ΕΘΝΙΚΟ **Μ**ΕΤΣΟΒΙΟ **Π**ΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΝΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΙΣ «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ HILLE-YOSIDA ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΓΓΕΛΑΚΟΥ Δ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

Επιβλέπων Καθηγητής:
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Χ. ΚΡΑΒΒΑΡΙΤΗΣ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι άμεσο αποτέλεσμα της διδασκαλίας και της καθοδήγησης του επιβλέποντα Καθηγητή κ. Δημήτριο Χ. Κραββαρίτη ,τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τόσο για την αμέριστη βοήθεια και την διαρκή συμπαράσταση που μου παρείχε από την αρχή μέχρι το τέλος της παρούσας διπλωματικής, αλλά και γενικότερα σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κ. Βασίλειο Παπανικολάου και κ. Ιωάννη Τσινιά, οι οποίοι αποτελούν μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που με στηρίζει σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε το Θεώρημα Hille-Yosida και την εφαρμογή του στην εξίσωση της Θερμότητας κατ της Κυματικής Εξίσωσης.

Στο Κεφάλαιο 1 παραθέτουμε ορισμένα βασικά Θεωρήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης τα οποία χρησιμοποιούμε στη συνέχεια.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται αναφορά στις βασικές ιδιότητες των χώρων Hilbert και στη συνέχεια αποδεικνύονται τα Θεωρήματα Προβολής πάνω σε ένα κλειστό κυρτό σύνολο, καθώς και τα Θεωρήματα Stampacchia και Lax-Milgram.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια μικρή αναφορά στη Θεωρία των χώρων Sobolev. Εξετάζεται τόσο ο χώρος $W^{m,p}(I)$ *με* $I \subseteq \mathbb{R}$ *όσο και ο χώρος* $W^{m,p}(\Omega)$ *με* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *και παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητές τους.*

Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύεται η Ανισότητα Poincaré και μελετώνται δυο γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών, όπου η ύπαρξη λύσης τους στηρίζεται στο Θεώρημα Lax-Milgram.

Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μια εισαγωγή στους μεγιστικά μονότονους τελεστές και αποδεικνύουμε ορισμένες βασικές ιδιότητές τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου μελετάται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης για το Εξελικτικό Πρόβλημα $\frac{du}{dt} + Au = 0, u(0) = u_0$. *Αποδεικνύεται το Θεώρημα Cauchy-Lipschitz-Picard και το Θεώρημα Hille-Yosida ,ένω στο τέλος του κεφαλαίου αυτού εξετάζεται η περίπτωση του αυτοσυζυγούς τελεστή.*

Τέλος ,στο Κεφάλαιο 6 χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα του προηγούμενου κεφαλαίου αποδεικνύουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης για την εξίσωση Θερμότητας και την Κυματική εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1

Έστω Χ ένας χώρος Banach. Τότε ο X^* *είναι επίσης χώρος Banach με*

$x^* \in X^*$ *και* $\|x^*\| = sup\{|x^*(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.(**Αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn Banach.**)*
Έστω Χ ένας γραμμικός χώρος και συνάρτηση $\rho : X \to \mathbb{R}$ *με τις ιδιότητες*
(1) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall\, x, y \in X.$
(2) $\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x), \forall\, x, y \in X, \forall\, \lambda > 0.$
Έστω, επιπλέον, $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ *ένας γραμμικός υπόχωρος του* X *και* $\phi : \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ *ένα γραμμικό συναρτησιακό , ώστε:*

$$\phi(x) \leq \rho(x)\,, \forall\, x \in Y\,.$$

Τότε, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό f *ορισμένο στον* X *που επεκτείνει το* ϕ *δηλαδή:*

$$\varphi(x) = f(x), \forall\, x \in Y$$

και τέτοιο ώστε:

$$f(x) \leq \rho(x), \forall\, x, y \in X.$$

*ΠΟΡΙΣΜΑ 1.3(**Συνέπειες του Θεωρήματος Hahn- Banach**)*
Έστω Χ ένας χώρος με νόρμα και Υ ένας γραμμικός υπόχωρος του Χ.
(1)'Εαν $y^* \in Y^*$, *τότε υπάρχει* $x^* \in X^*$, *ώστε :*

$$x^*(x) = y^*(x), \forall\, x \in Y \text{ και } \|x^*\| = \|y^*\|.$$

(2) *Εάν ο Υ είναι, επί πλέον, κλειστός υπόχωρος του Χ, τότε για κάθε* $x_0 \in X - Y$ *υπάρχει* $x^* \in X^*$ *με* $\|x^*\| = 1$ *ώστε* $x^*(x) = 0$ *για κάθε* $x \in Y$ *και τότε* $x^*(x_0) = \rho(x_0, Y)$, *όπου ρ είναι η μετρική που καθορίζεται από τη νόρμα του* X.
(3) Για κάθε $x_0 \in X$ *με* $x_0 \neq 0$, *υπάρχει* $x^* \in X^*$ *με* $\|x^*\| = 1$, *ώστε* $x^*(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.
Άρα, ο X^* *διαχωρίζει τα σημεία του Χ (δηλαδή για κάθε* $x, y \in X$ *με* $x \neq y$, *υπάρχει* $x^* \in X^*$, *ώστε* $x^*(x) = y^*(y)$).

(4) Ο γραμμικός υπόχωρος Y του X είναι πυκνό υποσύνολο του X εάν και μόνον άν για κάθε $x^* \in X^*$, με $x^*(x) = 0$, για κάθε $x \in Y$, ισχύει $x^* = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.

Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.

Τότε ο $T^* : Y^* \to X^*$ καλείται συζυγής ή δυικός του T και ορίζεται ως

$$T^*(y^*) = y^*(Tx).$$

Ευκολα αποδεικνύεται ότι $\|T\| = \|T^*\|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5 **(Θεώρημα σταθερού σημείου Banach-μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων Picard).**

Έστω X ένας μη κενός πλήρης μετρικός χώρος και $S : X \to X$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$d(S\upsilon_1, S\upsilon_2) \le kd(\upsilon_1, \upsilon_2) \quad \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in X \text{ με } k < 1.$$

Τότε η S έχει μοναδικό σταθερό σημείο ,$u=Su$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6 **(Θεώρημα Banach-Steinhaus).**

Έστω E και F δυο Banach χώροι και $(T_\iota)_{\iota\in I}$ μια οικογένεια (όχι απαραίτητα αριθμήσιμη) γραμμικών και συνεχών τελεστών από τον E στον F.

Υποθέτουμε ότι :

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty, \ \forall\, x \in E.$$

Τότε,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathfrak{L}(E,F)} < \infty.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε :

$$\|T_\iota(x)\| \le c\|x\|, \ \forall\, x \in E, \forall\, i \in I.$$

Το θεώρημα αυτό συχνά αναφέρεται ως Αρχή του Ομοιόμορφου Φράγματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7 **(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower)**

Κάθε συνεχής συνάρτηση από την μπάλα $B(0,1)$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο.

Πόρισμα 1.8 **(Πόρισμα Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Brower).**

Εάν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = R > 0$ ισχύει : $\langle f(x), x\rangle \ge 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_0\| \le R$ τέτοιο ώστε : $f(x_0) = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9 **(Θεώρημα Σταθερού σημείου Schauder).**

Έστω X ένας χώρος Banach και $K \subset X$ συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X. Εάν η συνάρτηση $f : K \to K$ είναι συνεχής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

*Πόρισμα 1.10 (**Πόρισμα Θεωρήματος Σταθερού Σημείου του Schauder**).*
Έστω X ένας χώρος Banach και $K \subset X$ ένα κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του X. Εάν η συνάρτηση $f : K \to K$ είναι συνεχής και συμπαγής, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11 (**Φασματικό Θεώρημα**).*
Έστω T ένας αυτοσυζυγής ,συμπαγής τελεστής σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert H. Τότε, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.
Επί πλέον ,ισχύει :

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n ,$$

όπου λ_n είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των u_n .

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ 1.12
Έστω E ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $\| \cdot \|$.
Συμβολίζουμε με E' τον (τοπολογικό) δυικό του E, δηλαδή τον χώρο των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών πάνω στον E.
Ο E' είναι εφοδιασμένος με τημ δυική νόρμα :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} f(x).$$

Για $f \in E'$ και $x \in E$ θα γράφουμε γενικά $\langle f, x \rangle$ αντί f(x).
Λέμε ότι το $\langle \ , \ \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο ως πρός τη δυικότητα E', E.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1.13 (**Θεώρημα αναπαραστάσεως Rietz-Frechet**).*
Για δεδομένο $\varphi \in H'$ υπάρχει $f \in H$ μοναδικό τέτοιο ώστε

$$\langle \varphi, \upsilon \rangle = (f, \upsilon) \quad \forall\, \upsilon \in H.$$

Επί πλέον ,ισχύει $|f| = \|\phi\|_{H'}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.14 Το θεώρημα δείχνει ότι κάθε γραμμικό συναρτησιακό πάνω στο H μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω του εσωτερικού γινομένου.
Η απεικόνιση $\varphi \mapsto f$ είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός που μας επιτρέπει να ταυτίσουμε τον H με τον H'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΧΩΡΟΙ HILBERT

1. ΟΡΙΣΜΟΙ. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ. ΠΡΟΒΟΛΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΕΝΑ ΚΛΕΙΣΤΟ ΚΥΡΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.

Έστω H ένας γραμμικός χώρος. Ένα εσωτερικό γινόμενο (u,υ) είναι ένα διγραμμικό συναρτησιακό από τον $H \times H$ στον $\mathbb{R}$, συμμετρικό, θετικά ορισμένο (δηλαδή $(u,u) \geq 0 \;\; \forall\, u \in H$ και $(u,u)>0$ αν $u \neq 0$).
*Υπενθυμίζουμε ότι ένα εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την **ανισότητα Cauchy-Schwarz:***

$$|(u,\upsilon)| \leq (u,u)^{1/2}(\upsilon,\upsilon)^{1/2} \qquad \forall\, u,\upsilon \in H. \tag{2.1}$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι το $|u| = (u,u)^{1/2}$ είναι μια νόρμα .(Πράγματι, $|u+\upsilon|^2 = |u|^2 + |\upsilon|^2 + 2(u,\upsilon) \leq |u|^2 + |\upsilon|^2 + 2|u||\upsilon|$).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.

*Ένας χώρος **Hilbert** είναι ένας γραμμικός χώρος H εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο (u,υ) και ο οποίος είναι **πλήρης** για τη νόρμα $(u,u)^{1/2}$.*
Στη συνέχεια με H συμβολίζουμε έναν χώρο Hilbert.

ΒΑΣΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Ο $L^2(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,\upsilon) = \int_\Omega u(x)\upsilon(x)dx$$

Είναι ένας χώρος Hilbert. Ο χώρος Sobolev H^1 είναι ένας άλλος χώρος Hilbert με "πρότυπο " τον L^2.
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Θα συμβολίζουμε με $|\cdot|$ (αντί για $\|\cdot\|$)τη νόρμα που αντιστοιχεί σε ένα εσωτερικό γινόμενο.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.**(Προβολή πάνω σε ένα κλειστό κυρτό)***

Έστω $K \subset H$ ένα κλειστό , κυρτό, μη κενό. Τότε για κάθε $f \in H$, υπάρχει $u \in K$ μοναδικό τέτοιο ώστε

$$|f-u| = \min_{\upsilon \in K}|f-\upsilon| \tag{2.2}$$

Επί πλέον, το u χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f-u, \upsilon - u) \le 0 \ \ \forall\, \upsilon \in K \end{cases} \qquad (2.3)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α)Ισοδυναμία των (2.2) και (2.3).

Έστω $u \in K$ που ικανοποιεί την (2.2) και έστω $w \in K$. Ισχύει

$$\upsilon = (1-t)u + tw \in K \ \ \text{για } t \in (0,1]$$

και άρα

$$\begin{aligned} |f-u| &\le |f-\upsilon| \qquad \big(\text{ καθώς } |f-u| = \min_{\upsilon \in K}|f-\upsilon|\,\big) \\ &= |f-[(1-t)u+tw]| \\ &= |(f-u)-t(w-u)|. \end{aligned}$$

Επομένως ,

$$|f-u|^2 \le |f-u|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2|w-u|^2 \ ,$$

δηλαδή

$$2(f-u, w-u) \le t|w-u|^2 \ .$$

Όταν $t \to 0$, παίρνουμε την (2.3).

Αντίστροφα, έστω u που ικανοποιεί την (2.3)

Έχουμε τότε ,

$$\begin{aligned} |f-\upsilon|^2 &= |f-u+u-\upsilon|^2 \\ &= |(f-u)+(u-\upsilon)|^2 \\ &= |f-u|^2 + |u-\upsilon|^2 + 2(f-u, u-\upsilon) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ |f-\upsilon|^2 - |f-u|^2 = |u-\upsilon|^2 - 2(f-u, \upsilon-u) \ge 0 \quad \forall\, \upsilon \in K \ ,$$

Άρα ,

$$|f-\upsilon|^2 \ge |f-u|^2 \quad \forall\, \upsilon \in K$$

Επομένως

$$|f-u| = \min_{\upsilon \in K}|f-\upsilon|.$$

β)Μοναδικότητα.

Έστω u_1 και u_2 που ικανοποιούν την (2.3).

Έχουμε ,

$$(f-u_1, \upsilon-u_1) \le 0 \quad \forall\, \upsilon \in K \qquad (2.4)$$

$$(f-u_2, \upsilon-u_2) \le 0 \quad \forall\, \upsilon \in K \qquad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας $\upsilon = u_2$ στην (2.4) και $\upsilon = u_1$ στην (2.5), έχουμε

$$(f-u_1, u_2-u_1) \le 0 \ \text{ και } \ (f-u_2, u_1-u_2) \le 0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε

$$(f - u_1, u_2 - u_1) + (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (f - u_1, u_2 - u_1) + (u_2 - f, u_2 - u_1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cancel{f} - u_1 + u_2 - \cancel{f}, u_2 - u_1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |u_2 - u_1|^2 \leq 0$$

Άρα ,

$$u_2 = u_1.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.5.

Με βάση το παραπάνω θεώρημα ,είναι καλώς ορισμένη η απεικόνιση:

$$\wp_K : H \to K \text{ με } \wp_K(f) := u, \forall f \in H,$$

όπου $u \in K$ για το οποίο ισχύει η ισότητα (2.2).

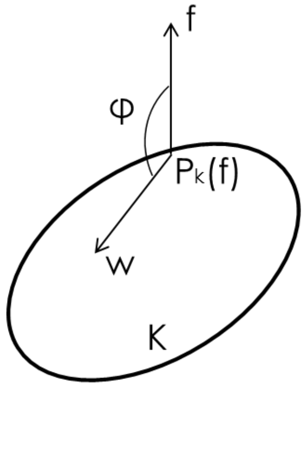
ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6.

Η $\wp_K$ *ονομάζεται μετρική προβολή του Η στο Κ και προφανώς $\wp_K(a) = a$, $\forall a \in K$. Χρησιμοποιώντας τη μετρική προβολή $\wp_K$ του Η στο Κ, η σχέση (3) γράφεται ισοδύναμα :*

$$\langle f - \wp_K(f), w - \wp_K(f) \rangle \leq 0, \forall w \in H.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.7

Ουσιαστικά, το $u = \wp_K(f)$ είναι το πλησιέστερο σημείο του Κ πρός το $f \in H$ και η ανισότητα (2.3) δείχνει ότι για οποιοδήποτε $w \in K$, η γωνία φ που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων $f - \wp_K(f)$, $w - \wp_K(f)$ είναι αμβλεία.



ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8.

Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.4, ισχύει

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \le |f_1 - f_2| \qquad \forall\ f_1, f_2 \in H.$$

(δηλαδή ο τελεστής P_K είναι συστολή, με $P_K = \wp_K$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτοντας $u_1 = P_K f_1$ και $u_2 = P_K f_2$, παίρνουμε

$$(f_1 - u_1, \upsilon - u_1) \le 0 \quad \forall\ \upsilon \in K. \qquad (2.6)$$

$$(f_2 - u_2, \upsilon - u_2) \le 0 \quad \forall\ \upsilon \in K. \qquad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας $\upsilon = u_2$ στην (2.6) και $\upsilon = u_1$ στην (2.7), παίρνουμε

$$(f_1 - u_1, u_2 - u_1) \le 0 \quad \text{και} \quad (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \le 0.$$

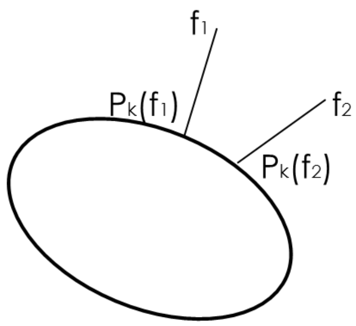
Με πρόσθεση έχουμε

$$\begin{aligned}
&(f_1 - u_1, u_2 - u_1) + (f_2 - u_2, u_1 - u_2) \le 0 \\
\Leftrightarrow\ &(f_1 - u_1, u_2 - u_1) + (u_2 - f_2, u_2 - u_1) \le 0 \\
\Leftrightarrow\ &(f_1 - u_1 + u_2 - f_2, u_2 - u_1) \le 0 \\
\Leftrightarrow\ &(f_1 - f_2 + u_2 - u_1, u_2 - u_1) \le 0 \\
\Leftrightarrow\ &(f_1 - f_2, u_2 - u_1) + |u_2 - u_1|^2 \le 0
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
|u_1 - u_2|^2 &\le (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \\
&\le |f_1 - f_2||u_1 - u_2| \quad \text{λόγω της ανισότητας Cauchy - Schwartz}
\end{aligned}$$

Άρα, $|u_1 - u_2| \le |f_1 - f_2|$.



ΠΟΡΙΣΜΑ 2.9.

Έστω $M \subset H$ ένας γραμμικός κλειστός υπόχωρος και $f \in H$.

Τότε το $u = P_M f$ χαρακτηρίζεται με

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, \upsilon) = 0 \quad \forall\ u \in M. \end{cases} \qquad (2,8)$$

Επί πλέον, ο P_M είναι ένας γραμμικός τελεστής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
Λόγω της (2.3) έχουμε

$$(f - u, \upsilon - u) \leq 0 \qquad \forall \upsilon \in M$$

και άρα

$$(f - u, t\upsilon - u) \leq 0 \qquad \forall \upsilon \in M, \forall t \in \mathbb{R},$$

οπότε

$$(f - u, \upsilon) = 0 \qquad \forall \upsilon \in M.$$

Αντίστροφα, αν το u ικανοποιεί την (2.8), έχουμε

$$(f - u, \upsilon - u) = 0 \qquad \forall \upsilon \in M.$$

2.Θεωρήματα Stampacchia και Lax-Milgram

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10.
Λέμε ότι ένα διγραμμικό συναρτησιακό a(u,υ): $H \times H \to \mathbb{R}$ είναι
*(1)**συνεχές** εάν υπάρχει σταθερά c>0 τέτοια ώστε:*

$$|a(u,\upsilon)| \leq c|u||\upsilon|, \forall u, \upsilon \in H,$$

*(2)**πιεστικό** εάν υπάρχει σταθερά k>0 τέτοια ώστε :*

$$a(u,u) \geq k|u|^2, \forall u \in H$$

*ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11 **(Stampacchia).***
Έστω a(u,υ) ένα διγραμμικό συνεχές πιεστικό συναρτησιακό. Έστω K ένα κλειστό, κυρτό και μη κενό υποσύνολο του H. Για δεδομένο $\phi \in H'$ υπάρχει $u \in K$ μοναδικό τέτοιο ώστε

$$a(u, \upsilon - u) \geq \langle \varphi, \upsilon - u \rangle \quad \forall \upsilon \in K. \qquad (2.9)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
Από το θεώρημα αναπαραστάσεως Rietz-Frechet (θεώρημα 1.12) υπάρχει $f \in H$ μοναδικό τέτοιο ώστε

$$\langle \phi, \upsilon \rangle = (f, \upsilon) \qquad \forall \upsilon \in H.$$

Εξάλλου, για σταθερό $u \in H$, η απεικόνιση $\upsilon \mapsto a(u,\upsilon)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό πάνω στο H και, σύμφωνα με το θεώρημα ανα - παραστάσεως Rietz - Frechet, υπάρχει ένα στοιχείο του H , έστω Au, τέτοιο ώστε $a(u,\upsilon) = (Au,\upsilon)$ $\forall \upsilon \in H$.
Ο A είναι γραμμικός τελεστής από τον H στον H και ισχύει :

$$(i) \; |Au| \leq C|u| \qquad \forall u \in H \qquad (2.10)$$

Απόδειξη i)

$$|(Au,\upsilon)| = |a(u,\upsilon)| \leq C|u||\upsilon| \quad (\text{καθώς το } a \text{ είναι συνεχές})$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(Au,\upsilon)\,|}{|\upsilon|} \leq C|u|$$

$$\Leftrightarrow |Au| = \sup_{\upsilon\in H} \frac{|(Au,\upsilon)\,|}{|\upsilon|} \leq C|u|$$

Άρα ο Α είναι συνεχής.

(ii) $(Au,u) \geq a|u|^2 \qquad \forall\, u \in H$ *(2.11)*

Απόδειξη ii)

$(Au,u) = a(u,u) \geq a|u|^2$ *(καθώς το α είναι πιεστικό)*

Άρα ο Α είναι πιεστικός.

Το πρόβλημα (2.9) ανάγεται στο να βρεθεί $u \in K$ *τέτοιο ώστε :*

$$(Au,\upsilon - u) \geq (f,\upsilon - u) \qquad \forall\, \upsilon \in K$$

$$\Leftrightarrow (Au,\upsilon - u) - (f,\upsilon - u) \geq 0 \quad \forall\, \upsilon \in K$$

$$\Leftrightarrow (Au - f,\upsilon - u) \geq 0 \quad \forall\, \upsilon \in K$$

$$\Leftrightarrow (f - Au,\upsilon - u) \leq 0 \quad \forall\, \upsilon \in K. \qquad (2.12)$$

Έστω ρ>0 μια σταθερά που θα οριστεί αργότερα. Η ανισότητα (2.12) ισοδυναμεί με:

$$(\rho f - \rho Au + u - u,\upsilon - u) \leq 0 \quad \forall \upsilon \in K$$

Επομένως αρκεί να δείξω ότι

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$$

Τότε(από θεώρημα 2.4) ισχύει ότι αν

$$u = P_K(f) \Leftrightarrow (f - u,\upsilon - u) \leq 0.$$

Για κάθε $\upsilon \in K$*, θέτουμε* $S\upsilon = P_K(\rho f - \rho A\upsilon + \upsilon)$*. Θα δείξουμε ότι, αν το* $\rho > 0$ *επιλεγεί κατάλληλα, τότε η S είναι μια αυστηρή συστολή, δηλαδή υπάρχει* $k < 1$ *τέτοιο ώστε*

$$|S\upsilon_1 - S\upsilon_2| \leq k|\upsilon_1 - \upsilon_2| \qquad \forall\, \upsilon_1,\upsilon_2 \in K.$$

Πράγματι,

$$|S\upsilon_1 - S\upsilon_2| = |P_K(\rho f - \rho A\upsilon_1 + \upsilon_1) - P_K(\rho f - \rho A\upsilon_2 + \upsilon_2)|$$

$$\leq |\rho f - \rho A\upsilon_1 + \upsilon_1 - \rho f + \rho A\upsilon_2 - \upsilon_2|$$

εφόσον η P_K *είναι συστολή (πρόταση 2.8)*

$$= |\upsilon_1 - \upsilon_2 - \rho A(\upsilon_1 - \upsilon_2)|$$

καθώς ο Α είναι γραμμικός, δηλαδή $A\upsilon_1 + A\upsilon_2 = A(\upsilon_1 + \upsilon_2)$.

$$|S\upsilon_1 - S\upsilon_2|^2 \leq |\upsilon_1 - \upsilon_2 - \rho A(\upsilon_1 - \upsilon_2)|^2$$

$$|S\upsilon_1 - S\upsilon_2|^2 \leq |\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 + \rho^2|A(\upsilon_1 - \upsilon_2)|^2 - 2\rho(\upsilon_1 - \upsilon_2, A(\upsilon_1 - \upsilon_2)).$$

$$\leq |\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 + \rho^2 C^2|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 - 2\rho(\upsilon_1 - \upsilon_2, A(\upsilon_1 - \upsilon_2)).$$

καθώς ο Α είναι συνεχής , και άρα ισχύει $|A(\upsilon_1 - \upsilon_2)| \leq C|\upsilon_1 - \upsilon_2|$

$$\Leftrightarrow |A(\upsilon_1 - \upsilon_2)|^2 \leq C^2|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2$$

Από πιεστικότητα του A έχουμε ότι :

$$(A\upsilon,\upsilon) \geq \alpha|\upsilon|^2$$

$$(A(\upsilon_1 - \upsilon_2),\upsilon_1 - \upsilon_2) \geq \alpha|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2$$

$$-(A(\upsilon_1 - \upsilon_2),\upsilon_1 - \upsilon_2) \leq -\alpha|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2$$

Άρα ,

$$|S\upsilon_1 - S\upsilon_2|^2 \leq |\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 + \rho^2C^2|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 - 2\rho\alpha|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2$$
$$= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2)|\upsilon_1 - \upsilon_2|^2 .$$

Αν το $\rho > 0$ επιλεγεί τέτοιο ώστε $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$

δηλαδή $1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 1$

$$-2\rho\alpha + \rho^2C^2 < 0$$

$$\rho(-2\alpha + \rho C^2) < 0$$

$\rho > 0$, *άρα*

$$(-2\alpha + \rho C^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho C^2 < 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \rho < \frac{2a}{C^2}$$

τότε από θεώρημα σταθερού σημείου Banach (θεώρημα 1.3)το S έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή $Su = u$.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1.**(Θεώρημα Lax-Milgram).***

Έστω H ένας χώρος Hilbert και $a(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ ένα διγραμμικό συνεχές και πιεστικό συναρτησιακό.

Τότε, για κάθε $\phi \in \mathrm{H}$ υπάρχει $u \in H$ μοναδικό τέτοιο ώστε :

$$a(u,\upsilon) = \langle \phi, \upsilon \rangle, \forall\, \upsilon \in H. \qquad (2.13)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΧΩΡΟΙ SOBOLEV

1.Ο ΧΩΡΟΣ SOBOLEV $W^{m,p}(I)$ *, I* $\subseteq \mathbb{R}$

Έστω $I = (a,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ *ένα διάστημα φραγμένο ή μη και έστω* $p \in \mathbb{R}$ *με* $1 \leq p \leq \infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ *ορίζεται ως εξής :*

$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : \exists\, g \in L^p(I)$ *τέτοια ώστε :* $\int_I uw'\,dx = -\int_I gw dx, \forall\, w \in C_0^{\infty}(I)\}$.

Προφανώς,

$$W^{1,p}(I) \subseteq L^p(I).$$

Θέτουμε

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Για κάθε $u \in W^{1,p}(I)$ *γράφουμε* $u'_w = g$ *και η* g *ονομάζεται ασθενής παράγωγος της* u $1^{ης}$ *τάξης.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2

Προφανώς, εάν $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ *και* $u' \in L^p(I)$*(εδώ η* u' *είναι η συνήθης παράγωγος της* u*), τότε* $u \in W^{1,p}(I)$*.Επί πλέον , η συνήθης παράγωγος της* u *ταυτίζεται με την ασθενή παράγωγο της* u *υπό την έννοια του* $W^{1,p}(I)$*, δηλαδή* $u' = u_w'$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.3

Στην περίπτωση που ο I *είναι φραγμένο ισχύει :* $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ *για κάθε* $1 \leq p \leq \infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4

Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα :*

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)} : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$$

με $\|u\|_{W^{1,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \|u'_w\|_{L^p(I)}, \forall\, u \in W^{1,p}(I)$

ή καμιά φορά με την ισοδύναμή της :

$$(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'_w\|^p_{L^p(I)})^{\frac{1}{p}}, \forall u \in W^{1,p}(I).$$

Ειδικά ο χώρος $H^1(\mathrm{I}) = W^{1,2}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο :*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{H}^1(\mathrm{I})} : \mathrm{H}^1(\mathrm{I}) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{I}) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u,\upsilon\rangle_{H^1(I)} := \langle u,\upsilon\rangle_{L^2(I)} + \langle u'_w,\upsilon'_w\rangle_{L^2(I)},\ \forall\, u,\upsilon \in H^1(I).$$

Η αντίστοιχη νόρμα του $H^1(I)$ *είναι :*

$$\|\cdot\|_{H^1(I)} : H^1(I) \to \mathbb{R}$$

με $\|u\|_{H^1(I)} := (\quad (\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'_w\|^2_{L^2(I)})^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1(I)$.

η οποία είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}(I)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ *είναι :*

(1)χώρος Banach για $1 \le p \le \infty$,

(2)ανακλαστικός χώρος για $1 < p < \infty$ *και*

(3)διαχωρίσιμος χώρος για $1 \le p < \infty$

Ειδικά, ο χώρος $H^1(\mathrm{I}) = W^{1,2}(I)$ *είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6.

Υπάρχει σταθερά $c > 0$*(η οποία εξαρτάται μόνο από το*$|I| \le \infty$*) τέτοια ώστε :*

α.Για κάθε $1 \le p < \infty$ *ισχύει :*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(I)},\ \forall\, u \in W^{1,p}(I),$$

δηλαδή η ενσφήνωση $W^{1,p}(I) \to L^\infty(I)$ *είναι συνεχής.*

β.Επί πλέον , εάν το Ι είναι φραγμένο,τότε :

i.Για κάθε $1 < p \le \infty$, *η ενσφήνωση* $W^{1,p}(I) \to C(\bar{I})$ *είναι συμπαγής.*

ii.Για κάθε $1 \le q < \infty$, *η ενσφήνωση* $W^{1,1}(I) \to L^q(I)$ *είναι συμπαγής*

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7.

Εάν $m \ge 2$ *ακέραιος και* $1 \le p \le \infty$ *πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά το χώρο Sobolev* $W^{m,p}(I)$ *ώς έξης :*

$$W^{m,p}(I) := \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Θέτουμε

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $u \in W^{m,p}(I)$ *εάν και μόνον άν υπάρχουν m συναρτήσεις* $g_1, g_2, \ldots, g_m \in L^p(I)$ *τέτοιοες ώστε :*

$$\int_I uD^j w dx = (-1)^j \int_I g_i w dx,\ \forall\, w \in C_0^\infty(I),\ \forall\, j = 1,2,3,\ldots,m,$$

όπου το $D^j w$ *συμβολίζει την ασθενή παράγωγο τάξεως j της* $w \in C_0^\infty(I)$.

Όταν $u \in W^{m,p}(I)$ *μπορούμε να θεωρήσουμε τιε διαδοχικές παραγώγους* $u'_w = g_1$, $(u'_w)'_w = g_2, \ldots$ *μέχρι την τάξη m, τις οποίες συμβολίζουμε με* $Du, D^2u, \ldots, D^m u$.
Άρα , ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(I)$ *είναι πιο απλά ο εξής :*

$$W^{m,p}(I) : \{u \in L^p(I) : \text{υπάρχουν οι ασθενείς παράγωγοι μέχρι και } m\text{ - τάξεως και όλες ανήκουν στον } L^p(I)\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ *3.8.*

Ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα :*

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}(I)} : W^{m,p}(I) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \left\|D^j u\right\|_{L^p(I)}, \forall\, u \in W^{m,p}(I).$$

Ειδικά ο χώρος $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμεν :*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^m(I)} : H^m(I) \times H^m(I) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u,w \rangle_{H^m(I)} := \langle u,w \rangle_{L^2(I)} + \sum_{j=1}^{m} \left\langle D^j u, D^j w \right\rangle_{L^2(I)}, \forall\, u,w \in H^m(I).$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|\cdot\|_{W^{m,p}(I)}$ *είναι ισοδύναμη με τη νόρμα :*

$$|||u||| = \|u\|_{L^p(I)} + \left\|D^m u\right\|_{L^p(I)}.$$

Συγκεκριμένα , αποδεικνύεται ότι, εάν $1 \le j \le m-1$, *τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει c σταθερά (η οποία εξαρτάται από το ε και τι* $|I| \le \infty$), *τέτοιο ώστε :*

$$\left\|D^j u\right\|_{L^p(I)} \le \varepsilon \left\|D^m u\right\|_{L^p(I)} + c\|u\|_{L^p(I)}, \forall\, u \in W^{m,p}(I).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.9

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(I)$ *έχει τις ίδιες ιδιότητες με τον χώρο Sobolev* $W^{1,p}(I)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10.

Για $1 \le p < \infty$, *συμβολίζουμε με* $W_0^{1,p}(I)$ *το κλειστό περίβλημα του* $C_0^\infty(I)$ *στον* $W^{1,p}(I)$.

Ο χώρος $W_0^{1,p}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει ο χώρος* $W^{1,p}(I)$ *και είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.Είναι, επί πλέον, ανακλα - στικός για* $1 < p < \infty$.

Γράφουμε

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Ο χώρος $H_0^1(I)$ *είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

2.Ο ΧΩΡΟΣ SOBOLEV $W^{m,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $p \in \mathbb{R}$, με $1 \le p \le \infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.11.

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως εξής :

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)$: υπάρχουν $g_1, g_2, \dots g_n \in L^p(\Omega)$ τέτοιες ώστε :

$$\int_\Omega u \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i w dx, \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \iota = 1, 2, \dots n\}.$$

Θέτουμε

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Για $u \in W^{1,p}(\Omega)$, γράφουμε :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{και } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = gradu.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.12.

Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα :

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\iota=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

ή καμιά φορά με την ισοδύναμή της :

$$\left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{\iota=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Ειδικά , ο χώρος $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, w \rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, w \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}, \forall u, w \in H^1(\Omega).$$

Η αντίστοιχη νόρμα του $H^1(\Omega)$ είναι :

$$\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\iota=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u \in H^1(\Omega)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με τη νόρμα του $W^{1,2}(\Omega)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13.

Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ είναι :

(1)χώρος Banach για $1 \le p \le \infty$,

(2)ανακλαστικός χώρος για $1 < p < \infty$ και

(3)διαχωρίσιμος χώρος για $1 \le p < \infty$.

Ειδικά , ο χώρος $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.14.

Προφανώς, εάν $u \in C^1(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$ και $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall\, \iota = 1,2,\ldots n$ (εδώ η $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο τηςu με τη συνήθη έννοια), τότε $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Επί πλέον, οι μερικές παράγωγοι της u με τη συνήθη έννοια ταυτίζονται με τις μερικές παραγώγουςτης u υπό την έννοια του $W^{1,p}(\Omega)$, δηλαδή $u' = u'_w$.Ειδικά, εάν το Ω είναι φραγμένο , τότε $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$, για κάθε $1 \le p \le \infty$.Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι, εάν $u \in W^{1,p}(\Omega)\bigcap C(\Omega)$ με $1 \le p \le \infty$ και εάν $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$(το $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ συμβολίζει τη μερική παράγωγο με την έννοια του $W^{1,p}(\Omega)$,) τότε $u \in C^1(\Omega)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.15.

Εάν $m \ge 2$ ακέραιος και $1 \le p \le \infty$ πραγματικός, τότε ορίζουμε αναδρομικά το χώρο Sobolev $W^{m.p}(\Omega)$ ώς εξής :

$$W^{m.p}(\Omega) := \{u \in W^{m-1.p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1.p}(\Omega)\ , \forall\, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Για κάθε $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ με $a_\iota \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$ ορίζουμε

$$|a| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

και για κάθε $u \in W^{m.p}(\Omega)$ συμβολίζουμε :

$$D^a u = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \ldots \partial x_n^{a_n}}.$$

Ισοδύναμα , ο χώρος $W^{m,p}(\Omega)$ ορίζεται ώς εξής :

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \text{για κάθε } a \text{ με } |a| \le m \text{ υπάρχει } g_a \in L^p(\Omega)$$

$$\text{τέτοιο ώστε } \int_\Omega u D^a w dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega g_a w dx,\ \forall\, w \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Συμβολίζουμε $D^a u = g_a$.

Θέτουμε

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.16.

Ο χώρος Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα :

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

με

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{0\le|a|\le m} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ u \in\ W^{m,p}(\Omega)$$

και είναι χώρος Banach.

Ειδικά , ο χώρος $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^m(\Omega)} : H^m(\Omega)\times H^m(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου

$$\langle u, w\rangle_{H^m(\Omega)} := \sum_{0\le|a|\le m} \langle D^a u, D^a w\rangle_{L^2(\Omega)},\ \forall\ u,w \in H^m(\Omega).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.17.

Αποδεικνύεται ότι, εάν το Ω είναι "αρκετά ομαλό", με $\partial\Omega$ φραγμένο, η νόρμα $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^a u\|_{L^p(\Omega).}$$

Συγκεκριμένα, για κάθε πολυδείκτη a με $0 < |a| < m$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ αποδεικνύεται ότι υπάρχει c σταθερά (η οποία εξαρτάται από τα Ω, ε, a), τέτοιο ώστε :

$$\|D^a u\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p(\Omega)} + c\|u\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ u \in W^{m,p}(\Omega).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.18.

Για $1 \le p \le \infty$, συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ το κλειστό περίβλημα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα που επάγει οχώρος $W^{1,p}(\Omega)$ και είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach. Είναι , επίπλέον, ανακλαστικός για $1 < p < \infty$.

Γράφουμε

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.19.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W_0^{1,p}(\Omega)$, δηλαδή

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

και ιδιαίτερα εάν $\Omega = \mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Γενικά ισχύει :

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \underset{\neq}{<} \mathrm{H}^1(\Omega).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.20.

Οι συναρτήσεις του $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι "χονδρικά" συναρτήσεις του $W^{1,p}(\Omega)$ που μηδενίζονται στο $\partial\Omega$. Επί πλέον, αποδεικνύεται ότι, για $1 \le p < \infty$, κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ που έχει συμπαγή φορέα ο οποίος περιέχεται στο Ω, τότε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 3.21(**Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev**).*

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με αρκετά λείο σύνορο $\partial\Omega$.

(1)*Εάν $1 \le p < n$, τότε για κάθε q^* με $1 \le q^* \le \dfrac{np}{n-p}$ η ενσφήνωση*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{q^*}(\Omega)$$

είναι συνεχής.

(2)Εάν $q^* < \dfrac{np}{n-p}$, τότε η ενσφήνωση

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{q^*}(\Omega)$$

είναι συμπαγής.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 3.22(**Θεώρημα Rayleigh**)*

Για $u \in H_0^1(\Omega)$ και $u \neq 0$ το πηλίκο Rayleigh είναι :

$$R(u) = \frac{\int_\Omega (\nabla u)^2\, dx}{\int_\Omega u^2\, dx} = \frac{|u|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Ι*σχύει :*

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} R(u),$$

όπου λ_1 η πρώτη ιδιοτιμή της Λαπλασιανής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ POINCARÉ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

1.ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ POINCARÉ.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1(**Ανισότητα Poincare**).*

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει $c > 0$ σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Η απόδειξη θα γίνει για $n = 2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(1)Θεωρούμε $\Omega = (-a,a)\times(-a,a) \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο καο ανοικτόυποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με $a > 0$.Θα αποδείξουμε την ανισότητα Poincare για κάθε $u \in C_0^\infty(\Omega)$, αφού ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $H_0^1(\Omega)$.Θεωρούμε τη συνάστηση $u(x,y) \in C_0^\infty(\Omega)$. Τότε,

$$u \,/\, \partial\Omega = 0$$

και $$u(x,y) = \int_{-a}^{y} \frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\,dt + u(x,-a).$$

Αλλά $u(x,-a) = 0$ αφού $u \,/\, \partial\Omega = 0$, οπότε :

$$u(x,y) = \int_{-a}^{y} \frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\,dt.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} u^2(x,y) &= \left(\int_{-a}^{y} \frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\,dt\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{-a}^{y} 1^2\,dt\right)\left(\int_{-a}^{y} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\right)^2 dt\right) \\ &= [t]_{-a}^{y}\left(\int_{-a}^{y} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\right)^2 dt\right) \\ &= (y+a)\left(\int_{-a}^{y} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\right)^2 dt\right) \\ &\leq 2a\left(\int_{-a}^{y} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y}\right)^2 dt\right) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

διότι $y \in [-a, a] \Leftrightarrow -a \le y \le a$ *άρα* $0 \le y + a \le 2a$.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.1) ως προς x έχουμε :

$$\int_{-a}^{a} u^2(x,y)dt \le 2a\int_{-a}^{a}(\int_{-a}^{y}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dt)dx$$

$$\le 2a\int_{-a}^{a}(\int_{-a}^{a}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dt)dx. \qquad (4.2)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.2) ως προς y έχουμε :

$$\int_{-a}^{a}(\int_{-a}^{a} u^2(x,y)dx)dy \le \int_{-a}^{a} 2ady\int_{-a}^{a}(\int_{-a}^{a}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dy)dx$$

$$= 4a^2\int_{-a}^{a}(\int_{-a}^{a}(\frac{\partial u(x,t)}{\partial y})^2 dy)dx. \qquad (4.3)$$

Αλλά, για κάθε $u \in L^2(\Omega)$ *έχουμε :*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{-a}^{a} \int_{-\alpha}^{\alpha} u^2(x,y)dxdy,$$

άρα, η σχέση (4.3) γράφεται :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 4a^2\int_{-a}^{a}(\int_{-\alpha}^{\alpha}(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 dy)dx. \qquad (4.4)$$

Ομοίως, θεωρώντας τη συνάρτηση $u(x,y) \in C_0^\infty(\Omega)$ *ως εξής :*

$$u(x,y) = \int_{-\alpha}^{x}\frac{\partial u(t,y)}{\partial x}dt + u(-a,y)$$

τότε

$$u(x,y) = \int_{-\alpha}^{x}\frac{\partial u(t,y)}{\partial x}dt$$

αφού $u/\partial\Omega = 0$ *και προκύπτει ότι :*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 4a^2\int_{-a}^{a}(\int_{-\alpha}^{\alpha}(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 dx)dy. \qquad (4.5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.0.7) και (1.0.8) έχουμε :

$$2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 4a^2\int_{-a}^{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}[(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2]dxdy$$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2a^2\int_{-a}^{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}[(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2]dxdy.$$

Αλλά, για κάθε $u \in L^2(\Omega)$ έχουμε :

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{-a}^{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}[(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u(x,y)}{\partial x})^2]dxdy.$$

Οπότε, η παραπάνω σχέση γράφεται :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2a^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sqrt{2}a\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (4.6)$$

και θέτοντας $c = \sqrt{2}a > 0$ σταθερό, η σχέση (4.6) γράφεται :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Άρα, όταν το Ω είναι τετράγωνο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ισχύει :

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ , \forall\ u \in H^1_0(\Omega).$$

(2)*Εάν το Ω δεν είναι τετράγωνο, δηλαδή το Ω δεν είναι της μορφής $\Omega = (-a,a)\times(-a,a)$, με $a > 0$, τότε μπορούμε να βρολυμε ένα τετράγωνο $\overline{\Omega}$ τέτοιο ώστε : $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$, αφού το Ω είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*Τότε, *για κάθε $u \in H^1_0(\overline{\Omega})$ ισχύει :*

$$\|u\|_{L^2(\overline{\Omega})} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\overline{\Omega})} \ . \qquad (4.7)$$

Για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ θεωρούμε την επέκτασή της στον $L^2(\overline{\Omega})$, την $\overline{f}$, με $\overline{f} = f$ στο Ω και $\overline{f} = 0$ στο $(\overline{\Omega}\setminus\Omega)$.

Οπότε, για κάθε $u \in H^1_0(\Omega) \subseteq \mathrm{H}^1_0(\overline{\Omega})$ ισχύει η σχέση (4.7) :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Άρα, όταν το Ω δεν είναι τετράγωνο αλλά είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του$\mathbb{R}^2$ ισχύει :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ , \forall\ u \in H^1_0(\Omega).$$

Έτσι , για κάθε $u \in H^1_0(\Omega)$ ισχύει :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Στον $\mathbb{R}^n$ η απόδειξη της ανισότητας Poincare είναι όμοια με $c = \sqrt[n]{2}a > 0$ και η σταθερά c εξαρτάται από το σύνολο Ω και τη διάσταση του $\mathbb{R}^n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2.

Στον $H_0^1(\Omega)$ *θεωρούμε την απεικόνιση :*

$$|\cdot|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

η οποία ορίζεται ως εξής :

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ , } \forall\, u \in H_0^1(\Omega) .$$

Λόγω της Ανισότητας Poincare, η απεικόνιση $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *ικανοποιεί τις ιδιότητες της νόρμας (ιδιαίτερα την ιδιότητα της απόλυτης ομογένειας). Άρα , η* $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *είναι νόρμα στον* $H_0^1(\Omega)$ *.*

Στον $H_0^1(\Omega)$ *, η νόρμα που έχει οριστεί είναι η :*

$$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},$$

όπου

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \text{ , } \forall\, u \in H_0^1(\Omega) .$$

Άρα , για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ *έχουμε :*

$$\begin{aligned} &\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow &\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + |u|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow &\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq |u|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Από την ανισότητα Poincare έχουμε :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (c+1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &= (c+1)|u|_{H_0^1(\Omega)} . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Από τις σχέσεις (4.8) και (4.9) έχουμε για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ *:*

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq (c+1)\,|u|_{H_0^1(\Omega)} . \tag{4.10}$$

Συνεπώς, οι νόρμες $|u|_{H_0^1(\Omega)}$ *,* $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ *είναι ισοδύναμες στον* $H_0^1(\Omega)$*.*

2.ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in L^2(\Omega)$.
Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών(Πρόβλημα Dirichlet) :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.11}$$

όπου

$$\Delta u = \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Λαπλασιανή της } u$$

και f μια δεδομένη συνάρτηση πάνω στο Ω.
Η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο Γ καλείται (ομογενής) συνθήκη Dirichlet).
Κλασσική λύση της (4.11) είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ που ικανοποιεί την (4.11) .
Για δεδομένη $f \in L^2(\Omega)$ ονομάζουμε ασθενή λύση του Προβλήματος Συνορισκών Τιμών (4.11) μια συνάρτηση $u \in X = H_0^1(\Omega)$ ώστε για κάθε $w \in X = H_0^1(\Omega)$ να ισχύει :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx. \tag{4.12}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με $f \in L^2(\Omega)$.
Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών(Πρόβλημα Dirichlet) :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ στο } \Omega \\ u &= 0, \text{ στο } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική ασθενή λύση.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
ΒΗΜΑ 1Ο .**Κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής.**
Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (4.11) με $w \in C_0^\infty(\Omega)$ και ολοκλήρώνουμε στο Ω
Άρα

$$\begin{aligned} & -\Delta u = f \\ \Leftrightarrow & -\Delta u w = f w \\ \Leftrightarrow & \int_\Omega (-\Delta u w) dx = \int_\Omega f w dx \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Green έχουμε :

$$\int_{\Omega}(\Delta u)w = \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n} w d\sigma - \int_{\Omega}\nabla u \nabla w$$

όπου dσ είναι το επιφανειακό μέτρο πάνω στο Γ.

Άν u η κλασσική λύση της (4.11), τότε $u \in H_0^1(\Omega)$ και έχουμε

$$\int_{\Omega}\nabla u \nabla w = \int_{\Omega} fw \qquad \forall w \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Όμως λόγω πυκνότητας του χώρου $C_0^{\infty}(\Omega)$ ισχύει $\overline{C_0^{\infty}}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$
και επομένως η λύση επεκτείνεται :

$$\int_{\Omega}\nabla u \nabla w = \int_{\Omega} fw \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Άρα από την κλασική λύση περνάμε στην γενίκευση του προβλήματος Dirichlet στην ασθενή περίπτωση.

Βήμα 2ο
Ύπαρξη και μοναδικότητα της ασθενούς λύσεως

Στο χώρο Hilbert $(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{H_0^1(\Omega)})$ θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό :

$$a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου :

$$a(u,w) := \int_{\Omega}\nabla u \nabla w dx, \forall\, u, w \in H_0^1(\Omega).$$

Τότε, για κάθε $u, w \in H_0^1(\Omega)$ ισχύει :

$$\begin{aligned} |a(u,w)| &= \left|\int_{\Omega}\nabla u \nabla w dx\right| \\ &\le \int_{\Omega}|\nabla u||\nabla w|\, dx \\ &\le |u|_{H_0^1(\Omega)}\,|w|_{H_0^1(\Omega)} \\ \Rightarrow |a(u,w)| &\le |u|_{H_0^1(\Omega)}\,|w|_{H_0^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Άρα το διγραμμικό συναρτησιακό a είναι συνεχές.

Επί, πλέον, για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_{\Omega}\nabla u \nabla u dx = \int_{\Omega}(\nabla u)^2\, dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = |u|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ a(u,u) = |u|_{H_0^1(\Omega)}^2\ .$$

Οπότε, το διγραμμικό συναρτησιακό a είναι πιεστικό.

Επομένως, από το Θεώρημα Lax - Milgram(2.12), υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ *ώστε :*

$$a(u,w) = \langle f, w \rangle, \forall\, w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega f w dx, \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

Άρα , για δεδομένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ *υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *ώστε να ισχύει η σχέση (4.12).Επομένως , υπάρχει μοναδική ασθενής λύση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *για το πρόβλημα Dirichlet (4.11)*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4 (Ομογενές Πρόβλημα Dirichlet).

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *και έστω η συνάρτηση* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *με* $f \in L^2(\Omega)$.

Θεωρούμε το Γραμμικό Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών(Πρόβλημα Dirichlet) :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, \text{στο } \Omega \ , \lambda > 0 \\ u = 0, \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (4.19)$$

Το πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική ασθενή λύση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

*ΒΗΜΑ 1Ο .**Κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής.***

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (4.19) με $w \in C_0^\infty(\Omega)$ *και ολοκλήρώνουμε στο Ω.*

Άρα ,

$$-\Delta u + \lambda u = f$$

$$\Leftrightarrow -\Delta u w + \lambda u w = f w$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (-\Delta u w) dx + \int_\Omega \lambda u w dx = \int_\Omega f w dx$$

Από τον τύπο του Green έχουμε :

$$\int_\Omega (\Delta u) w = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} w d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla w$$

όπου $d\sigma$ *είναι το επιφανειακό μέτρο πάνω στο Γ.*

Άν u η κλασσική λύση της (4.19), τότε $u \in H_0^1(\Omega)$ *και έχουμε*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega \lambda u w dx = \int_\Omega f w \, dx \qquad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Όμως λόγω πυκνότητας του χώρου $C_0^\infty(\Omega)$ *ισχύει* $\overline{C_0^\infty}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ *και επομένως η λύση επεκτείνεται :*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega \lambda u w dx = \int_\Omega f w dx \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega). \qquad (4.20)$$

Άρα από την κλασική λύση περνάμε στην γενίκευση του προβλήματος Dirichlet στην ασθενή περίπτωση.

Βήμα 2ο

Ύπαρξη και μοναδικότητα της ασθενούς λύσεως

Στο χώρο Hilbert $(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{H_0^1(\Omega)})$ *θεωρούμε το διγραμμικό συναρτησιακό :*

$$a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

όπου :

$$a(u,w) := \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega \lambda u w dx \quad , \forall\, u, w \in H_0^1(\Omega).$$

Τότε, για κάθε $u, w \in H_0^1(\Omega)$ *ισχύει :*

$$\begin{aligned}
|a(u,w)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \lambda u w dx \right| \\
&\le \int_\Omega |\nabla u||\nabla w|\, dx + \int_\Omega |\lambda u w|\, dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx\Big)^{1/2} + \lambda \Big(\int_\Omega |u|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |w|^2\, dx\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

(ανισότητα Hölder)

$$\begin{aligned}
&= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le |u|_{H_0^1(\Omega)} |w|_{H_0^1(\Omega)} + \lambda |u|_{H_0^1(\Omega)} |w|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Άρα,

$$|a(u,w)| \le (1+\lambda)|u|_{H_0^1(\Omega)} |w|_{H_0^1(\Omega)} .$$

Επομένως $\exists\ M = 1 + \lambda > 0$ *τέτοιο ώστε* $|a(u,w)| \le M |u|_{H_0^1(\Omega)} |w|_{H_0^1(\Omega)}$ *και άρα το* $a(u,w)$ *είναι συνεχές.*

Επί, πλέον, για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ *έχουμε :*

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx + \int_\Omega \lambda u u dx \\
&= \int_\Omega (\nabla u)^2 dx + \int_\Omega \lambda u^2 dx \\
&= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\ge c_1 |u|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \ \textit{(από ισοδυναμία νορμών)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ a(u,u) \ge c_1 |u|_{H_0^1(\Omega)}^2 \ .$$

Οπότε, το διγραμμικό συναρτησιακό a είναι πιεστικό.

Επομένως, από το Θεώρημα Lax - Milgram(2.12), υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1(\Omega)$ *ώστε :*

$$a(u,w) = \langle f, w \rangle, \forall\, w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega \lambda u w dx = \int_\Omega f w dx, \forall\, w \in H_0^1(\Omega).$$

Άρα , για δεδομένη συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$ *υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *ώστε να ισχύει η σχέση (4.20).Επομένως , υπάρχει μοναδική ασθενής λύση* $u \in H_0^1(\Omega)$ *για το πρόβλημα Dirichlet (4.19).*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ HILLE-YOSIDA

1.ΟΡΙΣΜΟΣΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΕΓΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ

Έστω H ένας χώρος Hilbert.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1

Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ *ένας γραμμικός μη φραγμένος τελεστής. Λέμε ότι ο A είναι μονότονος αν,*

$$(A\upsilon,\upsilon) \geq 0 \quad \forall\, \upsilon \in D(A),$$

Ο A είναι μεγιστικά μονότονος (maximal monotone) εάν επί πλέον,

$$R(A+I) = H$$

$\Leftrightarrow$ *για κάθε* $f \in H$ *υπάρχει* $u \in D(A) \subset H$ *τέτοιο ώστε :*

$$(A+I)(u) = f \Leftrightarrow A(u) + u = f.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2

Έαν ο τελεστής $A : D(A) \subset H \to H$ *είναι γραμμικός και μεγιστικά μονότονος, τότε :*

(1) Ο $D(A)$ *είναι πυκνός υπόχωρος του* H *, δηλαδή* $\overline{D(A)} = H$.

(2)*Για κάθε* $\lambda > 0$, *υπάρχει ο τελεστής* $(I+\lambda A)^{-1} : H \to D(A) \subset H$ *ο οποίος είναι φραγμένος με* $\| (I+\lambda A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ *και συνεχής.*

(3)Ο τελεστής A είναι κλειστός και δηλαδή το γράφημά του : $Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in D(A)\} \subseteq H \times H$ *είναι κλειστό υποσύνολο του* $H \times H$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο τελεστής A είναι μεγιστικά μονότονος. Επομένως, ισχύουν τα εξής:

(α) *ο A είναι μονότονος, δηλαδή ισχύει :*

$$(u, Au) \geq 0, \forall\, u \in D(A) \subset H, \tag{5.1}$$

(β) $$R(A+I) = H. \tag{5.2}$$

(1)*'Εστω* $f_0 \in H$ *για το οποίο ισχύει :*

$$(u, f_0) = 0, \forall\, u \in D(A) \subset H. \tag{5.3}$$

Από τη σχέση (5.2) έχουμε ότι για το $f_0 \in H = R(A+I)$ *υπάρχει* $u_0 \in D(A+I) = D(A)$ *τέτοιο ώστε :*

$$(A+I)u_0 = f_0$$
$$Au_0 + u_0 = f_0 \tag{5.4}$$
Από τις σχέσεις (5.3), (5.4) προκύπτει :

$$(u, Au_0 + u_0) = 0, \forall\, u \in D(A) \subset H$$
$$\Leftrightarrow\ (u, Au_0) + (u, u_0) = 0, \forall\, u \in D(A) \subset H. \tag{5.5}$$
Για $u_0 \in D(A)$ *ισχύει η σχέση (5.5) , άρα*
$$(\,u_0\,, Au_0) + (u_0\,, u_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow (u_0\,, Au_0) + |u_0|^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ |u_0|^2 = -(u_0\,, Au_0). \tag{5.6}$$
Αλλά
$$|u_0|^2 \geq 0$$
και από τη σχέση (5.1) έχουμε :
$$(u_0\,, Au_0) \geq 0.$$
Άρα, για να ισχύει η σχέση (5.6) πρέπει :
$$|u_0|^2 = 0 \quad \text{και} \quad (u_0\,, Au_0) = 0\,.$$
Επομένως,
$$u_0 = 0 \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad f_0 = 0.$$

Οπότε, εάν $f_0 \in H$ *με* $(u, f_0) = 0, \forall u \in D(A)$ *τότε* $f_0 = 0$.
Έτσι, το μοναδικό ορθογώνιο στοιχείο του H *είναι το* $0 \in H$,
άρα σύμφωνα με τις συνέπειες του Θεωρήματος Hahn - Banach ισχύει :
$$D\overline{(A)} = H.$$

Επομένως, ο $D(A)$ *είναι πυκνός υπόχωρος του* H.

(2) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής
$$(I + A) : D(I + A) = D(A) \subset H \to H$$
αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του
$$(I + A)^{-1} : H \to D(A) \subset H$$
είναι φραγμένος με
$$\left\|(I + A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$$
και συνεχής.

Από τη σχέση (5.2) έπεται ότι ο τελεστής $(I + A)$ *είναι επί.*
Άρα, για $f \in H = R(I + \mathrm{A})$ *υπάρχει* $u_1 \in D(I + \mathrm{A}) = D(\mathrm{A})$
τέτοιο ώστε :

$$(I+\mathrm{A})u_1 = f$$
$$u_1 + Au_1 = f \tag{5.7}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_2 \in D(I+\mathrm{A}) = D(\mathrm{A})$ *τέτοιο ώστε :*
$$(I+A)u_2 = f$$
$$\Leftrightarrow u_2 + Au_2 = f. \tag{5.8}$$
Από τις σχέσεις (5.7), (5.8) προκύπτει :
$$u_1 + Au_1 = u_2 + Au_2$$
$$\Leftrightarrow u_1 - u_2 + Au_1 - Au_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow u_1 - u_2 + A(u_1 - u_2) = 0.$$
Επομένως, έχουμε :
$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2 + A(u_1 - u_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (u_1 - u_2, u_1 - u_2) + (u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) = 0$$
$$\Leftrightarrow |u_1 - u_2|^2 + (u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) = 0. \tag{5.9}$$

Αλλά
$$|u_1 - u_2|^2 \geq 0$$
και από τη σχέση (5.1) έχουμε :
$$(u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)) \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (5.9)πρέπει :
$$|u_1 - u_2|^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$
Επομένως, τελεστής $I + A$ *είναι 1 - 1.*

Έτσι, ο τελεστής
$$(I+A) : D(I+A) = D(A) \subset H \to H$$

είναι 1 - 1 και επί, άρα υπάρχει ο αντίστροφός του
$(A+I)^{-1} : H \to D(\mathrm{A}) \subset H$,

ώστε για κάθε $f \in H$ *υπάρχει μοναδικό* $u \in D(A)$ *τέτοια ώστε :*
$$(I+A)^{-1} f = u$$
$$\Leftrightarrow (I+A)u = f$$
$$\Leftrightarrow u + Au = f.$$

Επομένως,
$$(u + Au, u) = (f, u)$$
$$\Leftrightarrow (u,u) + (Au,u) = (f,u)$$
$$\Leftrightarrow |u|^2 + (Au,u) = (f,u). \tag{5.10}$$

Από τη σχέση (5.10) έχουμε :

$$(f,u) \geq |u|^2 . \qquad (5.11)$$

Από την ανισότητα Cauchy - Schwartz έχουμε :

$$|f||u| \geq (f,u) \qquad (5.12)$$

Άρα, από τις σχέσεις (5.11) , (5.12) έπεται ότι :

$$|u|^2 \leq |f||u|$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq |f||u| - |u|^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq |u|(|f| - |u|). \qquad (5.13)$$

Επειδή $0 \leq |u|$ από τη σχέση (5.13) προκύπτει :

$$|f| - |u| \geq 0 \Leftrightarrow |f| \geq |u|. \qquad (5.14)$$

Αλλά $u = (I + A)^{-1}(f)$ άρα η σχέση (5.14) γράφεται :

$$\|f\| \geq \|(I + A)^{-1} f\|,$$

οπότε για $f \in H$ με $f \neq 0$ έχουμε :

$$\frac{\|(I + A)^{-1} f\|}{\|f\|} \leq 1.$$

Επομένως, ισχύει :

$$\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = sup\{\frac{\|(I + A)^{-1} f\|}{\|f\|} : f \in H, f \neq 0\} \leq 1.$$

Άρα, ο τελεστής

$$(I + A)^{-1} : H \to D(\mathrm{A}) \subset H$$

είναι φραγμένος και γραμμικός.

Επομένως, ο τελεστής $(A + I)^{-1}$ είναι συνεχής. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda > 0$, υπάρχει ο τελεστής

$$(I + \lambda A)^{-1} : H \to D(\mathrm{A}) \subset H$$

ο οποίος είναι φραγμένος με

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$$

και συνεχής.

Για $\lambda = 1$. δείξαμε ότι ισχύει. Έστω ότι για κάποιο $\lambda_0 > 0$ ο τελεστής $(I + \lambda_0 A)$ είναι 1 - 1 , επί, συνεχής, γραμμικός και φραγμένος τελεστής με

$$\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Άρα, για κάθε $f \in H$ υπάρχει μοναδικό $u \in D(A)$ τέτοιο ώστε :

$$(I + \lambda_0 A)u = f \Leftrightarrow u + \lambda_0 Au = f.$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\lambda > \lambda_0$ *ο τελεστής*

$$I + \lambda A : D(A) \subset H \to H$$

είναι επί. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in H$ *υπάρχει* $u \in D(\mathrm{A})$ *τέτοιο ώστε :*

$$(I + \lambda A)u = f \Leftrightarrow u + \lambda A u = f.$$

Ιοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in H$ *υπάρχει λύση* $u \in D(A)$ *για την εξίσωση :*

$$u + \lambda A u = f \tag{5.14}$$

$$\Leftrightarrow \lambda A u = f - u$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 \lambda A u = \lambda_0 f - \lambda_0 u$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f - \frac{\lambda_0}{\lambda} u$$

$$\Leftrightarrow u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}) u$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{I} + \lambda_0 A) u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}) u. \tag{5.15}$$

Επειδή όμως υπάρχει ο $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ *η σχέση (5.15) γίνεται :*

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} (\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}) u). \tag{5.16}$$

Θεωρώντας $T(u) = (I + \lambda_0 A)^{-1} (\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}) u)$ *η σχέση(5.16) γράφεται :*

$$u = T(u).$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $u \in D(A)$ *τέτοια ώστε :*

$$u = T(u),$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής T *έχει σταθερό σημείο.*

Έστω $u_1, u_2 \in D(\mathrm{A})$. *Τότε :*

$$\begin{aligned}
\|T(u_1) - \mathrm{T}(u_2)\| &= \left\|(I + \lambda_0 \mathrm{A})^{-1} (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u_1 - u_2)\right\| \\
&= \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \left\|(I + \lambda_0 \mathrm{A})^{-1} (u_1 - u_2)\right\| \\
&\le \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \left\|(I + \lambda_0 \mathrm{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} \|u_1 - u_2\| \\
&\le \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\lambda > 0$ *τέτοιο ώστε :*

$$0 < \left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < -\frac{\lambda_0}{\lambda} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\lambda_0}{2} < \lambda.$$

Τότε, ο τελεστής T *είναι συστολή και άρα από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου Banach υπάρχει* $u \in D(A)$ *τέτοιο ώστε :*

$$u = T(u)$$

$$\Leftrightarrow u = (I + \lambda A)(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u),$$

Άρα, η εξίσωση (5.14) έχει λύση και μάλιστα είναι μοναδική διότι εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις $u_1, u_2 \in D(\mathrm{A})$ *της εξίσωσης (5.14), τότε :*

$f = (I + \lambda A)u_1$ *και* $f = (I + \lambda A)u_2$

οπότε αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε :

$$u_1 - u_2 + \lambda A(u_1 - u_2) = 0$$

$$\Rightarrow (u_1 - u_2, u_1 - u_2 + \lambda A(u_1 - u_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u_1 - u_2\|^2 + (u_1 - u_2, \lambda A(u_1 - u_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u_1 - u_2\|^2 = -(u_1 - u_2, \lambda A(u_1 - u_2)). \qquad (5.17)$$

Αλλά,

$$\|u_1 - u_2\|^2 \geq 0$$

και λόγω μονοτονίας του A *έχουμε :*

$$(u_1 - u_2, \lambda A(u_1 - u_2)) \geq 0.$$

Άρα, για να ισχύει η σχέση (5.17) πρέπει :

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2.$$

Επομένως, η εξίσωση (5.14) έχει μία και μοναδική λύση.Άρα, ο τελεστής $(I + \lambda A)$ *είναι 1 - 1 και επί, άρα αντιστρέφεται.Έτσι, έχουμε δείξει ότι για* $\lambda_0 = 1$ *και για* $\lambda > \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} = \lambda_0'$ *τοΘεώρημα ισχύει. Επομένως, και για* $\lambda_0'' = \frac{1}{2} + \varepsilon$, *με* $\varepsilon > 0$ *ισχύει και για κάθε* $\lambda > \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{2}$ *επίσης ισχύει.Έτσι, το Θεώρημα ισχύεικαι για κάθε* $\lambda > 0$, *δηλαδή για κάθε* $\lambda > 0$ *υπάρχει ο τελεστής* $(I + \lambda A)^{-1} : H \to D(\mathrm{A}) \subset H$ *ο οποίος είναι φραγμένος με* $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ *και συνεχής.*

(3) *Θα αποδείξουμε ότι ο Α είναι κλειστός τελεστής.Αρκεί να αποδείξουμε ότι το γράφημα του Α, το* $Gr(A) = \{(x, A(x)) : x \in D(A)\} \subseteq H \times H$, *είναι κλειστό υποσύνολο του* $H \times H$.

Έστω $(x_n, A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *μία ακολουθία στοιχείων του* $Gr(A)$ *πουσυγκλίνει στο στοιχείο* $(x, y) \in H \times H$.*Θα αποδείξουμε ότι* $(x, y) \in Gr(A)$ *δηλαδή* $x \in D(A)$ *και* $y = A(x)$.*Πράγματι, εφ'όσον* $(x_n, A(x_n) \to (x, y)$ *έπεται ότι :*

$$x_n \to x \text{ και } A(x_n) \to y.$$

Άρα και

$$x_n + \mathrm{A}(x_n) \to x + y \Rightarrow (I + \mathrm{A})(x_n) \to x + y. \qquad (5.18)$$

Επειδή όμως από το (2) του Θεωρήματος έπεται ότι ο τελεστής $(I + A)^{-1}$ *υπάρχει, είναι συνεχής και γραμμικός.Άρα, από τη σχέση (5.18) συμπεραίνουμε ότι :*

$$x_n \to (I + A)^{-1}(x + y).$$

Αλλά $x_n \to x$ *άρα από τα παραπάνω έπεται ότι*

$$x = (I + A)^{-1}(x + y)$$

άρα, $x \in D(A)$ *και* $x + y = (I + A)(x) \Leftrightarrow x + y = x + A(x) \Leftrightarrow y = A(x)$.
Επομένως, ο τελεστής Α είναι κλειστός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3.
Έστω Α ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής. Θέτουμε, για κάθε $\lambda > 0$,

$$J_\lambda = (\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1} \text{ και } A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} - J_\lambda).$$

J_λ *είναι ο επιλύων του Α και* A_λ *είναι ο ομαλοποιημένος Yosida του Α*

Ισχύει ότι $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. Έστω Α ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής.Ισχύουν :

a_1)	$A_\lambda \upsilon = A(J_\lambda \upsilon)$	$\forall \upsilon \in H$ *και* $\forall \lambda > 0$
a_2)	$A_\lambda \upsilon = J_\lambda(A\upsilon)$	$\forall \upsilon \in D(A)$ *και* $\forall \lambda > 0$
β)	$\lvert A_\lambda \upsilon\rvert \leq \lvert A\upsilon\rvert$	$\forall \upsilon \in D(A)$ *και* $\forall \lambda > 0$
γ)	$\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda \upsilon = \upsilon$	$\forall \upsilon \in H$
δ)	$\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda \upsilon = A\upsilon$	$\forall \upsilon \in D(A)$
ε)	$(A_\lambda \upsilon, \upsilon) \geq 0$	$\forall \upsilon \in H$ *και* $\forall \lambda > 0$
στ)	$\lvert A_\lambda \upsilon\rvert \leq \frac{1}{\lambda}\lvert\upsilon\rvert$	$\forall \upsilon \in H$ *και* $\forall \lambda > 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

a_1)*Για* $\upsilon \in H, \lambda > 0$

$$J_\lambda \upsilon = (\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1} \upsilon$$

$$(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})\, J_\lambda \upsilon = \upsilon$$

$$J_\lambda \upsilon + \lambda \mathrm{A}\, J_\lambda \upsilon = \upsilon$$

$$(\mathrm{I} - J_\lambda)\upsilon = \lambda \mathrm{A} J_\lambda \upsilon$$

$$\frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} - J_\lambda)\upsilon = \mathrm{A} J_\lambda \upsilon$$

$$A_\lambda \upsilon = \mathrm{A}(J_\lambda \upsilon).$$

$$a_2) A_\lambda \upsilon = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} - J_\lambda)\upsilon$$

$$= \frac{1}{\lambda}[(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})\upsilon - (\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1}\upsilon$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1}[(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})\upsilon - \upsilon]$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1}(\cancel{\upsilon} + \lambda \mathrm{A}\upsilon - \cancel{\upsilon})$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} + \lambda \mathrm{A})^{-1}(\lambda A \upsilon)$$

$$= J_\lambda(\mathrm{A}\upsilon)$$

$$\beta) |A_\lambda \upsilon| = |J_\lambda(\mathrm{A}\upsilon)| \quad \text{λόγω της } a_2)$$

$$\leq |J_\lambda||A\upsilon|$$

$$\leq 1|A\upsilon|$$

$$\leq |A\upsilon|$$

γ)*Έστω* $\upsilon \in D(A)$

$$|\upsilon - J_\lambda \upsilon| = \lambda |A_\lambda \upsilon|, \quad \text{από ορισμό ομαλοποιημένου Yosida}$$

$$\leq \lambda |A\upsilon|, \quad \text{λόγω της } \beta).$$

$\lambda |A\upsilon| \to 0$ *όταν* $\lambda \to 0$

Συνεπώς $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda \upsilon = \upsilon$

Ας περάσουμε στη γενική περίπτωση

Έστω $\upsilon \in H$ *και* $\varepsilon > 0$.

Επειδή $\overline{D(A)} = H$ *(θεώρημα 5.2) υπάρχει* $\upsilon_1 \in D(A)$, *τέτοιο ώστε* $|\upsilon - \upsilon_1| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

Έχουμε $|\upsilon - J_\lambda \upsilon| = |\upsilon - \upsilon_1 + \upsilon_1 - J_\lambda \upsilon_1 + J_\lambda \upsilon_1 - J_\lambda \upsilon|$

$$\leq |\upsilon - \upsilon_1| + |\upsilon_1 - J_\lambda \upsilon_1| + |\upsilon - \upsilon_1|$$

$$\leq \varepsilon + |\upsilon_1 - J_\lambda \upsilon_1|$$

Επομένως

$$\limsup_{\lambda\to 0}|\upsilon - J_\lambda\upsilon| \le \varepsilon, \qquad \forall\varepsilon > 0$$

και άρα

$$\lim_{\lambda\to 0}|\upsilon - J_\lambda\upsilon| = 0.$$

δ) $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda\upsilon = \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda(A\upsilon)$ *λόγω της* a_2)

$\quad = A\upsilon$ *λόγω της γ)*

ε) $(A_\lambda\upsilon,\upsilon) = (A_\lambda\upsilon,\upsilon - J_\lambda\upsilon) + (A_\lambda\upsilon, J_\lambda\upsilon)$

$\quad = (A_\lambda\upsilon, \lambda A_\lambda\upsilon) + (A_\lambda\upsilon, J_\lambda\upsilon)$ *καθώς* $(I - J_\lambda)\upsilon = \lambda A_\lambda\upsilon$

$\quad = (A_\lambda\upsilon, \lambda A_\lambda\upsilon) + (A(J_\lambda\upsilon), J_\lambda\upsilon)$ *λόγω της* a_1)

$\quad = \lambda|A_\lambda\upsilon|^2 + (A(J_\lambda\upsilon), J_\lambda\upsilon)$

Όμως $(A(J_\lambda\upsilon), J_\lambda\upsilon) \ge 0$ *καθώς ο Α είναι μεγιστικά μονότονος*

Άρα $(A_\lambda\upsilon,\upsilon) \ge \lambda|A_\lambda\upsilon|^2 \ge 0.$

στ) $(A_\lambda\upsilon,\upsilon) \ge \lambda|A_\lambda\upsilon|^2$ *λόγω της ε).*

$\Leftrightarrow |A_\lambda\upsilon|^2 \le \frac{1}{\lambda}(A_\lambda\upsilon,\upsilon) \le \frac{1}{\lambda}|A_\lambda\upsilon||\upsilon|$

(λόγω της ανισότητας Cauchy - Schwarz)

$\Leftrightarrow |A_\lambda\upsilon| \le \frac{1}{\lambda}|\upsilon|$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.5.Αξίζει να συγκρατήσουμε από την πρόταση (5.4) ότι η $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ *είναι μια οικογένεια φραγμένων τελεστών που "προσεγγίζουν" τον Α όταν* $\lambda \to 0$*.Βέβαια, η* $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}$ *"εκρήγνυται" όταν* $\lambda \to 0$*.*

2.ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & \textit{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Ύπαρξη και μοναδικότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.6 (Cauchy, Lipschitz, Picard).

Έστω Ε ένας χώρος Banach και $F : E \to E$ *μια απεικόνιση τέτοια ώστε :*

$$\|Fu - Fv\| \le L\|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in E \ \ (L \ge 0).$$

Τότε $\forall\, u_0 \in E\ \ \exists\, u \in C^1([0,\infty), E)$ *μοναδικό τέτοιο ώστε*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Fu & \textit{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 & \textit{(αρχική τιμή).} \end{cases} \tag{5.19}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ύπαρξη

Η επίλυση της (5.19) ισοδυναμεί με το να βρεθεί $u \in C([0,\infty), E)$ *τέτοιο ώστε*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds. \tag{5.20}$$

Για δεδομένο $k > 0$, *το οποίο θα σταθεροποιήσουμε αργότερα, εισάγουμε τον χώρο*

$$X = \{u \in C([0,\infty), E) : \sup_{t\ge 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty\}.$$

Θα επαληθεύσουμε τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) ο Χ είναι ένας χώρος Banach για νόρμα

$$\|u\|_X = \sup_{t\ge o} e^{-kt}\|u(t)\|.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

[1] Έστω $\{u_n\}$ *μια ακολουθία Cauchy στον Χ,*

δηλαδή $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\forall\, n, m \ge n_0$ *να ισχύει* $\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon$

Άρα $\|u_n - u_m\|_X = \sup_{t\ge 0} e^{-kt}\|u_n(t) - u_m(t)\|_E < \varepsilon$

$\Leftrightarrow e^{kt}\,\|u_n - u_m\|_X = \sup_{t\geq 0}\|u_n(t) - u_m(t)\|_E$

$\Leftrightarrow \|u_n(t) - u_m(t)\|_E \leq e^{kt}\,\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon$

Άρα $\{u_n(t)\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στον Ε και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο u(t), καθώςΕ είναι χώρος Banach.

Η $t \mapsto u(t)$ είναι συνεχής καθώς $u_n(t) \to u(t)$ ομοιόμορφα για $t \in [0,T]$

$\forall$ Τ δοσμένο.

Άρα $u \in C([0,\infty),E]$.

$[2]\ \|u_n - u_m\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u_m(t)\|_E < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, n,m \geq n_0$

$\Leftrightarrow e^{-kt}\,\|u_n(t) - u_m(t)\|_E < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, n,m \geq n_0$

όταν $m \to \infty$ έχουμε

$$e^{-kt}\,\|u_n(t) - u(t)\|_E < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, n,m \geq n_0$$

$\Leftrightarrow \qquad \|u_n - u\|_X < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, n,m \geq n_0$

Επόμένως

$\|u\|_X = \|u - u_{n_0} + u_{n_0}\|_X \leq \|u - u_{n_0}\|_X + \|u_{n_0}\|_X < \varepsilon + \|u_{n_0}\|_X < \infty$

$[3]\ \|u_n - u\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u(t)\|_E$

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u(t)\|_E &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u_m(t) + u_m(t) - u(t)\|_E \\ &\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u_m(t)\|_E + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_m(t) - u(t)\|_E \\ &\leq \|u_n - u_m\|_X + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_m(t)\|_E + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u(t)\|_E\end{aligned}$$

Για $\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοο ώστε $\forall\, n,m \geq n_0$ ισχύει $\|u_n - u_m\|_X < \varepsilon$

(καθώς u_n είναι Cauchy στον X.)

Επίσης $\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_m(t)\|_E < \infty$ και $\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u(t)\|_E < \infty$ από [2],

επομένως,

$$\|u_n - u\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\,\|u_n(t) - u(t)\|_E < \varepsilon \quad \forall\, n. \geq n_0$$

Άρα u_n είναι και συγκλίνουσα στον X, και άρα ο X είναι χώρος Banach.

(ii)Για κάθε $u \in X$ η συνάρτηση

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$$

ανήκει στον X.

*Α*ΠΟΔΕΙΞΗ

Για να δείξω ότι η $(\Phi u)(t) \in X$ αρκεί να δείξω ότι

$$\|\Phi u\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|(\Phi u)(t)\| < \infty$$

$$\begin{aligned}
\|(\Phi u)(t)\| &= \left\| u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \right\| \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds \\
&= \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(u_0) + F(u_0)\| ds \\
&\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s)) - F(u_0)\| ds + \int_0^t \|F(u_0)\| ds \\
&\leq \|u_0\| + L\int_0^t \|u(s) - u_0\| ds + \|F(u_0)\| t \\
&\leq \|u_0\| + L\int_0^t \|u(s)\| ds + L\int_0^t \|u_0\| ds + \|F(u_0)\| t \\
&= \|u_0\| + L\int_0^t \|u(s)\| ds + L\|u_0\| t + \|F(u_0)\| t \\
&= (\|u_0\| + L\|u_0\| t + \|F(u_0)\| t) + L\int_0^t e^{-ks} \|u(s)\| e^{ks} ds \\
&\leq [\|u_0\| + (L\|u_0\| + \|F(u_0)\|)t] + L\int_0^t \sup e^{-ks} \|u(s)\| e^{ks} ds
\end{aligned}$$

όμως $L\int_0^t \|u\|_X \, e^{ks} ds = \|u\|_X \, L \frac{e^{ks}}{k}\Big|_0^t = \|u\|_X \frac{L}{k} e^{kt} - \|u\|_X \frac{L}{k} = \|u\|_X \frac{L}{k}(e^{kt} - 1)$

Άρα,

$$\|(\Phi u)(t)\| \leq [\|u_0\| + (L\|u_0\| + \|F(u_0)\|)t] + \frac{L}{k}\|u\|_X (e^{kt} - 1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{-kt} \|(\Phi u)(t)\| &\leq [\|u_0\| + (\|u_0\| L + \|F(u_0)\| t)] e^{-kt} + \frac{L}{k}\|u\|_X (1 - e^{-kt}) \\
&\leq \|u_0\| + \frac{1}{ke}(\|u_0\| L + \|F(u_0)\|) + \frac{L}{k}\|u\|_X \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|(\Phi u)(t)\| < \infty.$$

Άρα $\Phi u \in X$.

$(iii) \|\Phi u - \Phi \upsilon\|_X \leq \frac{L}{k}\|u-\upsilon\|_X \quad \forall\, u, \upsilon \in X.$

Για k > L, η Φ έχει ένα σταθερό σημείο που είναι μία λύση της (5.20).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\Phi u(t) - \Phi \upsilon(t) = \int_0^t (F(u(s)) - F(\upsilon(s)))ds$$

$$\begin{aligned}
e^{-kt}\|\Phi u(t) - \Phi \upsilon(t)\| &\leq e^{-kt}\int_0^t \|F(u(s)) - F(\upsilon(s))\| ds \\
&\leq e^{-kt} L\int_0^t \|u(s) - \upsilon(s)\| ds \\
&= e^{-kt} L\int_0^t e^{-ks}\|u(s) - \upsilon(s)\| e^{ks} ds \\
&\leq Le^{-kt}\int_0^t \|u-\upsilon\|_X e^{ks} ds \\
&= \frac{L}{k} e^{-kt}\|u-\upsilon\|_X e^{ks}\Big|_0^t \\
&= \frac{L}{k} e^{-kt}\|u-\upsilon\|_X e^{kt} - \frac{L}{k} e^{-kt}\|u-\upsilon\|_X \\
&= \frac{L}{k} e^{-kt}\|u-\upsilon\|_X (e^{kt}-1) \\
&= \frac{L}{k}\|u-\upsilon\|_X (1-e^{-kt}) \\
&\leq \frac{L}{k}\|u-\upsilon\|_X
\end{aligned}$$

Άρα $\|\Phi u - \Phi \upsilon\|_X \leq \frac{L}{k}\|u-\upsilon\|_X$.

Για k > L η Φ έχει σταθερό σημείο u = Φ(u) , καθώς $k > L \Rightarrow \frac{L}{k} < 1$ *και επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα σταθερού σημείου Banach.(θεωρημα 1.4)*

Άρα u = Φ(u) και επομένως $u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$

Μοναδικότητα

Έστω ότι u και $\bar{u}$ *είναι δύο λύσεις της (5.19)*

Θέτουμε $\varphi(t) = \|u - \bar{u}\|$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \quad , \qquad \overline{u(t)} = u_0 + \int_0^t F(\bar{u}(s))ds$$

$$\left\|u(t) - \bar{u}(t)\right\| = \left\|u_0 + \int_0^t F(u(s)ds - u_0 - \int_0^t F(\bar{u}(s))ds\right\|$$

$$= \left\|\int_0^t (F(u(s) - F(\bar{u}(s)))ds\right\|$$

$$\leq \int_0^t \left\|F(u(s)) - F(\bar{u}(s))\right\| ds$$

$$\leq L\int_0^t \left\|u(s) - \bar{u}(s)\right\| ds$$

$$= L\int_0^t \phi(s)ds.$$

Άρα $\varphi(t) \leq L\int_0^t \phi(s)ds \quad \forall\, t \geq 0.$

Επομένως $\quad \varphi(t) \equiv 0$

3.Ο ΘΕΩΡΗΜΑ (Hille-Yosida)

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.7 .(Hille - Yosida)

Έστω A ένας μεγιστικά μονότονος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert H.

Τότε για κάθε $u_0 \in D(A)$ υπάρχει μια συνάρτηση

$$u \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A))$$

μοναδική τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \ \text{ στο } [0,+\infty) \\ u(0) = u_0 \qquad (\text{αρχική τιμή}) \end{cases} \tag{5.21}$$

Επί πλέον ,ισχύουν

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{και} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_o| \quad \forall t \geq 0.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.8.

Το κύριο ενδιαφέρον του θεωρήματος (5.7) βρίσκεται στο γεγονός ότι, για να λύσουμε το εξελικτικό πρόβλημα (5.21)αναγόμαστε στο να επαληθεύσουμε ότι ο A είναι μεγιστικά μονότονος,δηλαδή , στη μελέτη της στάσιμης εξισώσεως $u + \lambda Au = f$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.9

Ο χώρος D(A) είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα του γραφήματος $|v| + |Av|$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.10

Άν $\varphi \in C^1([0,\infty),H)$, *τότε* $|\varphi|^2 \in C^1([0,\infty),H)$ *και*

$$\frac{d}{dt}|\phi(t)|^2 = 2(\frac{d}{dt}\phi(t),\phi(t)) \qquad (5.22)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ *(Θεωρήματος Hille - Yosida)*

Θα γίνει σε 6 βήματα

1ο Βήμα: Μοναδικότητα.

Έστω u *και* $\overline{u}$ *δύο λύσεις της (5.21) και έστω* $\varphi = u - \overline{u}$.

Από σχέση (5.22) και από το ότι ο A είναι μεγιστικά μονότονος , έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi(t)|^2 = (\frac{d}{dt}\phi(t),\phi(t)) = (-A\varphi(t),\varphi(t)) \leq 0$$

Άρα η συνάρτηση $t \mapsto |\varphi(t)|$ *έναι φθίνουσα στο* $[0,+\infty)$.

Όμως $|\varphi(0)| = |u(0) - \overline{u}(0)| = |u_0 - \overline{u}_0| = 0.$

Τότε $|\varphi(t)| = 0 \quad \forall t \geq 0$

Άρα $|u_0 - \overline{u}_0| = 0 \Rightarrow u(t) = \overline{u}(t) \ \forall\, t \in [0,\infty)$

Επομένως η λύση είναι μοναδική.

Για να δείξουμε ***την ύπαρξη*** *της u,αντικαθιστούμε τον A με τον ομαλοποιημένοYosida* A_λ *,αποδεικνύουμε διάφορες εκτιμήσεις* ***ανεξάρτητες του*** *λ και περνούμε στο όριο όταν* $\lambda \to 0$.

Έστω u_λ *η λύση του προβήματος*

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \ \text{ στο } [0,\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \qquad (5.22)$$

Η u_λ *υπάρχει λόγω του θεωρήματος Cauchy - Lipschitz - Picard που εφαρμόζεται για την απεικόνιση* $F = -A_\lambda$.

Επειδή A_λ *είναι γραμμικός, αρκεί να δείξω ότι* $|A_\lambda \upsilon| \leq L|\upsilon|$, *που ισχύει για* $L = \dfrac{1}{\lambda}$

(πρόταση 5.4 στ)

Άρα $\forall\, u_0 \in D(A)\ \exists\, u_\lambda \in C^1([0,\infty),D(A))$ *μοναδική λύση του (5.22)*

2ο Βήμα. *Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα:*

Λήμμα 5.10

Έστω $w \in C^1([0,\infty),H)$ *μια συνάρτηση που ικανοποιεί*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad \text{στο} \quad [0,+\infty). \qquad (5.23)$$

Τότε, οι συναρτήσεις $t \mapsto |w(t)|$ *και* $t \mapsto \left|\frac{dw}{dt}(t)\right| = |A_\lambda w(t)|$ *είναι φθίνουσες στο* $[0,+\infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ισχύει ότι αν $w \in C^1([0,+\infty),H)$ *τότε* $|w|^2 \in C^1([0,+\infty),H)$ *και*

$$\frac{d}{dt}|w|^2 = 2\left(\frac{d}{dt}w(t), w(t)\right)$$

Έχουμε $\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0$

Επί πλέον, $(A_\lambda w, w) \geq 0$ *(ο* A_λ *είναι μεγιστικά μονότονος)*

Επομένως $\left(\frac{dw}{dt}, w\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 \leq 0$

Άρα $|w(t)|^2$ *είναι φθίνουσα και συνεπώς* $|w(t)|$ *είναι φθίνουσα.*

Εξάλλου, επειδή ο A_λ *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, συμπεραίνουμε ότι* $w \in C^\infty$.

$$\frac{\frac{dw}{dt}(t+\Delta t) - \frac{dw}{dt}(t)}{\Delta t} = \frac{-A_\lambda w(t+\Delta t) + A_\lambda w(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{-A_\lambda (w(t+\Delta t) - w(t))}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{dw}{dt} + A_\lambda \frac{dw}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt}\right) + \left(A_\lambda \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt}\right) = 0$$

'Ομως $\left(A_\lambda \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt}\right) \geq 0$ *και άρα* $\left(\frac{d}{dt}\frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt}\right) \leq 0.$

Επομένως $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{dw}{dt}\right|^2$ *φθίνουσα* $\Rightarrow t \mapsto \left|\frac{dw}{dt}\right|$ *είναι φθίνουσα.*

Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι $t \mapsto \left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)|$ *και* $t \mapsto |u_\lambda(t)|$ *είναι φθίνουσες στο* $[0,+\infty)$.

Άρα $|u_\lambda(t)| \le |u_\lambda(0)| \Leftrightarrow |u_\lambda(t)| \le |u_0|$ *και*

$$\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \le |A_\lambda u_\lambda(0)|$$

$$= |A_\lambda u_0|$$

$$\le |Au_0| \text{ (πρόταση 5.4)} \quad \forall t \ge 0, \forall \lambda > 0.$$

Επόμένως,

$$\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| \le |Au_0| \qquad (5.24)$$

*3ο **Βήμα**. Θα δείξουμε ότι, για κάθε* $t \ge 0$, *η* $u_\lambda(t)$ *_συγκλίνει όταν* $\lambda \to 0$ *σε ένα όριο ,έστω u(t).Επί πλέον ,η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα [0,T].*
Πράγματι, έστω λ,μ>0. Έχουμε

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

$$(\frac{d}{dt}(u_\lambda - u_\mu), u_\lambda - u_\mu) + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0 \qquad (5.25)$$

Παρατηρούμε ότι

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda(\mathrm{I} - J_\lambda) + J_\lambda u_\lambda - u_\mu(\mathrm{I} - J_\mu) - J_\mu u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu - J_\mu u_\mu) \text{ εφόσον } A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{I} - J_\lambda)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda) - A(J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)$$

$$\text{καθώς } A_\lambda u_\lambda = A(J_\lambda u_\lambda) \text{ και } A_\mu u_\mu = A(J_\mu u_\mu)$$

$$= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)$$

Ισχύει ότι $(A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \ge 0$

$$\text{καθώς } J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu \in D(A) \text{ και } A \text{ μονότονος}$$

Άρα $(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \ge (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu).$ *(5.26)*

Συμπεραίνουμε τότε από(5.24) ,(5..25), (5.26) ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 = -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu).$$

Από (5.26) *έχουμε*

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)$$

$$\Leftrightarrow -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)$$

Από (5.25) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 &\leq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\
&\leq \left|A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu\right|\left|\lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right| \\
&\leq (\left|A_\lambda u_\lambda\right| + \left|A_\mu u_\mu\right|)(\left|\lambda A_\lambda u_\lambda\right| + \left|\mu A_\mu u_\mu\right|) \qquad \lambda, \mu > 0. \\
&\leq (\left|Au_0\right| + \left|Au_0\right|)(\lambda\left|Au_0\right| + \mu\left|Au_0\right|) \\
&\qquad\qquad \text{καθώς από (8) έχουμε ότι } \left|A_\lambda u_\lambda\right| \leq \left|Au_0\right|. \\
&= 2\left|Au_0\right|((\lambda+\mu)\left|Au_0\right|) \\
&= 2(\lambda+\mu)\left|Au_0\right|^2 .
\end{aligned}$$

Άρα $\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\left|Au_0\right|^2$

και με ολοκλήρωση

$$\int \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 dt \leq 2(\lambda+\mu)\int\left|Au_0\right|^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 \leq 4(\lambda+\mu)\int\left|Au_0\right|^2 t$$

$$\Leftrightarrow \left|u_\lambda - u_\mu\right| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\left|Au_0\right| \tag{5.27}$$

Προκύπτει ότι , για κάθε $t \geq 0$, *η* $(u_\lambda(t))$ *είναι Cauchy και άρα συγκλίνει όταν* $\lambda \to 0$ *σε ενα όριο , έστω* $u(t)$.

$u_\lambda(t) \underset{\lambda\to 0}{\to} u(t)$ *και* $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\right| \leq 2\sqrt{\mu t}\left|Au_0\right|$

$\left|u(t) - u_\mu(t)\right| \leq 2\sqrt{\mu t}\left|Au_0\right|$

$\lim\limits_{\mu\to 0}\left|u(t) - u_\mu(t)\right| \to 0 \Leftrightarrow u_\mu(t) \underset{\mu\to 0}{\to} u(t)$

'Αρα $\quad \left|u_\lambda(t) - u(t)\right| \leq 2\sqrt{\lambda t}\left|Au_0\right|$.

Επομένως , η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς t σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,T]$ *και* $u \in C([0,\infty), H)$.

4^o *Βήμα*

Υποθέτουμε , επί πλέον , ότι ισχύει $u_0 \in D(A^2)$, *δηλαδή* $u_0 \in D(A)$ *και* $Au_0 \in D(A)$.

Τότε η $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ *συγκλίνει όταν* $\lambda \to 0$, *για κάθε* $t \geq 0$ *ομοιόμορφα ως πρός t σε κάθε φραγμένο διάστημα* $[0,T]$. *Πράγματι, θέτοντας* $\upsilon_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, *προκύπτει ότι*

$$\frac{d\upsilon_\lambda}{dt} + A_\lambda \upsilon_\lambda = 0.$$

Ακολουθώντας το 3^ο βήμα , παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\upsilon_\lambda - \upsilon_\mu\right|^2 \le (\left|A_\lambda \upsilon_\lambda\right| + \left|A_\mu \upsilon_\mu\right|) \cdot (\left|\lambda A_\lambda \upsilon_\lambda\right| + \left|\mu A_\mu \upsilon_\mu\right|). \qquad (5.28)$$

Αλλά από το λήμμα 5.10 , έχουμε ότι $A_\lambda \upsilon_\lambda$ είναι φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα

$$\left|A_\lambda \upsilon_\lambda\right| \le \left|A_\lambda \upsilon_\lambda(0)\right| = \left|A_\lambda A_\lambda u_0\right| . \qquad (5.29)$$

καθώς $\upsilon_\lambda(0) = \dfrac{du_\lambda(0)}{dt}$

$= -A_\lambda u_\lambda(0)$

$= -A_\lambda u_0$

και παρομοίως

$$\left|A_\mu \upsilon_\mu\right| \le \left|A_\mu \upsilon_\mu(0)\right| = \left|A_\mu A_\mu u_0\right|. \qquad (5.30)$$

Τέλος, επειδή $Au_0 \in D(A)$, προκύπτει (από πρόταση 5.4 a_2)

$A_\lambda A_\lambda u_0 = A_\lambda [J_\lambda A\, u_0\,]$

$= J_\lambda (A_\lambda A\, u_0)$

$= J_\lambda J_\lambda A A u_0$

$= J_\lambda{}^2 A^2 u_0$

Άρα

$$\left|A_\lambda A_\lambda u_0\right| = \left|J_\lambda{}^2 A^2 u_0\right| \le \left|J_\lambda\right|^2 \left|A^2 u_0\right| \le \left|A^2 u_0\right|. \quad (5.31)$$

Ομοίως ,

$$\left|A_\mu A_\mu u_0\right| \le \left|A^2 u_0\right|.$$

Συνδιάζοντας τις (5.28),(5.29),(5.30) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\upsilon_\lambda - \upsilon_\mu\right|^2 \le (\left|A_\lambda \upsilon_\lambda\right| + \left|A_\mu \upsilon_\mu\right|) \cdot (\left|\lambda A_\lambda \upsilon_\lambda\right| + \left|\mu A_\mu \upsilon_\mu\right|)$$

$$\le (\left|A_\lambda A_\lambda u_0\right| + \left|A_\mu A_\mu u_0\right|)(\lambda \left|A_\lambda A_\lambda u_0\right| + \mu \left|A_\mu A_\mu u_0\right|)$$

$$\le (\left|A^2 u_0\right| + \left|A^2 u_0\right|)(\lambda \left|A^2 u_0\right| + \mu \left|A^2 u_0\right|)$$

$$\le 2(\lambda + \mu)\left|A^2 u_0\right|^2.$$

Ολοκληρώνοντας , έχουμε

$$\left|\upsilon_\lambda - \upsilon_\mu\right|^2 \le 4(\lambda + \mu)\left|A^2 u_0\right|^2 t$$

$$\left|\upsilon_\lambda - \upsilon_\mu\right| \le 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}\,\left|A^2 u_0\right|$$

Συμπεραίνουμε, όπως στο 3^0 *βήμα , ότι* $\upsilon_\lambda(t)=\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ *συγκλίνει , όταν* $\lambda \to 0$*, για κάθε* $t \geq 0$ *και ομοιόμορφα ως προς* t *σε κάθε φραγμένο διάστημα.*

5ο Βήμα

Υπάρχει μια λύση της (5.21), αν υποθέσουμε επί πλέον ότι $u_0 \in D(A^2)$.
Πράγματι, από τα παραπάνω , γνωρίζουμε ότι για κάθε $T<\infty$:

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t), \qquad \text{όταν } \lambda \to 0, \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T], \\ \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \text{ συγκλίνει , όταν } \lambda \to 0, \text{ ομοιόμορφα στο } [0,T]. \end{cases}$$

Προκύπτει ότι $u \in C^1([0,\infty),H)$ *και ότι* $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \to \dfrac{du}{dt}(t)$*, όταν* $\lambda \to 0$*, ομοιόμορφα στο* $[0,T]$.
Γράφουμε την (7) στη μορφή

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + \mathrm{A}(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0 \quad , \text{από πρόταση } 5.4a_2 \qquad (5.32)$$

Ισχύει ότι $J_\lambda u_\lambda(t) \underset{\lambda\to 0}{\to} u(t)$ *διότι*

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &= |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t) + J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |J_\lambda||u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \underset{\lambda\to 0}{\to} 0. \end{aligned}$$

Επειδή το γράφημα του A *είναι κλειστό, έπεται από την (17) ότι* $u(t) \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ *και ότι*

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

Τέλος, επειδή $u \in C^1([0,\infty),H)$*, η συνάρτηση* $t \mapsto Au(t)$ *είναι συνεχής από το* $[0,\infty)$ *στο* H *και άρα* $u \in C([0,\infty),D(A))$.

Επομένως , έχουμε μια λύση της (6) που ικανοποιεί $|u(t)| \leq |u_0|$, $\forall t \geq 0$ *και* $\left|\dfrac{du}{dt}(t)\right| \leq |Au_0|$, $\forall t \geq 0$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα χρειαστούμε το

Λήμμα 5.11

Έστω $u_0 \in D(A)$. *Τότε* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\ \bar{u}_0 \in D(A^2)$ *τέτοιο ώστε* $\left|u_0 - \bar{u}_0\right| < \varepsilon$ *και*

$\left|Au_0 - A\bar{u}_0\right| < \varepsilon.$

Με άλλα λόγια , ο $D(A^2)$ *είναι πυκνός στον D(A) (για τη νόρμα του γραφήματος).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$, *οπότε ισχύει* $\bar{u}_0 \in D(A)$ *και* $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0.$

Άρα $A\bar{u}_0 \in D(A)$, *δηλαδή* $\bar{u}_0 \in D(A^2)$.

Γνωρίζουμε (από πρόταση VII2) ότι

α) $A\bar{u}_0 = \mathrm{A}(J_\lambda u_0) = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$

β) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left|J_\lambda u_0 - u_0\right| = 0$

γ) $\lim\limits_{\lambda\to 0} A_\lambda u_0 = Au_0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda A u_0 = Au_0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}\left|J_\lambda A u_0 - Au_0\right| = 0$

Επιλέγουμε τότε το $\lambda > 0$ *αρκετά μικρό και έτσι προκύπτει ότι*

$\left|\bar{u}_0 - u_0\right| < \varepsilon$ *(από β)) και* $\left|A\bar{u}_0 - Au_0\right| < \varepsilon$.

6ο Βήμα

Έστω $u_0 \in D(A)$. *Βάσει του προηγούμενου λήμματος, υπάρχει ακολουθία* $(u_{0n}) \in D(A^2)$ *τέτοια ώστε* $u_{0n} \to u_0$ *και* $Au_{0n} \to Au_0$.

Από το 5*ο* *βήμα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια λύση* u_n *του προβλήματος*

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{στο } [0,\infty). \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \qquad (5.33)$$

Επί πλέον , έχουμε

$$\left|u_n(t) - u_m(t)\right| \le \left|u_{0n} - u_{0m}\right| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| = \left|Au_n - Au_m\right| \le \left|Au_{0n} - Au_{0m}\right| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Επομένως,

$$u_n(t) \to u(t) \qquad \text{ομοιόμορφα στο } [0,\infty)$$

$$\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t) \qquad \text{ομοιόμορφα στο } [0,\infty)\ ,$$

με $u \in C^1([0,\infty), H)$. Παίρνοντας το όριο στη (5.33), επειδή το γράφημα του A είναι κλειστό, βλέπουμε ότι $u \in C([0,\infty), D(A))$ και ότι η u ικανοποιεί την (5.21).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.12

Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η επίλυση της εξισώσεως

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 & \text{στο } [0,\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ανάγεται πολύ απλά στην επίλυση της (6) με το ακόλουθο κλασικό τέχνασμα.

Θέτουμε

$$\upsilon(t) = e^{\lambda t} u(t).$$

Τότε η υ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{cases} \dfrac{d\upsilon}{dt} + A\upsilon + \lambda \upsilon = 0 & \text{στο } [0,\infty) \\ \upsilon(0) = \upsilon_0 . \end{cases}$$

4. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΗ

Έστω $A : D(A) \subset H \to H$ γραμμικός μη φραγμένος τελεστής με $\overline{D(A)} = H$.

Άν κάνουμε την ταύτιση $H' = H$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον A^* ως μη φραγμένο τελεστή στον H.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.13. Λέμε ότι

ο A είναι **συμμετρικός** αν

$$(Au, \upsilon) = (u, A\upsilon) \qquad \forall\, u, \upsilon \in D(A)$$

ο A είναι αυτοσυζυγής αν

$$A^* = A,$$

που υπονοεί ότι $D(A^*) = D(A)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.14

Όταν $A \in \mathcal{L}(H)$ δεν υπάρχει λόγος να διακρίνουμε μεταξύ συμμετρικού και αυτοσυζυγούς τελεστή. Αντίθετα, αν ο A είναι μη φραγμένος ,η διάκριση μεταξύ «συμμετρικού» και «αυτοσυζυγούς» είναι λεπτή. Είναι φανερό ότι ένας αυτοσυζυγής τελεστής είναι συμμετρικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει: ο A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A \subset A^*$, που υπονοεί ότι $D(A) \subset D(A^*)$, και $A = A^*$ στον $D(A)$. Όταν ο A είναι συμμετρικός, μπορεί να συμβεί $A \underset{\neq}{\subset} A^*$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι ,αν ο Α είναι ***μεγιστικός μονότονος*** *,τότε (Α συμμετρικός)* $\Leftrightarrow$ *(Α αυτοσυζυγής).*

ΠΡΟΤΑΣΗ5.15

Έστω Α ένας μεγιστικός μονότονος και συμμετρικός τελεστής . Τότε ο Α είναι αυτοσυζυγής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $J_1 = (I + A)^{-1}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο J_1είναι αυτοσυζυγής.

Αρκεί να επαληθεύσουμε, επειδή $J_1 \in \mathcal{L}(H)$, ότι

$$(J_1 u, \upsilon) = (u, J_1 \upsilon) \qquad \forall u, \upsilon \in H. \quad (5.34)$$

Θέτουμε $u_1 = J_1 u$ και $\upsilon_1 = J_1 \upsilon$, οπότε

$$u_1 + Au_1 = u$$
$$\upsilon_1 + A\upsilon_1 = \upsilon.$$

Επειδή $(u_1, A\upsilon_1) = (Au_1, \upsilon_1)$, προκύπτει ότι $(u_1, \upsilon) = (u, \upsilon_1)$, δηλαδή η (5.34).

Έστω $u \in D(A^*)$ και θέτουμε $f = u + A^* u$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}(f,\upsilon) &= (u + A^* u, \upsilon)\\ &= (u,\upsilon) + (A^* u, \upsilon)\\ &= (u,\upsilon) + (u, A\upsilon) \ \ (\text{από ορισμό } 1.3)\\ &= (u, \upsilon + A\upsilon) \qquad \forall \upsilon \in D(A)\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f, J_1 w) = (u, w) \qquad \forall w \in H.$$

Επομένως, $u = J_1 f$ και άρα $u \in D(A)$.

Συμπέρασμα : $D(A^*) = D(A)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.16

Έστω Α ένας μεγιστικός μονότονος και αυτοσυζυγής τελεστής . Τότε ,για κάθε $u_0 \in H$ *, υπάρχει μια συνάρτηση*

$$u \in C([0,\infty), H) \cap C^1((0,\infty), H) \cap C((0,\infty), D(A))$$

μοναδική τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{στο } (0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Επί πλέον, έχουμε

$$|u(t)| \le |u_0| \quad \textit{και} \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \le \frac{1}{t}|u_0|$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μοναδικότητα. *Έστω u και* $\bar{u}$ *δύο λύσεις. Εφαρμόζοντας τη μονοτονία του A, βλέπουμε ότι η συνάρτηση φ(t)=*$|u(t)-\bar{u}(t)|^2$ *είναι φθίνουσα στο* $(0,\infty)$. *Εξάλλου, η φ είναι συνεχής στο* $[0,\infty)$ *και φ(0)=0.Συνεπώς, φ=0.*

Ύπαρξη

Βήμα 1ο. *Υποθέτουμε πρώτα ότι* $u_0 \in D(A^2)$ *και έστω u η λύση της (5.21)*

που δίνει το θεώρημα Hille-Yosida.Θα δείξουμε την εκτίμηση

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \le \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0. \qquad (5.35)$$

Από την απόδειξη της πρότασης 5.15 έχουμε ότι:

$$J_\lambda^* = J_\lambda \qquad \textit{και} \qquad A_\lambda^* = A_\lambda \quad \forall \lambda > 0$$

όπου

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \qquad \textit{και} \qquad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

Επαναλαμβάνουμε την προσέγγιση που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος Hille-Yosida

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \textit{στο } [0,\infty), \qquad (5.36)$$

$$u_\lambda(0) = u_0.$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στην (5.36) με u_λ, *έχουμε*

$$\left(\frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda\right) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0$$

Από σχέση (5.22) ισχύει : $\frac{d}{dt}|\phi(t)|^2 = 2\left(\frac{d}{dt}\phi(t), \phi(t)\right)$.

Άρα,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda|^2 + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 0$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_\lambda|^2 dt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = 0$$

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(0)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = 0$$

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 . \qquad (5.37)$$

Παίρνοντας μετά το εσωτερικό γινόμενο στη (5.36) με $t\frac{du_\lambda}{dt}$ *,έχουμε*

$$(\frac{du_\lambda}{dt}, t\frac{du_\lambda}{dt},) + (A_\lambda u_\lambda, t\frac{du_\lambda}{dt}) = 0$$

και ολοκληρώνονατς στο [0,T], βρίσκουμε

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))tdt = 0. \qquad (5.38)$$

Εξάλλου

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = (A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt})$$

Ισχύει ότι $A_\lambda^* = A_\lambda$ *και* A_λ *είναι συμμετρικός, άρα*

$$(A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda) = (A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt})$$

Επομένως έχουμε,

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = 2(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}).$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, έχουμε

$$\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right) t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)]\, tdt \quad \text{από (29a)}$$

$$= \frac{1}{2}[(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))\, t]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt \qquad (5.39)$$

$$= \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\, T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt$$

Εξάλλου , επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|$ *είναι φθίνουσα (λήμμα 5.11)*

έχουμε

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geq \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(\mathrm{T})\right|^2 tdt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(\mathrm{T})\right|^2 [\frac{t^2}{2}]_0^T$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}. \qquad (5.40)$$

Συνδυάζοντας την (5.38) και την (5.39) ,έχουμε

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))tdt = 0$$

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt + \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = 0 \;\; \text{λόγω της}$$

Ισχύει ότι

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt = -\frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T + \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt \qquad (5.41)$$

Από την (5.40) έχουμε

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}$$

Επομένως από (5.41) προκύπτει ότι

$$-\frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T + \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2} \quad (5.42)$$

Από την (5.37) έχουμε

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{2}|u_0|^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{4}|u_0|^2 - \frac{1}{4}|u_\lambda(T)|^2 \quad (5.43)$$

Συνδυάζοντας την (5.42) και την (5.43) , προκύπτει

$$-\frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T + \frac{1}{4}|u_0|^2 - \frac{1}{4}|u_\lambda(T)|^2 \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2} + \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T + \frac{1}{4}|u_\lambda(T)|^2 \le \frac{1}{4}|u_0|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$T^2\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 \le \frac{1}{2}|u_0|^2$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ειδικά ότι:

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \le \frac{1}{T}|u_0| \qquad \forall T > 0. \qquad (5.45)$$

Από το 5ο Βήμα της απόδειξης του θεωρήματος Hille-Yosida έχουμε ότι

$$\frac{du}{dt} \to \frac{du}{dt}$$

Παίρνοντας το όριο στην(5.45) όταν $\lambda \to 0$ *,προκύπτει*

$$\left|\frac{du}{dt}(T)\right| \le \frac{1}{T}|u_0| \qquad \forall T > 0.$$

2ο Βήμα

Υποθέτουμε τώρα ότι $u_0 \in H$*.Έστω* (u_{0n}) *μια ακολουθία στο* $D(A)$*, τέτοια ώστε* $u_{0n} \to u_0$*.Έστω* u_n *η λύση της εξισώσεως*

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0 & \text{στο } [0,\infty) \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι ,(θεώρημα 5.7)

$$|u_n(t) - u_m(t)| \le |u_{0n} - u_{0m}| \qquad \forall m,n, \forall t \ge 0$$

και (1ο βήμα) ότι

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \le \frac{1}{t}|u_{0n} - u_{0m}| \qquad \forall m,n, \forall t \ge 0$$

Προκύπτει ότι η $u_n(t)$ *συγκλίνει σε άνα όριο* $u(t)$ *ομοιόμορφα στο* $[0,\infty)$ *και ότι η* $\frac{du_n}{dt}$ *συγκλίνει στη* $\frac{du}{dt}$ *ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα* $[\delta,+\infty)$ *με* $\delta > 0$*. Άρα*

$$u \in C([0,\infty),H) \cap C^1((0,\infty),H).$$

Εύκολα προκύπτει οτι η $u(t) \in D(A)$ *για κάθε* $t > 0$ *και καθώς ο Α είναι κλειστός , η u ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \qquad \text{στο } (0,\infty)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

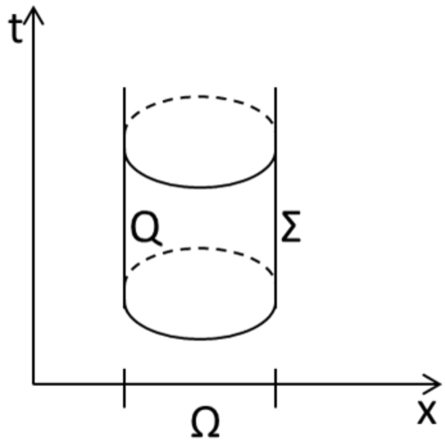
Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

1.Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ένα ανοιχτό με σύνορο* Γ. *Θέτουμε*

$$Q = \Omega \times (0,+\infty) \quad \text{και} \quad \Sigma = \Gamma \times (0,+\infty)$$

όπου Σ *είναι το πλευρικό σύνορο ενός κυλίνδρου* Q.



Θεωρούμε το πρόβλημα:

Να βρεθεί η συνάρτηση $u(x,t): \overline{\Omega}\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε:*

(6.1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{στο}\ Q$

(6.2) $\quad u = 0 \quad \text{στο} \quad \Sigma$

(6.3) $\quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο} \quad \Omega.$

όπου $\Delta = \sum_{\iota=1}^{N} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *συμβολίζει τον τελεστή Laplace ως προς τις χωρικές μεταβλητές ,*

t *τη χρονική μεταβλητή και* $u_0(x)$ *μια δεδομένη συνάρτηση.*

Η εξίσωση (1) καλείται ***εξίσωση θερμότητας*** *επειδή προτυποποιεί την κατανομή της θερμοκρασίας u στο πεδίο Ω τη στιγμή t. Η εξίσωση θερμότητας και οι παραλλαγές της εμφανίζονται σε πολλά φαινόμενα διαχύσεως. Η εξίσωση θερμότητας είναι το απλούστερο παράδειγμα μιας παραβολικής εξισώσεως.*

Η εξίσωση (2) είναι η συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Μπορεί να αντικατασταθεί με τη συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \;\; \sigma\tau o \;\; \Sigma$$

(n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο Γ).
Η συνθήκη (2) εκφράζει τη διατήρηση του συνόρου Γ του Ω σε μηδενική θερμοκρασία ,η δε συνθήκη (2′) εκφράζει το γεγονός ότι η ροή θερμότητας μέσω του Γ είναι μηδενική.
Η συνθήκη (3) είναι αρχική συνθήκη ή συνθήκη Cauchy.
Θα λύσουμε το πρόβλημα (1), (2),(3), θεωρώντας την u(x,t) ως συνάρτηση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με τιμές σε έναν χώρο H ,όπου H ένας χώρος συναρτήσεων που εξαρτώνται μόνο από το x ,π.χ., $H = L^2(\Omega)$ ή $H = H_0^1(\Omega)$,κ.τ.λ .Έτσι ,το u(t) συμβολίζει ένα στοιχείο του H , δηλαδή τη συνάρτηση $x \mapsto u(x,t)$, για t σταθερό. Αυτή η θεώρηση μας επιτρέπει να έχουμε πολύ εύκολα μια λύση του προβλήματος (1),(2),(3) εφαρμόζοντας το θεώρημα Hille-Yosida.
Για να απλουστεύσουμε την παρουσίαση , υποθέτουμε ότι το Ω είναι τάξεως $C_0^\infty(\Omega)$ με Γ φραγμένο

Εφαρμόζουμε τη θεωρία Hille - Yosida στον χώρο $H = L^2(\Omega)$
Γι'αυτό εισάγουμε τον μη φραγμένο τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$
που ορίζεται με

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ενσωματώνουμε τη συνοριακή συνθήκη (6.2) στον ορισμό του πεδίου ορισμού του A.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 ***(Ύπαρξη και μοναδικότητα).***
Υποθέτουμε ότι $u_0 \in D(A)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση u(x,t) που ικανοποιεί τις (1), (2), (3) και

(6.4) $\quad u \in C^1([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$

*Θα επαληθεύσουμε ότι ο A είναι **μεγιστικός μονότονος**. Θα μπορέσουμε τότε να εφαρμόσουμε το θεώρημα (5.7) για να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσεως των (6.1),(6.2),(6.3),(6.4).(6.5).*
*(i)Ο A είναι **μονότονος.***
Πράγματι ,αν $u \in D(A)$, έχουμε

$$(Au,u)_{L^2} = (-\Delta u,u)_{L^2} = \int (-\Delta u)u$$

Από τον τύπο του Green έχουμε :

$$\int_{\Omega}(\Delta u)\upsilon = \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\upsilon d\sigma - \int_{\Omega}\nabla u\nabla \upsilon$$

όπου dσ είναι το επιφανειακό μέτρο πάνω στο Γ.

Άρα ,

$$\int_{\Omega}(\Delta u)u = \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}ud\sigma - \int_{\Omega}\nabla u\nabla u$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega}(-\Delta u)u = \int_{\Omega}\nabla u\nabla u$$

$$= \int_{\Omega}|\nabla u|^2$$

Επομένως

$$(Au,u)_{L^2} == \int_{\Omega}|\nabla u|^2 \quad \geq 0$$

Άρα ο Α είναι μονότονος.

(ιι)ο Α είναι ***μεγιστικός μονότονος***

Αρκεί να αποδείξουμε ότι R(I+A)=H= L^2 .

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $f \in L^2$ υπάρχει $u \in H^2 \cap H_0^1$ μοναδική λύση της εξισώσεως u-Δu=f.

Αυτό προκύπτει από το παράδειγμα 4.6 (κεφάλαιο 4).

2.Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ένα ανοιχτό με σύνορο Γ. Όπως προηγουμένως συμβολίζουμε

$Q = \Omega \times (0,+\infty)$ *και* $\Sigma = \Gamma \times (0,+\infty)$

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα :

Να βρεθεί μια συνάρτηση $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(6.7) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \qquad$ *στο Q*

(6.8) $\quad u = 0 \qquad$ *στο Σ*

(6.9) $\quad u(x,0) = u_0(x) \qquad$ *στο Ω*

(6.10) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_0(x) \qquad$ *στο Ω,*

όπου $\Delta = \sum_{\iota=1}^{N}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *συμβολίζει τον τελεστή Laplace ως προς τις χωρικές μεταβλητές,*

t τη χρονική μεταβλητή και u_0 , υ_o δεδομένες συναρτήσεις.

Η εξίσωση (6.7) καλείται **κυματική εξίσωση**. Ο τελεστής $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta$

είναι ο τελεστής d'Alembert.Η κυματική εξίσωση είναι ένα πρότυπο παράδειγμα υπερβολικής εξισώσεως.
Όταν N=1, Ω=(0,1) ,η εξίσωση (6.7) προτυποποιεί τις μικρές ταλαντώσεις μιας χορδής που δεν υπόκειται σε καμία εξωτερική δύναμη. Για κάθε $t \geq 0$,
το γράφημα της συναρτήσεως $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ συμπίπτει με το σχήμα της χορδής τη στιγμή t. Όταν N=2, η εξίσωση (6.7) προτυποποιεί τις μικρές ταλαντώσεις μιας ελαστικής μεμβράνης. Για κάθε $t \geq 0$, το γράφημα της συναρτήσεως
$x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ συμπίπτει με το σχήμα της μεμβράνης
τη στιγμή t. Γενικά, η εξίσωση (6.7) προτυποποιεί τη διάδοση ενός κύματος (ακουστικού, ηλεκτρομαγνητικού ,κ.τ.λ.) σε ένα ομογενές ελαστικό μέσο
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
Η εξίσωση (6.8) είναι συνοριακή συνθήκη Dirichlet. Μπορεί να αντικατασταθεί με τη συνθήκη Neumann, ή και με κάποια άλλη συνοριακή συνθήκη. Η συνθήκη u=0 στο Σ εκφράζει το γεγονός ότι η χορδή (αντ. η μεμβράνη, κ.τ.λ.) είναι σταθεροποιημένη στο σύνορο Γ.
Η συνθήκη Neumann εκφράζει ότι η χορδή είναι ελεύθερη στα άκρα της.
Οι εξισώσεις (6.9) και (6.10) περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος . Είναι οι συνθήκες Cauchy. Το αρχικό σχήμα (λέμε επίσης και η αρχική μετατόπιση) περιγράφεται από την $u_0(x)$ και η αρχική ταχύτητα από την $\upsilon_0(x)$.
Υποθέτουμε ,παντού, στη συνέχεια ότι το Ω είναι τάξεως C^∞ με Γ φραγμένο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2**(Ύπαρξη και μοναδικότητα).**
Υποθέτουμε ότι έχουμε $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και $\upsilon_o \in H_0^1(\Omega)$. Τότε υπάρχει μοναδική λύση των (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) με
(6.11)

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)).$$

Επί πλέον , ισχύει

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |\upsilon_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, t \geq 0 \qquad (6.12)$$

(όπου συμβολίζουμε

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx \;\; \text{και} \;\; |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u_i}{\partial t_i}(x,t)\right|^2 dx.)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ
Η σχέση (12) είναι νόμος διατηρήσεως που εκφράζει ότι η ενέργεια του συστήματος παραμένει αμετάβλητη στο χρόνο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε την $u(x,t)$ ως συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$ με τιμές σε έναν γραμμικό χώρο. Συγκεκριμένα , για $t \geq 0$ σταθερό , το $u(t)$ συμβολίζει την απεικόνιση $x \mapsto u(x,t)$.Γράφουμε την εξίσωση (6.7) στη μορφή ενός συστήματος πρώτης τάξης :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \upsilon = 0 \;\; \sigma\tau o\, Q \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta \upsilon = 0 \;\; \sigma\tau o\, Q \end{cases} \tag{6.13}$$

και θέτουμε $U = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix}$, οπότε η (13) γίνεται

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \tag{6.14}$$

με

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\upsilon \\ -\Delta u \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη θεωρία Hille - Yosida στον χώρο $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega \upsilon_1 \upsilon_2 dx$$

όπου

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \upsilon_1 \end{pmatrix} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τον μη φραγμένο τελεστή $A : D(A) \subset H \to H$ που ορίζεται από την (6.15) , με

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Σημειωτέον ότι η συνοριακή συνθήκη (8) έχει ενσωματωθεί στον χώρο H.

Παρατηρούμε επίσης ότι από την (8) έχουμε αυτομάτως $\upsilon = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ στο Σ.

Θα επαληθεύσουμε ότι ο A+I είναι μεγιστικός μονότονος στον H.

(ι) Ο A+I είναι ***μονότονος.***

Αρκεί να δείξουμε ότι $((A+I))U,U)_H \geq 0$.

Πράγματι , αν $U = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix} \in D(A)$, έχουμε

$$\begin{aligned} ((A+I))U,U)_H &= (AU+U,U)_H \\ &= (AU,U)_H + |U|_H^2 \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$AU = \begin{pmatrix} -\upsilon \\ -\Delta u \end{pmatrix} \; \text{και}\, U = \begin{pmatrix} u \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

εφαρμόζοντας τον τύπο του εσωτερικού γινομένου για τον χώρο
$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *έχουμε ότι :*

$$(AU,U)_H = -\int \nabla\upsilon \nabla u - \int u\upsilon + \int (-\Delta u)\upsilon$$

Ομοίως,

$$(U,U)_H = \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int \upsilon^2$$

Άρα ,

$$(AU,U)_H + |U|_H^2 = -\int \nabla\upsilon\nabla u - \int u\upsilon + \int (-\Delta u)\upsilon + \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int \upsilon^2$$
$$= -\int u\upsilon + \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int \upsilon^2$$

καθώς $\int \nabla\upsilon\nabla u = \int (-\Delta u)\upsilon$ *, από τον τύπο του Green*

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$|(u,\upsilon)| \le (u,u)^{1/2}(\upsilon,\upsilon)^{1/2}$$

Επομένως

$$\int u\upsilon \le \int u^2 + \int \upsilon^2$$
$$\Leftrightarrow \int \upsilon^2 + \int u^2 - \int u\upsilon \ge 0 \quad \text{και} \quad \int |\nabla u|^2 \ge 0$$

άρα

$$((A+I))U,U) = (AU,U)_H + |U|_H^2 \ge 0$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι ο $A + I$ *είναι μονότονος.*

(ii)ο A είναι ***μεγιστικός μονότονος***
Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $A + 2I$ *είναι επί.*

Για δεδομένη $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, *πρέπει να λύσουμε την εξίσωση* $AU + 2U = F$,
δηλαδή το σύστημα

$$\begin{cases} -\upsilon + 2u = f & \text{στο}\ \Omega \\ -\Delta u + 2\upsilon = g & \text{στο}\ \Omega \end{cases} \qquad (6.16)$$

με $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *και* $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$.
Από την (6.16) προκύπτει ότι

$$(6.17) \qquad -\Delta u + 4u = 2f + g.$$

Αλλά η εξίσωση (6.16) έχει μια μοναδική λύση $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
(η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του παραδείγματος 4.6)

Παίρνουμε , μετά $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$, *θέτοντας* $\upsilon = 2u - f$, *που λύνει την (6.16)*

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Hille-Yosida προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα

$$\frac{dV}{dt} + (A + I)V = 0$$

Εφαρμόζοντας την παρατήρηση (5.12) ,δηλαδή θέτοντας $U(t) = e^t V(t)$ *προκύπτει ότι υπάρχει μαναδική λύση του πρόβλημα*

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = 0 \ \text{ στο } [0,\infty) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (6.18)$$

με

$$U \in C^1([0,\infty), H) \cap C([0,\infty), D(A)), \quad (6.19)$$

αφού $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \upsilon_0 \end{pmatrix} \in D(A).$

Από την (6.19) συμπεραίνουμε την (6.11).

Για να αποδείξουμε την (6.12), αρκεί να πολλαπλασιάσουμε την (6.7) με $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *και να ολοκληρώσουμε στο Ω.*

Έχουμε ότι

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx$$

και

$$\int_\Omega (-\Delta u) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega \nabla u \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Επομένως

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = |\upsilon_0|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \, t \geq 0$$

Βιβλιογραφια

[1] H.Bresis,Συναρτησιακή Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997
[2] H.Bresis, Opérateus maximaux monotones et semi-groupes de contractions Dans les espaces de Hilbert, North-Holland, 1973, Cours de 3e cycle sur les equations d'evolution non lineaires.
[3] Σ. Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης ,Ν.Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη. Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Αθήνα 1997.
[4] Γ. Κουμουλλής, Σ.Νεγρεπόντης, Θεωρία Μέτρου, Αθήνα 1991.
[5]D.H.Griffel, Applied Functional Analysis, Dover Publications, INC.Mineola, New York.
[6] L.Tartar, An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces, Springer 2007.
[7] B.Reddy,Introductory Functional Analysis,Springer 1998.
[8] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.
[9] A.W.Naylor, G.R.Sell,Linear Operator Theory in Engineering and Science, Springer-Verlag, New York Heibelberg Berlin, 1982.
[10] L.Debnath,P.Mikusinski ,Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press, 1990.