

Στεργίου Α. Μαρία
Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
στον Τομέα Μηχανικής
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου

Πρόβλημα μοναδικότητας της λύσης για επίπεδα προβλήματα
ρωγμών με τη χρήση της μικροπολικής θεωρίας.

Επιβλέπων
Χ.Γ. ΓΕΩΡΓΙΑΔΗΣ
Καθηγητής του Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα 2012

Επιβλέπων Καθηγητής:

Χαράλαμπος Γ. Γεωργιάδης, Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Μέλη Εξεταστικής Επιτροπής:

Δημήτριος Ευταξιώπουλος, Επίκουρος Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.
Σταύρος Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών κατά το διάστημα Σεπτέμβριος 2011 έως Νοέμβριος 2012. Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη ΔΕΠ και τους εργαζόμενους στον Τομέα Μηχανικής για το δημιουργικό και ευχάριστο περιβάλλον που έχουν δημιουργήσει, χάρη στο οποίο η παραμονή μου στον Τομέα Μηχανικής κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας υπήρξε μία πολύ ενδιαφέρουσα εμπειρία.

Θα ήθελα, πρωτίστως, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Χ. Γεωργιάδη για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνεργαστούμε, για την πρόταση του συγκεκριμένου θέματος και την πολύτιμη βοήθειά του.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους κυρίους Παναγιώτη Γουργιώτη και Μπαξεβανάκη Κωνσταντίνο καθώς και την κυρία Χριστίνα Γρέντζελου για την πολύτιμη βοήθειά τους και για την ευχάριστη και αποδοτική συνεργασία.

Στεργίου Α. Μαρία
2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	ii
Περίληψη της εργασίας	v
Symmary	vi
Εισαγωγή	
Γενικά	1
1. Μικροπολική Θεωρία	
1.1 Γενικά	3
1.2 Βασικές εξισώσεις της θεωρίας	4
2. Μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος ρωγμής	
Γενικά	10
Γενικά Συμπεράσματα	19
Παράρτημα	20
Βιβλιογραφία	22

Πρόβλημα μοναδικότητας της λύσης για επίπεδα προβλήματα ρωγμών με τη χρήση της μικροπολικής θεωρίας

Στεργίου Α. Μαρία
Τομέας Μηχανικής
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Περίληψη της Εργασίας

Η παρούσα εργασία ασχολείται με το θεώρημα μοναδικότητας για επίπεδα προβλήματα ρωγμών σε στερεά, που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη φαινομένων βαθμίδας. Η μικροπολική θεωρία προέκυψε από φαινόμενα «ενίσχυσης» στην άμεση γειτονία αιχμών ρωγμής, εγκοπών, μικρών οπών και εγκλεισμάτων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή αλλά και από τη βαθμίδα της στροφής. Μελετάμε την ανισότροπη γραμμική συμπεριφορά επίπεδου ρηγματωμένου σώματος, σε συνθήκες επίπεδης και αντι-επίπεδης παραμόρφωσης. Τονίζεται ότι, στη γενική περίπτωση προβλημάτων ρωγμών, απαιτείται ένα θεώρημα μοναδικότητας πιο εκτεταμένο από το κλασσικό θεώρημα Kirchhoff εξαιτίας της ιδιόμορφης συμπεριφοράς των πεδίων στην αιχμή της ρωγμής. Ένα τέτοιο θεώρημα θέτει περιορισμούς στη συμπεριφορά των πεδίων στη γειτονία των αιχμών ρωγμής. Στην κλασσική Ελαστικότητα, ένα τέτοιο θεώρημα διατυπώθηκε από τους Knowles και Pucik (Knowles, J. K., Pucik, T. A., 1973), οι οποίοι απέδειξαν ότι οι αναγκαίες συνθήκες για μοναδικότητα της λύσης είναι φραγμένα πεδία μετατοπίσεων και καθολικών δυνάμεων. Στην παρούσα εργασία προκύπτει ότι δύο επιπλέον συνθήκες, για φραγμένο πεδίο στροφών και πεδίο καθολικών ροπών, στην άμεση γειτονία των αιχμών ρωγμής, εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα στα πλαίσια της γενικής μορφής της μικροπολικής θεωρίας Ελαστικότητας.

Uniqueness for plane crack problems in micropolar elasticity

Stergiou A. Maria
Mechanics Division,
Department of Applied Sciences.
National Technical University of Athens

Summary

The current work deals with the uniqueness theorem for plane crack problems in solids, characterized by gradient elasticity. Micropolar elasticity derives from strengthening effects in the vicinity of crack tips. According to this theory, the strain-energy density is not only dependent on the strain but also on the rotation gradient. We consider an anisotropic material response of the cracked plane body and conditions of plane-strain and anti-plane strain. It is emphasized that, for crack problems in general, a uniqueness theorem more extended than the standard Kirchoff theorem is needed because of the singular behaviour of the solutions at the crack tips. Such a theorem will impose certain restrictions on the behaviour of the fields in the vicinity of crack tips. In standard Elasticity, the theorem needed was established by Knowles and Pucik (Knowles, J. K., Pucik, T. A., 1973) who showed that the necessary conditions for solution uniqueness are a bounded displacement field and a bounded body-force field. In this study, we show that the additional (to the two previous conditions) requirements of a bounded rotation field and a bounded body couple field in the vicinity of the crack tips guarantees uniqueness within the form of the theory of micropolar elasticity.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γενικά

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με το πρόβλημα της μοναδικότητας λύσεων για σώμα με ρωγμή, θεωρώντας ανισότροπη συμπεριφορά υλικού και συνθήκες επίπεδης ή αντεπίπεδης παραμόρφωσης. Στην περίπτωση ύπαρξης ρωγμών, το σύνηθες θεώρημα για τη μοναδικότητα λύσεων δεν αρκεί. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι λύσεις αυτών των προβλημάτων παρουσιάζουν ιδιομορφίες στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής και ορισμένες από αυτές μπορεί να μη βρίσκονται σε αρμονία με την απαίτηση του θεωρήματος μοναδικότητας για ομαλά πεδία. Ωστόσο, αν επιβληθούν ορισμένοι περιορισμοί στη συμπεριφορά κάποιων από τα πεδία στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής, τότε είναι δυνατή η επέκταση του θεωρήματος ώστε να καλύπτει και αυτού του είδους τα προβλήματα. Προκειμένου να αποδειχθεί η μοναδικότητα της λύσης, είναι αναγκαίο να διατυπωθεί σε ολοκληρωτική μορφή η Αρχή των Δυνατών Έργων. Στην έκφραση αυτή, θα πρέπει όλα τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν. Στην περίπτωση αποκλιόντων ολοκληρωμάτων η Αρχή των Δυνατών Έργων απλώς δεν έχει νόημα. Επομένως, το θεώρημα μοναδικότητας στην περίπτωση ρηγματωμένου σώματος θα πρέπει να προσδιορίζει τις αναγκαίες εκείνες συνθήκες που τα πεδία κοντά στην αιχμή της ρωγμής θα πρέπει να πληρούν ώστε όλα τα ολοκληρώματα στην προαναφερθείσα ασθενή (ολοκληρωτική) μορφή, να συγκλίνουν.

Η πρακτική εφαρμογή αυτών των συνθηκών είναι γνωστή σε προβλήματα ρωγμών, καθώς η πληροφορία αυτή βοηθά στον προσδιορισμό ακριβούς λύσης μέσω της τεχνικής Wiener-Hopf, γνωρίζοντας εξ αρχής την ασυμπτωτική συμπεριφορά κοντά στην αιχμή της ρωγμής ορισμένων από τα πεδία, τα οποία πρέπει να προσδιοριστούν. Επιπλέον, πιθανές λύσεις του εκάστοτε προβλήματος μπορούν άμεσα να απορριφθούν αν δε συμβαδίζουν με

τις συνθήκες αυτές. Σχετικά παραδείγματα βρίσκονται στις δημοσιεύσεις των Freund, 1990, Georgiadis και Brock, 1994, Georgiadis και Rigatos, 1996.

Στα πλαίσια της κλασσικής Ελαστικότητας, οι Knowles και Pucik, (1973), απέδειξαν ότι οι αναγκαίες συνθήκες για τη μοναδικότητα της λύσης είναι το πεδίο των μετατοπίσεων και των καθολικών δυνάμεων να είναι φραγμένα στην περιοχή της αιχμής της ρωγμής. Στην εργασία αυτή, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με εκείνους, αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση της μικροπολικής θεωρίας (micropolar theory), επιπλέον αυτών των δύο συνθηκών, θα πρέπει να είναι επίσης φραγμένο το πεδίο της στροφής και το πεδίο των καθολικών ροπών. Είναι ενδιαφέρον να επισημάνουμε ότι πρόσφατα αποτελέσματα για επίπεδα προβλήματα ρωγμών στα πλαίσια της θεωρίας αυτής ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές, καθώς οι μετατοπίσεις στις επιφάνειες της ρωγμής μεταβάλλονται ως $O((-x_1)^{3/2})$ καθώς $x_1 \rightarrow -0$, ως προς το Καρτεσιανό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, που έχει την αρχή του στην αιχμή της ρωγμής και για ρωγμή που βρίσκεται στη θέση $(-\ell < x_1 < 0, x_2 = 0)$, όπου ℓ είναι σταθερό μήκος. Αναφέρουμε εδώ ότι τέτοια ραμφοειδής συμπεριφορά για το κλείσιμο (closure) της ρωγμής έχει επίσης εξαχθεί στην εργασία Cleveringa et al. (2000), μέσω της χρήσης διακριτών εξαρμώσεων γύρω από τη ρωγμή. Επίσης, στην εργασία των Elssner et al. (1994), επιβεβαιώνεται τέτοιου είδους συμπεριφορά για το κλείσιμο ρωγμής σε πειράματα Μικρομηχανικής.

Κεφάλαιο 1

Μικροπολική Θεωρία

1.1 Γενικά

Η κλασική θεωρία Ελαστικότητας περιγράφει, εν γένει ρεαλιστικά, τα εντατικά και παραμορφωσιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στα συνήθη υλικά, στο κατάλληλο εύρος φορτίσεων, στη Μηχανική των Υλικών και των Κατασκευών. Παρόλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις που η τελευταία αδυνατεί να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα. Μια χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η κόπωση μηχανικών μερών ή, πιο γενικά, τα προβλήματα στα οποία έχουμε μεγάλη συγκέντρωση τάσεων. Τα πειραματικά δεδομένα στις περιπτώσεις αυτές έχουν δείξει μεγάλη απόκλιση από τα αποτελέσματα που προβλέπει η κλασική θεωρία. Ο λόγος είναι ότι οι θεωρήσεις που έχουν γίνει στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας οδηγούν στο να μη λαμβάνεται υπ' όψιν η παρουσία βαθμίδων τάσης και παραμόρφωσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα φαινόμενα «ενίσχυσης» (strengthening effects) που προκαλούνται από την ύπαρξη φαινομένων βαθμίδας γίνονται σημαντικά όταν οι εν λόγω βαθμίδες είναι πράγματι μεγάλες. Αυτό συμβαίνει στην άμεση γειτονία αιχμών ρωγμής, εγκοπών, μικρών οπών και εγκλεισμάτων καθώς και στην περίπτωση μικρομετρικών διεισδύσεων (micrometer indentations). Χαρακτηριστικά παραδείγματα φαινομένων κλίμακας σε ελαστικά παραμορφώσιμα σώματα αποτελούν: η διάδοση κυμάτων με πολύ μικρό μήκος κύματος σε στρωσιγενή (layered) υλικά, η ύπαρξη οριζοντίως πολωμένων (SH waves) επιφανειακών κυμάτων και στρεπτικών επιφανειακών κυμάτων, η ύπαρξη επιφανειακών κυμάτων Rayleigh με διασπορά σε υψηλές συχνότητες και ο λυγισμός δοκών πολυ-κρυσταλλικών υλικών. Από ό,τι δείχνουν προηγούμενες εργασίες στην βιβλιογραφία, οι παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να περιγραφούν επαρκώς μόνο στα πλαίσια Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου. Καθίσταται σαφές λοιπόν ότι το προτεινόμενο έργο αποτελεί πρωτότυπη έρευνα που αναμένεται να δώσει απαντήσεις σε σημαντικά προβλήματα της Μηχανικής.

Τέτοια φαινόμενα οφείλονται κυρίως στην έλλειψη κάποιου εσωτερικού χαρακτηριστικού μήκους στις εξισώσεις της κλασσικής θεωρίας, με αποτέλεσμα να μην λαμβάνεται υπ'όψιν η δομή του υλικού. Το μειονέκτημα αυτό της κλασσικής θεωρίας ξεπεράστηκε με τη χρήση των Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου, οι οποίες εξ ορισμού «αναγνωρίζουν» την εσωτερική δομή του υπό εξέταση υλικού και την ενσωματώνουν (με τη μορφή κάποιων χαρακτηριστικών μηκών) στην μαθηματική διατύπωση του εκάστοτε προβλήματος. Κατηγορίες υλικών που εμφανίζουν μικροδομή αποτελούν τα κοκκώδη, κυψελοειδή, οπλισμένα με ίνες και στρωσιγενή σύνθετα. Πρόκειται για εγγενώς ετερογενή υλικά με μικροδομικό χαρακτήρα που αντιστοιχεί στις διαστάσεις των επί μέρους υλικών (micro-media). Λόγω αυτής της δομής τα υλικά αυτά παρουσιάζουν χαρακτηριστικά φαινόμενα κλίμακας (size effects) που οι κλασσικές Θεωρίες της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου αδυνατούν να περιγράψουν επαρκώς.

Ιστορικά, ιδέες που διέπουν τις γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου είχαν ήδη αρχίσει να εμφανίζονται από τον 19^ο αιώνα με τις εργασίες των Cauchy (1851), Voigt (1887) και των αδελφών E. και F. Cosserat (1909). Όμως το ζήτημα γενικεύτηκε και έφτασε στην ωριμότητά του στις δεκαετίες του 1960 και 1970 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin (1964), Green και Rivlin (1964), Bleustein (1967), Mindlin και Eshel (1968), Eringen (1968), Nowacki (1972) και Germain (1973).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η μικροπολική θεωρία (micropolar theory) Ελαστικότητας αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τους αδερφούς E. και F. Cosserat (1909). Στην εργασία αυτή διατυπώθηκαν, όμως, μόνο οι εξισώσεις ισορροπίας και όχι οι καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας. Η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας έγινε αργότερα από τους Eringen και Suhubi (1964) και Nowacki (1972) ενώ ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις της μικροπολικής θεωρίας μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Lubarda και Markenscoff (2000) και Lubarda και Markenscoff (2003).

1.2 Βασικές εξισώσεις της θεωρίας

Η μικροπολική θεωρία (micropolar theory) υποθέτει ότι κάθε στοιχείο επιφάνειας ΔS , που βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του σώματος είτε στην επιφάνεια του, υπόκειται όχι μόνο σε μια συνισταμένη δύναμη αλλά και σε μια συνισταμένη ροπή, ανά μονάδα

επιφάνειας. Η υπόθεση αυτή είναι κατάλληλη για υλικά με κοκκώδη ή κρυσταλλική δομή όπου η αλληλεπίδραση δυο γειτονικών στοιχείων εισάγει εσωτερικές ροπές.

Ειδικότερα, η θεωρία αυτή υποθέτει ότι: (i) κάθε υλικό σημείο έχει έξι ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης και τρεις συνιστώσες στροφής), (ii) η Αρχή των Τάσεων (Stress Principle) των Euler-Cauchy επεκτείνεται λαμβάνοντας υπ' όψιν την ύπαρξη ελκυστών τάσεων ζεύγους (ροπής), (iii) η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή αλλά και από την βαθμίδα της στροφής. Απουσία αδρανειακών φαινομένων, οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της στροφορμής για έναν όγκο ελέγχου CV με επιφάνεια S είναι (Eringen και Suhubi, 1964, Nowacki, 1972)

$$\int_S t_p^{(n)} dS + \int_{CV} X_p d(CV) = 0 \quad (1.1)$$

$$\int_S (x_q t_k^{(n)} e_{pqk} + M_p^{(n)}) dS + \int_{CV} (x_q X_k e_{pqk} + Y_p) d(CV) = 0 \quad (1.2)$$

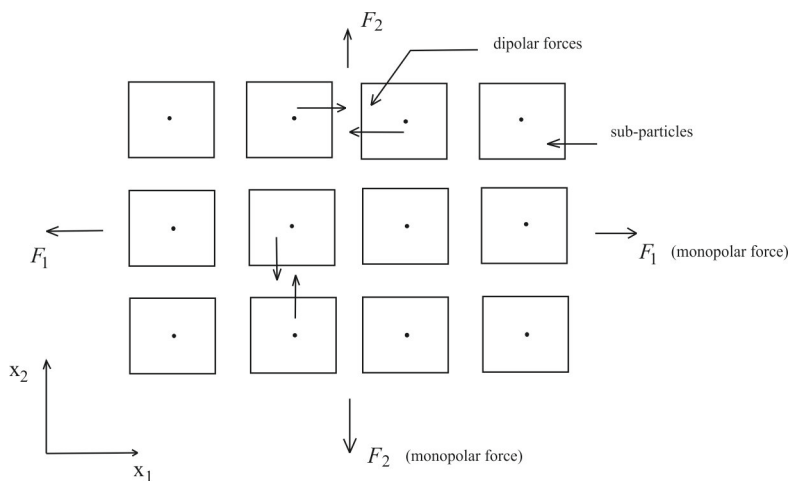
όπου $t_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα επιφανείας (ο ελκυστής των τάσεων), X_p είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, $M_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή ροπή ανά μονάδα επιφανείας, Y_p είναι οι καθολικές ροπές ανά μονάδα όγκου και x_q είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης κάθε υλικού στοιχείου με στοιχειώδη όγκο $d(CV)$.

Στη συνέχεια, οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ορίζονται αν λάβουμε υπ' όψιν την ισορροπία στοιχειώδους υλικού τετραέδρου (τετραέδρου Cauchy) και χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (1.1) και (1.2), αντίστοιχα (ιδέ π.χ. Aero και Kuvshinskii, 1960, Malvern, 1969). Ο τανυστής των τάσεων σ_{pq} , ο οποίος είναι ασύμμετρος, ορίζεται ως

$$t_p^{(n)} = \sigma_{qp} n_q \quad (1.3)$$

και ο τανυστής των τάσεων ζεύγους μ_{pq} , ο οποίος είναι επίσης ασύμμετρος, ως

$$M_p^{(n)} = \mu_{qp} n_q \quad , \quad (1.4)$$



Σχήμα 1. Υλικό με μικροδομή: μονοπολικές (εξωτερικές) και διπολικές (εσωτερικές) δυνάμεις δρουν σε ένα σύνολο μικρο-μέσων.

Ο ταυστής του ζεύγους τάσεων προκύπτει από τη θεώρηση *πολυπολικών* δυνάμεων, οι οποίες είναι αντιπαράλληλες δυνάμεις και δρουν μεταξύ των μικρομέσων που περιέχονται σε συνεχές μέσο με μικροδομή (Σχ. 1). Όπως εξηγήθηκε από τους Green και Rivlin (1964) και Jaunzemis (1967), η έννοια των *πολυπολικών* δυνάμεων προκύπτει άμεσα από τη γενίκευση της μηχανικής ισχύος M , η οποία περιέχει ανώτερης τάξης παραγώγου του πεδίου ταχύτητας. Με τον τρόπο αυτό, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο υποσωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύεται σε ένα άθροισμα *εξωτερικών* και *εσωτερικών* δυνάμεων, όπου οι τελευταίες είναι αυτοϊσορροπούμενες. Όμως, τέτοιες αυτοϊσορροπούμενες *πολυπολικές* δυνάμεις παράγουν *μη μηδενικές* τάσεις, τις *πολυπολικές* τάσεις.

Οι σχέσεις $\mathbf{t}^{(n)} = -\mathbf{t}^{(-n)}$ και $\mathbf{M}^{(n)} = -\mathbf{M}^{(-n)}$, όπου \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο σε ένα στοιχείο επιφάνειας (είτε στο σύνορο, είτε σε οποιαδήποτε ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του σώματος) με φορά προς τα έξω, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν αν θεωρήσει κανείς την ισορροπία μίας «λεπτής λωρίδας» (thin slice) του υλικού. Οι τάσεις ζεύγους μ_{pq} έχουν διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻¹.

Για την κινηματική περιγραφή του σώματος ορίζονται, στα πλαίσια μιας γεωμετρικά γραμμικής θεωρίας, οι ακόλουθες ποσότητες

$$\gamma_{ji} = \partial_j u_i - \varepsilon_{kji} \varphi_k \quad , \quad (1.5\alpha)$$

$$\kappa_{ji} = \partial_j \varphi_i \quad (1.5\beta)$$

όπου u_i το διάνυσμα μετατόπισης, φ_i είναι το διάνυσμα στροφής, γ_{ji} ο τανυστής σχετικής παραμόρφωσης και κ_{ji} είναι ο τανυστής καμπυλότητας (curvature or torsion-flexure tensor) ο οποίος έχει διαστάσεις [μήκος]⁻¹. Τονίζεται ότι η στροφή και η μετατόπιση στη μικροπολική θεωρία είναι ανεξάρτητες ποσότητες.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας W σε ένα τριδιάστατο συνεχές μέσο είναι μία *θετικά ορισμένη* συνάρτηση της μορφής

$$W \equiv W(\gamma_{ji}, \kappa_{ji}) \quad . \quad (1.6)$$

Στην απλούστερη, τώρα, περίπτωση *γραμμικής* ανισότροπης καταστατικής συμπεριφοράς, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει την ακόλουθη τετραγωνική μορφή

$$W = \frac{1}{2} a_{jkl} \gamma_{ji} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} c_{jkl} \kappa_{ji} \kappa_{kl} \quad (1.7)$$

όπου a_{jkl} και c_{jkl} οι τανυστές σταθερών του υλικού, για τους οποίους ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες συμμετρίας

$$a_{jkl} = a_{klji} \quad (1.8)$$

$$c_{jkl} = c_{klji} \quad . \quad (1.9)$$

Στη γενική περίπτωση, οι τανυστές (a_{jkl}, c_{jkl}) θεωρούνται συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις της θέσης, περιλαμβάνοντας έτσι την ύπαρξη ανομοιογένειας στο υλικό. Τελικά, το γεγονός ότι η W είναι θετικά ορισμένη, θέτει τους συνήθεις περιορισμούς για το επιτρεπτό εύρος τιμών των σταθερών του υλικού. Στην απλούστερη περίπτωση ισότροπου υλικού, οι τανυστές a_{jkl} και c_{jkl} γράφονται ως εξής

$$a_{jkl} = (\mu + \alpha) \delta_{jk} \delta_{il} + (\mu + \alpha) \delta_{jk} \delta_{ik} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.10)$$

$$c_{jkl} = (\gamma + \varepsilon) \delta_{jk} \delta_{il} + (\gamma - \varepsilon) \delta_{jl} \delta_{ik} + \beta \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.11)$$

όπου $\alpha, \lambda, \mu, \beta, \gamma, \varepsilon$ είναι σταθερές του υλικού.

Για θετικά ορισμένη παραμορφωσιακή ενέργεια προκύπτουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad (1.12\alpha)$$

$$\gamma > 0, \quad 3\beta + 2\gamma > 0 \quad (1.12\beta)$$

$$\mu + \alpha > 0 \quad (1.12\gamma)$$

$$\gamma + \varepsilon > 0 \quad (1.12\delta)$$

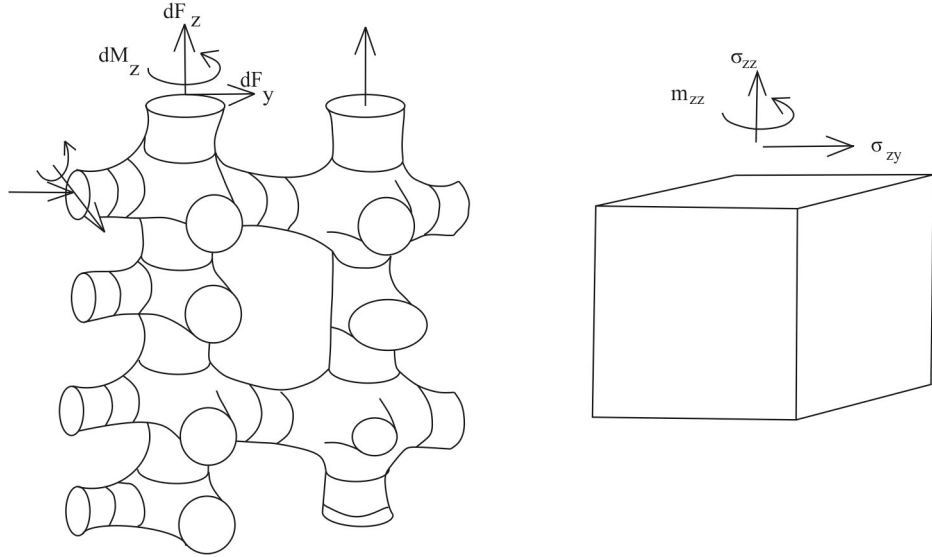
$$\alpha > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (1.12\varepsilon)$$

ενώ, αντίστοιχα, οι τάσεις μπορούν να οριστούν ως μεταβολές της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας W

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \quad (1.13)$$

$$\mu_{ji} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ji}} \quad (1.14)$$

Οι καταστατικές σχέσεις (1.13) και (1.14) εξασφαλίζουν μία-προς-μία αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών σ_{ji} και γ_{ji} και μ_{ji} και κ_{ji} . Στο Σχήμα 2 φαίνονται οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους σε ένα στοιχειώδη όγκο στερεού Cosserat και, αντίστοιχα, οι δυνάμεις και ροπές στα δομικά στοιχεία ενός πραγματικού υλικού.



Σχήμα 2. Αριστερά, δυνάμεις και ροπές στα δομικά στοιχεία ενός πραγματικού υλικού. Δεξιά, τάσεις και τάσεις ζεύγους σε ένα στοιχειώδη όγκο στερεού Cosserat.

Στην περίπτωση γραμμικής και ισότροπης καταστατικής συμπεριφοράς, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει την ακόλουθη τετραγωνική μορφή

$$W = \mu \gamma_{\langle ij \rangle} \gamma_{\langle ij \rangle} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{kk} \gamma_{nn} + \gamma \kappa_{\langle ij \rangle} \kappa_{\langle ij \rangle} + \varepsilon \kappa_{\langle ij \rangle} \kappa_{\langle ij \rangle} + \frac{\beta}{2} \kappa_{kk} \kappa_{nn} \quad (1.15)$$

που περιλαμβάνει τέσσερις διαφορετικές υλικές σταθερές. Γραμμικές και ισότροπες καταστατικές σχέσεις μπορούν, τώρα, να προκύψουν από τη σχέση (1.15) ως

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \delta_{ji} \gamma_{kk} \quad (1.16)$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + \beta \delta_{ji} \kappa_{kk} \quad (1.17)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις καταστατικές σχέσεις (1.16) και (1.17) στην εξίσωση ισορροπίας και χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις (1.5α) και (1.5β) καταλήγουμε, απουσία καθολικών δυνάμεων και ροπών, στις εξισώσεις ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις

$$\square_2 \bar{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \text{grad div} \bar{u} + 2a \text{rot} \bar{\varphi} + \bar{X} = 0 \quad (1.18)$$

$$\square_4 \vec{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div } \vec{\varphi} + 2\alpha \text{rot } \vec{u} + \vec{Y} = 0 \quad (1.19)$$

με τους τελεστές να ορίζονται ακολούθως

$$\square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 \quad (1.20)$$

$$\square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - 4\alpha \quad (1.21)$$

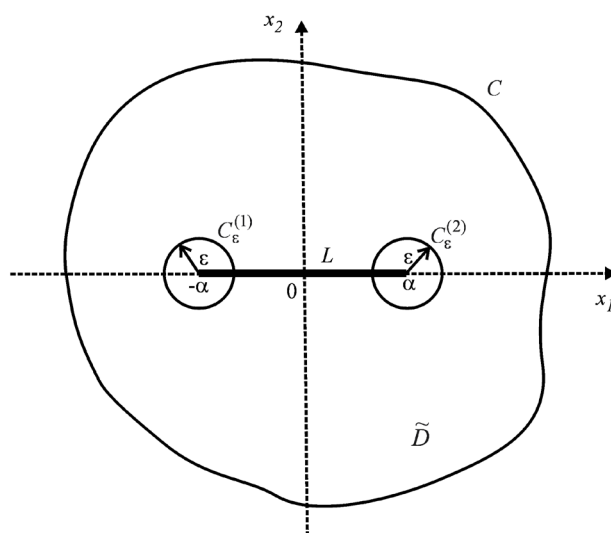
Κεφάλαιο 2

Μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος ρωγμής

Θεωρούμε ένα επίπεδο χωρίο \tilde{D} με λείο σύνορο C . Το σώμα περιέχει μία μοναδική, εσωτερική ρωγμή ορισμένη ως L . Στις ρωγμές δε δρα κάποιος ελκυστής ενώ το φορτίο εφαρμόζεται στο C . Ένα συνεχές πεδίο καθολικών δυνάμεων και ροπών μπορεί να δρα στο σώμα. Όπως απεικονίζεται στο Σχ. 1, θεωρούμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο σώμα ώστε η ρωγμή να αποτελείται από τα σημεία $L \equiv \{(x_1, x_2) : -a \leq x_1 \leq a, x_2 = \pm 0\}$. Επιπλέον, ορίζουμε δύο κύκλους $C_\varepsilon^{(1)}$ και $C_\varepsilon^{(2)}$ γύρω από τα χείλη της ρωγμής $(-a, 0)$ και $(a, 0)$ ενώ ισχύει $C_\varepsilon \equiv C_\varepsilon^{(1)} + C_\varepsilon^{(2)}$. Κάθε κύκλος έχει ακτίνα ε , η οποία είναι θετική και αρκετά μικρή ώστε να εξασφαλίζεται ότι οι κύκλοι είναι πράγματι εντός του \tilde{D} . Ορίζουμε επιπλέον τα ακόλουθα πεδία ορισμού : $G_\varepsilon \equiv G_\varepsilon^{(1)} + G_\varepsilon^{(2)}$ είναι το πεδίο που περιέχει όλα τα σημεία εντός των κύκλων εκτός από αυτά που κείνται επί της ρωγμής L , $D_0 \equiv D - L$ είναι το πεδίο που περιέχει όλα εκείνα τα σημεία του D που δεν κείνται επί του L , $D_\varepsilon \equiv D_0 - G_\varepsilon$ το πεδίο που περιέχει τα σημεία του D_0 που είναι εκτός των κύκλων $C_\varepsilon^{(1)}$ και $C_\varepsilon^{(2)}$, και

$D^+ \equiv \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in D + C, x_2 \geq 0, (x_1 + a)^2 + x_2^2 \neq 0\}$ είναι το πεδίο που περιέχει εκείνα τα σημεία του $D + L$ που κείνται επί ή πάνω από τον άξονα x_1 , με την εξαίρεση των δύο χελιών της ρωγμής (ομοίως $D^- \equiv \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in D + C, x_2 \leq 0, (x_1 + a)^2 + x_2^2 \neq 0\}$). Τέλος, θα γίνει χρήση του εσωτερικού του L που ορίζεται ως $L_0 \equiv \{(x_1, x_2) : -a < x_1 < a, x_2 = \pm 0\}$.

Σε κάθε περίπτωση, όλες οι καθολικές δυνάμεις και οι ελκυστές δρουν εντός του επιπέδου (x_1, x_2) και είναι ανεξάρτητες από το x_3 .



Σχήμα 3. Επίπεδη περιοχή \tilde{D} με σύνορο C που περιλαμβάνει πεπερασμένου μήκους ρωγμή L . Οι επαρκώς μικροί κύκλοι $C_\epsilon^{(1)}$ και $C_\epsilon^{(2)}$ με κέντρο τις αιχμές της ρωγμής έχουν ακτίνα ϵ .

Εξετάζουμε τη μοναδικότητα των λύσεων $(u_q, \varphi_q, \sigma_{pq}, \mu_{pq})$ του προβλήματος, οι οποίες θα πρέπει επιπλέον να υπακούουν στις ακόλουθες συνθήκες λειότητας

$$u_q \in C^1(D^+) \cap C^1(D^-) \cap C^2(D_0) ,$$

$$\varphi_q \in C(D^+) \cap C(D^-) \cap C^2(D_0) ,$$

$$\sigma_{pq} \in C(D^+) \cap C(D^-) \cap C^1(D_0) ,$$

$$\mu_{pq} \in C(D^+) \cap C(D^-) \cap C^1(D_0) .$$

Η έκφραση του δυνατού έργου για τη μικροπολική θεωρία τάσεων γράφεται ως εξής

$$\int_V (\sigma_{pq} \delta \gamma_{pq} + \mu_{pq} \delta \kappa_{pq}) dV = \int_V (X_i \delta u_i + Y_i \delta \varphi_i) dV + \int_S (t_p^{(n)} \delta u_i + M_p^{(n)} \delta \varphi_i) dS \quad (2.1)$$

και, όπως απέδειξαν οι Knowles και Pucik (1973), λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μοναδικότητα στην κλασσική θεωρία, οι αναγκαίες συνθήκες αιχμής ώστε η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας να είναι φραγμένη και να μπορεί να ισχύει τόσο η Αρχή των Δυνατών Έργων όσο και το θεώρημα του Kirchoff, είναι ένα φραγμένο πεδίο μετατοπίσεων καθώς και ένα φραγμένο πεδίο καθολικών δυνάμεων στην άμεση γειτονία των αιχμών της ρωγμής. Εδώ προσθέτουμε, συμπληρωματικά με τις παραπάνω, την επιπλέον συνθήκη φραγμένου πεδίου στροφής και καθολικών ροπών έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_{D_0} W dA < \infty \text{ και} \\ \int_{D_0} X_q u_q dA + \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA + \int_C \sigma_{pq} n_p u_q dS + \int_C \mu_{pq} n_p \varphi_q dS = \\ \int_{D_0} X_q u_q dA + \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA + \int_V \partial_p (\sigma_{pq} u_q) dV + \int_V \partial_p (\mu_{pq} \varphi_q) dV = \\ \int_{D_0} X_q u_q dA + \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA + \int_V (\partial_p \sigma_{pq} u_q + \sigma_{pq} \partial_p u_q) dV + \int_V (\partial_p \mu_{pq} \varphi_q + \mu_{pq} \partial_p \varphi_q) dV = \\ \int_{D_0} X_q u_q dA + \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA + \int_V [\partial_p \sigma_{pq} u_q + \sigma_{pq} (\gamma_{pq} + \varepsilon_{pqr} \varphi_r)] dV \\ + \int_V (\partial_p \mu_{pq} \varphi_q + \mu_{pq} \kappa_{pq}) dV = \int_V \sigma_{pq} \gamma_{pq} dV + \int_V \mu_{pq} \kappa_{pq} dV = 2 \int_{D_0} W dA \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ορίζουμε συνάρτηση $g(\varepsilon)$, για κάθε θετική και στοιχειώδη ποσότητα ε , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= 2 \int_{D_\varepsilon} W dA - \int_{D_0} X_q u_q dA - \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA - \int_C t_p^{(n)} u_q dS - \int_C M_p^{(n)} \varphi_q dS \\ \Rightarrow g(\varepsilon) &= 2 \int_{D_0 - G_\varepsilon} W dA - \int_{D_0} X_q u_q dA - \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA - \int_C t_p^{(n)} u_q dS - \int_C M_p^{(n)} \varphi_q dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(\varepsilon) &= 2 \int_{D_0} W dA - 2 \int_{G_\varepsilon} W dA - \int_{D_0} X_q u_q dA - \int_{D_0} Y_q \varphi_q dA - \int_C t_p^{(n)} u_q dS - \int_C M_p^{(n)} \varphi_q dS \\
\Rightarrow g(\varepsilon) &= -2 \int_{G_\varepsilon} W dA \\
\Rightarrow g(\varepsilon) &= - \int_{G_\varepsilon} X_q u_q dA - \int_{G_\varepsilon} Y_q \varphi_q dA - \int_{C_\varepsilon} t_p^{(n)} u_q dS - \int_{C_\varepsilon} M_p^{(n)} \varphi_q dS \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις, προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\int_{C_\varepsilon} t_q u_q dS + \int_{C_\varepsilon} M_q \varphi_q dS = \int_{C_\varepsilon} n_p (\sigma_{pq} u_q + \mu_{pq} \varphi_q) dS \tag{2.4}$$

και τελικά λαμβάνουμε

$$g(\varepsilon) = - \int_{G_\varepsilon} X_q u_q dA - \int_{G_\varepsilon} Y_q \varphi_q dA + \int_{C_\varepsilon} n_p \sigma_{pq} u_q dS + \int_{C_\varepsilon} n_p \mu_{pq} \varphi_q dS \tag{2.5}$$

ενώ ισχύει, επίσης

$$\begin{aligned}
|g(\varepsilon)| &= \left| - \int_{G_\varepsilon} X_q u_q dA - \int_{G_\varepsilon} Y_q \varphi_q dA - \int_{C_\varepsilon} t_q u_q dS - \int_{C_\varepsilon} M_q \varphi_q dS \right| \\
\Rightarrow |g(\varepsilon)| &\leq \left| - \int_{G_\varepsilon} X_q u_q dA - \int_{G_\varepsilon} Y_q \varphi_q dA \right| + \left| - \int_{C_\varepsilon} t_q u_q dS - \int_{C_\varepsilon} M_q \varphi_q dS \right| \\
\Rightarrow |g(\varepsilon)| &\leq \int_{G_\varepsilon} |X_q u_q| dA + \int_{G_\varepsilon} |Y_q \varphi_q| dA + \int_{C_\varepsilon} |n_q \sigma_{pq} u_q| dS + \int_{C_\varepsilon} |n_q \mu_{pq} \varphi_q| dS \\
&\leq \left(\int_{G_\varepsilon} |X_q|^2 dA \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon} |u_q|^2 dA \right)^{1/2} + \left(\int_{G_\varepsilon} |Y_q|^2 dA \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon} |\varphi_q|^2 dA \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{C_\varepsilon} |n_q \sigma_{pq}|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} |u_q|^2 dS \right)^{1/2} + \left(\int_{C_\varepsilon} |n_q \mu_{pq}|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} |\varphi_q|^2 dS \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{G_\varepsilon} X_q X_q dA \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon} u_q u_q dA \right)^{1/2} + \left(\int_{G_\varepsilon} Y_q Y_q dA \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon} \varphi_q \varphi_q dA \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_{C_\varepsilon} \sigma_{pq} \sigma_{pq} dS \right)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} u_q u_q dS \right)^{1/2} + \left(\int_{C_\varepsilon} \mu_{pq} \mu_{pq} dS \right)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} \varphi_q \varphi_q dS \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Επειδή το σώμα είναι πεπερασμένο (κλειστό) και οι καθολικές δυνάμεις και ροπές καθώς και οι μετατοπίσεις και οι στροφές είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D_0 , θα είναι και

φραγμένες, με αποτέλεσμα να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες (όπου $\alpha, \beta, \zeta, \eta$ θετικές σταθερές)

$$\begin{aligned}
|X_q| &\leq \alpha \quad \forall x_p \in D_0 \\
|u_q| &\leq \beta \quad \forall x_p \in D_0 \\
|Y_q| &\leq \eta \quad \forall x_p \in D_0 \\
|\varphi_q| &\leq \zeta \quad \forall x_p \in D_0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

οπότε και προκύπτουν οι κάτωθι ανισότητες

$$\left(\int_{G_\varepsilon} X_q X_q dA \right)^{1/2} \leq \alpha \left(\int_{G_\varepsilon} dA \right)^{1/2} = \alpha (2\pi\varepsilon^2)^{1/2} \tag{2.7}$$

$$\left(\int_{G_\varepsilon} u_q u_q dA \right)^{1/2} \leq \beta \left(\int_{G_\varepsilon} dA \right)^{1/2} = \beta (2\pi\varepsilon^2)^{1/2} \tag{2.8}$$

$$\left(\int_{G_\varepsilon} Y_q Y_q dA \right)^{1/2} \leq \eta \left(\int_{G_\varepsilon} dA \right)^{1/2} = \eta (2\pi\varepsilon^2)^{1/2} \tag{2.9}$$

$$\left(\int_{G_\varepsilon} \varphi_q \varphi_q dA \right)^{1/2} \leq \zeta \left(\int_{G_\varepsilon} dA \right)^{1/2} = \zeta (2\pi\varepsilon^2)^{1/2} \tag{2.10}$$

$$\left(\int_{C_\varepsilon} u_q u_q dS \right)^{1/2} \leq \beta \left(\int_{C_\varepsilon} dS \right)^{1/2} = \beta (4\pi\varepsilon)^{1/2} \tag{2.11}$$

$$\left(\int_{C_\varepsilon} \varphi_q \varphi_q dS \right)^{1/2} \leq \zeta \left(\int_{C_\varepsilon} dS \right)^{1/2} = \zeta (4\pi\varepsilon)^{1/2} \tag{2.12}$$

και τελικά θα λάβουμε

$$|g(\varepsilon)| = 2\pi\varepsilon^2\alpha\beta + 2\pi\varepsilon^2\eta\zeta + \beta(4\pi\varepsilon)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} \sigma_{pq} \sigma_{pq} dS \right)^{1/2} + \zeta(4\pi\varepsilon)^{1/2} \left(\int_{C_\varepsilon} \mu_{pq} \mu_{pq} dS \right)^{1/2} \tag{2.13}$$

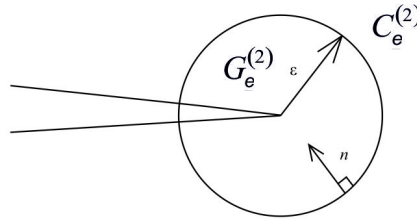
Επειδή η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας είναι συνάρτηση τετραγωνικής μορφής, υπάρχουν θετικές σταθερές λ και ξ ώστε

$$W(\sigma_{pq}, \mu_{pq}) \geq \lambda^2 \sigma_{pq} \sigma_{pq} + \xi^2 \mu_{pq} \mu_{pq} \quad (2.14)$$

κι εφόσον είναι $\sigma_{pq} \sigma_{pq} \geq 0$, $\mu_{pq} \mu_{pq} \geq 0$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sigma_{pq} \sigma_{pq} &\leq \frac{1}{\lambda^2} W \quad , \\ \mu_{pq} \mu_{pq} &\leq \frac{1}{\xi^2} W \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Παραγωγίζοντας κατά Leibniz, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2 που ακολουθεί,



Σχήμα 4. Λεπτομέρεια αιχμής ρωγμής

επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= -2 \int_{G_\epsilon} W dA \\ \Rightarrow g(\epsilon) &= -2 \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} W(r, \theta) r d\theta dr \end{aligned}$$

μετά την παραγωγή, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g'(\epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[-2 \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} W(r, \theta) r d\theta dr \right] \\ \Rightarrow g'(\epsilon) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[-2 \int_0^\epsilon \left\{ \int_0^{2\pi} W(r, \theta) d\theta \right\} r dr \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g'(\varepsilon) &= -2\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^\varepsilon h(r) r dr\right] = -2h(\varepsilon)\varepsilon = \\
&= -2\varepsilon \int_0^{2\pi} W(\varepsilon, \theta) d\theta = \\
&= -2 \int_0^{2\pi} W(\varepsilon, \theta) \varepsilon d\theta = -2 \int_{C_\varepsilon} W ds \quad .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να γράψουμε

$$|g(\varepsilon)| \leq \Phi \varepsilon^2 + \Psi (-\varepsilon g'(\varepsilon))^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4\pi(\alpha\beta + \eta\zeta) \\
\Psi &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta}{\lambda} + \frac{\zeta}{\xi} \right) \quad .
\end{aligned}$$

Τέλος, πρέπει να αποδείξουμε ότι η διαφορική εξίσωση (2.17) συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της $g(\varepsilon)$ καθώς $\varepsilon \rightarrow +0$, καθώς επίσης και ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(\varepsilon) = 0$. Η μονοτονία της $g(\varepsilon)$ εξασφαλίζει ότι είτε το $g(+0)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο είτε ότι $g(+0) = +\infty$. Συνεπώς, υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση 1: } 0 < g(+0) \leq \infty \tag{2.18}$$

$$\text{Περίπτωση 2: } -\infty < g(+0) < 0 \tag{2.19}$$

$$\text{Περίπτωση 3: } g(+0) = 0 \tag{2.20}$$

Ακολουθώντας τη μέθοδο Knowles and Pucik (1973) θα αποδείξουμε ότι μόνη πιθανή είναι η Περίπτωση 3.

Στην Περίπτωση 1, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν αριθμό ε_2 , αρκετά μικρό ώστε η ανισότητα (2.17) να ισχύει για $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ και

$$|g(\varepsilon)| - \Phi \varepsilon^2 = g(\varepsilon) - \Phi \varepsilon^2 \geq g(\varepsilon) - \Phi \varepsilon_2^2 \geq g(\varepsilon_2) - \Phi \varepsilon_2^2 > 0 \quad . \quad (2.21)$$

Από τις (2.17) και (2.21) προκύπτει ότι

$$0 < [g(\varepsilon) - \Phi \varepsilon_2^2]^2 \leq -\Psi^2 \varepsilon g'(\varepsilon) \quad (2.22)$$

για $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ και ολοκληρώνοντας την τελευταία για $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi^2} \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1) &\leq \frac{1}{g(\varepsilon_2) - \Phi \varepsilon_2^2} - \frac{1}{g(\varepsilon_1) - \Phi \varepsilon_2^2} \leq \frac{1}{g(\varepsilon_2) - \Phi \varepsilon_2^2} \\ \Rightarrow g(\varepsilon_2) - \Phi \varepsilon_2^2 &\leq \frac{\Psi^2}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

εφόσον, βάσει των ανισοτήτων στην (2.21), $g(\varepsilon_1) - \Phi \varepsilon_2^2 > 0$. Θέτοντας, τώρα, $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ στην (2.23), προκύπτει

$$g(\varepsilon_2) - \Phi \varepsilon_2^2 \leq 0 \quad (2.24)$$

η οποία, ωστόσο, είναι σε αντίθεση με την τελευταία από τις ανισότητες στην (2.21) και έτσι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η Περίπτωση 1 είναι αδύνατη.

Στην Περίπτωση 2, επιλέγουμε και πάλι μία ποσότητα $\varepsilon_2 > 0$, αρκετά μικρή ώστε να διασφαλίζεται ότι η ανισότητα στην (2.17) ισχύει για $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ και, βάσει της (2.19), θα πάρουμε

$$\begin{aligned} |g(\varepsilon)| - \Phi \varepsilon^2 &= -g(\varepsilon) - \Phi \varepsilon^2 \geq -g(\varepsilon) - \Phi \varepsilon_2^2 \geq -g(+0) - \Phi \varepsilon_2^2 \\ &= |g(+0)| - \Phi \varepsilon_2^2 > 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Από τις (2.17) και την (2.25) και ολοκληρώνοντας για $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, θα προκύψει

$$0 < [g(\varepsilon) + \Phi \varepsilon_2^2]^2 \leq -\Psi^2 \varepsilon g'(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Psi^2} \cdot \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1) \leq \frac{1}{g(\varepsilon_2) + \Phi \varepsilon_2^2} - \frac{1}{g(\varepsilon_1) + \Phi \varepsilon_2^2} \quad (2.26)$$

Όμως, ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της τελευταίας ανισότητας είναι αρνητικός οπότε

$$-g(\varepsilon_1) - \Phi \varepsilon_2^2 \leq \frac{\Psi^2}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} \quad (2.27)$$

και, θέτοντας $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ στην (2.27)

$$|g(+0)| - \Phi \varepsilon_2^2 \leq 0 \quad , \quad (2.28)$$

η οποία, ωστόσο, είναι αντίθετη με την τελευταία από τις ανισότητες στην (2.25) και συνεπώς οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η Περίπτωση 2 είναι αδύνατη.

Συνεπώς, αναγκαστικά οδηγούμαστε στην Περίπτωση 3 στην (2.20). Αυτό σημαίνει ότι το όριο της συνάρτησης $g(\varepsilon)$, καθώς $\varepsilon \rightarrow +0$, υπάρχει πράγματι καθώς και ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} g(\varepsilon) = 0$. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι οι συνθήκες αιχμής (edge conditions) που απαιτούνται στις (2.6) είναι οι απαραίτητες συνθήκες για να υπάρξει μοναδικότητα της λύσης.

Γενικά Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία τονίσαμε τις συνθήκες αιχμής (φραγή σε ορισμένα πεδία στη γειτονία αιχμών ρωγμής) οι οποίες εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της λύσης για επίπεδα προβλήματα ρωγμής με βάση τη μικροπολική θεωρία. Βασιστήκαμε σε ενεργειακές σχέσεις και αποδείξαμε ότι απαιτούνται πιο αυστηρές συνθήκες για αυτές τις γενικευμένες θεωρίες Συνεχούς Μέσου σε σύγκριση με αυτές που απαιτούνται στην κλασσική ελαστικότητα. Οι πληροφορίες που προκύπτουν από τις συνθήκες αιχμής είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την επίλυση προβλημάτων οριακών συνθηκών που περιέχουν ρωγμές εφόσον θα είναι εκ των προτέρων γνωστή η συμπεριφορά συγκεκριμένων πεδίων (βαθμίδας μετατόπισης ή στροφής ή παραμόρφωσης) στη γειτονία των αιχμών της ρωγμής και θα είναι δυνατός, έτσι, ο έλεγχος καταλληλότητας πιθανών λύσεων.

Επιπλέον, θα πρέπει να τονιστεί ότι η μορφή των καταστατικών εξισώσεων δεν επηρεάζει τα όρια εφόσον οι καταστατικές σχέσεις παραμένουν γραμμικές. Με βάση αυτή την παρατήρηση, μπορεί να υπάρξει εφαρμογή και σε πρόσφατες τροποποιήσεις της γενικής θεωρίας.

Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι πλήθος λύσεων σε προβλήματα ρωγμών (λύσεων βασισμένων στις γενικευμένες θεωρίες Συνεχούς Μέσου) συμφωνούν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν στη συγκεκριμένη εργασία (για παράδειγμα, οι πρόσθετες συνθήκες στην άμεση γειτονία αιχμών ρωγμής από τις ήδη υπάρχουσες της κλασσικής ελαστικότητας).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θεωρούμε σώμα όγκου V , με ομαλό σύνορο S , ακολουθώντας τη στρατηγική του θεωρήματος Neumann (όπως στην κλασική Ελαστικότητα) ενώ θεωρούμε επίσης και την περίπτωση μικτών συνοριακών συνθηκών $\{(t_p^{(n)'}, M_p^{(n)'})$ στο S_p και (u_i, φ_i) στο $S_u\}$. Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις (ίδιο υλικό, ίδια γεωμετρία, ίδιες συνοριακές συνθήκες και μαζικές δυνάμεις), $\Lambda' = (u_i', \varphi_i', \sigma_{ij}', \mu_{ij}')$ και $\Lambda'' = (u_i'', \varphi_i'', \sigma_{ij}'', \mu_{ij}'')$. Εφόσον οι συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} & \int_S \left[\left(t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} \right) \left(u_i' - u_i'' \right) + \left(M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} \right) \left(\varphi_i' - \varphi_i'' \right) \right] dS \\ &= \int_{S_p} \left[\left(t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} \right) \left(u_i' - u_i'' \right) + \left(M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} \right) \left(\varphi_i' - \varphi_i'' \right) \right] dS \\ &+ \int_{S_u} \left[\left(t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} \right) \left(u_i' - u_i'' \right) + \left(M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} \right) \left(\varphi_i' - \varphi_i'' \right) \right] dS \end{aligned} \quad (1)$$

Στο $\int_{S_p} \left[\left(t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} \right) \left(u_i' - u_i'' \right) + \left(M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} \right) \left(\varphi_i' - \varphi_i'' \right) \right] dS$ είναι $t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} = 0$ και $M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} = 0$ ενώ στο $\int_{S_u} \left[\left(t_p^{(n)'} - t_p^{(n)''} \right) \left(u_i' - u_i'' \right) + \left(M_p^{(n)'} - M_p^{(n)''} \right) \left(\varphi_i' - \varphi_i'' \right) \right] dS$ είναι $u_i' - u_i'' = 0$ και $\varphi_i' - \varphi_i'' = 0$. Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας, μπορούμε να πούμε ότι και η διαφορά των λύσεων $\Lambda = (u_i, \varphi_i, \sigma_{ij}, \mu_{ij})$, θα αποτελεί, επίσης, λύση του προβλήματος. Θα είναι

$$\begin{aligned}
u_i &= u_i' - u_i'' \\
\varphi_i &= \varphi_i' - \varphi_i'' \\
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}' - \sigma_{ij}'' \\
\mu_{ij} &= \mu_{ij}' - \mu_{ij}''
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Clapeyron για τη λύση $\Lambda = (u_i, \varphi_i, \sigma_{ij}, \mu_{ij})$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
& \int_{S_u} t_p^{(n)} u_k dS + \int_{S_u} M_p^{(n)} \varphi_k dS + \int_{S_p} t_p^{(n)} u_k dS + \int_{S_p} M_p^{(n)} \varphi_k dS \\
&= 2 \int_V W dV
\end{aligned} \tag{2}$$

Κάνοντας χρήση των (1) και (2) προκύπτει ότι το αριστερό μέλος του ολοκληρώματος είναι ίσο με μηδέν και άρα

$$\int_V W dV = 0 \Rightarrow W = 0 \tag{3}$$

Επειδή, όμως, η παραμορφωσιακή ενέργεια είναι τετραγωνική μορφή, θετικά ορισμένη, η μόνη περίπτωση για να είναι ίση με το μηδέν είναι το σώμα να είναι αφόρτιστο. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = 0 & \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} = 0 & \quad \Rightarrow \quad u_i = 0 \\
\mu_{ij} = 0 & \quad \Rightarrow \quad \kappa_{ij} = 0 & \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Συνεπώς, οι δύο λύσεις που υποθέσαμε ταυτίζονται και έτσι καταλήγουμε στη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος της ρωγμής στα πλαίσια της μικροπολικής θεωρίας Ελαστικότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Aero, E.L., Kuvshinskii, E.V., 1960. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Fiz. Tverd. Tela* 2, 1399-1409, Translated in *Soviet Physics—Solid State* 2, 1272-1281 (1961).
- Bleustein, J. L., 1967. A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *Int. J. Solids Struct.* 3, 1053-1057.
- Cauchy, A.L., 1851. Note sur l'equilibre et les mouvements vibratoires des corps solides. *Comptes-Rendus Acad. Paris* 32, 323-326.
- Cleveringa, H.H.M., van der Giessen, E., Needleman, A., 2000. A discrete dislocation analysis of mode I crack growth. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 1133–1157.
- Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Hermann et Fils, Paris.
- Elssner, G., Korn, D. and Ruhle, M., 1994. The influence of interface impurities on fracture energy of UHV diffusion bonded metal-ceramic bicrystals. *Scripta Metall. Mater.* 31, 1037–1042.
- Eringen, A.C., 1968. Theory of micropolar elasticity. In: Liebowitz, H. (Ed.), *Fracture – An Advanced Treatise*, Vol. 2, Academic Press, New York, pp. 621-729.
- Eringen, A. C., Suhubi, E. S., 1964a. Non-linear theory of micro-elastic solids I. *Int. J. Eng. Sci.* 2, 189-203.
- Eringen, A. C., Suhubi, E. S., 1964b. Non-linear theory of micro-elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* 2, 389-404.
- Freund, L. B., 1990. *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Georgiadis, H. G., Brock, L. M., 1994. Exact elastodynamic analysis of some fracture specimen models involving strip geometries. *Int. J. Solids Struct.* 31, 2599-2613.
- Georgiadis, H. G., Rigatos, A. P., 1996. Transient SIF results for a cracked viscoelastic strip under concentrated impact loading-an integral-transform/function-theoretic approach. *Wave Motion* 24, 41-57.
- Germain, P., 1973. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: microstructure. *SIAM J. Appl. Math.* 25, 556-575.
- Green, A.E., Rivlin, R.S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 113-147.
- Knowles, J. K., Pucik, T. A., 1973. Uniqueness for plane crack problems in linear elastostatics. *J. Elast.* 3, 155-160.
- Lubarda, V.A., Markenskoff, X., 2000. Conservation integrals in couple stress elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 48, 553-564.

- Lubarda, V. A., Markenschoff, X., 2003. The stress field for a screw dislocation near cavities and straight boundaries. *Material Science and Engineering A-Structural materials properties microstructure and processing*, Vol. 349, Is. 1-2, 327-334.
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16, 51-78.
- Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 109-124.
- Nowacki, W., 1972. *Theory of micropolar elasticity*. CISM International Centre for Mechanical Sciences No. 25. Springer-Verlag.
- Toupin, R.A., 1962. Perfectly elastic materials with couple stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 385-414.
- Voigt, W., 1887. *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*. *Abh. Ges. Wiss. Göttingen* 34.