



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

**Αριθμητική επίλυση προβλημάτων θερμοελαστικότητας  
σε μέσα μεταβλητών ιδιοτήτων**

Μεταπτυχιακή εργασία του Νικολαράκη Αντώνιου,  
Πολιτικού Μηχανικού ΕΜΠ, MSc

Επιβλέπων: Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012



## Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η

Αντικείμενο της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας αποτελεί η εφαρμογή της θεωρίας της Θερμοελαστικότητας σε μέσα μεταβλητών ιδιοτήτων (functionally graded materials – FGMs). Η ανάλυση πραγματοποιείται με χρήση της αριθμητικής Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Για την υλοποίηση της μεθόδου κατασκευάζεται κώδικας σε περιβάλλον Matlab.

Αρχικά παρουσιάζονται οι εξισώσεις που εκφράζουν τη σύζευξη του παραμορφωσιακού και του θερμοκρασιακού πεδίου σε ένα συνεχές μέσο, στη γενική περίπτωση τρισδιάστατου προβλήματος ανομοιογενούς, ανισότροπου υλικού. Οι εξισώσεις προσαρμόζονται κατάλληλα στις ειδικότερες περιπτώσεις του επίπεδου και του μονοδιάστατου προβλήματος. Εξετάζονται οι περιπτώσεις ιστροπίας και ομοιογένειας. Επίσης εξετάζεται η περίπτωση του ασύζευκτου προβλήματος.

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για το μονοδιάστατο και το επίπεδο πρόβλημα, στην περίπτωση ισότροπου (ομοιογενούς ή μη) υλικού. Εξάγονται τα μητρώα των πεπερασμένων στοιχείων και καθορίζεται η μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης (μέθοδος Euler).

Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία αλγορίθμου σε περιβάλλον Matlab. Παρουσιάζονται εφαρμογές σε σύνθετο υλικό με στρώσεις κεραμικού (Ζιρκονία) και μετάλλου (Νικέλιο). Τοποθετείται στρώση FGM ανάμεσα στη στρώση κεραμικού και μετάλλου και εξετάζεται η επίδρασή της στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Ειδικότερα, αναλύεται το μονοδιάστατο πρόβλημα του σύνθετου υλικού με τρεις στρώσεις (κεραμικό-FGM-μέταλλο) υπό τις εξής συνοριακές συνθήκες:

- i. επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας (συνθήκες Dirichlet)
- ii. μεταφορά θερμότητας από τον περιβάλλοντα αέρα στο σύνθετο υλικό με συναγωγή (συνθήκες Robin).

Επιπλέον, μελετάται το ασύζευκτο πρόβλημα της μεταφοράς θερμότητας στις δύο διαστάσεις, υπό συνοριακές συνθήκες Neumann.

Τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της ανάλυσης και προτείνονται θέματα για μελλοντική έρευνα.



## ABSTRACT

The current post-graduate project presents the theory of Thermoelasticity in the case of functionally graded materials (FGMs). The Finite Element Method is used for the analysis. The numerical calculations are performed via the construction of Matlab code.

Initially, the derivation of the equations of thermoelasticity is performed. The cases of one-dimensional and two-dimensional problems are presented. Also, the special cases of homogeneity and isotropy are examined. The last paragraph of Chapter 2 is about the uncoupled problem of thermoelasticity.

The Finite Element Method is then applied to the equations of one-dimensional and two-dimensional problems, in the case of isotropy. The Finite Element matrices are calculated. The Euler Method is used for the time integration.

The results of the above procedure are used for the construction of code in Matlab. The code is used for the analysis of a 3-layered Ceramic-Metal composite. The 3 layers are consisted of Ceramic (Zirconia), FGM and Metal (Nikelium), respectively.

More specifically, the thermomechanical behaviour of the 3-layered is analysed in the case of one-dimensional problem and the following boundary conditions:

- i. thermal shock in the upper boundary (Dirichlet conditions)
- ii. heat transfer by convection (Robin conditions).

The two-dimensional uncoupled problem of heat transfer is also examined, in the case of Neumann boundary conditions.

Finally, the results of the analysis are discussed and suggestions for future research are presented.



# Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	<b>1</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
1.1 Το συνεχές μέσο και οι βασικές του ιδιότητες. Θερμοελαστικότητα και εφαρμογή	3
1.2 Υλικά μεταβλητών ιδιοτήτων	4
1.3 Κατασκευή των FGMs και μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς τους	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Θερμοελαστικότητα</b>	<b>7</b>
2.1 Βασικές εξισώσεις	7
2.2 Συζευγμένες εξισώσεις. Περίπτωση ισοτροπίας	9
2.3 Επίπεδο πρόβλημα θερμοελαστικότητας στην περίπτωση ισοτροπίας	12
2.4 Μονοδιάστατο πρόβλημα θερμοελαστικότητας ισότροπου υλικού	13
2.5 Ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας. Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας	14
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων</b>	<b>17</b>
3.1 Αριθμητική ανάλυση μονοδιάστατου προβλήματος ισότροπου και ομοιογενούς υλικού	17
3.2 Μόρφωση καθολικών μητρώων στην περίπτωση απουσίας καθολικών δυνάμεων και πηγών θερμότητας	23

3.3	Χρονική ολοκλήρωση	25
3.4	Αριθμητική ανάλυση μονοδιάστατου προβλήματος ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού	27
3.5	Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση επίπεδου προβλήματος ισότροπου και ομοιογενούς υλικού	31
3.6	Επίπεδο πρόβλημα ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού	41
3.7	Ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας. Υπολογισμός μητρώων πεπερασμένων στοιχείων της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας για το επίπεδο πρόβλημα	46
3.8	Συνοριακοί όροι. Συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin	47
	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογές</b>	<b>51</b>
4.1	Δομή αλγορίθμου	51
4.2	Εφαρμογή σε σύνθετο υλικό κεραμικού-μετάλλου (FGM)	52
4.3	Έλεγχος σύγκλισης του αλγορίθμου για την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος ομογενούς και ισότροπου υλικού	54
4.4	Σύγκριση ομογενούς μετάλλου με σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (χωρίς FGM), υπό την επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας	61
4.5	Η επίδραση του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, υπό την επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας	72
4.6	Σύγκριση ομογενούς μετάλλου με σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (χωρίς FGM), υπό συνθήκες μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή στην άνω επιφάνεια	83
4.7	Η επίδραση του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, υπό συνθήκες μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή στην άνω επιφάνεια	92



4.8	Ανάλυση του επίπεδου ασύζευκτου προβλήματος της μεταφοράς θερμότητας στο σύνθετο υλικό (κεραμικό-FGM-μέταλλο), υπό συνθήκες σταθερής ροής θερμότητας	101
4.9	Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα	108
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>111</b>



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία μελετά την θερμομηχανική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με στρώσεις. Ειδικότερα, εξετάζεται η επίδραση στρώσης υλικού με διαβαθμισμένες ιδιότητες (functionally graded material - FGM) σε σύνθετο υλικό κεραμικού-μετάλλου.

Το πρώτο εισαγωγικό κεφάλαιο αναφέρεται στις ιδιότητες του συνεχούς μέσου. Επιπλέον, εκτενής αναφορά γίνεται για τα FGM, τη χρήση τους και τις μεθόδους ανάλυσης. Αιτιολογείται η χρήση υπολογιστικής μεθόδου (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων) και εισάγει το πλαίσιο της θεωρίας της Θερμοελαστικότητας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία της Θερμοελαστικότητας. Εξάγονται οι εξισώσεις για το γενικό, τρισδιάστατο, πλήρως συζευγμένο πρόβλημα. Εξετάζονται οι περιπτώσεις προβλημάτων στις δύο διαστάσεις, τη μία διάσταση, καθώς και οι ειδικές περιπτώσεις ισοτροπίας και ομοιογένειας. Επιπλέον, εξάγονται οι εξισώσεις για το ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας.

Στο τρίτο κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στις εξισώσεις του μονοδιάστατου και του δισδιάστατου προβλήματος, στην περίπτωση ισοτροπίας. Υπολογίζονται τα μητρώα των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση ομογενούς υλικού, αλλά και για την περίπτωση ανομοιογενούς υλικού. Εξετάζεται ακόμη η περίπτωση του ασύζευκτου επίπεδου προβλήματος θερμοελαστικότητας και υπολογίζονται τα μητρώα των πεπερασμένων στοιχείων για την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας. Αναφορά γίνεται στη μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης Implicit Euler, η οποία και χρησιμοποιείται για την ανάλυση. Αναλύονται οι δυνατές συνοριακές συνθήκες (Dirichlet, Neumann, Robin).

Το τέταρτο κεφάλαιο αφορά τις εφαρμογές. Αρχικά παρουσιάζεται η δομή του κώδικα που υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab. Στη συνέχεια περιγράφεται η σύνθεση των στρώσεων του σώματος που αναλύεται. Ελέγχεται η σύγκλιση του αλγορίθμου ως προς τις διαθέσιμες στη βιβλιογραφία αναλυτικές λύσεις για την περίπτωση ελαστικού ημίχωρου από ομογενές υλικό. Ακολουθούν αναλύσεις για το μονοδιάστατο πρόβλημα με σύνθετο υλικό τριών στρώσεων (κεραμικό-FGM-μέταλλο). Επιπλέον, εξετάζεται το δισδιάστατο πρόβλημα της ασύζευκτης εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας. Το κεφάλαιο κλείνει με συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία υλοποιήθηκε κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2011-12, στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Υπολογιστική Μηχανική», με συντονίζουσα σχολή των Χημικών Μηχανικών ΕΜΠ.

Στο σημείο αυτό, οφείλω να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή της εργασίας Ευστάθιο Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητή ΕΜΠ, για τις συμβουλές και τις παρατηρήσεις του. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο και φίλο Δρ. Μηχανολόγο Μηχανικό ΕΜΠ Θεοδόσιο Παπαθανασίου, η βοήθεια του οποίου στην παρούσα εργασία υπήρξε πολύτιμη.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Το συνεχές μέσο και οι βασικές του ιδιότητες. Θερμοελαστικότητα και εφαρμογή

Η μηχανική του συνεχούς μέσου ασχολείται με τη μελέτη του πεδίου των τάσεων, του πεδίου των μετατοπίσεων καθώς και με τις ροές (π.χ. θερμότητας) που αναπτύσσονται σε στερεά, υγρά ή αέρια σώματα. Η έννοια του «συνεχούς» μέσου αναφέρεται στην απλοποιητική παραδοχή της μη ύπαρξης κενών σε ένα σώμα, παρακάμπτοντας με τον τρόπο αυτό την μοριακή δομή της ύλης.

Οι βασικές ιδιότητες του συνεχούς μέσου είναι οι εξής [7]:

- **Συνέχεια:** Ένα σώμα χαρακτηρίζεται ως συνεχές εάν δεν υπάρχουν κενά σε αυτό. Επιπλέον, η κατάστασή του (π.χ. θερμοκρασία, μετακίνηση κ.α.) περιγράφεται από *συνεχείς* συναρτήσεις. Η συνέχεια είναι ιδιότητα που προφανώς κατέχει κάθε συνεχές μέσο.
- **Ομοιογένεια:** Ομοιογενές σώμα είναι εκείνο που έχει σταθερές ιδιότητες σε όλα τα σημεία του.
- **Ισοτροπία:** Ένα μέσο είναι ισότροπο σε κάποιο σημείο του όταν οι ιδιότητές του είναι ίδιες σε κάθε κατεύθυνση.

Η θερμοελαστικότητα είναι ο κλάδος της μηχανικής συνεχούς μέσου που ερευνά την αλληλεπίδραση του παραμορφωσιακού και του θερμοκρασιακού πεδίου σε ένα συνεχές μέσο. Ουσιαστικά, ενοποιεί τις θεωρίες ελαστικότητας και μεταφοράς θερμότητας, οι οποίες αποτελούν και τους δύο βασικούς κλάδους της.

Η πρώτη δημοσίευση σχετικά με τη θερμοελαστικότητα πραγματοποιήθηκε από τον J.M.C. Duhamel στο Journal de l'École Polytechnique, το 1837 [4]. Η δημοσίευσή του περιείχε τη μόρφωση προβλημάτων συνοριακών συνθηκών, καθώς και την εξαγωγή των εξισώσεων σύζευξης του θερμοκρασιακού πεδίου και της παραμόρφωσης ενός συνεχούς μέσου.

Είναι φανερό πως ο κλάδος αυτός είναι εξαιρετικά νέος. Μία μοντέρνα εφαρμογή της θερμοελαστικότητας αποτελεί η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων σωμάτων από μέταλλο και κεραμικό υλικό, όπου ανάμεσά τους παρεμβάλλεται υλικό διαβαθμισμένων ιδιοτήτων. Η εφαρμογή αυτή περιγράφεται στα επόμενα.

## 1.2 Υλικά μεταβλητών ιδιοτήτων

Τα δομικά μέλη κάθε κατασκευής αποτελούνται από υλικά κατάλληλων προδιαγραφών. Ωστόσο, είναι προφανές πως οι επιβαλλόμενες εξωτερικές συνθήκες (παραμορφώσεις, τάσεις, θερμοκρασιακές μεταβολές κλπ.) που επιβάλλονται στα δομικά μέλη διαφέρουν σε κάθε σημείο τους. Επιπροσθέτως, οι απότομες μεταβολές στις ιδιότητες των υλικών τους συχνά οδηγούν σε τοπικές συγκεντρώσεις τάσεων.

Οι παρατηρήσεις αυτές ουσιαστικά συνθέτουν τη φιλοσοφία των υλικών μεταβλητών ιδιοτήτων (functionally graded materials - FGMs). Εξ' ορισμού, τα FGMs χρησιμοποιούνται για τη σύνθεση δομικών μελών με βαθμιαία μεταβλητές ιδιότητες, ανάλογα με τις απαιτήσεις που υπάρχουν σε κάθε σημείο τους. Επομένως, η χρήση των υλικών αυτών οδηγεί στη βελτιστοποίηση της συνολικής απόδοσής τους.

Ειδικότερα, τα FGMs παρέχουν τη δυνατότητα βελτίωσης των θερμομηχανικών χαρακτηριστικών ενός δομικού μέλους ως εξής:

- Μείωση των θερμικών τάσεων. Ταυτόχρονα, είναι δυνατή η πρόβλεψη των θέσεων όπου οι θερμικές τάσεις μεγιστοποιούνται.
- Καθυστερήση της εμφάνισης πλαστικών παραμορφώσεων για δεδομένη θερμομηχανική φόρτιση.
- Περιορισμός του φαινομένου συγκέντρωσης τάσεων και των ιδιομορφιών που εμφανίζονται στις ενδοεπιφάνειες, αλλά και σε περιοχές απότομης μεταβολής της γεωμετρίας (π.χ. εγκοπές ή εξογκώματα).
- Δυνατότητα βαθμιαίας μετάβασης μεταξύ διαφορετικών υλικών με άμεση συνέπεια την αύξηση της συνοχής στην περίπτωση σύνθετων υλικών. Ενδεικτικά αναφέρεται η εναπόθεση σχετικά παχιάς ψαθυρής επικάλυψης επί ελαστικού υποστρώματος μέσω υλικών διαβαθμισμένων ιδιοτήτων.
- Μείωση της πιθανότητας εμφάνισης και διάδοσης ρωγμών κατά μήκος των ενδοεπιφανειών.

Η συνήθης πρακτική για κατασκευές που αποτελούνται από διαφορετικά ομοιογενή υλικά είναι η ένωσή τους με μηχανικά μέσα σύνδεσης. Οι συνδέσεις αυτές καταπονούνται ιδιαίτερα και, συχνά, οι αστοχίες εμφανίζονται ακριβώς στα σημεία των μηχανικών συνδέσεων. Τα FGMs προσφέρουν τη δυνατότητα ένωσης διαφορετικών υλικών μέσω μίας ενδοεπιφάνειας βαθμιαία μεταβλητών ιδιοτήτων, ώστε η μετάβαση από το ένα υλικό στο άλλο να γίνεται με τρόπο ομαλό (σε επίπεδο μικροδομής).

Τα τελευταία χρόνια τα FGMs βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορες κατασκευές όπως ανθρώπινα εμφυτεύματα, μαγνητικές συσκευές, πυρίμαχα δομικά υλικά, εργαλεία κοπής κ.α. Είναι μάλιστα αξιοσημείωτο πως η φιλοσοφία των FGMs απαντάται στην ίδια τη φύση, όπως ισχύει για τη δομή των οστών των ζωντανών οργανισμών αλλά και των δένδρων. Οι «φυσικές κατασκευές» έχουν την πρόσθετη ικανότητα της δυναμικής προσαρμογής τους στη μεταβολή των συνθηκών του περιβάλλοντος στο οποίο ζουν.

### 1.3 Κατασκευή των FGMs και μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς τους

Τα FGMs κατηγοριοποιούνται σε δύο βασικές οικογένειες, ανάλογα με τη μέθοδο κατασκευής τους [9]:

- Στην πρώτη κατηγορία η κατασκευή πραγματοποιείται ανά στρώση. Η διαβάθμιση των ιδιοτήτων επιτυγχάνεται μέσω της βαθμιαίας διαφοροποίησης των ιδιοτήτων κάθε στρώσης. Η τεχνική αυτή ονομάζεται «Δομική διαδικασία» (Constructive process) και είναι πλέον εφικτή, καθώς δύναται να καθοδηγηθεί μέσω χρήσης ηλεκτρονικού υπολογιστή.
- Στη δεύτερη κατηγορία η κατασκευή βασίζεται σε φυσικά φαινόμενα μεταφοράς, όπως είναι η ροή των ρευστών, η μεταφορά θερμότητας, η ατομική διάχυση. Οι διαδικασίες αυτές είναι προφανώς λιγότερο ελεγχόμενες, ωστόσο η εις βάθος κατανόηση και η ποσοτικοποίηση των φαινομένων μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή FGMs με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς τους, στις πλείστες των περιπτώσεων, γίνεται μέσω υπολογιστικών μεθόδων, όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method). Η χρήση προσεγγιστικών αναλυτικών μοντέλων (Voigt Model, Reuss Model, Halpin-Tsai equation [9] κλπ.), όπου επιδιώκεται η συνολική αποτίμηση των ιδιοτήτων ενός FGM μέσω υιοθέτησης ενός «μέσου» μητρώου ακαμψίας και ενός «μέσου» συντελεστή θερμικής διαστολής, έχει περιορισμένο εύρος εφαρμογών. Συγκεκριμένα, οι αναλυτικές μέθοδοι εφαρμόζονται μόνο σε περιπτώσεις απλής γεωμετρίας (π.χ. σφαίρα ή κύλινδρος) και ομαλής χωρικής κατανομής των ιδιοτήτων του υλικού. Στην γενική περίπτωση τυχαίας γεωμετρίας ή χωρικής κατανομής των θερμομηχανικών χαρακτηριστικών, η καταφυγή σε υπολογιστικές μεθόδους είναι επί της ουσίας μονόδρομος.

Η παραδοχή θερμοελαστικής συμπεριφοράς στο πλαίσιο μικρών μεταβολών της θερμοκρασίας και μικρών παραμορφώσεων, απλοποιεί την υπολογιστική διαδικασία ενώ παράλληλα παρέχει ικανοποιητικώς ακριβή αποτελέσματα για πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Μία εξαιρετική εισαγωγή στα FGMs πραγματοποιείται από τους S. Suresh και A. Mortensen [9]. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στην εφαρμογή τους στην περίπτωση κατασκευής από μέταλλο με επικάλυψη κεραμικού υλικού, η οποία υποβάλλεται σε υψηλές θερμοκρασίες. Το FGM χρησιμοποιείται ως ενδοεπιφάνεια ανάμεσα στο μέταλλο και το κεραμικό υλικό. Στα κεφάλαια που ακολουθούν μελετάται η επίδραση του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, υπό το πλαίσιο της θεωρίας της θερμοελαστικότητας.





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Θερμοελαστικότητα

#### 2.1 Βασικές εξισώσεις

Έστω συνεχές στερεό μέσο, το οποίο υπόκειται σε εξωτερικές φορτίσεις και θέρμανση/ψύξη. Το υλικό του υποτίθεται γραμμικό ελαστικό. Στην κατάσταση αναφοράς οι τάσεις (και οι παραμορφώσεις) θεωρούνται μηδενικές, ενώ η θερμοκρασία του είναι ομοιόμορφη και ίση προς  $T_0$ .

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της θερμοελαστικότητας που διέπουν το συνεχές στερεό μέσο, στο πλαίσιο μικρών μεταβολών τόσο στο παραμορφωσιακό, όσο και στο θερμοκρασιακό του πεδίο [3, 8]. Για τη διατύπωση των εξισώσεων επιλέγεται ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ). Το κόμμα πριν από δείκτη υποδηλώνει μερική παραγωγή ως προς την αντίστοιχη χωρική συντεταγμένη, δηλαδή  $f_{,i} \equiv \partial f / \partial x_i$ . Ακόμη, η υπερκείμενη τελεία υποδηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο, δηλαδή  $\dot{f} \equiv df/dt$ .

Υπό την παραδοχή μικρών μετατοπίσεων και παραμορφώσεων, οι τροπές δίνονται από τις εξής γεωμετρικές σχέσεις:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.1)$$

όπου  $u_i$  είναι το διάνυσμα της μετατόπισης και  $e_{ij}$  ο τανυστής των απειροστών τροπών.

Η θερμοκρασία στην τρέχουσα κατάσταση συμβολίζεται με  $T$ , συνεπώς η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι:

$$\theta = T - T_0. \quad (2.2)$$

Με την επιπλέον παραδοχή της μικρής μεταβολής του θερμοκρασιακού πεδίου του στερεού ( $\theta/T_0 \ll 1$ ) οι καταστατικές εξισώσεις έχουν τη μορφή:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta, \quad (2.3)$$

όπου  $\sigma_{ij}$  είναι ο τανυστής των τάσεων,  $C_{ijkl}$  είναι ο τανυστής των ελαστικών σταθερών και  $\beta_{ij}$  είναι ο τανυστής των θερμικών σταθερών.

Η αρχή διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας), η αρχή διατήρησης της ορμής (εξίσωση κίνησης) και η αρχή διατήρησης της στροφορμής (συμμετρία τανυστή τάσεων) διατυπώνονται ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \\ \sigma_{ji,j} + X_i = \rho \dot{v}_i \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{array} \right\}, \quad (2.4)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του συνεχούς μέσου,  $v_i$  το διάνυσμα της ταχύτητας και  $X_i$  το διάνυσμα των κατ' όγκον καθολικών δυνάμεων.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας (1<sup>ος</sup> θερμοδυναμικός νόμος) έχει αρχικά τη μορφή:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{U} + \mathcal{K}) = \mathcal{L} + \frac{dQ}{dt} + Z, \quad (2.5)$$

όπου  $\mathcal{U}$  είναι η εσωτερική ενέργεια,  $\mathcal{K}$  είναι η κινητική ενέργεια,  $\mathcal{L}$  η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων (power of external forces),  $Q$  η θερμότητα που εισάγεται στο μέσο και  $Z$  είναι ο ρυθμός με την οποίο παράγεται θερμότητα λόγω πηγών.

Η τελική μορφή της αρχής διατήρησης της ενέργειας (εξίσωση ενέργειας) λαμβάνεται χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις τρεις προηγούμενες αρχές (εξίσωση συνέχειας, εξίσωση κίνησης, συμμετρία τανυστή τάσεων) και είναι η ακόλουθη:

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - q_{i,j} + Z, \quad (2.6)$$

όπου  $U$  είναι κατ' όγκον εσωτερική ενέργεια (specific internal energy) και  $q_i$  είναι το διάνυσμα της ροής ισχύος θερμότητας (power of thermal flux vector) στο στερεό μέσο.

Κατ' αναλογία με την εσωτερική ενέργεια, η εντροπία είναι συνάρτηση της κατάστασης ενός θερμοδυναμικού συστήματος – και ως τέτοιο εξετάζεται το στερεό μέσο από την σκοπιά της θεωρίας μεταφοράς θερμότητας. Η εξίσωση ισορροπίας της εντροπίας είναι της μορφής:

$$\dot{S} = -\frac{q_{i,j}}{T} + \frac{Z}{T} = -\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2} + \frac{Z}{T}, \quad (2.7)$$

όπου  $S$  είναι η κατ' όγκον εντροπία (specific entropy).

Ο όρος  $q_i/T$  εκφράζει το ρυθμό της χωρικής μεταβολής (ροής) της εντροπίας λόγω ανταλλαγής θερμότητας του συνεχούς μέσου με το περιβάλλον, ενώ ο όρος  $-q_i T_{,i}/T^2$

εκφράζει το ρυθμό παραγωγής εντροπίας (πηγή εντροπίας). Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό νόμο ο ρυθμός παραγωγής εντροπίας οφείλει να είναι θετικός, συνεπώς η ποσότητα  $q_i T_{,i}$  είναι αρνητική. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει πως η ροή θερμότητας έχει αντίθετο πρόσημο προς την κλίση της θερμοκρασίας – με άλλα λόγια πως η ροή θερμότητας πραγματοποιείται από τις θερμότερες προς τις ψυχρότερες περιοχές.

Ο όρος του ρυθμού παραγωγής εντροπίας δύναται να αναλυθεί περαιτέρω ως εξής:

$$\dot{s}_i = -\frac{q_i T_{,i}}{T^2} = \frac{q_i}{T} \cdot \left( -\frac{T_{,i}}{T} \right). \quad (2.8)$$

Στην παραπάνω σχέση η πηγή εντροπίας προκύπτει ως το γινόμενο μίας γενικευμένης δύναμης ( $-T_{,i}/T$ ) και της συνεπαγόμενης γενικευμένης ροής ( $q_i/T$ ). Ο νόμος Fourier συνδέει την αιτία (γενικευμένη δύναμη) με το αποτέλεσμα (γενικευμένη ροή):

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = -k_{ij} T_{,j} \\ k_{ij} = k_{ji} \end{array} \right\}, \quad (2.9)$$

όπου  $k_{ij}$  είναι ο τανυστής των σταθερών μεταφοράς θερμότητας.

Ο νόμος Fourier είναι μία ειδική περίπτωση φαινομενολογικής σχέσης, όπου η σχέση αιτίας-αποτελέσματος είναι γραμμική. Στις φαινομενολογικές σχέσεις ισχύει η αρχή Onsager (Onsager principle), η οποία ικανοποιείται από τη συμμετρία του τανυστή  $k_{ij}$ .

Τέλος, εισάγωντας την έννοια της ειδικής θερμοχωρητικότητας του υλικού  $c_v$  σε σταθερό όγκο (δηλαδή για  $\dot{\epsilon}_{ij} = \mathbf{0}$ ) [2], η απόκλιση της ροής θερμότητας εκφράζεται ως ακολούθως:

$$-q_{i,i} = \rho c_v \dot{T} - Z. \quad (2.10)$$

## 2.2 Συζευγμένες εξισώσεις. Περίπτωση ισοτροπίας

Οι εξισώσεις που αναφέρονται στην προηγούμενη παράγραφο αποτελούν τις βασικές εξισώσεις της θερμοελαστικότητας. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.1) και (2.3) στην δεύτερη των εξισώσεων (2.4), και χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\dot{v}_i = \ddot{u}_i$ , προκύπτει η γενική εξίσωση της ελαστικότητας:

$$\left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) - \beta_{ij} \theta \right]_{,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.11)$$

Η επεξεργασία των εξισώσεων που αφορούν της μεταφοράς θερμότητας διευκολύνεται μέσω της εισαγωγής της συνάρτησης της κατ' όγκον ελεύθερης ενέργειας Helmholtz (Specific Helmholtz's Free Energy Function):

$$F \equiv U - TS. \quad (2.12)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.6), έπεται ότι  $\dot{F} = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} - \dot{T}S \Rightarrow dF = \sigma_{ij} de_{ij} + (-S)dT$ , συνεπώς:

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -S. \quad (2.13)$$

Λόγω του δεύτερου σκέλους της σχέσης (2.13), η σχέση (2.7) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} -\frac{q_{i,j}}{T} + \frac{Z}{T} &= \dot{S} = \frac{\partial S}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} + \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \dot{e}_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} \Rightarrow \\ \Rightarrow -q_{i,j} + Z &= -T \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \dot{e}_{ij} - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} \Rightarrow \\ -q_{i,j} + Z &= -T \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} \dot{e}_{ij} - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με τη σχέση (2.10), η οποία ισχύει για  $\dot{e}_{ij} = \mathbf{0}$ , συνεπάγεται ότι:

$$\rho c_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}. \quad (2.15)$$

Επιπλέον, λόγω του πρώτου σκέλους της σχέσης (2.13), της σχέσης (2.1) και της σχέσης (2.3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} = \frac{\partial (C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta)}{\partial T} = -\frac{\partial (\beta_{ij} \theta)}{\partial T} = -\beta_{ij} \frac{\partial (T - T_0)}{\partial T} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial T} &= -\beta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Λόγω των σχέσεων (2.15) και (2.16), η σχέση (2.14) λαμβάνει τη μορφή:

$$-q_{i,j} + Z = \rho c_v \dot{T} + T \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.17)$$

Ουσιαστικά, η εξίσωση (2.17) αποτελεί μία γενίκευση της σχέσης (2.10). Τελικώς, η αντικατάσταση της πρώτης από τις σχέσεις (2.9) στην εξίσωση (2.17) οδηγεί στην επόμενη σχέση:

$$(k_{ij} T_{,j})_{,i} + Z = \rho c_v \dot{T} + T \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (2.18)$$

Είναι φανερό πως υπάρχει σύζευξη ανάμεσα στις σχέσεις (2.11), (2.18), μέσω του όρου  $\beta_{ij}$ . Οι συζευγμένες σχέσεις (2.11) και (2.18) συνθέτουν το τρισδιάστατο πρόβλημα της θερμοελαστικότητας, στη γενική περίπτωση του ανισότροπου-ανομοιογενούς συνεχούς μέσου και υπό την παραδοχή μικρών μεταβολών του παραμορφωσιακού και του θερμοκρασιακού πεδίου. Με την παρατήρηση ότι  $T \simeq T_0$ , η τελική μορφή του συστήματος διαμορφώνεται ως παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,j} + u_{l,k}) - \beta_{ij} \theta \right]_{,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \\ (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} + Z = \rho c_v \dot{\theta} + \frac{1}{2} \beta_{ij} T_0 (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \\ \beta_{ij} = \beta_{ji} \\ k_{ij} = k_{ji} \\ C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Στην περίπτωση ισότροπου υλικού οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά. Οι τανυστές των θερμικών σταθερών και σταθερών μεταφοράς θερμότητας γίνονται διαγώνιοι, δηλαδή  $\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$  και  $k_{ij} = k \delta_{ij}$  αντίστοιχα, ενώ ο τανυστής των ελαστικών σταθερών ισούται με  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ji} \delta_{lk})$ . Συνεπώς, για το ισότροπο υλικό η καταστατική εξίσωση (2.3) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή [3]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta, \quad (2.20)$$

όπου  $\lambda, \mu$  είναι οι σταθερές του Lamé.

Το τρισδιάστατο πρόβλημα της θερμοελαστικότητας στην περίπτωση ισότροπου-ανομοιογενούς συνεχούς μέσου και υπό την παραδοχή μικρών μεταβολών του παραμορφωσιακού και του θερμοκρασιακού πεδίου διατυπώνεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda u_{i,j} - \beta \theta)_{,j} + [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \\ (k \theta_{,i})_{,i} + Z = \rho c_v \dot{\theta} + \beta T_0 \dot{u}_{i,i} \\ \beta = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} = (3\lambda + 2G)\alpha \end{array} \right\}, \quad (2.21)$$

όπου  $\alpha$  είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής,  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $G$  το μέτρο διάτμησης και  $\nu$  ο συντελεστής του Poisson.

Το σύστημα (2.21) απλοποιείται περαιτέρω στην περίπτωση που το υλικό, εκτός από ισότροπο, είναι και ομοιογενές. Το τρισδιάστατο πρόβλημα της θερμοελαστικότητας στην περίπτωση ισότροπου-ομοιογενούς συνεχούς μέσου και υπό την παραδοχή μικρών μεταβολών του παραμορφωσιακού και του θερμοκρασιακού πεδίου έχει την παρακάτω μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\lambda + \mu)u_{i,j} - \beta \theta]_{,j} + \mu u_{i,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i \\ k \theta_{,ii} + Z = \rho c_v \dot{\theta} + \beta T_0 \dot{u}_{i,i} \\ \beta = \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} = (3\lambda + 2G)\alpha \end{array} \right\}. \quad (2.22)$$

### 2.3 Επίπεδο πρόβλημα θερμοελαστικότητας στην περίπτωση ισοτροπίας

Στην περίπτωση επίπεδου προβλήματος, το διάνυσμα της μετατόπισης έχει δύο συνιστώσες ( $u_x, u_y$ ), ενώ τα διάφορα μεγέθη δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή  $z$ , δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = u_x(x, y, t) \\ u_y = u_y(x, y, t) \\ \theta = \theta(x, y, t) \end{array} \right\}.$$

Το σύστημα (2.21) γράφεται σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla[\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta\theta] + \nabla \cdot \left\{ \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \right\} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \nabla \cdot (k \nabla \theta) + Z = \rho c_v \dot{\theta} + \beta T_0 (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) \end{array} \right\}. \quad (2.23)$$

Στην περίπτωση ομοιογένειας το σύστημα (2.23) μετατρέπεται στο ακόλουθο:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla[(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta\theta] + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ k \nabla^2 \theta + Z = \rho c_v \dot{\theta} + \beta T_0 (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) \end{array} \right\}. \quad (2.24)$$

#### 2.4 Μονοδιάστατο πρόβλημα θερμοελαστικότητας ισότροπου υλικού

Για την περίπτωση μονοδιάστατου προβλήματος, οι διάφορες ποσότητες εξαρτώνται από τις μεταβλητές  $x$  και  $t$ , που εκφράζουν τη διεύθυνση της κίνησης και το χρόνο αντίστοιχα:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(x, t) \\ \theta = \theta(x, t) \end{array} \right\}.$$

Το σύστημα (2.21) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\theta \right] + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + Z = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \end{array} \right\}. \quad (2.25)$$

Στην περίπτωση ομοιογένειας το σύστημα (2.25) απλοποιείται περαιτέρω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\theta \right] + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Z = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \end{array} \right\}. \quad (2.26)$$

## 2.5 Ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας. Εξίσωση μεταφοράς θερμότητας

Στο σύστημα (2.19), οι όροι  $\beta_{ij}\theta$  στην εξίσωση κίνησης και  $\frac{1}{2}\beta_{ij}T_0(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$  στην εξίσωση θερμότητας εκφράζουν τη σύζευξη του παραμορφωσιακού και θερμοκρασιακού πεδίου.

Συχνά παραλείπεται ο όρος  $\frac{1}{2}\beta_{ij}T_0(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$  από την εξίσωση μεταφοράς θερμότητας. Τοιουτοτρόπως επιτυγχάνεται αποσύζευξη του προβλήματος δίχως να αλλοιώνεται σημαντικά η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, καθώς η συνεισφορά του όρου αυτού είναι μικρή. Το σύστημα (2.19), μετά την απαλοιφή του όρου  $\frac{1}{2}\beta_{ij}T_0(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ , γράφεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{2}C_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k}) - \beta_{ij}\theta \right]_{,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i \\ (k\theta_{,j})_{,j} + Z = \rho c_v \dot{\theta} \end{array} \right\}. \quad (2.27)$$

Το μαθηματικό πρόβλημα απλοποιείται πλέον αρκετά, αφού είναι δυνατή η ανεξάρτητη επίλυση των δύο εξισώσεων: επίλυση αρχικά της εξίσωσης θερμότητας και μεταφοράς των αποτελεσμάτων της στην εξίσωση κίνησης. Στην περίπτωση ισότροπου υλικού το σύστημα (2.27) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda u_{,j,j} - \beta\theta)_{,j} + [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i \\ (k\theta_{,j})_{,j} + Z = \rho c_v \dot{\theta} \end{array} \right\}. \quad (2.28)$$

Εάν το υλικό είναι ισότροπο και ομοιογενές, το σύστημα (2.28) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\lambda + \mu)u_{,j,j} - \beta\theta]_{,j} + \mu u_{i,jj} + X_i = \rho\ddot{u}_i \\ k\theta_{,jj} + Z = \rho c_v \dot{\theta} \end{array} \right\}. \quad (2.29)$$

Ακολουθεί συγκεντρωτικός πίνακας με τις εξισώσεις του ασύζευκτου προβλήματος στις δύο διαστάσεις και στη μία διάσταση για την περίπτωση ιστροπίας:



Περίπτωση προβλήματος	Εξίσωση
Επίπεδο πρόβλημα ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού	$\left\{ \begin{aligned} \nabla[\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta\theta] + \nabla \cdot \left\{ \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \right\} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \nabla \cdot (k \nabla \theta) + Z &= \rho c_v \dot{\theta} \end{aligned} \right\}$
Επίπεδο πρόβλημα ισότροπου, ομοιογενούς υλικού	$\left\{ \begin{aligned} \nabla[(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta\theta] + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ k \nabla^2 \theta + Z &= \rho c_v \dot{\theta} \end{aligned} \right\}$
Μονοδιάστατο πρόβλημα ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού	$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\theta \right] + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + Z &= \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \right\}$
Μονοδιάστατο πρόβλημα ισότροπου, ομοιογενούς υλικού	$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\theta \right] + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Z &= \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} \end{aligned} \right\}$

Πίνακας 2.1: Εξισώσεις ασύζευκτου προβλήματος θερμοελαστικότητας



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

#### 3.1 Αριθμητική ανάλυση μονοδιάστατου προβλήματος ισότροπου και ομοιογενούς υλικού

Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων [5] για την περίπτωση μονοδιάστατου προβλήματος θερμοελαστικότητας ισότροπου-ομοιογενούς υλικού. Θέτωντας  $\frac{\partial u}{\partial t} = v$ , το σύστημα (2.26) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \beta T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + Z \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \theta \right] + X \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Οι άγνωστες ποσότητες του προς επίλυση συστήματος (3.1) είναι οι εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta(x, t) \\ v = v(x, t) \\ u = u(x, t) \end{array} \right.$$

Το επόμενο βήμα είναι η αδιαστατοποίηση των σχέσεων (3.1). Για την επίτευξη του σκοπού αυτού, αρχικά εισάγονται δύο νέα μεγέθη: η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος  $c_w = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  (μονάδες:  $m/sec$ ) και ο συντελεστής διάχυσης θερμότητας  $\kappa = k/(\rho c_v)$  (μονάδες:  $m^2/sec$ ). Έπειτα πραγματοποιείται αδιαστατοποίηση των μεγεθών  $x$  και  $t$  μέσω των νέων μεταβλητών  $\omega = \omega(x)$ ,  $\eta = \eta(t)$ :

$$\omega(x) = \frac{c_w}{\kappa} x \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dx} = \frac{c_w}{\kappa},$$

$$\eta(t) = \frac{c_w^2}{\kappa} t \Leftrightarrow \frac{d\eta}{dt} = \frac{c_w^2}{\kappa}.$$

Εκτός των μεταβλητών  $x$  και  $t$  απαιτείται αδιαστατοποίηση των μεγεθών της μεταβολής της θερμοκρασίας  $\theta$ , της ταχύτητας  $v$  και της μετατόπισης  $u$ , μέσω των νέων αδιαστατοποιημένων αγνώστων  $\Theta = \Theta(\theta)$ ,  $V = V(v)$ ,  $U = U(u)$ :

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{T_0} \theta \Leftrightarrow \theta = T_0 \Theta,$$

$$V(v) = \frac{1}{c_w} v \Leftrightarrow v = c_w V,$$

$$U(u) = \frac{c_w}{\kappa} u \Leftrightarrow u = \frac{\kappa}{c_w} U.$$

Λόγω της αλλαγής μεταβλητών, οι σχέσεις (3.1) γράφονται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \omega^2} - \frac{\beta}{\rho c_v} \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\kappa}{\rho c_v T_0 c_w^2} Z \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \Theta \right) + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} X \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= V \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Οι σχέσεις (3.2) πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους  $w_1, w_2, w_3 \in H^1$  (χώρος Sobolev, βλ. [5] παράρτημα 1.1) και ολοκληρώνονται στο μήκος του πεπερασμένου στοιχείου  $i$ , δηλαδή από  $\omega_i$  έως  $\omega_{i+1}$ , όπου  $\omega_i$  είναι η αδιαστατοποιημένη συντεταγμένη του κόμβου  $i$ .

$$\left. \begin{aligned} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} d\omega &= \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \omega^2} d\omega - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial V}{\partial \omega} d\omega + \frac{\kappa}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 Z d\omega \\ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} d\omega &= \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \Theta \right) d\omega + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 X d\omega \\ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 \frac{\partial U}{\partial \eta} d\omega &= \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 V d\omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} d\omega = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} d\omega + \left[ w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial V}{\partial \omega} d\omega + \\
& \quad + \frac{\kappa}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 Z d\omega \\
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \frac{\partial V}{\partial \eta} d\omega = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_2}{\partial \omega} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \Theta \right) d\omega + \left[ w_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \Theta \right) \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} + \\
& \quad + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 X d\omega \\
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 \frac{\partial U}{\partial \eta} d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 V d\omega
\end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

Εάν οι συναρτήσεις σχήματος του πεπερασμένου στοιχείου είναι οι:

$$\left\{ \begin{aligned}
N_i(\omega) &= 1 - \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \\
N_{i+1}(\omega) &= \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i}
\end{aligned} \right\},$$

τότε οι άγνωστες ποσότητες του προς επίλυση συστήματος (3.3) διατυπώνονται ως εξής:

$$\left\{ \begin{aligned}
\Theta &= \theta(\omega, \eta) = N_i(\omega) \Theta_i(\eta) + N_{i+1}(\omega) \Theta_{i+1}(\eta) \\
V &= V(\omega, \eta) = N_i(\omega) V_i(\eta) + N_{i+1}(\omega) V_{i+1}(\eta) \\
U &= U(\omega, \eta) = N_i(\omega) U_i(\eta) + N_{i+1}(\omega) U_{i+1}(\eta)
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
\Theta &= [N_i(\omega) \quad N_{i+1}(\omega)] \begin{bmatrix} \Theta_i(\eta) \\ \Theta_{i+1}(\eta) \end{bmatrix} \\
V &= [N_i(\omega) \quad N_{i+1}(\omega)] \begin{bmatrix} V_i(\eta) \\ V_{i+1}(\eta) \end{bmatrix} \\
U &= [N_i(\omega) \quad N_{i+1}(\omega)] \begin{bmatrix} U_i(\eta) \\ U_{i+1}(\eta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta = [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \\ V = [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \\ U = [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} \end{array} \right\}.$$

Επιπλέον, οι συνοριακοί όροι  $\left[ w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}$  και  $\left[ w_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \Theta \right) \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}$  που

εμφανίζονται στις σχέσεις (3.3) απλοποιούνται κατά τη μόρφωση των καθολικών μητρώων λόγω συνέχειας και εμφανίζονται μόνο στο σύνορο του φορέα. Μάλιστα, εάν οι συνοριακές συνθήκες του φορέα είναι τέτοιες ώστε οι άγνωστες ποσότητες είναι γνωστές στο σύνορο (συνοριακές συνθήκες Dirichlet), οι συνοριακοί όροι μηδενίζονται και στο σύνορο. Για το μονοδιάστατο πρόβλημα, το σύνορο αποτελείται προφανώς από τον αρχικό και τον τελικό κόμβο. Το σύστημα (3.3) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} d\omega = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} [N'_i \quad N'_{i+1}] \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} d\omega + \\ \quad - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 [N'_i \quad N'_{i+1}] \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} d\omega + \frac{\kappa}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 Z d\omega \\ \\ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} d\omega = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_2}{\partial \omega} \left( [N'_i \quad N'_{i+1}] \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} - \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \right) d\omega + \\ \quad + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 X d\omega \\ \\ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} d\omega \end{array} \right\}.$$

Θέτοντας διαδοχικά  $w_1 = w_2 = w_3 = N_i(\omega)$  και  $w_1 = w_2 = w_3 = N_{i+1}(\omega)$ , το παραπάνω σύστημα μετατρέπεται ως ακολούθως:

$$\left. \begin{aligned}
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{\kappa}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} Z \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} d\omega \\
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} X \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} d\omega \\
& \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} .$$

Για τη μεταφορά του διαστήματος ολοκλήρωσης στο  $[0, 1]$ , εισάγεται η μεταβλητή  $\xi = \xi(\omega)$ :

$$\xi(\omega) = \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \Leftrightarrow \omega(\xi) = \omega_i + \xi(\omega_{i+1} - \omega_i) \Rightarrow d\omega = (\omega_{i+1} - \omega_i) d\xi .$$

$$\text{Για } h_i = \omega_{i+1} - \omega_i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\omega - \omega_i}{h_i} \\ \omega = \omega_i + h_i \xi \\ d\omega = h_i d\xi \end{array} \right\} \text{ και } \left\{ \begin{array}{l} N_i(\xi) = 1 - \xi \\ N_{i+1}(\xi) = \xi \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} N'_i(\xi) = -\frac{1}{h_i} \\ N'_{i+1}(\xi) = \frac{1}{h_i} \end{array} \right\} .$$

Το σύστημα, λόγω της αλλαγής της μεταβλητής των ολοκληρώσεων, γράφεται:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & h_i \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\ & -\frac{\beta}{\rho c_v} \int_0^1 \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} + \\ & +\frac{\kappa h_i}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_0^1 Z \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\ & h_i \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \\ & +\frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \int_0^1 \begin{bmatrix} -(1-\xi) & -\xi \\ 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\ & +\frac{\kappa h_i}{\rho c_w^3} \int_0^1 X \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\ & h_i \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = h_i \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}.$$

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται είναι ο εξής:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} -(1-\xi) & 1-\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το σύστημα των εξισώσεων διαμορφώνεται όπως παρακάτω:



$$\left. \begin{aligned}
& h_i \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} - \frac{\beta}{\rho c_v} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{\kappa h_i}{\rho c_v T_0 c_w^2} \int_0^1 Z \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\
& h_i \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{\beta T_0}{\rho c_w^2} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{\kappa h_i}{\rho c_w^3} \int_0^1 X \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\
& h_i \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = h_i \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\}. \quad (3.4)$$

### 3.2 Μόρφωση καθολικών μητρώων στην περίπτωση απουσίας καθολικών δυνάμεων και πηγών θερμότητας

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν ούτε καθολικές δυνάμεις ( $X=0$ ) ούτε πηγές θερμότητας ( $Z=0$ ), οι σχέσεις (3.4) γίνονται:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} - \frac{\beta}{2\rho c_v} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \\
& \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{\beta T_0}{2\rho c_w^2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \\
& \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\}.$$

Το σύστημα αυτό είναι μητρική σχέση της γενικής μορφής  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}$ , με  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Αναλυτικότερα το σύστημα γράφεται ως (και για σταθερό μήκος πεπερασμένου στοιχείου  $h_i = h$ ):

$$\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \\ V_i \\ V_{i+1} \\ U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{\beta}{2\rho c_v} & -\frac{\beta}{2\rho c_v} & 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & \frac{\beta}{2\rho c_v} & -\frac{\beta}{2\rho c_v} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta T_0}{2\rho c_w^2} & -\frac{\beta T_0}{2\rho c_w^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{\beta T_0}{2\rho c_w^2} & \frac{\beta T_0}{2\rho c_w^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \\ V_i \\ V_{i+1} \\ U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Η παραπάνω μητρική σχέση ισχύει για κάθε πεπερασμένο στοιχείο (εκτός των ακραίων πεπερασμένων στοιχείων, όπου ενδέχεται να πρέπει να προστεθούν οι συνοριακοί όροι). Η μόρφωση της καθολικής μητρικής σχέσης του μονοδιάστατου φορέα βασίζεται στη μέθοδο που αναπτύσσεται στο βιβλίο του Thomas J. R. Hughes [5]. Για το σκοπό αυτό σχηματίζονται τα μητρώα IEN, ID και LM.

Το μητρώο IEN έχει διαστάσεις (συνολικός αριθμός κόμβων πεπερασμένου στοιχείου x συνολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχείων) και έχει ως αποτέλεσμα την καθολική αρίθμηση των κόμβων κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος το πλήθος των κόμβων σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο είναι προφανώς ίσο με 2.

Το μητρώο ID έχει διαστάσεις (συνολικός αριθμός βαθμών ελευθερίας κόμβου x συνολικός αριθμός κόμβων) και ως σκοπό έχει την καθολική αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας (αγνώστων) κάθε κόμβου. Στο υπό μελέτη πρόβλημα θερμοελαστικότητας οι άγνωστοι ανά κόμβο είναι 3 ( $\Theta_i, V_i, U_i$ ).

Το μητρώο LM μορφώνεται με τη βοήθεια των μητρώων IEN και ID. Έχει διαστάσεις (συνολικός αριθμός βαθμών ελευθερίας πεπερασμένου στοιχείου x συνολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχείων) και το αποτέλεσμα είναι η καθολική αρίθμηση των βαθμών ελευθερίας (αγνώστων) κάθε πεπερασμένου στοιχείου. Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας κάθε πεπερασμένου στοιχείου στο μονοδιάστατο πρόβλημα θερμοελαστικότητας είναι ίσο με  $2 \times 3 = 6$  ( $\Theta_i, \Theta_{i+1}, V_i, V_{i+1}, U_i, U_{i+1}$ ).

Ακολουθεί η σχηματική παράσταση των προαναφερθέντων μητρώων (ο συνολικός αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων συμβολίζεται με  $N_{elem}$  και ο συνολικός αριθμός των κόμβων με  $N_{nodes}$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & N_{elem} \\ 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & \dots & N_{elem} + 1 \end{bmatrix} \quad [IEN] \quad (2 \times N_{elem}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & \cdot & N_{elem} + 1 \\ N_{elem} + 2 & N_{elem} + 2 & \dots & \dots & \cdot & 2N_{elem} + 2 \\ 2N_{elem} + 3 & 2N_{elem} + 4 & \dots & \dots & \cdot & 2N_{elem} + 3 \end{bmatrix} \quad [ID] \quad (3 \times N_{nodes}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & \cdot & N_{elem} \\ 2 & 3 & \dots & \dots & \cdot & N_{elem} + 1 \\ N_{elem} + 2 & N_{elem} + 3 & \dots & \dots & \cdot & 2N_{elem} + 1 \\ N_{elem} + 3 & N_{elem} + 4 & \dots & \dots & \cdot & 2N_{elem} + 2 \\ 2N_{elem} + 3 & 2N_{elem} + 4 & \dots & \dots & \cdot & 3N_{elem} + 2 \\ 2N_{elem} + 4 & 2N_{elem} + 5 & \dots & \dots & \cdot & 3N_{elem} + 3 \end{bmatrix} \quad [LM] \quad (6 \times N_{elem}).$$

### 3.3 Χρονική ολοκλήρωση

Η διαδικασία που έχει περιγραφεί έως τώρα οδήγησε στη μόρφωση της μητρικής σχέσης της μορφής  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ . Στην πραγματικότητα, η μητρική σχέση είναι  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , όπου τα διανύσματα  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  παριστάνουν τους αγνώστους στους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων, σε κάθε χρονική στιγμή.

Στο σημείο αυτό, ίσως είναι σκόπιμο να γίνουν δύο παρατηρήσεις. Η πρώτη παρατήρηση αφορά στα μητρώα  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$ . Τα μητρώα αυτά έχουν εκ των προτέρων (a priori) υποθεθεί ως ανεξάρτητα των αγνώστων μεγεθών της θερμοκρασίας, ταχύτητας και μετατόπισης. Η βασική αυτή υπόθεση φανερώνει το γραμμικό χαρακτήρα της παρούσης εργασίας. Ενδεχόμενη μη γραμμική θεώρηση του προβλήματος θερμοελαστικότητας απαιτεί την εξάρτηση των μητρώων αυτών από το διάνυσμα των αγνώστων και, συνεπώς, τον εκ νέου προσδιορισμό τους σε κάθε χρονικό βήμα.

Η δεύτερη παρατήρηση αφορά στην εισαγωγή της ταχύτητας  $v = \dot{u}$  ως επιπλέον αγνώστου. Ο σκοπός της κίνησης αυτής γίνεται πλέον προφανής: η τελική μητρική διαφορική σχέση είναι πρώτου βαθμού ως προς το χρόνο, η οποία αντιμετωπίζεται σαφώς πιο άνετα κατά τη διαδικασία της χρονικής ολοκλήρωσης.

Για την επίλυση της μητρικής διαφορικής σχέσης πρώτου βαθμού, που πλέον έχει ως μόνη μεταβλητή το χρόνο  $t$ , χρησιμοποιούνται η μέθοδος Euler (explicit Euler), η πεπλεγμένη μέθοδος Euler (implicit Euler) και η μέθοδος Crank-Nicolson [1, 5]. Οι μέθοδοι αυτοί βασίζονται στη διακριτοποίηση του συνολικού χρόνου σε πεπερασμένο αριθμό σταθερών χρονικών βημάτων. Σε κάθε χρονικό βήμα  $n$  θα ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t_n) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_n. \quad (3.5)$$

Εάν οριστεί ως  $t_n$  το σταθερό χρονικό βήμα, οι τρεις αυτές μέθοδοι προσεγγίζουν τη χρονική παράγωγο σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{t_h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \quad \text{Explicit Euler} \\ \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{t_h} (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) \quad \text{Implicit Euler} \\ \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_{n-1}} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n-1}) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_n = \frac{1}{2t_h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n-1}) \quad \text{Crank-Nicolson} \end{array} \right\}.$$

Επομένως, ανάλογα με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, η σχέση (3.5) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t_h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_n \quad \text{Explicit Euler} \\ \frac{1}{t_h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_{n+1} \quad \text{Implicit Euler} \\ \frac{1}{t_h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n) \quad \text{Crank-Nicolson} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{x}_n \quad \text{Explicit Euler} \\ \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{x}_n \quad \text{Implicit Euler} \\ \mathbf{x}_{n+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{t_h}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right)^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{t_h}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_n \quad \text{Crank-Nicolson} \end{array} \right\}.$$

Στην γενικότερη περίπτωση που η μητρική εξίσωση είναι της μορφής  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}$  (με  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ ), οι παραπάνω μέθοδοι εκφράζονται ως ακολούθως:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{x}_n + t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f}_n \quad \text{Explicit Euler} \\ \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} - t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{x}_n + t_h \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f}_{n+1}) \quad \text{Implicit Euler} \\ \mathbf{x}_{n+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{t_h}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right)^{-1} \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{t_h}{2} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_n + \frac{t_h}{2} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}) \right] \quad \text{Crank-Nicolson} \end{array} \right\}.$$

Η διαδικασία της χρονικής ολοκλήρωσης που παρουσιάστηκε εδώ για την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος ομοιογενούς υλικού, εφαρμόζεται σε όλες τις επόμενες περιπτώσεις (επίπεδο πρόβλημα ή περίπτωση ανομοιογένειας), οπότε και δε γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στα επόμενα.

### 3.4 Αριθμητική ανάλυση μονοδιάστατου προβλήματος ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού

Στην παράγραφο αυτή εξετάζεται η επίδραση της ανομοιογένειας του υλικού στην παραπάνω διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή, τα χαρακτηριστικά του υλικού είναι συναρτήσεις της θέσης και όχι σταθερές παράμετροι (π.χ.  $\rho = \rho(x)$ ). Αξίζει να σημειωθεί πως μία ειδική εφαρμογή της περίπτωσης ισότροπου ανομοιογενούς υλικού είναι το ισότροπο υλικό με στρώσεις, όπου κάθε στρώση θεωρείται ως ομοιογενής.

Θέτωντας, όπως προηγουμένως,  $\frac{\partial u}{\partial t} = v$ , το σύστημα (2.25) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \beta T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + Z \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \theta \right] + X \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Η αδιαστατοποίηση των σχέσεων (3.6) είναι ελαφρώς πιο περίπλοκη από εκείνη του ομοιογενούς υλικού (βλ. παρ. 3.1). Η ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος  $c_w$  και ο συντελεστής διάχυσης θερμότητας  $\kappa$  δεν είναι πλέον σταθερά μεγέθη, αλλά συναρτήσεις της θέσης (δηλαδή  $c_w = c_w(x)$ ,  $\kappa = \kappa(x)$ ). Επομένως, για την επίτευξη της αδιαστατοποίησης επιλέγονται χαρακτηριστικές τιμές των μεγεθών αυτών. Στη γενική περίπτωση η αδιαστατοποίηση των σχέσεων (3.6) γίνεται μέσω των παραμέτρων  $c_{wm} = c_w(x_1)$ ,  $\kappa_m = \kappa(x_2)$ , για κάποια κατάλληλα επιλεγμένα σημεία  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα.

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στην παράγραφο 3.1, αντικαθιστώντας τη  $c_w$  με τη  $c_{wm}$  και τον  $\kappa$  με τον  $\kappa_m$ , το σύστημα (3.6) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa_m} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right) - \beta \frac{\partial V}{\partial \omega} + \frac{\kappa_m}{T_0 c_{wm}^2} Z \\ \rho \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{1}{c_{wm}^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^3} X \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = V \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Οι σχέσεις (3.7) πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους  $w_1, w_2, w_3 \in H^1$  και ολοκληρώνονται στο μήκος του πεπερασμένου στοιχείου  $i$ , δηλαδή από  $\omega_i$  έως  $\omega_{i+1}$ , όπου  $\omega_i$  είναι η αδιαστατοποιημένη συντεταγμένη του κόμβου  $i$ .

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \rho c_v \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} d\omega = \frac{1}{\kappa_m} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \left( k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right) d\omega - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \beta \frac{\partial V}{\partial \omega} d\omega + \frac{\kappa_m}{T_0 c_{wm}^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 Z d\omega \\
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \rho \frac{\partial V}{\partial \eta} d\omega = \frac{1}{c_{wm}^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] d\omega + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 X d\omega \\
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 \frac{\partial U}{\partial \eta} d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 V d\omega
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \rho c_v \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} d\omega = \frac{1}{\kappa_m} \left\{ - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} d\omega + \left[ w_1 k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \right\} - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 \beta \frac{\partial V}{\partial \omega} d\omega + \\
 & \quad + \frac{\kappa_m}{T_0 c_{wm}^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_1 Z d\omega \\
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 \rho \frac{\partial V}{\partial \eta} d\omega = \frac{1}{c_{wm}^2} \left\{ - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\partial w_2}{\partial \omega} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] d\omega + \right. \\
 & \quad \left. + \left[ w_2 \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \right\} + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_2 X d\omega \\
 & \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 \frac{\partial U}{\partial \eta} d\omega = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} w_3 V d\omega
 \end{aligned} \right\} \cdot (3.8)$$

Εάν οι συναρτήσεις σχήματος του πεπερασμένου στοιχείου είναι οι:

$$\left\{ \begin{aligned}
 N_i(\omega) &= 1 - \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \\
 N_{i+1}(\omega) &= \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \Theta &= [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \\
 V &= [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \\
 U &= [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\},$$

θέτωντας διαδοχικά  $w_1 = w_2 = w_3 = N_i(\omega)$  και  $w_1 = w_2 = w_3 = N_{i+1}(\omega)$ , και παραλείποντας τους συνοριακούς όρους  $\frac{1}{\kappa_m} \left[ w_1 k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}$  και  $\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ w_2 \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}}$  το σύστημα (3.8) γίνεται:

$$\left\{ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \rho c_v \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\kappa_m} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} k \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \beta \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} + \frac{\kappa_m}{T_0 c_{wm}^2} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} Z \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} d\omega \right. \\ \left. \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \rho \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{c_{wm}^2} \left\{ \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} (\lambda + 2\mu) \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N'_i \quad N'_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. - T_0 \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \beta \begin{bmatrix} N'_i \\ N'_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \right\} + \\ \left. + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^3} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} X \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} d\omega \right. \\ \left. \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \begin{bmatrix} N_i \\ N_{i+1} \end{bmatrix} [N_i \quad N_{i+1}] d\omega \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Για τη μεταφορά του διαστήματος ολοκλήρωσης στο  $[0, 1]$ , εισάγεται η μεταβλητή  $\xi = \xi(\omega)$ :

$$\xi(\omega) = \frac{\omega - \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \Leftrightarrow \omega(\xi) = \omega_i + \xi(\omega_{i+1} - \omega_i) \Rightarrow d\omega = (\omega_{i+1} - \omega_i) d\xi.$$

$$\text{Για } h_i = \omega_{i+1} - \omega_i \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{\omega - \omega_i}{h_i} \\ \omega = \omega_i + h_i \xi \\ d\omega = h_i d\xi \end{cases} \text{ και } \begin{cases} N_i(\xi) = 1 - \xi \\ N_{i+1}(\xi) = \xi \end{cases}, \begin{cases} N'_i(\xi) = -\frac{1}{h_i} \\ N'_{i+1}(\xi) = \frac{1}{h_i} \end{cases}.$$

Το σύστημα, λόγω της αλλαγής της μεταβλητής των ολοκληρώσεων, γράφεται:

$$\left. \begin{aligned}
& h_i \int_0^1 \rho c_v \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\kappa_m h_i} \int_0^1 k d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad - \int_0^1 \beta \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{\kappa_m h_i}{T_0 c_{wm}^2} \int_0^1 Z \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\
& \\
& h_i \int_0^1 \rho \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{c_{wm}^2 h_i} \int_0^1 (\lambda + 2\mu) d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{1}{c_{wm}^2} T_0 \int_0^1 \beta \begin{bmatrix} -(1-\xi) & -\xi \\ 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{\kappa_m h_i}{c_{wm}^3} \int_0^1 X \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi \\
& \\
& \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν ούτε καθολικές δυνάμεις ( $X=0$ ) ούτε πηγές θερμότητας ( $Z=0$ ), ενώ επιπλέον το μήκος των πεπερασμένων στοιχείων είναι σταθερό και ίσο προς  $h_i = h$ , οι σχέσεις (3.9) γίνονται:

$$\left. \begin{aligned}
& h \int_0^1 \rho c_v \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \dot{\Theta}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\kappa_m h} \int_0^1 k d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad - \int_0^1 \beta \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix} \\
& \\
& h \int_0^1 \rho \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & \xi(1-\xi) \\ \xi(1-\xi) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_{i+1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{c_{wm}^2 h} \int_0^1 (\lambda + 2\mu) d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} + \\
& \quad + \frac{T_0}{c_{wm}^2} \int_0^1 \beta \begin{bmatrix} -(1-\xi) & -\xi \\ 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \end{bmatrix} \\
& \\
& \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\}$$



Σε μητρική μορφή, το σύστημα εξισώσεων για κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει ως εξής:

$$h \begin{bmatrix} \int_0^1 \rho c_v (1-\xi)^2 d\xi & \int_0^1 \rho c_v \xi(1-\xi) d\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_0^1 \rho c_v \xi(1-\xi) d\xi & \int_0^1 \rho c_v \xi^2 d\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^1 \rho (1-\xi)^2 d\xi & \int_0^1 \rho \xi(1-\xi) d\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^1 \rho \xi(1-\xi) d\xi & \int_0^1 \rho \xi^2 d\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_i \\ \Theta_{i+1} \\ V_i \\ V_{i+1} \\ U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\kappa_m h_0} \int_0^1 k d\xi & \frac{1}{\kappa_m h_0} \int_0^1 k d\xi & \int_0^1 \beta(1-\xi) d\xi & -\int_0^1 \beta(1-\xi) d\xi & 0 & 0 \\ \frac{1}{\kappa_m h_0} \int_0^1 k d\xi & -\frac{1}{\kappa_m h_0} \int_0^1 k d\xi & \int_0^1 \beta \xi d\xi & -\int_0^1 \beta \xi d\xi & 0 & 0 \\ -\frac{T_0}{c_{wm}^2} \int_0^1 \beta(1-\xi) d\xi & -\frac{T_0}{c_{wm}^2} \int_0^1 \beta \xi d\xi & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{wm}^2 h_0} \int_0^1 (\lambda+2\mu) d\xi & \frac{1}{c_{wm}^2 h_0} \int_0^1 (\lambda+2\mu) d\xi \\ \frac{T_0}{c_{wm}^2} \int_0^1 \beta(1-\xi) d\xi & \frac{T_0}{c_{wm}^2} \int_0^1 \beta \xi d\xi & 0 & 0 & \frac{1}{c_{wm}^2 h_0} \int_0^1 (\lambda+2\mu) d\xi & -\frac{1}{c_{wm}^2 h_0} \int_0^1 (\lambda+2\mu) d\xi \\ 0 & 0 & \frac{h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{6} & \frac{h}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{i+1} \\ V_i \\ V_{i+1} \\ U_i \\ U_{i+1} \end{bmatrix} \cdot$$

### 3.5 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση επίπεδου προβλήματος ισότροπου και ομοιογενούς υλικού

Το επίπεδο πρόβλημα θερμοελαστικότητας για την περίπτωση ισότροπου και ομοιογενούς υλικού περιγράφεται από τις σχέσεις (2.24). Κατ' αντιστοιχία με το μονοδιάστατο πρόβλημα, εισάγεται το διάνυσμα της ταχύτητας  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$

$\left( \frac{\partial u_x}{\partial t} = v_x, \frac{\partial u_y}{\partial t} = v_y \right)$  και το σύστημα (2.24) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \nabla^2 \theta - \beta T_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + Z \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta \theta] + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Οι άγνωστες ποσότητες του προς επίλυση συστήματος (3.10) είναι οι εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta(x, y, t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) \end{array} \right\}.$$

Η αδιαστατοποίηση των σχέσεων (3.10) επιτυγχάνεται, όπως και στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, ως προς την ταχύτητα διάδοσης του ελαστικού κύματος  $c_w = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  (μονάδες:  $m/sec$ ) και το συντελεστή διάχυσης θερμότητας  $\kappa = k/(\rho c_v)$  (μονάδες:  $m^2/sec$ ).

$$\begin{aligned} \omega(x) = \frac{c_w}{\kappa} x &\Leftrightarrow \frac{d\omega}{dx} = \frac{c_w}{\kappa}, \quad \psi(y) = \frac{c_w}{\kappa} y \Leftrightarrow \frac{d\psi}{dy} = \frac{c_w}{\kappa} \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla_{(x,y)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dy} \end{bmatrix} = \frac{c_w}{\kappa} \nabla_{(\omega,\psi)}, \end{aligned}$$

$$\eta(t) = \frac{c_w^2}{\kappa} t \Leftrightarrow \frac{d\eta}{dt} = \frac{c_w^2}{\kappa},$$

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{T_0} \theta \Leftrightarrow \theta = T_0 \Theta,$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{v}) = \frac{1}{c_w} \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = c_w \mathbf{V},$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}) = \frac{c_w}{\kappa} \mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \frac{\kappa}{c_w} \mathbf{U},$$

Λόγω της αλλαγής μεταβλητών, οι σχέσεις (3.10) γράφονται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \nabla^2 \Theta - \frac{\beta}{\rho c_v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\kappa}{\rho c_v c_w^2 T_0} Z \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} = \frac{\kappa}{\rho c_w^2} \nabla [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta T_0 \Theta] + \frac{\mu}{\rho c_w^2} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \mathbf{x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \end{array} \right\}. \quad (3.11)$$

Οι σχέσεις (3.11) πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους  $w_1, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix}$ , όπου  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in H^1$ , και ολοκληρώνονται στην επιφάνεια του τυχαίου ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου επιφάνειας  $A_k$  και συνόρου  $C_k$  (με κάθετο διάνυσμα προς αυτό  $\mathbf{n}_k$ ). Έπειτα, εφαρμόζονται οι κατάλληλες παραγοντικές ολοκληρώσεις και λαμβάνονται οι εξής σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_k} w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} dA = - \int_{A_k} (\nabla w_1 \cdot \nabla \Theta) dA + \int_{C_k} w_1 (\nabla \Theta \cdot \mathbf{n}_k) dC - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{A_k} w_1 (\nabla \cdot \mathbf{v}) dA + \\ \quad + \frac{\kappa}{\rho c_v c_w^2 T_0} \int_{A_k} w_1 Z dA \\ \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} dA = - \frac{\kappa}{\rho c_w^2} \int_{A_k} [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta T_0 \Theta] \begin{bmatrix} \partial w_2 / \partial \omega \\ \partial w_3 / \partial \psi \end{bmatrix} dA + \\ \quad + \frac{\kappa}{\rho c_w^2} \int_{C_k} [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta T_0 \Theta] \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \mathbf{n}_k dC + \\ \quad - \frac{\mu}{\rho c_w^2} \int_{A_k} \begin{bmatrix} \nabla w_2 & 0 \\ 0 & \nabla w_3 \end{bmatrix} \nabla \mathbf{u} dA + \\ \quad + \frac{\mu}{\rho c_w^2} \int_{C_k} \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_k) dC + \frac{\kappa}{\rho c_w^3} \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} dA \\ \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dA = \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \mathbf{v} dA \end{array} \right\}. \quad (3.12)$$

Στις σχέσεις (3.12) οι συνοριακοί όροι  $\int_{C_k} w_1 (\nabla \Theta \cdot \mathbf{n}_k) dC$ ,  $\frac{\kappa}{\rho c_w^2} \int_{C_k} [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \beta T_0 \Theta] \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \mathbf{n}_k dC$  και  $\frac{\mu}{\rho c_w^2} \int_{C_k} \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} (\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_k) dC$ , όπως στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, απλοποιούνται και εμφανίζονται μόνο στο σύνορο. Επιπλέον, εάν θεωρηθούν μηδενικές καθολικές δυνάμεις και πηγές θερμότητας, το σύστημα διαμορφώνεται όπως παρακάτω:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{A_k} w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} dA = - \int_{A_k} (\nabla w_1 \cdot \nabla \Theta) dA - \frac{\beta}{\rho c_v} \int_{A_k} w_1 (\nabla \cdot \mathbf{V}) dA \\ \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} dA = - \frac{\kappa}{\rho c_w^2} \int_{A_k} [(\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \beta T_0 \Theta] \begin{bmatrix} \partial w_2 / \partial \omega \\ \partial w_3 / \partial \psi \end{bmatrix} dA + \\ \quad - \frac{\mu}{\rho c_w^2} \int_{A_k} \begin{bmatrix} \nabla w_2 & 0 \\ 0 & \nabla w_3 \end{bmatrix} \nabla \mathbf{U} dA \\ \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA = \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \mathbf{V} dA \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Εάν ονομαστούν 1,2 και 3 οι κόμβοι του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου, με συντεταγμένες  $(\omega_1, \psi_1)$ ,  $(\omega_2, \psi_2)$  και  $(\omega_3, \psi_3)$  αντίστοιχα, οι συναρτήσεις σχήματος έχουν ως εξής [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega & \psi & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} \\ N_2(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega & \psi & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} \\ N_3(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega & \psi & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_1(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega & \psi & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} / (2E_{A_k}) \\ N_2(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega & \psi & 1 \\ \omega_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} / (2E_{A_k}) \\ N_3(\omega, \psi) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \psi_1 & 1 \\ \omega_2 & \psi_2 & 1 \\ \omega & \psi & 1 \end{vmatrix} / (2E_{A_k}) \end{array} \right\},$$

όπου  $E_{A_k} = E$  είναι το προσανατολισμένο εμβαδόν του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου. Έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} \left[ (\psi_2 - \psi_3)\omega - (\omega_2 - \omega_3)\psi + \begin{bmatrix} \omega_2 & \psi_2 \\ \omega_3 & \psi_3 \end{bmatrix} \right] \\ \left[ (\psi_3 - \psi_1)\omega - (\omega_3 - \omega_1)\psi + \begin{bmatrix} \omega_3 & \psi_3 \\ \omega_1 & \psi_1 \end{bmatrix} \right] \\ \left[ (\psi_1 - \psi_2)\omega - (\omega_1 - \omega_2)\psi + \begin{bmatrix} \omega_1 & \psi_1 \\ \omega_2 & \psi_2 \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} \psi_2 - \psi_3 & -(\omega_2 - \omega_3) \\ \psi_3 - \psi_1 & -(\omega_3 - \omega_1) \\ \psi_1 - \psi_2 & -(\omega_1 - \omega_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, καθώς τα τριγωνικά στοιχεία είναι ορθογώνια, ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \psi_2 - \psi_3 \\ \psi_3 - \psi_1 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_y \\ h_y \\ 0 \end{bmatrix} = -h_y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_3 \\ \omega_3 - \omega_1 \\ \omega_1 - \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \\ 0 \\ -h_x \end{bmatrix} = h_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} -h_y(\omega - \omega_1) - h_x(\psi - \psi_1) + 2E \\ h_x(\omega - \omega_1) \\ h_y(\psi - \psi_1) \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2E} \begin{bmatrix} -h_y & -h_x \\ h_y & 0 \\ 0 & h_x \end{bmatrix},$$

όπου  $h_x, h_y$  είναι τα αδιαστατοποιημένα μήκη των καθέτων πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου. Για τη μεταφορά των διαστημάτων ολοκλήρωσης στο  $[0, 1]$ , χρησιμοποιείται ο παρακάτω μετασχηματισμός:

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \xi + \omega_1 \\ h_y \zeta + \psi_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega - \omega_1}{h_x} \\ \frac{\psi - \psi_1}{h_y} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\omega} = \frac{1}{h_x} \\ \frac{d\zeta}{d\psi} = \frac{1}{h_y} \end{array} \right\}.$$

Επομένως, στο νέο σύστημα συντεταγμένων ισχύουν:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi-\zeta \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{d\omega} & \frac{d\xi}{d\psi} \\ \frac{d\zeta}{d\omega} & \frac{d\zeta}{d\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_x h_y} \begin{bmatrix} -h_y & -h_x \\ h_y & 0 \\ 0 & h_x \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι πλέον δυνατή η χρήση της σχέσης  $\int_{A_k} r^a s^b t^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2E$ , όπου  $r, s, t$  μονώνυμα και  $A_k$  τρίγωνο εμβαδού  $E$  [5].

Θέτοντας  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{f} = N_1 \mathbf{f}_1(\eta) + N_2 \mathbf{f}_2(\eta) + N_3 \mathbf{f}_3(\eta) \Rightarrow$

$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix}$ , όπου  $\mathbf{f}_i$  η τυχούσα άγνωστη ποσότητα  $\mathbf{f}$  στον κόμβο  $i$  του

τριγώνου κάθε χρονική στιγμή, έπεται ότι:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1} \\ \mathbf{f}_{x2} \\ \mathbf{f}_{x3} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{y2} \\ \mathbf{f}_{y3} \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \omega} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1} \\ \mathbf{f}_{x2} \\ \mathbf{f}_{x3} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{y2} \\ \mathbf{f}_{y3} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \omega} & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x1} \\ \mathbf{f}_{x2} \\ \mathbf{f}_{x3} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{y2} \\ \mathbf{f}_{y3} \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, τα ολοκληρώματα που πρέπει να υπολογιστούν στις σχέσεις (3.13) είναι τα παρακάτω:

$$\int_{A_k} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3] dA = \int_{A_k} \begin{bmatrix} \phi^2 & \xi\phi & \zeta\phi \\ \xi\phi & \xi^2 & \xi\zeta \\ \zeta\phi & \xi\zeta & \zeta^2 \end{bmatrix} dA = \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\int_{A_k} \nabla \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \nabla [N_1 \quad N_2 \quad N_3] dA = \frac{1}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix},$$

$$\int_{A_k} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \omega} & \frac{\partial N_2}{\partial \omega} & \frac{\partial N_3}{\partial \omega} & \frac{\partial N_1}{\partial \psi} & \frac{\partial N_2}{\partial \psi} & \frac{\partial N_3}{\partial \psi} \end{bmatrix} dA =$$

$$= \frac{1}{h_x h_y} \int_{A_k} \begin{bmatrix} -h_y \phi & h_y \phi & 0 & -h_x \phi & 0 & h_x \phi \\ -h_y \xi & h_y \xi & 0 & -h_x \xi & 0 & h_x \xi \\ -h_y \zeta & h_y \zeta & 0 & -h_x \zeta & 0 & h_x \zeta \end{bmatrix} dA = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \\ -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \\ -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \end{bmatrix}.$$

Επομένως οι σχέσεις (3.13), έπειτα από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, λαμβάνουν την τελική τους μορφή (σχέσεις (3.14)). Από τις σχέσεις (3.14) προκύπτει η μητρική εξίσωση του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου.

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} + \\
& -\frac{\beta}{6\rho c_v} \begin{bmatrix} -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \\ -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \\ -h_y & h_y & 0 & -h_x & 0 & h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \end{bmatrix} \\
& \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \end{bmatrix} = \frac{\kappa \beta T_0}{6\rho c_w^2} \begin{bmatrix} -h_y & -h_y & -h_y \\ h_y & h_y & h_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_x & -h_x & -h_x \\ 0 & 0 & 0 \\ h_x & h_x & h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} + \\
& -\frac{\kappa}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ 0 & 0 & 0 & -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{y1} \\ U_{y2} \\ U_{y3} \end{bmatrix} \\
& \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{y1} \\ U_{y2} \\ U_{y3} \end{bmatrix} = \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$







Για το επίπεδο πρόβλημα, το πλήθος των κόμβων σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο είναι ίσο με 3 και οι άγνωστοι ανά κόμβο είναι 5 ( $\Theta, V_x, V_y, U_x, U_y$ ). Συνεπώς, το πλήθος των βαθμών ελευθερίας κάθε περασμένου στοιχείου είναι ίσο με  $3 \times 5 = 15$ .

Οι διαστάσεις των μητρώων είναι  $[IEN]$  ( $3 \times N_{elem}$ ),  $[ID]$  ( $5 \times N_{nodes}$ ),  $[LM]$  ( $15 \times N_{elem}$ ), όπου  $N_{elem}$  και  $N_{nodes}$  το πλήθος των στοιχείων και των κόμβων αντίστοιχα.

### 3.6 Επίπεδο πρόβλημα ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού

Η περίπτωση της ανομοιογένειας στις δύο διαστάσεις προβλήματος αντιμετωπίζεται όπως στο μονοδιάστατο πρόβλημα. Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι (2.23). Με τη γνωστή πλέον διαδικασία τίθεται  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$  και οι και το σύστημα (2.23) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla \theta) - \beta T_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + Z \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta \theta] + \nabla \cdot \left\{ \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \right\} + \mathbf{x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Η φιλοσοφία της αδιαστατοποίησης των σχέσεων (3.15) δεν αλλάζει σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, και πραγματοποιείται ως προς τις παραμέτρους  $c_{wm} = c_w(x_1, y_1)$  και  $\kappa_m = \kappa(x_2, y_2)$ , όπου  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  κάποιες κατάλληλα επιλεγμένες θέσεις. Για λόγους πληρότητας, υπενθυμίζεται ότι  $c_w = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  (μονάδες:  $m/sec$ ) και  $\kappa = k/(\rho c_v)$  (μονάδες:  $m^2/sec$ ). Με τις αδιαστατοποιημένες μεταβλητές, οι σχέσεις (3.15) γίνονται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\kappa_m} \nabla \cdot (k \nabla \Theta) - \beta (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^2 T_0} Z \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} = \frac{1}{c_{wm}^2} \nabla [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \beta T_0 \Theta] + \frac{1}{c_{wm}^2} \nabla \cdot \left\{ \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \right\} + \frac{\kappa_m}{c_{wm}^3} \mathbf{x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Οι σχέσεις (3.16) πολλαπλασιάζονται με τις συναρτήσεις βάρους  $w_1, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix}$  και  $\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix}$  αντίστοιχα, (όπου  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in H^1$ ) και ολοκληρώνονται στην επιφάνεια του τυχαίου ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου επιφάνειας  $A_k$  και συνόρου  $C_k$  (με κάθετο διάνυσμα προς αυτό  $\mathbf{n}_k$ ). Έπειτα από τις παραγοντικές ολοκληρώσεις, την απαλοιφή των συνοριακών όρων και την παραδοχή μηδενικών καθολικών δυνάμεων και πηγών θερμότητας, το σύστημα (3.16) γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} \int_{A_k} \rho c_v w_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} dA &= -\frac{1}{\kappa_m} \int_{A_k} k (\nabla w_1 \cdot \nabla \Theta) dA - \int_{A_k} \beta w_1 (\nabla \cdot \mathbf{V}) dA \\ \int_{A_k} \rho \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} dA &= -\frac{1}{c_{wm}^2} \int_{A_k} [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \beta T_0 \Theta] \begin{bmatrix} \partial w_2 / \partial \omega \\ \partial w_3 / \partial \psi \end{bmatrix} dA + \\ &\quad -\frac{1}{c_{wm}^2} \int_{A_k} \mu \begin{bmatrix} \nabla w_2 & 0 \\ 0 & \nabla w_3 \end{bmatrix} [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] dA \\ \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dA &= \int_{A_k} \begin{bmatrix} w_4 & 0 \\ 0 & w_5 \end{bmatrix} \mathbf{V} dA \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Εφαρμόζοντας την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων της προηγούμενης παραγράφου και χρησιμοποιώντας τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος, οι σχέσεις (3.17) λαμβάνουν την παρακάτω τελική μορφή τους (σχέσεις (3.18)). Έπειτα από τις σχέσεις (3.18) ακολουθεί το μητρώο του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου, για την περίπτωση επίπεδου προβλήματος θερμοελαστικότητας ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού.

$$\left. \begin{aligned}
& \int_{A_k} \rho c_v \begin{bmatrix} \phi^2 & \xi\phi & \zeta\phi \\ \xi\phi & \xi^2 & \xi\zeta \\ \zeta\phi & \xi\zeta & \zeta^2 \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\kappa_m (h_x h_y)^2} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \int_{A_k} k dA \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} + \\
& -\frac{1}{h_x h_y} \int_{A_k} \beta \begin{bmatrix} -h_y\phi & h_y\phi & 0 & -h_x\phi & 0 & h_x\phi \\ -h_y\xi & h_y\xi & 0 & -h_x\xi & 0 & h_x\xi \\ -h_y\zeta & h_y\zeta & 0 & -h_x\zeta & 0 & h_x\zeta \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \end{bmatrix} \\
& \int_{A_k} \rho \begin{bmatrix} \phi^2 & \xi\phi & \zeta\phi & 0 & 0 & 0 \\ \xi\phi & \xi^2 & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 \\ \zeta\phi & \xi\zeta & \zeta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi^2 & \xi\phi & \zeta\phi \\ 0 & 0 & 0 & \xi\phi & \xi^2 & \xi\zeta \\ 0 & 0 & 0 & \zeta\phi & \xi\zeta & \zeta^2 \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \dot{V}_{x1} \\ \dot{V}_{x2} \\ \dot{V}_{x3} \\ \dot{V}_{y1} \\ \dot{V}_{y2} \\ \dot{V}_{y3} \end{bmatrix} = \frac{T_0}{c_{wm}^2 h_x h_y} \int_{A_k} \beta dA \begin{bmatrix} -h_y\phi & -h_y\xi & -h_y\zeta \\ h_y\phi & h_y\xi & h_y\zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ -h_x\phi & -h_x\xi & -h_x\zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ h_x\phi & h_x\xi & h_x\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} + \\
& -\frac{1}{c_{wm}^2 (h_x h_y)^2} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ 0 & 0 & 0 & -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \int_{A_k} (\lambda + 2\mu) dA \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{y1} \\ U_{y2} \\ U_{y3} \end{bmatrix} \\
& \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{x1} \\ \dot{U}_{x2} \\ \dot{U}_{x3} \\ \dot{U}_{y1} \\ \dot{U}_{y2} \\ \dot{U}_{y3} \end{bmatrix} = \frac{h_x h_y}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$





Τα σύμβολα που εμφανίζονται στο μητρώο του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου αντιστοιχούν στα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \int_{A_k} k dA, & \mathbf{E} &= \int_{A_k} \rho c_v \phi^2 dA = \int_{A_k} \rho c_v \xi^2 dA, & \mathbf{I} &= \int_{A_k} \rho \phi^2 dA = \int_{A_k} \rho \xi^2 dA, \\
 \mathbf{B} &= \int_{A_k} (\lambda + 2\mu) dA, & \mathbf{F} &= \int_{A_k} \rho c_v \zeta^2 dA, & \mathbf{J} &= \int_{A_k} \rho \zeta^2 dA, \\
 \mathbf{C} &= \int_{A_k} \beta \phi dA = \int_{A_k} \beta \xi dA, & \mathbf{G} &= \int_{A_k} \rho c_v \xi \zeta dA = \int_{A_k} \rho c_v \zeta \phi dA, & \mathbf{K} &= \int_{A_k} \rho \xi \zeta dA = \int_{A_k} \rho \zeta \phi dA, \\
 \mathbf{D} &= \int_{A_k} \beta \zeta dA, & \mathbf{H} &= \int_{A_k} \rho c_v \xi \phi dA, & \mathbf{L} &= \int_{A_k} \rho \xi \phi dA.
 \end{aligned}$$

### 3.7 Ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας. Υπολογισμός μητρώων πεπερασμένων στοιχείων της εξίσωσης μεταφοράς θερμότητας για το επίπεδο πρόβλημα

Όπως έχει ήδη περιγραφεί στην παράγραφο 2.5, το ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας επιτρέπει τη διαδοχική και ανεξάρτητη επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας και κίνησης. Στην παράγραφο αυτή εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στην εξίσωση θερμότητας, για το δισδιάστατο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον πίνακα 2.1, η εξίσωση της θερμότητας για την περίπτωση ισότροπου ανομοιογενούς υλικού είναι η παρακάτω:

$$\nabla \cdot (k \nabla \theta) + Z = \rho c_v \dot{\theta}, \quad (3.19)$$

όπου  $\theta = \theta(x, y, t)$ . Η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην εξίσωση (3.19), όπως φαίνεται στην παράγραφο 3.6, οδηγεί στην ακόλουθη μητρική εξίσωση του πεπερασμένου στοιχείου:

$$\int_{A_k} \rho c_v \begin{bmatrix} \phi^2 & \xi \phi & \zeta \phi \\ \xi \phi & \xi^2 & \xi \zeta \\ \zeta \phi & \xi \zeta & \zeta^2 \end{bmatrix} dA \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} = - \frac{1}{\kappa_m (h_x h_y)^2} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \int_{A_k} k dA \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Επομένως, το μητρώο του ορθογώνιου τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου για την εξίσωση θερμότητας στο ασύζευκτο επίπεδο πρόβλημα θερμοελαστικότητας ισότροπου, ανομοιογενούς υλικού, είναι το ακόλουθο:



$$\begin{bmatrix} \int_{A_k} \rho c_v \phi^2 dA & \int_{A_k} \rho c_v \xi \phi dA & \int_{A_k} \rho c_v \zeta \phi dA \\ \int_{A_k} \rho c_v \xi \phi dA & \int_{A_k} \rho c_v \xi^2 dA & \int_{A_k} \rho c_v \xi \zeta dA \\ \int_{A_k} \rho c_v \zeta \phi dA & \int_{A_k} \rho c_v \xi \zeta dA & \int_{A_k} \rho c_v \zeta^2 dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} = -\frac{\int_{A_k} k dA}{\kappa_m (h_x h_y)^2} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix}.$$

### 3.8 Συνοριακοί όροι. Συνοριακές συνθήκες Dirichlet, Neumann και Robin

Έχει γίνει ήδη αναφορά στους συνοριακούς όρους που εμφανίζονται στις εξισώσεις κατά την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Οι συνοριακοί αυτοί όροι εκφράζουν τις δυνάμεις -με την ευρεία έννοια του όρου- που εμφανίζονται στο σύνορο του πεπερασμένου στοιχείου. Κατά την άθροιση των μητρώων όλων των πεπερασμένων στοιχείων για την μόρφωση του καθολικού μητρώου, οι συνοριακοί όροι που εμφανίζονται σε εσωτερικό σύνορο αλληλοαναιρούνται. Επομένως, η καθολική εξίσωση περιέχει μόνο εκείνους τους συνοριακούς όρους που υπάρχουν στο εξωτερικό σύνορο του συνεχούς μέσου.

Για την περαιτέρω ανάλυση των συνοριακών όρων θα εξεταστεί η περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος ανομοιογενούς-ισότροπου υλικού. Έπειτα, αντίστοιχα συμπεράσματα είναι δυνατόν να εξαχθούν για κάθε άλλη περίπτωση. Οι συνοριακοί όροι που εμφανίζονται στις εξισώσεις του προβλήματος αυτού είναι της μορφής

$$\frac{1}{\kappa_m} \left[ w_1 k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \text{ και } \frac{1}{c_{wm}^2} \left[ w_2 \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right] \right]_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \quad (\text{βλ. σύστημα (3.8)}).$$

Ο όρος  $-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}$  απαντάται στην πρώτη εξίσωση (εξίσωση θερμότητας) και εκφράζει τη ροή ισχύος θερμότητας στο σύνορο. Από το νόμο Fourier (βλ. σχέσεις (2.9)) έπεται ότι η ροή θερμότητας προκαλείται από την κλίση της θερμοκρασίας  $\frac{\partial \Theta}{\partial \omega}$ . Συνεπώς, ο όρος  $-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}$  μηδενίζεται είτε στην περίπτωση που δεν υπάρχει ροή θερμότητας (αδιαβατικό σύνορο) είτε στην περίπτωση που η θερμοκρασία του συνόρου είναι γνωστή [5].

Ο όρος  $-\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right]_{\omega=\omega_0}$  συναντάται στη δεύτερη εξίσωση (εξίσωση κίνησης) και εκφράζει την εξωτερική πίεση (τάση) στο σύνορο. Η εξωτερική πίεση προέρχεται από την αλληλεπίδραση εξωτερικής φόρτισης (όρος  $(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega}$  - μηχανική τάση) και μεταβολής της θερμοκρασίας (όρος  $\beta T_0 \Theta$  - θερμική τάση).

Επομένως, ο όρος  $-\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right]_{\omega=\omega_0}$  μηδενίζεται είτε στην περίπτωση που δεν υπάρχει εξωτερική πίεση (ελεύθερο σύνορο) είτε στην περίπτωση που η ταχύτητα του συνόρου είναι γνωστή [5].

Γενικότερα, οι εξωτερικές συνθήκες φόρτισης τοποθετούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες [1, 5]:

- **Συνοριακές συνθήκες Dirichlet:** Όταν η τιμή της άγνωστης ποσότητας θεωρείται γνωστή στο σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται συνθήκες Dirichlet.
- **Συνοριακές συνθήκες Neumann:** Όταν η κλίση (παράγωγος) της άγνωστης ποσότητας είναι γνωστή στο σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται συνθήκες Neumann.
- **Συνοριακές συνθήκες Robin:** Όταν στο σύνορο είναι γνωστή μία πεπλεγμένη σχέση της τιμής της άγνωστης ποσότητας και της κλίσης (παραγώγου) της, οι συνοριακές συνθήκες ονομάζονται συνθήκες Robin.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να γίνει αναφορά στην περίπτωση μεταφοράς θερμότητας από τον περιβάλλοντα αέρα στο σύνορο του συνεχούς μέσου με συναγωγή (convection) [4]. Στην περίπτωση αυτή η ροή ισχύος θερμότητας από τον αέρα στο στερεό δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$q = h_v (T_b - T_\infty), \quad (3.21)$$

όπου  $h_v$  είναι ο συντελεστής συναγωγής,  $T_b$  η θερμοκρασία του συνόρου και  $T_\infty$  η θερμοκρασία του αέρα μακριά από το σύνορο. Λόγω της σχέσης (2.9), η (3.21) γράφεται:

$$-k \frac{\partial T_b}{\partial x} = h_v (T_b - T_\infty). \quad (3.22)$$

Η αδιαστατοποίηση της σχέσης (3.22) γίνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T_b}{\partial x} = h_v (T_b - T_\infty) &\Rightarrow -k \frac{\partial (T_b - T_0)}{\partial x} = h_v [(T_b - T_0) - (T_\infty - T_0)] \Rightarrow -k \frac{\partial \theta_b}{\partial x} = h_v (\theta_b - \theta_\infty) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -k \frac{\partial \left( \frac{\theta_b}{T_0} \right)}{\partial x} = h_v \left( \frac{\theta_b}{T_0} - \frac{\theta_\infty}{T_0} \right) \Rightarrow -k \frac{\partial \Theta_b}{\partial x} = h_v (\Theta_b - \Theta_\infty) \Rightarrow -k \frac{\partial \Theta_b}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dx} = h_v (\Theta_b - \Theta_\infty) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -k \frac{\partial \Theta_b}{\partial \omega} \frac{c_{wm}}{\kappa_m} = h_v (\Theta_b - \Theta_\infty) \Rightarrow -\frac{1}{\kappa_m} \left( k \frac{\partial \Theta_b}{\partial \omega} \right) = \frac{h_v}{c_{wm}} (\Theta_b - \Theta_\infty). \end{aligned}$$

Επομένως στην περίπτωση της μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή ο συνοριακός όρος της εξίσωσης θερμότητας δίνεται από την εξής σχέση:

$$-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_b} = \frac{h_v}{c_{wm}} [\Theta]_{\omega=\omega_b} - \frac{h_v}{c_{wm}} \Theta_{\infty}. \quad (3.23)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή αποτελεί συνοριακή συνθήκη Robin και ουσιαστικά είναι μία ρεαλιστική γενίκευση της εξωτερικής συνθήκης με δεδομένη θερμοκρασία (συνθήκη Dirichlet). Στην περίπτωση της δεδομένης θερμοκρασίας θεωρείται πως το σύνορο του στερεού ακαριαία αποκτά τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα. Σε αυτήν την κατηγορία προβλημάτων, η συνθήκη Dirichlet αποτελεί την οριακή κατάσταση στην οποία τείνει η συνθήκη Robin, καθώς ο συντελεστής συναγωγής  $h_v$  τείνει προς το  $\infty$ .

Ομοίως, οι συνοριακές συνθήκες Neumann πηγάζουν από τις συνοριακές συνθήκες Robin, εάν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά  $(T_b - T_{\infty})$  να θεωρείται γνωστή συνάρτηση του χρόνου. Έπεται ότι η ροή ισχύος θερμότητας  $q$  στο σύνορο είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου και συνεπώς προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες Neumann, ως ειδική περίπτωση των συνθηκών Robin. Στην περίπτωση που ισχύει  $[(T_b - T_{\infty}) \equiv \text{σταθερό}]$ , προκύπτει σταθερή ροή θερμότητας.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα που αφορά την επίδραση των συνοριακών συνθηκών στους συνοριακούς όρους του μονοδιάστατου προβλήματος ανομοιογενούς-ισότροπου υλικού:

<u>Συνοριακή συνθήκη</u>	<u>Είδος</u>	<u>Επίδραση σε συνοριακό όρο</u>
Δεδομένη θερμοκρασία	Dirichlet	$-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_b} = 0$
Μηδενική ροή θερμότητας (αδιαβατικό σύνορο)	Neumann	$-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_b} = 0$
Δεδομένη ταχύτητα (ή μετατόπιση)	Dirichlet	$-\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right]_{\omega=\omega_b} = 0$
Μηδενική πίεση (ελεύθερο σύνορο)	Neumann	$-\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right]_{\omega=\omega_b} = 0$
Δεδομένη ροή θερμότητας	Neumann	$-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_b} = f(\eta)$
Δεδομένη πίεση	Neumann	$-\frac{1}{c_{wm}^2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial \omega} - \beta T_0 \Theta \right]_{\omega=\omega_b} = f(\eta)$
Μεταφορά θερμότητας με συναγωγή	Robin	$-\frac{1}{\kappa_m} \left[ k \frac{\partial \Theta}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_b} = \frac{h_v}{c_{wm}} [\Theta]_{\omega=\omega_b} - \frac{h_v}{c_{wm}} \Theta_\infty$

Πίνακας 3.1: Συνοριακές συνθήκες για το μονοδιάστατο πρόβλημα ανομοιογενούς υλικού

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Εφαρμογές

#### 4.1 Δομή αλγορίθμου

Η ανάλυση που έγινε στο κεφάλαιο που προηγήθηκε είχε ως αντικειμενικό σκοπό τον υπολογισμό των μητρώων  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$  στη σχέση  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , η οποία ισχύει σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο. Η διάσταση των τετραγωνικών αυτών μητρώων εξαρτάται από τη διάσταση του προβλήματος και ουσιαστικά ταυτίζεται με το πλήθος των αγνώστων ανά πεπερασμένο στοιχείο (δηλαδή 6 για το πρόβλημα στη μία διάσταση, 15 για το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις). Ο υπολογισμός των στοιχείων τους στην περίπτωση ισότροπων ομοιογενών υλικών είναι άμεσος. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση υλικών μεταβλητών ιδιοτήτων, όπου τα στοιχεία των  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$  εμφανίζονται ως ορισμένα ολοκληρώματα αγνώστων συναρτήσεων. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών γίνεται αριθμητικά, με χρήση των ολοκληρωτικών τύπων Gauss [5]. Επίσης, όπως έχει ήδη επισημανθεί, γίνεται η παραδοχή πως τα μητρώα αυτά δεν εξαρτώνται από το χρόνο.

Ο καθορισμός των μητρώων  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$  κάθε πεπερασμένου στοιχείου καθιστά δυνατό τον υπολογισμό των καθολικών μητρώων  $\bar{\mathbf{C}}$  και  $\bar{\mathbf{K}}$  ολόκληρου του φορέα. Η διάσταση των καθολικών μητρώων ισούται με το βαθμό ελευθερίας του συνολικού φορέα, δηλαδή ισούται με συνολικό αριθμό των κόμβων του φορέα επί το συνολικό αριθμό των αγνώστων ανά κόμβο. Η καθολική σχέση του φορέα είναι η  $\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t)$ . Έπειτα από τη μόρφωση της καθολικής σχέσης είναι εφικτή η παραγωγή αλγορίθμου για τον υπολογισμό του άγνωστου διανύσματος  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  σε κάθε χρονικό βήμα  $t$ .

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα θερμοελαστικότητας ισότροπου υλικού μεταβλητών ιδιοτήτων. Η περίπτωση ομοιογενούς υλικού είναι προφανώς ειδική περίπτωση του αλγορίθμου αυτού. Επιπλέον, αναλόγως με το είδος των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών (π.χ. Dirichlet, Neumann, Robin), ο αλγόριθμος τροποποιείται κατάλληλα, ώστε να περιλαμβάνει τους αντίστοιχους συνοριακούς όρους. Το διάγραμμα ροής είναι το ακόλουθο:

Διάγραμμα ροής αλγορίθμου πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα θερμοελαστικότητας ισότροπου υλικού μεταβλητών ιδιοτήτων (1 ή 2 διαστάσεις)

- Καθορισμός συνολικού αριθμού πεπερασμένων στοιχείων και συνολικού αριθμού χρονικών βημάτων
- Εισαγωγή συνολικών μεγεθών και χαρακτηριστικών μεγεθών αδιαστατοποίησης
- Εισαγωγή συναρτήσεων των μεταβλητών ιδιοτήτων του υλικού
- Μόρφωση καθολικών μητρών IEN, ID και LM
- Μόρφωση τοπικών μητρών  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$   
(με χρήση των συναρτήσεων των ιδιοτήτων και ολοκλήρωση Gauss)
- Άθροιση των τοπικών μητρών και μόρφωση των καθολικών μητρών  $\bar{\mathbf{C}}$  και  $\bar{\mathbf{K}}$
- Χρονική ολοκλήρωση μέσω της μεθόδου Implicit Euler
- Διαχωρισμός του υπολογιζόμενου διανύσματος των αγνώστων  $\mathbf{x}(t)$  σε επιμέρους αδιαστατοποιημένα διανύσματα μεταβολής θερμοκρασίας  $\theta(t)$ , ταχύτητας  $\mathbf{v}_x(t) - \mathbf{v}_y(t)$  και μετατόπισης  $\mathbf{u}_x(t) - \mathbf{u}_y(t)$
- Υπολογισμός του μητρώου των τάσεων μέσω της σχέσης (2.20):  
$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta$$
- Αδιαστατοποίηση των τάσεων μέσω της σχέσης  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / K$ ,  $K = \beta T_0$

Πίνακας 4.1: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου θερμοελαστικότητας

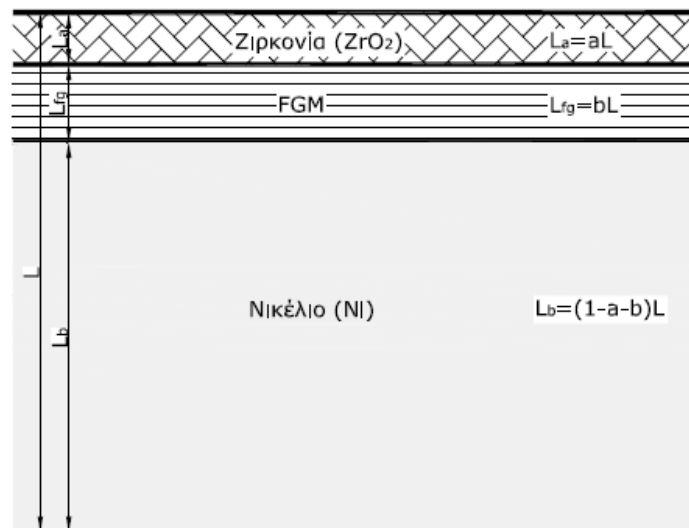
Η υλοποίηση του αλγορίθμου πραγματοποιείται σε περιβάλλον Matlab. Οι συναρτήσεις των ιδιοτήτων του υλικού, καθώς και ο υπολογισμός των σημείων και των βαρών για την ολοκλήρωση Gauss γίνονται σε ανεξάρτητα υποπρογράμματα, τα οποία καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα.

#### 4.2 Εφαρμογή σε σύνθετο υλικό κεραμικού-μετάλλου (FGM)

Υπάρχουν πολλά άρθρα που πραγματεύονται τη συμπεριφορά των FGMs υπό συνθήκες υψηλών θερμοκρασιών [12, 13, 14, 15]. Τυπικά, τα σύνθετα αυτά υλικά αποτελούνται από κεραμικό και μέταλλο. Το πλεονέκτημα του συνδυασμού αυτού είναι η αντοχή του σε περιβάλλοντα έντονης κλίσης της θερμοκρασίας. Το κεραμικό

λειτουργεί ως θερμική ασπίδα, λόγω του χαμηλού συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας που το χαρακτηρίζει. Το μέταλλο, χάρη στην ολκιμότητά του, εμποδίζει τη θραύση λόγω των υψηλών τάσεων που επιβάλλει η απότομη μεταβολή της θερμοκρασίας.

Οι εφαρμογές που ακολουθούν αφορούν σύνθετα υλικά από μέταλλο και κεραμικό σε στρώσεις. Συγκεκριμένα, μελετάται η θερμομηχανική συμπεριφορά σύνθετου υλικού τριών στρώσεων. Η πρώτη στρώση (εξωτερική) είναι σχετικά λεπτή και αποτελείται από κεραμικό υλικό και συγκεκριμένα Ζιρκονία ( $ZrO_2$ ). Η τρίτη στρώση (εσωτερική) αποτελείται από μέταλλο και συγκεκριμένα Νικέλιο (Ni). Η δεύτερη στρώση αποτελεί την ενδοεπιφάνεια του FGM με πάχος παραπλήσιο της εξωτερικής στρώσης. Οι ιδιότητες της ενδοεπιφάνειας λαμβάνονται ως γραμμικά μεταβαλλόμενες ανάμεσα στις ιδιότητες των δύο άλλων στρώσεων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται η διαστρωμάτωση του σύνθετου υλικού και οι θερμομηχανικές ιδιότητες της Ζιρκονίας και του Νικελίου [14].



Σχήμα 4.1: Διαστρωμάτωση σύνθετου υλικού

Υλικό	Πυκνότητα ( $kg \cdot m^{-3}$ )	Ειδική Θερμοχωρητικό- τητα ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ )	Συντελεστής Μεταφοράς Θερμότητας ( $J \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}$ )	Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	Συντελεστής Poisson	Συντελεστής Θερμικής Διαστολής ( $10^{-6} \cdot K^{-1}$ )
Κεραμικό (Ζιρκονία)	5990	3000	3.0	200	0.30	10.6
Μέταλλο (Νικέλιο)	8890	443	89.9	207	0.31	13.3

Πίνακας 4.2: Θερμομηχανικές ιδιότητες υλικών

Στις συγκεκριμένες εφαρμογές θεωρείται πως το πάχος του μετάλλου είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος των δύο άλλων στρώσεων, ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αντανάκλασης του τασικού κύματος. Το σύνθετο υλικό επομένως προσεγγίζεται ως ημίχωρος και μελετώνται η διάδοση της θερμότητας και του τασικού κύματος:  $(L_a + L_{fg}) \ll L_b$ . Κατά τις διάφορες αναλύσεις, το συνολικό πάχος των δύο αρχικών στρώσεων διατηρείται σταθερό:  $(L_a + L_{fg}) = L_c$ . Η θέση της διεπιφάνειας του μετάλλου είναι επομένως σταθερή. Συγκεκριμένα, τα αδιαστατοποιημένα μεγέθη των εφαρμογών είναι τα εξής:

- Το σώμα έχει συνολικό αδιάστατο μήκος  $L = 25$ ,
- το σταθερό πάχος των δύο ανώτερων στρώσεων είναι  $L_c = L_a + L_{fg} = \frac{L}{10} = 2.5$ ,
- εξετάζονται οι περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 0, \frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}, \frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ ,
- το φαινόμενο μελετάται για συνολικό αδιαστατοποιημένο χρόνο ίσο με  $t_c = 7$ ,
- το σώμα έχει αρχική θερμοκρασία  $T_0 = 27^\circ\text{C} = 300\text{K}$ ,
- για το μονοδιάστατο πρόβλημα μελετώνται οι περιπτώσεις ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας κατά  $300\text{K}$  ( $\Theta_0 = 1$ ) (συνθήκες Dirichlet), καθώς και η περίπτωση μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή και παραμέτρους  $T_\infty = 600\text{K}$  ( $\Theta_\infty = 1$ ),  $h_v = 50000\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  (συνθήκες Robin).

Να σημειωθεί ότι η αδιαστατοποίηση σε όλες τις αναλύσεις γίνεται ως προς τα χαρακτηριστικά μεγέθη του μετάλλου.

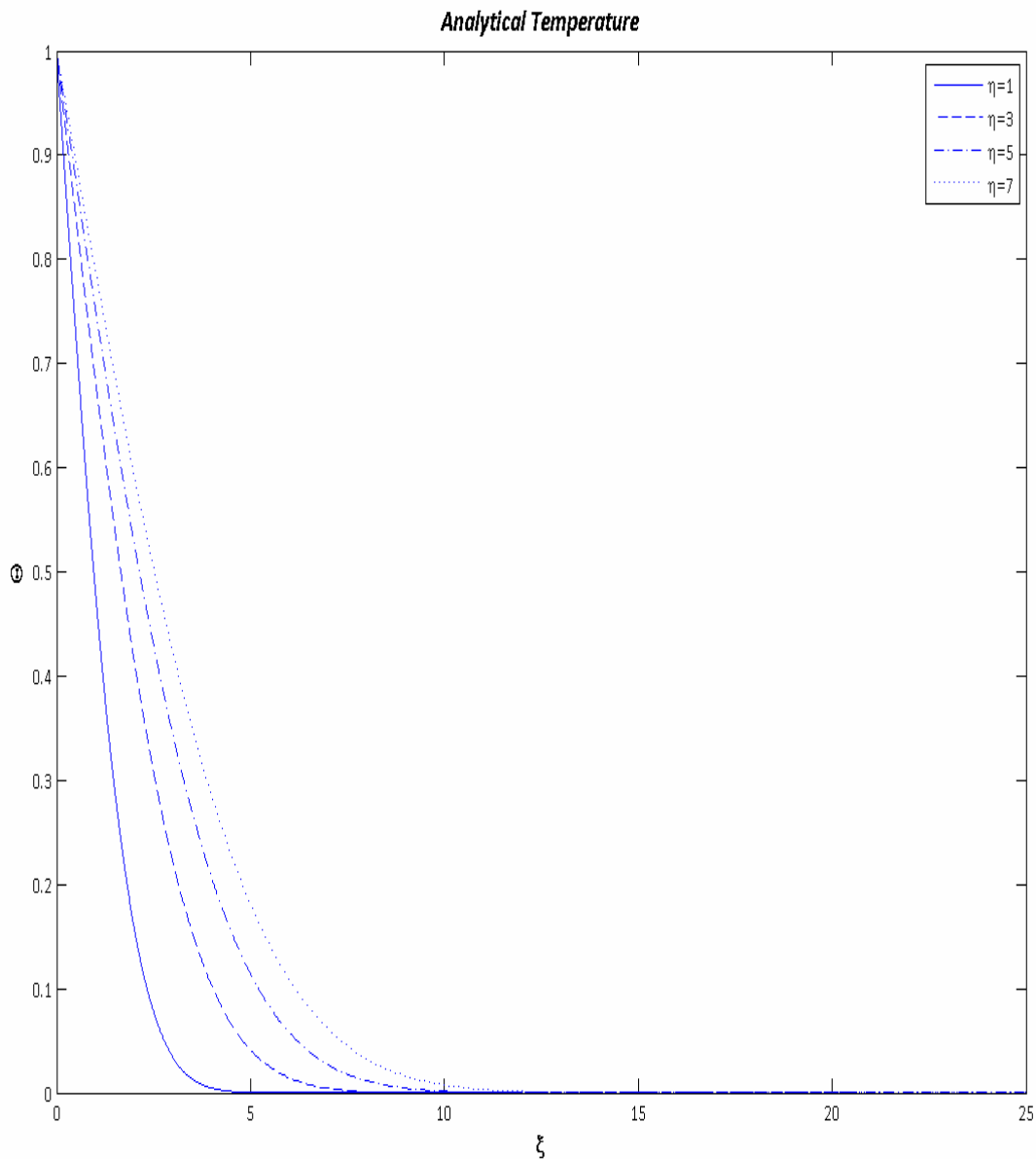
#### 4.3 Έλεγχος σύγκλισης του αλγορίθμου για την περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος ομογενούς και ισότροπου υλικού

Για την περίπτωση του ελαστικού ομογενούς-ισότροπου ημίχωρου που υποβάλλεται σε ακαριαία μοναδιαία μεταβολή της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας του, είναι διαθέσιμες αναλυτικές λύσεις στη βιβλιογραφία [6, 8, 10, 11]. Βέβαια, θα πρέπει να διευκρινιστεί ότι οι λύσεις αυτές αφορούν το ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας, στο οποίο ο όρος  $\beta T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$  απουσιάζει από την εξίσωση της θερμότητας. Ωστόσο, όπως αποδεικνύεται, η επίδραση του όρου αυτού είναι αμελητέα [8]. Οι αδιαστατοποιημένες συναρτήσεις της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης δίνονται από τις σχέσεις που ακολουθούν. Επίσης, παρουσιάζονται τα



διαγράμματα κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης για διάφορες χρονικές στιγμές:

$$\Theta(\xi, \eta) = \Theta_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\eta}}\right), \quad (4.1)$$

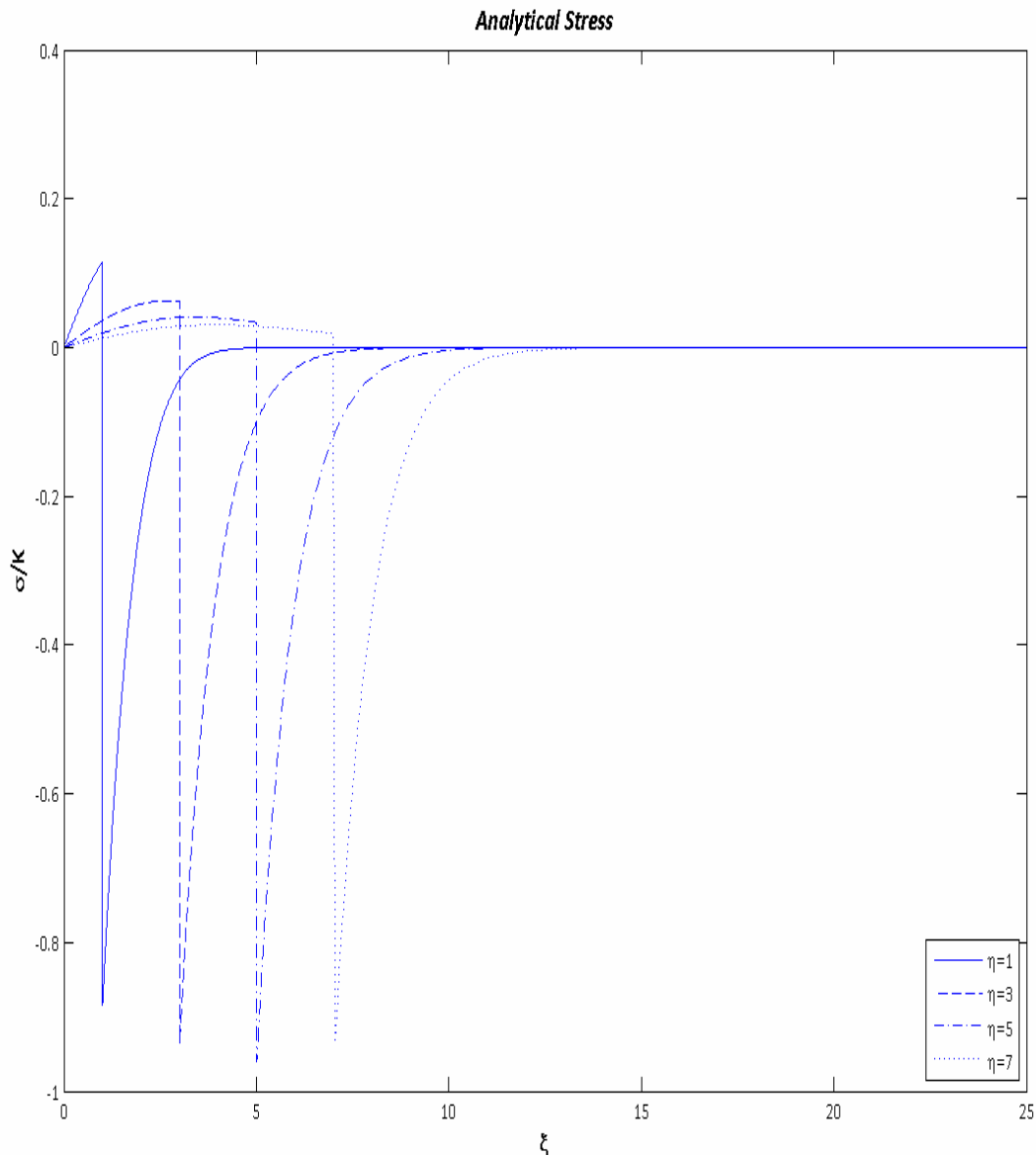


Σχήμα 4.2: Αναλυτική λύση της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας σε διάφορες χρονικές στιγμές

Όπως ήταν αναμενόμενο, η συνάρτηση της μεταβολής της θερμοκρασίας είναι συνεχής. Κατά την πάροδο του χρόνου, η θερμότητα διαδίδεται στον ημίχωρο. Η

θερμοκρασία κάθε σημείου συνεχώς αυξάνεται, έως ότου φτάσει την εξωτερικά επιβαλλόμενη θερμοκρασία:  $\Theta(\xi, \infty) = \Theta_0 = 1$ .

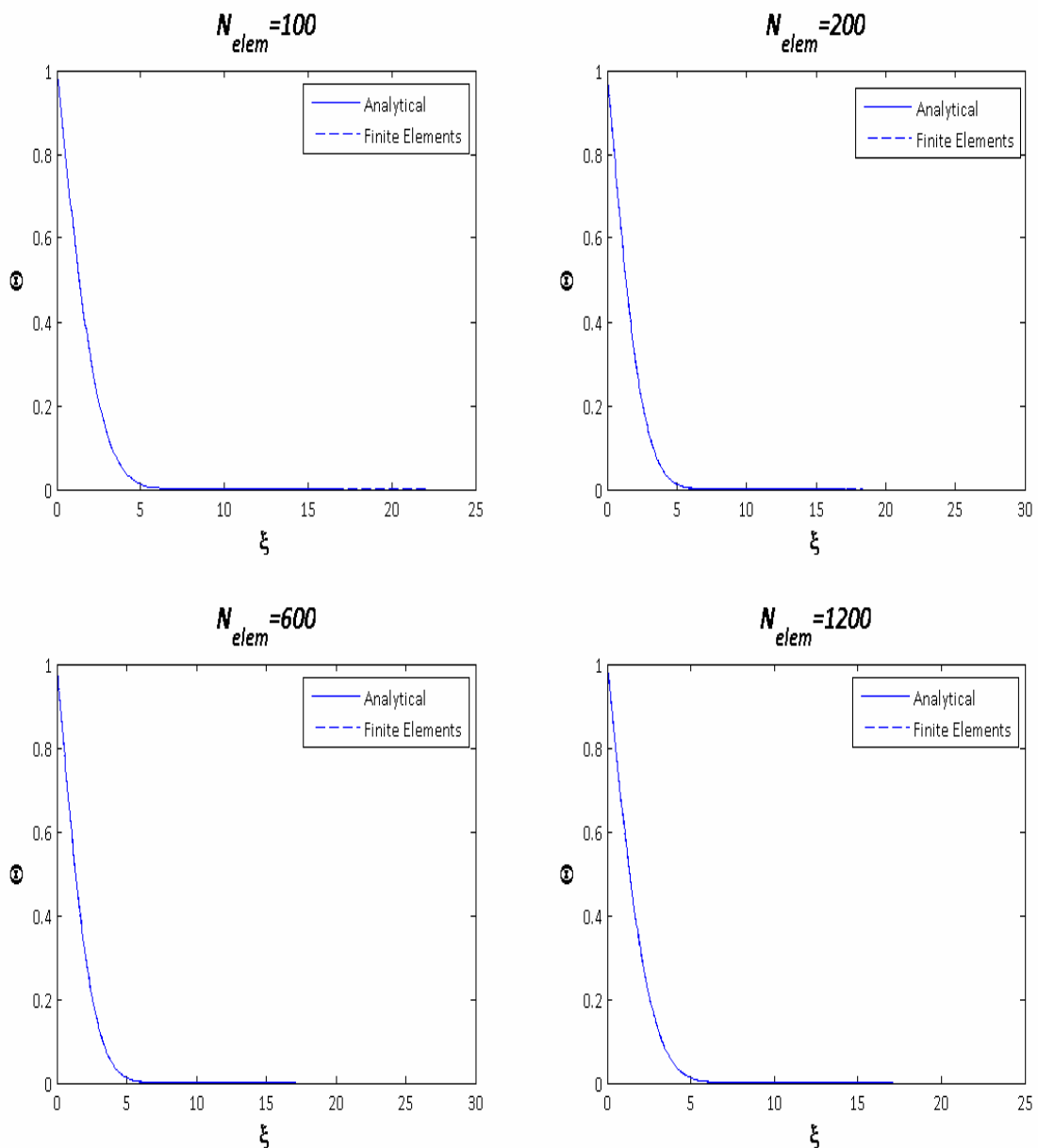
$$\frac{\sigma(\xi, \eta)}{\kappa} = \left( \Theta_0 \beta \frac{1}{2} e^{\eta+\xi} + e^{-\xi} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\eta}} \right) - e^{\eta-\xi} \operatorname{H}(\eta - \xi), \quad (4.2)$$



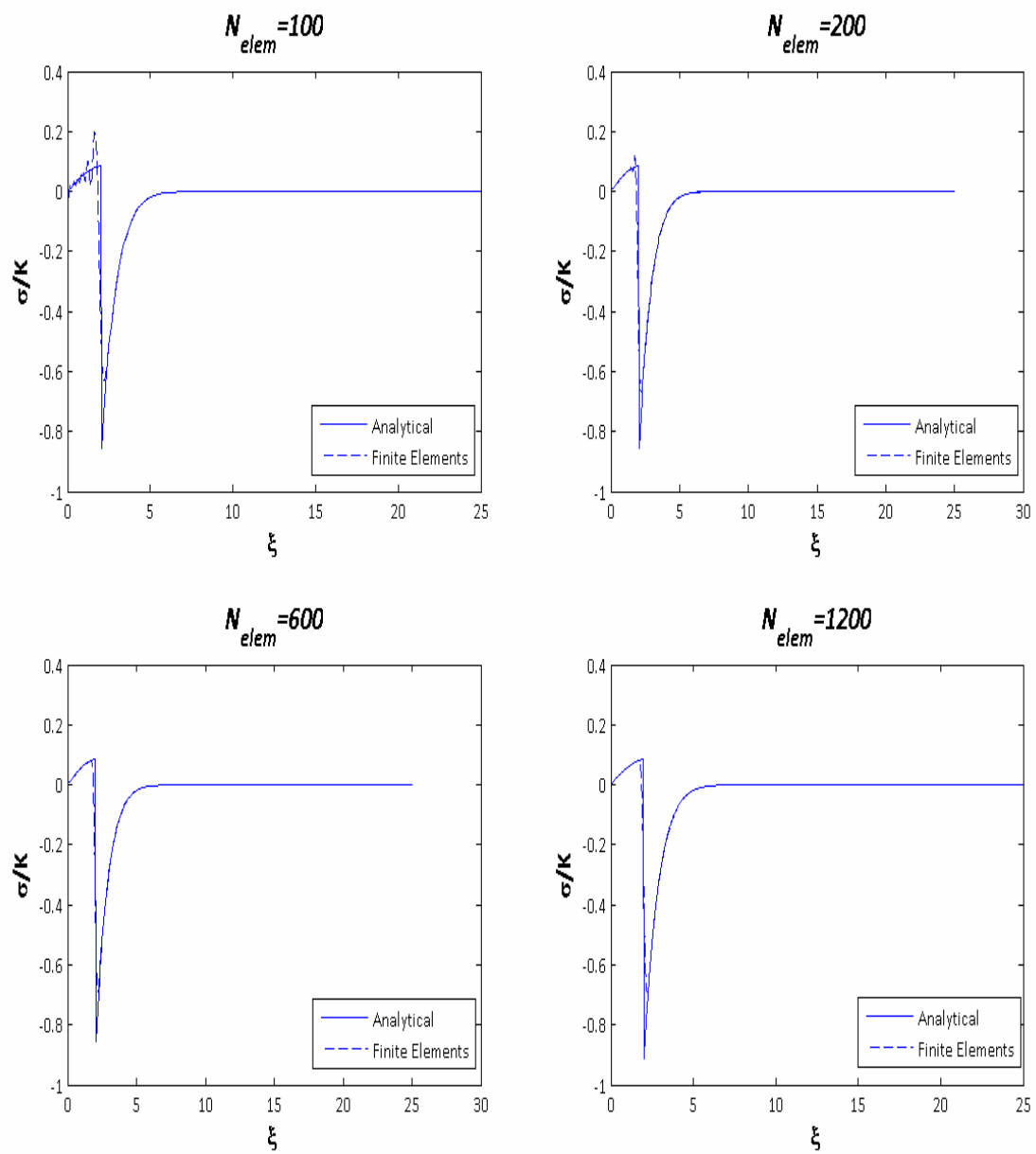
Σχήμα 4.3: Αναλυτική λύση της κατανομής της τάσης σε διάφορες χρονικές στιγμές

Η τάση δεν είναι συνεχής συνάρτηση. Έστω ένα σημείο του ελαστικού ημίχωρου στη θέση  $\xi$ . Κατά τη χρονική στιγμή  $\eta = \xi$  το τασικό κύμα διαπερνά τη θέση αυτή και η τάση που ασκείται στο σημείο παρουσιάζει μοναδιαίο άλμα.

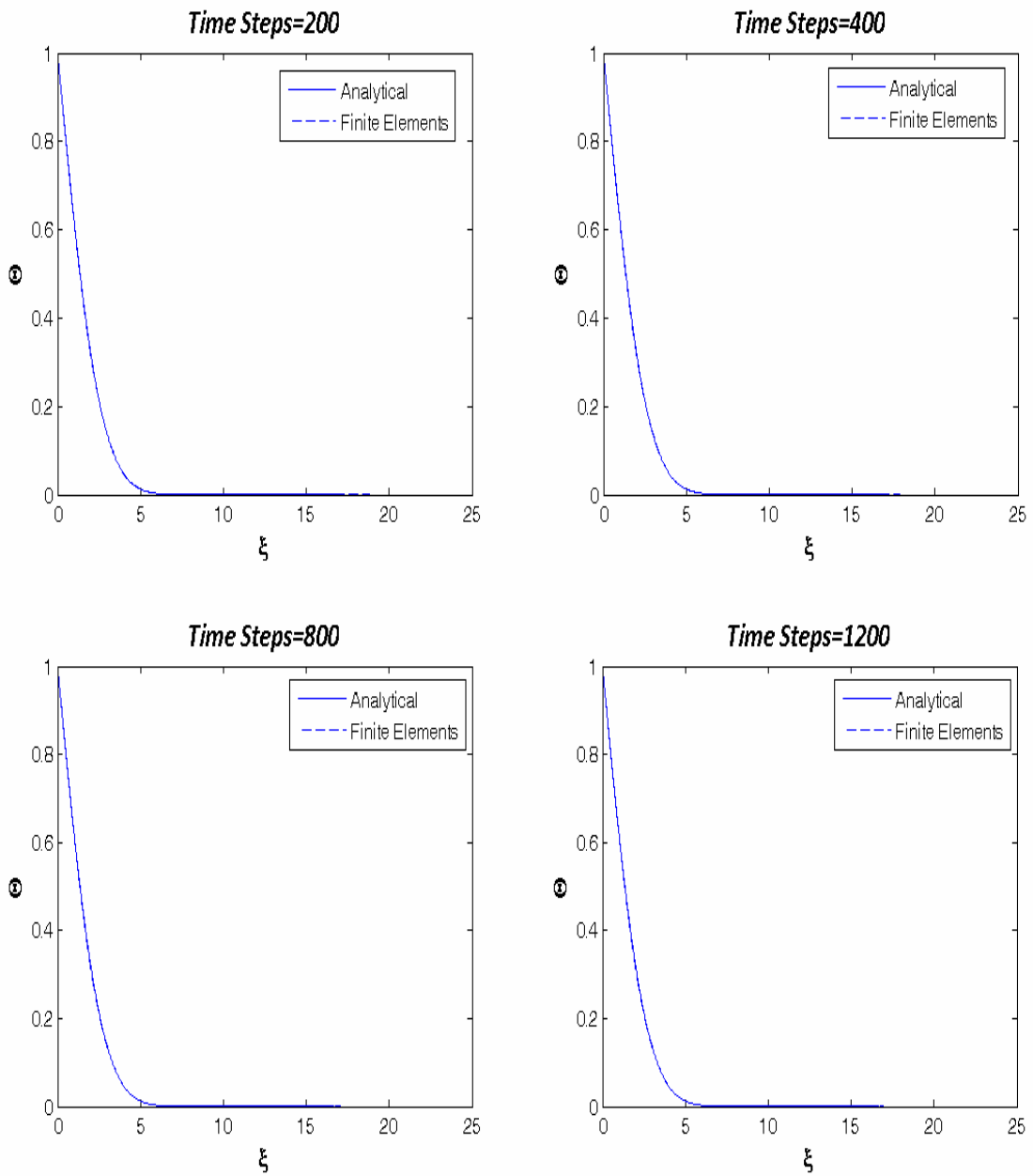
Στα επόμενα διαγράμματα απεικονίζεται η σύγκλιση του αλγορίθμου προς την ακριβή αναλυτική λύση, καθώς γίνεται πύκνωση τόσο των πεπερασμένων στοιχείων όσο και των χρονικών βημάτων. Συγκεκριμένα, απεικονίζονται τα στιγμιότυπα της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης τη χρονική στιγμή  $\eta = 2$ , για την περίπτωση που το σύνθετο υλικό αποτελείται μόνο από μέταλλο (ομογενές). Αρχικά πραγματοποιείται πύκνωση των πεπερασμένων στοιχείων, ενώ τα χρονικά βήματα παραμένουν σταθερά και ίσα προς  $M = 1200$ . Στη συνέχεια πυκνώνονται τα χρονικά βήματα υπό σταθερό αριθμό πεπερασμένων στοιχείων ίσο με  $N_{elem} = 1200$ .



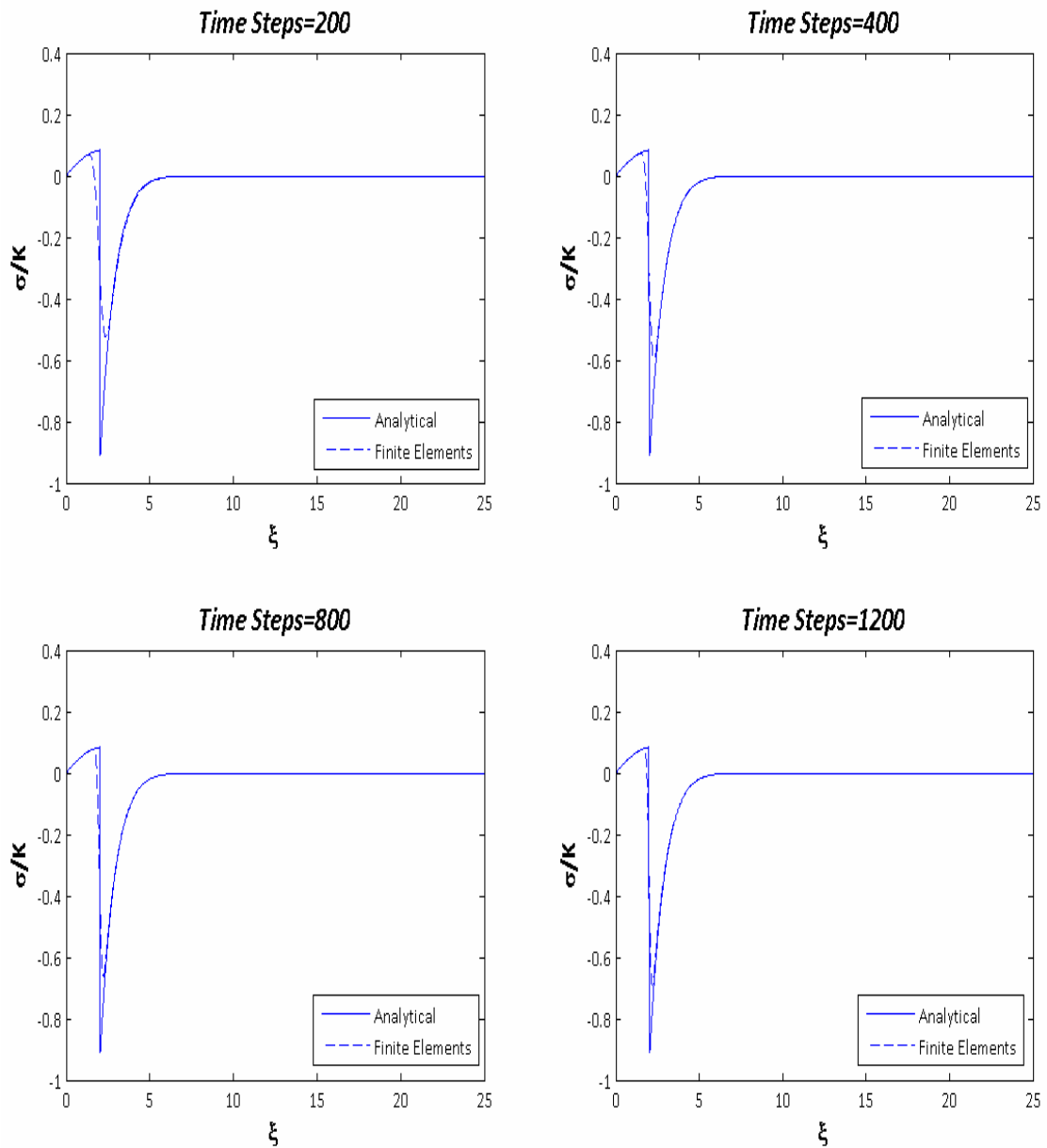
Σχήμα 4.4: Σύγκλιση της μεταβολής της θερμοκρασίας με πύκνωση των πεπερασμένων στοιχείων



Σχήμα 4.5: Σύγκλιση της τάσης με πύκνωση των πεπερασμένων στοιχείων



Σχήμα 4.6: Σύγκλιση της μεταβολής της θερμοκρασίας με πύκνωση των χρονικών βημάτων



Σχήμα 4.7: Σύγκλιση της τάσης με πύκνωση των χρονικών βημάτων

Η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι εμφανής. Μάλιστα, στην περίπτωση της θερμοκρασίας η λύση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει σχεδόν αμέσως στην αναλυτική λύση (με λίγα πεπερασμένα στοιχεία ή χρονικά βήματα). Η τάση ωστόσο απαιτεί πύκνωση, λόγω της απότομης μεταβολής της στο σημείο  $\xi = \eta = 2$ .

Καθώς είναι δεδομένη πλέον η σύγκλιση του αλγορίθμου, πραγματοποιούνται αναλύσεις με χρήση  $N_{elem} = 1200$  πεπερασμένων στοιχείων και  $M = 1200$  χρονικών βημάτων. Ωστόσο, τα πεπερασμένα στοιχεία δεν είναι ισομήκη. Χρησιμοποιούνται

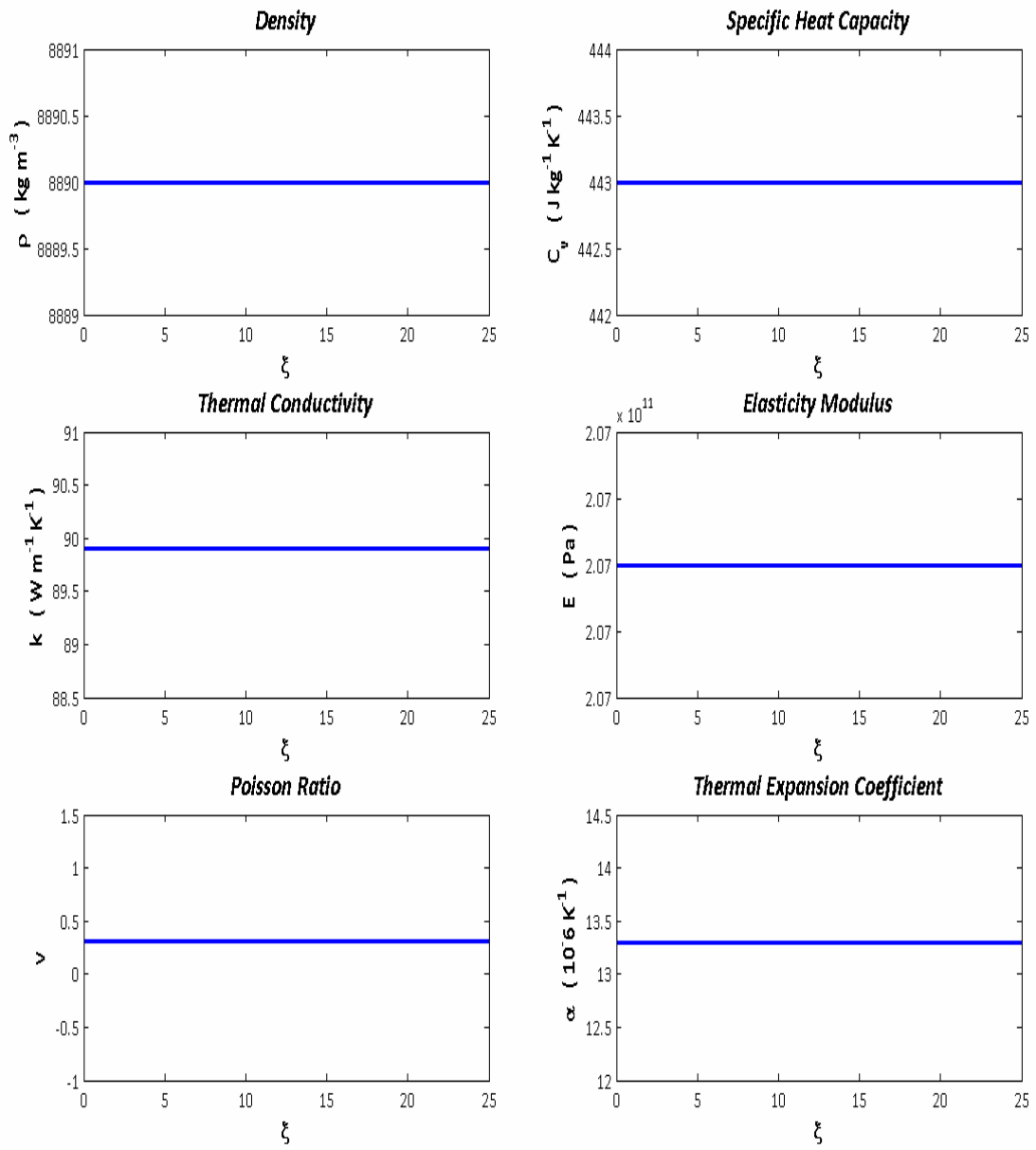
1000 πεπερασμένα στοιχεία για τη διακριτοποίηση έως τη θέση  $\xi = \frac{L}{5} = 5$ , ενώ τα υπόλοιπα 200 πεπερασμένα στοιχεία χρησιμεύουν για την αραιή διακριτοποίηση του υπόλοιπου σώματος.

#### **4.4 Σύγκριση ομογενούς μετάλλου με σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (χωρίς FGM), υπό την επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας**

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάται η επίδραση της παρουσίας του κεραμικού στο σύνθετο υλικό υπό συνθήκες Dirichlet (ακαριαία μοναδιαία αύξηση της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας). Για το λόγο αυτό γίνεται σύγκριση του ομογενούς μετάλλου με το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, ώστε να διαπιστωθεί αρχικά ο ρόλος του κεραμικού.

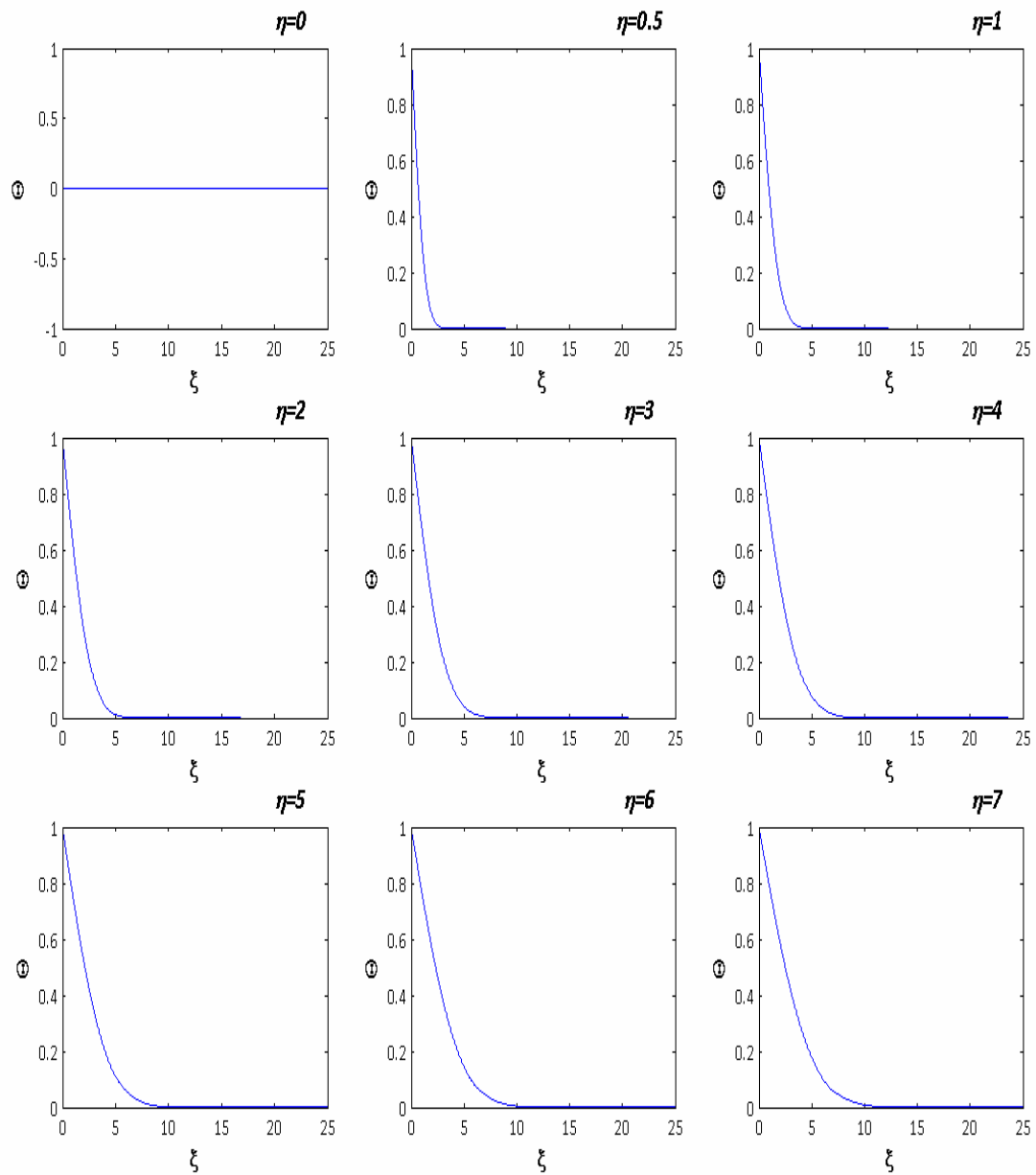
Το πάχος της στρώσης του κεραμικού λαμβάνεται ίσο προς  $L_c = L_a = \frac{L}{10} = 2.5$ .

Αρχικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αφορούν το μέταλλο: η κατανομή των ιδιοτήτων του, η χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης. Ομοίως, ακολουθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα για το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης σε χαρακτηριστικές θέσεις ( $\xi = 1.25$ ,  $\xi = 2.5$ ,  $\xi = 5$ ). Τέλος, αναλύεται η επίδραση του κεραμικού στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

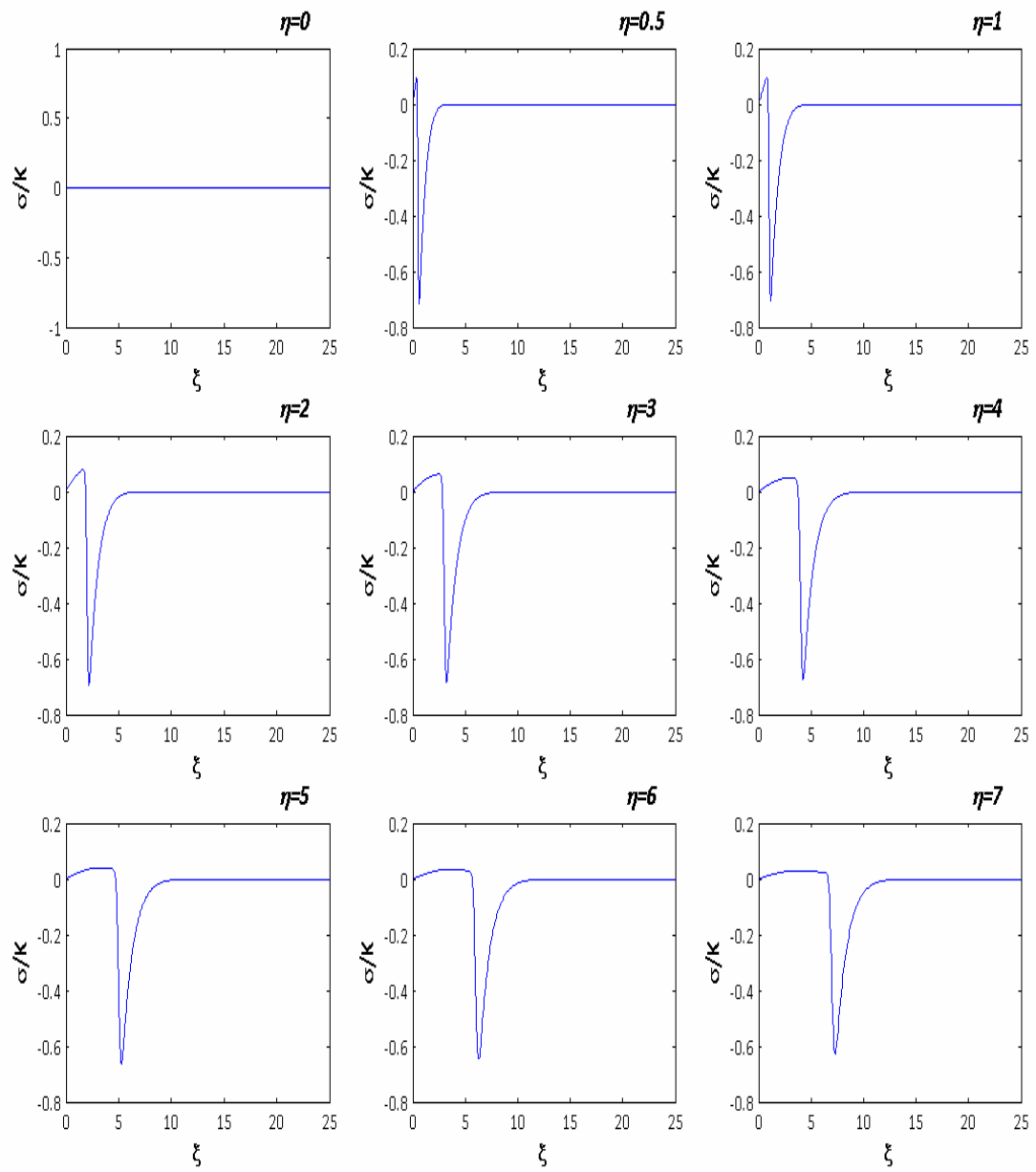


Σχήμα 4.8: Κατανομή των ιδιοτήτων του μετάλλου (ομογενές υλικό)

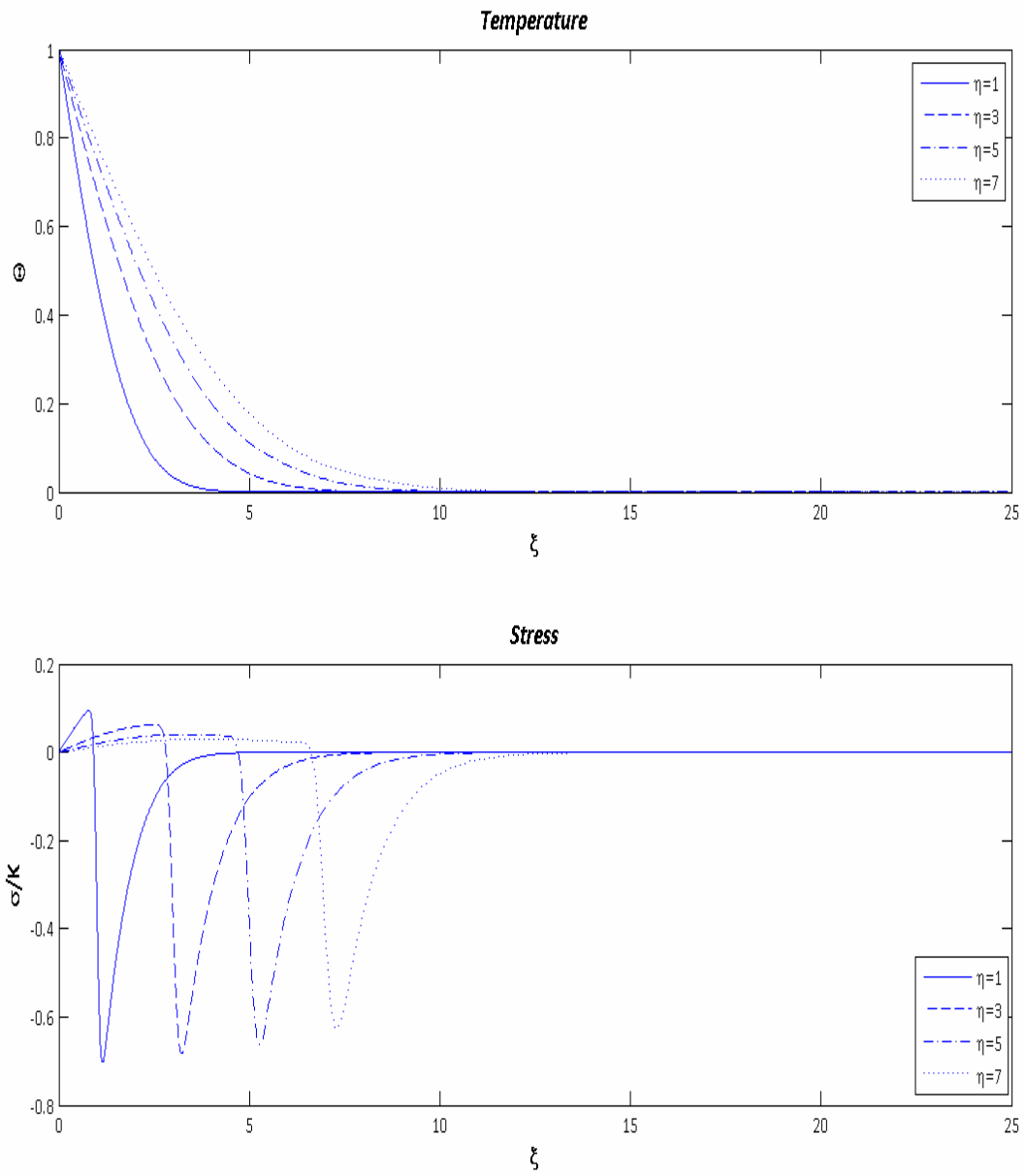




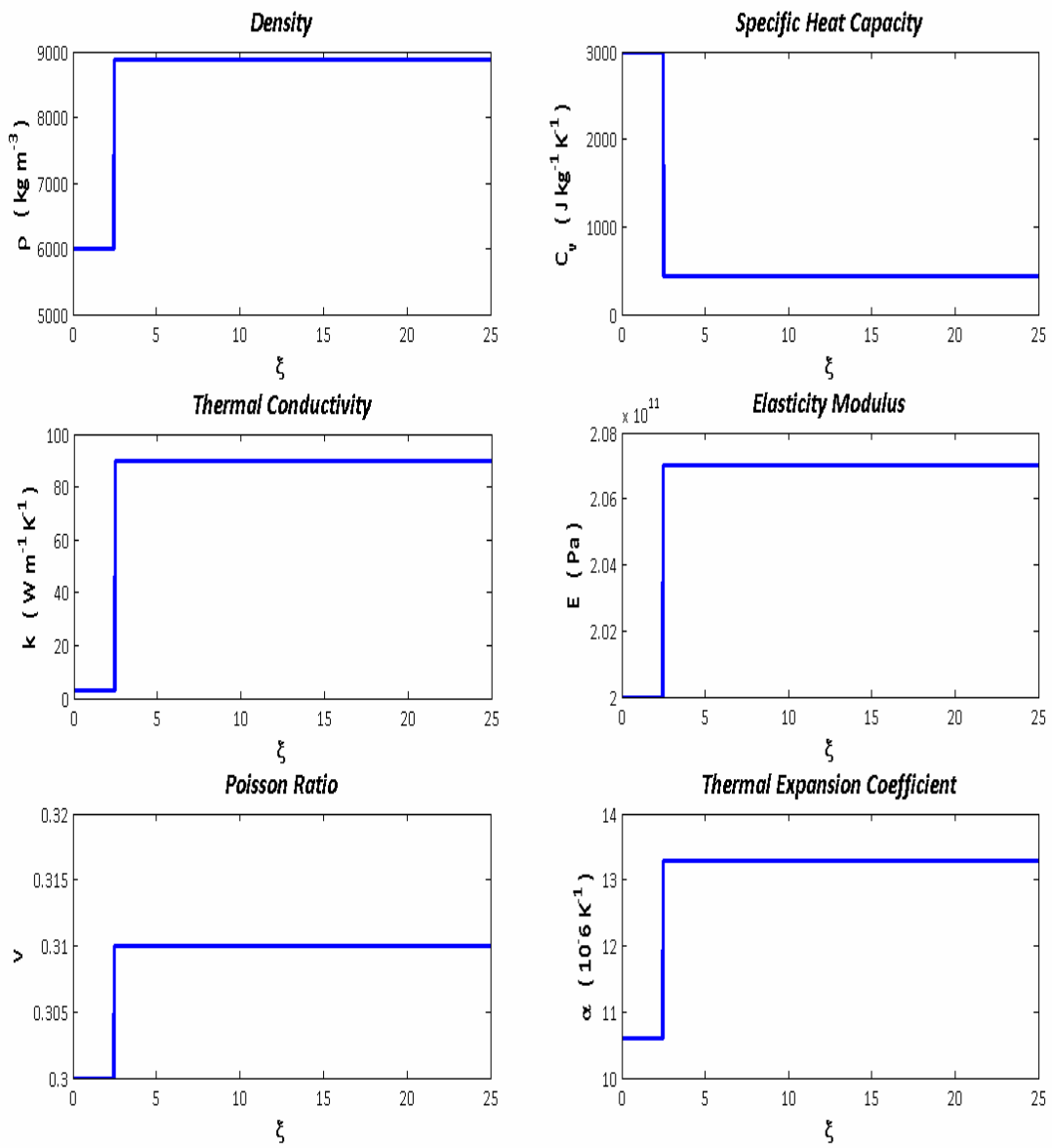
Σχήμα 4.9: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του μετάλλου (στιγμιότυπα)



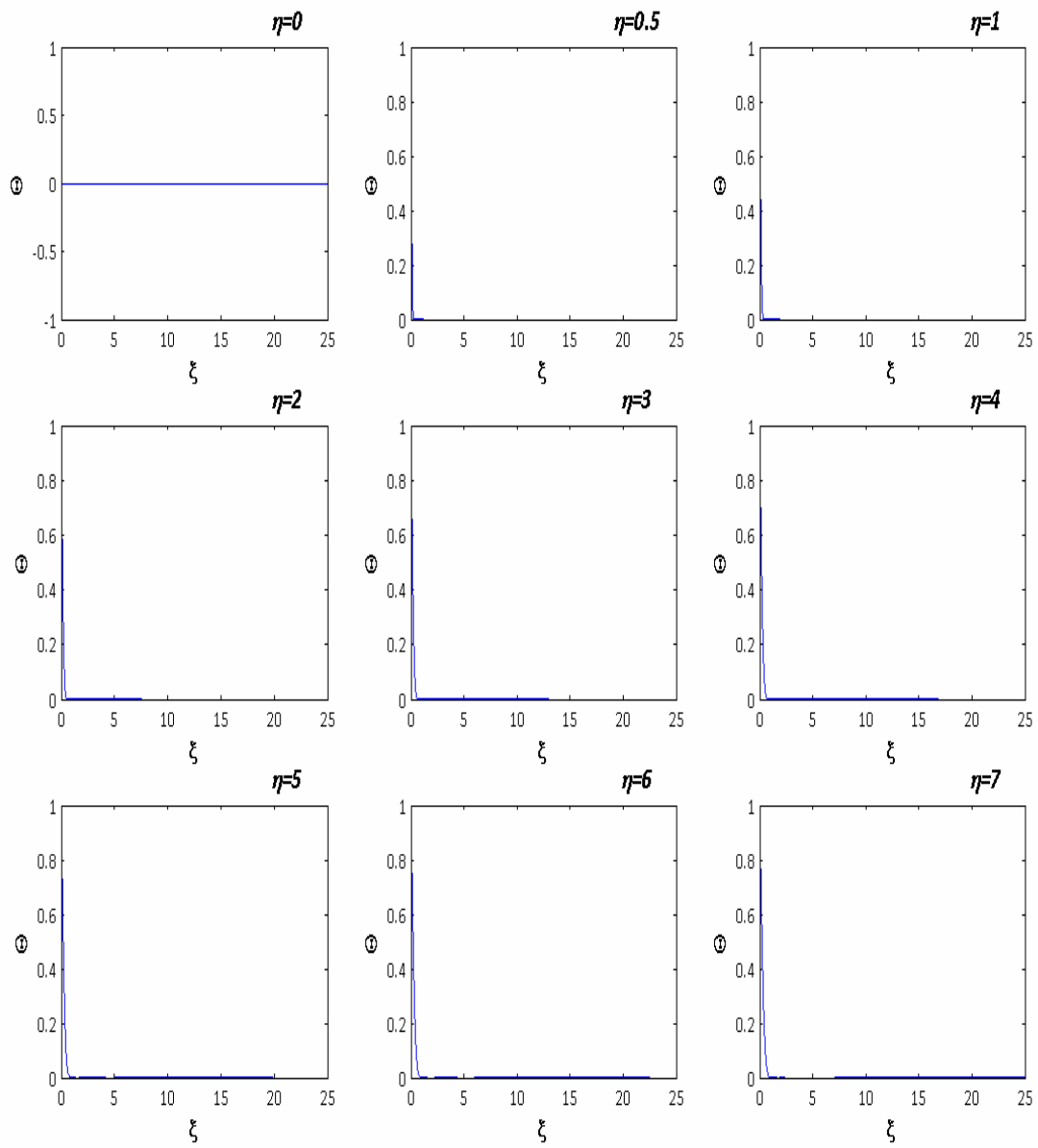
Σχήμα 4.10: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο μέταλλο (στιγμιότυπα)



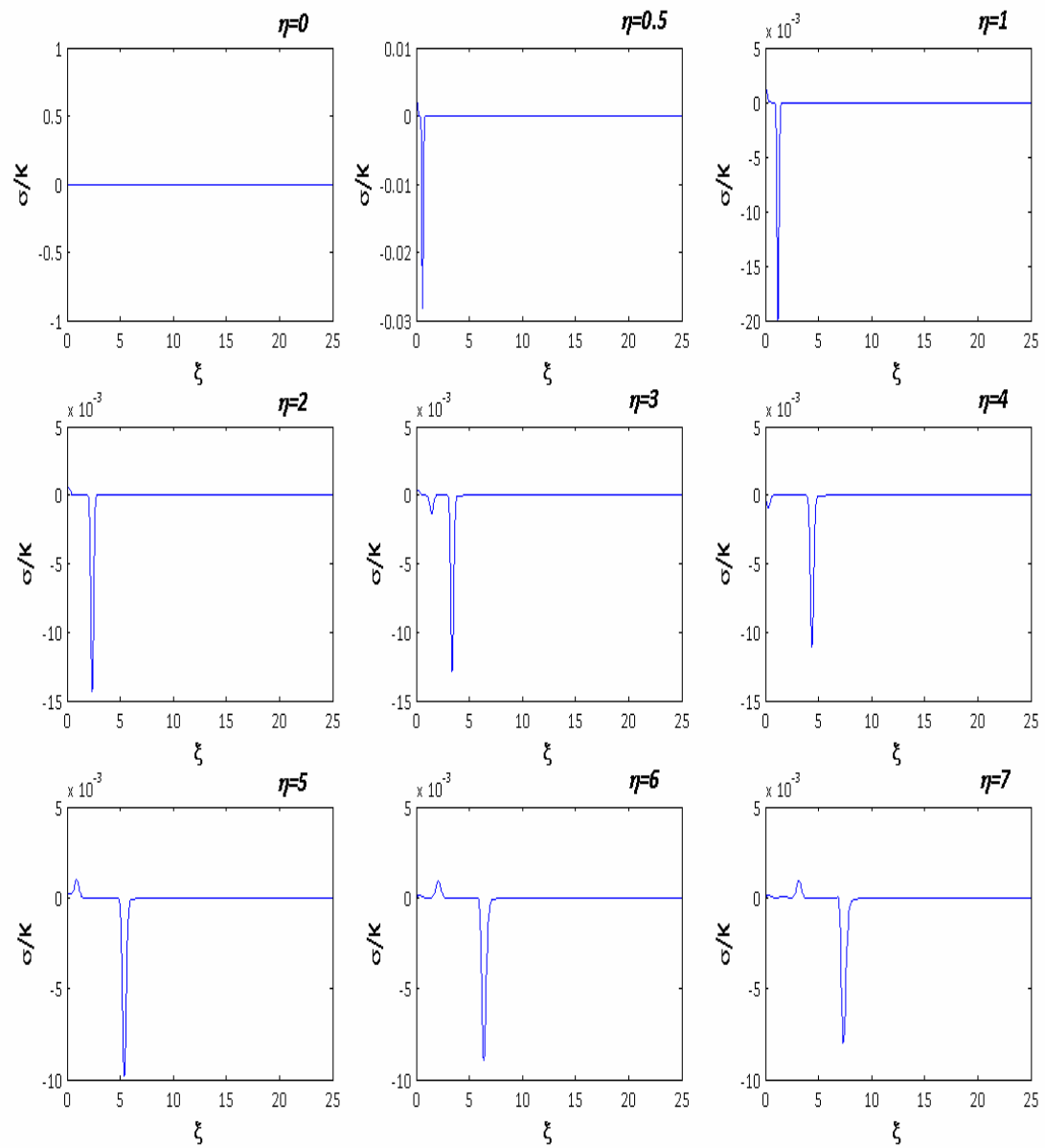
Σχήμα 4.11: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο μέταλλο (σε ένα διάγραμμα)



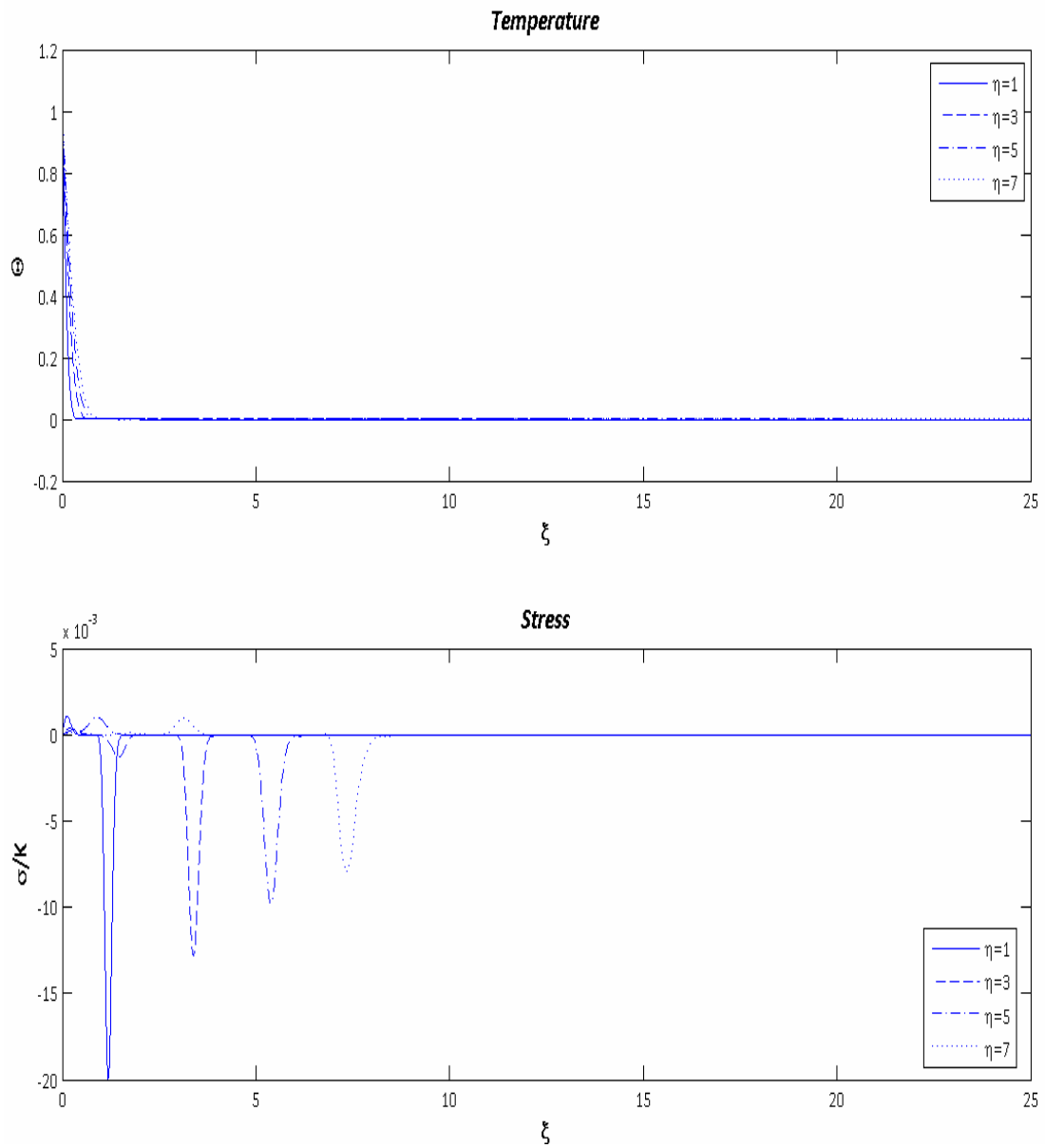
Σχήμα 4.12: Κατανομή των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο



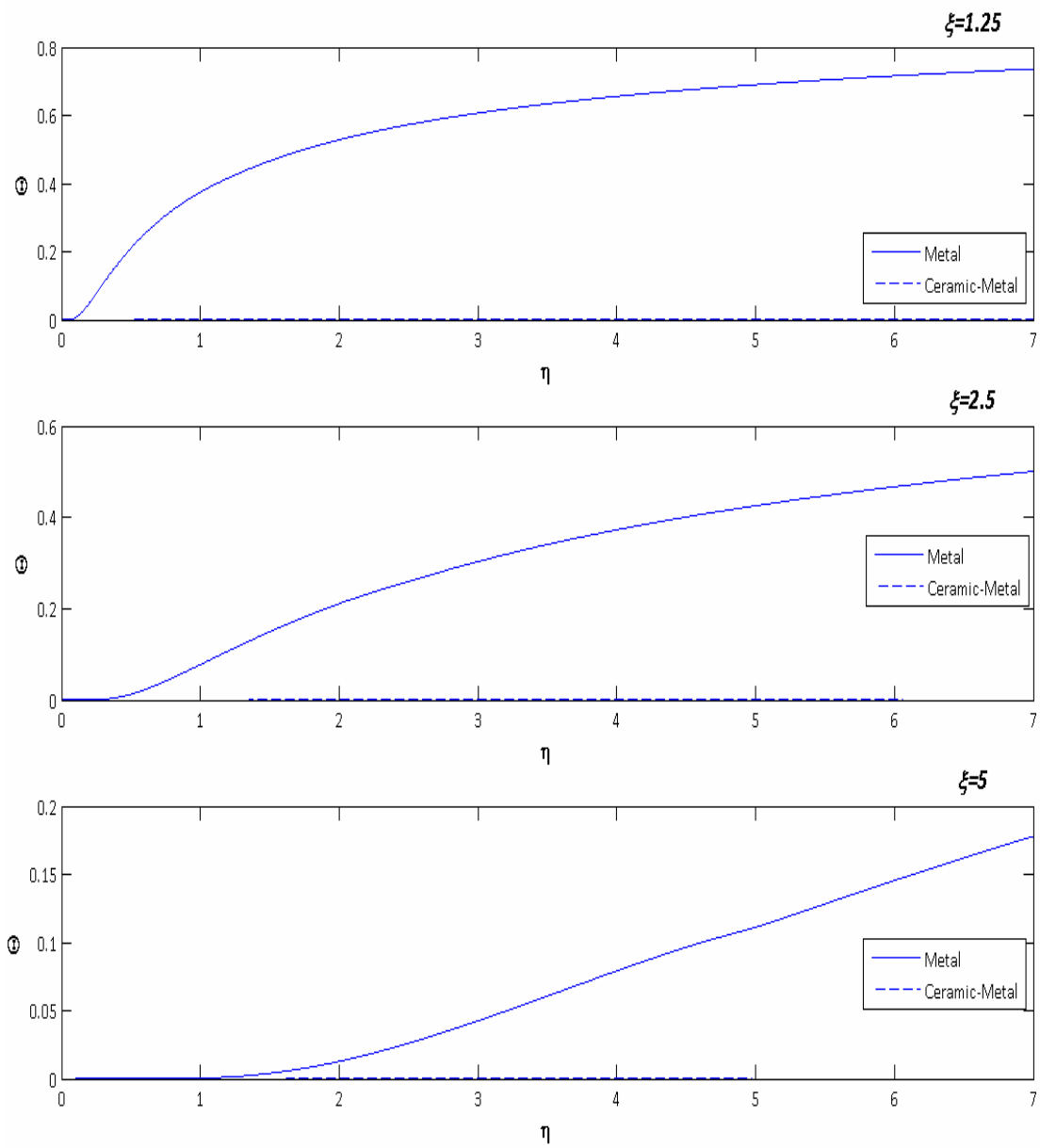
Σχήμα 4.13: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.14: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (στιγμιότυπα)

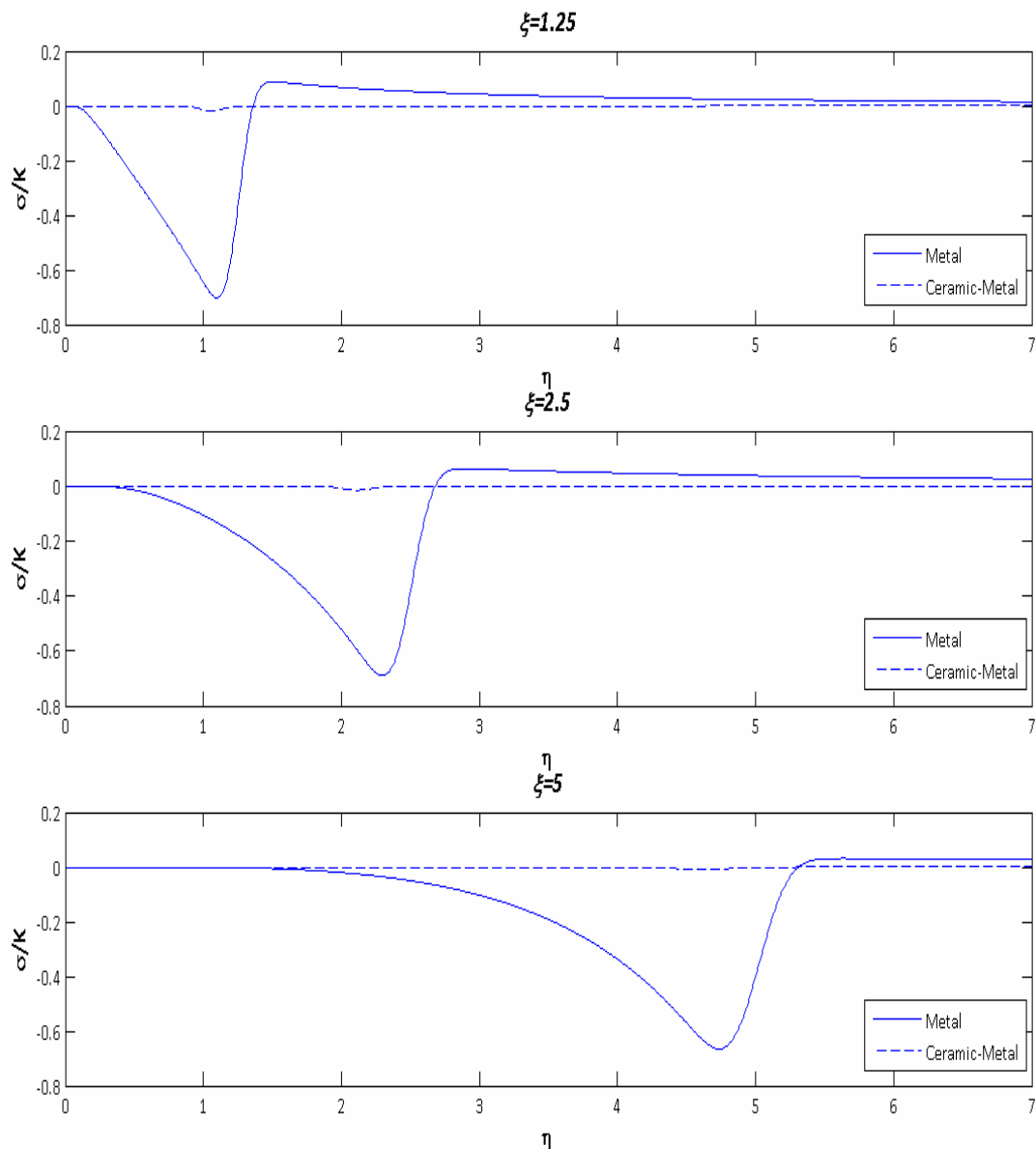


Σχήμα 4.15: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (σε ένα διάγραμμα)



Σχήμα 4.16: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας στο μέταλλο και το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, σε χαρακτηριστικές θέσεις





Σχήμα 4.17: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της τάσης στο μέταλλο και το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, σε χαρακτηριστικές θέσεις

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν τα εξής:

- Είναι σαφής ο ρόλος του κεραμικού υλικού ως θερμική ασπίδα. Ο χαμηλός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας που διαθέτει έχει ως αποτέλεσμα τη δραστική μείωση της ταχύτητας διάδοσης της θερμότητας.
- Η μείωση της ταχύτητας διάδοσης της θερμότητας έχει ως πρόσθετη συνέπεια τη μείωση της έντασης του τασικού κύματος.
- Η ύπαρξη της διεπιφάνειας κεραμικού-μετάλλου στη θέση  $\xi = 2.5$  έχει ως αποτέλεσμα την αντανάκλαση του τασικού κύματος στη θέση αυτή. Όταν το αντανακλώμενο θλιπτικό τασικό κύμα επιστρέψει στην άνω επιφάνεια, αντανακλάται εκ νέου (λόγω της διεπιφάνειας αέρα-κεραμικού). Μάλιστα, το

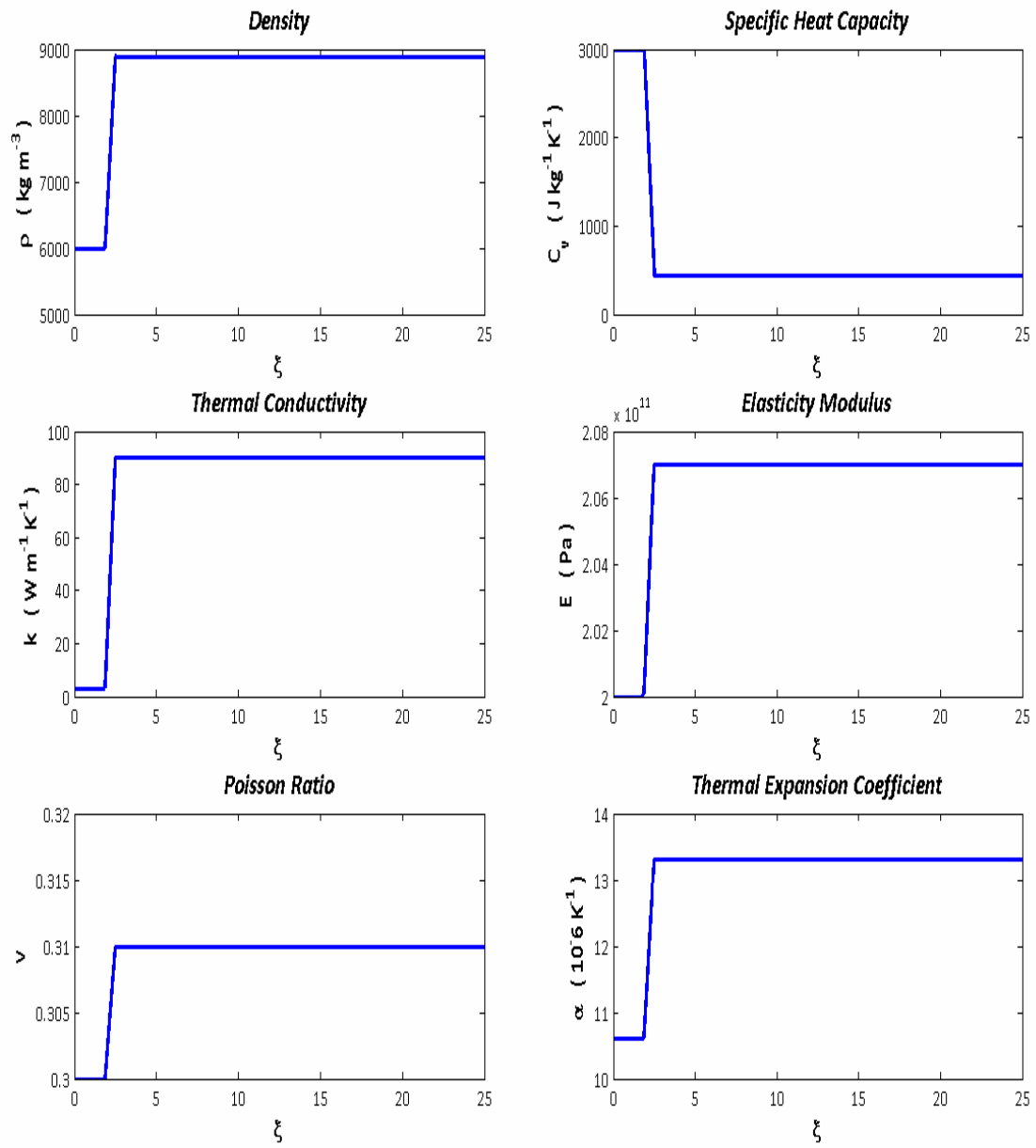
νέο αντανακλώμενο τασικό κύμα είναι εφελκυστικό. Προκύπτει επομένως το συμπέρασμα πως στην περίπτωση του σύνθετου υλικού, ένα μέρος του τασικού κύματος «εγκλωβίζεται» στην περιοχή του κεραμικού.

#### 4.5 Η επίδραση του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, υπό την επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας

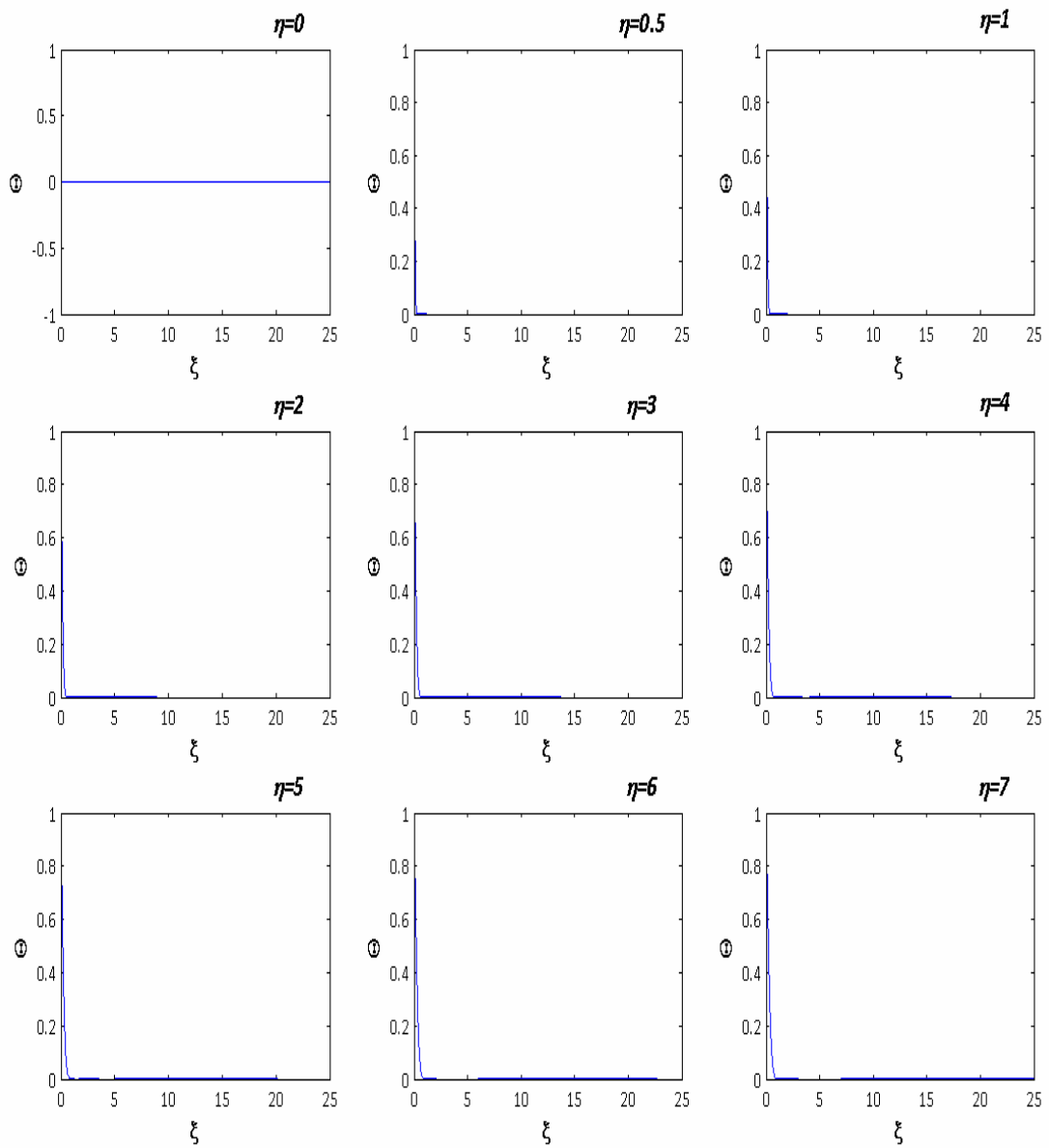
Αντικείμενο της παρούσης ενότητας αποτελεί η μελέτη της επίδρασης FGM στο σύνθετο υλικό, υπό συνοριακές συνθήκες Dirichlet (ακαριαία μοναδιαία αύξηση της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας). Στις αναλύσεις που πραγματοποιούνται το συνολικό πάχος των στρώσεων του κεραμικού και του FGM διατηρείται σταθερό και ίσο προς  $L_c = L_a + L_{fg} = \frac{L}{10} = 2.5$ . Εξετάζονται οι περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 0$  (περίπτωση σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο, βλ. παρ. 4.4),  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ . Οι ιδιότητες της στρώσης του FGM λαμβάνονται ως γραμμικά μεταβαλλόμενες ανάμεσα στις ιδιότητες των στρώσεων του κεραμικού και του μετάλλου.

Σύμφωνα με τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, αρχικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αφορούν τις περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και

$\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ : η κατανομή των ιδιοτήτων τους, η χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης. Στη συνέχεια ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης σε χαρακτηριστικές θέσεις ( $\xi = 1.25$ ,  $\xi = 2.5$ ,  $\xi = 5$ ). Καταλήγοντας, μελετάται η επίδραση της στρώσης του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

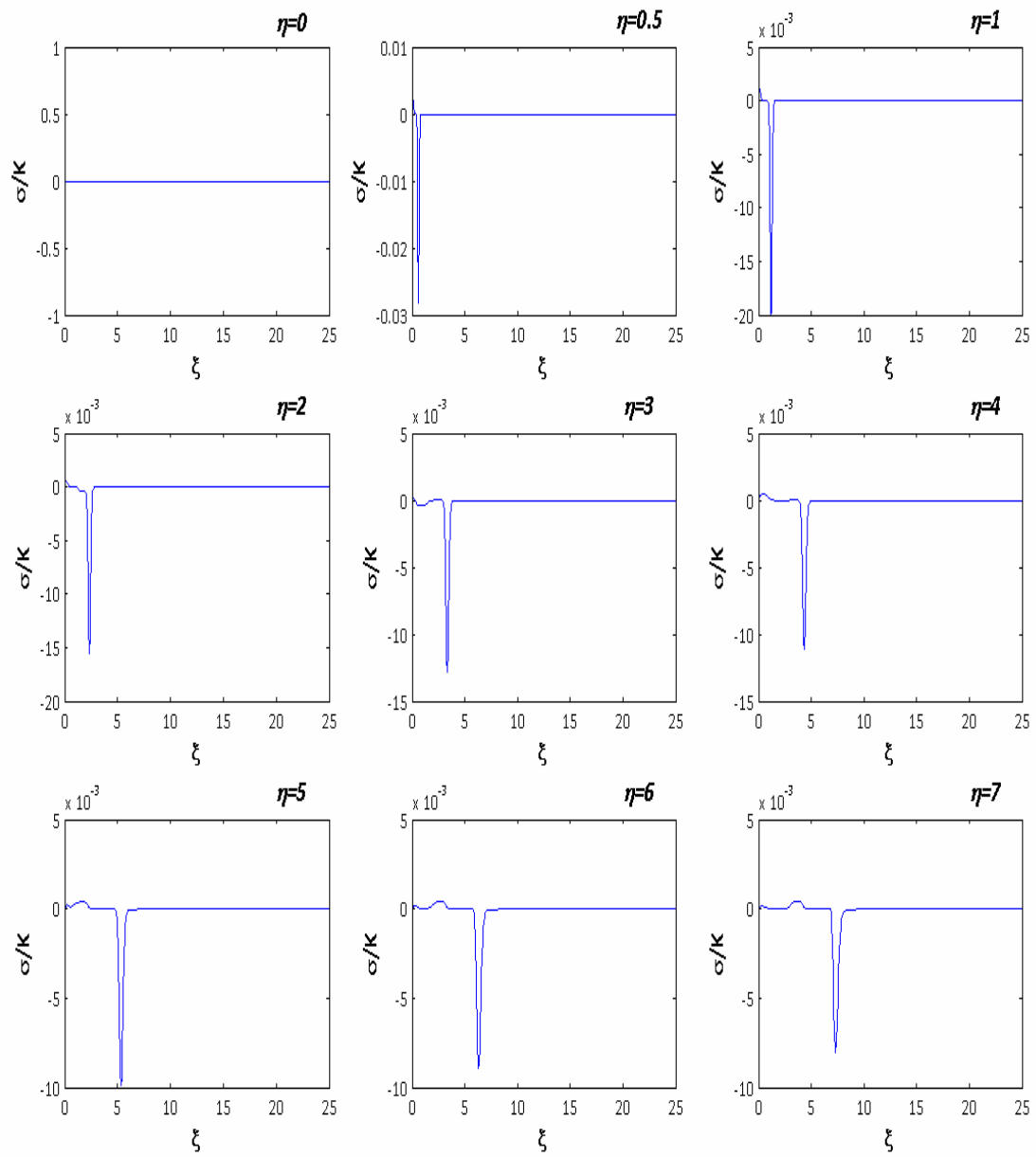


Σχήμα 4.18: Κατανομή των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$



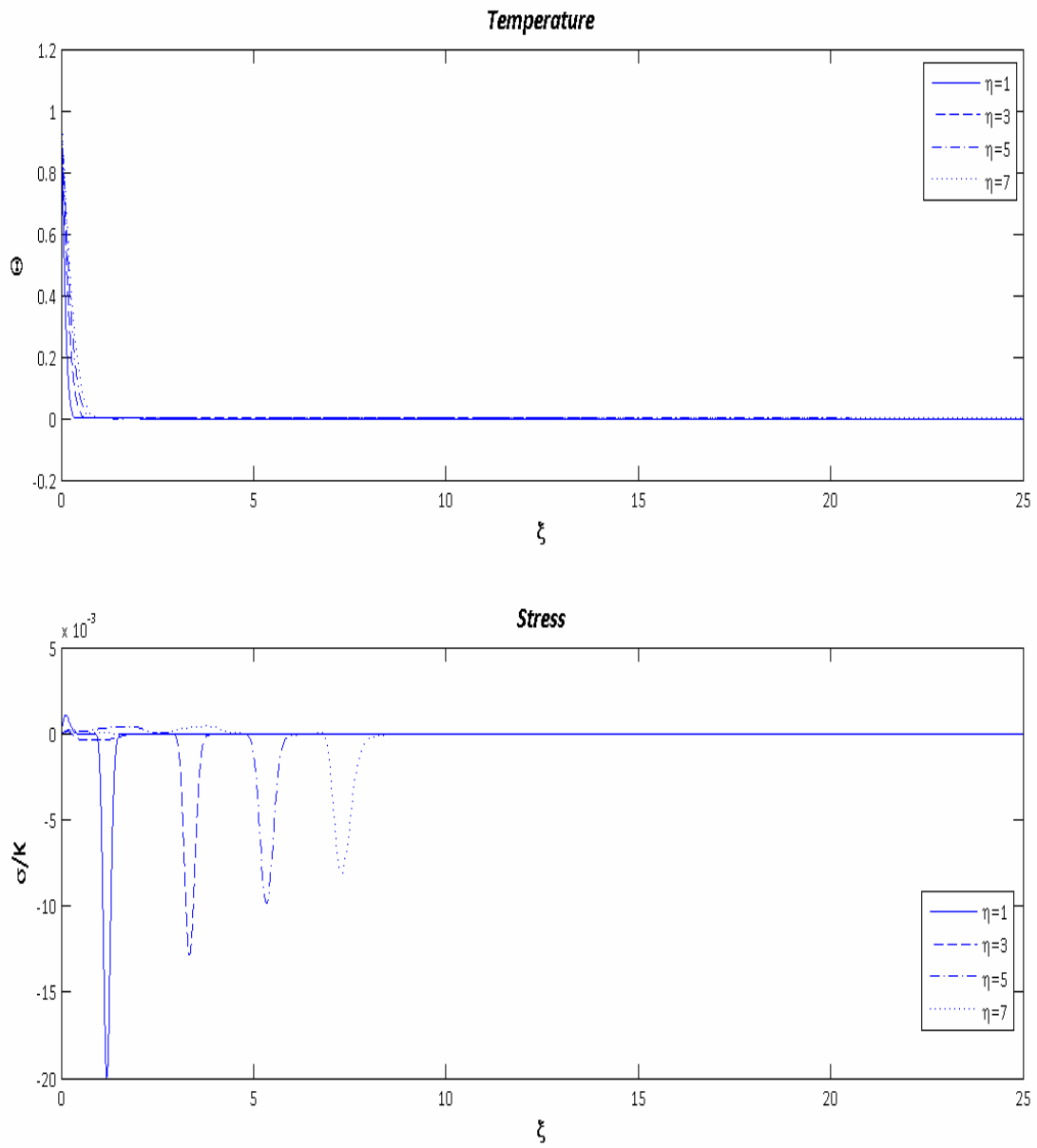
Σχήμα 4.19: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου

υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (στιγμιότυπα)



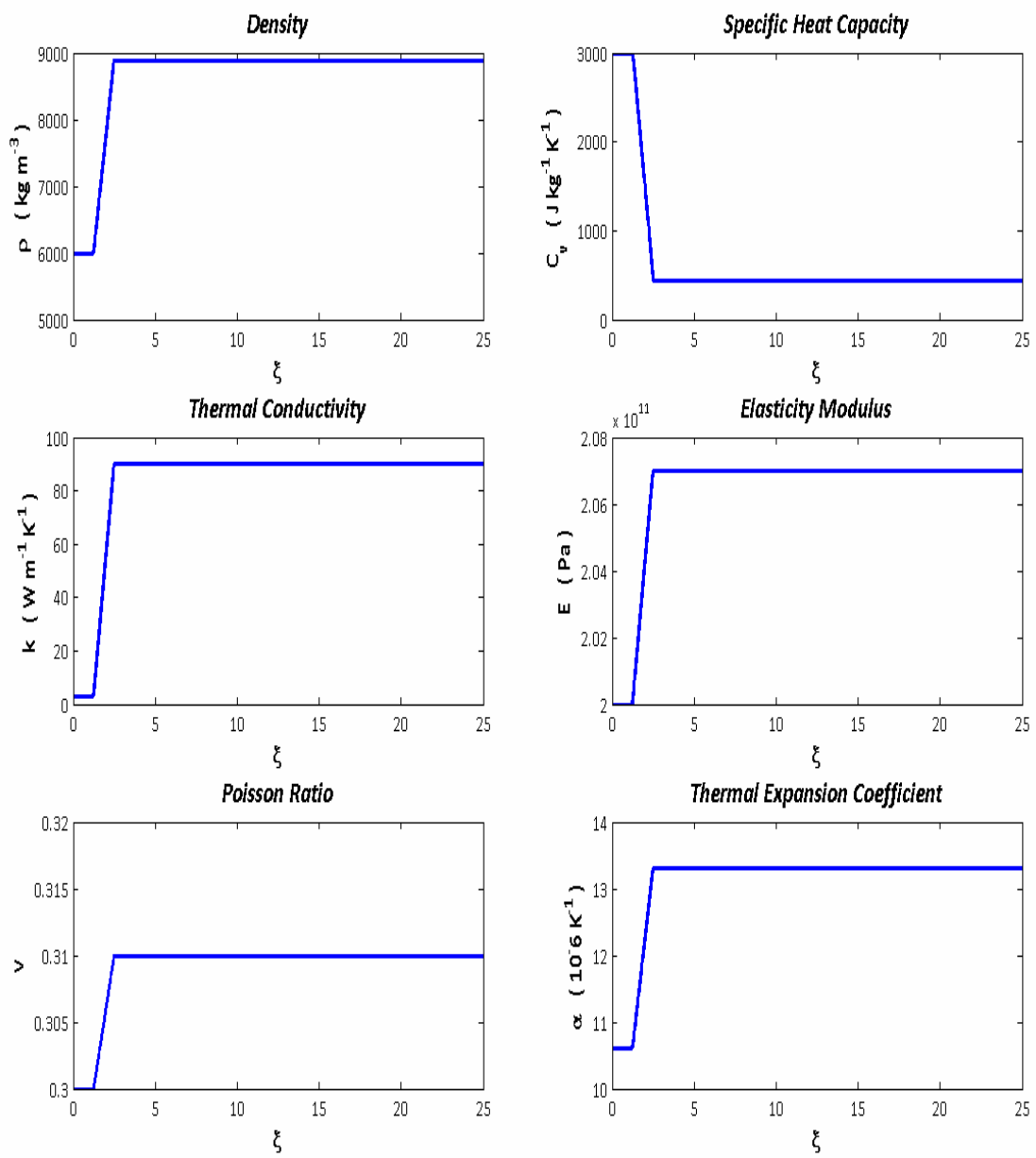
Σχήμα 4.20: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-

μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (στιγμιότυπα)

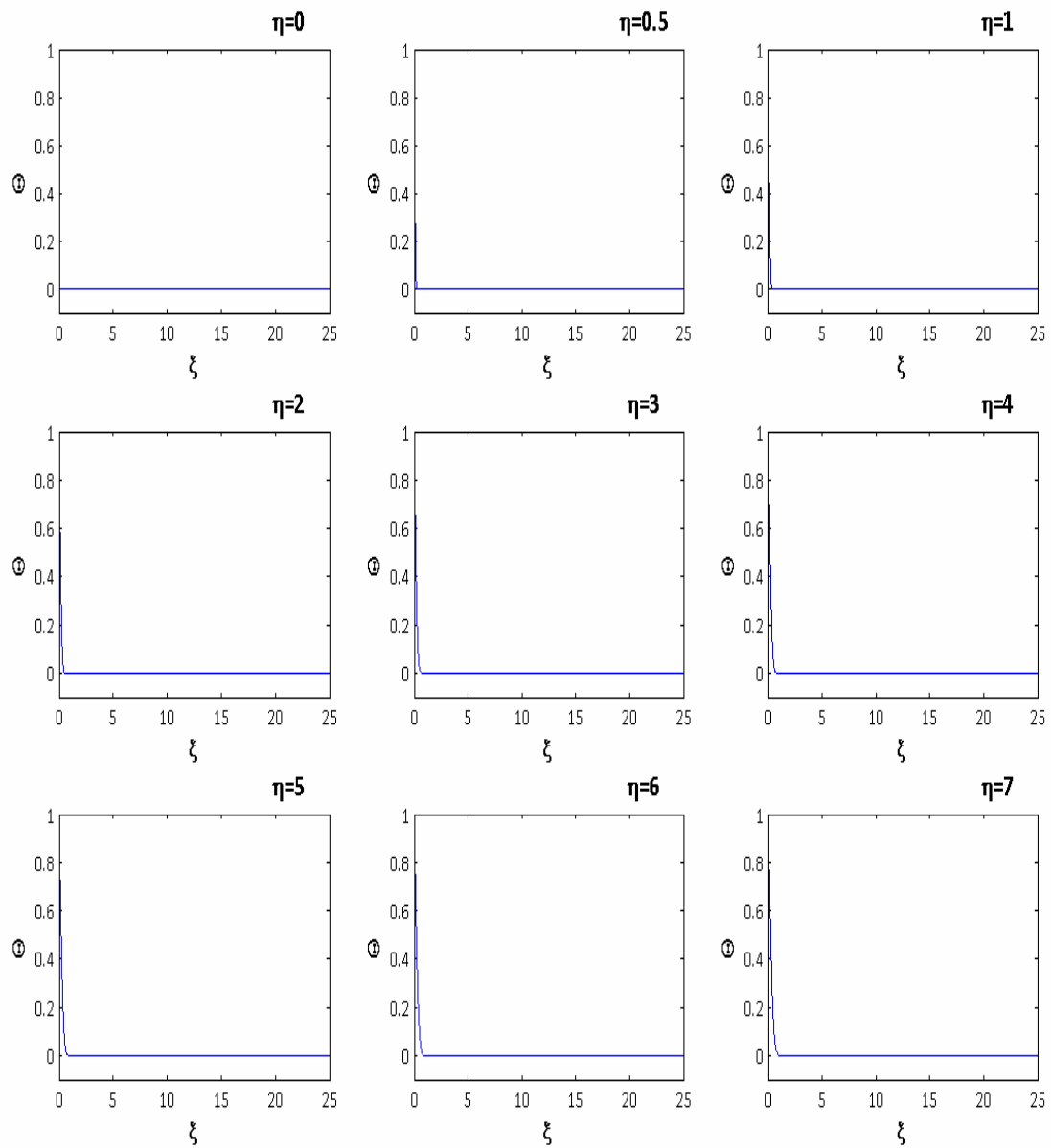


Σχήμα 4.21: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο

σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (σε ένα διάγραμμα)

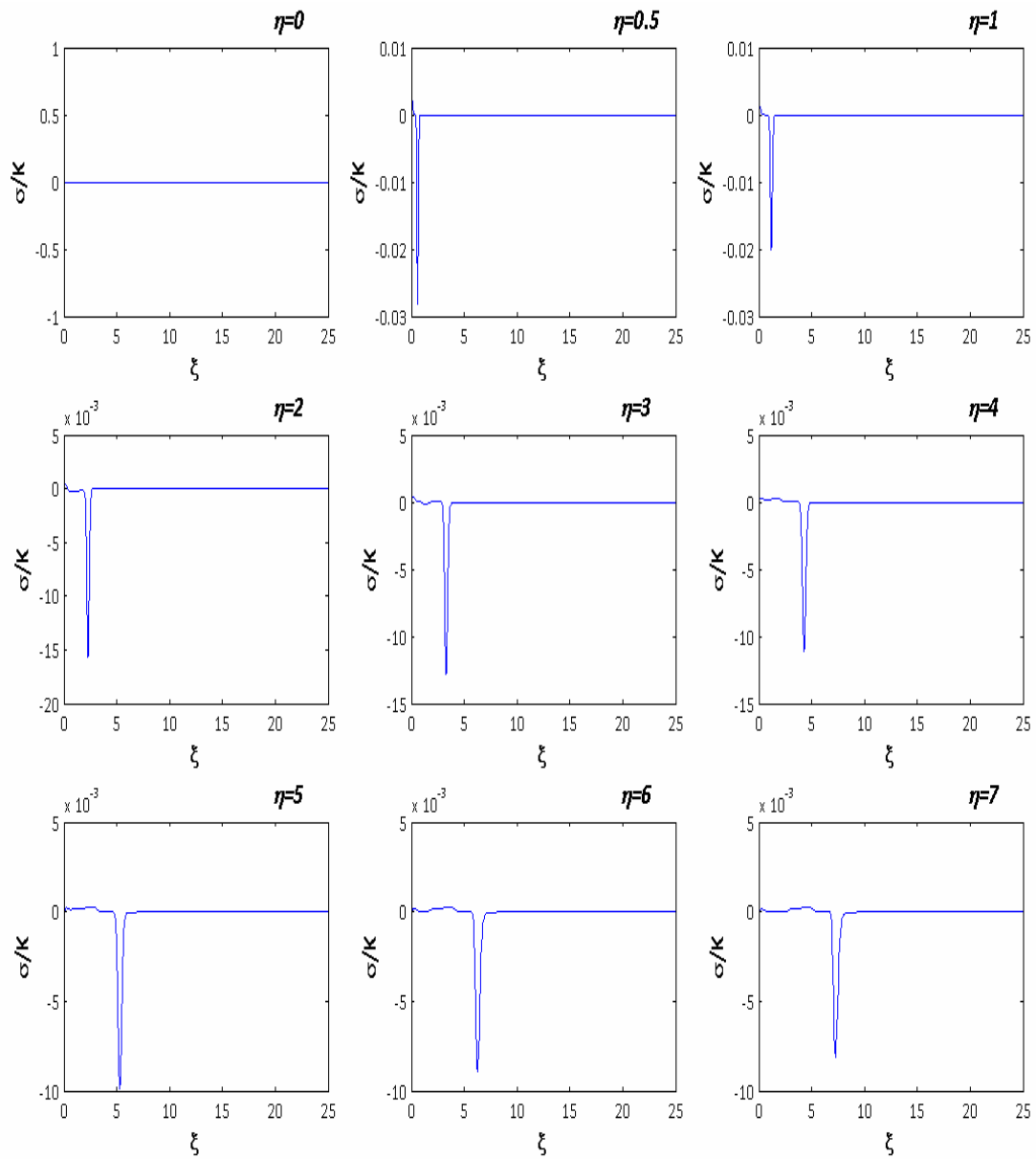


Σχήμα 4.22: Κατανομή των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_o} = 1$



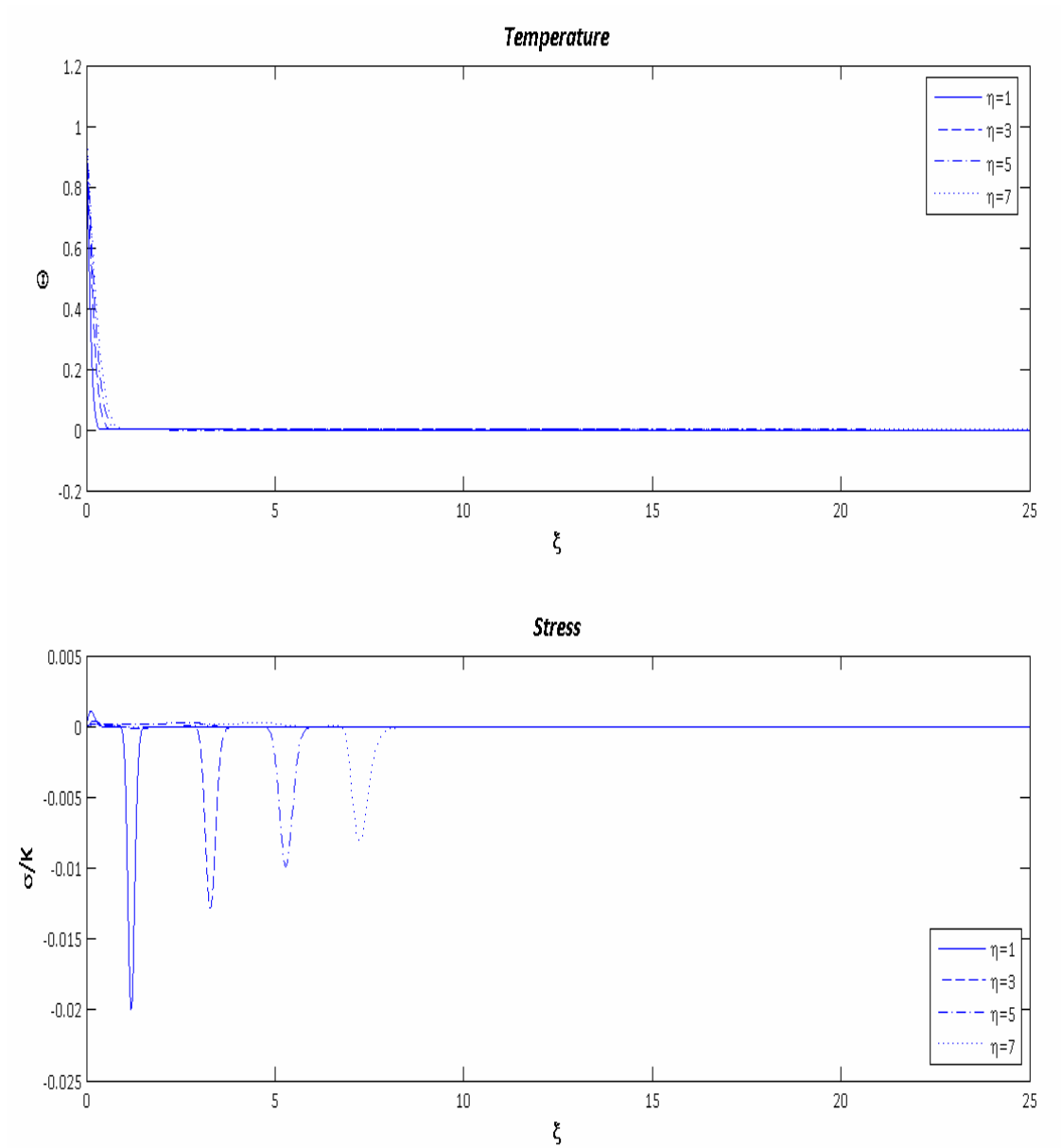
Σχήμα 4.23: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (στιγμιότυπα)



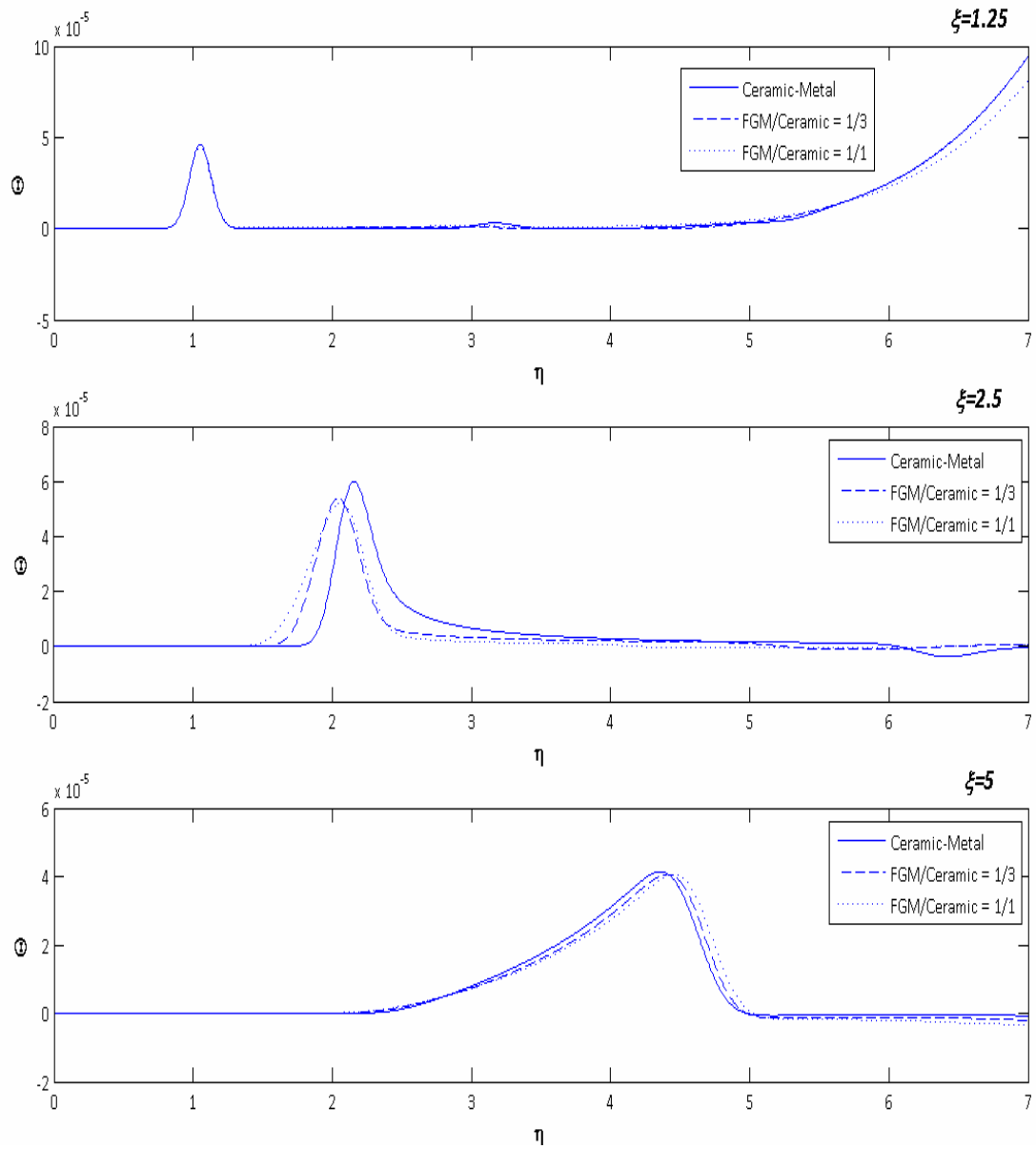


Σχήμα 4.24: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-

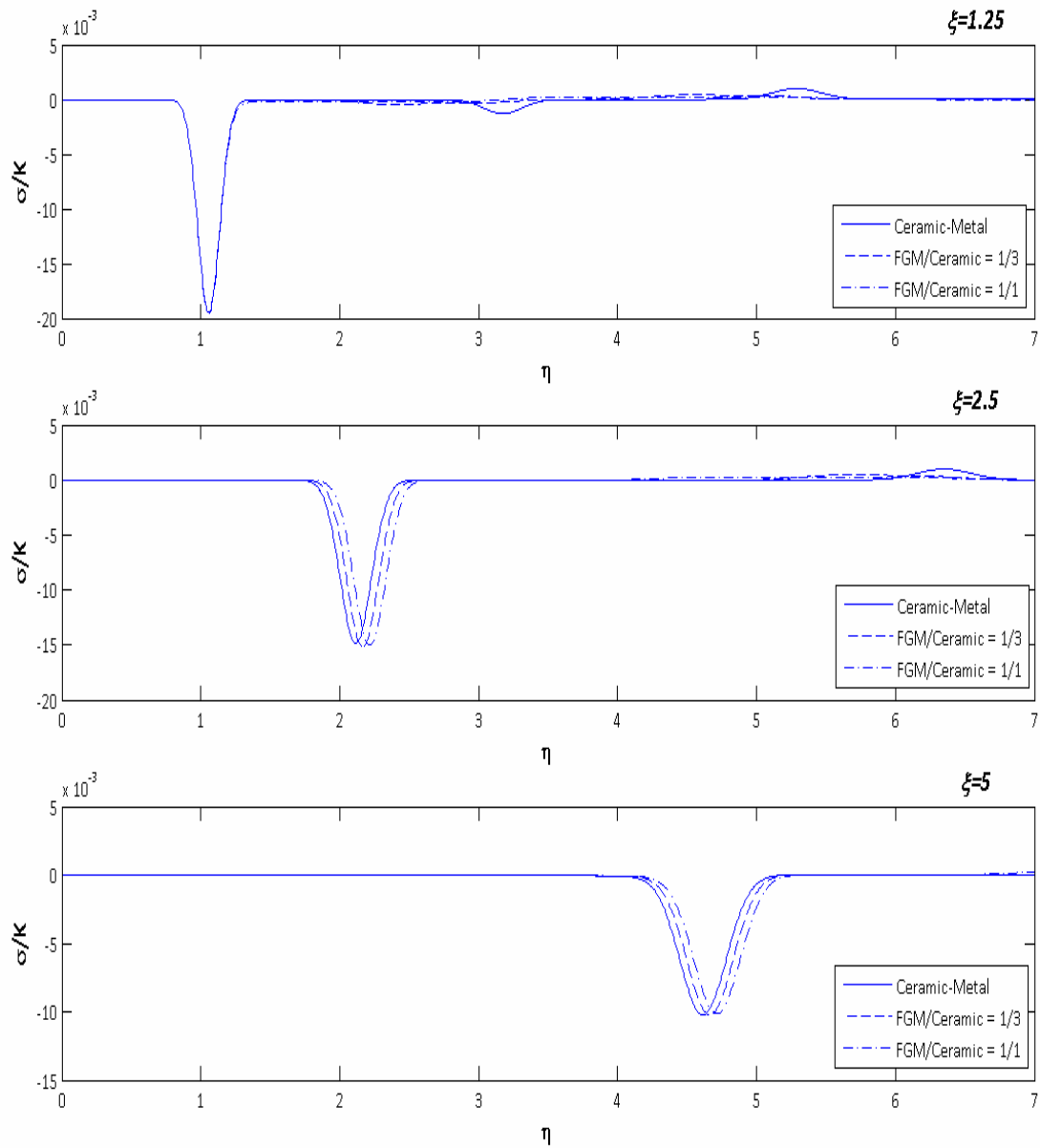
μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.25: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (σε ένα διάγραμμα)



Σχήμα 4.26: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, σε χαρακτηριστικές θέσεις



Σχήμα 4.27: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της τάσης στο σύνθετο υλικό για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, σε χαρακτηριστικές θέσεις

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν τα εξής:

- Η παρουσία της στρώσης του FGM προσδίδει συνέχεια στην κατανομή των ιδιοτήτων του υλικού (απουσιάζει το άλμα των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού στη διεπιφάνεια κεραμικού-μετάλλου).
- Οι διεπιφάνειες πλέον είναι δύο (κεραμικού-FGM και FGM-μετάλλου). Ωστόσο, καθώς η κατανομή των ιδιοτήτων είναι συνεχής, η ένταση των ανακλώμενων τασικών κυμάτων είναι σαφώς μειωμένη. Εξάγεται το πολύ

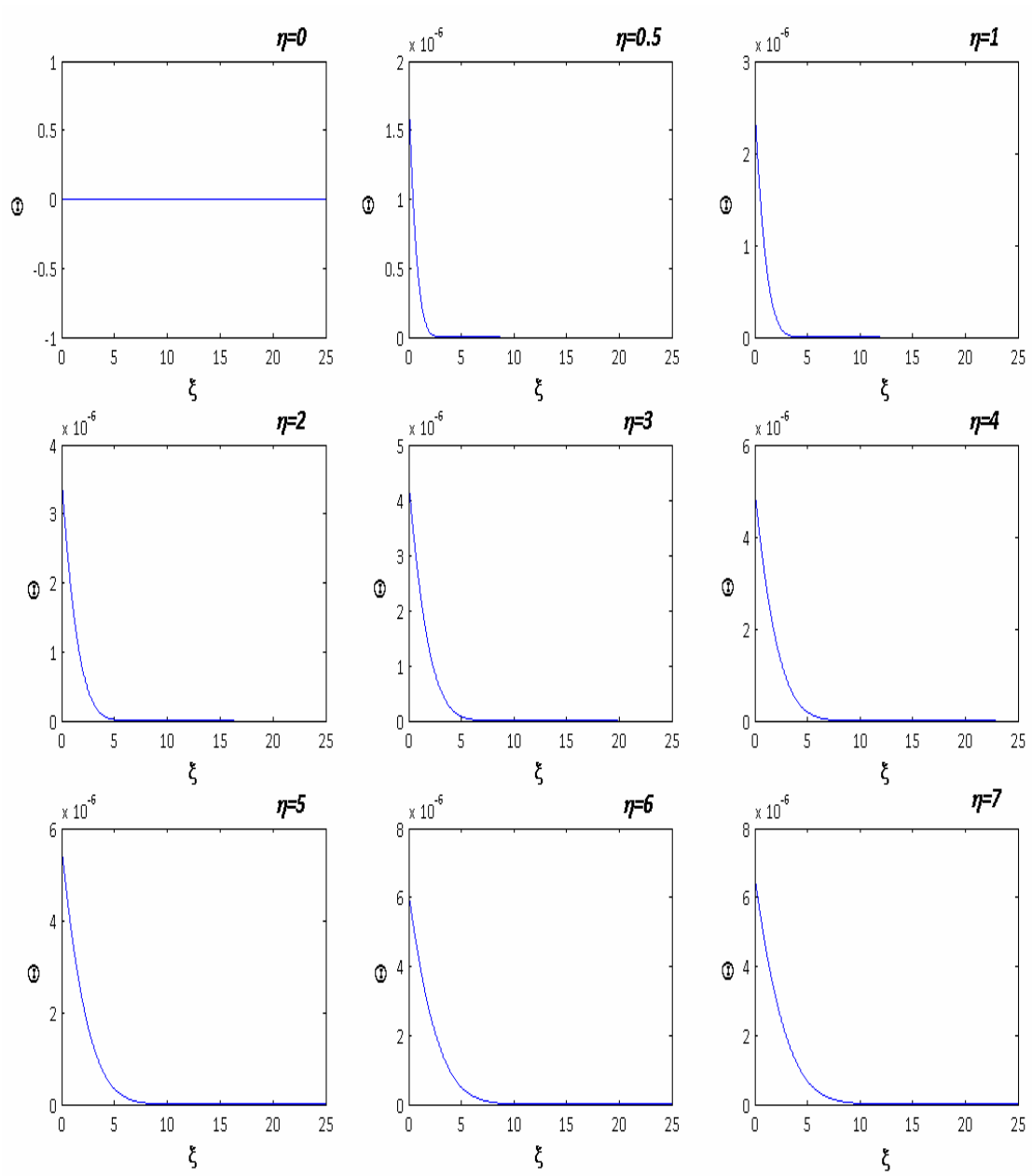
σπουδαίο συμπέρασμα πως η παρουσία στρώσης FGM υποβιβάζει σημαντικά το φαινόμενο της αντανάκλασης του τασικού κύματος στη ζώνη του κεραμικού. Επομένως, η άνω στρώση ανακουφίζεται και το κεραμικό υλικό υπόκειται πλέον σε σημαντικά μικρότερες εφελκυστικές τάσεις.

- Παρουσία στρώσης FGM, το κεραμικό υλικό εξακολουθεί να διαδραματίζει το ρόλο της θερμικής ασπίδας, ενώ παράλληλα προστατεύεται από ενδεχόμενη αστοχία λόγω ψαθυρής θραύσης ή κόπωσης.
- Το τασικό κύμα που διαδίδεται στο μέταλλο, πέραν ίσως από μία ελαφριά χρονική μετατόπιση, δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα ( $\xi = 5$ ).

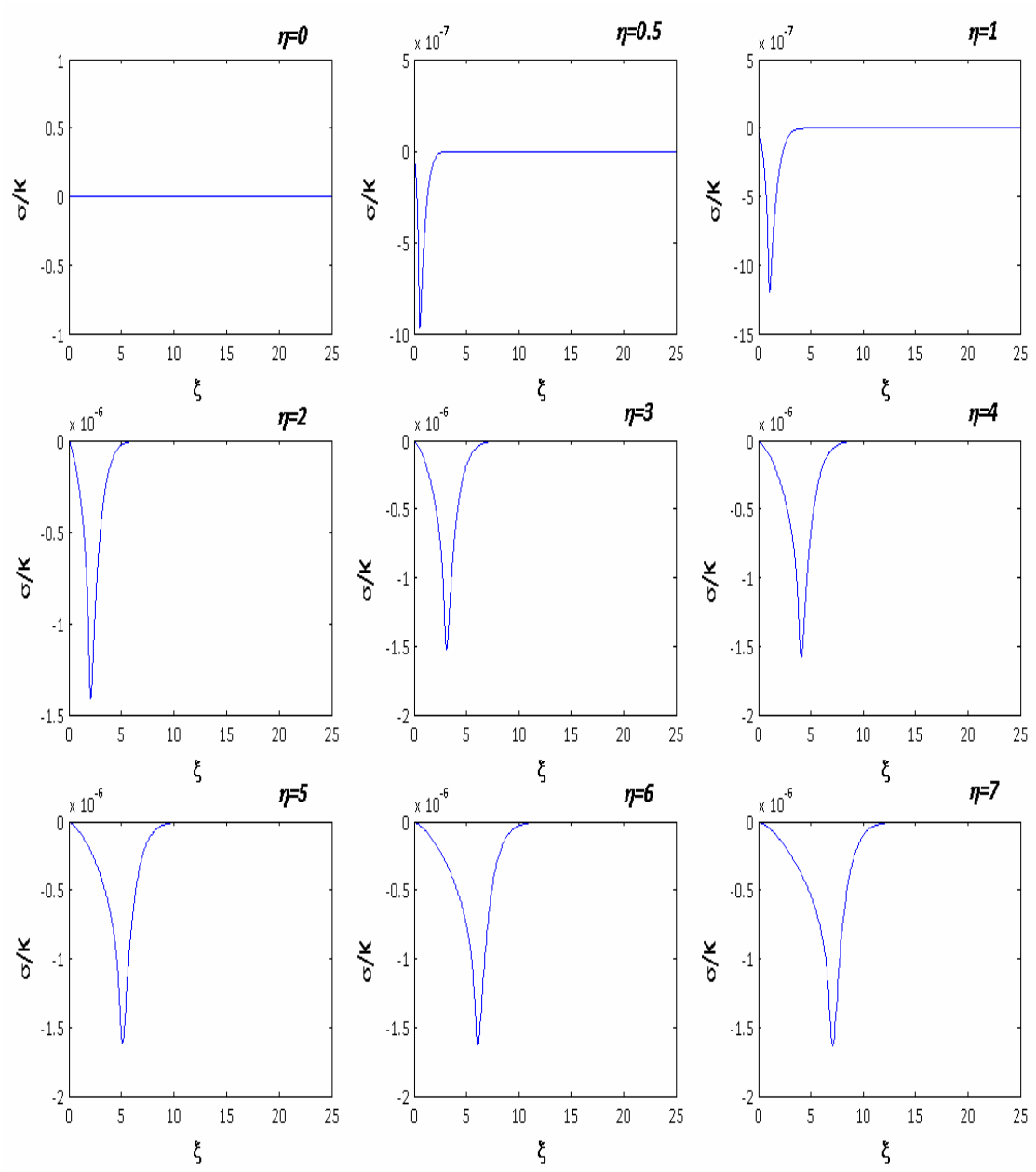
#### 4.6 Σύγκριση ομογενούς μετάλλου με σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (χωρίς FGM), υπό συνθήκες μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή στην άνω επιφάνεια

Η ανάλυση που έχει προηγηθεί αφορά στην ακαριαία μοναδιαία μεταβολή της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας του σώματος. Η περίπτωση αυτή αποτελεί οριακή κατάσταση της γενικότερης περίπτωσης μεταφοράς θερμότητας από τον περιβάλλοντα αέρα με συναγωγή (συνοριακές συνθήκες Robin). Στην περίπτωση της συναγωγής, οι συνοριακές συνθήκες περιγράφονται από τη σχέση (3.21), όπως έχει ήδη αναλυθεί στην παράγραφο 3.8. Καθώς ο συντελεστής συναγωγής  $h_v$  αυξάνεται, οι συνοριακές συνθήκες Robin τείνουν στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet ( $h_v \rightarrow \infty \Rightarrow Robin \rightarrow Dirichlet$ ). Δηλαδή η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή, για φυσιολογικές τιμές του συντελεστή  $h_v$ , συνεπάγεται μία πολύ πιο ήπια μεταβολή της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας του σώματος. Στις εφαρμογές που έπονται λαμβάνονται  $\Theta_\infty = 1$  και  $h_v = 50000 Wm^{-2}K^{-1}$ , όπου  $\Theta_\infty$  είναι η αδιαστατοποιημένη μεταβολή της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος αέρα.

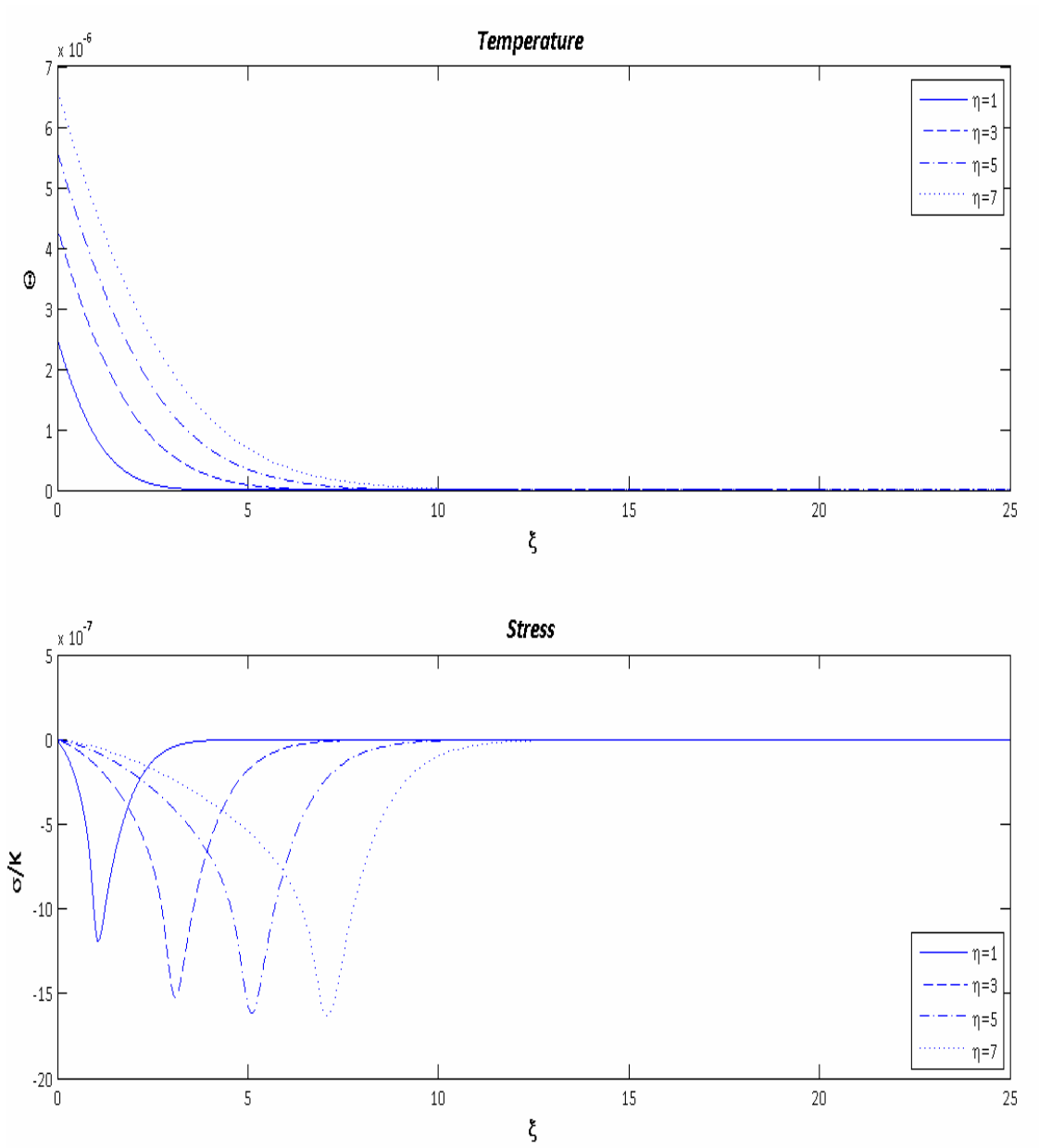
Αρχικά γίνεται σύγκριση του ομογενούς μετάλλου με το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, όπως στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet. Το πάχος της στρώσης του κεραμικού λαμβάνεται ίσο προς  $L_c = L_o = \frac{L}{10} = 2.5$ . Ακολουθούν τα διαγράμματα χρονικής εξέλιξης των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης, για το μέταλλο και για το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο. Εν συνεχεία παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης σε χαρακτηριστικές θέσεις ( $\xi = 1.25$ ,  $\xi = 2.5$ ,  $\xi = 5$ ). Τέλος, αναλύεται η επίδραση του κεραμικού στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού για την περίπτωση συνοριακών συνθηκών Robin.



Σχήμα 4.28: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του μετάλλου (στιγμιότυπα)

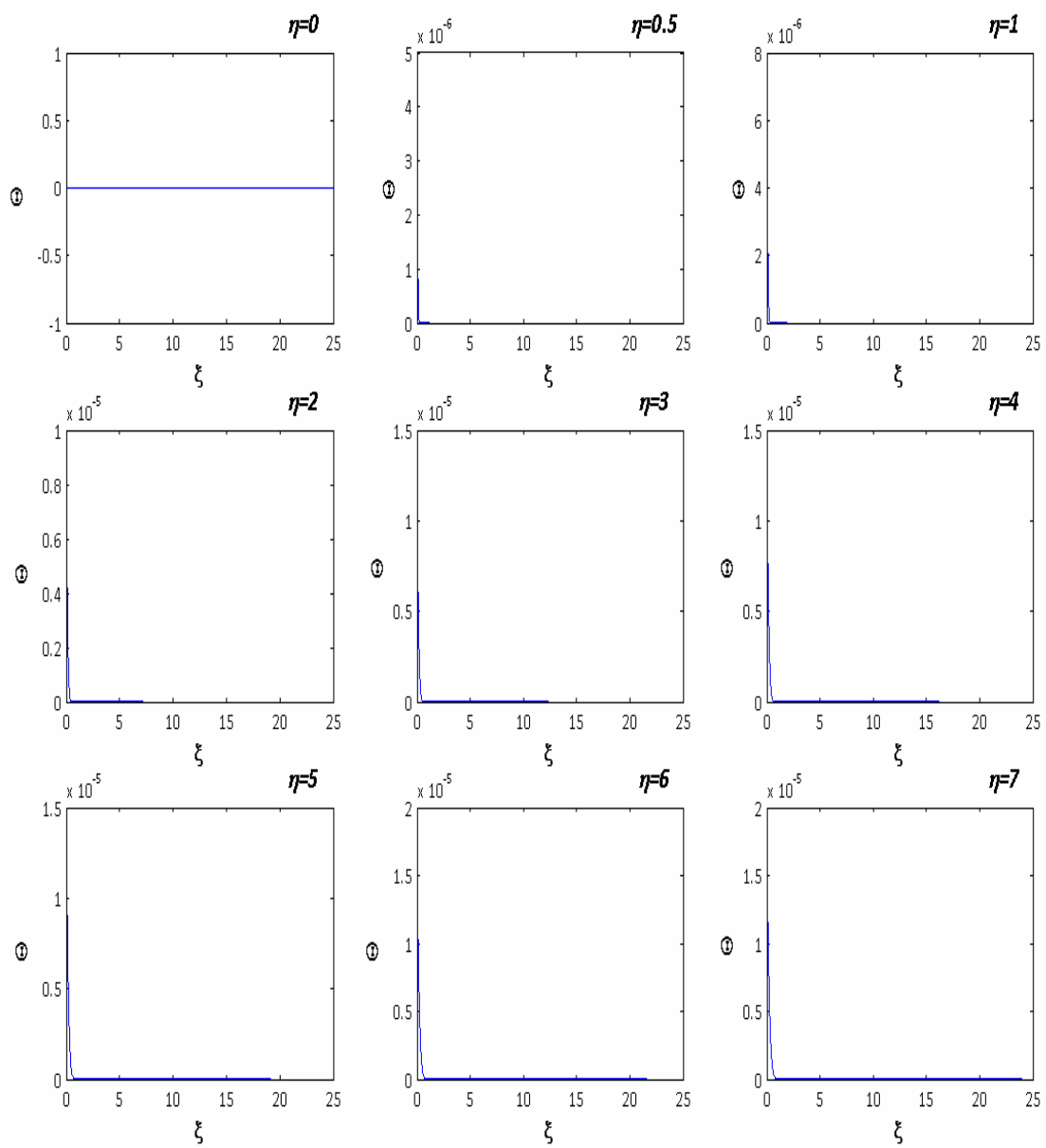


Σχήμα 4.29: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο μέταλλο (στιγμιότυπα)

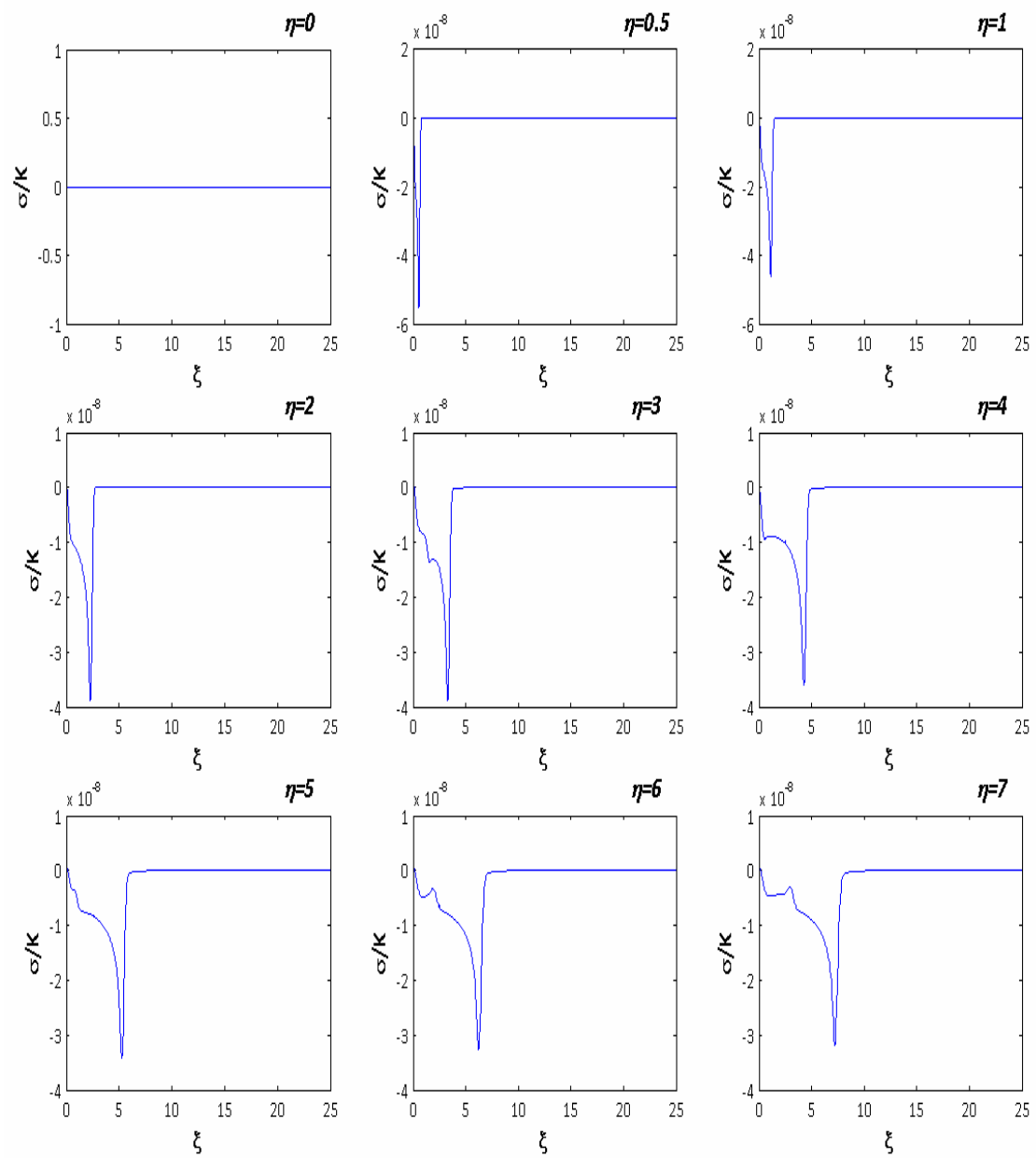


Σχήμα 4.30: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο μέταλλο (σε ένα διάγραμμα)

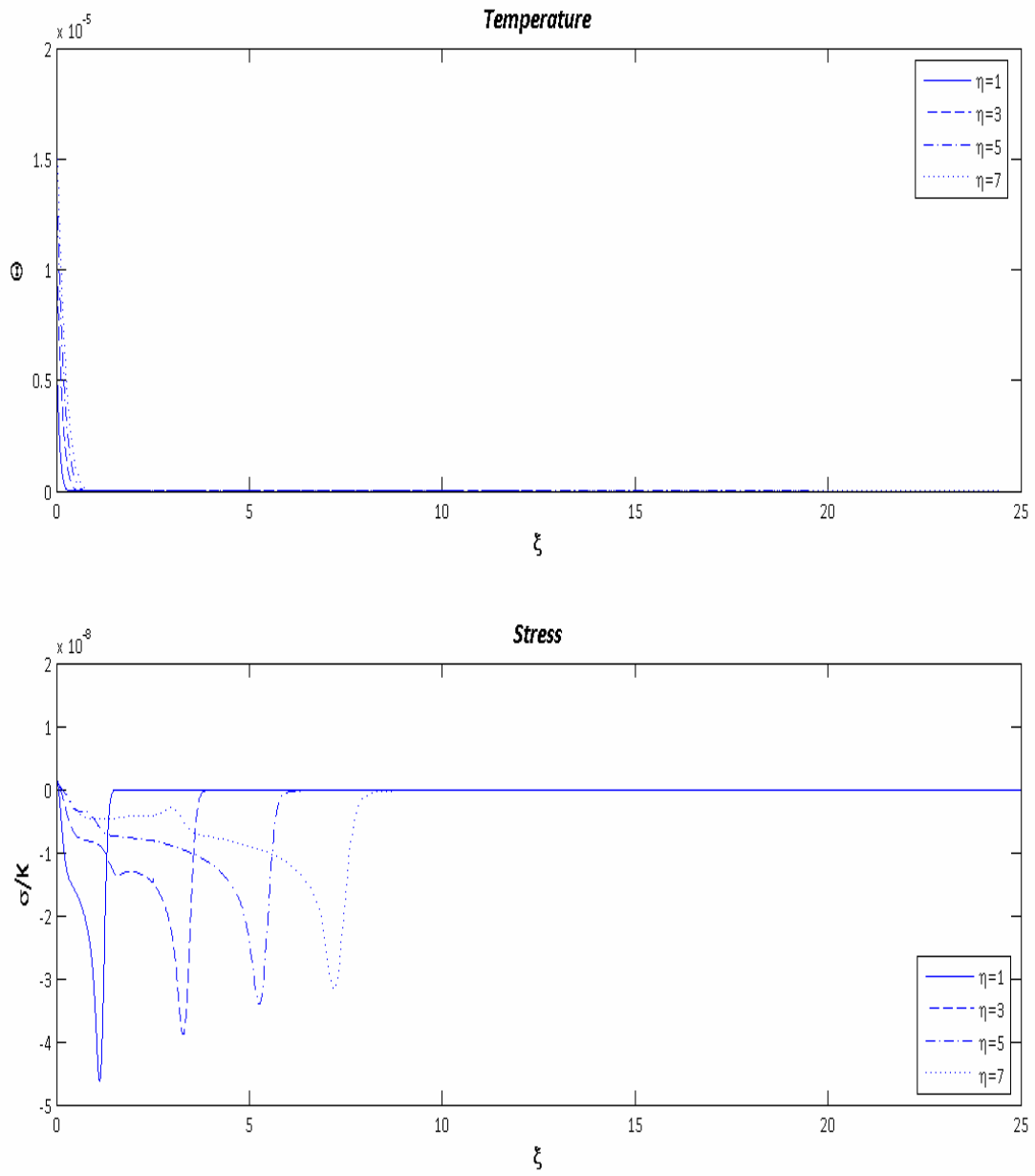




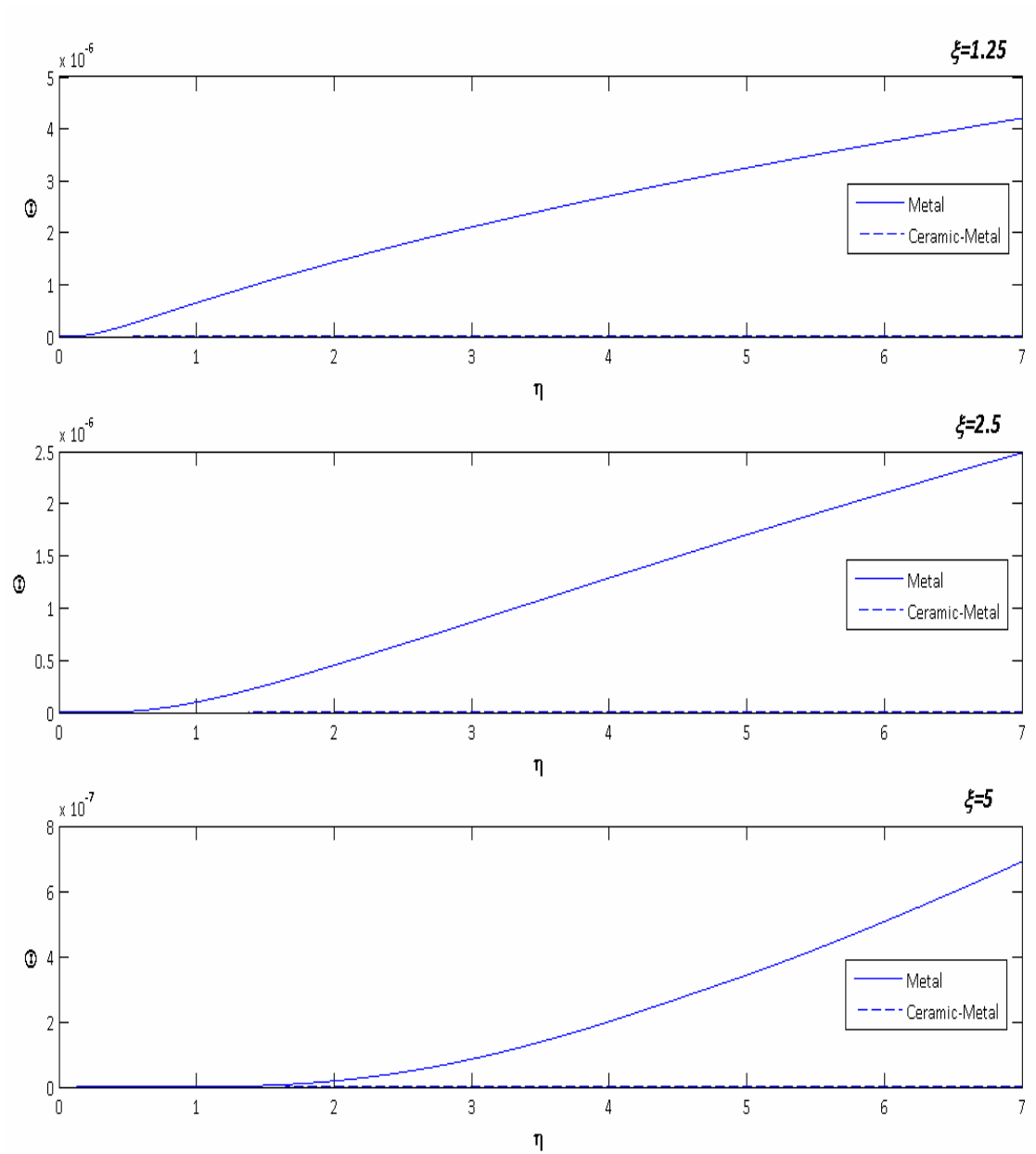
Σχήμα 4.31: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο (στιγμιότυπα)



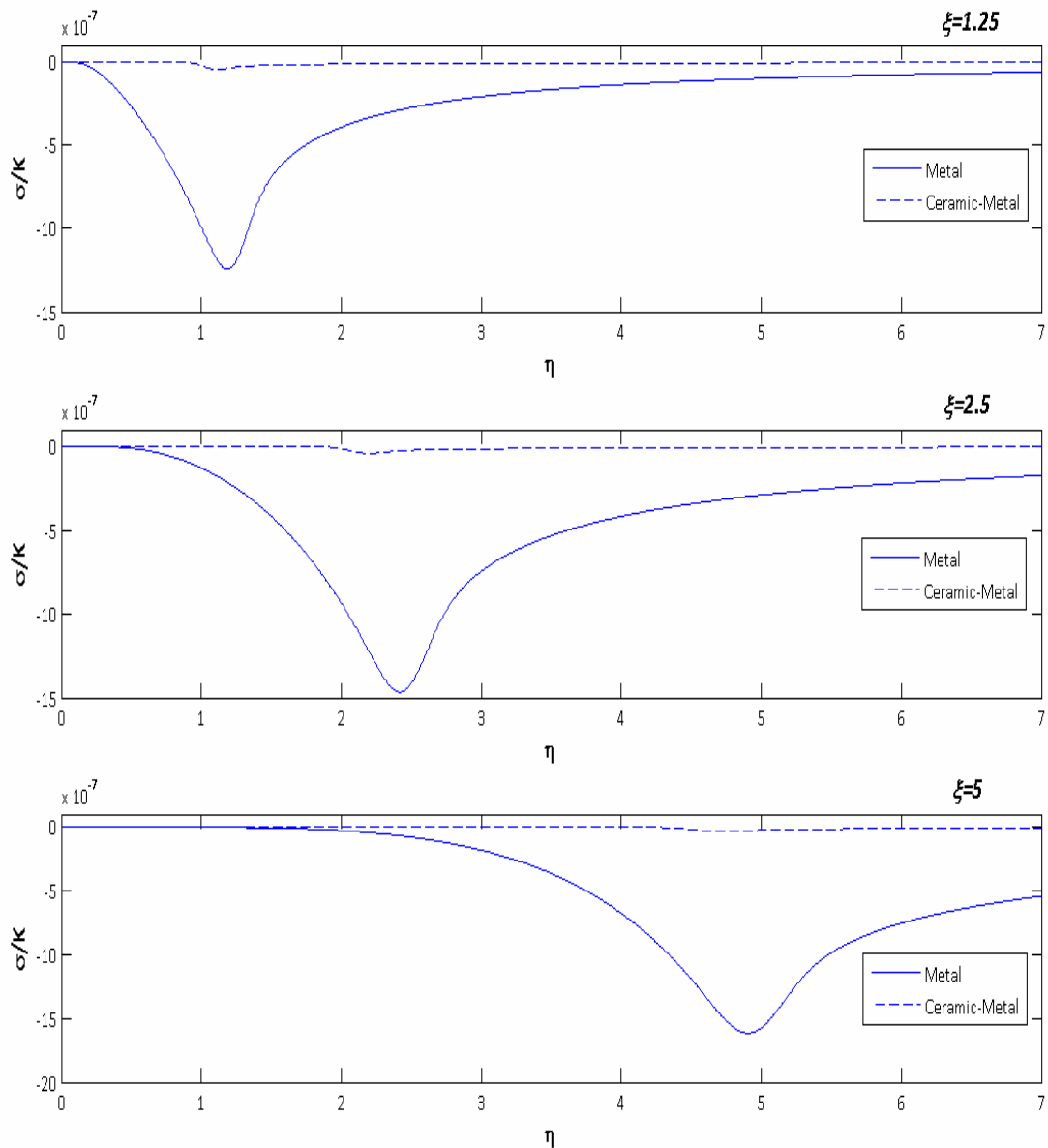
Σχήμα 4.32: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.33: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο (σε ένα διάγραμμα)



Σχήμα 4.34: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας στο μέταλλο και το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, σε χαρακτηριστικές θέσεις



Σχήμα 4.35: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της τάσης στο μέταλλο και το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο, σε χαρακτηριστικές θέσεις

Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν τα εξής:

- Είναι φανερό πως τα απόλυτα μεγέθη, υπό τις συνοριακές συνθήκες Robin, είναι πολύ μικρότερα. Το φαινόμενο εξελίσσεται με υποπολλαπλάσιο ρυθμό και η ένταση του τασικού κύματος είναι πολύ χαμηλή. Ο ρόλος της τιμής του συντελεστή συνεπαγωγής  $h_v$  είναι καταλυτικός.
- Ποιοτικά, τα συμπεράσματα είναι αντίστοιχα με εκείνα των συνοριακών συνθηκών Dirichlet. Το κεραμικό υλικό συμβάλλει στη θερμική θωράκιση του σώματος. Ταυτόχρονα, η μείωση της ταχύτητας διάδοσης της θερμότητας

συνεπάγεται τη μείωση της έντασης του τασικού κύματος. Επιπλέον, παρατηρείται πάλι το ανακλώμενο τασικό κύμα λόγω της διεπιφάνειας.

- Θα μπορούσε επίσης να παρατηρηθεί πως το τασικό κύμα είναι περισσότερο «απλωμένο» στο χρόνο. Το γεγονός αυτό είναι επίσης συνέπεια της πιο ήπιας επιβολής εξωτερικών συνθηκών.

#### 4.7 Η επίδραση του FGM στη θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού, υπό συνθήκες μεταφοράς θερμότητας με συναγωγή στην άνω επιφάνεια

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζεται η επιρροή του FGM στο σύνθετο υλικό, υπό συνοριακές συνθήκες Robin (μεταφορά θερμότητας από τον περιβάλλοντα αέρα με συναγωγή). Για τις αναλύσεις λαμβάνονται  $\Theta_{\infty} = 1$  και  $h_v = 50000 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  (βλ. σχέση (3.21)). Όπως στην περίπτωση της ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας, στις εφαρμογές που περιγράφονται παρακάτω το συνολικό πάχος των στρώσεων του κεραμικού και του FGM διατηρείται σταθερό και ίσο προς  $L_c = L_a + L_{fg} = \frac{L}{10} = 2.5$ .

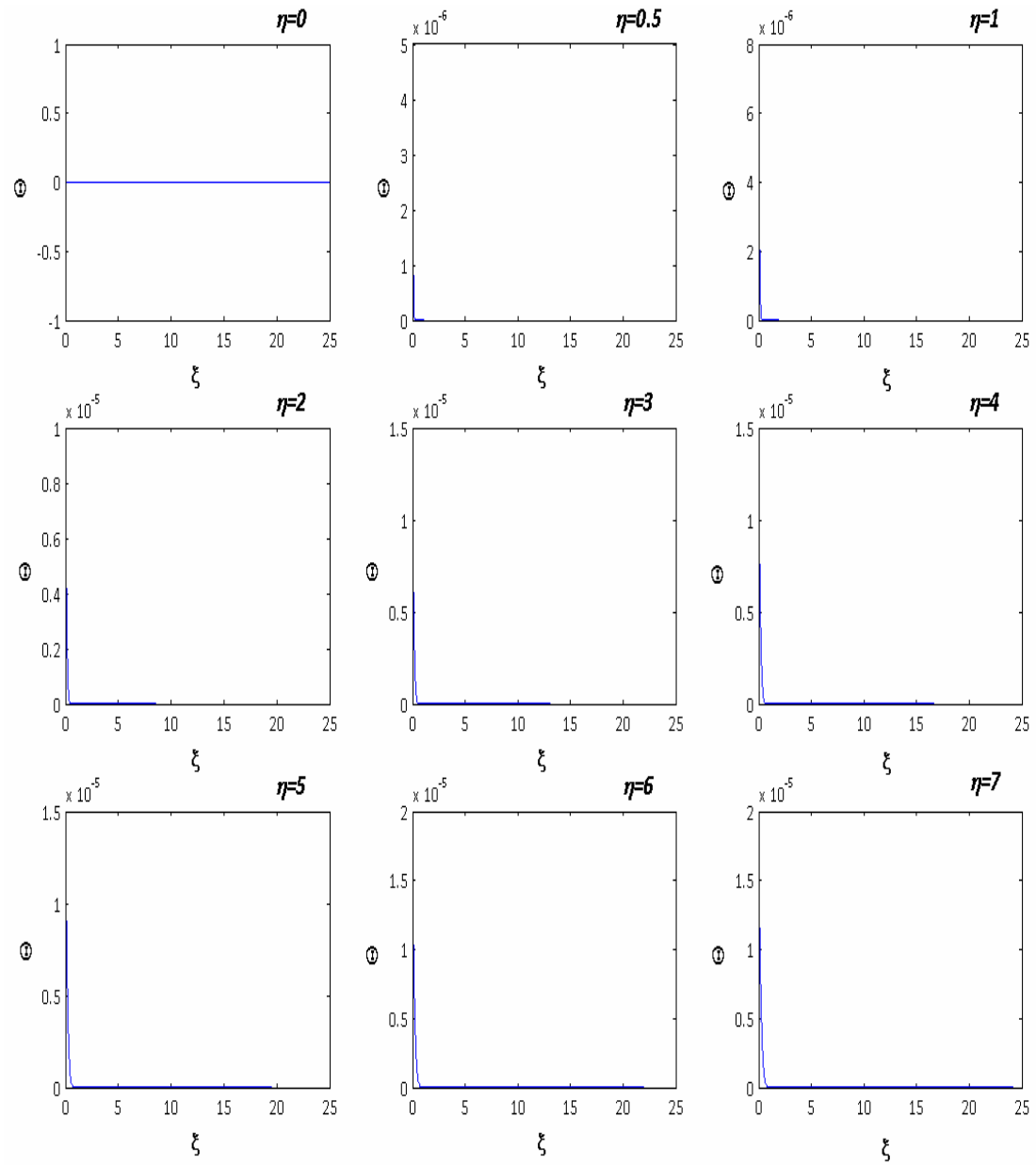
Συγκρίνονται οι περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 0$  (περίπτωση σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο,

βλ. παρ. 4.6),  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ . Οι ιδιότητες της στρώσης του FGM λαμβάνονται ως γραμμικά μεταβαλλόμενες ανάμεσα στις ιδιότητες των στρώσεων του κεραμικού και του μετάλλου.

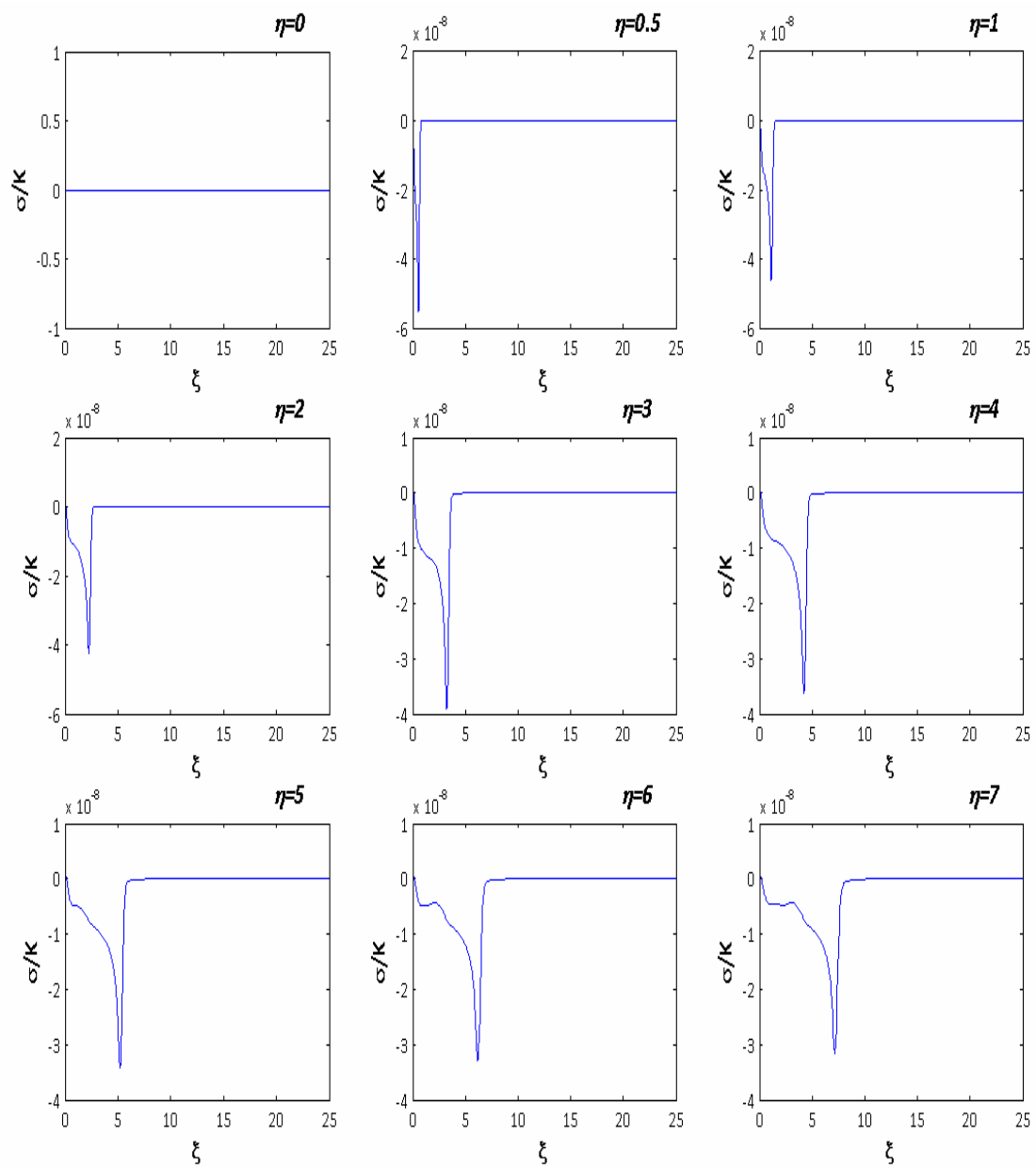
Παρουσιάζονται τα διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης, διαδοχικά για τις περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και

$\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ . Στη συνέχεια ακολουθούν τα συγκεντρωτικά διαγράμματα της χρονικής

εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης σε χαρακτηριστικές θέσεις ( $\xi = 1.25$ ,  $\xi = 2.5$ ,  $\xi = 5$ ) για τις τρεις περιπτώσεις σύνθεσης. Τέλος, ερμηνεύονται τα εξαγόμενα σχήματα και γίνεται η σύγκριση με την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet.



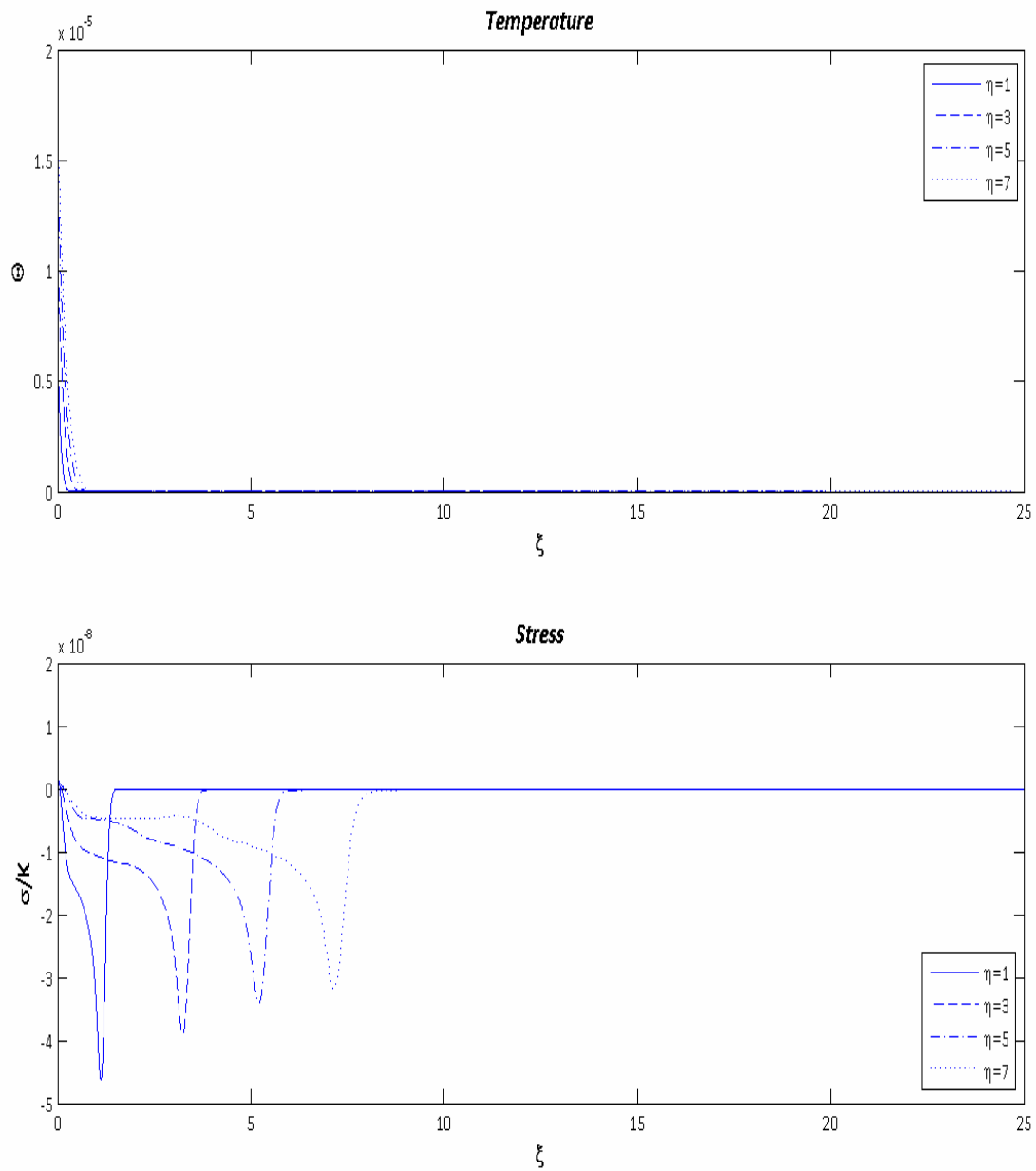
Σχήμα 4.36: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (στιγμιότυπα)



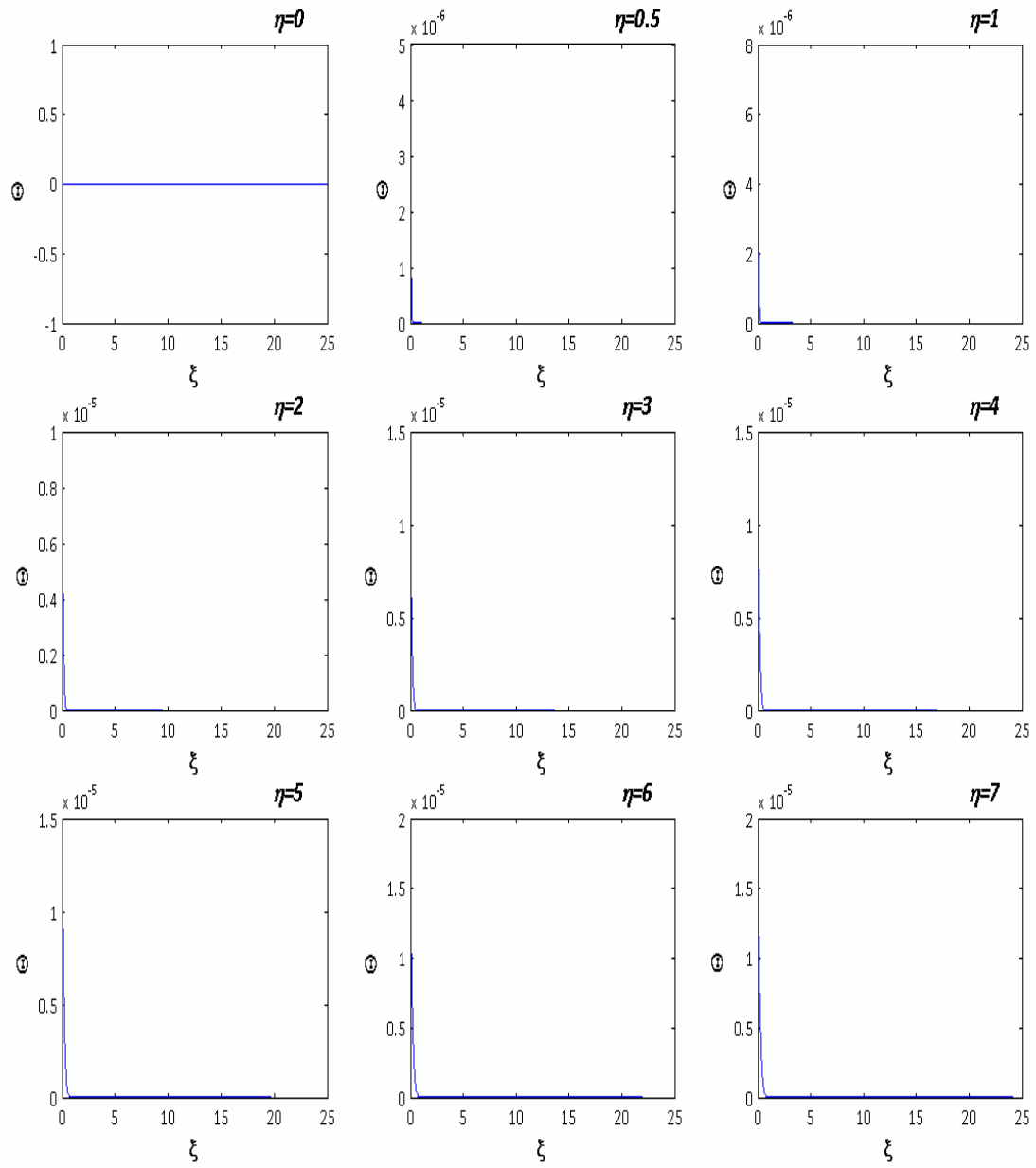
Σχήμα 4.37: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-

μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (στιγμιότυπα)



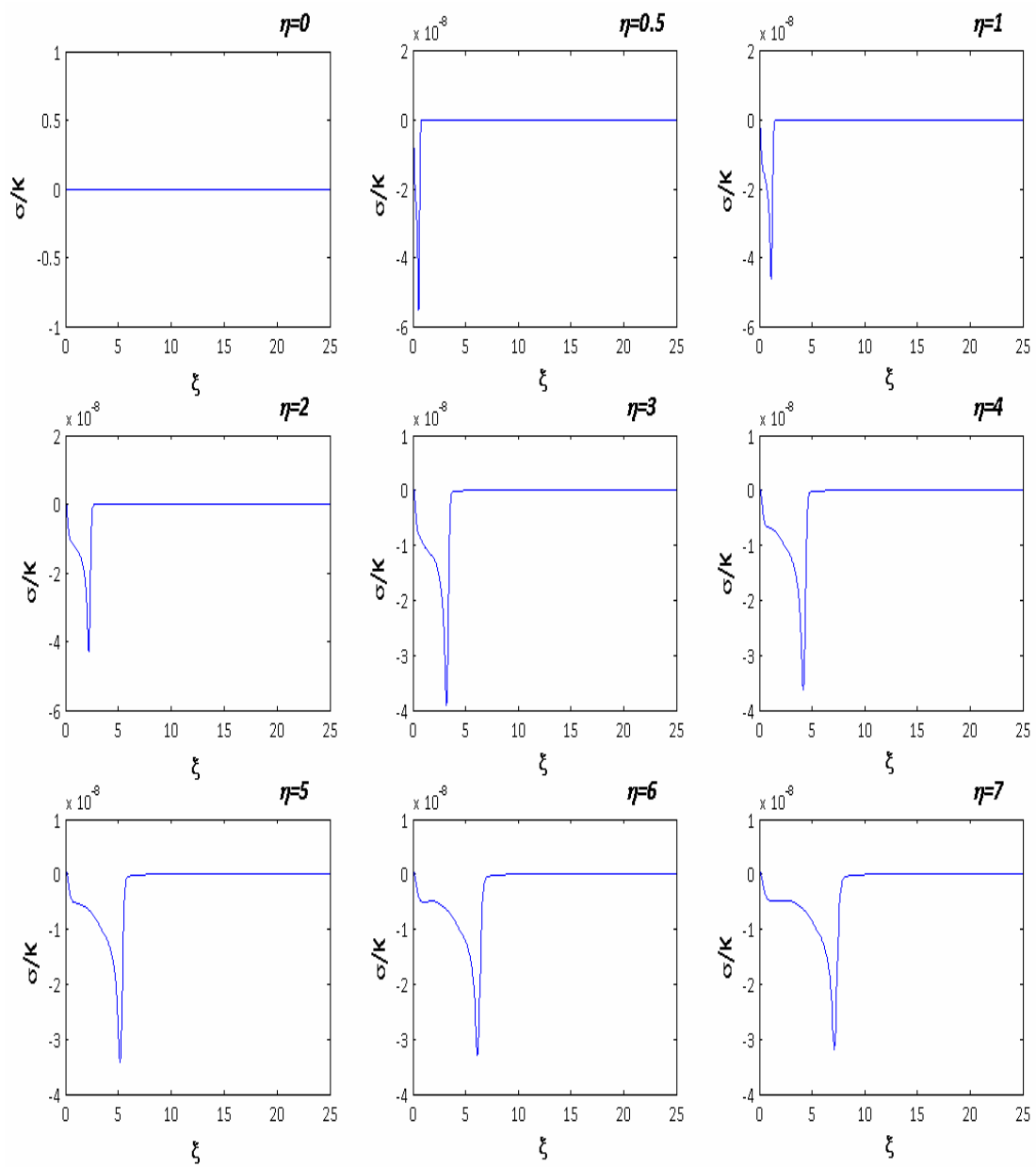


Σχήμα 4.38: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_o} = \frac{1}{3}$  (σε ένα διάγραμμα)

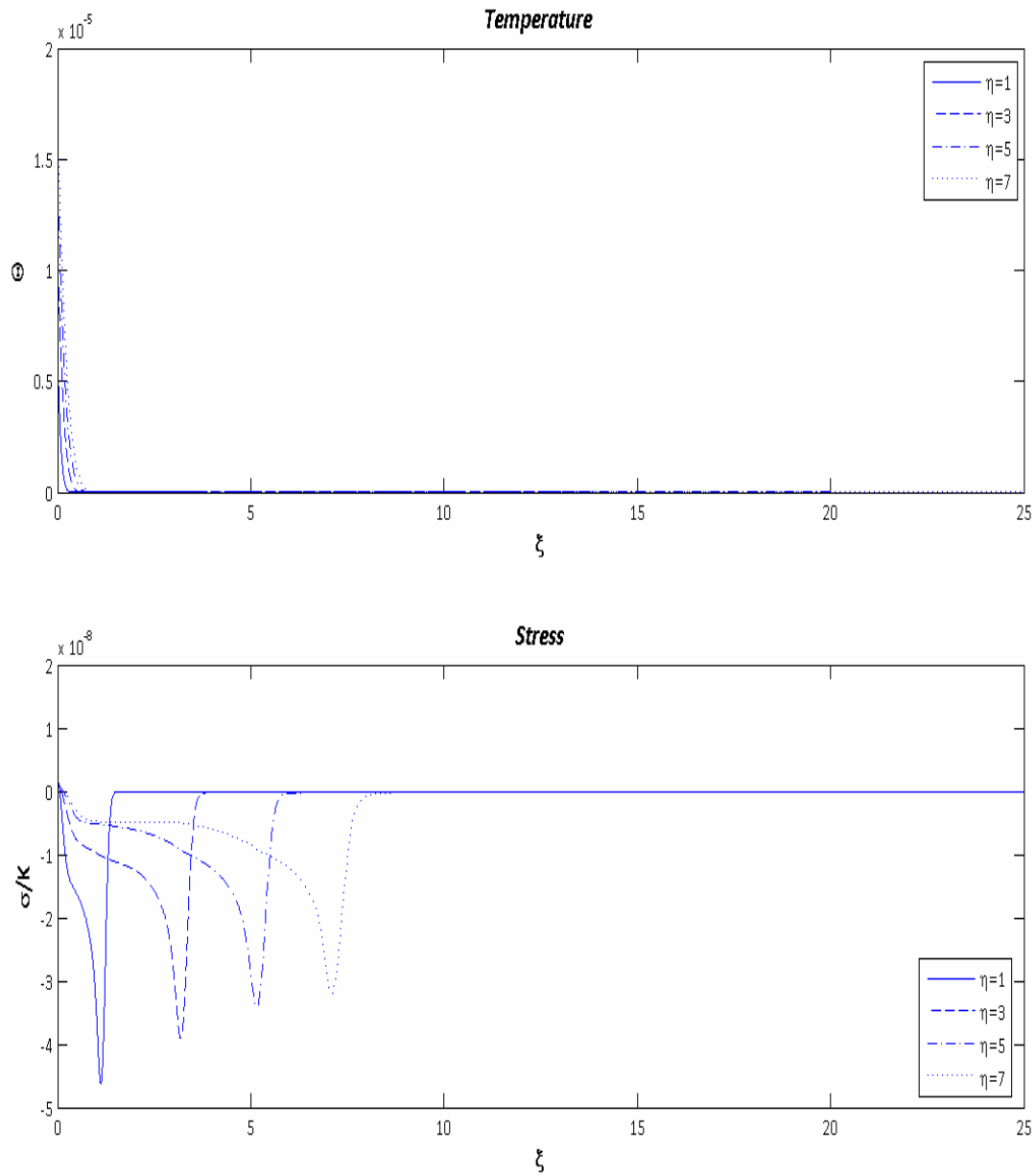


Σχήμα 4.39: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου

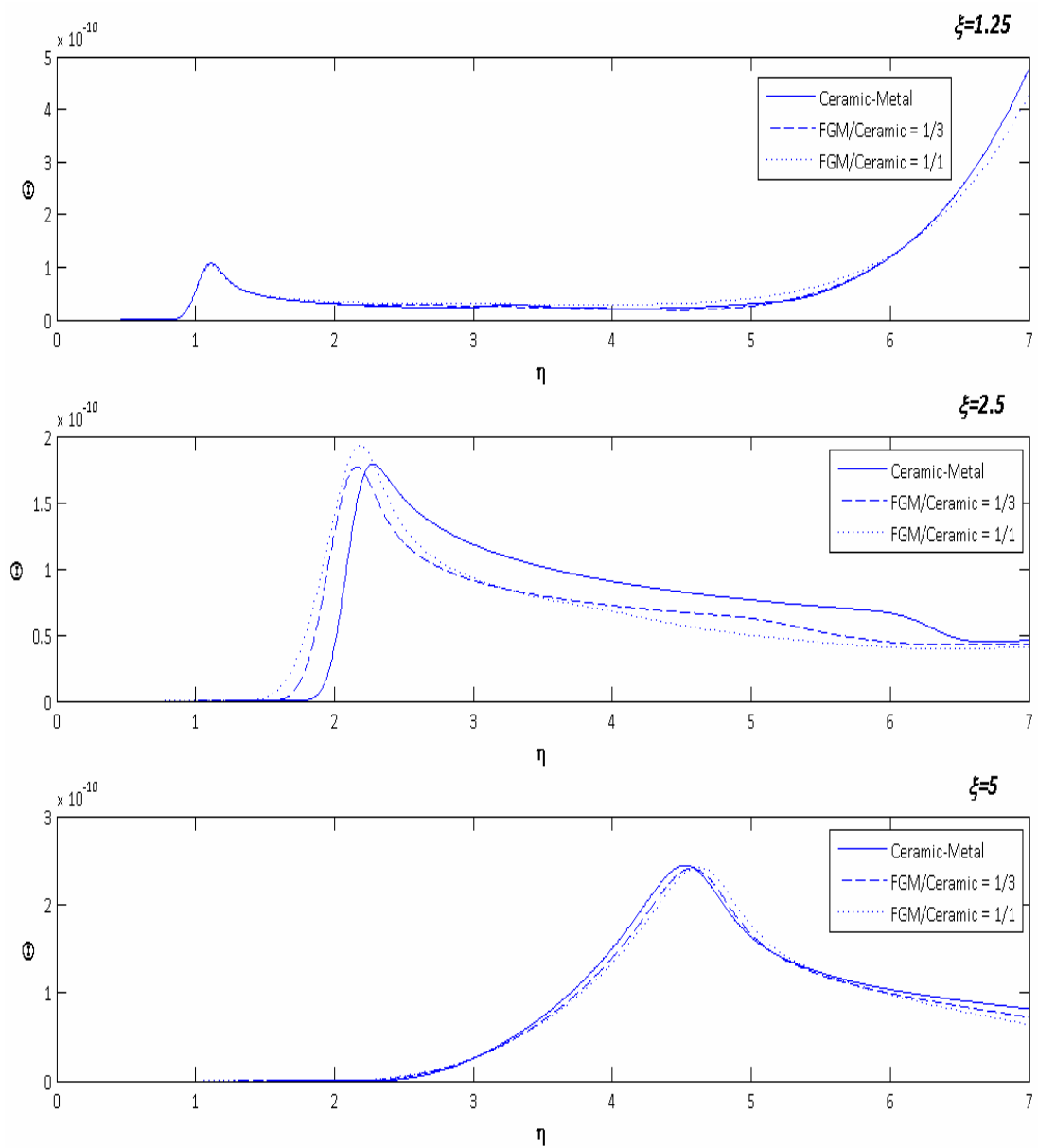
υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (στιγμιότυπα)



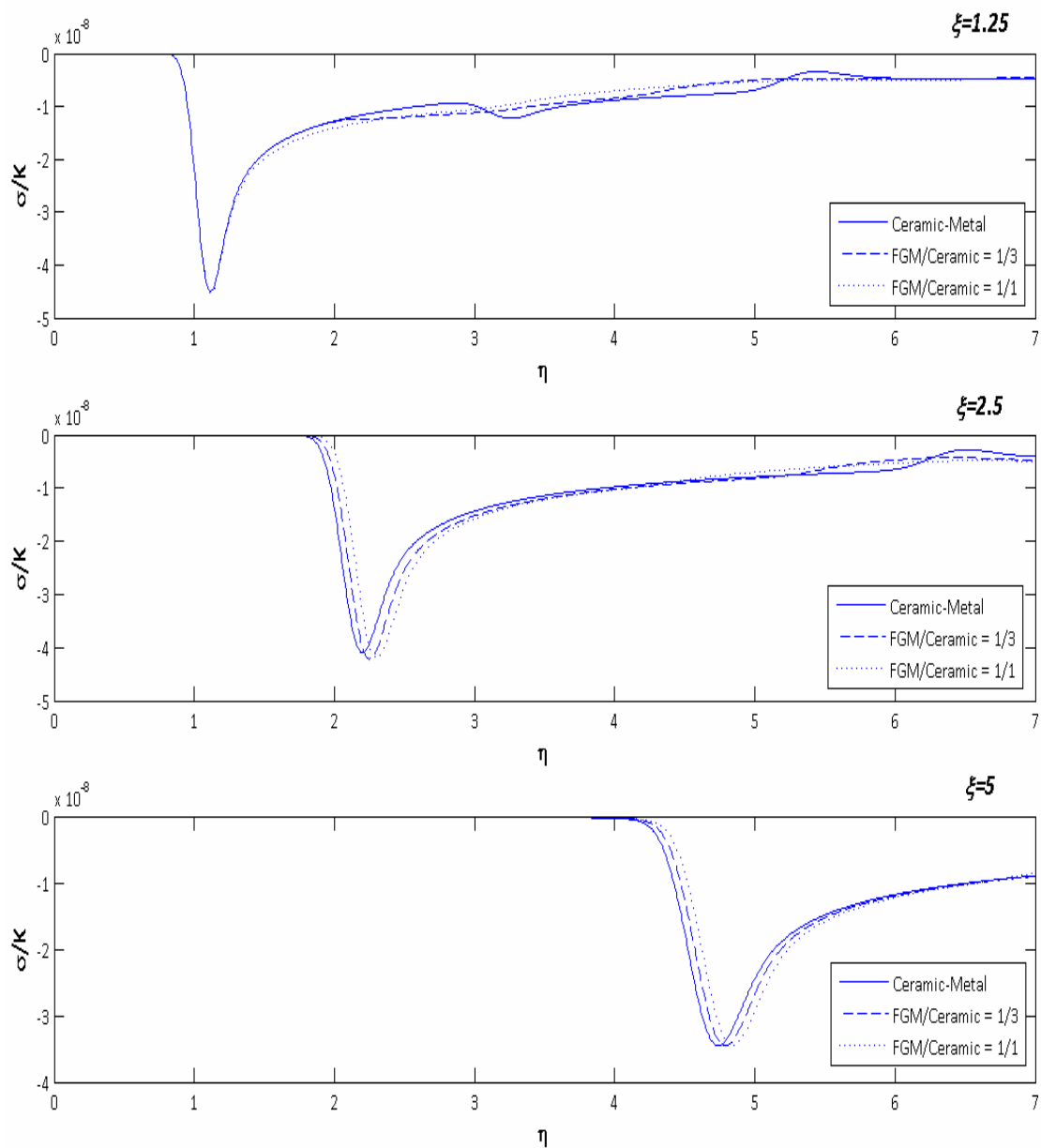
Σχήμα 4.40: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.41: Χρονική εξέλιξη των κατανομών της μεταβολής της θερμοκρασίας και της τάσης στο σύνθετο υλικό κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (σε ένα διάγραμμα)



Σχήμα 4.42: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, σε χαρακτηριστικές θέσεις



Σχήμα 4.43: Σύγκριση της χρονικής εξέλιξης της τάσης στο σύνθετο υλικό για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, σε χαρακτηριστικές θέσεις

Τα παραπάνω διαγράμματα επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί στις προηγούμενες παραγράφους:

- Οι συνοριακές συνθήκες Robin συνεπάγονται πολύ πιο ομαλή μεταβολή της θερμοκρασίας της άνω επιφάνειας. Επομένως, η ταχύτητα μεταβολής της θερμοκρασίας και το μέγεθος του τασικού κύματος είναι πολύ μικρότερα σχέση με το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet.

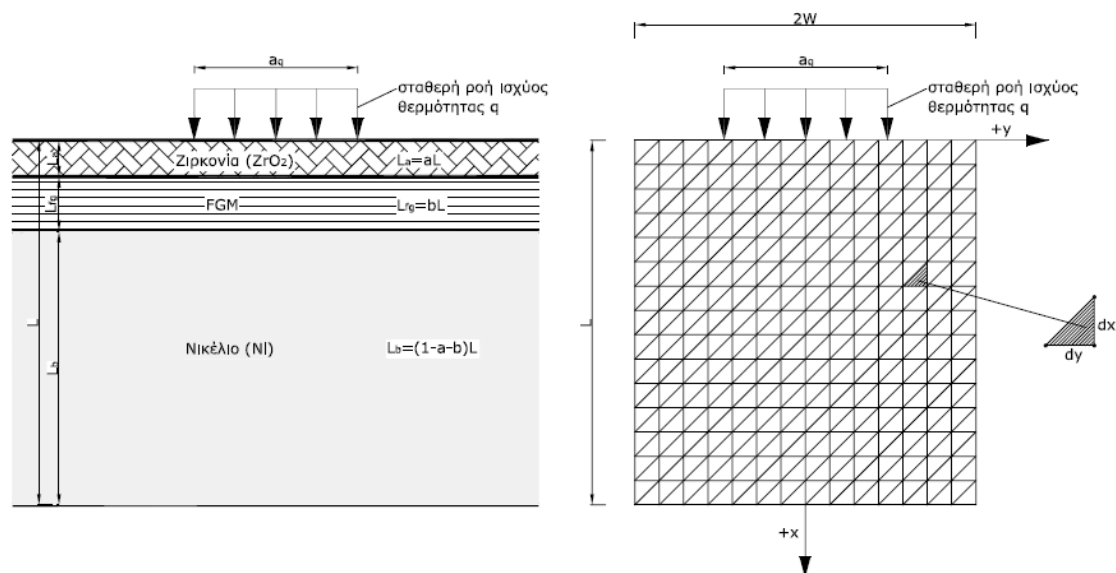
- Το κεραμικό προσφέρει θερμική θωράκιση, ενώ η στρώση του FGM αμβλύνει σε σημαντικό βαθμό την ένταση του ανακλώμενου στις διεπιφάνειες τασικού κύματος.

#### 4.8 Ανάλυση του επίπεδου ασύζευκτου προβλήματος της μεταφοράς θερμότητας στο σύνθετο υλικό (κεραμικό-FGM-μέταλλο), υπό συνθήκες σταθερής ροής θερμότητας

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μία πρώτη προσέγγιση του επίπεδου προβλήματος. Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του πλήρως συζευγμένου δισδιάστατου προβλήματος είναι ιδιαίτερα αυξημένη, καθώς σε κάθε κόμβο του δικτύου πεπερασμένων στοιχείων υπάρχουν 5 άγνωστοι. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζεται το ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας (βλ. παρ.2.5, 3.7).

Συγκεκριμένα, αναλύεται το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας και κατασκευάζεται κώδικας Matlab για την μελέτη του θερμοκρασιακού πεδίου του σύνθετου υλικού, ανεξάρτητα από το παραμορφωσιακό πεδίο. Όπως έχει ήδη επισημανθεί (παρ. 2.5), τούτο πραγματοποιείται μέσω μηδενισμού του όρου σύζευξης  $\frac{1}{2} \beta_{ij} T_0 (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ . Με τον τρόπο αυτό το μαθηματικό πρόβλημα απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό, καθώς οι άγνωστοι κάθε κόμβου περιορίζονται σε έναν (θερμοκρασία).

Το δίκτυο ορθογώνιων τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων και οι συνθήκες φόρτισης παρουσιάζονται στο ακόλουθο σχήμα:



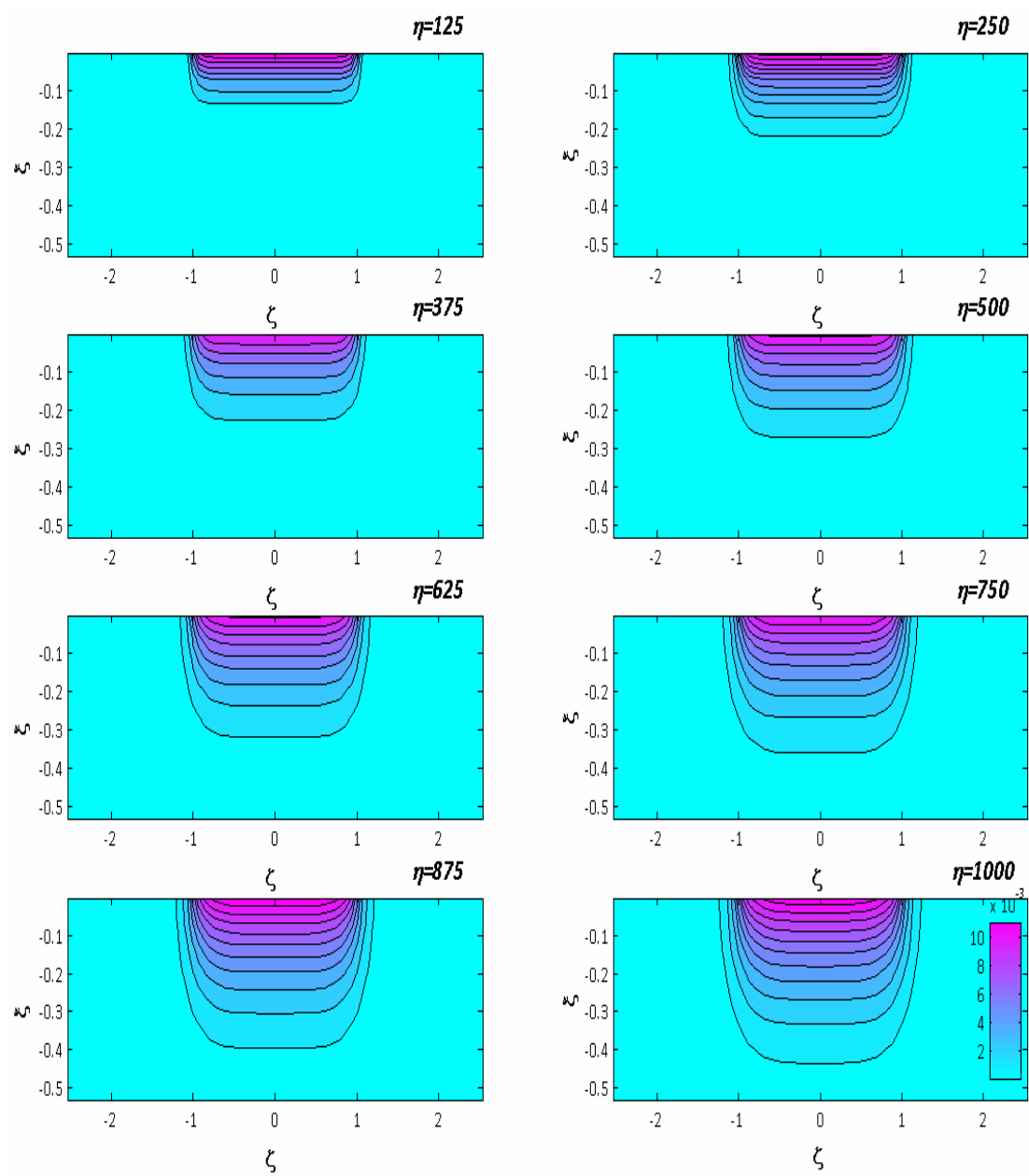
Σχήμα 4.44: Δίκτυο ορθογώνιων τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων για το επίπεδο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας

Οι συνοριακές συνθήκες της ανάλυσης που γίνεται είναι συνθήκες Neumann (σταθερή ροή ισχύος θερμότητας στην άνω επιφάνεια – βλ. παρ.3.8). Η σταθερή ροή ισχύος θερμότητας στην επιφάνεια λαμβάνεται ίση προς  $q = 50000 \text{ Wm}^{-2}$ . Στην εφαρμογή του επίπεδου προβλήματος, τα αδιαστατοποιημένα μεγέθη έχουν ως εξής:

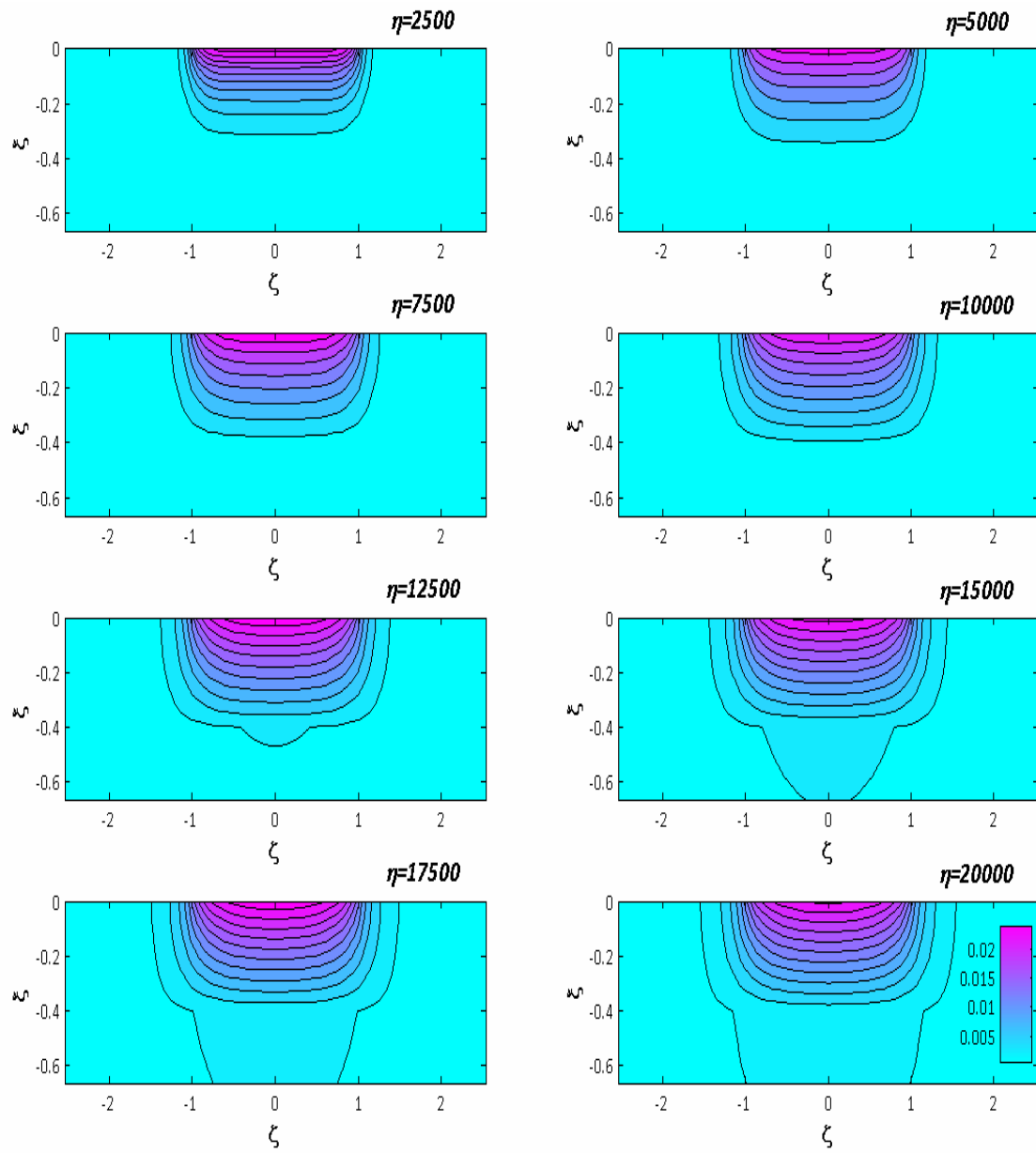
- Το σώμα έχει συνολικό αδιάστατο μήκος  $L = 10$  και πλάτος  $2W = 10$ ,
- το σταθερό πάχος των δύο ανώτερων στρώσεων είναι  $L_c = L_a + L_{fg} = \frac{L}{25} = 0.4$ ,
- το πλάτος της εισερχόμενης ροής ισχύος θερμότητας είναι  $a_q = \frac{2W}{5} = 2$ ,
- εξετάζονται οι περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 0, \frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}, \frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ ,
- το φαινόμενο μελετάται για συνολικό αδιαστατοποιημένο χρόνο ίσο με  $t_c = 1000$  για το ομογενές μέταλλο και  $t_c = 20000$  για το σύνθετο υλικό.

Για τις αναλύσεις χρησιμοποιείται δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων  $[(N=150) \times (M=150)]$  και συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων  $N_t = 500$ . Ακολουθούν τα διαγράμματα της χρονικής εξέλιξης της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας διαδοχικά για το ομογενές μέταλλο, το σύνθετο υλικό κεραμικό-μέταλλο και τις περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ . Στη συνέχεια ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας τη χρονική στιγμή  $\eta = 20000$  για τις περιπτώσεις  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 0, \frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$ . Τέλος, αναλύεται η επιρροή του FGM στη χρονική εξέλιξη της διάδοσης της θερμότητας.

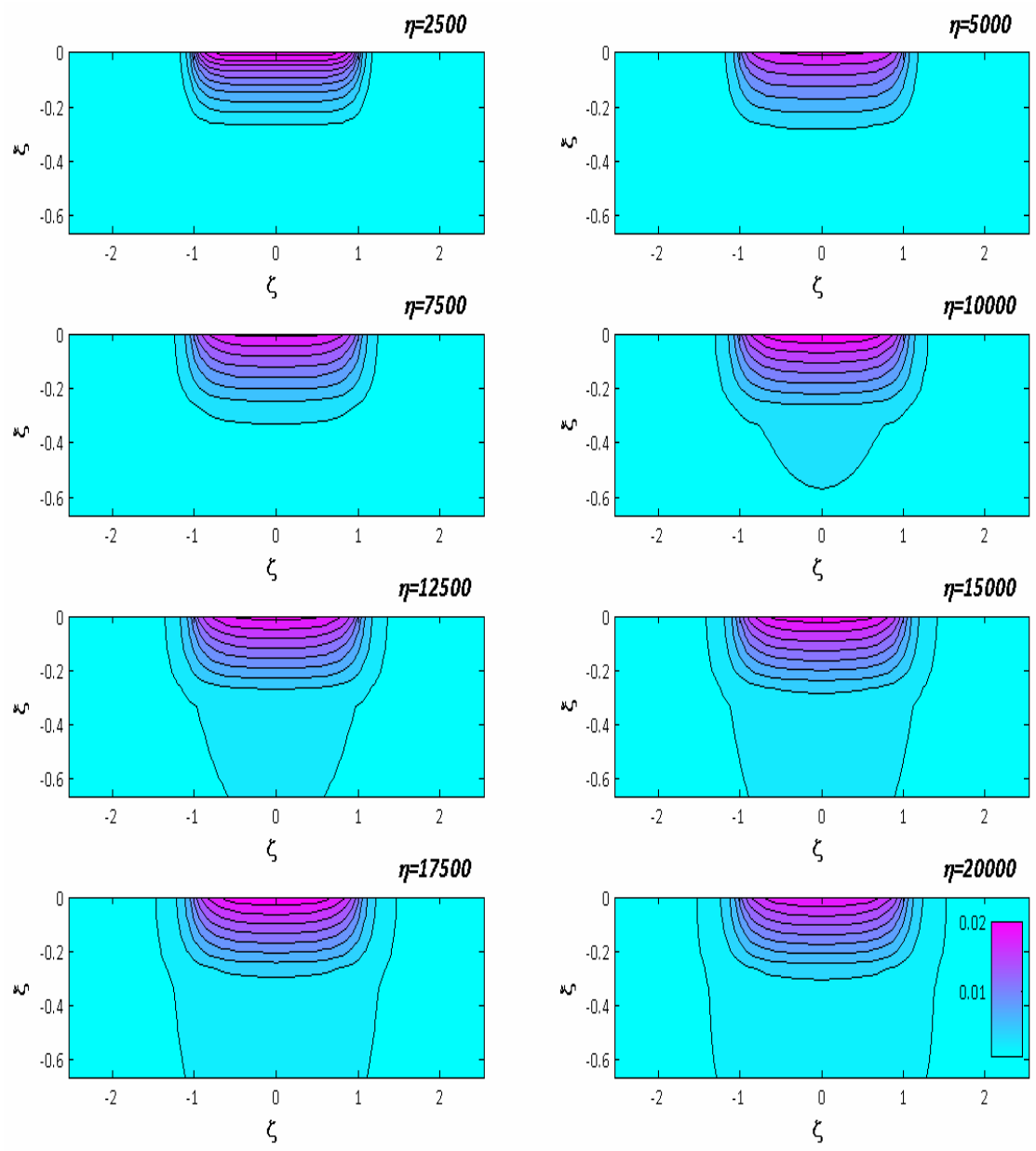




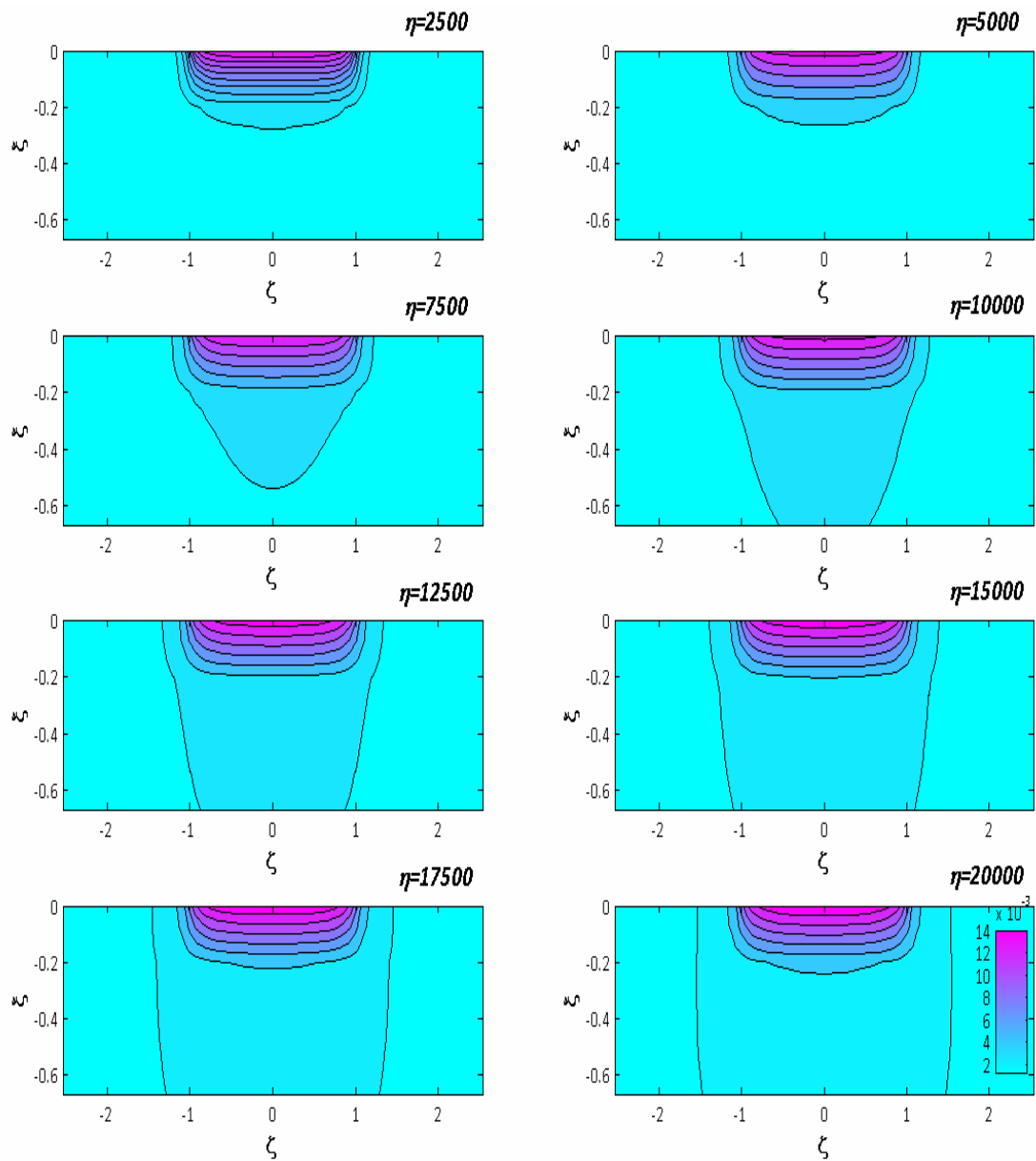
Σχήμα 4.45: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του μετάλλου (στιγμιότυπα)



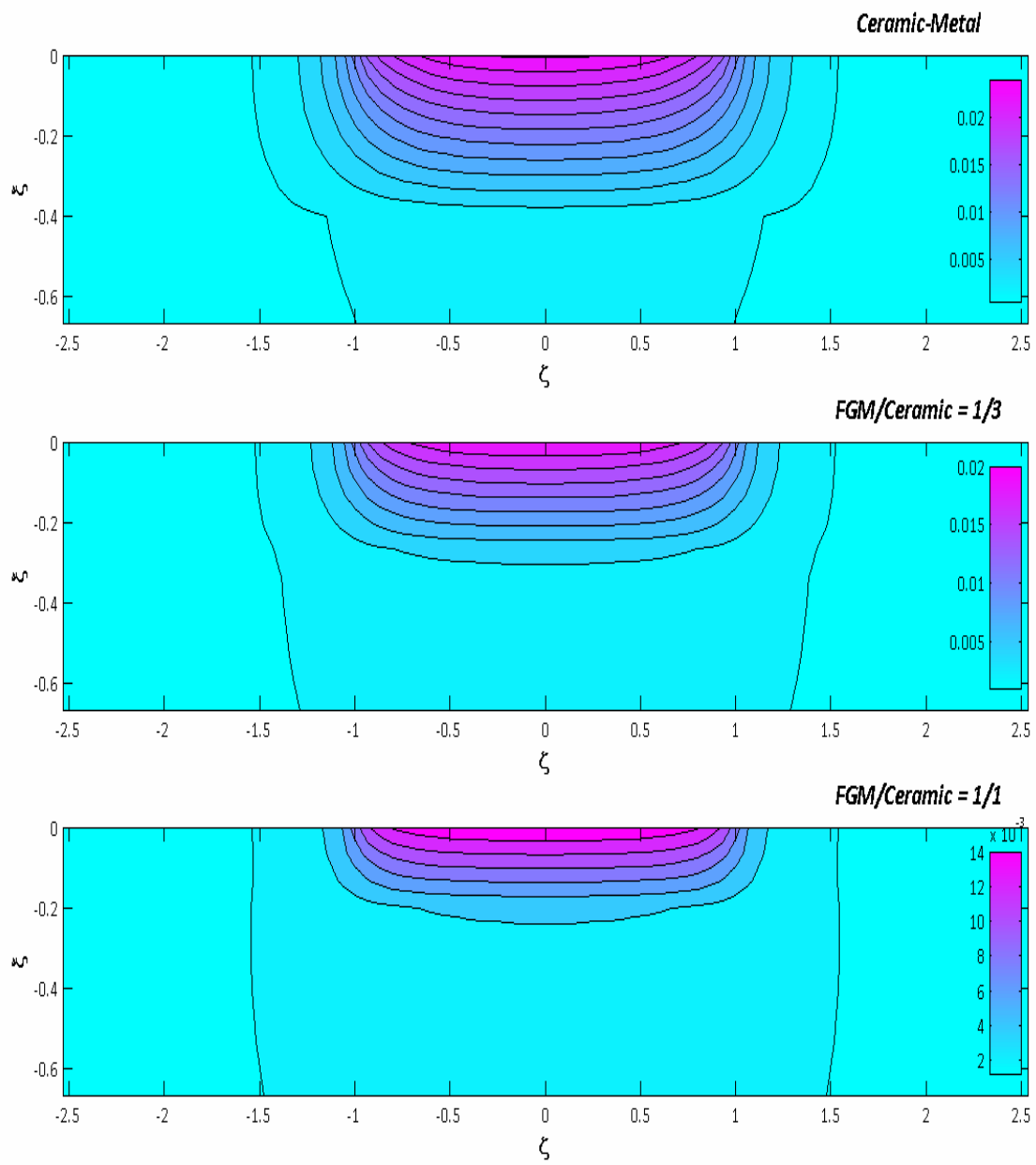
Σχήμα 4.46: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-μέταλλο (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.47: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = \frac{1}{3}$  (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.48: Χρονική εξέλιξη της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού κεραμικό-FGM-μέταλλο,  $\frac{L_{fg}}{L_a} = 1$  (στιγμιότυπα)



Σχήμα 4.49: Σύγκριση της κατανομής της μεταβολής της θερμοκρασίας του σύνθετου υλικού για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, τη χρονική στιγμή  $\eta = 20000$

Υλικό	Μεταβολή Θερμοκρασίας στη Διεπιφάνεια τη χρονική στιγμή $\eta = 20000$
Κεραμικό	0.029
FGM/Κεραμικό = 1/3	0.032
FGM/Κεραμικό = 1/1	0.034

Πίνακας 4.3: Μεταβολή της θερμοκρασίας στη διεπιφάνεια, στη θέση του άξονα συμμετρίας, για τα διάφορα πάχη της στρώσης του FGM, τη χρονική στιγμή  $\eta = 20000$

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα παραπάνω σχήματα και τον πίνακα, είναι τα εξής:

- Επιβεβαιώνεται η θετική επίδραση του κεραμικού στην επιβράδυνση της διάδοσης της θερμότητας.
- Στη θέση της διεπιφάνειας κεραμικού-μετάλλου, η μορφή της διάδοσης της θερμότητας παρουσιάζει «ανωμαλία». Όπως έχει ήδη παρατηρηθεί στις προηγούμενες εφαρμογές, αύξηση στην ταχύτητα διάδοσης της θερμότητας συνεπάγεται αύξηση της έντασης του τασικού κύματος. Το FGM συμβάλλει στην άρση της «ανωμαλίας» στην κλίση της θερμοκρασίας, γεγονός που οδηγεί σε χαμηλότερες τάσεις.

#### 4.9 Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Έχει ήδη συζητηθεί στα προηγούμενα ο ρόλος τόσο του κεραμικού, όσο και του FGM. Παρατίθεται επιπλέον ο ακόλουθος συγκεντρωτικός πίνακας που αφορά τις αναλύσεις στα μονοδιάστατα προβλήματα, στον οποίο αναγράφεται η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στη θέση  $\xi = 2.5$ , καθώς και η χρονική στιγμή που εμφανίζεται η μέγιστη αυτή τάση. Η θέση  $\xi = 2.5$ , στην περίπτωση σύνθετου υλικού, αντιστοιχεί στη θέση διεπιφάνειας του μετάλλου είτε με το κεραμικό είτε με το FGM.

Υλικό	Συνθήκες Φόρτισης	Μέγιστη Αδιαστατοποιημένη Τάση στη Διεπιφάνεια	Αδιαστατοποιημένος Χρόνος Εμφάνισης Μέγιστης Τάσης
Μέταλλο	Dirichlet	-6.90E+00	2.29
Κεραμικό-Μέταλλο		-1.54E-02	2.11
FGM/Κεραμικό = 1/3		-1.52E-02	2.16
FGM/Κεραμικό = 1/1		-1.50E-02	2.21
Μέταλλο	Robin	-1.47E-06	2.42
Κεραμικό-Μέταλλο		-4.22E-08	2.19
FGM/Κεραμικό = 1/3		-4.21E-08	2.25
FGM/Κεραμικό = 1/1		-4.19E-08	2.30

Πίνακας 4.4: Μέγιστη τάση στη διεπιφάνεια και χρονική στιγμή εμφάνισής της, για τις διάφορες αναλύσεις που έχουν πραγματοποιηθεί

Επομένως, τα τελικά συμπεράσματα συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- Όπως ήταν αναμενόμενο, η επιβολή συνοριακών συνθηκών Robin έχουν ως αποτέλεσμα τη χρονική επιμήκυνση του φαινομένου, σε σχέση με την επιβολή ακαριαίας μεταβολής της θερμοκρασίας του συνόρου (συνθήκες Dirichlet). Ο μειωμένος ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας συνεπάγεται μείωση της έντασης του τασικού κύματος. Ωστόσο, τα ποιοτικά συμπεράσματα από τις αναλύσεις των δύο διαφορετικών συνοριακών συνθηκών ταυτίζονται.
- Το κεραμικό υλικό λειτουργεί ως θερμική ασπίδα. Ο χαμηλός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας που διαθέτει έχει ως αποτέλεσμα τη δραστική μείωση της ταχύτητας διάδοσης της θερμότητας.
- Το FGM καθιστά τις συναρτήσεις των ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού συνεχείς. Το γεγονός αυτό συμβάλλει στη σημαντική μείωση της έντασης του ανακλώμενου τασικού κύματος στη διεπιφάνεια. Η παρατήρηση αυτή είναι κομβικής σημασίας, καθώς το ψαθυρό κεραμικό υλικό έχει χαμηλές αντοχές έναντι εφελκυσμού ή κόπωσης.
- Ο ρόλος κάθε στρώσης του υλικού γίνεται πλέον σαφής. Το κεραμικό υλικό προσφέρει προστασία στο μέταλλο έναντι θερμικών φορτίων. Το FGM αμβλύνει την ένταση του ανακλώμενου τασικού κύματος στην περιοχή του κεραμικού.

Προφανώς, οι δυνατότητες για περαιτέρω διερεύνηση του φαινομένου είναι πολλές. Ενδεικτικά, αναφέρονται προτάσεις και ιδέες για μελλοντική έρευνα:

- Επιβολή μηχανικής φόρτισης (πίεσης) στο σύνορο. Συνδυασμός θερμικής και μηχανικής φόρτισης.
- Διαφοροποίηση των συνθηκών στήριξης (π.χ. δεσμευμένο σύνορο).
- Εναλλακτική κατανομή των ιδιοτήτων του FGM (π.χ. εκθετική).
- Εναλλακτική διαστρωμάτωση – προσθήκη νέων στρώσεων.
- Ολοκλήρωση κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για το επίπεδο πρόβλημα. Μελέτη παραμορφωσιακού πεδίου για το ασύζευκτο πρόβλημα θερμοελαστικότητας.
- Κατασκευή κώδικα για το συζευγμένο επίπεδο πρόβλημα. Μελέτη επίδρασης του όρου σύζευξης.



- **Βιβλιογραφία**

- **Βιβλία**

1. Γεώργιος Δ. Ακρίβης – Βασίλειος Α. Δουγαλής: *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.
2. Enrico Fermi: *Θερμοδυναμική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2008.
3. Y. C. Fung – Pin Tong: *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific, 2001.
4. Richard B. Hetnarski – M. Reza Eslami: *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer, 2009.
5. Thomas J. R. Hughes: *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1987.
6. A. D. Kovalenko: *Thermoelasticity. Basic Theory and Applications*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1969.
7. Lawrence E. Malvern: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., 1969.
8. Witold Nowacki: *Dynamic Problems of Thermoelasticity*, PWN, 1975.
9. S. Suresh – A. Mortensen: *Fundamentals of Functionally Graded Materials. Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*, IOM Communications Ltd, 1998.

- **Άρθρα**

10. V. I. Danilovskaya: *On a dynamic problem of thermoelasticity*, Prikl. Math. Mech., Vol.16, No. 3, 1952.
11. V. I. Danilovskaya: *Thermal stresses in an elastic half-space arising after a sudden heating of its boundary*, Prikl. Math. Mech., Vol.14, No. 3, 1950.

12. Sunil C. Joshi – H. W. Ng: *Optimizing functionally graded nickel-zirconia coating profiles for thermal stress relaxation*, Simulation Modelling Practice and Theory 19 (2011) 586–598.
13. J. N. Reddy – C. D. Chin: *Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates*, Journal of Thermal Stresses, 21:593–626 (1998).
14. Hideaki Tsukamoto: *Design of functionally graded thermal barrier coatings based on a nonlinear micromechanical approach*, Elsevier, (2010).
15. Jun Zhao - Yanzheng Li – Xing Ai: *Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings*, Thin Solid Films 516 (2008) 7581–7587.