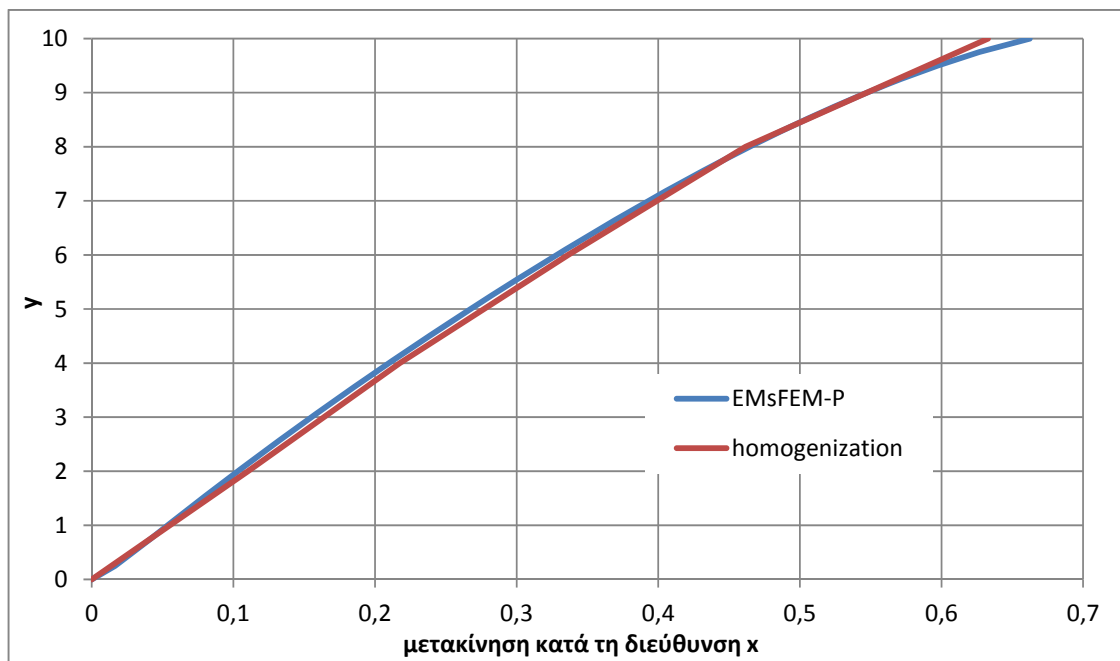
- (α) EMsFEM-P: περιοδικές συνοριακές συνθήκες
- (β) υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξεως

Στο Σχήμα 6-23 απεικονίζεται η διακριτοποίηση του φορέα για την επίλυση μέσω της μεθόδου της υπολογιστικής ομογενοποίησης. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση.



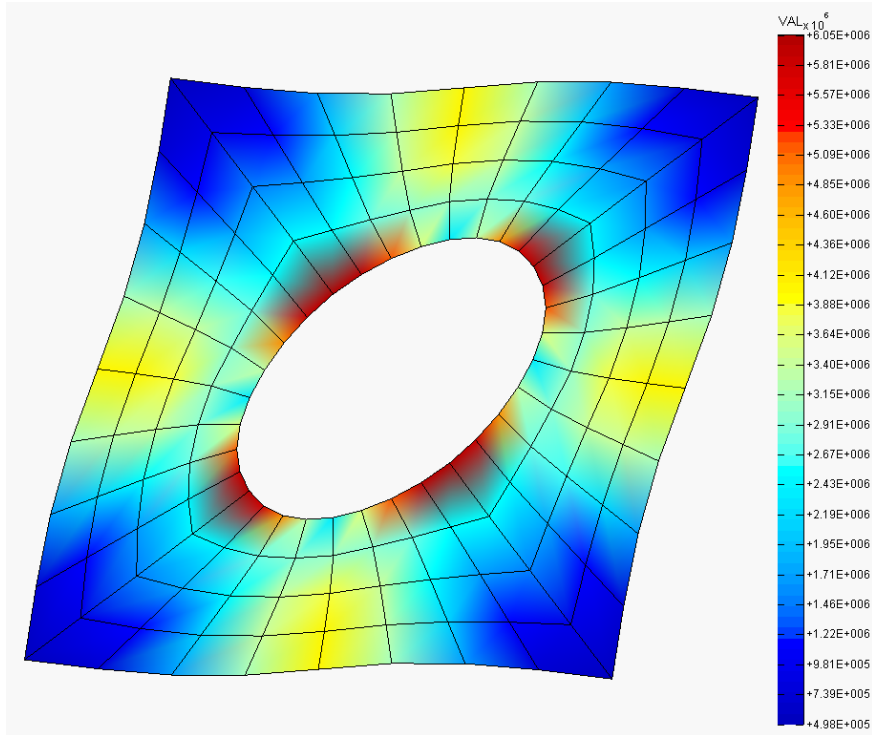
Σχήμα 6-23 Διακριτοποίηση φορέα στην υπολογιστική ομογενοποίηση, φόρτιση και συνοριακές συνθήκες

Στο σχήμα που ακολουθεί (Σχήμα 6-24) συγκρίνονται οι μετακινήσεις κατά τη διεύθυνση x των κόμβων της δεξιάς ίνας σύμφωνα με την EMsFEM με τις μετακινήσεις που προκύπτουν από την επίλυση με την υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξης.

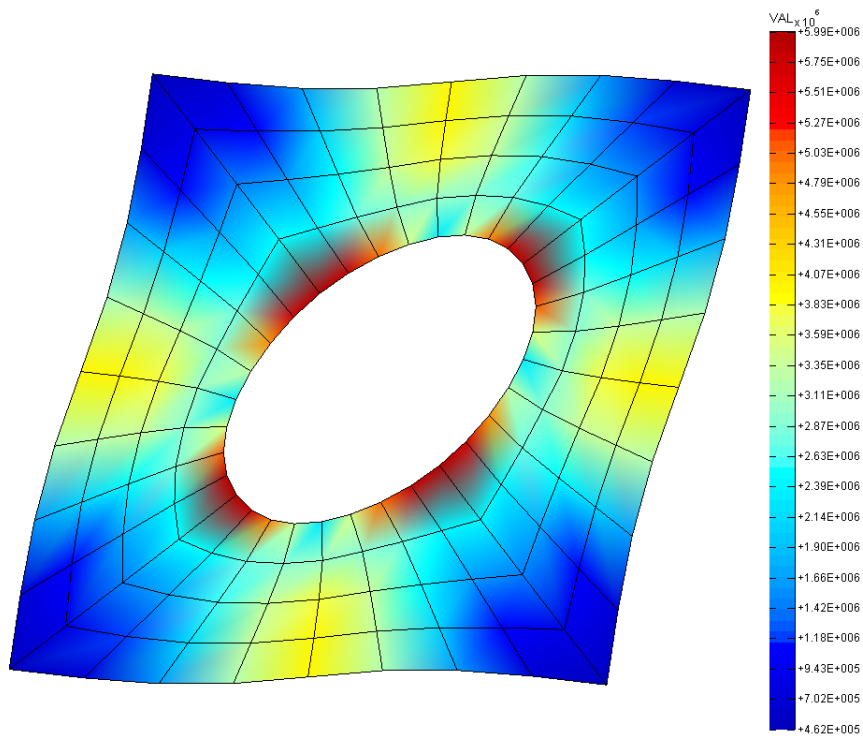


Σχήμα 6-24 Μετακινήσεις των κόμβων της δεξιάς ίνας της κατασκευής κατά τη διεύθυνση x

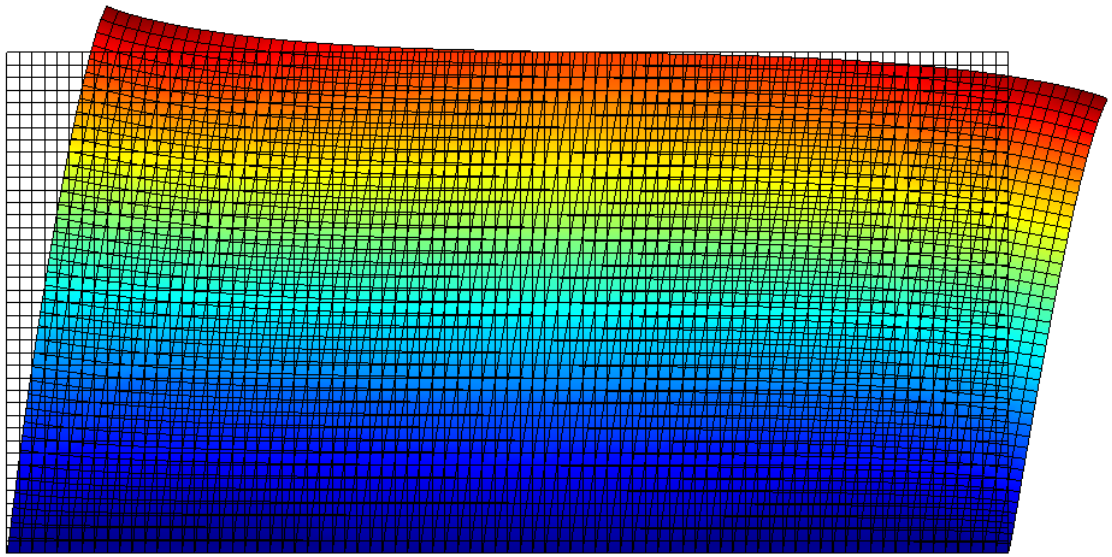
Στο Σχήμα 6-25 και στο Σχήμα 6-26 συγκρίνονται οι κατανομές των ισοδύναμων τάσεων Von Mises στο επίπεδο της μικροκλίμακας για το στοιχείο που αντιστοιχεί στο σημείο ολοκλήρωσης K (Σχήμα 6-23).



Σχήμα 6-25 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της μεθόδου της υπολογιστικής ομογενοποίησης πρώτης τάξης



Σχήμα 6-26 Κατανομές τάσεων μικροκλίμακας βάσει της EMsFEM-P



Σχήμα 6-27 Παραμορφωμένη κατάσταση κατασκευής

κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη μεταπτυχιακή εργασία εξετάστηκαν οι μέθοδοι πολλαπλών κλιμάκων στην επίλυση ελαστοπλαστικών προβλημάτων επίπεδης έντασης. Σχεδόν όλα τα βιομηχανικά και τεχνητά υλικά (π.χ. κυψελοειδή υλικά / honeycomb materials), όπως επίσης και τα φυσικά υλικά (π.χ. εμβιοϋλικά), που χαρακτηρίζονται από πολλαπλές κλίμακες, παρουσιάζουν ανομοιογένεια σε κάποια συγκεκριμένη κλίμακα, η οποία έχει σημαντικό αντίκτυπο στην παρατηρούμενη μακροσκοπική συμπεριφορά τους. Ο καθορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των υλικών αυτών μέσω της διενέργειας απλών πειραματικών μετρήσεων σε έναν αριθμό δειγμάτων υλικού διαφορετικών διαστάσεων, λαμβάνοντας υπόψη διάφορους δρόμους φόρτισης είναι ένα μάλλον ανέφικτο έργο. Από την άλλη μεριά, η απευθείας αριθμητική επίλυση των προβλημάτων πολλαπλής κλίμακας είναι δύσκολη ακόμα και με την εμφάνιση των υπερ-υπολογιστών, γιατί απαιτείται ένα τεράστιο ποσό μνήμης του υπολογιστή και μεγάλος χρόνος επεξεργασίας. Για τους παραπάνω λόγους, υπάρχει μια επιτακτική ανάγκη για την ανάπτυξη εξειδικευμένων στρατηγικών προσομοίωσης, των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων.

Στο 4^ο κεφάλαιο, αναπτύσσεται η extended multiscale finite element method (EMsFEM) των Zhang, Wu, Lü και Fu [9], [10], [11]. Στο κεφαλαίο αυτό, περιγράφεται η διαδικασία της μόρφωσης των συναρτήσεων βάσης, η οποία προϋποθέτει την επιλογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών (γραμμικών ή περιοδικών), εξάγεται το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας και παρουσιάζεται η διαδικασία της αναγωγής στη μικροκλίμακα από την μακροκλίμακα. Στο τέλος του κεφαλαίου αναπτύσσεται ο αλγόριθμος της ελαστοπλαστικής ανάλυσης με βάση τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Στο 5^ο κεφάλαιο παρατίθεται η υπολογιστική ομογενοποίηση πρώτης τάξεως που αναπτύχθηκε από την Kouznetsova [6]. Αναλύονται οι βασικές παραδοχές της μεθόδου, περιγράφεται η σύζευξη της μακροκλίμακας και της μικροκλίμακας σε επίπεδο τάσεων και παραμορφώσεων, εξάγεται η μορφή του συνεπούς καταστατικού μητρώου για κάθε σημείο Gauss και παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου σε προβλήματα που δε λαμβάνεται υπόψη η γεωμετρική μη γραμμικότητα. Στο 6^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται παραδείγματα που αφορούν προβλήματα επίπεδης έντασης. Η επίλυση τους με τη βοήθεια των μεθόδων πολλαπλών κλιμάκων καταδεικνύει την ισχύ και την ακρίβεια των μεθόδων αυτών μέσω της σύγκρισης με τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τη επίλυση των ίδιων παραδειγμάτων με το Femap ή το Abaqus.

Συμπερασματικά, η ελαστική ανάλυση με την EMsFEM και τη μέθοδο της υπολογιστικής ομογενοποίησης προσφέρει τα παρακάτω πλεονεκτήματα: (α) η διαδικασία επίλυσης επιταχύνεται σημαντικά και (β) τα μητρώα που εμφανίζονται κατά την επίλυση (στιβαρότητας, επικόμβιων δυνάμεων και μετακινήσεων) έχουν μικρότερο μέγεθος. Οι διαφορές των δύο μεθόδων είναι οι εξής: (α) η μέθοδος της ομογενοποίησης απαιτεί επαναλήψεις μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση, ενώ στην EMsFEM η λύση προκύπτει από την επίλυση του συστήματος και (β) στην EMsFEM η κλίμακα μήκους της μικροκλίμακας είναι μικρότερη σε σχέση με την κλίμακα μήκους της μακροκλίμακας, ενώ στη μέθοδο της ομογενοποίησης είναι αρκετά μικρότερη (οι αντιπροσωπευτικοί όγκοι θεωρούνται ως μακροσκοπικά υλικά σημεία).

Όσον αφορά στην ελαστοπλαστική ανάλυση με την EMsFEM, παρουσιάζεται το πλεονεκτικό χαρακτηριστικό ότι χρησιμοποιείται το αρχικό ελαστικό ισοδύναμο καθολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής σε κάθε επανάληψη του κάθε

προσαυξητικού βήματος και συνεπώς αποφεύγεται η δαπανηρή ανανέωση των αριθμητικών συναρτήσεων βάσης. Παράλληλα, εμφανίζονται και τα παρακάτω μειονεκτήματα: (α) απαιτούνται περισσότερα επαναληπτικά βήματα μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση (λόγω της χρήσης του αρχικού ελαστικού μητρώου) και (β) η ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την πλαστική ροή πραγματοποιείται για κάθε σημείο ολοκλήρωσης του κάθε στοιχείου της μικροκλίμακας του κάθε στοιχείου της μακροκλίμακας.

Βιβλιογραφία

1. Akhtar S. Khan & Sujian Huang, Continuum Theory of Plasticity, J. Wiley, 1995
2. Criesfield, M. A., Non-linear Finite Element Analysis of solids and Structures, Volume 1: Essentials, J. Wiley, 1991
3. Criesfield, M. A., Non-linear Finite Element Analysis of solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics, J. Wiley, 1997
4. Efendiev Y., Hou Y. Thomas, Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications, Springer, 2009
5. Galvanetto U., Ferri Aliabadi M. H., Multiscale Modeling in Solid Mechanics, Computational Approaches, Imperial College Press, 2010
6. Kouznetsova V. G., Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials, PhD. Thesis, 2002, Eindhoven University
7. Mase G. T., Mase G. E., Continuum Mechanics for engineers, CRC Press, 1999
8. Owen D. R. J., Hinton E., Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Limited, 1980
9. Zhang, Wu, Lü, A new multiscale computational method for elasto-plastic analysis of heterogeneous materials, Comput. Mech., 2012
10. Zhang, Wu, Lü, Extended multiscale finite element method for elasto-plastic analysis of 2D periodic lattice truss materials, Comput. Mech., 2010
11. Zhang, Wu, Lü, Fu, Extended multiscale finite element method for mechanical analysis of heterogeneous materials, Comput. Mech., 2010
12. Δαφαλιάς Ι., Σημειώσεις Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου
13. Παπαδρακάκης Μ., Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, Αθήνα, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001
14. Παπαδρακάκης Μ., Μη γραμμικά Πεπερασμένα Στοιχεία, Αθήνα 1998
15. Πρασιανάκης Ι.Ν. και Κουρκουλής Σ.Κ., Πειραματική Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία, 1999