

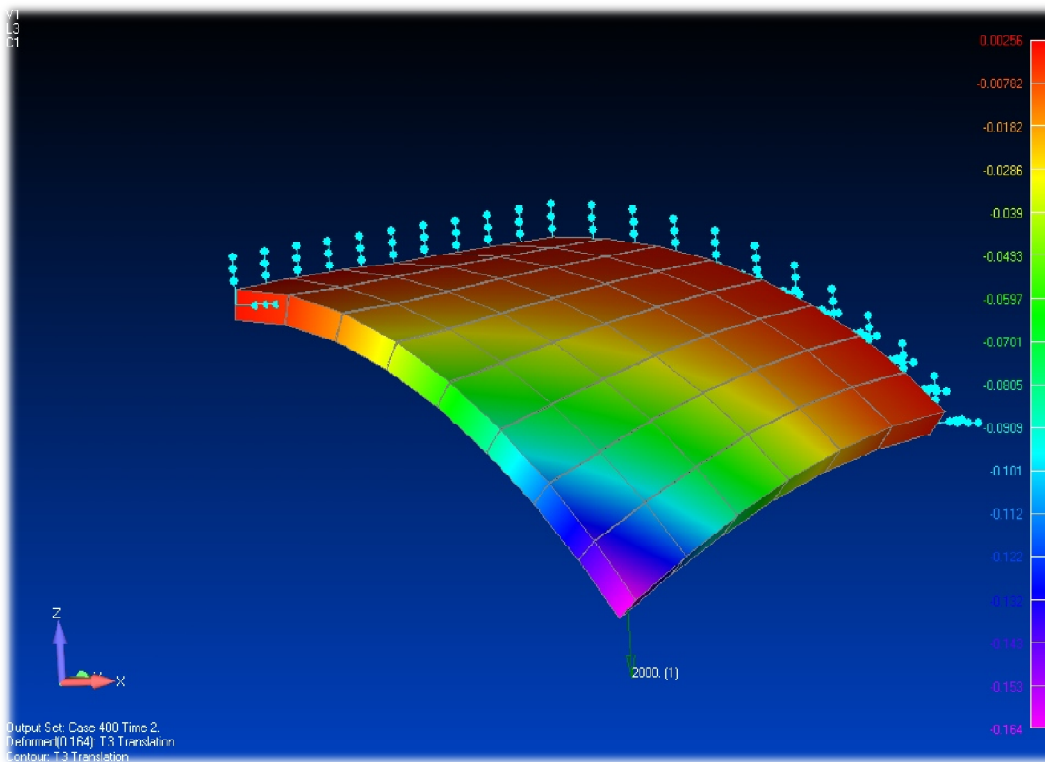


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΠΜΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

Ανάπτυξη Υστερητικών Πεπερασμένων Στοιχείων Κελύφους με Χρήση του Προσομοιώματος Βouc – Wen



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευάγγελος Ηλίας

Βλάσης Κουμούσης, Επιβλέπων Καθηγητής

*Ανάπτυξη Υστερητικών Πεπερασμένων Στοιχείων Κελύφους
με Χρήση του Προσομοίωματος Bouc – Wen*

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας Περιεχομένων	i
Πίνακας εικόνων	iii
Ευχαριστίες	v
Περίληψη	vii
Abstract	ix
1. Εισαγωγή	11
1.1 Υστερητικά προσομοιώματα	11
1.2 Κελυφωτές κατασκευές	12
1.3 Αντικείμενο της εργασίας	16
2. Τάσεις και Παραμορφώσεις	19
2.1 Εισαγωγή	19
2.2 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων	19
2.3 Τάσεις	21
2.3.1 Τάσεις Cauchy	21
2.3.2 Τανυστής της τάσης	23
2.3.3 Κύριες τάσεις	24
2.4 Παραμορφώσεις	28
2.4.1 Τανυστής της παραμόρφωσης	28
2.4.2 Θεωρία μικρών παραμορφώσεων	29
3. Θεωρία Πλαστικότητας	33
3.1 Εισαγωγή	33
3.2 Κριτήριο Διαρροής	33
3.2.1 Κριτήριο διαρροής Tresca	34
3.2.2 Κριτήριο διαρροής von Mises	36
3.2.3 Κριτήριο Διαρροής Bresler – Pister	36
3.3 Βασικές παραδοχές της θεωρίας πλαστικότητας	38
3.4 Θεωρία πλαστικού δυναμικού	38
3.5 Αξίωμα ευστάθειας του Drucker	40

3.6	Κράτνυση	43
3.6.1	Ισότροπη κράτνυση	44
3.6.2	Κινηματική κράτνυση	44
4.	Υστερητικό Μοντέλο Bouc – Wen.....	47
4.1	Εισαγωγή	47
4.2	Η έννοια της υστέρησης	47
4.3	Από την θεωρία πλαστικότητας στο μοντέλο Bouc – Wen.....	49
4.3.1	Αναλύοντας το μοντέλο Bouc – Wen.....	49
4.3.2	Παρατηρήσεις σχετικά με το μοντέλο.....	51
4.3.3	Γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc – Wen.....	52
4.3.4	Το παράλληλο γενικευμένο υστερητικό προσομοίωμα.....	56
5.	Υστερητικά Πεπερασμένα Στοιχεία Κελύφους	59
5.1	Εισαγωγή	59
5.2	Θεωρία λεπτών κελυφών	59
5.3	Τετραπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία κελύφους	61
5.3.1	Συναρτήσεις σχήματος.....	62
5.3.2	Καθορισμός γεωμετρίας στοιχείου.....	63
5.3.3	Πεδίο μετατοπίσεων	65
5.3.4	Μητρώο ελαστικότητας	66
5.3.5	Μητρώο δυσκαμψίας.....	68
5.4	Εφαρμογή υστερητικού προσομοιώματος Bouc – Wen	70
5.4.1	Μητρώο δυσκαμψίας.....	72
5.4.2	Διαδικασία επίλυσης δυναμικού προβλήματος	74
6.	Αριθμητικές εφαρμογές.....	77
6.1	Εισαγωγή	77
6.2	Παρουσίαση μοντέλου.....	77
6.3	Αριθμητικά Παραδείγματα.....	80
6.3.1	Παράδειγμα 1 ^ο	80
6.3.2	Παράδειγμα 2 ^ο	84
6.3.3	Παράδειγμα 3 ^ο	86
6.3.4	Παράδειγμα 4 ^ο	89
6.4	Παρατηρήσεις.....	90
7.	Συμπεράσματα.....	93
	Βιβλιογραφία.....	97

Πίνακας εικόνων

Εικόνα 1.1 Βρόχος υστέρησης	12
Εικόνα 1.2 Εικόνες κελυφών από τη φύση	13
Εικόνα 1.3 Παραδείγματα κελυφωτών κατασκευών	14
Εικόνα 1.4 Χαρακτηριστική περίπτωση κελύφους	15
Εικόνα 1.5 Ανάλυση κελύφους με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων	16
Εικόνα 2.1 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων	20
Εικόνα 2.2 Τυπικός συνεχές σώμα στο οποίο φαίνεται επίπεδο S^* που διέρχεται από το P	21
Εικόνα 2.3 Δύναμη και ροπή που ασκούνται στο σημείο P στην επιφάνεια ΔS^*	22
Εικόνα 2.4 Τανυστής τάσης που ασκείται στο σημείο P , με κάθετο n_i στο επίπεδο	22
Εικόνα 2.5 Διανύσματα ως προς τα τρία κύρια επίπεδα στο σημείο P	23
Εικόνα 2.6 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος τετράεδρου με κορυφή το P	23
Εικόνα 2.7 Θετική σήμανση των όρων του τανυστή των τάσεων	24
Εικόνα 2.8 Διάνυσμα τάσεως στο σημείο P για ένα κύριο επίπεδο	25
Εικόνα 2.9 Οκταεδρικά επίπεδα	27
Εικόνα 2.10 Επίπεδη παραμόρφωση	30
Εικόνα 3.1 Επιφάνεια του κριτηρίου διαρροής στο χώρο των κυρίων τάσεων	34
Εικόνα 3.2 Σύγκριση των κριτηρίων Tresca και von Mises	35
Εικόνα 3.3 Επιφάνεια διαρροής κριτηρίου Bresler - Pister	37
Εικόνα 3.4 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων για μονοαξονική φόρτιση	38
Εικόνα 3.5 Ελαστικός και ελαστοπλαστικός κύκλος φόρτισης – αποφόρτισης	40
Εικόνα 3.6 Υλικό με κράτυνση και με χαλάρωση	41
Εικόνα 3.7 Καθιέρωση του διανύσματος των πλαστικών παραμορφώσεων	42
Εικόνα 3.8 (α) Κυρτή επιφάνεια διαρροής και (β) μη κυρτή επιφάνεια διαρροής	43
Εικόνα 3.9 Ισότροπη κράτυνση	44
Εικόνα 3.10 Κινηματική κράτυνση	44
Εικόνα 3.11 Υλικό με γραμμική κινηματική κράτυνση	45
Εικόνα 4.1 Μονοβάθμιος ταλαντωτής υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση	48
Εικόνα 4.2 Βρόχος υστέρησης	48
Εικόνα 4.3 (α) Μοντέλο Bouc –Wen (β) διάγραμμα φορτίου μετατόπισης	50
Εικόνα 4.4 Μεταβολή της συνάρτησης ομαλοποίησης για διάφορες τιμές του n	52
Εικόνα 4.5 (α) Ανακυκλιζόμενη ανελαστική απόκριση (β) Συναρτήσεις Heaviside	55
Εικόνα 5.1 Εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους του κελύφους	60
Εικόνα 5.2 Τετραπλευρικό στοιχείο κελύφους 18 κόμβων	61
Εικόνα 5.3 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο κελύφους εννέα κόμβων	62
Εικόνα 5.4 Τυπικός κόμβος ισοπαραμετρικού στοιχείου κελύφους: (α) διάνυσμα V_{3i} , (β) σύστημα αξόνων κόμβου i , (γ) μετατοπίσεις σημείου P_i	64
Εικόνα 6.1 Κυλινδρικό κέλυφος	78
Εικόνα 6.2 Προσομοίωση φορέα στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN	79
Εικόνα 6.3 Σύγκλιση αποτελεσμάτων μέσω του κώδικα NASTRAN	79
Εικόνα 6.4 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 1 ^{ου} παραδείγματος	80
Εικόνα 6.5 Διακριτοποίηση και επιβαλλόμενο φορτίο πρώτου παραδείγματος	81
Εικόνα 6.6 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 1 ^{ου} παραδείγματος	82
Εικόνα 6.7 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 1 ^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία	83

Εικόνα 6.8 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 2 ^{ου} παραδείγματος	84
Εικόνα 6.9 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 2 ^{ου} παραδείγματος	85
Εικόνα 6.10 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 2 ^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία	86
Εικόνα 6.11 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 3 ^{ου} παραδείγματος.....	86
Εικόνα 6.12 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 3 ^{ου} παραδείγματος	87
Εικόνα 6.13 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 3 ^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία	88
Εικόνα 6.14 Διακριτοποίηση και επιβαλλόμενο φορτίο 4 ^{ου} παραδείγματος.....	89
Εικόνα 6.15 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 4 ^{ου} παραδείγματος	90
Εικόνα 7.1 Ο αλγόριθμος Newton – Raphson	94

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Ε.Μ.Π. κ. Βλάση Κουμούση για την πολύτιμη καθοδήγηση του σε όλο το διάστημα της συνεργασίας μας. Η υπομονή του καθώς επίσης και οι ουσιώδεις παρατηρήσεις και διορθώσεις του συνέβαλαν καθοριστικά στην εκπόνηση της εργασίας αυτής.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, για την συμμετοχή τους και την αξιολόγηση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διδάκτορα του Ε.Μ.Π. κ. Σάββα Τριανταφύλλου, καθώς και τον Υποψήφιο Διδάκτορα του Ε.Μ.Π. κ. Ηλία Γκιμούση για τη συμμετοχή και προθυμία τους στην αντιμετώπιση των δυσκολιών που παρουσιάστηκαν από την αρχή αυτής της προσπάθειας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράσταση, υποστήριξη και κατανόηση που έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Στην μεταπτυχιακή αυτή εργασία γίνεται προσπάθεια να μελετηθεί η υστερητική συμπεριφορά πεπερασμένων στοιχείων κελύφους Ένα πρόβλημα ιδιαίτερης σημασίας στην επιστήμη του Δομοστατικού Πολιτικού Μηχανικού αφορά την απόκριση ελαστοπλαστικών κατασκευών υποκείμενων σε στατικά ή δυναμικά φορτία. Προκειμένου η ανελαστική απόκριση να ληφθεί υπόψη, πιο ακριβή υστερητικά προσομοιώματα χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν. Έτσι, στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται το μοντέλο Bouc – Wen, το οποίο είναι ανεξάρτητο του ρυθμού επιβολής της φόρτισης (rate independent). Το προσομοίωμα αυτό αποδεικνύεται ιδιαίτερα εύχρηστο καθώς επιτρέπει την προσομοίωση οποιασδήποτε υστερητικής συμπεριφοράς με τη χρήση μίας μόνο ομαλής συνάρτησης.

Προκειμένου να εξεταστεί η υστερητική συμπεριφορά στοιχείων κελύφους, αναπτύχθηκε κώδικας πεπερασμένων στοιχείων στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB, στον οποίο χρησιμοποιούνται ισοπαραμετρικά στοιχεία κελύφους εννέα κόμβων. Το πρόγραμμα έχει την ικανότητα να προσομοιώσει τόσο στοιχεία μονής καμπυλότητας όσο και στοιχεία διπλής καμπυλότητας καθώς η εισαγωγή της γεωμετρίας γίνεται με έμμεσο τρόπο χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων σε κάθε κόμβο. Το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής αποτελείται από δύο μέρη, ένα ελαστικό και ένα υστερητικό. Το ελαστικό μέρος παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της ανάλυσης ενώ, το υστερητικό πρέπει να υπολογίζεται σε κάθε βήμα.

Αναλυτικότερα στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία συνοπτική εισαγωγή στα θέματα που πραγματεύεται η εργασία. Αρχικά αναφέρονται κάποιες γενικές αρχές των υστερητικών προσομοιωμάτων και ειδικότερα του προσομοιώματος Bouc – Wen που αποτελεί και μέρος της εργασίας. Στη συνέχεια παρατίθενται παραδείγματα κελυφωτών κατασκευών που είτε συναντώνται στη φύση είτε κατασκευάζονται από τον άνθρωπο. Επίσης, επισημαίνεται το μεγάλο πλεονέκτημα των κατασκευών αυτών που είναι η κάλυψη μεγάλων ανοιγμάτων με τη μικρότερη δυνατή χρησιμοποίηση υλικού. Τέλος, αναφέρεται συνοπτικά το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι έννοιες της τάσης και της παραμόρφωσης όπως αυτές ορίζονται από τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου και οι οποίες χρησιμοποιούνται στη συνέχεια από τη Θεωρία Πλαστικότητας. Αναλυτικότερα γίνεται αναφορά στους τανυστές της τάσης και της παραμόρφωσης, στις κύριες τάσεις, στις πραγματικές τάσεις Cauchy καθώς και στη θεωρία μικρών παραμορφώσεων. Επίσης, εξετάζεται η καμπύλη τάσεων παραμορφώσεων για την περίπτωση ενός μετάλλου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναφέρονται οι γενικές έννοιες της Θεωρίας Πλαστικότητας. Εξετάζονται τα δύο πιο γνωστά κριτήρια διαρροής για μέταλλά, το κριτήριο von Mises και το κριτήριο Tresca, καθώς και το κριτήριο Bresler – Pister για σκυρόδεμα.

Επίσης, γίνεται αναφορά στη θεωρία πλαστικού δυναμικού καθώς και στο αξίωμα ευστάθειας του Ducker, ενώ παρουσιάζονται οι δύο πιο απλές περιπτώσεις κράτυνσης η ισότροπη και η κινηματική.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen. Εξετάζεται η έννοια της υστέρησης ενώ περιγράφεται η μετάβαση από τη Θεωρία Πλαστικότητας, που αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο προσομοίωμα Bouc – Wen καθιστώντας εύκολη την κατανόηση του.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η διαδικασία σχηματισμού των υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων κελύφους. Αρχικά, γίνεται εισαγωγή στη θεωρία λεπτών κελυφών, στην οποία εντάσσονται τα στοιχεία που αναπτύχθηκαν, και αναφέρεται η παράλληλη καμπτική και μεμβρανική λειτουργία τους η οποία αποτελεί το κυριότερο πλεονέκτημα τους έναντι των πλακών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για το σχηματισμό των ελαστικών ισοπαραμετρικών στοιχείων κελύφους, καθώς επίσης και η διαδικασία καθορισμού του συστήματος αξόνων των κόμβων από το οποίο καθορίζεται η γεωμετρία του στοιχείου. Τέλος, γίνεται η μετάβαση από τα ελαστικά πεπερασμένα στοιχεία στα υστερητικά μέσω της κατάλληλης τροποποίησης του μητρώου δυσκαμψίας σε δύο επιμέρους μητρώα, ένα ελαστικό και ένα υστερητικό, καθώς και της διατύπωσης των κατάλληλων εξισώσεων εξέλιξης των υστερητικών τάσεων.

Στο έκτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποια αριθμητικά παραδείγματα προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων κελύφους που αναπτύχθηκαν στην εργασία αυτή. Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN.

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εργασία αυτή, όπως επίσης και τα πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Abstract

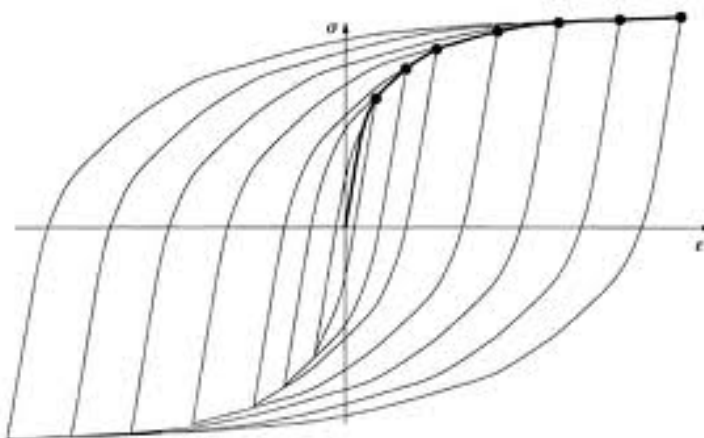
In this master thesis the hysteretic behavior of shell structures is examined. It refers to the nonlinear response of elastoplastic structures undergoing cyclic dynamic loading i.e. an issue of major importance for structural engineering. In order to take into account the inelastic response, more accurate material models are needed and herein, the Bouc-Wen model is used, which is a smooth, hysteretic, rate independent model. This model is very versatile as it allows the simulation of a variety of hysteretic behavior simply by using a smooth function. A MATLAB code was written in order to study this hysteretic behavior, based on nine node isoparametric shell elements. These elements can be double curved as the geometry of each one is taken into account indirectly using a numerical approach and establishing an orthogonal coordinate system at each node which fully describe the geometry of the element. The hysteresis is taken into account by decomposing the global stiffness matrix into two parts, namely the elastic and the hysteretic stiffness matrix. The elastic stiffness matrix of the structure is evaluated once at the beginning of the analysis and remains constant at all the subsequent steps, while the hysteretic part is updated at every analysis step. Finally, the system of the differential equations that describe the problem is solved using the Newmark Numerical Integration Scheme. Results are presented that demonstrate the validity and efficiency of the proposed method.

1.1 Υστερητικά προσομοιώματα

Ένα πρόβλημα ιδιαίτερης σημασίας στην επιστήμη του Δομοστατικού Πολιτικού Μηχανικού αφορά την απόκριση ελαστοπλαστικών κατασκευών υποκείμενων σε στατικά ή δυναμικά φορτία. Οι κατασκευές συχνά παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά υπό την δράση ισχυρών διεγέρσεων οι οποίες προκαλούνται κυρίως από σεισμικά γεγονότα. Σε αυτή την περίπτωση η δυνάμεις επαναφοράς γίνονται έντονα μη γραμμικές παρουσιάζοντας σημαντική υστέρηση. Η φύση των μη γραμμικών αυτών δυνάμεων επαναφοράς υποδηλώνει ότι δεν μπορούν να περιγραφούν ως συναρτήσεις των στιγμιαίων μετατοπίσεων και ταχυτήτων. Σύμφωνα λοιπόν με τα προηγούμενα απαιτείται η χρήση προσομοιωμάτων που να περιγράφουν την χρονική εξάρτηση των μεγεθών αυτών μέσω κατάλληλων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Για το σκοπό αυτό κρίνεται απαραίτητη η περεταίρω εξέταση του φαινομένου και η κατάλληλη ανάπτυξη ακριβέστερων υστερητικών προσομοιωμάτων που να περιγράφουν αυτή τη συμπεριφορά. Τις τελευταίες δεκαετίες το προσομοίωμα Bouc –Wen έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα εύχρηστο στην περιγραφή ενός εύρους υστερητικών αποκρίσεων συμπεριλαμβανομένων και φαινομένων όπως η απώλεια δυσκαμψίας (stiffness degradation), η μείωση της αντοχής (strength deterioration) και η ολίσθηση (pinching).

Η υστέρηση εμφανίζεται στις κατασκευές ως ένας φυσικός μηχανισμός των υλικών να αναπτύσσουν δυνάμεις καθυστέρησης – επαναφοράς έναντι των μετακινήσεων και να καταναλώνουν ενέργεια. Ως υστέρηση επομένως αναφέρεται η μνήμη της ανελαστικής συμπεριφοράς που παρουσιάζουν τα συστήματα αυτά και όπου οι δυνάμεις επαναφοράς εξαρτώνται όχι μόνο από τις στιγμιαίες παραμορφώσεις, αλλά από όλη την ιστορία των παραμορφώσεων.

Η λεπτομερής προσομοίωση τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιώντας τους νόμους της φυσικής είναι μία δύσκολη διαδικασία, και τα προσομοιώματα που προκύπτουν είναι συνήθως ιδιαίτερα πολύπλοκά καθιστώντας δυσχερή την εφαρμογή τους σε πρακτικές εφαρμογές. Για το σκοπό αυτό εναλλακτικά φαινομενολογικά προσομοιώματα των σύνθετων αυτών συστημάτων έχουν προταθεί, τα οποία γενικά δεν προέρχονται τόσο από την λεπτομερή ανάλυση της φυσικής συμπεριφοράς του συστήματος, όσο περισσότερο από τον συνδυασμό διαφόρων γνωστών χαρακτηριστικών της υστερητικής συμπεριφοράς και κατάλληλων παραδοχών.



Εικόνα 1.1 Βρόχος υστέρησης

Στο πλαίσιο αυτό ένα τέτοιο υστερητικό προσομοίωμα προτάθηκε αρχικά από τον Bouc (1971) και στη συνέχεια γενικεύθηκε από τον Wen (1976). Έκτοτε το προσομοίωμα αυτό είναι γνωστό σαν προσομοίωμα Bouc – Wen και χρησιμοποιείται ευρέως σε πλήθος εφαρμογών που παρουσιάζουν υστερητική συμπεριφορά, και κυρίως σε δόμοστατικά και μηχανολογικά συστήματα. Το μοντέλο πρακτικά αποτελείται από μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης η οποία συνδέει με υστερητικό τρόπο την μετατόπιση του συστήματος με τη δύναμη επαναφοράς. Επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για ένα πλήθος παραμέτρων που υπεισέρχονται στο μοντέλο είναι δυνατό να ταυτιστεί η απόκριση του συστήματος με τον πραγματικό βρόχο υστέρησης.

1.2 Κελυφωτές κατασκευές

Τα κελύφη είναι τρισδιάστατα δομικά στοιχεία, τα οποία κατέχουν ιδιαίτερη θέση στον κλάδο της Μηχανικής. Παραδείγματα τέτοιων κατασκευών μπορούν να θεωρηθούν η στέγαση μεγάλων ανοιγμάτων, δεξαμενές, τοξωτά φράγματα κ.λ.π. Πέραν των τεχνητών κελυφών τα οποία κατασκευάζονται από τον άνθρωπο για την εξυπηρέτηση συγκεκριμένων αναγκών, ένα μεγάλο πλήθος κελυφωτών κατασκευών συναντάται και στη φύση, όπου τις περισσότερες φορές είναι αρκετά εντυπωσιακές (Εικόνα 1.2).



Εικόνα 1.2 Εικόνες κελυφών από τη φύση

Τα κελύφη συνδυάζουν ένα πλήθος πλεονεκτημάτων, τα οποία δεν συναντώνται σε άλλα δομικά στοιχεία. Σαν σημαντικότερα από αυτά μπορούν να αναφερθούν η ικανότητα τους να φέρουν σημαντικά κατανεμημένα φορτία, η μεγάλη στιβαρότητα τους και ο υψηλός λόγος αντοχής προς βάρος. Αυτή η τελευταία ιδιότητα των κελυφών τους δίνει ένα συγκριτικό πλεονέκτημα έναντι άλλων κατασκευών, καθώς με τις ίδιες διαστάσεις και την ίδια ποσότητα υλικού επιτρέπεται η κάλυψη μεγαλύτερων ανοιγμάτων [7]. Καθίστανται δηλαδή περισσότερο οικονομικές. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα των εικόνων που ακολουθούν, όπου φαίνονται τα πλεονεκτήματα και η δυνατότητες κατασκευής που προσφέρει στον σχεδιαστή η χρήση κελυφών.

Εκτός από τα παραπάνω, τα κελύφη κατέχουν μία ιδιαίτερη θέση μεταξύ των κατασκευών λόγω κυρίως του αισθητικού αποτελέσματος το οποίο έχουν, λόγος για τον οποίο και προτιμώνται ιδιαίτερα από τους Αρχιτέκτονες. Στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού υπάρχουν άφθονα παραδείγματα κελυφών τα οποία χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο όπως και στη φύση για την κάλυψη μεγάλων ανοιγμάτων λόγω του μικρού βάρους τους και της ικανότητας τους να φέρουν μεγάλα φορτία (Εικόνα 1.3). Τέτοια παραδείγματα είναι διαφορές στέγες, εντυπωσιακές γέφυρες, δεξαμενές, φράγματα κ.λ.π. Στόχος του σχεδιασμού τέτοιων κατασκευών είναι η επίτευξη όσο το δυνατόν μικρότερου πάχους προκειμένου να έχουμε ελαφρύτερες και οικονομικότερες λύσεις.





Εικόνα 1.3 Παραδείγματα κελυφωτών κατασκευών

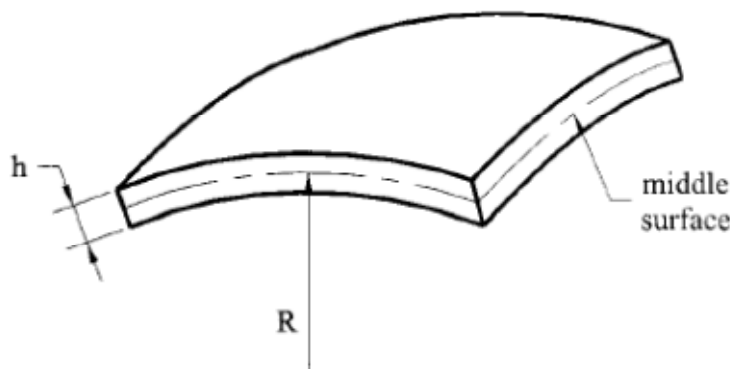
Βλέποντας τώρα λίγο πιο αναλυτικά την θεωρία κελυφών, μπορούμε να πούμε ότι ως κελύφη ορίζονται κατασκευές, οι οποίες αποτελούνται από δύο καμπύλες επιφάνειες, όπου η απόσταση μεταξύ αυτών των επιφανειών, είναι αρκετά μικρότερη από τις άλλες δύο διαστάσεις του στοιχείου. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις δύο αυτές επιφάνειες ορίζεται ως *μέση επιφάνεια*, ενώ το μήκος του τμήματος που είναι κάθετο στη μέση επιφάνεια ορίζεται ως *πάχος* του κελύφους. Η γεωμετρία των κελυφών μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως γνωρίζοντας τις συντεταγμένες τις μέσης επιφάνειας και το πάχος σε κάθε σημείο της.

Τα κελύφη έχουν όλα τα χαρακτηριστικά των πλακών, με την προσθήκη επιπλέον της καμπυλότητας. Η έννοια αυτή αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των κελυφών, καθώς η συμπεριφορά τους υπό τη δράση κατανεμημένων φορτίων, καθορίζεται κατά κύριο λόγο από την καμπυλότητα. Με βάση λοιπόν την καμπυλότητα της επιφάνειας τους τα κελύφη διακρίνονται σε κυλινδρικά, κωνικά, σφαιρικά, ελλειψοειδή, παραβολοειδή κ.λ.π.

Υπάρχουν δύο διαφορετικές κατηγορίες κελυφών, τα *λεπτά* και τα *παχιά* κελύφη. Ως λεπτά ορίζονται αυτά για τα όποια ο λόγος $\frac{h}{R}$ (όπου R είναι η ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας), μπορεί να αμεληθεί σε σχέση με τη μονάδα. Γενικά, από τη σκοπιά της ακρίβειας, μπορούμε να πούμε ότι ως λεπτά χαρακτηρίζονται τα κελύφη για τα οποία ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20} \quad (1.1)$$

Αντίστοιχα, ως παχιά ορίζονται τα κελύφη για τα οποία παραβιάζεται η παραπάνω συνθήκη.



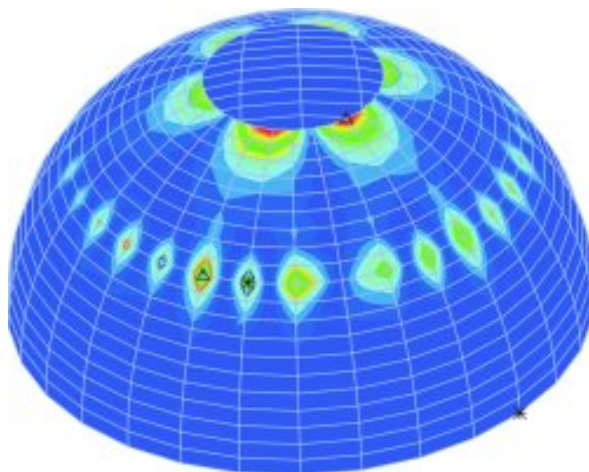
Εικόνα 1.4 Χαρακτηριστική περίπτωση κελύφους

Η λεπτομερής ανάλυση κελυφωτών κατασκευών συχνά παρουσιάζει δυσκολίες και προκλήσεις για το σχεδιαστή. Οι δυσκολίες αυτές έγκεινται στο ότι τα κελύφη κατά κύριο λόγο ανθίσταται στις εξωτερικές δράσεις μέσω της καμπυλότητας τους, έτσι για το ίδιο πάχος και το ίδιο υλικό αλλάζοντας έστω και λίγο την καμπυλότητα η συμπεριφορά τους είναι εντελώς διαφορετική. Η ευαισθησία αυτή αποτελεί και την Αχίλλειο πτέρνα των κελυφών που τα καθιστά ευαίσθητα σε ατέλειες γεγονός που αναγκάζει τους μελετητές στο να προβλέψουν δευτερογενείς υποστηρικτικούς μηχανισμούς ανάληψης της έντασης, όπως φαίνεται και σε ορισμένα από τα παραπάνω σχήματα. Συμπεραίνουμε λοιπόν με βάση τα παραπάνω ότι η καμπυλότητα, το πάχος και φυσικά οι συνοριακές συνθήκες είναι οι παράμετροι αυτές που επηρεάζουν κατά κύριο λόγο τη συμπεριφορά των κελυφών.

Η ιδιαιτερότητα της συμπεριφοράς αυτών των κατασκευών, οι δυσκολίες που παρουσιάζει η ανάλυση τους, καθώς και η όλο και αυξανόμενη χρήση τους έχει ωθήσει την έρευνα προς την πλευρά της ανάλυσης των κελυφών. Κατά την διάρκεια των ετών έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες καθώς επίσης και διάφορες προσεγγιστικές τεχνικές για την ανάλυση κελυφωτών κατασκευών. Ωστόσο, η μεγαλύτερη πρόοδος στην ανάλυση κελυφών έγινε με την ανάπτυξη της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων [5]. Παρότι σήμερα τα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιούνται ευρέως για ένα μεγάλο πλήθος στοιχείων και σε διάφορους τομείς της επιστήμης, αξίζει να αναφερθεί ότι πρακτικά ώθηση στην ανάπτυξη τους έδωσε η ανάγκη ανάλυσης των κελυφών. Μολονότι η ελαστική ανάλυση κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων φαντάζει τυπική υπόθεση, υπάρχουν πολλές σημαντικές πτυχές που πρέπει να κατανοηθούν προκειμένου να πραγματοποιηθεί μια σωστή ανάλυση. Φυσικά, η εφαρμογή μη γραμμικών αναλύσεων συχνά απαιτεί περισσότερη προσπάθεια και ακόμα μεγαλύτερη κατανόηση της στατικής συμπεριφοράς και των τεχνικών που χρησιμοποιούνται κατά την ανάλυση.

Είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι σε κάθε ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία, η λύση του μαθηματικού προβλήματος μιας πραγματικής κατασκευής προσεγγίζεται αριθμητικά μέσω της χρήσης πεπερασμένων στοιχείων. Η επίλυση του

μαθηματικού μοντέλου, επιτρέπει την μελέτη της συμπεριφοράς και της σύγκλισης του, καθώς οι διάφορες παράμετροι που εισάγονται στο πρόβλημα μεταβάλλονται. Έτσι ελέγχοντας τη σύγκλιση της λύσης του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων με την ακριβή λύση είναι δυνατός ο έλεγχος της αποτελεσματικότητας του μοντέλου.



Εικόνα 1.5 Ανάλυση κελύφους με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων

Η μη γραμμική ανάλυση κελυφών αποτελεί στις μέρες μας ένα αρκετά επίκαιρο θέμα και για αυτό το λόγο συντελείται διεθνώς εκτεταμένη έρευνα στο πεδίο αυτό, επιτρέποντας την εφαρμογή μη γραμμικών αναλύσεων με αξιοπιστία σε μεγάλο πλήθος προβλημάτων. Η ανάγκη για μη γραμμική ανάλυση γίνεται επιτακτική στην περίπτωση κατά την οποία αναπτύσσονται στην κατασκευή μεγάλες μετατοπίσεις ή ο καταστατικός νόμος δεν είναι σταθερός.

1.3 Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη υστερητικών ισοπαραμετρικών πεπερασμένων στοιχείων κελύφους για τη μελέτη της ανελαστικής συμπεριφοράς των κατασκευών. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η υστέρηση είναι μία φυσική ιδιότητα των υλικών για την περιγραφή της οποίας έχουν αναπτυχθεί διάφορα φαινομενολογικά υστερητικά προσομοιώματα. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε το προσομοίωμα Bouc – Wen το οποίο τις τελευταίες δεκαετίες έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα εύχρηστο για ένα πλήθος υστερητικών συμπεριφορών. Το προσομοίωμα αυτό είναι ένα ομαλό υστερητικό προσομοίωμα με την έννοια ότι αρκεί η χρήση μίας μόνο ομαλής συνάρτησης για την περιγραφή της υστερητικής συμπεριφοράς. Ένα ακόμα πλεονέκτημα του μοντέλου είναι ότι είναι ανεξάρτητο του ρυθμού επιβολής της φόρτισης (rate independent).

Η προσομοίωση των υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων έγινε μέσω της ανάπτυξης ενός κώδικα στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB. Στον κώδικα αυτό η καμπυλότητα των στοιχείων εισάγεται με έμμεσο τρόπο θεωρώντας σε κάθε κόμβο του στοιχείου ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Με αυτό τον τρόπο

χρησιμοποιείται μόνο η μέση επιφάνεια των στοιχείων ενώ, επιτρέπεται η χρήση στοιχείων τόσο μονής όσο και διπλής καμπυλότητας.

Μέσω του παράλληλου γενικευμένου υστερητικού προσομοιώματος Bouc –Wen ο τανυστής των τάσεων αναλύεται σε δύο επιμέρους όρους, τον τανυστή των ελαστικών τάσεων και τον τανυστή των υστερητικών τάσεων. Χρησιμοποιώντας την Αρχή των Δυνατών Έργων παράγονται δύο μητρώα δυσκαμψίας, το ελαστικό και το υστερητικό αντίστοιχα. Το ελαστικό μητρώο της κατασκευής παραμένει σταθερό καθόλη τη διάρκεια της ανάλυσης και για το σκοπό αυτό απαιτείται ο υπολογισμός του μία φορά. Αντίθετα, το υστερητικό μητρώο εξαρτάται από τις υστερητικές τάσεις και για το σκοπό αυτό υπολογίζεται σε κάθε βήμα της ανάλυσης. Η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, που διέπουν το πρόβλημα, γίνεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Newmark.

Τάσεις και Παραμορφώσεις

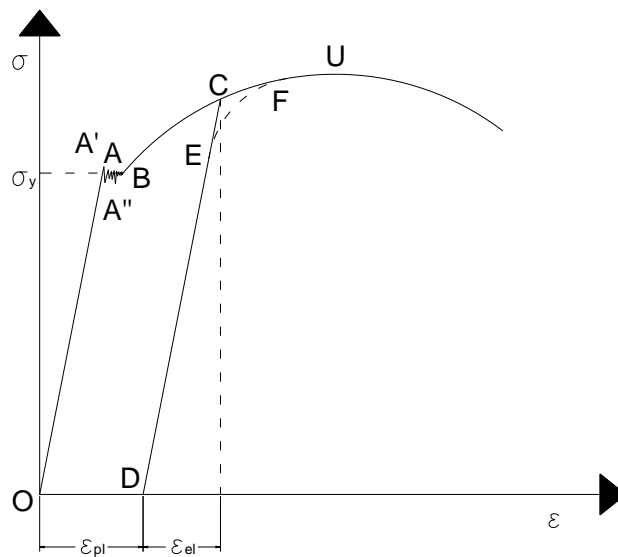
2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια γενική αναφορά στις έννοιες της τάσης και της παραμόρφωσης, όπως αυτές διατυπώνονται από τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Αρχικά, δίνεται έμφαση στην καμπύλη τάσεων παραμορφώσεων των υλικών, όπου χρησιμοποιείται ενδεικτικά η καμπύλη για υλικά όπως ο χάλυβας. Στη συνέχεια γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των σημαντικότερων εννοιών των τάσεων οι οποίες είναι απαραίτητες στη θεωρία πλαστικότητας. Τέλος, παρουσιάζονται οι γενικές έννοιες των παραμορφώσεων και οι θεμελιώδεις σχέσεις που τις εκφράζουν και οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στην εργασία αυτή.

2.2 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων

Οποιοδήποτε σώμα υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις εκδηλώνει παραμορφώσεις. Οι παραμορφώσεις αυτές ονομάζονται *ελαστικές* όταν είναι αντιστρέψιμες και ανεξάρτητες του χρόνου, ενώ ονομάζονται *βισκοελαστικές* όταν ναί μεν είναι αντιστρέψιμες αλλά χρονικά εξαρτημένες. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι παραμορφώσεις μειώνονται αργά μετά την απομάκρυνση του επιβαλλόμενου φορτίου. Τέλος, οι παραμορφώσεις οι οποίες είναι μη αναστρέψιμες ονομάζονται *πλαστικές* και είναι μόνιμες. Ψαθυρά υλικά όπως το σκυρόδεμα, το γυαλί ή ο βράχος υπό την δράση υδροστατικών πιέσεων αναπτύσσουν μόνο ελαστικές παραμορφώσεις προτού αστοχήσουν λόγω υπέρβασης της αντοχής τους. Αντίθετα, υλικά όπως μέταλλα και βράχοι σε υψηλές πιέσεις μπορούν να εκδηλώσουν σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις πριν την αστοχία και για αυτό το λόγω ονομάζονται *πλάσטיμα*.

Μία τυπική καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων χάλυβα είναι αυτή της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 2.1). Παρατηρούμε ότι αρχικά η σχέση των τάσεων και των παραμορφώσεων είναι γραμμική μέχρι το σημείο A'' . Το σημείο αυτό ονομάζεται όριο αναλογίας. Ο κλάδος OA'' είναι ο ελαστικός κλάδος για τον οποίο ισχύει ο νόμος του Hooke. Πέραν του σημείου αυτού η αύξηση των παραμορφώσεων δεν είναι ανάλογη με την αύξηση των τάσεων στην αρχική αναλογία, αλλά οι παραμορφώσεις είναι ακόμα στην ελαστική περιοχή με την έννοια ότι αφαίρεση των τάσεων προκαλεί επαναφορά του σώματος στην αρχική του κατάσταση. Αυτό ισχύει μέχρι το σημείο A' , το οποίο ονομάζεται άνω σημείο διαρροής. Περαιτέρω παραμόρφωση συνοδεύεται από μικρή πτώση και από αρκετές ταλαντώσεις του επιπέδου των τάσεων. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται ένα μικρό πλατό μέχρι το σημείο B . Ο κλάδος AB εκφράζει αυτό που αποκαλούμε απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Το χαμηλότερο όριο των ταλαντώσεων της τάσεως λαμβάνεται ως το σημείο διαρροής του υλικού και συμβολίζεται ως σ_y . Αν η τάση συνεχίσει να αυξάνεται πέραν του σημείου B τότε λέμε ότι το υλικό εμφανίζει κράτυνση και η αύξηση συνεχίζεται μέχρι το σημείο U . Πέραν του σημείου αυτού οι τάσεις μειώνονται ενώ οι παραμορφώσεις συνεχίζουν να αυξάνονται αναπαριστώντας τον κλάδο της χαλάρωσης.



Εικόνα 2.1 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων

Ο περιοχή BU ονομάζεται κράτυνση του υλικού, ενώ όλη η περιοχή ABU αναπαριστά την πλαστική παραμόρφωση του. Αν το υλικό αποφορτιστεί σε αυτό τον κλάδο, έστω στο σημείο C , τότε ακολουθεί τον κλάδο CD ο οποίος είναι παράλληλος στον αρχικό ελαστικό δρόμο φόρτισης. Ως αποτέλεσμα μέρος μόνο της παραμόρφωσης ανακτάται, το οποίο αποτελεί την ελαστική παραμόρφωση, ενώ το υπόλοιπο μέρος της παραμόρφωσης είναι μόνιμο και αποτελεί την πλαστική παραμόρφωση. Λαμβάνοντας υπόψη και την παραπάνω εικόνα η συνολική παραμόρφωση αποτελείται από δύο μέρη ένα ελαστικό και ένα πλαστικό και μπορεί να εκφραστεί από την ακόλουθη σχέση:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{el}\} + \{\varepsilon_{pl}\} \quad (2.1)$$

Επαναφορτίζοντας από το σημείο D η συμπεριφορά θα είναι ελαστική και αναπαριστάται από τον κλάδο DE . Στο σημείο E το υλικό θα διαρρέυσει ξανά και η πλαστική παραμόρφωση θα αρχίσει για άλλη μια φορά. Παραμόρφωση πέραν του σημείου F θα ακολουθήσει τον κλάδο FU αν δεν συμβεί άλλη αποφόρτιση και επαναφόρτιση. Το σημείο E αποτελεί το επόμενο σημείο διαρροής. Έχει παρατηρηθεί ότι για πραγματικά υλικά το επόμενο σημείο διαρροής E βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο C και υπάρχει μια περιοχή προσαρμογής από το E στο F , όπου το F βρίσκεται επί της καμπύλης τάσεων – παραμορφώσεων που λαμβάνεται για μία δοκιμή μονοαξονικής φόρτισης χωρίς αποφόρτιση.

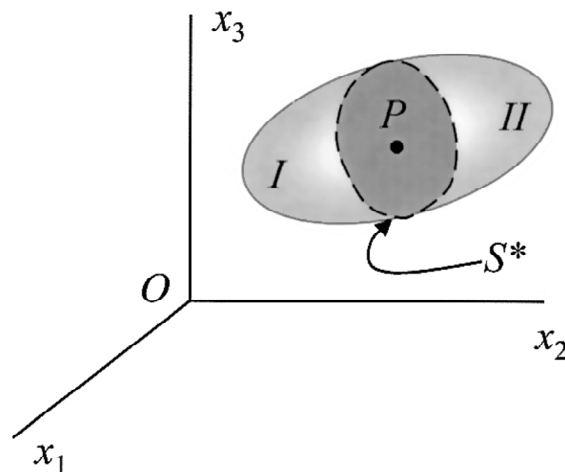
2.3 Τάσεις

Οι τάσεις εκφράζουν το μέτρο της έντασης της δύναμης που ασκείται επί μιας επιφάνειας, είτε στο εσωτερικό αυτού. Οι δυνάμεις αυτές μπορούν να διακριθούν στις εξής δύο κατηγορίες, στις *μαζικές δυνάμεις* οι οποίες εκφράζουν δράσεις ανά μονάδα όγκου και χαρακτηριστικά μπορούν να αναφερθούν σαν τέτοιες η βαρύτητα και οι αδρανειακές δυνάμεις, και στις *επιφανειακές* οι οποίες εκφράζουν δράσεις ανά μονάδα επιφάνειας.

2.3.1 Τάσεις Cauchy

Η πραγματική εντατική κατάσταση στην παραμορφωμένη διαμόρφωση του φορέα περιγράφεται από τον τανυστή τάσεως Cauchy σ , ο οποίος ορίζεται από την τρέχουσα δύναμη τη χρονική στιγμή t , ανά μονάδα παραμορφωμένης επιφάνειας.

Θεωρούμε ένα ομογενές ισότροπο υλικό σώμα B το οποίο περιβάλλεται από μια επιφάνεια S και καταλαμβάνει όγκο V [22]. Το σώμα υπόκειται τόσο σε μαζικές f^V , όσο και σε επιφανειακές δυνάμεις f^S . Έστω ένα εσωτερικό σημείο P του σώματος B από το οποίο διέρχεται μια επίπεδη επιφάνεια S^* , έτσι ώστε το σώμα να διαιρείται σε δύο τμήματα I και II (Εικόνα 2.2). Το σημείο P ανήκει σε ένα μικρό στοιχείο επί της επιφάνειας, το οποίο ορίζεται από το κάθετο στο στοιχείο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} , που έχει κατεύθυνση από το τμήμα I προς το τμήμα II .



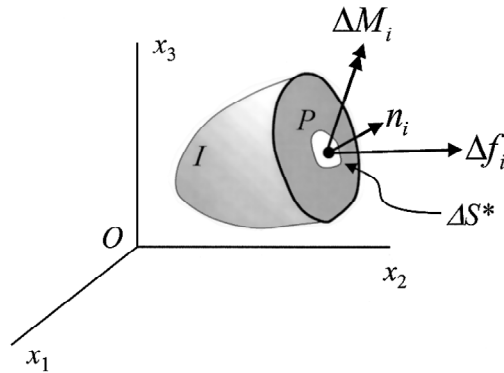
Εικόνα 2.2 Τυπικός συνεχές σώμα στο οποίο φαίνεται επίπεδο S^* που διέρχεται από το P

Οι εσωτερικές δυνάμεις που μεταβιβάζονται στο επίπεδο S^* , ως αντιδράσεις του τμήματος II προκαλούν την ανάπτυξη έντασης επί του επιπέδου ισοδύναμης με μία συνισταμένη δύναμη Δf_i και μια ροπή ΔM_i στο σημείο P (Εικόνα 2.3). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα μεγέθη Δf_i και ΔM_i δεν είναι κατ' ανάγκη στη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n}_i στο P . Το διάνυσμα της τάσεως ή ο ελκυστής \mathbf{t} που αντιστοιχεί στο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} στο P , ορίζεται από τη σχέση:

$$t_i^n = \lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S^*} \quad (2.2)$$

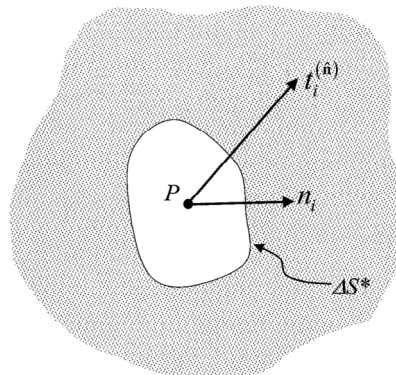
Επίσης θεωρούμε ότι οριακά στο P , το διάνυσμα των ροπών εξαφανίζεται και έτσι δεν υπάρχουν παραμένουσες συγκεντρωμένες ροπές.

$$\lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta S^*} = 0 \quad (2.3)$$



Εικόνα 2.3 Δύναμη και ροπή που ασκούνται στο σημείο P στην επιφάνεια ΔS^*

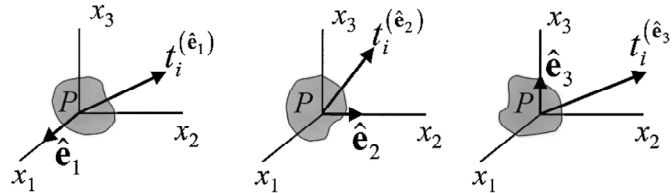
Το διάνυσμα της τάσης που ορίστηκε προηγουμένως έχει νόημα σε συνδυασμό με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο P . Έτσι, καθώς από το σημείο P διέρχονται άπειρα επίπεδα, το καθένα από τα οποία ορίζεται και από ένα διαφορετικό διάνυσμα \mathbf{n} , είναι προφανές ότι άπειρα είναι και τα διανύσματα τάσεως \mathbf{t}_i^n για μια δεδομένη φόρτιση του σώματος. Το σύνολο των δύο αυτών διανυσμάτων που διέρχονται από το σημείο P , όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.4 ορίζει το πεδίο των τάσεων για το σημείο αυτό.



Εικόνα 2.4 Τανυστής τάσης που ασκείται στο σημείο P , με κάθετο n_i στο επίπεδο

2.3.2 Τανυστής της τάσης

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, οι τάσεις Cauchy σχετίζονται με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην εκάστοτε επιφάνεια. Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο σημείο P , το διάνυσμα των τάσεων $t_i^{e_j}$ μπορεί να εκφραστεί ως προς τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα e_i , όπου $i=1, 2, 3$.

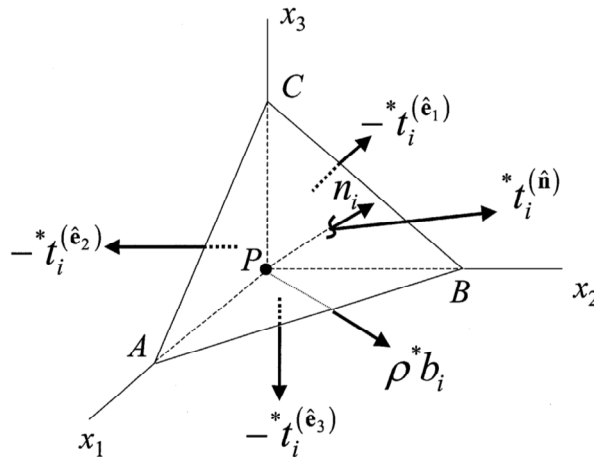


Εικόνα 2.5 Διανύσματα ως προς τα τρία κύρια επίπεδα στο σημείο P

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω για το σημείο P έχουμε:

$$t^{(e_i)} = t_j^{(e_i)} e_j \quad (i=1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει το διάνυσμα των τάσεων στο σημείο P για ένα συγκεκριμένο επίπεδο σε σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η παραπάνω διατύπωση των τάσεων είναι αρκετά περιορισμένη, αυτό που πραγματικά θα ήταν χρήσιμο είναι μια γενικότερη διατύπωση η οποία να δίνει τις τάσεις σε ένα σημείο P για ένα αυθαίρετο επίπεδο που διέρχεται από αυτό. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την ισορροπία ενός απειροστού τμήματος τετραεδρικού σχήματος το οποίο έχει την κορυφή του στο σημείο P και την βάση του ABC κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα $n = n_i e_i$ (Εικόνα 2.6). Το σύστημα αναφοράς επιλέγεται έτσι ώστε οι τρεις πλευρές που τετράεδρου να βρίσκονται επί των Καρτεσιανών επιπέδων.



Εικόνα 2.6 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος τετράεδρου με κορυφή το P

Από την ισορροπία του απειροστού αυτού τμήματος αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

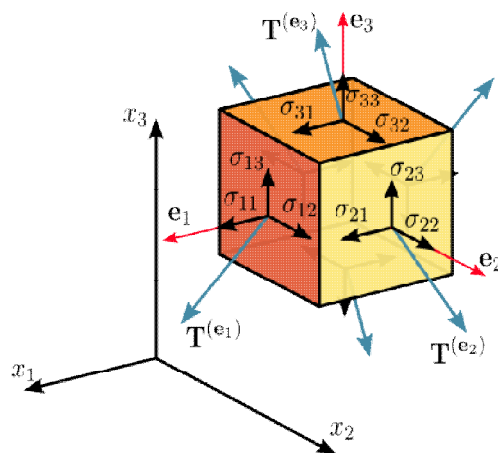
$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad \text{ή} \quad t^{(n)} = \sigma \cdot n \tag{2.5}$$

Οι ποσότητες σ_{ji} είναι οι όροι του τανυστή δευτέρας τάξεως σ , ο οποίος είναι γνωστός και ως τανυστής τάσεως.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Από την εξίσωση (2.5) παρατηρούμε ότι αν γνωρίζουμε τον τανυστή των τάσεων στο σημείο P , μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα των τάσεων για οποιοδήποτε επίπεδο διέρχεται από το σημείο αυτό.

Οι εννέα όροι σ_{ji} του τανυστή των τάσεων εκφράζονται σαν διανύσματα επί των πλευρών ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.7.



Εικόνα 2.7 Θετική σημαση των όρων του τανυστή των τάσεων

Οι τρεις από τους όρους αυτούς ασκούνται κάθετα στα τρία Καρτεσιανά επίπεδα, συμβολίζονται ως σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} και ονομάζονται ορθές τάσεις, ενώ οι υπόλοιποι έξι κείτονται επί των επιπέδων, συμβολίζονται ως σ_{12} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{32} , σ_{13} , σ_{31} και ονομάζονται διατμητικές τάσεις. Οι όροι του τανυστή είναι θετικοί όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση με το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου στο οποίο ανήκουν. Γενικά, οι θετικές τάσεις αναφέρονται ως εφελκυστικές, ενώ οι αρνητικές ως θλιπτικές.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει η ακόλουθη έκφραση:

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \quad (2.7)$$

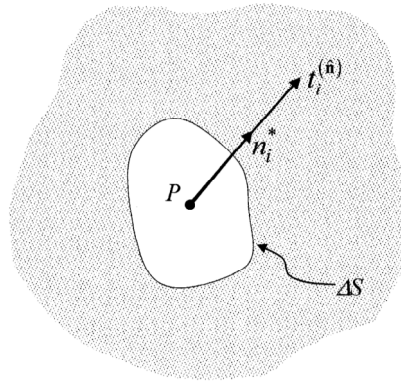
αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για τον προσδιορισμό των τάσεων σε κάθε σημείο αρκεί να γνωρίζουμε έξι από τους εννέα όρους του τανυστή.

2.3.3 Κύριες τάσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για κάθε επίπεδο που διέρχεται από ένα σημείο P ορίζεται ένα διάνυσμα τάσεως το οποίο δεν είναι κατ' ανάγκη παράλληλο στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί του επιπέδου (Εικόνα 2.4). Είναι πιθανό όμως για

κάποιους συγκεκριμένους προσανατολισμούς των επιπέδων αυτών, το διάνυσμα τάσεως που προκύπτει να είναι παράλληλο του n (Εικόνα 2.8) και επομένως να μπορεί να εκφραστεί ως βαθμωτό πολλαπλάσιο του. Έτσι, το διάνυσμα των τάσεων για ένα κύριο επίπεδο γράφεται:

$$t_i^{(n)} = \sigma n_i \quad (2.8)$$



Εικόνα 2.8 Διάνυσμα τάσεως στο σημείο P για ένα κύριο επίπεδο

όπου το σ είναι ένα διαγώνιο μητρώο. Οι διευθύνσεις που ορίζονται από τα διανύσματα n_i για τα οποία ισχύει η σχέση (2.8), ονομάζονται κύριες διευθύνσεις και το βαθμωτό μητρώο σ ονομάζεται τανυστής των κυρίων τάσεων. Τέλος, τα κάθετα επίπεδα στο διάνυσμα n_i ονομάζονται κύρια επίπεδα. Όπως είναι φανερό από την Εικόνα 2.8, λόγω της καθετότητας του $t^{(n)}$ στο κύριο επίπεδο δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις στα επίπεδα αυτά.

Για τον προσδιορισμό των κυρίων τάσεων χρησιμοποιείται η ακόλουθη εξίσωση:

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0 \quad (2.9)$$

από την οποία προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση του τανυστή των τάσεων, και διατυπώνεται με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2.10)$$

οι συντελεστές I_1, I_2 και I_3 ονομάζονται πρώτη, δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτη (stress invariants) της τάσεως αντίστοιχα και προσδιορίζονται με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = tr \sigma \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2}[(tr \sigma)^2 - tr(\sigma^2)] \\ I_3 &= \varepsilon_{ijk}\sigma_{1i}\sigma_{2j}\sigma_{3k} = \det \sigma \end{aligned} \quad (2.11)$$

Στη θεωρία πλαστικότητας είναι σύνηθες ο τανυστής των τάσεων να αναλύεται σε δύο όρους, όπως φαίνεται και στην ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} - S_{ij} \quad (2.12)$$

Ο πρώτος από τους δύο όρους εκφράζει την υδροστατική τάση ή την υδροστατική πίεση και ονομάζεται υδροστατικός τανυστής της τάσης (spherical or hydrostatic stress tensor). Η έκφραση του υδροστατικού τανυστή της τάσης είναι:

$$p = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (2.13)$$

Ο δεύτερος όρος υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση και ονομάζεται αποκλίνων τανυστής της τάσης (deviatoric stress tensor):

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.14)$$

Από την εξίσωση (2.14) εύκολα προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned} J_1 &= S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = tr\mathbf{S} = 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) \\ J_3 &= \det(S_{ij}) = \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki} = S_{11}S_{22}S_{33} \end{aligned} \quad (2.15)$$

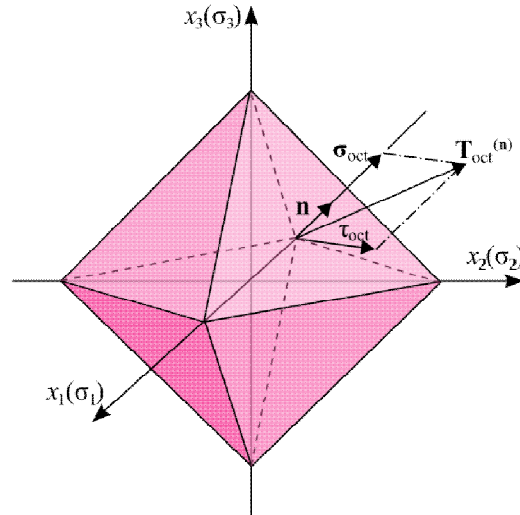
Αποδεικνύεται ότι οι κύριες διευθύνσεις του αποκλίνοντος τανυστή της τάσης είναι οι ίδιες με αυτές του τανυστή σ και ότι οι κύριες αποκλίνουσες τάσεις S_i ($i=1, 2, 3$) σχετίζονται με τις τάσεις σ_i ($i=1, 2, 3$) μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \\ S_{22} &= \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} \quad \text{ή} \quad S_i = \sigma_i - p \quad (i=1, 2, 3) \\ S_{33} &= \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Επιπρόσθετα, πέραν του $J_1 = 0$, ο δεύτερος και ο τρίτος αποκλίνων τανυστής συνδέονται με τις αναλλοίωτες I_i ($i=1, 2, 3$) με τις σχέσεις που παρουσιάζονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2) \\ J_3 &= \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Σε αυτό το σημείο είναι σκόπιμο να ορισθεί η έννοια των οκταεδρικών τάσεων (octahedral stresses). Για το σκοπό αυτό πρώτα ορίζεται το οκταεδρικό επίπεδο. Ένα επίπεδο ονομάζεται οκταεδρικό όταν η κάθετος επί του επιπέδου σχηματίζει ίσες γωνίες με καθένα από τους κύριους άξονες του τανυστή των τάσεων σ (Εικόνα 2.9).



Εικόνα 2.9 Οκταεδρικά επίπεδα

Έτσι, για κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 \quad \text{και} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2.18)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις προκύπτει ότι:

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.19)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν οκτώ επίπεδα που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις (2.19), των οποίων οι εξισώσεις είναι:

$$\pm\sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 = \sqrt{3}C \quad (2.20)$$

όπου το C είναι μια σταθερά. Από τα οκταεδρικά επίπεδα μπορούν να ορισθούν οι οκταεδρικές τάσεις, ως οι ορθές τάσεις επί του επιπέδου, με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_{oct} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 \quad (2.21)$$

Η αντίστοιχη διατμητική τάση ορίζεται σαν η διατμητική τάση επί του οκταεδρικού επιπέδου με βάση τη σχέση:

$$\tau_{oct}^2 = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{2}{3}J_2 \quad (2.22)$$

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε την τελική έκφραση των οκταεδρικών διατμητικών τάσεων:

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \\ &= \frac{1}{3}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (2.21) ότι η ορθή οκταεδρική τάση είναι ίση με την υδροστατική τάση που αναφέρθηκε προηγουμένως. Με βάση αυτή τη διαπίστωση αλλά και την έκφραση των τ_{oct} , θα δείξουμε στο κεφάλαιο της πλαστικότητας ότι οι οκταεδρικές διατμητικές τάσεις είναι αυτές που διατυπώνουν το κριτήριο διαρροής.

2.4 Παραμορφώσεις

Αποτέλεσμα των τάσεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι η εκδήλωση μετακινήσεων, οι οποίες μπορεί να είναι είτε απειροστές είτε σημαντικές. Το μέγεθος αυτών των μετακινήσεων (στρέψη, επιμήκυνση κ.λ.π.) ορίζεται σε όρους παραμορφώσεων – τροπών (strain). Στην περιοχή των μικρών παραμορφώσεων, όπως οι τάσεις έτσι και οι παραμορφώσεις σε ένα σημείο μπορούν να προσδιοριστούν από ένα συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξης. Οι τιμές του τανυστή πρακτικά υπολογίζονται από τις παραγώγους των μετατοπίσεων. Στην περιοχή των μεγάλων παραμορφώσεων ωστόσο, εναλλακτικές μέθοδοι προσδιορισμού των παραμορφώσεων θα πρέπει να διατυπωθούν, για παράδειγμα η λογαριθμική παραμόρφωση, η κλίση της παραμόρφωσης (deformation gradient) κ.λ.π.

2.4.1 Τανυστής της παραμόρφωσης

Υπό την δράση των έξι συνιστωσών του τανυστή των τάσεων σ_{ij} σε ένα σώμα, αναπτύσσονται παραμορφώσεις, οι οποίες μπορούν να διακριθούν σε αξονικές (direct strain) και γωνιακές (angular). Οι αξονικές παραμορφώσεις ορίζονται ως ε_{xx} , ε_{yy} και ε_{zz} και προκύπτουν από τις αντίστοιχες ορθές τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} και σ_{zz} , ενώ οι γωνιακές ορίζονται ως ε_{xy} , ε_{yz} και ε_{zx} και προκύπτουν από τις διατμητικές τάσεις σ_{xy} , σ_{yz} και σ_{zx} .

Ο συμμετρικός τανυστής των παραμορφώσεων, ο οποίος χαρακτηρίζει την παραμόρφωση ενός σώματος, δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Όπου οι γωνιακές παραμορφώσεις ορίζονται ως $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$.

Οι όροι του τανυστή των παραμορφώσεων δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Όπως κάθε τανυστής έτσι και ο τανυστής των παραμορφώσεων μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαγώνια μορφή.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Όπου ως ε_{11} , ε_{22} και ε_{33} αναφέρονται οι ορθές κύριες παραμορφώσεις. Αυτό σημαίνει ότι κάθε παραμόρφωση μπορεί να παραχθεί από απλές επιμηκύνσεις κατά τις φορές τριών κύριων κάθετων μεταξύ τους διευθύνσεων. Οι διαφορές:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \tag{2.27}$$

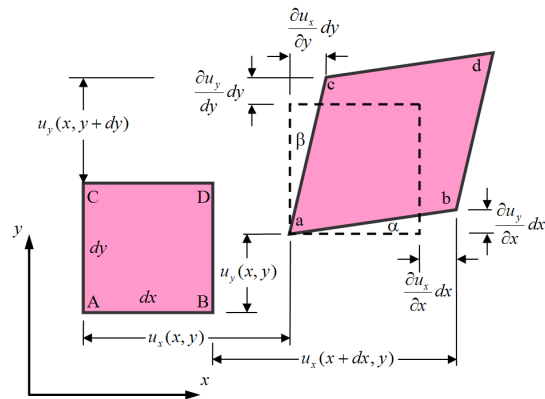
ονομάζονται κύριες διατμητικές παραμορφώσεις.

2.4.2 Θεωρία μικρών παραμορφώσεων

Στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων οι όροι του τανυστή των παραμορφώσεων είναι μικροί σε σχέση με τη μονάδα. Αν επίσης οι γωνίες στροφής είναι και αυτές σχετικά μικρές τότε είναι δυνατό να αμεληθούν οι δευτεροβάθμιοι όροι από τις σχέσεις (2.25). Έτσι, τελικά προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για τις παραμορφώσεις:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται σχηματικά, για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, τι αναπαριστούν οι όροι του τανυστή της παραμόρφωσης.



Εικόνα 2.10 Επίπεδη παραμόρφωση

Έτσι, ως $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ αναπαριστώνται οι σχετικές επιμηκύνσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y, z αντίστοιχα, ενώ ως $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ οι σχετικές διατμητικές παραμορφώσεις (γ_{xy} είναι η αλλαγή της γωνίας μεταξύ των αξόνων x και y). Η σχετική ογκομετρική παραμόρφωση ενός σώματος δίνεται από την σχέση:

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z
 \tag{2.29}$$

Οι απλές αυτές σχέσεις δεν είναι ακριβείς για την περίπτωση ουσιαστικών αλλαγών του σχήματος στερεών σωμάτων, καθώς στην περίπτωση αυτή οι όροι του τανυστή των παραμορφώσεων είναι συγκρίσιμοι με τη μονάδα και έτσι απαιτείται η χρήση των σχέσεων (2.25). Ακόμα όμως και στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων είναι πιθανό οι σχέσεις (2.28) να μην είναι επαρκείς σε προβλήματα παραμορφώσεων και ευστάθειας καμπτόμενων κατασκευών. Στη συνέχεια λοιπόν λέγοντας μικρές παραμορφώσεις θα εννοούμε τέτοιες ώστε οι σχέσεις (2.28) να είναι εφαρμόσιμες.

Χρησιμοποιώντας τανυστικό συμβολισμό οι όροι του τανυστή των παραμορφώσεων μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.30)$$

Εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \boldsymbol{\delta}_{ij} \quad (2.31)$$

Θεωρία Πλαστικότητας

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι γενικές αρχές της Θεωρίας Πλαστικότητας. Πιο αναλυτικά, αρχικά γίνεται αναφορά στην έννοια του κριτηρίου διαρροής και παρουσιάζονται τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα κριτήρια. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται κάποιες βασικές αρχές της Θεωρίας Πλαστικότητας καθώς επίσης και η Θεωρία Πλαστικού Δυναμικού. Ακολουθώντας, γίνεται μια σύντομη αναφορά στο αξίωμα ευστάθειας του Drucker, ενώ το κεφάλαιο κλείνει με την παρουσίαση των δύο πιο απλών περιπτώσεων κράτνσης, της ισότροπης και της κινηματικής κράτνσης.

3.2 Κριτήριο Διαρροής

Ως κριτήριο διαρροής αναφέρεται η μαθηματική έκφραση που περιγράφει την εντατική κατάσταση σε ένα σημείο του υλικού και με την οποία μπορεί να προσδιοριστεί το σημείο έναρξης των πλαστικών παραμορφώσεων [1]. Όταν το κριτήριο διαρροής πληρείται για ένα σημείο, τότε στο σημείο αυτό έχουν αναπτυχθεί πλαστικές παραμορφώσεις, αλλιώς βρίσκεται ακόμα στην ελαστική κατάσταση. Η παραπάνω διαπίστωση εκφράζεται με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma_{ij}) < 0 & \text{ για το πεδίο των ελαστικών παραμορφώσεων} \\ \Phi(\sigma_{ij}) = 0 & \text{ για το πεδίο των πλαστικών παραμορφώσεων}\end{aligned}\tag{3.1}$$

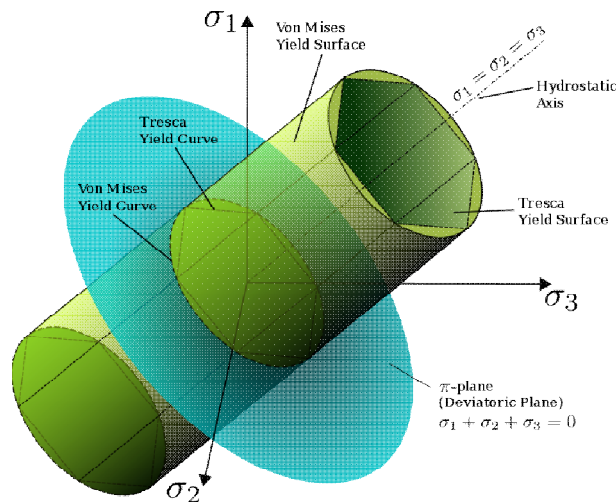
Αν το υλικό είναι ισότροπο, η διαρροή εξαρτάται μόνο από το μέγεθος των κύριων τάσεων. Για αυτά τα υλικά το κριτήριο διαρροής εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= 0 \\ \Phi(I_1, I_2, I_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Η παραπάνω σχέσεις αναπαριστούν μια επιφάνεια στον χώρο των κυρίων τάσεων. Έχει αποδειχθεί ότι για τα μέταλλα η υδροστατικές τάσεις δεν επηρεάζουν την πλαστική παραμόρφωση, έτσι σύμφωνα και με τη σχέση (2.12) η διαρροή εξαρτάται μόνο από τον αποκλίνοντα τανυστή s . Για ισότροπα υλικά λοιπόν, το κριτήριο διαρροής μπορεί να εκφραστεί ως προς τις αναλλοιώτες του αποκλίνοντος τανυστή της τάσης J_1, J_2, J_3 . Και επειδή όπως ειπώθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο $J_1 = 0$, έχουμε ότι:

$$\Phi(J_2, J_3) = 0 \quad (3.3)$$

Η παραπάνω έκφραση αναπαριστά ένα κύλινδρο στο χώρο των κυρίων τάσεων με τον διαμήκη άξονα του παράλληλο στον άξονα των υδροστατικών τάσεων (Εικόνα 3.1).



Εικόνα 3.1 Επιφάνεια του κριτηρίου διαρροής στο χώρο των κυρίων τάσεων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα σημαντικότερα κριτήρια διαρροής, τόσο για μέταλλα όσο και για σκυρόδεμα.

3.2.1 Κριτήριο διαρροής Tresca

Το κριτήριο διαρροής Tresca χρησιμοποιείται κυρίως για μέταλλα και η βασική παραδοχή του είναι ότι η διαρροή θα συμβεί μόνο όταν οι μέγιστες διατμητικές τάσεις φτάσουν μια τιμή k του υλικού. Η παραδοχή αυτή μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά από την παρακάτω σχέση:

$$\tau_{\max} = k \quad \text{για τη διαρροή} \quad (3.4)$$

$$\tau_{\max} < k \quad \text{για το πεδίο των ελαστικών παραμορφώσεων} \quad (3.5)$$

Η εξίσωση (3.4) σε όρους κυρίων τάσεων γράφεται:

$$\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) = k \quad (3.6)$$

ή

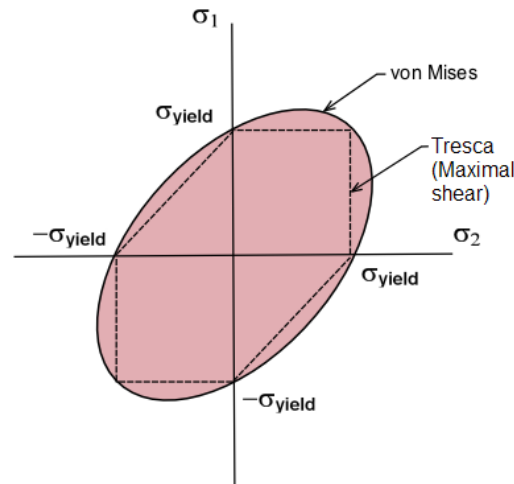
$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = k \quad (3.7)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι στο χώρο των κυρίων τάσεων η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου Tresca είναι ένας εξαγωνικός κύλινδρος παράλληλος στον άξονα των I_1 (Εικόνα 3.1). Ο γεωμετρικός τύπος των σημείων του κριτηρίου Tresca επί του π – επιπέδου είναι ένα κανονικό εξάγωνο.

Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης όπου $\sigma_3 = 0$ η εξίσωση (3.6) δίνει:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm 2k \\ \sigma_1 &= \pm 2k \\ \sigma_2 &= \pm 2k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η παραπάνω έκφραση αναπαριστά το εξάγωνο του κριτηρίου Tresca στον χώρο των $\sigma_1 - \sigma_2$ (Εικόνα 3.2).



Εικόνα 3.2 Σύγκριση των κριτηρίων Tresca και von Mises

Τέλος, η διατμητική αντοχή σε καθαρή διάτμηση, των υλικών τα οποία υπακούουν στο κριτήριο Tresca, αποδεικνύεται ότι είναι ίση με το μισό της αντοχής σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το συμπέρασμα αυτό συνοψίζεται στην σχέση που ακολουθεί.

$$k = \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \quad (3.9)$$

Άρα, το κριτήριο διαρροής Tresca γράφεται:

$$\Phi_{TR} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|}{\sigma_y} - 1 \quad (3.10)$$

3.2.2 Κριτήριο διαρροής von Mises

Το κριτήριο von Mises υποθέτει ότι η διαρροή θα συμβεί μόνο όταν η δεύτερη αναλλοίωτη J_2 του αποκλίνοντος τανυστή της τάσης s φτάσει μια οριακή τιμή k^2 , η οποία είναι χαρακτηριστική παράμετρος του υλικού. Τα παραπάνω συνοψίζονται στις εκφράσεις που ακολουθούν:

$$J_2 - k^2 = 0 \quad \text{για τη διαρροή} \quad (3.11)$$

$$J_2 < k^2 \quad \text{για το πεδίο των ελαστικών παραμορφώσεων} \quad (3.12)$$

Σε όρους τάσεων και κυρίων τάσεων οι εξίσωση (3.11) γράφεται, αντίστοιχα:

$$\frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 = k^2 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = k^2 \quad (3.14)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου von Mises στο χώρο των κυρίων τάσεων είναι κύλινδρος παράλληλος με τον άξονα των υδροστατικών τάσεων. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων επί του π - επιπέδου είναι κύκλος με ακτίνα $r = \sqrt{2}k$.

Στην περίπτωση επίπεδης έντασης η εξίσωση (3.14) απλοποιείται στην:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3k^2 \quad (3.15)$$

Η σχέση αυτή αναπαριστά μια έλλειψη στον χώρο των τάσεων $\sigma_1 - \sigma_2$ (Εικόνα 3.2).

Τέλος, αποδεικνύεται ότι η σταθερά k είναι ίση με:

$$k = \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (3.16)$$

Για ένα υλικό επομένως το οποίο υπακούει στο κριτήριο διαρροής von Mises η αντοχή διαρροής του σε μονοαξονικό εφελκυσμό είναι ίση με $\sqrt{3}$ φορές την αντοχή διαρροής του σε καθαρή διάτμηση.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω το κριτήριο διαρροής von Mises μπορεί να διατυπωθεί με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi_{VM} = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6 \left[(\sigma_{xy})^2 + (\sigma_{yz})^2 + (\sigma_{zx})^2 \right]}{2\sigma_y^2} - 1 \quad (3.17)$$

3.2.3 Κριτήριο Διαρροής Bresler – Pister

Όταν πρόκειται να περιγραφεί η πλαστική συμπεριφορά υλικών όπως το σκυρόδεμα απαιτείται ένα κριτήριο εκφρασμένο ως προς τις μέσες τάσεις. Το κριτήριο Bresler – Pister εξαρτάται από τρεις παραμέτρους μέσω των οποίων

προσομοιώνεται η πλαστικότητα του σκυροδέματος. Η επιφάνεια διαρροής δίνεται από την σχέση:

$$\Phi_{BP} = 0 \tag{3.18}$$

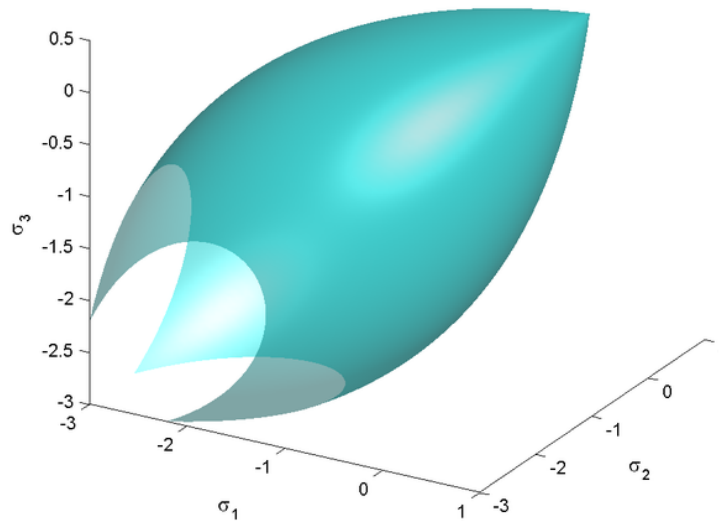
όπου

$$\Phi_{BP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{J_2} - c_1(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - c_2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2}{c_0} - 1 \tag{3.19}$$

Οι παράμετροι c_0, c_1, c_2 εξαρτώνται από το υλικό, ενώ ο όρος J_2 είναι η δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων. Η επιλογή των παραμέτρων θα πρέπει να γίνει με προσοχή προκειμένου να προκύψει μια λογική επιφάνεια διαρροής. Για την περίπτωση του σκυροδέματος οι τρεις παράμετροι του κριτηρίου Bresler – Pister δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sqrt{3}(\sigma_t + \sigma_c)} \right) \left(\frac{4\sigma_b^2 - \sigma_b(\sigma_t + \sigma_c) + \sigma_c\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b(\sigma_t - \sigma_c) - \sigma_c\sigma_t} \right) \\ c_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}(\sigma_t + \sigma_c)} \right) \left(\frac{\sigma_b(3\sigma_t - \sigma_c) - 2\sigma_c\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b(\sigma_t - \sigma_c) - \sigma_c\sigma_t} \right) \\ c_0 &= \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} + c_1\sigma_c - c_2\sigma_c^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

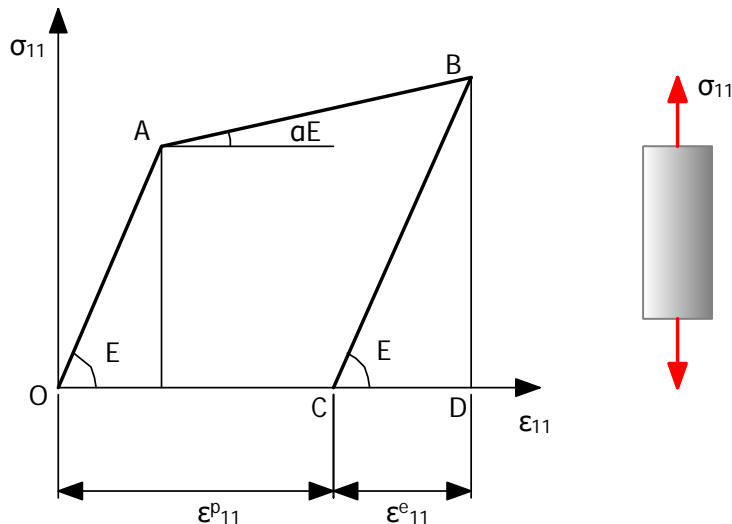
Στη σχέση (3.20) σ_c, σ_t είναι οι τάσεις διαρροής σε μονοαξονική θλίψη και εφελκυσμό αντίστοιχα ενώ σ_b είναι η τάση διαρροής σε διαξονική θλίψη. Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η τρισδιάστατη επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου Bresler – Pister για $\sigma_c = 1MPa, \sigma_t = 0.3MPa, \sigma_b = 1.7MPa$



Εικόνα 3.3 Επιφάνεια διαρροής κριτηρίου Bresler - Pister

3.3 Βασικές παραδοχές της θεωρίας πλαστικότητας

Όπως είναι γνωστό οι πλαστικές παραμορφώσεις σχετίζονται με την κατανάλωση ενέργειας επομένως είναι μη αναστρέψιμες.



Εικόνα 3.4 Καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων για μονοαξονική φόρτιση

Η συνολική παραμόρφωση αποτελείται από ένα ελαστικό αντιστρέψιμο μέρος ε_{el} και από ένα πλαστικό ε_{pl} μη αναστρέψιμο (Εικόνα 3.4).

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{el}\} + \{\varepsilon_{pl}\} \quad (3.21)$$

Αξιίζει να αναφερθεί ότι η παραπάνω σχέση έχει ισχύ για τη περίπτωση απειροστών μετατοπίσεων.

Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως οι πλαστικές παραμορφώσεις είναι αυτές που προκαλούν την απορρόφηση ενέργειας, κατ' επέκταση η εξέλιξη τους εξαρτάται από την ιστορία της φόρτισης (history or path dependent). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθεία συσχέτιση μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων κατά την πλαστικοποίηση.

Μια ακόμα παραδοχή που κάνει η Θεωρία Πλαστικότητας είναι ότι αμελεί την επίδραση της ιξώδους αντίστασης (viscous effects) κατά την διάρκεια των πλαστικών παραμορφώσεων, θεωρεί δηλαδή ότι οι πλαστικές παραμορφώσεις δεν είναι ευαίσθητες στο ρυθμό επιβολής της έντασης (rate insensitive). Συνεπώς οι τάσεις συνδέονται γραμμικά με τις ελαστικές παραμορφώσεις και γράφονται:

$$\sigma = E\varepsilon_{el} = E(\varepsilon - \varepsilon_{pl}) \quad (3.22)$$

3.4 Θεωρία πλαστικού δυναμικού

Η γενική μαθηματική έκφραση της καταστατικής εξίσωσης που περιγράφει την πλαστική ροή, διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον von Mises το 1928.

Παρατήρησε λοιπόν ότι ο τανυστής των παραμορφώσεων συνδέεται με τις τάσεις σ μέσω μιας ελαστικής συνάρτησης δυναμικού, την συμπληρωματική ενέργεια παραμόρφωσης U , έτσι:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.23)$$

Γενικεύοντας την παραπάνω ιδέα και εφαρμόζοντας τη στη θεωρία πλαστικότητας ο von Mises πρότεινε την ύπαρξη μιας πλαστικής συνάρτησης δυναμικού $Q(\sigma_{ij})$ και έτσι ο ρυθμός μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης μπορεί να διατυπωθεί με βάση την σχέση:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.24)$$

όπου το λ ονομάζεται πλαστικός πολλαπλασιαστής είναι θετική ποσότητα και προσδιορίζεται με βάση το κριτήριο διαρροής. Η πλαστική θεωρία που βασίζεται στην παραπάνω κανόνα ροής (flow rule) ονομάζεται Θεωρία Πλαστικού Δυναμικού (Plastic Potential Theory).

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο (§ 3.2) το κριτήριο διαρροής στο χώρο των έξι διαστάσεων, περιγράφει μια επιφάνεια, ενώ οι πλαστικές παραμορφώσεις $\dot{\varepsilon}^p$ εκφράζουν ένα διάνυσμα. Η σχέση (3.24) γεωμετρικά εκφράζει ότι το διάνυσμα της μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων είναι κάθετο στην επιφάνεια $Q(\sigma_{ij})$, γι' αυτό συχνά στη θεωρία πλαστικότητας αναφέρεται και σαν κανόνας ορθογωνικότητας (normality rule).

Για ισότροπα υλικά, η ποσότητα $Q(\sigma_{ij})$ είναι συνάρτηση των αναλλοίωτων του τανυστή των τάσεων σ :

$$Q = Q(I_1, I_2, I_3) \quad (3.25)$$

Σε περίπτωση ανισότροπων υλικών επιπλέον παράμετροι θα πρέπει να οριστούν:

$$Q = Q(\sigma_{ij}, \beta_k) \quad (3.26)$$

Καθοριστικός για τη θεωρία πλαστικού δυναμικού είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης Q . Μια κοινή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιείται σαν συνάρτηση δυναμικού η έκφραση που περιγράφει την καμπύλη διαρροής $\Phi(\sigma_{ij})$.

$$Q(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma_{ij}) \quad (3.27)$$

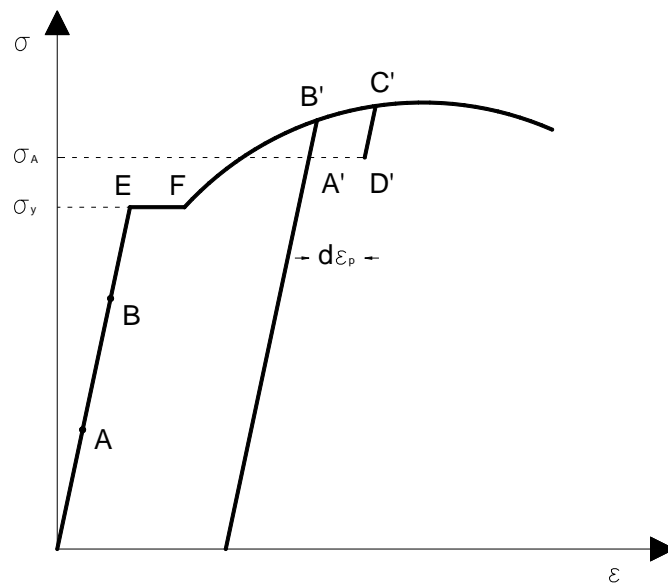
Έτσι, η σχέση (3.24) μπορεί πλέον να γραφεί:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (3.28)$$

όπου το διάνυσμα της μεταβολής των πλαστικών παραμορφώσεων $\dot{\epsilon}^p$ είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Η παραπάνω θεώρηση ονομάζεται *κανόνας συσχετισμένης ροής* (associative flow rule). Μαθηματικά μπορεί να αποδειχθεί μέσω του αξιώματος του Drucker, το οποίο θα αναφερθεί στη συνέχεια, ότι για ευσταθή υλικά (stable materials) ο ρυθμός ροής πρέπει να είναι συσχετισμένος.

3.5 Αξίωμα ευστάθειας του Drucker

Σε μία προσπάθεια να διατυπώσει μια γενική έκφραση για τις πλαστικές σχέσεις τάσεων – παραμορφώσεων, ο Drucker πρότεινε μια προσέγγιση βασισμένη στο αξίωμα ευστάθειας του (1951). Αξίζει να αναφερθεί ότι θεμελιώδης συνέπεια του αξιώματος του Drucker είναι ότι για ευσταθή υλικά ο κανόνας ροής είναι συσχετισμένος ($\varrho \equiv \Phi$). Για να γίνει κατανοητό το αξίωμα αρχικά θα οριστεί ένας κλειστός κύκλος φόρτισης – αποφόρτισης στο χώρο των τάσεων. Η περίπτωση για μονοαξονική φόρτιση [1] φαίνεται στην Εικόνα 3.5, όπου οι ελαστικοί κύκλοι αναπαριστώνται από τη διαδρομή ABA , ενώ οι ελαστοπλαστικοί από την διαδρομή $A'B'C'D'$.



Εικόνα 3.5 Ελαστικός και ελαστοπλαστικός κύκλος φόρτισης – αποφόρτισης

Για τον ελαστικό – πλαστικό κύκλο είναι προφανές ότι η παραμόρφωση στην αρχή και το τέλος του διαφέρουν κατά $d\epsilon^p$.

Σύμφωνα με το αξίωμα του Drucker για να είναι ένα υλικό ευσταθές (stable), η παρακάτω ανισότητα θα πρέπει να ισχύει:

$$W = \int_{C_\sigma} \Delta\sigma : d\epsilon \geq 0 \quad (3.29)$$

Όπου το C_σ αναπαριστά ένα κύκλο φόρτισης – αποφόρτισης. Το ολοκλήρωμα εκφράζει το έργο που καταναλώνεται από την εξωτερική φόρτιση εντός του C_σ . Είναι

προφανές ότι ένα υλικό που δεν ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα είναι ασταθές (unstable).

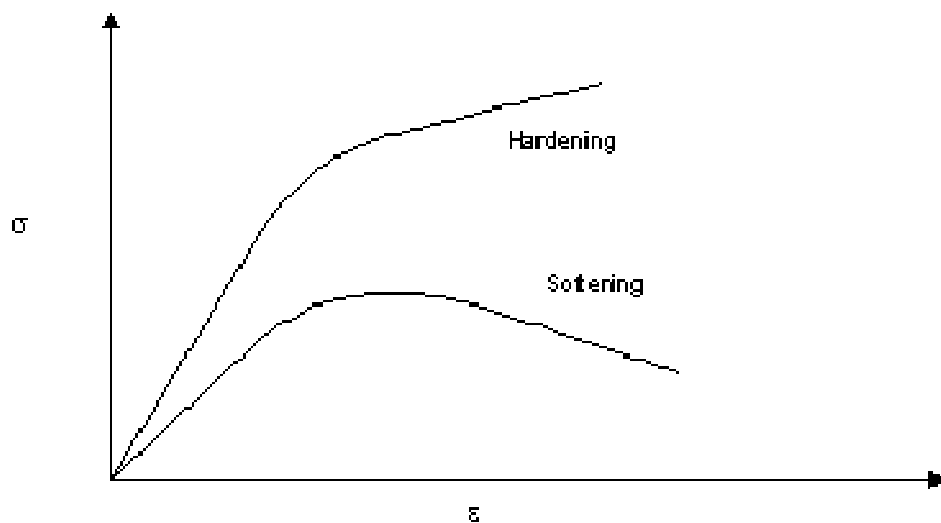
Καθώς οι κύκλοι των τάσεων αποτελούνται από τμήματα φόρτισης και αποφόρτισης, και καθώς κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης το έργο των εξωτερικών δράσεων είναι αρνητικό, προκύπτει από την ανισότητα (3.29) ότι:

1. Κατά την εφαρμογή των επιπρόσθετων τάσεων, το έργο των εξωτερικών δράσεων θα πρέπει να είναι θετικό:

$$d\sigma : d\varepsilon > 0 \quad (3.30)$$

2. Εντός του κύκλου επιβολής και απομάκρυνσης των επιπρόσθετων τάσεων $\Delta\sigma$, το έργο των εξωτερικών δράσεων θα πρέπει να είναι μη αρνητικό. Είναι μηδέν στην περίπτωση που κατά την διάρκεια του κύκλου συμβαίνουν μόνο ελαστικές παραμορφώσεις, ενώ είναι θετικό στην περίπτωση που συμβούν και πλαστικές παραμορφώσεις.

Κάθε υλικό που ικανοποιεί το αξίωμα του Drucker εντός ενός κύκλου φόρτισης – αποφόρτισης, μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό με κράτυνση (hardening material), ενώ σε αντίθετη περίπτωση θεωρείται υλικό με χαλάρωση (softening material). Το αξίωμα του Drucker δεν μπορεί να εφαρμοστεί για υλικά με χαλάρωση, ενώ για τα απολύτως πλαστικά υλικά θα πρέπει να γίνουν κατάλληλες τροποποιήσεις. Για τους παραπάνω λόγους το αξίωμα του Drucker ονομάζεται και *αξίωμα κράτυνσης*.



Εικόνα 3.6 Υλικά με κράτυνση και με χαλάρωση

Οι δύο βασικές παραδοχές του αξιώματος του Drucker είναι οι εξής

1. Υπάρχει μια επιφάνεια διαρροής η οποία διαχωρίζει την ελαστική από την πλαστική περιοχή. Η αλλαγή της εντατικής κατάστασης εντός ή επί της επιφάνειας προκαλεί μόνο ελαστικές παραμορφώσεις. Πλαστικές παραμορφώσεις συμβαίνουν μόνο όταν το διάνυσμα των επαυξητικών τάσεων κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας διαρροής.

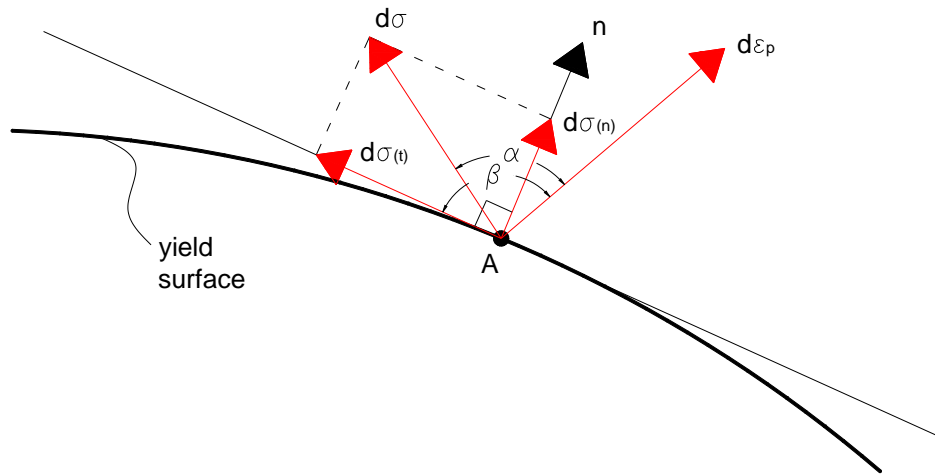
2. Η σχέση μεταξύ της απειροστής μεταβολής των τάσεων και των πλαστικών παραμορφώσεων είναι ελαστική.

Με βάση τις δύο παραπάνω παραδοχές μπορούν να εξαχθούν δύο βασικά συμπεράσματα σχετικά με την επιφάνεια διαρροής και το διάνυσμα των επαυξητικών πλαστικών παραμορφώσεων $d\varepsilon^p$.

Πρώτον, η απειροστή επαύξηση των τάσεων $d\sigma$ για ελαστική – πλαστική φόρτιση από κάθε σημείο της επιφάνειας διαρροής κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας και μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο σε δύο συνιστώσες μια εφαπτόμενη στη μέση επιφάνεια και σε μία κάθετη.

$$d\sigma = d\sigma^{(t)} + d\sigma^{(n)} \quad (3.31)$$

όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.7.



Εικόνα 3.7 Καθετότητα του διανύσματος των πλαστικών παραμορφώσεων

Δεύτερον, οι πλαστικές παραμορφώσεις που προκαλούνται από το μεταβολή των τάσεων $d\sigma$ ισοδυναμούν με το άθροισμα αυτών που προκαλούνται από τα διανύσματα $d\sigma^{(t)}$ και $d\sigma^{(n)}$ χωριστά. Ωστόσο, η μεταβολή των τάσεων κατά μήκος του εφαπτομενικού επιπέδου προκαλεί μόνο ελαστικές παραμορφώσεις, έτσι το διάνυσμα των επαυξητικών παραμορφώσεων $d\varepsilon^p$ εξαρτάται μόνο από το $d\sigma^{(n)}$. Το παραπάνω συμπέρασμα συνοψίζεται στη σχέση που ακολουθεί.

$$d\sigma : d\varepsilon^p = (d\sigma^{(t)} + d\sigma^{(n)}) : d\varepsilon^p = d\sigma^{(n)} : d\varepsilon^p > 0 \quad (3.32)$$

ή

$$|d\sigma^{(n)}| |d\varepsilon^p| \cos \alpha > 0 \quad (3.33)$$

και

$$d\sigma^{(t)} : d\varepsilon^p = 0 \quad (3.34)$$

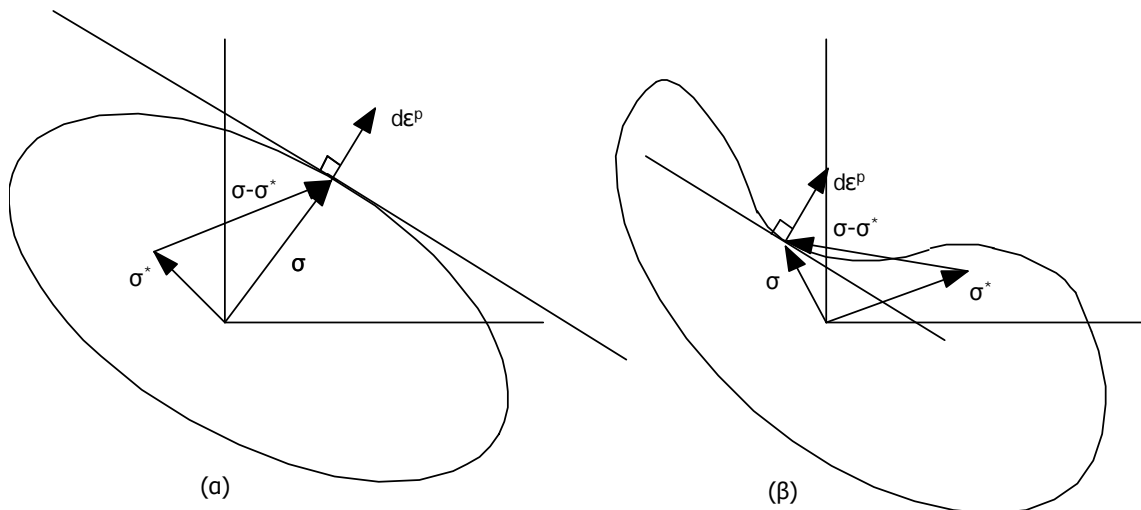
ή

$$|d\sigma^{(n)}||d\epsilon^p| \cos \beta = 0 \tag{3.35}$$

Καθώς η εξίσωση (3.30) ισχύει για κάθε $d\sigma$, έτσι και η εξίσωση (3.34) θα πρέπει να ισχύει για $d\sigma^{(t)}$ κατά μήκος κάθε διεύθυνσης πάνω στο εφαπτομενικό επίπεδο. Αυτό είναι δυνατό μόνο και μόνο όταν $\beta = \pi/2$, προκύπτει λοιπόν ότι το διάνυσμα $d\epsilon^p$ έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος n στην επιφάνεια διαρροής σε κάθε σημείο A:

$$d\epsilon^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \tag{3.36}$$

Η σχέση (3.36) είναι γνωστή στη θεωρία πλαστικότητας σαν κανόνας της ορθογωνικότητας (normality rule) ή συσχετισμένος κανόνας ροής (associative flow rule), και είναι αποτέλεσμα του αξιώματος ευστάθειας του Drucker.



Εικόνα 3.8 (α) Κυρτή επιφάνεια διαρροής και (β) μη κυρτή επιφάνεια διαρροής

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για ευσταθή υλικά, τα οποία ικανοποιούν το αξίωμα του Drucker, η επιφάνεια διαρροής θα πρέπει να είναι κυρτή (Εικόνα 3.8α), και οι επαύξηση των πλαστικών παραμορφώσεων να έχει τη διεύθυνση της καθέτου n στην επιφάνεια διαρροής. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αν το σ^* βρίσκεται από την έξω πλευρά της εφαπτόμενης της επιφάνειας διαρροής η σχέση (3.30) δεν ικανοποιείται (Εικόνα 3.8β).

3.6 Κράτνυση

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχουν τρεις κατηγορίες υλικών, αυτά που υπό την επίδραση μιας χρονοϊστορίας παραμορφώσεων παρουσιάζουν κράτνυση (hardening), αυτά που παρουσιάζουν χαλάρωση (softening) και τα απολύτως πλαστικά υλικά (perfectly plastic). Γενικά, τα υλικά που

παρουσιάζουν κράτνυση ονομάζονται ευσταθή και είναι αυτά για τα οποία ισχύει το αξίωμα του Drucker.

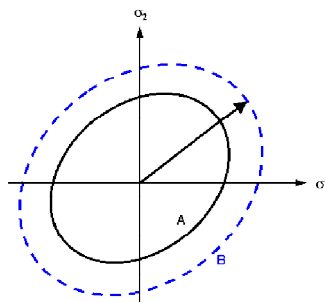
Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι υπό την επίδραση μίας χρονοϊστορίας παραμορφώσεων η επιφάνεια διαρροής μπορεί να παρουσιάσει μεταφορά, στρέψη, επέκταση κ. λ. π. Αυτή η μεταβολή της επιφάνειας ονομάζεται κράτνυση. Στα παρακάτω εξετάζονται μόνο δύο απλοί τύποι, η επέκταση της επιφάνειας διαρροής (isotropic hardening) και η μεταφορά της (kinematic hardening).

3.6.1 Ισότροπη κράτνυση

Ισότροπη κράτνυση ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο παρατηρείται ομοιόμορφη επέκταση της επιφάνειας διαρροής ως προς την αρχική επιφάνεια (Εικόνα 3.9). Για ισότροπα υλικά το κριτήριο διαρροής εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Phi = f(J_2, J_3) - \kappa(\alpha) = 0 \quad (3.37)$$

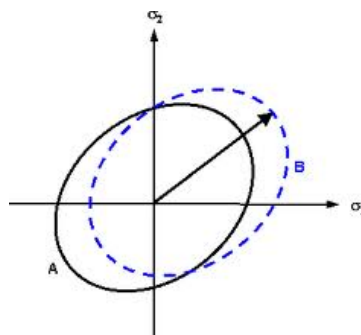
Μόνο μια παράμετρος α αρκεί για τον προσδιορισμό της ισότροπης κράτνυσης, καθώς η συνάρτηση κ είναι μονότονα αύξουσα.



Εικόνα 3.9 Ισότροπη κράτνυση

3.6.2 Κινηματική κράτνυση

Κινηματική κράτνυση ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο η αρχική επιφάνεια διαρροής μεταφέρεται στον χώρο των κυρίων τάσεων χωρίς να συμβεί κάποια άλλη αλλαγή (Εικόνα 3.10).



Εικόνα 3.10 Κινηματική κράτνυση

Η επιφάνεια διαρροής στην περίπτωση της κινηματικής κράτνσης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Phi = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\eta}) - \kappa = 0 \quad (3.38)$$

όπου η παράμετρος $\boldsymbol{\eta}$ ονομάζεται τάση αναφοράς ή πίσω τάση (back stress), ενώ το κ είναι σταθερά του υλικού και αναπαριστά το μέγεθος της επιφάνειας διαρροής.

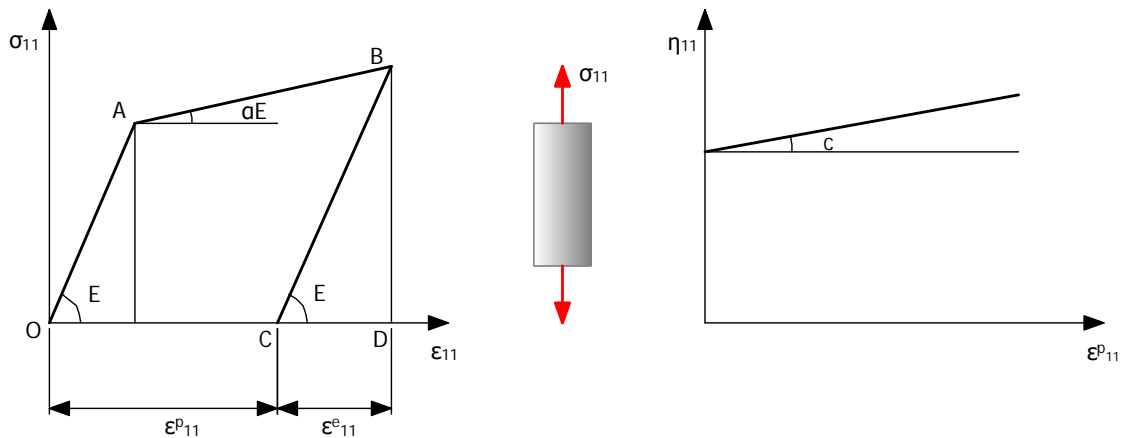
3.6.2.1 Προσομοίωμα Melan – Prager

Το μοντέλο κράτνσης Melan – Prager [21] ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} = c(\{\boldsymbol{\eta}\})\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\} \quad (3.39)$$

όπου η ποσότητα $c(\{\boldsymbol{\eta}\})$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση της πίσω τάσης. Στην περίπτωση που η ποσότητα αυτή είναι σταθερή έχουμε την περίπτωση της γραμμικής κινηματικής κράτνσης (Εικόνα 3.11).

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της πίσω τάσης θα παρουσιαστεί στα παρακάτω η περίπτωση ενός υλικού που πληροί το κριτήριο von Mises και το οποίο παρουσιάζει γραμμική κινηματική κράτνση.



Εικόνα 3.11 Υλικό με γραμμική κινηματική κράτνση

Κατά την αποφόρτιση από το σημείο B στο σημείο C, ένα τμήμα των παραμορφώσεων είναι ελαστικό και συνεπώς αντιστρέψιμο, ενώ ένα άλλο είναι πλαστικό (§3.3). Το ελαστικό μέρος του ρυθμού μεταβολής των παραμορφώσεων δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{\sigma}_{11} = E\dot{\varepsilon}_{11} \quad (3.40)$$

Σε περίπτωση επαναφόρτισης η τάση αυξάνεται ακολουθώντας την διαδρομή CB μέχρι το σημείο B οπου συμβαίνει διαρροή. Η τάση στο σημείο αυτό είναι:

$$\sigma = \alpha E \left(\varepsilon - \frac{\sigma_y}{E} \right) \quad (3.41)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.41) ως προς το χρόνο, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\dot{\sigma} = \alpha E \dot{\epsilon} \quad (3.42)$$

Καθώς, όπως προαναφέρθηκε, η διαρροή κατά την επαναφόρτιση συμβαίνει στο σημείο B, το κριτήριο διαρροής πληροίτε και επομένως έχουμε:

$$\Phi = 0 \Rightarrow (\sigma_{11} - \eta_{11}) - \sigma_y = 0 \Rightarrow \eta_{11} = \sigma_{11} - \sigma_y \quad (3.43)$$

Συνεπώς, όπως φαίνεται και από την παραπάνω έκφραση, η πίσω τάση εκφράζει την επιπρόσθετη τάση που απαιτείτε να αναπτυχθεί πέρα από την αρχική τάση διαρροής, έτσι ώστε το υλικό να διαρρεύσει ξανά.

Παραγωγίζοντας την σχέση (3.43) ως προς το χρόνο, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\dot{\eta}_{11} = \dot{\sigma}_{11} \quad (3.44)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ρυθμός μεταβολής της πίσω τάσης ισούται με αυτόν της πραγματικής τάσης. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.44) στην (3.39) και λαμβάνοντας ακόμα υπόψη τις σχέσεις (3.40) και (3.21), παίρνουμε την σχέση που ακολουθεί:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\alpha E} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{c} \Rightarrow \frac{1}{\alpha E} = \frac{1}{E} + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{\alpha E}{1 - \alpha} \quad (3.45)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής κινηματικής κράτυνσης συνδέεται τόσο με το μέτρο ελαστικότητας, όσο και με το λόγο της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία.

Υστερητικό Μοντέλο Bouc – Wen

4.1 Εισαγωγή

Η υστέρηση είναι μία πολύ σημαντική ιδιότητα, η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την μη γραμμική απόκριση μιας κατασκευής υπό ανακυκλιζόμενες δράσεις. Βασιζόμενος στις εργασίες των Massing (1925), Preisac (1935) και Valanis (1971), ο Bouc παρουσίασε το υστερητικό του μοντέλο με ολίσθηση. Στη συνέχεια, πολλές τροποποιήσεις του παραπάνω μοντέλου παρουσιάστηκαν, όπως το μοντέλο Bouc – Wen (Wen, 1976, 1980), το μοντέλο Baber – Noori (Baber and Wen 1980, Barer et al. 1976) και το μοντέλο Reinhorn (Sivaselvan and Reinhorn, 2000). Τα υστερητικά μοντέλα, γνωστά και ως ομαλά υστερητικά μοντέλα (smooth hysteretic models), μπορούν να προσομοιώσουν διάφορους τύπους υστερητικής συμπεριφοράς με τη χρήση μίας μόνο ομαλής συνάρτησης, η οποία επηρεάζεται από ένα πλήθος παραμέτρων που ορίζονται από το χρήστη.

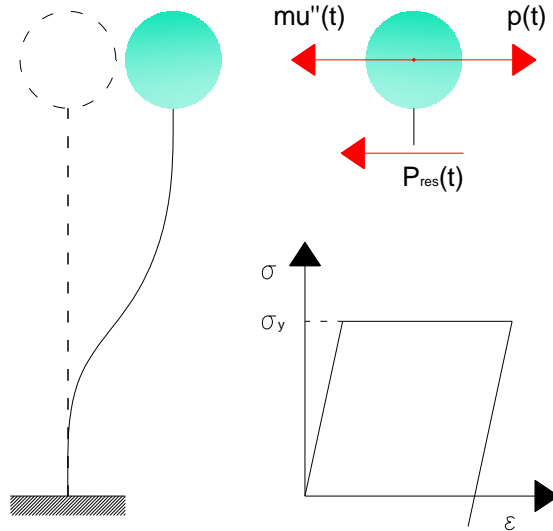
Τις τελευταίες δεκαετίες το μοντέλο Bouc –Wen έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα εύχρηστο στην προσομοίωση μεγάλου πλήθους υστερητικών αποκρίσεων συμπεριλαμβανομένων και φαινομένων όπως η απώλεια δυσκαμψίας (stiffness degradation), η μείωση της αντοχής (strength deterioration) και η ολίσθηση (pinching).

4.2 Η έννοια της υστέρησης

Για να γίνει κατανοητή η έννοια της υστέρησης θα χρησιμοποιηθεί ένας μονοβάθμιος ταλαντωτής σαν αυτόν της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 4.1). Ο ταλαντωτής παρουσιάζει ελαστική – απολύτως πλαστική συμπεριφορά με τάση διαρροής σ_y .

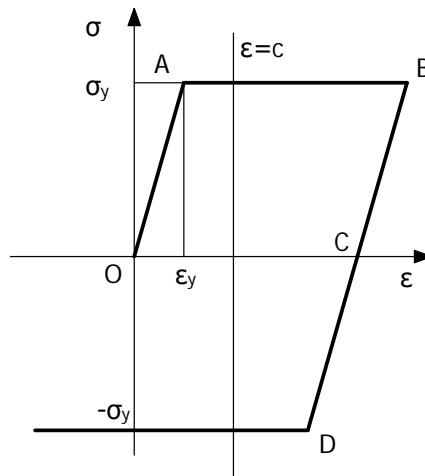
Για τάσεις μικρότερες της τάσης διαρροής ο ταλαντωτής συμπεριφέρεται ελαστικά και κατ' επέκταση ισχύει ο νόμος του Hooke για τα ελαστικά υλικά:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad |\sigma| \leq \sigma_y \quad (4.1)$$



Εικόνα 4.1 Μονοβάθμιος ταλαντωτής υπό ανακυκλιζόμενη φόρτιση

Όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4.2) υπάρχουν τουλάχιστον δύο επίπεδα τάσεων για τα οποία το υλικό διαρρέει $\sigma \in [-\sigma_y, \sigma_y]$ και αντιστοιχούν σε τιμές παραμόρφωσης μεγαλύτερες από την παραμόρφωση διαρροής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ακόμα και για την απλή περίπτωση των απολύτως πλαστικών υλικών δεν υπάρχει μια συνάρτηση $\sigma(\varepsilon)$ που να συνδέει με μοναδικό τρόπο το τρέχον επίπεδο τάσης με το αντίστοιχο επίπεδο παραμόρφωσης. Η μαθηματική θεωρία της υστέρησης προσπαθεί να προσδιορίσει μια συνάρτηση $\sigma(t)$, $t \in [0, T]$ έχοντας σαν δεδομένη τη συνάρτηση $\varepsilon(t)$ έτσι ώστε να παραχθεί μια συνάρτηση που να ταυτίζεται με αυτή της εικόνας (Εικόνα 4.2).



Εικόνα 4.2 Βρόχος υστέρησης

Έτσι, το μηχανικό πρόβλημα της υστέρησης μετατρέπεται σε ένα μαθηματικό πρόβλημα προσδιορισμού ενός τελεστή, ο οποίος αναφέρεται σαν υστερητικός τελεστής $B[In](t)$ όπου σαν $[In](t)$, $t \in [0, T]$ λαμβάνεται μία αυθαίρετη χρονοϊστορία π.χ. μετατόπισης, παραμόρφωσης κ. λ. π. Από φυσικής άποψης το συναρτησιακό πρέπει να είναι ανεξάρτητο του ρυθμού μεταβολής, καθώς η υστερητική ενέργεια που συσσωρεύεται σε μεταγενέστερους κύκλους φόρτισης αποφόρτισης δεν εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων εισόδου και εξόδου. Επίσης, ο υστερητικός τελεστής πρέπει να είναι τμηματικά μονότονος όπως συνεπάγεται και ο βρόχος υστέρησης της παραπάνω εικόνας.

Είναι προφανές λοιπόν ότι η έννοια της υστέρησης αντιμετωπίζεται με τη χρήση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων, τα οποία δεν σχετίζονται με τις συναρτήσεις που περιγράφουν τους υστερητικούς βρόχους. Για το λόγο αυτό τα όσα παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία, αποτελούν φαινομενολογική προσέγγιση. Παρόλα αυτά, υπάρχουν πλευρές που συνδέονται άμεσα με μηχανικές ιδιότητες της υστέρησης, όπως είναι οι μηχανισμοί κατανάλωσης ενέργειας και τα φαινόμενα κράτυνσης τα οποία διατυπώνονται με συνεπή τρόπο.

4.3 Από την θεωρία πλαστικότητας στο μοντέλο Bouc – Wen

4.3.1 Αναλύοντας το μοντέλο Bouc – Wen

Το υστερητικό μοντέλο Bouc – Wen έτσι όπως διατυπώθηκε από τον Wen (1980) και τροποποιήθηκε ξανά στη συνέχεια, χρησιμοποιείται σαν βάση για οποιοδήποτε επακόλουθη ανάλυση.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + c\dot{u} + P_{res}^{BW} &= p(t) \\ P_{res}^{BW} &= aKu + z \\ \dot{z} &= (1-a)K \left[A - |z|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})) \right] \dot{u} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Όπου c είναι η απόσβεση του συστήματος, P_{res}^{BW} είναι η δύναμη επαναφοράς του ταλαντωτή, a είναι ο λόγος της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, K είναι η ελαστική δυσκαμψία του ταλαντωτή, ενώ A, β, γ είναι παράμετροι του προσομοιώματος. Έχει αποδειχθεί ότι η παράμετρος A είναι περιττή και για το σκοπό αυτό θεωρείται στα παρακάτω ίση με τη μονάδα. Όπως φαίνεται και από τη δεύτερη σχέση των εξισώσεων (4.2), η δύναμη επαναφοράς του συστήματος μπορεί να επιμεριστεί σε δύο τμήματα. Το πρώτο είναι ελαστικό με ισοδύναμη δυσκαμψία ίση με την πλαστική δυσκαμψία του υλικού και το δεύτερο υστερητικό, όπου με z συμβολίζονται οι υστερητικές δυνάμεις επαναφοράς που ενέχει η μνήμη των μη γραμμικών συστημάτων.

Στο κείμενο αυτό χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της διατύπωσης που παρουσιάστηκε προηγουμένως, στην οποία σαν z λαμβάνονται οι υστερητικές μετατοπίσεις του συστήματος, όπως φαίνεται και στην ακόλουθη σχέση.

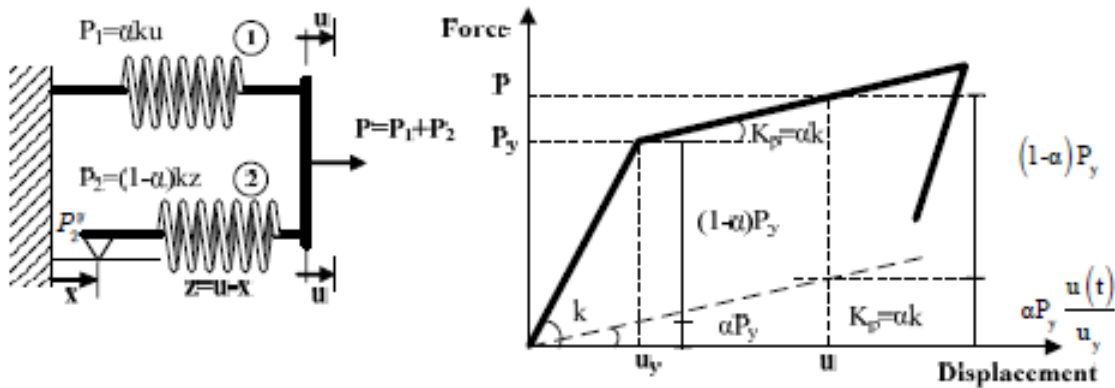
$$\begin{aligned} \ddot{u} + c\dot{u} + P_{res}^{BW} &= p(t) \\ P_{res}^{BW} &= aKu + (1-a)Kz \\ \dot{z} &= \left[A - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})) \right] \dot{u} \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου z_y είναι η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου.

Η εξισώσεις των σχέσεων (4.2) και (4.3) βασίζονται στη μηχανική θεώρηση και όχι τόσο στη μαθηματική θεωρία της υστέρησης. Έτσι, η διατύπωση των σχέσεων (4.2) με βάση το μαθηματικό υπόβαθρο της παραγράφου 4.2 δεν είναι άμεση. Ωστόσο, η σχέσεις (4.2) μπορούν να αναλυθούν με βάση το παρακάτω μηχανικό μοντέλο.

Θεωρώντας μηδενική ιξώδη απόσβεση για απλούστευση, το υστερητικό μοντέλο Bouc – Wen μπορεί να απεικονισθεί σχηματικά από ένα παράλληλο συνδυασμό ενός ελαστικού ελατηρίου (ελατήριο – 1) και ενός μη γραμμικού στοιχείου (Εικόνα 4.3.α) [28]. Το μη γραμμικό στοιχείο αποτελείται από ένα ελαστικό ελατήριο (ελατήριο – 2) και ένα ολισθητήρα συνδεδεμένα εν σειρά. Έτσι, εισάγεται ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας όπου u είναι η συνολική μετατόπιση, και z η σχετική μετατόπιση του ελατηρίου – 2. Για να ικανοποιείται το συμβιβαστό των παραμορφώσεων, η μετατόπιση του ολισθητήρα, αν υπάρχει, θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$x = u - z \quad (4.4)$$



Εικόνα 4.3 (α) Μοντέλο Bouc –Wen (β) διάγραμμα φορτίου μετατόπισης

Όσο η δύναμη που δρα στον ολισθητήρα είναι μικρότερη από μια οριακή τιμή x_y δεν έχουμε ολίσθηση και έτσι η μετατόπιση του ελατηρίου – 2 είναι ίση με τη συνολική μετατόπιση του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται ελαστικά με συνολική δυσκαμψία k , καθώς τα ελατήρια – 1 και 2 έχουν δυσκαμψία ak και $(1-a)k$ αντίστοιχα.

Όταν η οριακή τιμή του ολισθητήρα υπερκεραστεί, τότε συμβαίνει ολίσθηση και πλέον η σχετική μετατόπιση του ελατηρίου– 2 μένει σταθερή και συμβολίζεται με z_y .

Τα παραπάνω συνοψίζονται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_{res}^{BW} = P_1 + P_2 = aku + (1-a)kz \quad (4.5)$$

όπου z είναι:

$$z = \begin{cases} u & , u \leq u_y \\ z_y & , u > u_y \end{cases} \quad (4.6)$$

Καθώς στα περισσότερα μηχανικά προβλήματα, η εσωτερική μεταβλητή x ούτε εύκολα μπορεί να υπολογιστεί, αλλά ούτε μπορεί να παραχθεί με κάποιο θεωρητικό τρόπο, χρησιμοποιείται αντί αυτής η συνολική μετατόπιση για την οποία έχουμε ολίσθηση. Έτσι, η σχέση (4.6) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη έκφραση:

$$z = \begin{cases} u & , u \leq u_y \\ u_y & , u > u_y \end{cases} \quad (4.7)$$

Για να ομαλοποιήσει την μετάβαση από την ελαστική (χωρίς ολίσθηση) στην ανελαστική (με ολίσθηση) απόκριση, ο Wen (1980) πρότεινε την ακόλουθη σχέση:

$$\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t)) = \dot{u} [A - h_1 h_2] \quad (4.8)$$

όπου

$$h_1 = \left| \frac{z}{z_y} \right|^n, \quad h_2 = \beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u}) \quad (4.9)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις το h_1 θεωρείται ότι εκφράζει το κανόνα ροής (flow rule), ενώ το h_2 τον αντίστοιχο ρυθμό της ανακυκλιζόμενης φόρτισης. Η παράμετρος n ρυθμίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στον πλαστικό κλάδο, ενώ οι όροι β και γ είναι συντελεστές σχήματος που επηρεάζουν το σχήμα του βρόχου υστέρησης.

4.3.2 Παρατηρήσεις σχετικά με το μοντέλο

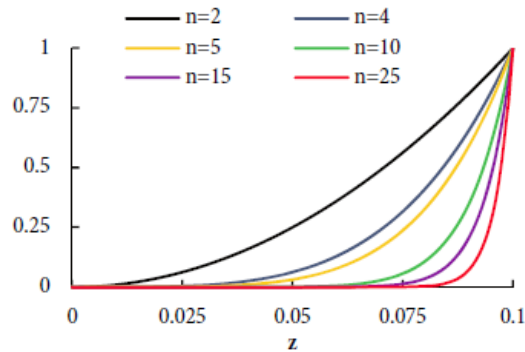
Άμεση συνέπεια των εξισώσεων (4.5) και (4.8), είναι ότι για μια μικρή τιμή της παραμέτρου n , προκαλείται ολίσθηση πριν ακόμα το σύστημα φτάσει στην μετατόπιση διαρροής z_y . Αυτό εύκολα μπορεί να γίνει αντιληπτό αν θεωρήσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\operatorname{sgn}(z\dot{u}) = 1$, και έτσι η εξίσωση (4.8) γράφεται:

$$z = u \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{u} \Rightarrow \left[1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma) \right] = 1 \xrightarrow{\beta + \gamma = 1} z = 0 \quad (4.10)$$

Η σχέση (4.10) δεν μπορεί να ισχύει καθώς τότε η επιβαλλόμενη μετατόπιση θα ήταν επίσης μηδέν. Αυτό που στην πραγματικότητα κάνει η κανονικοποιημένη συνάρτηση ομαλοποίησης είναι να κρατάει τον όρο $\left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma)$ αρκετά χαμηλά όσο $z < z_y$, έτσι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$1 - \left| \frac{z}{z_y} \right|^n (\beta + \gamma) \xrightarrow{\beta + \gamma = 1} 1 \quad (4.11)$$

Η αποτελεσματικότητα της συνάρτησης αυτής φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4.4). Για μεγάλες τιμές της παραμέτρου n , η απόδοση της συνάρτησης αυξάνεται, αντίθετα όσο το n μειώνεται, μειώνεται και η απόδοση της. Κατ' επέκταση, η σχέση (4.10) αποκλίνει ελαφρώς από τη μονάδα και συνεπώς μικροολισθήσεις συμβαίνουν ακόμα και πριν το σύστημα φτάσει τη μετατόπιση διαρροής.



Εικόνα 4.4 Μεταβολή της συνάρτησης ομαλοποίησης για διάφορες τιμές του n

Είναι προφανές ότι μια τέτοια διατύπωση είναι ικανή να προσομοιώσει οποιαδήποτε μονοαξονική συμπεριφορά εισάγεται στα πλαίσια της κλασσικής πλαστικότητας, ενσωματώνοντας σε μία μόνο εξίσωση το κριτήριο διαρροής, τον κανόνα ροής και τον ρυθμό μεταβολής της φόρτισης. Σημειώνεται εδώ ότι, ο όρος που αναφέρεται σαν μετατόπιση διαρροής, είναι μια φαινομενολογική ποσότητα που δείχνει τη μετατόπιση για την οποία αρχίζει η πλαστική παραμόρφωση. Αυτή η ποσότητα καθώς επίσης και οι όροι β , γ και n μπορούν να προσδιοριστούν με διάφορες τεχνικές. Έχει ωστόσο αποδειχθεί, από τους Erlicher και Bursi (2004), ότι οι παράμετροι που προσδιορίζονται, προκειμένου να παράγουν ένα θερμοδυναμικά αποδεκτό μοντέλο, θα πρέπει να υπακούουν στον ακόλουθο περιορισμό:

$$-\beta \leq \gamma \leq \beta \quad (4.12)$$

Στη συνέχεια, μια γενικότερη διατύπωση παρουσιάζεται, στα πλαίσια της Θεωρίας Πλαστικότητας, που επιτρέπει την εφαρμογή των ομαλών αυτών υστερητικών τελεστών, αποφεύγοντας έτσι την ανάγκη τμηματικά γραμμικών μοντέλων.

4.3.3 Γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc – Wen

Οι ίδιες σχέσεις που διατυπώθηκαν και προηγουμένως μπορούν να προκύψουν και με θεώρηση της κλασσικής θεωρίας πλαστικότητας. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι οι σχέσεις μπορούν να εκφραστούν ως προς του ταυυστές των τάσεων και των παραμορφώσεων [28]. Αυτό οδηγεί σε ένα εύχρηστο μοντέλο τόσο από πειραματικής όσο και από υπολογιστικής πλευράς.

Η κλασσική θεωρία πλαστικότητας βασίζεται σε ένα σύνολο σχέσεων, όπως διατυπώθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην παρούσα εργασία η περίπτωση της συσχετισμένης πλαστικότητας έχει ληφθεί υπόψη. Η εξέλιξη των πλαστικών

παραμορφώσεων, όπως ειπώθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτει από τη σχέση:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\} = \lambda \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \quad (4.13)$$

Ο πλαστικός πολλαπλασιαστής λ και η συνάρτηση διαρροής Φ συμμορφώνονται με τις συνθήκες βελτιστοποίησης Kuhn – Tucker, όπως φαίνεται και στις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\lambda \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \lambda \Phi = 0 \quad (4.14)$$

Η συνθήκη συνέπειας προκύπτει άμεσα από τη σχέση (4.14), δηλώνοντας ότι κατά την διαρροή ισχύει:

$$\lambda \dot{\Phi} = 0 \quad (4.15)$$

Ένα τυπικό ισότροπο κριτήριο διαρροής είναι το κριτήριο von Mises το οποίο ορίζεται ως ακολούθως:

$$\Phi = \|\{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\boldsymbol{\eta}\}\| - \sigma_M \leq 0 \quad (4.16)$$

όπου $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ είναι ο αποκλίνων τανυστής της τάσης και $\{\boldsymbol{\eta}\}$ είναι ο αποκλίνων τανυστής των πίσω τάσεων. Όπως ειπώθηκε και προηγουμένως (§ 3.6.2.1), η εξέλιξη των πίσω τάσεων προσδιορίζει τον τύπο κράτνσης που εισάγεται στο προσομοίωμα για μεταγενέστερους κύκλους φόρτισης και αποφόρτισης. Ο πιο κοινός τύπος κράτνσης είναι ο γραμμικός κατά τον οποίο ο πλαστικός πολλαπλασιαστής είναι σταθερός κατά τη διάρκεια της πλαστικής φόρτισης. Για αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = C \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}\} \quad (4.17)$$

όπου το C ορίζεται ως σταθερά κράτνσης του υλικού.

Μια βασική παραδοχή της κλασσικής θεωρίας πλαστικότητας, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως (§ 3.3), είναι ο επιμερισμός των παραμορφώσεων σε ένα αναστρέψιμο ελαστικό όρο και ένα μη αναστρέψιμο πλαστικό.

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}\} + \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}\} \Rightarrow \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}\} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl}\} \quad (4.18)$$

Από παρατηρήσεις έχει φανεί ότι η δυσκαμψία κατά την αποφόρτιση ενός πλαστικού υλικού είναι ίση με την ελαστική και έτσι η ακόλουθη σχέση ισχύει στον συνολικό τανυστή των τάσεων και το ελαστικό μέρος του ρυθμού μεταβολής των παραμορφώσεων:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [D] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el}\} \quad (4.19)$$

όπου D είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.13) στη σχέση (4.18) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.19), έχουμε:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [D] \left(\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \lambda \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right) \quad (4.20)$$

Από τη συνθήκη συνέπειας (4.15) και τη σχέση (4.20) η τιμή του πλαστικού πολλαπλασιαστή λ προκύπτει ως:

$$\lambda \dot{\Phi} = 0 \Rightarrow \lambda \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Κατά την διαρροή $\Phi = 0$ και $\lambda > 0$, έτσι η σχέση (4.21) γράφεται:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} \quad (4.22)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέρη της εξίσωσης (4.20) με τον όρο $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T$ προκύπτει η ακόλουθη έκφραση:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \left(\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \lambda \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right) \quad (4.23)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.22) στην (4.23) παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \left(\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \lambda \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right) \quad (4.24)$$

Στην κλασική θεωρία πλαστικότητας ο νόμος κράτυνσης ορίζεται συναρτήσει του τανυστή της πίσω τάσης και του τανυστή των πλαστικών παραμορφώσεων. Η σχέση αυτή μπορεί να είναι είτε ανεξάρτητη, είτε εξαρτημένη από τον ρυθμό μεταβολής, σε κάθε περίπτωση όμως η πίσω τάση εκφράζεται συναρτήσει του πλαστικού πολλαπλασιαστή λ , έτσι:

$$\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} = \lambda G(\{\boldsymbol{\eta}\}, \Phi) \quad (4.25)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.25) στην (4.24), έχουμε:

$$- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T \lambda G(\{\boldsymbol{\eta}\}, \Phi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \left(\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} - \lambda \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right) \quad (4.26)$$

Επιλύοντας για τον πλαστικό πολλαπλασιαστή παίρνουμε:

$$\lambda = \left(- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T G(\{\boldsymbol{\eta}\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} \quad (4.27)$$

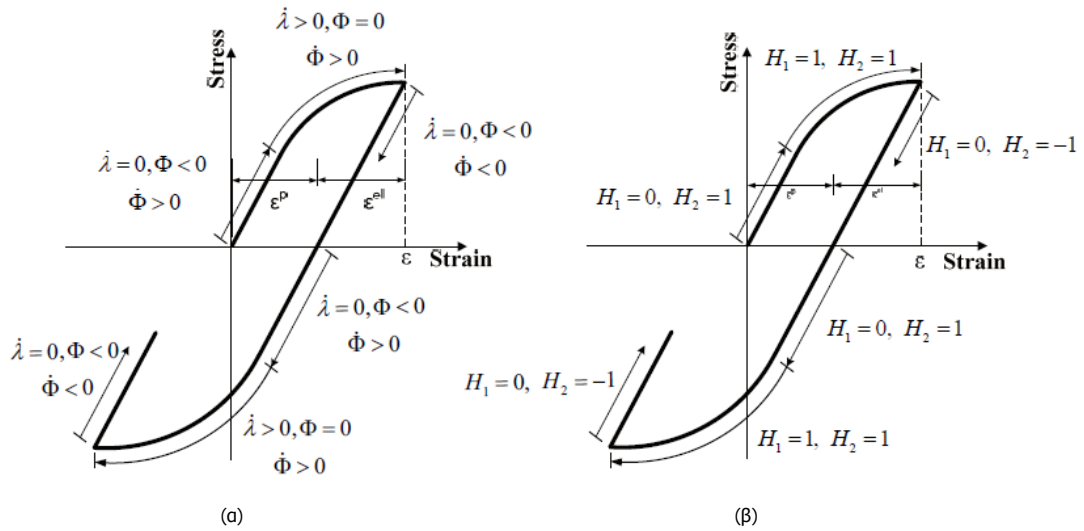
Στην περίπτωση ελαστικού απολύτως πλαστικού υλικού ισχύει $G \equiv 0$. Οι εξισώσεις (4.22) και (4.27) ισχύουν όταν η διαρροή συμβεί, είτε στο θετικό, είτε στο αρνητικό ημιεπίπεδο και έτσι εισάγοντας κατάλληλες συναρτήσεις Heaviside μπορεί να εξαχθεί μία μόνο σχέση για τον πλαστικό πολλαπλασιαστή σε όλο το πεδίο του τανυστή των παραμορφώσεων.

$$H_1 = \begin{cases} 1, & \Phi = 0 \\ 0, & \Phi < 0 \end{cases} \quad H_2 = \begin{cases} 1, & \dot{\Phi} > 0 \\ 0, & \dot{\Phi} < 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Η σχέση αυτή έχει την μορφή:

$$\dot{\lambda} = H_1 H_2 \left(- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\eta}\}} \right)^T G(\{\boldsymbol{\eta}\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \frac{\partial \Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T [D] \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} \quad (4.29)$$

Αντί να περιγράφεται η ανακυκλιζόμενη συμπεριφορά ενός υλικού από μια βήμα προς βήμα προσέγγιση θεωρώντας τα πεδία των συνθηκών Kuhn – Tucker (Εικόνα 4.5α), ο Casciati, πρότεινε την ομαλοποίηση της μέσω επιπρόσθετων παραμέτρων που συνδέονται με το υλικό.



Εικόνα 4.5 (α) Ανακυκλιζόμενη ανελαστική απόκριση (β) Συναρτήσεις Heaviside

Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την προσέγγιση, οι δύο παραπάνω συναρτήσεις Heaviside ομαλοποιούνται με βάση τις ακόλουθες σχέσεις:

$$H_1 = \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^N, \quad N \geq 2 \quad (4.30)$$

και

$$H_2 = H \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} \right) = \frac{1 + \operatorname{sgn} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \right)^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} \right)}{2} \approx \beta + \gamma \operatorname{sgn}(\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}) \quad (4.31)$$

όπου β, γ και N είναι παράμετροι του προσομοιώματος, ενώ Φ_0 είναι η μέγιστη τιμή του κριτηρίου διαρροής ή το σημείο διαρροής. Στην ειδική περίπτωση όπου $\beta = \gamma = 0.5$, η δυσκαμψία κατά την αποφόρτιση είναι ίση με την ελαστική. Το μοντέλο που προτάθηκε από τους Baber – Noori είναι θερμοδυναμικά αποδεκτό όσο

ικανοποιείται η σχέση (4.12). Άμεση συνέπεια της εξίσωσης (4.30) είναι ότι το υλικό έχει την δυνατότητα να διαρρέψει πριν ακόμα φτάσει το σημείο διαρροής (Φ_0). Από την εξίσωση (4.20) αντικαθιστώντας τη σχέση για τον πλαστικό πολλαπλασιαστή, παίρνουμε το ακόλουθο προσομοίωμα Bouc – Wen:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \left([I] - \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^N (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(\{\varepsilon\}^T \{\dot{\sigma}\})) \right) [R] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.32)$$

Όπου το μητρώο R λαμβάνεται ως:

$$[R] = \left(- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\eta\}} \right)^T G(\{\eta\}, \Phi) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \frac{\partial \Phi(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \right)^T [D] \quad (4.33)$$

και εκφράζει την αλληλεπίδραση των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων κατά τη διαρροή. Έτσι, η βήμα προς βήμα διατύπωση της σχέσης (4.14) αντικαθιστάται από μία συνεχή σχέση τάσεων – παραμορφώσεων. Στην περίπτωση μονοαξονικής φόρτισης το κριτήριο διαρροής von Mises απλοποιείται στην ακόλουθη σχέση:

$$\Phi_{VM} = \frac{(\sigma_{11} - \eta_{11})^2}{\sigma_y^2} - 1 \quad (4.34)$$

και αντίστοιχα η εξίσωση (4.32) γράφεται:

$$\dot{\sigma}_{11} = E \left(1 - \frac{E}{c + E} \left| \frac{\sigma_{11} - \eta_{11}}{\sigma_y} \right|^{2N} (\beta + \gamma \operatorname{sgn}(\varepsilon_{11} \dot{\sigma}_{11})) \right) \dot{\varepsilon}_{11} \quad (4.35)$$

Οι ομοιότητες της σχέσης (4.35) με την σχέση (4.3) των υστερητικών παραμέτρων z του προσομοιώματος του Bouc, είναι εμφανείς.

4.3.4 Το παράλληλο γενικευμένο υστερητικό προσομοίωμα

Το παράλληλο γενικευμένο υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen είναι μία υποπερίπτωση της διατύπωσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Γενικεύοντας την έννοια των παράλληλων ελατηρίων (Εικόνα 4.3.α), ο τανυστής των τάσεων αναλύεται σε ένα ελαστικό και ένα υστερητικό όρο, όπως φαίνεται στην ακόλουθη σχέση:

$$\{\sigma\} = [a] \{\sigma_{el}\} + ([I] - [a]) \{\sigma_h\} \quad (4.36)$$

όπου ως $[a]$ αναπαριστάται το τετραγωνικό διαγώνιο μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, οι οποίοι για ένα ισότροπο υλικό είναι σταθεροί προς κάθε κατεύθυνση. Ως $[I]$ λαμβάνεται ένα μοναδιαίο διαγώνιο μητρώο, ενώ το ελαστικό μέρος $\{\sigma_{el}\} = \{\sigma_{11}^{el} \ \sigma_{22}^{el} \ \sigma_{12}^{el}\}^T$ εκφράζεται από την σχέση:

$$\{\sigma_{el}\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (4.37)$$

Το υστερητικό μέρος $\{\sigma_h\} = \{\sigma_{11}^h \ \sigma_{22}^h \ \sigma_{12}^h\}^T$ εξελίσσεται σύμφωνα με τον ακόλουθο υστερητικό νόμο κατά Bouc – Wen.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^h \\ \dot{\sigma}_{22}^h \\ \dot{\sigma}_{12}^h \end{Bmatrix} = [D]([I] - H_1 H_2 [\tilde{R}]) \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Όπου οι όροι H_1 και H_2 είναι οι συναρτήσεις Heaviside που ορίστηκαν στις σχέσεις (4.30) και (4.31) αντίστοιχα, ενώ \tilde{R} είναι το μητρώο αλληλεπίδρασης της σχέσης (4.33) λαμβάνοντας $G \equiv 0$. Ωστόσο, οι εξισώσεις (4.36) και (4.38) είναι ικανές να προσομοιώσουν υστερητικά συστήματα με γραμμική κινηματική κράτυνση. Σαφώς, αυτό περιορίζει την δυνατότητα εφαρμογής του μοντέλου.

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την σχέση (4.36) και αντικαθιστώντας την (4.38), έχουμε:

$$\{\dot{\sigma}\} = [\alpha][D]\{\dot{\varepsilon}\} + ([I] - [\alpha])[D]([I] - H_1 H_2 [\tilde{R}])\{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.39)$$

Το μητρώο $[a]$ είναι διαγώνιο, άρα η σχέση (4.39) μπορεί να γραφεί:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]([\alpha] + ([I] - [\alpha])([I] - H_1 H_2 [\tilde{R}]))\{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.40)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.35) και (4.40) παίρνουμε την παρακάτω γενικευμένη έκφραση:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]([Z_1] + [Z_2])([I] - H_1 H_2 [\tilde{R}])\{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.41)$$

όπου στην περίπτωση του γενικευμένου προσομοιώματος έχουμε:

$$\begin{aligned} [Z_1] &= [I] \\ [Z_2] &= -[I] \end{aligned} \quad (4.42)$$

ενώ στην περίπτωση του παράλληλου προσομοιώματος, είναι:

$$\begin{aligned} [Z_1] &= [a] \\ [Z_2] &= [I] - [a] \\ [R] &= [R]_{G=0} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Υστερητικά Πεπερασμένα Στοιχεία Κελύφους

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η διαδικασία σχηματισμού του υστερητικού πεπερασμένου στοιχείου κελύφους, το οποίο αποτέλεσε και τη βάση της παρούσας εργασίας. Το στοιχείο αυτό είναι εννεακομβικό με κάθε κόμβο να αποτελείται από πέντε βαθμούς ελευθερίας, τρεις μεταφορικούς και δύο στροφικούς. Η υστέρηση λαμβάνεται υπόψη με τον επιμερισμό του μητρώου δυσκαμψίας σε δύο μέρη ένα ελαστικό και ένα υστερητικό, καθώς και την κατάλληλη διατύπωση των σχέσεων εξέλιξης των υστερητικών μεγεθών, τα οποία εδώ είναι οι τάσεις. Αρχικά λοιπόν παρουσιάζονται κάποια γενικά στοιχεία της θεωρίας λεπτών κελυφών ενώ στη συνέχεια παρατίθεται η διαδικασία σχηματισμού των απαραίτητων μητρώων της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος, γίνεται αναφορά στη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την προσθήκη των υστερητικών βαθμών ελευθερίας.

5.2 Θεωρία λεπτών κελυφών

Οι γενικές θεωρίες των δοκών, των πλακών, των τόξων και των κελυφών είναι βασισμένες σε ένα σύνολο ενιαίων παραδοχών. Παρόλα αυτά οι μηχανισμοί μεταφοράς της έντασης διαφέρουν από στοιχείο σε στοιχείο. Γενικά μπορεί να πούμε ότι τα κελύφη σχετίζονται με τις πλάκες, καθώς έχουν όλα τα χαρακτηριστικά των πλακών, με την προσθήκη επιπλέον της καμπυλότητας. Η έννοια αυτή αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των κελυφών, καθώς η συμπεριφορά τους υπό τη δράση κατανεμημένων φορτίων, καθορίζεται κατά κύριο λόγο από την καμπυλότητα.

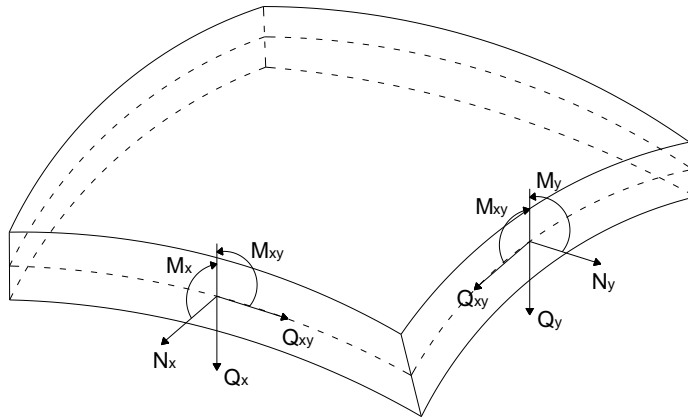
Τα κελύφη ταυτόχρονα συνδυάζουν τη συμπεριφορά της πλάκας, ως προς την καμπτική τους λειτουργία, και τη συμπεριφορά του δίσκου ως προς την μεμβρανική

τους λειτουργία [7]. Η ιδανική κατάσταση επέρχεται όταν στο κέλυφος αναπτύσσεται μόνο μεμβρανική ένταση. Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει από την διαπίστωση ότι η συμπεριφορά των περισσότερων δομικών υλικών είναι πολύ καλύτερη σε θλίψη (ή εφελκυσμό) από ότι σε κάμψη. Συνεπώς, το κύριο πλεονέκτημα των κελυφών σε σχέση με τις πλάκες και τις δοκούς, είναι αυτή η ικανότητα τους να αναπτύσσουν κατά κύριο λόγο μεμβρανική ένταση.

Επίσης, μια ακόμα διαφοροποίηση σε σχέση με τις πλάκες αφορά τη μεγαλύτερη αντοχή και δυσκαμψία που εμφανίζουν τα κελύφη. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην καμπυλότητα των κελυφών, η οποία επηρεάζει τη δυσκαμψία τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες καθαρής κάμψης θα πρέπει να αποφεύγονται, καθώς λαμβάνοντας υπόψη το μικρό πάχος των κελυφών, η αντοχή που παρουσιάζουν για αυτού του είδους τις παραμορφώσεις είναι μικρή. Ωστόσο, έχει παρατηρηθεί ότι ισχυρές καμπτικές τάσεις συγκεντρώνονται στις περιοχές ασυνεχειών της φόρτισης ή της γεωμετρίας, στις περιοχές των στηρίξεων κ.λ.π. Καθώς απομακρυνόμαστε από αυτές τις περιοχές οι καμπτικές τάσεις μειώνονται ραγδαία και έτσι ένα σημαντικό μέρος του κελύφους βρίσκεται υπό συνθήκες μεμβρανικής έντασης. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, όσο λεπτότερο είναι το κέλυφος τόσο γρηγορότερα εξαλείφονται οι παραπάνω τάσεις.

Οι καμπτικές τάσεις στο κέλυφος αντιστοιχούν στις καμπτικές τάσεις της πλάκας και προκαλούν τις καμπτικές ροπές, τις ροπές συστροφής και τις τέμνουσες δυνάμεις του κελύφους (Εικόνα 5.1).



Εικόνα 5.1 Εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους του κελύφους

$$M_x = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_y z dz \quad (5.1)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xy} z dz \quad (5.2)$$

$$Q_x = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{yz} dz \quad (5.3)$$

Οι μεμβρανικές τάσεις στο κέλυφος αντιστοιχούν προς τις τάσεις ενός προβλήματος επίπεδης έντασης και δρουν στο εφαπτομενικό επίπεδο της μέσης επιφάνειας. Οι τάσεις αυτές προκαλούν εφαπτομενικές δυνάμεις οι οποίες δίνονται ανά μονάδα μήκους από τις σχέσεις:

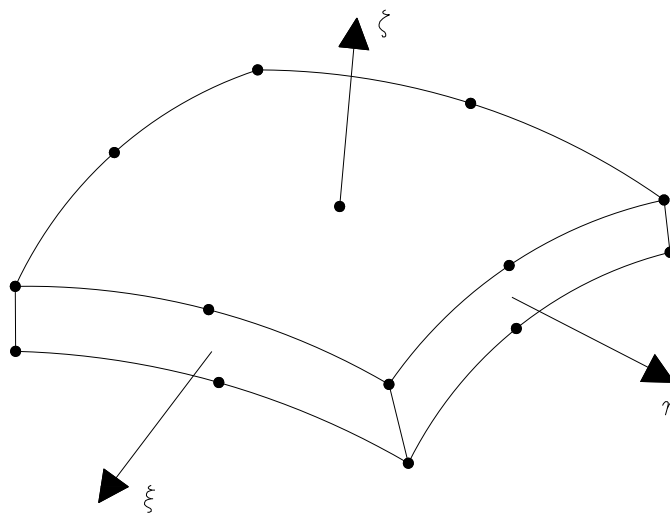
$$N_x = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-1/2}^{1/2} \sigma_y dz, \quad Q_{xy} = \int_{-1/2}^{1/2} \tau_{xy} dz \quad (5.4)$$

Οι τάσεις σ_z είναι κατά πολύ μικρότερες των τάσεων σ_x και σ_y και για αυτό το λόγο συνήθως αμελούνται.

Η θεωρία λεπτών κελυφών αναφέρεται σε λεπτά κελύφη στα οποία η εγκάρσια διατμητική παραμόρφωση θεωρείται αμελητέα. Στα λεγόμενα παχιά κελύφη θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις, θεωρίες κελυφών τύπου Timoshenko και σε ορισμένες περιπτώσεις και η ύπαρξη της ανηγμένης παραμόρφωσης ε_z , οπότε το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα τρισδιάστατης ελαστικότητας.

5.3 Τετραπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία κελύφους

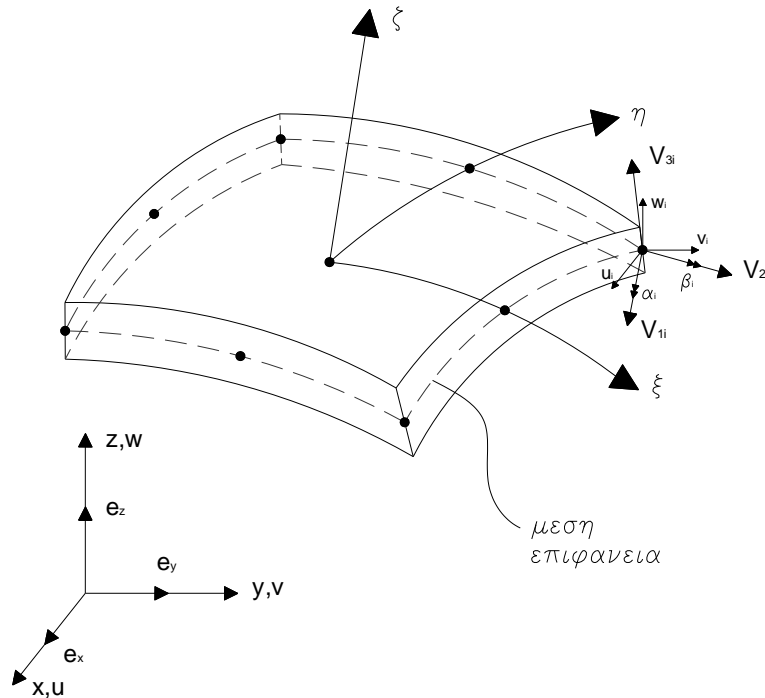
Ένα κέλυφος οποιασδήποτε μορφής είναι δυνατό να προσομοιωθεί με ισοπαραμετρικά στοιχεία τρισδιάστατης ελαστικότητας των οποίων το πάχος είναι σημαντικά μικρότερο των άλλων δύο διαστάσεων. Έχει παρατηρηθεί ότι ακόμα και στην περίπτωση παχιών κελυφών οι ενδιάμεσοι κόμβοι, κατά την διεύθυνση του πάχους των στοιχείων, συνήθως δεν προσφέρουν πρόσφατη ακρίβεια στο στοιχείο. Έτσι, χρησιμοποιούνται στοιχεία σαν αυτό της παρακάτω εικόνας (Εικόνα 5.2), στα οποία η ανηγμένη παραμόρφωση ε_z θεωρείται σταθερή κατά μήκος του πάχους του κελύφους.



Εικόνα 5.2 Τετραπλευρικό στοιχείο κελύφους 18 κόμβων

Μειονέκτημα αυτού του τύπου στοιχείων είναι τα αριθμητικά προβλήματα που παρατηρούνται κατά την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας στον H/Y και τα οποία

εμφανίζονται όταν το πάχος του κελύφους μειώνεται με αποτέλεσμα ο όρος του μητρώου δυσκαμψίας που αντιστοιχεί στην ανηγμένη παραμόρφωση ε_z να αυξάνεται σημαντικά. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να αμβλυνθούν δεσμεύοντας τις μετακινήσεις των κόμβων της άνω και κάτω επιφάνειας του κελύφους ώστε να έχουν την ίδια μετακίνηση κατά τον τοπικό τους άξονα ζ . Έτσι, οι ενεργοί βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου της παραπάνω εικόνας μειώνονται σε 45, από τους αρχικούς 54 [38]. Οι πέντε αυτοί μεταφορικοί βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε κάθε ζεύγος κόμβων της άνω και κάτω επιφάνειας μπορούν να θεωρηθούν ότι ανήκουν σε ένα κόμβο της μέσης επιφάνειας με τρεις μεταφορικούς και δύο στροφικούς βαθμούς ελευθερίας. Ένα τέτοιο στοιχείο εννέα κόμβων και 45 βαθμών ελευθερίας παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 5.3 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο κελύφους εννέα κόμβων

Οι πέντε βαθμοί ελευθερίας που χαρακτηρίζουν τις μετατοπίσεις ενός κόμβου είναι οι τρεις μετατοπίσεις και οι δύο στροφές της παραπάνω εικόνας. Το μητρώο ελαστικότητας για τα στοιχεία που προκύπτουν από τη παραπάνω διατύπωση είναι το κλασικό μητρώο ελαστικότητας της τρισδιάστατης ελαστικότητας θέτοντας $\sigma_z = 0$.

5.3.1 Συναρτήσεις σχήματος

Οι συναρτήσεις σχήματος του ισοπαραμετρικού στοιχείου που παρουσιάστηκε παραπάνω ονομάζονται Lagrange καθώς μπορούν να παραχθούν με πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων Lagrange. Στις σχέσεις που ακολουθούν παρουσιάζονται οι εννέα συναρτήσεις σχήματος του ισοπαραμετρικού στοιχείου Lagrange.

Για τους γωνιακούς κόμβους:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2 &= -\frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4 &= -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Για τους ενδιάμεσους κόμβους:

$$\begin{aligned}
N_5 &= -\frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1-\eta) \\
N_6 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(1+\eta) \\
N_8 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Για τον εσωτερικό κόμβο:

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \tag{5.7}$$

5.3.2 Καθορισμός γεωμετρίας στοιχείου

Θεωρώντας το τυπικό στοιχείο που αναφέρθηκε προηγουμένως (Εικόνα 5.2) μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τη γεωμετρία του λαμβάνοντας τα διανύσματα των Καρτεσιανών συντεταγμένων των κόμβων της άνω και κάτω επιφάνειας.

Ορίζουμε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ξ, η στη μέση επιφάνεια και ζ τον κατακόρυφο άξονα στη διεύθυνση του πάχους. Θεωρώντας ότι οι συντεταγμένες ξ, η και ζ μεταβάλλονται από -1 έως 1 μπορούμε να εκφράσουμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες κάθε σημείου του κελύφους ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες με βάση την ακόλουθη σχέση.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi, \eta) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} + \sum N_i(\xi, \eta) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \tag{5.8}$$

Όπου σαν $N_i(\xi, \eta)$ ορίζονται οι συναρτήσεις σχήματος του ισοπαραμετρικού στοιχείου κελύφους.

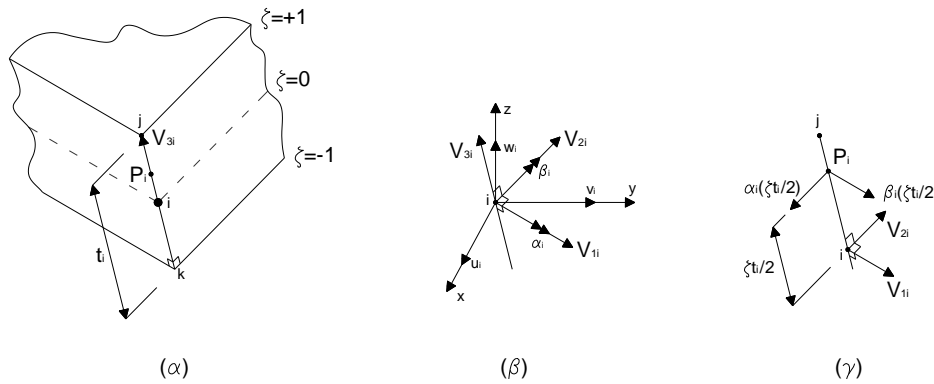
Είναι καταλληλότερο να ξαναδιατυπώσουμε τη σχέση (5.8) σε μία μορφή που να περιλαμβάνει το διάνυσμα που συνδέει τους κόμβους της άνω και κάτω επιφάνειας και τις συντεταγμένες της μέσης επιφάνειας. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{mid} + \sum N_i \frac{\zeta}{2} V_{3i} \quad (5.9)$$

Όπου V_{3i} είναι το διάνυσμα της διαφοράς των συντεταγμένων της άνω και κάτω επιφάνειας των κόμβων του κελύφους και ορίζεται ως εξής:

$$V_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \quad (5.10)$$

Πέραν του διανύσματος αυτού απαιτείται και ο προσδιορισμός ενός ακόμα ζεύγους διανυσμάτων με τα οποία θα ορίζεται το τοπικό σύστημα συντεταγμένων κάθε κόμβου. Επειδή όπως είναι γνωστό, σε ένα διάνυσμα V_{3i} υπάρχει μια απειρία κάθετων και ορθογώνιων σε αυτό διανυσμάτων, πρέπει να οριστεί μια μεθοδολογία που να ορίζει κατά μοναδικό τρόπο το σύστημα συντεταγμένων των κόμβων. Μια βολική μεθοδολογία είναι αυτή της επιλογής των καθολικών αξόνων x και y ως αξόνων αναφοράς.



Εικόνα 5.4 Τυπικός κόμβος ισοπαραμετρικού στοιχείου κελύφους: (α) διάνυσμα V_{3i} , (β) σύστημα αξόνων κόμβου i , (γ) μετατοπίσεις σημείου P_i

Για τον προσδιορισμό του πρώτου κάθετου διανύσματος V_{1i} , εντοπίζουμε την μικρότερη συνιστώσα του διανύσματος V_{3i} και παίρνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της συνιστώσας αυτής. Το εξωτερικό γινόμενο των δύο προηγούμενων διανυσμάτων ορίζει πλήρως το διάνυσμα V_{1i} [15]. Αν για παράδειγμα η x συνιστώσα είναι η μικρότερη τότε το πρώτο κάθετο διάνυσμα προκύπτει ως εξής:

$$V_{1i} = \mathbf{i} \times V_{3i} \quad (5.11)$$

Όπου

$$\mathbf{i} = [1 \ 0 \ 0]^T \quad (5.12)$$

Το πρώτο μοναδιαίο διάνυσμα προκύπτει από το παραπάνω διάνυσμα με βάση την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathbf{v}_{li} = \frac{\mathbf{V}_{li}}{|\mathbf{V}_{li}|} \quad (5.13)$$

Το δεύτερο κάθετο διάνυσμα προκύπτει ως το εξωτερικό γινόμενο των δύο προηγούμενων διανυσμάτων.

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{3i} \times \mathbf{V}_{li} \quad (5.14)$$

και κανονικοποιείται με βάση την σχέση (5.13). Προκύπτουν συνεπώς τρεις τοπικοί ορθογώνιοι άξονες σε κάθε κόμβο, οι οποίοι ορίζονται από τα μοναδιαία διανύσματα

$$v_{li}, v_{2i} \text{ και } v_{3i} \quad (5.15)$$

5.3.3 Πεδίο μετατοπίσεων

Καθώς οι παραμορφώσεις κατά την κάθετη διεύθυνση στη μέση επιφάνεια θεωρούνται αμελητέες, οι μετατοπίσεις του στοιχείου μπορούν να οριστούν κατά μοναδικό τρόπο από τους τρεις μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας του κόμβου i της μέσης επιφάνειας και τους δύο στροφικούς κατά τις διευθύνσεις των καθέτων στο διάνυσμα \mathbf{V}_{3i} . Έτσι, το πεδίο των μετατοπίσεων γράφεται (Εικόνα 5.4):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{mid} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} [v_{li} \quad -v_{2i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

όπου u, v, w είναι οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y, z .

Ακολουθώντας την πάγια διαδικασία υπολογισμού του μητρώου παραμόρφωσης διατυπώνουμε την σχέση των ανηγμένων παραμορφώσεων και των μερικών παραγώγων των μετατοπίσεων ως προς ξ, η και ζ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix}_{(5 \times 1)} = [B_i] \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \end{Bmatrix}_{(9 \times 1)} \quad (5.18)$$

όπου J_{ij}^* είναι οι όροι του αντίστροφου Ιακωβιανού μητρώου, το οποίο εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Το διάνυσμα $\{u_{,\xi}\}$ των μερικών παραγώγων των u, v, w ως προς ξ, η και ζ προκύπτει από τη σχέση (5.16):

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & -N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & -N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & N_{i,\xi} & 0 & -N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & N_{i,\eta} & 0 & -N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & N_{i,\xi} & -N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\xi}\zeta \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} & -N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\eta}\zeta \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} n_{1i} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ v_{,\xi} \\ w_{,\xi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^9 [B_{2i}] \{d_i\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ v_{,\xi} \\ w_{,\xi} \end{Bmatrix} = [B_2] \{d\} \quad (5.21)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.21) στη σχέση (5.18) προκύπτει η τελική έκφραση του μητρώου παραμόρφωσης $[B]$ του στοιχείου κελύφους:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix} = [B_1] [B_2] \{d\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (5.22)$$

5.3.4 Μητρώο ελαστικότητας

Το μητρώο ελαστικότητας που συνδέει το διάνυσμα των τάσεων με το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων, μπορεί να διατυπωθεί ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες xyz του στοιχείου, αλλά μπορεί επίσης να διατυπωθεί και ως προς το τοπικό σύστημα αξόνων του κάθε κόμβου που ορίζεται από τα διανύσματα V_{1i}, V_{2i}, V_{3i} .

Η σχέση τάσεων ανηγμένων παραμορφώσεων ως προς το σύστημα του κόμβου i εκφράζεται, για ισότροπα υλικά, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_s \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_s \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

ή

$$\{\sigma'\} = [D']\{\varepsilon'\} \quad (5.24)$$

Ο συντελεστής c_s διορθώνει την ορθογωνική κατανομή των διατμητικών τάσεων γ_{23} και γ_{31} σε παραβολική κατανομή κατά μήκος του πάχους του κελύφους παίρνοντας την τιμή 5/6. Το τοπικό σύστημα του κόμβου i επελέγη για τη μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας προκειμένου να αξιοποιηθεί η παραδοχή ότι η τάση που είναι κάθετη στη μέση επιφάνεια του στοιχείου είναι μηδενική ($\sigma_3 = 0$).

Το μητρώο ελαστικότητας $[D']$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί στην ολοκληρωτική σχέση του μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου διότι το μητρώο παραμόρφωσης $[B]$ αναφέρεται στο φυσικό σύστημα του στοιχείου και όχι στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε κόμβου. Για να μπορέσουμε να αναγάγουμε το μητρώο ελαστικότητας από το τοπικό σύστημα του κόμβου στο τοπικό σύστημα του στοιχείου, το οποίο μπορεί να συμπίπτει και με το καθολικό σύστημα του φορέα, ανατρέχουμε στο μετασχηματισμό των τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων ο οποίος μας παραπέμπει στον κύκλο Mohr για τις δύο διαστάσεις.

Ο μετασχηματισμός ενεργοποιείται σε κάθε σημείο Gauss στο οποίο υπολογίζεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση προκειμένου να υπολογιστεί αριθμητικά το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου. Τα συνημίτονα κατεύθυνσης $[T]$ ταυτίζονται με τα συνημίτονα κατεύθυνσης των διανυσμάτων V_{1i} , V_{2i} , V_{3i} στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss. Για να αποφύγουμε τον άμεσο υπολογισμό των διανυσμάτων αυτών τα υπολογίζουμε συναρτήσει των διανυσμάτων V_{1i} , V_{2i} , V_{3i} των κόμβων με χρήση των συναρτήσεων σχήματος και των σχέσεων παρεμβολής:

$$\begin{aligned} \{V_1\} &= \sum_{i=1}^9 N_i \{V_{1i}\} \\ \{V_2\} &= \sum_{i=1}^9 N_i \{V_{2i}\} \\ \{V_3\} &= \sum_{i=1}^9 N_i \{V_{3i}\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Το μητρώο μετασχηματισμού υπολογίζεται σε κάθε σημείο Gauss με βάση τη σχέση που ακολουθεί:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Πραγματοποιείται επομένως ο ακόλουθος μετασχηματισμός:

$$\{\sigma\} = [T]^T \{\sigma'\} \Rightarrow \{\sigma\} = [T]^T [D'] [T] \{\varepsilon\} \quad (5.27)$$

$$[D] = [T]^T [D'] [T] \quad (5.28)$$

$(5 \times 5) \quad (5 \times 5) \quad (5 \times 5) \quad (5 \times 5)$

5.3.5 Μητρώο δυσκαμψίας

Η γενική έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας ισοπαραμετρικών στοιχείων κελύφους εννέα κόμβων δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (5.29)$$

$(45 \times 45) \quad (45 \times 5) \quad (5 \times 5) \quad (5 \times 45)$

Στην περίπτωση που οι ιδιότητες των υλικών δεν εξαρτώνται από τη φυσική συντεταγμένη ζ , τότε με την παραδοχή ενός μικρού σφάλματος η ολοκλήρωση κατά τη διεύθυνση του πάχους του κελύφους μπορεί να γίνει αναλυτικά. Αυτό μπορεί να συμβεί αφού προηγουμένως αμεληθούν οι όροι του Ιακωβιανού μητρώου που εξαρτώνται από τη φυσική συντεταγμένη ζ εξ. (5.9). Εφόσον το στοιχείο δεν έχει έντονη καμπυλότητα οι όροι αυτοί είναι πολύ μικροί. Έτσι, το μητρώο παραμόρφωσης $[B]$ μπορεί να χωριστεί σε ένα μητρώο ανεξάρτητο της συντεταγμένης ζ και σε ένα δεύτερο που εξαρτάται γραμμικά από το ζ . Τα δύο αυτά μητρώα δίνονται από τις σχέσεις που ακολουθούν.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\sum N_i \{x_i\}_{mid})}{\partial \xi} & \frac{\partial(\sum N_i \{y_i\}_{mid})}{\partial \xi} & \frac{\partial(\sum N_i \{z_i\}_{mid})}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\sum N_i \{x_i\}_{mid})}{\partial \eta} & \frac{\partial(\sum N_i \{y_i\}_{mid})}{\partial \eta} & \frac{\partial(\sum N_i \{z_i\}_{mid})}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

$$[B_{2i}^{(1)}] = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & N_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & N_{i,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} n_{1i} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$[B_{2i}^{(2)}] = \sum_{i=1}^9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\xi} \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\eta} \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Άρα:

$$[B_2] = [B_2^{(1)}] + \zeta \cdot [B_2^{(2)}] \quad (5.34)$$

Όποτε προκύπτουν τα δύο ακόλουθα μητρώα παραμόρφωσης:

$$\begin{aligned} [B_a] &= [B_1] [B_2^{(1)}] \\ [B_b] &= [B_1] [B_2^{(2)}] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Τελικά το μητρώο παραμόρφωσης $[B]$ γράφεται:

$$[B] = [B_a] + \zeta \cdot [B_b] \quad (5.36)$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης (5.36) στη σχέση (5.29) και με την παρατήρηση ότι $\int_{-1}^1 \zeta \cdot [B_b] d\zeta = 0$ προκύπτει η τελική έκφραση του μητρώου στιβαρότητας για το στοιχείο κελύφους:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(2[B_a]^T [D][B_a] + \frac{2}{3}[B_b]^T [D][B_b] \right) \det[J] d\xi d\eta \quad (5.37)$$

στην οποία το μητρώο $[J]$ διατηρεί τις διαστάσεις του (3×3) αλλά υπολογίζεται στα σημεία Gauss με $\zeta = 0$.

5.4 Εφαρμογή υστερητικού προσομοιώματος Bouc – Wen

Προκειμένου να λάβουμε υπόψη το προσομοίωμα Bouc – Wen για τα στοιχεία κελύφους που αναφέρθηκαν προηγουμένως θα πρέπει να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις του μητρώου δυσκαμψίας των στοιχείων. Αυτό πρακτικά μπορεί να γίνει θεωρώντας την σχέση τάσεων παραμορφώσεων που διατυπώθηκε για το παράλληλο γενικευμένο υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρθηκε οι συνολικές τάσεις αναλύονται σε ένα ελαστικό και σε ένα υστερητικό μέρος, από τα όποια προκύπτουν όπως θα αποδειχθεί παρακάτω δύο μητρώα δυσκαμψίας, ένα ελαστικό και ένα υστερητικό αντίστοιχα.

Η σχέση τάσεων – παραμορφώσεων τροποποιείται έτσι ώστε να ενσωματώνει το προσομοίωμα Bouc – Wen, όπως αυτό ορίστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο (§ 4.3.4), με βάση την ακόλουθη μη γραμμική υστερητική έκφραση:

$$\{\sigma\} = \{\sigma^e\} + \{\sigma^h\} = [\alpha][D]\{\varepsilon\} + ([I] - [\alpha])[D]\{\varepsilon^h\} \quad (5.38)$$

όπου $\{\sigma\}$ είναι το διάνυσμα των τάσεων, $\{\sigma^e\}$ είναι το ελαστικό μέρος του τανυστή των τάσεων και $\{\sigma^h\}$ το υστερητικό. Ως $[\alpha]$ συμβολίζεται το διαγώνιο μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία οι οποίοι για ισότροπα υλικά θεωρούνται σταθεροί. Εάν το μητρώο $[\alpha]$ είναι μηδενικό τότε η υστερητική μη γραμμική σχέση (5.38) οδηγεί σε ελαστική απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Όταν το $[\alpha]$ γίνει μοναδιαίο τότε η συμπεριφορά είναι ελαστική. Το μητρώο $[D]$ είναι τα ελαστικό καταστατικό μητρώο ενώ το $[I]$ είναι μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων (5×5) . Τέλος, $\{\varepsilon\}$ είναι το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων και $\{\varepsilon^h\}$ το διάνυσμα των υστερητικών ανηγμένων παραμορφώσεων.

Το διάνυσμα του υστερητικού μέρους των τάσεων μπορεί να εκφραστεί με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\{\sigma^h\} = [D]\{\varepsilon^h\} \quad (5.39)$$

Οι εξισώσεις εξέλιξης (evolution equations) του διανύσματος των υστερητικών τάσεων διατυπώνονται με βάση τον ακόλουθο υστερητικό νόμο:

$$\{\dot{\sigma}^h\} = [D]([I] - H_1 H_2 [R])\{\dot{\varepsilon}\} \quad (5.40)$$

ή

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_x^h \\ \dot{\sigma}_y^h \\ \dot{\sigma}_{xy}^h \\ \dot{\sigma}_{yz}^h \\ \dot{\sigma}_{zx}^h \end{Bmatrix} = [D]([I] - H_1 H_2 [R]) \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\epsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

ή

$$\{\dot{\sigma}^h\} = G(a, \eta, \Phi, \varepsilon) \{\dot{\epsilon}\} \quad (5.42)$$

Οι τάσεις αυτές θα πρέπει να εκφράζονται ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων των κόμβων, έτσι απαιτείται ο κατάλληλος μετασχηματισμός των παραμορφώσεων από το καθολικό στο τοπικό σύστημα. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση του μητρώου μετασχηματισμού της σχέσης (5.26) με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$\{\dot{\sigma}^h\} = G(a, \eta, \Phi, \varepsilon) [T] \{\dot{\epsilon}\} \quad (5.43)$$

Όπου όπως αναφέρθηκε και στο σχετικό κεφάλαιο (Κεφάλαιο 4) οι συναρτήσεις H_1, H_2 είναι συναρτήσεις Heaviside οι οποίες γράφονται:

$$H_1 = \|\Phi(\sigma^h) + 1\|^N, \quad N \geq 2 \quad (5.44)$$

$$H_2 = \beta + \gamma \operatorname{sgn}\left(\{\sigma^h\}^T [T] \{\dot{\epsilon}\}\right) \quad (5.45)$$

Ως $\Phi(\sigma^h)$ αναφέρεται ένα οποιοδήποτε κριτήριο διαρροής το οποίο είναι διατυπωμένο ως προς το υστερητικό μέρος των τάσεων και για το οποίο ισχύει ότι:

$$\Phi(\sigma^h) - 1 \leq 0 \quad (5.46)$$

με την ιδιότητα να ισχύει όταν η διαρροή συμβεί. Η σχέση (5.44) εξομαλύνει τη μετάβαση από τον ελαστικό στον πλαστικό κλάδο όπου N είναι μια παράμετρος του προσομοιώματος η οποία ονομάζεται παράμετρος εξομάλυνσης (smoothing parameter). Η σχέση (5.45) ελέγχει την αποφόρτιση κατά την περίπτωση ανακυκλιζόμενης διέγερσης όπου οι παράμετροι β και γ ορίζουν το σχήμα των κλάδων φόρτισης και αποφόρτισης των υστερητικών βρόχων.

Το κριτήριο διαρροής που χρησιμοποιήθηκε είναι το κριτήριο von Mises όπως αυτό ορίστηκε σε προηγούμενη παράγραφο (§ 3.2.2):

$$\Phi_{VM} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6\left[(\sigma_{xy})^2 + (\sigma_{yz})^2 + (\sigma_{zx})^2\right]}{2\sigma_y^2} - 1 \quad (5.47)$$

Για να διατυπωθεί το παραπάνω κριτήριο ως προς τις υστερητικές τάσεις θα πρέπει να τροποποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη ότι $\sigma_y^h = (1-a)\sigma_y$. Έτσι, το κριτήριο von Mises

ως προς το υστερητικό μέρος των τάσεων ύστερα από τις κατάλληλες απλοποιήσεις γράφεται:

$$\begin{aligned} \Phi_{VM} = & \frac{(\sigma_x^h)^2}{(1-a(1,1))^2 \sigma_y^2} + \frac{(\sigma_y^h)^2}{(1-a(2,2))^2 \sigma_y^2} - \frac{\sigma_x^h \sigma_y^h}{(1-a(1,1))(1-a(2,2)) \sigma_y^2} \\ & + \frac{3(\sigma_{xy}^h)^2}{(1-a(3,3))^2 \sigma_y^2} + \frac{3(\sigma_{yz}^h)^2}{(1-a(4,4))^2 \sigma_y^2} + \frac{3(\sigma_{zx}^h)^2}{(1-a(5,5))^2 \sigma_y^2} - 1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Δεδομένου ότι και στα δύο μέλη της σχέσης (5.40) εμφανίζονται οι παράγωγοι των αντίστοιχων παραμέτρων συμπεραίνουμε ότι το υστερητικό διάνυσμα $\{\sigma^h\}$ είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας παραμόρφωσης (rate independent). Η τυπική ελαστική απολύτως πλαστική συμπεριφορά μπορεί να ληφθεί θεωρώντας $\beta = \gamma = 0.5$, $N \geq 6$ και $\alpha = 0$, ενώ πλήθος άλλων αποκρίσεων μπορεί να εφαρμοστεί με επιλογή των κατάλληλων παραμέτρων.

Το μητρώο αλληλεπίδρασης διατυπώνεται ως προς το αντίστοιχο κριτήριο διαρροής, εκφρασμένο ως προς τις υστερητικές τάσεις:

$$[R] = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right)^T [D] \frac{\partial \Phi(\{\sigma^h\})}{\partial \{\sigma^h\}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right)^T [D] \quad (5.49)$$

Το μητρώο αλληλεπίδρασης τυπικά προκύπτει από την συνθήκη συνέχειας (consistency condition) της συσχετισμένης πλαστικότητας (associative plasticity). Οι σχέσεις (5.38) και (5.40) δίνουν μια εύχρηστη διατύπωση στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας πλαστικότητας, όπου οι περισσότεροι από τους νόμους της συσχετισμένης ροής (associative flow rule) εκφράζονται στο χώρο των τάσεων.

5.4.1 Μητρώο δυσκαμψίας

Το μητρώο δυσκαμψίας μπορεί να παραχθεί μέσω της διατύπωσης της αρχής των δυνατών έργων η οποία γράφεται:

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \{P\} \quad (5.50)$$

Καθώς το διάνυσμα των δυνατών επικόμβιων μετατοπίσεων είναι σταθερό, η προηγούμενη σχέση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T \{\dot{\sigma}\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \{\dot{P}\} \quad (5.51)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.38) και (5.42) στη σχέση (5.51) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T [\alpha][D]\{\dot{\varepsilon}\} \det[J] dV_n + \int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T ([I] - [a])G(a, \eta, \Phi, \varepsilon)\{\dot{\varepsilon}\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \{\dot{P}\} \quad (5.52)$$

Ο πρώτος όρος του πρώτου μέλους της εξίσωσης (5.52) μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά ως ακολούθως:

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T [\alpha][D]\{\varepsilon\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \int_{V_n} [B]^T [\alpha][D][B] \det[J] dV_n \{\dot{u}\} \\ = \{\delta u\}^T [k_{el}] \{\dot{u}\} \quad (5.53)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.53) αντιστοιχεί στο ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας πολλαπλασιασμένο με το διαγώνιο μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία. Για το μητρώο αυτό ισχύουν τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως για το μητρώο δυσκαμψίας των στοιχείων κελύφους, δηλαδή:

$$[k_{el}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{\left(2[B_a]^T [a][D][B_a] + \frac{2}{3}[B_b]^T [a][D][B_b] \right) \det[J] d\xi d\eta}_{45 \times 45} \quad (5.54)$$

Αναλύοντας περαιτέρω το δεύτερο όρο του πρώτου μέλους της εξίσωσης (5.52) παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\int_{V_n} \{\delta \varepsilon\}^T G(a, \eta, \Phi, \varepsilon) \{\dot{\varepsilon}\} \det[J] dV_n = \{\delta u\}^T \int_{V_n} [B]^T G(a, \eta, \Phi, \varepsilon) [B] \det[J] dV_n \{\dot{u}\} \\ = \{\delta u\}^T \int_{V_n} [B]^T ([I] - [a])[D]([I] - H_1 H_2 [R])[B] \det[J] dV_n \{\dot{u}\} \quad (5.55) \\ = \{\delta u\}^T [k_h] \{\dot{u}\}$$

όπου

$$[k_h] = \int_{V_n} [B]^T ([I] - [a])[D]([I] - H_1 H_2 [R])[B] \det[J] dV_n \quad (5.56)$$

είναι το υστερητικό μητρώο δυσκαμψίας πολλαπλασιασμένο με τον όρο $([I] - [a])$.

Παρατηρούμε ότι το ελαστικό καταστατικό μητρώο μετασχηματίζεται σε ένα μη γραμμικό καταστατικό μητρώο το οποίο ενσωματώνει το προσομοίωμα Bouc – Wen. Το μητρώο αυτό γράφεται:

$$[D_{BW}] = [D]([I] - H_1 H_2 [R]) \quad (5.57)$$

Οι εξισώσεις εξέλιξης των υστερητικών τάσεων όπως αναφέρθηκε υπολογίζονται με βάση τη μη γραμμική σχέση:

$$\{\dot{\sigma}^h\} = [D]([I] - H_1 H_2 [R])[T]\{\dot{\varepsilon}\} \quad (5.58)$$

Επαναλαμβάνοντας τα όσα αναφέρθηκαν και στην περίπτωση του ελαστικού μητρώου δυσκαμψίας, το μητρώο παραμόρφωσης αναλύεται σε δύο όρους και κατά αντιστοιχία η τελική έκφραση του υστερητικού μητρώου δυσκαμψίας είναι:

$$[k_h] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{\left(2[B_a]^T ([I] - [a])[D_{BW}][B_a] + \frac{2}{3}[B_b]^T ([I] - [a])[D_{BW}][B_b] \right) \det[J] d\xi d\eta}_{45 \times 45} \quad (5.59)$$

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω η Αρχή των Δυνατών Έργων της σχέσης (5.50) γράφεται ως ακολούθως:

$$[[k_{el}] + [k_h]]\{d\} = \{P\} \Rightarrow [\tilde{k}]\{\tilde{d}\} = \{P\} \quad (5.60)$$

5.4.2 Διαδικασία επίλυσης δυναμικού προβλήματος

Αφού υπολογιστούν τα μητρώα δυσκαμψίας κάθε στοιχείου με τις σχέσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως στη συνέχεια εφαρμόζοντας τη μέθοδο άμεσης ακαμψίας κατασκευάζεται το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας $[K]_s$ της κατασκευής το οποίο αποτελείται τόσο από το ελαστικό μέρος της σχέσης (5.54) όσο και από το υστερητικό της σχέσης (5.59). Για οποιαδήποτε κατασκευή με n_f συνολικούς βαθμούς ελευθερίας η οποία αποτελείται από n_{el} πεπερασμένα στοιχεία με δεδομένη κατανομή μάζας και συνοριακών συνθηκών η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$[M]_s \{\ddot{U}\} + [C]_s \{\dot{U}\} + [K]_s \{U\} = \{P(t)\} \quad (5.61)$$

όπου $[M]_s, [C]_s, [K]_s$ είναι τα τετραγωνικά μητρώα ($n_f \times n_f$) μάζας, ιξώδους απόσβεσης και δυσκαμψίας της κατασκευής αντίστοιχα, $\{P(t)\}$ είναι το διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων διαστάσεων ($n_f \times 1$). Ως $\{U\}$ συμβολίζεται το διάνυσμα των καθολικών άγνωστων επικόμβιων μετατοπίσεων διαστάσεων ($n_f \times 1$), ενώ $\{\dot{U}\}$ και $\{\ddot{U}\}$ είναι τα διανύσματα των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων αντίστοιχα.

Ειδικότερα, το μητρώο δυσκαμψίας, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, είναι το άθροισμα δύο ανεξάρτητων μητρών, ενός ελαστικού και ενός υστερητικού αντίστοιχα. Τα δύο αυτά μητρώα έχουν, όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (5.54) και (5.59), τις ίδιες διαστάσεις και επομένως μπορούν να αθροιστούν κατά τα γνωστά. Το ελαστικό μητρώο δυσκαμψίας είναι σταθερό, καθώς εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία και το υλικό του φορέα και έτσι, απαιτείται ο υπολογισμός του μια φορά κατά την διάρκεια της ανάλυσης. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και με το υστερητικό μητρώο, το οποίο εξαρτάται άμεσα από τις υστερητικές τάσεις $\{\sigma^h\}$. Οι τάσεις αυτές δεν είναι εξαρχής γνωστές και μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της ανάλυσης καθιστώντας έτσι αναγκαίο τον υπολογισμό του υστερητικού μητρώου δυσκαμψίας σε κάθε βήμα της μεθόδου Newmark.

Η εξίσωση (5.61) σε συνδυασμό με τις εξισώσεις εξέλιξης της σχέσης (5.58) περιγράφουν πλήρως την απόκριση της κατασκευής για δεδομένη φόρτιση και για δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Μέθοδος Newmark

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης της σχέσης (5.61) εφαρμόζεται η μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης Newmark, η οποία παρουσιάζεται συνοπτικά στα παρακάτω:

1. Αρχικά, υπολογίζουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης της μεθόδου Newmark, οι οποίες γράφονται:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\gamma}{\beta \cdot Dt} \\
 a_2 &= \frac{1}{\beta \cdot Dt^2} \\
 a_3 &= \frac{1}{\beta \cdot Dt} \\
 a_4 &= \frac{\gamma}{\beta} \\
 a_5 &= \frac{1}{2 \cdot \beta} \\
 a_6 &= \left(\frac{\gamma}{2 \cdot \beta} - 1 \right) \cdot Dt
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Οι μεταβλητές β και γ ονομάζονται παράμετροι ολοκλήρωσης και ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν, η μέθοδος αντιστοιχεί στον κανόνα ολοκλήρωσης του τραπεζιού, τη μέθοδο της μέσης επιτάχυνσης κ.ο.κ. Στα παραδείγματα που πρόκειται να ακολουθήσουν χρησιμοποιήθηκε η κανόνας ολοκλήρωσης του τραπεζιού με $\beta = 1/4$ και $\gamma = 1/2$. Τέλος, ο όρος Dt αντιστοιχεί στο χρονικό βήμα ολοκλήρωσης της μεθόδου.

2. Στη συνέχεια, σε κάθε βήμα της μεθόδου υπολογίζονται οι παρακάτω ποσότητες:

Το ενεργό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα γράφεται:

$$[K]_{eff}^i = [K]_s^i + a_1 \cdot [C]_s + a_2 \cdot [M]_s \tag{5.63}$$

Το μητρώο $[K]_s$ αντιστοιχεί στο συνολικό μητρώο δυσκαμψίας του φορέα, δηλαδή $[K]_s = [K_{el}] + [K_n]$, ενώ οι όροι $[C]_s$ και $[M]_s$ αναφέρονται στο μητρώο απόσβεσης και το μητρώο μάζας της κατασκευής, αντίστοιχα.

Το ενεργό διάνυσμα φόρτισης γράφεται:

$$\{dP\}_s^i = \{P\}_s^i + a_0 \cdot \{\dot{x}\}_s^i + \beta_0 \cdot \{\ddot{x}\}_s^i \tag{5.64}$$

Όπου $\{\dot{x}\}_s^i$ και $\{\ddot{x}\}_s^i$ είναι τα διανύσματα ταχυτήτων και επιταχύνσεων αντίστοιχα, του φορέα στο χρονικό βήμα i .

Οι ποσότητες a_0 και β_0 υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_3 \cdot [M]_s + \alpha_4 \cdot [C]_s \\ \beta_0 &= \alpha_5 \cdot [M]_s + \alpha_6 \cdot [C]_s \end{aligned} \quad (5.65)$$

Τέλος, τα διανύσματα των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων υπολογίζονται σε κάθε βήμα, ως ακολούθως:

$$\{dx\}_s^i = ([K]_{eff}^i)^{-1} \cdot \{dP\}_s^i \quad (5.66)$$

$$\{d\dot{x}\}_s^i = a_1 \cdot \{dx\}_s^i - a_4 \cdot \{\dot{x}\}_s^i - a_6 \cdot \{\ddot{x}\}_s^i \quad (5.67)$$

$$\{d\ddot{x}\}_s^i = a_2 \cdot \{dx\}_s^i - a_3 \cdot \{\dot{x}\}_s^i - a_5 \cdot \{\ddot{x}\}_s^i \quad (5.68)$$

Άρα, τελικά έχουμε:

$$\{x\}_s^{i+1} = \{x\}_s^i + \{dx\}_s^i \quad (5.69)$$

$$\{\dot{x}\}_s^{i+1} = \{\dot{x}\}_s^i + \{d\dot{x}\}_s^i \quad (5.70)$$

$$\{\ddot{x}\}_s^{i+1} = \{\ddot{x}\}_s^i + \{d\ddot{x}\}_s^i \quad (5.71)$$

Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε βήμα της ανάλυσης, για τον υπολογισμό των τελικών κινηματικών μεγεθών της κατασκευής.

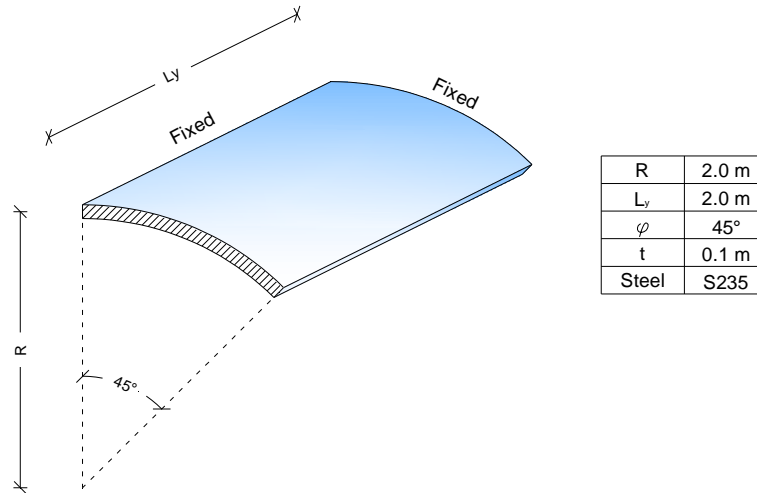
Αριθμητικές εφαρμογές

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα προκειμένου να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την ισχύ των όσων αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Χάριν απλότητας επιλέχθηκε η χρησιμοποίηση ενός κελύφους με καμπυλότητα κατά τη μία μόνο διεύθυνση – κυλινδρικό κέλυφος. Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της διατύπωσης που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή, χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN.

6.2 Παρουσίαση μοντέλου

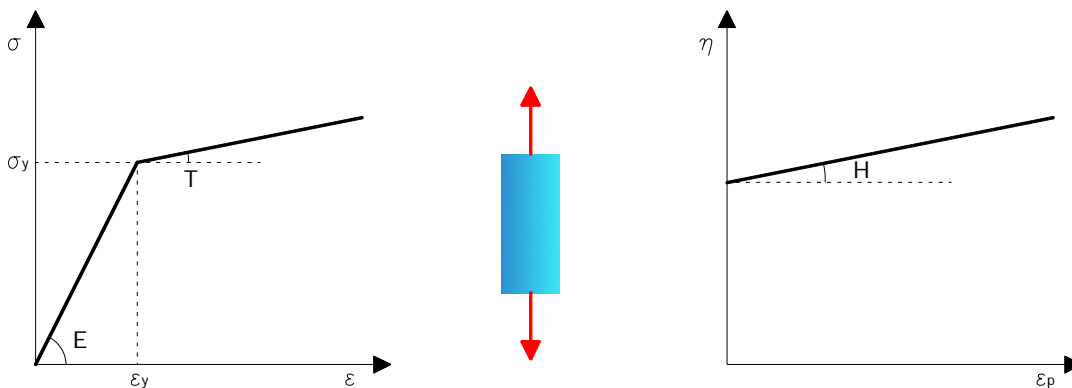
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως επιλέχθηκε η χρησιμοποίηση ενός κυλινδρικού κελύφους. Η συγκεκριμένη κατασκευή θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε ένα απλό στέγαστρο. Το στέγαστρο αυτό επιλέχθηκε να είναι μεταλλικό και σχετικά μικρών διαστάσεων, καθώς η χρησιμοποίηση της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB καθιστούσε ασύμφορη την ανάλυση κατασκευών με μεγάλο πλήθος βαθμών ελευθερίας. Το πρόβλημα επιλύεται δυναμικά, όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο (§ 5.4.2), και για αυτό το λόγο απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες αυξάνονται σημαντικά καθώς αυξάνεται και ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται. Επίσης, παρατηρήθηκε ότι η χρησιμοποίηση στοιχείων μεγάλων διαστάσεων δεν έδινε αξιόπιστα αποτελέσματα. Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε το κέλυφος που χρησιμοποιήθηκε για τις αναλύσεις.



Εικόνα 6.1 Κυλινδρικό κέλυφος

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6.1 το κυλινδρικό αυτό κέλυφος έχει ακτίνα καμπυλότητας $R=2.0m$, μήκος κατά την διεύθυνση όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι άπειρη $L_y=2.0m$ και γωνία στροφής $\varphi=45^\circ$. Το πάχος του είναι $t=0.1m$ και είναι πακτωμένο σε δύο διαδοχικές πλευρές ενώ, οι άλλες δύο είναι ελεύθερες.

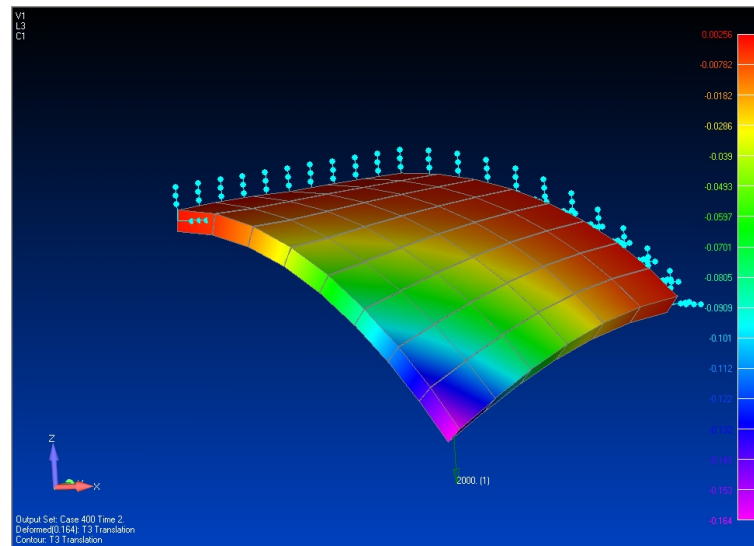
Θεωρούμε ότι, το υπόψη κέλυφος είναι κατασκευασμένο από ομογενές ισότροπο ελαστοπλαστικό υλικό (π.χ. χάλυβα), μέτρου ελαστικότητας $E=2.1 \cdot 10^8 kN$, λόγου Poisson $\nu=0.3$ και πυκνότητας $d=7.85 kN/m^3$. Η τάση διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό του υλικού, θεωρείται ίση με $\sigma_y=235MPa$, ενώ παρουσιάζει κράτνυση με επαπτομενικό μέτρο κράτνυσης $T=2.1 \cdot 10^7 kN$.



Τέλος, το πλαστικό μέτρο κράτνυσης (plastic modulus), σύμφωνα με το προσομοίωμα Melan – Prager είναι ίσο με:

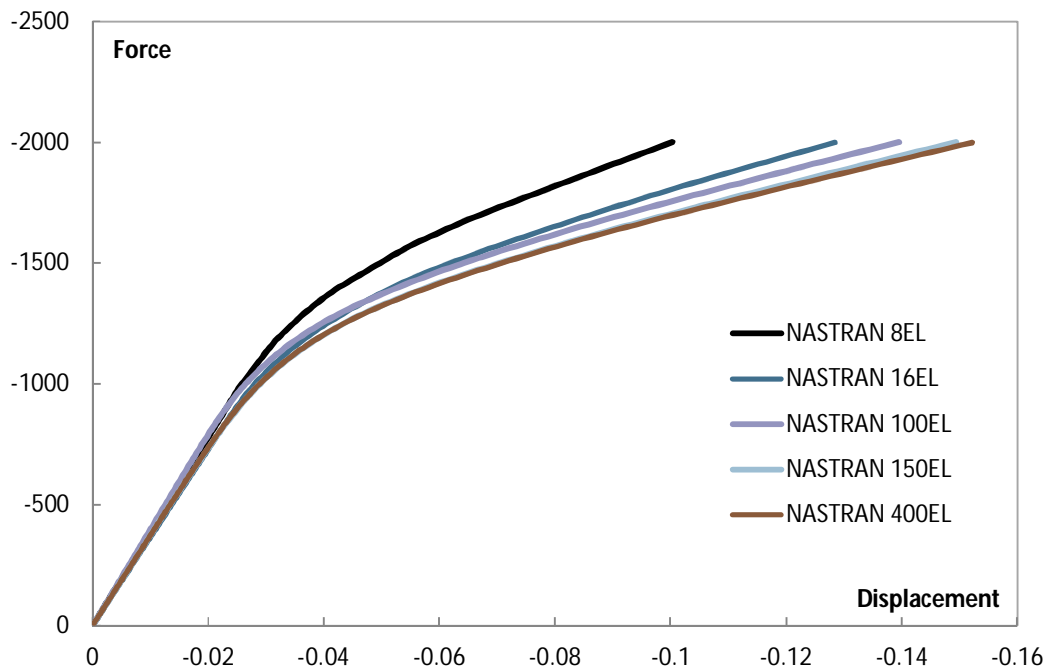
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E} \Rightarrow H = 2.333 \cdot 10^7 kPa \quad (6.1)$$

Το παραπάνω μοντέλο προσομοιώθηκε και στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN για τον έλεγχο των παραγόμενων αποτελεσμάτων. Για την προσομοίωση του μοντέλου, έγιναν οι παραδοχές που αναφέρονται και παραπάνω.



Εικόνα 6.2 Προσομοίωση φορέα στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN

Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζονται οι καμπύλες φορτίου μετατόπισης που προέκυψαν από την ανάλυση μέσω του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN, για πέντε περιπτώσεις διακριτοποίησης. Το επιβαλλόμενο φορτίο επιβάλλεται στο ελεύθερο άκρο του φορέα και αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.



Εικόνα 6.3 Σύγκλιση αποτελεσμάτων μέσω του κώδικα NASTRAN

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε ότι για ανάλυση με 150 στοιχεία τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ίδια με αυτά της ανάλυσης με χρήση 400 στοιχείων.

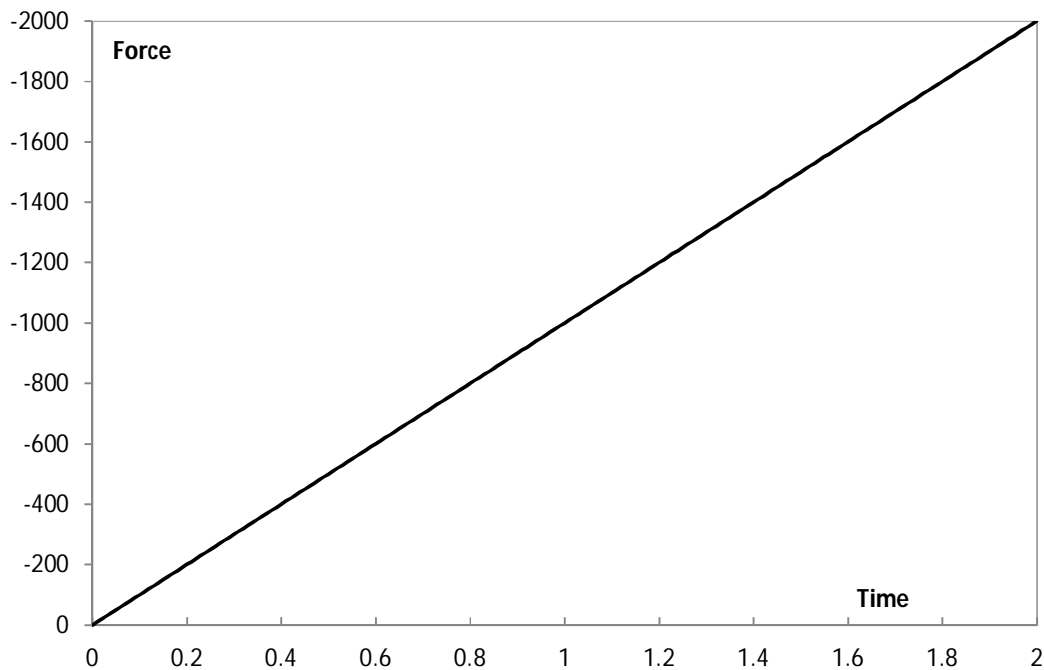
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, μια καλή πρώτη προσέγγιση της πραγματικής συμπεριφοράς, μπορεί να γίνει για αναλύσεις με αυτό τον αριθμό στοιχείων.

6.3 Αριθμητικά Παραδείγματα

6.3.1 Παράδειγμα 1^ο

Στο πρώτο από τα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν, επιβάλλουμε στο ελεύθερο άκρο του φορέα ένα συγκεντρωμένο φορτίο, η χρονική εξέλιξη του οποίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 6.4).

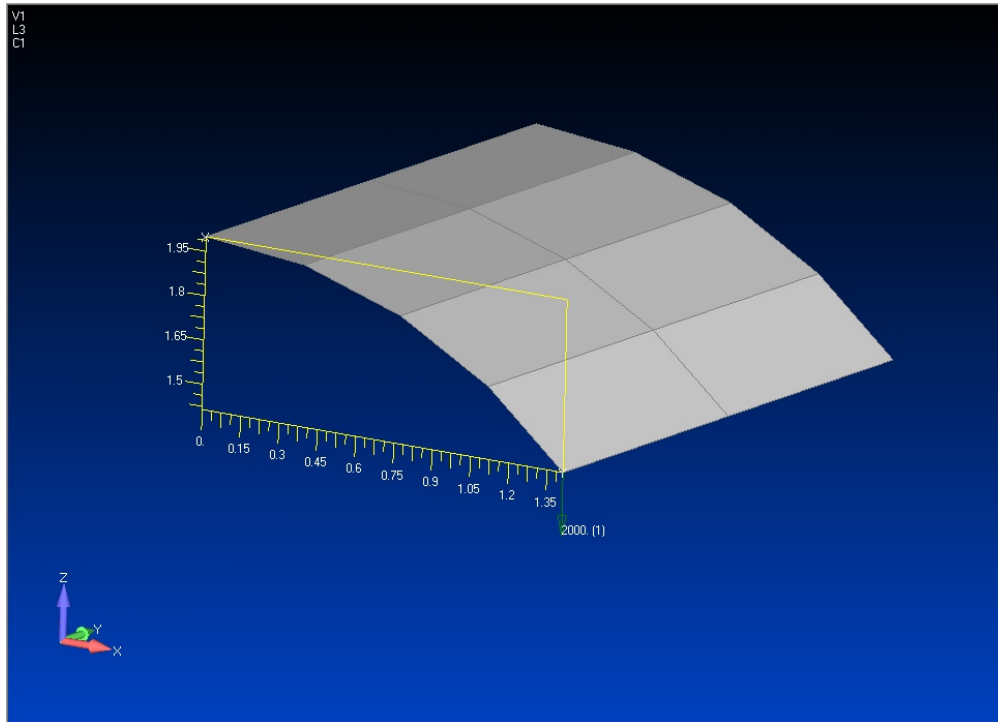
Η φόρτιση είναι μονότονη και φτάνει τη μέγιστη τιμή της τη χρονική στιγμή των $t = 2.0\text{sec}$, οπότε και τερματίζεται. Το φορτίο αυξάνεται σταδιακά από την τιμή των 0kN έως την τιμή των 2000kN .



Εικόνα 6.4 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 1^ο παραδείγματος

Για τις ανάγκες της ανάλυσης το υπόψη κέλυφος διακριτοποιήθηκε σε οκτώ επιμέρους υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία κελύφους, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 6.5).

Για την ανάλυση μέσω του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία τα οποία να προσομοιώνουν όσο το δυνατόν καλύτερα την συμπεριφορά των υπόψη στοιχείων κελύφους. Έτσι, έγινε χρήση των δκομβικών στοιχείων "plate", τα οποία έχουν την ικανότητα ανάληψης μεμβρανικής έντασης.



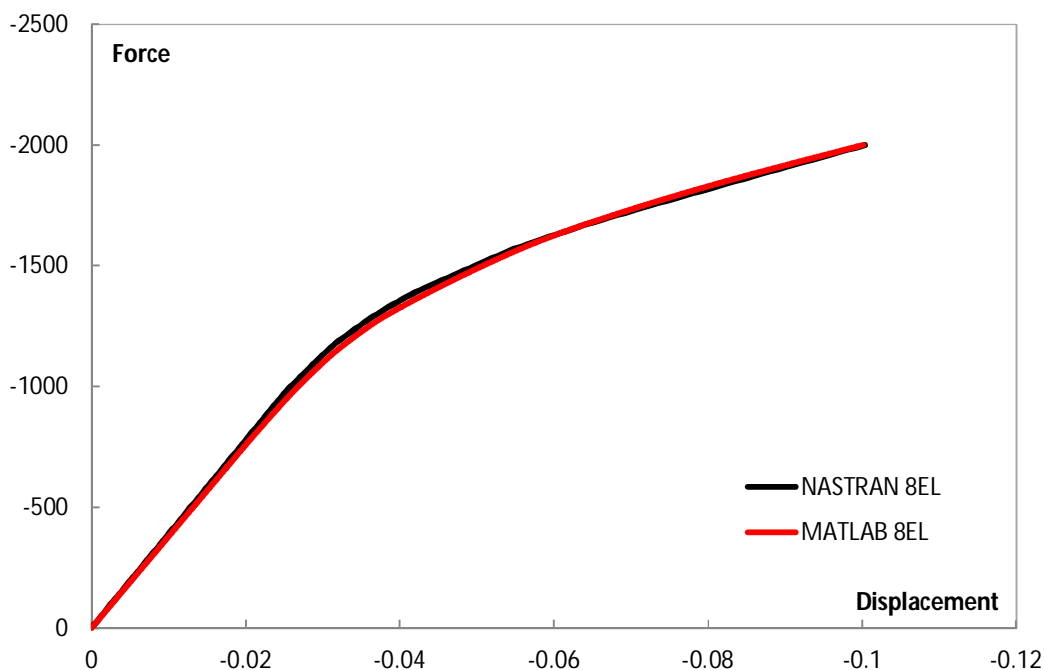
Εικόνα 6.5 Διακριτοποίηση και επιβαλλόμενο φορτίο πρώτου παραδείγματος

Εφαρμόζοντας τη μεθοδολογία που διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 5, για την ανάπτυξη υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων κελύφους που να ενσωματώνουν το προσομοίωμα Bouc – Wen, συντάχθηκε κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB. Στον κώδικα αυτό εισάγεται από τον χρήστη ένα πλήθος δεδομένων, όπως είναι οι συντεταγμένες των κόμβων του φορέα, η φόρτιση, τα χαρακτηριστικά του υλικού κ.λ.π. και στη συνέχεια, υπολογίζονται τα κινηματικά μεγέθη του προβλήματος, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην § 5.4.2. Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης συγκρίνονται με αυτά που παίρνουμε από τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN, για τον έλεγχο της ορθότητάς τους.

Όσον αφορά το μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία $[a]$, είναι όπως αναφέρθηκε διαγώνιο και ίσο με:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε την καμπύλη φορτίου – μετατόπισης, για τον κόμβο στον οποίο επιβάλλεται το φορτίο, τόσο του κώδικα NASTRAN, όσο και του υπόψη κώδικα της MATLAB. Και για τις δύο αναλύσεις χρησιμοποιήθηκαν οκτώ πεπερασμένα στοιχεία, καθώς η χρησιμοποίηση μεγάλου αριθμού στοιχείων στον κώδικα MATLAB καθιστά την ανάλυση αρκετά χρονοβόρα.

Εικόνα 6.6 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 1^{ου} παραδείγματος

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των δύο αναλύσεων συγκλίνουν αρκετά μεταξύ τους. Αναλυτικότερα, τόσο ο ελαστικός, όσο και ο μετελαστικός κλάδος των δύο καμπυλών ταυτίζονται, πράγμα που φανερώνει ότι το υπόψη στοιχείο κελύφους που αναπτύχθηκε με βάση το προσομοίωμα Bouc – Wen, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά με τα στοιχεία κελύφους που χρησιμοποιεί ο κώδικας πεπερασμένων στοιχείων του NASTRAN.

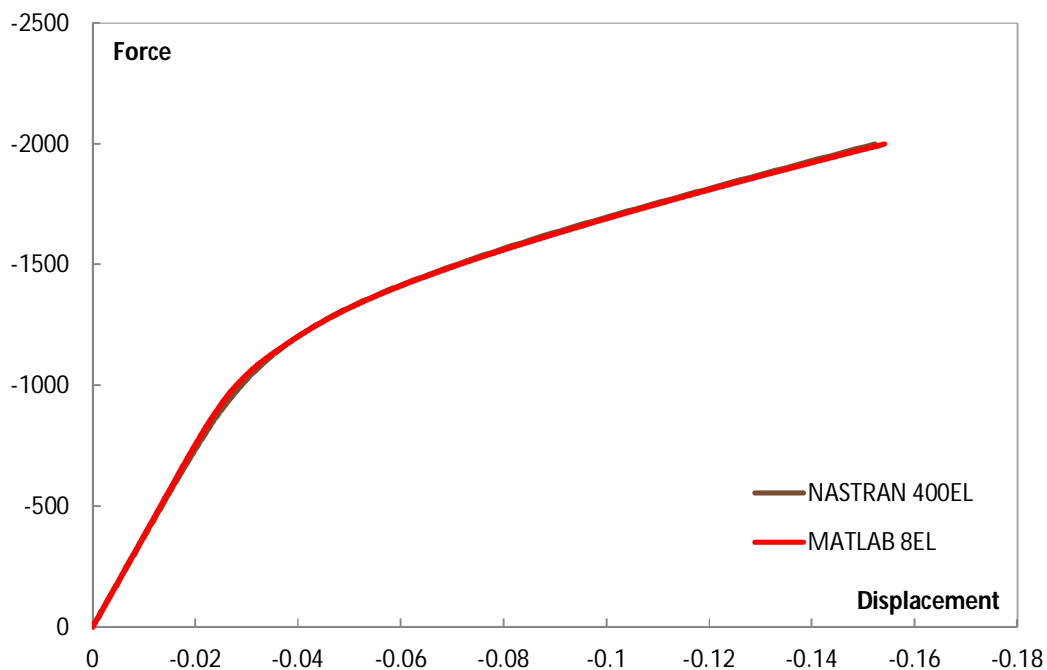
Όσον αφορά τώρα κάποιες μικρές αποκλίσεις στα αποτελέσματα των δύο αναλύσεων, αυτές μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες λαμβάνοντας υπόψη ότι η εν γένει συμπεριφορά είναι παρόμοια.

Ένα σημείο στο οποίο αξίζει να σταθούμε, είναι το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων. Όπως έγινε γνωστό μέσω της σχέσης (5.36), το μητρώο παραμόρφωσης των υπόψη στοιχείων επιμερίζεται σε ένα το οποίο υπολογίζεται στη μέση επιφάνεια των στοιχείων και σε ένα το οποίο μέσω της παραμέτρου ζ , η οποία παίρνει τιμές από -1 έως 1 , λαμβάνει υπόψη το πάχος των στοιχείων. Παρατηρήθηκε λοιπόν ότι, για να είναι τα παραπάνω διαγράμματα φορτίου – μετατόπισης συγκρίσιμα, θα πρέπει ο υπολογισμός των τάσεων να γίνει στο επίπεδο όπου $\zeta = 0.595$. Βλέπουμε λοιπόν ότι, για να μπορέσουμε να πάρουμε μια ρεαλιστική εικόνα της απόκρισης της κατασκευής θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη συμπεριφορά της.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο (§ 4.3.1) η παράμετρος, του προσομοιώματος Bouc – Wen που ρυθμίζει τη μετάβαση από τον ελαστικό στον μετελαστικό κλάδο, είναι η παράμετρος εξομάλυνσης (smoothing parameter) $N \geq 2$. Η επίδραση της παραμέτρου αυτής στη διαρροή του συστήματος φαίνεται στην Εικόνα 4.4, όπου για μικρές τιμές της, η μετάβαση γίνεται πιο ομαλά, ενώ όσο

αυξάνεται η συμπεριφορά πλησιάζει αυτή του ελαστικού – απολύτως πλαστικού υλικού. Στο παραπάνω παράδειγμα ωστόσο, η τιμή της παραμέτρου που χρησιμοποιήθηκε είναι $N = 20$. Οι όροι β και γ του προσομοιώματος Bouc – Wen, είναι συντελεστές σχήματος όπου όπως αναφέρθηκε ρυθμίζουν το σχήμα του βρόχου υστέρησης. Στο παράδειγμα αυτό αλλά και σε αυτά που ακολουθούν θεωρήθηκε ότι $\beta = \gamma = 0.5$.

Μία ακόμα παρατήρηση σχετικά με τη προτεινόμενη μέθοδο έχει να κάνει με την ευελιξία που παρουσιάζει. Πιο αναλυτικά, θα δούμε στα παρακάτω ότι μεταβάλλοντας κάποιες από τις παραμέτρους του υπολογισμού μπορούμε να προσεγγίσουμε τη «πραγματική» συμπεριφορά της κατασκευής. Οι παράμετροι αυτοί είναι καταρχήν το επίπεδο, καθ' ύψος της διατομής, στο οποίο γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων (εξ. (5.36)) και στη συνέχεια το μητρώο των λόγων της μεταλαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία. Οι παραπάνω παράμετροι μεταβάλλονται ανά πάσα στιγμή στο κώδικα της MATLAB και έτσι σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα μπορούμε να προσεγγίσουμε την απόκριση μιας οποιασδήποτε κατασκευής, αποτελούμενης από στοιχεία κελύφους.



Εικόνα 6.7 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 1^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία

Παρατηρούμε ότι με την προτεινόμενη μεθοδολογία, με χρήση 8 μόνο στοιχείων, παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα με την ανάλυση με 400 στοιχεία. Το παραπάνω αποτέλεσμα φανερώνει την ευελιξία των υπόψη υστερητικών στοιχείων.

Στην παραπάνω ανάλυση μεταβάλλοντας τις δύο παραμέτρους που προαναφέρθηκαν καταφέραμε να προσεγγίσουμε με πολύ καλή ακρίβεια την «πραγματική» συμπεριφορά της κατασκευής. Αναλυτικότερα, όσον αφορά το επίπεδο υπολογισμού των τάσεων παρατηρήθηκε ότι τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά για $\zeta = 0.75$. Βλέπουμε ότι για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε το

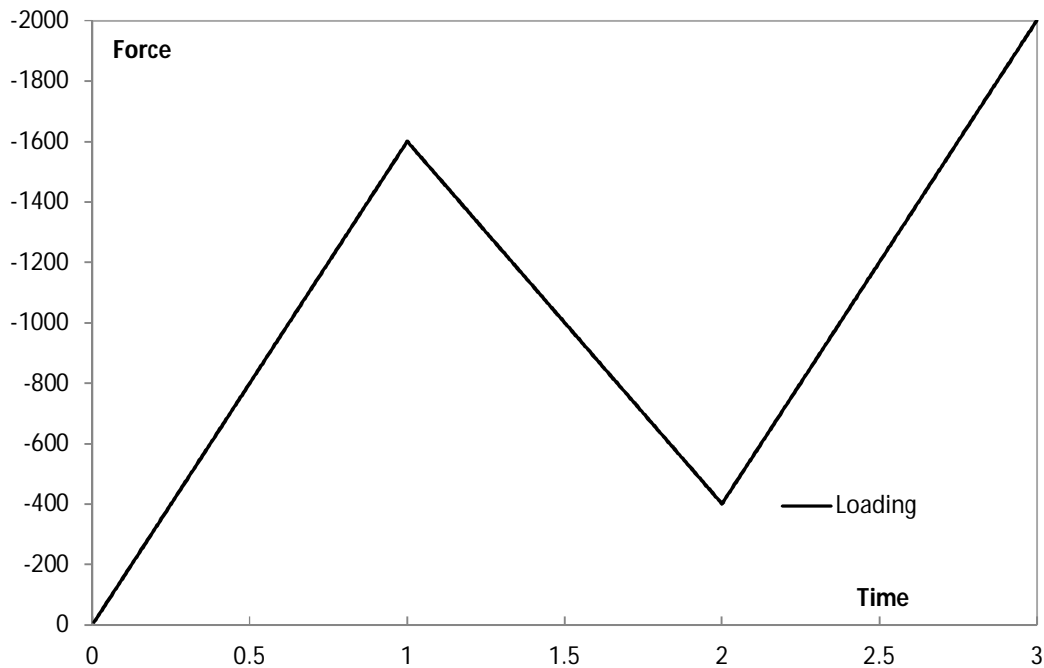
σημείο διαρροής, απαιτήθηκε ο υπολογισμός των τάσεων να γίνει σε επίπεδο κοντινότερο στην άνω παρειά του κελύφους.

Όσον αφορά τώρα το μητρώο του λόγου των δυσκαμψιών $[a]$ που χρησιμοποιήθηκε στις αναλύσεις μέσω του MATLAB, παρατηρήθηκε ότι έδινε μετελαστικό κλάδο παράλληλο σε αυτόν των αποτελεσμάτων του NASTRAN για 400 στοιχεία, όταν:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 \end{bmatrix}$$

6.3.2 Παράδειγμα 2^ο

Στο δεύτερο από τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, μεταβάλουμε τη χρονική εξέλιξη της επιβαλλόμενης εξωτερικής φόρτισης. Συγκεκριμένα, επιβάλλεται η συνάρτηση φόρτισης – αποφόρτισης – επαναφόρτισης της παρακάτω εικόνας.

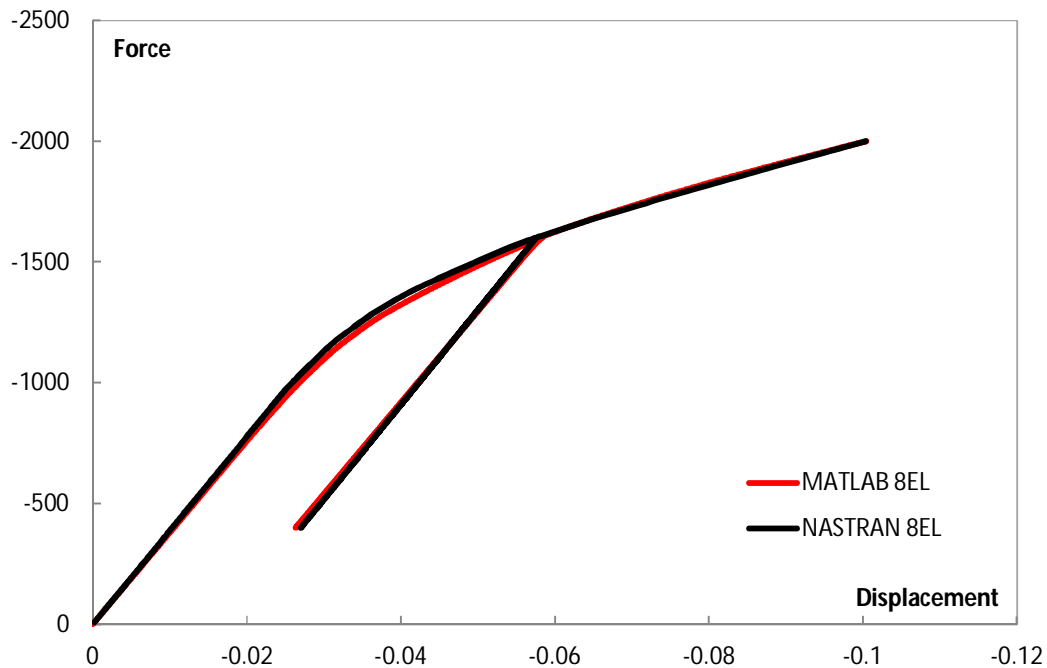


Εικόνα 6.8 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 2^{ου} παραδείγματος

Παρατηρούμε ότι, αρχικά η φόρτιση αυξάνεται γραμμικά μέχρι την τιμή των 1600 kN , κατόπιν το σύστημα αποφορτίζεται μέχρι το φορτίο των 400 kN και στη συνέχεια επαναφορτίζεται μέχρι τα 2000 kN οπότε και τερματίζεται η ανάλυση.

Με βάση λοιπόν την παραπάνω καμπύλη φόρτισης, προέκυψαν οι ακόλουθες δύο καμπύλες φορτίου μετατόπισης του ελεύθερου άκρου του φορέα (Εικόνα 6.9). Και σε αυτό το παράδειγμα έγινε χρήση οκτώ πεπερασμένων στοιχείων κελύφους, για τους

λόγους που προαναφέρθηκαν, ενώ οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc –Wen όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως επιλέχθηκε να είναι αντίστοιχα $N = 20$ και $\beta = \gamma = 0.5$.

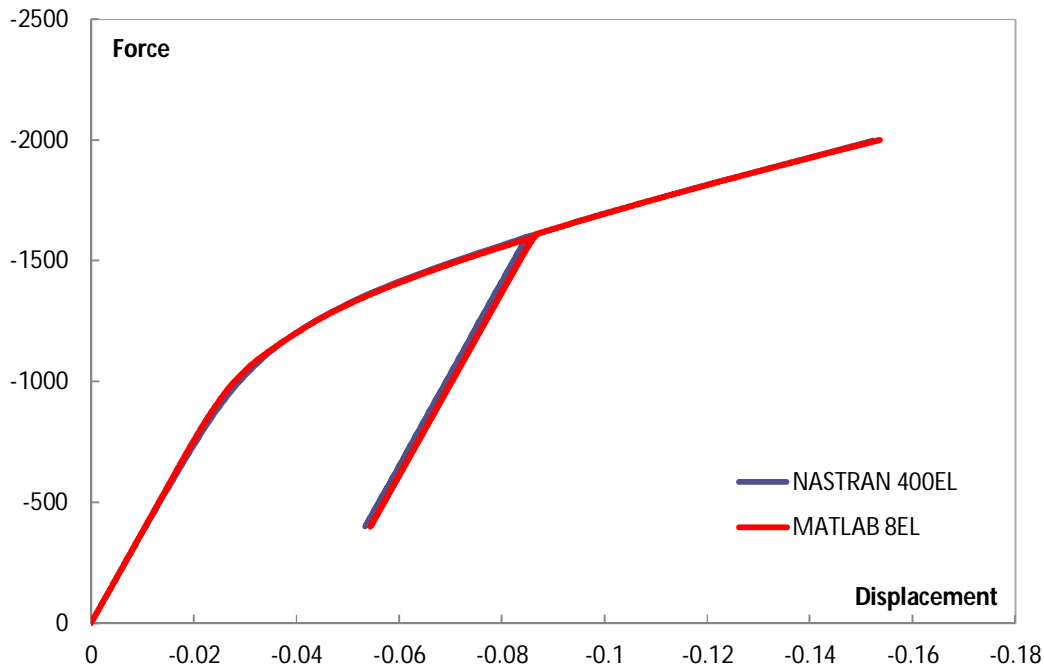


Εικόνα 6.9 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 2^{ου} παραδείγματος

Στην Εικόνα 6.9 παρατηρούμε ότι η καμπύλη φορτίου μετατόπισης για τις δύο αναλύσεις είναι περίπου η ίδια. Πιο αναλυτικά, όταν η επιβαλλόμενη εξωτερική φόρτιση φτάσει την τιμή των 1600 kN , τότε το όλο σύστημα αποφορτίζεται μέχρι την τιμή των 400 kN με δυσκαμψία ίση με την ελαστική δυσκαμψία της κατασκευής. Στη συνέχεια, επαναφορτίζοντας σύμφωνα με την καμπύλη φόρτισης του παραδείγματος, η συμπεριφορά θα είναι ελαστική ακολουθώντας τον ίδιο κλάδο μέχρι το φορτίο των 1600 kN όπου η κατασκευή θα διαρρεύσει για δεύτερη φορά και οι πλαστικές παραμορφώσεις θα αρχίσουν ξανά. Η παραμόρφωση πέραν του σημείου αυτού θα ακολουθήσει τον μετελαστικό κλάδο της κατασκευής.

Όσον αφορά τώρα τη σύγκριση των δύο καμπυλών, παρατηρούμε ότι ισχύουν γενικά όσα αναφέρθηκαν και για τις καμπύλες του προηγούμενου παραδείγματος. Και στις δύο αναλύσεις η τελική μετατόπιση του ελεύθερου άκρου του φορέα είναι η ίδια γεγονός που μαρτυρά την καλή συμπεριφορά των υστερητικών στοιχείων κελύφους, που αναπτύχθηκαν στην εργασία αυτή. Επίσης, ο ελαστικός και ο μετελαστικός κλάδος είναι ταυτόσημοι, όπως επίσης και ο κλάδος της αποφόρτισης. Τέλος, οι μικρές διαφορές που εντοπίζονται μεταξύ των δύο παραπάνω διατυπώσεων μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

Τροποποιώντας όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία και το επίπεδο υπολογισμού των τάσεων παίρνουμε την παρακάτω καμπύλη φορτίου μετατόπισης.

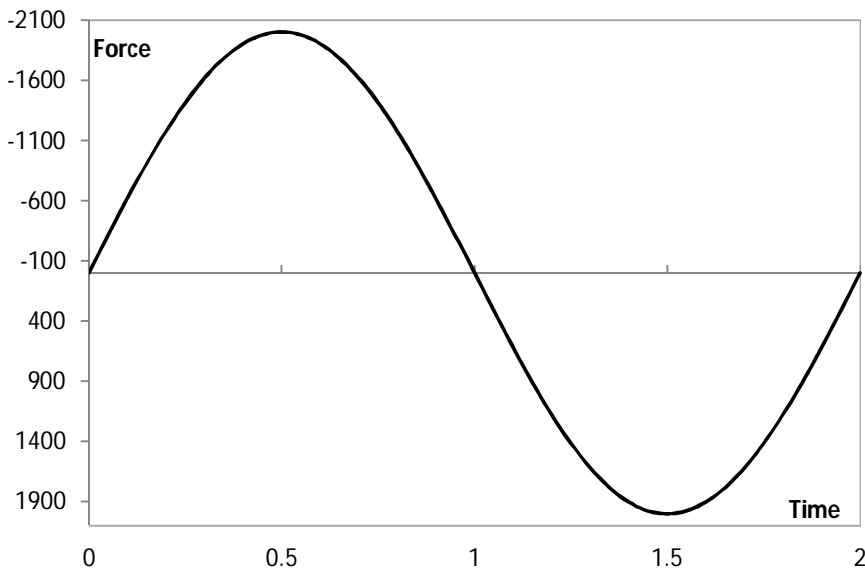


Εικόνα 6.10 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 2^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία

Παρατηρούμε ότι και για αυτή την περίπτωση φόρτισης, η σύγκλιση των αποτελεσμάτων είναι αρκετά ικανοποιητική.

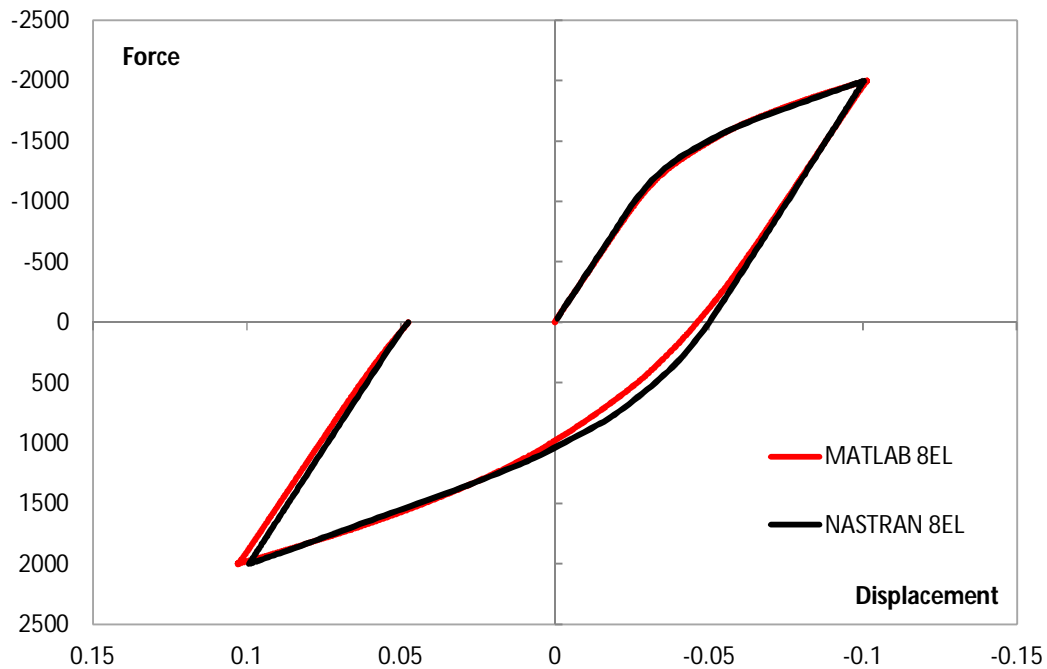
6.3.3 Παράδειγμα 3^ο

Στο τρίτο από τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, επιβάλλουμε στο ελεύθερο άκρο του φορέα μία ημιτονοειδή φόρτιση, με μέγιστη τιμή τα 2000 kN (Εικόνα 6.11). Με τη χρήση του παραδείγματος αυτού έχουμε τη δυνατότητα αναπαράστασης του βρόχου υστέρησης της κατασκευής.



Εικόνα 6.11 Συνάρτηση επιβολής φορτίου 3^{ου} παραδείγματος

Εκτελώντας τις αναλύσεις με χρήση του κώδικα της MATLAB και του κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN, προκύπτουν οι ακόλουθοι δύο βρόχοι υστέρησης.

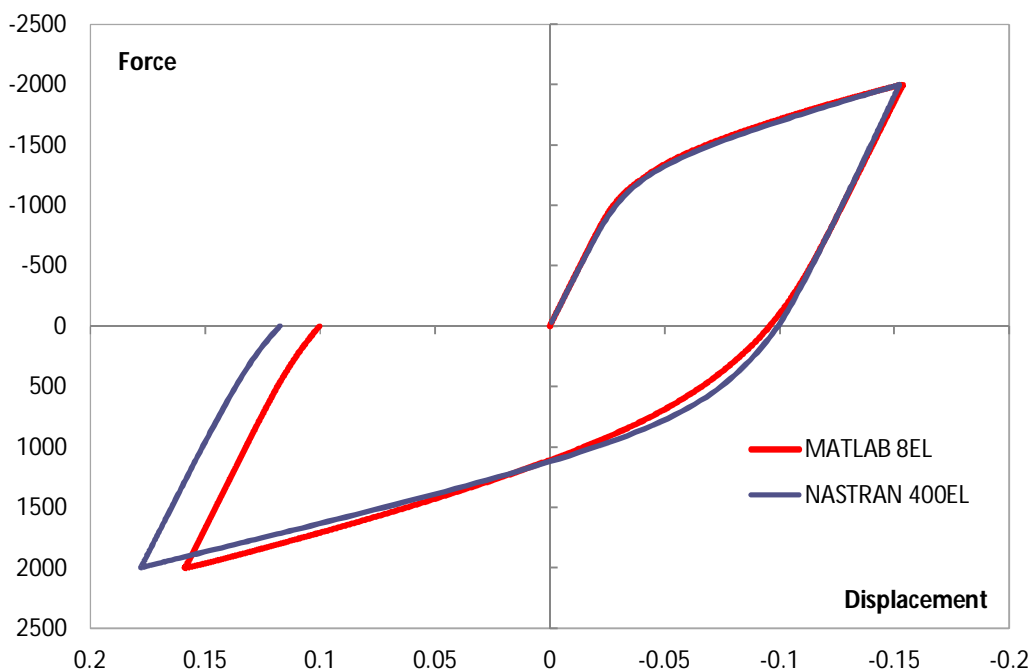


Εικόνα 6.12 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 3^{ου} παραδείγματος

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των αναλύσεων είναι αρκετά ικανοποιητικά. Συγκεκριμένα, οι βρόχοι υστέρησης είναι σχεδόν όμοιοι με μόνη διαφορά το σημείο έναρξης της δεύτερης διαρροής του κώδικα της MATLAB. Εκεί βλέπουμε ότι η μετάβαση στο μετελαστικό κλάδο γίνεται ομαλότερα από ότι στην ανάλυση μέσω του κώδικα του NASTRAN. Το γεγονός αυτό παρατηρούμε ότι επηρεάζει την παραμένουσα πλαστική μετατόπιση του φορέα. Ειδικότερα, βλέπουμε ότι στην ανάλυση μέσω του κώδικα NASTRAN η παραμένουσα μετατόπιση του συστήματος είναι ή ίδια κατά την αποφόρτιση και επαναφόρτιση του συστήματος, πράγμα το οποίο δεν ισχύει για την ανάλυση μέσω του κώδικα της MATLAB, όπου λόγω του τρόπου με τον οποίο γίνεται η μετάβαση από τον ένα κλάδο στον άλλο, οι δύο μετατοπίσεις διαφέρουν για λίγο.

Κατά την επαναφόρτιση της κατασκευής παρατηρούμε ότι η διαρροή συμβαίνει για χαμηλότερο επίπεδο δύναμης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια του γνωστού φαινομένου Bauschinger (Bauschinger effect), το οποίο παρατηρείται κατά κόρον στην πλαστική παραμόρφωση όλκιμων μετάλλων.

Χρησιμοποιώντας και σε αυτό το παράδειγμα περισσότερα στοιχεία στον κώδικα NASTRAN και συγκρίνοντας στη συνέχεια με τον κώδικα της MATLAB, αφού γίνουν πρώτα οι απαραίτητες τροποποιήσεις των παραμέτρων της ανάλυσης, παίρνουμε τα αποτελέσματα του παρακάτω διαγράμματος.



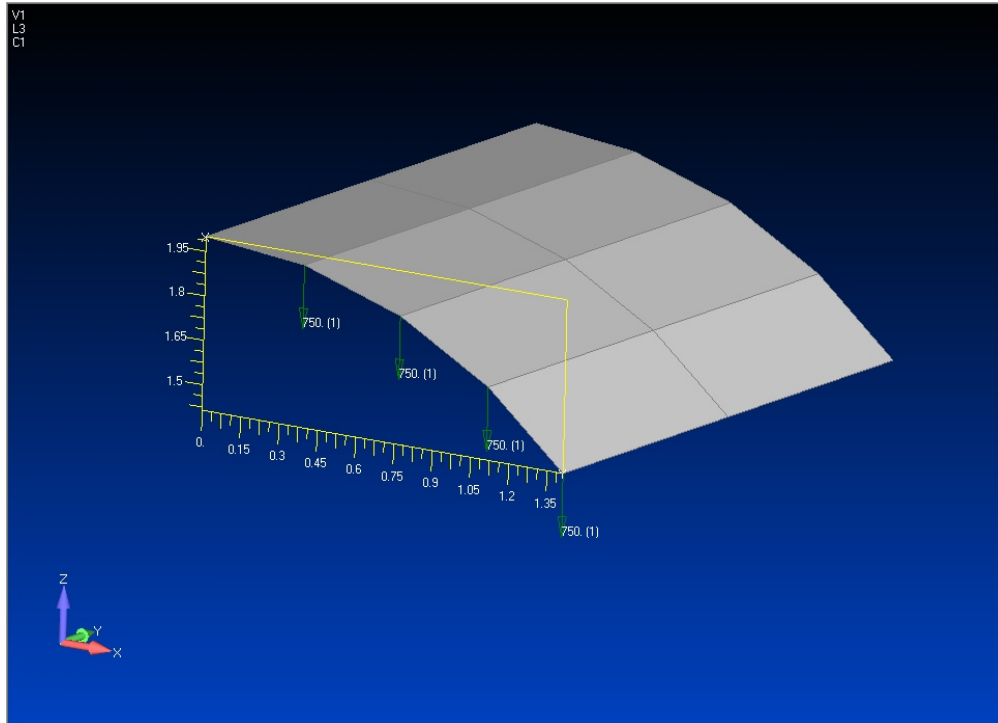
Εικόνα 6.13 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 3^{ου} παραδείγματος για ανάλυση με περισσότερα στοιχεία

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε κάποιες διαφοροποιήσεις στους βρόχους υστέρησης, ανάμεσα στις δύο αναλύσεις. Καταρχήν παρατηρούμε ότι η παραμένουσα πλαστική μετατόπιση των αποτελεσμάτων του κώδικα NASTRAN δεν είναι η ίδια για τους δύο κύκλους φόρτισης – επαναφόρτισης, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του MATLAB, όπου παρατηρούμε ότι οι δύο μετατοπίσεις είναι περίπου ίσες. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η κλίση του μετελαστικού κλάδου των αποτελεσμάτων του NASTRAN κατά τη δεύτερη διαρροή είναι μικρότερη, δηλαδή παρατηρούμε μια μείωση της αντοχής μετά τη διαρροή.

Οι παραπάνω διαφορές μπορεί να οφείλονται σε διάφορους παράγοντες. Καταρχήν, για τις δύο αναλύσεις γίνεται χρήση διαφορετικών πεπερασμένων στοιχείων. Όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα το στοιχείο που χρησιμοποιήθηκε για τις αναλύσεις του NASTRAN, ήταν το 8κομβικό στοιχείο "plate", σε αντίθεση με τον κώδικα που συντάχθηκε στην γλώσσα προγραμματισμού MATLAB, όπου έγινε χρήση 9κομβικών στοιχείων κελύφους. Επιπλέον, στην παρούσα εργασία, ο υπολογισμός των τάσεων γίνεται στα σημεία Gauss του στοιχείου με κανόνα ολοκλήρωσης 3x3, ενώ στον κώδικα NASTRAN η ολοκλήρωση πιθανώς γίνεται με κανόνα 2x2. Πέραν των παραπάνω, επίδραση στην όλη συμπεριφορά της κατασκευής έχει και η γεωμετρία του φορέα. Με τη χρήση περισσότερων στοιχείων η γεωμετρία της κατασκευής προσομοιώνεται με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι με τη χρήση οκτώ μόνο στοιχείων. Τέλος, τεχνικές όπως η μείωση της τάξης ολοκλήρωσης είναι πιθανό να ακολουθούνται από το λογισμικό NASTRAN για την αποφυγή φαινομένων όπως το shear locking και το membrane locking.

6.3.4 Παράδειγμα 4^ο

Στο τελευταίο από τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου, αντί του συγκεντρωμένου φορτίου στο ελεύθερο άκρο του φορέα, αποφασίστηκε η επιβολή τεσσάρων συγκεντρωμένων φορτίων, στη μια από τις δύο ελεύθερες πλευρές του φορέα. Τα φορτία αυτά επιβάλλονται κατά παρόμοιο τρόπο με το φορτίο του πρώτου παραδείγματος, δηλαδή με χρονική συνάρτηση επιβολής αυτή της Εικόνα 6.4. Στην εικόνα που ακολουθεί βλέπουμε τα σημεία στα οποία επιβάλλεται η παραπάνω φόρτιση.

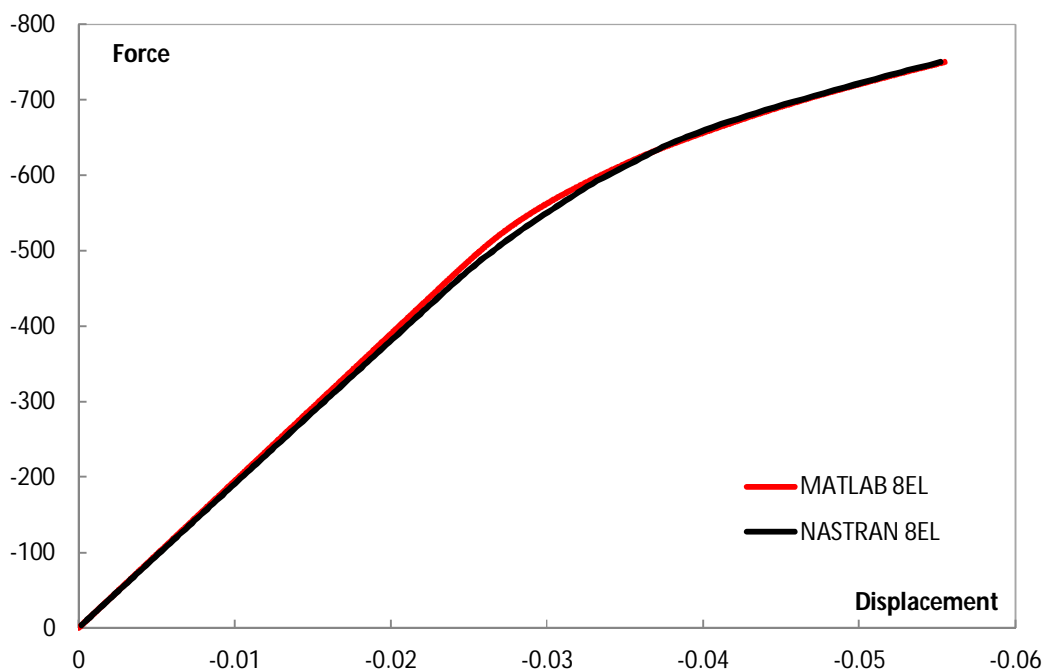


Εικόνα 6.14 Διακριτοποίηση και επιβαλλόμενο φορτίο 4^{ου} παραδείγματος

Παρατηρούμε ότι αυτή τη φορά η μέγιστη τιμή του φορτίου είναι 750kN , ενώ η χρονική διάρκεια της φόρτισης είναι και πάλι $t = 2.0\text{sec}$.

Στη συνέχεια, βάση και των παραπάνω χρησιμοποιούμε τον κώδικα της MATLAB για την ανάλυση της κατασκευής και τα αποτελέσματα που προκύπτουν τα συγκρίνουμε με αυτά που παίρνουμε για την ανάλυση με το NASTRAN. Στην περίπτωση αυτή η αναλύσεις γίνονται για χρήση οκτώ μόνο στοιχείων. Η επέκταση για χρήση περισσότερων στοιχείων δεν έγινε γιατί όπως φάνηκε και στα προηγούμενα παραδείγματα, για τη περίπτωση μονότονων φορτίσεων, τα αποτελέσματα ήταν ικανοποιητικά.

Αφού λοιπόν εκτελέσουμε τις αναλύσεις με τους δύο κώδικες που αναφέρονται στα παραπάνω, παίρνουμε τις ακόλουθες καμπύλες φορτίου μετατόπισης.

Εικόνα 6.15 Καμπύλη φορτίου μετατόπισης 4^{ου} παραδείγματος

Βλέπουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα των αναλύσεων συμφωνούν μεταξύ τους με τις όποιες διαφορές να είναι αμελητέες. Τόσο ο ελαστικός όσο και ο μετελαστικός κλάδος των δύο καμπύλων είναι παράλληλοι, ενώ και η τελική μετατόπιση είναι η ίδια.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι, για να είναι οι δύο παραπάνω καμπύλες ταυτόσημες απαιτήθηκε να γίνει αλλαγή του επιπέδου υπολογισμού των τάσεων καθ' ύψος της διατομής. Βλέπουμε λοιπόν ότι ανάλογα με το μέγεθος της επιβαλλόμενης φόρτισης απαιτείται και διαφορετικό επίπεδο υπολογισμού των τάσεων.

6.4 Παρατηρήσεις

Από τα παραπάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κελύφους που αναπτύχθηκαν με βάση το υστερητικό προσομοίωμα Bouc – Wen συμπεριφέρονται αρκετά καλά για τις τρεις περιπτώσεις φόρτισης που προηγήθηκαν. Μπορούμε λοιπόν σε πρώτο στάδιο να πούμε ότι η εν γένει συμπεριφορά τους θεωρείται αξιόπιστη. Παρατηρήθηκε επίσης ότι, την απόκριση των στοιχείων επηρεάζει άμεσα και το επίπεδο καθ' ύψος της διατομής όπου γίνεται ο υπολογισμός των τάσεων.

Πιο αναλυτικά, όσον αφορά το επίπεδο αυτό, η επίδραση του φαίνεται άμεσα από τη σχέση (5.36). Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι το μητρώο παραμόρφωσης των στοιχείων κελύφους επιμερίζεται σε δύο ανεξάρτητα μητρώα, ένα το οποίο υπολογίζεται στη μέση επιφάνεια του στοιχείου και ένα το οποίο λαμβάνει υπόψη το πάχος της διατομής. Ύστερα από δοκιμές, για τα τρία πρώτα παραδείγματα, προέκυψε ότι τα αποτελέσματα των αναλύσεων μέσω του MATLAB, συγκλίνουν με αυτά των αναλύσεων μέσω του NASTRAN, για την τιμή $\zeta = 0.595$. Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 5, ο τοπικός άξονας ζ είναι κάθετος στη μέση επιφάνεια του

στοιχείου σε κάθε σημείο της διατομής και παίρνει τιμές από $\zeta = -1$ έως $\zeta = +1$. Βλέπουμε λοιπόν ότι για να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα, θα πρέπει ο υπολογισμός των τάσεων να γίνει σε απόσταση $\zeta = 0.5 \cdot 0.595 \cdot t \Rightarrow \zeta = 0.297 \cdot t$ από τη μέση επιφάνεια. Αντίθετα, για το τέταρτο από τα παραπάνω παραδείγματα, η τιμή $\zeta = 0.595$ οδηγούσε σε διαρροή σε μεγαλύτερο επίπεδο φόρτισης. Ύστερα από δοκιμές προέκυψε ότι για την τιμή $\zeta = 0.760$ τα αποτελέσματα των αναλύσεων ήταν σχεδόν παρόμοια. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ανάλογα με το μέγεθος του επιβαλλόμενου φορτίου, μεταβάλλεται και το επίπεδο της διατομής καθ' ύψος στο οποίο απαιτείται να γίνει ο υπολογισμός των τάσεων, γεγονός που καταδεικνύει τη σημασία της κατανομής των τάσεων καθ' ύψος της διατομής και της πλαστικοποίησής τους με βάση το χρησιμοποιούμενο κριτήριο διαρροής

Αναφορικά τώρα με τα διαγράμματα φορτίου – μετατόπισης των παραπάνω παραδειγμάτων αξίζει να αναφερθεί ότι, τα αποτελέσματα που εξήχθησαν από τον κώδικα NASTRAN για μεγαλύτερο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων κατά την ανάλυση, διέφεραν αρκετά από αυτά με χρησιμοποίηση οκτώ μόνο στοιχείων. Είδαμε ωστόσο ότι, με κατάλληλες τροποποιήσεις των παραμέτρων της ανάλυσης, η προτεινόμενη διατύπωση μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα πολύ κοντά σε αυτά της «πραγματικής» συμπεριφοράς, χωρίς μεταβολή του πλήθους των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα έγινε αντιληπτό ότι οι δύο παράμετροι που καθόριζαν το αποτέλεσμα ήταν, το μητρώο των λόγων της μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία και το επίπεδο υπολογισμού των τάσεων καθ' ύψος της διατομής. Γίνεται λοιπόν αντιληπτή η ευελιξία της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Newmark (§5.4.2), όπου το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης θεωρείται σταθερό, χωρίς να γίνεται κάποιος έλεγχος σφάλματος. Από τη σκοπιά αυτή προτιμότερη θα ήταν η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με κάποια άλλη μέθοδο, όπως για παράδειγμα η Runge – Kutta ή μία από τις μεθόδους της οικογένειας των ode (ordinary differential equations), όπου στην περίπτωση αυτή απαιτείται η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων που προβλήματος σε μορφή κατάστασης (state – space).

Πέραν των διαγραμμάτων φορτίου – μετατόπισης, για την περαιτέρω μελέτη της συμπεριφοράς των υστερητικών στοιχείων κελύφους που παρουσιάζονται στην εργασία αυτή, κρίνεται σκόπιμη η μελέτη των διαγραμμάτων ροπών – καμπυλοτήτων και η σύγκριση τους κατά παρόμοιο τρόπο με διαγράμματα που θα προκύψουν από την ανάλυση μέσω ενός εμπορικού πακέτου πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, μία τέτοια σύγκριση δεν πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας που είχε ως κύριο αντικείμενό της την θεωρητική ανάπτυξη του θέματος.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή έγινε μια πρώτη προσπάθεια για την ανάπτυξη υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων κελύφους, με σκοπό την ανελαστική, δυναμική ανάλυση τέτοιου είδους κατασκευών. Τα στοιχεία τα οποία εξετάστηκαν ήταν απλά εννεακομβικά στοιχεία, όπου κάθε κόμβος έχει πέντε βαθμούς ελευθερίας, τρεις μεταφορικούς και δύο στροφικούς. Ειδικότερα, για να ληφθεί υπόψη η γεωμετρία των στοιχείων κάθε φορά, χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία που αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία [14]. Η έννοια της υστέρησης εισάγεται μέσω του υστερητικού προσομοιώματος Bouc – Wen, το οποίο όπως αναφέρθηκε είναι ένα ομαλό υστερητικό μοντέλο με την έννοια ότι αρκεί η χρήση μίας μόνο ομαλής συνάρτησης για την περιγραφή της υστερητικής συμπεριφοράς, ενώ είναι και ανεξάρτητο του ρυθμού επιβολής της φόρτισης (rate independent). Οι σχέσεις που διέπουν το προσομοίωμα εκφράζονται σε όρους τάσεων, βασιζόμενες στην θεώρηση της κλασικής θεωρίας πλαστικότητας. Για την επίλυση του προβλήματος απαιτείται η διατύπωση επιπλέον εξισώσεων, των εξισώσεων εξέλιξης, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις (5.40). Στις σχέσεις αυτές η εξέλιξη (rate) του τανυστή των τάσεων περιγράφεται για όλο τον κύκλο φόρτισης μέσω της εισαγωγής των κατάλληλων βηματικών συναρτήσεων Heaviside και για κάθε τύπο κριτηρίου διαρροής και νόμου κράτυνσης. Μέσω των σχέσεων αυτών υπολογίζονται οι υστερητικές τάσεις στα σημεία Gauss του στοιχείου, έτσι σε κάθε τέτοιο σημείο υπολογίζονται πέντε ανεξάρτητες τάσεις, μια για κάθε βαθμό ελευθερίας.

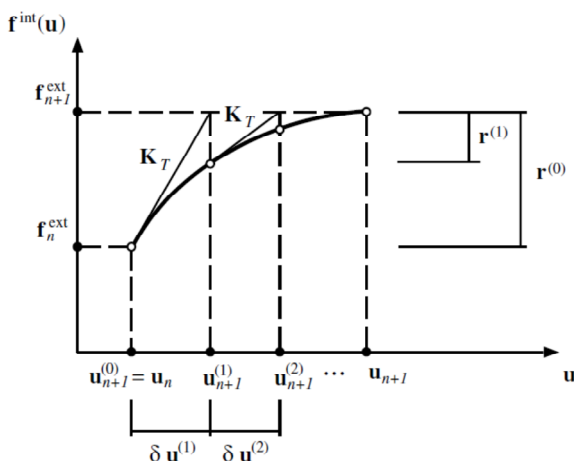
Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία των υπόψη στοιχείων επιλύθηκαν χαρακτηριστικά αριθμητικά παραδείγματα. Για το σκοπό αυτό συντάχθηκε κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB, με τον οποίο εφαρμόζονται όσα αναφέρονται και στα παραπάνω. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε με τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων NASTRAN, για οκτώ στοιχεία κελύφους, όπου διαπιστώθηκε ότι η συμπεριφορά των υστερητικών στοιχείων κελύφους ήταν αρκετά

κοντά στην συμπεριφορά των στοιχείων του NASTRAN. Παρατηρήθηκαν ωστόσο μικροαποκλίσεις, ιδιαίτερα κατά την εφαρμογή φόρτισης με μορφή ημιτόνου στο ελεύθερο άκρο του φορέα. Το αποτέλεσμα αυτό ωστόσο δεν αναιρεί την εν γένη καλή συμπεριφορά των στοιχείων.

Πέραν των παραπάνω φάνηκε και η ευελιξία της προτεινόμενης διατύπωσης, καθώς προέκυψε ότι με κατάλληλες τροποποιήσεις των παραμέτρων της ανάλυσης, μπορούμε να προσομοιώσουμε την συμπεριφορά του υπόψη κελύφους για ανάλυση με πολύ μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων. Για περεταίρω συγκρίσεις στα φυσικά μεγέθη, αλλά και στους υπολογιστικούς χρόνους για επιλύσεις ίσης ακρίβειας απαιτείται η μεταφορά του κώδικα σε μία από τις αλγοριθμικές γλώσσες προγραμματισμού όπως Fortran ή C. Όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα τα στοιχεία που προτείνονται αποτελούνται από ένα πλήθος βαθμών ελευθερίας, συγκεκριμένα 45, με αποτέλεσμα να απαιτείται η διαχείριση μητρώων μεγάλων διαστάσεων.

Σαν πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου μπορούν να θεωρηθούν, καταρχήν η χρησιμοποίηση οποιουδήποτε κριτηρίου διαρροής και κυρίως οποιουδήποτε νόμου κράτυνσης, πέρα από τη γραμμική κινηματική. Επιπρόσθετα, όσον αφορά τη διαδικασία επίλυσης, μέσω της μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης Newmark το πρόβλημα επιλύεται δυναμικά, επιβάλλοντας το εξωτερικό φορτίο σε βήματα.

Η ευελιξία του προτεινόμενου μοντέλου, εμφανίζεται ακόμα μεγαλύτερη στην περίπτωση απομειούμενων μοντέλων (απομείωση δυσκαμψίας, υποβάθμιση αντοχής, ολίσθηση κ.λ.π.), όπου η συμπεριφορά προσδιορίζεται με βάση ένα πρόσθετο αριθμό παραμέτρων.



Εικόνα 7.1 Ο αλγόριθμος Newton – Raphson

Το συνολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής, όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα, επιμερίζεται σε δύο επιμέρους μητρώα, ένα ελαστικό και ένα υστερητικό, αντίστοιχα. Το ελαστικό παραμένει σταθερό και αρκεί ο υπολογισμός του μία φορά κατά τη διάρκεια της ανάλυσης. Αντίθετα, το υστερητικό μητρώο εξαρτάται από τις υστερητικές τάσεις και για το σκοπό αυτό απαιτείται ο

υπολογισμός του σε κάθε βήμα της ανάλυσης. Το υστερητικό μητρώο υπολογίζεται άμεσα κατά τα κοινά της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το «εφαπτομενικό» καταστατικό μητρώο της σχέσης (5.57). Μέσω της παραπάνω διαδικασίας βλέπουμε ότι η μέθοδος διαφοροποιείται από την κλασσική μέθοδο Newton – Raphson, καθώς αποφεύγει τις επαναλήψεις ισορροπίας και συνεπώς την ανάγκη ελέγχου σύγκλισης των αποτελεσμάτων σε κάθε βήμα. Επίσης, όπως είναι γνωστό, στη μέθοδο Newton – Raphson καθοριστικοί για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι οι υπολογισμοί του εφαπτομενικού μητρώου δυσκαμψίας και των επικόμβιων δυνάμεων $\{f_n\}$ σε κάθε βήμα. Αντίθετα, στην εργασία αυτή αρκεί μόνο ο υπολογισμός των υστερητικών τάσεων, στα σημεία Gauss των στοιχείων, για την εκτίμηση του υστερητικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής.

Ένα πρόβλημα της προτεινόμενης μεθοδολογίας στη παρούσα μορφή της είναι ο καθορισμός της καθ' ύψος θέσης της διατομής στην οποία απαιτείται να γίνει ο υπολογισμός των υστερητικών τάσεων που στην εργασία πραγματοποιείται με δοκιμές. Η επιλογή της ακραίας ίνας οδηγεί σε μη ρεαλιστικά αποτελέσματα εμφανίζοντας τα στοιχεία και γενικά τη κατασκευή να διαρρέει νωρίτερα από τη «πραγματική». Το πρόβλημα αυτό γίνεται αντιληπτό με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων της MATLAB με αυτά του κώδικα NASTRAN στον οποίο δεν είναι σαφές πως χειρίζεται το όλο θέμα. Μία αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού μπορεί να είναι είτε προς την κατεύθυνση ελέγχου των τάσεων σε ένα προκαθορισμένο αριθμό σταθμών καθ' ύψος της διατομής και του εντοπισμού για κάθε στοιχείο του ύψους της στάθμης της διαρροής, ή της έκφρασης του κριτηρίου διαρροής ως συνάρτηση των υστερητικών εντατικών μεγεθών της διατομής ώστε να ξεπεραστεί το όλο πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

- [1]. Akhtar, S. Khan and Sujian Huang. *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [2]. Baaser, H. *Development and Application of the Finite Element Method Based on MATLAB*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [3]. Bathe, K.J. and Bolourchi, S. *A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element*, Computers & Structures, Vol. 11. pp. 23-48.
- [4]. Bathe, K.J., Dvorkin, E.N. and Ho, Lee W. *Our Discrete - Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear analysis - an Assessment*, Computers & Structures, Vol. 16 No 1 - 4, pp. 89-98, 1983.
- [5]. Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1996.
- [6]. Butcher, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 2008.
- [7]. Calladine, C. R. *Theory of Shell Structures*, Cambridge University Press, New York, 1983.
- [8]. Chakrabarty, J. *Applied Plasticity, Second Edition*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- [9]. Chakrabarty, J. *Theory of Plasticity*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, Elsevier Butterworth - Heinemann, Oxford, 2006.
- [10]. Chapelle, D. and Bathe, K. J. *The Finite Element Analysis of Shells, Fundamentals, Second Edition*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2003, 2011.
- [11]. Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J. *A continuum Mechanics Based Four - node Shell Element for General Nonlinear Analysis*, Eng. Comput, 1984, Vol. 1, March.
- [12]. Ferreira, A.J.M. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis, Solids and Structures*, Springer, 2009.
- [13]. Fish, J. and Belytschko, T. *A First Course in Finite Elements*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 2007.
- [14]. Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. *A Simple Matrix - Vector Handling Scheme for Three - Dimensional and Shell Analysis*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 2, 509-522, 1970.
- [15]. Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 2, 419-451, 1970.
- [16]. Ismail, M., Ikhouane, F. and Rodellar, J. *The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey*, Arch. Comput Methods Eng, Vol 16, 161-188, 2009.
- [17]. Kachanov, L. M. *Foundations of the Theory of Plasticity*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam - London, 1971.
- [18]. Kattan, P. I. *MATLAB Guide to Finite Elements, An Interactive Approach*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

- [19]. Kwon, Y. W. and Bang, H. *The Finite Element Method Using MATLAB, Second Edition*, CRC Press, Florida, 2000.
- [20]. Lee, H. J. *Ordinary and Partial Differential Equation Routines in C, C++, Fortran, Java, Maple, and MATLAB*, Chapman & Hall, Florida, 2004.
- [21]. Lubliner, J. *Plasticity Theory*, Pearson Education, Inc., 1990.
- [22]. Mase, G. T. and Mase, G. E. *Continuum Mechanics for Engineers, Third Edition, Computational Mechanics and Applied Analysis*, CRC Press LLC, 1999.
- [23]. Moler, C. *Numerical Computing with MATLAB*, 2008.
- [24]. Neto de Sousa, E.A., Peric, D. and Owen, D. R. J. *Computational Methods for Plasticity, Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 2008.
- [25]. Simeonov, V.K. *Nonlinear Analysis of Structural Frame Systems by the State Space Approach*, Computer - Aided Civil and Infrastructure Engineering, Vol. 15, 76 – 89, 2000.
- [26]. Timoshenko, S. and Woinowsky - Krieger, S. *Theory of Plates and Shells, Second Edition*, McGraw - Hill, 1959.
- [27]. Triantafyllou, S.P. and Koumousis, V.K. *A Bouc-Wen Type Hysteretic Plane Stress Element*, American Society of Civil Engineering (in press).
- [28]. Triantafyllou, S.P. and Koumousis, V.K. *A Hysteretic Quadrilateral Plane Stress Element*, 7th GRACM International Congress on Computational Mechanics Athens, 30 June – 2 July 2011.
- [29]. Triantafyllou, S.P. and Koumousis, V.K. *Small and Large Displacement Dynamic Analysis of Frame Structures Based on Hysteretic Beam Elements*, American Society of Civil Engineering (in press).
- [30]. Ventsel, E. and Krauthammer, T. *Thin Plates and Shells. Theory, Analysis and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.
- [31]. Wu, Han-Chin. *Continuum Mechanics and Plasticity. Modern Mechanics and Mathematics*, Chapman & Hall, Florida, 2005.
- [32]. Yang, Henry T. Y., Saigal, S., Masud, A. and Kapania, R. K. *A survey of recent shell finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 47, 101 – 127, 2000.
- [33]. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L. *Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 2: Solid Mechanics*, Elsevier Butterworth - Heinemann, Oxford, 2000.
- [34]. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L. *Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 2: The Basis*, Elsevier Butterworth - Heinemann, Oxford, 2000.
- [35]. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Sixth Edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
- [36]. Κατοικαδέλης, Ι. Θ. *Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2007.
- [37]. Κατοικαδέλης, Ι. Θ. *Δυναμική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2007.
- [38]. Παπαδρακάκης, Μ. *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2001.
- [39]. Τσαμασφύρος, Γ. Ι. και Θεοτόκογλου Ε. Ε. *Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2005.

