ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΑΘΩΝ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ *(Έρευνα σε δείγμα πρωτοετών φοιτητών Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ 2011-2012)*

Φοιτήτρια: Κατσαμπίρη Θεοδώρα, Α.Μ.: 09103212

επιβλέπων καθηγητής: Ανάργυρος Φελλούρης, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

εξεταστική επιτροπή: 1) Σωτήριος Καρανάσιος, Καθηγητής ΕΜΠ

2) Παναγιώτης Ψαρράκος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα 2012

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΑΘΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΑΘΩΝ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ***(Έρευνα σε δείγμα πρωτοετών φοιτητών Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ 2011-2012)***

Φοιτήτρια: Κατσαμπίρη Θεοδώρα, Α.Μ.: 09103212

επιβλέπων καθηγητής: Ανάργυρος Φελλούρης, Αν.Καθηγητής ΕΜΠ

εξεταστική επιτροπή: : 1) Σωτήριος Καρανάσιος, Καθηγητής ΕΜΠ

2) Παναγιώτης Ψαρράκος, Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

Αφιερώνω αυτήν τη διπλωματική εργασία στην οικογένειά μου.

Ευχαριστώ θερμά για την ολοκλήρωση της την καθηγήτριά μου κ.Κάλλια Παυλοπούλου, καθώς και τον καθηγητή μου κ.Ανάργυρο Φελλούρη για την καθοδήγησή τους και την πολύτιμη βοήθειά τους καθ’ όλη την διάρκεια της δημιουργία της.

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία γράφτηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στην Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ. Κύριος στόχος μου ήταν η εμπλοκή μου με την έρευνα σε θέμα σχετικά με την διδασκαλία και την ανάλυση λαθών στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας σε φοιτητές του ΕΜΠ και η απόλαυση των πνευματικών ταξιδιών που θα γίνονταν με την βοήθεια των έμπειρων καθηγητών μου. Νομίζω πως ο στόχος επετεύχθη!

Ιδιαίτερα θερμές ευχαριστίες οφείλω στον Αναπληρωτή καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της σχολής μου κ. Ανάργυρο Φελλούρη, που ήταν και ο εισηγητής της εργασίας αυτής, για την συνεργασία που είχαμε, για το ενδιαφέρον με το οποίο παρακολούθησε την προετοιμασία της και την ενθάρρυνση και υποστήριξη που μου προσέφερε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την κ. Κάλλια Παυλοπούλου για την συμβολή της στην υλοποίηση της έρευνας και τις υποδείξεις της. Τέλος, θα πρέπει να ευχαριστήσω για την υποστήριξή του στην στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων και τις συμβουλές τους στην πραγματοποίηση της διπλωματικής μου εργασίας και τα αδέλφια μου Ιωάννη και Παναγιώτη Κατσαμπίρη αντίστοιχα.

Σε αυτήν την εργασία στοχεύουμε, όσο είναι δυνατόν στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας, στην ποιοτική και ποσοτική ανίχνευση και ανάλυση λαθών ή σφαλμάτων στην Γραμμική Άλγεβρα σε φοιτητές του ΕΜΠ και συγκεκριμένα στους Πολιτικούς Μηχανικούς. Τα κεφάλαια της Γραμμικής Άλγεβρας με τα οποία καταπιανόμαστε είναι τρία: 1) Διανυσματικοί (ή Γραμμικοί) Χώροι, 2) Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες, και 3) Χαρακτηριστικά Μεγέθη. Η έρευνα και η μελέτη των λαθών έγιναν πάνω σε τρία προβλήματα που αποτέλεσαν θέματα τελικών εξετάσεων στους Πολιτικούς Μηχανικούς του ΕΜΠ τον Φεβρουάριο του 2012. Το καθένα από αυτά τα προβλήματα 1, 2 και 3 στηρίζονται πάνω στην θεωρία των παραπάνω κεφαλαίων της Γραμμικής Άλγεβρας 1, 2 και 3 αντιστοίχως.

Πιο συγκεκριμένα, η εργασία αυτή απαρτίζεται από 4 κεφάλαια:

Το κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει την θεωρία των διανυσματικών χώρων, την διατύπωση και την λύση του προβλήματος 1 σε βήματα, την διερεύνηση των κατηγοριών και υποκατηγοριών των λαθών που παρατηρήθηκαν στο δείγμα των φοιτητών και την ποιοτική και ποσοτική ανάλυσή τους, καθώς και τα γενικά συμπεράσματα της ανάλυσης.

Το κεφάλαιο 2 περιλαμβάνει την θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων και των πινάκων, την διατύπωση του προβλήματος 2 και την λύση του σε βήματα, την ποιοτική και ποσοτική διερεύνηση των κατηγοριών και των υποκατηγοριών των λαθών που παρατηρήθηκαν στους φοιτητές και τα γενικά συμπεράσματα.

Το κεφάλαιο 3 περιλαμβάνει την θεωρία των χαρακτηριστικών μεγεθών, την διατύπωση του προβλήματος 3 και την λύση του σε βήματα, την ποιοτική και ποσοτική ανάλυση των λαθών , καθώς και τα γενικά συμπεράσματα της ανάλυσης.

Το κεφάλαιο 4 τέλος περιλαμβάνει τους λόγους εμφάνισης των λαθών ή σφαλμάτων στην Γραμμική Άλγεβρα. Αρχικά, αναλύεται η θέση της έννοιας του διανύσματος στο σχολείο, αναφέρονται σημαντικές έρευνες πάνω στα διανύσματα και στον ρόλο των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόησή τους, ενώ γίνεται βαθύτερη ανάλυση των λόγων που υπάρχουν παρανοήσεις. Τελειώνει με την παιδαγωγική αξία του μαθηματικού λάθους.

.

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

Πρόλογος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΛΑΘΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Εισαγωγή

Γνωρίζετε ότι γράφω με αργό ρυθμό. Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι δεν είμαι ποτέ ικανοποιημένος έως ότου έχω πει όσο το δυνατόν περισσότερα με λίγες λέξεις, και η συνοπτική γραφή απαιτεί πολύ περισσότερο χρόνο από την εκτενή γραφή.

Carl Friedrich Gauss (1777- 1855)

Μαθαίνοντας Γραμμική Άλγεβρα βρίσκεσαι απέναντι σε ένα σημαντικό πρόβλημα: Η Άλγεβρα είναι από την φύση της αφαιρετικός κλάδος των Μαθηματικών. Εκεί έγκειται η δυναμική της και η καθολική χρησιμότητά της. Πώς όμως επιτυγχάνεται μία ισορροπία μεταξύ του αφαιρετικού και του συγκεκριμένου στοιχείου; Οι προσπάθειες που πρέπει να γίνουν είναι πολλές και σύνθετες κάποιες φορές. Πρέπει να καταβληθεί ιδιαίτερη προσπάθεια έτσι ώστε η αφαίρεση να πραγματοποιείται σταδιακά, δηλαδή να παρέχονται κίνητρα που να δικαιολογούν την εισαγωγή νέων εννοιών και να επεξηγούνται με όσο το δυνατόν απλό τρόπο οι σημαντικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων και στις λύσεις των προβλημάτων. Για αυτόν το λόγο χρειάζεται να υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός επεξεργασμένων ασκήσεων και εφαρμογών. Επίσης, επειδή οι φοιτητές των Μαθηματικών δεν πρέπει να είναι απλοί θεατές αλλά ενεργοί συμμετέχοντες της διαδικασίας μάθησης είναι σημαντικό να επιχειρήσουν να απαντήσουν σε ερωτήσεις κατανόησης των εννοιών και να λύσουν αρκετές ασκήσεις έτσι ώστε να ενθαρρύνεται η χρήση των μαθηματικών εργαλείων που διδάχτηκε σε προηγηθείσες παρακολουθήσεις ή αναγνώσεις της διδαχθείσας θεωρίας.

Η λέξη «Άλγεβρα» υπήρξε μέρος του τίτλου ενός Αραβικού κειμένου του 800 μ. Χ. το οποίο αναφερόταν στους κανόνες για την λύση των εξισώσεων και μέχρι περίπου τα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα η Άλγεβρα ήταν ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολούνταν με τη μελέτη των εξισώσεων.

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο όρος «δομή» κατέχει μία από τις κυριότερες θέσεις στα σύγχρονα Μαθηματικά. Η σωστή κατανόηση και η μελέτη των δομών θεωρείται πολύ σημαντικό εργαλείο για την προώθηση της ενοποίησης και της ανάπτυξης των Μαθηματικών. Ένα από τα θεμελιώδη είδη των δομών αποτελεί ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία ή περισσότερες πράξεις. Η Άλγεβρα, στην σημερινή εποχή, είναι η μελέτη αυτών των θεμελιωδών δομών. Γι' αυτό το λόγο μπορεί κανείς να πει ότι η Άλγεβρα αποτελεί μόνο ένα μέρος των Μαθηματικών, αλλά κατέχει και τον ρόλο που είχαν και έχουν τα Μαθηματικά στην ανάπτυξη των θετικών επιστημών.

Η νέα αυτή αντίληψη για το ρόλο της Άλγεβρας, που επικράτησε στη δεκαετία του 1920 και συνδέεται κυρίως με τα ονόματα της Emmy Noether, των Emil Artin, B.L. Van Waerden, Hermann Weyl και άλλων γνωστών μαθηματικών, βασίστηκε στη μελέτη θεμελιωδών δομών όπως είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι, τα πρότυπα και τα σώματα. Αυτή η αντίληψη της σύγχρονης Άλγεβρας οδήγησε σε μία θεμελιώδη και καινοτόμο ανάπτυξη της Άλγεβρας. Κύριο χαρακτηριστικό αυτής της ανάπτυξης είναι ότι τα προηγούμενα χρόνια λύθηκαν σημαντικές εικασίες που διατυπώθηκαν σε προηγούμενους αιώνες και που αναφέρονται σε κλασσικά Μαθηματικά. Ως ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η θεμελιώδης εικασία του Fermat, σύμφωνα με την οποία η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει καμία ακέραια λύση (x, y, z), με τα x, y, z να είναι όλα διάφορα του μηδενός, όταν $n \geq 3$. Η εικασία αποδείχθηκε ότι ισχύει από τον Wiles, έπειτα από 350 χρόνια περίπου. Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι το 10^{ο} ,14^{ο} και 17^{ο} πρόβλημα του Hilbert, καθώς και οι εικασίες του Andrew Wiles. Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που έχει επιτευχθεί μέχρι σήμερα στην Άλγεβρα είναι η απόδειξη της εικασίας των Burnside και Galois, η οποία αναφέρεται στην Θεωρία Ομάδων και στην ύπαρξη της ταξινόμησης των απλών πεπερασμένων ομάδων. Αποδείχθηκε τη δεκαετία του '80 και απασχόλησε τους μεγαλύτερους αλγεβριστές του περασμένου αιώνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

Διανυσματικοί Χώροι

1.1 Θεωρία διανυσματικών χώρων

1.1.1 Γενικά

Ένα οποιοδήποτε σύνολο αν εφοδιαστεί κατάλληλα με δύο πράξεις αποκτά αλγεβρική δομή, η οποία λέγεται δομή διανυσματικού χώρου. Έχοντας υπ' όψιν το σύστημα ιδιοτήτων που ικανοποιούν οι πράξεις της πρόσθεσης (εσωτερική πράξη) και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (εξωτερική πράξη) διαμορφώνουμε τον ορισμό του διανυσματικού χώρου.

<u>Ορισμός 1^{ος}</u>: Έστω ένα μη κενό σύνολο X το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη, την πρόσθεση,

$+: X x X \rightarrow X : (x,y) \rightarrow x+y,$

και μία εξωτερική πράξη, το βαθμωτό πολλαπλασιασμό, με συντελεστές σε σώμα K,

$\cdot: K x X \rightarrow X : (\lambda,x) \rightarrow \lambda\cdot x,$

έτσι ώστε για κάθε $x,y,z \in X$, $\lambda,\mu \in K$ να ισχύουν τα εξής:

i) $x+y= y+x$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $(x+y)+z= x+(y+z)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) Υπάρχει $0 \in X$ έτσι ώστε $x+0= 0+x= x$ (ουδέτερο στοιχείο)

iv) Για κάθε $x \in X$, υπάρχει $-x \in X$ έτσι ώστε $x+(-x)= (-x)+x= 0$ (αντίθετο στοιχείο)

v) $(\lambda+\mu)\cdot x= \lambda\cdot x+\mu\cdot x$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση στο K)

vi) $\lambda\cdot(x+y)= \lambda\cdot x+\mu\cdot y$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση στο X)

vii) $(\lambda\cdot\mu)\cdot x= \lambda\cdot(\mu\cdot x)$

viii) $1\cdot x= x$.

Τότε η τριάδα $(X, +, \cdot)$ λέγεται διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος πάνω στο σώμα K.

<u>Σχόλιο 1^{ο}</u>: Συνήθως, ως σώμα K θεωρείτε το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ και ο X λέγεται πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος αντίστοιχα. Σε ολόκληρο το παρόν κεφάλαιο, θα θεωρείται πάντοτε ότι οι διανυσματικοί χώροι ορίζονται πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ εκτός αν δηλώνεται ότι είναι μόνο $K= \mathbb{R}$ ή μόνο $K= \mathbb{C}$.

1.1.2 Γραμμικά συστήματα

Εισαγωγή

Κάθε εξίσωση της μορφής:

$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_r \cdot x_r = \mu,$ (1)

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \mu \epsilon K$ και $x_1, x_2, \ldots, x_r$ άγνωστοι αριθμοί από το σώμα K λέγεται γραμμική εξίσωση με r-αγνώστους. Οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ λέγονται συντελεστές των αγνώστων. Λύση της γραμμικής εξίσωσης (1) είναι κάθε διατεταγμένη r-άδα αριθμών $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ τέτοια ώστε $\lambda_1 \cdot \nu_1 + \lambda_2 \cdot \nu_2 + \ldots + \lambda_r \cdot \nu_r = \mu$, δηλαδή επαληθεύει την εξίσωση αν θέσουμε όπου $x_i = \nu_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Γραμμικό σύστημα με m εξισώσεις και r αγνώστους ή mxr γραμμικό σύστημα είναι ένα πεπερασμένου πλήθους σύστημα m εξισώσεων με r αγνώστους και έχει την εξής μορφή: (2)

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1r} \cdot x_r = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2r} \cdot x_r = \beta_2 \\ \cdots \\ \alpha_{m1} \cdot x_1 + \alpha_{m2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{mr} \cdot x_r = \beta_m \end{matrix}\right\}$$

Αν θεωρήσουμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2r} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \text{ και } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix},$$

τότε το γραμμικό σύστημα (2) γράφεται ως μία εξίσωση πινάκων οπότε:

$A \cdot X = \beta$ (3)

Όπου ο πίνακας A λέγεται πίνακας συντελεστών, ο πίνακας X λέγεται πίνακας αγνώστων και ο πίνακας β λέγεται πίνακας σταθερών όρων.

Ως λύση του γραμμικού συστήματος (2) θεωρείται κάθε διατεταγμένη r-άδα αριθμών $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) \epsilon K^r$, ή αλλιώς $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \end{bmatrix}$ που επαληθεύει και τις m εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (2). Το γραμμικό σύστημα (2) λέγεται συμβιβαστό, αν έχει μία τουλάχιστον λύση και αδύνατο, αν δεν έχει λύση.

Δύο γραμμικά συστήματα

$$A\cdot X=\beta \text{ και } B\cdot X=\gamma,$$

με $A\epsilon M_{mxr}(K)$, $\beta\epsilon M_{mx1}(K)$, $B\epsilon M_{nxr}(K)$, $\gamma\epsilon M_{nx1}(K)$, και $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων αριθμών λέγονται ισοδύναμα, αν και μόνον αν, έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, η διαδικασία δηλαδή εύρεσης όλων των λύσεων του συστήματος, στηρίζεται στην εύρεση άλλων ισοδύναμων και πιο απλοποιημένων γραμμικών συστημάτων ως προς το αρχικό.

Όταν ο πίνακας β των σταθερών όρων είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε το σύστημα (3) λέγεται ομογενές.

Ο πίνακας $[A|\beta]$ ή $[A|\beta]\epsilon M_{mx(r+1)}(K)$ λέγεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος $A\cdot X=\beta$ και είναι ο πίνακας A συμπληρωμένος με μία επιπλέον στήλη στο τέλος, όπως ορίζεται από τον πίνακα β.

<u>Μέθοδος απαλοιφής του Gauss:</u> Έστω το γραμμικό σύστημα

$A\cdot X=\beta$, (4) όπου $A\epsilon M_{mxr}(K)$, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων και $\beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας-στήλη των σταθερών όρων. Για την επίλυση του συστήματος (4) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην οποία γίνεται ο μετασχηματισμός του επαυξημένου πίνακα $[A|\beta]$ του συστήματος (4) σε ανηγμένο κλιμακωτό με χρήση μόνον στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές με την εξής διαδικασία:

i) Αν είναι ανάγκη με εναλλαγή των γραμμών κάνουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης μη-μηδενικής στήλης διάφορο του μηδενός.

ii) Κάνουμε το πρώτο στοιχείο της πρώτης μη-μηδενικής στήλης ίσο με την μονάδα.

iii) Κάνουμε όλα τα στοιχεία της πρώτης μη-μηδενικής στήλης που είναι κάτω από την μονάδα ίσα με μηδέν.

iv) Αγνοώντας την πρώτη γραμμή χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα βήματα στον εναπομείναντα πίνακα μέχρι να εξαντληθούν ή να μείνουν στο τέλος μηδενικές γραμμές.

v) Σε κάθε στήλη που περιέχει το πρώτο μη-μηδενικό 1 μιας μη-μηδενικής γραμμής κάνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία 0 αρχίζοντας από την στήλη που είναι στα δεξιότερα. (Αλγόριθμος του Gauss)

Άρα με την διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές στον επαυξημένο πίνακα $[A|\beta]$ το συστήματα που προκύπτουν έχουν εξισώσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των εξισώσεων του αρχικού συστήματος (4). Τα συστήματα δηλαδή που προκύπτουν είναι ισοδύναμα με το αρχικό σύστημα.

Μετά την αναγωγή του πίνακα $[A|\beta]$ διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

i) Αν στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα υπάρχει γραμμή της μορφής $(0, 0,\ldots, 0|t)$, $t\neq 0$, τότε $\rho(A)\neq\rho(A|\beta)$ και το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Αν $\rho(A)= \rho(A|\beta)= n\leq \min(m, r)$, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό και θεωρούμε (r-n) αγνώστους που αντιστοιχούν σε στήλες του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα, δεν περιέχουν κάποιο από τα ηγετικά 1 ως αυθαίρετους και εκφράζουν τους υπόλοιπους αγνώστους ως συναρτήσεις των αυθαίρετων αγνώστων (για n= r το σύστημα έχει μηδενική λύση και για n<r έχει άπειρες λύσεις με (r-n) αυθαίρετους αγνώστους).

1.1.3 Υπόχωρος διανυσματικού χώρου

Σε έναν διανυσματικό χώρο X πάνω στο σώμα K, υπάρχουν υποσύνολά του εκτός του ίδιου του X και του τετριμμένου χώρου {0} τα οποία έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον. Αυτά τα υποσύνολα εφοδιασμένα με τις δύο πράξεις του X θεωρούνται και τα ίδια διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K.

<u>Ορισμός 2^{ος}</u>: Ένα μη κενό υποσύνολο Y ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται διανυσματικός υπόχωρος ή υπόχωρος του X, αν και μόνον αν, για κάθε $\lambda\epsilon K$, $x,y\epsilon Y$ ισχύουν τα εξής:

i) $\lambda\cdot x\epsilon Y$ και

ii) $x+y\epsilon Y$ ή ισοδύναμα, αν και μόνον αν, για κάθε $\lambda.\mu\epsilon K$, $x,y\epsilon Y$ ισχύει

iii) $\lambda\cdot x+\mu\cdot y\epsilon Y$.

Σχόλια 2: α) Αν Y είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X, τότε για κάθε $x\epsilon Y$ ισχύει και $-x\epsilon Y$, γιατί αν στην i) $\lambda=-1$ προκύπτει ο ισχυρισμός. Άρα λόγω της ii) θα ισχύει και

$x+(-x)=0\epsilon Y$, επομένως καταλήξαμε στο ότι κάθε υπόχωρος Y ενός διανυσματικού χώρου X περιέχει πάντα το 0.

β) Ο διανυσματικός χώρος είναι υπόχωρος του εαυτού του και επίσης το τετριμμένο {0} είναι υπόχωρος του X. Κάθε άλλος υπόχωρος λέγεται γνήσιος υπόχωρος του X.

Συνεχίζουμε στην μελέτη μη τετριμμένων υποχώρων που ορίζονται από άλλους υποχώρους ή από διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου και είναι οι εξής:

α) Τομή υποχώρων.

Αν Y_1, Y_2 είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου X, τότε και το υποσύνολο $Y_1 \cap Y_2$ του X είναι επίσης υπόχωρός του. Πράγματι, $0 \in Y_1$ και $0 \in Y_2$ άρα συνεπάγεται $0 \in Y_1 \cap Y_2$, άρα και το σύνολο αυτό είναι μη κενό. Ακόμη, αν $x, y \in Y_1 \cap Y_2$, τότε για κάθε $\lambda, \mu \in K$ και $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Y_1$ και $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Y_2$, οπότε $\lambda \cdot x + \mu \cdot y \in Y_1 \cap Y_2$. Επαγωγικά ως προς την τομή, προφανώς αποδεικνύεται και ότι η τομή r-υποχώρων Y_1, Y_2, …, Y_r του X είναι υπόχωρος του X.

β) Άθροισμα υποχώρων.

Αν Y_1, Y_2 είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου X, τότε το σύνολο $Y_1 + Y_2 := \{x + y : x \in Y_1 \text{ και } y \in Y_2\}$, είναι και αυτό υπόχωρος του X και λέγεται άθροισμα των υποχώρων Y_1, Y_2. Πράγματι, το $0 \in Y_1$ και $0 \in Y_2$ και άρα το $0 = 0 + 0 \in Y_1 + Y_2$, οπότε το σύνολο μη κενό. Επίσης, αν $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2 \in Y_1 + Y_2$ και $\lambda, \mu \in K$, τότε αυτό σημαίνει x_1, $y_1 \in Y_1$ και x_2, $y_2 \in Y_2$, οπότε και $\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1 \in Y_1$, $\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 \in Y_2$ κατά συνέπεια $\lambda \cdot (x_1 + x_2) + \mu \cdot (y_1 + y_2) = (\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot y_1) + (\lambda \cdot x_2 + \mu \cdot y_2) \in Y_1 + Y_2$. Άρα $Y_1 + Y_2$ υπόχωρος του X. Επαγωγικά πάλι, αποδεικνύεται τελικά ότι και το σύνολο $Y_1 + Y_2$, …, $Y_r := \{x_1 + x_2 + \ldots + x_r : x_i \in Y_i,\ i = 1,2,3,\ldots,r\}$, όπου Y_1, Y_2, …, Y_r, $r > 2$ είναι υπόχωροι του X και λέγεται άθροισμα υποχώρων Y_1, Y_2, …, Y_r.

γ) Γραμμική θήκη.

Θεωρούμε τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r ενός διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K. Τότε το διάνυσμα $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_r \cdot x_r$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2, …, x_r με συντελεστές λ_1, λ_2, …, λ_r στο σώμα K και ανήκει στον διανυσματικό χώρο X. Τότε το σύνολο $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle := \{\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_r \cdot x_r : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K\}$ είναι διανυσματικός χώρος του X και λέγεται γραμική θήκη των διανυσμάτων x_1, x_2, …, x_r. Επίσης, αν $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r παράγουν τον διανυσματικό χώρο X και αποτελούν ένα σύνολο γεννητόρων του X.

Για την γραμμική θήκη ισχύει ένα βασικό θεώρημα το οποίο λέει ότι:

<u>Θεώρημα 1^ο</u> : Η γραμμική θήκη $\langle x_1, x_2, \ldots, x_r \rangle$ είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X που περιέχει τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r.

1.1.4 Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ορισμός 3ος ***: α)*** Τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r, $r\in\mathbb{N}$, ενός διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K λέγονται γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνον αν, υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1,\lambda_2, \ldots , \lambda_r\in K$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει η ισότητα $\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+\ldots+\lambda_r\cdot x_r= 0$.

β) Από την άλλη τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r, $r\in\mathbb{N}\cdot$, ενός διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα, αν και μόνον αν, δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ή ισοδύναμα, αν και μόνον αν, $\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+\ldots+\lambda_r\cdot x_r= 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\in K \rightarrow \lambda_1= \lambda_2= \ldots = \lambda_r= 0$.

Σχόλιο 2ο ***: α)*** Κάθε διάνυσμα $x\in X$, $x\neq 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού ισχύει το εξής: $\lambda\cdot x= 0$, $\lambda\in K$, $x\neq 0 \rightarrow \lambda= 0$.

β) Το μηδενικό διάνυσμα $0\in X$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού ισχύει: $\lambda\cdot 0= 0$ με $\lambda\neq 0$.

Θεώρημα 2ο ***:*** Τα διανύσματα x_1, x_2, …, x_r, $r\in\mathbb{N}$, ενός διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνον αν, ένα τουλάχιστον από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

1.1.5 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Ξεκινάμε με τον ορισμό (Hamel) βάσης ενός διανυσματικού χώρου και έχουμε τα εξής:

Ορισμός 4ος ***:*** Το υποσύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ του διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K, είναι μία βάση για τον διανυσματικό χώρο X, αν και μόνον αν, ισχύουν τα παρακάτω:

- ***i)*** Τα διανύσματα x_1, x_2,…, x_r είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- ***ii)*** Η διανύσματα παράγουν το χώρο, δηλαδή για τη γραμμική τους θήκη ισχύει ότι: $\langle x_1, x_2,\ldots, x_r\rangle= X$.

Θεώρημα 3ο ***:*** Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K και $\{x_1, x_2,\ldots, x_r\}$ μία βάση του, τότε για κάθε $x\in X$ υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r\in K$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $x= \lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2+\ldots+\lambda_r\cdot x_r$.

Θεωρείτε ότι η μοναδικά οριζόμενη r-άδα $(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r)$ συντελεστών πάνω στο K ορίζει επίσης και τις συντεταγμένες του διανύσματος $x\in X$ ως προς την βάση $\{x_1, x_2,\ldots,x_r\}$ του X. Οπότε, αν αλλάξει η διάταξη των στοιχείων της βάσης, τότε θα αλλάξει και η r-άδα των συντελεστών. Για αυτόν τον λόγο η βάση θεωρείτε διατεταγμένη, δηλαδή για την εύρεση των συντεταγμένων ενός διανύσματος ως προς την βάση έχουμε την διάταξη των διανυσμάτων της βάσης.

Για παράδειγμα αν πάρουμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\nu$, το τυχόν διάνυσμα (λ_1, λ_2,…, λ_ν)$\epsilon\mathbb{R}^\nu$ γράφεται στην μορφή:

(λ_1, λ_2,…, λ_ν)= $\lambda_1\cdot$(1, 0, …, 0)+$\lambda_2\cdot$(0, 1,…, 0)+…+$\lambda_\nu\cdot$(0, 0,…,1)= $\lambda_1\cdot e_1+\lambda_2\cdot e_2+\ldots+\lambda_\nu\cdot e_\nu$, όπου τα $e_i\epsilon\mathbb{R}^\nu$ ορίζονται έτσι ώστε να έχουν ίση με 1 στην i-θέση και 0 στις υπόλοιπες. Άρα τα e_1, e_2,…, e_ν παράγουν τον $\mathbb{R}^\nu$ (1), επιπλέον είναι γραμμικά ανεξάρτητα (2), άρα από (1), (2) τα e_1, e_2,…, e_ν αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^\nu$. Η βάση αυτή λέγεται και κανονική βάση του $\mathbb{R}^\nu$.

Γενικά υπάρχουν διανυσματικοί χώροι με πεπερασμένη βάση (πεπερασμένος αριθμός στοιχείων), χώροι με μη πεπερασμένη βάση (άπειρος αριθμός στοιχείων), ενώ κάθε διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μία βάση. Επομένως, προκύπτουν τα ερωτήματα:

i) Κάθε διανυσματικός χώρος έχει μία βάση πεπερασμένη ή όχι;

ii) Έχουν όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου το ίδιο πλήθος στοιχείων;

Κατ' αρχήν στο i) για την ύπαρξη πεπερασμένης βάσης η απάντηση είναι ναι, αλλά υπό κάποιες προϋποθέσεις. Η απάντηση και στα δυο ερωτήματα δίνεται από τα παρακάτω Θεωρήματα.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων Α ενός διανυσματικού χώρου Χ το οποίο είναι μέγιστο, δηλαδή δεν υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Χ που να έχει το Α ως γνήσιο υποσύνολό του, άρα:

Θεώρημα 4^ο^ : Κάθε μέγιστο σύνολο Α από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του διανυσματικού χώρου Χ αποτελεί βάση του Χ.

Θεώρημα 5^ο^ : Κάθε διανυσματικός χώρος $X\neq\{0\}$ ο οποίος έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $\{x_1, x_2,\ldots, x_r\}$ έχει μία βάση.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων Β ενός διανυσματικού χώρου Χ το οποίο είναι ελάχιστο, δηλαδή δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του Β που να παράγει τον χώρο Χ. Άρα από το Θεώρημα 5 το σύνολο Β είναι βάση του Χ. Άρα έχουμε το εξής:

Θεώρημα 6^ο^ : Κάθε ελάχιστο πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου αποτελεί βάση του.

Απαντήσαμε στο i) και μένει να απαντήσουμε και στο ii) με το Θεώρημα 7, που στηρίζεται με τη σειρά του στο ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα ανταλλαγής του Steinitz: Αν έχω A= {x_1, x_2,…, x_r} ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου X πάνω στο σώμα K και B= {y_1, y_2,…, y_ν} είναι ένα σύνολο γεννητόρων του X, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $r \leq \nu$

ii) Υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων του X της μορφής {x_1,…, x_r, y'_{r+1},…, y'_ν}, με $y'_i \epsilon B$, i= r+1,…, ν.

Θεώρημα 7ο : Εάν ένας διανυσματικός χώρος X έχει μία πεπερασμένη βάση, έστω {x_1, x_2,…, x_r}, τότε και κάθε άλλη βάση του θα έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Από το Θεώρημα 7 προκύπτει ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 5ος : Αν έχουμε έναν διανυσματικό χώρο X πάνω στο σώμα K, με πεπερασμένη βάση, τότε ο κοινός αριθμός των στοιχείων κάθε βάσης του (πληθικότητα βάσης) λέγεται διάσταση του διανυσματικού χώρου X και συμβολίζεται με dimX, ενώ ο X λέγεται διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και η dim{0}= 0.

Άμεσες συνέπεια του Λήμματος ανταλλαγής είναι το εξής: «Αν ο διανυσματικός χώρος X στο σώμα K είναι πεπερασμένης διάστασης r, τότε οποιαδήποτε r+k, k= 1, 2,… διανύσματα αυτού είναι γραμμικά εξαρτημένα.»

Επίσης, υπάρχει το Θεώρημα 8, το οποίο είναι Θεώρημα επέκτασης βάσης ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης και βασίζεται στην εξής πρόταση: «Αν X είναι διανυσματικός χώρος στο σώμα K και A= {x_1, x_2,…, x_r} είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του, τότε για κάθε $x \epsilon X - \langle A \rangle$ το σύνολο $A \cup \{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.»

Θεώρημα 8ο : Αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης r, τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του A επεκτείνεται σε μία βάση του, δηλαδή το A είναι υποσύνολο κάποιας βάσης του X.

Τέλος, ισχύουν οι εξής χρήσιμες προτάσεις: «Σ' έναν διανυσματικό χώρο X πεπερασμένης διάστασης κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολό του A με r στοιχεία είναι βάση του.» και: «Αν Y υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X, τότε ισχύουν: i) dimY≤ dimX, ii) dimY= dimX → Y= X.»

1.1.6 Κλιμακωτή μορφή διανυσμάτων και Θεώρημα Διάστασης

Ορισμός 6ος : Αν θεωρήσουμε τα διανύσματα x_i= (α_{i1}, α_{i2},.., $\alpha_{i\nu}$)≠ 0, i= 1, 2,…, n του $\mathbb{R}^\nu$. Αν οι πρώτες μη μηδενικές συντεταγμένες των x_1, x_2,…x_n, έστω οι a_{1t_1}, a_{2t_2}, … ,

a_{nt_n} αντίστοιχα, είναι τέτοιες ώστε να ισχύει: $t_1 < t_2 \ldots < t_n$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα x_i, i= 1, 2,…, n είναι σε κλιμακωτή μορφή.

Στη συνέχεια ακολουθούν δύο θεωρήματα που είναι αναγκαία για τα διανύσματα σε κλιμακωτή μορφή.

<u>Θεώρημα 9^ο</u> : Αν τα διανύσματα $x_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\ldots, \alpha_{i\nu}) \epsilon \mathbb{R}^{\nu}$, i= 1, 2,…, n είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε είναι και γραμμικά ανεξάρτητα.

<u>Θεώρημα 10^ο</u> : Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο X πάνω στο σώμα K, και το υποσύνολο $A= \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ του X. Αν $x= \lambda_1 \cdot x_1+\ldots+\lambda_i \cdot x_i+\ldots+\lambda_n \cdot x_n$ με $\lambda_i \neq 0$, τότε $<A>= <x_1, x_2,\ldots, x_n>= <x_1,\ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1},\ldots, x_n>$.

Επίσης, ένα σύνολο διανυσμάτων $x_1, x_2,\ldots, x_n$ του $\mathbb{R}^{\nu}$ μετατρέπεται σε σύνολο διανυσμάτων κλιμακωτής μορφής με τις παρακάτω στοιχειώδεις πράξεις:

- ***i)*** $x_i \rightarrow x_j$ (εναλλαγή x_i, x_j)
- ***ii)*** $x_i \rightarrow \lambda \cdot x_i$, $\lambda \neq 0$ (αντικατάσταση του x_i με το $\lambda \cdot x_i$)
- ***iii)*** $x_i \rightarrow x_i+\lambda \cdot x_j$, $\lambda \neq 0$, (αντικατάσταση του x_i με το $x_i+\lambda \cdot x_j$)
- ***iv)*** διαγραφή μηδενικού διανύσματος.

Οπότε αν μετά την εφαρμογή των στοιχειωδών πράξεων τα διανύσματα που προκύπτουν σε κλιμακωτή μορφή είναι τα $y_1, y_2,\ldots, y_t$, $t \leq n$, τότε από τα δύο τελευταία θεωρήματα ισχύουν τα εξής:

- ***i)*** $y_1, y_2,\ldots, y_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
- ***ii)*** $<y_1, y_2,\ldots, y_t>= <x_1, x_2,\ldots, x_n>$.

Τελειώνοντας την ενότητα αυτή, αναφέρουμε και ένα χρήσιμο θεώρημα με εφαρμογές σε παραδείγματα και ασκήσεις και είναι το εξής:

<u>Θεώρημα 11^ο (Θεώρημα Διάστασης)</u> : Αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και Y_1, Y_2 υπόχωροί του, τότε ισχύει:

$$\dim(Y_1+Y_2)= \dim Y_1+ \dim Y_2- \dim(Y_1 \cap Y_2).$$

1.2 Διατύπωση Προβλήματος 1 και λύση του σε βήματα

1.2.1 Γενικά

Στην ανάλυση λαθών όσον αφορά τους διανυσματικούς χώρους χρησιμοποιήθηκε το πρόβλημα που ακολουθεί και στη συνέχεια, η σωστή λύση του βασισμένη στην θεωρία που διδάχτηκε στις παραδόσεις του εξαμήνου στους φοιτητές των Πολιτικών Μηχανικών ΕΜΠ, στο 1ο εξάμηνο του έτους 2011-2012 . Η λύση αυτή χωρίζεται σε βήματα αργότερα για να διευκολυνθεί η ανάλυσή τους και να διεξαχθούν πιο ευδιάκριτα τα είδη των λαθών που εμφανίζονται στις λύσεις που δίνουν οι φοιτητές.

1.2.2 Διατύπωση προβλήματος και η λύση του σε βήματα

Πρόβλημα 1^ο^ : Θεωρούμε τους δύο υποχώρους του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$:
A= {(x,y,z,w): y+z-2·w= 0}, B= {(x,y,z,w): x+z= 0, y= 3·w}. Να βρείτε μία βάση για καθέναν από τους υποχώρους A, B, A∩B και την διάσταση του υποχώρου A+B.

Σωστή Λύση (σε βήματα) 1^ου^ Προβλήματος:

Βήμα 1^ο^ : Για τον υπόχωρο Α θα λύσουμε το ομογενές σύστημα με τέσσερις αγνώστους και μία εξίσωση, και άρα τρεις παραμέτρους στο τέλος, ως εξής:

y+z-2·w= 0→ z= 2·w-y,

τότε (x, y, z, w)= (x, y, 2·w-y, w)= x·(1, 0, 0, 0)+y ·(0, 1, -1, 0)+w·(0, 0, 2, 1). Άρα βρίσκουμε τρεις γεννήτορες για τον υπόχωρο Α, δηλαδή τα διανύσματα

(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 2, 1).

Βήμα 2^ο^ : Εξηγούμε γιατί τα διανύσματα-γεννήτορες του Α είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ο πίνακας διαστάσεων (3x4) με τα παραπάνω διανύσματα, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

είναι σε κλιμακωτή μορφή, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Βήμα 3^ο^ : Βρίσκουμε μία βάση του υποχώρου Α και είναι η εξής: {(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 2, 1)}, ενώ η διάστασή του ως η πληθικότητα της βάσης του είναι: dim(A)= 3.

Βήμα 4^ο^ : Για τον υπόχωρο Β θα λύσουμε το σύστημα των δύο (2) εξισώσεων με τέσσερις (4) αγνώστους, άρα δύο (2) παραμέτρους και θα έχουμε: { x+z= 0, y= 3·w} → {z= -x, y= 3·w}, άρα (x, y, z, w)= (x, 3·w, -x, w)= x·(1, 0, -1, 0)+w·(0, 3, 0, 1). Άρα βρίσκουμε δύο γεννήτορες για τον υπόχωρο Β, τα διανύσματα (1, 0, -1, 0) και (0, 3, 0, 1).

Βήμα 5^ο^ : Εξηγούμε γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ο πίνακας διαστάσεων (2x4), $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι σε κλιμακωτή μορφή,άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Βήμα 6^ο^ : Άρα μία βάση του υποχώρου Β είναι η εξής: {(1, 0, -1, 0), (0, 3, 0, 1)} και η διάστασή του είναι dim(B)= 2.

Βήμα 7^o : Για τον υπόχωρο $A\cap B$, δηλαδή την τομή των υποχώρων Α και Β παίρνουμε όλα τα διανύσματα των Α, Β και λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων με τέσσερεις αγνώστους, άρα μία παράμετρο στο τέλος και παίρνουμε:

Ο υπόχωρος είναι ο $A\cap B = \{(x,y,z,w): y+z-2\cdot w= 0,\ x+z= 0,\ y= 3\cdot w\}$, άρα λύνω το σύστημα και:

$\{x+z= 0, y= 3\cdot w, y+z-2\cdot w= 0\} \rightarrow \{z= -x, y= 3\cdot w, 3\cdot w+z-2\cdot w= 0\} \rightarrow \{z= -x, y= 3\cdot w, z= -w\} \rightarrow \{x= -z= w, y= 3\cdot w, z= -w\}$.

Άρα $(x, y, z, w)= (w, 3\cdot w, -w, w)= w\cdot(1, 3, -1, 1)$. Άρα βρίσκουμε έναν γεννήτορα για τον υπόχωρο $A\cap B$.

Βήμα 8^o : Άρα μία βάση του υποχώρου $A\cap B$ είναι η $\{(1, 3, -1, 1)\}$ και η διάστασή του $\dim(A\cap B)= 1$.

Βήμα 9^o : Εδώ βρίσκουμε την διάσταση του υποχώρου Α+Β χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Διάστασης (Θεώρημα 11^o) και έχουμε: $\dim(A+B)= \dim(A)+ \dim(B)- \dim(A\cap B)= 3+2-1= 5-1= 4$, άρα $\dim(A+B)= 4$.

1.3 Διερεύνηση λαθών

1.3.1 Είδη λαθών στη λύση του προβλήματος 1 και κατηγοριοποίησή τους

Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει ποιοτική ανάλυση των λαθών που βρέθηκαν στο δείγμα των 222 γραπτών των πρωτοετών φοιτητών, δηλαδή θα κατηγοριοποιηθούν σε είδη με βάση και τα εννέα (9) βήματα στην σωστή λύση και με βάση τους πίνακες που υπάρχουν στο παράρτημα.

Κατ' αρχήν, τα λάθη εδώ χωρίζονται σε τρεις γενικές κατηγορίες:

i) Λάθη κατανόησης της θεωρίας των διανυσματικών χώρων, συμβολίζουμε με **(Κ)**

ii) Έλλειψης δικαιολόγησης της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων, συμβολίζουμε με **(Δ)**

iii) Στις πράξεις και στην επίλυση συστήματος εξισώσεων, συμβολίζουμε με **(Π)**

Αρχικά, θα παρατηρήσουμε ότι τα βήματα 1, 4 και 7 είναι παρόμοια. Σ'αυτά γίνεται επίλυση συστήματος εξισώσεων με διαφορετικές στον αριθμό εξισώσεις κάθε φορά και διαφορετικούς αγνώστους. Τα είδη λαθών που συναντούμε εδώ ανήκουν στις κατηγορίες (i) και (iii).

Συγκεκριμένα, για την (i) κατηγορία (κατανόησης) συναντούμε τα εξής:

α) Δεν έχουν κατανοήσει πώς "διαχειριζόμαστε" διανύσματα με παραπάνω από δύο συντεταγμένες αφού ξεφεύγουν από τον τετριμμένο διανυσματικό υπόχωρο $\mathbb{R}^2$ και άρα πώς λύνεται ένα σύστημα τριών (ή περισσοτέρων) αγνώστων. Από εκεί και έπειτα τα λάθη γίνονται στις πράξεις επίλυσης των συστημάτων, άρα είμαστε στην κατηγορία (iii) και θα τα αναλύσουμε πιο κάτω.

β) Δεν έχουν κατανοήσει το τι είναι οι γεννήτορες ενός υποχώρου διανυσματικού χώρου και πώς τους βρίσκουμε. Παρατηρήθηκαν δύο λάθη:

β_1) Αυθαίρετα, ενώ ο φοιτητής βρίσκει σωστά τα διανύσματα του υποχώρου προσθέτει και το μηδενικό διάνυσμα έτσι ώστε να υπάρχουν τέσσερεις (4) γεννήτορες, όσο και η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ και

β_2) Για τον υπόχωρο $A \cap B$, για να βρει τους γεννήτορές του παίρνει τα δύο διανύσματα του υποχώρου B ως γραμμικό συνδυασμό των τριών διανυσμάτων του υποχώρου A.

Τώρα στην (iii) κατηγορία-πράξεις συναντούμε τα εξής:

γ) Λάθη στις πράξεις επίλυσης των συστημάτων και πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι:

γ_1) Βρίσκουν λάθος αριθμό διανυσμάτων-γεννητόρων είτε λιγότερα, είτε περισσότερα.

γ_2) Βρίσκουν μερικά διανύσματα σωστά και μερικά λάθος.

γ_3) Συνδυασμός των (γ_1) και (γ_2) λαθών, δηλαδή λιγότερους γεννητόρων ή περισσότερους και κάποιοι από αυτούς είναι οι σωστοί.

γ_4) Όλα τα διανύσματα-γεννήτορες που προκύπτουν μετά την επίλυση του συστήματος είναι λάθος.

γ_5) Κάνουν λάθος στα πρόσημα, άρα αριθμητικά λάθη.

Επίσης, παρατηρούμε ότι τα βήματα 2 και 5 είναι παρόμοια και σε αυτά δίνεται η εξήγηση της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων που βρέθηκαν στα βήματα 1,4 και 7. Δίνεται απάντηση δηλαδή στο γιατί τα διανύσματα που βρέθηκαν είναι γραμμικά ανεξάρτητα για τους υποχώρους A, B και $A \cap B$ φυσικά. Τα είδη των λαθών που συναντούμε σ' αυτό το κομμάτι λύσης ανήκουν στις κατηγορίες (i) και (ii).

Πιο αναλυτικά βλέπουμε στην κατηγορία-κατανόησης (i) ότι ενώ δίνεται δικαιολόγηση αυτή δεν είναι η σωστή γιατί:

δ) Δεν έχουν κατανοήσει πότε τα διανύσματα θεωρούνται γραμμικώς ανεξάρτητα και σε αρκετές περιπτώσεις στην προσπάθειά τους να τα θέσουν σε κλιμακωτή μορφή κάνουν τα εξής λάθη:

δ_1) Στα προηγούμενα 1,4 ή 7 βήματα βρίσκουν λάθος γεννήτορες και αφού δεν είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή τα κάνουν κλιμακωτά με σωστή ή όχι διαδικασία και πράξεις.

δ_2) Βρίσκουν σωστά τους γεννήτορες, άρα λύνουν σωστά τα συστήματα εξισώσεων και δεν παρατηρούν ότι είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή. Οπότε θέτουν τους πίνακες με τους γεννήτορες σε κλιμακωτή μορφή και αφού βρίσκουν το βαθμό των πινάκων παίρνουν ίσο αριθμό διανυσμάτων με το βαθμό του πίνακα κάθε φορά και αυτά θεωρούν μόνο γραμμικά ανεξάρτητα. Όλα αυτά από πάνω προς τα κάτω στον πίνακα και τα υπόλοιπα που περισσεύουν τα διαγράφουν.

Στην κατηγορία (ii):

ε) Ενώ βρίσκουν σωστά τα διανύσματα ακολουθώντας σωστά την διαδικασία στα 1, 4 ή 7 βήματα δεν δίνεται δικαιολόγηση για την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων που προκύπτουν, γίνεται μόνο απλή παράθεσή τους ως βάση για τους επιμέρους υποχώρους.

Τέλος, και τα βήματα 3, 6, 8 και 9 είναι παρόμοια και σ' αυτά βρίσκουμε την βάση και την διάσταση των υποχώρων Α, Β, Α∩Β και την διάσταση του υποχώρου Α+Β. Τα λάθη που παρατηρούνται σ' αυτά τα βήματα ανήκουν στις κατηγορίες (i) και (iii).

Στην κατηγορία-κατανόησης (i) έχουμε τα εξής είδη λαθών:

στ) Δεν βρίσκουν καθόλου διαστάσεις ή βρίσκουν διαστάσεις και βάσεις σε κάποιους από τους υποχώρους λάθος ή σωστές, άρα δεν έχουν κατανοήσει τις έννοιες βάση και διάσταση διανυσματικών χώρων ή της τομής αυτών.

στ$_1$) Αν και βρίσκουν σωστά τα διανύσματα βάσης θεωρούν μόνο κάποια από αυτά ως γραμμικά ανεξάρτητα και καταλήγουν σε λάθος διάσταση.

στ$_2$) Μπερδεύουν την έννοια της διάστασης με τον βαθμό του πίνακα, δηλαδή βρίσκουν τον βαθμό του πίνακα κάθε φορά και λένε ότι τόση είναι και η διάστασή του, μικρότερη συνήθως, και όχι ότι διάσταση είναι η πληθικότητα της βάσης.

στ$_3$) Προσθέτουν αυθαίρετα στους γεννήτορες ένα ή δύο μοναδιαία διανύσματα έτσι ώστε η βάση του υποχώρου να περιέχει τέσσερα διανύσματα και η διάσταση να γίνεται ίση με την διάσταση του διανυσματικού χώρου, δηλαδή ο υπόχωρος να είναι διάστασης τέσσερα. Συνήθως αυτό παρατηρείται στους υπόχωρους Α και Β και άρα έχει αντίκτυπο και στη διάσταση του Α∩Β.

στ$_4$) Βρίσκουν την διάσταση του υποχώρου Α∩Β χρησιμοποιώντας τον τύπο dim(Α∩Β)= dim(Α)+dim(Β) ή παίρνουν τα κοινά διανύσματα βάσης των Α και Β.

ζ) Αφορά μόνον την διάσταση του υποχώρου Α+Β και το ότι έγραψαν λάθος το θεώρημα διάστασης.

ζ_1) Γράφουν ότι η διάσταση $\dim(A+B)= \dim(A)+\dim(B)-2\cdot\dim(A\cap B)$ ή $\dim(A+B)= \dim(A)+\dim(B)$ ή $\dim(A+B)= \dim(A)+\dim(B)+\dim(A\cap B)$ ή $\dim(A+B)= \dim(AB)= \dim(A)+\dim(B)$

ζ_2) Γράφουν την διάσταση αλλά δεν εξηγούν πως προέκυψε.

ζ_3) Δεν την βρίσκουν καθόλου.

ζ_4) Παίρνουν με την σειρά τα διανύσματα βάσης των A, $A\cap B$ σε έναν πίνακα και σ' έναν άλλο τα διανύσματα των B, $A\cap B$ τους θέτουν σε κλιμακωτή μορφή με βαθμό για τον κάθε πίνακα ίσο με τρία (3), άρα η διάσταση είναι η άθροιση των βαθμών των πινάκων $\dim(A+B)= 3+3+6$ ή απλά ο βαθμός του κάθε πίνακα δηλαδή $\dim(A+B)= 3$.

Στην κατηγορία-πράξεις (iii) παρατηρούμε τα εξής:

η) Βρίσκουν λάθος βάση, άρα και διάσταση κυρίως είτε γιατί έχουν βρει λάθος γεννήτορες στους υποχώρους στα προηγούμενα 1, 4 και 7 βήματα, είτε γιατί δεν θεώρησαν όλα τα διανύσματα-γεννήτορες γραμμικά ανεξάρτητα. Γι' αυτό το λόγο έχουμε τις ακόλουθες υποκατηγορίες:

η_1) Βρίσκουν λάθος αριθμό διανυσμάτων-γεννητόρων ή λάθος διανύσματα, άρα και λάθος βάση ή διάσταση.

η_2) Αν και βρίσκουν σωστά διανύσματα βάσης στην διάσταση παίρνουν μόνο αυτά που αυθαίρετα θεωρούν ως γραμμικά ανεξάρτητα και άρα συνήθως η διάσταση μικρότερη της σωστής.

1.3.2 Ποσοστιαία ανάλυση λαθών στους διανυσματικούς χώρους

Η έρευνα

Έχοντας παρουσιάσει, σε αδρές γραμμές, το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας της Γραμμικής Άλγεβρας στην σχολή των Πολιτικών Μηχανικών (και γενικότερα σε σχολές του Πολυτεχνείου ανάλογα τις ανάγκες της κάθε σχολής), γίνεται φανερό ότι από τη μια η δυσκολία της διδασκαλίας και της μάθησης των εννοιών της Άλγεβρας μιας και είναι περιορισμένη η εμβάθυνση στην διδασκαλία του διανυσματικού λογισμού, των πινάκων και των οριζουσών τους και των άλλων συμπεριλαμβανομένων εννοιών από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση ακόμη, και από την άλλη δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην καλλιέργεια των διάφορων μορφών αναπαράστασης του διανύσματος και άρα και των γραμμικών απεικονίσεων. Με βάση το πιο πάνω πλαίσιο προσπαθήσαμε να διερευνήσουμε την κατανόηση των βασικών εννοιών στα τρία κεφάλαια Γραμμικής Άλγεβρας τα οποία αναλύθηκαν και τα λάθη ή τις παρανοήσεις που πιθανόν συναντάμε σε πρωτοετείς ή τελειόφοιτους ή οποιουσδήποτε εξαμήνου φοιτητές του ΕΜΠ.

α) Το δείγμα. Για τους σκοπούς της έρευνας χρησιμοποιήθηκε δείγμα φοιτητών-υποκειμένων. Αποτελούνταν από 222 στον αριθμό φοιτητές των Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ που είχαν διδαχθεί την ύλη των τριών κεφαλαίων της Γραμμικής Άλγεβρας: Διανυσματικοί Χώροι, Γραμμικές Απεικονίσεις και Πίνακες, Χαρακτηριστικά Μεγέθη. Το δείγμα χρησιμοποιήθηκε στο να εξάγουμε συμπεράσματα ως προς την κατανόηση, τα λάθη και τις παρανοήσεις γύρω από τις έννοιες και τα μαθηματικά εργαλεία που συμπεριλαμβάνονται σε αυτά τα κεφάλαια. Το δείγμα κρίνεται ως αντιπροσωπευτικό για τις ανάγκες της έρευνας αφού αποτελείται από άτομα που έχουν ολοκληρώσει τις γυμνασιακές και λυκειακές τους σπουδές, καθώς και την φοίτησή τους τουλάχιστον στο εξάμηνο που διδάχθηκαν τα κεφάλαια. Επομένως, έχουν διδαχθεί το σύνολο των μαθημάτων που άμεσα ή έμμεσα σχετίζονται με την διδασκαλία των διανυσματικών χώρων, των γραμμικών απεικονίσεων και των χαρακτηριστικών μεγεθών. Επιπλέον, τα άτομα αυτά προέρχονται από την μία αντιπροσωπευτική σχολή μηχανικών και εκφράζουν περίπου όλο το φάσμα των φοιτητών του Πολυτεχνείου. Τέλος, η εισδοχή τους στο πανεπιστήμιο μετά από εισαγωγικές εξετάσεις τους προσδίδει το χαρακτηρισμό των «επιμελών» φοιτητών. Τα υποκείμενα του δείγματος λοιπόν, θεωρούνται εξοικειωμένα με τα διανυσματικά μεγέθη και τις έννοιες της Γραμμική Άλγεβρα αφού κατά τα πλείστον αφορούν υποψήφιους αποφοίτους πολυτεχνικής σχολής.

β) Τα γραπτά τελικών εξετάσεων εξαμήνου. Από τα υποκείμενα του δείγματος ζητήθηκε να απαντήσουν σε τρία θέματα στις τελικές γραπτές εξετάσεις, που αποτελούν και τα τρία προβλήματα που αναλύθηκαν ποιοτικά στα τρία πρώτα κεφάλαια και αναζητήθηκαν τα είδη των λαθών ή οι παρανοήσεις ή τα σφάλματα των φοιτητών στις λύσεις που δώσανε (Παράρτημα). Ο πρώτος πίνακας περιλαμβάνει τα είδη των λαθών που παρατηρήθηκαν στα γραπτά και την κωδικοποίησή τους στο πρώτο θέμα ή αλλιώς στο πρόβλημα 1, με στόχο να εξεταστούν σε βάθος τα λάθη που εμφανίζονται σε κάθε βήμα στην λύση, στην επίλυση συστημάτων και στην εύρεση γεννητόρων των υποχώρων, γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων και αναγωγή τους σε κλιμακωτή μορφή, εύρεση βάσης και διάστασης. Τα υποκείμενα καλούνται να δώσουν λύσεις στο πρόβλημα 1, χρησιμοποιώντας αυτά που διδάχθηκαν στα τρία πεδία θεωρίας της Γραμμικής Άλγεβρας στην σχολή και όσα ήδη γνωρίζουν από το σχολείο.

γ) Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων καταγράφονται τα ποσοστά των λαθών για τα πιο σημαντικά λάθη στους διανυσματικούς χώρους:

ΠΟΣΟΣΤΑ	***ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***	***ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***
ΔΑΒ (ΔΑ- ΔΒ)	*8.11%*	*91.89%*
ΠΑΒΓ (ΠΑ- ΠΒ- ΠΓ)	*21.62%*	*78.38%*
ΚΑΒ (ΚΑ- ΚΒ)	*7.66%*	*92.34%*
ΚΓΔ (ΚΓ- ΚΔ)	*7.66%*	*92.34%*

Επίσης, το ποσοστό των φοιτητών που έλυσαν σωστά το πρόβλημα 1 είναι ***31.53%,*** το ποσοστό αυτών που δεν το έλυσαν καθόλου είναι ***36.49%*** και το ποσοστό που έκαναν κάποιο λάθος ή δεν έλυσαν όλα τα ερωτήματα είναι ***31.98%***.

δ) Συμπεράσματα. Από τα βασικά προβλήματα στην Γραμμική Άλγεβρα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στο πρόβλημα 1 ή με την μέθοδο του Gauss. Και όλα αυτά εφαρμόζονται και στην συνέχεια όταν ζητούνται η εύρεση βάσης ή διάστασης ενός διανυσματικού χώρου ή των υποχώρων του. Από το σχολείο ακόμη, στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο οι φοιτητές διδάσκονται βασικά στοιχεία θεωρίας Άλγεβρας σε συνδυασμό με ασκήσεις και παραδείγματα και έτσι παίρνουν τις βάσεις για να μπορούν να διαχειριστούν προβλήματα όπως το πρόβλημα 1. Πιο συγκεκριμένα, μαθαίνουν να χειρίζονται αριθμητικές παραστάσεις και πρωτοβάθμιες εξισώσεις, πολυωνυμικές παραστάσεις, ταυτότητες, κανόνες παραγοντοποίησης και απλοποίησης ρητών παραστάσεων καθώς και επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Επίσης, μαθαίνουν για τα διανύσματα σε δύο (2) διαστάσεις και επίλυση συστημάτων ομογενών ή μη, ή πάλι βασικά στοιχεία γραμμικών εξισώσεων. Όλα αυτά αφορούν μερικές από τις βασικές έννοιες, γνώσεις και δεξιότητες που πρέπει να έχουν οι φοιτητές που φοιτούν σε Θετικές ή Πολυτεχνικές Σχολές. Αποτελούν δηλαδή μερικά από τα βασικά κομμάτια ύλης που διδάσκονται στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και είναι απαραίτητα για να μπορέσει ο φοιτητής να παρακολουθήσει και να κατανοήσει την πανεπιστημιακού επιπέδου ύλη, στην Γραμμική Άλγεβρα στην προκειμένη περίπτωση, που διδάσκεται στην σχολή. Μόνο που στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει στο μεγαλύτερο ποσοστό φοιτητών. Υπάρχουν πολλοί λόγοι γιατί συμβαίνει αυτό, παρόμοιοι με αυτούς που αφορούν και την μετάδοση της γνώσης της Άλγεβρας στο πανεπιστήμιο και φυσικά αντικατοπτρίζονται συνολικά σχεδόν στα αποτελέσματα των γραπτών των φοιτητών στις τελικές εξετάσεις εξαμήνου.

Πριν ξεκινήσουμε να σχολιάζουμε τα λάθη που εμφανίζονται στην έρευνα μας θα πρέπει να αναφέρουμε ότι κατά την διάρκεια του εξαμήνου οι φοιτητές διδάχτηκαν στοιχεία θεωρίας και εφαρμογές διανυσματικού λογισμού, διανυσματικών (ή γραμμικών) χώρων, γραμμοπράξεις και γραμμική ανεξαρτησία. Επιπλέον, διδάχτηκαν στοιχεία γραμμικών συστημάτων και πίνακες που πλέον δεν διδάσκονται στο Λύκειο. Όλη αυτή η διδακτέα ύλη σε συνδυασμό με αυτά που θεωρείται ότι διδάχτηκαν στο σχολείο και αναφέρονται πιο πάνω ήταν αυτονόητα γνωστά. Αλλά παρατηρήθηκαν διάφορα λάθη και το αυτονόητο δεν ίσχυε τελικώς.

Τα λάθη ή σφάλματα που συναντώνται είναι πολλά και διάφορα, ενώ τα είδη των λαθών που εμφανίζονται σε αυτό το κομμάτι της Γραμμικής Άλγεβρας των διανυσματικών χώρων, τουλάχιστον για το δείγμα γραπτών των Πολιτικούς Μηχανικούς του ΕΜΠ στις τελικές εξετάσεις Φεβρουαρίου 2012 αφορούν κατ' αρχάς τρεις κατηγορίες. Στην πρώτη γενική κατηγορία (i) με σύμβολο (Κ) συμπεριλαμβάνονται τα λάθη που αφορούν την κατανόηση της θεωρίας των διανυσματικών χώρων και η ποιοτική τους ανάλυση σε υποκατηγορίες είναι στην πιο πάνω παράγραφο. Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες δύο γενικές κατηγορίες λαθών. Στην δεύτερη κατηγορία (ii) με σύμβολο Δ με τις επιμέρους υποκατηγορίες της αναλύονται τα λάθη που αφορούν στην έλλειψη δικαιολόγησης και απάντησης από πλευράς μερίδας των φοιτητών στο ερώτημα: Γιατί οι πίνακες των διανυσμάτων που προκύπτουν μετά την επίλυση των συστημάτων σωστή ή λανθασμένη, θεωρούνται γραμμικά ανεξάρτητα; Στην τρίτη και τελευταία υποκατηγορία (iii) με σύμβολο Π αναλύονται τα λάθη στις πράξεις και στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων.

Η ομαδοποίηση των λαθών στους διανυσματικούς χώρους στις τρεις μεγάλες κατηγορίες και η κωδικοποίησή τους σε υποκατηγορίες για μεγαλύτερη διευκόλυνση στην κατανόηση και στην ποσοτική ανάλυσή τους έγινε με τα παρακάτω σύμβολα και είναι η εξής:

Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, για την γραμμική ανεξαρτησία.

ΔΑ: δεν απαντούν γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα, είτε είναι σωστά ή λάθος

ΔΒ: δικαιολογούν την γραμμική ανεξαρτησία, αλλά είτε τα διανύσματα είναι λάθος από προηγούμενα βήματα ή και σωστά να είναι τα θέτουν σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουν ως γεννήτορες κάποια από αυτά ανάλογα με το βαθμό του πίνακα που τους προκύπτει

Π: λάθη στις πράξεις, στην λύση συστήματος διανυσμάτων.

ΠΑ: αριθμητικά λάθη στις πράξεις ή στα πρόσημα.

ΠΒ: επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων, λάθος αριθμός διανυσμάτων - γεννητόρων είτε περισσότερα είτε λιγότερα, λάθος διανύσματα όλα ή μερικά, συνδυασμός αυτών ή αυθαίρετη πρόσθεση μηδενικού διανύσματος σ' αυτά που βρίσκουν από την επίλυση.

ΠΓ: λάθος αριθμός διανυσμάτων από προηγούμενα βήματα άρα και τα διανύσματα βάσης ή η διάσταση ή και σωστά να τα βρίσκουν μπερδεύουν την διάσταση με τον βαθμό του πίνακα και παίρνει τα πρώτα (μη μηδενικά) ανάλογα τον βαθμό.

Κ: κατανόηση της ύλης των διανυσματικών χώρων.

ΚΑ: διανύσματα τομής Α και Β ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων Α και Β ή διανύσματα τομής τα κοινά των Α,Β, είτε προσθέτει μοναδιαία διανύσματα σ' αυτά που βρίσκει ώστε η διάσταση του υποχώρου να είναι ίση με 4 όπως και του διανυσματικού χώρου.

ΚΒ: δεν αντιλαμβάνονται έννοια διάστασης και πώς αυτή συνδέεται με βάση ή γεννήτορες και δεν την βρίσκουν παρόλο που βρίσκουν συνήθως πριν την βάση σωστή ή λάθος ή συγχέουν διάσταση με βαθμό πίνακα.

ΚΓ: στο θεώρημα διάστασης για τον υπόχωρο Α+Β είτε δεν το γράφουν καθόλου είτε δεν το θυμούνται ακριβώς είτε το γράφουν λάθος και το μπερδεύουν με διάσταση τομής και απλή πρόσθεση διαστάσεων Α και Β.

ΚΔ: είτε προσπαθούν να βρουν διάσταση του Α+Β από τα διανύσματα βάσης των Α, Β και της τομής τους με πίνακες αυτών και συνδυασμό πινάκων των διανυσμάτων τους και βρίσκοντας βαθμό ή θέτοντας αυτούς σε κλιμακωτή μορφή και επιλέγοντας τα μη μηδενικά που προκύπτουν.

1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

2.1 Γραμμικές απεικονίσεις

2.1.1 Βασικά στοιχεία θεωρίας

Οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων έχουν κάποιες ξεχωριστές ιδιότητες σχετικά με τις πράξεις με τις οποίες είναι εφοδιασμένοι οι δύο χώροι.

Ορισμός 1^{ος} **:** Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους X, Y πάνω στο σώμα K και μία απεικόνιση $\tau: X \to Y$,

Λέγεται K-γραμμική ή απλά γραμμική απεικόνιση, αν και μόνον αν, ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $\tau(x, y)= \tau(x)+\tau(y)$, για κάθε $x, y \in X$ (προσθετική ιδιότητα)

ii) $\tau(\lambda\cdot x)= \lambda\cdot\tau(x)$, για κάθε $x\in X, \lambda\in K$ (ομογενής), ή ισοδύναμα

iii) $\tau(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)= \lambda\cdot\tau(x)+\mu\cdot\tau(y)$, για κάθε $x, y\in X$, $\lambda, \mu\in K$.

Σχόλιο 1^{ο} ***:*** Την γραμμική απεικόνιση πολλές φορές την ονομάζουμε και γραμμικό μετασχηματισμό ή γραμμικό τελεστή ή και ομομορφισμό γραμμικών χώρων, ενώ αν ο Y= X τότε λέγεται ενδομορφισμός.

Ορισμός 2^{ος} **:** Αν $\tau: X \to Y$ είναι μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων X, Y πάνω στο σώμα K, τότε το σύνολο

$Ker(\tau):= \{x\in X: \tau(x)= 0\}$,

λέγεται πυρήνας της τ, ενώ το σύνολο

$Im(\tau):= \tau(X)= \{\tau(x): x\in X\}\subset Y$,

λέγεται εικόνα της τ.

Θεώρημα 1^{ο} : Τα σύνολα Ker(τ) και Im(τ) είναι υπόχωροι των διανυσματικών χώρων X και Y, αντιστοίχως.

Συνεχίζουμε με κάποιους ορισμούς για τις γραμμικές απεικονίσεις και σχόλια πάνω σε αυτούς. Έχουμε τους διανυσματικούς χώρους X και Y και την γραμμική απεικόνιση $\tau: X \to Y$, η οποία είναι ομομορφισμός γραμμικών χώρων και στην περίπτωση που η τ είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή $\tau(x)= \tau(y) \rightarrow x= y$, τότε λέγεται μονομορφισμός, ενώ αν $\tau(X)= Y$ δηλαδή η τ είναι επί του Υ τότε λέγεται επιμορφισμός.

Επίσης, αν η γραμμική απεικόνιση τ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε λέγεται ισομορφισμός των διανυσματικών χώρων Χ και Υ. Οι διανυσματικοί χώροι Χ, Υ όπου μεταξύ τους ορίζεται ένας ισομορφισμός λέγονται με την σειρά τους ισόμορφοι και συμβολίζονται $X\cong Y$.

<u>Σχόλιο 2^o </u>: Η σχέση της ισομορφίας στο σύνολο όλων των διανυσματικών χώρων πάνω στο σώμα Κ είναι σχέση ισοδυναμίας και επομένως το σύνολο των διανυσματικών χώρων χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους και αποτελούνται από διανυσματικούς χώρους που είναι ισόμορφοι και άρα όλοι οι ισόμορφοι ανά δύο διανυσματικοί (ή γραμμικοί) χώροι ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και ικανοποιούν τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες (αν και διαφέρουν ως προς τη φύση των στοιχείων τους).

Ακολουθεί ένα θεώρημα που αφορά την ταξινόμηση των διανυσματικών χώρων πάνω στο σώμα Κ ως προς την σχέση ισοδυναμίας που ορίστηκε παραπάνω και έχει ως εξής:

<u>Θεώρημα 2^o :</u> Κάθε διανυσματικός χώρος Χ πάνω στο σώμα Κ, διάστασης r, είναι ισόμορφος με τον K^r.

<u>Σχόλια 3^o :</u> α) Η ισομορφία μεταξύ του τυχαίου r-διάστατου διανυσματικού χώρου Χ και του K^r μας επιτρέπει να ταυτίσουμε το τυχόν $x= \xi_1\cdot x_1+\ldots+\xi_r\cdot x_r$ και γράφουμε $x= (\xi_1,\ldots \xi_r)$, όταν βέβαια γνωρίζουμε την βάση ως προς την οποία το x έχει συντεταγμένες $(\xi_1,\ldots, \xi_r)$. Το τελευταίο δημιουργεί και τα προβλήματα σχετικά με την πλήρη ταύτιση του τυχαίου r-διάστατου χώρου με τον K^r, δηλαδή το ότι ο ισομορφισμός του προηγούμενου Θεωρήματος 2 εξαρτάται από τις βάσεις των δύο χώρων. Οι ορισμοί και τα θεωρήματα που ισχύουν στον K^r ασφαλώς, αφού είναι ανεξάρτητα από την θεωρούμενη βάση (σύστημα συντεταγμένων), θα ισχύουν και σε κάθε άλλο διανυσματικό χώρο διάστασης r.

β) Από το Θεώρημα 2 είναι φανερό ότι δύο διανυσματικοί χώροι ίδιας διάστασης είναι ισόμορφοι. Αλλά, δεν είναι σαφές το αν ο K^m είναι ισόμορφος με τον K^r, ,$m\neq r$, ή πιο γενικά αν είναι ισόμορφοι δύο διανυσματικοί χώροι διαφορετικής διάστασης . Σε αυτό το σημείο την απάντηση την δίνει το παρακάτω θεώρημα:

<u>Θεώρημα 3^o :</u> Αν Χ και Υ είναι δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα Κ και

$\tau: X \rightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύουν:

i) $\tau(0)= 0$ (το $0\epsilon X$ απεικονίζεται στο $0\epsilon Y$).

ii) $\tau(-x)= -\tau(x)$, για κάθε $x\epsilon X$

iii) η τ είναι 1-1 $\leftrightarrow Ker(\tau)= \{0\}$

iv) Αν η τ είναι ισομορφισμός και $\{x_1, x_2,\ldots, x_r\}$ είναι μία βάση του X, τότε $\{\tau(x_1), \tau(x_2),\ldots, \tau(x_r)\}$ είναι βάση του Y.

Παρατηρούμε ότι το (iv) του Θεωρήματος 3 δίνει την απάντηση στο σχόλιο (ii) παραπάνω. Πράγματι, αν οι χώροι X και Y με $\dim(X)= m\neq r= \dim(Y)$ ήταν ισόμορφοι, τότε από το (iv) ο χώρος Y θα είχε μία βάση με m-στοιχεία, όμως $m\neq \dim(Y)$, άρα άτοπο.

2.1.2 Ο διανυσματικός χώρος L(X, Y)

Ο χώρος L(X, Y) πάνω στο σώμα K είναι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο X στον διανυσματικό χώρο Y. Και αυτό το σύνολο είναι διανυσματικός χώρος αν ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

$(\tau_1+\tau_2)(x):= \tau_1(x)+\tau_2(x)$

$(\lambda\cdot\tau_1)(x):= \lambda\cdot\tau_1(x)$,

για κάθε $\tau_1, \tau_2\epsilon L(X, Y)$ και για κάθε $\lambda\epsilon K$. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι η μηδενική απεικόνιση. Όταν μάλιστα X= Y, τότε το σύνολο συμβολίζεται L(X, X) και είναι το σύνολο των ενδομορφισμών του X.

2.1.3 Πίνακες και γραμμικές απεικονίσεις

Εισαγωγή

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους X και Y πάνω στο σώμα K, με βάσεις $v_1= \{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$ και $v_2= \{y_1, y_2,\ldots,y_r\}$ αντίστοιχα, και την γραμμική απεικόνιση τ: X → Y.

Τότε θα υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $\alpha_{ij}\epsilon K$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq r$ έτσι ώστε:

$$\tau(x_1) = \alpha_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2 + \cdots + a_{1r}\cdot y_r$$
$$\tau(x_2) = a_{12}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 + \cdots + a_{2r}\cdot y_r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tau(x_m) = a_{m1}\cdot y_1 + a_{m2}\cdot y_2 + \cdots + a_{mr}\cdot y_r$$

Από τις ισότητες παραπάνω που παρέχουν (m·r)- στοιχεία από το σώμα K τοποθετημένα σε m-γραμμές των r-στοιχείων οδηγούν στον ορισμό 3:

Ορισμός 3ος : Μία ορθογώνια παράταξη (m·r)-στοιχείων από το σώμα K σε m- οριζόντιες σειρές, τις γραμμές, και σε r- κατακόρυφες σειρές, τις στήλες, είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \quad (2)$$

και λέγεται πίνακας, τύπου mxr, με στοιχεία από το σώμα K και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ή με το τυπικό στοιχείο α_{ij} σε παρένθεση, δηλαδή (α_{ij}) όταν ο τύπος του πίνακα είναι γνωστός.

Το σύνολο όλων των (mxr) πινάκων με στοιχεία από το σώμα K συμβολίζεται με $M_{mxr}(K)$ ή M_{mxr} με γνωστό το K.

Όταν m= r, ο πίνακας λέγεται τετραγωνικός και το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων συμβολίζεται με $M_r(K)$ ή M_r.

Η σχέση ισότητας στο σύνολο Mmxr(K) ορίζεται ως εξής:

αν A= (α_{ij}) και B= (β_{ij})$\epsilon M_{mxr}(K)$, τότε

A= B $\leftrightarrow$ $\alpha_{ij}= \beta_{ij}$, για κάθε i= 1, 2,…, m, j= 1, 2,…, r (3)

δηλαδή δύο πίνακες του συνόλου $M_{mxr}(K)$ θεωρούνται διακεκριμμένοι, όταν για ένα τουλάχιστον ζεύγος (i, j), τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι διαφορετικά.

Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Έχουμε τους διανυσματικούς χώρους X και Y με τις βάσεις $\{x_1, x_2,\ldots,x_m\}$ και $\{y_1, y_2,\ldots,y_r\}$ όπως πριν και οι ισότητες (1) γράφονται με συνοπτικό τρόπο στην μορφή:

$\tau(x_i) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot y_j$, i= 1, 2,…, m. (4)

Άρα σε κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων X και Y πεπερασμένης διάστασης m και r, αντίστοιχα, με δεδομένες τις βάσεις τους και μέσω των ισοτήτων (1) και (4) αντιστοιχίζεται ένας πίνακας τύπου mxr. Έτσι ορίζεται η απεικόνιση $M: L(X, Y) \rightarrow M_{mxr}(K): \tau \rightarrow M(\tau):= A= (\alpha_{ij})$, όπου τα α_{ij} ορίζονται από το (4).

Ορισμός $4^{ος}$: Ο πίνακας Μ(τ) ή $M(\tau)(\nu_1,\nu_2)$ λέγεται πίνακας της γραμμικής απεικόνισης τ ως προς τις βάσεις $\nu_1= \{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$ και $\nu_2= \{y_1, y_2,\ldots, y_r\}$ των διανυσματικών χώρων X και Y αντιστοίχως.

Ο πίνακας Μ(τ) προσδιορίζει πλήρως την γραμμική απεικόνιση τ, γιατί όταν ξέρουμε τον πίνακα της τ τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε την εικόνα μέσω της τ του τυχαίου στοιχείου xϵX. Η απεικόνιση Μ είναι 1-1 και για κάθε πίνακα $A= (\alpha_{ij})$ υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση τϵL(X, Y), τέτοια ώστε Μ(τ)= Α.

Επιπλέον, η τ είναι γραμμική. Έτσι μέχρι τώρα έχουμε πει ότι η απεικόνιση που προσδιορίζεται από τον πίνακα Μ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

2.1.4 Ο διανυσματικός χώρος $M_{mxr}(K)$ και η άλγεβρα των πινάκων $M_r(K)$

Ο διανυσματικός χώρος $M_{mxr}(K)$: Η ύπαρξη της αμφιμονοσήμαντης και επί απεικόνισης Μ μεταξύ του διανυσματικού χώρου L(X, Y) και του συνόλου $M_{mxr}(K)$ οδηγεί στον εφοδιασμό του τελευταίου με τη δομή διανυσματικού χώρου μέσω αυτής της γραμμικής απεικόνισης.

Θεωρούμε (mxr) πίνακες $A= (\alpha_{ij})$ και $B= (\beta_{ij})$ των οποίων οι αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις είναι οι τ_1 και τ_2, δηλαδή $M(\tau_1)= A$ και $M(\tau_2)= B$. Επίσης, $\tau_1(x_i)= \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot y_j$ και $\tau_2(x_i)= \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \cdot y_j$, i= 1, 2,…, m.

Και για κάθε i= 1, 2,…,m ισχύουν:

$$(\tau_1+\tau_2)(x_i)= \tau_1(x_i)+\tau_2(x_i)= \sum_{j=1}^{r}(a_{ij} + \beta_{ij} \cdot y_j)$$

$$(\lambda\cdot\tau_1)(x_i)= \lambda\cdot\tau_1(x_i)= \sum_{j=1}^{r}\big(\lambda \cdot a_{ij}\big) \cdot y_j$$

Οπότε,

$$M(\tau_1+\tau_2)= (\alpha_{ij}+\beta_{ij})$$

$$M(\lambda\cdot\tau_1)= (\lambda\cdot\alpha_{ij})$$

ή ισοδύναμα,

$$A+B:= (\alpha_{ij}+\beta_{ij})$$

$$\lambda\cdot A:= (\lambda\cdot\alpha_{ij}), \text{ με } A= (\alpha_{ij}) \text{ και } B= (\beta_{ij}).$$

Είναι φανερό ότι με τις παραπάνω πράξεις στο σύνολο $M_{mxr}(K)$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού και άρα το σύνολο γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα Κ. Επιπλέον, είναι και ισόμορφος προς τον διανυσματικό χώρο L(X, Y), αφού από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση M γίνεται και γραμμική άρα και ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων L(X, Y) και $M_{mxr}(K)$.

Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι ο πίνακας) που έχει όλα τα στοιχεία του μηδέν. Θεωρούμε το σύνολο των πινάκων $\{E_{ij}\}$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq r$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει το στοιχείο του που ορίζεται από την i-γραμμή και την j-στήλη ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα ίσα με 0. Το σύνολο αυτό αποτελείται από (m·r)-πίνακες και αποτελεί βάση του διανυσματικού χώρου $M_{mxr}(K)$, αφού κάθε πίνακας $A= (\alpha_{ij})\epsilon M_{mxr}(K)$ γράφεται ως εξής:

$$A= a_{11}\cdot E_{11} +\ldots+ a_{1r}\cdot E_{1r} +a_{21}\cdot E_{21} +\ldots+a_{mr}\cdot E_{mr},$$

$$\text{ή } A= \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\cdot E_{ij}$$

και επίσης,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}\cdot E_{ij} = 0 \rightarrow (\lambda_{ij})= 0 \leftrightarrow \lambda_{ij}= 0$$

για κάθε i= 1, 2,…, m, j= 1, 2,…r.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο Θεώρημα 4 παρακάτω:

Θεώρημα 4^ο^: Αν X και Y είναι διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα K με dimX= m, dimY= r, και $M_{mxr}(K)$ είναι το σύνολο των πινάκων τύπου mxr, με στοιχεία από το σώμα K,τότε ισχύουν:

- ***i)*** Το σύνολο $M_{mxr}(K)$ γίνεται διανυσματικός χώρος πάνω στο K, μέσω των πράξεων που ορίσαμε παραπάνω.
- ***ii)*** $L(X, Y)\cong M_{mxr}(K)$
- ***iii)*** $\dim L(X, Y)= \dim M_{mxr}(K)= m\cdot r$.

Η άλγεβρα των πινάκων Mr(K): Σε αυτό το σημείο, ξέροντας ότι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το R εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων γίνεται δακτύλιος με μονάδα, θα εισάγουμε μία αντίστοιχη πράξη στο σύνολο όλων των πινάκων.

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους X, Y και Z πάνω στο σώμα K, πεπερασμένης διάστασης m, r και n, αντίστοιχα, και τις γραμμικές απεικονίσεις

$\tau_1: X \rightarrow Y$ και $\tau_2: Y \rightarrow Z$.

Διαπιστώνουμε ότι και η σύνθεση $\tau_2{}^\circ\tau_1$των απεικονίσεων $\tau_1\, και\, \tau_2$ είναι γραμμική.

Αν $\{x_1,\ x_2, \dots, x_m\}$, $\{y_{1,}\, y_1, \dots, y_r\}$ και $\{z_{1,}\, z_2, \dots, z_n\}$ είναι βάσεις των διανυσματικών χώρων X, Y και Z, αντίστοιχα, τότε θα ισχύουν:

$\tau_1(x_i)$= $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot y_j$ και $\tau_2(y_j)$= $\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \cdot z_k$,

Για i=1, 2,….,m , j=1, 2,…, r και οι πίνακες των τ_1και τ_2είναι οι M(τ_1)= (α_{ij})= AϵM_{mxr}(K) και M(τ_2)= (β_{ij})= BϵM_{rxn}(K), ενώ για την σύνθεση των τ_1 και τ_2ισχύει:

$(\tau_2{}^\circ\tau_1)(x_i)$= $\tau_2(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot y_j)$= $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot \beta_{jk}) \cdot z_k$, i= 1, 2,…, m,

Δηλαδή,

M($\tau_2{}^\circ\tau_1$)= (Υ_{ik})= GϵM_{mxn}(K)

Όπου το γενικό στοιχείο του πίνακα G ορίζεται από

G_{ik}= $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot \beta_{jk}$=$a_{i1} \cdot \beta_{1k}$+$a_{i2} \cdot \beta_{2k}$+$a_{1r} \cdot \beta_{rk}$

Άρα για τους πίνακες A$\epsilon M_{mxr}(K)$ και BϵM_{rxn}(K) ορίζουμε το γινόμενό τους από την σχέση:

A·B= G= (γ_{ik}) = $(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \cdot \beta_{jk})\epsilon M_{mxn}$(K)

Ή ισοδύναμα, από τις αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις,

M(τ_1)M(τ_2):= M($\tau_2{}^\circ\tau_1$).

Είναι προφανές ότι το γινόμενο A·B των δύο πινάκων ορίζεται από κατάλληλους πίνακες, όπου ο αριθμός των στηλών του A πρέπει να ταυτίζεται με τον αριθμό των γραμμών του B. Και τότε για να βρούμε το γενικό στοιχείο (γ_{ik}) του πίνακα A·B αθροίζουμε τα γινόμενα της i-γραμμής του A και της k-στήλης του B όρο προς όρο.

Αποδεικνύεται λοιπόν, από τις αντίστοιχες γραμμικές απεικονίσεις, ότι ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) (λ·A+μ·B)·Γ= λ·A·Γ+μ·B·Γ (αριστερά επιμεριστική ιδιότητα)

ii) A·(λ·B+μ·Γ)= λ·A·B+μ·A·Γ (δεξιά επιμεριστική ιδιότητα)

iii) Α·(Β·Γ)= (Α·Β)·Γ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Για κάθε λ, μϵK και για όλους τους πίνακες Α, Β και Γ που είναι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι πολλαπλασιασμοί πινάκων.

Ξαναγυρίζοντας τώρα στο σύνολο M_r(K) των τετραγωνικών πινάκων τύπου rxr με στοιχεία από το σώμα Κ, βλέπουμε ότι στο σύνολο αυτό ορίζεται η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων και σε συνδυασμό με την πράξη της πρόσθεσης το εφοδιάζει με τη δομή του δακτυλίου με μονάδα. Το σύνολο M_r(K) λοιπόν, με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού έχει τη δομή:

i) Διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα Κ και είναι διάστασης r^2

ii) Δακτυλίου με μονάδα και

iii) Ισχύει ότι λ·(Α·Β)= (λ·Α)·Β= Α·(λ·Β), ∀ $\lambda\epsilon K, A, B\epsilon M_r$(K)

Άρα το σύνολο M_r(K) είναι μία προσεταιριστική άλγεβρα με μονάδα, πάνω στο σώμα Κ με διάσταση r.

Η μονάδα της άλγεβρας M_r(K) είναι η μονάδα του αντίστοιχου δακτυλίου που ορίζεται από τον πίνακα rxr:

$$\mathrm{I_r} \coloneqq (\delta_{\mathrm{ij}})$$

ή I, αν το r είναι γνωστό και όπου δ_{ij} είναι το «δέλτα του Kronecker»

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, \alpha\nu\ i=j\\ 0, \alpha\nu\ i\neq j\end{cases}$$

Επίσης, να πούμε ότι το σύνολο M_r(K) δεν είναι σώμα, αφού δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Ακόμη, δεν υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο για όλους τους πίνακες της άλγεβρας M_r(K). Όταν για έναν πίνακα ΑϵM_r(K), υπάρχει πίνακας ΧϵM_r(K) έτσι ώστε να ισχύουν:

Α·Χ= Χ·Α= I_r,

Τότε ο πίνακας Χ λέγεται αντίστροφος πίνακας του Α και συμβολίζεται με A^{-1} . Οι πίνακες γενικά για τους οποίους υπάρχει ο αντίστροφος λέγονται αντιστρέψιμοι ή ομαλοί ή μη-ιδιάζοντες πίνακες. Το σύνολο των αντιστρέψιμων (rxr) τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα K αποτελεί (μη αβελιανή) ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό και συμβολίζεται ως GL(r, K) και λέγεται «γενική γραμμική ομάδα». Οπότε από την θεωρία των αλγεβρικών δομών, ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}, $A \epsilon$GL(r, K) είναι μοναδικός.

2.1.5 Είδη πινάκων και πράξεις

Ξεκινάμε με τα βασικά είδη πινάκων που συναντούμε στην Γραμμική Άλγεβρα:

α) <u>Ορισμός 5^{ος}</u>: Μετά από την εναλλαγή των γραμμών ενός πίνακα, έστω πίνακας A= (α_{ij})= $\epsilon M_{mxr}(K)$, με τις στήλες του προκύπτει ένας πίνακας τύπου (rxm) που λέγεται ανάστροφος του A και συμβολίζεται με A^T. Δηλαδή ο ανάστροφος ισούται με: $A^T =$ $(\alpha_{ji})_{\mathrm{rxm}}$.

Από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $(A+B)^T= A^T+B^T$, για κάθε A, $B\epsilon M_{mxr}$(K).

ii) $(A\cdot B)^T= B^T\cdot A^T$, για κάθε $A\epsilon M_{mxr}(K)$, $B\epsilon M_{rxn}$(K)

iii) $I^T= I$

iv) $A^{TT}:= (A^T)^T= A$

v) $(A^T)^{-1}= (A^{-1})^T$.

Για την ιδιότητα (ii), αν (A_{ij}) είναι το γενικό στοιχείο του πίνακα τότε θα έχουμε:

$$((A\cdot B)^T)_{ij}= (A\cdot B)_{ji}= \sum_{k=1}^{r} a_{jk}\cdot \beta_{ki}= \sum_{k=1}^{r}(B^T)ik\cdot (A^T)kj = (B^T\cdot A^T)ij,$$

ενώ για την ιδιότητα (v) λόγω των ιδιοτήτων (ii) και (iii) θα έχουμε:

$$(A^{-1})^T\cdot A^{T\,=}\, A^T\cdot (A^{-1})^T= I$$

ή ισοδύναμα, λόγω μοναδικότητας του αντιστρόφου πίνακα:

$$(A^T)^{-1}= (A^{-1})^T.$$

β) Το δεύτερο είδος πινάκων που συναντούμε συχνά είναι οι πίνακες-γραμμή και οι πίνακες-στήλη. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο M_{1xr}(K) των (1xr) πινάκων-γραμμή και τον διανυσματικό χώρο M_{rx1}(K) των (rx1) πινάκων-στήλη και το διανυσματικό χώρο K^r . Ορίζουμε τις απεικονίσεις

τ_1: $K^r \to M_{1xr}(K)$: $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \to \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\end{bmatrix}$,

τ_2: $K^r \to M_{1xr}(K)$: $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \to \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\end{bmatrix}$,

και προφανώς είναι γραμμικές, 1-1 και επί. Άρα οι διανυσματικοί χώροι K^r, $M_{rx1}(K)$, $M_{1xr}(K)$ είναι ισόμορφοι και άρα μπορούμε να ταυτίζουμε διανύσματα του K^r με πίνακες μιας γραμμής ή στήλης γράφοντας:

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \equiv [\xi_1\ \xi_2\ \dots\ \xi_r]$

$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \equiv \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\end{bmatrix} = [\xi_1\ \ \xi_2\ \ \dots\ \ \xi_r]^T$.

Επιπλέον, από γνωστό θεώρημα γνωρίζουμε ότι κάθε διανυσματικός χώρος X πάνω στο σώμα K, διάστασης r, είναι ισόμορφος προς το διανυσματικό χώρο K^r. Άρα αν v= $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι μία βάση του X, μπορούμε να ταυτίσουμε το στοιχείο $\xi_1 \cdot v_1 + \xi_2 \cdot v_2 + \cdots + \xi_r \cdot v_r$ του X με έναν πίνακα-γραμμή ή έναν πίνακα-στήλη. Δηλαδή,

$\xi_1 \cdot v_1 + \cdots . + \xi_r \cdot v_r \equiv [\xi_1\ \dots\ \xi_r\ ]$ ή $\xi_1 \cdot v_1 + \cdots + \xi_r \cdot v_r \equiv \begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\end{bmatrix}$.

Ξαναγυρίζουμε στην σχέση που ορίζει την γραμμική απεικόνιση τ_1 και ο πίνακάς της θεωρείται γνωστός. Θα έχουμε:

x= $\xi_1 \cdot x_1 + \ \dots\ + \xi_m \cdot x_m \equiv [\xi_1\ \dots\ \xi_m]$

$\tau_1(x) = \psi_1 \cdot y_1 + \ \dots + \psi_r \cdot y_r \equiv [\psi_1\ \dots\ \psi_r]$,

τότε: $\tau_1(x) = [\psi_1\ \dots\ \psi_r] = [\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot a_{i1}\ \dots\ \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot a_{ir}] =$

$[\xi_1\ \dots\ \xi_m] \cdot \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mr}\end{bmatrix} = x \cdot A$

Πρακτικά, για να βρούμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης τ_1ως προς τις βάσεις v_1= $\{x_1, \dots, x_m\}$, v_2= $\{y_1, \dots, y_r\}$ των διανυσματικών χώρων X και Y, αντίστοιχα, εκφράζουμε με τις σχέσεις (1) τις εικόνες $\tau_1(x_1), \dots, \tau_1(x_m)$ των διανυσμάτων της βάσης v_1*ως προς την βάση* v_2. Οι συντεταγμένες του $\tau_1(x_i)$ ως προς τη βάση v_2 ορίζουν την πρώτη γραμμή του πίνακα $M(\tau_1)$ και εν γένει οι συντεταγμένες του $\tau_1(x_i)$ ως προς τη βάση v_2 ορίζουν την i-γραμμή του πίνακα $M(\tau_1)$, i= 1, 2,…., m.

Αν τώρα θεωρήσουμε τους ανάστροφους πίνακες των δύο μελών της ισότητας της $\tau_1(x)= x\cdot A$ παραπάνω θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_r\end{bmatrix}= A^T\cdot\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix}.$$

Πολλές φορές μάλιστα, ως πίνακας της γραμμικής απεικόνισης τ_1: $X \to Y$ $ως\ προς\ τις\ βάσεις\ v_1\ και\ v_2$ των διανυσματικών χώρων X και Y ορίζεται να είναι ο πίνακας B:= A^T , και αυτό συμβαίνει κυρίως όταν τα διανύσματα των χώρων X και Y ταυτίζονται με πίνακες μίας στήλης. Για την κατασκευή λοιπόν του πίνακα B οι συντεταγμένες της εικόνας $\tau_1(x_i)$ ως προς την βάση v_2 του χώρου Y, ορίζουν την i-στήλη του πίνακα B με i= 1, 2, …, m και έχουμε:

$$x= \begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix},\ \tau_1(x)= \begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_r\end{bmatrix},$$ και τότε καταλήγουμε στο: $\tau_1(x)= B\cdot x$.

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατά περίπτωση τη σχέση $\tau_1(x)= x\cdot A$ ή τη σχέση
$\tau_1(x)= B\cdot x$.

γ) Ένας τετραγωνικός πίνακας A= (α_{ij}) λέγεται διαγώνιος, όταν όλα τα στοιχεία του εκτός της κύριας διαγωνίου είναι μηδενικά. Δηλαδή, $\alpha_{ij}= 0$, για $i\neq j$. Συνήθως τον διαγώνιο πίνακα τον συμβολίζουμε και έτσι:

A= diag$(a_{11}, \dots ,\ a_{rr})$.

Προφανώς, ισχύει το ακόλουθο:

diag$(a_1, \dots\ ,\ a_r)\cdot$ diag$(\beta_1, \dots ,\ \beta_r)$= diag$(\alpha_1\cdot\beta_1, \dots\ ,\ \alpha_r\cdot\beta_r)$.

Ένας πίνακας λέγεται κάτω (ή άνω) τριγωνικός, όταν όλα τα στοιχεία του άνω (κάτω) από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει $\alpha_{ij}= 0$, για $i<j$ $(i>j)$.

Και ακόμη:

δ) Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται συμμετρικός, όταν A^T= A και αντι-συμμετρικός όταν A^T= -A.

ε) Επίσης, σε μία μη-μηδενική γραμμή, το ηγετικό στοιχείο της είναι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της (από τα αριστερά προς τα δεξιά).

Ένας πίνακας είναι κλιμακωτός ή σε κλιμακωτή μορφή όταν ισχύουν τα εξής:

i) Οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, είναι μετά τις μη-μηδενικές.

ii) Αν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\tau$ είναι οι μη-μηδενικές γραμμές, τότε το ηγετικό στοιχείο της γραμμής γ_{i+1} είναι δεξιότερα από το ηγετικό στοιχείο της γραμμής γ_i , i= 1, 2, … , τ-1.

Ένας πίνακας λέγεται ανηγμένος κλιμακωτός, όταν ισχύουν τα εξής:

i) Είναι κλιμακωτής μορφής

ii) Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής είναι 1.

iii) Σε μία στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο κάποιας γραμμής, όλα τα άλλα στοιχεία της είναι μηδέν.

Τελειώσαμε με τα βασικά είδη πινάκων και σε αυτό το σημείο θα μιλήσουμε για τις στοιχειώδεις πράξεις που ορίζονται στους πίνακες.

Οι στοιχειώδεις πράξεις που ισχύουν στην κλιμακωτή μορφή των διανυσμάτων ισχύουν και στους πίνακες. Μόνο που στους πίνακες το ρόλο των διανυσμάτων παίζουν οι γραμμές και οι στήλες των πινάκων. Άρα σε κάθε πίνακα έχουμε τις ακόλουθες στοιχειώδεις πράξεις:

i) $\mathrm{\gamma_i} \leftrightarrow \mathrm{\gamma_j}$, εναλλαγή της $\mathrm{i}-$γραμμής με την $\mathrm{j}-$στήλη

ii) $\mathrm{\gamma_i} \rightarrow \mathrm{\gamma_i},\ \lambda \neq 0$, πολλαπλασιασμός της $\mathrm{i}-$γραμμής επί $\lambda \neq 0$

iii) $\mathrm{\gamma_i} \rightarrow \mathrm{\gamma_i} + \lambda \cdot \mathrm{\gamma_j}, \lambda \neq 0$, αντικατάσταση της $\mathrm{i}-$γραμμής με το άθροισμά της και του $\lambda-$πλαισίου της $\mathrm{j}-$γραμμής

Αναλόγως, ορίζονται και οι στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του πίνακα και έχουμε:

$\sigma_i \leftrightarrow \sigma_j$, $\sigma_i \rightarrow \lambda \cdot \sigma_j$, $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \lambda \cdot \sigma_j$.

Σε κάθε μία από τις στοιχειώδεις πράξεις αντιστοιχούμε και έναν στοιχειώδη πίνακα ο οποίος προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_r αν του εφαρμόσουμε την αντίστοιχη πράξη.

Οι στοιχειώδεις πράξεις έτσι όπως ορίζονται στους πίνακες οδηγούν στην συνέχεια και στην αναγωγή ενός πίνακα σε (ανηγμένο) κλιμακωτό.

Ας θεωρήσουμε έναν πίνακα A= $(\alpha_{ij})\epsilon M_{mxr}$(K) και με διαδοχική εφαρμογή των στοιχειωδών πράξεων τον ανάγουμε σε κλιμακωτό ή ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

i) Με εναλλαγή γραμμών, αν υπάρχει ανάγκη, κάνουμε το στοιχείο α_{11} διάφορο του μηδενός. Το στοιχείο αυτό λέγεται βασικό, όπως και το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής. Για να διευκολυνθούμε στις πράξεις που ακολουθούν κάνουμε το βασικό στοιχείο μονάδα, κάτι που είναι υποχρεωτικό όταν μετατρέπουμε τον πίνακα A σε ανηγμένο κλιμακωτό και όχι απλά σε κλιμακωτό. Αυτό γίνεται στην περίπτωση της πρώτης γραμμής με την στοιχειώδη πράξη $\gamma_1 \to \left(\frac{1}{\alpha_{11}}\right)\cdot\gamma_1$. Στην συνέχεια με στοιχειώδεις πράξεις του βήματος (iii) μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης, εκτός του βασικού. Οι στοιχειώδεις πράξεις που γίνονται είναι:

$\gamma_2 \to \gamma_2 - \alpha_{21}\cdot\gamma_1, \gamma_3 \to \gamma_3 - \alpha_{31}\cdot\gamma_1, \dots, \gamma_m \to \gamma_m - \alpha_{m1}\cdot\gamma_1$.

Αν η πρώτη στήλη είναι μηδενική την αγνοούμε και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα στην δεύτερη στήλη και ότου
καθ' εξής.

ii) Με εναλλαγή γραμμών (εκτός όμως της πρώτης γραμμής) κάνουμε το στοιχείο α_{22} διάφορο του μηδενός και με την ίδια διαδικασία όπως και πριν το κάνουμε ίσο με το 1 και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της δεύτερης στήλης που είναι ακριβώς κάτω από το βασικό στοιχείο. Αν δεν γίνεται το στοιχείο α_{22} διάφορο του μηδενός τότε προχωρούμε στο πρώτο προς τα δεξιά στοιχείο της δεύτερης γραμμής, το α_{23} και εφαρμόζουμε τα ίδια και πάλι ότου καθ' εξής.

iii) Με στοιχειώδεις πράξεις του βήματος (iii) μετατρέπουμε τα στοιχεία των στηλών που έχουν το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής, που και είναι πάνω από αυτό, σε μηδενικό.

Μετά από την παραπάνω διαδικασία ο πίνακας A ανάγεται σε ανηγμένο κλιμακωτό και κάθε φορά που μηδενίζουμε μόνο τα στοιχεία της στήλης που είναι κάτω από το βασικό στοιχείο ο A γίνεται κλιμακωτός.

Σχόλια 4^ο : ***α)*** Υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει ένας πίνακας κλιμακωτός. Οι πίνακες αυτοί που προκύπτουν κάθε φορά δεν ταυτίζονται κατ' ανάγκη, όμως έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό μεταξύ τους και αυτό είναι ότι έχουν ίδιο αριθμό μη-μηδενικών γραμμών. Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας στον οποίο ανάγεται ένας πίνακας είναι μοναδικός

β) Η μετατροπή ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι πολύ χρήσιμη διαδικασία για την εύρεση του βαθμού του πίνακα αλλά και για την επίλυση γραμμικών συστημάτων (όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 1). Και μάλιστα δεν είναι ανάγκη κάποιες φορές να τον ανάγουμε σε ανηγμένο κλιμακωτό, αφού η αναγωγή του σε κλιμακωτό λύνει μία χαρά το πρόβλημα γραμμικών συστημάτων.

Στην συνέχεια ακολουθούν προτάσεις σχετικά με τις στοιχειώδεις πράξεις και πίνακες και την αντιστρεψιμότητα ενός πίνακα.

Πρόταση 1^η: Έστω κ μία από τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και κ(A) ο πίνακας που προκύπτει μετά την εφαρμογή της πράξης κ στον (rxm) πίνακα A. Αν K είναι ο (rxr) στοιχειώδης πίνακας που αντιστοιχεί στην στοιχειώδη πράξη κ, τότε:

κ(A)= K·A.

Επίσης, αν έστω μ μία από τις στοιχειώδεις πράξεις στηλών και μ(A) ο πίνακας που προκύπτει μετά την εφαρμογή της πράξης μ στον (rxm) πίνακα A.

Αν M είναι ο (mxm) στοιχειώδης πίνακας που αντιστοιχεί στην στοιχειώδη πράξη μ, τότε:

μ(A)= A·M.

Πρόταση 2^η : Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι και αντιστρέψιμος.

Από τις δύο προηγούμενες προτάσεις είναι προφανές, ότι με την διαδοχική εφαρμογή των στοιχειωδών πράξεων γραμμών σε έναν (rxm) πίνακα A, ο πίνακας που προκύπτει θα είναι της μορφής P·A, με P να είναι ο αντιστρέψιμος (rxr) πίνακας ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Ακολουθεί και η τελευταία πρόταση που αφορά τους τετραγωνικούς πίνακες και λέει τα εξής:

Πρόταση 3^η : Έστω ο πίνακας AϵM_r(K) και με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών μετασχηματίζεται σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα B. Τότε θα ισχύουν τα παρακάτω:

i) Αν ο B έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή, τότε ο A είναι μη-αντιστρέψιμος.

ii) Αν ο B έχει μηδενικές γραμμές, τότε B= I_r και A$\epsilon GL(r, K)$.

iii) Αν οι στοιχειώδεις πράξεις $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_t$ με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες $P_1, P_2, \ldots, P_t$ μετασχηματίζουν τον πίνακα Α στο I_r, τότε οι ίδιες πράξεις μετασχηματίζουν τον I_r στον A^{-1} και ισχύει:

$A^{-1} = P_t \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot I_r$ ή $P_t \cdot \ldots \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = I_r$.

Από αυτές τις σχέσεις κατανοούμε ότι αν έχουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα Α και τον μοναδιαίο Ι και εφαρμόσουμε και στους δύο ταυτόχρονα τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών έτσι ώστε ο Α να μετασχηματιστεί στον μοναδιαίο πίνακα Ι, τότε ο Ι θα μετατραπεί στον αντίστροφο του Α τον A^{-1}. Είναι μία διαδικασία που θα την δούμε να εφαρμόζεται και στο επόμενο Κεφάλαιο 3.

Σχόλια 5

<u>Σχόλια 5^o</u>: Όπως θα παρατηρήσουμε μετά από μία ολική ανάγνωση των Κεφαλαίων 1, 2 και 3 τα στοιχεία θεωρίας που υπάρχουν σε καθένα από αυτά δεν έχει ξεκάθαρα «σύνορα». Δηλαδή, το κάθε κεφάλαιο «δανείζεται» στοιχεία από τα άλλα δύο. Ο τρόπος διαχωρισμού της θεωρίας έγινε προς χάριν ευκολίας αργότερα στην ανάλυση λαθών. Άλλωστε η θεωρία είναι μία και οι έννοιες σε αυτήν συνδέονται άρρηκτα μεταξύ τους.

2.2 Πρόβλημα 2 και η λύση του σε βήματα

2.2.1 Γενικά

Το πρόβλημα 2 αφορά τις γραμμικές απεικονίσεις και συγκεκριμένα μία γραμμική απεικόνιση τ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και ορίζεται έτσι ώστε σε κάθε σημείο M(x, y) να αντιστοιχίζει το σημείο M΄(x΄, y΄) ως εξής:

Αν ΟΜ είναι το διάνυσμα θέσης του (x. y)$\epsilon\mathbb{R}^2$ και ΟΜ΄ είναι το διάνυσμα θέσης της εικόνας τ(x, y), τότε οι αποστάσεις των διανυσμάτων ΟΜ και ΟΜ΄ να ισούνται: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM'}\right|$ και η μεταξύ τους γωνία: $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$= φ. Η απεικόνιση αυτή λέγεται και γεωμετρικός μετασχηματισμός στροφή στο επίπεδο κατά γωνία φ.

2.2.2 Διατύπωση Προβλήματος 2 και η λύση του σε βήματα

<u>Πρόβλημα 2^o :</u> Έστω μια γραμμική απεικόνιση τ: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο M(x, y) του Καρτεσιανού επιπέδου το σημείο M΄(x΄, y΄) έτσι ώστε να ισχύει: $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM'}|$ και η γωνία $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})$= φ. Ζητούνται:

α) Να βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης τ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

β) Να βρείτε τον τύπο της απεικόνισης τ.

γ) Εάν φ= 60° και M(x= 2, y= 3), να βρείτε το σημείο τ(M).

<u>Σωστή Λύση (σε βήματα) 2ου Προβλήματος:</u> α) <u>Βήμα 1ο</u> : Η $\tau(\vec{i})$ ή $\tau(\vec{e}_1)$= τ(1, 0)= $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ και $\tau(\vec{j})$ ή $\tau(\vec{e_2})$= τ(0, 1)= $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$,

όπου (1, 0)∈ $\mathbb{R}^2$ και (0, 1)∈ $\mathbb{R}^2$ μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^2$.

<u>Βήμα 2ο</u> : Άρα ο πίνακας της τ γραμμικής απεικόνισης ως προς την κανονική βάση {(1, 0), (0, 1)} του $\mathbb{R}^2$ είναι:

$$M_\tau = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

β) <u>Βήμα 1ο</u> : Ο τύπος της απεικόνισης τα είναι ο εξής:

$$\tau(x, y) = M_\tau \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi \\ x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi \end{bmatrix} \text{ ή}$$

$\tau(x, y) = (x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi, x\cdot\sin\varphi + y\cdot\cos\varphi)$. (1)

Δηλαδή, για να βρούμε τον τύπο της τα πολλαπλασιάσαμε τους πίνακες M_τ *και* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, τύπων (2x2) και (2x1) αντίστοιχα, άρα γίνεται ο πολλαπλασιασμός και προκύπτει πίνακας-στήλη τύπου (2x1).

<u>γ) Βήμα 1ο</u> : Για να βρούμε το σημείο τ(M) αντικαθιστούμε στον παραπάνω τύπο (1) τα δεδομένα, κάνουνε τις απαιτούμενες πράξεις και προκύπτει το αποτέλεσμα, δηλαδή ένα διδιάστατο διάνυσμα. Η αντικατάσταση γίνεται ως εξής:

Βάζω όπου x= 2, y= 3 και γωνία φ= 60° και κάνω διαδοχικές πράξεις και παίρνω,

$\tau(x=2, y=3) = (2\cdot\cos 60° - 3\cdot\sin 60°, 2\cdot\sin 60° + 3\cdot\cos 60°) = (2\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}) = (1-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{3}{2}) = (\frac{2-3\cdot\sqrt{3}}{2}, \frac{3+2\cdot\sqrt{3}}{2})$.

2.3 Διερεύνηση λαθών στις γραμμικές απεικονίσεις

2.3.1 Είδη λαθών στο πρόβλημα 2 και η κατηγοριοποίησή τους

Το πρόβλημα 2 αφορά τις γραμμικές απεικονίσεις και συγκεκριμένα μία γραμμική απεικόνιση από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ *στον* $\mathbb{R}^2$. Στο πρώτο ερώτημα ζητούνται από τους φοιτητές να βρουν τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης και αυτό είναι το βήμα 1 ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ και τον τύπο της απεικόνισης και αυτό είναι το βήμα

2. Στο δεύτερο ερώτημα δίνονται ως δεδομένα οι συντεταγμένες ενός σημείου και η γωνία του και ζητείται να βρεθεί η αντιστοίχησή του μέσω της απεικόνισης.

Τα είδη των λαθών που συναντώνται εδώ είναι τα εξής:

i) Λάθη που αφορούν έλλειψη δικαιολόγησης της λύσης στην εύρεση του τύπου της γραμμικής απεικόνισης και του πίνακά της με σύμβολο το **(Δ).**

ii) Λάθη σχετικά με την κατανόηση της θεωρίας των γραμμικών απεικονίσεων και το πώς βρίσκουμε τον τύπο της και τον πίνακά της με σύμβολο το **(Κ).** Ισχύει για όλους τους φοιτητές που κάνουν λάθη στην λύση του προβλήματος.

iii) Λάθη στις πράξεις σε αριθμητικές παραστάσεις, στα συνημίτονα και ημίτονα ή στους πολλαπλασιασμούς με σύμβολο το **(Π).** Παρατηρούμε ότι αυτό το είδος συναντάται περισσότερο στο τρίτο ερώτημα στην εύρεση σημείου.

Στα λάθη κατανόησης κυρίως συναντούμε πιο συγκεκριμένα τις εξής υποκατηγορίες:

α) Βρίσκουν λάθος τύπο της γραμμικής απεικόνισης ως προς την κανονική βάση και συμβολίζεται με **ΤΑ**.

β) Βρίσκουν λάθος τον τύπο της απεικόνισης στο καρτεσιανό επίπεδο, δηλαδή τον τύπο τ(x, y) και συμβολίζεται με **ΤΒ.**

γ) Θεωρούν σωστό τον πίνακα αλλά δεν παίρνουν τον ανάστροφό του με **ΤΓ**.

δ) Βρίσκουν λανθασμένο πίνακα απεικόνισης και δεν παίρνουν τον ανάστροφό του και συμβολίζεται με **ΤΔ.**

Γενικότερα, θα λέγαμε ότι σε αυτό το πρόβλημα γραμμικής απεικόνισης κυριάρχησαν τα δύο άκρα. Είτε οι φοιτητές ήξεραν να το λύσουν είτε δεν ήξεραν και δεν το έλυσαν ή δεν κατέληξαν στην σωστή λύση μετά από προσπάθειες. Τα λάθη παρουσιάζονται στην προσπάθεια να το λύσουν και να βρουν του τύπο της γραμμικής απεικόνισης, τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης και όταν δεν ξέρουν να βρουν τα παραπάνω προσπαθούν να εφαρμόσουν τα δεδομένα του προβλήματος: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \left|\overrightarrow{OM'}\right|$ και $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$=φ λανθασμένα με το να αντικαθιστούν τις συντεταγμένες των διανυσμάτων και να χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο και τις τριγωνομετρικές εξισώσεις.

2.3.2 Ποσοστιαία ανάλυση λαθών στις γραμμικές απεικονίσεις

α) Τα γραπτά τελικών εξετάσεων εξαμήνου. Από τα υποκείμενα του δείγματος ζητήθηκε να απαντήσουν σε τρία θέματα στις τελικές γραπτές εξετάσεις, που αποτελούν και τα τρία προβλήματα που αναλύθηκαν ποιοτικά στα τρία πρώτα κεφάλαια και αναζητήθηκαν τα είδη των λαθών ή οι παρανοήσεις ή τα σφάλματα των φοιτητών στις λύσεις που δώσανε (Παράρτημα). Στο δεύτερο πίνακα αναλύονται τα είδη των λαθών και η κωδικοποίησή τους πάνω στο δεύτερο θέμα ή αλλιώς στο πρόβλημα 2, με στόχο να εξεταστούν οι παρανοήσεις σε κάθε βήμα της λύσης και, πιο συγκεκριμένα, στην εύρεση του τύπου μιας γραμμικής απεικόνισης και του πίνακά της, καθώς και στην εφαρμογή τους σε συγκεκριμένες συντεταγμένες και γωνία. Τα υποκείμενα καλούνται να δώσουν λύσεις στα πρόβλημα 2, χρησιμοποιώντας αυτά που διδάχθηκαν στην θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας στην σχολή και όσα ήδη γνωρίζουν από το σχολείο.

β) Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων καταγράφονται τα λάθη και οι παρανοήσεις των υποκειμένων στις έννοιες που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν παραπάνω και υπολογίζονται τα ποσοστά στα πιο σημαντικά λάθη:

ΠΟΣΟΣΤΑ	***ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***	***ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***
Δ	*5.86%*	*94.14%*
Π	*3.15%*	*96.85%*
ΤΑΒ (ΤΑ- ΤΒ)	*4.95%*	*95.05%*
ΤΓΔ (ΤΓ- ΤΔ)	*3.15%*	*96.85%*

Επίσης, το ποσοστό των φοιτητών που το έλυσαν σωστά το πρόβλημα 2 είναι ***18.92%***, το ποσοστό αυτών που δεν το έλυσαν καθόλου είναι ***69.82%*** και το ποσοστό αυτών που έκαναν κάποιο λάθος ή δεν απάντησαν σε όλα τα ερωτήματα είναι ***11.26%***.

γ) Συμπεράσματα. Τα απαραίτητα στοιχεία θεωρίας που χρειάζεται να γνωρίζουν οι φοιτητές που καλούνται να λύσουν προβλήματα γραμμικών απεικονίσεων κάποια τα διδάσκονται στο σχολείο και κάποια στη σχολή. Από το Γυμνάσιο ακόμα οι μαθητές διδάσκονται στοιχεία τριγωνομετρίας. Στο Λύκειο διδάσκονται πάλι τριγωνομετρία, τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών ορισμένων γωνιών και τις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών.

Επίσης, μαθαίνουν πώς ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο μίας γωνίας στον τριγωνομετρικό κύκλο και ποιες είναι οι άμεσες συνέπειες του ορισμού: «Αν η τελική πλευρά της γωνίας φ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ(x, y) τότε: ***α)*** $sin\,\varphi = y\ (τεταγμένη\ του\ M), \boldsymbol{\beta})\ \cos\varphi = x\ (τετμημένη\ του\ M)$.»

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι οι τιμές των $\sin\varphi,\ \cos\varphi$ δεν μπορούν να υπερβούν κατ'απόλυτη τιμή την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή το 1, οπότε: -1≤ $\sin\varphi \leq 1\ και -1 \leq \cos\varphi \leq 1$. Επίσης, από το πυθαγόρειο θεώρημα: $x^2 + y^2 = 1^2$ προκύπτει η βασική ταυτότητα $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1, \forall\ γωνία\ \varphi$. Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών αλλάζουν ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρισκόμαστε και στον τριγωνομετρικό κύκλο ο άξονας xx΄ αντιστοιχεί στο $\cos\varphi\ και\ ο\ άξονας\ yy'\ στο\ \sin\varphi$, ενώ η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με 1. Όλα αυτά θεωρούνται ότι είναι γνωστά από τους πρωτοετείς ή μη φοιτητές, όπως και οι πίνακες ή τι είναι απεικόνιση 1-1, επί, η αντίστροφη εικόνα της και άλλα πολλά παρόμοια. Βέβαια στην πράξη τα λάθη που προκύπτουν στις τελικές εξετάσεις μαρτυρούν ότι δεν ισχύει για όλους η βαθιά κατανόηση αυτών των εννοιών και πώς εφαρμόζονται.

Επιπλέον, στην ύλη διδασκαλίας στην σχολή συμπεριλαμβάνονται θεωρία και εφαρμογές στις γραμμικές απεικονίσεις και την γεωμετρία τους, στους πίνακες γραμμικής απεικόνισης και στους αντιστρέψιμους πίνακες. Και όλα αυτά σε συνδυασμό και με τις γνώσεις με τις οποίες εφοδιάζονται στο σχολείο θεωρούνται ότι είναι σε θέση να λύσουν προβλήματα όπως το 2. Στην πράξη όμως βλέπουμε ότι αντιμετωπίζουν διάφορα προβλήματα κατανόησης και δυσκολίες στο να εφαρμόσουν την θεωρία που έχουν διδαχθεί. Τα λάθη που συναντώνται στο σημείο αυτό ανήκουν σε τρεις γενικές κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία λαθών συμβολίζεται με **Δ** και αφορά την έλλειψη δικαιολόγησης στο γιατί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης ή ο πίνακάς της είναι αυτός που γράφουν, σωστός ή λανθασμένος, και όχι κάποια ή κάποιος άλλος. Ίσως επειδή το πρόβλημα έχει διδαχθεί αυτούσιο στις παραδόσεις του εξαμήνου να οφείλεται στην «τυφλή» απομνημόνευση του αποτελέσματος χωρίς ουσιαστική κατανόηση των εννοιών. Υπάρχουν σίγουρα και άλλοι λόγοι που γίνονται λάθη αλλά θα αναλυθούν με περισσότερες λεπτομέρειες σε επόμενο ξεχωριστό κεφάλαιο.

Στην δεύτερη κατηγορία με σύμβολο το **Κ** ανήκουν τα λάθη κατανόησης της θεωρίας και «κρύβεται» πίσω από οποιοδήποτε λάθος παρατηρήθηκε στο πρόβλημα των γραμμικών απεικονίσεων. Αφορά πιο συγκεκριμένα είτε την έλλειψη κατανόησης στο τι είναι ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης ως προς την κανονική βάση ή όχι και πώς την βρίσκουμε με σύμβολο **ΤΑ** και **ΤΒ** αντίστοιχα, είτε στο τι είναι και πώς βρίσκουμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης ανάστροφο όπως πρέπει να είναι ή όχι με σύμβολα **ΤΓ** και **ΤΔ**.

Στην τρίτη και τελευταία γενική κατηγορία λαθών ανήκουν τα λάθη που γίνονται στις πράξεις και συμβολίζεται με **Π.** Αφορούν τις λανθασμένες αντικαταστάσεις στον σωστό ή λανθασμένο γενικό τύπο της γραμμικής απεικόνισης σε γωνίες, σε αριθμητικά λάθη στις πράξεις των παραστάσεων που προκύπτουν μετά την αντικατάσταση. Η ερμηνεία των συμβόλων υπάρχει πιο συγκεντρωτικά και παρακάτω:

Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, δίνει την λύση κατευθείαν χωρίς επεξήγηση.

Π: πράξεις για εύρεση σημείου τ(M), σε αντικατάσταση των δεδομένων με λάθος συνημίτονα- ημίτονα και σε πολλαπλασιασμούς των κλασμάτων αργότερα στις αριθμητικές παραστάσεις που προκύπτουν άρα και λάθος αποτέλεσμα.

Κ: κατανόηση της ύλης των γραμμικών απεικονίσεων, ισχύει για σύμβολα **ΤΑ, ΤΒ**, **ΤΓ**, **ΤΔ** πάντα.

ΤΑ: τύπος απεικόνισης ως προς κανονική βάση.

ΤΒ: τύπος απεικόνισης τ(x,y).

ΤΓ: μη ανάστροφος πίνακας της τ.

ΤΔ: μη ανάστροφος πίνακας και λανθασμένος.

1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o}

Χαρακτηριστικά Μεγέθη

3.1 Θεωρία χαρακτηριστικών μεγεθών

3.1.1 Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση f: X → X, όπου X είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K (συνήθως ο χώρος των πραγματικών αριθμών ℝ ή των μιγαδικών ℂ). Εάν υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in X$, τα οποία έχουν την ιδιότητα $f(v) = \lambda \cdot v$, όπου $\lambda \in K$, τα διανύσματα αυτά ονομάζονται ιδιοδιανύσματα της γραμμικής απεικόνισης f, ενώ οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση αυτή ονομάζονται ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης. Οι όροι των διανυσμάτων v που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του X τους οποίους και θα ονομάσουμε ιδιόχωρους της συγκεκριμένης ιδιοτιμής. Βασικός στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να διατυπώσει μια μεθοδολογία εύρεσης των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων μιας γραμμικής απεικόνισης μέσω του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων/γραμμικών απεικονίσεων, ενώ στο τέλος παρουσιάζουμε το Θεώρημα Cayley-Hamilton και εφαρμογές του στον υπολογισμό: ***α)*** του αντίστροφου ενός πίνακα, ***β)*** μαθηματικών παραστάσεων που εξαρτούνται από έναν πίνακα (όπως οι δυνάμεις ενός πίνακα), και ***γ)*** του ελάχιστου πολυωνύμου ενός πίνακα.

3.1.2 Βασικά στοιχεία θεωρίας ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων

<u>Ορισμός 1^{ος} :</u> Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K (K = ℝ ή K = ℂ) και

$f : X \rightarrow X$, μια γραμμική απεικόνιση. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in X$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης εάν υπάρχει αριθμός $\lambda \in K$, τέτοιος ώστε

$f(x) = \lambda \cdot x$

Ο αριθμός $\lambda \in K$ ονομάζεται ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης. Συνολικά, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται ιδιοποσά ή χαρακτηριστικά μεγέθη της γραμμικής απεικόνισης.

Ο χώρος $V(\lambda) = \{x : x \in X \text{ και } f(x) = \lambda \cdot x\}$ ονομάζεται ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

<u>Θεώρημα 1^{o}:</u> Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K και f : X → X μια γραμμική απεικόνιση. Τότε ο ιδιοχώρος V(λ) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αποτελεί υποχώρο του X.

<u>Θεώρημα 2</u>

Θεώρημα 2^{ο}: Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K και f : X → X μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\lambda_i \epsilon K$, i = 1, 2, ..., n είναι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές της f και v_i , i = 1, 2, ..., n είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πρόταση 1^{η} : Ο αριθμός λ∈K αποτελεί ιδιοτιμή της γραμμικής απεικόνισης f : X → X, αν και μόνο αν, $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$,

ενώ τα ιδιοδιανύσματα $x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n$ της γραμμικής απεικόνισης f που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι τα διανύσματα $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ικανοποιούν την εξίσωση:
$(\lambda \cdot I_n - A) \cdot y = 0$.

Λόγω της σύνδεσης αυτής μεταξύ των ιδιοποσών (ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων) μιας γραμμικής απεικόνισης και των χαρακτηριστικών στοιχείων του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης (τιμές που μηδενίζουν το πολυώνυμο $\det[\lambda \cdot I_n - A]$- διανύσματα που αποτελούν λύση του ομογενούς συστήματος $(\lambda \cdot I_n - A) \cdot x = 0$) δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2^{ος} : Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$) ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα ενός τετράγωνου πίνακα ώστε $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ (ή $M_n(\mathbb{C}^n)$) εάν υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$), τέτοιος ώστε:

$A \cdot x = \lambda \cdot x$

Ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του πίνακα A. Συνολικά οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται ιδιοποσά ή χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα.

Στην θεωρία που αναφέρεται παρακάτω, όταν αναφερόμαστε στα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, θα εννοούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Παράδειγμα κατανόησης: Προσδιορίστε ποιο από τα διανύσματα

$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \epsilon M_3(\mathbb{R})$ και σε ποια ιδιοτιμή αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα αυτό.

Τα ερωτήματα που γεννιούνται είναι τα εξής :

1) Υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές για κάθε πίνακα A ;

2) Ποιο είναι το πλήθος των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός τετράγωνου πίνακα Α ;

3) Με ποιον τρόπο υπολογίζω τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός τετράγωνου πίνακα Α ;

Θα ξεκινήσουμε με την απάντηση στο τρίτο ερώτημα, δηλαδή τον τρόπο εύρεσης των ιδιοδιανυσμάτων-ιδιοτιμών του πίνακα Α. Από τον ορισμό, αν $x \in \mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$) είναι

ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ή $M_n(\mathbb{C})$, τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) τέτοιο ώστε:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow (\lambda \cdot I_n - A) \cdot x = 0 \Leftrightarrow B \cdot x = 0.$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας $B = \lambda \cdot I_n - A$ έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός, τότε η μόνη λύση που έχει το σύστημα παραπάνω είναι η μηδενική (x= 0). Σε περίπτωση που η ορίζουσα του πίνακα $B = \lambda \cdot I_n - A$ είναι μηδέν, τότε υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις $x \epsilon \mathbb{R}^n$του συστήματος. Συνεπώς το ιδιοδιάνυσμα $x \epsilon \mathbb{R}^n$ υπάρχει

στην περίπτωση που $m_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ ή $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$. (1)

<u>Ορισμός 3</u> ***:*** Η εξίσωση (1) πιο πάνω ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, ενώ το πολυώνυμο p(λ), ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$. Το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες και αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα Α, ονομάζεται φάσμα και συμβολίζεται με σ (Α).

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας το πλήθος των ριζών (και άρα των ιδιοτιμών $\lambda_i \in \mathbb{C}$) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι n, όση δηλαδή και η διάσταση του πίνακα Α.

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας κάθε μη-σταθερό πολυώνυμο $f(x) \epsilon \mathbb{C}[x]$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο σώμα $\mathbb{C}$ και συνεπώς ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ έχει n ιδιοτιμές, σε αντίθεση με έναν πίνακα $A \epsilon M_n(\mathbb{R})$ ο οποίος μπορεί και να μην διαθέτει ιδιοτιμές.

<u>Ορισμός 4</u>: Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ιδιοτιμή στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Για παράδειγμα αν $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ και $\lambda_i \neq \lambda_j$, τότε η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i είναι n_i.

Για να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($M_n(\mathbb{C})$), θα πρέπει για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \epsilon \mathbb{R}(\mathbb{C})$ του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ($M_n(\mathbb{C})$) να λύσουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_i \cdot I_n - A) \cdot x_i = 0$.

<u>Ορισμός 5^{ος}</u> : Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων $V(\lambda_i)$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_i \epsilon \mathbb{R}$ (ή $\sigma\tau o$ $\mathbb{C}$) αποτελούν έναν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), ο οποίος και ονομάζεται ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Η διάσταση του ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$ ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και αποδεικνύεται ότι είναι ίση

με $\dim V(\lambda_i) = n - \operatorname{rank} (\lambda_i \cdot I_n - A)$.

Η ταύτιση της γεωμετρικής και αλγεβρικής πολλαπλότητας για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα Α αποτελεί έναν από τους δύο κύριους παράγοντες για την δυνατότητα της διαγωνοποίησης ενός πίνακα κάτω από κατάλληλους μετασχηματισμούς ομοιότητας.

<u>Θεώρημα 3^o</u> **:** Αν συμβολίσουμε με n_i την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_i \epsilon \mathbb{R}(\mathbb{C})$, τότε ισχύει η σχέση $1 \leq \dim V(\lambda_i) \leq n_i$.

<u>Μεθοδολογία υπολογισμού ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $A \epsilon \boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})(\boldsymbol{M_n}(\mathbb{C}))$:</u>

<u>Βήμα 1:</u> Εύρεση ιδιοτιμών του πίνακα $A \epsilon M_n(\mathbb{R})(M_n(\mathbb{C}))$

α) Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$m_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1-} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_0$.

β) Υπολογισμός των ριζών $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\lambda_i \epsilon \mathbb{R}(\mathbb{C})$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης $m_A(\lambda) = 0$.

<u>Βήμα 2^o</u> **:** Εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων $x_i \epsilon \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ του πίνακα Α.

Και στη συνέχεια επίλυση της εξίσωσης $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$, για $i = 1,2,...,n$.

3.1.3 Ιδιότητες ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μερικές από τις σημαντικές ιδιότητες των ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων τετράγωνων πινάκων.

<u>Θεώρημα 4^o</u> **:** Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και το ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε:

α) Ο πίνακας A^k θα έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda^k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $k = 2,3,...$ και ιδιοδιάνυσμα θα έχει το $x \in \mathbb{C}^n$.

β) Ο πίνακας Α δεν έχει πλήρη τάξη, για παράδειγμα $\operatorname{rank} A \neq n$, αν και μόνο αν, το 0 αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα Α.

γ) Αν ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος (συνεπώς $\lambda \neq 0$), ο πίνακας A^{-1} (αντίστροφος) θα έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και ιδιοδιάνυσμα το $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

δ) Ο πίνακας A^T (ανάστροφος) θα έχει ως ιδιοτιμή το $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

ε) Έστω ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και το ίδιο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) με τον πίνακα Α, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ. Τότε ο πίνακας Α+ Β θα έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda + \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

στ) Έστω ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και το ίδιο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) με τον πίνακα Α, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ. Τότε ο πίνακας $A \cdot B$ θα έχει ως ιδιοτιμή την $\lambda \cdot \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $x \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

3.1.4 Θεώρημα Cayley-Hamilton

<u>Θεώρημα 5^ο</u> : Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $m_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_n - A)$, δηλαδή $m_A(A) = 0$.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Cayley-Hamilton: *α)* Εύρεση αντίστροφου πίνακα:

Έστω ένας πίνακας $A \epsilon M_n(\mathbb{R})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$m_A(\lambda) = p_0 + p_1 \cdot \lambda + \cdots + p_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \lambda^n.$

Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton θα έχουμε:

$m_A(\lambda) = \mathrm{p}_0 \cdot \mathrm{I}_\mathrm{n} + \mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{A} + \cdots + \mathrm{A}^\mathrm{n} = 0.$

Στην περίπτωση που ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος θα έχουμε $p_0 \neq 0$

$(p_0 = m_A(0) = \det(0 \cdot I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A) \neq 0)$

Και άρα:

$$p_0 \cdot I_n = -p_1 \cdot A - \ldots - A^n = A \cdot (-p_1 \cdot I_n - p_2 \cdot A - \ldots - A^{n-1}) \xrightarrow{\cdot 1/p_0}$$

$$I_n = A \cdot \left\{\frac{1}{p_0} \cdot (p_1 \cdot I_n - p_2 \cdot A - \cdots - A^{n-1})\right\} \rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{p_0} \cdot (-p_1 \cdot I_n - p_2 \cdot A - \cdots - A^{n-1}).$$

β) Υπολογισμός τιμών ενός πολυωνύμου σε πίνακα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του πολυωνύμου:
$q(\lambda) = q_0 + q_1 \cdot \lambda + \cdots + q_k \cdot \lambda^k$
σε έναν πίνακα $A \epsilon M_n(R)$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:
$m_A(\lambda) = p_0 + p_1 \cdot \lambda + \cdots + p_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \lambda^n.$

Στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου q(λ) είναι μικρότερος από τον βαθμό του $m_A(\lambda)$ υπολογίζουμε τον πίνακα q(A) με απλή αντικατάσταση. Στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου q(λ) είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του $m_A(\lambda)$, τότε κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση του q(λ) με το $m_A(\lambda)$. Δηλαδή υπάρχουν πολυώνυμα α(λ) και r(λ) με deg r (λ) ≤ deg p (λ) τέτοια ώστε:

$$q(\lambda)= \alpha(\lambda)\cdot m_A(\lambda)+ r(\lambda)$$

και συνεπώς με αντικατάσταση του λ με τον πίνακα A θα έχουμε:

$$q(A)= \alpha(A)\cdot m_A(A)+ r(A)= r(A).$$

Αυτό δηλαδή που μπορούμε να καταφέρουμε είναι να μειώσουμε τον βαθμό υπολογισμού του πολυωνυμικού πίνακα από k σε έναν βαθμό μικρότερο του n. Ένα δεύτερο ερώτημα που γεννιέται είναι πως θα υπολογίσουμε το υπόλοιπο r(λ). Ένας τρόπος είναι με την απευθείας ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων. Ο τρόπος αυτός είναι πολύ πολύπλοκος όταν ο βαθμός k του q(λ) είναι πολύ μεγαλύτερος από τον βαθμό n του $m_A(\lambda)$. Παρακάτω θα δούμε και έναν δεύτερο τρόπο υπολογισμού του πολυωνύμου r(λ).

<u>1η περίπτωση:</u> Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές λ_i, i= 1,2,..., n με αλγεβρική πολλαπλότητα 1. Τότε θα έχουμε:

$$q(\lambda_i)= \alpha(\lambda_i)\cdot m_A(\lambda_i)+r(\lambda_i)= r(\lambda_i), \text{ με } i=1, 2, \dots, n.$$

διότι $m_A(\lambda) = \det(\lambda_i\cdot I_n - A) = 0$. Αν υποθέσουμε ότι:

$$r(\lambda)= r_0+r_1\cdot\lambda+ \dots + r_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}$$

Θα πρέπει λοιπόν να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$q(\lambda_i)= r_0 + r_1\cdot\lambda_i + \cdots + r_{n-1}\cdot{\lambda_i}^{n-1}, \text{ όπου } i= 1, 2, \dots, n..$$

<u>2^{η} περίπτωση:</u> Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας *A* έχει την ιδιοτιμή λ_i, με αλγεβρική πολλαπλότητα *ν*. Τότε θα έχουμε:

$$q(\lambda)= \alpha(\lambda)\cdot m_A(\lambda)+ r(\lambda)$$

όπου $m_A(\lambda)=\det(\lambda\cdot I_n- A)= (\lambda - \lambda_i)^{\nu}\cdot\tilde{p}(\lambda)$ και άρα θα έχουμε ισοδύναμα:

$q(\lambda)= \alpha(\lambda)\cdot(\lambda - \lambda_i)^{\nu}\cdot\tilde{p}(\lambda)+ r(\lambda) \rightarrow q(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i)\cdot(\lambda_i - \lambda_i)^{\nu}\cdot\tilde{p}(\lambda_i)+ r(\lambda_i) \rightarrow$
$q(\lambda_i) = r(\lambda_i)$. Και:

$q'(\lambda)= \alpha'(\lambda)\cdot (\lambda - \lambda_i)^{\nu}\cdot\tilde{p}(\lambda)+\alpha(\lambda)\cdot\nu\cdot(\lambda - \lambda_i)^{\nu-1}\cdot\tilde{p}(\lambda)+\alpha(\lambda)\cdot (\lambda - \lambda_i)^{\nu}\cdot\widetilde{p}'(\lambda)+r'(\lambda) \rightarrow$

$$q'(\lambda)= (\lambda - \lambda_i)^{\nu-1}\cdot\alpha_1(\lambda)+ r'(\lambda) \rightarrow q'(\lambda_i)= r'(\lambda_i)$$

…………………………………………………………

$$q^{(n-1)}(\lambda)= (\lambda - \lambda_i)\cdot\alpha_{n-1}(\lambda)+ r^{(n-1)}(\lambda) \rightarrow q^{(n-1)}(\lambda_i)= r^{(n-1)}(\lambda_i) .$$

Συνεπώς, θα πρέπει για κάθε ιδιοτιμή λ_i με αλγεβρική πολλαπλότητα ν, να λύσουμε τις εξισώσεις :

$$q(\lambda_i)= r(\lambda_i)$$

$$q'(\lambda_i)= r'(\lambda_i)$$

...

$q^{(n-1)}(\lambda_i)= r^{(n-1)}(\lambda_i)$

υποθέτοντας ότι:

$r(\lambda)= r_0 + r_1 \cdot \lambda + \cdots + r_{n-1} \cdot \lambda^{n-1}.$

3.1.5 Ελάχιστο Πολυώνυμο

Ορισμός 6^{ος} : Με τον όρο ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, ορίζουμε το μη-μηδενικό πολυώνυμο στο οποίο ισχύουν τα εξής:

i) ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι 1

ii) είναι το πολυώνυμο με τον ελάχιστο βαθμό το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα πολυώνυμο που μηδενίζει τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη του ελαχίστου πολυωνύμου.

3.2 Διατύπωση προβλήματος 3 και η σωστή λύση του σε βήματα

3.2.1 Γενικά

Στο Πρόβλημα 3 δίνεται ένας τετραγωνικός πίνακας A τύπου (3x3) και ζητείται κατ’ αρχήν ένας αντιστρέψιμος, έστω P, που τον διαγωνοποιεί. Ο πίνακας P που ψάχνουμε και διαγωνοποιεί τον πίνακα A θα έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα προηγουμένως θα υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του A. Και επειδή ο A είναι (3x3) τετραγωνικός, θα έχει σίγουρα 3 ιδιοτιμές και με αλγεβρική πολλαπλότητα που θα υπολογιστεί για την καθεμιά από αυτές. Αφού βρίσκουμε λοιπόν τα (μη μηδενικά) ιδιοδιανύσματα και βλέπουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε ο A διαγωνοποιήσιμος μέσω του P με στήλες αυτά και συνεπώς, υπάρχει ο P τέτοιος ώστε $A= P \cdot D \cdot P^{-1}$, όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές. Από την θεωρία παραπάνω βλέπουμε ότι βρίσκουμε τις ιδιοτιμές μηδενίζοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα και υπολογίζοντας την ορίζουσα (3x3), ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται με δύο τρόπους όπως φαίνεται και στην λύση σε βήματα παρακάτω.

Το δεύτερο ερώτημα έχει να κάνει πάλι με έναν οποιοδήποτε τετραγωνικό πίνακα τύπου (3x3) τέτοιο ώστε κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x\epsilon\mathbb{R}^3$να είναι και ιδιοδιάνυσμά του (η ιδιότητα του πίνακα). Αυτό που ζητείται είναι να αποδείξουμε ότι έχει μόνο μία ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας 3. Είναι ένα θεωρητικό ερώτημα που για να απαντηθεί χρειάζεται μια πιο βαθιά εμπέδωση και εμπειρία της θεωρίας των χαρακτηριστικών μεγεθών.

3.2.2 Διατύπωση προβλήματος 3 και η λύση του σε βήματα

<u>Πρόβλημα 3ο :</u> α) Δίνεται ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον πίνακα A.

β) Έστω ένας 3x3 πίνακας A τέτοιος ώστε κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}\epsilon\mathbb{R}^3$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Να αποδείξετε ότι ο A έχει ΜΙΑ ΜΟΝΟ ιδιοτιμή ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑΣ 3.

<u>Σωστή λύση (σε βήματα) του 3ου προβλήματος :</u>

α) <u>Βήμα 1ο:</u> Παίρνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$\chi_A(t)= \det(t\cdot I_3- A)\equiv |\, t\cdot I_3 - A| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ 0 & t-3 & -2 \\ 0 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$(υπολογ.ορίζουσα\ 3x3) \Leftrightarrow (t-2)\cdot\{(t-3)\cdot(t-4)-2\}+1\cdot(0-0)-2\cdot 0 =$
$0 \Leftrightarrow (t-2)\cdot(t^2-7\cdot t+12-2)\,) = 0 \Leftrightarrow (t-2)\cdot(t^2-7\cdot t+10) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (t-2)\cdot(t-2)\cdot(t-5) = 0 \Leftrightarrow \boxed{(t-2)^2\cdot(t-5)=0}$.

Άρα καταλήξαμε στο «πλαίσιο» παραπάνω και οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

λ_1= 2 (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 ή αλλιώς η λ_1 είναι διπλή ιδιοτιμή), λ_2= 5 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 1).

<u>Βήμα 2ο :</u> (Α΄ ΤΡΟΠΟΣ:) Για λ_1= 2 έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} t=2-2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & t=2-3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & t=2-4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_2\to\gamma_2-\gamma_1\ και\ \gamma_3\to\gamma_3-\gamma_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα από τον τελευταίο πίνακα προκύπτει το σύστημα: $-1 \cdot \xi_2 - 2 \cdot \xi_3 = 0 \xrightarrow[3\ άγνωστοι\ και\ 1\ εξίσωση, άρα\ 2\ παράμετροι]{} \xi_2 = -2 \cdot \xi_3 \Rightarrow (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (\xi_1,\ -2 \cdot \xi_2,\ \xi_3) = \xi_1 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \xi_2 \cdot (0,\ -2,\ 1)$.

Τα δύο διανύσματα είναι σε κλιμακωτή μορφή, άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επιπλέον, παράγουν τον υπόχωρο V(λ_1= 2). Άρα ως βάση του V(2) μπορούμε να θεωρήσουμε την: V(2)= $\langle (1,\ 0,\ 0), (0, -2,\ 1) \rangle$.

Η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_1= 2 είναι 2 (V(λ_1= 2) $\leq$ 2), επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{x_1}$= (1, 0, 0), $\overrightarrow{x_2}$= (0, -2, 1) είναι τα ιδιοδιανύσματα του Α.

(Β΄ ΤΡΟΠΟΣ:) Για λ_1= 2 έχουμε:

$$(\lambda_1 \cdot I_3 - A) \cdot \vec{\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow (2 \cdot I_3 - A) \cdot \vec{\xi} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\xi_2 - 2 \cdot \xi_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$\xi_2 = -2 \cdot \xi_3 \Leftrightarrow \xi_1 = c_1, \xi_2 = -2 \cdot c_2, \xi_3 = c_2$. Οπότε, το τυχόν στοιχείο $\vec{x}$ του V(2) είναι της μορφής:

$\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (c_1, -2 \cdot c_2, c_2) = c_1 \cdot (1, 0, 0) + c_2 \cdot (0, -2, 1)$ και αφού τα διανύσματα $\overrightarrow{x_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{x_2} = (0, -2, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα εφόσον είναι σε κλιμακωτή μορφή και επιπλέον παράγουν τον V(2) είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α.

<u>Βήμα 3^ο :</u> ***(Α' ΤΡΟΠΟΣ:)*** Για λ_2= 5 έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} t = 5 - 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & t = 5 - 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & t = 5 - 4 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 - \gamma_3\ και\ \gamma_2 \rightarrow \gamma_2 + 2 \cdot \gamma_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_1 \rightarrow \frac{\gamma_1}{3}\ και\ \gamma_3 \rightarrow -\gamma_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Από τον τελευταίο πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 3 αγνώστους και 2 εξισώσεις, άρα 1 παράμετρος, έστω θεωρούμε ως παράμετρο του συστήματος την ξ_3 και έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 - \xi_3 = 0 \\ \xi_2 - \xi_3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \xi_1 = \xi_3 \\ \xi_2 = \xi_3 \end{Bmatrix}, \text{ άρα } (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_3, \xi_3, \xi_3) = \xi_3 \cdot (1, 1, 1).$$

Η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_2= 5 είναι 1 και άρα V(λ_2= 5)= 1. Οπότε, το $\overrightarrow{x_3}$= (1, 1, 1) είναι ιδιοδιάνυσμα του Α.

(Β' ΤΡΟΠΟΣ:) Για λ_2= 5 έχουμε:

$(5\cdot I_3 - A)\cdot\xi = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 3\cdot\xi_1 - \xi_2 - 2\cdot\xi_3 = 0 \\ 2\cdot\xi_1 - 2\cdot\xi_3 = 0 \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{matrix} \xi_1 = \xi_3 \\ \xi_2 = \xi_3 \end{matrix} \right\}$. Άρα το τυχόν στοιχείο $\vec{x}$ του V(5) είναι της μορφής: $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_3, \xi_3, \xi_3) = \xi_3 \cdot (1, 1, 1)$. Άρα στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{x_3} = (1, 1, 1)$. Επιπλέον, το $\overrightarrow{x_3}$ είναι και η βάση του υποχώρου $V(5) = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

<u>Βήμα 4</u>

<u>Βήμα 4^o :</u> Ο πίνακας $A \epsilon M_{3x3}(K)$ έχει τρία ακριβώς ιδιοδιανύσματα τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συνεπώς ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος πίνακας μέσω του πίνακα Ρ που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του Α. Άρα υπάρχει αντιστρέψιμος Ρ τέτοιος ώστε $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του Α, τύπου (3x3).

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 5^o :</u> Ο πίνακας Ρ ορίζεται όπως παραπάνω, με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$, επομένως είναι ο εξής: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ τύπου (3x3) αντιστρέψιμος.

Για να βρούμε τον αντίστροφο του Ρ, δηλαδή τον P^{-1}: (Α'ΤΡΟΠΟΣ) Εφαρμόζουμε Gauss- Jordan και έχουμε:

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_2 \to \gamma_2 + 2*\gamma_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\gamma_1 \to \gamma_1 - \frac{\gamma_2}{3} \, \kappa\alpha\iota \, \gamma_3 \to \gamma_3 - \frac{\gamma_2}{3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3 \, \kappa\alpha\iota \, \gamma_2 \to \frac{\gamma_2}{3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right],$$

Άρα καταλήξαμε $[P|I] \xrightarrow[(Gauss-Jordan)]{} [I_3|P^{-1}]$ και αφού προέκυψε μοναδιαίος πίνακας, ο Ρ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

(Β'ΤΡΟΠΟΣ:) Για να βρω τον αντίστροφο P^{-1} χρησιμοποιώ το εξής:

<u>Πρόταση:</u> «Αν ο Ρ είναι τετραγωνικός, ομαλός πίνακας δηλαδή με ορίζουσα $|P| \neq 0$, τότε υπάρχει ο αντίστροφός του P^{-1} και ισούται με $P^{-1} = \frac{adjP}{|P|}$, όπου adjP είναι ο συμπληρωματικός του Ρ.»

Βρίσκω λοιπόν πρώτα την ορίζουσα (3x3) του Ρ (έστω ως 1η γραμμή για ευκολία):

$$|P| = \det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2-1) - 0 \cdot (0-0) + 1 \cdot (0-0) = -3 \neq 0, \textit{άρα ο } P \textit{ είναι ομαλός πίνακας } (3x3).$$

Αφού ο Ρ είναι τετραγωνικός και ομαλός σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση έχει αντίστροφο P^{-1}.

Βρίσκω τον συμπληρωματικό του Ρ:

adjP= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T$, με συμπληρωματικά στοιχεία τα εξής: $\alpha_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2-1) = -3$, $\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$,

$a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$.

Άρα ο adjP= $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \textit{και } P^{-1} = \frac{adjP}{|P|} = \frac{1}{-3} \cdot adjP = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. Επομένως, καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα όπως και με τον Α'ΤΡΟΠΟ, άρα υπάρχει αντιστρέψιμος Ρ με αντίστροφο τον P^{-1} και ισχύει με βάση και την θεωρία: $P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}1 & -{}^{1}/_{3} & -{}^{2}/_{3}\\ 0 & -{}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{3}\\ 0 & {}^{1}/_{3} & {}^{2}/_{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\cdots=$ $diag(2,2,5)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

β) ***<u>Βήμα 1ο :</u>***Έχουμε έναν πίνακα Α∈ $M_{3x3}(K)$ τέτοιος ώστε $\forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^3(\vec{x}\neq(0,0,0)=\vec{0})$ ιδιοδιάνυσμα του Α ,ο Α να έχει μόνο μία ιδιοτιμή (αλγεβρικής πολλαπλότητας 3 προφανώς, αφού Α∈ $M_{3x3}(K)$).

Παίρνουμε έναν τυχαίο πίνακα Α∈ $M_{3x3}(K)$ ως εξής: Α= $\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{bmatrix}$.

Για τις ιδιοτιμές- ιδιοδιανύσματα του Α ισχύει:

Α·$\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}$, (1)

με λ∈ ℝ ιδιοτιμή και $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$ ιδιοδιάνυσμα του Α.

Κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ είναι ιδιοδιάνυσμα του Α. Άρα και τα μοναδιαία τρισδιάστατα διανύσματα (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) είναι ιδιοδιανύσματα του Α με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$. Τότε για το πρώτο διάνυσμα από την σχέση Α·$\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}\rightarrow A\cdot[1\quad 0\quad 0]^T=\lambda_1\cdot[1\quad 0\quad 0]^T\rightarrow\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow$

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \delta\\ \eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=\lambda_1\\ \delta=\eta=0\end{matrix}\right\}.$$

Εφαρμόζουμε και το 2ο διάνυσμα στην (1) και έχουμε:

Α·$[0\quad 1\quad 0]^T=\lambda_2\cdot[0\quad 1\quad 0]^T\rightarrow\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda_2\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\beta\\ \varepsilon\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda_2\\0\end{bmatrix}\rightarrow$

$\left\{\begin{matrix}\varepsilon=\lambda_2\\ \beta=\theta=0\end{matrix}\right\}$, ενώ εφαρμόζοντας το 3ο διάνυσμα:

Α·$[0\quad 0\quad 1]^T=\lambda_3\cdot[0\quad 0\quad 1]^T\rightarrow\begin{bmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \delta & \varepsilon & \zeta\\ \eta & \theta & \iota\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \lambda_3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\gamma\\ \zeta\\ \iota\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \lambda_3\end{bmatrix}\rightarrow$

$\left\{\begin{matrix}\iota=\lambda_3\\ \gamma=\zeta=0\end{matrix}\right\}$.

Άρα ο A= $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του που αντιστοιχούν όπως είπαμε και παραπάνω στα τρία μοναδιαία ιδιοδιανύσματα.

<u>Βήμα 2^ο:</u> Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot I - A) = \ |t \cdot I - A| = \begin{vmatrix} t-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & t-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (t-\lambda_1) \cdot (t-\lambda_2) \cdot (t-\lambda_3) = 0.$$

Έστω ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ο A γίνεται,

A= $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot I_{3x3}.$

Τότε, για να είναι οι ιδιοτιμές ίσες θα πρέπει κάθε τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα να είναι της μορφής: $\vec{x}$= $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ και να ισχύουν:

A$\cdot\vec{x} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \xi_1 \\ \lambda \cdot \xi_2 \\ \lambda \cdot \xi_3 \end{bmatrix}$ (2) και,

λ$\cdot\vec{x} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot \xi_1 \\ \lambda \cdot \xi_2 \\ \lambda \cdot \xi_3 \end{bmatrix}$ (3). Από τις (2), (3) προκύπτει ότι ισχύει η (1), δηλαδή A$\cdot\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0},$ και αφού ικανοποιεί την (1) αποδείξαμε ότι πράγματι, υπάρχει μία ιδιοτιμή λ του A. Αυτή κατά την θεωρία θα ικανοποιεί και την χαρακτηριστική εξίσωση του A και θα έχουμε τελικά:

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot I - A) = \begin{vmatrix} t-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \ (t-\lambda)^3 = 0.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι πράγματι ο A έχει μία ΜΟΝΟ ιδιοτιμή λ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

3.3 Διερεύνηση λαθών στο πρόβλημα 3

3.3.1 Είδη λαθών στα χαρακτηριστικά μεγέθη και κατηγοριοποίησή τους

Το πρόβλημα 3 έχει να κάνει με την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων έτσι ώστε να βρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον τετραγωνικό πίνακα A στο πρώτο ερώτημα και στο δεύτερο θεωρητικό ερώτημα να αποδείξουν ότι ένας τετραγωνικός πίνακας, εδώ 3x3, με οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα που ανήκει στον $\mathbb{R}^3$ να είναι ιδιοδιάνυσμά του έχει μόνο μία ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας 3. Οι φοιτητές για να λύσουν μία τέτοια άσκηση θα πρέπει να γνωρίζουν πώς να βρίσκουν ιδιοτιμές άρα να λύνουν ορίζουσες και στην συνέχεια πώς να βρίσκουν τα ιδιοδιανύσματά τους άρα να επιλύουν γραμμικά συστήματα με τον πρώτο τρόπο ή να θέτουν έναν πίνακα σε κλιμακωτή μορφή με τον δεύτερο τρόπο. Στην συνέχεια πρέπει να γνωρίζουν πότε έναν πίνακας διαγωνοποιείται και πώς βρίσκουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P ενός πίνακα A με μέθοδο Gauss-Jordan με τον πρώτο τρόπο ή με τον γνωστό τύπο με $P^{-1} = \frac{adjP}{|P|}$,όπου εδώ οι φοιτητές καλούνται να βρουν την ορίζουσα του P και να ελέγξουν εάν είναι διάφορη του μηδενός και άρα να μπορούν να συνεχίσουν και αν βρουν τον συμπληρωματικό πίνακα του P. Επομένως πρέπει να ξέρουν την θεωρία πινάκων πολύ καλά, καθώς και τις έννοιες και τα εργαλεία που συμπεριλαμβάνονται στην θεωρία και στις εφαρμογές.

Τώρα για να λύσουν και το δεύτερο ερώτημα, που είναι πιο γενικό και ζητά να αποδείξουν ότι ένας πίνακας έχει μόνο μία ιδιοτιμή ίδιας πολλαπλότητας ενώ έχει την ιδιότητα κάθε μη μηδενικό διάνυσμά του να είναι και ιδιοδιάνυσμά του και όλα αυτά στον τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο, θα πρέπει να γνωρίζουν πολύ καλά την θεωρία των ιδιοτιμών- ιδιοδιανυσμάτων, τι σημαίνει σ'έναν τρισδιάστατο πίνακα κάθε μη μηδενικό τρισδιάστατο διάνυσμα είναι και ιδιοδιάνυσμα και πώς «μεταφράζεται» αυτό στην πράξη και τέλος πώς χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα και τα στοιχεία θεωρίας των χαραστηριστικών μεγεθών να αποδείξουν ότι πράγματι ο πίνακας έχει μόνο μία ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 3. Άρα και πάλι πρέπει να ξέρουν να χειρίζονται πολύ καλά πίνακες και ορίζουσες. Τελειώσαμε με το τι πρέπει να γνωρίζουν για να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα.

Όμως, σε αυτήν τη φάση θα αναλύσουμε και το τι τελικά δεν γνωρίζουν από αυτά και τι είδους λάθη κάνουν όταν λύνουν το πρόβλημα. Τα είδη των λαθών που παρατηρούνται χωρίζονται στις εξής κατηγορίες:

i) Λάθη στην δικαιολόγηση και συμβολίζεται με **Δ**, όπως έλλειψη διακαιολόγησης

ii) Λάθη στην επίλυση συστημάτων, στους πινάκων και στις ορίζουσες, συμβολίζεται με **Π**

iii) Δεν έχουν κατανοήσει σωστά ή πλήρως τις έννοιες ιδιοτιμή- ιδιοδιάνυσμα και τον τρόπο εύρεσής τους και πώς αυτό συνδέεται και οδηγεί στο να αποδείξουν ότι ένας πίνακας διαγωνοποιείται, τις έννοιες αντιστρεψιμότητα και αντιστρέψιμος πίνακας, γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων και κλιμακωτή μορφή πίνακα ιδιοδιανυσμάτων ή έννοια συμπληρωματικού πίνακα. Συμβολίζεται με **Κ** και ισχύει για όλα τα λάθη που γίνονται.

iv) Λάθη στην διαγωνοποίηση του πίνακα Α και συμβολίζεται με **ΔΓ**

v) Λάθη στα ιδιοδιανύσματα και συμβολίζεται με **ΡΑ**

vi) Λάθη στην αντιστρεψιμότητα του Ρ και συμβολίζεται με **ΡΒ**

vii) Βρίσκουν λάθος ιδιοτιμές και συμβολίζεται με **ΙΔΑ**

viii) Βρίσκουν λάθος ιδιοδιανύσματα και συμβολίζεται με **ΙΔΒ**

Πέραν όμως αυτών έχουμε και υποκατηγορίες λαθών και ανάλογα το βήμα στην λύση και την φύση του λάθους είναι οι εξής:

Για τις κατηγορίες (i) και (iii):

α) Συμβολίζεται με **ΔΔΔ** και έχει να κάνει με την έλλειψη απόδειξης στο ότι κάθε μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα ικανοποιεί την $A\cdot x= \lambda\cdot x$ (2) ή και όταν αποδεικνύουν την (2) παίρνουν λανθασμένο τον πίνακα Α είτε τον θέτουν σε κλιμακωτή μορφή και τον κάνουν άνω διαγώνιο ή δεν επιλύουν σωστά τα συστήματα σε προηγούμενα βήματα και θέτουν την (1) ίση με μηδέν.

Η υποκατηγορία (α) αφορούν κυρίως το βήμα 2 του δεύτερου ερωτήματος.

Για τις κατηγορίες (ii), (iii) και (iv):

β) Συμβολίζεται με **ΚΒ** και αφορά λάθη κατανόησης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Θέτουν τον πίνακα Α ή τον $(A- \lambda\cdot I)$ πρώτα σε κλιμακωτή μορφή και μετά βρίσκουν την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές ή θέτουν τον πίνακα $(A- \lambda\cdot I)= 0$ σε κλιμακωτή μορφή με λάθος τρόπο άρα προκύπτει λάθος πίνακας και λάθος ιδιοδιανύσματα. Αφορά τον πρώτο τρόπο εύρεσης ιδιοδιανυσμάτων το τελευταίο. Αφορά κυρίως τα βήματα 1, 2, 3 του πρώτου ερωτήματος.

γ_1) Συμβολίζεται με **ΔΓΑ** και έχει να κάνει με την διαγωνοποίηση του Α και τα λάθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

γ₂) Συμβολίζεται με **ΔΓΒ** και έχει να κάνει με την διαγωνοποίηση του Α και την λάθος επιλογή ελαχίστου πολυωνύμου ή την επαλήθευση της επιλογής αυτής. Είναι γνωστό ότι το ελάχιστο πολυώνυμο μας δίνει την δυνατότητα να κρίνουμε αν ένας πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος ή όχι. Συγκεκριμένα, υπάρχει το σχετικό θεώρημα που διατυπώνεται ως εξής: «Ένας πίνακας Α $\in M_n(K)$είναι διαγωνοποιήσιμος, όταν και μόνον όταν, το ελάχιστο πολύώνυμο $m_A(t)$ του Α είναι γινόμενο διακεκριμμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, δηλαδή $m_A(t) = (t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k), k \leq n$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ $(συνήθως\ K = \mathbb{R},$
$πραγματικοί\ αριθμοί\ όπως\ και\ στο\ πρόβλημα\ 3)$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του Α.»

Οι υποκατηγορίες (γ_1), (γ_2) αφορούν κυρίως το βήμα 4 του πρώτου ερωτήματος.

Για τις κατηγορίες (ii), (iii) και (v):

δ₁) Συμβολίζεται με **ΡΑΑ** και έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ που αντί να έχει τα ιδιοδιανύσματα σε στήλες τα έχει σε γραμμές.

δ₂) Συμβολίζεται με **ΡΑΒ** και έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ με λάθος ιδιοδιανύσματα από τα προηγούμενα βήματα 1, 2, 3 ή και με τον λάθος τρόπο να τεθεί σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε ο Ρ να είναι ένας πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

δ₃) Συμβολίζεται με **ΡΑΓ** και έχει να κάνει με το ότι θέτουν τον Ρ ως διαγώνιο με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές, δηλαδή αντί για τον σωστό Ρ παίρνουν τον D.

Οι υποκατηγορίες (δ_1), (δ_2), (δ_3) αφορούν κυρίως το βήμα 4 του πρώτου ερωτήματος ή επηρεάζουν το βήμα 5 στην εύρεση του P^{-1}

Για τις κατηγορίες (ii), (iii) και (vi):

ε₁) Συμβολίζεται με **ΡΒΑ** και έχει να κάνει με την αντιστρεψιμότητα του Ρ και την εύρεση του συμπληρωματικού πίνακα του Ρ έτσι ώστε να βρεθεί αργότερα και ο P^{-1} στον δεύτερο τρόπο

ε₂) Συμβολίζεται με **ΡΒΒ** και έχει να κάνει με την μετατροπή του πίνακα Ρ σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε να βρεθεί και ο P^{-1} με τον πρώτο τρόπο.

Οι υποκατηγορίες (ε_1), (ε_2) αφορούν κυρίως το βήμα 5 του πρώτου ερωτήματος.

Για την κατηγορία (vii) και το σύμβολο **ΙΔΑ** δεν υπάρχουν υποκατηγορίες. Έχει να κάνει με τις λάθος ιδιοτιμές, διαφορετικές ή περισσότερες ή λιγότερες, με λάθος πολλαπλότητα. Αφορά κυρίως το βήμα 1 του πρώτου ή δεύτερου ερωτήματος.

Για τις κατηγορίες (ii), (iii) και (viii):

ζ₁) Συμβολίζεται με **ΙΔΒ** και έχει να κάνει με λάθος ιδιοδιανύσματα, περισσότερα ή λιγότερα ή στα πρόσημα δηλαδή αριθμητικά λάθη στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

ζ₂) Συμβολίζεται με **ΙΔΒΒ** και έχει να κάνει με το ότι το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α. Σημαντικό λάθος που φανερώνει και την έλλειψη κατανόησης της έννοιας του ιδιοδιανύσματος ή και της ιδιοτιμής.

Οι υποκατηγορίες (ζ_1), (ζ_2) αφορούν κυρίως τα βήματα 2 και 3 του πρώτου ερωτήματος ή το βήμα 1 του δεύτερου ερωτήματος.

Επομένως, αυτές είναι σε ανάλυση οι πιθανές κατηγορίες λαθών ή σφαλμάτων και οι υποκατηγορίες τους που συναντώνται στο πρόβλημα 3 ή και πιο γενικά είναι δυνατόν να παρατηρηθούν σε προβλήματα με χαρακτηριστικά μεγέθη.

3.3.2 Ποσοστιαία λάθη στις γραμμικές απεικονισεις

α) Τα γραπτά τελικών εξετάσεων εξαμήνου. Από τα υποκείμενα του δείγματος ζητήθηκε να απαντήσουν σε τρία θέματα στις τελικές γραπτές εξετάσεις, που αποτελούν και τα τρία προβλήματα που αναλύθηκαν ποιοτικά στα τρία πρώτα κεφάλαια και αναζητήθηκαν τα είδη των λαθών ή οι παρανοήσεις ή τα σφάλματα των φοιτητών στις λύσεις που δώσανε (Παράρτημα). Στον τρίτο πίνακα αναλύονται τα είδη των λαθών που παρατηρήθηκαν σε κάθε βήμα λύσης του τρίτου θέματος ή αλλιώς του προβλήματος 3 και η κωδικοποίησή τους. Η περιγραφή της προβληματικής κατάστασης γίνεται στο πεδίο της θεωρίας των χαρακτηριστικών μεγεθών, δηλαδή στην εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, στις απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιούνται για να διαγωνοποιείται ο πίνακας, στην διαδικασία αντιστρεψιμότητας του πίνακα με εύρεση αντιστρόφου με την Μέθοδο των Gauss- Jordan ή από την σχέση $P^{-1} = \frac{adjP}{|P|}$. Τα υποκείμενα καλούνται να δώσουν λύσεις στο πρόβλημα 3, χρησιμοποιώντας αυτά που διδάχθηκαν στη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας στην σχολή και όσα ήδη γνωρίζουν από το σχολείο.

β) Παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων. Στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων καταγράφονται τα λάθη και παρανοήσεις των υποκειμένων στις έννοιες που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν παραπάνω και αναλύονται σε ποσοστά τα πιο σημαντικά λάθη:

ΠΟΣΟΣΤΑ	***ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***	***ΔΕΝ ΕΚΑΝΕ ΤΟ ΛΑΘΟΣ***
ΔΔΔ	*4.05%*	*95.95%*
ΚΒ	*1.80%*	*98.20%*
ΔΓΑΒ (ΔΓΑ- ΔΓΒ)	*4.05%*	*95.95%*
ΡΑΑ- ΡΑΒ- ΡΑΓ	*14.86%*	*86.14%*
ΡΒΑ- ΡΒΒ	*8.11%*	*91.89%*
ΙΔΑ	*13.06%*	*86.94%*
ΙΔΒ	*27.48%*	*72.52%*
ΙΔΒΒ	*1.80%*	*98.20%*

Επίσης, τα ποσοστά των φοιτητών που έλυσαν σωστά το πρόβλημα είναι ***9.46%***, το ποσοστό αυτών που δεν το έλυσαν καθόλου είναι ***29.28%*** και το ποσοστό αυτών που έκαναν κάποιο λάθος ή δεν έλυσαν όλα τα ερωτήματα είναι ***61.26%***.

γ) Συμπεράσματα. Κάποια κομμάτια από την θεωρία της Άλγεβρας όπως συστήματα γραμμικών εξισώσεων, τα διανύσματα σε δύο διαστάσεις οι φοιτητές τα έχουν ήδη διδαχθεί στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο και θεωρούνται γνωστά και εφαρμόσιμα από αυτούς σε πρώτο επίπεδο, και σε δεύτερο επίπεδο ως βάση για την περαιτέρω επέκταση των γνώσεών τους στα χαρακτηριστικά μεγέθη. Δυστυχώς, οι πίνακες δεν διδάσκονται πλέον.

Πιο συγκεκριμένα, σε δεύτερο επίπεδο διδάσκονται στη σχολή νέες έννοιες όπως ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα, γραμμικούς μετασχηματισμούς και πίνακες, ορίζουσες, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, το Θεώρημα Caley-Hamilton και την αντιστρεψιμότητα και διαγωνοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα οποιουδήποτε μεγέθους γραμμών και στηλών. Αυτό που δεν διδάχθηκε στους Πολιτικούς Μηχανικούς είναι το ελάχιστο πολυώνυμο, αν και χρησιμοποιήθηκε λανθασμένα σε μερικά γραπτά, το οποίο δίνει απάντηση στο εάν ένας πίνακας διαγωνοποιείται. Για την βαθιά εμπέδωση της γνώσης και των εννοιών λύνονται προβλήματα και ασκήσεις μορφής όπως το πρόβλημα 3. Και ενώ και εδώ θα περίμενε κανείς η κατανόηση όλων των διδαχθεισών γνώσεων παλαιών και νέων θα ήταν εφικτή και εφαρμόσιμη, τα αποτελέσματα της μελέτης των απαντήσεων στα γραπτά πάνω στο πρόβλημα 3 μαρτυρούν ότι παρεμβλήθηκαν σίγουρα κάποιοι σοβαροί λόγοι παρανόησης της θεωρίας των χαρακτηριστικών μεγεθών και υπολογισμού τους. Οι λόγοι εμφάνισης αυτών των δυσκολιών στην κατανόηση της ύλης στην Γραμμική Άλγεβρα θα αναλυθούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Τα λάθη στην ενότητα των χαρακτηριστικών μεγεθών κωδικοποιούνται και χωρίζονται εν συντομία στα ακόλουθα:

Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, έλλειψη απόδειξης στο ότι κάθε μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα ικανοποιεί την $A\cdot\vec{x}= \lambda\cdot\vec{x}$ (2) ή και όταν αποδεικνύουν την (2) παίρνουν λανθασμένο τον πίνακα Α είτε τον θέτουν σε κλιμακωτή μορφή και τον κάνουν άνω διαγώνιο ή δεν επιλύουν σωστά τα συστήματα σε προηγούμενα βήματα και θέτουν την (1) ίση με μηδέν και συμβολίζεται με **ΔΔΔ**.

Π: πράξεις σε επίλυση συστήματος, σε πίνακες, ορίζουσες ανάλογα το βήμα.

Κ: κατανόηση της ύλης ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων, ισχύει πάντα για όλα τα σύμβολα.

ΚΒ: λάθη κατανόησης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων θέτουν τον πίνακα Α ή τον (Α- λ·Ι) πρώτα σε κλιμακωτή μορφή και μετά βρίσκουν την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές ή θέτουν τον πίνακα (Α- λ·Ι)= 0 σε κλιμακωτή μορφή με λάθος τρόπο άρα προκύπτει λάθος πίνακας και λάθος ιδιοδιανύσματα. Αφορά τον πρώτο τρόπο εύρεσης ιδιοδιανυσμάτων το τελευταίο.

ΔΓ: διαγωνοποίηση πίνακα είτε έχει να κάνει με την διαγωνοποίηση του Α και τα λάθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με **ΔΓΑ**, είτε με λάθος ελάχιστο πολυώνυμο του Α ως γινόμενο διακεκριμμένων πρωτοβάθμιων όρων και επαλήθευση επιλογής με **ΔΓΒ**

ΡΑ: έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ που αντί να έχει τα ιδιοδιανύσματα σε στήλες τα έχει σε γραμμές με **ΡΑΑ**, είτε έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ με λάθος ιδιοδιανύσματα από τα προηγούμενα βήματα 1, 2, 3 ή και με τον λάθος τρόπο να τεθεί σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε ο Ρ να είναι ένας πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

με **ΡΑΒ**, είτε έχει να κάνει με το ότι θέτουν τον Ρ ως διαγώνιο με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές, δηλαδή αντί για τον σωστό Ρ παίρνουν τον D με **ΡΑΓ.**

ΡΒ: αντιστρεψιμότητα του Ρ, έχει να κάνει με την εύρεση του συμπληρωματικού πίνακα του Ρ έτσι ώστε να βρεθεί αργότερα και ο P^{-1} στον δεύτερο τρόπο με **ΡΒΑ**, έχει να κάνει με την μετατροπή του πίνακα Ρ σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε να βρεθεί και ο P^{-1} με τον πρώτο τρόπο με **ΡΒΒ.**

ΙΔΑ: ιδιοτιμές λάθος, διαφορετικές, περισσότερες ή λιγότερες, με λάθος πολλαπλότητα.

ΙΔΒ: έχει να κάνει με λάθος ιδιοδιανύσματα, περισσότερα ή λιγότερα ή στα πρόσημα δηλαδή αριθμητικά λάθη στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

ΙΔΒΒ: έχει να κάνει με το ότι το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α.

1 ή 0 : λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Λόγοι εμφάνισης λαθών ή σφαλμάτων στην Γραμμική Άλγεβρα

4.1 Η έννοια του διανύσματος στο Ελληνικό σχολεία

4.1.1 Εισαγωγή του διανύσματος στα βιβλία και στα αναλυτικά προγράμματα

Από το πρώτο αναλυτικό πρόγραμμα του 1833 μέχρι το πρόγραμμα του 1966, με το οποίο τα διανύσματα καθιερώνονται στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, τα διανύσματα δεν περιλαμβάνονται στην διδακτέα ύλη. Η μόνη εξαίρεση αποτελεί το αναλυτικό πρόγραμμα του 1922, το οποίο ανέφερε τα διανύσματα για τις ανάγκες της Τριγωνομετρίας στο Λύκειο.

Από το 1966 μέχρι κα σήμερα έχουν εκδοθεί τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές σειρές βιβλίων στα μαθηματικά και σε καθεμιά από αυτές γινόταν διαφορετική προσέγγιση στην έννοια του διανύσματος. Την περίοδο 1967- 1969, μάλιστα, η Ελλάδα ακολούθησε την μεταρρυθμιστική κίνηση των «Αυστηρών» Μαθηματικών. Υπήρξαν αντιδράσεις εναντίον της Αντι- Ευκλείδειας κίνησης και είχαν ως αποτέλεσμα από την μία μεριά την εκλογή της αυστηρής και αξιωματικής θεμελίωσης και φορμαλισμού του Hilbert και από την άλλη την εισαγωγή ενός νέου υλικού από την διανυσματική ανάλυση και τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Τα διανύσματα εισάγονται και στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου και στο Λύκειο, για την μελέτη των ρητών και πραγματικών αριθμών και των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Τα εφαρμοστά και τα ελεύθερα διανύσματα ορίζονται βάσει της έννοιας των κλάσεων ισοδυναμίας. Τώρα, την περίοδο 1969- 1977 περάσαμε στην φάση των «μετριασμένων» μαθηματικών με κύριο χαρακτηριστικό την απλοποίηση της μορφής και την απουσία οποιουδήποτε αξιώματος. Άρα έννοιες όπως ίσα και ελεύθερα διανύσματα δίνονται με απλό τρόπο, ενώ ο όρος κλάση ισοδυναμίας δεν αναφέρεται. Στην περίοδο 1977- 1988 ακόμη, λαμβάνει χώρα μία νέα μεταρρύθμιση στα σχολεία η οποία ήταν στο πνεύμα των σύγχρονων μαθηματικών και έγιναν πολλές προσπάθειες για να απελευθερωθούν τα σχολικά μαθηματικά από την παράδοση. Έγινε ένα ευρύτερο ουσιαστικά άνοιγμα σε κλάδους όπως η Γεωμετρία, η Φυσική και η Ιστορία όπου η καθημερινή ζωή και τα παραδείγματα από εκεί χρησιμοποιούνται για την μελέτη των διανυσμάτων. Τα διανύσματα χρησιμοποιούνται πλέον για την μελέτη των ακεραίων, των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο επίπεδο και τον τρισδιάστατο χώρο. Τέλος, περίπου από το 1987 άρχισε μία νέα φάση για την ελληνική μαθηματική εκπαίδευση με μία φανερή απομάκρυνση από τις αρχές των «παλαιών» Μαθηματικών. Τα νέα βιβλία είναι πλέον απαλλαγμένα από την υπερβολική χρήση της θεωρίας και των συμβολισμών. Δίνεται έμφαση στη σύνδεση των Μαθηματικών με τις άλλες επιστημονικές περιοχές και την καθημερινή ζωή. Επίσης, παραλείπονται όροι, όπως εφαρμοστό διάνυσμα, κλάση ισοδυναμίας και οι ιδιότητες ισότητας διανυσμάτων, ενώ εισάγονται έννοιες όπως για παράδειγμα οι συντεταγμένες ενός διανύσματος.

Στο ερώτημα τι είναι διάνυσμα δεν υπάρχει μοναδική απάντηση. Συναντούμε αρκετές προσεγγίσεις της έννοιας του διανύσματος, όπως στην Φυσική τα διανύσματα είναι έννοιες που έχουν μέτρο και κατεύθυνση και προστίθενται σύμφωνα με τον κανόνα των μετατοπίσεων ή στην Γεωμετρία το διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Υπάρχει και η αναλυτική προσέγγιση της έννοιας του διανύσματος όπου κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$ και το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος (x, y), η αξιωματική προσέγγιση όπου τα διανύσματα ορίζονται ως οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ή ως τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου. Επίσης, γίνεται προσέγγιση της έννοιας σε σχέση με την κίνηση και διάνυσμα θεωρείται η παράλληλη μεταφορά όλου του χώρου ή μιας κλάσης ισοδύναμων μετατοπίσεων.

Ακόμη, τα διανύσματα χωρίζονται στις εξής ακόλουθες κατηγορίες: α) Το ολισθαίνον διάνυσμα το οποίο είναι ένα μέγεθος στο οποίο η ευθεία ενέργειας, το μέτρο και η κατεύθυνση πρέπει να προσδιορίζονται, β) Το εφαρμοστό διάνυσμα που τοποθετείται σε ένα σημείο, και γ) Το ελεύθερο διάνυσμα που είναι μία ποσότητα που προσδιορίζεται πλήρως μόνο από το μέτρο και την κατεύθυνση.

Τη μόνη φορά που στο Γυμνασίου τα διανύσματα διδάσκονται ως αυτόνομη ενότητα είναι στην Τρίτη τάξη. Χρησιμοποιούνται παραδείγματα από την Φυσική για την εισαγωγή των εννοιών σχετικά με το διάνυσμα και την παρουσίαση ιδιοτήτων και πράξεων με διανύσματα.

Επίσης, γίνεται και διάκριση μεταξύ αριθμητικού και διανυσματικού μεγέθους. Μόνο που συνήθως το συγκεκριμένο κεφάλαιο δεν αποτελεί διδακτέα ύλη με αποτέλεσμα να δημιουργούνται κενά στην γνωστική ανάπτυξη των παιδιών. Η ουσιαστική πρώτη επαφή των παιδιών με την μαθηματική έννοια του διανύσματος γίνεται στην δεύτερη τάξη του Λυκείου. Εκεί το διάνυσμα εισάγεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, ενώ δεν γίνεται αναφορά στα ελεύθερα ή εφαρμοστά διανύσματα. Όμως, εισάγεται η έννοια της ισότητας διανυσμάτων και κάθε διάνυσμα παραμένει αναλλοίωτο εάν μετακινηθεί παράλληλα ως προς την αρχική του θέση, έτσι ώστε κάθε διάνυσμα του (διανυσματικού) χώρου να είναι ίσο με ένα μοναδικό διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο αναφοράς Ο.

Ως γωνία δύο διανυσμάτων, $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}\ και\ \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, ορίζεται να είναι η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$. Επομένως, αν φ= $\widehat{AOB}$, τότε 0≤φ≤π. Η επιλογή αυτή γίνεται για να διευκολυνθεί η κατανόηση του διανυσματικού λογισμού και να μην επιβαρύνονται τα παιδιά με νέους συμβολισμούς. Οι πράξεις τώρα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διανυσμάτων με αριθμό, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες, παρουσιάζονται με την βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως η διαφορά $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, όπου το Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Και όσον αφορά την τριγωνική ανισότητα $\left||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τονίζεται ότι η αριστερή ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα, ενώ η δεξιά ισότητα όταν τα διανύσματα είναι ομόρροπα. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων είναι η εξής: $\vec{\alpha} II \vec{\beta} \leftrightarrow\ \vec{\alpha} = \lambda * \vec{\beta}, όταν\ \vec{\beta} \neq \vec{0}$, και χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων. Στην συνέχεια, με την βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος ένα διάνυσμα συμβολίζεται με ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του και έτσι διευκολύνεται και πάλι ο διανυσματικός λογισμός. Με αφορμή μάλιστα, την απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$: $\vec{\alpha} II \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, εισάγεται ο συμβολισμός det($\vec{a}, \vec{b}$)= $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί και για την έκφραση του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές του. Το εσωτερικό γινόμενο αποτελεί την σημαντικότερη ενότητα του κεφαλαίου των διανυσμάτων και αυτό φαίνεται σε πολλές εφαρμογές του. Οι διάφορες εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου επιτρέπουν τον υπολογισμό του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας δύο διανυσμάτων, καθώς και την πραγματοποίηση της απόδειξης πολλών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εν συντομία λοιπόν, παρατέθηκε το τι υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια και διδάσκεται στο σχολείο σε σχέση με την έννοια του διανύσματος και τα συνεπακόλουθά της. Η σημασία της διδασκαλίας του διανύσματος αποτελεί θεμελιώδη αρχή στην κατανόηση της Γραμμικής Άλγεβρας στο Πανεπιστήμιο. Με άλλα λόγια με τον διανυσματικό λογισμό τα παιδιά εξοικειώνονται με τον λογισμό διανυσμάτων ώστε να ανταποκριθούν επιτυχώς στις απαιτήσεις άλλων κλάδων που χρησιμοποιούν διανύσματα όπως Κινηματική, προσεγγίζουν γεωμετρικά θέματα μέσω των διανυσμάτων και αυτό βοηθάει στην μελέτη και την εξαγωγή συμπερασμάτων σε θέματα Γραμμικής Άλγεβρας, Αναλυτικής Γεωμετρίας και στους μιγαδικούς αριθμούς.

4.1.2 Έρευνες πάνω στα διανύσματα

Η έννοια του διανύσματος είναι πολυδιάστατη και σε συνδυασμό με την εμφάνισή της σε αλγεβρικό, γεωμετρικό και φυσικό επίπεδο δημιουργεί πολλά προβλήματα στην διδασκαλία και κατανόηση της.

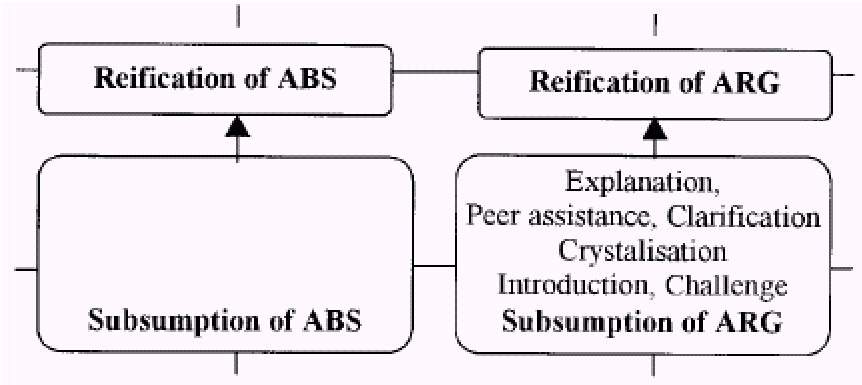
Έχουν γίνει πολλές έρευνες για τα διανύσματα, κυρίως στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και υπάρχουν πολλές αναφορές στην ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης στα μαθηματικά. Ιδιαίτερα συναντούμε την έννοια αυτή στην Άλγεβρα και την Μηχανική.

Για παράδειγμα οι Jose Aguirre και Gaalen Erickson (1984) ερευνούν την κατανόηση του διανύσματος στο πλαίσιο της Φυσικής και αντιμετωπίζουν τις ιδέες των μαθητών στις οποίες εμπλέκεται η μαθηματική έννοια με την φυσική έννοια, όπως η θέση, η ταχύτητα ή η επιτάχυνση. Προτείνουν οι καθηγητές να προσπαθήσουν να οικοδομήσουν πάνω στην διαίσθηση των παιδιών μέσω της καθημερινής εμπειρίας τις συσχετίσεις που υπάρχουν με τα πιο τυπικά προβλήματα της επιστημονικής κοινότητας. Με τον όρο διαίσθηση ή διαισθήσεις εννοούν τις αντιλήψεις των παιδιών για τον φυσικό κόσμο πριν διδαχθούν την τυπική γνώση στην τάξη. Μάλιστα, τα δίκτυα των διανυσματικών εννοιών που παράγουν στην έρευνά τους δεν έχουν καμία ένδειξη της μαθηματικής έννοιας του διανύσματος. Σύμφωνα με αυτούς το διάνυσμα συνδυάζεται με τα διανυσματικά μεγέθη, τα οποία είναι πιο δύσκολο να κατανοηθούν από τα παιδιά παρά την εμπειρική τους γνώση.

Κάποιες άλλες σημαντικές έρευνες στην ίδια κατεύθυνση έγιναν από τους Ted Graham, John Berry και Stuart Rowlands, οι οποίοι μελέτησαν την έννοια του διανύσματος μέσα από την κατανόηση των διανυσματικών μεγεθών στην Μηχανική. Αρχικά οι Graham και Berry, το 1990, θέλησαν να ερευνήσουν το πώς τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις έννοιες της Μηχανικής πριν ακόμη διδαχθούν παρόμοιες έννοιες στην τάξη, δηλαδή προσπάθησαν να εντοπίσουν τις διαισθητικές ιδέες ή και παρανοήσεις. Στους στόχους τους συμπεριλαμβανόταν και η βοήθεια στους καθηγητές των Μαθηματικών, αφού θα μάθαιναν το γνωστικό υπόβαθρο των παιδιών που δίδασκαν και έτσι θα μπορούσαν να τους καθοδηγήσουν σε ουσιαστικότερη μάθηση εκτοπίζοντας ταυτόχρονα τις λανθασμένες αντιλήψεις τους. Πέρα από αυτά, υπήρξε συνέχεια της έρευνάς τους, το 1991, όπου προσπάθησαν να αναπτύξουν στρατηγικές διδασκαλίας με τις οποίες θα μπορούσαν να διορθώσουν τυχόν παρανοήσεις των διδασκομένων στις έννοιες της Μηχανικής έτσι ώστε να μην μεταφερθούν αργότερα στο μάθημα των Μαθηματικών ή της Φυσικής. Ας σημειωθεί εδώ πως στο αναλυτικό πρόγραμμα της Αγγλίας η μηχανική επιτελούσε εισαγωγικό και υποβοηθητικό ρόλο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, στη μοντελοποίηση και στην επίλυση προβλήματος, τουλάχιστον το διάστημα που γινόταν η έρευνα. Ακολούθησαν αρκετά άρθρα (Graham & Berry, 1992, Graham & Berry, 1993, Graham & Berry, 1996, Graham & Berry, 1997, Rowlands, Graham & Berry, 1998) με στόχο τον προσδιορισμό των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές, δίνοντας προοδευτικά όλο και περισσότερη έμφαση στην κατασκευή μοντέλων για το πώς αναπτύσσεται η κατανόηση των εννοιών. Αντιμετώπισαν όμως κάθε διανυσματικό μέγεθος μεμονωμένα, χωρίς να προσπαθούν να εντοπίσουν τα κοινά τους στοιχεία, τα κοινά τους προβλήματα στην κατανόηση και τελικά την κοινή τους μαθηματική δομή. Κατά την άποψή τους το διάνυσμα συνδυάζεται με τα διανυσματικά μεγέθη, τα οποία είναι δυσκολότερο να γίνουν κατανοητά από τους μαθητές παρά την εμπειρία που έχουν από αυτά στη ζωή τους. Οι Rowlands, Graham & Berry (1999) παρατήρησαν ότι «οι διάφορες προσπάθειες για την ταξινόμηση των εννοιολογικών κατασκευών των φοιτητών ήταν μη επιτυχημένες. Μία ταξινόμηση τους μπορεί να είναι αδύνατη επειδή οι εκτιμήσεις των παρερμηνειών απαιτούν να λάβουμε υπόψη το συγκεκριμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο η παρερμηνεία εμφανίζεται και πώς η παρερμηνεία συνδέεται με τις άλλες μορφές συλλογισμού». Η βασικότερη αιτία που μπορεί να παραγάγει πολλές παρανοήσεις είναι ξεχασμένη, και αυτή είναι η μη σαφής μαθηματική γνώση του διανύσματος.

Στην συνέχεια των ερευνών, οι Patricia Forster και Peter Taylor προσπάθησαν να ερευνήσουν την εξέλιξη της κατανόησης της έννοιας του διανύσματος από τους μαθητές. Ενδιαφέρθηκαν για το μαθηματικό περιεχόμενο της έννοιας, αλλά η εισαγωγή στο διάνυσμα έγινε μέσα από έργα που αφορούσαν πραγματικές καταστάσεις και με τη διαμεσολάβηση υπολογιστών τσέπης με γραφικά. Για να μπορέσουν να μελετήσουν την ανάπτυξη της γνώσης βασίστηκαν τόσο στις κατηγορίες της μαθηματικής κατανόησης των Gray και Tall (1994), όσο και στις θεωρίες των Hiebert και Carpenter (1992), Sfard (1991). Ειδικότερα, ενδιαφέρθηκαν να εντοπίσουν πότε ο μαθητής, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, χρησιμοποιεί τις συμβολικές εκφράσεις διαδικαστικά και πότε ως αντικείμενα.

Δυστυχώς, οι ερευνητές «χάνονται» στην παρουσίαση παρατηρήσεων, που αφορούν τον κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, τους υπολογιστές τσέπης με γραφικά, τον αναστοχασμό, την ανάπτυξη της γνώσης, χωρίς να εμβαθύνουν στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος. Παρόλα αυτά, η ερευνά τους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφού συνδυάζοντας τη θεωρία των δικτύων των Hiebert και Carpenter και τη θεωρία των σταδίων της Sfard, διαχώρισαν το μέτρο του διανύσματος από την κατεύθυνσή του, προτείνοντας (Forster και Taylor, 2000) το παρακάτω σχήμα:



Όπως βλέπουμε θεώρησαν το μέτρο (ABS) ως έναν κόμβο του δικτύου και τη κατεύθυνση (ARG) ως άλλο, οι οποίοι βέβαια συνδέονται μεταξύ τους. Εδώ ίσως να πρέπει να σημειώσουμε πως αυτός ο διαχωρισμός σχεδόν επιβλήθηκε από τη χρήση των υπολογιστών τσέπης με γραφικά, αφού ο υπολογισμός του μέτρου ενός διανύσματος γίνεται με διαφορετικό τρόπο (με τη συνάρτηση ABS) από τον υπολογισμό της γωνίας (με τη συνάρτηση ARG).

Οι αντιλήψεις των μαθητών για το διάνυσμα, ως μαθηματικό αντικείμενο και εργαλείο, αποτέλεσαν και το πεδίο συστηματικής έρευνας από τους Ελένη Δημητριάδου, Αθανάσιο Γαγάτση και Κωνσταντίνο Τζανάκη. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η καταγραφή των προβλημάτων και των παρανοήσεων που προκύπτουν από τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών. Συνοπτικά τους μαθητές δυσκολεύει:

α) Η έννοια της φοράς του διανύσματος. Οι περισσότεροι μαθητές συγχέουν το μαθηματικό της περιεχόμενο με αντιλήψεις και σημασίες από την καθημερινή ζωή και τη Φυσική. Έτσι δεν αναγνωρίζουν τη φορά ως κύριο χαρακτηριστικό του διανύσματος και την αγνοούν στους συλλογισμούς τους.

β) Η έννοια της διεύθυνσης, η οποία όμως φαίνεται να προκαλεί λιγότερα προβλήματα και με ασθενέστερη ένταση. Κυρίως παρουσιάστηκε σύγχυση μεταξύ διεύθυνσης και φοράς, έννοιες που οι μαθητές δεν μπορούσαν να διαχωρίσουν εύκολα, κάτι που αποτέλεσε πηγή πολλών λαθών.

γ) Ο χειρισμός του συμβολισμού των διανυσμάτων όταν χρησιμοποιούνται κεφαλαία γράμματα (εφαρμοστά διανύσματα) σε αντίθεση με τα μικρά (ελεύθερα διανύσματα). Αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι τα κεφαλαία γράμματα ενσωματώνουν και τη φορά των διανυσμάτων. Εκεί που εμφανίστηκαν τα μεγαλύτερα προβλήματα ήταν στο συμβολισμό των οριζοντίων διανυσμάτων με φορά από δεξιά προς τα αριστερά, άθροισμα μη συγγραμμικών διανυσμάτων, αφαίρεση και σύγκριση διανυσμάτων.

δ) Η χρήση του όρου «αντίθετος». Αυτός ο όρος χρησιμοποιείται στον προφορικό λόγο με διαφορετική σημασία, σε διαφορετικές περιστάσεις, συνδέεται δηλαδή με προηγούμενες καθημερινές εμπειρίες. Επομένως, πρόκειται για μια αυθόρμητη έννοια η οποία δεν έχει αναπτυχθεί σε σημείο που να διαφοροποιηθεί επαρκώς από το παρελθόν και να μετατραπεί σε επιστημονική. Σε τέτοιες περιπτώσεις η λέξη σημαίνει διαφορετικός ή άνισος ακόμη και όταν οι σχέσεις δεν είναι δυαδικές και χρησιμοποιείται για τη διάκριση διανυσμάτων διαφορετικής φοράς ή διεύθυνσης και σε μεμονωμένες περιπτώσεις διαφορετικού μέτρου.

ε) Το τρισυπόστατο, συγκεκριμένο μέτρο, φορά και διεύθυνση, της έννοιας. Συνήθως επικρατεί το μέτρο με αποτέλεσμα το διάνυσμα να αντιμετωπίζεται ως ευθύγραμμο τμήμα.

στ) Η πρόσθεση διανυσμάτων. Πολλές φορές οι μαθητές θεωρούν πως το μέτρο του αθροίσματος δυο μη συγγραμμικών διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των δυο επί μέρους μέτρων. Αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με τη χρήση των συμβόλων «+», «-», και «=» τα οποία για λόγους οικονομίας της σκέψης και για να υπενθυμίζεται πως οι διανυσματικές πράξεις γενικεύουν τις αριθμητικές πράξεις είναι τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική και την άλγεβρα, αλλά που τώρα έχουν ένα διαφορετικό, πιο γενικό νόημα. Επίσης, πολλά είναι και τα λάθη που γίνονται κατά την εφαρμογή του κανόνα του τριγώνου και του κανόνα του παραλληλογράμμου. Αρκετοί μαθητές δημιουργούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας δικούς τους κανόνες, παραλλαγές, ή απλουστεύσεις του τυπικού κανόνα, τους οποίους θεωρούν πιο απλούς και κατανοητούς.

Επίσης, σε μια πρωτότυπη έρευνα οι Α. Γαγάτσης και Ε. Δημητριάδου ασχολήθηκαν με τη σύγκριση των διανυσματικών μεθόδων σε σχέση με τις μεθόδους της κλασσικής γεωμετρίας, όσον αφορά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Η ανάλυση των γραπτών των μαθητών κατέδειξε πως οι μαθητές προτιμούν τις μεθόδους της Ευκλείδειας γεωμετρίας και μάλιστα κάνουν λιγότερα λάθη όταν τις χρησιμοποιούν, σε σχέση με τις διανυσματικές μεθόδους.

Τέλος, ένα σημαντικότατο στοιχείο προέκυψε από τη συγκριτική μελέτη των προβλημάτων διδασκαλίας και μάθησης της έννοιας του διανύσματος στην ελληνική και την κυπριακή δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι Έλληνες μαθητές πρώτα γνωρίζουν το διάνυσμα μέσα από τα μαθήματα της Φυσικής. Αντίθετα, η κατάσταση στην Κύπρο είναι καλύτερη, αφού η έννοια του διανύσματος εισάγεται στα Μαθηματικά (Β΄ Γυμνασίου) ένα χρόνο πριν οι μαθητές ακούσουν για τα διανυσματικά μεγέθη στη Φυσική (Γ΄ Γυμνασίου). Αυτός είναι ίσως ο σημαντικότερος λόγος για τον οποίο οι Κύπριοι μαθητές έκαναν λιγότερα λάθη από τους μαθητές των ελληνικών σχολείων. Μια μη-σαφή, ελλιπή και μονομερή αντίληψη για τη μαθηματική ιδέα του διανύσματος, που μπορεί να δώσει το μάθημα της Φυσικής, δεν είναι διαθέσιμη σε οποιαδήποτε αφαίρεση, επειδή δεν στρέφεται στις συγκεκριμένες ιδιότητες της καθαρής μαθηματικής έννοιας του διανύσματος.

Σε μία τελευταία αναφορά έρευνας πάνω στα διανύσματα οι Anna Watson, Panayotis Spyrou και David Tall, το 2002 εξετάζουν τη σχέση μεταξύ του αντιληπτικού κόσμου της ενσωμάτωσης και του εννοιολογικού κόσμου του μαθηματικού συμβολισμού, ειδικότερα σχετικά με την έννοια του διανύσματος. Δείχνουν ότι ο ενσωματωμένος κόσμος έχει ποικίλες διαφορετικές έννοιες εξαρτώμενες από το πλαίσιο στο οποίο η έννοια εμφανίζεται και εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο αυτές συνδέονται με το μαθηματικό συμβολισμό. Η εκμάθηση των διανυσμάτων τοποθετείται στη τομή της θεωρίας ενσωματωμένων μαθηματικών σχετικά με τα φυσικά φαινόμενα, και της διαδικασίας-αντικειμένου συμπύκνωσης των δράσεων ως μαθηματικές έννοιες. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πορίσματά τους, που αφορούν την πρόσθεση διανυσμάτων. Από την έρευνα φαίνεται πως ο κανόνας του παραλληλογράμμου και ο κανόνας του τριγώνου ναι μεν είναι από μαθηματική άποψη ισοδύναμοι, αλλά δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι, ιδιαίτερα όταν οι μαθητές τους συναντούν για πρώτη φορά. Αναλυτικότερα διαπίστωσαν ότι αντιλήψεις των μαθητών για τις δυνάμεις που ενεργούν στα σώματά τους, τους αναγκάζουν να αισθανθούν το συνδυασμό δύο δυνάμεων ως ενιαία δύναμη ενδιάμεσα των δυο αρχικών. Το τράβηγμα προς τα εμπρός ενός ατόμου ύστερα από την επίδραση δυο δυνάμεων στα χέρια του, το αναγκάζει να κινηθεί σε μια προς τα μπρος κατεύθυνση που αντιπροσωπεύει το συνδυασμό των δύο δυνάμεων. Αυτό οδηγεί στη φυσική ερμηνεία της διανυσματικής πρόσθεσης με τη χρησιμοποίηση του κανόνα του παραλληλογράμμου. Από την άλλη πλευρά, όταν ο μαθητής συναντήσει τα διανύσματα στο πλαίσιο των διαδοχικών μετατοπίσεων, τότε οδηγείται φυσικότερα στη σύνθεση των διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τον κανόνα τριγώνων.

Αυτές όμως οι λεπτές διαφορές στην κατανόηση του διανυσματικού λογισμού πολλές φορές οδηγούν σε λάθη, όπως κατά τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από τους μαθητές να αναλύσουν τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα που βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο κάποιοι μαθητές έδωσαν την παρακάτω απάντηση:

Οι μαθητές ανέλυσαν τη δύναμη, που οφείλεται στη βαρύτητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τριγώνου. Αυτό όμως οδήγησε στην εντύπωση ότι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης της βαρύτητας δεν ενεργεί στο σώμα, αφού είναι μακριά του. Συνοπτικά λοιπόν, η ενσωμάτωση του διανύσματος ως κίνηση οδηγεί φυσικότερα στη χρήση του κανόνα του τριγώνου, ενώ η ενσωμάτωση του διανύσματος ως δύναμη οδηγεί φυσικότερα στον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αυτό μπορεί να οδηγήσει πολλούς μαθητές, που βρίσκονται στα πρώτα στάδια μάθησης, σε σημαντικές παρερμηνείες, ειδικά στη Μηχανική. Επομένως η ενσωμάτωση έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες, που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή.

4.2 Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος

4.2.1 Εισαγωγή

Η έρευνα στην εκπαίδευση των φυσικών επιστημών έχει καταδείξει πως οι μαθητές δεν είναι άγραφα χαρτιά που αναμένουν να γεμίσουν με γνώση. Αντίθετα, στον κάθε μαθητή προϋπάρχει κάποια γνώση την οποία η εκπαίδευση καλείται να αναπλάσει και να συμπληρώσει (Strike & Posner, 1985). Η θεωρία του μετασχηματισμού της αντίληψης συμπληρώνει τη θεωρία της οικοδόμησης που θέλει τους μαθητές να οικοδομούν ενεργητικά τη γνώση μέσα από την αλληλεπίδραση της προϋπάρχουσας γνώσης και των καινούριων εμπειριών τους. Μια από τις σοβαρές προκλήσεις που αντιμετωπίζει η εκπαίδευση των φυσικών επιστημών προέρχεται από τη σθεναρή αντίσταση που έχουν οι μαθητές στο να μεταβάλουν τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις τους.

Οι δικές τους αντιλήψεις έρχονται πολλές φορές σε αντίθεση με τις τυπικές μαθηματικές ή φυσικές δομές. Για παράδειγμα, οι μαθητές αντιμετωπίζουν με σκεπτικισμό την έννοια του διανύσματος. Είναι εξοικειωμένοι με το σώμα των πραγματικών αριθμών και δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι τα διανύσματα αποτελούν ξεχωριστά μαθηματικά αντικείμενα για τα οποία ισχύουν ξεχωριστές ιδιότητες αθροίσματος ή γινομένου. Οι λανθασμένες προϋπάρχουσες αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια του διανύσματος είναι υπεύθυνες για μια σειρά από λάθη όπως: α) το άθροισμα δύο δυνάμεων είναι πάντοτε «μεγαλύτερο» από τις συνιστώσες δυνάμεις, β) το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι το άθροισμα των μέτρων τους, γ) η γωνία δύο διανυσμάτων που έχουν την ίδια διεύθυνση είναι μηδέν μοίρες, ή δ) η γωνία δυο διανυσμάτων με αντίθετη φορά είναι μηδέν μοίρες. Είναι λοιπόν επιβεβλημένη η αναζήτηση διδακτικών προσεγγίσεων ικανών να βοηθήσουν τους μαθητές να επιλύσουν τις νοητικές συγκρούσεις ανάμεσα στις λανθασμένες προϋπάρχουσες αντιλήψεις που έχουν και στις ορθές μαθηματικές και φυσικές δομές που διέπουν την έννοια του διανύσματος.

4.2.2 Ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων

Οι διάφορες εξωτερικές αναπαραστάσεις κωδικοποιούν τις ίδιες δομές μιας έννοιας με ξεχωριστό τρόπο. Η αναγνώριση των δομών αυτών ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας. Ο Duval (1987) υποστηρίζει ότι κάθε πεδίο αναπαράστασης χαρακτηρίζεται από διαφορετικές δυνατότητες. Η φύση ενός σημειωτικού πεδίου που επιλέγεται για την αναπαράσταση ενός περιεχομένου - αντικειμένου, έννοια, προβληματική κατάσταση, προβάλλει ιδιαίτερες πληροφορίες και στοιχεία του περιεχομένου που αναπαριστά. Για παράδειγμα, τα γραφήματα αποκαλύπτουν τη μεταβολή που κρύβεται μέσα σε μια εξίσωση. Οι πίνακες διευκολύνουν το χρήστη στην αναγνώριση μοτίβων (Cox & Brna 1995, Kaput 1989). Η χρήση διαγραμμάτων διευκολύνει τις διεργασίες αναζήτησης και αναγνώρισης, μειώνοντας το απαιτούμενο μνημονικό φορτίο και βοηθώντας το χρήστη να επικεντρώνεται περισσότερο στα αντικείμενα και τις σχέσεις τους (Larkin & Simon 1987).

Ωστόσο, η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης. Είναι γενικά παραδεκτό ότι η διαδικασία μετάφρασης από ένα πεδίο αναπαράστασης σε άλλο βοηθά το μαθητή στο να αναγνωρίσει διάφορες πτυχές της έννοιας, να αποβάλει την εξάρτηση του από συγκεκριμένους φορμαλισμούς, να αντιμετωπίζει ευχερέστερα προβληματικές καταστάσεις. Για παράδειγμα, η παράλληλη χρήση της γεωμετρικής και της των πολικών συντεταγμένων αναπαράστασης του διανύσματος επαυξάνει την ικανότητα διάκρισης των στοιχείων του διανύσματος σε μέτρο, διεύθυνση και φορά. Στο σχεδιασμό των εθνικών επιπέδων εκπαίδευσης και αξιολόγησης για τα μαθηματικά στην Αμερική (NCTM 2000), αναγνωρίζεται η μεγάλη σημασία των αναπαραστάσεων. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι το αναλυτικό πρόγραμμα θα πρέπει να καλλιεργεί στους μαθητές την ικανότητα: α) να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις με στόχο να οργανώνουν, να κωδικοποιούν και να επικοινωνούν τις μαθηματικές τους ιδέες, β) να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις με στόχο τη κατανόηση και επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης, γ) να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στη μοντελοποίηση και ερμηνεία φυσικών, κοινωνικών και μαθηματικών φαινομένων. Ειδικά στη διδασκαλία του διανύσματος γίνεται εισήγηση για χρήση από τους διδάσκοντες ενός δυναμικού μοντέλου προσομοίωσης όπου γίνεται σύζευξη πολικών συντεταγμένων διανύσματος και γεωμετρικής αναπαράστασής του. Μέσα από το μοντέλο ο μαθητής καλείται να πειραματιστεί πάνω σε μεταβολές που επιφέρει στην κίνηση ενός αυτοκινήτου ή ενός αεροπλάνου το διάνυσμα της κίνησης του ή η συνισταμένη του διανύσματος κίνησης του αντίστοιχα. Στόχος είναι η διδασκαλία των βασικών ιδιοτήτων του διανύσματος (μέτρο, διεύθυνση, φορά) καθώς και των βασικών μετασχηματισμών του, όπως, παράλληλη μετατόπιση, βαθμωτός πολλαπλασιασμός, άθροισμα και διαφορά.

4.2.3 Σύνοψη

Συνοπτικά, αυτά είναι τα συμπεράσματα ερευνών πάνω στην κατανόηση και την διδασκαλία της σημαντικότατης, στην Γραμμική Άλγεβρα, έννοιας του διανύσματος. Γίνεται φανερό ότι η αποσπασματική διδασκαλία της έννοιας του διανύσματος και η σαφής προτίμηση στις αλγεβρικές αναπαραστάσεις της αναλυτικής γεωμετρίας είναι υπεύθυνες για την ελλιπή και μονομερή γνώση που αποκτούν οι διδασκόμενοι. Η αδυναμία τους να αντιληφθούν το διάνυσμα ως ένα γεωμετρικό μαθηματικό αντικείμενο δημιουργεί μια σειρά από παρανοήσεις και λάθη. Η παράλληλη διδασκαλία των διάφορων μορφών αναπαράστασης του διανύσματος θα μπορούσε να βοηθήσει στη διαφοροποίηση των λανθασμένων αντιλήψεων της έννοιας του διανύσματος. Η αναπαράσταση των πολικών συντεταγμένων συμβάλλει καθοριστικά στη κατανόηση και επίλυση προβληματικών καταστάσεων με διανυσματικά μεγέθη. Επιπλέον, η παρατηρούμενη και σε άλλες έννοιες διαφοροποίηση ανάμεσα στις συμβολικές, όπως η αλγεβρική και λεκτική μορφή, και στις αισθητικές αναπαραστάσεις, όπως η γεωμετρική,

αμβλύνεται με τη διδασκαλία των πολικών συντεταγμένων. Η γεωμετρική αναπαράσταση του διανύσματος αναδεικνύεται ως η ιδανικότερη να περιγράψει διανυσματικά μεγέθη και τούτο φαίνεται διαυγέστατα από το βαθμό επιτυχίας στη λύση προβλήματος όταν αυτή αποτελεί την αναπαράσταση «πηγή». Από την άλλη, η σημασία αυτή μειώνεται στη περίπτωση των πολικών συντεταγμένων λόγω ακριβώς της «διπλής φύσης» της αναπαράστασης που συνδέεται με αυτή.

4.3 Δυσκολίες στην μάθηση και στην εφαρμογή εννοιών στην Γραμμική Άλγεβρα

4.3.1 Εισαγωγή

Είναι πολλές οι έννοιες, οι γνώσεις και οι δεξιότητες που πρέπει να έχουν οι φοιτητές που φοιτούν σε πανεπιστήμια και σχολές. Συγκεκριμένα, το τι ακριβώς πρέπει να γνωρίζουν οι φοιτητές από την θεωρία του Γυμνασίου και του Λυκείου καθώς και το τι διδάχθηκαν στην σχολή στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας αναλύθηκε και παρατίθεται στα συμπεράσματα των τριών πρώτων κεφαλαίων και στην θεωρία τους αντίστοιχα. Αποτελούν βασική ύλη και είναι απαραίτητα για να μπορέσει ο φοιτητής να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις του και να κατανοήσει σε βάθος, χωρίς παρανοήσεις ή λάθη, την πανεπιστημιακού επιπέδου γνώση που του προσφέρεται.

Για κάποιους λόγους όμως μπορεί ένας φοιτητής να μην μπορεί να παρακολουθήσει και να κατανοήσει την διδάσκουσα ύλη. Αρχικά, αναφέρουμε επιγραμματικά κάποιους λόγους πρακτικής φύσεως που τους εμποδίζουν στο να δώσουν σωστές λύσεις στις εξετάσεις ή όχι και είναι οι εξής: ***α)*** Δεν μελετούν πολύ προσεκτικά το θεωρητικό μέρος της θεωρίας που αποτελείται από τις έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας που αναλύθηκαν παραπάνω και δεν επικεντρώνουν την προσοχή τους ιδιαίτερα στα παραδείγματα που λύνονται στην τάξη ή όχι, ***β)*** Δεν προσπαθούν να λύσουν μόνοι τους τις ασκήσεις που τους δίνονται στην τάξη ή υπάρχουν σε βιβλία αντίστοιχης θεωρίας με την διδάσκουσα, άρα απειρία λύσης προβλημάτων και παλαιότερων ίσως θεμάτων, ***γ)*** Δεν συγκρίνουν τις λύσεις τους με αυτές που παρατίθενται στα λυμένα προβλήματα και αυτό οφείλεται στην έλλειψη συστηματικής παρακολούθησης του μαθήματος κατά την διάρκεια του εξαμήνου, ***δ)*** Δεν αξιολογούν σωστά τις γνώσεις τους, δεν έχουν καμία επικοινωνία με τον διδάσκοντα ή με κάποιον που κατέχει σε βάθος την διδάσκουσα γνώση.

4.3.2 Βαθύτερη ανάλυση των λόγων εμφάνισης παρανοήσεων

Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να αποσκοπεί στη ωφέλεια του φοιτητή από τον παιδευτικό και τον εφαρμόσιμο χαρακτήρα των Μαθηματικών. Κατ' αρχάς με τον παιδευτικό τους χαρακτήρα καλλιεργούν το νου, κυρίως οξύνοντας την αναλυτική και συνθετική σκέψη, εκπαιδεύουν στην ακρίβεια της διατύπωσης συλλογισμών, ενθαρρύνουν και συντελούν στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Στην εποχή μας, όπου η υπερβολική πληροφόρηση καταλήγει ουσιαστικά σε παραπληροφόρηση, η ισχυρή κριτική σκέψη αποτελεί ένα σημαντικό εφόδιο. Η συμβολή της μαθηματικής παιδείας είναι σημαντική προς αυτή την κατεύθυνση. Με τον εφαρμόσιμο χαρακτήρα τους, εφοδιάζουν με γνώσεις χρήσιμες τις άλλες επιστήμες. Μάλιστα η σημερινή τους εμβέλεια, έχει ξεπεράσει το πλαίσιο των εφαρμογών στις θετικές επιστήμες και χρησιμοποιούνται σε πολλούς άλλους τομείς μέχρι και τις κοινωνικές επιστήμες. Κάτω από αυτή την οπτική, πέρα από την εμπέδωση διδασκομένων μαθηματικών εννοιών απαραίτητη είναι και η ανάπτυξη ικανοτήτων ως προς τη διαδικασία εφαρμογής τους σε πραγματικά προβλήματα.
Η ωφέλεια του μαθητή από τους δύο αυτούς χαρακτήρες συναρτάται άμεσα με το στόχο της εκπαίδευσης ενός πολίτη που χρησιμοποιεί τη λογική του, αφομοιώνει στη ζωή του εύκολα νέες γνώσεις, και μπορεί να χειριστεί με άνεση τα τεχνολογικά προϊόντα.

Οι λόγοι που οδηγούν τελικά στην παρανόηση μαθηματικών εννοιών και λύσεων προβλημάτων πάνω σε αυτές, πιο αναλυτικά, μπορούμε να πούμε ότι είναι οι εξής:

α) Δεν δίνεται έμφαση στη βαθύτερη και ουσιαστικότερη κατανόηση των εννοιών και δευτερευόντως στις πράξεις. Άλλωστε αυτές γίνονται και με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Όσο πιο πλήρης είναι η κατανόηση των εννοιών και ανεξάρτητη από τα σύμβολα που τις συνοδεύουν, τόσο πιο άρτια είναι η γλωσσική τους απόδοση.

β) Δεν γίνεται σωστή χρήση των συλλογισμών και της αιτιακής σχέσης. Πρέπει να αρχίσει όσο το δυνατόν νωρίτερα, σε αντιστοιχία προφανώς με την ωρίμανση των παιδιών, και να συνοδεύει την εκμάθηση τύπων, κανόνων και θεωρημάτων. Θεωρήματα χωρίς απόδειξη πρέπει να αποφεύγονται.

γ) Είναι δύσκολη η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφαιρετικό επίπεδο και μπορεί να εμφανίζεται ως επιβάρυνση και αύξηση της πολυπλοκότητας. Προφανώς, οι αφαιρέσεις ή οι τυποποιήσεις δεν μπορούν να λειτουργήσουν, αν δεν υπάρχει μια προγενέστερη συσσώρευση αυτού που πρέπει να τυποποιηθεί.

δ) Υπάρχει υπερβολική συσσώρευση γνώσεων και έτσι δεν ενισχύεται η δομή των γνώσεων και η συσχέτιση του καινούργιου με το ήδη αφομοιωμένο.

ε) Δεν χρησιμοποιούνται προβλήματα που να επιδέχονται διαφορετικούς τρόπους επίλυσης με αποτέλεσμα οι φοιτητές να μην εμπεδώσουν την ορθότητα ενός συλλογισμού και να συμβιβαστούν με την απλή απομνημόνευση μιας σειράς υποχρεωτικών βημάτων.

στ) Ως πρώην μαθητές που έχουν τελειώσει το Λύκειο δεν είναι εφοδιασμένοι με γνώσεις από αρκετά κεφάλαια της Άλγεβρας όπως: σύνολα αριθμών (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί αριθμοί), αλγεβρικές παραστάσεις, απόλυτες τιμές, ριζικά, επίλυση εξισώσεων πρώτου, δευτέρου και ορισμένων πολυωνυμικών εξισώσεων ανώτερου βαθμού, επίλυση ανισώσεων και απόδειξη ανισοτήτων, επίλυση γραμμικών συστημάτων και μη γραμμικών συστημάτων, στοιχεία Τριγωνομετρίας (ορισμοί, σχέσεις, εξισώσεις, συστήματα, επίλυση τριγώνων), αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι, λογάριθμοι (ορισμοί, ιδιότητες, εξισώσεις), μιγαδικοί αριθμοί (ορισμοί, πράξεις, συζυγής, μέτρο, γεωμετρική αναπαράσταση, επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων), διανύσματα στο επίπεδο, διανυσματικός λογισμός, συντεταγμένες σημείων του επιπέδου και μελέτη επίπεδων καμπύλων (ευθεία, παραβολή, έλλειψη και υπερβολή), στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας (πίνακες, ορίζουσες, γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss), θεωρία αριθμών (ορισμοί, διαιρετότητα, πρώτοι, γραμμική Διοφαντική εξίσωση).

ζ) Ως νυν φοιτητές στο πανεπιστήμιο δεν είναι εφοδιασμένοι με γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας όπως: πίνακες (οι βασικοί ορισμοί, οι πράξεις στο σύνολο, ειδικοί τύποι πινάκων, αναγωγή πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό, εύρεση αντίστροφου πίνακα, εισαγωγή στα γραμμικά συστήματα και η μέθοδος απαλοιφής του Gauss), ορίζουσες (ορισμός της ορίζουσας, ιδιότητες της συνάρτησης της ορίζουσας, ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace, υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα, γραμμικά συστήματα και ο κανόνας του Cramer, ο βαθμός πίνακα και εφαρμογές στα γραμμικά συστήματα), διανυσματικός (ο διανυσματικός χώρος, συντεταγμένες σημείου και διανύσματος, το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων και τριπλά γινόμενα διανυσμάτων), διανυσματικοί χώροι (ο υπόχωρος διανυσματικού χώρου, η γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων, η βάση και η διάσταση διανυσματικού χώρου, η κλιμακωτή μορφή διανυσμάτων), γραμμικές απεικονίσεις (ο πυρήνας και η εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης, ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου και του χώρου) και τέλος τα χαρακτηριστικά μεγέθη (οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, η διαγωνοποίηση πίνακα, το θεώρημα Cayley- Hamilton).

4.4 Η παιδαγωγική αξία του λάθους ως συμπέρασμα

Το λάθος στο σύγχρονο πανεπιστήμιο αποτελεί πρόκληση πολλές φορές για τους φοιτητές. Ο καθηγητής των Μαθηματικών ή, πιο συγκεκριμένα, της Γραμμικής Άλγεβρας θεωρεί κάποιες φορές το λάθος ως κάτι ασυμβίβαστο με την ιδιότητα του «καλού» φοιτητή, κάτι που μπορεί να εξηγηθεί με το ότι ο ίδιος βρίσκεται μεταξύ του διπόλου σωστό- λάθος σε μίας μορφής αντίληψη η οποία θεωρεί τις μαθηματικές καταστάσεις στο τέλος μόνο ή σωστές ή λανθασμένες. Απεναντίας, όμως, οι εργασίες φιλοσόφων και ιστορικών της επιστήμης, όπως ο Kuhn, Lakatos, Kline και Feyerabend, συμβάλλουν στο να συνειδητοποιήσει κανείς ότι τα λάθη έχουν θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών και κάθε άλλης επιστήμης. Η ιστορία των μαθηματικών έχει δείξει αμέτρητες φορές ότι κάποιο λάθος ή αποτυχία στο να επιτευχθεί ένας στόχος, όπως για παράδειγμα η απόδειξη ενός αιτήματος που έχει διατυπωθεί σε προηγούμενα χρόνια, οδήγησε σε επαναστατικά αποτελέσματα.

Όπως υποστηρίζουν μελετητές στην περιοχή της εκπαίδευσης έχει πια δειχθεί ότι τα λάθη μπορούν να αποτελέσουν ένα ισχυρό εργαλείο διάγνωσης των μαθησιακών δυσκολιών και συνεπώς και της ίασής τους. Ένα βασικό συμπέρασμα των ερευνών αυτών είναι η συνειδητοποίηση πως τα λάθη δεν είναι δυνατόν να «θεραπευτούν» με το να επαναλαμβάνονται απλά ξανά και ξανά οι σωστές διαδικασίες ή τα σωστά αποτελέσματα ή με το να δίνονται επιπρόσθετες πρακτικές ασκήσεις. Τα αίτια είναι πιο βαθιά και θα πρέπει να αναλύονται κάθε φορά με ιδιαίτερη προσοχή. Τα λάθη των φοιτητών σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να δημιουργήσουν σημαντικές ευκαιρίες για προβληματισμό και ενεργή συμμετοχή, εισάγοντας τον φοιτητή στην ερευνητική διαδικασία και την κριτική στάση απέναντι στα μαθηματικά. Τις ευκαιρίες αυτές που παρουσιάζονται κάθε φορά μπορεί να τις αξιοποιήσει ο καθηγητής για να καλλιεργήσει τις σωστές στάσεις των φοιτητών του απέναντι στα μαθηματικά ή, σε έναν πιο αφαιρετικό κομμάτι τους όπως είναι η Γραμμική Άλγεβρα, ξεφεύγοντας έτσι από την τυποποίηση της διαδικασίας που βομβαρδίζει τους φοιτητές με οπτικά και άλλα ερεθίσματα προς χάριν της υπέρμετρης γνώσης και πληροφορίας χωρίς, όμως, να τους δίνει τον χρόνο και τις ευκαιρίες να σκεφτούν οι ίδιοι και να την ανακαλύψουν ξανά. Κάποιες έρευνες τονίζουν μάλιστα ότι η «ηθική» στην αίθουσα δουλεύει σαν γομολάστιχα. Δηλαδή, σε ένα τυπικό τμήμα φοιτητών η αντίδραση του φοιτητή στην λανθασμένη απάντηση είναι να προσπαθήσει να την ξεχάσει όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Και αυτό γιατί ήδη από την προηγούμενη φοιτητική του πορεία έχει μάθει ότι τα λάθη είναι «κακά». Άρα το τελευταίο που θέλει κανείς να κάνει είναι να ασχοληθεί με αυτά, να τα επεξεργαστεί ή να τα αναλύσει. Στο εκπαιδευτικό πεδίο που περιγράφει, συγκεκριμένα, ο Papert το παιδί δεν επικρίνεται για το λάθος του αλλά η όλη διαδικασία διόρθωσης του λάθους είναι ένα κανονικό τμήμα της διεργασίας κατανόησης του προβλήματος. Οι φοιτητές πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι ο καθηγητής είναι και αυτός αιώνια μαθητευόμενος και ότι όλοι μαθαίνουν από τα λάθη τους.

Και αν προχωρήσουμε ακόμη πιο πέρα θα πρέπει να τονίσουμε και πως τα μονοπάτια της μάθησης περιέχουν «ψεύτικες» θεωρίες που διδάσκουν σημαντικά πράγματα όπως και οι αληθινές. Το εκπαιδευτικό σύστημα γενικώς απορρίπτει τις «ψεύτικες» θεωρίες των διδασκομένων, απορρίπτοντας έτσι δυστυχώς και τον τρόπο που μαθαίνουν στην πραγματικότητα τα παιδιά. Απορρίπτει ακόμη και τις ανακαλύψεις που δείχνουν την σπουδαιότητα των «ψεύτικων» θεωριών στα μονοπάτια της μάθησης. Τα παιδιά κρατούν τις ανορθόδοξες θεωρίες ως ένα απαραίτητο τμήμα της διαδικασίας με την οποία μαθαίνουν να σκέφτονται, λειτουργώντας ως τρόποι ανάπτυξης των γνωστικών διεργασιών, εξάσκησης και εμπέδωσης των απαραίτητων δεξιοτήτων που απαιτούνται για την δημιουργία των ορθόδοξων και αληθινών θεωριών.

Επομένως, η επεξεργασία του λάθους αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο παιδευτικό εργαλείο, το οποίο αποτελεί και χαρακτηριστικό και της ίδιας της ανάπτυξης, της διδασκαλίας και της μάθησης της επιστημονικής γνώσης των μαθηματικών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1^{Ο} -ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ)

Κωδικοποίηση: 1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, για την γραμμική ανεξαρτησία.

2) ΔΑ: δεν απαντούν γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα διανύσματα, είτε είναι σωστά ή λάθος

3) ΔΒ: δικαιολογούν την γραμμική ανεξαρτησία, αλλά είτε τα διανύσματα είναι λάθος από προηγούμενα βήματα ή και σωστά να είναι τα θέτουν σε κλιμακωτή μορφή και παίρνουν ως γεννήτορες κάποια από αυτά ανάλογα το βαθμό του πίνακα που τους προκύπτει

4) Π: λάθη στις πράξεις, στην λύση συστήματος διανυσμάτων.

5) ΠΑ: αριθμητικά λάθη στις πράξεις ή στα πρόσημα.

6) ΠΒ: επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων, λάθος αριθμός διανυσμάτων - γεννητόρων είτε περισσότερα είτε λιγότερα, λάθος διανύσματα όλα ή μερικά, συνδυασμός αυτών ή αυθαίρετη πρόσθεση μηδενικού διανύσματος σ'αυτά που βρίσκουν από την επίλυση.

7) ΠΓ: λάθος αριθμός διανυσμάτων από προηγούμενα βήματα άρα και τα διανύσματα βάσης ή η διάσταση ή και σωστά να τα βρίσκουν μπερδεύουν την διάσταση με τον βαθμό του πίνακα και παίρνει τα πρώτα (μη μηδενικά) ανάλογα τον βαθμό

8) Κ: κατανόηση της ύλης των διανυσματικών χώρων.

9) ΚΑ: διανύσματα τομής Α και Β ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων Α και Β ή διανύσματα τομής τα κοινά των Α,Β, είτε προσθέτει μοναδιαία διανύσματα σ' αυτά που βρίσκει ώστε η διάσταση του υποχώρου να είναι ίση με 4 όπως και του διανυσματικού χώρου.

10) ΚΒ: δεν αντιλαμβάνονται έννοια διάστασης και πώς αυτή συνδέεται με βάση ή γεννήτορες και δεν την βρίσκουν παρόλο που βρίσκουν συνήθως πριν την βάση σωστή ή λάθος ή συγχέουν διάσταση με βαθμό πίνακα και λένε η διάσταση ίση με τον βαθμό του πίνακα.

11) ΚΓ: στο θεώρημα διάστασης για τον υπόχωρο A+B είτε δεν το γράφουν καθόλου είτε δεν το θυμούνται ακριβώς είτε το γράφουν λάθος και το μπερδεύουν με διάσταση τομής και απλή πρόσθεση διαστάσεων A και B.

12) ΚΔ: είτε προσπαθούν να βρουν διάσταση του A+B από τα διανύσματα βάσης των A, B και της τομής τους με πίνακες αυτών και συνδυασμό πινάκων των διανυσμάτων τους και βρίσκοντας βαθμό ή θέτοντας αυτούς σε κλιμακωτή μορφή και επιλέγοντας τα μη μηδενικά που προκύπτουν.

13) 1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν αντίστοιχα.

14) Α/Α ή ΑΡ.: αύξων αριθμός φοιτητών.

15) 1α: πρώτο ερώτημα προβλήματος 1.

16) Β1 έως Β9: τα εννιά (9) βήματα της λύσης.

ΑΡ.	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β5**	**Β6**	**Β7**	**Β8**	**Β9**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	ΠΒ	ΔΑ	ΠΓ	1	1	1	1	1	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	ΚΓ
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ΑΡ.	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α	1α
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β5**	**Β6**	**Β7**	**Β8**	**Β9**
112	0	0	0	0	0	0	0	0	0
113	0	0	0	0	0	0	0	0	0
114	0	0	0	0	0	0	0	0	0
115	0	0	0	0	0	0	0	0	0
116	0	0	0	0	0	0	0	0	0
117	0	0	0	0	0	0	0	0	0
118	0	0	0	0	0	0	0	0	0
119	0	0	0	0	0	0	0	0	0
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0
121	ΠΒ	ΔΑ	ΠΓ	1	1	1	1	1	ΚΓ
122	0	0	0	0	0	0	0	0	0
123	1	1	1	1	1	1	1	1	1
124	0	0	0	0	0	0	0	0	0
125	0	0	0	0	0	0	0	0	0
126	1	1	1	1	1	1	1	1	1

16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	ΠΑ	0	0	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
19	1	1	1	1	1	1	1	1	ΚΓ
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	0	ΚΓ
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	ΠΑ	0	0	1	1	1	1	1	ΚΓ
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1
27	ΠΒ	0	ΠΓ	1	1	1	1	1	ΚΓ
28	ΠΒ	0	0	ΠΑ	0	0	ΠΒ	0	0
29	1	0	ΚΒ	1	0	ΚΒ	1	ΚΒ	ΚΒ
30	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	0	0	0
31	1	1	1	`	1	1	1	1	1
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	ΚΒ	1	1	ΚΒ	1	ΚΒ	ΚΒ
35	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	0	ΚΑ	0
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	1	1	1	1	1	1	1	1	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1

127	0	0	0	0	0	0	0	0	0
128	0	0	0	0	0	0	0	0	0
129	0	0	0	0	0	0	0	0	0
130	0	0	0	0	0	0	0	0	0
131	ΠΒ	ΔΑ	0	1	1	1	1	ΚΒ	ΚΓ
132	0	0	0	0	0	0	0	0	0
133	1	1	1	1	1	1	1	1	1
134	1	0	1	0	1	1	1	1	1
135	1	1	1	1	1	1	1	1	1
136	ΠΒ	ΔΒ	ΚΒ	1	1	1	1	ΚΑ	0
137	ΠΑ	0	0	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
138	0	0	0	0	0	0	0	0	0
139	1	1	1	1	1	1	1	1	1
140	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	1
141	1	1	1	1	1	1	1	1	1
142	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΚΒ	1
143	1	1	1	1	1	1	1	1	1
144	1	0	1	1	0	1	1	1	ΚΔ
145	0	0	0	0	0	0	0	0	0
146	1	1	1	1	1	1	1	1	ΚΓ
147	0	0	0	0	0	0	0	0	0
148	1	1	1	1	1	1	1	1	1
149	1	1	1	ΠΑ	1	1	1	1	1
150	1	1	1	1	1	1	1	1	1
151	0	0	0	0	0	0	0	0	0
152	0	0	0	0	0	0	0	0	0
153	ΠΒ	0	ΠΓ	1	0	1	ΠΒ	ΠΓ	1

43	ΠΒ	0	ΠΓ	1	0	1	ΠΒ	ΠΓ	ΚΓ
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1
45	ΠΒ	0	ΠΓ	1	1	1	1	1	0
46	1	1	1	ΠΒ	0	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0
63	0	0	0	0	0	0	0	0	0
64	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	ΠΒ	ΠΓ	0
65	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	0	0	0
66	1	1	1	1	1	1	1	1	1
67	1	ΔΒ	ΚΒ	1	1	1	0	0	0
68	1	1	1	1	1	1	1	1	1
69	1	1	1	ΠΒ	ΔΒ	ΠΓ	1	1	0
70	1	1	1	1	1	1	1	1	1

154	0	0	0	0	0	0	0	0	0
155	1	1	1	1	1	1	1	1	1
156	0	0	0	0	0	0	0	0	0
157	0	0	0	0	0	0	0	0	0
158	0	0	0	0	0	0	0	0	0
159	0	0	0	0	0	0	0	0	0
160	0	0	0	0	0	0	0	0	0
161	1	1	1	1	1	1	1	1	1
162	1	1	1	1	1	1	1	1	1
163	1	1	1	1	1	1	1	1	ΚΓ
164	1	ΔΒ	ΚΒ	1	1	1	1	1	1
165	0	0	0	0	0	0	0	0	0
166	1	1	1	1	1	1	1	1	1
167	0	0	0	0	0	0	0	0	0
168	0	0	0	0	0	0	0	0	0
169	1	1	1	ΠΒ	0	ΠΓ	1	1	1
170	1	0	1	1	0	1	ΠΒ	ΠΓ	ΚΓ
171	1	1	1	1	1	1	1	1	1
172	0	0	0	0	0	0	0	0	0
173	1	1	1	1	1	1	1	1	1
174	1	1	1	1	1	1	1	1	1
175	ΠΒ	0	ΠΓ	ΠΒ	0	ΠΓ	0	ΚΑ	0
176	1	1	1	1	1	1	1	1	1
177	1	1	1	1	1	1	1	1	1
178	1	1	1	1	1	1	1	1	1
179	ΠΒ	0	ΠΓ	ΠΒ	0	ΠΓ	ΠΒ	1	0
180	1	1	1	1	1	1	1	1	1
181	0	0	0	0	0	0	0	0	0

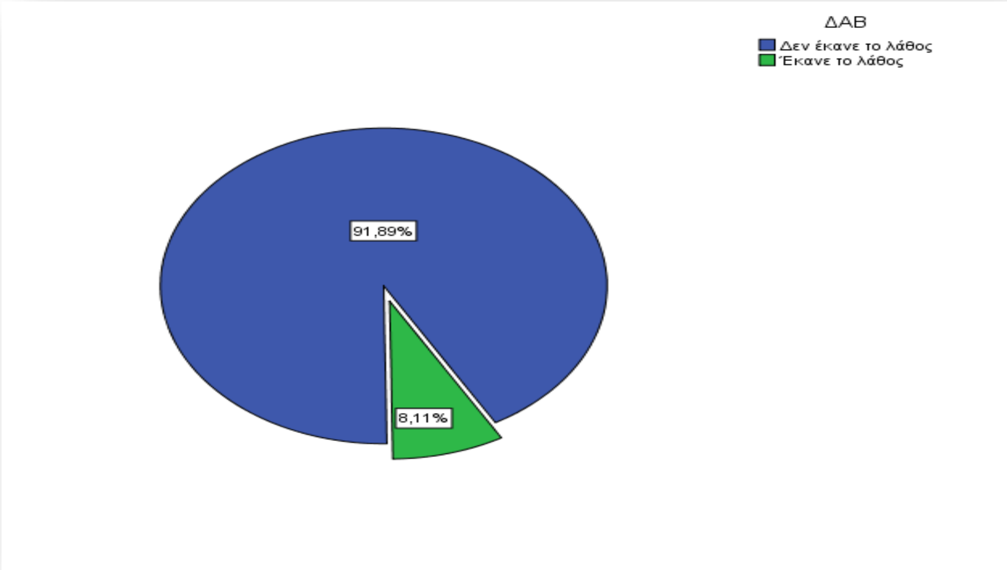
71	ΠΒ	0	ΠΓ	1	1	1	1	1	1
72	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	1
73	ΠΒ	0	0	1	1	1	1	1	1
74	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	0	1
75	ΠΒ	0	0	1	1	1	1	1	1
76	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
77	0	0	0	0	0	0	0	0	0
78	1	1	1	1	1	1	1	1	1
79	1	ΔΒ	ΚΒ	1	1	1	1	1	ΚΔ
80	1	1	1	1	1	1	1	1	ΚΓ
81	1	1	1	1	1	1	1	1	1
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1
86	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	0	0	0
87	ΠΒ	0	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	0
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1
91	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92	1	1	ΚΒ	1	1	ΚΒ	1	0	0
93	ΠΒ	0	0	1	1	1	1	1	0
94	ΠΒ	0	0	1	1	1	1	1	ΚΓ
95	0	0	0	0	0	0	0	0	0
96	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0	0	0

182	0	0	0	0	0	0	0	0	0
183	1	1	1	1	1	1	1	1	1
184	1	0	ΚΒ	1	0	ΚΑ	1	ΚΑ	0
185	ΠΒ	ΔΒ	ΠΓ	1	1	1	1	1	1
186	1	ΔΒ	ΚΒ	1	0	1	1	1	1
187	0	0	0	0	0	0	0	0	0
188	1	1	1	1	1	1	1	1	1
189	0	0	0	0	0	0	0	0	0
190	0	0	0	0	0	0	0	0	0
191	1	1	1	1	1	1	1	1	1
192	0	0	0	0	0	0	0	0	0
193	0	0	0	0	0	0	0	0	0
194	1	1	1	1	1	1	1	1	1
195	0	0	0	0	0	0	0	0	0
196	1	ΔΑ	1	1	1	1	1	1	1
197	0	0	0	0	0	0	0	0	0
198	1	1	1	1	1	1	1	1	1
199	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	1	ΔΑ	1	1	ΔΑ	1	1	1	1
201	1	ΔΑ	1	1	1	1	1	1	1
202	1	1	1	1	1	1	1	1	1
203	1	1	1	1	1	1	1	1	1
204	0	0	0	0	0	0	0	0	0
205	1	1	1	1	1	1	1	1	1
206	1	1	1	1	1	1	1	1	1
207	0	0	0	0	0	0	0	0	0
208	0	0	0	0	0	0	0	0	0
209	ΠΒ	ΔΑ	1	1	1	1	1	1	1

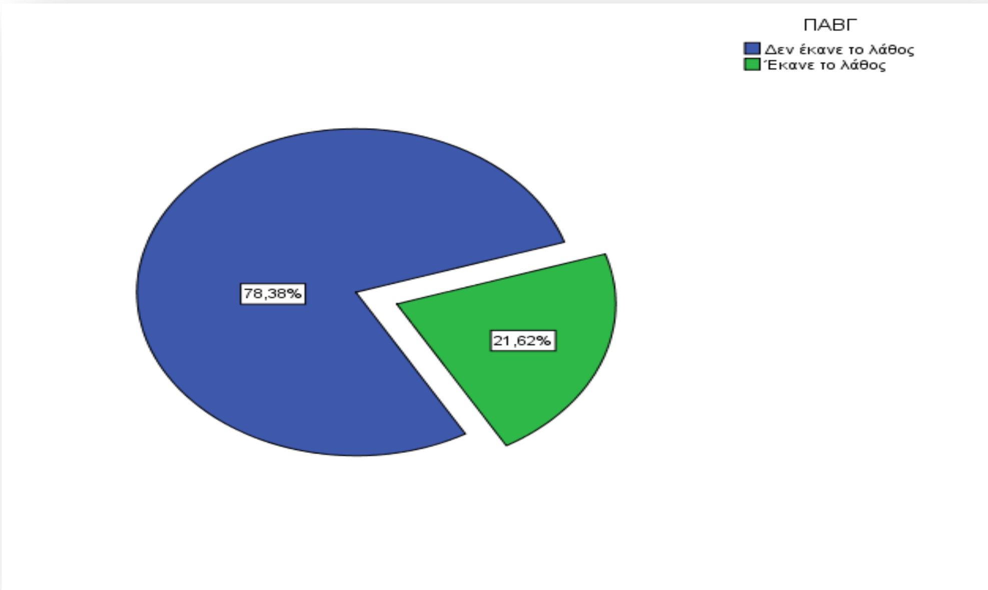
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
101	1	ΔΑ	1	1	ΔΑ	1	1	1	1
102	0	0	0	0	0	0	0	0	0
103	0	0	0	0	0	0	0	0	0
104	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	1
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1
106	1	1	1	1	1	1	ΠΒ	ΠΓ	1
107	ΠΒ	0	1	ΠΒ	0	1	1	1	0
108	0	0	0	0	0	0	0	0	0
109	1	1	ΚΒ	1	1	ΚΒ	1	1	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0	0	0

210	1	1	1	1	1	1	1	1	1
211	ΠΒ	0	0	ΠΒ	0	0	0	0	0
212	0	0	0	0	0	0	0	0	0
213	ΠΒ	ΔΒ	ΚΒ	1	1	1	1	1	ΚΔ
214	0	0	0	0	0	0	0	0	0
215	ΠΒ	0	ΠΓ	1	ΔΑ	ΚΒ	ΠΒ	1	ΚΓ
216	0	0	0	0	0	0	0	0	0
217	0	0	0	0	0	0	1	1	0
218	1	ΔΑ	1	1	ΔΑ	1	ΠΒ	ΠΓ	1
219	1	1	1	1	1	1	1	1	1
220	1	1	1	1	1	1	1	1	1
221	1	1	1	1	1	1	ΚΑ	0	0
222	0	0	0	0	0	0	0	0	0

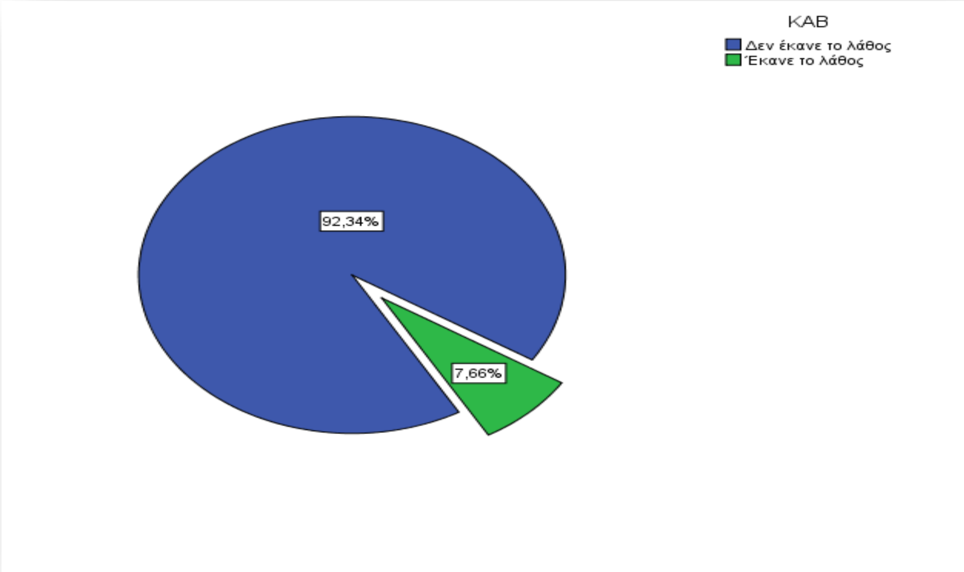
Διαγράμματα πίνακα 1



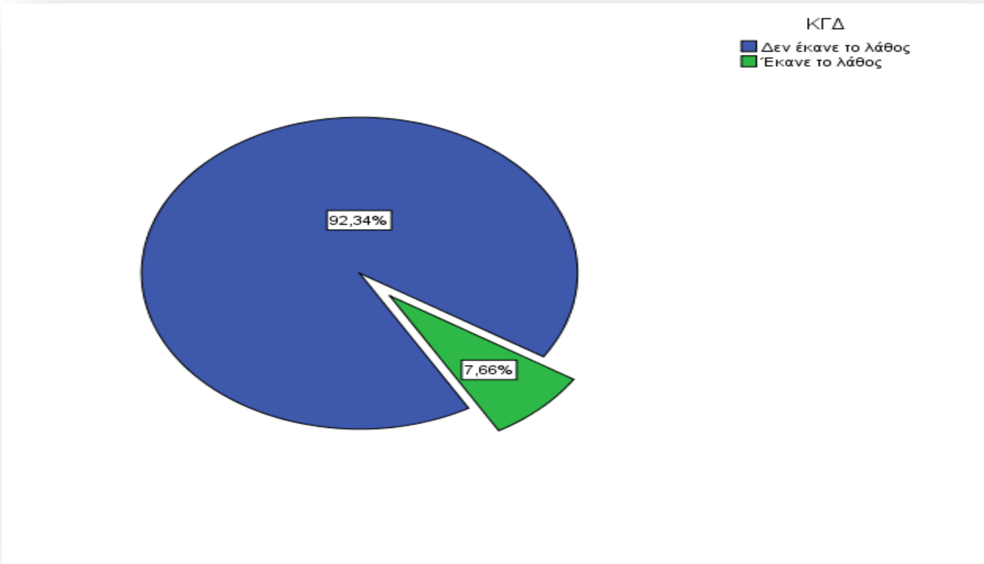
Διάγραμμα 1



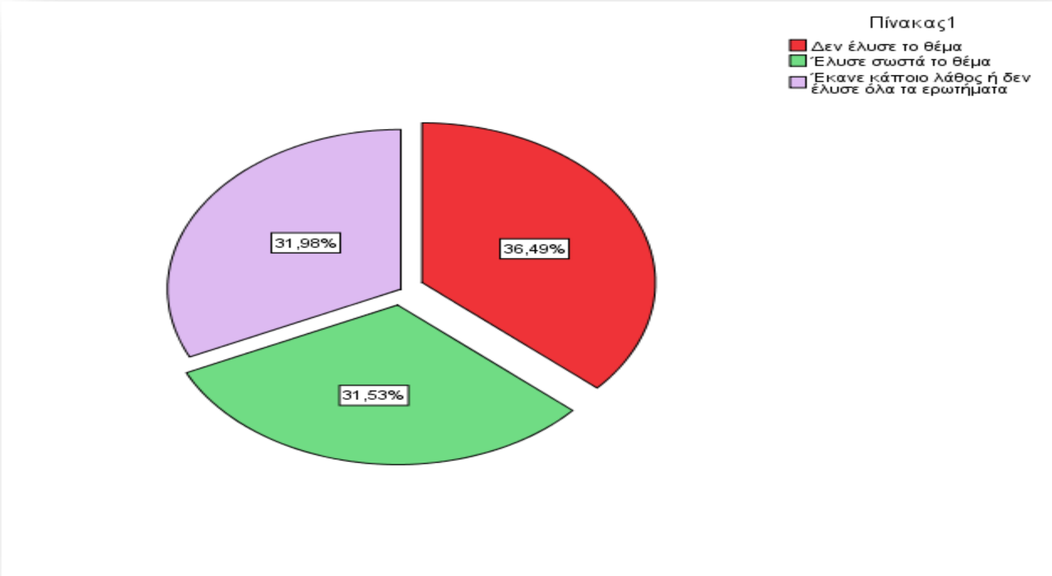
Διάγραμμα 2



Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 4


Πίνακας1
Δεν έλυσε το θέμα
Έλυσε σωστά το θέμα
Έκανε κάποιο λάθος ή δεν έλυσε όλα τα ερωτήματα
36,49%
31,53%
31,98%

Διάγραμμα 5

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^{O} – ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ)

Κωδικοποίηση λαθών: 1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, δίνει την λύση κατευθείαν χωρίς επεξήγηση.

2) Π: πράξεις για εύρεση σημείου τ(Μ), σε αντικατάσταση των δεδομένων με λάθος συνημίτονα- ημίτονα και σε πολλαπλασιασμούς των κλασμάτων αργότερα στις αριθμητικές παραστάσεις που προκύπτουν άρα και λάθος αποτέλεσμα.

3) Κ: κατανόηση της ύλης των γραμμικών απεικονίσεων, ισχύει για σύμβολα **ΤΑ**, **ΤΒ**, **ΤΓ**, **ΤΔ** πάντα.

4) ΤΑ: τύπος απεικόνισης ως προς κανονική βάση.

5) ΤΒ: τύπος απεικόνισης τ(x,y).

6) ΤΓ: μη ανάστροφος πίνακας της τ.

7) ΤΔ: μη ανάστροφος πίνακας και λανθασμένος.

8) 1 ή 0: λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν αντίστοιχα.

9) Α/Α ή ΑΡ.: αύξων αριθμός φοιτητών.

10) 2α: πρώτο ερώτημα, **2β**: δεύτερο ερώτημα, **2γ**: τρίτο ερώτημα.

11) Β1, Β2: βήματα 1 και 2 της λύσης.

ΑΡ.	**2α**	**2α**	**2β**	**2γ**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β1**	**Β1**
1	1	1	1	1
2	ΚΔΤΑ	ΚΤΔ	0	0
3	1	1	1	1
4	0	0	0	0
5	1	1	1	1
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	1	ΚΤΔ	ΚΤΒ	ΠΤΒ
9	0	0	0	0
10	Δ	0	0	0
11	ΚΔΤΑ	ΚΤΔ	ΚΤΒ	0
12	ΚΤΑ	ΚΤΔ	0	0
13	0	0	0	0
14	1	1	1	1
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0
17	1	ΚΤΔ	ΚΔΤΒ	0
18	1	1	ΚΔΤΒ	0

ΑΡ.	**2α**	**2α**	**2β**	**2γ**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β1**	**Β1**
112	0	0	0	0
113	0	0	0	0
114	0	0	0	0
115	0	0	0	0
116	0	0	0	0
117	0	0	0	0
118	0	0	0	0
119	0	0	0	0
120	0	0	0	0
121	1	1	1	1
122	0	0	0	0
123	1	1	1	Π
124	0	0	0	0
125	0	0	0	0
126	1	1	1	1
127	0	0	0	0
128	0	0	0	0
129	0	0	0	0

19	0	0	0	0
20	0	0	0	0
21	0	0	0	0
22	1	1	ΚΔΤΒ	0
23	0	0	0	0
24	0	0	0	0
25	0	0	0	0
26	0	0	0	0
27	0	0	0	0
28	0	0	0	0
29	0	0	0	0
30	0	0	0	0
31	0	0	0	0
32	0	0	0	0
33	0	0	0	0
34	0	0	0	0
35	0	0	0	0
36	0	0	0	0
37	0	0	0	0
38	0	0	0	0
39	0	0	0	0
40	0	0	0	0
41	0	0	0	0
42	1	1	ΚΔΤΒ	0
43	0	0	0	0
44	0	0	0	0
45	0	0	0	0
46	0	0	0	0
47	0	0	0	0
48	0	0	0	0
49	0	0	0	0

130	0	0	0	0
131	1	1	1	1
132	0	0	0	0
133	0	0	0	0
134	1	1	1	1
135	1	1	1	1
136	1	1	1	1
137	1	1	1	1
138	1	1	1	1
139	0	0	0	0
140	0	0	0	0
141	0	0	0	0
142	0	0	0	0
143	1	1	1	1
144	0	0	0	0
145	0	0	0	0
146	0	0	0	0
147	0	0	0	0
148	0	0	0	0
149	0	0	0	0
150	0	0	0	0
151	0	0	0	0
152	0	0	0	0
153	0	0	0	0
154	0	0	0	0
155	1	1	1	1
156	0	0	0	0
157	0	0	0	0
158	0	0	0	0
159	0	0	0	0
160	0	0	0	0

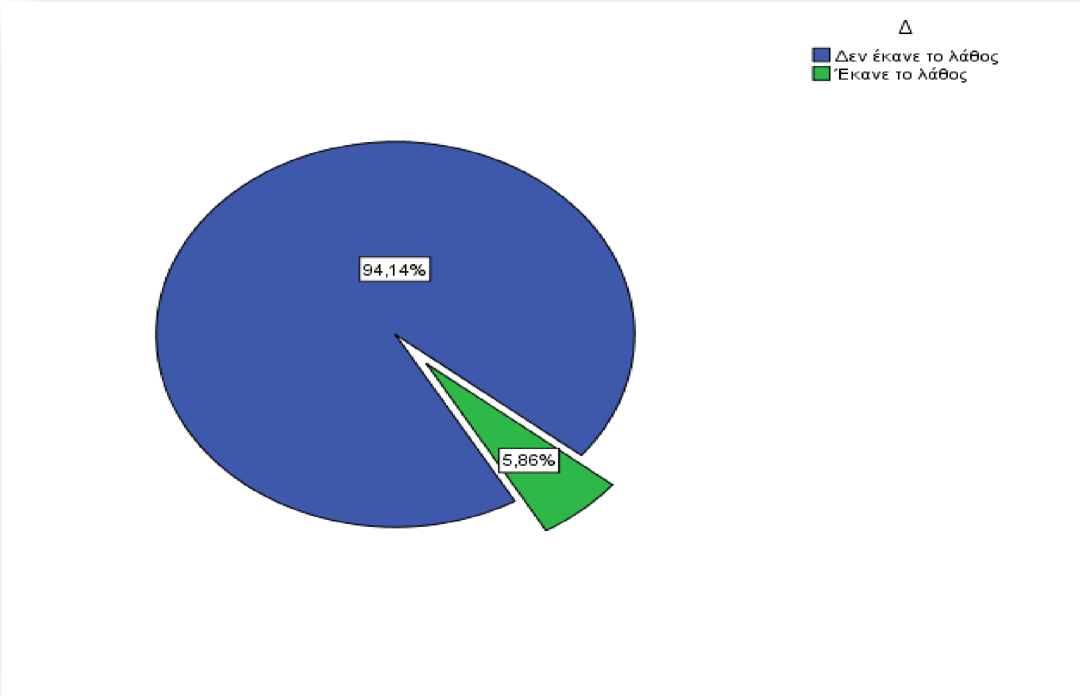
50	0	0	0	0
51	0	0	0	0
52	0	0	0	0
53	0	0	0	0
54	0	0	0	0
55	0	0	0	0
56	0	0	0	0
57	0	0	0	0
58	0	0	0	0
59	0	0	0	0
60	0	0	0	0
61	0	0	0	0
62	0	0	0	0
63	0	0	0	0
64	0	0	0	0
65	0	0	0	0
66	0	0	0	0
67	0	0	0	0
68	0	0	0	0
69	1	1	1	Π
70	1	1	1	1
71	Δ	Δ	0	0
72	0	0	0	0
73	0	0	0	0
74	0	0	0	0
75	0	0	0	0
76	0	0	0	0
77	0	0	0	0
78	1	1	1	1
79	Δ	Δ	0	0
80	1	1	1	1

161	1	1	1	1
162	0	0	0	0
163	0	0	0	0
164	0	0	0	0
165	0	0	0	0
166	0	0	0	0
167	0	0	0	0
168	0	0	0	0
169	1	1	1	1
170	0	0	0	0
171	0	0	0	0
172	0	0	0	0
173	0	0	0	0
174	1	1	0	0
175	0	0	0	0
176	0	0	0	0
177	0	0	0	0
178	ΚΔΤΑ	ΚΤΔ	ΚΤΒ	0
179	1	1	1	1
180	1	1	1	1
181	1	1	1	1
182	0	0	0	0
183	0	0	0	0
184	1	1	1	1
185	0	0	0	0
186	1	1	1	1
187	0	0	0	0
188	1	1	1	1
189	0	0	0	0
190	1	1	1	1
191	0	0	0	0

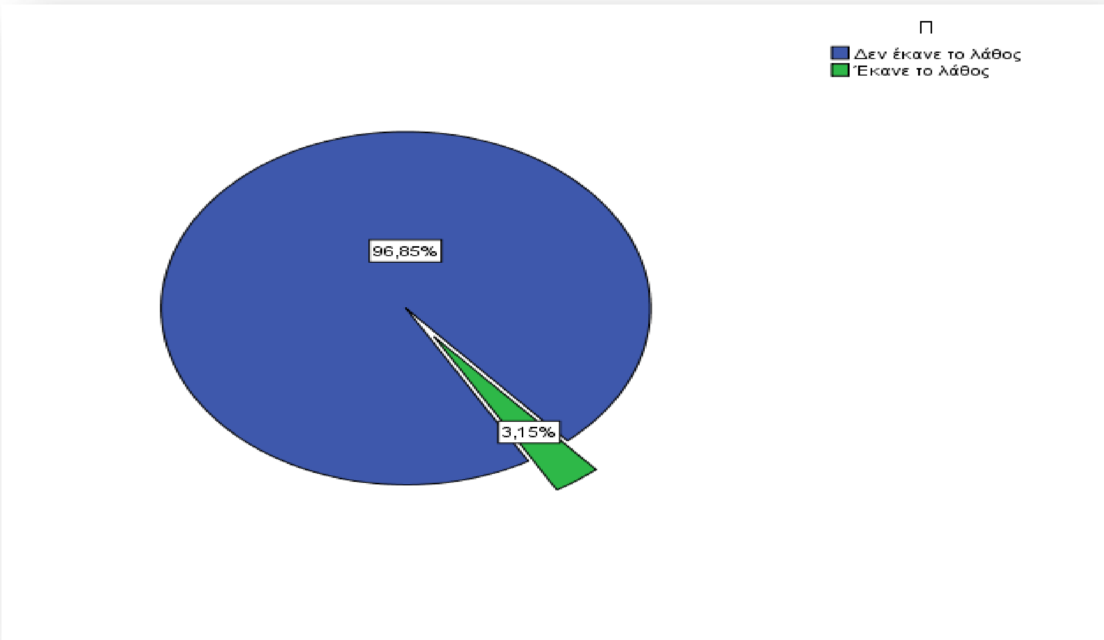
81	0	0	0	0
82	0	0	0	0
83	1	1	1	1
84	1	ΚΤΓ	1	0
85	1	1	1	1
86	1	1	1	1
87	1	1	1	1
88	1	1	1	Π
89	1	1	1	1
90	0	0	0	0
91	0	0	0	0
92	0	0	0	0
93	Δ	1	1	Π
94	Δ	1	1	Π
95	0	0	0	0
96	0	0	0	0
97	0	0	0	0
98	0	0	0	0
99	0	0	0	0
100	0	0	0	0
101	0	0	0	0
102	0	0	0	0
103	0	0	0	0
104	1	1	1	1
105	Δ	1	1	Π
106	1	1	1	1
107	Δ	0	0	0
108	0	0	0	0
109	1	1	1	1
110	0	0	0	0
111	0	0	0	0

192	0	0	0	0
193	0	0	0	0
194	1	1	1	1
195	0	0	0	0
196	O	0	0	0
197	0	0	0	0
198	0	0	0	0
199	0	0	0	0
200	1	1	1	1
201	1	1	1	1
202	1	1	1	1
203	1	0	ΚΤΒ	0
204	0	0	0	0
205	1	1	1	1
206	0	0	0	0
207	0	0	0	0
208	0	0	0	0
209	1	1	1	1
210	0	0	0	0
211	0	0	0	0
212	0	0	0	0
213	0	0	0	0
214	0	0	0	0
215	0	0	0	0
216	0	0	0	0
217	1	1	1	Π
218	1	1	1	1
219	0	0	ΚΤΒ	0
220	0	0	0	0
221	0	0	0	0
222	0	0	0	0

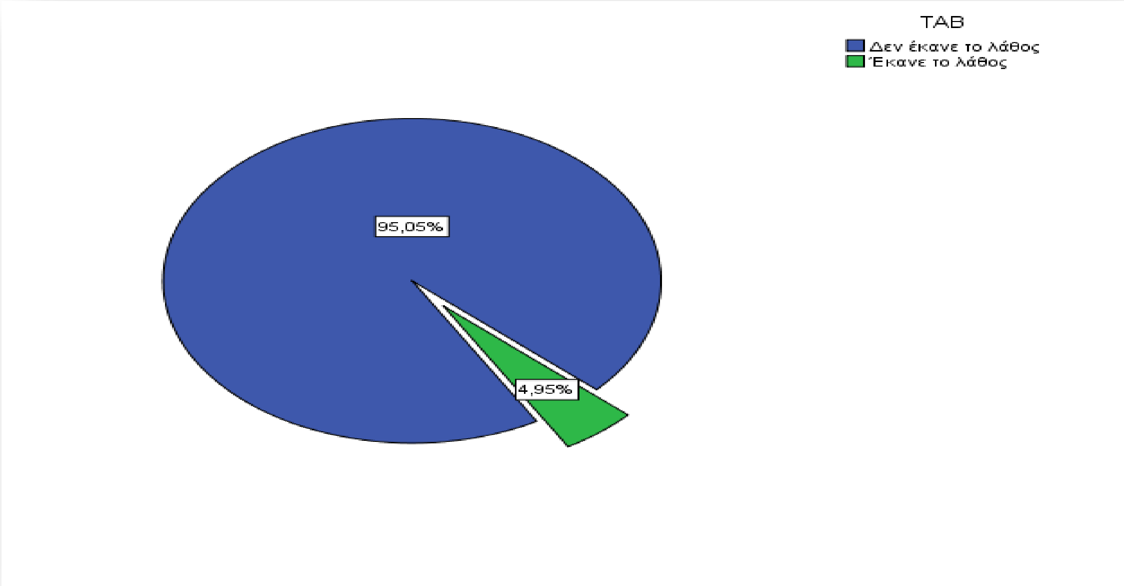
Διαγράμματα πίνακα 2



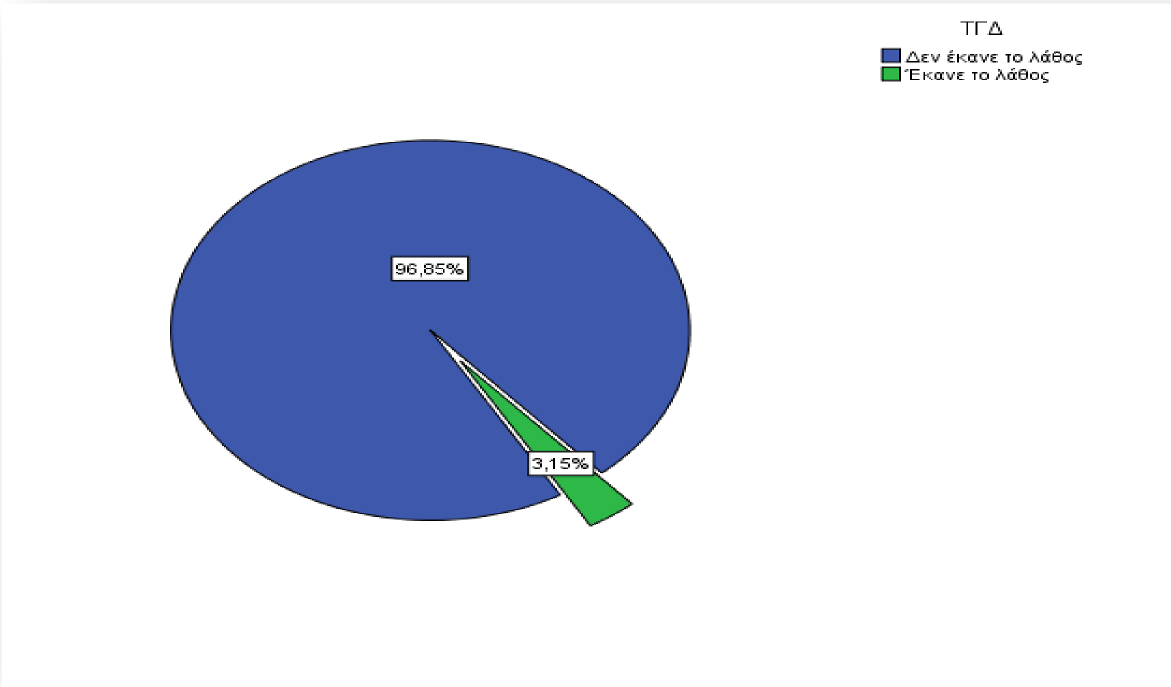
Διάγραμμα 1



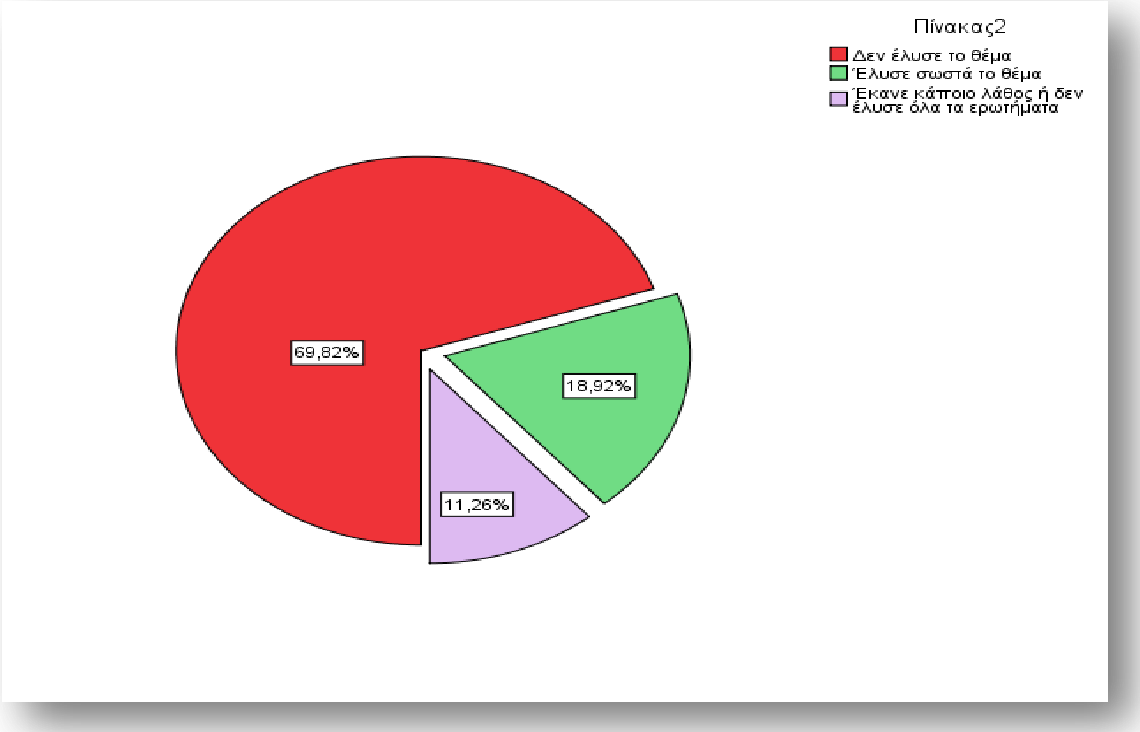
Διάγραμμα 2



Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 4


Πίνακας2
Δεν έλυσε το θέμα
Έλυσε σωστά το θέμα
Έκανε κάποιο λάθος ή δεν έλυσε όλα τα ερωτήματα
69,82%
18,92%
11,26%

Διάγραμμα 5

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3^{Ο} – ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ)

Κωδικοποίηση: 1) Δ: έλλειψη δικαιολόγησης, έλλειψη απόδειξης στο ότι κάθε μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα ικανοποιεί την $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ (2) ή και όταν αποδεικνύουν την (2) παίρνουν λανθασμένο τον πίνακα Α είτε τον θέτουν σε κλιμακωτή μορφή και τον κάνουν άνω διαγώνιο ή δεν επιλύουν σωστά τα συστήματα σε προηγούμενα βήματα και θέτουν την (1) ίση με μηδέν και συμβολίζεται με **ΔΔΔ.**

2) Π: πράξεις σε επίλυση συστήματος, σε πίνακες, ορίζουσες ανάλογα το βήμα.

3) Κ: κατανόηση της ύλης ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων, ισχύει πάντα για όλα τα σύμβολα.

4) ΚΒ: λάθη κατανόησης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων θέτουν τον πίνακα Α ή τον (Α- λ·Ι) πρώτα σε κλιμακωτή μορφή και μετά βρίσκουν την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές ή θέτουν τον πίνακα (Α- λ·Ι)= 0 σε κλιμακωτή μορφή με λάθος τρόπο άρα προκύπτει λάθος πίνακας και λάθος ιδιοδιανύσματα. Αφορά τον πρώτο τρόπο εύρεσης ιδιοδιανυσμάτων.

5) ΔΓ: διαγωνοποίηση πίνακα είτε έχει να κάνει με την διαγωνοποίηση του Α και τα λάθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με **ΔΓΑ**, είτε με λάθος ελάχιστο πολυώνυμο του Α ως γινόμενο διακεκριμμένων πρωτοβάθμιων όρων και επαλήθευση επιλογής με **ΔΓΒ.**

6) ΡΑ: έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ που αντί να έχει τα ιδιοδιανύσματα σε στήλες τα έχει σε γραμμές με **ΡΑΑ**, είτε έχει να κάνει με τον λανθασμένο πίνακα Ρ με λάθος ιδιοδιανύσματα από τα προηγούμενα βήματα 1, 2, 3 ή και με τον λάθος τρόπο να τεθεί σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε ο Ρ να είναι ένας πίνακας με γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με **ΡΑΒ**, είτε έχει να κάνει με το ότι θέτουν τον Ρ ως διαγώνιο με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές, δηλαδή αντί για τον σωστό Ρ παίρνουν τον D με **ΡΑΓ.**

7) ΡΒ: αντιστρεψιμότητα του Ρ, έχει να κάνει με την εύρεση του συμπληρωματικού πίνακα του Ρ έτσι ώστε να βρεθεί αργότερα και ο P^{-1} στον δεύτερο τρόπο με **ΡΒΑ**, έχει να κάνει με την μετατροπή του πίνακα Ρ σε κλιμακωτή μορφή έτσι ώστε να βρεθεί και ο P^{-1} με τον πρώτο τρόπο με **ΡΒΒ.**

8) ΙΔΑ: ιδιοτιμές λάθος, διαφορετικές, περισσότερες ή λιγότερες, με λάθος πολλαπλότητα.

9) ΙΔΒ: έχει να κάνει με λάθος ιδιοδιανύσματα, περισσότερα ή λιγότερα ή στα πρόσημα δηλαδή αριθμητικά λάθη στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

10) ΙΔΒΒ: έχει να κάνει με το ότι το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα Α.

11) 1 ή 0 : λύθηκαν σωστά ή δεν λύθηκαν.

12) Α/Α ή ΑΡ.: αύξων αριθμός φοιτητών.

13)3α: πρώτο ερώτημα, **3β**: δεύτερο ερώτημα.

14) Β1 εώς Β5: τα πέντε (5) βήματα του 3α, **Β1, Β2**: τα δύο (2) βήματα του 3β.

ΑΡ.	**3α**	**3α**	**3α**	**3α**	**3α**	**3β**	**3β**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β5**	**Β1**	**Β2**
1	1	1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	1	1	ΚΔ	ΚΠ ΔΔΔ
3	1	1	1	1	1	1	ΚΔ ΔΔ
4	1	ΚΠ ΙΔ	1	0	ΚΠ ΡΑ	0	0

ΑΡ.	**3α**	**3α**	**3α**	**3α**	**3α**	**3β**	**3β**
Α/Α	**Β1**	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β5**	**Β1**	**Β2**
112	0	0	0	0	0	0	0
113	0	0	0	0	0	0	0
114	0	0	0	0	0	0	0
115	0	0	0	0	0	0	0

		Β			Β		
5	1	1	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	1	ΚΔ	ΚΔΔΔ
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
10	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΒΒ	0	0
11	1	1	1	1	1	0	0
12	1	0	1	0	0	0	0
13	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	0	0
16	1	1	1	1	1	0	0
17	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	ΚΔΓΒ	ΚΠΡΑΑΡΒΑ	0	0
18	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	ΚΔΓΒ	0	0	0
19	1	1	1	1	ΚΡΑΑ	0	0
20	1	0	0	0	0	0	0
21	1	1	1	1	ΚΡΑΑ	0	0
22	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	0	0	ΚΡΑΑΡΒΒ	0	0
23	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
24	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	ΚΡΑΒΡΒΒ	0	0

116	0	0	0	0	0	0	0
117	0	0	0	0	0	0	0
118	0	0	0	0	0	0	0
119	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
120	0	0	0	0	0	0	0
121	1	ΚΠΙΔΒ	1	1	ΚΡΑΒ	0	0
122	0	0	0	0	0	0	0
123	1	1	1	1	1	1	1
124	0	0	0	0	0	0	0
125	0	0	0	0	0	0	0
126	1	1	1	1	1	1	1
127	0	0	0	0	0	0	0
128	1	1	1	ΚΔΔΓΒ	0	0	0
129	0	0	0	0	0	0	0
130	0	0	0	0	0	0	0
131	1	1	1	1	1	1	1
132	0	0	0	0	0	0	0
133	1	1	1	1	1	1	1
134	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
135	1	1	1	1	1	0	0

25	1	1	1	1	1	1	1
26	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
27	1	1	1	1	1	1	1
28	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
29	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
30	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
31	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	ΚΔΔΓΑ	ΚΡΑΑ	0	0
32	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
33	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	ΚΔΔΓΒ	0	0	0
34	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
35	1	1	1	1	1	0	0
36	1	1	1	0	0	0	0
37	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
38	1	1	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
39	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	1
41	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑΑ	0	0
42	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
43	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	1	ΚΡΑΑ	0	0
44	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
45	1	ΚΠ	1	0	0	0	0

136	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
137	1	0	0	ΚΠΔΓΒ	ΚΡΑΑ	0	0
138	1	ΚΒΙΔΒ	ΚΙΔΒΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
139	1	ΚΙΔΒ	1	0	0	0	0
140	0	0	0	0	0	0	0
141	1	1	1	1	1	0	0
142	ΚΠ	0	0	0	0	0	0
143	1	1	1	1	1	0	0
144	1	1	1	1	1	0	0
145	1	0	0	0	0	0	0
146	1	1	1	1	1	0	0
147	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
148	1	ΚΠΙΔΒ	1	1	1	0	0
149	1	1	1	1	1	0	0
150	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
151	0	0	0	0	0	0	0
152	1	1	1	1	1	0	0
153	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
154	0	0	0	0	0	0	0
155	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΠΡΑΒΡΒΑ	0	0
156	0	0	0	0	0	0	0

46	1	1	1	1	1	1	1
47	1	ΚΠΙΔΒΒ	1	0	ΚΡΑΑ	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0	0	0
54	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0
61	0	0	0	0	0	0	0
62	0	0	0	0	0	0	0
63	0	0	0	0	0	0	0
64	1	1	1	1	1	1	1
65	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒΒ	0	0	0	0	0
66	1	ΚΠΙΔΒΒ	1	0	0	0	0
67	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
68	ΚΠΙ	0	0	0	0	0	0

157	ΚΒΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0	0
158	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0
159	0	0	0	0	0	0	0
160	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒΒ	0	0	0	0
161	0	0	0	0	0	0	0
162	1	1	1	1	1	0	0
163	1	1	1	1	1	0	0
164	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑΑ	0	0
165	0	0	0	0	0	0	0
166	1	1	1	1	1	0	0
167	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
168	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
169	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
170	1	ΚΠ	ΚΠ	0	0	0	0
171	ΚΙΔΑ	ΚΒΙΔΒ	ΚΒΙΔΒ	0	ΚΠΡΑΒΡΒΑ	0	0
172	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΠΡΒΑ	0	0
173	1	1	1	1	1	0	0
174	1	1	1	1	1	0	0
175	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
176	0	0	0	0	0	0	0
177	0	0	0	0	ΚΡΑΑ	0	0
178	1	1	1	0	ΚΡΑΓ	1	ΚΠΔΔΔ
179	1	ΚΠΙ	1	0	ΚΠ	0	0

	ΔΑ						
69	1	1	1	1	1	1	1
70	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
71	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
72	1	1	1	1	1	1	1
73	1	1	1	1	1	1	1
74	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
75	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΒΒ	0	0
76	1	1	1	1	ΚΠΡΒΒ	0	0
77	0	0	0	0	0	0	0
78	1	1	1	1	ΚΠΡΒΑ	0	0
79	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΠΡΒΑ	0	0
80	1	1	1	1	ΚΠΡΒΒ	0	0
81	1	1	1	1	1	0	0
82	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
83	1	1	1	1	1	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0
85	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
86	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0

		ΔΒ					
180	1	1	1	ΚΔΔΓΑ	1	0	0
181	ΚΙΔΑ	0	0	0	ΚΡΑΓ	0	0
182	1	1	1	0	ΚΠΡΑΑΡΒΑ	0	0
183	1	1	1	1	1	1	ΚΠΔΔΔ
184	1	1	1	1	1	0	0
185	1	1	1	1	1	0	0
186	1	ΚΒΙΔΒΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
187	0	0	0	0	0	0	0
188	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑΒ	0	0
189	0	0	0	0	0	0	0
190	0	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	0	0	0
191	1	1	1	1	1	ΚΔ	ΚΠΔΔΔ
192	0	0	0	0	0	0	0
193	1	1	ΚΠ	0	ΚΡΒΒ	0	0
194	1	1	1	1	1	1	1
195	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΔΓΒ	0	0	0
196	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΠΡΒΑ	0	0
197	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	ΚΔ	ΚΔΔΔ

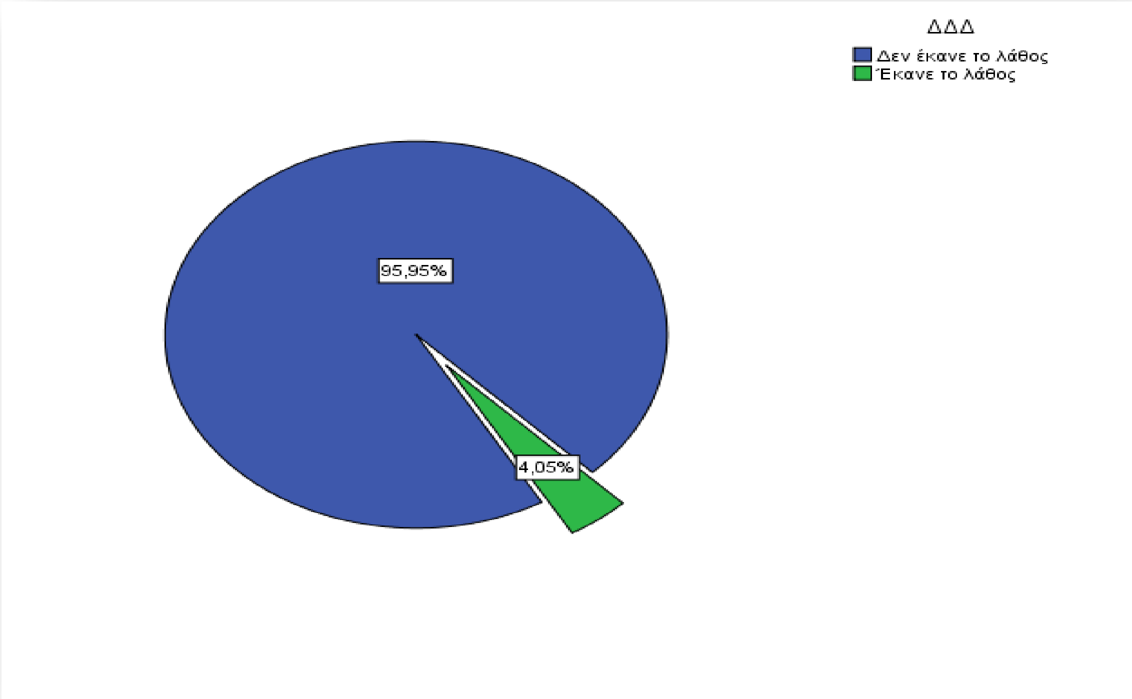
87	1	1	ΚΠΙΔΒ	1	ΚΠΡΑΑΡΒΑ	0	0
88	0	0	0	0	0	0	0
89	1	1	1	1	1	1	1
90	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
91	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
92	0	0	0	0	0	0	0
93	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
94	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
95	0	0	0	0	0	0	0
96	ΚΠ	0	0	0	0	0	0
97	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0
99	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	0
101	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	ΚΔΔΓΒ	0	0	0
102	ΚΠΙΔΑ	ΚΙΔΒ	0	0	0	0	0
103	0	0	0	0	0	0	0
104	1	1	1	1	1	1	1
105	ΚΠΙΔΑ	0	0	0	ΚΡΑΑ	0	0
106	1	1	1	1	1	1	1
107	1	1	1	1	ΚΡΑΑ	0	0
108	0	0	0	0	0	0	0
109	0	0	0	0	0	0	0

198	1	1	1	1	1	0	0
199	0	0	0	0	0	0	0
200	1	1	1	1	1	0	ΚΔΔΔ
201	1	1	1	1	1	0	0
202	1	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΒ	0	0
203	1	1	1	1	1	0	0
204	0	0	0	0	0	0	0
205	1	1	1	1	1	1	1
206	0	0	0	0	0	0	0
207	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	0	0	0
208	0	0	0	0	0	0	0
209	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑΒΡΒΑ	0	ΚΔΔΔ
210	1	1	1	1	1	0	0
211	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑ	0	0
212	0	0	0	0	0	0	0
213	1	ΚΠΙΔΒ	1	0	ΚΡΑ	0	0
214	0	0	0	0	0	0	0
215	0	0	0	0	0	0	0
216	0	0	0	0	0	0	0
217	0	0	0	0	0	0	0
218	1	1	1	1	1	0	0
219	1	1	1	1	1	0	0
220	ΚΠΙΔΑ	ΚΠΙΔΒ	ΚΠΙΔΒ	0	ΚΡΑΡΒΑ	0	0

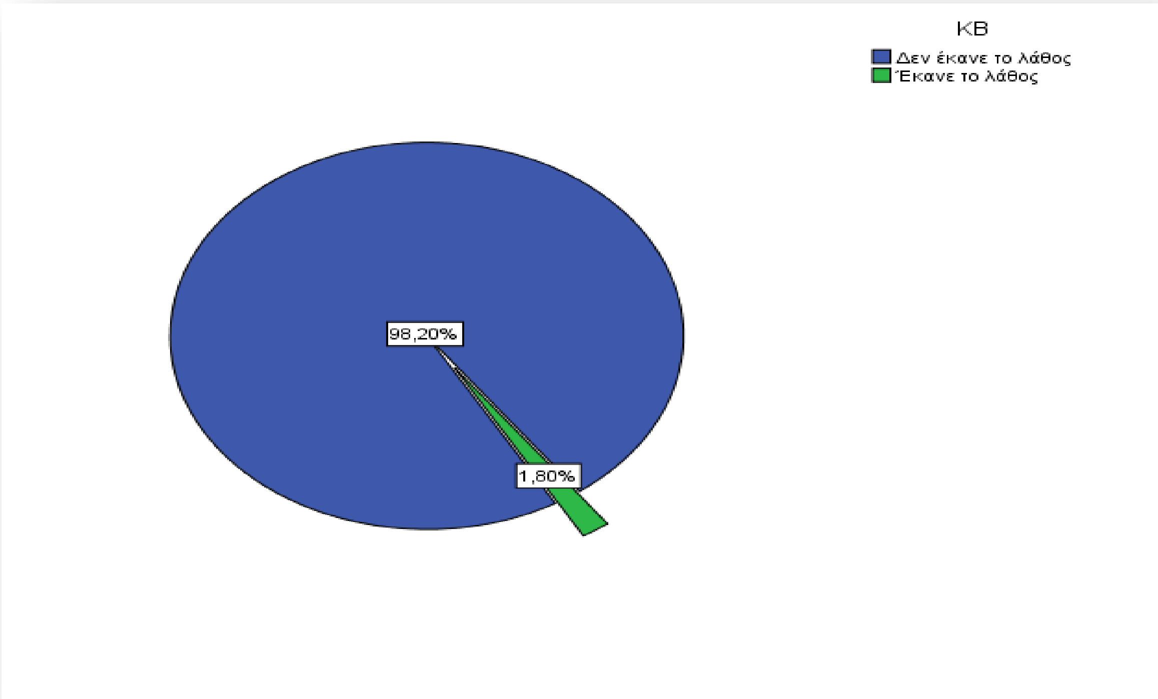
110	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0

221	1	1	ΚΠΙ ΔΒ	1	ΚΠ ΡΒ Α	0	0
222	1	1	1	ΚΔ ΔΓΒ	1	0	0

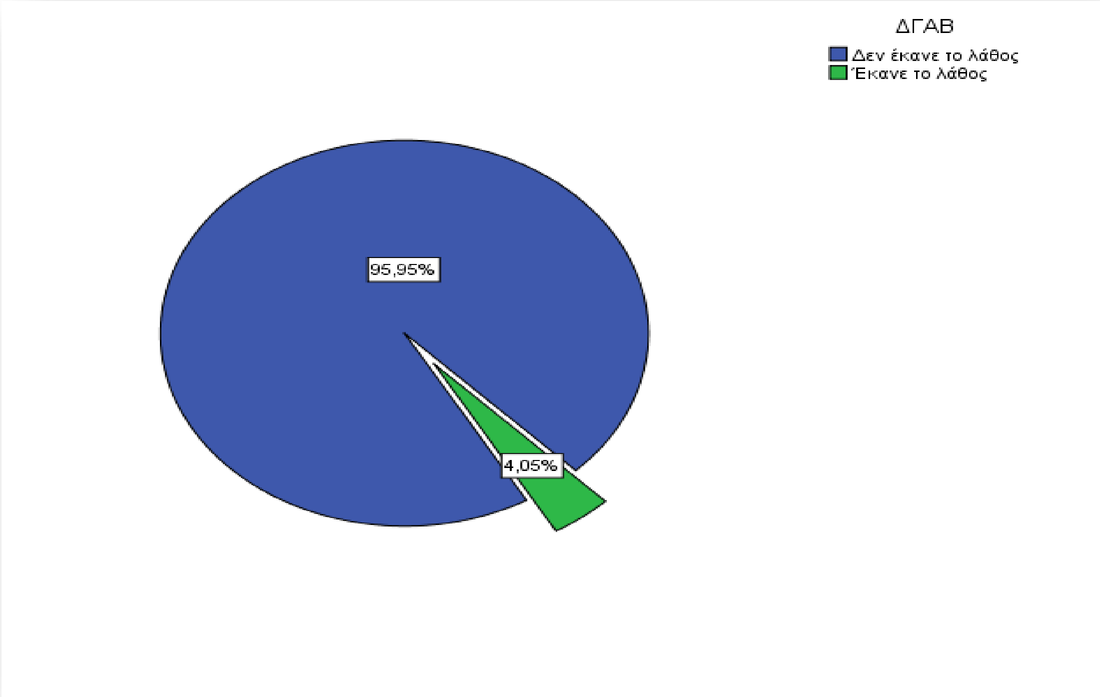
Διαγράμματα πίνακα 3



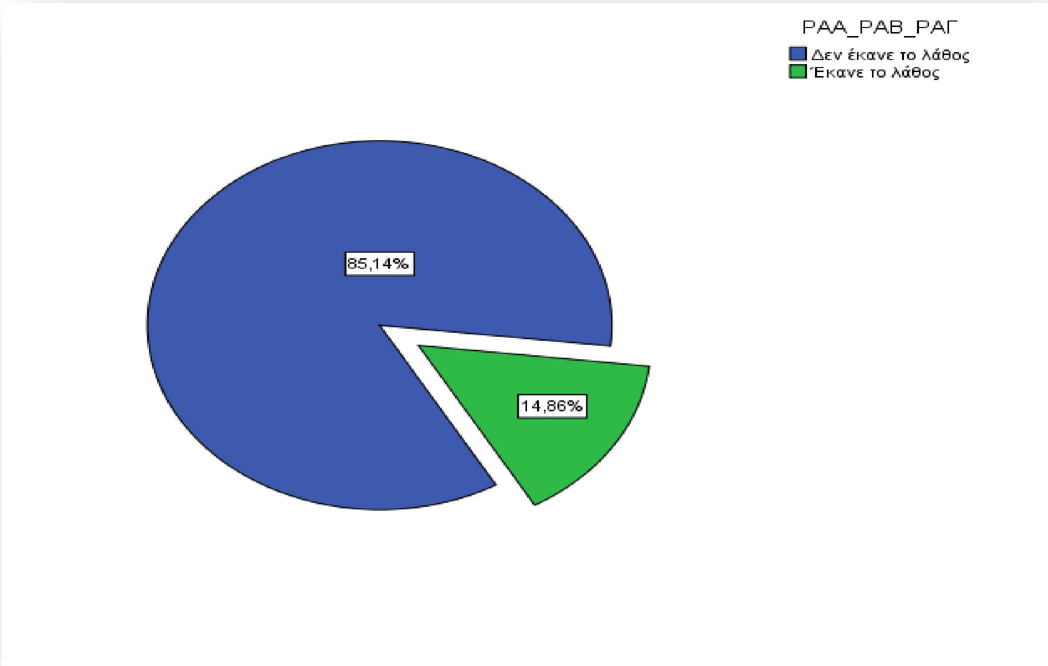
Διάγραμμα 1



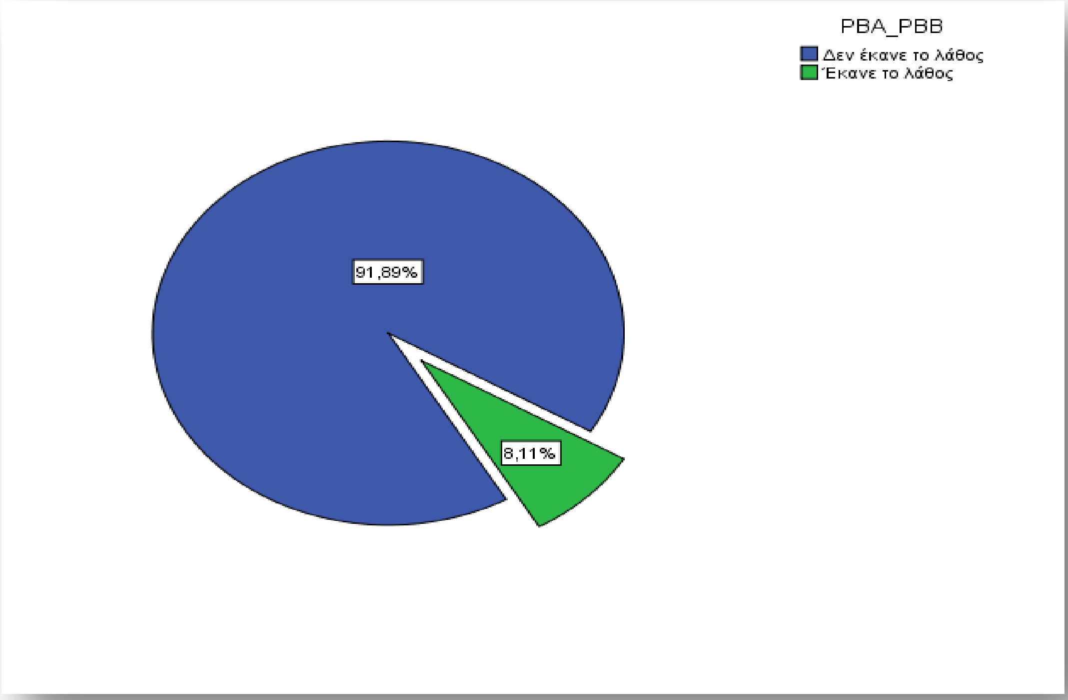
Διάγραμμα 2



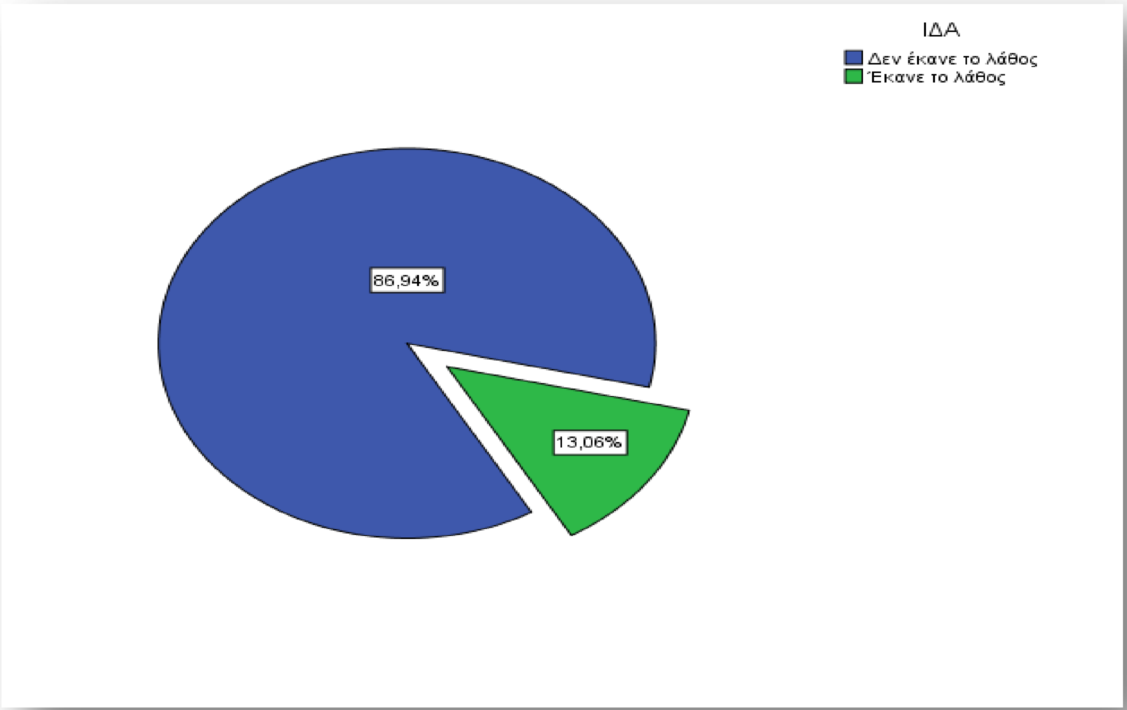
Διάγραμμα 3



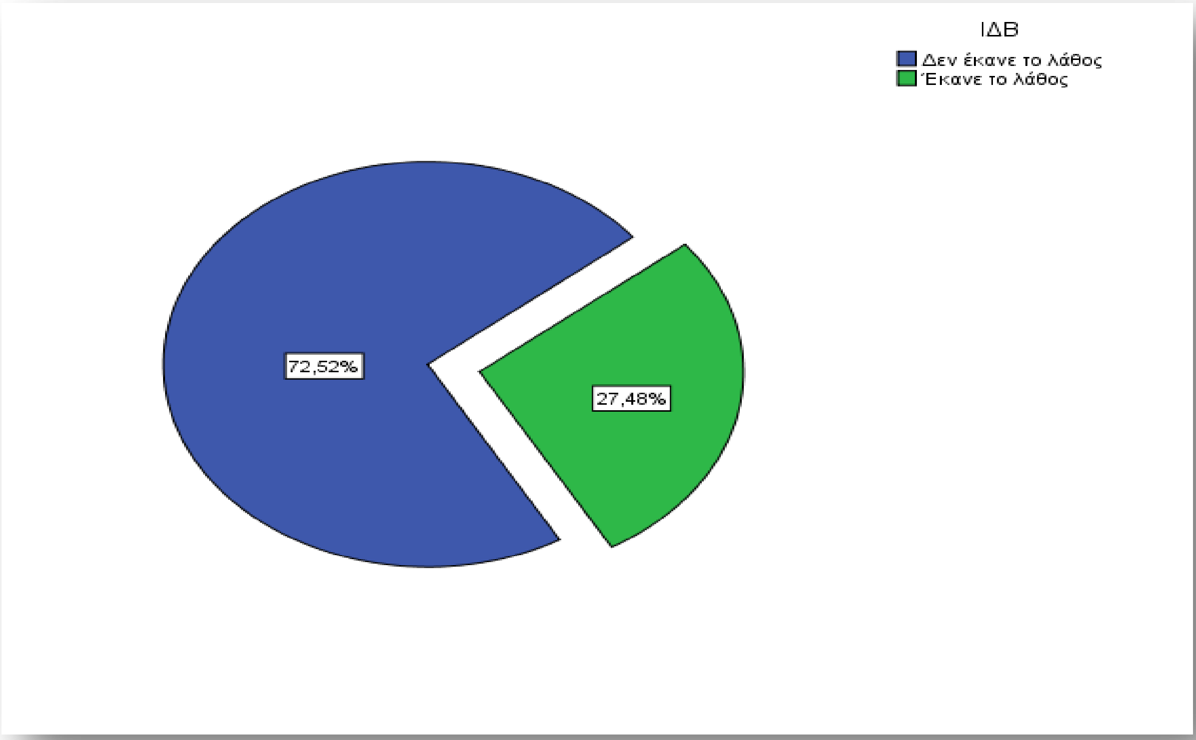
Διάγραμμα 4



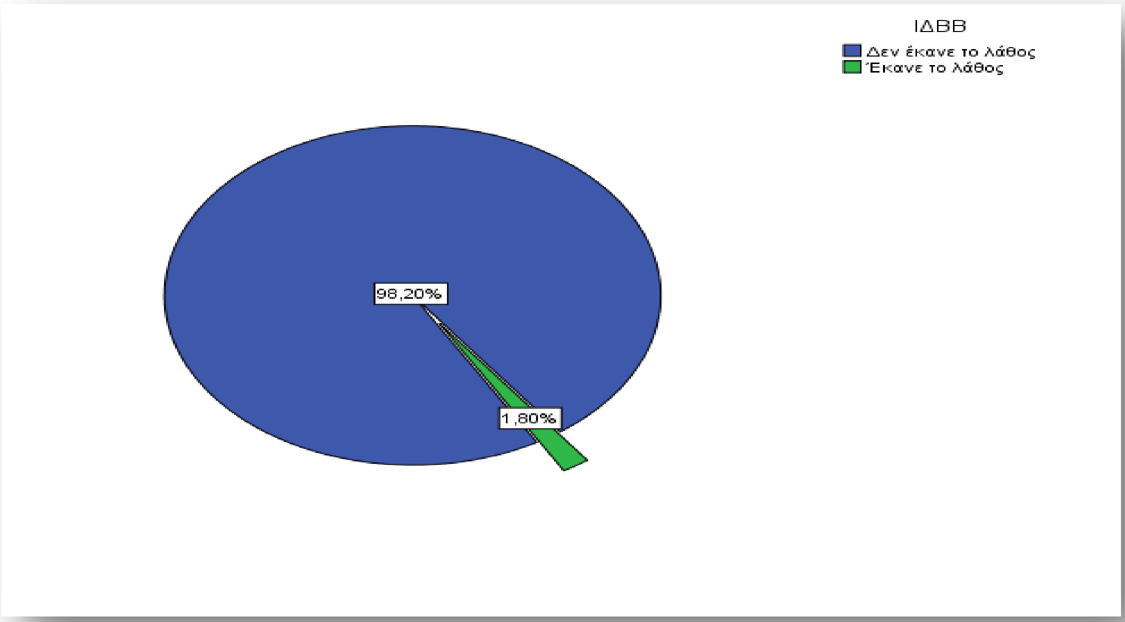
Διάγραμμα 5



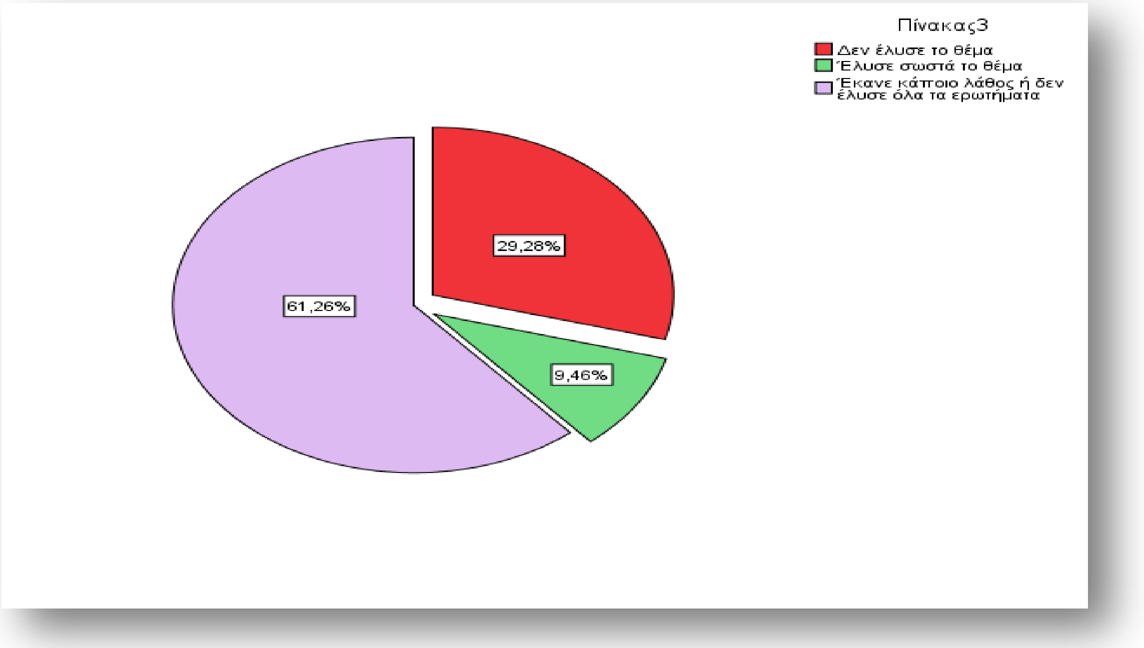
Διάγραμμα 6



Διάγραμμα 7



Διάγραμμα 8


Πίνακας3
Δεν έλυσε το θέμα
Έλυσε σωστά το θέμα
Έκανε κάποιο λάθος ή δεν έλυσε όλα τα ερωτήματα
29,28%
9,46%
61,26%

Διάγραμμα 9

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Έντυπο Υλικό

1. *Ακρίβης Δ. Γεώργιος, "Γραμμική Άλγεβρα (Πανεπιστημιακές παραδόσεις)", Τμήμα Πληροφορικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Ιώάννινα 2003. (pdf)*
2. *Βάρσος Δημήτρης, Δεριζιώτης Δημήτρης, Μαλιάκας Μιχάλης, Παπασταυρίδης Γ. Σταύρος, Ράπτης Ευάγγελος, Ταλέλλη Ολυμπία, "Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα", Τόμος Α, pp. 29- 95, 99- 174, 157- 208, Αθήνα, Ιανουάριος 2003. (pdf)*
3. *Βάρσος Δημήτρης, Δεριζιώτης Δημήτρης, Μαλιάκας Μιχάλης, Ταλέλλη Ολυμπία, "Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα", Τόμος Β,pp. 29- 86, 93- 119, Έκδοση 2η , Αθήνα, Οκτώβριος 2005. (pdf)*
4. *J. L. Dorier, (2002). "Teaching Linear Algebra at University",vol. III 1- 3, pp. 876- 882. (pdf)*
5. *Καδιανάκης Ν., Καρανάσιος Σ., "Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές", pp. 1- 26, 137- 269, 353- 383, Έκδοση 2η , Αθήνα 2002.*
6. *Μαρουλάς Ιωάννης, Καθηγητής ΣΕΜΦΕ, "Γραμμική άλγεβρα", Αθήνα ΕΜΠ 2005. (pdf)*
7. *Michael Haddad, "Difficulties ih the learning and teaching of Linear Algebra: A personal experience", A thesis ih the Department of Mathematics and Statistics. Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the degree of Master in the Teaching of Mathematics at Concordia University Montreal, Quebec, Canada, August 1999.(pdf)*
8. *Βερύκιος Γ. Πέτρος, Υπ. Διδάκτορας Τμ. Μαθηματικών Παν. Αθηνών, "Κατανόηση εννοιών Άλγεβρας από μαθητές Γυμνασίου". (pdf)*
9. *Δαγδιλέλης Ε. Βασίλειος, Παυλοπούλου Π. Καλλιόπη, Τρίγγα Κ. Παναγιώτα, "Διδακτική- Μέθοδοι και Εφαρμογές", Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, pp. 267- 299, Αθήνα 1998*
10. *Ευθυμίου Π. Μαρία, "Μεταπτυχιακή εργασία: Μαθησιακές δυσκολίες και Άλγεβρα. Καθολικός σχεδιασμός της διδασκαλίας στο Λύκειο, με χρήση δομημένων φύλλων εργασίας", Πανεπιστήμιο Κρήτης, Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών,pp. 5- 77, 80- 84, Ηράκλειο 2011. (pdf)*

11. *Παυλοπούλου Καλλιόπη, "Συμπληρωματικές Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών", Ιούνιος 2004.*

12. *Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, "Οδηγίες για την διδακτέα ύλη και την διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Γενικό Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2010- 2011", Τεύχος Γ, pp. 7- 13, 30- 32, 76- 104, 202- 242, 259- 260, 261- 273, Αθήνα 2010- 2011 (pdf)*

13. *Παντελιάδου Σουζάνα, Πατσιοδήμου Αντωνία, "Εφαρμογές διδακτικής αξιολόγησης και μαθησιακές δυσκολίες", pp. 1- 16, 37- 44, Εκδόσεις Γράφημα Θεσσαλονίκης, Βόλος 2007. (pdf)*

14. *Πατρώνης Τάσος, "Δυσκολίες στην προσέγγιση των Μαθηματικών εννοιών από τα παιδιά". (pdf)*

15. *Φελλούρης Γ. Αργύρης, Αν.Καθηγητής του ΕΜΠ, "Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία", Εκδόσεις Συμεών- Έκδοση 6η , pp. 18- 190, Αθήνα 2001.*

Ιστοσελίδες

1. http://digitalschool.minedu.gov.gr/modules/auth/listfaculte.php
2. http://lisari.blogspot.gr/2011/09/2011-12.html
3. http://www.mathman.gr/panepisthmio/grammiki-algebra.html
4. http://www.mathsfinder.gr/sites_p3.htm
5. http://blogs.sch.gr/iokaragi/%CF%85%CF%80%CE%BF%CF%83%CF%84%CE%AE%CF%81%CE%B9%CE%BE%CE%B7-%CE%B5%CE%BA%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B5%CF%85%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8E%CE%BD/
6. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/idris.pdf
7. http://hkier.fed.cuhk.edu.hk/journal/wp-content/uploads/2010/06/erj_v23n2_203-226.pdf
8. http://www1.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions.pdf
9. http://arxiv.org/pdf/math/0305018.pdf
10. http://science.uniserve.edu.au/pubs/china/vol4/CP4_M3.pdf
11. http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CF%81%CE%B1%CE%BC%CE%BC%CE%B9%CE%BA%CE%AE_%CE%AC%CE%BB%CE%B3%CE%B5%CE%B2%CF%81%CE%B1
12. http://users.forthnet.gr/ath/thantas77/edu/project011.html
13. http://reader.ekt.gr/bookReader/show/index.php?lib=EDULLL&item=897&bitstream=897_01#page/1/mode/2up