



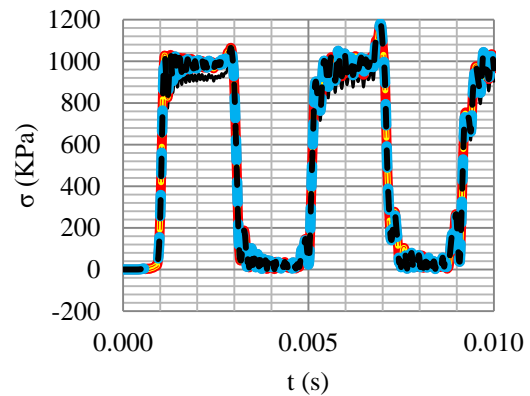
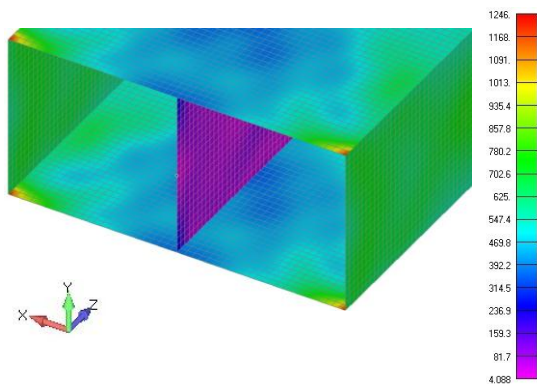
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

# ΣΤΡΕΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΓΥΡΙΔΗ ΑΜΑΛΙΑΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ :**

ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ Ε. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΤΣΙΠΗΡΑΣ Β. Υποψήφιος Διδάκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβρης 2012



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή.....	1
1 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας.....	3
1.1 Βασικοί Ορισμοί .....	3
1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα.....	4
1.2.1 Τάσεις .....	4
1.2.2 Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις .....	7
1.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας.....	10
1.2.4 Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας.....	12
2 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου.....	17
2.1 Προκαταρκτικές έννοιες .....	17
2.2 Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψεως.....	20
2.3 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	22
2.3.1 Μετατοπίσεις .....	23
2.3.2 Παραμορφώσεις.....	24
2.3.3 Τάσεις .....	25
2.4 Τοπικές εξισώσεις ισορροπίας, πρωτογενής $\phi_S^P$ , δευτερογενής $\phi_S^S$ συνάρτηση στρέβλωσης .....	25
2.4.1 Τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.....	25
2.4.2 Σύνοψη υπολογισμού $\phi_S^P, \phi_S^S$ .....	28
2.4.3 Υπολογισμός $\phi_S^P, \phi_S^S$ (ως προς το κέντρο συστροφής) για τυχόν σύστημα συντεταγμένων (που δεν διέρχεται από το κέντρο συστροφής) .....	29
2.5 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	32
2.5.1 Εντατικά μεγέθη .....	32
2.5.2 Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας συνοριακές και αρχικές συνθήκες .....	33
2.6 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.....	35
3 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.....	37
3.1 Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων.....	38
3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	38
3.2.1 Μετατοπίσεις .....	39
3.2.2 Παραμορφώσεις.....	40
3.2.3 Τάσεις .....	41

3.3	Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.	43
3.4	Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	44
3.4.1	Εντατικά μεγέθη .....	44
3.4.2	Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας συνοριακές και αρχικές συνθήκες .....	45
3.5	Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις .....	48
4	Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος .....	55
4.1	Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $I_p, I_t^P, I_t^S, C_s$ με συνοριακή ολοκλήρωση .....	55
4.2	Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης $k_x$ με πεδιακή ολοκλήρωση.....	57
4.3	Αριθμητικός υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών $\theta_x, n_x$ .....	58
5	Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α.....	61
5.1	Εισαγωγή.....	61
5.2	1 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: Σταυροειδής διατομή $B=70mm, t=2.4mm$	65
5.2.1	Μήκος δοκού $L=0.6m$ .....	65
5.2.2	Μήκος δοκού $L=5m$ .....	69
5.3	2 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: HEB100 .....	72
5.3.1	Μήκος δοκού $L=0.4m$ .....	72
5.3.2	Μήκος δοκού $L=0.8m$ .....	75
5.4	3 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: ορθογωνική διατομή 800x1600 .....	78
5.4.1	Μήκος δοκού $L=6.4m$ .....	79
5.4.2	Μήκος δοκού $L=12.8m$ .....	82
5.5	4 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 100x60x6.3.....	84
5.5.1	Μήκος δοκού $L=0.5m$ .....	85
5.5.2	Μήκος δοκού $L=1.0m$ .....	90
5.6	5 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 160x80x6.3.....	94
5.6.1	Μήκος δοκού $L=1.0m$ .....	94
5.6.2	Μήκος δοκού $L=5.0m$ .....	98
5.7	6 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 450x250x8.....	101
5.7.1	Μήκος δοκού $L=2.5m$ .....	102
5.7.2	Μήκος δοκού $L=4.5m$ .....	105
5.8	7 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 250x150x10.....	109
5.8.1	Μήκος δοκού $L=1.25m$ .....	109
5.8.2	Μήκος δοκού $L=2.5m$ .....	112
5.9	8 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 60x40x5.....	115



5.9.1	Μήκος δοκού $L = 0.3m$ .....	115
5.9.2	Μήκος δοκού $L = 0.6m$ .....	119
5.10	9 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: κοίλη ορθογωνική διατομή 1000x1600 (μέση γραμμή) .....	122
5.10.1	Μήκος δοκού $L = 8.0m$ .....	123
5.10.2	Μήκος δοκού $L = 16.0m$ .....	126
5.11	10 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: δικύψελο κιβώτιο .....	129
5.11.1	Μήκος δοκού $L = 5.0m$ .....	129
5.11.2	Μήκος δοκού $L = 10.0m$ .....	132
6	Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος 'B'.....	137
6.1	Εισαγωγή .....	137
6.2	1 <sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα.....	137
6.2.1	Φόρτιση με 1 <sup>η</sup> ιδιομορφή.....	138
6.2.2	Φόρτιση με 2 <sup>η</sup> ιδιομορφή.....	142
6.2.3	Φόρτιση με 3 <sup>η</sup> ιδιομορφή.....	147
6.2.4	Φόρτιση με 4 <sup>η</sup> ιδιομορφή.....	152
6.2.5	Αποτελέσματα αναλύσεων FFT .....	156
6.3	2 <sup>ο</sup> Αριθμητικό παράδειγμα.....	158
6.3.1	Κινηματικά και εντατικά μεγέθη και τάσεις στο άκρο 1 από dynSlin .....	159
6.3.2	Κινηματικά και εντατικά μεγέθη από dynUniflin .....	162
6.3.3	$\theta_x$ και $\sigma_{Von-Mises}$ από Nastran.....	163
6.3.4	Συγκεντρωτικά αποτελέσματα.....	167
	Συμπεράσματα .....	171
	Α μέρος.....	171
	Β μέρος.....	171
	Βιβλιογραφία.....	173



## Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τις Στρεπτικές Ταλαντώσεις Ράβδων με Επιρροή Δευτερογενών Διατμητικών Παραμορφώσεων προσπαθώντας να αναδείξει τη σπουδαιότητα των παραμορφώσεων αυτών στον υπολογισμό ιδιομορφών, ιδιοσυχνοτήτων, κινηματικών, εντατικών και τασικών μεγεθών της ράβδου. Προκειμένου να γίνει πραγματοποιηθεί αυτό κρίθηκε απαραίτητο η διπλωματική αυτή να έχει την εξής δομή:

- Κεφάλαιο 1: Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας. Επεξηγείται η θεωρία ελαστικότητας στον βαθμό που είναι αναγκαίο προκειμένου στη συνέχεια να γίνει αντιληπτή η θεωρία στρέψης.
- Κεφάλαιο 2: Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου. Αναλύεται η κλασσική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης εφαρμοσμένη στις γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις.
- Κεφάλαιο 3: Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Περιγράφεται η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης όσον αφορά τις γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις.
- Κεφάλαιο 4: Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος. Αναπτύσσονται συνοπτικά οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα.
- Κεφάλαιο 5: Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται εκτενώς τα αποτελέσματα των αναλύσεων που έγιναν και αφορούν τον υπολογισμό των ιδιομορφών και των συχνοτήτων ταλάντωσης ράβδων διαφόρων διατομών, μηκών και στατικών συστημάτων.
- Κεφάλαιο 6: Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Β. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται εκτενώς τα αποτελέσματα δύο τύπων αναλύσεων. Ο πρώτος αφορά τον υπολογισμό της χρονοϊστορίας κινηματικών και εντατικών μεγεθών αλλά και συχνοτήτων ταλάντωσης ράβδων που υποβάλλονται σε φόρτιση αρχικών συνθηκών βασισμένη σε κάποια από τις ιδιομορφές τους. Ο δεύτερος τύπος αναλύσεων αντιστοιχεί στον υπολογισμό κινηματικών, εντατικών αλλά και τασικών μεγεθών ράβδων που υποβάλλονται σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (στην περίπτωση μας ορθογωνικό πλήγμα). Και στις δύο περιπτώσεις μελετώνται ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση.

Στο σημείο αυτό είναι πολύ σημαντικό να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες της παρούσας διπλωματικής εργασίας κ. Σαουντζάκη Ευάγγελο (Καθηγητή ΕΜΠ) και κ. Τσίπηρα Βασίλειο (Υποψήφιο Διδάκτορα ΕΜΠ) για τη συνεχή βοήθεια, καθοδήγηση και επίλυση αποριών καθ' όλο το χρονικό διάστημα που διήρκεσε η εργασία αυτή. Επίσης κατά κύριο λόγο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Κλεάνθη και Αικατερίνη Αργυρίδη και τη θεία μου Παναγιώτα Πολυμέρου για τη διαρκή συμπαράσταση σε όλη τη διάρκεια του πενταετούς κύκλου σπουδών.

Αθήνα, Οκτώβριος 2012



# 1 Στοιχεία θεωρίας ελαστικότητας

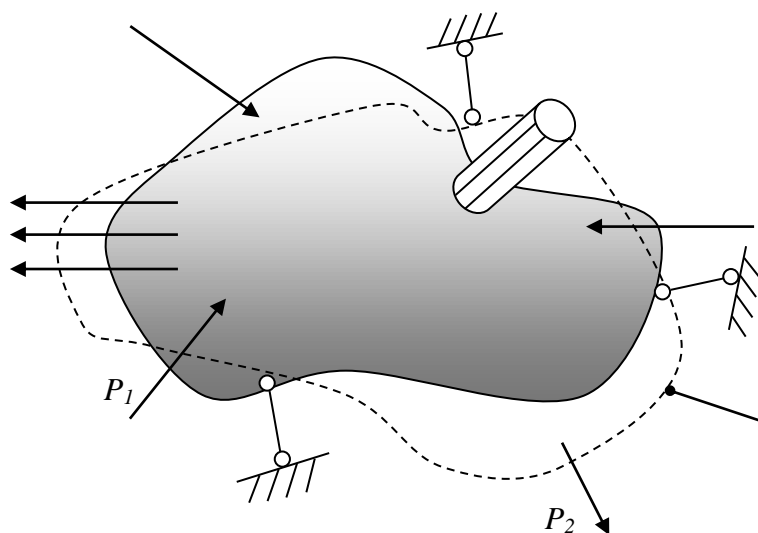
## 1.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε το στερεό παραμορφώσιμο σώμα, με δομή χωρίς ασυνέχειες του Σχήματος 1.1.1, επί του οποίου επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις (καθολικές – επιφανειακές). Αποκόπτοντας και απομονώνοντας το αριστερό τμήμα (Σχήμα 1.1.1 Σχήμα 1.1.2), εμφανίζεται στην επιφάνεια της επίπεδης τομής μια συνισταμένη εσωτερική δύναμη  $\Delta F$ , η οποία είναι ισοπολική των δυνάμεων του δεξιού τμήματος. Συμβολίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας τομής ως  $A$ , ορίζουμε ως τάση  $\sigma$  το όριο του λόγου

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1.1.1)$$

όπου

$\Delta A$  : ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας που τείνει να μηδενιστεί



**Σχήμα 1.1.1** Ελαστικό σώμα υπό την ενέργεια εξωτερικών δυνάμεων

Στη γενική περίπτωση, όπου η δύναμη  $\Delta P$  έχει τυχαία διεύθυνση, ορίζουμε το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{n}$ , οπότε αναλύοντας το διάνυσμα της δύναμης σε μια συνιστώσα παράλληλη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_n$ ) και μια συνιστώσα κάθετη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_t$ ) και άρα συνεπίπεδη στην επιφάνεια  $A$ , εξάγουμε τους παρακάτω ορισμούς :

Ορθή Τάση :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \quad (1.1.2)$$

Διατμητική Τάση :

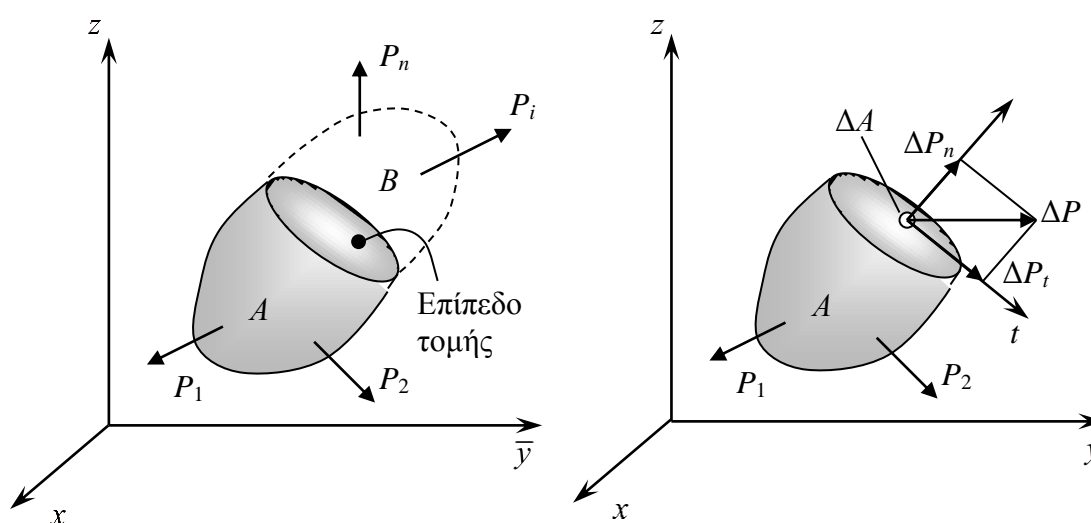
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \quad (1.1.3)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τη διάτμηση ως εξής :

**Διάτμηση είναι το εντατικό αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις σε συνδυασμό με τις ορθές τάσεις**

αποκαθιστούν την ισορροπία για κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός στερεού σώματος, ενώ ταυτόχρονα είναι υπαίτιες για εσωτερικές παραμορφώσεις, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα μηχανισμό μεταβίβασης της εξωτερικής καταπόνησης του σώματος (καθολικές – επιφανειακές δυνάμεις) στο εσωτερικό του.

Είναι λοιπόν προφανές ότι κατά τον σχεδιασμό των έργων πολιτικού μηχανικού είναι απαραίτητος ο ακριβέστερος, όσο το δυνατόν, υπολογισμός των εσωτερικών εντατικών μεγεθών (ορθές και διατμητικές τάσεις), καθώς και των προκαλούμενων παραμορφώσεων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η **Θεωρία της Ελαστικότητας**. Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις όποιες παραδοχές κάνει για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία, την εξωτερική φόρτιση και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων σε κάθε σημείο του.



Σχήμα 1.1.2 Επίπεδη τομή σε ελαστικό σώμα

## 1.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα

Στη γενικότερη περίπτωση κάθε πρόβλημα πολιτικού μηχανικού αντιμετωπίζεται από τη Θεωρία Ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο. Όπως προαναφέρθηκε, η εσωτερική απόκριση ενός σώματος σε εξωτερική καταπόνηση περιγράφεται από τις αναπτυσσόμενες τάσεις και τις προκαλούμενες παραμορφώσεις.

### 1.2.1 Τάσεις

Για τον καθορισμό της έννοιας της τάσεως στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, μορφής κύβου με απειροστές διαστάσεις ( $dx, dy, dz$ ), οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $Oxyz$  (Σχήμα 1.2.1). Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκούνται δυνάμεις οι οποίες εάν διαιρεθούν με την επιφάνεια και αναλυθούν σε συνιστώσες παράλληλες στους άξονες  $x, y, z$  προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες των τάσεων σε μητρική μορφή

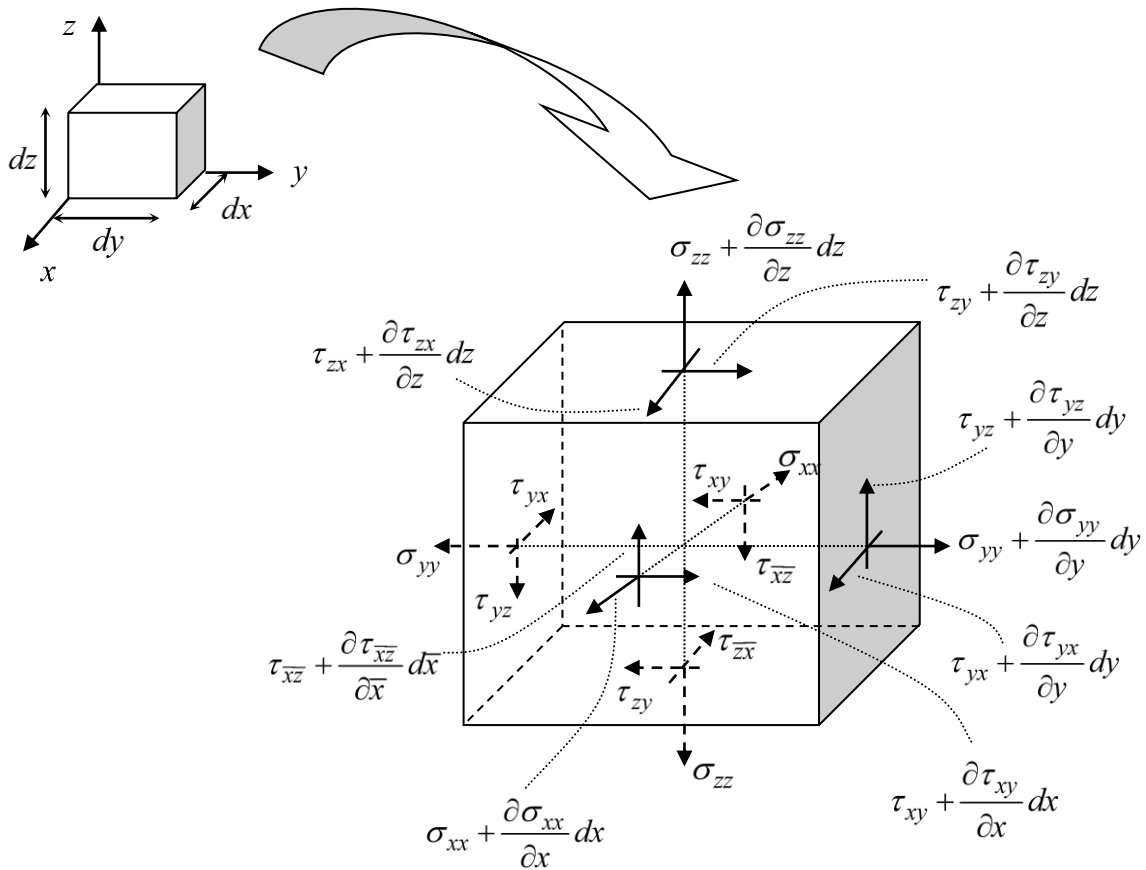
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

όπου

$\sigma_{ii} (i=x, y, z) :$  οι ορθές τάσεις

$\tau_{ij} (i,j=x, y, z) :$  οι διατμητικές τάσεις

Όπως είναι γνωστό το παραπάνω μητρώο αποτελεί έναν συμμετρικό τανυστή 2<sup>ης</sup> τάξης. Οι συνιστώσες των τάσεων αποτελούν συναρτήσεις της θέσης του σημείου στο ελαστικό σώμα. Επομένως μεταβάλλονται κατά την μετακίνηση του επιπέδου αναφοράς κατά  $dx, dy, dz$ . Τη μεταβολή αυτή την εκφράζουμε με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor, διατηρώντας τους δύο πρώτους όρους (Σχήμα 1.2.1).



**Σχήμα 1.2.1** Συνιστώσες τάσεων σε στοιχειώδη κύβο διαστάσεων  $dx, dy, dz$

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο τα εξής :

- Οι δείκτες  $i, j$  στον συμβολισμό  $\tau_{ij}$  δηλώνουν αντίστοιχα τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο και τη διεύθυνση του διανύσματος της συνιστώσας των τάσεων.
- Ορίζουμε ως θετικές ορθές τάσεις τις εφελκυστικές και ως αρνητικές τις θλιπτικές. Όσον αφορά τις διατμητικές, θεωρούμε ότι αυτές είναι θετικές εάν έχουν την φορά των

θετικών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος, εφόσον η αντίστοιχη θετική ορθή τάση έχει κι αυτή φορά θετικού άξονα. Αντίστοιχα εάν η ορθή τάση έχει φορά αντίθετη του θετικού άξονα, οι θετικές φορές των διατμητικών αντιστρέφονται.

Εφαρμόζοντας στον στοιχειώδη κύβο (Σχήμα 1.2.1) τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τις τρεις διευθύνσεις  $x, y, z$  προκύπτουν (εφαρμόζοντας απλή άλγεβρα) οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Διεύθυνση } x : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\text{Διεύθυνση } y : \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + p_y = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\text{Διεύθυνση } z : \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + p_z = 0 \quad (1.2.4)$$

όπου

$p_x, p_y, p_z$  : οι συνιστώσες του διανύσματος της δύναμης πεδίου ανά μονάδα όγκου

Σημειώνουμε ότι οι τρεις εξισώσεις ροπών έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή των σχέσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1.2.5)$$

Τέλος είναι χρήσιμο για την περαιτέρω ανάλυση που θα ακολουθήσει να παραθέσουμε τη σχέση μεταξύ των συνιστωσών του ταυυστή των τάσεων που δρουν σε ένα σημείο  $O$  και του διανύσματος τάσης  $\sigma_n$  που δρα σε επίπεδο τυχούσας διεύθυνσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα  $\vec{n}$  που διέρχεται από το  $O$ . Θεωρούμε το στοιχειώδες τετράεδρο (Σχήμα 1.2.2). Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας για τη διεύθυνση  $\vec{x}$  θα έχουμε

$$\tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS_x - \tau_{yx} \cdot dS_y - \tau_{zx} \cdot dS_z - f_x \cdot dV = 0 \quad (1.2.6)$$

όπου

$dS_x, dS_y, dS_z, dS, dV$  : το εμβαδόν των πλευρών  $OAC, OAB, OBC, ABC$  και ο όγκος του τετραπλεύρου αντίστοιχα

Ισχύει ότι

$$dS_x = dS \cdot \lambda_{nx} \quad (1.2.7)$$

$$dS_y = dS \cdot \lambda_{ny} \quad (1.2.8)$$

$$dS_z = dS \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.9)$$

$$dV = dS \cdot h \quad (1.2.10)$$

όπου

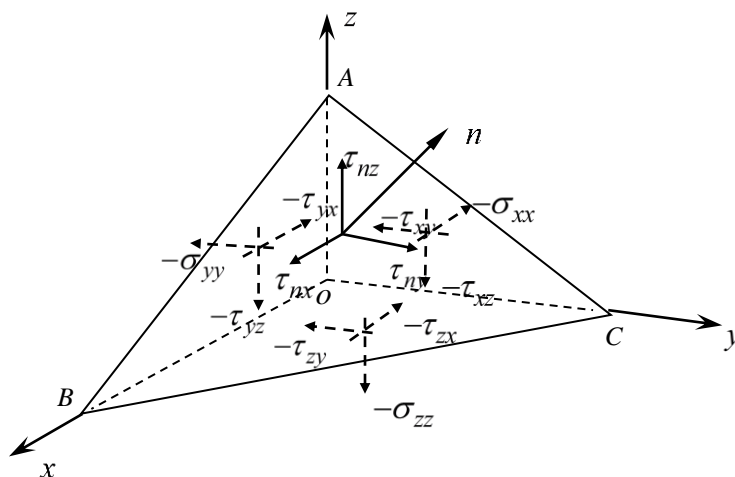
$h$  : η απόσταση της πλευράς  $ABC$  από το  $O$  και  $\lambda_{ni} (i = x, y, z)$  τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{n}$  με τους άξονες  $x, y, z$

Αντικαθιστώντας τις (1.2.7)-(1.2.10) στην εξίσωση ισορροπίας (1.2.6) προκύπτει



$$\begin{aligned} \tau_{nx} \cdot dS - \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot dS \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot dS \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot dS \cdot h = 0 \rightarrow \\ \tau_{nx} - \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} - \tau_{yx} \cdot \lambda_{ny} - \tau_{zx} \cdot \lambda_{nz} - f_x \cdot h = 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Ομοίως και για τις διευθύνσεις  $y$  και  $z$ .



Σχήμα 1.2.2 Συνιστώσες των τάσεων επιπέδου τυχούσης διεύθυνσης  $\vec{n}$

Για τετράεδρο με απειροελάχιστες διαστάσεις ( $h \rightarrow 0$ ) και με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy προκύπτουν τελικά οι παρακάτω σχέσεις

$$\tau_{xn} = \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.12)$$

$$\tau_{yn} = \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.13)$$

$$\tau_{zn} = \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} \quad (1.2.14)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε παρακάτω χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τις συνοριακές συνθήκες στα προβλήματα Τρισδιάστατης Ελαστικότητας.

## 1.2.2 Μετατοπίσεις - Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό σώμα στηρίζεται έτσι ώστε να εμποδίζονται οι μετακινήσεις στερεού σώματος, κάτω από την επενέργεια εξωτερικών φορτίσεων το σώμα παραμορφώνεται και επομένως κάθε υλικό σημείο του θα υφίσταται μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις αυτές περιγράφονται από το λεγόμενο **πεδίο μετατοπίσεων**, δηλαδή συναρτήσεις της θέσης του σημείου  $(x, y, z)$  που εκφράζουν τις μετατοπίσεις κατά τις τρεις διευθύνσεις  $x, y$  και  $z$

$$\text{Μετατόπιση κατά } x: \quad u = u(x, y, z) \quad (1.2.15)$$

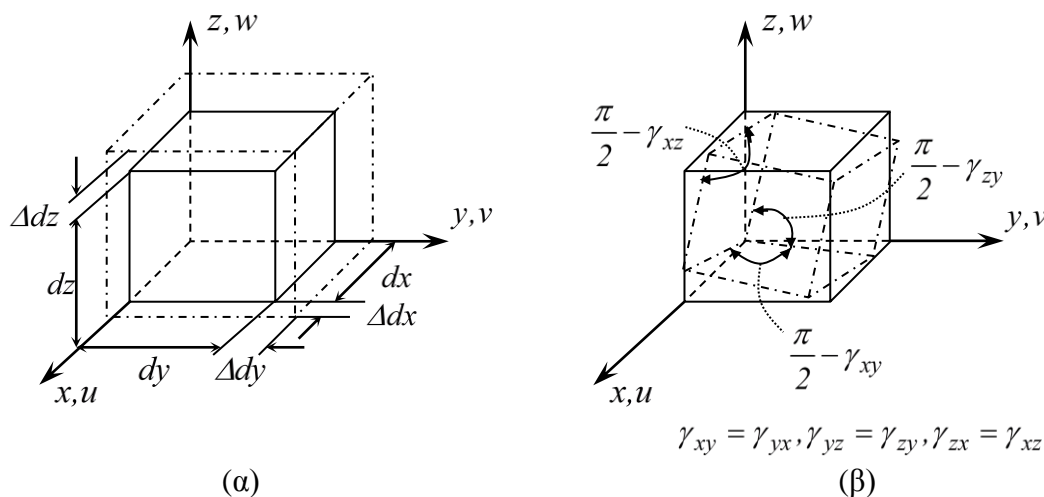
$$\text{Μετατόπιση κατά } y: \quad v = v(x, y, z) \quad (1.2.16)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } z: \quad w = w(x, y, z) \quad (1.2.17)$$

Για να συσχετίσουμε τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις θεωρούμε πάλι τον στοιχειώδη κύβο, διαστάσεων  $dx, dy, dz$  (Σχήμα 1.2.3 α,β). Επισημαίνουμε ότι στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας υιοθετούμε την **παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων**. Έτσι

ορίζουμε τις ορθές παραμορφώσεις ως τον λόγο μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος. Π.χ. κατά τη διεύθυνση  $x$  θα είναι

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.2.18)$$



**Σχήμα 1.2.3** Παραμόρφωση στοιχειώδους κύβου:  
ορθές παραμορφώσεις(α), διατμητικές παραμορφώσεις (β).

Όπως και με τις συνιστώσες των τάσεων, έτσι κι εδώ εκφράζουμε τη μεταβολή των τιμών των μετατοπίσεων από σημείο σε σημείο με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor  $\left( \Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)$ . Άρα τελικά προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.19)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.21)$$

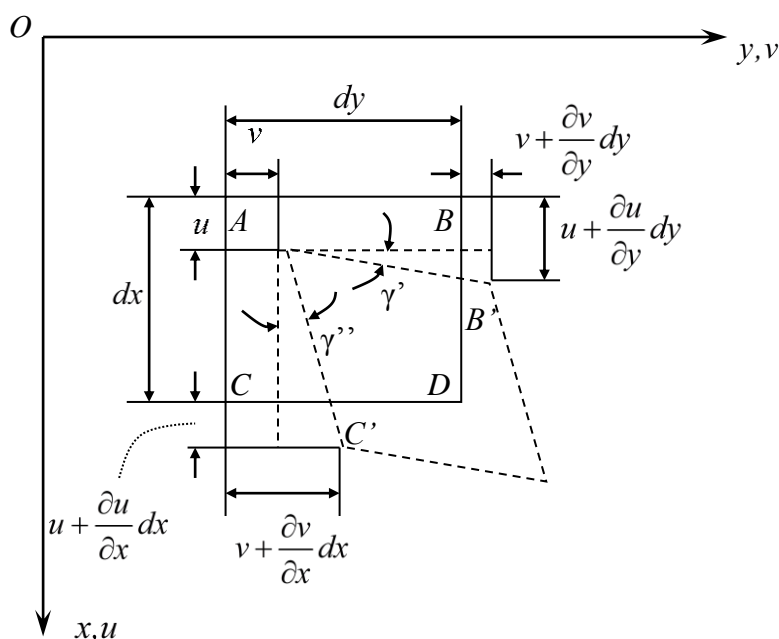
Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την στροφή των αρχικά κάθετων εδρών του κύβου. Εξετάζοντας την προβολή της έδρας στο Καρτεσιανό επίπεδο  $xOy$  (Σχήμα 1.2.4), ορίζουμε τη διατμητική παραμόρφωση

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{yx} \quad (1.2.22)$$

Ομοίως ορίζονται οι διατμητικές παραμορφώσεις στα επίπεδα  $yz$  και  $zx$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \quad (1.2.23)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} \quad (1.2.24)$$



Σχήμα 1.2.4 Διαμητικές παραμορφώσεις στοιχειώδους κύβου στο επίπεδο  $xOy$

Όμοια λοιπόν με τις τάσεις, ορίζεται ο συμμετρικός τανυστής 2<sup>ης</sup> τάξης, ο οποίος καθορίζει πλήρως την παραμόρφωση που υφίσταται το σώμα σ' ένα υλικό του σημείο με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ .

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

Όπως παρατηρούμε από τις εξισώσεις (1.2.19)-(1.2.24) οι συνιστώσες της παραμόρφωσης  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  ( $i, j = x, y, z$ ) εκφράζονται μονοσήμαντα σαν συναρτήσεις των  $u$ ,  $v$  και  $w$ . Ας θεωρήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή ας υποθέσουμε ότι οι  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  είναι γνωστές συναρτήσεις και θέλουμε να εκφράσουμε τις συνιστώσες  $u$ ,  $v$ ,  $w$  συναρτήσει αυτών. Παρατηρούμε ότι έχουμε έξι εξισώσεις για τρεις αγνώστους. Χρησιμοποιώντας τις τρεις από αυτές και λύνοντας ως προς  $u$ ,  $v$  και  $w$ , θα προκύψουν τιμές οι οποίες, εν γένει, δεν θα ικανοποιούν τις υπόλοιπες τρεις εξισώσεις. Επομένως οι συναρτήσεις  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$  δεν μπορεί να είναι αυθαίρετες, αλλά θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **εξισώσεις συμβιβαστού**. Οι εξισώσεις συμβιβαστού αποτελούν τη μαθηματική διατύπωση της συνθήκης συνέχειας του παραμορφώσιμου σώματος. Δηλαδή θέτουν περιορισμούς στη μορφή των εξισώσεων  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ , έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η σύνδεση των παραμορφωμένων κύβων και να μην

λύεται η συνέχεια του υλικού. Οι εξισώσεις συμβιβαστού προκύπτουν από τις σχέσεις (1.2.19)-(1.2.24) με απαλοιφή των συνιστωσών των μετατοπίσεων και ύστερα από διαδοχικές παραγωγίσεις. Έτσι καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.26)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \quad (1.2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} \quad (1.2.31)$$

### 1.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας

Με όσα έχουν αναφερθεί συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης ελαστικότητας προσδιορίζεται από 15 αγνώστους :

Έξι συνιστώσες τάσεων

Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων

Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων

Όμως μέχρι τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο 9 εξισώσεις :

Τρεις εξισώσεις ισοροπίας

Έξι εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις συμβιβαστού δεν αποτελούν πρόσθετες (ανεξάρτητες) εξισώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση. Απλά εκφράζουν τους περιορισμούς για την μορφή των συναρτήσεων  $\varepsilon_{ij}(x, y, z)$ , ώστε να μην καταλύεται η συνέχεια του υλικού.

Επομένως το πρόβλημα είναι 6 φορές άοριστο. Στη θεωρία της ελαστικότητας αίρεται αυτή η αοριστία με την εισαγωγή σχέσεων που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις**. Στην ουσία εισάγουν τις μηχανικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό. Οι μηχανικές ιδιότητες βασίζονται σε κάποιες παραδοχές που γίνονται στα πλαίσια της Ελαστικής Θεωρίας (νόμος του Hooke). Στο εξής θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές :

➤ Το υλικό είναι **ομοιογενές**. Επομένως οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε σημείο του υλικού.

- Το υλικό είναι **ισότροπο**. Δηλαδή οι ιδιότητες ενός σημείου του υλικού παραμένουν ίδιες, ανεξαρτήτως της διεύθυνσης την οποία εξετάζουμε.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό**. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα των τάσεων είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών των παραμορφώσεων. Επίσης με τον μηδενισμό των επιβαλλόμενων τάσεων το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.2.32)$$

όπου ισχύει η σύμβαση πρόσθεσης των δεικτών

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι καταστατικές εξισώσεις σε μητρική μορφή γράφονται

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{12} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k_{11} - k_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.33)$$

Για να βρούμε τις σταθερές  $k_{11}$  και  $k_{12}$  (ελαστικές σταθερές) εκτελούμε πειράματα απλού εφελκυσμού  $\left( \varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \varepsilon_{εγκαρσια} = -\nu \cdot \frac{\sigma}{E} \right)$  και απλής διάτμησης  $(\tau = G \cdot \gamma)$ . Οπότε προκύπτουν

$$k_{11} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad k_{12} = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad (k_{11} - k_{12}) = 2 \cdot G \quad (1.2.34)$$

όπου

$E$  : μέτρο ελαστικότητας

$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$  : μέτρο διάτμησης

$\nu$  : λόγος Poisson ( $0 < \nu < 0,5$ )

Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{xx} + \nu \cdot (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \quad (1.2.35)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{yy} + \nu \cdot (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \right] \quad (1.2.36)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \left[ (1 - \nu) \cdot \varepsilon_{zz} + \nu \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \quad (1.2.37)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (1.2.38)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{yz} \quad (1.2.39)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \gamma_{zx} \quad (1.2.40)$$

ή

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \nu \cdot (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (1.2.41)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \nu \cdot (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad (1.2.42)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{zz} - \nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (1.2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xy} \quad (1.2.44)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{yz} \quad (1.2.45)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{zx} \quad (1.2.46)$$

#### 1.2.4 Τα τρία Θεμελιώδη Προβλήματα της Ελαστικότητας

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι το μαθηματικό πρόβλημα της ελαστικότητας έγκειται στον υπολογισμό 15 αγνώστων

**Έξι συνιστώσες τάσεων**

**Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων**

**Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων**

Επίσης έχουμε ένα σύστημα 15 διαφορικών εξισώσεων

**Τρεις εξισώσεις ισορροπίας**

**Έξι εξισώσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων**

**Έξι εξισώσεις τάσεων – παραμορφώσεων**

Επομένως το πρόβλημα επιδέχεται λύση (που όπως αποδεικνύεται είναι μοναδική). Η επίλυση όμως των διαφορικών εξισώσεων οδηγεί σε γενική λύση. Για να βρούμε την ειδική λύση του προβλήματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την ταυτόχρονη ικανοποίηση επιπρόσθετων συνθηκών στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος, τις λεγόμενες **συνοριακές συνθήκες**. Έτσι λοιπόν ανάλογα με τη φύση των συνοριακών συνθηκών προκύπτουν τα τρία θεμελιώδη προβλήματα.

##### A) Πρόβλημα Neumann

Στο πρόβλημα αυτό οι συνοριακές συνθήκες αφορούν την εντατική κατάσταση στα σύνορα του παραμορφώσιμου σώματος. Εάν  $\Gamma$  είναι το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν το σύνορο, τότε με βάση τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{xy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{xz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{xn} \\ \tau_{yx} \cdot \lambda_{nx} + \sigma_{yy} \cdot \lambda_{ny} + \tau_{yz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{yn} \\ \tau_{zx} \cdot \lambda_{nx} + \tau_{zy} \cdot \lambda_{ny} + \sigma_{zz} \cdot \lambda_{nz} &= \sigma_{zn} \end{aligned} \quad , \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.47)$$

## Β) Πρόβλημα Dirichlet

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν τις μετατοπίσεις των σημείων του συνόλου  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u \\ v(x, y, z) &= v \quad , \text{ για κάθε σημείο στο σύνορο } \Gamma \\ w(x, y, z) &= w \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

## Γ) Μικτό Πρόβλημα

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται οι τάσεις για τα σημεία  $(x, y, z)$  του συνόρου  $\Gamma_u$  και οι μετατοπίσεις των σημείων του συνόρου  $\Gamma_v$  , όπου  $\Gamma_u \cup \Gamma_v = \Gamma$ .

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στα πλαίσια της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων οι συνοριακές συνθήκες λαμβάνονται υπόψη για τη γεωμετρία του φορέα που αντιστοιχεί στην **απαραμόρφωτη** κατάσταση που είναι δεδομένη και όχι στην παραμορφωμένη που συνιστά ζητούμενο του προβλήματος. Λόγω των μικρών μετακινήσεων η διαφορά της παραμορφωμένης από την απαραμόρφωτη κατάσταση είναι επουσιώδης και αμελείται.

Ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, μπορούμε απαλείφοντας κάποιους αγνώστους να μειώσουμε το συνολικό αριθμό των διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση που επιλέγονται ως βασικοί άγνωστοι οι 6 συνιστώσες των τάσεων χρησιμοποιούμε τις 6 εξισώσεις συμβιβαστού [σχέσεις (1.2.26)-(1.2.31)] (στις οποίες ήδη έχει γίνει η απαλοιφή των  $u, v, w$ ), όπου εκφράζουμε με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.41)-(1.2.46) τις συνιστώσες  $\epsilon_{ij}$  συναρτήσει των  $\tau_{ij}$ . Καταλήγουμε έτσι σε ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους ( $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ )

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2.49)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.50)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.51)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.2.52)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1.2.53)$$

$$(1+\nu) \cdot \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0 \quad (1.2.54)$$

όπου

$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  : η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  : ο τελεστής Laplace

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές ως **εξισώσεις Beltrami – Michel**. Έτσι η περίπτωση του προβλήματος Neumann ανάγεται στον υπολογισμό των συναρτήσεων  $\tau_{ij}(x, y, z)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Beltrami – Michel (1.2.49)-(1.2.54) και οι συνοριακές συνθήκες με τη μορφή των σχέσεων (1.2.12)-(1.2.14).

Το πρόβλημα της ελαστικότητας θα μπορούσε επίσης να εκφραστεί από ένα σύστημα τριών εξισώσεων που θα έχουν ως αγνώστους τις συνιστώσες των μετατοπίσεων  $u, v, w$ . Για τον σκοπό αυτό στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας (1.2.2)-(1.2.4) αντικαθιστούμε τις συνιστώσες  $\tau_{ij}$  συναρτήσει των  $\varepsilon_{ij}$  με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις παραμορφώσεων – μετατοπίσεων (1.2.19)-(1.2.24) εκφράζουμε τις συνιστώσες των παραμορφώσεων συναρτήσει των  $u, v, w$  οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις, γνωστές ως εξισώσεις Lamé

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P_x}{G} = 0 \quad (1.2.55)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{P_y}{G} = 0 \quad (1.2.56)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{P_z}{G} = 0 \quad (1.2.57)$$

όπου

$$\Psi = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad : \quad \text{η πρώτη αναλλοίωτος του τανυστή των}$$

παραμορφώσεων

Για το μεν πρόβλημα Dirichlet η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών

$$u(x, y, z) = u \quad (1.2.58)$$

$$v(x, y, z) = v \quad , \text{για κάθε σημείο } (x, y, z) \text{ στο σύνορο } \Gamma \quad (1.2.59)$$

$$w(x, y, z) = w \quad (1.2.60)$$

Ενώ για το πρόβλημα Neumann η λύση δίνεται από το σύστημα των εξισώσεων (1.2.55)-(1.2.57) με συνοριακές συνθήκες

$$\tau_{xn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nx} + G \left[ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \lambda_{nx} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \lambda_{ny} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \lambda_{nz} \right] \quad (1.2.61)$$

$$\tau_{yn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{ny} + G \left[ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \lambda_{ny} + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \lambda_{nz} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \lambda_{nx} \right] \quad (1.2.62)$$

$$\tau_{zn} = \lambda \cdot \Psi \cdot \lambda_{nz} + G \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial z} \lambda_{nz} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lambda_{nx} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \lambda_{ny} \right] \quad (1.2.63)$$

όπου

$$\lambda = \frac{G \cdot (2 \cdot G - E)}{E - 3 \cdot G} \quad : \quad \text{σταθερά η οποία εξαρτάται από τις ελαστικές σταθερές } E \text{ και } G$$



Οι παραπάνω σχέσεις προέκυψαν από τις σχέσεις (1.2.12)-(1.2.14) στις οποίες εκφράσαμε τις συνιστώσες  $\tau_{ij}$  συναρτήσει των  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) μέσω των σχέσεων (1.2.35)-(1.2.40) και στη συνέχεια συναρτήσει των  $u, v, w$  με τη βοήθεια των σχέσεων (1.2.19)-(1.2.24).

Τέλος για το μικτό πρόβλημα οι συνοριακές συνθήκες απαρτίζονται από τις σχέσεις (1.2.61)-(1.2.63) για το σύνολο  $\Gamma_u$  και από τις σχέσεις (1.2.58)-(1.2.60) για το σύνολο  $\Gamma_v$ .

Συνεπώς τρία θεμελιώδη προβλήματα, θεωρητικά, προσδιορίζουν με ακρίβεια την εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση οποιουδήποτε σώματος με τυχούσα γεωμετρία και εξωτερική φόρτιση και προφανώς δίνουν μια ακριβή λύση και στο πρόβλημα των καμπτόμενων δοκών με διάτμηση, έχοντας ως μόνες παραδοχές :

- **Τις μικρές παραμορφώσεις του σώματος**
- **Την ομοιομορφία και την ισοτροπία του υλικού**
- **Την ελαστική (γραμμική) φύση του υλικού**

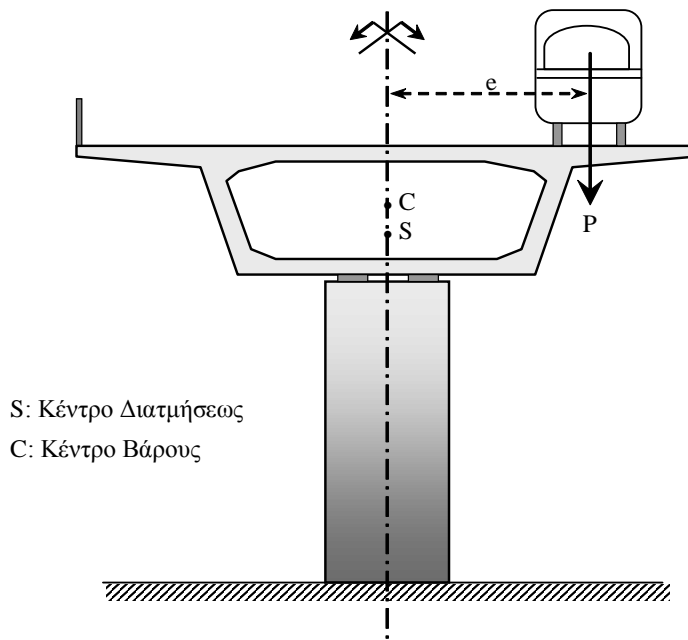
Οι παραπάνω παραδοχές δεν δημιουργούν μεγάλες ανακρίβειες. Σε ορισμένες περιπτώσεις βρίσκονται πολύ κοντά στην πραγματικότητα, όπως π.χ σε προεντεταμένους φορείς (γέφυρες) και σε φορείς όπου η μέγιστη τάση δεν ξεπερνά το όριο αναλογίας του υλικού. Παρόλα αυτά η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του τρισδιάστατου ελαστικού προβλήματος παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες. Υπάρχει εν τούτοις μια κατηγορία προβλημάτων στα οποία τόσο η φύση του σώματος όσο και ο τρόπος επιβολής της φόρτισης επιβάλλουν ορισμένες απλοποιήσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις με την εισαγωγή ορισμένων πρόσθετων παραδοχών μεταπίπτουμε στο πρόβλημα της **διδιάστατης ελαστικότητας** ή αλλιώς στο **επίπεδο εντατικό πρόβλημα**.



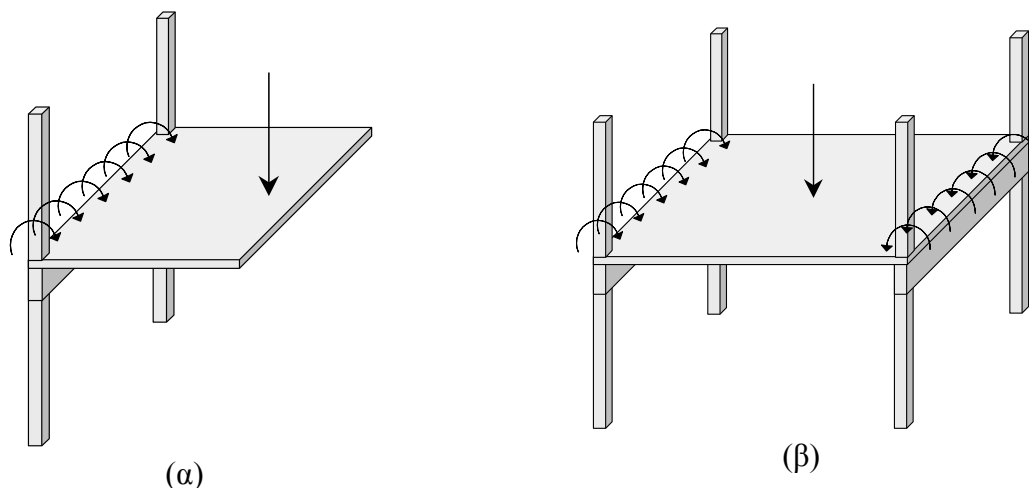
## 2 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου

### 2.1 Προκαταρκτικές έννοιες

Στρέψη ράβδου καλείται η φόρτιση εκείνη κατά την οποία ένα ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε μια διατομή, έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου και το ελεύθερο διάνυσμα της ροπής  $M_t$  του ζεύγους να έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Η στρέψη στα ραβδωτά στοιχεία φορέων εμφανίζεται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το επίπεδο της εξωτερικής φορτίσεως δεν διέρχεται από το κέντρο διατομής  $S$  (Σχήμα 2.1.1), με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις προκαλώντας στρέβλωση των διατομών τους.

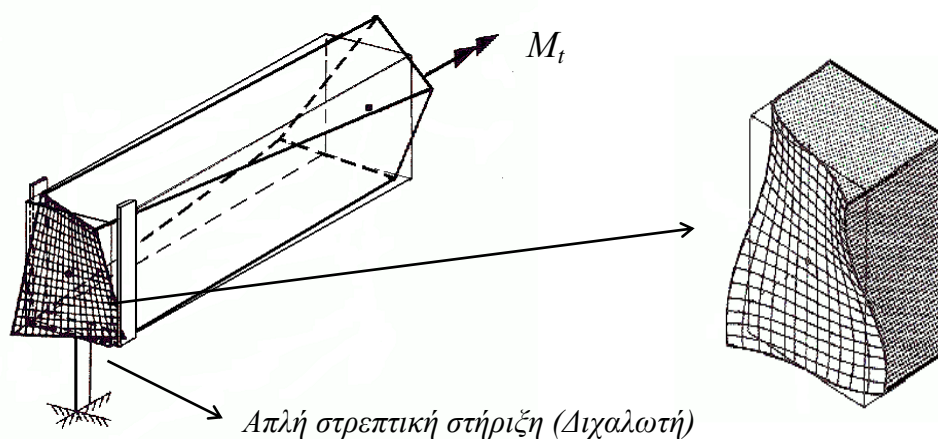


**Σχήμα 2.1.1** Ράβδος κιβωτιοειδούς μορφής υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διατομής φόρτιση.



Σχήμα 2.1.2 Παραδείγματα άμεσης (α) και έμμεσης (β) στρέψης δοκού.

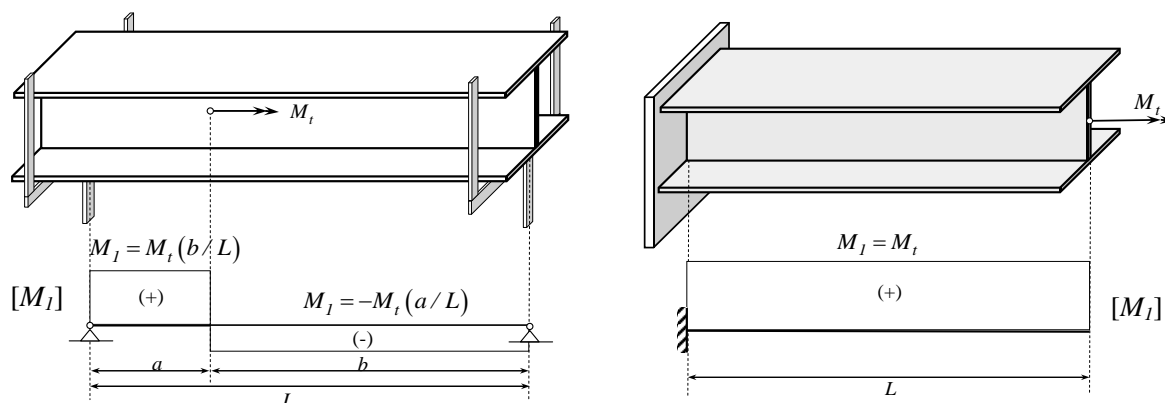
Τη στρέψη ως στατική ένταση μπορούμε να διακρίνουμε σε άμεση και έμμεση στρέψη (Σχήμα 2.1.2). Οι στρεπτικές ροπές στην περίπτωση της άμεσης στρέψεως είναι απαραίτητες για την ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας του φορέα (στρέψη ισορροπίας). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι καμπύλοι φορείς με έκκεντρη φόρτιση. Οι στρεπτικές ροπές στην περίπτωση της έμμεσης στρέψεως οφείλονται αποκλειστικά σε παρεμπόδιση της γωνιακής παραμόρφωσης της εισαγόμενης από παρακείμενα στοιχεία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ακραία δοκός φορέα μορφής πλακοδοκού, η οποία καταπονείται σε έμμεση στρέψη λόγω της κάμψης της μονολιθικά συνδεδεμένης πλάκας με τη δοκό.



Σχήμα 2.1.3 Ανεμπόδιση στρέβλωση ορθογωνικής διατομής.

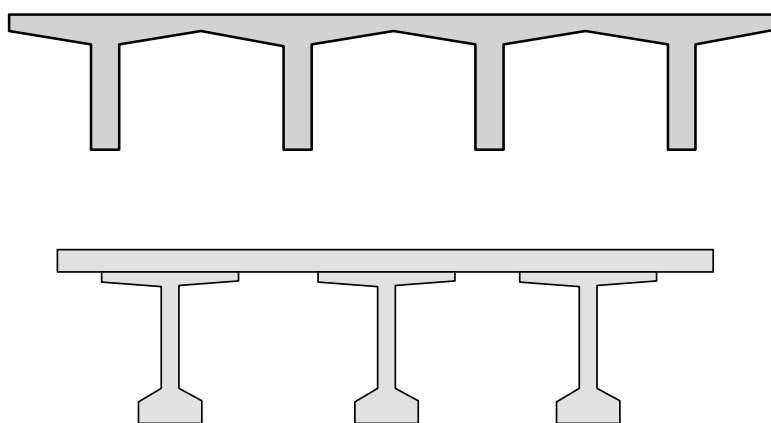
Η ανάπτυξη της θεωρίας στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση της ράβδου με κυκλική διατομή. Ο Saint Venant (1855) στηριζόμενος στη θεωρία του Coulomb την οποία τροποποίησε κατάλληλα ώστε να ισχύει και για μη κυκλικές διατομές, απέδειξε ότι επίπεδη εγκάρσια διατομή ράβδου μη κυκλικής διατομής υποβαλλόμενη σε στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη. Πιο συγκεκριμένα, η επιφάνεια της αρχικά επίπεδης διατομής γίνεται στρεβλή. Η στρέψη

κατά Saint Venant, η οποία είναι ομοιόμορφη κατά μήκος της ράβδου καλείται και ελεύθερη, διότι η στρέβλωση της διατομής μπορεί να αναπτυχθεί ανεμπόδιστα.



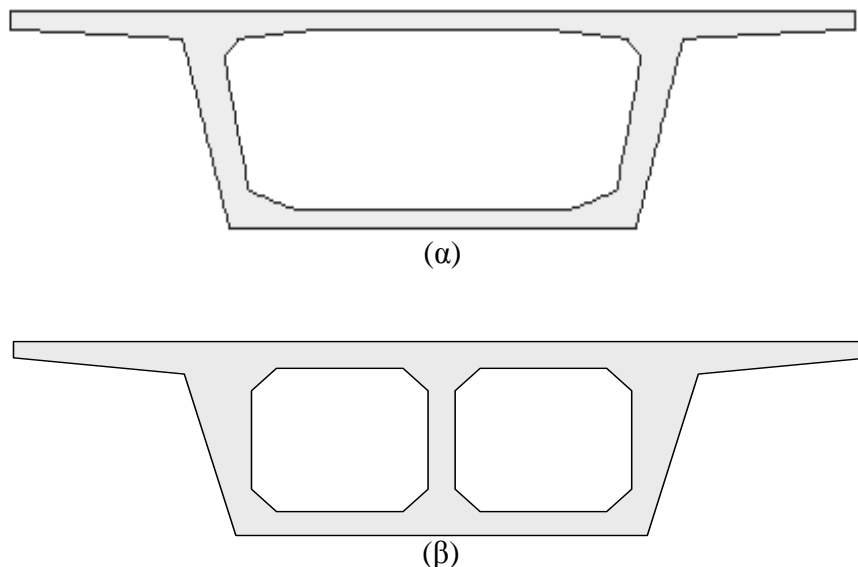
**Σχήμα 2.1.4** Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης.

Στην περίπτωση στρεπτικά καταπονούμενης ράβδου, κατά την οποία οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση παρεμποδίζονται λόγω φορτίσεως ή συνθηκών στηρίξεως (παρεμποδιζόμενη στρέβλωση διατομής από μετωπική εγκάρσια νεύρωση), η στρέψη είναι ανομοιόμορφη και αναπτύσσονται ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες της στρεβλώσεως και συνεπώς μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Οι επιπτώσεις της παρεμποδιζόμενης στρεβλώσεως έγιναν αντιληπτές πρώτα από τον Marguerre (1940).



**Σχήμα 2.1.5** Διατομές φορέων τεχνικών έργων με έντονη στρέβλωση.

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η στρέψη αναφορικά με τον τρόπο ανάληψης των στρεπτικών ροπών από τη διατομή, μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανεμπόδιστη στρέψη *Saint Venant* (ομοιόμορφη στρέψη - χαρακτηρίζεται από τη στρεπτική σταθερά  $I_t$  της διατομής) και ως παρεμποδιζόμενη στρέψη με δυνάμεις στρέβλωσης (ανομοιόμορφη στρέψη - χαρακτηρίζεται από τη σταθερά στρεβλώσεως  $C_S$ ).



**Σχήμα 2.1.6** Διατομή απλού (α) και πολλαπλού (β) κιβωτίου φορέα τεχνικών έργων με μεγάλη στρεπτική αντίσταση.

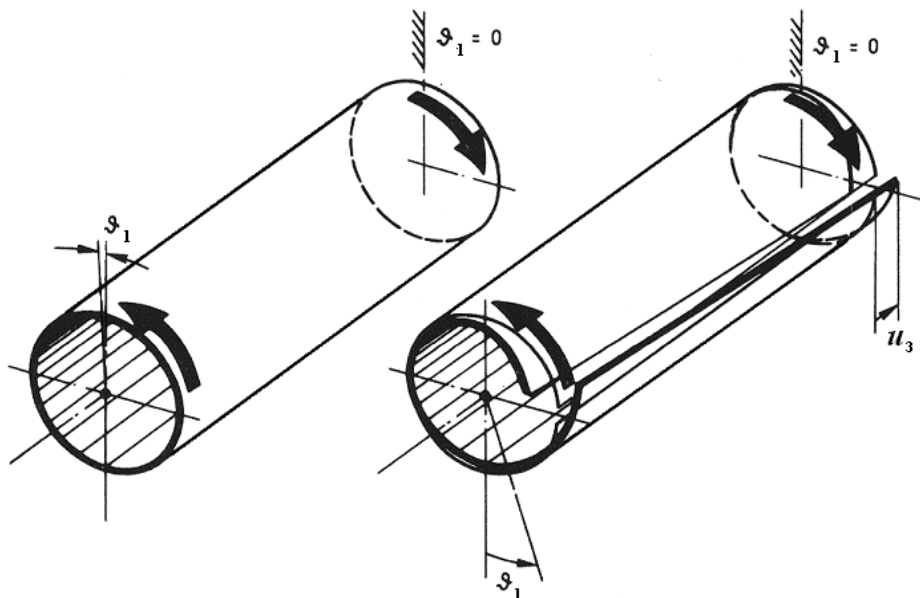
Κατά την ομοιόμορφη ή ανεμπόδιστη στρέψη *Saint Venant* (Σχήμα 2.1.3), η ισορροπία εξασφαλίζεται από κλειστή ροή στρεπτικών διατμητικών τάσεων (ροή κατά Bredt). Κατά την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, όπως προαναφέρθηκε ο φορέας ανθίσταται στις επιβαλλόμενες στρεπτικές ροπές με την ανάπτυξη ορθών τάσεων λόγω παρεμπόδισης της διαμήκου παραμόρφωσης (Σχήμα 2.1.4). Η στρέψη με στρέβλωση είναι ιδιαίτερα εμφανής σε φορείς από οπλισμένο ή προεντεταμένο σκυρόδεμα με ανοικτές διατομές που περιλαμβάνουν τουλάχιστον τρεις πλευρές, καθεμία από τις οποίες αποτελείται από τοίχωμα ή κλειστή διατομή (Σχήμα 2.1.5). Στις περιπτώσεις αυτές οι τάσεις λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης πρέπει να προσδιορίζονται, διότι μπορεί να είναι σημαντικές. Σε περιπτώσεις απλών ή πολλαπλών κλειστών διατομών (Σχήμα 2.1.6), η επιρροή της παρεμπόδισης της στρέβλωσης μπορεί να αγνοηθεί, ιδιαίτερα αν ταυτόχρονα ασκείται σημαντική καμπτική καταπόνηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αντιπαράθεσης των στρεπτικών μετατοπίσεων (Σχήμα 2.2.1) αποτελεί η διατομή κλειστού κυκλικού σωλήνα (απουσία στρέβλωσης, μεγάλη στρεπτική αντίσταση) και του ανοικτού κυκλικού σωλήνα ίδιων διαστάσεων (ιδιαίτερα εμφανής στρέβλωση, πολύ μικρή στρεπτική αντίσταση). Το παράδειγμα αυτό γίνεται αντιληπτό αν αναλογιστούμε ότι οι συντοριακές συνθήκες στη θέση του ανοίγματος επιβάλλουν μηδενική διατμητική τάση, γεγονός που οδηγεί σε μεγάλες διατμητικές τάσεις στη διατομή προκειμένου να αναληφθεί το στρεπτικό φορτίο. Στον κλειστό σωλήνα ωστόσο, οιαδήποτε νοητή τομή θα δώσει διατμητικές τάσεις διάφορες του μηδενός, γεγονός που κάνει τον κλειστό σωλήνα «υπερστατικό» με αποτέλεσμα να δίδει μεγαλύτερη στρεπτική αντίσταση.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε την ελαστική θεωρία ανομοιόμορφων στρεπτικών ταλαντώσεων ως γενική περίπτωση και τις στρεπτικές ταλαντώσεις χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Για να γίνουν κατανοητές οι διαφορές που υπάρχουν, θα περιγραφούν οι παραδοχές και οι βασικές σχέσεις των δύο θεωριών παράλληλα.

## 2.2 Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψεως

1. *Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.*

Στους καμπύλους φορείς η κάμψη και η στρέψη είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με γεωμετρικές σχέσεις. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Becker (1965), Vlassov (1964, 1965), Dabrowski (1968), κ.ά.



**Σχήμα 2.2.1** Αντιπαράθεση των στρεπτικών μετατοπίσεων ενός κλειστού και ενός ανοικτού κυκλικού σωλήνα ίδιων διαστάσεων.

2. *Η ράβδος υπόκειται μόνο σε περιστροφή περί το διαμήκη άξονά της, όπου ο άξονας στροφής μπορεί να τοποθετείται ελεύθερα. Μετατοπίσεις κάθετες στον άξονα της ράβδου (εκτροπή) δεν υπάρχουν.*

Στη στρέψη ράβδων όπου επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας στροφής διαφορετικός από αυτόν που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης των διατομών αναφέρεται ο Roik (1978). Η κάμψη της ράβδου με την παραδοχή αυτή θεωρείται ανεξάρτητη καταπόνηση. Τούτο δεν ισχύει όμως και στην περίπτωση που η ράβδος υπολογίζεται με θεωρία δευτέρας τάξεως. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Roik et.al. (1972).

3. *Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ( $\gamma_{yz} = 0$ ).*

Σε πολύ λεπτότοιχες διατομές μπορεί η παραδοχή αυτή να μην ισχύει, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν τοπικές καταπονήσεις. Μια σειρά από λύσεις για τέτοια ειδικά προβλήματα μπορεί να βρεθεί στην βιβλιογραφία, έτσι π.χ. για δοκούς μορφής διπλού ταυ (I) από τους Scheer (1955), Oxford (1963), για λεπτότοιχους φορείς κιβωτιοειδούς μορφής από τους Heilig (1961), Steinle (1970), Dittler (1980), και για λεπτότοιχους καμπύλους σωλήνες από τους Klöppel and Friemann (1963). Η παραδοχή της μη αισθητής μεταβολής της μορφής της διατομής κατά τη συστρόφη της λόγω στρέψης αποτελεί προϋπόθεση στους φορείς κιβωτιοειδούς μορφής, ώστε να μπορούν να επιλύονται (όπως συμβαίνει κατά κανόνα) με τις μεθόδους της στατικής των ραβδωτών φορέων. Η προϋπόθεση αυτή κατά κανόνα πληρούται στις προεντεταμένες κιβωτιοειδείς γέφυρες, με την τοποθέτηση εγκάρσιας νεύρωσης (διαδοκίδα) στα άκρα ή και στο μέσο

(ανάλογα με το άνοιγμα, το πλάτος και το ύψος) του κατασκευαζόμενου φορέα, σύμφωνα με τους Leonhardt (1980), Weidemaan (1984), Rossner (1988).

4. *Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.*  
Με την παραδοχή αυτή το σχήμα της διατομής της ράβδου είναι ανεξάρτητο της διαμήκουσ συντεταγμένης. Στη στρέψη ράβδων, όπου το σχήμα των διατομών τους μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους, αναφέρονται οι Lee and Szabo (1967).
5. *Η πρωτογενής (κύρια) στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους.*  
Η αναλογία μεταξύ στρέβλωσης των διατομών της ράβδου και σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους αποδείχθηκε ότι ισχύει στην περίπτωση της γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης από τον Saint Venant. Ο συγκεκριμένος τρόπος στρέβλωσης της διατομής επεκτείνεται και στην παρούσα θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης οδηγώντας σε απλοποίησή της. Η θεώρηση ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης της διατομής, η οποία δεν είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους, καθιστά δυνατή τη διερεύνηση της επιρροής δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων και παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.
6. *Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.*  
Στη στρεπτική καταπόνηση με μεγάλες στροφές αναφέρονται οι Kreuzinger (1969) και Klöppel and Bilstein (1972)
7. *Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.*
8. *Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.*
9. *Αγνοείται η απόσβεση.*  
Στην παρούσα εργασία γίνεται η παραδοχή ότι η απόσβεση της ράβδου ισούται με 0.

Στην ειδική περίπτωση όπου αγνοείται η επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης ισχύει επιπρόσθετα η παραδοχή ότι:

10. *Οι ορθές τάσεις και παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στη ράβδο μπορούν να αμεληθούν.*

### 2.3 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

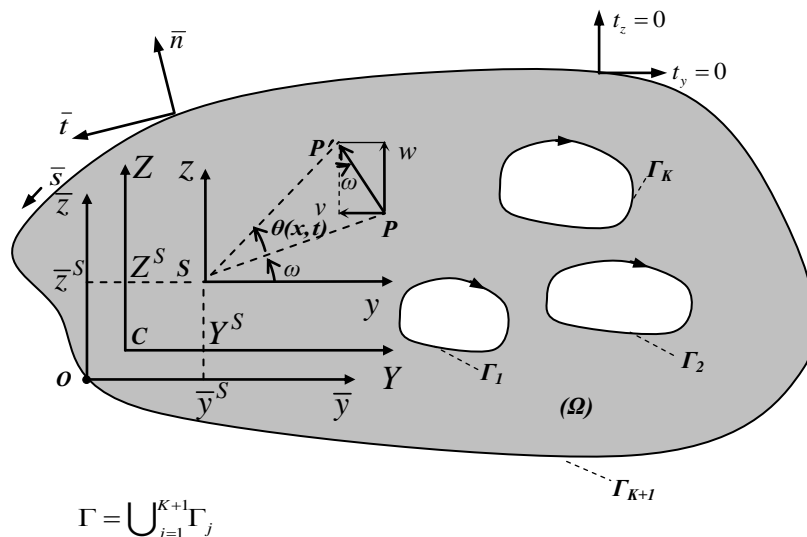
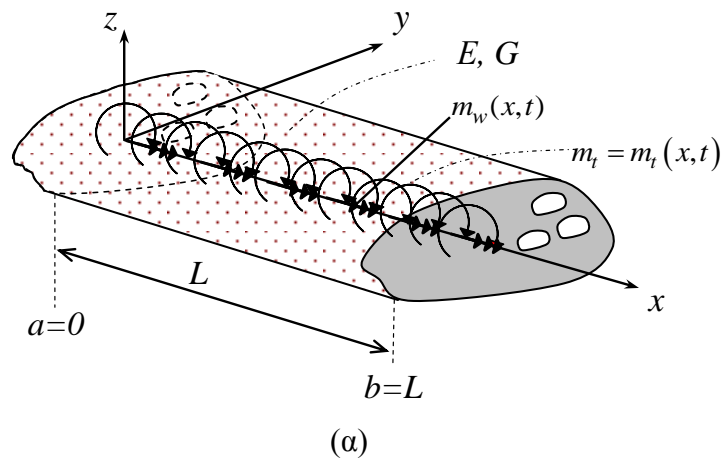
Θεωρούμε πρισματική ράβδο μήκους  $l$  (Σχήμα 2.3.1α), τυχούσας, σταθερής διατομής εμβαδού  $A$ . Το ομογενές ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό της διατομής της δοκού, με μέτρο ελαστικότητας  $E$ , μέτρο διάτμησης  $G$ , και πυκνότητα  $\rho$  καταλαμβάνει το διδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο  $\Omega$  του επιπέδου  $y, z$  που περιβάλλεται από τις καμπύλες  $\Gamma_j$  ( $j=1,2,\dots,K$ ) οι οποίες είναι τμηματικά λείες, δηλαδή μπορούν να έχουν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Στο (Σχήμα 2.3.1β)  $S_{yz}$  είναι το κύριο καμπτικό σύστημα συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της διατομής. Η ράβδος υποβάλλεται



σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη χρονικά μεταβαλλόμενη στρεπτική φόρτιση  $m_t = m_t(x, t)$  και στρεβλωτική φόρτιση  $m_w = m_w(x, t)$  περί τον επιμήκη άξονα της  $x$  (Σχήμα 2.3.1α). Αποτέλεσμα της στρεπτικής αυτής καταπόνησης είναι η στροφή της διατομής της ράβδου ως προς το κέντρο διατομής  $S$  κατά γωνία  $\theta_x(x, t)$ . Το κέντρο διατομής  $S$  ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής της διατομής της ράβδου εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής. Στα επόμενα θεωρούμε ότι στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άλλος άξονας συστροφής.

### 2.3.1 Μετατοπίσεις

Με βάση την ανωτέρω φόρτιση, το πεδίο των μετατοπίσεων  $u, v, w$  κατά τους άξονες  $x, y, z$ , αντίστοιχα (Σχήμα 2.3.1β) για τυχόν σημείο  $P$  θεωρούμε ότι δίδεται ως:



**Σχήμα 2.3.1** Ράβδος τυχούσας διατομής υποβαλλόμενη σε στρεπτική ροπή  $m_t$  και ροπή στρέβλωσης  $m_w$ .

$$u(x, y, z, t) = \theta'_x(x, t) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z, t) \quad (2.3.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -(PP')\sin\omega = -(MP)\theta_x(x, t)\sin\omega = -z\theta_x(x, t) \quad (2.3.2)$$

$$w(x, y, z, t) = (PP')\cos\omega = (MP)\theta_x(x, t)\cos\omega = y\theta_x(x, t) \quad (2.3.3)$$

όπου

- $\theta'_x(x, t) = d\theta_x / dx$  είναι η σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου ανηγμένη στη μονάδα μήκους
- $\phi_S^P(y, z)$  η πρωτογενής συνάρτηση στρεβλώσεως ως προς το κέντρο διατομής  $S$ , η οποία χαρακτηρίζεται και ως κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως. Ο δείκτης  $S$  δείχνει ότι η στρέβλωση αναφέρεται στον άξονα στροφής  $S$ . Η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_S^P$  εκφράζει τη στρέβλωση  $u$  που προκύπτει για μοναδιαία σχετική γωνία στροφής ( $\theta'_x(x, t) = 1$ ). Σύμφωνα με την παραδοχή που εκφράζει η σχέση (2.3.1), η συνάρτηση στρεβλώσεως εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης  $x$  και
- $\phi_S^S(x, y, z, t)$  η δευτερογενής κύρια συνάρτηση στρέβλωσης.

Σύμφωνα με την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, η σχετική γωνία στροφής είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης  $x$  ( $\theta'_x = \theta'_x(x, t)$ ).

### 2.3.2 Παραμορφώσεις

Με τη βοήθεια των μετατοπίσεων που δίδονται από τις σχέσεις (2.3.1)-(2.3.3) και εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων (1.2.19)-(1.2.24) της θεωρίας ελαστικότητας (στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων), λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή παραμορφώσεως ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta'_x \cdot \phi_S^P(y, z) \quad (2.3.4)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta'_x \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (2.3.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta'_x \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) + \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (2.3.9)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ανωτέρω σχέσεις προέκυψαν με την παραδοχή ότι αγνοείται η συνεισφορά της δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης στις εκφράσεις των ορθών παραμορφώσεων.

### 2.3.3 Τάσεις

Με τη βοήθεια του πεδίου παραμορφώσεων που δίνεται από τις σχέσεις (2.3.4)-(2.3.9) και εφαρμόζοντας τις σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων (1.2.35)-(1.2.40) της θεωρίας ελαστικότητας (στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων), λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως ως

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] \stackrel{\nu=0}{\Rightarrow} \sigma_{xx} = E \cdot \theta'_x(x,t) \cdot \phi_S^P(y,z) \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] \stackrel{\nu=0}{\Rightarrow} \sigma_{yy} = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = 0 \stackrel{\nu=0}{\Rightarrow} \sigma_{zz} = 0 \quad (2.3.12)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \theta'_x \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\tau_{xy}^P} + G \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\tau_{xy}^S} \quad (2.3.13)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 0 \quad (2.3.14)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \theta'_x \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\tau_{xz}^P} + G \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\tau_{xz}^S} \quad (2.3.15)$$

όπου οι τελικές εκφράσεις των εξ. (2.3.10)-(2.3.12) έχουν εξαχθεί με την παραδοχή ότι  $\nu = 0$ , όπου  $\nu$  είναι ο λόγος Poisson του υλικού της ράβδου.

Σημειώνεται ότι όσον αφορά την τιμή του μέτρου ελαστικότητας  $E$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε τιμή κρίνεται λογική (βλέπε Κεφάλαιο 3.2.3).

## 2.4 Τοπικές εξισώσεις ισορροπίας, πρωτογενής $\phi_S^P$ , δευτερογενής $\phi_S^S$ συνάρτηση στρέβλωσης

### 2.4.1 Τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3.13), (2.3.15) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας και λαμβάνοντας υπόψη μαζικές αδρανειακές δυνάμεις λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} - \rho \ddot{u} = 0 \quad (2.4.1)$$

Η σχέση (2.4.1) δηλώνει ότι η εντατική κατάσταση της ράβδου υποκείμενης σε στρεπτική καταπόνηση προκύπτει από την επαλληλία των πρωτογενών  $\tau^P$ , των δευτερογενών  $\tau^S$  διατμητικών τάσεων, των ορθών τάσεων από στρέβλωση  $\sigma_{xx}$  και των μαζικών αδρανειακών δυνάμεων. Προκειμένου να ικανοποιήσουμε την εξίσωση (2.4.1) απαιτούμε τον μηδενισμό τόσο των όρων που προέρχονται από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (2.4.2)$$

όσο και αυτών που προέρχονται από τις μαζικές αδρανειακές δυνάμεις, τις ορθές και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις από στρέβλωση (είναι προφανές ότι στην ομοιόμορφη στρέψη *Saint Venant* ή όταν αγνοούμε την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης οι όροι αυτοί μηδενίζονται)

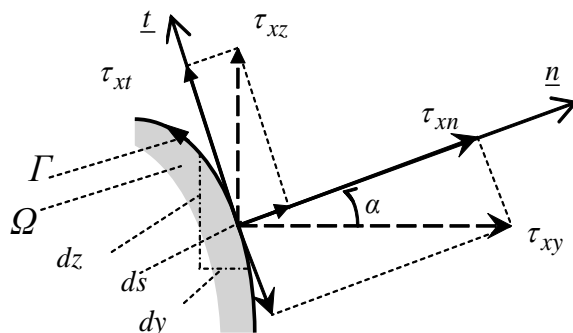
$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \rho \ddot{u} = 0 \quad (2.4.3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3.10), (2.3.13), (2.3.15) στις σχέσεις (2.4.2)-(2.4.3) και αμελώντας την συμβολή της  $\phi_S^S$  στις αδρανειακές δυνάμεις λαμβάνουμε

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4.4)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x'''(x,t)}{G} \cdot \phi_S^P + \frac{\rho}{G} \cdot \ddot{\theta}_x \cdot \phi_S^P \quad (2.4.5)$$

Για τη μόνωση των **συνοριακών συνθηκών** της πρωτογενούς και της δευτερογενούς κύριας συνάρτησης στρεβλώσεως παρατηρούμε τις διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής. Εξετάζοντας τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dydz$  που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4.1 εύκολα λαμβάνουμε



Σχήμα 2.4.1 Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \quad (2.4.6)$$

$$\tau_{xt} = -\tau_{xy} \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_y \quad (2.4.7)$$

όπου  $n_y = \cos(y, n) = \cos \alpha = \frac{dy}{dn} = \frac{dz}{ds}$  και  $n_z = \sin(z, n) = \sin \alpha = \frac{dz}{dn} = -\frac{dy}{ds}$  είναι τα συνημίτονα κατευθύνσεως του εξωτερικού κάθετου διανύσματος  $\underline{n}$  στο σύνορο της διατομής. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3.13), (2.3.15) που εκφράζουν τη διάσπαση των διατμητικών τάσεων σε πρωτογενείς και δευτερογενείς στις σχέσεις (2.4.6)-(2.4.7) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = \tau_{xy}^P \cdot n_y + \tau_{xz}^P \cdot n_z \quad (2.4.8)$$

$$\tau_{xt}^P = -\tau_{xy}^P \cdot n_z + \tau_{xz}^P \cdot n_y \quad (2.4.9)$$

$$\tau_{xn}^S = \tau_{xy}^S \cdot n_y + \tau_{xz}^S \cdot n_z \quad (2.4.10)$$

$$\tau_{xt}^S = -\tau_{xy}^S \cdot n_z + \tau_{xz}^S \cdot n_y \quad (2.4.11)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (2.3.10), (2.3.13), (2.3.15) στις σχέσεις (2.4.8)-(2.4.11) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = G \cdot \theta'_x(x, t) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) \quad (2.4.12)$$

$$\tau_{xt}^P = G \cdot \theta'_x(x, t) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y \cdot n_y + z \cdot n_z \right) \quad (2.4.13)$$

$$\tau_{xn}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \quad (2.4.14)$$

$$\tau_{xt}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (2.4.15)$$

Οι σχέσεις (2.4.12), (2.4.14) και (2.4.13), (2.4.15) δίδουν αντίστοιχα τις κάθετες και εφαπτομενικές ως προς το σύνορο της διατομής πρωτογενείς και δευτερογενείς διατμητικές

τάσεις. Αμελώντας τη φόρτιση κατά τη διαμήκη κατεύθυνση στην παράπλευρη επιφάνεια της ράβδου πρέπει για λόγους ισορροπίας οι κάθετες διατμητικές τάσεις στο σύνορο της να μηδενίζονται.

Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τη συνοριακή αυτή συνθήκη απαιτούμε τον μηδενισμό τόσο των όρων που προέρχονται από τις πρωτογενείς όσο και αυτών από τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις, δηλαδή

$$\tau_{xn}^P = 0 \quad (2.4.16)$$

$$\tau_{xn}^S = 0 \quad (2.4.17)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.4.12), (2.4.14) στις σχέσεις (2.4.16)-(2.4.17) και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $G\theta'_x \neq 0$ , η συνοριακή συνθήκη της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως δίδεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad (2.4.18)$$

και η συνοριακή συνθήκη της δευτερογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad (2.4.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνοριακή συνθήκη δεν επηρεάζεται από την παρουσία των μαζικών δυνάμεων.

#### 2.4.2 Σύνοψη υπολογισμού $\phi_S^P$ , $\phi_S^S$

Ανακεφαλαιώνοντας τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς  $\phi_S^P(y, z, t)$  και δευτερογενούς  $\phi_S^S(x, y, z, t)$  κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως απαιτείται η λύση των πιο κάτω προβλημάτων :

**A) Για τον υπολογισμό της  $\phi_S^P$**  (για σύστημα συντεταγμένων ως προς το κέντρο συστροφής)

*Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Laplace*

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \text{ στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (2.4.20)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (2.4.21)$$

**B) Για τον υπολογισμό της  $\phi_S^S$**  (για σύστημα συντεταγμένων ως προς το κέντρο συστροφής)

*Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson*

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x'''(x,t)}{G} \cdot \phi_S^P + \frac{\rho}{G} \cdot \ddot{\theta}_x' \cdot \phi_S^P \text{ στο εσωτερικό του } \Omega \quad (2.4.22)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (2.4.23)$$

### 2.4.3 Υπολογισμός $\phi_S^P, \phi_S^S$ (ως προς το κέντρο συστροφής) για τυχόν σύστημα συντεταγμένων (που δεν διέρχεται από το κέντρο συστροφής)

Στην περίπτωση κατά την οποία το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψεως τίθεται ως προς τυχόν σημείο  $O$  του επιπέδου της διατομής (βλ. Σχήμα 2.3.1β), αρχικά προσδιορίζεται η πρωτογενής συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$ , την οποία λαμβάνουμε από τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος Neumann της διαφορικής εξίσωσης Laplace

$$\nabla^2 \phi_O^P = \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \phi_O^P}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \text{στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (2.4.24)$$

$$\frac{\partial \phi_O^P}{\partial n} = \bar{z} \cdot n_y - \bar{y} \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (2.4.25)$$

Στη συνέχεια προσδιορίζεται η πρωτογενής κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_S^P(y, z)$  ως προς το κέντρο διατομής  $S$  με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (Marguerre 1940)

$$\phi_S^P(y, z, t) = \phi_O^P(\bar{y}, \bar{z}, t) - \bar{y}\bar{z}^S + \bar{z}\bar{y}^S + \bar{c} \quad (2.4.26)$$

όπου  $\bar{y}^S, \bar{z}^S$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου διατομής  $S$  ως προς το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων  $O\bar{y}\bar{z}$  και  $\bar{c}$  μία σταθερά. Οι συντεταγμένες  $\bar{y}^S, \bar{z}^S$  και η σταθερά  $\bar{c}$  προσδιορίζονται από την απαίτηση η αξονική δύναμη  $N$  και οι καμπτικές ροπές  $M_{\bar{y}}, M_{\bar{z}}$  που προκύπτουν από τις ορθές τάσεις  $\sigma_{xx}$  από στρέβλωση να μηδενίζονται ως προς οιοδήποτε σύστημα αξόνων, δηλαδή

$$N = \int_{\Omega} \sigma_{xx} d\Omega = 0 \quad (2.4.27)$$

$$M_{\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z} \sigma_{xx} d\Omega = 0 \quad (2.4.28)$$

$$M_{\bar{z}} = -\int_{\Omega} \bar{y} \sigma_{xx} d\Omega = 0 \quad (2.4.29)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3.10), (2.4.26) στις σχέσεις (2.4.27)-(2.4.29) λαμβάνουμε

$$S_{\bar{y}} \bar{y}^S - S_{\bar{z}} \bar{z}^S + A \bar{c} = -\bar{R}_S^P \quad (2.4.30)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} \bar{y}^S + I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{z}^S + S_{\bar{y}} \bar{c} = -R_{\bar{y}}^P \quad (2.4.31)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \bar{y}^S + I_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^S - S_{\bar{z}} \bar{c} = R_{\bar{z}}^P \quad (2.4.32)$$

όπου

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad (2.4.33)$$

$$S_{\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z} d\Omega \quad (2.4.34)$$

$$S_{\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y} d\Omega \quad (2.4.35)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \int_{\Omega} \bar{z}^2 d\Omega \quad (2.4.36)$$

$$I_{\bar{z}\bar{z}} = \int_{\Omega} \bar{y}^2 d\Omega \quad (2.4.37)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = - \int_{\Omega} \bar{y}\bar{z} d\Omega \quad (2.4.38)$$

είναι το εμβαδόν της διατομής, οι στατικές ροπές αδράνειας της ως προς τους άξονες  $\bar{y}$  και  $\bar{z}$ , οι καμπτικές ροπές αδράνειας της ως προς τους άξονες  $\bar{y}$  και  $\bar{z}$  και το γινόμενο αδράνειας της, αντίστοιχα. Επίσης στις σχέσεις (2.4.30)-(2.4.32) ως ροπές στρεβλώσεως  $\bar{R}_S^P$ ,  $R_{\bar{y}}^P$ ,  $R_{\bar{z}}^P$  έχουν τεθεί οι ποσότητες

$$\bar{R}_S^P = \int_{\Omega} \phi_O^P d\Omega \quad (2.4.39)$$

$$R_{\bar{y}}^P = \int_{\Omega} \bar{z} \phi_O^P d\Omega \quad (2.4.40)$$

$$R_{\bar{z}}^P = \int_{\Omega} \bar{y} \phi_O^P d\Omega \quad (2.4.41)$$

Η δεσπόζουσα εξίσωση (4.2.29α) του προαναφερθέντος προβλήματος Neumann αναφορικά με τη συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z})$  προκύπτει με τη βοήθεια των σχέσεων μετασχηματισμού (βλ. Σχ.4.9β)

$$y = \bar{y} - \bar{y}^S \quad (2.4.42)$$

$$z = \bar{z} - \bar{z}^S \quad (2.4.43)$$

αν στην έκφραση της κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως  $\phi_S^P(y, z)$

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \quad (2.4.44)$$



αντικαταστήσουμε τη σχέση μετασχηματισμού (2.4.26), η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.42)-(2.4.43) γράφεται ως

$$\phi_S^P = \phi_O^P - (y + \bar{y}^S) \cdot \bar{z}^S + (z + \bar{z}^S) \cdot \bar{y}^S + \bar{c} \quad (2.4.45)$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$\nabla^2 \phi_S^P = \nabla^2 \phi_O^P \quad (2.4.46)$$

Επίσης η συνοριακή συνθήκη (2.4.25) του προαναφερθέντος προβλήματος Neumann αναφορικά με τη συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_O^P(\bar{y}, \bar{z}, t)$  προκύπτει εύκολα, αν στην πρώτη παράγωγο της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως προς το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο της διατομής

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} n_z = \frac{\partial \phi_S^P}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi_S^P}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} n_z \quad (2.4.47)$$

αντικαταστήσουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού (2.4.42)-(2.4.43), (2.4.45).

Από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι για τα προβλήματα Neumann που προαναφέρθηκαν και περιγράφονται από τις σχέσεις (2.4.20)-(2.4.21) και (2.4.22)-(2.4.23) πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα :

- Η λύση καθενός από τα δύο προβλήματα προκύπτει συναρτήσει μιας αυθαίρετης σταθεράς (μετατόπιση στερεού σώματος κατά  $x$ ), η οποία δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τις συνοριακές συνθήκες του. Είναι προφανές ότι στα μεγέθη στα οποία υπεισέρχονται παράγωγοι της λύσης, η σταθερά δεν έχει επιπτώσεις.

Αναφορικά με την αυθαίρετη σταθερά μετατόπισης στερεού σώματος του προβλήματος Neumann για την πρωτογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως περιλαμβάνεται στη σχέση μετασχηματισμού (2.4.26) που ήδη παρουσιάσαμε. Έτσι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στην περίπτωση κατά την οποία η αρχή των αξόνων στο επίπεδο της διατομής της ράβδου δεν συμπίπτει με το κέντρο συστροφής  $S$ , η επιφάνεια στρεβλώσεως (πρωτογενής) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών Neumann για την εξίσωση Laplace, έχει υποστεί στροφή στερεού σώματος στο επίπεδο της διατομής (δεύτερος και τρίτος όρος του δεξιού μέλους της σχέσεως μετασχηματισμού (2.4.26)) και λόγω της φύσεως του προβλήματος Neumann παράλληλη μετατόπιση  $\bar{c}$  κατά τον άξονα της ράβδου.

Αναφορικά με την αυθαίρετη σταθερά μετατόπισης στερεού σώματος του προβλήματος Neumann για τη δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_S^S$ , η οποία αναφέρεται στο κέντρο συστροφής  $S$ , θα ισχύει

$$\tilde{\phi}_S^S = \phi_S^S + c^S \quad (2.4.48)$$

όπου η συνάρτηση  $\tilde{\phi}_S^S$  ονομάζεται **βασική δευτερογενής συνάρτηση στρεβλώσεως** και  $c^S$  είναι αυθαίρετη σταθερά ολοκληρώσεως. Η σχέση (2.4.48) επαληθεύει την εξίσωση Poisson και τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος (2.4.23). Ο προσδιορισμός της σταθεράς ολοκληρώσεως  $c^S$  επιτυγχάνεται από την απαίτηση

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (2.4.49)$$

η οποία προκύπτει από τη μέθοδο ισορροπίας ή την ενεργειακή μέθοδο. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.4.48) στη σχέση (2.4.49) λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} (\tilde{\phi}_S^S - c^S) d\Omega = 0 \quad (2.4.50)$$

και επομένως

$$c^S = \frac{I}{A} \int_{\Omega} \tilde{\phi}_S^S d\Omega \quad (2.4.51)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η σχέση (2.4.48) γράφεται ως

$$\phi_S^S = \tilde{\phi}_S^S - \frac{I}{A} \int_{\Omega} \tilde{\phi}_S^S d\Omega \quad (2.4.52)$$

## 2.5 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας αρχικές και συνοριακές συνθήκες

### 2.5.1 Εντατικά μεγέθη

Ο κινηματικός άγνωστος μίας χωρικής μεταβλητής του προβλήματος  $\theta_x(x,t)$  θα προσδιοριστεί από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα διατυπωθούν με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση του προβλήματος λαμβάνονται τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (2.5.1)$$

$$M_w = \int_{\Omega} \phi_S^P \sigma_{xx} d\Omega \quad (2.5.2)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(2.3.10), (2.3.13), (2.3.15)) στις σχέσεις (2.5.1)-(2.5.2), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t^P = GI_t \theta'_x \quad (2.5.3)$$

$$M_w = EC_S \theta''_x \quad (2.5.4)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές  $I_t$  (στρεπτική σταθερά) και  $C_S$  (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται ως

$$I_t = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.5.5)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (2.5.6)$$

## 2.5.2 Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής  $\theta_x$  (και των παραγώγων της), προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) που περιγράφουν την ισορροπία στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων. Έτσι η αρχή των δυνατών έργων διατυπώνεται ως:

$$\delta W_{int} + \delta W_{mass} = \delta W_{ext} \quad (2.5.7)$$

όπου

$$\delta W_{int} = \int_V \left( \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right) dV \quad (2.5.8)$$

$$\delta W_{mass} = \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV \quad (2.5.9)$$

$$\delta W_{ext} = \int_F \left( t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w \right) dF \quad (2.5.10)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $\delta(\cdot)$  δηλώνει τις δυνατές ποσότητες,  $(\dot{\cdot})$  δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο,  $V$ ,  $F$  είναι ο όγκος και η επιφάνεια της ράβδου, αντίστοιχα, και  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος τάσης.

Αξιοποιώντας το διαχωρισμό των διατμητικών παραμορφώσεων σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος όπως περιγράφεται για τις διατμητικές τάσεις στις εξισώσεις (2.3.13), (2.3.15) η συνεισφορά των διατμητικών τάσεων στο δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$I_I = \int_V \left[ \left( \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \right) \left( \delta \gamma_{xy}^P + \delta \gamma_{xy}^S \right) + \left( \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \right) \left( \delta \gamma_{xz}^P + \delta \gamma_{xz}^S \right) \right] dV \quad (2.5.11)$$

ή

$$I_I = \int_V \left( \tau_{xy}^P \delta \gamma_{xy}^P + \tau_{xy}^S \delta \gamma_{xy}^S + \tau_{xy}^S \delta \gamma_{xy}^P + \tau_{xy}^P \delta \gamma_{xy}^S + \tau_{xz}^P \delta \gamma_{xz}^P + \tau_{xz}^S \delta \gamma_{xz}^S + \tau_{xz}^S \delta \gamma_{xz}^P + \tau_{xz}^P \delta \gamma_{xz}^S \right) dV \quad (2.5.12)$$

Πραγματοποιώντας την κατάλληλη ολοκλήρωση κατά παράγοντες και αξιοποιώντας τις εξισώσεις (2.4.20) και (2.4.21) αποδεικνύεται εύκολα ότι οι υπογραμμισμένοι όροι στην παραπάνω εξίσωση μηδενίζονται. Οι απομένοντες όροι μπορούν να γραφούν πιο εύκολα ως

$$I_I = \int_{x=0}^l \left[ M_t^P \delta \theta_x' \right] dx \quad (2.5.13)$$

σημειώνοντας ότι οι όροι των δυνατών δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων αγνοήθηκαν, καθώς στα πλαίσια της παρούσας θεωρίας αμελείται η επιρροή τους στην καθολική ισορροπία της ράβδου (η συγκεκριμένη επιρροή λαμβάνεται υπόψη στο Κεφάλαιο 3).

Ανικαθιστώντας τα τασικά αποτελέσματα που δίνονται στις εξισώσεις (2.3.10), (2.3.13), (2.3.15), τις παραμορφώσεις που δίνονται στις εξισώσεις (2.3.4)-(2.3.9) και τις συνιστώσες της μετατόπισης που δίνονται στις εξισώσεις (2.3.1)-(2.3.3) στην αρχή των δυνατών έργων (εξισώσεις (2.5.7)-(2.5.10)), η κυρίαρχη μερική διαφορική εξίσωση και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου  $x=0,l$  προκύπτει μετά από μερικές πράξεις ως

$$\rho I_P \cdot \ddot{\theta}_x - \rho C_S \cdot \ddot{\theta}_x'' - \frac{\partial M_t^P}{\partial x} + \frac{\partial^2 M_w}{\partial x^2} = m_t(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} [m_w(x,t)] \quad (2.5.14)$$

$$\left[ -(M_w)' + M_t^P + \rho C_S \cdot \dot{\theta}_x' - \bar{M}_t \right] \delta \theta_x = 0 \quad (2.5.15)$$

$$(M_w - \bar{M}_w) \delta (\theta_x)' = 0 \quad (2.5.16)$$

όπου τα μεγέθη  $m_t$ ,  $m_w$  (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (βλ. Σχήμα 2.1.3α) και ορίζονται κατά μήκος της ράβδου (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων μέσω του όρου  $\delta W_{ext}$ ) συναρτήσεως του διανύσματος τάσης ως προς την απαραμόρφωτη επιφάνεια της ράβδου ως

$$m_t(x,t) = \int_{\Gamma} [t_y(x,y,z,t) \cdot (-z) + t_z(x,y,z,t) \cdot y] ds \quad (2.5.17)$$

$$m_w(x,t) = \int_{\Gamma} t_x(x,y,z,t) \cdot \phi_S^P ds \quad (2.5.18)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (2.5.15)-(2.5.16) υπεισέρχονται τα μεγέθη  $\bar{M}_t$ ,  $\bar{M}_w$  που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις διατομές των άκρων της ράβδου ως

$$\bar{M}_t(x=0,t) = - \int_{\Omega} t_y(x,y,z,t) \cdot (-z) + t_z(x,y,z,t) \cdot y d\Omega \quad (2.5.19)$$

$$\bar{M}_t(x=l,t) = \int_{\Omega} t_y(x,y,z,t) \cdot (-z) + t_z(x,y,z,t) \cdot y d\Omega \quad (2.5.20)$$

$$\bar{M}_w(x=0,t) = - \int_{\Omega} t_x(x,y,z,t) \cdot \phi_S^P d\Omega \quad (2.5.21)$$

$$\bar{M}_w(x=l,t) = \int_{\Omega} t_x(x,y,z,t) \cdot \phi_S^P d\Omega \quad (2.5.22)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (2.5.3)-(2.5.4) στις σχέσεις (2.5.14)-(2.5.16) και αναδιατυπώνοντας τις συνοριακές συνθήκες (2.5.15)-(2.5.16) μορφώνεται η παρακάτω κυρίαρχη διαφορική εξίσωση ισορροπίας στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων ως

$$\rho I_P \cdot \ddot{\theta}_x - \rho C_S \cdot \ddot{\theta}_x'' - GI_t \theta_x'' + EC_S \theta_x'''' = m_t(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [m_w(x, t)] \quad (2.5.23)$$

που υπόκειται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου  $x = 0, l$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad (2.5.24)$$

$$\beta_1 M_w + \beta_2 \theta_x' = \beta_3 \quad (2.5.25)$$

και στις αρχικές συνθήκες ( $x \in (0, l)$ )

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad (2.5.26)$$

$$\dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (2.5.27)$$

όπου  $M_t$ ,  $M_w$  είναι η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου, αντίστοιχα, που δίνονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t = GI_t \theta_x' - EC_S \theta_x'' - m_w + \rho C_S \cdot \ddot{\theta}_x'' \quad (2.5.28)$$

$$M_w = EC_S \cdot \theta_x'' \quad (2.5.29)$$

Στις σχέσεις (2.5.24)-(2.5.25)  $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ,  $\beta_i = \beta_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι χρονικές συναρτήσεις που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (πχ πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις αυτές με χρήση κατάλληλων συντελεστών.

## 2.6 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης

Στην ειδική περίπτωση όπου θέλουμε να αμελήσουμε την επιρροή της ανομοιόμορφης στρέβλωσης και της στρεβλωτικής αδράνειας πρέπει να αγνοήσουμε τους όρους που την αντιπροσωπεύουν στις εκφράσεις των παραμορφώσεων, των τάσεων, των εντατικών μεγεθών, των εξωτερικών δράσεων, των εξισώσεων ισορροπίας και των συνοριακών συνθηκών. Έτσι στα ακόλουθα παρουσιάζονται οι εκφράσεις που αλλάζουν σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με όσα αναφέρθηκαν στα κεφάλαια 2.1 - 2.5.

Συνεπώς η αλλαγή που υφίσταται το πεδίο μετατοπίσεων είναι η αντικατάσταση της σχέσης (2.3.1) από την

$$u(x, y, z, t) = \theta_x'(x, t) \phi_S^P(y, z) \quad (2.6.1)$$

Όσον αφορά το πεδίο των παραμορφώσεων η σχέση (2.3.4) που δίνει την ορθή παραμόρφωση αντικαθίσταται από την

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad (2.6.2)$$

Σχετικά με το πεδίο των τάσεων η σχέση (2.3.10) που δίνει την ορθή τάση αντικαθίσταται από την

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (2.6.3)$$

Η διαφοροποίηση στις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών αφορά την σχέση (2.5.2) του δίρροπου στρέβλωσης που λαμβάνει τη μορφή

$$M_w = 0 \quad (2.6.4)$$

Αντίστοιχα η εξωτερική στρεβλωτική δράση δεν υφίσταται και η σχέση (2.5.18) γίνεται

$$m_w(x, t) = 0 \quad (2.6.5)$$

Τέλος η εξίσωση ισορροπίας (2.5.23) γίνεται

$$\rho I_P \cdot \ddot{\theta}_x - GI_t \theta_x'' = m_t(x, t) \quad (2.6.6)$$

που υπόκειται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου  $x = 0, l$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad (2.6.7)$$

και στις αρχικές συνθήκες ( $x \in (0, l)$ )

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad (2.6.8)$$

$$\dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (2.6.9)$$

όπου  $M_t$  είναι η στρεπτική ροπή στα άκρα της ράβδου που δίνεται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t = GI_t \theta_x' \quad (2.6.10)$$

Στη σχέση (2.6.7)  $\alpha_i = \alpha_i(t)$ , είναι χρονικές συναρτήσεις που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες στρέψης.

### 3 Ανομοιόμορφες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων

Κατά τη διερεύνηση της συμπεριφοράς ανοικτών λεπτότοιχων διατομών υπό ανομοιόμορφη στρέψη, ο Vlasov (1963), βασιζόμενος στην παραδοχή περί μηδενισμού των διατμητικών τάσεων στη μέση γραμμή των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή, απέδειξε ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστροφής  $\theta'_x$ . Κατά την «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (Κεφάλαιο 2), υιοθετείται επίσης η θεώρηση ότι η στρέβλωση είναι ανάλογη της συστροφής. Η θεώρηση αυτή έχει ως συνέπεια να λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις στην καθολική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου, με τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις να υπολογίζονται a posteriori μετά την επίλυσή της (Κεφάλαιο 2). Τούτο έχει ως αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή είναι ιδιαίτερος σημαντική σε κλειστές λεπτότοιχες διατομές (Rubin 2005, Murin and Kutis 2008), όπου οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές λόγω της ιδιαίτερης γεωμετρίας της διατομής. Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψιν με υιοθέτηση νέου κινηματικού μεγέθους που δίδει το μέγεθος της στρέβλωσης της διατομής (πρωτογενής συστροφή  $(\theta_x^P)'$  ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης  $\eta_x$ ), το οποίο πλέον δεν λαμβάνεται ανάλογο με τη συστροφή  $\theta'_x$ .

Η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης που διατυπώνεται συναρτήσει δύο άγνωστων κινηματικών μεγεθών μίας μεταβλητής παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko (Murin and Kutis 2008, Roik and Sedlacek 1966, Rubin 2005). Συνεπώς, παραβιάζει κι αυτή την τοπική διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου καθώς και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής δευτερογενών διατμητικών τάσεων που προκύπτει. Τούτο έχει ως αποτέλεσμα την ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με τη χρήση κατάλληλου διορθωτικού συντελεστή διάτμησης, ο οποίος υπολογίζεται στη βιβλιογραφία με ενεργειακή προσέγγιση (Slivker 2007, Kim and Kim 2005, Laudiero and Savoia 1990, Kraus 2007). Η συγκεκριμένη προσέγγιση οδηγεί στη σύζευξη στρεπτικών και καμπτικών καταπονήσεων ράβδων τυχούσας διατομής, με τους αντίστοιχους διορθωτικούς συντελεστές διάτμησης να υπολογίζονται σύμφωνα με τις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών, στις εργασίες των Slivker (2007), Kim and Kim (2005). Στην περίπτωση που η διατομή είναι διπλά συμμετρική, αποδεικνύεται ότι στρεπτικές και καμπτικές καταπονήσεις αποζευγνύονται (Slivker 2007, Laudiero and Savoia 1990). Έτσι, το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης μπορεί να μελετηθεί ξεχωριστά από αυτό της καμπτοδιατμητικής καταπόνησης, με τον αντίστοιχο διορθωτικό συντελεστή διάτμησης να υπολογίζεται αριθμητικά για ράβδους τυχούσας (διπλά συμμετρικής) διατομής στην εργασία του Kraus (2007) (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων) και στην εργασία των Sapountzakis and Mokok (2009) (Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων).

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφων στρεπτικών ταλαντώσεων ράβδων διατομής τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων. Οι βασικές παραδοχές της θεωρίας ταυτίζονται μερικώς με αυτές της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. Κεφάλαιο 2) και συνοψίζονται παρακάτω.

### 3.1 Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ( $\gamma_{yz} = 0$ ).
3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
4. Η διατομή της ράβδου είναι διπλά συμμετρική.  
Στην περίπτωση όπου η διατομή έχει έναν ή κανέναν άξονα συμμετρίας, η στρεπτική και καμπτοδιατμητική καταπόνηση είναι συζευγμένες και πρέπει να μελετηθούν μαζί. Όταν η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, τότε η στρεπτική καταπόνηση μπορεί να μελετηθεί αυτόνομα.
5. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται (κατασκευαστικά) κάποιος άξονας περιστροφής.  
Η ράβδος μπορεί να στραφεί ελεύθερα μετά την άσκηση σε αυτήν του στρεπτικού φορτίου και αποδεικνύεται ότι ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών. Η (κατασκευαστική) επιβολή οποιουδήποτε άλλου άξονα περιστροφής οδηγεί αναπόφευκτα στην ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής έντασης πέρα από τη στρεπτική.
6. Η πρωτογενής στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της πρωτογενούς σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (ή ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης).  
Επειδή η πρωτογενής στρέβλωση των διατομών δεν λαμβάνεται ανάλογη της συνολικής σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (βλ. κεφ. 2), η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων είναι δυνατόν να ληφθεί υπόψιν στην καθολική ισορροπία της ράβδου.
7. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.
8. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.
9. Η κατανομή των τάσεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.
10. Αγνοείται η απόσβεση.  
Στην παρούσα εργασία γίνεται η παραδοχή ότι η απόσβεση της ράβδου ισούται με 0.

### 3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

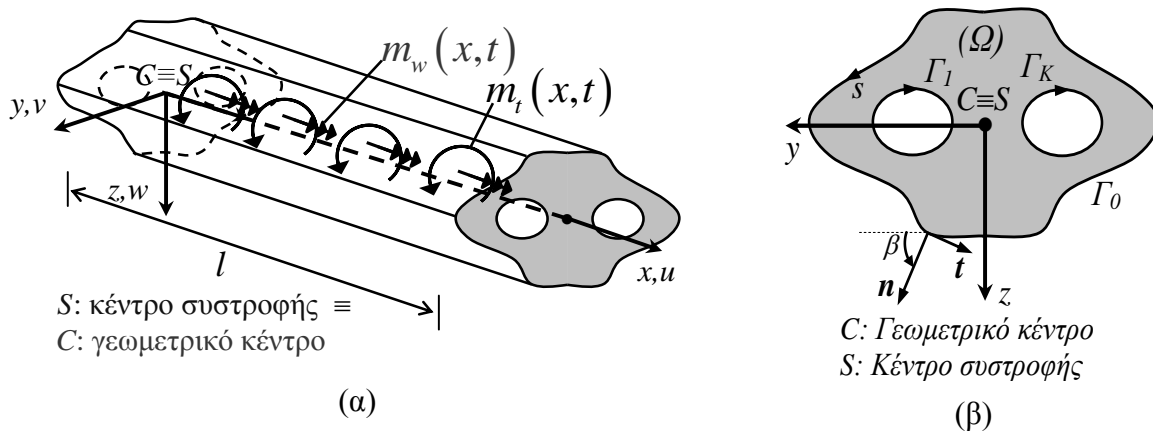
Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο μήκους  $l$  (παραδοχές 1, 3) τυχούσας διπλά συμμετρικής (παραδοχή 4) διατομής εμβαδού  $A$  (στο υποκεφάλαιο 3.5 αιτιολογείται ο περιορισμός του παρόντος κεφαλαίου σε διπλά συμμετρικές διατομές). Το ομογενές ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό της διατομής της δοκού, με μέτρο ελαστικότητας  $E$ , μέτρο διάτμησης  $G$  και πυκνότητα  $\rho$  καταλαμβάνει το δισδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο  $\Omega$  του επιπέδου  $y, z$  και περιβάλλεται από τις συνοριακές καμπύλες  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ), που είναι τμηματικά λείες, δηλαδή μπορεί να έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Η ράβδος υποβάλλεται σε τυχούσες συγκεντρωμένες ή/και κατανεμημένες χρονικά εξαρτώμενες στρεπτικές ροπές  $m_t = m_t(x, t)$  και δίρροπα στρέβλωσης  $m_w = m_w(x, t)$  περί τον διαμήκη άξονα της  $x$  (Σχήμα 3.2.1α). Η ανάλυση της ράβδου



πραγματοποιείται με τη βοήθεια δεξιόστροφου συστήματος αναφοράς  $Sxyz$ , του οποίου ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα κέντρα συστροφής (κέντρα διάτμησης)  $S$  των διατομών. Τα σημεία  $S$  ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα  $C$  εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής (Σχήμα 3.2.1,β και παραδοχή 5). Το αρχικό σημείο του συστήματος αναφοράς τοποθετείται συμβατικά στο αριστερό άκρο της ράβδου με  $x=0$  (Σχήμα 3.2.1,α).

### 3.2.1 Μετατοπίσεις

Με βάση τις προαναφερθείσες παραδοχές 2 και 7 και την ανωτέρω φόρτιση, το πεδίο των μετατοπίσεων  $u, v, w$  κατά τους άξονες  $x, y, z$ , αντίστοιχα (Σχήμα 3.2.1,β) δίδεται ως:



**Σχήμα 3.2.1** Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος που καταλαμβάνει το διάστημα χωρίου  $\Omega$  (β).

$$u(x, y, z, t) = \eta_x(x, t) \phi_S^P(y, z) \quad (3.2.1)$$

$$v(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, t) \quad (3.2.2)$$

$$w(x, y, z, t) = y\theta_x(x, t) \quad (3.2.3)$$

όπου:

- Οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις λαμβάνονται υπόψη στο πρόβλημα μέσω της έκφρασης της μετατόπισης  $u$  (παραδοχή 6).
- $\eta_x$  είναι ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης (El Fatmi 2007, Simo and Vu-Quoc 1991)
- $\phi_S^P$  είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο  $S$  (βλ. κεφ. 2).
- $\theta_x$  είναι η (συνολική) γωνία στροφής περί τον άξονα  $x$

Η παράμετρος  $\eta_x$  είναι συνάρτηση της διαμήκουσ συντεταγμένης  $x$  και περιγράφει το μέγεθος της στρέβλωσης σε μια διατομή, ενώ καλείται επίσης και ανεξάρτητη μεταβλητή στρέβλωσης (Wunderlich et. al. 1986). Ο χαρακτηρισμός «ανεξάρτητη» οφείλεται στο γεγονός ότι γενικά δεν ισχύει η έκφραση  $\eta_x = \theta'_x$  που έχει υιοθετηθεί στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης του κεφαλαίου 2. Η φυσική σημασία της παραμέτρου  $\eta_x$  αναδεικνύεται από την εξέταση εναλλακτικής διατύπωσης με την οποία μπορεί να περιγραφεί η επιρροή δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων στην ανομοιόμορφη

στρέψη ράβδου. Σύμφωνα με αυτήν, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου καθώς και η στρεπτική γωνία στροφής της διατομής διασπώνται σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος ως:

$$u = u^P + u^S \quad (3.2.4)$$

$$v = v^P + v^S \quad (3.2.5)$$

$$w = w^P + w^S \quad (3.2.6)$$

$$\theta_x = \theta_x^P + \theta_x^S \quad (3.2.7)$$

όπου τα δύο αυτά μέρη προκύπτουν από τις πρωτογενείς και δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις, αντίστοιχα. Το πρωτογενές μέρος του πεδίου μετατοπίσεων λαμβάνεται ταυτόσημο με αυτό της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (κεφ.2) ως

$$u^P(x, y, z) = (\theta_x^P)' \phi_S^P(y, z) \quad (3.2.8)$$

$$v^P(x, y, z) = -z\theta_x^P(x) \quad (3.2.9)$$

$$w^P(x, y, z) = y\theta_x^P(x) \quad (3.2.10)$$

ενώ το δευτερογενές μέρος δίδεται ως

$$u^S(x, y, z) = 0 \quad (3.2.11)$$

$$v^S(x, y, z) = -z\theta_x^S(x) \quad (3.2.12)$$

$$w^S(x, y, z) = y\theta_x^S(x) \quad (3.2.13)$$

Συγκρίνοντας τις δύο διατυπώσεις, παρατηρείται ότι η παράμετρος  $\eta_x$  ισούται με την πρωτογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (πρωτογενής συστροφή), δηλαδή

$$\eta_x = (\theta_x^P)' \quad (3.2.14)$$

Στα επόμενα παρουσιάζεται αναλυτικά η διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (3.2.4)-(3.2.13) θέτοντας όπου  $\theta_x^S = \theta_x - \theta_x^P$ , καθώς η μόρφωση των συνοριακών συνθηκών της ράβδου είναι σημαντικά απλούστερη συγκριτικά με την εναλλακτική διατύπωση που βασίζεται στους κινηματικούς αγνώστους  $\theta_x^P$ ,  $\theta_x^S$ . Τονίζεται ότι η υιοθετούμενη διατύπωση είναι ανάλογη με τη διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (3.2.1)-(3.2.3).

### 3.2.2 Παραμορφώσεις

Από την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας, οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις για γεωμετρικά γραμμικά προβλήματα (παραδοχή 8) εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων από τις σχέσεις (1.2.19)-(1.2.24). Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων (3.2.4)-(3.2.13) στις σχέσεις (1.2.19)-(1.2.24) λαμβάνουμε

$$\varepsilon_{xx} = \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (3.2.15)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\theta_x^P\right)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \theta_x' z \quad (3.2.18)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\theta_x^P\right)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \theta_x' y \quad (3.2.19)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.20)$$

Προκειμένου να αναδειχθεί η συνεισφορά των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών παραμορφώσεων, οι σχέσεις (3.2.18)-(3.2.19) αναγράφονται εναλλακτικά ως

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( \left(\theta_x^P\right)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.21)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( \left(\theta_x^P\right)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.22)$$

Η φυσική σημασία της ποσότητας  $\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x'$  αναδεικνύεται από τη συγκριτική εξέταση της εναλλακτικής διατύπωσης του προβλήματος (σχέσεις (3.2.4)-(3.2.13)) από όπου προκύπτει ότι

$$\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x' = -\left(\theta_x^S\right)' \quad (3.2.23)$$

Συνεπώς, η ποσότητα  $\left(\theta_x^P\right)' - \theta_x'$  σχετίζεται με τη δευτερογενή γωνία στροφής ανά μονάδα μήκους της ράβδου (δευτερογενής συστροφή).

### 3.2.3 Τάσεις

Ο υπολογισμός των **τάσεων** που καταπονούν τη ράβδο βασίζεται στον καταστατικό νόμο του Hooke (βλ. παραδοχή 8), ο οποίος συσχετίζει γραμμικά τον τανυστή παραμορφώσεως με τον ενεργειακά συζυγή ως προς αυτόν τανυστή τάσεως (τανυστής τάσεως Cauchy). Έτσι, υποθέτοντας ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό υλικό (παραδοχή 8), οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως Cauchy (1.2.35)-(1.2.40) δίδονται με τη βοήθεια των σχέσεων (3.2.15), (3.2.21), (3.2.22) ως

$$\sigma_{xx} = E^* \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (3.2.24)$$

$$\sigma_{yy} = E^{**} \left(\theta_x^P\right)'' \phi_S^P \quad (3.2.25)$$

$$\sigma_{zz} = E^{**} \left( \theta_x^P \right)'' \phi_S^P \quad (3.2.26)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( \left( \theta_x^P \right)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.27)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( \left( \theta_x^P \right)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.2.28)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (3.2.29)$$

όπου  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  με  $E, G, \nu$  το μέτρο ελαστικότητας, το

μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson, αντίστοιχα του υλικού. Οι σχέσεις (3.2.24), (3.2.27), (3.2.28) που δίδουν την ορθή  $\sigma_{xx}$  και τις διατμητικές  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  τάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας για την επίλυση του προβλήματος, ενώ οι σχέσεις (3.2.25), (3.2.26) που δίδουν τις ορθές τάσεις  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  (που δεν παράγουν έργο αφού οι αντίστοιχες παραμορφώσεις  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  σύμφωνα με τις σχέσεις (3.2.16), (3.2.17) είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των άγνωστων κινηματικών μεγεθών για τον υπολογισμό των τάσεων αυτών. Ωστόσο, στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} \approx 0$ , τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την καθολική ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει επακριβώς στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson  $\nu=0$ . Επιπλέον, το  $E^*$  αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που  $\nu=0$ . Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$  για τις

συνήθεις τιμές λόγου Poisson που λαμβάνουν τα δομικά υλικά. Εξάλλου οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Με βάση τα προηγούμενα, οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως διαμορφώνονται τελικά ως

$$\sigma_{xx} = E \left( \theta_x^P \right)'' \phi_S^P \quad (3.2.30)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}=\tau_{xy}^P} + \underbrace{G \left( \left( \theta_x^P \right)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}=\tau_{xy}^S} \quad (3.2.31)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}=\tau_{xz}^P} + \underbrace{G \left( \left( \theta_x^P \right)' - \theta'_x \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}=\tau_{xz}^S} \quad (3.2.32)$$

### 3.3 Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης  $\phi_S^P$  υπολογίζεται μέσω του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί και στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (κεφ.2)

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.3.2)$$

απαιτώντας παράλληλα να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad (3.3.3)$$

Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται αφενός ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αποτελούν αυτοίσορροπούμενη κατανομή τάσεων σε επίπεδο υλικού σημείου (εξ.(3.3.1),(3.3.2)) και αφετέρου ότι η στρεπτική ένταση δεν οδηγεί και σε αξονική καταπόνηση (εξ.(3.3.3)). Ωστόσο, αντικαθιστώντας τις εξ. (3.2.30)-(3.2.32)στη διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου σε επίπεδο υλικού σημείου (και στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \rho \ddot{u} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (3.3.4)$$

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = t_x \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.3.5)$$

διαπιστώνεται εύκολα ότι δεν επαληθεύονται εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Το γεγονός αυτό είναι ανάλογο με τη θεωρία Timoshenko καμπτόμενων ράβδων, στην οποία η προκύπτουσα κατανομή διατμητικών τάσεων επίσης δεν επαληθεύει την εξίσωση ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου. Συνεπώς, κατ' αναλογία με τη θεωρία δοκού Timoshenko, θα εισαχθεί και στην παρούσα θεωρία διορθωτικός συντελεστής διάτμησης (Roik and Sedlacek 1966, Slivker 2007, Kim and Kim 2005, Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009), ο οποίος εδώ καλείται **στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης**. Ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης καθώς και μιας ικανοποιητικότερης κατανομής δευτερογενών διατμητικών τάσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στο υποκεφάλαιο 3.5. Όπως και στην «κλασική» θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε επίπεδο υλικού σημείου κατά τις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις επίσης δεν πληρούνται και το γεγονός αυτό αποτελεί ασυνέπεια της παρούσας θεωρίας.

## 3.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας αρχικές και συνοριακές συνθήκες

### 3.4.1 Εντατικά μεγέθη

Οι κινηματικοί άγνωστοι μιας χωρικής μεταβλητής του προβλήματος  $((\theta_x^P)')(x,t)$ ,  $\theta_x(x,t)$  θα προσδιοριστούν από καθολικές εξισώσεις ισορροπίας. Οι εξισώσεις ισορροπίας θα διατυπωθούν με τη βοήθεια του λογισμού των μεταβολών. Προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση του προβλήματος λαμβάνονται και εδώ τα παρακάτω εντατικά μεγέθη

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.4.1)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left( \tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.4.2)$$

$$M_w = \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (3.4.3)$$

τα οποία αντιστοιχούν σε αυτά της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (εξ.(2.5.1)-(2.5.2)).

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (εξ.(3.2.30)-(3.2.32)) στις σχέσεις(3.4.1)-(3.4.3), τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t^P = GI_t^P \theta_x' \quad (3.4.4)$$

$$M_t^S = -GI_t^S \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \quad (3.4.5)$$

$$M_w = EC_S (\theta_x^P)'' \quad (3.4.6)$$

όπου οι γεωμετρικές σταθερές  $I_t^P$  (πρωτογενής στρεπτική σταθερά),  $I_t^S$  (δευτερογενής στρεπτική σταθερά) και  $C_S$  (σταθερά στρέβλωσης) δίδονται ως

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.4.7)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (3.4.8)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.4.9)$$

Η πρωτογενής στρεπτική σταθερά ορίζεται όμοια με τη στρεπτική σταθερά της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης. Στη δευτερογενή στρεπτική σταθερά εισάγεται ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής  $k_x$  (βλ. υποκεφάλαια 3.3 και 3.5), ο οποίος είναι

πάντοτε μικρότερος της μονάδας ( $k_x < 1$ ). Στην περίπτωση κατά την οποία η σταθερά  $I_t^S$  δεν διορθωθεί εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων, τότε στην έκφραση (3.4.8) τίθεται  $k_x = 1$ . Η διατύπωση αυτή έχει υιοθετηθεί σε διάφορες δημοσιεύσεις της βιβλιογραφίας (Gruttmann et. al. 2000, Simo and Vu-Quoc 1991, El Fatmi and Zenzri 2004, Gendy et.al. 1992) και δίδει

$$I_t^S = I_P - I_t^P \quad (3.4.10)$$

όπου  $I_P$  η πολική ροπή αδράνειας της διατομής:

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (3.4.11)$$

για και χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.3.1)-(3.3.2) η σταθερά  $I_t^S$  μπορεί να γραφεί ως

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left( -y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = k_x (I_P - I_t^P) \quad (3.4.12)$$

$$\text{ή ως} \quad I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (3.4.13)$$

### 3.4.2 Καθολικές εξισώσεις ισορροπίας συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Λαμβάνοντας υπόψη στην Αρχή Δυνατών Έργων τις δυνατές μεταβολές της στρεπτικής στροφής  $\theta_x$  και της πρωτογενούς συστροφής  $(\theta_x^P)'$  (και των παραγώγων τους), προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange (και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες) που περιγράφουν την ισορροπία στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων. Έτσι η αρχή των δυνατών έργων διατυπώνεται ως:

$$\delta W_{int} + \delta W_{mass} = \delta W_{ext} \quad (3.4.14)$$

όπου

$$\delta W_{int} = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (3.4.15)$$

$$\delta W_{mass} = \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV \quad (3.4.16)$$

$$\delta W_{ext} = \int_F (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w) dF \quad (3.4.17)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $\delta(\cdot)$  δηλώνει τις δυνατές ποσότητες,  $(\cdot)$  δηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο,  $V$ ,  $F$  είναι ο όγκος και η επιφάνεια της ράβδου, αντίστοιχα, και  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  είναι οι συνιστώσες του του διανύσματος τάσης.

Αξιοποιώντας το διαχωρισμό των διατμητικών παραμορφώσεων σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος όπως περιγράφεται για τις διατμητικές τάσεις στις εξισώσεις (3.2.31)-(3.2.32) ο συνδυασμός των διατμητικών τάσεων στο δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$I_I = \int_V \left[ \left( \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \right) \left( \delta\gamma_{xy}^P + \delta\gamma_{xy}^S \right) + \left( \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \right) \left( \delta\gamma_{xz}^P + \delta\gamma_{xz}^S \right) \right] dV \quad (3.4.18)$$

ή

$$I_I = \int_V \left( \tau_{xy}^P \delta\gamma_{xy}^P + \tau_{xy}^S \delta\gamma_{xy}^S + \tau_{xy}^S \delta\gamma_{xy}^P + \tau_{xy}^P \delta\gamma_{xy}^S + \tau_{xz}^P \delta\gamma_{xz}^P + \tau_{xz}^S \delta\gamma_{xz}^S + \tau_{xz}^S \delta\gamma_{xz}^P + \tau_{xz}^P \delta\gamma_{xz}^S \right) dV \quad (3.4.19)$$

Πραγματοποιώντας την κατάλληλη ολοκλήρωση κατά παράγοντες και αξιοποιώντας τις εξισώσεις (3.3.1) και (3.3.2), αποδεικνύεται εύκολα ότι οι υπογραμμισμένοι όροι στην παραπάνω εξίσωση μηδενίζονται. Οι απομένοντες όροι μπορούν να γραφούν πιο εύκολα ως

$$I_I = \int_{x=0}^l \left[ M_t^P \delta\theta'_x - M_t^S \left( \delta(\theta_x^P)' - \delta\theta'_x \right) \right] dx \quad (3.4.20)$$

Ανικαθιστώντας τα τασικά αποτελέσματα που δίνονται στις εξισώσεις (3.2.30)-(3.2.32), τις παραμορφώσεις που δίνονται στις εξισώσεις (3.2.15), (3.2.21)-(3.2.22) και τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων που δίνονται στις εξισώσεις (3.2.1)-(3.2.3) στην Αρχή των Δυνατών Έργων (εξισώσεις (3.4.14)-(3.4.17)), η κυρίαρχη μερική διαφορική εξίσωση και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου  $x=0, l$  προκύπτουν μετά από μερικές πράξεις ως

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - \frac{\partial M_t^P}{\partial x} - \frac{\partial M_t^S}{\partial x} = m_t(x, t) \quad (3.4.21)$$

$$\rho C_S (\theta_x^P)' - \frac{\partial M_w}{\partial x} - M_t^S = m_w(x, t) \quad (3.4.22)$$

$$(M_t^P + M_t^S - \bar{M}_t) \delta\theta_x = 0 \quad (3.4.23)$$

$$(M_w - \bar{M}_w) \delta(\theta_x^P)' = 0 \quad (3.4.24)$$

όπου τα μεγέθη  $m_t$ ,  $m_w$  (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (βλ. Σχήμα 3.2.1 α) και ορίζονται κατά μήκος της ράβδου (μέσω της Αρχής Δυνατών Έργων μέσω του όρου  $\delta W_{ext}$ ) συναρτήσσει του διανύσματος τάσης ως

$$m_t(x, t) = \int_{\Gamma} \left[ t_y(x, t) \cdot (-z) + t_z(x, t) \cdot y \right] ds \quad (3.4.25)$$

$$m_w(x, t) = \int_{\Gamma} t_x(x, y, z, t) \cdot \phi_S^P ds \quad (3.4.26)$$



Στις συνοριακές συνθήκες (3.4.23)-(3.4.24) υπαισέρχονται τα μεγέθη  $\bar{M}_t$ ,  $\bar{M}_w$  που αποτελούν εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις (στρεπτική ροπή και δίρροπο στρέβλωσης, αντίστοιχα) και ορίζονται στις διατομές των άκρων της ράβδου ως

$$\bar{M}_t(x=0,t) = - \int_{\Omega} t_y(x,y,z,t) \cdot (-z) + t_z(x,y,z,t) \cdot y d\Omega \quad (3.4.27)$$

$$\bar{M}_t(x=l,t) = \int_{\Omega} t_y(x,y,z,t) \cdot (-z) + t_z(x,y,z,t) \cdot y d\Omega \quad (3.4.28)$$

$$\bar{M}_w(x=0,t) = - \int_{\Omega} t_x(x,y,z,t) \cdot \phi_S^P d\Omega \quad (3.4.29)$$

$$\bar{M}_w(x=l,t) = \int_{\Omega} t_x(x,y,z,t) \cdot \phi_S^P d\Omega \quad (3.4.30)$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις (3.4.4)-(3.4.6) στις σχέσεις (3.4.21)-(3.4.24) και αναδιατυπώνοντας τις συνοριακές συνθήκες (3.4.27)-(3.4.30) μορφώνονται οι παρακάτω κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στρεπτικών και στρεβλωτικών δράσεων ως

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' + GI_t^S (\theta_x^P)'' = m_t(x,t) \quad (3.4.31)$$

$$\rho C_S (\theta_x^P)'' - EC_S (\theta_x^P)'' + GI_t^S \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) = m_w(x,t) \quad (3.4.32)$$

που υπόκεινται στις πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου  $x=0,l$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad (3.4.33)$$

$$\beta_1 M_w + \beta_2 (\theta_x^P)' = \beta_3 \quad (3.4.34)$$

και στις αρχικές συνθήκες ( $x \in (0,l)$ )

$$\theta_x(x,0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad (3.4.35)$$

$$\dot{\theta}_x(x,0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.4.36)$$

$$(\theta_x^P)'(x,0) = \overline{(\theta_x^P)'}_0(x) \quad (3.4.37)$$

$$(\dot{\theta}_x^P)'(x,0) = \overline{(\dot{\theta}_x^P)'}_0(x) \quad (3.4.38)$$

όπου  $M_t$ ,  $M_w$  είναι η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου, αντίστοιχα, που δίνονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών ως

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S) \theta_x' - GI_t^S (\theta_x^P)' \quad (3.4.39)$$

$$M_w = EC_S (\theta_x^P)'' \quad (3.4.40)$$

Στις σχέσεις (3.4.33)-(3.4.34)  $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ,  $\beta_i = \beta_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ) είναι χρονικές συναρτήσεις που καθορίζονται κατάλληλα στα άκρα της ράβδου, προκειμένου να περιγράψουν τις ισχύουσες συνοριακές συνθήκες στρέψης και στρέβλωσης. Αξίζει να τονισθεί ότι όλα τα είδη των συμβατικών συνοριακών συνθηκών (πχ πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις αυτές με χρήση κατάλληλων συντελεστών.

Σε περίπτωση που επιθυμείται η διατύπωση των εξισώσεων ως προς τους κινηματικούς αγνώστους  $\eta_x$ ,  $\theta_x$ , αρκεί να γίνει χρήση της εξ. (3.2.14) σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις. Στην περίπτωση αυτή μορφώνονται οι κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας ως

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - G(I_t^P + I_t^S) \theta_x'' + GI_t^S \eta_x' = m_t \quad (3.4.41)$$

$$\rho C_S \ddot{\eta}_x - EC_S \eta_x'' + GI_t^S (\eta_x - \theta_x') = m_w \quad (3.4.42)$$

οι αντίστοιχες πλέον γενικές συνοριακές συνθήκες ως

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad (3.4.43)$$

$$\beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (3.4.44)$$

και οι αρχικές συνθήκες ( $x \in (0, l)$ )

$$\theta_x(x, 0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad (3.4.45)$$

$$\dot{\theta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (3.4.46)$$

$$\eta_x(x, 0) = \bar{\eta}_{x0}(x) \quad (3.4.47)$$

$$\dot{\eta}_x(x, 0) = \dot{\bar{\eta}}_{x0}(x) \quad (3.4.48)$$

όπου  $M_t$ ,  $M_w$  είναι η στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης στα άκρα της ράβδου, αντίστοιχα, που δίνονται συναρτήσει των κινηματικών μεγεθών  $\eta_x$ ,  $\theta_x$  ως

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S) \theta_x' - GI_t^S \eta_x \quad (3.4.49)$$

$$M_w = EC_S \eta_x' \quad (3.4.50)$$

### 3.5 Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η επίλυση των καθολικών εξισώσεων ισορροπίας της ράβδου απαιτεί τον υπολογισμό του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$ . Ο υπολογισμός αυτός βασίζεται σε ενεργειακή θεώρηση (Kraus 2007,

Sapountzakis and Mokos 2009) σύμφωνα με την οποία εξισώνεται η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης με την αντίστοιχη προσεγγιστική. Προκειμένου να ευρεθεί η προαναφερθείσα ακριβής έκφραση, θα πρέπει να προσδιοριστεί ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων, η οποία να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας (3.3.4) και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (3.3.5). Έτσι, ενώ διατηρούνται οι εκφράσεις των ορθών (3.2.30) και των πρωτογενών διατμητικών τάσεων (εξ.(3.2.31),(3.2.32)), τροποποιούνται οι εκφράσεις των δευτερογενών διατμητικών τάσεων και οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεως διαμορφώνονται τελικά ως

$$\sigma_{xx} = E(\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (3.5.1)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} + \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.5.2)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} + \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.5.3)$$

όπου  $\phi_S^S = \phi_S^S(x, y, z)$  είναι δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία θα προσδιοριστεί με εφαρμογή των εξ. (3.3.4), (3.3.5). Οι προαναφερθείσες δευτερογενείς διατμητικές τάσεις περιλαμβάνουν συναρτήσεις παραγώγων της  $\phi_S^S$  και προκύπτουν εάν για την περιγραφή του προβλήματος υιοθετηθεί το πεδίο μετατοπίσεων

$$u(x, y, z) = (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) - \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \left[ \phi_S^P(y, z) + \left( \frac{I_t^S}{C_S} + \frac{m_w}{GC_S \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right)} \right) \phi_S^S(x, y, z) \right] \quad (3.5.4)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (3.5.5)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (3.5.6)$$

και στη συνέχεια προσδιοριστούν οι συμβιβαστές παραμορφώσεις και ακολούθως οι προκύπτουσες από αυτές τάσεις. Ο λόγος που δεν υιοθετήθηκε το παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων εξαρχής είναι ότι θα διατυπώνονταν θεωρία ανάλογη με τη θεωρία διάτμησης 3ης τάξης (3rd order shear deformation theory, (Wang et. al. 2000)), η οποία είναι περισσότερο πολύπλοκη και απαιτεί τη χρήση τριών συνοριακών συνθηκών (αντί για δύο) σε κάθε άκρο της ράβδου.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τάσεων (3.5.1)-(3.5.3) στις εξ.(3.3.4)-(3.3.5) και λαμβάνοντας υπόψη την καθολική εξίσωση ισορροπίας (3.4.42), μορφώνεται πρόβλημα συνοριακών τιμών υπολογισμού της  $\phi_S^S$  ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = - \frac{t_x C_S}{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) I_t^S + m_w} \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.5.8)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης που να μην εξαρτάται από τη φόρτιση, τίθεται απλοποιητικά αφενός  $t_x = 0$  στο δεξιά μέλος της εξ. (3.5.8) και αφετέρου  $m_w = 0$  στις εξ. (3.5.2)-(3.5.3). Έτσι καθίσταται δυνατό να οριστεί διδιάστατη  $\phi_S^S = \phi_S^S(y, z)$  μέσω του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (3.5.9)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (3.5.10)$$

καθώς επίσης και να απλοποιηθούν οι εκφράσεις των διατμητικών τάσεων ως

$$\tau_{xy} = \underbrace{G \theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.5.11)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G \theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (3.5.12)$$

Σημειώνεται ότι προκειμένου η δευτερογενής στρέβλωση να μην οδηγεί σε αξονική καταπόνηση (βλ. εξ.(3.5.4)), οι εξ. ((3.5.9)-(3.5.10)) επιλύονται με την επιπλέον απαίτηση να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (3.5.13)$$

Η ελαστική ενέργεια λόγω διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου δίδεται ως

$$U = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xy}^{S2} + 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + \tau_{xz}^{P2} + \tau_{xz}^{S2} + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S}{2G} d\Omega \quad (3.5.14)$$

$$\text{ή } U = U_P + U_S + U_{PS} \quad (3.5.15)$$

όπου

$$U_P = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xz}^{P2}}{2G} d\Omega \quad (3.5.16)$$

$$U_S = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{S2} + \tau_{xz}^{S2}}{2G} d\Omega \quad (3.5.17)$$

$$U_{PS} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left( 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S \right) d\Omega \quad (3.5.18)$$

Η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης θα δοθεί μέσω της κατανομής των εξ. (3.2.31)-(3.2.32) ενώ η ακριβής έκφραση μέσω των εξ. (3.5.11)-(3.5.12). Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύεται εύκολα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι  $U_{PS} = 0$ . Επιπρόσθετα, είναι εμφανές ότι η ελαστική ενέργεια που οφείλεται αποκλειστικά στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις (όρος  $U_P$ ) ταυτίζεται στις δύο περιπτώσεις ( $U_{approx.,P} = U_{exact,P}$ ). Συνεπώς, η εξίσωση προσεγγιστικής και ακριβούς έκφρασης δίδει

$$U_{approx.} = U_{exact} \Rightarrow U_{approx.,S} = U_{exact,S} \quad (3.5.19)$$

Η μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ. (3.2.31)-(3.2.32)) διαμορφώνεται με τη βοήθεια της (3.4.5) ως

$$\tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \quad (3.5.20)$$

$$\tau_{xz}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \quad (3.5.21)$$

ενώ για την ακριβή κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. εξ. (3.5.11)-(3.5.12)) ισχύει

$$\tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.5.22)$$

$$\tau_{xz}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.5.23)$$

Έτσι, η έκφραση της ελαστικής ενέργειας της σχέσης (3.5.17) μετά την αντικατάσταση της προσεγγιστικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των εξ. (3.5.20)-(3.5.21) και στη συνέχεια την βοήθεια της εξ.(3.4.8) διαμορφώνεται ως (Kraus 2007)

$$U_{approx.,S} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \longrightarrow \quad (3.5.24)$$

$$U_{approx.,S} = \frac{I}{2G} \frac{(M_t^S)^2}{I_t^S}$$

Αντίστοιχα, η αντικατάσταση της ακριβούς κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων των εξ. (3.5.22)-(3.5.23) στην έκφραση της ελαστικής ενέργειας της σχέσης (3.5.17) δίδει

$$U_{exact,S} = \frac{I}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \rightarrow U_{exact,S} = \frac{I}{2G} \left( \frac{M_t^S}{C_S} \right)^2 I_{\phi} \quad (3.5.25)$$

όπου  $I_{\phi}$  είναι γεωμετρική σταθερά που ορίζεται ως

$$I_{\phi} = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (3.5.26)$$

και μπορεί να δοθεί (χωρίς να εξαρτάται από παραγώγους της  $\phi_S^S$ ) με ολοκλήρωση κατά παράγοντες και εκμετάλλευση των εξ. (3.5.9)-(3.5.10) ως

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (3.5.27)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.5.24)-(3.5.25), στην εξ. (3.5.19) μορφώνεται η σχέση υπολογισμού της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς ως

$$I_t^S = \frac{C_S^2}{I_{\phi}} \quad (3.5.28)$$

από την οποία με εφαρμογή των σχέσεων (3.4.8), (3.4.10) προκύπτει η σχέση υπολογισμού του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$  ως

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (3.5.29)$$

Σημειώνεται ότι ισοδύναμες σχέσεις υπολογισμού προκύπτουν εάν η ακριβής έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης προσδιοριστεί μέσω της «κλασικής» θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης (και της αντίστοιχης δευτερογενούς συνάρτησης στρέβλωσης που έχει οριστεί στο κεφ. 2).

Μετά τον υπολογισμό του συντελεστή  $k_x$ , την εισαγωγή του στις καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου και ακολούθως την επίλυσή τους, μπορεί να γίνει χρήση των σχέσεων (3.5.11) αντί των σχέσεων (3.2.30)-(3.2.32) προκειμένου να υπολογιστεί ικανοποιητικότερη κατανομή διατμητικών τάσεων που να μην παραβιάζει τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας κατά μήκος της ράβδου (και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη). Υπογραμμίζεται ότι η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου ικανοποιείται τόσο στην περίπτωση στατικής όσο και δυναμικής ανάλυσης. Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι η ενεργειακή θεώρηση για τον υπολογισμό των διορθωτικών συντελεστών διάτμησης οδηγεί γενικά στη σύζευξη καμπτοδιατμητικών και στρεπτικών κινηματικών και εντατικών μεγεθών. **Η στρέψη (στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνονται υπόψη οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις) αποξενώνεται από την καμπτοδιατμητική ένταση αποκλειστικά στην περίπτωση διπλά συμμετρικών διατομών (Laudiero and**

Savoia 1990, Slivker 2007) και για τον λόγο αυτόν η παρούσα ανάλυση περιορίζεται στις συγκεκριμένες διατομές.





## 4 Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος

### 4.1 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $I_P, I_t^P, I_t^S, C_S$ με συνοριακή ολοκλήρωση

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ο υπολογισμός των αγνώστων του προβλήματος προϋποθέτει ότι έχουν προσδιοριστεί όλες οι γεωμετρικές σταθερές που υπεισέρχονται στις διάφορες εξισώσεις. Οι βασικές από αυτές τις γεωμετρικές σταθερές είναι η πολική ροπή αδρανείας  $I_P$ , η πρωτογενής στρεπτική σταθερά  $I_t^P$ , η δευτερογενής στρεπτική σταθερά  $I_t^S$  και η σταθερά στρέβλωσης  $C_S$  για τις οποίες έχουν δοθεί οι σχέσεις υπολογισμού τους (βλ. σχέσεις (3.4.7)-(3.4.9)) και είναι οι εξής:

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.1.1)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (4.1.2)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (4.1.3)$$

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega \quad (4.1.4)$$

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (4.1.5)$$

όπου

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (4.1.6)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όμως έχουν τη μορφή διπλού ολοκληρώματος στο χωρίο  $\Omega$  και προκειμένου να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα της επίλυσης με συνοριακή ολοκλήρωση (για τις σχέσεις (4.1.1)-(4.1.4)) θα γίνει συνοριακή ολοκλήρωση ενώ για τις σχέσεις (4.1.5)-(4.1.6) θα γίνει πεδιακή ολοκλήρωση (βλ. Κεφάλαιο 4.2) επιδιώκουμε να μετατρέψουμε τα πεδιακά ολοκληρώματα σε συνοριακά και με τη βοήθεια του **θεωρήματος απόκλισης Gauss** (Κατσικαδέλης, 1999) προσδιορίζονται ως εξής:

$$I_P = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial (y^3)}{\partial y} + \frac{\partial (z^3)}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} (y^3 n_y + z^3 n_z) ds \quad (4.1.7)$$

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (yz^2 - z\phi_S^P)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2z + y\phi_S^P)}{\partial z} \right] d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_t^P = \int_{\Gamma} \left[ (yz^2 - z\phi_S^P)n_y + (y^2z + y\phi_S^P)n_z \right] ds \quad (4.1.8)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^S - \phi_S^S \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = - \int_{\Gamma} \phi_S^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (4.1.9)$$

όπου  $\phi_S^S$  η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης (βλ. σχέσεις (3.5.9)-(3.5.10)) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \text{ στο } \Omega \quad (4.1.10)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma \quad (4.1.11)$$

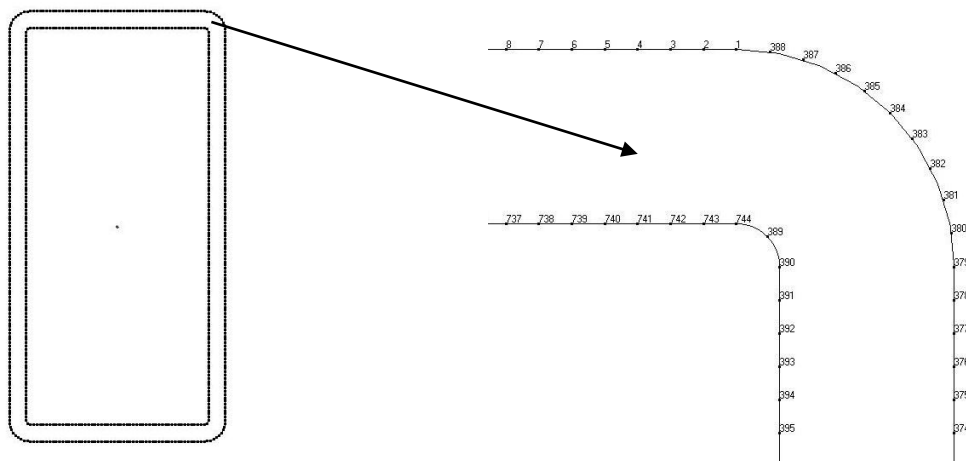
Για το  $I_t^S$  αν κάνουμε χρήση της σχέσης (3.3.1) από τη σχέση (4.1.2) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (4.1.12)$$

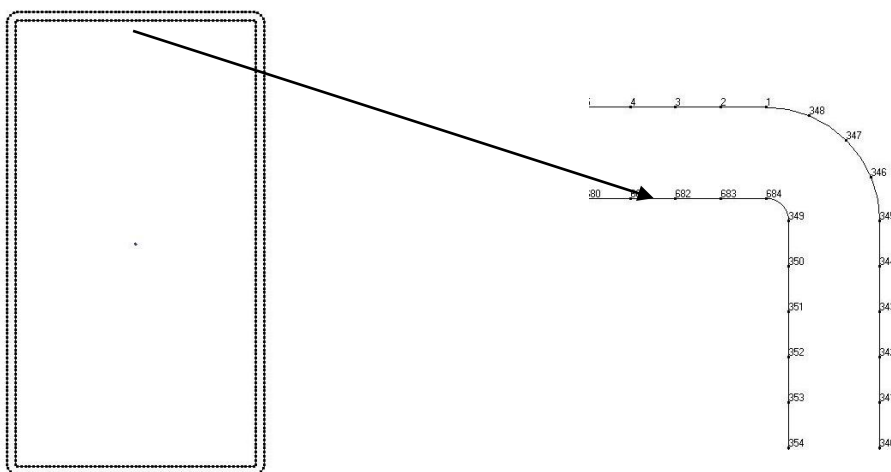
Ενώ αν κάνουμε χρήση της σχέσης (3.3.2) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P (zn_y - yn_z) ds \quad (4.1.13)$$

Στη συνέχεια θα διακριτοποιηθεί το σύνορο της διατομής σε σταθερά συνοριακά στοιχεία και θα εφαρμοστούν οι τυπικοί κανόνες ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στο Σχήμα 4.1.1 και το Σχήμα 4.1.2 φαίνονται μερικές περιπτώσεις συνοριακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran. Αξίζει να αναφερθεί ότι 400-500 συνοριακά στοιχεία επαρκούν για τον ακριβή υπολογισμό των προαναφερθεισών γεωμετρικών σταθερών των διατομών που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.1.1 Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 160x80x6.3 με 744 συνοριακά στοιχεία.



Σχήμα 4.1.2 Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 450x250x8 με 684 συνοριακά στοιχεία.

## 4.2 Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης $k_x$ με πεδιακή ολοκλήρωση

Όπως προέκυψε από το Κεφάλαιο 3 (βλ. σχέσεις(3.5.27), (3.5.29)) ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης δίνεται από τη σχέση

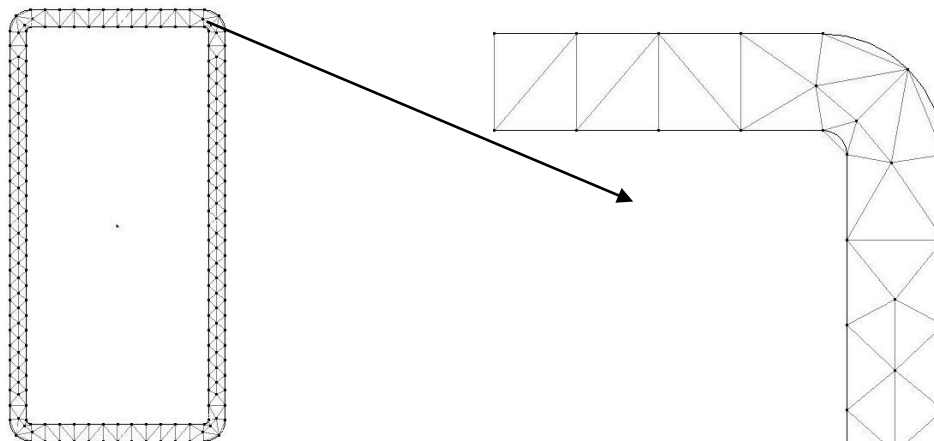
$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_\phi} \quad (4.2.1)$$

όπου

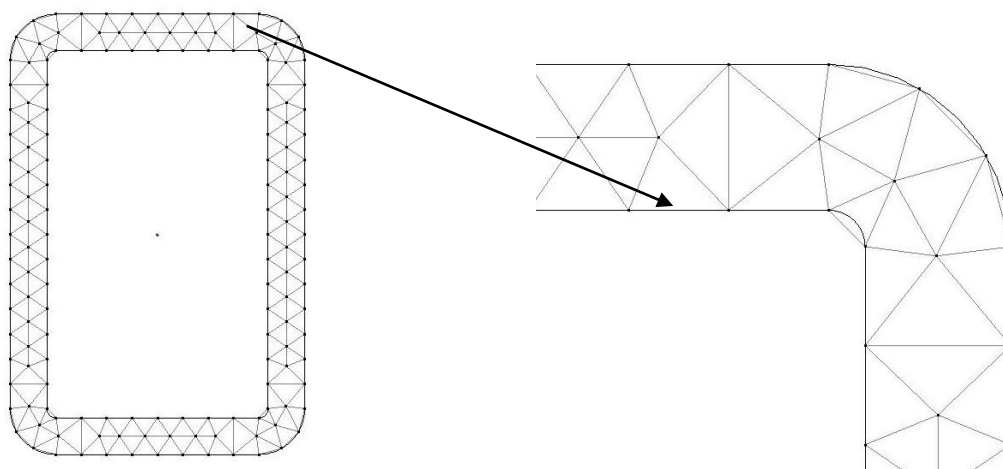
$$I_\phi = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (4.2.2)$$

Η σχέση υπολογισμού του  $k_x$  και του  $I_\phi$ , όμως, δεν είναι δυνατό να μετατραπεί σε συνοριακό ολοκλήρωμα και εξαιτίας του στοιχείου αυτού απαιτείται ο υπολογισμός

πεδιακού (διπλού) ολοκληρώματος. Στην παρούσα εργασία, ο υπολογισμός αυτός πραγματοποιείται με διακριτοποίηση του χωρίου της διατομής σε επιφανειακά (τριγωνικά) στοιχεία και η εφαρμογή τυπικών κανόνων ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στο Σχήμα 4.2.1 και το Σχήμα 4.2.2 φαίνονται μερικές περιπτώσεις πεδιακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran. Αξίζει να αναφερθεί ότι 200-300 επιφανειακά στοιχεία επαρκούν για τον ακριβή υπολογισμό των προαναφερθεισών γεωμετρικών σταθερών των διατομών που εξετάστηκαν.



Σχήμα 4.2.1 Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 160x80x6.3 με 284 πεδιακά στοιχεία.



Σχήμα 4.2.2 Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 60x40x5 με 200 πεδιακά στοιχεία.

### 4.3 Αριθμητικός υπολογισμός των κινηματικών μεγεθών $\theta_x, n_x$

Το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών των εξ.((4.3.1)-(4.3.8))

$$\rho I_P \ddot{\theta}_x - G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S \eta_x' = m_t \quad (4.3.1)$$

$$\rho C_S \ddot{\eta}_x - EC_S \eta_x'' + GI_t^S (\eta_x - \theta_x') = m_w \quad (4.3.2)$$

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad (4.3.3)$$

$$\beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (4.3.4)$$

$$\theta_x(x,0) = \bar{\theta}_{x0}(x) \quad (4.3.5)$$

$$\dot{\theta}_x(x,0) = \dot{\bar{\theta}}_{x0}(x) \quad (4.3.6)$$

$$\eta_x(x,0) = \bar{\eta}_{x0}(x) \quad (4.3.7)$$

$$\dot{\eta}_x(x,0) = \dot{\bar{\eta}}_{x0}(x) \quad (4.3.8)$$

επιλύεται αριθμητικά με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (BEM) με πεδιακή διακριτοποίηση. Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής οδηγεί στη μετατροπή των εξ. ((4.3.1)-(4.3.4)) σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{p(t)\} \quad (4.3.9)$$

το οποίο υπόκειται στις αρχικές συνθήκες

$$\{q\} = \{q_0\} \quad (4.3.10)$$

$$\{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\} \quad (4.3.11)$$

που προκύπτουν από τις εξ. ((4.3.5)-(4.3.8)). Στη σχ. (4.3.9)  $[M]$ ,  $[K]$  είναι γενικευμένα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας, αντίστοιχα ενώ  $\{q\}$ ,  $\{p(t)\}$  αποτελούν γενικευμένα διανύσματα άγνωστων κινηματικών μεγεθών και γνωστών εξωτερικών δυνάμεων διέγερσης, αντίστοιχα. Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών επιλύεται αριθμητικά με κατάλληλη αριθμητική τεχνική άμεσης χρονικής ολοκλήρωσης. Επιπλέον, για την ειδική περίπτωση ελεύθερων ταλαντώσεων, ισχύει  $\{p(t)\} = \{0\}$ . Θέτοντας

$$\{q\} = \{Q\} e^{-i\omega t} \quad (4.3.12)$$

μορφώνεται τυπικό γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{Q_i\} = \{0\} \quad (4.3.13)$$

όπου  $\omega_i$  και  $\{Q_i\}$  είναι οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές της ράβδου, αντίστοιχα. Το πρόβλημα αυτό στη συνέχεια επιλύεται αριθμητικά με κατάλληλη αριθμητική τεχνική και υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές της ράβδου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα του Β μέρους των αριθμητικών παραδειγμάτων (βλ. Κεφάλαιο.6) ελήφθησαν με αριθμητική επίλυση της σχ.(4.3.9) (άμεση χρονική ολοκλήρωση) ενώ τα αποτελέσματα του Α μέρους (βλ. Κεφάλαιο.5) με αριθμητική επίλυση της σχ.(4.3.13) (ιδιομορφική ανάλυση).

Τέλος αξίζει τονίζεται ότι τα προγράμματα θεωρίας δοκού που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας συντάχθηκαν από τον Υποψήφιο Διδάκτορα ΕΜΠ κ. Β.Τσίπηρα.



## 5 Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Α

### 5.1 Εισαγωγή

Στο 1<sup>ο</sup> μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων πραγματοποιείται ιδιομορφική ανάλυση δοκών διαφόρων διατομών. Η ανάλυση αυτή υλοποιείται με τη χρήση α) του λογισμικού Nastran μέσω τρισδιάτων πενταεδρικών ή εξαεδρικών (θεωρία τρισδιάστατης ελαστικότητας), κελυφωτών (θεωρία κελύφους) πεπερασμένων στοιχείων με ή χωρίς τη χρήση διαφραγμάτων και β) με τα προγράμματα συνιοριακών στοιχείων torselindgeom, dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert και dynfreeUniflin, που έχουν συνταχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran από τον Υποψήφιο Διδάκτορα κ. Β. Τσίπηρα, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Ε. Σαπουντζάκη. Τα τελευταία 4 προγράμματα χρησιμοποιήθηκαν για να εξαχθούν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών (σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 4) και να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες των δοκών για γραμμικές ανομοιομορφες στρεπτικές ταλαντώσεις με επιρροή Δευτερογενών Διατμητικών Παραμορφώσεων (ΔΔΠ) με ή χωρίς επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας και για γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις χωρίς την επιρροή της ανομοιομορφης στρέβλωσης αντίστοιχα.

Όσον αφορά τους τύπους των στοιχείων στο Nastran χρησιμοποιήθηκαν τρισδιάστατα 6-εδρικά (3D 6-εδρικά, βλέπε Σχήμα 5.1.1) ή 5-εδρικά (3D 5-εδρικά, βλέπε Σχήμα 5.1.2) και 4-πλευρικά κελυφωτά στοιχεία (βλέπε Σχήμα 5.1.3) τα οποία προέκυψαν από διακριτοποίηση της διατομής με τετραπλευρικά, τριγωνικά και γραμμικά στοιχεία αντίστοιχα (το τελευταίο μόνο στις κοίλες και ανοικτές διατομές,) και επακόλουθη χρήση της εντολής extrude.

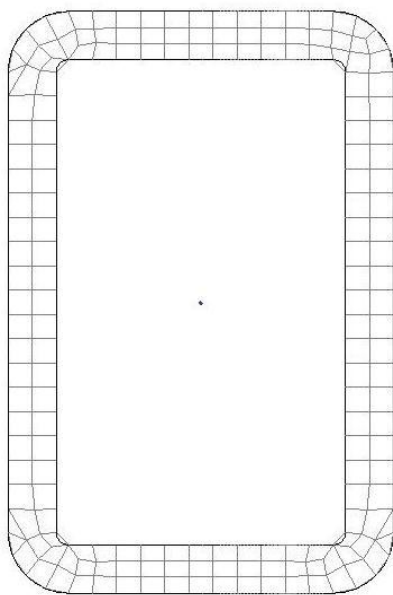
Μέσω των προγραμμάτων torselindgeom, dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert και dynfreeUniflin υλοποιήθηκαν αναλύσεις με εφαρμογή θεωρίας δοκού. Αναλυτικότερα αρχικά εισήχθησαν η επιφανειακή και συνιοριακή διακριτοποίηση της διατομής στο πρόγραμμα torselindgeom προκειμένου να εξαχθούν τα γεωμετρικές σταθερές της διατομής και ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης (βλέπε Κεφάλαιο 4). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τους υπολογισθέντες παράγοντες και μια διαμήκη διακριτοποίηση του άξονα της δοκού και πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις με τα υπόλοιπα προγράμματα.

Σχετικά με τα διαφράγματα αξίζει να σημειωθεί ότι η χρήση τους έγινε αναγκαία εξαιτίας της παρουσίας του φαινομένου distortion (εγκάρσια παραμορφωσιμότητα της διατομής). Αυτό κατέστησε πολλές φορές αδύνατη την ταυτοποίηση των ιδιομορφών ανάμεσα σε όλες όσες ανήκαν στο εύρος των συχνοτήτων που ήταν δυνατό να εμφανιστούν. Ακόμα και σε περιπτώσεις που ήταν δυνατή η εύρεση των ιδιομορφών είναι άξιο αναφοράς το ότι χρειάστηκε να υπολογιστούν πάρα πολλές ιδιομορφές προκειμένου να πάρουμε τις 4 πρώτες στρεπτικές καθώς εμφανίζονταν πάρα πολλές που αντιστοιχούσαν στο φαινόμενο του distortion! Επιπλέον λόγω του φαινομένου αυτού σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζονται πολύ μεγάλες αποκλίσεις ανάμεσα στις αναλύσεις που έχουν ή όχι τοποθετηθεί διαφράγματα με τις πρώτες να συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τα προγράμματα της θεωρίας δοκού.

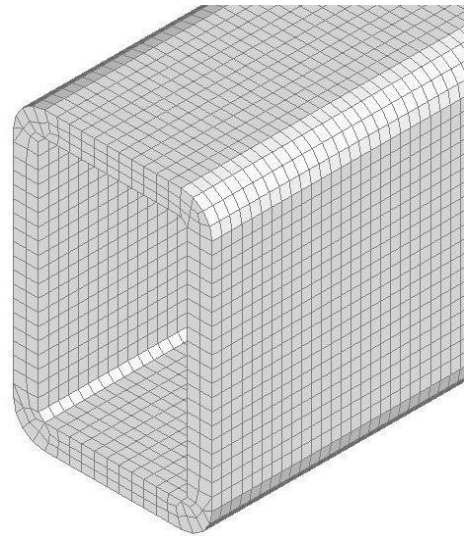
Τα διαφράγματα που χρησιμοποιήθηκαν συνδέουν το κέντρο κάθε διατομής με κάθε ένα από τα στοιχεία της καθιστώντας κοινές τις μετατοπίσεις στο επίπεδο της διατομής και τη στροφή περί τον διαμήκη άξονα της δοκού. Με  $R_x$  και  $R_y$  συμβολίζεται η στροφή περί τον κύριο και ασθενή άξονα της διατομής της δοκού αντίστοιχα, που σε ορισμένες περιπτώσεις δεσμεύτηκαν και αυτές στα διαφράγματα (όπου έχει γίνει αυτό διευκρινίζεται).

Ειδικότερα στα ακόλουθα παραδείγματα οι αναλύσεις υλοποιήθηκαν για δύο μήκη κάθε διατομής υπό το ίδιο στατικό σύστημα έτσι ώστε να εξαχθούν αναλύσεις για «σχετικά μεγάλο» και «σχετικά μικρό» μήκος δοκού, δηλαδή ο λόγος

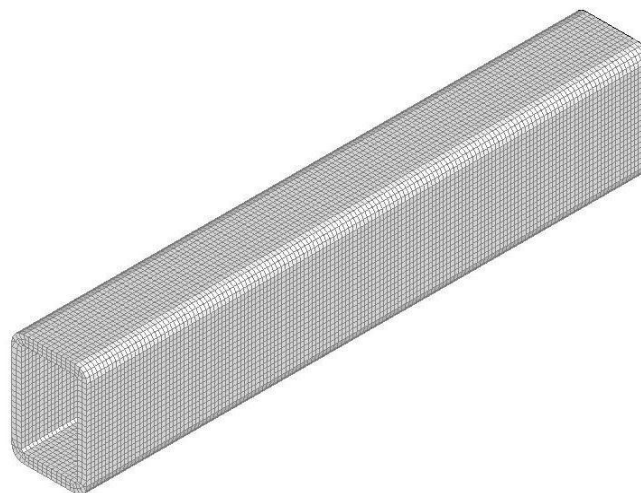
μέγιστη διάσταση διατομής/μήκος δοκού στις περισσότερες περιπτώσεις να λαμβάνει περίπου τιμές 1:5 και 1:10 αντίστοιχα.



(α)



(β)



(γ)

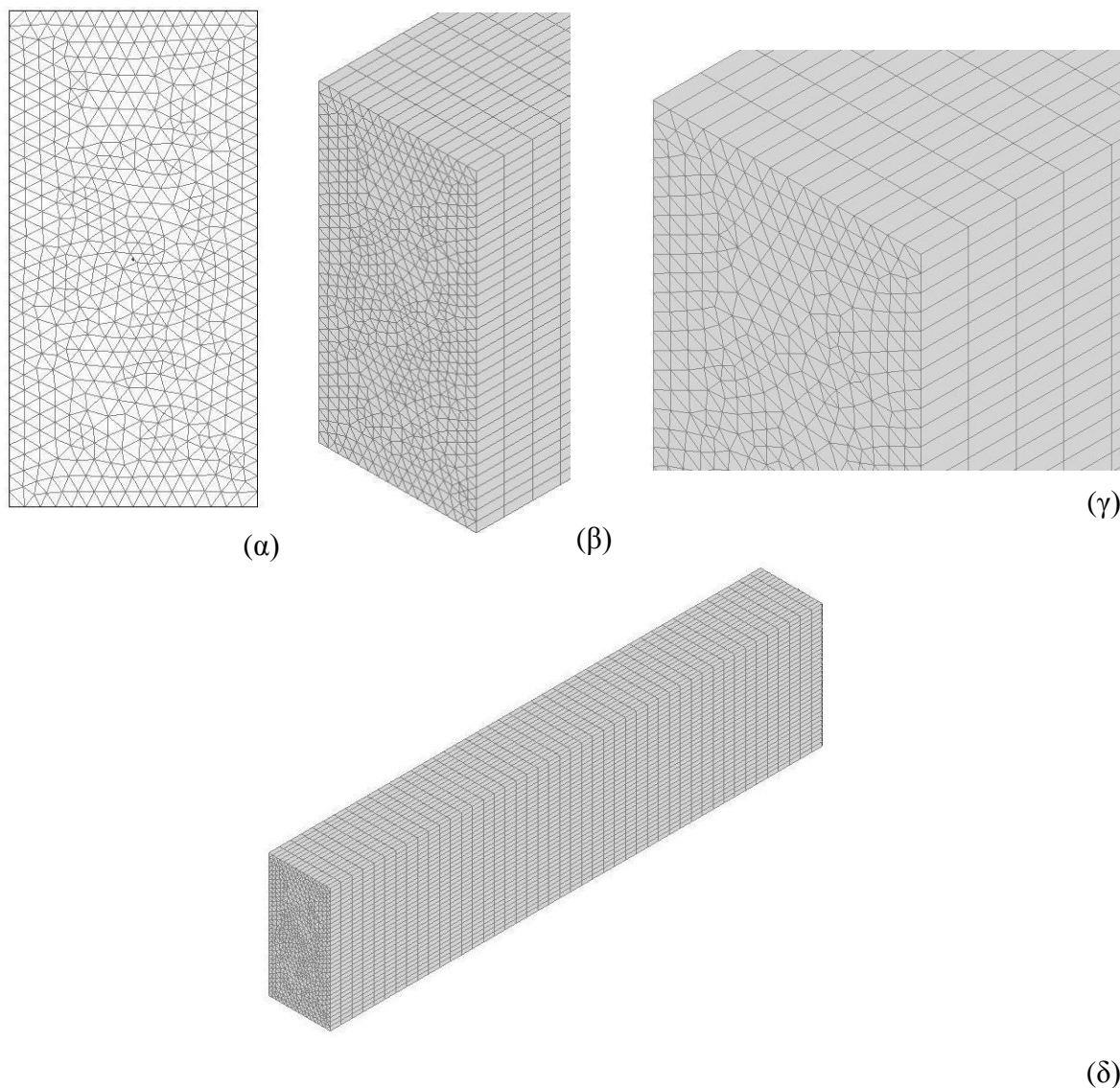
**Σχήμα 5.1.1** Τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία. Διατομή 60x40x5 (α), φορέας με L=0.3m σε διάφορα zoom (β) & (γ)

Κάθε δοκός στηρίζεται στα δύο της άκρα για τα οποία επιλέχθηκαν διάφοροι συνδυασμοί ανάμεσα στις στηρίξεις: πάκτωση, παρεμπόδιση στρέβλωσης με πλήρη ελευθέρωση στρεπτικής στροφής, ελεύθερο άκρο.

Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν είναι χάλυβας και αλουμίνιο. Όσον αφορά το χάλυβα έχει μέτρο ελαστικότητας  $E_s = 210GPa$  και λόγο Poisson  $\nu_s = 0.3$  με ειδικό βάρος  $\gamma_s = 78.5kN/m^3$ , συνεπώς ελήφθη μέτρο διάτμησης  $G_s = E_s/[2(1+\nu_s)] = 80.8GPa$ . Για επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 9.81m/s^2$  η πυκνότητα του υλικού προκύπτει  $\rho_s = \gamma_s / g = 8.002kg/m^3$ . Σχετικά με το αλουμίνιο το μέτρο ελαστικότητας του είναι



$E_a = 70GPa$ , ο λόγος Poisson  $\nu_a = 0.3$  και το ειδικό βάρος  $\gamma_a = 26.5kN / m^3$ . Επομένως για το μέτρο διάτμησης ισχύει  $G_a = E_a / [2(1 + \nu_a)] = 26.9GPa$  και πυκνότητα υλικού  $\rho_a = \gamma_a / g = 2.701kg / m^3$  για την επιτάχυνση της βαρύτητας που προαναφέρθηκε.

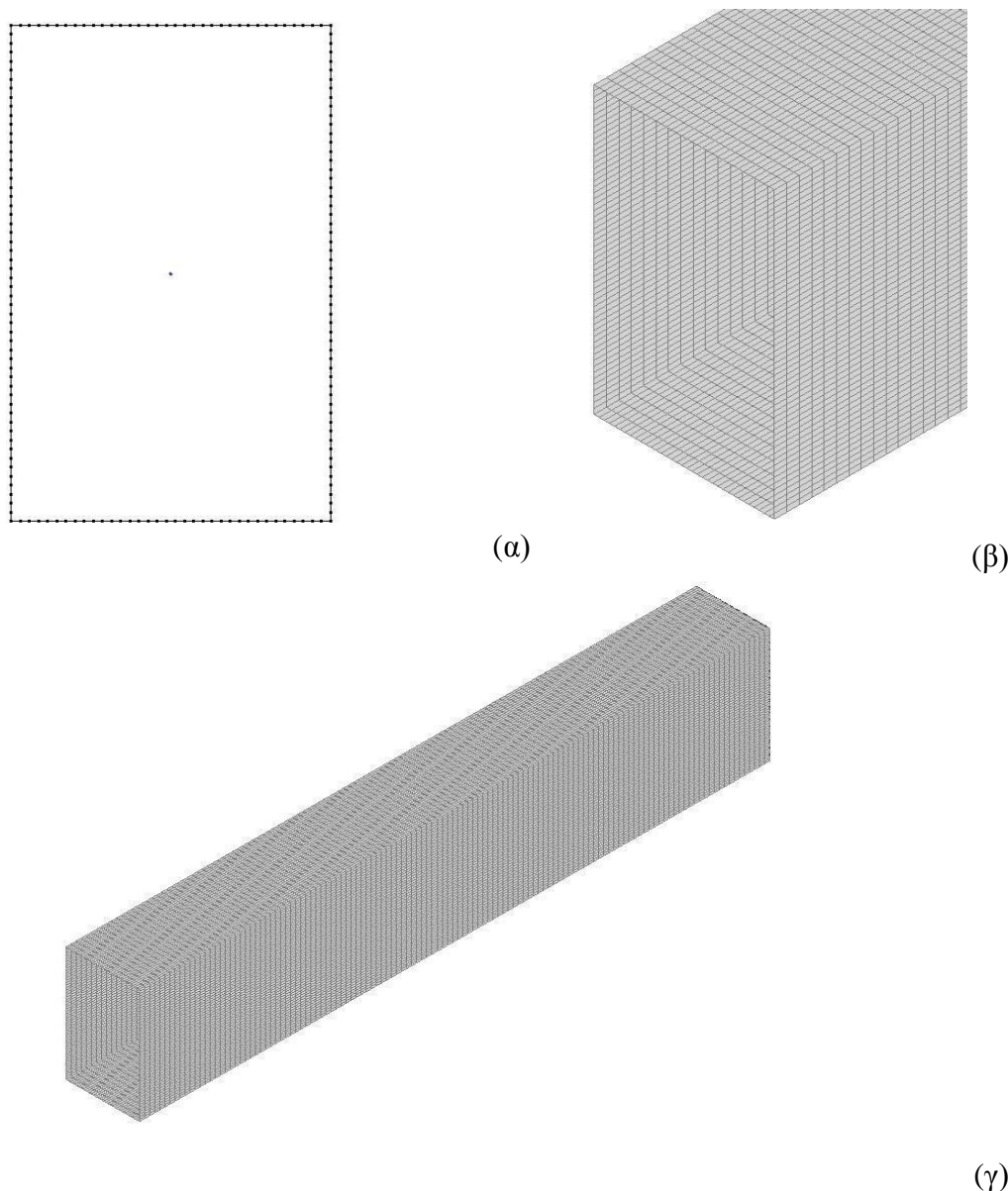


**Σχήμα 5.1.2** Τρισδιάστατα 5-εδρικά στοιχεία. Διατομή  $800 \times 1600$  (α), φορέας με  $L=6.4m$  σε διάφορα zoom (β), (γ) & (δ).

Προκειμένου να γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων θεωρήθηκε ότι είναι ικανοποιητικό να παρουσιαστούν οι 4 πρώτες ιδιομορφές. Σαν μέτρο σύγκρισης επιλέχθηκε η συχνότητα  $f$  (Hz). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν για τη συχνότητα ισχύουν και για τις ιδιοπεριόδους  $T$  (s) και τις ιδιοσυχνότητες  $\omega$  (rad / s) καθώς οι σχέσεις που συνδέουν τα παραπάνω μεγέθη είναι:

$$T = \frac{1}{f} \quad (5.1.1)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (5.1.2)$$



**Σχήμα 5.1.3** Τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία. Διατομή 60x40x5 (α), φορέας με  $L=0.3m$  σε διάφορα zoom (β) & (γ).

Συνεπώς στα παραδείγματα παρουσιάζονται πίνακες με τις τιμές των συχνοτήτων όλων των αναλύσεων καθώς και οι προσημασμένες % διαφορές των αναλύσεων που έχουν γίνει με το Nastran από εκείνες που έχουν γίνει με τα dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert και dynfreeUniflin. Οι διαφορές αυτές υπολογίζονται ως

$$\text{Διαφορά από dynfreeSlin \%} = \frac{f_{Nastran} - f_{dynfreeSlin}}{f_{dynfreeSlin}} \cdot 100 \quad (5.1.3)$$

$$\text{Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert \%} = \frac{f_{Nastran} - f_{dynfreeSlinwarpinert}}{f_{dynfreeSlinwarpinert}} \cdot 100 \quad (5.1.4)$$

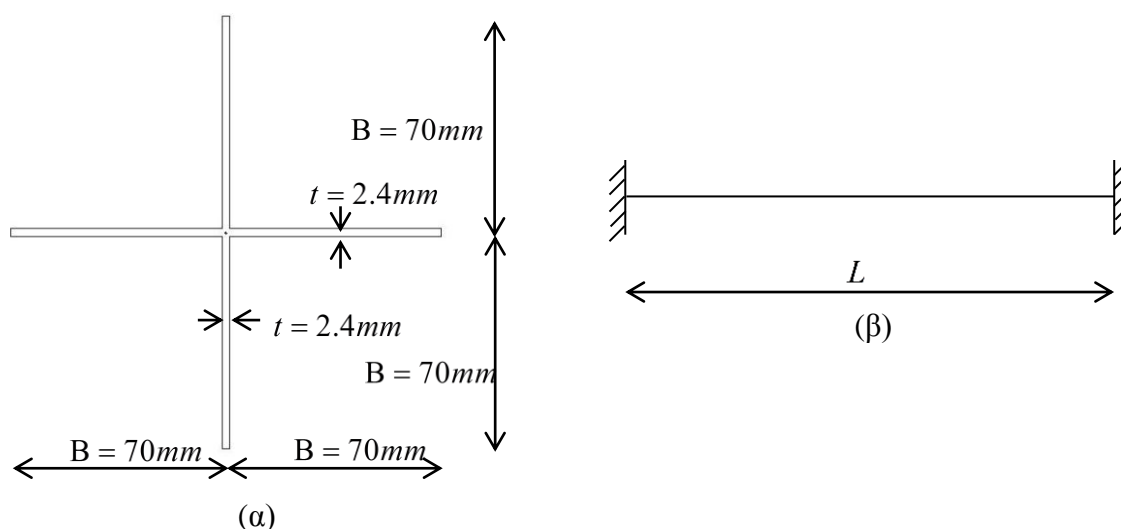
$$\text{Διαφορά από dynfreeUniflin \%} = \frac{f_{Nastran} - f_{dynfreeUniflin}}{f_{dynfreeUniflin}} \cdot 100 \quad (5.1.5)$$

Στα ακόλουθα με τον όρο ταλαντώσεις, ιδιομορφές, συχνότητες κτλ θα αναφερόμαστε σε στρεπτικές για λόγους συντομίας. Με τους όρους be και trig θα αναφερόμαστε στα

στοιχεία με τα οποία έχει γίνει η συνοριακή και επιφανειακή (με τριγωνικά στοιχεία) διακριτοποίηση της διατομής αντίστοιχα.

## 5.2 1<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: Σταυροειδής διατομή $B=70mm$ , $t=2.4mm$

Στο πρώτο παράδειγμα αναλύεται σταυροειδής διατομή με διαστάσεις  $B=70mm$ ,  $t=2.4mm$  (βλέπε Σχήμα 5.2.1α) για μήκη δοκών  $0.6m$  και  $5m$ . Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.2.1β).



Σχήμα 5.2.1 Σταυροειδής διατομή  $B=70mm$ ,  $t=2.4mm$  (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.2.1 Μήκος δοκού $L=0.6m$

Στους Πίνακες 5.2.1.1-5.2.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.2.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.2.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.2.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια και αξιοπιστία όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών).
- 2) Τα τρισδιάστατα 6-εδρικά και τα 4-πλευρικά κελυφωτά στοιχεία προσεγγίζουν καλύτερα την λύση της θεωρίας δοκού καθώς βελτιώνεται η διακριτοποίηση.
- 3) Για τα 4-πλευρικά κελυφωτά αξίζει να τονιστεί ότι παρουσιάζουν πολύ μικρή απόκλιση με τα 3d 6-εδρικά συνεπώς με πολύ μικρό αριθμό στοιχείων επιτυγχάνουμε να υπολογίσουμε τις 3 πρώτες ιδιοσυχνότητες με πολύ μικρό σφάλμα (βλέπε ανάλυση 3α).
- 4) Τα τρισδιάστατα 5-εδρικά βλέπουμε ότι δεν λειτουργούν τόσο καλά σε περιπτώσεις σαν αυτές. Ενώ χρησιμοποιήσαμε πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων

παρ' όλα αυτά δεν καταφέραμε να μειώσουμε το σφάλμα όσο με τους άλλους τύπους στοιχείων.

- 5) Συγκρίνοντας τις αναλύσεις 1α-1β διαπιστώνουμε ότι είναι προτιμότερο να έχουμε μια λεπτομερέστερα διακριτοποιημένη διατομή με επιμήκη κατά μήκος του φορέα στοιχεία παρά το αντίθετο.
- 6) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.2.2 με το Σχήμα 5.2.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 7) Στο παράδειγμά αυτό βλέπουμε ότι έχουμε πετύχει ακριβή λύση χωρίς χρήση διαφραγμάτων, συνεπώς η επιρροή του φαινομένου distortion δεν είναι σημαντική σε αυτή τη διατομή.
- 8) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 9) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης είναι πιο αξιόπιστη από τη θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.2.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	556	22,240	-	104.28	217.58	347.48	499.65
1β			116	27,840	-	106.18	221.16	352.28	504.82
1γ			556	33,360	-	104.22	217.45	347.21	498.96
2α		3D 5-εδρικά	114	13,680	-	138.96	284.95	444.29	622.14
2β			1,560	31,200	-	108.23	225.21	358.88	516.17
2γ			548	54,800	-	109.11	227.06	361.26	517.16
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	28	1,680	-	102.91	214.69	342.65	425.68
3β			280	30,800	-	103.12	215.27	343.90	494.32
3γ			156	51,480	-	103.42	215.88	344.83	440.91

**Πίνακας 5.2.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	2,800	548	50	-	104.89	218.24	347.30	497.62
5	dynfreeSlin- warpinert			50		104.89	218.25	347.32	497.68
6	dynfreeUniflin			50		92.42	184.97	277.77	370.95

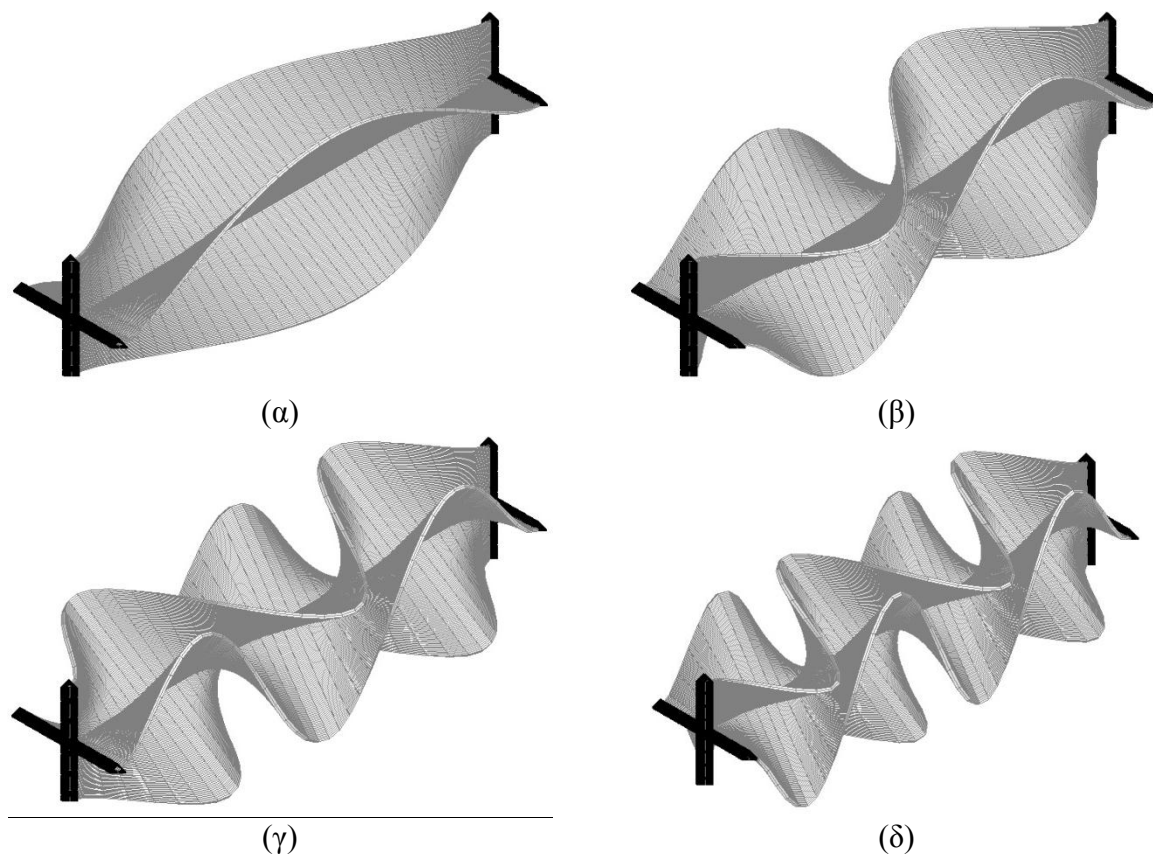
**Πίνακας 5.2.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	-0.58	-0.30	0.05	0.41	-0.58	-0.31	0.05	0.40
	1β		1.23	1.34	1.44	1.45	1.22	1.34	1.43	1.43
	1γ		-0.64	-0.36	-0.02	0.27	-0.64	-0.36	-0.03	0.26
	2α	3D 5-εδρικά	32.48	30.57	27.93	25.02	32.48	30.56	27.92	25.01
	2β		3.19	3.19	3.34	3.73	3.19	3.19	3.33	3.72
	2γ		4.02	4.04	4.02	3.93	4.02	4.04	4.01	3.92
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-1.88	-1.63	-1.34	-14.46	-1.89	-1.63	-1.34	-14.47
	3β		-1.69	-1.36	-0.98	-0.66	-1.69	-1.37	-0.98	-0.67
	3γ		-1.40	-1.08	-0.71	-11.40	-1.40	-1.09	-0.72	-11.41

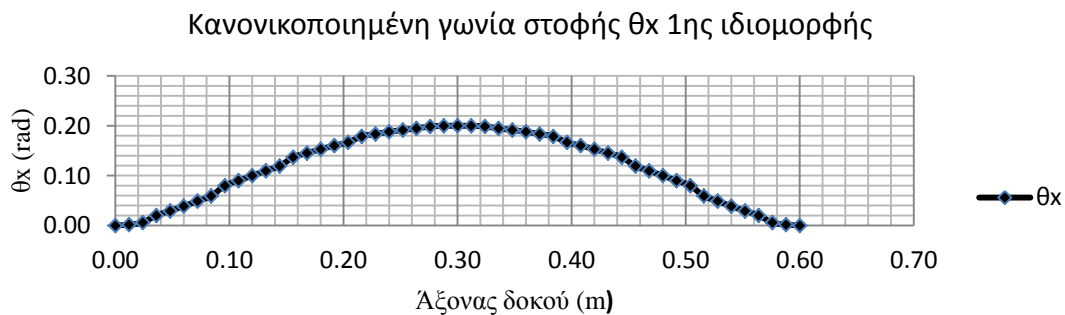
**Πίνακας 5.2.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	12.83	17.63	25.09	34.69
	1β		14.88	19.57	26.82	36.09
	1γ		12.76	17.56	25.00	34.51
	2α	3D 5-εδρικά	50.35	54.05	59.95	67.71
	2β		17.11	21.75	29.20	39.15
	2γ		18.05	22.75	30.06	39.42
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	11.35	16.06	23.36	14.75
	3β		11.57	16.38	23.81	33.26
	3γ		11.90	16.71	24.14	18.86

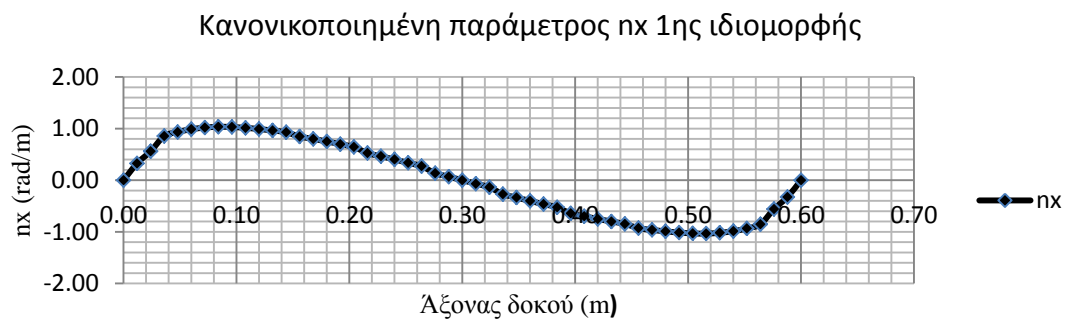




Σχήμα 5.2.2 Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



Σχήμα 5.2.3 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.



Σχήμα 5.2.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.

### 5.2.2 Μήκος δοκού $L = 5m$

Στους Πίνακες 5.2.2.1-5.2.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.2.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.2.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.2.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια και αξιοπιστία όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών).
- 2) Τα τρισδιάστατα 6-εδρικά και τα 4-πλευρικά κελυφωτά στοιχεία προσεγγίζουν καλύτερα την λύση της θεωρίας δοκού καθώς βελτιώνεται η διακριτοποίηση.
- 3) Τα τρισδιάστατα 5-εδρικά βλέπουμε ότι δεν λειτουργούν τόσο καλά σε περιπτώσεις σαν αυτές. Ενώ χρησιμοποιήσαμε πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων παρ' όλα αυτά δεν καταφέραμε να μειώσουμε το σφάλμα όσο με τους άλλους τύπους στοιχείων.
- 4) Συγκρίνοντας τις αναλύσεις 1α-1β διαπιστώνουμε ότι δεν κερδίζουμε σε ακρίβεια μεταβαίνοντας από τα 30,160 στα 232,000 στοιχεία.
- 5) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.2.5 με το Σχήμα 5.2.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 6) Στο παράδειγμά αυτό βλέπουμε ότι έχουμε πετύχει ακριβή λύση χωρίς χρήση διαφραγμάτων, συνεπώς η επιρροή του φαινομένου distortion δεν είναι σημαντική σε αυτή τη διατομή.
- 7) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 8) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης είναι πιο αξιόπιστη από τη θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.2.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των -Λοιπά χαρ/κά	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	116	30,160	-	11.33	22.68	34.05	45.47
1β			116	232,000	-	11.33	22.68	34.05	45.47
1γ			556	278,000	-	11.07	22.16	33.28	44.48
2α		3D 5-εδρικά	114	114,000	-	15.29	30.60	45.92	61.28
3α		Κελυφωτά 4- πλευρικά	28	14,000	-	10.80	21.62	32.46	43.35
3β		56	56,000	-	10.99	22.00	33.03	44.11	

**Πίνακας 5.2.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κά	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	2800	548	50	-	11.23	22.48	33.76	45.08
5	dynfreeSlin- warpinert			50		11.23	22.48	33.76	45.08
6	dynfreeUniflin			50		11.09	22.19	33.31	44.47

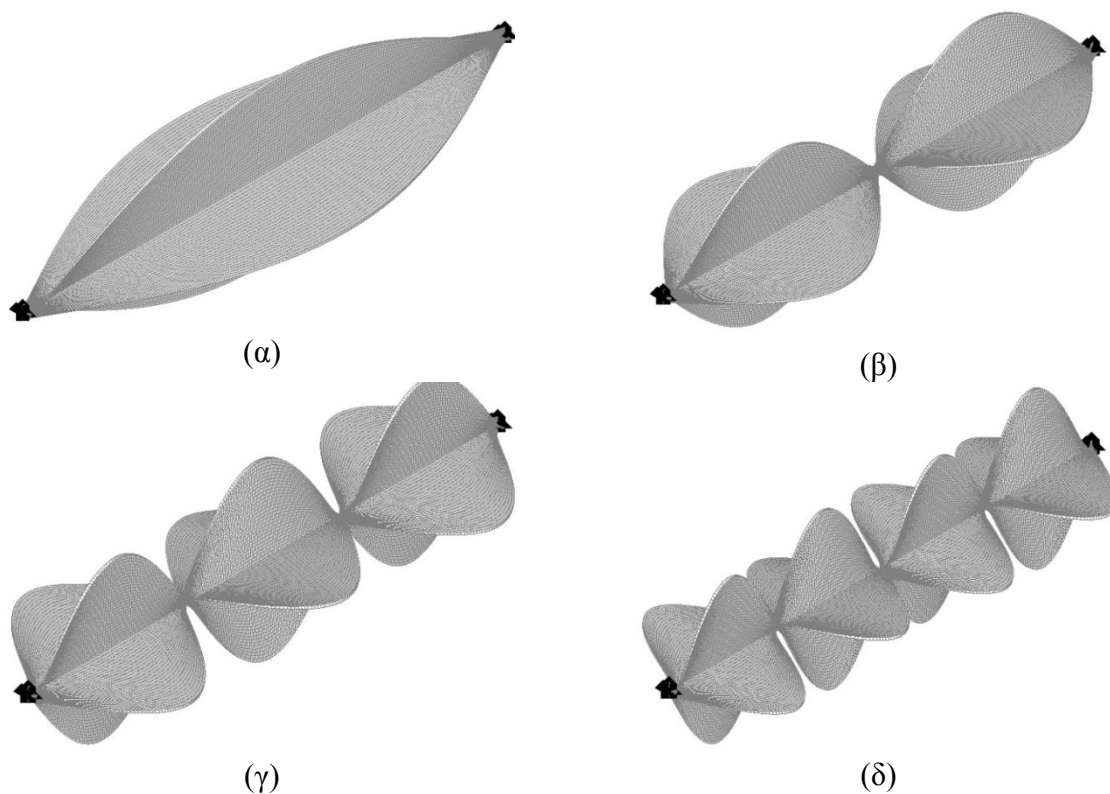
**Πίνακας 5.2.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.87	0.87	0.86	0.86	0.87	0.87	0.86	0.86
	1β		0.87	0.87	0.87	0.86	0.87	0.87	0.87	0.86
	1γ		-1.46	-1.44	-1.42	-1.33	-1.46	-1.44	-1.42	-1.33
	2α	3D 5-εδρικά	36.10	36.10	36.02	35.93	36.10	36.10	36.02	35.93
	3α	Κελυφωτά	-3.87	-3.84	-3.85	-3.84	-3.87	-3.84	-3.85	-3.84
	3β	4-πλευρικά	-2.17	-2.17	-2.17	-2.16	-2.17	-2.17	-2.17	-2.16

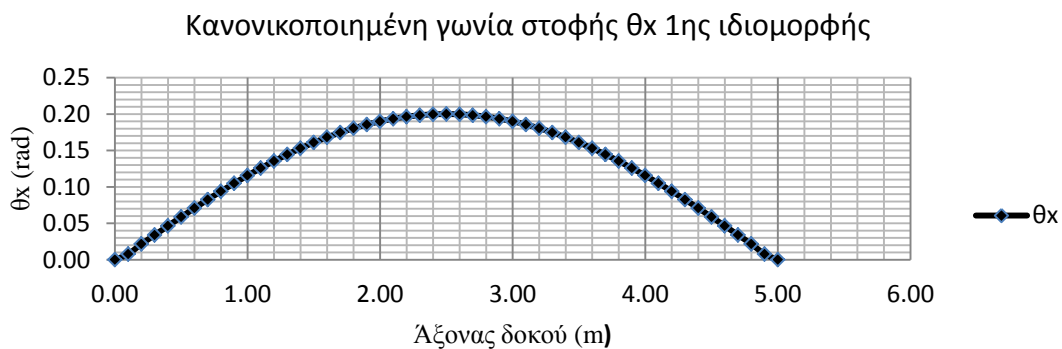


**Πίνακας 5.2.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

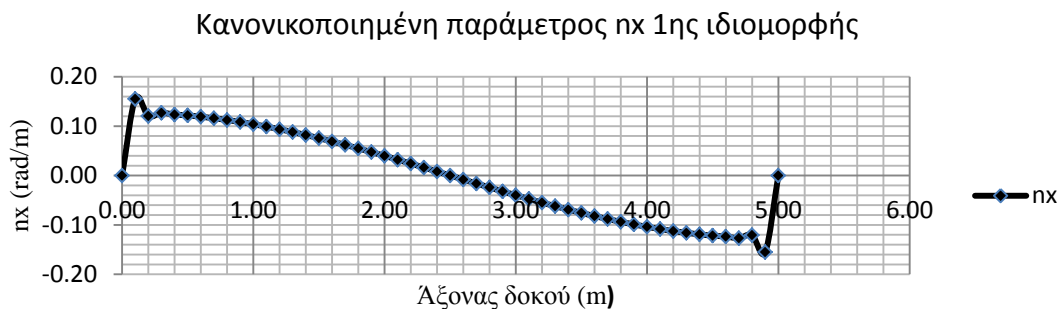
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	2.18	2.19	2.21	2.24
	1β		2.18	2.19	2.22	2.25
	1γ		-0.18	-0.14	-0.10	0.02
	2α	3D 5-εδρικά	37.87	37.89	37.84	37.80
	3α	Κελυφωτά	-2.62	-2.57	-2.56	-2.52
	3β	4-πλευρικά	-0.90	-0.88	-0.85	-0.81



**Σχήμα 5.2.5** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



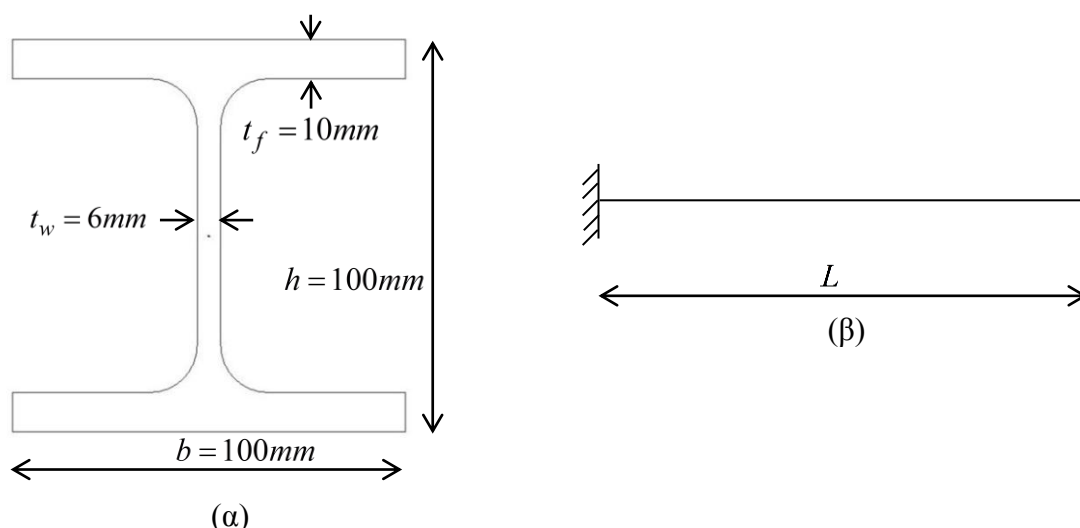
**Σχήμα 5.2.6** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από dynfreeSlinwarperit.



Σχήμα 5.2.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.3 2<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: HEB100

Στο δεύτερο παράδειγμα αναλύεται η διατομή HEB100 (βλέπε Σχήμα 5.3.1α) για μήκη δοκών  $0.4m$  και  $0.8m$ . Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Το στατικό σύστημα της δοκού λαμβάνεται πρόβολος (βλέπε Σχήμα 5.3.1β).



Σχήμα 5.3.1 Διατομή HEB100 (α), στατικό σύστημα(β).

#### 5.3.1 Μήκος δοκού $L = 0.4m$

Στους Πίνακες 5.3.1.1-5.3.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.3.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 3β με κελυφωτά 4-πλευρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.3.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.3.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β κελυφωτών 4-πλευρικών).

- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.3.2 με το Σχήμα 5.3.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 4) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης είναι πιο αξιόπιστη από τη θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.3.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανά-λυ-σης	Πρό-γραμ-μα ανά-λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των - Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	468	46,800	-	489.92	1939.91	2869.87	5182.06
							3925.15	6637.74	
1β			468	46,800	100 (σε ΟΛΕΣτις διατομές)	551.18	2405.74	5321.49	8495.63
1γ		468	46,800	100 (σε ΟΛΕΣτις διατομές) + δέσμευση Rx + Ry σε αυτά	551.18	2405.74	5321.49	8495.63	
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	145	29,000	-	474.18	1580.10	2416.82	3460.39
3β			145	29,000	200 (σε ΟΛΕΣτις διατομές)	504.04	2260.54	5060.68	8137.76

**Πίνακας 5.3.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

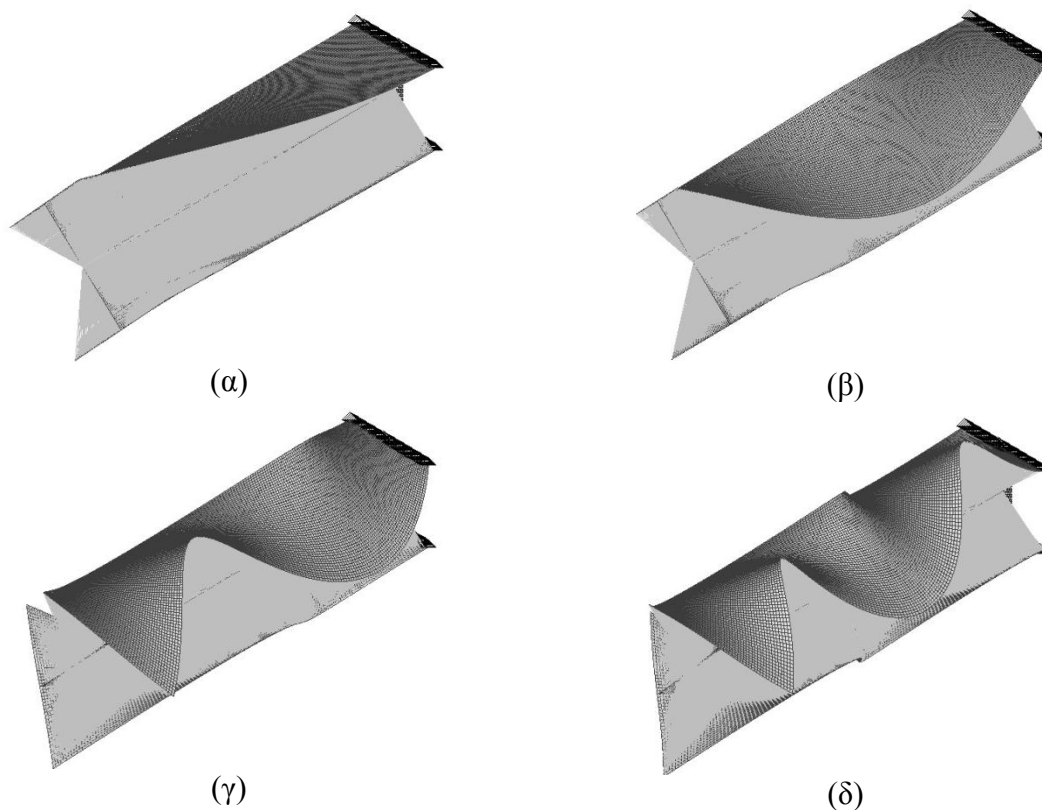
α/α ανά-λυ-σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή
4	dynfreeSlin	2580	1,352	50	It από Kraus	504.70	2199.80	4916.07	7944.23
5	dynfreeSlinwarpinert			50		507.69	2270.62	5133.84	8346.92
6	dynfreeUniflin			50		243.99	732.22	1221.17	1711.32

**Πίνακας 5.3.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

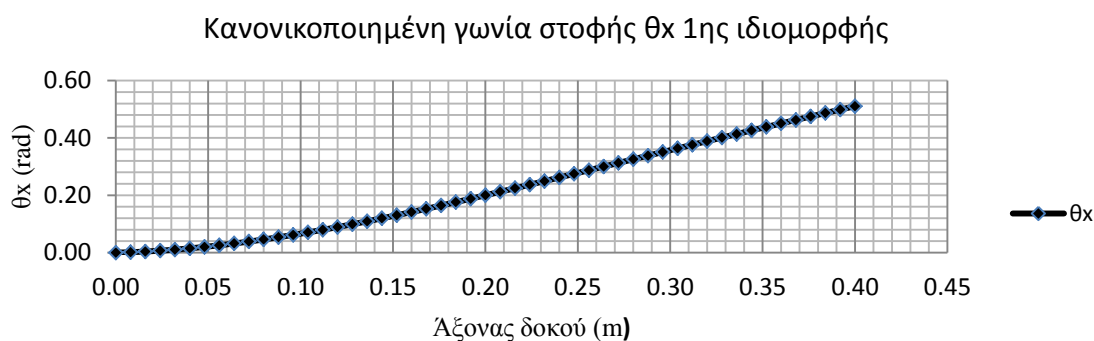
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	-2.93	-11.81	-41.62	-34.77	-3.50	-14.56	-44.10	-37.92
					-20.16	-16.45			-23.54	-20.48
	1β		9.21	9.36	8.25	6.94	8.57	5.95	3.66	1.78
	1γ	9.21	9.36	8.25	6.94	8.57	5.95	3.66	1.78	
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-6.05	-28.17	-50.84	-56.44	-6.60	-30.41	-52.92	-58.54
	3β		-0.13	2.76	2.94	2.44	-0.72	-0.44	-1.43	-2.51

**Πίνακας 5.3.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

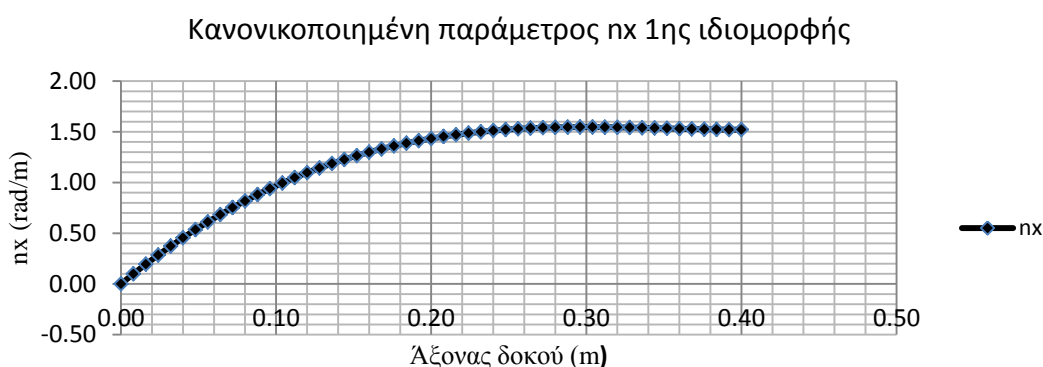
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	100.79	164.94	135.01	202.81
					221.43	287.87
	1β		125.90	228.56	335.77	396.44
	1γ	125.90	228.56	335.77	396.44	
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	94.34	115.80	97.91	102.21
	3β		106.58	208.73	314.41	375.53



**Σχήμα 5.3.2** Ανάλυση 3α, κελυφωτά 4-πλευρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



Σχήμα 5.3.3 Γωνία στοφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.3.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.3.2 Μήκος δοκού $L = 0.8m$

Στους Πίνακες 5.3.2.1-5.3.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.3.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.3.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στοφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.3.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β κελυφωτών 4-πλευρικών).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.3.5 με το Σχήμα 5.3.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στοφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 4) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφής στρέψης είναι πιο αξιόπιστη από τη θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφής στρέβλωσης.

5)

**Πίνακας 5.3.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανά-λυσης	Πρό-γραμ-μα ανά-λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των-Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	468	46,800	-	180.13	721.35	1549.35	2095.51
1β			468	93,600	200 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	195.49	804.09	1859.97	3190.77
1γ			468	93,600	200 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές) + δέσμευση Rx + Ry σε αυτά	195.49	804.09	1859.97	3190.77
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	145	58,000	-	165.10	700.31	1385.66	1737.53
3β			145	58,000	400 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	174.56	738.88	1738.49	3008.94

**Πίνακας 5.3.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

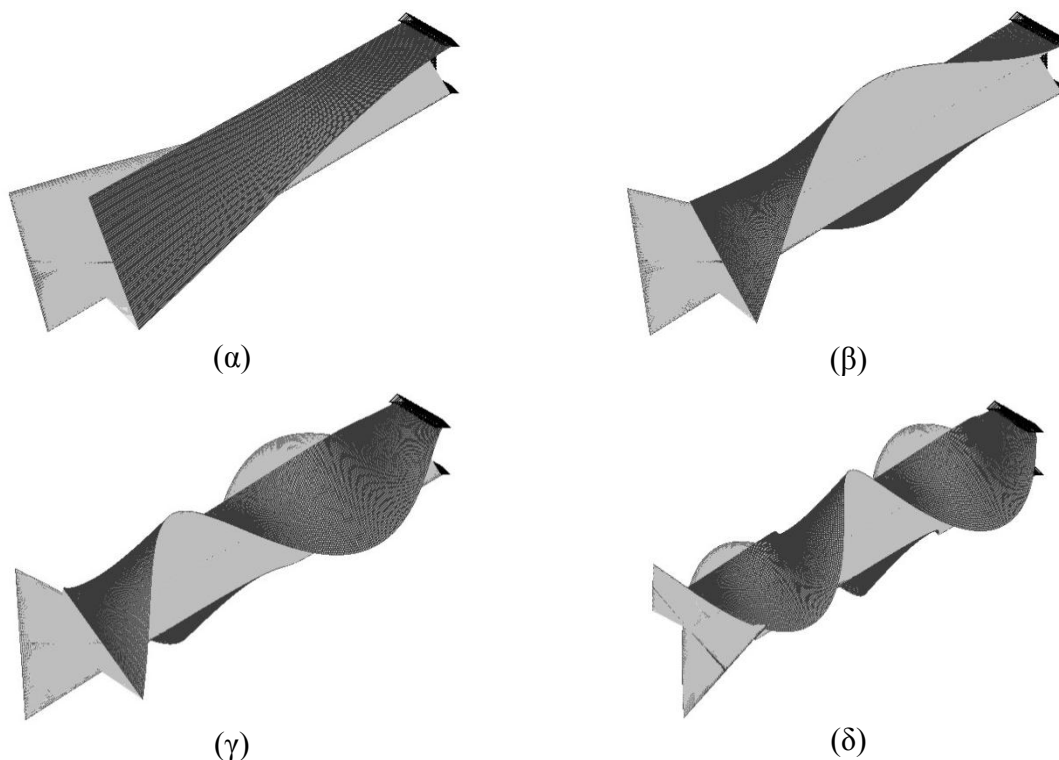
α/α ανά-λυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο-μορφή
4	dynfreeSlin	2,580	1,352	50	It από Kraus	184.61	734.82	1687.44	2921.02
5	dynfreeSlin-warpinert			50		184.87	742.74	1723.35	3008.73
6	dynfreeUniflin			50		122.00	366.15	610.75	856.12

**Πίνακας 5.3.7** Σύγκριση Nastran με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*.

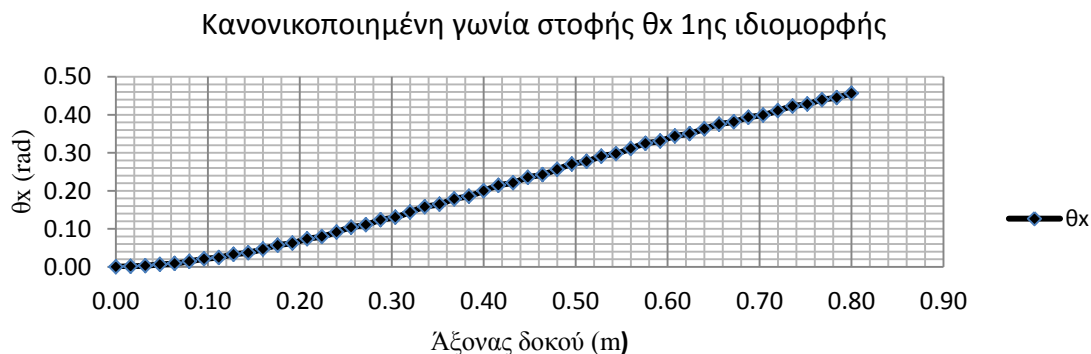
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeSlin</i> %				Διαφορά από <i>dynfreeSlinwarpinert</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	-2.42	-1.83	-8.18	-28.26	-2.56	-2.88	-10.10	-30.35
	1β		5.89	9.43	10.22	9.23	5.75	8.26	7.93	6.05
	1γ		5.89	9.43	10.22	9.23	5.75	8.26	7.93	6.05
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-10.57	-4.70	-17.88	-40.52	-10.69	-5.71	-19.60	-42.25
	3β		-5.45	0.55	3.03	3.01	-5.58	-0.52	0.88	0.01

**Πίνακας 5.3.8** Σύγκριση Nastran με *dynfreeUniflin*.

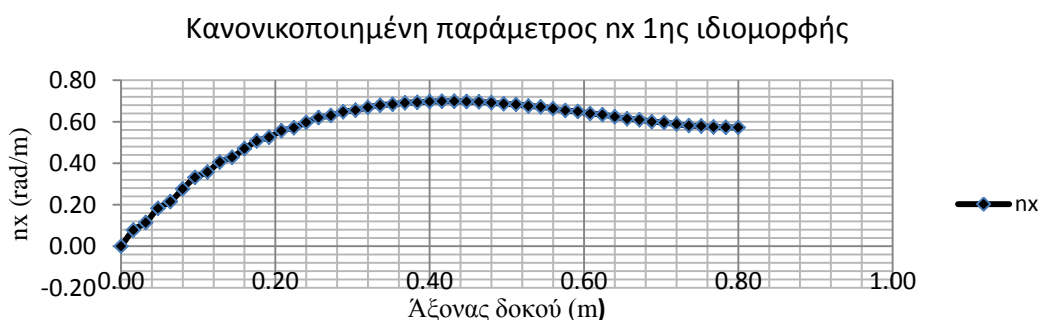
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeUniflin</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	47.65	97.01	153.68	144.77
	1β		60.24	119.61	204.54	272.70
	1γ		60.24	119.61	204.54	272.70
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	35.33	91.26	126.88	102.95
	3β		43.08	101.80	184.65	251.46



**Σχήμα 5.3.5** Ανάλυση 3α, κελυφωτά 4-πλευρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



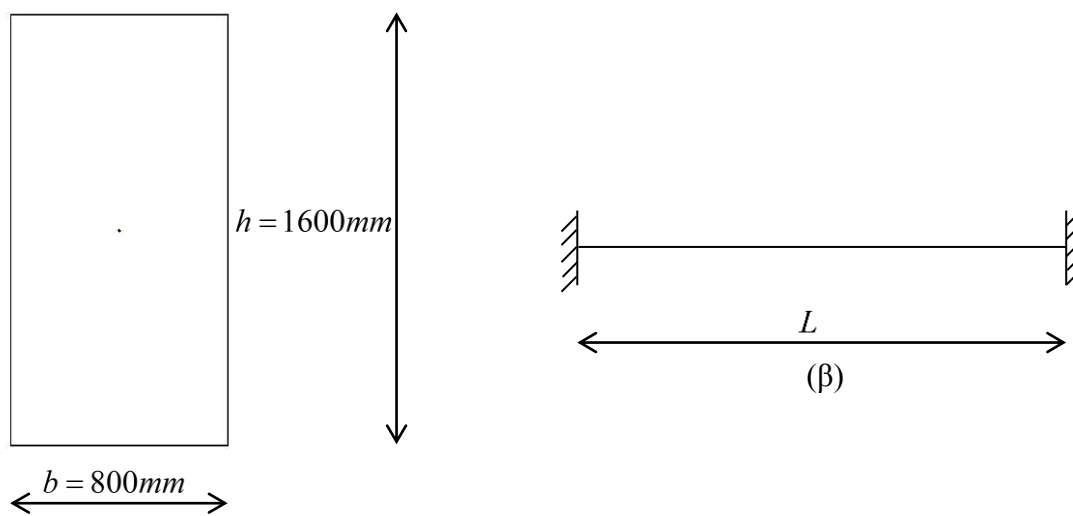
Σχήμα 5.3.6 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.3.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.4 3<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: ορθογωνική διατομή 800x1600

Στο τρίτο παράδειγμα αναλύεται η ορθογωνική διατομή με διαστάσεις  $b = 0.8m$  και  $h = 1.6m$  (βλέπε Σχήμα 5.4.1α) για μήκη δοκών  $6.4m$  και  $12.8m$ . Το υλικό της διατομής είναι αλουμίνιο. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.4.1β).



Σχήμα 5.4.1 Ορθογωνική διατομή 800x1600 (α), στατικό σύστημα (β).



### 5.4.1 Μήκος δοκού $L = 6.4m$

Στους Πίνακες 5.4.1.1-5.4.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.4.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.4.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreewarpinert η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.4.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια και αξιοπιστία όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές.
- 2) Τα τρισδιάστατα 6-εδρικά και 5-εδρικά στοιχεία προσεγγίζουν καλύτερα την λύση της θεωρίας δοκού καθώς βελτιώνεται η διακριτοποίηση.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.4.2 με το Σχήμα 5.4.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης είναι πιο αξιόπιστη από τη θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.4.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D	512	29,696	-	193.09	389.14	590.12	796.72
1β		6-εδρικά	512	40,960	-	193.07	389.16	590.27	797.14
2α		3D	1,108	29,916	-	193.39	389.34	589.49	794.18
2β		5-εδρικά	1,108	49,860	-	193.34	389.56	590.55	796.94

**Πίνακας 5.4.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*, *dynfreeUniflin*.

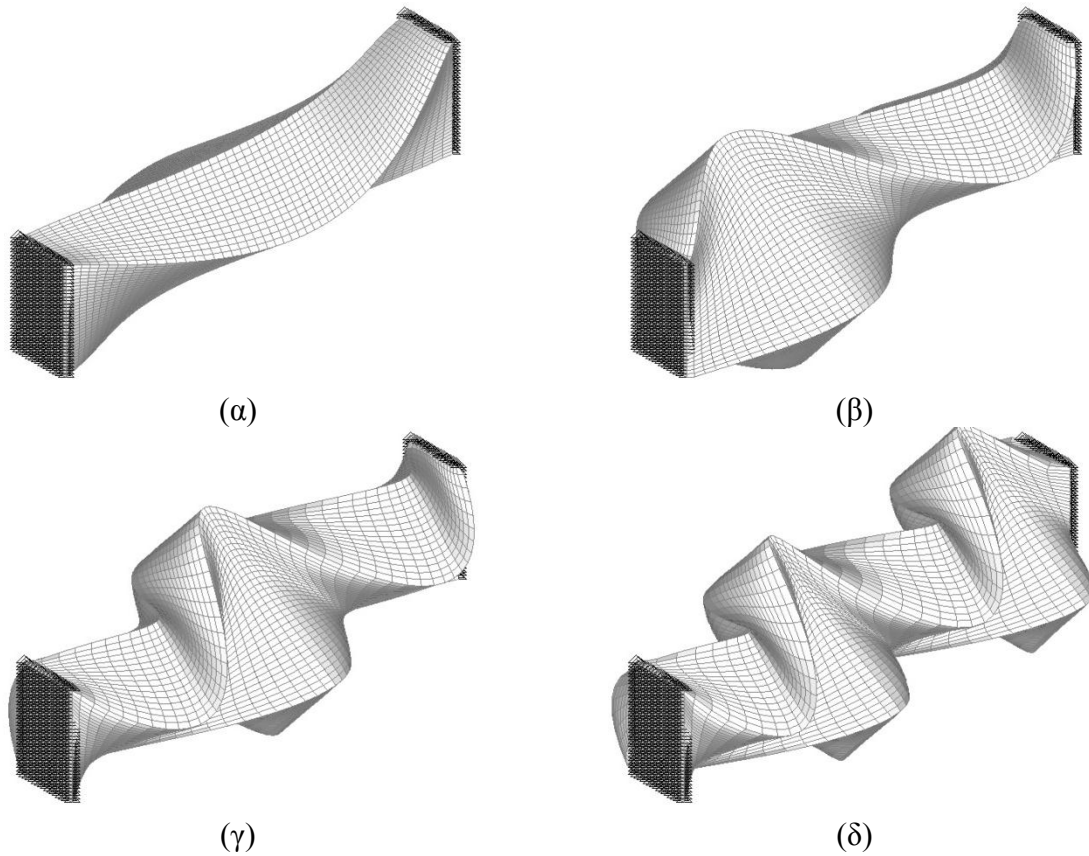
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,200	1,108	50	-	191.40	387.09	589.62	799.52
5	dynfreeSlin- warpinert			50		191.65	388.86	594.58	808.93
6	dynfreeUniflin			50		182.01	364.21	546.77	729.87

**Πίνακας 5.4.3** Σύγκριση Nastran με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*.

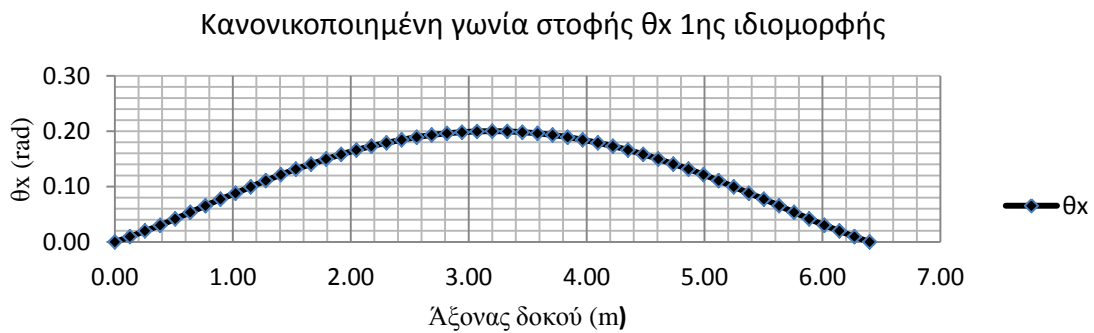
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeSlin</i> %				Διαφορά από <i>dynfreeSlinwarpinert</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D	0.88	0.53	0.09	-0.35	0.75	0.07	-0.75	-1.51
	1β	6-εδρικά	0.87	0.53	0.11	-0.30	0.74	0.08	-0.72	-1.46
	2α	3D	1.04	0.58	-0.02	-0.67	0.91	0.12	-0.86	-1.82
	2β	5-εδρικά	1.02	0.64	0.16	-0.32	0.88	0.18	-0.68	-1.48

**Πίνακας 5.4.4** Σύγκριση Nastran με *dynfreeUniflin*.

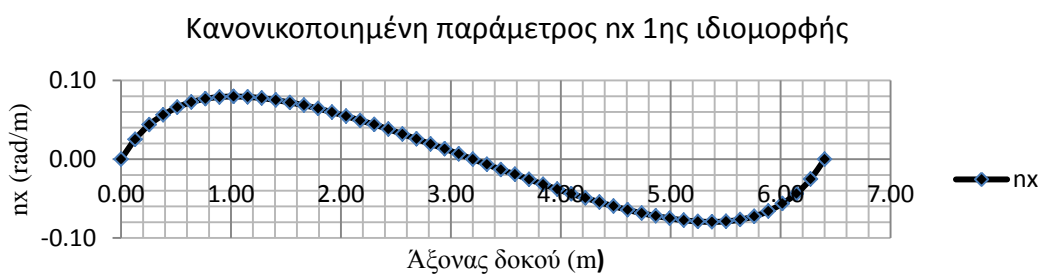
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeUniflin</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D	6.09	6.85	7.93	9.16
	1β	6-εδρικά	6.08	6.85	7.96	9.22
	2α	3D	6.25	6.90	7.81	8.81
	2β	5-εδρικά	6.23	6.96	8.01	9.19



Σχήμα 5.4.2 Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



Σχήμα 5.4.3 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.4.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.4.2 Μήκος δοκού $L = 12.8m$

Στους Πίνακες 5.4.2.1-5.4.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.4.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1β με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.4.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreewarpinert η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.4.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1β τρισδιάστατων 6-εδρικών).
- 2) Τα τρισδιάστατα 6-εδρικά και 5-εδρικά στοιχεία προσεγγίζουν καλύτερα την αναλυτική λύση καθώς βελτιώνεται η διακριτοποίηση.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.4.5 με το Σχήμα 5.4.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας ισχύει η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης και όχι η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.4.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Αριθμός διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D	512	29,696	-	93.81	188.10	283.30	379.75
1β		6-εδρικά	512	49,152	-	93.80	188.11	283.41	380.05
2α		3D	1,108	29,916	-	93.96	188.19	282.91	378.31
2β		5-εδρικά	1,108	49,860	-	93.95	188.33	283.54	379.88

**Πίνακας 5.4.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

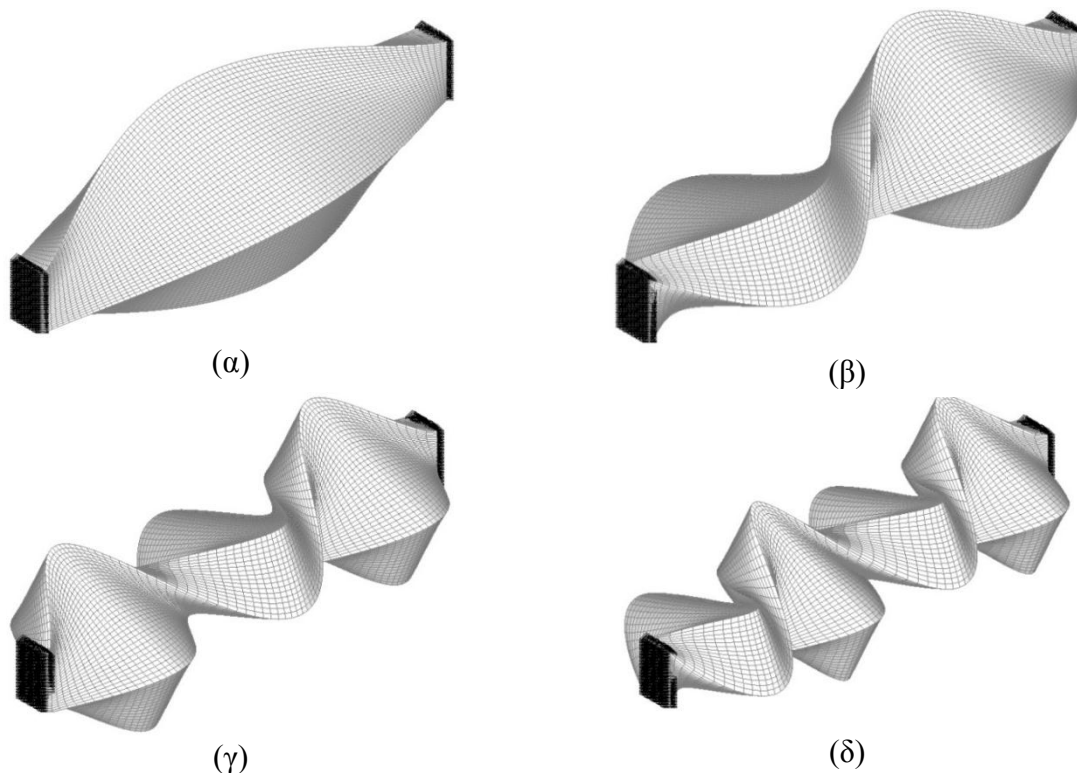
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,200	1,108	50	It από nastran	92.91	186.63	281.85	379.12
5	dynfreeSlin- warpinert			50		92.95	186.92	282.79	381.17
6	dynfreeUniflin			50		90.39	180.87	271.53	362.46

**Πίνακας 5.4.7** Σύγκριση Nastran με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*.

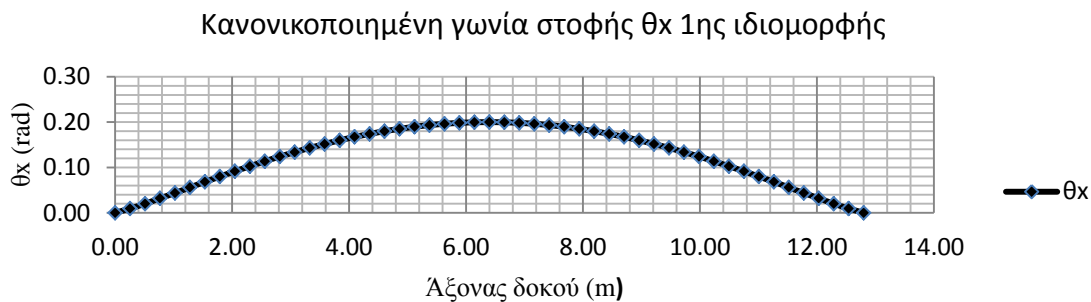
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeSlin</i> %				Διαφορά από <i>dynfreeSlinwarpinert</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D	0.97	0.79	0.51	0.17	0.93	0.63	0.18	-0.37
	1β	6-εδρικά	0.95	0.80	0.55	0.25	0.91	0.64	0.22	-0.29
	2α	3D	1.13	0.84	0.38	-0.21	1.09	0.68	0.04	-0.75
	2β	5-εδρικά	1.11	0.91	0.60	0.20	1.07	0.75	0.27	-0.34

**Πίνακας 5.4.8** Σύγκριση Nastran με *dynfreeUniflin*.

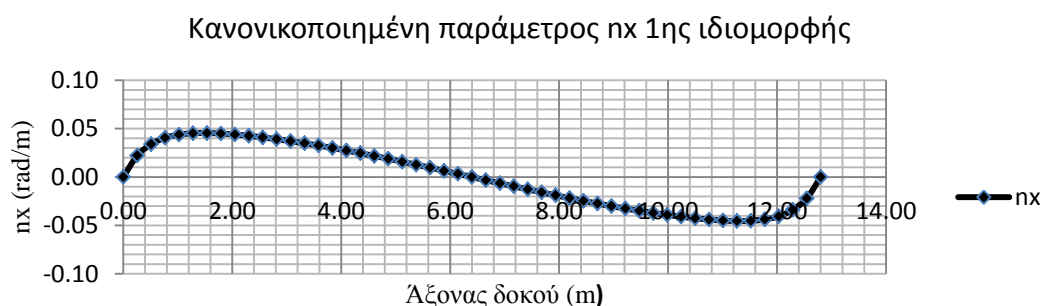
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeUniflin</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D	3.79	4.00	4.34	4.77
	1β	6-εδρικά	3.77	4.01	4.38	4.86
	2α	3D	3.95	4.05	4.19	4.37
	2β	5-εδρικά	3.93	4.12	4.42	4.81



**Σχήμα 5.4.5** Ανάλυση 1β, 3D 6-εδρικά. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



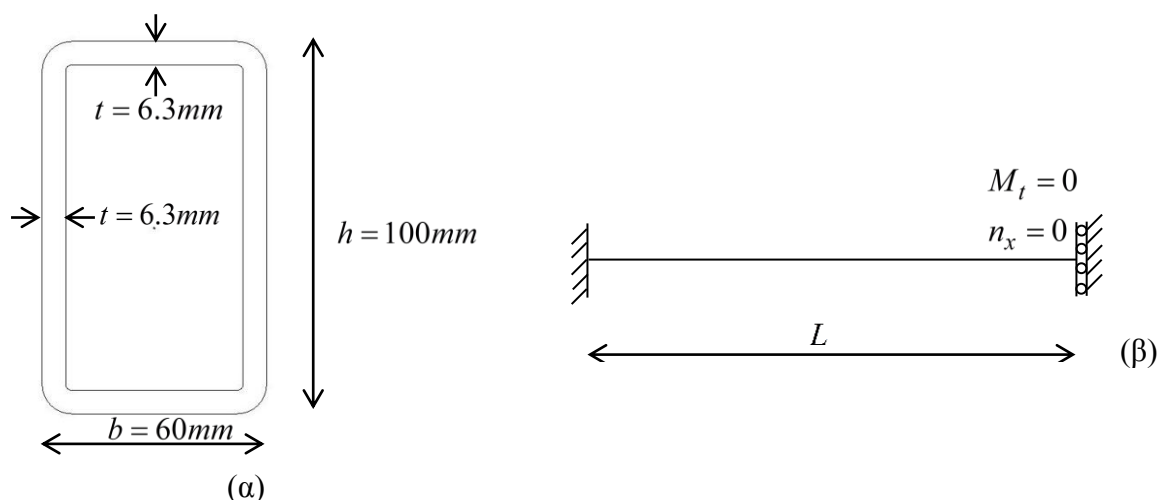
Σχήμα 5.4.6 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1ης ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.4.7 Παράμετρος  $n_x$  1ης ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.5 4<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 100x60x6.3

Στο τέταρτο παράδειγμα αναλύεται η διατομή RHS 100x60x6.3 (βλέπε Σχήμα 5.5.1α) για μήκη δοκών  $0.5m$  και  $1.0m$ . Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Οι στηρίξεις λαμβάνονται ως πάκτωση στο ένα άκρο, παρεμπόδιση της στρέβλωσης στο άλλο (βλέπε Σχήμα 5.5.1β).



Σχήμα 5.5.1 Διατομή RHS 100x60x6.3 (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.5.1 Μήκος δοκού $L=0.5m$

Στους Πίνακες 5.5.1.1-5.5.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.5.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran ενώ στο Σχήμα 5.5.3 οι αντίστοιχες που προέκυψαν από την ανάλυση 3α με 4-πλευρικά κελυφωτά με τη χρήση μόνο ενός διαφράγματος στην ακραία διατομή. Στο Σχήμα 5.5.4 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreewarpinert η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.5.5 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Όσον αφορά τα προσομοιώματα των 4-πλευρικών κελυφωτών στοιχείων, βλέπουμε ότι με τη χρήση διαφραγμάτων δεν έχουμε βελτίωση της ακρίβειας. Αντιθέτως στην περίπτωση 3η που έχουν τοποθετηθεί μόνο 2 διαφράγματα (ένα στη μεσαία και ένα στην ακραία διατομή) βλέπουμε ότι έχουμε ένα χειρότερο προσομοίωμα καθώς η παρουσία τους εμποδίζει την αναμενόμενη παραμόρφωση της δοκού και αλλοιώνει τις συχνότητες.
- 3) Από το Σχήμα 5.5.3 βλέπουμε την πολύ μεγάλη επιρροή του φαινομένου distortion στις ιδιομορφές πέραν της επίδρασης του στις συχνότητες.
- 4) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.5.2 με το Σχήμα 5.5.4 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 5) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 6) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.5.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Αριθμός διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)				
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	152	19,000	124 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	1342.37	4036.49	6752.50	9491.59	
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	116	11,600	1 (στην ακραία διατομή)	1239.65	4136.51	6291.28	9406.72	
								4762.99		8817.83
3β			116	11,600	100 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	1289.82	3876.77	6481.41	9106.06	
3γ			116	11,600	50	1289.46	3875.23	6477.54	9098.27	
3δ			116	11,600	25	1288.90	3872.06	6467.48	9074.55	
3ε			116	11,600	10	1287.60	3854.05	6384.90	8817.76	
3στ			116	11,600	5	1285.02	3801.42	6060.81	10288.04	
3ζ			116	11,600	4	1283.64	3764.46	5667.42	7838.91	
3η		116	11,600	2	1273.48	3810.34	4145.89	7828.27		
							6138.78			

**Πίνακας 5.5.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,912	228	50	-	1334.01	4009.32	6703.49	9421.90
5	dynfreeSlin- warpinert			50		1334.14	4012.38	6714.81	9445.16
6	dynfreeUniflin			50		1326.98	3982.26	6641.47	9307.23

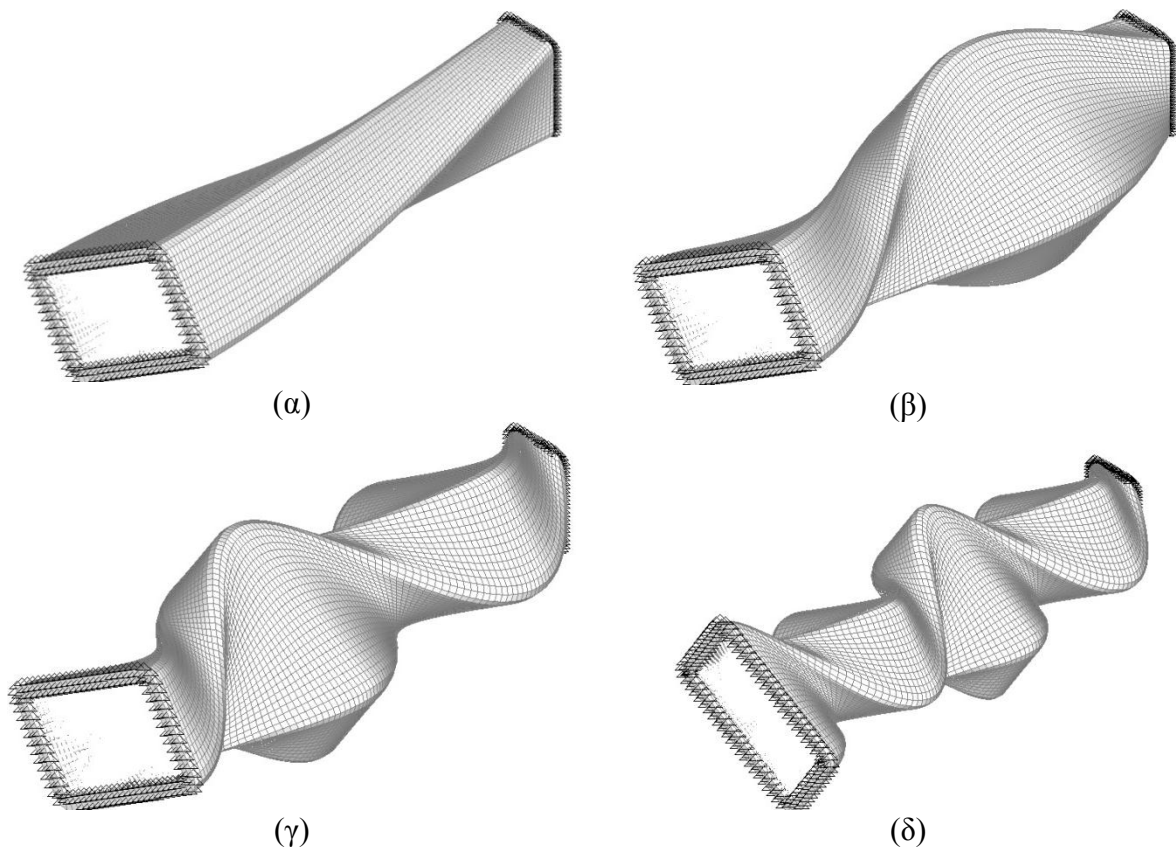


**Πίνακας 5.5.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

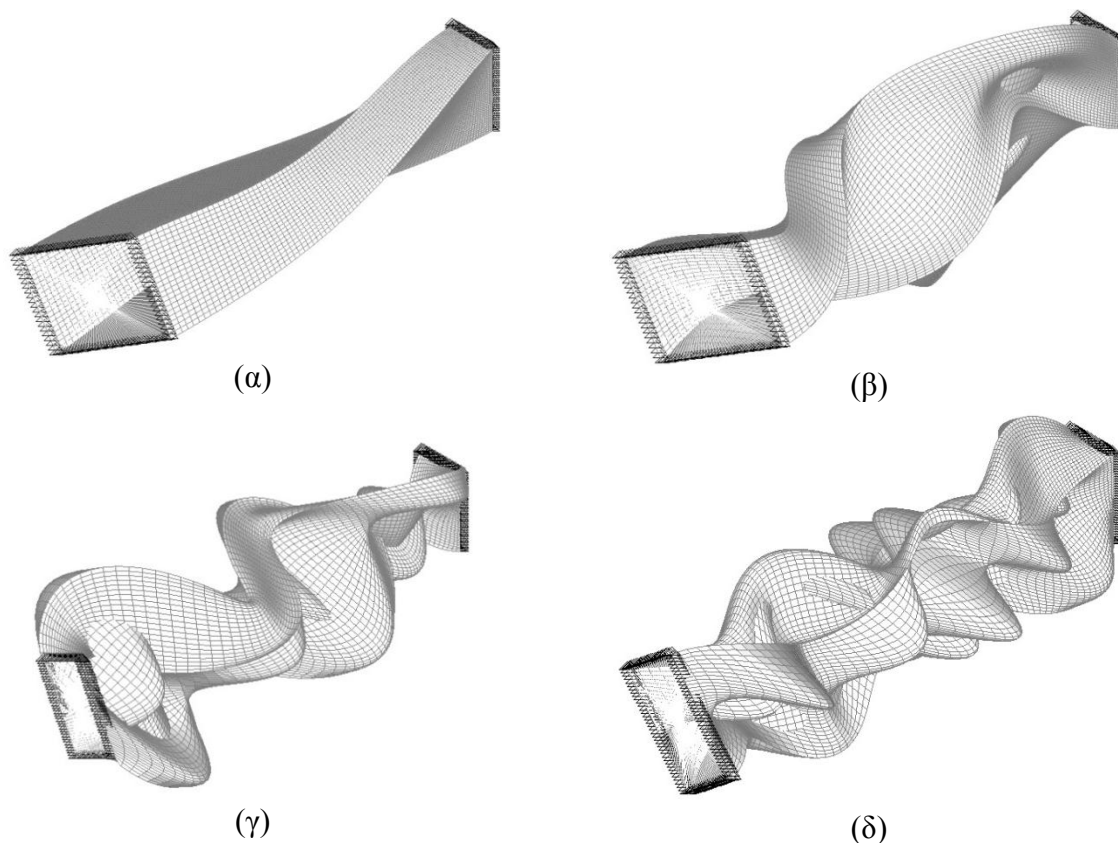
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.63	0.68	0.73	0.74	0.62	0.60	0.56	0.49
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-7.07	3.17	-6.15	-0.16	-7.08	3.09	-6.31	-0.41
				18.80		-6.41		18.71		-6.64
	3β		-3.31	-3.31	-3.31	-3.35	-3.32	-3.38	-3.48	-3.59
	3γ		-3.34	-3.34	-3.37	-3.43	-3.35	-3.42	-3.53	-3.67
	3δ		-3.38	-3.42	-3.52	-3.69	-3.39	-3.50	-3.68	-3.92
	3ε		-3.48	-3.87	-4.75	-6.41	-3.49	-3.95	-4.91	-6.64
	3στ		-3.67	-5.19	-9.59	9.19	-3.68	-5.26	-9.74	8.92
	3ζ		-3.78	-6.11	-15.46	-16.80	-3.79	-6.18	-15.60	-17.01
3η	-4.54		-4.96	-38.15	-16.91	-4.55	-5.04	-38.26	-17.12	
			-8.42				-8.58			

**Πίνακας 5.5.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

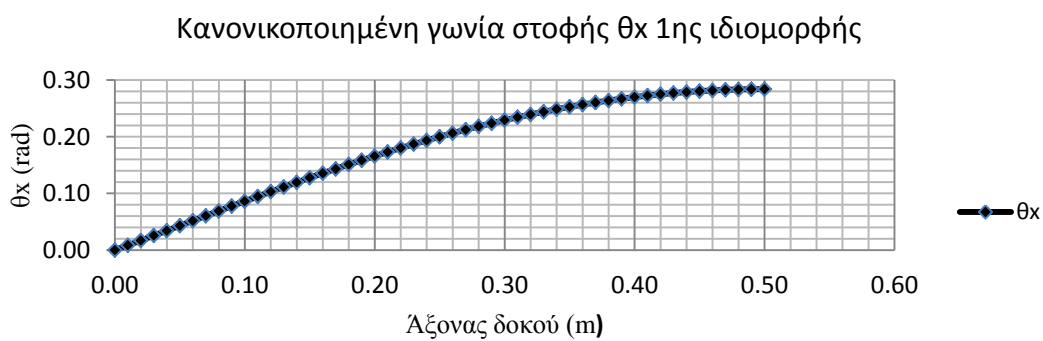
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.16	1.36	1.67	1.98
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-6.58	3.87	-5.27	1.07
				19.61		-5.26
	3β		-2.80	-2.65	-2.41	-2.16
	3γ		-2.83	-2.69	-2.47	-2.25
	3δ		-2.87	-2.77	-2.62	-2.50
	3ε		-2.97	-3.22	-3.86	-5.26
	3στ		-3.16	-4.54	-8.74	10.54
	3ζ		-3.27	-5.47	-14.67	-15.78
3η	-4.03		-4.32	-37.58	-15.89	
			-7.57			



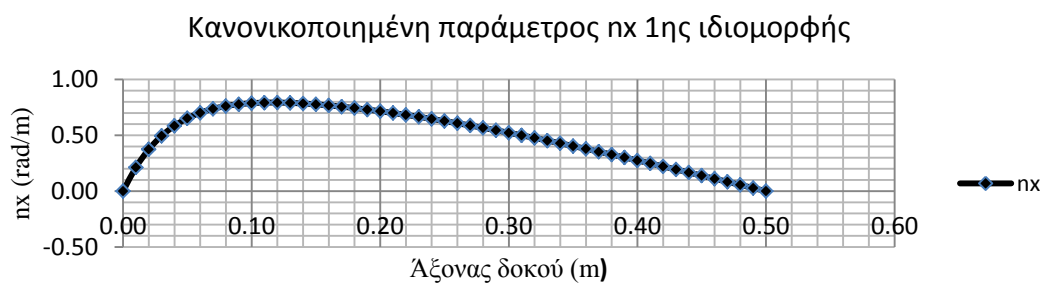
**Σχήμα 5.5.2** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=124) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.5.3** Ανάλυση 3α, κελυφωτά 4-πλευρικά με διάφραγμα μόνο στην ακραία διατομή. Ιδιαίτερα εμφανής η επιρροή του φαινομένου *distortion*. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.5.4** Γωνία στρωφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreewarpinert*.



**Σχήμα 5.5.5** Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreewarpinert*.

### 5.5.2 Μήκος δοκού $L = 1.0m$

Στους Πίνακες 5.5.2.1-5.5.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.5.6 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran ενώ στο Σχήμα 5.5.7 οι αντίστοιχες που προέκυψαν από την ανάλυση 3α με 4-πλευρικά κελυφωτά με τη χρήση μόνο ενός διαφράγματος στην ακραία διατομή. Στο Σχήμα 5.5.8 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreewarpinert η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.5.9 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Από την σύγκριση των αναλύσεων 3α-3β, με λιγότερα και περισσότερα στοιχεία αντίστοιχα, προκύπτει ότι ο διπλασιασμός των στοιχείων του φορέα δεν οδηγεί σε αισθητή μείωση του σφάλματος της ανάλυσης.
- 3) Η χρήση διαφραγμάτων σε όλες τις διατομές της δοκού ή μόλις σε 10 διατομές, αναλύσεις 3γ και 3δ αντίστοιχα οδηγεί σε σημαντική μείωση των αποκλίσεων τους από την ανάλυση των 3d πεπερασμένων.
- 4) Από το Σχήμα 5.5.7 βλέπουμε την πολύ μεγάλη επιρροή του φαινομένου distortion στις ιδιομορφές πέραν της επίδρασης τους στις ιδιοσυχνότητες.
- 5) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.5.6 με το Σχήμα 5.5.8 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 6) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 7) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.5.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	152	38,000	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	668.50	2007.07	3349.99	4699.09
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	116	11,600	1 (στην ακραία διατομή)	633.81	1534.38	3369.41	4906.69
3β			116	23,200	1 (στην ακραία διατομή)	633.73	1534.67	3369.83	4909.38
3γ			116	23,200	200 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	642.75	1929.42	3219.39	4514.20
3δ			116	23,200	10	641.70	1919.18	3176.84	4393.30

**Πίνακας 5.5.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

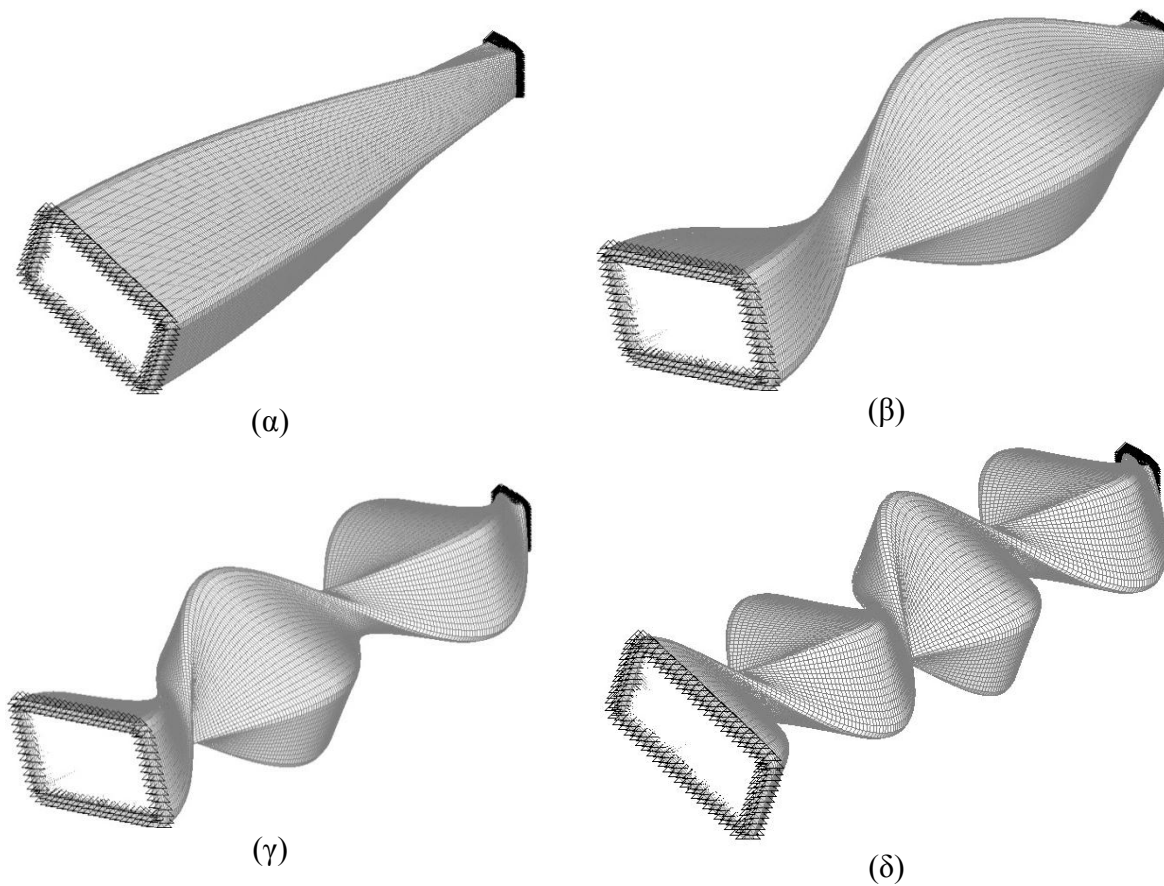
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,912	228	50	-	665.20	1996.78	3331.82	4672.41
5	dynfreeSlin- warpinert			50		665.22	1997.26	3333.92	4677.73
6	dynfreeUniflin			50		663.49	1991.13	3320.73	4653.61

**Πίνακας 5.5.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

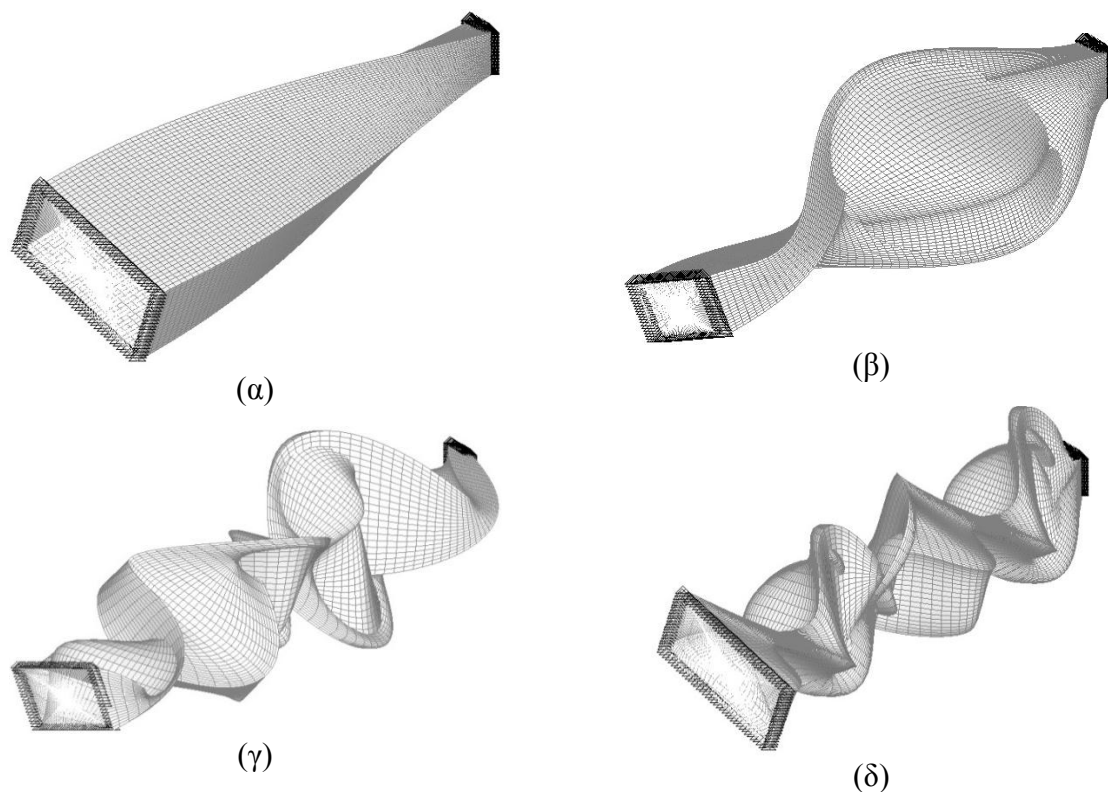
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.50	0.52	0.55	0.57	0.49	0.49	0.48	0.46
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-4.72	-23.16	1.13	5.01	-4.72	-23.18	1.06	4.89
	3β		-4.73	-23.14	1.14	5.07	-4.73	-23.16	1.08	4.95
	3γ		-3.38	-3.37	-3.37	-3.39	-3.38	-3.40	-3.44	-3.50
	3δ		-3.53	-3.89	-4.65	-5.97	-3.54	-3.91	-4.71	-6.08

**Πίνακας 5.5.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

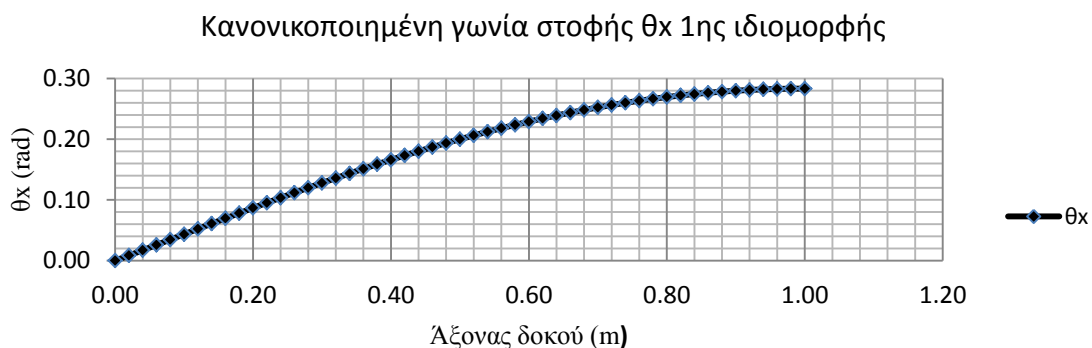
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.75	0.80	0.88	0.98
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-4.47	-22.94	1.47	5.44
	3β		-4.49	-22.92	1.48	5.50
	3γ		-3.13	-3.10	-3.05	-3.00
	3δ		-3.28	-3.61	-4.33	-5.59



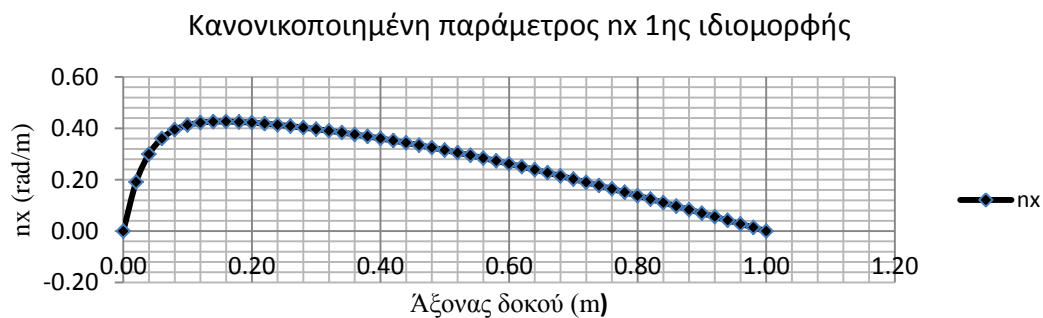
**Σχήμα 5.5.6** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.5.7** Ανάλυση 3α, κελυφωτά 4-πλευρικά με διάφραγμα μόνο στην ακραία διατομή. Ιδιαίτερα εμφανής η επιρροή του φαινομένου *distortion*. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



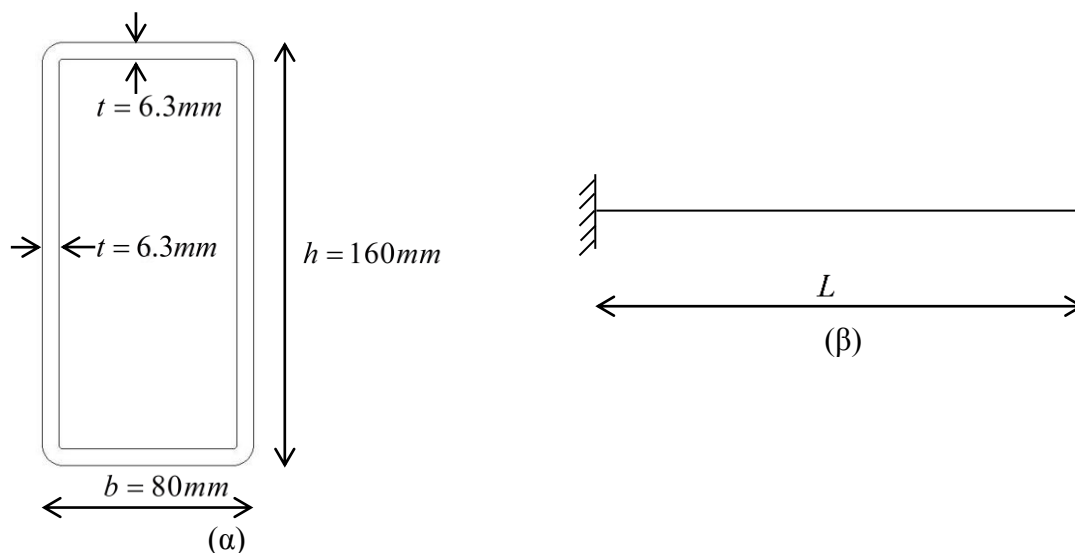
**Σχήμα 5.5.8** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



**Σχήμα 5.5.9** Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*

## 5.6 5<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 160x80x6.3

Στο πέμπτο παράδειγμα αναλύεται η διατομή RHS 160x80x6.3 (βλέπε Σχήμα 5.6.1α) για μήκη δοκών  $1.0m$  και  $5.0m$ . Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Το στατικό σύστημα της δοκού λαμβάνεται πρόβολος (βλέπε Σχήμα 5.6.1β).



Σχήμα 5.6.1 Διατομή RHS 160x80x6.3 (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.6.1 Μήκος δοκού $L = 1.0m$

Στους Πίνακες 5.6.1.1-5.6.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.6.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.6.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.6.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ . Με τον όρο BIAS δηλώνεται ότι η κατά μήκος διακριτοποίηση δεν έχει γίνει με ισομήκη στοιχεία.

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1γ τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.6.2 με το Σχήμα 5.6.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Η χρήση των διαφραγμάτων είναι καθοριστικής σημασίας προκειμένου να περιορισθεί σημαντικά το σφάλμα.
- 8) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.



- 9) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.6.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	54	6,750	125 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	632.58	1901.34	3179.62	4470.12
1β			234	23,400	1 BIAS	557.82	2152.23	3024.60	4447.46
1γ			234	46,800	200 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	626.63	1883.98	3152.10	4434.07
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	112	11,200	1 BIAS	539.20	2101.68	2961.59	4303.39
3β			112	11,200	1	539.20	2101.97	2964.59	4309.41
3γ			112	11,200	100 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	608.62	1828.97	3057.68	4297.42
3δ			112	11,200	10	607.10	1806.85	2946.95	3900.96
3ε			112	22,400	200 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	608.72	1829.39	3058.75	4299.71

**Πίνακας 5.6.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

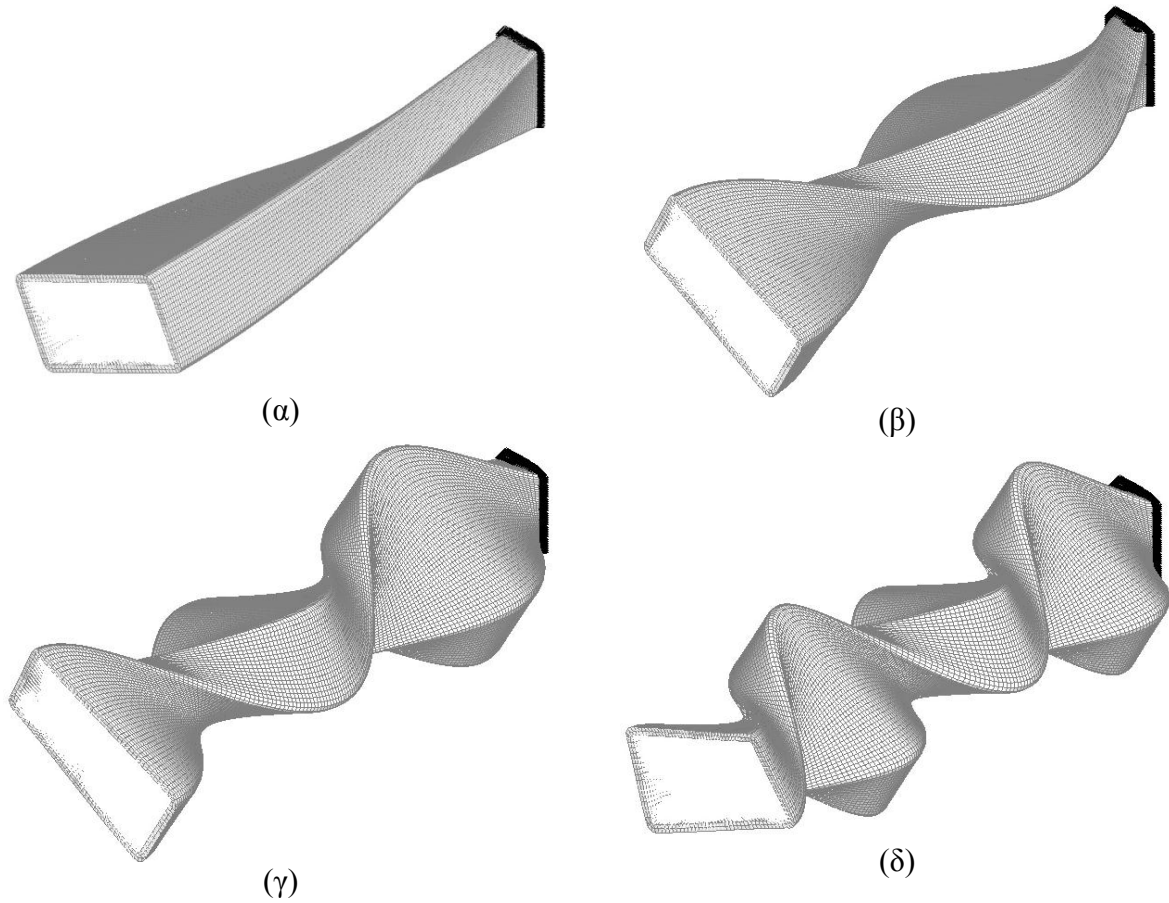
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	744	284	50	-	623.70	1874.31	3133.78	4405.89
5	dynfreeSlin- warpinert			50		623.76	1875.68	3139.38	4418.86
6	dynfreeUniflin			50		619.77	1859.91	3101.89	4346.93

**Πίνακας 5.6.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

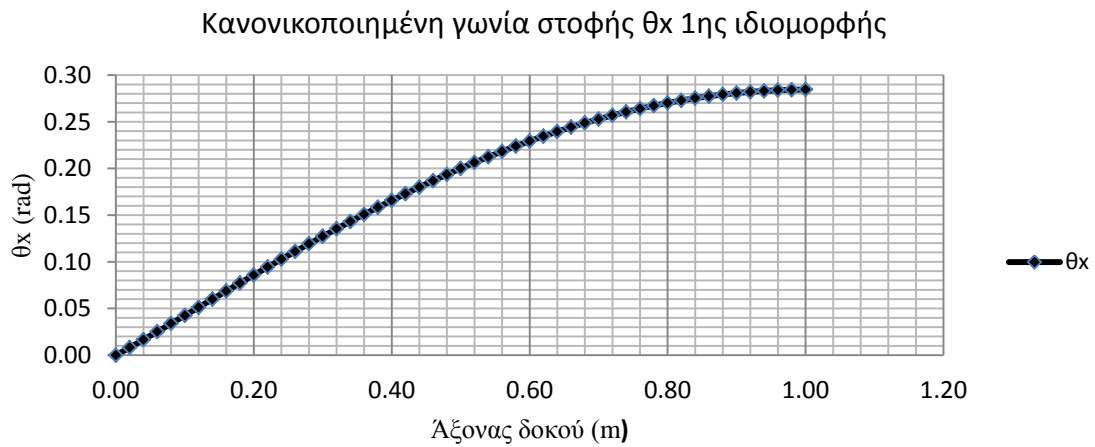
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.42	1.44	1.46	1.46	1.41	1.37	1.28	1.16
	1β		-10.56	14.83	-3.48	0.94	-10.57	14.74	-3.66	0.65
	1γ				8.97				8.77	
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-13.55	12.13	-5.49	-2.33	-13.56	12.05	-5.66	-2.61
	3β		-13.55	12.15	-5.40	-2.19	-13.56	12.06	-5.57	-2.48
					6.10				5.91	
	3γ		-2.42	-2.42	-2.43	-2.46	-2.43	-2.49	-2.60	-2.75
	3δ		-2.66	-3.60	-5.96	-11.46	-2.67	-3.67	-6.13	-11.72
3ε	-2.40	-2.40	-2.39	-2.41	-2.41	-2.47	-2.57	-2.70		

**Πίνακας 5.6.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

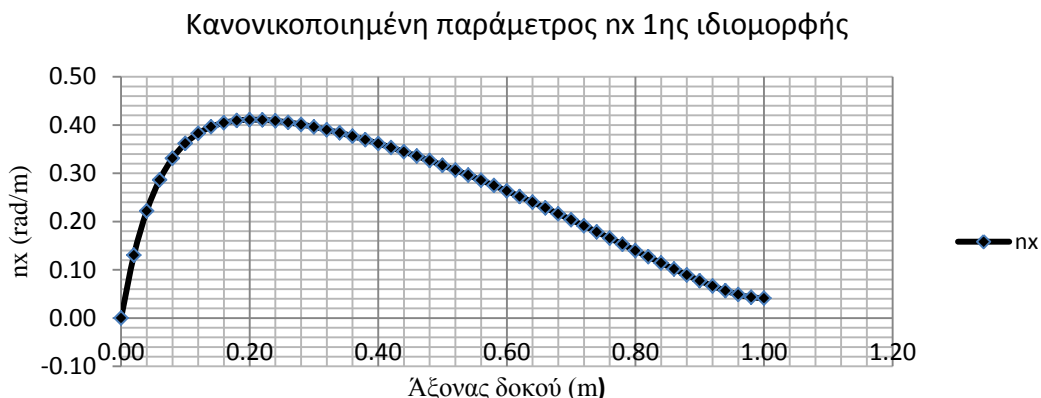
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	2.07	2.23	2.51	2.83
	1β		-10.00	15.72	-2.49	2.31
	1γ				10.09	
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-13.00	13.00	-4.52	-1.00
	3β		-13.00	13.01	-4.43	-0.86
					7.19	
	3γ		-1.80	-1.66	-1.43	-1.14
	3δ		-2.04	-2.85	-4.99	-10.26
3ε	-1.78	-1.64	-1.39	-1.09		



**Σχήμα 5.6.2** Ανάλυση 1γ, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=200) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.6.3** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*



Σχήμα 5.6.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*

### 5.6.2 Μήκος δοκού $L = 5.0m$

Στους Πίνακες 5.6.2.1-5.6.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.6.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.6.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.6.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1γ τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Από την ανάλυση 3δ βλέπουμε ότι ακόμα και αν δεν τοποθετήσουμε διαφράγματα σε όλες τις διατομές αλλά σε πολύ λιγότερες, 10 σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να πάρουμε τις 3 πρώτες συχνότητες με αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.6.5 με το Σχήμα 5.6.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.6.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	234	23,400	1 BIAS	123.78	356.36	531.95	624.53
1β			54	33,750	625 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	125.71	377.18	628.79	880.63
1γ			234	58,500	250 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	124.45	373.40	622.49	871.82
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	112	11,200	1 BIAS	120.29	345.18	510.62	594.64
3β			112	11,200	1	120.29	345.21	510.83	595.18
3γ			112	11,200	100 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	120.94	362.84	604.78	846.76
3δ			112	11,200	10	120.75	359.62	588.93	794.09

**Πίνακας 5.6.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

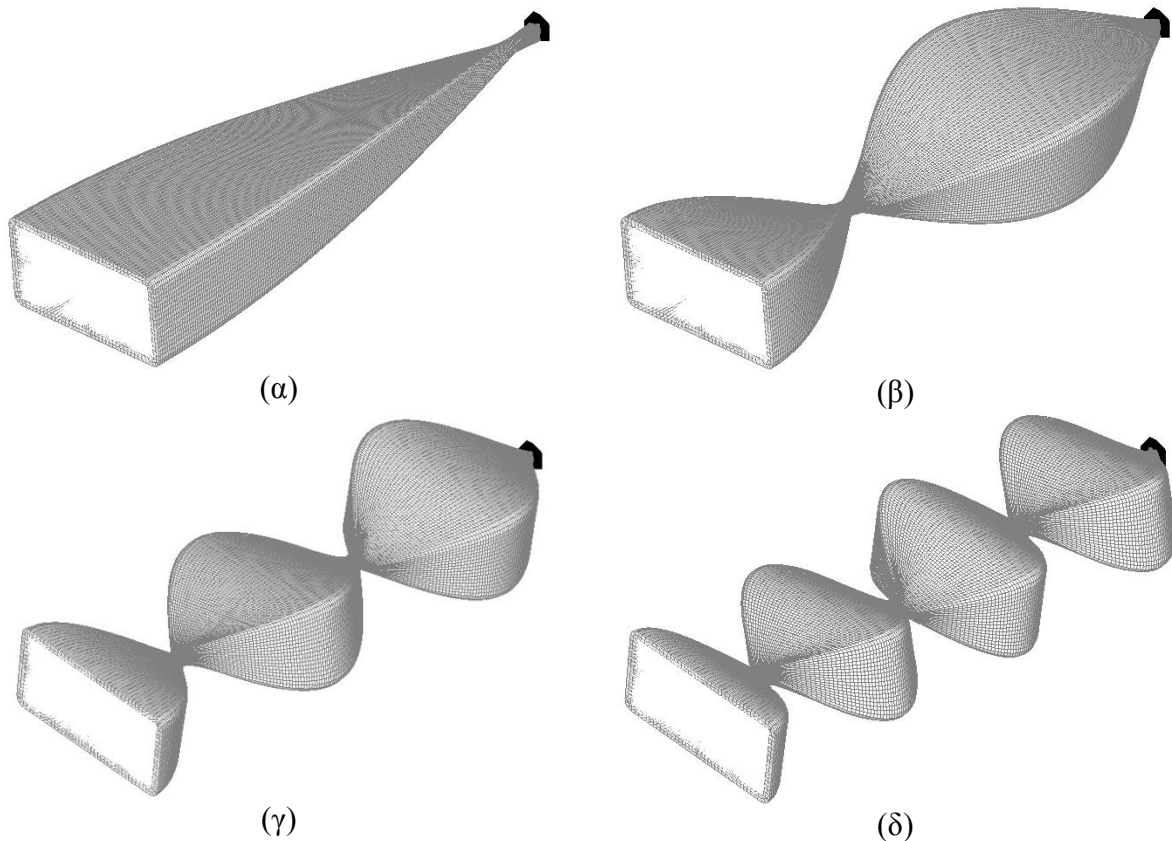
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	744	284	50	-	124.10	372.35	620.73	869.34
5	dynfreeSlin- warpinert			50		124.10	372.36	620.79	869.51
6	dynfreeUniflin			50		123.95	371.98	620.38	869.39

**Πίνακας 5.6.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

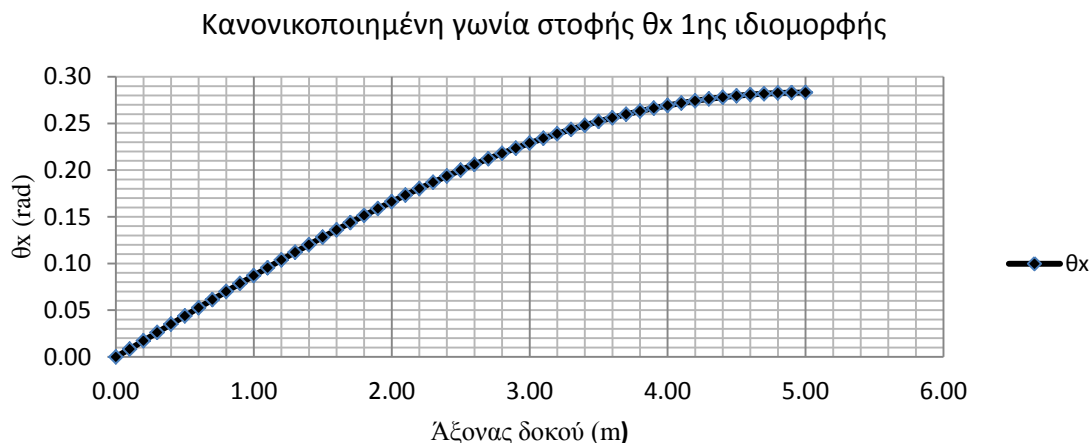
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	-0.26	-4.29	-14.30	-28.16	-0.26	-4.30	-14.31	-28.17
	1β		1.30	1.30	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
	1γ		0.28	0.28	0.28	0.29	0.28	0.28	0.27	0.27
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-3.07	-7.30	-17.74	-31.60	-3.07	-7.30	-17.75	-31.61
	3β		-3.07	-7.29	-17.71	-31.54	-3.08	-7.29	-17.71	-31.55
	3γ		-2.54	-2.55	-2.57	-2.60	-2.54	-2.56	-2.58	-2.62
	3δ		-2.70	-3.42	-5.12	-8.66	-2.70	-3.42	-5.13	-8.67

**Πίνακας 5.6.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

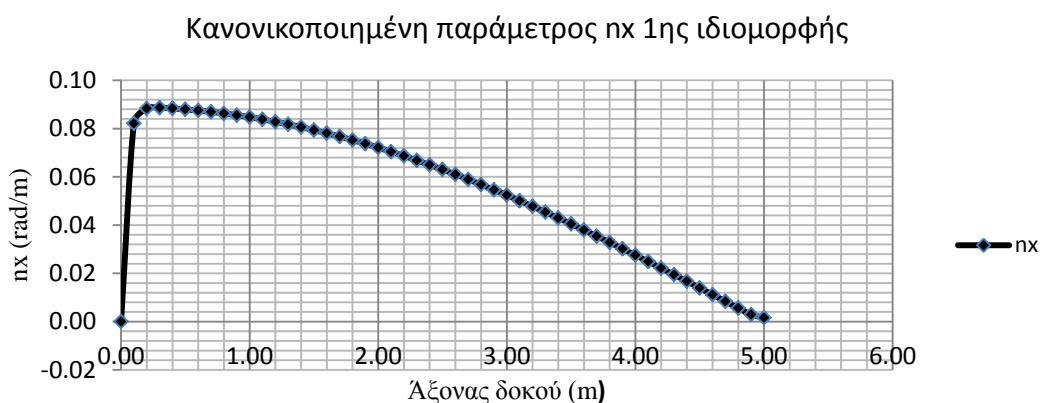
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	-0.14	-4.20	-14.25	-28.16
	1β		1.42	1.40	1.36	1.29
	1γ		0.40	0.38	0.34	0.28
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-2.95	-7.21	-17.69	-31.60
	3β		-2.96	-7.20	-17.66	-31.54
	3γ		-2.43	-2.46	-2.51	-2.60
	3δ		-2.58	-3.32	-5.07	-8.66



**Σχήμα 5.6.5** Ανάλυση 1γ, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=250) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



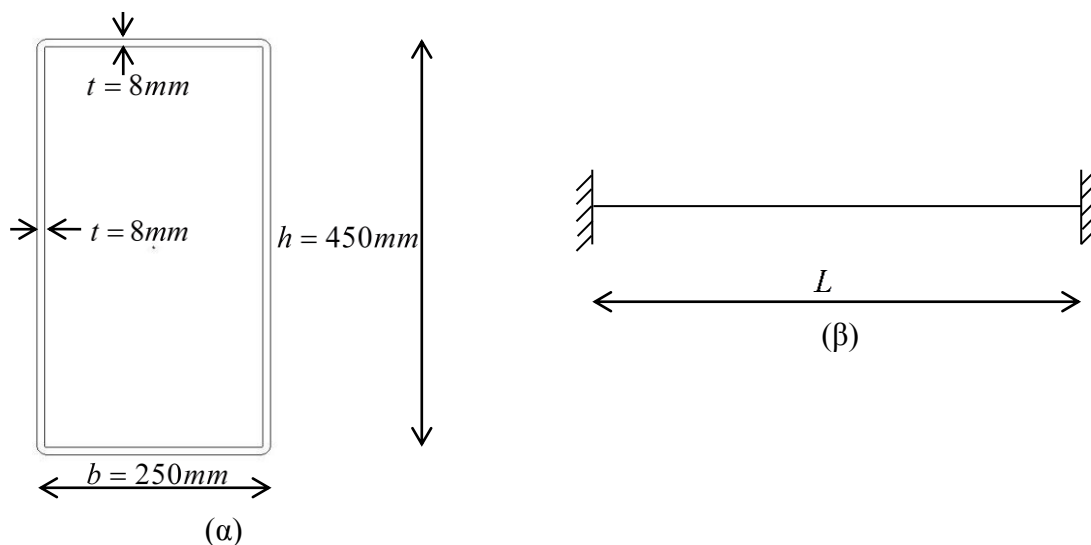
Σχήμα 5.6.6 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*



Σχήμα 5.6.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*

## 5.7 6<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 450x250x8

Στο έκτο παράδειγμα αναλύεται η διατομή RHS 450x250x8 (βλέπε Σχήμα 5.7.1α) για μήκη δοκών 2.5m και 4.5m. Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.7.1β).



Σχήμα 5.7.1 Διατομή RHS 450x250x8 (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.7.1 Μήκος δοκού $L = 2.5m$

Στους Πίνακες 5.7.1.1-5.7.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.7.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.7.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.7.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα).
- 2) Από την ανάλυση 3γ βλέπουμε ότι ακόμη και με 4 διαφράγματα μπορούμε να περιορίσουμε σημαντικά το σφάλμα στον υπολογισμό των συχνοτήτων των 3 πρώτων ιδιομορφών. Όσον αφορά την 4<sup>η</sup> ο πιθανότερος λόγος που δεν αναγνωρίζεται είναι ότι η τοποθέτηση 4 διαφραγμάτων που ισαπέχουν, δηλαδή χωρίζουν τη δοκό σε 5 τμήματα, παρεμποδίζει την ανάπτυξη της αναμενόμενη παραμορφωμένης εικόνας που αντιστοιχεί σε αυτή. Οπότε έχουμε ένα «κενό» όσον αφορά τον υπολογισμό της 4<sup>ης</sup> ιδιομορφής λόγω του επιλεγμένου προσομοιώματος.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.7.2 με το Σχήμα 5.7.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.



**Πίνακας 5.7.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	552	55,200	99 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	516.95	1035.77	1557.70	2082.77
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	136	27,200	-	Δεν αναγνω- ρίζεται	1118.19	1939.04	2481.07
3β			136	27,200	199 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	509.58	1020.86	1535.00	2052.28
3γ			136	27,200	4	464.37	1073.31	1446.57	Δεν αναγνω- ρίζεται
						684.04			

**Πίνακας 5.7.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

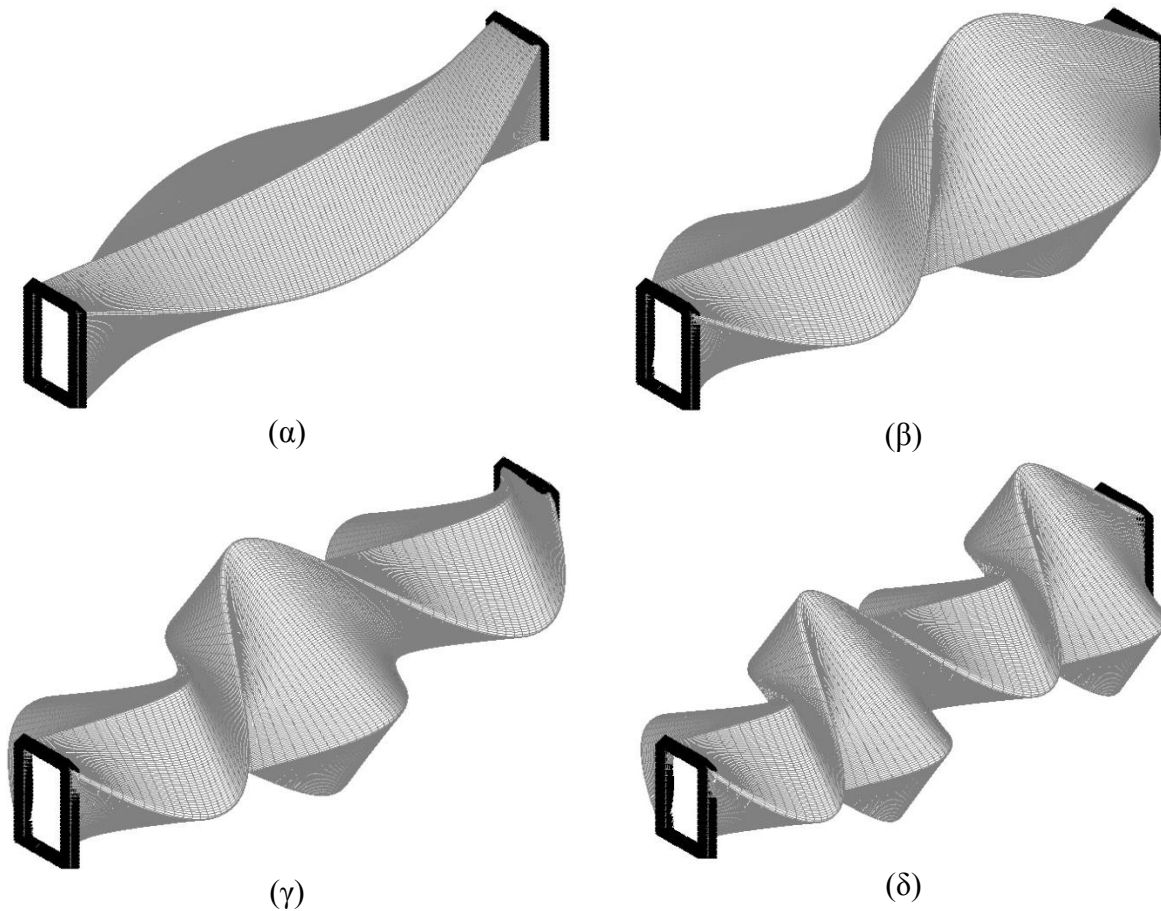
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	684	236	50	-	514.99	1031.78	1551.82	2075.93
5	dynfreeSlin- warpinert			50		515.12	1032.69	1554.37	2080.67
6	dynfreeUniflin			50		509.62	1019.73	1530.86	2043.50

**Πίνακας 5.7.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

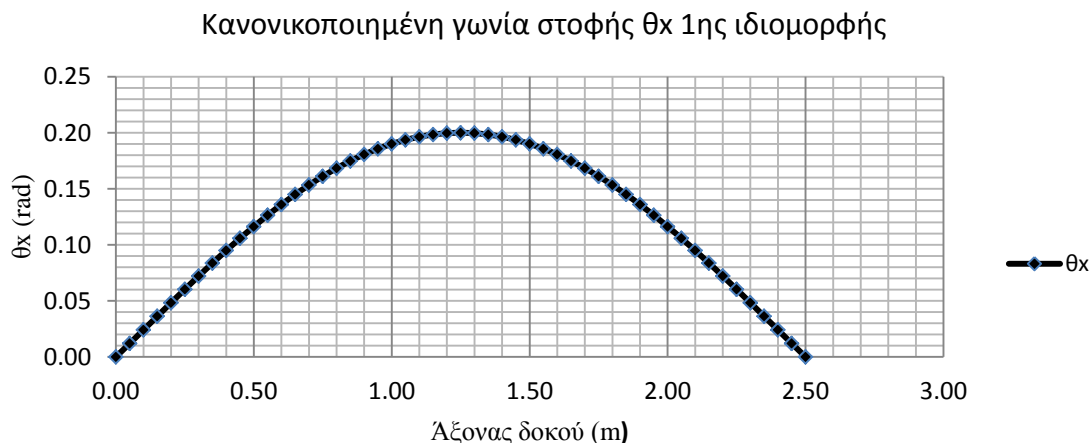
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.38	0.39	0.38	0.33	0.36	0.30	0.21	0.10
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-	8.37	24.95	19.52	-	8.28	24.75	19.24
	3β		-1.05	-1.06	-1.08	-1.14	-1.07	-1.15	-1.25	-1.36
	3γ		-9.83	4.03	-6.78	-	-9.85	3.93	-6.94	-
			32.83			32.79				

**Πίνακας 5.7.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

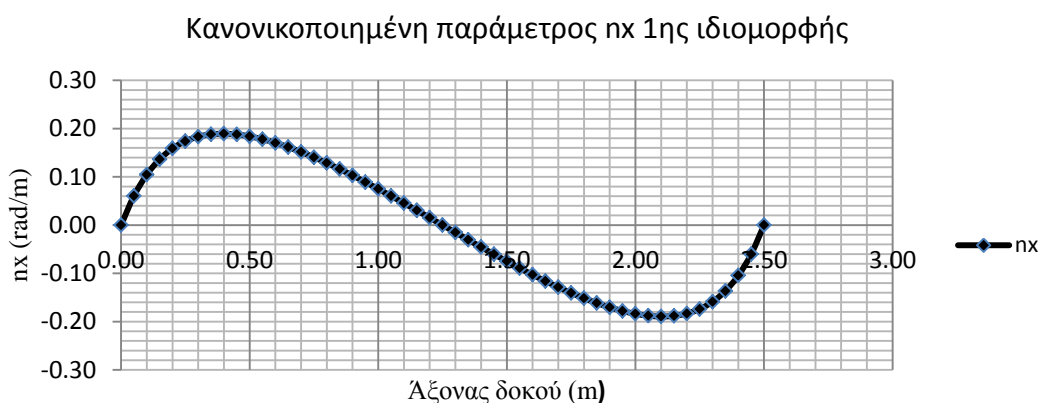
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.38	0.39	0.38	0.33
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-	8.37	24.95	19.52
	3β		-1.05	-1.06	-1.08	-1.14
	3γ		-9.83	4.03	-6.78	-
		32.83				



**Σχήμα 5.7.2** Ανάλυση 1α 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=99) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



Σχήμα 5.7.3 Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.7.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.7.2 Μήκος δοκού $L = 4.5m$

Στους Πίνακες 5.7.2.1-5.7.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.7.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.7.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.7.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.7.5 με το Σχήμα 5.7.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Για την ανάλυση 3γ ισχύουν όσα αναφέρθηκαν σε αυτό το παράδειγμα για το μήκος των  $2.5m$  με τη διαφορά ότι το σφάλμα σαν συνολική εικόνα είναι

μεγαλύτερο που λογικά οφείλεται στο ότι έχουμε τοποθετήσει τον ίδιο αριθμό διαφραγμάτων ενώ πλέον η δοκός έχει σχεδόν το διπλάσιο μήκος.

- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.7.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	552	55,200	99 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	285.43	571.40	858.34	1146.44
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	136	27,200	-	Δεν αναγνω- ρίζεται	692.06	959.42	1209.52
3β			136	27,200	199 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	281.53	563.54	846.42	1130.40
3γ			136	27,200	4	272.14	449.34	878.27	Δεν αναγνω- ρίζεται
							659.81	936.75	
3δ			136	49,300	360 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	281.57	563.63	846.57	1130.66

**Πίνακας 5.7.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

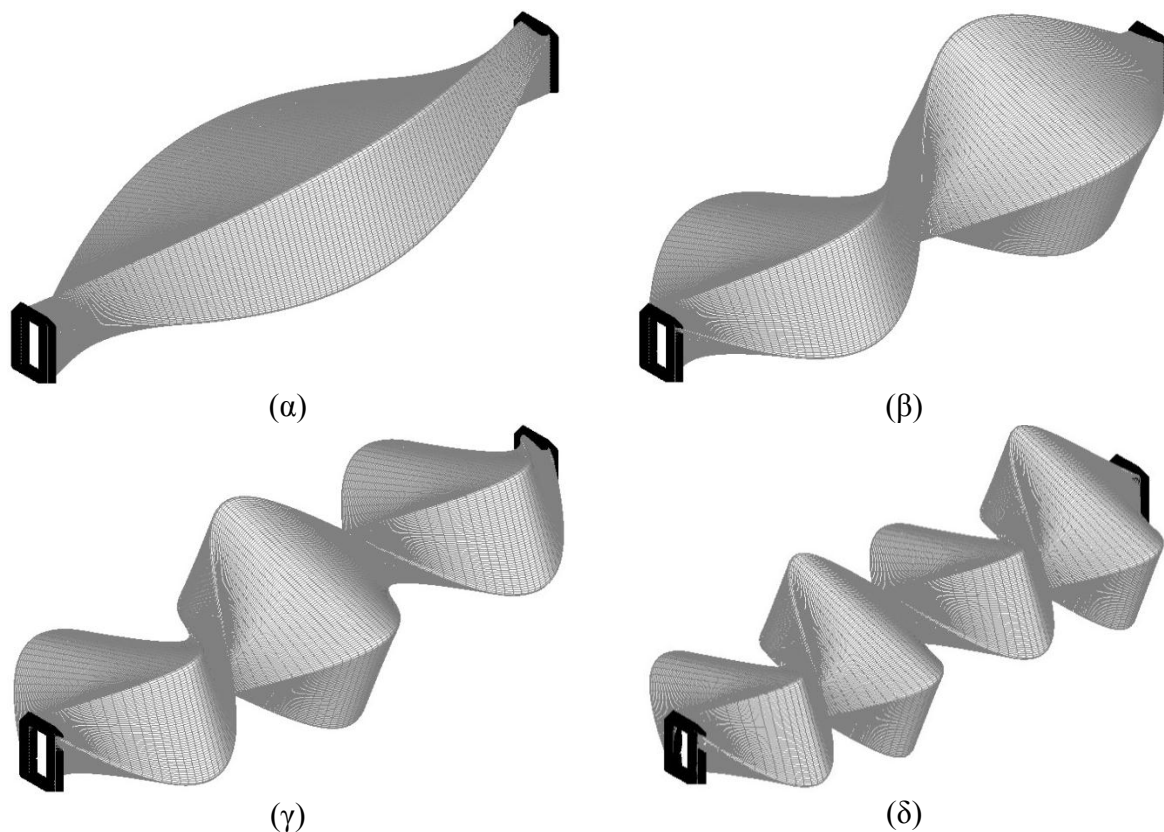
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίησης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	684	236	50	-	284.74	569.99	856.23	1143.89
5	dynfreeSlin- warpinert			50		284.77	570.22	856.93	1145.40
6	dynfreeUniflin			50		283.12	566.52	850.48	1135.28

**Πίνακας 5.7.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

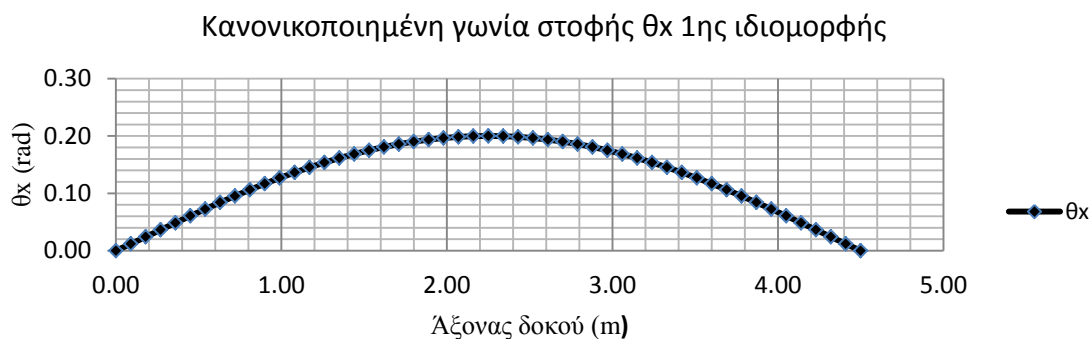
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.24	0.25	0.25	0.22	0.23	0.21	0.16	0.09
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-	21.42	12.05	5.74	-	21.37	11.96	5.60
	3β		-1.13	-1.13	-1.15	-1.18	-1.14	-1.17	-1.23	-1.31
	3γ		-4.43	-21.17	2.57	-	-4.44	-21.20	2.49	-
				15.76	9.40		0.00	15.71	9.31	0.00
3δ		-1.11	-1.12	-1.13	-1.16	-1.12	-1.16	-1.21	-1.29	

**Πίνακας 5.7.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

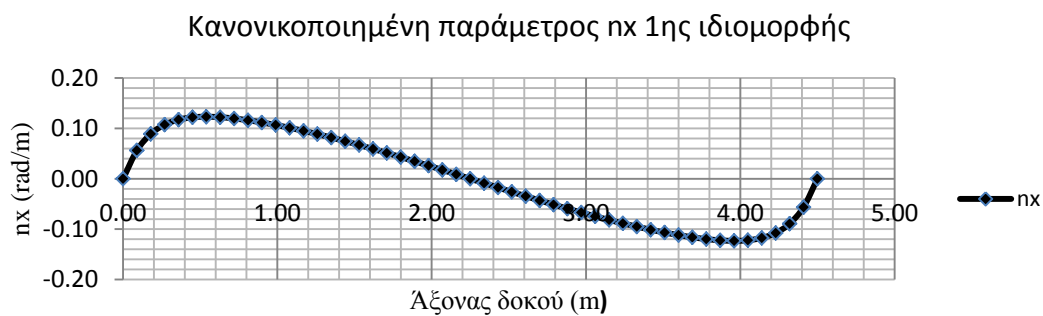
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.81	0.86	0.92	0.98
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-	22.16	12.81	6.54
	3β		-0.56	-0.53	-0.48	-0.43
	3γ		-3.88	-20.68	3.27	-
					16.47	10.14
3δ		-0.55	-0.51	-0.46	-0.41	



**Σχήμα 5.7.5** Ανάλυση 1α 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=99) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



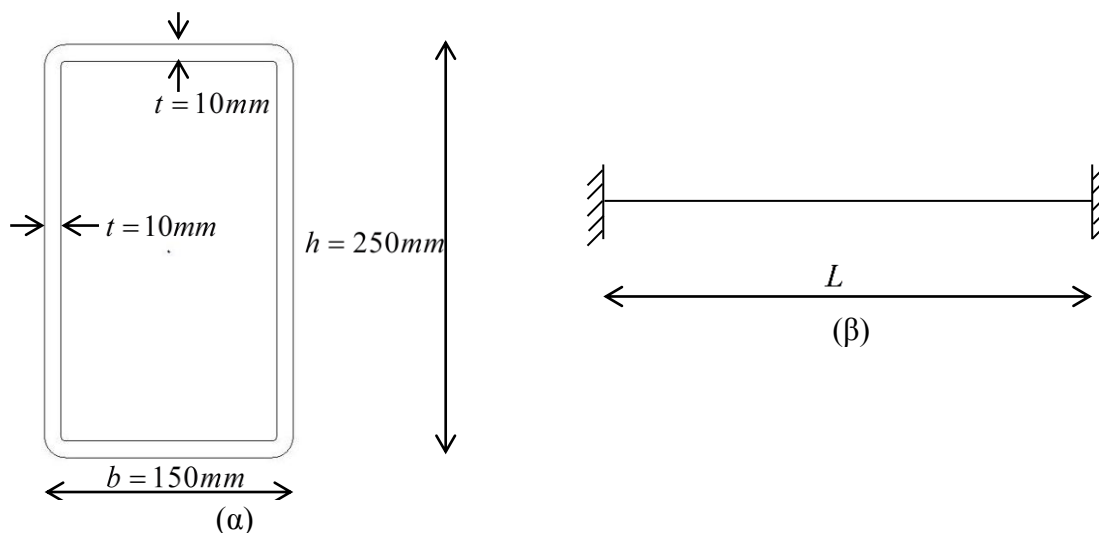
**Σχήμα 5.7.6** Γωνία στοφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



**Σχήμα 5.7.7** Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

## 5.8 7<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 250x150x10

Στο έβδομο παράδειγμα αναλύεται η διατομή RHS 250x150x10 (βλέπε Σχήμα 5.8.1α) για μήκη δοκών 1.25m και 2.5m. Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.8.1β).



Σχήμα 5.8.1 Διατομή RHS 250x150x10 (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.8.1 Μήκος δοκού $L = 1.25\text{m}$

Στους Πίνακες 5.8.1.1-5.8.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.8.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.8.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.8.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.8.2 με το Σχήμα 5.8.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Ακόμα και χωρίς χρήση διαφραγμάτων (βλέπε ανάλυση 3α) βλέπουμε ότι το σφάλμα που έχουμε δεν είναι τεράστιο
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.8.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	258	51,600	199 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	1068.64	2140.84	3219.19	4303.83
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	152	19,000	-	1132.16	2110.39	3543.51	4497.86
3β			152	19,000	124 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	1039.24	2081.47	3128.82	4181.71
3γ			152	19,000	4	1021.62	1903.71	3260.16	3951.66
								4016.47	
									4614.99

**Πίνακας 5.8.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	752	244	50	-	1061.46	2126.28	3197.33	4276.30
5	dynfreeSlin- warpinert			50		1061.73	2128.19	3202.56	4285.82
6	dynfreeUniflin			50		1051.15	2103.45	3158.08	4216.20

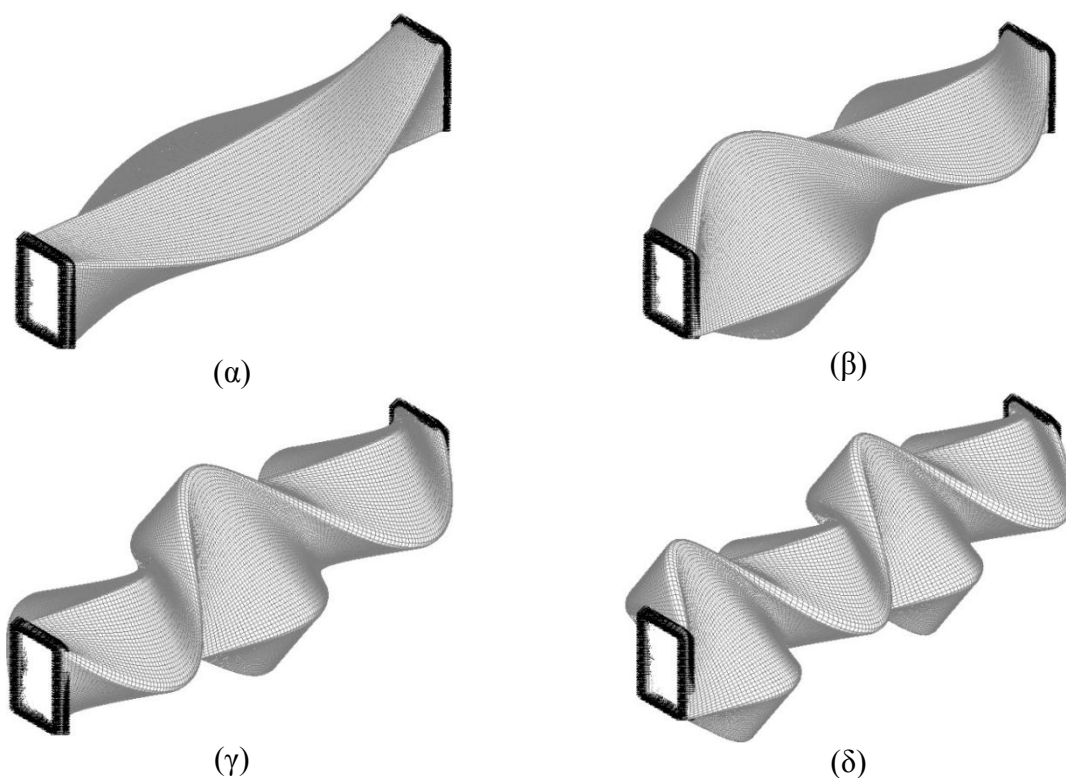
**Πίνακας 5.8.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.68	0.68	0.68	0.64	0.65	0.59	0.52	0.42
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	6.66	-0.75	10.83	5.18	6.63	-0.84	10.65	4.95
	3β		-2.09	-2.11	-2.14	-2.21	-2.12	-2.20	-2.30	-2.43
	3γ		-3.75	-10.47	1.97	-7.59	-3.78	-10.55	1.80	-7.80
						-6.08				-6.28
					7.92				7.68	

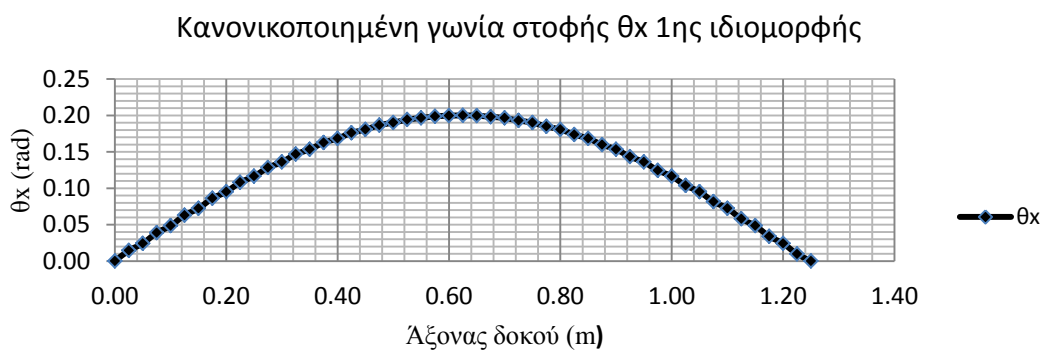


**Πίνακας 5.8.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

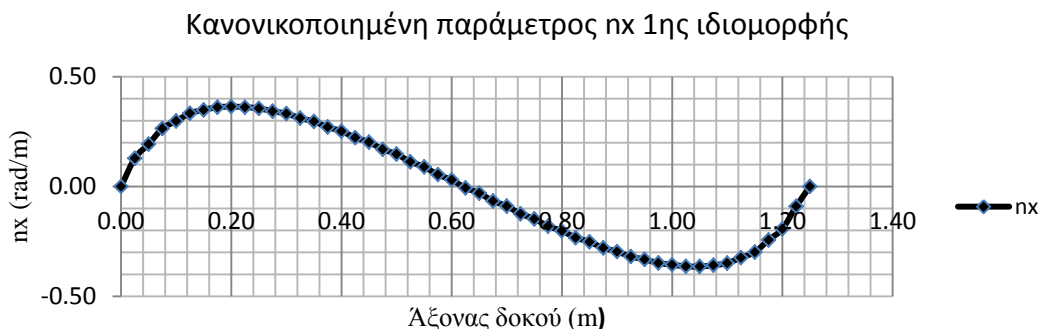
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.66	1.78	1.93	2.08
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	7.71	0.33	12.20	6.68
	3β		-1.13	-1.05	-0.93	-0.82
	3γ		-2.81	-9.50	3.23	-6.27
						-4.74
				9.46		



**Σχήμα 5.8.2** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=199) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.8.3** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από dynfreeSlinwarpinert.



**Σχήμα 5.8.4** Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.8.2 Μήκος δοκού $L = 2.5m$

Στους Πίνακες 5.8.2.1-5.8.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.8.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.8.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.8.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.8.2 με το Σχήμα 5.8.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Όσον αφορά την ανάλυση 3γ που διαθέτει 4 διαφράγματα βλέπουμε ότι παρουσιάζει μεγάλο σφάλμα και δεν ισχύουν τα αντίστοιχα σχόλια που έγιναν για τη δοκό μήκους 1.25m αυτού του παραδείγματος. Ωστόσο πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η δοκός έχει το διπλάσιο μήκος οπότε απαιτούνται περισσότερα διαφράγματα προκειμένου να πειροριστεί η εγκάρσια παραμορφωσιμότητα.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.8.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	258	103,200	399 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	530.56	1062.06	1595.24	2130.52
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	152	19,000	-	602.42	1130.94	1647.13	2080.90
3β			152	19,000	124 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	516.27	1033.21	1551.34	2071.00
3γ			152	19,000	4	510.57	983.82	1378.82	1772.07
								2018.71	

**Πίνακας 5.8.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

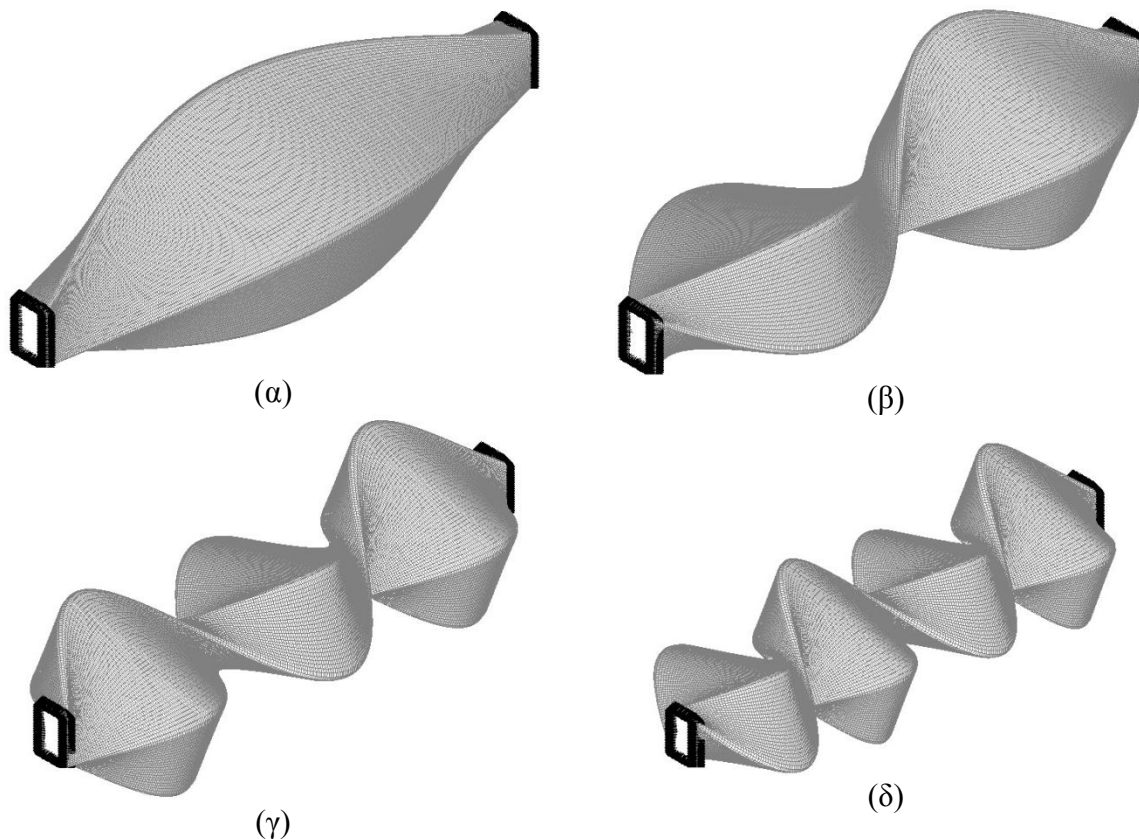
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	752	244	50	-	528.08	1056.95	1587.37	2120.02
5	dynfreeSlin- warpinert			50		528.13	1057.32	1588.53	2122.55
6	dynfreeUniflin			50		525.56	1051.64	1578.76	2107.44

**Πίνακας 5.8.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

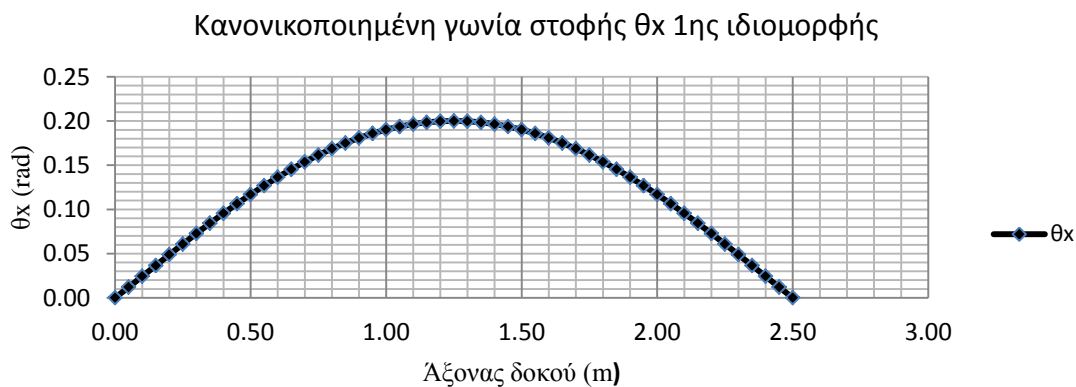
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.47	0.48	0.50	0.50	0.46	0.45	0.42	0.38
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	14.08	7.00	3.76	-1.85	14.07	6.96	3.69	-1.96
	3β		-2.24	-2.25	-2.27	-2.31	-2.25	-2.28	-2.34	-2.43
	3γ		-3.32	-6.92	-13.14	-16.41	-3.33	-6.95	-13.20	-16.51
					-4.78				-4.89	

**Πίνακας 5.8.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

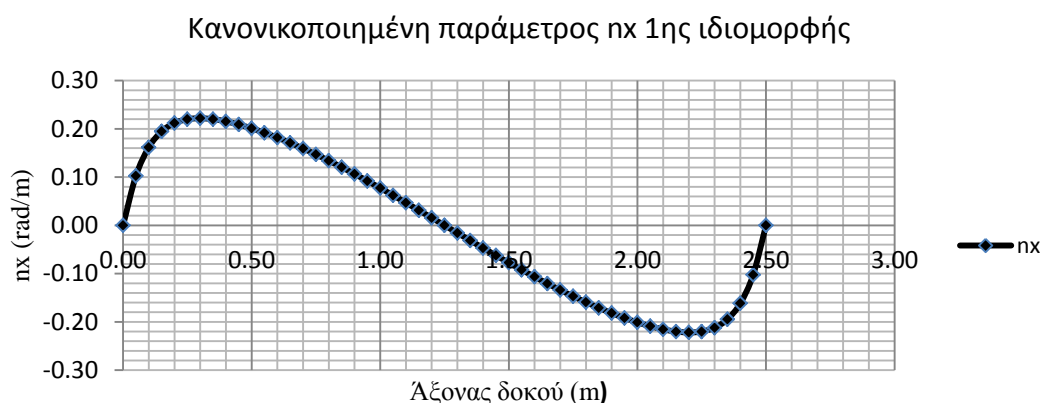
		Τύπος στοιχείων	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.95	0.99	1.04	1.10
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	14.62	7.54	4.33	-1.26
	3β		-1.77	-1.75	-1.74	-1.73
	3γ		-2.85	-6.45	-12.66	-15.91
					-4.21	



**Σχήμα 5.8.5** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=399) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



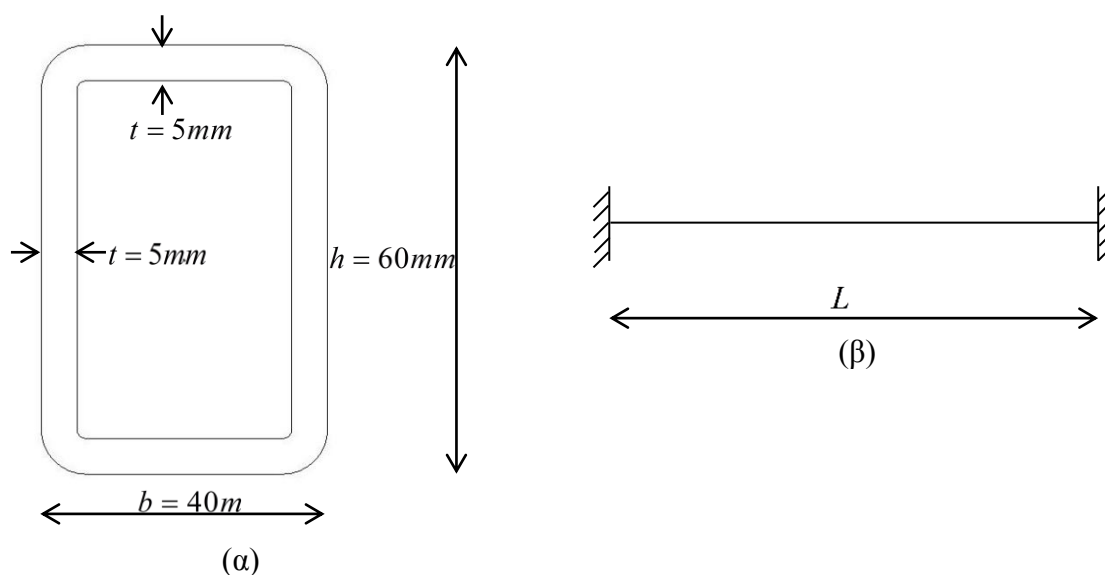
**Σχήμα 5.8.6** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από dynfreewarpinert.



Σχήμα 5.8.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreewarpinert*.

## 5.9 8<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: RHS 60x40x5

Στο όγδοο παράδειγμα αναλύεται η διατομή RHS 60x40x5 (βλέπε Σχήμα 5.9.1α) για μήκη δοκών 0.3m και 0.6m. Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.9.1β).



Σχήμα 5.9.1 Διατομή RHS 60x40x5 (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.9.1 Μήκος δοκού $L = 0.3m$

Στους Πίνακες 5.9.1.1-5.9.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.9.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.9.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.9.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1β τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.9.2 με το Σχήμα 5.9.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 3) Σύμφωνα με την ανάλυση 3ε η επιπλέον δέσμευση της στροφής περί των 2 αξόνων που είναι κάθετοι στον διαμήκη άξονα της δοκού δεν βελτιώνει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων συνεπώς δεν ανταποκρίνεται στη θεωρία δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.9.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των-Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	177	26,550	-	Δεν αναγνωρίζεται	9887.22	14529.03	18880.58
1β			177	26,550	149 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	4657.64	9327.90	14020.24	18736.63
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	180	22,500	-	5047.86	9440.24	13850.10	17872.11
3β			180	22,500	124 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	4448.33	8907.84	13387.24	17890.00
3γ			180	22,500	2	4390.98	8334.56	13864.14	16660.29
3δ			180	45,000	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	4448.91	8909.51	13391.05	17897.51
3ε			180	45,000	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές) + δέσμευση και Rx , Ry στα διαφ/τα	5095.24	10196.36	15308.27	20432.60

**Πίνακας 5.9.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*, *dynfreeUniflin*.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	<i>dynfreeSlin</i>	1,740	200	50	-	4622.52	9256.44	13911.72	18595.13
5	<i>dynfreeSlin- warpinert</i>			50		4623.53	9263.60	13931.78	18632.59
6	<i>dynfreeUniflin</i>			50		4587.05	9178.62	13779.26	18393.49

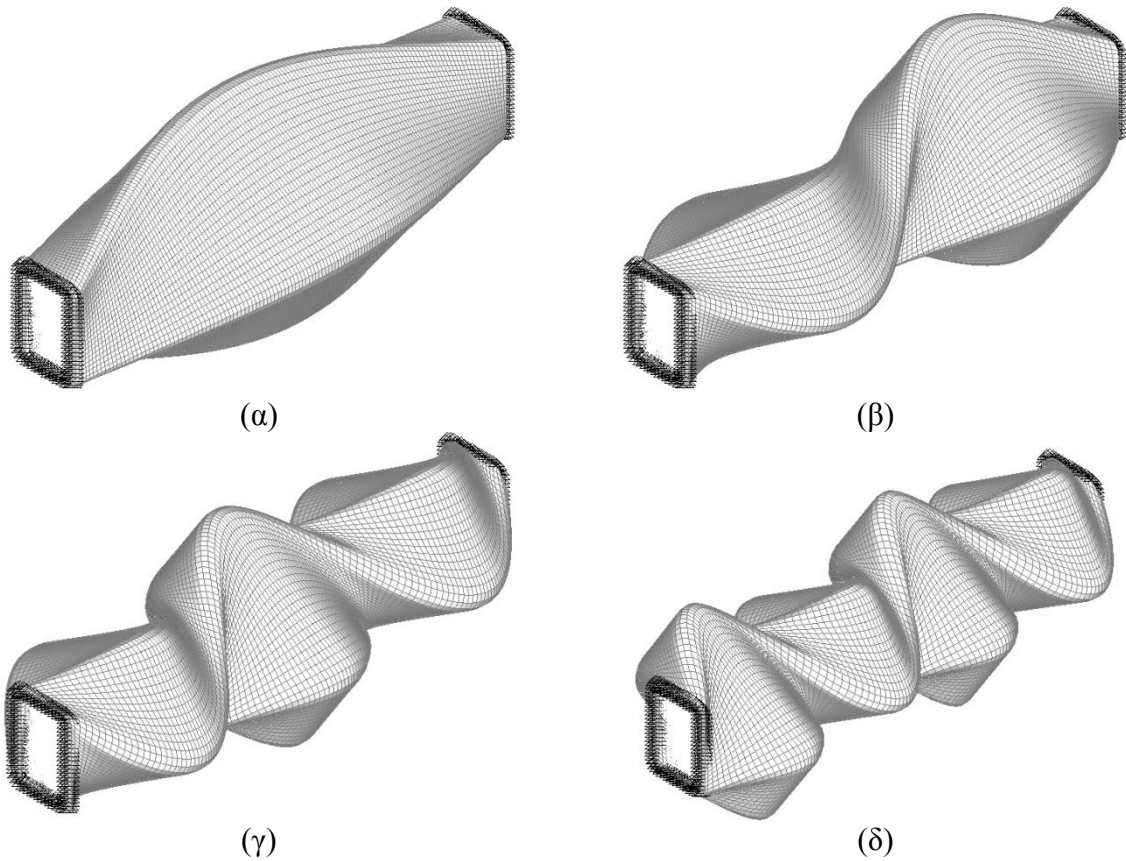
**Πίνακας 5.9.3** Σύγκριση *Nastran* με *dynfreeSlin*, *dynfreeSlinwarpinert*.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeSlin</i> %				Διαφορά από <i>dynfreeSlinwarpinert</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D	-	6.81	4.44	1.54	-	6.73	4.29	1.33
	1β	6-εδρικά	0.76	0.77	0.78	0.76	0.74	0.69	0.63	0.56
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	9.20	1.99	-0.44	-3.89	9.18	1.91	-0.59	-4.08
	3β		-3.77	-3.77	-3.77	-3.79	-3.79	-3.84	-3.91	-3.99
	3γ		-5.01	-9.96	-0.34	-10.41	-5.03	-10.03	-0.49	-10.59
	3δ		-3.76	-3.75	-3.74	-3.75	-3.78	-3.82	-3.88	-3.95
	3ε		10.23	10.15	10.04	9.88	10.20	10.07	9.88	9.66

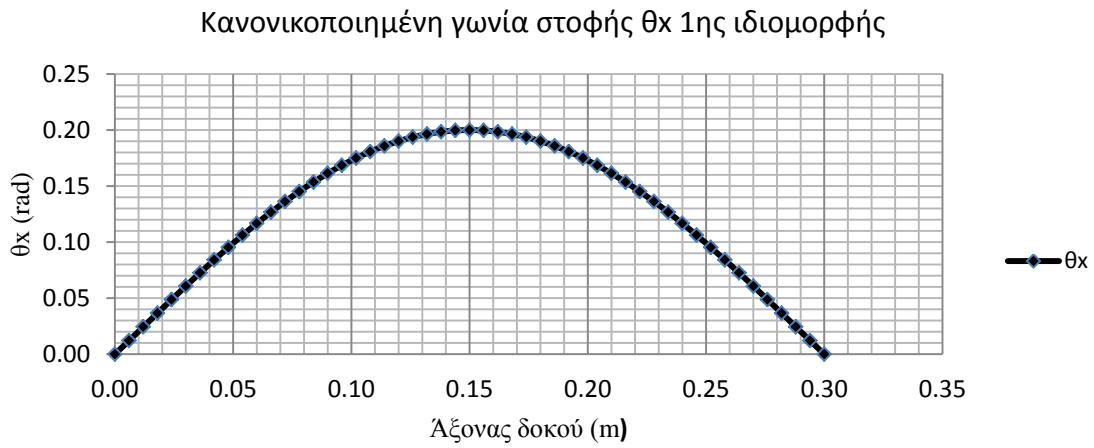
**Πίνακας 5.9.4** Σύγκριση *Nastran* με *dynfreeUniflin*.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από <i>dynfreeUniflin</i> %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D	-	7.72	5.44	2.65
	1β	6-εδρικά	1.54	1.63	1.75	1.87
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	10.05	2.85	0.51	-2.83
	3β		-3.02	-2.95	-2.84	-2.74
	3γ		-4.27	-9.20	0.62	-9.42
	3δ		-3.01	-2.93	-2.82	-2.70
	3ε		11.08	11.09	11.10	11.09



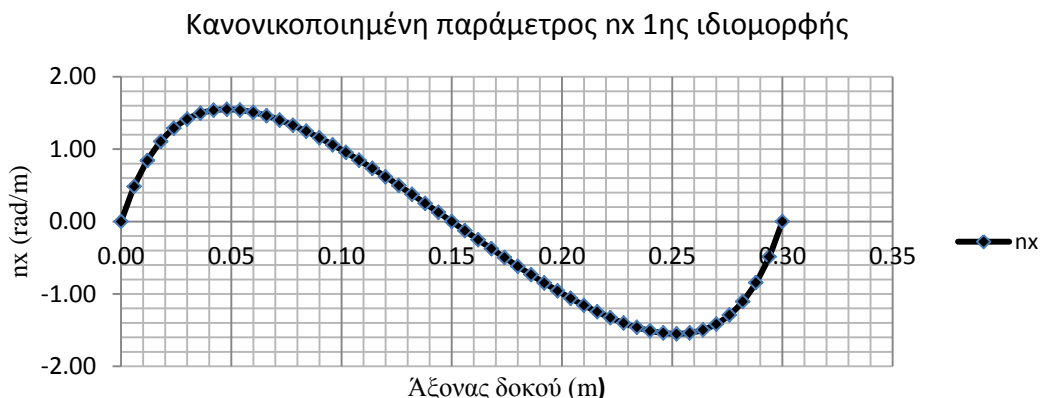


**Σχήμα 5.9.2** Ανάλυση 1β, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=149) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.9.3** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.





Σχήμα 5.9.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.9.2 Μήκος δοκού $L = 0.6m$

Στους Πίνακες 5.9.2.1-5.9.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.9.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.9.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.9.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 1α τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Σχετικά με τη δέσμευση της στοφής περί των 2 αξόνων που είναι κάθετοι στον διαμήκη άξονα της δοκού στην ανάλυση 3ε ισχύουν τα ίδια με εκείνα που αναφέρθηκαν σε αυτό το παράδειγμα για μήκος δοκού  $0.3m$
- 3) Τα 4-πλευρικά κελυφωτά στοιχεία προσεγγίζουν καλύτερα την λύση της θεωρίας δοκού καθώς βελτιώνεται η διακριτοποίηση.
- 4) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.9.5 με το Σχήμα 5.9.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 5) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 6) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.9.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρό- γραμ- μα ανά- λυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	177	53,100	299 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	2314.14	4631.36	6954.16	9284.13
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	180	22,500	-	2130.54	4959.47	7176.08	9414.93
								6439.42	7960.93
3β			180	22,500	124 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	2518.24	5036.08	7553.13	10068.99
3γ			180	22,500	4	2198.25	4337.11	6573.73	9278.41
3δ			180	90,000	499 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	2211.16	4424.80	6643.04	8867.41
3ε	180	90,000	499 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές) + δέσμευση και Rx , Ry στα διαφ/τα	2540.97	5083.48	7628.84	10177.97		

**Πίνακας 5.9.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

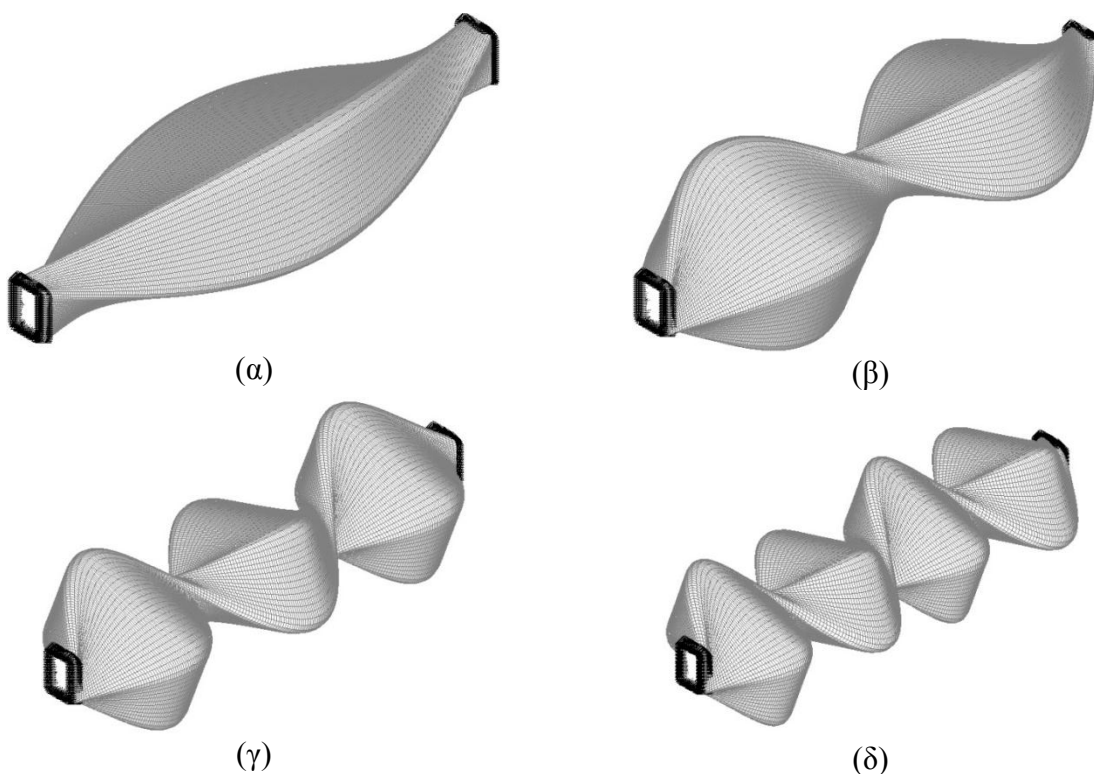
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,740	200	50	-	2302.13	4606.88	6916.85	9234.58
5	dynfreeSlin- warpinert			2302.30		4608.22	6921.16	9244.14	
6	dynfreeUniflin			2293.52		4589.31	6889.63	9196.75	

**Πίνακας 5.9.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

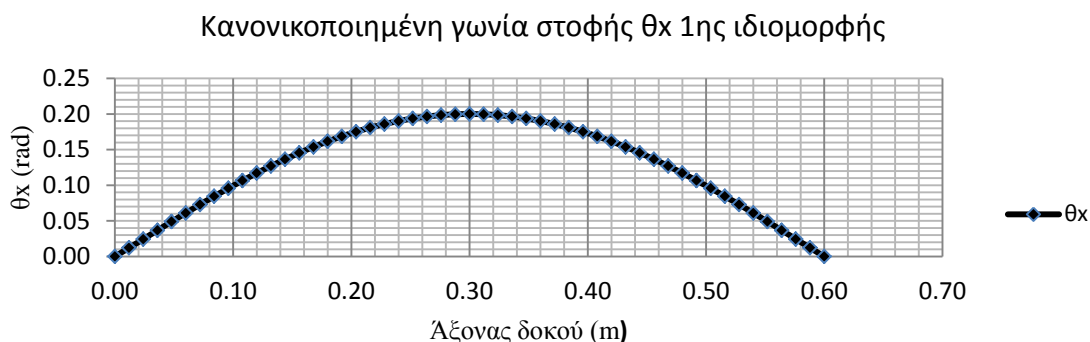
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.52	0.53	0.54	0.54	0.51	0.50	0.48	0.43
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-7.45	7.65	3.75	1.95	-7.46	7.62	3.68	1.85
					-6.90	-13.79			-6.96	-13.88
	3β		9.39	9.32	9.20	9.04	9.38	9.28	9.13	8.92
	3γ		-4.51	-5.86	-4.96	0.47	-4.52	-5.88	-5.02	0.37
	3δ		-3.95	-3.95	-3.96	-3.98	-3.96	-3.98	-4.02	-4.08
3ε	10.37		10.35	10.29	10.22	10.37	10.31	10.22	10.10	

**Πίνακας 5.9.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

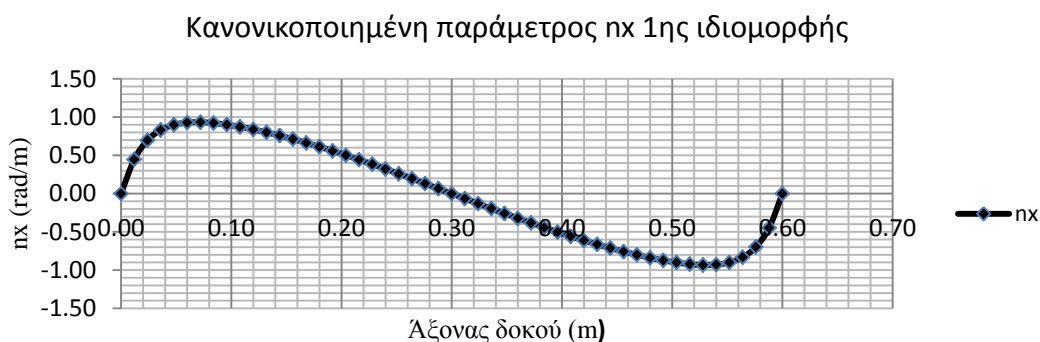
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	0.90	0.92	0.94	0.95
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-7.11	8.07	4.16	2.37
					-6.53	-13.44
	3β		9.80	9.74	9.63	9.48
	3γ		-4.15	-5.50	-4.59	0.89
	3δ		-3.59	-3.58	-3.58	-3.58
3ε	10.79		10.77	10.73	10.67	



**Σχήμα 5.9.5** Ανάλυση 1α, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=177) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



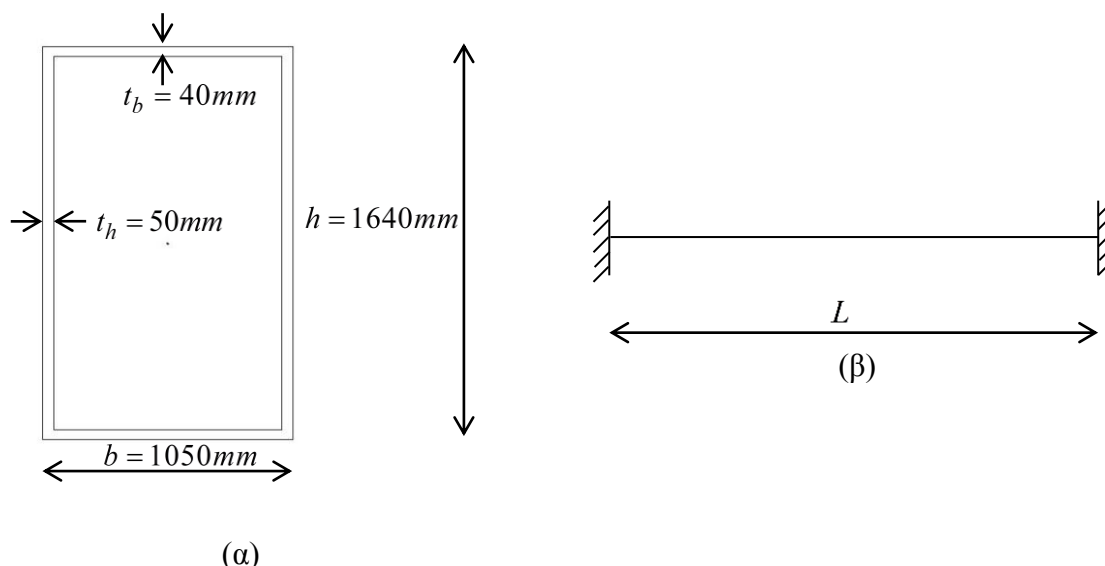
Σχήμα 5.9.6 Γωνία στοφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.



Σχήμα 5.9.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlinwarpinert*.

### 5.10 9<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: κοίλη ορθογωνική διατομή 1000x1600 (μέση γραμμή)

Στο ένατο παράδειγμα αναλύεται η κοίλη ορθογωνική διατομή με μέση γραμμή 1000x1600 δηλαδή πρακτικά με εξωτερικές διαστάσεις  $b = 1050\text{mm}$ ,  $h = 1640\text{mm}$  (βλέπε Σχήμα 5.10.1α) και πάχη  $t_b = 40\text{mm}$ ,  $t_h = 50\text{mm}$  για μήκη δοκών 8.0m και 16.0m. Το υλικό της διατομής είναι χάλυβας. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.10.1β).



**Σχήμα 5.10.1** Κοίλη ορθογωνική διατομή 1000x1600 (μέση γραμμή) (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.10.1 Μήκος δοκού $L = 8.0m$

Στους Πίνακες 5.10.1.1-5.10.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.10.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.10.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.10.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β τρισδιάστατων 6-εδρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Αντιπαραβάλλοντας τις αναλύσεις 3α-3γ διαπιστώνουμε ότι παρουσία λίγων διαφραγμάτων δεν βελτιώνει σαφώς το προσομοίωμα αλλά μάλλον διασπείρει το σφάλμα σε όλες τις ιδιοσυχνότητες.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.11.2 με το Σχήμα 5.10.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.10.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
3α	NASTRAN	Κελυφωτά 4-πλευρικά	208	52,000	-	165.74	375.86	501.52	563.15
3β			208	52,000	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές	164.68	329.46	494.45	659.66
3γ			208	52,000	4	159.25	363.75	551.57	639.72

**Πίνακας 5.10.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

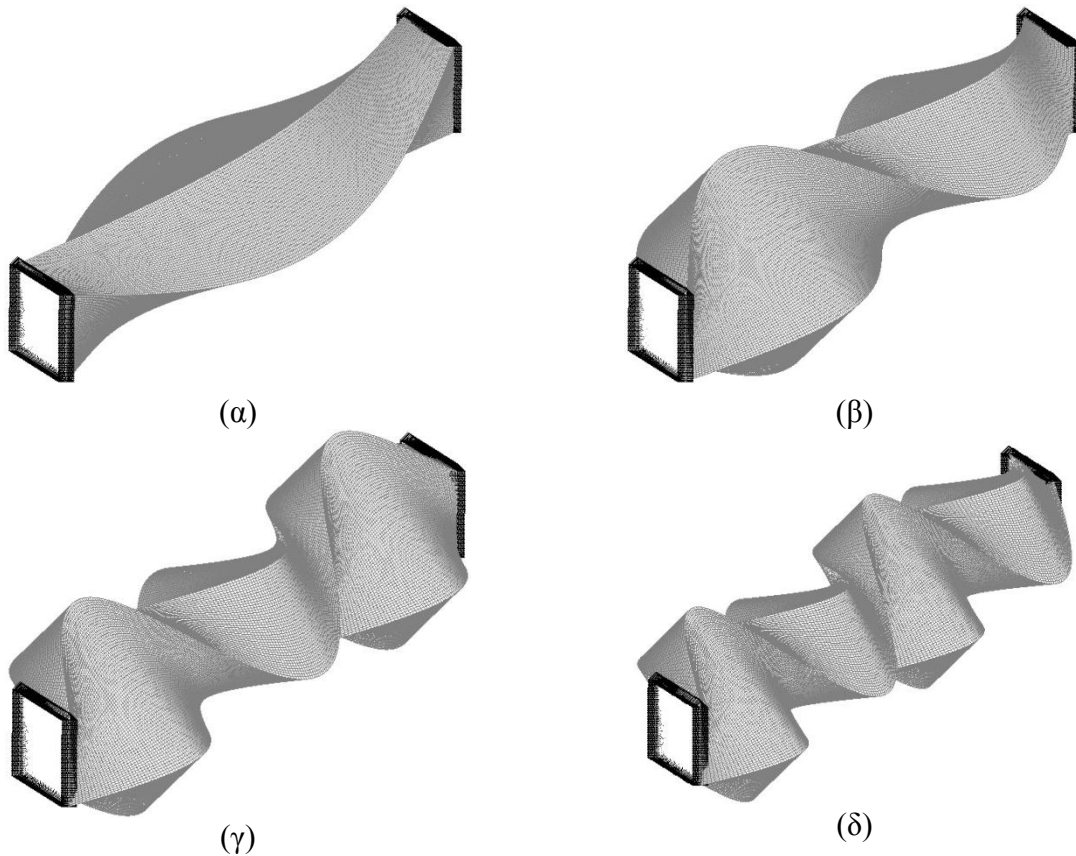
α/α ανάλυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,388	840	50	-	165.53	331.24	497.31	663.93
5	dynfreeSlin- warpinert			50		165.54	331.32	497.54	664.38
6	dynfreeUniflin			50		166.24	332.65	499.38	666.62

**Πίνακας 5.10.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

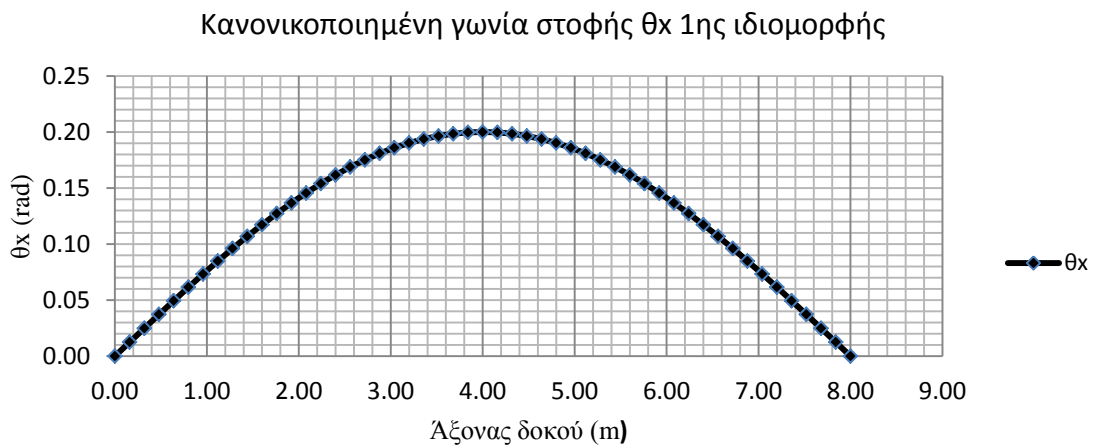
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	0.12	13.47	0.85	-15.18	0.12	13.44	0.80	-15.24
	3β					-1.28				-1.35
	3γ		-3.80	9.82	10.91	-3.65	-3.80	9.79	10.86	-3.71

**Πίνακας 5.10.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

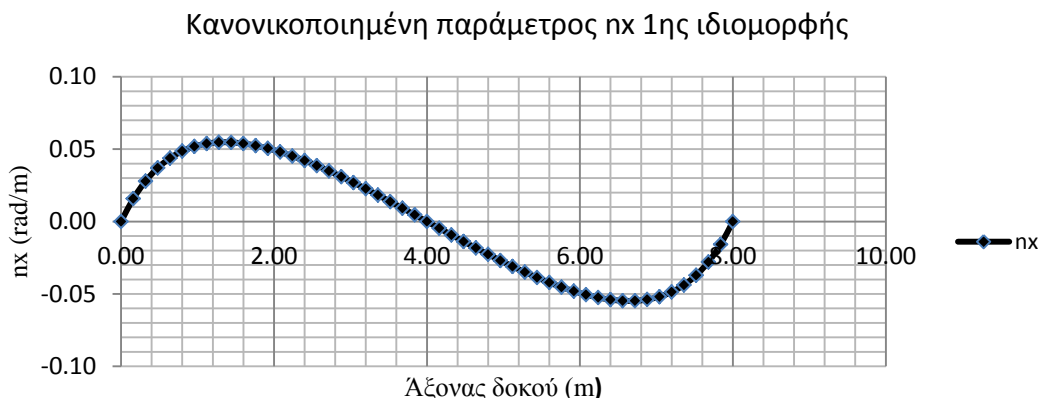
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-0.30	12.99	0.43	-15.52
	3β		-0.94	-0.96	-0.99	-1.04
	3γ		-4.21	9.35	10.45	-4.04



**Σχήμα 5.10.2** Ανάλυση 3β, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.10.3** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.



Σχήμα 5.10.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.

### 5.10.2 Μήκος δοκού $L = 16.0m$

Στους Πίνακες 5.10.2.1-5.10.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.10.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.10.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.10.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β κελυφωτών 4-πλευρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Όσον αφορά την ανάλυση 3β ισχύουν όσα αναφέρθηκαν σε αυτό το παράδειγμα για την αντίστοιχη ανάλυση της δοκού των  $\delta m$ .
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.10.5 με το Σχήμα 5.11.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.



**Πίνακας 5.10.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Πλήθος διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
3α	NASTRAN	Κελυφωτά 4-πλευρικά	208	104,000	-	86.53	165.52	218.02	244.64
3β			208	104,000	499	82.16	164.35	246.60	328.90
3γ			208	104,000	9	81.56	159.00	221.31	361.78
							305.17		
								320.07	

**Πίνακας 5.10.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

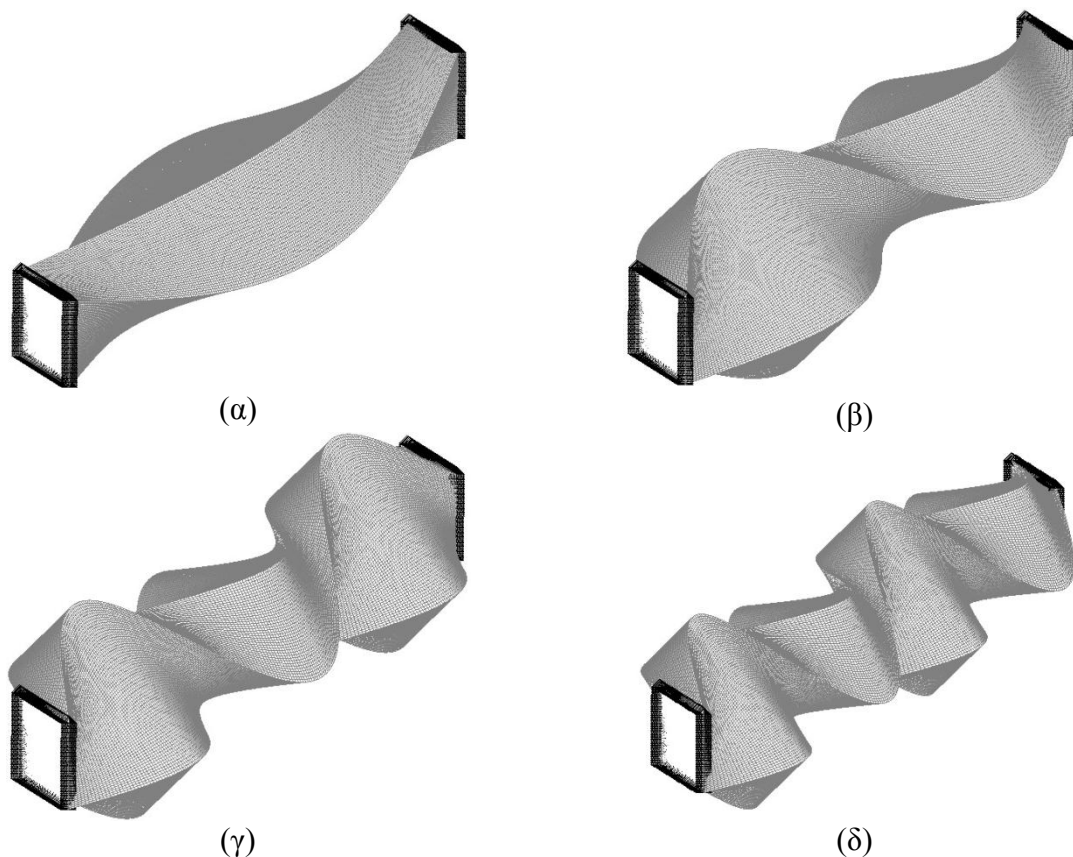
α/α ανάλυσης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποιή- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	1,388	840	50	-	82.66	165.37	248.17	331.13
5	dynfreeSlin- warpinert			50		82.66	165.38	248.22	331.26
6	dynfreeUniflin			50		83.12	166.32	249.69	333.31

**Πίνακας 5.10.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

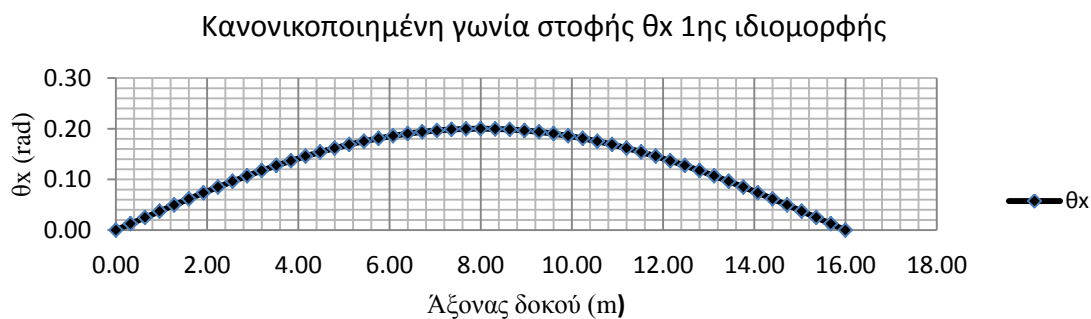
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	4.68	0.10	-12.15	-26.12	4.68	0.09	-12.17	-26.15
	3β		-0.60	-0.61	-0.63	-0.67	-0.60	-0.62	-0.66	-0.71
	3γ		-1.33	-3.85	-10.82	9.26	-1.33	-3.86	-10.84	9.21
						28.97			28.95	

**Πίνακας 5.10.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

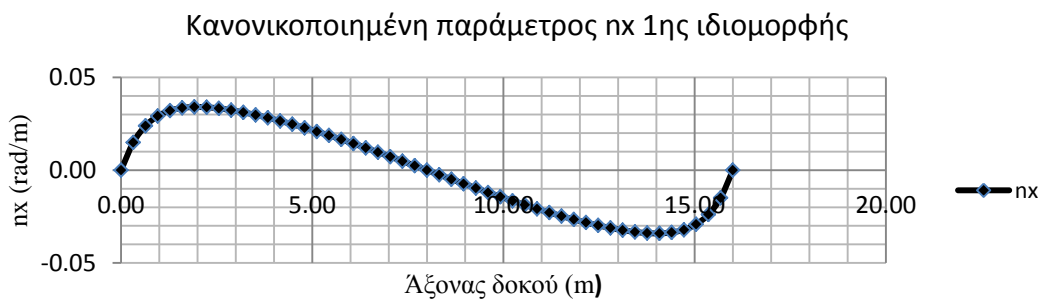
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	4.10	-0.48	-12.68	-26.60
	3β		-1.15	-1.18	-1.24	-1.32
	3γ		-1.88	-4.40	-11.37	8.54
					28.19	



**Σχήμα 5.10.5** Ανάλυση 3β, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε ολές (=499) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



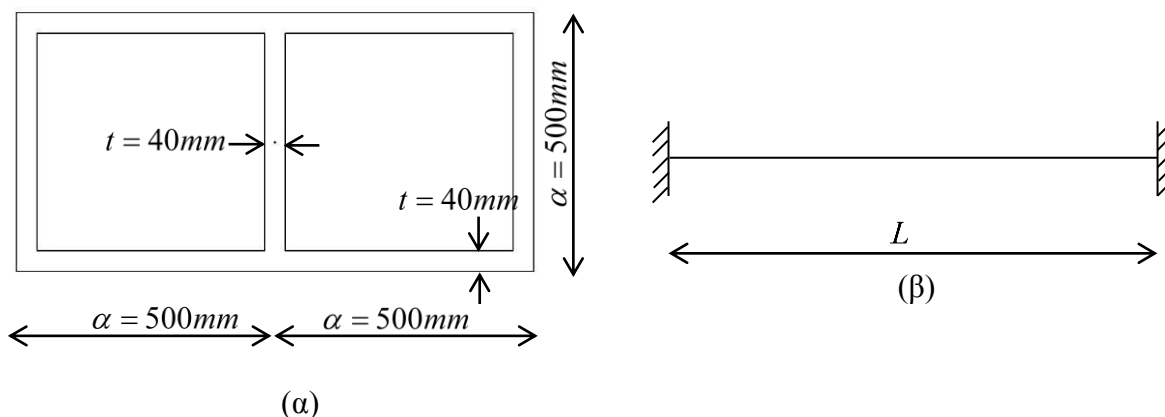
**Σχήμα 5.10.6** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.



**Σχήμα 5.10.7** Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.

## 5.11 10<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα: δικύπελο κιβώτιο

Στο δέκατο παράδειγμα αναλύεται η διατομή δικύπελου κιβωτίου με διαστάσεις  $a = 500\text{mm}$ ,  $t = 40\text{mm}$  (βλέπε Σχήμα 5.11.1α), η επιλογή των διαστάσεων έγινε έτσι ώστε να μην είναι κατηγορίας 4, για μήκη δοκών  $5.0\text{m}$  και  $10.0\text{m}$ . Το υλικό της διατομής είναι αλουμίνιο. Η δοκός λαμβάνεται αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 5.11.1α).



Σχήμα 5.11.1 Διατομή δικύπελου κιβωτίου (α), στατικό σύστημα (β).

### 5.11.1 Μήκος δοκού $L = 5.0\text{m}$

Στους Πίνακες 5.11.1.1-5.11.1.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.11.2 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.11.3 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του dynfreeSlin η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.11.4 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β κελυφωτών 4-πλευρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Από την ανάλυση 3γ βλέπουμε ότι τα 4 διαφράγματα δεν είναι αρκετά για τον ικανοποιητικό υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.11.2 με το Σχήμα 5.11.3 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του dynfreeSlin και του dynfreeSlinwarpinert απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.11.1** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran.

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Αριθμός διαφ/των- Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	521	52,100	99 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	248.94	499.45	752.51	1008.15
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	165	41,250	-	180.24	532.03	711.78	835.84
3β			165	41,250	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	242.91	487.17	733.68	982.61
3γ		165	41,250	4	238.83	456.24	823.07	992.91	

**Πίνακας 5.11.2** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

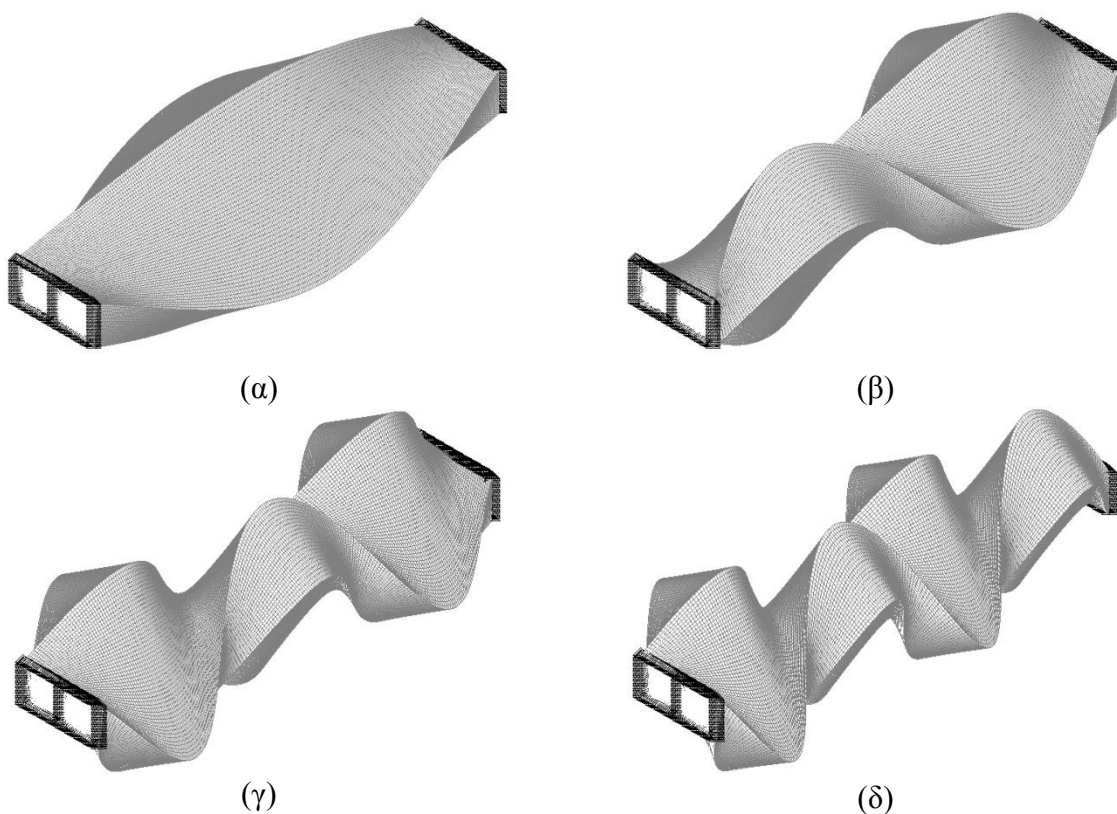
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτικοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	2,576	520	50	-	245.31	491.98	741.01	992.82
5	dynfreeSlin- warpinert			50		245.40	492.61	742.73	995.94
6	dynfreeUniflin			50		241.29	482.81	724.81	967.53

**Πίνακας 5.11.3** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

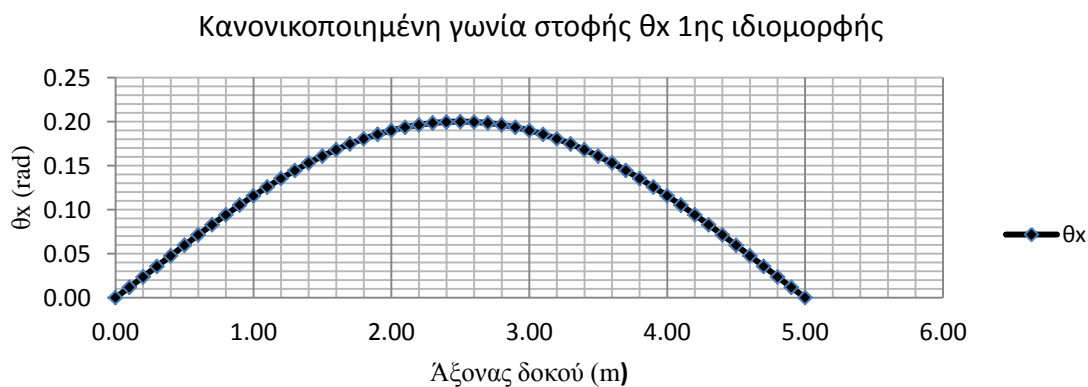
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.48	1.52	1.55	1.54	1.44	1.39	1.32	1.23
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-26.53	8.14	-3.94	-15.81	-26.55	8.00	-4.17	-16.07
	3β				19.76	12.88			19.48	12.53
	3γ		-0.98	-0.98	-0.99	-1.03	-1.01	-1.10	-1.22	-1.34

**Πίνακας 5.11.4** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

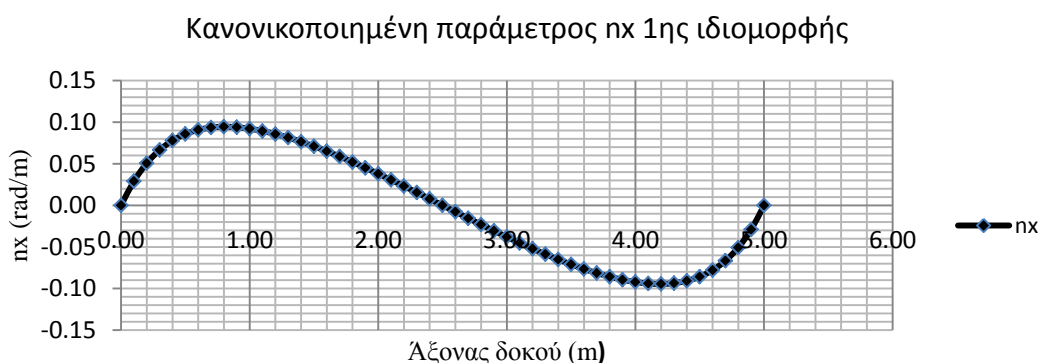
		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	3.17	3.45	3.82	4.20
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-25.30	10.19	-1.80	-13.61
	3β		0.67	0.90	1.22	1.56
	3γ		-1.02	-5.50	13.56	2.62



**Σχήμα 5.11.2** Ανάλυση 3β, κελυφωτά 4-πλευρικά με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).



**Σχήμα 5.11.3** Γωνία στροφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από dynfreeSlin.



Σχήμα 5.11.4 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.

### 5.11.2 Μήκος δοκού $L = 10.0m$

Στους Πίνακες 5.10.2.1-5.10.2.4 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων με το Nastran και τα προγράμματα θεωρίας δοκού. Στο Σχήμα 5.11.5 απεικονίζονται οι 4 πρώτες ιδιομορφές όπως προέκυψαν από την ανάλυση 1α με τρισδιάστατα 6-εδρικά στοιχεία που έγινε με το Nastran. Στο Σχήμα 5.11.6 παρουσιάζεται για την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή από την ανάλυση του *dynfreeSlin* η γραφική παράσταση της γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της δοκού ενώ στο Σχήμα 5.11.7 η αντίστοιχη παράμετρος  $n_x$ .

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις προαναφερθείσες αναλύσεις συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 1) Η θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια όχι μόνο την 1<sup>η</sup> αλλά και τις υπόλοιπες ιδιομορφές (βλέπε ανάλυση 3β κελυφωτών 4-πλευρικών με διαφράγματα σε όλες τις διατομές).
- 2) Από την ανάλυση 3γ, με τα 9 διαφράγματα, βλέπουμε ότι το σφάλμα είναι μικρότερο σε σχέση με την αντίστοιχη ανάλυση για τη δοκό των 5m.
- 3) Συγκρίνοντας το Σχήμα 5.11.5 με το Σχήμα 5.11.6 βλέπουμε ότι υπάρχει συμφωνία της κατανομής της στροφής  $\theta_x$  μεταξύ του Nastran και της θεωρίας δοκού.
- 4) Βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα του *dynfreeSlin* και του *dynfreeSlinwarpinert* απέχουν ελάχιστα συνεπώς η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική.
- 5) Τέλος βλέπουμε ότι για τον φορέα μας δεν είναι ξεκάθαρο αν είναι πιο αξιόπιστη η διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ή η θεωρία χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης.

**Πίνακας 5.11.5** Αποτελέσματα αναλύσεων με Nastran

α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Τύπος στοιχείων	Πλήθος στοιχείων ανά διατομή	Πλήθος στοιχείων φορέα	Αριθμός διαφ/των -Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
						1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
1α	NASTRAN	3D 6-εδρικά	521	104,200	199 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	123.04	246.45	370.54	495.48
3α		Κελυφωτά 4-πλευρικά	165	41,250	-	111.52	170.08	205.53	260.55
							416.45	529.73	
								539.10	
3β		165	41,250	249 (σε ΟΛΕΣ τις διατομές)	120.23	240.75	361.80	483.54	
3γ		165	41,250	9	119.56	237.16	349.92	452.37	

**Πίνακας 5.11.6** Αποτελέσματα αναλύσεων με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert, dynfreeUniflin.

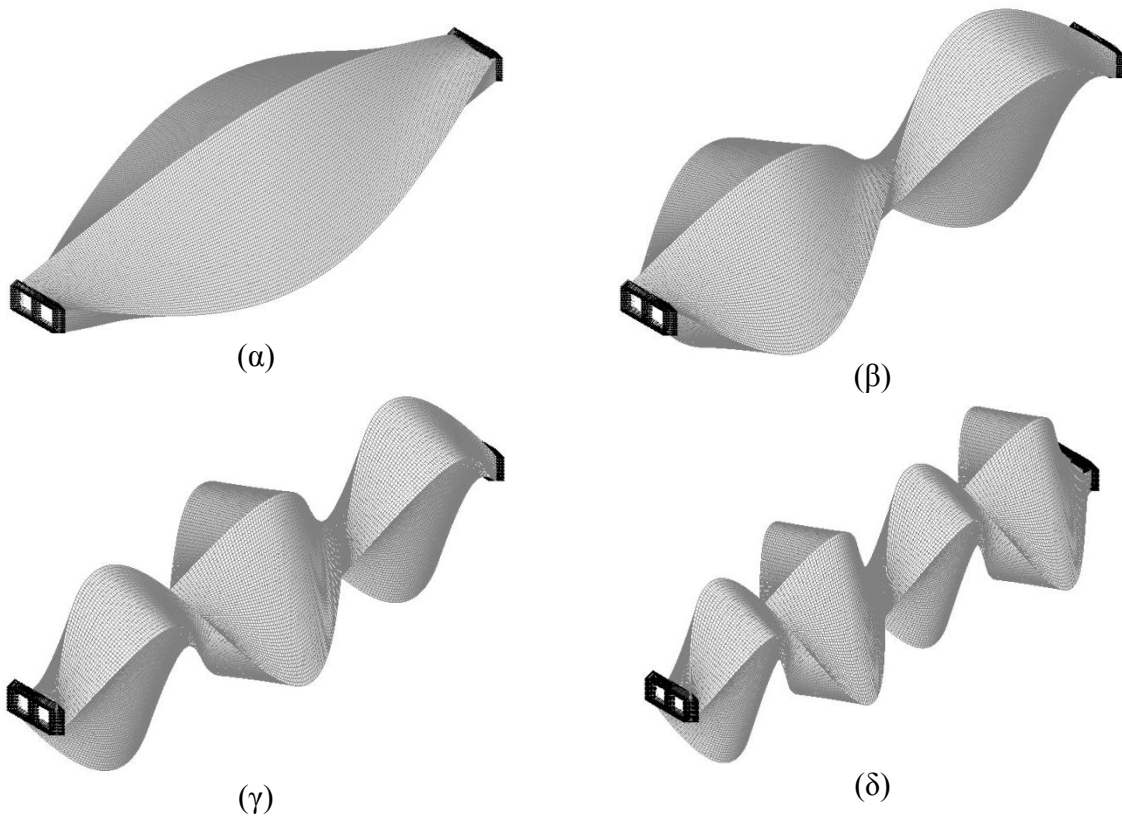
α/α ανάλυ- σης	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διακριτοποίηση διατομής		Πλήθος διαμήκους διακριτοποίη- σης	Λοιπά χαρ/κα	Συχνότητες f(Hz)			
		Πλήθος be	Πλήθος trig			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
4	dynfreeSlin	2,576	520	50	-	121.62	243.55	366.05	489.37
5	dynfreeSlin- warpinert			50		121.64	243.67	366.43	490.17
6	dynfreeUniflin			50		120.64	241.41	362.41	483.76

**Πίνακας 5.11.7** Σύγκριση Nastran με dynfreeSlin, dynfreeSlinwarpinert.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeSlin %				Διαφορά από dynfreeSlinwarpinert %			
			1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	1 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	2 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	3 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή	4 <sup>η</sup> ιδιο- μορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.16	1.19	1.23	1.25	1.15	1.14	1.12	1.08
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-8.30	-30.16	-43.85	-46.76	-8.32	-30.20	-43.91	-46.84
					13.77	8.25			13.65	8.07
						10.16				9.98
3β		-1.15	-1.15	-1.16	-1.19	-1.16	-1.20	-1.26	-1.35	
3γ		-1.70	-2.62	-4.41	-7.56	-1.71	-2.67	-4.50	-7.71	

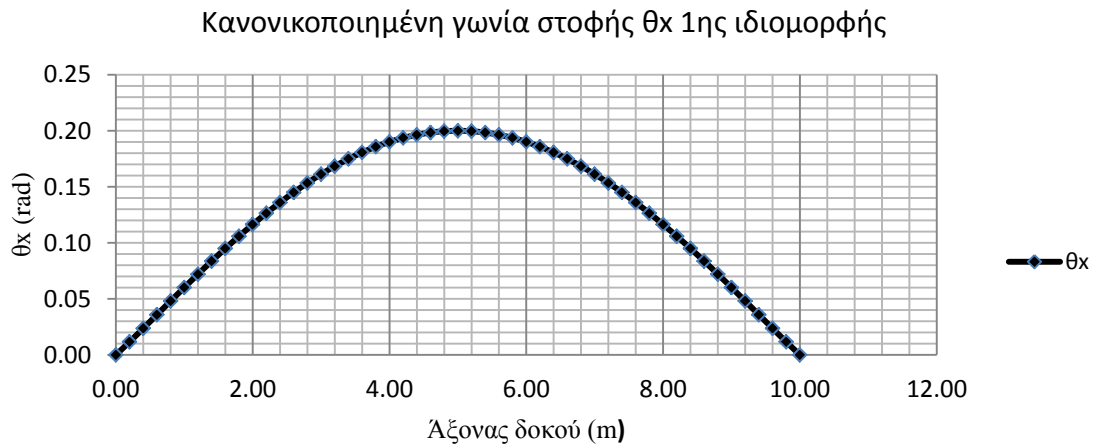
**Πίνακας 5.11.8** Σύγκριση Nastran με dynfreeUniflin.

		Τύπος στοιχείων	Διαφορά από dynfreeUniflin %			
			1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή	4 <sup>η</sup> ιδιομορφή
Ανάλυση	1α	3D 6-εδρικά	1.98	2.09	2.24	2.42
	3α	Κελυφωτά 4-πλευρικά	-7.56	-29.54	-43.29	-46.14
					14.91	9.50
						11.44
	3β		-0.34	-0.27	-0.17	-0.05
3γ		-0.90	-1.76	-3.45	-6.49	

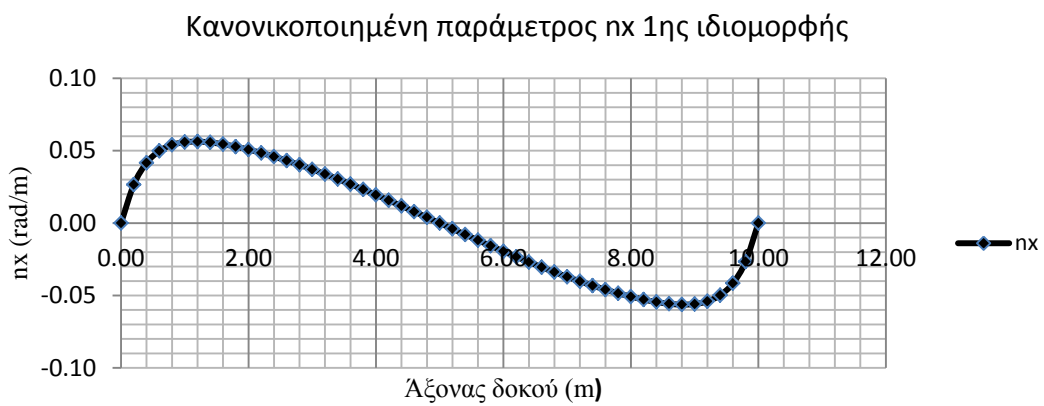


**Σχήμα 5.11.5** Ανάλυση 3β, 3D 6-εδρικά με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές. 1<sup>η</sup> ιδιομορφή (α), 2<sup>η</sup> ιδιομορφή (β), 3<sup>η</sup> ιδιομορφή (γ), 4<sup>η</sup> ιδιομορφή (δ).





Σχήμα 5.11.6 Γωνία στοφής  $\theta_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.



Σχήμα 5.11.7 Παράμετρος  $n_x$  1<sup>ης</sup> ιδιομορφής από *dynfreeSlin*.



## 6 Αριθμητικά Παραδείγματα: Μέρος Β

### 6.1 Εισαγωγή

Στο 2<sup>ο</sup> μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων παρουσιάζονται 2 παραδείγματα. Το 1<sup>ο</sup> αφορά ανάλυση δοκού που υποβάλλεται σε 4 διαφορετικές φορτίσεις αρχικών συνθηκών οι οποίες αντιστοιχούν στις 4 πρώτες ιδιομορφές της ενώ το 2<sup>ο</sup> εξαναγκασμένη ταλάντωση με φόρτιση ορθογωνικού πλήγματος συγκεντρωμένης στρεπτικής ροπή που ασκείται στο μέσο το μήκους της.

Όσον αφορά το 1<sup>ο</sup> παράδειγμα η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με τα προγράμματα θεωρίας δοκού dynSlin και dynUniflin που υπολογίζουν την απόκριση μιας δοκού βασισμένα στη Θεωρία Ανομοιομορφής Στρέψης με Επιρροή Δευτερογενών Διατμητικών παραμορφώσεων και στην Θεωρία Ανομοιομορφής Στρέψης Χωρίς Επιρροή της Ανομοιομορφής Στρέβλωσης. Επίσης χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα ταχέως μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform) βασισμένο σε υπορουτίνα της βιβλιοθήκης IMSL το οποίο εξάγει το συχνοτικό περιοχόμενο χρονικά μεταβαλλόμενης συνάρτησης προκειμένου να επιβεβαιωθεί ότι η φόρτιση με αρχικές συνθήκες από κάποια ιδιομορφή (και μηδενικές αρχικές ταχύτητες  $\dot{\theta}_x$  και  $\dot{n}_x$ ) οδηγεί σε ταλάντωση με συχνότητα την αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα. Για τη σύγκριση αυτή χρησιμοποιήθηκαν οι συχνότητες  $f$  (Hz) και όχι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega$  (rad/s) όμως αυτό δεν επηρεάζει την αξία των συμπερασμάτων καθώς εξαιτίας της σχέσης (5.1.2) που τις συνδέει γραμμικά ότι ισχύει για τις 1<sup>ες</sup> ισχύει και για τις 2<sup>ες</sup>. Επιπλέον στόχος του παραδείγματος αυτού είναι η εξαγωγή των χρονοϊστοριών εντατικών και κινηματών μεγεθών.

Σχετικά με το 2<sup>ο</sup> παράδειγμα η ανάλυση υλοποιήθηκε με τα προγράμματα θεωρίας δοκού dynSlin και dynUniflin, με το πρόγραμμα τασικής ανάλυσης torselindstressesAm2 το οποίο με δεδομένα τα εντατικά μεγέθη  $M_t^P, M_t^S, M_w$  μιας διατομής υπολογίζει τις τάσεις της στα Gauss Points των στοιχείων που έχουν δοθεί σαν επιφανειακή διακριτοποίηση της διατομής και στα σημεία συνόρου που έχουν δοθεί σαν συνοριακή διακριτοποίηση της διατομής και με το Nastran. Σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι η εξαγωγή των χρονοϊστοριών εντατικών και κινηματικών μεγεθών καθώς και ο υπολογισμός χαρακτηριστικών τασικών μεγεθών. Τα παραπάνω υπολογιζόμενα μεγέθη από τα προγράμματα dynSlin, dynUniflin και torselindstressesAm2 συγκρίνονται με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από το Nastran.

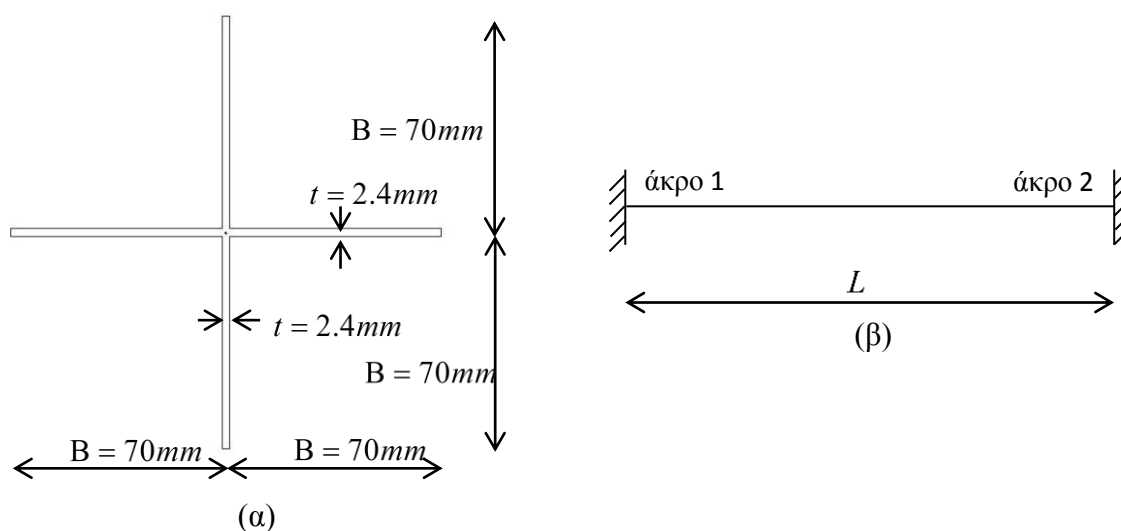
### 6.2 1<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα

Στο 1<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα η του Κεφαλαίου 5.2.1 σταυροειδής, χαλύβδινη δοκός (βλέπε Σχήμα 6.2.1α) με μήκος  $L = 0.6m$  η οποία είναι πακτωμένη και στα 2 άκρα της (βλέπε Σχήμα 6.2.1β) φορτίζεται διαδοχικά με αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στην 1<sup>η</sup>, 2<sup>η</sup>, 3<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> ιδιομορφή της. Προκειμένου να γίνει αυτό στα προγράμματα dynSlin και dynUniflin τίθενται οι τιμές που αντιστοιχούν στα  $\theta_x$  και  $n_x$  κάθε ιδιομορφής όπως έχουν προκύψει από την ανάλυση που έχει υλοποιηθεί στο Κεφάλαιο 5.2.1 με τα προγράμματα dynfreeSlin και dynfreeUniflin αντίστοιχα. Συνεπώς η ανάλυση με το dynSlin έχει φόρτιση που αντιστοιχεί στο output του dynfreeSlin ενώ η ανάλυση με το dynUniflin φόρτιση που έχει προκύψει από το output του dynfreeUniflin. Στη συνέχεια τα εντατικά και κινηματικά μεγέθη που προκύπτουν από κάθε ανάλυση συναρτήσκει του χρόνου

εισάγονται στα προγράμματα FFT1 και FFT2 προκειμένου να εξαχθεί η κυρίαρχη συχνότητα κάθε μεγέθους. Έχει νόημα να μιλάμε μόνο για 1 κυρίαρχη συχνότητα καθώς όπως βλέπουμε από τα γραφήματα των εντατικών και κινηματικών μεγεθών συναρτήσει του χρόνου 1 είναι η κυρίαρχη συχνότητα για κάθε μέγεθος.

Στα ακόλουθα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των εντατικών και κινηματικών μεγεθών (βλέπε Σχήμα 6.2.2-Σχήμα 6.2.39) που είναι μη μηδενικά σε κάθε φόρτιση.

Επίσης παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα των αναλύσεων FFT (βλέπε Πίνακας 6.2.1-Πίνακας 6.2.4) και η συχνότητα κάθε μεγέθους συγκρίνεται με εκείνη που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες της φόρτισης της για να εξετάσουμε κατά πόσον φόρτιση με κάποια ιδιομορφή οδηγεί σε ταλάντωση με συχνότητα ίση με εκείνη αυτής της ιδιομορφής.

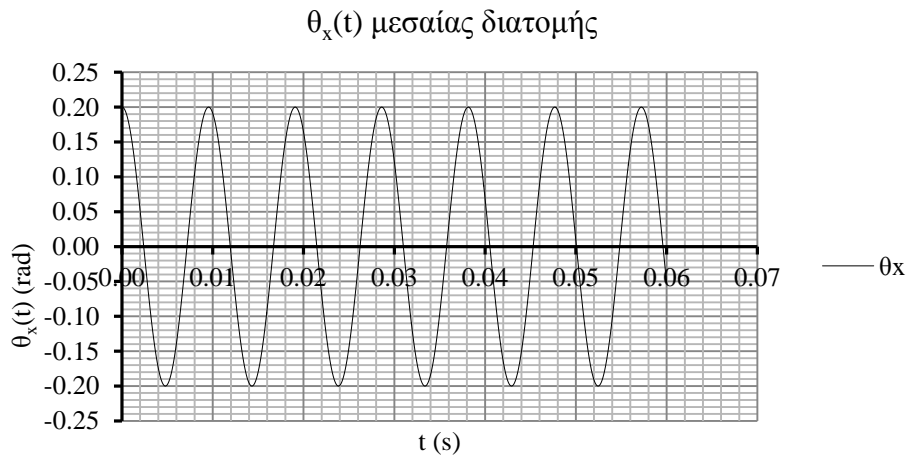


Σχήμα 6.2.1 Σταυροειδής διατομή  $B=70\text{mm}$ ,  $t=2.4\text{mm}$  (α), στατικό σύστημα (β).

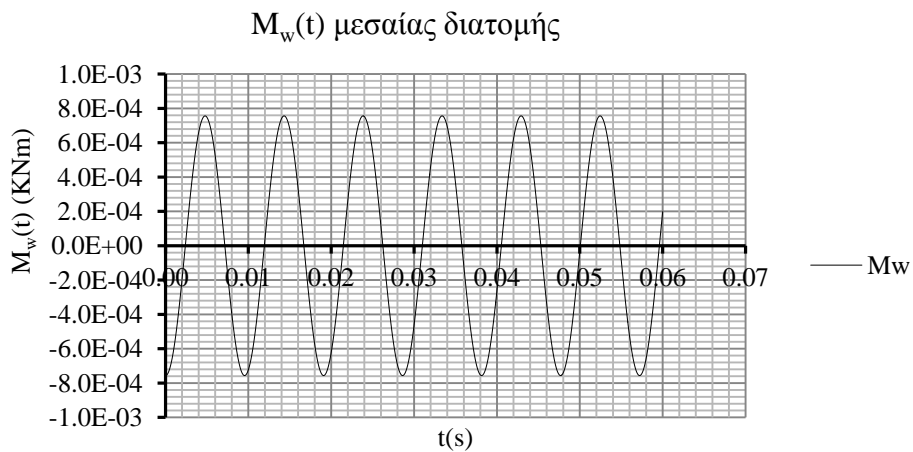
### 6.2.1 Φόρτιση με 1<sup>η</sup> ιδιομορφή

Λόγω του ότι έχουμε αμφίπακτη δοκό η οποία παραμορφώνεται σύμφωνα με την 1η ιδιομορφή της τα μεγέθη  $n_x$ ,  $M_t^P$  και  $M_t^S$  θα είναι μηδενικά στη μεσαία διατομή. Όσον αφορά τις ακραίες διατομές της δοκού λόγω του αμφίπακτου στατικού συστήματος τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $n_x$  θα είναι επίσης μηδενικά.

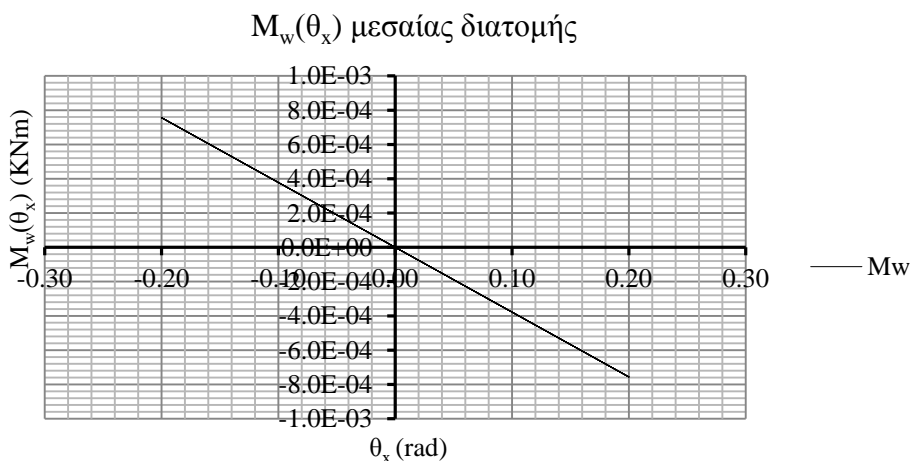
#### A) dynSlin



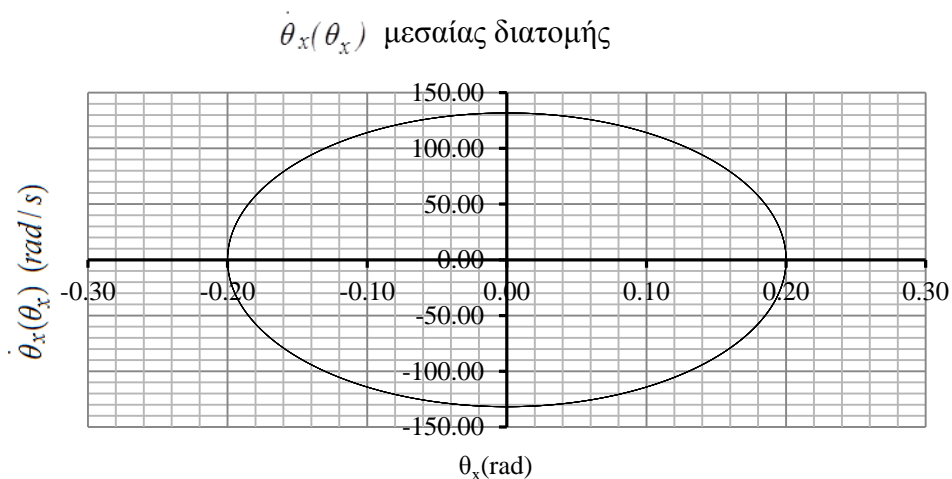
**Σχήμα 6.2.2** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



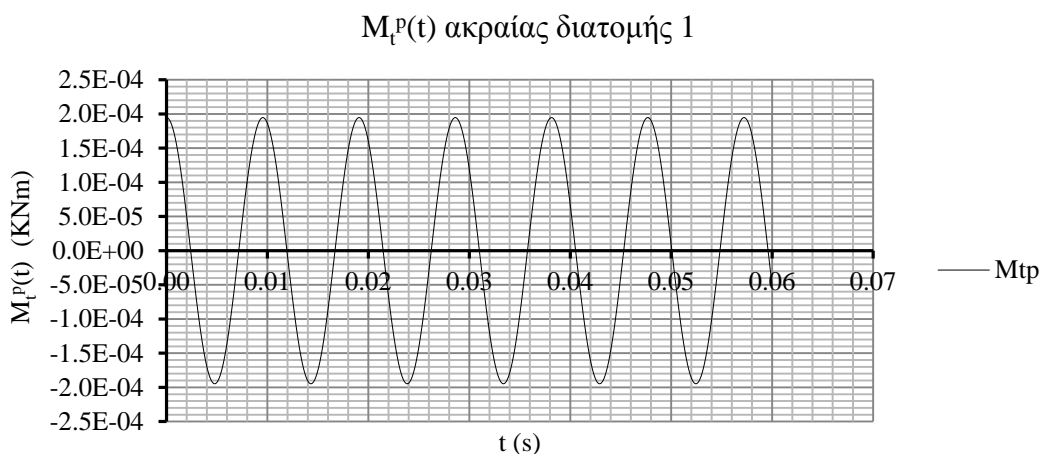
**Σχήμα 6.2.3** Δίπλοπο στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



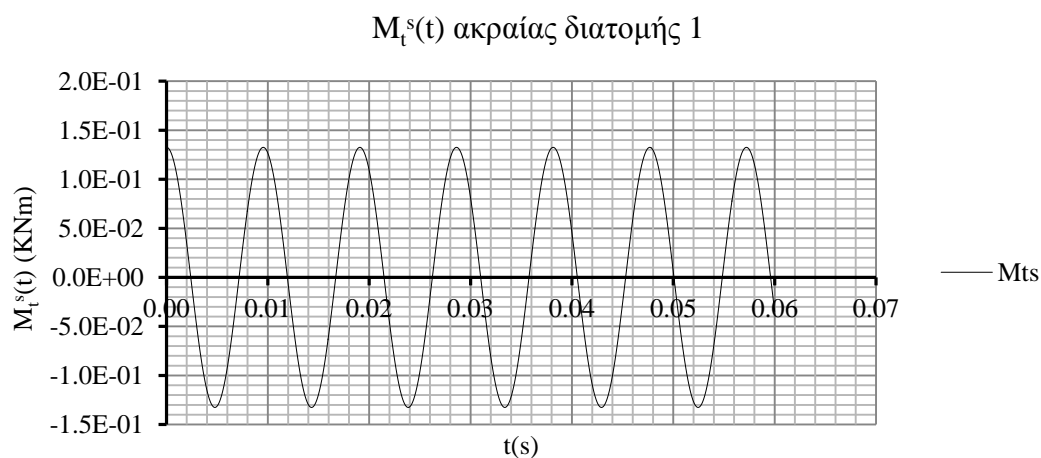
**Σχήμα 6.2.4** Δίπλοπο στρέβλωσης συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



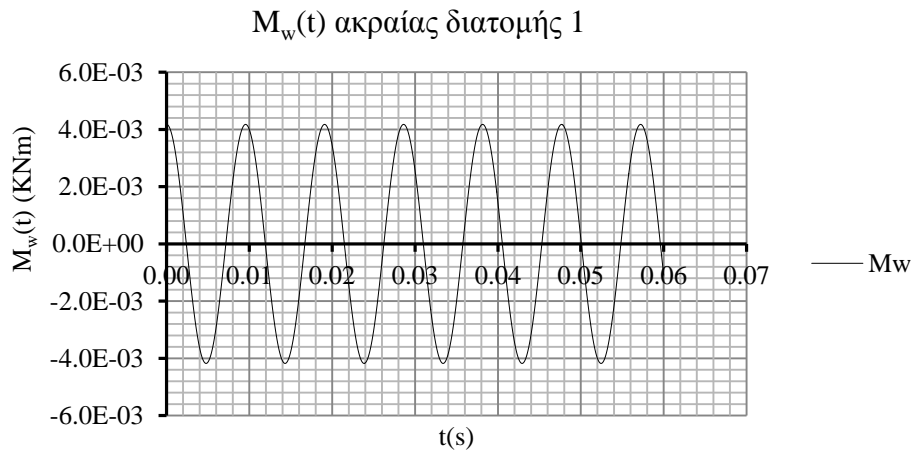
**Σχήμα 6.2.5** Ταχύτητα στροφής συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.6** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

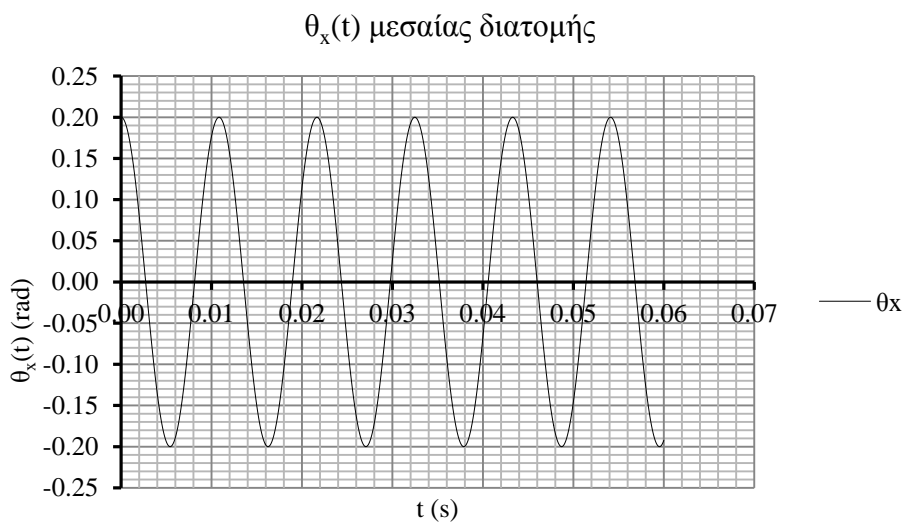


**Σχήμα 6.2.7** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

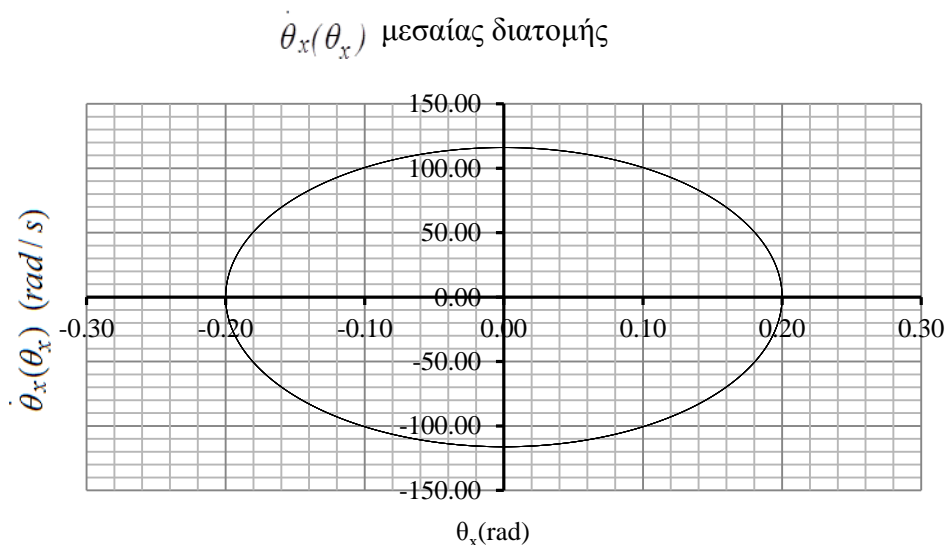


**Σχήμα 6.2.8** Λίγροπο στρέβλωσης ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

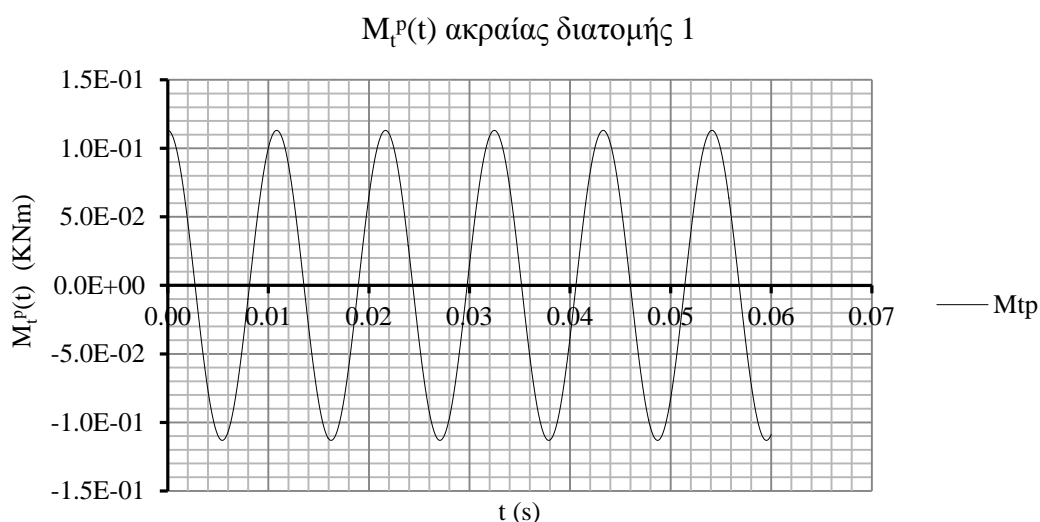
### B) *dynUniflin*



**Σχήμα 6.2.9** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynUniflin*. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.10** Ταχύτητα στροφής συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από dynUniflin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



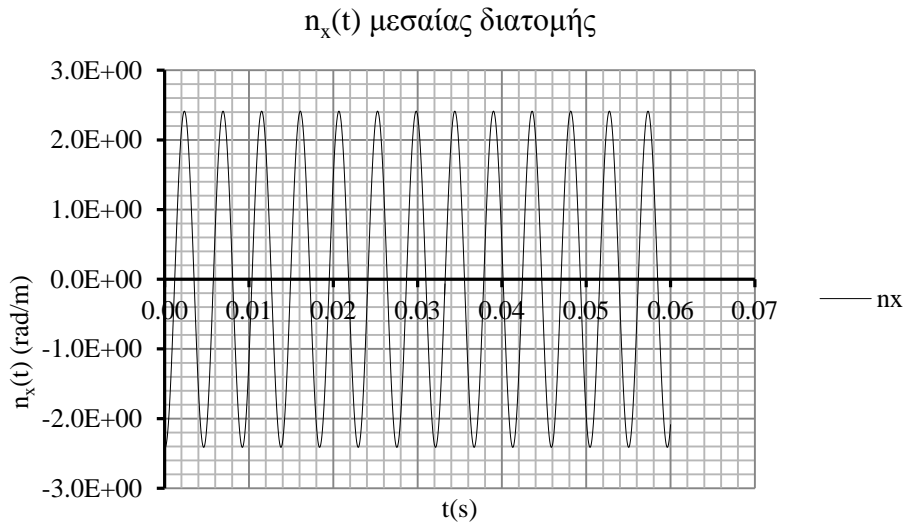
**Σχήμα 6.2.11** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin. Φόρτιση με 1<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

### 6.2.2 Φόρτιση με 2<sup>η</sup> ιδιομορφή

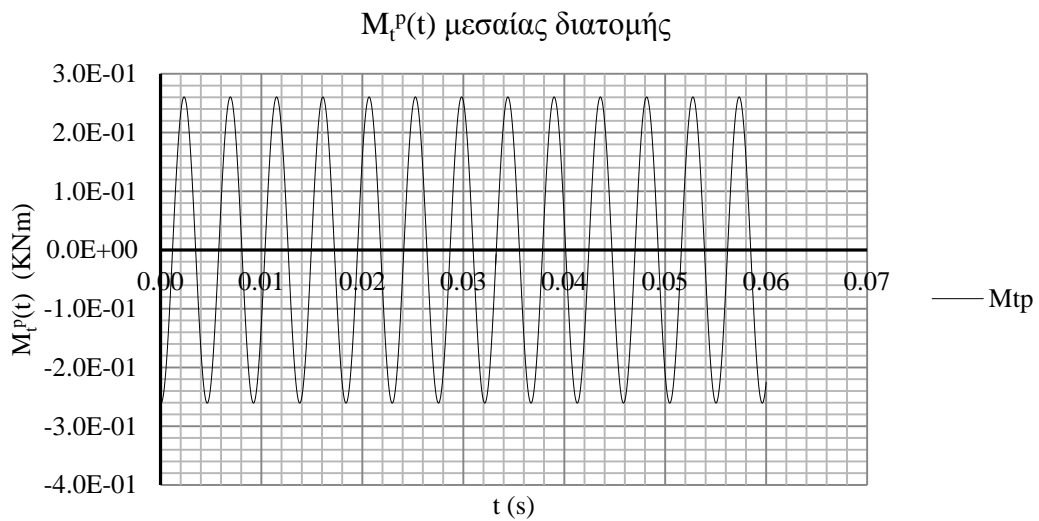
Λόγω του ότι έχουμε αμφίπακτη δοκό η οποία παραμορφώνεται σύμφωνα με την 2<sup>η</sup> ιδιομορφή της τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $M_w$  θα είναι μηδενικά στη μεσαία διατομή. Όσον αφορά τις ακραίες διατομές της δοκού λόγω του αμφίπακτου στατικού συστήματος τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $n_x$  θα είναι επίσης μηδενικά.

#### A) dynfreeSlin

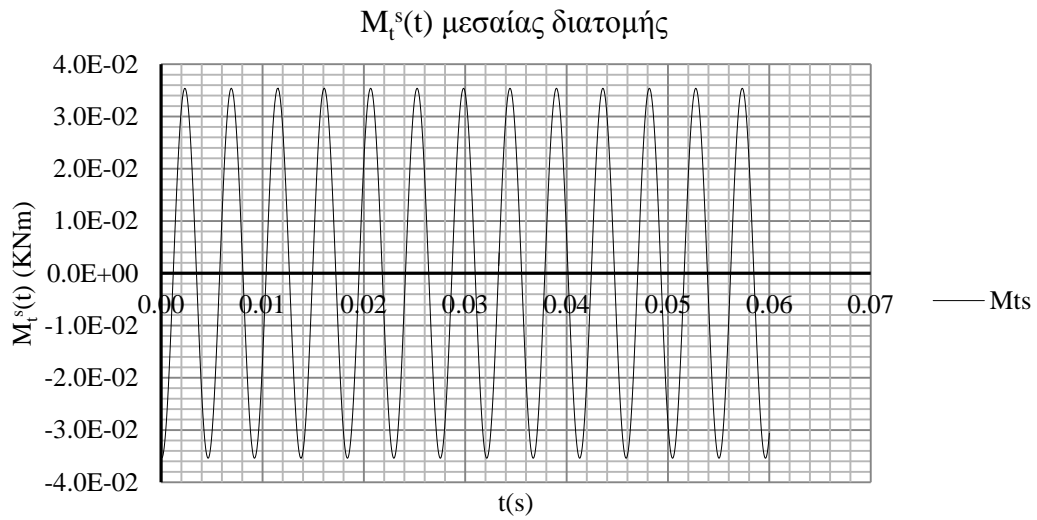




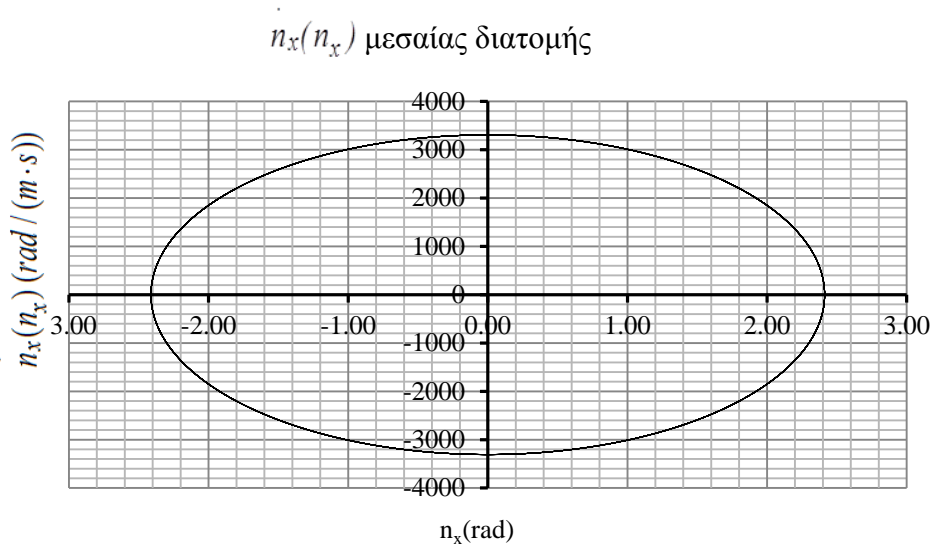
**Σχήμα 6.2.12** Ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



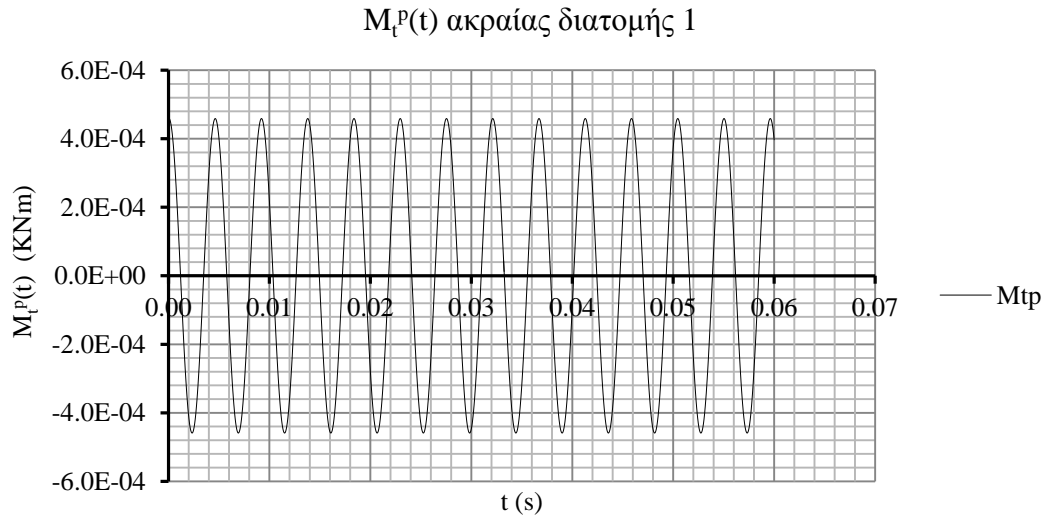
**Σχήμα 6.2.13** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



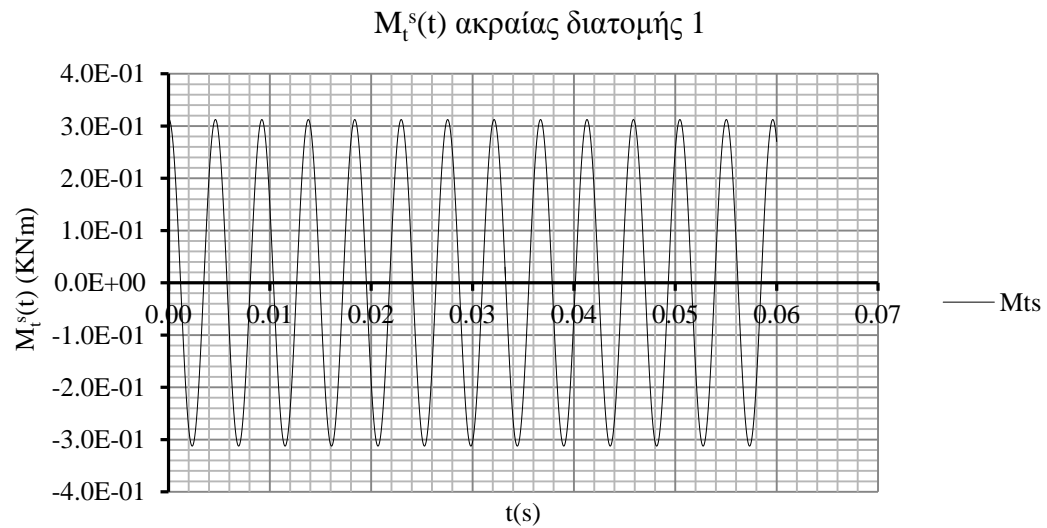
**Σχήμα 6.2.14** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



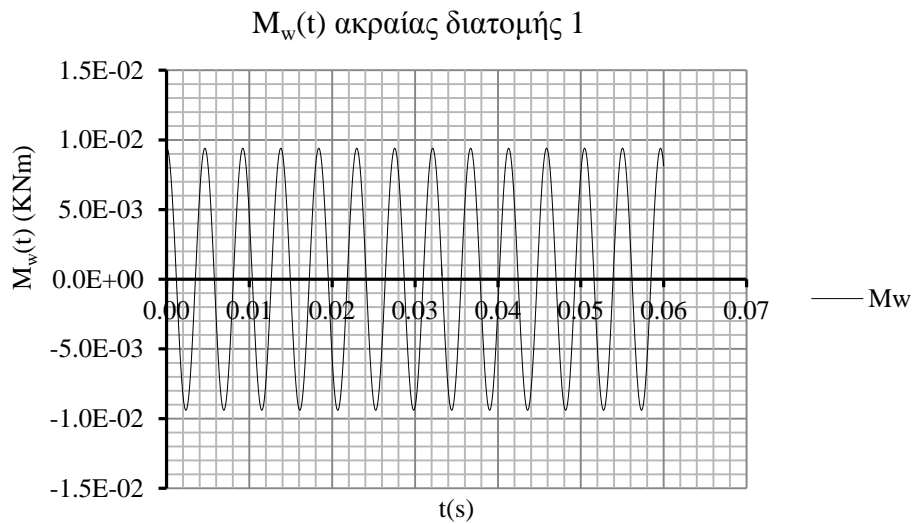
**Σχήμα 6.2.15** Ταχύτητα ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης συναρτήσει ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης στη μεσαία διατομή από dynSlin. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.16** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

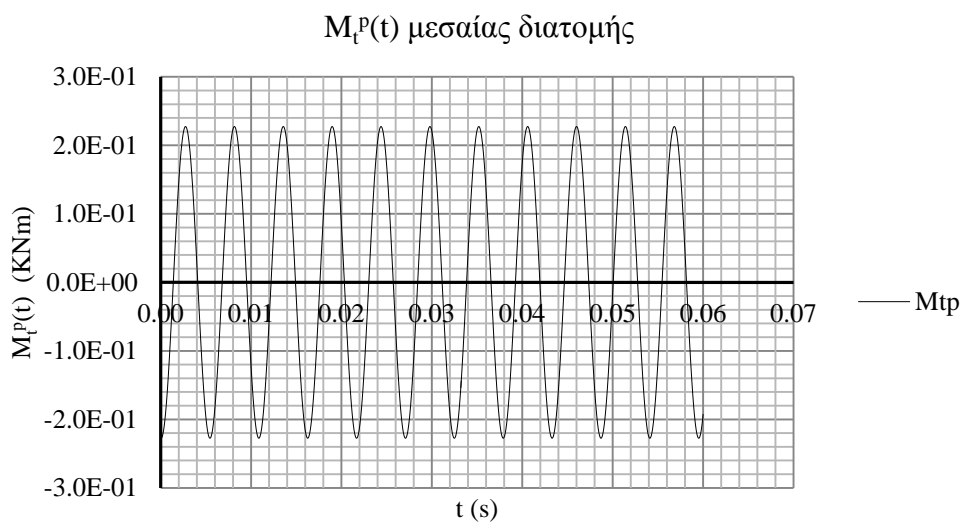


**Σχήμα 6.2.17** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

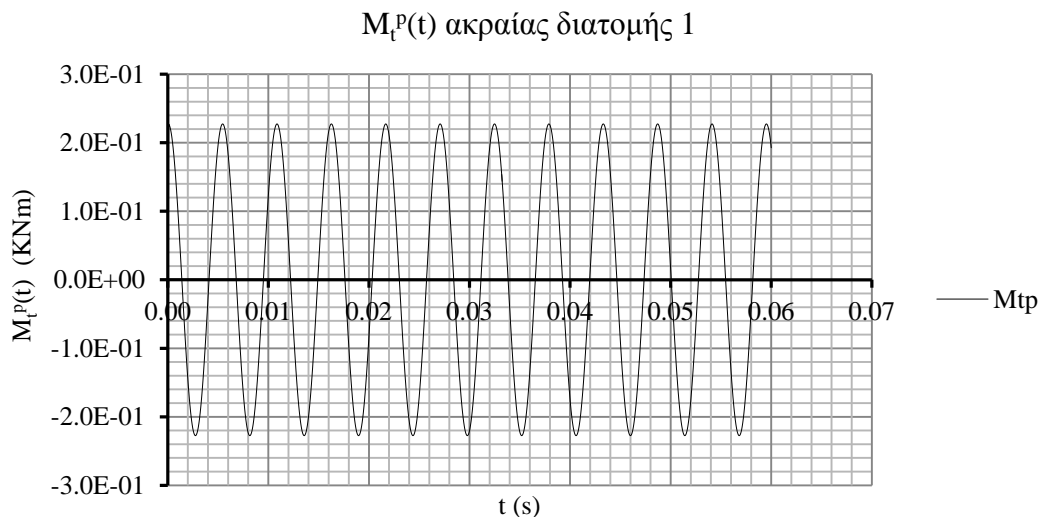


**Σχήμα 6.2.18** Δίγραφο στρέβλωσης ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

**B) dynUniflin**



**Σχήμα 6.2.19** Πρωτογενής στρεπτική ροπή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynUniflin*. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

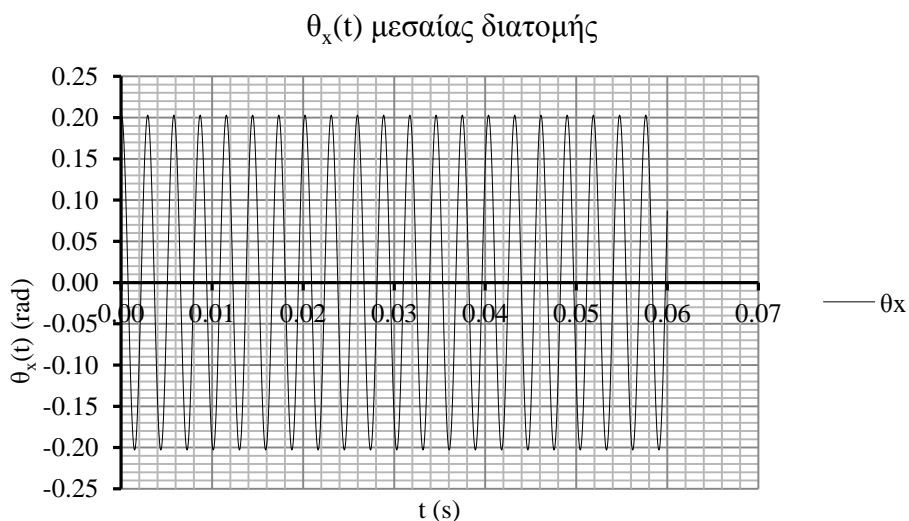


**Σχήμα 6.2.20** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin. Φόρτιση με 2<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

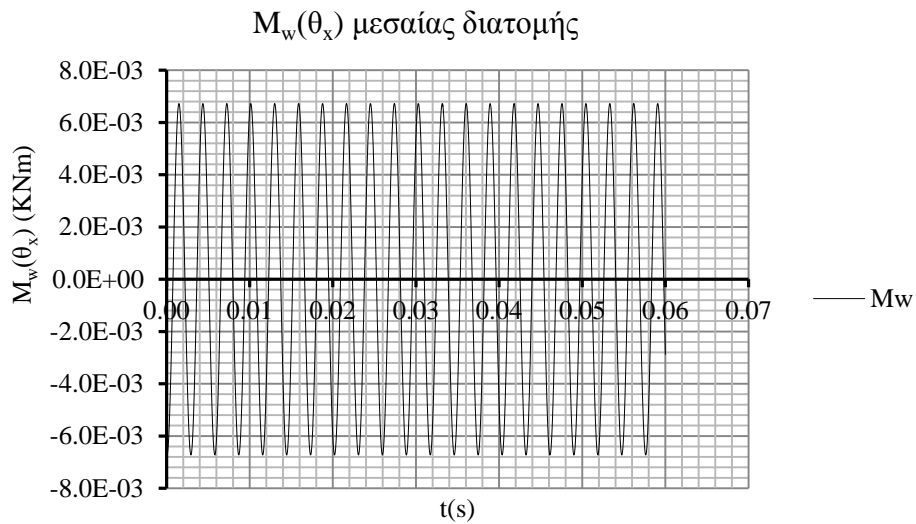
### 6.2.3 Φόρτιση με 3<sup>η</sup> ιδιομορφή

Λόγω του ότι έχουμε 1 αμφίπακτη δοκό η οποία παραμορφώνεται σύμφωνα με την 4<sup>η</sup> ιδιομορφή της τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $M_w$  θα είναι μηδενικά στη μεσαία διατομή. Όσον αφορά τις ακραίες διατομές της δοκού λόγω του αμφίπακτου στατικού συστήματος τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $n_x$  θα είναι επίσης μηδενικά.

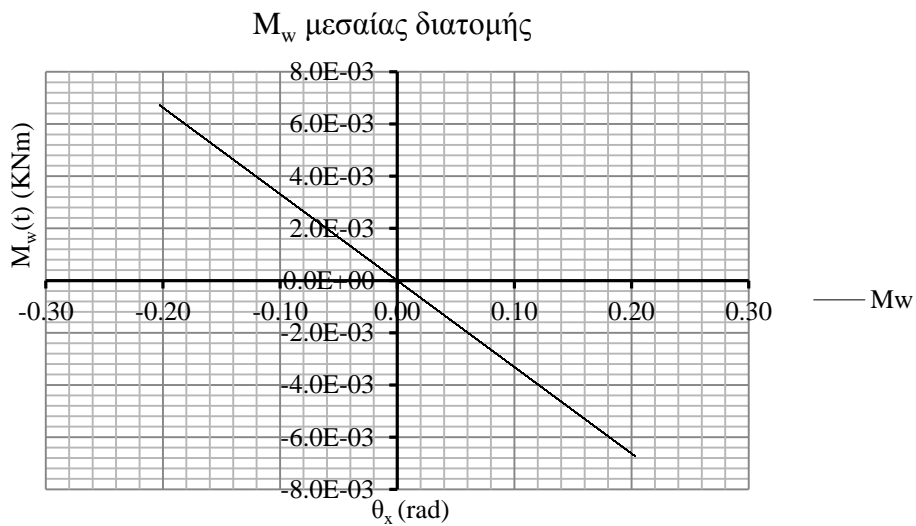
#### A) dynfreeSlin



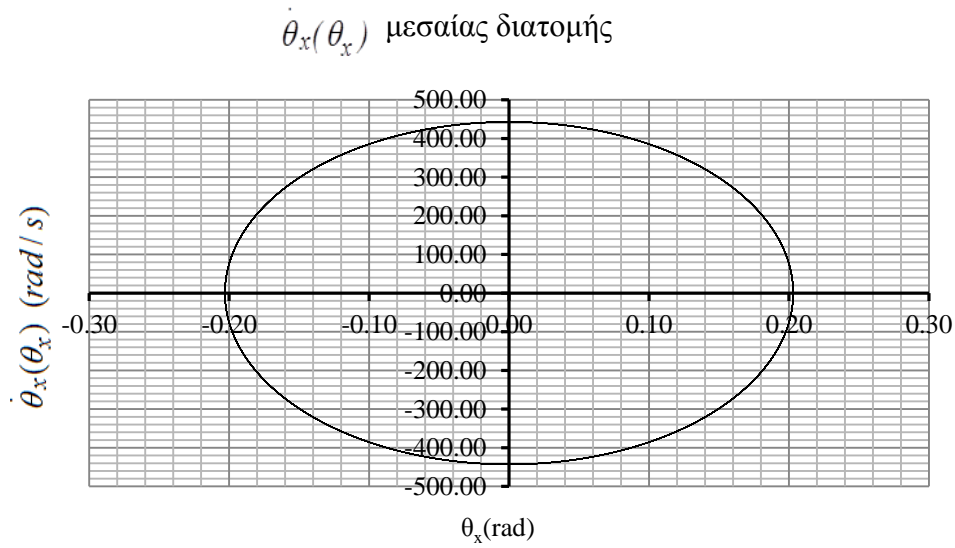
**Σχήμα 6.2.21** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



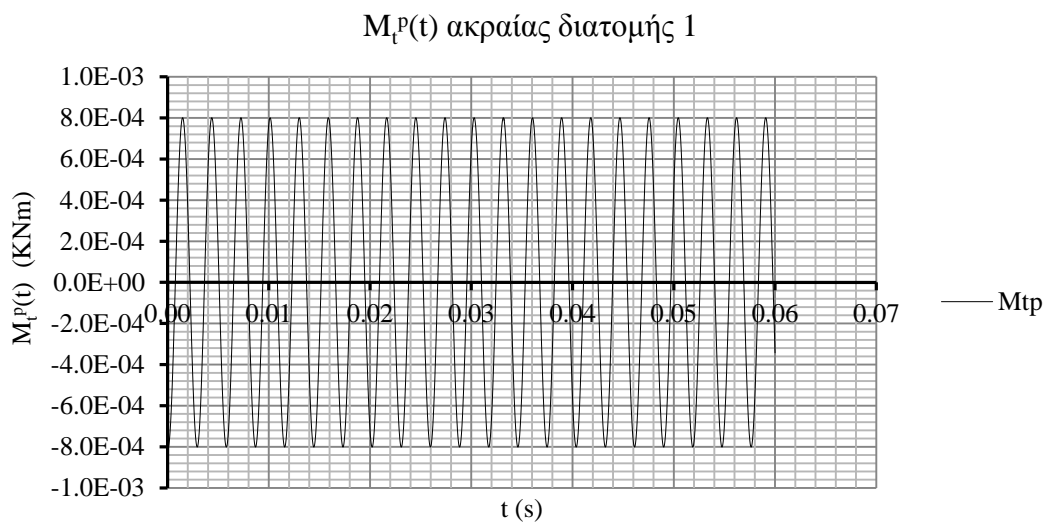
**Σχήμα 6.2.22** Δίγραφο στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ίδιομορφή.



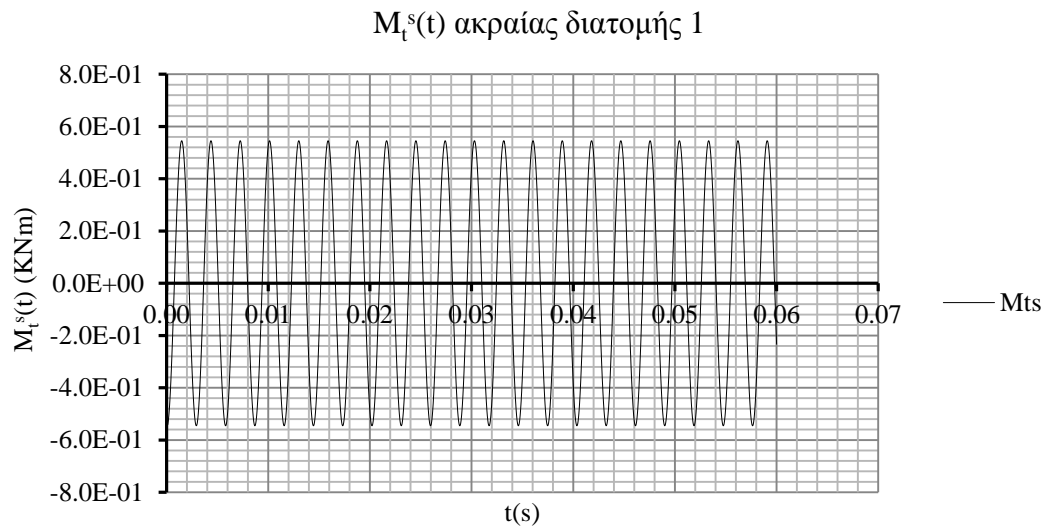
**Σχήμα 6.2.23** Δίγραφο στέβλωσης συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από *dynSlin*. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ίδιομορφή.



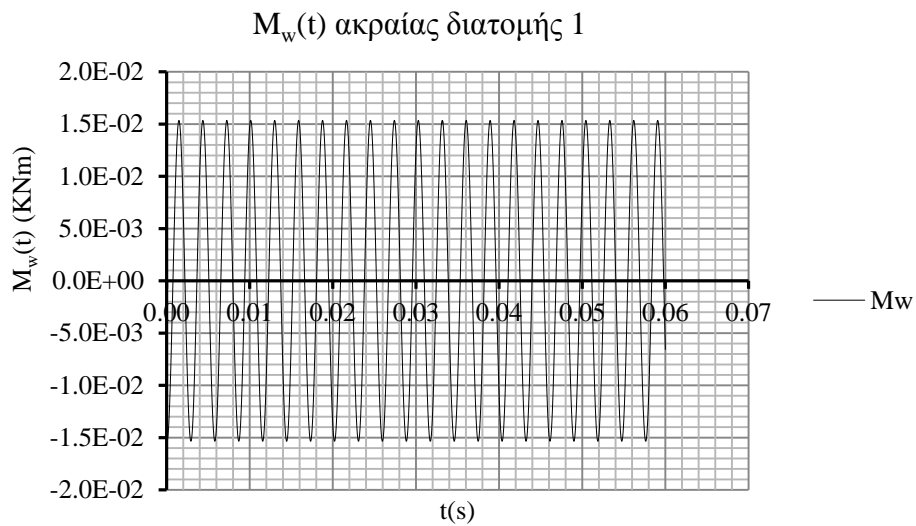
**Σχήμα 6.2.24** Ταχύτητα στροφής συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από dynSlin. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.25** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



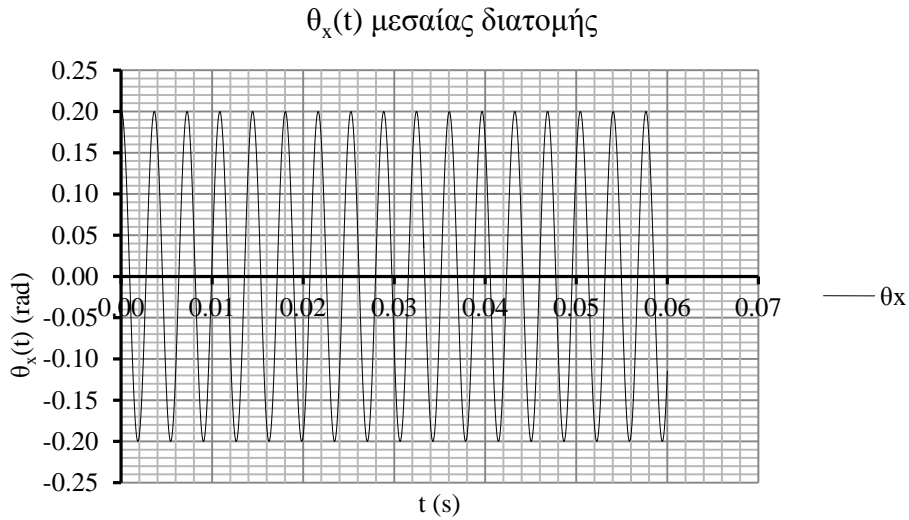
**Σχήμα 6.2.26** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



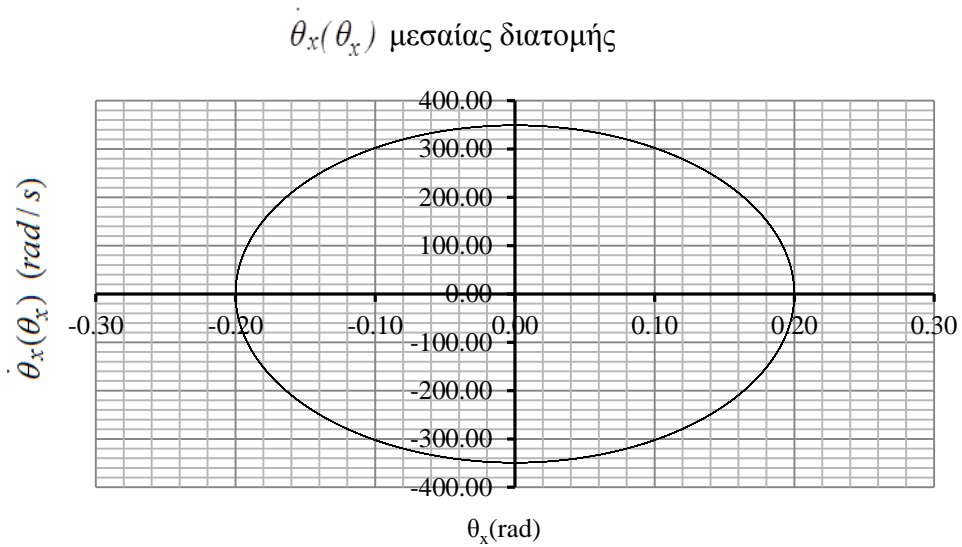
**Σχήμα 6.2.27** Δίρροπο στρέβλωσης ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

## B) dynUniflin

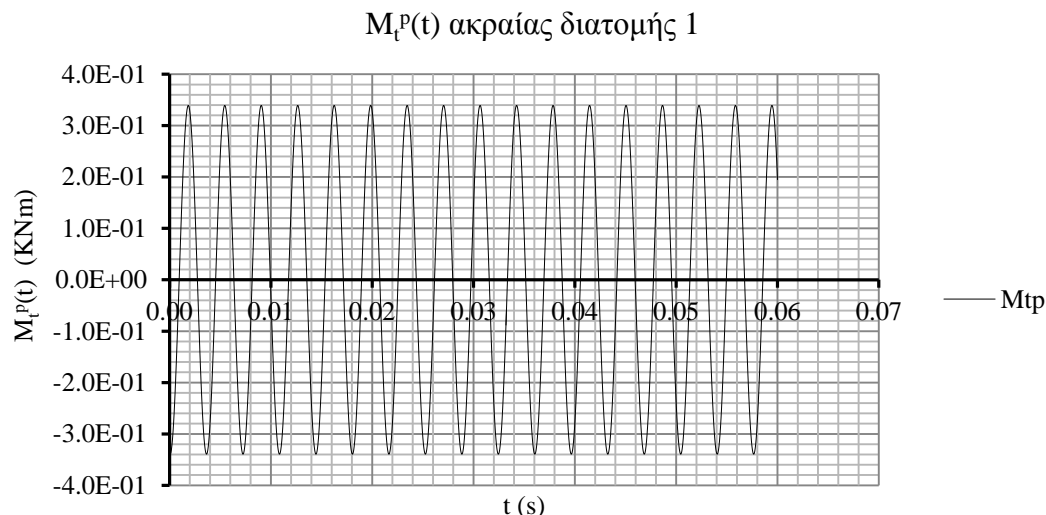




**Σχήμα 6.2.28** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynUniflin*. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.29** Ταχύτητα στροφής συναρτήσει στροφής στη μεσαία διατομή από *dynUniflin*. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

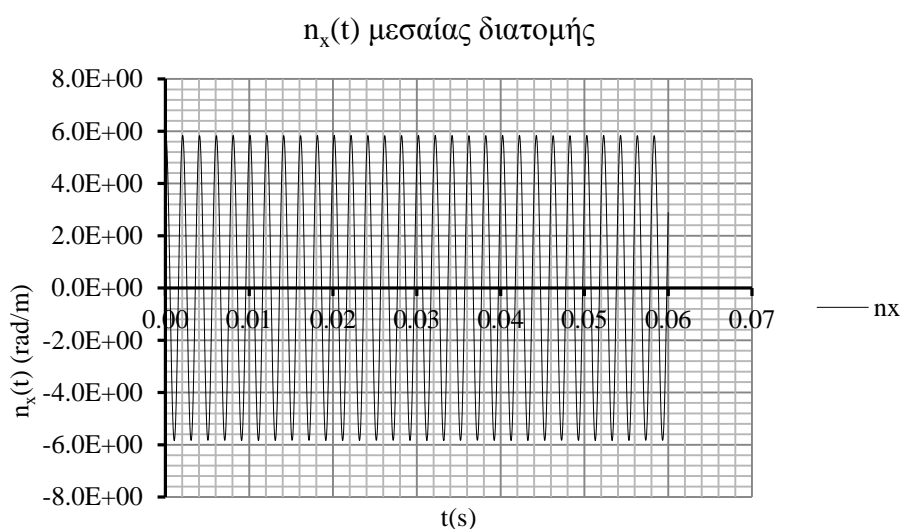


**Σχήμα 6.2.30** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynUniflin*. Φόρτιση με 3<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

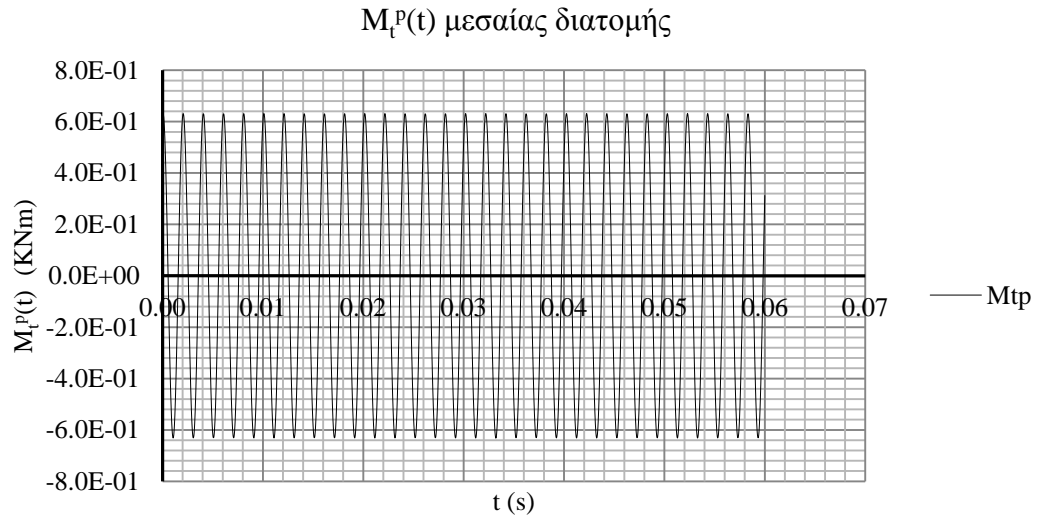
#### 6.2.4 Φόρτιση με 4<sup>η</sup> ιδιομορφή

Λόγω του ότι έχουμε 1 αμφίπακτη δοκό η οποία παραμορφώνεται σύμφωνα με την 4<sup>η</sup> ιδιομορφή της τα μεγέθη  $n_x$ ,  $M_t^P$  και  $M_t^S$  θα είναι μηδενικά στη μεσαία διατομή. Όσον αφορά τις ακραίες διατομές της δοκού λόγω του αμφίπακτου στατικού συστήματος τα μεγέθη  $\theta_x$  και  $n_x$  θα είναι επίσης μηδενικά.

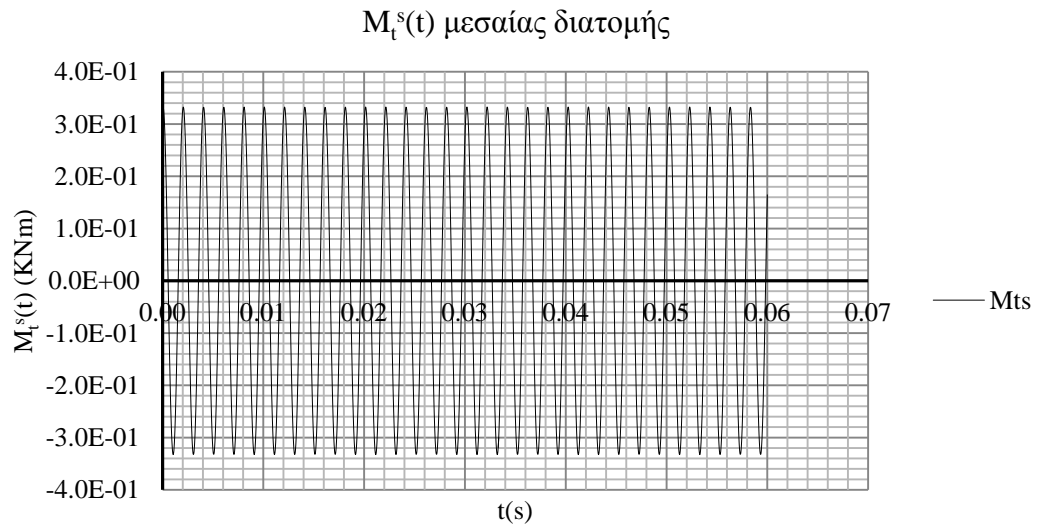
#### A) *dynfreeSlin*



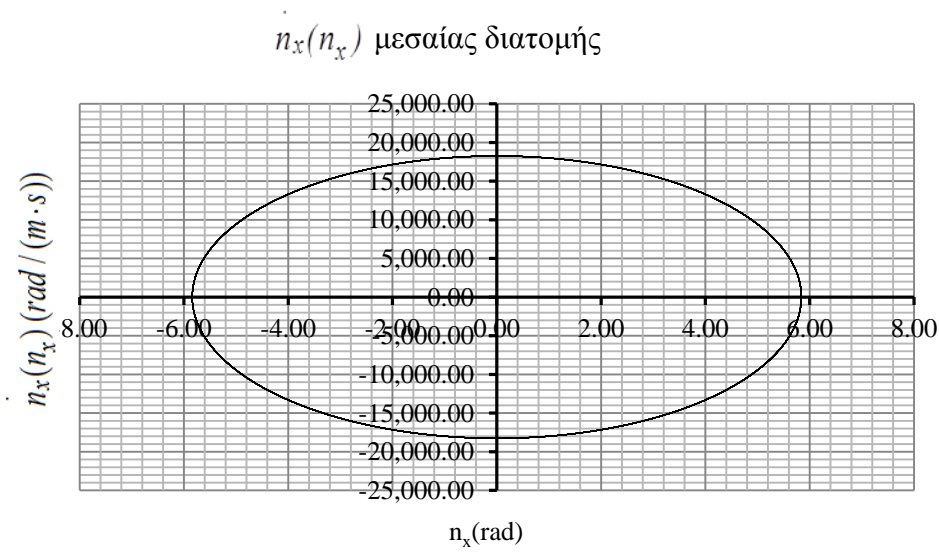
**Σχήμα 6.2.31** Ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



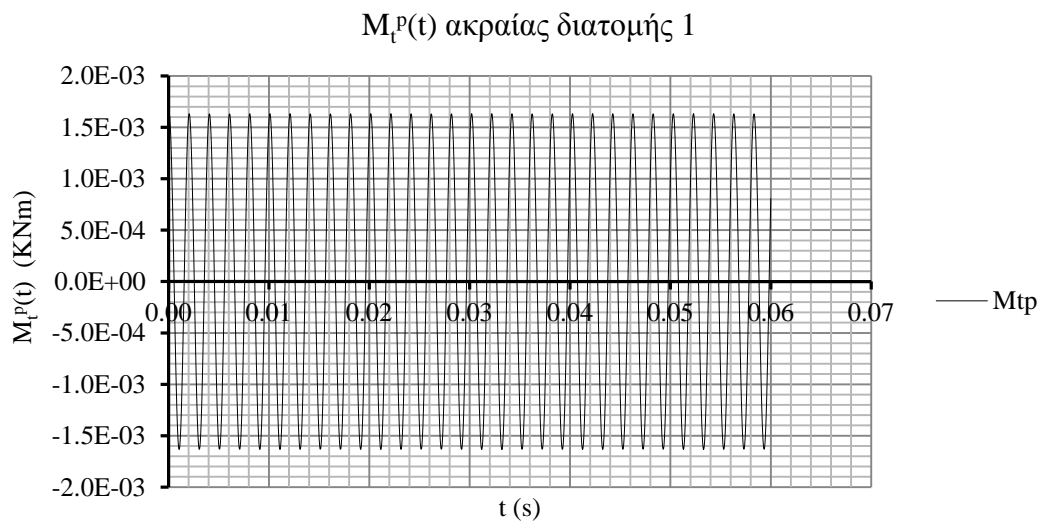
**Σχήμα 6.2.32** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



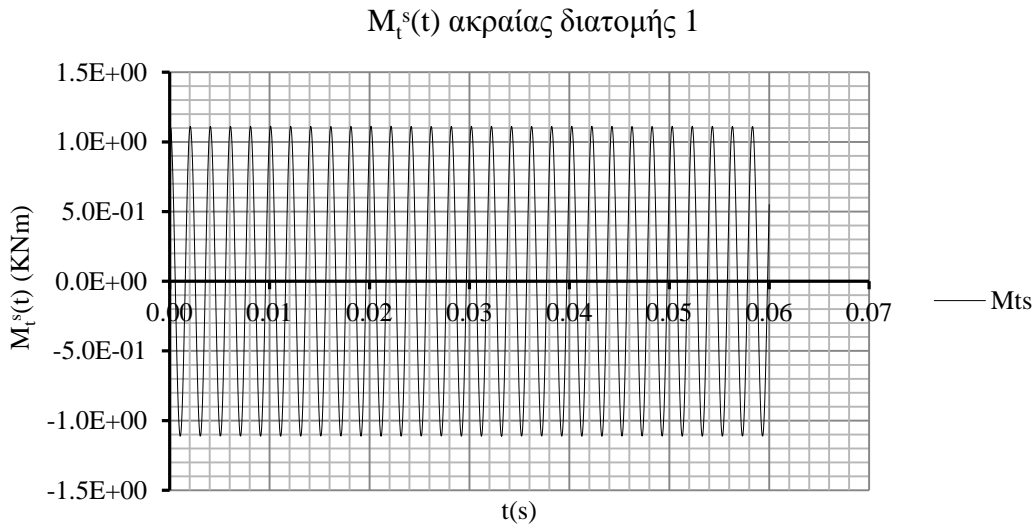
**Σχήμα 6.2.33** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



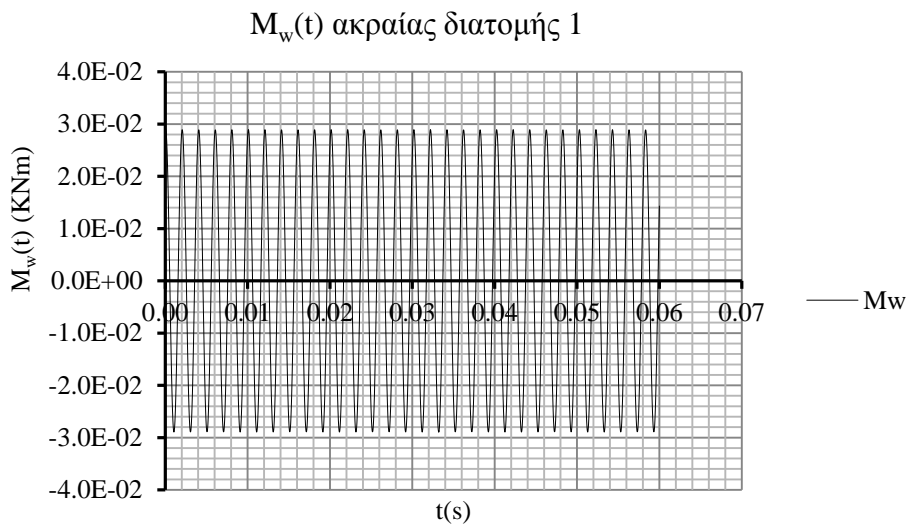
**Σχήμα 6.2.34** Ταχύτητα ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης συναρτήσει ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης στη μεσαία διατομή από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.35** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

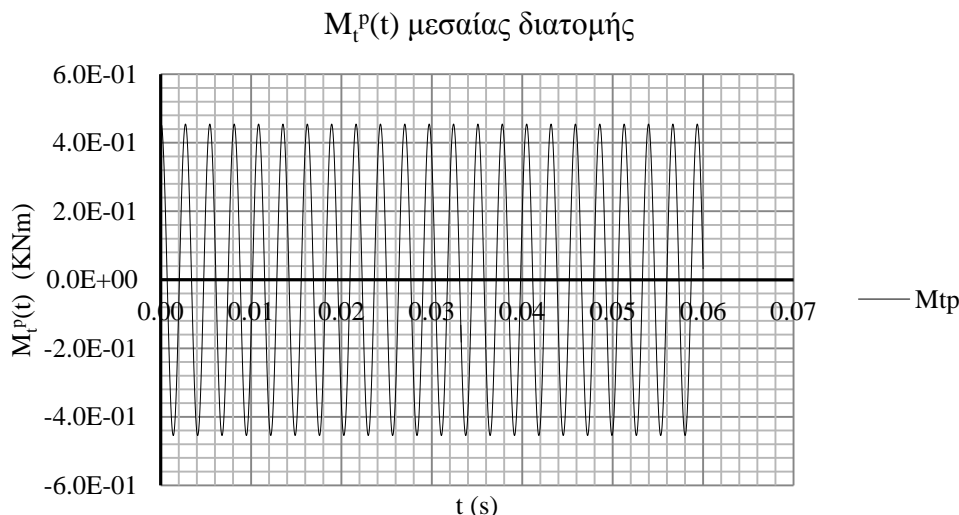


**Σχήμα 6.2.36** Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

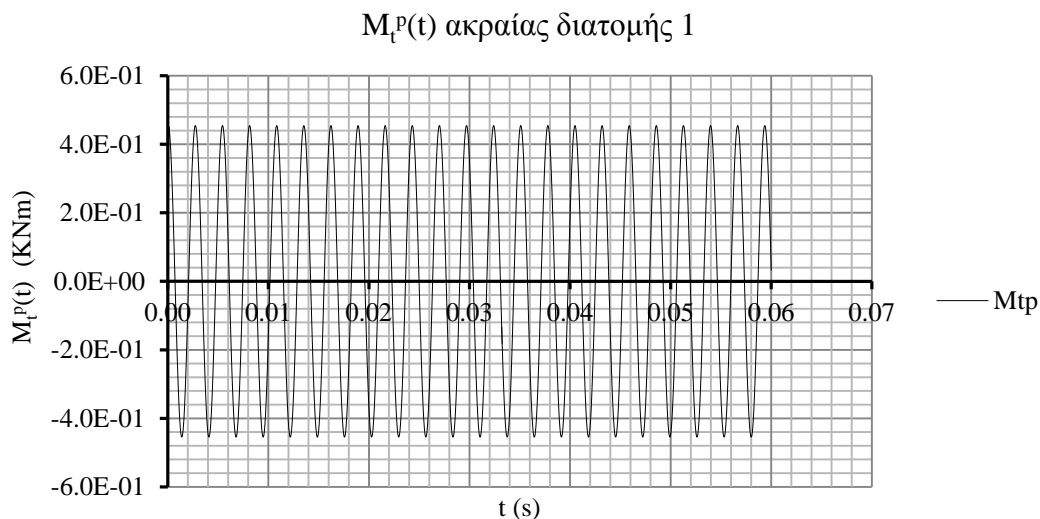


**Σχήμα 6.2.37** Δίρροπο στρέβλωσης ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

## B) dynUniflin



**Σχήμα 6.2.38** Πρωτογενής στρεπτική ροπή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.



**Σχήμα 6.2.39** Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin. Φόρτιση με 4<sup>η</sup> Ιδιομορφή.

## 6.2.5 Αποτελέσματα αναλύσεων FFT

### A) Ανάλυση με dynSlin

Στους παρακάτω πίνακες βλέπουμε ότι πράγματι όταν επιβάλλουμε 1 ιδιομορφή, η οποία έχει προκύψει από τη Θεωρία Ανομοιομόρφης Στρέψης με Επιρροή ΔΔΠ, ως αρχική συνθήκη στη δοκό αυτή η οποία στη συνέχεια εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με τη συχνότητα που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιομορφή. Στους πίνακες αυτούς οι συχνότητες του dynfreeSlin με τις οποίες γίνεται η σύγκριση παρουσιάζονται στον Κεφάλαιο 5.2.1 (Πίνακας 5.2.1). Ενώ οι % διαφορές υπολογίζονται βάσει του τύπου:

$$\text{Διαφορά από dynfreeSlin \%} = \frac{f_{FFT_i} - f_{dynfreeSlin}}{f_{dynfreeSlin}} \cdot 100 \quad (6.2.1)$$

όπου  $i = 1, 2$

**Πίνακας 6.2.1** Αποτελέσματα FFT αναλύσεων.

Διατομή	Μέγεθος	Πρόγραμμα ανάλυσης	Ιδιοσυχνότητες $\omega$ (rad/s)				Συχνότητες $f$ (Hz)			
			1	2	3	4	1	2	3	4
Μεσαία	$\theta_x$	FFT	659.08	-	2182.85	-	104.90	-	347.41	-
	$n_x$	FFT	-	1371.87	-	3127.79	-	218.34	-	497.80
	$M_t^P$	FFT	-	1371.87	-	3127.79	-	218.34	-	497.80
	$M_t^S$	FFT	-	1371.87	-	3127.79	-	218.34	-	497.80
	Mw	FFT	659.08	-	2182.85	-	104.90	-	347.41	-
Άκρο 1	$\theta_x$	FFT	-	-	-	-	-	-	-	-
	$n_x$	FFT	-	-	-	-	-	-	-	-
	$M_t^P$	FFT	659.08	1371.87	2182.85	3127.79	104.90	218.34	347.41	497.80
	$M_t^S$	FFT	659.08	1371.87	2182.85	3127.79	104.90	218.34	347.41	497.80
	Mw	FFT	659.08	1371.87	2182.85	3127.79	104.90	218.34	347.41	497.80

**Πίνακας 6.2.2** Σύγκριση FFT αναλύσεων με συχνότητες ιδιομοφών από dynfreeSlin.

Διατομή	Μέγεθος	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διαφορά από dynfreeSlin %			
			1	2	3	4
Μεσαία	$\theta_x$	FFT	0.004	-	0.03	-
	$n_x$	FFT	-	0.05	-	0.04
	$M_t^P$	FFT	-	0.05	-	0.04
	$M_t^S$	FFT	-	0.05	-	0.04
	Mw	FFT	0.004	-	0.03	-
Άκρο 1	$\theta_x$	FFT	-	-	-	-
	$n_x$	FFT	-	-	-	-
	$M_t^P$	FFT	0.004	0.05	0.03	0.04
	$M_t^S$	FFT	0.004	0.05	0.03	0.04
	Mw	FFT	0.004	0.05	0.03	0.04

## B) Ανάλυση με dynUniflin

Στους παρακάτω πίνακες βλέπουμε ότι πράγματι όταν επιβάλλουμε 1 ιδιομορφή, η οποία έχει προκύψει από τη Θεωρία Ανομοιόμορφης Στρέψης Χωρίς Επιρροή Ανομοιόμορφης Στρέβλωσης, ως αρχική συνθήκη στη δοκό αυτή στη συνέχεια εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με τη συχνότητα που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιομορφή.

Στα επόμενα οι συχνότητες του dynfreeUniflin με τις οποίες γίνεται η σύγκριση παρουσιάζονται στον Κεφάλαιο 5.2.1 (Πίνακας 5.2.1). Ενώ οι % διαφορές υπολογίζονται βάσει του τύπου:

$$\text{Διαφορά από dynfreeUniflin \%} = \frac{f_{FFT} - f_{dynfreeUniflin}}{f_{dynfreeUniflin}} \cdot 100 \quad (6.2.2)$$

**Πίνακας 6.2.3** Αποτελέσματα FFT αναλύσεων.

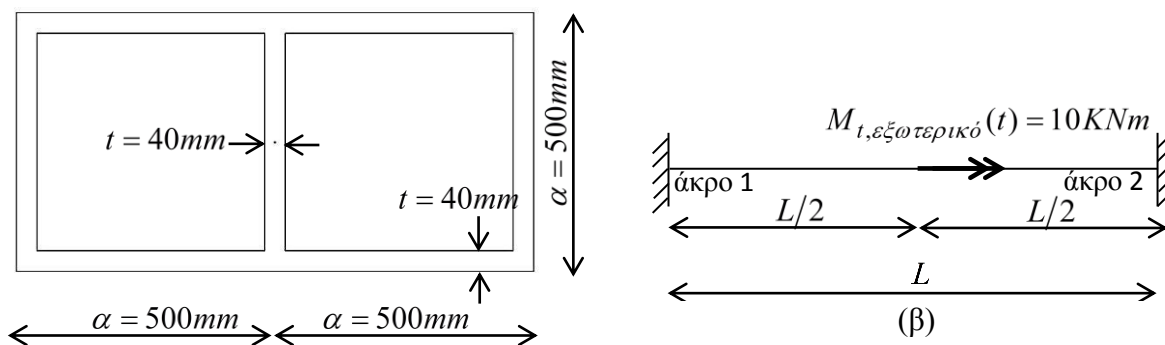
Διατομή	Μέγεθος	Πρόγραμμα ανάλυσης	Ιδιοσυχνότητες $\omega$ (rad/s)				Συχνότητες $f$ (Hz)			
			1	2	3	4	1	2	3	4
Μεσαία	$\theta_x$	FFT	580.87	-	1746.20	-	92.45	-	277.92	-
	$M_t^P$	FFT	-	1162.66	-	2331.70	-	185.04	-	371.10
Άκρο 1	$\theta_x$	FFT	-	-	-	-	-	-	-	-
	$M_t^P$	FFT	580.87	1162.66	1746.20	2331.70	92.45	185.04	277.92	371.10

**Πίνακας 6.2.4** Σύγκριση FFT αναλύσεων με συχνότητες ιδιομορφών από dynfreeUniflin.

Διατομή	Μέγεθος	Πρόγραμμα ανάλυσης	Διαφορά από dynfreeUniflin			
			1	2	3	4
Μεσαία	$\theta_x$	FFT	0.03	-	0.05	-
	$M_t^P$	FFT	-	0.04	-	0.04
Άκρο 1	$\theta_x$	FFT	-	-	-	-
	$M_t^P$	FFT	0.03	0.04	0.05	0.04

### 6.3 2<sup>ο</sup> Αριθμητικό παράδειγμα

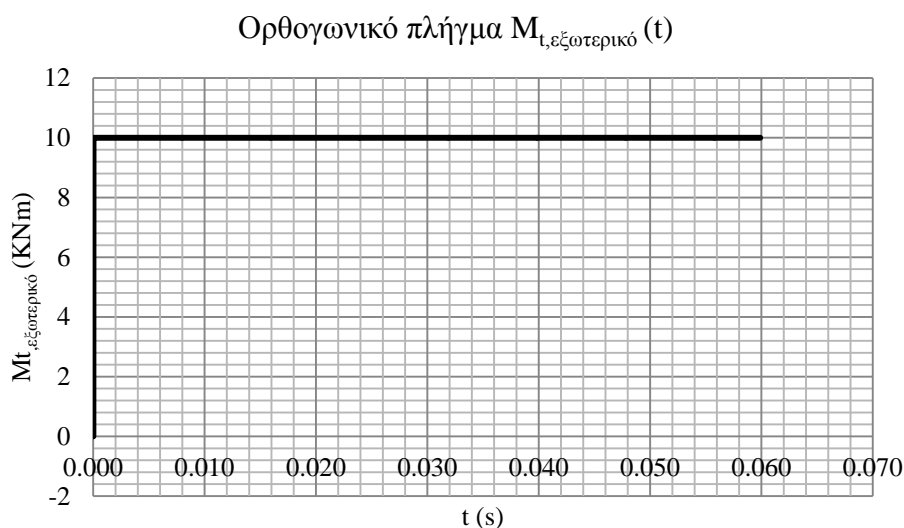
Στο 2<sup>ο</sup> αριθμητικό παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε δοκός διατομής δικύπελου κιβωτίου (βλέπε Σχήμα 6.3.1α) του Κεφαλαίου 5.10.1. Η δοκός έχει μήκος  $L = 5m$  και είναι αμφίπακτη (βλέπε Σχήμα 6.3.1β). Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  εφαρμόζεται ορθογωνικό πλήγμα συγκεντρωμένης στρεπτικής ροπής  $M_t(t) = 10KNm$  στο μέσο της ράβδου (βλέπε Σχήμα 6.3.2).



(α)

**Σχήμα 6.3.1** Διατομή δικύπελου κιβωτίου (α), στατικό σύστημα και φόρτιση (β).





**Σχήμα 6.3.2** Χρονική εξέλιξη φόρτισης μεσαίας διατομής

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι χρονικές εξελίξεις των κινηματικών και εντατικών μεγεθών καθώς και των τάσεων όπως προέκυψαν από τα προγράμματα θεωρίας δοκού και το Nastran (με χρήση κελυφωτών στοιχείων) για ανάλυση στο χρονικό διάστημα 0-0.01s. Ειδικότερα για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε η διατομή που βρίσκεται στο μέσο της δοκού και η διατομή του άκρου 1 (που είναι στη θέση  $x = 0$  της δοκού).

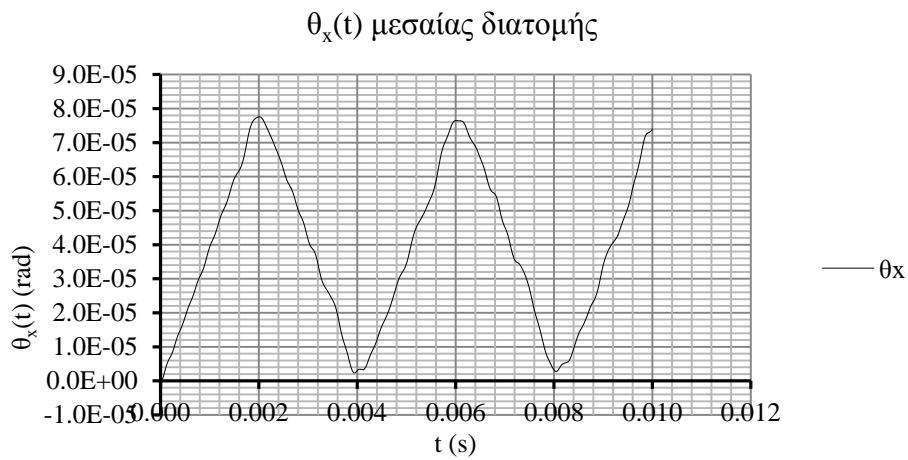
Για τη μεσαία διατομή υπολογίστηκαν τα εντατικά, κινηματικά μεγέθη από τα προγράμματα θεωρίας δοκού και οι στροφές (όπου η στροφή της διατομής θεωρήθηκε ότι ταυτίζεται με τη στροφή του κυρίου κόμβου του διαφράγματος της διατομής) από το Nastran. Συνεπώς η σύγκριση που θα γίνει για τη μεσαία διατομή ανάμεσα στα προγράμματα της θεωρίας δοκού και το Nastran αφορά μόνο την χρονική εξέλιξη της στροφής  $\theta_x$ . Αυτό έγινε γιατί δεν θεωρήθηκε αξιόπιστο να ληφθούν από το Nastran αποτελέσματα που αφορούν τασικά μεγέθη καθώς το φορτίο επιβάλλεται σε αυτή τη διατομή τοποθετώντας ένα διάφραγμα και ασκώντας το στον κύριο κόμβο του διαφράγματος (για την ακραία διατομή δεν υπάρχει το πρόβλημα αυτό και παίρνουμε τασικά μεγέθη από το Nastran καθώς είναι αρκετά μακριά από τη θέση άσκησης του φορτίου και θεωρούμε ότι δεν επηρεάζεται από τον τρόπο επιβολής του).

Όσον αφορά την ακραία διατομή υπολογίστηκαν τα εντατικά μεγέθη και οι τάσεις Von – Mises (τα κινηματικά μεγέθη είναι μηδενικά λόγω του αμφίπακτου στατικού συστήματος) από τα προγράμματα θεωρίας δοκού και οι τάσεις Von Mises (στα Gauss Points των στοιχείων) από το Nastran.

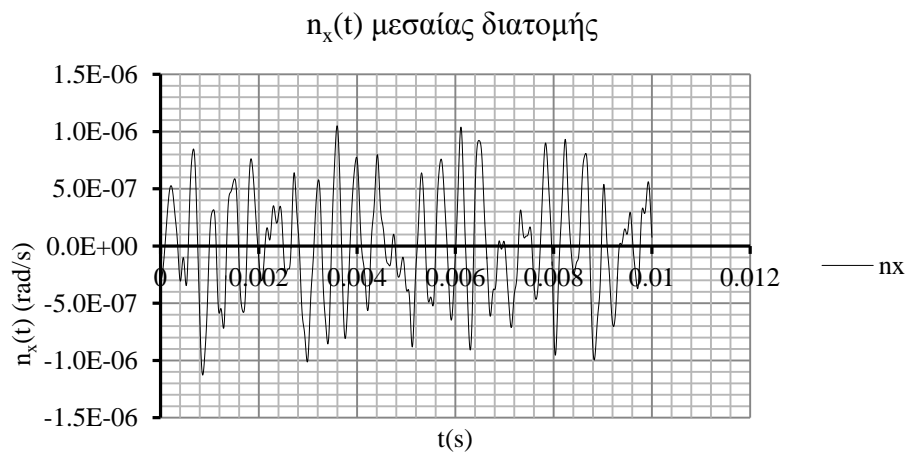
### 6.3.1 Κινηματικά και εντατικά μεγέθη και τάσεις στο άκρο 1 από dynSlin

Στα ακόλουθα παρουσιάζονται τα κινηματικά και εντατικά μεγέθη της μεσαίας και της ακραίας διατομής (βλέπε Σχήμα 6.3.3-Σχήμα 6.3.5) από το πρόγραμμα dynSlin καθώς και η μέγιστη τάση που εμφανίζεται στη διατομή του άκρου 1 (Πίνακας 6.3.1) σε όλη τη διάρκεια της καταπόνησης από το πρόγραμμα torselindstressesAm2. Σημειώνεται ότι τα  $\theta_x$  και  $n_x$  είναι μηδενικά για την ακραία διατομή καθώς είναι πακτωμένη. Επίσης για τη μεσαία διατομή δεν ήταν δυνατό να υπολογιστούν τα  $M_t^P, M_t^S$  καθώς εκεί ασκείται το συγκεντρωμένο φορτίο και το διάγραμμα στρεπτικών ροπών παρουσιάζει άλμα. Συνεπώς οι

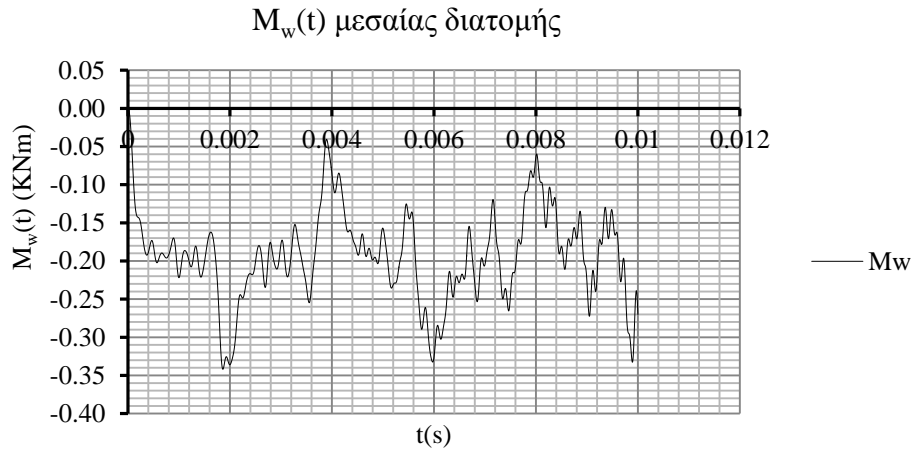
παραπάνω ποσότητες είναι δυνατόν να υπολογιστούν στις διατομές  $L/2^+$  και  $L/2^-$  και όχι ακριβώς πάνω στη διατομή  $L/2$ .



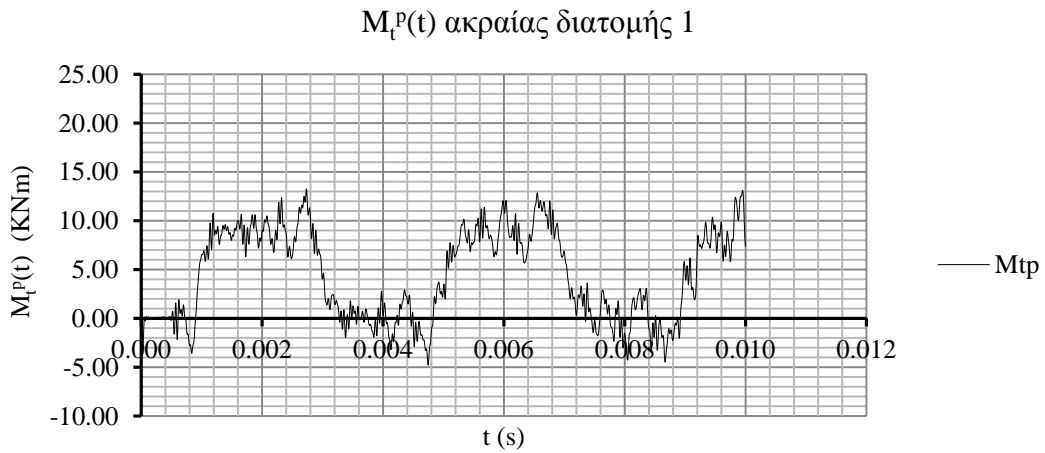
**Σχήμα 6.3.3** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*.



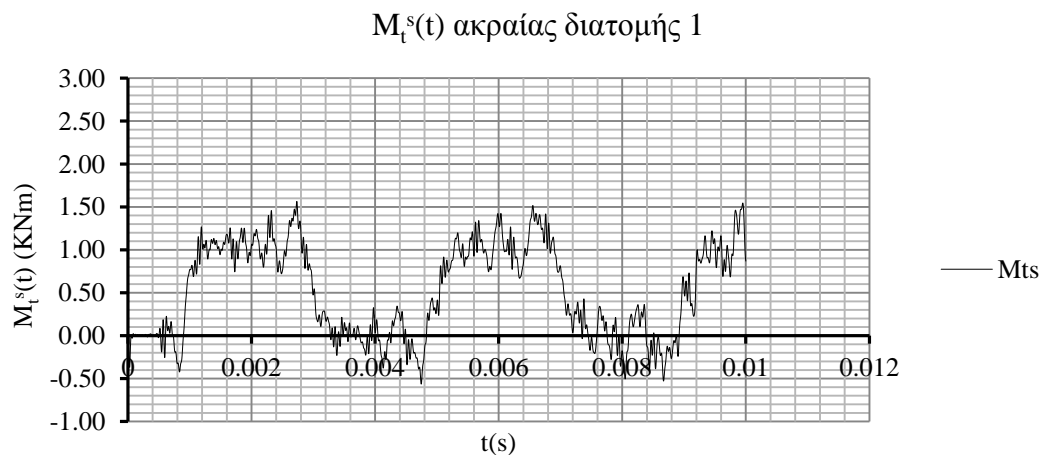
**Σχήμα 6.3.4** Ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *dynSlin*.



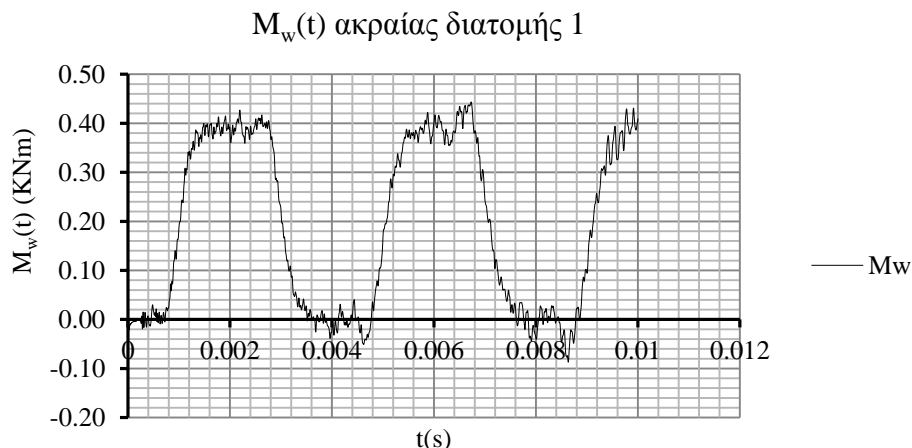
Σχήμα 6.3.5 Δίρροπο στρέβλωσης μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin.



Σχήμα 6.3.6 Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin.



Σχήμα 6.3.7 Δευτερογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin.



**Σχήμα 6.3.8** Δίρροπο στρέβλωσης ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynSlin.

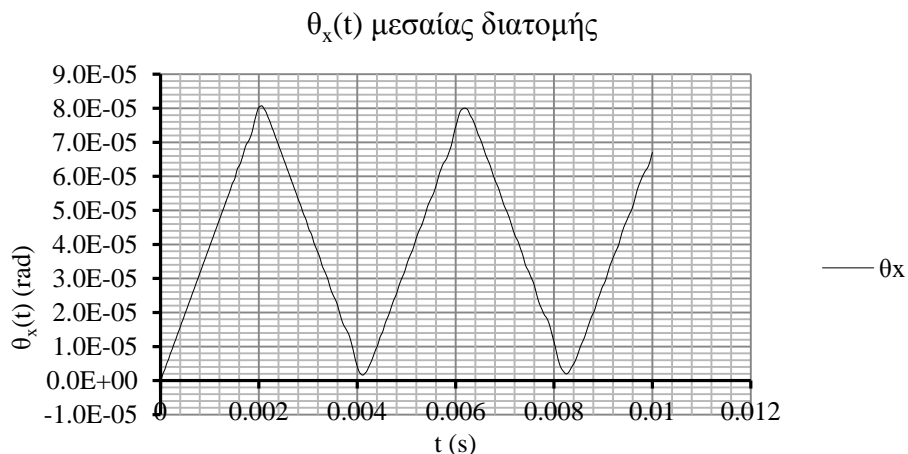
**Πίνακας 6.3.1** Μέγιστη τάση Von –Mises ακραίας διατομής 1 από dynSlin.

Διατομή άκρου 1				
Χαρ/κά Ανάλυσης	Τάση Von - Mises (Kpa)	Θέση		t (s)
		Y (m)	Z(m)	
dynSlin με 5000 Δt στο διάστημα 0-0.01s	1294.36	0.46	0.20625	0.002734

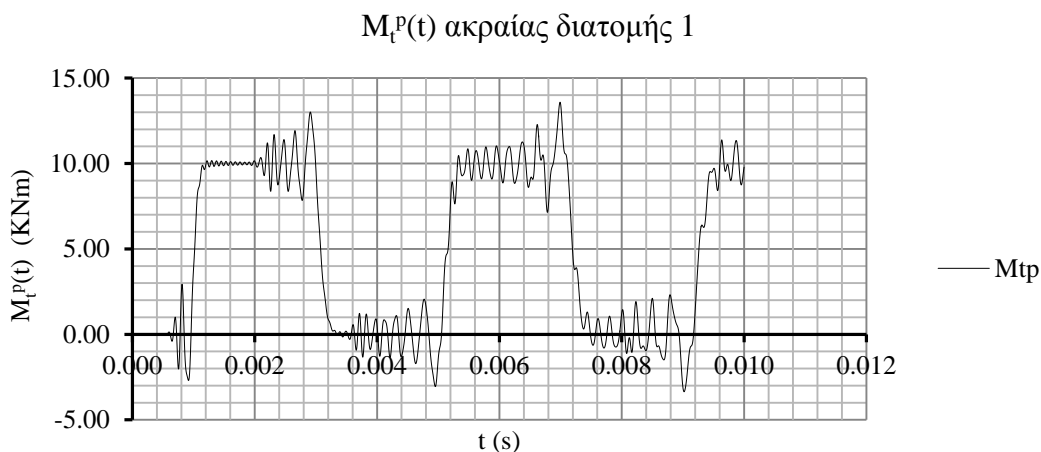
Η μέγιστη τάση του τελευταίου πίνακα προέκυψε με την ακόλουθη διαδικασία. Από τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών του άκρου 1 (βλέπε Σχήμα 6.3.6-Σχήμα 6.3.8) επιλέξαμε 3 συνδυασμούς μεγεθών (δηλαδή τα μεγέθη που δρούν ταυτόχρονα σε 3 διαφορετικές χρονικές στιγμές)  $M_t^P$ ,  $M_t^S$  και  $M_w$ . Ο 1<sup>ος</sup> ήταν εκείνος που αντιστοιχούσε στο μέγιστο  $M_t^P$ , δεύτερος στο μέγιστο  $M_t^S$  και ο 3<sup>ος</sup> στο μέγιστο  $M_w$ . Οι κρίσιμοι (που δεν ήταν ξεκάθαρο ποιος δίνει τη μέγιστη τάση) συνδυασμοί από αυτούς εισήχθησαν στο torselindstressAm2 και από εκεί πήραμε τη μέγιστη τάση.

### 6.3.2 Κινηματικά και εντατικά μεγέθη από dynUniflin

Στα ακόλουθα παρουσιάζονται τα κινηματικά και εντατικά μεγέθη της μεσαίας και της ακραίας διατομής (βλέπε Σχήμα 6.3.9-Σχήμα 6.3.10) από το πρόγραμμα dynSlin καθώς και η μέγιστη τάση που εμφανίζεται στη διατομή του άκρου 1 (Πίνακας 6.3.2) σε όλη τη διάρκεια της καταπόνησης από το πρόγραμμα torselindstressAm2. Σημειώνεται ότι το  $\theta_x$  είναι μηδέν για την ακραία διατομή καθώς είναι πακτωμένη.



Σχήμα 6.3.9 Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin.



Σχήμα 6.3.10 Πρωτογενής στρεπτική ροπή ακραίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από dynUniflin.

Πίνακας 6.3.2 Μέγιστη τάση Von –Mises ακραίας διατομής 1 από dynUniflin.

Διατομή άκρου 1				
Χαρ/κά Ανάλυσης	Τάση Von - Mises (Kpa)	Θέση		t (s)
		Y (m)	Z(m)	
dynUniflin με 5000 Δt στο διάστημα 0-0.01s	1022.18	0.46	-0.20625	0.006992

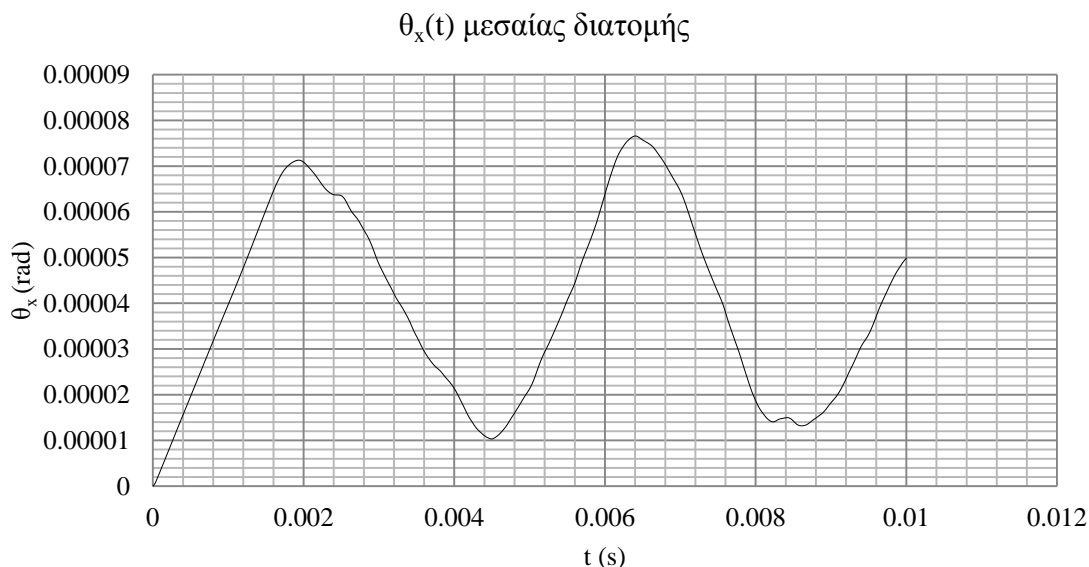
Η μέγιστη τάση του τελευταίου πίνακα προέκυψε με την ακόλουθη διαδικασία. Από τα διάγραμμα  $M_t^P$  του άκρου 1 (βλέπε Σχήμα 6.3.10) επιλέξαμε τη μέγιστη πρωτογενή στρεπτική ροπή. Η ροπή αυτή εισήχθηκε στο torselindstressesAm2 (με μηδενικά τα  $M_t^S, M_w$ ) και από εκεί πήραμε τη μέγιστη τάση.

### 6.3.3 $\theta_x$ και $\sigma_{Von-Mises}$ από Nastran

Στα ακόλουθα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που πραγματοποιήθηκαν με το Nastran για το ίδιο μοντέλο κελυφωτών στοιχείων χωρίς και με διαφράγματα.

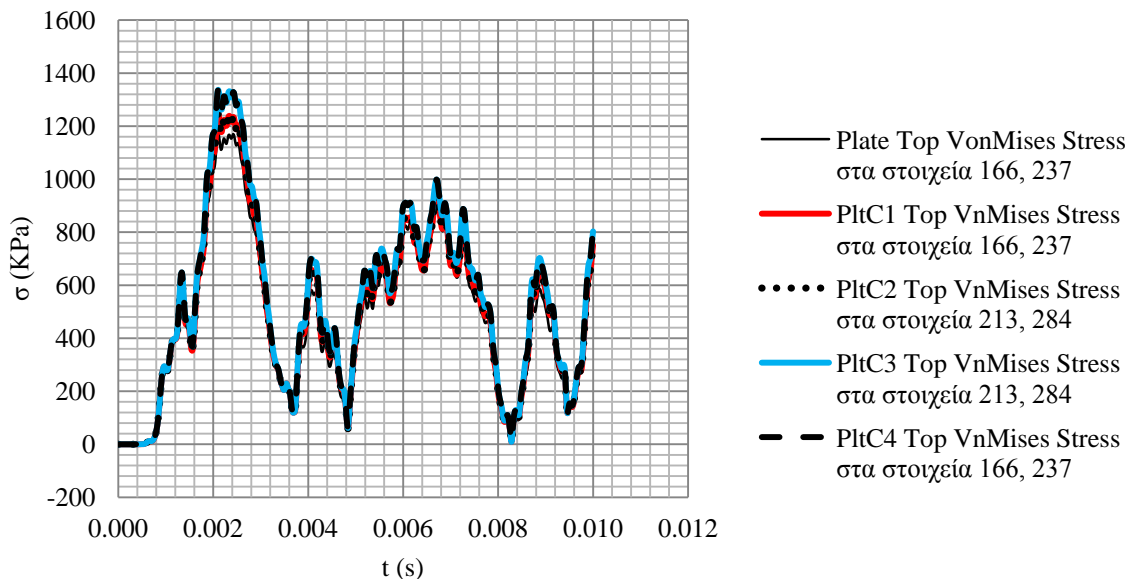
Ειδικότερα παρουσιάζεται η στροφή της μεσαίας διατομής (βλέπε Σχήμα 6.3.11, Σχήμα 6.3.14) και οι τάσεις Von-Mises (βλέπε Σχήμα 6.3.12, Σχήμα 6.3.15, Σχήμα 6.3.13, Σχήμα 6.3.16).

### A) Χωρίς διαφράγματα



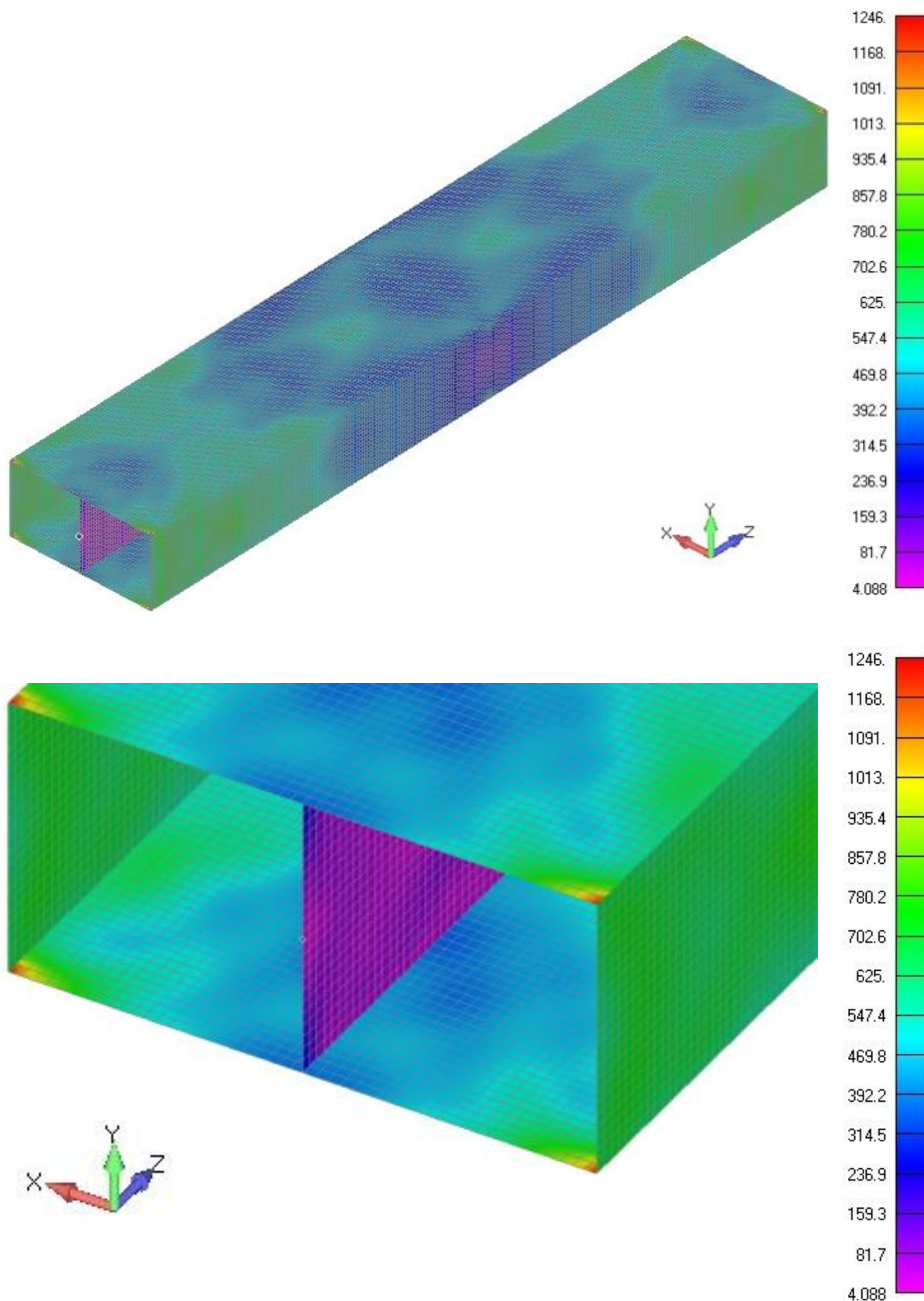
**Σχήμα 6.3.11** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από Nاستan. Προσομοίωμα με 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία χωρίς διαφράγματα.

Χρονική εξέλιξη τάσεων VonMises στο στοιχείο που παρουσιάζεται η μέγιστη τάση κάθε μιας



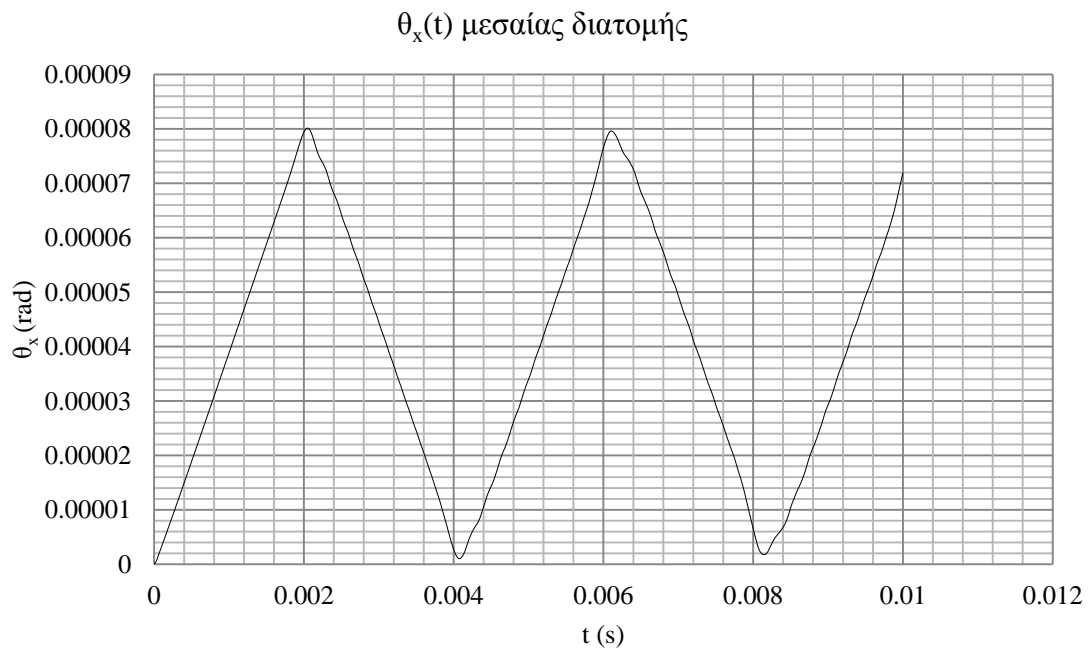
**Σχήμα 6.3.12** Τάσεις Von –Mises συναρτήσει του χρόνου από Nastran για το στοιχείο στο οποίο παρουσιάζεται η μέγιστη τάση. Προσομοίωμα με 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία χωρίς διαφράγματα.

Στο Σχήμα 6.3.12 τα C1, C2, C3, C4 είναι τα Gauss points του κελυφωτού στοιχείου.



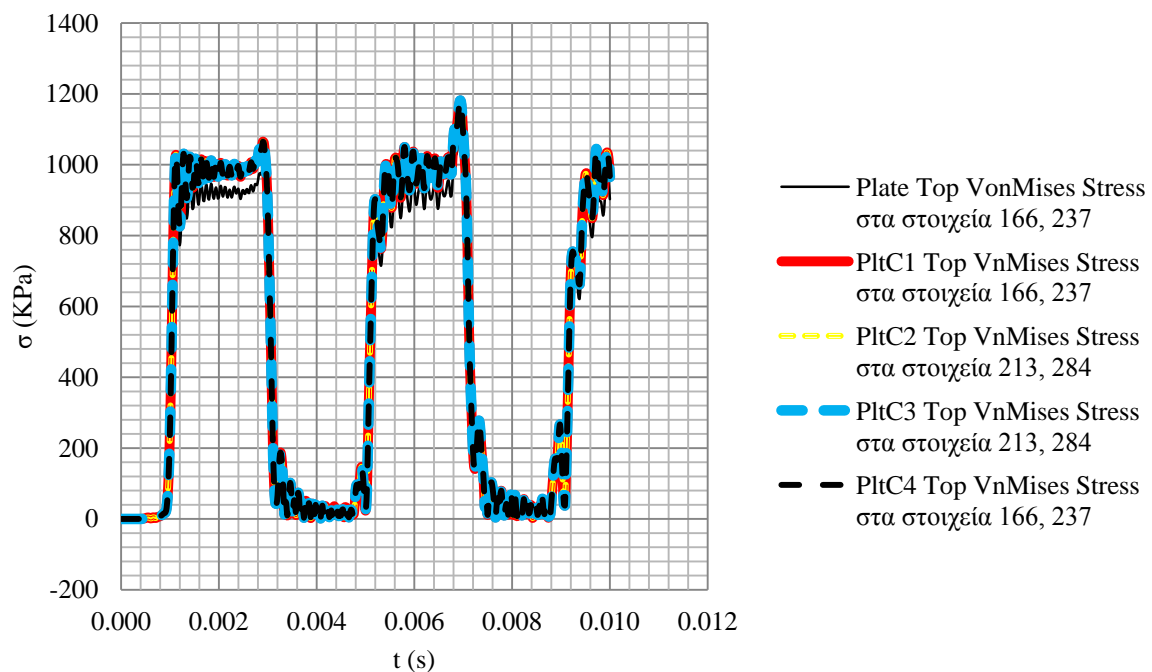
**Σχήμα 6.3.13** Τάσεις Von-Mises στο προσομοίωμα χωρίς διαφράγματα τη χρονική στιγμή  $t=0.0021s$  όπου παρατηρείται η μέγιστη Von-Mises τάση.

## Β) Με διαφράγματα



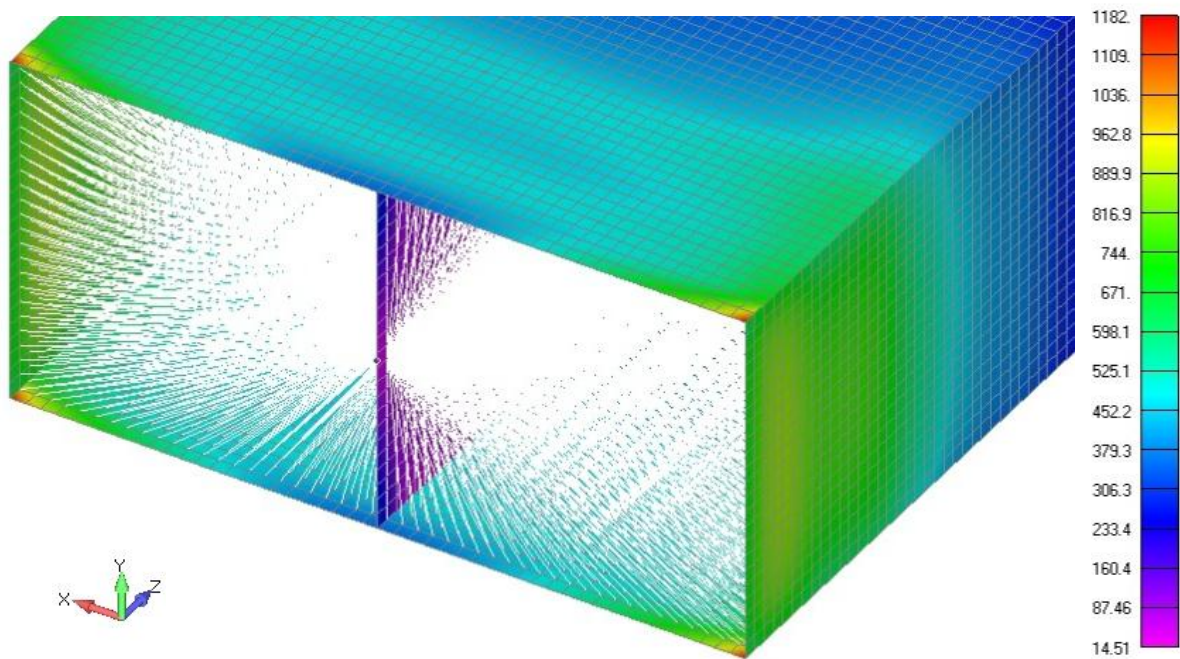
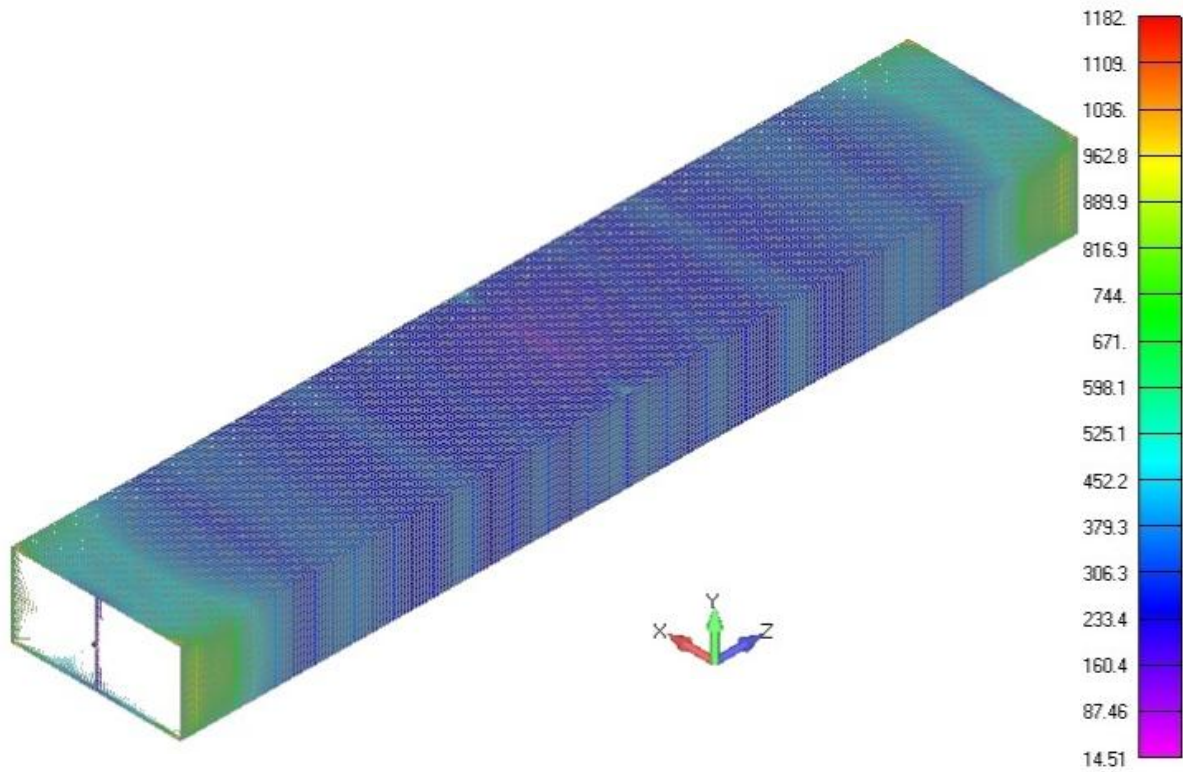
**Σχήμα 6.3.14** Στροφή μεσαίας διατομής συναρτήσει του χρόνου από *Nastan*. Προσομοίωμα με 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές.

Χρονική εξέλιξη τάσεων VonMises στο στοιχείο που παρουσιάζεται η μέγιστη τάση κάθε μιας



**Σχήμα 6.3.15** Τάσεις Von –Mises συναρτήσει του χρόνου από *Nastran* για το στοιχείο στο οποίο παρουσιάζεται η μέγιστη τάση. Προσομοίωμα με 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία με διαφράγματα σε όλες (=249) τις διατομές.

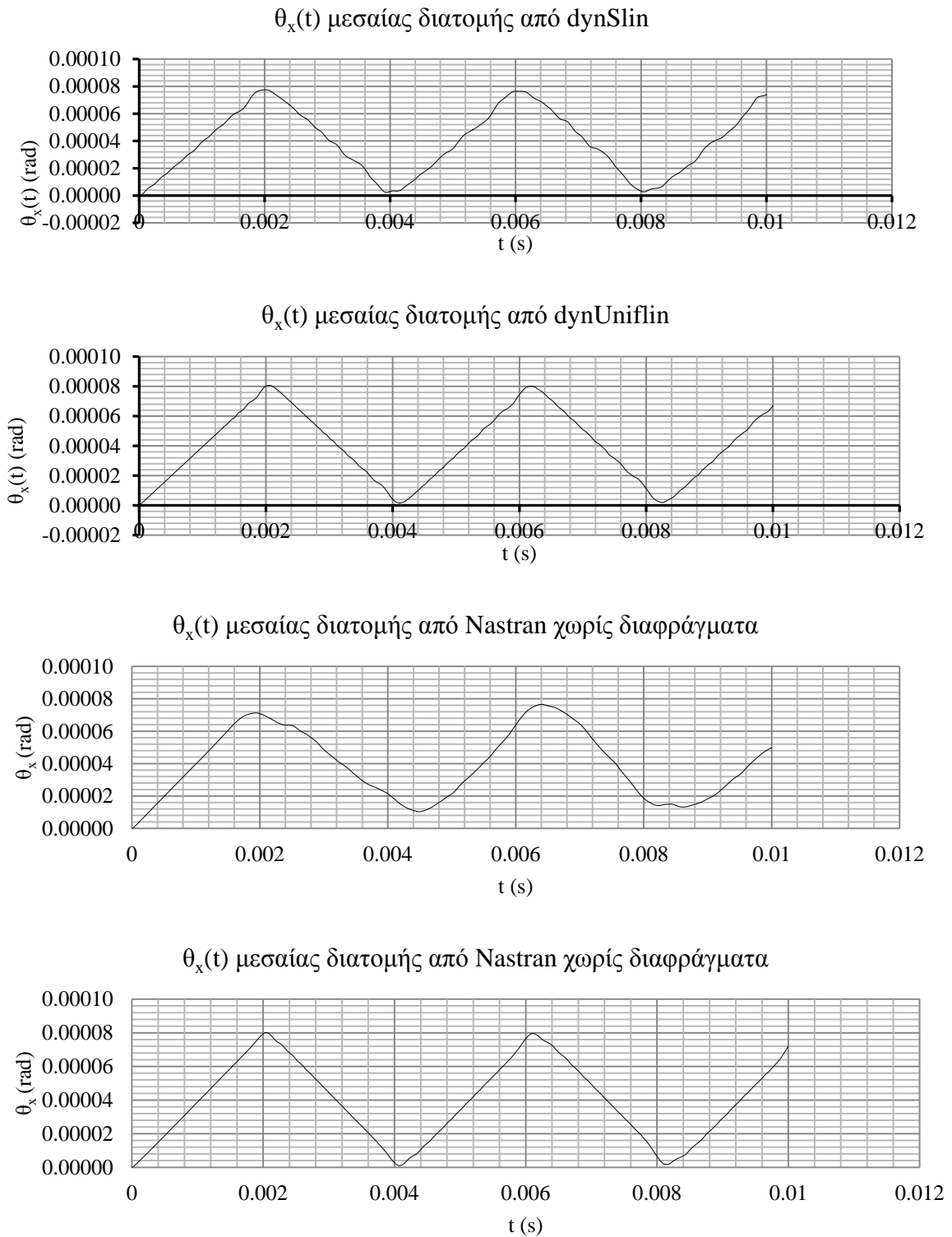




**Σχήμα 6.3.16** Τάσεις Von-Mises στο προσομοίωμα με διαφράγματα τη χρονική στιγμή  $t=0.00694s$  όπου παρατηρείται η μέγιστη Von-Mises τάση.

### 6.3.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Στα επόμενα συγκρίνονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα και αφορούν τις στροφές στη μεσαία διατομή ( βλέπε Σχήμα 6.3.17) και τις τάσεις στην ακραία (Πίνακας 6.3.3).



**Σχήμα 6.3.17** Συγκριτική παρουσίαση διαγραμμάτων  $\theta_x(t)$  από τις αναλύσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

**Πίνακας 6.3.3** Σύγκριση μεγίστων τάσεων Von – Misses από Nastran με dynSlin και dynUniflin

Διατομή άκρου 1			
Χαρ/κά Ανάλυσης	Τάση Von - Mises (Kpa)	Διαφορά από dynSlin %	Διαφορά από dynUniflin %
Nastran χωρίς διαφράγματα με 500 χρονικές στιγμές στο διάστημα 0-0.01s, 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία	1336.56	3.26	30.76
Nastran με διαφράγματα (249 = σε ΟΛΕΣ τις διατομές) με 500 χρονικές στιγμές στο διάστημα 0-0.01s, 41250 κελυφωτά 4-Πλευρικά στοιχεία	1181.68	-8.71	15.60
dynSlin με 5000 χρονικές στιγμές στο διάστημα 0-0.01s	1294.36	-	-
dynUniflin με 5000 χρονικές στιγμές στο διάστημα 0-0.01s	1022.18	-	-

Οι % διαφορές του παραπάνω πίνακα υπολογίστηκαν από του τύπους:

$$\text{Διαφορά από dynSlin \%} = \frac{\sigma_{nastran} - \sigma_{dynSlin}}{\sigma_{dynSlin}} \cdot 100 \quad (6.3.1)$$

$$\text{Διαφορά από dynUniflin \%} = \frac{\sigma_{nastran} - \sigma_{dynUniflin}}{\sigma_{dynUniflin}} \cdot 100 \quad (6.3.2)$$



## Συμπεράσματα

### Α μέρος

Για το Α μέρος των αριθμητικών στο οποίο πραγματοποιήθηκε ιδιομορφική ανάλυση ράβδων διαφόρων διατομών, μηκών και στατικών συστημάτων τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- Από τις αναλύσεις με και χωρίς διαφράγματα διαπιστώθηκε ότι είναι πολύ σημαντική η παρουσία των διαφραγμάτων στο προσομοίωμα προκειμένου να ικανοποιηθεί η παραδοχή 2 του Κεφαλαίου 3. Αυτή λέει ότι δεν αναπτύσσονται εγκάρσιες παραμορφώσεις και το σχήμα της διατομής διατηρείται πράγμα που δεν συνέβαινε στις περισσότερες περιπτώσεις που δεν υπήρχαν διαφράγματα και έπαιξε κυρίαρχο ρόλο το φαινόμενο distortion. Εξαιρέση αποτελούν οι ράβδοι σταυροειδούς διατομής και συμπαγούς ορθογωνικής διατομής που εξετάστηκαν στα κεφάλαια 5.2 και 5.4 αντίστοιχα.
- Η ισχύουσα σε κάθε περίπτωση θεωρία δοκού υπολογίζει με πολύ καλή ακρίβεια τις 4 πρώτες ιδιομορφές.
- Σε αρκετές περιπτώσεις τα προσομοιώματα των τρισδιάστατων 5-εδρικών στοιχείων δεν οδήγησαν σε αξιόπιστα αποτελέσματα το οποίο δεν συνέβη για τα τρισδιάστατα 6-εδρικά και τα 4-πλευρικά κελυφωτά.
- Η θεωρία δοκού συγκρίνεται επιτυχώς με προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων με διαφράγματα, όσον αφορά τιμές των  $\theta_x, n_x$ .
- Η επιρροή της στρεβλωτικής αδράνειας δεν είναι σημαντική σε όλες τις ράβδους που εξετάστηκαν.
- Σε όλες τις κοίλες κλειστές διατομές έχουμε καλύτερη πρόβλεψη των 3d πεπερασμένων από τη θεωρία δοκού παρά από τα κελυφωτά στοιχεία. Το ίδιο πράγμα ισχύει και για το δικύπελο κιβώτιο.

### Β μέρος

Σχετικά με το Β μέρος των αριθμητικών παραδειγμάτων στο οποίο μελετήθηκαν με χρονική ολοκλήρωση εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδων τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

- Η μέθοδος χρονικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης που υιοθετήθηκε οδηγεί σε αξιόπιστο υπολογισμό της απόκρισης ράβδων που εκτελούν ελεύθερες στρεπτικές ταλαντώσεις.
- Στην εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που εξετάστηκε βλέπουμε ότι η χρονοϊστορία της στροφής  $\theta_x$  που προκύπτει από την διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης σχεδόν ταυτίζεται με εκείνη που προκύπτει από την ανάλυση που υλοποιήθηκε στο Nastran με χρήση διαφραγμάτων ενώ επίσης δεν αποκλίνει σημαντικά από εκείνη που υλοποιήθηκε χωρίς διαφράγματα. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για την θεωρία ανομοιομορφης στρέψης χωρίς επιρροή ανομοιομορφης στρέβλωσης.
- Στην περίπτωση εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που εξετάστηκε, η επιρροή των ανώτερων ιδιομορφών είναι ιδιαίτερος αισθητή στα εντατικά μεγέθη της ράβδου, σε αντίθεση με τα κινηματικά μεγέθη της.
- Στην περίπτωση εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που εξετάστηκε προκύπτει ότι η μέγιστη τάση Von – Mises όπως προέκυψε από τη διευρυμένη θεωρία ανομοιομορφης στρέψης **υποεκτιμά** την αντίστοιχη που προκύπτει με την ανάλυση με το Nastran

χωρίς χρήση διαφραγμάτων (3,26%) ενώ **υπερεκτιμά** εκείνη που αντιστοιχεί στην ανάλυση με διαφράγματα (-8.71%). Όσον αφορά την μέγιστη τάση Von – Mises που προκύπτει από την θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης χωρίς επιρροή ανομοιόμορφης στρέβλωσης αυτή **υποεκτιμά σημαντικά** τόσο το προσομοίωμα του Nastran χωρίς διαφράγματα (30.76%) όσο και το προσομοίωμα του Nastran με διαφράγματα (15.60%).

## Βιβλιογραφία

1. **Σπετσιέρης Δ.** (2005) “Επιρροή της στρέβλωσης και της διατμητικής παραμόρφωσης στο μητρώο δυσκαμψίας μέλους χωρικού ραβδόμορφου φορέα”, *Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα.*
2. **Μπαλάφας Κ.** (2009) “Μη γραμμικές στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδων με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων – εφαρμογές στην μεταλυγισμική συμπεριφορά”, *Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα.*
3. **Μουδάτσος Ε.** (2012) “Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων”, *Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα.*
4. **Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος** “Εφαρμοσμένη ανάλυση ραβδωτών και επιφανειακών φορέων”, *ΔΠΜΣ Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών, ΕΜΠ, Αθήνα.*
5. **M. Kraus & R. Kindmann** (2009): “St. Venants Torsion Constant of Hot Rolled Steel Profiles and Position of the Shear Centre”, NSCC, pp. 454-461
6. **E.J. Sapountzakis and V.J. Tsipiras** (2010) “Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Shear Deformable Bars - Application to Torsional Postbuckling Configurations”, *Proc. of the 11<sup>th</sup> International Conference on Boundary Element Techniques*, Berlin, Germany, 12-14 July, pp. 482-489.
7. **E.J. Sapountzakis and V.J. Tsipiras** (2009) “Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by BEM”, *Proc. of the ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Rhodes, Greece, 22-24 June, paper CD143, pp. 27.
8. **E.J. Sapountzakis and V.J. Tsipiras** (2009) “Warping Shear Stresses in Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations of Bars by BEM”, *Proc. of the 10<sup>th</sup> International Conference on Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, 22-24 July, pp. 69-79.
9. **E.J. Sapountzakis and V.J. Tsipiras** (2010) “Shear Deformable Bars of Doubly Symmetrical Cross Section Under Nonlinear Nonuniform Torsional Vibrations – Application to Torsional Postbuckling Configurations and Primary Resonance Excitations”, *Nonlinear Dynamics*, Vol.62, pp. 967-987.
10. **E.J. Sapountzakis G.C. Tsiatas** (2006) “Flexural-torsional vibrations of beams by BEM”, *Comput. Mech.*, Vol.39, pp 409-417.
11. **E.J. Sapountzakis, G.C. Tsiatas** (2007) “Flexural-Torsional Buckling and Vibration Analysis of Composite Beams”, *CMC*, Vol.6, no.2, pp. 103-115.