Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμενες Μαθηματικες Επιστημες

Ευκλείδια Θεωρια Ramsey και χρωματισμοι.
Ο χρωματικος αριθμος του επιπεδου.

Επιβλεπων: Επ.Καθηγητης ΕΜΠ Βασίλης Κανελλόπουλος

Κιουβρεκης Ιωαννης

Περιεχόμενα

List of Figures

List of Tables

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ramsey Theory

1. Θεωρήματα Ramsey για το πεπερασμένο

Θα αρχίσουμε τη παρουσίαση αυτής της διπλωματικής με το παρακάτω πρόβλημα.

Το πρόβλημα της παρέας

Είναι αλήθεια οτι σε μια παρέα έξι ατόμων είτε τρείς θα γνωρίζονται είτε τρείς θα άγνωστοι μεταξύ τους;

Αν βρεθούμε σε μία παρέα έξι ατόμων είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι είτε θα υπάρχουν τρείς που θα γνωρίζονται μεταξύ τους είτε τρείς που είναι άγνωστοι μεταξύ τους. Αυτό το απλό παράδειγμα είναι η εισαγωγή μας για τους αριθμούς Ramsey. Ο αριθμός Ramsey $\mathcal{R}(n,m)$ ειναι ο ελαχιστος αριθμος ετσι ωστε σε μια παρεα $\mathcal{R}(n,m)$ το πληθος ανθρωπων να βρισκονται ειτε n που θα γνωριζονται ολοι μεταξυ τους ειτε m που θα ειναι αγνωστοι μεταξυ τους.
Το προβλημα της παρεας ειναι εισαγωγικο προβλημα πριν αρχισουμε την παραθεση των βασικων θεωρηματων της πεπερασμενης αλλα και απειρης θεωριας Ramsey. Η θεωρια Ramsey ασχολειται με χρωματισμους συνολων και τις ιδιοτητες που εχουν αυτοι οι χρωματισμοι. Παρακατω παραθετουμε το πρωτο θωρημαπου μπορει καποιος να συναντησε διαβαζοντας θεωρια Ramsey.

Θεωρημα 1.1. *Έστω $K \in \mathbb{N}$ και $C : [\mathbb{N}]^k \to \{1,\ldots,l\}$ ένας πεπερασμένος χρωματισμός του $[\mathbb{N}]^k$, τότε υπάρχει $M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο τέτοιο ώστε το σύνολο $[M]^k$ είναι μονοχρωματικό.* $\mathbb{R}$

Το οποιο μας λεει το εξης: Αν βαψουμε με l χρωματα τον k διαστατο χωρο $\mathbb{N}^k$ τοτε μπορουμε να βρουμε ενα απειρο υποσυνολο των φυσικων ωστε ο k διαστατος υποχωρος που παραγεται ειναι μονοχρωματικος.Για την τετριμενη περιπτωση οταν $k = 1$ ειναι ευκολο να το δουμε στις περισσοτερες διαστασεις η απαντηση δεν ειναι τετριμμενη. Παρακατω παρουσιαζουμε τα πιο σημαντικα θεωρηματα και πορισματα.

2. Μονοχρωματικα Συστηματα

Απο εδω και στο εξης θα γραφουμε $\mathbb{N}$ για το συνολο των θετικων ακεραιων $\{1,2,\ldots\}$. Για καθε θετικο ακεραιο n θα γραφουμε $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. Επισης για καθε συνολο X θα συμβολιζουμε με $X^{(r)} = \{A \subset X \ : \ |A| = r\}$.

Ορισμος 1.1. Εστω ενα συνολο X, τοτε σαν $k-$χρωματισμο του $X^{(r)}$ εννοουμε μια συναρτηση

$$\chi : X^{(r)} \to [k]$$

Αν υπαρχει $M \subset X$ τετοιο ωστε η $\chi|_{M^{(r)}}$ ειναι σταθερη συναρτηση τοτε το M λεγεται μονοχρωματικο.

Θεωρημα 1.2. *Για καθε $2-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(2)}$ υπάρχει ένα άπειρο μονοχρωματικό σύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$.*

Αποδειξη. Στοχος μας ειναι να βρουμε ενα υποσυνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ απειρο τετοιο ωστε το συνολο $M^{(2)}$ να ειναι μονοχρωματικο. Ζημαντικό βήμα στην απόδειξη μας είναι να θεωρήσουμε το πλήρες απειρο γράφημα $\langle V, E\rangle$ με $V = \mathbb{N}$. Ο χρωματισμος χ ειναι ισοδυναμος με το να χρωματισουμε τις πλευρες του γραφηματος με δυο χρωματα ετσι ωστε το χρωμα της πλευρας (x,y) να ειναι ιδιο με το χρωμα του $\chi(\{x,y\})$. Διαλεγοντας αυθαιρετα εναν φυσικό αριθμό a_1 τότε υπάρχει ένα άπειρο σύνολο φυσικών αριθμών, έστω $X_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{a_1\}$, έτσι ώστε όλες οι πλευρές με κορυφές το a_1 και κάποιο στοιχείο του X_1 έχουν το ιδιο χρωμα πλευρας, έστω το χ_1. Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε ένα στοιχείο $a_2 \in X_1$ και με το ιδιο τρόπο να κατασκευάσουμε ένα σύνολο $X_2 \subseteq X_1 \setminus \{a_2\}$ έτσι ώστε κάθε πλευρά με κορυφές το a_2 και κάποιο στοιχείο του X_2 να έχουν το ίδιο χρώμα, έστω το χ_2. Δουλεύοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες, την $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ και την $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Για την $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισχυει οτι καθε πλευρα με κορυφες a_i, a_j με $i < j$ εχει χρωμα χ_i, δλδ $\chi(\{a_i, a_j\}) = \chi_i$ Ενω για την $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ισχυει

$$\chi_n = 1 \text{ η } 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα υπαρχει ενα $K \subseteq \mathbb{N}$ απειρο τετοιο ωστε η $\{\chi_k\}_{k\in K}$ ειναι σταθερη. αυτο συνεπαγεται οτι η υπακολουθια $\{a_k\}_{k\in K} = M \subset \mathbb{N}$ ειναι μονοχρωματικο συνολο. □

Πορισμα 1. *Για καθε $k-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(2)}$ υπάρχει ένα άπειρο μονοχρωματικό σύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$.*

Αποδειξη. Η αποδειξη ειναι ιδια με το προηγουμενο θεωρημα. □

το ενδιαφερον ειναι η εφαρμογη των θεωρηματων Ramsey σε αλλους κλαδους των Μαθηματικων, ενα πρωτο παραδειγμα ειναι το παρακατω πορισμα, το οποιο φυσικα μας ειναι ηδη γνωστό από την ανάλυση.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Έστω X ένας ολικά διατεταγμένος χώρος, τότε κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μονότονη ακολουθία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ όπου X ένας μερικά διατεταγμένα χώρος τότε μπορούμε να χρωματίσουμε το σύνολο $\mathbb{N}^{(2)}$ ως εξής:

- $\{k, m\}$ (με $k < m$) «αύξουσα» αν ισχύει ότι $x_k < x_m$
- $\{k, m\}$ (με $k < m$) «φθίνουσα» αν ισχύει ότι $x_k > x_m$

από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει ένα $M \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο έτσι ώστε το $M^{(2)}$ να είναι μονοχρωματικό, αυτό άμεσα συνεπάγεται ότι η υπακολουθία $\{x_m\}_{m\in M}$ είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα, δηλαδή σε κάθε περίπτωση μονότονη. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Για κάθε $2-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(r)}$, υπάρχει ένα $M \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε το σύνολο $M^{(r)}$ είναι μονοχρωματικό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο r. Για $r = 1$ η περίπτωση είναι τετριμμένη. Επαγωγική υπόθεση. Έστω ότι ισχύει για $r \geq 1$, δηλαδή για κάθε $2-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(r)}$ υπάρχει ένα άπειρο $M \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε το $M^{(r)}$ είναι μονοχρωματικό. Θα αποδειξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε $2-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(r+1)}$. Έστω ένας $2-$χρωματσμός του $\mathbb{N}^{(r+1)}$

$$\chi : \mathbb{N}^{(r+1)} \mapsto [2]$$

και ένα $a_1 \in \mathbb{N}$ Στη συνέχεια της απόδειξης θα εργαστούμε επαγωγικά (όπως και στο προηγούμενο θεώρημα). Καταρχάς θα κατασκευάσουμε ένα $2-$χρωματισμό χ' για το σύνολο $\left(\mathbb{N} \setminus \{a_1\}\right)^{(r)}$ ως εξής:

$$\chi'(A) = \chi(A \cup \{a_1\})$$

για κάθε $A \in \left(\mathbb{N} \setminus \{a_1\}\right)^{(r)}$. Λόγω επαγωγικής υπόθεσης υπάρχει ένα άπειρο $M_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus \{a_1\}$ έτσι ώστε για κάθε $A \in M_1^r$ ισχύει ότι

$$\chi'(A) = \chi(A \cup \{a_1\}) = \chi_1$$

. Στο επόμενο βήμα διαλέγουμε ένα $a_2 \in M_1$ και κατασκευάζουμε αντίστοιχα ένα σύνολο $M_{2\subseteq M_1 \setminus \{a_2}$ χρωματισμό χ'' έτσι ώστε $\chi''(B) = \chi(B \cup \{a_2\})$. Δουλεύοντας επαγωγικά αυτο το οποίο επιτυγχάνουμε είναι να κατασκευάσουμε δύο ακολουθίες

- την ακολουθία φυσικών αριθμών $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$
- και την ακολουθία «χρωμάτων» $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ τέτοιες ώστε για οποιαδήποτε ακολουθία δεικτών $i_1 < \ldots < i_r$ να ισχύει

$$\chi(\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}) = \chi$$

□

Πορισμα 3. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $2-$χρωματισμό του $[n]^{(r)}$ υπάρχει ένα μονοχρωματικό σύνολο $M \in [n]^{(m)}$*

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με εια άτοπο επαγωγή. Έστω οτι δεν ισχύει η υπόθεση μας τότε θα κατασκευάσουμε εναν $2-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^{(r)}$ χωρίς ενα $m-$χρωματικό σύνολο, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το προηγούμενο θεώρημα. Η κατασκευή έχει ώς εξής: Για κάθε $n \geq r$ έχουμε ένα χρωματισμό $\chi_n \, [n]^{(r)} \mapsto [2]$ χωρίς μονοχρωματικό $m-$σύνολο. Επειδή το $[r]^{(r)}$ ειναι πεπερασμένο υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος τρόποι για να χρωματίσουμε το $[r]^{(r)}$ άρα και άπειρους το πλήθος τρόποι ώστε οι περιορισμοί $\chi_r| \, [r]^{(r)}, \chi_{r+1}| \, [r]^{(r)}, \chi_{r+2}|, \ldots$ να ταυτίζονται, έστω $\chi_i| \, [r]^{(r)} = d_r$ για όλα τα i που ανήκουν στο A_1, το οποίο είναι απειροσύνολο και d_r είναι κάποιος χρωματισμός του $[r]^{(r)}$. Ανάμεσα στα χ_i με $i \in A_1$ θα υπάρχουν άπειρα τα οποία θα ταυτίζονται στο $[r+1]^{(r)}$, έστω $\chi_i \, [r+1]^{(r)} = d_{r+1}$ για κάθε $i \in A_2$ με $d_{r+1} : [r+1]^{(r)} \to 2$ και $A_2 \subset A_1$ άπειρο. Δουλεόντας επαγωγικά κατασκευάζουμε χρωματισμους $d_n \, [n]^{(r)} \to 2$ για $n = r, r+1, \ldots$ έτσι ώστε:

(1) κανένας d_n δεν έχει μονοχρωματικό $m-$σύνολο μιας και υπάρχει k τέτοιο ώστε $d_n = \chi_k| \, [n]^{(r)}$
(2) για κάθε n ισχύει $d_{n+1}| \, [n]^{(r)} = d_n$

άρα μπορούμε να ορίσουμε τον χρωματισμό $\chi : \mathbb{N}^r \to [2]$ με $\chi(A) = d_n(A)$ για κάθε $n \geq \max A$. Ο χρωματισμός αυτός που μόλις ορίσαμε είναι καλά ορισμένος λότω του (ii) και δεν υπάρχει μονοχρωματικό $m-$σύνολο λόγω του (i). Τέτοιος όμως χρωματισμός δεν μπορει να υπάρχειο γιατί έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημαμ (2). ☐

Παρατηρηση. Η προηγούμενη απόδειξη είναι μια απόδειξη συμπάγειας μιας και αυτό που αποδειξαμε είναι ότι ο τοπολογικός χώρος $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο, η οποία επάγεται από την μετρική $d(f, g) = \dfrac{1}{\min \{n \ : f(n) \neq g(n)\}}$

Θεωρημα 1.4. *The Canonical Ramsey Theorem Για κάθε χρωατισμό του $\mathbb{N}^{(2)}$ με ένα αυθαίρετο σύνολο «χρωμάτων», υπάρχει ένα άπειρο σύνολο M τέτοιο ώστε:*

(1) *ο χρωματισμός χ είναι σταθερός στο $M^(2)$, είτε*
(2) *ο χρωματισμός χ είναι $1-1$ στο $M^(2)$, είτε*
(3) *$\chi(ij) = \chi(kl)$ αν και μονο αν $i = k$, για κάθε $i, j, k, l \in M$ με $i < j$ και $k < l$ είτε*

(4) $\chi(ij) = \chi(kl)$ *αν και μονο αν* $j = l$, *για κάθε* $i, j, k, l \in M$ *με* $i < j$ *και* $k < l$ *είτε*

Αποδειξη. Καταρχάς όταν θα γράφουμε $ijkl$ εννοούμε το σύνολο $\{i, j, k, l\}$ με $i < j < k < l$. Στη συνέχεια κατακευάζουμε έναν $2-$χρωματισμό, με «χρώματα» ΝΑΙ και ΟΧΙ για το $\mathbb{N}^(4)$ έτσι ώστε το σύνολο $ijkl$ να επεικονίζεται στο ΝΑΙ αν $\chi(ij) = \chi(kl)$ και στο ΟΧΙ αν $\chi(ij) \neq \chi(kl)$. Από το Θεώρημα Ramsey για $r = 4$ έχουεμ ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο M το οποίο είναι μονοχρωματικό. Αν το M είναι μονοχρωματικο με χρώμα το ΝΑΙ τότε το M είναι και μονοχρωματικό για τον χρωματισμό χ. Αυτό γιατί για οποιαδήποτε ij και kl που ανήκουν στο $M^(2)$ αν διαλέξουμε οποιαδήποτε $m < n \in M$ με $m > i, j, k, l$ τότε $\chi(ij) = \chi(mn) = \chi(kl)$ άρα ισχύει η πρόταση (i). Αν υποθέσουμε τώρα ότι το M είναι μονοχρωματικό σύνολο με χρώμα το ΟΧΙ τότε $\square$

Παρατηρηση. Το θεωρημα αυτό συνεπάγεται το Θεώρημα 1 μιας αν το σύνολο των χρωμάτων είναι πεπερασμένο οι περιπτώσεις (ii),(iii), και (iv) είναι αδύνατες.

2.1. Το θεώρημα Van der Waerden. Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το θεώρημα του Van der Waerden και τις γενικεύσεις του. Είναι μια εισαγωγή για το πως η απειρη συνδυαστική «μιλαέι» για τις ομοθεσίες και κατεπέκταση πως μπορει να συνδεθεί με άλλους κλάδους των Μαθηματικών όπως η Αναλυτική θεωρία αριθμών αλλά και η μελέτη γεωμετρικών ιδιοτήτων διανυσματικών χώρων όπως ο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Αυτό το οποίο θα δειξουμε είναι το εξής:

Για κάθε $2-$χρωματισμό των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική ακολουθία μήκους m, δηλαδή υπάρχουν $\alpha, \alpha + \lambda, \ldots, \alpha + (m-1)\lambda \in \mathbb{N}$ η οποία είναι μονοχρωματική.

το οποίο θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμο με το παρακάτω:

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $2-$χρωματισμό του $[n]$ υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική ακολουθία μήκους m.

Παρατηρηση. Η ισοδυναμία των δύο προτάσεων δεν πρέπει να μας εκπλήσει μιας και από την πρώτη μπορούεμ αν αποδειξουμε την δεύτερη χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά μας επιχειρήματα συμπάγειας.

Στην απόδειξη που θα δώσουμε παρακάτω θα εφαρμόσουμε την εξής ιδέα:

Γενικεύοντας θα αποδειξουμε ότι για κάθε $m, k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε για κάθε $k-$χρωματισμό του $[n]$ υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική ακολουθία μήκους m. Θα γράφουμε $W(m, k)$ για τον ελάχιστο φυσικό αριμθό n, αν υπάρχει, για τον οποίο ισχύει η πρόταση.

Μια ακόμα ιδεά που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η παρακατω:

Αν με $A_1, A_2, \ldots, A_r$ συμβολίσουμε μια ακολουθία αριθμητικών προόδων μήκους l, έστω $A_i = \{a_i, a_i + d_i, a_i + 2d_i, \ldots, a_i + (l-1)d_i\}$. Θα λέμε ότι οι αριθμηιτκές πρόοδοι $A_1, A_2, \ldots, A_r$ έχουν εστία τον αριθμό m αν και μονο αν ισχύει ότι $a_i + ld_i$ για κάθε i. Ένα παράδειγμα, οι αριθμητικές πρόοδοι $\{2, 5\}$ και $\{4, 6\}$ έχουν εστία το 6.

Προταση 1.5. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $r \leq k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k-$χρωματισμό του $[n]$ είτε υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους 3 είτε υπάρχουν r το πλήθος αριθμητικές πρόοδοι μήκους 2 που έχουν ίδια εστία.*

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο r.

- Για $r = 1$ η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη γιατί μπορούμε να θέσουμε $n = k + 1$ και από την αρχή του περιστερώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία με το ίδιο χρώμα άρα και μια $r = 1$ αριθμητική πρόοδος μήκους 2.
- Η επαγωγική υπόθεση μας λέει ότι για $r - 1 \geq 1$ υπάρχει ένας φυσικός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η υπόθεση μας. Θα αποδείξουμε ότι για τον r ο φυσικός αυτός είναι ο $(k^{2n} + 1)\, 2n$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν $k-$χρωματισμό του συνόλου $[(k^{2n} + 1)\, 2n]$ ο οποίος δεν περιέχει μια αριθμητική πρόοδο μήκους 3. Τότε θα διαμερίσουμε το σύνολο $[(k^{2n} + 1)\, 2n]$ σε $k^{2n} + 1$ υποσύνολα μήκους $2n$ το καθένα, έστω λοιπόν $B_i = [2n(i-1) + 1, 2ni]$ για $i = 1, \ldots, k^{2n} + 1$. Σε κάθε υποσύνολο της διαμέρισης υπάρχουν $r-$ αριθμητικές πρόοδοι μήκους 2 με χρωματική εστία, λόγω της επιλογής του n και η χρωματική εστία και αυτό γιατί κάθε υποσύνολο της διαμέρισης έχει μήκος (πληθικότητα) $2n$. Επειδή κάθε B_i έχει $2n$ στοιχεία υπάρχουν k^{2n} δυνατοί $k-$χρωματισμοί και επειδή η διαμέριση έχει $k^{2n} + 1$ υποσύνολα συνεπάγεται ότι υπάρχουν δύο υποσύνολα της διαμέρισης, έστω B_s και B_{s+t} τα οποία θα έχουν τον ίδιο χρωματισμό. Επειδή το B_s περιέχει $r - 1$ το πλήθος αριθμητικές προόδους μήκους, έστω $\{a_i, a_i + d_i\}$, $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ με χρωματική εστία f

συνεπάγεται ότι το σύνολο B_{s+t}, που είναι μεταφορά του B_s κατα $2nt$, θα έχει (τουλάχιστον) τις εξής $r-1$ το πλήθος αριθμητικές πρόοδοι $\{a_i+2nt, a_i+d_i+2nt\}$, $i \in \{1,\dots,r-1\}$ με χρωματική εστία $f+2nt$ με τον χρωματισμό να παραμένει αναλλοίωτος από την μεταφορά. Η παρατήρηση αυτή συνεπάγεταί ότι οι αριθμητικές πρόοδοι $\{a_i, a_i+d_i\}+2nt$, $i \in \{1,\dots,r-1\}$ έχουν χρωματική εστία $f+4nt$, την ίδια χρωματική εστία με την αριθμητική πρόοδο $\{f, f+2nt\}$. Αρα έχουμε r το πλήθος αριθμητικές προόδους μήκους 2 με την ίδια χρωματική εστία.

□

Παρατηρηση. στην βιβλιογραφία η ιδέα του να βρούμε το πληθος των τόπων ...

Παρατηρηση. Η προηγούμενη απόδειξη μας δίνει ένα άνω φράγμα για το $W(3,k) \le \left. k^{k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k^{4k}}}}}}} \right\} (k-1)$.

Πορισμα 4. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε όποτε το $[n]$ χρωματίζεται με k χρώματα, υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους 3.*

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενο θεωρήματος, αρκεί να θέσουμε $r=k$, τότε ανεξάρτητα από το χρώμα της χρωματικής εστίας υπάρχει μια αριθμητική πρόοδος μήκους 3. □

Θεωρημα 1.6. *Έστω $m,k \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $k-$χρωματισμό του $[n]$ υπάρχει μονοχρωματική ακολουθλια μήκους m*

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο m. Για $m=1$ έχουμε τετριμμένη περίπτωση. Η επαγωγική μας υπόθεση είναι ότι για $m-1 \ge 1$ ισχύει η υπόθεση και έστω $n = W(m-1,k)$. Για να συνεχίσουμε την απόδειξη μας θα αποδειξουμε το εξής λήμμα:

Έστω $k \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $r \le k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k-$χρωματισμό του $[n]$ είτε υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκους m είτε υπάρχουν r το πλήθος αριθμητικές πρόοδοι μήκους $m-1$ που έχουν ίδια εστία.

Αν αποδειξουμε το λήμμα αυτο, όπως και πριν η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνεπεια του, αρκεί να θλεσουμε $r=k$. πόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο r.

- Για $r=1$ η απόδειξη είναι αρκετά εύκολη γιατί μπορούμε να θέσουμε $n = W(m-1,k)$ κ

- Η επαγωγική υπόθεση μας λέει ότι για $r-1 \geq 1$ υπάρχει ένας φυσικός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ισχύει η υπόθεση μας. Θα αποδείξουμε ότι για τον r ο φυσικός αυτός είναι ο $W\left(m-1, k^{2n}\right) 2n$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν $k-$χρωματισμό του συνόλου $\left[W\left(m-1, k^{2n}\right) 2n\right]$ ο οποίος δεν περιέχει μια αριθμητική πρόοδο μήκους m. Τότε θα διαμερίσουμε το σύνολο $\left[W\left(m-1, k^{2n}\right) 2n\right]$ σε $W\left(m-1, k^{2n}\right)$ υποσύνολα μήκους $2n$ το καθένα, έστω λοιπόν $B_i=[2n(i-1)+1, 2ni]$ για $i=1, \ldots, W\left(m-1, k^{2n}\right)$. Από τον ορισμό του $W\left(m-1, k^{2n}\right)$ μπορούμε να βρούμε $m-1$ το πλήθος υποσύνολα της διαμέρισης, έστω $B_s, B_{s+t}, \ldots, B_{s+(m-2)t}$ (τα οποία όπως και πρίν όλα είναι μεταφορές του πρώτου κατα kt) με το ίδιο χρωματσμό. Το επόεμνο βήμα είναι να παρατηρήσουμε ότι το B_s περιέχει $r-1$ το πλήθος αριθμητικές προόδους μήκους $m-1$, έστω $A_1, \ldots, A_{r-1}$ με $A_i=\{a_i, a_i+d_i, \ldots, a_i+(m-2)d_i\}$, οι οποίες έχουν την ίδια χρωματική εστία, έστω f, η οποία ανήκει και αυτή στο B_s.΄Οπως και στην προηγούμενη απόδειξη κατασκευάζουμε $r-1$ το πλήθος αριθμητικές προόδους, τις $A_i^{\prime}=\{a_i, a_i+(d_i+2nt), \ldots, a_i+(m-2)d_i\}$ για $1 \leq r \leq r-1$ έτσι ώστε κάθε $A_i^{\prime}$ να έχει χρωματική εστία $f+(m-1)2nt$. Τέλος κατασκευάζουμε την μονοχρωματική αριθμητική πρόοδο $\{f, f+2nt, \ldots, f+(m-2)2nt\}$ με χρωματική εστία $f+(m-1)2nt$.

□

Ας δούμε κάποιές

Ορισμος 1.2. Ορίζουμε σαν Ackermann ιεραρχία (hierarchy) την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} f_1(x)= & \quad 2x \\ f_{n+1}(x)= & \ f_n^{(x)}(1) \text{ για } n \geq 1 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$\begin{gathered} f_2(x)=2^x \\ f_3(x)=\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} x \\ f_4(1)=2 \\ f_4(2)=2^2 \\ f_4(3)=2^{2^{2^2}}, \kappa o \kappa \end{gathered}$$

Η απόδειξη που κάναμε με την διπλή επαγωγή δείξαμε πυσιαστικά ότι οι αριθμοί $W(m, k)$ (συναρτήσεις δύο μεταβλητών) αυξάνουν πιο γρήγορα σε σχέση με την συνάρτηση f_n. Από τα πιο πρόσφατα αποτελέσματ είναι τα παρακάτω τρία φραγματα:

$$W(m,k) \leq f_4(m,k) \tag{1}$$

$$W(m,2) = W(2) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{m}}}}}}} \tag{2}$$

και

$$W(m,2) = W(m) \geq \frac{2^m}{8m} \tag{3}$$

Πορισμα 5. *Για κάθε $k-$χρωματισμό των φυσικών $\mathbb{N}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα χρώμα το οποίο περιέχει μια αυθαίρετα μεγάλη αριθμθητική πρόοδο*

Παρατηρηση. Το προηγούμενο πόρισμα δεν μας εγγυάται ότι η αριθμητική πρόοδος είναι άπειρη. Αν χρωματίσουμε τους φυσικούς ώς εξής:

- Το 1 το χρωματιζουμε με το 1
- Τα $2, 3$ τα χρωματιζουμε με το 2
- Τα $4, 5, 6$ τα χρωματίζουμε με το 3 κ.ο.

δουλευοντας αναδρομιακα κατασκευαζσαμε εναν χρωματισμο των φυσικων έτσι ώστε μπορούμε να βρούμε μια αριθμητική πρόοδο με μήκος n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αλλά καμία δεν έχει άπειρο μήκος.

Θεωρημα 1.7. *Έστω $m, k \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε $k-$χρωματισμό των φυσικών υπάρχει μια αριθμητική πρόοδος μήκους m τέτοια ώστε μαζί με τον λόγο της είναι μονοχρωματική.*

Αποδειξη. Το θεώρημα μας λέει ότι για ότε για κάθε $k-$χρωματισμό των φυσικών υπάρχει μια αριθμητική πρόοδος μήκους m, έστω $\{a, a + d, \ldots, a + (m-1)d\}$, το σύνολο $\{a, a+d, \ldots, a+(m-1)d, d\}$ είναι μονοχρωματικό. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των χρωματων k.

- Για $k = 1$ η περίπτωση είναι τετριμμένη.
- Έστω ότι για $k - 1 \geq 1$ ισχύει η επαγωγική υπόθεση, μάλιστα από το θεώρημα Van den Waerden μπορούμε να επιλέξουμε φυσικός n τέτοιος ώστε για $k-1-$χρωματισμό του $[n]$ υπάρχει μια αριθμητική προοδος που μαζί με το λόγο της είναι ένα μονοχρωματικό σύνολο πληθικότητας n. Θα αποδειξουμε ότι ο φυσικός $W\left(n(m-1)+1, k\right)$ ικανοποιεί την υπόθεση μας για k. Έστω ένας $k-$χρωματισμός του $[W\left(n(m-1)+1, k\right)]$ τότε υπάρχει μια μονοχρωματική αριθμητική πρόοδος μήκος $n(m-1)+1$, έστω $\{a, a+d, \ldots, a+n(m-1)d\}$. Τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

– Αν ένας από τους $d, 2, d, \ldots, nd$ έχουν το ίδιο χρώμα με την αριθμητική πρόοδο έχουεμ το ζητούμενο.
– Σε διαφοτερική περίπτωση η αριθμητική πρόοδος $\{d, 2d, \ldots, nd\}$ έχει μήκος n και είναι $k-1-$χρωματίσιμη

$\square$

Πορισμα 6. *Για κάθε χρωματισμό των φυσικών με k χρώματα υπάρχει $x, y \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε το σύνολο $x, y, x+y$ είναι μονοχρωματικό*

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι άμεσο πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος για $m = 2$. Όμως μπορούμε να δώσουμε και μια εναλλακτική απόδεικη χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Ramsey. Έστω ενας $k-$χρωματισμός των φυσικών τότε μπορούμε να επάγουμε τον εξής $k-$χρωματισμό του $[n]^2$ ως εξής:

$$\chi'(ij) = \chi(|i-j|) \tag{4}$$

Από το θεώρημα Ramsey υπάρχει ένα μονοχρωματικό *τρίγωνο*, δηλαδή υπάρχουν $\alpha < \beta < \gamma \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\chi'(\alpha\beta) = \chi'(\beta\gamma) = \chi'(\alpha\gamma)$$

άρα

$$\chi(\beta-\alpha) = \chi(\gamma-\alpha) = \chi(\gamma-\beta)$$

αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$(\beta-\alpha) + (\gamma-\beta) = (\gamma-\alpha)$$

και θέτοντας $x = \beta - \alpha$ και $y = \gamma - \beta$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

3. Το θεώρημα Hales-Jewett

Το επόμενο σημαντικό θεώρημα της άπειρης συνδυαστικής ειναι το θέωρημα των Hales και Jewett

Ορισμος 1.3. Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο (αλφάβητο)και το καρτεσιανό γινόμενο X^n, το οποίο εκφράζει το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο X. Ένα σύνολο $L = \{f_y : y \in X\} \subset X^n$ με $|L| = |X|$ λέγεται συνδυαστική γραμμή αν υπάρχει ένα μη κενό $I \subset [n]$ και μια συνάρτηση $g : [n] \setminus I \to X$ έτσι ώστε για κάθε $y \in X$ να ισχύει:

(1) $f_y(i) = g(i)$ για κάθε $i \in [n] \setminus I$
(2) $f_y(i) = y$ για κάθε $i \in I$

Παραδειγμα 1.1. Για $X = [3]$ έχουμε ότι οι γραμμές του $[3]^2$ είναι

- $\{(1,1), (2,1), (3,1)\}$,$\{(1,2), (2,2), (3,2)\}$ και $\{(1,3), (2,3), (3,3)\}$ για $I = \{2\}$
- $\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$,$\{(2,1), (2,2), (2,3)\}$ και $\{(3,1), (3,2), (3,3)\}$ για $I = \{1\}$

- $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ για $I=\{1,2\}$

Παραδειγμα 1.2. Αν $\mathbb{F}=GF(p)$ σώμα για κάποιον p πρώτο, είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι το σύνολο των συνδυαστικών γραμμων του $\mathbb{F}^n$ είναι υποσύνολο των γραμμών του $\mathbb{F}^n$.Επίσης το σύνολο των συνδυαστικών γραμμών του $\mathbb{F}^n$ είναι

$$(p+1)^n-p^n$$

Όμως ο αριθμός των γραμμών του $\mathbb{F}^n$ είναι

$$\frac{\binom{p^n}{2}}{\binom{p}{2}}=\frac{p^{n-1}\left(p^n-1\right)}{p-1}>p^{n-2}\left(p^n-1\right)>(p+1)^n \tag{5}$$

για κάθε $n\geq 5$ και $|\mathbb{F}|=p\geq 2$

Θεωρημα 1.8. *Έστω $m,k\in\mathbb{N}$ τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k-$χρωματισμό του $[m]^n$ υπάρχει μια μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή.*

Παρατηρηση. Αν L είναι μια συνδυαστική γραμμή του $[m]^n$ τότε με L^- και L^+ θα συμβολίζουμε το «πρώτο» και το «τελευταίο» σημείο της γραμμής. Η διάταξη που δίνουμε στο $[m]^n$ ορίζεται ως εξής:
Έστω $x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in[m]^n$ τότε

$$x\leq y\Leftrightarrow x_i\leq y_i\quad\forall i$$

Επίσης αν $L_1,\ldots,L_k$ είναι συνδυαστικές γραμμές τότε λέμε ότι έχουν εστία την f αν για κάθε i ισχύει $L_i^+=f$, και σαν επέκταση αυτού λέμε ότι οι συνδυαστικές γραμμές έχουν χρωματική εστία αν κάθε $L_i-\left\{L_i^+\right\}$ είναι μονοχρωματική αλλά όχι με το ίδιο χρώμα ανα δύο.

Παρατηρηση. Θα συμβολίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n που ικανοποιεί την υπόθεση του θεωρήματος με $HJ(m,k)$.

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο m.

- Για $m=1$ έχουμε τετριμμένη περίπτωση
- Έστω ότι ισχύει για $m-1\geq 1$ με $n_{m-1}=HJ(m-1,k)$ θα εργαστούμε παρόμοια με τις προηγούμενες αποδειξεις και θα δείξουμε το εξής λήμμα
  Για κάθε $r\leq r$ υπάρχει n τέτοιος ώστε για κάθε $k-$χρωματισμό του $[m]^n$ είτε θα υπάρχει μια μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή είτε r το πλήθος συνδυαστικές γραμμές με χρωματική εστία. Για να αποδειξουμε το λήμμα θα εργαστούμε με επαγωγή στο r.
  - Για $r=1$ αρκεί να επιλέξουμε $n=HJ(m-1,k)$.

– ʼΕστω $r \geq 1$έτσι ώστε να ισχύει η υπόθεση τότε θα δειξουμε ότι για $r+1$ ο κατάλληλος φυσικός είναι ο $n+n'$ με $n' = HJ(m-1, k^{m^n}$. ʼΕστω ένας $k-$χρωματισμός του $[m]^{n+n'} = [m]^n \times [m]^{n'}$ χωρίς καμία μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή. Τότε υπάρχουν k^{m^n} τρόποι να χρωματίσουμε το $[m]^n$, έτσι λόγω της επιλογής του n' έχουμε μια συνδυαστική γραμμή L, με $L \in [m]^{n'}$ έτσι ώστε για κάθε $a \in [m]^n$ και για κάθε $b, b' \in L - \{L^+\}$ έχουμε ότι $\chi(a,b) = \chi(a,b') = \chi'(a)$. Από τον ορισμό του n υπάρχουν r το πλήθος μονοχρωματικές, με διαφορετικό χρώμα ανα δυο, συνδυαστικές γραμμές με χρωμματική εστία f για τον χρωματισμό χ'. ʼΕστω $L_1, \ldots, L_r$ και $X_1, \ldots, X_r$ .... αντίστοιχα. Θέτοντας L_i' τη συνδυαστική γραμμή που περνά από το σημείο (L_i^-, L^-) με ... $X_i \cup X$ για $1 \leq i \leq r$, τότε οι γραμμές $L_1', \ldots, L_r'$ έχουν την ίδια χρωμματική εστία, την (f, L^+). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η γραμμή που περνα από το σημείο (f, L^-) με ... μας δίνει $r+1$ το πλήθος color-focusses γραμμές.

□

Πορισμα 7. *Το θεώρημα Van Der Waerden*

Αποδειξη. Το θεώρημα Hakes και Jewett έχει σαν πόρισμα το θεώρημα Van der Waerden. ʼΕστω ενας $k-$χρωματισμός των φυσικών αριθμών, τότε αυτός επάγει φυσικά έναν $k-$χρωματισμό του $[m]^n$ □

3.1. Το θεώρημα Gallai. ʼΕστω $S \subseteq \mathbb{N}^d$ πεπερασμένο σύνολο. Μια ομοιοθεσία του S είναι οποιοδήποτε σύνολο της μορφής $\alpha + \lambda S$ με $a \in \mathbb{N}^d$ και $\lambda \in \mathbb{N}$.

Θεωρημα 1.9. *Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}^d$ και κάθε $k-$χρωματισμό του $\mathbb{N}^d$ υπάρχει μια μονοχρωματική ομοιθεσία του συνόλου S.*

Αποδειξη. ʼΕστω το σύνολο $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ και χ ένας $k-$χρωματισμός του $\mathbb{N}^d$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα χρωματισμό στο $[m]^n$ ως εξης:

$$\chi'(\vec{x}) = \chi\left(\sum_i S(x_i)\right) \tag{6}$$

από το θεώρημα των Hales και Jewett υπάρχει μια μονοχρωματική συνδυαστική γραμμή η οποία μας δίνει μια μονοχρωματική ομοιοθεσία του S. □

Πορισμα 8. *ʼΕστω $S = \{(x,y) \ : \ x, y \in \{0,1\}\}$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει ʼενα μονοχρωματικό τετράγωνο.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Χρωματίζονας το Επίπεδο

1. Το προβλημα

Το προηγούμενο κεφάλαιο ήταν μια εισαγωγή σε θεμελειώδεις έννοιες της θεωρίας Ramsey. Σε αυτο το κεφαλαιο θα ασχοληθουμε με κατι το οποιο αρχισε απο την θεωρια Ramsey αλλα τελικα κατεληξε σε εναν εντελως διαφορετικο κλαδο, την λεγομενη Ευκλειδια Θεωρια Ramsey η οποια μελετα τους χρωματισμους σε πεπεραμσενους διανυσματικους χωρους και τις γεωμετρικες ιδιοτητες που παραμενουν αναλλοιωτες κατω απο την δραση ενος χρωματισμου. Το προβλημα με το οποιο θα ασχοληθουμε εμεις ειναι το παρακατω:

Υποθεση 1. *Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων έτσι ώστε αν χρωματίσουμε το επίπεδο δύο σημεία του επιπέδου που έχουν απόσταση* 1 *να εχουν διαφορετικο χρωμα.*

Το πρόβλημα του χρωματισμού του επιπέδου έτσι ώστε κάθε δύο σημεία που απέχουν απόσταση 1 να έχουν διαφορετικό χρώμα είναι ένα σχετικά καινούριο πρόβλημα. Παρόλα αυτά είναι δύσκολο να βρούμε ποιός το έθεσε πρώτος. Στον παρακάτω πίνακα φαινεται ξεκαθαρα το μπερδεμα που υπαρχει για την απαρχη του προβληματος

Έτος	Συγγραφέας	Τι έγραψε
1960	Gardner	**Leo Moser** ... writes ...
1961	Hadwiger	**Nelson**
1961	Erdos	I cannot trace the origin of this problem
1967	Croft	A long standing open problem of **Erdos**
1973	Woodall	**Gardner**
1976	Simmons	**Erdos,Harary** and **Tutte**
1980 – 81	Erdos	Hadwiger and Nelson
1991	Croft,Falconer and Guy	Apparently due to **E.Nelson**
1991	Klle and Wagon	Posed by **M.Gardner** and **Hadwiger**

2. Χρωματικοι αριθμοι

Ο παρακατω ορισμος ερχεται φυσιολογικα:

Χρωματικος Αριθμος

Εστω ενα συνολο S στο οποιο εχουμε ορισει την εννοια της αποστασης τοτε σαν χρωματικο αριθμο ονομαζουμε τον μικροτερο αριθμο απο χρωματα τετοιο ωστε δυο σημεια του S με αποσταση $d = d(x, y)$ να μην εχουν το ιδιο χρωμα. Θα το συμβολιζουμε με

$$\chi(S)$$

Για αρχη θα αποδειξουμε τον χρωματικο αριθμο των φυσικων αριθμων στο επιπεδο.

Θεωρημα 2.1. $\chi(\mathbb{N}^2) = 2$

Αποδειξη. Έστω το επίπεδο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^2$ τότε
1^o βήμα Βάφουμε την γραμμή $x = 0$ ώς εξής:

$$\chi_0(0, n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 2k \\ 0 & \text{αν } n = 2k + 1 \end{cases} \tag{7}$$

είναι προφανες ότι

$$\chi_0(0, n) = \chi_0(0, m) \Rightarrow d\left((0, n), (0, m)\right) \geq 2 \tag{8}$$

2^o Βήμα Να επεκτείνουμε τον χρωματισμό σε όλο το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ως εξής

$$\chi(k, m) = \begin{cases} \chi_0(0, m) & \text{αν } k = 2l,\ l \in \mathbb{Z} \\ 1 - \chi_0(0, m) & \text{αν } k = 2l + 1,\ l \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{9}$$

είναι προφανες ότι

$$\chi(m, n) = \chi(m', n') \Rightarrow \chi(0, m) = \chi(0, m') \Rightarrow d\left((0, n), (0, n')\right) \geq 2 \Rightarrow d\left((m, n), (m', n')\right) \tag{10}$$

□

Στη συνεχεια θα αποδειξουμε τον χρωματικο αριθμο των ρητων αριθμων στο επιπεδο . Ειναι σημαντικο να αναφερουμε οτι η αποδειξη του χρωματικου αριθμου των ρητων αριθμων δεν γινεται μεσα απο τετριμεννα συνολα και ατο ειναι μια σημαντικη ενδειξη για το ποσο δυσκολο ειναι το προβλημα του χρωματικυο αριθμου του επιπεδου

Θεωρημα 2.2. *Το* $\chi(\mathbb{Q}^2) = 2$

Αποδειξη. Έστω δύο σημεία $(r_1, r_2), (q_1, q_2)$ του επιπέδου $\mathbb{Q}^2$ και $r_1 - q_1 = \dfrac{k_1}{n_1}, r_2 - q_2 = \dfrac{k_2}{n_2}$[1] τότε ορίζουμε την σχέση $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ώς

[1] στην απόδειξη θεωρούμε τους ρητους στην ανάγωγη μορφή τους

εξής

(11) $(r_1, r_2) \sim (q_1, q_2) \Leftrightarrow$ αν οι παρανομαστές n_1 και n_2 είναι περιττοί

Αυτή η σχέση στο $\mathbb{Q}^2$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας και διαμερίζει το $\mathbb{Q}^2$ σε υποσύνολα με την εξής χαρακτηριστική ιδιότητα: *Αν $x, y \in \mathbb{Q}^2$ και $d(x,y) = 1$ τότε $x \sim y$.* Όντως έστω $(r_1, r_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ με $r_1 - q_1 = \dfrac{k_1}{n_1}, r_2 - q_2 = \dfrac{k_2}{n_2}$, οι οποίοι απέχουν απόσταση 1, τότε

$$\sqrt{(r_1 - q_1)^2 + (r_2 - q_2)^2} = 1 \quad \Rightarrow \tag{12}$$

$$(r_1 - q_1)^2 + (r_2 - q_2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \tag{13}$$

$$\left(\frac{k_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{n_2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \tag{14}$$

$$n_1^2 k_2^2 + n_2^2 k_1^2 = n_1^2 n_2^2 \tag{15}$$

ειναι αρκετα ευκολα να δειξουμε τωρα οτι οι παρανομαστες αναγκαστικα πρεπει να ειναι περιττοι. Η επομενη παρατηρηση ειναι οτι το καθε κλαση ισοδυναμιας ειναι μια μεταφορα μιας αλλης κλασης ισοδυναμιας απο τη διαμεριση της σχεσης ισοδυναμιας. Αρα αρκει να χρωματισουμε μια κλαση ισοδυναμιας. Οντως αυτο γινεται με τον εξης τροπο. Βαφουμε με το ενα χρωματα τα σημεια στης κλασης ισοδυναμιας της μορφης $\left(\dfrac{\pi}{\pi}, \dfrac{\pi}{\pi}\right)$ και $\left(\dfrac{\alpha}{\pi}, \dfrac{\alpha}{\pi}\right)$ και με το δευτερο τα σημεια της μορφης $\left(\dfrac{\pi}{\pi}, \dfrac{\alpha}{\pi}\right)$ και $\left(\dfrac{\alpha}{\pi}, \dfrac{\pi}{\pi}\right)$ χρωμα και αυτος ο χρωματισμος ειναι ο ζητουμενος. □

Καποια αλλα αποτελεσματα

- $\chi(\mathbb{Q}^3) = 2$
- $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$
- $\chi(\mathbb{Q}^5) \geq 8$
- $\chi(\mathbb{Q}^6) \geq 10$
- $\chi(\mathbb{Q}^7) \geq 15$

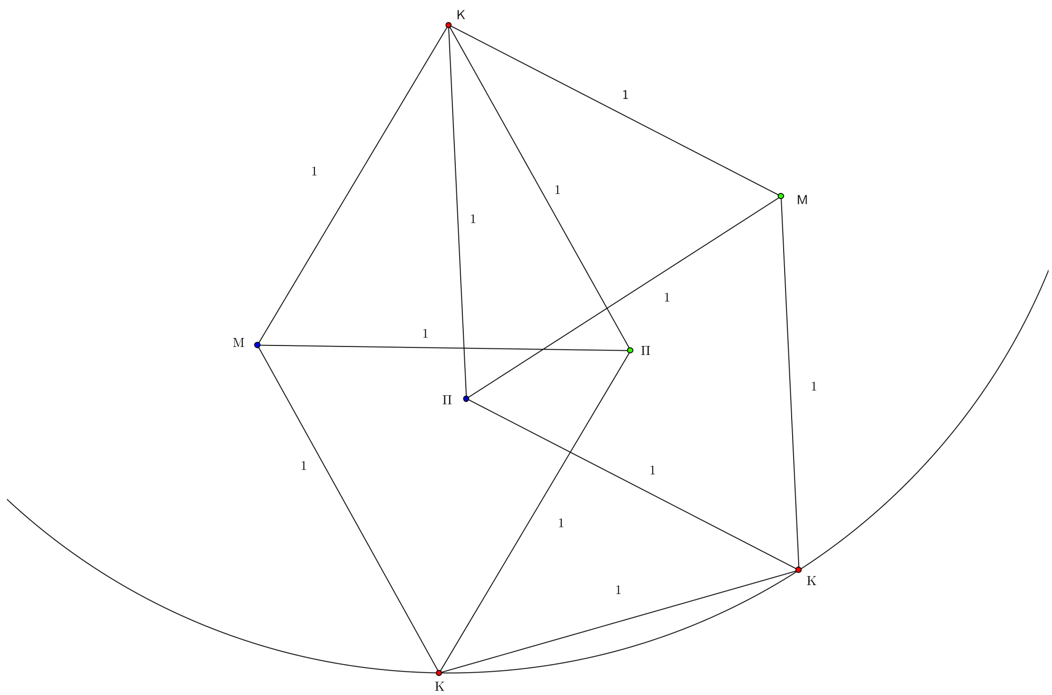
3. Το κατω και ανω (;) φραγμα

Θεωρημα 2.3. $\chi(\mathbb{R}, 1) \geq 4$

Αποδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις $\chi(\mathbb{R}, 1) \geq 4$.

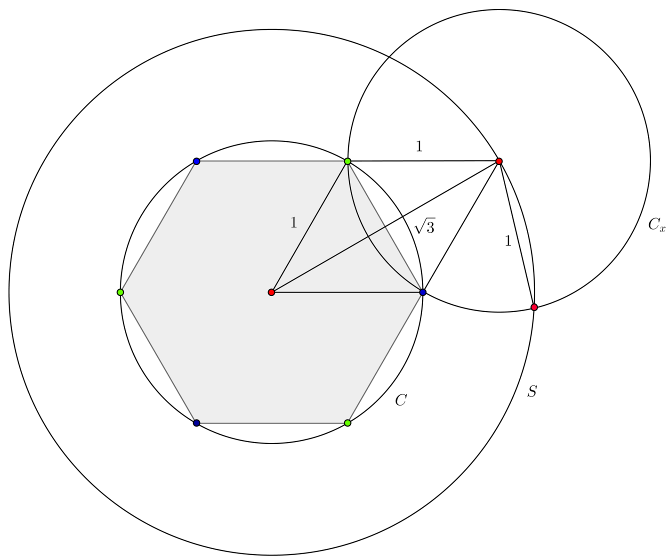
1^{η} Απόδειξη

Έστω ότι μπορούμε να «βάψουμε» το επίπεδο με τρία χρώματα έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε σημεία του με απόστααση 1 έχουν διαφορετικό χρώμα. Κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά 1, κάθε κορυφή του θα έχει και διαφορετικό χρώμα (η επιλογή γίνεται τυχαία) όπως φαίνεται και στο σχήμα. Το συμμετρικό σημείο του A ως προς το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ «δημιουργεί» ένα δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο, το $A'B\Gamma$ το οποίο είναι και αυτό ισόπλευρο και η κορυφή A' ειναι «βαμμένη» κόκκινη. Το επόμενο βήμα είναι να θεωρήσουμε τον κύκλο με κέντρο το A και ακτίνα $\sqrt{3}$ τότε αν στρέψουμε τον ρόμβο $AB\Gamma A'$ έτσι ώστε το A' να διαγράψει τόξο με χορδή μήκους 1, όπως φαίνεται και από το σχήμα, βρήκαμε δύο σημεία με απόσταση 1 ίδιου χρώματος το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση μας, άρα $\chi(\mathbb{R}, 1) \geq 4$.



2^{η} **Απόδειξη**

Έστω ότι μπορούμε να «βάψουμε» το επίπεδο με τρία χρώματα έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε σημεία του με απόσταση 1 έχουν διαφορετικό χρώμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι το $(0, 0)$ είναι «βαμμένο» κόκκινο τότε οι κορυφές του τυχαίου κανονικού εξάγωνου που είναι περιγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο C, θα είναι «βαμμένες» εναλλάξ πράσινες και μπλέ (σχημα). Το επόμενο βήμα είναι να διαλέξουμε το σημείου του κύκλου S, με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$, τέτοιο ώστε να σχηματίζει ισόπλευρο τρίφωνο με τα . Τότε το σημείο αυτό είναι βαμμένο κόκκινο. Η κατασκευή αυτή μας οδηγει στο συμπέρασμα ότι ο κύκλος S ειναι μονοχρωματικός (εδώ κόκκινος) και άρα υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία πάνω στο κύκλο S με απόσταση 1, τα σημεία τομής του S και του κύκλου C_x που έχει κέντρο το x και ακτίνα 1, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση μας.



□

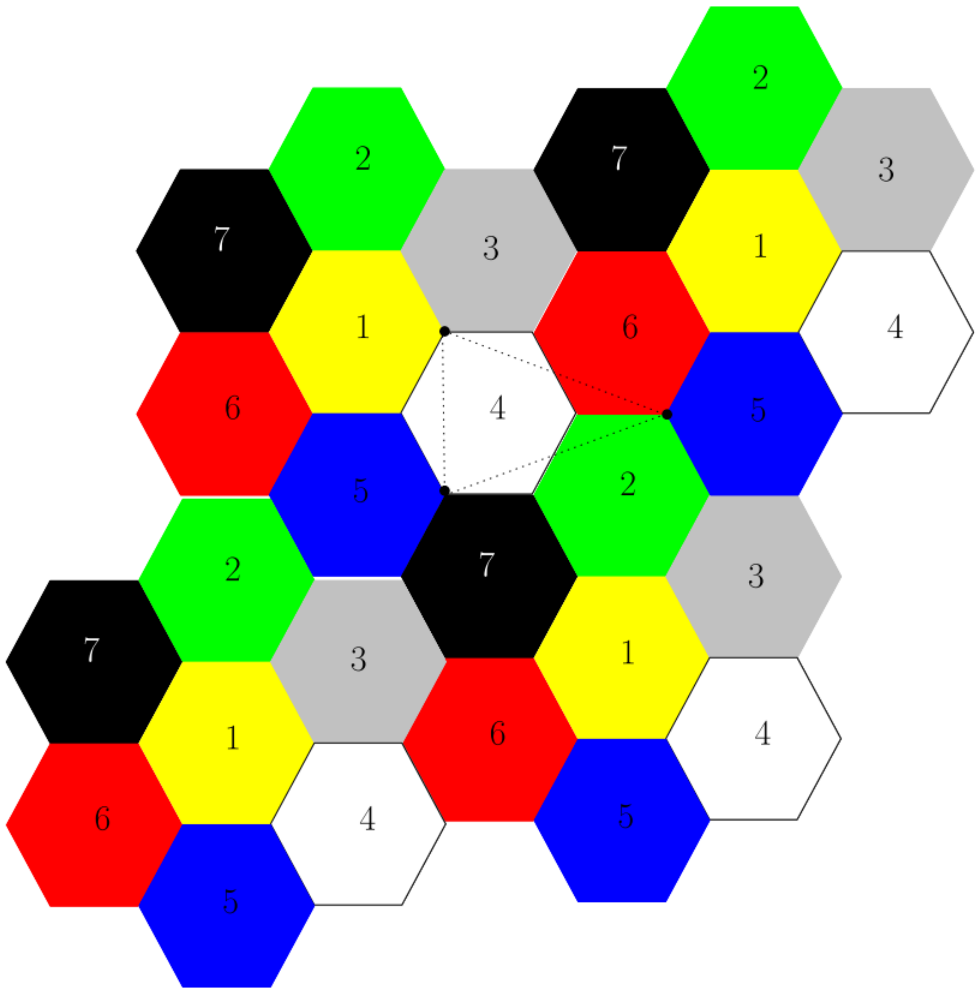
Θεωρημα 2.4. $\chi(\mathbb{R}, 1) \leq 7$

Αποδειξη. 1η Απόδειξη

Η πρώτη απόδειξη βασίζεται σε μια επικάλυψη του επιπέδου από κανονικά εξάγωνα τα οποία έχουν πλευρά $\frac{2}{5}$. Για κάθε επικάλυψη του επιπέδου από κανονικά εξάγωνα, κάθε εξάγωνο συνορεύει με 6 όμοια του εξάγωνα. Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα εξάγωνο και το χρωματίζουμε με το χρώμα 1, τα 6 εξάγωνα που συνορεύουν με το εξάγωνο που διαλέξαμε τα χρωματίζουμε με τα υπόλοιπα 6 χρώματα με αυθαίρετο τρόπο. Για τις κοινές ακμές των εξαγώνων διαλέγουμε αυθαίρετα ένα από τα δύο χρώματα των εξαγώνων στα οποία είναι ακμές. Το επόμενο βήμα είναι να επεκτείνουμε τον χρωματσμό σε όλο το επίπεδο όπως φαίνεται στο σχημα. Το επόμενο βήμα είναι να αποδειξουμε ότι για αν δύο σημεία του επιπέδου που έχουν απόσταση 1 τότε έχουν διαφορετικό χρώμα.

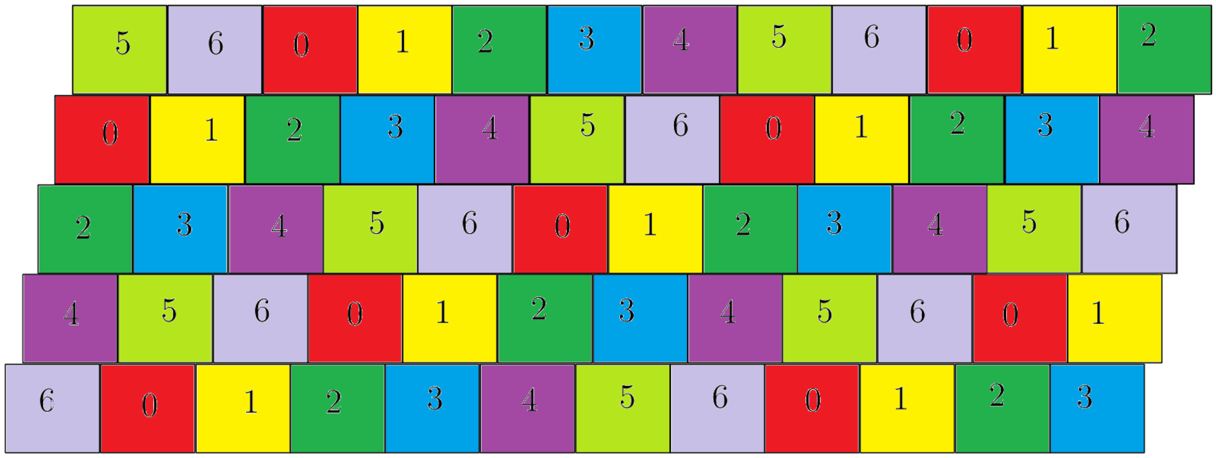
- Στην περίπτωση που τα δύο σημεία ανήκουν στο ίδιο εξάγωνο τότε η μέγιστη απόσταση που μπορεί να έχουν τα δύο σημεία είναι $\frac{4}{5}$, η οποία ειναι ίση με την μεγαλύτερη διάμετρο του εγαξώνου.
- Στην περίπτωση που τα δύο σημεία ανήκουν σε διαφορετικά εξάγωνα τότε η μικρότερη απόσταση που επιτυγχάνεται όταν τα δυο σημεία αυτά είναι κορυφές των εξαγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση τους τότε είναι $\frac{\sqrt{28}}{5}$ και είναι η πλευρά του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματιζεται (σχημα).

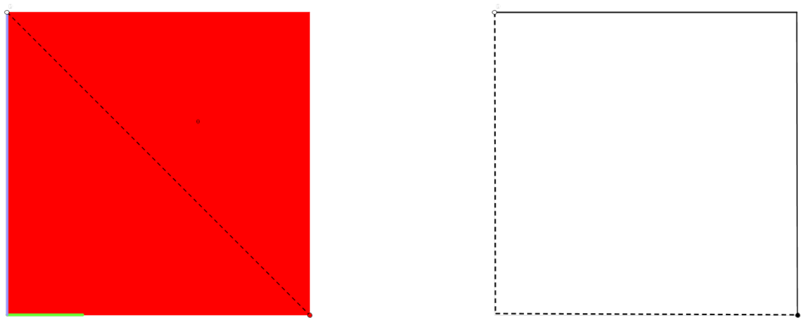
άρα σε κάθε περίπτωση η απόσταση δύο σημείων που έχουν το ίδιο χρώμα δεν ανήκει στο ανοικτό διάστημ $\left(\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{28}}{5}\right)$ άρα $d \neq 1$.



2^{η} Απόδειξη +

Στην δεύτερη απόδειξη χρησιμοποιούμε έναν διαφορετικό χρωματισμό του επιπέδου. Καταρχάς χρωματίζουμε την λωρίδα του επιπέδου $\mathbb{R} \times (0, 1]$ διαμερίζοντας της με «τετράγωνα» πλευράς $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και διαγώνιο 1, όπως φαίνεται στο σχημα. Αρχίζοντας αυθαιρετα από ενα τετράγωνο το χρωματίζουμε και έπειτα χρωματίζουμε τα υπόλοιπα τετράγωνα modulo 7. Το επόμενο βήμα είναι επεκτείνουμε αυτόν το χρωματισμό σε όλο το επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε λωρίδα $\mathbb{R}\times(n, n+1]$ είναι η μεταφορά της $\mathbb{R} \times (n-1, n]$ κατα το διάνυσμα $(1.1, 1)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι κορυφές των διαγωνίων των τετραγώνων έχουν μεν απόσταση 1 αλλά διαφορετικό χρώμα, πλέον είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημειών με ίδιο χρώμα είναι 1.1.





□

4. Πολυχρωματικος αριθμος

το προβλημα του χρωματικου αριθμου του επιπεδου αποδειχθηκε τελιακ ενα αρκετα δυσκολο ζητημα για αυτο και οι μαθηματικοι που ασχοληθηκαν με το προβλημα προσπαθησαν να προσεγγισουν το ζητημα και με αλλους τροπους. Μια τετοια προσπαθεια εγινε με την εισαγωγη της εννοιας του πουλχρωματικου αριθμου ενος συνολου.

Πολυχρωματικος Αριθμος

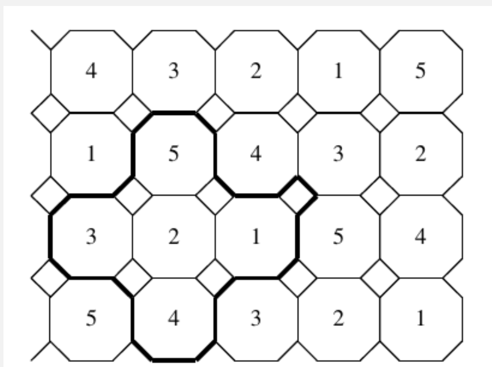
Εστω ενα συνολο A και ενας χρωματισμος $\chi_p; A \mapsto X$ με $|X| = n$ τότε αν καθε χρώμα ικανοποιει ότι

$$\forall x, y \in \chi^{-1}(x_k) \Rightarrow d(x, y) \neq d_k$$

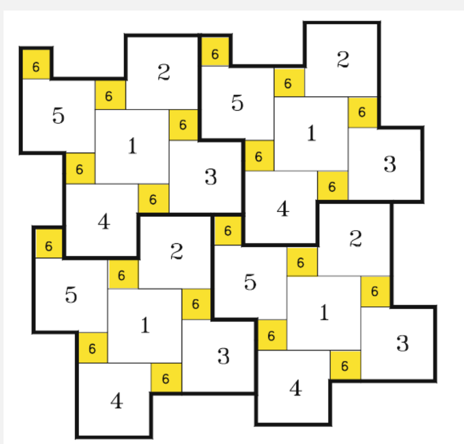
Θα λεμε οτι ο χρωματισμος ειναι της μορφης $(d_1, \ldots, d_k)$ για τις αντιστοιχες αποστασεις.

Μεχρι στιγμης εχουμε δειξει οτι υπαρχει ο χρωματισμος της μορφης $(1,1,1,1,1,1,1)$ και το πεομενο ερωτημα ειναι αν υπαρχει ο χρωματισμος της μορφης $(1,1,1,1,1,1)$ ετσι ωστε να ριξουμε το κατω φραγμα αποτο 7 στο 6 τουλαχιστον. Δυστυχως τα μονα αποτελεσματα που εχουμε ειναι τα παρακατω.

Υπάρχει χρωματισμος του επιπέδου τύπου $\left(1,1,1,1,1,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.



Υπάρχει χρωματισμός του επιπέδου τύπου $(1,1,1,1,1,\sqrt{2}-1)$



και το πιο ενδιαφερον αποτελεσμα ειναι

Υπάρχει χρωματισμος του επιπέδου τύπου $(1,1,1,1,1,a)$ για καθε $a \in \left(\dfrac{1}{sqrt5},\sqrt{2}-1\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο χρωματικος αριθμος μια πλακοστρωσης

Ορισμος 3.1. Μια πλακόστρωση του επιπέδου ονομάζεται μια οικογένεια πολυγώνων $\mathbb{P}$ τέτοια ώστε

- $\bigcup P = \mathbb{R}^2$
- για κάθε $P_1, P_2 \in \mathbb{P}$ τότε $intP_1 \cap intP_2 = \emptyset$

Παρατηρηση. Συνοριακό σημείο του επιπέδου είναι το σημείο που δεν θα ανήκει στο εσωτερικό κάποιου πολυγώνου

Ορισμος 3.2. Μια πλακόστρωση P του επιπεδου καλείται τοπικά πεπερασμένη αν για κάθε σημείου (x, y) του $\mathbb{R}^2$ υπάρχει κύκλος C με κέντρο το (x, y) έτσι ώστε τα στοιχεια του $C \cap \bigcup P$ να ανήκουν σε πεπερασμένα τπ πλήθος στοιχεία της P.

Παρατηρηση. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ενω ένας χρωματισμός έχει σαν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^2$ παρόλαυτά θα αποφύγουμε να ασχοληθούμε με τον χρωματισμό των συνοριακών σημείων μιας πλακόστρωσης. Μην ξεχνάτε ότι τα συνοριακά σημεία είναι τα κοινά σημεία τουλάχιστον δύο πολυγώνων της οικογένειας. Οπότε ένας χρωματισμός δεν μπορεί να είναι σταθερός σε ενα πολύγωνο εκτός και αν συνορεύει με πολύγωνα με το ίδιο χρώμα. Ως εκ τούτου πρέπει να γίνει μια επιλογή χρώματος για τις κορυφές και τις πλευρές τέτοια ώστε το χρώμα να είναι ίδιο με ένα από τα χρώματα των πολυγώνων που ανήκουν η πλευρά και η κορυφή. Αποδεικνύεται ότι δεν έχει σημασία ποια επιλογή θα κάνουμε.

Παρατηρηση. Στο υπόλοιπο κείμενο οι χρωματισμοί χ του επιπέδου θα ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα:

- Για κάθε P ο $\chi|_{intP}$ είναι σταθερός.
- Θα ειναι τοπικα πεπερασμενος

Λημμα 3.1. *Για κάθε χρωματισμό $\chi : \mathbb{R}^2 \to \Delta$ distance excluding μιας τριγωνοποίησης τότε υπάρχει μια τριχρωματικη κορυφη.*

Αποδειξη. Έστω ότι δεν υπάρχει τριχρωματική κορυφή τότε έστω T_1 ένα τρίγωνο και $\Re$ μια οικογένεια τριγώνων η οποία είναι μεγιστική για τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $T_1 \in \Re$

(2) Αν $T_2 \in \Re$ τότε $\mathrm{int}T_2$ και $\mathrm{int}T_1$ έχουν το ίδιο χρώμα, και
(3) η $\bigcup \Re$ είναι συννεκτική.

Θα αποδειξουμε ότι για κάθε οιγένεια (οχι κατα ανάγκη μεγιστική) που ικανοποιεί τις (1)-(2)-(3) η $\bigcup \Re$ ειναι φραγμένη. Έστω ότι για $\Re$ με $T_1 \in \Re$ η ένωση $\bigcap \Re$ δεν είναι φραγμένη τότε αν $x \in \mathrm{int}T_1$ το σύνολο $S_d(x) \cap \bigcap \Re$ είναι μη κενό.Έστω $y \in \S_d(x) \cap \bigcup \Re$ τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

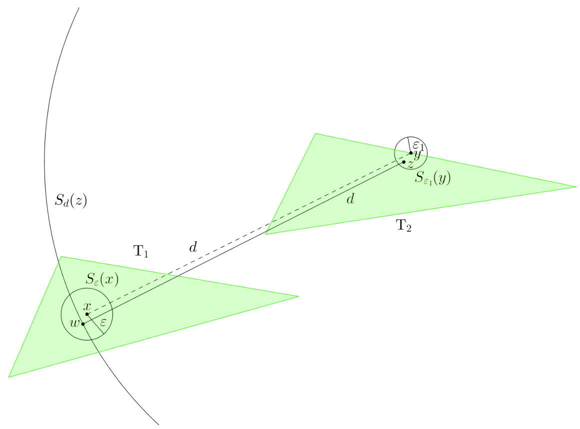
- Αν το y ανήκει σε εσωτερικό κάποιου τριγώνου $T \in \Re$ τότε $d = ||x - y||$ και x, y έχουν το ίδιο χρώμα, το οποίο είναι αντίφαση μιας ο χρωματισμός μας είναι d distance excluding.
- Αν το y ειναι συνοριακό σημείο ενός τριγώνου T_2 τότε υπάρχουν $\epsilon_1 \leq \epsilon$ τέτοια ώστε $S_\epsilon(x) \subseteq \mathrm{int}T_1$ και $S_{\epsilon_1}(y) \cap \mathrm{int}T_2 \neq \emptyset$. Αν $z \in S_{\epsilon_1} \cap \mathrm{int}T_2$ τότε $S_d(z) \cap S_\epsilon(x) \neq \emptyset$. Έστω $w \in S_d(z) \cap S_\epsilon(x)$ τότε επειδή $S_{\epsilon_1}(x) \subseteq S_\epsilon(x)$ συνεπάγεται ότι τα z και w θα έχουν απόσταση d και το ίδιο χρώμα το οποίο είναι αντίφαση.

άρα η $\bigcup \Re$ είναι φραγμένη. Έστω λοιπόν η $\bigcup \Re$ φραγμένη τότε το συμπληρωματικό της $\Re^c = \mathbb{R}^2 \setminus \Re$ είναι ένα μη φραγμένο σύνολο το οποίο περιέχει ένα υποσύνολο μη φραγμένο U (μπορει να είναι και το ίδιο) το σύνορο του οποίου διαμερίζει το επίπεδο με μια κλειστή καμπύλη Jordan, έστω L. Είναι προφανές ότι η καμπύλη L είναι η ένωση πλευρών που ανήκουν σε τρίγωνα από την οικογένεια $\Re$ και από τρίγωνα που ανήκουν $\mathcal{P} \setminus \Re$. Έστω $\mathcal{U}$ μια οικογένεια τριγώνων από το σύνολο $\mathcal{P} \setminus \Re$ έτσι ώστε οι πλευρές του να ανήκουν στην L. Η σημαντική ιδιότητα που έχουν τα τρίγωνα αυτά είναι ότι έχουν ολα τον ίδιο χρωματισμό. Όντως αν υποθέσουμε το αντίθετο τότε υπάρχουν Δ_1 και Δ_2 τρίγωνα που ανήκουν στην $\mathcal{U}$ και Π_1,Π_2 οι πλευρές των τριγώνων αντίστοιχα έτσι ώστε $\Pi_1 \subset L$ και $\Pi_2 \subset L$. Αφού η καμπύλη L είναι συνεκτικό σύνολο συνπάγεται ότι υπάρχει ένα μονοπάτι M από πλευρές που «συνδέουν» τις Π_1 και Π_2. Από υπόθεση δεν υπάρχει τριχρωματική κορυφή στο μονοπάτι M άρα και κάθε κορυφή που ανήκει στο μονοπατι είναι διχρωματική. Έστω λοιπόν χ_1 το χρώμα των εσωτερικών των τριγώνων της $\Re$, χ_2 το χρώμα του Δ_1 και χ_3 το χρώμα του Δ_2. Για τα χρώματα ισχύει ότι $\chi_1 \neq \chi_2$ και $\chi_1 \neq \chi_3$ γιατί η $\Re$ είναι μεγιστική. Το επόμενο βήμα της απόδειξης είναι κινηθούμε κατα μήκος του μονοπατιού M από την πλευρά Π_1 προς την Π_2, ώσπου να συναντήσουμε την πρώτη διχρωματική κορυφή με τα χρώματα χ_1 και χ_3, έστω $\varkappa_3$ τότε η προηγούμενη κορυφή στο μονοπάτι, έστω $\varkappa_2$ είναι και εκείνη διχρωματική με χρώματα χ_1 και χ_2. Σαν άμεσο πόρισμα έχουμ ότι το τρίγωνο με πλευρά την $[\varkappa_2, \varkappa_3]$ έχει μια τριχρωματική κορυφή, άτοπο. Άρα τα στοιχεία της $\mathcal{U}$ είναι μονοχρωματικά ως προς το εσωτερικό τους. Αν θεωρήσουμε την $\mathcal{U}$ έτσι ώστε να είναι μεγιστική για τις παρακάτω ιδιότητες:

- $T_1, T_2 \in \mathcal{U}$ τότε $\mathrm{int}T_1$ και $\mathrm{int}T_2$ έχουν το ίδιο χρώμα
- η $\bigcup \mathcal{U}$ είναι συνεκτική.

διαπιστωνουμε οτι αφου ειναι φραγμενη και δουλευοντας επαγωγικα καποια στιγμη θα υπαρξει μια οικογενεια οπου θα εχει δυο σημεια με ιδιο χρωμα και αποσταση 1 γιατι διαφορετικα θα ερχεται σε αντιφαση με το οτι η πλακοστρωση μς ειναι πεπερασμενα τοπικη. ☐

Λημμα 3.2. *Έστω C ένας κύκλος τότε υπάρχουν πεπερασμένα συνοριακά σημεία μιας πλακόστρωσης του $\mathbb{R}^2$ πάνω στον κύκλο.*



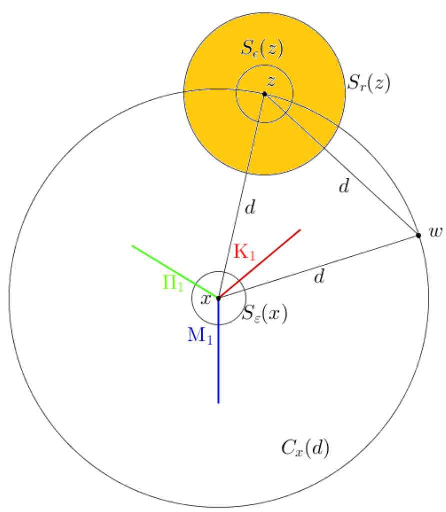
Αποδειξη. Η πλακόστρωση είναι τοπικά πεπερασμένη, αυτό έχει σαν συνέπεια κάθε κύκλος να έχει μη κενή τομή με πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της πλακόστρωσης. Όντως αν υπήρχε κύκλος ο οποίος είχε μη κενή τομή με άπειρα στοιχεία της πλακόστρωσης τότε με εφαρμογή του Θ.Bolzano-Weirstrass υπάρχει σημείο y του κύκλου C το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης των άπειρων σημείων της τομής άρα για αυτό το σημείο y δεν ισχύει ότι η τοπολογια μας είναι πεπερασμένα τοπική. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι ο κύκλος μας έχει άπειρα συνοριακά σημεία της πλακόστρωσης τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Να υπάρχουν άπειρες κορυφές στον κύκλο, η υπόθεση αυτή μας οδηγεί σε άντίφαση μιας και τότε ο κύκλος θα είχε κοινά σημεία τομής με άπειρα στοιχεία της πλακόστρωσης.
- Να υπάρχουν άπειρα σημεία πλευρών στο κύκλο. Και αυτή η υπόθεση μας οδηγεί σε αντίφαση για τον ίδιο λόγο αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε πλευρά υα έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με τονκύκλο.

☐

Θεωρημα 3.3. *Έστω ένας χρωματισμός X (πλακοστρωσης) τότε* $|X| \geq 5$

Αποδειξη. Έχουμε ήδη αποδειξει ότι κάθε πλακόστρωση θα έχει τουλάχιστον μια τριχρωματική κορυφή,έστω x αυτή η κορυφή τότε λόγω του προηγούμενου θεωρήματος στον κύκλο $C_x(d)$ με κέντρο το x και ακτίνα d υπάρχούν δύο σημεία z και w με απόσταση d τα οποία είναι εσωτερικά σημεία δύο διακεκριμένων στοιχείων της πλακόστρωσης. Επειδή το z είναι εσωτερικό σημείο συνεπάγεται ότι υπάρχει $0 < r < d$ τέτοιο ώστε ο $S_r(z)$ να είναι μονοχρωματικός. Επίσης υπάρχει $0 < \epsilon < r$ έτσι ώστε οι πλευρές της κορυφής x να έχουν η καθεμία ένα κοινό σημείο με τον κύκλο $S_\epsilon(x)$, έστω τα Π_1, K_1 και M_1. Αντίστοιχα υπάρχουν τρία σημεία στον κύκλο $S_\epsilon(z)$ τα οποία έχουν το ίδιο χρώμα με το z και απέχουν απο τα Π_1, K_1 και M_1 το καθένα απόσταση d. Άρα το z δεν μπορεί να είναι χρωματισμένο με τα χρώματα των πλευρών που ανήκει η κορυφή x, δηλαδή χρειαζόμαστε και τέταρτο χρώμα. Μεχρι στιγμής δείξαμε οτι το κάτω φράγμα για ενα χρωματισμο με πλακόστρωση είναι το 4, για επιτύχουμε το 5 αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σημείο w του κύκλου δεν μπορεί να είναι χρωματισμένο με τα 4 προηγούμενα χρώματα άρα το κάτω φράγμα είναι 5.



□

Λημμα 3.4. *Έστω C ένας κύκλος με ακτίνα d και κέντρο K μια τριχρωματική κορυφή. Αν $x, y \in C$ με $d(x, y) = d$ και το x είναι συνοριακό σημείο δύο διαφορετικών στοιχείων της πλακόστρωσης με διαφορετικό χρώμα τότε το y δεν είναι εσωτερικό σημείο.*

Αποδειξη. Έστω ότι τα 5 χρώματα που χρησιμοποιήσαμε για τον χρωματισμό είναι τα $X = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5\}$ και $C = C_d(T)$ ένας κύκλος με ακτίνα d και κέντρο μια τριχρωματική κορυφή T έτσι ώστε $x, y \in C$

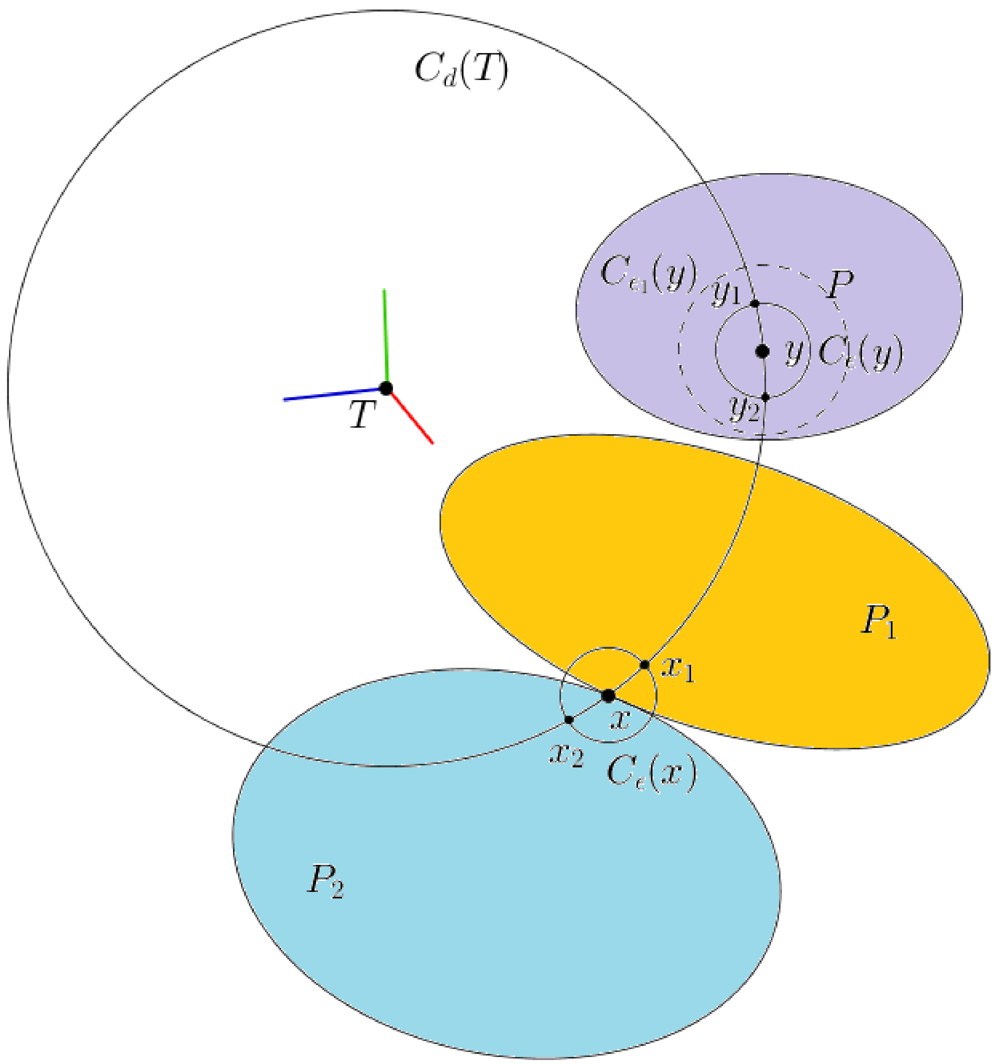
με με $d(x,y) = d$ και το x είναι συνοριακό σημείο δύο διαφορετικών στοιχείων P_1 και P_2 της πλακόστρωσης με διαφορετικό χρώμα και το y εσωτερικό σημείο P της πλακόστρρωσης.΄Εστω τα χρώματα των πλευρών της T χ_1, χ_2 και χ_3, τότε

(1) επειδή το y είναι εσωτερικό υπάρχει $\epsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $C_{\epsilon_1}(y) \subset P$.
(2) το χρώμα του P δεν είναι κανένα από τα χ_1, χ_2 και χ_3, έστω ότι είναι το χ_4.
(3) επειδή το x είναι συνοριακό σημείο των P_1 και P_2 συνεπάγεται οτι υπάρχει $0 < \epsilon < \epsilon_1$ έτσι ώστε ο $C_\epsilon(x)$ να έχει κοινά σημεία με το εσωτερική των P_1 και P_2. ΄Εστω $x_1 \in C_\epsilon(x) \cap P_1 \cap C_d(x)$ και $x_2 \in C_\epsilon(x) \cap P_2 \cap C_d(x)$.
(4) επειδή τα x, y έχουν απόσταση d και $0 < \epsilon < \epsilon_1$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in C_\epsilon(y) \cap P \cap C_d(x)$ με $d = d\,(x_1, y_1) = d\,(x_2, y_2)$.

Είναι αρκετά εύκολο να δούμε ότι τα x_1 και x_2 λόγω των προηγουμένων δεν μπορούν να είναι χρωματισμένα

- με το χ_4 μιας και ειναι τα y_1 και y_2
- με τα χ_1, χ_2, χ_3 μιας και είναι εσωτερικα σημεία πάνω στον κύκλο με κεντρο την τριχρωματικη κορυφη T

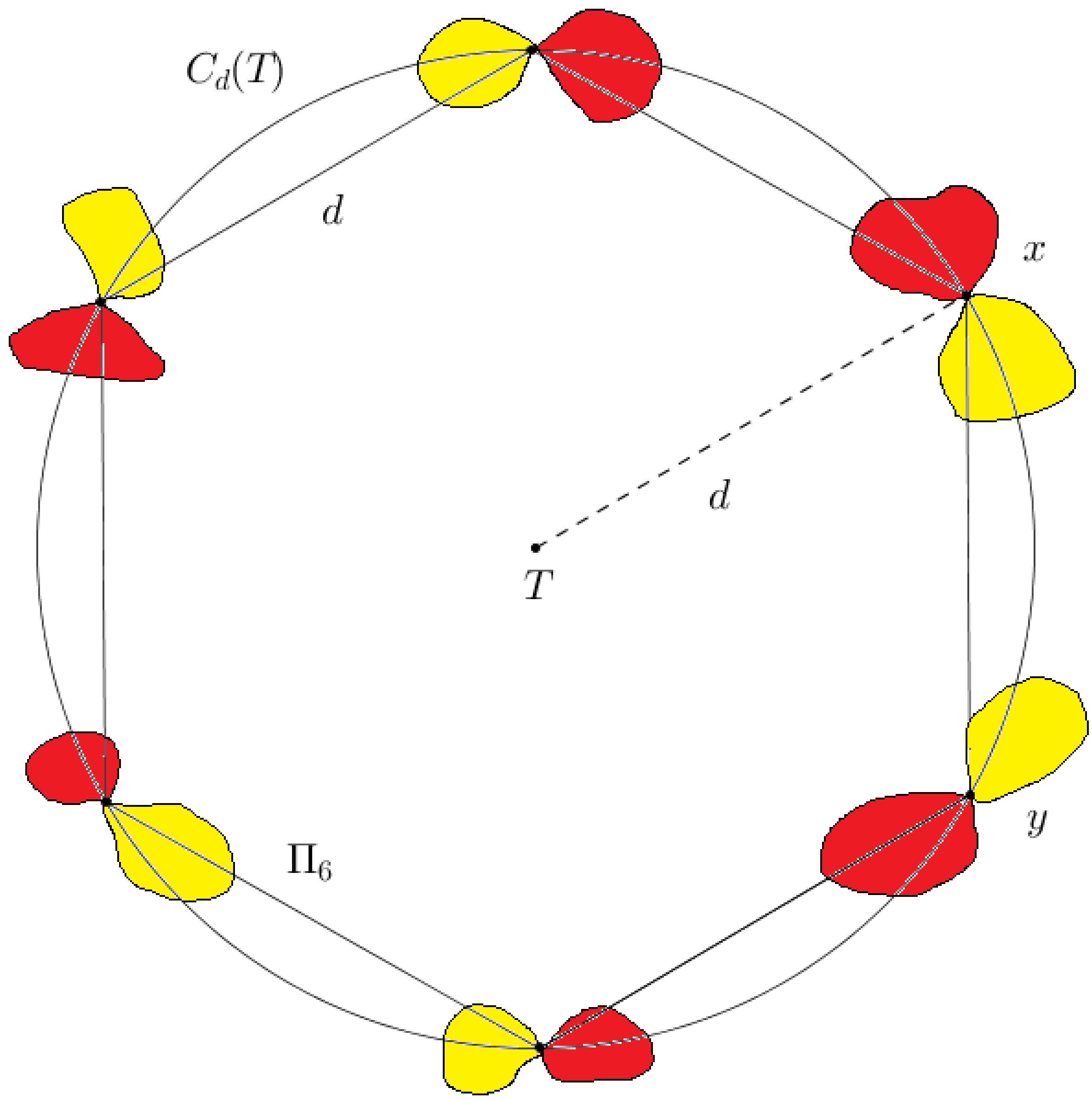
άρα καταλήγουμε σε άτοπο.



□

Λημμα 3.5. *Έστω ένας κύκλος C με ακτίνα d και κέντρο μια τριχρωματική κορυφή T τότε υπάρχει ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμένο στο κύκλο οι κορυφές του οποίου αποτελούν συνοριακά σημεία δύο στοιχείων της πλακόστρωσης με διαφορετικό χρώμα.*

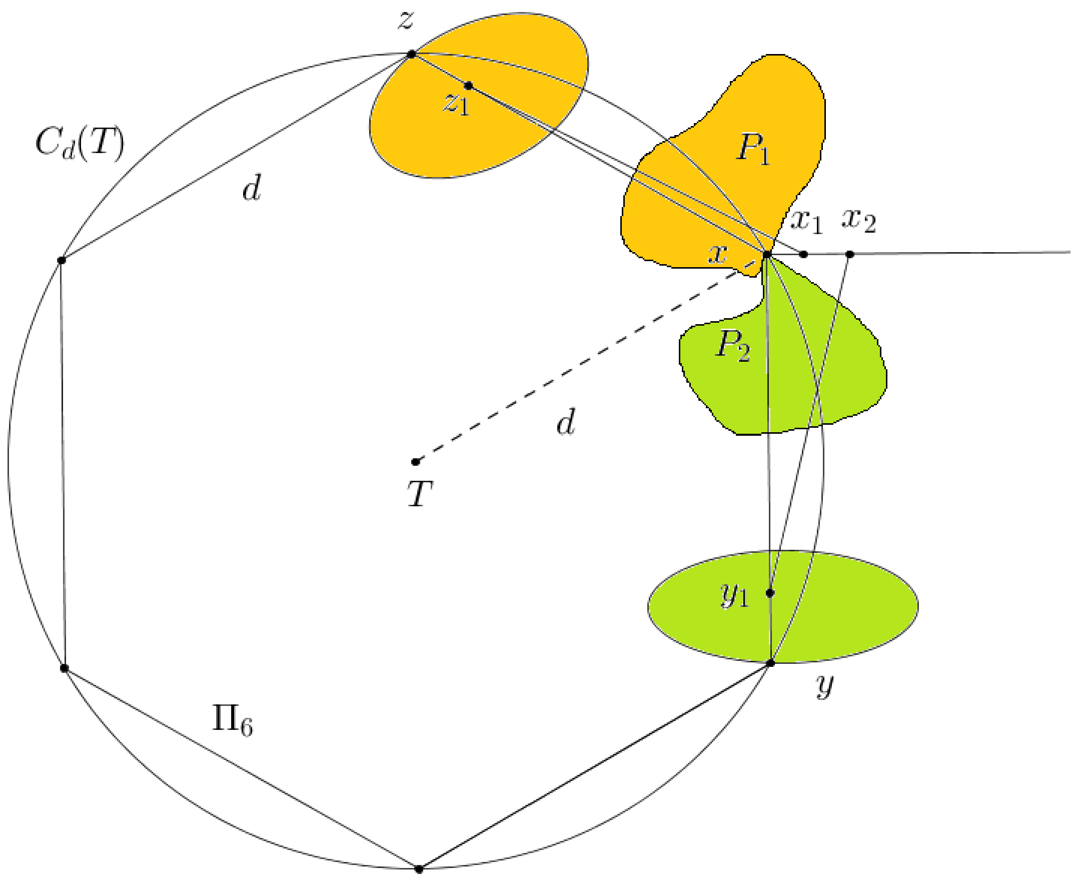
Αποδειξη. Με βάση τα προηγουμενα θεωρηματα και λημματα είναι άμεσο συμπέρασμα ότι πάνω στον κύκλο υπάρχει τουλάχιστον ενα συνοριακο σημείο το οποίο ανήκει σε δύο στοιχεία της πλακόστρωσης με διαφορετικό χρώμα. Επίσης τα δύο σημεία του κύκλου που απέχουν απόσταση d από αυτό με τη σειρά τους δεν είναι εσωτερικά (λογω του προηγούμενου λήμματος) αλλά συνοριακά αντίστοιχα δύο στοιχείων της πλακόστρωσης με διαφορετικό χρώμα, αντίστοιχα δουλεύοντας παίρνουμε και τις υπόλοιπες 3 κορυφές του κανονικού εξάγωνου. Επειδή ο χρωματισμός μας χρησιμοποιεί 5 χρώματα και τα τρία τα έχουμε χρησιμοποιήσει στις πλευρές της κορυφής T συνεπάγεται ότι όλα τα στοιχεία της πλακόστρωσης που ανήκουν οι κορυφές του εξαγώνου έχουν τα υπόλοιπα δύο χρώματα και μάλιστα η «διάταξη» τους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. □



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Για τα παρακάτω θεωρήματα θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό, αν x, y είναι δύο σημεία ενός κύκλου τότε αυτά σχηματίζουν δύο τόξα. Θα γράφουμε $< x, y >$ για το μικρότερο σε μήκος τόξο.

ΛΗΜΜΑ 3.6. *Έστω ενα κανονικό εξάγωνο που ικανοποιεί τις προυποθέσεις του προηγούμενου λήμματος και x, y δύο κορυφές του εξαγώνου οι οποίες αποτελούν τις κορυφές μιας πλευράς του. Αν χ_4 και χ_5 είναι τα χρώματα των P_1 και P_2 που ανήκει η x, τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ και μια ημιευθεία ε_x με αρχή την x η οποία είναι κάθετη στην πλευρά (x, y) έτσι ώστε κάθε σημείο της τομής $\epsilon_x \cap B(x, \epsilon)$ να μην είναι χρωματισμένο με τα χ_4 και χ_5.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω z η κορυφή της δεύτερης πλευράς του εξαγώνου που έχει σαν κορυφή την x. Από υπόθεση το εσωτερικό των P_1 και P_2 είναι χρωματισμένα με τα χ_4 και χ_5 αντίστοιχα. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει $z_1 \in (z, x)$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο με χρώμα χ_4, αντίστοιχα υπάρχει $y_1 \in (x, y)$ εσωτερικό σημείο χρωματισμένο με το χ_5. Μπορούμε να διαλέξουμε τα z_1, y_1 όσο κοντά θέλουμε στο z και y αντίστοιχα έτσι ώστε να υπάρχουν $x_1, x_2 \in \epsilon_x$ με $d(x_1, z_1) = d(x_2, y_1) = d$. Είναι προφανές ότι για οποιδήποτε σημείο της ημιευθείας ϵ_x το οποί απέχει απόσταση από το x μικρότερη της $\min\{d(x, x_1), d(x, x_2)\}$ δεν μπορεί να είναι χρωματισμένο ούτε με το χ_4 ούτε με το χ_5. $\square$

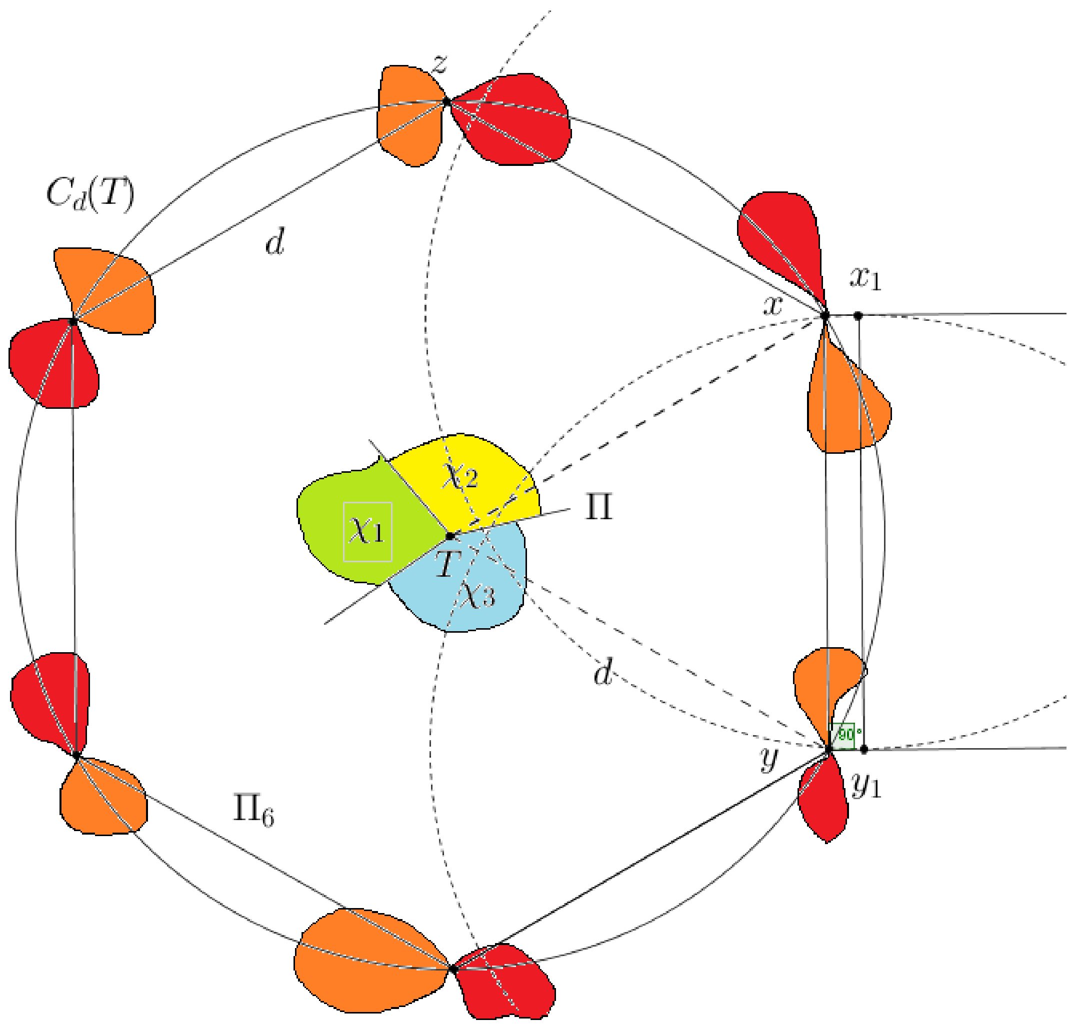


Θεωρημα 3.7. *Έστω $X : \mathbb{R}^2 \to \chi$ είναι d-distance excluding χρωματισμός μιας τοπικά πεπερασμένη πλακόστρωσης, τότε $|\chi| \geq 6$*

Αποδειξη. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει d-distance excluding χρωματισμός X με $|\chi| = 5$ θα επεκτείνουμε την κατασκευή του προηγούμενου λήμματος (δειτε σχημα παρακατω) με τη κατάλληλη επιλογή των x, y. Αυθαίρετα διαλέγουμε μια από τις πλευρές στις οποίες ανήκει η τριχρωματική κορυφή T, έστω Π, τότε αν την προεκτεινουμε θα τέμνει μια πλευρά του εξαγώνου, έστω την (x, y) όπου x, y οι κορυφές της. Φέρνοντας πλέον δύο ημιευθείες κάθετες στην (x, y), όπως κάναμε και πριν, οι οποίες μεταξύ τος είναι παράλληλες. Λόγω του προηγούμενου λήμματος υπάρχουν x_1, y_1 όσο κοντά θέλουμε στις κορυφές x και y αντίστοιχα έτσι ώστε $d(x_1, y_1) = d$, δλδ $(x_1, y_1) \parallel (x, y)$ και να μην είναι χρωματισμένα με τα υπόλοιπα σύο χρωματα χ_4 και χ_5. Διαλέγουμε τα x_1 και y_1 τόσο κοντά στις x και y αντίστοιχα έτσι ώστε ο $S_d(x_1) \cap \Pi \neq \emptyset$ και $S_d(y_1) \cap \Pi \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι

- η x_1 δεν μπορεί να χρωματιστεί με τα χ_2 και χ_3 άρα είναι χρωματισμένη με το χ_1.
- η y_1 δεν μπορεί να χρωματιστεί με τα χ_2 και χ_3 άρα είναι χρωματισμένη με το χ_1.

άρα και x_1 και η y_1 είναι χρωματισμένες με το χ_1 άτοπο. Άρα $|\chi| \geq 6$. □



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μετρησιμος χρωματικος αριθμος

Στο παρον κεφάλαιο θα σκιαγραφησουμε την αποδειξη του παρακάτω θεωρήματος που οφείλεται στον Kenneth Falconer

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. **Falconer Θεώρημα** *Έστω $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ μια διαμέριση του επιπέδου από 4 μετρήσιμα σύνολα, τότε κάποιο από τα 4 «φτάνει» την απόσταση 1.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. Lebesque πυκνότητα Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα μετρήσιμο σύνολο Lebesque και $x \in \mathbb{R}^2$ τότε σαν Lebesque πυκνότητα του A ορίζουμε την συνάρτηση

$$D\left(A, x\right) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu\left(A \cap B(x, r)\right)}{\mu\left(B(x, r)\right)} \tag{16}$$

με $\mu\left(B(x, r)\right) = \pi r^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. **Θεώρημα Πυκνότητας Lebesque** *Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ισχύει ότι:*

$$D(A, x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ x \in A \\ 0 & \alpha\nu\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases} \tag{17}$$

σχεδόν παντού.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. Για κάθε μετρήσιμο σύνολο A ορίζουμε

$$A^* = \{x \in A : D(A, x) = 1\} \tag{18}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Επειδή $\mu\left(A^* \triangle\right) = 0$ συνεπάγεται ότι το A^* ίσο με το A σχεδόν παντού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Το A^* είναι μετρήσιμο σύνολο μιας και η συνάρτηση $\mu\left(A \cap B(x, r)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση και

$$A^* = D^{-1}\left[\{1\}\right] \tag{19}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3. Σύνορο κατα πυκνότητα Για κάθε μετρήσιμο σύνολο A ορίζουμε το σύνορο του *κατα πυκνότητα* ως εξής

$$\partial A = \{x : D(A, x) \neq 0, 1 \text{ ή δεν υπάρχει}\} \tag{20}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Από το θεώρημα (4.2) προκύπτει ότι $\mu\left(\partial A\right) = 0$

Λημμα 4.3. *Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε $\mu(A) > 0$ και $\mu(\mathbb{R}^2 \setminus A) > 0$ ισχύει ότι $\partial A \neq \emptyset$*

Παραδειγμα 4.1. Αν θέσουμε $A = [-1,1]^2$ τότε $\mu(A) > 0, \mu(\mathbb{R}^2 \setminus A) > 0$ και

$$D(A,x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in (-1,1)^2 \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}^2 \setminus A \\ \frac{1}{2} & \text{αν } x = (\pm 1, b) \text{ με } b \in (-1,1) \text{ή } x = (\alpha, \pm 1) \text{ με } \alpha \in (-1,1) \\ \frac{1}{4} & \text{αν } x = (a,b) \text{ με } a,b \in \{1,-1\} \in \end{cases} \tag{21}$$

Λημμα 4.4. *Αν $\mathbb{R}^2 \bigcup_{i=1}^4 A_i$ είναι μια κάλυψη του επιπέδου από 4 ξένα μετρήσιμα σύνολα τότε η $\bigcup_{i=1}^4 A^*$ είναι μια ένωση ξένων μεταξύ τους συνόλων με το συμπλήρωματικο τους να είναι το $\left(\bigcup_{i=1}^4 A^*\right)^c = \mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^4 \partial A_i$*

Λημμα 4.5. *Αν $\mathcal{M}$ τότε υπάρχει $x \in \mathcal{M}$ έτσι ώστε*

$$l\left(C(x,1) \cap \mathcal{M}\right) = l\left(C(x,\sqrt{3}) \cap \mathcal{M}\right) = 0 \tag{22}$$

Λημμα 4.6. *Αν $\mathbb{R}^2 \bigcup_{i=1}^4 A_i$ είναι μια κάλυψη του επιπέδου από 4 ξένα μετρήσιμα σύνολα έτσι ώστε να είναι 1-ecxluding τότε αν $x \in \mathcal{M}$ με $x \in \partial A_1 \cap \partial A_2$ συναπάγεται ότι*

$$l\left(C(x,\sqrt{3}) \setminus (A_1^* \cup A_2^*)\right) = 0 \tag{23}$$

Λημμα 4.7. *Αν C είναι ένας κύκλος με ακτίνα $r > \frac{1}{2}$ και E_1, E_2 δύο ξένα μετρήσιμα υποσυνόλα του C τέτοια ώστε $l(C \setminus (E_1 \cup E_2)) = 0$ τότε αν $\phi = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2r}\right)$ είναι άρρητος και πολλαπλάσιος του π τότε ένα από τα E_1 και E_2 περιέχει δύο σημεία που απέχουν απόσταση 1.*

Λημμα 4.8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $\left(1 - i\sqrt{11}\right)^{2m} \neq (-12)^m$*

Απόδειξη του Θεωρηματος Falconer

Με ολα τα προηγουμενα λημματα ειναι πλεον ευκολο να αποδειξουμε το ζητουμενο. Αν $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$ ενας χρωματισμος απο μετρησιμα συνολα ξενα μεταξυ τους που ικανοποιει την χρματικη προυποθεση τοτε με βαση τα προηγουμενα λημματα καταληγουμε οτι

$$\left(1 - i\sqrt{11}\right)^{2m} \neq (-12)^m$$

το οποιο ειναι ατοπο.