



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ**

## **ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Σπυρίδων Δανιήλ**

**Υπολογιστική Μελέτη Φαινομένων Σπηλαιώσης σε  
Εγχυτήρες Diesel**

**Εξεταστική επιτροπή:**

**Επιβλέπων: Α. Καϊκτσίς, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Μέλη: Ν. Κυρτάτος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Χ. Φραγκόπουλος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα, Οκτώβριος 2012**

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη» του ΕΜΠ. Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με βοήθησαν, μου στάθηκαν και μου συμπαραστάθηκαν, ο καθένας με τον τρόπο του. Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Λ. Καϊκτσή, καθώς και τον Επιστημονικό Συνεργάτη κ. Κ. Αϊβαλή, αφού χωρίς την καθοδήγηση και τη βοήθειά τους η περάτωση της παρούσας εργασίας δεν θα ήταν δυνατή. Επίσης τους διδάσκοντες και εξεταστές Καθηγητές κ.κ. Ν. Κυρτάτο και Χ. Φραγκόπουλο. Υποχρεωμένος νιώθω προς τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Δ. Μάργαρη, για την άμεση ανταπόκριση του στην αποστολή απαραίτητων συγγραμάτων. Θα ήμουν αγνώμων αν παρέλειπα τον φίλο και εξαίρετο συνάδελφο Σπύρο Δρόσο, για την καθοδήγηση του στην Υπολογιστική Ρευστοδυναμική. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ολόψυχα τον φίλο και συνάδελφο Γιάννη Ρόμπολα, για την πολύτιμη βοήθειά του κατά τη διαδικασία συγγραφής, μορφοποίησης και τελικής επεξεργασίας της παρούσας εργασίας. Τέλος για μία ακόμη φορά, ευχαριστώ τον φίλο και συνοδοιπόρο Αποστόλη Βλάχο για την ψυχολογική συμπαράσταση που απλόχερα χαρίζει.

## ΣΥΝΟΨΗ

Η παρούσα εργασία, που εκπονήθηκε στον Τομέα Ναυτικής Μηχανολογίας της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ, πραγματεύεται την υπολογιστική μελέτη του φαινομένου της σπηλαίωσης σε πρότυπη γεωμετρία εγχυτήρα, συγκεκριμένα σε κυλινδρικό στόμιο με απότομη στένωση. Η δημιουργία της γεωμετρίας και του αριθμητικού πλέγματος έγινε με χρήση του λογισμικού GAMBIT, ενώ για την προσομοίωση της ροής χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής FLUENT του υπολογιστικού πακέτου ANSYS.

Ως σπηλαίωση ορίζεται η ατμοποίηση ενός υγρού υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας, λόγω μείωσης της πίεσης, σε επίπεδα κάτω από την πίεση ατμοποίησης. Η πίεση ατμοποίησης εξαρτάται από τη φύση του ρευστού. Η σπηλαίωση είναι ανεπιθύμητη, καθώς μπορεί να προκαλέσει σημαντικές φθορές και μείωση της απόδοσης σε εφαρμογές ροής. Για τον λόγο αυτόν, η μελέτη του φαινομένου της σπηλαίωσης έχει μεγάλο ενδιαφέρον στις εφαρμογές της Μηχανολογίας και της Ναυπηγικής.

Στην παρούσα εργασία, γίνεται αρχικά μια εκτενής αναφορά σε μεθοδολογίες Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, και αναλύεται το φαινόμενο της σπηλαίωσης από φυσική άποψη. Ακολούθως, παρουσιάζεται η διαδικασία δημιουργίας υπολογιστικών πλεγμάτων της παρούσας εργασίας. Τέλος παρουσιάζονται και αναλύονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα, και συγκρίνονται με πειραματικά και αντίστοιχα υπολογιστικά της βιβλιογραφίας.

Για την παρούσα πρότυπη γεωμετρία κυλινδρικού ακροφυσίου με στένωση, τα αποτελέσματα κατέδειξαν την παρουσία μιας περιοχής εξατμισμένου καυσίμου μετά τη διατομή της στένωσης, το μέγεθος της οποίας αυξάνεται με τη συνολική διαφορά πίεσης στο ακροφύσιο. Η εν λόγω περιοχή χαμηλής πίεσης συνδέεται με την παρουσία μιας ζώνης ανακυκλοφορίας του ρευστού. Η αδιαστατοποίηση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει τη σχέση του Nurick της βιβλιογραφίας, αναφορικά με την εξάρτηση του συντελεστή παροχής από τον αριθμό σπηλαίωσης.

Τα υπολογιστικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για την υπολογιστική μελέτη του φαινομένου της σπηλαίωσης σε ρεαλιστικές γεωμετρίες εγχυτήρων.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	i
ΣΥΝΟΨΗ.....	ii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	iii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΡΟΩΝ .....	1
1.1 Εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστομηχανική.....	1
1.2 Μαθηματική θεμελίωση των νόμων της ρευστομηχανικής.....	3
1.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier Stokes .....	9
1.3.1 Αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes.....	10
1.3.2 Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων .....	15
1.4 Τυρβώδεις ροές – Μοντέλα τύρβης.....	16
1.5 Μεσοποιημένες εξισώσεις Reynolds .....	17
1.6 Προσέγγιση Boussinesq.....	18
1.7 Μοντέλο Spalart – Allmaras .....	19
1.7.1 Εισαγωγή .....	19
1.7.2 Μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους $\mu_t$ .....	20
1.7.3 Μοντελοποίηση καταστροφής τυρβώδους ιξώδους .....	22
1.7.4 Σταθερές του μοντέλου .....	23
1.7.5 Συνοριακές συνθήκες.....	23
1.8 Μοντέλο k - ε.....	24
1.8.1 Εισαγωγή .....	24
1.8.2 Εξισώσεις μεταφοράς .....	24
1.8.3 Μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους.....	25
1.8.4 Σταθερές μοντέλου .....	25
1.8.5 Μοντελοποίηση παραγωγής τύρβης .....	26
1.9 Μοντέλο k - ω.....	26
1.9.1 Εισαγωγή .....	26
1.9.2 Εξισώσεις μεταφοράς .....	27
1.9.3 Μοντελοποίηση ενεργούς διάχυσης .....	27



1.9.4 Μοντελοποίηση παραγωγής τύρβης .....	28
1.9.5 Μοντελοποίηση όρων σκέδασης .....	30
1.9.6 Σταθερές μοντέλου .....	32
1.9.7 Συνοριακές συνθήκες.....	32
1.10 Προσδιορισμός πλέγματος προσομοίωσης τυρβώδους ροής .....	33
1.10.1 Εισαγωγή .....	33
1.10.2 Σύγκριση επιλογής “Wall Functions” και μοντέλου “Near-Wall” .....	35
1.10.3 Επιλογή Standard Wall Functions .....	37
1.10.4 Επιλογή “Enhanced Wall Treatment” .....	39
1.10.5 Δημιουργία πλέγματος κοντά στα τοιχώματα για επιλογή “Wall Functions” .....	40
1.10.6 Δημιουργία πλέγματος κοντά στα τοιχώματα για μοντέλο Spalart- Allmaras.....	41
1.10.7 Δημιουργία πλέγματος κοντά σε τοιχώματα για μοντέλα $k - \omega$ ...41	
1.11 Μοντέλο μίξης (mixture model) .....	42
1.11.1 Ορισμός.....	42
1.11.2 Περιορισμοί στον κώδικα FLUENT.....	43
1.11.3 Εξισώσεις διατήρησης .....	43
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΣΠΗΛΑΙΩΣΗΣ</b> .....	45
2.1 Εισαγωγή στα κύρια χαρακτηριστικά ροών με σπηλαίωση .....	45
2.1.1 Ορισμός σπηλαίωσης.....	45
2.1.2 Πίεση ατμοποίησης.....	45
2.1.3 Κύριες μορφές σπηλαίωσης.....	47
2.2 Σπηλαίωση σε πρακτικές εφαρμογές.....	52
2.2.1 Στάδια σπηλαίωσης.....	52
2.2.2 Ευνοϊκές συνθήκες για την εμφάνιση σπηλαίωσης.....	53
2.2.3 Οι κύριες επιπτώσεις της σπηλαίωσης σε υδραυλικά συστήματα..53	
2.3 Ειδικά χαρακτηριστικά της σπηλαίωσης .....	54
2.3.1 Πίεση και κλίση πίεσης.....	54
2.3.2 Διεπιφάνειες υγρού-ατμού .....	55

2.3.3	Τυπικά μεγέθη σπηλαιώσης.....	56
2.4	Αδιάστατες παράμετροι .....	57
2.4.1	Αριθμός σπηλαιώσης (cavitation number) $\sigma_v$ .....	57
2.4.2	Ο αριθμός σπηλαιώσης στην εκκίνηση της σπηλαιώσης $\sigma_{vi}$ .....	57
2.4.3	Σχετική υποπίεση $\sigma_c$ .....	58
2.5	Μικροφουσαλίδες και σπηλαιώση.....	59
2.5.1	Πυρήνες σπηλαιώσης ή μικροφουσαλίδες.....	59
2.5.2	Ισορροπία μικροφουσαλίδας .....	60
2.5.3	Συνολικός αριθμός μικροφουσαλίδων .....	63
2.6	Δυναμική σφαιρικών φουσαλίδων.....	66
2.6.1	Βασικές εξισώσεις .....	66
2.6.2	Κατάρρευση μιας φουσαλίδας ατμού .....	69
2.6.3	Έκρηξη φουσαλίδας.....	75
2.7	Μοντέλο σπηλαιώσης στον κώδικα FLUENT .....	77
2.7.1	Εισαγωγή .....	77
2.7.2	Βασικό μοντέλο σπηλαιώσης .....	78
2.7.3	Κλάσμα μάζας ατμού και μεταφορά ατμού.....	79
2.7.4	Διακυμάνσεις πίεσης λόγω τύρβης.....	80
2.7.5	Επιπτώσεις μη συμπτκνώσιμων αερίων .....	80
2.7.6	Ρυθμοί αλλαγής φάσης .....	81
2.7.7	Παράγοντες που επηρεάζουν το μοντέλο σπηλαιώσης .....	81
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΟ ΠΑΚΕΤΟ GAMBIT .....</b>		<b>82</b>
3.1	Εισαγωγή στο λογισμικό.....	82
3.2	Στοιχεία γεωμετρίας της διάταξης του ακροφυσίου .....	84
3.3	Σχεδίαση γεωμετρίας και αριθμητικού πλέγματος .....	86
3.3.1	Δημιουργία κορυφών .....	87
3.3.2	Δημιουργία ευθύγραμμων τμημάτων.....	88
3.3.3	Ορισμός κατάλληλων τετράπλευρων.....	89
3.3.4	Κατασκευή υπολογιστικού πλέγματος σε επιφάνειες.....	94
3.3.5	Καθορισμός οριακών συνθηκών.....	97
3.3.6	Οριακές συνθήκες .....	98

3.3.7 Σχεδιασμος εναλλακτικών πλεγμάτων .....	100
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ .....	101
4.1 Εισαγωγή .....	101
4.2 Ορισμός βασικών παραμέτρων.....	102
4.3 Εισαγωγή του αρχείου με τη γεωμετρία και το πλέγμα που κατασκευάστηκαν με το πρόγραμμα GAMBIT.....	103
4.4 Επιλογή του μοντέλου προσομοίωσης.....	105
4.5 Καθορισμός του συστατικού (material) και των χαρακτηριστικών του .....	107
4.6 Καθορισμός των φάσεων υγρού και ατμού .....	108
4.7 Καθορισμός των συνθηκών λειτουργίας .....	109
4.8 Καθορισμός οριακών συνθηκών.....	110
4.9 Καθορισμός παραμέτρων επίλυσης .....	113
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	115
5.1 Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων .....	115
5.1.1 Γραφήματα στατικής πίεσης με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar .....	115
5.1.2 Γραφήματα στατικής πίεσης με πίεση εξόδου 100 bar.....	120
5.2.1 Γραφήματα απεικόνισης κλάσματος ατμού με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar .....	124
5.2.2 Γραφήματα απεικόνισης κλάσματος ατμού με πίεση εξόδου 100 bar .....	129
5.3.1 Γραφήματα απεικόνισης αξονικής ταχύτητας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900 bar και πίεση εξόδου 1 bar .....	132
5.3.2 Γραφήματα απεικόνισης αξονικής ταχύτητας με πίεση εξόδου 100 bar .....	137
5.3.3 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar .....	138
5.3.4 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας με πίεση εξόδου 100 bar .....	143

5.3.5 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 100 έως 900bar και πίεση εξόδου 1bar .....	144
5.3.6 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο με πίεση εξόδου 100bar .....	148
5.4.1 Γραφήματα απεικόνισης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar .....	151
5.4.2 Γραφήματα απεικόνισης τυρβώδους κινητικής ενέργειας, με πίεση εξόδου 100 bar .....	156
5.5.1 Γραφήματα απεικόνισης της κίνησης της ροής με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900 bar και πίεση εξοδου 1 bar .....	159
5.5.2 Γραφήματα απεικόνισης τυρβώδους κινητικής ενέργειας, με πίεση εξόδου 100 bar .....	164
5.5.6 Αδιαστατοποίηση των αποτελεσμάτων .....	165
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ .....	169
6.1 Συμπεράσματα .....	169
6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα .....	170
Βιβλιογραφία .....	171

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΡΟΩΝ

## 1.1 Εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστομηχανική

Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamics - CFD) είναι ένας επιστημονικός κλάδος της μηχανικής των ρευστών, ο οποίος έχει ως αντικείμενο την επίλυση ροϊκών πεδίων, που σχετίζονται με εφαρμογές του μηχανικού. Η εν λόγω επίλυση γίνεται προσεγγιστικά, με χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η προσεγγιστική επίλυση έχει την έννοια ότι η υπολογιστική ρευστομηχανική δεν παρέχει αναλυτική λύση στα προβλήματα ροής, η οποία θα είναι πλήρως ακριβής, ανάλογα βέβαια με τις παραδοχές που έχει υποστεί η μαθηματική θεμελίωση του προβλήματος, αλλά υπολογίζει διακριτές τιμές της λύσης, που πάντα απέχουν από τις πραγματικές, λόγω απώλειας πληροφορίας από τις τιμές της λύσης που δεν υπολογίζονται, δηλαδή κάνει χρήση της αριθμητικής ανάλυσης. Με άλλα λόγια, η λύση θα είναι ένα σύνολο αριθμών και όχι μαθηματική έκφραση (συνάρτηση). Σχετικό υλικό αναλύεται σε σχετικά σιγράμματα, π.χ. [1,2].

Η γενική μεθοδολογία με την οποία λειτουργεί η υπολογιστική ρευστομηχανική είναι να επιλύει με αριθμητικές μεθόδους τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή των ρευστών, γνωστές ως εξισώσεις Navier-Stokes. Η αριθμητική επίλυση εφαρμόστηκε λόγω της αδυναμίας να επιλυθούν αναλυτικά οι εξισώσεις αυτές, ακόμα και για απλά πεδία ροής. Φυσικά, υπάρχουν ορισμένα απλά προβλήματα ροής, για τα οποία έχει βρεθεί αναλυτική λύση των Navier-Stokes, όπως η ροή Couette. Η αδυναμία της αναλυτικής επίλυσης αυτών των εξισώσεων, οφείλεται στην πολυπλοκότητα τους, στο πλήθος τους, αλλά και στη μη γραμμικότητα τους. Ακόμα, για την απλοποίησή τους, αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις Euler του μη συνεκτικού ρευστού, οι εξισώσεις οριακού στρώματος και δυναμικού πεδίου, αλλά και πάλι η αναλυτική τους λύση ήταν αδύνατη για τα περισσότερα πραγματικά προβλήματα. Η χρησιμοποίηση, όμως, των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση όλων αυτών των εξισώσεων, απαιτεί τη χρήση του υπολογιστή, ώστε να μπορεί να εκτελεστεί ο μεγάλος όγκος των πράξεων σε λογικό χρόνο και χωρίς πιθανότητα ανθρώπινου λάθους. Έτσι, η Υπολογιστική Ρευστομηχανική, αν και είχε την μαθηματική θεμελίωση των νόμων της κίνησης των ρευστών και τις μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης, από πολύ παλιά, μπόρεσε να λύσει πρακτικά προβλήματα

ροής μόνο τις τελευταίες δεκαετίες, όπου η υπολογιστική ισχύς, η μνήμη και η δυνατότητα αποθήκευσης δεδομένων των υπολογιστών είναι πάρα πολύ μεγάλες.

Η υπολογιστική ρευστομηχανική, επιλύοντας τις εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες εκφράζουν κάθε είδος ροής, οποιασδήποτε χωρικής κλίμακας, αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο της μελέτης της ροής των ρευστών. Παλαιότερα, ο μόνος τρόπος για να μελετηθεί η ροή σε σύνθετες γεωμετρίες ήταν η διεξαγωγή πειραμάτων, συνήθως σε σήραγγες, όπου τοποθετούνταν πρότυπες διατάξεις, συνήθως σε μικρότερη κλίμακα σε σχέση με τις πραγματικές. Σήμερα, χρησιμοποιείται και η Υπολογιστική Ρευστομηχανική, η οποία, με τη συνεχή εξέλιξη και βελτίωση της αξιοπιστίας της, τείνει να αντικαταστήσει μεγάλο τμήμα των πειραματικών μελετών. Ποτέ όμως το πείραμα δεν μπορεί να εξαλειφθεί ως διαδικασία μελέτης, αφού είναι το μόνο που μπορεί να μάς δώσει ακριβή αποτελέσματα. Και το πείραμα και η υπολογιστική ρευστομηχανική έχουν κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Από τη μία πλευρά, το πείραμα έχει υψηλό κόστος, απαιτεί χρόνο για να δώσει τα αποτελέσματα, αδυνατεί πολλές φορές να προσομοιώσει τα φυσικά μεγέθη των γεωμετριών, όπως και τις επιθυμητές συνθήκες. Επιπλέον, μπορούμε συνήθως να μετρήσουμε μόνο συγκεκριμένα ολοκληρωτικά μεγέθη, όπως συνολικές δυνάμεις. Από την άλλη πλευρά, το πείραμα παρέχει υψηλή ακρίβεια. Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική παρέχει λύσεις με σχετικά χαμηλό κόστος, για ένα μεγάλο εύρος συνθηκών λειτουργίας, ενώ παρέχει τα ροϊκά μεγέθη σε κάθε σημείο της ροής, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί στο πείραμα. Επιπλέον, υπάρχει η δυνατότητα μεταβολής οποιασδήποτε παραμέτρου του υπολογιστικού πειράματος, χωρίς δυσκολία. Από την άλλη, δεν μπορούμε να έχουμε πάντα βεβαιότητα για την πλήρη ορθότητα της λύσης, αφού φαινόμενα όπως η τύρβη μοντελοποιούνται, εξαιτίας της αδυναμίας να επιλύσουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes για μεγάλη πυκνότητα σημείων υπολογισμού, ώστε να μετράμε την πολύ μικρής χωρικής κλίμακας λειτουργία της, που επηρεάζει μακροσκοπικά τη ροή. Έτσι, ο συνδυασμός του πειράματος με προσομοιώσεις Υπολογιστικής ρευστομηχανικής δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα, παρέχοντας τα πλεονεκτήματα και των δύο προσεγγίσεων.

Μια συνήθης διαδικασία μελέτης ενός ροϊκού προβλήματος είναι η μελέτη της ίδιας γεωμετρίας, υπό τις ίδιες συνθήκες λειτουργίας, τόσο υπολογιστικά όσο και πειραματικά. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, μπορεί να ελεγχθεί η ακρίβεια της υπολογιστικής λύσης, και να καθοριστούν οι παράμετροι και να επιλεγούν τα μοντέλα (π.χ. μοντέλα τύρβης) που αντιστοιχούν στην υψηλότερη ακρίβεια των

υπολογισμών. Τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην υπολογιστική μελέτη παρόμοιων συνθηκών και γεωμετριών, υποθέτοντας ότι στις καινούργιες ροϊκές καταστάσεις οι παράμετροι και τα μοντέλα τύρβης, που καθορίστηκαν και ρυθμίστηκαν με βάση το πείραμα, δεν μεταβάλλονται ή μεταβάλλονται ελάχιστα. Έτσι, αποφεύγεται η εκτέλεση πειραμάτων για ένα μεγάλο εύρος λειτουργίας των παραμέτρων. Η χρήση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής μπορεί να γίνει είτε με εξ αρχής ανάπτυξη κώδικα, είτε με χρήση εμπορικών πακέτων λογισμικού, όπως το πακέτο ANSYS.

## 1.2 Μαθηματική θεμελίωση των νόμων της ρευστομηχανικής

Η ροή των ρευστών περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes. Οι εξισώσεις Navier-Stokes ιστορικά αναφέρονται στις τρεις εξισώσεις ορμής, αλλά συνηθίζεται να αποκαλούμε έτσι και τις πέντε συνολικά διαφορικές εξισώσεις διατήρησης που περιγράφουν την ασυμπίεστη μονοφασική ροή: μία εξίσωση διατήρησης μάζας (εξίσωση συνέχειας), μία εξίσωση διατήρησης ορμής για κάθε μία από τις τρεις διευθύνσεις του χώρου και μία εξίσωση διατήρησης ενέργειας. Εάν η ροή είναι συμπίεστη, πρέπει, επιπλέον, να γίνει χρήση της καταστατικής εξίσωσης. Αναλυτική παρουσίαση αναφορικά με τις εξισώσεις διατήρησης υπάρχει στα σχετικά συγγράματα, π.χ. [3,4].

Οι περισσότεροι νόμοι της μηχανικής αναφέρονται σε υλικά συστήματα, με την έννοια ότι περιγράφουν τις κινήσεις υλικών σωμάτων, ανεξάρτητα του σημείου που βρίσκονται μέσα στον χώρο. Όμως, για την ευκολία της μελέτης των ροών, είναι καλύτερα να εκφράζονται οι νόμοι αυτοί, όχι για ένα συγκεκριμένο υλικό σύστημα, αλλά για έναν συγκεκριμένο όγκο του χώρου (όγκος ελέγχου). Τη μετατροπή της μελέτης από ένα υλικό κινούμενο σύστημα σε έναν σταθερό όγκο ελέγχου, αναλαμβάνει το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds.

Το θεώρημα του Reynolds μετατρέπει τον ρυθμό μεταβολής μιας εντατικής ποσότητας ενός συγκεκριμένου υλικού συστήματος σε ρυθμό μεταβολής της εντατικής ποσότητας σε συγκεκριμένο όγκο ελέγχου.

Ο ρυθμός μεταβολής της εντατικής ποσότητας  $\varphi$ , ενός υλικού συστήματος είναι:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV \quad (1.2.1)$$

όπου  $V$  ο όγκος που καταλαμβάνει το υλικό σύστημα, κάθε χρονική στιγμή και  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού. Δηλαδή, ο όγκος δεν είναι σταθερός, αλλά κινείται. Έτσι η σχέση (1.2.1) γράφεται:

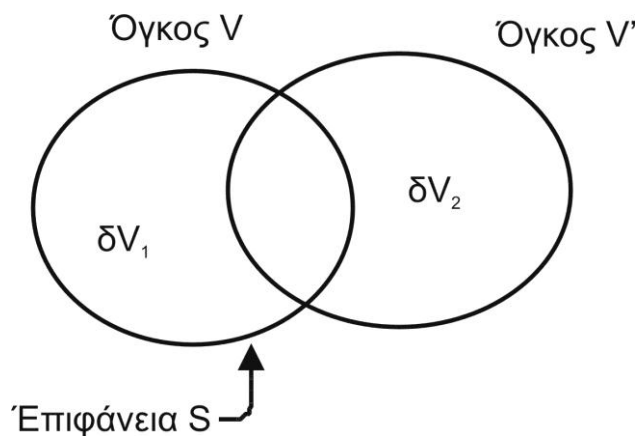
$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \iiint_{V'} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV' - \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV \right\} \quad (1.2.2)$$

Στη σχέση αυτή ο όγκος  $V'$  είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το υλικό σύστημα τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ ο όγκος  $V$  της χρονικής στιγμής  $t + \delta t$ .

Ορίζοντας τους παρακάτω όγκους όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1:

$\delta V_1$  όγκος του  $V$  που δεν περιέχεται στον  $V'$

$\delta V_2$  όγκος του  $V'$  που δεν περιέχεται στον  $V$



**Σχήμα 1. 1** Οι όγκοι που χρησιμοποιούνται για την διεξαγωγή του θεωρήματος μεταφοράς Reynolds



Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της σχέσης (1.2.2) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \iiint_{V'} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV' = \\ & = \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV - \iiint_{\delta V_1} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV + \iiint_{\delta V_2} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

οπότε η (1.2.2) γράφεται:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV = \\ & = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \begin{aligned} & \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV - \iiint_{\delta V_1} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV \\ & + \iiint_{\delta V_2} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV - \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV \end{aligned} \right\} = \\ & = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV - \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV \right\} \\ & + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \iiint_{\delta V_2} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV - \iiint_{\delta V_1} \rho \cdot \varphi(x_i, t + \delta t) dV \right\} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Πλέον η σχέση (1.2.4) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της εντατικής ποσότητας  $\varphi$  σε ένα συγκεκριμένο όγκο ελέγχου  $V$ . Το πρώτο όριο εκφράζει τη μεταβολή της ιδιότητας μέσα στον όγκο αυτό, ενώ το δεύτερο όριο το ρυθμό με τον οποίο περνά η ιδιότητα αυτή από την επιφάνεια του όγκου αυτού. Έτσι η (1.2.2) γράφεται:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV + \iint_S \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot \varphi \cdot ds \quad (1.2.5)$$

όπου  $\vec{u}$  η ταχύτητα του ρευστού στην επιφάνεια  $ds$  και  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Έτσι, λόγω του θεωρήματος Green, η σχέση (1.2.5) γίνεται:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi(x_i, t) dV + \iiint_V \nabla(\rho \cdot \vec{u} \cdot \varphi) dV = \iiint_V \left[ \frac{d}{dt} (\rho \cdot \varphi(x_i, t)) + \nabla(\rho \cdot \vec{u} \cdot \varphi) \right]$$

(1.2.6)

Επομένως, η εξίσωση μεταφοράς του Reynolds, από την οποία δημιουργούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes, γράφεται:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot \varphi dV = \iiint_V \left[ \frac{d}{dt} (\rho \cdot \varphi) + \nabla(\rho \cdot \vec{u} \cdot \varphi) \right] \quad (1.2.7)$$

Για την εξίσωση της **διατήρησης της μάζας**, ο ρυθμός μεταβολής του  $\Phi$  θα είναι μηδέν, αφού δεν παράγεται ή δημιουργείται μάζα, και θα έχουμε  $\varphi = 1$ . Η

(1.2.7) γίνεται:

$$\iiint_V \left[ \frac{d}{dt} (\rho \cdot \varphi) + \nabla(\rho \cdot \vec{u} \cdot \varphi) \right] = 0$$

(1.2.8)

Και αυτό συνεπάγει:

$$\frac{d}{dt} (\rho \cdot \varphi) + \nabla(\rho \cdot \vec{u} \cdot \varphi) = 0 \quad (1.2.9)$$

Και κατ' επέκταση:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \nabla \vec{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \vec{u} = 0 \quad (1.2.10)$$

όπου  $\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{d(\cdot)}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla(\cdot)$  η ουσιαστική παράγωγος, η οποία εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής που βλέπει ένας παρατηρητής, κινούμενος μαζί με το ρευστό. Η εξίσωση αυτή της συνέχειας απλοποιείται ανάλογα με τις ιδιότητες του ρευστού. Έτσι, αν

έχουμε ασυμπίεστο ρευστό και μόνιμη ροή, όπως στην περίπτωση της παρούσας εργασίας, τότε η (1.2.9) γίνεται:

$$\nabla \vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2.11)$$

Για τις εξισώσεις ορμής, χρησιμοποιούμε, πάλι, το θεώρημα του Reynolds (σχέση 1.2.7) με  $\varphi = u$ , με τον παρακάτω τρόπο:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot u dV = \iiint_V \rho \cdot F dV + \iint_S p(n_j, x_j, t) dS \quad (1.2.12)$$

όπου  $F$  οι δυνάμεις που ενεργούν σε όλο τον όγκο ελέγχου (π.χ. πεδιακές δυνάμεις),  $p(n_j, x_j, t)$  ο τανυστής πρώτου βαθμού των δυνάμεων επαφής, δηλαδή των δυνάμεων που δρουν μόνο πάνω στην επιφάνεια του όγκου ελέγχου. Επειδή όμως ισχύει:

$$p(n_j, x_j, t) = T_{ij} \cdot n_j \quad (1.2.13)$$

όπου  $T_{ij}$  τανυστής δευτέρας τάξης και  $n_j$  τανυστής πρώτης τάξης, η σχέση (1.2.12) λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot u dV = \iiint_V \rho \cdot F dV + \iint_S T_{ij} \cdot n_j dS = \iiint_V \rho \cdot F dV + \iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (1.2.14)$$

Κατ' επέκταση, και λόγω του ότι το πρώτο μέλος της (1.2.14) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot u dV = \iiint_V \rho \cdot \frac{Du}{Dt} dV \quad (1.2.15)$$

Η σχέση (1.2.14) γίνεται:

$$\frac{Du_j}{Dt} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.2.16)$$

οπότε, μετά από διαδικασίες όπου εκφράζεται ο τανυστής  $T_{ij}$  με τα μεγέθη  $u, v, w, p$ , δηλαδή τις ταχύτητες σε κάθε διεύθυνση και την πίεση, οι εξισώσεις ορμής για κάθε διεύθυνση  $x, y, z$  από την (1.2.16) γράφονται:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Σχέσεις (1.2.17),(1.2.18),(1.2.19)

Τέλος, με την εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας κλείνει το σύστημα των πέντε εξισώσεων της ασυμπίεστης ροής, με τους πέντε αγνώστους, που είναι οι τρεις ταχύτητες  $u, v, w$  σε κάθε διεύθυνση,  $x, y, z$ , η πίεση  $p$  και η θερμοκρασία,  $T$ :

$$\begin{aligned} \rho \cdot C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ + 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} &- \frac{2}{3} \mu \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ + \mu \left\{ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right\} &+ \dot{q} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

### 1.3 Διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier Stokes

Για να μπορέσουν να επιλυθούν οι εξισώσεις Navier Stokes πρέπει να διακριτοποιηθούν ώστε να εκφράζονται συναρτήσει των άγνωστων μεταβλητών σε ορισμένα προεπιλεγμένα σημεία (κόμβοι). Η διαδικασία διακριτοποίησης μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές εξισώσεις απλουστεύοντας έτσι το πρόβλημα. Η διακριτοποίηση γίνεται στα πεδία του χρόνου και του χώρου για χρονικά μεταβαλλόμενες ροές αλλά για μόνιμες ροές η διακριτοποίηση γίνεται μόνο στον χώρο.

Το σύνολο των σημείων όπου θα υπολογιστούν τα διάφορα μεγέθη προσδιορίζονται από το αριθμητικό πλέγμα. Συγκεκριμένα, είναι τα σημεία τομής του πλέγματος που ονομάζονται κόμβοι (nodes) και ο αριθμός τους προσδιορίζεται από τον χρήστη. Όσο πυκνότερο είναι το πλέγμα τόσο καλύτερη η προσέγγιση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν, αφού μειώνεται το σφάλμα αποκοπής στην προσέγγιση των παραγώγων με αριθμητικές εκφράσεις.

Για τη διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier Stokes στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων. Ο χώρος στον οποίο ζητείται το ροϊκό πεδίο χωρίζεται σε ξεχωριστούς όγκους ελέγχου και σε καθέναν από αυτούς εφαρμόζεται η ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων διατήρησης. Από κάθε όγκο επομένως προκύπτει μία αλγεβρική εξίσωση και το σύνολο των αλγεβρικών εξισώσεων σχηματίζει ένα σύστημα το οποίο δίνει τις τιμές των ροϊκών μεγεθών στους κόμβους των όγκων ελέγχου. Ο κόμβος υπολογισμού του όγκου ελέγχου βρίσκεται στο κέντρο βάρους του όγκου και είναι ουσιαστικά το σημείο υπολογισμού των διαφόρων μεταβλητών. Λόγω του ότι η επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes είναι πρακτικά αδύνατη, χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι με επαναληπτικές διαδικασίες ώστε μετά από ορισμένο αριθμό επαναλήψεων να γίνει σύγκλιση της λύσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μεταβλητή της πίεσης δεν εμφανίζεται στην εξίσωση της συνέχειας και επομένως δε μπορεί να λυθεί το σύστημα των τριών εξισώσεων ορμής και της εξίσωσης της συνέχειας αν δεν είναι εξ' αρχής δοσμένο το πεδίο της πίεσης. Έτσι, η συνήθης τακτική είναι να υποτίθεται μία αρχική τιμή για την πίεση, και μέσω

των επαναλήψεων τελικά να γίνεται σύγκλιση στην πραγματική τιμή. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν ο αλγόριθμος SIMPLE και ο αλγόριθμος SIMPLEC. Οι δύο αυτοί αλγόριθμοι αναλύονται παρακάτω.

### 1.3.1 Αλγόριθμοι επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes

Επειδή είναι αδύνατη η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes απευθείας, δηλαδή με τη χρήση διαδικασίας ενός βήματος, χρησιμοποιούνται διάφοροι αλγόριθμοι με επαναληπτικές διαδικασίες, που τελικά δίνουν τη λύση τους. Ο λόγος για τον οποίο υπάρχει αυτή η αδυναμία επίλυσης, είναι ότι η μεταβλητή της πίεσης δεν εμφανίζεται στην εξίσωση της συνέχειας, και επομένως δεν μπορεί να λυθεί το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις εξισώσεις ορμής και από την εξίσωση συνέχειας αν δεν έχουμε ήδη γνωστό το πεδίο της πίεσης. Έτσι, όπως αναφέραμε, χρησιμοποιούνται επαναληπτικές διαδικασίες, που η γενική φιλοσοφία τους είναι να θεωρούν ένα αρχικό πεδίο πίεσης και σε κάθε επαναληπτικό βήμα να το διορθώνουν, μέχρι να βρεθούν τα μεγέθη της πίεσης και των ταχυτήτων που ικανοποιούν τις εξισώσεις διατήρησης. Υπάρχουν διάφοροι τέτοιοι αλγόριθμοι, οι περισσότεροι από τους οποίους είναι βελτιωμένες εκδοχές του SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations), που δημιούργησαν το 1972 οι Patankar και Spalding.

Έτσι υπάρχουν οι παρακάτω αλγόριθμοι επίλυσης:

- A. SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations)
- B. SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations Revised)
- Γ. SIMPLEC (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations Consistent)
- Δ. SIMPLEST (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations Shortened)
- E. PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators)

Όλοι οι παραπάνω αλγόριθμοι, εκτός του PISO, προέρχονται από τον αλγόριθμο SIMPLE και παρουσιάζουν βελτιωμένα χαρακτηριστικά. Παρακάτω θα αναλύσουμε τους SIMPLE, SIMPLEC και PISO, οι οποίοι χρησιμοποιούνται και στο πακέτο FLUENT, το οποίο χρησιμοποιούμε για στην παρούσα εργασία. Στην εργασία αυτή, θα κάνουμε χρήση του αλγορίθμου SIMPLE για την επίλυση των εξισώσεων,

αφού δίνει ακριβή αποτελέσματα για μονοφασική ροή όσο και για ροή με παρουσία φαινομένων σπηλαιώσης.

### 1.3.1.1 Αλγόριθμος SIMPLE

Ο αλγόριθμος SIMPLE εφαρμόζει τα παρακάτω βήματα για την επίλυση των εξισώσεων Navier Stokes:

1. Εκτιμά το πεδίο της πίεσης  $p^*$
2. Βρίσκει τις ταχύτητες του πεδίου  $u^*, v^*, w^*$ , επιλύοντας τις εξισώσεις ορμής
3. Επιλύει την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης, η οποία εξάγεται από την εξίσωση συνέχειας, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των σωστών ταχυτήτων  $u_p, v_p, w_p$   
( $u_p = u^* - \frac{\partial u}{\partial(\Delta p)}(p'_D - p'_p)$ ): όπου  $\Delta p = p^*_D - p^*_p$  και  $p'_D - p'_p$  οι διορθωμένες τιμές των  $p^*_D, p^*_p$ ) που την ικανοποιούν και το μη μηδενικό ισοζύγιο μάζας που προκύπτει από την εξίσωση συνέχειας, χρησιμοποιώντας τις ταχύτητες που βρήκαμε  $u^*, v^*, w^*$ .
4. Υπολογίζει τη νέα τιμή της πίεσης,  $p$ , από τη σχέση:  $p = p^* + p'$ , όπου  $p'$  η διόρθωση της πίεσης.
5. Τέλος, υπολογίζει τις νέες τιμές των ταχυτήτων  $u_p, v_p, w_p$

Ο παραπάνω αλγόριθμος επαναλαμβάνεται, μέχρις ότου οι τιμές  $u_p, v_p, w_p$  των επαναλήψεων συγκλίνουν. Η σύγκλιση των τιμών αυτών καθορίζεται από μια μικρή ποσότητα  $\varepsilon = \varphi_{new} - \varphi_{old}$ , που είναι η ακρίβεια (ανοχή) την οποία επιθυμούμε να φτάσουμε.

Η σύγκλιση των ταχυτήτων  $u_p, v_p, w_p$  επιτυγχάνεται μετά από κάποιον αριθμό επαναληπτικών βημάτων, σε κάθε ένα από τα οποία διορθώνεται το πεδίο της πίεσης και των άλλων υδροδυναμικών και μη μεγεθών. Όμως, η διόρθωση αυτή πολλές φορές δεν οφείλεται μόνο στις εξισώσεις διόρθωσης των μεγεθών αυτών, αλλά

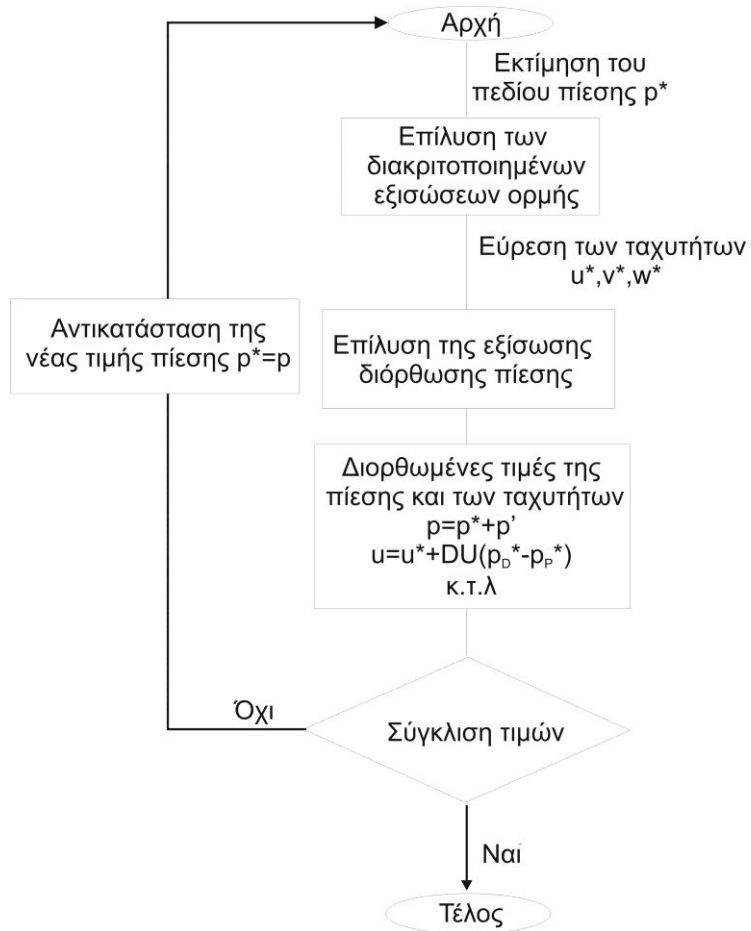
χρησιμοποιείται και μια σχέση, η οποία μεταβάλλει τις διορθωμένες τιμές, επιπλέον κατά μία τιμή, η οποία προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό μιας προηγούμενης διαφοράς του μεγέθους με έναν συντελεστή. Οι συντελεστές αυτοί ονομάζονται συντελεστές υποχαλάρωσης. Με τον τρόπο αυτόν, έχουμε τη δυνατότητα να επιταχύνουμε τη σύγκλιση, διότι τα βήματα μεταβολής των άγνωστων μεγεθών γίνονται μεγαλύτερα, και έτσι φτάνουν πιο γρήγορα στην λύση. Όσο πιο μεγάλοι είναι οι συντελεστές αυτοί, τόσο πιο γρήγορα επέρχεται η σύγκλιση. Βέβαια, αυτή η επιτάχυνση της σύγκλισης έχει κάποια όρια, πάνω από τα οποία αρχίζει να είναι ασταθής ο αλγόριθμος, και επομένως να μη δίνει σωστή λύση. Άρα, η συνήθης διαδικασία είναι να αυξάνουμε τους συντελεστές υποχαλάρωσης, μέχρι να πάρουν τιμές ελάχιστα μικρότερες, από τις τιμές αστάθειας του αλγορίθμου. Έτσι, πετυχαίνουμε την, όσο το δυνατόν, ταχύτερη σύγκλιση των αγνώστων του προβλήματος. Οι συντελεστές υποχαλάρωσης εφαρμόζονται στην σχέση (1.2.21), ένα βήμα μετά από τις διορθώσεις των μεγεθών ως :

$$\varphi = \varphi_{old} + a \cdot \Delta\varphi \quad (1.2.22)$$

όπου  $\varphi$  η καινούργια τιμή,  $\varphi_{old}$  η παλιά τιμή (μετά τη αρχική διόρθωση),  $a$  ο συντελεστής υποχαλάρωσης και  $\Delta\varphi$  μια υπολογισμένη προηγούμενη διαφορά του μεγέθους του  $\varphi$ , δηλαδή μια διαφορά των τιμών, από δύο προηγούμενες διαδοχικές επαναλήψεις.

Ο αλγόριθμος SIMPLE είναι αποδοτικός, αλλά έχει κάποια μειονεκτήματα σχετικά με τον αριθμό των επαναλήψεων (πιο αργή σύγκλιση) και τις τεχνικές υποχαλάρωσης (μικρότερα βήματα). Εντούτοις, χρησιμοποιείται αρκετά, ακόμα και σήμερα. Παρακάτω, φαίνεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου, Σχήμα 1.2:





**Σχήμα 1.2** Το λογικό διάγραμμα ροής (flow chart) του αλγορίθμου SIMPLE

### **1.3.1.2 Αλγόριθμος SIMPLEC**

Ο αλγόριθμος SIMPLEC είναι μια εξέλιξη του SIMPLE, που αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο βρίσκονται οι διορθώσεις της πίεσης και των ταχυτήτων. Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα ίδια με αυτά του SIMPLE. Το πλεονέκτημα του SIMPLEC είναι ότι έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί μεγάλους συντελεστές υποχαλάρωσης (under relaxation), που σημαίνει μεγαλύτερα βήματα στην αλλαγή των διορθωμένων πιέσεων, και συνεπώς ταχύτερη σύγκλιση. Όμως, δεν χρησιμοποιείται πάντα, διότι πολλές φορές οι μεγάλες τιμές στους συντελεστές υποχαλάρωσης επιφέρουν αστάθεια στη διαδικασία επίλυσης, και έτσι προτιμάται η χρήση του SIMPLE, που χρησιμοποιεί πιο συντηρητικές τιμές των συντελεστών υποχαλάρωσης.

### **1.3.1.3 Αλγόριθμος PISO**

Η βασική ιδέα του αλγορίθμου PISO είναι να μεταφέρει τους επαναληπτικούς υπολογισμούς που απαιτούνται από τους δυο προηγούμενους αλγόριθμους, SIMPLE και SIMPLEC, μέσα στο υπολογιστικό στάδιο της επίλυσης της εξίσωσης διόρθωσης της πίεσης. Μετά από μερικές επιπλέον επαναλήψεις, οι διορθωμένες ταχύτητες ικανοποιούν τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής. Έτσι, κάθε επαναληπτικό βήμα του αλγορίθμου PISO απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο, αλλά τα συνολικά επαναληπτικά βήματα μέχρι να συμβεί σύγκλιση, είναι πολύ λιγότερα, ειδικά, αν πρόκειται για χρονικά μεταβαλλόμενη ροή. Άρα, ο αλγόριθμος αυτός πλεονεκτεί για χρονικά μεταβαλλόμενες ροές (unsteady flows), αφού έχει τη δυνατότητα να εφαρμόζει μεγάλα χρονικά βήματα και μεγάλους συντελεστές υποχαλάρωσης, κατά συνέπεια επέρχεται ταχύτερη σύγκλιση. Σε μόνιμες ροές, ο αλγόριθμος δεν φαίνεται να υπερέχει των SIMPLE και SIMPLEC.

Τέλος, σημειώνεται ότι οι παραπάνω αλγόριθμοι είναι μέρος της γενικότερης φιλοσοφίας επίλυσης των εξισώσεων διαχωρισμένης επίλυσης (segregated solver), δηλαδή οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας δεν λύνονται ταυτόχρονα, αλλά σε διαφορετικά στάδια. Επίσης, λόγω του ότι στους αλγορίθμους αυτούς επιλύεται μία εξίσωση για την πίεση, η οποία μπορεί να προέλθει από την εξίσωση συνέχειας, αναφέρεται ότι γίνεται σύζευξη πίεσης-ταχύτητας (Pressure-Velocity Coupling)

### 1.3.2 Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Καθώς οι εξισώσεις Navier-Stokes διακριτοποιούνται με τις μεθόδους διακριτοποίησης, που αναφέραμε στην Ενότητα 1.2.3, δημιουργούνται ορισμένα συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων, που η επίλυσή τους στα διάφορα στάδια του αλγορίθμου επίλυσης των Navier Stokes δίνει την αριθμητική λύση του ροϊκού προβλήματος. Για την επίλυση των συστημάτων των αλγεβρικών εξισώσεων που δημιουργούνται απαιτούνται τα ακόλουθα δύο: Πρώτο, να γραμμικοποιηθούν όλες οι αλγεβρικές εξισώσεις που παράγονται από τη διαδικασία της διακριτοποίησης, αφού ο περισσότερες είναι μη γραμμικές, δηλαδή να πάρουν τη γραμμική μορφή:

$$a_p \cdot \Phi = \sum_{nb} a_{nb} \cdot \Phi_{nb} + b \quad (1.2.23)$$

όπου  $a_p, a_{nb}$  οι συντελεστές των μεταβλητών  $\Phi, \Phi_{nb}$  και  $n$  η αρίθμηση των μεγεθών των γειτονικών όγκων.

Δεύτερο, να γίνει χρήση μιας κατάλληλης μεθόδου επίλυσης των συστημάτων των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Οι άμεσες μέθοδοι επιλύουν με έναν αλγόριθμο απευθείας το σύστημα, χωρίς επαναληπτικές διαδικασίες και με ακρίβεια. Οι επαναληπτικές μέθοδοι κάνουν χρήση κάποιας επαναληπτικής διαδικασίας.

Άμεσες μέθοδοι είναι ο αλγόριθμος Thomas για τριδιαγώνιο σύστημα και η γενίκευσή του, η απαλοιφή Gauss. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα από τον υπολογιστή, με τη δημιουργία κώδικα προγραμματισμού, αλλά μειονεκτούν στο γεγονός ότι, για μεγάλα συστήματα εξισώσεων, απαιτούν πάρα πολλές πράξεις με συνέπεια την απαίτηση μεγάλης μνήμης, υπολογιστικής ισχύος και χρόνου εκτέλεσης. Άρα, στην υπολογιστική ρευστομηχανική, όπου έχουμε συνήθως

πολύ μεγάλα συστήματα εξισώσεων, αποφεύγονται οι άμεσες μέθοδοι, ενώ χρησιμοποιούνται οι επαναληπτικές. Δύο βασικές επαναληπτικές μέθοδοι είναι οι μέθοδοι **Jacobi** και **Gauss-Seidel**. Η μέθοδος Gauss-Seidel χρησιμοποιείται στον κώδικα FLUENT για την επίλυση των συστημάτων των εξισώσεων, που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση των Navier-Stokes, με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Επίσης ο κώδικας FLUENT, χρησιμοποιεί μαζί με τη μέθοδο Gauss-Seidel και μία μέθοδο που ονομάζεται Algebraic Multigrid method (AMG), η οποία είναι μια τεχνική που βελτιώνει τον ρυθμό σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel, ορίζοντας βασικά επίπεδα πλέγματος (πιο αραιά).

## 1.4 Τυρβώδεις ροές – Μοντέλα τύρβης

Οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται από διακυμαινόμενα πεδία ταχύτητας. Οι διακυμάνσεις αυτές αναμειγνύουν ποσότητες όπως ορμή και ενέργεια μεταβάλλοντας τις τιμές τους. Οι διακυμάνσεις αυτές είναι μικρής κλίμακας και υψηλής συχνότητας και επομένως είναι υπολογιστικά πολύ απαιτητικές για να προσομοιωθούν απευθείας σε πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, οι ακριβείς εξισώσεις μπορεί να είναι χρονικά μεσοποιημένες (time averaged) ή συνολικά μεσοποιημένες (ensemble-averaged) ή τροποποιημένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μη λαμβάνουν υπόψη τις μικρές κλίμακες, καταλήγοντας συνεπώς σε ένα τροποποιημένο σύνολο εξισώσεων το οποίο απαιτεί υπολογιστικά λιγότερο χρόνο για την επίλυσή του. Όμως, οι τροποποιημένες αυτές εξισώσεις περιέχουν επιπρόσθετες άγνωστες μεταβλητές, και επομένως απαιτούνται μοντέλα τύρβης για να προσδιοριστούν αυτές οι μεταβλητές συναρτήσει γνωστών ποσοτήτων.

Ο κώδικας FLUENT επιτρέπει τη χρήση των εξής μοντέλων τύρβης :

- Μοντέλο Spalart-Allmaras.
- Μοντέλα  $k - \epsilon$ .
- Μοντέλα  $k - \omega$ .
- Μοντέλο τάσης Reynolds (Reynolds stress model - RSM)
- Μοντέλο προσομοίωσης αποκολλημένων δινών (detached eddy simulation model - DES)

- Μοντέλο προσομοίωσης μεγάλων δινών (large eddy simulation model - LES). Επίσης, υποκατηγορίες των παραπάνω μοντέλων.

Δεν υπάρχει κάποιο μοντέλο τύρβης το οποίο να θεωρείται η καλύτερη επιλογή για κάθε είδους πρόβλημα. Η επιλογή του μοντέλου εξαρτάται από ζητήματα όπως το είδος της ροής, το απαιτούμενο ποσοστό ακρίβειας των αποτελεσμάτων, οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι και ο διαθέσιμος χρόνος για την εκτέλεση της προσομοίωσης. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται τα μοντέλα Spalart - Allmaras, standard k - ε και standard k - ω τα οποία και περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο.

## 1.5 Μεσοποιημένες εξισώσεις Reynolds

Στις μεσοποιημένες εξισώσεις RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) οι μεταβλητές της λύσης αναλύονται σε χρονικά μεσοποιημένες (time-averaged) και συνολικά μεσοποιημένες (ensemble-averaged) καθώς και σε διακυμαινόμενες μεταβλητές. Για την ταχύτητα ισχύει:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (1.23)$$

Όπου  $\bar{u}_i$ , και  $u'_i$  είναι η μέση και διακυμαινόμενη ταχύτητα αντίστοιχα. ( $i = 1, 2, 3$ ).

Ομοίως, για την πίεση και άλλες βαθμωτές ποσότητες ισχύει:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (1.24)$$

Όπου ο όρος  $\varphi$  υποδηλώνει μία βαθμωτή ποσότητα όπως για παράδειγμα ενέργεια ή η πίεση.

Οι συνολικά μεσοποιημένες εξισώσεις ορμής διατυπώνονται σε καρτεσιανή μορφή ως εξής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (1.26)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται μεσοποιημένες Reynolds Navier-Stokes εξισώσεις (Reynolds-Averaged Navier-Stokes - RANS) . Έχουν την ίδια γενική μορφή όπως οι Navier-Stokes εξισώσεις, με τη διαφορά ότι οι ταχύτητες και οι άλλες μεταβλητές τώρα αναπαριστούν χρονικά μεσοποιημένες ή συνολικά μεσοποιημένες ποσότητες. Επίσης, εμφανίζονται επιπλέον όροι οι οποίοι αντιπροσωπεύουν την επίδραση της τύρβης. Ο όρος  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  (τάσεις Reynolds) πρέπει να μοντελοποιηθεί ώστε να είναι δυνατή η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης.

## 1.6 Προσέγγιση Boussinesq

Η μοντελοποίηση της τύρβης μέσω των μεσοποιημένων εξισώσεων Reynolds απαιτεί τη μοντελοποίηση των τάσεων Reynolds  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ . Μια συνηθισμένη μέθοδος για τη σύνδεση των τάσεων Reynolds με τις κλίσεις της μέσης ταχύτητας (mean velocity gradients) είναι η χρησιμοποίηση της υπόθεσης Boussinesq:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \quad (1.27)$$

Η υπόθεση Boussinesq χρησιμοποιείται στο μοντέλο Spalart-Allmaras και στα μοντέλα k - ε και k - ω. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι το σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με τον υπολογισμό του τυρβώδους ιξώδους (turbulent viscosity)  $\mu_t$ . Στην περίπτωση του μοντέλου Spalart-Allmaras, επιλύεται μία μόνο επιπλέον εξίσωση μεταφοράς (η οποία αντιπροσωπεύει το τυρβώδες ιξώδες). Στα μοντέλα k - ε και k - ω επιλύονται δύο επιπλέον εξισώσεις μεταφοράς: για την τυρβώδη κινητική ενέργεια k και τον ρυθμό σκέδασης της τύρβης ε (μοντέλο k - ε) ή τον ειδικό ρυθμό σκέδασης (specific dissipation rate) ω (μοντέλο k - ω). Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$  υπολογίζεται συναρτήσει του k και του ε ή του ω.

Το μειονέκτημα της υπόθεσης Boussinesq είναι ότι υποθέτει ότι το τυρβώδες ιξώδες  $\mu$ , είναι μια ιστροπική βαθμωτή ποσότητα, κάτι που δεν ισχύει στην πραγματικότητα.

Η εναλλακτική προσέγγιση που ενσωματώνεται στο μοντέλο τάσεων Reynolds (Reynolds stress model - RSM) είναι η επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς για καθέναν από τους όρους του τανυστή τάσεων Reynolds. Επίσης, απαιτείται μία επιπλέον εξίσωση (scale-determining equation). Γενικά, για το μοντέλο τάσεων RSM πρέπει να επιλυθούν 5 επιπλέον εξισώσεις μεταφοράς για δισδιάστατες ροές και επτά επιπλέον εξισώσεις μεταφοράς για τρισδιάστατες ροές.

Σε πολλές περιπτώσεις, μοντέλα που βασίζονται στην υπόθεση Boussinesq αποδίδουν ικανοποιητικά, και έτσι οι επιπλέον υπολογιστικοί πόροι και ο χρόνος που απαιτεί τα μοντέλα RSM δεν δικαιολογούν την επιλογή τους. Ωστόσο, τα μοντέλα RSM είναι σαφώς καλύτερα σε εφαρμογές που η ανισοτροπία της τύρβης έχει κυρίαρχη επίδραση στη μέση ροή (mean flow).

## **1.7 Μοντέλο Spalart – Allmaras**

### **1.7.1 Εισαγωγή**

Το μοντέλο Spalart-Allmaras (SA) είναι ένα σχετικά απλό μοντέλο το οποίο επιλύει μία μόνο μοντελοποιημένη εξίσωση μεταφοράς για το κινηματικό τυρβώδες ιξώδες (turbulent or eddy viscosity). Έτσι, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίζεται μία κλίμακα μήκους που θα σχετίζεται με το πάχος του τοπικού διατμητικού στρώματος. Το μοντέλο σχεδιάστηκε ειδικά για εφαρμογές στην αεροδιαστημική που περιλαμβάνουν ροές οριακού στρώματος (wall-bounded flows), και έχει δείξει πολύ καλά αποτελέσματα για οριακά στρώματα που υπόκεινται σε μεγάλες κλίσεις (gradients) πίεσης. Τελευταία, έχει αρχίσει η χρήση του σε εφαρμογές στροβιλομηχανών.

Στην αρχική του μορφή, το μοντέλο Spalart-Allmaras είναι ένα μοντέλο χαμηλού αριθμού Reynolds που απαιτεί την κατάλληλη επίλυση της περιοχής του οριακού στρώματος που εξαρτάται από το ιξώδες (viscous-affected region). Ωστόσο, στον κώδικα FLUENT το μοντέλο έχει προγραμματιστεί ώστε να χρησιμοποιεί την

επιλογή “wall functions” όταν η ανάλυση του πλέγματος δεν είναι αρκετά πυκνή κοντά στα τοιχώματα. Αυτό το καθιστά ως την καλύτερη επιλογή για προσομοιώσεις με σχετικά αραιά πλέγματα. Επιπλέον, κοντά στα τοιχώματα οι κλίσεις των μεταφερόμενων μεταβλητών είναι πολύ μικρότερες από τις κλίσεις των μεταφερόμενων μεταβλητών στα μοντέλα  $k-\varepsilon$  και  $k-\omega$ . Αυτό καθιστά το μοντέλο λιγότερο ευαίσθητο σε αριθμητικό λάθος όταν χρησιμοποιούνται πλέγματα “non-layered” κοντά σε τοιχώματα.

Ωστόσο, το μοντέλο Spalart-Allmaras δε μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς σε όλα τα είδη πολύπλοκων ροών. Επιπλέον, τα μοντέλα μίας εξίσωσης δεν έχουν την ικανότητα να προσαρμόζονται ταχέως σε αλλαγές στην κλίμακα μήκους (length scale), όπως μπορεί να χρειαστεί όταν η ροή αλλάζει απότομα από ροή οριακού στρώματος σε ελεύθερη ροή με διάτμηση (free shear flow).

Στα μοντέλα τύρβης που βασίζονται στη μέθοδο Boussinesq, το κεντρικό ζήτημα είναι ο τρόπος υπολογισμού του τυρβώδους ιξώδους.

Η μεταφερόμενη μεταβλητή στο μοντέλο Spalart-Allmaras,  $\nu$ , είναι ταυτόσημη με το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες με εξαίρεση την περιοχή κοντά στα τοιχώματα που εξαρτάται από το ιξώδες. Η εξίσωση μεταφοράς για το  $\nu$  είναι η εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\bar{\nu}u_i) = G_\nu + \frac{1}{\sigma_\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\bar{\nu}) \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2}\rho \left( \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_\nu - S_\nu \quad (1.28)$$

όπου  $G_\nu$  είναι η παραγωγή τυρβώδους ιξώδους και  $Y_\nu$  είναι η καταστροφή (destruction) τυρβώδους ιξώδους που λαμβάνει χώρα στην περιοχή κοντά στα τοιχώματα λόγω των τοιχωμάτων και της ιξώδους σκέδασης (viscous scattering). Τα μεγέθη  $\sigma_\nu$  και  $C_{b2}$  είναι σταθερές, και ο όρος  $\nu$  είναι το μοριακό κινηματικό ιξώδες. Το  $S_\nu$  είναι ένας όρος που καθορίζεται από τον χρήστη. Καθώς η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$  δεν υπολογίζεται στο μοντέλο Spalart-Allmaras, ο τελευταίος όρος στην παραπάνω εξίσωση παραλείπεται κατά τον υπολογισμό των τάσεων Reynolds.

### 1.7.2 Μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους $\mu_t$

Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$ , υπολογίζεται ως εξής:

$$\mu_t = \rho\bar{\nu}f_{\nu 1} \quad (1.29)$$



όπου η συνάρτηση ιξώδους απόσβεσης  $f_{v1}$  δίνεται από τη σχέση:

$$f_{v1} = \frac{x^3}{x^3 + C_{v1}^3} \quad (1.30)$$

και

$$x = \frac{\bar{v}}{v} \quad (1.31)$$

Ο όρος παραγωγής τυρβώδους ιξώδους  $G_v$  μοντελοποιείται ως εξής:

$$G_v = C_{b1} \rho \bar{S} \bar{v} \quad (1.32)$$

Όπου:

$$\bar{S} = S + \frac{\bar{v}}{k^2 d^2} f_{v2} \quad (1.33)$$

και

$$f_{v2} = 1 - \frac{x}{1 - x f_{v1}} \quad (1.34)$$

Τα μεγέθη  $C_{b1}$  και  $\kappa$  είναι σταθερές,  $d$  είναι η απόσταση από το τοίχωμα και  $S$  είναι το μέτρο του τανυστή παραμόρφωσης. Από προεπιλογή στον κώδικα FLUENT, το  $S$  βασίζεται στο μέγεθος του στροβιλισμού (vorticity):

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (1.35)$$

όπου  $\Omega_{ij}$  είναι ο τανυστής περιστροφής και ορίζεται από τη σχέση :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.36)$$

Η αιτία για την προκαθορισμένη έκφραση του μεγέθους  $S$  είναι ότι για τις ροές συνοριακού στρώματος παρατηρείται τύρβη μόνο σε σημεία κοντά στα τοιχώματα όπου δημιουργείται στροβιλισμός. Ωστόσο, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της μέσης παραμόρφωσης (mean strain) στην παραγωγή τύρβης, και έτσι έχει προταθεί μια τροποποίηση η οποία και ενσωματώθηκε στον κώδικα FLUENT. Η τροποποίηση αυτή συνδυάζει τα μέτρα των τανυστών περιστροφής και παραμόρφωσης στον ορισμό του  $S$ :

$$S = |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|) \quad (1.37)$$

όπου:

$$C_{prod}, |\Omega_{ij}| = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, |S_{ij}| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

με τον μέσο ρυθμό παραμόρφωσης  $S_{ij}$  να ορίζεται ως εξής:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.38)$$

Το γεγονός ότι συμπεριλαμβάνονται οι τανυστές περιστροφής και παραμόρφωσης ευθύνεται για τις επιπτώσεις της στροβιλότητας στην τύρβη, και επίσης προκαλεί τη μείωση της παραγωγής του τυρβώδους ιξώδους σε περιοχές όπου το μέτρο του στροβιλισμού υπερβαίνει αυτό του ρυθμού παραμόρφωσης.

### 1.7.3 Μοντελοποίηση καταστροφής τυρβώδους ιξώδους

Ο όρος καταστροφής του τυρβώδους ιξώδους μοντελοποιείται ως εξής:

$$Y_v = C_{w1} \rho f_w \left( \frac{\bar{v}}{d} \right)^2 \quad (1.39)$$

όπου:

$$f_w = g \left[ \frac{1+C_{w3}^6}{g^6+C_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad (1.40)$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad (1.41)$$

$$r = \frac{\bar{v}}{\bar{s}k^2d^2} \quad (1.42)$$

Οι όροι  $C_{wb}$ ,  $C_{w2}$  και  $C_{w3}$  είναι σταθερές και ο όρος  $\bar{S}$  δίνεται από την εξίσωση 1.33. Σημειώνεται ότι η τροποποίηση που περιγράφεται παραπάνω για να συμπεριλάβει τις επιπτώσεις της μέσης παραμόρφωσης στο  $S$  θα επηρεάσει επίσης την τιμή  $\bar{S}$  που χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το  $r$ .

#### 1.7.4 Σταθερές του μοντέλου

Οι σταθερές του μοντέλου,  $C_M$ ,  $C_{b2}$ ,  $C_{b3}$ ,  $C_{wb}$ ,  $C_{w2}$ ,  $C_{w3}$  και  $k$ , έχουν τις ακόλουθες τιμές:

$$C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \bar{\sigma}_v = \frac{2}{3}, \quad C_{v1} = 7.1$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\bar{\sigma}_v}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0, \quad k = 0.4187$$

#### 1.7.5 Συνοριακές συνθήκες

Στα τοιχώματα, το τροποποιημένο τυρβώδες κινηματικό ιξώδες  $\nu$  τίθεται ίσο με 0. Στο ιξώδες υπόστρωμα, η ταχύτητα, αδιαστατοποιημένη με την ταχύτητα διάτμησης (shear velocity -  $u_r$ ) μπορεί να δοθεί από την τοπική τιμή της συντεταγμένης  $y^+ = u_r y / \nu$ :

$$\frac{u}{u_r} = f\left(\frac{\rho u_r y}{\mu}\right) \quad (1.43)$$

Αν το πλέγμα είναι αρκετά αραιό για να μπορεί να περιλάβει το στρωτό υπόστρωμα, θεωρείται ότι το κέντρο των κελιών του πλέγματος ακριβώς δίπλα στο

τοίχωμα βρίσκεται στη λογαριθμική περιοχή του οριακού στρώματος, και χρησιμοποιείται ο νόμος του τοιχώματος (wall law):

$$\frac{u}{u_r} = \frac{1}{k} \ln E \left( \frac{\rho u_r y}{\mu} \right) \quad (1.44)$$

Στις παραπάνω δύο σχέσεις,  $u$  είναι η ταχύτητα παράλληλη στο τοίχωμα,  $u_r$  είναι η ταχύτητα διάτμησης,  $y$  είναι η απόσταση από το τοίχωμα,  $k$  είναι η σταθερά von Karman (0.4187) και  $E = 9.793$ .

## 1.8 Μοντέλο $k - \varepsilon$

### 1.8.1 Εισαγωγή

Τα απλούστερα ολοκληρωμένα μοντέλα τύρβης είναι μοντέλα δύο εξισώσεων, στα οποία η επίλυση δύο ξεχωριστών εξισώσεων μεταφοράς επιτρέπει τον ανεξάρτητο προσδιορισμό της τυρβώδους ταχύτητας και των κλιμακών μήκους (length scales). Το μοντέλο  $k - \varepsilon$  χαρακτηρίζεται από οικονομία στην απαιτούμενη υπολογιστική ισχύ, και ικανοποιητική ακρίβεια για ένα μεγάλο εύρος τυρβωδών ροών. Είναι ένα ημιεμπειρικό μοντέλο που βασίζεται σε μοντελοποιημένες εξισώσεις μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$  και το ρυθμό σκέδασης  $\varepsilon$ . Στο πλαίσιο του μοντέλου  $k - \varepsilon$  θεωρείται ότι η ροή είναι πλήρως τυρβώδης και οι επιπτώσεις του μοριακού ιξώδους αμελητέες. Το μοντέλο  $k - \varepsilon$  είναι επομένως ακριβές μόνο για πλήρως τυρβώδεις ροές (fully turbulent flows).

### 1.8.2 Εξισώσεις μεταφοράς

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$  και ο ρυθμός σκέδασης  $\varepsilon$  λαμβάνονται από τις παρακάτω εξισώσεις μεταφοράς:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M - S_k \quad (1.45)$$

και:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (1.46)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις ο όρος  $G_k$  αντιπροσωπεύει την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των κλίσεων της μέσης ταχύτητας (mean velocity gradients) ενώ ο όρος  $G_b$  την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω άνωσης (buoyancy). Ο όρος  $Y_M$  αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά της διακυμαινόμενης διαστολής (dilatation) στη συμπιεστή τύρβη στον ολικό ρυθμό σκέδασης. Τα μεγέθη  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$  και  $C_{3\varepsilon}$  είναι σταθερές, και οι όροι  $\sigma_k$  και  $\sigma_\varepsilon$  είναι οι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl για τα  $k$  και  $\varepsilon$  αντίστοιχα. Τα μεγέθη  $S_k$  και  $S_\varepsilon$  είναι όροι που προσδιορίζονται από τον χρήστη.

### 1.8.3 Μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους

Το τυρβώδες ιξώδες ή ιξώδες τυρβωδών δινών  $\mu_t$  υπολογίζεται συνδυάζοντας τα  $k$  και  $\varepsilon$  σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.47)$$

όπου  $C_\mu$  είναι σταθερά του μοντέλου.

### 1.8.4 Σταθερές μοντέλου

Οι σταθερές του μοντέλου  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{2\varepsilon}$ ,  $C_{3\varepsilon}$ ,  $\sigma_k$  και  $\sigma_\varepsilon$  έχουν τις ακόλουθες προκαθορισμένες τιμές:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, \quad C_{2\varepsilon} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Αυτές οι τιμές έχουν καθοριστεί από πειράματα με αέρα και νερό σε θεμελιώδεις τυρβώδεις ροές με διάτμηση, και έχει διαπιστωθεί ότι λειτουργούν πολύ

καλά για ένα ευρύ φάσμα ροών οριακού στρώματος και ελεύθερων ροών με διάτμηση.

### 1.8.5 Μοντελοποίηση παραγωγής τύρβης

Ο όρος  $G_k$  που αναπαριστά την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας, μοντελοποιείται με τον ίδιο τρόπο για το «κλασσικό» μοντέλο  $k - \varepsilon$ , και για τις παραλλαγές του “RNG”, και “realizable”. Από την ακριβή εξίσωση για τη μεταφορά του  $k$ , ο όρος της παραγωγής μπορεί να οριστεί ως:

$$G_k = -\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.48)$$

Για τον υπολογισμό του  $G_k$  κατά τρόπο σύμφωνο με την υπόθεση Boussinesq ισχύει η εξίσωση:

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (1.49)$$

όπου  $S$  είναι το μέτρο του τανυστή του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης:

$$S_{ij} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (1.50)$$

## 1.9 Μοντέλο $k - \omega$

### 1.9.1 Εισαγωγή

Το μοντέλο  $k - \omega$  είναι ένα εμπειρικό μοντέλο που βασίζεται σε μοντελοποιημένες εξισώσεις μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$  και τον ειδικό ρυθμό σκέδασης  $\omega$ , που μπορεί να θεωρηθεί ως ο λόγος του  $\varepsilon$  προς το  $k$ .

Το μοντέλο  $k - \omega$ , μετά την εισαγωγή του, έχει τροποποιηθεί και έχουν προστεθεί όροι παραγωγής (production terms) στις εξισώσεις του  $k$  και του  $\omega$  που έχουν βελτιώσει την ακρίβεια του μοντέλου να προβλέπει ελεύθερες ροές με διάτμηση.

### 1.9.2 Εξισώσεις μεταφοράς

Η τυρβώδης κινητική ενέργεια  $k$  και ο ειδικός ρυθμός διάχυσης  $\omega$  λαμβάνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις μεταφοράς:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k - Y_k + S_k \quad (1.51)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + S_\omega \quad (1.52)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις ο όρος  $G_k$  αντιπροσωπεύει την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των κλίσεων της μέσης ταχύτητας, ενώ ο όρος  $G_\omega$  την παραγωγή του  $\omega$ . Τα  $\Gamma_k$  και  $\Gamma_\omega$  αντιπροσωπεύουν την αποτελεσματική διάχυση (effective diffusivity) των  $k$  και  $\omega$ , αντίστοιχα. Τα  $Y_k$  και  $Y_\omega$  αντιπροσωπεύουν τη σκέδαση των  $k$  και  $\omega$ , αντίστοιχα, λόγω της τύρβης. Τα  $S_k$  και  $S_\omega$  είναι όροι που ορίζονται από τον χρήστη.

### 1.9.3 Μοντελοποίηση ενεργούς διάχυσης

Οι ενεργοί συντελεστές διάχυσης για το μοντέλο  $k - \omega$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Gamma_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \quad (1.53)$$

$$\Gamma_{\omega} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega}} \quad (1.54)$$

όπου  $\sigma_k$  και  $\sigma_{\omega}$  είναι οι τυρβώδεις αριθμοί Prandtl για τα μεγέθη  $k$  και  $\omega$ , αντίστοιχα. Το τυρβώδες ιξώδες  $\mu_t$  υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση, ως συνάρτηση των  $k$  και  $\omega$ .

$$\mu_t = a^* \frac{\rho k}{\omega} \quad (1.55)$$

- Διόρθωση χαμηλού αριθμού Reynolds

Ο συντελεστής  $a^*$  επηρεάζει το τυρβώδες ιξώδες προκαλώντας μια διόρθωση για την περίπτωση χαμηλού αριθμού Reynolds, και δίνεται από τη σχέση:

$$a^* = a_{\infty}^* \left( \frac{a_0^* + \frac{Re_t}{R_k}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}} \right) \quad (1.56)$$

όπου:

$$Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (1.57)$$

$$R_k = 6 \quad (1.58)$$

$$a_0^* = \frac{\beta_i}{3} \quad (1.59)$$

$$\beta_i = 0.072 \quad (1.60)$$

Για την περίπτωση υψηλού αριθμού Reynolds στο μοντέλο  $k - \omega$  ισχύει  $a_0^* = a_{\infty}^* = 1$ .

#### 1.9.4 Μοντελοποίηση παραγωγής τύρβης



- Παραγωγή του  $k$

Ο όρος  $G_k$  αντιπροσωπεύει την παραγωγή της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$ . Από την ακριβή εξίσωση για τη μεταφορά του  $k$ , ο όρος αυτός μπορεί να οριστεί ως:

$$G_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.61)$$

ή με τρόπο σύμφωνο με την υπόθεση Boussinesq:

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (1.62)$$

όπου  $S$  είναι το μέτρο του τανυστή του μέσου ρυθμού παραμόρφωσης, που ορίζεται ακριβώς όπως στο μοντέλο  $k - \epsilon$  (εξίσωση 1.50).

- Παραγωγή του  $\omega$

Η παραγωγή του  $\omega$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$G_\omega = \alpha \frac{\omega}{k} G_k \quad (1.63)$$

όπου ο όρος  $G_k$  δίνεται από την εξίσωση (1.61).

Ο συντελεστής  $\alpha$  δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{a_\infty}{a^*} \left( \frac{a_0 + \frac{Re_t}{R_\omega}}{1 + \frac{Re_t}{R_\omega}} \right) \quad (1.64)$$

όπου  $R_\omega = 2.95$ . Οι όροι  $a^*$  και  $Re_t$ , δίνονται από τις εξισώσεις (1.56) και (1.57), αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι για τη μορφή υψηλού αριθμού Reynolds του μοντέλου  $k - \omega$  ισχύει  $\alpha = a_\infty = 1$ .

### 1.9.5 Μοντελοποίηση όρων σκέδασης

- Σκέδαση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$ :

Η σκέδαση του  $k$  δίνεται από τη σχέση:

$$Y_k = \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega \quad (1.65)$$

Όπου:

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & x_k \leq 0 \\ \frac{1+680x_k^2}{1+400x_k^2} & x_k > 0 \end{cases} \quad (1.66)$$

$$x_k = \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (1.67)$$

Και

$$\beta^* = \beta_i^* [1 + \zeta^* F(M_t)] \quad (1.68)$$

$$\beta_i^* = \beta_{\infty}^* \left( \frac{\frac{4}{15} + \left(\frac{Re_t}{R_{\beta}}\right)^4}{1 + \left(\frac{Re_t}{R_{\beta}}\right)^4} \right) \quad (1.69)$$

$$\zeta^* = 1.5 \quad (1.70)$$

$$R_{\beta} = 8 \quad (1.71)$$

$$\beta_{\infty}^* = 0.09 \quad (1.72)$$

Ο όρος  $Re_t$ , δίνεται από την εξίσωση 1.57.

- Διάχυση του  $\omega$ :

Η διάχυση του  $\omega$  δίνεται από τη σχέση

$$Y_\omega = \rho \beta f_\beta \omega^2 \quad (1.73)$$

όπου:

$$f_\beta = \frac{1+70x_\omega}{1+80x_\omega} \quad (1.74)$$

$$x_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right| \quad (1.75)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.76)$$

Ο ταυστής του ρυθμού παραμόρφωσης  $S_{ij}$  ορίζεται από την εξίσωση 1.38:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Επίσης ισχύει:

$$\beta = \beta_i \left[ 1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta^* F(M_t) \right] \quad (1.77)$$

όπου οι όροι  $\beta_i^*$  και  $F(M_t)$  ορίζονται από τις εξισώσεις 1.69 και 1.78 αντίστοιχα.

- Διόρθωση Συμπιεστότητας

Η συνάρτηση συμπιεστότητας (compressibility function)  $F(M_t)$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F(M_t) = \begin{cases} 0 & M_t \leq M_{t0} \\ M_t^2 - M_{t0}^2 & M_t > M_{t0} \end{cases} \quad (1.78)$$

όπου

$$M_t^2 = \frac{2k}{a^2} \quad (1.79)$$

$$M_{t0} = 0.25 \quad (1.80)$$

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.81)$$

Για τη μορφή υψηλού αριθμού Reynolds του μοντέλου k - ω ισχύει  $\beta_i^* = \beta_\infty^*$ . Για την ασυμπίεστη μορφή ισχύει  $\beta^* = \beta_i^*$ .

### 1.9.6 Σταθερές μοντέλου

Οι σταθερές του μοντέλου παίρνουν τις ακόλουθες τιμές:

$$a_\infty^* = 1, \quad a_\infty = 0.52, \quad a_0 = \frac{1}{9}, \quad \beta_\infty^* = 0.09, \quad \beta_i = 0.072, \quad R_\beta = 8$$

$$R_k = 6, \quad R_\omega = 2.95, \quad \zeta^* = 1.5, \quad M_{t0} = 0.25, \quad \sigma_k = 2.0, \quad \sigma_\omega = 2.0$$

### 1.9.7 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες για την εξίσωση του k στα μοντέλα k - ω ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως στην εξίσωση του k στα μοντέλα k - ε, όταν χρησιμοποιείται η επιλογή του κώδικα FLUENT “enhanced wall treatments”. Δηλαδή, όλες οι συνοριακές συνθήκες για πλέγματα με αραιή πυκνωση κοντά στα τοιχώματα θα χρησιμοποιήσουν την επιλογή “wall function”, ενώ για πυκνότερα πλέγματα θα εφαρμοστούν οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες χαμηλού αριθμού Reynolds.

Στον κώδικα FLUENT, η τιμή του ω στα τοιχώματα ορίζεται ως:

$$\omega_\omega = \frac{\rho(u^*)^2}{\mu} \omega^+ \quad (1.82)$$

Η ασυμπτωτική τιμή του  $\omega^+$  στο στρωτό υπόστρωμα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega^+ = \min\left(\omega_\omega^+, \frac{6}{\beta_i(y^+)^2}\right) \quad (1.83)$$

όπου:

$$\omega_\omega^+ = \begin{cases} \left(\frac{50}{k_s^+}\right)^2 & k_s^+ < 25 \\ \frac{100}{k_s^+} & k_s^+ \geq 25 \end{cases} \quad (1.84)$$

$$k_s^+ = \max\left(1.0, \frac{\rho k_s u^*}{\mu}\right) \quad (1.85)$$

όπου  $k_s$  ο βαθμός τραχύτητας.

Στη λογαριθμική περιοχή, η τιμή του  $\omega^+$  δίνεται από τη σχέση:

$$\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{\beta_\infty^*}} \frac{du_{turb}^+}{dy^+} \quad (1.86)$$

που οδηγεί στην τιμή του  $\omega$  στο κελί του πλέγματος ακριβώς δίπλα στο τοίχωμα (wall cell) να λαμβάνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\omega = \frac{u^*}{\sqrt{\beta_\infty^*} k y} \quad (1.87)$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ένα κελί του πλέγματος ακριβώς δίπλα σε τοίχωμα τοποθετηθεί στη μεταβατική περιοχή (buffer region), ο κώδικας FLUENT θα υπολογίσει το  $\omega^+$  ως συνάρτηση των τιμών του λογαριθμικού και στρωτού υποστρώματος (laminar sublayer).

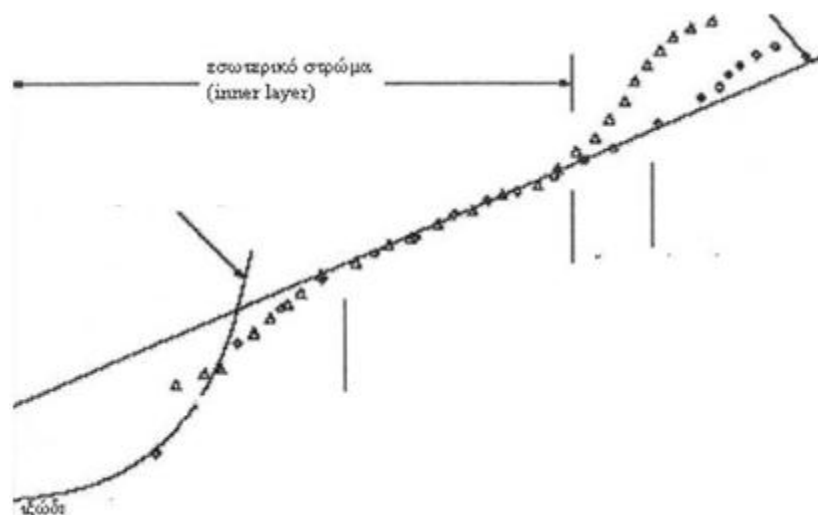
## 1.10 Προσδιορισμός πλέγματος προσομοίωσης τυρβώδους ροής

### 1.10.1 Εισαγωγή

Οι τυρβώδεις ροές επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από την παρουσία των τοιχωμάτων. Το πεδίο μέσης ταχύτητας επηρεάζεται από τη συνθήκη μη ολίσθησης (no-slip condition) η οποία πρέπει να ικανοποιείται στο τοίχωμα.

Ωστόσο, η τύρβη μεταβάλλεται από την παρουσία των τοιχωμάτων και με άλλους τρόπους. Πολύ κοντά στο τοίχωμα, η ιξώδης απόσβεση (viscous damping) ελαττώνει τις διακυμάνσεις της εφαπτομενικής ταχύτητας. Η σωστή μοντελοποίηση κοντά στα τοιχώματα είναι πολύ σημαντική καθώς τα τοιχώματα είναι η κύρια πηγή στροβιλισμού και τύρβης. Στην περιοχή κοντά στα τοιχώματα, οι μεταβλητές της λύσης παρουσιάζουν μεγάλες κλίσεις και η μεταφορά ορμής και άλλων βαθμωτών ποσοτήτων είναι πολύ έντονη. Επομένως η ακριβής μοντελοποίηση της ροής στην περιοχή κοντά σε τοιχώματα καθορίζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων σε ροές οριακού στρώματος. Στην περιοχή κοντά στο τοίχωμα (near wall region), η τύρβη αυξάνεται με ταχείς ρυθμούς από την παραγωγή τυρβώδους κινητικής ενέργειας λόγω των μεγάλων κλίσεων στη μέση ταχύτητα.

Η περιοχή κοντά στα τοιχώματα μπορεί να διαιρεθεί σε τρία στρώματα όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 1.3.



**Σχήμα 1.3** Διαχωρισμός της περιοχής κοντά στο τοίχωμα (Near - Wall Region).

$$y^+ \equiv \frac{\rho u_T y}{\mu} \text{ και } U_T = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \text{ η ταχύτητα τριβής (friction velocity).}$$

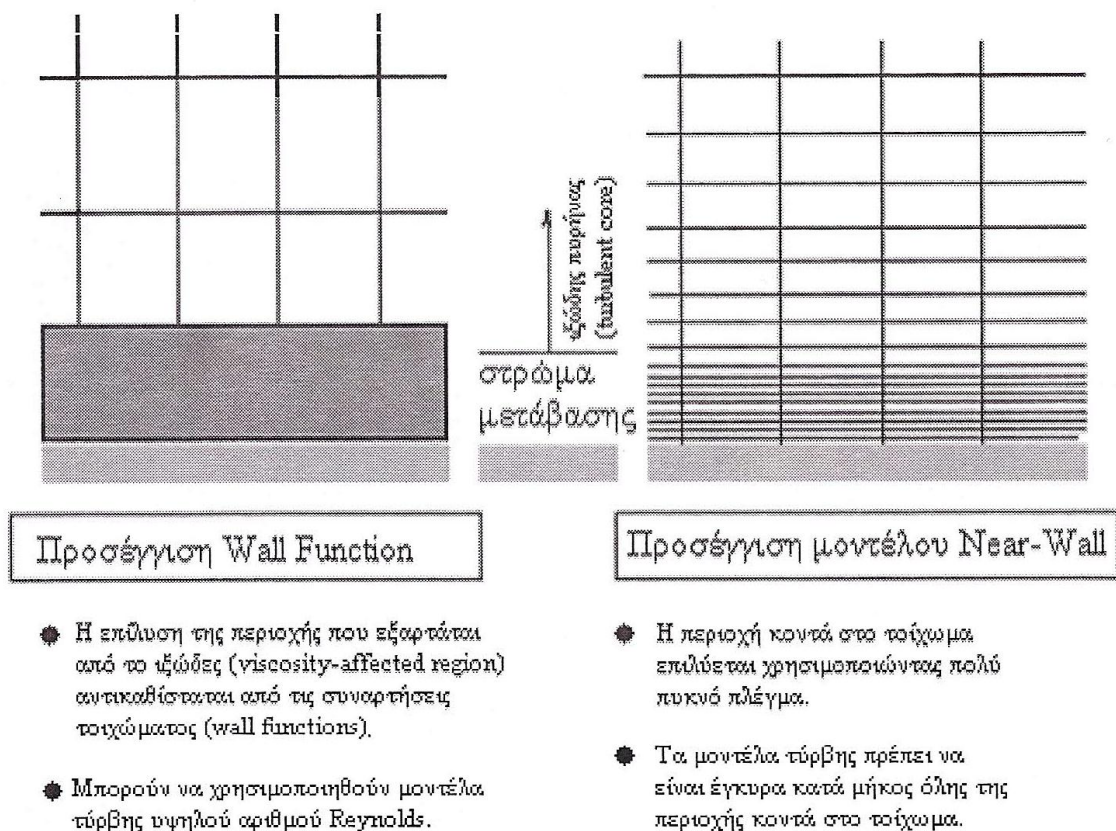
Στο εσωτερικό στρώμα που ονομάζεται και ιξώδες υπόστρωμα (viscous sublayer), η ροή είναι σχεδόν στρωτή και το μοριακό ιξώδες έχει κυρίαρχο ρόλο στη μεταφορά ορμής, θερμότητας ή μάζας. Στο εξωτερικό στρώμα που ονομάζεται και πλήρως τυρβώδες υπόστρωμα (fully-turbulent sublayer), η τύρβη είναι αυτή που καθορίζει τα μεγέθη της μέσης ροής. Τέλος, υπάρχει και μία ενδιάμεση περιοχή μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος και του πλήρως τυρβώδους υποστρώματος όπου οι επιπτώσεις του μοριακού ιξώδους και της τύρβης είναι εξίσου σημαντικές. Το στρώμα αυτό ονομάζεται στρώμα μετάβασης (buffer layer) ή περιοχή μίξης (blending region). Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει το διαχωρισμό της περιοχής κοντά στο τοίχωμα σε ημιλογαριθμικές συντεταγμένες (semi-log coordinates).

### 1.10.2 Σύγκριση επιλογής “Wall Functions” και μοντέλου “Near-Wall”

Υπάρχουν δύο τρόποι για τη μοντελοποίηση της περιοχής κοντά στα τοιχώματα. Με τον πρώτο τρόπο η εσωτερική περιοχή που επηρεάζεται από το ιξώδες (ιξώδες υπόστρωμα και στρώμα μετάβασης) δεν επιλύεται. Χρησιμοποιούνται εμπειρικές συναρτήσεις (wall functions) ώστε να ενώσουν την περιοχή που επηρεάζεται από το ιξώδες μεταξύ του τοιχώματος και της πλήρως τυρβώδους περιοχής. Η χρήση της επιλογής wall functions προλαμβάνει την ανάγκη να τροποποιηθούν τα μοντέλα τύρβης έτσι ώστε να μοντελοποιήσουν με ακρίβεια την περιοχή κοντά στα τοιχώματα χρησιμοποιώντας πολύ πυκνό πλέγμα, κάτι που θα αύξανε τον απαιτούμενο χρόνο και τους απαιτούμενους υπολογιστικούς πόρους. Στη δεύτερη προσέγγιση (near-wall modeling) πρέπει να χρησιμοποιηθεί πολύ πυκνό πλέγμα κοντά στα τοιχώματα, ώστε να επιλυθεί με ακρίβεια η περιοχή που επηρεάζεται από το ιξώδες, συμπεριλαμβανομένου και του ιξώδους υποστρώματος. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις απεικονίζονται παρακάτω.

Στις περισσότερες ροές υψηλού αριθμού Reynolds η επιλογή Wall Function εξοικονομεί υπολογιστικούς πόρους επειδή δεν επιλύει την περιοχή κοντά στα τοιχώματα που επηρεάζεται από το ιξώδες, χωρίς όμως ταυτόχρονα να μειώνει σημαντικά την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Επομένως, με τις συναρτήσεις τοιχώματος δε χρειάζεται πύκνωση του πλέγματος στην περιοχή κοντά στα

τοιχώματα. Επιτυχείς υπολογισμοί των τυρβωδών ροών απαιτούν προσεκτικό σχεδιασμό του υπολογιστικού πλέγματος. Εφόσον η τύρβη παίζει κυρίαρχο ρόλο στη μεταφορά της μέσης ορμής και άλλων παραμέτρων, αν χρειάζεται να επιτευχθεί υψηλή ακρίβεια πρέπει να εξακριβωθεί ότι επιλύεται κατάλληλα το ροϊκό πεδίο σε πολύπλοκες τυρβώδεις ροές. Λόγω της ισχυρής αλληλεπίδρασης της μέσης ροής (mean flow) και της τύρβης, τα αριθμητικά αποτελέσματα για τυρβώδεις ροές επηρεάζονται περισσότερο από την κατασκευή του πλέγματος σε σύγκριση με τις στρωτές ροές. Πρέπει επομένως οι περιοχές όπου η μέση ροή αλλάζει και υπάρχουν διατμητικά στρώματα με μεγάλο μέσο ρυθμό παραμόρφωσης να επιλυθούν με πλέγματα κατάλληλης πυκνότητας.



**Σχήμα 1.4** Οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της περιοχής κοντά στο τοίχωμα.

Το πλέγμα κοντά στα τοιχώματα μπορεί να ελεγχθεί με γραφική απεικόνιση των τιμών  $y^+$ ,  $y^*$ , και  $Re_y$ , που είναι διαθέσιμες στα πάνελ “post-processing” του κώδικα FLUENT.



Οι τιμές  $y^+$ ,  $y^*$ , και  $Re_y$  δεν είναι προκαθορισμένες γεωμετρικές ποσότητες, αλλά εξαρτώνται από τη λύση. Για παράδειγμα, όταν πυκνώσει το πλέγμα κατά έναν παράγοντα δύο (ελαττώνοντας έτσι την απόσταση από το τοίχωμα στο μισό), το νέο  $y^+$  δε γίνεται απαραίτητα το μισό από το  $y^+$  του αρχικού πλέγματος, καθώς εξαρτάται και από άλλους παράγοντες.

### 1.10.3 Επιλογή Standard Wall Functions

Η επιλογή Standard Wall Functions βασίζεται στην πρόταση των Launder και Spalding, και έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε βιομηχανικές ροές.

-Ορμή:

Ο νόμος του τοιχώματος (wall law) για τη μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$U^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*) \quad (1.88)$$

Όπου:

$$U^* \geq \equiv \frac{U_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.89)$$

$$y^* \geq \equiv \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu} \quad (1.90)$$

όπου  $\kappa = 0.4187$  είναι η σταθερά von Karman,  $E = 9.793$  εμπειρική σταθερά,  $U_p$  η μέση ταχύτητα του ρευστού στο σημείο P,  $k_p$  η τυρβώδης κινητική ενέργεια στο σημείο P,  $y_p$  η απόσταση μεταξύ του σημείου P και του τοιχώματος και  $\mu$  το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.

Ο νόμος λογαριθμικής κατανομής για τη μέση ταχύτητα ισχύει για  $30 < y^* < 300$ . Στον κώδικα FLUENT, ο νόμος λογαριθμικής κατανομής χρησιμοποιείται όταν  $y^* > 11.225$ . Όταν για το πλέγμα ισχύει  $y^* < 11.225$  στα κελιά του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα, ο κώδικας FLUENT χρησιμοποιεί τη σχέση για την ταχύτητα μέσα στο ιξώδες υπόστρωμα, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$U^* = y^* \quad (1.91)$$

Στον κώδικα FLUENT, ο νόμος του τοιχώματος για τη μέση ταχύτητα και θερμοκρασία βασίζεται στη μονάδα τοιχώματος  $y^*$  αντί για τη μονάδα  $y^+ \left( \equiv \frac{\rho u_{\tau} y}{\mu} \right)$ . Τα δύο μεγέθη είναι περίπου ίσα σε τυρβώδη οριακά στρώματα σε ισορροπία, (equilibrium turbulent boundary layers).

-Τύρβη:

Στα μοντέλα k-ε, η εξίσωση k επιλύεται σε όλη το υπολογιστικό πεδίο, συμπεριλαμβανομένων των κελιών του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα. Η οριακή συνθήκη για το k στα τοιχώματα είναι:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (1.92)$$

όπου n είναι η τοπική συντεταγμένη στην διεύθυνση κάθετα προς το τοίχωμα. Η παραγωγή κινητικής ενέργειας  $G_k$  και ο ρυθμός διάχυσης ε στα κελιά δίπλα στο τοίχωμα είναι οι όροι πηγής (source terms) στην εξίσωση του k. Υπολογίζονται με βάση την υπόθεση τοπικής ισορροπίας, στο πλαίσιο της οποίας η παραγωγή του k και ο ρυθμός σκέδασης ε θεωρούνται ίσοι κοντά στο τοίχωμα. Η παραγωγή του όρου k υπολογίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$G_k \approx \tau_{\omega} \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_{\omega} \frac{\tau_{\omega}}{\kappa \rho C_{\mu}^{1/4} k_p^{1/2} y_p} \quad (1.93)$$

και ο όρος ε υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad (1.94)$$

Η εξίσωση  $\varepsilon$  δεν επιλύεται για τα κελιά κοντά στα τοιχώματα, αλλά υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση 1.94.

Σημειώνεται ότι οι οριακές συνθήκες για τις μεταβλητές της λύσης, όπως η μέση ταχύτητα, η θερμοκρασία και τα μεγέθη  $k$  και  $\varepsilon$  λαμβάνονται υπόψη από την επιλογή “wall functions”.

Οι συναρτήσεις τοιχώματος λειτουργούν ικανοποιητικά για ένα μεγάλο εύρος ροών οριακού στρώματος. Ωστόσο, είναι λιγότερο αξιόπιστες όταν οι συνθήκες της ροής αποκλίνουν αρκετά από τις ιδανικές συνθήκες οι οποίες έχουν υποθεθεί. Οι υποθέσεις σταθερής διάτμησης (constant-shear) και τοπικής ισορροπίας είναι αυτές κυρίως που περιορίζουν τις συναρτήσεις τοιχώματος από το να χρησιμοποιούνται σε οποιαδήποτε εφαρμογή. Αντίστοιχα, όταν η ροή κοντά στα τοιχώματα υπόκειται σε έντονες κλίσεις πίεσης και όταν οι ροές χαρακτηρίζονται από σημαντική αστάθεια, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων μειώνεται αισθητά. Ωστόσο, ο κώδικας FLUENT παρέχει ως επιπλέον επιλογή τη δυνατότητα χρήσης συναρτήσεων για καταστάσεις εκτός της ισορροπίας (non-equilibrium wall functions), οι οποίες βελτιώνουν τα αποτελέσματα στις παραπάνω περιπτώσεις.

#### 1.10.4 Επιλογή “Enhanced Wall Treatment”

Η επιλογή του κώδικα FLUENT “Enhanced Wall Treatment” είναι μια μέθοδος μοντελοποίησης η οποία χρησιμοποιείται όταν το πλέγμα κοντά στα τοιχώματα είναι αρκετά πυκνό ώστε να μπορεί να επιλύσει το βαθμωτό υπόστρωμα (συνήθως  $y^+ \approx 1$ ). Ωστόσο, ο περιορισμός ότι το πλέγμα κοντά στα τοιχώματα πρέπει να είναι ικανοποιητικά πυκνό μπορεί να αυξήσει υπερβολικά τους απαιτούμενους υπολογιστικούς πόρους. Η ιδανική περίπτωση είναι μια διάταξη του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα η οποία θα μπορεί να χρησιμοποιείται εξίσου καλά με αραιά πλέγματα και πυκνά πλέγματα. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να μην υπάρχει μεγάλο σφάλμα για μεσαίας πύκνωσης πλέγματα, δηλαδή πλέγματα που είναι πολύ πυκνά ώστε το κέντρο του κελιών ακριβώς δίπλα στα τοιχώματα να βρίσκεται εντός της πλήρως τυρβώδους περιοχής, αλλά επίσης αρκετά αραιά ώστε το υπόστρωμα να επιλύεται με

ικανοποιητική ακρίβεια. Για να επιτευχθεί η ιδανική περίπτωση πλέγματος, ο κώδικας FLUENT μπορεί να συνδυάσει τα μοντέλα τύρβης δύο εξισώσεων με την επιλογή “Enhanced Wall Treatment”.

Όταν χρησιμοποιείται η επιλογή “Enhanced Wall Treatment” με την πρόθεση να επιλυθεί το στρωτό υπόστρωμα, το μέγεθος  $y^+$  στο κελί του πλέγματος ακριβώς δίπλα στο τοίχωμα θα πρέπει να είναι της τάξης του  $y^+ = 1$ . Ωστόσο, ένα υψηλότερο  $y^+$  είναι αποδεκτό εφόσον βρίσκεται εντός του ιξώδους υποστρώματος ( $y^+ < 4 \sim 5$ ).

Επίσης, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 10 κελιά εντός της περιοχής κοντά στο τοίχωμα που εξαρτάται από το ιξώδες ( $Re_y < 200$ ), ώστε να μπορούν να επιλυθούν η μέση ταχύτητα και τα μεγέθη της τύρβης στην περιοχή αυτή.

### **1.10.5 Δημιουργία πλέγματος κοντά στα τοιχώματα για επιλογή “Wall Functions”**

Ο νόμος της λογαριθμικής κατανομής (log-law) ο οποίος είναι έγκυρος για οριακά στρώματα ισορροπίας και πλήρως αναπτυγμένες ροές, παρέχει άνω και κάτω όρια στην αποδεκτή απόσταση μεταξύ του κέντρου του κελιού και του τοιχώματος για τα κελιά ακριβώς δίπλα στα τοιχώματα. Η απόσταση συνήθως υπολογίζεται στη μονάδα του τοιχώματος,  $y^+ \left( \equiv \frac{\rho u_{\tau} y}{\mu} \right)$  ή  $y^*$ .

Τα μεγέθη  $y^+$  και  $y^*$  έχουν συγκρινόμενες τιμές όταν το πρώτο κελί τοποθετείται στο λογαριθμικό στρώμα.

Για την επιλογή “standard” ή “non-equilibrium” wall functions, το κέντρο κάθε κελιού που βρίσκεται ακριβώς δίπλα στα τοιχώματα πρέπει να βρίσκεται εντός του στρώματος που ισχύει ο νόμος λογαριθμικής κατανομής,  $30 < y^+ < 300$ . Μια τιμή  $y^+$  κοντά στο χαμηλότερο όριο ( $y^+ \approx 30$ ) είναι προτιμότερη.

Παρόλο που ο κώδικας FLUENT χρησιμοποιεί τον γραμμικό νόμο όταν  $y^* < 11.225$ , η χρησιμοποίηση ενός εξαιρετικά πυκνού πλέγματος κοντά στα τοιχώματα πρέπει να αποφεύγεται, διότι οι συναρτήσεις τοιχώματος δεν θα είναι πλέον στο ιξώδες υπόστρωμα.

Το πλέγμα πρέπει να κατασκευάζεται είτε αρκετά αραιό είτε αρκετά πυκνό ώστε να αποτρέπει τα κελιά κοντά στα τοιχώματα από το να τοποθετούνται στο ενδιάμεσο υπόστρωμα (buffer layer)  $y^+ = 5 \sim 30$ .

Το άνω όριο του λογαριθμικού στρώματος εξαρτάται κυρίως από τις κλίσεις πίεσης και τον αριθμό Reynolds. Όσο ο αριθμός Reynolds αυξάνει, το άνω όριο τείνει επίσης να αυξάνει. Οι τιμές του  $y^+$  που είναι αρκετά μεγάλες δεν είναι επιθυμητές επειδή ο ομόρρους (wake) γίνεται αρκετά ευρύς πάνω από το λογαριθμικό στρώμα.

Τέλος, είναι σημαντικό να υπάρχουν τουλάχιστον μερικά κελιά εντός του οριακού στρώματος.

#### **1.10.6 Δημιουργία πλέγματος κοντά στα τοιχώματα για μοντέλο Spalart-Allmaras**

Το μοντέλο Spalart-Allmaras στην πλήρη του εφαρμογή είναι ένα μοντέλο χαμηλού αριθμού Reynolds. Αυτό σημαίνει ότι είναι σχεδιασμένο να χρησιμοποιείται με πλέγματα που επιλύουν την περιοχή που εξαρτάται από το ιξώδες και οι συναρτήσεις απόσβεσης (damping functions) έχουν εισαχθεί στο μοντέλο με σκοπό να προσομοιώνουν κατάλληλα το τυρβώδες ιξώδες στο ιξώδες υπόστρωμα. Επομένως, για να ληφθεί το μέγιστο κέρδος από τη χρήση του μοντέλου Spalart-Allmaras, η πύκνωση του πλέγματος κοντά στα τοιχώματα πρέπει να γίνει όπως περιγράφηκε παραπάνω για την επιλογή “enhanced wall treatment”.

Ωστόσο, οι οριακές συνθήκες για το μοντέλο Spalart-Allmaras έχουν εφαρμοστεί ώστε το μοντέλο να λειτουργεί και με πιο αραιά πλέγματα με την προσέγγιση συνάρτησης τοιχώματος.

Συνοπτικά, για καλύτερα αποτελέσματα με το μοντέλο Spalart-Allmaras θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί είτε πολύ πυκνό πλέγμα κοντά στα τοιχώματα (της τάξης του  $y^+ = 1$ ) ή να γίνει κατάλληλη διαίρεση του πλέγματος σε διαστήματα ώστε να ισχύει  $y^+ > 30$ .

#### **1.10.7 Δημιουργία πλέγματος κοντά σε τοιχώματα για μοντέλα k – ω**

Καί τα δύο διαθέσιμα μοντέλα  $k - \omega$  στον κώδικα FLUENT υπάρχουν ως μοντέλα χαμηλού αριθμού Reynolds αλλά και υψηλού αριθμού Reynolds. Αν η επιλογή «μεταβατικές ροές» (Transitional Flows) ενεργοποιηθεί στο αντίστοιχο πάνελ, θα χρησιμοποιηθούν οι μεταβλητές χαμηλού αριθμού Reynolds, και σε αυτή την περίπτωση οι οδηγίες για το πλέγμα θα συμπίπτουν με αυτές της επιλογής “enhanced wall treatment”. Ωστόσο, αν αυτή η επιλογή δεν είναι ενεργοποιημένη, τότε οι οδηγίες για την κατασκευή του πλέγματος θα πρέπει να είναι αντίστοιχες με τις οδηγίες κατασκευής πλέγματος για τις συναρτήσεις τοιχώματος.

## **1.11 Μοντέλο μίξης (mixture model)**

### **1.11.1 Ορισμός**

Το μοντέλο μίξης είναι ένα απλοποιημένο πολυφασικό μοντέλο (multiphase model) το οποίο χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση πολυφασικών ροών, στις οποίες οι φάσεις κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες αλλά υπάρχει η δυνατότητα να γίνει υπόθεση τοπικής ισορροπίας για κλίμακες μικρού μήκους. Το μοντέλο μίξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό μη-νευτώνειου ιξώδους ή για τη μοντελοποίηση ομογενούς πολυφασικής ροής με τις φάσεις να κινούνται με την ίδια ταχύτητα.

Ακόμα, υπάρχει η δυνατότητα μοντελοποίησης  $n$  φάσεων, με επίλυση των εξισώσεων της ορμής, συνέχειας και ενέργειας για το μίγμα, των εξισώσεων κλάσματος όγκου για τη δευτερεύουσα φάση και αλγεβρικών εξισώσεων για τις σχετικές ταχύτητες.

Το μοντέλο μίξης μπορεί να αντικαταστήσει σε αρκετές περιπτώσεις το πλήρες πολυφασικό μοντέλο του Euler. Η χρήση του πλήρους πολυφασικού μοντέλου μπορεί να μην είναι εφικτή όταν υπάρχει μεγάλη διασπορά στην κατανομή μιας συγκεκριμένης φάσης ή όταν οι νόμοι για τη διεπιφάνεια είναι άγνωστοι ή μειωμένης αξιοπιστίας. Ένα απλούστερο μοντέλο, όπως το μοντέλο μίξης, μπορεί να αποδώσει το ίδιο καλά με το πλήρες μοντέλο μίξης, επιλύοντας έναν μικρότερο αριθμό μεταβλητών σε σχέση με το πλήρες μοντέλο, εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικούς πόρους και χρόνο.

### 1.11.2 Περιορισμοί στον κώδικα FLUENT

Μερικοί από τους περιορισμούς στο μοντέλο μίξης που χρησιμοποιείται στον κώδικα FLUENT είναι οι παρακάτω:

- Πρέπει να χρησιμοποιηθεί η επιλογή Pressure-based Solver. Το μοντέλο μίξης δεν είναι διαθέσιμο με την επιλογή Density-based Solver.
- Μόνο μία από τις φάσεις μπορεί να προσδιοριστεί ως συμπιεστό ιδανικό αέριο.
- Δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί περιοδική ροή με προσδιορισμένο ρυθμό ροής μάζας.
- Δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν η στερεοποίηση και η τήξη.
- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ιδεατές ροές (inviscid flows).

Σημειώνεται ότι το μοντέλο τύρβης LES δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον κώδικα FLUENT, όταν είναι ενεργοποιημένη η επιλογή της σπηλαίωσης.

Το μοντέλο μίξης επιλύει την εξίσωση συνέχειας, την εξίσωση ορμής και την εξίσωση ενέργειας για το μίγμα, ενώ επιλύει την εξίσωση κλάσματος όγκου για τις δευτερεύουσες φάσεις, καθώς επίσης και αλγεβρικές εκφράσεις για τις σχετικές ταχύτητες (αν οι φάσεις κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες).

### 1.11.3 Εξισώσεις διατήρησης

- Εξίσωση συνέχειας για το μίγμα:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m) + \nabla(\rho_m \vec{v}_m) = 0 \quad (1.95)$$

όπου:

$$\vec{v}_m = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \rho_k \vec{v}_k}{\rho_m}, \quad (1.96)$$

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n a_k \rho_k \quad (1.97)$$

όπου  $a_k$  το κλάσμα όγκου της φάσης k.

- Εξίσωση ορμής για το μίγμα:

Η εξίσωση ορμής για το μίγμα λαμβάνεται προσθέτοντας τις επιμέρους εξισώσεις ορμής για όλες τις φάσεις:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \overline{v_m}) + \nabla (\rho_m \overline{v_m v_m}) = -\nabla p - \nabla [\mu_m (\nabla \overline{v_m} + \nabla \overline{v_m}^T)] + \rho_m \vec{g} + \vec{F} + \nabla (\sum_{k=1}^n a_k \rho_k \vec{v}_{dr,k} \vec{v}_{dr,k}) \quad (1.98)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των φάσεων,  $\vec{F}$  η ασκούμενη δύναμη (body force) και  $\mu_m$ , το ιξώδες του μείγματος:

$$\mu_m = \sum_{k=1}^n a_k \mu_k \quad (1.99)$$

όπου  $\vec{v}_{dr,k}$  είναι η ταχύτητα κίνησης (drift velocity) για τη δευτερεύουσα φάση  $k$

$$\vec{v}_{dr,k} = \vec{v}_k - \vec{v}_m \quad (1.100)$$

- Εξίσωση κλάσματος όγκου για τις δευτερεύουσες φάσεις:

Από την εξίσωση συνέχειας για τη δευτερεύουσα φάση  $p$ , η εξίσωση κλάσματος όγκου για τη δευτερεύουσα φάση  $p$  ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} (a_p \rho_p) + \nabla (a_p \rho_p \vec{v}_m) = -\nabla (a_p \rho_p \vec{v}_{dr,p}) + \sum_{q=1}^n (\dot{m}_{qp} - \dot{m}_{pq}) \quad (1.101)$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΣΠΗΛΑΙΩΣΗΣ

### 2.1 Εισαγωγή στα κύρια χαρακτηριστικά ροών με σπηλαιώση

#### 2.1.1 Ορισμός σπηλαιώσης

Η σπηλαιώση ορίζεται ως η ατμοποίηση ενός υγρού υπό συνθήκες σταθερής θερμοκρασίας, λόγω μείωσης της πίεσης κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο που ονομάζεται πίεση ατμοποίησης. Η σπηλαιώση ξεκινάει με σχηματισμό κοιλοτήτων ατμού (vapor cavities) εντός ενός αρχικά ομοιογενούς υγρού. Αναλόγως με τη διαμόρφωση της ροής και τις φυσικές ιδιότητες του υγρού, η σπηλαιώση μπορεί να παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά. Εκτενής αναφορά στα θέματα της σπηλαιώσης υπάρχει σε σχετικά συγγράμματα [5-7].

#### 2.1.2 Πίεση ατμοποίησης

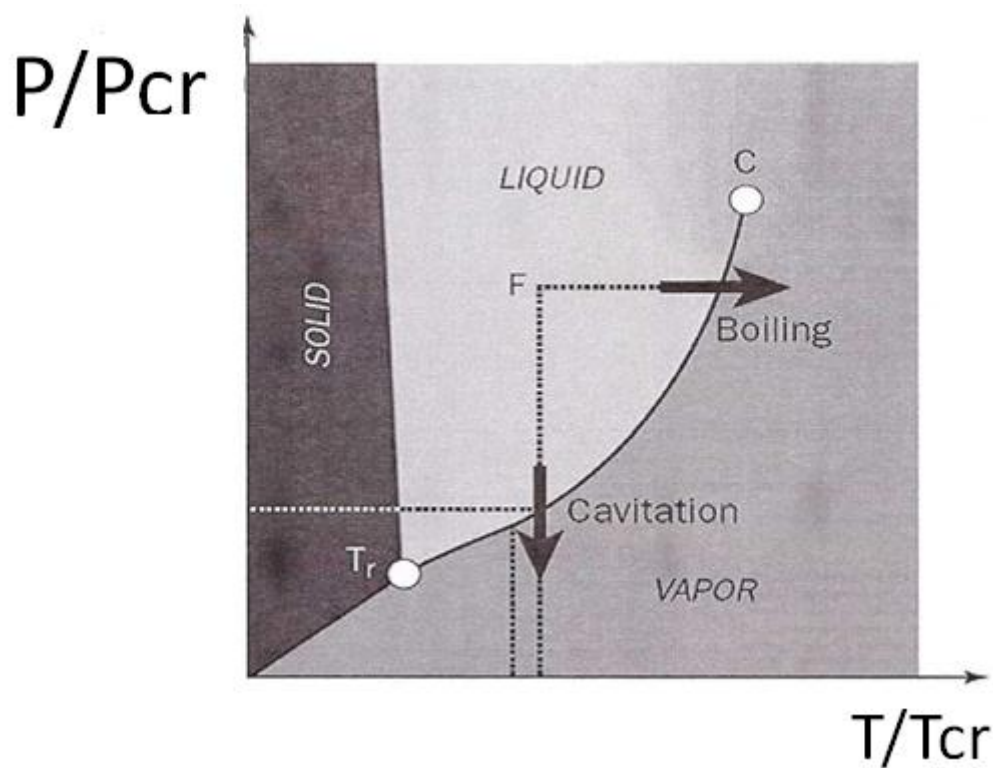
Η έννοια της πίεσης ατμοποίησης γίνεται περισσότερο κατανοητή μέσω της κλασσικής θερμοδυναμικής. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα φάσης του νερού (Σχήμα 2.1) η καμπύλη από το τριπλό σημείο  $T_r$  μέχρι το κρίσιμο σημείο C διαχωρίζει τις περιοχές του υγρού και του ατμού. Το πέρασμα αυτής της καμπύλης αντιπροσωπεύει μια αντιστρεπτή μεταβολή υπό σταθερές συνθήκες (για παράδειγμα εξάτμιση ή συμπύκνωση του υγρού) σε πίεση  $p_v$ , η οποία ονομάζεται πίεση ατμοποίησης (vapor pressure) και είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας ( $p_v(T)$ ).

Η σπηλαιώση σε ένα υγρό μπορεί να συμβεί μειώνοντας την πίεση και ταυτόχρονα διατηρώντας τη θερμοκρασία κατά προσέγγιση σταθερή. Έτσι, η σπηλαιώση προκύπτει σαν ένα παρόμοιο φαινόμενο με τον βρασμό με τη διαφορά ότι ο κινητήριο μηχανισμός δεν είναι μία αλλαγή στη θερμοκρασία αλλά μία αλλαγή στην πίεση, η οποία εξαρτάται από τη δυναμική της ροής.

Στις περισσότερες περιπτώσεις (ειδικά για το νερό σε χαμηλή θερμοκρασία), απαιτείται μόνο ένα μικρό ποσό θερμότητας για το σχηματισμό ενός μεγάλου όγκου ατμού. Μετρήσεις στο περιβάλλον νερό, το οποίο λειτουργεί ως πηγή θερμότητας για

την ατμοποίηση, δείχνουν πολύ μικρή αλλαγή στη θερμοκρασία του. Η μεταβολή αυτή στο διάγραμμα φάσης μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά ισόθερμη.

Ωστόσο, σε μερικές περιπτώσεις η μεταφορά θερμότητας που απαιτείται για την ατμοποίηση μπορεί να προκαλέσει αλλαγή φάσης σε μία θερμοκρασία  $T'$  χαμηλότερη από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος υγρού. Η διαφορά θερμοκρασίας  $T - T'$  ονομάζεται θερμική καθυστέρηση (thermal delay). Η διαφορά είναι μεγαλύτερη όταν η περιβάλλουσα θερμοκρασία είναι κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία του ρευστού.



**Σχήμα 2.1** Διάγραμμα φάσης του νερού. Με  $T_r$  συμβολίζεται το τριπλό σημείο ενώ με  $C$  το κρίσιμο σημείο του νερού. Η καμπύλη που ενώνει τα δύο σημεία χωρίζει την υγρή φάση από τη φάση του ατμού. Με  $p_v(T)$  συμβολίζεται η πίεση ατμοποίησης του νερού, η οποία είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η καμπύλη  $p_v(T)$  δεν είναι ένα απόλυτο όριο μεταξύ των φάσεων υγρού και ατμού. Μπορεί να υπάρχουν αποκλίσεις από αυτή την καμπύλη στην περίπτωση πολύ γρήγορης αλλαγής φάσης. Ακόμα και σε σχεδόν στατικές συνθήκες μπορεί να συμβεί αλλαγή φάσης σε πίεση κατώτερη από την πίεση

ατμοποίησης  $p_v$ . Έτσι, αν η τοπική απόλυτη πίεση είναι ίση με την πίεση ατμοποίησης, αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι έχει ξεκινήσει το φαινόμενο της σπηλαιώσης.

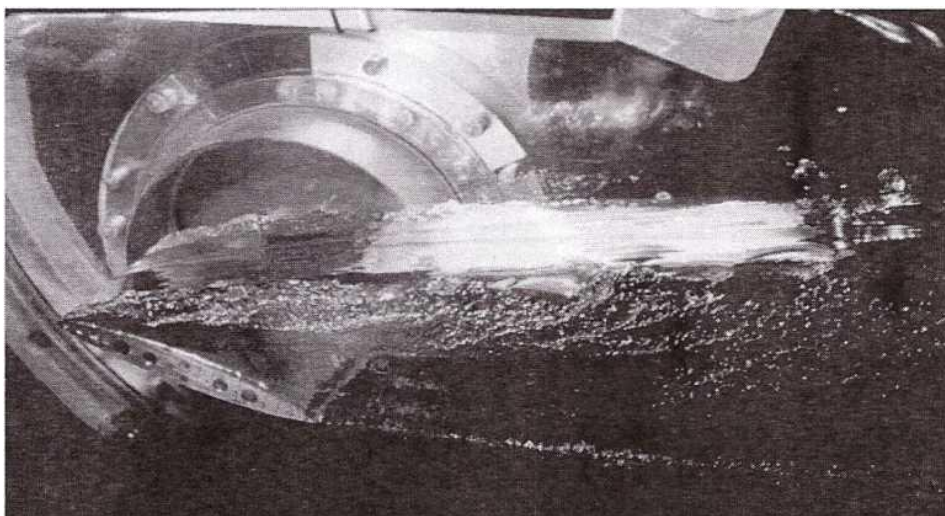
### 2.1.3 Κύριες μορφές σπηλαιώσης

Η σπηλαιώση μπορεί να παρουσιαστεί σε διάφορες μορφές, εξαρτώμενη κυρίως από τη βασική δομή της ροής. Ωστόσο, καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται, η δομή του ατμού επηρεάζει και τροποποιεί τη ροή. Διακρίνονται τρεις κύριοι τύποι σπηλαιώσης:

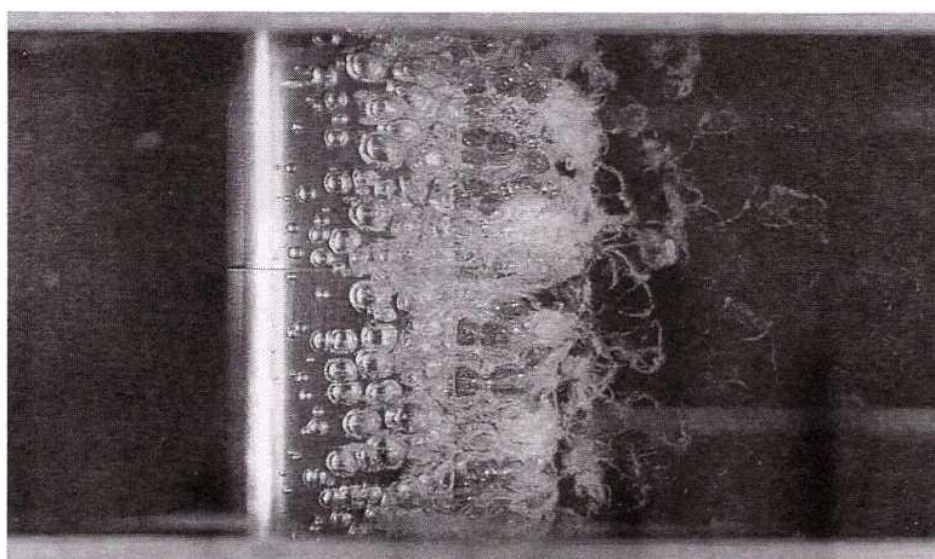
- Παροδικές μεμονωμένες φυσαλίδες (transient isolated bubbles). Εμφανίζονται στην περιοχή χαμηλής πίεσης, ως αποτέλεσμα της ταχείας αύξησης πολύ μικρών περιοχών αερίου που εμπεριέχονται στο υγρό. Μεταφέρονται με τη ροή και σταδιακά εξαφανίζονται καθώς εισέρχονται σε περιοχές υψηλής πίεσης.
- Προσκολλημένες κοιλότητες (attached cavities). Σε αυτό το είδος σπηλαιώσης, κοιλότητες ατμού προσκολλώνται πάνω σε στερεές επιφάνειες. Εδώ, μπορεί να γίνει μια επιπλέον διάκριση μεταξύ της μερικής σπηλαιώσης (partial cavities) που παρατηρείται κοντά στα τοιχώματα και η οποία έχει σταθερό μήκος σπηλαιώσης και της υπερσπηλαιώσης (super-cavities) όπου το μήκος της περιοχής της σπηλαιώσης επεκτείνεται πέρα από κάποιο όριο, για παράδειγμα την έξοδο του αγωγού της ροής.
- Σπηλαιώση λόγω δημιουργίας δινών (cavitating vortices). Εδώ η σπηλαιώση μπορεί να εμφανιστεί στο κέντρο μιας δίνης το οποίο χαρακτηρίζεται από πολύ χαμηλή πίεση, και η οποία μεταφέρεται με τη ροή.

Υπάρχουν και άλλα είδη σπηλαιώσης που δεν συμπίπτουν με κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες, όπως η σπηλαιώση σε σχήμα σύννεφου (cloud cavitation). Σε αυτήν την περίπτωση σπηλαιώσης, εμφανίζονται λόγω ασταθειών μεγάλες μάζες ατμού σε μορφή σύννεφου. Επιπλέον, υπάρχουν και περιπτώσεις σπηλαιώσης που μπορεί να εμφανίζουν συνδυασμένα χαρακτηριστικά των διαφόρων τύπων σπηλαιώσης. Κύριο παράδειγμα είναι η σπηλαιώση που εμφανίζεται αρχικά με τη μορφή προσκολλημένων κοιλοτήτων, αλλά στη συνέχεια μεταφέρονται με τη ροή (traveling bubble cavitation). Στην περίπτωση αυτή, σχηματίζονται φυσαλίδες στα

τοιχώματα της διάταξης, αλλά αφού αυτές αυξηθούν σε μέγεθος μεταφέρονται προς την κατεύθυνση της ροής, μέχρι να εξαφανιστούν λόγω εισόδου τους σε περιοχές υψηλότερης πίεσης. Παρακάτω παρουσιάζονται εικόνες με τα διάφορα είδη της σπηλαίωσης.



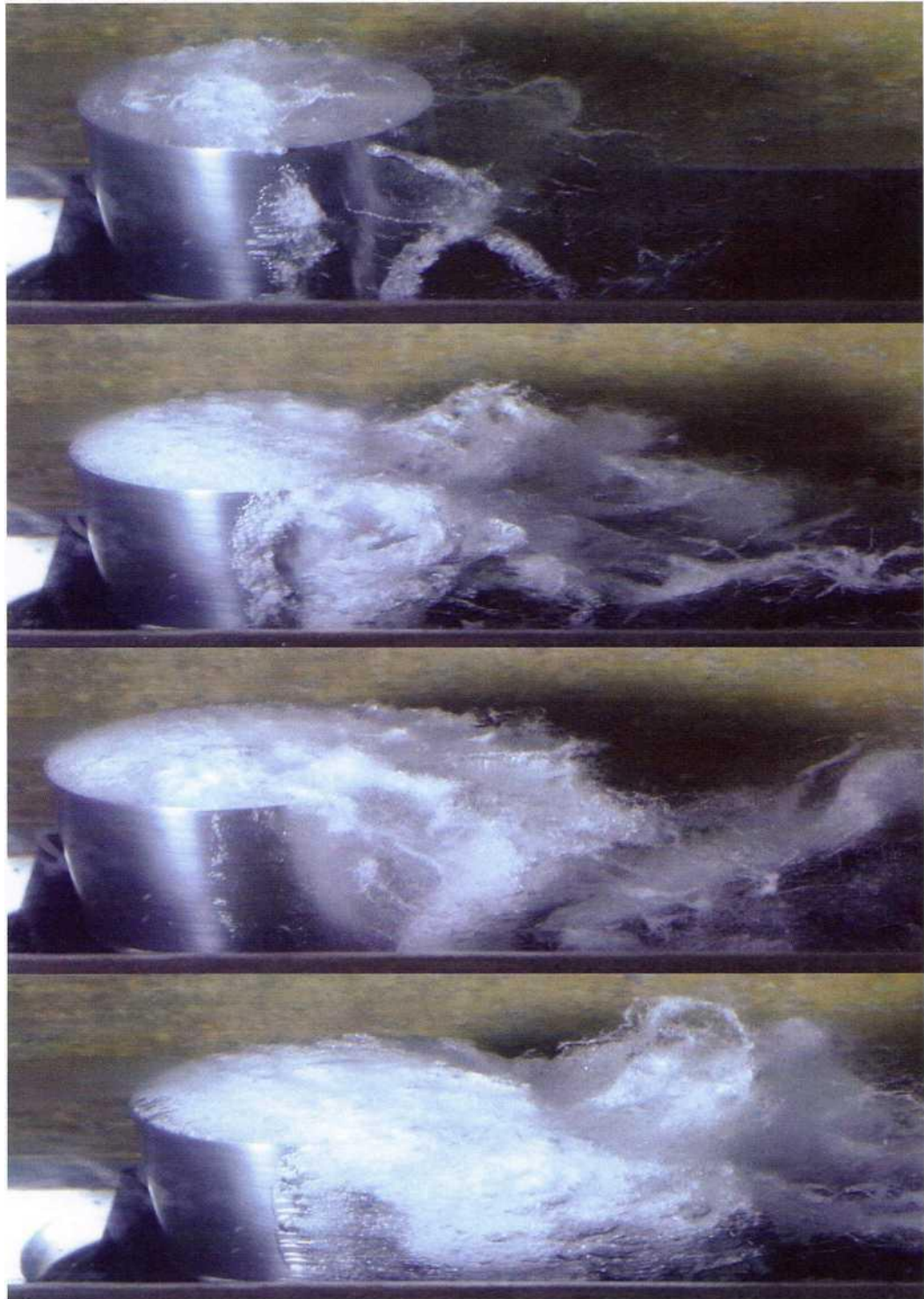
**Σχήμα 2.2** Εμφάνιση υπερσπηλαίωσης (supercavitation) πίσω από υδροτομή (hydrofoil) NACA 16012 [8, 9]. Το μήκος της σπηλαίωσης καλύπτει όλη την επιφάνεια και επεκτείνεται για αρκετό διάστημα κατά την κατεύθυνση της ροής. Χαρακτηριστικά εγκατάστασης: αριθμός Reynolds  $10^6$ , παράμετρος σπηλαίωσης 0,07, γωνία πρόσπτωσης (incidence angle)  $17^\circ$ .



(Πηγή: <http://caltechbook.library.caltech.edu/1/4/figs/fig706.jpg>)

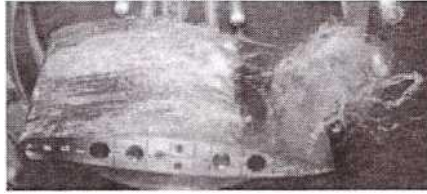
**Σχήμα 2.3** (Traveling bubble cavitation) Σπηλαίωση που εμφανίζεται με τη μορφή προσκολλημένων κοιλοτήτων. Αφού οι σχηματισμένες φυσαλίδες αυξηθούν σε μέγεθος, μεταφέρονται κατά την κατεύθυνση της ροής (από αριστερά προς τα δεξιά), και μετά από λίγο εξαφανίζονται. Η εγκατάσταση είναι υδροτομή NACA 4412 με γωνία προσβολής  $0^\circ$ , η ταχύτητα είναι 13,7 m/s και ο αριθμός σπηλαίωσης 0,3.



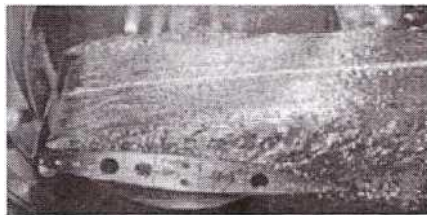


**Σχήμα 2.4** Εμφάνιση σπηλαιώσης πίσω από κυλινδρικό αγωγό ο οποίος βρίσκεται εντός σήραγγας ροής νερού υψηλής ταχύτητας. Εδώ, η σπηλαιώση εμφανίζεται σε μορφή δινών που μεταφέρονται με τη ροή (cavitating vortices). Η ταχύτητα της ροής αυξάνεται και ο αριθμός σπηλαιώσης μειώνεται αντίστοιχα με σειρά από πάνω προς τα κάτω. (Πηγή: <http://cav.safl.umn.edu/gaUeiy.htm>).

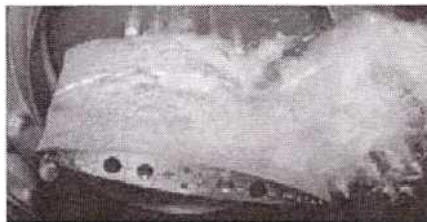
Στο Σχήμα 2.5 απεικονίζονται διάφορα είδη σπηλαιώσης σε υδροτομή NACA 16012 για αριθμό Reynolds  $Re = 10^6$  για νερό που έχει υποστεί διεργασία αφαίρεσης αερίων (deaerated water).



Μερική σπηλαιώση (partial cavitation)



Υπερσπηλαιώση (supercavitation)

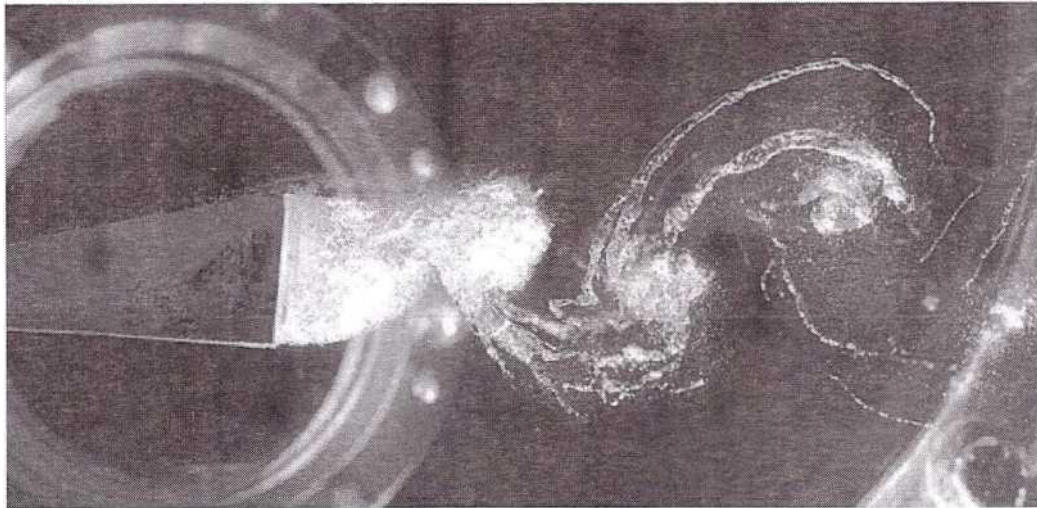


Σπηλαιώση δυο φάσεων (two-phase cavitation)



Σπηλαιώση σε τυρβώδη ροή με διάτμηση (Shear cavitation)

**Σχήμα 2.5** Διαφορετικοί τύποι σπηλαιώσης σε υδροτομή NACA 16012 για αριθμό Reynolds  $Re = 10^6$  για νερό που έχει υποστεί διεργασία απομάκρυνσης του εμπεριεχόμενου αέρα (deaerated water),[8].



**Σχήμα 2.6** Η σπηλαιώση δημιουργείται στον πυρήνα των δινών και έπειτα μεταφέρεται μαζί με τη ροή (cavitating vortices) σχηματίζοντας δύο διαδοχικές δίνες αντίστροφης στροβιλότητας [8].

## 2.2 Σπηλαιώση σε πρακτικές εφαρμογές

### 2.2.1 Στάδια σπηλαιώσης

Για πρακτικούς λόγους, στην ανάπτυξη της σπηλαιώσης διακρίνονται δύο μόνο στάδια:

- Έναρξη της σπηλαιώσης. Χαρακτηρίζεται από τη μικρή περιοχή όπου πρωτοεμφανίζεται η σπηλαιώση, της οποίας τα όρια διαχωρίζουν τη ροή με σπηλαιώση από την υπόλοιπη ροή.
- Αναπτυγμένη σπηλαιώση. Χαρακτηρίζεται από μονιμότητα ή διεύρυνση της περιοχής της σπηλαιώσης, και σημαντική μείωση της απόδοσης των μηχανών.

Η διάκριση αυτή είναι σημαντική στις βιομηχανικές εγκαταστάσεις. Όσον αφορά στη μη αναπτυγμένη σπηλαιώση, πρέπει να γίνει εστίαση στην περιοχή έναρξης του φαινομένου, ενώ για την αναπτυγμένη σπηλαιώση πρέπει να εξεταστούν οι επιπτώσεις της σπηλαιώσης στη λειτουργία της διάταξης.



### 2.2.2 Ευνοϊκές συνθήκες για την εμφάνιση σπηλαίωσης

- Η γεωμετρία των τοιχωμάτων μπορεί να προκαλέσει σε αρχικά σταθερή ροή έντονες τοπικές αυξήσεις της ταχύτητας, οι οποίες συνοδεύονται από πτώση της πίεσης. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση απότομης μείωσης της διατομής, όπως για παράδειγμα όταν η ροή περάσει μέσα από ακροφύσιο, καθώς επίσης και λόγω της καμπυλότητας που μπορεί να επιβληθεί στη ροή από την τοπική γεωμετρία (για παράδειγμα, γωνίες σε σωληνώσεις ή καμπυλότητα υδροτομών).
- Σπηλαίωση μπορεί επίσης να εμφανιστεί σε τυρβώδεις ροές με διάτμηση, λόγω μεγάλων διακυμάνσεων στην πίεση.
- Ο ασταθής χαρακτήρας κάποιων ροών (όπως για παράδειγμα στους αγωγούς τροφοδότησης κινητήρα Diesel με καύσιμο) μπορεί να οδηγήσει σε επιτάχυνση του ρευστού και συνεπώς σε στιγμιαία παραγωγή σημείων χαμηλής πίεσης, γεγονός που οδηγεί σε σπηλαίωση.
- Η τραχύτητα των τοιχωμάτων παράγει τοπικά περιοχές ομόρρου (local wakes) όπου μπορεί να αναπτυχθεί σπηλαίωση με τη μορφή προσκολλημένων κοιλοτήτων.
- Ως συνέπεια της ταλαντούμενης κίνησης των τοιχωμάτων (για παράδειγμα σε μηχανές Diesel), δημιουργούνται διακυμαινόμενα πεδία πίεσης που επιβάλλονται πάνω στο κατά τα άλλα ομοιόμορφο πεδίο πίεσης. Αν το εύρος διακύμανσης είναι αρκετά μεγάλο, μπορεί να εμφανιστεί σπηλαίωση.
- Αν ένα στερεό σώμα επιταχυνθεί απότομα (κρούση) εντός υγρού που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, ιδιαίτερα αν το σώμα διαθέτει αιχμηρές άκρες, μπορεί να δημιουργηθεί σπηλαίωση. Η επιτάχυνση του υγρού που απαιτείται για να παρακάμψει τις άκρες παράγει χαμηλές πιέσεις, ακόμα και αν οι ταχύτητες είναι σχετικά μικρές αμέσως μετά την κρούση.

### 2.2.3 Οι κύριες επιπτώσεις της σπηλαίωσης σε υδραυλικά συστήματα

Το φαινόμενο της σπηλαίωσης μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τα υδραυλικά συστήματα. Οι σημαντικότερες επιπτώσεις είναι οι εξής:

- Αλλαγή στην απόδοση του συστήματος
- Εμφάνιση επιπλέον δυνάμεων στις στερεές δομές
- Παραγωγή ταλαντώσεων και θορύβου

- Διάβρωση των τοιχωμάτων στην περίπτωση αναπτυγμένης σπηλαιώσης σε περίπτωση που η ταχύτητα του υγρού είναι πολύ μεγάλη.

Εκ πρώτης όψεως, η σπηλαιώση εμφανίζεται ως ένα επιβλαβές φαινόμενο, του οποίου η εμφάνιση πρέπει να αποφεύγεται. Σε ορισμένες περιπτώσεις, για να μην επιβαρυνθεί οικονομικά μια εγκατάσταση, μπορεί να επιτραπεί ένας ορισμένος βαθμός ανάπτυξης της σπηλαιώσης. Αυτό όμως πρέπει να γίνεται εφόσον οι επιπτώσεις της σπηλαιώσης ελέγχονται και δεν επηρεάζουν σημαντικά τη λειτουργία της διάταξης.

Εκτός από τις αρνητικές επιπτώσεις, η σπηλαιώση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιες βιομηχανικές διαργασίες και εφαρμογές για να συγκεντρώσει ενέργεια σε μικρές επιφάνειες και να παράγει υψηλές πιέσεις σε προκαθορισμένα σημεία. Για αυτόν τον σκοπό, συχνά χρησιμοποιούνται συσκευές υπερήχων. Χαρακτηριστικά παραδείγματα ωφέλιμης χρήσης της σπηλαιώσης είναι ο καθαρισμός επιφανειών με υπερήχους ή δέσμες (jets), η διασπορά σωματιδίων σε υγρό μέσο, η χρήση σε τομείς της εμβιομηχανικής και τέλος η μείωση του ρυθμού ροής σε περιορισμένες ροές μέσω ανάπτυξης υπερσπηλαιώσης.

## **2.3 Ειδικά χαρακτηριστικά της σπηλαιώσης**

### **2.3.1 Πίεση και κλίση πίεσης**

Σε ασυμπίεστες ροές χωρίς σπηλαιώση, η απόλυτη τιμή της πίεσης δεν έχει καμία επίπτωση στη δυναμική της ροής, η οποία εξαρτάται από την κλίση της πίεσης (pressure gradient). Όμως, η απόλυτη τιμή της πίεσης μπορεί με μείωσή της κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο να προκαλέσει την εμφάνιση και ανάπτυξη σπηλαιώσης. Έτσι, είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη τόσο η απόλυτη τιμή της πίεσης όσο και η κλίση της πίεσης.

Για την πρόβλεψη της έναρξης της σπηλαιώσης με θεωρητική ανάλυση ή με χρήση αριθμητικής προσομοίωσης, πρέπει να συγκριθεί η υπολογισμένη τιμή της πίεσης σε μια κρίσιμη περιοχή της ροής όπου αναμένεται η έναρξη της σπηλαιώσης με μία κατώτατη επιτρεπόμενη τιμή, η οποία συνήθως είναι η πίεση ατμοποίησης.

### 2.3.2 Διεπιφάνειες υγρού-ατμού

Οι ροές με σπηλαίωση, όπως και οι υπόλοιπες ροές δύο φάσεων υγρού-ατμού, χαρακτηρίζονται από την παρουσία πολλαπλών διεπιφανειών (interfaces) λόγω της εμφάνισης φυσαλίδων. Ωστόσο, η ανταπόκρισή τους σε εξωτερικές διαταραχές (για παράδειγμα σε μια αύξηση πίεσης) μπορεί να διαφέρει από την αντίστοιχη σε ροές υγρού ατμού στις οποίες λαμβάνει χώρα εξάτμιση. Όταν αυτές οι ροές περιέχουν φυσαλίδες αερίου συνήθως δεν υπόκεινται σε γρήγορες αλλαγές στη μέση πυκνότητα.

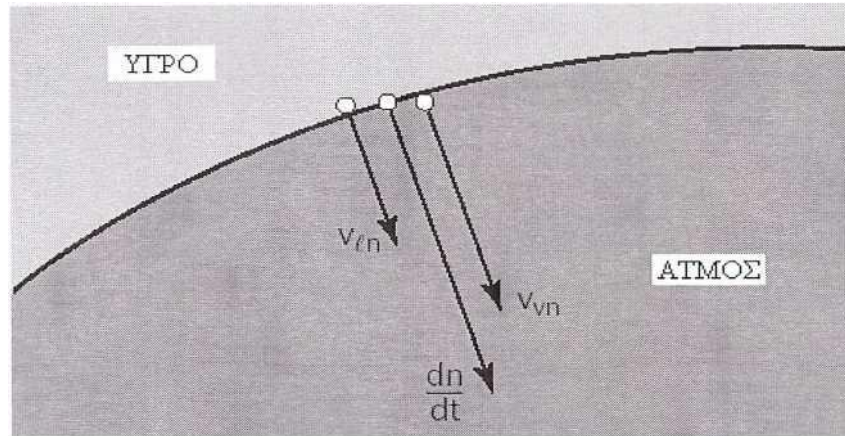
Ωστόσο, στις ροές με σπηλαίωση οι διεπιφάνειες από τη μία πλευρά υπόκεινται σε σταθερή πίεση, πρακτικά ίση με την πίεση ατμοποίησης. Έτσι, δεν μπορούν να διατηρήσουν μια αύξηση ή μείωση στην εξωτερική πίεση χωρίς να εξελιχθούν ταχέως σε σχήμα και μέγεθος, γεγονός που τις καθιστά εξαιρετικά ασταθείς.

Είναι εξαιρετικά δύσκολο να χρησιμοποιηθούν όργανα μέτρησης για να ληφθούν μετρήσεις εντός ροής με σπηλαίωση. Αυτό οφείλεται κυρίως στη σπηλαίωση που είναι δυνατό να επάγει το ίδιο το όργανο μέτρησης. Όμως, στην περίπτωση που το υγρό είναι διαφανές (π.χ. το νερό), είναι εφικτό να παρατηρηθούν μέσω σύγχρονων οπτικών μεθόδων οι διεπιφάνειες, καθώς αντανακλούν πολύ αποτελεσματικά το φως. Η οπτικοποίηση των διεπιφανειών παρέχει σημαντικά στοιχεία για τη δυναμική της ροής.

Όσον αφορά στην ανταλλαγή υγρού και ατμού κατά μήκος μιας διεπιφάνειας, η ροή μάζας  $\dot{m}$  (ανά μονάδα εμβαδού επιφάνειας) είναι ανάλογη των κάθετων ταχυτήτων (normal velocities) είτε του υγρού είτε του ατμού στη διεπιφάνεια. Η σχέση διατήρησης της μάζας κατά μήκος της διεπιφάνειας είναι η εξής:

$$\dot{m} = \rho_l \left[ v_{ln} - \frac{dn}{dt} \right] = \rho_v \left[ v_{vn} - \frac{dn}{dt} \right] \quad (2.1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι δείκτες l και v παραπέμπουν στη φάση υγρού και ατμού, αντίστοιχα (liquid, vapor), και ο δείκτης n (normal) στην κάθετη προς τη διεπιφάνεια κατεύθυνση των ταχυτήτων. Το σύμβολο  $\frac{dn}{dt}$  αντιπροσωπεύει την κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας  $\left( \frac{dn}{dt} = -\frac{1}{\|gradf\|} \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ .



**Σχήμα 2.7** Διεπιφάνεια υγρού/ατμού (φουσαλίδας). Με  $\frac{dn}{dt}$  συμβολίζεται η κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας και με  $v_{in}$  και  $v_{vn}$  οι κάθετες προς τη διεπιφάνεια ταχύτητες του υγρού και του ατμού, αντίστοιχα.

Αν η ροή μάζας μέσω της διεπιφάνειας θεωρηθεί ίση με το 0, τότε οι τρεις κάθετες προς τη διεπιφάνεια ταχύτητες είναι ίσες. Ξεχωρίζουν δύο περιπτώσεις :

- Για μια σφαιρική φουσαλίδα της οποίας η ακτίνα  $R(t)$  είναι συνάρτηση του χρόνου, η κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας είναι  $\frac{dR}{dt}$ . Για την υπόθεση μηδενικής ροής μάζας ισχύει:  $v_{in} = v_{vn} = \frac{dR}{dt}$ .
- Για σταθερή σπηλαιώση με δημιουργία κοιλοτήτων σε τοίχωμα που περικλείεται από υγρό σε κίνηση, η κάθετη ταχύτητα  $\frac{dn}{dt}$  είναι μηδέν. Αν θεωρηθεί ότι η ροή μάζας μέσω της διεπιφάνειας ισούται με μηδέν, τότε οι κάθετες προς τη διεπιφάνεια ταχύτητες του υγρού και του ατμού είναι επίσης μηδέν. Έτσι, η ταχύτητα του υγρού στην εξωτερική ροή της διεπιφάνειας είναι εφαπτομενική στο τοίχωμα.

### 2.3.3 Τυπικά μεγέθη σπηλαιώσης

Αστάθεια στις διεπιφάνειες μπορεί να οδηγήσει σε έκρηξη-κατάρρευση (collapse-explosion) των φουσαλίδων, με μεγάλες αποκλίσεις σε μέγεθος και ταχύτητα σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα. Μερικές τυπικές τιμές που συναντώνται στο πεδίο της σπηλαιώσης είναι οι εξής:

- Η χρονική διάρκεια της κατάρρευσης σφαιρικής φυσαλίδας ατμού ακτίνας 1 cm σε νερό κάτω από εξωτερική πίεση 1 bar, είναι περίπου 1 ms.
- Η διάρκεια του τελικού σταδίου κατάρρευσης μιας φυσαλίδας, μέγεθος πολύ σημαντικό για τη διαδικασία της διάβρωσης, είναι της κλίμακας 1 μs.
- Η κάθετη ταχύτητα μιας διεπιφάνειας κυμαίνεται μεταξύ μερικών μέτρων ανά δευτερόλεπτο έως και μερικών εκατοντάδων μέτρων ανά δευτερόλεπτο.
- Οι υπερπίεσεις (overpressures) λόγω ενδόρηξης (implosion) φυσαλίδων ή δινών μπορεί να φτάσουν έως και αρκετές χιλιάδες bar.

## 2.4 Αδιάστατες παράμετροι

### 2.4.1 Αριθμός σπηλαίωσης (cavitation number) $\sigma_v$

Σε υδραυλικά συστήματα στα οποία εμφανίζεται σπηλαίωση, ορίζεται ως  $p_r$  η πίεση σε συμβατικό σημείο αναφοράς  $r$ . Το σημείο  $r$  συνήθως επιλέγεται κοντά στην περιοχή όπου αναμένεται να εμφανιστεί η σπηλαίωση. Αν  $T$  είναι η θερμοκρασία του υγρού και  $\Delta p$  η διαφορά πίεσης που χαρακτηρίζει το σύστημα, ο αριθμός σπηλαίωσης (που ονομάζεται επίσης και παράμετρος σπηλαίωσης) ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_v = \frac{p_r - p_v(T)}{\Delta p} = \frac{p_{downstream} - p_v(T)}{p_{upstream} - p_{downstream}} \quad (2.2)$$

### 2.4.2 Ο αριθμός σπηλαίωσης στην εκκίνηση της σπηλαίωσης $\sigma_{vi}$

Ο αριθμός  $\sigma_{vi}$  είναι η τιμή της παραμέτρου  $\sigma_v$  κατά την εκκίνηση της σπηλαίωσης σε κάποιο σημείο εντός της ροής. Η σπηλαίωση εμφανίζεται λόγω μείωσης της πίεσης στο σημείο αναφοράς  $r$  ή λόγω αύξησης στη διαφορά πίεσης  $\Delta p$ . Η λειτουργία σε συνθήκες χωρίς σπηλαίωση προϋποθέτει ότι  $\sigma_v > \sigma_{vi}$ .

Το όριο  $\sigma_{vi}$  εξαρτάται από τους όρους που λαμβάνονται συνήθως υπόψη στη ρευστομηχανική όπως η γεωμετρία της ροής, το ιξώδες, η βαρύτητα, η επιφανειακή τάση, τα επίπεδα τύρβης, θερμικές παράμετροι, η τραχύτητα των τοιχωμάτων και η περιεκτικότητα του υγρού σε αέριο.

Γενικά, όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $\sigma_{vi}$  για ένα σύστημα, τόσο καλύτερα συμπεριφέρεται η ροή. Όταν το  $\sigma_v$  γίνει μικρότερο από το  $\sigma_{vi}$  η σπηλαιώση αναπτύσσεται με ταχείς ρυθμούς. Σε σπάνιες περιπτώσεις, μετά την αρχική εμφάνιση σπηλαιώσης, αυτή μπορεί να εξαφανιστεί αν μειωθεί περαιτέρω η τιμή του  $\sigma_v$ .

Σε πολλές περιπτώσεις, και ειδικά για τη μοντελοποίηση ροών με σπηλαιώση, μπορεί να γίνει η ακόλουθη υπόθεση για το  $\sigma_{vi}$  :  $\sigma_{vi} = -C_{pmin}$  όπου  $C_{pmin}$  είναι ο ελάχιστος συντελεστής πίεσης, ο οποίος είναι συνήθως αρνητικός. Ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  σε ένα σημείο M ορίζεται από τη σχέση:

$$C_p = \frac{p_M - p_r}{\Delta p} \quad (2.3)$$

όπου  $p_r$  είναι η απόλυτη πίεση στο σημείο αναφοράς r. Στην παραπάνω σχέση έχουν γίνει δύο υποθέσεις: Πρώτον, ότι η σπηλαιώση συμβαίνει στο σημείο ελάχιστης πίεσης, και δεύτερον ότι το κατώτατο όριο πίεσης είναι ίσο με την πίεση ατμοποίησης. Έτσι, η υπόθεση  $\sigma_{vi} = -C_{pmin}$  δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε είδος ροής.

### 2.4.3 Σχετική υποπίεση $\sigma_c$

Αν υπάρχει σπηλαιώση με παρουσία προσκολλημένων κοιλοτήτων ή εάν υπάρχει μεγάλος αριθμός φυσαλίδων, η πίεση στην περιοχή που καλύπτεται από τη σπηλαιώση είναι ομοιόμορφη. Συμβολίζοντας αυτήν την πίεση ως  $p_c$ , ορίζεται μια αδιάστατη παράμετρος γνωστή ως σχετική υποπίεση (relative underpressure) της σπηλαιώσης:

$$\sigma_c = \frac{p_r - p_c}{\Delta p} \quad (2.4)$$

Αυτή η μεταβλητή χρησιμοποιείται στην αριθμητική μοντελοποίηση ροών με αναπτυγμένη σπηλαιώση, και παίζει σημαντικό ρόλο στη δυναμική της σπηλαιώσης. Συνήθως η πίεση  $p_c$  στη σπηλαιώση είναι το άθροισμα δύο στοιχείων: της πίεσης ατμοποίησης  $p_v$  και της μερικής πίεσης  $p_g$  λόγω της παρουσίας μη συμπυκνούμενου

αερίου εντός της σπηλαιώσης. Αν ο τελευταίος όρος είναι αμελητέος, η σχετική υποπίεση της σπηλαιώσης  $\sigma_c$  γίνεται ίση με την παράμετρο σπηλαιώσης  $\sigma_v$ .

## 2.5 Μικροφουσαλίδες και σπηλαιώση

### 2.5.1 Πυρήνες σπηλαιώσης ή μικροφουσαλίδες

Ορισμένες φορές, η ελάχιστη απόλυτη πίεση όπου εμφανίζεται η σπηλαιώση δεν ισούται με την πίεση ατμοποίησης  $p_v$  του υγρού. Αυτό το φαινόμενο έχει παρατηρηθεί σε πολλά πειράματα, και για την εξήγησή του πρέπει να γίνει κατανοητή η ατμοποίηση του υγρού.

Η υπόθεση του ομογενούς υγρού διευκολύνει τους θεωρητικούς υπολογισμούς, αλλά δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Έτσι, σε κάθε υγρό μέσο υπάρχουν σημεία που διασπούν την ομοιογένεια του υγρού. Τα σημεία αυτά σχηματίζονται από μικρή ποσότητα αερίου και ατμού, και λειτουργούν ως σημεία εκκίνησης για την ατμοποίηση του υγρού. Ονομάζονται πυρήνες σπηλαιώσης (cavitation nuclei ή nuclei) ή μικροφουσαλίδες (microbubbles). Πειράματα αποδεικνύουν ότι τα σημεία αυτά έχουν μέγεθος μεταξύ μερικών  $\mu\text{m}$  έως μερικές εκατοντάδες  $\mu\text{m}$ . Παραμένουν σφαιρικά σε αυτήν την κλίμακα, λόγω της επιφανειακής τάσης.

Οι μικροφουσαλίδες βρίσκονται στα τοιχώματα ή στον κύριο όγκο του υγρού. Αυτές που βρίσκονται στα τοιχώματα αποτελούνται από αέριο παγιδευμένο σε μικρές ρωγμές οι οποίες δεν περιέχουν καθόλου υγρό. Ο συνηθέστερος τρόπος δημιουργίας μικροφουσαλίδων είναι η μείωση της πίεσης του υγρού ενώ αυτό βρίσκεται σε κατάσταση κορεσμού.

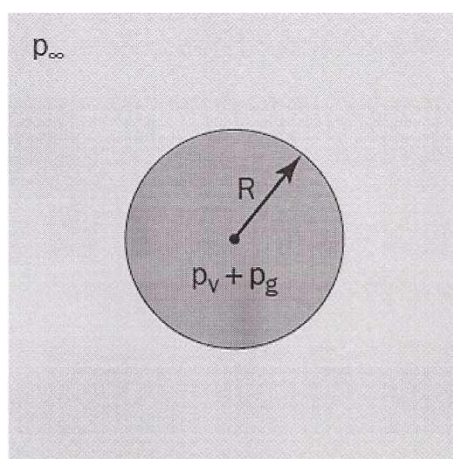
Εφόσον οι μικροφουσαλίδες σχηματιστούν, εξελίσσονται με δύο τρόπους. Πρώτον, όσες δεν είναι προσκολλημένες σε τοίχωμα ανεβαίνουν λόγω της άνωσης. Δεύτερον, όλες οι μικροφουσαλίδες ανταλλάσσουν αέριο μέσω διάχυσης με το διαλυμένο αέριο που υπάρχει στο περιβάλλον υγρό. Γενικά, οι συντελεστές διάχυσης μάζας είναι πολύ μικροί, η διαδικασία διάχυσης αργή και οι τυπικοί χρόνοι διάχυσης είναι της τάξης δευτερολέπτου (s). Αυτή είναι μια αρκετά μεγάλη τιμή σε σχέση με τον χρόνο που χρειάζεται η κατάρρευση μιας φουσαλίδας, που συνήθως είναι μερικά ms. Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί η μηχανική ισορροπία μιας σφαιρικής μικροφουσαλίδας, στο πλαίσιο της οποίας η μάζα του εμπεριεχόμενου αερίου να υποτεθεί σταθερή.

Το κλάσμα κενού που προκύπτει από την παρουσία ελεύθερων μικροφουσαλίδων είναι εξαιρετικά μικρό (της τάξης του  $10^{-4}$ ). Επομένως, η πυκνότητα του υγρού παραμένει ουσιαστικά αναλλοίωτη.

## 2.5.2 Ισορροπία μικροφουσαλίδας

### 2.5.2.1 Συνθήκη ισορροπίας

Θεωρείται σφαιρική μικροφουσαλίδα η οποία περιέχει αέριο και ατμό, και η οποία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας εντός ακίνητου υγρού. Το υγρό θεωρείται ικανό να αντέχει πιέσεις μικρότερες της πίεσης ατμοποίησης  $p_v$  και αντίστοιχες τάσεις. Η μικροφουσαλίδα είναι το σημείο από το οποίο θα ξεκινήσει η ατμοποίηση του υγρού. Η ακτίνα της φουσαλίδας  $R$  θεωρείται αρκετά μικρή ώστε η διαφορά στην υδροστατική πίεση  $2\rho g R$  να θεωρείται αμελητέα σε σχέση με τη διαφορά πίεσης που αντιστοιχεί στην επιφανειακή τάση  $\frac{2S}{R}$ . Αυτή η συνθήκη απαιτεί η ακτίνα  $R$  να είναι μικρότερη της τιμής  $\sqrt{\frac{S}{\rho g}}$ , η οποία για παράδειγμα για το νερό ισούται με 2.7 mm.



**Σχήμα 2.8** Μικροφουσαλίδα (microbubble). Με  $p_\infty$  συμβολίζεται η πίεση του περιβάλλοντος υγρού,  $R$  είναι η ακτίνα της φουσαλίδας,  $p_v$  η πίεση ατμοποίησης και  $p_g$  η μερική πίεση του αερίου εντός της φουσαλίδας [8].



Η πίεση μπορεί τότε να θεωρηθεί ομοιόμορφη στον όγκο του υγρού που περιβάλλει τη μικροφουσαλίδα (εκφρασμένη ως  $p_\infty$ ). Η ισορροπία στη διεπιφάνεια απαιτεί να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη :

$$p_\infty = p_g + p_v - \frac{2S}{R} \quad (2.5)$$

όπου  $p_g$  είναι η μερική πίεση (partial pressure) του αερίου εντός της φουσαλίδας,  $S$  είναι η επιφανειακή τάση και  $R$  η ακτίνα της φουσαλίδας.

Θεωρείται ότι η πίεση μεταβάλλεται αρκετά αργά έτσι ώστε να ικανοποιείται η μηχανική ισορροπία και να είναι δυνατή η μεταφορά θερμότητας μεταξύ αερίου και υγρού. Ωστόσο, η αλλαγή στην πίεση θα πρέπει να συμβεί σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, ώστε η διάχυση αερίου στη διεπιφάνεια να είναι αμελητέα. Επομένως, η διεργασία ατμοποίησης μπορεί να θεωρηθεί ισόθερμη και η μάζα του αερίου σταθερή. Για το αρχικό στάδιο ισχύει:

$$p_{\infty 0} = p_{g0} + p_v - \frac{2S}{R} \quad (2.6)$$

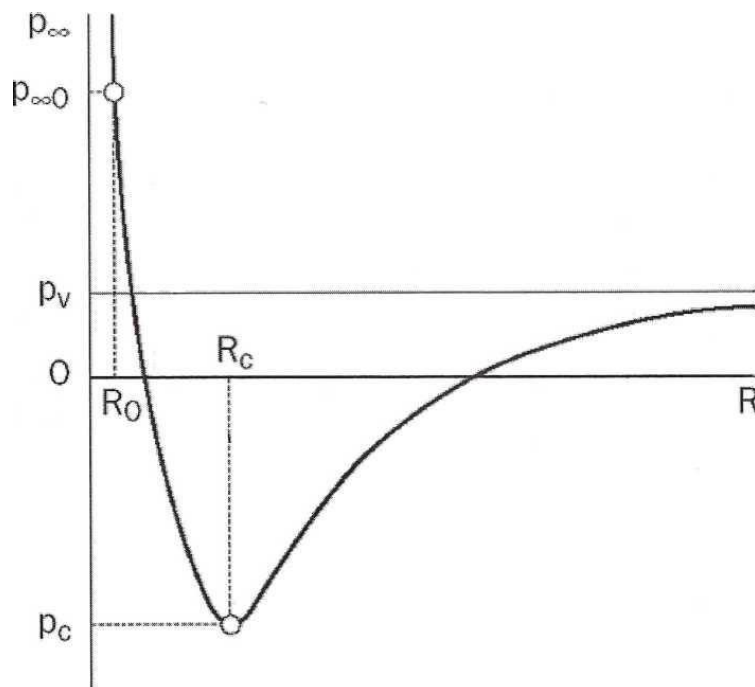
Καθώς σε μια ισόθερμη διεργασία η πίεση του αερίου είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου, από την εξίσωση 2.5 προκύπτει:

$$p_\infty = p_{g0} \left[ \frac{R_0}{R} \right]^3 + p_v - \frac{2S}{R} \quad (2.7)$$

Η καμπύλη  $p_\infty(R)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9. Οι δύο παράγοντες που θεωρήθηκαν στην εξίσωση 2.5, δηλαδή η εσωτερική πίεση που τείνει να αυξήσει το μέγεθος της φουσαλίδας και η επιφανειακή τάση που δρα στην αντίθετη κατεύθυνση, συντελούν στην ύπαρξη ενός ελάχιστου που δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} R_c = R_0 \sqrt{\frac{3p_{g0}}{\frac{2S}{R_0}}} \\ p_c = p_v - \frac{4S}{3R_c} \end{cases} \quad (2.8)$$

Για ένα δοσμένο αέριο και υγρό σε σταθερή θερμοκρασία, μια μικροφουσαλίδα χαρακτηρίζεται από τη μάζα του αερίου που περιέχει, η οποία είναι ανάλογη της ποσότητας  $p_{g0}R_0^3$ .



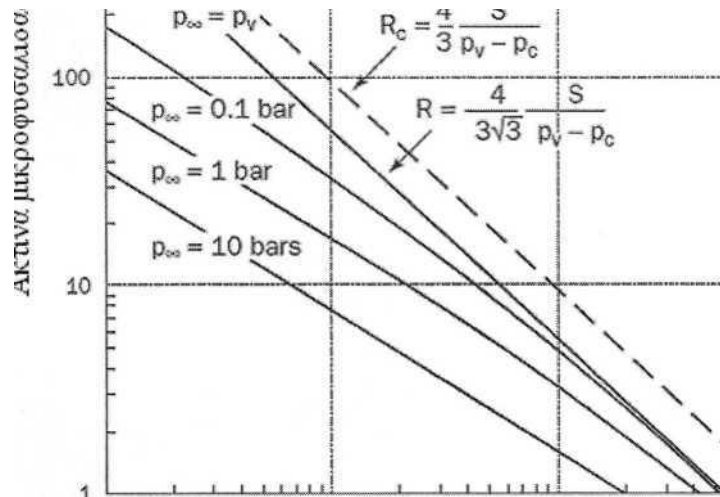
**Σχήμα 2.9** Καμπύλη ισορροπίας μικροφουσαλίδας. Αρχικά η φουσαλίδα βρίσκεται υπό πίεση  $p_{\infty 0}$ . Για πίεση  $p_v$  η φουσαλίδα βρίσκεται σε ευσταθή κατάσταση και με μείωση της πίεσης αυξάνεται η ακτίνα της μέχρι να βρεθεί ξανά σε ευσταθή κατάσταση. Σε περίπτωση όμως μείωσης της πίεσης κάτω από την κρίσιμη πίεση  $p_c$ , η φουσαλίδα βρίσκεται σε ασταθή κατάσταση, με αποτέλεσμα η ακτίνα της να τείνει να αυξηθεί απεριόριστα [8].

### 2.5.2.2 Σταθερότητα και κρίσιμη πίεση μικροφουσαλίδας

Θεωρείται νέα μικροφουσαλίδα με ακτίνα  $R'_0 > R_0$  που υπόκειται σε πίεση  $p_{\infty 0}$ . Η πίεση αερίου  $p'_{g0}$  θα είναι μικρότερη από τη  $p_{g0}$ . Η μηχανική ισορροπία μιας μικροφουσαλίδας είναι σταθερή στην καμπύλη που έχει αρνητική κλίση. Η ελάχιστη πίεση  $p_c$  που μπορεί να αντέξει μια μικροφουσαλίδα υπό σταθερές συνθήκες ονομάζεται κρίσιμη πίεση. Η διαφορά  $p_v - p_c$  ονομάζεται στατική καθυστέρηση για την εμφάνιση σπηλαιώσης. Η εξίσωση 2.8 υποδεικνύει ότι όσο μικρότερη είναι η μικροφουσαλίδα τόσο μεγαλύτερη είναι η στατική καθυστέρηση. Το Σχήμα 2.10 δίνει

για αναπαράσταση των καμπυλών ισορροπίας για μικροφουσαλίδες αέρα εντός νερού. Βασίζεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$p_{\infty} = \frac{4}{27} \frac{\left(\frac{2S}{R}\right)^3}{(p_v - p_c)^2} + p_v - \frac{2S}{R} \quad (2.9)$$



**Σχήμα 2.10** Ακτίνα ισορροπίας για μικροφουσαλίδες αέρα εντός νερού για διάφορες εξωτερικές πιέσεις  $p_{\infty}$ , [8].

### 2.5.3 Συνολικός αριθμός μικροφουσαλίδων

#### 2.5.3.1 Τρόποι μέτρησης

Τα υγρά στην πραγματικότητα περιέχουν μικροφουσαλίδες διαφόρων μεγεθών. Η ανταπόκριση ενός υγρού στις διακυμάνσεις πίεσης εξαρτάται από τον συνολικό αριθμό μικροφουσαλίδων που περιέχει. Η μέτρηση του ολικού αριθμού γίνεται είτε με σύγχρονες οπτικές μεθόδους, που δίνουν την ακτίνα ισορροπίας  $R_0$  μιας μικροφουσαλίδας που υπόκειται σε εξωτερική πίεση  $p_{\infty 0}$ , είτε με δυναμικές μεθόδους που δίνουν την κρίσιμη πίεση της μικροφουσαλίδας  $p_c$ .

#### 2.5.3.2 Συνθήκες έναρξης σπηλαίωσης

Η μεγαλύτερη κρίσιμη πίεση  $p_s$ , η οποία αντιστοιχεί στην κρίσιμη πίεση της μεγαλύτερης μικροφουσαλίδας, είναι ένα σημαντικό μέγεθος για την έναρξη της

σπηλαίωσης. Η σπηλαίωση θα εμφανιστεί όταν η μεγαλύτερη μικροφουσαλίδα αποσταθεροποιηθεί, δηλαδή όταν η ελάχιστη πίεση γίνει μικρότερη από τη  $p_s$ . Η συνθήκη έναρξης της σπηλαίωσης είναι η εξής:

$$p_s = p_{min} \quad (2.10)$$

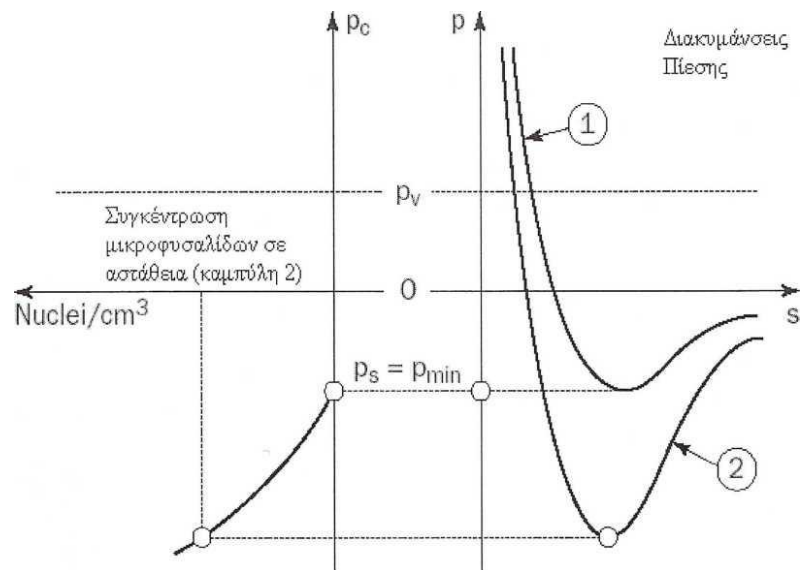
Στο Σχήμα 2.11, η κατανομή πίεσης (1) αντιστοιχεί σε έναρξη σπηλαίωσης, ενώ στην κατανομή πίεσης (2) αποσταθεροποιείται ένας μεγαλύτερος αριθμός μικροφουσαλίδων.

Σύμφωνα με τις σχέσεις για τα μεγέθη  $\sigma_v$  και  $C_p$  (εξισώσεις 2.2, 2.3), η συνθήκη έναρξης σπηλαίωσης παίρνει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$\sigma_{vi} = -C_p p_{min} - \Delta\sigma_s \quad (2.11)$$

όπου  $\Delta\sigma_s$ , είναι η σχετική υποπίεση και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Delta\sigma_s = \frac{p_v - p_s}{\Delta p} \quad (2.12)$$



**Σχήμα 2.11** Για δεδομένο αριθμό μικροφουσαλίδων ανά  $\text{cm}^3$  ( $\text{Nuclei}/\text{cm}^3$ ) η κατανομή πίεσης (1) αντιστοιχεί σε έναρξη σπηλαιώσης καθώς  $p_{\min} = p_s$ , και αποσταθεροποιούνται μόνο οι μικροφουσαλίδες με τη μεγαλύτερη διάμετρο, ενώ στην κατανομή πίεσης (2) αποσταθεροποιείται ένας μεγαλύτερος αριθμός μικροφουσαλίδων καθώς  $p_{\min} < p_s$ .

Ο όρος  $\Delta\sigma_s$ , αυξάνεται όταν οι μεγαλύτερες μικροφουσαλίδες έχουν εξαφανιστεί, αυξάνοντας έτσι την αντίσταση του υγρού στη σπηλαιώση. Ο όρος αυτός μειώνεται όταν η διαφορά πίεσης  $\Delta p$  αυξάνεται λόγω αύξησης της ταχύτητας του υγρού. Δυναμικές μετρήσεις έχουν δείξει ότι οι μεγάλες μικροφουσαλίδες μπορούν να μεγαλώσουν με ομαλό ρυθμό, φτάνοντας σε διάμετρο το 1 mm, ενώ οι μικρές μικροφουσαλίδες τείνουν να εκραγούν αμέσως μόλις αποσταθεροποιηθούν. Αν το υγρό δεν περιέχει μεγάλες μικροφουσαλίδες, η έναρξη της σπηλαιώσης μπορεί να πάρει τη μορφή ξαφνικής έκρηξης μικροφουσαλίδων, που φτάνει σε συνολική έκταση το 1 cm ή και περισσότερο.

## 2.6 Δυναμική σφαιρικών φυσαλίδων

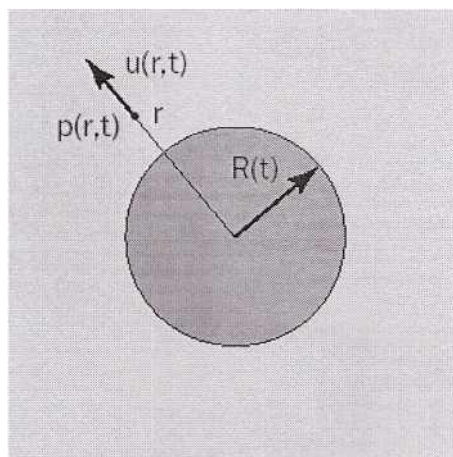
### 2.6.1 Βασικές εξισώσεις

#### 2.6.1.1 Υποθέσεις

Θεωρούνται οι εξής υποθέσεις:

- Το υγρό είναι ασυμπίεστο και νευτώνειο ή άτριβο (inviscid).
- Αμελείται η βαρύτητα.
- Ο αέρας που περιέχεται εντός της φυσαλίδας είναι σταθερός και αμελείται η αδράνεια καθώς επίσης και οποιαδήποτε ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον. Αυτή η αδιαβατική θεώρηση είναι έγκυρη κυρίως για αρκετά μεγάλες φυσαλίδες.
- Η φυσαλίδα περιέχει κορεσμένο ατμό με μερική πίεση ίση με την πίεση ατμοποίησης για τη θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται ο κύριος όγκος του υγρού.

Οι συναρτήσεις που θα καθοριστούν στην περιοχή του υγρού ( $r \geq R(t)$ ) είναι η ταχύτητα  $u(r,t)$  και η πίεση  $p(r,t)$  λόγω της εξέλιξης της φυσαλίδας.



**Σχήμα 2.12** Η ταχύτητα και η πίεση του υγρού μέσου δίπλα στη διεπιφάνεια μιας φυσαλίδας μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου  $t$  και της απόστασης  $r$  από το κέντρο της φυσαλίδας λόγω αύξησης της ακτίνας της ( $R$ ).

### 2.6.1.2 Συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Η μεταφορά μάζας μέσω της διεπιφάνειας αμελείται, έτσι ώστε η ταχύτητα του υγρού στη διεπιφάνεια  $u(R,t)$  να είναι ίση με την ταχύτητα της διεπιφάνειας  $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ .

Στην περίπτωση ιξώδους ρευστού με κινηματικό ιξώδες  $\mu$ , η τάση κάθετη στη διεπιφάνεια είναι:

$$t_{rr}(R, t) = -p(R, t) + 2\mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2.13)$$

Η ισορροπία των δυνάμεων κάθετων στη διεπιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

$$t_{rr}(R, t) = p_v + p_g(t) - \frac{2S}{R} \quad (2.14)$$

όπου  $p_g$  είναι η μερική πίεση του αερίου εντός της φυσαλίδας. Θεωρώντας τη διαδικασία αδιαβατική, η στιγμιαία πίεση του αερίου σχετίζεται με την αρχική πίεση  $p_{g0}$  με την εξής σχέση:

$$p_g(t) = p_{g0} \left[ \frac{R_0}{R(t)} \right]^{3\gamma} \quad (2.15)$$

όπου  $\gamma$  είναι ο λόγος των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων,  $C_{pg}$  και  $C_{vg}$ .

Έτσι, η πίεση της διεπιφάνειας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$p(R, t) = p_v + p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2S}{R} + 2\mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2.16)$$

Μακριά από τη φυσαλίδα, το υγρό θεωρείται ακίνητο έτσι ώστε  $u(\infty, t) \rightarrow 0$  και η πίεση  $p(\infty, t)$  που συμβολίζεται  $p_\infty(t)$  θεωρείται δοσμένη.

Για τις αρχικές συνθήκες η φυσαλίδα θεωρείται ότι βρίσκεται σε ισορροπία, για παράδειγμα  $\dot{R}(0) = 0$ , έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση 2.2:

$$p_{\infty 0} = p_{g0} + p_v - \frac{2S}{R_0} \quad (2.17)$$

### 2.6.1.3 Εξίσωση Rayleigh – Plesset

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, η ροή θεωρείται μη-στροβιλή (irrotational) . Η εξίσωση διατήρησης της μάζας για ασυμπιεστο ρευστό,  $\text{div}\vec{V} = 0$ , οδηγεί στην εξής σχέση:

$$u(r, t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \quad (2.18)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιξώδης όρος των εξισώσεων Navier - Stokes ισούται με 0. Επομένως, τόσο για συνεκτικό όσο και για μη συνεκτικό ρευστό, η εξίσωση ορμής δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.19)$$

από την οποία συνεπάγεται, λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση 2.18:

$$\ddot{R} \frac{R^2}{r^2} + 2\dot{R}^2 \left[ \frac{R}{r^2} - \frac{R^4}{r^5} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (2.20)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το  $r$  και θεωρώντας τις συνθήκες στο άπειρο, ισχύει:

$$\frac{p(r,t) - p_{\infty}(t)}{\rho} = \ddot{R} \frac{R^2}{r} + 2\dot{R}^2 \left[ \frac{R}{r} - \frac{R^4}{4r^4} \right] \quad (2.21)$$

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση Bernoulli για μεταβλητή ασταθή ροή ενός μη ιξώδους υγρού. Στη διεπιφάνεια ( $r = R$ ) σύμφωνα με την εξίσωση 2.21 ισχύει:

$$\frac{p(R,t) - p_{\infty}(t)}{\rho} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \quad (2.22)$$

Τέλος, συνδυάζοντας την εξίσωση 2.16 για την πίεση στη διεπιφάνεια και παρατηρώντας από τη σχέση 2.18 ότι:



$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{2\dot{R}}{R} \quad (2.23)$$

η εξίσωση 2.22 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho \left[ R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = p_v - p_\infty(t) + p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2S}{R} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} \quad (2.24)$$

#### 2.6.1.4 Ερμηνεία της εξίσωσης Rayleigh - Plesset με όρους ισοζυγίου ενέργειας

Παρατηρώντας ότι:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{2\dot{R}R^2} \frac{d}{dt} \left[ \dot{R}^2 R^3 \right] \quad (2.25)$$

η εξίσωση Rayleigh-Plesset μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{d}{dt} (2\pi\rho\dot{R}^2 R^3) = \left[ p_v + p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) \right] 4\pi R^2 \dot{R} - 8\pi S R \dot{R} + 16\pi\mu R \dot{R}^2 \quad (2.26)$$

Οι όροι του αριστερού μέλους αντιπροσωπεύουν τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του υγρού. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στο υγρό, ενώ ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις της επιφανειακής τάσης. Ο ρυθμός διάχυσης λόγω ιξώδους εκφράζεται ως  $\iiint 2\mu e_{ij} e_{ij} d\tau$ , όπου  $e_{ij}$  είναι ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης, και το ολοκλήρωμα λαμβάνεται σε όλο τον όγκο του υγρού. Το ολοκλήρωμα αυτό δίνει τον τελευταίο όρο της εξίσωσης.

### 2.6.2 Κατάρρευση μιας φυσαλίδας ατμού

#### 2.6.2.1 Υποθέσεις

Στο παρόν υποκεφάλαιο δεν λαμβάνονται υπόψη οι επιπτώσεις του ιξώδους, του μη συμπυκνώσιμου αερίου και της επιφανειακής τάσης.

Πριν τη θεωρούμενη χρονική στιγμή, η φυσαλίδα θεωρείται ότι βρίσκεται σε ισορροπία υπό πίεση  $p_{\infty 0}$ , η οποία είναι ίση με την πίεση ατμοποίησης  $p_v$ , σύμφωνα με την εξίσωση 2.17. Από τη στιγμή  $t=0$ , εφαρμόζεται στο υγρό σταθερή πίεση  $p_{\infty}$  υψηλότερη από την  $p_v$ . Ως αποτέλεσμα, η φυσαλίδα καταρρέει σε χαρακτηριστικό χρόνο  $\tau$  που ονομάζεται χρόνος Rayleigh.

Αυτό το απλό μοντέλο επιτρέπει την περιγραφή των χαρακτηριστικών της πρώτης κατάρρευσης φυσαλίδας για ένα σχεδόν ιδεατό (inviscid) υγρό όπως το νερό.

### 2.6.2.2 Η ταχύτητα διεπιφάνειας

Με τις προηγούμενες υποθέσεις, η εξίσωση Rayleigh-Plesset 2.24 μπορεί να ολοκληρωθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.25 οδηγώντας στην παρακάτω εξίσωση:

$$\rho \dot{R}^2 R^3 = -\frac{2}{3} (p_{\infty} - p_v) (R^3 - R_0^3) \quad (2.27)$$

Καθώς ο όρος  $\dot{R}$  είναι αρνητικός κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης, λαμβάνεται η παρακάτω εξίσωση:

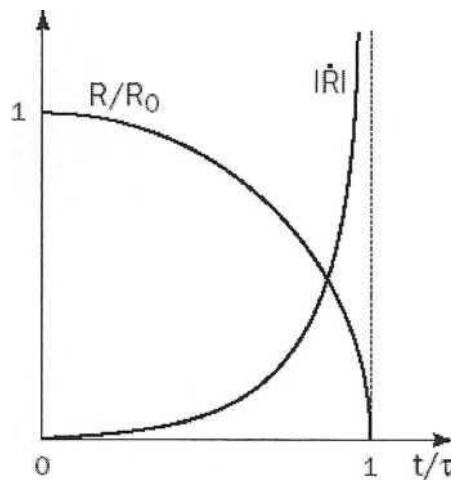
$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{\infty} - p_v}{\rho} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right]} \quad (2.28)$$

Η ακτίνα  $R$  τείνει στο μηδέν. Η αριθμητική ολοκλήρωση αυτής της εξίσωσης επιτρέπει τον υπολογισμό της ακτίνας  $R(t)$  συναρτήσει του χρόνου. Ο χαρακτηριστικός χρόνος κατάρρευσης ή αλλιώς ο χρόνος Rayleigh δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\rho}{p_{\infty} - p_v}} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}} \equiv 0.915 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_{\infty} - p_v}} \quad (2.29)$$

Η σταθερά 0.915 είναι η προσεγγιστική τιμή του όρου  $\sqrt{\frac{\pi \Gamma(5/6)}{6 \Gamma(4/3)}}$  όπου με  $\Gamma$  συμβολίζεται η παραγοντική συνάρτηση  $\Gamma$ .

Η τιμή του  $\tau$  προσεγγίζει με καλή ακρίβεια τις πειραματικές τιμές για ένα μεγάλο εύρος αρχικών τιμών της διαμέτρου της φυσαλίδας από  $1\mu\text{m}$  έως  $1\text{mm}$ . Για παράδειγμα, στην περίπτωση του νερού, μια φυσαλίδα με αρχική ακτίνα  $1\text{cm}$  σε πίεση  $1\text{ bar}$  καταρρέει σε περίπου  $1\text{ms}$ . Η συμπεριφορά των  $R(t)$  και  $\dot{R}(t)$  φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



**Σχήμα 2.13** Εξέλιξη της ακτίνας και της ταχύτητας της διεπιφάνειας ( $R(t)$  και  $\dot{R}(t)$  αντίστοιχα) κατά τη διάρκεια κατάρρευσης της φυσαλίδας. Η ταχύτητα  $R(t)$  βρίσκεται σε απόλυτη τιμή, καθώς κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης έχει αρνητικό πρόσημο,[8].

Ενώ η μέση τιμή της ταχύτητας κατάρρευσης είναι  $\frac{R_0}{\tau}$ , το  $\dot{R}$  τείνει προς το άπειρο στο τέλος της κατάρρευσης. Για τιμές του  $R$  που τείνουν στο 0 για την ταχύτητα διεπιφάνειας ισχύει η εξής σχέση:

$$|\dot{R}| \cong \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_\infty - p_v}{\rho}} \left[ \frac{R_0}{R} \right]^{3/2} \cong 0.747 \frac{R_0}{\tau} \left[ \frac{R_0}{R} \right]^{3/2} \quad (2.30)$$

Στο τέλος της κατάρρευσης η ακτίνα εξελίσσεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$\frac{R}{R_0} \cong 1.87 \left[ \frac{\tau - t}{\tau} \right]^{2/5} \quad (2.31)$$

Για τις αριθμητικές τιμές του νερού, διαπιστώνεται ότι  $|\dot{R}| \approx 720\text{ m/s}$  για  $\frac{R}{R_0} = 1/20$ .

Για τόσο υψηλή ταχύτητα η συμπιεστότητα του υγρού θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στα τελικά στάδια κατάρρευσης.

### 2.6.2.3 Πεδίο πίεσης

Το πεδίο πίεσης  $p(r,t)$  μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση 2.21, όπου ο όρος  $\dot{R}$  είναι γνωστός από την εξίσωση 2.28 και ο όρος  $\ddot{R}$  προκύπτει με παραγωγή του  $\dot{R}$ :

$$\ddot{R} = -\frac{p_{\infty}-p_v}{\rho} \frac{R_0^3}{R^4} \quad (2.32)$$

Το αποτέλεσμα είναι:

$$\Pi(r, t) = \frac{p(r,t)-p_{\infty}}{p_{\infty}-p_v} = \frac{R}{3r} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right] - \frac{R^4}{3r^4} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right] \quad (2.33)$$

Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζεται η συμπεριφορά της αδιάστατης πίεσης  $\Pi$  σε διάφορες χρονικές στιγμές. Παρουσιάζει μέγιστο αμέσως μόλις η ακτίνα της φυσαλίδας γίνει μικρότερη από την τιμή  $(1/\sqrt[3]{4})R_0 \cong 0.63R_0$ . Η μέγιστη πίεση είναι:

$$\Pi_{max} = \frac{p_{max}-p_{\infty}}{p_{\infty}-p_v} = \frac{\left[ \frac{R_0^3}{4R^3} - 1 \right]^{4/3}}{\left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right]^{1/3}} \quad (2.34)$$

και προκύπτει σε απόσταση  $r_{max}$  από το κέντρο της φυσαλίδας που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\frac{r_{max}}{R} = \left[ \frac{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}{\frac{R_0^3}{4R^3} - 1} \right]^{1/3} \quad (2.35)$$

Όταν ο λόγος  $\frac{R}{R_0}$  γίνει αρκετά μικρός, τότε για τις δύο προηγούμενες σχέσεις ισχύει προσεγγιστικά:

$$P_{max} = \frac{1}{4^{4/3}} \left[ \frac{R}{R_0} \right]^3 \cong 0.157 \left[ \frac{R}{R_0} \right]^3 \quad (2.36)$$

$$\frac{r_{max}}{R} \approx \sqrt[3]{4} \cong 1.59 \quad (2.37)$$

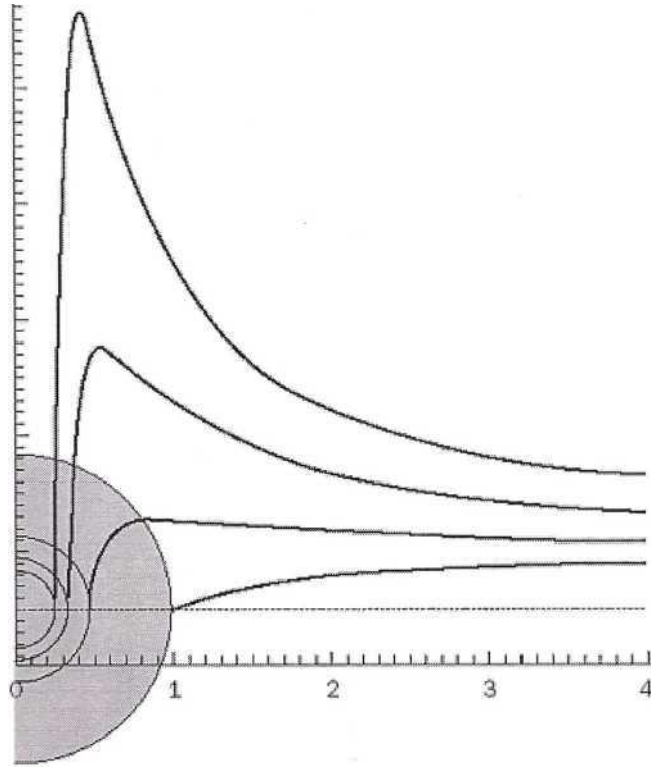
Οι υψηλότερες πιέσεις παρατηρούνται κοντά στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας.

Πρέπει να δοθεί προσοχή στο κύμα πίεσης που φαίνεται στο Σχήμα 2.14 κατά τη διάρκεια κατάρρευσης της φυσαλίδας. Καθώς λαμβάνονται υπόψη μόνο οι δυνάμεις πίεσης και αδράνειας στο συγκεκριμένο μοντέλο, το κύμα πίεσης που μεταδίδεται προς τα μέσα θεωρείται ως αποτέλεσμα των δυνάμεων αδράνειας.

Η απότομη συμπεριφορά της κατάρρευσης της φυσαλίδας οφείλεται σε δύο λόγους:

Πρώτον, η πίεση εντός της φυσαλίδας είναι σταθερή και δεν προβάλλει αντίσταση στην κίνηση του υγρού.

Δεύτερον, η διατήρηση του όγκου του υγρού λόγω σφαιρικής συμμετρίας (εξίσωση 2.18) τείνει να συγκεντρώσει την κίνηση του υγρού σε μία ολοένα και μικρότερη περιοχή.



**Σχήμα 2.14** Εξέλιξη του πεδίου πίεσης κατά τη διάρκεια κατάρρευσης μιας φυσαλίδας. Επίσης απεικονίζεται το κύμα πίεσης που εμφανίζεται λόγω των δυνάμεων αδράνειας [8].

Αν ληφθεί υπόψη και η επιφανειακή τάση, τότε η εξίσωση 2.28 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{\infty} - p_v}{\rho} \left[ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right] + \frac{2S}{\rho R_0} \frac{R_0^3}{R^3} \left[ 1 - \frac{R^2}{R_0^2} \right]} \quad (2.38)$$

## 2.6.3 Έκρηξη φυσαλίδας

### 2.6.3.1 Ταχύτητα διεπιφάνειας

Θεωρείται μικροφυσαλίδα αρχικά σε ισορροπία υπό πίεση  $p_{\infty 0}$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  υπόκειται σε χαμηλότερη πίεση  $p_{\infty} < p_{\infty 0}$ , η οποία μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την πίεση ατμοποίησης  $p_v$ . Η απότομη πτώση στην πίεση κάνει τη φυσαλίδα να μεγαλώσει λόγω του αερίου που περιέχει. Οι επιπτώσεις λόγω ιξώδους αγνοούνται, αλλά λαμβάνεται υπόψη η επιφανειακή τάση.

Καθώς η πίεση  $p_{\infty}$  θεωρείται σταθερή, η εξίσωση Rayleigh - Plesset μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.25, οδηγώντας στην παρακάτω σχέση:

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_v - p_{\infty}}{\rho} \left[ 1 - \frac{R_0^3}{R^3} \right] + \frac{2}{3(\gamma-1)} \frac{p_{g0} R_0^3}{\rho R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} \right] - \frac{2S}{\rho R} \left[ 1 - \frac{R^2}{R_0^2} \right] \quad (2.39)$$

Ο όρος  $p_{g0}$  είναι η αρχική πίεση του αερίου. Καθώς το μέγεθος της μικροφυσαλίδας αναμένεται να αυξηθεί, θεωρείται αδιαβατική μεταβολή του αερίου. Στην περίπτωση ισόθερμης μεταβολής του αερίου που εμπεριέχεται στη φυσαλίδα, ο δεύτερος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης 2.39 θα γίνει:

$$2 \frac{p_{g0} R_0^3}{\rho R^3} \ln \frac{R}{R_0} \quad (2.40)$$

Η εξίσωση 2.40 είναι της μορφής  $\dot{R}^2 = f(R)$ . Η εύρεση των ριζών της συνάρτησης  $f(R)$  είναι σημαντική καθώς οι ρίζες της  $f(R)$  καθορίζουν την περιοχή διακύμανσης της ακτίνας  $R$  λόγω του ότι η κίνηση είναι θετική μόνο αν η  $f(R)$  είναι θετική.

### 2.6.3.2 Περίπτωση ισορροπίας $p_{\infty} = p_{g0} + p_v - \frac{2S}{R_0}$

Η κατάσταση ισορροπίας για  $R = R_0$  απαιτεί η συνάρτηση  $f(R)$  να έχει διπλή ρίζα στο  $R_0$  έτσι ώστε  $\dot{R}_0 = 0$  και  $\ddot{R}_0 = 0$ . Έτσι:

- $f(R_0) = 0$ : Αυτή η συνθήκη ισχύει λόγω της επιλογής των αρχικών συνθηκών
- $\dot{f}(R_0) = 0$  Αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ισορροπίας:

$$p_{\infty} = p_{g0} + p_v - \frac{2S}{R_0} \quad (2.41)$$

Η σταθερότητα της κατάστασης ισορροπίας στην περιοχή της ακτίνας  $R_0$  απαιτεί την επιπλέον συνθήκη  $f(R_0) < 0$ . Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ευστάθειας που αναφέρθηκε στο υποκεφάλαιο 2.5.2, συγκεκριμένα ότι υπάρχει ευστάθεια μόνο στην καμπύλη με την αρνητική κλίση στο Σχήμα 2.9.

### 2.6.3.3 Περίπτωση αύξησης της μικροφουσαλίδας $p_{\infty} < p_{\infty 0}$

Αν η συνάρτηση  $f(R)$  έχει μία ρίζα  $R_l$  μεγαλύτερη από  $R_0$  (το οποίο είναι δυνατό για  $p_{\infty} < p_v$  ή  $p_{\infty} > p_v$ ), το πρόσημο του  $R$  αλλάζει στα όρια  $R = R_0$  και  $R = R_l$  και η ακτίνα ταλαντώνεται περιοδικά μεταξύ των τιμών  $R_0$  και  $R_l$ . Καθώς έχει γίνει η υπόθεση ότι δεν υπάρχει διάχυση, δεν υπάρχει απόσβεση στην ταλάντωση. Η κίνηση εξαρτάται από την τιμή του λόγου  $\frac{R_1}{R_0}$ . Αν η τιμή είναι μεγάλη, τότε η επίδραση της πίεσης του αερίου είναι μικρή όταν το  $R$  είναι μεγάλο και κοντά στο  $R_1$ , αλλά παίζει κυρίαρχο ρόλο για ακτίνες με τιμή  $R$  κοντά στο  $R_0$ . Η κίνηση είναι μη γραμμική. Επαναύξηση φουσαλίδας μπορεί να συμβεί λόγω της ελαστικής συμπεριφοράς του εμπεριεχομένου αερίου. Η ταλάντωση μοιάζει με ακολουθία εκρήξεων και καταρρεύσεων. Αντίθετα, αν ο λόγος  $\frac{R_1}{R_0}$  είναι κοντά στην τιμή 1, η κίνηση γίνεται αρμονική. Η περίοδος  $T_0$  δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$T_0 = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{-\dot{f}(R_0)}} \quad (2.42)$$

Έτσι, η φουσαλίδα συμπεριφέρεται σαν ένας γραμμικός ταλαντωτής, συχνότητας:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[ 3\gamma p_{g0} - \frac{2S}{R_0} \right]} \quad (2.43)$$



Αν η συνάρτηση  $f(R)$  δεν έχει ρίζα μεγαλύτερη από την τιμή  $R_0$ , το πρόσημο της ταχύτητας διεπιφάνειας  $\dot{R}$  δεν αλλάζει, και η φυσαλίδα μεγαλώνει απεριόριστα. Η εξίσωση 2.39 δείχνει ότι η ταχύτητα διεπιφάνειας  $\dot{R}$  φτάνει μία οριακή τιμή  $\dot{R}_\infty$  που δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{R}_\infty = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p_\infty}{\rho}} \quad (2.44)$$

Η τιμή που προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι σε πολύ καλή συμφωνία με αντίστοιχες πειραματικές τιμές.

## 2.7 Μοντέλο σπηλαιώσης στον κώδικα FLUENT

### 2.7.1 Εισαγωγή

Το υγρό μέσο περιέχει μικροφυσαλίδες από μη συμπυκνώσιμα αέρια, οι οποίες με πτώση της πίεσης κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο μπορούν να μεγαλώσουν και να σχηματίσουν κοιλότητες (cavities) οι οποίες οδηγούν στο φαινόμενο της σπηλαιώσης. Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούνται πολύ μεγάλες και απότομες διακυμάνσεις στην πυκνότητα στις περιοχές χαμηλής πίεσης όπου εμφανίζεται η σπηλαιώση.

Το μοντέλο σπηλαιώσης που χρησιμοποιείται στον κώδικα FLUENT χρησιμοποιείται για όλες τις επιδράσεις πρώτης τάξης (first-order effects), όπως αλλαγή φάσης, δυναμική της φυσαλίδας, διακυμάνσεις στην τυρβώδη πίεση και στα μη συμπυκνώσιμα αέρια. Λειτουργεί καί για πολυφασικές ροές, και έχει τη δυνατότητα να περιλαμβάνει τις επιδράσεις των ταχυτήτων ολίσθησης (slip velocities) μεταξύ της υγρής και αέριας φάσης, καθώς και τις θερμικές επιδράσεις και τη συμπίεστικότητα της υγρής και της αέριας φάσης. Το μοντέλο σπηλαιώσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί με το μοντέλο πολυφασικού μείγματος (mixture multiphase model) με ή χωρίς ταχύτητες ολίσθησης. Το πλήρες μοντέλο σπηλαιώσης του κώδικα FLUENT μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα:

Πρώτον, στο βασικό μοντέλο σπηλαιώσης (basic cavitation model), το οποίο περιέχει το βασικό διφασικό μοντέλο σπηλαιώσης (standard two-phase cavitation model). Δεύτερον, στο διευρυμένο μοντέλο σπηλαιώσης, το οποίο χρησιμοποιείται

για περισσότερες από δύο φάσεις. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το βασικό μοντέλο σπηλαιώσης για δύο φάσεις χωρίς ταχύτητες ολίσθησης.

### 2.7.2 Βασικό μοντέλο σπηλαιώσης

Στο βασικό διφασικό μοντέλο σπηλαιώσης θεωρούνται οι εξής παραδοχές:

- Το σύστημα προς προσομοίωση περιλαμβάνει δύο μόνο φάσεις (το υγρό μέσο και τον ατμό του) και ένα ειδικό κλάσμα από χωριστά μοντελοποιημένα μη συμπυκνώσιμα αέρια.
- Λαμβάνονται υπόψη ο σχηματισμός των φυσαλίδων και η κατάρρευσή τους.
- Το κλάσμα μάζας των μη συμπυκνώσιμων αερίων θεωρείται εξαρχής γνωστό.

Το βασικό μοντέλο σπηλαιώσης προσφέρει τις εξής δυνατότητες:

- Είναι υπεύθυνο για τη μεταφορά μάζας μεταξύ του υγρού και του ατμού.
- Είναι συμβατό με όλα τα διαθέσιμα μοντέλα τύρβης στον κώδικα FLUENT.
- Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την εξίσωση ενέργειας μίγματος (mixture energy equation).
- Τόσο η υγρή όσο και η αέρια φάση μπορεί να είναι συμπιεστή ή ασυμπιέστη. Τα μη συμπυκνώσιμα αέρια θεωρούνται πάντα συμπιεστά. Για συμπιεστά ρευστά, η πυκνότητα μπορεί να προσδιοριστεί ως συνάρτηση οριζόμενη από τον χρήστη (user-defined function).
- Οι παράμετροι πίεση ατμοποίησης και συντελεστής επιφανειακής τάσης του υγρού μπορεί να έχουν σταθερές τιμές ή να είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας.

Οι περιορισμοί στο βασικό μοντέλο σπηλαιώσης είναι οι εξής:

- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τη μέθοδο VOF (Volume Of Fluid).
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προσομοίωση πολυφασικής ροής μόνο όταν χρησιμοποιείται το μοντέλο μίξης (mixture model). Όταν υπάρχει σημαντική ολίσθηση (slip) μεταξύ των φάσεων, είναι προτιμότερο να επιλύεται η σπηλαιώση με την επιλογή ταχύτητες ολίσθησης (slip velocities) απενεργοποιημένη.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν εμφανίζεται σπηλαιώση σε ένα και μόνο υγρό.

- Η αρχική φάση πρέπει να είναι η υγρή φάση και η δευτερεύουσα φάση ατμός.

### 2.7.3 Κλάσμα μάζας ατμού και μεταφορά ατμού

Το υγρό μέσο θεωρείται ότι είναι ένα μίγμα υγρού, ατμού και μη συμπυκνώσιμων αερίων. Μια εξίσωση μεταφοράς διέπει το κλάσμα μάζας του ατμού,  $f$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \nabla(\rho \vec{v}_v f) = \nabla(\gamma \nabla f) + R_e - R_c \quad (2.45)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του μείγματος,  $\vec{v}_v$  είναι το διάνυσμα ταχύτητας της φάσης του ατμού,  $\gamma$  είναι ο συντελεστής ειδικής ανταλλαγής (effective exchange coefficient) και  $R_e$  και  $R_c$  είναι οι ρυθμοί ανάπτυξης και κατάρρευσης των φυσαλίδων αντίστοιχα. Οι ρυθμοί προέρχονται από τις εξισώσεις Rayleigh - Plesset και από τον περιορισμό στο μέγεθος των φυσαλίδων (διεπιφάνεια ανά μονάδα όγκου του ατμού). Αυτοί οι ρυθμοί είναι συναρτήσεις της στιγμιαίας, τοπικής στατικής πίεσης, και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

Όταν  $p < p_{sat}$ :

$$R_e = C_e \frac{V_{ch}}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2(p_{sat}-p)}{3\rho_l}} (1-f) \quad (2.46)$$

Ενώ για  $p > p_{sat}$ :

$$R_c = C_c \frac{V_{ch}}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2(p-p_{sat})}{3\rho_l}} (1-f) \quad (2.47)$$

όπου οι όροι  $l$  και  $v$  υποδηλώνουν την υγρή φάση και τη φάση του ατμού, αντίστοιχα,  $V_{ch}$  είναι η χαρακτηριστική ταχύτητα η οποία είναι προσέγγιση της έντασης της τοπικής τύρβης ( $V_{vh} = \sqrt{k}$ ),  $\sigma$  είναι ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης του υγρού,  $p_{sat}$  είναι η πίεση κορεσμού του υγρού για δεδομένη σταθερή θερμοκρασία, και  $C_e$  και  $C_c$  είναι εμπειρικές σταθερές με τιμές  $C_e = 0.02$  και  $C_c = 0.01$ .

#### 2.7.4 Διακυμάνσεις πίεσης λόγω τύρβης

Η τύρβη έχει σημαντική επίδραση στις ροές με σπηλαίωση. Το μοντέλο σπηλαίωσης του κώδικα FLUENT διαχειρίζεται τις διακυμάνσεις στην πίεση που προκαλούνται λόγω της τύρβης αυξάνοντας την οριακή τιμή της πίεσης όπου συμβαίνει αλλαγή φάσης από  $p_{sat}$  σε

$$p_v = \frac{1}{2}(p_{sat} + p_{turb}) \quad (2.48)$$

όπου:

$$p_{turb} = 0.39\rho k \quad (2.49)$$

όπου  $k$  είναι η τοπική κινητική ενέργεια της τύρβης.

#### 2.7.5 Επιπτώσεις μη συμπτκνώσιμων αερίων

Το υγρό μέσο συνήθως περιέχει πολύ μικρές ποσότητες από μη συμπτκνώσιμα αέρια. Ακόμα και ελάχιστες ποσότητες, όπως για παράδειγμα 10 ppm (parts per million), μπορούν να έχουν πολύ μεγάλη επίδραση σε ροή με σπηλαίωση λόγω της εκτόνωσής τους σε χαμηλές πιέσεις, σύμφωνα με τον νόμο των ιδανικών αερίων. Στον κώδικα FLUENT, το εργαζόμενο μέσο θεωρείται ότι είναι ένα μίγμα υγρής φάσης και φάσης ατμού, με τη φάση ατμού να αποτελείται από κορεσμένο ατμό και μη συμπτκνώσιμα αέρια. Η πυκνότητα του μίγματος,  $\rho$ , υπολογίζεται ως εξής:

$$\rho = a_v\rho_v + a_g\rho_g + (1 - a_v - a_g)\rho_l \quad (2.50)$$

όπου  $\rho_l$ ,  $\rho_v$  και  $\rho_g$  είναι οι πυκνότητες του υγρού, του ατμού και των μη συμπτκνώσιμων αερίων, αντίστοιχα, και  $a_l$ ,  $a_v$  και  $a_g$  είναι τα αντίστοιχα κλάσματα όγκου. Η σχέση μεταξύ του κλάσματος μάζας  $f$  στις σχέσεις 2.45, 2.46, 2.47 και του κλάσματος όγκου  $a_i$ , στην εξίσωση 2.50 είναι η εξής:

$$a_i = f_i \frac{\rho}{\rho_i} \quad (2.51)$$

Το συνδυασμένο κλάσμα όγκου του ατμού και του αερίου ( $a_v + a_g$ ) ονομάζεται κλάσμα κενού (void fraction) ( $\alpha$ ). Το μη συμπυκνώσιμο αέριο είναι από προεπιλογή αέρας με μοριακό βάρος 29, αλλά ο χρήστης μπορεί να το αλλάξει μέσω της γραμμής εντολών (command text). Η θερμοκρασία από προεπιλογή ορίζεται στα 300 K όταν η εξίσωση ενέργειας δεν είναι ενεργοποιημένη.

### 2.7.6 Ρυθμοί αλλαγής φάσης

Οι τελικές σχέσεις για τους ρυθμούς ανάπτυξης και κατάρρευσης φυσαλίδων με το μέγεθος  $p_v$  να αντικαθιστά το  $p_{sat}$  είναι οι εξής:

για  $p < p_v$ :

$$R_e = C_e \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2(p_v - p)}{3\rho_l}} (1 - f_v - f_g) \quad (2.52)$$

ενώ για  $p > p_v$ :

$$R_c = C_c \frac{\sqrt{k}}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2(p - p_v)}{3\rho_l}} f_v \quad (2.53)$$

### 2.7.7 Παράγοντες που επηρεάζουν το μοντέλο σπηλαιώσης

Σε πρακτικές εφαρμογές, υπάρχουν αρκετοί παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του φαινομένου της σπηλαιώσης. Η διαφορά πίεσης μεταξύ πίεσης εισόδου και εξόδου και η πολύ χαμηλή (κοντά στο απόλυτο μηδέν) τιμή της πίεσης είναι μερικοί από τους παράγοντες που μπορούν να οδηγήσουν σε απόκλιση. Επίσης, αν οι αρχικές συνθήκες που δίνονται από τον χρήστη απέχουν πολύ από τις πραγματικές, θα επηρεαστούν οι τιμές του πεδίου πίεσης καθώς και η στιγμή έναρξης του φαινομένου της σπηλαιώσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΟ ΠΑΚΕΤΟ GAMBIT

### 3.1 Εισαγωγή στο λογισμικό

Το σχεδιαστικό πακέτο Gambit είναι ένα λογισμικό, στο οποίο ο σχεδιαστής που θέλει να προσομοιώσει ένα μοντέλο για ένα φαινόμενο, μπορεί να σχεδιάσει το μοντέλο, να κατασκευάσει το πλέγμα του ώστε στη συνέχεια να είναι σε θέση να επιλύσει φαινόμενα ροής ρευστών, μεταφοράς θερμότητας και άλλες επιστημονικές εφαρμογές.

Στις παραγράφους που ακολουθούν δίνεται μια εποπτική άποψη για τη χρήση του προγράμματος, και περιγράφονται αναλυτικά τα βήματα που πραγματοποιήθηκαν για την κατασκευή του μοντέλου του εγχυτήρα. Οι βασικές λειτουργίες (operations) του προγράμματος οι οποίες θα αναλυθούν είναι οι εξής :

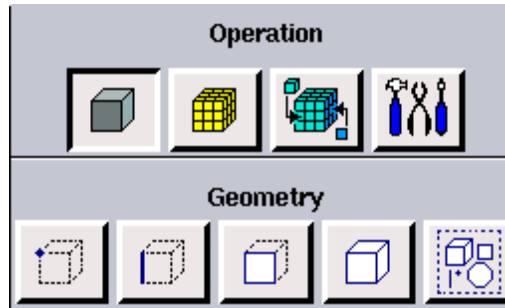
- Εντολές που αφορούν στη γεωμετρία (Geometry command button)
- Εντολές που αφορούν στο πλέγμα (Mesh command button)
- Εντολές που αφορούν στις οριακές συνθήκες (Zone command button)

Στη γραφική διεπιφάνεια του προγράμματος, υλοποιούνται ο γεωμετρικός σχεδιασμός του υπό μελέτη αντικειμένου, η δημιουργία πλέγματος και ο καθορισμός των οριακών συνθηκών.

Η γραμμή εργαλείων και λειτουργιών (operation tool pad) όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1 αποτελείται από τα εξής επιμέρους τμήματα :

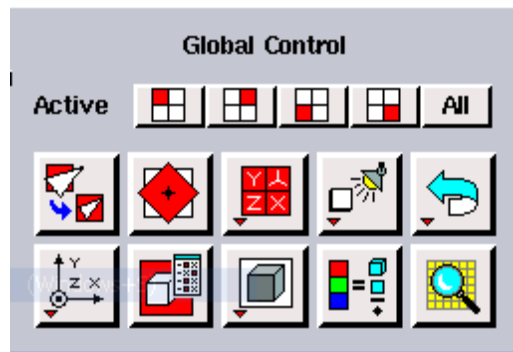
- Γεωμετρία (Geometry): Με το πλήκτρο αυτό, ενεργοποιούνται τα εργαλεία με τα οποία κατασκευάζεται ένα γεωμετρικό σχήμα, στην προκειμένη περίπτωση το μοντέλο που μελετάμε.
- Πλέγμα (Mesh): Με το πλήκτρο αυτό, ενεργοποιούνται τα εργαλεία με τα οποία κατασκευάζουμε και επιλέγουμε το πλέγμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη γεωμετρία που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο στάδιο.
- Ζώνες (Zones): Με το πλήκτρο αυτό, ενεργοποιούνται τα εργαλεία με τα οποία προσδιορίζουμε τις οριακές συνθήκες του μοντέλου.

- Εργαλεία (Tools): Με το πλήκτρο αυτό, ενεργοποιείται η γραμμή εργαλείων από την οποία είναι δυνατόν να δημιουργήσουμε ή να μετατρέψουμε συστήματα συντεταγμένων καθώς και πλέγματα.



**Σχήμα 3.1** Γραμμή εργαλείων και λειτουργιών.

Επιπλέον, στην αρχική επιφάνεια εργασίας του Gambit, βλέπουμε και την γραμμή εργαλείων κεντρικού ελέγχου ( *global control toolbar* ), η οποία φαίνεται στο *Σχήμα 3.2*.



**Σχήμα 3.2** Γραμμή εργαλείων κεντρικού ελέγχου.

Η γραμμή εργαλείων κεντρικού ελέγχου αποτελείται από τις εξής επιμέρους λειτουργίες:

- > *Fit to window*: Προσαρμόζει το μοντέλο που έχουμε κατασκευάσει ώστε να καταλαμβάνει όλη την επιφάνεια εργασίας γραφικών.
- > *Select pivot*: Καθορίζει ένα σημείο, γύρω από το οποίο μπορούμε να περιστρέψουμε το γεωμετρικό μοντέλο μας.
- > *Select preset configuration*: Χωρίζει την επιφάνεια εργασίας σε τέσσερα ίσα τμήματα στα οποία το μοντέλο έχει διαφορετικό προσανατολισμό, και υπάρχει η επιλογή να διαλέξουμε ένα από τα τέσσερα μοντέλα, και αυτό να καταλαμβάνει όλη την επιφάνεια εργασίας γραφικών.
- > *Modify lights*: Ρυθμίζει την ένταση του φωτισμού προς το γεωμετρικό μοντέλο.
- > *Annotate*: Δίνεται η δυνατότητα τοποθέτησης σχολίων στο σχέδιο με χρήση γραμμών και βελών.
- > *Undo - Redo*: Αναίρεση της τελευταίας εντολής - Επαναφορά της τελευταίας εντολής.
- > *Orient model*: Προσανατολίζει τη γεωμετρία σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που ορίζουμε εμείς.
- > *Specify display attributes*: Μάς επιτρέπει να ορίσουμε ποια χαρακτηριστικά της γεωμετρίας θα παρουσιάζονται στην οθόνη γραφικών, όπως, κόμβοι, ακμές, επιφάνειες.
- > *Render model*: Ορίζει αν στο μοντέλο θα φαίνεται το πλέγμα ή όχι, αν θα είναι σκιασμένο, ή αν θα φαίνονται ακμές.
- > *Specify color mode*: Καθορίζει τον χρωματισμό των διαφόρων συνιστωσών της γεωμετρικής μας κατασκευής.
- > *Examine mesh*: Επιτρέπει τον έλεγχο του πλέγματος.

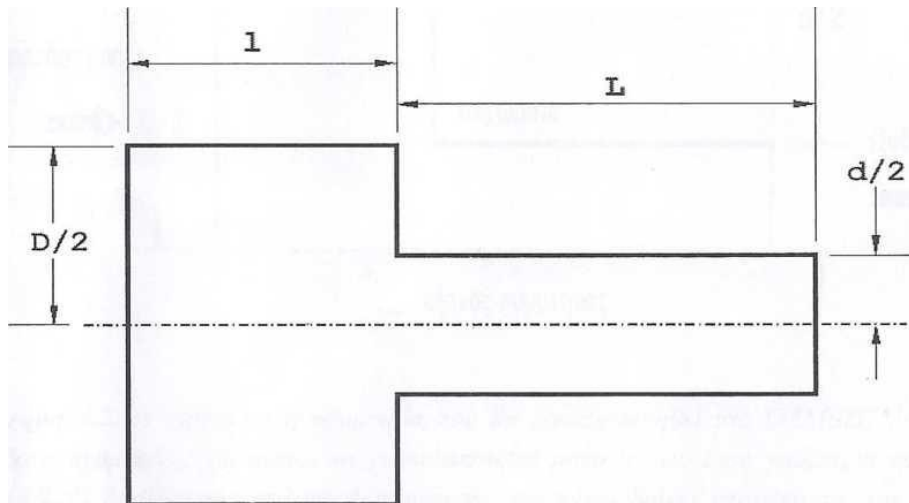
### 3.2 Στοιχεία γεωμετρίας της διάταξης του ακροφυσίου

Το πρώτο κομμάτι της ανάλυσης του ροϊκού πεδίου και του φαινομένου της



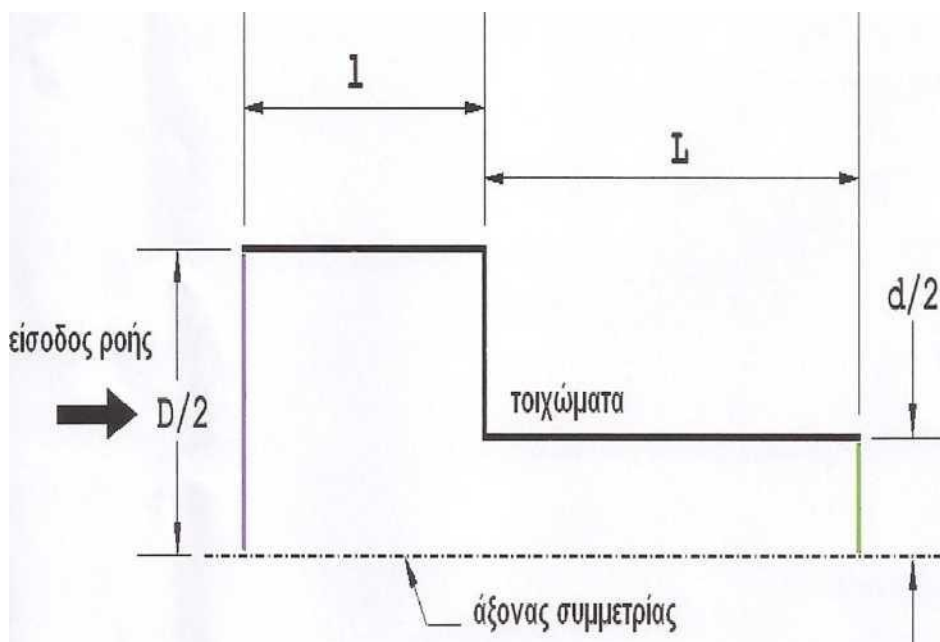
διφασικής ροής και του φαινομένου της σπηλαίωσης, ώστε να είναι δυνατή η παρουσίαση της διαδικασίας προσομοίωσης στον κώδικα FLUENT, είναι η σχεδίαση της γεωμετρίας και του αριθμητικού πλέγματος που χρησιμοποιείται για να καθορίσει τα όρια της ανάλυσης. Η είσοδος της ροής είναι μία, καθώς μία είναι και η έξοδος. Συγκεκριμένα, παρακάτω παρουσιάζεται η βήμα προς βήμα κατασκευή της γεωμετρίας του προβλήματος και ο καθορισμός των οριακών συνθηκών στο λογισμικό GAMBIT.

Στην περίπτωση της διφασικής ροής η πολυπλοκότητα του φαινομένου, δηλαδή η ύπαρξη δύο φάσεων, αυξάνεται ραγδαία για την τρισδιάστατη ροή. Αυτό έχει ως συνέπεια να αυξάνεται και η απαίτηση για υπολογιστική ισχύ με αποτέλεσμα η υπολογιστική διερεύνηση να γίνει πολύ χρονοβόρα, αν υπολογίσουμε ότι αυτή πρέπει να γίνει για αρκετές περιπτώσεις. Επίσης, πειράματα που έγιναν για δισδιάστατη ροή, έδωσαν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για τον λόγο αυτόν η ανάλυση του ροϊκού πεδίου έγινε σε δύο διαστάσεις, υποθέτοντας ότι η τρίτη διάσταση δεν επηρεάζει το μέσο ροϊκό πεδίο.



**Σχήμα 3.3** Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης. Με  $d$  συμβολίζεται η διάμετρος του κυλινδρικού στομίου, με  $D$  η διάμετρος του μεγαλύτερου κυλινδρικού αγωγού, με  $L$  το μήκος του στομίου και με  $l$  το μήκος του μεγαλύτερου αγωγού.

### 3.3 Σχεδίαση γεωμετρίας και αριθμητικού πλέγματος



**Σχήμα 3.4** Η δισδιάστατη γεωμετρία που θα μοντελοποιηθεί στο GAMBIT. Λόγω της αξονικής συμμετρίας, χρειάζεται να μοντελοποιηθεί μόνο η άνω μισή γεωμετρία καθώς ο κώδικας FLUENT διαθέτει την επιλογή “Axisymmetric” στο πάνελ Solver, επιτρέποντας την επίλυση αξονοσυμμετρικών ροών. Έτσι, εξοικονομούνται υπολογιστικοί πόροι και χρόνος.

Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4, χρειάζεται να κατασκευαστεί μόνο η μισή γεωμετρία του στομίου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το στόμιο και ο μεγαλύτερος σωλήνας πριν το στόμιο θεωρούνται κυκλικοί (και επομένως οι γεωμετρίες τους αξονοσυμμετρικές) και επομένως τα αποτελέσματα στο FLUENT για την υπόλοιπη μισή γεωμετρία θα είναι ακριβώς τα ίδια (ως προς τον άξονα συμμετρίας). Επίσης, λόγω της συμμετρίας και επειδή αναπτύσσονται πολύ υψηλές ταχύτητες στη ροή εντός του στομίου, η βαρύτητα μπορεί να αμεληθεί. Με την υπόθεση της διδιάστατης ροής, μειώνονται κατά πολύ οι απαιτούμενοι υπολογιστικοί πόροι αλλά και ο χρόνος σύγκλισης των επαναλήψεων. Το σημείο (0,0) που συμβολίζει την αρχή των αξόνων (x,y) θα σχεδιαστεί έτσι ώστε να συμπίπτει με την αρχή του ακροφυσίου και να



βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας.

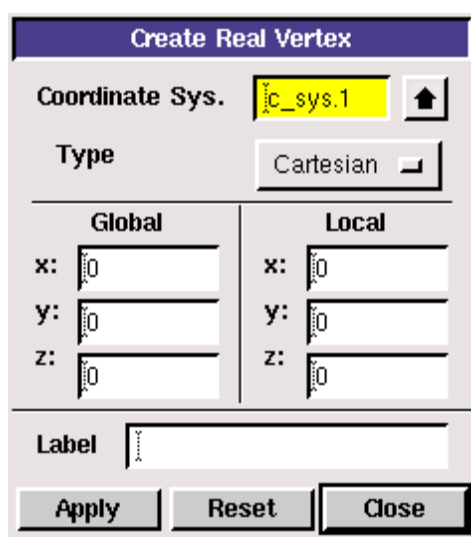
Έτσι, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ακροφυσίου είναι (Πίνακας 3.1):

Γεωμετρικό μέγεθος	Μήκος (mm)
d	0.2
D	0.8
L	1
1	0.5

**Πίνακας 3.1** Γεωμετρικά χαρακτηριστικά ακροφυσίου.

### 3.3.1 Δημιουργία κορυφών

Αρχικά πρέπει να δημιουργηθούν όλες οι κορυφές της γεωμετρίας, οι οποίες στη συνέχεια θα μας βοηθήσουν στην κατασκευή των απαιτούμενων ευθύγραμμων τμημάτων. Στη γραμμή λειτουργιών Geometry κάνουμε αριστερό ‘κλικ’ στο Κουμπί  και στη γραμμή λειτουργιών Vertex κάνουμε αριστερό ‘κλικ’ στο κουμπί  (create real vertex) για να δημιουργήσουμε την πρώτη κορυφή πατώντας το Apply.





**Σχήμα 3.5** Δημιουργία κορυφής βάσει συντεταγμένων

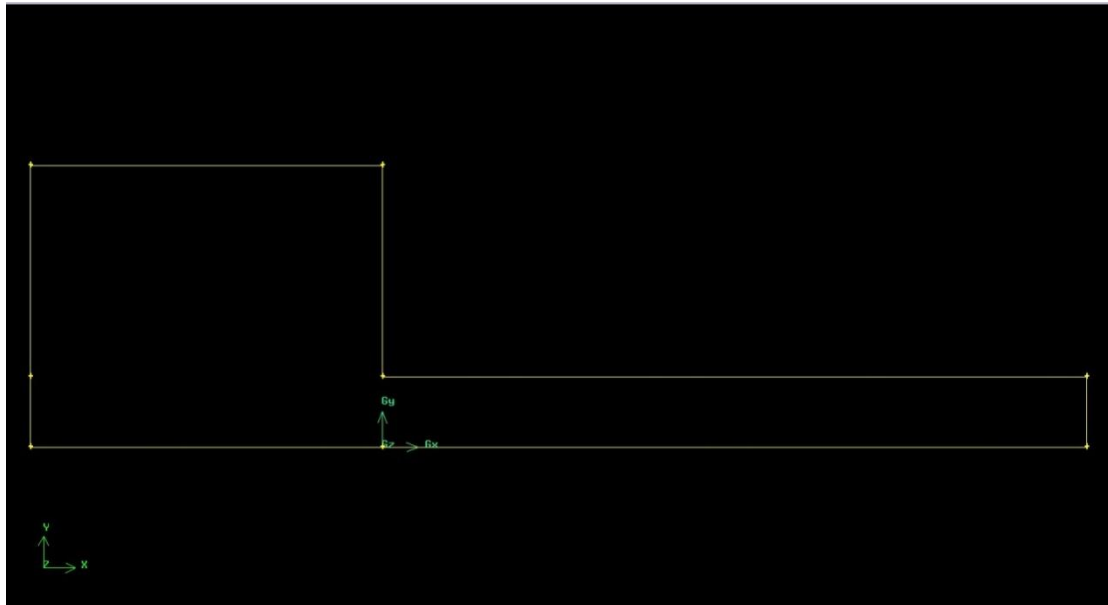
Στη συνέχεια, γνωρίζοντας τις ακριβείς αποστάσεις, μπορούμε να δημιουργήσουμε όλες τις κορυφές που χρειαζόμαστε, βάζοντας όπου x,y τις συντεταγμένες των σημείων. Στον Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι συντεταγμένες των σημείων που δημιουργήθηκαν.

Σημείο	Συντεταγμένες (x,y) (m)
1	(-0.0005, 0.0000)
2	(-0.0005, 0.0001)
3	(-0.0005, 0.0004)
4	(0, 0.0004)
5	(0, 0.0001)
6	(0.0010, 0.0001)
7	(0.0010, 0)
8	(0,0)

**Πίνακας 3.2** Συντεταγμένες σημείων.




### 3.3.2 Δημιουργία ευθύγραμμων τμημάτων

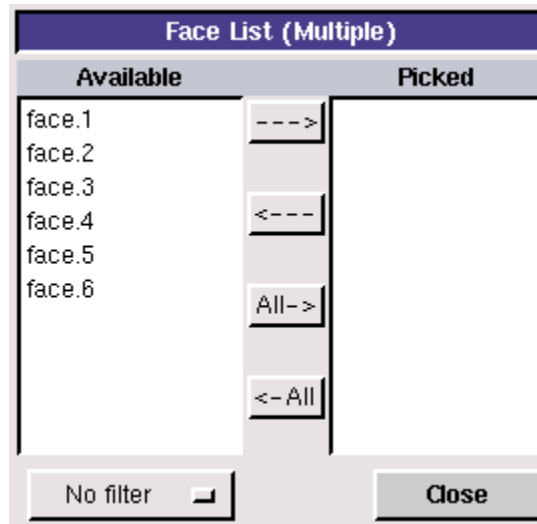
Έχοντας όλα τα σημεία της γεωμετρίας, μπορούμε να σχεδιάσουμε τα ευθύγραμμα τμήματα. Στη γραμμή λειτουργιών Geometry κάνουμε αριστερό ‘κλικ’ στο κουμπί  και στη συνέχεια στο κουμπί  (create straight edge). Κρατώντας πατημένο το κουμπί ‘Shift’, επιλέγουμε διαδοχικά τα σημεία της γεωμετρίας και πατώντας το Apply δημιουργούμε τα ευθύγραμμα τμήματα. Στο σχήμα 3.6 φαίνεται τόσο η δημιουργία των σημείων όσο και των ευθυγράμμων τμημάτων της γεωμετρίας.



**Σχήμα 3.6** Δημιουργία ευθύγραμμων τμημάτων.

### 3.3.3 Ορισμός κατάλληλων τετράπλευρων

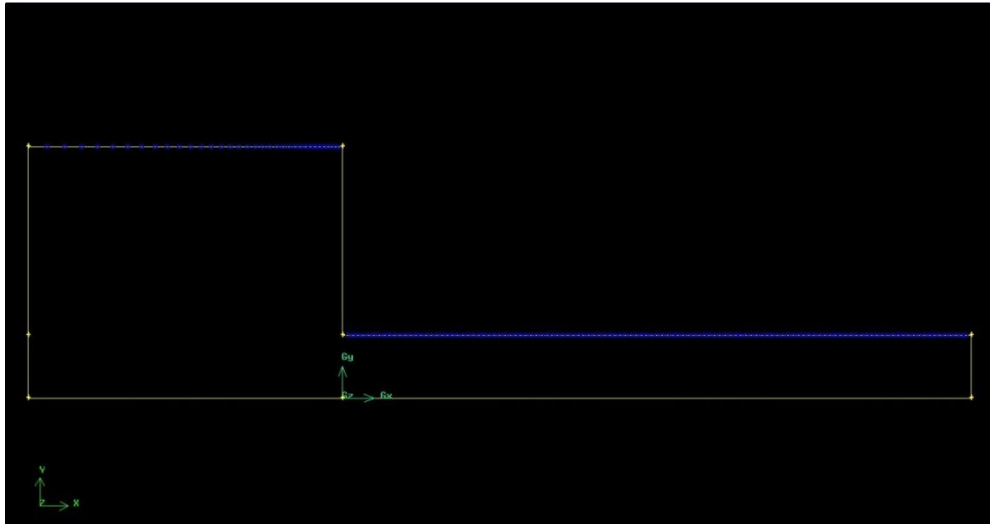
Ο ορισμός των κατάλληλων τετραπλεύρων είναι ζωτικής σημασίας, καθώς επηρεάζουν άμεσα την κατασκευή του πλέγματος, όπως εξηγείται και παρακάτω. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δημιουργούμε 6 τέτοια τετράπλευρα, και τα κατασκευάζουμε από τα διαδοχικά διπλανά νοητά τετράπλευρα. Στη γραμμή λειτουργιών Geometry πατάμε το κουμπί  και μετά το κουμπί  (create face from wireframe). Στη συνέχεια, κρατώντας πατημένο το κουμπί ‘Shift’, επιλέγουμε διαδοχικά ανά τέσσερις τις ακμές που σχηματίζουν τα τετράπλευρα, και πατάμε το Apply. Κάθε φορά που δημιουργείται ένα τετράπλευρο επιτυχώς, τα ευθύγραμμα τμήματα από κίτρινο χρώμα μετατρέπονται σε γαλάζια. Για να επιβεβαιώσουμε την δημιουργία των τετραπλεύρων, πατώντας το κουμπί  από τη γραμμή λειτουργιών Face και μετά το κουμπί με το κατακόρυφο βέλος με φορά προς τα πάνω και μάς εμφανίζεται ένα αντίστοιχο παράθυρο με το σχήμα 3.7, όπου θα από τυπώνονται τα Faces.



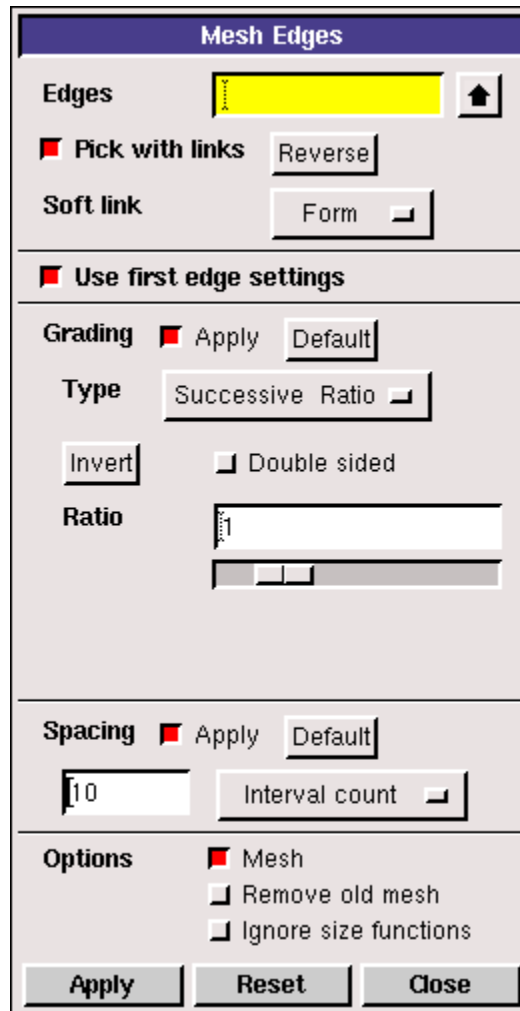
**Σχήμα 3.7** Face List

Το επόμενο βήμα ήταν η κατασκευή του πλέγματος στον χώρο εσωτερικά της γεωμετρίας, το οποίο αποτελεί την επιφάνεια στην οποία θα πραγματοποιηθούν οι υπολογισμοί της ροής. Μια λανθασμένη επιλογή πλέγματος μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα, που δεν ανταποκρίνονται στην πραγματική λύση. Τις περισσότερες φορές η επιλογή του επιθυμητού πλέγματος γίνεται εμπειρικά, ανάλογα με τη γεωμετρία και τα δεδομένα εισόδου του προβλήματος. Επομένως, η επιλογή του κατάλληλου πλέγματος είναι εξαιρετικά σημαντική για την επίτευξη της υπολογιστικής λύσης. Το πλέγμα που τελικά χρησιμοποιήθηκε, προήλθε μέσα από μια σειρά συνεχών δοκιμών διαφορετικών πλεγμάτων (διαφορετικής πυκνότητας).

Αρχικά, πρέπει να κατασκευαστεί πλέγμα σε κάθε πλευρά ξεχωριστά, ώστε να είναι δυνατή στη συνέχεια η κατασκευή πλέγματος στα τετράπλευρα που έχουμε δημιουργήσει και να καλυφθεί όλη η επιφάνεια της γεωμετρίας μας, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.8, χρησιμοποιώντας το παράθυρο εντολών του σχήματος 3.9.



Σχήμα 3.8 Κατασκευή πλέγματος ανά πλευρά



Σχήμα 3.9 Κατασκευή πλέγματος.

Το πλέγμα της γεωμετρίας σχεδιάστηκε έτσι ώστε στον μεγαλύτερο αγωγό να πυκνώνει σταδιακά προς τα τοιχώματα και προς την αρχή του στομίου, ενώ στο

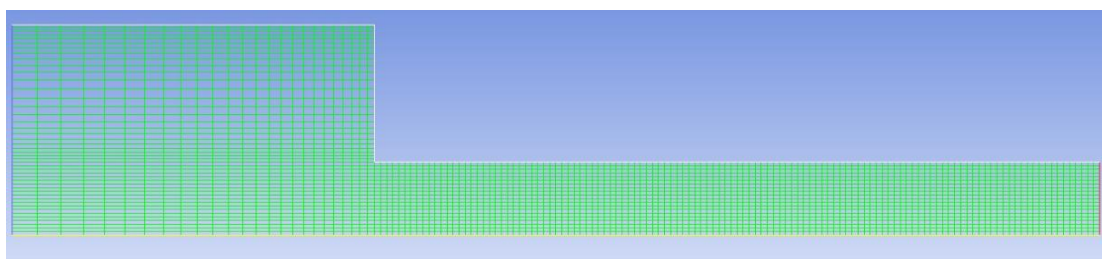
στόμιο να είναι ομογενές και πυκνό. Λεπτομέρειες κατασκευής του πλέγματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3

Edges	Successive Ratio	Interval Count
1,6	Ratio: 1	40
2,4	Ratio1: 1.1 Ratio2: 1.1 (Double sided)	45
3, 8	Ratio: 0.95	45
5,7	Ratio: 1	200

**Πίνακας 3.3** Λεπτομέρειες κατασκευής πλέγματος.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον προσανατολισμό του πλέγματος της κάθε πλευράς, ο οποίος φαίνεται με την εμφάνιση ενός χαρακτηριστικού κόκκινου βέλους κάθε φορά που επιλέγουμε μία ακμή. Ο προσανατολισμός είναι σημαντικός για δύο λόγους. Πρώτον γιατί καθορίζει την πυκνότητα του πλέγματος, όταν το Ratio είναι διαφορετικό από 1, και δεύτερον όπως θα εξηγηθεί παρακάτω είναι αποφασιστικής σημασίας στη χρήση του μοντέλου Map, το οποίο χρησιμοποιήθηκε κατά τη δημιουργία του τελικού υπολογιστικού πλέγματος.

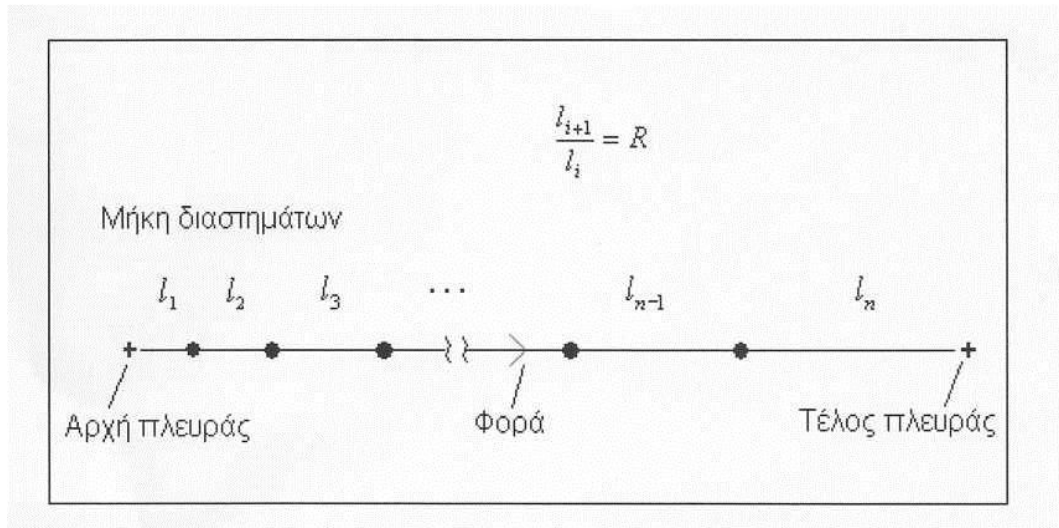
Στο παρόν μοντέλο ο προσανατολισμός στις πλευρές με ratio=0.95 είναι προς το κέντρο του ακροφυσίου, εκεί που υπάρχει η στένωση, ώστε το πλέγμα όσο πλησιάζουμε εκεί να πυκνώνει, καθώς στο σημείο εκείνο η ροή είναι πιο σύνθετη. Επίσης, οι πλευρές στις οποίες έχει χρησιμοποιηθεί η επιλογή “double sided” έχουν προσανατολισμό τέτοιο ώστε το πλέγμα να είναι πιο πυκνό στις άκρες της κάθε ακμής. Αυτό πρακτικά συντελεί στο να είναι πιο πυκνό το πλέγμα όσο πλησιάζουμε στα τοιχώματα των αγωγών, διότι εκεί χρειαζόμαστε μεγαλύτερη ακρίβεια.



**Σχήμα 3.10** Τελικό πλέγμα



Στην στήλη “Edges” τοποθετήθηκαν οι αριθμοί των πλευρών της γεωμετρίας όπως απεικονίζονται στο σχήμα 3.4, ενώ στη στήλη Successive Ratio τοποθετήθηκε η αναλογία πύκνωσης του πλέγματος η οποία δίνεται από τη σχέση:  $R = \frac{l_{i+1}}{l_i}$  όπου  $l_{i+1}$  και  $l_i$  είναι τα μήκη των διαστημάτων  $i+1$  και  $i$  αντίστοιχα και με  $R$  συμβολίζεται η επιλογή “Ratio”. Τα μεγέθη αυτά φαίνονται στο Σχήμα 3.11.



**Σχήμα 3.11** Σχηματική αναπαράσταση της αναλογίας πύκνωσης (successive ratio).

Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των υπολογιστικών κελιών (interval count), τόσο πυκνότερο θα είναι το πλέγμα, ενώ όσο μεγαλύτερη η τιμή του  $R$  τόσο το πλέγμα θα αραιώνει προς τη φορά που δείχνει το βέλος.

Στο Σχήμα 3.10 οι οριζόντιες πλευρές έχουν φορά προς τα δεξιά, ενώ οι κάθετες προς τα κάτω. Επομένως για πύκνωση του πλέγματος των πλευρών 3, 8 απαιτείται αριθμός μικρότερος του 1 (0.95). Στις πλευρές 2, 4, χρησιμοποιήθηκε η επιλογή “Double Sided”, όπου η διαδικασία σταδιακής πύκνωσης του πλέγματος ξεκινάει από το κέντρο της πλευράς, και το πλέγμα πυκνώνει (αν  $R > 1$ ) και προς την αρχή και προς το τέλος της πλευράς. Χρησιμοποιήθηκε επειδή το πλέγμα χρειάζεται να είναι πυκνότερο και στο τοίχωμα (πλευρά 3) αλλά και προς την αρχή του στομίου όπου λόγω απότομης μεταβολής της γεωμετρίας αναμένεται να εμφανιστεί σπηλαίωση.

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η ικανότητα των μοντέλων τύρβης να δώσουν ακριβή αποτελέσματα, συγκριτικά με τα αντίστοιχα πειράματα για τις ίδιες γεωμετρίες, για πλέγματα χωρίς υπερβολική πύκνωση με τη χρήση συναρτήσεων τοιχώματος ( $y^+ > 30$ , Wall Functions (Κεφάλαιο 2)) καθώς έτσι θα εξοικονομείται χρόνος και υπολογιστικοί πόροι χωρίς απώλεια ακρίβειας στη λύση. Έτσι, στη γεωμετρία δε χρησιμοποιείται η επιλογή boundary layer με την οποία πυκνώνονται υπερβολικά οι περιοχές δίπλα στα τοιχώματα ( $y^+ < 1$ ), που θα είχε σκοπό την επίλυση με ακρίβεια της περιοχής που επηρεάζεται από το ιξώδες, συμπεριλαμβανομένου και του ιξώδους υποστρώματος.

### 3.3.4 Κατασκευή υπολογιστικού πλέγματος σε επιφάνειες

Η εντολή δημιουργίας υπολογιστικού πλέγματος σε επιφάνεια μάς δίνει τη δυνατότητα να εισάγουμε ή να τροποποιήσουμε το υπολογιστικό πλέγμα στην εν λόγω επιφάνεια. Η εντολή της δημιουργίας πλέγματος σε επιφάνεια συνοδεύεται από μια σειρά παραμέτρων τις οποίες πρέπει να λάβουμε υπόψη προκειμένου να κατασκευάσουμε το πλέγμα. Οι παράμετροι αυτές είναι οι κάτωθι:

- *Faces*: Επιλέγουμε τις επιφάνειες στις οποίες επιθυμούμε να κατασκευάσουμε το υπολογιστικό πλέγμα.
- *Scheme /Elements / Type*: Αφορούν στα στοιχεία που αποτελούν το πλέγμα και τη διάταξή τους στο υπολογιστικό πλέγμα.
- *Spacing*: Απόσταση μεταξύ κόμβων των στοιχείων
- *Options*: Διάφορες επιλογές που αφορούν στο υπολογιστικό πλέγμα.

Ένα σημαντικό στοιχείο που είναι αναγκαίο, είναι η επιλογή του σχήματος των επιμέρους στοιχείων που αποτελούν το υπολογιστικό πλέγμα. Το λογισμικό Gambit δίνει τρεις επιλογές για τα στοιχεία, οι οποίες παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4.




Επιλογή Στοιχείου (Elements)	Περιγραφή
Quad	Η επιφάνεια στην οποία θα κατασκευάσουμε υπολογιστικό πλέγμα θα αποτελείται από τετραγωνικά στοιχεία.
Tri	Η επιφάνεια στην οποία θα κατασκευάσουμε υπολογιστικό πλέγμα θα αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία.
Quad/Tri	Η επιφάνεια στην οποία θα κατασκευάσουμε υπολογιστικό πλέγμα θα αποτελείται από τετραγωνικά στοιχεία κυρίως στο εσωτερικό της, ενώ όσο κατευθυνόμαστε σε γωνιακά σημεία θα χρησιμοποιούνται τριγωνικά στοιχεία.

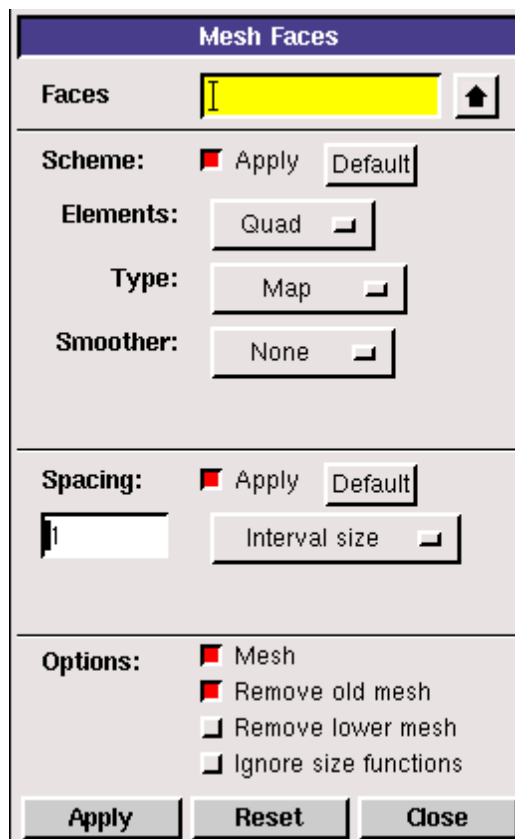
**Πίνακας 3.4** Περιγραφή των στοιχείων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή υπολογιστικού πλέγματος σε επιφάνεια.

Επιπλέον, ένα άλλο σημαντικό στοιχείο, είναι η επιλογή του τύπου του υπολογιστικού πλέγματος. Το Gambit δίνει τις ακόλουθες επιλογές, οι οποίες παρατίθενται στον Πίνακα 3.5.


Επιλογή Τύπου Υ.Π.	Περιγραφή
<i>Map</i>	Δημιουργία κανονικού, δομημένου υπολογιστικού πλέγματος.
<i>Submap</i>	Πραγματοποιείται διαίρεση μιας μη διακριτοποιημένης επιφάνειας σε διακριτές περιοχές και δημιουργείται ένα δομημένο υπολογιστικό πλέγμα σε καθεμία από τις διακριτές περιοχές.
<i>Pave</i>	Δημιουργία ενός μη δομημένου υπολογιστικού πλέγματος.
<i>Tri Primitive</i>	Πραγματοποιείται διαίρεση μιας τρίπλευρης επιφάνειας σε τρεις τετράπλευρες περιοχές και δημιουργείται ένα δομημένο υπολογιστικό πλέγμα σε καθεμία από τις διακριτές περιοχές.
<i>Wedge Primitive</i>	Πραγματοποιείται δημιουργία τριγωνικών στοιχείων στην άκρη μιας σφηνοειδούς επιφάνειας και δημιουργείται ένα ακτινικό υπολογιστικό πλέγμα εσωτερικά της σφηνοειδούς επιφάνειας.

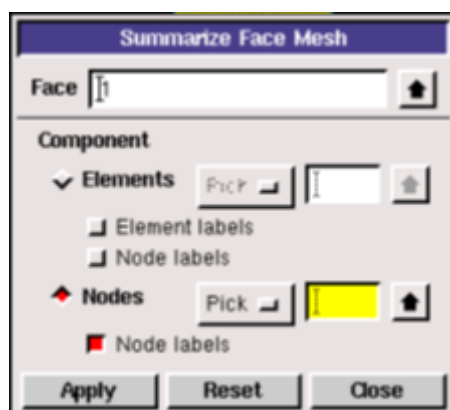
**Πίνακας 3.5** Περιγραφή των τύπων των υπολογιστικών πλεγμάτων σε επιφάνεια.

Για να δημιουργήσουμε πλέγμα σε επιφάνεια, πατάμε το κουμπί  από τη γραμμή λειτουργιών Operation, μετά το  από το Mesh και στη συνέχεια το  (Mesh faces), ώστε να εμφανιστεί το παράθυρο του σχήματος 3.12. Στο παράθυρο αυτό επιλέγουμε την επιφάνεια, έχοντας πατημένο το κουμπί ‘Shift’, στη συνέχεια ενεργοποιούμε τις επιλογές Quad και Map, και στη συνέχεια πατάμε το κουμπί Apply.



Σχήμα 3.12 Δημιουργία επιφάνειας.



Τα στοιχεία του πλέγματος της κάθε επιφάνειας μπορούμε να τα δούμε πατώντας το κουμπί  από τη γραμμή λειτουργιών Face του Mesh, αφού έχουμε επιλέξει την επιφάνεια που θέλουμε με πατημένο το πλήκτρο “Shift”. Στο Σχήμα 3.13 φαίνεται η διαδικασία.

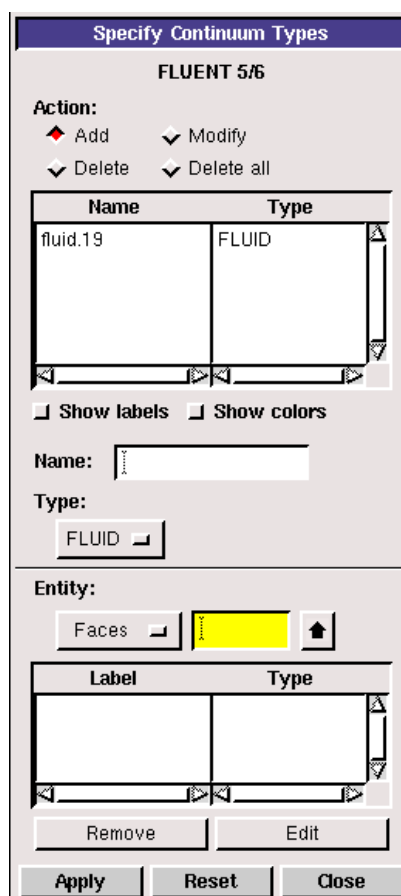


Σχήμα 3.13 Στοιχεία πλέγματος.

### 3.3.5 Καθορισμός οριακών συνθηκών



Μόλις τελειώσει η σχεδίαση της γεωμετρίας και του πλέγματος, καθορίζονται και οι οριακές συνθήκες, δηλαδή η κατάσταση της ροής του ρευστού σε συγκεκριμένες περιοχές. Το λογισμικό GAMBIT δεν καθορίζει πλήρως τις οριακές συνθήκες, αλλά προσδιορίζει τους τύπους τους χωρίς να επιβάλλει συγκεκριμένες τιμές. Για παράδειγμα, προσδιορίζει αν η οριακή συνθήκη είναι τιμή πίεσης ή ταχύτητας ή αν μία επιφάνεια είναι τοίχωμα ή άξονας συμμετρίας. Σημειώνεται ότι οι παραπάνω οριακές συνθήκες είναι δυνατόν να μην καθοριστούν σε αυτό το στάδιο, με τη χρήση του λογισμικού GAMBIT, αλλά να προσδιοριστούν απευθείας στο λογισμικό επίλυσης των εξισώσεων της ροής FLUENT.

Αρχικά ορίζουμε το είδος της επιλεγμένης επιφάνειας (υγρής ή στερεάς). Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ρευστό (υγρή και αέρια φάση). Στη γραμμή λειτουργιών “Operation” πατάμε το κουμπί  και στη συνέχεια το  (Specify continuum types). Επιλέγουμε έχοντας πατημένο το κουμπί ‘Shift’ όλες τις επιφάνειες της γεωμετρίας, μια και διέρχεται από όλες ρευστό, και πατάμε το Apply. Το παράθυρο που κάνουμε τις παραπάνω ρυθμίσεις φαίνεται στο Σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14 Παράθυρο ρυθμίσεων.

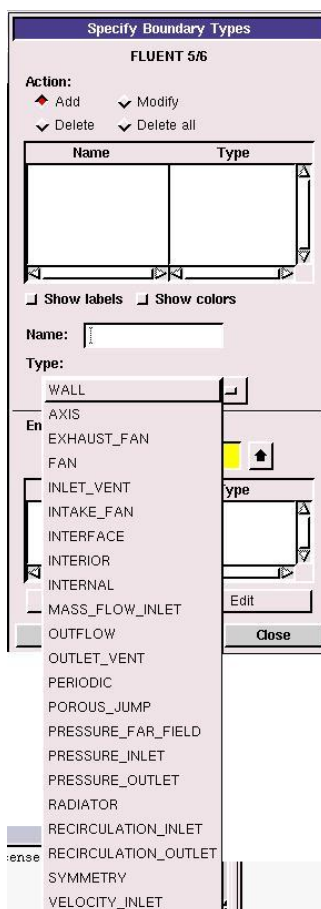
### 3.3.6 Οριακές συνθήκες

Στη συνέχεια, ορίσαμε τον τύπο των οριακών συνθηκών, ορίσαμε δηλαδή τι τύπος είναι η κάθε ακμή της γεωμετρίας μας όπως τοίχωμα, είσοδος ροής, έξοδος κτλ. Στη γραμμή λειτουργιών “Operation” πατάμε το κουμπί  και μετά το (Specify boundary types) .

Επιλέγουμε την κάθε ακμή, και ορίζουμε τον τύπο της, χρησιμοποιώντας το παράθυρο που φαίνεται στο Σχήμα 3.15. Αναλυτικά, ο τύπος της κάθε ακμής φαίνεται στον Πίνακα 3.6.

Edges	Boundary conditions
1,2	Pressure inlet
3,4,5	Wall
6	Pressure outlet
7,8	Axis

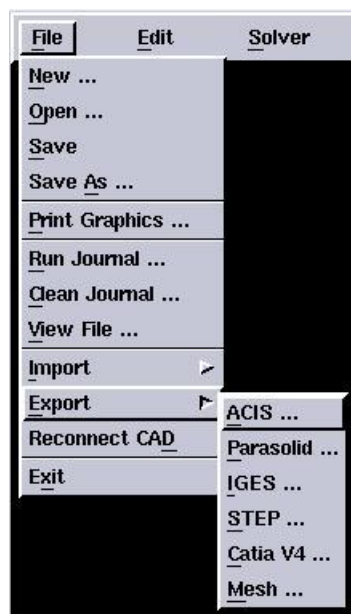
**Πίνακας 3.6** Τύπος οριακών συνθηκών για τις ακμές.



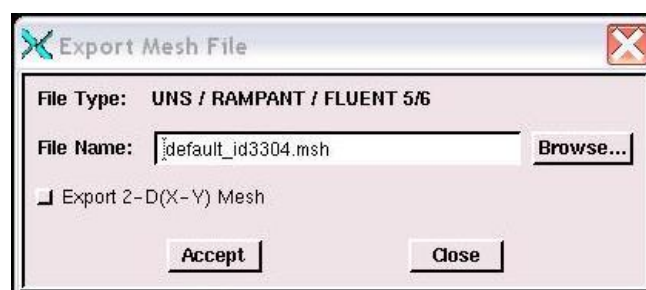
**Σχήμα 3.15** Επιλογή τύπου οριακής ζώνης ακμών.

Κατά τον ορισμό των οριακών συνθηκών, είναι χρήσιμο να ονομάσουμε τις ακμές που γίνεται η εισαγωγή και η εξαγωγή της ροής, καθώς όπως παρατηρούμε έχουμε δύο ακμές εισόδου (ομοευθειακά ευθύγραμμα τμήματα) και μία εξόδου. Η ονοματολογία θα μάς φανεί χρήσιμη αργότερα, κατά την εισαγωγή του αρχείου στον κώδικα FLUENT, ώστε να ορίσουμε με ευκολία τις οριακές συνθήκες.

Το τελευταίο βήμα είναι η αποθήκευση του αρχείου. Δημιουργούμε ένα αρχείο τύπου .dbs, το οποίο θα είναι επεξεργάσιμο στο λογισμικό GAMBIT με τη διαδικασία File > Save as > και ορίζουμε το όνομα που επιθυμούμε. Επίσης, πρέπει να δημιουργηθεί ένα αρχείο τύπου .msh, αναγώσιμο από το λογισμικό Fluent, το οποίο γίνεται με την διαδικασία File > Export > Mesh, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.16 και ενεργοποιούμε την επιλογή Export 2-D(X-Y) Mesh στο παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται βλ. Σχήμα 3.17.



Σχήμα 3.16 Μενού File.



Σχήμα 3.17 Παράθυρο διαλόγου Export Mesh File.

### 3.3.7 Σχεδιασμός εναλλακτικών πλεγμάτων

Για την αξιολόγηση του πλέγματος, σχεδιάστηκαν αρκετά πλέγματα, άλλα πιο αραιά και άλλα πιο πυκνά. Το πιο αραιό πλέγμα αποτελείται από 1500 κελιά, ενώ το πιο πυκνό από πάνω από 10000 κελιά. Οι υπολογισμένοι ρυθμοί ροής μάζας από το λογισμικό FLUENT για διάφορες τιμές της πίεσης εισόδου, από μία πύκνωση του πλέγματος και πάνω, διέφεραν κατά λιγότερο από 1% μεταξύ τους. Στον Πίνακα 3.7 δίνονται η απόκλιση του ρυθμού ροής μάζας  $\dot{m}$  και ο συντελεστής  $y^+$  στο τοίχωμα για συγκεκριμένη πίεση εισόδου, ίση 150 KPa, καθώς και ο αριθμός των κελιών του κάθε πλέγματος.

Πλέγμα	Απόκλιση του $\dot{m}$ συγκριτικά με το αρχικό πλέγμα για πίεση εισόδου	Τιμή του $y^+$ για πίεση εισόδου 150KPa
Πιο αραιό	0,3 %	60
Πιο πυκνό	0,5 %	26

**Πίνακας 3.7** Σύγκριση πλεγμάτων.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

Ο κώδικας FLUENT του υπολογιστικού πακέτου ANSYS είναι ένα πρόγραμμα μοντελοποίησης ροής ρευστών και μεταφοράς θερμότητας σε πολύπλοκες γεωμετρίες, που αναπτύχθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C. Παρέχει ευελιξία όσον αφορά στα αριθμητικά πλέγματα, παρέχοντας την επιλογή επίλυσης της ροής με μη δομημένο πλέγμα (unstructured mesh), και υποστηρίζει τριγωνικό και τετράπλευρο τύπο στοιχείων για δισδιάστατες γεωμετρίες ενώ για τρισδιάστατες γεωμετρίες υποστηρίζει τετράεδρο, εξάεδρο, σε σχήμα πυραμίδας, σε σχήμα σφήνας (wedge) και πολύεδρο τύπο στοιχείων, καθώς και συνδυασμούς των παραπάνω. Ο κώδικας FLUENT παρέχει επίσης τη δυνατότητα αραίωσης ή πυκνώσης του πλέγματος χωρίς να χρειάζεται να μεταφερθεί από την αρχή το αρχείο στο πρόγραμμα GAMBIT για επεξεργασία του πλέγματος. Ο χρήστης χειρίζεται το FLUENT μέσω εικονικής διεπαφής (Graphical User Interface - GUI), αλλά διατίθεται και γραμμή εντολών (command text). Ο κώδικας FLUENT για να λειτουργήσει χρειάζεται αρχικά ένα αρχείο που θα περιέχει τη γεωμετρία και το πλέγμα της ροής προς προσομοίωση, το οποίο μπορεί να σχεδιαστεί στο λογισμικό GAMBIT ή σε κάποιο αντίστοιχο πρόγραμμα, και το οποίο θα είναι αναγνωρίσιμο από το FLUENT. Περαιτέρω, το λογισμικό FLUENT παρέχει τη δυνατότητα προσαρμογής του πλέγματος, ορισμού των οριακών συνθηκών (boundary conditions) σε περίπτωση που δεν έχουν οριστεί, ορισμού των ιδιοτήτων του ρευστού, επίλυσης της ροής και παρουσίασης των αποτελεσμάτων, καθώς και γραφημάτων μεγεθών όπως η κατανομή της πίεσης, της ταχύτητας κ.α.

Το λογισμικό FLUENT παρέχει τη δυνατότητα μοντελοποίησης των εξής τύπων ροής: επίπεδης, αξονοσυμμετρικής και περιστροφικά συμμετρικής (rotationally symmetric) δισδιάστατης ροής, τρισδιάστατης ροής, μόνιμης ή μεταβατικής ροής, ασυμπίεστης ή συμπιεστής ροής, μη συνεκτικής και συνεκτικής ροής, στρωτής και τυρβώδους ροής, νευτώνειας ή μη νευτώνειας ροής.

Το λογισμικό FLUENT παρέχει επίσης βάση δεδομένων με τις ιδιότητες μεγάλου αριθμού ουσιών (materials), όπως νερό, πετρέλαιο diesel κ.α, μοντέλο

σπηλαιώσης, μοντέλο για πολυφασική ροή (multiphase model), δυνατότητα προσομοίωσης μεταφοράς θερμότητας, ακουστικό μοντέλο για την πρόβλεψη παραγωγής θορύβου λόγω της ροής, και πλήθος άλλων δυνατοτήτων, που χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές εφαρμογές από αυτή της παρούσας εργασίας.

Στη συνέχεια, προσομοιώνεται η εμφάνιση σπηλαιώσης σε ροή μέσω κυλινδρικού στομίου (circular orifice) για καύσιμο diesel, σε παρόμοια διάταξη με τους εγχυτήρες καυσίμου (μπεκ ψεκασμού) σε κινητήρες Diesel. Χρησιμοποιείται το μοντέλο k - ε. Λόγω της απότομης μεταβολής της γεωμετρίας και λόγω της πολύ μικρής διαμέτρου του στομίου, αναπτύσσονται υψηλές ταχύτητες στη ροή αμέσως μόλις εισέλθει στο στόμιο, οι οποίες δημιουργούν μία ζώνη χαμηλής πίεσης. Εκεί, αν η τιμή της πίεσης είναι αρκετά χαμηλή, εμφανίζεται σπηλαιώση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειωθεί ο ρυθμός ροής και μπορεί να προκληθεί επιφανειακή αλλοίωση στα τοιχώματα κατά μήκος του στομίου. Εξετάζεται η αξιοπιστία του μοντέλου σπηλαιώσης σε γεωμετρίες μικρών διαστάσεων, σε συνδυασμό με μεγάλες διαφορές πίεσης και υψηλή αναλογία πυκνότητας υγρού προς ατμό, προσομοιώνοντας τις συνθήκες που επικρατούν στους εγχυτήρες κινητήρων Diesel.

## 4.2 Ορισμός βασικών παραμέτρων

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν ο συντελεστής παροχής  $C_d$  (discharge coefficient) και ο αριθμός σπηλαιώσης  $\sigma$  (cavitation number). Ο συντελεστής παροχής ορίζεται ως ο λόγος της πραγματικής ροής μάζας μέσω του στομίου προς τη θεωρητική ροή μάζας όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$C_d = \frac{\dot{m}_{exp}}{\dot{m}_{TH}} \quad (4.1)$$

Για στόμιο, η παραπάνω σχέση επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$C_d = \frac{\dot{m}_{exp}}{A\sqrt{2\rho_2\Delta P}} \quad (4.2)$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδό του στομίου,  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού στην υγρή φάση και  $\Delta P$  είναι η διαφορά πίεσης κατά μήκος του στομίου.

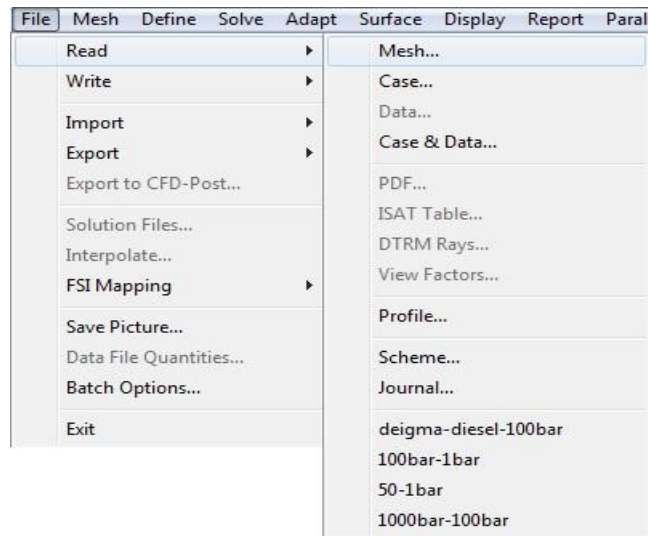
Ο αριθμός σπηλαίωσης, όπως ορίστηκε από τον Nurick το 1976 [14], ορίζεται ως εξής:

$$\sigma = \frac{P_i - P_{min}}{P_i - P_{out}} \quad (4.3)$$

όπου  $P_i$  είναι η πίεση εισόδου,  $P_{out}$  η πίεση εξόδου και  $P_{min}$  η πίεση ατμοποίησης. Ο αριθμός σπηλαίωσης είναι αδιάστατη παράμετρος. Για ροές σε στόμια, ορίζεται ο κρίσιμος αριθμός σπηλαίωσης ( $\sigma_{crit}$ ) ως ο αριθμός σπηλαίωσης που αντιστοιχεί στην εμφάνιση σπηλαίωσης. Επομένως, όσο ο αριθμός σπηλαίωσης είναι μεγαλύτερος του κρίσιμου αριθμού σπηλαίωσης το ρευστό παραμένει μονοφασικό (στην υγρή φάση).

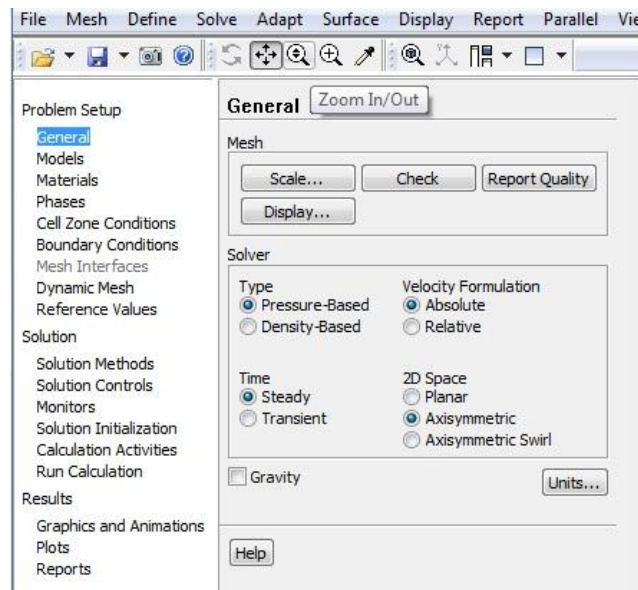
### **4.3 Εισαγωγή του αρχείου με τη γεωμετρία και το πλέγμα που κατασκευάστηκαν με το πρόγραμμα GAMBIT**

Πρώτο βήμα είναι η εισαγωγή του αρχείου (με κατάληξη .msh) που περιέχει τη γεωμετρία που έχουμε σχεδιάσει. Αφού ανοιχθεί το πρόγραμμα FLUENT με την επιλογή δισδιάστατης ροής με διπλή ακρίβεια επίλυσης (2D double-precision solver) με τη διαδικασία File → Read → Case, ελέγχεται το πλέγμα για τυχόν λάθη με τη διαδικασία Grid → Check, Σχήμα 4.1. Εδώ, πρέπει να επιβεβαιωθεί ότι η τιμή του αναφερθέντος ελάχιστου όγκου (minimum volume) είναι θετικός αριθμός. Με την επιλογή Display Grid απεικονίζεται το αριθμητικό πλέγμα. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε έχει στοιχεία τετράπλευρου τύπου (quadrilaterals). Με τη διαδικασία Grid → Info → Size λαμβάνονται ορισμένα μεγέθη του πλέγματος όπως το πλήθος των πεπερασμένων όγκων (Cells) και ο αριθμός των σημείων ή κόμβων (Nodes) όπου θα υπολογιστούν οι μεταβλητές της ροής.



**Σχήμα 4.1** Μενού File.

Επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός του μοντέλου και του επιλυτή (Solver) μέσω της διαδικασίας Define → Models → Solver. Στο Σχήμα 4.2 φαίνονται οι επιλογές που έγιναν:



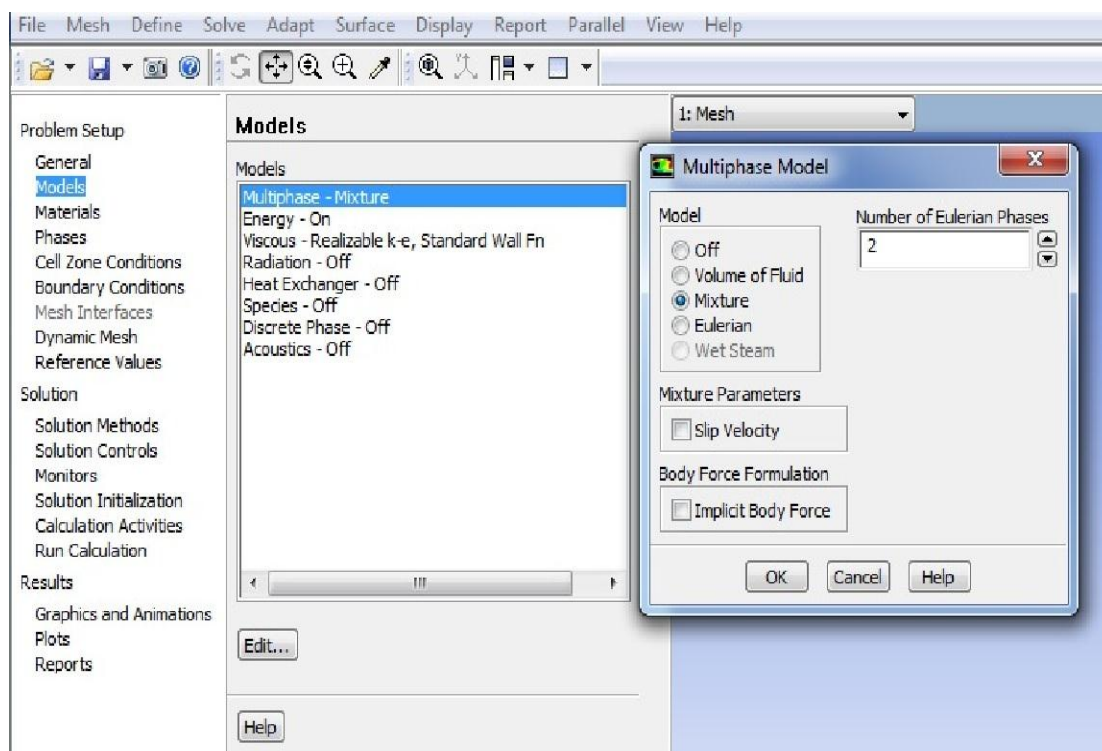
**Σχήμα 4.2** Problem setup > General.

Για την επίλυση του προβλήματος, απαιτείται ένας υπολογιστικά απαιτητικός υπολογισμός, που θα προσομοιώσει με ακρίβεια την ακανόνιστη διεργασία του σχηματισμού, ανάπτυξης και κατάρρευσης φυσαλίδων. Οι υπολογισμοί γίνονται για μόνιμη κατάσταση (steady - state), κάτι που αντιστοιχεί στην πραγματικότητα, καθώς

το φαινόμενο της σπηλαιώσης που εμφανίζεται στο στόμιο είναι (στο επίπεδο της μέσης ροής) μόνιμο. Χρησιμοποιείται η επιλογή “Pressure Based Solver”, καθώς είναι μια από τις απαιτήσεις για τη χρήση του μοντέλου μίξης, το οποίο επιτρέπει τη χρήση του μοντέλου σπηλαιώσης. Στην επιλογή “Pressure Based Solver”, ο περιορισμός της διατήρησης της μάζας σε σχέση με το πεδίο ταχυτήτων επιλύεται με μια εξίσωση διόρθωσης της πίεσης. Η εξίσωση αυτή προέρχεται από τις εξισώσεις ορμής και συνέχειας, με τέτοιο τρόπο ώστε το πεδίο ταχύτητας, διορθωμένο από την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης, να ικανοποιεί τη συνθήκη συνέχειας. Η διαδικασία επίλυσης είναι επαναληπτική (iterative), όπου το σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων επιλύεται έως ότου η λύση συγκλίνει.

#### 4.4 Επιλογή του μοντέλου προσομοίωσης

Επόμενο βήμα είναι η επιλογή του πολυφασικού μοντέλου μέσω της διαδικασίας “Define Models → Multiphase”, Σχήμα 4.3, για την προσομοίωση της σπηλαιώσης.



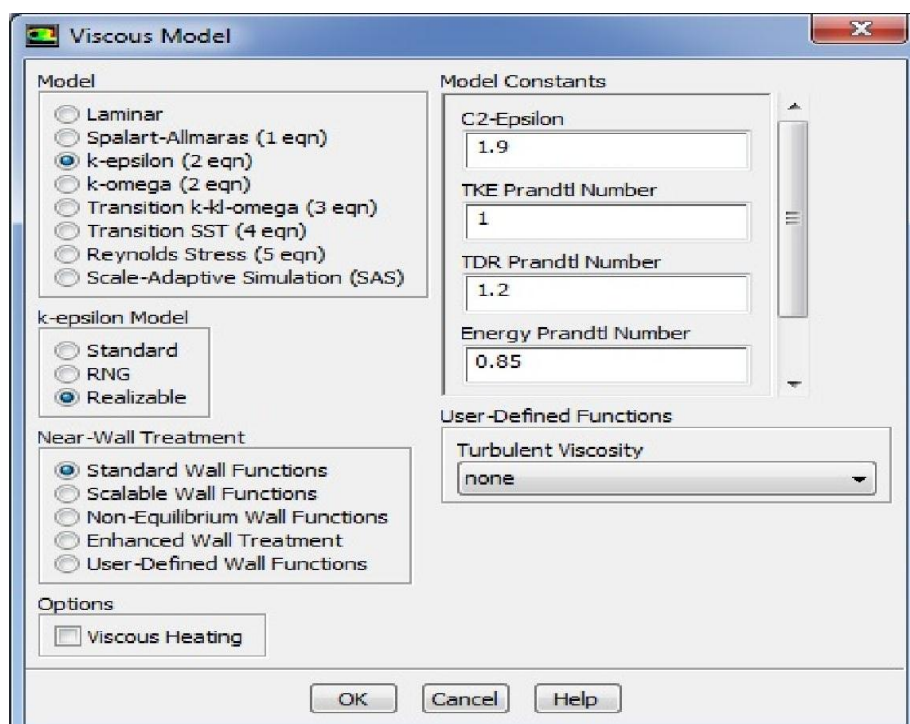
Σχήμα 4.3 Επιλογή του μοντέλου μίξης ως πολυφασικού μοντέλου.

Υπάρχουν τρεις διαθέσιμες επιλογές πολυφασικών μοντέλων, η επιλογή Eulerian model, Volume of Fluid model (VOF) και Mixture Model (μοντέλο μίξης). Η κάθε μέθοδος προσομοιώνει με διαφορετικό τρόπο τη σπηλαίωση. Το μοντέλο μίξης επιλύει δύο σετ εξισώσεων διατήρησης, ένα για το υγρό και ένα για τον ατμό, και η αλληλεπίδραση μεταξύ των φάσεων μοντελοποιείται με τη μορφή επιπλέον όρων ανταλλαγής (exchange terms). Παρέχει καλή ακρίβεια αποτελεσμάτων και οι απαιτήσεις του σε υπολογιστικούς πόρους δεν είναι μεγάλες. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται δίνονται στο Κεφάλαιο 1.

Στη συγκεκριμένη ροή, τα υψηλά επίπεδα τύρβης δεν επιτρέπουν μεγάλη αύξηση των φυσαλίδων, επομένως η βαρύτητα δεν επιδρά σημαντικά και μπορεί να αγνοηθεί. Δεν συμπεριλαμβάνονται στους υπολογισμούς ταχύτητες ολίσθησης (slip velocities) μεταξύ της επιφάνειας των φυσαλίδων και του υγρού.

Η εξίσωση ενέργειας συμπεριλαμβάνεται στους υπολογισμούς αλλά το καύσιμο diesel στην υγρή κατάσταση έχει σταθερή πυκνότητα. Ο υπολογισμός της ροής γίνεται στη μόνιμη κατάσταση.

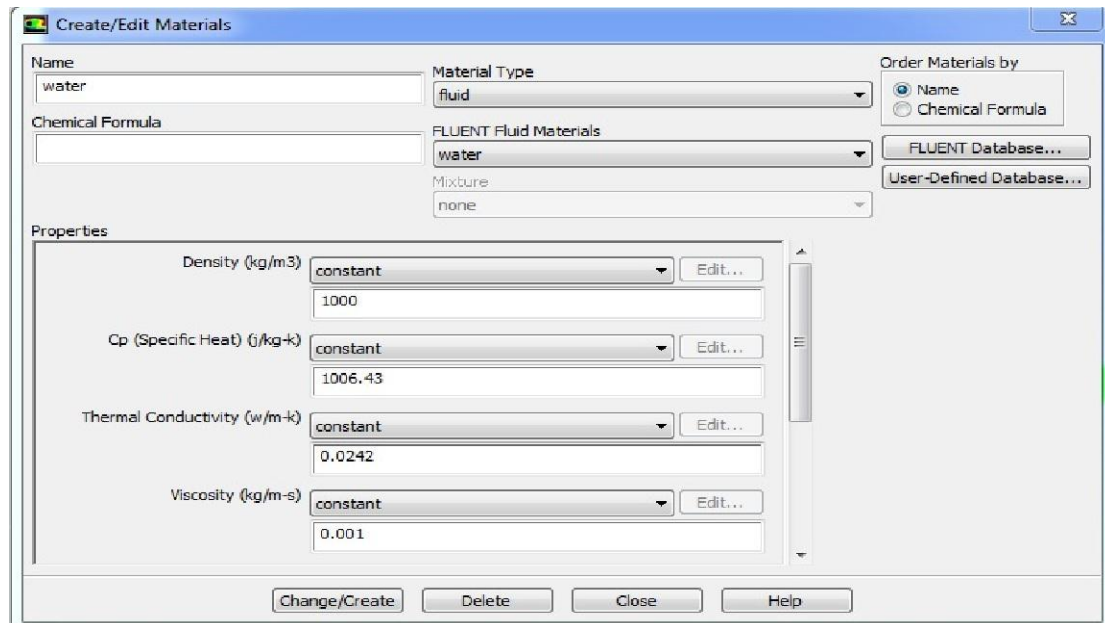
Τέλος, μέσω του πάνελ Viscous Model επιλέγεται αρχικά το μοντέλο Standard k-ε με ενεργοποιημένη την επιλογή συναρτήσεων τοιχώματος (Standard Wall Functions), Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4 Επιλογή μοντέλου τύρβης.

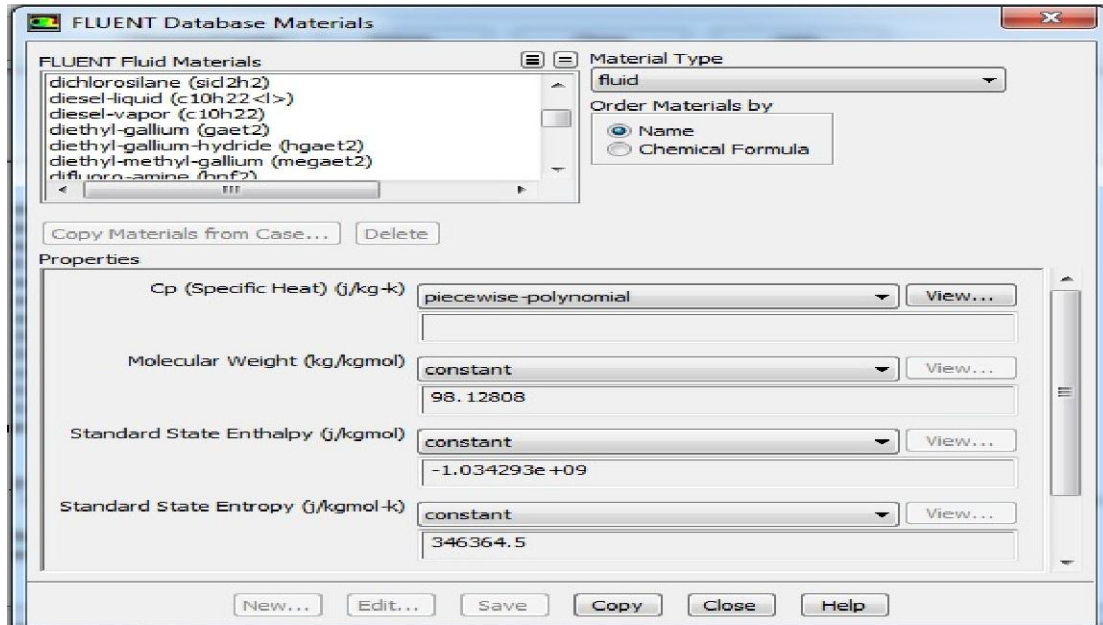
## 4.5 Καθορισμός του συστατικού (material) και των χαρακτηριστικών του

Μέσω της διαδικασίας Define Materials → Fluent Database, επιλέγεται το diesel fuel ως το ρευστό, βλ. Σχήμα 4.5. Το λογισμικό Fluent παρέχει μεγάλη βάση δεδομένων, με πολλά διαφορετικά ρευστά.



Σχήμα 4.5 Επιλογή υλικού.

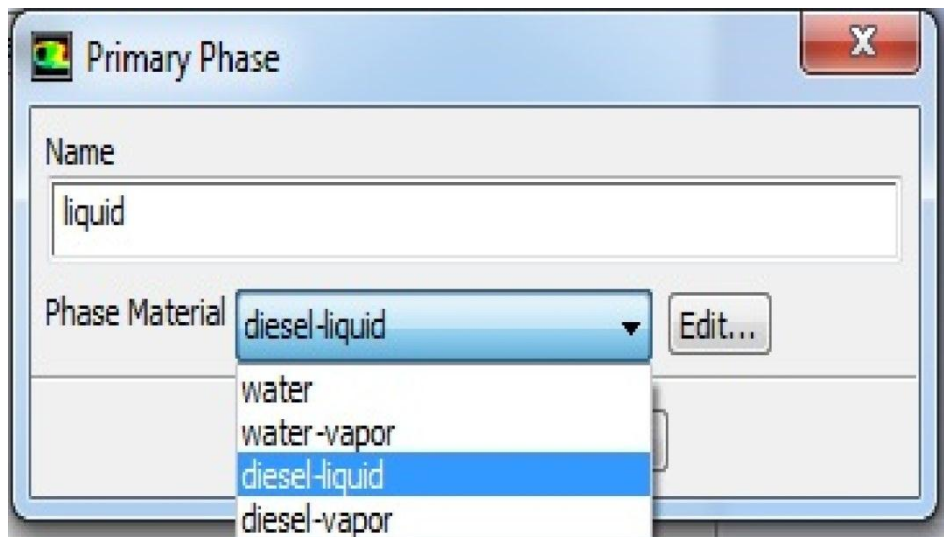
Με την ίδια διαδικασία επιλέγεται το συστατικό diesel για τη φάση του ατμού (diesel-vapor) από τη βάση, βλ. Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6 Βάση δεδομένων θερμοφυσικών ιδιοτήτων.

#### 4.6 Καθορισμός των φάσεων υγρού και ατμού

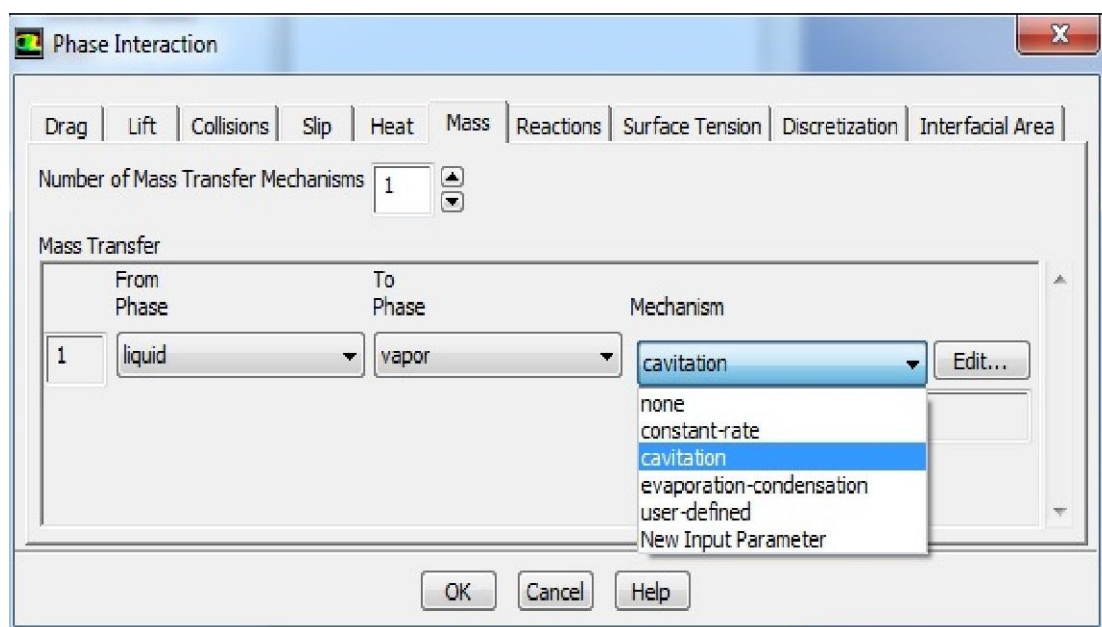
Με τη διαδικασία Define → Phases καθορίζονται οι φάσεις στον κώδικα FLUENT. Ως κύρια φάση (Primary phase) ορίζεται η φάση του υγρού, ενώ ως δευτερεύουσα φάση (secondary phase) η φάση του ατμού, βλ. Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7 Επιλογή φάσεων.



Επίσης, μέσω της επιλογής Interaction στο πάνελ Phases και της επιλογής στη συνέχεια της καρτέλας Mass, δίνεται η δυνατότητα ρύθμισης του μοντέλου σπηλαιώσης. Αρχικά ενεργοποιείται η επιλογή Cavitation και ύστερα γίνονται κατάλληλες ρυθμίσεις, βλ. Σχήμα 4.8 :

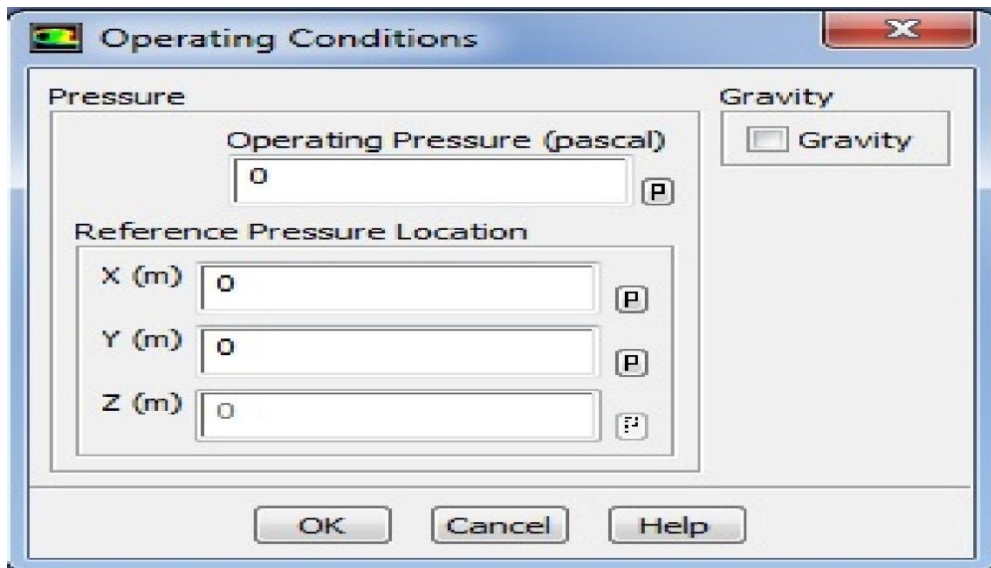


**Σχήμα 4.8** Επιλογές αλληλεπιδράσεων.

Η πίεση ατμοποίησης εξαρτάται κυρίως από τη θερμοκρασία. Η τιμή 170 Pa αντιστοιχεί στο καύσιμο diesel σε θερμοκρασία 300 K.

#### 4.7 Καθορισμός των συνθηκών λειτουργίας

Με τη διαδικασία Define → Operating Conditions ανοίγει το πάνελ για τον καθορισμό των συνθηκών λειτουργίας. Ως συνθήκες λειτουργίες διατίθενται προς επιλογή η βαρύτητα (η οποία δε λαμβάνεται υπόψη στην παρούσα εργασία) και η πίεση αναφοράς, η οποία χρησιμοποιείται όταν δεν έχει οριστεί οριακή συνθήκη πίεσης, οπότε και τίθεται ίση με μηδέν, Σχήμα 4.9.



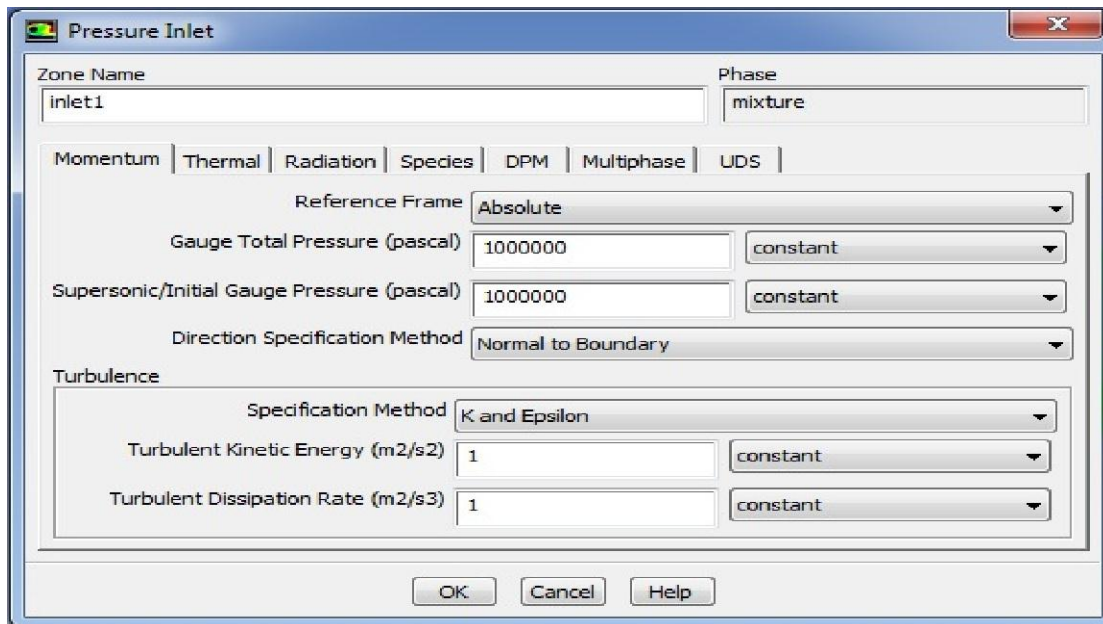
**Σχήμα 4.9** Συνθήκες λειτουργίας (operating conditions). Η πίεση αναφοράς λαμβάνεται ίση με 0 Pa, και η βαρύτητα αμελείται.

#### 4.8 Καθορισμός οριακών συνθηκών

Για το μοντέλο μίξης ορίζονται οριακές συνθήκες για το μίγμα (που ισχύουν για όλες τις φάσεις), καθώς και ξεχωριστά για την κύρια και δευτερεύουσα φάση. Μέσω της διαδικασίας Define Boundary Conditions ορίζεται αρχικά η πίεση εισόδου για την κύρια φάση του υγρού καθώς και την αέρια στις πλευρές 1 και 2, όπως παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.1,4.2 και στο Σχήμα 4.10, και έπειτα η πίεση εξόδου στην πλευρά 6 σύμφωνα με τον Πίνακα 4.3 και το Σχήμα 4.11. Επιπλέον στο Σχήμα 4.12 και στον Πίνακα 4.4 απεικονίζονται η διαδικασία και οι ρυθμίσεις για τις οριακές συνθήκες των τοιχωμάτων του ακροφυσίου.

Phase	Mixture
Zone	Pressure Inlet
Direction Specification Method	Normal to Boundary
Specification Method	K and Epsilon
Turbulent Kinetic Energy ( $m^2 / s$ )	0.02
Turbulent Dissipation Rate	1

**Πίνακας 4.1** Συνοριακές συνθήκες εισόδου.



**Σχήμα 4.9** Επιλογή οριακών συνθηκών εισόδου.

Για τη δευτερεύουσα φάση:

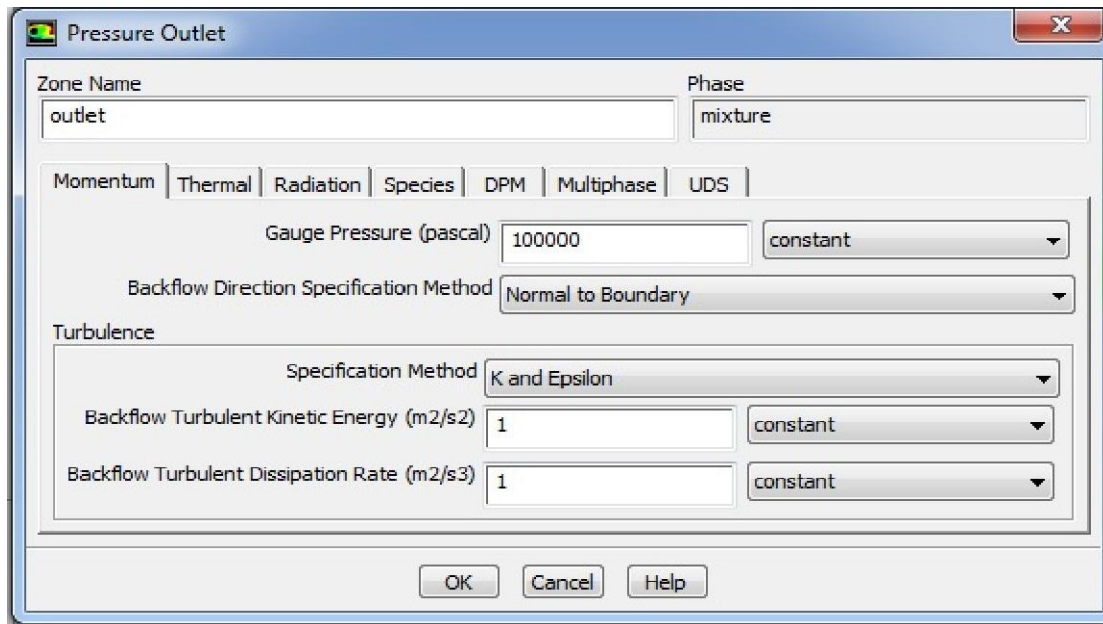
Phase	Vapor
Volume Fraction	0

**Πίνακας 4.2** Οριακή συνθήκη στις πλευρές 1, 2 για τη δευτερεύουσα φάση.

Για την πλευρά 6 (pressure\_outlet):

Phase	Mixture
Gauge Pressure (pascal)	100000
Backflow Direction Specification	Normal to Boundary
Specification Method	K and Epsilon
Backflow Turbulent Kinetic Energy	0.02
Backflow Turbulent Dissipation Rate	1

**Πίνακας 4.3** Οριακή συνθήκη στην πλευρά 6 για τη δευτερεύουσα φάση

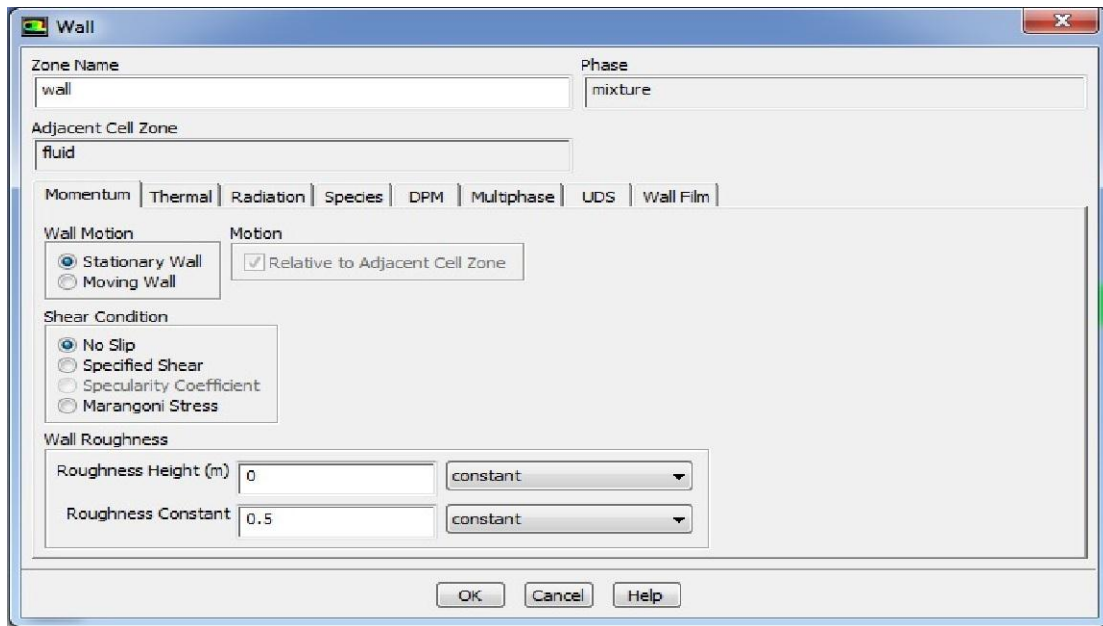


**Σχήμα 4.11** Επιλογή οριακών συνθηκών εξόδου.

Για τις πλευρές 3, 4, 5 (τοιχώματα):

Zone Name	Wall
Adjacent Cell Zone	Fluid
Phase	Mixture
Wall Motion	Stationary wall
Shear Condition	No Slip
Roughness Height (m)	0
Roughness Constant	0.5

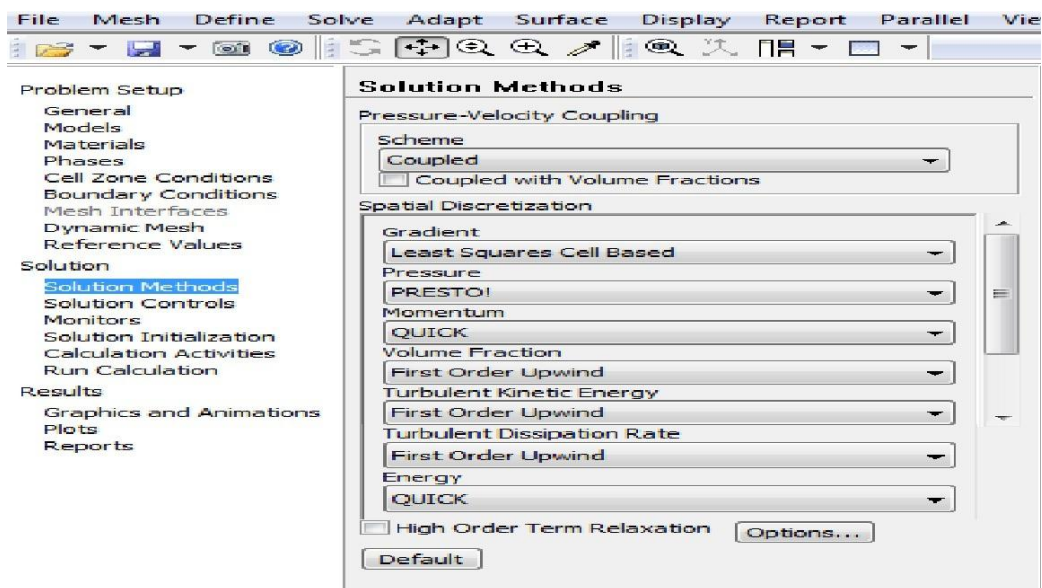
**Πίνακας 4.4** Οριακή συνθήκη στις πλευρές 3, 4 και 5 για τη δευτερεύουσα φάση.



Σχήμα 4.12 Επιλογή οριακών συνθηκών τοιχωμάτων.

## 4.9 Καθορισμός παραμέτρων επίλυσης

Μέσα από τη διαδικασία Solve Controls Solution εμφανίζεται το πάνελ Solution Controls. Εκεί, ρυθμίζονται ο αλγόριθμος επίλυσης, οι συντελεστές υποχαλάρωσης (underrelaxation factors) και τα σχήματα επίλυσης με τα οποία διακρίτοποιούνται οι εξισώσεις ροής. Στο Σχήμα 4.13 και στον πίνακα 4.5 απεικονίζονται οι λεπτομέρειες της μεθόδου επίλυσης.



Σχήμα 4.13 Επιλογή μεθόδων επίλυσης.

Pressure	Presto
Density	First Order Upwind
Momentum	Quick
Vapor	First Order Upwind
Turbulent Kinetic Energy	First Order Upwind
Turbulent Dissipation Rate	First Order Upwind
Energy	Quick

**Πίνακας 4.5** Σχήματα διακριτοποίησης τα οποία χρησιμοποιούνται και για τις τρεις κατηγορίες μοντέλων τύρβης..

Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζονται οι συντελεστές υποχαλάρωσης, όπως προέκυψαν μετά από εκτεταμένα αριθμητικά πειράματα. Συγκεκριμένα, εξετάστηκε ο ρυθμός σύγκλισης έτσι ώστε να αποφεύγονται οι αριθμητικές αποκλίσεις.

Pressure	0.4
Density	1
Body Forces	1
Momentum	0.4
Vaporization Mass	1
Vapor	0.2
Turbulent Kinetic Energy	0.5
Turbulent Dissipation Rate	0.5
Turbulent Viscosity	0.5

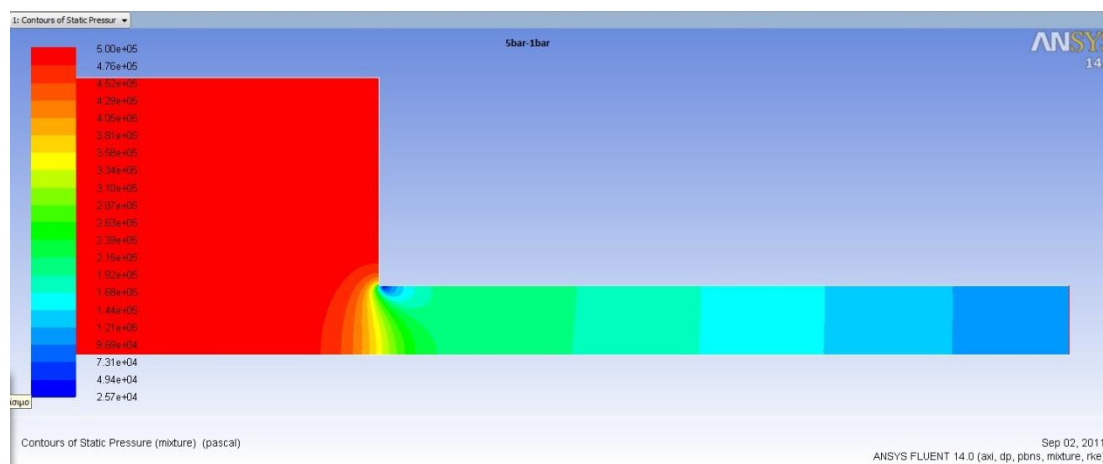
**Πίνακας 4.6** Συντελεστές υποχαλάρωσης (Under-Relaxation Factors) για το μοντέλο τύρβης  $k - \epsilon$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

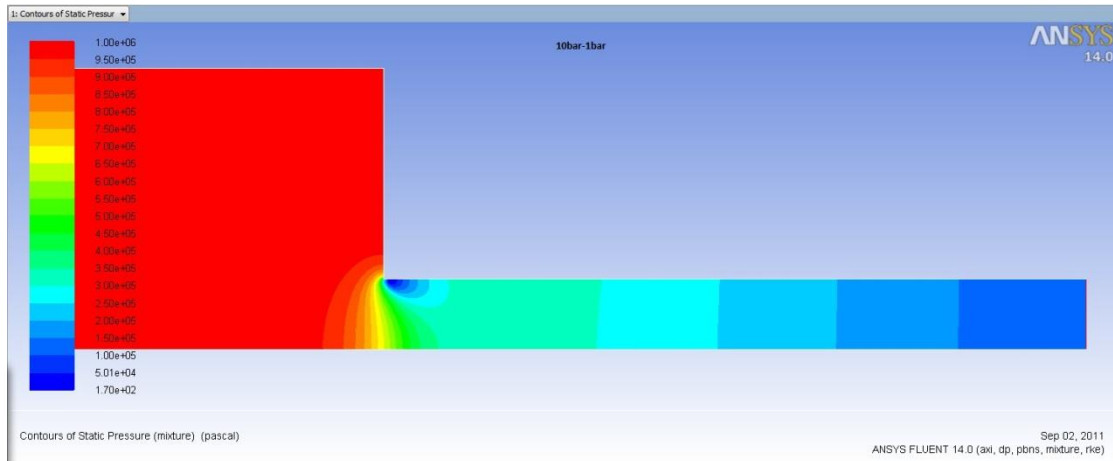
### 5.1 Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων

Πραγματοποιήθηκαν 15 προσομοιώσεις της ίδιας γεωμετρίας για καύσιμο diesel. Στις πρώτες 12 περιπτώσεις η πίεση εξόδου είναι 1 bar και για τις τελευταίες τρεις περιπτώσεις η πίεση εξόδου είναι 100 bar. Αυτό έγινε για να κρατήσουμε το  $\Delta P$  σταθερό (ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο), ώστε να εξετάσουμε την επίδραση των συνοριακών συνθηκών.

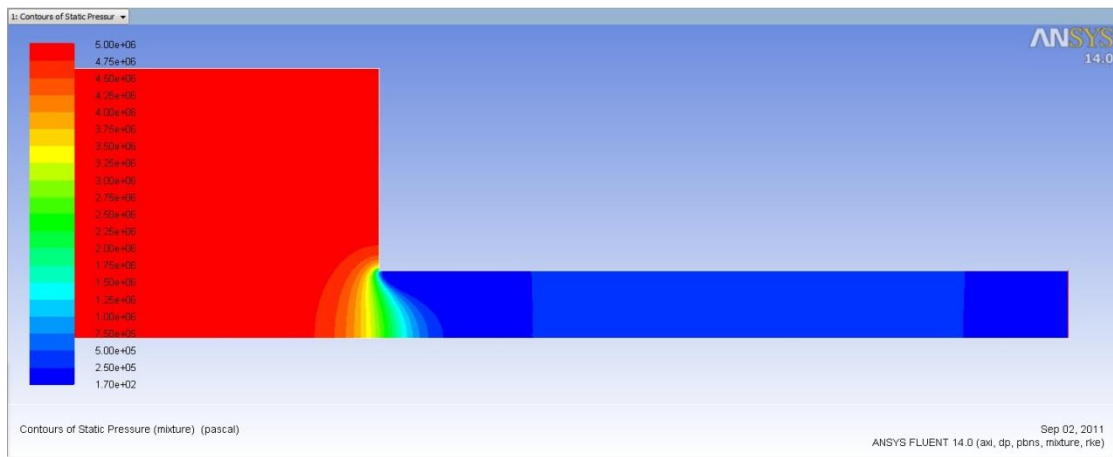
#### 5.1.1 Γραφήματα στατικής πίεσης με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar



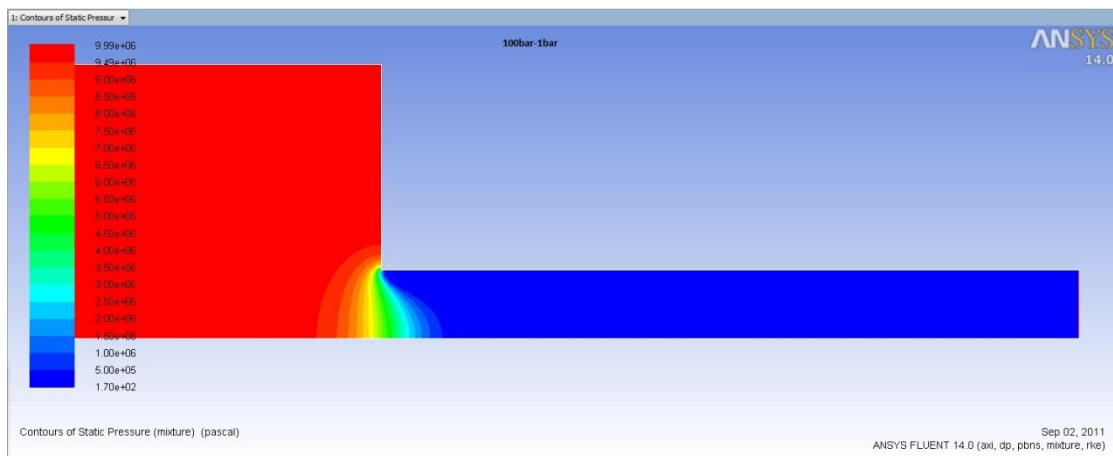
Σχήμα 5.1 Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 5bar και πίεση εξόδου 1bar.



**Σχήμα 5.2** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 10bar και πίεση εξόδου 1bar.

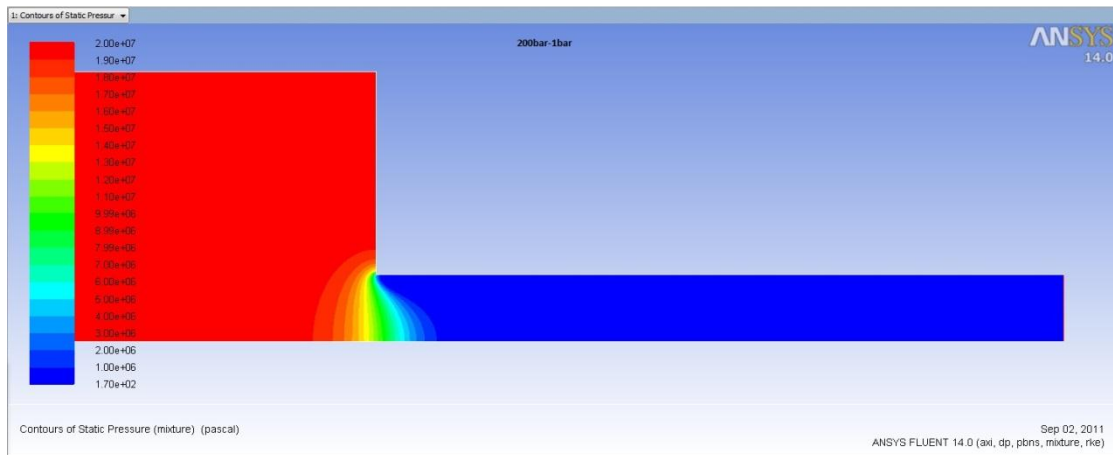


**Σχήμα 5.3** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 50bar και πίεση εξόδου 1bar.

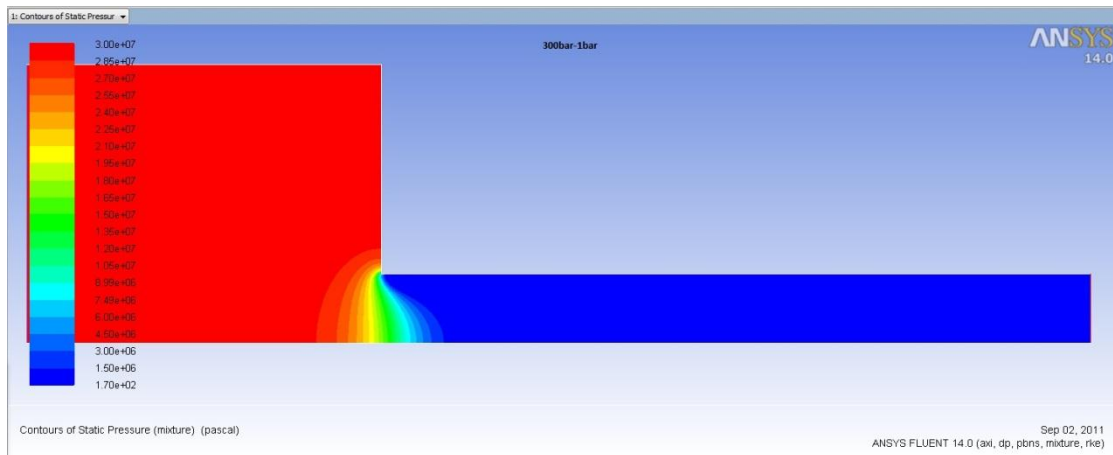


**Σχήμα 5.4** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar.

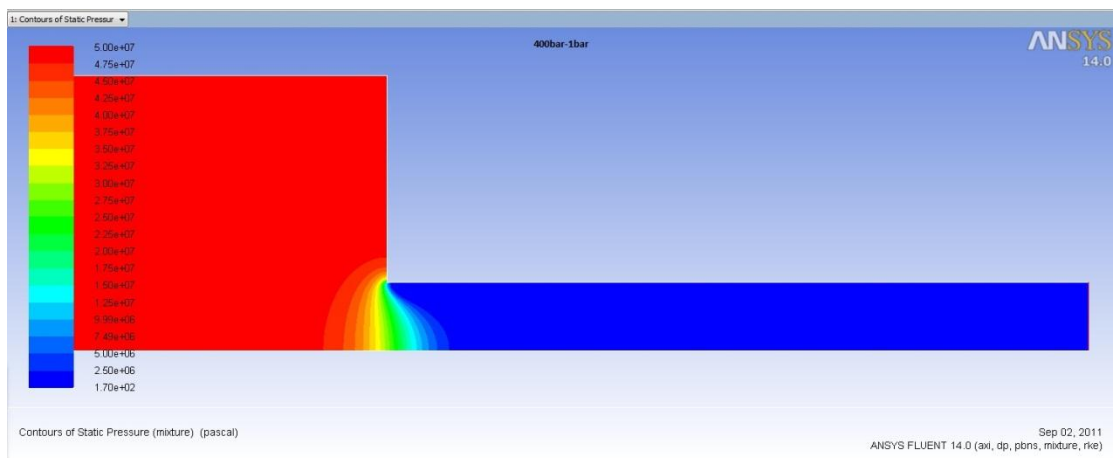




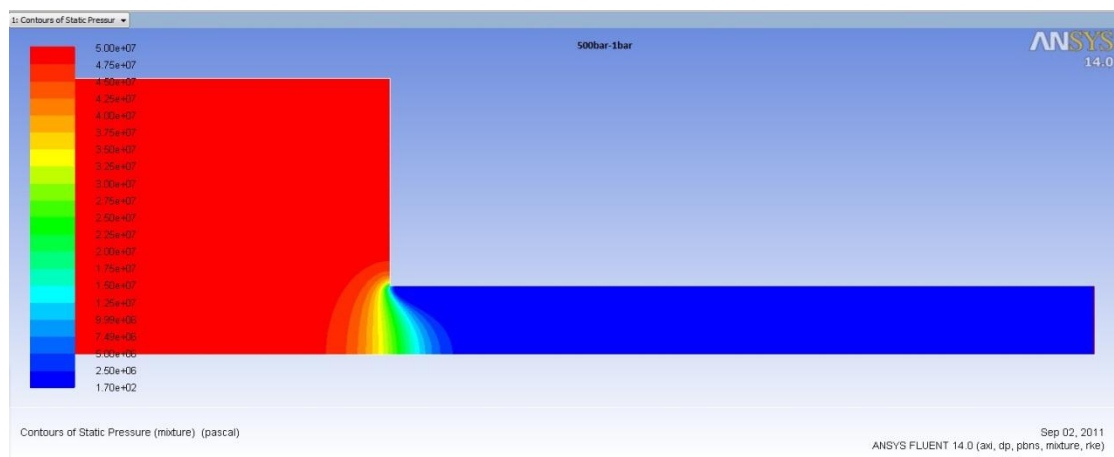
**Σχήμα 5.5** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 200bar και πίεση εξόδου 1bar



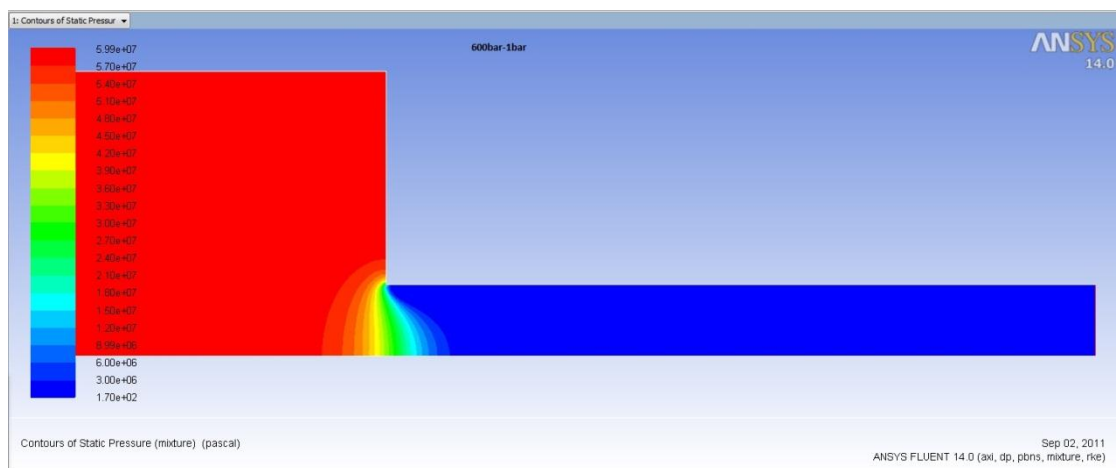
**Σχήμα 5.6** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 300bar και πίεση εξόδου 1bar



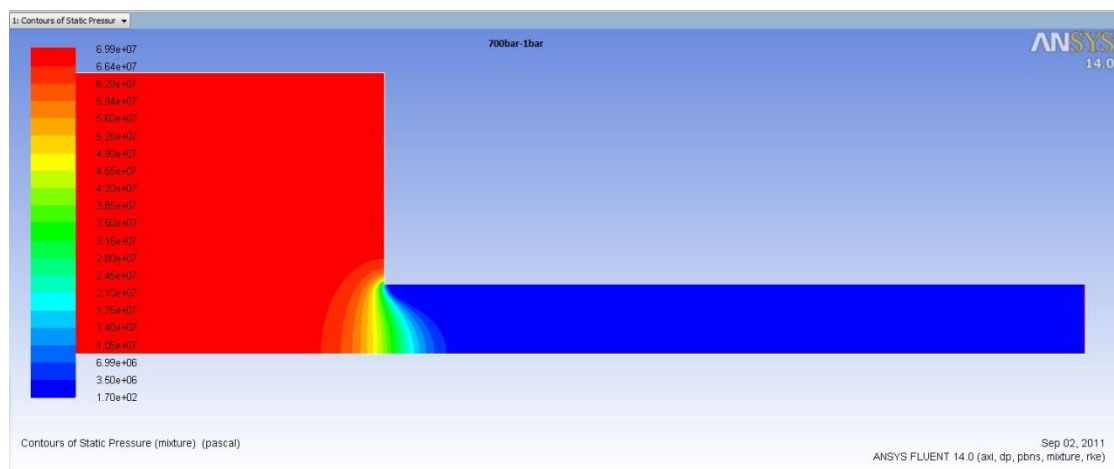
**Σχήμα 5.7** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 400bar και πίεση εξόδου 1bar



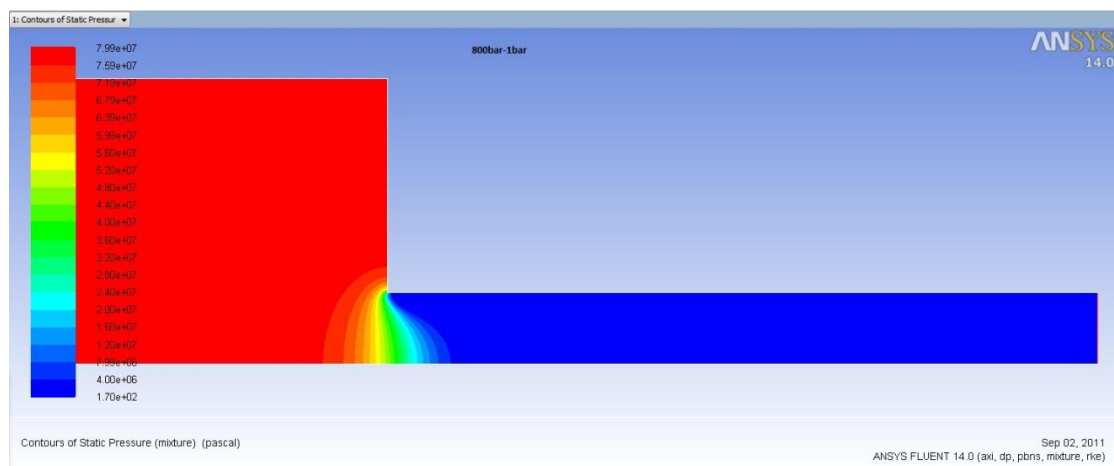
**Σχήμα 5.8** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 500bar και πίεση εξόδου 1bar



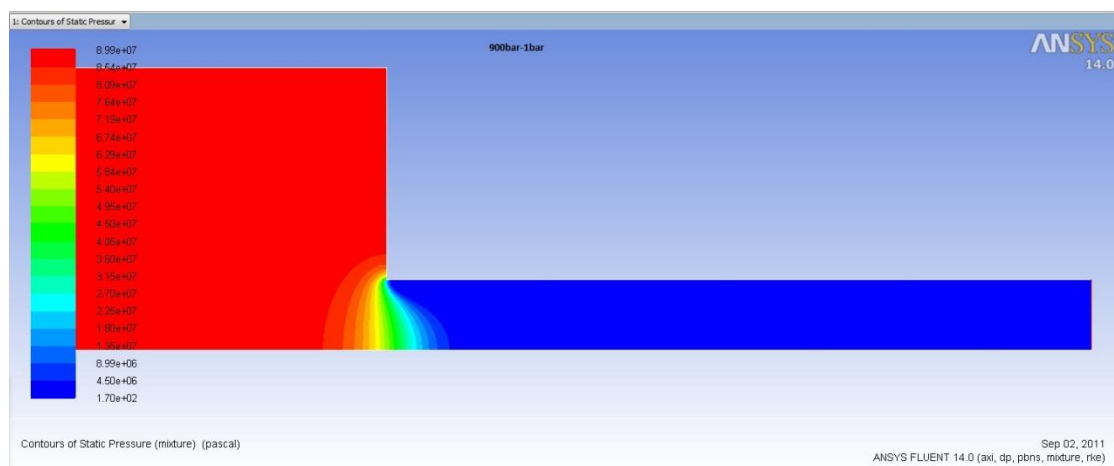
**Σχήμα 5.9** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 600bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.10** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 700bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.11** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.12** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 1bar

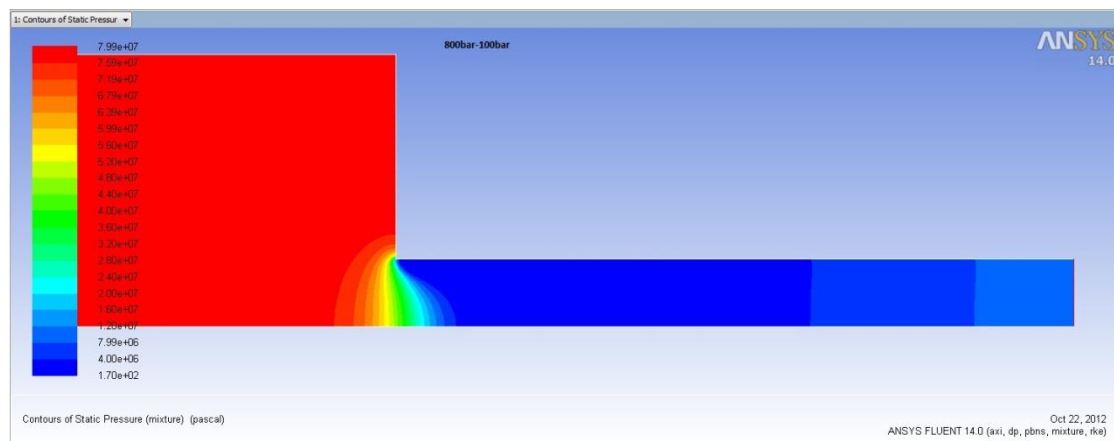
Από τα Σχήματα 5.1 – 5.12 μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι στην πρώτη περίπτωση (είσοδος 5 bar) δεν εμφανίζεται στατική πίεση τέτοια που να ευνοεί την σπηλαιώση, αφού η χαμηλότερη πίεση αγγίζει τα 25700 Pa, τιμή που απέχει αρκετά από την πίεση ατμοποίησης (170 Pa) του πετρελαίου. Από την αμέσως επόμενη πίεση (10 bar) και μετά, γίνεται εμφανής η δημιουργία περιοχών με ελάχιστη στατική πίεση (170 Pa), και μέχρι την πίεση εισόδου των 50 bar μεγαλώνει αυτή η περιοχή. Από πιέσεις τις τάξεως των 100 bar πάνω, σε όλο το μήκος του ακροφυσίου έχουμε χαμηλές πιέσεις κοντά στην πίεση ατμοποίησης. Άρα όπως αναλύσαμε και

στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο έχουν δημιουργηθεί συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να παρατηρηθεί σπηλαιώση.

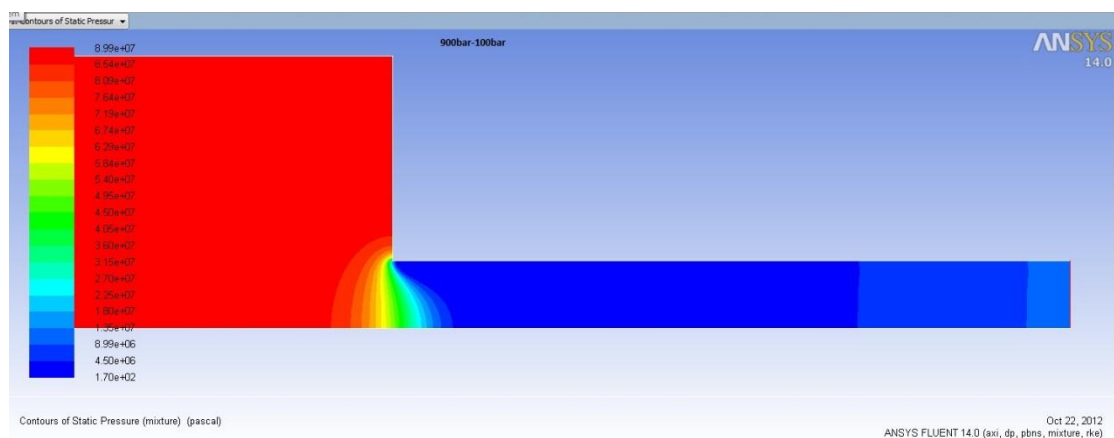
### 5.1.2 Γραφήματα στατικής πίεσης με πίεση εξόδου 100 bar

Πραγματοποιήσαμε και ένα δεύτερο σετ αριθμητικών πειραμάτων, όπου το ΔΡ είχε τις τιμές 700, 800, 900 bar, αλλάζοντας όμως τις συνοριακή συνθήκη εξόδου από 1 bar σε 100 bar. Για την ακρίβεια, αυξήσαμε την πίεση στην έξοδο με σκοπό να εξομοιώσουμε καλύτερα τις συνθήκες σε έναν θάλαμο καύσης ενός ναυτικού κινητήρα diesel, [10, 11]. Επιπλέον, και για να διαπιστώσουμε την πιθανή σχέση ή εξάρτηση των αποτελεσμάτων από τις απόλυτες οριακές συνθήκες. Κατ'αυτόν τον τρόπο θέσαμε την πίεση εξόδου ίση με 100 bar.

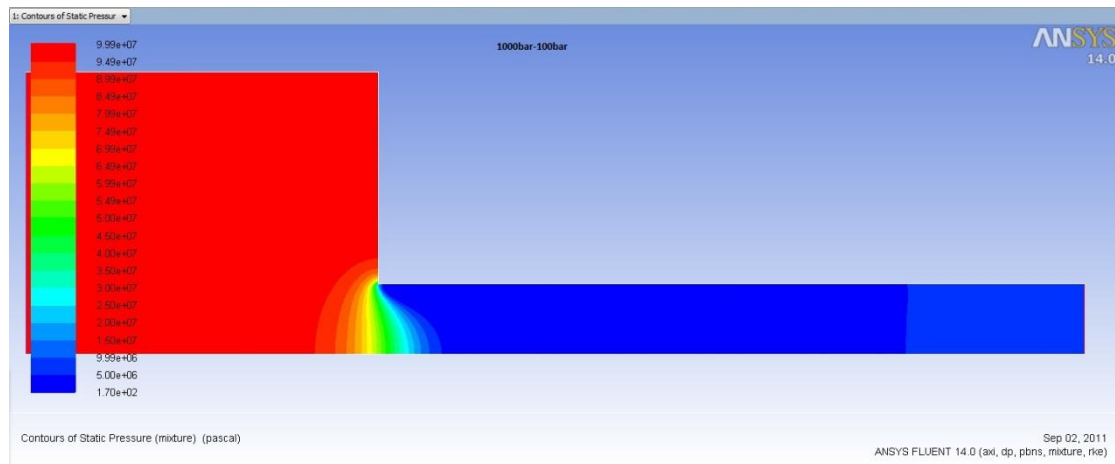
Στα σχήματα 5.13, 5.14, 5.15 παρουσιάζεται η στατική πίεση, για πίεση εισόδου ίση με 800, 900 και 1000 bar αντίστοιχα.



**Σχήμα 5.13** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 100bar

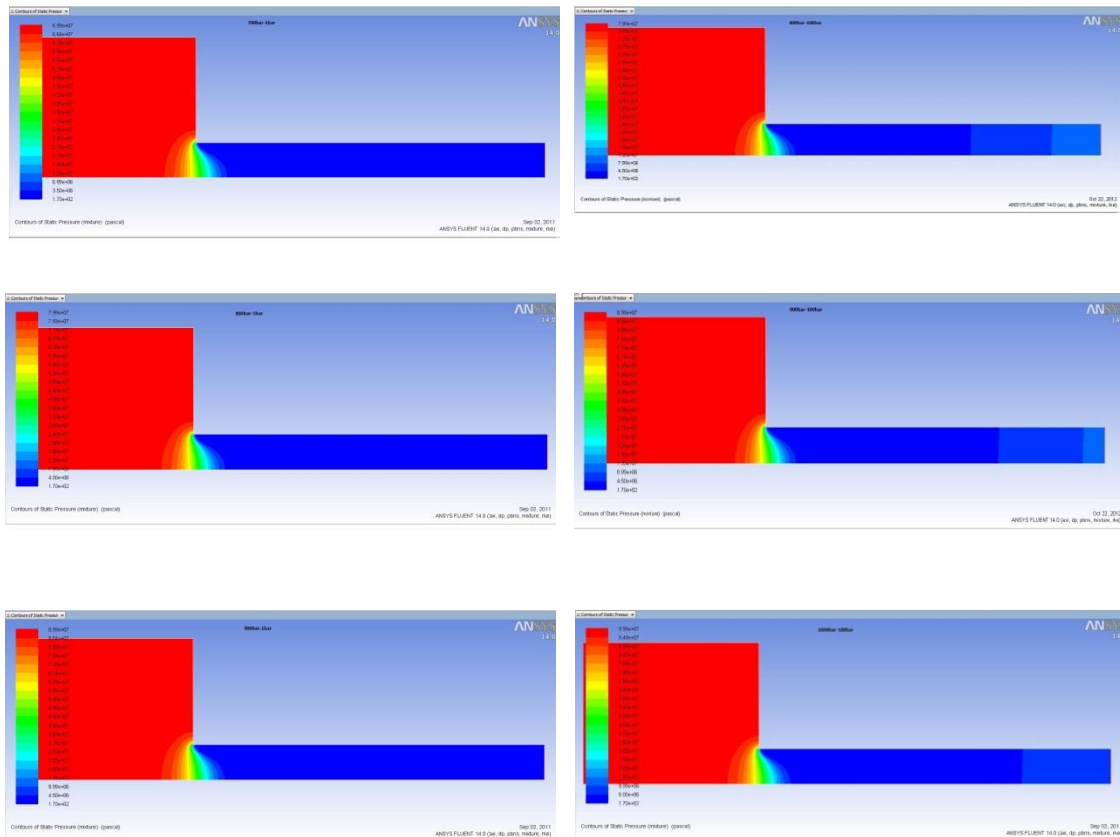


**Σχήμα 5.14** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 100bar



**Σχήμα 5.15** Γράφημα στατικής πίεσης για πίεση εισόδου 1000bar και πίεση εξόδου 100bar

Η στατική πίεση παρουσιάζει αντίστοιχη κατανομή για τις τρεις πιέσεις εξόδου. Στην περιοχή εξόδου του ακροφυσίου, όπου παρατηρείται έντονη ανάκτηση πίεσης, για όλες τις περιπτώσεις με πίεση εξόδου 100 bar.



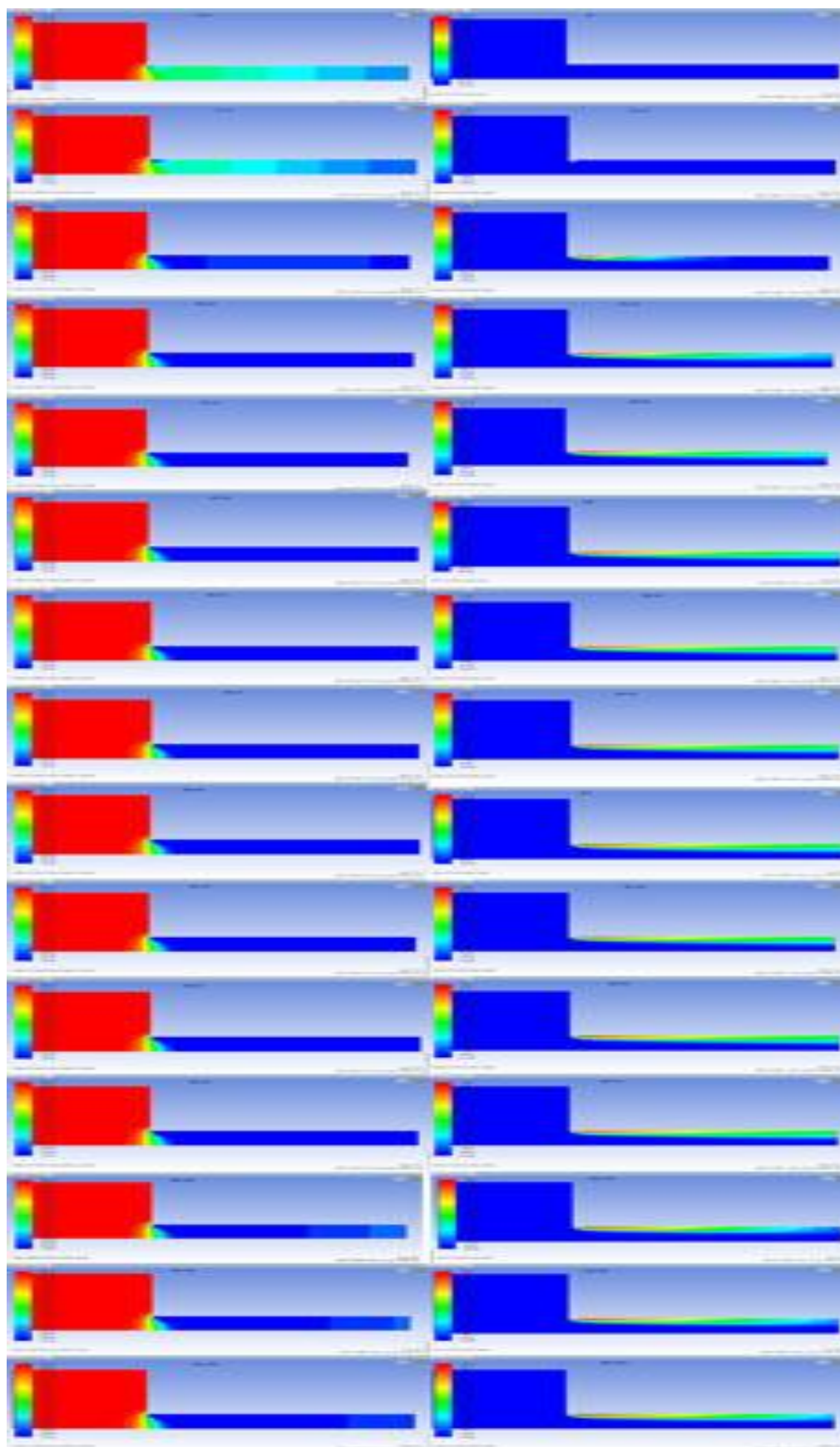
Πίεση εξόδου 1 bar

Πίεση εξόδου 100 bar

**Σχήμα 5.16** Συγκεντρωτικά γραφήματα στατικής πίεσης, από πίεση εισόδου 700 bar έως 1000bar για πίεση εξόδου 1bar και 100bar.

Στο Σχήμα 5.16 μπορούμε να παρατηρήσουμε σε απευθείας σύγκριση την επίδραση των συνοριακών συνθηκών για κοινό  $\Delta P$ , ώστε να καταστεί σαφής η προαναφερθείσα ανάκτηση πίεσης στην περιοχή εξόδου του ακροφυσίου.

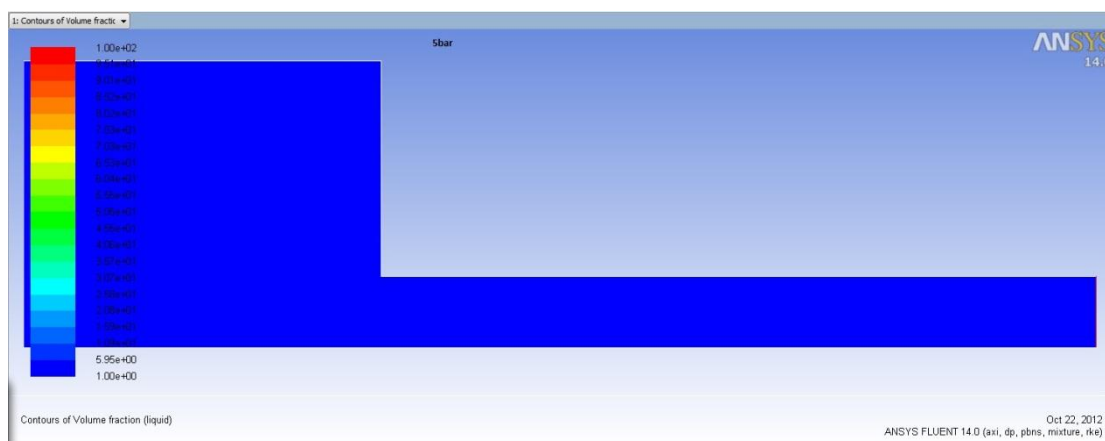
Στο Σχήμα 5.17, παρουσιάζεται μια σύνθεση γραφημάτων με σκοπό τη δημιουργία μιας πρώτης εκτίμησης όσον αφορά στο κλάσμα ατμού του πετρελαίου, που δημιουργείται εξαιτίας της σπηλαιώσης. Στην αριστερή στήλη διακρίνονται τα γραφήματα της στατικής πίεσης με αύξουσα διαφορά πίεσης ( $\Delta P$ ), ενώ στη δεξιά στήλη αντιπαραβάλλονται τα γραφήματα κλάσματος ατμού, στοιχισμένα αντίστοιχα.



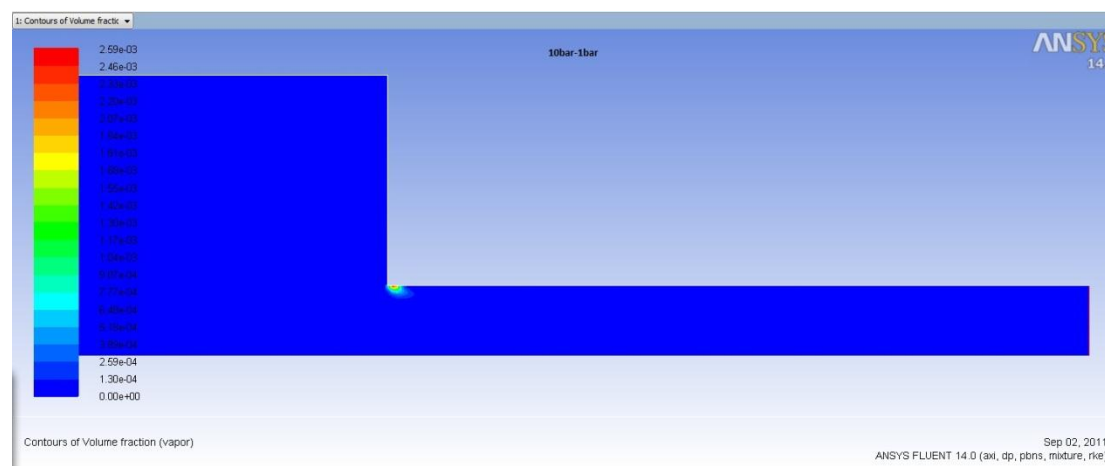
Σχήμα 5.17 Αντιπαραβολή γραφημάτων στατικής πίεσης – κλάσματος ατμού.

### 5.2.1 Γραφήματα απεικόνισης κλάσματος ατμού με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar

Το κλάσμα ατμού ορίζεται ως  $V_{vapor}/(V_{liquid}+V_{vapor})$ . Από το Σχήμα 5.18 προκύπτει ότι για πίεση εισόδου 5bar δεν παρατηρείται εξάτμιση.

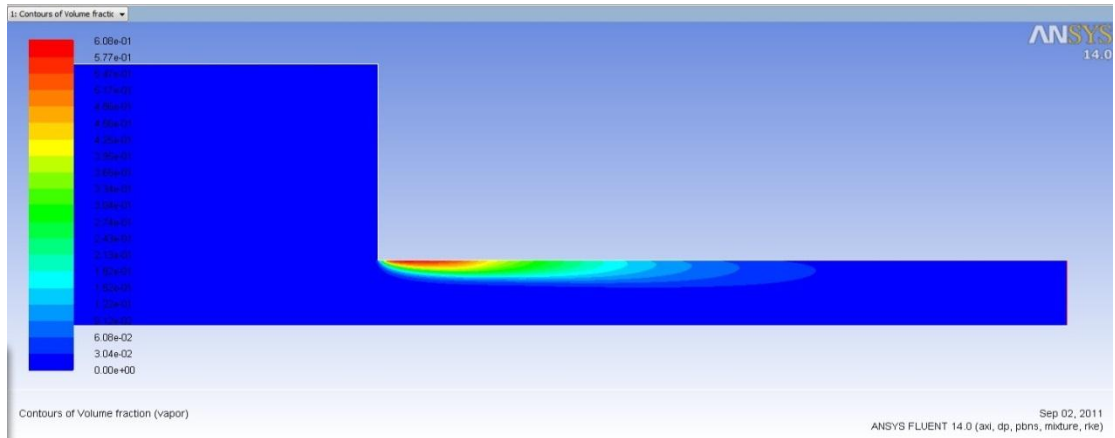


Σχήμα 5.18 Γράφημα κλάσματος υγρού για πίεση εισόδου 5bar και πίεση εξόδου 1bar

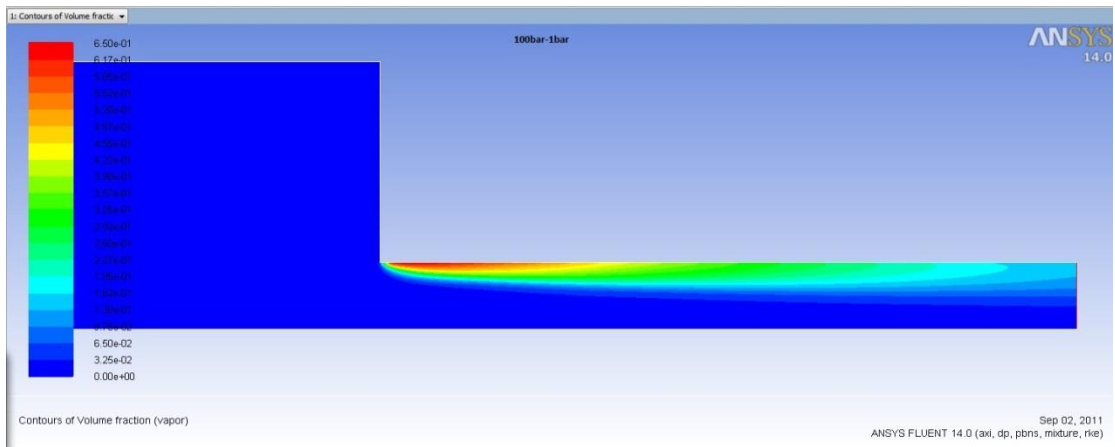


Σχήμα 5.19 Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 10bar και πίεση εξόδου 1bar

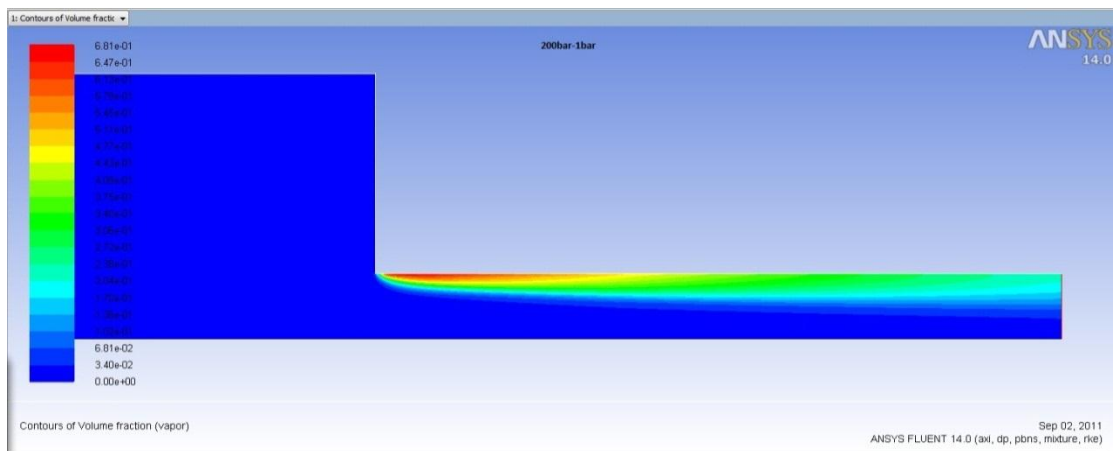




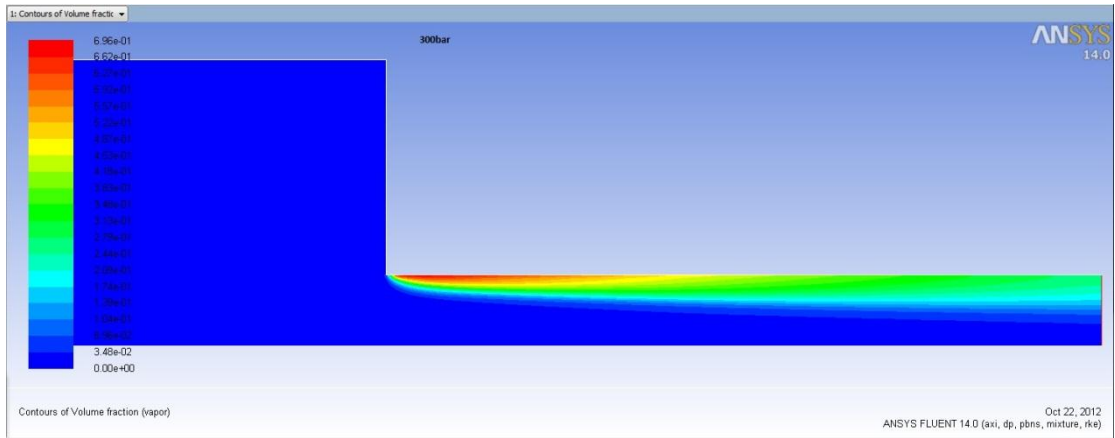
**Σχήμα 5.20** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 50bar και πίεση εξόδου 1bar



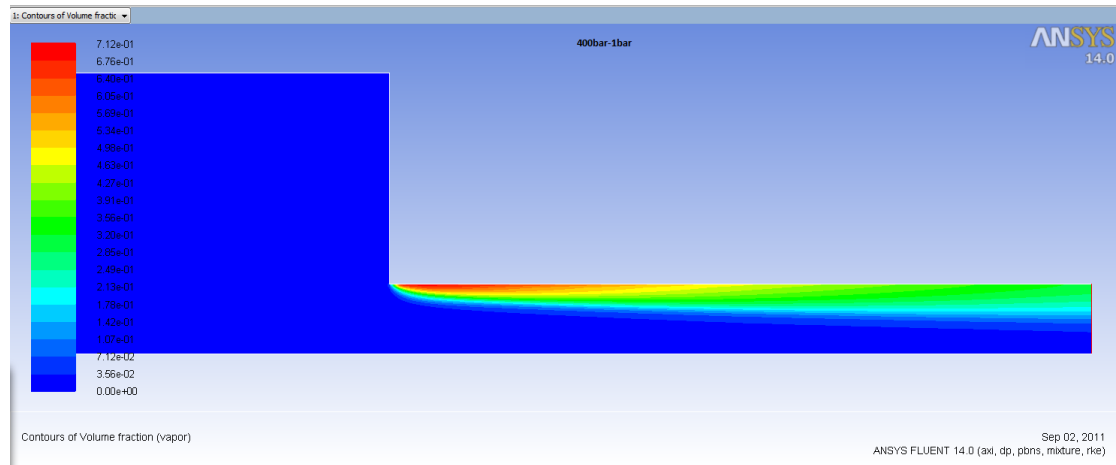
**Σχήμα 5.21** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar.



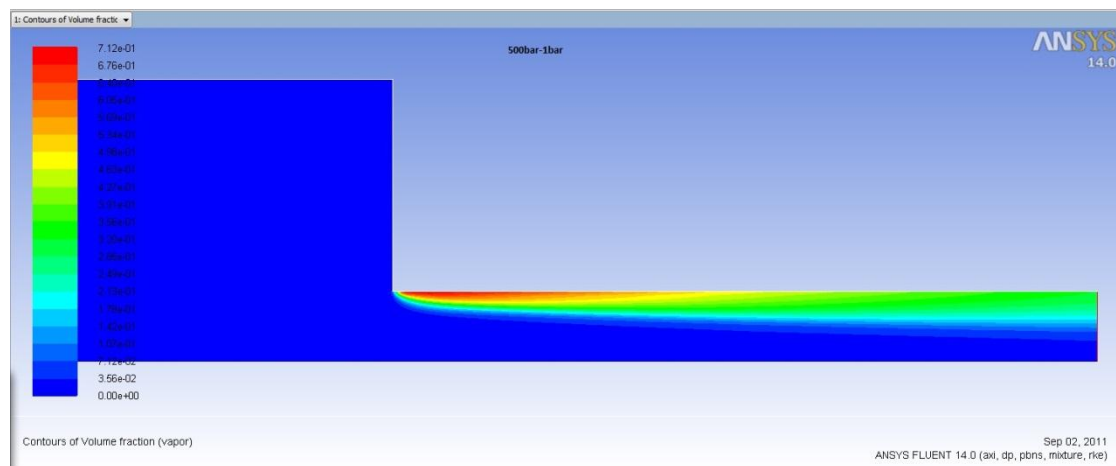
**Σχήμα 5.22** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 200bar και πίεση εξόδου 1bar



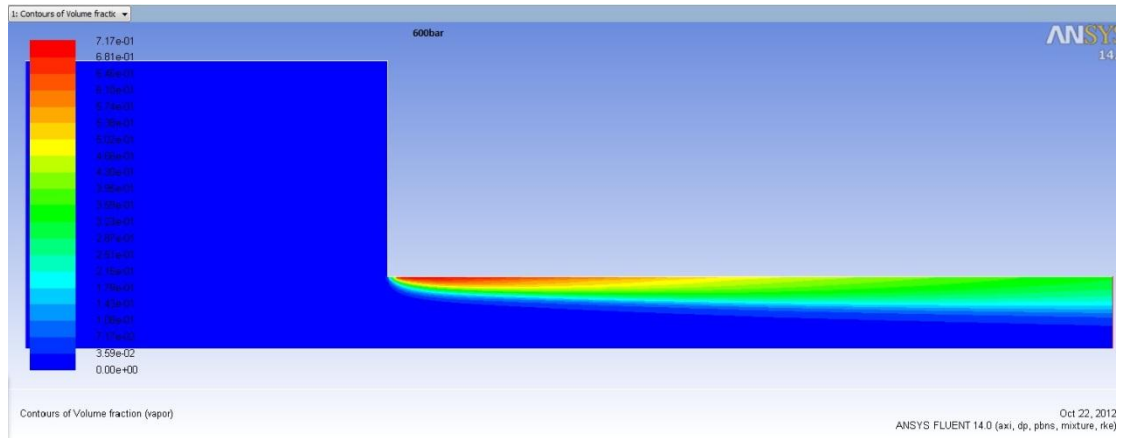
**Σχήμα 5.23** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 300bar και πίεση εξόδου 1bar



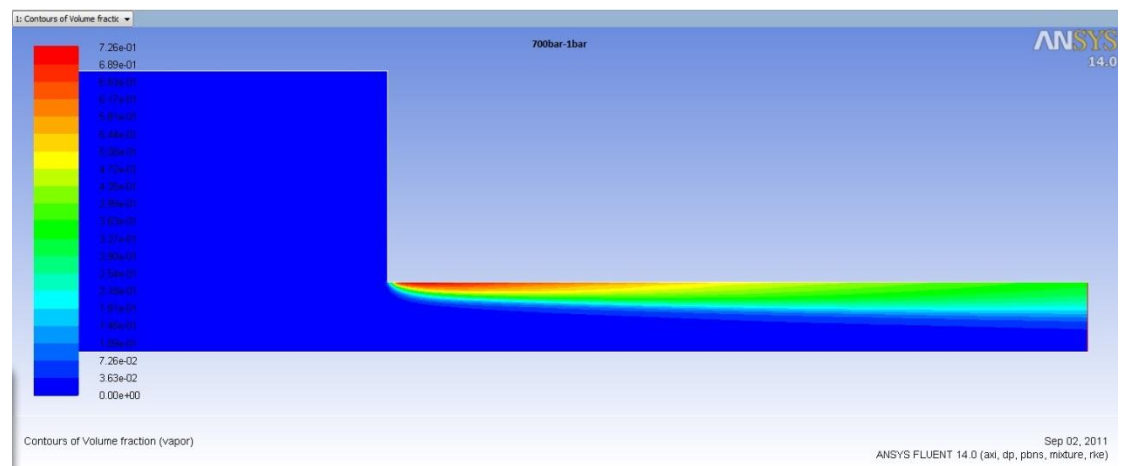
**Σχήμα 5.24** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 400bar και πίεση εξόδου 1bar



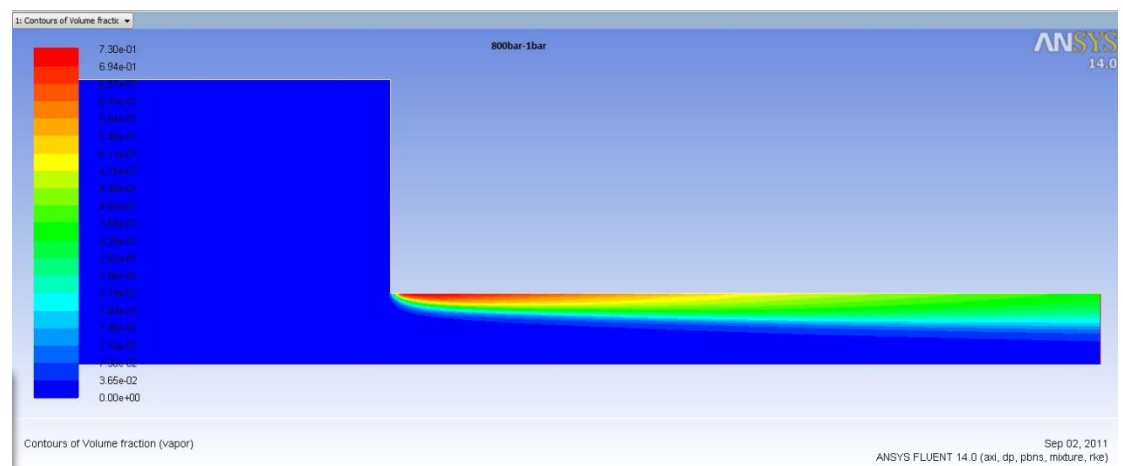
**Σχήμα 5.25** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 500bar και πίεση εξόδου 1bar



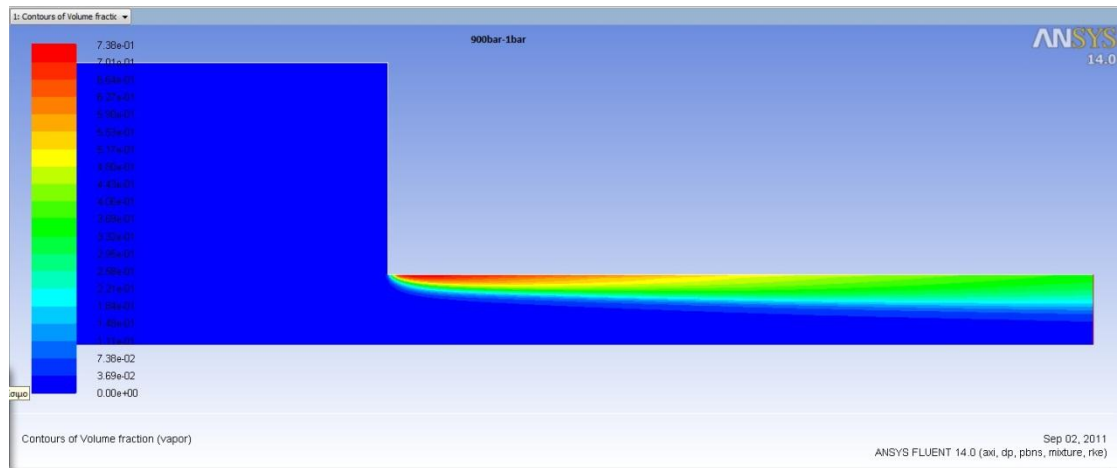
**Σχήμα 5.26** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 600bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.27** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 700bar και πίεση εξόδου 1bar

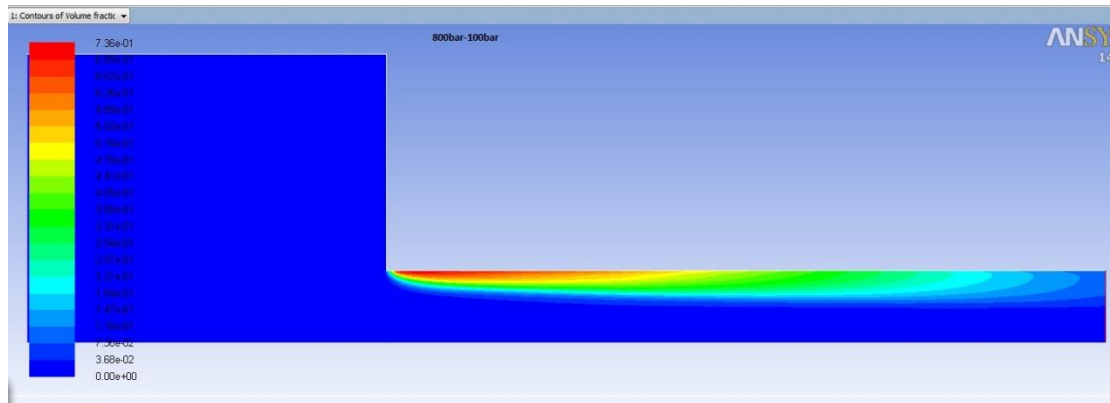


**Σχήμα 5.28** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 1bar

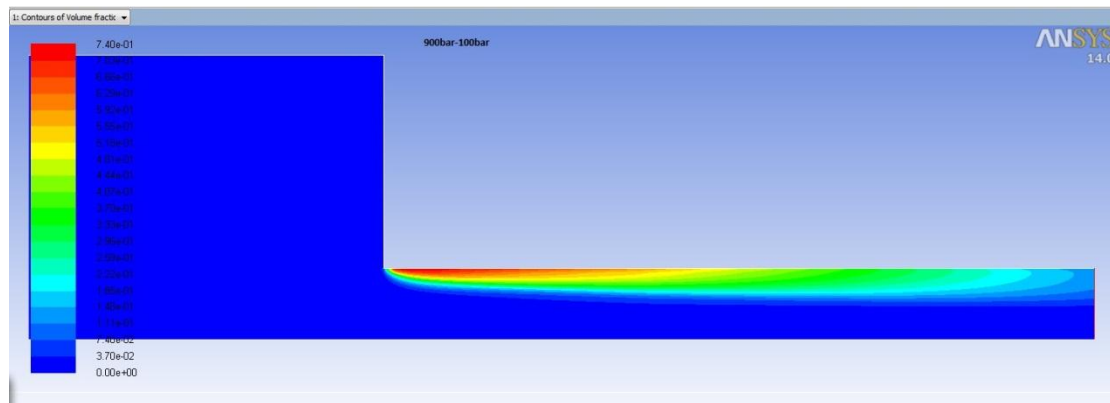


**Σχήμα 5.29** Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 1bar

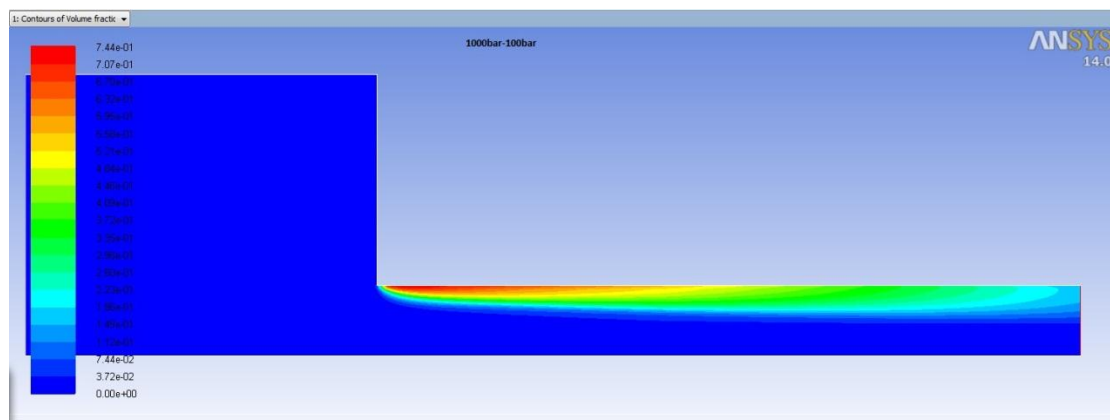
## 5.2.2 Γραφήματα απεικόνισης κλάσματος ατμού με πίεση εξόδου 100 bar



Σχήμα 5.30 Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 100bar



Σχήμα 5.31 Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 100bar

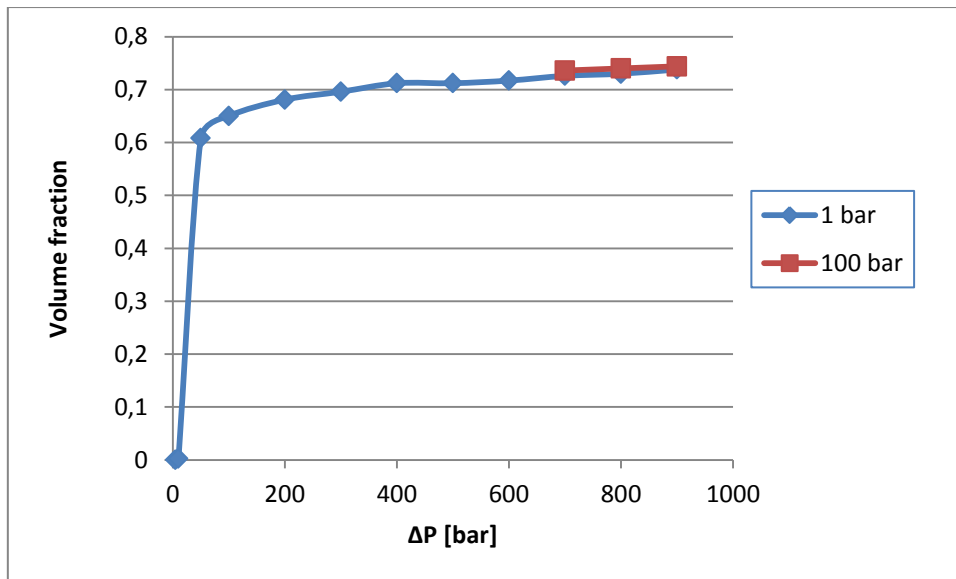


Σχήμα 5.32 Γράφημα κλάσματος ατμού για πίεση εισόδου 1000bar και πίεση εξόδου 100bar.

Παρατηρώντας τα γραφήματα κλάσματος ατμού του πετρελαίου, διαπιστώνεται ότι με πίεση εισόδου  $P=5$  bar δεν παρουσιάζεται σπηλαιώση, καθώς το κλάσμα ατμού παραμένει μηδενικό σε όλη την έκταση του ακροφυσίου. Στο δεύτερο γράφημα όπου η πίεση εισόδου διπλασιάζεται στα 10bar, το κλάσμα ατμού εμφανίζεται στην αρχή της στένωσης της διατομής, με πολύ μικρή έκταση καθώς και ελάχιστη περιεκτικότητα, καθώς η μέγιστη τιμή του είναι 0,00259 κατ' όγκο. Στο τρίτο γράφημα, με πίεση εισόδου 50 bar το κλάσμα ατμού αυξάνει, με μέγιστη τιμή πλέον 0,608. Αυξάνοντας σταδιακά την πίεση έως και τα 900bar καταγράφουμε μέγιστη τιμή κλάσματος ατμού ίση με 0,738 κατ'όγκο. Στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις όπου η πίεση εξαγωγής είναι 100 bar παρατηρούμε ελαφρώς αυξημένο κλάσμα ατμού. Στο Σχήμα 5.33 παρουσιάζονται οι τιμές της μέγιστης τιμής του κλάσματος ατμού συναρτήσει της αντίστοιχης διαφοράς πίεσης στο ακροφύσιο, και στο Σχήμα 5.34 το σχετικό διάγραμμα.

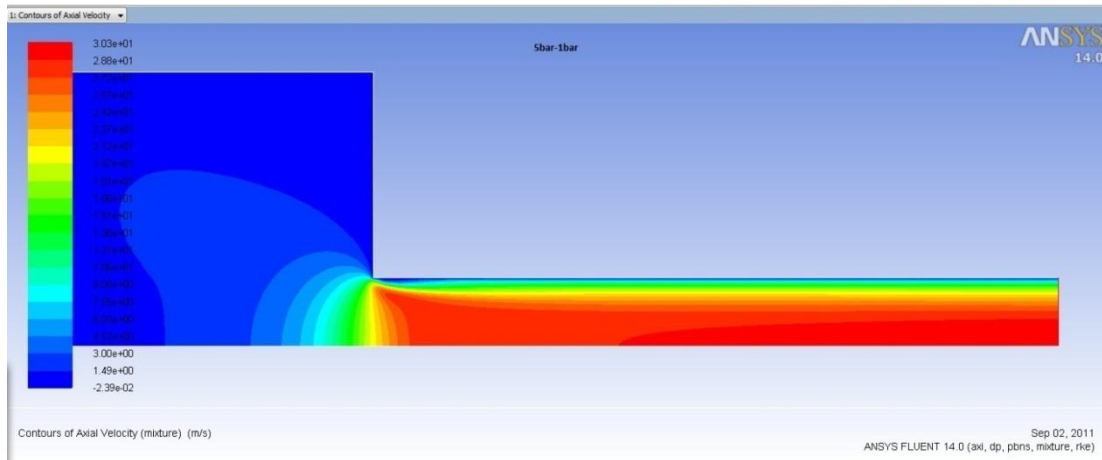
$\Delta P$	Volume Fraction
5	0
10	0,00259
50	0,608
100	0,65
200	0,681
300	0,696
400	0,712
500	0,712
600	0,717
700	0,726
800	0,73
900	0,738
700	0,736
800	0,74
900	0,744

**Σχήμα 5.33** Πίνακας τιμών  $\Delta P$  – μέγιστης τιμής του κλάσματος ατμού. Η πίεση είναι σε bar. Οι δώδεκα πρώτες περιπτώσεις είναι για πίεση εξόδου 1 bar, ενώ οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν σε πίεση εξόδου 100 bar.

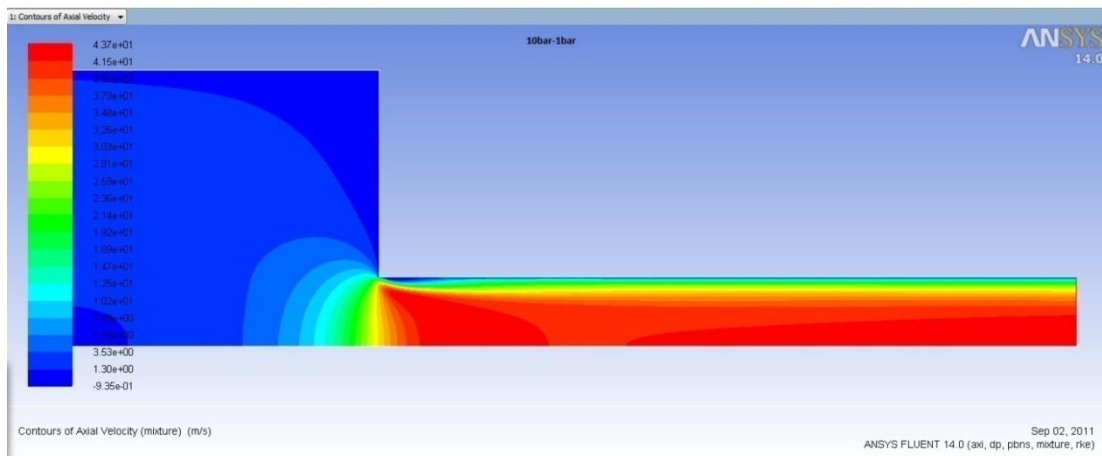


**Σχήμα 5.34** Διαγραμματική αναπαράσταση των δεδομένων  $\Delta P$  – μέγιστης τιμής του κλάσματος ατμού. Σε πίεση εξόδου 1 bar αντιστοιχούν τα τετράγωνα, και σε πίεση εξόδου 100 bar οι ρόμβοι.

### 5.3.1 Γραφήματα απεικόνισης αξονικής ταχύτητας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900 bar και πίεση εξόδου 1 bar

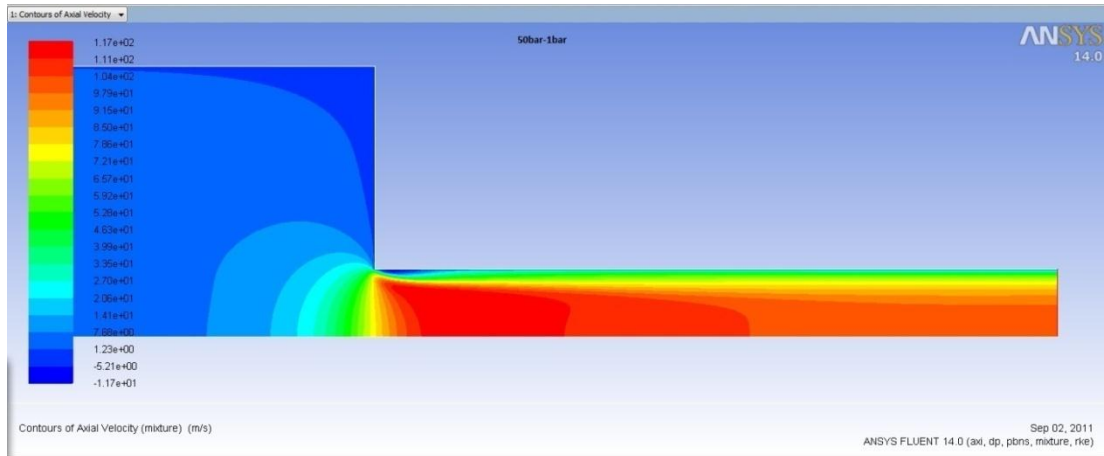


Σχήμα 5.35 Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 50 bar και πίεση εξόδου 1 bar

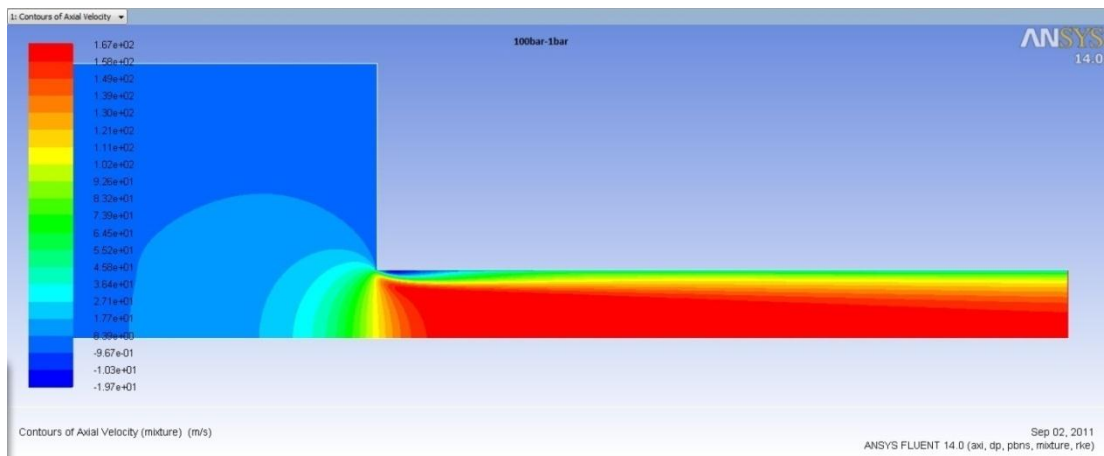


Σχήμα 5.36 Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 10 bar και πίεση εξόδου 1 bar

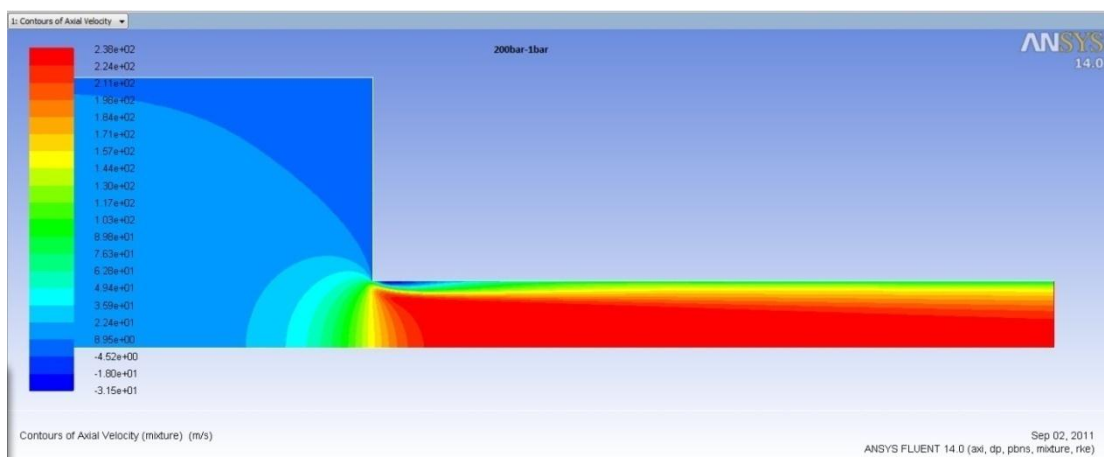




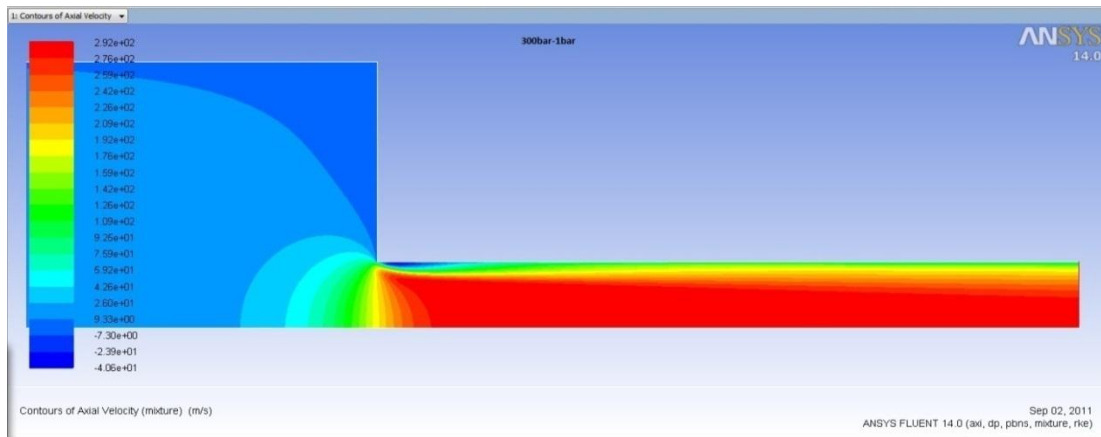
**Σχήμα 5.37** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 50 bar και πίεση εξόδου 1 bar



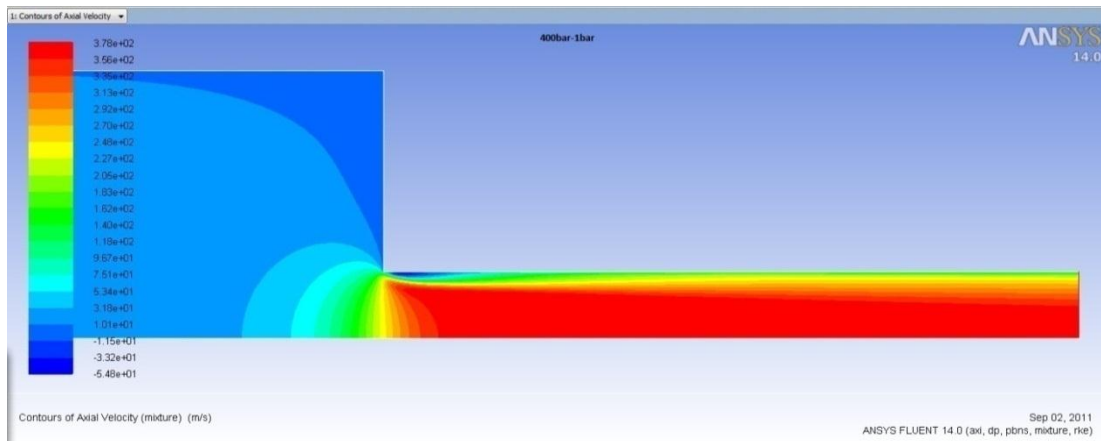
**Σχήμα 5.38** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 100 bar και πίεση εξόδου 1 bar



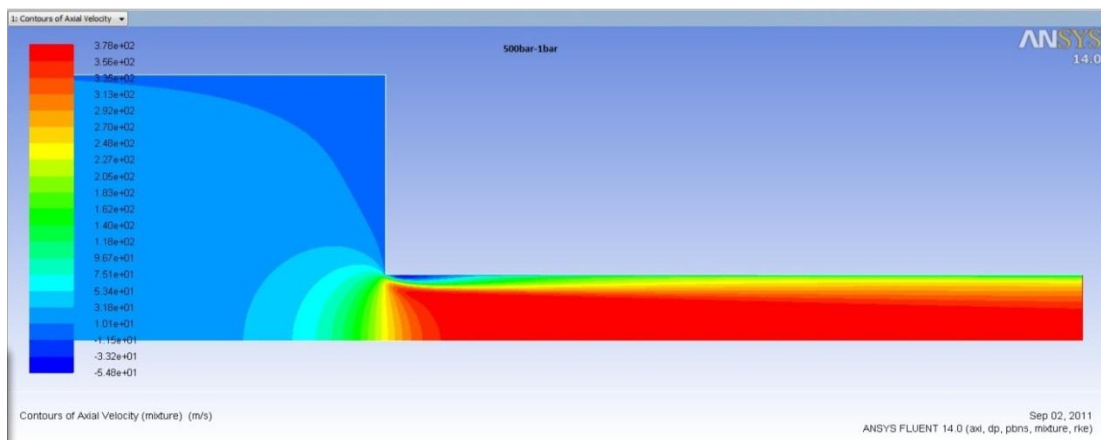
**Σχήμα 5.39** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 200 bar και πίεση εξόδου 1 bar



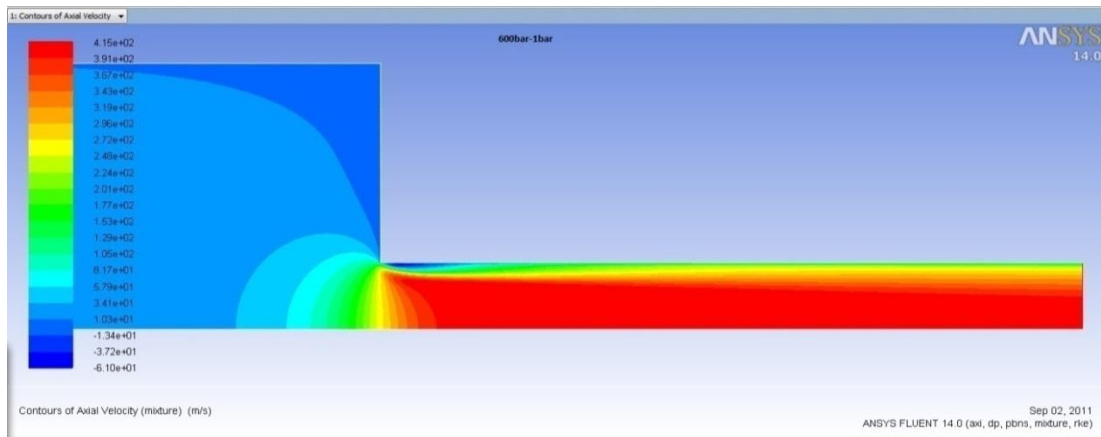
**Σχήμα 5.40** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 300 bar και πίεση εξόδου 1 bar



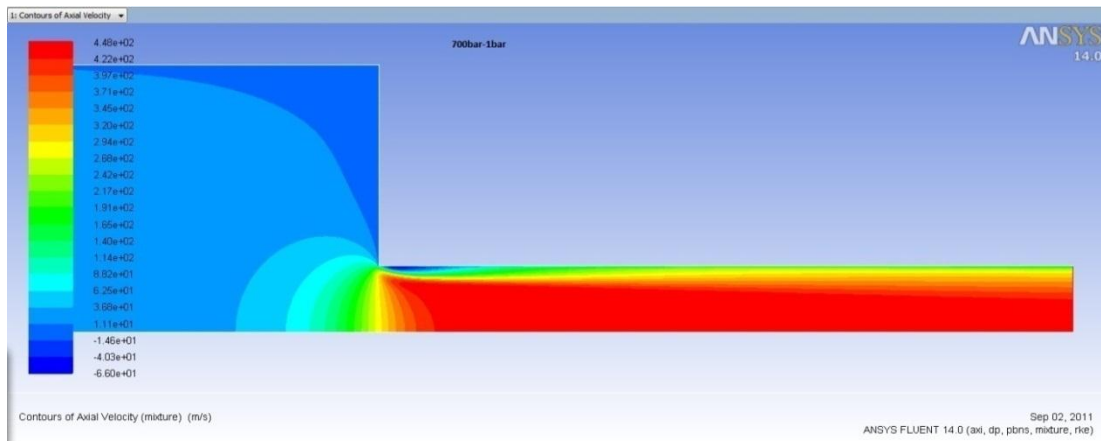
**Σχήμα 5.41** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 400 bar και πίεση εξόδου 1 bar



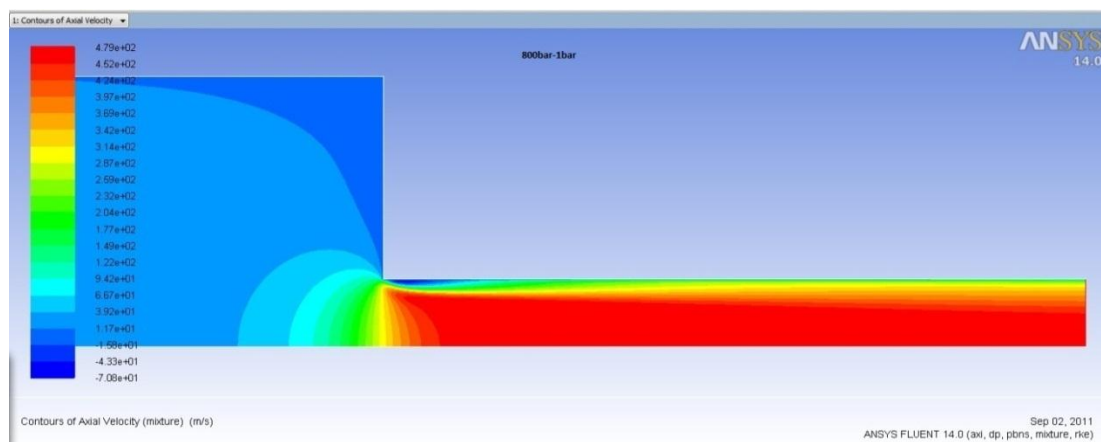
**Σχήμα 5.42** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 500 bar και πίεση εξόδου 1 bar



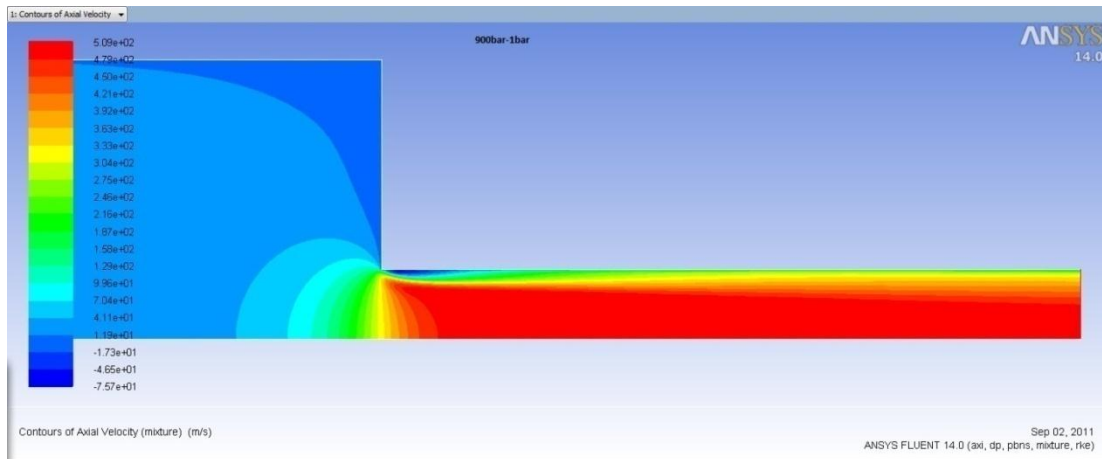
**Σχήμα 5.43** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 600 bar και πίεση εξόδου 1 bar



**Σχήμα 5.44** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 700 bar και πίεση εξόδου 1 bar

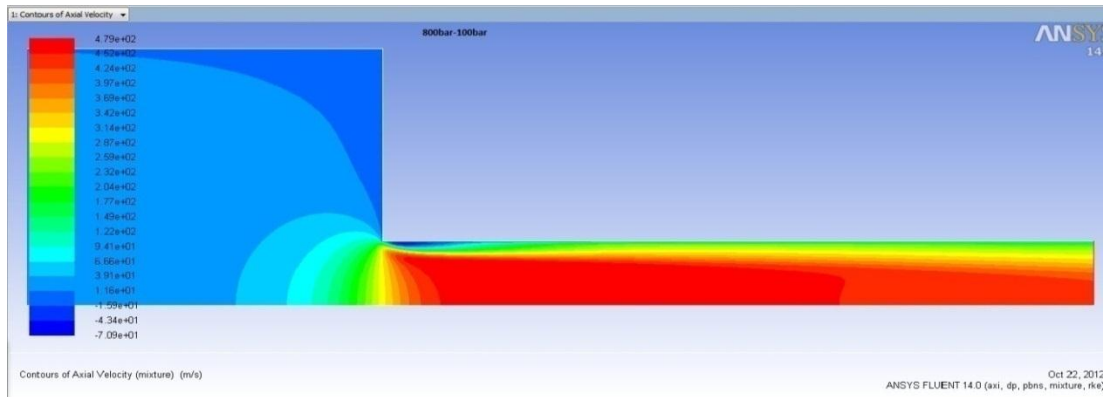


**Σχήμα 5.45** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 800 bar και πίεση εξόδου 1 bar

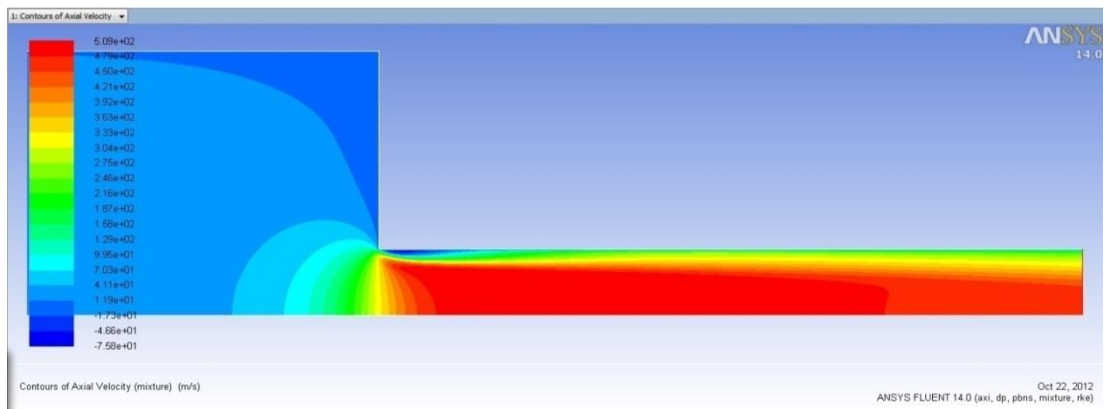


**Σχήμα 5.46** Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 900 bar και πίεση εξόδου 1 bar

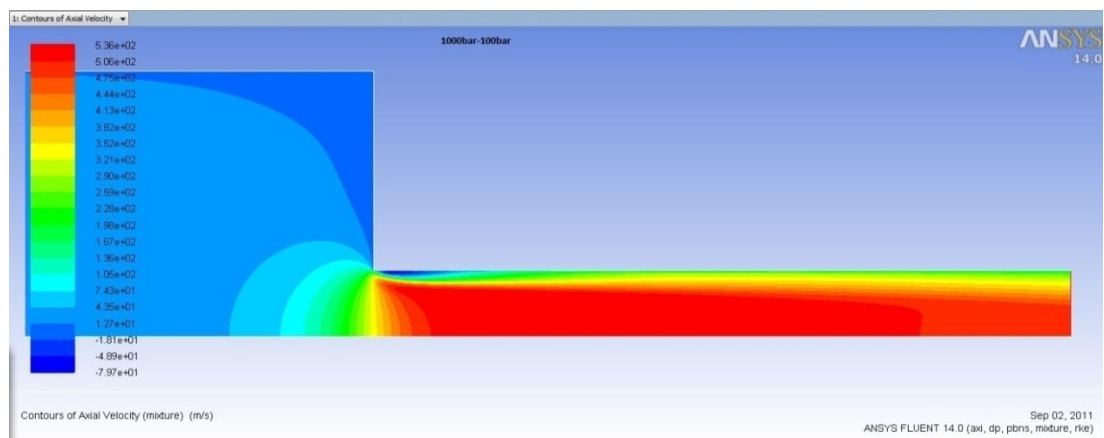
### 5.3.2 Γραφήματα απεικόνισης αξονικής ταχύτητας με πίεση εξόδου 100 bar



Σχήμα 5.47 Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 800 bar και πίεση εξόδου 100 bar



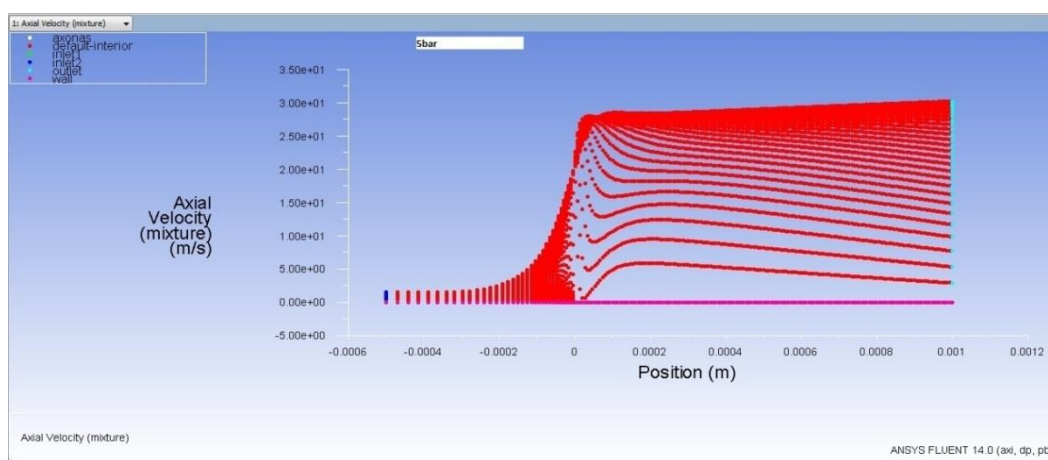
Σχήμα 5.48 Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 900 bar και πίεση εξόδου 100 bar



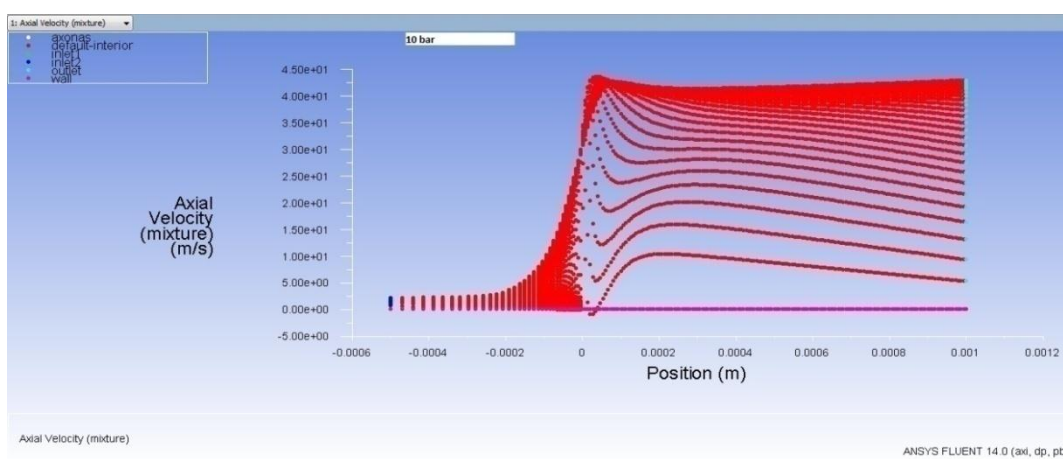
Σχήμα 5.49 Γράφημα αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 1000 bar και πίεση εξόδου 100 bar

### 5.3.3 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar

Για τη διακριτοποίηση στην ακτινική διεύθυνση χρησιμοποιήσαμε 30 κελιά με ομοιόμορφη πύκνωση. Αρχίζοντας από το τοίχωμα μέχρι την αξονική γραμμή παρουσιάζουμε στα σχήματα 5.50 έως 5.64 τη μεταβολή της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του ακροφυσίου, για  $r=\text{constant}$ . Από τα διαγράμματα αυτά μπορεί να εκτιμηθεί η περιοχή ανακυκλοφορίας στην αρχή της στένωσης του ακροφυσίου, χαρακτηριζόμενη από αρνητικές τιμές της ταχύτητας.

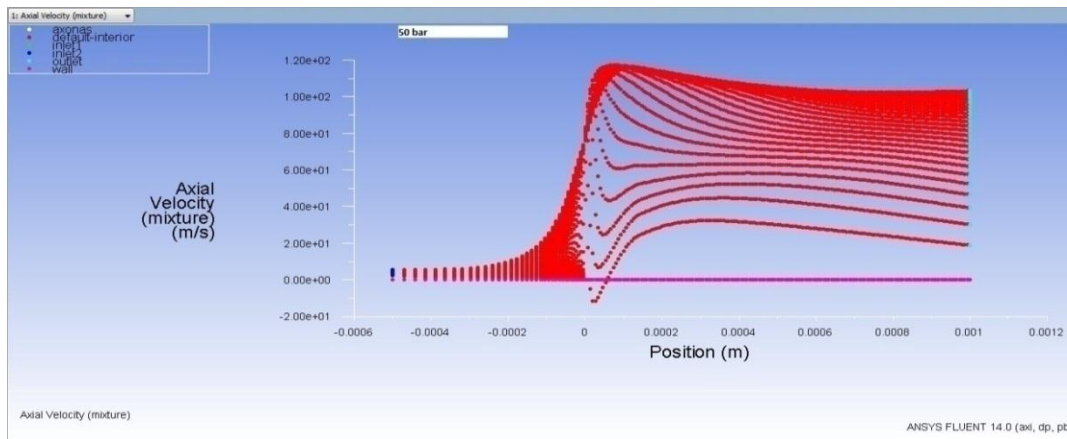


Σχήμα 5.50 Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 5bar και πίεση εξόδου 1bar

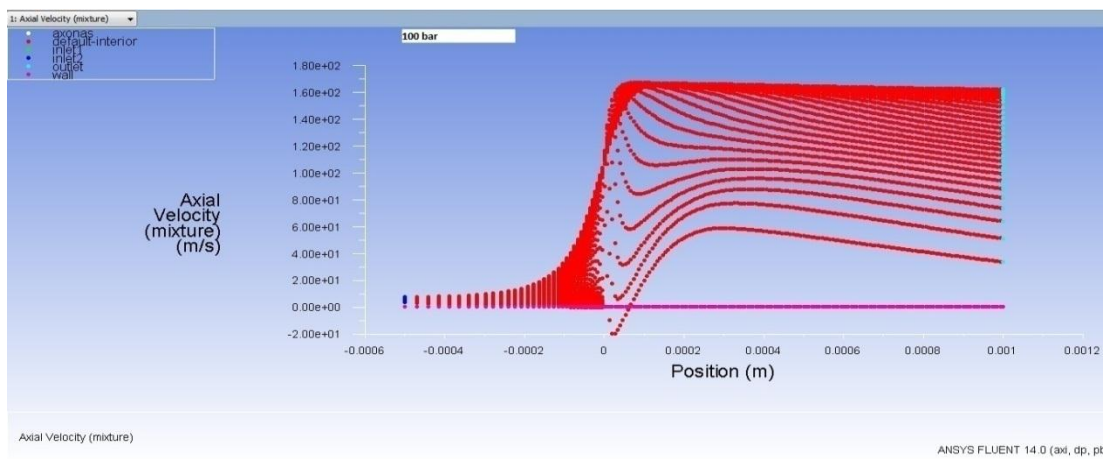


Σχήμα 5.51 Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 10bar και πίεση εξόδου 1bar

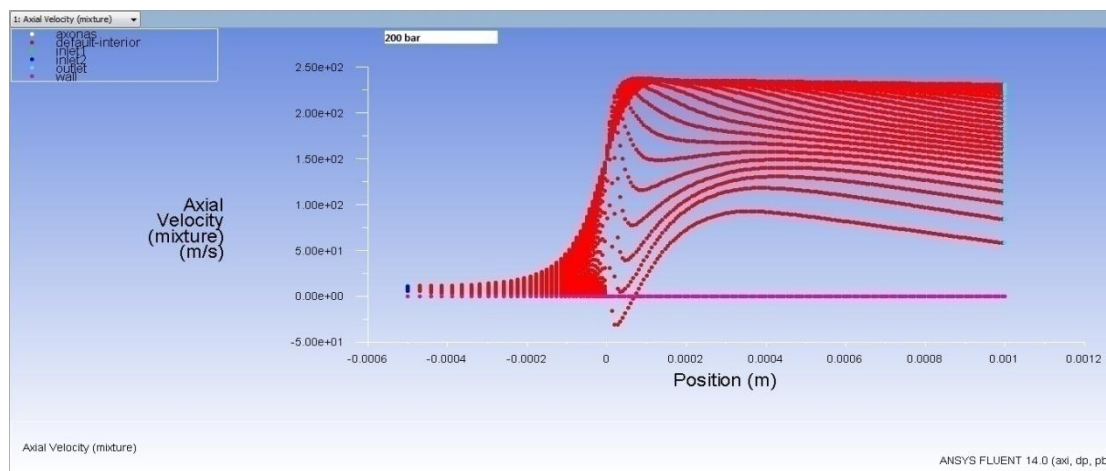




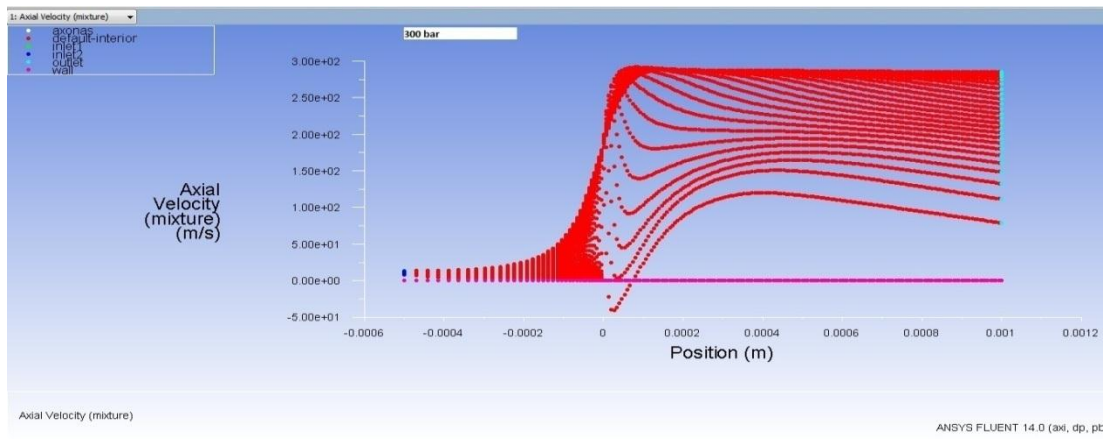
**Σχήμα 5.52** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 50bar και πίεση εξόδου 1bar



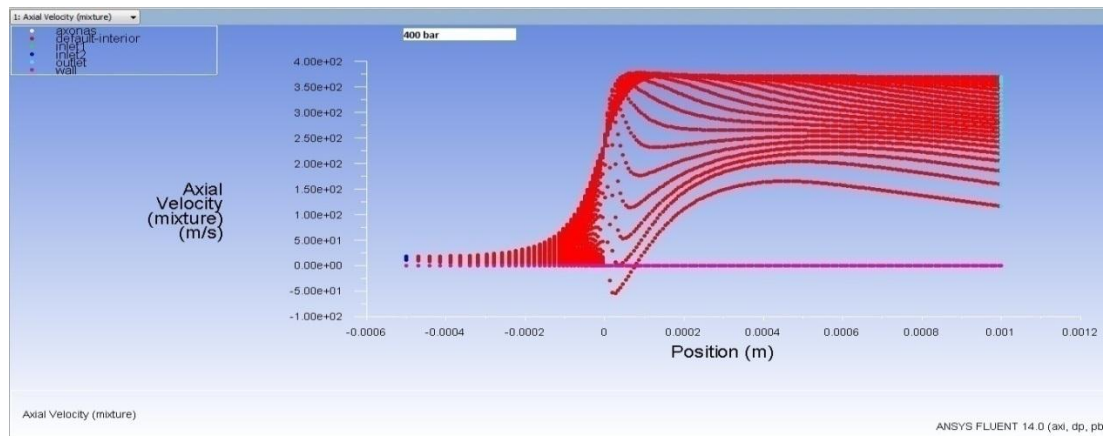
**Σχήμα 5.53** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar



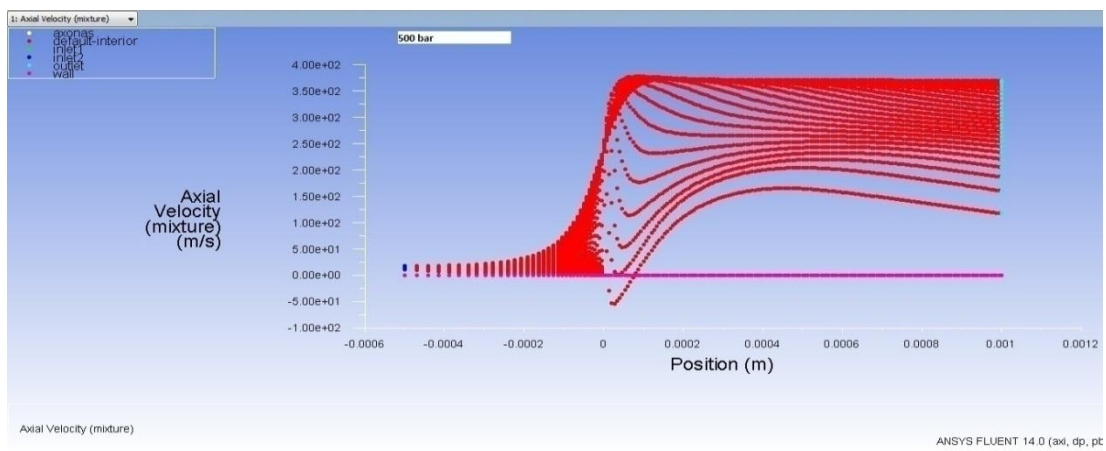
**Σχήμα 5.54** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 200bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.55** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 300bar και πίεση εξόδου 1bar

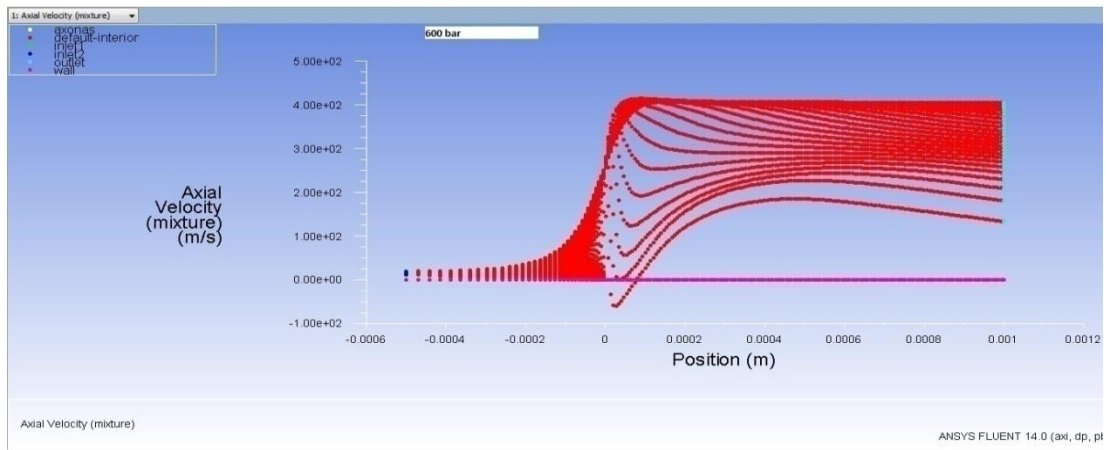


**Σχήμα 5.56** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 400bar και πίεση εξόδου 1bar

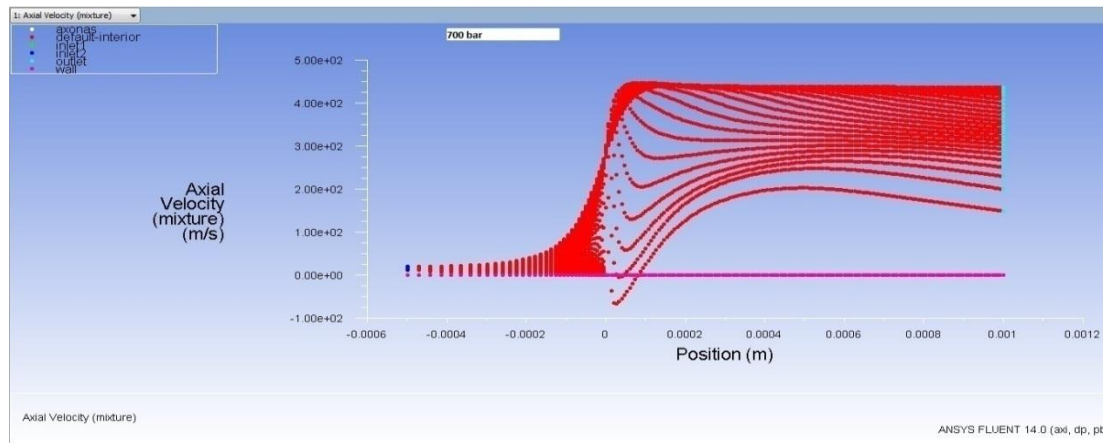


**Σχήμα 5.57** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 500bar και πίεση εξόδου 1bar

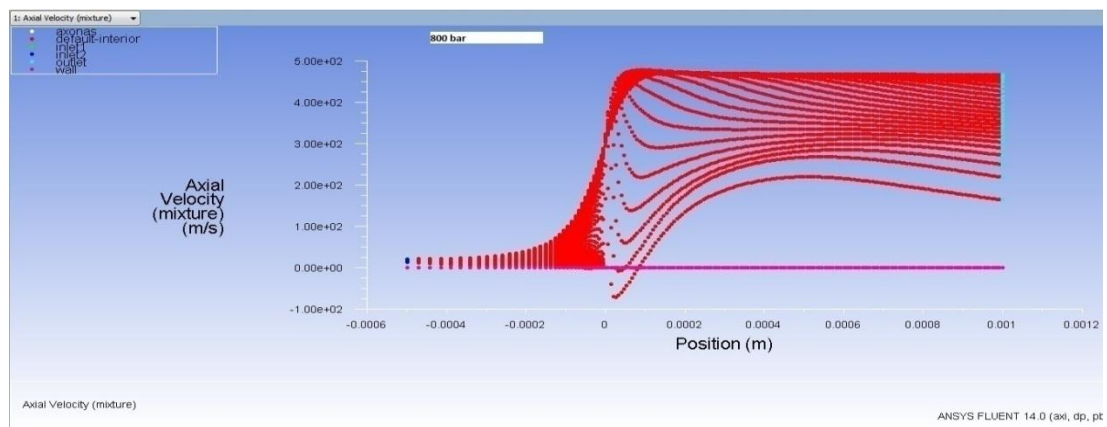




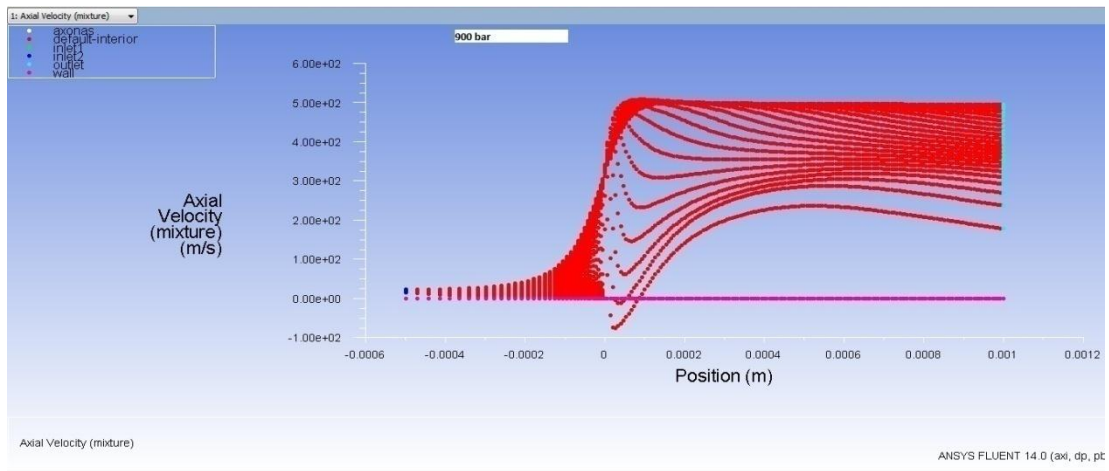
**Σχήμα 5.58** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 600bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.59** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 700bar και πίεση εξόδου 1bar

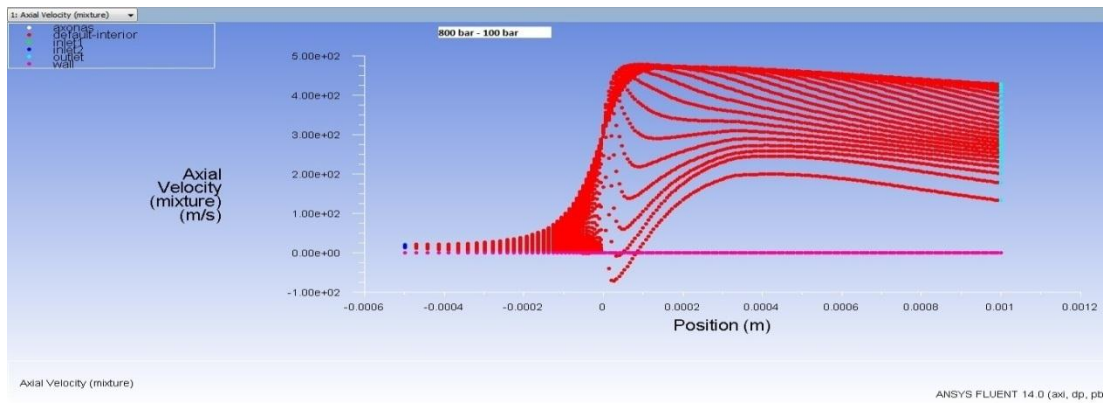


**Σχήμα 5.60** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 1bar

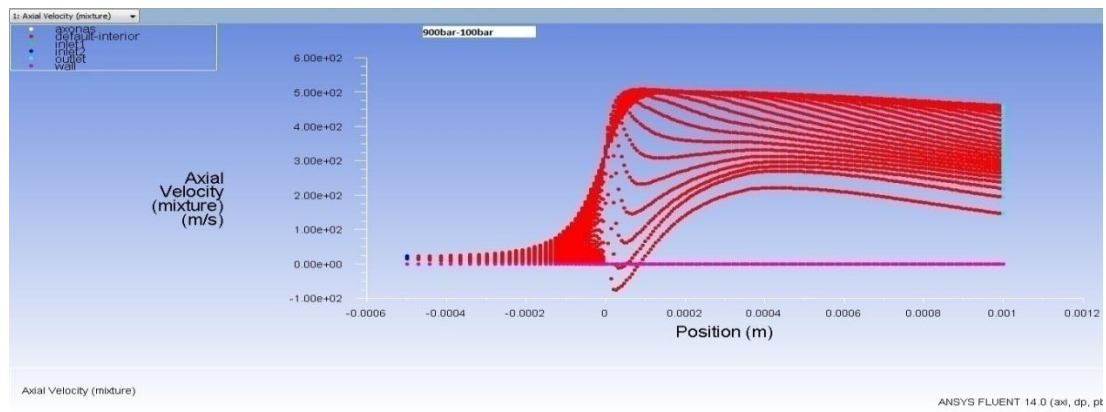


**Σχήμα 5.61** Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 1bar

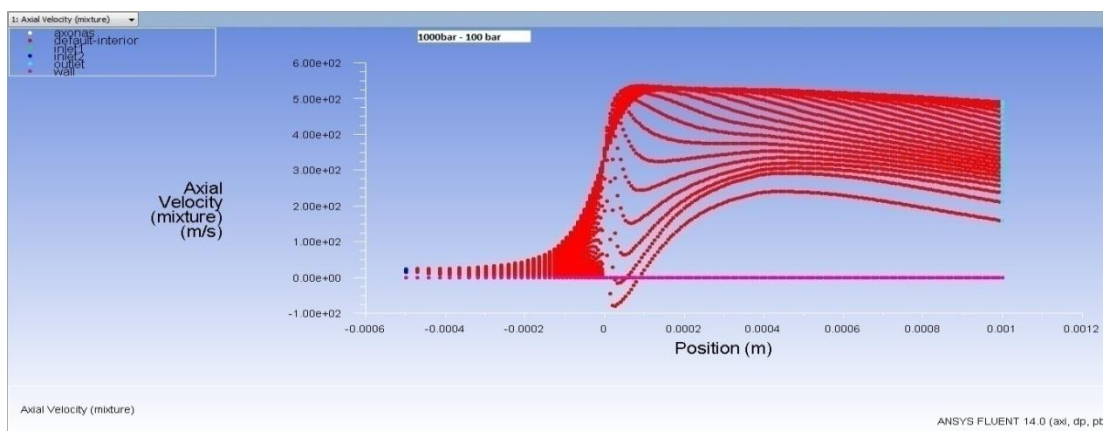
### 5.3.4 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας με πίεση εξόδου 100 bar



Σχήμα 5.62 Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 100bar



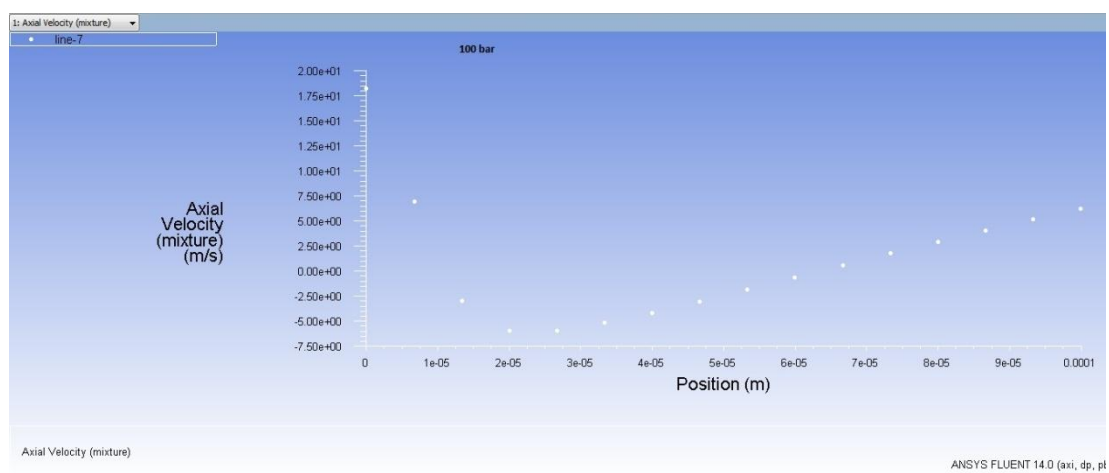
Σχήμα 5.63 Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 100bar



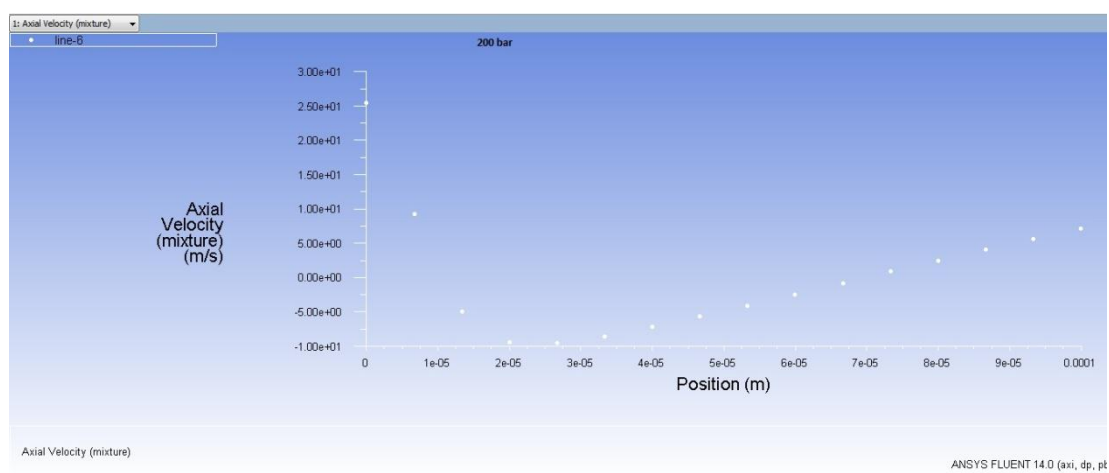
Σχήμα 5.64 Γράφημα κατανομής αξονικής ταχύτητας για πίεση εισόδου 1000bar και πίεση εξόδου 100bar

### 5.3.5 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 100 έως 900bar και πίεση εξόδου 1bar

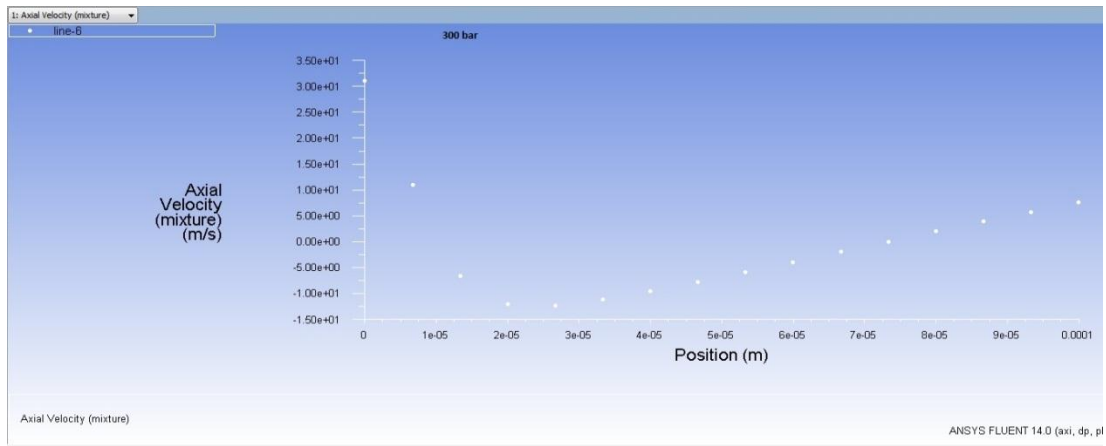
Στα σχήματα 5.65 έως 5.79 καταδεικνύεται η μεταβολή της αξονικής ταχύτητας για το υπολογιστικό κελί το πλησιέστερο στο τοίχωμα του ακροφυσίου. Η αρχή της αξονικής απόστασης λαμβάνεται ως η διατομή της στένωσης.



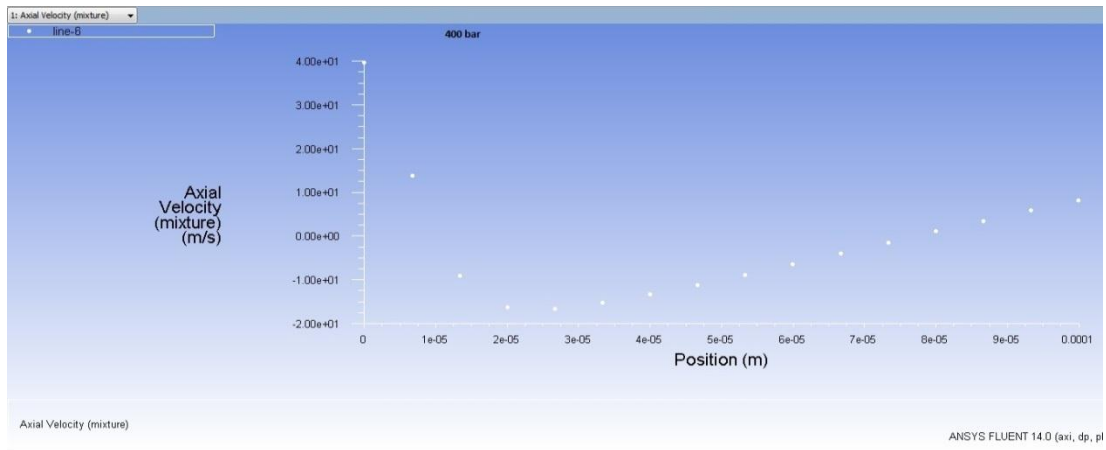
Σχήμα 5.65 Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar



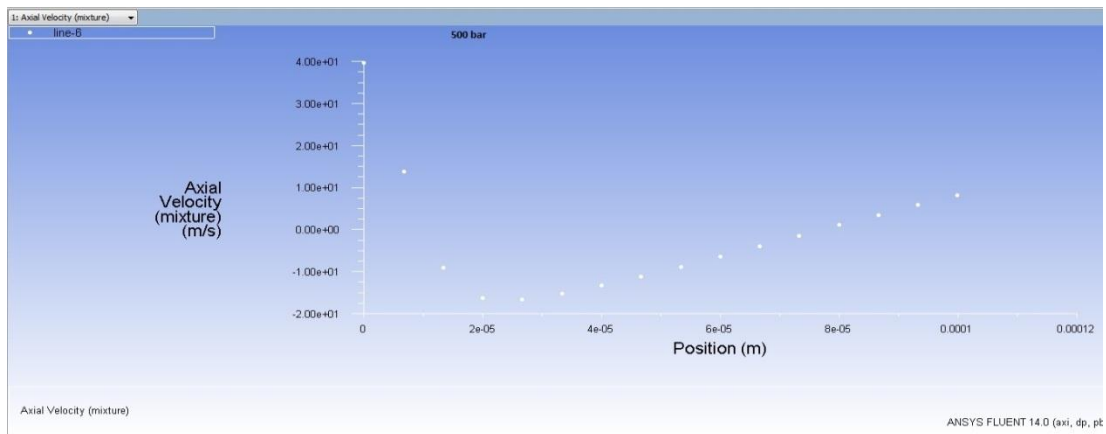
Σχήμα 5.66 Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 200bar και πίεση εξόδου 1bar



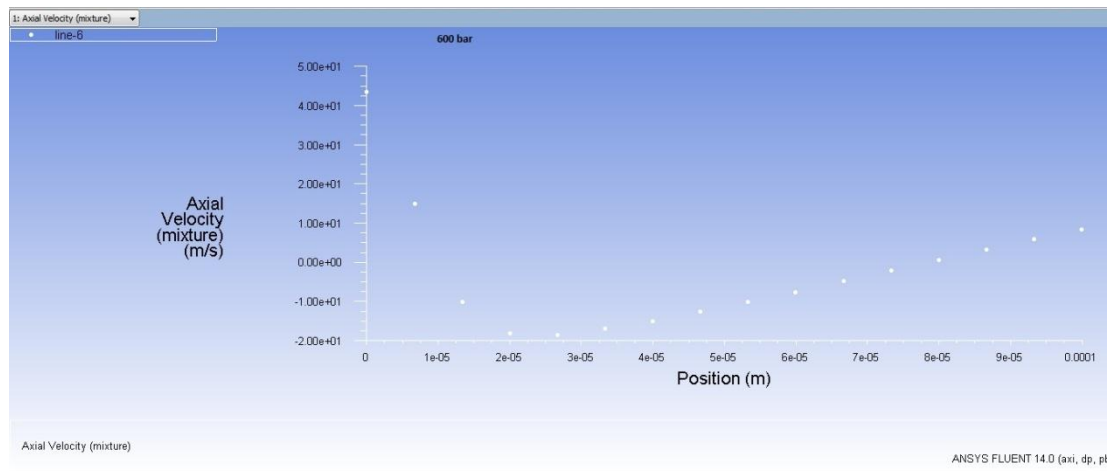
**Σχήμα 5.67** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 300bar και πίεση εξόδου 1bar



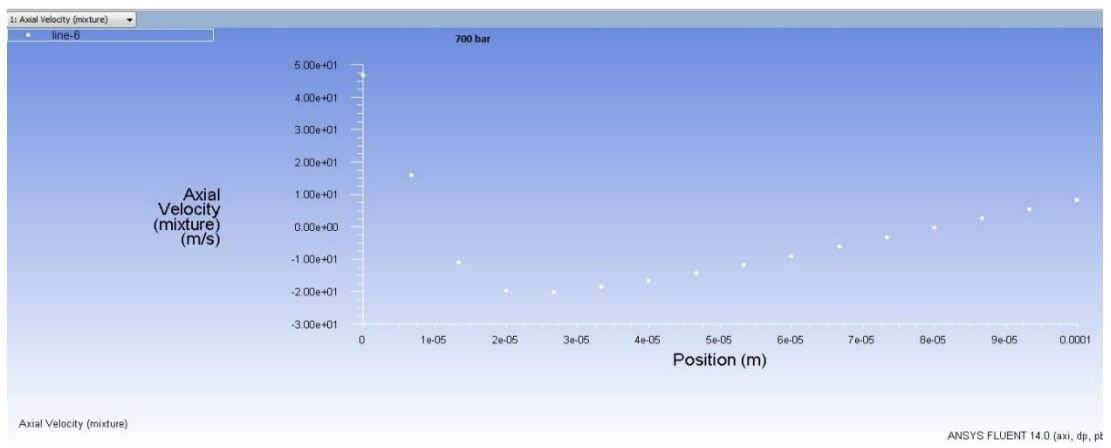
**Σχήμα 5.68** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 400bar και πίεση εξόδου 1bar



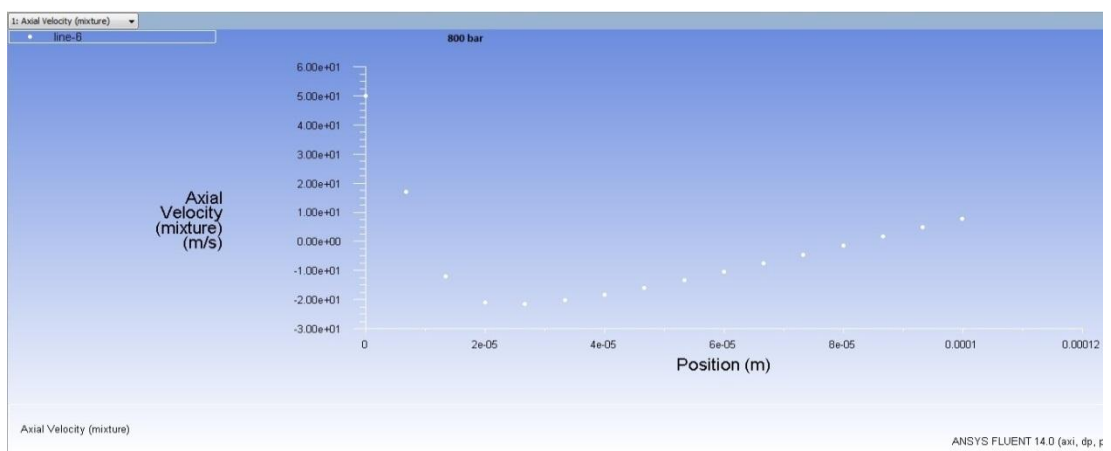
**Σχήμα 5.69** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 500bar και πίεση εξόδου 1bar



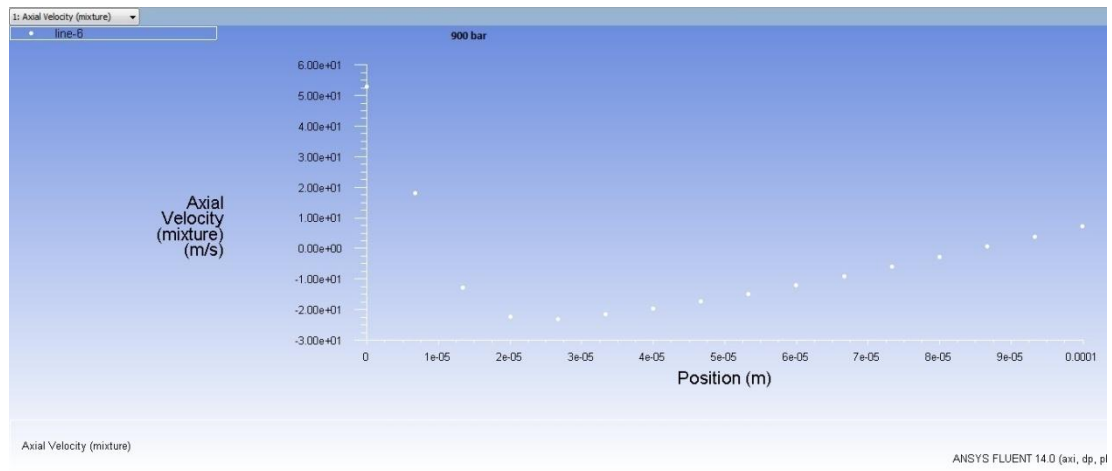
**Σχήμα 5.70** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 600bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.71** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 700bar και πίεση εξόδου 1bar

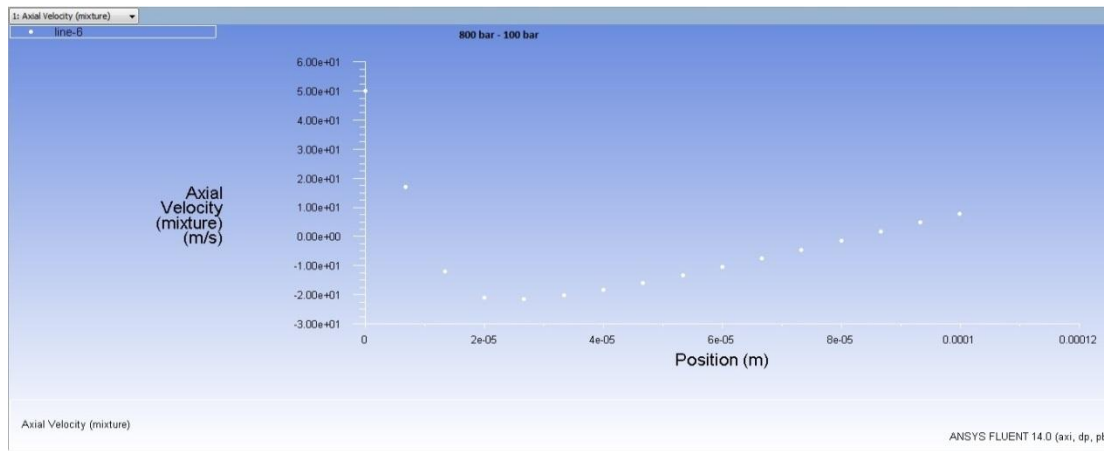


**Σχήμα 5.72** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 1bar

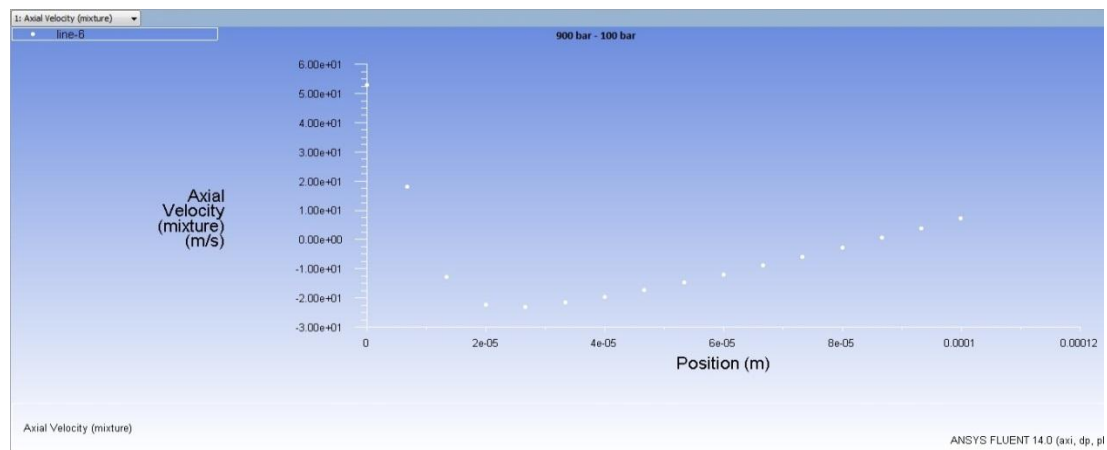


**Σχήμα 5.73** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 1bar

### 5.3.6 Διαγράμματα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο με πίεση εξόδου 100bar

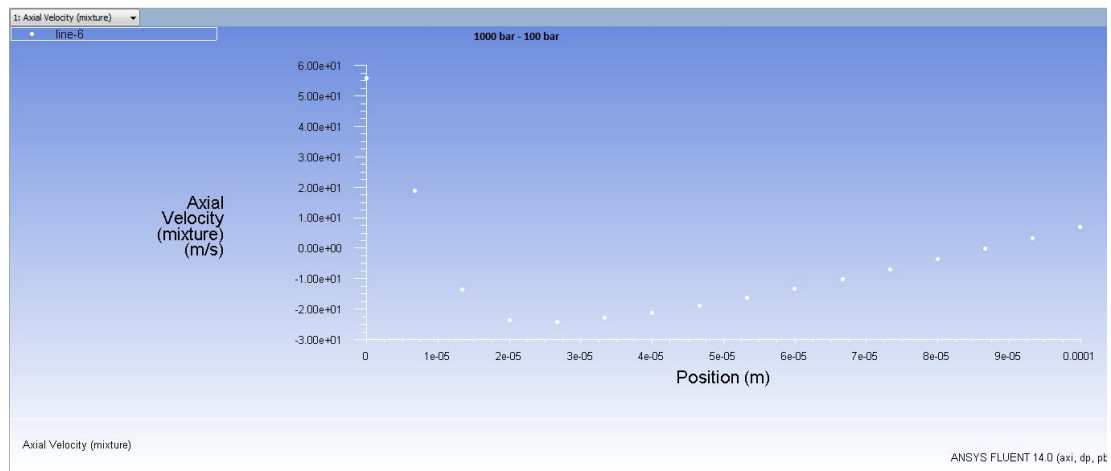


Σχήμα 5.74 Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 100bar



Σχήμα 5.75 Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 100bar

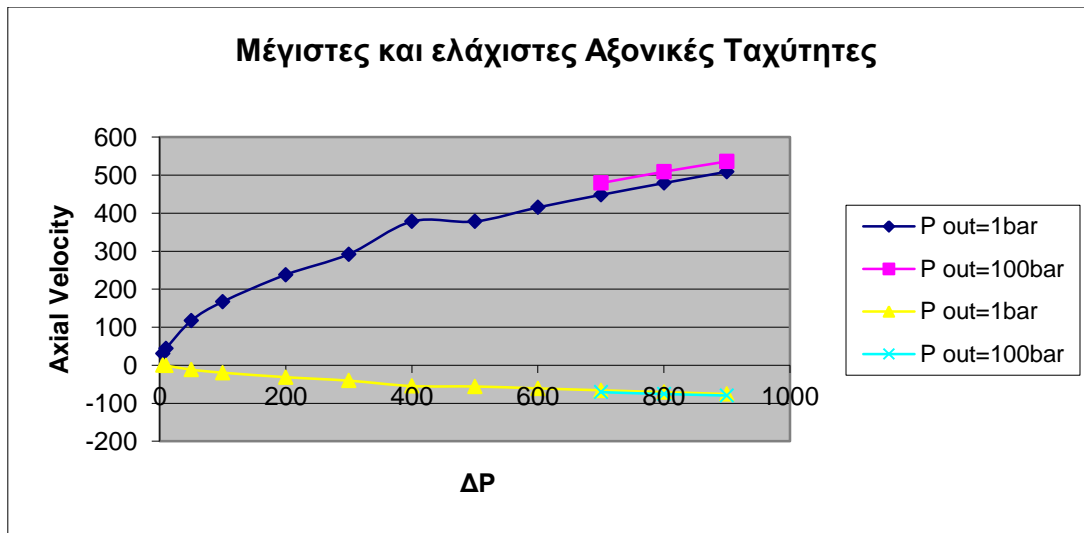




**Σχήμα 5.76** Διάγραμμα κατανομής αξονικής ταχύτητας στο στόμιο για πίεση εισόδου 1000bar και πίεση εξόδου 100bar

Πίεση εισαγωγής	Μέγιστη Αξονική Ταχύτητα	Μέγιστη Αρνητική Αξονική Ταχύτητα
5	30,3	-0,0239
10	43,7	-0,935
50	117	-11,7
100	167	-19,7
200	238	-31,5
300	292	-40,6
400	378	-54,8
500	378	-55,9
600	415	-61
700	448	-66
800	479	-70,8
900	509	-75,7
700	479	-70,9
800	509	-75,8
900	536	-79,7

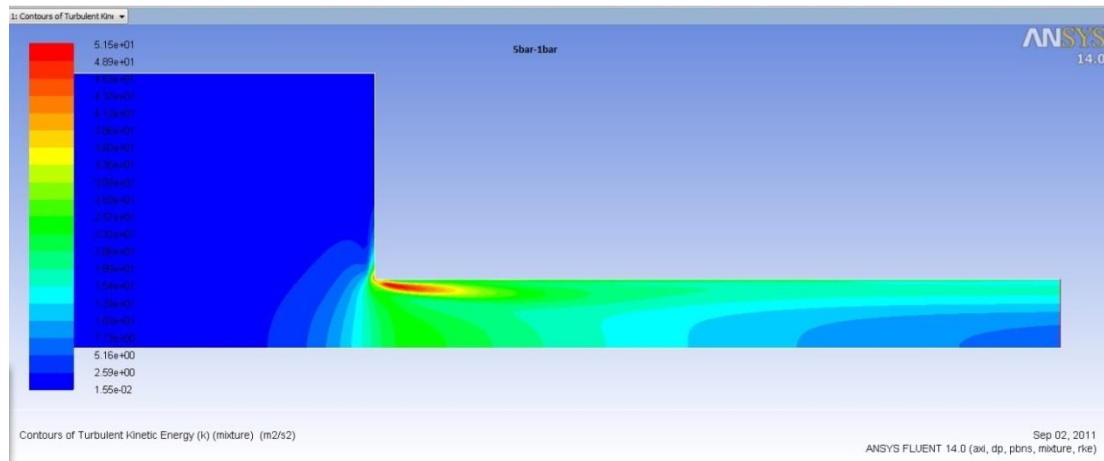
**Σχήμα 5.77** Πίνακας τιμών πίεσης εισαγωγής, μέγιστης αξονικής και αρνητικής αξονικής ταχύτητας. Οι πρώτες δώδεκα γραμμές αντιστοιχούν σε πίεση εξόδου 1 bar. Οι τελευταίες τρεις γραμμές αντιστοιχούν σε πίεση εξόδου 100 bar. Η πίεση είναι σε bar και η ταχύτητα σε m/s.



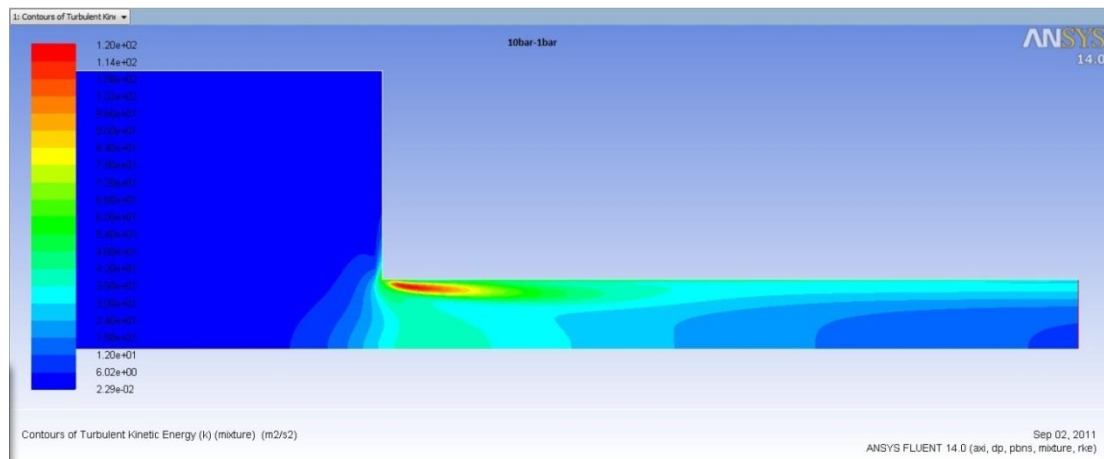
**Σχήμα 5.78** Διαγραμματική απεικόνιση μέγιστων και ελάχιστων αξονικών ταχυτήτων συναρτήσεως του  $\Delta P$ . Η πίεση είναι σε bar και η ταχύτητα σε m/s.

Παρατηρώντας τόσο τα γραφήματα όσο και τα διαγράμματα της αξονικής ταχύτητας του ρευστού, διακρίνεται η δημιουργία μίας ζώνης επανακυκλοφορίας του ρευστού στην αρχή της στένωσης του ακροφυσίου. Εκεί ακριβώς δηλαδή που παρατηρείται και το φαινόμενο της σπηλαίωσης. Για τον λόγο αυτόν παρουσιάστηκαν διαγραμματικά οι αξονικές ταχύτητες του ρευστού ακριβώς δίπλα από το τοίχωμα (σε ελαχιστη απόσταση) ώστε να εκτιμηθεί με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια η έκταση της ζώνης αυτής. Ετσι, προκύπτει ότι η ζώνη επανακυκλοφορίας αυτή αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον για διαφορά πιέσεων από  $\Delta P=100$  bar, ξεκινώντας σε απόσταση 0.01 mm από την αρχή της στένωσης και εκτείνεται μέχρι και 0.06 mm επίσης από την αρχή της στένωσης. Όσο αυξάνεται η διαφορά πίεσης  $\Delta P$ , αυξάνει η ένταση των αρνητικών αξονικών ταχυτήτων αλλά και η έκταση της περιοχής ανακυκλοφορίας, όπως προκύπτει από τα διαγράμματα. Για  $\Delta P=900$  bar, η ζώνη ανακυκλοφορίας εκτείνεται έως και 0.095 mm. Επιπλέον, στη δεύτερη σειρά αριθμητικών πειραμάτων, με πίεση εξόδου 100 bar, παρατηρείται μια ελαφρά μείωση της έκτασης της ζώνης ανακυκλοφορίας σε σχέση με τα αντίστοιχα πειράματα για όμοια  $\Delta P$ , αλλά με πίεση εξόδου 1 bar. Η εξάρτηση των μέγιστων αξονικών ταχυτήτων, θετικών και αρνητικών, του ρευστού μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή από τα σχήματα 5.77 και 5.78.

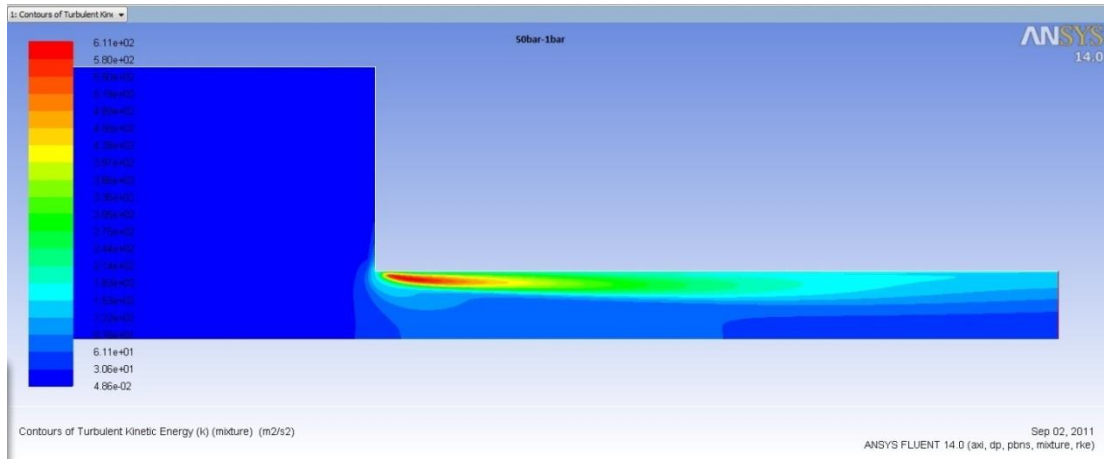
#### 5.4.1 Γραφήματα απεικόνισης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900bar και πίεση εξόδου 1 bar



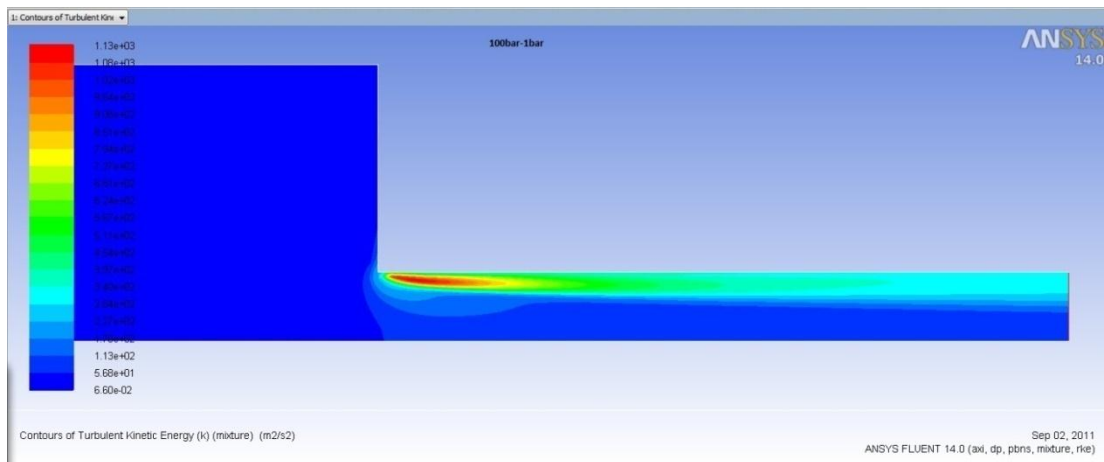
Σχήμα 5.79 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 5 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



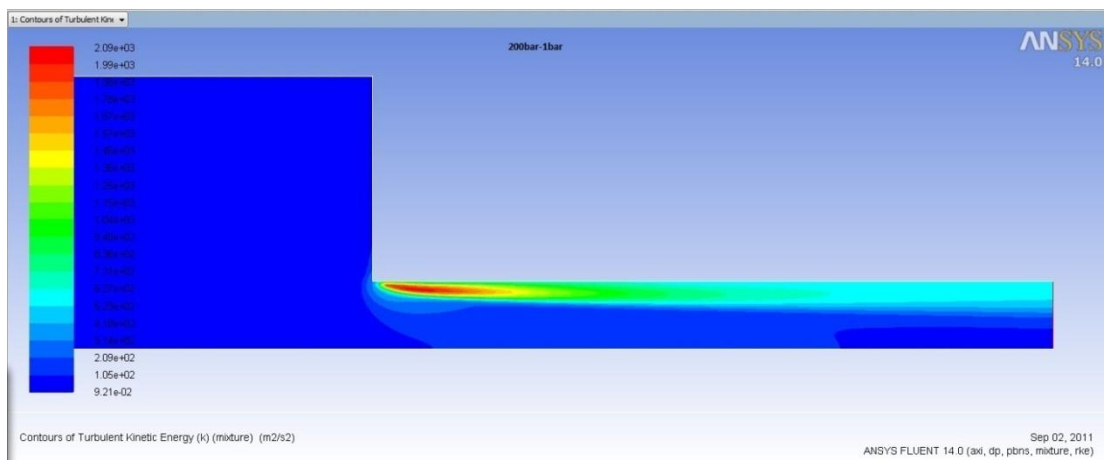
Σχήμα 5.80 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 10 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



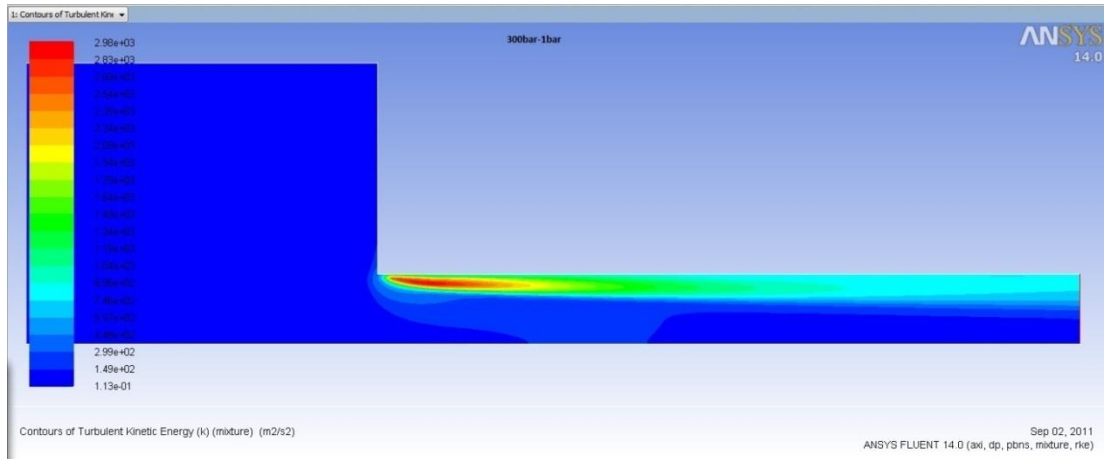
**Σχήμα 5.81** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 50 bar και πίεση εξόδου 1bar.



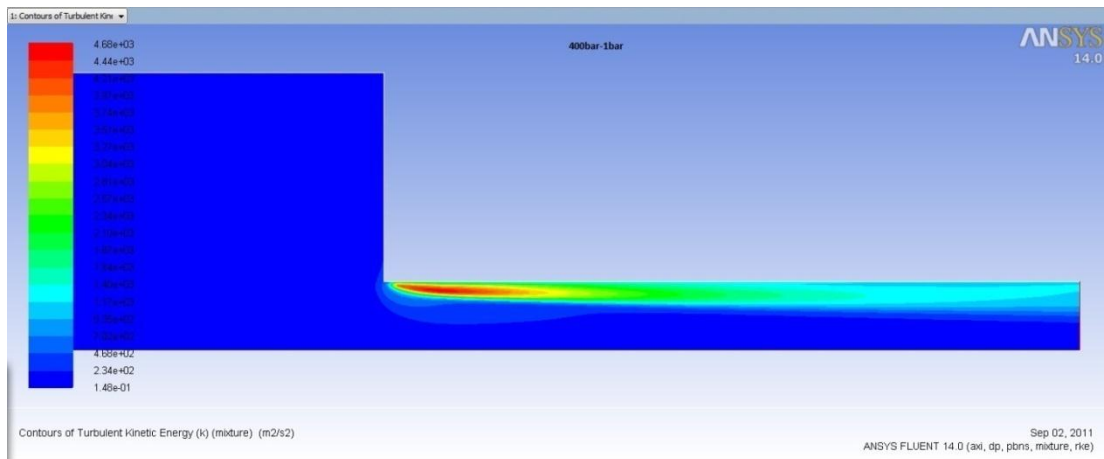
**Σχήμα 5.82** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 100 bar και πίεση εξόδου 1bar.



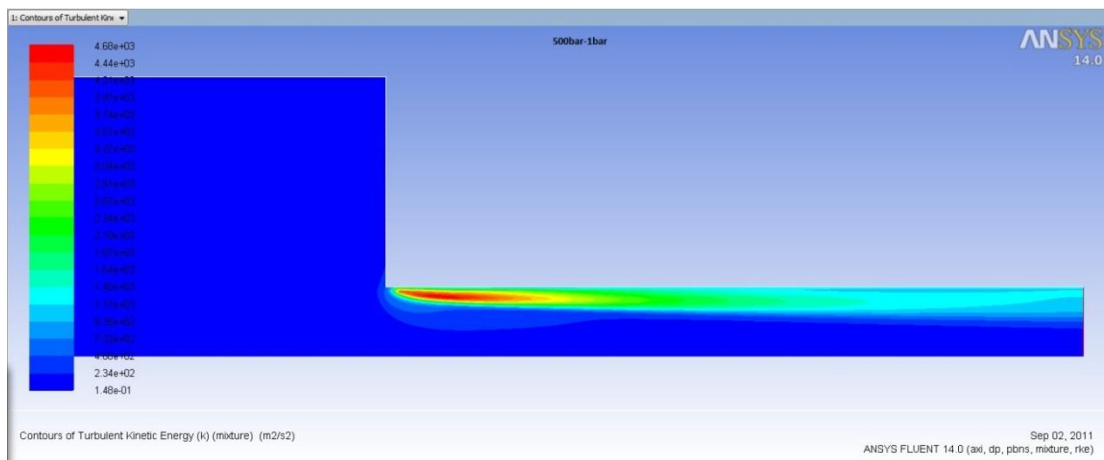
**Σχήμα 5.83** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 200 bar και πίεση εξόδου 1bar.



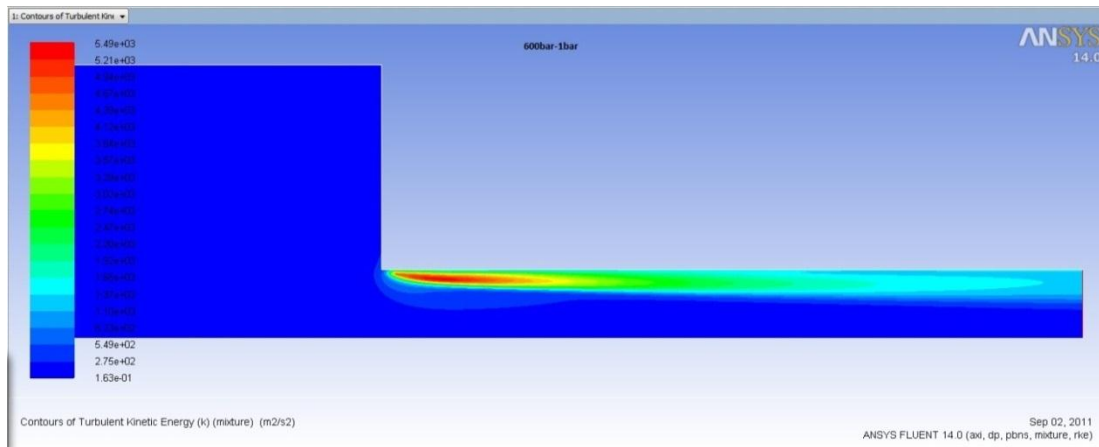
Σχήμα 5.84 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 300 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



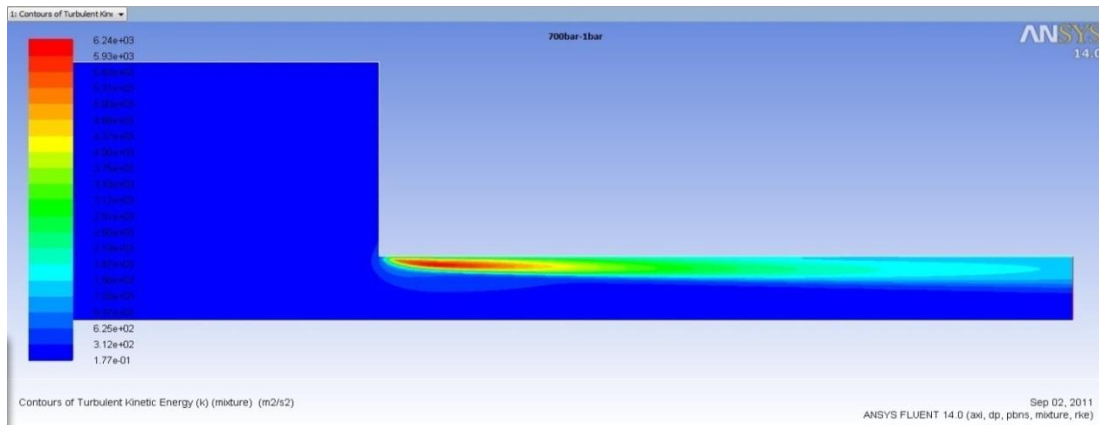
Σχήμα 5.85 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 400 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



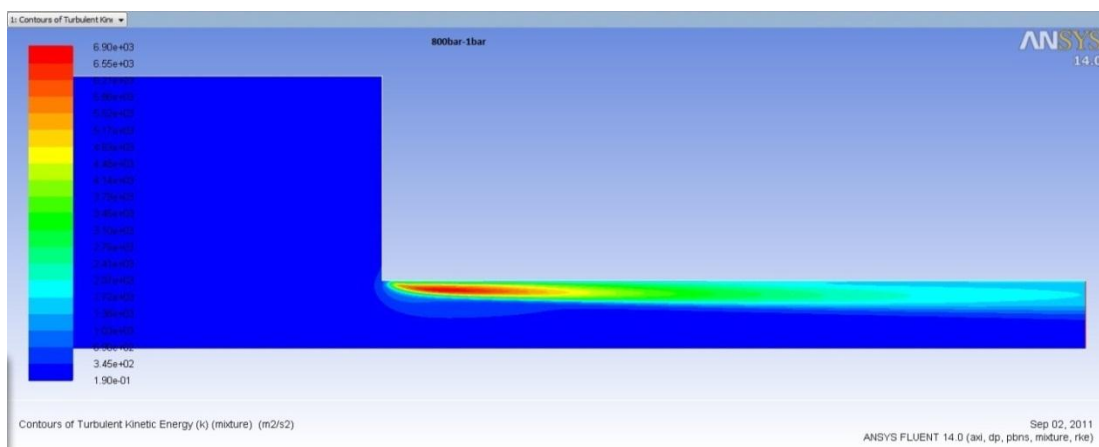
Σχήμα 5.86 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 500 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



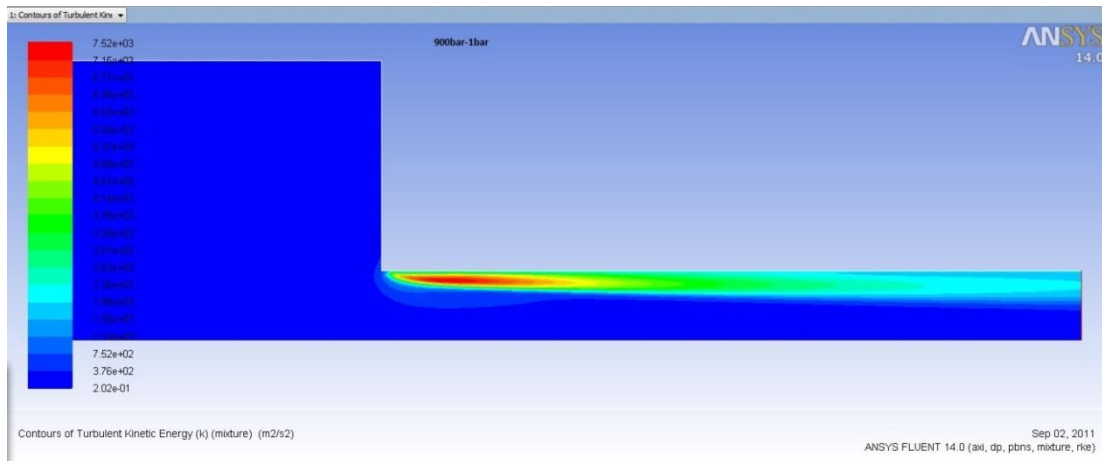
**Σχήμα 5.87** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 600 bar και πίεση εξόδου 1 bar.



**Σχήμα 5.88** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 700 bar και πίεση εξόδου 1 bar.

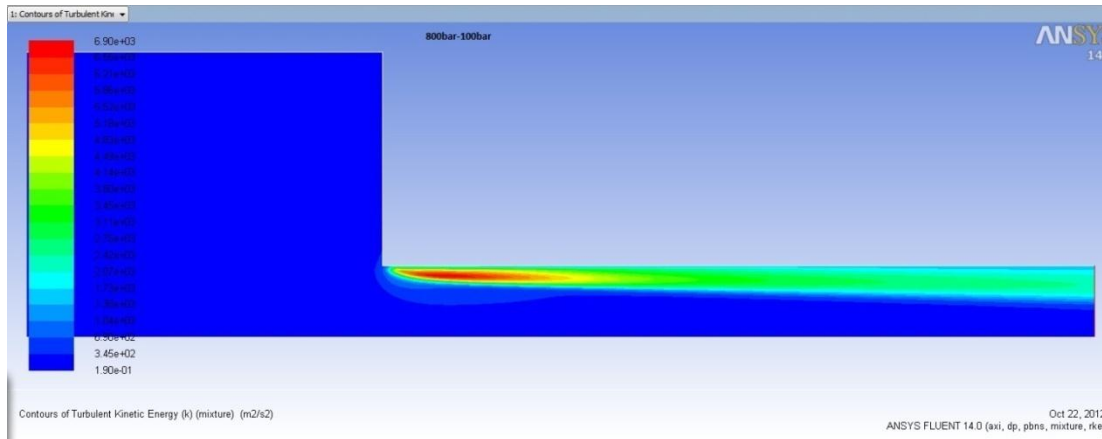


**Σχήμα 5.89** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 800 bar και πίεση εξόδου 1 bar.

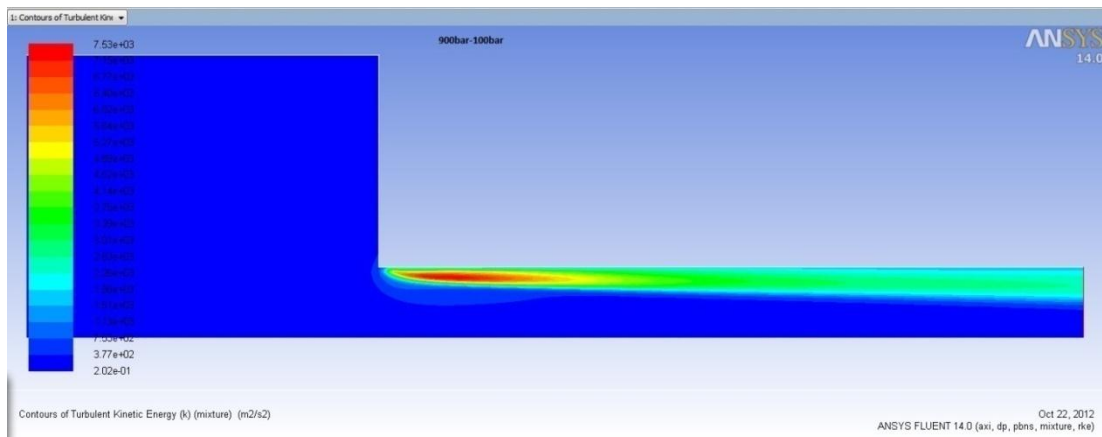


**Σχήμα 5.90** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 900 bar και πίεση εξόδου 1 bar.

### 5.4.2 Γραφήματα απεικόνισης τυρβώδους κινητικής ενέργειας, με πίεση εξόδου 100 bar

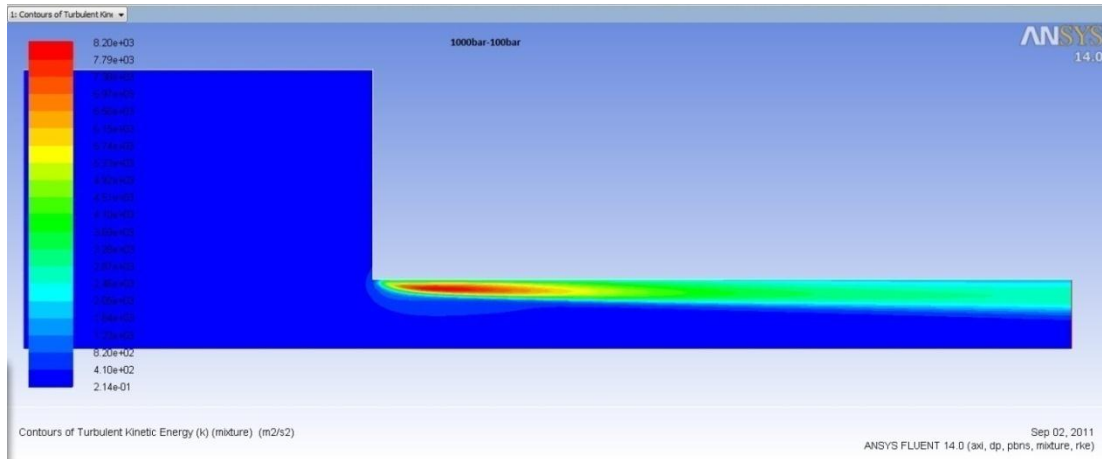


Σχήμα 5.91 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 800 bar και πίεση εξόδου 100 bar.



Σχήμα 5.92 Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας για πίεση εισόδου 900 bar και πίεση εξόδου 100 bar.



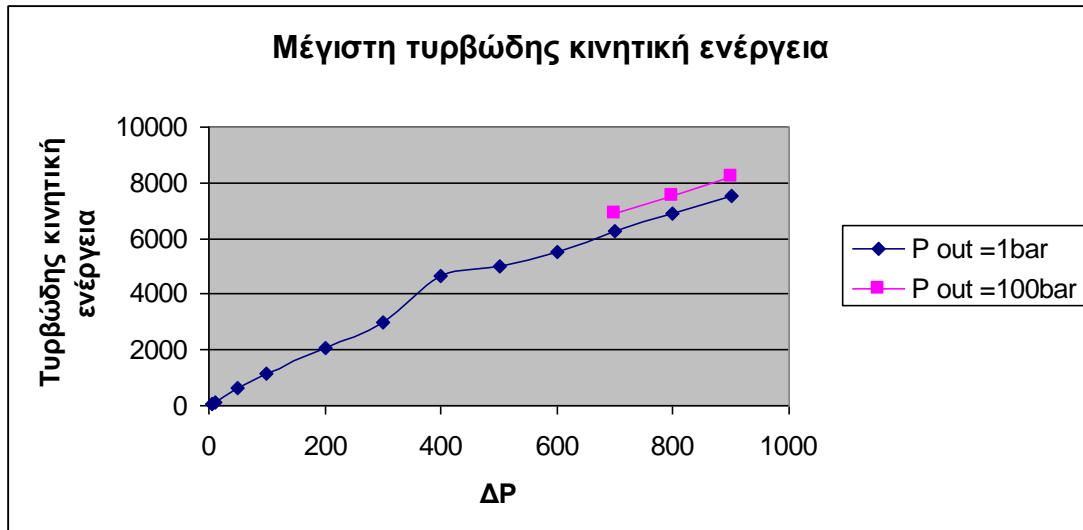


**Σχήμα 5.93** Γράφημα τυρβώδους κινητικής ενέργειας ( $m^2/s^2$ ) για πίεση εισόδου 900 bar και πίεση εξόδου 100 bar.

Πίεση εισαγωγής Μέγιστη τυρβώδης κινητική ενέργεια	
5	51,5
10	120
50	611
100	1130
200	2090
300	2980
400	4680
500	5004
600	5490
700	6240
800	6900
900	7520
700	6900
800	7530
900	8200

**Σχήμα 5.94** Πίνακας τιμών πίεσης εισαγωγής και μέγιστης τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Η πίεση είναι σε bar και η τυρβώδης κινητική ενέργεια σε

$$m^2/s^2.$$

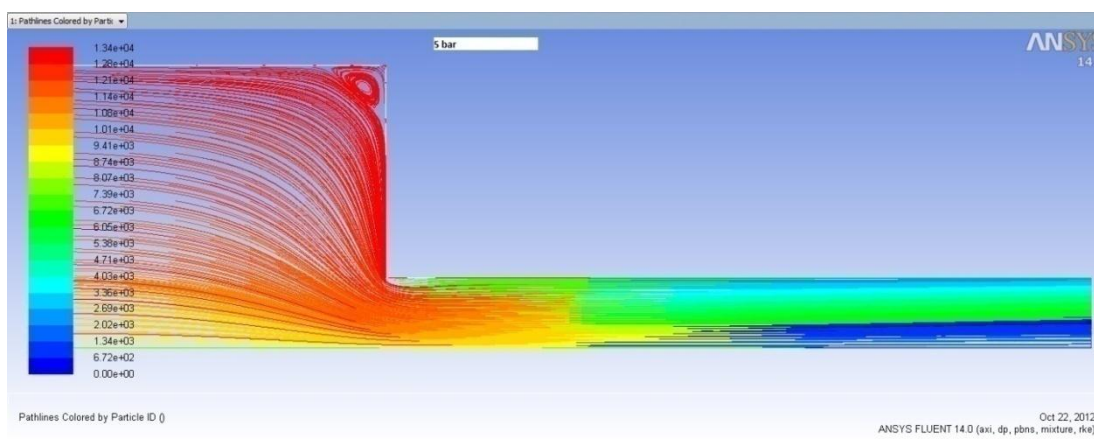


**Σχήμα 5.95** Διαγραμματική απεικόνιση τυρβώδους κινητικής ενέργειας –  $\Delta P$  . Οι μονάδες της πίεσης σε bar και της τυρβώδους κινητικής ενέργειας σε  $m^2/s.^2$

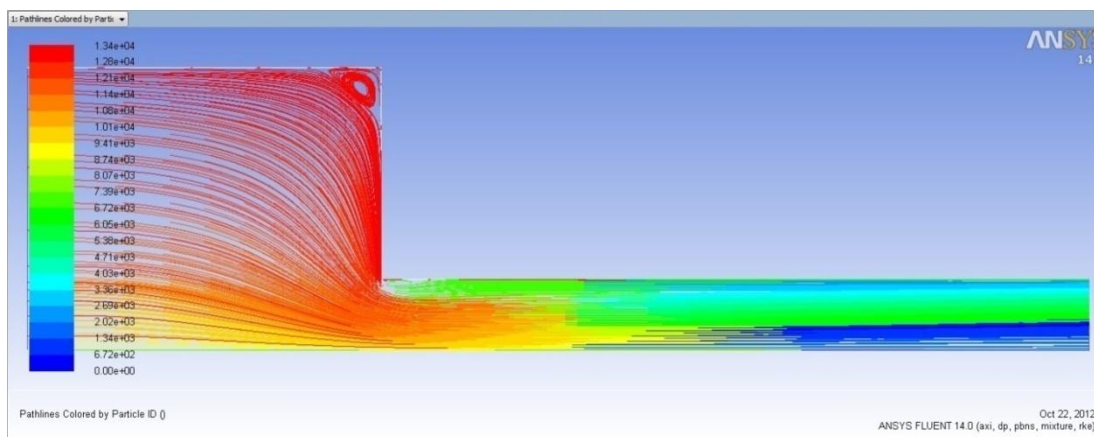
Στα σχήματα 5.94 και 5.95 παρατέθηκαν τα γραφήματα της μέγιστης τυρβώδους κινητικής ενέργειας, και για τις δύο σειρές πειραμάτων. Τόσο από το Σχήμα 5.94, όσο και από το διάγραμμα του σχήματος 5.95, διακρίνεται η εξάρτηση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας από τις απόλυτες συνοριακές συνθήκες, καθώς για ίδια διαφορά πίεσης  $\Delta P$ , σε μεγαλύτερες πιέσεις εισόδου-εξόδου προέκυψαν μεγαλύτερες τιμές τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

### 5.5.1 Γραφήματα απεικόνισης της κίνησης της ροής με χαρακτηριστικές τιμές πίεσης εισόδου από 5 έως 900 bar και πίεση εξόδου 1 bar

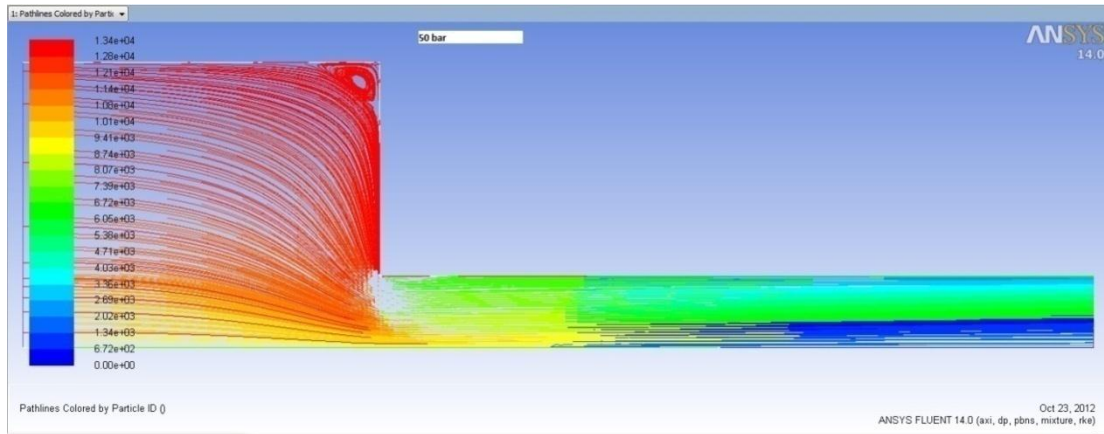
Για την περαιτέρω κατανόηση της ροής παρατίθενται τα παρακάτω διαγράμματα, στα οποία φαίνονται οι γραμμές ροής (path lines). Στην άνω γωνία πριν τη στένωση, παρατηρείται μια ζώνη ανακυκλοφορίας, το μέγεθος της οποίας αυξάνεται με την αύξηση της πίεσης εισόδου.



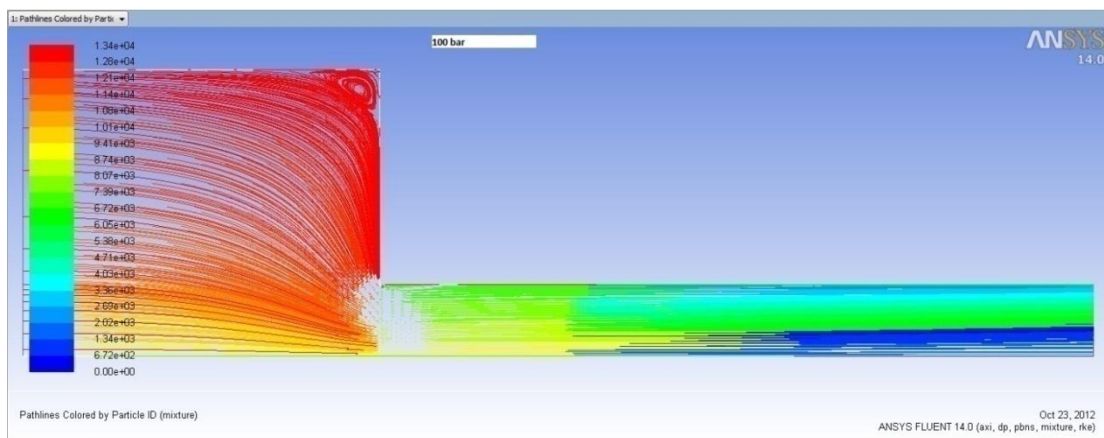
**Σχήμα 5.96** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 5bar και πίεση εξόδου 1bar.



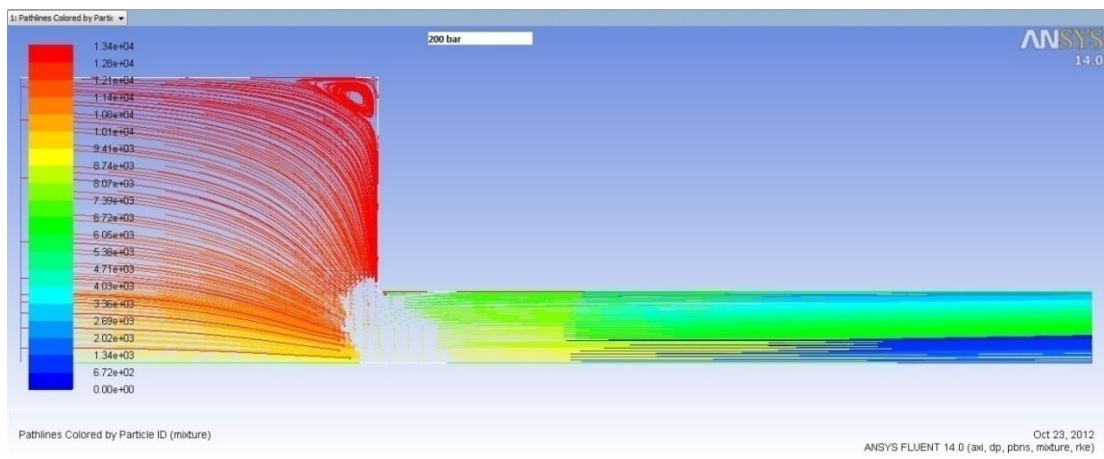
**Σχήμα 5.97** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar.



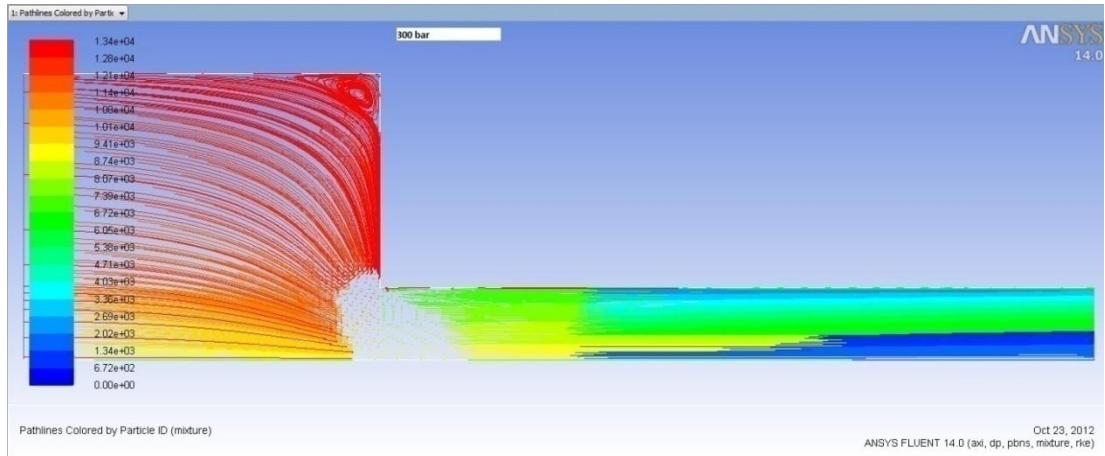
**Σχήμα 5.98** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 50bar και πίεση εξόδου 1bar



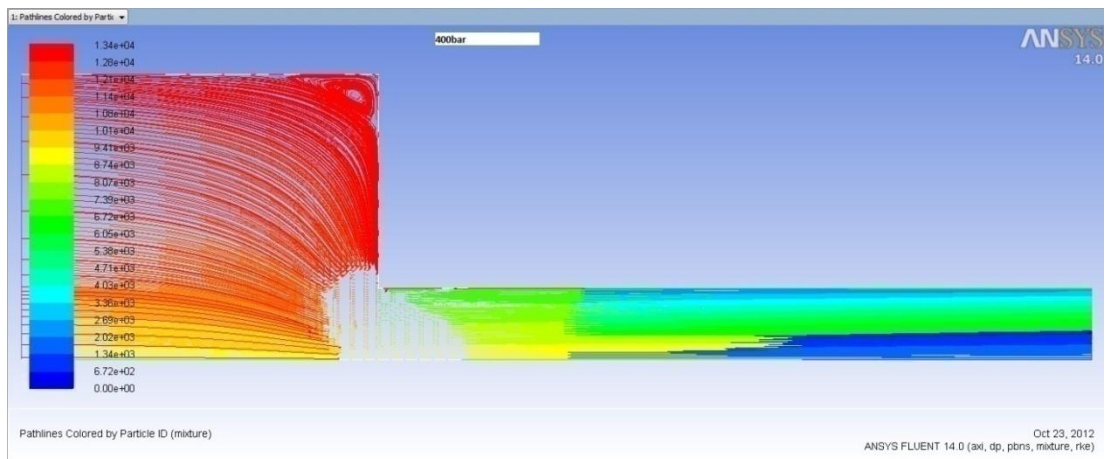
**Σχήμα 5.99** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 100bar και πίεση εξόδου 1bar



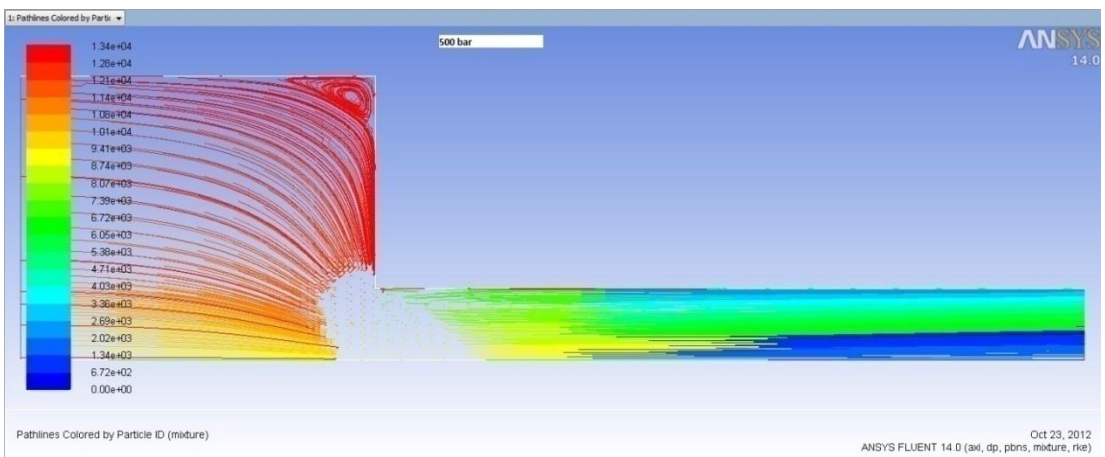
**Σχήμα 5.100** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 200bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.101** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 300bar και πίεση εξόδου 1bar

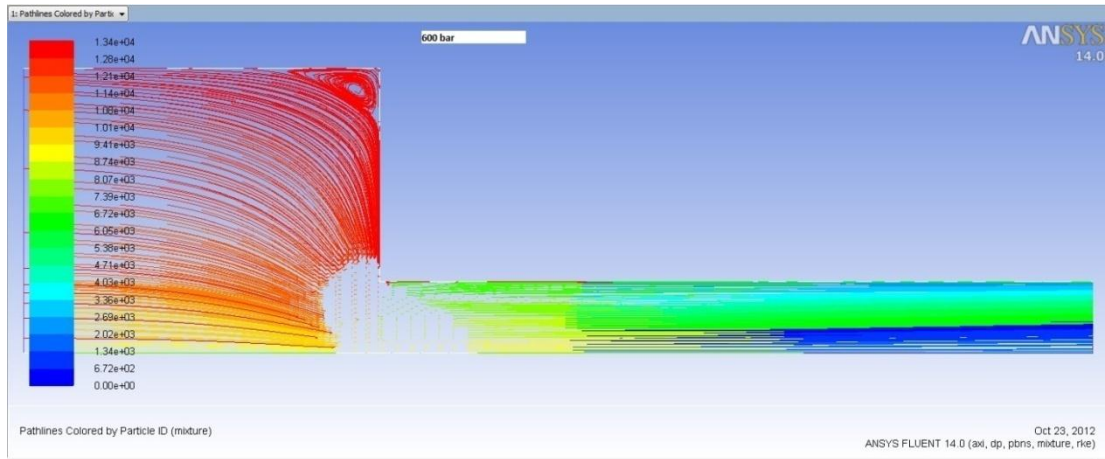


**Σχήμα 5.102** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 400bar και πίεση εξόδου 1bar

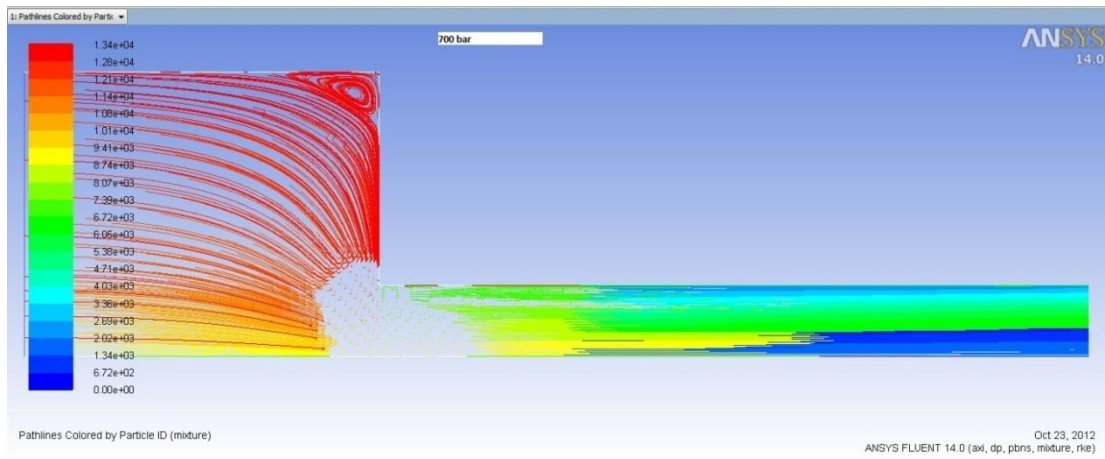


**Σχήμα 5.103** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 500bar και πίεση εξόδου 1bar

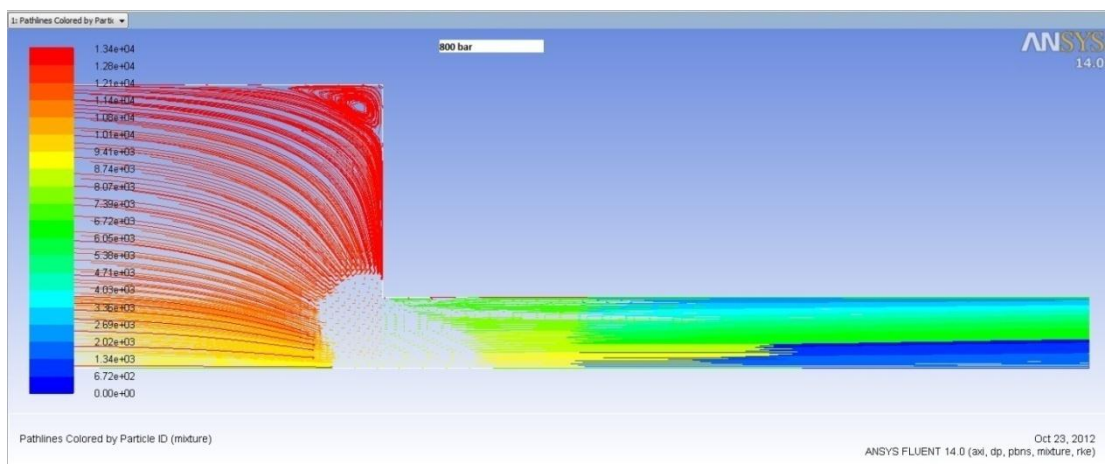




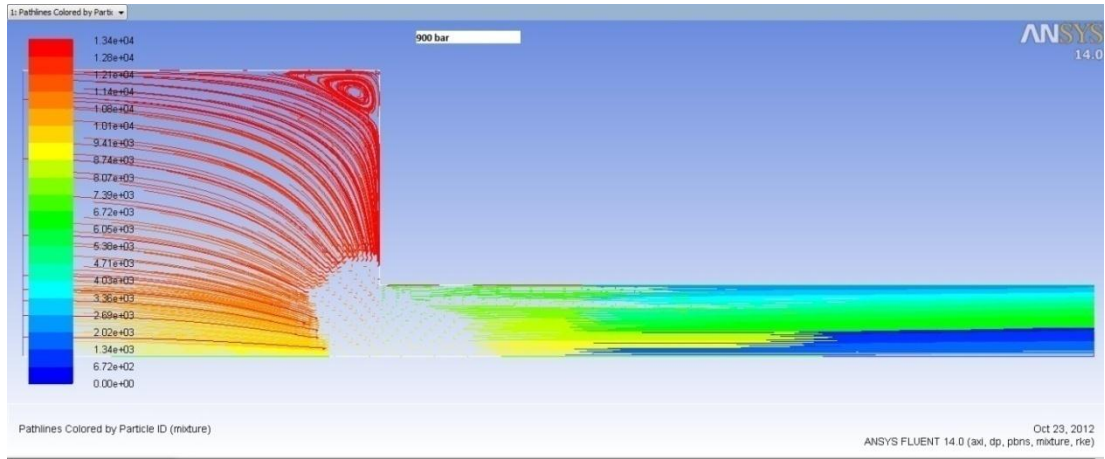
**Σχήμα 5.104** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 600bar και πίεση εξόδου 1bar



**Σχήμα 5.105** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 700bar και πίεση εξόδου 1bar

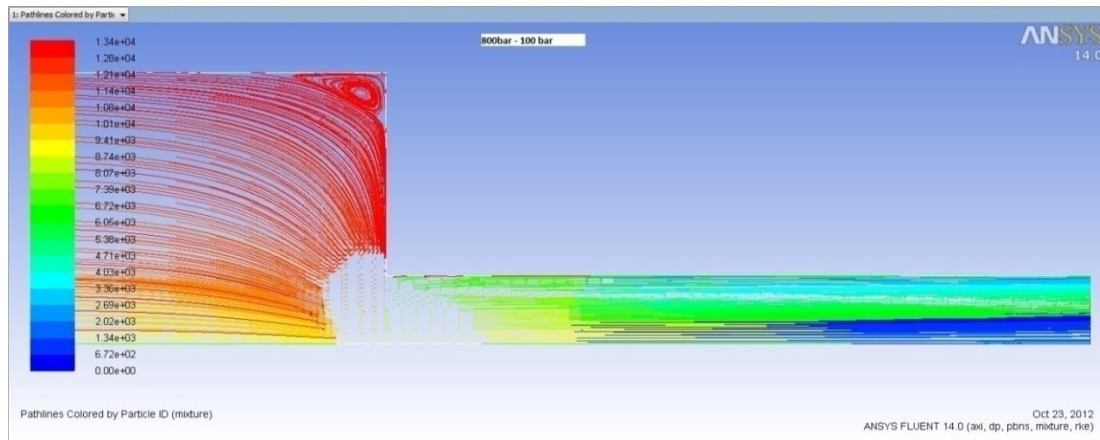


**Σχήμα 5.106** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 1bar

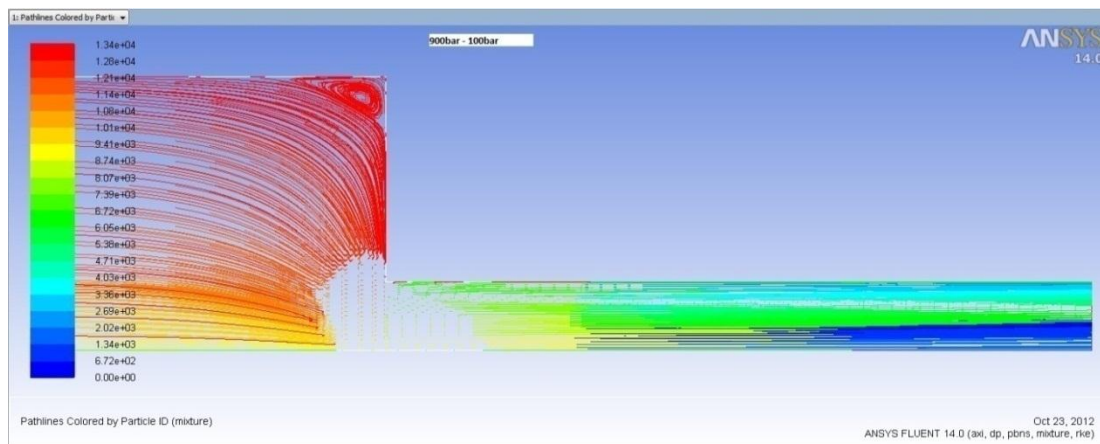


**Σχήμα 5.107** Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 1bar

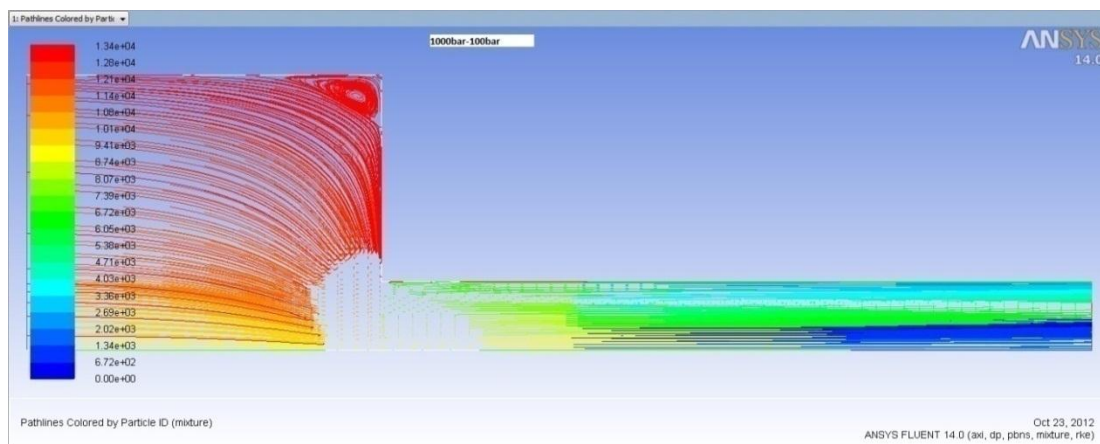
## 5.5.2 Γραφήματα απεικόνισης τυρβώδους κινητικής ενέργειας, με πίεση εξόδου 100 bar



Σχήμα 5.108 Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 800bar και πίεση εξόδου 100bar



Σχήμα 5.109 Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 900bar και πίεση εξόδου 100bar



Σχήμα 5.110 Γραμμές ροής για πίεση εισόδου 1000bar και πίεση εξόδου 100bar

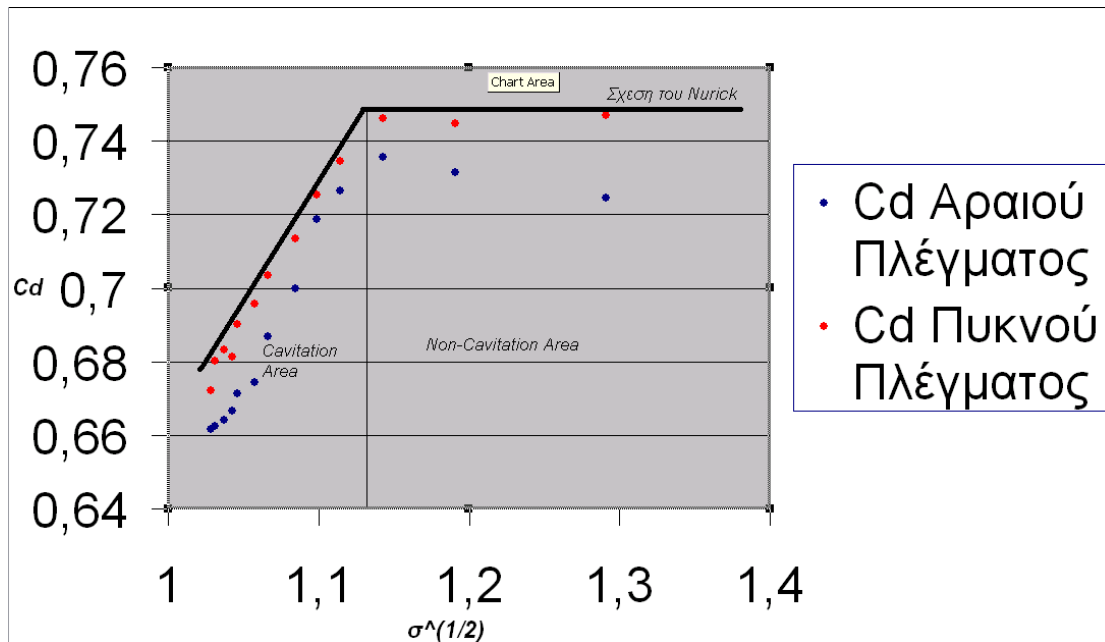


### 5.5.6 Αδιαστατοποίηση των αποτελεσμάτων

Pi	Po	Pmin	Mth	Mexp	$\sigma$	Cd	Cd Nurick	$\sigma^{(1/2)}$
500000	100000	25700	0.0007588	0.0004794	1.66666	0.724569	0.746971	1.290991867
1000000	100000	170	0.0011382	0.0007272	1.417564	0.73154	0.7447853	1.190614967
5000000	100000	170	0.0026559	0.0017828	1.3056971	0.735746	0.746237	1.142671038
10000000	100000	170	0.0037751	0.0024962	1.2415943	0.726479	0.73459	1.114268504
20000000	100000	170	0.0053522	0.0035025	1.2071364	0.7187	0.72543	1.098697593
30000000	100000	170	0.0065606	0.00427	1.176413	0.6999123	0.7134729	1.084625742
40000000	100000	170	0.0075787	0.0049169	1.1364783	0.686781	0.7035493	1.066057362
50000000	100000	170	0.0084753	0.0054864	1.1176931	0.674318	0.695701	1.057210055
60000000	100000	170	0.0092858	0.006001	1.0943671	0.6714369	0.690214	1.046120022
70000000	100000	170	0.010031	0.0064711	1.086931	0.6666613	0.68123	1.04255983
80000000	100000	170	0.0107246	0.006908	1.075319	0.664197	0.6831479	1.036975892
90000000	100000	170	0.0113759	0.0073176	1.0638167	0.662431	0.680167	1.031414902
100000000	100000	170	0.0119919	0.0077063	1.0571397	0.6616429	0.672273	0.035968617

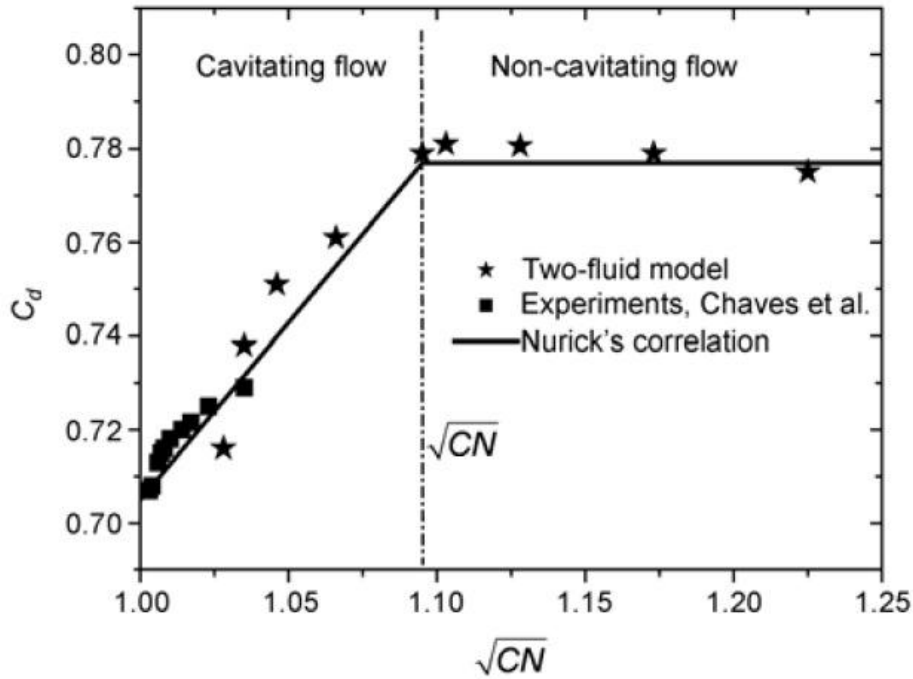
**Σχήμα 5.111** Πίνακας τιμών των μεγεθών Cd, Cd Nurick, Pi, Po, Pmin, Mth και Mexp Η πίεση είναι σε Pa, η παροχή μάζας σε kg/s.

Στο σχήμα 5.111 παρουσιάζονται πινακοποιημένα τα αποτελέσματα για τον συντελεστή παροχής Cd συναρτήσει της πίεσης εισόδου. Pi είναι η πίεση εισόδου, Po η πίεση εξόδου, Pmin η υπολογισθείσα ελάχιστη πίεση. Mth και Mexp η θεωρητική και πειραματική παροχή μάζας, αντίστοιχα, ενώ, Cd είναι ο συντελεστής παροχής. Εάν  $\sigma$  είναι ο αριθμός σπηλαίωσης, ο συντελεστής παροχής του Nurick είναι  $Cd=Cc*\sigma^{(1/2)}$ , όπου Cc ο συντελεστής στένωσης (contraction coefficient).



**Σχήμα 5.112** Διαγραμματική απεικόνιση του συντελεστή παροχής συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας αριθμού σπηλαίωσης.

Μέσω του Σχήματος 5.112 γίνεται σύγκριση των τιμών του συντελεστή παροχής  $C_d$  συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας αριθμού σπηλαίωσης, όπως προέκυψαν από τους παρόντες υπολογισμούς, για χρήση του μοντέλου K-ε, και του συντελεστή παροχής από τη σχέση του Nurick. Η απόκλιση είναι αρκετά μικρή, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι το μοντέλο K-ε προσομοιώνει με ακρίβεια ροές με σπηλαίωση σε κυλινδρικό στόμιο. Επίσης, απεικονίζονται και τα αποτελέσματα των υπολογισμών με τη χρήση ενός πιο αραιού πλέγματος, τα οποία, όπως είναι εμφανές από το Σχήμα 5.112, απέχουν αρκετά από τα αποτελέσματα της σχέσης του Nurick.



**Σχήμα 5.113** Διαγραμματική απεικόνιση του συντελεστή παροχής συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας αριθμού σπηλαιώσης [17].

Το Σχήμα 5.113 είναι αποτέλεσμα της έρευνας των Wang & Su [17], οι οποίοι μελέτησαν την ίδια ακριβώς γεωμετρία, σε ίδιο εύρος πιέσεων με αυτό της παρούσας εργασίας. Η εν λόγω έρευνα περιελάμβανε σύγκριση θεωρητικών δεδομένων, υπολογιστικών δεδομένων αλλά και πειραματικών δεδομένων. Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Wang & Su (Σχήμα 5.113) καθώς και τα πειραματικά δεδομένα που παρατίθενται στο ίδιο σχήμα, επιβεβαιώνεται η ακρίβεια των υπολογισμών της παρούσας εργασίας.

Cd	Cd Nurick	σφάλμα Cd
0,724569	0,746971	3,00%
0,73154	0,744785	1,78%
0,735746	0,746237	1,41%
0,726479	0,73459	1,10%
0,7187	0,72543	0,93%
0,699912	0,713473	1,90%
0,686781	0,703549	2,38%
0,674318	0,695701	3,07%
0,671437	0,690214	2,72%
0,666661	0,68123	2,14%
0,664197	0,683148	2,77%
0,662431	0,680167	2,61%
0,661643	0,672273	1,58%

**Σχήμα 5.114** Πίνακας τιμών των Cd, Cd Nurick και του σχετικού σφάλματος.

Η ακρίβεια των παρόντων υπολογισμών επιβεβαιώνεται και από το ποσοστό σφάλματος του συντελεστή παροχής, Cd, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.114. Το σφάλμα κυμαίνεται από 0.9% έως και 3%. Ενα ποσοστό του σφάλματος οφείλεται στην μεταβλητή  $y^+$  που, παρόλη την πυκνότητα του πλέγματος, για ορισμένες πιέσεις λειτουργίας δεν ήταν η καταλληλότερη για την χρήση των συναρτήσεων τοιχώματος (wall functions) οι οποίες απαιτούν τιμές του  $y^+$  μεταξύ 30 και 300.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

### 6.1 Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη μελέτη της ροής καυσίμου diesel σε πρότυπη γεωμετρία εγχυτήρα, υπό συνθήκες αντίστοιχες κινητήρων Diesel. Στη παρούσα μελέτη, η γεωμετρία συνίσταται σε κυλινδρικό αγωγό με απότομη στένωση. Εδώ, η μοντελοποίηση βασίστηκε στη χρήση του κώδικα FLUENT του υπολογιστικού πακέτου ANSYS. Από την εμπειρία της παρούσας εργασίας, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για ένα εύχρηστο αλλά και με πολλές επιλογές λογισμικό, με εκτενείς δυνατότητες προσομοίωσης ροών. Η πλούσια βάση δεδομένων του επιτρέπει την προσομοίωση ροών για μια πλειάδα ρευστών. Τέλος, η δυνατότητα προσομοίωσης διδιάστατης και αξονοσυμμετρικής ροής μπορεί να μειώσει τις απαιτήσεις υπολογιστικής ισχύος.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια με στόχο τη δημιουργία βέλτιστων πλεγμάτων για την προσομοίωση της ροής στην πρότυπη γεωμετρία εγχυτήρα, για ένα μεγάλο εύρος διαφορών πίεσης εισόδου – εξόδου. Εν προκειμένω, μία δυσκολία συνίσταται στην εξάρτηση από παραμέτρους όπως η μεταβλητή  $y^+$ , η οποία επηρεάζεται από τις συνθήκες εισόδου – εξόδου. Για πυκνά πλέγματα, διαπιστώθηκε πολύ καλή σύγκλιση των παρόντων αποτελεσμάτων με πειραματικά και πρόσφατα υπολογιστικά της βιβλιογραφίας [17].

Αναφορικά με το φαινόμενο της σπηλαίωσης, τα παρόντα αποτελέσματα κατέδειξαν την παρουσία μιας ζώνης εξατμισμένου καυσίμου στην περιοχή μετά τη στένωση, το μήκος της οποίας αυξάνεται (για σταθερή πίεση εξόδου) με την αύξηση της πίεσης εισόδου του ακροφυσίου. Μεταβάλλοντος την πίεση εξόδου, τα αποτελέσματα δεν διαφοροποιούνται σημαντικά για σταθερή συνολική διαφορά πίεσης στο ακροφύσιο. Σε όλες τις περιπτώσεις, η περιοχή του εξατμισμένου καυσίμου (χαμηλής πίεσης) είναι σε άμεση συσχέτιση με την παρουσία μιας ζώνης ανακυκλοφορίας του ρευστού.

Η αδιαστατοποίηση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από την παρούσα εργασία (συντελεστής παροχής συναρτήσεως του αριθμού σπηλαίωσης) είναι σε συμφωνία με τη σχέση του Nurick, επιβεβαιώνοντας και με τον τρόπο αυτόν την ακρίβεια των παρόντων υπολογισμών.

Τα υπολογιστικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία μπορούν να αποτελέσουν τη βάση για περαιτέρω έρευνα, με στόχο την προσομοίωση της ροής του καυσίμου και τη μελέτη του φαινομένου της σπηλαίωσης σε ρεαλιστικές γεωμετρίες εγχυτήρων.

## 6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Τα παρόντα υπολογιστικά αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την καταλληλότητα των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν για την προσομοίωση της ροής καυσίμου, με παρουσία σπηλαίωσης, σε πρότυπη γεωμετρία εγχυτήρα. Σε συνέχεια της παρούσας εργασίας, μπορεί να γίνει χρήση και άλλων μοντέλων, για παράδειγμα των μοντέλων τύρβης  $k-\omega$  και Spalart Allmaras, και η διερεύνηση της επίτευξης ακόμη καλύτερων υπολογιστικών αποτελεσμάτων, με βάση συγκρίσεις με πειραματικά δεδομένα. Στο πλαίσιο αυτό, μπορεί να επιχειρηθεί και μια συνολική βελτιστοποίηση των τιμών των σταθερών των μοντέλων, για προσομοίωση της ροής στην παρούσα πρότυπη γεωμετρία εγχυτήρα.

Με χρήση και περαιτέρω ανάπτυξη των υπολογιστικών μοντέλων της παρούσας εργασίας, και μετά τη διερεύνηση της χρήσης και άλλων φυσικών μοντέλων, όπως τα προαναφερθέντα μοντέλα τύρβης, η προσομοίωση φαινομένων σπηλαίωσης σε γεωμετρίες πραγματικών εγχυτήρων μπορεί να θεωρηθεί ως ένας ρεαλιστικός στόχος.

## Βιβλιογραφία

- [1] Μπεργελές, Γ., «Υπολογιστική Ρευστομηχανική», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2006
- [2] Τζαμπίρας Γ., Πολίτης Γ., «Αναλύσεις Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD)», ΕΜΠ 2006
- [3] Παπανίκας Δ. Γ., «Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2005
- [4] Καλλιντέρης Ι., «Βασική Ρευστό μηχανική», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2008
- [5] Μάργαρης Δ., «Πειραματική Ρευστοδυναμική – Αεροδυναμική», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2004
- [6] Παπανίκας Δ. Γ., «Ρευστοδυναμικές Μηχανές και Εγκαταστάσεις Τόμος Ι», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2007
- [7] Παπανίκας Δ. Γ., «Ρευστοδυναμικές Μηχανές και Εγκαταστάσεις Τόμος ΙΙ», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2007
- [8] Μάργαρης Δ., «Συστήματα Αιολικής Ενέργειας», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2008
- [9] Van Dyke M., «An Album of Fluid Motion», Cambridge University Press, 2003
- [10] Heywood, J.B, « Internal Combustion Engine Fundamentals», McGraw-Hill, 1988
- [11] Κυρτάτος Ν.Π., «Ναυτικοί Κινητήρες Diesel – Θέματα Σχεδίασης και Λειτουργίας», Εκδόσεις Συμμετρία, 1993
- [12] Πανίδης Θ., «Φαινόμενα Μεταφοράς Πανεπιστημιακές Σημειώσεις», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2008

- [13] Kaiktsis, L., «Numerical Simulation of Flow and Combustion in the RTA58T Engine of Wärtsilä NSD», Technical Report, 2001
- [14] Franc J.P., Michel J.M., «Fundamentals of Cavitation», Kluwer Academic Publishers, 2004
- [15] Palau-Salvador G., Gonzalez-Altozano P., Arviza-Valverde J., «Numerical Modeling of cavitating flows for simple geometries», Spanish Journal of Agricultural Research, 2007,5(4): 460 -469
- [16] Singhal A. K., Athavale M. M., Li H., Jiang Y., «Mathematical Basis and Validation of the Cavitation Model», CFD Research Corporation, 2002, 124: 617 - 624
- [17] Wang X. & Su W., «A numerical study of cavitating flows in high-pressure diesel injection nozzle holes using a two-fluid model», Chinese Science Bulletin, 2009, 54(10): 1665-1662
- [18] Fluent Inc., «FLUENT 14 Documentation», 2012
- [19] Fluent Inc., «GAMBIT 4.6 Documentation», 2006