



ΔΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

*“ Επίλυση Εξισώσεων-Μοντέλων Σχηματισμού και Διάδοσης
Κυμάτων Tsunami με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων ”*

Μεταπτυχιακή εργασία
της
Καλλιόπης Καλαμαρά

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Ε. Ε. Θεοτόκογλου
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ
Οκτώβριος 2012

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ευστάθιο Θεοτόκογλου, Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την ανάθεση του θέματος της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας και για την επίβλεψη κατά τη διάρκεια εκπόνησής της. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος το διδάκτορα, κ. Θεοδόσιο Παπαθανασίου, για την πολύτιμη συνεργασία και τη συνεχή καθοδήγηση που μου προσέφερε στο διάστημα αυτό.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω ακόμη τον κ. Κωνσταντίνο Μπελιμπασάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Ε.Μ.Π. , και τον κ. Θεόδωρο Γεροστάθη, Επίκουρο Καθηγητή του Τ.Ε.Ι. Αθήνας, , για τη συμμετοχή τους και τις παρατηρήσεις τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Καλαμαρά Καλλιόπη

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μοντελοποίηση του φαινομένου της γένεσης και της διάδοσης των κυμάτων τσουνάμι με χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αρχικά, παρουσιάζεται το γενικό πρόβλημα κυμάτων ελεύθερης επιφάνειας σύμφωνα με τους θεμελιώδεις νόμους της υδροδυναμικής και περιγράφονται οι εξισώσεις ρηχών υδάτων, οι οποίες με τις κατάλληλες παραδοχές, ενδείκνυνται για την περιγραφή της διάδοσης κυμάτων τσουνάμι.

Στη συνέχεια, γίνεται μια σύντομη αναφορά στα αίτια και τους μηχανισμούς δημιουργίας κυμάτων τσουνάμι, περιγράφονται τα στάδια εξέλιξής τους και για κάθε ένα από αυτά, οι αντίστοιχες εξισώσεις ρηχών υδάτων. Έπειτα, παρουσιάζεται η μεταβολική διατύπωση των κατάλληλων γραμμικοποιημένων εξισώσεων ρηχών υδάτων, η οποία οδηγεί στην κατασκευή μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων, και αποδεικνύεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του μεταβολικού προβλήματος.

Ακολούθως, παρουσιάζεται η προσομοίωση και ο προγραμματισμός που έγινε για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (μέσω του υπολογιστικού περιβάλλοντος Matlab). Τα μοντέλα προσομοίωσης που επιλύθηκαν αφορούν σε διάφορους γενεσιουργούς μηχανισμούς όπως η τμηματική ανύψωση πυθμένα και οι υποθαλάσσιες κατολίσθησεις. Με την ίδια μέθοδο, επιλύθηκε και η περίπτωση δημιουργίας τσουνάμι με γενεσιουργό αίτιο την πτώση μετεωρίτη.

Τέλος, παρατίθενται τα αποτελέσματα των προηγούμενων εφαρμογών και γίνεται σχολιασμός και σύγκριση αυτών με αντίστοιχα από τη σχετική βιβλιογραφία.

Abstract

The present study aims to investigate the generation and propagation of tsunami waves via suitable forms of the linearized shallow water equations and use of the Finite Element method.

Initially, the derivation of the basic hydrodynamic theory for non-viscous incompressible fluids is introduced and the shallow water theory is described. That constitutes a principal approximate theory, which results from assuming the water to be shallow or the wave to have a long wavelength. In this study, we are restricting the research to the linear approximation, which is defined in terms of the ratio of a typical wave amplitude to a typical depth.

Several generating mechanisms, such as seabed dislocations or submarine landslides, are considered. For this purpose, 1-D and 2-D equations are presented and suitable variational formulations are derived and analysed. Based on the previous, Finite Element models are developed. The implementation of the above, along with several time integration techniques, into MatLab codes follows.

Numerical results, regarding to seabed dislocations and submarine landslides, are presented and compared to similar cases of the relevant literature.

Finally, an application of the above techniques for the simulation of meteor impact generated water waves, is attempted. Comparison of the shallow water theory with full dispersion solutions is presented and convergence of the numerical schemes is demonstrated.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1	9
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11
1.1. Βασικά στοιχεία υδροδυναμικής	11
1.2. Θεώρημα Helmholtz.....	14
1.3. Ροή δυναμικού και Νόμος Bernoulli.....	15
1.4. Συνοριακές συνθήκες	17
1.5. Τυπικό πρόβλημα θαλάσσιων κυμάτων στο επίπεδο	18
1.6. Θεωρία ρηχών υδάτων (Shallow water theory) - Παραδοχές	20
Κεφάλαιο 2	25
ΚΥΜΑΤΑ ΤΣΟΥΝΑΜΙ	27
2.1. Λίγα ιστορικά στοιχεία.....	27
2.1.1. Χαρακτηριστικά - Αίτια γένεσης τσουνάμι.....	27
2.2. Εξισώσεις ρηχών υδάτων (shallow water equations).....	28
2.2.1. Γένεση	28
2.2.2. Διάδοση και Αναρρίχηση κύματος στην ακτή	30
2.2.3. Γενικευμένο μοντέλο ροής σε ρηχά νερά.....	31
Κεφάλαιο 3	35
ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ	37
3.1. Ισχυρή διατύπωση του προβλήματος γένεσης κύματος τσουνάμι	37
3.2. Μεταβολική διατύπωση του προβλήματος γένεσης κύματος τσουνάμι ..	38
3.2.1. Ακριβής μεταβολική διατύπωση:	39
3.2.2. Προσεγγιστική μεταβολική διατύπωση (Μέθοδος Galerkin):	42
Κεφάλαιο 4	45
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	47
4.1. Μονοδιάστατο πρόβλημα.....	47
4.2. Διδιάστατο πρόβλημα.....	52
4.3. Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων 2 ^{ης} τάξης	54
4.3.1. Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης εξισώσεων πρώτης τάξης.....	56
4.4. Μέθοδος συγκεντρωμένων μαζών	59
Κεφάλαιο 5	63
ΒΑΣΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΤΣΟΥΝΑΜΙ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	65
5.1. Μετατόπιση πυθμένα λόγω σεισμικής δραστηριότητας (Dislocation generated tsunami)	65
5.1.1. Ενέργεια κύματος τσουνάμι – Παράμετροι.....	65

5.1.2. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης μετατόπισης πυθμένα στη μία διάσταση.....	66
5.1.3. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης μετατόπισης πυθμένα στις δύο διαστάσεις	82
5.2. Γεωλίσθηση πυθμένα (Landslide generated tsunami).....	88
5.2.1. Ενέργεια κύματων τσουνάμι – Παράμετροι.....	88
5.2.2. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης ολίσθησης πυθμένα στη μία διάσταση.....	91
5.2.3. Μοντέλο προσομοίωσης ολίσθησης πυθμένα σύνθετης διατομής στη μία διάσταση.....	99
5.3. Πτώση αστεροειδούς (Meteor impact generated tsunami).....	107
5.3.1. Ενέργεια κυμάτων τσουνάμι	107
5.3.2. Περιγραφή μηχανισμού γένεσης τσουνάμι – Αναλυτική λύση.....	107
5.3.3. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης πτώση μετεωρίτη σε θαλάσσια επιφάνεια - Αποτελέσματα.....	116
Κεφάλαιο 6	127
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	129
Κεφάλαιο 7	131
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	133

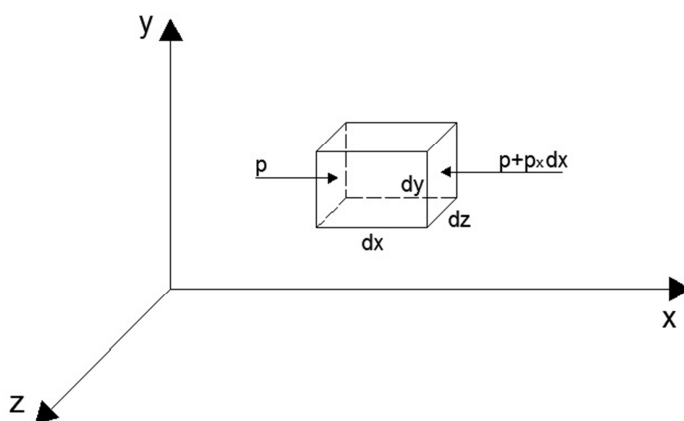
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Βασικά στοιχεία υδροδυναμικής

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια σύντομη παρουσίαση βασικών στοιχείων υδροδυναμικής. Η διάρθρωση των υποενοτήτων και η περιγραφή των εξισώσεων, ακολουθεί την αντίστοιχη παρουσίαση του κλασσικού συγγράμματος του J. J. Stoker^[1]. Η αρχή διατήρησης ορμής του ρευστού σωματιδίου βασίζεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Θεωρούμε στοιχειώδη όγκο μορφής ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με πλευρές dx , dy , dz , όπως στο **Σχήμα 1.1**.



Σχήμα 1.1: Στοιχειώδης όγκος ρευστού

Η εντατική κατάσταση της στοιχειώδους μάζας dm κατά τον άξονα x , που απεικονίζεται στο **Σχήμα 1.1**, περιγράφεται ως εξής

$$[-(p + p_x dx) + p]dydz + X\rho dx dy dz = \rho a_{(x)} dx dy dz \quad , \quad (1.1.1)$$

όπου

$X = X(x, y, z, t)$ = το σύνολο των εξωτερικών ή/και καθολικών δυνάμεων που ενεργούν στο στοιχείο μάζας

$a_{(x)} = a_{(x)}(x, y, z, t)$ = η επιτάχυνση του στοιχείου μάζας dm κατά τη διεύθυνση του άξονα x

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ = η πυκνότητα του στοιχείου μάζας dm κατά τη διεύθυνση του άξονα x

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι γενικές εξισώσεις κίνησης κατά τους τρεις άξονες γράφονται ως εξής

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} p_x + X = a_{(x)} \\ -\frac{1}{\rho} p_y + X = a_{(y)} \\ -\frac{1}{\rho} p_z + X = a_{(z)} \end{cases}, \quad (1.1.2)$$

ή εναλλακτικά σε διανυσματική μορφή:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{F} = \mathbf{a}, \quad (1.1.3)$$

όπου το διάνυσμα της καθολικής δύναμης $\mathbf{F} = F(0, -g, 0)$, όπου g = επιτάχυνση της βαρύτητας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ως θετική φορά του κατακόρυφου άξονα y θεωρείται η αντίθετη του βάρους.

Οι εξισώσεις (1.1.2) αποτελούν το θεμελιώδη νόμο της ρευστομηχανικής που αναφέρεται σε ένα σύνολο ύλης καθορισμένης οντότητας και προσιδιάζει στην κινηματική περιγραφή της ροής κατά Lagrange, κατά την οποία παρακολουθείται η πορεία συγκεκριμένων ρευστών σωματιδίων. Ωστόσο, είναι αναγκαία η προσαρμογή των νόμων στα πλαίσια της μεθόδου Euler κατά την οποία μελετάται τι συμβαίνει σε σταθερά σημεία του χώρου καθώς διέρχονται διάφορα ρευστά σωματίδια.

Συνεπώς, κατά την περιγραφή Euler το πεδίο των ταχυτήτων (u, v, w) περιγράφεται συναρτήσει των χωρικών συντεταγμένων και του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, αν το πεδίο ροής περιγράφεται συναρτήσει των

$$\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t)), \quad (1.1.4)$$

τότε το πεδίο ταχυτήτων περιγράφεται από τη χρονική παράγωγο των ανωτέρω ως εξής

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \quad (1.1.5)$$

Έστω λοιπόν, μια ιδιότητα του ρευστού F . Η χρονική παράγωγός της δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} + F_t \\ &= u \dot{x} + v \dot{y} + w \dot{z} + F_t, \end{aligned} \quad (1.1.6).$$

Επομένως, για να εξάγουμε την ολική παράγωγο μιας συνάρτησης αρκεί να εφαρμόσουμε τον τελεστή

$$\frac{d}{dt}(\) = u(\)_x + v(\)_y + w(\)_z + (\)_t, \quad (1.1.7)$$

Σύμφωνα με την σχέση (1.1.7), η επιτάχυνση \mathbf{a}_{θ} κατά την διεύθυνση του άξονα i προκύπτει από την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{a}_{\theta} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = uu_{(i)x} + vu_{(i)y} + wu_{(i)z} + u_{(i)t}, \quad (1.1.8).$$

Με γνωστές τις επιταχύνσεις του σωματιδίου ανά άξονα, \mathbf{a}_{θ} , και με την παραδοχή ότι η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται είναι της βαρύτητας, οι εξισώσεις (1.1.2) αναδιατυπώνονται

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho} p_x, \\ u_t + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\rho} p_y - g, \\ u_t + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z \end{cases} \quad (1.1.9).$$

Οι εξισώσεις (1.1.9) αποτελούν ένα σύστημα τριών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων των u, v, w, ρ και p . Θεωρώντας ότι πρόκειται για ασυμπίεστο ρευστό, η πυκνότητα ρ λαμβάνεται σταθερή. Ταυτοχρόνως, στα ασυμπίεστα ρευστά, ο όγκος μιας καθορισμένης μάζας παραμένει αμετάβλητος. Η αρχή διατήρησης της μάζας μπορεί να περιγραφεί αρχικά από τη σχέση

$$\iint_S \rho \mathbf{u}_n dS = 0, \quad (1.1.10)$$

η οποία εκφράζει ότι η εκροή μάζας από ένα όγκο που περιβάλλεται από μία κλειστή επιφάνεια - και με την προϋπόθεση ότι δεν παράγεται ή καταστρέφεται ποσότητα μάζας μέσα στον όγκο αυτό - είναι μηδενική. Κατά σύμβαση, η φορά της ταχύτητας \mathbf{u}_n λαμβάνεται θετική κατά την κάθετη στην επιφάνεια εκροή της μάζας. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss, η εξίσωση (1.1.10) ισοδυναμεί με

$$\iint_S \rho \mathbf{u}_n dS = \iiint_R \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\tau = 0, \quad (1.1.11)$$

για τυχαίο όγκο R .

Θα πρέπει λοιπόν, $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Η πυκνότητα ρ του ρευστού σωματιδίου κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο ροής ασυμπίεστου ρευστού παραμένει αμετάβλητη κι έτσι απαλείφεται από την εξίσωση (1.1.11). Επομένως,

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = u_x + v_y + w_z = 0 \quad , \quad (1.1.12) .$$

Η εξίσωση (1.1.12) είναι η αρχή **διατήρησης της ορμής** και λέγεται **εξίσωση συνέχειας**. Οι εξισώσεις (1.1.9) και (1.1.12) είναι ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων που επιλύεται και προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο τις συνιστώσες της ταχύτητας u, v, w και την πίεση p .

1.2. Θεώρημα Helmholtz

Έστω ότι έχουμε μια κλειστή καμπύλη C , η οποία κινείται ταυτόχρονα με το ρευστό (δηλαδή τα σύνορα αποτελούνται από σωματίδια του ίδιου ρευστού). Η **κυκλοφορία** Γ του ρευστού, η οποία ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της ταχύτητας πάνω σε μία τυχαία κλειστή γραμμή C του χώρου, περιγράφεται συναρτήσει του χρόνου ως εξής

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \oint_C u dx + v dy + w dz \\ &= \oint_C \mathbf{v}_s ds \quad , \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

όπου \mathbf{v}_s = η εφαπτόμενη στην καμπύλη C ταχύτητα του ρευστού, ds = στοιχειώδες μήκος τόξου.

Η καμπύλη C δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{x}(\sigma, \tau)$, όπου σ είναι παράμετρος τέτοια ώστε $0 \leq \sigma \leq 1$ και $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(1, t)$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange, ο καθορισμός της τιμής της παραμέτρου σ προσδιορίζει ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης C .

Με κατάλληλο μετασχηματισμό στο φυσικό σύστημα η (1.2.1) γράφεται $\Gamma(t) = \int_0^1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_\sigma ds$, όπου $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_\sigma$ εσωτερικό γινόμενο. Η χρονική παράγωγος αυτού προκύπτει ως εξής

$$\dot{\Gamma}(t) = \int_0^1 (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{x}_\sigma + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}_\sigma) d\sigma .$$

Εναλλακτικά, η τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης (1.1.3), μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}(t) &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{\rho} \mathbf{x}_\sigma \cdot \text{grad} \mathbf{p} - g \mathbf{x}_\sigma \cdot \text{grad} \mathbf{y} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\sigma \right) d\sigma \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{\rho} p_\theta - g y_\sigma + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})_\sigma \right] d\sigma \\
&= 0
\end{aligned}$$

εφ'όσον οι τιμές p , y και v εμφανίζονται όταν $\sigma = 0$ και $\sigma = 1$, και οι τιμές ρ και g είναι σταθερές. Από την τελευταία εξίσωση, συμπεραίνεται ότι σε ρευστό χωρίς ιξώδες η ροή σε μία κλειστή καμπύλη, η οποία απαρτίζεται από σωματίδια του ίδιου ρευστού, είναι σταθερή ως προς το χρόνο (Θεώρημα Helmholtz). Τέτοιες περιπτώσεις παρατηρούνται όταν το ρευστό βρίσκεται σε ηρεμία ή όταν κινείται με σταθερή ταχύτητα για κάποιο χρονικό διάστημα.

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτουν πρόσθετα συμπεράσματα. Έστω ότι ως θετική λαμβάνεται η αντιωρολογιακή φορά ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τυχαία επιφάνεια S που έχει ως όριο την καμπύλη C , τότε σύμφωνα με το θεώρημα Stokes του διανυσματικού λογισμού

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}_s ds = \iint_S (\text{curl} \mathbf{v})_n dA = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v})_n dA.$$

Προκύπτει, δηλαδή, ότι η κυκλοφορία παριστάνει ουσιαστικά τη στροβιλότητα του πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.

Στην περίπτωση που $\Gamma = 0$ για όλες τις κλειστές καμπύλες, προκύπτει εύκολα το συμπέρασμα ότι

$$\text{curl} \mathbf{v} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = 0,$$

οπότε η ροή ονομάζεται **αστρόβιλη**. Συμπεραίνεται λοιπόν, ότι εάν η ροή ενός ρευστού χωρίς ιξώδες είναι στιγμιαία αστρόβιλη, τότε χαρακτηρίζεται γενικά αστρόβιλη (συντηρητικό πεδίο). Τότε το διάνυσμα της ταχύτητας μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$, όπου Φ λέγεται *συνάρτηση δυναμικού*. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, οι θεωρίες που αναπτύσσονται αφορούν σε αστρόβιλα πεδία.

1.3. Ροή δυναμικού και Νόμος Bernoulli

Η θεώρηση αστρόβιλης ροής οδηγεί σε μία σειρά από χρήσιμα συμπεράσματα. Κατ'αρχήν, το γεγονός ότι $\text{curl} \mathbf{v} = 0$ εξασφαλίζει την ύπαρξη στο πεδίο ενός βαθμωτού μεγέθους, του *δυναμικού ταχυτήτων* $\Phi(x, y, z; t)$, από το οποίο μπορεί να προκύψει το πεδίο των ταχυτήτων ως εξής

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z), \quad (1.3.1)$$

ή

$$u = \Phi_x, v = \Phi_y, w = \Phi_z, \quad (1.3.2).$$

Το δυναμικό των ταχυτήτων προσδιορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\Phi(x, y, z; t) = \int^{x,y,z} u dx + v dy + w dz, \quad (1.3.3).$$

Η μηδενική στροβιλότητα ($curl v = 0$) εξασφαλίζει ότι η έκφραση προς ολοκλήρωση της (1.3.3) αποτελεί τέλειο διαφορικό. Εφ'όσον προσδιοριστούν οι συνιστώσες της ταχύτητας από την (1.3.2), προκύπτει από την εξίσωση συνέχειας (1.1.12) ότι η συνάρτηση Φ αποτελεί λύση της εξίσωσης Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \quad (1.3.4)$$

κι επομένως, η Φ χαρακτηρίζεται *αρμονική συνάρτηση*. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη, καθώς το πεδίο των ταχυτήτων προκύπτει από μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη γραμμική διαφορική εξίσωση του Laplace.

Επιπλέον, λόγω της αστρόβιλης ροής οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν ως

$$\text{grad} \Phi_t + \frac{1}{2} \text{grad}(u^2 + v^2 + w^2) = -\text{grad} \frac{p}{\rho} - \text{grad}(gy), \quad (1.3.5).$$

Η ολοκλήρωση της εξίσωσης (1.3.5) καταλήγει στην πολύ σημαντική εξίσωση, γνωστή ως **νόμος Bernoulli**

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t), \quad (1.3.6).$$

Η εξίσωση Laplace (1.3.4) και ο νόμος Bernoulli (1.3.6) μπορούν να χρησιμοποιηθούν έναντι των εξισώσεων κίνησης και συνέχειας με σκοπό να υπολογιστούν οι συνιστώσες της ταχύτητας u, v, w και η πίεση p . Πιο συγκεκριμένα, η ταχύτητα υπολογίζεται από την επίλυση της (1.3.4) ως προς Φ , και ακολούθως από την (1.3.6) προσδιορίζεται η τιμή της πίεσης p .

Παρατηρείται ότι η πίεση p προσδιορίζεται μέσα από μία συνάρτηση που φαίνεται να παραμένει σταθερή κάθε χρονική στιγμή μέσα στο ρευστό. Παρόλα αυτά, αν προσθέσουμε στην κατανομή της πίεσης μία συνάρτηση χρονικά εξαρτώμενη δε θα παρατηρηθεί καμία μεταβολή στην κίνηση του ρευστού, καθώς με αυτόν τον τρόπο δεν προστίθεται επιπλέον όρος στη βαθμίδα της πίεσης.

Για παράδειγμα, αν θέσουμε

$$\Phi = \Phi^* + \int C(\xi) d\xi, \quad (1.3.7)$$

τότε η συνάρτηση Φ^* είναι αρμονική με $grad\Phi = grad\Phi^*$ και με αντικατάσταση στη σχέση Bernoulli (1.3.6) συμπεραίνεται ότι $C(t) \equiv 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

1.4. Συνοριακές συνθήκες

Έστω ρευστό με σύνορο την επιφάνεια S που το διαχωρίζει από οποιοδήποτε άλλο μέσο. Τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια S θεωρούμε ότι παραμένουν σε αυτή. Συνήθως, πρόκειται για επιφάνειες στερεού, άκαμπτου σώματος που βρίσκονται σε συνεχή επαφή με το ρευστό, όπως π.χ. ο πυθμένας της θάλασσας, η ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας που βρίσκεται σε επαφή με την ατμόσφαιρα, κ.ά.

Εάν, για παράδειγμα η επιφάνεια S δίνεται από τον τύπο $\eta(x, y, z; t) = 0$ προκύπτει, μέσω της (1.1.3), ότι η συνθήκη

$$\frac{d\eta}{dt} = u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z + \eta_t = 0, \quad (1.4.1)$$

ικανοποιείται στην επιφάνεια S . Από την (1.3.2) και το δεδομένο ότι το διάνυσμα (η_x, η_y, η_z) είναι κάθετο στην επιφάνεια S συνεπάγεται ότι η συνθήκη (1.4.1) μπορεί να γραφεί

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = -\frac{\eta_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} = \mathbf{v}_n, \quad (1.4.2)$$

όπου ο όρος \mathbf{v}_n εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού και του συνόρου S στην κατεύθυνση του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος n .

Στην περίπτωση που το σύνορο S είναι ορισμένο και ανεξάρτητο του χρόνου η συνθήκη μηδενίζεται σε αυτό, δηλαδή

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad (1.4.3)$$

και κρίνεται κατάλληλη για περιπτώσεις όπου ένα εκ των συνόρων είναι ο απαράμορφωτος, θαλάσσιος πυθμένας.

Ακόμη, στην ειδική περίπτωση που σύνορο S του προβλήματος αποτελεί η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, στην οποία η πίεση που ασκείται είναι προκαθορισμένη, ο περιορισμός που λαμβάνεται σε αυτό, μέσω της (1.4.1), είναι

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \Phi_z \eta_z + \eta_t = 0, \quad (1.4.4).$$

Επιπλέον, δεδομένης της πίεσης στο σύνορο S , ο νόμος Bernoulli πάνω στο S διαμορφώνεται ως εξής

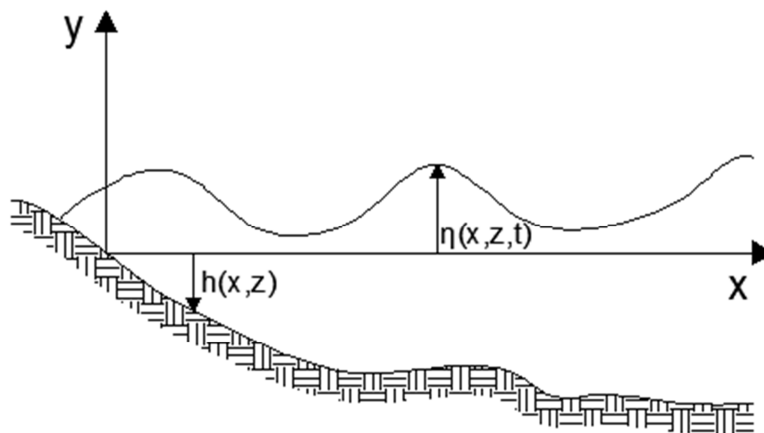
$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{P}{\rho} = 0, \quad (1.4.5)$$

Τελικά, η συνάρτηση δυναμικού Φ θα πρέπει να ικανοποιεί ένα ζεύγος μη γραμμικών συνοριακών συνθηκών (1.4.4) και (1.4.5) στην ελεύθερη επιφάνεια S , αντίθετα με την απαίτηση της γραμμικής συνοριακής συνθήκης του απαραμόρφωτου συνόρου. Ωστόσο, δεν αποτελεί παράδοξο, καθώς στην ελεύθερη επιφάνεια υπεισέρχεται ως πρόσθετη άγνωστη συνάρτηση η κάθετη μετατόπισή της $\eta(x, z; t)$.

1.5. Τυπικό πρόβλημα θαλάσσιων κυμάτων στο επίπεδο

Το **Σχήμα 1.5.1** αποτυπώνει γραφικά το γενικό πρόβλημα θαλάσσιων κυμάτων στο επίπεδο. Ο θαλάσσιος όγκος θεωρείται αρχικά ότι βρίσκεται σε ηρεμία, κατανεμημένος στο επίπεδο σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$-h(x, z) \leq y \leq 0, -\infty < z < \infty.$$



Σχήμα 1.5.1 Τυπικό πρόβλημα θαλάσσιων κυμάτων στο επίπεδο

όπου z ο κάθετος στο επίπεδο xy άξονας.

Δεδομένης μιας διαταραχής κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, αναζητείται η συνάρτηση της παραμορφωμένης ελεύθερης επιφάνειας, $y = \eta(x, z; t)$. Βάσει των δεδομένων του προβλήματος, θα πρέπει να ικανοποιείται αρχικά, η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \text{ για } \begin{cases} x^s(z; t) \leq x \leq \infty \\ -h(x, z) \leq y \leq \eta(x, z; t) \\ -\infty < z < \infty \end{cases} \quad (1.5.1).$$

όπου $x^s(z; t) =$ το ελεύθερο μεταβλητό σύνορο του νερού που φτάνει στην ακτή.

Η φυσική συνοριακή συνθήκη στον πυθμένα της θάλασσας, όπου δηλαδή $y = -h(x, z)$, είναι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.5.2)$$

ενώ στην ελεύθερη επιφάνεια, όπου δηλαδή $y = \eta(x, z; t)$, έχουμε την κινηματική συνοριακή συνθήκη

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \Phi_z \eta_z + \eta_t = 0, \quad (1.5.3)$$

και τη δυναμική συνθήκη

$$g\eta + \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) = F(x, z; t), \quad (1.5.4)$$

όπου $F(x, z; t) \equiv 0$ εκτός από την περιοχή της διαταραχής. Θεωρούμε, επίσης, ότι όσο $x \rightarrow \infty, |z| \rightarrow \infty$, οι συναρτήσεις Φ, η παραμένουν φραγμένες και τόσο αυτές όσο και κάποιες από τις παραγώγους τους τείνουν να μηδενιστούν.

Στη συνέχεια, πρέπει να ορίσουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, τέτοιες ώστε να ανταποκρίνονται στην αρχική θεώρηση ηρεμίας του νερού. Δηλαδή για τη χρονική στιγμή $t = 0$, ορίζουμε

$$\eta(x, z; t) = 0, \quad (1.5.5)$$

$$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0, \quad (1.5.6).$$

Τέλος, για την πλήρη διατύπωση του προβλήματος πρέπει να εισαχθεί σε αυτό η προκαλούμενη διαταραχή. Αρκεί, δηλαδή, να προσδιοριστεί η συνάρτηση φόρτισης F .

Στο στάδιο αυτό, που το πρόβλημα έχει περιγραφεί πλήρως, γίνεται αντιληπτή η δυσκολία επίλυσής του. Αυτό έγκειται αφενός στη μη γραμμικότητά του και αφετέρου στο ότι η ελεύθερη επιφάνεια ύδατος δεν είναι γνωστή a priori· κι έτσι το

πεδίο στο οποίο πρέπει να προσδιοριστεί η συνάρτηση δυναμικού Φ δεν είναι γνωστό εξαρχής.

Ακόμη, στο πρόβλημα εντοπίζονται επιπλέον δυσκολίες ως προς την επίλυσή του. Γίνεται σαφές ότι οι εξισώσεις αυτές δεν μπορούν να περιγράψουν επακριβώς το φυσικό φαινόμενο όσο $t \rightarrow \infty$, εφ' όσον οι κυματικές διαταραχές δεν διαδίδονται ομαλά σε σχέση με το χρόνο· αντιθέτως, προσεγγίζοντας την ακτή έχουμε αύξηση του πλάτους και θραύση των κυμάτων. Έτσι, η εισαγωγή στο μαθηματικό μοντέλο των ιδιομορφιών ως προς το χρόνο και το χώρο θα βελτιστοποιούσε το βαθμό ακρίβειας της λύσης.

Ωστόσο, εξαιτίας των δυσκολιών αυτών που παρουσιάζουν τα μη γραμμικά προβλήματα, προχωράμε μέσω κατάλληλων παραδοχών στην απλούστευσή τους κι εντέλει στην κατάταξή τους σε γνωστές κατηγορίες προβλημάτων.

1.6. Θεωρία ρηχών υδάτων (Shallow water theory) - Παραδοχές

Η θεωρία ρηχών υδάτων εφαρμόζεται όταν το βάθος είναι πολύ μικρότερο σε σύγκριση με μήκος κύματος των επιφανειακών κυμάτων. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μετατόπιση και η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας δεν είναι μικρές, καταλήγοντας έτσι σε μη γραμμικές εξισώσεις. Η θεωρία αυτή βρίσκει εφαρμογή παρέχοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα και ακριβείς προσεγγίσεις σε διάφορα φυσικά φαινόμενα όπως παλίρροιες, μοναχικά κύματα διαδιδόμενα σε ρηχά νερά, θραύση κυμάτων σε ακτές, κύματα καναλιών κ.ά. Ακόμη, μπορεί να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος, όπως αναλύεται σε επόμενο κεφάλαιο.

Αρχικά, θα εξάγουμε τη μορφή των εξισώσεων ρηχών υδάτων στις δύο διαστάσεις. Έστω x ο οριζόντιος άξονας της ατάραχης στάθμης ύδατος και y ο κάθετος σε αυτόν με άνω θετική φορά. Η γεωμετρία του πυθμένα δίνεται από τη συνάρτηση $y = -h(x, t)$, ενώ η μεταβολή της στάθμης ύδατος περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = \eta(x, t)$. Η ταχύτητα του ρευστού υποδηλώνεται από τις συνιστώσες $\mathbf{u}(x, y, t)$ και $\mathbf{v}(x, y, t)$.

Η εξίσωση συνέχειας είναι

$$u_x + v_y = 0 \quad , \quad (1.6.1)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια πρέπει να ικανοποιούνται η κινηματική οριακή συνθήκη

$$(\eta_t + u\eta_x - v)|_{y=\eta} = 0 \quad , \quad (1.6.2)$$

καθώς και η δυναμική οριακή συνθήκη, σύμφωνα με την οποία η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μηδενική

$$p|_{y=\eta} = 0 , \quad (1.6.3) .$$

Στον πυθμένα, η αντίστοιχη κινηματική οριακή συνθήκη εκφράζει την ιδιότητα των ρευστών κατά την οποία σε ακίνητο στερεό όριο η κάθετη προς αυτό συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική. Έτσι,

$$(uh_x + v)|_{y=-h} = 0 , \quad (1.6.4) .$$

Η ολοκλήρωση της (1.14) καθ' ύψος καταλήγει στη σχέση

$$\int_{-h}^{\eta} (u_x) dy + v|_{-h}^{\eta} = 0 , \quad (1.6.5) .$$

Αξιοποιώντας τις κινηματικές συνθήκες, καταλήγουμε στην μορφή

$$\int_{-h}^{\eta} u_x dy + \eta_t + u|_{\eta} \cdot \eta_x + u|_{-h} \cdot h_x = 0 , \quad (1.6.6) .$$

Εισάγουμε τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\eta(x)} u dy = u|_{y=\eta} \cdot \eta_x + u|_{y=-h} \cdot h_x + \int_{-h}^{\eta} u_x dy , \quad (1.6.7)$$

και συνδυάζοντας την με την εξίσωση (1.6.6), λαμβάνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dy = -\eta_t , \quad (1.6.8) .$$

Η θεωρία ρηχών υδάτων αποτελεί μία προσεγγιστική θεωρία, η οποία εγκείται στην παραδοχή ότι η κατακόρυφη συνιστώσα της επιτάχυνσης έχει αμελητέα επίδραση στην πίεση, δηλαδή η πίεση κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια κατανέμεται υδροστατικά σύμφωνα με τη σχέση

$$p = g \rho (\eta - y) , \quad (1.6.9) .$$

Παραγωγίζοντας την (1.6.9) ως προς x , λαμβάνουμε

$$p_x = g \rho \eta_x , \quad (1.6.10)$$

κι επομένως παρατηρούμε ότι η παράγωγος p_x είναι ανεξάρτητη του βάθους y . Κατά συνέπεια, η οριζόντια συνιστώσα της επιτάχυνσης (κατά x) είναι ανεξάρτητη από την κατακόρυφη, και η ίδια αντιστοιχία προκύπτει και για τις συνιστώσες της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t .

Έτσι, προχωρούμε στην παραδοχή ότι το πεδίο των ταχυτήτων περιγράφεται από τη συνάρτηση $u = u(x, t)$, δηλαδή μεταβάλλεται ανά σημείο του άξονα x και ανά χρονική στιγμή t . Η εξίσωση κίνησης απλοποιείται στη μορφή

$$u_t + uu_x = -g\eta_x, \quad (1.6.11).$$

Η σχέση (1.6.11) αποτελεί την τυπική εξίσωση κίνησης σύμφωνα με την περιγραφή Euler, όπου $u_y = 0$. Επιπλέον, η (1.6.8) μπορεί να γραφεί

$$[u(\eta + h)]_x = -\eta_t, \quad (1.6.12)$$

καθώς λόγω της ανεξαρτησίας της ταχύτητας u από το y ισχύει $\int_{-h}^{\eta} u dy = u \int_{-h}^{\eta} dy$.

Το ζεύγος των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (1.6.11) και (1.6.12) για τις άγνωστες συναρτήσεις $u = u(x, t)$ και $\eta = \eta(x, t)$ αποτελούν τις διαφορικές εξισώσεις της θεωρίας ρηχού ύδατος. Με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή τις τιμές των συναρτήσεων u και η για $t = 0$, η επίλυση των εν λόγω διαφορικών εξισώσεων αποδίδουν το ανάλογο φυσικό φαινόμενο.

Επιπροσθέτως, θεωρούμε ότι οι τιμές της ταχύτητας των σωματιδίων του ρευστού v και της μεταβολής της ελεύθερης επιφάνειας του ύδατος η , καθώς και οι μερικές παράγωγοι τους είναι πολύ μικρές, κι έτσι τα τετράγωνα τους και τα μεταξύ τους γινόμενα μπορούν να αμεληθούν, συγκριτικά με τους γραμμικούς όρους. Συνεπώς, εισάγουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις ρηχών υδάτων, οι οποίες προέκυψαν από την απαλοιφή των μη γραμμικών όρων. Έτσι, έχουμε

$$u_t = -g\eta_x, \quad (1.6.13)$$

$$(uh)_x = -\eta_t, \quad (1.6.14)$$

Το σύστημα των ανωτέρω διαφορικών εξισώσεων, με κατάλληλες παραγωγίσεις και αντικαταστάσεις οδηγεί στην παρακάτω διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(uh)_{xx} - \frac{1}{g} u_{tt} = 0, \quad (1.6.15).$$

Εάν, μάλιστα, το βάθος του πυθμένα είναι σταθερό η εξίσωση (1.6.15) καταλήγει στην κλασική γραμμική εξίσωση κύματος

$$u_{xx} - \frac{1}{gh} u_{tt} = 0, \quad (1.6.16).$$

Από την κυματική εξίσωση (1.6.16) μπορεί να εξαχθεί ότι η ταχύτητα διάδοσης της περιγραφόμενης διαταραχής είναι ίση με \sqrt{gh} .

Η γραμμική περιγραφή της θεωρίας των ρηχών υδάτων εφαρμόζοταν ανέκαθεν για την ανάλυση παλιρροϊκών φαινομένων. Βέβαια, η ακριβής ανάλυση παλιρροϊκών φαινομένων στους ωκεανούς απαιτεί τον συνυπολογισμό εξωτερικών βαρυτικών δυνάμεων, της δύναμης Coriolis, κ.ά.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις κυμάτων τσουνάμι

2. ΚΥΜΑΤΑ ΤΣΟΥΝΑΜΙ

2.1. Λίγα ιστορικά στοιχεία

Τα κύματα τσουνάμι έχουν καταγραφεί σε φυσικό φαινόμενο από την εποχή της αρχαιότητας. Υπάρχουν σαφείς ιστορικές αναφορές που κάνουν λόγο για τέτοιου είδους θαλάσσια κύματα, όπως για παράδειγμα τα κύματα τσουνάμι που προκλήθηκαν από την έκρηξη του ηφαιστείου της νήσου Στρογγύλης (Σαντορίνη), γνωστή και ως μινωική έκρηξη, γύρω στο 1600 π.Χ. Εκτιμάται ότι οι καταστροφικές επιπτώσεις τους προσεγγίζοντας τις ακτές της βόρειας Κρήτης ήταν τέτοιες που συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με τη “δύση” του Μινωικού πολιτισμού.

Έκτοτε, έχουν σημειωθεί πολλές φορές κύματα τσουνάμι ανά τον κόσμο με λιγότερο ή περισσότερο καταστροφικές συνέπειες για τον άνθρωπο. Στατιστικά, έχει παρατηρηθεί η συχνή εμφάνιση τους στον Ειρηνικό ωκεανό, λόγω της έντονης τεκτονικής δραστηριότητας των λιθοσφαιρικών πλακών.

Ανάμεσα στο πιο πρόσφατο αλλά και πιο σοβαρό, ως προς τις επιπτώσεις τους, κύμα τσουνάμι είναι αυτό που προκλήθηκε από το σεισμό του 1833 στη νήσο Σουμάτρα της Ινδονησίας, εκτιμώμενου μεγέθους 8.8-9.2 στην κλίμακα της σεισμικής ροπής. Μια από τις μεγαλύτερες φυσικές καταστροφές σημειώθηκε το 2004 εξαιτίας του σεισμού που εκδηλώθηκε στα ανοιχτά του Ινδικού ωκεανού, σεισμικής ροπής 9.1-9.3 ^[2]. Τα κύματα τσουνάμι που προκλήθηκαν έπληξαν πολλές χώρες, όπως Ταϊλάνδη, Ινδία, Σρι Λάνκα έως και χώρες της Αφρικής κ.ά. Το ύψος των κυμάτων που καταγράφηκε ανέρχεται στα 30 μέτρα και είχε ως αποτέλεσμα έναν πρωτοφανή, μεγάλο αριθμό θυμάτων. Τέλος, στην Ιαπωνία το 2011 ο σεισμός σεισμικής ροπής 9, που προκλήθηκε με υποθαλάσσιο επίκεντρο, έπληξε τις ακτές της Ιαπωνίας με κύματα τσουνάμι ύψους 10-30 μέτρων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μεγαλύτερο κύμα τσουνάμι που έχει καταγραφεί μέχρι σήμερα είναι 524 μέτρων, που προκλήθηκε το 1958 από ογκώδη κατολίσθηση στην Αλάσκα ^[3].

Πλέον, τα τσουνάμι αποτελούν ένα ευρύ πεδίο έρευνας διεθνώς, η οποία αποσκοπεί τόσο στην κατανόηση όλων των σταδίων του φαινομένου, όσο και στην προστασία των παράκτιων περιοχών έναντι αυτού.

2.1.1. Χαρακτηριστικά - Αίτια γένεσης τσουνάμι

Κύματα τσουνάμι ονομάζονται οι θαλάσσιοι κυματισμοί ελεύθερης επιφάνειας σεισμογενούς ή γενικότερα κρουστικής προελεύσεως. Βασικοί μηχανισμοί δημιουργίας κυμάτων τσουνάμι είναι: **(α)** Η μετατόπιση του πυθμένα λόγω σεισμικής δραστηριότητας, **(β)** οι γεωλισθήσεις του πυθμένα, **(γ)** οι ηφαιστειακές εκρήξεις και **(δ)** άλλα αίτια όπως π.χ. πτώση μετεωριτών ή αστεροειδών, υποθαλάσσιες εκρήξεις κ.λ.π ^[4].

Βασικά χαρακτηριστικά των κυμάτων αυτών είναι το μεγάλο μήκος κύματος και τα τεράστια ποσά ενέργειας που μεταφέρονται με κυματική διάδοση. Η περίοδος των κυμάτων τσουνάμι κυμαίνεται από 5 λεπτά έως 2 ώρες περίπου. Τυπικά μήκη κύματος ανήκουν στο φάσμα των δεκάδων ή και εκατοντάδων χιλιομέτρων. Η ενέργεια του κύματος είναι άξουσα συνάρτηση της ενέργειας του γενεσιουργού αιτίου και οι απώλειες κατά τη φάση της διάδοσης αμελητέες.

Τα κύματα τσουνάμι διαδίδονται με υψηλή ταχύτητα στα βαθιά νερά των ωκεανών. Η ενδεικτική μέση ταχύτητα διάδοσής τους στους ωκεανούς αντιστοιχεί στα 500 km/h^[4]. Καθώς, όμως προσεγγίζουν την ακτή η ταχύτητα μειώνεται δραματικά και το μεγαλύτερο μέρος της κυματικής ενέργειας διοχετεύεται στο μέτωπο του κύματος, φθάνοντας σε ύψος 5 έως 15 μέτρων^[4]. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αναλύσεις γύρω από το σενάριο πιθανής κατάρρευσης του ηφαιστείου La Palma στα Κανάρια νησιά εκτιμούν ότι το κύμα megatsunami που θα προκληθεί μπορεί να φτάσει σε ύψος μετώπου 650-900 μέτρων^[5]. Έτσι, ενώ σε βαθιά νερά το τσουνάμι, λόγω των χαρακτηριστικών του εκεί, δεν θεωρείται σοβαρός κίνδυνος για τις πλεύουσες κατασκευές, φτάνοντας στις ακτές έχει ιδιαίτερα καταστρεπτικές συνέπειες.

2.2. Εξισώσεις ρηχών υδάτων (shallow water equations)

Το μεγάλο μήκος κύματος των τσουνάμι, συγκρινόμενο με τυπικές ωκεάνιες βαθυμετρίες (μέγιστο ωκεάνιο βάθος περίπου 11km), καθιστά τις εξισώσεις ρηχών υδάτων κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή της δημιουργίας και της διάδοσης των κυμάτων αυτών^[6].

2.2.1. Γένεση

Κατά τη φάση της γένεσης του, το κύμα τσουνάμι, μπορεί να προσομοιωθεί με χρήση των εξισώσεων ρηχών υδάτων σε χωρικά και χρονικά μεταβαλλόμενη βαθυμετρία. Έτσι, λαμβάνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις^[6]:

- Εξίσωση κίνησης
$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + (u_j M_i)_{,i} + g(h_0 + \eta)\eta_{,i} = 0 \quad (2.2.1)$$

- Εξίσωση συνέχειας
$$\frac{\partial}{\partial t}(h_0 + \eta) + M_{i,i} = 0 \quad (2.2.2)$$

όπου:

$$M_i = (h_0 + \eta - b)u_i$$

$$u_i = \eta \text{ ταχύτητα}$$

η = η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας

h_0 = βάθος πυθμένα

g = επιτάχυνση της βαρύτητας

Πιο αναλυτικά, στην περίπτωση προβλήματος δύο διαστάσεων οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις ρηχών υδάτων είναι

- *Εξίσωση κίνησης*

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (2.2.6)$$

Για λόγους απλούστευσης, αν θεωρήσουμε ότι $h_0 = h_0(x, y, t)$ και $h(x, y, t) = h_0(x, y, t) + \eta(x, y, t)$, οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής ανά άξονα είναι

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (2.2.8)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο τις εξισώσεις (2.2.7) και (2.2.8) στο διάστημα $[0, t]$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t M_x dt \right) &= -g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \Leftrightarrow m_x|_0^t = -g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_x|_t = M_x|_0 - g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dt. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ομοίως, προκύπτει για τον άξονα y

$$M_y|_t = M_y|_0 - g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} dt. \quad (2.2.10)$$

- *Εξίσωση συνέχειας*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta + h_0) + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0. \quad (2.2.11)$$

Με αντικατάσταση των (2.2.9) και (2.2.10) στην εξίσωση συνέχειας (2.2.11), προκύπτει

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial M_x|_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \right) - \frac{\partial M_y|_0}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} dt \right) . \quad (2.2.12)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (2.2.12), έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t \partial x} \left(g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \right) + \frac{\partial}{\partial t \partial y} \left(g \int_0^t h_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} dt \right) \Leftrightarrow \\ &= -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g h_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) , \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + g \nabla (h_0 \nabla \eta) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + g \nabla (h_0 \nabla h) - g \nabla (h_0 \nabla h_0) . \quad (2.2.14)$$

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (2.2.14) απαιτούνται δύο αρχικές συνθήκες

$$i) \quad \eta(x, y, 0) = \eta_0$$

$$ii) \quad \eta_t(x, y, 0) = -\frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial M_x|_0}{\partial x} - \frac{\partial M_y|_0}{\partial y}$$

Η συνθήκη (ii) προκύπτει από την τιμή της συνάρτησης (2.2.12) για τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Η δύναμη Coriolis, το ιξώδες και η δύναμη της τριβής θεωρούνται αμελητέα για το πρόβλημα αυτό.

2.2.2. Διάδοση και Αναρρίχηση κύματος στην ακτή

Καθώς το τσουνάμι διαδίδεται και πλησιάζει στην ακτή, ο όρος που περιλαμβάνει τη μετατόπιση του πυθμένα μπορεί να παραληφθεί και οι ανωτέρω εξισώσεις να γραφούν σε όρους ταχύτητας ως εξής ^[6]

$$\bullet \quad \text{Εξίσωση κίνησης} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} = 0 . \quad (2.2.3)$$

• Εξίσωση συνέχειας:
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \{(h_0 + \eta)u_i\}_{,i} = 0 . \quad (2.2.4)$$

Οι Kawahara et al.^[7] εφάρμοσαν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία, σε κάθε κόμβο των οποίων υπολογίζονται τα προαναφερόμενα μεγέθη h_{0i} , η_i και οι ταχύτητες u_i , v_i . Ακολούθως, υπολογίζεται η τελική στάθμη της θάλασσας από τον τύπο: $h_i = h_{0i} + \eta_i$. Στη συνέχεια, διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις για κάθε πεπερασμένο στοιχείο:

1. Όλες οι κομβικές τιμές h_i να είναι θετικές, $h_i > 0$. Επομένως, το στοιχείο βρίσκεται κάτω τη θαλάσσια στάθμη.
2. Τουλάχιστον για μια κομβική τιμή να ισχύει $h_i < 0$ και οι υπόλοιπες $h_i > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η τάχυντα του κόμβου για τον οποίο ισχύει $h_i < 0$ λαμβάνεται ίση με μηδέν.
3. Όλες οι κομβικές τιμές h_i να είναι αρνητικές, $h_i < 0$. Άρα, το στοιχείο βρίσκεται στο εκτεθειμένο τμήμα του πυθμένα και θα παραληφθεί από τους υπολογισμούς.

Για την προσομοίωση του φαινομένου, οι Kawahara et al.^[7] και Kawahara και Nakazawa^[8] εφάρμοσαν άμεση χρονική ολοκλήρωση δύο βημάτων σε δεδομένα ανάλυσης των σεισμών στις πόλεις Kanto και Tokachi-oki της Ιαπωνίας.

Το τρίτο στάδιο ανάλυσης του φαινομένου, δηλαδή αυτό της προσέγγισης του κύματος τσουνάμι στην ακτή (runup), έχει μοντελοποιηθεί δεδομένης της γεωμετρίας της ακτής. Μέσα από την ανάλυση αυτή μπορεί να εξαχθεί, εκτός των άλλων, και το συμπέρασμα αποκάλυψης του πυθμένα ή όχι, μέσω των ακολούθων κριτηρίων:

(1) Εάν $h = h_0 + \eta \geq 0$, ο πυθμένας της θάλασσας αποκαλύπτεται ενώ,

(2) Εάν $h = h_0 + \eta < 0$, υπερκαλύπτεται από τον υδάτινο όγκο.

όπου

h_0 = το βάθος του πυθμένα από τη μέση στάθμη της θάλασσας.

η = η ανύψωση της στάθμης της θάλασσας λόγω της κυματικής διαταραχής (μετρούμενη από τη μέση στάθμη).

2.2.3. Γενικευμένο μοντέλο ροής σε ρηγά νερά (Ιξώδες-Δύναμη Coriolis)

Για την ακριβή ανάλυση της ροής σε ρηγά νερά (π.χ. παράκτιες θαλάσσιες ζώνες, νερά ποταμών) απαιτείται να ληφθεί υπόψη η τύρβη, η μεταφορά φερτών υλών, η θερμότητα, η δύναμη Coriolis, το ιξώδες κ.ά. Ένα καταστατικό μοντέλο που περιλαμβάνει όλα τα προηγούμενα δεν είναι διαθέσιμο μέχρι στιγμής στο πεδίο των

πεπερασμένων στοιχείων. Οι καταλληλότερες εξισώσεις για να περιγράψουν το φαινόμενο είναι οι ακόλουθες ^[6]

- Εξισώσεις κίνησης

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v \right) = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g \gamma u}{C^2 h} + \frac{f_x}{h} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.2.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \Omega u \right) = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g \gamma v}{C^2 h} + \frac{f_y}{h} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.2.6)$$

όπου

u, v = οι συνιστώσες της ταχύτητας στο επίπεδο διάδοσης

Ω = παράμετρος της τιμής Coriolis

$h(x, y)$ = η βαθυμετρία του πυθμένα

$\eta(x, y)$ = η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού

f_x, f_y = διατμητικές τάσεις του αέρα

$$\gamma = \sqrt{u^2 + v^2}$$

μ = συντελεστής ιξώδους

C = σταθερά τριβής Chezy (μεταξύ ρευστού-πυθμένα)

- Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh), \quad (2.2.7)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.2.5) - (2.2.7) μπορεί να προσαρμοστεί αναλόγως με το πρόβλημα. Στην απλούστερη του μορφή, που αγνοούνται η επίδραση της δύναμης Coriolis, του ιξώδους και της τριβής, καταλήγουμε στις εξισώσεις ρηχών υδάτων (shallow water equations) που αναλύθηκαν προηγουμένως.

Εάν, επιπλέον, η χρονική εξάρτηση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι αρμονική, δηλαδή $\eta(x, y, t) = \eta(x, y)e^{i\omega t}$, όπου ω = κυκλική συχνότητα, η κυματική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{\omega^2 \eta}{g} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.2.8)$$

Πολλές φορές, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί ένα απλουστευμένο μοντέλο ροής με τριβή στο πυθμένα. Αυτό επιτυγχάνεται με τη γραμμικοποίηση του όρου Chezy και με την εισαγωγή της παραμέτρου M , τέτοια ώστε σε ένα κυματικό κύκλο να απελευθερώνεται ισοδύναμο ποσό ενέργειας^[6]

$$-\frac{\omega^2 \eta}{g} + i\omega M \eta = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (2.2.9)$$

όπου

u_{\max} = η μέγιστη ταχύτητα που επιτυγχάνεται σε ένα κυματικό κύκλο

$$M = \frac{8u_{\max}}{3\pi C^2 h}$$

Κεφάλαιο 3

Μεταβολική διατύπωση του Προβλήματος

3. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί η ισχυρή διατύπωση του γραμμικοποιημένου προβλήματος γένεσης κύματος τσουνάμι και θα διαμορφωθεί το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος, στη διακριτή μορφή της οποίας στηρίζεται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων.

3.1. Ισχυρή διατύπωση του προβλήματος γένεσης κύματος τσουνάμι

Έστω το ανοιχτό, φραγμένο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1$ ή $d = 2$, με Lipschitz σύνορο Γ . Έστω επιπλέον σταθερές $g, T > 0$ και τυχαίο $\mathbf{x} \in \Omega$. Θεωρούμε συναρτήσεις $F(\mathbf{x}), G(\mathbf{x})$ και $k(t)$ τέτοιες ώστε: $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ και $k(0) = 0$. Ορίζουμε ως συνάρτηση μεταβαλλόμενης βαθυμετρίας, τη συνάρτηση $h_0 : Q \rightarrow \mathbb{R}$ με $Q = \Omega \times [0, T]$ και τύπο $h_0(\mathbf{x}, t) \doteq F(\mathbf{x}) + k(t)G(\mathbf{x})$.

Παρατήρηση 1: Η συνθήκη $k(0) = 0$ ορίζει, ότι πριν την εκδήλωση μετατοπίσεων του πυθμένα (γενεσιουργό αίτιο κύματος τσουνάμι), έχουμε σταθερή βαθυμετρία και ίση με $F(\mathbf{x})$. Η περίπτωση $G(\mathbf{x}) > 0$ αντιστοιχεί σε κατακρήμνιση του πυθμένα, ενώ η περίπτωση $G(\mathbf{x}) < 0$ σε ανύψωσή του.

Παρατήρηση 2: Είναι δυνατό, σε κάποια υποσύνολα του Ω να είναι $G(\mathbf{x}) > 0$ και σε κάποια άλλα $G(\mathbf{x}) < 0$. Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται σε ορισμένες περιπτώσεις δημιουργίας κυμάτων τσουνάμι με γενεσιουργό αίτιο υποθαλάσσιες κατολισθήσεις.

Παραδοχή 1: Στην ανάλυση που ακολουθεί, εκτός αν δηλωθεί διαφορετικά, θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση $h_0(\mathbf{x}, t) \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Omega))$

$$\exists c_b \in \mathbb{R}^+ : h_0(\mathbf{x}, t) > c_b, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q. \quad (3.1.1)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση βαθυμετρίας είναι πάντα θετική και καμία χρονική στιγμή ο πυθμένας δεν φτάνει την αδιατάραχη στάθμη των υδάτων.

Η ισχυρή μορφή του προβλήματος δημιουργίας κύματος τσουνάμι, που διέπεται από τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις ρηχών υδάτων, με βάση τις πιο πάνω παραδοχές, είναι η ακόλουθη:

Έστω $Z = \Omega \times (0, T)$. Να βρεθεί συνάρτηση $\eta(\mathbf{x}, t) : Z \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \nabla \cdot (h_0(\mathbf{x}, t) \nabla \eta) - \frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} \quad \text{στο } Z, \quad (3.1.2)$$

και

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Sigma := \Gamma \times [0, T] \quad (\text{συνοριακή συνθήκη}),$$

όπου n το κάθετο προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα στο Γ , $\eta(\mathbf{x}, 0) = \eta_0(\mathbf{x})$ και $\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(\mathbf{x})$, στο Ω (αρχικές συνθήκες).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση η είναι συνεχής στην αρχή των χρόνων, ισχύει για την αρχική συνθήκη στην ταχύτητα $\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{t=0} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \Big|_{t=0} - \left. \frac{\partial h_0}{\partial t} \right|_{t=0}$, όπου $\mathbf{M} = M_x$ για $d=1$ και $\mathbf{M} = (M_x, M_y)^T$ για $d=2$.

Είναι $M_x = (h_0 + \eta)u_x$, $M_y = (h_0 + \eta)u_y$, οι ροές αποφόρτισης κατά τις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

3.2. Μεταβολική διατύπωση του προβλήματος γένεσης κύματος τσουνάμι

Πριν προχωρήσουμε, θα παρουσιάσουμε κάποιους από τους χώρους συναρτήσεων που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα, όπως και κάποιες ιδιότητες και συμβολισμούς.

Για κάθε χώρο Banach X , ορίζουμε τους χώρους συναρτήσεων με τιμές συναρτήσεις $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ και $L^\infty(0, T; X)$, εφοδιασμένους με τις νόρμες:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{και} \quad \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$$

Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $u: [0, T] \rightarrow X$, εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|u\|_{C^0(0, T; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$, συμβολίζεται με $C^0(0, T; X)$. Στην παρακάτω ανάλυση τυπικά θα επιλέγουμε $X(\Omega) \equiv W^{r, 2}(\Omega) \equiv H^r(\Omega)$, $0 < r \in \mathbb{R}$, όπου $H^r(\Omega)$ χώρος Hilbert.

Ως τριπλέτα Hilbert, ορίζεται το ζεύγος ενσφηνώσεων $V(\Omega) \subset H(\Omega) \subset V^*(\Omega)$, τέτοιο ώστε:

- Ο V είναι διαχωρίσιμος και ανακλαστικός χώρος Banach.
- Ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.
- Ο V είναι πυκνός στον H και $\exists c \in \mathbb{R}^+$: $\|u\|_H \leq c \|u\|_V$, $\forall u \in V$.

Για τον δυϊκό του L^2 είναι $(L^2)^* = L^2$. Ισχύουν οι εγκλεισμοί: $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ και $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^{-1}(\Omega))^*$ με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις.

Γενικότερα:

- αν το Ω είναι φραγμένο, έχουμε $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις.

- αν το Ω δεν είναι φραγμένο, έχουμε $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, μόνο για κάθε $1 \leq p \leq 2$, με συνεχείς και πυκνές ενσφηνώσεις,

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε το χώρο:

$$W(0, T) \equiv C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \cap H^2(0, T; V^*), \quad (3.2.1)$$

με νόρμα $\|u\|_{W(0, T)}^2 = \|u\|_{C^0([0, T]; V)}^2 + \|u\|_{C^1([0, T]; H)}^2 + \|u\|_{H^2(0, T; V^*)}^2$, (3.2.2).

Τέλος, συμβολίζουμε με (\bullet, \bullet) το $L^2(\Omega)$ εσωτερικό γινόμενο, με $\langle \bullet, \bullet \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο ως προς τη δυϊκότητα V^*, V , ενώ $\| \cdot \|_X$ και $| \cdot |_X$ δηλώνουν αντίστοιχα τη νόρμα και την ημινόρμα του χώρου Banach X .

3.2.1. Ακριβής μεταβολική διατύπωση:

Να βρεθεί $\eta \in W$, τέτοιο ώστε:

$$(\eta_{tt}, w) + ga_F(\eta, w) + gk(t)a_G(\eta, w) = (-h_{0_{tt}}, w), \quad \forall w \in V, \quad (3.2.3)$$

σχεδόν παντού στο $[0, T]$, και $\eta(\mathbf{x}, 0) = \eta_0(\mathbf{x})$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(\mathbf{x})$,

όπου: $a_F, a_G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ διγραμμικά συναρτησιακά, με $a_F(\eta, w) \doteq \int_{\Omega} F \nabla \eta \nabla w d\Omega$
, $a_G(\eta, w) \doteq \int_{\Omega} G \nabla \eta \nabla w d\Omega$.

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα κομβικό αποτέλεσμα για την ανάλυση μεταβολικών διατυπώσεων υπερβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1 (J. L. Lions)^[9]: Έστω $V \subset H \subset V^*$ τριπλέτα Hilbert και $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ διγραμμικό συναρτησιακό τέτοιο ώστε:

- Οι απεικονίσεις $(t, u, w) \rightarrow a(t, u, w)$ και $(t, u, w) \rightarrow a_t(t, u, w)$ είναι συνεχείς στον $[0, T] \times V \times V$,
- $a(t, u, w) = a(t, w, u) \quad \forall u, w \in V, \quad \forall t \in [0, T]$.
- $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε $a(t, u, u) + c_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in V$.

Τότε, για δεδομένα $f_1 \in L^2(0, T; H)$, $f_2 \in H^1(0, T; V^*)$, $u_1 \in V$, $u_2 \in H$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \cap H^2(0, T; V^*)$ με $u(0) = u_1$,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_2, \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$\left\langle \frac{d^2 u}{dt^2}, w \right\rangle + a(t; u, w) = \langle f_1 + f_2, w \rangle, \quad \forall w \in V \text{ σχεδόν παντού στο } [0, T], \quad (3.2.4)$$

Επιπλέον, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, ανεξάρτητο των u_1, u_2, f_1, f_2 τέτοιο ώστε:

$$\|u\|_{C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \cap H^2(0, T; V^*)} \leq c \left(\|u_1\|_V + \|u_2\|_H + \|f_1\|_{L^2(0, T; H)} + \|f_2\|_{H^1(0, T; V^*)} \right), \quad (3.2.5).$$

Για το διγραμμικό συναρτησιακό της μεταβολικής διατύπωσης (3.2.3) μπορούμε εύκολα να δείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2: Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε το διγραμμικό συναρτησιακό $a(t, \eta, \eta) = g a_F(\eta, \eta) + g k(t) a_G(\eta, \eta)$, να ικανοποιεί ανισότητα τύπου Gårding, $\forall t \in [0, T]$. Δηλαδή ισχύει:

$$a(t, \eta, \eta) + c_1 \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_2 \|\eta\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.2.6).$$

Απόδειξη:

Είναι:

$$a(t, \eta, \eta) = g a_F(\eta, \eta) + g k(t) a_G(\eta, \eta) = g \int_{\Omega} (F + k(t)G) \nabla \eta \cdot \nabla \eta d\Omega, \quad (3.2.7)$$

Όμως με βάση την **Παραδοχή 1**, έχουμε:

$$a(t, \eta, \eta) \geq g c_b \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla \eta d\Omega = g c_b \|\eta\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (3.2.8).$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της (3.2.8), τον όρο $c_1 \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2$, οπότε

$$a(t; \eta, \eta) + c_1 \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_2 \|\eta\|_{H^1(\Omega)}^2, \text{ με } c_2 = \min\{c_1, gc_b\}, \quad (3.2.9)..$$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα λύσης για το μεταβολικό πρόβλημα (3.2.3), άλλα και να εξασφαλίσουμε *a priori* εκτίμηση ευστάθειας της λύσης αυτής.

Θεώρημα 3: Έστω ότι $-k_u G(\mathbf{x}) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\eta_o(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$, $v_o(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$.

Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση:

$$\eta \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; H^1(\Omega)^*)$$

$$\text{με } \eta(\mathbf{x}, 0) = \eta_o(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{t=0} = v_o(\mathbf{x}), \text{ τέτοια ώστε:}$$

$$\left\langle \frac{d^2 \eta}{dt^2}, w \right\rangle + ga_F(\eta, w) + gkta_G(\eta, w) = \langle -k_u G(\mathbf{x}), w \rangle, \forall w \in H^1(\Omega) \text{ σχεδόν παντού}$$

στο $[0, T]$.

Επιπλέον $\exists c \in \mathbb{R}^+$, ανεξάρτητο των $\eta_o, v_o, -k_u G(\mathbf{x})$ τέτοιο ώστε:

$$\|\eta\|_{C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \cap H^2(0, T; V^*)} \leq c \left(\|\eta_o\|_{H^1(\Omega)} + \|v_o\|_{L^2(\Omega)} + \|k_u G(\mathbf{x})\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \right)$$

Απόδειξη:

Επιλέγουμε $V \equiv H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$. Με βάση την ανισότητα τύπου *Gårding* του Λήμματος 2(3.2.6), η απόδειξη είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 1..

Αν υποθέσουμε επιπλέον ομαλότητα της ασθενούς λύσης είναι δυνατό να δείξουμε το πιο κάτω αποτέλεσμα, το οποίο εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το συγκεκριμένο φαινόμενο.

Θεώρημα 4: Έστω $\eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ με $\eta_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\eta_u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)$, λύση του μεταβολικού προβλήματος (3.2.3). Τότε ισχύει η ενεργειακού τύπου αρχή διατήρησης:

$$\begin{aligned} \|\eta_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + ga_F(\eta(t), \eta(t)) + gk(t)a_G(\eta(t), \eta(t)) = \\ \|v_o\|_{L^2(\Omega)}^2 + ga_F(\eta_o, \eta_o) + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \eta_s(s) f d\Omega ds + g \int_0^t k'(s) a_G(\eta(s), \eta(s)) ds \end{aligned} \quad (3.2.10).$$

Απόδειξη:

Θέτουμε στην εξίσωση (3.2.3), $w = \eta_t$, οπότε έχουμε:

$$\int_{\Omega} \eta_t \eta_{tt} d\Omega + g \int_{\Omega} F \nabla \eta_t \cdot \nabla \eta d\Omega + gk(t) \int_{\Omega} G \nabla \eta_t \cdot \nabla \eta d\Omega = \int_{\Omega} f \eta_t d\Omega, \quad (3.2.11).$$

Είναι όμως $2\eta_t \eta_{tt} = (\eta_t^2)_t$ και $2\nabla \eta_t \cdot \nabla \eta = (\nabla \eta \cdot \nabla \eta)_t$, οπότε η εξίσωση (3.2.11) γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega} \eta_s^2 d\Omega + g \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega} F \nabla \eta \cdot \nabla \eta d\Omega + gk(s) \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega} G \nabla \eta \cdot \nabla \eta d\Omega &= 2 \int_{\Omega} f \eta_t d\Omega \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial s} \|\eta_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + g \frac{\partial}{\partial s} a_F(\eta(s), \eta(s)) + gk(s) \frac{\partial}{\partial s} a_G(\eta(s), \eta(s)) &= 2 \int_{\Omega} f \eta_t d\Omega. \end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης ως προς το χρόνο στο διάστημα $[0, t]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\eta_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\eta_o\|_{L^2(\Omega)}^2 + ga_F(\eta(s), \eta(s)) - ga_F(\eta_o, \eta_o) + \\ + g \int_0^t k(s) \frac{\partial}{\partial s} a_G(\eta(s), \eta(s)) ds = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \eta_s(s) f d\Omega ds. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση του ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της (3.2.12), προκύπτει

$$\begin{aligned} \|\eta_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\eta_o\|_{L^2(\Omega)}^2 + ga_F(\eta(s), \eta(s)) - ga_F(\eta_o, \eta_o) + \\ gk(s) a_G(\eta(s), \eta(s)) \Big|_0^t - g \int_0^t k'(s) a_G(\eta(s), \eta(s)) ds = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \eta_s(s) f d\Omega ds, \end{aligned} \quad (3.2.13).$$

Με βάση τον ορισμό του k , έχουμε $k(0) = 0$. Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.2.13) προκύπτει η εξίσωση (3.2.10)..

3.2.2. Προσεγγιστική μεταβολική διατύπωση (Μέθοδος Galerkin):

Η κατασκευή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, στηρίζεται σε μια διακριτή μορφή της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος. Επιλέγουμε να προσεγγίσουμε την λύση με συναρτήσεις ενός διακριτού υπόχωρου του V (συναρτήσεις σχήματος), ενώ οι συναρτήσεις βάρους, ανήκουν σε ένα διακριτό υπόχωρο του $W^{[10]}$. Το διακριτό πρόβλημα είναι:

Να βρεθεί $\eta^h \in W^h$, τέτοιο ώστε

$$\left(\eta_{tt}^h, w^h\right)_0 + g a_F(\eta^h, w^h) + g k(t) a_G(\eta^h, w^h) = \left(-h_{0,tt}, w^h\right)_0, \quad \forall w^h \in V^h, \quad \text{σχεδόν}$$

παντού στο $[0, T]$, και $\eta^h(\mathbf{x}, 0) = \eta_o^h(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial \eta^h}{\partial t}\right|_{t=0} = v_o^h(\mathbf{x})$.

Τα όσα προηγήθηκαν για την ανάλυση του συνεχούς προβλήματος, ισχύουν και στην περίπτωση του αντίστοιχου διακριτού. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, παρουσιάζεται η κατασκευή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, τόσο για προβλήματα σε μια, όσο και σε δύο διαστάσεις.

Κεφάλαιο 4

Επίλυση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

4.1. Μονοδιάστατο πρόβλημα

Έστω ότι η διάδοση του κύματος γίνεται στον άξονα x . Η γραμμικοποιημένη εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση τσουνάμι στη μία διάσταση είναι

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \quad (4.1.1)$$

Έστω ομοιόμορφη διαμέριση του πεδίου ορισμού $\Omega = [-L, L]$, της μορφής $\{-L = x_1, x_2, \dots, x_{N+1} = L\}$. Έχουμε με τον τρόπο αυτό χωρίσει το πεδίο ορισμού σε N ισομήκη πεπερασμένα στοιχεία με κόμβους στα άκρα τους $[x_i, x_{i+1}]$, όπου $i = 1, 2, \dots, N$.

Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος σε ένα πεπερασμένο στοιχείο είναι

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx = \left(wgh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+1}} - \left(wgh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Big|_{x_i} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial x} gh_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} w \frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} dx, \quad (4.1.2)$$

με αρχικές συνθήκες: $\eta(\mathbf{x}, 0) = \eta_o(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_o(\mathbf{x})$.

Μέσα σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, υποθέτουμε γραμμική χωρική κατανομή της συνάρτησης $\eta(x, t)$, οπότε είναι

$$\eta(x, t) = N_i(x)\eta_i(t) + N_{i+1}(x)\eta_{i+1}(t), \quad (4.1.3)$$

όπου N_i, N_{i+1} είναι οι συναρτήσεις σχήματος

$$N_i(x) = 1 - \frac{x - x_i}{h_{el}} \quad \text{και} \quad N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{h_{el}}$$

με $h_{el} = x_{i+1} - x_i$ (δηλαδή το μήκος του πεπερασμένου στοιχείου).

Σύμφωνα με τη μέθοδο Budnov-Galerkin^[10], οι συναρτήσεις βάρους είναι ίδιες με τις συναρτήσεις σχήματος. Τελικά, με αντικατάσταση της (4.1.3) στην (4.1.2) προκύπτει η εξής μητρική σχέση για το πεπερασμένο στοιχείο:

$$\begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i N_{i+1} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i N_{i+1} dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1}^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_i \\ \ddot{\eta}_{i+1} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,x}^2 h_0 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,x} N_{i+1,x} h_0 dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,x} N_{i+1,x} h_0 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1,x}^2 h_0 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_i \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i h_{0,tt} dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i+1} h_{0,tt} dx \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

Παρατηρείται ότι στην σχέση (4.1.5) αμελούνται οι συνοριακοί όροι $(wgh_0\eta_{,x})|_{x_i}$ και $(wgh_0\eta_{,x})|_{x_{i+1}}$. Αυτό συμβαίνει διότι λόγω της συνέχειας της ποσότητας $h_0\eta_{,x}$ κατά τη μόρφωση των καθολικών μητρώων απαλείφονται. Επιπλέον, επιλέγουμε το πεδίο ορισμού έτσι ώστε το κύμα να μην φτάνει στα άκρα του, για το χρονικό διάστημα στο οποίο μελετάμε το φαινόμενο. Με τον τρόπο αυτό έχουμε $\eta_{,x}|_{x=-L} = 0$ και $\eta_{,x}|_{x=L} = 0$.

Χρησιμοποιούμε τώρα την απεικόνιση

$$\frac{x - x_i}{h_{el}} = \xi, \quad (4.1.6).$$

$$\text{Συνεπώς, ισχύει ακόμα} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \Leftrightarrow 0 \leq \xi \leq 1, \quad (4.1.7\alpha)$$

$$dx = h_{el} d\xi, \quad (4.1.7\beta).$$

Ο μετασχηματισμός αυτός επιδρά και στις συναρτήσεις σχήματος, οι οποίες διαμορφώνονται ως εξής

$$N_i = 1 - \xi, \quad (4.1.8)$$

$$N_{i+1} = \xi, \quad (4.1.9)$$

και ακολούθως, οι παράγωγοί τους ως προς x προκύπτουν ως εξής

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1) \cdot \frac{1}{h_{el}} = -\frac{1}{h_{el}}, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{dN_{i+1}}{dx} = \frac{dN_{i+1}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{h_{el}} = \frac{1}{h_{el}}, \quad (4.1.11)$$

Στο στάδιο αυτό, διευκολύνονται οι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων των μητρώων της εξίσωσης (4.1.5). Πιο αναλυτικά, έχουμε

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1^2 dx = \int_0^1 (1-\xi)^2 h_{el} d\xi = \left[-h_{el} \frac{(1-\xi)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{h_{el}}{3}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2^2 dx = \int_0^1 \xi^2 h_{el} d\xi = \left[h_{el} \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1 = \frac{h_{el}}{3}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1 N_2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2 N_1 dx = \int_0^1 \xi(1-\xi) h_{el} d\xi = \left[h_{el} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \right]_0^1 = \frac{h_{el}}{6}$$

Η τελική μητρική σχέση στο τοπικό σύστημα γράφεται ως εξής

$$\underbrace{\frac{h_{el}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\frac{g}{h_{el}} \int_0^1 h_0 d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 h_{0,t} d\xi \\ \int_0^1 N_2 h_{0,t} d\xi \end{bmatrix}}_F, \quad (4.1.12)$$

όπου

M = τοπικό μητρώο μάζας

K = τοπικό μητρώο δυσκαμψίας

F = τοπικό διάνυσμα φόρτισης

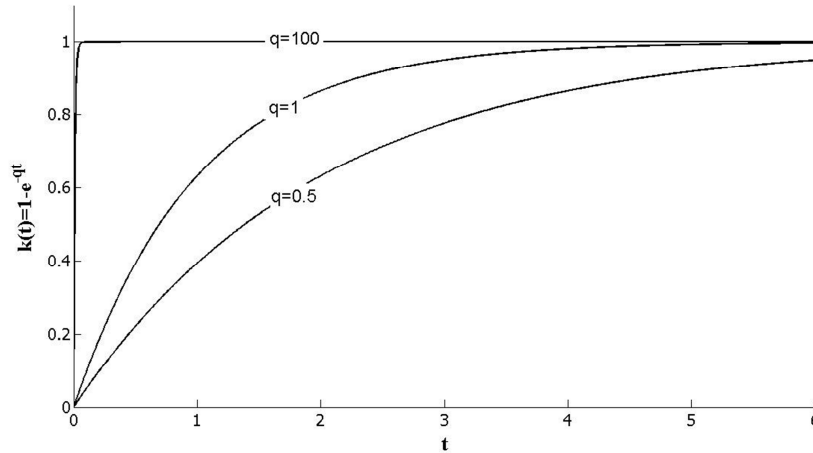
Σε αυτό το σημείο, ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος και η λύση εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό από την παραδοχή που αφορά στη βαθυμετρία. Στην παρούσα μελέτη η βαθυμετρία του πυθμένα περιγράφηκε από την ακόλουθη συνάρτηση

$$h_0(x,t) = F(x) + k(t)G(x), \quad h_0 \in L^\infty, \quad (4.1.13)$$

$$\text{όπου:} \quad k(t) = 1 - e^{-qt}, \quad (4.1.14)$$

Η συνάρτηση $F(x)$ εκφράζει τη μόνιμη γεωμετρία του πυθμένα, ενώ ο δεύτερος όρος της συνάρτησης επιβάλλει τη διαταραχή. Πιο συγκεκριμένα, η χρονική συνάρτηση (4.1.14) μπορεί να προσδιορίσει πόσο απότομα ή ομαλά επιβάλλεται η

διαταραχή, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου q . Ενδεικτικά, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 4.1.1** η επίδραση της $k(t)$ στην επιβαλλόμενη διαταραχή



Σχήμα 4.1.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(t)$ συναρτήσει του χρόνου t και της τιμής q

Γίνεται σαφές ότι όσο αυξάνεται η τιμή του q , τόσο πιο ακαριαία επιβάλλεται η διαταραχή του πυθμένα μέσω της συνάρτησης $G(x)$. Παρατηρείται επίσης, ότι η συνάρτηση $k(t)$ είναι άνω φραγμένη στην τιμή 1. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται η φυσική ερμηνεία του γινομένου της με τη συνάρτηση $G(x)$, καθώς η τελευταία καθορίζει το είδος της επιβαλλόμενης διαταραχής και η οποία επέτρεψε τη μελέτη διαφορετικών περιπτώσεων – αιτίων διαταραχής, όπως θα αναλυθούν σε επόμενη ενότητα.

- *Ολοκλήρωση Gauss*

Επιπλέον, για τον υπολογισμό των όρων $\int_0^1 h_0 d\xi$, $\int_0^1 N_i h_{0,n} d\xi$ που εμφανίζονται στην (4.1.12) επιλέχθηκε η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, επιλέγονται n σημεία στα οποία υπολογίζονται η τιμή της προς ολοκλήρωση συνάρτησης και κατάλληλοι συντελεστές βάρους w_i ώστε

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.1.15)$$

Οι τιμές των συντελεστών βάρους w_i προσδιορίζονται μέσω ειδικών πολυωνύμων, των πολυωνύμων Legendre $P_n(x)$

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}, \quad (4.1.16)$$

Επομένως, με βάση τα παραπάνω οι εν λόγω όροι διαμορφώνονται ως εξής

$$I_1 = \int_0^1 h_0 d\xi = \int_0^1 F(x_1 + \xi dx) d\xi + \int_0^1 k(t)G(x_1 + \xi dx) d\xi \quad (4.1.17)$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i F(x_1 + \xi_i dx) + k(t) \sum_{i=1}^n w_i G(x_1 + \xi_i dx)$$

$$I_2 = \int_0^1 N_1 h_{0,u} d\xi = \int_0^1 (1-\xi)k''(t)G(x + \xi dx) \underbrace{h_{el} d\xi}_{dx} = k''(t)h_{el} \sum_{i=1}^n (1-\xi_i)w_i G(x_1 + \xi_i dx), \quad (4.1.18)$$

$$I_3 = \int_0^1 N_2 h_{0,u} d\xi = \int_0^1 \xi k''(t)G(x + \xi dx) \underbrace{h_{el} d\xi}_{dx} = k''(t)h_{el} \sum_{i=1}^n \xi_i w_i G(x_1 + \xi_i dx), \quad (4.1.19)$$

- Μόρφωση της εξίσωσης του προβλήματος στο καθολικό σύστημα

Εάν αντικαταστήσουμε τις (4.1.17), (4.1.18) και (4.1.19) στην (4.1.12), το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας θα επιμεριστεί ως εξής

$$\underbrace{\frac{h_{el}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{g}{h_{el}} \int_0^1 h_0 d\xi \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 h_{0,u} d\xi \\ \int_0^1 N_2 h_{0,u} d\xi \end{bmatrix}}_F \Leftrightarrow$$

$$[M_{loc}] \ddot{\boldsymbol{\eta}} = [K_{1loc}] \boldsymbol{\eta} + k(t)[K_{2loc}] \boldsymbol{\eta} - k''(t)[F_{loc}], \quad (4.1.20)$$

όπου:

$$K_{1loc} = -\frac{g}{h_{el}} \sum_{i=1}^n w_i F(x_1 + \xi_i dx) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.21)$$

$$K_{2loc} = -\frac{g}{h_{el}} \sum_{i=1}^n w_i G(x_1 + \xi_i dx) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1.22)$$

Στη συνέχεια, απαιτείται η μόρφωση των καθολικών μητρώων μάζας, δυσκαμψίας και φόρτισης, διαστάσεων $N \times N$, που προκύπτουν μέσω της πρόσθεσης των μητρωικών όρων που αντιστοιχούν σε κοινούς βαθμούς ελευθερίας από στοιχείο σε στοιχείο. Έστω λοιπόν, ότι M, K_1, K_2, F είναι τα μητρώα που αφορούν στο καθολικό σύστημα. Η εξίσωση που αφορά στο μονοδιάστατο πλέγμα, N βαθμών ελευθερίας γράφεται ως εξής

$$[M]\ddot{\eta} = [K_1]\eta + k(t)[K_2]\eta - k'(t)[F], \quad (4.1.23)$$

Το καθολικό μητρώο μάζας $[M]$ είναι θετικά ορισμένο και επομένως αντιστρέψιμο. Έτσι, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από αριστερά κάθε όρο της εξίσωσης (4.1.23) με το αντίστροφό του, $[M^{-1}]$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} [I]\ddot{\eta} &= \underbrace{[M^{-1}][K_1]}_{A_1}\eta + k(t)\underbrace{[M^{-1}][K_2]}_{A_2}\eta - k'(t)\underbrace{[M^{-1}][F]}_{F_1} \\ \ddot{\eta} &= [A_1]\eta + k(t)[A_2]\eta - k'(t)[F_1], \end{aligned} \quad (4.1.24a)$$

Ολοκληρώνοντας την (4.1.24a) στο $[0, t]$

$$\begin{aligned} \int_0^t \ddot{\eta} dt &= A_1 \int_0^t \eta dt + A_2 \int_0^t k(t)\eta dt - F_1 \int_0^t k'(t) dt \Leftrightarrow \\ \dot{\eta}|_t &= \dot{\eta}|_0 + A_1 \int_0^t \eta dt + A_2 \int_0^t k(t)\eta dt - F_1 \int_0^t k'(t) dt \end{aligned}, \quad (4.1.24b)$$

Η επίλυση της εξίσωσης (4.1.24a) με μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης παρέχει την προσεγγιστική λύση του προβλήματος της γένεσης κυμάτων τσουνάμι.

4.2. Διδιάστατο πρόβλημα

Η ασθενής μορφή του προβλήματος στις δύο διαστάσεις περιγράφεται από την εξίσωση

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} d\Omega = -g \int_{\Omega} \nabla w \nabla \eta d\Omega - \int_{\Omega} w h_{0,t} d\Omega, \quad (4.2.1)$$

Ο όρος των συνοριακών συνθηκών αμελείται, καθώς λόγω συνέχειας απαλείφεται κατά τη μόρφωση της εξίσωσης στο καθολικό σύστημα. Για την επίλυσή της (4.2.1) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπως και στο μονοδιάστατο πρόβλημα,

διακριτοποιούμε τον, πεπερασμένης διάστασης, χώρο χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε ίσα μεταξύ τους τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία.

Θεωρούμε προσεγγιστική λύση πολυωνυμικής μορφής, που είναι συνεχής στους κόμβους

$$\eta(x, y, t) = N_1(x, y)\eta_1(t) + N_2(x, y)\eta_2(t) + N_3(x, y)\eta_3(t) , \quad (4.2.3)$$

όπου N_i είναι συναρτήσεις σχήματος, που αποτελούν τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις με τύπους^[6]

$$N_1(x, y) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad N_2(x, y) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad N_3(x, y) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

$$\text{με } D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A ,$$

όπου

x_i = οι τετμημένες των κόμβων του τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου

y_i = οι τεταγμένες των κόμβων των τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου

$A = (1/2)dxdy$ = το εμβαδόν του τριγωνικού πεπερασμένου στοιχείου

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το μονοδιάστατο πρόβλημα, προκύπτουν τα παρακάτω μητρώα στο τοπικό σύστημα

$$\text{Τοπικό μητρώο μάζας: } M_{loc} = \frac{dxdy}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad (4.2.4)$$

$$\text{Τοπικό μητρώο δυσκαμψίας: } K_{loc} = -g \begin{bmatrix} \frac{dx^2 + dy^2}{2dxdy} & \frac{-dy}{2dx} & \frac{-dx}{2dy} \\ \frac{-dy}{2dx} & \frac{dy}{2dx} & 0 \\ \frac{-dx}{2dy} & 0 & \frac{dx}{2dy} \end{bmatrix} \int_{\Omega} h_0(x, y, t) d\Omega ,$$

(4.2.5)

$$\text{Τοπικό μητρώο φόρτισης: } F_{loc} = k''(t) \begin{pmatrix} \int_{\Omega} N_1(x, y) G(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} N_2(x, y) G(x, y) d\Omega \\ \int_{\Omega} N_3(x, y) G(x, y) d\Omega \end{pmatrix}, \quad (4.2.6)$$

και εξάγεται η προς χρονική ολοκλήρωση αντίστοιχη εξίσωση.

4.3. Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων 2^{ης} τάξης

Στο σημείο αυτό, θα γίνει μια σύντομη αναφορά στην επίλυση με άμεση χρονική ολοκλήρωση και στις δύο βασικές μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης. Η βήμα προς βήμα άμεση (direct) χρονική ολοκλήρωση, ανεξάρτητα της γραμμικότητας ή μη του υπό επίλυση προβλήματος, είναι πάντοτε δυνατή. Γενικά, διακρίνονται δύο κατηγορίες μεθόδων: οι απευθείας (explicit) και οι έμμεσες (implicit). Οι απευθείας μέθοδοι, όπως η μέθοδος των κεντρικών διαφορών, έχουν τη μορφή

$$U_{n+1} = f(U_n, \dot{U}_n, \ddot{U}_n, U_{n-1}, \dots),$$

δηλαδή το διάνυσμα της μετατόπισης U_{n+1} κατά τη χρονική στιγμή $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας μόνο πληροφορίες (μετατοπίσεις και χρονικές παραγώγους) της χρονικής στιγμής $t_n = n\Delta t$ και νωρίτερα. Στις έμμεσες μεθόδους, ο υπολογισμός του U_{n+1} προσδιορίζεται με βάση τις χρονικές παραγώγους του U_{n+1} , που είναι άγνωστες, δηλαδή περιγράφονται από τη μορφή

$$U_{n+1} = f(\dot{U}_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}, U_n, \dots).$$

Από τις πιο βασικές μεθόδους χρονικής ολοκλήρωσης είναι η μέθοδος Newmark και η μέθοδος των κεντρικών διαφορών.

- **Μέθοδος Newmark**

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης που περιγράφεται από τη γενική σχέση^[11]:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = R(t), \quad (4.3.1)$$

με αρχικές συνθήκες $U(0) = U_0, \dot{U}(0) = \dot{U}_0$.

Η μέθοδος Newmark αποτελεί μία ευρέως διαδεδομένη μέθοδο άμεσης (direct) χρονικής ολοκλήρωσης διαφορικών εξισώσεων, η οποία αποτελείται από τις παρακάτω εξισώσεις^[11]

$$M\ddot{U}_{n+1} + C\dot{U}_{n+1} + KU_{n+1} = R_{n+1} , \quad (4.3.2\alpha)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t \left[(1-\gamma)\ddot{U}_n + \gamma\ddot{U}_{n+1} \right] , \quad (4.3.2\beta)$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t\dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta)\ddot{U}_n + 2\beta\ddot{U}_{n+1} \right] , \quad (4.3.2\gamma) .$$

Οι παράμετροι β, γ ($0 \leq \beta, \gamma \leq 1$) προσδιορίζουν τα χαρακτηριστικά ευστάθειας και ακρίβειας του αλγορίθμου. Οι τιμές των $U_{n+1}, \dot{U}_{n+1}, \ddot{U}_{n+1}$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές των μεγεθών του προηγούμενου χρονικού βήματος. Η μέθοδος Newmark περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις πολλές και εξίσου διαδεδομένες χρονικές μεθόδους.

Η διαδικασία σύγκλισης της μεθόδου συνίσταται σε τέσσερα διακριτά βήματα: (1) τη μετατροπή σε πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας (SDOF), (2) τον καθορισμό κατάλληλης συνθήκης ευστάθειας, (3) τον προσδιορισμό της τάξης του σφάλματος και (4) την επαλήθευση της σύγκλισης μέσω μιας εκ των δύο συνθηκών.

Η ευστάθεια της λύσης για τη μέθοδο Newmark εξασφαλίζεται ανεπιφύλακτα όταν ισχύει η ανισότητα: $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$. Ωστόσο, πιθανή ευστάθεια μπορεί να επιτευχθεί και για τιμές $\gamma \geq \frac{1}{2}$ ή $\beta < \frac{\gamma}{2}$ και με τον περιορισμό ως προς το χρονικό βήμα

$$\omega^h \Delta t \leq \Omega_{crit}, \Omega_{crit} = \frac{\xi \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) + \left[\gamma/2 - \beta + \xi^2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{(\gamma/2 - \beta)} ,$$

όπου ω^h η κυκλική συχνότητα και Ω_{crit} η τιμή της κρίσιμης συχνότητας.

Ανάλογα με το πρόβλημα, ορίζονται τιμές των παραμέτρων β, γ , καθώς και η τιμή του Ω_{crit} , κι έτσι η μέθοδος Newmark διασπάται σε μεθόδους (έμμεσες ή άμεσες) που αφορούν ειδικές κατηγορίες προβλημάτων.

- **Μέθοδος κεντρικών διαφορών (explicit method)**

Είναι η συνηθέστερη μέθοδος απευθείας χρονικής ολοκλήρωσης. Προκύπτει από τη θεώρηση της ελαστοδυναμικής εξίσωσης κίνησης τη χρονική στιγμή $t_n = n\Delta t$.

Έστω ότι έχουμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης που περιγράφεται στη σχέση (4.3.1)

Με τις ισότητες^[11]

$$\dot{U}_n = \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\ddot{U}_n = \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\Delta t^2},$$

η εξίσωση (4.3.1) γίνεται

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) U_{n+1} = R_n - K U_n + \frac{1}{\Delta t^2} M (2U_n - U_{n-1}) + \frac{1}{2\Delta t} C U_{n-1}$$

Η μέθοδος των κεντρικών διαφορών δεν αποσβένει αυτόματα το θόρυβο που αντιστοιχεί στις υψηλές συχνότητες.

4.3.1. Μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης εξισώσεων πρώτης τάξης

Στο πρόβλημα που εξετάζει η παρούσα μελέτη, η χρονική ολοκλήρωση γίνεται στην εξ. (4.1.27b) στο χρονικό βήμα $\Delta t = [t_n, t_{n+1}]$. Για τη διερεύνηση της λύσης, χρησιμοποιήθηκε η γενική μέθοδος ολοκλήρωσης, κατά την οποία

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_\theta dt = [(1-\theta)u_n + \theta u_{n+1}] dt, \quad (4.3.3)$$

- **Πίσω ολοκλήρωση κατά Euler (Implicit Euler)**

Αποτελεί μια έμμεση μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης, η οποία επιλύει τη διαφορική εξίσωση χρησιμοποιώντας τιμές της προηγούμενης αλλά και της τρέχουσας επανάληψης. Προκύπτει από τη σχέση (4.3.3) για την τιμή $\theta = 1$.

Έτσι, στο δικό μας πρόβλημα, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο στην εξίσωση (4.1.24a) στο χρονικό βήμα $\Delta t = [t_n, t_{n+1}]$ λαμβάνουμε

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\eta}|_t dt = A_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_0^t \eta dt \right) + A_2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_0^t k(t) \eta dt \right) - F_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_0^t k''(t) dt \right) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\eta}|_t dt = A_1 \left(\int_0^{t_{n+1}} \eta dt \right) dt + A_2 \left(\int_0^{t_{n+1}} k(t) \eta dt \right) dt - F_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} k'(t) dt \Leftrightarrow$$

Με την κατάλληλη διάσπαση των ολοκληρωμάτων, προκύπτουν οι όροι Int_1 και Int_2 , ώστε

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} - \boldsymbol{\eta}_n = A_1 \Delta t \left(\int_0^{t_n} \boldsymbol{\eta} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\eta} dt \right) + A_2 \Delta t \left(\int_0^{t_n} k(t) \boldsymbol{\eta} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} k(t) \boldsymbol{\eta} dt \right) - F_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} k'(t) dt \quad , (4.3.4)$$

όπου

$$Int_1 = \int_0^{t_n} \boldsymbol{\eta} dt \quad Int_2 = \int_0^{t_n} k(t) \boldsymbol{\eta} dt$$

Επομένως, η τελική σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} - \boldsymbol{\eta}_n = A_1 \Delta t (Int_1 + \boldsymbol{\eta}_{n+1} \Delta t) + A_2 \Delta t [Int_2 + k(t_{n+1}) \boldsymbol{\eta}_{n+1}] - F_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} k'(t) dt$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n + A_1 Int_1 \Delta t + A_1 \boldsymbol{\eta}_{n+1} \Delta t^2 + A_2 Int_2 \Delta t + A_2 k(t_{n+1}) \boldsymbol{\eta}_{n+1} \Delta t^2 - F_1 k'(t_{n+1}) \Delta t$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής $\boldsymbol{\eta}$ στη $(n+1)$ επανάληψη καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left[I - A_1 \Delta t^2 - A_2 k(t_{n+1}) \Delta t^2 \right] \boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n + \left[A_1 Int_1 + A_2 Int_2 - F_1 k'(t_{n+1}) \right] \Delta t$$

και στην αντιστροφή του μητρώου, ώστε:

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \left[I - A_1 \Delta t^2 - A_2 k(t_{n+1}) \Delta t^2 \right]^{-1} \left\{ \boldsymbol{\eta}_n + \left[A_1 Int_1 + A_2 Int_2 - F_1 k'(t_{n+1}) \right] \Delta t \right\} \quad , (4.3.5) .$$

- **Εμπρός ολοκλήρωση κατά Euler (Explicit Euler)**

Πρόκειται για μέθοδο απευθείας χρονικής ολοκλήρωσης, η οποία επιλύει τη διαφορική εξίσωση χρησιμοποιώντας τιμές μόνο της προηγούμενης επανάληψης. Προκύπτει από τη σχέση (4.3.3), αν αντικατασταθεί η τιμή της παραμέτρου θ με $\theta=0$.

Έτσι, στο δικό μας πρόβλημα, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο στην εξίσωση (4.1.24a) στο χρονικό βήμα $\Delta t = [t_n, t_{n+1}]$ λαμβάνουμε

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} - \boldsymbol{\eta}_n = A_1 \Delta t (Int_1 + \boldsymbol{\eta}_n \Delta t) + A_2 \Delta t [Int_2 + k(t_n) \boldsymbol{\eta}_n] - F_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} k'(t) dt$$

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n + A_1 \text{Int}_1 \Delta t + A_1 \boldsymbol{\eta}_n \Delta t^2 + A_2 \text{Int}_2 \Delta t + A_2 k(t_n) \boldsymbol{\eta}_n \Delta t^2 - F_1 k'(t_n) \Delta t$$

Ομοίως, για τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής $\boldsymbol{\eta}$ στη $(n+1)$ επανάληψη, χωρίς να απαιτείται αντιστροφή μητρώου, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \left(I + A_1 \Delta t^2 + A_2 k(t_n) \Delta t^2 \right) \boldsymbol{\eta}_n + \left(A_1 \text{Int}_1 + A_2 \text{Int}_2 - F_1 k'(t_n) \right) \Delta t, \quad (4.3.6)$$

- **Μέθοδος Crank-Nicolson (Implicit method)**

Στη μέθοδο αυτή η τιμή του ολοκληρώματος της μεταβλητής κατά τη n επανάληψη λαμβάνεται ίση με το μέσο όρο των τιμών της προηγούμενης και της τρέχουσας επανάληψης, δηλαδή αφορά στην τιμή της παραμέτρου $\theta = 1/2$ (βλ. εξίσωση (4.3.3)). Έτσι, η εξίσωση (4.1.24a) λαμβάνει τη μορφή

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1} = \boldsymbol{\eta}_n + A_1 \Delta t \left[\text{Int}_1 + \frac{(\boldsymbol{\eta}_{n+1} + \boldsymbol{\eta}_n)}{2} \Delta t \right] + A_2 \Delta t \left\{ \text{Int}_2 + \left[\frac{k(t_n) + k(t_{n+1})}{2} \right] \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\eta}_n + \boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2} \right) \cdot \Delta t \right\} - q F_1 \left(\frac{e^{-qt_{n+1}} + e^{-qt_n}}{2} \right) \Delta t \quad (4.3.7)$$

Για τον υπολογισμό της τιμής της μεταβλητής $\boldsymbol{\eta}$ στη $(n+1)$ επανάληψη καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left[I - A_1 \frac{\Delta t^2}{2} - A_2 \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{k(t_n) + k(t_{n+1})}{2} \right) \right] \boldsymbol{\eta}_{n+1} = \left[I + A_1 \frac{\Delta t^2}{2} + A_2 \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{k(t_n) + k(t_{n+1})}{2} \right) \right] \boldsymbol{\eta}_n + (A_1 \text{Int}_1 + A_2 \text{Int}_2) \Delta t - q F_1 \left(\frac{e^{-qt_{n+1}} + e^{-qt_n}}{2} \right) \Delta t \quad (4.3.8),$$

και με αντιστροφή του μη μηδενικού μητρώου

$$\begin{aligned} \eta_{n+1} = & \left\{ I - \left[A_1 + A_2 \left(\frac{k(t_n) + k(t_{n+1}))}{2} \right) \right] \Delta t^2 \right\}^{-1} \left\{ I + \left[A_1 + A_2 \left(\frac{k(t_n) + k(t_{n+1}))}{2} \right) \right] \frac{\Delta t^2}{2} \right\} \eta_n + \\ & + (A_1 Int_1 + A_2 Int_2) \Delta t - qF_1 \left(\frac{e^{-qt_{n+1}} + e^{-qt_n}}{2} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (4.3.9).$$

4.4. Μέθοδος συγκεντρωμένων μαζών

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για λόγους βελτιστοποίησης, κατά την επίλυση των προβλημάτων με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκαν μητρώα συγκεντρωμένης μάζας (*lumped mass matrix*). Στη συνέχεια, σύμφωνα με τους C. Grossman, Hans-Gorg Roos και Martin Stynes^[21], αποδεικνύεται ότι η αντικατάσταση των μητρώων μάζας με μητρώα συγκεντρωμένων ιδιοτήτων δεν επηρεάζει το ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου.

Ειδικά για την περίπτωση $d = 2$, όπου το πλήθος των στοιχείων, οπότε και των βαθμών ελευθερίας είναι πολύ μεγάλο, η χρήση της μεθόδου των 'συγκεντρωμένων μαζών' (*lumped mass method*), μπορεί να περιορίσει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, χωρίς ουσιαστική επίδραση στις ιδιότητες σύγκλισης του αριθμητικού σχήματος. Η ανάλυση που ακολουθεί αφορά σε κλασσικά τριγωνικά στοιχεία τριών κόμβων και ακολουθεί την ανάλυση που παρουσιάζεται στο Finite Element Handbook^[4].

Είδαμε ότι η διακριτοποίηση της μεταβολικής διατύπωσης του προβλήματος γένεσης κυμάτων τσουνάμι με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, οδηγεί στη διαμόρφωση ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta} + \mathbf{K}\eta = \mathbf{f}, \quad (4.4.2)$$

Ο πίνακας μάζας (Consistent Mass Matrix) \mathbf{M} , με στοιχεία $m_{ij} = (N_i, N_j)$, όπου $N_i, N_j \in V^h$ η κλασσική κομβική βάση του χώρου των πεπερασμένων στοιχείων, δεν είναι διαγώνιος πίνακας.

Στη μέθοδο των συγκεντρωμένων μαζών, ο πίνακας \mathbf{M} αντικαθίσταται από ένα διαγώνιο πίνακα \mathbf{D}_M , το κάθε στοιχείο d_{ii} του οποίου, αποτελεί το άθροισμα των στοιχείων της αντίστοιχης γραμμής του πίνακα \mathbf{M} . Δηλαδή, είναι:

$$d_{ii} = \sum_j m_{ij}$$

Θα δειχθεί ότι η αντικατάσταση του \mathbf{M} από τον διαγώνιο πίνακα \mathbf{D}_M , ισοδυναμεί με την χρήση προσεγγιστικού κανόνα ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (N_i, N_j) .

Υποθέτουμε τριγωνοποίηση T_h του πεδίου ορισμού $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και έστω $K \in T_h$ τυχαίο τρίγωνο. Θεωρούμε τώρα τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_K f d\Omega \approx \frac{1}{3} |K| \sum_{j=1}^3 f(P_{Kj}), \quad (4.4.3)$$

όπου τα σημεία P_{Kj} είναι οι κορυφές του τριγώνου K . Ορίζουμε:

$$(u, w)_h \doteq \sum_{K \in T_h} \frac{1}{3} |K| \sum_{j=1}^3 (u, w)(P_{Kj}), \quad (4.4.4)$$

Ισχύει προφανώς $(N_i, N_j)_h = 0$ όταν $i \neq j$, αφού το γινόμενο $N_i N_j$ μηδενίζεται στην περίπτωση αυτή σε κάθε κορυφή τριγώνου (κόμβο πλέγματος). Επιπλέον για τις συναρτήσεις σχήματος ισχύει $N_i(P_{Ki})=1$, οπότε έχουμε

$$(N_i, N_i)_h = \frac{1}{3} |K_{P_i}|, \quad (4.4.5)$$

όπου K_{P_i} η ένωση όλων των $K \in T_h$ που έχουν κορυφή την P_i .

Για τα ολοκληρώματα των γραμμικών συναρτήσεων σχήματος σε τυχαίο τρίγωνο $K \in T_h$ ισχύει

$$\int_K N_i N_j d\Omega = \frac{1}{12} |K|, \quad i \neq j \quad \text{και} \quad \int_K N_i^2 d\Omega = \frac{1}{6} |K|, \quad (4.4.6)$$

εφόσον οι συναρτήσεις σχήματος δεν μηδενίζονται ταυτοτικά στο στοιχείο K .

Βλέπουμε τελικά ότι $(N_i, N_i)_h = \sum_j (N_i, N_j)$, άρα η εφαρμογή του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των στοιχείων (N_i, N_j) του πίνακα \mathbf{M} , παράγει το μηρώο συγκεντρωμένων μαζών \mathbf{D}_M .

Με βάση τα παραπάνω, η χρήση της μεθόδου των συγκεντρωμένων μαζών είναι ισοδύναμη με την χρήση της εξίσωσης

$$(\eta_u^h, w^h)_h + a_F(\eta^h, w^h) + k(t) a_G(\eta^h, w^h) = (-b_u, w^h), \quad (4.4.7)$$

αντί της αντίστοιχης (3.2.14).

Τελικά, το μητρώο συγκεντρωμένης μάζας που προέκυψε για την περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος και τριγωνικού πλέγματος είναι

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} dx dy \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad (4.4.8)$$

όπου dx, dy τα στοιχειώδη τμήματα κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 5

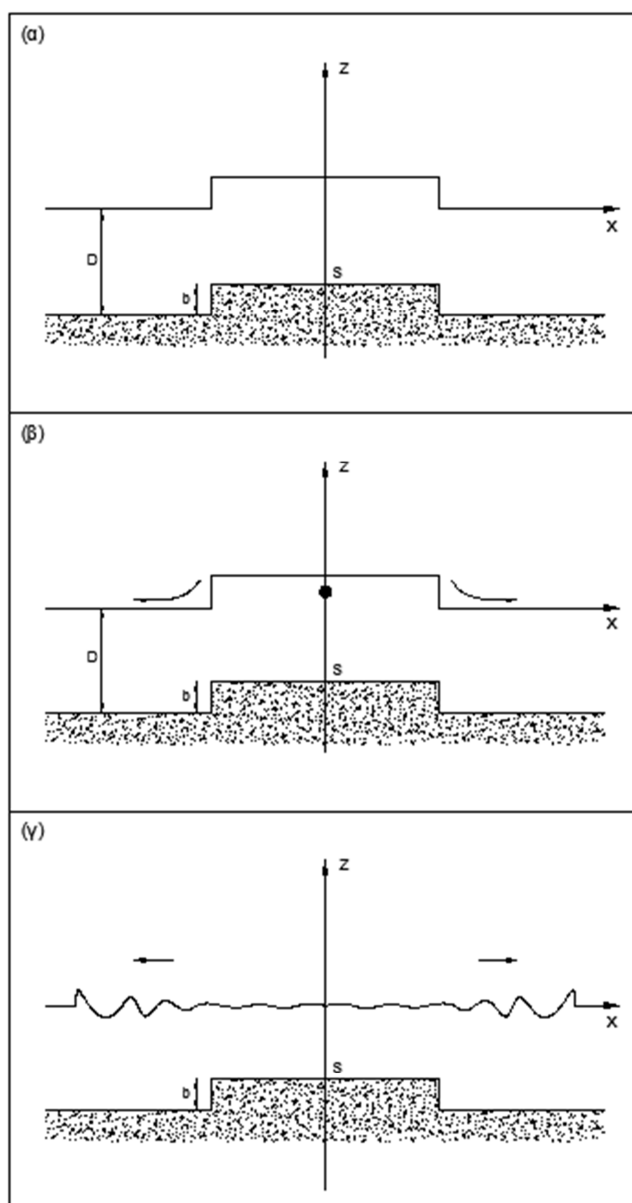
Βασικοί μηχανισμοί δημιουργίας κυμάτων τσουνάμι

5. ΒΑΣΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΤΣΟΥΝΑΜΙ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1. Μετατόπιση πυθμένα λόγω σεισμικής δραστηριότητας (Dislocation generated tsunami)

5.1.1. Ενέργεια κύματων τσουνάμι – Παράμετροι

Ο μηχανισμός δημιουργίας τσουνάμι λόγω μετατόπισης του θαλάσσιου πυθμένα περιγράφεται γραφικά στο **Σχήμα 5.1**. Στην απλούστερη μορφή του, σύμφωνα με την ανάλυση των A. Okal και C. Synolakis^[12], θεωρούμε μια ξαφνική, κάθετη ανύψωση ενός τμήματος S του πυθμένα της θάλασσας κατά b (**Σχήμα 5.1.α**).



Σχήμα 5.1: Τμηματική μετατόπιση θαλάσσιου πυθμένα κατά b (κατά A. Okal και C. Synolakis^[12])

Εάν η μετατόπιση αυτή είναι ακαριαία, τότε και η ελεύθερη επιφάνεια υφίσταται την ίδια ανύψωση b . Ακολούθως, συνεπάγεται αύξηση της δυναμικής ενέργειας του νερού ίση με^[12]

$$\Delta W_1 = \rho_w g S b D, \quad (5.1.1)$$

όπου ρ_w = πυκνότητα του νερού, D = βάθος και g = επιτάχυνση της βαρύτητας. Η σχέση (5.1.1) εκφράζει το έργο που παράγει η δύναμη της πίεσης $\rho_w g S D$ κατά την μετατόπιση b . Το νερό είναι ασυμπίεστο και έχει πολύ χαμηλό ιξώδες συγκριτικά με άλλα ρευστά, ώστε να θεωρείται αμελητέο. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα του νερού που ανυψώνεται τμηματικά στην ελεύθερη επιφάνεια είναι ασταθής κι εμφανίζει την τάση επανένταξης στον αρχικό θαλάσσιο όγκο, του οποίου το επίπεδο στάθμης, λόγω των πολύ μεγαλύτερων διαστάσεων του, δεν επηρεάζεται από την τμηματική μετατόπιση του (Σχήμα 5.1β). Στην πραγματικότητα, αν λάβουμε υπόψη μας το κέντρο βάρους της ανυψούμενης μάζας, τότε η τελική δυναμική ενέργεια της μετατοπισμένης θαλάσσιας μάζας είναι ίση με^[12]

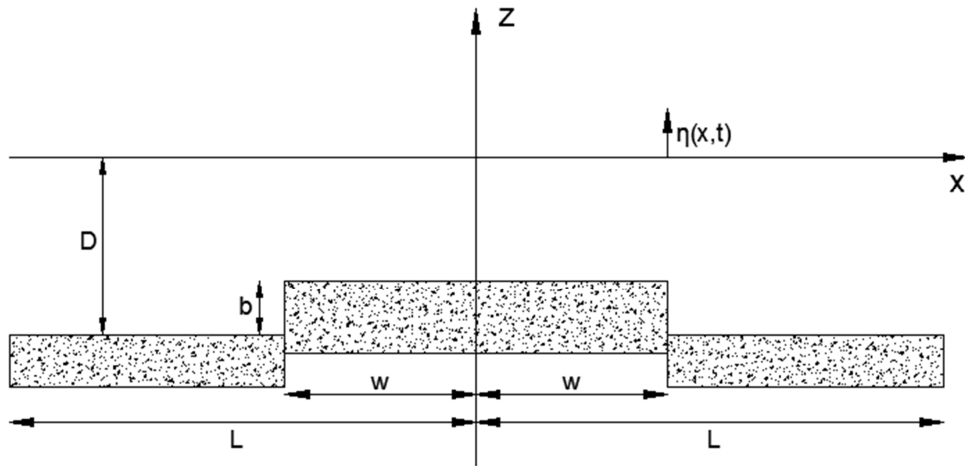
$$\Delta W_2 = \rho_w g S b (D - b/2) \quad (5.1.2)$$

Η διαφορά μεταξύ των (5.1.1) και (5.1.2) εκφράζει τη υπολειπόμενη, διαθέσιμη ενέργεια που διοχετεύεται σε ενέργεια ταλάντωσης και κατ'επέκταση στη δημιουργία τσουνάμι (Σχήμα 5.1.γ).

Πρόκειται για ένα απλό και εφαρμόσιμο μοντέλο, καθώς η διάρκεια της διαταραχής του πυθμένα συνήθως, είναι κατά πολύ μικρότερη του χρόνου που απαιτείται για να δημιουργηθεί τσουνάμι. Στην περίπτωση ταχείας ανύψωσης, το έργο που παράγεται είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από τη δυναμική ενέργεια που αποκτά η ανυψωμένη επιφάνεια κι έτσι η διαφορά ενέργειας που διοχετεύεται στη δημιουργία τσουνάμι είναι εξίσου μεγάλη. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν η μετατόπιση του πυθμένα προκαλείται με αργό ρυθμό, η υδραυλική ισορροπία επιτυγχάνεται σε περισσότερες ενδιάμεσες θέσεις του φαινομένου· κι έτσι οι κυματικές διαταραχές απορροφώνται από την υδάτινη μάζα γρηγορότερα. Στην πράξη, η ταχύτητα διάδοσης σεισμικών κυμάτων είναι της τάξεως των 3 km/s, ενώ η μέση ταχύτητα διάδοσης των τσουνάμι $c = \sqrt{gD}$ κυμαίνεται στα 250 m/s.

5.1.2. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης μετατόπισης πυθμένα στη μία διάσταση

Ο μηχανισμός γένεσης τσουνάμι από σεισμικά αίτια που προκαλούν κατακόρυφη μετατόπιση του θαλάσσιου πυθμένα έχει περιγραφεί από το Hammack^[13] (1973). Σύμφωνα με το πρότυπο του Hammack, θεωρούμε μία διατομή του πυθμένα, η οποία υφίσταται μετατόπιση b . Έτσι, η γεωμετρία του πυθμένα σε αυτή τη θέση διαμορφώνεται συμμετρικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.



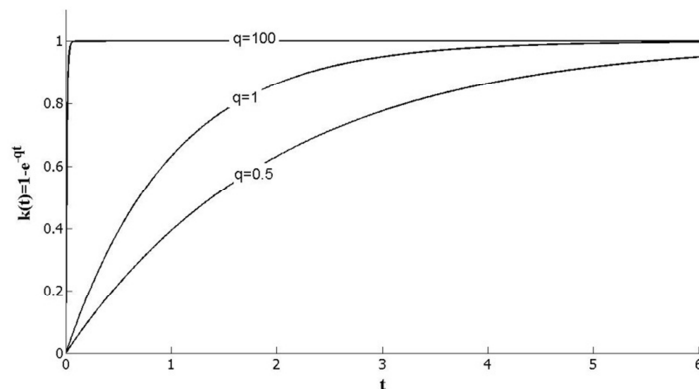
Σχήμα 5.2: Κατακόρυφη τμηματική ανύψωση θαλάσσιου πυθμένα

Όπως είχε αναφερθεί στο Κεφάλαιο 4, η βαθυμετρία του πυθμένα περιγράφεται γενικά από τη συνάρτηση

$$h_0(x,t) = F(x) + k(t)G(x) , \tag{5.1.3}$$

όπου $k(t) = 1 - e^{-qt}, t \geq 0, \tag{5.1.4}$

Η συνάρτηση $F(x)$ εκφράζει τη μόνιμη γεωμετρία του πυθμένα, ενώ ο δεύτερος όρος της συνάρτησης επιβάλλει τη διαταραχή. Η χρονική συνάρτηση (5.1.4) μπορεί να προσδιορίσει πόσο απότομα ή ομαλά επιβάλλεται η διαταραχή, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου q . Ενδεικτικά, παρουσιάζεται στο **Σχήμα 5.3** η εξάρτηση της $k(t)$ από την παράμετρο q .



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(t)$ συναρτήσει του χρόνου t και της τιμής q

Γίνεται σαφές ότι όσο αυξάνεται η τιμή του q τόσο πιο ακαριαία επιβάλλεται η διαταραχή του πυθμένα μέσω της συνάρτησης $G(x)$. Παρατηρείται επίσης, ότι η συνάρτηση $k(t)$ είναι άνω φραγμένη στην τιμή 1. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζεται η φυσική ερμηνεία του γινομένου της με τη συνάρτηση $G(x)$, καθώς η τελευταία καθορίζει το είδος της επιβαλλόμενης διαταραχής.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο πυθμένας θεωρήθηκε οριζόντιος (βλ. Σχήμα 5.2), δηλαδή

$$F(x) = D, \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.1.5)$$

ενώ στην περιοχή της διαταραχής πλάτους $2w$, η κατακόρυφη μετατόπιση του πυθμένα περιγράφηκε από τη συνάρτηση

$$G(x) = -b[H(x+w) - H(x-w)], \quad (5.1.6).$$

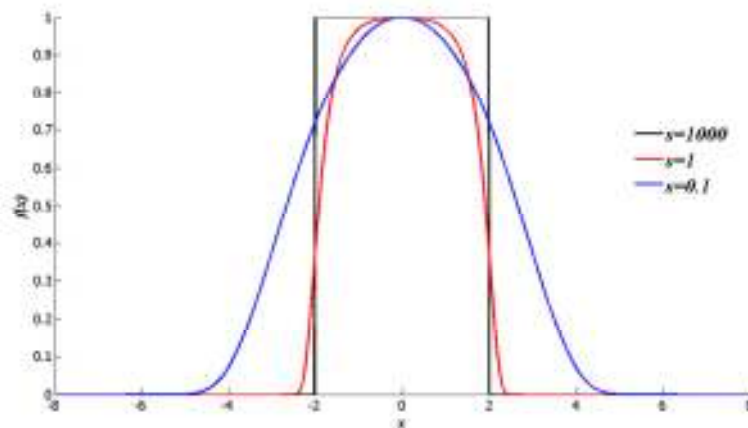
όπου H = η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Εναλλακτικά, για λόγους βελτιστοποίησης, η γεωμετρία της επιβαλλόμενης διαταραχής αντικαταστάθηκε σύμφωνα με την ακόλουθη ισότητα

$$[H(x+w) - H(x-w)] \cong e^{-sw^2} \cdot e^{-s(x+w)(x-w)}.$$

Επομένως, η συνάρτηση $G(x)$ λήφθηκε ίση με

$$G(x) = -be^{-sw^2} \cdot e^{-s(x+w)(x-w)}, \quad (5.1.7).$$



Σχήμα 5.4: Επίδραση της παραμέτρου s στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-sw^2} \cdot e^{-s(x+w)(x-w)}$$

Η συνάρτηση (5.1.7) αυτόματα εισάγει μία νέα παράμετρο s , της οποίας η επίδραση ως προς την επιβαλλόμενη διαταραχή πρέπει να προσδιοριστεί. Στο **Σχήμα 5.4** απεικονίζεται, ενδεικτικά για τρεις τιμές της παραμέτρου s , η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = e^{e^{-sn^2}} \cdot e^{-e^{s(x+w)(x-w)}}, \quad (5.1.8).$$

Είναι φανερό ότι η τιμή της παραμέτρου s επηρεάζει τη γεωμετρία της επιβαλλόμενης διαταραχής: όσο μικρότερη είναι, τόσο πιο ομαλά επιβάλλεται η αλλαγή της γεωμετρίας. Αντίθετα, οι μεγάλες τιμές του s ισοδυναμούν με την επιβολή διαταραχής τύπου “σκαλοπατιού”.

Είναι σαφές ότι, πριν την επίλυση του προβλήματος, πρέπει να οριστούν ακόμη τρεις παράμετροι: χαρακτηριστικό πλάτος w , ύψος μετατόπισης b και ο χαρακτηριστικός χρόνος t_c . Σύμφωνα με το Hammack^[13], η τιμή του t_c ορίζεται έτσι ώστε $t_c = 1.11/q$. Σε ό,τι αφορά το σταθερό βάθος του πυθμένα θεωρήθηκε ίσο με $D = 0.025m$, το ημιπλάτος της ανύψωσης $w = 0.305m$, ενώ το συνολικό μήκος του πλέγματος, στο οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο, επιλέχθηκε έτσι ώστε να αποφεύγεται η ανάκλαση του κύματος στα σύνορα, δηλαδή $L = 8 \div 10m$.

Οι περιπτώσεις που διερευνήθηκαν καθορίζονται από τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου q , ώστε να αντιπροσωπεύουν διαφορετικό τρόπο επιβολής της μετατόπισης^[13,14] (βλ. **Σχήμα 5.3**): $q_1 = 26.1176$ (κρουστική μετατόπιση – impulsive bed motion), $q_2 = 0.20716$ (έρπουσα – creeping bed motion), $q_3 = 4.6211$ (μεταβατική – transitional bed motion).

Για καθεμία από τις παραπάνω τιμές, εξετάστηκαν τρεις υποπεριπτώσεις που αντιστοιχούν στις τιμές της παραμέτρου s : $s = 10, 100, 1000$.

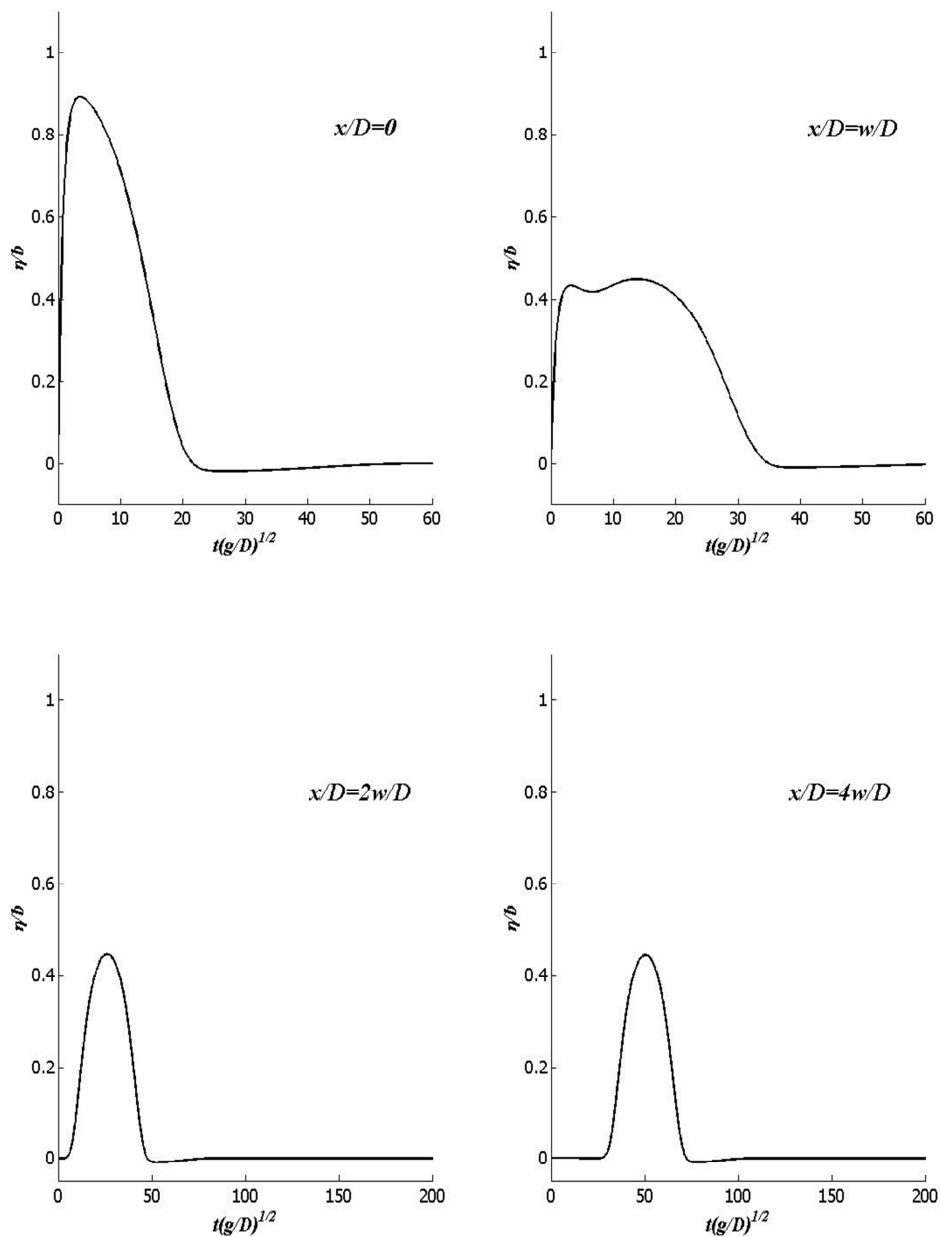
Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, που παρουσιάζονται παρακάτω, αφορούν τόσο σε θέσεις κοντά στη διαταραγμένη περιοχή του πυθμένα ($x = 0, x = w$), όσο και σε απομακρυσμένες από τη διαταραχή θέσεις ($x = 2w, x = 4w$), όπου η βαθυμετρία παραμένει αμετάβλητη.

○ **Κρουστική μετατόπιση πυθμένα (Impulsive bed motion, $q = q_1$)**

Στην περίπτωση αυτή, το μεγαλύτερο μέρος της μετατόπισης του πυθμένα πραγματοποιείται πριν η μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας αρχίσει να διαδίδεται εκτός της περιοχής της διαταραχής. Ο λόγος $t_c \sqrt{gD}/w = 0.069$ είναι πολύ μικρότερος της μονάδας, κι έτσι προκύπτει η τιμή της παραμέτρου q ίση με

$q_1 = 26.1176$. Η ανύψωση του πυθμένα λήφθηκε ίση με το 20% του βάθους του, δηλαδή $b/D = 0.2$.

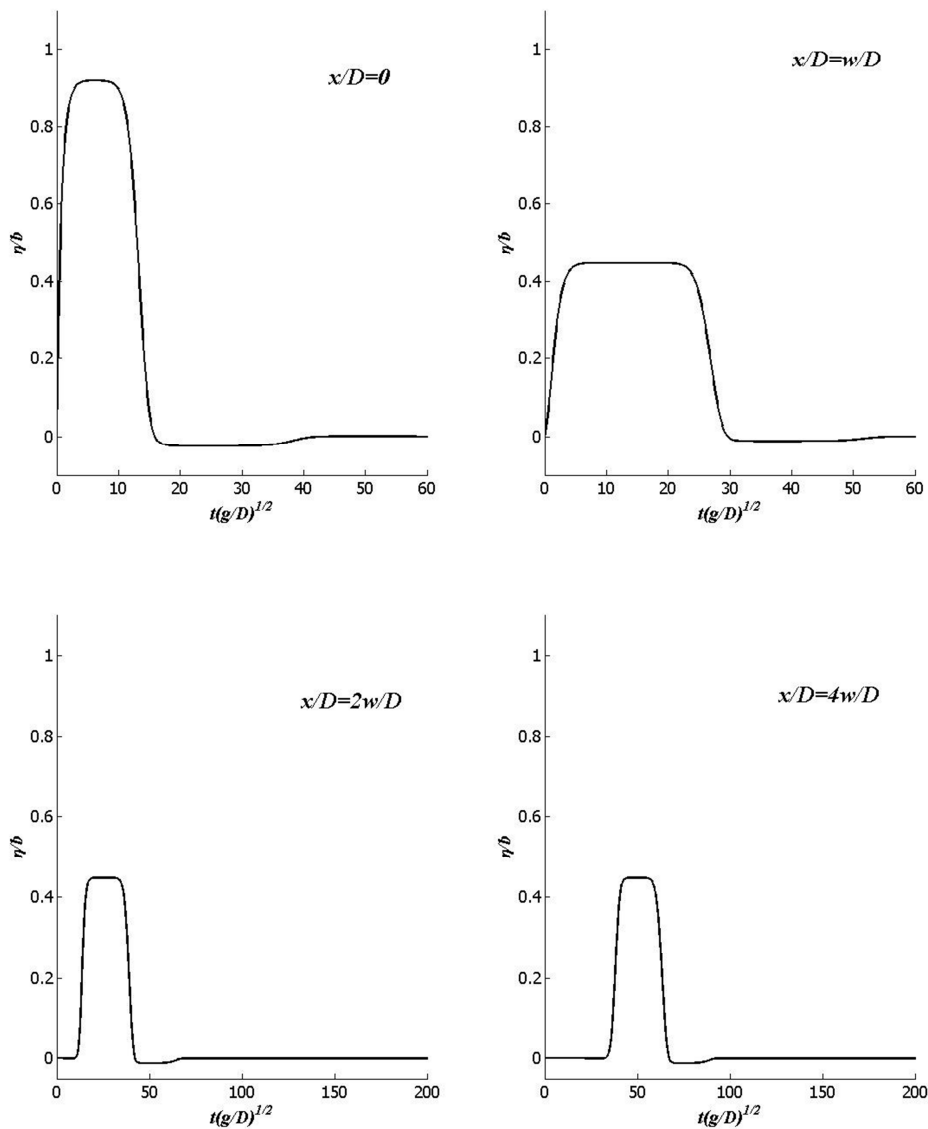
Στη συνέχεια, παρατίθενται διαγράμματα ανύψωσης της στάθμης της θάλασσας στις τέσσερις θέσεις ελέγχου και για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου s . Για την καλύτερη εκτίμηση του φαινομένου, έγινε αδιαστατοποίηση των αξόνων των διαγραμμάτων. Έτσι, η μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας η εκφράζεται ως ποσοστό της μετατόπισης του θαλάσσιου πυθμένα b , ενώ ο χρόνος εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του χρόνου που απαιτείται για να διαδοθεί το κύμα μέχρι το ημιπλάτος w .



Σχήμα 5.5: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_1 = 26.1176, b/D = 0.2, s = 10$ (2000 elements)

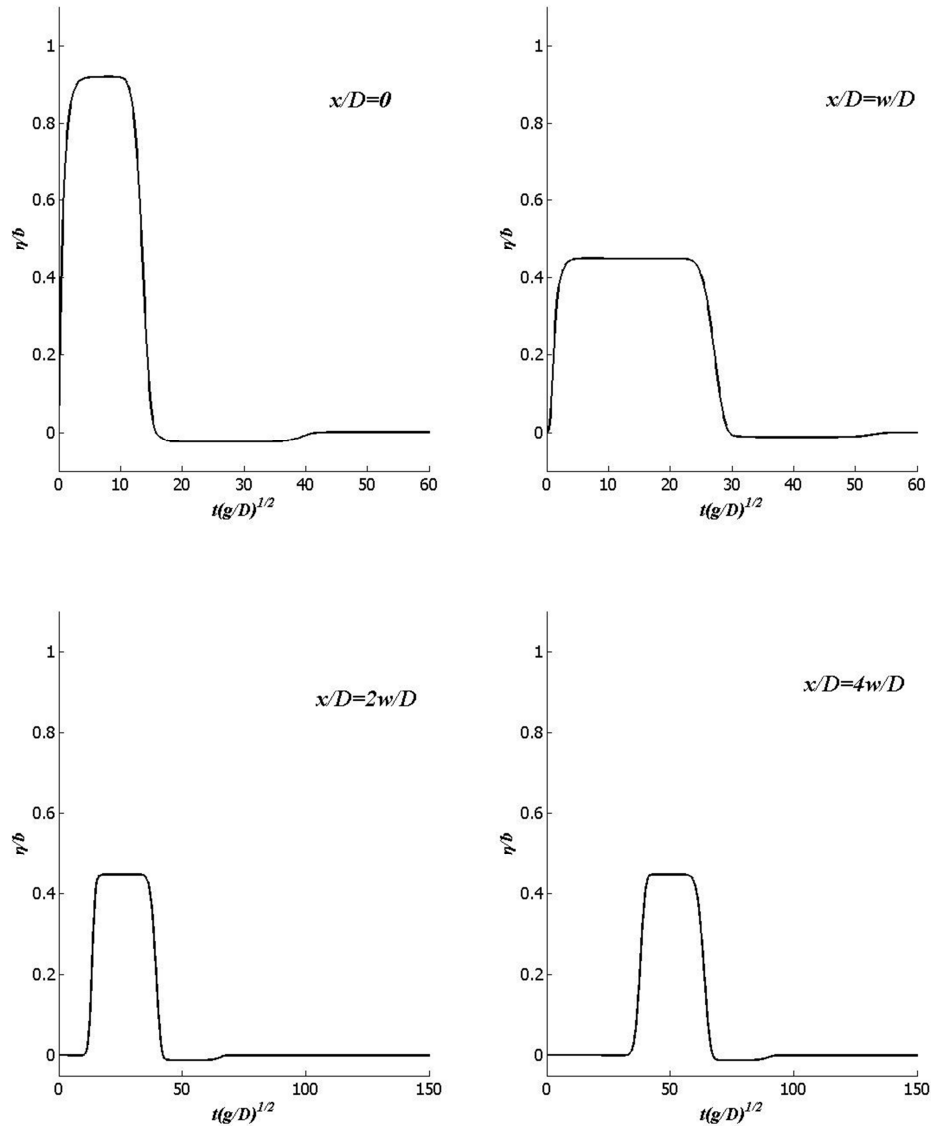
Παρατηρείται ότι στη θέση $x=0$ το επίπεδο της στάθμης, αρχικά, φτάνει σε ένα μέγιστο πλάτος περίπου ίσο με την ανύψωση του πυθμένα b . Στη θέση $x=w$, στο σύνορο της μετατόπισης, η ανύψωση της θαλάσσιας επιφάνειας μειώνεται περίπου στο μισό της μέγιστης και διατηρείται σταθερή για μικρό χρονικό διάστημα μέχρι την επαναφορά της στην αρχική κατάσταση ηρεμίας. Στις θέσεις $x=2w, x=4w$ επιβεβαιώνεται η σταθεροποίηση του πλάτους του κύματος στο $0.5b$.

Στα Σχήμα 5.6 και Σχήμα 5.7 παρουσιάζονται τα κυματικά προφίλ που προέκυψαν για τις τιμές $s=100$ και $s=1000$ αντίστοιχα.



Σχήμα 5.6: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_1 = 26.1176, b/D = 0.2, s = 100$ (2000 elements)

Παρατηρείται ότι οι μέγιστες τιμές ανύψωσης της στάθμης της θάλασσας, τόσο στην περιοχή του διαταραγμένου πυθμένα, όσο και στο αμετάβλητο τμήμα του, παραμένουν σταθερές και ανεξάρτητες από την τιμή του συντελεστή s . Ωστόσο, είναι εμφανές ότι για τις τιμές $s = 100, s = 1000$ και σε όλες τις θέσεις ελέγχου το ύψος του κύματος διατηρείται για αρκετό χρονικό διάστημα. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι στο πρόβλημα δεν έχουν ληφθεί υπόψη φαινόμενα διασποράς, γεγονός που δικαιολογεί την ομαλότητα της διάδοσης και της σταθερής επανάληψης της κυματικής διαταραχής.



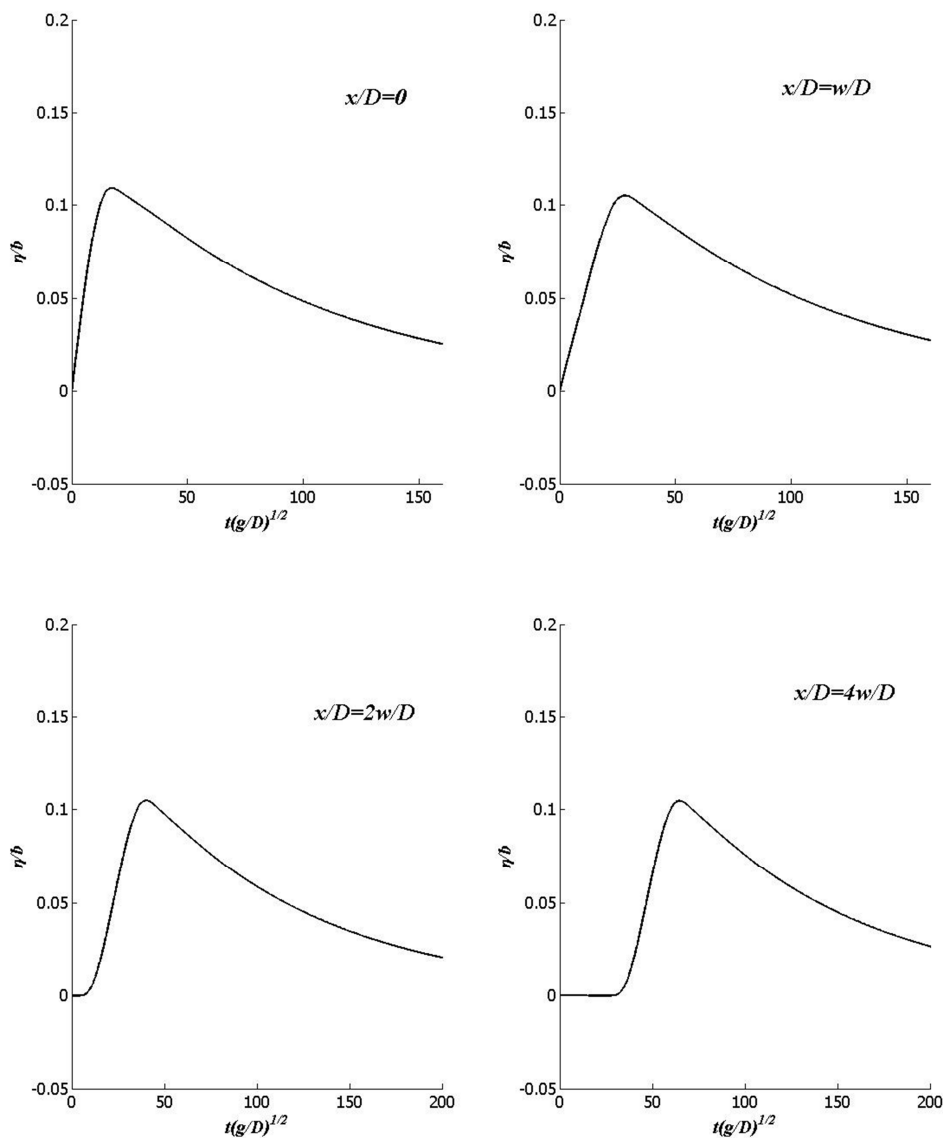
Σχήμα 5.7: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_1 = 26.1176, b/D = 0.2, s = 1000$ (2000 elements)

Τα παραπάνω αποτελέσματα, όπως και αυτά που ακολουθούν, που αντιστοιχούν στην τιμή $s=1000$, φαίνεται να προσεγγίζουν με αρκετή ακρίβεια με αυτά της ανάλυσης του Hammack^[13,14], σύμφωνα με την οποία η επιβολή της διαταραχής γίνεται μέσω της συνάρτησης Heaviside.

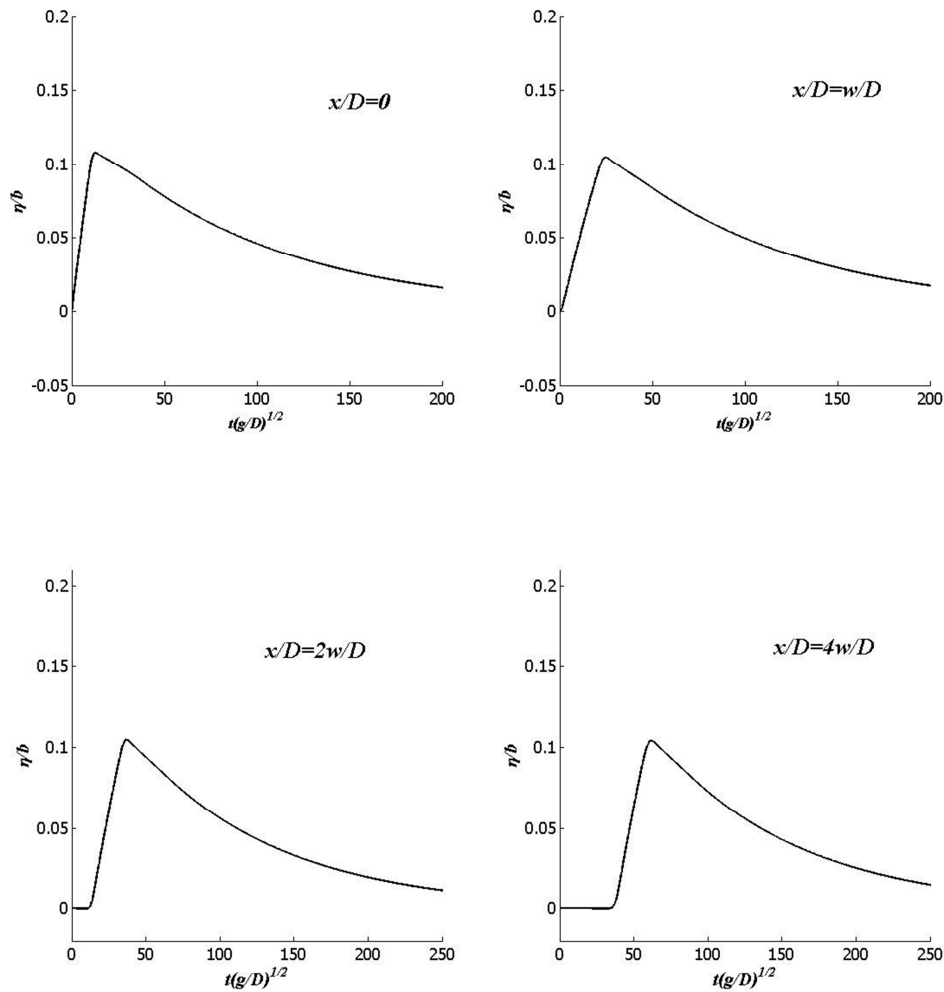
ο Έρπουσα μετατόπιση πυθμένα (*Creeping bed motion, $q = q_2$*)

Η έρπουσα ανύψωση του πυθμένα χαρακτηρίζεται από την απομάκρυνση της κυματικής διαταραχής από την πηγή της, πριν ακόμα ολοκληρωθεί η ολική παραμόρφωση του πυθμένα. Ο χαρακτηριστικός λόγος λαμβάνεται πολύ μεγαλύτερος της μονάδας, δηλαδή $t_c \sqrt{gD}/w = 8.70$ και κατ'έπекταση ο συντελεστής q μικρότερος αυτής, $q_2 = 0.20716$. Η ανύψωση του πυθμένα λήφθηκε ίση με το 30% του βάθους του, δηλαδή $b/D = 0.3$.

Στα Σχήματα 5.8, 5.9 και 5.10 παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των σημείων της ελεύθερης επιφάνειας για τις τιμές $s = 10, s = 100$ και $s = 1000$ αντιστοίχως.



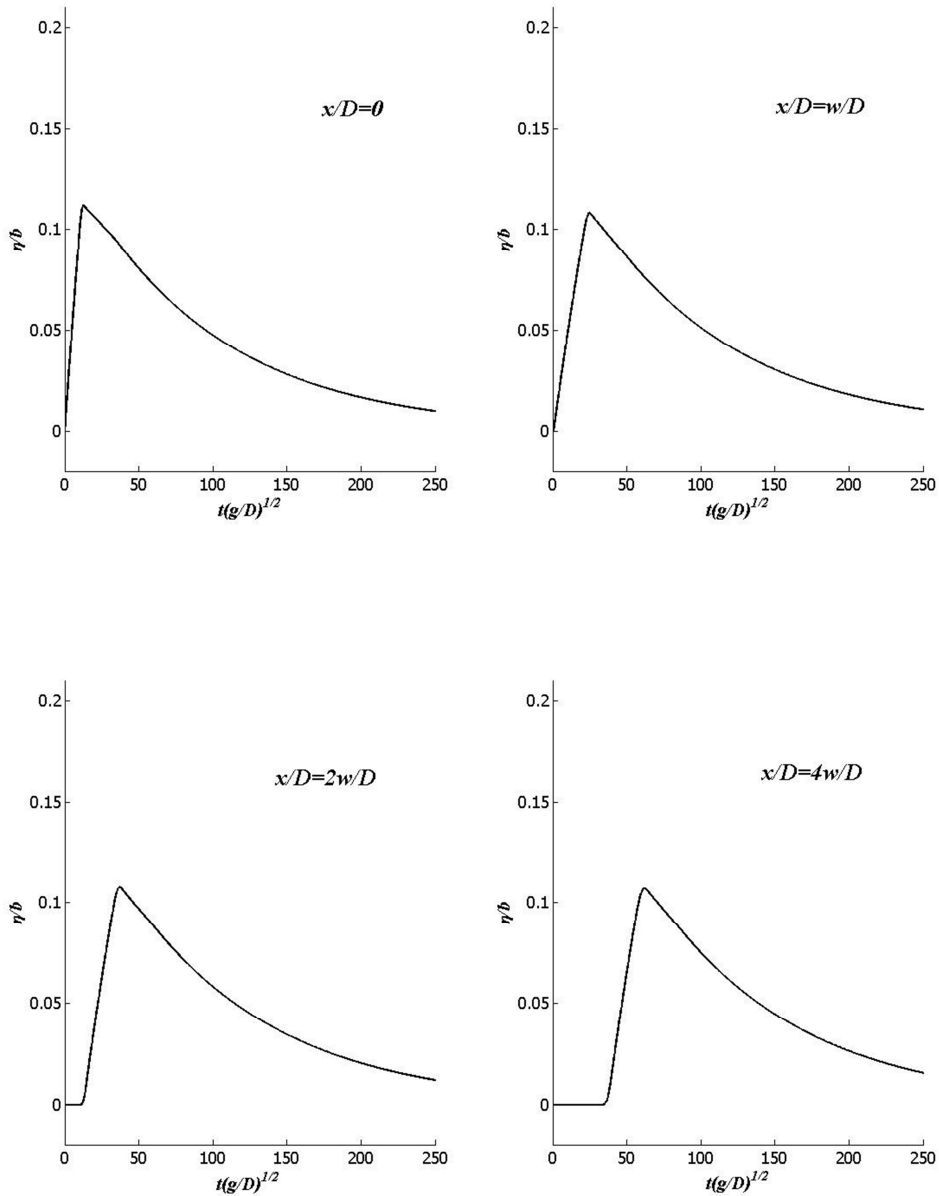
Σχήμα 5.8: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_2 = 0.2071, b/D = 0.3, s = 10$ (2000 elements)



Σχήμα 5.9: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_2 = 0.2071, b/D = 0.3, s = 100$ (2000 elements)

Η κυματική διαταραχή που αντιστοιχεί σε αυτή την κατηγορία εξελίσσεται ομοιόμορφα καθ'όλο το μήκος του πλέγματος. Συμπεραίνεται ότι εξαιτίας του πολύ αργού ρυθμού επιβολής της παραμόρφωσης, η ανύψωση της θαλάσσιας επιφάνειας πραγματοποιείται εξίσου αργά με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται αισθητή μείωση της μακριά από το διαταραγμένο πυθμένα.

Έτσι, λοιπόν, το μέγιστο πλάτος του κύματος σταθεροποιείται εμφανώς γύρω στο $0.12b$, τόσο κοντά στην υποθαλάσσια πηγή, όσο και μακριά από αυτήν. Προκύπτει επίσης, ότι η επαναφορά στην αρχική ηρεμία πραγματοποιείται αργά και ομαλά, συγκριτικά με την περίπτωση της κρουστικής μετατόπισης του πυθμένα.



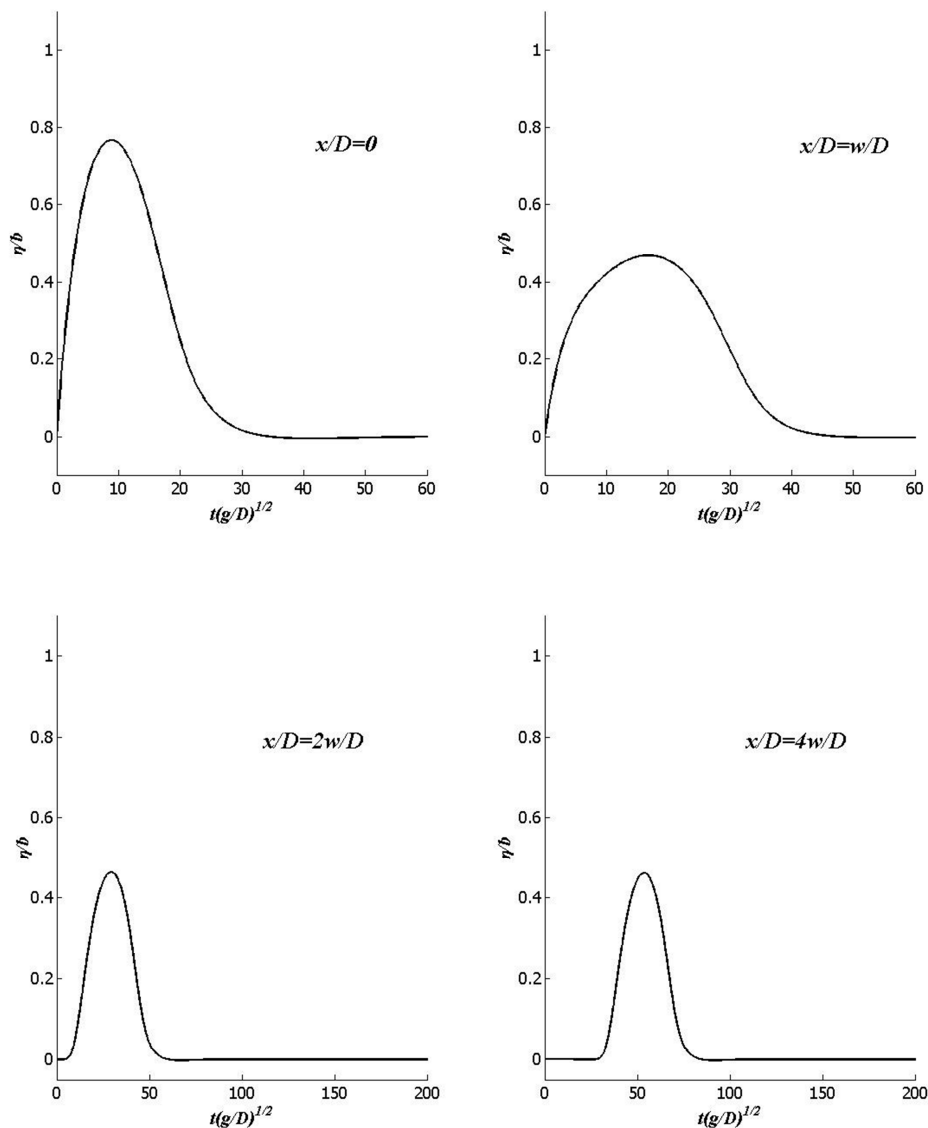
Σχήμα 5.9: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_2 = 0.2071, b/D = 0.3, s = 1000$ (2000 elements)

ο **Μεταβατική μετατόπιση πυθμένα (Transitional bed motion, $q = q_3$)**

Η περίπτωση αυτή περιγράφει μία ενδιάμεση κατάσταση των προηγούμενων δύο, συνδυάζοντας κάποια από τα χαρακτηριστικά τους. Για παράδειγμα, αρχικά επιτυγχάνεται κυματική διαταραχή πλάτους κοντά στο $0.9b$, δηλαδή περίπου ίσο με τη μετατόπιση που την προκάλεσε. Στις μεταγενέστερες θέσεις, ωστόσο, παρατηρείται σημαντική μείωση, περίπου στο μισό της αρχικής, η οποία πραγματοποιείται με ομαλό ρυθμό.

Στο παράδειγμα αυτό, η συνολική μετατόπιση του πυθμένα θεωρήθηκε ίση το 10% του συνολικού βάθους, δηλαδή $b/D=0.1$. Ο χαρακτηριστικός λόγος λαμβάνεται ίσος με $t_c \sqrt{gD}/w=0.39$, δίνοντας συντελεστή q μεγαλύτερο της μονάδας, $q_3 = 4.6211$.

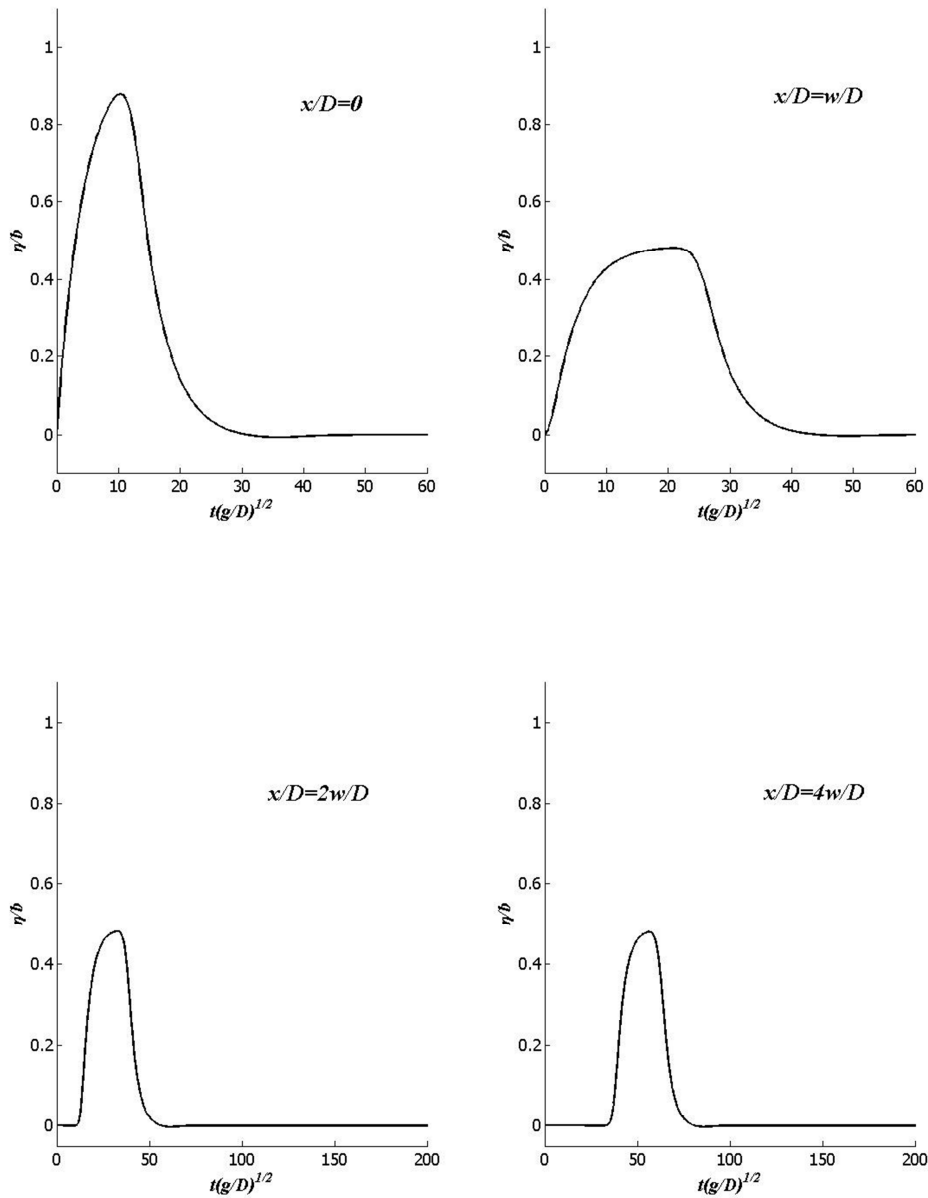
Στα σχήματα που ακολουθούν, Σχήμα 5.10, 5.11 και 5.12 φαίνονται τα κυματικά προφίλ της εν λόγω διαταραχής στις διάφορες θέσεις.



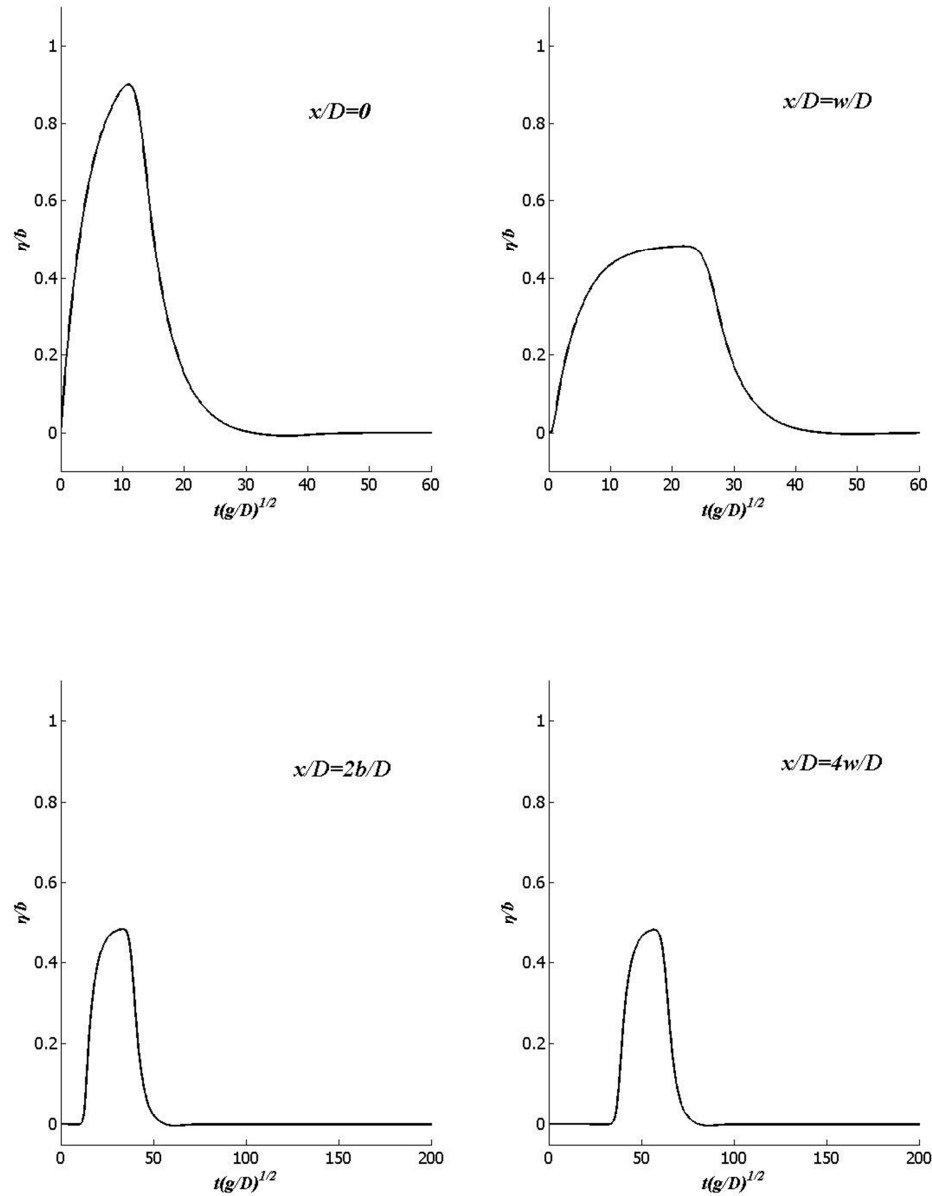
Σχήμα 5.10: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_3 = 4.6211, b/D = 0.1, s = 10$ (2000 elements)

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να σημειωθεί ότι για $s=10$ το μέγιστο ύψος του κύματος στη θέση $x=0$ φτάνει σε ποσοστό 80% της ανύψωσης του πυθμένα, αντί του

90% που παρουσιάζουν οι υπόλοιπες εφαρμογές. Αυτό συμβαίνει διότι είναι τέτοια η επιβολή της διαταραχής ώστε κατά την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, οι ενδιάμεσες θέσεις του υδάτινου συνόρου (μεταξύ του μεγίστου ύψους και της αδιατάραχτης επιφάνειας) μπορούν και αποκτούν επιτάχυνση που εμποδίζει την περαιτέρω αύξηση του ύψους του κύματος.

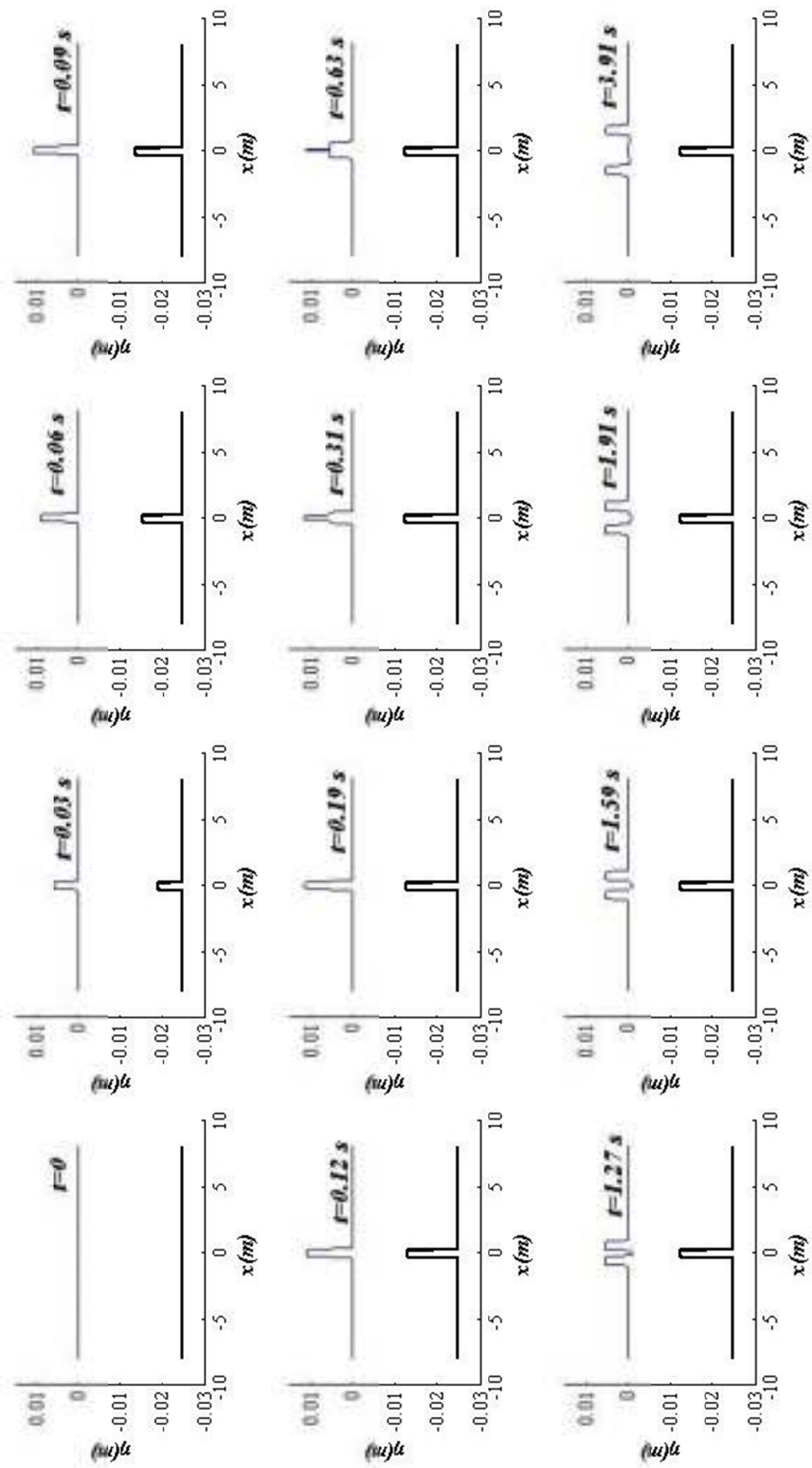


Σχήμα 5.11: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_3 = 4.6211, b/D = 0.1, s = 100$ (2000 elements)

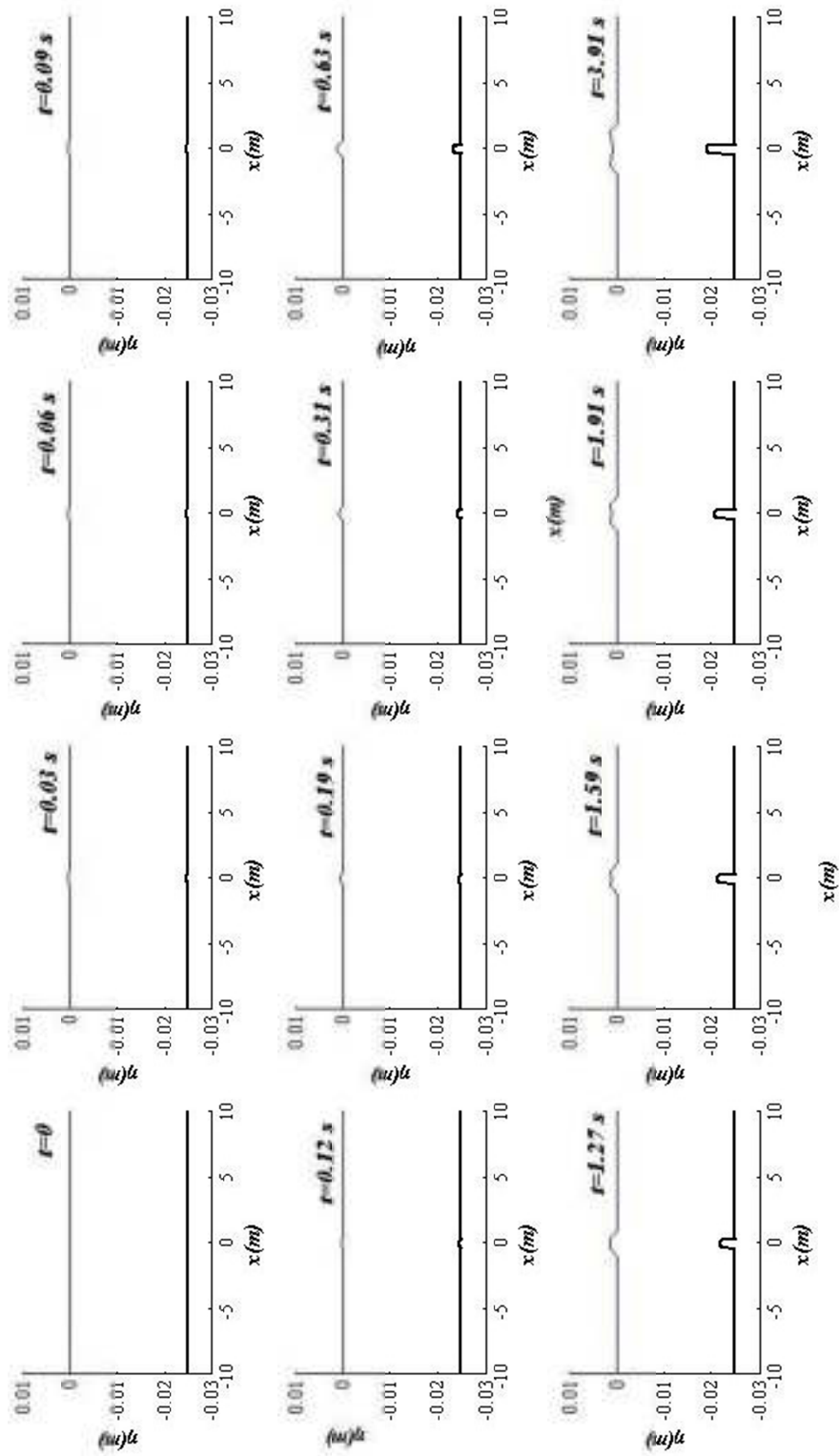


Σχήμα 5.12: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q_3 = 4.6211$, $b/D = 0.1$, $s = 1000$ (2000 elements)

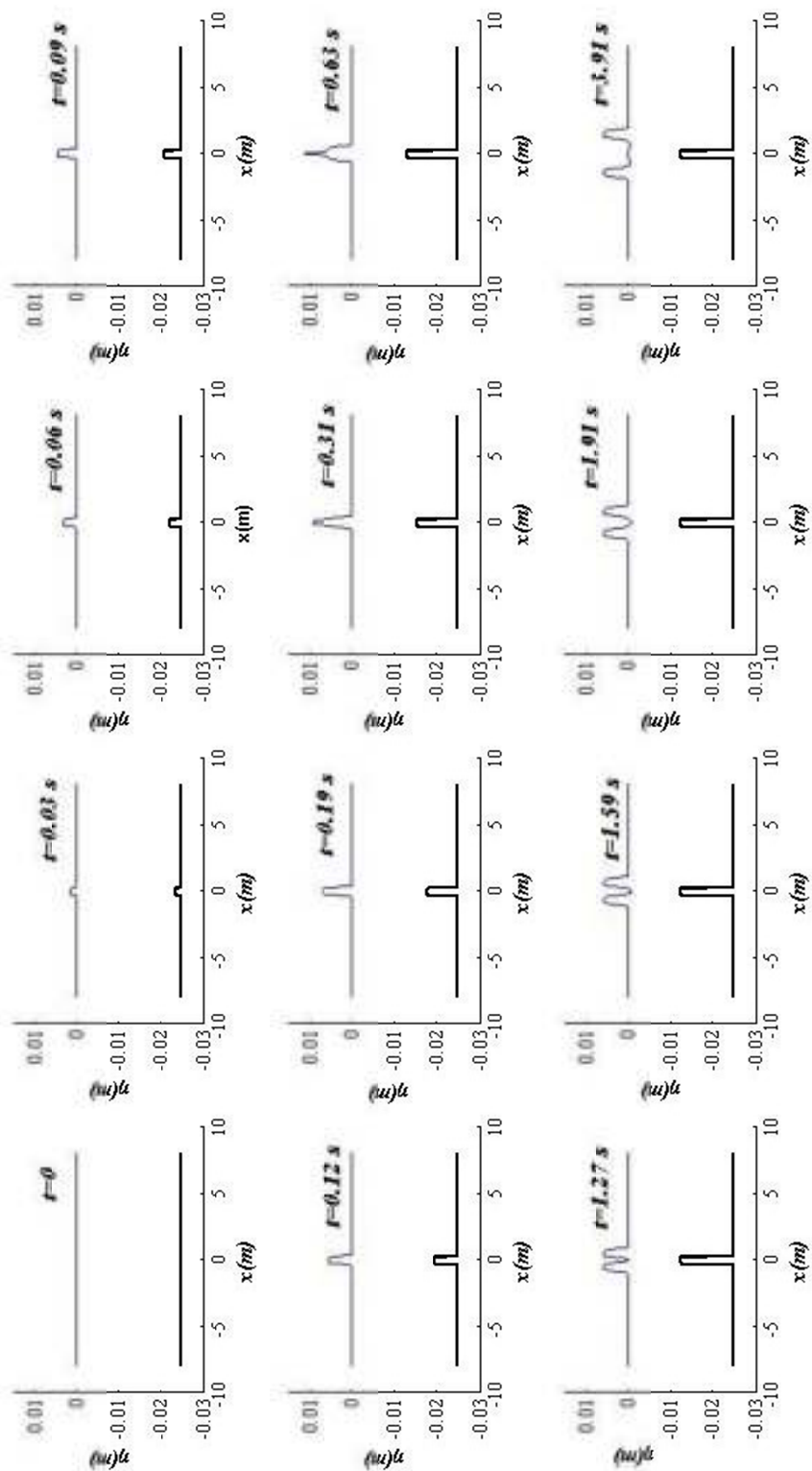
Για τη γενικότερη εποπτεία του φαινομένου, στα Σχήματα 5.13, 5.14 και 5.15 παρατίθενται μια σειρά από διαδοχικά στιγμιότυπα της κυματικής διαταραχής για καθεμία τιμή της παραμέτρου q και για $s = 1000$. Ενδεικτικά, η κατακόρυφη μετατόπιση του υποθαλάσσιου τμήματος λαμβάνεται ίση με το ημιβάθος, δηλαδή $b/D = 0.5$.



Σχήμα 5.13: Στιγμιότυπα κύματος για η_1 , ($s = 1000, b/D = 0.5$).



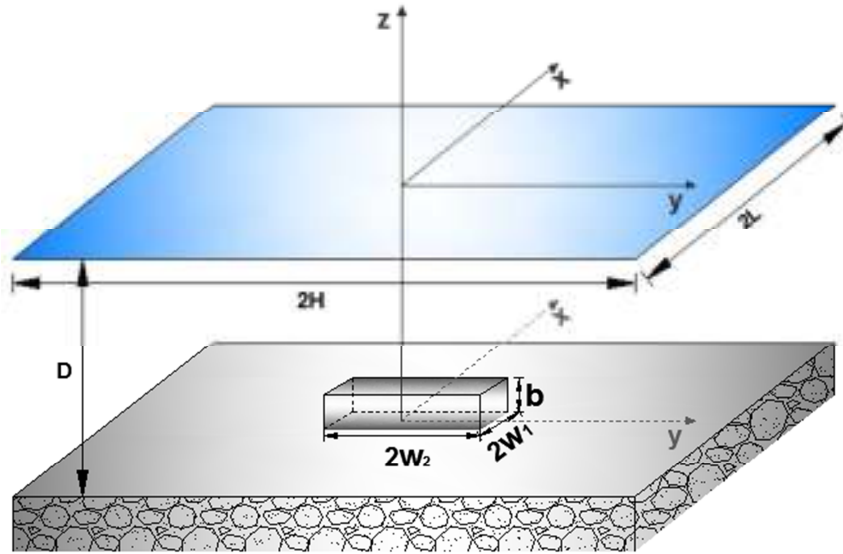
Σχήμα 5.14: Στιγμιότυπα κύματος για q_2 , ($s = 1000, b/D = 0.5$).



Σχήμα 5.14: Στηνμιότοπα κύματος για g_3 , ($s = 1000, b/D = 0.5$).

5.1.3. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης μετατόπισης πυθμένα στις δύο διαστάσεις

Στις δύο διαστάσεις, το πρόβλημα περιγράφεται από την ανύψωση της επιφάνειας $2w_1 \times 2w_2$ κατά b , σε πυθμένα σταθερού βάθους D . Οι διαστάσεις του πλέγματος ορίζουν επιφάνεια εμβαδού $2L \times 2H$. Στο **Σχήμα 5.15** που ακολουθεί απεικονίζεται η εν λόγω βαθυμετρία.



Σχήμα 5.15: Κατακόρυφη τμηματική ανύψωση θαλάσσιου πυθμένα στις δύο διαστάσεις

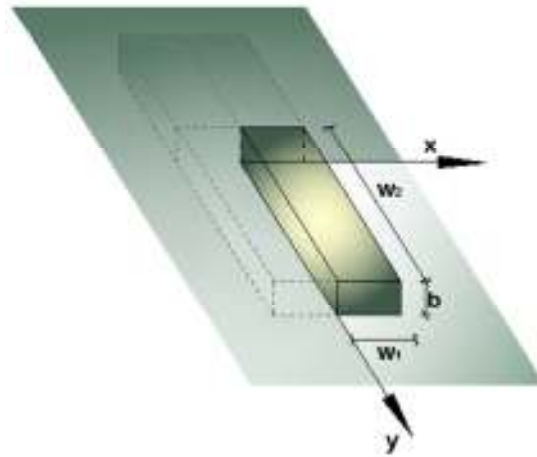
Οι διαστάσεις w_1, w_2 επιλέχθηκαν έτσι ώστε $w_1 \ll w_2$ προκειμένου η λύση να προσεγγίζει τη λύση του μονοδιάστατου προβλήματος, στο οποίο η άλλη διάσταση θεωρείται άπειρη, και να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ τους.

Η διάταξη του **Σχήματος 5.15** παρουσιάζει διπλή συμμετρία (ως προς τους άξονες x και y). Για το λόγο αυτό, προσομοιώθηκε και εξετάστηκε το ένα τέταρτο της διαταραχής του πυθμένα, χρησιμοποιώντας ομογενείς συνθήκες Neumann, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.16**. Αυτό συμβαίνει διότι οι διαστάσεις L, H επιλέχθηκαν ώστε να αποφεύγεται η ανάκλαση του κύματος στα σύνορα, κι επομένως να ισχύει η ομογενής συνθήκη $\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0$. Ομοίως, στους άξονες x, y , με βάση τη διπλή συμμετρία, μπορούν να επιβληθούν οι ομογενείς συνθήκες Neumann $\eta_x|_{x=0} = 0$ και $\eta_y|_{y=0} = 0$.

Η γενική βαθυμετρία του πυθμένα περιγράφεται, όπως είδαμε και νωρίτερα, από τη συνάρτηση

$$h_0(x, y, t) = F(x, y) + k(t)G(x, y) ,$$

όπου $k(t) = 1 - e^{-qt}, t \geq 0 .$



Σχήμα 5.16: Κατακόρυφη τμηματική ανύψωση του διπλά συμμετρικού τμήματος του πυθμένα

Θεωρείται ως δεδομένο ότι το βάθος του πυθμένα παραμένει σταθερό σε όλο το πεδίο ορισμού, δηλαδή $F(x, y) = D, -L \leq x \leq L, -H \leq y \leq H$. Η συνάρτηση $G(x, y)$, λόγω συμμετρίας, η οποία καθορίζει τη γεωμετρία της επιβαλλόμενης διαταραχής, αναδιατυπώνεται ως εξής

$$G(x, y) = -b[1 - H(x - w_1)][1 - H(y - w_2)] , \quad (5.1.9)$$

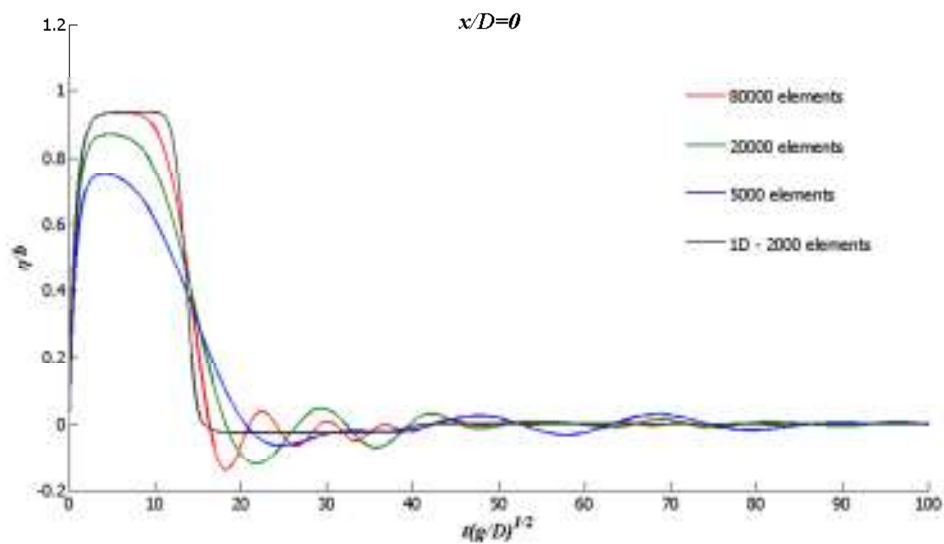
όπου H = η βηματική συνάρτηση Heaviside, ή

$$G(x, y) = -b \left[1 - e^{-e^s(x-w_1)} \right] \left[1 - e^{-e^s(y-w_2)} \right] , \quad (5.1.10).$$

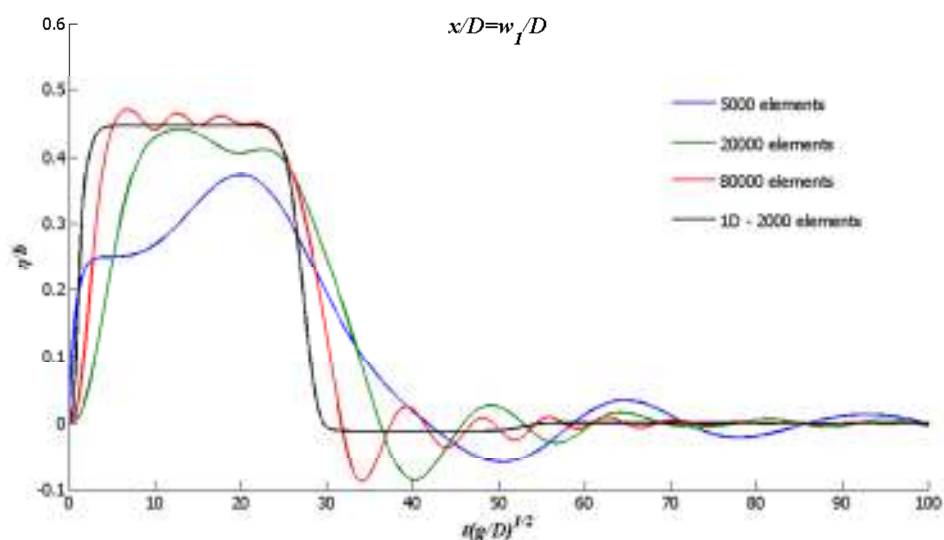
Στο παράδειγμα αυτό, το σταθερό βάθος του πυθμένα θεωρήθηκε ίσο με $D = 0.025m$ και οι διαστάσεις του πλέγματος εκτιμήθηκαν με κριτήριο τη μη ανάκλαση του κύματος στα σύνορα, δηλαδή $L = H = 20m$. Τα ημιπλάτη της ανύψωσης λήφθηκαν ίσα με $w_1 = 0.305m, w_2 = 3.05m$. Για λόγους σύγκρισης, οι υπόλοιπες παράμετροι ορίστηκαν σύμφωνα με την περίπτωση της *κρουστικής μετατόπισης* του πυθμένα (*impulsive bed motion*), όπως και στο μονοδιάστατο πρόβλημα (βλ. Ενότητα 5.1.2). Ειδικότερα, ο συντελεστής q της χρονικής

συνάρτησης (5.1.4) αντικαταστάθηκε με την τιμή $q_1 = 26.1176$, ενώ η ανύψωση του πυθμένα φτάνει το 20% του συνολικού του βάθους, δηλαδή $b/D = 0.2$.

Στα Σχήματα 5.17 και 5.18, που ακολουθούν, παρουσιάζονται οι λύσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ανάλογα με το πλήθος τους στις θέσεις ελέγχου, για το μονοδιάστατο και το διδιάστατο πρόβλημα.

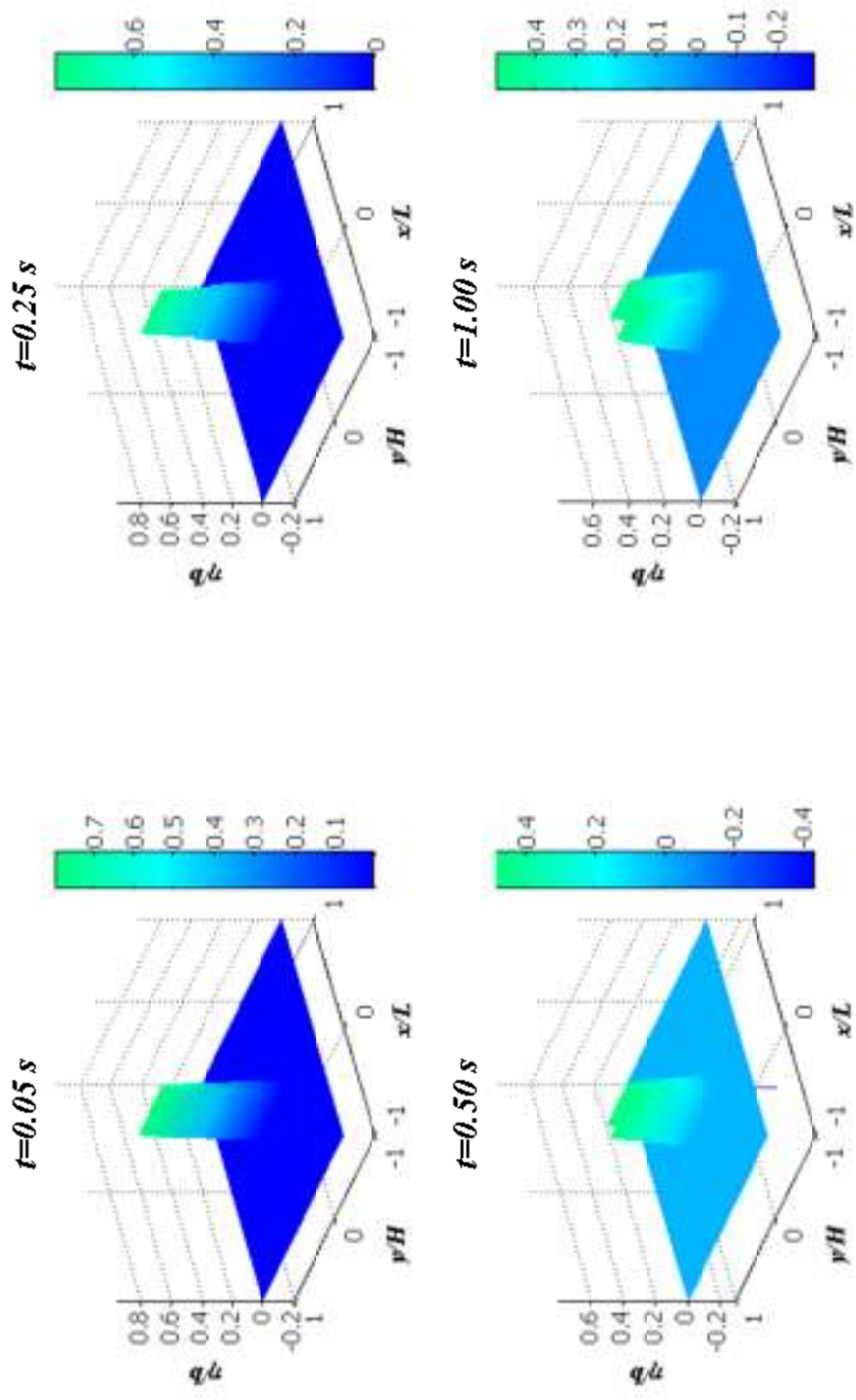


Σχήμα 5.17: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στο $x=0$, για $q_1 = 26.1176$, $b/D = 0.2$, $s = 1000$.

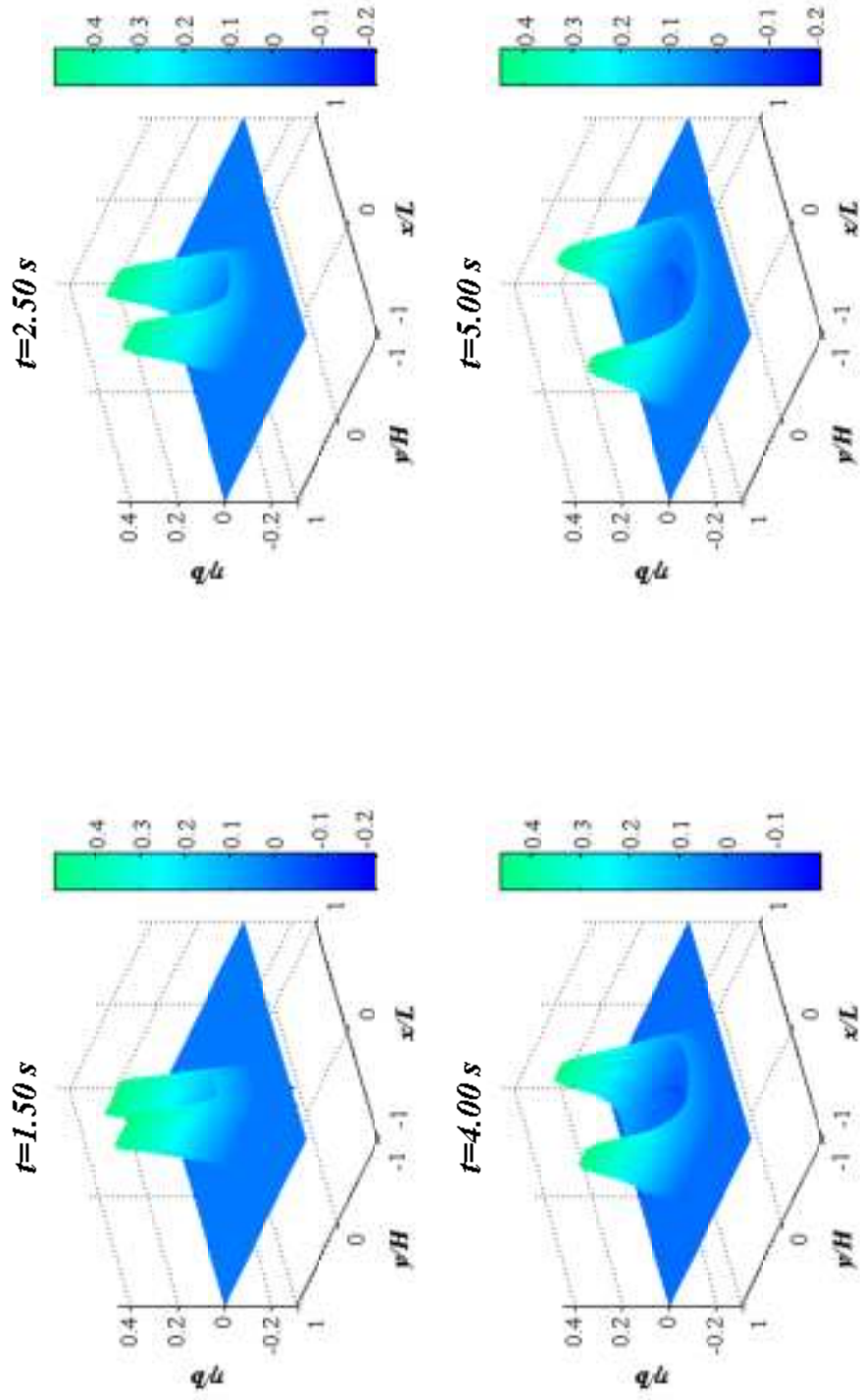


Σχήμα 5.18: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στο $x=w_1$, για $q_1 = 26.1176$, $b/D = 0.2$, $s = 1000$.

Και στα δύο άκρα του τμήματος που ανυψώνεται ($x = 0, x = w_1$), παρατηρείται ότι όσο πυκνώνει το διδιάστατο πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων τόσο περισσότερο το διάγραμμα προσεγγίζει τη μονοδιάστατη λύση, ειδικά στις πρώτες χρονικές στιγμές. Αξίζει να σημειωθεί ότι παρουσιάζεται σχεδόν ταύτιση μεγίστου ύψους κύματος ανάμεσα στη μονοδιάστατη λύση και στη λύση με 80000 πεπερασμένα στοιχεία. Στη συνέχεια, για την καλύτερη εποπτεία του φαινομένου παρατίθενται στα **Σχήματα 5.19** και **5.20** στιγμιότυπα του φαινομένου σε διάφορες χρονικές στιγμές.



Σχήμα 5.19: Στιγμιότυπα κύματος για q_1 , ($s = 1000, b/D = 0.2$).



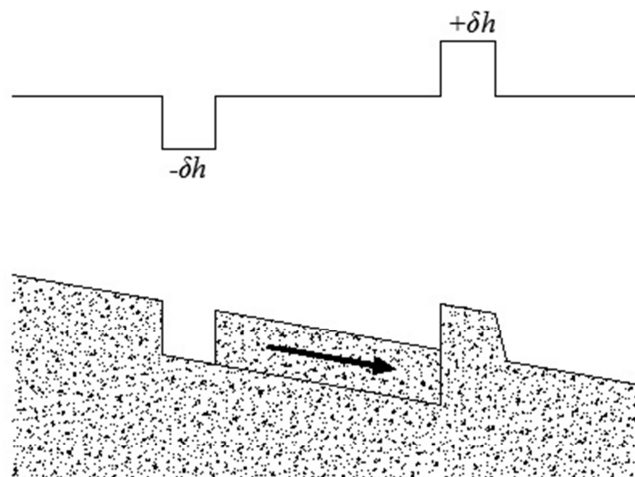
Σχήμα 5.14: Στιγμιότυπα κύματος για q_1 , ($s = 1000, b/D = 0.2$)

5.2. Γεωλίσθηση πυθμένα (Landslide generated tsunami)

5.2.1. Ενέργεια κύματων τσουνάμι – Παράμετροι

Οι υποθαλάσσιες γεωλισθήσεις αποτελούν σοβαρή αιτία γένεσης κυμάτων τσουνάμι, καθώς ευθύνονται για τη δημιουργία του 10% όλων των καταγεγραμμένων τσουνάμι. Χαρακτηριστικά παραδείγματα γεωλισθήσεων έχουν σημειωθεί στο ακρωτήριο Agulhas στη Νότια Αφρική, στη βορειοδυτική Νορβηγία (όπου ο όγκος της γεωλίσθησης εκτιμάται πάνω από 5000 km^3), κ.ά.^[3] Ενδεικτικά, αναφέρεται ότι το καταστροφικό τσουνάμι μέγιστου ύψους 15m, που σημειώθηκε στην Παπούα-Νέα Γουινέα το 1998, οφειλόταν σε υποθαλάσσια κατολίσθηση^[15].

Η υποθαλάσσια γεωλίσθηση συνίσταται στην αποκόλληση και στην ολίσθηση τμήματος του πυθμένα. Ο μηχανισμός γένεσης τσουνάμι που ενεργοποιείται κατά το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται γραφικά στο **Σχήμα 5.15**. Σύμφωνα με την ανάλυση των E.Okal και C. Synolakis^[12], στην απλούστερη μορφή του, θεωρούμε την ολίσθηση τμήματος του πυθμένα κατά μήκος αυτού. Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.15**, στην αρχή της διαταραχής, παρατηρείται βύθιση του επιπέδου του πυθμένα, ενώ στο τέλος της έχουμε αντίστοιχη ανύψωση. Συνεπώς, όπως αναλύθηκε και στην Ενότητα 5.1, αναμένονται αντίστοιχες μεταβολές και στην ελεύθερη επιφάνεια του ύδατος. Πιο συγκεκριμένα, στο σημείο της βύθισης, η στάθμη του νερού μειώνεται κατά δh , ενώ κατάντη της γεωλίσθησης αυξάνεται ισόποσα. Εμφανίζεται, έτσι, ένα δίπολο, που, ωστόσο, λειτουργεί αθροιστικά στην αποτίμηση της συνολικής ενέργειας του τσουνάμι^[12].



Σχήμα 5.15: Γένεση τσουνάμι από ολίσθηση τμήματος πυθμένα (κατά E. Okal και C. Synolakis^[6])

Μελετώντας το φαινόμενο αυτό, συμπεραίνεται ότι η διάρκεια της γεωμετρικής μεταβολής του πυθμένα δε μπορεί να θεωρηθεί πάντοτε αμελητέα ως προς την εξέλιξη του κύματος. Αυτό συμβαίνει διότι η ταχύτητα ολίσθησης του εδάφους εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g . Στην πράξη, η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να επιτευχθεί σε βαρυτική κατολίσθηση πρηνούς δίνεται από τη σχέση $v = \sqrt{2gz}$, όπου z η μέγιστη κατακόρυφη συνιστώσα της συνολικής μετατόπισης^[12]. Συγκρίνοντας την ταχύτητα διάδοσης του κύματος προκύπτει ο λόγος^[12]

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2gz}{gD}} = \sqrt{\frac{2z}{D}}, \quad (5.2.1).$$

Σημειώνεται ότι ο λόγος αυτός δεν μπορεί να πάρει εύκολα μεγάλες τιμές, αφού συνήθως ισχύει $z \ll D$, όπου D συμβολίζεται το βάθος του πυθμένα. Για παράδειγμα, μια γεωλίσθηση η οποία υποβιβάζει κατά 500 m τον πυθμένα βάθους 1500 m δίνει λόγο $v/c = 0.8$.

Για την ενεργειακή διερεύνηση του φαινομένου, προσομοιώνεται η δημιουργία και η ανάπτυξη του τσουνάμι κατά τη διάρκεια της ολίσθησης του πυθμένα, σύμφωνα με άρθρο των E. Okal και C. Synolakis^[12]. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται, φαίνεται στο **Σχήμα 5.16**.

Σύμφωνα με αυτό, ένα τμήμα του πυθμένα αρχίζει να ολισθαίνει τη χρονική στιγμή $t=0$ με ταχύτητα v και σταματάει απότομα όταν $t=T$ (βλ. **Σχήμα 5.16α**). Θεωρείται, ακόμα ότι το ολισθαίνον τμήμα έχει σχήμα της συνάρτησης Gauss, επομένως η μετατόπιση δίνεται από τη συνάρτηση^[12]

$$\varepsilon(x,t) = Ae^{-k(x-vt)^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.2.2).$$

Η μετατόπιση της θαλάσσιας επιφάνειας $\eta(x,t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}, \quad (5.2.3).$$

Η λύση που προκύπτει για την κυματική διαταραχή ταχύτητας $+c$ του **Σχήματος 5.16β** για τις χρονικές στιγμές $t \geq 0$ είναι η ακόλουθη^[12]

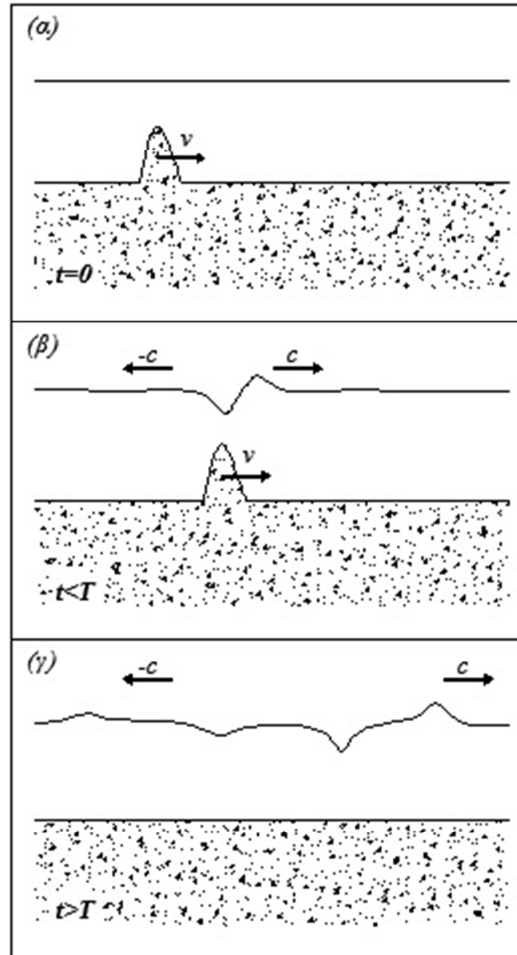
$$\eta_1(x,t) = AH(t) \left[\left(\frac{v^2}{v^2 - c^2} \right) e^{-k(x-vt)^2} + \frac{v^2}{2c} \left(\frac{e^{-k(x+ct)^2}}{c+v} + \frac{e^{-k(x-ct)^2}}{c-v} \right) \right], \quad (5.2.4)$$

(όπου $H(t)$: η βηματική συνάρτηση Heaviside).

Για το κύμα που αρχίζει να διαδίδεται με πλάτος $-A$ τη χρονική στιγμή $t=T$ στη θέση $x=L=vT$, η μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\eta_2(x,t) = -AH(\tau) \left[\left(\frac{v^2}{v^2 - c^2} \right) e^{-k(\xi - v\tau)^2} + \frac{v^2}{2c} \left(\frac{e^{-k(\xi + c\tau)^2}}{c + v} + \frac{e^{-k(\xi - c\tau)^2}}{c - v} \right) \right], \quad (5.2.5)$$

όπου: $\xi = x - L$ και $\tau = t - T$.



Σχήμα 5.16: Γένεση τσουνάμι από ολίσθηση τμήματος πυθμένα (κατά E. Okal και C. Synolakis^[12])

Συνδυάζοντας τις (5.2.4) και (5.2.5) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας $\eta = \eta_1 + \eta_2$, προκύπτει κοινή λύση για $t \geq T$

$$\eta(x,t) = \frac{Av^2}{2c} \left[\frac{e^{-k(x+ct)^2} - e^{-k(\xi+ct)^2}}{c+v} + \frac{e^{-k(x-ct)^2} - e^{-k(\xi-ct)^2}}{c-v} \right], \quad (5.2.6).$$

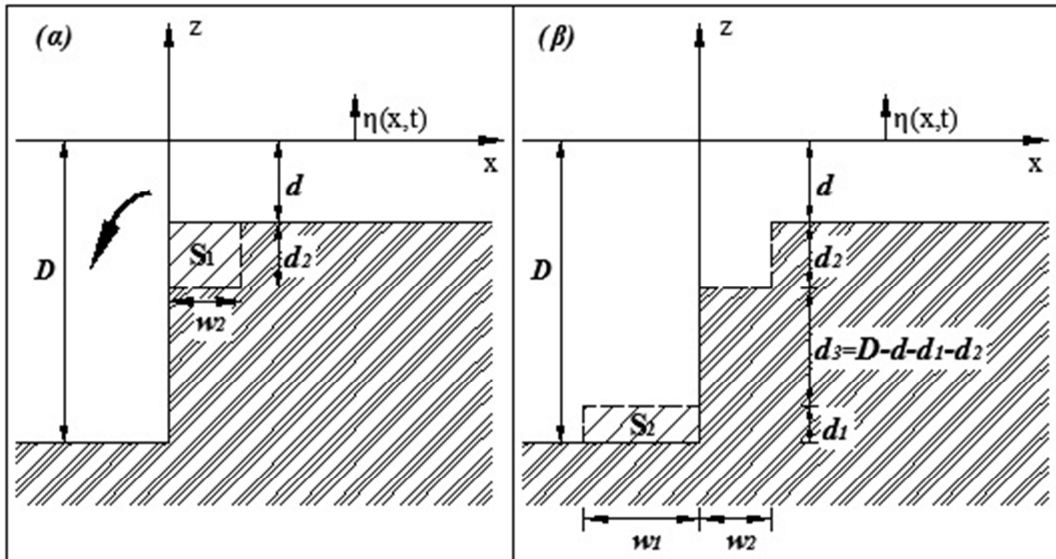
Ο πρώτος όρος της σχέσης (5.2.6) περιγράφει το τσουνάμι που διαδίδεται προς τα αριστερά, ενώ ο δεύτερος όρος το κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά.

Η εκτίμηση της ενέργειας που αποδίδεται στα κύματα τσουνάμι που δημιουργούνται εκατέρωθεν της ολίσθησης, μπορεί να γίνει εμμέσως, με τη βοήθεια των παρακάτω αδιάστατων αριθμών^[12]

$$\alpha_{up} = \frac{v^2}{2c(c+v)}, \alpha_{down} = \frac{v^2}{2c(c-v)}.$$

5.2.2. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης ολίσθησης πυθμένα στη μία διάσταση

Στο Σχήμα 5.17 περιγράφεται μια τυπική διατομή του θαλάσσιου πυθμένα που υφίσταται κατολίσθηση. Όπως φαίνεται, το τμήμα S_1 αποκολλάται από το πυθμένα και μεταφέρεται στη θέση του τμήματος S_2 , με αλλαγή της αρχικής του γεωμετρίας.



Σχήμα 5.17: Ολίσθηση τμήματος S_1 του θαλάσσιου πυθμένα και μεταφορά στη θέση S_2

Στο μοντέλο προσομοίωσης που θα αναπτυχθεί παρακάτω, έγινε η παραδοχή ότι ο όγκος του ολισθαίνοντος τμήματος διατηρείται σταθερός. Στο πρόβλημα μίας διάστασης, η παραδοχή αυτή μεταφράζεται στην ακόλουθη ισότητα

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow d_1 w_1 = d_2 w_2, \quad (5.2.7).$$

Η βαθυμετρία στη γενική της μορφή περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$h_0(x,t) = F(x) + k(t)G(x), \quad (5.2.8)$$

όπου
$$k(t) = 1 - e^{-qt}, t \geq 0, \quad (5.2.9)$$

Για τη μόνιμη βαθυμετρία, που περιγράφεται από τη συνάρτηση $F(x)$, σύμφωνα με το **Σχήμα 5.17α**, προκύπτει

$$F(x) = D - dH(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.2.10)$$

Αντίστοιχα, σύμφωνα με τη γεωμετρία του πυθμένα όπως διαμορφώνεται αμέσως μετά την κατολίσθηση (βλ. **Σχήμα 5.17β**), προκύπτει η συνάρτηση $G(x)$

$$G(x) = -d_1H(x+w_1) - (d_3-d)H(x) - d_2H(x-w_2), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.2.11).$$

όπου $H(x)$ η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Δεδομένης της ισότητας $H(x+w) \approx 1 - e^{-e^{s(x+w)}}$, με κατάλληλες αντικαταστάσεις, οι σχέσεις (5.2.10), (5.2.11) διαμορφώνονται ως εξής

$$F(x) = D - d(1 - e^{-e^{sx}}), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.2.12)$$

$$G(x) = -d_1 \left[1 - e^{-e^{s(x+w_1)}} \right] - (d_3 - d) (1 - e^{-e^{sx}}) - d_2 \left[1 - e^{-e^{s(x-w_2)}} \right], \quad -L \leq x \leq L \quad (5.2.13).$$

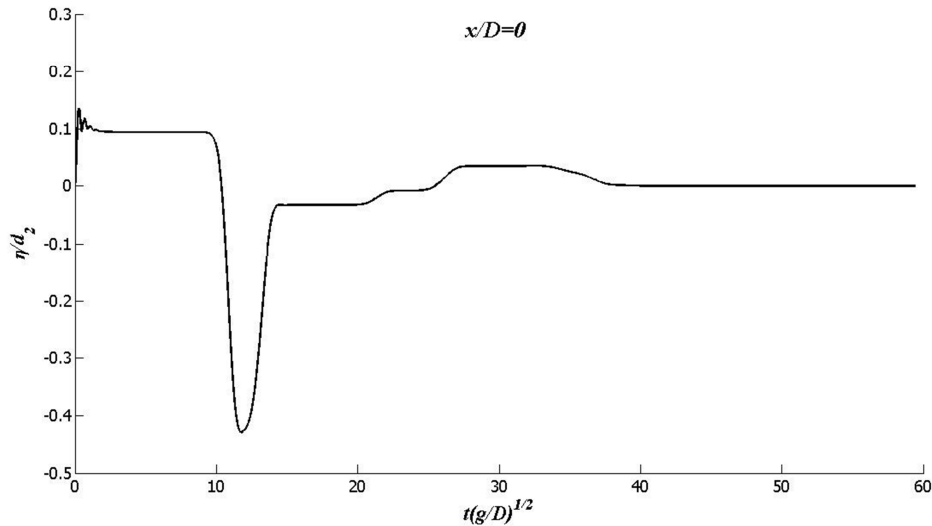
Στο παράδειγμα που μελετήθηκε, το σταθερό βάθος του πυθμένα κατόντη της γεωλίσθησης θεωρήθηκε ίσο με $D = 1km$ και ανάντη $d = 0.5km$. Για το αρχικό τμήμα S_1 και το τελικό S_2 ορίστηκαν οι διαστάσεις: $d_1 = d_2 = 0.2km$ για το ύψος και $w_1 = w_2 = 10km$. Σημειώνεται ότι το συνολικό μήκος του πλέγματος, στο οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο, επιλέχθηκε έτσι ώστε να αποφεύγεται η ανάκλαση του κύματος στα σύνορα, δηλαδή $L = 200km$.

Για την καλύτερη εκτίμηση του φαινομένου, εξετάστηκαν περιπτώσεις για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου q της συνάρτησης (5.2.9), που καθορίζουν τον ρυθμό επιβολής της διαταραχής (βλ. **Σχήμα 5.4**). Έτσι, η πρώτη εφαρμογή, που αφορά στην τιμή $q = 26.1176$, προσομοιάζει την ακαριαία γεωμετρική μεταβολή του πυθμένα και κατ'επέκταση την αμελητέα διάρκεια της κατολίσθησης. Αντιθέτως, η τιμή $q = 1$, που μελετήθηκε, αφορά σε φαινόμενα γεωλισθήσεων μεγαλύτερης διάρκειας, που εξελίσσονται σταδιακά.

Και για τις δύο εφαρμογές, η τιμή της παραμέτρου s που εμπλέκεται στις συναρτήσεις βαθυμετρίας (5.2.12) και (5.2.13) λήφθηκε ίση με $s = 1000$. Στη συνέχεια παρατίθενται οι μεταβολές της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $x = 0$, αλλά και εκατέρωθεν της διαταραχής, δηλαδή στις θέσεις: $x = w_2, x = 2w_2$ και $x = -w_1, x = -2w_1$.

- ο Εφαρμογή για $q = 26.1176, s = 1000$

Στα Σχήματα 5.18, 5.19 παρουσιάζεται η μεταβολή της στάθμης της θαλάσσιας επιφάνειας στις θέσεις ελέγχου, ανηγμένη ως προς το ύψος d_2 .

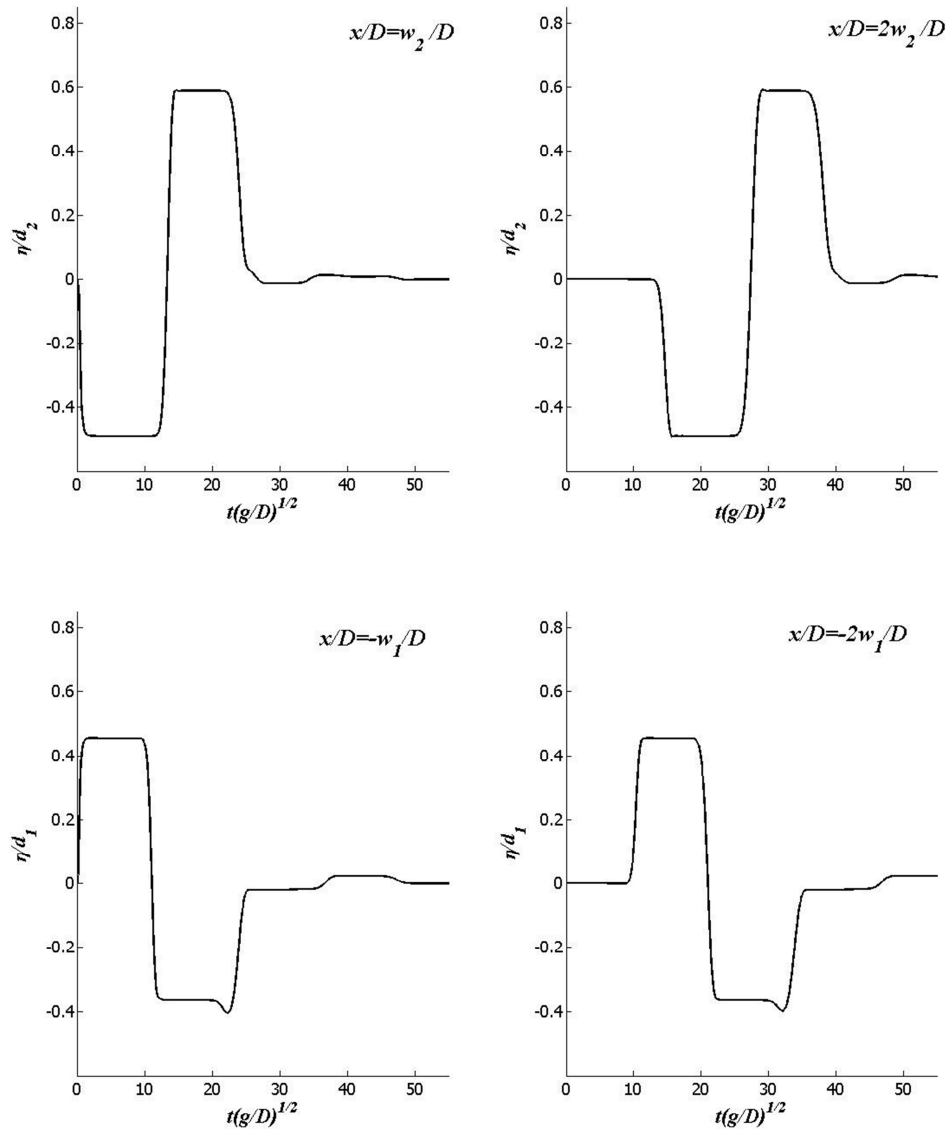


Σχήμα 5.18: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $x=0$, για $q = 26.1176, s = 1000$ (2000 elements)

Παρατηρείται, αρχικά, ότι στις θέσεις $x = -w_1, x = w_2$, μεταβολή του επιπέδου της στάθμης κατά 50% περίπου του ύψους διαταραχής d_1, d_2 ($d_1 = d_2$). Παρατηρείται η δημιουργία δύο κυμάτων, διαδιδόμενα προς αντίθετες διευθύνσεις. Σε αντίθεση με την περίπτωση της κατακόρυφης μετατόπισης του πυθμένα (που εξετάστηκε στην Ενότητα 5.1), τα κύματα που δημιουργούνται στην περίπτωση αυτή είναι μορφής N (N-waves). Κατά τη διάδοσή τους, δηλαδή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.19, επιβάλλουν αύξηση του επιπέδου της στάθμης και ανάλογη βύθιση υπό τη μορφή N.

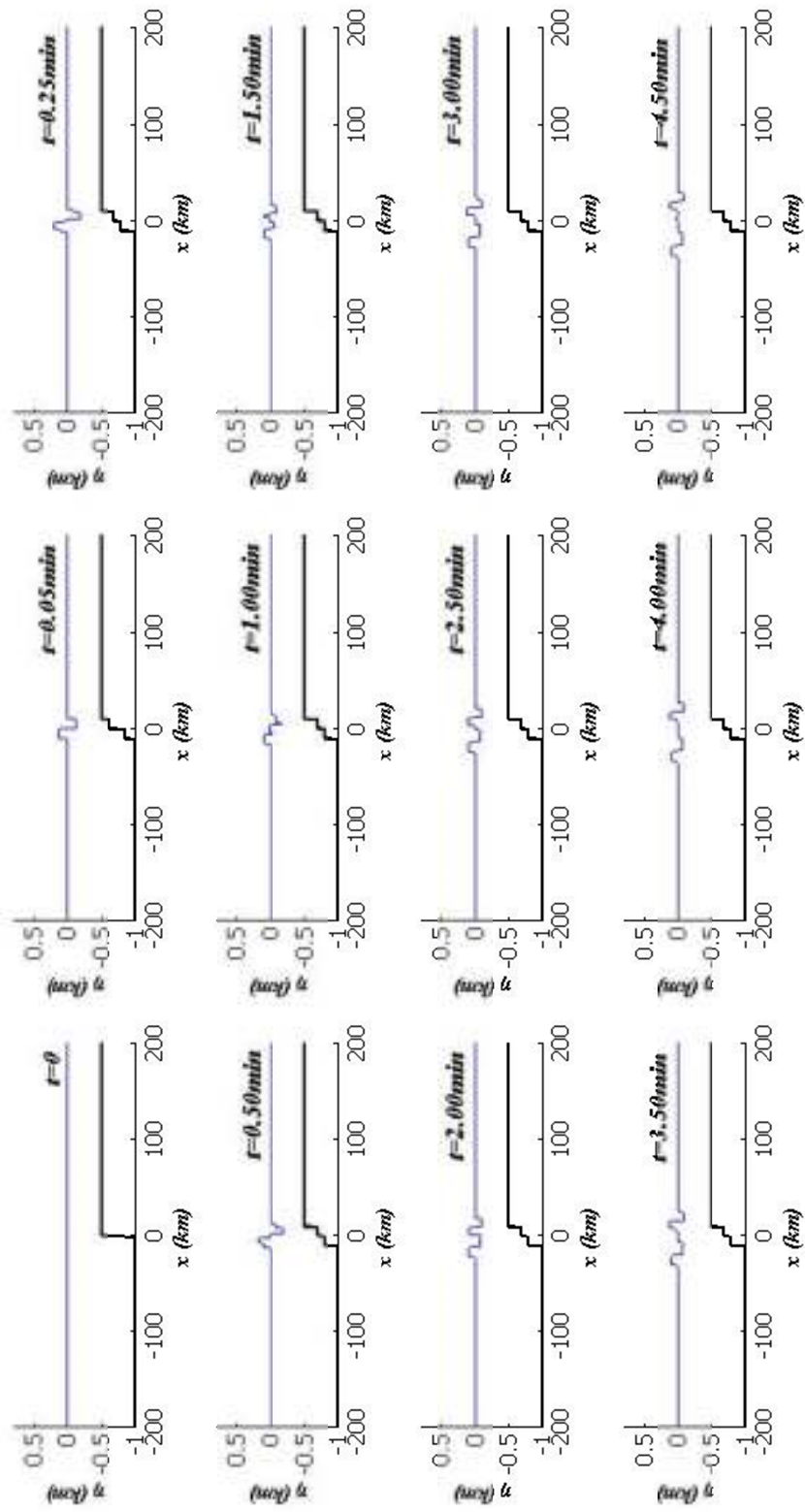
Στις θέσεις $x = -2w_1, x = 2w_2$, επιβεβαιώνεται η σταθεροποίηση των παλμών, καθώς το μέγιστο και ελάχιστο πλάτος των κυμάτων φαίνονται να διατηρούνται σταθερές κατά τη διάδοσή τους.

Παρατηρείται επίσης, το κύμα που οδεύει προς τα αριστερά, διαδίδεται σε βαθιά νερά κι επομένως αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα ($d < D \Leftrightarrow \sqrt{gd} < \sqrt{gD}$). Αντιθέτως, το κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά έχει μικρότερη ταχύτητα και μεγαλύτερο πλάτος, καθώς διαδίδεται σε ρηχότερα νερά. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να τονιστεί ότι το πλάτος του κύματος αυτού είναι συγκρίσιμο με το τοπικό βάθος του πυθμένα και ενδεχομένως για μεγαλύτερη ακρίβεια θα πρέπει να ληφθούν υπόψη μη γραμμικά φαινόμενα.



Σχήμα 5.19: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q = 26.1176, s = 1000$ (2000 elements)

Μία γενική άποψη του φαινομένου εμφανίζεται στο **Σχήμα 5.20**, όπου απεικονίζονται στιγμιότυπα των κυμάτων σε διάφορες χρονικές στιγμές.



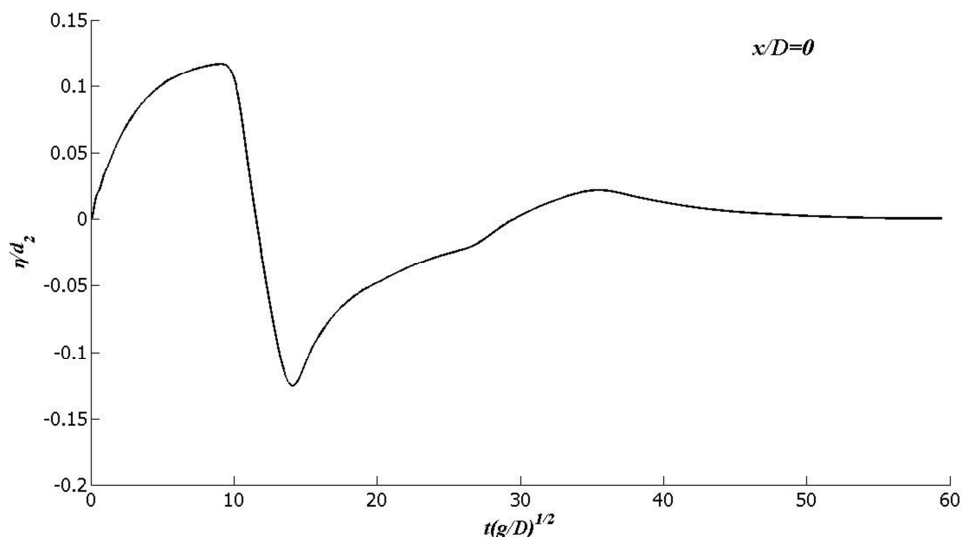
Σχήμα 5.20: Στιγμιότυπα κομμάτων για $g = 26.1176, s = 1000$.

ο **Εφαρμογή για $q = 1, s = 1000$**

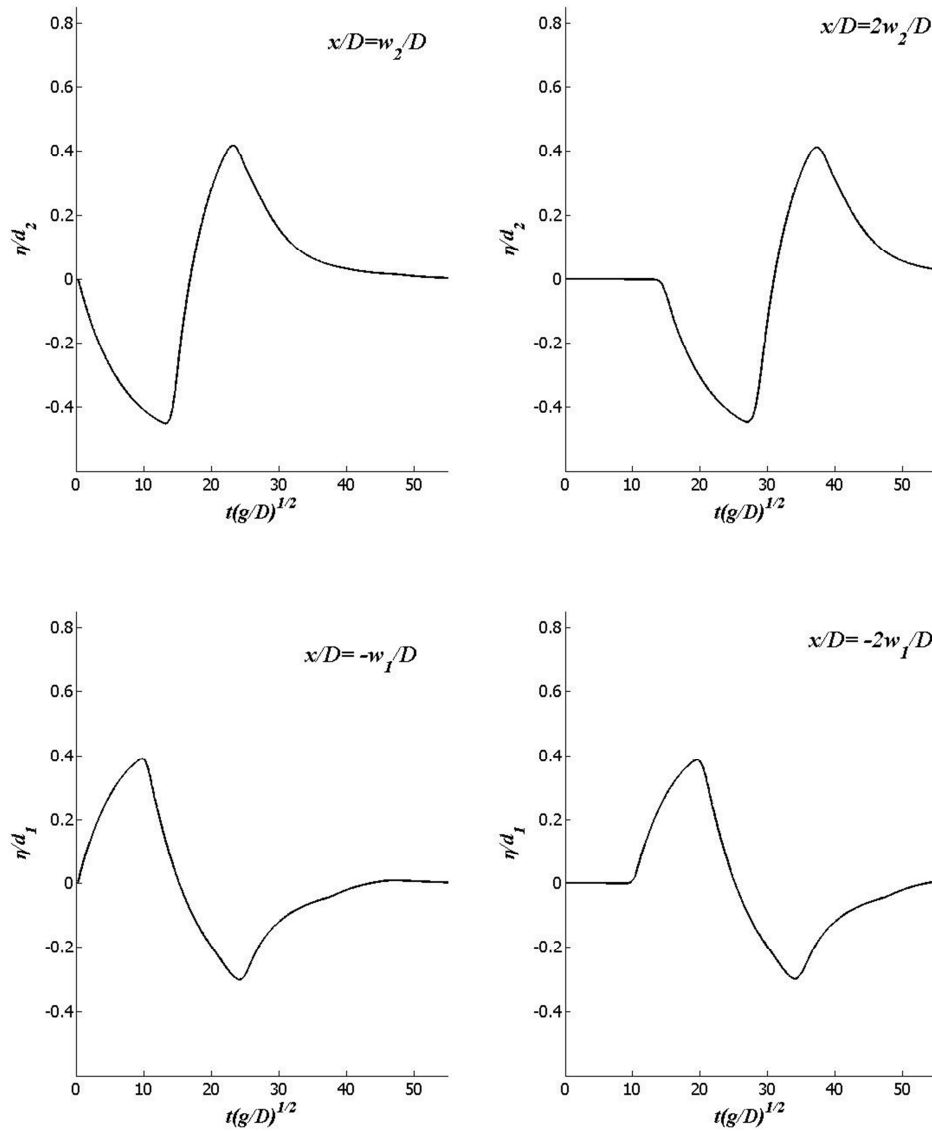
Για $q = 1$ συμπεραίνεται ότι εξαιτίας του αργού ρυθμού επιβολής της παραμόρφωσης, οι μεταβολές της θαλάσσιας επιφάνειας πραγματοποιούνται εξίσου αργά (**Σχήμα 5.21**).

Σε ό,τι αφορά το πλάτος των κυμάτων, σημειώνεται μικρή μείωση σε σχέση με την προηγούμενη εφαρμογή (**Σχήμα 5.22**). Η μέγιστη ανύψωση (και βύθιση) ανέρχεται στο ήμισυ σχεδόν του ύψους διαταραχής για το πρωτεύον κύμα. Αντίστοιχα, οι μέγιστες αποκρίσεις του δευτερεύοντος κύματος φτάνουν το $0.4d_1$.

Προκύπτει επίσης, ότι η επαναφορά στην αρχική ηρεμία πραγματοποιείται αργά και ομαλά, συγκριτικά με την εφαρμογή για $q = 26.1176$. Και σε αυτήν την περίπτωση, μετά την απομάκρυνση από την πηγή της διαταραχής, η μορφή των κυμάτων σταθεροποιείται· ωστόσο το μέγιστο ύψος τους επιτυγχάνεται στιγμιαία.

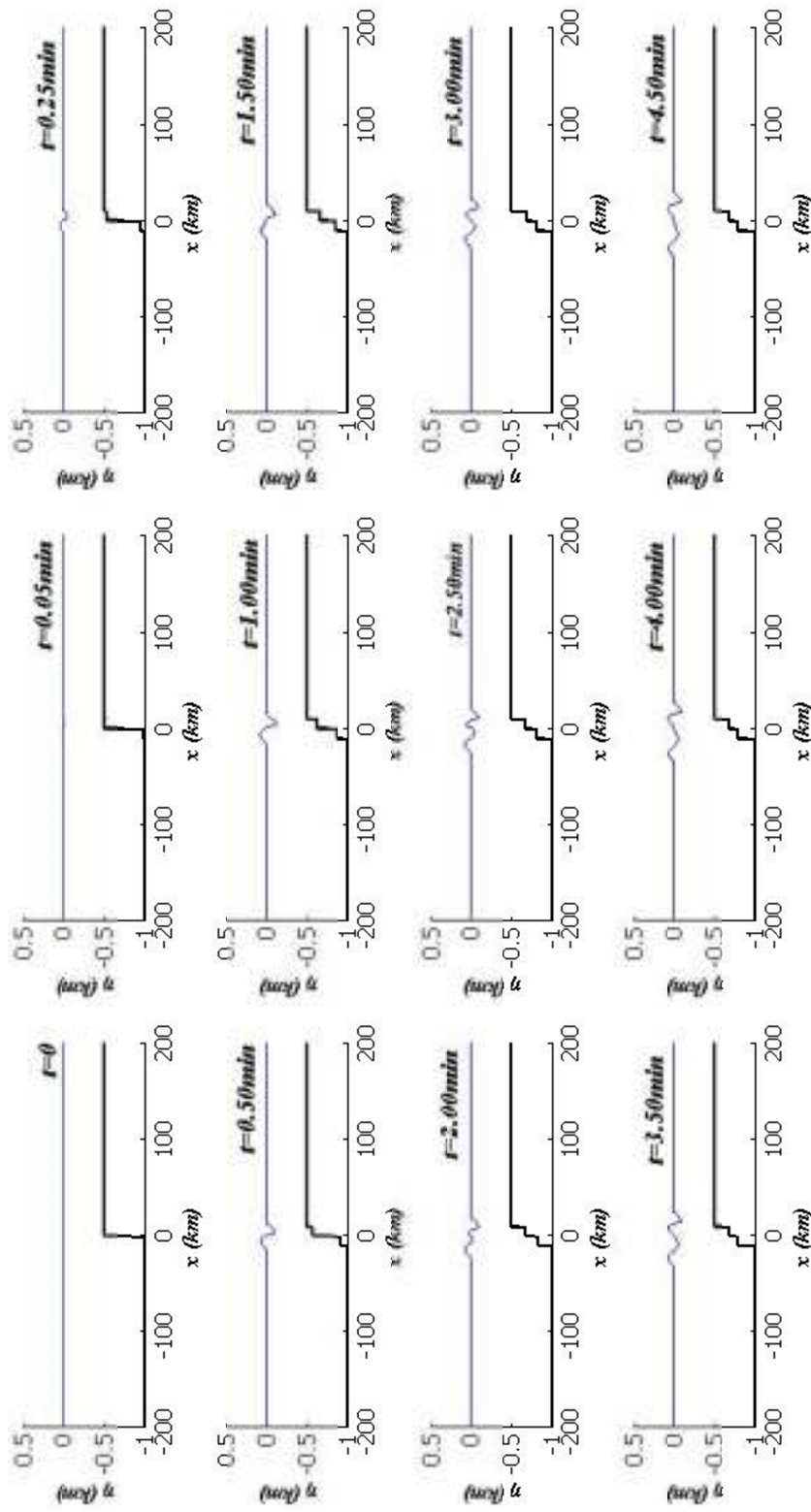


Σχήμα 5.21: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $x=0$ για $q = 1, s = 1000$ (2000 elements)



Σχήμα 5.22: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας για $q = 1, s = 1000$ (2000 elements)

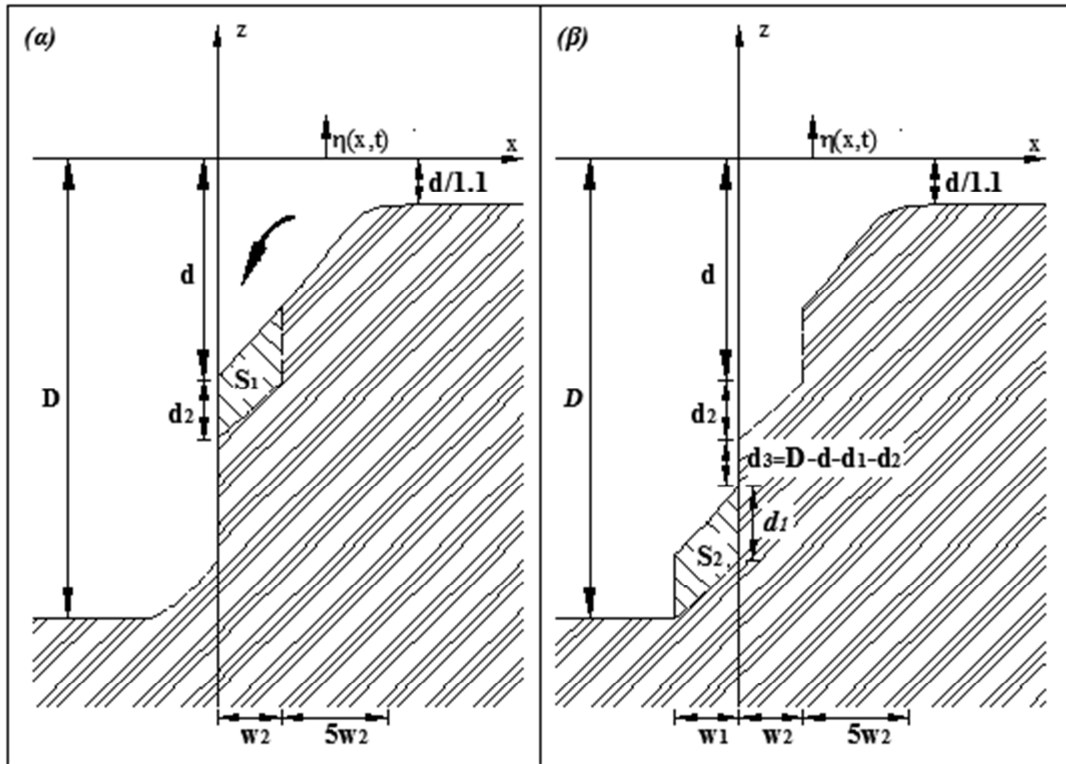
Στη συνέχεια, παρατίθεται το **Σχήμα 5.23**, στο οποίο απεικονίζονται στιγμιότυπα των κυμάτων που δημιουργούνται για την περίπτωση της έρπουσας γεωλίσθησης ($q = 1$) σε τυχαίες, διαδοχικές χρονικές στιγμές.



Σχήμα 5.23: Στιγμιότυπα κυμάτων για $q = 1, s = 1000$.

5.2.3. Μοντέλο προσομοίωσης ολίσθησης πυθμένα σύνθετης διατομής στη μία διάσταση

Στο Σχήμα 5.24(α), (β) απεικονίζονται η αρχική και τελική φάση της κατολίσθησης του τμήματος από τη θέση S_1 στην S_2 , με πιο σύνθετη βαθυμετρία από αυτή του περιγράφεται στο Σχήμα 5.17.



Σχήμα 5.24: Ολίσθηση τμήματος S_1 του θαλάσσιου πυθμένα και μεταφορά στη θέση S_2

Και σε αυτήν την περίπτωση, έγινε η παραδοχή της ισότητας των εμβαδών των δύο τμημάτων, δηλαδή:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow d_1 w_1 = d_2 w_2 .$$

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων παρέμεινε ίδια, με εξαίρεση την αλλαγή της βαθυμετρίας πριν και μετά την κατολίσθηση. Πιο συγκεκριμένα, για να ανταποκρίνεται στη γεωμετρία του Σχήματος 5.24α, η συνάρτηση $F(x)$ ορίστηκε ως εξής:

$$F(x) = D - dH(x) - (d/1.1)H(x - 5w_2), \quad -L \leq x \leq L, \quad (5.2.14).$$

Αντίστοιχα, σύμφωνα με τη γεωμετρία του πυθμένα όπως διαμορφώνεται αμέσως μετά την κατολίσθηση (βλ. Σχήμα 5.17β), προκύπτει η συνάρτηση $G(x)$:

$$G(x) = -d_1 \mathbf{H}(x + w_1) - (d_3 - d) \mathbf{H}(x) - d_2 \mathbf{H}(x - w_2), -L \leq x \leq L, \quad (5.2.15).$$

όπου $\mathbf{H}(x)$: η βηματική συνάρτηση Heaviside.

Για λόγους βελτιστοποίησης, χρησιμοποιήθηκε η εκθετική προσέγγιση της συνάρτησης Heaviside, σύμφωνα με την οποία $\mathbf{H}(x + w) \approx 1 - e^{-e^{s(x+w)}}$, κι έτσι με κατάλληλες αντικαταστάσεις, οι σχέσεις (5.2.14), (5.2.15) διαμορφώνονται ως εξής:

$$F(x) = D - d(1 - e^{-e^{sx}}) - (d/1.1)(1 - e^{-e^{s_1 x}}), -L \leq x \leq L, \quad (5.2.12)$$

$$G(x) = -d_1 \left[1 - e^{-e^{s(x+w_1)}} \right] - (d_3 - d)(1 - e^{-e^{sx}}) - d_2 \left[1 - e^{-e^{s(x-w_2)}} \right], -w_1 \leq x \leq w_2 \quad (5.2.13).$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι τιμές της παραμέτρου s , που υπεισέρχονται στις σχέσεις (5.2.12) και (5.2.13), ορίστηκαν ως εξής: $s = 1000$ και $s_1 = 0.05$.

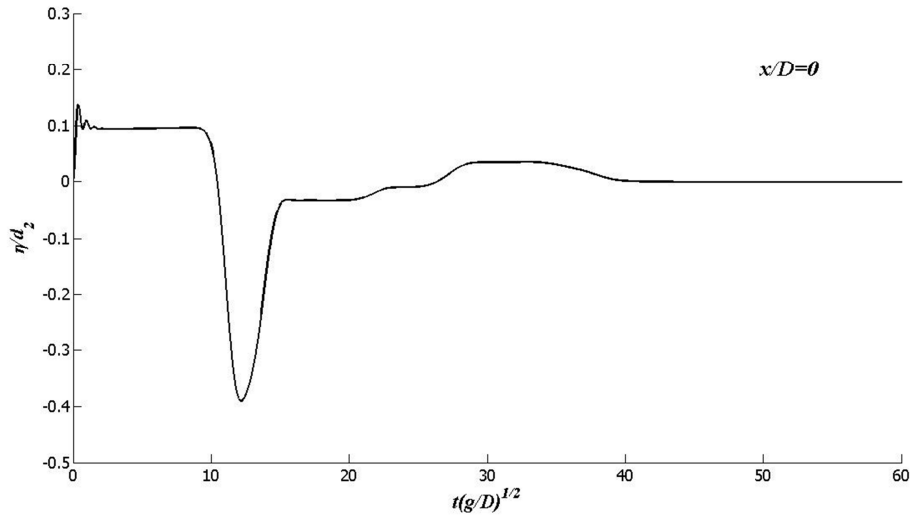
Το σταθερό βάθος του πυθμένα κατόπιν της γεωλίσθησης θεωρήθηκε ίσο με $D = 1km$ και ανάντη $d = 0.5km$. Για το αρχικό τμήμα S_1 και το τελικό S_2 ορίστηκαν οι διαστάσεις: $d_1 = d_2 = 0.2km$ για το ύψος και $w_1 = w_2 = 10km$. Σημειώνεται ότι το συνολικό μήκος του πλέγματος, στο οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο, όπως και ο χρόνος εξέτασής του, επιλέχθηκε έτσι ώστε να αποφεύγεται η ανάκλαση του κύματος στα σύνορα, δηλαδή $L = 250km$.

Η πρώτη εφαρμογή, που αφορά στην τιμή $q = 26.1176$, προσομοιάζει την ακαριαία γεωμετρική μεταβολή του πυθμένα και κατ'επέκταση την αμελητέα διάρκεια της κατολίσθησης. Αντιθέτως, η τιμή $q = 1$, που μελετήθηκε, αφορά σε φαινόμενα μεγαλύτερης διάρκειας, που εξελίσσονται σταδιακά.

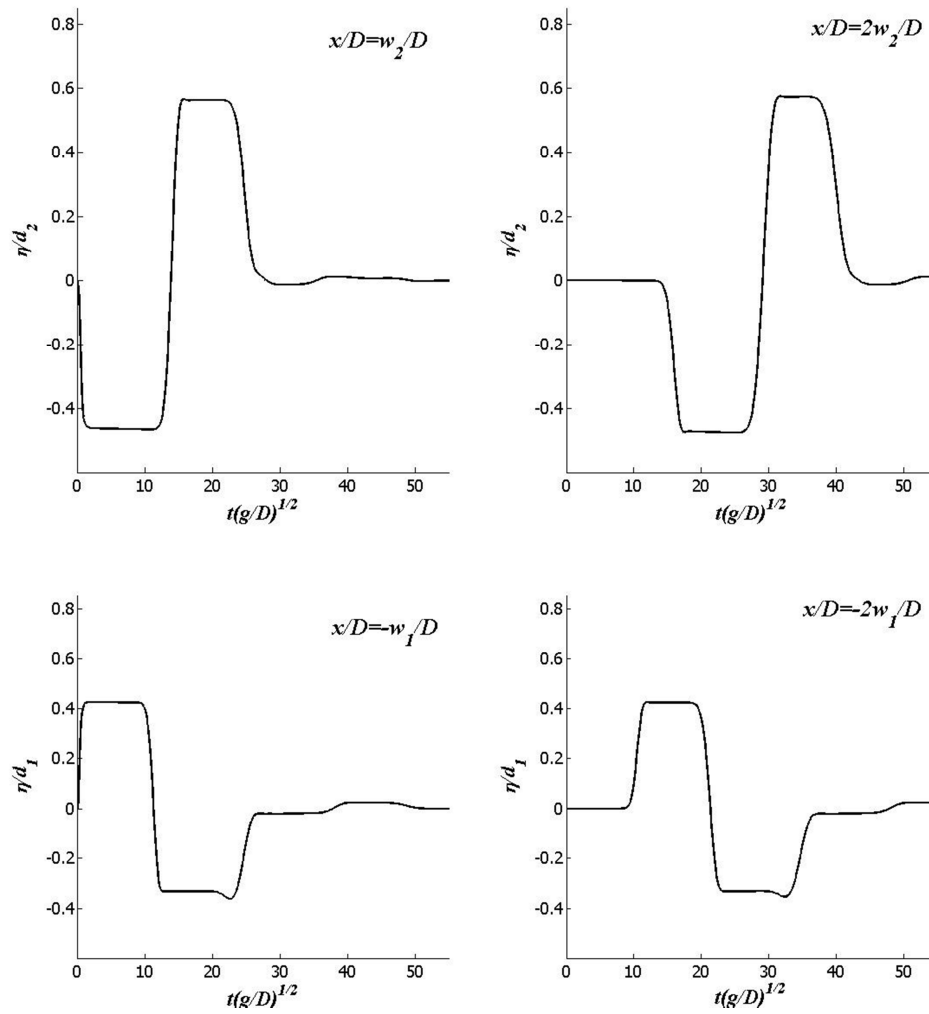
Στη συνέχεια, παρατίθενται οι μεταβολές της ελεύθερης επιφάνειας στις θέσεις ελέγχου: $x = 0$, $x = w_2$, $x = 2w_2$ και $x = -w_1$, $x = -2w_1$.

○ **Εφαρμογή για $q = 26.1176$, $s = 1000$**

Στα **Σχήματα 5.25, 5.26** παρουσιάζεται η μεταβολή της στάθμης της θαλάσσιας επιφάνειας στις θέσεις ελέγχου, ανηγμένη ως προς το ύψος d_2 .



Σχήμα 5.25: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $x=0$, για $q = 26.1176, s = 1000$ (2000 elements)



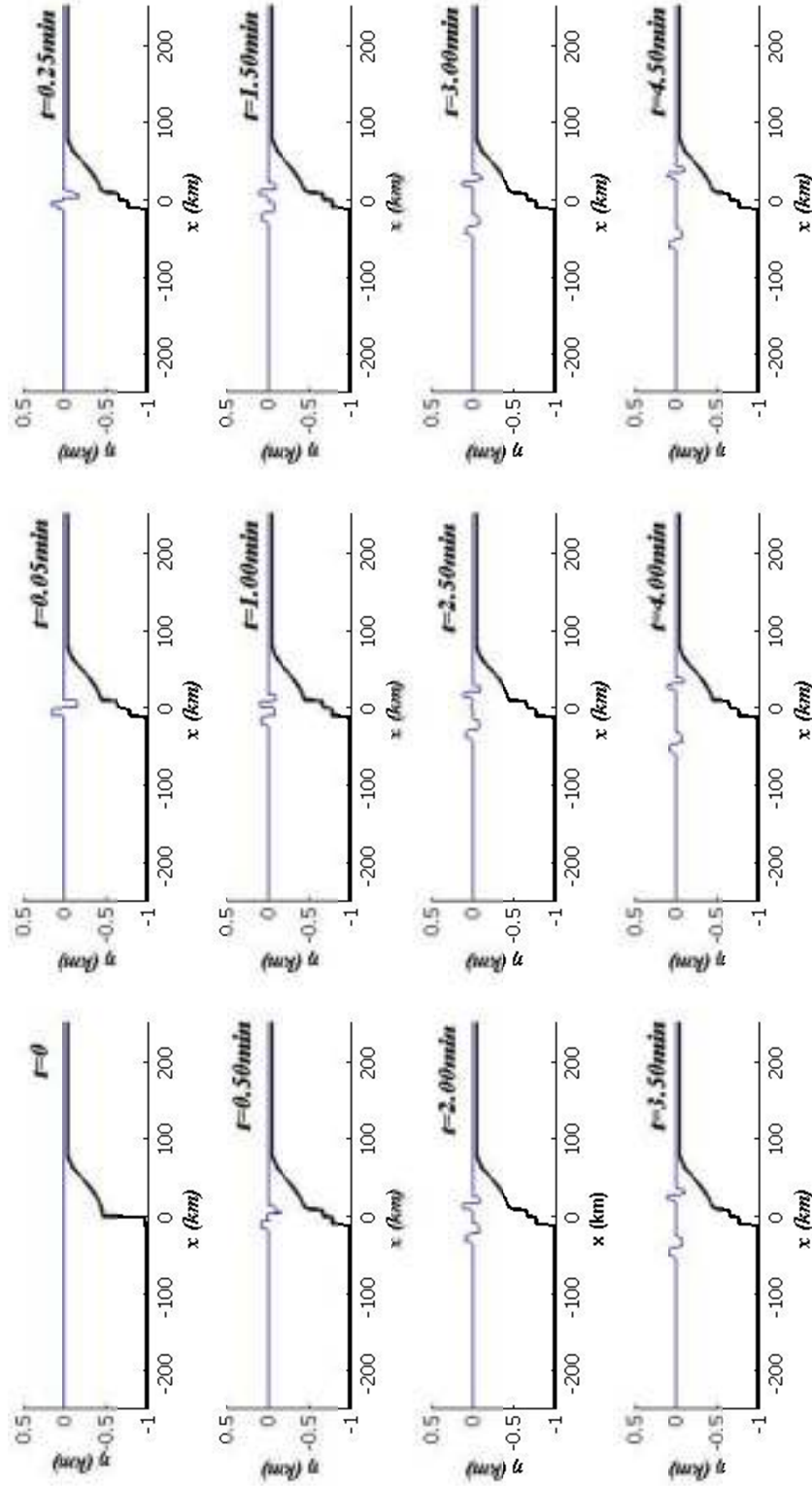
Σχήμα 5.26: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στις θέσεις ελέγχου για $q=26.1176, s=1000$ (2000 elements)

Παρατηρείται στις θέσεις $x = -w_1, x = w_2$, αρχική αύξηση και βύθιση του επιπέδου της στάθμης αντίστοιχα, κατά 50% περίπου του ύψους διαταραχής d_1, d_2 ($d_1 = d_2$). Τα κύματα που δημιουργούνται, κατά τη διάδοσή τους, επιβάλλουν αύξηση του επιπέδου της στάθμης και ανάλογη υποβίβαση υπό τη μορφή N.

Στις θέσεις $x = -2w_1, x = 2w_2$, επιβεβαιώνεται η σταθεροποίηση των παλμών, καθώς η μέγιστη και ελάχιστη απόκριση των κυμάτων φαίνονται να διατηρούνται σταθερές κατά τη διάδοσή τους.

Τα στιγμιότυπα που παρατίθενται στο **Σχήμα 5.27** δείχνουν την εξέλιξη του φαινομένου ανά διαδοχικές, χρονικές στιγμές.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην συγκεκριμένη εφαρμογή, προβλέπεται η αποκάλυψη του πυθμένα με την απενεργοποίηση των βαθμών ελευθερίας $\eta < F - kG$ και θέτουμε $\eta = F - kG$, ώστε η βύθιση της στάθμης του νερού, κατά τη διάδοση των κυμάτων, να μην ξεπερνάει την επιτρεπόμενη λόγω επαφής με το στερεό συνόρο.

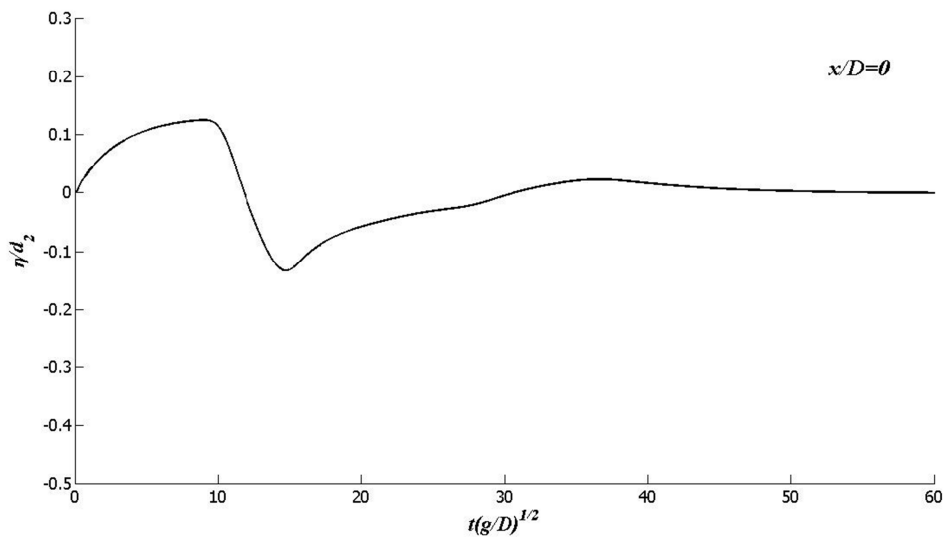


Σχήμα 5.27: Στιγμιότυπα κομήτων για $q = 26.1176, s = 1000$.

ο **Εφαρμογή για $q = 1, s = 1000$**

Για $q = 1$ συμπεραίνεται ότι εξαιτίας του αργού ρυθμού επιβολής της παραμόρφωσης, οι μεταβολές της θαλάσσιας επιφάνειας πραγματοποιούνται ομαλότερα.

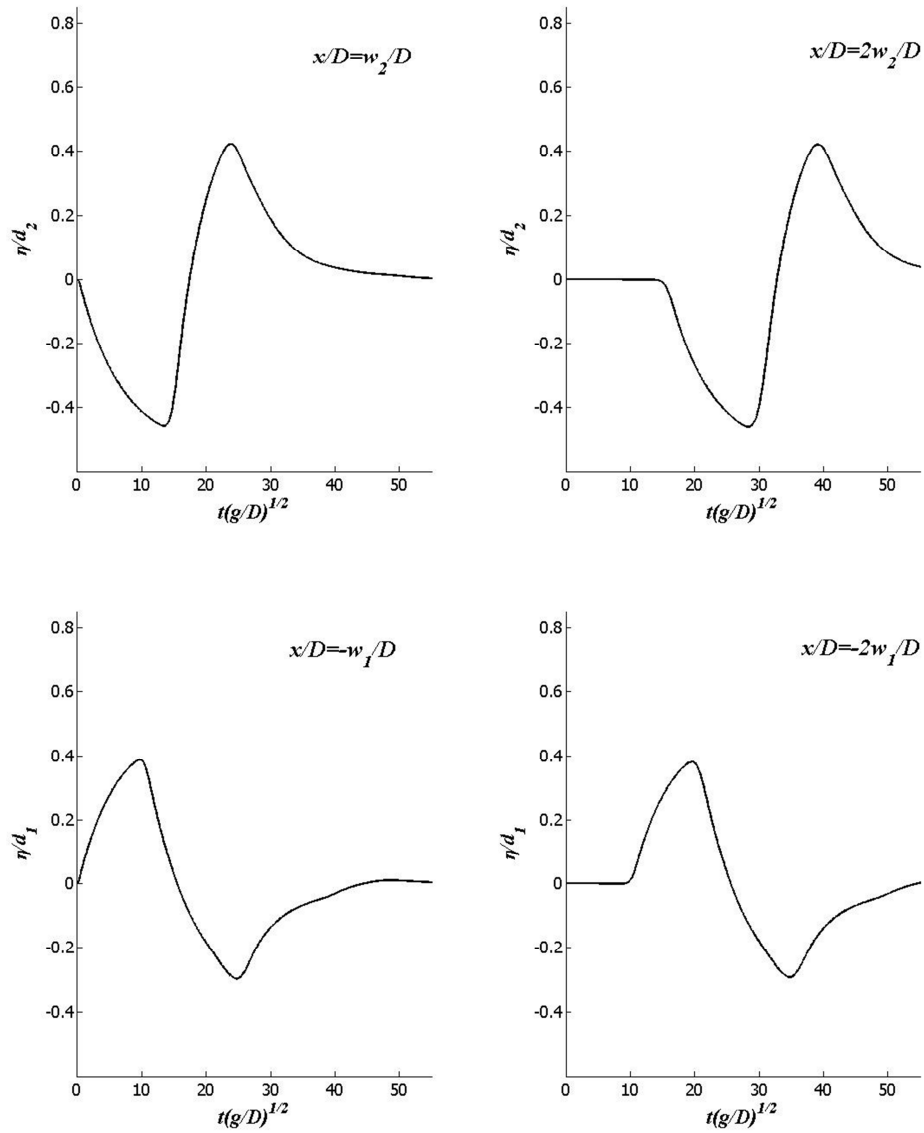
Σε ό,τι αφορά το πλάτος των κυμάτων, μειώνεται αισθητά σε σχέση με την προηγούμενη εφαρμογή για $q = 26.1176$ (**Σχήμα 5.29**).



Σχήμα 5.28: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στη θέση $x=0$ για $q = 1, s = 1000$ (2000 elements)

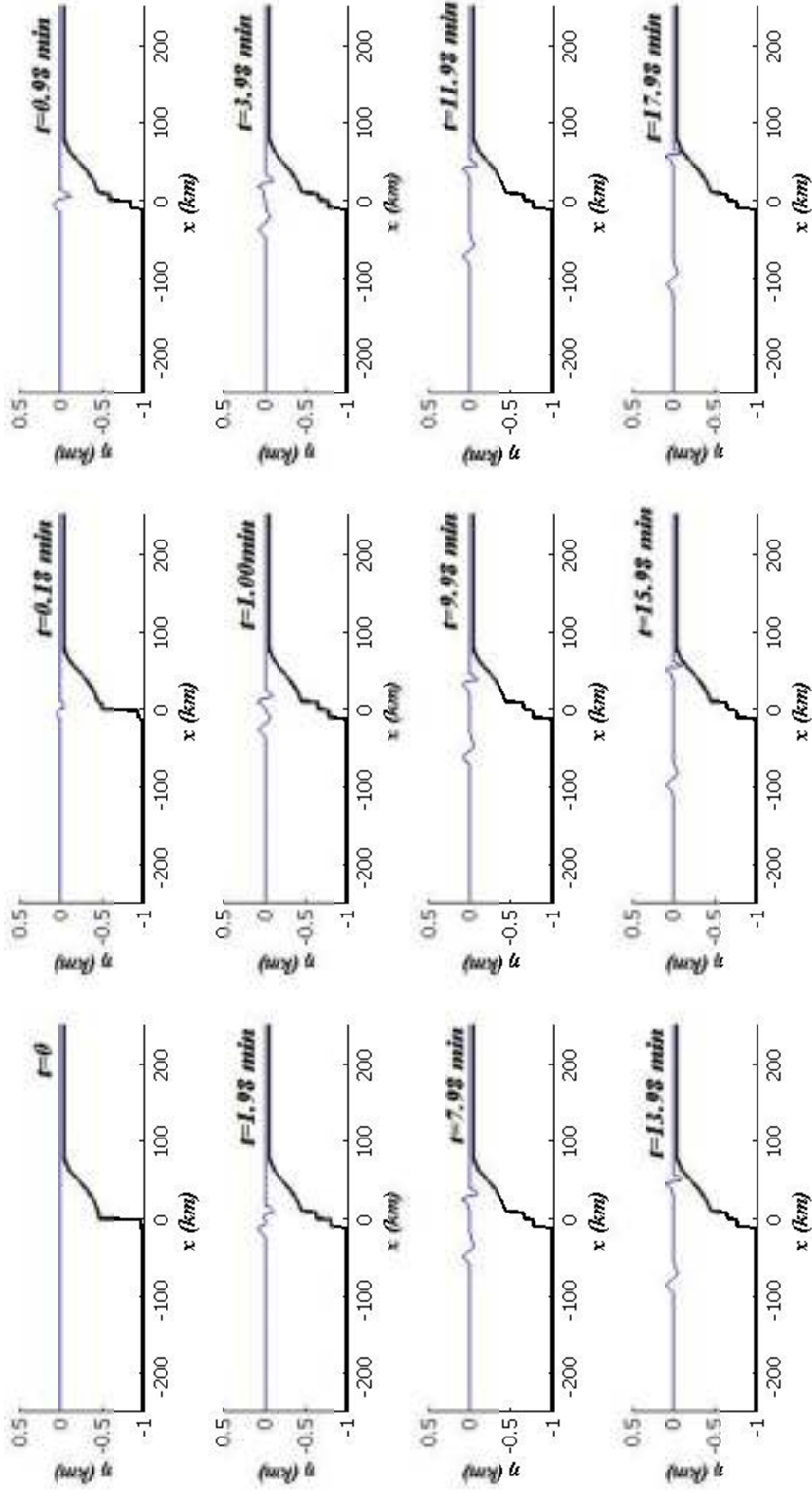
Το πρώτο κύμα, που διαδίδεται προς τα δεξιά, προκαλεί μέγιστη ανύψωση και βύθιση της στάθμης περίπου ίση με $0.5d_2$. Το κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά παρουσιάζει αντίστοιχα, μέγιστη ανύψωση και βύθιση κοντά στο $0.4d_1$.

Γίνεται σαφές ότι η επαναφορά στην αρχική ηρεμία πραγματοποιείται ηπιότερα συγκριτικά με την περίπτωση για $q = 26.1176$. Και σε αυτήν την περίπτωση, μετά την απομάκρυνση από την πηγή της διαταραχής, η μορφή των κυμάτων σταθεροποιείται· ωστόσο το μέγιστο ύψος τους επιτυγχάνεται στιγμιαία.



Σχήμα 5.29: Μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας στις θέσεις ελέγχου για $q=1$, $s=1000$ (2000 elements)

Η εξέλιξη του φαινομένου ως προς το χρόνο συνοψίζεται στο παρακάτω διάγραμμα, Σχήμα 5.30.



Σχήμα 5.30: Στεγμώματα κομμάτων για $q=1$, $s=1000$

5.3. Πτώση αστεροειδούς (Meteor impact generated tsunami)

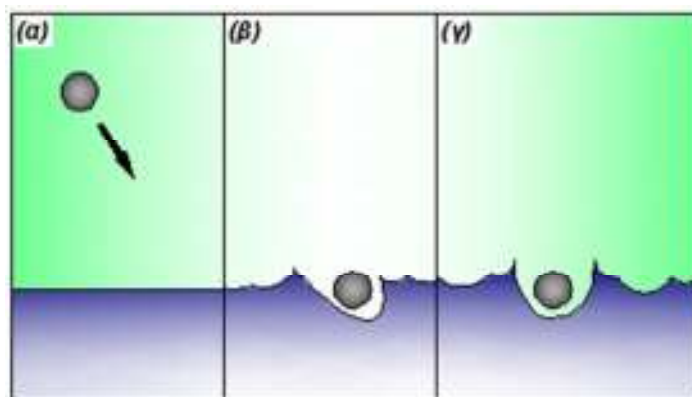
5.3.1. Ενέργεια κυμάτων τσουνάμι

Όπως έχει αναφερθεί, τα συχνότερα αίτια δημιουργίας κυμάτων τσουνάμι είναι οι υποθαλάσσιοι σεισμοί, οι γεωλισθήσεις ή εκρήξεις υποθαλάσσιων ηφαιστείων. Ωστόσο, η ενδεχόμενη πτώση μετεωρίτη σε θαλάσσια περιοχή αποτελεί εξίσου πιθανή γενεσιουργό αιτία. Με την έκρηξη του ηφαιστείου Krakatau στην Ινδονησία το 1883 εκτιμάται ότι απελευθερώθηκε ενέργεια ισοδύναμη 200 μεγατόνων ατομικής βόμβας, δηλαδή περίπου 8.4×10^{17} Joules^[16]. Η ενέργεια που απελευθερώνεται από πτώση αστεροειδούς μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερη. Αστεροειδείς με διάμετρο μεγαλύτερη των 200 m χτυπούν τη γη κάθε 3000-5000 χρόνια^[16]. Εκτίμηση που ανάγεται σε πιθανότητα 2-3% ως προς τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου^[16].

Υπάρχουν πολλά ευρήματα που μαρτυρούν τη πτώση μετεωριτών στη γη. Ανάμεσα τους συγκαταλέγεται και η πτώση αστεροειδούς, πριν από 65 εκατομμύρια χρόνια, διαμέτρου 10 km, στον κόλπο του Μεξικό (Chicxulub) που προκάλεσε ισχυρό τσουνάμι^[16]. Εκτιμάται ότι αστεροειδείς με διάμετρο μικρότερη των 100 μέτρων δεν δύνανται να προσεγγίσουν την επιφάνεια της γης· συνήθως, εκρήγνυνται σε απόσταση μερικών χιλιομέτρων από αυτή^[4]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εναέρια έκρηξη μετεωρίτη, πάνω από την περιοχή Tunguska της Ρωσίας το 1908^[4]. Στο ερευνητικό αυτό πλαίσιο, έχει προβλεφθεί, με πιθανότητα 0.33%, η σύγκρουση του αστεροειδούς 1950 DA με τη γη στις 16 Μαρτίου 2880^[16].

5.3.2. Περιγραφή μηχανισμού γένεσης τσουνάμι – Αναλυτική λύση

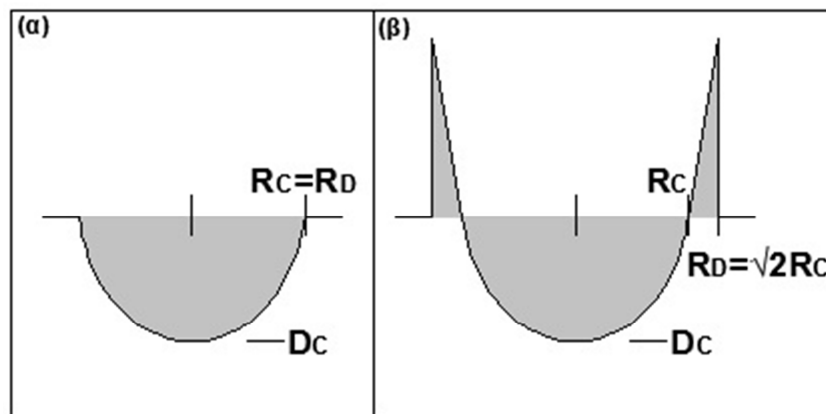
Τα αρχικά στάδια πτώσης μετεωρίτη στη θαλάσσια επιφάνεια φαίνονται στο Σχήμα 5.31.



Σχήμα 5.31: Σκαρίφημα πτώσης μετεωρίτη-Αρχικά στάδια

Σύμφωνα με μελέτες και πειραματικές έρευνες^[17], η εξάτμιση του νερού που συντελείται στη διεπιφάνεια σύγκρουσης δημιουργεί έναν ασύμμετρο αρχικά θαλάσσιο κρατήρα (βλ. Σχήμα 5.31β), που πολύ σύντομα λαμβάνει συμμετρικό σχήμα, τέτοιο ώστε στην ανάλυση να θεωρείται ημισφαιρικό (βλ. Σχήμα 5.31γ).

Αποδεικνύεται πειραματικά^[17] ότι η δημιουργία της σφαιρικής κοιλότητας είναι ανεξάρτητη από τη γωνία πρόσκρουσης του μετεωρίτη με τη θαλάσσια επιφάνεια. Αντιθέτως, εξαρτάται άμεσα από τη διάμετρό του και η αρχική μορφή της διακρίνεται στις δύο περιπτώσεις^[18] που φαίνονται στο **Σχήμα 5.32**.



Σχήμα 5.32: Αρχική διατομή κρατήρα κατά τη θαλάσσια πρόσκρουση: (α) χωρίς υδάτινο φράγμα, (β) με υδάτινο, περιμετρικό φράγμα^[18]

Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 5.32α**, η πρώτη κατηγορία αφορά στην περίπτωση που $R_D = R_C$ και περιγράφει το φαινόμενο κατά το οποίο όλη η ποσότητα του νερού στην περιοχή του κρατήρα εκτινάσσεται ακαθόριστα με αποτέλεσμα να μη συνδράμει στη δημιουργία κύματος τσουνάμι^[18].

Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ότι κατά την πτώση, η ποσότητα νερού εκτινάσσεται συντεταγμένα ώστε να σχηματιστεί περιμετρικά του κρατήρα υδάτινο φράγμα που συμβάλλει ενεργειακά στη δημιουργία τσουνάμι^[18] (βλ. **Σχήμα 5.32β**). Σε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με τους N. Ward και E. Asphaug^[18], η εξωτερική ακτίνα της κοιλότητας λαμβάνεται ίση με $R_D = \sqrt{2}R_C$ αν θεωρηθεί ότι όλο το νερό, το οποίο βρισκόταν στη θέση του κρατήρα, έχει μετατεθεί στο υδάτινο φράγμα.

Οι N. Ward και E. Asphaug^[18] υποστηρίζουν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, τα κύματα με γενεσιουργό αίτιο την πτώση αστεροειδών δεν ανήκουν στην κατηγορία φαινομένων μεγάλου μήκους κύματος. Είναι φανερό ότι η παραπάνω διαπίστωση ισχύει ιδιαίτερα για την αρχική κοιλότητα του σχήματος 5.32β. Συνεπώς, η θεώρηση γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων για την περιγραφή τους είναι ενδεχομένως ανεπαρκής^[18]. Οι εξισώσεις ρηχών υδάτων δεν περιλαμβάνουν όρους

διασποράς, η οποία χαρακτηρίζει έντονα το εν λόγω φαινόμενο^[18]. Οι C. Kharif και E. Pelinovsky σε σειρά άρθρων τους ^[16,19], αν και αναφέρουν τα πιο πάνω, κάνουν εκτεταμένη χρήση των εξισώσεων ρηχών υδάτων για την μοντελοποίηση κυμάτων από πτώση μετεωριτών.

Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι ο έλεγχος της απόκλισης της λύσης των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ρηχών υδάτων από την λύση του πλήρους γραμμικοποιημένου προβλήματος Cauchy – Poisson για υδάτινα κύματα ελεύθερης επιφάνειας, στο πρόβλημα της πτώσης μετεωρίτη. Θα εξεταστεί η περίπτωση σταθερής βαθυμετρίας, για την οποία είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, τόσο για το πλήρες γραμμικοποιημένο πρόβλημα Cauchy – Poisson, όσο και για το αντίστοιχο πρόβλημα που προκύπτει στα πλαίσια της θεωρίας ρηχών υδάτων. Στη συνέχεια, θα ελεγχθεί η επίλυση του ίδιου προβλήματος, όπως αυτό διαμορφώνεται από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Είναι προφανές ότι το πρόβλημα αυτό δύναται να λυθεί και για μεταβαλλόμενη βαθυμετρία με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

A. Αξονοσυμμετρικό Πρόβλημα Cauchy – Poisson για κύματα ελεύθερης επιφάνειας.

Αν θεωρήσουμε νερό πεπερασμένου αλλά σταθερού βάθους, το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα Cauchy – Poisson για υδάτινα κύματα ελεύθερης επιφάνειας είναι^[21] (βλ. Κεφ. 1)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad -D \leq z \leq 0, \quad t > 0, \quad (5.3.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad z = 0, \quad t > 0, \quad (5.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -D, \quad t > 0, \quad (5.3.3)$$

και αρχικές

$$\phi(r, 0, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (5.3.4)$$

$$\eta(r,0,0) = \begin{cases} -D_C (1-r^2/R_C^2), & 0 \leq r \leq R_D \\ 0 & , R_D > r > \infty \end{cases}, \quad (5.3.5)$$

ή ισοδύναμα

$$\eta(r,0,0) = -D_C (1-r^2/R_C^2) \mathbf{H}(R_D - r), \quad (5.3.6)$$

όπου \mathbf{H} η βηματική συνάρτηση Heaviside, D_C το βάθος της αρχικής κοιλότητας (για $t=0$, βλ. Σχήμα 5.3.2).

Η αναλυτική λύση του παραπάνω προβλήματος (5.3.1)-(5.3.6) μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace ως προς την χρονική παράμετρο και μετασχηματισμού Hankel μηδενικής τάξης ως προς την ακτίνα r . Τελικά, η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι^[21]

$$\eta(r,t) = -D_C \left(1 - \left(\frac{R_D}{R_C} \right)^2 \right) I_1(r,t) - 2D_C \left(\frac{R_D}{R_C} \right)^2 I_2(r,t), \quad (5.3.7)$$

όπου

$$I_1(r,t) = \int_0^\infty J_1(s) J_0\left(\frac{r}{R_D} s\right) \cos\left(\frac{1}{R_D} \omega(s) t\right) ds, \quad (5.3.8)$$

$$I_2(r,t) = \int_0^\infty \frac{1}{s} J_2(s) J_0\left(\frac{r}{R_D} s\right) \cos\left(\frac{1}{R_D} \omega(s) t\right) ds, \quad (5.3.9)$$

και $\omega(s) = \sqrt{gs \tanh(Ds)}$, η σχέση διασποράς.

Τα ολοκληρώματα των σχέσεων (5.3.8) και (5.3.9) είναι έντονα ταλαντωτικά (highly oscillatory) και ο αναλυτικός τους υπολογισμός είναι πρακτικά αδύνατος.

Το μέγιστο ύψος τσουνάμι επιτυγχάνεται κοντά στη μέγιστη τιμή του φάσματος, δηλαδή για την τιμή του κυματικού αριθμού

$$s_{\max} = \frac{2\pi}{2.11R_C}, \quad (5.3.10)$$

Το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην περίπτωση αυτή προσεγγίζει τη διάμετρο της αρχικής κοιλότητας, ενώ η μέγιστη ταχύτητα διάδοσης υπολογίζεται ίση με^[18]

$$u(s_{\max}, D) = c(s_{\max}) \left[\frac{1}{2} + s_{\max} D / \sinh(2Ds_{\max}) \right], \quad (5.3.11)$$

Αντίστοιχα, η μέγιστη κυκλική συχνότητα είναι ίση με^[18]

$$\omega_{\max} = \sqrt{g s_{\max} \tanh(D s_{\max})}, \quad (5.3.12)$$

Αποδεικνύεται^[18] ότι μακριά από την πηγή, η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας μειώνεται ως προς την απόσταση με αναλογία $1/\sqrt{r}$

$$\eta(r, t) = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{s}{2\pi^3 r}} \mathcal{H}_o(s, 0) \cos[sr - \omega(s)t - \pi/4] ds, \quad (5.3.13)$$

Τα έντονα φαινόμενα διασποράς που εμφανίζονται κατά την απομάκρυνση του κύματος από την πηγή αλλοιώνουν το ημισφαιρικό σχήμα της αρχικής κοιλότητας και το μέγιστο ύψος του κύματος^[18]. Καθώς το τσουνάμι πλησιάζει στην ακτή, το πρόβλημα γίνεται μη γραμμικό και απαιτεί εφαρμογή μη γραμμικής ανάλυσης, που δεν αποτελεί, ωστόσο, αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Β. Αξονοσυμμετρικό Πρόβλημα Αρχικών Τιμών Γραμμικοποιημένης εξίσωσης ρηγών υδάτων.

Η γραμμικοποιημένη εξίσωση ρηγού ύδατος στις δύο διαστάσεις είναι η ακόλουθη [βλ. Κεφάλαιο 4]

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g h_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (5.3.14)$$

όπου $h_0(x, y, t) = F(x) + k(t)G(x)$.

Θεωρώντας σταθερή βαθυμετρία, δηλαδή $F(x) = D = const$ και $G(x) = 0$, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gD \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + gD \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gD \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \quad (5.3.15)$$

Η εξίσωση (5.3.15) εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες ως εξής

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gD \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right), \quad (5.3.16)$$

Λόγω της αξονικής συμμετρίας του προβλήματος, η συνάρτηση η δεν εξαρτάται από τη γωνία θ . Έχουμε δηλαδή $\eta = \eta(r, t)$ και ο τελευταίος όρος της (5.3.2) μπορεί να παραληφθεί. Είναι επομένως,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gD \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right), \quad (5.3.17)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\eta(r,0) = -D_C \left(1 - r^2/R_C^2\right) \mathbf{H}(R_D - r) \quad , \quad (5.3.18\alpha)$$

και

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(r,0) = 0 \quad , \quad (5.3.18\beta)$$

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Hankel $\mathcal{H}_o(s,t)$, μηδενικής τάξης, για την συνάρτηση $\eta(r,t)$, ως προς r , λαμβάνουμε την εξίσωση (5.3.17) υπό τη μορφή

$$\frac{d^2 \mathcal{H}_o(s,t)}{dt^2} = gD \left[-s^2 \mathcal{H}_o(s,t) \right] \Leftrightarrow \frac{d^2 \mathcal{H}_o(s,t)}{dt^2} + gDs^2 \mathcal{H}_o(s,t) = 0, \quad (5.3.19)$$

Πίνακας 5.3.1. Μετασχηματισμοί Hankel μηδενικής τάξης

$f(x), x \geq 0$	$\mathcal{H}_o(f)(s)$
$f'' + \frac{1}{x} f'$	$-s^2 \mathcal{H}_o(f)(s)$
$\mathbf{H}(a-x), a > 0$	$\frac{a}{s} \mathbf{J}_1(as)$
$x^{2N} \mathbf{H}(a-x), a > 0$	$\sum_{n=0}^N (-1)^n 2^n a^{2N-n+1} \frac{N!}{(N-n)!} \frac{\mathbf{J}_{n+1}(as)}{s^{n+1}}$

Σε ό,τι αφορά στις αρχικές συνθήκες, αυτές μετασχηματίζονται ως εξής (βλ. Πίνακα 5.3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_o(s,0) &= D_C \left\{ \frac{R_D}{s} \mathbf{J}_1(R_D s) - \frac{1}{R_C^2} \left[\sum_{n=0}^1 (-1)^n 2^n R_D^{3-n} \frac{1!}{(1-n)!} \frac{\mathbf{J}_{n+1}(R_D s)}{s^{n+1}} \right] \right\} \Rightarrow \\ \mathcal{H}_o(s,0) &= D_C \left\{ \frac{R_D}{s} \mathbf{J}_1(R_D s) - \frac{1}{R_C^2} \left[R_D^3 \frac{\mathbf{J}_1(R_D s)}{s} - 2R_D^2 \frac{\mathbf{J}_2(R_D s)}{s^2} \right] \right\} \Rightarrow \\ \mathcal{H}_o(s,0) &= D_C \left[R_D \left(1 - \frac{R_D^2}{R_C^2} \right) \frac{\mathbf{J}_1(R_D s)}{s} + 2 \frac{R_D^2}{R_C^2} \frac{\mathbf{J}_2(R_D s)}{s^2} \right], \quad (5.3.20) \end{aligned}$$

και

$$\dot{\mathcal{H}}_o(s, 0) = 0, \quad (5.3.21)$$

όπου J_1, J_2 κυλινδρικές συνάρτησεις *Bessel* πρώτου είδους, πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύουν

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}, \quad (5.3.22)$$

$$J_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}, \quad (5.3.22)$$

Η γενική λύση της (5.3.19) είναι

$$\mathcal{H}_o(s, t) = A(s) \cos(\sqrt{gD}st) + B(s) \sin(\sqrt{gD}st), \quad (5.3.23)$$

και η παράγωγος της (5.3.23) ως προς το χρόνο

$$\dot{\mathcal{H}}_o(s, t) = -A(s) \sqrt{gD}s \sin(\sqrt{gD}st) + B(s) \sqrt{gD}s \cos(\sqrt{gD}st), \quad (5.3.23\alpha)$$

Για τη χρονική στιγμή $t=0$, βάσει της αρχικής συνθήκης (5.3.21), η σχέση (5.3.23α) θα πρέπει να μηδενίζεται, δηλαδή

$$\dot{\mathcal{H}}_o(s, 0) = 0 \Leftrightarrow B(s) = 0,$$

κι επομένως, η ζητούμενη λύση γίνεται

$$\mathcal{H}_o(s, t) = A(s) \cos(\sqrt{gD}st), \quad (5.3.24)$$

Εφαρμόζουμε τη δεύτερη αρχική συνθήκη (5.3.20) στην σχέση (5.3.24) για τον υπολογισμό του συντελεστή $A(s)$, κι έτσι προκύπτει η ισότητα

$$A(s) = \mathcal{H}_o(s, 0), \quad (5.3.25)$$

Τελικά, η μετασχηματισμένη συνάρτηση έχει προσδιοριστεί πλήρως ως εξής

$$\mathcal{H}_o(s, t) = \mathcal{H}_o(s, 0) \cos(\sqrt{gD}st), \quad (5.3.26)$$

Εφαρμόζοντας στην (5.3.26) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Hankel, λαμβάνουμε την αναλυτική λύση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας

$$\eta(r, t) = -D_C \left[1 - \left(\frac{R_D}{R_C} \right)^2 \right] I_3(r, t) - 2D_C \left(\frac{R_D}{R_C} \right)^2 I_4(r, t), \quad (5.3.27)$$

όπου

$$I_3(r,t) = \int_0^\infty J_1(s)J_0\left(\frac{r}{R_D}s\right)\cos(\sqrt{gDt}s)ds, \quad (5.3.28)$$

$$I_4(r,t) = \int_0^\infty \frac{1}{s}J_2(s)J_0\left(\frac{r}{R_D}s\right)\cos(\sqrt{gDt}s)ds, \quad (5.3.29)$$

Για τα ολοκληρώματα I_3 και I_4 ισχύουν όσα αναφέρθηκαν και για τα I_1, I_2 . Στην συνέχεια του κεφαλαίου, τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται αριθμητικά, για την τιμή του λόγου $r/R_D = 0$ και σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, με χρήση του υπολογιστικού πακέτου MATHEMATICA. Ενδεικτικές τιμές των ολοκληρωμάτων αυτών δίνονται στον **Πίνακα 5.3.2**.

Πίνακας 5.3.2. Τιμές των ολοκληρωμάτων I_3, I_4 για $r/R_D = 0$

\sqrt{gDt}	I_3	I_4
0	1.00000	0.500000
0.10	1.00000	0.490000
0.50	1.00000	0.250000
0.75	1.00000	-0.062500
1.25	-0.666667	-0.125000
1.50	-0.341641	-0.072949
1.75	-0.218544	-0.049238
2.00	-0.154700	-0.035890
2.25	-0.116313	-0.027480
2.50	-0.091086	-0.021780
2.75	-0.073490	-0.017721
3.00	-0.060660	-0.016259

Ο **Πίνακας 5.3.3** παρουσιάζει τα αποτελέσματα της αναλυτικής μεθόδου που παρουσιάζεται σε άρθρο των S. Ward και E. Asphaug^[18] ως προς την εξάρτηση της διαμέτρου d_c ($d_c = 2R_c$) και του βάθους της κοιλότητας D_c από την ακτίνα του προσπίπτοντος αντικειμένου, R_I .

Πίνακας 5.3.2. Διάμετρος και βάθος κρατήρα (σε m) και ενέργεια τσουνάμι, ανάλογα με την ακτίνα του μετεωρίτη, για $R_p = \sqrt{2}R_c$ (κατά τους S. Ward και E. Asphaug^[18]).

R_I (m)	Διάμετρος κοιλότητας d_c	Βάθος κοιλότητας, D_c	d_c/D_c	Ενέργεια τσουνάμι, E_T (GTon)
25	1967	785	2.51	0.00145
50	3378	1291	2.62	0.01160
100	5800	2126	2.73	0.09290
125	6903	2497	2.76	0.11700
150	7958	2847	2.80	0.31300
200	9960	3502	2.84	0.74300
250	11853	4113	2.88	1.45000
300	13665	4690	2.91	2.51000
400	17103	5769	2.96	5.94000
500	20354	6774	3.00	11.60000

Συμπερασματικά, η διαφορά με τα τσουνάμι ενδογενούς αιτίου (σεισμική διέγερση, γεωλίσθηση) έγκειται στην κατεύθυνση της διαταραχής. Ο σεισμός διαθέτει έντονα κατευθυντικά χαρακτηριστικά, γι'αυτό άλλωστε μπορεί να έχει καταστροφικές συνέπειες σε περιοχές που βρίσκονται μακριά από το επίκεντρο του^[17]. Σε ό,τι αφορά την υποθαλάσσια γεωλίσθηση, ο διπολικός της χαρακτήρας ορίζει την κύρια κατεύθυνση της διαταραχής^[17,20]. Αντίθετα, τα τσουνάμι που οφείλονται σε εξωγενείς παράγοντες (π.χ. μετεωρίτης) δεν είναι κατευθυντικά, διαδίδονται αξονοσυμμετρικά κι έτσι εξασθενούν γεωμετρικά με την απόσταση από την πηγή^[17].

Έτσι, τα περισσότερα κύματα τσουνάμι που δημιουργούνται από πτώση αστεροειδούς δεν ανήκουν στην κατηγορία κυμάτων μεγάλου μήκους. Το μήκος κύματος τους είναι μικρότερο από αυτό των ενδογενών διαταραχών^[17]. Άλλωστε, σημαντικό μέρος της ενέργειας τους καταναλώνεται σε εξάτμιση του νερού, δημιουργία εναέριων ρευμάτων και τύρβης^[17]. Κατ'επέκταση, η διάδοσή τους σε μεγάλες αποστάσεις είναι εξαιρετικά αβέβαιη. Τα κύματα αυτά πλησιάζοντας παράκτιες περιοχές μοιάζουν περισσότερο με κύματα τυφώνων παρά κλασσικά τσουνάμι^[17].

5.3.3. Περιγραφή μοντέλου προσομοίωσης πτώση μετεωρίτη σε θαλάσσια επιφάνεια - Αποτελέσματα

Για τη μελέτη του φαινομένου της πτώσης μετεωρίτη στη θαλάσσια επιφάνεια και κατ'επέκταση τη δημιουργία κύματος τσουνάμι με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, δημιουργήθηκε ένα διδιάστατο μοντέλο προσομοίωσης σύμφωνα με το οποίο η βαθυμετρία του πυθμένα θεωρήθηκε σταθερή καθόλη τη διάρκεια εξέλιξής του. Έτσι, η γενική συνάρτηση περιγραφής της γεωμετρίας του πυθμένα διαμορφώθηκε ως εξής

$$h_0(x, y, t) = F(x, y) + k(t)G(x, y), \quad -H \leq x \leq H, -L \leq y \leq L$$

όπου $F(x, y) = D$ και εφόσον το αίτιο της διαταραχής είναι εξωγενές $G(x, y) = 0$, με αποτέλεσμα

$$h_0(x, y, t) = D, \quad -H \leq x \leq H, -L \leq y \leq L, \quad (5.3.30).$$

Η επιβολή της διαταραχής έγινε μέσω της αρχικής συνθήκης:

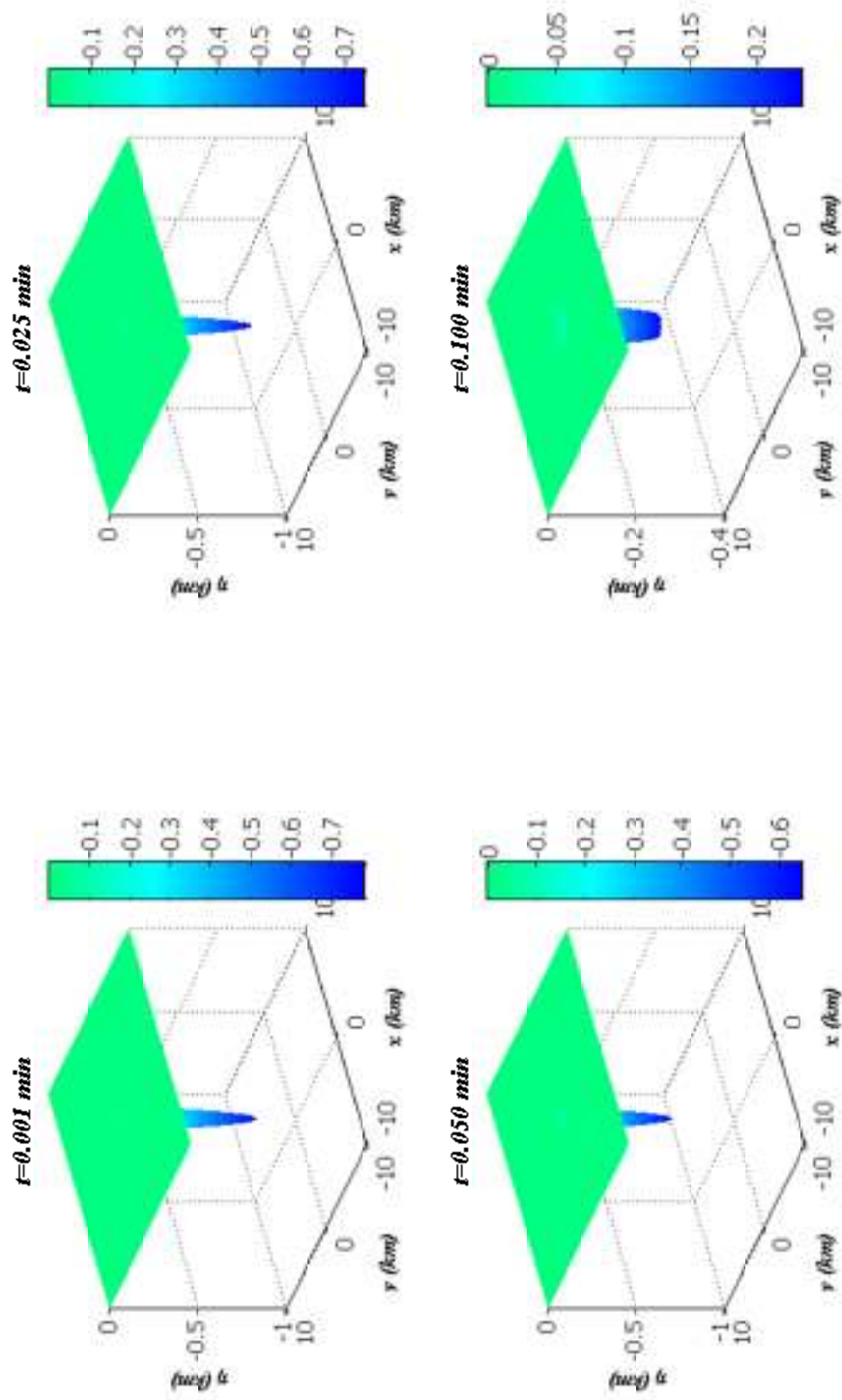
$$\eta(r, 0) = -D_c \left[1 - \left(\frac{r}{R_c} \right)^2 \right] H(R_D - r), \quad r > 0, \quad (5.3.31)$$

όπου H η βηματική συνάρτηση Heaviside, r η ακτινική απόσταση από το σημείο πρόσκρουσης, D_c το βάθος της κοιλότητας, R_D η εξωτερική ακτίνα και R_c η εσωτερική ακτίνα της αρχικής κοιλότητας.

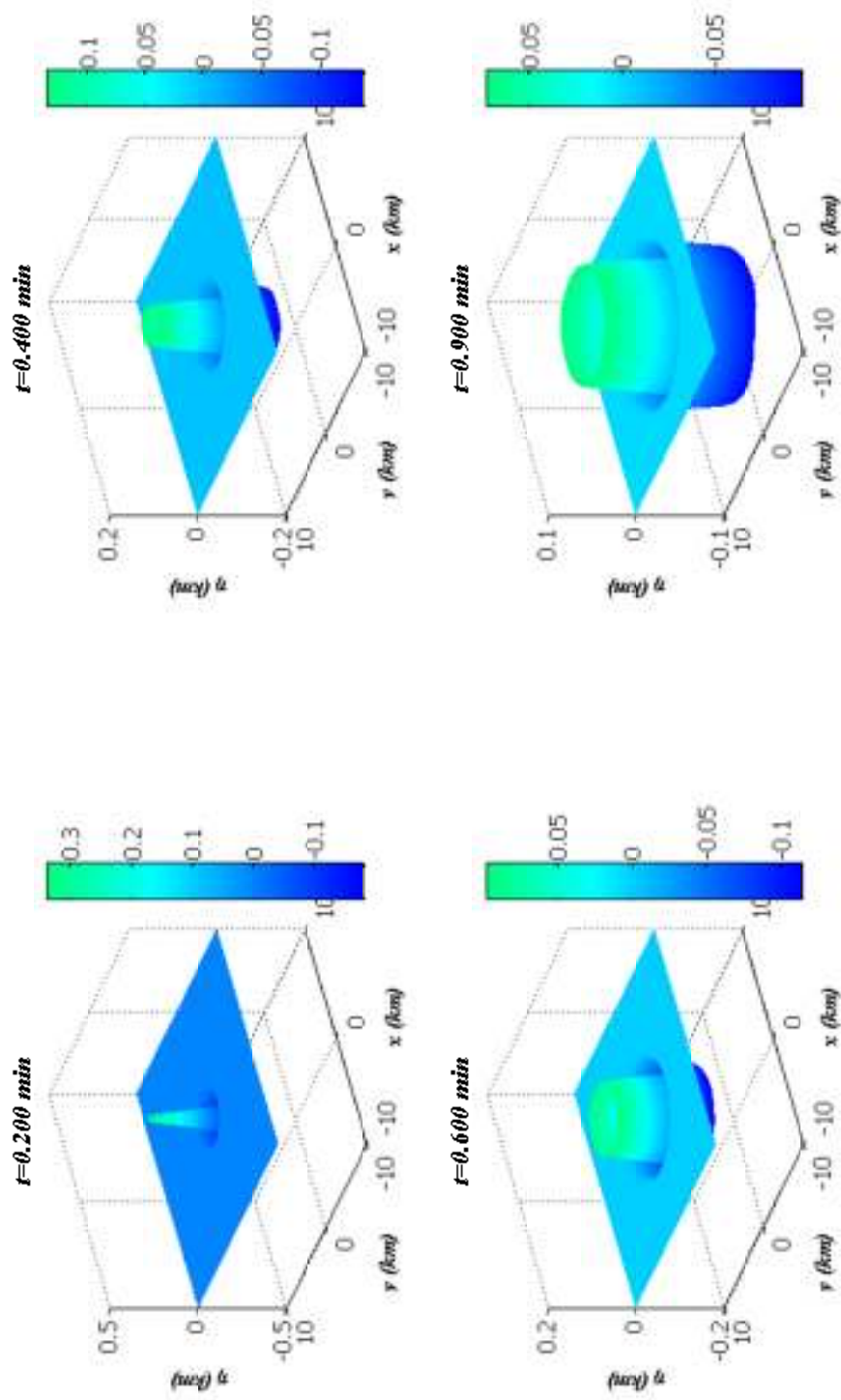
Για λόγους πληρότητας, μελετήθηκαν και οι δύο περιπτώσεις εκτίναξης του νερού, που περιγράφηκαν παραπάνω (βλ. Σχήμα 5.32). Για την επίλυση του προβλήματος είναι απαραίτητο να οριστούν οι παραπάνω βασικές παράμετροι. Έτσι, το βάθος του πυθμένα θεωρήθηκε ίσο με $D = 1km$, το βάθος της αρχικής κοιλότητας λήφθηκε ίσο με $D_c = 0.785km$, ενώ σε ό,τι αφορά τις αρχικές ακτίνες ίσχυσαν οι ισότητες $R_c = 1km$ και $R_D = \sqrt{2}R_c \approx 1.414km$.

ο Εφαρμογή 1^η:

Το παράδειγμα αυτό αφορά στην περίπτωση που το εκτινασσόμενο νερό απομακρύνεται από το σημείο πρόσκρουσης ακαθόριστα χωρίς να συμβάλλει στο κυματικό φαινόμενο ($R_c = R_D$). Στη συνέχεια, παρατίθενται χαρακτηριστικά στιγμιότυπα του φαινομένου κατά τη διάρκεια εξέλιξής του, που προέκυψαν από την επίλυση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (βλ. Σχήμα 5.33, 5.34).

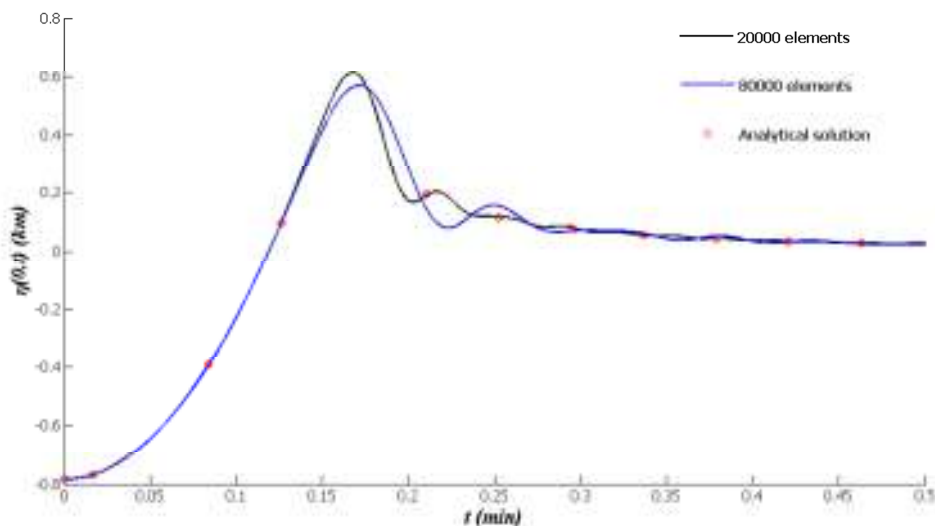


Σχήμα 5.33: Στιγμιότυπα του κόμβου για την περίπτωση $R_D = R_C$



Σχήμα 5.34: Στιγμιότυπα του κόμβου για την περίπτωση $R_D = R_C$

Για την καλύτερη εκτίμηση της λύσης, τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων συγκρίθηκαν με την αναλυτική λύση στη θέση $r=0$ (βλ. Σχήμα 5.35).

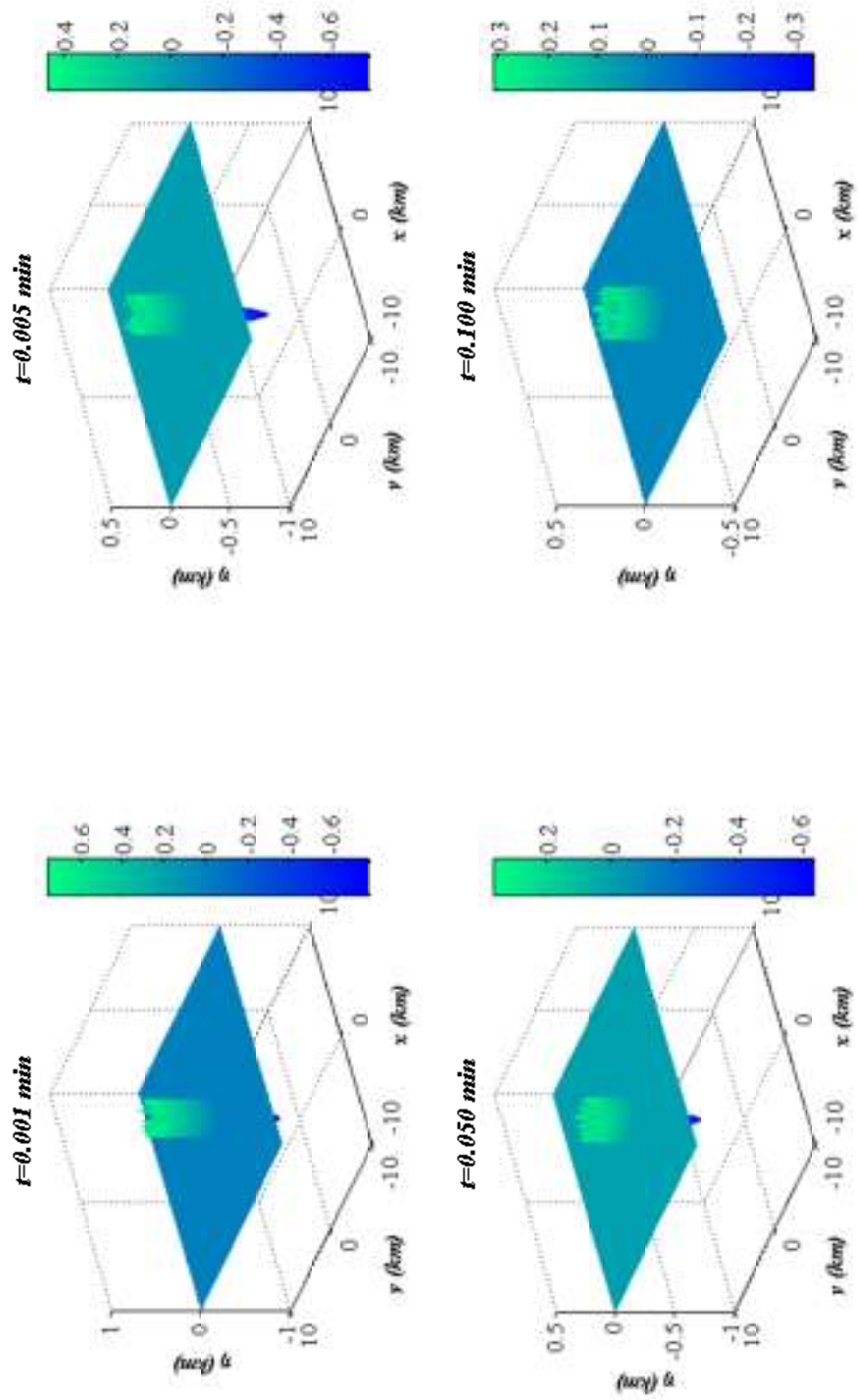


Σχήμα 5.35: Σύγκριση αναλυτικής λύσης με τη λύση μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στη θέση $r=0$

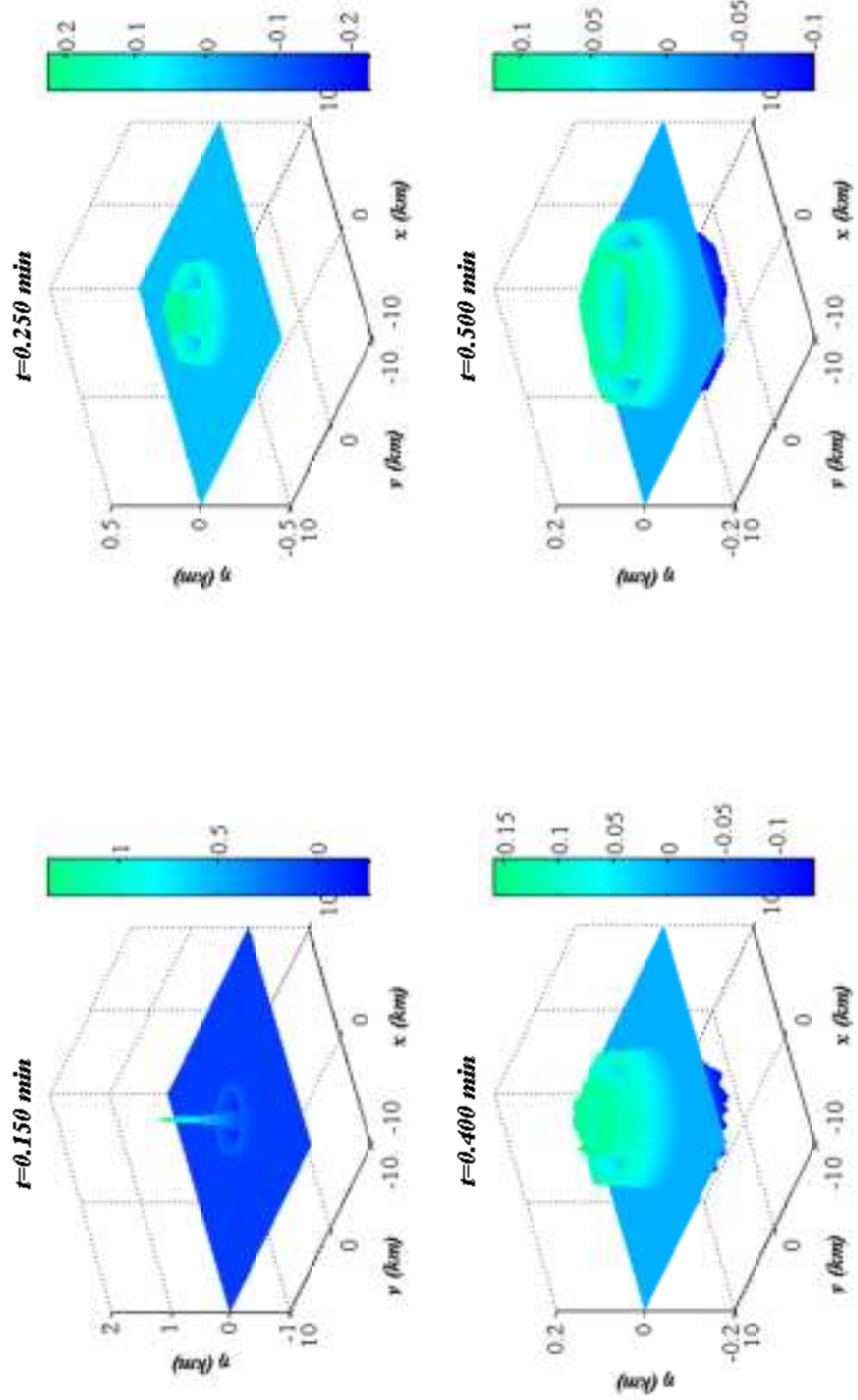
Παρατηρείται ότι με την πύκνωση του πλέγματος επιτυγχάνεται η ταύτιση της λύσης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων με την αναλυτική λύση σε όλες τις χρονικές στιγμές, επιβεβαιώνοντας την ακρίβεια της.

ο Εφαρμογή 2^η:

Η εφαρμογή αυτή περιγράφει την περίπτωση που όλη η ποσότητα του νερού που βρίσκεται στη θέση του κρατήρα, μετατίθεται έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα υδάτινο φράγμα ($R_D = \sqrt{2}R_C$). Τα χαρακτηριστικά στιγμιότυπα που προέκυψαν από την επίλυση με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων φαίνονται στα **Σχήματα 5.36** και **5.37**.

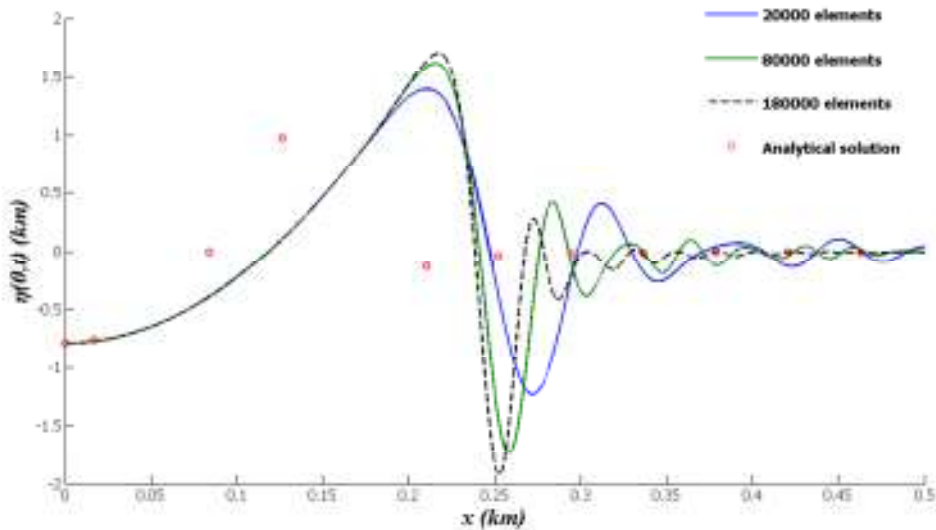


Σχήμα 5.36: Στιγμιότυπα του κόμβου για την περίπτωση $R_b = \sqrt{2}R_c$



Σχήμα 5.37: Στιγμιότυπα του κόμβου για την περίπτωση $R_b = \sqrt{2}R_c$

Και σε αυτήν την εφαρμογή, τα αποτελέσματα από την προσομοίωση τέθηκαν σε σύγκριση με τη μεταβολή της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτουν από την αναλυτική λύση στη θέση $r = 0$ και παρουσιάζονται στο **Σχήμα 5.38**.



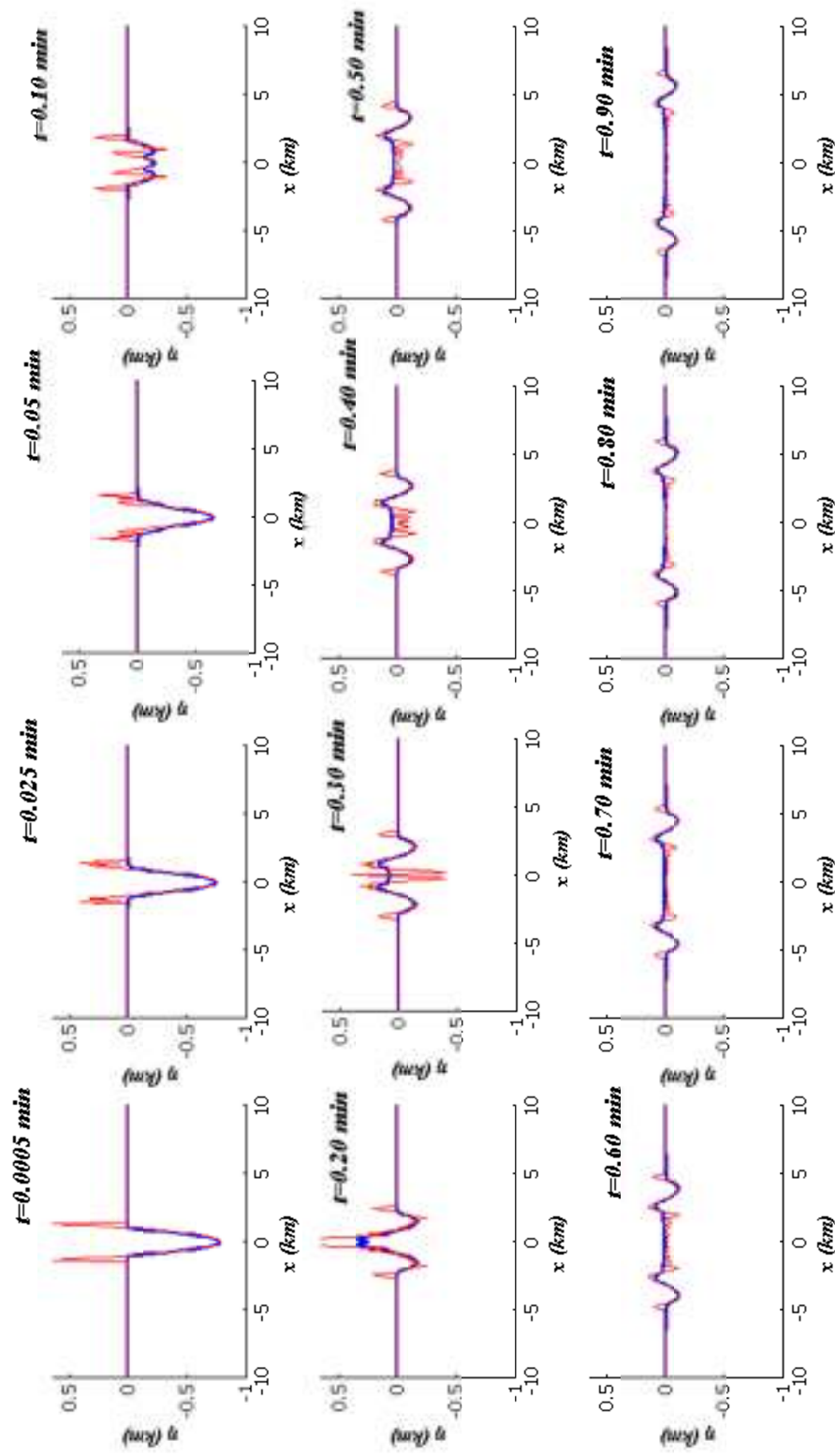
Σχήμα 5.38: Σύγκριση αναλυτικής λύσης με τη λύση μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στη θέση $r=0$

Από τη σύγκριση προκύπτει ότι υπάρχει απόκλιση των δύο μεθόδων η οποία όμως με την πύκνωση του πλέγματος αποκαθίσταται πλήρως στις μεταγενέστερες χρονικές στιγμές. Σε ό,τι αφορά τις αρχικές χρονικές στιγμές, η απόκλιση που παρατηρείται μεταξύ της αναλυτικής λύσης και της υπολογιστικής οφείλεται στην ασυνέχεια που εμπεριέχεται στην αρχική συνθήκη της συγκεκριμένης εφαρμογής. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση που $R_D = R_C$ οι αρχικές συνθήκες $\eta_o(x, y) \in H^1(\Omega)$ και $v_o(x, y) \in L^2(\Omega)$ εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης (βλ. **Θεώρημα 2, Κεφ.3**) για την οποία ισχύει

$$\eta \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap H^2([0, T]; H^1(\Omega)^*)$$

Στην δεύτερη περίπτωση, όπου $R_D = \sqrt{2}R_C$, για την αρχική συνθήκη η_o , λόγω της ασυνέχειάς της γύρω από τη θέση $r = R_D$, ισχύει $\eta_o(x, y) \in L^2(\Omega)$ κι επομένως δεν πληροί τις απαιτούμενες προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2. Έτσι, δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης, αλλά ούτε και η ομαλότητα που καθορίζει ο πιο πάνω χώρος συναρτήσεων.

Για λόγους σύγκρισης, στο **Σχήμα 5.39** παρουσιάζονται ενδεικτικά στιγμιότυπα του κύματος κατά μήκος του άξονα x σε διάφορες χρονικές στιγμές για κάθε μια εφαρμογή.



Σχήμα 5.39: Στιγμιότυπα κωμάτων για τις περιπτώσεις $R_b = R_c$ (μπλε γραμμή) και $R_b = \sqrt{2}R_c$ (κόκκινη γραμμή)

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μελετήθηκε το φαινόμενο της γένεσης κυμάτων τσουνάμι και της διάδοσής τους σε βαθειά νερά. Όπως είδαμε, πρόκειται για ένα πρόβλημα διάδοσης επιφανειακών κυμάτων μεγάλου μήκους, που στο σύνολό του εμπεριέχει, εκτός των άλλων, φαινόμενα διασποράς και μη γραμμικότητας.

Στην προσπάθεια προσομοίωσης του φαινομένου και επίλυσής του με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, το μεγάλο μήκος κύματος των τσουνάμι, συγκρινόμενο με τυπικές ωκεάνιες βαθυμετρίες (μέγιστο ωκεάνιο βάθος περίπου 11km), κατέστησε τις εξισώσεις ρηχών υδάτων κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή της δημιουργίας και της διάδοσης των κυμάτων αυτών. Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις των ρηχών υδάτων (linearized shallow water theory), που επιλύθηκαν υπολογιστικά, κρίθηκαν εκ του αποτελέσματος επαρκείς στο να περιγράψουν επακριβώς το φαινόμενο της γένεσης και διάδοσης των κυμάτων τσουνάμι όσο ικανοποιείται η συνθήκη του μεγάλου μήκους κύματος και του, σχετικά με το βάθος, μικρού πλάτους.

Επιπλέον, η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος, για τους δύο κύριους μηχανισμούς γένεσης κυμάτων τσουνάμι (dislocation generated tsunami, landslide generated tsunami) απέδωσε με μεγάλη ακρίβεια το φαινόμενο και αποδείχτηκε εξαιρετικά ισχυρή μέθοδος. Ενδείκνυται, ωστόσο, σε περιοχές διάδοσης όπου το βάθος της θάλασσας μικραίνει, όπως στις παράκτιες περιοχές, να ληφθούν υπόψη φαινόμενα διασποράς και μη γραμμικότητας για την πιο αξιόπιστη περιγραφή του φαινομένου.

Εντέλει, μελετήθηκε και η δημιουργία τσουνάμι εξωγενούς αιτίου, δηλαδή από την πτώση μετεωρίτη στη θαλάσσια επιφάνεια σταθερής βαθυμετρίας. Το πρόβλημα μελετήθηκε για τους δύο τρόπους εκτίναξης του νερού. Μέσα από τη σύγκριση της αναλυτικής επίλυσης του προβλήματος αυτού, όπως αυτό διαμορφώνεται από τις εξισώσεις ρηχών υδάτων, με τη λύση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων διαπιστώθηκαν μικρές αποκλίσεις. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα περισσότερα κύματα τσουνάμι που δημιουργούνται από πτώση αστεροειδούς δεν ανήκουν στην κατηγορία κυμάτων μεγάλου μήκους. Συνεπώς, η θεώρηση γραμμικών εξισώσεων ρηχών υδάτων για την περιγραφή τους είναι ενδεχομένως ανεπαρκής, καθώς οι εξισώσεις ρηχών υδάτων δεν περιλαμβάνουν όρους διασποράς, η οποία χαρακτηρίζει έντονα το εν λόγω φαινόμενο.

Κεφάλαιο 7

Βιβλιογραφία

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J. J. Stoker, *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, Interscience Publishers, Inc., 1957
2. H. Zhang, Y. Shi, D. A. Yuen, Z. Yan, X. Yuan and C. Zhang, Modeling and Visualization of Tsunamis, *Pure and Applied Geophysics*, 165:475-496, 2008
3. S. Tinti and E. Bertolucci, Energy of Water Waves Induced by Submarine Landslides, *Pure and Applied Geophysics*, 157: 281-318, 2000
4. M. P. Paine, Asteroid Impacts: The Extra Hazard due to Tsunami, *Science of Tsunami Hazards*, 17:155, No. 3, 1999
5. S. N. Ward and S. Day, Cumbre Vieja Volcano – Potential Collapse and Tsunami at La Palma, Canary Islands, *American Geophysical Union*, 2001
6. H. Kardenstuncer (Editor in Chief), *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, 1987
7. M. Kawahara, H. Hirano, K. Tsubota and K. Inagaki, Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow', *Int. J. Numerical Methods of Fluids*, 2:89-112, 1982
8. M. Kawahara and S. Nakazawa, 'Finite Element Formulation for Convection or Buoyancy Dominated Flows in Rivers, Bays and Estuaries', *Finite Elements in Water Resources*, 5:103-112, 1980
9. J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes* (3 volumes), Dunod, 1968
10. V. Thomée, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Springer, 1997.
11. T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1987
12. E. A. Okal and C. Synolakis, A Theoretical Comparison of Tsunamis from Dislocations and Landslides, *Pure and Applied Geophysics*, 160:2177-2188, 2003
13. J. L. Hammack, A Note on Tsunamis: Their generation and propagation in an ocean of uniform depth, *Fluid Mechanics*, 60:769-799, 1973
14. B. B. Zhao, W. Y. Duan and W. C. Webster, *Tsunami Simulation with Green-Naghdi Theory*, Elsevier, 2010
15. I. Didenkulova, I. Nikolkina, E. Pelinovsky and N. Zahibo, Tsunami Waves Generated by Submarine Landslides of Variable Volume: Analytical Solutions for a Basin of Variable Depth, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 10:2407-2419, 2010
16. C. Kharif and E. Pelinovsky, Asteroid Impact Tsunamis, *C.R. Physique*, 6:361-366, 2005
17. G. R. Gislér, *Tsunamis from Asteroid Impacts in Deep Water*, *Physics of Geological Processes*, University of Oslo
18. S. N. Ward and E. Asphaug, Asteroid Impact Tsunami: A Probabilistic Hazard Assessment, *Icarus*, 1999

19. R. D. Schuiling, R. B. Cathcart, V. Badescu, D. Isvoranu and E. Pelinovsky, Asteroid Impact in the Black Sea. Death by drowning or asphyxiation?, *Nat Hazards*, 40:327-338, 2007
20. G. Gislér, R. Weaver and M. Gittings, Calculations of Asteroid Impacts into Deep And Swallow Water, *Pure and Applied Geophysics*, 168:1187-1198, 2011
21. L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhauser, 2005
22. C. Grossman, Hans-Gorg Roos and Martin Stynes, *Numerical treatment of partial differential equations*, Springer, 2007

