Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
Και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Επεκτάσεις Ασαφών Περιγραφικών Λογικών με Κανόνες και Απτά Πεδία

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΘΕΟΦΙΛΟΥ Π. ΜΑΪΛΗ

Διπλωματούχου Ηλεκτρολόγου Μηχανικού &
Μηχανικού Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Ε.Μ.Π (2004)

Αθήνα, Μάρτιος 2012

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Επεκτάσεις Ασαφών Περιγραφικών Λογικών με Κανόνες και Απτά Πεδία

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΘΕΟΦΙΛΟΥ Π. ΜΑΪΛΗ

Διπλωματούχου Ηλεκτρολόγου Μηχανικού &
Μηχανικού Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
Ε.Μ.Π (2004)

Συμβουλευτική Επιτροπή: Στέφανος Κόλλιας
Ανδρέας Σταφυλοπάτης
Γιώργος Στάμου

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την .... 2012.

...	...	...
Στέφανος Κόλλιας	Ανδρέας Σταφυλοπάτης	Γιώργος Στάμου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Λέκτορας Ε.Μ.Π.
...	...	...
Παναγιώτης Τσανάκας	Μανώλης Κουμπαράκης	Τιμολέων Σελλής
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Κ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.
	...	
	Νικόλαος Παπασπύρου	
	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	

Αθήνα, Μάρτιος 2012

. . .

ΘΕΟΦΙΛΟΣ Π. ΜΑΪΛΗΣ
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός & Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική μου διατριβή, θα ήθελα να εκφράσω θερμές ευχαριστίες σε όσους μου συμπαραστάθηκαν ηθικά και πρακτικά σε όλη τη μακρά πορεία εκπόνησης της.

Αρχικά ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή Ε.Μ.Π κ. *Στέφανο Κόλλια*, καθώς με την ένταξη μου στους υποψήφιους διδακτορές του, μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με τον τομέα της έρευνας που ήταν πάντα επιθυμία μου. Τον ευχαριστώ ακόμα, για την προθυμία του να με βοηθήσει και να με στηρίξει καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας. Ιδιαίτερα τον ευχαριστώ για την ευγένειά του και την εγγύτητα στην επικοινωνία μας.

Ξεχωριστή ήταν και η συμβολή του κ. *Γιώργου Στάμου*, Λέκτορα του Ε.Μ.Π, καθώς με τις γνώσεις, τα σχόλια, και τις καίριες παρατηρήσεις του, με βοηθούσε να εξελίσσομαι και να βελτιώνω τις ερευνητικές μου προτάσεις. Οι κατευθυντήριες γραμμές που μου έδινε ήταν για μένα πολύτιμες και εποικοδομητικές. Τον ευχαριστώ ακόμα για τη δεκτικότητα και την εμπιστοσύνη που έδειχνε στις προτάσεις και τις ιδέες μου, παρέχοντας μου την ελευθερία να εκφράζομαι.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους συναδέρφους μου στο Εργαστήριο Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας, Βίντεο και Πολυμέσων για τη δημιουργία ενός ευχάριστου περιβάλλοντος εργασίας όλα αυτά τα χρόνια, αλλά ιδιαίτερα εκείνους με τους οποίους συνεργάστηκα στο πλαίσιο της ερευνητικής μου εργασίας. Συγκεκριμένα, είχα μία γόνιμη συνεργασία με το Δρ. *Γιώργο Στοΐλο* και το Δρ. *Νικόλαου Σίμου*, η οποία αποτυπώνεται στο σύνολο των δημοσιεύσεων που έγιναν στα πλαίσια της διδακτορικής μου διατριβής. Επίσης θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμησή μου και τις ευχαριστίες μου προς τους συναδέλφους Δρ. *Αμαρυλλίς Ραουζαίου*, Δρ. *Βασίλη Τζουβάρα*, Δρ. *Ευάγγελο Σπύρου*, ερευνητή *Ιωάννη Αβρίθη*, ερευνητή *Κώστα Καρπούζη*, και Δρ. *Σπύρο Ιωάννου* για τις ερευνητικές συνεργασίες που είχαμε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου, τους Δρ. *Αθανάσιο Δροσόπουλο*, επίκουρο καθηγητή του Α.Π.Θ *Αναστάσιο Ντελόπουλο*, και Δρ. *Χρήστο Μαραμή*, για την άψογη συνεργασία που είχαμε στα πλαίσια του ερευνητικού έργου ASSIST, καθώς και τους Γιώργο Καρυδάκη, Θέμιδα Ζερβού για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφεραν προκειμένου να περατωθεί η διδακτορική μου διατριβή.

Οφείλω, τέλος, να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στη σύντροφό μου *Χαρούλα Πάστρα* και στην οικογένειά μου, οι οποίοι με ενθάρρυναν σε όλη τη διάρκεια της πορείας μου και μου παρείχαν τα ψυχικά εφόδια προκειμένου να ολοκληρώσω τη διδακτορική μου διατριβή.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κατάλογος πινάκων

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα από τα σημαντικότερα θέματα της Επιστήμης των Υπολογιστών είναι η αναπαράσταση γνώσης και η χρήση της για συλλογιστική. Οι κλασσικές Περιγραφικές Λογικές αποτελούν μία πολύ διαδεδομένη οικογένεια γλωσσών αναπαράστασης της ανθρώπινης γνώσης για τον κόσμο που μας περιβάλλει. Παρόλα αυτά, εφόσον η γνώση μας για τον κόσμο αυτό εμπεριέχει αβεβαιότητα και ανακρίβεια, έτσι και τα μέσα αναπαράστασής του θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα απεικόνισης αυτού του είδους της πληροφορίας. Για αυτόν τον λόγο, προτάθηκαν οι ασαφείς Περιγραφικές Λογικές, οι οποίες αποτελούν επεκτάσεις των κλασσικών Περιγραφικών Λογικών ικανές να αναπαραστήσουν έναν κόσμο με αβεβαιότητα και ανακρίβεια. Οι επεκτάσεις αυτές μας δίνουν τη δυνατότητα όχι μόνο να αναπαραστήσουμε με ικανοποιητικό τρόπο έννοιες όπως ψηλός, μακρυά, πολύ, λίγο κ.ο.κ, αλλά και να εξαγάγουμε συμπεράσματα βάσει της περιγραφόμενης γνώσης. Έτσι λοιπόν, αφενός, έχουν δημιουργηθεί εκφραστικές γλώσσες ασαφών Περιγραφικών Λογικών όπως η f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$, αφετέρου έχουν δημιουργηθεί μηχανές συμπερασματολογίας όπως το FiRE για τις συγκεκριμένες εκφραστικότητες.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι η επέκταση των ασαφών Περιγραφικών Λογικών με δύο είδη εκφραστικότητας, τα οποία δεν έχουν μελετηθεί διεξοδικά έως τώρα. Το πρώτο είδος εκφραστικότητας αναφέρεται στην επέκταση των γλωσσών αυτών με κανόνες παρόμοιους με αυτούς που παρουσιάζονται σε άλλους λογικούς φορμαλισμούς, όπως είναι ο λογικός προγραμματισμός. Το δεύτερο είδος εκφραστικότητας αναφέρεται στην επέκταση των γλωσσών αυτών έτσι ώστε να μπορούν να ενσωματώνουν με ικανοποιητικό τρόπο τύπους δεδομένων όπως αριθμητικά δεδομένα. Όπως θα δούμε και στην εργασία, τα δύο αυτά είδη εκφραστικότητας είναι πολύτιμα σε διάφορες εφαρμογές όπως ιατρικές και επεξεργασίας εικόνας. Ενώ είναι σχετικά προφανής ο τρόπος με τον οποίο θα δοθεί σημασιολογία σε μία νέα γλώσσα Περιγραφικών Λογικών, η δυσκολία σε μια τέτοια επέκταση έγκειται στην εύρεση ενός *ορθού (sound)* και *πλήρους (complete)* αλγόριθμου συλλογιστικής. Κύριο εμπόδιο σε αυτήν την προσπάθεια είναι η πολύ υψηλή πολυπλοκότητα των γλωσσών αυτών. Σε αρκετές μάλιστα περιπτώσεις, υπάρχει ο κίνδυνος οι εκφραστικές επεκτάσεις που θα προτείνουμε να οδηγήσουν σε μη αποφάνσιμες (undecidable) γλώσσες.

Στα πλαίσια τις συγκεκριμένης εργασίας δημιουργήσαμε το ασαφές CARIN, μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης η οποία συνδυάζει τις ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με *κανόνες Horn (Horn Rules).* Το ασαφές CARIN ενσωματώνει τελεστές της ασαφούς λογικής στη γλώσσα του μη-αναδρομικού CARIN και δύναται να επιλύσει προβλήματα συλλογιστικής με *συζευκτικά ερωτήματα*, *ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων*, και το πρόβλημα της *υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής.* Μέσα από τη μελέτη της γλώσσας του ασαφούς CARIN και κατά την προσπάθεια υλοποίησης μίας μηχανής συλλογιστικής για τη συγκεκριμένη εκφραστικότητα, ένα από τα θέματα τα οποία αντιμετωπίσαμε ήταν αυτό της πολύ υψηλής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου συλλογιστικής που έπρεπε να υλοποιηθεί. Για αυτόν το λόγο στραφήκαμε στη μελέτη γλωσσών πολυωνυμικής πολυπλοκότητας όπως είναι αυτές που ανήκουν στην οικογένεια της $\mathcal{EL}$ γλώσσας. Αρχικά προτείναμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ δηλαδή τη σύνταξη, τη σημασιολογία, και έναν πλήρη και ορθό αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα αυτή, ενώ αποδείξαμε ότι η προτεινόμενη γλώσσα διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα. Στη συνέχεια μελετήσαμε τους περιορισμούς που πρέπει να τεθούν έτσι ώστε η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα να μπορεί να ενσωματώσει απτά πεδία, δηλαδή να μπορεί να αναπαραστήσει με ικανοποιητικό τρόπο τύπους δεδομένων όπως αριθμητικά δεδομένα, χωρίς όμως να χάσει την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα. Στα πλαίσια της μελέτης αυτής, προτάθηκε η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα. Τέλος, μία ακόμα επέκταση που μελετήθηκε ήταν αυτή της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας με κανόνες. Η προτεινόμενη επέκταση εξετάζει το σύνολο τον περιορισμών που θα πρέπει να έχουν οι κανόνες προκειμένου να ενσωματωθούν στην $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα, χωρίς όμως να χαθεί η πολυωνυμική της πολυπλοκότητα. Η μελέτη αυτή έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ γλώσσας.

ABSTRACT

One of the most important topics in Computer Science is Knowledge Representation and Reasoning. Description Logics is a family of formal knowledge representation languages used in artificial intelligence for formal reasoning on the concepts of an application domain. Nevertheless, since our knowledge about certain domains contains uncertainty and imprecision, the knowledge representation languages should also have the ability to incorporate this kind of information. For this reason, fuzzy Description Logics, that form an extension of crisp Description Logics capable of representing uncertainty and imprecision, have been proposed. These extensions allow us, not only to adequately represent concepts such as near, far, much, little, etc., but also to perform reasoning. On this ground, on the one hand, expressive fuzzy Description Logic languages such as f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$ have been proposed, on the other hand reasoning engines such as FiRE have been developed for the previously mentioned languages.

The main objective of this thesis is to extend fuzzy Description Logics with two types of expressiveness that have not been adequately studied. The first type refers to extending fuzzy Description Logic languages with rules similar to those already been introduced in other logic formalisms such as Logic Programming, while the second refers to extending fuzzy Description Logics so as to incorporate data types such as numerical data. These types of expressiveness are useful in various applications –such as medical and image processing applications–. The main difficulty in our work was not to provide the semantics of a fuzzy Description Logic language, but to find a sound, complete, and terminating algorithm for the specific language. The main obstacle towards this direction is the high complexity of the proposed languages. In the worst case, we may propose a DL extension which is undecidable.

During our research, we have proposed fuzzy CARIN, a knowledge representation language combining fuzzy Description Logics with *(Horn Rules)*. Fuzzy CARIN incorporates fuzzy logic operators to the non recursive CARIN language and is able to solve reasoning problems with conjunctive queries and unions of conjunctive queries as well as the problem of existential entailment. Throughout the study of fuzzy CARIN and in our attempt to develop a reasoning engine for the specific expressiveness, the main problem we faced was the high complexity of the proposed language (and

consequently its corresponding reasoning algorithm). Thus, we later focused our attention to the study of polynomial complexity languages, such as those of the $\mathcal{EL}$ family. Initially we proposed the fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$ language, i.e. its syntax, semantics together with a sound and complete reasoning algorithm which was proved to have polynomial complexity. We then studied the limitations that have to be imposed so that the fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$ language may incorporate concrete domains, i.e. to be able to adequately represent data types such as numerical data, without losing its polynomial complexity. This study resulted in the fuzzy $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ language. Finally, we have also examined the fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$ language with rules. The proposed extension investigates the set of restrictions that have to be imposed to the rules, embodied to fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$, so that it won't lose its polynomial complexity. The specific study resulted to the creation of the fuzzy $\mathcal{ELP}$ language.

Κατάλογος Συντμήσεων

ABox	:	Assertional Box, σώμα ισχυρισμών
$\mathcal{ALCNR}$	:	$\mathcal{ALC}$ με περιορισμούς πληθικότητας ($\mathcal{N}$):$\leq nR, \geq nR$ και περιορισμένα αξιώματα υπαγωγής ρόλων ($\mathcal{R}$)
$\mathcal{ALC}$	:	$\mathcal{A}$ttributive $\mathcal{L}$anguage with $\mathcal{C}$omplement:$\top \mid \bot \mid A \mid \neg C \mid \exists R.C \mid \forall R.C$
ανν	:	αν και μόνο αν
ΒΓ	:	Βάση Γνώσης
CARIN	:	η ΠΛ $\mathcal{ALCNR}$ με Horn κανόνες
CBox	:	Constraint Box, σώμα περιορισμών
CQ	:	Conjunctive Query, συζευκτικό ερώτημα
DAML	:	DARPA Agent Markup Language
DL	:	Description Logics, περιγραφικές λογικές
$\mathcal{EL}$	:	ΠΛ που επιτρέπει την σύζευξη και υπαρξιακούς περιορισμούς
ΕΥ	:	Επαγωγική Υπόθεση
f-DL	:	fuzzy-DL
f_{KD}-ΠΛ	:	η οικογένεια των ασαφών ΠΛ γλωσσών που χρησιμοποιούν την ασαφή συνεπαγωγή του Kleene Dienes, την τομή και την ένωση του Gödel και την άρνηση του Lukasiewicz
f-ΠΛ	:	ασαφείς Περιγραφικές Λογικές
GCI	:	General Concept Inclusion, γενικευμένο αξίωμα υπαγωγής εννοιών
GLB	:	Greatest Lower Bound, μέγιστο κάτω φράγμα
κα	:	και άλλοι
KB	:	Knowledge Base, βάση γνώσης
ΚΜΑ	:	Κανονική Μορφή Άρνησης
κοκ	:	και ούτω καθεξής
κτλ	:	και τα λοιπά

LUB	:	Least Upper Bound
OIL	:	Ontology Inference Layer
OWL	:	Web Ontology Language
ΠΛ	:	Περιγραφικές Λογικές
RI	:	Role Inclusion, περιορισμός ρόλου
$\mathcal{S}$	:	$\mathcal{ALC}$ με αξιώματα μεταβατικών ρόλων($\mathcal{ALC}_{R^+}$) : $\mathrm{Tr}(R)$
$\mathcal{SHI}$	:	$\mathcal{SI}$ με αξιώματα υπαγωγής ρόλων:$R \sqsubseteq S$
$\mathcal{SHIF}$	:	$\mathcal{SHI}$ με συναρτησιακούς περιορισμούς πληθικότητας($\mathcal{F}$):$\leq 1R, \geq 2R$
$\mathcal{SHIN}$	:	$\mathcal{SHI}$ με περιορισμούς πληθικότητας($\mathcal{N}$):$\leq nR, \geq nR$
$\mathcal{SHOIN}$	:	$\mathcal{SHIN}$ με ονοματικές έννοιες($\mathcal{O}$) : $\{o\}$
$\mathcal{SI}$	:	$\mathcal{S}$ με αντίστροφους ρόλους $\mathcal{I}$:$\mathrm{Inv}(R)$ ή R^-
SWRL	:	*Semantic Web Rule Language*
TBox	:	Terminological Box, σώμα ορολογίας
ΘΑΚΜ	:	Θετικής Ανισότητας Κανονική Μορφή
W3C	:	World Wide Web Consortium

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Νοημοσύνη και Λογική

Ο όρος *νοημοσύνη (intelligence)* περιγράφει ένα σύνολο ικανοτήτων των έμβιων όντων που σχετίζονται με λειτουργίες του εγκεφάλου όπως αυτή της αφαιρετικής σκέψης, της επικοινωνίας, της συλλογιστικής, της μάθησης, της μάθησης μέσω εμπειρίας, του σχεδιασμού, της επίλυσης προβλημάτων κοκ. Εύκολα μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι κάθε προσπάθεια προς την κατεύθυνση του να δοθεί ένας σαφής ορισμός για τη νοημοσύνη είναι ελλιπής και περιγραφική. Για παράδειγμα η προηγούμενη περιγραφή της έννοιας της νοημοσύνης δεν δίνει βάρος στις κοινωνικές δεξιότητες ενός ατόμου, δηλαδή στην ικανότητα αλληλεπίδρασης με άλλα άτομα στα πλαίσια ενός κοινωνικού συνόλου, ικανότητα που περιγράφεται από τους ψυχολόγους και κοινωνιολόγους ως *κοινωνική νοημοσύνη (social intelligence)* (Mayer et al., 2004). Το πόσο πολύπλοκη και πολυδιάστατη έννοια είναι η ανθρώπινη νοημοσύνη προκύπτει και από το σύνολο των επιστημονικών κλάδων που ασχολούνται με τη μελέτη της. Η γνωσιακή *επιστήμη (cognitive science)* είναι ένα διεπιστημονικό αντικείμενο το οποίο αντλεί γνώσεις και ερευνητική μεθοδολογία από τις νευροεπιστήμες, τη γνωστική ψυχολογία, την κοινωνιολογία, την τεχνητή νοημοσύνη, τη γλωσσολογία και τη φιλοσοφία του νου.

Μία από τις παραμέτρους της ανθρώπινης νοημοσύνης είναι η *λογική (logic)*, η ικανότητα δηλαδή ενός ατόμου να συνδυάζει δεδομένα που προκύπτουν από τη γνώση του και να φτάνει σε συγκεκριμένα συμπεράσματα βάσει μίας ορισμένης *συλλογιστικής (reasoning)*. Η ικανότητα αυτή είναι έμφυτη τόσο στον άνθρωπο, όσο και σε πολλά άλλα έμβια όντα, από πολύ μικρή ηλικία. Για παράδειγμα ένα νήπιο δεν θα ακουμπήσει το αναμμένο μάτι της κουζίνας, όταν έχει τη γνώση ότι το κόκκινο χρώμα που έχει το μάτι υποδηλώνει την υψηλή του θερμοκρασία και ότι αν ακουμπήσει ένα αντικείμενο υψηλής θερμοκρασίας θα του προκληθούν βλάβες. Σε περίπτωση βέβαια που το νήπιο δεν έχει αυτή τη γνώση θα την αποκτήσει, δυστυχώς, μέσω του καψίματος. Όπως βλέπουμε και από το προηγούμενο παράδειγμα, ακόμα και αντιδράσεις τις οποίες θεωρούμε ενστικτώδεις και μηχανικές έχουν τις ρίζες τους σε διαδικασίες συλλογιστικής.

Ένας από τους πρώτους που προσπάθησαν να κωδικοποιήσουν "την ορθή σκέψη", δηλαδή την αναντίρρητη διαδικασία συλλογισμού, ήταν ο *Αριστοτέλης*. Το έργο του Αριστοτέλη επάνω στη λογική συντίθεται από μία σειρά πραγματειών, υπό τον γενικότερο τίτλο Όργανον, που περιλαμβάνει τις πραμάτειες: "*Περί Ερμηνείας*", "*Κατηγορίαι*", "*Αναλυτικά Πρότερα*", "*Αναλυτικά Ύστερα*" και "*Τοπικοί και Σοφιστικοί Έλεγχοι*". Η λογική του Αριστοτέλη βασίζεται στην έννοια του *συλλογισμού*. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, ο συλλογισμός είναι η διαδικασία κατά την οποία κάποια δεδομένα τα οποία έχουν υποτεθεί, έχουν σαν αποτέλεσμα την ισχύ "εξ ανάγκης" κάποιων νέων δεδομένων. Ο ορισμός που δίνει ο Αριστοτέλης για τη συλλογιστική ταυτίζεται με τον μοντέρνο ορισμό της *λογικής συνεπαγωγής (logic entailment)*. Ένα άλλο εργαλείο της λογικής που προτείνει ο Αριστοτέλης είναι αυτό της επαγωγής. *Επαγωγή (induction)* σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι η μέθοδος εύρεσης μίας "καθολικής αλήθειας" ως αποτέλεσμα σύνθεσης πολλών "μερικών αληθειών". Η εργασία του Αριστοτέλη έθεσε τις βάσεις για αυτό που σήμερα ονομάζουμε *τυπική λογική (formal logic)* που αποτελεί αντικείμενο έρευνας τόσο των μαθηματικών (*μαθηματική λογική, mathematical logic*) όσο και της φιλοσοφικής επιστήμης.

Ουσιαστική πρόοδος στο πεδίο της μαθηματικής λογικής –εδώ βέβαια δεν αναφέρουμε τη δουλειά που σχετίζεται με τη λογική σαν πεδίο της φιλοσοφίας από πολλούς, κυρίως Γερμανούς, φιλοσόφους όπως ο *Immanuel Kant*– δεν έγινε μέχρι που ο *George Boole* έθεσε τις βάσεις της *προτασιακής λογικής (propositional logic)*. Στη συνέχεια, ο Frege (1879) πρότεινε ένα σύστημα *αυτοματοποιημένης συλλογιστικής* και έθεσε ουσιαστικά τις βάσεις του *κατηγορηματικού λογισμού (Predicate logic)*. Από τότε μέχρι σήμερα έχουν προταθεί διάφορα είδη λογικής όπως για παράδειγμα η *Λογική Πρώτης Τάξης (First Order Logic)* (Barwise, 1977), η *Τροπική Λογική (Modal Logic)* (Hughes et al., 1968), η *Πλειότιμη Λογική (Many Valued Logic)* (Malinowski, 1993), καθώς και οι *Περιγραφικές Λογικές (Description Logics)* (Baader, 2003) και η *Ασαφής Λογική (fuzzy logic)* (Klir and Yuan, 1995; Hájek, 1998) που αποτελούν τον πυρήνα της διδακτορικής διατριβής.

Υπάρχουν τόσες πολλές κατηγορίες μαθηματικής λογικής σε σημείο που καθίσταται δύσκολη ακόμα και η απαρίθμησή τους.

1.2 Λογική και Επιστήμη των Υπολογιστών

Ορόσημο στην εξέλιξη της λογικής αποτέλεσε η δημιουργία του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή. Η λογική, από εργαλείο των μαθηματικών και της φιλοσοφίας, μετεξελίχθηκε σε κεντρικό άξονα της *Τεχνητής Νοημοσύνης (Artificial Intelligence)*, της προσπάθειας δηλαδή προσομοίωσης της ανθρώπινης σκέψης από κάποιο Υπολογιστικό Σύστημα. Ήδη από το 1950 ο *Alan Turing* εμπνεύστηκε μία δοκιμασία για το χαρακτηρισμό μηχανών ως ευφυών, το λεγόμενο *Turing Test* (Turing, 2009). Σύμφωνα με τη δοκιμασία αυτή, για να χαρακτηριστεί μία μηχανή ως ευφυής θα πρέπει σε ένα σύνολο ερωτημάτων που θα της τεθούν από κάποιο κριτή να μη μπορεί ο κριτής να διαχωρίσει εάν οι απαντήσεις δόθηκαν από κάποιον άνθρωπο ή από κάποιον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή.

Μία νέα πρόκληση για τον χώρο της Τεχνητής Νοημοσύνης αποτελεί το όραμα του *Tim Bernes-Lee* για τον *Σημασιολογικό Ιστό (Semantic Web).* Σύμφωνα με τους Lee et al. (2001), *"Ο Σημασιολογικός Ιστός είναι μία επέκταση του τωρινού Παγκόσμιου Ιστού (World Wide Web) όπου για κάθε πληροφορία δίνεται και μία σαφώς ορισμένη ερμηνεία, επιτρέποντας τη συνεργασία μεταξύ υπολογιστών και ανθρώπων"*. Δηλαδή στον Παγκόσμιο Ιστό του μέλλοντος, οι υπολογιστές θα είναι σε θέση να *αναζητούν (seek)*, να *ανακτούν (retrieve)*, και να *ενσωματώνουν (integrate)* πληροφορίες με ευφυή τρόπο και να δημιουργούν νέα γνώση προκειμένου να απαντήσουν σε πολύπλοκα ερωτήματα.

Πρωτεύοντα ρόλο στη δημιουργία του Σημασιολογικού Ιστού παίζουν οι *οντολογίες (ontologies)* καθώς δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας γνώσης η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή από ανθρώπους και να υποστεί επεξεργασία από κάποιο υπολογιστικό σύστημα. Η έννοια "οντολογία", που έχει τις ρίζες της στην αρχαία ελληνική φιλοσοφία, σύμφωνα με την επιστήμη των υπολογιστών είναι μία τυπική αναπαράσταση της γνώσης που βασίζεται στις έννοιες ενός συγκεκριμένου πεδίου ενδιαφέροντος και στη σχέση μεταξύ αυτών των εννοιών. Χρησιμοποιείται έτσι ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για τις *οντότητες*, τα αντικείμενα δηλαδή του πεδίου που θέλουμε να περιγράψουμε. Οι οντολογίες αναπτύχθηκαν στην τεχνητή νοημοσύνη για να διευκολύνουν τον διαμοιρασμό και την επαναχρησιμοποίηση της γνώσης. Ο λόγος για τον οποίο έγιναν τόσο δημοφιλείς είναι το γεγονός ότι παρέχουν μία τυπική περιγραφή της γνώσης που μπορεί να γίνει κατανοητή τόσο από ανθρώπους όσο και από υπολογιστικές εφαρμογές.

Προκειμένου να επιτευχθεί αυτή η τυπική αναπαράσταση της γνώσης, είναι απαραίτητη η δημιουργία μίας τυποποιημένη γλώσσας. Έτσι λοιπόν η *World Wide Web* κοινοπραξία δημιούργησε μία ομάδα για να αναπτύξει μία τέτοια γλώσσα. Το αποτέλεσμα αυτής της δραστηριότητας ήταν η γλώσσα *OWL (Web Ontology Language)* που ορίστηκε από τους Patel-Schneider et al. (2004) και αποτελεί την εξέλιξη προηγουμένων εργασιών: των Fensel et al. (2005) που παρουσίασαν τις *OIL (Ontology Inference Layer)* γλώσσα και των Horrocks and Patel-Schneider (2001) που παρουσίασαν την *DAML (DARPA Agent Markup Language-Ontology Inference Layer)* και *DAML+OIL* γλώσσες.

1.3 Περιγραφικές Λογικές

Η σχέση των οντολογιών με τη μαθηματική λογική είναι άμεση, αφού η σύνταξη και η σημασιολογία τους βασίστηκε στις *Περιγραφικές Λογικές (Description Logics).*

Πιο συγκεκριμένα, οι γλώσσες OWL-DL και OWL-Lite έχει αποδειχθεί από τους Horrocks et al. (2003) ότι είναι συντακτικές παραλλαγές των Περιγραφικών Λογικών $\mathcal{SHIF}(D^+)$ και $\mathcal{SHOIN}(D^+)$ αντίστοιχα, ενώ η γλώσσα OWL 2 έχει αποδειχθεί από τους Grau et al. (2008); Motik et al. (2008) ότι είναι ισοδύναμη της Περιγραφικής Λογικής $\mathcal{SROIQ}(\mathbf{D})$.

Οι *Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ)* είναι μία οικογένεια από βασισμένους στη λογική φορμαλισμούς αναπαράστασης γνώσης. Οι φορμαλισμοί αυτοί είναι προσαρμοσμένοι στην αναπαράσταση της ορολογίας μίας εφαρμογής με δομημένο και τυποποιημένο τρόπο. Επιτρέπουν στους χρήστες: να ορίσουν τα σημαντικά στοιχεία ενός πεδίου ενδιαφέροντος χρησιμοποιώντας *έννοιες (concepts)*, *ρόλους (roles)*, και *άτομα (atoms)* (ή εναλλακτικά κλάσεις, σχέσεις, αντικείμενα)· να δηλώσουν περιορισμούς στον τρόπο που αυτά τα στοιχεία θα ερμηνευθούν· και να συνάγουν συμπεράσματα βάσει των ορισμών και των περιορισμών που προαναφέρθηκαν. Το όνομά των ΠΛ προκύπτει από το γεγονός ότι: αφενός οι κλάσεις ορίζονται από περιγραφές εννοιών, αφετέρου από το γεγονός ότι η σημασιολογία τους βασίζεται στη λογική. Δηλαδή οι ΠΛ δίνουν τη δυνατότητα να ορίσουμε πολύπλοκες εκφράσεις μέσα από *ονόματα εννοιών(concept names)* που είναι μοναδιαία κατηγορήματα και *ατομικούς ρόλους (atomic roles)* που είναι δυαδικά κατηγορήματα, ενώ η σημασιολογία των εκφράσεων αυτών βασίζεται στη *λογική πρώτης τάξης (first order logic).*

Παράδειγμα 1.1 *Χρησιμοποιώντας την εκφραστικότητα των ΠΛ μπορούμε να πούμε ότι άντρας είναι ο άνθρωπος ο οποίος έχει γένος αρσενικό, ότι πολύτεκνος είναι ο άνθρωπος που έχει* 3 *ή περισσότερα παιδιά, ότι κάθε άνθρωπος είναι θνητός, και ότι ο γιος του αδερφού ενός ατόμου είναι και ανιψιός του.*

$$\begin{aligned}
\text{Άντρας} &\equiv \text{Άνθρωπος} \sqcap \text{Αρσενικό} \\
\text{Πολύτεκνος} &\equiv \text{Άνθρωπος} \sqcap \geq 3 \text{έχειΠαιδί} \\
\text{Άνθρωπος} &\sqsubseteq \text{Θνητός} \\
\text{έχειΑδερφό} \circ \text{έχειΓιο} &\sqsubseteq \text{έχειΑνιψιό}
\end{aligned}$$

Οι κύριοι λόγοι που καθιστούν επιτυχημένη τη χρήση των ΠΛ ως γλωσσών αναπαράστασης οντολογιών είναι: η ύπαρξη μίας τυποποιημένης, μη αμφίσημης σημασιολογίας που βασίζεται στην Tarski-τύπου σημασιολογία της λογικής πρώτης τάξης· το γεγονός ότι οι ΠΛ παρέχουν διάφορα προσεκτικά επιλεγμένα εκφραστικά μέσα για τη δημιουργία εννοιών και ρόλων, για περιορισμούς στις διερμηνείες της γνώσης, και για την αρχικοποίηση των εννοιών και των ρόλων με άτομα· το γεγονός ότι οι ΠΛ παρέχουν στους χρήστες τους βελτιστοποιημένες διαδικασίες συλλογιστικής για την εξαγωγή συμπερασμάτων από την υπάρχουσα γνώση.

1.4 Επεκτάσεις Περιγραφικών Λογικών

Διάφορες γλώσσες και συστήματα Περιγραφικών Λογικών έχουν αναπτυχθεί βασισμένα στην κλασσική σημασιολογία των ΠΛ που θα περιγράψουμε στο Κεφάλαιο 2.2. Παρόλα αυτά, η εκφραστικότητα των κλασσικών ΠΛ δεν επαρκεί έτσι ώστε να περιγραφεί η ορολογική γνώση συγκεκριμένων πεδίων εφαρμογών. Έτσι λοιπόν ενώ υπάρχουν κατασκευαστές των κλασσικών ΠΛ που ο συνδυασμός τους μπορεί να οδηγήσει σε πολύ εκφραστικές γλώσσες (ακόμα και μη αποφάνσιμες), για αρκετές εφαρμογές υπάρχει η απαίτηση για αναπαράσταση γνώσης πέρα από την κλασσική μοντελοθεωρητική σημασιολογία των ΠΛ. Για παράδειγμα οι κλασσικές ΠΛ δεν μπορούν να περιγράψουν ένα μισοάδειο ποτήρι, να καταγράψουν με ακρίβεια στοιχεία όπως το βάρος και το ύψος ενός ατόμου, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις υπολείπονται της εκφραστικότητας την οποία δίνουν συστήματα κανόνων.

Έτσι λοιπόν, για διαφορετικού είδους εφαρμογές, διαφορετικές επεκτάσεις των ΠΛ έχουν προταθεί προκειμένου να περιγράψουν την υφιστάμενη γνώση. Για την αναπαράσταση ανακριβούς και ασαφούς πληροφορίας έχουν προταθεί διάφορες επεκτάσεις στη θεωρία των κλασσικών ΠΛ βασισμένες στη θεωρία δυνατοτήτων (possibilistic theory), στη θεωρία πιθανοτήτων (probabilistic theory), και στην ασαφή λογική (fuzzy logic). Επιπλέον, έχουν προταθεί επεκτάσεις των ΠΛ με συστήματα κανόνων, δηλαδή με συστήματα που περιγράφουν γνώση χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από κανόνες της μορφής ΑΝ-ΤΟΤΕ (IF-THEN). Τέλος, η επέκταση με *απτά πεδία (concrete domains)* επιτρέπει στις ΠΛ την αναπαράσταση με παραστατικό τρόπο αριθμητικών και άλλων πεδίων δεδομένων.

Στη συνέχεια αναλύουμε τις επεκτάσεις των ΠΛ με ασάφεια, κανόνες, και απτά πεδία καθώς αυτές θα αποτελέσουν τον πυρήνα της διδακτορικής διατριβής.

1.4.1 Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Ένα χαρακτηριστικό της γνώσης που εμφανίζεται σε αρκετές εφαρμογές είναι η αβεβαιότητα. Μία από τις σημαντικότερες μορφές αβεβαιότητας είναι η ασάφεια. Στην περίπτωση των *ασαφών Περιγραφικών Λογικών* (*fuzzy Description Logics*) που αρχικά προτάθηκαν από τον Yen (1991) ο σκοπός είναι να χρησιμοποιηθούν χαρακτηρισμοί, οι οποίοι δεν μπορούν να ταξινομηθούν είτε ως καθολικά αληθείς είτε ως καθολικά ψευδείς. Για παράδειγμα το γεγονός ότι κάποιος είναι ψηλός δεν μπορεί να καθοριστεί με ένα αυστηρό όριο ύψους, αλλά μπορεί να αναπαρασταθεί με μία συνάρτηση συμμετοχής ή βαθμού.

Από την αρχική προσπάθεια ασαφοποίησης των ΠΛ που περιγράφεται από τον Yen (1991) μέχρι σήμερα, πολλές εκφραστικές γλώσσες ασαφών ΠΛ έχουν προταθεί. Οι Stoilos et al. (2007) πρότειναν τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{SHIN}$, ο Straccia (2005b) παρουσίασε τη γλώσσας της ασαφούς $\mathcal{SHIF}(D)$, ενώ οι Bobillo et al. (2007) παρουσίασαν την ασαφή $\mathcal{SROIQ}$ γλώσσα . Οι προσπάθειες αυτές είχαν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία συστημάτων όπως το *FiRE* [1], *το fuzzyDL*[2] και το *DELOREAN.*

Οι προτεινόμενες ασαφείς ΠΛ όχι μόνο ορίζουν μία σημασιολογία η οποία βασίζεται στα ασαφή σύνολα και λογική, αλλά εισαγάγουν επιπλέον εκφραστικότητα με περιγραφείς όπως *"πολύ"*, *"κυρίως"* κτλ, ενώ προτείνουν και αλγορίθμους συμπερασματολογίας για μία πλειάδα προβλημάτων συλλογιστικής.

1.4.2 Περιγραφικές Λογικές με Κανόνες

Το κύριο χαρακτηριστικό των ΠΛ, δηλαδή η βασισμένη σε κλάσεις αντικειμένων αναπαράσταση γνώσης, θέτει και ένα όριο στην εκφραστική τους δύναμη από τη στιγμή που δεν μπορούν να εκφράσουν πολύπλοκες περιγραφές που σχετίζονται με κατηγορήματα. Ακόμη και εκφραστικές ΠΛ όπως η $\mathcal{SHOIQ}$ δεν έχουν τη δυνατότητα να εκφράσουν την απλή σύνθεση μεταξύ ρόλων [3]. Για αυτό το λόγο, σαν ένα σκαλοπάτι στην ανάπτυξη του Σημασιολογικού Ιστού η ανάγκη για συστήματα που θα παρέχουν υπηρεσίες συλλογιστικής που θα συνδυάζουν ΠΛ με κανόνες *(Description Logics with Rules)* είναι επιτακτική.

Μία άμεση επιλογή, σύμφωνα με τους Antoniou et al. (2006), για την επέκταση των ΠΛ θα ήταν η χρήση *γλωσσών κανόνων (rule languages)* όπως αυτές που χρησιμοποιούνται στον *λογικό προγραμματισμό (logic programming)* και στις μη μονότονες λογικές. Προς αυτήν την κατεύθυνση οι Horrocks et al. (2004) πρότειναν τη γλώσσα *SWRL (Semantic Web Rule Language)*, η οποία ενσωματώνει κανόνες στην OWL γλώσσα, και αποτελεί πρότυπο της οργάνωσης κοινοπραξίας *W3C*. Σύμφωνα τους Horrocks and Patel-Schneider (2004), η SWRL επεκτείνει την εκφραστικότητα της OWL με τίμημα την αποφανσιμότητα της γλώσσας. Ως εκ τούτο, το ζητούμενο είναι η δημιουργία γλωσσών που, ενώ θα αποτελούν εκφραστικά υποσύνολα της SWRL, ταυτόχρονα θα είναι και αποφάνσιμες. Οι Antoniou et al. (2006) παρουσιάζουν την "αφρόκρεμα" των γλωσσών αυτών η οποία περιλαμβάνει: την προτεινόμενη από τους Grosof et al. (2003) *DLP*, την προτεινόμενη από τους Donini et al. (1998) $\mathcal{AL}$-log, την προτεινόμενη από τους Kifer et al. (1995) F-logic, καθώς και τη γλώσσα του CARIN που προτάθηκε από τους Levy and Rousset (1998).

Αυτές οι γλώσσες μπορούν να χωριστούν σε *υβριδικές (hybrid languages)* στις οποίες υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των κατηγορημάτων στους κανόνες και του σώματος ΠΛ, και στις *ομογενοποιημένος (homogenuous languages)* στις οποίες δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος διαχωρισμός.

[1]`http://www.image.ece.ntua.gr/~nsimou/FiRE/`

[2]`http://faure.isti.cnr.it/~straccia/software/fuzzyDL/fuzzyDL.html`

[3]Πρόσφατα γλώσσες όπως οι $\mathcal{EL}^{++}$ Baader et al. (2005) και $\mathcal{SROIQ}$ Horrocks et al. (2006) κινούνται προς αυτήν την κατεύθυνση.

1.4.3 Περιγραφικές Λογικές με Απτά Πεδία

Ένας ακόμα περιορισμός των κλασσικών ΠΛ σχετίζεται με τη δυσκολία τους να ενσωματώσουν και να επεξεργαστούν γνώση που αναφέρεται σε συγκεκριμένα πεδία δεδομένων, αποκαλούμενα *απτά πεδία (concrete domains)*, όπως οι αριθμοί και συμβολοσειρές, τα οποία χρειάζονται σε πολλές εφαρμογές. Για παράδειγμα, για να μοντελοποιηθεί η έννοια ενός νέου ανθρώπου θα ήταν λάθος να χρησιμοποιηθεί ο ρόλος ηλικία και μία έννοια που θα αναπαριστούσε την ηλικία του. Αντίθετα το ορθό θα ήταν να μπορούν να συσχετιστούν με την περιγραφική λογική αριθμητικά δεδομένα, όπως φυσικοί αριθμοί, έτσι ώστε να αναπαρασταθεί με σωστό τρόπο η πληροφορία αυτή.

Παρόλο που κάποιες αρχικές απόπειρες αναπαράστασης τέτοιου είδους γνώσης σχεδιάστηκαν ως εκ των υστέρων λύσεις για συγκεκριμένα προβλήματα, οι Baader et al. (1991) πρότειναν μία μεθοδολογία προκειμένου να μπορεί να ενσωματωθεί τέτοιου είδους γνώση στις ΠΛ γλώσσες. Εάν ένα πεδίο μπορεί να προτυποποιηθεί, τότε και οι *tableaux τεχνικές* συλλογιστικής *(tableaux algorithms)* μπορούν να επεκταθούν κατάλληλα έτσι ώστε να διαχειριστούν υπηρεσίες συλλογιστικής στην επεκτεταμένη γλώσσα. Μία αναλυτική περιγραφή στη δουλειά που έχει γίνει στις ΠΛ και σχετίζεται με απτά πεδία έχει γίνει από τον Lutz (2003).

Τα απτά πεδία περιλαμβάνουν πέρα από τύπους δεδομένων όπως οι αριθμοί, και πιο πολύπλοκα πεδία όπως χωρικά, χρονικά κτλ.

1.5 Στόχοι και Δομή

Βασικός στόχος του διδακτορικού είναι η μελέτη και εν συνεχεία επέκταση των ΠΛ με τα είδη εκφραστικότητας που προαναφέρθηκαν. Έχοντας ως βάση τις ασαφείς ΠΛ θα προσπαθήσουμε να τις επεκτείνουμε έτσι ώστε να μπορούν να ενσωματώνουν κανόνες και απτά πεδία. Ο στόχος αυτός, όπως θα φανεί και στην πορεία, δεν είναι απλό να υλοποιηθεί. Ενώ είναι σχετικά προφανής ο τρόπος με τον οποίο θα δοθεί σημασιολογία σε μία νέα γλώσσα ΠΛ, δεν είναι τόσο προφανής η εύρεση ενός *ορθού (sound)*, *πλήρη (complete)*, και *τερματιζόμενου* (*terminating*) αλγόριθμου. Κύριο εμπόδιο σε αυτή την προσπάθεια είναι η πολύ υψηλή πολυπλοκότητα των γλωσσών και των αλγόριθμων που προκύπτουν. Δυστυχώς, στη χειρότερη των περιπτώσεων, μπορεί η γλώσσα που θα προκύψει να είναι μη *αποφάνσιμη (undecidable)* και αυτός είναι ο λόγος ο οποίος μας κάνει να θέτουμε αρκετούς περιορισμούς στην εκφραστικότητά μας.

Στο Κεφάλαιο 2 παραθέτουμε το θεωρητικό υπόβαθρο που σχετίζεται με την εργασία μας. Πιο συγκεκριμένα δίνονται κάποιες βασικές αρχές της *ασαφούς λογικής (fuzzy logic)* και *συνολοθεωρίας (fuzzy set theory)*, γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στις κλασσικές ΠΛ, ενώ τέλος γίνεται μία σύντομη περιγραφή της σημασιολογίας των ασαφών ΠΛ.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το ασαφές CARIN, μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης η οποία συνδυάζει τις ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με *κανόνες Horn (Horn Rules)*. Το ασαφές CARIN ενσωματώνει τελεστές της ασαφούς λογικής στη γλώσσα του μη αναδρομικού CARIN. Θα παρουσιαστούν επίσης τα προβλήματα συλλογιστικής για απάντηση σε *συζευκτικά ερωτήματα*, *ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων*, και το πρόβλημα της *υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής*. Επίσης θα περιγραφεί ένας ορθός, πλήρης, και τερματιζόμενος αλγόριθμος ο οποίος επιτρέπει συλλογιστική στην ΠΛ γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$ που έχει επεκταθεί με μη αναδρομικούς Horn κανόνες. Αυτή η επέκταση είναι πλέον πρακτική σε ρεαλιστικές εφαρμογές οι οποίες χειρίζονται ασαφή και ατελή πληροφορία όπως είναι εφαρμογές επεξεργασίας εικόνας και ιατρικές εφαρμογές.

Ένα από τα προβλήματα που προέκυψαν κατά την προσπάθεια υλοποίησης του αλγορίθμου συλλογιστικής του ασαφούς CARIN ήταν η υψηλή πρακτική πολυπλοκότητα που προκύπτει κυρίως από την κυκλικότητα στην ΠΛ γνώση και στους περιορισμούς που θα πρέπει να εφαρμοστούν σε ορισμένες έννοιες προκειμένου να απαντηθούν τα τρία είδη ερωτημάτων που προαναφέρθηκαν. Αυτός είναι και ο σκοπός που στραφήκαμε στη μελέτη βατών συστημάτων ΠΛ. Στο Κεφάλαιο 4 περιγράφουμε τη βατή γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ και παρέχουμε τη σύνταξη, τη σημασιολογία, και έναν πλήρη και ορθό αλγόριθμο συλλογιστικής για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Επιπλέον δείχνουμε πώς μία ευρεία κατηγορία προβλημάτων μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών, ενώ τέλος περιγράφεται ο αλγόριθμος συλλογιστική της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας μαζί με αναλυτικές αποδείξεις της ορθότητα, πληρότητας, και πολυωνυμικής του πολυπλοκότητας.

Στο πλαίσιο της εξέτασης γλωσσών πολυωνυμικής πολυπλοκότητας θα μελετήσουμε επεκτάσεις της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ με απτά πεδία και κανόνες.

Το Κεφάλαιο 5 έχει σαν πυρήνα την επέκταση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας με απτά πεδία. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μία ασαφή ΠΛ η οποία ενώ θα διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα, θα μπορεί και να αναπαριστά αριθμητικά και άλλου είδους δεδομένα μέσω των απτών πεδίων. Η γλώσσα αυτή που προτείνουμε ονομάζεται ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$. Στο Κεφάλαιο αυτό θα συνοψίσουμε τον ορισμό των ασαφών απτών πεδίων που έχει δοθεί από τον Straccia (2005b) ενώ θα τον επεκτείνουμε με έννοιες όπως η σύζευξη, η διάζευξη, και η συνεπαγωγή στα πλαίσια ενός απτού πεδίου. Θα παρουσιαστούν για πρώτη φορά κάποια απτά πεδία όπως αυτό των ασαφών αριθμών, ενώ θα εξεταστεί και το σύνολο των περιορισμών στους οποίους πρέπει να υπόκειται ένα απτό πεδίο έτσι ώστε να διατηρείται η πολυωνυμική πολυπλοκότητα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας. Οι περιορισμοί αυτοί συνοψίζονται στα μη αυστηρά π-αποδεκτά και στα αυστηρά π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία, τα οποία επιτρέπουν διαφορετικές εκφραστικότητες αλλά και περιορισμούς ως προς τον τρόπο ενσωμάτωσής τους στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Τέλος περιγράφεται ο αλγόριθμος συλλογιστική της $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ ενώ αποδεικνύεται με αναλυτικό τρόπο η ορθότητα, πληρότητα, και πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζουμε μία ακόμα επέκταση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας, αυτή τη φορά με κανόνες, με γνώμονα πάντα τη διατήρηση της πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Αρχικά συνοψίζουμε την κλασσική ασαφή $\mathcal{ELP}$ η οποία προτάθηκε από τους Krötzsch et al. (2008b). Στη συνέχεια ορίζουμε τους ΠΛ κανόνες με βάρη και τις ασαφείς βάσεις κανόνων για ΠΛ, βασισμένοι στους αντίστοιχους ορισμούς που δόθηκαν από τους Krötzsch et al. (2008a), ενώ παρουσιάζουμε και την απλούστερη μορφή μίας ασαφούς βάσης κανόνων που είναι ένα Datalog πρόγραμμα. Η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$, που θα οριστεί στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής, αποτελείται από ένα σύνολο τέτοιων κανόνων οι οποίοι όμως υπόκεινται σε συγκεκριμένους περιορισμούς που διασφαλίζουν την αποφανσιμότητα και πολυωνυμική πολυπλοκότητά της. Όπως αποδεικνύεται και στο Κεφάλαιο 6, η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ είναι εκφραστικό υπερσύνολο της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας που παρουσιάσαμε. Τέλος παρουσιάζεται ο αλγόριθμος συλλογιστικής για την ασαφή $\mathcal{ELP}$ ο οποίος βασίζεται στην αναγωγή ενός $\mathcal{ELP}$ συνόλου κανόνων με βάρη, σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα, η οποία αναγωγή γίνεται σε γραμμικό χρόνο. Εφόσον η συγκεκριμένη μορφή ασαφούς Datalog προγράμματος αποτιμάται σε πολυωνυμικό χρόνο, προκύπτει ότι τέτοια θα είναι και η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου συλλογιστικής μας.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζεται πιο αναλυτικά σχετική βιβλιογραφία στο πεδίο των ασαφών ΠΛ και των επεκτάσεών τους με κανόνες και απτά πεδία, ενώ στο Κεφάλαιο 8 ολοκληρώνεται η διατριβή ανακεφαλαιώνοντας την συνεισφορά μας και παρουσιάζοντας θέματα για πιθανή μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Ασαφής Συνολοθεωρία και Λογική

Σε αυτή την παράγραφο θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε συνοπτικά τις αρχές της ασαφούς συνολοθεωρίας και της ασαφούς λογικής. Μία αναλυτική περιγραφή των αρχών της *ασαφούς συνολοθεωρίας (fuzzy set theory)* δίνεται από τους Klir and Yuan (1995), ενώ η δουλειά του Hájek (1998) έχει σαν επίκεντρο το θεωρητικό υπόβαθρο της *ασαφούς λογικής (fuzzy logic)*.

2.1.1 Ασαφής Συνολοθεωρία

Στην κλασσική συνολοθεωρία, αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο A ορίζεται βάσει του συνόλου αναφοράς Ω, τότε κάθε στοιχείο του Ω είτε ανήκει, είτε δεν ανήκει στο A. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο A περιγράφεται από μία *χαρακτηριστική συνάρτηση* $\chi_{\mathrm{A}} : \Omega \to \{0, 1\}$ η οποία δίνει την τιμή 1 στα στοιχεία του Ω τα οποία ανήκουν στο A και την τιμή 0 στα υπόλοιπα στοιχεία που δεν ανήκουν στο A. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε οι τιμές που δίνονται στα στοιχεία του Ω να εμπίπτουν σε ένα συγκεκριμένο πεδίο τιμών και με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται ο βαθμός συμμετοχής των στοιχείων στο υπό ερώτηση σύνολο. Έτσι μεγάλες τιμές της συνάρτησης αυτής συνεπάγονται και μεγάλη συμμετοχή στο υπό ερώτηση σύνολο. *Μία τέτοια συνάρτηση αποκαλείται* συνάρτηση συμμετοχής *και το σύνολο που ορίζεται από αυτήν αποκαλείται ασαφές σύνολο (fuzzy set).* Το πεδίο τιμών που συνήθως χρησιμοποιείται είναι το διάστημα $[0, 1]$ των πραγματικών αριθμών. Έτσι λοιπόν μία συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου A έχει τη μορφή:

$$\mu_A : \Omega \to [0, 1]$$

και κάθε *ασαφές σύνολο* προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από μία συνάρτηση συμμετοχής.

Παράδειγμα 2.1 *Έστω ότι το σύνολο αναφοράς* $\Omega = \{\text{Κώστας, Νίκος, Γιάννης}\}$ *περιέχει τρία άτομα με αντίστοιχα ύψη* 1.70, 1.79, *και* 1.80 *(m). Αν θέλουμε το σύνολο* Ψ *να είναι το σύνολο των ψηλών ατόμων, στην κλασσική συνολοθεωρία θα πρέπει να βάλουμε ένα όριο το οποίο θα προσδιορίζει ένα ψηλό άτομο. Έτσι, θα πρέπει να πούμε ότι τα άτομα με ύψος κάτω από 1.80 δεν είναι ψηλά, ενώ τα άτομα με ύψος από* 1.80 *και πάνω είναι ψηλά. Συνεπώς έχουμε ότι* $\Psi = \{\text{Γιάννης}\}$*. Όπως βλέπουμε, ένας τέτοιος ορισμός της έννοιας ψηλός δεν είναι ικανοποιητικός μιας και για δύο άτομα που έχουν διαφορά ύψους μόλις ενός πόντου το ένα χαρακτηρίζεται ψηλό και το άλλο όχι. Στην ασαφή συνολοθεωρία το πρόβλημα αυτό δεν υφίσταται αφού μπορούμε να προσδιορίσουμε τον βαθμό στον οποίο ένα άτομο θα είναι ψηλό και να έχουμε* $\mu_\Psi(\text{Κώστας}) = 0.5$, $\mu_\Psi(\text{Νίκος}) = 0.8$, $\mu_\Psi(\text{Γιάννης}) = 0.9$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και τις *ασαφείς σχέσεις (fuzzy relations)*. Στην κλασσική συνολοθεωρία μία σχέση R μεταξύ των συνόλων $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ ορίζεται ως ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. Συνεπώς μπορεί και να αναπαρασταθεί από μία χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_R : \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \to \{0, 1\}$ η οποία θα δώσει την τιμή 1 σε n στοιχεία $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ που σχετίζονται μεταξύ τους και την τιμή 0 σε n στοιχεία που δεν σχετίζονται. Όπως τα ασαφή σύνολα, έτσι και οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να αναπαρασταθούν επιτρέποντας διάφορους βαθμούς πέρα του 0 και του 1. Έτσι, μία ασαφής σχέση είναι ένα ασαφές σύνολο που ορίζεται στο καρτεσιανό γινόμενο των κλασσικών συνόλων $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, όπου μία n-άδα $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ μπορεί να έχει διάφορους βαθμούς σε μία σχέση. Όσο πιο μεγάλος είναι ο βαθμός συμμετοχής n στοιχείων σε μία σχέση, τόσο πιο ισχυρή θα είναι και η σχέση μεταξύ των στοιχείων αυτών.

Παράδειγμα 2.2 *Θεωρώντας το σύνολο* $\Omega = \{\text{Κώστας, Νίκος, Γιάννης}\}$ *θα ορίσουμε τη σχέση φίλος, με σύμβολο* Φ*, στο σύνολο* Ω^2*. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι* $\mu_\Phi(\text{Κώστας, Νίκος}) = 0.6$ *και* $\mu_\Phi(\text{Κώστας, Γιάννης}) = 0.9$*, που σημαίνει ότι ο Κώστας είναι καλύτερος φίλος με τον Γιάννη παρά με τον Νίκο.*

2.1.2 Τελεστές Ασαφούς Συνολοθεωρίας

Οι τρεις πράξεις των κλασσικών συνόλων —το συμπλήρωμα, η τομή και η ένωση— μπορούν να επεκταθούν στα ασαφή σύνολα με περισσότερους του ενός τρόπους. Για κάθε μία από τις τρεις πράξεις υπάρχει μία μεγάλη κλάση συναρτήσεων που μπορούν να θεωρηθούν ως ασαφείς επεκτάσεις των κλασσικών πράξεων. Η επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης εξαρτάται κυρίως από τα χαρακτηριστικά της εφαρμογής που θα χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση αυτή.

Έστω ότι το A είναι ένα ασαφές υποσύνολο του συνόλου αναφοράς Ω. Εξ ορισμού ο βαθμός $\mu_A(x)$ ερμηνεύεται ως ο βαθμός στον οποίο ανήκει το x στο A. Έστω τώρα ότι cA είναι το *ασαφές συμπλήρωμα (fuzzy complement)* του A τύπου c. Τότε ο βαθμός $\mu_{cA}(x)$ μπορεί να ερμηνευτεί όχι μόνο ως ο βαθμός στον οποίο ανήκει το x στο cA, αλλά και ως ο βαθμός στον οποίο το x δεν ανήκει στο A. Το ασαφές συμπλήρωμα cA ορίζεται από μία συνάρτηση

$$c : [0,1] \to [0,1]$$

η οποία αντιστοιχεί μία τιμή $c(\mu_A(x))$ σε κάθε βαθμό συμμετοχής $\mu_A(x)$ για κάθε ασαφές σύνολο A. Η τιμή του $c(\mu_A(x))$ ερμηνεύεται ως η τιμή του $\mu_{cA}(x)$ για κάθε $x \in \Omega$ εξ ορισμού.

Για να θεωρηθεί ως έγκυρο ασαφές συμπλήρωμα, μία συνάρτηση c πρέπει να ικανοποιεί τουλάχιστον τις ακόλουθες αξιωματικές ιδιότητες: (i) $c(0) = 1$ και $c(1) = 0$ (συνθήκη ορίων), (ii) για κάθε $a, b \in [0,1]$, αν $a \leq b$, τότε $c(a) \geq c(b)$ (μονοτονία). Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι επιθυμητές επιπλέον απαιτήσεις για μία συνάρτηση ασαφούς συμπληρώματος όπως: (iii) η c να είναι μία συνεχής συνάρτηση, (iv) η c να είναι ενελικτική, δηλαδή $c(c(a)) = a$ για κάθε $a \in [0,1]$.

Η *τομή δύο ασαφών συνόλων A και B (fuzzy intersection)* ορίζεται από έναν δυαδικό τελεστή στο μοναδιαίο διάστημα, δηλαδή μία συνάρτηση της μορφής:

$$i : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Για κάθε στοιχείο x του συνόλου αναφοράς Ω, η συνάρτηση αυτή παίρνει σαν παράμετρο το ζεύγος των βαθμών συμμετοχής του x στα σύνολα A, B και παράγει το βαθμό συμμετοχής του x στο σύνολο που αποτελεί την τομή του A και του B. Συνεπώς για κάθε $x \in \Omega$:

$$(A \cap B)(x) = i[A(x), B(x)].$$

Για να θεωρηθεί ως έγκυρη ασαφής τομή, μία συνάρτηση i πρέπει να ικανοποιεί κάποιες αξιωματικές ιδιότητες. Όπως προκύπτει τα μέλη της οικογένειας συναρτήσεων των t-νορμών ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες (Klement et al., 2004). Έτσι θεωρούμε τους όρους "t-νόρμα" και "ασαφή τομή" ισοδύναμους. Μία ασαφή τομή i είναι μία δυαδική συνάρτηση στο μοναδιαίο διάστημα που ικανοποιεί όλους τους ακόλουθους περιορισμούς για κάθε $a, b, d \in [0,1]$: (i) $i(a,1) = a$ (συνθήκη ορίων), (ii) το $b \leq d$ συνεπάγεται $i(a,b) \leq i(a,d)$ (μονοτονία), (iii) $i(a,b) = i(b,a)$ (αντιμεταθετικότητα), (iv) $i(a, i(b,d)) \leq i(i(a,b),d)$ (προσεταιριστική ιδιότητα). Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι επιθυμητές επιπλέον απαιτήσεις για μία συνάρτηση ασαφούς τομής όπως: (v) το i να είναι μία συνεχής συνάρτηση, (vi) $i(a,a) < a$ (υπο-ταυτοδυναμία subidempotency), (vii) αν $a_1 < a_2$ και $b_1 < b_2$ τότε $i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$ (γνήσια μονοτονία).

Η *ένωση δύο ασαφών συνόλων A και B (fuzzy union)* ορίζεται από έναν δυαδικό τελεστή στο μοναδιαίο διάστημα, δηλαδή μία συνάρτηση της μορφής:

$$u : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Για κάθε στοιχείο x του συνόλου αναφοράς Ω, η συνάρτηση αυτή παίρνει σαν παράμετρο το ζεύγος των βαθμών συμμετοχής του x στα σύνολα A και B και παράγει το βαθμό συμμετοχής του x στο σύνολο που αποτελεί την ένωση του A και του B. Συνεπώς για κάθε $x \in \Omega$:

$$(A \cup B)(x) = u[A(x), B(x)].$$

Για να θεωρηθεί ως έγκυρη ασαφής ένωση, μία συνάρτηση u πρέπει να ικανοποιεί κάποιες αξιωματικές ιδιότητες. Όπως προκύπτει τα μέλη της οικογένειας συναρτήσεων των t-κονορμών ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες (Klement et al., 2004). Για αυτό θεωρούμε τους όρους "t-κονόρμα" και "ασαφή ένωση" ισοδύναμους. Μία ασαφής ένωση u είναι μία δυαδική συνάρτηση στο μοναδιαίο διάστημα που ικανοποιεί όλους τους ακόλουθους περιορισμούς για κάθε $a, b, d \in [0, 1]$: (i) $u(a, 0) = a$ (συνθήκη ορίων), (ii) το $b \leq d$ συνεπάγεται $u(a, b) \leq u(a, d)$ (μονοτονία), (iii) $u(a, b) = u(b, a)$ (αντιμεταθετικότητα), (iv) $u(a, u(b, d)) \leq u(u(a, b), d)$ (προσεταιριστική ιδιότητα). Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι επιθυμητές επιπλέον απαιτήσεις για μία συνάρτηση ασαφούς ένωσης όπως: (v) η u να είναι μία συνεχής συνάρτηση, (vi) $u(a, a) > a$ (υπερ-ταυτοδυναμία superidempotency), (vii) αν $a_1 < a_2$ και $b_1 < b_2$ τότε $u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$ (γνήσια μονοτονία).

Αρκετά συχνά θα δούμε να χρησιμοποιούνται και οι όροι *supremum* (sup) και infimum (inf) σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών: $R \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε υποσύνολο $R \subseteq \mathbb{R}$, ένας αριθμός $r \in \mathbb{R}$ είναι το supremum του συνόλου R όταν: (i) το r είναι το άνω φράγμα του R, δηλαδή $x \leq r$ για κάθε $x \in R$, (ii) κανένας αριθμός μικρότερος του r δεν είναι άνω φράγμα του R. Αντίστοιχα ένας αριθμός $s \in \mathbb{R}$ είναι το infimum του συνόλου R όταν: (i) το s είναι το κάτω φράγμα του R, δηλαδή $s \leq x$ για κάθε $x \in R$, (ii) κανένας αριθμός μεγαλύτερος του s δεν είναι κάτω φράγμα του R.

Στη συνέχεια ορίζουμε την sup-i *ασαφή σύνθεση (fuzzy composition)* μεταξύ δύο δυαδικών ασαφών σχέσεων. Δοθείσας μίας συγκεκριμένης t-νόρμας i και δύο ασαφών σχέσεων P, Q στο $\Omega_1 \times \Omega_2$ και Q στο $\Omega_2 \times \Omega_3$, η sup-i σύνθεση των P και Q είναι μία ασαφής σχέση $P \circ^i Q$ στο $\Omega_1 \times \Omega_3$ που ορίζεται ως:

$$[P \circ^i Q](x, z) = \sup_{y \in \Omega_2} [P(x, y), Q(y, z)]$$

για κάθε $x \in \Omega_1, y \in \Omega_3$. Όταν το i επιλέγεται να είναι ο τελεστής min, τότε λέμε ότι η σύνθεση $P \circ^{\min} Q$ είναι η στάνταρντ σύνθεση $P \circ Q$.

Τέλος η *ασαφής συνεπαγωγή (*fuzzy implication) ορίζεται ως μία δυαδική συνάρτηση $\mathcal{J} : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$. Μία συνάρτηση για να θεωρηθεί ασαφής συνεπαγωγή πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες μαθηματικές ιδιότητες (Klir and Yuan, 1995). Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν δύο κατηγορίες ασαφούς συνεπαγωγής, αυτές της S-συνεπαγωγής που ορίζονται από τη συνάρτηση $\mathcal{J}(a, b) = u(c(a), b)$, και αυτές της R-συνεπαγωγής που ορίζονται από τη συνάρτηση $\mathcal{J}(a, b) = \sup\{x \mid x \in [0, 1]$ και $t(a, x) \leq b\}$. Στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε κάποιες οικογένειες τελεστών και ασαφών συνεπαγωγών.

Πίνακας 2.1: *Δημοφιλείς οικογένειες ασαφών τελεστών.*

Οικογένεια	Zadeh	Łukasiewicz	Goguen	Gödel
t-νόρμα $i(a,b)$	$\min\{a,b\}$	$\max\{a+b-1,0\}$	$a \cdot b$	$\min\{a,b\}$
t-κονόρμα $u(a,b)$	$\max\{a,b\}$	$\min\{a+b,1\}$	$a+b-a\cdot b$	$\max\{a,b\}$
Άρνηση $c(a)$	$1-a$	$1-a$	$\begin{cases}1, & a=0\\ 0, & a>0\end{cases}$	$\begin{cases}1, & a=0\\ 0, & a>0\end{cases}$
Συνεπαγωγή $\mathcal{J}(a,b)$	$\max\{1-a,b\}$	$\min\{1-a+b,1\}$	$\begin{cases}1, & a\leq b\\ b/a, & a>b\end{cases}$	$\begin{cases}1, & a\leq b\\ b, & a>b\end{cases}$

2.2 Περιγραφικές Λογικές

Οι Περιγραφικές Λογικές (ΠΛ) είναι γλώσσες αναπαράστασης γνώσης με τυπική σύνταξη και σημασιολογία. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των ΠΛ είναι η περιγραφική τους γλώσσα η οποία επιτρέπει στους χρήστες να δημιουργήσουν πολύπλοκες εκφράσεις ξεκινώντας με απλά δομικά στοιχεία όπως είναι οι έννοιες και οι ρόλοι. Αυτές οι εκφράσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο *ορολογικό σώμα (terminological box - TBox)* μίας οντολογίας προκειμένου να περιγραφεί η ορολογία ενός πεδίου ενδιαφέροντος, ορίζοντας έννοιες και περιορίζοντας τις διερμηνείες των εννοιών αυτών. Επιπλέον, στο *σώμα ισχυρισμών (assertional box - ABox)* μίας οντολογίας δηλώνονται γεγονότα, εισάγοντας ονόματα ατόμων και περιγράφοντας τα άτομα αυτά με έννοιες και ρόλους. Ο όρος οντολογία χρησιμοποιείται για να περιγράψει τόσο το ορολογικό, όσο και το σώμα ισχυρισμών που σχετίζεται με ένα πεδίο ενδιαφέροντος. Για παράδειγμα η γνώση ότι "όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί" θα περιγραφεί στο ορολογικό σώμα μίας οντολογίας, ενώ το γεγονός ότι "ο Σωκράτης είναι άνθρωπος" βρίσκεται στο σώμα ισχυρισμών της. Από εκεί και πέρα η *συλλογιστική* μας επιτρέπει να εξαγάγουμε υπονοούμενη γνώση από τη ρητή γνώση που μας έχει δοθεί, εν προκειμένω ότι "ο Σωκράτης είναι θνητός".

Στη συνέχεια περιγράφουμε με τυπικό τρόπο διάφορα χαρακτηριστικά των ΠΛ γλωσσών. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η σύνταξη και η σημασιολογία που παρουσιάζεται στη συνέχεια δεν έχουν σκοπό να περιγράψουν κάποια συγκεκριμένη γλώσσα, αλλά να δώσουν μία γενικότερη εικόνα της σύνταξης και σημασιολογίας των ΠΛ. Η γενική αυτή γλώσσα που περιγράφουμε έχει χαρακτηριστικά από διάφορες γλώσσες όπως οι $\mathcal{ALC}$ (Schmidt-Schaufl and Smolka, 1991), $\mathcal{SHOIN}$ (Baader et al., 2007), και $\mathcal{EL}^{++}$ (Baader et al., 2005) που πιθανόν η συνδυασμένη χρήση τους να οδηγεί ακόμα και σε μη αποφανσιμότητα.

2.2.1 Περιγραφές Εννοιών και Ρόλων

Ξεκινώντας από ένα σύνολο *ονομάτων εννοιών (ατομικές έννοιες, atomic concepts)*, *ονομάτων ρόλων (ατομικοί ρόλοι, atomic roles)*, και *ατόμων (individuals)*, περιγραφές εννοιών δημιουργούνται χρησιμοποιώντας κάποιους κατασκευαστές εννοιών. Η σημασιολογία των κατασκευαστών εννοιών δίνεται βάσει της έννοιας της διερμηνείας η οποία αναθέτει σύνολα στις έννοιες και δυαδικές σχέσεις στους ρόλους. Μία διερμηνεία θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η δημιουργία ενός αφαιρετικού *"κόσμου"* ο οποίος ανταποκρίνεται στους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

Έστω ότι N_C είναι ένα σύνολο ονομάτων εννοιών, N_R είναι ένα σύνολο ονομάτων ρόλων, και N_I ένα σύνολο ατόμων. Τότε κάθε όνομα έννοιας είναι και μία περιγραφή έννοιας. Νέες *περιγραφές εννοιών (concept descriptions)* μπορούν να δοθούν χρησιμοποιώντας τους κατασκευαστές εννοιών βάσει της σύνταξης που περιγράφεται στο άνω μέρος του Πίνακα 2.2 όπου τα C και D είναι περιγραφές εννοιών, το o είναι ένα άτομο του N_I, και ο R είναι ένας ρόλος του N_R. Αντίστοιχα μπορούν να οριστούν *περιγραφές ρόλων (role descriptions)* όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του Πίνακα 2.2, όπου R, R_1, R_2 είναι ρόλοι του N_R.

Η *σημασιολογία (semantics)* των ΠΛ βασίζεται στις διερμηνείες. Μία *διερμηνεία (interpretation)* είναι ένα ζεύγος $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ όπου το πεδίο $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο και $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μία συνάρτηση η οποία αναθέτει σε κάθε έννοια $A \in N_C$ ένα σύνολο $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, σε κάθε ρόλο $r \in N_R$ μία δυαδική σχέση $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$, και σε κάθε $o \in N_I$ ένα στοιχείο $o^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Η διερμηνεία των περιγραφών εννοιών και ρόλων δίνεται στον Πίνακα 2.2. Σημειωτέον ότι ο τελεστής $\sharp$ αν εφαρμοστεί σε ένα σύνολο επιστρέφει τον αριθμό των στοιχείων του.

Παράδειγμα 2.3 *Έτσι με τη βοήθεια των κατασκευαστών εννοιών και ρόλων του Πίνακα 2.2 μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια των ατόμων που είναι άνθρωποι και έχουν γένος αρσενικό, την έννοια των ατόμων που έχουν τουλάχιστον ένα παιδί που είναι αγόρι, την έννοια των ατόμων που έχουν τρία ή περισσότερα παιδιά, ενώ αν ρόλος έχειΠαιδί περιγράφει όλα τα ζεύγη γονέα - παιδιού, ο αντίστροφός του περιγράφει όλα τα ζεύγη παιδιού - γονέα:*

$$\text{Άνθρωπος} \sqcap \text{Αρσενικό}$$
$$\exists \text{έχειΠαιδί}.\text{Αγόρι}$$
$$\forall \text{έχειΠαιδί}.\text{Κορίτσι}$$
$$\geq 3 \text{έχειΠαιδί}$$
$$\text{έχειΠαιδί}^{-1}$$

Πίνακας 2.2: *Σύνταξη και σημασιολογία περιγραφών εννοιών και ρόλων για τις κλασσικές ΠΛ.*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
καθολική έννοια	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
κενή έννοια	$\bot$	$\emptyset$
γενικευμένη άρνηση	$\neg C$	$\Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
ονοματική έννοια	$\{o\}$	$\{o^{\mathcal{I}}\}$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
διάζευξη	$C \sqcup D$	$C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$\{x \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και υπάρχει κάποιο $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ με $\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ και $y \in C^{\mathcal{I}}\}$
περιορισμός τιμών	$\forall R.C$	$\{x \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και για κάθε $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$, $\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{I}}$ συνεπάγεται $y \in C^{\mathcal{I}}\}$
περιορισμός το-λιγότερο	$\geq nR$	$\{x \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $\sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x, y) \geq n\}\}$
περιορισμός το-πολύ	$\leq nR$	$\{x \mid x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $\sharp\{y \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid R^{\mathcal{I}}(x, y) \leq n\}\}$
αντίστροφος ρόλος	R^{-1}	$\{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R^{\mathcal{I}}\}$
σύνθεση ρόλων	$R_1 \circ R_2$	$\{\langle x, z\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R_1^{\mathcal{I}}$ και $\langle y, z\rangle \in R_2^{\mathcal{I}}\}$
σύζευξη ρόλων	$R_1 \sqcap R_2$	$R_1^{\mathcal{I}} \cap R_2^{\mathcal{I}}$

Όπως μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτό, οι περιγραφές εννοιών που προαναφέραμε καλύπτουν μόνο ένα μικρό μέρος του συνόλου των περιγραφών εννοιών που μπορεί να υπάρξουν.

2.2.2 Ορολογικό Σώμα

Όπως ήδη αναφέραμε, το *ορολογικό σώμα* μίας οντολογίας έχει σκοπό να περιγράψει την ορολογία ενός πεδίου εφαρμογής. Στην απλούστερη μορφή του ένα TBox εισάγει νέα ονόματα εννοιών προκειμένου να περιγράψει πολύπλοκες έννοιες:

$$\text{Γυναίκα} \equiv \text{Άνθρωπος} \sqcap \text{Θηλυκό}.$$

Ένας *ορισμός έννοιας (concept definition)* έχει τη μορφή $A \equiv C$ όπου το A είναι μία ατομική έννοια και το C είναι μία περιγραφή έννοιας. Δοθέντος ενός συνόλου $\mathcal{T}$ από ορισμούς εννοιών, λέμε ότι η ατομική έννοια A χρησιμοποιεί άμεσα την ονοματική έννοια B εάν το $\mathcal{T}$ περιέχει έναν ορισμό έννοιας $A \equiv C$ τέτοιον ώστε το B να εμφανίζεται στο C. Εάν θεωρήσουμε τη σχέση "χρησιμοποιεί" ως το μεταβατικό κλείσιμο της σχέσης "χρησιμοποιεί άμεσα", τότε λέμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι κυκλικό όταν υπάρχει μία ατομική έννοια A η οποία χρησιμοποιεί στον ορισμό τον εαυτό της. Διαφορετικά το $\mathcal{T}$ είναι μη κυκλικό. Ένα *ορολογικό σώμα (terminological box - TBox)* $\mathcal{T}$ είναι ένα πεπερασμένο, μη κυκλικό σύνολο από ορισμούς εννοιών τέτοιο ώστε κάθε όνομα έννοιας να εμφανίζεται το πολύ μία φορά στο αριστερό μέρος ενός ορισμού έννοιας. Δοθέντος ενός TBox $\mathcal{T}$, λέμε ότι μία έννοια είναι ορισμένη όταν εμφανίζεται στο αριστερό χέρι ενός ορισμού στο $\mathcal{T}$. Όλες οι άλλες ατομικές έννοιες καλούνται *πρωταρχικές έννοιες.*

Ένα *γενικευμένο αξίωμα υπαγωγής* (general concept inclusion axiom - GCI) έχει τη μορφή $C \sqsubseteq D$ όπου τα C, D είναι περιγραφές εννοιών. Μία υπαγωγή εννοιών της μορφή $C \sqsubseteq D$ χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε το γεγονός ότι η έννοια D είναι υπερέννοια της C (ή διαφορετικά ότι η έννοια D είναι πιο γενική της έννοιας C). Ένα πεπερασμένο σύνολο από GCIs καλείται *γενικευμένο ορολογικό σώμα (general TBox).*

Ένα *αξίωμα υπαγωγής ρόλων (role inclusion axiom - RI)* έχει τη μορφή $R_1 \sqsubseteq R_2$ όπου τα R_1, R_2 είναι περιγραφές ρόλων. Αντίστοιχα με τις υπαγωγές εννοιών, μία υπαγωγή ρόλων της μορφής $R_1 \sqsubseteq R_2$ χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε το γεγονός ότι ο ρόλος R_2 είναι υπερρόλος του R_1. Όταν η γνώση περιέχει και αξιώματα υπαγωγής ρόλων τότε αντί για τον όρο ορολογικό σώμα χρησιμοποιείται ο όρος *σώμα περιορισμών (constraint box - CBox).*

Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι το *μοντέλο* ενός TBox $\mathcal{T}$ όταν ικανοποιεί όλους τους ορισμούς σε αυτό, δηλαδή όταν ισχύει $A^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}}$ για κάθε $A \equiv C$ στο $\mathcal{T}$. Αντίστοιχα, είναι μοντέλο ενός γενικευμένου TBox $\mathcal{T}$ εάν ικανοποιεί όλα τα GCIs σε αυτό, δηλαδή όταν ισχύει $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ για κάθε GCI $C \sqsubseteq D$ στο $\mathcal{T}$. Προφανώς ο ορισμός της έννοιας $A \equiv C$ είναι ισοδύναμος με ένα ζεύγος γενικευμένων αξιωμάτων υπαγωγής $A \sqsubseteq C$, $C \sqsubseteq A$, το οποίο σημαίνει ότι ένα TBox μπορεί να εκφραστεί και από ένα γενικευμένο TBox (ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει). Ένα αξίωμα υπαγωγής ρόλων $R_1 \sqsubseteq R_2$ ικανοποιείται από μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ όταν $R_1^{\mathcal{I}} \subseteq R_2^{\mathcal{I}}$. Μία διερμηνεία που ικανοποιεί όλα τα αξιώματα υπαγωγής εννοιών και ρόλων σε ένα CBox $\mathcal{C}$ αποκαλείται μοντέλο του $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 2.4 *Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς εννοιών και τα γενικευμένα αξιώματα υπαγωγής μπορούμε να δηλώσουμε ότι: άντρας είναι ένας άνθρωπος γένους αρσενικού, πολύτεκνος είναι ο άνθρωπος ο οποίος έχει τρία ή περισσότερα παιδιά, κάθε άνθρωπος είναι θνητός, και τέλος ότι κάθε γονέας έχει συγγένεια με τα παιδιά του:*

$$
\begin{aligned}
\text{Άντρας} &\equiv \text{Άνθρωπος} \sqcap \text{Αρσενικό} \\
\text{Πολύτεκνος} &\equiv \text{Άνθρωπος} \sqcap \geq 3\text{έχειΠαιδί} \\
\text{Άνθρωπος} &\sqsubseteq \text{Θνητός} \\
\text{έχειΠαιδί} &\sqsubseteq \text{έχειΣυγγένεια}
\end{aligned}
$$

2.2.3 Σώμα Ισχυρισμών

Το *σώμα ισχυρισμών* χρησιμοποιείται προκειμένου να εκφραστούν γεγονότα για τα άτομα του κόσμου μας, δηλαδή για τα στοιχεία του N_I. Έστω ότι C είναι μία περιγραφή έννοιας, R μία περιγραφή ρόλου, και $a, b \in N_I$. Ένας ισχυρισμός έχει τη μορφή $C(a)$ ισχυρισμός έννοιας (concept assertion), ή τη μορφή $R(a, b)$ ισχυρισμός ρόλου (role assertion). Ένα σώμα ισχυρισμών (assertional box - ABox) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ισχυρισμών. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο ενός ABox $\mathcal{A}$ όταν ικανοποιεί όλους τους ισχυρισμούς σε αυτό, δηλαδή ισχύει $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ για κάθε ισχυρισμό $C(a) \in \mathcal{A}$ και $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ για κάθε ισχυρισμό ρόλων $R(a, b) \in \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 2.5 *Στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να έχουμε τους ισχυρισμούς ότι ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, ότι ο Γιάννης είναι πολύτεκνος, και ότι ο Γιάννης έχει παιδί τη Μαρία:*

$$\text{Άνθρωπος(Σωκράτης)}$$
$$\text{Πολύτεκνος(Γιάννης)}$$
$$\text{έχειΠαιδί(Γιάννης,Μαρία)}$$

2.2.4 Προβλήματα Συλλογιστικής

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια από τα πιο δημοφιλή προβλήματα συλλογιστικής που εμφανίζονται στις ΠΛ. Έστω ότι το $\mathcal{T}$ είναι ένα γενικευμένο TBox, το $\mathcal{A}$ ένα ABox, τα C, D περιγραφές εννοιών, και το a ένα άτομο. Τότε ορίζονται τα ακόλουθα προβλήματα συλλογιστικής:

- Υπαγωγή Εννοιών (Concept Subsumption): Το C υπάγεται από το D ως προς το $\mathcal{T}$ ($C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$) όταν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$.

- Ισοδυναμία Εννοιών (Concept Equivalence): Το C είναι ισοδύναμο του D ως προς το $\mathcal{T}$ ($C \equiv_{\mathcal{T}} D$) όταν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$.

- Ικανοποιησιμότητα Έννοιας (Concept Satisfiability): Το C είναι ικανοποιήσιμο ως προς το $\mathcal{T}$ όταν $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ για κάποιο μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{T}$.

- Συνέπεια Σώματος Ισχυρισμών (ABox Consistency): Το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές ως προς το $\mathcal{T}$ όταν έχει ένα μοντέλο που είναι και μοντέλο του $\mathcal{T}$.

- Στιγμιότυπο Έννοιας (Concept Instance): Το a είναι στιγμιότυπο της έννοιας C ως προς το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$, $\mathcal{A} \models_{\mathcal{T}} C(a)$, όταν $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$ για όλα τα μοντέλα $\mathcal{I}$ του $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$.

2.2.5 Horn Κανόνες στις Περιγραφικές Λογικές

Σε ορισμένες περιπτώσεις υπάρχει η απαίτηση να επεκτείνουμε τη σύνταξη και σημασιολογία των ΠΛ με εκφραστικά μέσα όπως είναι οι Horn κανόνες που συναντάμε στον λογικό προγραμματισμό.

Ο *οπλισμός (signature)* μίας γλώσσας Horn κανόνων αποτελείται από *κατηγορήματα (predicates)* και *συναρτήσεις (functions)* που έχουν έναν μη αρνητικό *βαθμό (arity)*. Οι συναρτήσεις με βαθμό μηδέν ονομάζονται *σταθερές (constants)*, ενώ ένας Horn κανόνας είναι *ελεύθερος συναρτήσεων (function free)* όταν περιέχει μόνο σταθερές συναρτήσεις. Ένας *όρος (term)* ορίζεται επαγωγικά ως εξής: (i) κάθε μεταβλητή x και κάθε σταθερά c είναι ένας όρος, (ii) εάν η f είναι μία συνάρτηση n ορισμάτων και οι $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε και ο $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος. Ένας όρος είναι *βασικός (ground)* όταν δεν υπάρχει κάποια μεταβλητή σε αυτόν. Ένα *άτομο κανόνα (atom)* είναι ένας *τύπος (formula)* $p(t_1, \ldots, t_n)$ όπου το p είναι ένα κατηγόρημα βαθμού n και κάθε t_i είναι ένας όρος[1]. Ένα άτομο είναι βασικό όταν όλοι οι όροι t_i σε αυτό είναι βασικοί.

Ένας *Horn κανόνας (Horn rule)* έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_1(t_{1,1}, \ldots, t_{1,n_1}), \ldots p_m(t_{m,1}, \ldots, t_{m,n_m}) \rightarrow p_0(t_{0,1}, \ldots, t_{0,n_0}) \tag{2.1}$$

όπου κάθε $p_i(t_{i,1}, \ldots, t_{i,n_i})$ είναι ένα άτομο κανόνα. Το αριστερό μέλος ενός Horn κανόνα καλείται το σώμα του και το δεξί η κεφαλή του. Ένας κανόνας της μορφής $\rightarrow p_0(t_{0,1}, \ldots, t_{0,n_0})$ καλείται γεγονός (fact), ενώ εάν το $p_0(t_{0,1}, \ldots, t_{0,n_0})$ είναι ένα βασικό άτομο, τότε ο κανόνας καλείται βασικό γεγονός (ground fact).

Η σημασιολογία των Horn κανόνων σε ένα περιβάλλον ΠΛ δίνεται βάσει μίας διερμηνείας $\mathcal{I}$. Ομοίως με πριν, μία *διερμηνεία* είναι ένα ζεύγος $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ όπου το πεδίο $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο και η συνάρτηση διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ απεικονίζει:

- κάθε συνάρτηση f βαθμού n σε μία συνάρτηση $f^{\mathcal{I}} : (\Delta^{\mathcal{I}})^n \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$,
- κάθε κατηγόρημα p βαθμού n σε ένα υποσύνολο $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$.

Για να ολοκληρωθεί η σημασιολογία των Horn κανόνων πρέπει να οριστεί και μία απεικόνιση Z από τις μεταβλητές $\mathbf{V}$ που υπάρχουν σε αυτούς, στο σύνολο $\Delta^{\mathcal{I}}$, $Z : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$. Βάσει της συνάρτησης διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ και της απεικόνισης Z ορίζουμε την απεικόνιση $\cdot^{\mathcal{I},Z}$ ως εξής: κάθε σταθερά c απεικονίζεται από την $\cdot^{\mathcal{I},Z}$ στο στοιχείο $c^{\mathcal{I}}$, κάθε μεταβλητή x στο στοιχείο $Z(x)$, κάθε όρος $f(t_1, \ldots, t_n)$ θα απεικονιστεί από την $\cdot^{\mathcal{I},Z}$ στο στοιχείο $f^{\mathcal{I}}({t_1}^{\mathcal{I},Z}, \ldots, {t_n}^{\mathcal{I},Z})$. Έτσι λοιπόν ο Horn κανόνας της Εξίσωσης 2.1 ικανοποιείται από την διερμηνεία $\mathcal{I}$ όταν για όλες τις δυνατές απεικονίσεις

[1]Λόγω ονοματοδοσίας, δεν θα πρέπει να συγχέουμε τα άτομα κανόνων, δηλαδή τύπους της μορφής $p(t_1, \ldots, t_n)$, με τα άτομα (individuals) που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.2.1 και ανήκουν στο σύνολο N_I.

Z: εάν ισχύει ότι $t_{i,1}^{\mathcal{I},Z}, \ldots, t_{i,n_i}^{\mathcal{I},Z} \in p_i^{\mathcal{I}}$ για όλα τα i στο $1, \ldots, m$ τότε θα ισχύει και $t_{0,1}^{\mathcal{I},Z}, \ldots, t_{0,n_0}^{\mathcal{I},Z} \in p_0^{\mathcal{I}}$.

Παράδειγμα 2.6 *Αν για παράδειγμα έχουμε τις σταθερές Γιάννης, ροκφόρ, τα μοναδιαία κατηγορήματα αλλεργικόςΣεΓάλα, γαλακτοκομικόΠροϊόν, τυρί, και το δυαδικό κατηγόρημα αλλεργικόςΣε, μπορούμε να περιγράψουμε την ακόλουθη γνώση:*

$$\begin{array}{rcl} \textit{αλλεργικόςΣεΓάλα}(x), & & \\ \textit{γαλακτοκομικόΠροϊόν}(y) & \rightarrow & \textit{αλλεργικόςΣε}(x, y) \\ \textit{τυρί}(x) & \rightarrow & \textit{γαλακτοκομικόΠροϊόν}(x) \\ & \rightarrow & \textit{αλλεργικόςΣεΓάλα}(\textit{Γιάννης}) \\ & \rightarrow & \textit{τυρί}(\textit{ροκφόρ}). \end{array}$$

Η γνώση αυτή μας λέει ότι όποιος είναι αλλεργικός στο γάλα είναι αλλεργικός και στα γαλακτοκομικά προϊόντα, ότι κάτι που είναι τυρί είναι και γαλακτοκομικό προϊόν, ότι ό Γιάννης είναι αλλεργικός στο γάλα, και τέλος ότι το ροκφόρ είναι τυρί. Βάσει της υφιστάμενης γνώσης και της σημασιολογίας που παρουσιάσαμε, μπορεί να προκύψει ότι ο Γιάννης είναι αλλεργικός στο ροκφόρ.

Στην περίπτωση της ενσωμάτωσης Horn κανόνων σε ΠΛ τα μοναδιαία (ή δυαδικά) κατηγορήματα που εμφανίζονται στους Horn κανόνες μπορεί να είναι και περιγραφές εννοιών (ή ρόλοι) της οντολογίας, ενώ αντίστοιχα η σταθερές που εμφανίζονται στους κανόνες μπορεί να είναι άτομα (individuals) του N_I.

2.2.6 Απτά Πεδία στις Περιγραφικές Λογικές

Ένας από τους περιορισμούς των κλασσικών ΠΛ σχετίζεται με τη δυσκολία τους να ενσωματώσουν και να επεξεργαστούν γνώση που αναφέρεται σε συγκεκριμένα πεδία δεδομένων, αποκαλούμενα *απτά πεδία (concrete domains)*, όπως οι αριθμοί και συμβολοσειρές. Πριν παρουσιάσουμε τον τρόπο αλληλεπίδρασης μεταξύ μίας ΠΛ γλώσσας και ενός απτού πεδίου, πρέπει πρώτα να παρουσιάσουμε με τυπικό τρόπο ένα απτό πεδίο.

Ένα *απτό πεδίο (concrete domain)* $\mathcal{D}$ είναι ένα ζεύγος $\langle \Delta^{\mathcal{D}}, \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \rangle$ όπου το πεδίο ορισμού του $\Delta^{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο από απτά αντικείμενα (τιμές) και το $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο *κατηγορημάτων (predicates)*, όπου κάθε $p \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ έχει έναν βαθμό $k > 0$ και η διερμηνεία του είναι ένα υποσύνολο $p^{\mathcal{D}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{D}})^k$.

Παράδειγμα 2.7 *Το απτό πεδίο $\mathcal{N}$ έχει σαν πεδίο ορισμού το σύνολο των μη αρνητικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και το σύνολο των κατηγορημάτων του περιλαμβάνει δυαδικά κατηγορήματα όπως $<, \leq, \geq, >$ και μοναδιαία κατηγορήματα όπως $<_n, \leq_n, \geq_n, >_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα οποία έχουν την προφανή διερμηνεία —π.χ. η διερμηνεία $(>_3)^{\mathcal{D}}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 3—.*

Η ενσωμάτωση ενός απτού πεδίου $\mathcal{D} = \langle \Delta^{\mathcal{D}}, \mathcal{P} \rangle$ σε μία ΠΛ γλώσσα $\mathcal{L}$ επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης ενός συνόλου N_F από *ονόματα χαρακτηριστικών (feature names)*. Τα χαρακτηριστικά χρησιμοποιούνται ως ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των αντικειμένων του κόσμου μας και των τιμών του απτού πεδίου. Έτσι λοιπόν όταν σε μία ΠΛ γλώσσα που έχει επεκταθεί με το απτό πεδίο $\mathcal{N}$ θέλουμε να πούμε ότι *"η εταιρία A έχει ετήσια έσοδα άνω των* $100,000$€*"*, θα πρέπει να εισάγουμε το χαρακτηριστικό *έχειΕτήσιαΈσοδα*. Ενώ τα χαρακτηριστικά χρησιμοποιούνται ως η διεπαφή μεταξύ των αντικειμένων του κόσμου που θέλουμε να περιγράψουμε και ενός απτού πεδίου, τα κατηγορήματα που ανήκουν στο $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ προσδιορίζουν τις δυνατές διερμηνείες των χαρακτηριστικών αυτών. Έτσι για παράδειγμα η $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα παρέχει τον κατασκευαστή έννοιας $p(f_1, \ldots, f_n)$ όπου $p \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ ο οποίος προσδιορίζει τη συσχέτιση μεταξύ των χαρακτηριστικών $f_1, \ldots, f_n$.

Για να δοθεί σημασιολογία στου κατασκευαστές εννοιών που βασίζονται στα απτά πεδία, η συνάρτηση διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ που χρησιμοποιείται σε μία ΠΛ θα πρέπει να επεκταθεί έτσι ώστε να απεικονίζει κάθε χαρακτηριστικό $f \in N_F$ σε μία μερική συνάρτηση $f^{\mathcal{I}}$ από το $\Delta^{\mathcal{I}}$ στο $\Delta^{\mathcal{D}}$. Βάσει της διερμηνείας των χαρακτηριστικών, η διερμηνεία του $p(f_1, \ldots, f_n)$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{I}}(f_1, \ldots, f_n) = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y_1, \ldots, y_n \in \Delta^{\mathcal{D}} \text{ με } & f_i^{\mathcal{I}}(x) = y_i \\ & \text{για } 1 \leq i \leq k \text{ και } (y_1, \ldots, y_k) \in p^{\mathcal{D}_j}\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.8 *Βάσει του κατασκευαστή που προαναφέρθηκε μπορούμε να δημιουργήσουμε τη σύνθετη έννοια όσων (εταιριών ή μη) έχουν ετήσια έσοδα άνω των* $100,000$€*, ενώ μπορούμε να δημιουργήσουμε και τη σύνθετη έννοια όσων έχουν περισσότερα έσοδα από ότι έξοδα:*

$$\begin{gathered} >_{100{,}000€} (\textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}), \\ > (\textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}, \textit{έχειΕτήσιαΈξοδα}). \end{gathered}$$

Αν έχουμε τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ με $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ και η διερμηνεία των χαρακτηριστικών έχειΕτήσιαΈσοδα, έχειΕτήσιαΈξοδα είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}^{\mathcal{I}}(a) &= 80,000€ \\ \textit{έχειΕτήσιαΈξοδα}^{\mathcal{I}}(a) &= 40,000€ \\ \textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}^{\mathcal{I}}(b) &= 140,000€ \end{aligned}$$

τότε βάσει του ορισμού της διερμηνείας του κατασκευαστή απτού πεδίου θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} >^{\mathcal{I}}_{100{,}000€} (\textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}) &= \{b\} \\ >^{\mathcal{I}} (\textit{έχειΕτήσιαΈσοδα}, \textit{έχειΕτήσιαΈξοδα}) &= \{a\}. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι δεν δόθηκε κάποια τιμή για το $\textit{έχειΕτήσιαΈξοδα}^{\mathcal{I}}(b)$ *κάτι το οποίο είναι αποδεκτό αφού είπαμε ότι η διερμηνεία κάθε χαρακτηριστικού είναι μία μερική συνάρτηση από το $\Delta^{\mathcal{I}}$ στο $\Delta^{\mathcal{D}}$.*

Η εκφραστικότητα που μπορεί να προσδοθεί στις ΠΛ μέσω των απτών πεδίων δεν περιορίζεται στους κατασκευαστές που μόλις αναφέραμε. Πολύ πιο εκφραστικοί κατασκευαστές για τις κλασσικές ΠΛ παρουσιάζονται από τον Lutz (2003). Δυστυχώς οι κατασκευαστές αυτοί στις περισσότερες των περιπτώσεων οδηγούν σε μη αποφανσιμότητα της προκύπτουσας γλώσσας. Για αυτόν τον λόγω επιλέγουμε να μην τους αναφέρουμε.

2.3 Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Οι ασαφείς ΠΛ, ως επέκταση των κλασσικών ΠΛ, έχουν παρόμοια σύνταξη και δομή με τις κλασσικές. Το *ορολογικό σώμα* μίας ασαφούς ΠΛ οντολογίας χρησιμοποιείται προκειμένου να περιγραφεί η ορολογία του πεδίου εφαρμογής, ορίζοντας έννοιες και περιορίζοντας τις διερμηνείες των εννοιών αυτών. Αντίστοιχα στο *σώμα ισχυρισμών* μίας ασαφούς ΠΛ οντολογίας δηλώνονται γεγονότα που αφορούν κάποια συγκεκριμένη κατάσταση, εισάγοντας ονόματα ατόμων και συνδέοντας τα άτομα αυτά με έννοιες και ρόλους. Στη συνέχεια περιγράφουμε με τυπικό τρόπο μία ασαφή ΠΛ γλώσσα η οποία συνδυάζει χαρακτηριστικά διαφόρων γλωσσών όπως η ασαφής $\mathcal{SHIN}$ (Stoilos et al., 2007), η ασαφής $\mathcal{SHIF}$ (Straccia, 2005b), και η ασαφής $\mathcal{SROIQ}$ (Bobillo et al., 2007). Η συγκεκριμένη γλώσσα δίνεται ως σημείο αναφοράς προκειμένου να επεξηγηθούν η σύνταξη και η σημασιολογία των ασαφών ΠΛ και ενδεχομένως να μην είναι αποφάνσιμη.

2.3.1 Περιγραφές εννοιών και ρόλων

Στις ασαφείς ΠΛ, ομοίως με τις κλασσικές, ξεκινώντας από ένα σύνολο ονομάτων εννοιών, ονομάτων ρόλων, και ατόμων, μπορούμε να δημιουργήσουμε περιγραφές εννοιών χρησιμοποιώντας κάποιους κατασκευαστές. Η σημασιολογία των κατασκευαστών εννοιών δίνεται βάσει της έννοιας της ασαφούς διερμηνείας η οποία αναθέτει ασαφή σύνολα στις έννοιες και ασαφείς δυαδικές σχέσεις στους ρόλους.

Έστω ότι N_C είναι ένα σύνολο ονομάτων εννοιών, N_R είναι ένα σύνολο ονομάτων ρόλων, και N_I ένα σύνολο ατόμων. Τότε κάθε όνομα έννοιας είναι και μία περιγραφή έννοιας. Νέες περιγραφές εννοιών και ρόλων μπορούν να δοθούν χρησιμοποιώντας την ίδια σύνταξη που παρουσιάστηκε για τις κλασσικές ΠΛ (Πίνακας 2.3).

Η σημασιολογία των ασαφών ΠΛ βασίζεται στις ασαφείς διερμηνείες. Μία ασαφής διερμηνεία $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ αποτελείται από ένα πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$ το οποίο είναι ένα μη κενό σύνολο από αντικείμενα και μία συνάρτηση $\cdot^{\mathcal{I}}$ η οποία απεικονίζει: (i) κάθε $a \in N_I$ σε κάποιο στοιχείο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, (ii) κάθε $A \in N_C$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0, 1]$, (iii) κάθε $R \in N_R$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0, 1]$. Για παράδειγμα, για μία διερμηνεία $\mathcal{I}$, εάν $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τότε $A^{\mathcal{I}}(a)$ είναι ο βαθμός με τον οποίο το αντικείμενο a ανήκει στην ασαφή έννοια A, π.χ.

$A^{\mathcal{I}}(a) = 0.8$. Η διερμηνεία των περιγραφών εννοιών και ρόλων για τις ασαφείς ΠΛ δίνεται στον Πίνακα 2.3 για κάποια $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

Πίνακας 2.3: *Σύνταξη και σημασιολογία περιγραφών εννοιών και ρόλων για τις ασαφείς ΠΛ.*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
καθολική έννοια	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
κενή έννοια	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
γενικευμένη άρνηση	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = 1 - C^{\mathcal{I}}(a)$
ονοματική έννοια	$\{o\}$	$\{o^{\mathcal{I}}\}(a) = \begin{cases} 0 & a = o^{\mathcal{I}} \\ 1 & a \neq o^{\mathcal{I}} \end{cases}$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = \min(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
διάζευξη	$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = \max(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\min(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))\}$
περιορισμός τιμών	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))\}$
περιορισμός το-λιγότερο	$\geq nR$	$(\geq nR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b_1,\ldots,b_n \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min_{i=1}^{n}\{R^{\mathcal{I}}(a,b_i)\}$
περιορισμός το-πολύ	$\leq nR$	$(\leq nR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b_1,\ldots,b_{n+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max_{i=1}^{n+1}\{1 - R^{\mathcal{I}}(a,b_i)\}$
αντίστροφος ρόλος	R^{-1}	$(R^{-1})^{\mathcal{I}}(a,b) = R^{\mathcal{I}}(b,a)$
σύνθεση ρόλων	$R_1 \circ R_2$	$(R_1^{\mathcal{I}} \circ^{\min} R_2^{\mathcal{I}})(a,b)$
σύζευξη ρόλων	$R_1 \sqcap R_2$	$\min(R_1^{\mathcal{I}}(a,b) \sqcap R_2^{\mathcal{I}}(a,b))$

Παράδειγμα 2.9 *Τα παραδείγματα των ασαφών ΠΛ γλωσσών είναι αντίστοιχα με αυτά των κλασσικών, με τη μόνη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση επικεντρωνόμαστε σε ασαφείς έννοιες και ρόλους. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε σύνθετες έννοιες για τα άτομα που είναι κοινωνικά και πνευματώδη, που είναι είτε ευφυή είτε επιμελή, και να δημιουργήσουμε τη σύνθετη έννοια των ατόμων που έχουν περισσότερους από* 10 *φίλους (όπου ο ρόλος έχειΦίλο μπορεί να θεωρηθεί ασαφής).*

$$\text{Κοινωνικός} \sqcap \text{Πνευματώδης}$$
$$\text{Ευφυής} \sqcup \text{Επιμελής}$$
$$\geq 10\text{έχειΦίλο}.$$

2.3.2 Ορολογικό Σώμα

Το ορολογικό σώμα μίας ασαφούς ΠΛ έχει το σκοπό να περιγράψει την ορολογία ενός πεδίου εφαρμογής. Στην απλούστερη μορφή του ένα TBox εισάγει νέα ονόματα εννοιών προκειμένου να περιγράψει πολύπλοκες έννοιες:

$$\text{Ψηλόλιγνος} \equiv \text{Ψηλός} \sqcap \text{Λεπτός}.$$

Ένας ορισμός έννοιας έχει μορφής $A \equiv C$ όπου το A είναι μία ατομική έννοια και το C είναι μία περιγραφή έννοιας. Όπως και για τις κλασσικές ΠΛ ένα TBox $\mathcal{T}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από μη κυκλικούς ορισμούς εννοιών τέτοιο ώστε κάθε όνομα έννοιας εμφανίζεται το πολύ μία φορά στο αριστερό μέρος ενός ορισμού έννοιας. Δοθέντος ενός TBox $\mathcal{T}$, λέμε ότι μία έννοια είναι ορισμένη όταν εμφανίζεται στο αριστερό χέρι ενός ορισμού στο $\mathcal{T}$. Όλες οι άλλες ατομικές έννοιες καλούνται *πρωταρχικές έννοιες*.

Ένα *γενικευμένο αξίωμα υπαγωγής (GCI)* έχει τη μορφή $C \sqsubseteq D$ όπου τα C, D είναι περιγραφές εννοιών. Αντίστοιχα, ένα γενικευμένο *ασαφές* αξίωμα υπαγωγής (ασαφές GCI) έχει τη μορφή $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ όπου τα C, D είναι περιγραφές εννοιών και $d \in [0, 1]$. Ένα πεπερασμένο σύνολο από GCIs (ασαφή ή μη) είναι ένα γενικευμένο TBox. Στο Κεφάλαιο 3 εμφανίζοντα μόνο απλά αξιώματα υπαγωγής εννοιών, ενώ στο Κεφάλαιο 4 εμφανίζονται και ασαφή αξιώματα υπαγωγής.

Ένα αξίωμα υπαγωγής ρόλων (RI) έχει τη μορφή $R_1 \sqsubseteq R_2$ όπου τα R_1, R_2 είναι περιγραφές ρόλων. Όταν η γνώση περιέχει και αξιώματα υπαγωγής ρόλων τότε αντί για τον όρο ορολογικό σώμα χρησιμοποιείται ο όρος *σώμα περιορισμών* (CBox).

Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι το μοντέλο ενός TBox $\mathcal{T}$ όταν ικανοποιεί όλους τους ορισμούς σε αυτό, δηλαδή ισχύει $A^{\mathcal{I}}(x) = C^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε $A \equiv C$ στο $\mathcal{T}$ και $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο ενός γενικευμένου TBox $\mathcal{T}$ εάν ικανοποιεί όλα τα GCIs ασαφή ή μη σε αυτό. Πρέπει δηλαδή να ισχύει $C^{\mathcal{I}}(x) \leq D^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε GCI $C \sqsubseteq D$ στο $\mathcal{T}$ και $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Ενώ ένα ασαφές GCI $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ ικανοποιείται όταν $\mathcal{J}(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x)) \geq d$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Όπου το $\mathcal{J}$ αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση ασαφούς συνεπαγωγής από αυτές που ορίστηκαν στην Παράγραφο 2.1.2. Ένα αξίωμα υπαγωγής ρόλων $R_1 \sqsubseteq R_2$ ικανοποιείται από μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ όταν $R_1^{\mathcal{I}}(x) \leq R_2^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Μία διερμηνεία που ικανοποιεί όλα τα αξιώματα υπαγωγής εννοιών και ρόλων σε ένα CBox $\mathcal{C}$ αποκαλείται μοντέλο του $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 2.10 *Με τα παραπάνω εκφραστικά μέσα μπορούμε να πούμε ότι τα κοινωνικά και πνευματώδη άτομα είναι ευχάριστα στην παρέα, και ότι όποιος μαθητής είναι είτε* *ευφυής είτε επιμελής είναι καλός μαθητής:*

$$\begin{aligned}\text{Κοινωνικός} \sqcap \text{Πνευματώδης} &\sqsubseteq \text{Ευχάριστος}\\ \text{Μαθητής} \sqcap (\text{Ευφυής} \sqcup \text{Επιμελής}) &\sqsubseteq \text{ΚαλόςΜαθητής}\end{aligned}$$

2.3.3 Ασαφές Σώμα Ισχυρισμών

Οι ισχυρισμοί μίας ασαφούς οντολογίας χρησιμοποιούνται προκειμένου να εκφραστούν γεγονότα για τα άτομα του κόσμου μας, δηλαδή για τα στοιχεία του N_I. Έστω ότι C είναι μία περιγραφή έννοιας, R μία περιγραφή ρόλου, και τα a, b άτομα στο N_I. Ένας ισχυρισμός έχει είτε τη μορφή $C(a) \geq d$ οπότε και αποκαλείται ισχυρισμός έννοιας, είτε τη μορφή $R(a, b) \geq d$ οπότε και αποκαλείται ισχυρισμός ρόλου όπου και στις δύο περιπτώσεις $d \in [0, 1]$. Ένα σώμα ισχυρισμών (assertional box - ABox) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ισχυρισμών.

Μία ασαφής διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο ενός ABox $\mathcal{A}$ όταν ικανοποιεί όλους τους ισχυρισμούς σε αυτό, δηλαδή $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq d$ για κάθε ισχυρισμό $C(a) \geq d$ στο $\mathcal{A}$ και $R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \geq d$ για κάθε ισχυρισμό ρόλων $R(a, b) \geq d$ στο $\mathcal{A}$.

Παράδειγμα 2.11 *Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ότι ο Γιάννης είναι κοινωνικός και πνευματώδης με βαθμούς μεγαλύτερο ή ίσους του* 0.8 *και* 0.9 *αντίστοιχα, και ότι ο Κώστας είναι φίλος με τη Μαίρη με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του* 0.8*:*

$$\begin{aligned}\text{Κοινωνικός(Γιάννης)} &\geq 0.8\\ \text{Πνευματώδης(Γιάννης)} &\geq 0.9\\ \text{φίλος(Κώστας,Μαίρη)} &\geq 0.8.\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Ασαφείς ΠΛ με Κανόνες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγραφεί το ασαφές CARIN, μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης η οποία συνδυάζει τις ασαφείς ΠΛ με κανόνες Horn. Το ασαφές CARIN ενσωματώνει τελεστές της ασαφούς λογικής στη γλώσσα του μη αναδρομικού CARIN. Θα παρουσιαστούν τα προβλήματα συλλογιστικής για απαντήσεις σε συζευκτικά ερωτήματα, ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων, και το πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής. Επίσης θα παρουσιαστεί ένας ορθός και πλήρη αλγόριθμος ο οποίος επιτρέπει συλλογιστική στη γλώσσα ΠΛ της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$ που έχει επεκταθεί με μη αναδρομικούς Horn κανόνες. Αυτή η επέκταση είναι πλέον πρακτική σε ρεαλιστικές εφαρμογές οι οποίες χειρίζονται ατελή και ασαφή πληροφορία όπως είναι εφαρμογές επεξεργασίας εικόνας και ιατρικές εφαρμογές.

3.1 Εισαγωγή

Το κύριο χαρακτηριστικό των ΠΛ, δηλαδή η βασισμένη σε κλάσεις αντικειμένων αναπαράσταση γνώσης, θέτει και ένα όριο στην εκφραστική τους δύναμη από τη στιγμή που δεν μπορούν να εκφράσουν πολύπλοκες περιγραφές που σχετίζονται με κατηγορήματα. Εκφραστικές ΠΛ όπως η $\mathcal{SHOIQ}$ δεν έχουν τη δυνατότητα να εκφράσουν ακόμη και την απλή σύνθεση μεταξύ ρόλων [1]. Για αυτό το λόγο, σαν ένα σκαλοπάτι στην ανάπτυξη του Σημασιολογικού Ιστού, η ανάγκη για συστήματα που θα παρέχουν υπηρεσίες συλλογιστικής που θα συνδυάζουν ΠΛ με κανόνες είναι επιτακτική. Μία άμεση επιλογή για την ενσωμάτωση θα ήταν η χρήση γλωσσών κανόνων όπως αυτές που χρησιμοποιούνται στον λογικό προγραμματισμό και στις μη-μονότονες λογικές γλώσσες. Η “αφρόκρεμα” των γλωσσών που συνδυάζουν κανόνες και ΠΛ παρουσιάζεται από τους Antoniou et al. (2006). Γλώσσες όπως η DLP (Grosof et al., 2003), η SWRL (Horrocks and Patel-Schneider, 2004), η $\mathcal{AL}$-log (Donini et al., 1998), η

[1]Πρόσφατα γλώσσες όπως οι $\mathcal{EL}^{++}$ (Baader et al., 2005) και $\mathcal{SROIQ}$ (Horrocks et al., 2006) κινούνται προς αυτήν την κατεύθυνση.

F-logic (Kifer et al., 1995) και το CARIN (Levy and Rousset, 1998) αποτελούν διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα ενσωμάτωσης κανόνων στις ΠΛ. Αυτές οι γλώσσες μπορούν να χωριστούν σε υβριδικές στις οποίες υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των κατηγορημάτων στους κανόνες και του σώματος ΠΛ, και στις ομογενοποιημένες στις οποίες δεν υπάρχει κάποιος τέτοιος διαχωρισμός.

Το CARIN είναι μία τέτοια υβριδική γλώσσα η οποία συνδυάζει την ΠΛ $\mathcal{ALCNR}$ με Horn κανόνες (δύο ορθογώνια υποσύνολα της λογικής πρώτης τάξης). Οι Horn κανόνες είναι μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης που χρησιμοποιείται σε πολλές κατηγορίες προβλημάτων. Το κύριο πλεονέκτημά τους είναι ότι αποτελούν ένα βατό υποσύνολο της λογικής πρώτης τάξης για το οποίο πρακτικοί αλγόριθμοι εξαγωγής συμπερασμάτων έχουν αναπτυχθεί. Συνδυάζοντας την εκφραστική δυνατότητα και των δύο φορμαλισμών και χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο *Υπαρξιακής Λογικής Συνεπαγωγής* η γλώσσας του CARIN: (i) προσφέρει έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο συλλογιστικής για μη αναδρομικές CARIN βάσεις γνώσης, (ii) μπορεί να απαντήσει σε ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων, και (iii) παρέχει ένα αλγόριθμο για την υπαγωγή ερωτημάτων στην γλώσσα $\mathcal{ALCNR}$.

Παρόλο που το CARIN προσφέρει σημαντική εκφραστικότητα προκειμένου να αναπαρασταθεί η γνώση του κόσμου μας, αδυνατεί να περιγράψει εγγενώς ατελή ή ασαφή γνώση. Η ατελής γνώση προκύπτει από την έλλειψη πληροφορίας γύρω από συγκεκριμένα γεγονότα, π.χ. υποθέτουμε ότι μία θολή περιοχή στο φόντο μίας εικόνας είναι ένα λιοντάρι, ενώ η ασάφεια αναφέρεται στην εγγενή αδυναμία να κατηγοριοποιηθεί ένα γεγονός ή μία κατάσταση ενός αντικειμένου, π.χ. ένα μισοάδειο ποτήρι νερού δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε γεμάτο, ούτε άδειο. Προκειμένου να αναπαραστήσουν ασαφή πληροφορία διάφορες γλώσσες όπως οι f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ (Straccia, 2001), f_{KD}-$\mathcal{SI}$ (Stoilos et al., 2005a, 2007), f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$ (Stoilos et al., 2005b), οι οποίες συνδυάζουν τις ΠΛ με ασαφή συνολοθεωρία και λογική έχουν προταθεί. Η κύρια διαφορά μεταξύ των ασαφών ΠΛ και των αντίστοιχων κλασσικών γλωσσών είναι ότι οι έννοιες (και οι ρόλοι) αντιστοιχούν σε ασαφείς σχέσεις ενός (ή δύο) ορισμάτων. Για παράδειγμα εάν η κλασσική έννοια ψηλός χαρακτηρίζει ένα άτομο σαν ψηλό, η ασαφής επέκταση της έννοιας θα το χαρακτηρίσει ψηλό σε κάποιο βαθμό ο οποίος κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 0 και 1.

Βασισμένοι σε αυτές τις ΠΛ προτείνουμε το ασαφές CARIN. Το ασαφές CARIN είναι μία επέκταση του μη αναδρομικού CARIN η οποία επιτρέπει την αναπαράσταση και συλλογιστική με χρήση ασαφούς πληροφορίας. Η ανάγκη ασαφών εκφράσεων σε συστήματα που χρησιμοποιούν ΠΛ με κανόνες είναι προφανής: σε πολυμεσικές και εφαρμογές ανάκτησης δεδομένων (Fagin, 1998; Gong and Liu, 2009) για να παρέχουν βαθμονόμηση, σε γεοχωρικές εφαρμογές (O'Dea et al., 2005) για τη διαχείριση εννοιών όπως "κοντά" και "μακρυά", σε εφαρμογές του Σημασιολογικού Ιστού όπως είναι οι βάσεις γνώσεις επιχειρήσεων (Taha and Elmasri, 2008), καθώς και σε πολλές ακόμα εφαρμογές.

Παράδειγμα 3.1 *Έστω ότι έχουμε μία "αισιόδοξη" εφαρμογή για την αναγνώριση αντικειμένων. Η εφαρμογή αυτή αποτελείται από έναν αλγόριθμο επεξεργασίας εικόνας ο οποίος χωρίζει την εικόνα σε διάφορες περιοχές και εξαγάγει πληροφορία για κάθε μία από τις περιοχές αυτές και μία γλώσσα που συνδυάζει ΠΛ και κανόνες η οποία επεξεργάζεται την πληροφορία αυτή για την εξαγωγή υπονοούμενης γνώσης:*

$$\begin{array}{rcl} (\mathit{ΠράσινουΧρώματος} \sqcup \mathit{ΚίτρινουΧρώματος}) \sqcap \mathit{ΛείαςΥφής} & \sqsubseteq & \mathit{Φύλλα} \\ \mathit{Κορμός}(x) \wedge \mathit{είναιΣυνδεδεμένο}(x,y) \wedge \mathit{Φύλλα}(y) & \Rightarrow & \mathit{Δέντρο}(x,y) \end{array}$$

Σε αυτήν την περίπτωση ένα ΠΛ αξίωμα υπονοεί ότι ένα αντικείμενο (τμήμα της εικόνας) είτε πράσινου είτε κίτρινου χρώματος και κανονικής υφής απεικονίζει φύλλα, ενώ ένας κανόνας υπονοεί ότι το δέντρο είναι ένα αντικείμενο το οποίο αποτελείται από φύλλα και έναν κορμό. Προφανώς ένα αντικείμενο το οποίο περιγράφεται από κάποια άλλη απόχρωση του πρασίνου δεν θα χαρακτηριζόταν ποτέ σαν φύλλα από ένα κλασσικό σύστημα. Εδώ μπαίνουν οι ασαφείς περιγραφικές λογικές οι οποίες επιτρέπουν ισχυρισμούς της μορφής

$$(\mathit{τμήμα}_4 : \mathit{ΠράσινουΧρώματος}) \geq 0.7$$

οι οποίοι υπονοούν ότι κάποιο αντικείμενο μπορεί να είναι πράσινο σε ορισμένο βαθμό. Όπως θα φανεί στη συνέχεια ο βαθμός αυτός έχει σημαντικό ρόλο στη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων.

Παρόλο που έχει γίνει σημαντική δουλειά σχετικά με την ενσωμάτωση της ασαφούς λογικής στις ΠΛ, δεν έχει μελετηθεί επαρκώς το πρόβλημα της ενσωμάτωσης στις ασαφείς ΠΛ εννοιών που προέρχονται από τον Λογικό Προγραμματισμό. Σύμφωνα με τους Franconi and Tessaris (2004), τα συστήματα τα οποία συνδυάζουν ασαφείς ΠΛ με Λογικό Προγραμματισμό μπορούν να χωριστούν σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες: την αποκαλούμενη αξιωματική προσέγγιση, τη DL-log προσέγγιση, και την αυτό-επιστημονική προσέγγιση. Η γλώσσα του ασαφούς CARIN αντιστοιχεί στην πρώτη κατηγορία των αξιωματικών συστημάτων. Άλλα συστήματα τα οποία ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία περιγράφονται από τους Straccia (2006b); Venetis et al. (2007). Μία γλώσσα η οποία επεκτείνει τη DL-log προσέγγιση με ασάφεια περιγράφεται από τον Straccia (2006d), ενώ ο (Lukasiewicz, 2006) παρουσιάζει μία ασαφής επέκταση της αυτό-επιστημονικής προσέγγισης.

Η κύρια συνεισφορά μας μπορεί να περιγραφεί επιγραμματικά ως εξής:

- Παρέχουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία μίας βάσης γνώσης του ασαφούς CARIN. Μία βάση του ασαφούς CARIN αποτελείται από ένα ABox, ένα TBox, και ένα σώμα Horn κανόνων. Η σημασιολογία του ABox και του TBox είναι σε συνέπεια με τη σημασιολογία που παρουσιάζεται από τους Stoilos et al. (2005b) για την f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$ γλώσσα.

- Παρουσιάζουμε το πρόβλημα των συζευκτικών ερωτημάτων (CQ), της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων (UCQ), και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής.

Για αυτά τα προβλήματα παρέχουμε την κατάλληλη σημασιολογία η οποία βασίζεται στις ασαφείς διερμηνείες. Παρόλο που υπάρχει σημαντικός όγκος δουλειάς γύρω από τη γλώσσα της ασαφούς SQL, όπως αυτή των Carrasco et al. (2003), καθώς και στην απάντηση ερωτημάτων στις ασαφείς ΠΛ (Pan et al., 2007a), απ' όσο ξέρουμε δεν έχουν οριστεί κάπου αλλού οι έννοιες του συζευκτικού ερωτήματος, της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων, και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής.

- Δημιουργήσαμε έναν αλγόριθμο ο οποίος απαντά στο πρόβλημα των συζευκτικών ερωτημάτων και της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων για βάσεις γνώσης χωρίς κάποιο σώμα Horn κανόνων. Ο αλγόριθμος αυτός αποδεικνύεται ότι είναι ορθός, πλήρης, και τερματίζεται. Επιπλέον, εισάγουμε μία διαδικασία αναγωγής του προβλήματος υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής στο πρόβλημα της απάντησης σε ένωση συζευκτικών ερωτημάτων.

- Τέλος παρουσιάζουμε έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο αναγωγής του προβλήματος της απάντησης σε ένωση συζευκτικών ερωτημάτων με μία βάση γνώσης η οποία περιέχει Horn κανόνες, στο πρόβλημα απάντησης συζευκτικών ερωτημάτων με μία βάση γνώσης η οποία δεν περιέχει Horn κανόνες.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι δομημένο ως εξής. Η Παράγραφος 3.2 παρουσιάζει την αρχική CARIN γλώσσα η οποία παρουσιάστηκε από τους Levy and Rousset (1998). Στην Παράγραφο 3.3 παρουσιάζουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία του ασαφούς CARIN, δηλαδή τα δομικά του στοιχεία και τους φορμαλισμούς οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Η σημασία των φορμαλισμών αυτών και των δομικών τους στοιχείων μελετάται στην Παράγραφο 3.3 η οποία περιγράφει τη σημασιολογία βάσει μίας ασαφούς διερμηνείας. Στην Παράγραφο 3.3.1 παρουσιάζουμε τα προβλήματα του συζευκτικού ερωτήματος, της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων, και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής, και παρουσιάζουμε τις επεκτάσεις τους για τις ασαφείς ΠΛ. Ένας αλγόριθμος για τον έλεγχο της συνέπειας σε μία $\mathcal{ALCNR}$ βάση γνώσης παρουσιάζεται στην Παράγραφο 3.4 ο οποίος αποτελεί τον θεμελιώδη λίθο για την απάντηση σε μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων και στο πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής επαγωγής, που παρουσιάζονται στην Παράγραφο 3.4.3.

3.2 CARIN

Η γλώσσα του CARIN συνδυάζει την ΠΛ $\mathcal{ALCNR}$ με Horn κανόνες. Τα δομικά στοιχεία του CARIN είναι ονόματα εννοιών, ονόματα ρόλων, άτομα και *απλά κατηγορήματα (ordinary predicates).* Τα άτομα αντανακλούν τα αντικείμενα του πεδίου ενδιαφέροντος, ενώ οι έννοιες και οι ρόλοι αντιστοιχούν σε κατηγορήματα με ένα και δύο ορίσματα που αντικατοπτρίζουν σύνολα ή δυαδικές σχέσεις μεταξύ δύο αντικειμένων του πεδίου ενδιαφέροντος. Τα απλά κατηγορήματα αναφέρονται σε κατηγορήματα με οποιοδήποτε αριθμό ορισμάτων που μπορεί να βρίσκονται είτε στο ABox είτε στο σώμα των Horn κανόνων. Το σύστημα του CARIN μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε σύνθετες έννοιες χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους κατασκευαστές εννοιών:

$$C, D \to A \mid \top \mid \bot \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \neg C \mid \forall R.C \mid \exists R.C \mid \geq nR \mid \leq nR$$

όπου το A αντιστοιχεί στο όνομα μίας έννοιας (πρωταρχική έννοια) , το R στο όνομα ενός ρόλου, $n \in \mathbb{N}$, και οι μεταβλητές C, D αντιστοιχούν σε σύνθετες (περιγραφικές) έννοιες.

Μία CARIN βάση γνώσης K αποτελείται από το σώμα ισχυρισμών (ABox), το σώμα ορολογιών (TBox) και το σώμα των Horn κανόνων. Το ABox αποτελείται από ένα σύνολο ισχυρισμών εννοιών, ρόλων, και απλών κατηγορημάτων της μορφής:

$$C(a),\, R(a, b),\, q(a_1, \ldots, a_k)$$

όπου το q είναι ένα απλό κατηγόρημα, τα $a, b, a_1, \ldots, a_k$ είναι άτομα στη βάση γνώσης K. Το TBox αποτελείται από ένα σύνολο υπαγωγών εννοιών ή ορισμών εννοιών της μορφής

$$C \sqsubseteq D, C \equiv D$$

όπου οι C, D είναι σύνθετες έννοιες. Τέλος το σώμα των κανόνων Horn αποτελείτε από ένα σύνολο Horn κανόνων της μορφής

$$p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$$

όπου τα $p_1, \ldots, p_k$ είναι είτε σύνθετες έννοιες, είτε ρόλοι, είτε απλά κατηγορήματα με τον κατάλληλο αριθμό ορισμάτων.

Η σημασιολογία στη γλώσσα του CARIN δίνεται μέσω διερμηνειών. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ αποτελείται από ένα πεδίο ορισμού και μία συνάρτηση διερμηνείας $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$, όπου το πεδίο ορισμού είναι ένα μη κενό σύνολο από αντικείμενα και η συνάρτηση διερμηνείας απεικονίζει: κάθε άτομο a σε ένα αντικείμενο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, κάθε απλή έννοια A σε ένα υποσύνολο του $\Delta^{\mathcal{I}}$, $\mathrm{A}^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$, κάθε ρόλο R σε μία δυαδική σχέση $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$, και κάθε απλό κατηγόρημα q σε μία n-ορισμάτων σχέση $q^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \ldots \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τους ισχυρισμούς $C(a)$, $R(a, b)$ και $q(a_1, \ldots, a_k)$ εάν $a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$, $\langle a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}} \rangle \in R^{\mathcal{I}}$ και $\langle a_1^{\mathcal{I}}, \ldots, a_k^{\mathcal{I}} \rangle \in q^{\mathcal{I}}$. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τα TBox αξιώματα $C \sqsubseteq D$, $C \equiv D$ ανν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ και $C^{\mathcal{I}} \equiv D^{\mathcal{I}}$. Τέλος οι κανόνες Horn της μορφής $p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$ συνεπάγονται ότι για κάθε απεικόνιση ψ : varsIndivs$(\overline{X}_1 \cup \ldots \cup \overline{X}_k) \to \Delta^{\mathcal{I}}$, εάν ισχύει ότι $\psi(\overline{X}_i) \in p_i^{\mathcal{I}}$, τότε θα ισχύει και ότι $\psi(\overline{Y}) \in q^{\mathcal{I}}$.

3.3 Ασαφές CARIN

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η γλώσσα του μη αναδρομικού ασαφούς *CARIN* είναι μία γλώσσα η οποία συνδυάζει την ασαφή $\mathcal{ALCNR}$ με μη αναδρομικούς Horn κανόνες. Μία ασαφής βάση γνώσης K στο CARIN αποτελείται από τρεις συνιστώσες $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{A} \rangle$: ένα σώμα ΠΛ ορολογίας $\mathcal{T}$ αποκαλούμενο και TBox, ένα σώμα Horn κανόνων $\mathcal{H}$, και το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ αποκαλούμενο και ABox.

Στη σύνταξη και στη σημασιολογία που προτείνουμε η ασάφεια υπάρχει μόνο στο σώμα ισχυρισμών. Για παράδειγμα, μπορούμε να εκφράσουμε ότι ο καιρός είναι συννεφιασμένος με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 0.6, $(weather : cloudy) \geq 0.6$.

Σύνταξη

Τα δομικά στοιχεία του ασαφούς CARIN είναι ένα σύνολο ατόμων N_I, ένα σύνολο ονομάτων εννοιών N_C, ένα σύνολο ονομάτων ρόλων N_R, και ένα σύνολο ονομάτων απλών κατηγορημάτων N_Q. Τα στοιχεία του N_I αντιπροσωπεύουν τα αντικείμενα του κόσμου μας ενώ τα σύνολα N_C και N_R αντιστοιχούν σε μοναδιαία και δυαδικά κατηγορήματα μεταξύ ατόμων του συνόλου N_I. Τέλος τα στοιχεία του N_Q αντιστοιχούν σε σχέσεις, μεταξύ των ατόμων, με οποιοδήποτε αριθμό ορισμάτων.

Το Σώμα Ορολογίας Του Ασαφούς CARIN:

Το σώμα ορολογίας του ασαφούς CARIN $\mathcal{T}$ έχει την ίδια σύνταξη με το αντίστοιχο σώμα ορολογίας του κλασικού CARIN συστήματος. Σύνθετες έννοιες και περιγραφές ρόλων ορίζονται αναδρομικά από ονόματα ρόλων και εννοιών χρησιμοποιώντας τους κατασκευαστές της γλώσσας $\mathcal{ALCNR}$ οι οποίοι περιγράφονται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} C, D &\longrightarrow A \mid \top \mid \bot \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid \neg C \mid \forall R.C \mid \exists R.C \mid \geq m\ R \mid \leq m\ R \\ R &\longrightarrow P \mid P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k \end{aligned}$$

όπου τα C και D είναι σύνθετες περιγραφές εννοιών, το A είναι το όνομα μίας απλής έννοιας, το R είναι ένας σύνθετος ρόλος που προκύπτει από τη σύζευξη πολλών απλών ρόλων, τα $P, P_1, \ldots, P_k$ είναι ονόματα απλών ρόλων στο σύνολο N_R. και το m είναι ένας φυσικός αριθμός. Οι προτάσεις στο σώμα ορολογίας του ασαφούς CARIN είναι υπαγωγές εννοιών. Μία υπαγωγή έννοιας της μορφής:

$$C \sqsubseteq D$$

υπονοεί ότι ο βαθμός συμμετοχής κάθε στοιχείου στην έννοια C είναι μικρότερος ή ίσος του βαθμού συμμετοχής του στην έννοια D.

Horn Κανόνες Στο Ασαφές CARIN:

Το σώμα των Horn κανόνων $\mathcal{H}$ μίας βάσης γνώσης του ασαφούς CARIN K περιέχει ένα σύνολο Horn κανόνων της μορφής:

$$p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$$

όπου τα $\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_k$,$\overline{Y}$ είναι διανύσματα που αποτελούνται από μεταβλητές και άτομα, τα $p_1, \ldots, p_k$ είναι είτε περιγραφείς εννοιών, είτε ονόματα ρόλων, είτε απλά κατηγορήματα, και το q είναι πάντα ένα απλό κατηγόρημα. Το αριστερό μέλος ενός Horn κανόνα καλείται το σώμα του, ενώ το δεξί μέλος καλείται η κεφαλή του.

Προκειμένου να διασφαλίσουμε το ότι η γλώσσα μας θα είναι αποφάνσιμη και συνεπώς θα συνοδεύεται από έναν ορθό, πλήρη, και τερματιζόμενο αλγόριθμο, θα πρέπει να επιβάλουμε ένα σύνολο περιορισμών στην εκφραστικότητα των Horn κανόνων.

- Καταρχήν, τόσο το ασαφές όσο και το κλασσικό CARIN επιβάλλεται να είναι υβριδικές γλώσσες. Μία γλώσσα είναι υβριδική όταν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ της ΠΛ γλώσσας και των Horn κανόνων. Για αυτό τον λόγο τα απλά κατηγορήματα ορίζονται σαν κατηγορήματα με οποιοδήποτε αριθμό ορισμάτων τα οποία επιτρέπονται μονάχα στα σώματα $\mathcal{H}$ και $\mathcal{A}$, και δεν μπορούν να είναι μέρος μίας περιγραφής έννοιας, ακόμα και αν είναι μοναδιαία ή δυαδικά.

- Επιπλέον οι μεταβλητές του $\overline{Y}$ που βρίσκονται στην κεφαλή ενός κανόνα θα πρέπει να υπάρχουν και σε κάποιο από τα $\overline{X}_i$ στο σώμα του κανόνα.

- Τέλος στην εκφραστικότητα του ασαφούς CARIN επιτρέπονται μόνο μη αναδρομικοί κανόνες. Ένα σύνολο κανόνων λέμε ότι είναι αναδρομικό εάν υπάρχει μία κυκλικότητα στην εξάρτηση μεταξύ των απλών κατηγορημάτων, όπου ένα κατηγόρημα q εξαρτάται από ένα κατηγόρημα p όταν το p εμφανίζεται στο σώμα ενός κανόνα του οποίου η κεφαλή είναι το q και η σχέση εξάρτησης είναι μεταβατική.

Οι Levy and Rousset (1998) αποδεικνύουν ότι μία επέκταση της ΠΛ γλώσσας $\mathcal{ALCNR}$ με Horn κανόνες που δεν ικανοποιούν τις προαναφερθείσες συνθήκες είναι μη αποφάνσιμη. Εφόσον οι ασαφείς ΠΛ είναι πιο γενικές από τις αντίστοιχες κλασσικές ΠΛ είναι ασφαλές να συμπεράνουμε ότι η μη αποφανσιμότητα θα ισχύει και στις ασαφείς περιγραφικές λογικές.

Το Σώμα Ισχυρισμών Του Ασαφούς CARIN:

Το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ μίας βάσης γνώσης του ασαφούς CARIN αποτελείται από ένα σύνολο ασαφών ισχυρισμών της μορφής:

$$
\begin{aligned}
(a : C) &\bowtie d \\
(\langle a, b\rangle : P) &\rhd d \\
(\overline{a} : p) &\rhd d
\end{aligned}
$$

όπου το C είναι μία περιγραφή έννοιας, το P είναι το όνομα ενός ρόλου, το p είναι ένα οποιοδήποτε απλό κατηγόρημα, $\rhd \in \{\geq, >\}$, $\bowtie \in \{\geq, >, \leq, <\}$, $d \in [0, 1]$, $a, b \in N_I$, και $\overline{a} \in {N_I}^{\kappa}$ όπου κ είναι ο αριθμός των ορισμάτων του κατηγορήματος p.

Διαισθητικά ένας ισχυρισμός της μορφής (καιρός : συννεφιασμένος) ≥ 0.5 σημαίνει ότι ο καιρός είναι συννεφιασμένος με βαθμό τουλάχιστον ίσο με 0.5. Οι ισχυρισμοί που περιέχουν τα σύμβολα ανισότητας $\geq, >$ αποκαλούνται *θετικοί ισχυρισμοί* και το σύμβολο $\rhd$ αντιστοιχεί είτε στο σύμβολο μεγαλύτερο είτε στο σύμβολο μεγαλύτερο ή ίσο. Αντίστοιχα οι ισχυρισμοί που περιέχουν τα σύμβολα $\leq, <$ αποκαλούνται *αρνητικοί ισχυρισμοί* και το σύμβολο $\lhd$ περιγράφει τις αντίστοιχες ανισότητες. Τέλος το σύμβολο $\bowtie$ χρησιμοποιείται έναντι οποιουδήποτε συμβόλου ανισότητας. Για τα απλά κατηγορήματα χρησιμοποιούμε μόνο θετικούς ισχυρισμούς από τη στιγμή που δεν γίνεται να εκφραστεί η άρνηση σε απλούς Horn κανόνες.

Παράδειγμα 3.2 *Επεκτείνοντας τη γνώση που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 3.1 με ένα ασαφές ABox $\mathcal{A}$, το οποίο αναφέρεται στα τμήματα μίας εικόνας, προκύπτει η βάση γνώσης $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{A}\rangle$:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \{(\text{ΠράσινουΧρώματος} \sqcup \text{ΚίτρινουΧρώματος}) \sqcap \text{ΛείαςΥφής} \sqsubseteq \text{Φύλλα}, \\
&\quad\ \text{ΚαφέΧρώματος} \sqcap \exists \text{είναιΣυνδεδεμένο.Φύλλα} \sqsubseteq \text{Κορμός}\} \\
\mathcal{H} &= \{\text{Κορμός}(x) \wedge \text{είναιΣυνδεδεμένο}(x, y) \wedge \text{Φύλλα}(y) \Rightarrow \text{Δέντρο}(x, y)\} \\
\mathcal{A} &= \{(\text{τμήμα}_1 : \text{ΠράσινουΧρώματος}) \geq 0.3, (\text{τμήμα}_1 : \text{ΛείαςΥφής}) \geq 0.3, \\
&\quad\ \text{είναιΣυνδεδεμένο}(\text{τμήμα}_2, \text{τμήμα}_1) \geq 1, \\
&\quad\ (\text{τμήμα}_2 : \text{ΚαφέΧρώματος}) \geq 0.3\}
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε ότι μία περιοχή της εικόνας χαρακτηρίζεται ως πράσινου χρώματος και λείας υφής με ένα βαθμό τουλάχιστον 0.3, μία περιοχή που χαρακτηρίζεται ως καφέ χρώματος με βαθμό τουλάχιστον 0.3, και οι δύο περιοχές συνδέονται μεταξύ τους.

Σημασιολογία

Η σημασιολογία μίας ασαφούς βάσης γνώσης δίνεται μέσω των ασαφών διερμηνειών οι οποίες χρησιμοποιούν συναρτήσεις συμμετοχής στο διάστημα $[0, 1]$. Μία ασαφής διερμηνεία είναι ένα ζεύγος $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}}\rangle$ όπου το πεδίο ορισμού της διερμηνείας

$\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων και το $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μία *συνάρτηση ασαφούς διερμηνείας* η οποία απεικονίζει:

- Κάθε άτομο $a \in N_I$ σε ένα αντικείμενο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$.
- Κάθε απλή έννοια $A \in N_C$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$.
- Κάθε απλό ρόλο $R \in N_R$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$.
- Κάθε απλό κατηγόρημα $q \in N_Q$ με κ-ορίσματα σε μία συνάρτηση συμμετοχής $q^{\mathcal{I}} : (\Delta^{\mathcal{I}})^{\kappa} \to [0,1]$.
- Και ικανοποιεί τη συνθήκη μοναδικής ονοματοδοσίας, δηλαδή για κάθε δυάδα διαφορετικών ατόμων $a, b \in N_I$, ισχύει ότι $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$.

Η σημασιολογία των περιγραφικών εννοιών και ρόλων δίνεται από τις εξισώσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1 όπου $a, b \in \Delta^{\mathcal{I}}$, C,D είναι περιγραφείς εννοιών, το A είναι το όνομα μίας έννοιας, το R είναι μία σύζευξη ρόλων της μορφής $P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$ και τα $P_1, \ldots, P_k$ είναι ονόματα ρόλων από το σύνολο N_R.

Μοντέλο ενός Σώματος Ορολογίας:

Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα σώμα ορολογίας $\mathcal{T}$ ανν για κάθε αντικείμενο $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και αξίωμα υπαγωγής εννοιών $C \sqsubseteq D$ στο $\mathcal{T}$ ισχύει ότι:

$$C^{\mathcal{I}}(a) \leq D^{\mathcal{I}}(a).$$

Σε αυτήν την περίπτωση η διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{T}$, γεγονός που συμβολίζεται με $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$.

Μοντέλο ενός Σώματος των Horn Κανόνων:

Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί έναν Horn κανόνα $p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$ ανν για κάθε απεικόνιση ψ από τις μεταβλητές και τα άτομα $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k, \overline{Y}$ στα στοιχεία του $\Delta^{\mathcal{I}}$, όπου κάθε άτομα a απεικονίζεται στο $a^{\mathcal{I}}$,

$$\min(p_1^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_1})), \ldots, p_k^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_k}))) \leq q(\psi(\overline{Y}))$$

ισχύει. Το σώμα των Horn κανόνων ικανοποιείται ανν όλοι οι κανόνες σε αυτό ικανοποιούνται. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ που ικανοποιεί ένα σώμα Horn κανόνων $\mathcal{H}$ είναι μοντέλο του και το συμβολίζουμε με $\mathcal{I} \models \mathcal{H}$.

Πίνακας 3.1: *Σημασιολογία ασαφών εννοιών και ρόλων.*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
καθολική έννοια	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
κενή έννοια	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
άρνηση	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = 1 - C^{\mathcal{I}}(a)$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = \min(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
διάζευξη	$C \sqcup D$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = \max(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
περιορισμός τιμής	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\max(1 - R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))\}$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\min(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))\}$
περιορισμός το-λιγότερο	$\geq m\ R$	$(\geq mR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup\limits_{b_1,\cdots,b_m \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min\limits_{i=1}^{m}\{R^{\mathcal{I}}(a,b_i)\}$
περιορισμός το-πολύ	$\leq m\ R$	$(\leq mR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf\limits_{b_1,\cdots,b_{m+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} \max\limits_{i=1}^{m+1}\{1 - R^{\mathcal{I}}(a,b_i)\}$
σύζευξη ρόλων	$P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$	$(P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k)^{\mathcal{I}}(a,b) = \min(P_1^{\mathcal{I}}(a,b), \ldots, P_k^{\mathcal{I}}(a,b))$

Μοντέλο ενός Σώματος Ισχυρισμών:

Μία ασαφής διερμηνεία ικανοποιεί το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ ανν ικανοποιεί κάθε ασαφή ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα *μοντέλο* του $\mathcal{A}$, συμβολιζόμενο με $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$. Αν το $\mathcal{A}$ έχει ένα μοντέλο τότε λέμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές. Δοθείσης μίας ασαφούς διερμηνείας $\mathcal{I}$ λέμε ότι:

- η διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό $(a : C) \bowtie n$ όταν $C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \bowtie n$,
- η διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό $(\langle a, b\rangle : P) \rhd n$ όταν $P^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \rhd n$,
- η διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό $(\langle a_1, \ldots, a_k\rangle \ : \ q) \rhd n$ όταν $q^{\mathcal{I}}(a_1^{\mathcal{I}}, \ldots, a_k^{\mathcal{I}}) \rhd n$.

Μοντέλο μίας Βάσης Γνώσης:

Ένα ασαφές ABox $\mathcal{A}$ είναι συνεπές ως προς ένα TBox $\mathcal{T}$ και ένα σώμα ισχυρισμών $\mathcal{H}$ όταν έχει ένα μοντέλο $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ το οποίο ικανοποιεί κάθε υπαγωγή εννοιών και ρόλων στο $\mathcal{T}$, καθώς και κάθε Horn κανόνα στο $\mathcal{H}$. Μία ασαφής βάση γνώσης $K = \langle \mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{H} \rangle$ είναι ικανοποιήσιμη όταν υπάρχει ένα τέτοιο μοντέλο $\mathcal{I}$ το οποίο καλείται και μοντέλο της βάσης γνώσης K συμβολιζόμενο με $\mathcal{I} \models K$.

Κανονικοποίηση Σώματος Ισχυρισμών:

Προτού εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο ασαφούς συμπερασματολογίας για τη γλώσσα μας, θεωρούμε ότι κάθε ισχυρισμός έννοιας είναι στη *θετικής ανισότητας κανονική μορφή*, *κανονική μορφή άρνησης*, και *κανονικοποιημένη μορφή*. Συγκεκριμένα, στη γνώση μας θα επιτρέπονται μόνο ισχυρισμοί ρόλων της μορφής $(\langle a, b \rangle : P) \geq n$, ισχυρισμοί απλών κατηγορημάτων της μορφής $(\overline{a} : p) \geq n$, και ισχυρισμοί εννοιών της μορφής $(a : C) \geq n$ όπου το C είναι στην κανονική μορφή άρνησης. Ένα ABox $\mathcal{A}$ του ασαφούς CARIN μπορεί να μετατραπεί στη συγκεκριμένη μορφή στα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1 Οι αρνητικοί ισχυρισμοί μετατρέπονται στη Θετικής Ανισότητας Κανονική Μορφή τους (ΘΑΚΜ) εφαρμόζοντας το ασαφές συμπλήρωμα και στις δύο πλευρές της ανισότητας όπως περιγράφει ο Straccia (2005b). Για παράδειγμα οι ισχυρισμού $(a : C) \leq n$ και $(a : C) < n$ θα μετατραπούν στους ισχυρισμούς $(a : \neg C) \geq 1 - n$ και $(a : \neg C) > 1 - n$.

Βήμα 2 Οι έννοιες μετατρέπονται στην Κανονική Μορφή Άρνησης (ΚΜΑ). Μία περιγραφή έννοιας μετατρέπεται στην ΚΜΑ μορφή της "σπρώχνοντας" τις αρνήσεις στο εσωτερικό της περιγραφής έννοιας χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες ισοδυναμίες μεταξύ σύνθετων περιγραφών εννοιών (Straccia, 2001; Stoilos et al., 2005b):

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\neg(C \sqcup D) & \equiv & (\neg C \sqcap \neg D) & \qquad & \neg(C \sqcap D) & \equiv & (\neg C \sqcup \neg D) \\
\neg\exists R.C & \equiv & \forall R.(\neg C) & & \neg\forall R.C & \equiv & \exists R.(\neg C) \\
\neg \geq m_1 R & \equiv & \leq (m_1 - 1)R & & \neg \leq m_2 R & \equiv & \geq (m_2 + 1)R \\
\neg\neg C & \equiv & C & & & &
\end{array}
$$

όπου $m_1 \in \mathbb{N}^*$ και $m_2 \in \mathbb{N}$ στις παραπάνω ισοδυναμίες. Για παράδειγμα η σύνθετη έννοια $\neg(A \sqcup \exists r.B)$ στην ΚΜΑ μορφή της γίνεται: $\neg A \sqcap \forall r.(\neg B)$.

Βήμα 3 Οι κανονικοποιημένοι ισχυρισμοί είναι ισχυρισμοί στους οποίους το σύμβολο ανισότητας $>$ αντικαθίσταται από το σύμβολο ανισότητας $\geq$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μία θετική, απειροελάχιστα μικρή τιμή ϵ η οποία, από πλευρά της ανάλυσης, τείνει προς το 0^+. Όπως δείχνουν και οι Stoilos et al. (2006) κάθε ισχυρισμός της μορφής $(a : C) > n$ κανονικοποιείται σε έναν ισχυρισμό της μορφής $(a : C) \geq n + \epsilon$. Η ίδια μορφή κανονικοποίησης θα γίνει και για τους ισχυρισμούς ρόλων και απλών κατηγορημάτων. Οι Stoilos et al. (2006) έχουν αποδείξει ότι κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του K είναι επίσης και μοντέλο της κανονικοποιημένης μορφής του K και αντίστροφα.

Τέλος, βάσει του ορισμού των Stoilos et al. (2005b) παρουσιάζουμε την έννοια του αντικρουόμενου ζεύγους ασαφών ισχυρισμών. Δύο ισχυρισμοί είναι αντικρουόμενοι όταν η ταυτόχρονη παρουσία τους σε ένα σώμα ισχυρισμών καθιστά αδύνατη την ύπαρξη μοντέλου. Αν το ϕ αντιστοιχεί σε έναν κλασσικό (μη ασαφή ισχυρισμό) και το $\neg\phi$ στην άρνησή του (π.χ. αν $\phi \equiv a : C$ τότε $\neg\phi \equiv a : \neg C$), ένα ζεύγος ασαφών ισχυρισμών είναι αντικρουόμενο όταν είναι της μορφής $\phi \geq n, \neg\phi \geq m$ όπου $n + m > 1$.

3.3.1 Συζευκτικά Ερωτήματα σε Ασαφείς ΠΛ

Οι πιο συνηθισμένες υπηρεσίες συλλογιστικής (reasoning services) που απαντώνται σε ασαφή συστήματα ΠΛ είναι αυτά της ικανοποιησιμότητας (satisfiability), n-ικανοποιησιμότητας (n-satisfiability), υπαγωγής (subsumption), και λογικής συνεπαγωγής (entailment) (Straccia, 2001). Έχει αποδειχθεί από τους Straccia (2001); Stoilos et al. (2005b) ότι καθένα από αυτά τα προβλήματα μπορεί, σε μία εκφραστική γλώσσα, να αναχθεί στο πρόβλημα της συνέπειας (consistency) μίας βάσης γνώσης.

Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων συμπερασματολογίας, στενά συνδεδεμένη με τις σχεσιακές βάσεις δεδομένων, αποτελείται από το πρόβλημα του συζευκτικού ερωτήματος (conjunctive query), της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων (union of conjunctive queries), και της υπαρξιακής συνεπαγωγής (existential entailment). Παρόλο που έχει γίνει αρκετή δουλειά πάνω σε ασαφείς γλώσσες για βάσεις δεδομένων, όπως η ασαφής SQL (Carrasco et al., 2003), και στα ερωτήματα σε ασαφείς ΠΛ (Straccia, 2006d; Pan et al., 2007a), από όσο ξέρουμε, δεν έχουν ορισθεί και μελετηθεί μέχρι τώρα τα παραπάνω προβλήματα για ασαφείς βάσεις γνώσης. Βασισμένοι στη δουλειά των Ortiz et al. (2006) για τις κλασσικές περιγραφικές λογικές παρουσιάζουμε τον ορισμό των προβλημάτων του συζευκτικού ερωτήματος και της συζευκτικής ένωσης ερωτημάτων για τις ασαφείς ΠΛ.

Ορισμός 3.3 (Συζευκτικό Ερώτημα) *Ένα συζευκτικό ερώτημα (CQ) σε μία βάση γνώσης K είναι μία σύζευξη ατόμων της μορφής:*

$$CQ = p_1(\overline{Y}_1) \rhd d_1 \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{Y}_k) \rhd d_k$$

όπου τα $p_1, \ldots, p_k$ είναι είτε έννοιες (απλές ή σύνθετες), είτε ρόλοι στο σύνολο N_R, είτε απλά κατηγορήματα στο σύνολο N_Q, και τα $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$ είναι διανύσματα από μεταβλητές και άτομα του συνόλου N_I όπου το μέγεθος κάθε $\overline{Y}_i$ είναι ίδιο με τον αριθμό των ορισμάτων του κατηγορήματος p_i για κάθε $1 \leq i \leq k$, και τέλος $d_1, \ldots, d_k \in [0, 1]$.

Όπως και με τους ισχυρισμούς, τα συζευκτικά ερωτήματα μπορούν να μετατραπούν σε μία κανονικοποιημένη μορφή αντικαθιστώντας κάθε $p_i(\overline{Y}_i) > n_i$ στο CQ με $p_i(\overline{Y}_i) \geq n_i + \epsilon$ όπου $\epsilon \to 0^+$.

Ορισμός 3.4 (Ένωση Συζευκτικών Ερωτημάτων) *Μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων (UCQ) σε μία βάση γνώσης K είναι ένα σύνολο από συζευκτικά ερωτήματα:*

$$UCQ = \{CQ_1, \ldots, CQ_\kappa\}$$

όπου κάθε CQ_i για $1 \leq i \leq k$ είναι ένα συζευκτικό ερώτημα.

Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο Q για να περιγράψουμε είτε ένα συζευκτικό ερώτημα CQ είτε μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων UCQ. Η συνάρτηση varsIndivs(Q) μας επιστρέφει το σύνολο των μεταβλητών και ατόμων στο Q, η συνάρτηση vars(Q) μας επιστρέφει το σύνολο μεταβλητών στο Q, και η συνάρτηση indivs(Q) επιστρέφει το σύνολο των ατόμων στο Q. Εκφράσεις της μορφής vars($Q_1, \ldots, Q_l$) θα χρησιμοποιηθούν σαν συντομεύσεις των εκφράσεων vars(Q_1) $\cup \ldots \cup$ vars(Q_l) (το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις varsIndivs, indivs). Με παρεμφερή τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις vars($\overline{Y}$), varsIndivs($\overline{Y}$), indivs($\overline{Y}$) όπου το $\overline{Y}$ είναι ένα διάνυσμα μεταβλητών και ατόμων.

Η σημασιολογία των ερωτημάτων επίσης βασίζεται στις διερμηνείες. Θεωρούμε ότι μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το CQ, δηλαδή $\mathcal{I} \models CQ$, ανν υπάρχει μία απεικόνιση σ : varsIndivs(CQ) $\to \Delta^{\mathcal{I}}$ έτσι ώστε:

$$\begin{array}{rcll} \sigma(a) & = & a^{\mathcal{I}} & \text{για κάθε } a \in \text{indivs}(CQ) \\ p_i^{\mathcal{I}}(\sigma(\overline{Y_i})) & \geq & n & \text{για κάθε } p(\overline{Y_i}) \geq n \text{ in } CQ. \end{array} \tag{3.1}$$

Για μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων $UCQ = \{CQ_1, \ldots, CQ_l\}$, $\mathcal{I} \models UCQ$ ανν $\mathcal{I} \models CQ_i$ για κάποιο $CQ_i \in UCQ$. Για μία βάση γνώσης K και ένα ερώτημα Q λέμε ότι το K συνεπάγεται το Q, που συμβολίζεται με $K \models Q$, ανν $\mathcal{I} \models Q$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του K.

Ορισμός 3.5 (Λογική Συνεπαγωγή Ερωτήματος) *Έστω ότι K είναι μία βάση γνώσης και Q ένα ερώτημα. Το πρόβλημα της λογικής συνεπαγωγής συνίσταται στο να αποφασιστεί εάν $K \models Q$.*

Παράδειγμα 3.6 *Για τη βάση γνώσης του Παραδείγματος 3.2 και την ένωση των συζευκτικών ερωτημάτων:*

$$UCQ \;=\; \{\text{Δέντρο}(x, y) \geq 0.3, \text{Βουνό}(x) \geq 0.4\}$$

θέλουμε να ξέρουμε εάν $KB \models UCQ$, δηλαδή εάν η γνώση μας πάντα συνεπάγεται ότι υπάρχει είτε ένα δέντρο είτε ένα βουνό σε μία εικόνα, με βαθμούς τουλάχιστον 0.3, 0.4 αντίστοιχα.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το πρόβλημα της λογικής συνεπαγωγής ερωτημάτων, σε αντίθεση με την απλή λογική συνεπαγωγή, δεν μπορεί να αναχθεί σε έλεγχο της συνέπειας μίας βάσης γνώσης από τη στιγμή που η άρνηση ενός ερωτήματος δεν μπορεί να εκφραστεί σαν μέρος μίας βάσης γνώσης. Για αυτό το σκοπό ο έλεγχος της συνέπειας δεν αρκεί για να απαντήσουμε σε συζευκτικά ερωτήματα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον ορισμό τη υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής για ασαφείς ΠΛ. Ο ορισμός αυτός είναι προσαρμογή του ορισμού για το κλασσικό σύστημα CARIN (Levy and Rousset, 1998).

Ορισμός 3.7 (Υπαρξιακή Λογική Συνεπαγωγή) *Έστω ότι το $\mathcal{T}$ είναι ένα TBox στην ΠΛ της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$ και τα $\beta, Q_1, \ldots, Q_m$ είναι εκφράσεις της μορφής:*

$$(\exists \overline{Y}) p_1(\overline{Y}_1) \geq d_1 \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{Y}_k) \geq d_k \qquad (3.2)$$

όπου τα $p_1, \ldots, p_k$ είναι είτε ονόματα ρόλων στο N_R είτε περιγραφείς εννοιών, τα $\overline{Y}, \overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k$ είναι διανύσματα από μεταβλητές και άτομα από το N_I έτσι ώστε $\mathrm{vars}(\overline{Y}) \subseteq \mathrm{vars}(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k)$, και $d_1, \ldots, d_k \in [0,1]$.

Οι μεταβλητές οι οποίες εμφανίζονται στο Q ή στο β χωρίς κάποιο υπαρξιακό ποσοδείκτη θεωρούμε ότι είναι καθολικά ποσοτικοποιημένες. Κάθε καθολικά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή που εμφανίζεται σε κάποιο από τα Q_i πρέπει να εμφανίζεται και στο β. Το πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής συνίσταται στο να αποφασιστεί εάν:

$$\langle \beta, \mathcal{T} \rangle \models \{Q_1, \ldots, Q_m\}.$$

Προκειμένου να δοθεί συγκεκριμένη σημασιολογία στο πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής πρέπει πρώτα να ορίσουμε το τι είναι μοντέλο $\mathcal{I}$ για την έκφραση β. Μία ασαφής διερμηνεία $\mathcal{I}$ για το β είναι ένα ζεύγος $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$, όπου το πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη κενό σύνολο από αντικείμενα και η συνάρτηση $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι μια ασαφής συνάρτηση απεικόνισης η οποία απεικονίζει: (i) κάθε όνομα ατόμου $a \in \mathrm{indivs}(\beta)$ σε ένα στοιχείο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, (ii) κάθε όνομα μεταβλητής $x \in \mathrm{vars}(\beta)$ σε ένα στοιχείο $x^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$, (iii) κάθε όνομα έννοιας $A \in \mathbf{C}$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$, (iv) και κάθε όνομα ρόλου $P \in \mathbf{R}$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $P^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$. Η διερμηνεία $\mathcal{I}$ πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη μοναδικής ονοματοδοσίας για άτομα αλλά όχι οπωσδήποτε για μεταβλητές, δηλαδή για κάθε ζεύγος στοιχείων $a, b \in \mathrm{indivs}(\beta)$ πρέπει να ισχύει $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$. Λέμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο του β όταν ισχύει ότι $C^{\mathcal{I}}(\upsilon^{\mathcal{I}}) \geq n$ για κάθε έκφραση $C(\upsilon) \geq n$ στο β και $P^{\mathcal{I}}(\upsilon^{\mathcal{I}}, \omega^{\mathcal{I}}) \geq n$ για κάθε έκφραση $P(\upsilon, \omega) \geq n$ στο β όπου η C είναι μία έννοια, το P είναι το όνομα ενός ρόλου, και $\upsilon, \omega \in \mathrm{varsIndivs}(\beta)$.

Παρατηρούμε ότι το β έχει σημασιολογικές ομοιότητες με ένα ABox $\mathcal{A}$, όπως αυτό ορίστηκε στην Παράγραφο 3.3, με κύρια διαφορά ότι η συνθήκη μοναδικής ονοματολογίας δεν ισχύει για μεταβλητές. Το $\mathcal{I}$ είναι το μοντέλο του β ως προς κάποιο $\mathcal{T}$, δηλαδή $\mathcal{I} \models \langle \beta, \mathcal{T} \rangle$ ανν είναι μοντέλο του β και ικανοποιεί κάθε υπαγωγή εννοιών στο $\mathcal{T}$.

Μία υπαρξιακή λογική συνεπαγωγή της μορφής $\langle\beta,\mathcal{T}\rangle \models \{Q_1,\ldots,Q_m\}$ ικανοποιείται ανν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του β ως προς το $\mathcal{T}$ υπάρχει μία απεικόνιση από τις μεταβλητές και τα άτομα κάποιου ερωτήματος $Q_i \in \{Q_1,\ldots,Q_m\}$ στα στοιχεία του πεδίου ορισμού της διερμηνείας μας $\tau : \text{varsIndivs}(Q_i) \to \Delta^{\mathcal{I}}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\begin{array}{rl} \tau(a) = a^{\mathcal{I}} & \text{για κάθε άτομο στο } a \in \text{indivs}(\beta) \\ \tau(x) = x^{\mathcal{I}} & \text{για κάθε καθολικά ποσοτικοποιημένη} \\ & \text{μεταβλητή } x \in \text{vars}(\beta) \\ p_i^{\mathcal{I}}(\tau(\overline{Y_i})) \geq n_i & \text{για κάθε } i \in 1,\ldots,k. \end{array} \tag{3.3}$$

Μπορεί να ελεγχθεί ότι το πρόβλημα επίλυσης μίας ένωσης συζευκτικών επερωτημάτων χωρίς απλά κατηγορήματα είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής όπου το $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί σε μία β έκφραση χωρίς μεταβλητές. Το γεγονός αυτό υπονοεί ότι όλες οι μεταβλητές σε κάθε ένα από τα Q_i της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής είναι υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες.

Το πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένας ορθός και πλήρης αλγόριθμος για την υπαγωγή ερωτημάτων στη γλώσσα $\mathcal{ALCNR}$ και συνεπώς για την απλοποίηση πολύπλοκων ερωτημάτων επάνω σε ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων. Η εύρεση και αντιμετώπιση πλεονάζουσας πληροφορίας είναι ένα σημαντικό πρόβλημα στη βελτιστοποίηση ερωτημάτων και ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα σε περιοχές όπως οι σχεσιακές βάσεις δεδομένων (Cao and Badia, 2009) και OWL-DL μηχανές συμπερασματολογίας (Jing et al., 2008). Έστω ότι έχουμε μία βάση γνώσης $K = \langle\mathcal{T},\mathcal{A}\rangle$ και θέλουμε να απαντήσουμε στην ένωση συζευκτικών ερωτημάτων $UCQ = \{CQ_1,\ldots,CQ_m\}$. Εάν ισχύει ότι $\langle CQ_1,\mathcal{T}\rangle \models CQ_2$ μπορούμε να μειώσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματός μας σε αυτό της απάντησης της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων $UCQ \setminus CQ_2$.

3.4 Συλλογιστική στο Ασαφές CARIN

Ο κύριος στόχος μας είναι η δημιουργία ενός ορθού και πλήρη αλγορίθμου ο οποίος θα μπορεί να απαντά στα προβλήματα συλλογιστικής που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο αλγόριθμος για το κλασσικό CARIN (Levy and Rousset, 1998) βασίζεται σε συστήματα περιορισμών (constraint systems). Ένα σύστημα περιορισμών αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο περιορισμών της μορφής $s : C$, sPt, $\forall x.x : C$, και $s \neq t$. Εδώ θα δοκιμάσουμε μία διαφορετική προσέγγιση παραθέτοντας έναν αλγόριθμο ο οποίος θα βασίζεται σε δάση ολοκλήρωσης (completion forests). Ένα δάσος ολοκλήρωσης και ένα σύστημα περιορισμών είναι και τα δύο αφαιρετικές αναπαραστάσεις μίας διερμηνείας $\mathcal{I}$ και χρησιμοποιούνται προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός μοντέλου, μίας βάσης γνώσης K. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των αλγορίθμων που βασίζονται σε συστήματα περιορισμών και δάση ολοκλήρωσης. Ο λόγος που επιλέξαμε να βασίσουμε τον αλγόριθμό μας σε δέντρα ολοκλήρωσης είναι η εκμετάλλευση της πλούσιας βιβλιογραφίας (Straccia, 2001; Stoilos et al., 2007) ορθών και πλήρων αλγορίθμων συλλογιστικής για τις ασαφής ΠΛ οι οποίοι βασίζονται σε δέντρα ολοκλήρωσης.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μία βάση γνώσης συνεπάγεται ένα ερώτημα, $K \models Q$, όταν ισχύει ότι $\mathcal{I} \models Q$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του K. Αντί να εξετάσουμε ένα άπειρο αριθμό διερμηνειών $\mathcal{I}$ οι οποίες ικανοποιούν τη βάση γνώσης μας K, επιλέγουμε να εξετάσουμε ένα πεπερασμένο σύνολο από δέντρα ολοκλήρωσης. Ο αλγόριθμος για να απαντάμε στο UCQ πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί σε τρία βήματα.

- Στο πρώτο βήμα δημιουργούμε ένα σύνολο από δέντρα ολοκλήρωσης $\mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ σύμφωνα με τους κανόνες που περιγράφονται στον Πίνακα 3.2 για μία βάση γνώσης $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$, και εφαρμόζοντας τη συνθήκη q-μπλοκαρίσματος (δες τον ορισμό 3.17) για ένα ερώτημα UCQ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.24 κάθε δάσος ολοκλήρωσης ελεύθερο αντιφάσεων (clash free) υπονοεί την ύπαρξη ενός μοντέλου της γνώσης μας και η ύπαρξη ενός μοντέλου της γνώσης μας K υπονοεί την ύπαρξη ενός ελεύθερου από αντιφάσεις δάσους ολοκλήρωσης.

- Στο δεύτερο βήμα καλούμαστε να απαντήσουμε εάν κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ ικανοποιεί την UCQ ερώτησή μας. Αποδεικνύεται ότι αυτή η περίπτωση ισχύει ανν για κάθε δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F} \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ υπάρχει μία απεικόνιση από τις μεταβλητές και τα άτομα από ένα τουλάχιστον $CQ \in UCQ$ στους κόμβους ενός δάσους $\mathcal{F}$ έτσι ώστε κάθε ρόλος και έννοια στους περιορισμούς του CQ να ικανοποιείται στο $\mathcal{F}$. Το πρόβλημα της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής μπορεί εύκολα να αναχθεί στο πρόβλημα απάντησης ερωτημάτων UCQ.

- Στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι οι βάσεις γνώσεις δεν περιέχουν Horn κανόνες και συνεπώς τα ερωτήματα UCQ δεν περιέχουν απλά κατηγορήματα. Εάν τα ερωτήματα UCQ περιέχουν απλά κατηγορήματα, ένα βήμα προεπεξεργασίας εφαρμόζεται έτσι ώστε να αναχθεί το πρόβλημα απάντησης σε ένα ερώτημα UCQ το οποίο θα περιέχει απλά κατηγορήματα σε ένα πρόβλημα ερωτημάτων UCQ χωρίς απλά κατηγορήματα.

Στο κεφάλαιο 3.4.1 παρουσιάζεται μία δομή tableau για τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$ η οποία είναι μία ενδιάμεση μορφή αναπαράστασης μίας ασαφούς διερμηνείας $\mathcal{I}$ και ενός δάσους ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$. Στην παράγραφο 3.4.2 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για τον έλεγχο συνέπειας στην ασαφή $\mathcal{ALCNR}$ ο οποίος βασίζεται στα δέντρα ολοκλήρωσης. Σε αυτές τις βάσεις ένας αλγόριθμος για τα προβλήματα συλλογιστικής που ορίστηκαν στην Παράγραφο 3.3.1 θα προταθεί στην Παράγραφο 3.4.3.

3.4.1 Δομές Tableau για την Ασαφή $\mathcal{ALCNR}$

Οι αλγόριθμοι ασαφούς tableaux ελέγχουν την συνέπεια προσπαθώντας να κατασκευάσουν ένα ασαφές tableau για ένα ABox $\mathcal{A}$ ως προς ένα TBox $\mathcal{T}$, δηλαδή μία αφαιρετική αναπαράσταση ενός μοντέλου της βάσης γνώσης K. Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε το ασαφές tableau για τη γλώσσα $\mathcal{ALCNR}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι οι ισχυρισμοί εννοιών έχουν κανονικοποιηθεί όπως περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.

Ορισμός 3.8 *Εάν το $\mathcal{A}$ είναι ένα ασαφές $\mathcal{ALCNR}$ ABox, N_R είναι το σύνολο των ονομάτων ρόλων που εμφανίζονται στη βάση γνώσης K, N_I είναι το σύνολο των ατόμων στο K και $\mathcal{T}$ είναι ένα TBox, ένα ασαφές tableau T για το $\mathcal{A}$ ως προς το $\mathcal{T}$ ορίζεται ως μία τετράδα $\langle \mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V}\rangle$ έτσι ώστε: (i) το $\mathbf{S}$ είναι ένα σύνολο αντικειμένων, (ii) η $\mathcal{L} : \mathbf{S}\times \mathrm{sub}(K) \to [0,1]$ απεικονίζει κάθε ζεύγος αντικειμένου και κάθε έννοια του $\mathrm{sub}(K)$ στο βαθμό συμμετοχής του αντικειμένου στην έννοια, (iii) η $\mathcal{E} : \mathbf{R}\times\mathbf{S}\times\mathbf{S} \to [0,1]$ απεικονίζει κάθε ρόλο στο N_R και ζεύγος αντικειμένων στο βαθμό συμμετοχής του ζεύγους στο ρόλο, και (iv) η $\mathcal{V} : N_I \to \mathbf{S}$ απεικονίζει τα άτομα του $\mathcal{A}$ σε αντικείμενα του συνόλου $\mathbf{S}$.*

Για κάθε $s,t \in \mathbf{S}$, $C, E \in \mathrm{sub}(K)$, $n \in [0,1]$, $P, P_1, \ldots, P_k \in N_R$, και R μία σύζευξη ρόλων της μορφής $P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$, το tableaux T ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. *$\mathcal{L}(s,\bot) = 0$ και $\mathcal{L}(s,\top) = 1$ για κάθε $s \in \mathbf{S}$,*
2. *Εάν $\mathcal{L}(s,\neg A) \geq d$, τότε $\mathcal{L}(s,A) \leq 1-d$,*
3. *Εάν $\mathcal{L}(s,C\sqcap E) \geq d$, τότε $\mathcal{L}(s,C) \geq d$ και $\mathcal{L}(s,E) \geq d$,*
4. *Εάν $\mathcal{L}(s,C\sqcup E) \geq d$, τότε είτε $\mathcal{L}(s,C) \geq d$ είτε $\mathcal{L}(s,E) \geq d$,*
5. *Εάν $\mathcal{L}(s,\forall R.C) \geq d$ τότε για κάθε $t \in \mathbf{S}$ ισχύει είτε ότι $\mathcal{E}(P_i,\langle s,t\rangle) \leq 1-d$ για κάποιο $i \in \{1,\ldots,k\}$, είτε ότι $\mathcal{L}(t,C) \geq d$,*
6. *Εάν $\mathcal{L}(s,\exists R.C) \geq d$, τότε υπάρχει κάποιο $t \in \mathbf{S}$ έτσι ώστε $\mathcal{E}(P_i,\langle s,t\rangle) \geq d$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$ και $\mathcal{L}(t,C) \geq d$,*
7. *Εάν $\mathcal{L}(s,\geq p\ R) \geq d$, τότε $\sharp R^T(s,\geq,d) \geq p$,*
8. *Εάν $\mathcal{L}(s,\leq p\ R) \geq d$, τότε $\sharp R^T(s,\geq,1-d+\epsilon) \leq p$,*
9. *Εάν $C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$, τότε είτε $\mathcal{L}(s,\neg C) \geq 1-d+\epsilon$, είτε $\mathcal{L}(s,D) \geq d$ για κάθε $s \in \mathbf{S}$ και $d \in [0,1]_{\mathcal{A}}$,*
10. *Εάν $(a : C) \geq d \in \mathcal{A}$, τότε $\mathcal{L}(\mathcal{V}(a),C) \geq d$,*
11. *Εάν $(\langle a,b\rangle : P) \geq d \in \mathcal{A}$, τότε $\mathcal{E}(P,\langle \mathcal{V}(a),\mathcal{V}(b)\rangle) \geq d$,*
12. *Για κάθε $a, b \in N_I$, ισχύει $\mathcal{V}(a) \neq \mathcal{V}(b)$.*

Όπου το $\sharp$ *συμβολίζει τον αριθμό των στοιχείων ενός συνόλου. Για μία σύζευξη ρόλων* $R \to P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$*, το* $R^T(s, \geq, d) = \{t \in \mathbf{S} \mid \mathcal{E}(P_1, \langle s,t\rangle) \geq d, \ldots, \mathcal{E}(P_k, \langle s,t\rangle) \geq d\}$ *είναι το υποσύνολο του* **S** *που περιέχει όλα τα αντικείμενα που συνδέονται από το* s *μέσω όλων των ρόλων* P_i *με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με* d*. Η έκφραση* $\mathrm{sub}(C)$ *χρησιμοποιείται για να περιγράψει το σύνολο όλων των υποεννοιών μίας έννοιας* C *και ομοίως το* $\mathrm{sub}(K)$ *συμβολίζει το σύνολο των υποεννοιών που εμφανίζονται σε μία βάση γνώσης* K*. Με παρόμοιο τρόπο το* $\mathrm{sub}(Q)$ *συμβολίζει το σύνολο των υποεννοιών που εμφανίζονται σε ένα ερώτημα* Q*. Τέλος το* $[0,1]_{\mathcal{A}}$ *είναι το σύνολο των βαθμών που εμφανίζονται στο* $\mathcal{A}$*.*

Λήμμα 3.9 *Ένα ασαφές* $\mathcal{ALCNR}$ *ABox* $\mathcal{A}$ *είναι συνεπές ως προς ένα TBox* $\mathcal{T}$ *ανν υπάρχει ένα ασαφές tableau για το* $\mathcal{A}$ *ως προς το* $\mathcal{T}$*.*

3.4.2 $\mathcal{ALCNR}$ Δάση Ολοκλήρωσης

Τα δάση ολοκλήρωσης που θα περιγραφούν βασίζονται στα συστήματα περιορισμών που πρωτοπαρουσιάστηκαν για το κλασσικό CARIN (Levy and Rousset, 1998). Όπως και στο κλασσικό CARIN η εφαρμογή των κανόνων επέκτασης (expansion rules) για ένα σύστημα περιορισμών μπορεί να οδηγήσει σε έναν άπειρο αριθμό κόμβων εξαιτίας της ύπαρξης κυκλικών υπαγωγών εννοιών. Προκειμένου να διασφαλίσουμε τον τερματισμό των κανόνων επέκτασης, θα πρέπει να υιοθετήσουμε μία συνθήκη μπλοκαρίσματος. Σε αντίθεση με την απλή συνθήκη μπλοκαρίσματος που υιοθετεί η $\mathcal{ALCNR}$ (Baader and Hollunder, 1991), ο αλγόριθμός μας προτείνει τη συνθήκη q-μπλοκαρίσματος που πρωτοπαρουσιάστηκε στο κλασσικό CARIN προκειμένου να χειριστεί με σωστό τρόπο τις ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων. Στις επόμενες παραγράφους ορίζουμε τα δάση ολοκλήρωσης, το q-μπλοκάρισμα και επεξηγούμε σε λεπτομέρεια τους κανόνες επέκτασης.

Ορισμός 3.10 (Δέντρο ολοκλήρωσης) *Ένα δέντρο ολοκλήρωσης (completion tree) για τη γλώσσα του ασαφούς* $\mathcal{ALCNR}$ *είναι ένα δέντρο όλοι οι κόμβοι του οποίου είναι μεταβλητές κόμβοι, εκτός από τον κόμβο ρίζα ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα άτομο της γνώσης μας. Κάθε κόμβος* x *χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο τριάδων της μορφής:*

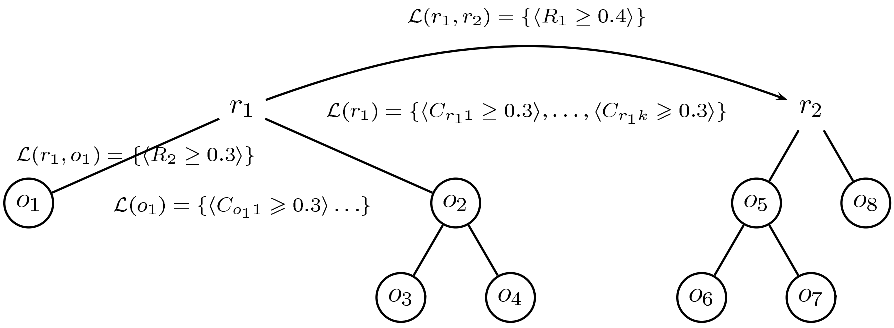
$$\mathcal{L}(x) = \{\langle C, \geq, d\rangle \mid C \in \mathrm{sub}(K), d \in [0,1]\}$$

Κάθε κατευθυνόμενη ακμή (directed edge) χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο τριάδων:

$$\mathcal{L}(x,y) = \{\langle P, \geq, d\rangle \mid P \in N_R, d \in [0,1]\}.$$

Ορισμός 3.11 (Δάσος Ολοκλήρωσης) *Ένα δάσος ολοκλήρωσης (completion forest)* $\mathcal{F}$ *είναι μία συλλογή από δέντρα των οποίων οι ρίζες, που αντιστοιχούν σε άτομα, μπορεί να είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με κατευθυνόμενες ακμές. Όπως και πριν, κάθε ακμή χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο:*

$$\mathcal{L}(x,y) = \{\langle P, \geq, d\rangle \mid P \in N_R, d \in [0,1]\}.$$



Σχήμα 3.1: *Δέντρο ολοκλήρωσης της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$*

Διαισθητικά κάθε τριάδα $\langle C, \geq, d\rangle$ (ή $\langle P, \geq, d\rangle$), αποκαλούμενη και τριάδα συμμετοχής, αναπαριστά το βαθμό συμμετοχής του κόμβου (ή ζεύγους κόμβων) σε μία έννοια $C \in sub(K)$ (ή κάποιον ρόλο $P \in N_R$).

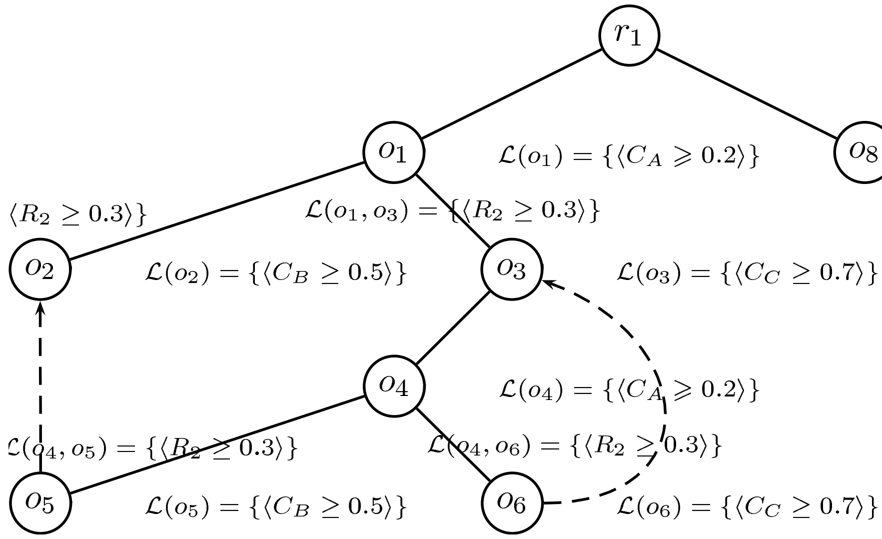
Παράδειγμα 3.12 *Στην Εικόνα 3.1 βλέπουμε ένα Δάσος Ολοκλήρωσης για την ασαφή $\mathcal{ALCNR}$ όπου οι r_1, r_2 είναι κόμβοι ρίζες, ενώ οι $o_1, \ldots, o_8$ είναι κόμβοι μεταβλητές που δημιουργήθηκαν από κάποιους κανόνες δημιουργίας νέων κόμβων. Κάθε κόμβος πρέπει να χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο εννοιών με βαθμούς και κάθε κατευθυνόμενη ακμή πρέπει να χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο ρόλων με βαθμούς. Σε αυτό το παράδειγμα μόνο οι κόμβοι r_1, o_1 και οι ακμές $\langle r_1, o_1\rangle, \langle r_1, r_2\rangle$ χαρακτηρίζονται λόγω περιορισμού χώρου.*

Ορισμός 3.13 (nodes, vars, $R_{\geq d}$-διάδοχος, διάδοχος, απόγονος) *Για ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$: (i) η έκφραση $nodes(\mathcal{F})$ αναπαριστά το σύνολο των κόμβων στο δάσος $\mathcal{F}$, (ii) η έκφραση* vars$(\mathcal{F})$ *αναπαριστά το σύνολο των κόμβων μεταβλητών στο δάσος $\mathcal{F}$, (iii) για τη σύζευξη ρόλων $R \rightarrow P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$, ο κόμβος w είναι* $R_{\geq d}$-διάδοχος ($R_{\geq d}$-successor) του κόμβου v *όταν οι κόμβοι v και w είναι συνδεδεμένοι μέσω μία κατευθυνόμενης ακμής $\langle v, w\rangle$ έτσι ώστε $\langle P_i, \geq, d_i\rangle \in \mathcal{L}(x, y)$ με $d_i \geq d$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$, (iv) ο κόμβος v είναι διάδοχος (*successor*) του κόμβου w όταν ο v είναι $R_{\geq d}$-διάδοχος του w με $d > 0$, (v) απόγονος (descendant) είναι το μεταβατικό κλείσιμο του διάδοχου.*

Να σημειωθεί πως ο ορισμός του $R_{\geq d}$-διάδοχου υπονοεί ότι εάν ο v είναι ένας $R_{\geq d}$-διάδοχος του w τότε είναι επίσης και ένας $R_{\geq d'}$-διάδοχος του w για κάθε $d' < d$.

Παράδειγμα 3.14 *Στην Εικόνα 3.1 ο κόμβος o_1 είναι $R_{2 \geq 0.3}$ διάδοχος του κόμβου r_1.*

Ορισμός 3.15 (q-δέντρων ισοδυναμία) *Το q-δέντρο (q-tree) ενός κόμβου-μεταβλητής v είναι το δέντρο το οποίο περιλαμβάνει τον κόμβο v και τους απογόνους του που έχουν*



Σχήμα 3.2: *Παράδειγμα μπλοκαρίσματος*

απόσταση από το v μέχρι q ακμές βάθος. Το σύνολο των κόμβων στο q-δέντρο του v συμβολίζεται με $V_q(v)$.

Δύο κόμβοι $v, w \in \mathcal{F}$ λέμε ότι είναι q-δέντρο ισοδύναμοι (q-tree equivalent) στο $\mathcal{F}$ εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός ψ:$V_q(v)\to V_q(w)$ έτσι ώστε (i) $\psi(v) = w$, (ii) για κάθε $s \in V_q(v)$ έχουμε ότι $\langle C, \geq, d\rangle \in \mathcal{L}(s)$ ανν $\langle C, \geq, d\rangle \in \mathcal{L}(\psi(s))$ (iii) για κάθε $s, t \in V_q(v)$ έχουμε ότι $\langle P, \geq, d\rangle \in \mathcal{L}(\langle s, t\rangle)$ ανν $\langle P, \geq, d\rangle \in \mathcal{L}(\langle \psi(s), \psi(t)\rangle)$. Διαισθητικά δύο κόμβοι μεταβλητές είναι q-δέντρο ισοδύναμοι αν τα υποδέντρα με βάθος q των οποίων είναι ρίζες είναι ισομορφικά.

Ορισμός 3.16 (q-μάρτυρας) *Ένας κόμβος v είναι ο q*-μάρτυρας (q-witness) ενός κόμβου w *όταν (i) v είναι απόγονος του w, (ii) το v και το w είναι q-δέντρο ισοδύναμα, (iii) $w \notin V_q(v)$.*

Ορισμός 3.17 (q-μπλοκάρισμα) *Ένας κόμβος x είναι q-μπλοκαρισμένος (q-blocked) είτε όταν είναι φύλλο ενός q-δέντρου στο $\mathcal{F}$ του οποίου η ρίζα w έχει έναν q-μάρτυρα v και $w \in \mathrm{vars}(\mathcal{F})$, ή όταν $\mathcal{L}(x) = \emptyset$. Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε μπλοκάρισμα εννοούμε q-μπλοκάρισμα.*

Παράδειγμα 3.18 *Στην Εικόνα 3.2 ο κόμβος o_1 είναι 1-μάρτυρας του κόμβου o_4 επειδή το 1-δέντρο του o_1 είναι ισοδύναμο με το 1-δέντρο του o_4 δηλαδή $\mathcal{L}(o_1) = \mathcal{L}(o_4)$, $\mathcal{L}(o_2) = \mathcal{L}(o_5)$, $\mathcal{L}(o_3) = \mathcal{L}(o_6)$ και $\mathcal{L}(o_1, o_2) = \mathcal{L}(o_4, o_5)$, $\mathcal{L}(o_1, o_3) = \mathcal{L}(o_4, o_6)$. Για αυτόν τον σκοπό ο κόμβος o_5 είναι μπλοκαρισμένος από τον o_2 και ο o_3 είναι μπλοκαρισμένο από τον o_6.*

Ορισμός 3.19 (Δάσος ολοκλήρωσης χωρίς αντιφάσεις) *Για έναν κόμβο x, το $\mathcal{L}(x)$ περιέχει μία αντίφαση (clash) όταν περιέχει: (i) Ένα αντικρουόμενο ζεύγος τριάδων (ένα αντικρουόμενο ζεύγος τριάδων μπορεί να οριστεί κατευθείαν βασισμένο στον ορισμό ενός αντικρουόμενου ζεύγους ασαφών ισχυρισμών όπως αυτός περιγράφηκε στην Παράγραφο 3.3), (ii) μία εκ των τριάδων $\langle \perp, \geq, d \rangle$ με $d > 0$, $\langle C, \geq, d \rangle$ με $d > 1$, (iii) κάποια τριάδα $\langle \leq pR, \geq, d \rangle$ όπου ο κόμβος x έχει $p + 1$ $R_{\geq d}$-διαδόχους $y_0, \ldots, y_p$ έτσι ώστε $y_i \neq y_j$ για κάθε $0 \leq i < j \leq p$.*

Ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ είναι χωρίς αντιφάσεις (clash free completion forest) όταν κανένας από τους κόμβους του δεν περιέχει αντίφαση.

Για ένα $\mathcal{ALCNR}$ ABox $\mathcal{A}$ ο αλγόριθμος αρχικοποιεί ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}_K$ έτσι ώστε να περιέχει (i) ένα κόμβο ρίζα x_0^i, για κάθε άτομο $a_i \in N_I$ στο $\mathcal{A}$, που χαρακτηρίζεται με $\mathcal{L}(x_0^i)$ έτσι ώστε $\{\langle C_i, \geq, d \rangle\} \subseteq \mathcal{L}(x_0^i)$ για κάθε ισχυρισμό του τύπου $(a_i : C_i) \geq d \in \mathcal{A}$, (ii) μία κατευθυνόμενη ακμή $\langle x_0^i, x_0^j \rangle$, για κάθε ισχυρισμό της μορφής $(\langle a_i, a_j \rangle : P) \geq d \in \mathcal{A}$, η οποία θα χαρακτηρίζεται με $\mathcal{L}(\langle x_0^i, x_0^j \rangle)$ έτσι ώστε $\{\langle P, \geq\ d \rangle\} \subseteq \mathcal{L}(\langle x_0^i, x_0^j \rangle)$, (iii) τη σχέση $\neq$ όπως $x_0^i \neq x_0^j$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών ατόμων $a_i, a_j \in N_I$ και τη σχέση $\doteq$ να είναι άδεια. Το $\mathcal{F}_K$ επεκτείνεται με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των κανόνων επέκτασης που περιγράφονται στον Πίνακα 3.2.

Στον Πίνακα 3.2 οι κανόνες $\sqcap_{\geq}$, $\sqcup_{\geq}$, $\exists_{\geq}$, $\forall_{\geq}$ πρωτοχρησιμοποιήθηκαν από τον Straccia (2001) και στη συνέχεια τροποποιήθηκαν για δέντρα ολοκλήρωσης από τους Stoilos et al. (2005a), οι κανόνες $\geq_{\geq}$ και $\leq_{\geq}$ παρουσιάζονται για πρώτη φορά από τους Stoilos et al. (2005b), ενώ ο κανόνας $\sqsubseteq$ προτάθηκε από τους Stoilos et al. (2006). Ο κανόνας $\leq_{r\geq}$ που παρουσιάστηκε από τους Stoilos et al. (2005b) δεν μπορεί να εφαρμοστεί αφού το $a^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$ ισχύει για κάθε ζεύγος ατόμων $a, b \in N_I$.

Πίνακας 3.2: *Tableaux κανόνες επέκτασης για την ασαφή $\mathcal{ALCNR}$.*

Κανόνας			Περιγραφή
$\sqcap_{\geq}$	εάν	1.	$\langle C_1 \sqcap C_2, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$,
		2.	$\{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\} \not\subseteq \mathcal{L}(x)$
	τότε		$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\}$
$\sqcup_{\geq}$	εάν	1.	$\langle C_1 \sqcup C_2, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$,
		2.	$\{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
	τότε		$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{C\}$ για κάποιο $C \in \{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\}$
$\exists_{\geq}$	εάν	1.	$\langle \exists R.C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν μπλοκάρεται,
		2.	ο x δεν έχει $R_{\geq n}$-διάδοχο y με $\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(y)$
	τότε		δημιουργείτε ένας νέος κόμβος y με $\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) = \{\langle P_i, \geq, n\rangle\}$, $\mathcal{L}(y) = \{\langle C, \geq, n\rangle\}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ της σύζευξης ρόλων $R \to P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$
$\forall_{\geq}$	εάν	1.	$\langle \forall R.C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$,
		2.	ο x έχει έναν $R_{\geq n'}$-διάδοχο y με $n' = 1 - n + \epsilon$
	τότε		$\mathcal{L}(y) \to \mathcal{L}(y) \cup \{\langle C, \geq, n\rangle\}$
$\geq_{\geq}$	εάν	1.	$\langle \geq mR, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο x δεν μπλοκάρεται,
		2.	δεν υπάρχουν m $R_{\geq n}$-διάδοχοι $y_1, \ldots, y_m$ του x με $y_i \neq y_j$ για $1 \leq i < j \leq m$
	τότε		δημιουργούνται m νέοι κόμβοι $y_1, \ldots, y_m$, με $\mathcal{L}(\langle x, y_i\rangle) = \{\langle P_{i'}, \geq, n\rangle\}$ και $y_i \neq y_j$ για $1 \leq i < j \leq m$ και για κάθε $i' \in \{1, \ldots, k\}$ για την ένωση ρόλων $R \to P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$
$\leq_{\geq}$	εάν	1.	$\langle \leq mR, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$,
		2.	υπάρχουν περισσότεροι από m $R_{\geq n'}$-διάδοχοι του x με $n' = 1 - n + \epsilon$ και για δύο εξ αυτών y, z δεν ισχύει ότι $y \neq z$,
		3.	ο y δεν είναι κόμβος ρίζα
	τότε	1.	$\mathcal{L}(z) \to \mathcal{L}(z) \cup \mathcal{L}(y)$
		2.	$\mathcal{L}(\langle\langle x, z\rangle) \to \mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \cup \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$
		3.	$\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) \to \emptyset$,
		4.	τίθεται $u \neq z$ για όλα τα u με $u \neq y$
$\sqsubseteq$	εάν	1.	$C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$ και
		2.	$\{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$ για κάποιο $n \in [0, 1]_{\mathcal{A}}$
	τότε		$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{E\}$ για κάποιο $E \in \{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\}$

Υποσημείωση: Το σύμβολο $[0, 1]_{\mathcal{A}}$ περιγράφει το σύνολο το οποίο περιέχει όλους τους βαθμούς που εμφανίζονται στο σώμα ισχυρισμών.

Ορισμός 3.20 (q-ολοκληρωμένο δάσος ολοκλήρωσης) *Έστω ότι $\mathbb{F}_K$ είναι το σύνολο των δασών ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ που προέκυψε μετά την εφαρμογή των κανόνων επέκτασης του Πίνακα 3.2 στο αρχικό δάσος της βάσης γνώσης μας $\mathcal{F}_K$. Ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ είναι q-ολοκληρωμένο όταν κανένας από τους κανόνες του Πίνακα 3.2 μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό αν θεωρήσουμε τη συνθήκη του q-μπλοκαρίσματος. Συμβολίζουμε με $\mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ το σύνολο των δέντρων ολοκλήρωσης στο $\mathbb{F}_K$ που είναι q-ολοκληρωμένα και χωρίς αντιφάσεις.*

Λήμμα 3.21 (Τερματισμός) *Για κάθε ασαφές $\mathcal{ALCNR}$ ABox $\mathcal{A}$ και TBox $\mathcal{T}$, ο αλγόριθμος tableaux τερματίζεται όταν αρχικοποιηθεί για κάποιο $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$.*

Λήμμα 3.22 (Ορθότητα) *Αν οι κανόνες επέκτασης μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα ασαφές $\mathcal{ALCNR}$ ABox $\mathcal{A}$ και TBox $\mathcal{T}$ έτσι ώστε να αποδίδουν ένα ολοκληρωμένο και χωρίς αντιφάσεις δάσος ολοκλήρωσης, τότε το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau ως προς το $\mathcal{T}$.*

Λήμμα 3.23 (Πληρότητα) *Έστω ότι το $\mathcal{A}$ είναι ένα $\mathcal{ALCNR}$ ABox και το $\mathcal{T}$ ένα TBox. Εάν το $\mathcal{A}$ έχει ένα ασαφές tableau ως προς το $\mathcal{T}$, τότε οι κανόνες επέκτασης μπορούν να εφαρμοστούν στο $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε ο αλγόριθμος tableau να παράγει ένα πλήρες δάσος ολοκλήρωσης χωρίς αντιφάσεις.*

Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.9, 3.22 και 3.23, έχουμε ότι:

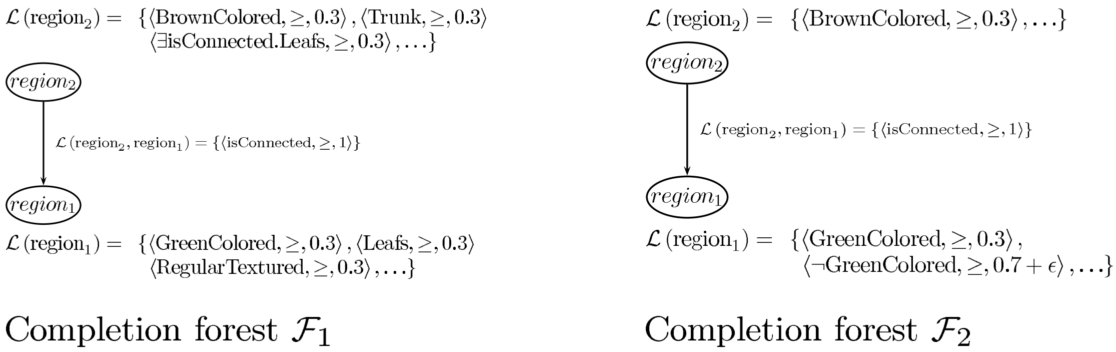
Θεώρημα 3.24 *Κάθε δάσος ολοκλήρωσης χωρίς αντιφάσεις $\mathcal{F} \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ αντιστοιχεί σε ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του K και αντίστροφα.*

Παράδειγμα 3.25 *Για την ΠΛ γνώση που περιγράφεται στο Παράδειγμα 3.2 δημιουργείται ένα σύνολο από δέντρα ολοκλήρωσης $\mathbb{F}_K^q$ μετά την εφαρμογή των κανόνων επέκτασης του Πίνακα 3.2. Δύο από αυτά παρουσιάζονται στην Εικόνα 3.3. Όπως μπορούμε να δούμε το $\mathcal{F}_2$ περιέχει μία αντίφαση από τη στιγμή που περιέχει δύο αντικρουόμενα ζεύγη τριάδων (συνδεδεμένα με την έννοια ΠράσινουΧρώματος). Για αυτό το λόγο μόνο το δάσος $\mathcal{F}_1 \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ ενώ το $\mathcal{F}_2 \notin \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$.*

Στην Παράγραφο 3.4.3 δείχνουμε πως το σύνολο $\mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να απαντήσουμε σε ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων.

3.4.3 Απαντώντας σε Πολύπλοκα Ερωτήματα

Σε αυτήν την Παράγραφο θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο που απαντάει σε ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων που αφορούν μία $\mathcal{ALCNR}$ βάση γνώσης K. Ο αλγόριθμος εξετάζει το πεπερασμένο σύνολο των χωρίς αντίφαση δασών ολοκλήρωσης $\mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$. Παρουσιάζουμε τον αλγόριθμό μας αρχικά για ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων χωρίς απλά κατηγορήματα και σώμα Horn κανόνων $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ και στη συνέχεια τον επεκτείνουμε για ερωτήματα που περιέχουν απλά κατηγορήματα.



Σχήμα 3.3: *Παραδείγματα δασών ολοκλήρωσης με και χωρίς αντιφάσεις.*

Απαντώντας σε Ενώσεις Συζευκτικών Ερωτημάτων Χωρίς Απλά Κατηγορήματα

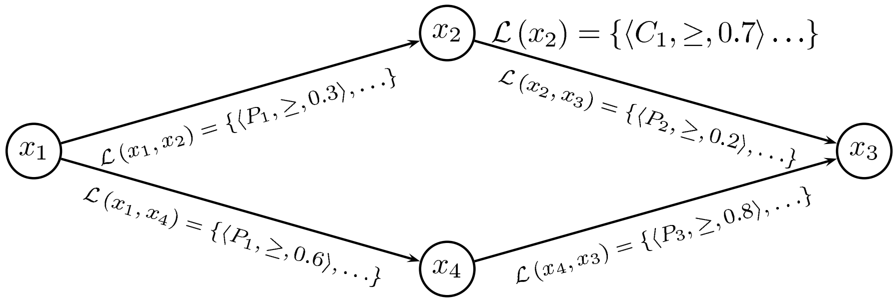
Σύμφωνα με τους Ortiz et al. (2006), προκειμένου να έχουμε έναν πλήρη αλγόριθμο, για την απάντηση σε συζευκτικά ερωτήματα, θα πρέπει να προσθέσουμε στο $TBox$ μας την υπαγωγή:

$$C \sqsubseteq C \tag{3.4}$$

για κάθε έννοια C που εμφανίζεται σε μία συζευκτική ερώτηση. Αυτό διασφαλίζει ότι για κάθε δάσος ολοκλήρωσης έχουμε είτε ότι $(x : C) \geq d$ είτε ότι $(x : C) < d$ [2] ισχύει και συνεπώς μπορεί να ελεγχθεί εάν ένας κόμβος μπορεί να απεικονιστεί σε μία μεταβλητή του συζευκτικού μας ερωτήματος.

Επιπλέον πρέπει να δείξουμε γιατί η συνθήκη του q-μπλοκαρίσματος χρησιμοποιείται αντί της συνθήκης απλού μπλοκαρίσματος. Ένα συζευκτικό ερώτημα CQ όπως παρουσιάστηκε στον Ορισμό 3.3 μπορεί να απεικονιστεί σε έναν γράφο G_{CQ} του οποίου οι κόμβοι αντιστοιχούν σε μεταβλητές και άτομα, όπου κάθε κόμβος x χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο $\mathcal{L}(x) = \{\langle C, \geq, d\rangle \mid C \in \text{sub}(CQ), d \in [0,1]\}$ και κάθε ακμή $\langle x, y\rangle$ χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο $\mathcal{L}(x,y) = \{\langle P, \geq, d\rangle \mid P \in N_R, d \in [0,1]\}$. Έστω ότι ℓ_{xy} είναι το μήκος του μέγιστου, ακυκλικού, κατευθυνόμενου μονοπατιού μεταξύ δύο κόμβων x και y, ορίζουμε με $|CQ|$ τη μέγιστη απόσταση ℓ_{xy} μεταξύ των μονοπατιών των συνδεδεμένων κόμβων στο CQ. Όπως είναι επόμενο συμπεραίνουμε ότι ένα συζευκτικό ερώτημα CQ δεν μπορεί να απεικονιστεί σε ένα υπο-δέντρο ενός δάσους ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ το οποίο έχει συνολικό ύψος μεγαλύτερο από $|CQ|$ ακμές. Η συνθήκη του $|CQ|$-μπλοκαρίσματος διασφαλίζει ότι πιθανές απεικονίσεις (απαντήσεις) από το ερώτημα CQ στο δάσος $\mathcal{F}$ δεν θα μπλοκαριστούν. Για την περίπτωση μίας ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων UCQ θεωρούμε ότι το $|UCQ|$ συμπίπτει με την μέγιστη τιμή $|CQ|$, δηλαδή $|UCQ| = \max\{|CQ| \mid CQ \in UCQ\}$.

[2] $(x : \neg C) \geq 1 - d + \epsilon$ είναι η κανονικοποιημένη μορφή.



Σχήμα 3.4: *Συζευκτικό ερώτημα που απεικονίζεται σε γράφο.*

Παράδειγμα 3.26 *Το συζευκτικό ερώτημα:*

$$\begin{aligned} CQ &= P(x_1, x_2) \geq 0.3 \wedge C_1(x_2) \geq 0.7 \wedge P_2(x_2, x_3) \geq 0.2 \wedge \\ &\quad \wedge P_1(x_1, x_4) \geq 0.6 \wedge P_3(x_4, x_3) \geq 0.8 \end{aligned}$$

αναπαρίσταται στο γράφο της Εικόνας 3.4 και έχει μήκος $|CQ| = 2$.

Ορισμός 3.27 *Έστω ότι έχουμε ένα συζευκτικό ερώτημα:*

$$\begin{aligned} CQ = \ & C_1(x_1) \geq d_1 \wedge \ldots \wedge C_k(x_k) \geq d_k \wedge \\ & P_{k+1}(y_{k+1}, z_{k+1}) \geq d_{k+1} \wedge \ldots \wedge P_\kappa(y_\kappa, z_\kappa) \geq d_\kappa \end{aligned}$$

Για ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ *λέμε ότι* $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ *όταν υπάρχει μία απεικόνιση* $\sigma : \text{varsIndivs}(CQ) \to \text{nodes}(\mathcal{F})$ *έτσι ώστε :*

1. *το* σ *να απεικονίζει κάθε άτομο* $a \in N_I$ *στον αντίστοιχο κόμβο ρίζα,*
2. $\langle C_i, \geq, d_i' \rangle \in \mathcal{L}(\sigma(x_i))$ *για κάποιο* $d_i' \geq d_i$, *και*
3. $\sigma(z_j)$ *είναι ένας* $(P_j)_{\geq d_j}$*-διάδοχος του* $\sigma(y_j)$

για κάθε $1 \leq i \leq k$ *και* $k + 1 \leq j \leq \kappa$. *Για μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων* $UCQ = \{CQ_1, \ldots, CQ_l\}$ *λέμε ότι* $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ *ανν* $CQ_i \hookrightarrow \mathcal{F}$ *για κάποιο* $CQ_i \in UCQ$.

Ορισμός 3.28 *Έστω ότι έχουμε ένα συζευκτικό ερώτημα:*

$$\begin{aligned} CQ = \ & C_1(x_1) \geq d_1 \wedge \ldots \wedge C_k(x_k) \geq d_k \wedge \\ & P_{k+1}(y_{k+1}, z_{k+1}) \geq d_{k+1} \wedge \ldots \wedge P_\kappa(y_\kappa, z_\kappa) \geq d_\kappa \end{aligned}$$

Για ένα ασαφές tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ *λέμε ότι* $CQ \hookrightarrow T$ *ανν υπάρχει μία απεικόνιση* $\sigma : \text{varsIndivs}(CQ) \to \mathbf{S}$ *τέτοια ώστε:*

1. *Το* σ *να απεικονίζει κάθε άτομο* $a \in N_I$ *στο* $\mathcal{V}(a)$,

2. $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) \geq d_i$, *και*

3. $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(y_j), \sigma(z_j)\rangle) \geq d_j$

για κάθε $1 \leq i \leq k$ *και* $k+1 \leq j \leq \kappa$. *Για μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων* $UCQ = \{CQ_1, \ldots, CQ_l\}$ *λέμε ότι* $UCQ \hookrightarrow T$ *ανν* $CQ_i \hookrightarrow T$ *για κάποιο* $CQ_i \in UCQ$.

Λήμμα 3.29 $UCQ \hookrightarrow T$ *για κάθε συνεπές tableau* T *ως προς ένα ABox* $\mathcal{A}$ *και TBox* $\mathcal{T}$, *ανν* $\mathcal{I} \models UCQ$ *για κάθε μοντέλο* $\mathcal{I}$ *της βάσης γνώσης* $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$.

Λήμμα 3.30 *Αν* $UCQ \hookrightarrow T$ *για κάθε συνεπές tableau* T *ως προς μία βάση γνώσης* $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$, *τότε* $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ *για κάθε δάσος ολοκλήρωσης* $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$.

Λήμμα 3.31 *Αν* $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$ *και* $Q \hookrightarrow \mathcal{F}$, *τότε* $Q \hookrightarrow T$ *για κάθε συνεπές tableau ως προς μία βάση γνώσης* $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$.

Θεώρημα 3.32 *Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.30, 3.31, 3.29 έχουμε ότι μία βάση γνώσης* K *συνεπάγεται μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων* UCQ ($K \models UCQ$) *ανν* $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ *για κάθε* $\mathcal{F} \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$.

Παράδειγμα 3.33 *Το συζευκτικό ερώτημα*

$$CQ = \text{Κορμός}(x) \geq 0.3 \wedge \text{είναι συνδεδεμένο}(x, y) \geq 0.3 \wedge \text{Φύλλα}(y) \geq 0.3$$

και το δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}_1$ *του Παραδείγματος 3.25 συνεπάγονται ότι η απεικόνιση* σ, *τέτοια ώστε* $\sigma(x) =$ *τμήμα*$_2$ *και* $\sigma(y) =$ *τμήμα*$_1$ *ικανοποιούν τη συνθήκη* $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}_1$ *όπου* $\mathcal{F}_1 \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$. *Προκειμένου να αποδείξουμε ότι* $K \models CQ$ *πρέπει να αποδειχθεί ότι* $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ *για κάθε δάσος ολοκλήρωσης* $\mathcal{F} \in \mathrm{ccf}(\mathbb{F}_K^q)$ *- εάν εξετάσουμε όλα τα δάση ολοκλήρωσης θα δούμε πως εν προκειμένω κάτι τέτοιο ισχύει-.*

Απαντώντας σε Συζευκτικά Ερωτήματα με Απλά Κατηγορήματα

Έως τώρα έχουμε παρουσιάσει έναν αλγόριθμο που απαντάει στο ερώτημα συνεπαγωγής $K \models UCQ$ για μία βάση γνώσης $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$ που δεν περιέχει κάποιο σώμα Horn κανόνων (και συνεπώς το ερώτημα UCQ δεν περιέχει κάποια απλά κατηγορήματα). Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μία διαδικασία αναγωγής του προβλήματος συνεπαγωγής με μία βάση γνώσης που περιέχει σώμα Horn κανόνων $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{A}\rangle$, στο πρόβλημα συνεπαγωγής με μία βάση γνώσης χωρίς σώμα Horn κανόνων $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται σε δύο βήματα.

Στο πρώτο βήμα απαλείφουμε τους ισχυρισμούς που αφορούν απλά κατηγορήματα. Για κάθε απλό κατηγόρημα q με ορίσματα $m > 1$ εισάγουμε ένα σύνολο ψευδορόλων $P_{q_1}, \ldots, P_{q_{m-1}}$ (στην περίπτωση που έχουμε απλά κατηγορήματα με 1 όρισμα αρκεί να δημιουργήσουμε μία ψευδο-έννοια C_q). Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα νέο σώμα Horn κανόνων $\mathcal{H}'$ προσθέτοντας στο αρχικό σώμα ισχυρισμών $\mathcal{H}$ ένα νέο κανόνα της μορφής:

$$P_{q_1}(x_1, x_2) \wedge \ldots \wedge P_{q_{m-1}}(x_{m-1}, x_m) \Rightarrow q(x_1, \ldots, x_m)$$

όπου τα $x_1, \ldots, x_m$ είναι ονόματα μεταβλητών. Το αρχικό ABox $\mathcal{A}$ αντικαθίσταται με ένα νέο ABox $\mathcal{A}'$ όπου κάθε ισχυρισμός που σχετίζεται με το q αντικαθίσταται από ένα σύνολο ισχυρισμών για τα $P_{q_1}, \ldots, P_{q_{m-1}}$. Για παράδειγμα ένας ισχυρισμός για ένα απλό κατηγόρημα $q(a_1, \ldots, a_m) \geq d$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα σύνολο ψευδο-ισχυρισμών $\mathcal{A}_q = \{P_{q_1}(a_1, a_2) \geq d, \ldots, P_{q_{m-1}}(a_{m-1}, a_m) \geq d\}$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{A} \rangle$ και $K' = \langle \mathcal{T}, \mathcal{H}', \mathcal{A}' \rangle$ ισχύει ότι $K \models UCQ$ ανν $K' \models UCQ$.

Στο επόμενο βήμα αντικαθιστούμε επαναληπτικά ένα συζευκτικό ερώτημα το οποίο περιέχει ένα κατηγόρημα q με μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων όπου το απλό κατηγόρημα q αντικαθίσταται από τις έννοιες, ρόλους, και κανονικά κατηγορήματα που εμφανίζονται στο σώμα του Horn κανόνα του οποίου η κεφαλή είναι q, σύμφωνα με τον αλγόριθμο 3.1.

Παράδειγμα 3.34 *Το συζευκτικό ερώτημα:*

$$CQ = \text{Δέντρο}(x, y) \geq 0.3$$

που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 3.6, σύμφωνα με το σώμα Horn κανόνων:

$$\mathcal{H} = \{\text{Κορμός}(x) \wedge \text{είναιΣυνδεδεμένο}(x, y) \wedge \text{Φύλλα}(y) \Rightarrow \text{Δέντρο}(x, y)\}$$

που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 3.2, θα αναχθεί στο συζευκτικό ερώτημα:

$$CQ = \text{Κορμός}(x) \geq 0.3 \wedge \text{είναιΣυνδεδεμένο}(x, y) \geq 0.3 \wedge \text{Φύλλα}(y) \geq 0.3$$

και σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.33 έχουμε ότι $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}_1$.

Λήμμα 3.35 *Η διαδικασία που περιγράφηκε στον Αλγόριθμο 3.1 τερματίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.*

Από τη στιγμή που το σώμα Horn κανόνων περιέχει μόνο μη κυκλικούς Horn κανόνες ο τερματισμός του αλγορίθμου μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί.

Λήμμα 3.36 *Για κάθε κύκλο του Αλγορίθμου 3.1 η αντικατάσταση ενός* UCQ *με κάποιο* UCQ' *είναι πλήρης και ορθή , δηλαδή* $K \models UCQ$ *ανν* $K \models UCQ'$.

Συλλογιστική για το Πρόβλημα της Υπαρξιακής Λογικής Συνεπαγωγής

Σύμφωνα με το κλασσικό CARIN ένα ABox $\mathcal{A}$ αντιστοιχεί σε μία β πρόταση η οποία δεν περιέχει κάποια μεταβλητή. Όταν το β περιέχει μεταβλητές, το β μπορεί να έχει

Διαδικασία Αναγωγή(UCQ)

- εάν το UCQ περιέχει ένα συζευκτικό ερώτημα CQ της μορφής

  $$CQ = p_1(\overline{Y}_1) \geq d_1 \wedge \ldots \wedge q(\overline{Y}_q) \geq d_q \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{Y}_k) \geq d_k$$

  όπου το q είναι ένα απλό κατηγόρημα τότε:

  - δημιουργούμε ένα νέο $UCQ' := UCQ \setminus \{CQ\}$
  - για κάθε Horn κανόνα της μορφής $r_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge r_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$
    - δημιουργούμε μία απεικόνιση ψ τέτοια ώστε:
      - $\psi(\overline{Y}) = \overline{Y}_q$,
      - $\psi(x) = x'$ όπου $x \in \text{vars}(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k) \setminus \text{vars}(\overline{Y})$ και x' είναι μία νέα μεταβλητή που δεν υπάρχει στο CQ,
      - $\psi(a) = a$ για κάθε άτομο $a \in N_I$.
    - δημιουργούμε ένα συζευκτικό ερώτημα CQ' από το CQ όπου η σύζευξη $q(\overline{Y}_q) \geq d_q$ έχει αντικατασταθεί με $r_1(\psi(\overline{X}_1)) \geq d_q \wedge \ldots \wedge r_k(\psi(\overline{X}_k)) \geq d_q$.
    - $UCQ' := UCQ' \cup \{CQ'\}$.
  - επιστρέφουμε **αναγωγή**(UCQ')
- διαφορετικά επιστρέφουμε UCQ

Αλγόριθμος 3.1: Αναγωγή ενός UCQ με απλά κατηγορήματα σε ένα UCQ χωρίς απλά κατηγορήματα.

μοντέλα στα οποία δύο ή περισσότερες μεταβλητές (ή μία ή περισσότερες μεταβλητές και ένα άτομο) απεικονίζονται στο ίδιο αντικείμενο στο πεδίο ορισμού της διερμηνείας. Προκειμένου να ελεγχθεί η λογική συνεπαγωγή πρέπει να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο για κάθε ομομορφισμό h στο β.

Ένας ομομορφισμός h είναι μία απεικόνιση

$$h : \text{varsIndivs}(\beta) \to \mathcal{P}(\text{varsIndivs}(\beta))$$

όπου το $\mathcal{P}$ αντιστοιχεί στη συνάρτηση δυναμοσυνόλου. Βάση της απεικόνισης h κάθε μεταβλητή ή άτομο απεικονίζεται στο σύνολο των ομομορφικών του μεταβλητών και ατόμων. Από την απεικόνιση h και το σύνολο varsIndivs(β) μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο σύνολο ατόμων $N_I{}'$. Διαισθητικά, εάν θεωρήσουμε έναν ομομορφισμό μεταξύ δύο μεταβλητών x, y του β, δηλαδή $h(x) = h(y) = \{x, y\}$, τότε θα ορίσουμε ένα νέο άτομο στο ${N_I}'$ το οποίο προσδιορίζεται με το ζεύγος $\{x, y\}$. Προκειμένου να είναι ένας έγκυρος ομομορφισμός, η συνάρτηση h πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- $x \in h(x)$,
- αν $y \in h(x)$ τότε θα ισχύει επίσης ότι $h(y) = h(x)$,
- για κάθε ζεύγος διαφορετικών ατόμων $a, b \in N_I$ θα πρέπει να ισχύει ότι $h(a) \neq h(b)$.

Τώρα από τα β και h δημιουργούμε ένα ABox $\mathcal{A}$ ως εξής: για κάθε συζευκτέο (conjunct) στο β για κάποια έννοια $C(x) \geq n$ (ή ρόλο $R(x, y) \geq n$) θα έχουμε έναν ισχυρισμό έννοιας (ή ρόλου) στο $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $C(h(x)) \geq n$ (ή αντίστοιχα $R(h(x), h(y)) \geq n$). Ομοίως κάθε άτομο και καθολικά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή x σε κάποιο συζευκτέο του Q_i για $1 \leq i \leq m$ αντικαθίσταται με $h(x)$ και παίρνουμε ένα νέο ερώτημα Q_i' το οποίο περιέχει μόνο άτομα και τις υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές.

Λήμμα 3.37 $\langle \beta, \mathcal{T} \rangle \models \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ *ανν για κάθε έγκυρο ομομορφισμό* h *στο σύνολο των μεταβλητών και των ατόμων στο* β*, ισχύει ότι* $K \models \{Q_1', \ldots, Q_k'\}$ *όπου* $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$*,* $\mathcal{A} = h(\beta)$*, και* $Q_i' = h(Q_i)$ *για κάθε* $1 \leq i \leq k$*.*

3.5 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Εργασίες

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μία αρκετά γενική, ασαφή επέκταση της γλώσσας το CARIN. Βασισμένοι στο CARIN περιγράψαμε μία γλώσσα η οποία επιτρέπει την ενσωμάτωση Horn κανόνων σε ασαφείς περιγραφικές λογικές, προσφέροντας συνεπώς εκφραστικότερα μέσα από τη στιγμή που μας δίνει τη δυνατότητα να περιγράψουμε ατελή και ασαφή πληροφορία. Η επέκταση που προτείνουμε βασίζεται στην ΠΛ της ασαφούς $\mathcal{ALCNR}$ με μη κυκλικούς Horn κανόνες. Η σύνταξη και η σημασιολογία που περιγράφονται είναι παρόμοιες με αυτές άλλων γλωσσών ασαφών ΠΛ όπως οι f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ (Straccia, 2001), f_{KD}-$\mathcal{SI}$ (Stoilos et al., 2005a, 2007) και f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$ (Stoilos et al., 2005b). Επιπλέον, έχουμε εισάγει για τις ασαφείς ΠΛ τα θεμελιώδη προβλήματά του συζευκτικού ερωτήματος, της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων, και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής, ορίζοντας συγκεκριμένη σημασιολογία καθώς και έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων. Παρόμοια με τη γλώσσα του κλασσικού CARIN περιορίζουμε την εκφραστικότητά μας σε μη κυκλικούς Horn κανόνες. Όπως έχουν αποδείξει οι Levy and Rousset (1998), η προσθήκη Horn κανόνων στη γλώσσα του CARIN κάνει τη γλώσσα μη αποφάνσιμη. Η απόδειξη βασίζεται σε αναγωγή του προβλήματος τερματισμού (halting problem) σε ένα πρόβλημα συλλογιστικής στη γλώσσα CARIN με κυκλικούς κανόνες. Από τη στιγμή που ένα πρόβλημα στο κλασσικό CARIN μπορεί να εκφραστεί με την ίδια σημασιολογία και στο ασαφές CARIN μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν έχει νόημα η προσθήκη στη γλώσσα μας κυκλικών Horn κανόνων αφού θα την έκαναν μη αποφάνσιμη.

Όσον αφορά τις μελλοντικές επεκτάσεις, αυτές περιλαμβάνουν τη μελέτη πιθανών επεκτάσεων του ασαφούς CARIN που θα χρησιμοποιούν πιο εκφραστικές ΠΛ. Προς αυτήν την κατεύθυνση οι Ortiz et al. (2006) παρουσιάζουν έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο για να απαντώνται ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων στην ΠΛ $\mathcal{SHIQ}$ και θα πρέπει να εξετάσουμε εάν το ίδιο πρόβλημα μπορεί να τεθεί και σε f_{KD}-$\mathcal{SHIQ}$ βάσεις γνώσης. Ένα ακόμα θέμα που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η επέκταση της γλώσσας του CARIN με γενικευμένες υπαγωγές εννοιών και ασαφή συστήματα κανόνων με βάρη. Σημαντική δουλειά, όσον αφορά τα ασαφή συστήματα κανόνων με βάρη, έχει γίνει από τους Chortaras et al. (2007), ενώ ο Straccia (2006c) παρουσίασε για πρώτη φορά τα γενικευμένα ασαφή αξιώματα υπαγωγής εννοιών. Διαισθητικά ένα γενικευμένο ασαφές αξίωμα υπαγωγής της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ συνεπάγεται ότι εάν ένα αντικείμενο ανήκει στο σύνολο C με κάποιο βαθμό $d_1 \in [0, 1]$ τότε θα ανήκει και στο σύνολο D με ένα βαθμό $d_2 \in [0, 1]$ όπου το d_2 αυξάνεται όταν αυξάνονται και οι τιμές των d_1, d. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βάλουμε βάρη στους Horn κανόνες. Μία ακόμα ενδιαφέρουσα επέκταση σχετίζεται με το μέγιστο κάτω φράγμα (greatest lower bound). Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός κλασσικού ισχυρισμού έννοιας για μία βάση γνώσης K ορίζεται ως εξής: $glb(K, (a : C)) = \sup\{d \mid K \models (a : C) \geq d\}$. Για παράδειγμα το γεγονός ότι $glb(K, (\text{Γιάννης} : \text{Ψηλός})) = 0.8$ συνεπάγεται ότι ο Γιάννης είναι Ψηλός για κάθε μοντέλο του K με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 0.8 και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μοντέλο όπου ο Γιάννης είναι ψηλός με βαθμό ίσο με 0.8. Το πρόβλημα προσδιορισμού του μεγίστου κάτω φράγματος καλείται *Best Truth Value Bound* (BTVB) πρόβλημα (Stoilos et al., 2006). Η επέκταση του προβλήματος αυτού για συζευκτικά ερωτήματα και συνεπώς για ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων είναι ένα πολύ ενδιαφέρων πρόβλημα. Ένα BTVB συζευκτικό ερώτημα θα έχει τη μορφή:

$$CQ_{BTVB} = p_1(\overline{Y_1}) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{Y_k})$$

όπου τα $p_1, \ldots, p_k$ είναι είτε έννοιες, είτε ρόλοι, είτε απλά κατηγορήματα. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί ότι $glb(K, CQ_{BTVB}) = d$ ανν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του K υπάρχει κάποια απεικόνιση σ : $\text{varsIndivs}(\overline{Y_i}) \to \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε $p_i^{\mathcal{I}}(\sigma(\overline{Y_i})) \geq d$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Πιστεύουμε ότι ο αλγόριθμός μας θα χρειαστεί κάποιες απειροελάχιστες αλλαγές προκειμένου να απαντήσει σε αυτό το πρόβλημα. Το πρόβλημα UCQ_{BTVB} μπορεί να οριστεί με ανάλογο τρόπο.

Ένα από τα σημαντικότερα εμπόδια προκειμένου να επεκτείνουμε περαιτέρω τη γλώσσα μας είναι η υψηλή υπολογιστική της πολυπλοκότητα. Έχει αποδειχθεί για το κλασσικό σύστημα CARIN ότι ο αλγόριθμός για το πρόβλημα $\beta \cup \mathcal{T} \not\models Q$ έχει χρονική πολυπλοκότητα μη ντετερμινιστική διπλά εκθετική ως προς το μέγεθος του

$\beta \cup \mathcal{T}$ και τριπλά εκθετική ως προς το μέγεθος του $\beta \cup \mathcal{T} \cup Q$. Απομένει να μελετήσουμε αν η πολυπλοκότητα στις ασαφείς περιγραφικές λογικές παραμένει η ίδια, ή εάν γίνεται ακόμα χειρότερη με την παρουσία βαθμών στους ισχυρισμούς. Για αυτό το λόγο η χρήση της γλώσσας του CARIN σε ρεαλιστικές εφαρμογές προϋποθέτει την ύπαρξη ενός πιο αποδοτικού συστήματος συλλογιστικής. Μία λύση προκειμένου να επιτύχουμε ένα πιο αποδοτικό σύστημα συλλογιστικής είναι να επεκτείνουμε με κανόνες ΠΛ πιο βατές από την $\mathcal{ALCNR}$. Η γλώσσα $\mathcal{ELP}$ που παρουσιάστηκε από τους Krötzsch et al. (2008b) είναι μία τέτοια επέκταση η οποία συνδυάζει μία γλώσσα πολυωνυμική πολυπλοκότητας όπως η $\mathcal{EL}^+$ με κανόνες. Μια διαφορετική προσέγγιση θα ήταν να ερευνήσουμε μεθόδους βελτιστοποίησης για τη συλλογιστική στο σύστημα CARIN. Μία από τις σημαντικότερες πηγές πολυπλοκότητας του αλγορίθμου είναι ότι προκειμένου να έχουμε ορθές και πλήρεις απαντήσεις για τα UCQ ερωτήματα κάθε κόμβος περιέχει είτε $\langle \neg C, \geq, 1-d+\epsilon \rangle$ είτε $\langle C, \geq, d \rangle$ για όλες τις έννοιες και όλους τους βαθμούς στη βάση γνώσης. Μία πιο συντηρητική εφαρμογή των κανόνων αυτών, η οποία θα περιόριζε την εφαρμογή μόνο στα ονόματα εννοιών και τους βαθμούς οι οποίοι περιέχονται στο συζευκτικό ερώτημα, θα βελτίωνε αισθητά τις επιδόσεις του αλγορίθμου μας. Μία ακόμα πηγή πολυπλοκότητας του αλγορίθμου σχετίζεται με τη συνθήκη q-μπλοκαρίσματος η οποία υιοθετήθηκε. Μία πιθανή λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι να εισηχθεί μία δυναμική εκδοχή του q-μπλοκαρίσματος κατά την οποία ένα δάσος ολοκλήρωσης δημιουργείται με απλό μπλοκάρισμα και στη συνέχεια επεκτείνεται μόνο εφόσον δεν απαντάται κάποιο από τα ερωτήματα στην ένωση UCQ. Τέλος μία από τις κυριότερες πηγές πολυπλοκότητας οφείλεται στο γεγονός ότι η γλώσσα μας έχει δομηθεί βάση μη-βελτιστοποιημένων tableau μεθόδων. Οι Simou et al. (2010) προτείνουν τεχνικές βελτιστοποίησης οι οποίες μπορούν να βελτιώσουν τις επιδόσεις ενός ασαφούς ΠΛ συστήματος, ενώ οι υπάρχουσες βελτιστοποιήσεις των tableau αλγορίθμων για κλασσικές ΠΛ (Tsarkov et al., 2007) μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις να εφαρμοστούν.

3.Α′ Αποδείξεις

Απόδειξη του Λήμματος 3.9: Για την ευθεία φορά. Αν $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ είναι ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{T}$ με τον εξής τρόπο:

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta^{\mathcal{I}} & = & \mathbf{S} \\
a^{\mathcal{I}} & = & \mathcal{V}(a), a \in N_I \\
\top^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, \top),\ \text{για κάθε } s \in \mathbf{S} \\
\bot^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, \bot),\ \text{για κάθε } s \in \mathbf{S} \\
A^{\mathcal{I}}(s) & = & \mathcal{L}(s, A),\ \text{για κάθε } s \in \mathbf{S} \text{ και έννοια } A \in N_C \\
P^{\mathcal{I}}(s,t) & = & \mathcal{E}(P, \langle s,t \rangle) \text{ για κάθε ρόλο } P \in N_R
\end{array}
$$

Η απόδειξη ότι το $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$ βασίζεται στην απόδειξη που πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Stoilos et al. (2007) για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$. Οι Stoilos et al. (2007) αποδεικνύουν με επαγωγή στη δομή μίας έννοιας ότι:

$$\mathcal{L}(s, C) \geq n \text{ implies } C^{\mathcal{I}}(s) \geq n \text{ for any } s \in \mathbf{S} \tag{3.5}$$

Από τη στιγμή που η γλώσσα μας δεν περιέχει μεταβατικούς ρόλους, η απόδειξη για το $\forall$ είναι διαφοροποιημένη, αφού δεν λαμβάνει υπόψιν το μέρος της απόδειξης που αναφέρεται σε μεταβατικούς ρόλους. Η απόδειξη για τους περιορισμούς πληθικότητας είναι πανομοιότυπη με αυτήν που περιγράφουν οι Stoilos et al. (2007) για την πιο εκφραστική γλώσσα $f_{KD} - \mathcal{SHIN}$. Κάποιες μικρές αλλαγές στις αποδείξεις πρέπει να γίνουν έτσι ώστε να μπορούμε να χειριστούμε αποτελεσματικά τις συζεύξεις ρόλων. Στη συνέχεια δίνουμε αναλυτική περιγραφή της απόδειξης για υπαρξιακούς περιορισμούς:

- Αν $\mathcal{L}(s, \exists R.C) \geq n$ για κάποια σύζευξη ρόλων $R \rightarrow P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$ τότε υπάρχει κάποιο $t \in \mathbf{S}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν $\mathcal{E}(P_i, \langle s,t \rangle) \geq n$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ και $\mathcal{L}(t, C) \geq n$. Εκ κατασκευής της διερμηνείας $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $P_i^{\mathcal{I}}(s,t) \geq n$ και από τη σημασιολογία της σύζευξης ρόλων προκύπτει ότι

  $$R^{\mathcal{I}}(s,t) = \min(P_1^{\mathcal{I}}(s,t), \ldots, P_k^{\mathcal{I}}(s,t)) \geq n$$

  Επομένως βάσει της υπόθεσης επαγωγής έχουμε ότι $C^{\mathcal{I}}(t) \geq n$ το οποίο σημαίνει ότι θα ισχύει:

  $$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(s) = \sup_{t \in \Delta^{\mathcal{I}}} \min(R^{\mathcal{I}}(s,t), C^{\mathcal{I}}(t)) \geq n.$$

Η ιδιότητα 9 του Ορισμού 3.8 διασφαλίζει ότι κάθε υπαγωγή εννοιών $C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$ θα ικανοποιείται σε κάθε διερμηνεία $\mathcal{I}$ που κατασκευάσαμε (μία αναλυτική απόδειξη έχει γίνει από τους Stoilos et al. (2006)). Οι ιδιότητες 10, 11 διασφαλίζουν την ικανοποίηση κάθε ισχυρισμού έννοια ή ρόλου στο $\mathcal{A}$, ενώ η ιδιότητα 12 διασφαλίζει την ικανοποίηση της μοναδικής ονοματοδοσίας.

Για την αντίστροφη φορά. Έστω ότι έχουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{T}$, θα κατασκευάσουμε ένα ασαφές tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\ \mathcal{E}(P, \langle s, t \rangle) &= P^{\mathcal{I}}(s, t) \\ \mathcal{L}(s, C) &= C^{\mathcal{I}}(s) \\ \mathcal{V}(a) &= a^{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να δείξουμε ότι οι ιδιότητες που περιγράφονται στον Ορισμό 3.8 ικανοποιούνται. Οι αποδείξεις για τις ιδιότητες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11 ακολουθούν τις αποδείξεις της γλώσσας $f_{KD}-\mathcal{SI}$ που περιγράφουν οι Stoilos et al. (2007) ενώ οι αποδείξεις για τις ιδιότητες 7, 8 είναι ίδιες με τις αποδείξεις για τη γλώσσα $f_{KD}-\mathcal{SHIN}$ που περιγράφουν οι Stoilos et al. (2007) ενώ την ιδιότητα 9 αποδεικνύουν οι Stoilos et al. (2006). Η ιδιότητα 12 ισχύει λόγω της μοναδικής ονοματοδοσίας. Κάποιες μικρές αλλαγές όσον αφορά τις αποδείξεις πρέπει να γίνουν έτσι ώστε να διαχειρίζεται ο αλγόριθμός μας συζεύξεις ρόλων. Για παράδειγμα η απόδειξη για υπαρξιακούς περιορισμούς θα αλλάξει ως εξής:

- Έστω ότι ισχύει $\mathcal{L}(s, \exists R.C) \geq n$ για μία σύζευξη ρόλων $R \rightarrow P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$. Ο ορισμός του T συνεπάγεται ότι

  $$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(s) \geq n \Rightarrow \sup_{y \in \Delta^{\mathcal{I}}} min(R^{\mathcal{I}}(s, y), C^{\mathcal{I}}(y)) \geq n.$$

  Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $t \in \Delta^{\mathcal{I}}$ με $R^{\mathcal{I}}(s, t) \geq n$ και $C^{\mathcal{I}}(t) \geq n$. Αφού ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(s, t) \geq n$, θα ισχύει επίσης και ότι $P_i^{\mathcal{I}}(s, t) \geq n$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ και επομένως $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) \geq n$. Ομοίως προκύπτει και ότι $\mathcal{L}(t, C) \geq n$. Εκ κατασκευής έχουμε ότι $t \in \mathbf{S}$ και συνεπώς το T ικανοποιεί την ιδιότητα 6.

■

Απόδειξη του Λήμματος 3.21: Όπως περιγράφουν οι Ortiz et al. (2006),προκειμένου να αποδειχθεί ο τερματισμός ενός αλγορίθμου αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα μέγιστος αριθμός T_q από μη-ισομορφικά q-δέντρα σε ένα δάσος ολοκλήρωσης για τη γνώση K. Η συνθήκη αυτή διασφαλίζει ότι η εφαρμογή των κανόνων επέκτασης δεν θα συνεχίζεται επ' άπειρον, αφού η συνθήκη της q-δέντρο ισοδυναμίας διασφαλίζει ότι θα εφαρμοστεί κάποια στιγμή ο αλγόριθμος μπλοκαρίσματος. Έστω ότι $\text{sub}(K) \cup \text{sub}(Q)$ είναι το σύνολο των υπο-εννοιών ενός συζευκτικού ερωτήματος Q σε μία βάση γνώσης K και $c = |\text{sub}(K) \cup \text{sub}(Q)|$ είναι πληθάριθμος του,

$r = |N_R|$ ο αριθμός των ονομάτων ρόλων, $m_{\max}$ ο μέγιστος αριθμός m που εμφανίζεται σε κάποιο περιορισμό πληθικότητας τύπου $\geq m\ R$, και $[0,1]_{\mathcal{A},Q}$ είναι οι βαθμοί στους $ABox$ ισχυρισμούς καθώς και στα συζευκτικά ερωτήματα (μαζί με τους επαυξημένους με ϵ βαθμούς).

Μπορεί να υπάρχουν το πολύ $2^{c \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|}$ χαρακτηρισμοί ενός κόμβου σε ένα δέντρο ολοκλήρωσης, αφού κάθε κόμβος χαρακτηρίζεται από πεπερασμένες τριάδες ονομάτων εννοιών και βαθμών (κανένας κανόνας επέκτασης δεν δημιουργεί νέους βαθμούς). Κάθε διάδοχος ενός κόμβου μπορεί να είναι η ρίζα ενός δέντρου βάθους $(n-1)$. Θεωρώντας ένα μόνο ρόλο R, αν ένας κόμβος v έχει x R-διαδόχους, τότε υπάρχει ένας μέγιστος αριθμός από $(T_{n-1})^x$ δέντρα βάθους $(n-1)$ με ρίζα το v.

Θεωρούμε ότι στην χειρότερη περίπτωση ο κανόνας $\geq_{\geq}$ υπάρχει σε κάθε έννοια $C \in \mathrm{sub}(K) \cup \mathrm{sub}(Q)$ για όλους τους βαθμούς και με τον μεγαλύτερο βαθμό $m_{\max}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ρόλος μπορεί να δημιουργεί το πολύ $c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|$ διαδόχους.

Ο αριθμός των R-διαδόχων ενός κόμβου κυμαίνεται από 0 έως $c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|$, και για κάθε αριθμό R-διαδόχων, έχουμε το πολύ $(T_{n-1})^{(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)}$ δέντρα βάθους $(n-1)$. Συνεπώς κάθε κόμβος μπορεί να είναι η ρίζα το πολύ

$$c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)(T_{q-1})^{(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|}$$

δέντρων βάθους $n-1$ εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα μόνο ρόλο.

Αφού ο μέγιστος αριθμός υποδέντρων που μπορεί να δημιουργηθεί για κάθε ρόλο στο N_R είναι δεδομένος, υπάρχει ένα όριο

$$((c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)(T_{q-1})^{(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)})^r$$

από δέντρα βάθους $(n-1)$ που ξεκινάνε από κάθε κόμβο. Ο αριθμός των διαφορετικών ριζών κάθε n-δέντρου περιορίζεται από 2^c. Ένα πάνω όριο λοιπόν για τον αριθμό των μη ισομορφικών n-δέντρων είναι

$$T_q = \mathcal{O}(2^c((c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)(T_{q-1})^{(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)})^r)$$

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, θεωρούμε ότι $x = 2^c(c + m_{\max})^r$ και $a = c \cdot m_{\max} r$. Τότε έχουμε ότι:

$$T_q = \mathcal{O}(x \cdot (T_{q-1})^a) = \mathcal{O}(x^{1+a+\ldots+a^{n-1}} \cdot (T_0)^{a^n}) = \mathcal{O}((x \cdot T_0)^{a^n}).$$

Ο μέγιστος αριθμός δέντρων βάθους 0 είναι το πολύ 2^c. Συνεπώς επιστρέφοντας στον προηγούμενο συμβολισμό έχουμε

$$T_q = \mathcal{O}((2^{2 \cdot c}(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}|)^r)^{(c \cdot m_{\max} \cdot |[0,1]_{\mathcal{A},Q}| \cdot r)^n}).$$

■

Απόδειξη του Λήμματος 3.22: Έστω ότι $\mathcal{F}_K$ είναι ένα πλήρες δάσος ολοκλήρωσης χωρίς αντιφάσεις το οποίο δημιουργήθηκε από τον αλγόριθμο tableau για ένα $\mathcal{A}$ ABox και TBox $\mathcal{T}$. Η δημιουργία ενός ασαφούς tableau $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ θα πραγματοποιηθεί βασισμένη στη δημιουργία ενός ασαφούς μοντέλου (Straccia, 2001; Stoilos et al., 2007).

Για ένα σύνολο τριάδων της μορφής $\langle A, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(s)$, ο μέγιστος αριθμός από όλα τα n_i επιλέγεται ως ο βαθμός συμμετοχής του s στο ασαφές σύνολο $A^{\mathcal{I}}$, δηλαδή ο βαθμός $\mathcal{L}(s, A)$ στην περίπτωσή μας. Να σημειωθεί ότι ο χαρακτηρισμός $\mathcal{L}(s, C)$ αναφέρεται σε κόμβους του ασαφούς tableau, ενώ ο χαρακτηρισμός $\mathcal{L}(s)$ σε κόμβους του δάσους ολοκλήρωσης. Δοθέντος ενός δάσους ολοκλήρωσης χωρίς αντιφάσεις $\mathcal{F}_K$, ένα ασαφές tableau μπορεί να δομηθεί ως εξής για όλα τα $s, t \in \mathbf{S}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \{s \mid s \text{ είναι ένας κόμβος στο } \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \\
&\qquad\qquad \text{και το } s \text{ δεν μπλοκάρετε}\}, \\
\mathcal{L}(s, \bot) &= 0, \\
\mathcal{L}(s, \top) &= 1, \\
\mathcal{L}(s, C) &= \sup\{n_i \mid \langle C, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(s)\}, \\
\mathcal{E}(P, \langle s, t \rangle) &= \sup(\{n_i \mid \langle P, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(s, t)\} \cup \\
&\qquad \{n_i \mid \langle P, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(s, z) \text{ για κάθε} \\
&\qquad\quad \text{κόμβο } z \text{ που μπλοκάρετε από το } t\}) \\
\mathcal{V}(a_i) &= s_{a_i}, \text{ όπου ο } s_{a_i} \text{ είναι ένας κόμβος ρίζα.}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι το T είναι ένα ασαφές tableau για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$:

1. Η ιδιότητα 1 του Ορισμού 3.8 ικανοποιείται βάσει της κατασκευής του T και επειδή το $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ δεν περιέχει αντιφάσεις.

2. Οι ιδιότητες 2, 3 και 4 ικανοποιούνται και η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη για τη γλώσσα f_{KD}-$\mathcal{SI}$.

3. Η ιδιότητα 5 του Ορισμού 3.8 ικανοποιείται. Έστω ότι $s \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(s, \forall R.C) = n_0 \geq n$ για κάποια σύζευξη ρόλων $R \to P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα, το πρώτο είναι ότι υπάρχει κάποιο P_i για $1 \leq i \leq k$, τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) = n_i$ με $n_i \leq 1 - n_0$ και το δεύτερο είναι ότι $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) = n_i$ με $n_i \geq 1 - n_0 + \epsilon$ για όλα τα $1 \leq i \leq k$. Για το πρώτο ενδεχόμενο έχουμε ότι $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) = n_i \leq 1 - n$, έτσι λοιπόν η ιδιότητα 5 ικανοποιείται. Για το δεύτερο ενδεχόμενο έχουμε, εκ κατασκευής του T, ότι $\langle \forall R.C, \geq, n_1 \rangle \in \mathcal{L}(s)$ και αφού $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) = n_i \geq 1 - n_0 + \epsilon$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ έχουμε είτε ότι το t είναι $R_{\geq 1-n+\epsilon}$-διάδοχος του s, είτε ότι το z είναι $R_{\geq 1-n+\epsilon}$-διάδοχος του s και το t μπλοκάρει το z. Εάν το t είναι ένας $R_{\geq 1-n+\epsilon}$-διάδοχος του s ο κανόνας $\forall_{\geq}$ διασφαλίζει ότι $\langle C, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(t)$, και συνεπώς $\mathcal{L}(s, t) \geq n_0 \geq n$. Το ίδιο ισχύει και για τη δεύτερη περίπτωση αφού $\langle C, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(z)$ και $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(t)$ λόγω

της συνθήκης μπλοκαρίσματος που οφείλεται στον ισομορφισμό ψ μεταξύ του z και του t.

4. Η ιδιότητα 6 του Ορισμού 3.8 ικανοποιείται. Έστω $s \in \mathbf{S}$ με $\mathcal{L}(s, \exists R.C) = n_0 \geq n$ για μία σύζευξη ρόλων $R \rightarrow P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$. Η κατασκευή του T συνεπάγεται ότι $\langle \exists R.C, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(s)$. Ο κανόνας $\exists_{\geq}$ διασφαλίζει ότι το s έχει έναν $R_{\geq n_0}$-διάδοχο t (και συνεπώς ισχύει $\langle P_i, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(s,t)$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ με $n_i \geq n_0$) τέτοιο ώστε $\langle C, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(t)$. Εάν το t δεν μπλοκάρεται η Ιδιότητα 6 ισχύει αφού, εκ κατασκευής του T, $\mathcal{E}(P_i, \langle s, t \rangle) \geq n_0 \geq n$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $\mathcal{L}(t, C) \geq n_0 \geq n$. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που το t μπλοκάρεται από το z, αφού θα ισχύει ότι $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(z)$.

5. Η ιδιότητα 7 του Ορισμού 3.8 ικανοποιείται. Έστω ότι $\mathcal{L}(s, \geq mR) = n_0 \geq n$ για κάποιο συζευκτικό ρόλο $R \rightarrow P_1 \sqcap \ldots \sqcap P_k$. Η κατασκευή του T διασφαλίζει ότι $\langle \geq mR, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(s)$. Αφού το $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ είναι ολοκληρωμένο, θα υπάρχουν τουλάχιστον m κόμβοι $t_1, \ldots, t_m$ που θα είναι $R_{\geq n_0}$ διάδοχοι του s έτσι ώστε να ισχύει $t_i \neq t_j$ για κάθε $1 \leq i < j \leq m$ (και συνεπώς $\langle P_{i'}, \geq, n_{i,i'} \rangle \in \mathcal{L}(s, t_i)$ και $n_{i,i'} \geq n_0$ ισχύουν για κάθε $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq k$). Εάν κάθε t_i δεν είναι μπλοκαρισμένο, τότε εκ κατασκευής του T, έχουμε ότι $\mathcal{E}(P_{i'}, \langle s, t_i \rangle) = n_{i,i'} \geq n_0 \geq n$ για κάθε $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i' \leq k$ και $t_i \neq t_j$ για κάθε $1 \leq i < j \leq m$, συνεπώς η ιδιότητα 7 ισχύει. Εάν τα t_i είναι μπλοκαρισμένα, εξαιτίας της συνθήκης μπλοκαρίσματος θα υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ δέντρων ολοκλήρωσης, και από την κατασκευή του T που σηματοδοτεί ότι $z_i \neq z_j$, εάν z_i μπλοκάρει το t_i και το z_j μπλοκάρει το t_j έχουμε ότι $\mathcal{E}(P_{i'}, \langle s, z_i \rangle) = n_{i,i'} \geq n_0 \geq n$ για κάθε $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i' \leq k$ και $z_i \neq z_j$ για κάθε $1 \leq i < j \leq m$. Συνεπώς η Ιδιότητα 7 ικανοποιείται.

6. Η ιδιότητα 8 του Ορισμού 3.8 ικανοποιείται. Έστω ότι $\mathcal{L}(s, \leq mR) = n_0 \geq n$. Η κατασκευή του T σηματοδοτεί ότι $\langle \leq mR, \geq, n_0 \rangle \in \mathcal{L}(s)$. Αφού το $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ είναι πλήρες και χωρίς αντιφάσεις, θα υπάρχουν το πολύ m $R_{\geq 1-n_0+\epsilon}$-διάδοχοι του s. Βασισμένοι στη λογική που ακολουθήσαμε έως τώρα είναι εύκολο να δείξουμε ότι η ιδιότητα 8 ισχύει.

7. Η απόδειξη για την ιδιότητα 9 του Ορισμού 3.8 παρουσιάζεται από τους Stoilos et al. (2006).

8. Η ιδιότητες 10, 11 και 12 ισχύουν εκ κατασκευής του δάσους ολοκλήρωσης $\mathcal{F}_K$.

■

Απόδειξη του Λήμματος 3.23: Η απόδειξη της πληρότητας βασίζεται στην απόδειξη που έγινε από τους Stoilos et al. (2007) με κάποιες διαφορές που οφείλονται στη μη ύπαρξη μεταβατικών και αντίστροφων ρόλων στη γνώση.

Έστω ότι $T = (\mathbf{S}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{V})$ είναι ένα ασαφές tableau για το ABox $\mathcal{A}$ και το TBox $\mathcal{T}$. Χρησιμοποιώντας το T "κατευθύνεται" η εφαρμογή των κανόνων επέκτασης έτσι ώστε να προκύψει ένα δάσος ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ το οποίο έχει επεκταθεί πλήρως και δεν περιέχει αντιφάσεις. Σύμφωνα με τους Horrocks et al. (2006) μία απεικόνιση π, η οποία απεικονίζει κόμβους του $\mathcal{F}$ σε στοιχεία του $\mathbf{S}$ και καθοδηγεί την εφαρμογή των μη ντετερμινιστικών κανόνων $\sqcup_{\geq}$, $\leq_{\geq}$ και $\sqsubseteq$, ορίζεται έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\langle C, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x) \text{ στο } \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{L}(\pi(x), C) \geq n \text{ στο } T \quad (3.7)$$

$$x \text{ είναι ένας } P_{\geq n} \text{ διάδοχος του } y \text{ στο } \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{E}(P, \langle \pi(x), \pi(y)\rangle) \geq n \text{ στο } T \quad (3.8)$$

$$x \neq y \text{ στο } \mathcal{F} \Rightarrow \pi(x) \neq \pi(y) \text{ στο } T \quad (3.9)$$

Σύμφωνα με τους Stoilos et al. (2007) η προτεινόμενη μέθοδος διαφέρει από αυτήν που χρησιμοποιείται στις κλασσικές ΠΛ ως εξής. Χρησιμοποιώντας τον βαθμό συμμετοχής ενός κόμβου σε μία έννοια, ευρισκομένη στο ασαφές tableau, δημιουργούμε "τεχνητές" τριάδες οι οποίες συγκρίνονται για κάποια αντίφαση με τις υποψήφιες τριάδες που οι μη ντετερμινιστικού κανόνες μπορούν να εισάγουν στο δάσος ολοκλήρωσης. Οι τριάδες που δεν προκαλούν αντίφαση μπορούν να προστεθούν. Οι τροποποιημένοι κανόνες που χρησιμοποιούνται προκειμένου να καθοδηγήσουν τη διαδικασία επέκτασης παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3. ■

Απόδειξη του Λήμματος 3.29: Για το ευθύ. Υποθέτουμε ότι $UCQ \hookrightarrow T$ για κάθε συνεπές tableau T για το $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{I} \models UCQ$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$. Έστω ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο του K. Ακολουθώντας την κατασκευή που παρουσιάστηκε στο Λήμμα 3.9 μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα tableau T για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$.

Από την υπόθεσή μας ότι $UCQ \hookrightarrow T$ για κάθε συνεπές tableau T για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$ σύμφωνα με τον Ορισμό 3.28, υπάρχει μία απεικόνιση σ : varsIndivs$(CQ) \to \mathbf{S}$ τέτοια ώστε: (i) το σ απεικονίζει κάθε $a \in$ indivs(CQ) στο $\mathcal{V}(a)$, (ii) $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) \geq n_i$ και (iii) $\mathcal{E}(P_j, \langle \sigma(y_j), \sigma(z_j)\rangle) \geq n_j$, όπου C_i, P_j είναι έννοιες και ρόλοι στο CQ, n_i και n_j οι βαθμοί τους, και $x_i, y_i, z_i \in$ varsIndivs(CQ). Από την κατασκευή του T (όπως φαίνεται στην απόδειξη του Λήμματος 3.9) έχουμε ότι (i) το σ απεικονίζει κάθε $a \in$ indivs(CQ) στο $a^{\mathcal{I}}$, (ii) $C^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) = \mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) \geq n_i$ και (iii) $P^{\mathcal{I}}(\sigma(y_j), \sigma(z_j)) = \mathcal{E}(P_j, \langle \sigma(y_j), \sigma(z_j)\rangle) \geq n_j$. Συνεπώς $\mathcal{I} \models UCQ$.

Για το αντίστροφο. Θεωρούμε ότι $\mathcal{I} \models UCQ$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $UCQ \hookrightarrow T$ για κάθε συνεπές tableau T για το $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$. Έστω ότι το T είναι ένα συνεπές tableau για το $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$. Τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του K με παρόμοιο τρόπο όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.9.

Από τη στιγμή που $\mathcal{I} \models UCQ$ έχουμε ότι υπάρχει μία απεικόνιση

$$\sigma : \text{varsIndivs}(CQ) \to \Delta^{\mathcal{I}}$$

Πίνακας 3.3: *Τροποποιημένοι Tableaux κανόνες επέκτασης για την ασαφή $\mathcal{ALCNR}$.*

Κανόνας			Περιγραφή
$\sqcup_{\geq}$	εάν	1.	$\langle C_1 \sqcup C_2, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο κόμβος x δεν μπλοκάρεται,
		2.	$\{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$
		τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{C\}$ για κάποιο $C \in \{\langle C_1, \geq, n\rangle, \langle C_2, \geq, n\rangle\}$ που δεν αντικρούει είτε το $\langle \neg C_1, \geq, 1 - \mathcal{L}(\pi(x), C_1)\rangle$ είτε το $\langle \neg C_2, \geq, 1 - \mathcal{L}(\pi(x), C_2)\rangle$
$\leq_{\geq}$	εάν	1.	$\langle \leq mR, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(x)$, ο κόμβος x δεν μπλοκάρεται,
		2.	υπάρχουν περισσότεροι από m $R_{\geq n'}$-διάδοχοι του x με $n' = 1 - n + \epsilon$ και υπάρχουν δύο εξ αυτών y, z, για τους οποίους δεν ισχύει $y \neq z$,
		3.	ο y δεν είναι κόμβος ρίζα και $\pi(y) = \pi(z)$
	τότε	1.	$\mathcal{L}(z) \to \mathcal{L}(z) \cup \mathcal{L}(y)$
		2.	$\mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \to \mathcal{L}(\langle x, z\rangle) \cup \mathcal{L}(\langle x, y\rangle)$
		3.	$\mathcal{L}(\langle x, y\rangle) \to \emptyset$,
		4.	τίθεται $u \neq z$ για όλα τα u με $u \neq y$
$\sqsubseteq$	εάν	1.	$C \sqsubseteq D \in \mathcal{T}$ και
		2.	$\{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$ για $n \in [0, 1]_{\mathcal{A}}$
		τότε	$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) \cup \{E\}$ για κάποιο $E \in \{\langle \neg C, \geq, 1 - n + \epsilon\rangle, \langle D, \geq, n\rangle\}$ που δεν αντικρούει είτε το $\langle C, \geq, \mathcal{L}(\pi(x), C)\rangle$ είτε το $\langle \neg D, \geq, 1 - \mathcal{L}(\pi(x), D)\rangle$

τέτοια ώστε (i) το σ απεικονίζει κάθε $a \in \text{indivs}(CQ)$ στο $a^{\mathcal{I}}$, (ii) $C^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) \geq n_i$ και (iii) $P^{\mathcal{I}}(\sigma(y_j), \sigma(z_j)) \geq n_j$, όπου τα C_i, P_j είναι οι έννοιες και οι ρόλοι στο CQ, n_i, n_j οι βαθμοί τους, και $x_i, y_i, z_i \in \text{varsIndivs}(CQ)$. Εκ κατασκευής του $\mathcal{I}$ από το T έχουμε επίσης ότι (i) το σ απεικονίζει κάθε $a \in \text{indivs}(CQ)$ στο $\mathcal{V}(a)$, και (ii) $P^{\mathcal{I}}(\sigma(y_j), \sigma(z_j)) = \mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(y_j), \sigma(z_j)\rangle) \geq n_j$.

Προκειμένου να τελειώσουμε την απόδειξη ότι το σ είναι μία απεικόνιση που ικανοποιεί τη συνθήκη $CQ \hookrightarrow T$ πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) \geq n_i$. Από την Εξίσωση 3.4 έχουμε για το $\sigma(x_i)$ ότι είτε $\mathcal{L}(\sigma(x_i), \neg C) > 1 - n$ είτε $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C) \geq n$ ισχύει. Εάν ισχύει ότι $\mathcal{L}(\sigma(x_i), \neg C) > 1 - n$, τότε σύμφωνα με την Εξίσωση 3.5 $(\neg C)^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) > 1 - n$ και τη σημασιολογία του $\neg$ έχουμε ότι $C^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) < n$. Αφού το $C^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) < n$ έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $C^{\mathcal{I}}(\sigma(x_i)) \geq n_i$ (εξ ορισμού της απεικόνισης σ) πρέπει να έχουμε ότι $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C) \geq n$ το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξή μας. ■

Απόδειξη του Λήμματος 3.30: Υποθέτουμε ότι $UCQ \hookrightarrow T$ για κάθε συνεπές tableau T για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ για κάθε $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$ όπου $K = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$ και $q = |UCQ|$. Έστω ότι $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$, από το $\mathcal{F}$

δημιουργούμε ένα tableau T σύμφωνα με την Εξίσωση 3.6. Βάση της απόδειξης του Λήμματος 3.22 αυτό το tableau T είναι συνεπές ως προς το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$, και από την υπόθεσή μας αυτό συνεπάγεται ότι $UCQ \hookrightarrow T$. Αποκαλούμε ένα ζεύγος $\langle s,t\rangle \in \mathbf{S}\times\mathbf{S}$ στο T ως μετα-μπλοκαρισμένο, εάν έχει προκύψει από το δεύτερο κλαδί κατά την κατασκευή του $\mathcal{E}$ σύμφωνα με την Εξίσωση3.6 (αναπαριστά μία ακμή μεταξύ ενός μπλοκαρισμένου και ενός μη μπλοκαρισμένου κόμβου).

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι όταν υπάρχει μία απεικόνιση στο T, η οποίο δεν περιέχει καθόλου μετα-μπλοκαρισμένα ζεύγη, τέτοια ώστε $UCQ \hookrightarrow T$, τότε θα ισχύει επίσης και ότι $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$. Αφού ισχύει $UCQ \hookrightarrow T$, θα υπάρχει ένα συζευκτικό ερώτημα $CQ \in UCQ$ τέτοιο ώστε $CQ \hookrightarrow T$. Αφού $CQ \hookrightarrow T$, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.28, θα υπάρχει μία απεικόνιση σ : varsIndivs(CQ) $\to \mathbf{S}$ τέτοια ώστε : (i) το σ απεικονίζει κάθε $a \in$ indivs(CQ) στο $\mathcal{V}(a)$, (ii) $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) \geq n_i$ και (iii) $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(y_j),\sigma(z_j)\rangle) \geq n_j$, όπου τα C_i, P_j είναι έννοιες και ρόλοι στο CQ, n_i, n_j οι βαθμοί τους, και $x_i, y_i, z_i \in$ varsIndivs(CQ). Εφόσον το $\mathcal{L}(\sigma(x_i), C_i) = n'_i \geq n_i$ ισχύει στο T τότε -εκ κατασκευής του T σύμφωνα με την Εξίσωση 3.6- $\langle C_i, \geq, n'_i\rangle \in \mathcal{L}(\sigma(x_i))$ στο δάσος $\mathcal{F}$ και $n'_i \geq n_i$. Ομοίως εφόσον $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(y_j),\sigma(z_j)\rangle) = n'_j \geq n_j$ ισχύει στο T, συμπεραίνουμε -σύμφωνα με την Εξίσωση 3.6- ότι $\langle P_j, \geq, n'_j\rangle \in \mathcal{L}(\langle\sigma(y_j),\sigma(t_j)\rangle)$ και $n'_j \geq n_j$. Τέλος, σύμφωνα με την Εξίσωση 3.6 έχουμε ότι $\mathcal{V}(a_i) = s_{a_i}$ όπου s_{a_i} είναι ο κόμβος ρίζα. Συνεπώς η απεικόνιση σ ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που περιγράφονται στον Ορισμό 3.27 για το δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ και έτσι $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ και άρα $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ ισχύουν.

Προκειμένου να τελειώσουμε την απόδειξή μας μένει να δείξουμε ότι μία απεικόνιση $\sigma : CQ \to \mathbf{S}$ που περιέχει μετα-μπλοκαρισμένα ζεύγη μπορεί να αναχθεί σε μία απεικόνιση $\sigma' : CQ \to \mathbf{S}$ που δεν θα περιέχει μετα-μπλοκαρισμένα ζεύγη. Η συνθήκη μπλοκαρίσματος στον Ορισμό 3.17 συνεπάγεται ότι στο αρχικό δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$, βάσει του οποίου δημιουργήθηκε το T, υπήρχε ένας ισομορφισμός ψ μεταξύ των κόμβων ενός q-δέντρου A και q-δέντρου B όπου κάθε κόμβος στο B είναι απόγονος ενός κόμβου ρίζα στο A και το σύνολο των κόμβων στο A είναι ξένο από το σύνολο των κόμβων στο B. Έστω ότι ψ είναι ένας ισομορφισμός από τους κόμβους του B στους κόμβους του A. Δημιουργούμε επαγωγικά μία απεικόνιση σ' ως εξής:

$$\sigma'(x) = \begin{cases} \psi(\sigma(x)) & \text{εάν ένας συζευκτέος } P_j(x,y) \geq n_j \text{ στο } CQ \text{ ικανοποιείται από ένα ζεύγος } \langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle \text{ το οποίο αντιστοιχεί σε μία μετα-μπλοκαρισμένη ακμή} \\ \psi(\sigma(x)) & \text{εάν ένας συζευκτέος } P_j(x,y) \geq n_j \text{ στο } CQ \text{ ικανοποιείται από ένα ζεύγος } \langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle \text{ και } \sigma'(y) = \psi(\sigma(y)) \\ \sigma(x) & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Η συνθήκη q-μπλοκαρίσματος διασφαλίζει ότι η απεικόνιση ψ ορίζεται για κάθε $\sigma(x) \in nodes(B)$ αφού το βάθος του q-δέντρου B είναι τουλάχιστον ίσο με το βάθος του CQ.

Εκ κατασκευής, η απεικόνιση σ' δεν περιέχει κάποιο μετα-μπλοκαρισμένο ζεύγος. Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι εάν η σ είναι μία απεικόνιση η οποία υπονοεί ότι $CQ \hookrightarrow T$ το ίδιο ισχύει και για την σ'. Βάσει του ορισμού της q-δέντρο ισοδυναμίας (Ορισμός 3.15) για έναν ισομορφισμό ψ, έχουμε ότι $\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(\psi(s))$ στο δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ και γι' αυτό $\mathcal{L}(s, C) = \mathcal{L}(\psi(s), C)$ για κάθε περιγραφή έννοιας $C \in sub(K)$ στο tableau T και συνεπώς:

$$\mathcal{L}(\sigma(x), C) = \mathcal{L}(\psi(\sigma(x)), C)$$

Τώρα μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{E}(P, \langle\sigma'(x), \sigma'(y)\rangle) = \mathcal{E}(P, \langle\sigma(x), \sigma(x)\rangle)$:

- Εάν η απεικόνιση σ' είχε προκύψει από το πρώτο κλαδί της Εξίσωσης 3.10 αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος $\langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle$ αντιστοιχεί σε μία μετα-μπλοκαρισμένη ακμή, που σημαίνει ότι στο δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ υπάρχει ένας κόμβος z που είναι διάδοχος του $\sigma(x)$ και το $\sigma(y)$ μπλοκάρει το z. Αφού το $\sigma(y)$ μπλοκάρει το z, σύμφωνα με τη συνθήκη του q-μπλοκαρίσματος και της q-δέντρο ισοδυναμίας (Ορισμός 3.17, 3.15) υπάρχει ένας ισομορφισμός ψ τέτοιος ώστε $\psi(z) = \sigma(y)$ και εάν $\langle P, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle\sigma(x), z\rangle)$ τότε $\langle P, \geq, n\rangle \in \mathcal{L}(\langle\psi(\sigma(x)), \psi(z)\rangle)$ ισχύει για κάθε ρόλο στο N_R. Αφού $\mathcal{L}(\langle\sigma(x), z\rangle) = \mathcal{L}(\langle\psi(\sigma(x)), \psi(z)\rangle)$ και $\psi(z) = \sigma(y)$ έχουμε από την κατασκευή του $\mathcal{E}$ ότι $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma'(x), \sigma'(y)\rangle) = \mathcal{E}(P_j, \langle\psi(\sigma(x)), \sigma(y)\rangle) = \mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle)$.
- Εάν η απεικόνιση προέκυψε από το δεύτερο κλαδί της Εξίσωση 3.10 έχουμε εξαιτίας της συνθήκης μπλοκαρίσματος ότι

  $$\mathcal{L}(\langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle) = \mathcal{L}(\langle\psi(\sigma(x)), \psi(\sigma(y))\rangle)$$

  και συνεπώς $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma'(x), \sigma'(y)\rangle) = \mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle)$.
- Τέλος για ακμές $\langle\sigma'(x), \sigma'(y)\rangle$ τέτοιες ώστε $\sigma'(x) = \sigma(x)$ και $\sigma'(y) = \sigma(y)$ προφανώς ισχύει ότι $\mathcal{E}(P_j, \langle\sigma'(x), \sigma'(y)\rangle) = \mathcal{E}(P_j, \langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle)$.

Για αυτό λοιπόν το σ' είναι μία απεικόνιση χωρίς μετα-μπλοκαρισμένες ακμές τέτοιο ώστε να ικανοποιεί το $CQ \hookrightarrow T$. ■

Απόδειξη του Λήμματος 3.31: Έστω ότι $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ για κάθε $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$ όπου $K = \langle\mathcal{T}, \mathcal{A}\rangle$ και $q = |UCQ|$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $UCQ \hookrightarrow T$ για κάθε συνεπές tableau T για το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{T}$. Η απόδειξή μας θα βασιστεί στη μέθοδο της εις άτοπο επαγωγής. Κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει ένα tableau T για το οποίο δεν ισχύει $CQ \hookrightarrow T$.

Κατασκευάζουμε από το T ένα δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ όπως στο Λήμμα 3.23 μέσω μίας απεικόνισης π η οποία απεικονίζει κόμβους του $\mathcal{F}$ σε στοιχεία του **S** και "καθοδηγεί" την εφαρμογή των μη ντετερμινιστικών κανόνων και με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπάρχουν αντιθέσεις μεταξύ της γνώσης του T και της γνώσης στο $\mathcal{F}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.23 $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$. Αφού $UCQ \hookrightarrow \mathcal{F}$ για κάθε $\mathcal{F} \in ccf(\mathbb{F}_K^q)$, υπάρχει μία απεικόνιση σ : varsIndivs$(CQ) \rightarrow nodes(\mathcal{F})$ έτσι ώστε: (i) το σ απεικονίζει κάθε άτομο στο indivs(CQ) στον αντίστοιχο κόμβο ρίζα, (ii) $\langle C_i, \geq, n_i \rangle \in \mathcal{L}(\sigma(x_i))$ για κάθε συζευκτέο $C_i(x_i) \geq n_i$ στο CQ, και (iii) ο κόμβος $\sigma(y_i)$ είναι ένας $P_{j \geq n_j}$-διάδοχος του κόμβου $\sigma(z_j)$ για κάθε συζευκτέο $P_j(y_j, z_j) \geq n_j$ στο CQ (όπου το CQ είναι μία απεικόνιση στο UCQ τέτοια ώστε $CQ \hookrightarrow \mathcal{F}$).

Βασισμένοι στις απεικονίσεις π, σ φτιάχνουμε μία νέα απεικόνιση σ' : varsIndivs$(CQ) \rightarrow$ **S** ως εξής: $\sigma'(x) = \pi(\sigma(x))$. Από τις ιδιότητες της απεικόνισης π που παρουσιάστηκαν στις Εξισώσεις 3.7, 3.8, 3.9 έχουμε ότι εάν $\langle C, \geq, n \rangle \in \mathcal{L}(\sigma(x))$ στο $\mathcal{F}$ τότε και $\mathcal{L}(\pi(\sigma(x)), C) \geq n$ στο T. Έχουμε επίσης ότι αν ο $\sigma(x)$ είναι $P_{\geq n}$-διάδοχος του $\sigma(y)$ στο δέντρο ολοκλήρωσης $\mathcal{F}$ τότε

$$\mathcal{E}(P, \langle \pi(\sigma(x)), \pi(\sigma(y)) \rangle) \geq n$$

ισχύει στο T. Τέλος εφόσον η απεικόνιση π απεικονίζει κόμβους ρίζες σε στοιχεία του $\mathcal{V}$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σ' συνεπάγεται ότι $CQ \hookrightarrow T$ το οποίο αντικρούει την υπόθεσή μας ότι το $CQ \hookrightarrow T$ δεν ισχύει. ■

Απόδειξη του Λήμματος 3.36: Αντίστροφο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν ισχύει $K \models UCQ'$ θα ισχύει και $K \models UCQ$. Έστω ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο του K. Εάν έχουμε ότι $\mathcal{I} \models CQ$ για κάποιο $CQ \in UCQ' \cap UCQ$, τότε προφανώς και θα ισχύει $\mathcal{I} \models UCQ$. Εάν $\mathcal{I} \models CQ$ για κάποιο $CQ \in UCQ' \setminus UCQ$ τότε σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 3.1 ικανοποιεί μία συζευκτική ερώτηση της μορφής:

$$\begin{aligned} CQ' &= p_1(\overline{Y}_1) \geq n_1 \wedge \ldots \wedge r_1(\psi(\overline{X}_1)) \geq n_q \wedge \ldots \\ &\quad \wedge r_k(\psi(\overline{X}_k)) \geq n_q \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{Y}_k) \geq n_k \end{aligned}$$

όπου η απεικόνιση ψ ορίστηκε βάσει του Αλγορίθμου 3.1 εξαιτίας της ύπαρξης ενός Horn κανόνα $r_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge r_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$. Αφού το $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το CQ', τότε υπάρχει μία απεικόνιση σ : varsIndivs$(CQ') \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι $r_i^{\mathcal{I}}(\sigma(\psi(\overline{X}_i))) \geq n_q$ για κάθε $1 \leq i \leq k$. Σύμφωνα με την σημασιολογία των Horn κανόνων έχουμε ότι:

$$q^{\mathcal{I}}(\sigma(\psi(\overline{Y}))) \geq min(r_1^{\mathcal{I}}(\sigma(\psi(\overline{X}_1))), \ldots, r_k^{\mathcal{I}}(\sigma(\psi(\overline{X}_k)))) \geq n_q$$

και εφόσον $\psi(\overline{Y}) = \overline{Y}_q$ έχουμε επίσης ότι $q^{\mathcal{I}}(\sigma(\overline{Y}_q)) \geq n_q$. Συνεπώς υπάρχει και μία λύση για το UCQ.

Ευθύ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $K \models UCQ \Rightarrow K \models UCQ'$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι όταν υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}'$ του K το οποίο δεν ικανοποιεί το UCQ' τότε υπάρχει επίσης και ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του K το οποίο δεν ικανοποιεί το UCQ. Εάν η διερμηνεία $\mathcal{I}'$ δεν ικανοποιεί το UCQ τότε το $\mathcal{I}'$ είναι η απεικόνιση που αναζητούμε. Εάν το $\mathcal{I}'$ ικανοποιεί το UCQ αυτό σημαίνει ότι το ερώτημα $CQ \in UCQ \setminus UCQ'$

ικανοποιείται από το $\mathcal{I}'$ ($UCQ \setminus UCQ'$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο αφού σε κάθε εκτελέσει του αλγορίθμου μόνο ένα συζευκτικό ερώτημα φεύγει). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία απεικόνιση $\sigma : \mathrm{varsIndivs}(CQ') \to \Delta^{\mathcal{I}'}$ τέτοια ώστε:

$$p_1^{\mathcal{I}'}(\sigma(\overline{Y}_1)) \geq n_1 \wedge \ldots \wedge q^{\mathcal{I}'}(\sigma(\overline{Y}_q)) \geq n_q \wedge \ldots \wedge p_k^{\mathcal{I}'}(\sigma(\overline{Y}_k)) \geq n_k$$

Από τη διερμηνεία $\mathcal{I}'$ κτίζουμε μία ακόμα διερμηνεία $\mathcal{I}$ έτσι ώστε $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}'}$ και το $\cdot^{\mathcal{I}}$ είναι πανομοιότυπο με το $\cdot^{\mathcal{I}'}$ με μόνη διαφορά ότι $q^{\mathcal{I}}(\sigma(\overline{Y}_q)) = n'_q$ τέτοιο ώστε το n'_q να ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες:

- για κάθε Horn κανόνα της μορφής $p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$ που έχει το q στην κεφαλή του ισχύει ότι $n'_q \geq \min(p_1^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_1})), \ldots, p_k^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_k})))$ για κάθε απεικόνιση $\psi : \mathrm{varsIndivs}(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k, \overline{Y}) \to \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε $\psi(\overline{Y}) = \sigma(\overline{Y}_q)$.

- για κάποιον Horn κανόνα της μορφής $p_1(\overline{X}_1) \wedge \ldots \wedge p_k(\overline{X}_k) \Rightarrow q(\overline{Y})$ που έχει το q στην κεφαλή του ισχύει ότι $n'_q = \min(p_1^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_1})), \ldots, p_k^{\mathcal{I}}(\psi(\overline{X_k})))$ για κάποια απεικόνισή $\psi : \mathrm{varsIndivs}(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k, \overline{Y}) \to \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε $\psi(\overline{Y}) = \sigma(\overline{Y}_q)$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι επίσης ένα μοντέλο του K αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί κάθε Horn κανόνα στο $\mathcal{H}$ που έχει το q στην κεφαλή του. Αυτό είναι προφανές από την επιλογή του βαθμού n'_q και τη σημασιολογία των Horn κανόνων που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3.3. Συνεπώς για το δημιουργημένο μοντέλο $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $q^{\mathcal{I}}(\sigma(\overline{Y}_q)) = n'_q < n_q$ (διαφορετικά δεν θα υπήρχε κάποιο μοντέλο του $\mathcal{I}'$ το οποίο επίσης θα ικανοποιούσε το UCQ'). Εάν υπάρχει κάποια άλλη απεικόνιση σ' τέτοια ώστε $q^{\mathcal{I}}(\sigma'(\overline{Y}_q)) \geq n_q$ με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να μεταβάλουμε τη διερμηνεία μας έτσι ώστε να ισχύει $q^{\mathcal{I}}(\sigma'(\overline{Y}_q)) < n_q$. Για αυτό το λόγο μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του K τέτοιο ώστε να ικανοποιεί το CQ και συνεπώς το UCQ όπως θέλαμε να δείξουμε. ■

Απόδειξη του Λήμματος 3.37: Θέλουμε να δείξουμε ότι $\langle \beta, \mathcal{T} \rangle \models \{Q_1, \ldots, Q_m\} \Leftrightarrow K \models \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ για $K = \langle \mathcal{A}', \mathcal{T} \rangle$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει κάποιο μοντέλο $\mathcal{I}' \models K$ τέτοιο ώστε $\mathcal{I}' \not\models \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ ανν υπάρχει κάποιο μοντέλο $\mathcal{I} \models \langle \beta, \mathcal{T} \rangle$ τέτοιο ώστε $\mathcal{I} \not\models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$.

Για το ευθύ: Έστω ότι $\mathcal{I}' \models K$ και $\mathcal{I}' \not\models \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$. Από την απεικόνιση $\mathcal{I}'$ δημιουργούμε μία απεικόνιση $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}'}$, $x^{\mathcal{I}} = h(x)^{\mathcal{I}'}$ για κάθε $x \in \mathrm{varsIndivs}(\beta)$, $A^{\mathcal{I}}(v) = A^{\mathcal{I}'}(v)$ και $R^{\mathcal{I}}(v, \omega) = R^{\mathcal{I}'}(v, \omega)$ για κάθε $v, \omega \in \Delta^{\mathcal{I}'}$. Είναι προφανές ότι $\mathcal{I} \models \langle \beta, \mathcal{T} \rangle$. Προκειμένου να τελειώσουμε την απόδειξή μας μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{I} \not\models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$.

Κάνουμε την υπόθεση ότι $\mathcal{I} \models Q_i$ για κάποιο $1 \leq i \leq m$. Τότε υπάρχει μία απεικόνιση $\tau : \mathrm{varsIndivs}(Q_i) \to \Delta^{\mathcal{I}}$ η οποία θα ικανοποιεί τις συνθήκες που περιγράφονται στην Εξίσωση 3.3. Ορίζουμε μία απεικόνιση $\sigma : \text{varsIndivs}(Q'_i) \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}'}$ τέτοια ώστε:

$$\sigma(x') = \begin{cases} \tau(x') & \text{εάν } x' \in \text{vars}(Q'_i) \\ x'^{\mathcal{I}'} & \text{εάν } x' \in \text{indivs}(Q'_i) \end{cases} \tag{3.11}$$

Προκειμένου να αποδειχθεί ότι το σ είναι μία λύση για το Q'_i αρκεί να δειχθεί ότι $\tau(x) = \sigma(x')$ για κάθε στοιχείο $x \in \text{varsIndivs}(Q_i)$, $x' \in \text{varsIndivs}(Q'_i)$ τέτοιο ώστε εάν το x βρίσκεται στην j-οστή θέση στο Q_i, το x' βρίσκεται στην j-οστή θέση στο Q'_i. Εάν το x είναι μία υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή στο Q_i τότε παραμένει αμετάβλητη στο Q'_i και συνεπώς $\tau(x) = \sigma(x')$ σύμφωνα με την εξίσωση 3.11. Εάν το x είναι μία καθολικά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή, ή κάποιο άτομο στο Q_i, τότε το x' αντιστοιχεί στο $h(x)$ στο Q'_i. Από την Εξίσωση 3.3 έχουμε ότι $\tau(x) = x^{\mathcal{I}}$ και από την Εξίσωση 3.11 ότι $\sigma(x') = h(x)^{\mathcal{I}'}$. Από την κατασκευή του $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $x^{\mathcal{I}} = h(x)^{\mathcal{I}'}$ όπως θέλαμε να δείξουμε. Συνεπώς προκύπτει ότι $\mathcal{I}' \models \{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$ το οποίο είναι αδύνατο και συνεπώς η υπόθεση ότι $\mathcal{I} \models Q_i$ είναι λάθος το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{I} \not\models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$.

Για το αντίστροφο. Έστω ότι $\mathcal{I} \models \langle \beta, \mathcal{T} \rangle$ και $\mathcal{I} \not\models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Για κάθε $x \in \text{varsIndivs}(\beta)$ δημιουργούμε έναν ομομορφισμό h ως εξής:

$$h(x) = \{y \mid x^{\mathcal{I}} = y^{\mathcal{I}} \text{ για κάθε } y \in \text{varsIndivs}(\beta)\}$$

Από τον ομομορφισμό h δημιουργούμε ένα νέο ABox $\mathcal{A}'$ και μία ένωση συζευκτικών ερωτημάτων $\{Q'_1, \ldots, Q'_m\}$.

Από το $\mathcal{I}$ δημιουργούμε μία απεικόνιση $\mathcal{I}'$ τέτοια ώστε $\Delta^{\mathcal{I}'} = \Delta^{\mathcal{I}}$, $h(x)^{\mathcal{I}'} = x^{\mathcal{I}}$ για κάθε $x \in \text{varsIndivs}(\beta)$, $A^{\mathcal{I}'}(\upsilon) = A^{\mathcal{I}}(\upsilon)$ και $R^{\mathcal{I}'}(\upsilon, \omega) = R^{\mathcal{I}}(\upsilon, \omega)$ για κάθε $\upsilon, \omega \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Προφανώς $\mathcal{I}' \models \mathcal{A}'$. Εάν $\mathcal{I}' \models Q'_i$ για κάποιο Q'_i τότε υπάρχει μία απεικόνιση $\sigma : \text{varsIndivs}(Q'_i) \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}'}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες που περιγράφονται στην Εξίσωση 3.1. Από την απεικόνιση αυτή δημιουργούμε μία νέα απεικόνιση $\tau : \text{varsIndivs}(Q_i) \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sigma(h(x)) & \text{εάν } x \in \text{varsIndivs}(\beta) \\ \sigma(x) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι η απεικόνιση τ ικανοποιεί τις συνθήκες που περιγράφηκαν στην Εξίσωση 3.3 και συνεπώς συνεπάγεται ότι $\mathcal{I} \models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$. Εφόσον το $\mathcal{I} \models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $\mathcal{I} \not\models \{Q_1, \ldots, Q_m\}$, η υπόθεση που έχουμε κάνει ότι $\mathcal{I}' \models Q'_i$ είναι λάθος. ∎

Κεφάλαιο 4

Βατές Ασαφείς ΠΛ

Αν και οι αλγόριθμοι συλλογιστικής για πολύ εκφραστικές ασαφείς ΠΛ έχουν μελετηθεί αρκετά, η αποδοτικότητα συστημάτων ασαφών ΠΛ δεν έχει εξεταστεί επαρκώς. Ένα σημαντικό θέμα προς έρευνα είναι η μελέτη βατών συστημάτων ασαφών ΠΛ. Στο πλαίσιο αυτό θα μελετήσουμε μία βατή ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{EL}^{++}$ η οποία επιλύει το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών σε πολυωνυμικό χρόνο. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η σύνταξη και η σημασιολογία της προτεινόμενης γλώσσας μαζί με έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Όπως θα αποδειχθεί, μία ευρεία κατηγορία σχετικών προβλημάτων μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα αυτό. Στα Κεφάλαια 5,6 θα εξεταστούν επεκτάσεις της προτεινόμενης γλώσσας με απτά πεδία και κανόνες.

4.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, υπάρχουν περιπτώσεις όπου προκειμένου να περιγράψουμε διάφορα στιγμιότυπα του κόσμου μας χρειαζόμαστε εκφραστικά μέσα για να αναπαραστήσουμε ασαφή και ατελή πληροφορία. Οι ασαφείς ΠΛ παρέχουν αυτή τη δυνατότητα και ως εκ τούτου έχουν χρησιμοποιηθεί σε μία πλειάδα εφαρμογών.

Σύμφωνα με τους Calvanese et al. (2005), *"ένα από τα σημαντικότερα θέματα των περιγραφικών λογικών αφορά στον συμβιβασμό μεταξύ της εκφραστικότητας μιας γλώσσας και της υπολογιστικής της πολυπλοκότητας προκειμένου να επιτευχθεί ένας ορθός και πλήρης αλγόριθμος συμπερασματολογίας"*. Τα τελευταία χρόνια, πολλές εκφραστικές γλώσσες ασαφών ΠΛ έχουν προταθεί, όπως η ασαφής $\mathcal{SHIN}$ (Stoilos et al., 2007), η ασαφής $\mathcal{SHIF}(D)$ (Straccia, 2005b) και η ασαφής $\mathcal{SROIQ}$ (Bobillo et al., 2007), με αποτέλεσμα τη δημιουργία συστημάτων όπως το *FiRE* [1], *το fuzzyDL* [2] και

[1] `http://www.image.ece.ntua.gr/~nsimou/FiRE/`

[2] `http://faure.isti.cnr.it/~straccia/software/fuzzyDL/fuzzyDL.html`

το *DELOREAN*[3]. Τα προαναφερθέντα συστήματα βασίζονται σε ασαφείς επεκτάσεις αλγορίθμων που στη χειρότερη περίπτωσή τους είναι εκθετικοί και συνεπώς ακατάλληλοι για *κλιμακούμενου μεγέθους (scalable)* συστήματα. Ως εκ τούτου, όπως και για τις κλασσικές ΠΛ, νέα ερευνητικά ενδιαφέροντα έχουν αναδυθεί με κύριο στόχο την ανάπτυξη ορθών και πλήρων αλγορίθμων για βατές ασαφείς ΠΛ, δηλαδή για υποσύνολα των ασαφών περιγραφικών λογικών πολυωνυμικής πολυπλοκότητας.

Προκειμένου να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος στόχος, διάφορες προσεγγίσεις, βασισμένες σε διαφορετικά κλασσικά συστήματα ΠΛ, έχουν προταθεί. Ο Straccia (2006a) προτείνει μία ασαφή επέκταση της *DL-Lite* γλώσσας, ενώ οι Pan et al. (2007b) παρουσιάζουν το πρώτο αποτελεσματικό και βατό σύστημα για τη γλώσσα της ασαφούς *DL-Lite* το οποίο δύναται να απαντήσει σε εκφραστικά συζευκτικά ερωτήματα επάνω σε σύνολα εκατομμυρίων δεδομένων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι δουλειές που σχετίζονται με την $\mathcal{EL}$ *οικογένεια γλωσσών* που έχει προταθεί από τους Baader et al. (2005). Αρχικά ο Vojtáš (2007) παρουσίασε μία *ασαφή επέκταση* της $\mathcal{EL}$ γλώσσας η οποία διαφοροποιείται από τις περισσότερες ΠΛ γλώσσες στο ότι η διερμηνεία της σύζευξης είναι μία συνάρτηση *ασαφούς συνάθροισης*, ενώ οι Stoilos et al. (2008) εξετάζουν μία *ασαφή επέκταση* της *βατής* γλώσσας $\mathcal{EL}^+$.

Η ασαφής $\mathcal{EL}^+$ ΠΛ που παρουσιάστηκε από τους Stoilos et al. (2008) έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες αφού είναι μία γλώσσα πολυωνυμικής πολυπλοκότητας η οποία επεκτείνει αξιώματα εννοιών με βαθμούς αλήθειας επιτρέποντας ασαφείς υπαγωγές εννοιών. Πάραυτα, η προτεινόμενη γλώσσα παρέχει έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο μόνο για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών, χωρίς όμως να παρέχει ονοματικές έννοιες, και συνεπώς είναι ακατάλληλη για προβλήματα συλλογιστικής με ισχυρισμούς εννοιών ή ρόλων (στην Παράγραφο 4.3.2 περιγράφονται αναλυτικά τα αντίστοιχα προβλήματα). Συνεπώς η ασαφής $\mathcal{EL}^+$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε προβλήματα ταξινόμησης μίας οντολογίας εφόσον δεν υποστηρίζει την ύπαρξη ατόμων στη γνώση της. Στο Παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζουμε την εκφραστικότητα που παρέχει η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ χρησιμοποιώντας ένα σενάριο ιατρικής εφαρμογής.

Παράδειγμα 4.1 *Στα πλαίσια του έργου* ASSIST *κατασκευάστηκε μία οντολογία που σχετίζεται με τον* καρκίνο της μήτρας *(Mitkas et al., 2008; Falelakis et al., 2009). Σύμφωνα με την οντολογία που παρουσιάζεται από τους Falelakis et al. (2009) η διάγνωση του καρκίνου της μήτρας βασίζεται κυρίως σε τρεις τύπους εξετάσεων, συγκεκριμένα την* κυτταρολογική εξέταση, *την* κολποσκόπηση, *και την* ιστολογική εξέταση. *Κάθε ασθενής μπορεί να έχει μία ή περισσότερες από αυτές τις εξετάσεις με κάποιο από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Σύμφωνα με τα ευρήματα της κάθε εξέτασης κάθε γυναίκα χαρακτηρίζεται από κάποιον δείκτη επικινδυνότητας. Μία γυναίκα με δείκτη επικινδυνότητας* ASSIST0 *θεωρείται υγιής, ενώ μία γυναίκα με δείκτη επικινδυνότητας*

[3]`http://webdiis.unizar.es/~fbobillo/delorean.php`

Πίνακας 4.1: *Κατηγοριοποίηση του γυναικείου πληθυσμού ως προς τον καρκίνο της μήτρας.*

ASSIST0 Κυτταρολογικό, Κολποσκοπικό, Ιστολογικό αποτέλεσμα	Αυτά τα αποτελέσματα προσδιορίζουν υγιείς γυναίκες.
ASSIST1 Κυτταρολογικό, Κολποσκοπικό, Ιστολογικό αποτέλεσμα	Αυτά τα αποτελέσματα προσδιορίζουν γυναίκες οι οποίες θα πρέπει να παρακολουθούνται σε πιο τακτική βάση και δεν επιβάλλεται η αφαίρεση ή χειρουργική αντιμετώπιση του αλλοιωμένου μητρικού επιθηλίου.
ASSIST2 Κυτταρολογικό, Κολποσκοπικό, Ιστολογικό αποτέλεσμα	Αυτά τα αποτελέσματα προσδιορίζουν γυναίκες οι οποίες έχουν κυτταρολογική εξέταση που υποδεικνύει ότι έχουν σημαντικές δυσπλασίες στα 2/3 του επιθηλίου, οι οποίες μπορείς να εξελιχθούν σε πλήρη δυσπλασία. Γυναίκες οι οποίες έχουν κολποσκοπικές εξετάσεις που υποδεικνύουν υψηλού βαθμού ανωμαλίες στον ιστό. Αυτά τα αποτελέσματα υποδεικνύουν γυναίκες οι οποίες είχαν LLETZ ή cone βιοψία και έχει αποδειχθεί ιστολογικά ότι έχουν δυσπλασίες στο επιθήλιο χωρίς όμως να έχουν στρωματική διείσδυση.
ASSIST3 Κυτταρολογικό, Κολποσκοπικό, Ιστολογικό αποτέλεσμα	Αυτά τα αποτελέσματα αναφέρονται σε γυναίκες με διεισδυτικό καρκίνο.

ASSIST3 *θεωρείται ότι έχει* διεισδυτικό καρκίνο.

$$\exists \text{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0 \tag{4.1}$$

Δυστυχώς η κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα δεν επιτρέπει να εκφράσουμε το γεγονός ότι το αποτέλεσμα μίας ιστολογικής εξέτασης είναι πιο σημαντικό από αυτό μίας κυτταρολογικής εξέτασης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εάν υιοθετήσουμε μία ασαφή έκδοση της $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας η οποία θα παρέχει μία βαθμονόμηση που σχετίζεται με τη βεβαιότητα των αποτελεσμάτων της κάθε εξέτασης. Άλλου είδους περιβάλλοντα στα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί οι ασαφείς ΠΛ με αντίστοιχο τρόπο —προκειμένου να παρέχουν διαβάθμιση μεταξύ ατόμων— έχουν προταθεί από τους Meghini et al. (2001); Simou et al. (2008); Dasiopoulou et al. (2008); Ferrara et al. (2008) για εφαρμογές όπως πολυμεσικές (multimedia), ανάκτησης πληροφορίας (information retrieval), *και* ευθυγράμμισης οντολογιών (ontology alignment).

Για παράδειγμα η ασαφής υπαγωγή έννοιας:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \;=\; \{ & \langle \exists έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα.ASSIST0 \sqsubseteq \\ & \qquad \exists έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας.ASSIST0, 0.6\rangle, \\ & \langle \exists έχειΙστολογικόΑποτέλεσμα.ASSIST0 \sqsubseteq \\ & \qquad \exists έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας.ASSIST0, 0.8\rangle \ldots\} \end{aligned}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να εκφράσουμε το γεγονός ότι μία ιστολογική εξέταση είναι πιο σημαντική, ως προς τη διάγνωση για το βαθμό επικινδυνότητας, από μία κυτταρολογική εξέταση.

Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της χρήσης της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$, αντί της χρήσης της ασαφούς $\mathcal{EL}^{+}$, προκειμένου να αναπαραστήσουμε τη γνώση μας, είναι το γεγονός ότι μας παρέχει ονοματικές έννοιες (nominals). *Οι ονοματικές έννοιες επιτρέπουν τη συσχέτιση της ορολογικής μας γνώσης με ένα σύνολο ισχυρισμών, όπως μπορεί να είναι η πληροφορία που σχετίζεται με κάθε ασθενή. Για παράδειγμα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ασθενής*137 *έχει μία κυτταρολογική εξέταση με ένα $ASSIST0$ αποτέλεσμα:*

$$(\exists έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα.ASSIST0)(ασθενής137) \geq 1$$

Βασισμένοι στο προηγούμενο σενάριο, παρουσιάσαμε μία ασαφή επέκταση της $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας. Ομοίως με την ασαφή $\mathcal{EL}^{+}$, η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ επιτρέπει για αξιώματα υπαγωγής εννοιών που εμπεριέχουν *βαθμούς αληθείας* όπως αυτά προτάθηκαν από τον Straccia (2005a). Επιπλέον, επεκτείνουν την εκφραστικότητα της γλώσσας δίνοντας τη δυνατότητα αναπαράστασης ονοματικών εννοιών και της κάτω έννοιας. Οι κύριες συνεισφορές μας που συνοψίζονται σε αυτή την παράγραφο είναι οι εξής:

- Παρουσιάσαμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας η οποία είναι πιο εκφραστική της $\mathcal{EL}^{+}$ λόγω της ύπαρξης ονοματικών εννοιών και της κάτω έννοιας.

- Μελετήσαμε και παρουσιάσαμε την αναγωγή των πιο κοινών προβλημάτων των ασαφών ΠΛ στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Πρέπει να σημειωθεί ότι η αναγωγή αυτή δεν έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία των ασαφών ΠΛ μέχρι τώρα.

- Παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ καθώς και αναλυτικές αποδείξεις για την ορθότητα και πληρότητα του αλγορίθμου μας.

- Μελετήσαμε την πολυπλοκότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου.

Ο βασικός στόχος της έρευνάς μας γύρω από την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ δεν είναι να παρουσιάσουμε μία πιο εκφραστική γλώσσα σε σχέση με προηγούμενες ασαφείς ΠΛ γλώσσες —τα περισσότερα από τα εκφραστικά μέσα που σχετίζονται με τη γλώσσα μας έχουν ήδη παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία—. Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ εκφραστικότητας και πολυπλοκότητας, προκειμένου να εισάγουμε μία νέα ασαφή ΠΛ γλώσσα που είναι αρκετά εκφραστική προκειμένου να χρησιμοποιηθεί σε ρεαλιστικές εφαρμογές και ταυτοχρόνως να διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι δομημένο ως εξής. Στην Παράγραφο 4.2 παρουσιάζουμε συνοπτικά την κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ ΠΛ που προτάθηκε από τους Baader et al. (2005). Στην Παράγραφο 4.3 παρουσιάζεται η σύνταξη και σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας, καθώς και τα σημαντικότερα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων και η μεθοδολογία αναγωγής τους στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Στην Παράγραφο 4.4 παρουσιάζεται λεπτομερώς η διαδικασία συλλογιστικής που χρησιμοποιείται για να επιλυθεί το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών ως προς μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία και παρατίθενται αναλυτικές αποδείξεις για την ορθότητα, πληρότητα, και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Τέλος στην Παράγραφο 4.5 παρουσιάζονται οι σχετικές εργασίες που αφορούν την οικογένεια γλωσσών της ασαφούς $\mathcal{EL}$, ενώ η Παράγραφος 4.6 ολοκληρώνει το κεφάλαιο με μία συζήτηση γύρω από το αν και πώς μπορεί να επεκταθεί η γλώσσα που προτάθηκε.

4.2 $\mathcal{EL}^{++}$

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την Περιγραφική Λογική $\mathcal{EL}^{++}$ την οποία και θα επεκτείνουμε στη γλώσσα της *ασαφούς* $\mathcal{EL}^{++}$. Η ΠΛ $\mathcal{EL}^{++}$ που προτάθηκε από τους Baader et al. (2005) είναι μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης που σχεδιάστηκε έτσι, ώστε να μπορεί να αναπαραστήσει και να εξαγάγει συμπεράσματα γύρω από τη γνώση ενός πεδίου ενδιαφέροντος σε πολυωνυμικό χρόνο. Ο *οπλισμός (signature)* της $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας (Baader et al., 2005) αποτελείται από τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: *ονομάτων εννοιών* N_C (***concept names***), *ονομάτων ρόλων* N_R (***role names***), και *ατόμων* N_I (***individuals***). Τα άτομα αντιστοιχούν σε αντικείμενα του κόσμου μας, ενώ οι έννοιες και οι ρόλοι αντιστοιχούν σε μοναδιαία και δυαδικά κατηγορήματα (unary/binary predicates) που αναπαριστούν σύνολα και δυαδικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων του κόσμου μας. Η $\mathcal{EL}^{++}$ μας επιτρέπει να ορίσουμε περιγραφές εννοιών χρησιμοποιώντας τους κατασκευαστές που περιγράφονται στο άνω τμήμα του Πίνακα 4.2 όπου τα a και b αντιστοιχούν σε ονόματα ατόμων, τα $R, R_1, \ldots, R_k$ και S είναι ονόματα ρόλων, ενώ τα C, D αντιστοιχούν σε περιγραφές εννοιών.

Μία $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ είναι ένα ζεύγος $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$, όπου το $\mathcal{A}$ είναι το *σώμα ισχυρι-*

Πίνακας 4.2: *Σύνταξη και σημασιολογία της $\mathcal{EL}^{++}$.*

Όνομα Έννοιας	Σύνταξη	Σημασιολογία
άνω	$\top$	$\Delta^{\mathcal{I}}$
κάτω	$\bot$	$\emptyset$
ονοματική έννοια	$\{a\}$	$\{a^{\mathcal{I}}\}$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} : (x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$
GCI	$C \sqsubseteq D$	$C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$
RI	$R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq S$	$R_1^{\mathcal{I}} \circ \ldots \circ R_k^{\mathcal{I}} \subseteq S^{\mathcal{I}}$
ισχυρισμός έννοιας	$C(a)$	$a^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$
ισχυρισμός ρόλου	$R(a,b)$	$(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$

σμών (assertional box-ABox) και το $\mathcal{C}$ είναι το *σώμα περιορισμών (constraint box-CBox)*. Ένα $\mathcal{EL}^{++}$ ABox είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από ισχυρισμούς εννοιών και ρόλων οι οποίοι χρησιμοποιούνται προκειμένου να αναπαραστήσουν στιγμιότυπα του κόσμου μας. Ένα $\mathcal{EL}^{++}$ CBox είναι ένα πεπερασμένο σύνολο *γενικευμένων υπαγωγών εννοιών (general concept inclusions-GCIs)* και *υπαγωγών ρόλων (role inclusions-RIs)* που χρησιμοποιούνται, προκειμένου να περιγράψουν την ορολογική γνώση μίας οντολογίας. Η σύνταξη των αξιωμάτων που βρίσκονται στο σώμα ισχυρισμών και στο σώμα περιορισμών παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2. Η σημασιολογία μίας $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογίας δίνεται βάσει μίας *διερμηνείας (interpretation)* $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$. Το πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη κενό σύνολο από αντικείμενα και η συνάρτηση διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ απεικονίζει κάθε όνομα έννοιας $A \in N_C$ σε ένα υποσύνολο $A^{\mathcal{I}}$ του $\Delta^{\mathcal{I}}$, κάθε όνομα ρόλου $R \in N_R$ σε μία δυαδική σχέση $R^{\mathcal{I}}$ στο $\Delta^{\mathcal{I}}$, και κάθε άτομο $a \in N_I$ σε ένα αντικείμενο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Η επέκταση του $\cdot^{\mathcal{I}}$ σε σύνθετες περιγραφές εννοιών ορίζεται επαγωγικά βάση της σημασιολογίας του Πίνακα 4.2. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο μίας οντολογίας $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ όταν είναι μοντέλο του $\mathcal{A}$ και του $\mathcal{C}$. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο ενός ABox $\mathcal{A}$ (CBox $\mathcal{C}$) όταν και μόνο όταν κάθε ισχυρισμός έννοιας και ρόλου στο $\mathcal{A}$ (GCI και RI στο $\mathcal{C}$) ικανοποιεί τη σημασιολογία των $\mathcal{EL}^{++}$ περιγραφών εννοιών που δίνονται στην τρίτη στήλη του Πίνακα 4.2.

4.3 Ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$

4.3.1 Σύνταξη και Σημασιολογία

Σε αυτήν την παράγραφο προτείνουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς επέκτασης της $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας. Από τη στιγμή που η σημασιολογία που προτείνεται βασίζεται στους τελεστές της Gödel λογικής μπορούμε να αποκαλούμε την προτεινόμενη γλώσσα και f$_G$-$\mathcal{EL}^{++}$. Η γλώσσα που προτείνουμε ακολουθεί την πρότυπη σύνταξη και σημασιολογία των ασαφών ΠΛ που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία (Straccia, 2001; Hölldobler et al., 2002; Stoilos et al., 2007). Μία συζήτηση γύρω από τις δυσκολίες επέκτασης της $\mathcal{EL}^{++}$ με οποιουσδήποτε ασαφείς τελεστές παρουσιάζεται στην Παράγραφο 4.5.

Όπως και η κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα, η f$_G$-$\mathcal{EL}^{++}$ περιγράφει τη γνώση για ένα πεδίο ενδιαφέροντος μέσω *ονομάτων εννοιών* N_C, *ονομάτων ρόλων* N_R και *ατόμων* N_I. Ως συνήθως τα άτομα αναπαριστούν τα αντικείμενα του κόσμου μας, τα ονόματα εννοιών αντιστοιχούν σε ασαφή σύνολα ατόμων, και τα ονόματα ρόλων αντιστοιχούν σε δυαδικές σχέσεις μεταξύ ατόμων του κόσμου μας.

Η γενική σύνταξη των εννοιών και των ρόλων είναι η ίδια με αυτήν που προτείνει η κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα· παρόλα αυτά η σημασιολογία τους βασίζεται στις ασαφείς διερμηνείες. Μία ασαφής διερμηνεία $\mathcal{I} = \langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ αποτελείται από ένα πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$ το οποίο είναι ένα μη κενό σύνολο από αντικείμενα και μία ασαφή συνάρτηση διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ η οποία απεικονίζει:

- κάθε άτομο $a \in N_I$ σε κάποιο στοιχείο $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$,
- κάθε έννοια $A \in N_C$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$,
- κάθε ρόλο $R \in N_R$ σε μία συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$.

Για παράδειγμα, για μία διερμηνεία $\mathcal{I}$, εάν $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τότε $A^{\mathcal{I}}(x)$ είναι ο βαθμός στον οποίο το αντικείμενο x ανήκει στην ασαφή έννοια A, π.χ. $A^{\mathcal{I}}(x) = 0.8$.

Η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ μας επιτρέπει να ορίσουμε επαγωγικά πολύπλοκες περιγραφές εννοιών χρησιμοποιώντας τους ίδιους κατασκευαστές με την κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Όπως και για την κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$, η σημασιολογία των *περιγραφών εννοιών* ορίζεται επαγωγικά όπως παρουσιάζεται στο άνω μέρος του Πίνακα 4.3 για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$, όπου τα a και b χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν άτομα στο N_I, οι C και D είναι είτε περιγραφές είτε ονόματα εννοιών στο N_C, και το R χρησιμοποιείται προκειμένου να αναπαραστήσει το όνομα ενός ρόλου στη N_R. Η σημασιολογία των περιγραφών εννοιών βασίζεται στους Gödel ασαφούς τελεστές που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 2.1.2. Για παράδειγμα, από τη στιγμή που η min συνάρτηση χρησιμοποιείται για σύζευξη, έχουμε ότι $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(x) = \min(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x))$. Σε συνέπεια με τις κλασσικές ΠΛ, η άνω έννοια χρησιμοποιείται προκειμένου να περιγράψει το

Πίνακας 4.3: *Σύνταξη και σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$.*

Όνομα Έννοιας	Σύνταξη	Σημασιολογία
άνω	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(x) = 1$
κάτω	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(x) = 0$
ονοματική	$\{a\}$	$\{a\}^{\mathcal{I}}(x) = \begin{cases} 1 & x = a^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
σύζευξη	$C \sqcap D$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(x) = \min(C^{\mathcal{I}}(x), D^{\mathcal{I}}(x))$
υπαρξιακός περιορισμός	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(x) = \sup_{y \in \Delta^{\mathcal{I}}}\{\min(R^{\mathcal{I}}(x,y), C^{\mathcal{I}}(y))\}$
GCI	$\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$	$\min(C^{\mathcal{I}}(x), d) \leq D^{\mathcal{I}}(x)$
RI	$R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq S$	$[R_1^{\mathcal{I}} \circ^{\min} \ldots \circ^{\min} R_k^{\mathcal{I}}](x,y) \leq S^{\mathcal{I}}(x,y)$
ισχυρισμός έννοιας	$C(a) \geq d$	$C^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq d$
ισχυρισμός ρόλου	$R(a,b) \geq d$	$R^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \geq d$

ασαφές σύνολο όλων των εννοιών στο πεδίο ενδιαφέροντος μας, η κάτω έννοια χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα κενό ασαφές σύνολο, ο τελεστής της σύζευξης χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ασαφή τομή μεταξύ δύο ασαφών εννοιών, ο κατασκευαστής ονοματικής έννοιας χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα συγκεκριμένο άτομο, ενώ τέλος ο υπαρξιακός τελεστής χρησιμοποιείται για να περιγράψουμε το ασαφές σύνολο των ατόμων που συνδέονται μέσω μίας συγκεκριμένης ασαφούς σχέσης με ένα στοιχείο το οποίο ανήκει σε κάποια συγκεκριμένη έννοια. Για παράδειγμα η έννοια $\exists$έχειΦίλο.Ψηλό περιγράφει το σύνολο των ατόμων του πεδίου ορισμού μας τα οποία έχουν κάποιο φίλο που είναι ψηλός, όπου ο ρόλος "έχειΦίλο" και η έννοια "Ψηλό" είναι ασαφείς. Τέλος επιλέξαμε η διερμηνεία των ονοματικών εννοιών (nominals) να είναι ίδια με τις κλασσικές ΠΛ. Δηλαδή η διερμηνεία του $\{a\}$ είναι το μονοσύνολο το οποίο περιέχει ακριβώς το στοιχείο $a^{\mathcal{I}}$, οπότε $\{a\}^{\mathcal{I}}(x) = 1$ όταν $x = a^{\mathcal{I}}$ διαφορετικά $\{a\}^{\mathcal{I}}(x) = 0$. Μία διαφορετική σημασιολογία των ονοματικών εννοιών προτείνεται από τους Bobillo et al. (2006).

Η *ορολογική γνώση* μίας ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογίας εκφράζεται από ένα σύνολο *ασαφών γενικευμένων αξιωμάτων υπαγωγών εννοιών (ασαφή GCIs)* και *αξιωμάτων υπαγωγών ρόλων (RIs)* που αποκαλείται σώμα περιορισμών *(CBox)* $\mathcal{C}$. Ένα ασαφές GCI είναι ένα αξίωμα της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$, όπου $d \in (0,1]$ και οι C, D είναι περιγραφές εννοιών οι οποίες εννοούν ότι ο βαθμός υπαγωγής του C στο D είναι τουλάχιστον ίσος με d. Οι υπαγωγές ρόλων είναι αξιώματα της μορφής $R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq S$, όπου $R_1, \ldots, R_k, S \in N_R$, και το σύμβολο "$\circ$" χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη *σύνθεση μεταξύ δύο ρόλων*. Τα ασαφή γενικευμένα αξιώματα εννοιών αρχικά παρουσιάστηκαν από τον Straccia (2005a) για την ΠΛ της ασαφούς $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$, ενώ τα αξιώματα υπαγωγής με σύνθεση ρόλων για τις ασαφείς ΠΛ πρωτοπαρουσιάστηκαν από τους Stoilos et al. (2008) για την ασαφή $\mathcal{EL}^+$ γλώσσα.

Η σημασιολογία των ασαφών GCIs και RIs δίνεται στο μεσαίο μέρος του Πίνακα 4.3 όπου $x, y \in \Delta^\mathcal{I}$ και ο τελεστής $\circ^{\min}$ αντιστοιχεί στην sup − min σύνθεση που περιγράφεται στην Παράγραφο 2.1.2. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι τα ασαφή GCIs που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο έχουν την ίδια σημασιολογία με τα ασαφή GCIs που περιγράφηκαν από τους Straccia (2005a); Stoilos et al. (2008) χρησιμοποιώντας την Gödel συνεπαγωγή $\inf_{x\in\Delta^\mathcal{I}} \mathcal{J}_G(C^\mathcal{I}(x), D^\mathcal{I}(x)) \geq d$. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο ενός CBox $\mathcal{C}$ ανν για κάθε GCI και RI στο $\mathcal{C}$, οι συνθήκες που περιγράφονται στο μεσαίο μέρος του Πίνακα 4.3 ικανοποιούνται. Για παράδειγμα το CBox $\mathcal{C} = \{\langle A \sqcap B \sqsubseteq D, 0.7\rangle, R_1 \circ R_2 \sqsubseteq S\}$ ικανοποιείται από τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε $\Delta^\mathcal{I} = \{x, y, z\}$, $A^\mathcal{I}(x) = 0.3$, $B^\mathcal{I}(x) = 0.2$, $D^\mathcal{I}(x) = 0.5$, $R_1^\mathcal{I}(x, y) = 0.4$, $R_2^\mathcal{I}(y, z) = 0.3$, $S^\mathcal{I}(x, z) = 0.3$ όπως εύκολα μπορεί να ελεγχθεί.

Η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα έχει επίσης και ένα *σώμα ισχυρισμών (ABox)* $\mathcal{A}$, δηλαδή ένα πεπερασμένο σύνολο ισχυρισμών εννοιών και ρόλων οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να περιγραφεί ο κόσμος μας. Η σύνταξη και σημασιολογία των ισχυρισμών εννοιών και ρόλων περιγράφεται στο κάτω μέρος του Πίνακα 4.3, όπου $a, b \in N_I$, $C \in N_C$, $R \in N_R$ και $d \in [0, 1]$. Χρησιμοποιώντας τα εκφραστικά μέσα που μας δίνει το σώμα ισχυρισμών μπορούμε να πούμε για παράδειγμα ότι: Ψηλός(Γιάννης) ≥ 0.8 και Φίλος(Γιάννης, Μαίρη) ≥ 0.5. Μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ που ικανοποιεί τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι η εξής: $\Delta^\mathcal{I} = \{x, y\}$, Γιάννης$^\mathcal{I} = x$, Μαίρη$^\mathcal{I} = y$, Ψηλός$^\mathcal{I}(x) = 0.9$, Φίλος$^\mathcal{I}(x, y) = 0.7$.

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι η ασαφής $\mathcal{EL}^+$ γλώσσα (Stoilos et al., 2008) δεν μπορεί να αναπαραστήσει ένα σώμα ισχυρισμών λόγω της απουσίας ονοματικών εννοιών.

Τέλος, μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι *μοντέλο μίας ασαφούς οντολογίας* $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}\rangle$ όταν είναι, ταυτόχρονα, μοντέλο των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{C}$.

Παράδειγμα 4.2 *Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία λεπτομερή αναπαράσταση της οντολογίας που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 4.1*[4]*:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \;=\; \{&(\exists \textit{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0)(\textit{ασθενής}137) \geq 1,\\ &(\exists \textit{έχειΙστολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0)(\textit{ασθενής}138) \geq 1\}\end{aligned}$$

[4]ο βαθμός που συνδέεται με κάθε υπαγωγή έννοιας έχει προταθεί από ιατρικό προσωπικό

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \;=\; \{ & \langle \exists \text{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq \\
& \qquad \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.6\rangle, \\
& \langle \exists \text{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq \\
& \qquad \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.7\rangle, \\
& \langle \exists \text{έχειΙστολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq \\
& \qquad \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.8\rangle \ldots \}
\end{aligned}$$

Το πρώτο ασαφές GCI υπονοεί ότι όταν μία ασθενής έχει αποτέλεσμα κυτταρολογικής εξέτασης τύπου ASSIST0, τότε η ασθενής αυτή θα έχει επίσης και δείκτη επικινδυνότητας ASSIST0 με βαθμό τουλάχιστον 0.6*, δηλαδή ο βαθμός συμμετοχής της ασθενούς στο σύνολο* $\exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0$ *είναι* 0.6*. Με παρόμοια λογική, τα δύο άλλα GCIs δηλώνουν ότι τα αποτελέσματα της κολποσκοπικής και της ιστολογικής εξέτασης υπονοούν βαθμούς συμμετοχής* 0.7 *και* 0.8 *αντίστοιχα. Συνεπώς η ασθενής*137 *εξαιτίας της κυτταρολογικής της εξέτασης ανήκει στο σύνολο των ατόμων με δείκτη επικινδυνότητας* $ASSIST0$ *με βαθμό τουλάχιστον* 0.6*, ενώ η ασθενής*138 *ανήκει στο ίδιο σύνολο με βαθμό συμμετοχής τουλάχιστον* 0.8 *εξαιτίας της ιστολογικής της εξέτασης.*

Στο προαναφερθέν σενάριο, το ιατρικό προσωπικό μπορεί να ερμηνεύσει τους βαθμούς αυτούς σαν βαθμούς βεβαιότητας. Συγκεκριμένα η έννοια

$$\exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0$$

παρέχει μία διαβάθμιση (ranking) μεταξύ των αντικειμένων που μετέχουν σε αυτή. Όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός συμμετοχής ενός ατόμου στην έννοια αυτή, τόσο μεγαλύτερη είναι και η βεβαιότητα ότι το άτομο αυτό είναι υγιές. Για αυτόν τον λόγο, αφού από τη γνώση μας συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{O} \models (\exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0)(\text{ασθενής}137) \geq 0.6$$
$$\mathcal{O} \models (\exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0)(\text{ασθενής}138) \geq 0.8$$

το ιατρικό προσωπικό έχει ένα βαθμό βεβαιότητας 0.6 *για το ότι η ασθενής*137 *είναι υγιής και ένα βαθμό βεβαιότητας* 0.8 *ότι η ασθενής*138 *είναι υγιής.*

Άλλου είδους εφαρμογές οι οποίες χρησιμοποιούν ασαφείς ΠΛ προκειμένου να παρέχουν διαβάθμιση μεταξύ ατόμων έχουν χρησιμοποιηθεί από τους Meghini et al. (2001); Simou et al. (2008); Dasiopoulou et al. (2008); Ferrara et al. (2008) σε εφαρμογές όπως πολυμεσικές (multimedia), ανάκτησης πληροφορίας (information retrieval), και ευθυγράμμισης οντολογιών (ontology alignment).

Η παρουσία ονοματικών εννοιών κάνει τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ πολύ πιο εκφραστική σε σχέση με τη γλώσσα $\mathcal{EL}^{+}$ από τη στιγμή που επιτρέπει την αναπαράσταση ενός σώματος ισχυρισμών για πολύ μεγάλες οντολογίες που μπορεί να περιέχουν είτε δεδομένα ασθενών είτε οποιοδήποτε είδος άλλης πληροφορίας. Επιπλέον οι ονοματικές έννοιες μαζί με την κάτω έννοια μας επιτρέπουν να εκφράσουμε περαιτέρω πληροφορίες όπως τη συνθήκη μοναδικής ονοματολογίας, δηλαδή τη γνώση ότι δύο άτομα δεν μπορούν να αντιστοιχούν στο ίδιο αντικείμενο στο $\Delta^{\mathcal{I}}$, ως εξής: $\langle\{a\} \sqcap \{b\} \sqsubseteq \bot, 1\rangle$. Η κάτω έννοια μας επιτρέπει επίσης να εκφράσουμε τη γνώση ότι δύο έννοιες είναι ξένες μεταξύ τους ως εξής: $\langle C \sqcap D \sqsubseteq \bot, 1\rangle$. Τέλος ο τελεστής της σύνθεσης είναι επίσης πρωταρχικής σημασίας σε ιατρικές εφαρμογές αφού μας επιτρέπει να εκφράσουμε δεδομένα όπως κληρονομημένα χαρακτηριστικά και γονίδιωμα.

4.3.2 Προβλήματα Συμπερασματολογίας Ασαφών ΠΛ

Σε αυτήν την Παράγραφο θα μελετήσουμε ορισμένα από τα σημαντικότερα προβλήματα συμπερασματολογίας των ασαφών ΠΛ και θα αποδείξουμε πως το καθένα από αυτά τα προβλήματα μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα ασαφούς υπαγωγής εννοιών.

Έστω ότι το $\mathcal{C}$ είναι ένα ασαφές $\mathcal{EL}^{++}$ σώμα περιορισμών, το $\mathcal{A}$ ένα ασαφές $\mathcal{EL}^{++}$ σώμα ισχυρισμών, και η $\mathcal{O}$ μία ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία.

Ικανοποιησιμότητα Έννοιας (Concept Satisfiability). Μία έννοια C είναι ικανοποιήσιμη ως προς το σώμα περιορισμών $\mathcal{C}$, όταν και μόνο όταν υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}(x) > 0$ για κάποιο $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

Ασαφής Υπαγωγή Έννοιας (Fuzzy Concept Subsumption). Μία έννοια C υπάγεται ασαφώς από μία έννοια D με βαθμό $d \in (0, 1]$ ως προς το σώμα περιορισμών $\mathcal{C}$ $-$δηλαδή $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{C}} D, d\rangle-$ όταν και μόνο όταν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{C}$ και $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ ισχύει ότι $\min(C^{\mathcal{I}}(x), d) \leq D^{\mathcal{I}}(x)$. Ομοίως χρησιμοποιούμε την έκφραση $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$ για να δηλώσουμε υπαγωγή εννοιών ως προς μία οντολογία $\mathcal{O}$ με ή χωρίς σώμα ισχυρισμών. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $\mathcal{O} \models \langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ σαν μία ισοδύναμη γραφή της έκφρασης $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$.

Συνεπής Οντολογία (Consistent Ontology) . Μία οντολογία $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}\rangle$ είναι συνεπής όταν και μόνο όταν η $\mathcal{O}$ έχει τουλάχιστον ένα μοντέλο.

Πρόβλημα Στιγμιότυπου (Instance Problem) . Ένα άτομο $a \in N_I$ είναι στιγμιότυπο μίας έννοιας C με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από d ως προς μία οντολογία $\mathcal{O}$, όταν και μόνο όταν για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{O}$ ισχύει ότι $C^{\mathcal{I}}(a) \geq d$.

Πρόβλημα Μέγιστου Κάτω Φράγματος (GLB, Greatest Lower Bound Problem). Το πρόβλημα μεγίστου κάτω φράγματος για έναν ισχυρισμό $C(a)$ είναι να βρεθεί ο μέγιστος βαθμός d για τον οποίο ισχύει $C^{\mathcal{I}}(a) \geq d$ για όλα τα μοντέλα $\mathcal{I}$ του $\mathcal{O}$.

Όπως φαίνεται και στο Λήμμα που ακολουθεί, όλα τα προβλήματα συλλογιστικής που παρουσιάσαμε μπορούν να αναχθούν σε γραμμικό χρόνο στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών.

Λήμμα 4.3 *Έστω ότι έχουμε την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ με $\mathcal{A}$ ένα ασαφές $\mathcal{EL}^{++}$ ABox και $\mathcal{C}$ ένα ασαφές CBox, και την έννοια C. Όλα τα προβλήματα συλλογιστικής μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών ως εξής:*

- *Ικανοποιησιμότητα Έννοιας: Μία έννοια είναι ικανοποιήσιμη ως προς ένα CBox $\mathcal{C}$ όταν και μόνο όταν $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{C}} \bot, 1 \rangle$.*

- *Πρόβλημα Στιγμιότυπου: Προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα στιγμιοτύπου, ο αλγόριθμός μας αντικαθιστά κάθε ισχυρισμό στο $\mathcal{A}$ με ένα ασαφές GCI μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας και μίας έννοιας. Επομένως, ο έλεγχος στιγμιοτύπου μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας και μίας άλλης έννοιας. Ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ ως εξής:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{A}} := & \{\langle \{a\} \sqsubseteq C, d \rangle \mid C(a) \geq d \in \mathcal{A}\} \bigcup \\ & \{\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.\{b\}, d \rangle \mid R(a,b) \geq d \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

  Ένα άτομο c είναι στιγμιότυπο μίας έννοιας C με βαθμό το λιγότερο d ως προς μία οντολογία $\mathcal{O}$ ανν $\langle \{c\} \sqsubseteq_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}} C, d' \rangle$ για κάποιο βαθμό $d' \geq d$.

  Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αλγόριθμός μας όταν υπολογίζει υπαγωγή εννοιών μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας $\{c\}$ και μίας έννοιας D ταυτόχρονα υπολογίζει και τον μεγαλύτερο βαθμό d τέτοιο ώστε $\mathcal{O} \models \langle \{c\} \sqsubseteq D, d \rangle$. Συνεπώς ταυτόχρονα λύνει και το πρόβλημα μεγίστου κάτω φράγματος.

- *Συνέπεια Οντολογίας: Η οντολογία $\mathcal{O}$ είναι συνεπής ανν $\langle \top \not\sqsubseteq_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \bot, 1 \rangle$, όπου το σώμα περιορισμών $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ ορίζεται όπως πριν.*

(Η απόδειξη παρουσιάζεται στο Παράρτημα 4.Α΄)

Συνεπώς, όπως και στην περίπτωση της κλασσικής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας, θα επικεντρωθούμε στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών.

Παράδειγμα 4.4 *Το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ της Βάσης Γνώσης που περιγράφηκε στο Παράδειγμα 4.2 θα μετατραπεί σε ένα σύνολο αξιωμάτων ως εξής:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{A}} = & \{\langle \{\textit{ασθενής}137\} \sqsubseteq \exists \textit{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0, 1 \rangle, \\ & \langle \{\textit{ασθενής}138\} \sqsubseteq \exists \textit{έχειΙστολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

4.4 Συλλογιστική στην Ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$

Από τη στιγμή που κάθε πρόβλημα στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών, αρκεί να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο για αυτό και μόνο το πρόβλημα. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος, ομοίως με τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε από τους Baader et al. (2005), πραγματοποιείται σε δύο βήματα. Αρχικά ένα σώμα περιορισμών $\mathcal{C}$ μετατρέπεται στην κανονική του μορφή για τη γλώσσα $\mathcal{EL}^{++}$ και στη συνέχεια ο αλγόριθμος για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών εφαρμόζεται στο κανονικοποιημένο σώμα περιορισμών. Από δω και στο εξής, από τη στιγμή που μία οντολογία $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ μπορεί να αναχθεί σε μία οντολογία $\mathcal{O}' = \langle \emptyset, \mathcal{C}' \rangle$ με ένα άδειο ABox, θα χρησιμοποιήσουμε καταχρηστικά τον όρο οντολογία και το σύμβολο $\mathcal{O}$ προκειμένου να αναπαραστήσουμε ένα CBox $\mathcal{C}$.

4.4.1 Κανονική Μορφή μίας Ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ Οντολογίας

Δοθείσας μίας οντολογίας $\mathcal{O}$, το σύνολο των *βασικών περιγραφών εννοιών* της $\mathcal{O}$, που συμβολίζεται με $BC_{\mathcal{O}}$, είναι το μικρότερο σύνολο εννοιών που περιέχει την άνω έννοια $\top$, όλα τα ονόματα εννοιών και όλες τις ονοματικές έννοιες στην $\mathcal{O}$. Ομοίως το $R_{\mathcal{O}}$ συμβολίζει το *σύνολο όλων των ονομάτων ρόλων* στην $\mathcal{O}$, ενώ το σύνολο $[0,1]_{\mathcal{O}}$ είναι το υποσύνολο του $[0,1]$ που περιέχει μόνο τους βαθμούς που εμφανίζονται στην $\mathcal{O}$:

$$[0,1]_{\mathcal{O}} = \{d \mid d \in [0,1] \text{ και } \langle C \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}\}.$$

Εφόσον ο αλγόριθμός μας επικεντρώνεται στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής και ως εκ τούτου έχει απαλοιφεί το σώμα ισχυρισμών σύμφωνα με το Λήμμα 4.3, δεν εξετάζουμε το σώμα ισχυρισμών $\mathcal{A}$ για βαθμούς.

Μία ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ είναι στην κανονική της μορφή όταν και μόνο όταν κάθε ασαφές GCI στην $\mathcal{O}$ είναι σε μία από τις εξής μορφές:

$$\begin{array}{rr} \langle C_1 \sqsubseteq D, d\rangle & \qquad \langle C_1 \sqsubseteq \exists R.C_2, d\rangle \\ \langle C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, d\rangle & \qquad \langle \exists R.C_1 \sqsubseteq C_2, d\rangle \end{array}$$

όπου $C_1, C_2 \in BC_{\mathcal{O}}$, $D \in BC_{\mathcal{O}} \cup \{\bot\}$, $R \in BC_{\mathcal{O}}$ και $d \in (0,1]$, και όλα τα RIs στην $\mathcal{O}$ είναι στην ακόλουθη μορφή:

$$R_1 \sqsubseteq S \qquad\qquad R_1 \circ R_2 \sqsubseteq S$$

με $R_1, R_2, S \in R_{\mathcal{O}}$.

Όπως και με την περίπτωση της κλασσικής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας, μία ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ μπορεί να μετατραπεί στην κανονική της μορφή $\mathcal{O}'$ εφαρμόζοντας διεξοδικά τους κανόνες κανονικοποίησης του Πίνακα 4.4 όπου τα $\hat{C}, \hat{D} \notin BC_{\mathcal{O}}$ είναι περιγραφές εννοιών, το U συμβολίζει ένα νέο όνομα ρόλου, και το A ένα νέο όνομα έννοιας. Νέα ονόματα εννοιών και ρόλων θα εισαχθούν υποχρεωτικά προκειμένου να μετατρέψουμε την οντολογία μας στην κανονική της μορφή. Όπως μπορούμε να δούμε, η παρουσία βαθμών σε ασαφή GCI δεν επηρεάζει τη διαδικασία κανονικοποίησης όπως αυτή προτάθηκε από τους Baader et al. (2005).

Πίνακας 4.4: *Κανόνες κανονικοποίησης για την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$.*

NF0	$\langle \hat{C} \sqsubseteq \hat{E}, 0\rangle$	$\rightarrow$	$\emptyset$
NF1	$R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq S$	$\rightarrow$	$R_1 \circ \ldots \circ R_{k-1} \sqsubseteq U,\ U \circ R_k \sqsubseteq S$
NF2	$\langle C \sqcap \hat{D} \sqsubseteq E, d\rangle$	$\rightarrow$	$\langle \hat{D} \sqsubseteq A, 1\rangle, \langle C \sqcap A \sqsubseteq E, d\rangle$
NF3	$\langle \exists R.\hat{C} \sqsubseteq D, d\rangle$	$\rightarrow$	$\langle \hat{C} \sqsubseteq A, 1\rangle, \langle \exists R.A \sqsubseteq D, d\rangle$
NF4	$\langle \bot \sqsubseteq D, d\rangle$	$\rightarrow$	$\emptyset$
NF5	$\langle \hat{C} \sqsubseteq \hat{D}, d\rangle$	$\rightarrow$	$\langle \hat{C} \sqsubseteq A, 1\rangle, \langle A \sqsubseteq \hat{D}, d\rangle$
NF6	$\langle B \sqsubseteq \exists R.\hat{C}, d\rangle$	$\rightarrow$	$\langle B \sqsubseteq \exists R.A, d\rangle,\ \langle A \sqsubseteq \hat{C}, 1\rangle$
NF7	$\langle B \sqsubseteq C \sqcap D, d\rangle$	$\rightarrow$	$\langle B \sqsubseteq C, d\rangle, \langle B \sqsubseteq D, d\rangle$

Παράδειγμα 4.5 *Έστω ότι η οντολογία μας $\mathcal{O}$ περιέχει μόνο ένα GCI της μορφής $\langle \exists R.(A \sqcap B) \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle$. Η οντολογία θα κανονικοποιηθεί στα παρακάτω βήματα:*

- *Η εφαρμογή του κανόνα NF3 αντικαθιστά το αρχικό GCI με δύο νέα GCIs της μορφής: $\langle A \sqcap B \sqsubseteq E_1, 1\rangle$ και $\langle \exists R.E_1 \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle$ όπου το E_1 είναι ένα νέο όνομα έννοιας.*

- *Η εφαρμογή του κανόνα NF5 αντικαθιστά το GCI $\langle \exists R.E_1 \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle$ με δύο νέα GCIs της μορφής $\langle \exists R.E_1 \sqsubseteq E_2, 1\rangle$ και $\langle E_2 \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle$ όπου το E_2 είναι ένα νέο όνομα έννοιας.*

- *Η εφαρμογή του κανόνα NF7 αντικαθιστά το GCI $\langle E_2 \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle$ με δύο νέα GCIs της μορφής $\langle E_2 \sqsubseteq C, 0.3\rangle$ και $\langle E_2 \sqsubseteq D, 0.3\rangle$.*

Για αυτό το λόγω το αρχικό CBox $\mathcal{C} = \{\langle \exists R.(A \sqcap B) \sqsubseteq C \sqcap D, 0.3\rangle\}$ μετασχηματίζεται σε ένα κανονικοποιημένο CBox:

$$\mathcal{C}' = \{\langle A \sqcap B \sqsubseteq E_1, 1\rangle, \langle \exists R.E_1 \sqsubseteq E_2, 1\rangle, \langle E_2 \sqsubseteq C, 0.3\rangle, \langle E_2 \sqsubseteq D, 0.3\rangle.\}$$

όπου E_1, E_2 είναι ονόματα εννοιών που δεν υπήρχαν πριν στην οντολογία.

Λήμμα 4.6 *Η ασαφής υπαγωγή εννοιών ως προς μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ μπορεί να αναχθεί σε γραμμικό χρόνο σε ασαφή υπαγωγή εννοιών ως προς μία κανονικοποιημένη ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}'$.*

(Απόδειξη στο Παράρτημα 4.Α′)

Προκειμένου το μέγεθος του $\mathcal{O}'$ να είναι γραμμικό ως προς το μέγεθος του $\mathcal{O}$, θα εφαρμόσουμε αρχικά τους κανόνες **NF0** έως **NF4** διεξοδικά και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε διεξοδικά τους κανόνες **NF5** έως **NF7**.

Παράδειγμα 4.7 *Το σώμα περιορισμών $\mathcal{C}$ που περιγράφεται στο Παράδειγμα 4.2 θα κανονικοποιηθεί στο σώμα περιορισμών $\mathcal{C}'$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}' = \{&\langle \exists \text{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq A_1, 1\rangle,\\ &\langle A_1 \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.6\rangle,\\ &\langle \exists \text{έχειΚυτταρολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq A_2, 1\rangle,\\ &\langle A_2 \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.7\rangle,\\ &\langle \exists \text{έχειΙστολογικόΑποτέλεσμα}.ASSIST0 \sqsubseteq A_3, 1\rangle\\ &\langle A_3 \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.8\rangle \ldots\}\end{aligned}$$

4.4.2 Ο Αλγόριθμος Ασαφούς Υπαγωγής της $\mathcal{EL}^{++}$

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε τον αλγόριθμο της ασαφούς υπαγωγής ως προς μία κανονικοποιημένη οντολογία $\mathcal{O}$. Αρχικά αναγάγουμε το πρόβλημα της υπαγωγής μεταξύ δύο εννοιών C και D στο πρόβλημα της υπαγωγής μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας και μίας έννοιας στο N_C ως εξής:

Λήμμα 4.8 *Έστω ότι έχουμε την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ και τα C, D είναι έννοιες της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$. Τότε $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$, ανν $\langle \{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}'} B, d\rangle$, όπου το o είναι ένα νέο άτομο που δεν υπήρχε στη γνώση μας, η έννοια B είναι μία έννοια που δεν εμφανιζόταν στο $BC_{\mathcal{O}}$ και η οντολογία $\mathcal{O}'$ ορίζεται ως εξής:*

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{\langle \{o\} \sqsubseteq C, 1\rangle, \langle D \sqsubseteq B, 1\rangle\}.$$

(Απόδειξη στο Παράρτημα 4.Α΄)

Η διαδικασία που ακολουθείται από τον προτεινόμενο αλγόριθμο βασίζεται στην εξαγωγή νέων αξιωμάτων υπαγωγής τα οποία δεν εκφράζονται ρητά στην αρχική οντολογία $\mathcal{O}$, αλλά υπονοούνται από την αρχική γνώση. Η εξαγωγή νέων υπαγωγών περιγράφεται από τους κανόνες του Πίνακα 4.5. Οι κανόνες εφαρμόζονται σε μία κανονικοποιημένη ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ και δημιουργούν νέα αξιώματα της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$, $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ όπου $R \in R_{\mathcal{O}}$ και $C, D \in BC_{\mathcal{O}}$. Αυτά τα νέα αξιώματα προστίθενται στην *οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$* η οποία περιέχει τα εξαγόμενα αξιώματα από την $\mathcal{O}$. Αυτό σημαίνει δηλαδή ότι εάν $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ τότε $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$. Οι κανόνες του Πίνακα 4.5 έχουν τη μορφή

$$\frac{U_1, \ldots, U_n}{W} : V$$

όπου $U_1, \ldots, U_n$ είναι υπαγωγές εννοιών στην $\mathcal{O}_{SAT}$ οντολογία, το W είναι μία υπαγωγή έννοιας η οποία θα προστεθεί μετά από κάθε εφαρμογή ενός κανόνα στο $\mathcal{O}_{SAT}$ και το V είναι μία υπαγωγή έννοιας ή ρόλου στο $\mathcal{O}$. Η σημειογραφία που ακολουθείται από τον αλγόριθμό μοιάζει περισσότερο με αυτήν που παρουσιάζεται από τον

Kazakov (2009), παρά με αυτήν που έχει υιοθετηθεί τους Baader et al. (2005); Stoilos et al. (2008).

Οι κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων χρησιμοποιούνται με την ακόλουθη σειρά. Αρχικά οι κανόνες **I1**, **I2** εφαρμόζονται και ο αλγόριθμος συνεχίζει με την εφαρμογή των υπολοίπων κανόνων ολοκλήρωσης που περιγράφονται στον Πίνακα 4.5 έως ότου κανένας κανόνας δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Βάσει της σημασιολογίας των υπαγωγών εννοιών εάν ταυτόχρονα $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d_1\rangle$, $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d_2\rangle$ ισχύουν αρκεί να κρατήσουμε στην $\mathcal{O}_{SAT}$ μόνο την υπαγωγή εννοιών με τον μεγαλύτερο βαθμό (το ίδιο συμβαίνει και για τις υπαγωγές εννοιών της μορφής $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} \exists R.D, d\rangle$). Για τον ίδιο λόγο ένας κανόνας ο οποίος προσθέτει μία υπαγωγή εννοιών $\langle C \sqsubseteq D, d_1\rangle$ στο $\mathcal{O}_{SAT}$ δεν θα εφαρμοστεί εάν το $\mathcal{O}_{SAT}$ ήδη περιέχει κάποια υπαγωγή $\langle C \sqsubseteq D, d_2\rangle$ με $d_2 \geq d_1$.

Στον Πίνακα 4.5 στον Κανόνα **CR6** χρησιμοποιείται η σχέση $\leadsto$ μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας και μίας έννοιας. Ο ορισμός της σχέσης αυτής είναι παρόμοιος με τον ορισμό που έδωσαν οι Baader et al. (2005) προσαρμοσμένο στις ασαφείς ΠΛ. Για μία ονοματική έννοια $\{a\}$ και μία έννοια $E \in BC_{\mathcal{O}}$ λέμε ότι $\langle\{a\} \leadsto E, d\rangle$ όταν μία από τις εξής συνθήκες ισχύει:

- Είτε υπάρχουν έννοιες $C_1, \ldots, C_{k+1} \in BC_{\mathcal{O}}$ και ρόλοι $R_1, \ldots, R_k \in R_{\mathcal{O}}$ τέτοιοι ώστε: (i) $\langle C_i \sqsubseteq \exists R_i.C_{i+1}, d_i\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, (ii) $\min(d_1, \ldots, d_k) = d$, (iii) $C_1 = \{a\}$ και $C_{k+1} = E$; είτε

- το E είναι μία ονοματική έννοια $\{b\} \in BC_{\mathcal{O}}$ και $d = 1$. Δηλαδή έχουμε ότι $\langle\{a\} \leadsto \{b\}, 1\rangle$ για κάθε ζεύγος ονοματικών εννοιών $\{a\}, \{b\} \in BC_{\mathcal{O}}$.

Διαισθητικά η σχέση $\langle\{b\} \leadsto E, d\rangle$ υπονοεί ότι για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της οντολογίας $\mathcal{O}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $E^{\mathcal{I}}(x) \geq d$. Αυτό προκύπτει βάσει της σημασιολογίας των υπαρξιακών περιορισμών. Αν π.χ. έχουμε ότι $\langle\{b\} \sqsubseteq \exists R.E, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ (και συνεπώς $\langle\{b\} \leadsto E, d\rangle$) τότε επειδή $\{b\}^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) = 1$ και ικανοποιείται η υπαγωγή $\langle\{b\} \sqsubseteq \exists R.E, d\rangle$, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x τέτοιο ώστε $E^{\mathcal{I}}(x) \geq d$. Αν επιπλέον έχουμε ότι $\langle E \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle$ για μία ονοματική έννοια $\{a\}$ όπως περιγράφεται στον κανόνα **CR6** μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι $x = a^{\mathcal{I}}$ και επομένως το γεγονός ότι $E^{\mathcal{I}}(x) \geq d$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\langle\{a\} \sqsubseteq E, d\rangle$.

Θεώρημα 4.9 *Έστω ότι η $\mathcal{O}$ είναι μία ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία σε κανονική μορφή και η οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ προκύπτει από την $\mathcal{O}$ εφαρμόζοντας διεξοδικά τους κανόνες του Πίνακα 4.5 έως ότου δεν προστίθεται νέα πληροφορία στην $\mathcal{O}_{SAT}$. Για κάθε ονοματική έννοια $\{o\} \in BC_{\mathcal{O}}$ και $B \in BC_{\mathcal{O}}$, ισχύει ότι $\mathcal{O} \models \langle\{o\} \sqsubseteq B, d\rangle$ ανν μία από τις συνθήκες που ακολουθούν επίσης ισχύει:*

S1 $\langle\{o\} \sqsubseteq B, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ *για κάποιο βαθμό* $d' \geq d$,

Πίνακας 4.5: *Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων για μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία.*

I1	$\dfrac{}{\langle C \sqsubseteq C, 1\rangle}$	
I2	$\dfrac{}{\langle C \sqsubseteq \top, 1\rangle}$	
CR1	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq C', d_1\rangle}{\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2)\rangle}$:	$\langle C' \sqsubseteq D, d_2\rangle$
CR2	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq C_1, d_1\rangle, \langle C \sqsubseteq C_2, d_2\rangle}{\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2, d_3)\rangle}$:	$\langle C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, d_3\rangle$
CR3	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq C', d_1\rangle}{\langle C \sqsubseteq \exists R.D, \min(d_1, d_2)\rangle}$:	$\langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d_2\rangle$
CR4	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \exists R.E, d_1\rangle, \langle E \sqsubseteq C', d_2\rangle}{\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2, d_3)\rangle}$:	$\langle \exists R.C' \sqsubseteq D, d_3\rangle$
CR5	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \exists R.E, d_1\rangle, \langle E \sqsubseteq \bot, d_2\rangle}{\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle}$:	$d_1 > 0$ και $d_2 > 0$
CR6	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle E \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle \{b\} \rightsquigarrow E, d_1\rangle, \langle E \sqsubseteq D, d_2\rangle}{\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2)\rangle}$	
CR10	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle}{\langle C \sqsubseteq \exists S.D, d\rangle}$:	$R \sqsubseteq S$
CR11	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \exists R_1.D, d_1\rangle, \langle D \sqsubseteq \exists R_2.E, d_2\rangle}{\langle C \sqsubseteq \exists S.E, \min(d_1, d_2)\rangle}$:	$R_1 \circ R_2 \sqsubseteq S$
CR12	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq \{a\}, d\rangle}{\langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle}$:	όπου $d > 0$

S2 υπάρχει μία ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$ τέτοια ώστε $\langle \{a\} \sqsubseteq \bot, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ και $d > 0$. (Απόδειξη στο Παράρτημα 4.Α΄)

Παράδειγμα 4.10 *Βασισμένοι στα Παραδείγματα 4.2,4.4 σχηματίζουμε την οντολογία $\mathcal{O} = \langle \emptyset, \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}\rangle$ την οποία και κανονικοποιούμε. Η εφαρμογή των Κανόνων **I1**, **I2**, **CR3**, **CR4** θα συνεχιστεί προσθέτοντάς στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$, που περιέχει τα συμπεράσματα,* *τις ακόλουθες υπαγωγές:*

$$\langle\{\text{ασθενής}137\} \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.6\rangle$$
$$\langle\{\text{ασθενής}138\} \sqsubseteq \exists \text{έχειΔείκτηΕπικινδυνότητας}.ASSIST0, 0.8\rangle$$

Λήμμα 4.11 *Το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας $\{o\}$ και μίας έννοιας $B \in BC_{\mathcal{O}}$ ως προς μία κανονικοποιημένη ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.*

(Απόδειξη στο Παράρτημα 4.Α′)

Το ακόλουθο θεώρημα προκύπτει ως άμεση συνέπεια των Λημμάτων 4.8, 4.11 και 4.6.

Θεώρημα 4.12 (Πολυπλοκότητα) *Το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό, ως προς το μέγεθος της αρχικής οντολογίας, χρόνο.*

4.5 Σχετικές Εργασίες

Έχουν προταθεί αρκετές επεκτάσεις οι οποίες βασίζονται σε ασαφοποίηση γλωσσών της οικογένειας της $\mathcal{EL}$. Ο Vojtáš (2007) πρότεινε μία αρχική ασαφή επέκταση της γλώσσας $\mathcal{EL}$ η οποία δύναται να απαντάει σε ερωτήματα τα οποία περιέχουν ασαφείς έννοιες, όπως οι προτιμήσεις ενός χρήστη, αρκετά τυπικές σε εφαρμογές του σημασιολογικού ιστού. Η προτεινόμενη γλώσσα διαφοροποιείται από τις περισσότερες ασαφείς ΠΛ στο ότι η διερμηνεία της σύζευξης είναι μία *ασαφής συνάθροιση (aggregation)* παρά μία πράξη ασαφούς τομής. Επίσης η διερμηνεία των ρόλων είναι ίδια με τις κλασσικές περιγραφικές λογικές, δηλαδή κάθε ρόλος έχει σαν διερμηνεία ένα κλασσικό και όχι ένα ασαφές σύνολο. Οι Stoilos et al. (2008) πρότειναν μία διαφορετική ασαφή επέκταση της $\mathcal{EL}^{+}$ γλώσσας η οποία βασίστηκε στους τελεστές της Gödel λογικής και έως εκ τούτου ονομάστηκε f_G-$\mathcal{EL}^{+}$. Η f_G-$\mathcal{EL}^{+}$ γλώσσα και αλγόριθμος συλλογιστικής παρέχουν την άνω έννοια, την τομή, υπαρξιακούς περιορισμούς, ασαφή GCIs, και RIs. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η γλώσσα μας είναι μία επέκταση της f_G-$\mathcal{EL}^{+}$ γλώσσας με ονοματικές έννοιες και την κάτω έννοια. Μεταγενέστερες επεκτάσεις της $\mathcal{EL}$ έχουν προταθεί από τους Vaneková and Vojtáš (2010) οι οποίοι επεκτείνουν τη γλώσσα του Vojtáš (2007) με μία πράξη συνάθροισης $@_U$, τον k-καλύτεροι κατασκευαστή, και ασαφή απτά πεδία. Ο *κατασκευαστής συνάθροισης* επιτρέπει να οριστούν οι βαθμοί μίας έννοιας βασισμένοι στους βαθμούς ενός συνόλου εννοιών και κάποιας συνάρτησης συνάθροισης. Ο *k-καλύτεροι* κατασκευαστής επιτρέπει την επιλογή από μία έννοια C μόνο των k ατόμων που ικανοποιούν την έννοια με τους μεγαλύτερους βαθμούς, ενώ η προτεινόμενη ΠΛ επιτρέπει γλωσσικές μεταβλητές όπως είναι η $\text{καλή}_{\text{τιμή}}$ κτλ οι οποίες βασίζονται σε μία συνάρτηση συμμετοχής. Τέλος, βασισμένοι στη γλώσσα που πρότειναν οι Stoilos et al. (2008), οι Feng et al. (2010) πρότειναν έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει τις λογικές διαφορές μεταξύ διαφορετικών εκδόσεων μίας οντολογίας, δηλαδή το σύνολο των συνεπαγομένων υπαγωγών που προκύπτουν από τη μία αλλά όχι από την άλλη οντολογία. Ο αλγόριθμος συλλογιστικής τους βασίστηκε στη δουλειά των Baader et al. (2009) η οποία χρησιμοποιείται για εξαγωγή συμπερασμάτων σε περιβάλλοντα χρηστών με περιορισμούς πρόσβασης σε αξιώματα της οντολογίας, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και για f_G-$\mathcal{EL}^{+}$ οντολογίες.

Η κύρια διαφορά μεταξύ της γλώσσας που προτείνουμε και της γλώσσας που παρουσιάζεται από τον Vojtáš (2007) είναι η διαφορά στη σημασιολογία, αφού η προτεινόμενη γλώσσα χρησιμοποιεί σαν διερμηνεία της σύζευξης μία *ασαφή συνάθροιση* παρά μία πράξη ασαφούς τομής. Η συνάρτηση συνάθροισης ενδεχομένως να προσφέρει μεγαλύτερη εκφραστικότητα, παρόλα αυτά, η γλώσσα που προτείνεται θα πρέπει να εξεταστεί ως προς την πολυπλοκότητα και τον τερματισμό της από τη στιγμή που η ύπαρξη γενικευμένων ασαφών κυκλικών αξιωμάτων υπαγωγών μαζί με την παρουσία συναρτήσεων ένωσης και τομής διαφορετικών των min max έχει αποδειχθεί από τους Baader and Peñaloza (2011a) —για περισσότερο εκφραστικές γλώσσες— πως οδηγεί σε μη αποφανσιμότητα. Οι διαφορές μεταξύ του αλγορίθμου μας και του αλγορίθμου που προτείνεται από τους Vaneková and Vojtáš (2010) θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο 5, από τη στιγμή που και οι δύο γλώσσες έχουν απτά πεδία.

4.6 Συμπεράσματα και Μελλοντικές Εργασίες

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε μία ασαφή επέκταση της πολυωνυμικής γλώσσας $\mathcal{EL}^{++}$, την ασαφή-$\mathcal{EL}^{++}$. Αρχικά παρουσιάσαμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της γλώσσας μας και βασισμένοι σε αυτά δημιουργήσαμε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο που απαντάει στο πρόβλημα της υπαγωγής μεταξύ εννοιών. Εκτός αυτού, παρουσιάσαμε πως κάποια από τα σημαντικότερα προβλήματα των ασαφών ΠΛ, δηλαδή η ικανοποιησιμότητα μίας έννοιας, η συνέπεια ενός ABox, και το πρόβλημα στιγμιότυπου, μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Οι κυριότερες συνεισφορές του αλγορίθμου μας σε σχέση με αυτόν της ασαφούς-$\mathcal{EL}^{+}$ είναι το ότι εισάγαμε ονοματικές έννοιες και την κάτω έννοια. Από τη μία μεριά οι ονοματικές έννοιες μας επιτρέπουν συλλογιστικές οι οποίες θα περιέχουν και ένα σώμα ισχυρισμών, σε αντίθεση με τη γλώσσα της ασαφούς-$\mathcal{EL}^{+}$ η οποία επιτρέπει μόνο σώμα περιορισμών. Για αυτό λοιπόν το πρόβλημα του στιγμιοτύπου μπορεί να περιγραφεί και να λυθεί στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Από την άλλη μεριά, η παρουσία της κάτω έννοιας καθιστά δυνατή την αξιολόγηση της ικανοποιησιμότητας ενός σώματος ισχυρισμών. Επιπλέον, η παρουσίαση της κάτω έννοιας μας επιτρέπει να δηλώσουμε ότι δύο έννοιες είναι ξένες μεταξύ τους με $\langle C \sqcap D \sqsubseteq \bot, 1\rangle$ και να εκφράσουμε τη συνθήκη μοναδικής ονοματοδοσίας με $\langle \{a\} \sqcap \{b\} \sqsubseteq \bot, 1\rangle$, βελτιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την εκφραστική δυνατότητα της γλώσσας μας. Τέλος αποδεικνύουμε διεξοδικά την ορθότητα, την πληρότητα, και την πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα από τα πιο δημοφιλή θέματα στην περιοχή των ασαφών ΠΛ είναι η μελέτη γλωσσών που υποστηρίζουν οποιεσδήποτε νόρμες (Hájek, 2005; Bobillo and Straccia, 2009b; Cerami et al., 2010). Μία επέκταση της γλώσσας μας προς αυτήν την κατεύθυνση θα περιελάμβανε τη μελέτη της πολυπλοκότητας της γενικευμένης $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας —ή στη χειρότερη περίπτωση την απόδειξη της μη αποφανσιμότητάς της—, τη δημιουργία ενός αλγορίθμου συλλογιστικής, και την εύρεση πολυωνυμικής πολυπλοκότητας υποσυνόλων της γενικευμένης ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ ΠΛ. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η πρόσφατη δουλειά των Baader and Peñaloza (2011a) αποδεικνύει τη μη αποφανσιμότητα διαφόρων οικογενειών ΠΛ με ασαφείς επεκτάσεις γενικευμένων t-νορμών και ενδεχομένως αυτή η μη αποφανσιμότητα να ισχύει και για λιγότερο εκφραστικές γλώσσες όπως η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$. Άλλες επεκτάσεις της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ θα καθοδηγηθούν από τις αντίστοιχες επεκτάσεις στις κλασσικές ΠΛ. Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε εάν η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ μπορεί να επεκταθεί και να παραμείνει πολυωνυμική με την ύπαρξη περιορισμών εννοιών όπως είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών, οι οποίοι έχουν ήδη μελετηθεί για την κλασσική $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα από τους Baader et al. (2008). Τέλος η επέκταση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ με απτά πεδία παρουσιάζεται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5 που θα ακολουθήσει.

4.Α΄ Αποδείξεις

Απόδειξη του Λήμματος 4.3: *Ικανοποιησιμότητα Έννοιας:* Ο ισχυρισμός είναι άμεσο επακόλουθο του ότι εάν η έννοια C είναι ικανοποιήσιμη, τότε υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{C}$ με $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}(x) > 0$, συνεπώς $C^{\mathcal{I}}(x) > \bot^{\mathcal{I}}(x)$. Συνεπώς το $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο το οποίο δείχνει ότι η υπαγωγή $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{C}} \bot, 1\rangle$ δεν μπορεί να ισχύει. Ομοίως εάν $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{C}} \bot, 1\rangle$, τότε υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{C}$ με $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $C^{\mathcal{I}}(x) > \bot^{\mathcal{I}}(x) = 0$ και η έννοια C είναι ικανοποιήσιμη.

Πρόβλημα Στιγμιότυπου: Η συγκεκριμένη απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο του $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ ανν είναι επίσης ένα μοντέλο του $\mathcal{A}$ ως προς το $\mathcal{C}$. Αυτό ισχύει επειδή η υπαγωγή $\langle \{a\} \sqsubseteq C, d\rangle$ είναι συντακτική παραλλαγή του ισχυρισμού $C(a) \geq d$ (το ίδιο συμβαίνει και για ισχυρισμούς ρόλων). Συγκεκριμένα, εάν το $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την υπαγωγή $\langle \{a\} \sqsubseteq C, d\rangle$ έχουμε ότι $C^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(\{a\}^{\mathcal{I}}(x), d)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$, επομένως επίσης θα ισχύει $C^{\mathcal{I}}(a) \geq \min(\{a\}^{\mathcal{I}}(a), d)$, και από τη σημασιολογία των ονοματικών εννοιών προκύπτει ότι $C^{\mathcal{I}}(a) \geq \min(1, d) = d$.

Συνέπεια Οντολογίας: Αρκεί να δείξουμε ότι η οντολογία $\mathcal{O}$ είναι μη συνεπής ανν ισχύει ότι $\langle \top \sqsubseteq_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \bot, 1\rangle$: Για το ευθύ: Έστω ότι ισχύει $\langle \top \sqsubseteq_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \bot, 1\rangle$. Τότε για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ πρέπει να έχουμε ότι $\top^{\mathcal{I}}(x) \leq \bot^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Προφανώς το $\Delta^{\mathcal{I}}$ πρέπει να είναι μη κενό, συνεπώς υπάρχει κάποιο $c \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\top^{\mathcal{I}}(c) \leq \bot^{\mathcal{I}}(c)$. Επιπλέον, εξ ορισμού μίας διερμηνείας έχουμε ότι $\top^{\mathcal{I}}(c) = 1$ και $\bot^{\mathcal{I}}(c) = 0$, συνεπώς προκύπτει ότι $1 \leq 0$, το οποίο είναι άτοπο Συνεπώς η οντολογία $\mathcal{O}$ δεν έχει κάποιο μοντέλο. Για το αντίστροφο: Έστω ότι η οντολογία $\mathcal{O}$ είναι μη συνεπής. Από τη στιγμή που μία μη συνεπής οντολογία συνεπάγεται όλα τα αξιώματα προκύπτει ότι $\langle \top \sqsubseteq_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \bot, 1\rangle$. ■

Απόδειξη του Λήμματος 4.6: Η γραμμική πολυπλοκότητα της διαδικασίας κανονικοποίησης προκύπτει ως άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι ο αλγόριθμος κανονικοποίησης είναι ίδιος με τον αλγόριθμο της κλασσικής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας που περιγράφεται από τον Baader et al. (2005), με μοναδική εξαίρεση την παρουσία βαθμών, οι οποίοι όμως δεν προσθέτουν κάποιο επιπλέον βήμα στον υπάρχοντα αλγόριθμο. Για το άλλο κομμάτι της απόδειξης, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μοντέλο της οντολογίας $\mathcal{O}'$ είναι και μοντέλο της $\mathcal{O}$ και κάθε μοντέλο της $\mathcal{O}$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα μοντέλο της $\mathcal{O}'$ επεκτείνοντας με κατάλληλο τρόπο τη διερμηνεία των νέων εννοιών και ρόλων. Έστω ότι το $\mathcal{I}'$ είναι ένα μοντέλο της $\mathcal{O}'$. Τότε για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}'}$, έχουμε ότι $\hat{D}^{\mathcal{I}'}(x) \leq A^{\mathcal{I}'}(x)$ και $\min(C^{\mathcal{I}'}(x), A^{\mathcal{I}'}(x), d) \leq E^{\mathcal{I}'}(x)$. Επομένως

$$\min(C^{\mathcal{I}'}(x), \hat{D}^{\mathcal{I}'}(x), d) \leq E^{\mathcal{I}'}(x)$$

και συνεπώς το $\mathcal{I}'$ είναι και μοντέλο της $\mathcal{O}$. Έστω ότι το $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της $\mathcal{O}$. Δημιουργούμε μία διερμηνεία $\mathcal{I}'$ που είναι πανομοιότυπη με την $\mathcal{I}$ με τη διαφορά ότι $A^{\mathcal{I}'}(x) = \hat{D}^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Από τη στιγμή που η έννοια A είναι νέα έννοια εμφανίζεται μόνο στις υπαγωγές εννοιών $\langle \hat{D} \sqsubseteq A, 1\rangle$ και $\langle C \sqcap A \sqsubseteq E, d\rangle$. Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι οι δύο νέες υπαγωγές εννοιών ικανοποιούνται από τη διερμηνεία $\mathcal{I}'$. Συνεπώς το $\mathcal{I}'$ είναι μοντέλο της οντολογίας $\mathcal{O}'$. ■

Απόδειξη του Λήμματος 4.8: Έστω ότι $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$, θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $\langle \{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}'} B, d\rangle$. Από τη στιγμή που η $\mathcal{O}'$ επεκτείνει την $\mathcal{O}$, κάθε μοντέλο $\mathcal{I}'$ της $\mathcal{O}'$ είναι και μοντέλο της $\mathcal{O}$. Επομένως ισχύει $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}'} D, d\rangle$ και αφού η $\mathcal{O}'$ περιέχει τις υπαγωγές $\langle \{o\} \sqsubseteq C, 1\rangle$, $\langle D \sqsubseteq B, 1\rangle$, μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι ισχύει $\langle \{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}'} B, d\rangle$.

Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$ συνεπάγεται $\langle \{o\} \not\sqsubseteq_{\mathcal{O}} B, d\rangle$. Εάν $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$ τότε υπάρχει μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε $C^{\mathcal{I}}(\omega) > D^{\mathcal{I}}(\omega)$, $d > D^{\mathcal{I}}(\omega)$ για κάποιο $\omega \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Κατασκευάζουμε μία διερμηνεία $\mathcal{I}'$ η οποία είναι ίδια με την $\mathcal{I}$ εκτός από τα εξής σημεία:

- $A^{\mathcal{I}'}(x) = 1$ εάν $A^{\mathcal{I}}(x) > D^{\mathcal{I}}(\omega)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και όνομα έννοιας $A \in N_C$,
- $R^{\mathcal{I}'}(x, y) = 1$ εάν $R^{\mathcal{I}}(x, y) > D^{\mathcal{I}}(\omega)$ για κάθε $x, y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $r \in R_{\mathcal{O}}$,
- $o^{\mathcal{I}} = \omega$ και $B^{\mathcal{I}}(x) = D^{\mathcal{I}}(x)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$.

Εάν η διερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί μία υπαγωγή εννοιών της μορφής $\langle \Gamma_1 \sqsubseteq \Gamma_2, d\rangle$, όπου τα Γ_1, Γ_2 είναι περιγραφές εννοιών, μπορεί να βεβαιωθεί ότι η διερμηνεία $\mathcal{I}'$ επίσης ικανοποιεί τη συγκεκριμένη υπαγωγή εννοιών (το ίδιο ισχύει και για υπαγωγές ρόλων). Συνεπώς το $\mathcal{I}'$ είναι μοντέλο του $\mathcal{O}$ και εφόσον ικανοποιεί, από την κατασκευή του $\mathcal{I}'$, την υπαγωγή εννοιών $\langle \{o\} \sqsubseteq C, 1\rangle$, $\langle D \sqsubseteq B, 1\rangle$, είναι επίσης ένα μοντέλο του $\mathcal{O}'$. Το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας αφού $\min(\{o\}^{\mathcal{I}'}(\omega), d) = \min(\{o\}^{\mathcal{I}'}(o^{\mathcal{I}'}), d) = d$, $D^{\mathcal{I}'}(\omega) = D^{\mathcal{I}}(\omega)$, και $d > D^{\mathcal{I}}(\omega)$. ■

Απόδειξη του Λήμματος 4.11: Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $|\cdot|$ για να αναπαραστήσουμε τον πληθάριθμο ενός συνόλου. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την έννοια του big-O, από την υπολογιστική πολυπλοκότητα, με το σύμβολο O. Η πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας είναι μία συνέπεια των παρακάτω ιδιοτήτων:

- Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, ο μέγιστος αριθμός υπαγωγών εννοιών της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ που υπάρχουν στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ που περιέχει τα συμπεράσματα έχει μέγιστο μέγεθος $|BC_{\mathcal{O}}|^2$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για δύο υπαγωγές εννοιών $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ και $\langle C \sqsubseteq D, d'\rangle$ μόνο αυτή με τον μεγαλύτερο βαθμό θα κρατηθεί.

  Ομοίως από την άλλη, για κάθε υπαγωγή εννοιών της μορφής $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ το άνω όριο των υπαγωγών που θα υπάρξουν στην $\mathcal{O}_{SAT}$ είναι $|R_{\mathcal{O}}| \cdot |BC_{\mathcal{O}}|^2$.

  Από τη στιγμή που κάθε υπαγωγή εννοιών και ρόλων, στην κανονική της μορφή, περιέχει το πολύ 3 έννοιες και ρόλους μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα $|BC_{\mathcal{O}}|$

και $|R_{\mathcal{O}}|$ έχουν μεγέθη $O(|\mathcal{O}|)$. Για αυτό υπάρχουν το πολύ $O(|\mathcal{O}|^3)$ υπαγωγές εννοιών στην προκύπτουσα οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$.

- Κανένας από τους κανόνες δεν εισαγάγει νέους βαθμούς. Για αυτό το λόγω ο βαθμός d που υπάρχει σε μία υπαγωγή εννοιών $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ ή $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ μπορεί να αλλαχθεί το πολύ $O(|\mathcal{O}|)$ φορές.

- Βάσει των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να έχουμε το πολύ $O(|\mathcal{O}|^4)$ εφαρμογές των κανόνων **CR1-CR12**.

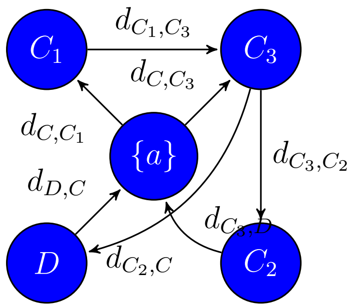
- Χρειάζεται πολυωνυμικός χρόνος ως προς το μέγεθος της $|\mathcal{O}|$ προκειμένου να ελεγχθεί εάν κάποιος κανόνας είναι εφαρμόσιμος. Για όλους τους κανόνες, εκτός του κανόνα **CR6**, για μία "αφελή" εφαρμογή του αλγορίθμου είναι προφανές ότι οι έλεγχοι οι οποίοι θα πρέπει να γίνουν (να γίνει έλεγχος για κάθε υπαγωγή στο $\mathcal{O}$ και για όλες τις ασαφές υπαγωγές στο $\mathcal{O}_{SAT}$) δεν μπορεί να είναι περισσότεροι των $O(|\mathcal{O}| \cdot |\mathcal{O}_{SAT}|) = |\mathcal{O}|^4$.

- Για τον κανόνα **CR6** το πρόβλημα του να βρεθεί εάν $\langle \{a\} \rightsquigarrow D, d\rangle$ μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας μία παραλλαγή του προβλήματος ελάχιστου μονοπατιού (shortest path problem) για κατευθυνόμενους γράφους με βάρη (weighted directed graphs). Στην Εικόνα 4.1 βλέπουμε ένα τέτοιο γράφο όπου κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο του $BC_{\mathcal{O}}$ και κάθε ακμή από τον κόμβο C_i στον κόμβο C_j έχει μήκος

$$|d_{C_i,C_j}| = \inf\{\frac{1}{d} \mid r \in R_{\mathcal{O}} \text{ και } \langle C_i \sqsubseteq \exists R.C_j, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}\}.$$

  Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.1 οι ακμές με ∞ μήκος δεν λαμβάνονται υπόψη. Στην παραλλαγή του προβλήματος ελαχίστου μονοπατιού θεωρούμε ότι η απόσταση που θα διανυθεί από τον έναν κόμβο στον άλλο μεταξύ δύο ακμών με μήκη e_1, e_2 είναι $\max(e_1, e_2)$ αντί για $e_1 + e_2$ (αντίστοιχα για περισσότερες των δύο ακμών). Προφανώς εάν το ελάχιστο μονοπάτι από κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$ στην έννοια D έχει μήκος e μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\langle C \rightsquigarrow D, 1/d\rangle$. Το πρόβλημα του να βρεθούν όλα τα ελάχιστα μονοπάτια σε ένα γράφο, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που προτάθηκε από τον Floyd (1962) έχει $O(|\mathcal{O}|^3)$ πολυπλοκότητα. Επομένως η εφαρμογή του κανόνα **CR6** γίνεται επίσης σε πολυωνυμικό χρόνο.

■



Σχήμα 4.1: *Αναγωγή του* $\langle\{a\} \rightsquigarrow C, d\rangle$ *στο πρόβλημα ελαχίστου μονοπατιού.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.9 (Ορθότητα): Η ορθότητα είναι η ευθεία φορά της συνεπαγωγής του Θεωρήματος 4.9. Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε μία οντολογία $\mathcal{O}$ δημιουργώντας μία οντολογία με τα εξαγόμενα συμπεράσματα $\mathcal{O}_{SAT}$ και $\{o\}$, B είναι αντίστοιχα μία ονοματική έννοια και μία έννοια $B \in BC_{\mathcal{O}}$ τέτοιες ώστε είτε η Συνθήκη S1, είτε η Συνθήκη S2 του Θεωρήματος 4.9 ισχύει. Πριν δείξουμε ότι ισχύει $\langle\{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}} B, d\rangle$, θα αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 4.13 *Κάθε υπαγωγή εννοιών στο* $\mathcal{O}_{SAT}$ *ικανοποιείται από ένα μοντέλο* $\mathcal{I}$ *της* $\mathcal{O}$ *οντολογίας.*

Απόδειξη: Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή στην εφαρμογή των κανόνων ολοκλήρωσης (completion rules) του Πίνακα 4.5.

Για τη βάση της επαγωγής, αρχικά έχουμε ότι κανένας κανόνας δεν εφαρμόζεται και η οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ είναι κενή. Συνεπώς κάθε μοντέλο του $\mathcal{O}$ είναι και μοντέλο του $\mathcal{O}_{SAT}$ και ο ισχυρισμός ισχύει. Υποθέτουμε ότι στο βήμα j της εκτέλεσης του αλγορίθμου μας έχουμε υπολογίσει την οντολογία $\mathcal{O}^j_{SAT}$ για την οποία ο ισχυρισμός μας ισχύει, δηλαδή κάθε μοντέλο του $\mathcal{O}$ είναι και μοντέλο του $\mathcal{O}^j_{SAT}$. Στο βήμα $j+1$ εφαρμογής κάποιου κανόνα του Πίνακα 4.5 προστίθεται μία νέα υπαγωγή εννοιών δημιουργώντας την $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$ οντολογία. Αρκεί να δείξουμε ότι η υπαγωγή εννοιών που προστέθηκε ικανοποιείται σε όλα τα μοντέλα της $\mathcal{O}$. Για να γίνει αυτό εξετάζουμε την περίπτωση κάθε κανόνα του Πίνακα 4.5 που εφαρμόστηκε προκειμένου να προστεθεί η νέα υπαγωγή εννοιών. Στο υπόλοιπο της απόδειξης θεωρούμε ότι $C^{\mathcal{I}}(x) = e$.

(I1 ή I2) Οι κανόνες αυτοί προσθέτουν $\langle C \sqsubseteq C, 1\rangle$ και $\langle C \sqsubseteq \top, 1\rangle$ στην $\mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε έννοια $C \in BC_{\mathcal{C}}$. Από τη σημασιολογία κάθε $C \in BC_{\mathcal{C}}$ και της άνω έννοιας είναι εύκολο να δούμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει.

(CR1) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq E, d_1 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}, \qquad \langle E \sqsubseteq D, d_2 \rangle \in \mathcal{O}$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2) \rangle$ στην $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$ οντολογία. Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται το GCI από ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{O}$, αρκεί να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$. Από την επαγωγική υπόθεση (ΕΥ) έχουμε ότι $E^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ που μαζί με το GCI $\langle E \sqsubseteq D, d_2 \rangle$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(E^{\mathcal{I}}(x), d_2) \geq \min(e, d_1, d_2).$$

(CR2) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq C_1, d_1 \rangle, \langle C \sqsubseteq C_2, d_2 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT} \qquad \langle C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, d_3 \rangle \in \mathcal{O}$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2, d_3) \rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2, d_3)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $C_1^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ και $C_2^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_2)$ που μαζί με το GCI $\langle C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, d_3 \rangle$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(C_1^{\mathcal{I}}(x), C_2^{\mathcal{I}}(x), d_3) \geq \min(e, d_1, d_2, d_3).$$

(CR3) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq C', d_1 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}, \qquad \langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d_2 \rangle \in \mathcal{O}$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, \min(d_1, d_2) \rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $(\exists R.D)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $C'^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ που μαζί με το GCI $\langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d_2 \rangle$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$(\exists R.D)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2).$$

(CR4) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq \exists R.E, d_1 \rangle, \langle E \sqsubseteq C', d_2 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}, \qquad \langle \exists R.C' \sqsubseteq D, d_3 \rangle \in \mathcal{O}$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2, d_3) \rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2, d_3)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $(\exists R.E)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ και $C'^{\mathcal{I}}(y) \geq \min(E^{\mathcal{I}}(y), d_2)$ για κάθε $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ που από τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών προκύπτει ότι $(\exists R.C')^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$. Το τελευταίο μαζί με το GCI $\langle \exists R.C' \sqsubseteq D, d_3 \rangle$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2, d_3).$$

(CR5) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq \exists R.E, d_1\rangle, \langle E \sqsubseteq \bot, d_2\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $e = 0$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $(\exists R.E)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ και $\bot^{\mathcal{I}}(y) \geq \min(E^{\mathcal{I}}(y), d_2)$ για όλα τα $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι $E^{\mathcal{I}}(y) = 0$ για όλα τα $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ το οποίο μαζί με τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $(\exists R.E)^{\mathcal{I}}(x) = 0$. Συνεπώς από τη στιγμή που ισχύει $(\exists R.E)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1)$ και $d_1 > 0$ προκύπτει ότι

$$e = 0.$$

(CR6) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle E \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle E \sqsubseteq D, d_2\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}, \qquad \langle \{b\} \rightsquigarrow E, d_1\rangle$$

και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2)\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\{a\}^{\mathcal{I}}(x) \geq e \tag{4.2}$$
$$\{a\}^{\mathcal{I}}(y) \geq E^{\mathcal{I}}(y) \tag{4.3}$$
$$D^{\mathcal{I}}(y) \geq \min(E^{\mathcal{I}}(y), d_2) \tag{4.4}$$

για κάθε $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Η συνθήκη $\langle \{b\} \rightsquigarrow E, d_1\rangle$ μαζί με την επαγωγική υπόθεση οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$(\exists R_1.(...\exists R_k.E))^{\mathcal{I}}(y) \geq \min(\{b\}^{\mathcal{I}}(y), d_1) \tag{4.5}$$

για μία οποιαδήποτε ακολουθία ρόλων $R_1, \ldots, r_k$.

(i) Εάν $x \neq a^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι $\{a\}^{\mathcal{I}}(x) = 0$ που μαζί με την Εξίσωση 4.2 οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $e = 0$ και συνεπώς η ανισότητα $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$ στοιχειωδώς ισχύει.

(ii) Εάν $x = a^{\mathcal{I}}$, τότε αντικαθιστώντας στην Εξίσωση 4.5 το y με το $b^{\mathcal{I}}$ προκύπτει ότι $(\exists R_1.(...\exists R_k.E))^{\mathcal{I}}(b^{\mathcal{I}}) \geq d_1$. Η τελευταία ανισότητα μαζί με τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει κάποιο $z \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $E^{\mathcal{I}}(z) \geq d_1$. Το γεγονός ότι $E^{\mathcal{I}}(z) \geq d_1$ μαζί με την Εξίσωση 4.3 συνεπάγονται ότι $E^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq d_1$ το οποίο αν συνδυαστεί με την Εξίσωση 4.4 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$D^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \geq \min(d_1, d_2) \geq \min(e, d_1, d_2).$$

(CR10) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle \in \mathcal{O}^{j}_{SAT},$$

ένα RI της μορφής $r \sqsubseteq s \in \mathcal{O}$ και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq \exists S.D, d\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $(\exists S.D)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d)$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $(\exists R.D)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d)$ το οποίο μαζί με την υπαγωγή ρόλων $r \sqsubseteq s$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$(\exists S.D)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d).$$

(CR11) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής:

$$\langle C \sqsubseteq \exists R_1.E, d_1\rangle, \langle E \sqsubseteq \exists R_2.D, d_2\rangle \in \mathcal{O}^{j}_{SAT},$$

ένα RI της μορφής $R_1 \circ R_2 \sqsubseteq s \in \mathcal{O}$ και προσθέτει στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$ το GCI $\langle C \sqsubseteq \exists S.E, \min(d_1, d_2)\rangle$. Μένει να δείξουμε ότι $(\exists S.E)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2)$. Από την επαγωγική υπόθεση και τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min(r_1^{\mathcal{I}}(x, y), E^{\mathcal{I}}(y))\} &\geq \min(e, d_1) \\ \sup_{z \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min(r_2^{\mathcal{I}}(y, z), D^{\mathcal{I}}(z))\} &\geq \min(E^{\mathcal{I}}(y), d_2). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι

$$\sup_{y,z \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min(r_1^{\mathcal{I}}(x, y), r_2^{\mathcal{I}}(y, z), D^{\mathcal{I}}(z))\} \geq \min(e, d_1, d_2)$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\sup_{z \in \Delta^{\mathcal{I}}} \{\min((R_1 \circ R_2)^{\mathcal{I}}(x, z), D^{\mathcal{I}}(z))\} \geq \min(e, d_1, d_2).$$

Η τελευταία ανισότητα μαζί με την υπαγωγή ρόλων $R_1 \circ R_2 \sqsubseteq s$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$(\exists S.E)^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d_1, d_2).$$

(CR12) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής

$$\langle C \sqsubseteq \{a\}, d\rangle \in \mathcal{O}^{j}_{SAT}$$

με $d > 0$ και προσθέτει το GCI $\langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Μένει να δειχθεί ότι $\{a\}^{\mathcal{I}}(x) \geq e$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\{a\}^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d)$ και εφόσον η τιμή του $\{a\}^{\mathcal{I}}(x)$ είναι είτε 0 είτε 1, $d > 0$, και $e \in [0, 1]$, προκύπτει ότι

$$\{a\}^{\mathcal{I}}(x) \geq e.$$

Εάν η Συνθήκη S1 ικανοποιείται, δηλαδή $\langle\{o\} \sqsubseteq D, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$, τότε από τον προηγούμενο ισχυρισμό προκύπτει ότι $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(\{o\}^{\mathcal{I}}(x), d') \geq \min(\{o\}^{\mathcal{I}}(x), d)$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της οντολογίας $\mathcal{O}$. Από την τελευταία ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $\langle\{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}} B, d\rangle$. Εάν η Συνθήκη S2 ισχύει, δηλαδή $\langle\{a\} \sqsubseteq \bot, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για οποιοδήποτε ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$, τότε βάσει του προηγούμενου ισχυρισμού θα πρέπει να έχουμε ότι $\{a\}^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) \leq \bot^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = 0$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του $\mathcal{O}$. Κάτι τέτοιο όμως βάσει της διερμηνείας των ονοματικών εννοιών δεν μπορεί να ισχύει και συνεπώς η οντολογία $\mathcal{O}$ είναι μη συνεπής (δεν έχει κάποιο μοντέλο). Μία μη συνεπής οντολογία συνεπάγεται όλα τα αξιώματα και για αυτό έχουμε ότι $\langle\{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}} B, d\rangle$. ∎

Πρόταση 4.14 *Εάν $\langle\top \sqsubseteq F, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποια περιγραφή έννοιας F τότε για κάθε $C \in BC_{\mathcal{C}}$ ισχύει ότι $\langle C \sqsubseteq F, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο βαθμό $d' \geq d$.*

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμός μας εκτελείται σε m βήματα και εξαγόμενη γνώση στο βήμα j συμβολίζεται με $\mathcal{O}^j_{SAT}$ (θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $\mathcal{O}_{SAT}$ σαν συντομογραφία της $\mathcal{O}^m_{SAT}$). Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά εξετάζοντας τους βαθμούς j για τους οποίους $\langle\top \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}^{j+1}_{SAT} \setminus \mathcal{O}^j_{SAT}$. Για τη βάση της επαγωγής αρχικά έχουμε ότι η οντολογία $\mathcal{O}^0_{SAT}$ είναι κενή και συνεπώς η υπόθεσή μας ισχύει. Για το βήμα της επαγωγής αναλύουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ανάλογα με το ποιος κανόνας εφαρμόστηκε προκειμένου να προστεθεί η υπαγωγή $\langle\top \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$.

(CR1) Η εφαρμογή του κανόνα αυτού υποδηλώνει την ύπαρξη υπαγωγών της μορφής $\langle\top \sqsubseteq C', d_1\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$, $\langle C' \sqsubseteq D, d_2\rangle \in \mathcal{O}$ και ο κανόνας προσθέτει την υπαγωγή $\langle\top \sqsubseteq D, \min(d_1, d_2)\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\langle C \sqsubseteq C', d'_1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για όλα τα $C \in BC_{\mathcal{O}}$ για κάποιο βαθμό $d'_1 \geq d_1$. Ο κανόνας **CR1** για $\langle C \sqsubseteq C', d'_1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$, $\langle C' \sqsubseteq D, d_2\rangle \in \mathcal{O}$ διασφαλίζει ότι $\langle C \sqsubseteq D, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq \min(d'_1, d_2) \geq \min(d_1, d_2)$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις μπορούν να αποδειχθούν ομοίως με την περίπτωση **CR1**. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.9 (Πληρότητα): Η πληρότητα είναι η αντίστροφη φορά της συνεπαγωγής του Θεωρήματος 4.9. Θέλουμε να δείξουμε ότι όταν ισχύει $\mathcal{O} \models \langle\{o\} \sqsubseteq B, d\rangle$ τότε θα πρέπει να ισχύει και μία από τις Συνθήκες S1, S2 του Θεωρήματος 4.9. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι όταν δεν ισχύει η Συνθήκη S2 και έχουμε ότι $\mathcal{O} \models \langle\{o\} \sqsubseteq B, d\rangle$, τότε πρέπει να ισχύει η Συνθήκη S1.

Βήμα 1. Θα κινηθούμε με τη μεθοδολογία που προτείνεται από τους Baader et al. (2005) δημιουργώντας ένα canonical μοντέλο της $\mathcal{O}$ πάνω στο οποίο θα στηριχθεί η απόδειξή μας. Έστω ότι οι κανόνες ολοκλήρωσης του Πίνακα 4.5 έχουν εφαρμοστεί μέχρι τέλους, ορίζουμε το σύνολο εννοιών $BC^-_{\mathcal{O}}$ ως εξής:

$$BC^-_{\mathcal{O}} := \{C \mid \langle\{a\} \rightsquigarrow C, d''\rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ για } \{a\}, C \in BC_{\mathcal{O}} \text{ και } d'' > 0\}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε με επαγωγικό τρόπο τη σχέση $\sim$ στο σύνολο $BC_{\mathcal{O}}^{-}$ ως εξής:

$$C \sim D \text{ ανν } \begin{array}{ll} \text{είτε} & \langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle D \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ για κάποιο } \{a\} \in BC_{\mathcal{O}} \\ \text{είτε} & C = D \end{array}$$

Μπορεί να βεβαιωθεί με εύκολο τρόπο ότι η σχέση $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας, ενώ ορίζεται και η κλάση ισοδυναμίας μίας έννοιας $C \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$ ως εξής:

$$[C] = \{D \mid C \sim D\}.$$

Πρόταση 4.15 *Έστω ότι οι έννοιες $\{a\}, C \in BC_{\mathcal{O}}$ ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας $\{a\}, C \in [E]$. Εάν $\langle \{a\} \sqsubseteq F, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ τότε $\langle C \sqsubseteq F, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$.*

Απόδειξη: Εφόσον $\{a\}, C \in [E]$ τότε υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{b\}$ τέτοια ώστε $\langle \{a\} \sqsubseteq \{b\}, 1\rangle, \langle C \sqsubseteq \{b\}, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$. Εάν το F είναι μία έννοια στο $BC_{\mathcal{O}}$. Εφόσον $\langle C \sqsubseteq \{b\}, 1\rangle, \langle \{a\} \sqsubseteq \{b\}, 1\rangle, \langle \{a\} \sqsubseteq F, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ και $\langle \{a\} \rightsquigarrow \{a\}, 1\rangle$ ο κανόνας **CR6** διασφαλίζει ότι $\langle C \sqsubseteq F, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$.

Εάν η F είναι μία περιγραφή έννοιας της μορφής $\exists R.D$ όπου $r \in R_{\mathcal{O}}$ και $D \in BC_{\mathcal{O}}$. Έστω ότι ο αλγόριθμός μας πραγματοποιείται σε m βήματα και η προκύπτουσα οντολογία στο βήμα j συμβολίζεται με $\mathcal{O}_{SAT}^{j}$ (θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathcal{O}_{SAT}$ σαν συντομογραφία για το $\mathcal{O}_{SAT}^{m}$). Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το μικρότερο j τέτοιο ώστε: $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}^{j+1} \setminus \mathcal{O}_{SAT}^{j}$. Για τη βάση της επαγωγής αρχικά έχουμε ότι η οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}^{0}$ είναι κενή και συνεπώς η υπόθεσή μας ισχύει. Για το βήμα της επαγωγής εξετάζουμε τις διάφορες περιπτώσεις εφαρμογής κανόνων που προσθέτουν το GCI $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ στην $\mathcal{O}_{SAT}^{j+1}$.

(CR3) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής $\langle \{a\} \sqsubseteq C', d_1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}^{j}$, $\langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d_2\rangle \in \mathcal{O}$ και προσθέτει ένα GCI $\langle \{a\} \sqsubseteq C', \min(d_1, d_2)\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}^{j+1}$. Αφού $\{a\} \in [C]$, έχουμε αποδείξει ότι $\langle C \sqsubseteq C', d_1'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d_1' \geq d_1$. Το τελευταίο μαζί με το GCI $\langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d_2\rangle \in \mathcal{O}$ και τη μη εφαρμογή του κανόνα **CR3** διασφαλίζουν ότι $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq \min(d_1', d_2) \geq \min(d_1, d_2)$.

(CR10) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε δύο υπαγωγές της μορφής $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}^{j}, r \sqsubseteq s \in \mathcal{O}$ και η εφαρμογή του προσθέτει το GCI $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists S.D, d\rangle$ στο $\mathcal{O}_{SAT}^{j+1}$. Αφού $\{a\} \in [C]$, από την επαγωγική υπόθεση πρέπει να έχουμε και ότι $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d' \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$. Το τελευταίο μαζί με το RI $r \sqsubseteq s \in \mathcal{O}$ και τη μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR10** διασφαλίζουν ότι $\langle C \sqsubseteq \exists S.D, d'' \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d'' \geq d' \geq d$.

(CR11) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε δύο υπαγωγές της μορφής $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R_1.D, d_1 \rangle, \langle D \sqsubseteq \exists R_2.E, d_2 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$, $R_1 \circ R_2 \in \mathcal{O}$ και προσθέτει το GCI $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists S.D, \min(d_1, d_2) \rangle$ στο $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Αφού $\{a\} \in [C]$, από την υπόθεση της επαγωγής πρέπει να ισχύει επίσης ότι $\langle C \sqsubseteq \exists R_1.D, d'_1 \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d'_1 \geq d_1$. Το τελευταίο μαζί με τις υπαγωγές $\langle D \sqsubseteq \exists R_2.E, d_2 \rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$, $r \sqsubseteq s \in \mathcal{O}$, και τη μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR11** διασφαλίζουν ότι $\langle C \sqsubseteq \exists S.D, d' \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq \min(d'_1, d_2) \geq \min(d_1, d_2)$.

Βήμα 2. Σε αυτό το βήμα θα δημιουργήσουμε μία ασαφή διερμηνεία $\mathcal{I}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η διερμηνεία αυτή είναι και μοντέλο της οντολογίας $\mathcal{O}$.

Για το υπόλοιπο της απόδειξης, για κάθε κάθε $C \in BC^-_{\mathcal{O}}$, περιγραφή έννοιας D, και ρόλο $R \in R_{\mathcal{O}}$, θα χρησιμοποιήσουμε τους βαθμούς d_C, $d_{C \sqsubseteq D}$, $d_{R(C,D)}$ σαν συντομογραφίες των:

$$\begin{aligned} d_C &= \sup\{d \mid \langle \{a\} \rightsquigarrow C, d \rangle \text{ και } \{a\} \in BC_C\} \\ d_{C \sqsubseteq D} &= d \text{ εάν } \langle C \sqsubseteq D, d \rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \\ d_{R(C,D)} &= \sup\{d \mid \langle C \sqsubseteq \exists R.D', d \rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ και } D' \in [D]\}. \end{aligned}$$

Για τους παραπάνω βαθμούς, στην περίπτωση που δεν υπάρχει κάποιο GCI $\langle C \sqsubseteq D, d \rangle$ (ή $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d \rangle$) στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ θα θεωρήσουμε ότι $d_{C \sqsubseteq D} = 0$ ($d_{R(C,D)} = 0$).

Ορίζουμε την ασαφή διερμηνεία $\mathcal{I}$ ως εξής (όπου $A \in BC_{\mathcal{O}}$ είναι το όνομα μίας έννοιας, $D, D' \in BC_{\mathcal{O}}$, $R \in R_{\mathcal{O}}$, $\{a\}$ είναι μία ονοματική έννοια στο $BC_{\mathcal{O}}$, και $C \in BC^-_{\mathcal{O}}$):

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{I}} &:= \{[C] \mid C \in BC^-_{\mathcal{O}}\} \\ a^{\mathcal{I}} &:= [\{a\}] \\ A^{\mathcal{I}}([C]) &:= \begin{cases} d_{\{a\} \sqsubseteq A} & \text{εάν υπάρχει κάποιο } \{a\} \in [C] \\ \max(\min(d_{C \sqsubseteq A}, d_C), d_{\top \sqsubseteq A}) & \text{διαφορετικά} \end{cases} \\ R^{\mathcal{I}}([C],[D]) &:= \begin{cases} d_{R(\{a\},D)} & \text{εάν υπάρχει κάποιο } \{a\} \in [C] \\ \max(\min(d_{r(C,D)}, d_C), d_{r(\top,D)}) & \text{διαφορετικά} \end{cases} \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας κάθε ονοματική έννοια $\{a\}$ ανήκει σε ακριβώς μία κλάση, συνεπώς το $a^{\mathcal{I}}$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Επιπλέον η Πρόταση 4.15 διασφαλίζει ότι η διερμηνεία κάθε έννοιας και ρόλου ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Για αυτό το λόγο η $\mathcal{I}$ είναι σωστά ορισμένη (well defined).

Πρόταση 4.16 *Για όλα τα $[C] \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $D \in BC_{\mathcal{O}} \cup \{\bot\}$, έχουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([C]) = d$ ανν μία εκ των δύο συνθηκών ισχύει:*

T1 Υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [C]$ και $d = d_{\{a\} \sqsubseteq D}$,

T2 Δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ και ισχύει ότι $d = \max(\min(d_{C \sqsubseteq D}, d_C), d_{\top \sqsubseteq D})$.

Απόδειξη: Εξετάζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις ως προς τον τύπο της έννοιας D:

D είναι η άνω έννοια ($D = \top$): Για κάθε $[C] \in \Delta^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι $\top^{\mathcal{I}}([C]) = 1$ από τη σημασιολογία της άνω έννοιας. Από τη στιγμή που $\langle \top \sqsubseteq \top, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ και $\langle \{a\} \sqsubseteq \top, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$, οι Συνθήκες T1, T2 στοιχειωδώς ισχύουν.

D είναι η κάτω έννοια ($D = \bot$): Για κάθε $[C] \in \Delta^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι $\bot^{\mathcal{I}}([C]) = 0$ από τη σημασιολογία της κάτω έννοιας. Η μη ικανοποίηση της Συνθήκης S2 διασφαλίζει ότι $\langle \{a\} \sqsubseteq \bot, 0\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$, δηλαδή $d_{\{a\} \sqsubseteq \bot} = 0$. Εφόσον $\langle \{a\} \sqsubseteq \bot, 0\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$, εξαιτίας του Κανόνα **CR5** και από την κατασκευή του $BC_{\mathcal{O}}^{-}$ προκύπτει ότι $\langle C \sqsubseteq \bot, 0\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$, δηλαδή $d_{C \sqsubseteq \bot} = 0$ για κάθε $C \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$. Επομένως $d_{\{a\} \sqsubseteq \bot} = d_{C \sqsubseteq D} = d_{\top \sqsubseteq \bot} = 0$ και οι Συνθήκες T1,T2 ισχύουν.

D είναι το όνομα μίας έννοιας ($D = A$): Οι δύο συνθήκες ισχύουν εκ κατασκευής του $A^{\mathcal{I}}$.

D είναι μία ονοματική έννοια ($D = \{c\}$): Ο κανόνας **CR12** διασφαλίζει ότι $d_{C \sqsubseteq \{a\}}$ είναι είτε 0 είτε 1 για κάθε έννοια C και ονοματική έννοια $\{a\}$.

Για το ευθύ. Έστω ότι $d_{\{a\} \sqsubseteq \{c\}} = 1$ για κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [C]$. Μένει να δείξουμε ότι $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 1$. Εξ ορισμού της κλάσης ισοδυναμίας $[C]$ έχουμε ότι $[\{c\}] = [\{a\}] = [C]$. Εφόσον, από την κατασκευή $\mathcal{I}$, $c^{\mathcal{I}} = [\{c\}] = [C]$ έχουμε ότι $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 1$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι εάν $\langle \{a\} \sqsubseteq \{c\}, 0\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ τότε $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 0$.

Για το αντίστροφο. Έστω ότι $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 1$, μένει να αποδείξουμε ότι $\langle\{a\} \sqsubseteq \{c\}, 1\rangle$ για κάθε $\{a\} \in [C]$. Εφόσον $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 1$ από την κατασκευή του $\mathcal{I}$ έχουμε ότι $c^{\mathcal{I}} = [C]$, δηλαδή $\{c\} \in [C]$, και σύμφωνα με την Πρόταση 4.15 προκύπτει ότι $\langle\{a\} \sqsubseteq \{c\}, 1\rangle$, δηλαδή $d_{\{a\}\sqsubseteq\{c\}} = 1$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι εάν $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 0$ τότε $\langle\{a\} \sqsubseteq \{c\}, 0\rangle$ για κάθε $\{a\} \in [C]$. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει μία ονοματική έννοια στο $[C]$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\langle C \sqsubseteq \{c\}, 0\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ και $\{c\}^{\mathcal{I}}([C]) = 0$.

Βήμα 3. Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε ότι η διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι ένα μοντέλο της οντολογίας $\mathcal{O}$, δηλαδή κάθε υπαγωγή έννοιας και ρόλου στο $\mathcal{O}$ ικανοποιείται από τη διερμηνεία $\mathcal{I}$. Εξετάζουμε τις διάφορες περιπτώσεις υπαγωγών εννοιών και ρόλων στην $\mathcal{O}$:

$\langle C' \sqsubseteq D, d\rangle$ Έστω ότι $C'^{\mathcal{I}}([C]) = e$. Αρκεί να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([C] \geq \min(e, d)$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.16, έχουμε ότι $e = \max(\min(d_{C\sqsubseteq C'}, d_C), d_{\top\sqsubseteq C'})$. Η μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR1** για $\langle C \sqsubseteq C', d_{C\sqsubseteq C'}\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$, $\langle C' \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}$ διασφαλίζει ότι $d_{C\sqsubseteq D} \geq \min(d_{C\sqsubseteq C'}, d)$. Η μη εφαρμογή του κανόνα **CR1** διασφαλίζει επίσης ότι $d_{\top\sqsubseteq D} \geq \min(d_{\top\sqsubseteq C'}, d)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 και τις προαναφερθείσες ανισότητες έχουμε:

$$D^{\mathcal{I}}([C]) = \max(\min(d_{C\sqsubseteq D}, d_C), d_{\top\sqsubseteq D}) \geq \min(e, d).$$

Εάν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε $e = d_{\{a\}\sqsubseteq C'}$ σύμφωνα με την Πρόταση 4.16. Η μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR1** εξασφαλίζει ότι $d_{\{a\}\sqsubseteq D} \geq \min(d_{\{a\}\sqsubseteq C'}, d) = \min(e, d)$. Από την Πρόταση 4.16 και την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι:

$$D^{\mathcal{I}}([C]) = d_{\{a\}\sqsubseteq D} \geq \min(e, d).$$

$\langle C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D, d\rangle$ Έστω ότι $(C_1 \sqcap C_2)^{\mathcal{I}}([C]) = e$. Από την προηγούμενη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $C_1^{\mathcal{I}}([C]) = e_1 \geq e$, $C_2^{\mathcal{I}}([C]) = e_2 \geq e$. Αρκεί να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([C]) \geq \min(e, d)$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 έχουμε ότι $e_1 = \max(\min(d_{C\sqsubseteq C_1}, d_C), d_{\top\sqsubseteq C_1})$ και $e_2 = \max(\min(d_{C\sqsubseteq C_2}, d_C), d_{\top\sqsubseteq C_2})$. Η περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR2** διασφαλίζει ότι $d_{C\sqsubseteq D} \geq \min(d_{C\sqsubseteq C_1}, d_{C\sqsubseteq C_2}, d)$ και ότι θα ισχύει $d_{\top\sqsubseteq D} \geq$

$\min(d_{\top \sqsubseteq C_1}, d_{\top \sqsubseteq C_2}, d)$. Από την Πρόταση 4.16 και τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε ότι

$$D^{\mathcal{I}}([C]) = \max(\min(d_{C \sqsubseteq D}, d_C), d_{\top \sqsubseteq D}) \geq \min(e, d).$$

Στην περίπτωση που υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ η απόδειξη μπορεί να υλοποιηθεί με παρόμοιο τρόπο.

$\langle C' \sqsubseteq \exists R.D, d \rangle$ Έστω ότι $C'^{\mathcal{I}}([C]) = e$. Αρκεί να δειχθεί ότι $(\exists R.D)^{\mathcal{I}}([C]) \geq \min(e, d)$, δηλαδή ότι υπάρχει κάποιο $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $R^{\mathcal{I}}([C], x) \geq \min(e, d)$ και $D^{\mathcal{I}}(x) \geq \min(e, d)$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε έχουμε ότι $e = \max(\min(d_{C \sqsubseteq C'}, d_C), d_{\top \sqsubseteq C'})$ σύμφωνα με την Πρόταση 4.16. Η μη εφαρμογή του κανόνα **CR3** διασφαλίζει ότι $d_{C \sqsubseteq \exists R.D} \geq \min(d_{C \sqsubseteq C'}, d)$ και $d_{\top \sqsubseteq \exists R.D} \geq \min(d_{\top \sqsubseteq C'}, d)$. Εξ ορισμού των βαθμών $d_{R(C,D)}$, $d_{R(\top,D)}$ και τις δύο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
d_{R(C,D)} &\geq d_{C \sqsubseteq \exists R.D} \geq \min(d_{C \sqsubseteq C'}, d) \\
d_{R(\top,D)} &\geq d_{\top \sqsubseteq \exists R.D} \geq \min(d_{\top \sqsubseteq C'}, d)
\end{aligned}$$

Τέλος από την κατασκευή του $R^{\mathcal{I}}$ και τις προαναφερθείσες ανισότητες έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{I}}([C], [D]) &= \max(\min(d_{r(C,D)}, d_C), d_{r(\top,D)}) \geq \\
&\geq \max(\min(d_{C \sqsubseteq C'}, d_C, d), \min(d_{\top \sqsubseteq C'}, d)) \geq \min(e, d)
\end{aligned}$$

(θεωρούμε ότι το $[D]$ εμφανίζεται στο $\Delta^{\mathcal{I}}$ από τη στιγμή που όπως θα δείξουμε στη συνέχεια $d_D > 0$ και συνεπώς $D \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$). Μένει να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([D]) \geq \min(e, d)$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Δεν υπάρχει ονοματική έννοια στο $[D]$. Από την τιμή των βαθμών d_C, $d_{C \sqsubseteq \exists R.D}$ και από τον ορισμό του d_D βαθμού, προκύπτει ότι $d_D \geq \min(d_C, d_{C \sqsubseteq \exists R.D}) \geq \min(d_C, d_{C \sqsubseteq C'}, d)$. Η Πρόταση 4.14 διασφαλίζει ότι $d_D \geq d_{\top \sqsubseteq \exists R.D}$. Συνεπώς

$$d_D \geq \max(\min(d_C, d_{C \sqsubseteq C'}, d), d_{\top \sqsubseteq \exists R.D}) \geq \min(e, d)$$

και αφού $d_{D \sqsubseteq D} = 1$ συμπεραίνουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([D]) \geq \min(e, d)$.

(ii) Υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [D]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([D]) = d_{\{a\} \sqsubseteq D}$. Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι $d_D \geq \min(e, d)$ και συνεπώς υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{b\}$ τέτοια ώστε $\langle \{b\} \rightsquigarrow D, \min(e, d) \rangle$. Από τη στιγμή που $\{a\} \in [D]$, σύμφωνα με την Πρόταση 4.15 έχουμε ότι $\langle D \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$. Η μη εφαρμογή του κανόνα **CR6** για $\langle \{a\} \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle$, $\langle D \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$, $\langle \{b\} \leadsto D, \min(e,d)\rangle$, και $\langle D \sqsubseteq D, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ διασφαλίζει ότι $d_{\{a\}\sqsubseteq D} \geq \min(e,d)$. Συνεπώς $D^{\mathcal{I}}([D]) \geq \min(e,d)$

Στην περίπτωση που υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ η απόδειξη πραγματοποιείται με παρόμοιο τρόπο.

$\langle \exists R.C' \sqsubseteq D, d\rangle$ Έστω ότι $(\exists R.C')^{\mathcal{I}}([C]) = e$. Από τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών έχουμε ότι $R^{\mathcal{I}}([C],[E]) \geq e$ και $C'^{\mathcal{I}}([E]) \geq e$ για κάποιο $[E] \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Απομένει να δείξουμε ότι $D^{\mathcal{I}}([C] \geq \min(e,d)$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε, από την κατασκευή του $R^{\mathcal{I}}([C],[E])$, έχουμε ότι

$$R^{\mathcal{I}}([C],[E]) = \max(\min(d_{r(C,E)}, d_C), d_{r(\top,E)}) \geq e.$$

Θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[E]$, $d_{R(C,E)} \geq e$, και $d_C \geq e$. Από τον ορισμό του βαθμού $d_{R(C,E)}$ και επειδή μόνο $E \in [E]$ έχουμε ότι $d_{C\sqsubseteq\exists R.E} \geq e$. Εφόσον $C'^{\mathcal{I}}([E]) \geq e$, οι Προτάσεις 4.14,4.16 διασφαλίζουν ότι $d_{E\sqsubseteq C'} \geq e$. Για αυτό το λόγω η μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR4** διασφαλίζει ότι

$$d_{C\sqsubseteq D} \geq \min(d_{C\sqsubseteq\exists R.E}, d_{E\sqsubseteq C'}, d) \geq \min(e,d)$$

και σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 έχουμε ότι

$$D^{\mathcal{I}}([C]) \geq \min(d_{C\sqsubseteq D}, d_C) \geq \min(e,d).$$

(ii) Δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[E]$ και $d_{R(\top,E)} \geq e$. Δουλεύοντας όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι $d_{\top\sqsubseteq D} \geq \min(e,d)$ και σύμφωνα με την Πρόταση 4.16 έχουμε ότι

$$D^{\mathcal{I}}([C]) \geq d_{\top\sqsubseteq D} \geq \min(e,d).$$

(iii) Υπάρχει μία ονοματική έννοια $\{a\} \in [E]$, $d_{R(C,E)} \geq e$, και $d_C \geq e$. Εξ ορισμού του βαθμού $d_{R(C,E)}$ έχουμε ότι $d_{C\sqsubseteq\exists R.E'} \geq e$ για κάποιο $E' \in [E]$. Εφόσον $C'^{\mathcal{I}}([E]) \geq e$ οι Προτάσεις 4.15,4.16 διασφαλίζουν ότι $d_{E'\sqsubseteq C'} \geq e$. Για αυτό το λόγω η μη περαιτέρω δυνατότητα εφαρμογής του κανόνα **CR4** διασφαλίζει ότι

$$d_{C\sqsubseteq D} \geq \min(d_{C\sqsubseteq\exists R.E'}, d_{E'\sqsubseteq C'}, d) \geq \min(e,d).$$

και εφόσον $d_C \geq e$, η Πρόταση 4.16 διασφαλίζει ότι

$$D^{\mathcal{I}}([C]) \geq \min(d_{C\sqsubseteq D}, d_C) \geq \min(e,d).$$

(iv) Υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [E]$ και $d_{R(\top,E)} \geq e$. Δουλεύοντας όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι $d_{\top \sqsubseteq D} \geq \min(e,d)$ και από την Πρόταση 4.16 έχουμε ότι

$$D^{\mathcal{I}}([C]) \geq d_{\top \sqsubseteq D} \geq \min(e,d).$$

Εάν υπάρχει ονοματική έννοια στο $[C]$ οι αποδείξεις μπορούν να υλοποιηθούν με παρόμοιο τρόπο.

$R \sqsubseteq S$ Έστω ότι $R^{\mathcal{I}}([C],[F]) = e$ για κάποιο $[C],[F] \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Μένει να αποδειχθεί ότι $S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq e$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε, από την κατασκευή του $R^{\mathcal{I}}$, έχουμε είτε ότι $d_{R(C,F)} \geq e$ και $d_C \geq e$ or $d_{R(\top,F)} = e$. Θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $d_{R(C,F)} \geq e$ και $d_C \geq e$. Τότε υπάρχει κάποιο $F' \in [F]$ τέτοιο ώστε $d_{C \sqsubseteq \exists R.F'} \geq e$. Η μη εφαρμογή του κανόνα **CR10** διασφαλίζει ότι

$$d_{C \sqsubseteq \exists S.F'} \geq d_{C \sqsubseteq \exists R.F'} \geq e.$$

και από την κατασκευή του $S^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq \min(d_{S(C,F)}, d_C) \geq \min(d_{C \sqsubseteq \exists S.F'}, e) \geq e.$$

(ii) $d_{R(\top,F)} = e$. Δουλεύοντας όπως πριν αποδεικνύουμε ότι $d_{\top,\exists R.F'} \geq e$. Συνεπώς από την κατασκευή του $S^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq d_{S(\top,F)} \geq d_{\top \sqsubseteq \exists R.F'} \geq e$$

Εάν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ η απόδειξη μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο.

$R_1 \circ R_2 \sqsubseteq S$ Έστω ότι $r_1^{\mathcal{I}}([C],[D]) = e_1$ και $r_2^{\mathcal{I}}([D],[F]) = e_2$ για κάποια $[C]$, $[D]$, $[F]$ στο $\Delta^{\mathcal{I}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq \min(e_1,e_2)$.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε εκ κατασκευής του $R_1^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι είτε $d_{R_1(C,D)} \geq e_1$ και $d_C \geq e_1$, είτε $d_{R_1(\top,D)} = e_1$. Θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[D]$, $d_{R_1(C,D)} \geq e_1$, και $d_C \geq e_1$. Εφόσον δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[D]$ τότε έχουμε μόνο $D \in [D]$ και συνεπώς $d_{R_1(C,D)} = d_{C \sqsubseteq \exists R_1.D} \geq e_1$. Εφόσον $R_2^{\mathcal{I}}([D],[F]) = e_2$, εκ κατασκευής του $R_2^{\mathcal{I}}$ και από την Πρόταση 4.14 έχουμε ότι $d_{R_2(D,F)} \geq e_2$ το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $F' \in [F]$ τέτοιο ώστε $d_{D \sqsubseteq \exists R_2.F'} \geq e_2$. Η μη περαιτέρω εφαρμογή του κανόνα **CR11** διασφαλίζει ότι

$$d_{C \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(d_{C \sqsubseteq \exists R_1.D}, d_{D \sqsubseteq \exists R_2.F'}) \geq \min(e_1, e_2)$$

Συνεπώς, εκ κατασκευής του $S^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι:

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq \min(d_{S(C,F)}, d_C) \geq \min(d_{C \sqsubseteq \exists S.F'}, e_1) \geq \min(e_1, e_2).$$

(ii) Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[D]$ και $d_{R_1(\top,D)} \geq e_1$. Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση δείχνουμε ότι $d_{\top \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(e_1, e_2)$ και από την κατασκευή του $S^{\mathcal{I}}$ έχουμε:

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq d_{S(\top,F)} \geq d_{\top \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(e_1, e_2).$$

(iii) Υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [D]$, $d_{R_1(C,D)} \geq e_1$, και $d_C \geq e_1$. Τότε $d_{C \sqsubseteq \exists R_1.D'} \geq e_1$ για κάποιο $D' \in [D]$. Εφόσον $R_2^{\mathcal{I}}([D],[F]) = e_2$ έχουμε εκ κατασκευής του $R_2^{\mathcal{I}}$ that $d_{\{a\} \sqsubseteq \exists R_2.F'} = e_2$ και την Πρόταση 4.15 ότι $d_{D' \sqsubseteq \exists R_2.F'} \geq e_2$. Ο κανόνας **CR11** διασφαλίζει ότι:

$$d_{C \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(d_{C \sqsubseteq \exists R_1.D'}, d_{D' \sqsubseteq \exists R_2.F'}) \geq \min(e_1, e_2).$$

και από την κατασκευή του $S^{\mathcal{I}}$ προκύπτει ότι:

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq \min(d_{S(C,F)}, d_C) \geq \min(d_{C \sqsubseteq \exists S.F'}, e_1) \geq \min(e_1, e_2).$$

(iv) Υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [D]$ και $d_{R_1(\top,D)} \geq e_1$. Εργαζόμενοι όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι $d_{\top \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(e_1, e_2)$ για κάποιο $F' \in [F]$ και συνεπώς εκ κατασκευής του $S^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι:

$$S^{\mathcal{I}}([C],[F]) \geq d_{S(\top,F)} \geq d_{\top \sqsubseteq \exists S.F'} \geq \min(e_1, e_2).$$

Εάν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ η απόδειξη μπορεί να πραγματοποιηθεί με παρόμοιο τρόπο.

Βήμα 4. Έχουμε δείξει ότι η διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της οντολογίας $\mathcal{O}$. Εάν $\mathcal{O} \models \langle \{o\} \sqsubseteq B, d \rangle$, τότε για τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ που κατασκευάσαμε αφού είναι μοντέλο της $\mathcal{O}$, ισχύει ότι $B^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \geq d$. Ο τελευταίος ισχυρισμός μαζί με την Πρόταση 4.16 συνεπάγονται ότι $d_{\{o\} \sqsubseteq B} \geq d$, δηλαδή ότι $\langle \{o\} \sqsubseteq B, d' \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$ όπως και θέλαμε να δείξουμε. ■

Κεφάλαιο 5

Βατές Ασαφείς ΠΛ με Απτά Πεδία

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα η οποία είναι μία βατή ασαφής περιγραφική λογική. Στο Κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τον τρόπο που μπορεί να επεκταθεί η συγκεκριμένη γλώσσα προκειμένου να αναπαραστήσει τύπους δεδομένων, όπως πχ αριθμητικά δεδομένα, μέσω των ασαφών απτών πεδίων. Η γλώσσα που παρουσιάζεται ονομάζεται ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ και διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών θέτοντας ένα σύνολο περιορισμών στην εκφραστικότητα των απτών πεδίων.

5.1 Εισαγωγή

Οι ασαφείς ΠΛ είναι επεκτάσεις των κλασσικών περιγραφικών λογικών που μπορούν να αναπαραστήσουν ατελή και ασαφή πληροφορία. Στο πλαίσιο της διατριβής μας επάνω στις ασαφείς ΠΛ εξετάσαμε την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα η οποία συνδυάζει υψηλή εκφραστικότητα με έναν αλγόριθμο συλλογιστικής πολυωνυμικής πολυπλοκότητας για προβλήματα όπως η ικανοποιησιμότητα έννοιας, η ασαφής υπαγωγή εννοιών, η συνέπεια μίας οντολογίας, το πρόβλημα στιγμιοτύπου, και το πρόβλημα μεγίστου κάτω φράγματος.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην ανάγκη αναπαράστασης γνώσης που σχετίζεται με αριθμητικά δεδομένα στη γλώσσα αυτή μέσω ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 5.1 *Στο Παράδειγμα 4.1 του Κεφαλαίου 4 εξετάσαμε πώς μία γλώσσα όπως η $\mathcal{EL}^{++}$ μπορεί να αναπαραστήσει γνώση που σχετίζεται με το ιατρικό πεδίο και πιο συγκεκριμένα να συσχετίσει γυναίκες ασθενείς με βαθμούς επικινδυνότητας όσον αφορά τον καρκίνο της μήτρας. Η οντολογία αυτή (χωρίς τους βαθμούς ασάφειας) δημιουργήθηκε από τους Falelakis et al. (2009); Mitkas et al. (2008) και βασιζόταν στο ευρωπαϊκό έργο ASSIST*[1] *του οποίου απώτερος σκοπός ήταν η δημιουργία ενός συστήματος ικανού να συσχετίσει την*

[1] `http://assist.ee.auth.gr`

εμφάνιση του καρκίνους της μήτρας με διάφορα είδη είτε κληρονομικών παραγόντων, είτε παραγόντων που σχετίζονται με τις συνθήκες διαβίωσης.

Έτσι λοιπόν θα επιθυμούσαμε να μάθουμε εάν μπορεί να υπάρξει συσχέτιση μεταξύ του καπνίσματος και της εμφάνισης καρκίνου της μήτρας. Προκειμένου να γίνει κάτι τέτοιο θα πρέπει να δημιουργηθεί η έννοια του καπνιστή. Επιπλέον, θα ήταν επιθυμητό να μπορούμε να ορίσουμε ως καπνιστή με βαθμό 1 *το άτομο που καπνίζει από* 25 *τσιγάρα και πάνω, ενώ ένα άτομο που καπνίζει γύρω στα 4 τσιγάρα την ημέρα να το ορίσουμε ως καπνιστή με βαθμό* 0.1.

Από το προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε πως εκτός από την ανάγκη να θέσουμε βαθμούς στην έννοια καπνιστής, προκύπτει και η ανάγκη να ενσωματώσουμε στην οντολογία μας αριθμητικά δεδομένα όπως είναι ο αριθμός των τσιγάρων που κάνει ένα άτομο την ημέρα. Ενώ λοιπόν, η ασάφεια μας διασφαλίζει ότι μπορούμε να ορίσουμε βαθμούς συμμετοχής για την έννοια καπνιστής, τα απτά πεδία μας επιτρέπουν να συσχετίσουμε τους βαθμούς αυτούς ασάφειας με αριθμητικά δεδομένα.

Έτσι λοιπόν στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την επέκταση των ασαφών ΠΛ (συγκεκριμένα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$) προκειμένου να ενσωματώσουν και να επεξεργαστούν γνώση που αναφέρεται σε συγκεκριμένα πεδία δεδομένων, αποκαλούμενα *απτά πεδία (concrete domains)*, όπως οι αριθμοί και συμβολοσειρές, τα οποία χρειάζονται σε πολλές εφαρμογές. Στο πλαίσιο αυτό θα προσπαθήσουμε να προτυποποιήσουμε κάποια απτά πεδία, και βάσει αυτής της προτυποποίησης να επεκτείνουμε τους αντίστοιχους αλγορίθμους προκειμένου να διαχειριστούν υπηρεσίες συλλογιστικής στην επεκτεταμένη γλώσσα.

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μία ασαφή ΠΛ η οποία ενώ θα διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα, θα μπορεί και να αναπαριστά αριθμητικά και άλλου είδους δεδομένα μέσω των απτών πεδίων. Η γλώσσα αυτή που προτείνουμε ονομάζεται ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$. Οι κύριες συνεισφορές μας που σχετίζονται με την παρουσία απτών πεδίων στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα είναι οι εξής:

- επεκτείνουμε τον ορισμό των ασαφών απτών πεδίων (fuzzy concrete domains) που έχει δοθεί από τον Straccia (2005b) προτείνοντας έννοιες όπως η *σύζευξη*, η *διάζευξη*, και η *συνεπαγωγή* στα πλαίσια ενός απτού πεδίου,

- παρουσιάζουμε παραδείγματα απτών πεδίων, και εξετάζουμε το σύνολο των περιορισμών στους οποίους πρέπει να υπόκειται ένα απτό πεδίο προκειμένου να διατηρείται η πολυωνυμική πολυπλοκότητα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας,

- συνοψίζουμε τους περιορισμούς αυτούς στα *μη αυστηρώς π-αποδεκτά* και στα *αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία* τα οποία επιτρέπουν διαφορετικές εκφραστικότητες αλλά και περιορισμούς ως προς τον τρόπο ενσωμάτωσης τους στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα.

- τέλος περιγράφουμε τον αλγόριθμο συλλογιστικής της $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ αποδεικνύοντας με αναλυτικό τρόπο την ορθότητα, πληρότητα, και πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

Η δομή του υπολοίπου κεφαλαίου είναι η εξής: Στην Παράγραφο 5 παρουσιάζουμε τη σχετική βιβλιογραφία που περιλαμβάνει τη σημασιολογία της κλασσικής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας και τον ορισμό των ασαφών απτών πεδίων. Η Παράγραφος 5.3 επεκτείνει τον ορισμό του απτού πεδίου με έννοιες όπως η σύζευξη, η διάζευξη, η ικανοποιησιμότητα, και η συνεπαγωγή. Στην Παράγραφο 5.4 δίνεται η σύνταξη και η σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας, ενώ προτείνεται το σύνολο των περιορισμών οι οποίοι διασφαλίζουν την πολυωνυμική πολυπλοκότητα της γλώσσας μας. Συνεχίζουμε στην Παράγραφο 5.5 παρουσιάζοντας τον αλγόριθμο συλλογιστικής για την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα. Ολοκληρώνουμε την εργασία μας πάνω στα απτά πεδία και την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα παρουσιάζοντας στην Παράγραφο 5.6 τις σχετικές εργασίες, ενώ στην Παράγραφο 5.7 συνοψίζουμε την εργασία μας πάνω σε αυτό το θέμα και προτείνουμε πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις. Τέλος στος Παράρτημα 5.Α′ παρουσιάζουμε τις αναλυτικές αποδείξης των Λημμάτων και Θεωρημάτων του Κεφαλαίου αυτού.

5.2 Θεωρητικό Υπόβαθρο

5.2.1 $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$

Η αριθμητική πληροφορία εκφράζεται στην $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ περιγραφική λογική με τη χρήση των απτών πεδίων (Baader et al., 2005). Ένα *απτό πεδίο* $\mathcal{D}$ είναι ένα ζεύγος $\langle \Delta^{\mathcal{D}}, \mathcal{P}^{\mathcal{D}} \rangle$ όπου το πεδίο ορισμού του $\Delta^{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο από απτά αντικείμενα (τιμές) και το $\mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο *κατηγορημάτων*, όπου κάθε $p \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}}$ έχει έναν βαθμό $n > 0$ και η διερμηνεία του είναι ένα υποσύνολο $p^{\mathcal{D}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{D}})^n$.

Παράδειγμα 5.2 *Το απτό πεδίο των ρητών αριθμών $Q = \langle \mathbb{Q}, \mathcal{P}^Q \rangle$, που παρουσιάζεται από τους Baader et al. (2005), έχει σαν πεδίο ορισμού τους ρητούς αριθμούς και περιέχει μοναδιαία κατηγορήματα όπως τα $\top_Q$, $=_q$, $>_q$ και δυαδικά κατηγορήματα όπως τα $=$, $+_q$ (όπου $q \in \mathbb{Q}$).*

Για παράδειγμα η διερμηνεία του κατηγορήματος $>_3$ ορίζεται ως εξής:

$$>_3^Q = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ και } x > 3\}$$

Διαισθητικά μία σύζευξη της μορφής:

$$(=_3)(x) \wedge (+_5)(x, y)$$

υποδεικνύει ότι $x = 3$ και $x + 5 = y$.

Πίνακας 5.1: *Σύνταξη και σημασιολογία του κατασκευαστή εννοιών απτού πεδίου για την $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα.*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
απτού πεδίου	$p(f_1, \ldots f_k)$ για $p \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}_j}$	$\{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y_1, \ldots, y_k \in \Delta^{\mathcal{D}_j}$ με $f_i^{\mathcal{I}}(x) = y_i$ για $1 \leq i \leq k$ και $(y_1, \ldots, y_k) \in p^{\mathcal{D}_j}\}$

Είναι προφανές ότι μία τέτοια σύζευξη είναι ικανοποιήσιμη και ότι συνεπάγεται τα ακόλουθα:

$$(=_3)(x) \wedge (+_5)(x, y) \models (=_8)(y).$$

Προκειμένου να εισαγάγουν απτά πεδία στην $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα, οι Baader et al. (2005) προτείνουν τη χρήση ενός συνόλου από *ονόματα χαρακτηριστικών (feature names)* N_F. Η σύνταξη και σημασιολογία του κατασκευαστή εννοιών που σχετίζονται με απτά πεδία φαίνεται στον Πίνακα 5.1, όπου το p είναι ένα κατηγόρημα του απτού πεδίου $\mathcal{D}_j$, τα $f_1, \ldots, f_k$ είναι ονόματα χαρακτηριστικών, και η συνάρτηση διερμηνείας $\cdot^{\mathcal{I}}$ απεικονίζει κάθε χαρακτηριστικό $f \in N_F$ σε μία μερική συνάρτηση $f^{\mathcal{I}}$ από το $\Delta^{\mathcal{I}}$ στο $\Delta^{\mathcal{D}}$.

Παράδειγμα 5.3 *Χρησιμοποιώντας τη σύνταξη της $\mathcal{EL}^{++}$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι* "ο Γιάννης είναι 30 ετών" *ως εξής :*

$$=_{30} (\text{έχειΗλικία})(\text{Γιάννης}).$$

Τέλος στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερα του ενός απτά πεδία $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ τα οποία σχετίζονται με μία γνώση, τότε επιβάλλεται ο περιορισμός $\Delta^{\mathcal{D}_i} \cap \Delta^{\mathcal{D}_j} = \emptyset$ για $i \neq j$ και η γλώσσα συμβολίζεται με $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$.

5.2.2 Απτά Πεδία στις Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Ο Straccia (2005b) ήταν ο πρώτος που μελέτησε τα ασαφή απτά πεδία για την ασαφή ΠΛ $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ δίνοντας και την αντίστοιχη σημασιολογία τους. Σύμφωνα με τον ορισμό που δίνει ο Straccia, ένα *ασαφές απτό πεδίο (fuzzy concrete domain)* $\mathcal{D}$ είναι ένα ζεύγος $\langle \Delta^{\mathcal{D}}, \Phi^{\mathcal{D}} \rangle$ όπου $\Delta^{\mathcal{D}}$ είναι το πεδίο ορισμού και $\Phi^{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο *κατηγορημάτων*. Κάθε ασαφές κατηγόρημα $p \in \Phi^{\mathcal{D}}$ έχει έναν βαθμό n και η διερμηνεία του είναι $p^{\mathcal{D}} : (\Delta^{\mathcal{D}})^n \to [0, 1]$, η οποία είναι μία ασαφής n-αδική σχέση στο σύνολο $\Delta^{\mathcal{D}}$.

5.3 Προβλήματα Συλλογιστικής σε Απτά Πεδία

Σε αυτήν την Παράγραφο παρουσιάζουμε τις έννοιες της σύζευξης και της διάζευξης και εν συνεχεία ορίζουμε το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας και της συνεπαγωγή στα πλαίσια ενός απτού πεδίου.

Για ένα απτό πεδίο $\mathcal{D}$, μία *σύζευξη* m *τύπων (formulas)* με βαθμούς έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{X}_i) \bowtie_i d_i \tag{5.1}$$

όπου $p_i \in \Phi^{\mathcal{D}}$ είναι ένα κατηγόρημα απτού πεδίου, $\overline{X}_i$ είναι ένα διάνυσμα από ονόματα μεταβλητών που ο αριθμός των στοιχείων του είναι ίδιος με τον βαθμό του p_i, το σύμβολο $\bowtie$ είναι ένα σύμβολο ανισότητας $\bowtie_i \in \{\leq, <, =, >, \geq\}$, $d_i \in (0,1]$, και $1 \leq i \leq m$.

Λέμε ότι η Εξίσωση 5.1 είναι *ικανοποιήσιμη*, ανν υπάρχει μία απεικόνιση δ από ονόματα μεταβλητών σε στοιχεία του απτού πεδίου μας $\delta : (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{X}_i) \to \Delta^{\mathcal{D}}$, τέτοια ώστε να ισχύει $p_i^{\mathcal{D}_j}(\delta(\overline{X}_i)) \bowtie_i d_i$ για κάθε τύπο στην σύζευξη. [2]

Η απεικόνιση δ αποκαλείται *λύση της σύζευξης* και συμβολίζεται με $\delta \models \bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{X}_i) \bowtie_i d_i$. Σε κάθε διαφορετική περίπτωση λέμε ότι η σύζευξη είναι *μη ικανοποιήσιμη*. Μία σύζευξη από τύπους συνεπάγεται μία *διάζευξη* από τύπους δηλαδή

$$\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{X}_i) \bowtie_i d_i \models \bigvee_{i=m+1}^{n} p_i(\overline{X}_i) \bowtie_i d_i$$

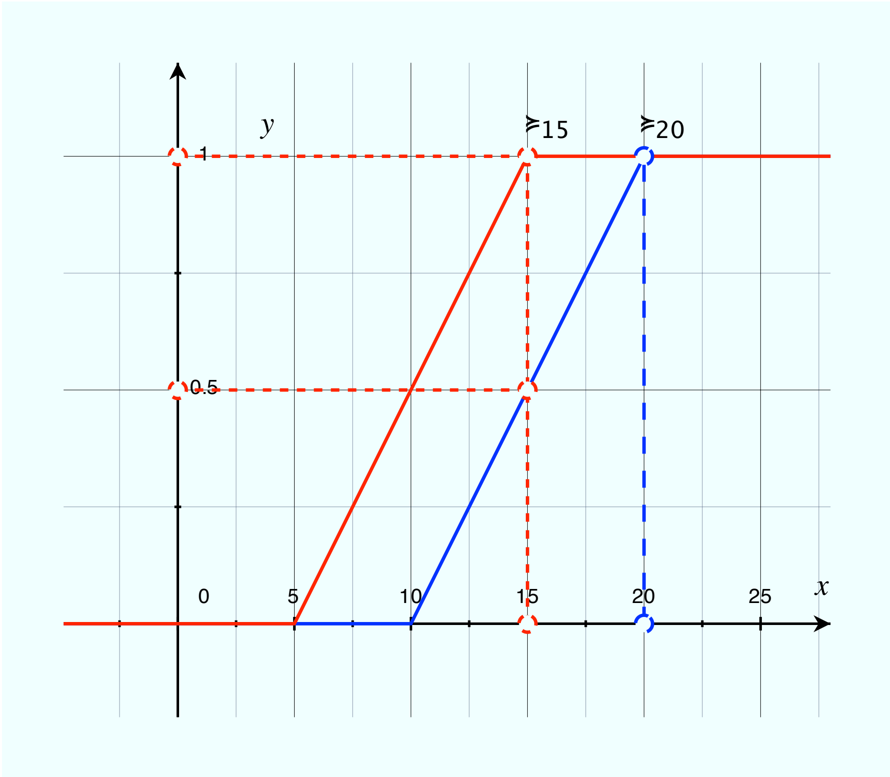
ανν για κάθε λύση δ της σύζευξης έχουμε ότι $\delta \models p_l((\overline{X}_l)) \bowtie_l d_l$ για κάποιο $n \in \{m+1, \ldots, n\}$.

Παράδειγμα 5.4 *Μπορούμε να ορίσουμε το απτό πεδίο* $\mathcal{F}'' = \langle \mathbb{Q}, \Phi^{\mathcal{F}''} \rangle$ *στο σύνολο των ρητών αριθμών το οποίο θα παρέχει το μοναδιαίο κατηγόρημα* $\succcurlyeq_q$ *και το δυαδικό κατηγόρημα* $\succnapprox_q$ *για κάθε* $q \in \mathbb{Q}$*. Τα δύο κατηγορήματα μπορούν να οριστούν βασισμένα σε μία μονότονη, συνεχή, αύξουσα συνάρτηση όπως η ακόλουθη:*

$$f_q(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < q - 10 \\ \frac{x-q+10}{10} & , \ q - 10 \leq x \leq q \\ 1 & , \ q < x \end{cases} .$$

Βασισμένοι στην προαναφερθείσα συνάρτηση τα δύο κατηγορήματα διερμηνεύονται ως εξής: $\succcurlyeq_q^{\mathcal{D}}(x) = f_q(x)$ *και* $\succnapprox_q^{\mathcal{D}}(x,y) = f_q(x-y)$.

[2] Για κάθε διάνυσμα μεταβλητών $\overline{X} = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, η έκφραση $\delta(\overline{X})$ είναι μία συντομογραφία για την έκφραση $\langle \delta(x_1), \ldots, \delta(x_k) \rangle$.



Σχήμα 5.1: *Οι συναρτήσεις συμμετοχής* $\succcurlyeq_{15}$ *και* $\succcurlyeq_{20}$

Ο τύπος $\succcurlyeq_{+q}(x)$ *χρησιμοποιείται προκειμένου να δηλώσουμε ότι η μεταβλητή* x *είναι* ασαφώς ανώτερη (superior) *από την τιμή* q*, ενώ ο τύπος* $\succcurlyeq_{+q}(x, y)$ *χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε ότι η μεταβλητή* x *είναι ασαφώς ανώτερη από το άθροισμα της μεταβλητής* y *και της τιμής του* q*. Η συνάρτηση συμμετοχής* f_{20}*, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1, δίνει την τιμή* 0 *σε κάθε* $x \in \mathbb{Q}$ *μικρότερο του* 10*, την τιμή* 1 *σε κάθε* $x \in \mathbb{Q}$ *μεγαλύτερο του* 20*, και μία ενδιάμεση τιμή σε κάθε άλλο* $x \in \mathbb{Q}$*. Για αυτό λοιπόν ένας ισχυρισμός της μορφής* $\succcurlyeq_{20}\ (x) \geq 1$ *(αντίστοιχα* $\succcurlyeq_{+20}(x, y)$*) υποδεικνύει ότι* $\delta(x) \geq 20$ *(αντίστοιχα* $\delta(x) \geq 20 + \delta(y)$*) για κάθε λύση* δ *του προηγούμενου ισχυρισμού.*

5.4 Ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$

5.4.1 Σύνταξη και Σημασιολογία

Η γνώση που συνδέεται με κάποιο ασαφές απτό πεδίο ενσωματώνεται σε μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία μέσω του αντίστοιχου κατασκευαστή. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.2, ο κατασκευαστής που προτείνουμε έχει την ίδια σύνταξη με τον κατασκευα-

Πίνακας 5.2: *Σύνταξη και σημασιολογία του κατασκευαστή εννοιών απτού πεδίου για την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα.*

Κατασκευαστής	Σύνταξη	Σημασιολογία
απτό πεδίο	$p(f_1, \ldots, f_k)$ για $p \in \mathcal{P}^{\mathcal{D}_j}$	$p(f_1, \ldots, f_k)^{\mathcal{I}}(x) = \begin{cases} d & \exists y_1, \ldots, y_k \in \Delta^{\mathcal{D}_j} \text{ και } f_i^{\mathcal{I}}(x) = y_i \text{ για } 1 \leq i \leq k, \; p^{\mathcal{D}_j}(y_1, \ldots, y_k) = d \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

στή της κλασσικής $\mathcal{EL}^{++}$ που προτάθηκε από τους Baader et al. (2005). Σαν συνέπεια, προκειμένου να υπάρχει σύνδεση μεταξύ της ασαφούς ΠΛ γλώσσας και κάποιου ασαφούς απτού πεδίου, χρησιμοποιείται ένα σύνολο N_F από *ονόματα χαρακτηριστικών*. Η περιγραφή έννοιας $p(f_1, \ldots, f_k)$ που εμφανίζεται στον Πίνακα 5.2 κατασκευάστηκε από το ένα κατηγόρημα του απτού πεδίου $\mathcal{D}$ και των ονομάτων χαρακτηριστικών $f_1, \ldots, f_k$. Διαισθητικά το κατηγόρημα p, μαζί με κάποιο βαθμό $d \in [0, 1]$ προσδιορίζουν τη σχέση μεταξύ των χαρακτηριστικών $f_1, \ldots, f_n$.

Παράδειγμα 5.5 *Έστω ότι έχουμε το κατηγόρημα $\succcurlyeq_{20}$ που ορίζεται στο Παράδειγμα 5.4 και το όνομα χαρακτηριστικού καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα. Μία υπαγωγή έννοιας της μορφής:*

$$\langle \succcurlyeq_{20} (\textit{καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα}) \sqsubseteq \textit{ΜανιώδηςΚαπνιστής}, 1 \rangle$$

προσδιορίζει ότι κάποιος ο οποίο καπνίζει περισσότερα των 20 τσιγάρων την ημέρα είναι μανιώδης καπνιστής. Ομοίως ένας ισχυρισμός έννοιας της μορφής:

$$\succcurlyeq_{15} (\textit{καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα})(\textit{Γιάννης}) \geq 1$$

δηλώνει ότι ο Γιάννης καπνίζει περισσότερα των 15 τσιγάρων την ημέρα.

Ως συνήθως, η ΠΛ γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ μπορεί να σχετίζεται με έναν αριθμό από απτά πεδία $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ έτσι ώστε να ισχύει $\Delta^{\mathcal{D}_i} \cap \Delta^{\mathcal{D}_j} = \emptyset$ για $1 \leq i < j \leq n$. Εάν θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συσχέτιση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ με συγκεκριμένα απτά πεδία $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, θα πρέπει να αναφέρουμε τη γλώσσα αυτή ως ασαφής $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ αντί για ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$.

Προκειμένου να διαχειριστεί τα ονόματα χαρακτηριστικών, μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ επεκτείνεται απεικονίζοντας κάθε όνομα χαρακτηριστικού $f \in N_F$ σε μία μερική συνάρτηση $f^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta^{\mathcal{D}_i}$. Η επέκταση του $\cdot^{\mathcal{I}}$ για τη *διερμηνεία* περιγραφών εννοιών για απτά πεδία παρουσιάζεται στον Πίνακα 5.2.

Παράδειγμα 5.6 *Μία πιθανή διερμηνεία του Παραδείγματος 5.5 είναι η ακόλουθη για το πεδίο διερμηνείας* $\Delta^{\mathcal{I}} = \{Γιάννης^{\mathcal{I}}\}$: καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα$^{\mathcal{I}}(Γιάννης^{\mathcal{I}}) = 15$, *ΜανιώδηςΚαπνιστής*$^{\mathcal{I}}(Γιάννης^{\mathcal{I}}) = 0.5$. *Η προηγούμενη διερμηνεία είναι μοντέλο της γνώσης μας εφόσον:*

$$(\succcurlyeq_{15}\ (καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα))^{\mathcal{I}}(Γιάννης^{\mathcal{I}}) = 1$$

$$(\succcurlyeq_{20}\ (καπνίζειΤσιγάραΑνάΜέρα))^{\mathcal{I}}(Γιάννης) = 0.5$$

και συνεπώς ικανοποιούνται τόσο το ABox όσο και το CBox της γνώσης μας.

5.4.2 Οι Συνθήκες π-Αποδοχής

Δυστυχώς, η μη περιορισμένη χρήση ασαφών απτών πεδίων μπορεί να οδηγήσει σε κάποια μη πολυωνυμική ή ακόμα και μη αποφάνσιμη γλώσσα. Για παράδειγμα, είναι προφανές ότι η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D}$ είναι μία γλώσσα εκθετικής πολυπλοκότητα, είναι μία γλώσσα η οποία έχει το λιγότερο εκθετική πολυπλοκότητα. Ακόμα χειρότερα, σύμφωνα με τον Lutz (2003), η συνδυασμένη χρήση αποφάνσιμων ΠΛ και αποφάνσιμων απτών πεδίων μπορεί ακόμα και να οδηγήσει σε μία μη αποφάνσιμη γλώσσα.

Προκειμένου να διασφαλίσουμε ότι η γλώσσα μας είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας πρέπει να επιβάλουμε ένα σύνολο περιορισμών στην εκφραστικότητα των ασαφών απτών πεδίων. Οι περιορισμοί αυτοί βασίζονται στην προσαρμογή των περιορισμών που προτείνει ο Baader et al. (2005) για τις ασαφείς ΠΛ και έχουν σαν συνέπεια τη δημιουργία δύο κατηγοριών *π-αποδοχής ασαφών απτών πεδίων (p-admissible fuzzy concrete domains)*: τα *μη αυστηρώς (loose) π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία* και τα *αυστηρώς (strict) π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία.*

Τα *μη αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία* είναι πιο εκφραστικά από τα αυστηρώς. Εξαιτίας της εκφραστικότητάς τους, η χρήση τους πρέπει να περιοριστεί προκειμένου να έχουμε έναν αλγόριθμο ορθό, πλήρη, και πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Συνεπώς, η χρήση μίας έννοιας $p(f_1, \ldots, f_k)$ επιτρέπεται μόνο σε υπαγωγές εννοιών της μορφής:

$$\langle \{a\} \sqsubseteq p(f_1, \ldots, f_k), d\rangle \tag{5.2}$$

$$\langle p(f_1, \ldots, f_k) \sqsubseteq C, d\rangle \tag{5.3}$$

όπου το $\{a\}$ είναι μία ονοματική έννοια στην οντολογία μας και το C μπορεί να είναι μία οποιαδήποτε περιγραφή έννοιας από τη στιγμή που δεν περιέχει κάποια έκφραση μη αυστηρού ασαφούς απτού πεδίου.

Από την άλλη, τα *αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία* μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κάθε σημείο μίας υπαγωγής εννοιών από τη στιγμή που η περιορισμένη εκφραστικότητά τους διασφαλίζει ότι η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα δεν χάνει την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα.

Ορισμός 5.7 (Μη Αυστηρώς Ασαφή π-Αποδεκτά Απτά Πεδία) *Ένα ασαφές απτό πεδίο $\mathcal{D}$ είναι* μη αυστηρώς π-αποδεκτό *όταν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας και της συνεπαγωγής στο $\mathcal{D}$ έχουν το πολύ πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα.*

2. *Το απτό πεδίο $\mathcal{D}$ είναι κυρτό (convex), δηλαδή εάν μία σύζευξη από άτομα της μορφής $p_i(\overline{X}_i) \geq d_i$ συνεπάγεται μία διάζευξη τέτοιων ατόμων, τότε συνεπάγεται και τουλάχιστον ένα από τα άτομα της διάζευξης.*

Οι συνθήκες αποδοχής που αναφέρονται στα μη αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία είναι μία άμεση επέκταση των αντίστοιχων συνθηκών που προτείνουν οι Baader et al. (2005). Η συνθήκη ενός πολυωνυμικού αλγορίθμου προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας και της συνεπαγωγής είναι προφανώς αναγκαία προκειμένου να διασφαλιστεί ότι η γλώσσα που θα προκύψει θα είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Η συνθήκη κυρτότητας διασφαλίζει ότι ένα ασαφές απτό πεδίο δεν θα εισαγάγει μη-ντετερμινιστικότητα στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Σε αντίθετη περίπτωση θα οδηγούμασταν σε μία γλώσσα μη πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Το απτό πεδίο που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 5.4 χωρίς την παρουσία του κατηγορήματος $\gtrapprox_q$ είναι μη αυστηρώς ασαφές π-αποδεκτό όπως αποδεικνύεται και στην Πρόταση 5.12 στο Παράρτημα.

Παράδειγμα 5.8 *Σε αυτό το παράδειγμα παρουσιάζουμε ένα ασαφές απτό πεδίο το οποίο δεν ικανοποιεί τη συνθήκη 2 του Ορισμού 5.7 και δείχνουμε ότι μπορεί να εισαγάγει μη ντετερμινισμό στη γλώσσα μας. Έστω ότι έχουμε ότι το απτό πεδίο $\Theta = \langle \mathbb{Q}, \Phi^{\Theta} \rangle$ όπου το $\mathbb{Q}$ αντιστοιχεί στο σύνολο των ρητών αριθμών και το Φ^{Θ} περιέχει μόνο τα μοναδιαία κατηγορήματα $\simeq_{0.5}, \simeq_1, \simeq_{1.5}$ των οποίων οι συναρτήσεις συμμετοχής παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2.*

Έστω τώρα ότι έχουμε έναν τύπο με βαθμούς $\simeq_1 (x) \geq 0.5$. Η προηγούμενη ανισότητα μαζί με το βαθμό συμμετοχής του κατηγορήματος $\simeq_1$ υπονοούν ότι κάθε λύση δ της προηγούμενης σύζευξης απεικονίζει τη μεταβλητή x σε κάποιο στοιχείο στο $[0.5, 1.5]$. Με παρόμοια συλλογιστική προκύπτει ότι κάθε λύση δ' του $\simeq_{0.5} (x) \geq 0.5$ απεικονίζει το x σε κάποιο στοιχείο στο $[0, 1]$, ενώ κάθε λύση δ'' του $\simeq_{1.5} (x) \geq 0.5$ απεικονίζει το x σε κάποιο στοιχείο στο $[1, 2]$. Συνεπώς μπορεί να βεβαιωθεί ότι ισχύει

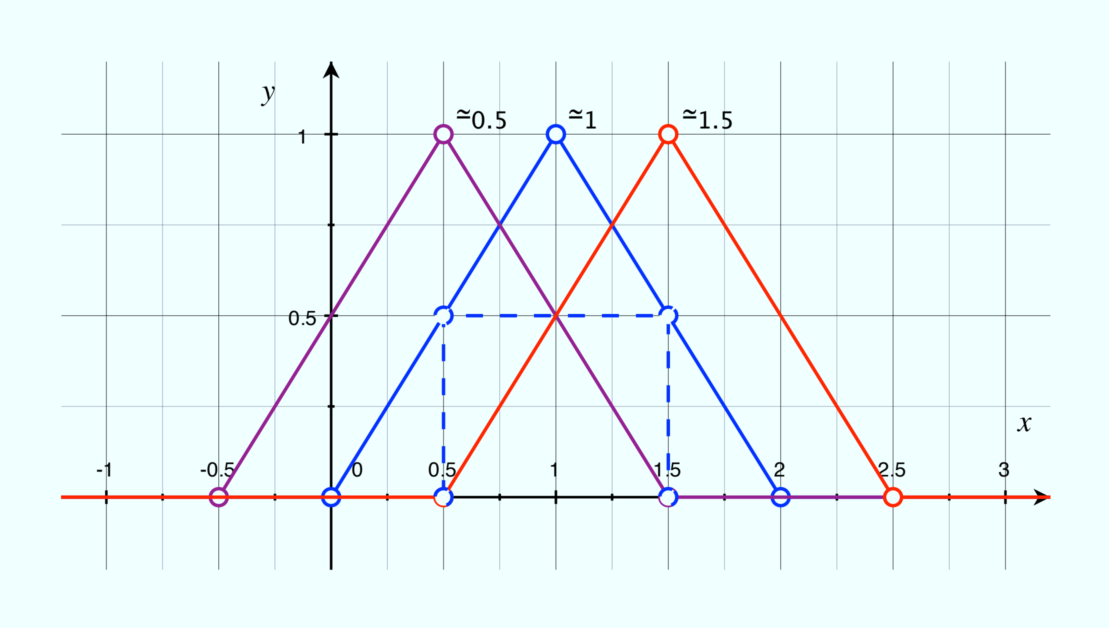
$$\simeq_1 (x) \geq 0.5 \models \simeq_{0.5} (x) \geq 0.5 \bigvee \simeq_{1.5} (x) \geq 0.5$$

ενώ δεν ισχύουν $\simeq_1 (x) \geq 0.5 \models \simeq_{0.5} (x) \geq 0.5$ και $\simeq_1 (x) \geq 0.5 \models \simeq_{1.5} (x) \geq 0.5$. Συνεπώς το απτό πεδίο που παρουσιάστηκε είναι μη-κυρτό.

Έστω τώρα ότι έχουμε μία $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία της μορφής

$$\mathcal{O} = \{\langle \{a\} \sqsubseteq \simeq_1 (f), 0.5\rangle, \langle \simeq_{0.5} (f) \sqsubseteq C, 1\rangle, \langle \simeq_{1.5} (f) \sqsubseteq D, 1\rangle, \}$$

όπου το f είναι το όνομα ενός χαρακτηριστικού. Σύμφωνα με τα προηγούμενα ευρήματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της οντολογίας $\mathcal{O}$ είτε $\mathcal{I} \models \langle \{a\} \sqsubseteq$



Σχήμα 5.2: *Οι συναρτήσεις συμμετοχής των κατηγορημάτων* $\simeq_{0.5}$, $\simeq_1$ *και* $\simeq_{1.5}$

$C, 0.5\rangle$ *είτε* $\mathcal{I} \models \langle \{a\} \sqsubseteq D, 0.5\rangle$ *ισχύει, ενώ δεν ισχύει ούτε ότι* $\mathcal{O} \models \langle \{a\} \sqsubseteq C, 0.5\rangle$ *ούτε ότι* $\mathcal{O} \models \langle \{a\} \sqsubseteq D, 0.5\rangle$. *Συνεπώς η προκύπτουσα γλώσσα είναι μη-ντετερμινιστική και επομένως δεν έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα.*

Στη συνέχεια προχωράμε να ορίσουμε τα αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία, τα οποία είναι ένα υποσύνολο περιορισμένης εκφραστικότητας των μη αυστηρώς π-αποδεκτών απτών πεδίων.

Ορισμός 5.9 (Αυστηρώς π-Αποδεκτά Ασαφή Απτά Πεδία) *Ένα ασαφές απτό πεδίο* $\mathcal{D}$ *είναι* αυστηρώς π-αποδεκτό, *όταν ικανοποιεί τις συνθήκες που περιγράφονται στον Ορισμό 5.7 και επιπλέον έχει τις παρακάτω ιδιότητες για μία σύζευξη* $\mathrm{conj} := \bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{X}_i) \geq d_i$*:*

1. *Εάν ισχύουν οι συνεπαγωγές* $\mathrm{conj} \models p(\overline{X}) \geq d$ *και* $\mathrm{conj} \not\models p(\overline{X}) > d$*, τότε οι συνεπαγωγές* $\mathrm{conj}' \models p(\overline{X}) \geq \min(e, d)$ *και* $\mathrm{conj}' \not\models p(\overline{X}) > \min(e, d)$ *επίσης θα ισχύουν για κάθε βαθμό* $e \in (0, 1]$ *και τη σύζευξη*

$$\mathrm{conj}' := \bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{X}_i) \geq \min(d_i, e).$$

2. *Εάν η σύζευξη* conj *είναι μη ικανοποιήσιμη, τότε και η σύζευξη* conj' *είναι επίσης μη ικανοποιήσιμη για κάθε βαθμό* $e \in (0, 1]$.

3. *Εάν ισχύουν οι συνεπαγωγές* $\text{conj} \models p(\overline{X}) \geq d$ *και* $\text{conj} \not\models p(\overline{X}) > d$*, τότε ο βαθμός* d *εμφανίζεται στη σύζευξη* conj.

4. *Εάν ισχύουν οι συνεπαγωγές* $\text{conj} \models p(\overline{X}) \geq d$ *και* $\text{conj} \not\models p(\overline{X}) > d$*, τότε επίσης ισχύει ότι* $\text{conj}'' \models p(\overline{X}) \geq d$ *και* $\text{conj}'' \not\models p(\overline{X}) > d$ *για τη σύζευξη:*

$$\text{conj}'' := \bigwedge_{p'(\overline{X}')\geq d' \text{ εμφανίζεται στην conj και } d'\geq d} p'(\overline{X'}) \geq d'.$$

Οι προαναφερθείσες συνθήκες για τα αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία, προέκυψαν κατά τη διαδικασία των αποδείξεων —χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις ορθότητας, πληρότητας, και πολυπλοκότητας— και συνεπώς είναι δύσκολο να δοθεί μία διαισθητική ερμηνεία κάθε μίας από αυτές. Μολαταύτα, η κύρια διαίσθηση στην οποία υπόκεινται οι περιορισμοί αυτοί είναι ότι περιορίζουν την παραγωγή νέων βαθμών. Η παραγωγή νέων βαθμών μαζί με την παρουσία εννοιών απτών πεδίων σε ασαφή GCIs θα οδηγούσε τον υπάρχων αλγόριθμο σε μη τερματισμό. Στο Παράδειγμα 5.11 του Παραρτήματος δείχνουμε πως η απουσία των περιορισμών αυτών μπορεί να επηρεάσει τις επιδόσεις του αλγορίθμου μας.

Έχοντας στο μυαλό μας την τελευταία δουλειά των Baader and Peñaloza (2011a) η οποία αποδεικνύει πως ακόμα και μη εκφραστικές ασαφείς ΠΛ γίνονται μη αποφάνσιμες με την παρουσία οποιωνδήποτε νορμών σύζευξης ή διάζευξης σε GCIs, είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε εάν το ίδιο θα ισχύσει και στην περίπτωση που έχουμε μη περιορισμένα απτά πεδία (ακόμα και πολυωνυμικής πολυπλοκότητας), από τη στιγμή που τόσο αυτά όσο και οι γενικευμένες νόρμες μπορούν να εισαγάγουν έναν οποιοδήποτε αριθμό νέων βαθμών στην οντολογία $\mathcal{O}$.

Στη συνέχεια δίνουμε το παράδειγμα ενός ασαφούς απτού πεδίου το οποίο είναι σύμφωνο με τους περιορισμούς τους οποίους μόλις αναφέραμε:

Παράδειγμα 5.10 *Μπορούμε να σχηματίσουμε ένα ασαφές απτό πεδίο*

$$\mathcal{F}' = \langle S \times [0,1], \Phi^{\mathcal{F}'} \rangle$$

όπου S *είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο στοιχείων και το σύνολο* $\Phi^{\mathcal{F}'}$ *περιέχει ένα κατηγόρημα* $=_q$ *για κάθε* $q \in S$*. Συνεπώς η διερμηνεία του* $=_q$ *είναι μία απεικόνιση από το σύνολο* $S \times [0,1]$ *στο διάστημα* $[0,1]$ *η οποία ορίζεται ως εξής για κάθε στοιχείο* $\alpha \in S \times [0,1]$*:*

$$=_q^{\mathcal{D}} (\alpha) = \begin{cases} d & \text{όταν } \alpha = \langle q, d \rangle \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Για παράδειγμα η σύζευξη

$$=_5 (x) \geq 0.3 \wedge =_5 (x) \geq 0.5 \wedge =_8 (y) \geq 0.6.$$

έχει μία λύση δ *τέτοια ώστε* $\delta(x) = \langle 5, 0.5 \rangle$ *και* $\delta(y) = \langle 8, 0.6 \rangle$.

5.5 Συλλογιστική στην Ασαφή $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον αλγόριθμο συλλογιστικής που προτάθηκε στο Κεφάλαιο 4 προκειμένου να μπορεί να διαχειριστεί ασαφή απτά πεδία. Όπως και ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4, έτσι και ο αλγόριθμος που θα παρουσιαστεί επιλύει το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών και ανάγει τα υπόλοιπα προβλήματα σε αυτό. Ομοίως με τον αλγόριθμο της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ εκτελείται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα κανονικοποιείται η οντολογία $\mathcal{O}$ κατά τον τρόπο που περιγράφεται στην Παράγραφο 4.4.1, ενώ στο δεύτερο βήμα εφαρμόζεται ο αλγόριθμος ασαφούς υπαγωγής εννοιών σε μία κανονικοποιημένη οντολογία.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον η οντολογία $\mathcal{O}$ περιέχει και έννοιες που προήλθαν από τον κατασκευαστή απτού πεδίου, το σύνολο των βασικών περιγραφών εννοιών του $\mathcal{O}$, που συμβολίζεται με $BC_{\mathcal{O}}$, ορίζεται πλέον ως το μικρότερο σύνολο εννοιών που περιέχει την άνω έννοια $\top$, όλα τα ονόματα εννοιών, όλες τις ονοματικές έννοιες στο $\mathcal{O}$, και έννοιες που δημιουργήθηκαν βάσει του κατασκευαστή εννοιών απτού πεδίου –που περιγράφεται στον Πίνακα 5.2– και περιέχονται στην $\mathcal{O}$.

Επιπλέον θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τόσο ο αλγόριθμος κανονικοποίησης όσο και η απόδειξη της ορθότητας και πληρότητάς του είναι επεκτάσεις αυτών που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4.4.1 για την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα.

Ο Αλγόριθμος Ασαφούς Υπαγωγής της $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε τον αλγόριθμο της ασαφούς υπαγωγής ως προς μία κανονικοποιημένη οντολογία $\mathcal{O}$. Αρχικά ανάγουμε το πρόβλημα της υπαγωγής μεταξύ δύο εννοιών C και D στο πρόβλημα της υπαγωγής μεταξύ μίας ονοματικής έννοιας και μίας έννοιας στο N_C σύμφωνα με το Λήμμα 4.8. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο αλγόριθμος εξαγωγής των αξιωμάτων υπαγωγής που δεν εκφράζονται ρητά στην αρχική μας οντολογία $\mathcal{O}$, αλλά υπονοούνται από την αρχική γνώση.

Ομοίως με τη διαδικασία που περιγράφεται στην Παράγραφο 4.4.2, τα εξαγόμενα συμπεράσματα αποθηκεύονται στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$. Επίσης η εξαγωγή συμπερασμάτων γίνεται βάσει των κανόνων του Πίνακα 4.5 της Παραγράφου 4.4.2 τους οποίους όμως έχουμε επεκτείνει με επιπλέον κανόνες που περιγράφονται στον Πίνακα 5.3 προκειμένου να είναι δυνατή η διαχείριση απτών πεδίων. Ομοίως με την Παράγραφο 4.4.2 οι κανόνες εφαρμόζονται σε μία κανονικοποιημένη ασαφή $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ οντολογία $\mathcal{O}$ και δημιουργούν νέα αξιώματα της μορφής $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$, $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ όπου $R \in R_{\mathcal{O}}$ και $C, D \in BC_{\mathcal{O}}$. Αυτά τα νέα αξιώματα προστίθενται στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ η οποία περιέχει τα εξαγόμενα αξιώματα από την $\mathcal{O}$. Αυτό σημαίνει δηλαδή ότι εάν $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ τότε $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$. Οι κανόνες του Πίνακα 5.3, όπως και στην Παράγραφο 4.4.2, έχουν τη μορφή:

$$\frac{U_1, \ldots, U_n}{W} : V$$

Πίνακας 5.3: *Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων για μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ οντολογία.*

CR7	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d_1\rangle, \ldots, \langle C \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d_m\rangle}{\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle}$:	η σύζευξη $\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq d_i$ είναι μη ικανοποιήσιμη
CR8a	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d_1\rangle, \ldots, \langle C \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d_m\rangle}{\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle}$:	ισχύει η συνεπαγωγή $\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq d_i \models p(\overline{F}) \geq d$ όπου (i) κάθε κατηγόρημα $p_1, \ldots, p_m \in \Phi^{\mathcal{D}}$, (ii) το $\mathcal{D}$ είναι ένα αυστηρώς π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο.
CR8b	Ο κανόνας **CR8b** είναι πανομοιότυπος του κανόνα **CR8a** με μόνη διαφορά ότι το C στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να είναι μονάχα μία ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$ και το $\mathcal{D}$ είναι ένα μη αυστηρώς π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο.	
CR9	$\dfrac{\langle C \sqsubseteq p_i(\overline{F}_i), d_i\rangle, \langle C \sqsubseteq p_j(\overline{F}_j), d_j\rangle}{\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle}$:	$p_i \in \Phi^{\mathcal{D}_i}, p_j \in \Phi^{\mathcal{D}_j}, i \neq j$ και (i) υπάρχει κάποιο χαρακτηριστικό f που εμφανίζεται ταυτοχρόνως στα διανύσματα $\overline{F}_i, \overline{F}_j$, (ii) $d_i > 0$ και $d_j > 0$.

όπου οι $U_1, \ldots, U_n$ είναι υπαγωγές εννοιών στην $\mathcal{O}_{SAT}$ οντολογία, το W είναι μία υπαγωγή έννοιας η οποία θα προστεθεί μετά από κάθε εφαρμογή ενός κανόνα στο $\mathcal{O}_{SAT}$, ενώ τέλος το V εκτός από μία υπαγωγή έννοιας ή ρόλου στο $\mathcal{O}$ μπορεί να είναι και μία συνθήκη που σχετίζεται με τα ασαφή απτά πεδία.

Στους κανόνες **CR7**, **CR8a**, **CR8b**, **CR9**, τα σύμβολα $\overline{F}$ και $\overline{F}_1 \ldots, \overline{F}_m$ αντιστοιχούν σε διανύσματα από ονόματα χαρακτηριστικών. Επίσης στους κανόνες **CR7**, **CR8a**, **CR8b** θεωρούμε ότι όλα τα κατηγορήματα ανήκουν στο ίδιο απτό πεδίο $p_1, \ldots, p_m \in \Phi^{\mathcal{D}}$, ενώ λαμβάνεται υπόψη κάθε αξίωμα υπαγωγής της μορφής $\langle C \sqsubseteq p_i(\overline{F}_i), d_i\rangle$ που αφορά το συγκεκριμένο απτό πεδίο. Τέλος οι κανόνες **CR8a**, **CR8b** θα εφαρμοστούν μόνο στην περίπτωση που η έννοια που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της υπαγωγής $\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle$ είναι μία έννοια $p(\overline{F}) \in BC_{\mathcal{O}}$.

Το Θεώρημα 4.9 το οποίο παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 4.4.2 και επαναλαμβάνουμε στη συνέχεια, ισχύει και για την περίπτωση της $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας.

Θεώρημα 4.9 *Θεωρούμε ότι έχουμε μία ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ σε κανονική μορφή οντολογία $\mathcal{O}$ και μία οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ που προκύπτει από την $\mathcal{O}$ εφαρμόζοντας διεξοδικά τους κανόνες των Πινάκων 4.5,5.3 έως ότου δεν εφαρμόζεται πλέον κάποιος κανόνας. Για κάθε ονοματική έννοια $\{o\} \in BC_{\mathcal{O}}$ και $B \in BC_{\mathcal{O}}$, ισχύει ότι $\mathcal{O} \models \langle \{o\} \sqsubseteq B, d\rangle$ ανν μία από τις συνθήκες* *που ακολουθούν επίσης ισχύει: (i)* $\langle \{o\} \sqsubseteq B, d' \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ *για κάποιο βαθμό* $d' \geq d$, *(ii) υπάρχει μία ονοματική έννοια* $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}$ *τέτοια ώστε* $\langle \{a\} \sqsubseteq \bot, d \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ *και* $d > 0$.

Οι επεκτάσεις των αποδείξεων της ορθότητας και πληρότητας που σχετίζονται με το Θεώρημα 4.9 παρουσιάζεται στο Παράρτημα 5.Α′. Τέλος η επέκταση της απόδειξης του Λήμματος 4.11 το οποίο αποδεικνύει την πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας παρουσιάζεται επίσης στο Παράρτημα 5.Α′.

5.6 Σχετικές Εργασίες

Όπως αναφέραμε και στην Παράγραφο 4.5 έχουν γίνει αρκετές επεκτάσεις οι οποίες βασίζονται σε ασαφοποίηση γλωσσών της οικογένειας της $\mathcal{EL}$. Από αυτές θα εξετάσουμε τη γλώσσα που προτάθηκε από τους Vaneková and Vojtáš (2010) καθώς επίσης παρέχει απτά πεδία.

Οι κύριες διαφορές μεταξύ της γλώσσας μας και της γλώσσας που παρουσιάζεται από τους Vaneková and Vojtáš (2010) είναι οι εξής: Η γλώσσα που παρουσιάζεται από τους Vaneková and Vojtáš (2010) παρέχει τους τελεστές συνάθροισης $@_U$ και τον top-k κατασκευαστή εννοιών ενώ χρησιμοποιεί μόνο κλασσικούς ρόλους (δηλαδή οι ρόλοι που χρησιμοποιεί δεν μπορούν να εκφράσουν ασάφεια). Επιπλέον δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος περιορισμός σε σχέση με την εκφραστικότητα των ασαφών απτών πεδίων. Από την άλλη, η γλώσσα που προτείνουμε υποστηρίζει επιπλέον την ύπαρξη ονοματικών εννοιών, της κάτω έννοιας, σύνθεση ρόλων και ασαφείς ρόλους. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι η γλώσσα που προτείνουν οι Vaneková and Vojtáš (2010) εξαιτίας της παρουσίας του τελεστή συνάθροισης $@_U$ και του top-k κατασκευαστή είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι είναι μη μονότονη, σε αντίθεση με τη δικιά μας γλώσσα η οποία έχει αποδειχθεί ότι είναι μονότονη. Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι οι Vaneková and Vojtáš (2010) δεν έχουν μελετήσει την πολυπλοκότητα της γλώσσας που προτείνουν με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να αποφανθούμε ούτε για την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα, ούτε για τον τερματισμό της.

Όσον αφορά τα ασαφή απτά πεδία, η εργασία μας βασίζεται στις εργασίες των Straccia και Bobillo. Συγκεκριμένα ο Straccia (2005b) αρχικά παρουσίασε την έννοια ενός ασαφούς απτού πεδίου $\mathcal{D} = \langle \Delta_{\mathcal{D}}, \Phi_{\mathcal{D}} \rangle$ όπου $\Delta_{\mathcal{D}}$ είναι το πεδίο της διερμηνείας και $\Phi_{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο από ασαφή κατηγορήματα απτών πεδίων. Ο Straccia (2005b) προκειμένου να εισαγάγει τα απτά πεδία στην ΠΛ γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, παρέχει τους κατασκευαστές έννοιας $\forall T.D$ και $\exists T.D$ όπου το T είναι ένας απτός (concrete) ρόλος και D είναι είτε κάποιο μοναδιαίο ασαφούς απτού πεδίου κατηγόρημα d, είτε η άρνησή του $\neg d$. Η συλλογιστική στην ασαφή $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ πραγματοποιείται ανάγοντας το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming bMIP) (Hahnle, 2001). Η προαναφερθείσα δουλειά επεκτείνεται από τους Bobillo and Straccia (2009b) με τους επιπλέον κατασκευαστές εννοιών $(\geq t\, n), (\leq t\, n), (= t\, n)$, όπου το t είναι κάποιο απτό χαρακτηριστικό και το n είναι μία δομή στο πεδίο ορισμού του απτού πεδίου $\Delta^{\mathcal{D}}$. Τέλος οι Bobillo and Straccia (2009a) επεκτείνουν περισσότερο τη γλώσσα $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ με μαθηματικούς τελεστές είτε μεταξύ πραγματικών αριθμών, είτε μεταξύ ασαφών συναρτήσεων όπως είναι οι ασαφείς αριθμοί. Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα δημιουργίας νέων συναρτήσεων συμμετοχής. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση συμμετοχής ως το άθροισμα δύο διαφορετικών τριγωνικών συναρτήσεων συμμετοχής.

Παρόλο που η εκφραστική δύναμη της γλώσσας που προτείνεται από τους Bobillo και Straccia είναι αρκετά ελκυστική, η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα δεν μπορεί να ενσωματώσει ένα οποιοδήποτε ασαφές απτό πεδίο που δεν θα υπόκειται στους περιορισμούς που παρουσιάζονται στους Ορισμούς 5.7,5.9. Πιο συγκεκριμένα, στο Παράδειγμα 5.8 δείξαμε πως η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ αν επεκταθεί με ένα απλό απτό πεδίο στους ρητούς αριθμούς και ένα ασαφές κατηγόρημα βασισμένο στην τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, μπορεί να αλλάξει την πολυπλοκότητα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας σε μη πολυωνυμική. Για αυτό το λόγω η κύρια συνεισφορά μας, σε σχέση με τις προηγούμενες δουλειές στα ασαφή απτά πεδία, είναι ότι παρουσιάσαμε τους περιορισμούς επάνω σε ένα απτό πεδίο που διασφαλίζουν ότι η ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ δεν θα χάσει την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα.

5.7 Σύνοψη και Μελλοντικές Εργασίες

Συνοπτικά, μέσω της εργασίας με θέμα τις γλώσσες πολυωνυμικής πολυπλοκότητας με απτά πεδία, εξετάσαμε και επεκτείναμε τη θεωρία γύρω από τα απτά πεδία, ενώ παρουσιάσαμε την $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα η οποία ενσωματώνει απτά πεδία στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Πιο συγκεκριμένα: Παρουσιάσαμε τον ορισμό των ασαφών απτών πεδίων που έχει δοθεί από τον Straccia (2005b) τον οποίο και επεκτείναμε με έννοιες όπως η σύζευξη, η διάζευξη, και η συνεπαγωγή. Προτείναμε κάποια απτά απτά πεδία όπως αυτό των ασαφών αριθμών, και παρουσιάσαμε αλγόριθμους επίλυσης για τα προβλήματα της ικανοποιησιμότητας και της συνεπαγωγής. Επιπλέον εξετάσαμε το σύνολο των περιορισμών στους οποίους πρέπει να υπόκειται ένα απτό πεδίο προκειμένου να διατηρείται η πολυωνυμική πολυπλοκότητα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας. Βάσει αυτών των περιορισμών προτείναμε τα μη αυστηρώς π-αποδεκτά και τα αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία τα οποία επιτρέπουν διαφορετικές εκφραστικότητες αλλά και περιορισμούς ως προς τον τρόπο ενσωμάτωσής τους στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Τέλος, περιγράψαμε τον αλγόριθμο συλλογιστική της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ και αποδείξαμε με αναλυτικό τρόπο την ορθότητα, πληρότητα, και πολυωνυμική πολυπλοκότητά του.

Ένα θέμα προς εξέταση το οποίο προέκυψε κατά τη μελέτη της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας είναι αυτό της αποφανσιμότητας που σχετίζεται με την προσθήκη των απτών πεδίων και με τον τρόπο που αυτά μπορούν να επηρεάσουν την πολυπλοκότητα μίας γλώσσας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι επεκτάσεις γλωσσών με απτά πεδία που προτείνονται από τους Straccia (2005b,b); Bobillo and Straccia (2009a) αναφέρονται σε γλώσσες στα οποία δεν επιτρέπονται γενικευμένα ασαφή αξιώματα υπαγωγής (ασαφή GCIs). Έτσι λοιπόν, παραμένει προς εξέταση ο τρόπος με τον οποίο, ακόμα και πολυωνυμικής πολυπλοκότητας ασαφή απτά πεδία, θα επηρεάσουν την πολυπλοκότητα των υπαρχόντων γλωσσών. Βάσει της εργασίας των Baader and Peñaloza (2011a,b,c), προκύπτει ότι οι περισσότερες ασαφείς ΠΛ γλώσσες αν επεκταθούν με οποιεσδήποτε t-νόρμες και t-κονόρμες γίνονται μη αποφάνσιμες. Αυτό που μένει είναι να αποδειχθεί εάν και πώς τα απτά πεδία μπορούν να προσομοιώσουν τέτοιες νόρμες και ποιοι είναι οι περιορισμοί που θα διασφαλίσουν την αποφανσιμότητα κατά την ενσωμάτωσή τους στις ασαφείς ΠΛ.

5.Α′ Αποδείξεις

Παράδειγμα 5.11 *Σε αυτό το παράδειγμα θα δείξουμε ότι η παρουσία, ακόμα και απλών, μη-αυστηρών ασαφών π-αποδεκτών απτών πεδίων σε ασαφή GCIs μπορεί να επηρεάσει τις χρονικές επιδόσεις του αλγορίθμου μας.*

Έστω ότι έχουμε το απτό πεδίο $\Theta = \langle \mathbb{Q}, \Phi^{\Theta} \rangle$ *where* $\mathbb{Q}$ *το οποίο αναφέρεται στο σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο* Φ^{Θ} *περιέχει τα κατηγορήματα* $\succcurlyeq_{20}$, $\succcurlyeq_{20.5}$ *όπως ορίστηκαν στο Παράδειγμα 5.4. Έστω τώρα ότι έχουμε την ακόλουθη οντολογία* $\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{O} =\{&\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20} (f), 0.5\rangle, \langle \succcurlyeq_{20} (f) \sqsubseteq \exists R.C, 1\rangle,\\ &\langle C \sqsubseteq \succcurlyeq_{20.5} (f), 1\rangle, \langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle\}\end{aligned}$$

*και δεν ισχύουν οι περιορισμοί αποδοχής που παρουσιάζονται στον κανόνα **CR8a**. Σε κάποια φάση εκτέλεσης του αλγορίθμου θα έχουμε την ακόλουθη εκτέλεση κανόνων:*

$\vdots$

$$\textbf{\textit{CR3}} \quad \frac{\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20} (f), 0.5\rangle}{\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.C, 0.5\rangle} : \langle \succcurlyeq_{20} (f) \sqsubseteq \exists R.C, 1\rangle$$

$$\textbf{\textit{CR6}} \quad \frac{\langle \{a\} \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle C \sqsubseteq \{a\}, 1\rangle, \langle \{a\} \rightsquigarrow C, 0.5\rangle, \langle C \sqsubseteq \succcurlyeq_{20.5} (f), 1\rangle}{\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20.5} (f), 0.5\rangle}$$

$$\textbf{\textit{CR8}} \quad \frac{\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20.5} (f), 0.5\rangle}{\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20} (f), 0.6\rangle} : \succcurlyeq_{20.5} (f) \geq 0.5 \models \succcurlyeq_{20} (f) \geq 0.6$$

$$\textbf{\textit{CR3}} \quad \frac{\langle \{a\} \sqsubseteq \succcurlyeq_{20} (f), 0.6\rangle}{\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.C, 0.6\rangle} : \langle \succcurlyeq_{20} (f) \sqsubseteq \exists R.C, 1\rangle$$

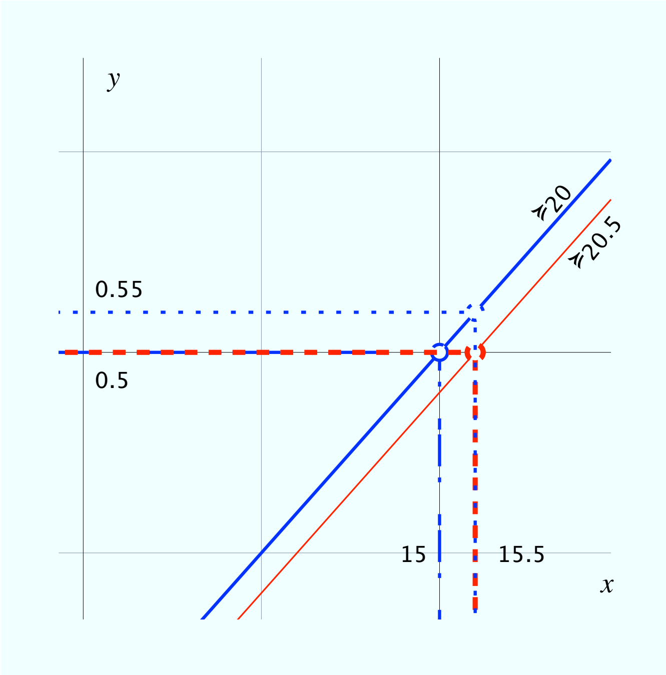
$\vdots$

Επομένως η συνεπαγωγή $\succcurlyeq_{20.5} (f) \geq 0.5 \models \succcurlyeq_{20} (f) \geq 0.6$ *μπορεί να εξαχθεί από τις συναρτήσεις συμμετοχής για τα* $\succcurlyeq_{20.5}, \succcurlyeq_{20}$ *που παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3.*

Όπως μπορεί να δειχθεί, αυτοί οι κανόνες μπορούν να εφαρμοστούν επαναληπτικά έως ότου ο αλγόριθμος φτάνει στο σημείο όπου $\langle \{a\} \sqsubseteq \exists R.C, 1\rangle$, *ενώ ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης συμμετοχής των* $\succcurlyeq_{20.5}, \succcurlyeq_{20}$ *(δηλαδή αν αυξήσουμε την κλίση των συναρτήσεων συμμετοχής αυξάνονται και οι επαναλήψεις του αλγορίθμου). Συνεπώς χωρίς τους περιορισμούς για αυστηρώς π-αποδεκτά απτά πεδία, ο αλγόριθμός μας θα χάσει την πολυωνυμική του πολυπλοκότητα.*

Πρόταση 5.12 *Το ασαφές απτό πεδίο το οποίο παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 5.4, χωρίς την παρουσία κατηγορημάτων της μορφής* $\succcurlyeq_{\mp q}$, *είναι μη αυστηρώς π-αποδεκτό.*

Sketch Απόδειξη: Το συγκεκριμένο απτό πεδίο περιέχει ένα μοναδιαίο κατηγόρημα $\succcurlyeq_q$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ που ορίζεται από την f_q συνάρτηση που παρουσιάστηκε στο



Σχήμα 5.3: *Οι συναρτήσεις συμμετοχής* $\succcurlyeq_{20}$ *και* $\succcurlyeq_{20.5}$

Παράδειγμα 5.4. Η συνάρτηση f_q απεικονίζει κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}$ στο διάστημα $[0, 1]$. Δημιουργούμε τη συνάρτηση $g_q : [0, 1] \to \mathbb{Q}$ ως εξής:

$$g_q(x) = \begin{cases} -\infty & , \ x = 0 \\ x \cdot 10 - 10 + q & , \ x \in (0, 1] \end{cases}$$

και μπορεί να βεβαιωθεί ότι $f_q(g_q(x)) = x$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Έστω τώρα ότι έχουμε την ακόλουθη σύζευξη τύπων με βαθμούς:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \succcurlyeq_{q_i} (x_i) \geq d_i$$

Κάθε συζευκτέος της μορφής $\succcurlyeq_{q_i} (x_i) \geq d_i$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία ανισότητα $x_i \geq g_q(d_i)$. Για αυτό καταλήγουμε σε ένα σύστημα ανισοτήτων που μπορεί να αναχθεί στο απτό πεδίο των ρητών αριθμών που παρουσίασαν οι Baader et al. (2005). Το τελευταίο απτό πεδίο έχει αποδειχθεί ότι είναι κυρτό και ότι η ικανοποιησιμότητα και συνεπαγωγή μπορούν να αποφασιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Εξετάζουμε τώρα γιατί το αντίστοιχο απτό πεδίο θα πάψει να είναι κυρτό όταν επιτρέψουμε σε αυτό συζευκτέους της μορφής $\succcurlyeq_{+q_i}(x_i, y_i) \geq d_i$. Οι συζευκτέοι αυτοί μπορούν επίσης να μετασχηματιστούν σε ανισότητες της μορφής $x \geq g_q(d_i) + y$

και το αρχικό πρόβλημα μετασχηματίζεται στο πρόβλημα επίλυσης ενός συστήματος ανισοτήτων. Δυστυχώς είναι εύκολο να δείξουμε με ένα αντιπαράδειγμα ότι το προκύπτον απτό πεδίο δεν είναι κυρτό. Για παράδειγμα οι ανισότητες $x \geq 10$ και $y \geq 10$ έχουν σαν συνέπεια ότι είτε $x \geq y + 0$ είτε $y \geq x + 0$ ισχύει, χωρίς όμως ποτέ κάποιο από τα δύο να ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. ■

Πρόταση 5.13 *Για κάθε αυστηρώς π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο $\mathcal{D}$ και οποιοδήποτε αριθμό $d_\omega \in (0,1)$ τα ακόλουθα ισχύουν: Εάν το δ είναι μία λύση για τη σύζευξη* conj*, τότε υπάρχει επίσης και μία λύση δ'' τέτοια ώστε (i) $p^{\mathcal{D}}(\delta''(\overline{X})) = 1$ εάν $p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X})) > d_\omega$ και (ii) $p^{\mathcal{D}}(\delta''(\overline{X})) = p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X}))$ εάν $p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X})) \leq d_\omega$ για κάθε κατηγόρημα $p \in \Phi^{\mathcal{D}}$.*

Απόδειξη : Βασισμένοι στην απεικόνιση δ δημιουργούμε δύο νέες συζεύξεις ως εξής:

$$\mathrm{conj}' := \bigwedge_{\text{if } p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X}))=d} p(\overline{X}) \geq d$$

$$\mathrm{conj}'' := \bigwedge_{\text{if } p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X}))=d \text{ and } d \leq d_\omega} p(\overline{X}) \geq d \bigwedge \bigwedge_{\text{if } p^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X}))=d \text{ and } d > d_\omega} p(\overline{X}) \geq 1.$$

Προφανώς κάθε λύση της σύζευξης conj″ είναι και λύση της σύζευξης conj. Συνεπώς εάν το δ'' είναι μία λύση της σύζευξης conj″ θα είναι και λύση της conj.

Αρχικά δείχνουμε ότι το conj″ έχει τουλάχιστον μία λύση. Βασισμένοι στην Ιδιότητα 2 του Ορισμού 5.9 μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι εάν δεν υπάρχει λύση για την conj″, τότε δεν υπάρχει λύση για την conj το οποίο είναι άτοπο από τη στιγμή που έχουμε ήδη υποθέσει ότι το δ είναι μία λύση της conj.

Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει μία λύση της μορφής δ'' για την conj″. Υποθέτουμε το αντίθετο: Έστω ότι το S'' είναι το (ενδεχομένως με άπειρα στοιχεία) σύνολο των λύσεων της conj″, τότε δεν υπάρχει κάποια λύση $\delta''_j \in S''$ που να αντιστοιχεί στην δ''. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι για κάθε λύση δ''_j υπάρχει κάποιο κατηγόρημα p_j και ένα διάνυσμα μεταβλητών $\overline{X}_j$ τέτοιο ώστε (i) $p_j^{\mathcal{D}}(\delta''_j(\overline{X}_j)) = d_j$ και (ii) το $p_j(\overline{X}_j) \geq d_j$ δεν εμφανίζεται σαν συζευκτέος στην conj″. Δημιουργούμε ένα σύνολο S''_p ως εξής: για κάθε λύση δ''_j στο S'' το σύνολο S''_p περιέχει μία ανισότητα $p_j(\overline{X}_j) \geq d_j$ τέτοια ώστε οι συνθήκες (i) και (ii) ισχύουν. Το τελευταίο μα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\mathrm{conj}'' \models \bigvee_{p_j(\overline{X}_j) \geq d_j \in S''_p} p_j(\overline{X}_j) \geq d_j$$

και η Ιδιότητα 2 του Ορισμού 5.7 (κυρτότητα) διασφαλίζει ότι

$$\mathrm{conj}'' \models p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq d_\lambda$$

για κάποιο στοιχείο $p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq d_\lambda$ που εμφανίζεται στο S''_p.

Για την περίπτωση που $d_\lambda > d_\omega$. Θεωρούμε τον αριθμό d_ω^+ ο οποίος είναι ελάχιστα μεγαλύτερος από τον d_ω και δημιουργούμε τις συζεύξεις:

1. $\mathrm{conj}'_{d_\omega^+}$ αντικαθιστώντας κάθε βαθμό d στο conj' με $\min(d, d_\omega)$,

2. $\mathrm{conj}''_{d_\omega^+}$ αντικαθιστώντας κάθε βαθμό d στο conj'' με $\min(d, d_\omega)$.

Μπορεί να βεβαιωθεί ότι οι δύο συζεύξεις είναι ίδιες. Από τη στιγμή που $\mathrm{conj}'' \models p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq d_\lambda$, η Ιδιότητα 1 του Ορισμού 5.9 διασφαλίζει ότι $\mathrm{conj}''_{d_\omega^+} \models p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq \min(d_\lambda, d_\omega^+) = d_\omega^+$. Εφόσον οι $\mathrm{conj}'_{d_\omega^+}$ και $\mathrm{conj}''_{d_\omega^+}$ είναι ίδιες έχουμε επίσης και ότι $\mathrm{conj}'_{d_\omega^+} \models p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq d_\omega^+$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $p_\lambda^{\mathcal{D}}(\delta(\overline{X}_\lambda)) > d_\omega$ και εκ κατασκευής του conj'' έχουμε ότι ότι το $p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq 1$ εμφανίζεται στο conj'' το οποίο και αντικρούει την υπόθεσή μας ότι καμία λύση δ_λ δεν αντιστοιχεί στο δ''.

Για την περίπτωση που $d_\lambda \leq d_\omega$. Με παρόμοιο με πριν τρόπο, δείχνουμε ότι η $p_\lambda(\overline{X}_\lambda) \geq d_\lambda$ θα εμφανιστεί στην conj'', το οποίο επίσης αντικρούει τον ισχυρισμό μας.

Επομένως έχουμε ότι πάντα υπάρχει μία λύση της μορφής δ''. ■

Απόδειξη του Λήμματος 4.8 για την $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$: Η απόδειξη για την περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι εάν ισχύει $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$ τότε θα ισχύει και $\langle\{o\} \sqsubseteq_{\mathcal{O}'} B, d\rangle$ είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη του Λήμματος 4.8 που περιγράφεται στο Παράρτημα 4.Α′.

Για το αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{O}} D, d\rangle$ συνεπάγεται $\langle\{o\} \not\sqsubseteq_{\mathcal{O}} B, d\rangle$. Η απόδειξη γίνεται με παρόμοιο τρόπο της απόδειξης του Λήμματος 4.8 που περιγράφεται στο Παράρτημα 4.Α′. Κατασκευάζεται δηλαδή μία διερμηνεία $\mathcal{I}'$ η οποία είναι ίδια με την $\mathcal{I}$ εκτός από τα εξής σημεία που περιγράφονται στην απόδειξη του Παραρτήματος 4.Α′ και στο ότι:

- $p^{\mathcal{I}'}(\overline{F})(x) = 1$ εάν $p^{\mathcal{I}}(\overline{F})(x) > D^{\mathcal{I}}(\omega)$ για κάθε $x \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και έννοια $p(\overline{F})$ όπου το κατηγόρημα p ανήκει σε κάποιο μη αυστηρώς π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο. Η Πρόταση 5.13 διασφαλίζει ότι μία τέτοια διερμηνεία μπορεί να κατασκευαστεί.

Ομοίως με την απόδειξη του Παραρτήματος 4.Α′ έχουμε ότι ισχύει ότι η διερμηνεία $\mathcal{I}'$ ικανοποιεί κάθε υπαγωγή εννοιών και ρόλων στη γνώση μας. Συνεπώς το $\mathcal{I}'$ είναι μοντέλο του $\mathcal{O}$ και εφόσον ικανοποιεί, από την κατασκευή του $\mathcal{I}'$, την υπαγωγή εννοιών $\langle\{o\} \sqsubseteq C, 1\rangle$, $\langle D \sqsubseteq B, 1\rangle$, είναι επίσης ένα μοντέλο του $\mathcal{O}'$. Το τελευταίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας αφού $\min(\{o\}^{\mathcal{I}'}(\omega), d) = \min(\{o\}^{\mathcal{I}'}(o^{\mathcal{I}'}), d) = d$, $D^{\mathcal{I}'}(\omega) = D^{\mathcal{I}}(\omega)$ και $d > D^{\mathcal{I}}(\omega)$. ■

Απόδειξη του Λήμματος 4.11 για την $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα: Η απόδειξη του Λήμματος που περιγράφεται στη συνέχεια είναι συμπληρωματική της απόδειξης που παρουσιάστηκε στο Παράρτημα 4.Α′ και για αυτόν τον λόγο θα περιγράψουμε μόνο τα σημεία που προστέθηκαν. Όπως και στο Παράρτημα 4.Α′ θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $|\cdot|$ για να αναπαραστήσουμε τον πληθάριθμο (cardinality) ενός συνόλου και το σύμβολο O για την έννοια big-O από την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Η πολυωνυμική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μας είναι μία συνέπεια των παρακάτω ιδιοτήτων:

- Όπως δείξαμε υπάρχουν το πολύ $O(|\mathcal{O}|^3)$ υπαγωγές εννοιών στην προκύπτουσα οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$.

- Ο κανόνας **CR8b**, που ενδεχομένως εισαγάγει νέους βαθμούς στη γνώση μας (βαθμούς που δεν περιέχονται στο $[0,1]_{\mathcal{O}}$) μπορεί να εφαρμοστεί το πολύ μία φορά για κάθε ζεύγος ονοματικής έννοιας-έννοιας απτού κατηγορήματος. Εφόσον υπάρχουν $O(|\mathcal{O}|^2)$ τέτοια ζεύγη στην οντολογία μας, τότε $O(|\mathcal{O}|^2)$ νέοι βαθμοί μπορούν να εισαχθούν.

- Κανένας από τους υπόλοιπους κανόνες δεν εισαγάγει νέους βαθμούς. Συγκεκριμένα ο κανόνας **CR8a** δεν εισαγάγει κάποιον νέο βαθμό εξαιτίας της Ιδιότητας 3 του Ορισμού 5.9. Για αυτό το λόγω ο βαθμός d που υπάρχει σε μία υπαγωγή εννοιών $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ ή $\langle C \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ μπορεί να αλλαχθεί το πολύ $O(|\mathcal{O}|^2)$ φορές.

- Βάσει των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να έχουμε το πολύ $O(|\mathcal{O}|^5)$ εφαρμογές των κανόνων **CR1-CR12**.

- Για τους νέους κανόνες **CR7**, **CR8**, **CR9** ο έλεγχος της εφαρμογής ενός κανόνα γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο εξαιτίας της Ιδιότητας 1 του ορισμού 5.7.

- Ομοίως με πριν, έχουμε ότι ο έλεγχος για το εάν κάποιος από τους υπόλοιπους κανόνες εφαρμόζεται γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

■

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.9 για την $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα (Ορθότητα): Η ορθότητα είναι η ευθεία φορά της συνεπαγωγής του Θεωρήματος 4.9.

Η απόδειξη της ορθότητας είναι πανομοιότυπη με την απόδειξη που υπάρχει στο Παράρτημα 4.Α′. Η κύρια διαφορά είναι ότι πρέπει να επεκτείνουμε τον Ισχυρισμό 4.13: "Κάθε υπαγωγή εννοιών στο $\mathcal{O}_{SAT}$ ικανοποιείται από ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{O}$ οντολογίας" και για την περίπτωση ισχυρισμών που περιέχουν έννοιες με απτά πεδία, δηλαδή για την περίπτωση εφαρμογής των κανόνων **CR7**, **CR8a**, **CR8b**, και **CR9**. Στο υπόλοιπο της απόδειξης θεωρούμε ότι $C^{\mathcal{I}}(x) = e$.

(CR7) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής

$$\langle C \sqsubseteq p_i(\overline{F}_i), d_i\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$$

για $1 \leq i \leq m$, η σύζευξη $\bigwedge_{i=1}^m p_i(\overline{F}_i) \geq d_i$ είναι μη ικανοποιήσιμη και ο κανόνας προσθέτει $\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle$ στην $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$ οντολογία. Μένει να δείξουμε ότι

$e = 0$. Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο. Έστω ότι $e > 0$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $p_i^{\mathcal{I}}(\overline{F}_i) \geq \min(e, d)$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\delta : N_F \to \Delta^{\mathcal{D}}$ ως εξής: $\delta(\overline{F}_i) = \overline{F}_i^{\mathcal{I}}(x)$ για όλα τα $1 \leq i \leq m$. Μπορεί να βεβαιωθεί ότι το δ είναι μία λύση της σύζευξης $\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq \min(e, d_i)$. Όμως, σύμφωνα με την Ιδιότητα 2 του Ορισμού 5.9 και εφόσον η σύζευξη $\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq d_i$ είναι μη ικανοποιήσιμη, η προηγούμενη σύζευξη θα πρέπει να είναι επίσης μη ικανοποιήσιμη. Για αυτό το λόγω η υπόθεση που κάναμε είναι λάθος, υπονοώντας ότι

$$e = 0.$$

(CR8a) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής

$$\langle C \sqsubseteq p_i(\overline{F}_i), d_i \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}^{j}$$

για $1 \leq i \leq m$, ισχύει η συνεπαγωγή $\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq d_i \models p(\overline{F}) \geq d$ και ο κανόνας προσθέτει $\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d \rangle$ στην $\mathcal{O}_{SAT}^{j+1}$ οντολογία. Μένει να δείξουμε ότι $p^{\mathcal{I}}(\overline{F}) \geq \min(e, d)$. Μία απεικόνιση δ μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής : $\delta(\overline{F}_i) = \overline{F}_i^{\mathcal{I}}(x)$ για όλα τα $1 \leq i \leq m$. Μπορεί να βεβαιωθεί ότι $\delta \models \bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq \min(e, d_i)$ και η Ιδιότητα 1 του Ορισμού 5.9 διασφαλίζει ότι

$$\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(\overline{F}_i) \geq \min(e, d_i) \models p(\overline{F}) \geq \min(e, d).$$

Εφόσον το δ είναι μία λύση της σύζευξης, έχουμε ότι $\delta \models p(\overline{F}) \geq \min(e, d)$, και από την κατασκευή του δ ότι

$$p^{\mathcal{I}}(\overline{F})(x) \geq \min(e, d).$$

(CR8b) Η απόδειξη για μη αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά μπορεί να ολοκληρωθεί όπως πριν, έχοντας υπόψιν ότι το C είναι πάντα μία ονοματική έννοια $\{a\}$ εξαιτίας του περιορισμού που παρουσιάζεται στην Εξίσωση 5.3 και επομένως είτε $C^{\mathcal{I}}(x) = 0$ είτε $C^{\mathcal{I}}(x) = 1$ πρέπει να ισχύει.

(CR9) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής $\langle C \sqsubseteq p_k(\overline{F}_k), d_k \rangle$, $\langle C \sqsubseteq p_l(\overline{F}_l), d_l \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}^{j}$ έτσι ώστε $p_k \in \Phi^{\mathcal{D}_k}$, $p_l \in \Phi^{\mathcal{D}_l}$ με $\mathcal{D}_k \neq \mathcal{D}_l$, τα διανύσματα χαρακτηριστικών $\overline{F}_k$, $\overline{F}_l$ έχουνε ένα τουλάχιστον κοινό χαρακτηριστικό f και ο κανόνας προσθέτει $\langle C \sqsubseteq \bot, 1 \rangle$ στην $\mathcal{O}_{SAT}^{j+1}$ οντολογία. Μένει να δείξουμε ότι $e = 0$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $p_k^{\mathcal{I}}(\overline{F}_k) \geq \min(e, d_k)$ και $p_l^{\mathcal{I}}(\overline{F}_l) \geq \min(e, d_l)$. Εάν $e > 0$, και εφόσον $d_k > 0$ και $d_l > 0$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα βάσει της σημασιολογίας των απτών πεδίων ότι $f^{\mathcal{I}}(x) = y$

για κάποιο $y \in \Delta^{\mathcal{D}_i} \bigcap \Delta^{\mathcal{D}_j}$, το οποίος όμως είναι άτοπο εφόσον τα σύνολα $\Delta^{\mathcal{D}_i}$ και $\Delta^{\mathcal{D}_j}$ δεν έχουν κοινά στοιχεία. Επομένως

$$e = 0.$$

■

Πρόταση 5.14 *Εάν $\langle \top \sqsubseteq F, d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποια περιγραφή έννοιας F τότε για κάθε $C \in BC_{\mathcal{C}}$ ισχύει ότι $\langle C \sqsubseteq F, d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο βαθμό $d' \geq d$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτή αποτελεί επέκταση της απόδειξης για την Πρόταση 4.14 που παρουσιάζεται στο Παράρτημα 4.Α′ για την περίπτωση που η γνώση μας έχει και απτά πεδία.

Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμός μας εκτελείται σε m βήματα και η εξαγόμενη γνώση στο βήμα j συμβολίζεται με $\mathcal{O}^j_{SAT}$ (θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $\mathcal{O}_{SAT}$ σαν συντομογραφία της $\mathcal{O}^m_{SAT}$). Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά εξετάζοντας τους βαθμούς j για τους οποίους $\langle \top \sqsubseteq D, d\rangle \in \mathcal{O}^{j+1}_{SAT} \setminus \mathcal{O}^j_{SAT}$. Για τη βάση της επαγωγής αρχικά έχουμε ότι η οντολογία $\mathcal{O}^0_{SAT}$ είναι κενή και συνεπώς η υπόθεσή μας ισχύει. Για το βήμα της επαγωγής αναλύουμε τις περιπτώσεις των κανόνων **CR7**, **CR8a**, **CR8b**, και **CR9** (οι υπόλοιπες περιπτώσεις κανόνων έχουν εξεταστεί) ανάλογα με το ποιος κανόνας εφαρμόστηκε προκειμένου να προστεθεί η υπαγωγή $\langle \top \sqsubseteq \exists R.D, d\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$.

(CR7) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής

$$\langle \top \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d_1\rangle, \ldots, \langle \top \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d_m\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT},$$

η σύζευξη $\bigwedge_{i=1}^m p_i(\overline{F}_i) \geq d_i$ είναι μη ικανοποιήσιμη και ο κανόνας προσθέτει $\langle \top \sqsubseteq \bot, 1\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Από την υπόθεση επαγωγής έχουμε ότι υπάρχουν υπαγωγές της μορφής $\langle C \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d'_1\rangle, \ldots, \langle C \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d'_m\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT}$ με $d'_i \geq d_i$. Ο κανόνας **CR7** για τις προαναφερθείσες υπαγωγές μαζί με τη μη ικανοποιησιμότητα της σύζευξης $\bigwedge_{i=1}^m p_i(\overline{F}_i) \geq d'_i$ διασφαλίζουν ότι $\langle C \sqsubseteq \bot, 1\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$.

(CR8a) Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται όταν έχουμε GCIs της μορφής

$$\langle \top \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d_1\rangle, \ldots, \langle \top \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d_m\rangle \in \mathcal{O}^j_{SAT},$$

ισχύει η συνεπαγωγή $\bigwedge_{i=1}^m p_i(\overline{F}_i) \geq d_i \models p(\overline{F}) \geq d$ και προσθέτει $\langle \top \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}^{j+1}_{SAT}$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν υπαγωγές της μορφής $\langle C \sqsubseteq p_1(\overline{F}_1), d'_1\rangle, \ldots, \langle C \sqsubseteq p_m(\overline{F}_m), d'_m\rangle$ στην $\mathcal{O}^j_{SAT}$ με $d'_i \geq d_i$. Επιπλέον, από τη σημασιολογία των απτών πεδίων έχουμε ότι $\bigwedge_{i=1}^m p_i(\overline{F}_i) \geq d'_i \models p(\overline{F}) \geq d$. Για αυτό το λόγο, ο κανόνας **CR8a** διασφαλίζει ότι $\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d'\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάποιο $d' \geq d$.

(CR8b) Ο κανόνας αυτός ποτέ δεν προσθέτει μία υπαγωγή εννοιών της μορφής $\langle \top \sqsubseteq D, d\rangle$ στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$, για αυτόν τον λόγο δεν υπάρχει ανάγκη να τον εξετάσουμε.

(CR9) Η απόδειξη για τον κανόνα αυτό είναι όμοια με την απόδειξη για τον κανόνα **CR7**.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.9 (Πληρότητα): Η απόδειξη αυτή είναι επέκταση της απόδειξης της Πληρότητας που παρουσιάζεται στο Παράρτημα 4.Α′ για την περίπτωση που η οντολογία μας περιέχει απτά πεδία. Για αυτό το λόγο παρουσιάζουμε μόνο τα κομμάτια της απόδειξης που χρειάζονται για την περίπτωση αυτή.

Μεταξύ των βημάτων 1 και 2 της απόδειξης πληρότητας στο Παράρτημα 4.Α′ προσθέτουμε ένα ενδιάμεσο βήμα το οποίο σχετίζεται με τα απτά πεδία.

Ενδιάμεσο Βήμα. Για κάθε έννοια $C \in BC_{\mathcal{O}}$ και απτό πεδίο $\mathcal{D}$, κατασκευάζουμε τη σύζευξη $\text{conj}_{C,\mathcal{D}}$ ως εξής:

$$\text{conj}_{C,\mathcal{D}} := \bigwedge_{\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ και } p \in \Phi^{\mathcal{D}}} p(\overline{F}) \geq d.$$

Η σύζευξη $\text{conj}_{C,\mathcal{D}}$ κατασκευάζεται δηλαδή από όλες τις ασαφείς υπαγωγές εννοιών στην οντολογία $\mathcal{O}_{SAT}$ που έχουν την έννοια C στο αριστερό τους μέλος και ένα κατηγόρημα απτού πεδίου $p \in \Phi^{\mathcal{D}}$ στο δεξί. Μία φραγμένη, από κάποιο βαθμό $d_{thr} \in (0,1]$, εκδοχή της σύζευξης $\text{conj}_{C,\mathcal{D}}$ μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής:

$$\text{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} := \bigwedge_{\langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ και } p \in \Phi^{\mathcal{D}}} p(\overline{F}) \geq \min(d, d_{thr}).$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για κάθε $C \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$ και βαθμό d_{thr} υπάρχει μία λύση δ για τη σύζευξη $\text{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \text{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ η οποία ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες. Η λύση αυτή θα χρησιμοποιηθεί προκειμένου να επεκτείνουμε τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ σε ονόματα χαρακτηριστικών που σχετίζονται με απτά πεδία.

Πρόταση 5.15 *Για κάθε $C \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$, κάθε αυστηρό π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο $\mathcal{D}$, και βαθμό φράγματος $d_{thr} \in (0,1]$, υπάρχει μία λύση δ για τη σύζευξη $\text{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \text{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ έτσι ώστε: $\delta \models p(\overline{F}) = d$ εάν το $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\text{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \text{conj}_{\top,\mathcal{D}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\delta_{C,\mathcal{D},d_{thr}}$ προκειμένου να αναπαραστήσουμε τη συγκεκριμένη λύση.*

Απόδειξη: Από τη μη ικανοποιησιμότητα της Συνθήκης S2 έχουμε ότι $\langle \{a\} \sqsubseteq \bot, 0 \rangle$ για κάθε ονοματική έννοια $\{a\} \in BC^-_{\mathcal{O}}$. Εξ ορισμού του $BC^-_{\mathcal{O}}$ και εξαιτίας του κανόνα **CR5** προκύπτει ότι $\langle C \sqsubseteq \bot, 0 \rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$ για κάθε $C \in BC^-_{\mathcal{O}}$. Επομένως ο κανόνας **CR7** διασφαλίζει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση δ που ικανοποιεί τη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}}$.

Η Πρόταση 5.14 διασφαλίζει ότι κάθε συζευκτέος στο $\mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ εμφανίζεται επίσης και στο $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}}$ με μεγαλύτερο βαθμό. Επομένως και εφόσον υπάρχει μία λύση για τη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}}$ υπάρχει επίσης και μία λύση για τη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,D}$. Εφόσον η σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ είναι πιο γενική από την $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,D}$ έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λύση για την $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$.

Το υπόλοιπο της απόδειξης βασίζεται σε εις άτοπο επαγωγή, θεωρώντας ότι η Πρότασή μας δεν ισχύει. Έστω λοιπόν ότι η προηγούμενη σύζευξη έχει n λύσεις που η κάθε μία συμβολίζεται ως δ_λ με $1 \leq \lambda \leq n$. Εφόσον η Πρόταση δεν ισχύει, για κάθε λύση δ_λ υπάρχει κάποιος συζευκτέος $p_\lambda(\overline{F}_\lambda)$ έτσι ώστε (i) $\delta_\lambda \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) = d_\lambda$ και (ii) ο όρος $p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ δεν εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$. Το τελευταίο υπονοεί ότι

$$\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}} \models \bigvee_{1 \leq \lambda \leq n} p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$$

και η Ιδιότητα 2 του Ορισμού 5.7 (μη αυστηρά π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία) διασφαλίζει ότι $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}} \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ για κάποιο $1 \leq \lambda \leq n$.

Ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις όπου $d_\lambda > d_{thr}$ και $d_\lambda \leq d_{thr}$.

Για την πρώτη περίπτωση, εφόσον $d_\lambda > d_{thr}$, βασισμένοι στην Ιδιότητα 4 του Ορισμού 5.9 συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}} \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ ενώ ο κανόνας **CR8a** διασφαλίζει ότι ο όρος $p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$.

Για τη δεύτερη περίπτωση, το γεγονός ότι $d_\lambda \leq d_{thr}$ μαζί με την Ιδιότητα 1 του Ορισμού 5.9 διασφαλίζουν ότι $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D},d_{thr}} \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$. Η τελευταία συνεπαγωγή μαζί με την Πρόταση 5.14 διασφαλίζουν ότι $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ υπονοώντας βάσει της σημασιολογίας των ασαφών απτών πεδίων ότι $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}} \models p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$. Η τελευταία σχέση μαζί με τον κανόνα **CR8a** διασφαλίζουν ότι ο όρος $p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d'_\lambda$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D}}$ για κάποιο $d'_\lambda \geq d_\lambda$ και τέλος η Ιδιότητα 1 of Definition 5.9 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$.

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι ο όρος $p_\lambda(\overline{F}_\lambda) \geq d_\lambda$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_{thr}} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ και συνεπώς η υπόθεση που κάναμε ότι δεν ισχύει η Πρότασή είναι λάθος.

Πρόταση 5.16 *Για κάθε ονοματική έννοια $\{a\} \in BC_{\mathcal{O}}^{-}$ και κάθε (μη αυστηρό ή αυστηρό) π-αποδεκτό ασαφές απτό πεδίο $\mathcal{D}$, υπάρχει μία λύση δ για τη σύζευξη $\mathrm{conj}_{\{a\},\mathcal{D}}$ τέτοια ώστε: $\delta \models p(\overline{F}) = d$ εάν ο όρος $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{\{a\},\mathcal{D}}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συντομογραφία $\delta_{\{a\},\mathcal{D}}$ για τη συγκεκριμένη λύση.*

Η απόδειξη μπορεί να ολοκληρωθεί με παρόμοια μεθοδολογία με την προηγούμενη απόδειξη.

Βήμα 3. Σε αυτό το βήμα αναφέρουμε τις ενέργειες που σχετίζονται με απτά πεδία προκειμένου να κατασκευαστεί η ασαφής διερμηνεία $\mathcal{I}$.

Ορίζουμε την ασαφή διερμηνεία $\mathcal{I}$ για ένα όνομα χαρακτηριστικού $f \in N_F$ και ένα αντικείμενο $[C]$ του $\Delta^{\mathcal{I}}$ (το οποίο κατασκευάστηκε όπως περιγράφεται στην αντίστοιχη απόδειξη στο Παράρτημα 4.Α΄) ως εξής:

$$f^{\mathcal{I}}([C]) := \begin{cases} \delta_{\{a\},\mathcal{D}}(f) & (i) \text{ υπάρχει ονοματική έννοια } \{a\} \in [C], \\ & (ii) \ \langle \{a\} \sqsubseteq p(\overline{F}), d \rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ για κάποιο } d > 0, \\ & \quad \text{το } f \text{ εμφανίζεται στο } \overline{F}, \text{ και } p \in \Phi^{\mathcal{D}}. \\ \delta_{C,\mathcal{D},d_C}(f) & (i) \text{ δεν υπάρχει ονοματική έννοια στο } [C], \\ & (ii) \ \langle C \sqsubseteq p(\overline{F}), d \rangle \in \mathcal{O}_{SAT} \text{ για κάποιο } d > 0, \\ & \quad \text{το } f \text{ εμφανίζεται στο } \overline{F}, \text{ και } p \in \Phi^{\mathcal{D}}. \end{cases}$$

όπου οι απεικονίσεις $\delta_{\{a\},\mathcal{D}}$, $\delta_{C,\mathcal{D},d_C}$ ορίζονται βάσει των Προτάσεων 5.15, 5.16.

Τέλος η Πρόταση 4.15 διασφαλίζει ότι η διερμηνεία κάθε ονόματος χαρακτηριστικού ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Για αυτό το λόγω η $\mathcal{I}$ είναι σωστά ορισμένη (well defined).

Πρόταση 5.17 *Η Πρόταση 4.16 ισχύει και όταν έχω στη γνώση μου κατηγορήματα από απτά πεδία.*

Απόδειξη: Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η έννοια D είναι μία έννοια απτού πεδίου:

D **είναι μία έννοια απτού πεδίου ($D = p(\overline{F})$):** Για κάθε $[C] \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και απτό πεδίο $\mathcal{D}^{\mathcal{I}}$ έχουμε ότι $p(\overline{F})^{\mathcal{I}}([C]) = d$ ανν $p^{\mathcal{D}}(\overline{F}^{\mathcal{I}}([C])) = d$.

Εάν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια $\{a\} \in [C]$ τότε από την κατασκευή της διερμηνείας του $\overline{F}^{\mathcal{I}}([C])$ έχουμε ότι η προηγούμενη ανισότητα ικανοποιείται ανν $p^{\mathcal{D}}(\delta_{\{a\},\mathcal{D}}(\overline{F})) = d$ όπου το $\delta_{\{a\},\mathcal{D}}$ αναφέρεται στην αντίστοιχη λύση που παρουσιάστηκε στην Πρόταση 5.16. Από την επιλογή της λύσης, το τελευταίο ισχύει ανν $\langle\{a\} \sqsubseteq p(\overline{F}), d\rangle \in \mathcal{O}_{SAT}$, δηλαδή $d_{\{a\}\sqsubseteq p(\overline{F})} = d$. Για αυτό τον λόγω η συνθήκη T1 ισχύει.

Εάν δεν υπάρχει κάποια ονοματική έννοια στο $[C]$ τότε από την κατασκευή της διερμηνείας του $\overline{F}^{\mathcal{I}}([C])$ έχουμε ότι η προηγούμενη ισότητα ικανοποιείται ανν $p^{\mathcal{D}}(\delta_{C,\mathcal{D},d_C}(\overline{F})) = d$ όπου το $\delta_{C,\mathcal{D},d_C}$ αντιστοιχεί στη λύση που παρουσιάστηκε στην Πρόταση 5.15. Από την επιλογή της λύσης $\delta_{C,\mathcal{D},d_C}$, το τελευταίο ισχύει ανν το $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_C} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$. Από την κατασκευή των δύο συζεύξεων, το $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_C}$ όταν $d = \min(d_{C\sqsubseteq p(\overline{F})}, d_C)$ και το $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στη σύζευξη $\mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ όταν $d = d_{\top\sqsubseteq p(\overline{F})}$. Συνεπώς το $p(\overline{F}) \geq d$ εμφανίζεται στην $\mathrm{conj}_{C,\mathcal{D},d_C} \wedge \mathrm{conj}_{\top,\mathcal{D}}$ ανν $d = \max(\min(d_{C\sqsubseteq p(\overline{F})}, d_C), d_{\top\sqsubseteq p(\overline{F})})$. Επομένως η Συνθήκη T2 ισχύει.

Το υπόλοιπο της απόδειξης παραμένει ίδιο. ■

Κεφάλαιο 6

Βατές Ασαφείς ΠΛ με Κανόνες

Όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 4, η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ συνδυάζει πολυωνυμική πολυπλοκότητα για προβλήματα συλλογιστικής όπως η υπαγωγή δύο εννοιών, η ταξινόμηση μίας οντολογίας, και η ικανοποιησιμότητα μίας οντολογίας, με εκφραστικότητα η οποία είναι αρκετή για να περιγραφεί μία πληθώρα εφαρμογών των οντολογιών. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα εξετάσουμε την επέκταση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας με κανόνες με βάρη και θα μελετήσουμε το σύνολο των περιορισμών οι οποίοι διασφαλίζουν ότι δε θα χαθεί η πολυωνυμική πολυπλοκότητα για τα προαναφερθέντα προβλήματα συλλογιστικής. Η γλώσσα που θα προκύψει αποκαλείται ασαφής $\mathcal{ELP}$ και ανήκει στο αποφάνσιμο υποσύνολο γλωσσών της ασαφούς γλώσσας κανόνων του σημασιολογικού ιστού.

6.1 Εισαγωγή

Οι *ασαφείς ΠΛ* αποτελούν επεκτάσεις των ΠΛ σχεδιασμένες έτσι ώστε να μπορούν να αναπαραστήσουν και να εξάγουν συμπεράσματα σε περιβάλλοντα με ατελή και ασαφή γνώση η οποία είναι εγγενής σε αρκετές εφαρμογές. Ως εκ τούτου, οι ασαφείς ΠΛ έχουν κερδίσει το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας και έχουν χρησιμοποιηθεί σε διάφορα πεδία.

Δύο ζητήματα τα οποία έχουν εξεταστεί στα πλαίσια της διατριβής είναι η δημιουργία πολυωνυμικής πολυπλοκότητας γλωσσών και αλγορίθμων συλλογιστικής οι οποίες να μπορούν να χειριστούν ατελή πληροφορία και η μελέτη ασαφών συστημάτων ΠΛ με κανόνες.

Στο πλαίσιο της διερεύνησης γλωσσών πολυωνυμικής πολυπλοκότητας έχουν γίνει αρκετές δουλειές οι οποίες σχετίζονται με την $\mathcal{EL}$ οικογένεια ΠΛ που προτάθηκε από τους Baader et al. (2005). Αρχικά ο Vojtáš (2007) παρουσίασε μία ασαφή επέκταση της $\mathcal{EL}$ γλώσσας, στη συνέχεια οι Stoilos et al. (2008) εξέτασαν ασαφείς επεκτάσεις της βατής γλώσσας $\mathcal{EL}^{+}$, ενώ στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάσαμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ (Mailis et al., 2008).

Στο πλαίσιο της μελέτης επεκτάσεων ασαφών συστημάτων ΠΛ με κανόνες οι Pan et al. (2006) παρουσίασαν την ασαφή Γλώσσα Κανόνων του Σημασιολογικού Ιστού (fuzzy Semantic Web Rule Language f-SWRL), η οποία αποτελεί μία ασαφή επέκταση της γλώσσας SWRL που προτάθηκε από τους Horrocks et al. (2004) και η οποία είναι με τη σειρά της μία επέκταση της γλώσσας σημασιολογικού ιστού OWL (McGuinness et al., 2004) με κανόνες. Εφόσον τόσο η γλώσσα SWRL, όσο και η ασαφής ομόλογη της f-SWRL έχουν αποδειχθεί να είναι μη αποφάνσιμες, έχουν επίσης μελετηθεί αποφάνσιμες υπογλώσσες των προτεινόμενων εκφραστικοτήτων. Τέτοιες εκφραστικές υπογλώσσες για τις ασαφείς ΠΛ έχουν π.χ. προταθεί από τους Lukasiewicz and Straccia (2007), Straccia (2006d), ενώ στο Κεφάλαιο 3 και στη βιβλιογραφία (Mailis et al., 2010, 2007) μελετήσαμε προβλήματα εκφραστικής συλλογιστικής με Horn κανόνες και ασαφείς ΠΛ.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε μία υβριδική γλώσσα η οποία ενσωματώνει κανόνες με βάρη σε ασαφείς ΠΛ και συγχρόνως λύνει σε πολυωνυμικό χρόνο το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών, τον έλεγχο στιγμιοτύπου, και το πρόβλημα συνέπειας μίας οντολογίας. Η προτεινόμενη γλώσσα επεκτείνει την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα με κανόνες με βάρη δίνοντας τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$. Η συνεισφορά μας σε αυτό το πεδίο συνοψίζεται στη συνέχεια:

- Επεκτείναμε τον ορισμό των ΠΛ κανόνων που δίνεται από τους Krötzsch et al. (2008a) για τις ασαφείς ΠΛ.

- Βασισμένοι στους ΠΛ κανόνες παρουσιάσαμε το σύνολο των περιορισμών οι οποίοι διασφαλίζουν ότι η ασαφής $\mathcal{ELP}$ γλώσσα, η επέκταση δηλαδή της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ με κανόνες, είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας.

- Παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για την ασαφή $\mathcal{ELP}$ ο οποίος βασίζεται στην αναγωγή ενός $\mathcal{ELP}$ συνόλου κανόνων με βάρη, σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα σε γραμμικό χρόνο.

Το υπόλοιπο του Κεφαλαίου χωρίζεται στις ακόλουθες ενότητες: Στην Παράγραφο 6.2 επεκτείνουμε τις έννοιες των κανόνων και των ΠΛ κανόνων με τελεστές της ασαφούς λογικής και βάσει αυτών των επεκτάσεων ορίζουμε την ασαφή $\mathcal{ELP}$ γλώσσα στην Παράγραφο 6.3. Στην Παράγραφο 6.4 παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο συλλογιστικής για τη γλώσσα που προτείναμε, ο οποίος ανάγει κάθε πρόβλημα συλλογιστικής μίας $\mathcal{ELP}$ βάσης κανόνων, στο αντίστοιχο πρόβλημα επίλυσης βάσει ενός Datalog προγράμματος. Τέλος, στην Παράγραφο 6.5 συνοψίζουμε την εργασία μας στην $\mathcal{ELP}$ γλώσσα, ενώ το Παράρτημα 6.Α΄ περιέχει τις αναλυτικές αποδείξεις της ορθότητας και πληρότητας της αναγωγής από μία $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα.

6.2 Κανόνες με Βάρη για Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Η γλώσσα της ασαφούς βασίζεται στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ την οποία και επεκτείνει με κανόνες με βάρη. Όπως έχει ήδη δειχθεί για τις κλασσικές ΠΛ —και συνεπώς θα ισχύει και στις ασαφείς— η χρήση υπαρξιακών περιορισμών σε μία γλώσσα κανόνων οδηγεί σε μη αποφανσιμότητα. Προκειμένου η γλώσσα μας να είναι όχι μόνο αποφάνσιμη, αλλά και πολυωνυμικής πολυπλοκότητας, θα πρέπει να εφαρμόσουμε ένα σύνολο περιορισμών στην εκφραστικότητα των κανόνων. Για την κλασσική $\mathcal{ELP}$ γλώσσα, οι Krötzsch et al. (2008b) προκειμένου να επιλύσουν το προαναφερθέν πρόβλημα, προτείνουν οι κανόνες της γλώσσας να περιορίζονται βάσει των ΠΛ κανόνων που έχουν προταθεί από τους ίδιους (Krötzsch et al., 2008a). Οι ΠΛ κανόνες αποτελούν ένα εκφραστικό υποσύνολο της γλώσσας SWRL το οποίο μπορεί να συνδυαστεί με διάφορες ΠΛ χωρίς να μεταβάλει τη χείριστη πολυπλοκότητά τους. Θα ακολουθήσουμε την ίδια στρατηγική επεκτείνοντας τους ΠΛ κανόνες για τις ασαφείς ΠΛ και βασισμένοι στους κανόνες αυτούς θα ορίσουμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$.

Η υπόλοιπη παράγραφος χωρίζεται ως εξής: Αρχικά προτείνουμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία των ασαφών κανόνων με βάρη για μία οποιαδήποτε ΠΛ $\mathcal{L}$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το σύνολο των περιορισμών που συνθέτουν τους ασαφείς ΠΛ κανόνες. Βασισμένοι σε αυτούς τους περιορισμούς θα παρουσιάσουμε, στην Παράγραφο 6.3, τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$.

6.2.1 Κανόνες με Βάρη

Αυτή η παράγραφος περιγράφει τη σύνταξη και σημασιολογία των κανόνων με βάρη μέσα από ένα σύνολο ορισμών που είναι είτε πανομοιότυποι, είτε άμεσες επεκτάσεις των ορισμών που δίνουν οι Krötzsch et al. (2008b).

Ορισμός 6.1 (Όρος, Άτομο) *Θεωρούμε μία ΠΛ $\mathcal{L}$ που αποτελείται από τα σύνολα ονομάτων εννοιών N_C, ονομάτων ατόμων N_I, ονομάτων ρόλων N_R, και το σύνολο σύνθετων εννοιών* $\mathbf{C}$ *—που ορίζεται βάσει των συνόλων N_C, N_R, N_I—, ενώ το* $\mathbf{V}$ *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από μεταβλητές πρώτης τάξης.* Όρος (term) *είναι κάθε στοιχείο του συνόλου* $\mathbf{V} \cup N_I$.

Δοθέντων των όρων t, u, ένα άτομο έννοιας (concept atom) *είναι ένας τύπος της μορφής $C(t)$ όπου $C \in \mathbf{C}$, ενώ ένα* άτομο ρόλου (role atom) *είναι ένας τύπος της μορφής $R(t, u)$ όπου $R \in N_R$.*

Λόγω ονοματοδοσίας, δεν θα πρέπει να συγχέουμε τα άτομα έννοιας και ρόλου που υπάρχουν στους κανόνες, δηλαδή τύπους της μορφής $C(t)$ και $R(t, u)$, με τα άτομα (individuals) που ανήκουν στο σύνολο N_I. Για αυτόν τον λόγο όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε την πρώτη κατηγορία ατόμων θα αναφερόμαστε σε αυτά ως άτομα κανόνων (ή άτομα εννοιών και ρόλων).

Ορισμός 6.2 (Κανόνας με Βάρη) *Ένας κανόνας με βάρη για μία ασαφή ΠΛ $\mathcal{L}$ είναι ένας τύπος της μορφής $\langle B \rightarrow H, d\rangle$, όπου το B είναι το σώμα του κανόνα και το H είναι η κεφαλή του κανόνα. Τόσο το σώμα όσο και η κεφαλή είναι συζεύξεις από άτομα ρόλων και εννοιών της γλώσσας $\mathcal{L}$ και ο d είναι ένας βαθμός στο $(0, 1]$.*

Παράδειγμα 6.3 *Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα που σχετίζεται με τις διατροφικές προτιμήσεις και περιγράφεται από το ακόλουθο σύνολο κανόνων:*

$$\begin{aligned}\langle \textit{ΑλλεργικόςΣεΦιστίκια}(x) \wedge \textit{ΠροϊόνΦιστικιού}(y) &\rightarrow \textit{αντιπαθεί}(x, y), 1\rangle \\ \langle \textit{Χορτοφάγος}(x) \wedge \textit{ΠροϊόνΨαριού}(y) &\rightarrow \textit{αντιπαθεί}(x, y), 0.6\rangle.\end{aligned}$$

Ο πρώτος κανόνας δηλώνει ότι όλοι οι άνθρωποι οι οποίοι είναι αλλεργικοί στα προϊόντα του φιστικιού αντιπαθούν γευστικά το φιστίκι, ενώ το ίδιο ισχύει σύμφωνα με τον δεύτερο κανόνα για τους χορτοφάγους και τα προϊόντα ψαριού. Όπως μπορούμε να δούμε οι κανόνες με τα μεγαλύτερα βάρη είναι πιο σημαντικοί από τους κανόνες με τα μικρότερα βάρη. Για αυτόν τον λόγο, κάποιος που είναι αλλεργικός στα φιστίκια θα αντιπαθεί τα προϊόντα που είναι παράγωγα του φιστικιού σε βαθμό 1, *ενώ κάποιος ο οποίος είναι χορτοφάγος θα αντιπαθεί τα προϊόντα ψαριού σε βαθμό τουλάχιστον* 0.6.

Η σημασιολογία των κανόνων με βάρη δίνεται μέσω μίας ασαφούς διερμηνείας $\mathcal{I}$, όπως αυτής που παρουσιάστηκε για τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ στην Παράγραφο 4.3, η οποία όμως έχει επεκταθεί με *αναθέσεις μεταβλητών (variable assignments)*. Μία ανάθεση μεταβλητών Z για μία ασαφή διερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μία απεικόνιση από το σύνολο μεταβλητών $\mathbf{V}$ στο πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$. Δοθέντος ενός όρου $t \in N_I \cup \mathbf{V}$, μίας διερμηνείας $\mathcal{I}$ και μίας ανάθεσης μεταβλητών Z χρησιμοποιούμε την έκφραση $t^{\mathcal{I},Z} = Z(t)$ ως εξής: $t^{\mathcal{I},Z} = Z(t)$ εάν $t \in \mathbf{V}$ ενώ $t^{\mathcal{I},Z} = t^{\mathcal{I}}$ εάν $t \in N_I$. Όπως έχουμε ήδη δηλώσει, το σώμα B και το κεφάλι H ενός κανόνα με βάρη αποτελούν συζεύξεις από άτομα κανόνων. Ο βαθμός μίας τέτοιας σύζευξης ως προς τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ και την ανάθεση μεταβλητών Z προσδιορίζεται από τους βαθμούς κάθε συζευκτέου και του τελεστή ασαφούς τομής (Πίνακας 2.1 Κεφάλαιο 2). Δηλαδή δοθείσας της σύζευξης:

$$S := \bigwedge_{i=1}^{k} C(t_i) \wedge \bigwedge_{i=k+1}^{l} R(t_i, u_i)$$

έχουμε ότι $S^{\mathcal{I},Z} = d$ όταν ισχύει ότι

$$i(C^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},Z}), \ldots, C^{\mathcal{I}}(t_k^{\mathcal{I},Z}), R^{\mathcal{I}}(t_{k+1}^{\mathcal{I},Z}, u_{k+1}^{\mathcal{I},Z}), \ldots, R^{\mathcal{I}}(t_l^{\mathcal{I},Z}, u_l^{\mathcal{I},Z}) = d$$

όπου το i είναι ένας τελεστής ασαφούς τομής. Συνεπώς, λέμε ότι μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ *ικανοποιεί* έναν κανόνα με βάρη $\langle B \rightarrow H, d\rangle$ όταν για όλες τις αναθέσεις μεταβλητών Z

για το $\mathcal{I}$ ισχύει ότι $i(B^{\mathcal{I},Z}, d) \leq H^{\mathcal{I},Z}$. Μία διερμηνεία *ικανοποιεί* ένα σύνολο κανόνων, δηλαδή είναι *μοντέλο* του συνόλου αυτού, όταν ικανοποιεί κάθε κανόνα του συνόλου αυτού. Δύο σύνολα κανόνων λέγονται *ισοδύναμα (equivalent)* όταν έχουν ακριβώς τα ίδια μοντέλα και *αμοιβαία ικανοποιήσιμα (equisatisfiable)* όταν η ικανοποιησιμότητα του ενός συνεπάγεται την ικανοποιησιμότητα του άλλου και αντίστροφα.

Επιλέγουμε ο προαναφερθείς τελεστής ασαφούς τομής i να είναι ο ίδιος με τον τελεστή που χρησιμοποιείται από την ασαφή ΠΛ γλώσσα μας (στην προκειμένη περίπτωση την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$). Για την περίπτωση λοιπόν της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας, ο τελεστής i είναι ο τελεστής της min τομής που περιγράφεται στον Πίνακα 2.1 του Κεφαλαίου 2. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η χρήση ενός οποιουδήποτε τελεστή τομής μαζί με την παρουσία υπαρξιακών περιορισμών στη γλώσσα μας θα μπορούσε να οδηγήσει σε μη αποφανσιμότητα σύμφωνα με την πρόσφατη βιβλιογραφία (Baader and Peñaloza, 2011a). Τέλος θα θεωρήσουμε ότι όταν το σώμα ενός κανόνα είναι κενό τότε ο βαθμός που δίνεται σε αυτό είναι μονάδα $B^{\mathcal{I},Z} = 1$. Συνεπώς μία έκφραση της μορφής $\langle \rightarrow H, d\rangle$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει το γεγονός (ισχυρισμό) ότι $H^{\mathcal{I},Z} \geq d$ για κάθε έγκυρη ανάθεση μεταβλητών Z για το $\mathcal{I}$.

Παράδειγμα 6.4 *Έστω ότι έχουμε τη διερμηνεία $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$, Χορτοφάγος$^{\mathcal{I}}(a) = 1$, ΠροϊόνΨαριού$^{\mathcal{I}}(b) = 1$ και αντιπαθεί$^{\mathcal{I}}(a, b) = 0.7$. Μπορεί εύκολα να βεβαιωθεί ότι ο κανόνας*

$$\langle \text{Χορτοφάγος}(x) \wedge \text{ΠροϊόνΨαριού}(y) \rightarrow \text{αντιπαθεί}(x, y), 0.6\rangle$$

που παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 6.3, ικανοποιείται από κάθε ανάθεση μεταβλητών Z στα στοιχεία του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Εάν όμως επιπλέον έχουμε ότι Χορτοφάγος$^{\mathcal{I}}(c) = 1$, αντιπαθεί$^{\mathcal{I}}(c, b) = 0.3$ μπορεί εύκολα να βεβαιωθεί ότι η διερμηνεία $\mathcal{I}$ δεν ικανοποιεί τον αντίστοιχο κανόνα για την απεικόνιση $Z(x) = c$, $Z(y) = b$.

Σε αυτό το σημείο θα συστήσουμε τις *ασφαλείς μεταβλητές (safe variables)*. Είναι γνωστό ότι το πεδίο $\Delta^{\mathcal{I}}$ μίας διερμηνείας $\mathcal{I}$ μπορεί να περιέχει έναν άπειρο αριθμό στοιχείων τα οποία δεν αναπαριστούνται άμεσα από κάποιο όνομα ατόμου στο N_I. Το γεγονός ότι οι κανόνες εφαρμόζονται σε όλα τα στοιχεία του πεδίου της διερμηνείας μπορεί να προκαλέσει προβλήματα ως προς τη δυνατότητα υπολογισμού και πολυπλοκότητα. Βάσει αυτού, έχουν προταθεί οι *ΠΛ ασφαλείς* μεταβλητές οι οποίες χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μόνο ονόματα ατόμων, δηλαδή στοιχεία του N_I. Η σημασιολογία των κανόνων με βάρη που περιέχουν ασφαλείς μεταβλητές είναι πανομοιότυπη των κανόνων με βάρη που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Η μόνη διαφορά έγκειται στις επιτρεπτές αναθέσεις μεταβλητών Z. Έστω λοιπόν ότι $V_S \subseteq V$ είναι το υποσύνολο των μεταβλητών που περιέχει όλες τις ασφαλείς μεταβλητές, τότε για κάθε $x \in V_S$ έχουμε ότι $Z(x) = a^{\mathcal{I}}$ για κάποιο άτομο $a \in N_I$. Κάθε άλλη μεταβλητή $x \in V \setminus V_S$ μπορεί να ανατεθεί όπως πριν σε οποιοδήποτε στοιχείο του $\Delta^{\mathcal{I}}$.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι το N_I είναι πάντα ένα πεπερασμένο σύνολο και επομένως υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός απεικονίσεων για τις ασφαλείς μεταβλητές.

Ασαφές Datalog Πρόγραμμα

Η πιο απλή μορφή των ΠΛ κανόνων με βάρη είναι οι *Datalog κανόνες* με βάρη:

Ορισμός 6.5 (Datalog Κανόνας με Βάρη, Ασαφές Datalog Πρόγραμμα) *Ένας κανόνας με βάρη είναι* Datalog κανόνας με βάρη *όταν όλες οι έννοιες που εμπεριέχονται σε αυτόν είναι είτε της μορφής $C(t)$ με $C \in N_C \cup \{\top, \bot\}$ (δηλαδή το C είναι είτε ένα όνομα έννοιας, είτε η άνω έννοια, είτε η κάτω έννοια). Ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα είναι ένα σύνολο Datalog κανόνων με βάρη.*

Εφόσον το πρόβλημα της συλλογιστικής στην ασαφή Datalog μπορεί να λυθεί με πιο εύκολο τρόπο, αρκεί να ανάγουμε την αρχική μας ασαφή $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα. Στην Παράγραφο 6.4 βλέπουμε πως ανάγεται μία ασαφής $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων σε ένα αμοιβαία ικανοποιήσιμο ασαφές Datalog πρόγραμμα.

Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε την αναγωγή αυτή, θα πρέπει να εισαγάγουμε και ένα νέο είδος κανόνα για να είναι δυνατή η διαχείριση των ονοματικών εννοιών από το Datalog πρόγραμμα το οποίο δεν μπορεί να εκφράσει ονοματικές έννοιες. Οι κανόνες αυτοί θα έχουν την μορφή $\langle B \to^* H, 1\rangle$ και η σημασιολογία τους δίνεται ως εξής: ένας κανόνας $\langle B \to H, 1\rangle$ ικανοποιείται από μία διερμηνεία $\mathcal{I}$ ανν για κάθε ανάθεση μεταβλητών Z, από τις μεταβλητές του κανόνα στα στοιχεία του $\Delta^{\mathcal{I}}$, έχουμε ότι εάν $B^{\mathcal{I},Z} > 0$ τότε $H^{\mathcal{I},Z} = 1$.

6.2.2 Ασαφείς Κανόνες Περιγραφικών Λογικών

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τους ασαφείς ΠΛ κανόνες. Οι ασαφείς ΠΛ κανόνες αποτελούν προσαρμογή των ΠΛ κανόνων που προτάθηκαν από τους Krötzsch et al. (2008a) για τις κλασσικές ΠΛ. Οι Krötzsch et al. (2008a) παρουσίασαν τους ΠΛ κανόνες ως ένα εκφραστικό υποσύνολο της γλώσσας SWRL το οποίο παραμένει αποφάνσιμο. Επιπλέον, απέδειξαν ότι οι κανόνες αυτοί μπορεί να συνδυαστούν με διάφορες χαμηλής εκφραστικότητας ΠΛ χωρίς να αυξάνουν της χείριστη πολυπλοκότητά τους. Σε αυτή την παράγραφο επεκτείνουμε τους ΠΛ κανόνες για τις ασαφείς ΠΛ και βασισμένοι σε αυτούς θα ορίσουμε την ασαφή $\mathcal{ELP}$ γλώσσα.

Ορισμός 6.6 (Άμεσα Συνδεδεμένοι Όροι, Συνδεδεμένοι Όροι) *Δοθέντος ενός ασαφούς ΠΛ κανόνα $\langle B \to H, d\rangle$ και των όρων $t, u \in N_I \cup \mathbf{V}$ μία άμεση σύνδεση από τον όρο t στον όρο u είναι ένα μη κενό σύνολο ατόμων ρόλων της μορφής $R(t, u)$.*

Εάν το σώμα B περιέχει μία άμεση σύνδεση μεταξύ των όρων t και u, τότε το t είναι άμεσα *συνδεδεμένο με το u. Η σύνδεση είναι το μεταβατικό κλείσιμο της άμεσης σύνδεσης μεταξύ δύο όρων.*

Ορισμός 6.7 (Εκτεταμένοι Ασαφείς ΠΛ Κανόνες) *Ένας εκτεταμένος κανόνας είναι ένας κανόνας με βάρη της μορφής $\langle B \to H, d\rangle$ τέτοιος ώστε εάν υπάρχουν δύο μεταβλητές x, y στο B με $x \neq Y$, τότε υπάρχει μία άμεση σύνδεση $S \subseteq B$ τέτοια ώστε τα x και y να μην είναι συνδεδεμένα στο $B \setminus S$.*

Ορισμός 6.8 (Μονοπάτι) *Ένα μονοπάτι από κάποιον όρο σε κάποια μεταβλητή x του B είναι μία μη κενή αλληλουχία ατόμων ρόλων της μορφής $R_1(x_1, x_2), \ldots, R_n(x_n, x_{n+1}) \in B$ όπου $x_1 = t, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{V}$, $x_{n+1} = x$, και $x_i \neq x_{i+1}$ για $1 \leq i \leq n$.*

Ορισμός 6.9 (Ασαφείς ΠΛ Κανόνες) *Ένας εκτεταμένος ασαφής ΠΛ κανόνας είναι και ασαφής ΠΛ κανόνας όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις που θα αναφέρουμε, όπου υποθέτουμε ότι τα x και y είναι μεταβλητές του συνόλου $\mathbf{V}$, ενώ τα t, t' ανήκουν στο σύνολο των όρων $N_I \cup \mathbf{V}$:*

1. *για κάθε μεταβλητή x στο B, υπάρχει ένα μονοπάτι από το πολύ έναν αρχικό όρο t στο x,*

2. *εάν είτε $R(x, t) \in H$ είτε $C(x) \in H$, τότε ο x είναι αρχικός όρος στο B,*

3. *εάν $R(x, x) \in B$, τότε ο ρόλος $R \in N_R^S$ πρέπει να είναι απλός,*

4. *εάν $R(t, x)$, $R'(t, x) \in B$, τότε οι ρόλοι $R, R' \in N_R^S$ είναι απλοί,*

5. *εάν $R(t, y) \in H$ με $R \in N_R^S$, τότε όλα τα άτομα ρόλων της μορφής $R'(t', y) \in B$ είναι τέτοια ώστε $t' = t$ και $R' \in N_R^S$.*

Όπως ήδη αναφέραμε, οι προαναφερθέντες περιορισμού διασφαλίζουν ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ ΠΛ κανόνων και μίας μη εκφραστικής ΠΛ γλώσσας δεν θα αυξήσει τη χείριστη πολυπλοκότητά της. Γενικά μιλώντας, εάν θεωρήσουμε ότι το σώμα και η κεφαλή κάθε κανόνα αντιστοιχεί σε έναν κατευθυνόμενο γράφο στον οποίο οι όροι αναπαριστούν τους κόμβους και τα άτομα ρόλων τις ακμές, το σύνολο των περιορισμών στο σώμα και την κεφαλή ενός κανόνα περιορίζει τους δύο αυτούς γράφους σε μία δενδρική μορφή. Μία πιο λεπτομερής περιγραφή της μορφής των περιορισμών και πως αυτοί επηρεάζουν την εκφραστικότητα της γλώσσας γίνεται από τους Krötzsch et al. (2008b) για την κλασσική $\mathcal{ELP}$ γλώσσα και ισχύει και για την περίπτωσή των ασαφών ΠΛ.

6.3 Ασαφής $\mathcal{ELP}$

Βασισμένοι στους προηγούμενους ορισμούς, θα προχωρήσουμε απαριθμώντας το σύνολο των περιορισμών στους κανόνες με βάρη (για τη γλώσσα $\mathcal{EL}^{++}$) οι οποίοι συνθέτουν την ασαφή $\mathcal{ELP}$ γλώσσα.

Η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ επιτρέπει δύο ειδών κανόνες: τους βασικούς $\mathcal{ELP}$ κανόνες και τους περιορισμούς πεδίου τιμών.

Ορισμός 6.10 (Βασικός Ασαφής $\mathcal{ELP}$ Κανόνας) *Ένας κανόνας $\langle B \rightarrow H, d\rangle$ είναι ένας βασικός ασαφής $\mathcal{ELP}$ κανόνας όταν:*

1. *ο κανόνας $\langle B \rightarrow H, d\rangle$ είναι ένας εκτεταμένος ΠΛ κανόνας για την $\mathcal{EL}^{++}$,*

2. *ο κανόνας $\langle B' \rightarrow H', d\rangle$ που προκύπτει από τον $\langle B \rightarrow H, d\rangle$ αντικαθιστώντας όλες τις ασφαλείς μεταβλητές από ονόματα ατόμων είναι ένας ΠΛ κανόνας για την $\mathcal{EL}^{++}$.*

Ορισμός 6.11 (Ασαφής $\mathcal{ELP}$ Βάση Κανόνων) *Μία ασαφής $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων (RB) αποτελείται από ένα σύνολο βασικών $\mathcal{ELP}$ κανόνων μαζί με* περιορισμούς πεδίου τιμών (range restrictions) *της μορφής $\langle R(x, y) \rightarrow C(y), d\rangle$ που ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: Εάν η βάση κανόνων RB περιέχει κανόνες της μορφής $\langle R(x, y) \rightarrow C(y), 1\rangle$ και $\langle B \rightarrow H, d\rangle \in RB$ με $R(t, z) \in H$, τότε $C(z) \in B$.*

Η επόμενη πρόταση λέει ότι κάθε $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O}$ μπορεί να αναχθεί σε μία ασαφής $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων.

Πρόταση 6.12 *Κάθε ασαφής $\mathcal{EL}^{++}$ οντολογία $\mathcal{O} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}\rangle$ μπορεί ευθέως να αναχθεί σε μία ισοδύναμη ασαφή $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων ως εξής:*

- *κάθε υπαγωγή εννοιών $\langle C \sqsubseteq D, d\rangle$ μπορεί να αναχθεί σε έναν ασαφή κανόνα με βάρη της μορφής $\langle C(x) \rightarrow D(x), d\rangle$,*

- *κάθε αξίωμα υπαγωγής ρόλων της μορφής $R_1 \circ \ldots \circ R_k \sqsubseteq s$ μπορεί να αναχθεί σε έναν ασαφή κανόνα με βάρη της μορφής*

$$\langle R_1(x_1, x_2) \wedge R_2(x_2, x_3) \wedge \ldots \wedge R_k(x_k, x_{k+1}) \rightarrow R(x_1, x_{k+1}), 1\rangle \quad (6.1)$$

  όπου οι $x_1, \ldots x_{k+1}$ είναι μεταβλητές του συνόλου $\mathbf{V}$,

- *κάθε ισχυρισμός έννοιας $C(a) \geq d$ (ισχυρισμός ρόλου $R(a, b) \geq d$) μπορεί να αναχθεί σε έναν ασαφή κανόνα με βάρη $\langle \rightarrow C(a), d\rangle$ ($\langle \rightarrow R(a, b), d\rangle$) όπου τα a, b είναι άτομα του N_I.*

Παράδειγμα 6.13 *Ενδεικτικά, μία υπαγωγή εννοιών η οποία λέει ότι το Ταϊλανδέζικο κάρυ περιέχει προϊόντα ψαριού*

$$\langle \textit{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ} \sqsubseteq \exists \textit{περιέχει.ΠροϊόνΨαριού}, 1\rangle$$

θα αναχθεί στον κανόνα

$$\langle \textit{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(x) \rightarrow \exists \textit{περιέχει.ΠροϊόνΨαριού}(x), 1\rangle$$

ενώ ένας ισχυρισμός έννοιας ότι ο Σάββας παρήγγειλε ένα πιάτο το οποίο περιέχει Ταϊλανδέζικο κάρυ

$$\exists \textit{παρήγγειλεΠιάτο.ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(\textit{Σάββας}) \geq 1$$

θα αναχθεί στον κανόνα

$$\langle \rightarrow \exists \textit{παρήγγειλεΠιάτο.ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(\textit{Σάββας}), 1\rangle.$$

6.4 Συλλογιστική στη Γλώσσα της Ασαφούς $\mathcal{ELP}$

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον ορισμό ενός πολυωνυμικής πολυπλοκότητας αλγορίθμου αναγωγής μίας ασαφούς $\mathcal{ELP}$ βάσης γνώσης σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα. Ο αλγόριθμος εκτελείται στα εξής βήματα:

Βήμα 1: οι περιορισμοί τιμών απαλείφονται από τη βάση κανόνων RB,

Βήμα 2: η $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB ανάγεται σε μία ισοδύναμη βάση κανόνων RB' η οποία είναι στην κανονική της μορφή,

Βήμα 3: η $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB' ανάγεται σε ένα αμοιβαία ικανοποιήσιμο ασαφές Datalog πρόγραμμα το οποίο θα συμβολίζουμε με $\overline{P}(RB')$.

Πρόταση 6.14 *Έστω ότι έχουμε την ασαφή $\mathcal{ELP}$ βάση γνώσης RB και ένα σύνολο RR από περιορισμούς πεδίου τιμών οι οποίοι είναι αποδεκτοί για τη βάση γνώσης RB. Τότε υπάρχει μία βάση γνώσης RB' χωρίς περιορισμούς πεδίου τιμών η οποία είναι αμοιβαία ικανοποιήσιμη ως προς την $RB \cup RR$, και η οποία μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο ως εξής:*

Αρχικά ορίζουμε τη σύνθετη έννοια $\textit{Range}_R$ ως τη σύζευξη όλων των εννοιών C που εμφανίζονται σε ένα αξίωμα της μορφής $\langle R(x,y) \rightarrow C(y), 1\rangle$ στους περιορισμούς τιμών RR. Τότε η νέα βάση κανόνων RB' προκύπτει από τις RB και RR ως εξής:

- *για όλους τους ρόλους $R \in N_R$ που εμφανίζονται στους περιορισμούς τιμών RR και για για όλα τα άτομα $a \in N_I$, η βάση κανόνων RB' περιέχει τον κανόνα $\langle R(x,a) \rightarrow \textit{Range}_R(a), 1\rangle$,*

- *για όλους τους κανόνες $\langle B \to H, d\rangle$ στο RB, η βάση κανόνων RB' περιέχει έναν κανόνα $\langle B \sqsubseteq H', d\rangle$, όπου η κεφαλή H' προκύπτει από την αναδρομική αντικατάσταση όλων των εννοιών της μορφής $\exists R.C$ που εμφανίζονται στην κεφαλή H με έννοιες της μορφής $\exists R.(C \sqcap \mathit{Range}_R)$.*

Ορισμός 6.15 (Κανονική Μορφή ασαφούς $\mathcal{ELP}$ Βάσης Κανόνων) *Μία ασαφής $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB είναι στην κανονική της μορφή όταν όλα τα άτομα εννοιών στο σώμα των κανόνων αποτελούνται είτε από ονόματα εννοιών, είτε από την άνω έννοια ($\top$), είτε από ονοματικές έννοιες, ενώ οι μεταβλητές στην κεφαλή ενός κανόνα εμφανίζονται επίσης και στο σώμα του και οι κεφαλές όλων των κανόνων έχουν μία από τις ακόλουθες μορφές:*

$$A(t) \qquad\qquad \exists R.B(t) \qquad\qquad R(t,u)$$

όπου $A \in N_C \cup \{\{a\} \mid a \in N_I\} \cup \{\bot\}$, $B \in N_C$, $R \in N_R$, και $t,u \in N_I \cup \mathbf{V}$.

Ο προηγούμενος ορισμός βασίζεται στον ορισμό που δόθηκε από τους Krötzsch et al. (2008b) για τη γλώσσα $\mathcal{ELP}$ οι οποίοι με τη σειρά τους βάσισαν τον ορισμό τους στην κανονική μορφή GCIs που προτάθηκε από τους Baader et al. (2005) για τη γλώσσα της $\mathcal{EL}^{++}$.

Πρόταση 6.16 *Μία $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB μπορεί να μετασχηματιστεί σε γραμμικό χρόνο σε μία αμοιβαία ικανοποιήσιμη $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB' σε κανονική μορφή.*

Η αναγωγή πραγματοποιείται ως εξής: Ο προτεινόμενος αλγόριθμος μετασχηματίζει επαναληπτικά τη βάση κανόνων RB. Κάθε κανόνας $\langle B \to H, d\rangle$ της RB που δεν είναι στην κανονική του μορφή επιλέγεται και εφαρμόζονται σε αυτόν οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί:

- *Εάν ο κανόνας περιέχει ένα άτομο κανόνων της μορφής $(C \sqcap D)(t)$, τότε αντικαθίσταται από τη σύζευξη $C(t) \wedge D(t)$.*

- *Εάν η κεφαλή H περιέχει ένα άτομο έννοιας της μορφής $(\exists r.C)(t)$ και $C \notin N_C$ τότε αυτό αντικαθίσταται στο H με την έκφραση $\exists r.A(t)$ όπου το $A \in N_C$ είναι ένα νέο όνομα έννοιας, και προστίθεται ο κανόνας $\langle A(x) \to C(x), 1\rangle$.*

- *Εάν η κεφαλή H περιέχει ένα άτομο έννοιας της μορφής $\top(x)$, τότε το άτομο αυτό σβήνεται από την κεφαλή H. Σε περίπτωση που η κεφαλή H περιέχει μόνο το άτομο έννοιας $\top(x)$, τότε θα σβηστεί ο κανόνας εξολοκλήρου από την RB.*

- *Εάν η κεφαλή H περιέχει μία μεταβλητή x η οποία δεν περιέχεται στο σώμα B, τότε το άτομο $\top(x)$ προστίθεται στο σώμα B.*

- *Εάν το σώμα B περιέχει ένα άτομο κανόνων της μορφής $\exists r.C(t)$, τότε αυτό αντικαθίσταται από δύο νέα άτομα κανόνων $R(t,y)$ και $C(y)$ όπου $y \in \mathbf{V}$ είναι μία μεταβλητή που δεν εμφανιζόταν προηγουμένως στον κανόνα.*

- *Εάν το σώμα B περιέχει ένα άτομο κανόνων της μορφής $\bot(t)$, τότε ο κανόνας $\langle B \to H, d\rangle$ σβήνεται από την βάση κανόνων RB.*

Μπορεί να βεβαιωθεί, βάσει της σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ γλώσσας, ότι οι βάσεις κανόνων RB και RB' είναι αμοιβαία ικανοποιήσιμες. Επιπλέον, μπορεί να ελεγχθεί ότι το μέγεθος της RB' είναι γραμμικό ως προς το μέγεθος της RB.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε το Datalog πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ από μία $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB έτσι ώστε η RB και το $\overline{P}(RB)$ να είναι αμοιβαία ικανοποιήσιμα.

Πρόταση 6.17 *Προκειμένου μία $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB στην κανονική της μορφή να αναχθεί σε ένα Datalog πρόγραμμα θα πρέπει να συστήσουμε τα ακόλουθα κατηγορήματα: (i) το κατηγόρημα της ισότητας $R_{\approx}$, (ii) ένα νέο όνομα έννοιας C_a για κάθε άτομο $a \in N_I$, (iii) ένα νέο όνομα έννοιας Self_R για κάθε απλό ρόλο $R \in N_R^S$, (iv) ένα νέο άτομο $d_{R,C}$ για κάθε ζεύγος ρόλου $R \in N_R$ και έννοιας $C \in N_C$.*

Στη συνέχεια δημιουργούμε το Datalog πρόγραμμα ως εξής:

1. *Για κάθε άτομο a που εμφανίζεται στη RB, το πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ περιέχει τους κανόνες $\langle \to^* C_a(a), 1\rangle$, $\langle C_a(x) \to^* R_{\approx}(x,a), 1\rangle$, $\langle C_a(x) \to^* C_a(x), 1\rangle$.*

2. *Για κάθε όνομα έννοιας C και όνομα ρόλου R που εμφανίζεται στο $\overline{P}(RB)$, το πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ περιέχει τους κανόνες*

$$\begin{array}{rl} \langle \to^* R_{\approx}(x,x), 1\rangle & \langle R(z,x) \wedge R_{\approx}(x,y) \to^* R(z,y), 1\rangle \\ \langle R_{\approx}(x,y) \to^* R_{\approx}(y,x), 1\rangle & \langle R_{\approx}(x,z) \wedge R_{\approx}(x,y) \to^* R_{\approx}(y,z), 1\rangle \\ \langle C(x) \wedge R_{\approx}(x,y) \to^* C(y), 1\rangle & \langle R_{\approx}(x,y) \wedge R_{\approx}(y,z) \to^* R_{\approx}(x,z), 1\rangle \end{array}$$

3. *Για κάθε κανόνα $\langle B \to H, d\rangle \in RB$, προστίθεται ένας κανόνας $\langle B' \to H', d\rangle$ στο $\overline{P}(RB)$ στον οποίο αντικαθιστούμε (i) όλες τις εμφανίσεις της μορφής $R(x,x)$ με $\mathrm{Self}_R(x)$, (ii) όλες τις εμφανίσεις της μορφής $\{a\}(t)$ με $C_a(t)$, και (iii) όλες τις εμφανίσεις της μορφής $\exists R.C(t)$ με $C \in N_C$ με μία σύζευξη $R(t, d_{R,C}) \wedge C(d_{R,C})$.*

4. *Για όλους τους κανόνες $\langle B \to H, d\rangle \in RB$ με $R(x,y) \in H$ και $R \in N_R^S$ να είναι ένας απλός ρόλος, προστίθεται στο πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ ένας κανόνας $\langle B' \to \mathrm{Self}_R(x), 1\rangle \in \overline{P}(RB)$, όπου το σώμα B' προκύπτει από το B αντικαθιστώντας: (i) όλες τις εμφανίσεις του y με x, (ii) όλες τις εμφανίσεις του $\{a\}(t)$ με $C_a(t)$, και (iii) όλες τις εκφράσεις $S(x,x)$ με $\mathrm{Self}_S(x)$.*

5. *Για κάθε απλό ρόλο $R \in N_R^S$ και άτομο $a \in N_I$, υπάρχει στο Datalog πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ ο κανόνας $\langle C_a(x) \wedge R(x,x) \to^* \mathrm{Self}_R(x)\rangle$.*

Διαισθητικά, η έννοια C_a στο $\overline{P}(RB)$ χρησιμοποιείται για να αναπαρασταθεί μία ονοματική έννοια $\{a\}$ στο RB, δηλαδή χρησιμοποιείται προκειμένου να κατηγοριοποιήσουμε όλα τα άτομα που ταυτίζονται με το άτομο a. Επομένως, αν έχουμε ότι $\overline{P}(RB) \models C_a(b) \geq 1$ για ένα άτομο b που εμφανίζεται στο N_I, τότε προκύπτει ότι για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του RB θα ισχύει ότι $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$. Παρόμοια είναι και η χρήση του κατηγορήματος $R_{\approx}$ έτσι λοιπόν εάν ισχύει ότι $\overline{P}(RB) \models R_{\approx}(a,b)$ τότε έχουμε $a^{\mathcal{I}} = b^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ του RB. Τέλος η έννοια Self_R χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσει έναν ρόλο στον οποίο το υποκείμενο και το αντικείμενο του ρόλου είναι το ίδιο άτομο (ανακλαστικός ρόλος).

Θεώρημα 6.18 *Δοθείσας μίας $\mathcal{ELP}$ βάσης κανόνων RB σε κανονική μορφή, η RB είναι ικανοποιήσιμη ανν το αντίστοιχο Datalog πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ είναι ικανοποιήσιμο.*

Η ορθότητα του θεωρήματος αυτού είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 6.21, 6.22 που παρουσιάζονται στο Παράρτημα 6.Α′.

Παράδειγμα 6.19 *Προκειμένου να αναπαραστήσουμε τη διαδικασία αναγωγής, αρχικά επεκτείνουμε με βαθμούς το παράδειγμα που παρουσιάζεται στη δημοσίευση των Krötzsch et al. (2008b) σχετικά με τις διατροφικές προτιμήσεις και στη συνέχεια εξηγούμε πως επενεργεί ο αλγόριθμος αναγωγής σε Datalog.*

Η αρχική ασαφής βάση κανόνων RB έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\langle \textit{ΑλλεργικόςΣεΦιστίκια}(x) \wedge \textit{ΠροϊόνΦιστικιού}(y) \rightarrow \textit{αντιπαθεί}(x,y), 1\rangle \tag{6.2}$$
$$\langle \textit{Χορτοφάγος}(x) \wedge \textit{ΠροϊόνΨαριού}(y) \rightarrow \textit{αντιπαθεί}(x,y), 0.6\rangle \tag{6.3}$$
$$\langle \textit{παρήγγειλεΠιάτο}(x,y) \wedge \textit{αντιπαθεί}(x,y) \rightarrow \textit{Δυστυχής}(x), 0.7\rangle \tag{6.4}$$
$$\langle \textit{αντιπαθεί}(x,\nu) \wedge \textit{Πιάτο}(y) \wedge \textit{περιέχει}(y,\nu) \rightarrow \textit{αντιπαθεί}(x,y), 0.8\rangle \tag{6.5}$$

$$\langle \textit{παρήγγειλεΠιάτο}(x,y) \rightarrow \textit{Πιάτο}(y), 1\rangle \tag{6.6}$$
$$\langle \textit{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(x) \rightarrow \textit{περιέχει}(x, \textit{φιστικέλαιο}), 1\rangle \tag{6.7}$$
$$\langle \textit{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(x) \rightarrow \exists \textit{περιέχει.ΠροϊόνΨαριού}(x), 1\rangle \tag{6.8}$$

$$\langle \rightarrow \textit{ΠροϊόνΦιστικιού}(\textit{φιστικέλαιο}), 1\rangle \tag{6.9}$$
$$\langle \rightarrow \textit{ΑλλεργικόςΣεΦιστίκια}(\textit{Σάββας}), 1\rangle \tag{6.10}$$
$$\langle \rightarrow \exists \textit{παρήγγειλεΠιάτο.ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(\textit{Σάββας}), 1\rangle \tag{6.11}$$
$$\langle \rightarrow \textit{Χορτοφάγος}(\textit{Μάρκος}), 1\rangle \tag{6.12}$$
$$\langle \rightarrow \exists \textit{παρήγγειλεΠιάτο.ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(\textit{Μάρκος}), 1\rangle \tag{6.13}$$

Για παράδειγμα ο κανόνας 6.2 δηλώνει ότι όσοι είναι αλλεργικοί στα φιστίκια αντιπαθούν τα προϊόντα που είναι παράγωγα του φιστικιού, ενώ ο κανόνας 6.3 δηλώνει ότι όλοι όσοι είναι χορτοφάγοι αντιπαθούν τα προϊόντα ψαριού με βαθμό τουλάχιστον 0.6.

Ενδεικτικά, το ασαφές Datalog πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ θα περιέχει κανόνες της μορφής

$$\langle \to^* C_{\text{Μάρκος}}(\text{Μάρκος}), 1\rangle \qquad \langle C_{\text{Μάρκος}}(x) \to^* R_{\approx}(x, a), 1\rangle \qquad \ldots$$

εξαιτίας της παρουσίας του ατόμου Μάρκος στη βάση PR, δύο κανόνες τις μορφής:

$$\langle \text{ΑλλεργικόςΣεΦιστίκια}(x) \wedge \text{ΠροϊόνΦιστικιού}(y) \to \text{αντιπαθεί}(x, y), 1\rangle$$
$$\langle \text{ΑλλεργικόςΣεΦιστίκια}(x) \wedge \text{ΠροϊόνΦιστικιού}(x) \to \mathrm{Self}_{\text{αντιπαθεί}}(x), 1\rangle$$

εξαιτίας της παρουσίας του κανόνα 6.2, ενώ ο ισχυρισμός έννοιας του κανόνα 6.13 θα αναχθεί στον κανόνα:

$$\langle \to \text{παρήγγειλεΠιάτο}(\text{Μάρκος}, d_{\text{παρήγγειλεΠιάτο},\text{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}}) \wedge \\ \text{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}(d_{\text{παρήγγειλεΠιάτο},\text{ΤαϊλανδέζικοΚάρυ}}), 1\rangle$$

στο $\overline{P}(RB)$.

Στη συνέχεια το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί από μία μηχανή συλλογιστικής για τη γλώσσα της ασαφούς Datalog (ή ένα εκφραστικό της υπερσύνολο). Ενδεικτικά τέτοιες μηχανές συλλογιστικής έχουν προταθεί από τους Ishizuka and Kanai (1985); Achs and Kiss (1995); Chortaras et al. (2007).

Λήμμα 6.20 *Ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα της μορφής που παρουσιάστηκε μπορεί να αποτιμηθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.* *(Απόδειξη στο Παράρτημα6.Α΄)*

6.5 Σύνοψη

Συνοψίζοντας, παρουσιάσαμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ η οποία επεκτείνει τη γλώσσα αναπαράστασης γνώσης $\mathcal{ELP}$ μέσω κανόνων με ασαφείς βαθμούς. Η γλώσσα που προτείνουμε μπορεί να θεωρηθεί και ως μία γενίκευση της ασαφούς ΠΛ γλώσσας $\mathcal{EL}^{++}$ με κανόνες με βάρη. Ως συνέπεια προσθέτει εκφραστικότητα όπως τοπικά ανακλαστικούς ρόλους (local reflexivity), γινόμενα εννοιών, σύζευξη απλών ρόλων, και μία περιορισμένη μορφή περιορισμών πεδίου τιμών (range restrictions) Τέλος παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο πολυωνυμικής πολυπλοκότητας ο οποίος ανάγει μία ασαφή $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα. Εφόσον η συγκεκριμένη μορφή Datalog προγράμματος μπορεί να αποτιμηθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι προφανές ότι και η γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ θα έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα.

Όσον αφορά μελλοντικές επεκτάσεις, έχουμε σαν στόχο να μελετήσουμε επεκτάσεις της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ οι οποίες θα επιτρέπουν οποιαδήποτε t-νόρμα για τη διερμηνεία του κατασκευαστή σύζευξης εννοιών. Έχοντας υπόψιν την τελευταία δουλειά των Baader and Peñaloza (2011a), στην οποία αποδεικνύεται η μη αποφανσιμότητα για οικογένειες γλωσσών των ασαφών ΠΛ οι οποίες χρησιμοποιούν τέτοιες νόρμες, παρουσιάζει ενδιαφέρον αν τα αποτελέσματα της μη αποφανσιμότητας θα ισχύουν και για την ασαφή $\mathcal{ELP}$ γλώσσα. Σε μία τέτοια περίπτωση, ένα ενδιαφέρον ερευνητικό θέμα είναι η μελέτη αποφάνσιμων υπογλωσσών της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ με γενικευμένες νόρμες.

6.Α΄ Αποδείξεις

Λήμμα 6.21 *Η ικανοποιησιμότητα της βάσης κανόνων RB συνεπάγεται και την ικανοποιησιμότητα του Datalog προγράμματος $\overline{P}(RB)$. Εάν δηλαδή υπάρχει έστω και ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ της RB τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα μοντέλο $\mathcal{J}$ του $\overline{P}(RB)$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη της ύπαρξης μοντέλου για το ασαφές Datalog πρόγραμμα αποδεικνύεται σε μία σειρά βημάτων.

Βήμα 1: Σε αυτό το βήμα θα ορίσουμε μία διερμηνεία $\mathcal{J}$ από τη διερμηνεία $\mathcal{I}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό N_I, N_R, N_C και N_I', N_R', N_C' για να αναπαραστήσουμε τον οπλισμό των RB και $\overline{P}(RB)$ αντίστοιχα.

Το πεδίο ορισμού της νέας διερμηνείας $\mathcal{J}$ το κατασκευάζουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathcal{J}} = \ & \{a^{\mathcal{I}} \mid \text{για κάθε } a \in N_I\} \bigcup \{\delta_{R,C} \mid R \in N_R, C \in N_C, \\ & \langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \{a\}, \omega\rangle \text{ για κάθε } a \in N_I \text{ και κάθε } \omega \in (0,1]\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

όπου το $\delta_{R,C}$ είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο το οποίο έχουμε επιλέξει κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να αντιστοιχεί μόνο στον ρόλο $R \in N_R$ και την έννοια $C \in N_C$. Επομένως ισχύει ότι $\delta_{R,C} \neq a^{\mathcal{J}}$ για όλα τα $a \in N_I$ και για κάθε ζεύγος $\delta_{R,C}, \delta_{R',C'}$ στοιχείων του $\Delta^{\mathcal{J}}$ με $R \neq R', C \neq C'$ θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι $\delta_{R,C} \neq \delta_{R',C'}$.

Στη συνέχει προχωράμε ορίζοντας τη διερμηνεία κάθε ατόμου $d \in N_I'$ έχοντας υπόψιν ότι το πεδίο ορισμού της διερμηνείας μας είναι το $\Delta^{\mathcal{J}}$. Εάν (i) το d είναι το όνομα ενός ατόμου a που ανήκει στο $N_I \cap N_I'$ τότε $a^{\mathcal{J}} = a^{\mathcal{I}}$. Εάν (ii) το d είναι ένα άτομο που ανήκει στο $N_I' \setminus N_I$ της μορφής $d_{R,C}$ και $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \perp, \omega\rangle$ για κάποιο βαθμό $\omega \in (0,1]$ τότε το $d^{\mathcal{J}}$ μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $\Delta^{\mathcal{J}}$. Εάν (iii) το d είναι κάποιο άτομο που εμφανίζεται στο $N_I' \setminus N_I$ της μορφής $d_{R,C}$ και $\langle C \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \{a\}, \omega\rangle$ για κάποιο άτομο $a \in N_I$ και κάποιο στοιχείο $\omega \in (0,1]$ τότε $d_{R,C}^{\mathcal{J}} = a^{\mathcal{J}}$. Εάν (iv) το d είναι κάποιο άτομο που εμφανίζεται στο $N_I' \setminus N_I$ της μορφής $d_{R,C}$ και $\langle C \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \{a\}, \omega\rangle$ για όλα τα $a \in N_I$ και όλα τα $\omega \in (0,1]$ τότε $d_{R,C}^{\mathcal{J}} = \delta_{R,C}$.

Για κάθε $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$ ορίζουμε τη συνάρτηση κ ως εξής: εάν $\delta = a^{\mathcal{J}}$ για κάποιο $a \in N_I$ τότε $\kappa(\delta) = \{a\}$ διαφορετικά εάν $\delta = \delta_{R,C}$ τότε $\kappa(\delta) = C$.

Για κάθε $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$ και βαθμό $\omega \in [0,1]$, η διερμηνεία των ονομάτων εννοιών $C \in N_C$ είναι η εξής:

$$\begin{aligned} C^{\mathcal{J}}(\delta) \ = \ & \sup\{\omega \mid \langle \kappa(\delta) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} C, \omega\rangle \text{ και} \\ & \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega \text{ για κάποιο } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \end{aligned} \tag{6.15}$$

ενώ οι έννοιες της μορφής $C_a \in N_C' \setminus N_C$ ερμηνεύονται ως εξής:

$$C_a^{\mathcal{J}}(\delta) \ = \ \begin{cases} 1 & \delta = a^{\mathcal{I}}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{6.16}$$

Τα ονόματα εννοιών της μορφής $\text{Self}_R \in N'_C \setminus N_C$ ερμηνεύονται ως εξής:

$$\text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta) = \begin{cases} < \omega & \text{δεν υπάρχει } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέτοιο ώστε } \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega, \\ < \omega & \text{δεν υπάρχει κάποιο } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέτοιο ώστε } \\ & \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega \text{ και } R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon) < \omega, \\ \geq \omega & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{6.17}$$

Τα ονόματα ρόλων ερμηνεύονται ως εξής για κάθε $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$ και $a \in N_I$:

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{J}}(\delta, a^{\mathcal{J}}) &= \sup\{\omega \mid \langle \kappa(\delta) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.\{a\}, \omega\rangle \text{ και} \\ &\qquad \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega \text{ για κάποιο } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Για όλα τα $R \in N_R^N$ και $d_{S,C} \in \Delta^{\mathcal{J}}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{J}}(\delta, d_{S,C}) &= \sup\{\omega \mid \langle \kappa(\delta) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.C, \omega\rangle \text{ και} \\ &\qquad \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega \text{ για κάποιο } \delta' \in \Delta^{\mathcal{I}}\} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Τέλος, για κάθε $R \in N_R^S$ και $d_{S,C} \in \Delta^{\mathcal{J}}$ θα πρέπει να θεωρήσουμε πολλαπλές ανισότητες προκειμένου να προσδιορίσουμε τον βαθμό $R^{\mathcal{J}}(\delta, d_{S,C})$:

$$R^{\mathcal{J}}(\delta, d_{S,C}) \begin{cases} < \omega & \text{δεν υπάρχει } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέτοιο ώστε } \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega, \\ < \omega & \text{δεν υπάρχει } \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέτοιο ώστε } C^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega, \\ < \omega & \langle \kappa(\delta) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega\rangle \text{ και υπάρχει κάποιο } \varepsilon, \varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέ-} \\ & \text{τοιο ώστε } \min(\kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega) \leq \min(S^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon'), C^{\mathcal{I}}(\varepsilon')) \\ & \text{και } \min(\kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega) > R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon'), \\ < \omega & \langle \kappa(\delta) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega\rangle \text{ και υπάρχει κάποιο } \varepsilon, \varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}} \text{ τέ-} \\ & \text{τοιο ώστε } \kappa(\delta)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \geq \omega, C^{\mathcal{I}}(\varepsilon') \geq \omega \text{ και } R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon') < \omega, \\ \geq \omega & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{6.20}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{J}$ είναι όντως ένα μοντέλο του $\overline{P}(RB)$, αρκεί να δείξουμε ότι εάν το $\mathcal{J}$ δεν είναι μοντέλο, τότε η διερμηνεία $\mathcal{I}$ που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να κατασκευάσουμε το $\mathcal{J}$ δεν θα είναι μοντέλο του RB. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{J}$ δεν είναι μοντέλο του $\overline{P}(RB)$, τότε υπάρχει κάποια απεικόνιση $Z' : \mathbf{V} \to \Delta^{\mathcal{J}}$ τέτοια ώστε να μη ικανοποιεί κάποιον κανόνα της μορφής $\langle B' \to H', \omega\rangle$ στο $\overline{P}(RB)$. Εφόσον ο κανόνας $\langle B' \to H', \omega\rangle$ δεν ικανοποιείται έχουμε ότι ισχύει ότι

$$\omega_{B'} > \omega_{H'} \tag{6.21}$$

$$\omega > \omega_{H'} \tag{6.22}$$

όπου ω_B, ω_H, $\omega_{B'}$, $\omega_{H'}$ είναι οι τιμές των $B^{\mathcal{I},Z}$, $H^{\mathcal{I},Z}$, $B'^{\mathcal{J},Z'}$, και $H'^{\mathcal{I},Z}$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποια απεικόνιση $Z : \mathbf{V} \to \Delta^{\mathcal{I}}$ η οποία δεν ικανοποιεί τον αντίστοιχο κανόνα $\langle B \to H, \omega\rangle$ στο RB, δηλαδή ότι ισχύει $\omega_B > \omega_H$ και $\omega > \omega_H$.

Βήμα 2: Σε αυτό το βήμα θα ορίσουμε την απεικόνιση $Z : \mathbf{V} \to \Delta^{\mathcal{I}}$ για τις μεταβλητές της κεφαλής H. Κατασκευάζουμε την απεικόνιση Z έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες :

$$\omega_{H'} \geq \omega_H, \tag{6.23}$$
$$\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H. \tag{6.24}$$

Εφόσον ο κανόνας $\langle B' \to H', \omega\rangle$ δεν ικανοποιείται από τη διερμηνεία $\mathcal{J}$ και την απεικόνιση Z', ισχύει ότι: $\omega_{B'} > \omega_{H'}$ και $\omega > \omega_{H'}$. Η κεφαλή H είναι είτε άτομο έννοιας της μορφής $A(t_0)$, $\{a\}(t_0)$, $\exists R.A(t_0)$, $\exists R.\{a\}(t_0)$, είτε άτομο κανόνα της μορφής $R(t_0, u_0)$. Από τον ορισμό των ΠΛ κανόνων προκύπτει ότι το t_0 θα εμφανίζεται και στην πρώτη θέση ενός ατόμου έννοιας ή ρόλου στο B και εφόσον ισχύει ότι $B'^{\mathcal{J},Z'} = \omega_{B'}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε:

$$\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\delta) \geq \omega_{B'} > \omega_{H'}. \tag{6.25}$$

Εάν το t_0 αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή, θεωρούμε τις παρακάτω εναλλακτικές προκειμένου να ορίσουμε την τιμή του $Z(t_0)$:

1. Αν $A(t_0) \in H'$ και $A(t_0) \in H$ με $A \in N_C$. Τότε έχουμε ότι $A^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}) = \omega_{H'}$. Εκ κατασκευής του $A^{\mathcal{J}}$ (Equation 6.15) και από την Εξίσωση 6.25 έχουμε ότι ισχύει $\langle \kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'}) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} A, \omega'\rangle$ για κάθε $\omega' > \omega_{H'}$. Το τελευταίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\omega_{H'} \geq A^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$ και $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > A^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε εφόσον ικανοποιεί τις Εξισώσεις 6.23 και 6.24.

2. Αν $C_a(t_0) \in H'$ και $\{a\}(t_0) \in H$ με $a \in N_I$. Τότε έχουμε ότι $C_a^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}) = \omega_{H'}$. Από την κατασκευή του $C_a^{\mathcal{J}}$ (Equation 6.16) έχουμε ότι $\omega_{H'} = 0$ και $t_0^{\mathcal{J},Z'} \neq a^{\mathcal{J},Z'}$. Εφόσον $t^{\mathcal{J},Z'} \neq a^{\mathcal{J},Z'}$ από την κατασκευή του $t^{\mathcal{J},Z'}$ έχουμε ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > 0$ και $\{a\}^{\mathcal{I}}(\varepsilon) = 0$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε και μπορεί εύκολα να ελεγχθεί ότι ικανοποιεί τις Εξισώσεις 6.23 και 6.24.

3. Αν $R(t_0, d_{R,A}), A(d_{R,A}) \in H'$ και $\exists R.A(t_0) \in H$. Τότε έχουμε ότι $\min(R^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, d_{R,A}^{\mathcal{J}}), A^{\mathcal{J}}(d_{R,A}^{\mathcal{J}})) = \omega_{H'}$. Θα θεωρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

   - Περίπτωση $A^{\mathcal{J}}(d_{R,A}^{\mathcal{J}}) = \omega_{H'}$ και το $d_{R,A}^{\mathcal{J}}$ αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο $a^{\mathcal{J}}$ με $a \in N_I$. Το τελευταίο οδηγεί στο συμπέρασμα, από την κατασκευή του $d_{R,A}^{\mathcal{J}}$, ότι
     $$\langle A \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \{a\}, 1\rangle.$$

Από την κατασκευή του κ έχουμε επίσης ότι $\kappa(d^{\mathcal{J}}_{R,A}) = \{a\}$ το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\kappa(d^{\mathcal{J}}_{R,A})^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = 1$. Εφόσον $A^{\mathcal{J}}(a^{\mathcal{J}}) = \omega_{H'}$, τότε από την κατασκευή του $A^{\mathcal{J}}$ (Equation 6.15) και εφόσον $\kappa(d^{\mathcal{J}}_{R,A})^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = 1$ προκύπτει ότι $\langle\{a\} \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} A, \omega'\rangle$ για κάθε $\omega' > \omega_{H'}$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι $\omega_{H'} \geq A^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}})$. Η τελευταία ανισότητα μαζί με το γεγονός ότι $\langle A \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \{a\}, 1\rangle$ συνεπάγονται ότι $\omega_{H'} \geq A^{\mathcal{I}}(\varepsilon')$ για κάθε $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Επομένως η ανισότητα $\omega_{H'} \geq \exists R.A^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$ ισχύει για κάθε $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και εφόσον η Εξίσωση 6.25 ισχύει τότε υπάρχει κάποιο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_{H'}$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το ε εφόσον ικανοποιεί τις Εξισώσεις 6.23 και 6.24.

- Αν $A^{\mathcal{J}}(d^{\mathcal{J}}_{R,A}) = \omega_{H'}$ και το $d^{\mathcal{J}}_{R,A}$ δεν αντιστοιχεί σε κάποιο άτομο. Εφόσον $A^{\mathcal{J}}(d^{\mathcal{J}}_{R,A}) = \omega_{H'}$, από την κατασκευή του $A^{\mathcal{J}}$ (Equation 6.15) και εφόσον $\langle A \sqsubseteq_{\mathcal{I}} A, 1\rangle$, προκύπτει ότι ισχύει η ανισότητα $\omega' > A^{\mathcal{I}}(\varepsilon')$ για κάθε $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και $\omega' > \omega_{H'}$. Επομένως ισχύει $\omega_{H'} \geq A^{\mathcal{I}}(\varepsilon')$ για κάθε $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι $\omega_{H'} \geq (\exists R.A)^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$ για όλα τα $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ και εφόσον η Εξίσωση 6.25 ισχύει τότε ισχύει επίσης ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_{H'}$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το ε εφόσον ικανοποιεί τις Εξισώσεις 6.23 και 6.24.
- Αν $R(t_0^{\mathcal{J},Z'}, d^{\mathcal{J}}_{R,A}) = \omega_{H'}$. Τότε από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Εξισώσεις 6.18, 6.19, 6.20) και από την Εξίσωση 6.25 έχουμε ότι ισχύει $\langle\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'}) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.A, \omega'\rangle$ για κάθε $\omega' > \omega_{H'}$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\omega_{H'} \geq (\exists R.A)^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$ και $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > (\exists R.A)^{\mathcal{I}}(\varepsilon)$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε.

4. Αν $\text{Self}_R(t_0) \in H'$, $R(t_0, t_0) \in H$. Εφόσον $\text{Self}^{\mathcal{J}}_R(t_0^{\mathcal{J},Z'}) = \omega_{H'}$, τότε από την κατασκευή της έννοιας $\text{Self}^{\mathcal{J}}_R$ (Equation 6.17) και την Εξίσωση 6.25, έχουμε ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_{H'}$ και $\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon)$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το ε.

5. Αν $\text{Self}_R(t_0) \in H'$, $R(t_0, u_0) \in H$, και ο κανόνας στο $\overline{P}(RB)$ αντιστοιχεί σε έναν κανόνα Τύπου 4 στον Ορισμό 6.17. Ομοίως με πριν δείχνουμε ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ έτσι ώστε $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_{H'}$ και $\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon)$. Επιλέγουμε το $Z(t_0), Z(u_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε.

6. Αν $R(t_0, u_0) \in H'$, $R(t_0, u_0) \in H$ με $R \in N_R$, και $u_0^{\mathcal{J},Z'} = a^{\mathcal{J}}$ για κάποιο άτομο $a \in N_I$. Εφόσον $R^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, a^{\mathcal{J}}) = \omega_{H'}$, τότε από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Εξίσωση 6.18) και την Εξίσωση 6.25 έχουμε ότι $\langle\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'}) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.\{a\}, \omega'\rangle$ για κάθε $\omega' > \omega_{H'}$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$

τέτοιο ώστε $\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, a^{\mathcal{I}})$ και $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})(\varepsilon) > R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, a^{\mathcal{I}})$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε.

7. Αν $R(t_0, a) \in H'$ και $\exists R.a(t_0) \in H$. Με παρόμοιο με πριν τρόπο μπορούμε να επιλέξουμε το $Z(t_0)$ έτσι ώστε να ικανοποιεί τις σχέσεις: $\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}, a^{\mathcal{I}})$ και $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}) > R^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}, a^{\mathcal{I}})$.

8. Αν $R(t_0, u_0) \in H'$, $R(t_0, u_0) \in H$ με $R \in N_R^N$ και $u_0^{\mathcal{J},Z'} = \delta_{R,C}$ για κάποιο $\delta_{R,C} \in \Delta^{\mathcal{J}}$ με $R \in N_R$ και $C \in N_C$. Εφόσον $R^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, \delta_{R,C}) = \omega_{H'}$, τότε από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Εξίσωση 6.19) και από την Εξίσωση 6.25 έχουμε ότι ισχύει $\langle \kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'}) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.C, \omega' \rangle$ για κάθε $\omega' > \omega_H$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει η ύπαρξη ενός ατόμου $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιου ώστε

$$\omega_{H'} \geq (\exists R.C)^{\mathcal{I}}(\varepsilon) \tag{6.26}$$

$$\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})(\varepsilon) > (\exists R.C)^{\mathcal{I}}(\varepsilon). \tag{6.27}$$

Η Εξίσωση 6.26 μαζί με τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $\omega'_H \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon')$ και $\omega'_H \geq C^{\mathcal{I}}(\varepsilon')$ για κάθε $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Η Εξίσωση 6.27 μαζί με τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})(\varepsilon) \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon')$ και $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})(\varepsilon) \geq C^{\mathcal{I}}(\varepsilon')$ για κάθε $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι αυτό το στοιχείο ε εφόσον ικανοποιεί τις Εξισώσεις 6.23 και 6.24 ασχέτως της απεικόνισης του $u^{\mathcal{I},Z}$.

9. Αν $R(t_0, u_0) \in H'$, $R(t_0, u_0) \in H$ με $R \in N_R^S$, $u_0^{\mathcal{J},Z'} = \delta_{R,C}$ και $\langle \kappa(t_0^{J,Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_{H'}$. Έχουμε ότι ισχύει $R^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, u^{\mathcal{J},Z'}) = \omega_{H'}$. Εφόσον η τιμή του $R^{\mathcal{J}}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, \delta_{R,C})$ είναι μικρότερη από ω', ένα από τα 4 παρακλάδια της Εξίσωσης 6.20 πρέπει να ισχύει. Η Εξίσωση 6.25 μαζί με το γεγονός ότι $\langle \kappa(t_0^{J,Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ συνεπάγονται ότι το 3ο παρακλάδι ισχύει, δηλαδή υπάρχει κάποιο $\varepsilon, \varepsilon'' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ για το οποίο ισχύει το ακόλουθο ζεύγος Εξισώσεων:

$$\min(S^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon'), C^{\mathcal{I}}(\varepsilon')) \geq \min(\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega') \tag{6.28}$$

$$\min(\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega') > R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon'). \tag{6.29}$$

Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι ε και το $Z(u_0)$ να είναι ε'. Εφόσον η Εξίσωση 6.29 συνεπάγεται ότι $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon')$ και $\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon')$, οι συνθήκες που περιγράφονται στις Εξισώσεις 6.23,6.24 ικανοποιούνται. Τέλος, από την Εξίσωση 6.28 και εφόσον ισχύουν οι σχέσεις $\omega' > \omega_{H'}$, $\omega'_H \geq \omega_H$, $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}) > \omega_{H'}$, προκύπτει ότι θα ισχύουν και οι ανισότητες

$$S^{\mathcal{I}}(t_0^{\mathcal{I},Z}, u_0^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H \tag{6.30}$$

$$C^{\mathcal{I}}(u_0^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H. \tag{6.31}$$

10. Αν $R(t_0, u_0) \in H'$, $R(t_0, u_0) \in H$ με $R \in N_R^S$, και $\langle \kappa(\delta) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ για κάθε $\omega' \geq \omega_{H'}$. Ομοίως με πριν μπορούμε να δείξουμε ότι είτε το 2^o είτε το 4^o παρακλάδι της Εξίσωσης 6.20 ισχύει. Για αυτό το λόγο έχουμε ότι:

    - Το 2^o παρακλάδι δεν μπορεί να ισχύσει. Από τους περιορισμούς που θέσαμε στους απλούς ρόλους έχουμε ότι το άτομο κανόνα $R'(t_0, u_0)$ εμφανίζεται στο σώμα B' για κάποιον απλό ρόλο $R' \in N_R^S$. Εφόσον ισχύει ότι ${B'}^{\mathcal{J},Z'} > \omega_{H'}$, έχουμε επίσης ότι θα ισχύει και ${R'}^{\mathcal{J},Z'}(t_0^{\mathcal{J},Z'}, u_0^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_{H'}$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(u_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon') > \omega_{H'}$ και συνεπώς το 2^o παρακλάδι δεν γίνεται να ισχύει.
    - Στην περίπτωση που ισχύει το 4^o παρακλάδι τότε υπάρχουν κάποια $\varepsilon, \varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε

    $$\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_{H'} \quad (6.32)$$
    $$C^{\mathcal{I}}(\varepsilon') > \omega_{H'} \quad (6.33)$$
    $$\omega_{H'} \geq R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon'). \quad (6.34)$$

    Επιλέγουμε το $Z(t_0)$ να είναι το ε και το $Z(u_0)$ να είναι το ε' έτσι ώστε οι Εξισώσει 6.23,6.24 να ικανοποιούνται.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι Εξισώσεις 6.23,6.24 θα εξακολουθήσουν να ισχύουν και για την περίπτωση που είτε ο όρος t_0 είτε ο όρος u_0 αντιστοιχούν σε κάποιο άτομο $a \in N_I$ αντί για κάποια μεταβλητή του **V**. Η απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο με την προηγούμενη απόδειξη.

Βήμα 3: Έχοντας ορίσει την απεικόνιση του όρου t_0 (ή σε κάποιες περιπτώσεις και του όρου u_0) συνεχίζουμε με τον ορισμό της απεικόνισης Z για όλους τους όρους μεταβλητές που εμφανίζονται στο σώμα του κανόνα μας.

Εφόσον το $Z(x)$ δεν έχει ακόμα οριστεί για όλες τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο B κάνουμε τα ακόλουθα: Επιλέγουμε κάποιο x στο B για το οποίο δεν υπάρχει κάποιος συζευκτέος $R(y, x)$ στο B έτσι ώστε το Z να μην είναι ορισμένο για τη μεταβλητή y. Μία τέτοια επιλογή είναι δυνατή εφόσον ο $\langle B \to H, \omega \rangle$ είναι ένας ασαφής ΠΛ κανόνας και ως εκ τούτου δεν περιέχει κύκλους στο σώμα του. θα ορίσουμε την τιμή του $Z(x)$ έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$\kappa(Z'(x))^{\mathcal{I}}(Z(x)) > \omega_H. \quad (6.35)$$

Θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $Z'(x) = a^{\mathcal{J}}$ για κάποιο $a \in N_I$. Τότε ορίζουμε

    $$Z(x) = a^{\mathcal{I}}. \quad (6.36)$$

    Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις έχουμε ότι το $Z'(x)$ είναι ένα στοιχείο $\delta_{S,C}$ που εμφανίζεται στο $\Delta^{\mathcal{J}}$.

2. Αν $Z'(x) = \delta_{S,C}$, $R(t,x) \in B'$ και $R \in N_R^N$. Τότε επιλέγουμε το $Z(x)$ να είναι ένα στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε η Εξίσωση 6.35 να ικανοποιείται και να ισχύει ότι:
$$R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, \varepsilon) > \omega_H. \tag{6.37}$$

3. Αν $Z'(x) = \delta_{S,C}$, $R \in N_R^S$, υπάρχει κάποιο άτομο $R(t,x) \in B'$, και $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$. Τότε επιλέγουμε το $Z(x)$ να είναι κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε η Εξίσωση 6.35 να ικανοποιείται και να ισχύει ότι:
$$S^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, \varepsilon) > \omega_H. \tag{6.38}$$

4. Διαφορετικά, επιλέγουμε το $Z(x)$ να είναι κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε η Εξίσωση 6.35 να ικανοποιείται.

Βήμα 4: Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει μία απεικόνιση που να πληρεί τις απαιτήσεις που περιγράψαμε στο Βήμα 3, δηλαδή μία απεικόνιση που θα ικανοποιεί τις προαναφερθείσες περιπτώσεις.

Δείχνουμε επαγωγικά ότι υπάρχει μία τέτοια απεικόνιση. Για τη βάση της επαγωγής έχουμε ότι $\kappa(t_0^{\mathcal{J},Z'})(t_0^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ για κάθε όρο t_0 που εμφανίζεται στην κεφαλή ενός κανόνα (Εξισώσεις 6.24, 6.31, 6.33) και $\kappa(a^{\mathcal{J}})(a^{\mathcal{I}}) = 1 > \omega_H$ για κάθε όρο άτομο a που εμφανίζεται στο σώμα B. Τώρα θα εξετάσουμε κάθε μία από τις περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν στο Βήμα 3:

1. Σε αυτή την περίπτωση η επιλογή είναι προφανώς δυνατή και ικανοποιεί την Εξίσωση 6.35 εφόσον
$$\kappa(Z'(x))^{\mathcal{I}}(Z(x)) = \{a\}^{\mathcal{I}}(a^{\mathcal{I}}) = 1 > \omega_H.$$
Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις πρέπει να σημειώσουμε ότι το $Z'(x)$ είναι ένα στοιχείο $\delta_{R,C}$ που εμφανίζεται στο $\Delta^{\mathcal{J}}$.

2. Εφόσον ισχύει ότι $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, Z'(x)) > \omega_H$, έχουμε σύμφωνα με την Εξίσωση 6.19 ότι $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.\kappa(Z'(x)), \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ (επαγωγική υπόθεση) συνεπάγονται ότι υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, \varepsilon) > \omega_H$ και $C^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_H$. Εφόσον $\kappa(Z'(x)) = \kappa(\delta_{R,C}) = C$, η απόδειξη για αυτήν την περίπτωση έχει ολοκληρωθεί.

3. Εφόσον $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$ και $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ (επαγωγική υπόθεση), τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $S^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, \varepsilon) > \omega_H$ και $C^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_H$ όπως θέλαμε να δείξουμε.

4. Εφόσον υπάρχει ένα άτομο κανόνα στο B' που περιέχει το x και $B'^{\mathcal{J},Z'} > \omega_H$ μπορούμε να συμπεράνουμε (βάσει των Εξισώσεων 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοιο ώστε $\kappa(Z'(x))^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_H$.

Μπορεί να βεβαιωθεί ότι οι Εξισώσεις 6.35,6.36 θα ισχύουν και για την περίπτωση που εκτός από έναν όρο μεταβλητή x έχουμε έναν όρο a που αντιστοιχεί σε κάποιο άτομο του N_I. Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι οι Εξισώσεις 6.35,6.38 ισχύουν επίσης και για την περίπτωση που η απεικόνιση μίας μεταβλητής η οποία εμφανίζεται στη δεύτερη θέση ενός ατόμου κανόνα για ρόλο ορίστηκε βάσει των περιπτώσεων 6.26,6.27 στο Βήμα 1 της απόδειξής μας.

Βήμα 5: Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε συζευκτέος που εμφανίζεται στο σώμα B έχει τιμή μεγαλύτερη από ω_H. Θα θεωρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για συζευκτέους που εμφανίζονται στο B:

- Αν το $C(t)$ εμφανίζεται στο B' και το $C(t)$ εμφανίζεται στο B για κάποιο $C \in N_C$. Βάσει των Εξισώσεων 6.21,6.23 έχουμε ότι $C^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_H$ το οποίο από την κατασκευή του $C^{\mathcal{J}}$ βάσει της Εξίσωσης 6.15 συνεπάγεται ότι $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} C, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ (Equation 6.35) οδηγούν στο συμπέρασμα ότι $C^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ όπως και θέλαμε να δείξουμε.

- Αν το $C_a(t)$ εμφανίζεται στο B' για την έννοια $C_a \in N'_C$ και το $\{a\}(t)$ εμφανίζεται στο B για κάποιο άτομο $a \in N_I$. Βάσει των Εξισώσεων 6.21,6.23 έχουμε ότι $C_a^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_H$. Η τελευταία ανισότητα βάσει της κατασκευής του C_a (Εξίσωση 6.16) συνεπάγεται ότι $t^{\mathcal{J},Z'} = a^{\mathcal{J}}$. Για αυτό έχουμε ότι $t^{\mathcal{I},Z} = a^{\mathcal{I}}$ (Εξίσωση 6.36) και συνεπώς και ότι $\{a\}^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) = 1 > \omega_H$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

- Αν το άτομο $\text{Self}_R(t)$ εμφανίζεται στο B' και το άτομο κανόνα $R(t,t)$ εμφανίζεται στο B για κάποιον απλό ρόλο $R \in N_R^S$. Βάσει των Εξισώσεων 6.21, 6.23 έχουμε ότι $\text{Self}_R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_H$. Η τελευταία σχέση βάση της κατασκευής του $\text{Self}_R^{\mathcal{J}}$ (Εξίσωση 6.17) συνεπάγεται ότι για όλα τα $\varepsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$ εάν ισχύει $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})(\varepsilon) > \omega_H$, τότε θα πρέπει να ισχύει και $R^{\mathcal{I}}(\varepsilon,\varepsilon) > \omega_H$. Εφόσον έχουμε ότι $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ (Εξίσωση 6.24), συμπεραίνουμε ότι $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ επίσης ισχύει, όπως και θέλαμε να δείξουμε.

- Αν το άτομο $\text{Self}_R(t)$ εμφανίζεται στο B', το άτομο $R(t,u)$ εμφανίζεται στο B για κάποιον απλό ρόλο $R \in N_R^S$, και ο κανόνας στο $\overline{P}(RB)$ αντιστοιχεί σε κάποιο κανόνα Τύπου 4 που περιγράφηκε στον Ορισμό 6.17. Η απόδειξη γίνεται ομοίως με την απόδειξη για την προηγούμενη περίπτωση.

- Αν το άτομο $R(t,u)$ εμφανίζεται στο B' και το άτομο $R(t,u)$ εμφανίζεται στο B για κάποιο $R \in N_R$. Εξετάζουμε τις αντίστοιχες περιπτώσεις με τον ορισμό του Z (Βήμα 3):

1. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $u^{\mathcal{I},Z} = a^{\mathcal{I}}$ και $u^{\mathcal{J},Z'} = a^{\mathcal{J}}$. Εφόσον ισχύει $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, a^{\mathcal{J}}) > \omega_H$ (Εξισώσεις 6.21,6.23) και από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Equation 6.18), έχουμε ότι $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists R.\{a\}, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ (Εξίσωση 6.35) υπονοούν ότι $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{J},Z'}, a^{\mathcal{J}}) > \omega_H$ όπως και θέλαμε να δείξουμε.

2. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μόνο ένα άτομο ρόλου $R(t,u)$ στο B και το B' περιέχει το u σαν δεύτερο όρισμα. Επομένως θα ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, u^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ από την κατασκευή της απεικόνισης Z βάσει της Εξίσωσης 6.37. Να σημειωθεί ότι η απεικόνιση του u δεν έχει οριστεί στο βήμα 1 του αλγορίθμου, αφού κάτι τέτοιο προϋποθέτει ότι η κεφαλή του κανόνα να είναι $R'(t,u)$ και $R' \in N_R^S$. Αυτό υπονοεί από την κατασκευή των ΠΛ κανόνων (Ορισμός 6.9 Συνθήκη 5) ότι το R είναι επίσης ένας απλός ρόλους το οποίο αντικρούει την υπόθεσή μας.

3. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε (από την κατασκευή των ασαφών ΠΛ κανόνων) ότι όλα τα άτομα ρόλων με το u σαν δεύτερο όρισμα πρέπει να είναι απλά και να αναφέρονται όλα στον ίδιο όρο t που υπάρχει στο πρώτο όρισμα. Έχουμε επίσης ότι $u^{\mathcal{J},Z'} = \delta_{S,C}$ και $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega' \rangle$ για κάποιο $\omega' > \omega_H$. Η τελευταία ανίσωση μαζί με το γεγονός ότι $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, u^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_H$ (Εξισώσεις 6.21,6.23) και από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Εξίσωση 6.20) συνεπάγονται ότι για όλα τα $\varepsilon, \varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$ εάν ισχύει ότι

$$\min(\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega') < \min(S^{\mathcal{I}}(\varepsilon,\varepsilon'), C^{\mathcal{I}}(\varepsilon')) \tag{6.39}$$

τότε θα πρέπει να ισχύει και ότι

$$\min(\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon), \omega') < R^{\mathcal{I}}(\varepsilon,\varepsilon'). \tag{6.40}$$

Εάν αντικαταστήσουμε το ε με $t^{\mathcal{I},Z}$ και το ε' με $u^{\mathcal{I},Z}$ τότε από την επιλογή του $u^{\mathcal{I},Z}$ σύμφωνα με τις Εξισώσεις 6.35,6.38 έχουμε ότι η Εξίσωση 6.39 ικανοποιείται. Το τελευταίο έχει σαν συνέπεια το ότι ικανοποιείται η Εξίσωση 6.40 και συνεπώς:

$$R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, u^{\mathcal{I},Z}) \geq \min(\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}), \omega'_H) > \omega_H \tag{6.41}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

4. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε (από την κατασκευή των ασαφών ΠΛ κανόνων) ότι όλα τα άτομα ρόλων με το u σαν δεύτερο όρισμα πρέπει να είναι απλά και να αναφέρονται στον ίδιο όρο t στο πρώτο τους όρισμα. Επίσης έχουμε ότι $u^{\mathcal{J},Z'} = \delta_{S,C}$ και $\langle \kappa(t^{\mathcal{J},Z'}) \not\sqsubseteq_{\mathcal{I}} \exists S.C, \omega \rangle$ για όλα τα $\omega > \omega_H$. Η τελευταία σχέση μαζί με το γεγονός ότι $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, u^{\mathcal{J},Z'}) > \omega_H$

(Εξισώσεις 6.21,6.23) και από την κατασκευή του $R^{\mathcal{J}}$ (Εξίσωση 6.20) συνεπάγονται ότι για όλα τα $\varepsilon, \varepsilon' \in \Delta^{\mathcal{I}}$:

$$\left.\begin{array}{r} \kappa(t^{\mathcal{J},Z'})^{\mathcal{I}}(\varepsilon) > \omega_H \\ C^{\mathcal{I}}(\varepsilon') > \omega_H \end{array}\right\} \implies R^{\mathcal{I}}(\varepsilon, \varepsilon') > \omega_H. \tag{6.42}$$

Έχουμε από την επιλογή του Z ότι $\kappa(t^{\mathcal{J},Z'})(t^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$ και $\kappa(u^{\mathcal{J},Z'})(u^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$. Επομένως, σύμφωνα με την Εξίσωση 6.42, ισχύει ότι $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, u^{\mathcal{I},Z}) > \omega_H$, όπως και θέλαμε να δείξουμε.

Βασισμένοι στα προηγούμενα βήματα αποδείξαμε ότι κάθε άτομο έννοιας ή ρόλου στο σώμα ενός κανόνα $\langle B \to H, \omega\rangle$ μέσω της διερμηνείας $\mathcal{I}$ και τις ανάθεσης μεταβλητών Z έχει τιμή μεγαλύτερη από $H^{\mathcal{I},Z}$. Επίσης έχουμε ότι $\omega \geq \omega_{H'} > \omega_H$ (Εξισώσεις 6.22, 6.23) και συνεπώς ο κανόνας $\langle B \to H, \omega\rangle$ δεν ικανοποιείται όπως και θέλαμε να δείξουμε.

Λήμμα 6.22 *Εάν το ασαφές Datalog πρόγραμμα $\overline{P}(RB)$ έχει κάποιο μοντέλο $\mathcal{J}$ τότε η $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων RB έχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$.*

Απόδειξη: Θα προχωρήσουμε στην κατασκεύη ενός μοντέλου $\mathcal{I}$ από το $\mathcal{J}$. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα N_I, N_R, N_C και N_I', N_R', N_C' όπως και για την προηγούμενη απόδειξη.

Αρχικά ορίζουμε την κλάση ενός στοιχείου $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$ ως εξής

$$[\delta] = \{\delta\} \cup \{\delta' \mid \delta' \in \Delta^{\mathcal{J}} \text{ τέτοιο ώστε } R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta, \delta') > 0\}. \tag{6.43}$$

Βασισμένοι στην προηγούμενη κατηγοριοποίηση των στοιχείων θα προχωρήσουμε να ορίσουμε τη διερμηνεία $\mathcal{I}$. Το πεδίο ορισμού της διερμηνείας $\mathcal{I}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{[\beta^{\mathcal{J}}] \mid \text{ για κάθε } \beta \in N_I'\} \tag{6.44}$$

Κάθε άτομο $a \in N_I$ θα εμφανίζεται και στο N_I' και συνεπώς τα άτομα του N_I ερμηνεύονται ως εξής:

$$a^{\mathcal{I}} = [a^{\mathcal{J}}]. \tag{6.45}$$

Τα ονόματα εννοιών και ρόλων θα ερμηνευθούν ως εξής, για κάθε $\delta, \varepsilon \in \Delta^{\mathcal{J}}$ έχουμε ότι:

$$C^{\mathcal{I}}([\delta]) = C^{\mathcal{J}}(\delta), \tag{6.46}$$

$$R^{\mathcal{I}}([\delta], [\varepsilon]) = R^{\mathcal{J}}(\delta, \varepsilon). \tag{6.47}$$

Επίσης ο ορισμός των απλών ρόλων $R \in N_R^S$ γίνεται ως εξής:

$$R^{\mathcal{I}}([\delta], [\delta]) = \max(\mathrm{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta), R^{\mathcal{J}}(\delta, \delta)). \tag{6.48}$$

Εφόσον κάθε κανόνας στον Ορισμό 6.17 με Self_R στην κεφαλή του έχει έναν αντίστοιχο κανόνα με R στην κεφαλή του, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(\delta,\delta) \geq \text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta,\delta)$. Για αυτό το λόγο η Εξίσωση 6.48 μπορεί να απλοποιηθεί σε $R^{\mathcal{I}}([\delta],[\delta]) = R^{\mathcal{J}}(\delta,\delta)$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η διερμηνεία εννοιών και ρόλων είναι σωστά ορισμένη, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 6.23 *Για κάθε ζεύγος στοιχείων $\delta', \delta'' \in [\delta]$ έχουμε ότι $C^{\mathcal{J}}(\delta') = C^{\mathcal{J}}(\delta'')$. Ομοίως για κάθε ζεύγη στοιχείων $\langle\delta',\varepsilon'\rangle, \langle\delta'',\varepsilon''\rangle \in [\delta]\times[\varepsilon]$ έχουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(\delta',\varepsilon') = R^{\mathcal{J}}(\delta'',\varepsilon'')$. Για αυτό το λόγο οι διερμηνείες $C^{\mathcal{I}}$, $R^{\mathcal{I}}$ είναι σωστά ορισμένες.*

Απόδειξη: Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η $C^{\mathcal{I}}([\delta])$ είναι σωστά ορισμένη αρκεί να δείξουμε ότι για δύο διαφορετικά στοιχεία $\delta, \delta' \in [\delta]$ έχουμε ότι $C^{\mathcal{J}}(\delta) = C^{\mathcal{J}}(\delta')$. Εφόσον $\delta, \delta' \in [\delta]$ έχουμε ότι $R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta,\delta') > 0$ και ο κανόνας $\langle R_{\approx}(x,y) \rightarrow^{*} R_{\approx}(y,x), 1\rangle$ (στον Ορισμό 6.17) διασφαλίζει ότι $R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta,\delta') = R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta',\delta) = 1$. Εφόσον ο κανόνας $\langle C(x) \wedge R_{\approx}(x,y) \rightarrow C(y), 1\rangle$ (στον Ορισμό 6.17) ικανοποιείται από τη διερμηνεία $\mathcal{J}$ προφανώς έχουμε ότι $C^{\mathcal{J}}(\delta) = C^{\mathcal{J}}(\delta')$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η διερμηνεία $R^{\mathcal{I}}([\delta],[\varepsilon])$ είναι σωστά ορισμένη, αρκεί να δείξουμε ότι για δύο διαφορετικά ζεύγη $\langle\delta,\varepsilon\rangle, \langle\delta',\varepsilon'\rangle \in [\delta]\times[\varepsilon]$ έχουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(\delta,\varepsilon) = R^{\mathcal{J}}(\delta',\varepsilon')$. Για ακόμα μία φορά έχουμε ότι ισχύει $R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta,\delta') = R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\delta',\delta) = R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\varepsilon,\varepsilon') = R_{\approx}^{\mathcal{J}}(\varepsilon',\varepsilon) = 1$. Εφόσον οι κανόνες $\langle R(z,x) \wedge R_{\approx}(x,y) \rightarrow R(z,y), 1\rangle$, $\langle R(x,z) \wedge R_{\approx}(x,y) \rightarrow R(y,z), 1\rangle$ (της Πρότασης 6.17) ικανοποιούνται από το $\mathcal{J}$ προφανώς και έχουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(\delta,\varepsilon) = R^{\mathcal{J}}(\delta',\varepsilon')$.

Τέλος μένει να δείξουμε ότι ισχύει $\text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta) = \text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta')$ για κάθε $\delta' \in [\delta]$. Για μία ακόμη φορά έχουμε ότι $R_{\approx}(\delta',\delta) = R_{\approx}(\delta,\delta') = 1$ και ο κανόνας $\langle \text{Self}_R(x) \wedge R_{\approx}(x,y) \rightarrow \text{Self}_R(y), 1\rangle$ διασφαλίζει ότι $\text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta) = \text{Self}_R^{\mathcal{J}}(\delta')$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι το $\mathcal{I}$ είναι όντως ένα μοντέλο του RB αρκεί να δείξουμε ότι αν το $\mathcal{I}$ δεν είναι μοντέλο του RB τότε το $\mathcal{J}$ δεν είναι επίσης μοντέλο του $\overline{P}(RB)$.

Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{I}$ δεν είναι μοντέλο του RB, τότε υπάρχει κάποια απεικόνιση $Z : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ τέτοια ώστε να μην ικανοποιεί κάποιον κανόνα T της μορφής $\langle B \rightarrow H, \omega\rangle$ στο RB. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει επίσης και μία απεικόνιση $Z' : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{J}}$ η οποία δεν ικανοποιεί τον αντίστοιχο κανόνα T' $\langle B' \rightarrow H', \omega\rangle$ στο $\overline{P}(RB)$.

Κατασκευάζουμε την απεικόνιση Z' από τη Z ως εξής $Z'(x) = \delta$ για κάποιο οποιοδήποτε $\delta \in Z(x)$ (είναι προφανές ότι $\delta \in \Delta^{\mathcal{J}}$ από την κατασκευή του $\Delta^{\mathcal{I}}$ βάσει της Εξίσωσης 6.44). Η τελευταία σχέση μαζί με την Εξίσωση 6.45 συνεπάγονται ότι $t^{\mathcal{I},Z} = [t^{\mathcal{J},Z'}]$ για κάθε όρο t.

Θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό των τιμών κάθε ατόμου έννοιας και ρόλου που εμφανίζεται στον κανόνα T: $\langle B \to H, \omega\rangle$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις ως προς το είδος του ατόμου ρόλου ή έννοιας που εμφανίζεται στον κανόνα T:

1. Ένα άτομο $A(t)$ που εμφανίζεται σε κάποιον κανόνα T για μία έννοια $A \in N_C$ θα εμφανιστεί και στον κανόνα T'. Εκ κατασκευής του $\mathcal{I}$ βάσει της Εξίσωσης 6.46 και από την Πρόταση 6.23 έχουμε ότι $A^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}) = A^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z})$.

2. Κάθε άτομο $\{a\}(t)$ που εμφανίζεται σε κάποιον κανόνα T για κάποιο άτομο $a \in N_I$ θα αντικατασταθεί από το άτομο $C_a(t)$ στο T'. Ο κανόνας $\langle C_a(x) \to^* R_{\approx}(x,a), 1\rangle$ και η Εξίσωση 6.45 (κατασκευή του $a^{\mathcal{I}}$) διασφαλίζουν ότι $t^{\mathcal{J},Z'} \in [a^{\mathcal{J}}]$ ανν $t^{\mathcal{I},Z} = a^{\mathcal{I}}$, δηλαδή $a^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) = C_a^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'})$.

3. Κάθε άτομο ρόλου $R(t,u)$ που εμφανίζεται σε κάποιο κανόνα T με $R \in N_R^N$ θα εμφανιστεί επίσης και στο T'. Από την κατασκεύη του $\mathcal{I}$ σύμφωνα με την Εξίσωση 6.47 και βάσει της Πρότασης 6.23 έχουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, u^{\mathcal{J},Z'}) = R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, u^{\mathcal{I},Z})$.

4. Κάθε άτομο $R(t,u)$ με $R \in N_R^S$ που εμφανίζεται σε κάποιον κανόνα T θα εμφανιστεί επίσης και στον κανόνα T'. Από την κατασκευή του $\mathcal{I}$ σύμφωνα με την Εξίσωση 6.47 και την Πρόταση 6.23 έχουμε ότι $R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, u^{\mathcal{J},Z'}) = R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, u^{\mathcal{I},Z})$.

5. Εάν το άτομο If $\exists R.A(t)$ είναι η κεφαλή ενός κανόνα T ενώ $A \in N_C \cup \{\top\}$ τότε $R(t, d_{R,A}) \wedge A(d_{R,A})$ είναι η κεφαλή του αντίστοιχου κανόνα T'. Από τη σημασιολογία των υπαρξιακών περιορισμών έχουμε ότι

$$(\exists R.A)^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) = \sup_{\delta\in\Delta^{\mathcal{I}}} \min(R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z},\delta), A^{\mathcal{I}}(\delta)).$$

   Από το τελευταίο προκύπτει ότι

$$(\exists R.A)^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) \geq \min(R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, [d_{R,A}^{\mathcal{J}}]), A^{\mathcal{I}}([d_{R,A}^{\mathcal{J}}]))$$

   ενώ το στοιχείο $[d_{R,A}^{\mathcal{J}}]$ εμφανίζεται στο $\Delta^{\mathcal{I}}$ από την κατασκευή του $\Delta^{\mathcal{I}}$. Σύμφωνα με τα δύο σημεία που αναφέραμε προκύπτει ότι $R^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}, [d_{R,A}^{\mathcal{J}}]) = R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, d_{R,A}^{\mathcal{J}})$ και $A^{\mathcal{I}}([d_{R,A}^{\mathcal{J}}]) = A^{\mathcal{J}}(d_{R,A}^{\mathcal{J}})$. Συνεπώς σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$(\exists R.A)^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) \geq \min(R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, d_{R,A}^{\mathcal{J},Z'}), B^{\mathcal{J}}(d_{R,A}^{\mathcal{J}})).$$

6. Εάν το άτομο $\exists R.\{a\}(t)$ είναι η κεφαλή ενός κανόνα T με $a \in N_I$ τότε $R(t,a)$ είναι το σώμα του αντίστοιχου κανόνα T'. Με παρόμοια συλλογιστική με την προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$(\exists R.\{a\})^{\mathcal{I}}(t^{\mathcal{I},Z}) \geq R^{\mathcal{J}}(t^{\mathcal{J},Z'}, a^{\mathcal{J},Z'}).$$

Για όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι προφανές ότι ισχύει $H^{\mathcal{I},Z} \geq H^{\mathcal{J},Z'}$ και $B^{\mathcal{I},Z} = B^{\mathcal{J},Z'}$ (όπου τα B, H είναι το σώμα και η κεφαλή του κανόνα T και τα B', H' είναι το σώμα και η κεφαλή του κανόνα T'). Συνεπώς εάν κάποιος κανόνας $\langle B \sqsubseteq H, \omega\rangle$ δεν ικανοποιείται από την διερμηνεία $\mathcal{I}$ για την απεικόνιση Z τότε ο αντίστοιχος κανόνας $\langle B' \sqsubseteq H', \omega\rangle$ δεν ικανοποιείται επίσης από την διερμηνεία $\mathcal{J}$ για την απεικόνισηZ'.

Συνεπώς προκύπτει ότι εάν το $\mathcal{J}$ είναι μοντέλο του $\overline{P}(RB)$ τότε και το $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο του RB.

Απόδειξη του Λήμματος 6.20: Σε αυτό το Λήμμα θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο Datalog κανόνων της μορφής

$$\langle p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow p_0, d\rangle \tag{6.49}$$

μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Να σημειωθεί ότι στην Εξίσωση 6.49 κάθε p_i είναι είτε ένα άτομο έννοιας $C(t)$, είτε ένα άτομο ρόλου $R(t,u)$ όπως αυτά περιγράφηκαν στον Ορισμό 6.1, με τα t και u να είναι όροι (μεταβλητές ή σταθερές), ενώ το d να είναι κάποιος βαθμός στο διάστημα $[0,1]$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε Datalog κανόνας, όπως αυτός που εμφανίζεται στην Εξίσωση 6.49 και έχει n άτομα στο σώμα του, μπορεί να αναχθεί σε γραμμικό χρόνο σε ένα σύνολο Datalog κανόνων οι οποίοι θα έχουν το πολύ δύο άτομα (ρόλου ή έννοιας) στο σώμα τους. Η αναγωγή αυτή μπορεί να γίνει εύκολα ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} \langle s_n \wedge p_n & \rightarrow & p_0, d\rangle \\ \langle s_{n-1} \wedge p_{n-1} & \rightarrow & s_n, 1\rangle \\ & \vdots & \\ \langle p_1 \wedge p_2 & \rightarrow & s_3, 1\rangle \end{array} \tag{6.50}$$

όπου τα $s_3, \ldots s_n$ είναι νέα άτομα (ρόλου ή έννοιας) και οι μεταβλητές τους πρέπει να επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ταιριάζουν με τις μεταβλητές που υπάρχουν στον αρχικό κανόνα της Εξίσωσης 6.49. Έτσι λοιπόν ενώ ο κανόνας της Εξίσωσης 6.49 είχε συνολικά $O(n)$ στοιχεία, το σύνολο κανόνων που προέκυψε στην Εξίσωση 6.49 έχει συνολικά $O(4n)$ στοιχεία, δηλαδή έχει γραμμικό μέγεθος ως προς τον αρχικό κανόνα. Συνεπώς, προκειμένου να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο κανόνων της μορφής της Εξίσωσης 6.49 μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο κανόνων με δύο άτομα στο σώμα τους μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Έστω ότι έχουμε ένα Datalog πρόγραμμα που αποτελείται από n κανόνες της μορφής:

$$\begin{aligned} \langle p_1 \wedge s_1 &\rightarrow q_1, d_1\rangle \\ &\vdots \\ \langle p_n \wedge s_n &\rightarrow q_n, d_n\rangle. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το συγκεκριμένο πρόγραμμα τερματίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Στο υπόλοιπο της απόδειξης, με τον όρο ground άτομο εννοούμε ένα άτομο έννοιας ή ρόλου το οποίο δεν περιέχει μεταβλητές. Όταν ολοκληρωθεί η εκτέλεση του προγράμματος σε κάθε ground άτομο θα δίνεται ένας συγκεκριμένος βαθμός.

Αρχικά παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο πρόγραμμα οι βαθμοί και οι σταθερές που εμφανίζονται έχουν μέγεθος $O(n)$ (όπου n είναι ο αριθμός των κανόνων της Εξίσωσης 6.51). Η πολυωνυμική πολυπλοκότητα είναι άμεση συνέπεια των παρακάτω σημείων:

- Εφόσον έχουμε $O(n)$ βαθμούς στην γνώση μας, κάθε $ground$ άτομο μπορεί να πάρει $O(n)$ τιμές. Επειδή το Datalog πρόγραμμα που περιγράψαμε είναι μονότονο προκύπτει ότι η τιμή ενός ground ατόμου μπορεί να αλλάξει το πολύ $O(n)$ φορές.

- Στην κεφαλή ενός κανόνα έχουμε είτε μία έννοια είτε έναν ρόλο. Σε κάθε ρόλο αντιστοιχούν $O(n^2)$ ground άτομα και αφού στις κεφαλές των κανόνων μπορούμε να έχουμε το πολύ n ρόλους, συμπεραίνουμε ότι η γνώση μας μπορεί να έχει το πολύ $O(n^3)$ ground άτομα.

- Από τα δύο προηγούμενα σημεία προκύπτει ότι συνολικά μπορούμε να έχουμε το πολύ $O(n^4)$ εφαρμογές κανόνων.

- Μένει να δειχθεί ότι ο έλεγχος εφαρμογής ενός κανόνα γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Βάσει των περιορισμών που θέσαμε σε μία $\mathcal{ELP}$ βάση κανόνων, έχουμε ότι οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην κεφαλή του κανόνα πρέπει να εμφανίζονται και στο σώμα του. Επομένως κάθε Datalog κανόνας της Εξίσωσης 6.51 θα έχει το πολύ 4 μεταβλητές. Άρα για το εάν μπορεί να εφαρμοστεί ένας κανόνας πρέπει να ελεγχθούν $O(n^4)$ αντικαταστάσεις μεταβλητών με σταθερές. Εφόσον έχουμε και $O(n)$ κανόνες, στην χειρότερη περίπτωση, πρέπει να κάνουμε $O(n^5)$ ελέγχους για το εάν εφαρμόζεται κάποιος από αυτούς.

■

Κεφάλαιο 7

Σχετική Βιβλιογραφία

Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Η παρουσία ασαφούς και ατελούς πληροφορίας σε μία πλειάδα εφαρμογών δημιούργησε και την αντίστοιχη ανάγκη αναπαράστασής της μέσω ασαφών επεκτάσεων των Περιγραφικών Λογικών. Ως εκ τούτου, έχει προταθεί μία πλειάδα γλωσσών επέκτασης των κλασσικών ΠΛ με ασαφείς τελεστές. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες από τις σημαντικότερες γλώσσες λογικής από τις οποίες επηρεάστηκε και με τις οποίες σχετίζεται η διδακτορική μας διατριβή.

Η πρώτη εργασία για τις ασαφείς ΠΛ έγινε από τον Yen (1991), ο οποίος πρότεινε μία ασαφή επέκταση της $\mathcal{FL}^{-}$ γλώσσας (Levesque and Brachman, 1987), η οποία είναι υπογλώσσα της $\mathcal{ALC}$. Η εργασία αυτή, βασισμένη στη Zadeh λογική, επιτρέπει ασάφεια στην ορολογική γνώση, χωρίς όμως να δίνεται η δυνατότητα ύπαρξης ενός ασαφούς σώματος ισχυρισμών. Επιπλέον δίνει έναν περιγραφικό ορισμό των τελεστών ασαφούς τροποποίησης (fuzzy modifiers), χωρίς όμως να τους ορίζει με σαφήνεια. Παρόλα αυτά, το μόνο πρόβλημα συλλογιστικής στο οποίο αναφέρεται είναι αυτό της υπαγωγής, για το οποίο οι απαντήσεις είναι της μορφής ναι/όχι.

Οι Tresp et al. (1998) παρουσίασαν μία πιο γενική επέκταση της ασαφούς $\mathcal{ALC}$ γλώσσας. Όπως και ο Yen, επιτρέπουν ένα ασαφές σώμα ορολογίας και ασαφείς τροποποιητές, βασίζουν τη σημασιολογία τους στη Zadeh λογική, ενώ δεν επιτρέπουν ασαφή σώματα ισχυρισμών. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων συλλογιστικής είναι ορθός και πλήρης, ενώ στηρίζεται σε τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού (linear programming).

Ο Straccia (2001, 2005a, 2006c) προτείνει μία διαφορετική προσέγγιση ασαφοποίησης της $\mathcal{ALC}$ η οποία επιτρέπει τόσο μία ασαφή ορολογική γνώση, όσο και ένα ασαφές σώμα ισχυρισμών, αλλά δεν επιτρέπει ασαφείς τροποποιητές εννοιών και απτά πεδία. Η γλώσσα αυτή επίσης βασίζεται στους τελεστές της Zadeh λογικής. Επιπλέον ο Straccia (2001) παρουσιάζει το πρόβλημα του μεγίστου κάτω φράγματος και περιγράφει έναν ορθό και πλήρη tableaux αλγόριθμο συλλογιστικής. Με παρόμοια λογική, οι Hölldobler et al. (2002, 2003) επεκτείνουν τη δουλειά του Straccia στην $\mathcal{ALC}$ με τροποποιητές εννοιών της μορφής $f_m(x) = x^\beta$, όπου $\beta > 0$, και παρουσιάζει έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο συλλογιστικής, βασισμένο στους tableaux αλγόριθμους, για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών

Οι Sánchez and Tettamanzi (2005, 2006a,b) προτείνουν μία ασαφή επέκταση της ΠΛ γλώσσας $\mathcal{ALCQ}$, (χωρίς σώμα ισχυρισμών) η οποία επίσης υπόκειται στους τελεστές της Zadeh λογικής, εξετάζοντας για πρώτη φορά τη σημασιολογία των ποσοδεικτών.

Ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στη δουλειά των Stoilos et al. (2007, 2005a,b), οι οποίοι παρουσίασαν τη σημασιολογία και αλγορίθμους συλλογιστικής για εκφραστικές ασαφείς ΠΛ όπως οι f_{KD}-$\mathcal{SI}$, f_{KD}-$\mathcal{SHIN}$, και f_{KD}-$\mathcal{SHOIN}$. Στις συγκεκριμένες εργασίες μελετάται η σημασιολογία εκφραστικών κατασκευαστών, όπως είναι οι περιορισμοί πληθικότητας, τα αξιώματα υπαγωγής, οι μεταβατικοί και αντίστροφοι ρόλοι ενώ αποδίδεται μία ορθή και πλήρης διαδικασία συλλογιστικής βασισμένη στους αλγορίθμους tableaux. Όπως και στις προηγούμενες εργασίες η σημασιολογία βασίζεται στους τελεστές της Zadeh λογικής.

Θα πρέπει επίσης να αναφερθούμε και στη δουλειά των Stoilos et al. (2006) που σχετίζεται με το πρόβλημα συλλογιστικής με γενικευμένα κυκλικά σώματα ορολογίας, παρουσιάζοντας έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για την ασαφή f_{KD}-$\mathcal{ALC}$ γλώσσα. Σημειωτέον ότι ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να επεκταθεί και για πιο εκφραστικές της $\mathcal{ALC}$ γλώσσες.

Μία διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα συλλογιστικής των $\mathrm{f_{KD}}$-ΠΛ παρουσιάστηκε από τον Straccia (2004), προτείνοντας μία διαδικασία αναγωγής μίας $\mathrm{f_{KD}}$-$\mathcal{ALCH}_{R^+}$ βάσης γνώσης σε μία $\mathcal{ALCH}_{R^+}$ βάση γνώση. Εν ολίγοις πρότεινε μία διαδικασία μετάβασης από τις ασαφείς στις κλασσικές ΠΛ. Μέσω της συγκεκριμένης μεθοδολογίας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι βελτιστοποιημένες πλατφόρμες εξαγωγής συμπερασμάτων των κλασσικών ΠΛ για την εκτέλεση διαδικασιών συλλογιστικής στις ασαφείς ΠΛ. Περαιτέρω επεκτάσεις της συγκεκριμένης τεχνικής έχουν προταθεί από τους Li et al. (2005, 2006) για τις γλώσσες $\mathrm{f_{KD}}$-$\mathcal{ALCN}$ και $\mathrm{f_{KD}}$-$\mathcal{ALCQ}$ αντίστοιχα και από τον Bobillo et al. (2008) για τη γλώσσα $\mathrm{f_{KD}}$-$\mathcal{SHOIN}$. Παρόλο που οι τεχνικές αυτές δίνουν τη δυνατότητα χρήσης βελτιστοποιήσεων που χρησιμοποιούνται με επιτυχία από τις κλασσικές ΠΛ, θα πρέπει να σημειωθεί ότι δημιουργούν ένα μεγάλο όγκο από ιεραρχίες εννοιών, ρόλων, και υπαγωγές σύνθετων εννοιών,

Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με Γενικευμένες Νόρμες

Όλες οι παραπάνω εργασίες προτείνουν ασαφείς επεκτάσεις των ΠΛ με χρήση της ασαφής συνεπαγωγής του Kleene-Dienes, της t-νόρμας και της t-κονόρμας του Gödel και της άρνηση του Łukasiewicz. Σημαντική εργασία, όμως, έχει γίνει και στην επέκταση των ασαφών ΠΛ με τη χρήση γενικευμένων ασαφών τελεστών.

Ορόσημο στο συγκεκριμένο ζήτημα αποτελούν οι εργασίες των Baader and Peñaloza (2011a,b,c). Στις εργασίες αυτές αποδεικνύεται ότι για τις περισσότερες γλώσσες των ασαφών ΠΛ, η ταυτόχρονη παρουσία γενικευμένων αξιωμάτων υπαγωγών (GCIs) και γενικευμένων νορμών για τη σύζευξη και τη διάζευξη, οδηγεί στη μη αποφανσιμότητα των γλωσσών αυτών. Αρχικά οι Baader and Peñaloza (2011c) αποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος συλλογιστικής που έχει προταθεί από τους Bobillo and Straccia (2007) για την ασαφή $\mathcal{ALCF}$ γλώσσα όπου χρησιμοποιείται η t-νόρμα για τη διερμηνεία της σύζευξης, δεν είναι ορθός και πλήρης. Εν συνεχεία οι Baader and Peñaloza (2011a) αποδεικνύουν ότι οι ασαφείς ΠΛ με διάζευξη και ενελικτική άρνηση (involutive negation) είναι μη αποφάνσιμες, ενώ επίσης αποδεικνύεται (Baader and Peñaloza, 2011b) ότι τα αποτελέσματα της μη αποφανσιμότητας ισχύουν και για την περίπτωση των ασαφών ΠΛ όπου η διάζευξη και η ενελικτική άρνηση έχουν αντικατασταθεί από τον τελεστή συνεπαγωγής residuum, ενώ για τη διερμηνεία της σύζευξης χρησιμοποιείται μία συνεχής t-νόρμα.

Εφόσον τα αποτελέσματα που παρουσίασαν οι Baader και Peñaloza δείχνουν ότι οι περισσότεροι αλγόριθμοι tableaux για τις ασαφείς ΠΛ με γενικευμένα αξιώματα υπαγωγής είναι στην ουσία λάθος, οι μόνες αποφάνσιμες γλώσσες ασαφών ΠΛ με GCIs που είναι επί του παρόντος διαθέσιμες είναι αυτές οι οποίες στηρίζονται σε έναν πεπερασμένο αριθμό βαθμών (Bobillo and Straccia, 2011; Borgwardt and Peñaloza, 2011; Borgwardt and Penaloza, 2011), ή αυτές οι οποίες βασίζονται στον τελεστή της Gödel t-νόρμας (Stoilos et al., 2006).

Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με Κανόνες

Στο πλαίσιο της επέκτασης των ασαφών ΠΛ με κανόνες, διάφορες προσεγγίσεις έχουν προταθεί οι οποίες βασίζονται σε αντίστοιχες γλώσσες των κλασσικών ΠΛ. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε κάποιες από αυτές τις επεκτάσεις.

Ο Straccia (2006b) πρότεινε μία επέκταση της $\mathcal{L}$-$\mathcal{ALC}$ γλώσσας με κανόνες. Βάσει της μεθοδολογίας που προτείνει υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ των εννοιών που συμμετέχουν στην ορολογική γνώση και των εννοιών που συμμετέχουν στους κανόνες. Επίσης θα πρέπει να σημειωθεί ότι η γλώσσα που προτείνει ο Straccia είναι μία γλώσσα της οποίας η σημασιολογία στηρίζεται στη θεωρία πλεγμάτων (lattice θεωρία) και όχι στην κλασσική σημασιολογία της ασαφούς λογικής. Παρόμοια μεθοδολογία ακολουθείται από τον ίδιο (Straccia, 2006d) με κύρια διαφορά ότι αυτή τη φορά η σημασιολογία βασίζεται στην ασαφή λογική και όχι στη θεωρία πλεγμάτων.

Ο Lukasiewicz (2006) επιλέγει μία διαφορετική προσέγγιση για τα ασαφή ΠΛ προγράμματα επιλέγοντας η σημασιολογία της λογικής του να βασιστεί στη σημασιολογία των συνόλων απαντήσεων (answer set semantics).

Καταλήγοντας, οι Venetis et al. (2007) προτείνουν ασαφή επέκταση των ΠΛ προγραμμάτων (DL Programs). Τα ΠΛ προγράμματα αποτελούν ένα εκφραστικό υποσύνολο της τομής της λογικής πρώτης τάξεως και του λογικού προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα αποτελούν την τομή της OWL γλώσσας με τους def-Horn κανόνες.

Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές με Απτά Πεδία

Ένα ακόμα ζήτημα με το οποίο ασχοληθήκαμε στα πλαίσια της διδακτορικής μας διατριβής, είναι αυτό της ενσωμάτωσης τύπων δεδομένων, όπως π.χ. αριθμητικά δεδομένα, στις ασαφείς ΠΛ. Αυτό το επιτύχαμε με τη χρήση των ασαφών απτών πεδίων.

Όσον αφορά τα ασαφή απτά πεδία, η εργασία μας βασίστηκε στις εργασίες των Straccia και Bobillo. Συγκεκριμένα ο Straccia (2005b) αρχικά παρουσίασε την έννοια ενός ασαφούς απτού πεδίου, $\mathcal{D} = \langle \Delta_{\mathcal{D}}, \Phi_{\mathcal{D}} \rangle$, όπου $\Delta_{\mathcal{D}}$ είναι το πεδίο της διερμηνείας και $\Phi_{\mathcal{D}}$ είναι ένα σύνολο από ασαφή κατηγορήματα απτών πεδίων. O Straccia (2005b), προκειμένου να εισαγάγει τα απτά πεδία στην ΠΛ γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, παρέχει τους κατασκευαστές έννοιας $\forall T.D$ και $\exists T.D$ όπου το T είναι ένας απτός (concrete) ρόλος και D είναι είτε κάποιο μοναδιαίο ασαφούς απτού πεδίου κατηγόρημα d, είτε η άρνησή του $\neg d$. Η συλλογιστική στην ασαφή $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$, πραγματοποιείται ανάγοντας το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming bMIP) (Hahnle, 2001). Η προαναφερθείσα δουλειά επεκτείνεται από τους Bobillo and Straccia (2009b) με τους επιπλέον κατασκευαστές εννοιών $(\geq t\, n), (\leq t\, n), (= t\, n)$, όπου το t είναι κάποιο απτό χαρακτηριστικό και το n είναι μία δομή στο πεδίο ορισμού του απτού πεδίου $\Delta^{\mathcal{D}}$. Τέλος οι Bobillo and Straccia (2009a) επέκτειναν περισσότερο τη γλώσσα $\mathcal{ALC}(\mathcal{D})$ με μαθηματικούς τελεστές είτε μεταξύ πραγματικών αριθμών, είτε μεταξύ ασαφών συναρτήσεων όπως είναι οι ασαφείς αριθμοί. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει στη γλώσσα που προτείνουν η δυνατότητα δημιουργίας νέων συναρτήσεων συμμετοχής. Για παράδειγμα γίνεται να ορισθεί μία συνάρτηση συμμετοχής ως το άθροισμα δύο διαφορετικών τριγωνικών συναρτήσεων συμμετοχής.

Βατές Ασαφείς Περιγραφικές Λογικές

Στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που έπρεπε να αντιμετωπίσουμε ήταν αυτό της πολυπλοκότητας. Οι περισσότεροι από τους αλγόριθμους των ασαφών και των κλασσικών ΠΛ έχουν τουλάχιστον εκθετική χείριστη πολυπλοκότητα και συνεπώς είναι ακατάλληλοι για την επίλυση προβλημάτων μεγάλης κλίμακας. Για τον λόγο αυτό επιλέξαμε να εξετάσουμε βατά συστήματα ΠΛ, δηλαδή συστήματα το οποία είτε έχουν χείριστη πολυωνυμική πολυπλοκότητα, είτε έχει αποδειχτεί ότι παρόλο που βασίζονται σε μία εκθετική γλώσσα, η πρακτική τους πολυπλοκότητα αποδεικνύεται μικρότερη.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν ασαφείς επεκτάσεις πολυωνυμικών (ή μικρότερης πολυπλοκότητας) γλωσσών και αλγορίθμων την κλασσικών ΠΛ. O Straccia (2006a) πρότεινε μία ασαφή επέκταση της DL-Lite γλώσσας, ενώ οι Pan et al. (2007b) παρουσιάζουν το πρώτο αποτελεσματικό και βατό σύστημα για τη γλώσσα της ασαφούς DL-Lite το οποίο δύναται να απαντήσει σε εκφραστικά συζευκτικά ερωτήματα επάνω σε σύνολα εκατομμυρίων δεδομένων. Σχετικά με την $\mathcal{EL}$ οικογένεια γλωσσών που έχει προταθεί από τους Baader et al. (2005), έχουν προταθεί διάφορες ασαφείς προσεγγίσεις. Αρχικά ο Vojtáš (2007) παρουσίασε μία ασαφή επέκταση της $\mathcal{EL}$ γλώσσας η οποία διαφοροποιείται από τις περισσότερες ΠΛ γλώσσες στο ότι η διερμηνεία της σύζευξης είναι μία συνάρτηση ασαφούς συνάθροισης, ενώ οι Stoilos et al. (2008) εξέτασαν μία ασαφή επέκταση της βατής γλώσσας $\mathcal{EL}$ με την κλασσική σημασιολογία της Zadeh λογικής. Θα πρέπει να σημειωθεί το ότι όταν μία κλασσική ΠΛ είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας, το ίδιο δεν ισχύει και για την αντίστοιχη ασαφή επέκτασή της. Έτσι λοιπόν για κάθε νέα γλώσσα θα πρέπει να μελετάται και η πολυπλοκότητά της.

Όσον αφορά τη μελέτη βατών συστημάτων ΠΛ τα οποία βασίζονται σε εκθετικές γλώσσες, αλλά η πρακτική τους πολυπλοκότητα είναι πολυωνυμική, υπάρχει ένας σημαντικός όγκος δουλειάς ο οποίος σχετίζεται με βελτιστοποιήσεις προς αυτήν την κατεύθυνση. Οι Simou et al. (2010) προτείνουν τέτοιες βελτιστοποιήσεις οι οποίες έχουν σαν στόχο τη βελτίωση της τυπικής απόδοσης κατά τον έλεγχο της ικανοποιησιμότητας και στηρίζονται στην τεχνική των ιχνών (trace technique), στην αναζήτηση πρώτα σε βάθος (depth first search), στην οδηγούμενη οπισθοδρόμηση (dependency directed backtracking), στην τυπική απλοποίηση (local simplification), στη σημασιολογική διακλάδωση (semantic branching), στις βελτιστοποιήσεις μεγίστου κάτω φράγματος (optimized GLB), και στις βελτιστοποιήσεις για τα γενικευμένα κυκλικά αξιώματα (management of GCIs).

Κεφάλαιο 8

Συνεισφορά και Θέματα προς Έρευνα

Η κύρια συνεισφορά της διδακτορικής διατριβής είναι η επέκταση των ασαφών ΠΛ με δύο είδη εκφραστικότητας τα οποία δεν είχαν μελετηθεί διεξοδικά έως τώρα. Το πρώτο είδος εκφραστικότητας αναφέρεται στην επέκταση των ΠΛ με κανόνες παρόμοιους με αυτούς που παρουσιάζονται σε άλλους λογικούς φορμαλισμούς, όπως είναι ο λογικός προγραμματισμός. Το δεύτερο είδος εκφραστικότητας αναφέρεται στην επέκταση των γλωσσών αυτών έτσι ώστε να μπορούν να ενσωματώνουν με ικανοποιητικό τρόπο, τύπους δεδομένων όπως αριθμητικά δεδομένα. Όπως είδαμε, τα δύο αυτά είδη εκφραστικότητας είναι πολύτιμα σε διάφορες εφαρμογές όπως ιατρικές, ευθυγράμμισης οντολογιών, επεξεργασίας εικόνας κοκ. Πέρα από το να ορίσουμε τη σημασιολογία για τις επεκτάσεις αυτές των ΠΛ που προτείναμε, μελετήσαμε διεξοδικά αλγορίθμους συλλογιστικής που σχετίζονται με κάθε γλώσσα, ενώ παραθέσαμε διεξοδικές αποδείξεις της ορθότητας, πληρότητας, και της πολυπλοκότητας του κάθε αλγορίθμου που προτείναμε. Στο πλαίσιο της μελέτης της πολυπλοκότητας της κάθε γλώσσας, κατά την πορεία της διδακτορικής διατριβής, επικεντρωθήκαμε στη διερεύνηση γλωσσών πολυωνυμικής πολυπλοκότητας.

Πιο συγκεκριμένα, οι κύριες συνεισφορές στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής είναι οι εξής:

- Προτείναμε τη γλώσσα του ασαφούς CARIN, μία γλώσσα αναπαράστασης γνώσης η οποία συνδυάζει τις ασαφείς ΠΛ με κανόνες Horn. Αυτό επιτυγχάνεται ενσωματώνοντας τελεστές της ασαφούς λογικής στη γλώσσα του μη αναδρομικού CARIN. Πιο συγκεκριμένα:

  Προτείναμε τη σύνταξη και η σημασιολογία μίας βάσης γνώσης του ασαφούς CARIN η οποία αποτελείται από ένα ABox, ένα TBox, και ένα σώμα Horn κανόνων.

Παρουσιάσαμε το πρόβλημα των συζευκτικών ερωτημάτων (CQ), της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων (UCQ), και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής (existential entailment). Για αυτά τα προβλήματα δώσαμε την κατάλληλη σημασιολογία η οποία βασίζεται στις ασαφείς διερμηνείες. Παρόλο που υπάρχει σημαντικός όγκος δουλειάς γύρω από τη γλώσσα της ασαφούς SQL καθώς και για την απάντηση ερωτημάτων σε ασαφείς ΠΛ, απ' όσο ξέρουμε δεν έχουν οριστεί κάπου αλλού οι έννοιες του συζευκτικού ερωτήματος, της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων, και της υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής.

Δημιουργήσαμε έναν αλγόριθμο ο οποίος απαντά στο πρόβλημα των συζευκτικών ερωτημάτων και της ένωσης συζευκτικών ερωτημάτων για βάσεις γνώσης χωρίς κάποιο σώμα Horn κανόνων. Αποδείξαμε αναλυτικά ότι ο αλγόριθμος αυτός ότι είναι ορθός, πλήρης, και τερματίζεται. Επιπλέον, προτείναμε μία διαδικασία αναγωγής του προβλήματος υπαρξιακής λογικής συνεπαγωγής στο πρόβλημα της απάντησης σε ένωση συζευκτικών ερωτημάτων.

Τέλος παρουσιάσαμε έναν ορθό και πλήρη αλγόριθμο αναγωγής του προβλήματος της απάντησης σε ένωση συζευκτικών ερωτημάτων με μία βάση γνώσης η οποία περιέχει Horn κανόνες, στο πρόβλημα απάντησης συζευκτικών ερωτημάτων με μία βάση γνώσης η οποία δεν περιέχει Horn κανόνες.

- Μελετήσαμε την αλληλεπίδραση μεταξύ εκφραστικότητας και πολυπλοκότητας προκειμένου να εισαγάγουμε μία νέα ασαφή ΠΛ γλώσσα που είναι αρκετά εκφραστική προκειμένου να χρησιμοποιηθεί σε ρεαλιστικές εφαρμογές και ταυτοχρόνως να διατηρεί την πολυωνυμική της πολυπλοκότητα. Έτσι λοιπόν προτείναμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ η οποία επιλύει το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών σε πολυωνυμικό χρόνο. Οι κύριες συνεισφορές συνοψίζονται ως εξής:

  Παρουσιάσαμε τη σύνταξη και τη σημασιολογία της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας η οποία παρέχει υψηλή εκφραστικότητα λόγω της ύπαρξης της άνω έννοιας, της κάτω έννοιας, ονοματικών εννοιών, υπαρξιακών περιορισμών, σύζευξης εννοιών, ασαφών υπαγωγών εννοιών, υπαγωγών ρόλων, και σύνθεσης ρόλων.

  Μελετήσαμε και παρουσιάσαμε την αναγωγή των πιο κοινών προβλημάτων των ασαφών ΠΛ στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάσαμε μία μεθοδολογία αναγωγής στο πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών των προβλημάτων της ικανοποιησιμότητας μίας έννοιας, της ασαφούς υπαγωγής εννοιών, της συνεπούς οντολογίας, του στιγμιοτύπου, και του μεγίστου κάτω φράγματος. Επιπλέον αποδείξαμε ότι η αναγωγή αυτή είναι πλήρης και ορθή. Πρέπει να σημειωθεί ότι η αναγωγή αυτή δεν έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία των ασαφών ΠΛ μέχρι τώρα.

Παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο συλλογιστικής για το πρόβλημα της ασαφούς υπαγωγής εννοιών στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ καθώς και αναλυτικές αποδείξεις για την ορθότητα και πληρότητα του αλγορίθμου μας.

Μελετήσαμε την πολυπλοκότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου και αποδείξαμε ότι αυτή είναι πολυωνυμική.

- Εξετάσαμε και επεκτείναμε τη θεωρία γύρω από τα απτά πεδία, ενώ παρουσιάσαμε την $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσα η οποία ενσωματώνει απτά πεδία στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα. Πιο συγκεκριμένα:

  Παρουσιάσαμε τον ορισμό των ασαφών απτών πεδίων που έχει δοθεί από τον Straccia (2005b) τον οποίο και επεκτείναμε με έννοιες όπως η σύζευξη, η διάζευξη, και η συνεπαγωγή στα πλαίσια ενός απτού πεδίου.

  Προτείναμε κάποια απτά απτά πεδία όπως αυτό των ασαφών αριθμών, και παρουσιάσαμε αλγόριθμους επίλυσης για τα προβλήματα της ικανοποιησιμότητας και της συνεπαγωγής.

  Επιπλέον εξετάσαμε το σύνολο των περιορισμών στους οποίους πρέπει να υπόκειται ένα απτό πεδίο προκειμένου να διατηρείται η πολυωνυμική πολυπλοκότητα της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ γλώσσας. Βάσει αυτών των περιορισμών προτείναμε τα μη αυστηρώς π-αποδεκτά και τα αυστηρώς π-αποδεκτά ασαφή απτά πεδία τα οποία επιτρέπουν διαφορετικές εκφραστικότητες αλλά και περιορισμούς ως προς τον τρόπο ενσωμάτωσής τους στην ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσα.

  Περιγράψαμε τον αλγόριθμο συλλογιστική της $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$ και αποδείξαμε με αναλυτικό τρόπο την ορθότητα, πληρότητα, και πολυωνυμική πολυπλοκότητά του.

- Εξετάσαμε την επέκταση της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας με κανόνες με βάρη και μελετήσαμε το σύνολο των περιορισμών οι οποίοι διασφαλίζουν την πολυωνυμική πολυπλοκότητα για τα πιο σημαντικά προβλήματα συλλογιστικής. Η γλώσσα που προέκυψε αποκαλείται ασαφής $\mathcal{ELP}$ και ανήκει στο αποφάνσιμο υποσύνολο γλωσσών της ασαφούς Γλώσσας Κανόνων του Σημασιολογικού Ιστού (fuzzy Semantic Web Rule Language f-SWRL). Πιο συγκεκριμένα:

  Ορίσαμε τους κανόνες με βάρη για ΠΛ και τις ασαφείς βάσεις κανόνων για ΠΛ, βασισμένοι στους αντίστοιχους ορισμούς που δόθηκαν από τους Krötzsch et al. (2008a),

  Επεκτείναμε για τις ασαφείς ΠΛ τον ορισμό των ΠΛ κανόνων που δίνεται από τους Krötzsch et al. (2008a). Οι ΠΛ κανόνες εμπεριέχουν ένα σύνολο περιορισμών το οποίο διασφαλίζει ότι η ενσωμάτωσή τους σε μία απλή γλώσσα ΠΛ δεν θα αλλάξει την πολυπλοκότητά της.

Βάσει των ασαφών ΠΛ κανόνων ορίσαμε τη γλώσσα της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ και αποδείξαμε ότι αποτελεί εκφραστικό υπερσύνολο της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας.

Τέλος παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμος συλλογιστικής για την ασαφή $\mathcal{ELP}$ ο οποίος βασίζεται στην αναγωγή ενός $\mathcal{ELP}$ συνόλου κανόνων με βάρη, σε ένα ασαφές Datalog πρόγραμμα σε γραμμικό χρόνο.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ανοικτά θέματα για περαιτέρω έρευνα.

- *Μελέτη ασαφών ΠΛ με γενικευμένους τελεστές.* Στη μέχρι τώρα μελέτη των ασαφών ΠΛ περιορίσαμε τα προβλήματα συλλογιστικής σε οικογένειες γλωσσών των οποίων η σημασιολογία δίνεται βάσει της λογικής του Zadeh. Συγκεκριμένα για τη σύζευξη χρησιμοποιήσαμε την t-νόρμα, για τη διάζευξη την t-κονόρμα max, για την άρνηση $c(a)$ το συμπλήρωμα Łukasiewicz, και τη συνεπαγωγή Kleene-Dienes $\mathcal{J}(a, b) = \max(1 - a, b)$. Για τη σημασιολογία των γλωσσών που προέκυψαν θα μπορούσαν να εξεταστούν και άλλοι τελεστές όπως αυτοί της Łukasiewicz και της Goguen οικογένειας τελεστών που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1. Έτσι λοιπόν ανοικτό παραμένει το θέμα της μελέτης και εύρεσης αλγορίθμων συλλογιστικής για τις γλώσσες που προτάθηκαν στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής. Δυστυχώς, βάσει των τελευταίων ευρημάτων, από τους Baader and Peñaloza (2011a,b,c), η μελέτη αυτή μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι κάποιες από αυτές τις γλώσσες που θα προταθούν είναι μη αποφάνσιμες.

  Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη γλώσσα του ασαφούς CARIN, είμαστε σίγουροι ότι η διερμηνεία της σύζευξης και διάζευξης με έναν οποιοδήποτε τελεστή ασαφούς τομής ή ένωσης οδηγεί σε μη αποφανσιμότητα. Αυτό προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι οι γλώσσες για τις οποίες αποδεικνύεται η μη αποφανσιμότητα από τους Baader και Peñaloza αποτελούν εκφραστικά υποσύνολα της γλώσσας του ασαφούς CARIN με μία γενικευμένη νόρμα.

  Όσον αφορά τις επεκτάσεις των γλωσσών $\mathcal{EL}^{++}$, $\mathcal{EL}^{++}(\mathcal{D})$, και $\mathcal{ELP}$ με γενικευμένες νόρμες, δεν έχει μελετηθεί ακόμα το θέμα της αποφανσιμότητάς τους. Θα πρέπει να μελετηθεί η πολυπλοκότητά των γλωσσών αυτών και στην περίπτωση που αυτές δεν είναι αποφάνσιμες, να μελετηθούν τα εκφραστικά υποσύνολα τα οποία διασφαλίζουν αποφανσιμότητα και πολυωνυμική πολυπλοκότητα.

- *Πρακτικά συστήματα συλλογιστικής για εκφραστικές ασαφείς περιγραφικές λογικές.* Ένα από τα σημαντικότερα εμπόδια που συναντήσαμε κατά την υλοποίηση του αλγόριθμου για το ασαφές CARIN ήταν η υψηλή πολυπλοκότητα της προτεινόμενης γλώσσας (μη ντετερμινιστικά διπλά εκθετική). Έτσι λοιπόν, η χρήση της γλώσσας του CARIN σε ρεαλιστικές εφαρμογές προϋποθέτει την ύπαρξη ενός πιο αποδοτικού βελτιστοποιημένου συστήματος συλλογιστικής. Για την επίτευξη αυτού του στόχου πρέπει να μελετηθούν οι τεχνικές και τα εργαλεία βελτιστοποίησης για τις ασαφείς ΠΛ. Ήδη οι τεχνικές αυτές έχουν μελετηθεί από τους Simou et al. (2010) στα πλαίσια της υλοποίησης του συστήματος συλλογιστικής FiRE (Fuzzy Reasoning Engine) που αποτελεί το πρώτο σύστημα συλλογιστικής που υλοποιήθηκε για εκφραστικές ασαφείς Περιγραφικές Λογικές. Ένα ανοικτό θέμα είναι ο τρόπος με τον οποίο οι τεχνικές αυτές βελτιστοποίησης μπορούν να επεκταθούν έτσι ώστε να εφαρμοστούν σε συστήματα ΠΛ με κανόνες και ποιες είναι οι επεκτάσεις των τεχνικών αυτών στην περίπτωση που η υπό εξέταση εκφραστικότητα εμπεριέχει και κανόνες.

- *Εκφραστικότερες επεκτάσεις των γλωσσών που εξετάσαμε.* Ένα ανοικτό θέμα προς περαιτέρω έρευνα είναι η μελέτη επεκτάσεων των γλωσσών που προτάθηκαν.

  Ένα θέμα που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η επέκταση της γλώσσας του CARIN με γενικευμένες υπαγωγές εννοιών (GCIs) και ασαφή συστήματα κανόνων με βάρη. Η σύνταξη και σημασιολογία των δύο αυτών ειδών εκφραστικότητας παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 4 και 6 αντίστοιχα για τις γλώσσες της ασαφούς $\mathcal{EL}^{++}$ και της ασαφούς $\mathcal{ELP}$ αντίστοιχα. Επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει και η επέκταση του προβλήματος μεγίστου κάτω φράγματος για συζευκτικά ερωτήματα και ενώσεις συζευκτικών ερωτημάτων. Δηλαδή η μελέτη ενός ορθού και πλήρη αλγόριθμου συλλογιστικής, ο οποίος για μία βάση γνώσης K και ένα ένα συζευκτικό ερώτημα της μορφής $C(x) \wedge R(x,y)$ θα επιστρέφει τον μέγιστο βαθμό d έτσι ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα $K \models C(x) \geq d$ και $\models R(x,y) \geq d$. Ακόμα πρέπει να εξεταστεί το κατά πόσο η επέκταση της γλώσσας του ασαφούς CARIN για πιο εκφραστικές ΠΛ όπως η ασαφής $\mathcal{SHIQ}$ είναι αποφάνσιμη (το παραπάνω έχει αποδειχθεί για τις κλασσικές ΠΛ από τους Ortiz et al. (2006)).

  Ως προς την ασαφή $\mathcal{EL}^{++}$ μένει να εξεταστεί η μελέτη επεκτάσεων της γλώσσας με περιορισμούς όπως είναι το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών, οι οποίοι έχουν αποδειχθεί για τις κλασσικές ΠΛ ότι δεν αλλάζουν την πολυωνυμική πολυπλοκότητα της $\mathcal{EL}^{++}$ γλώσσας (Baader et al., 2008).

- *Απτά πεδία σε εκφραστικές ασαφείς ΠΛ.* Ένα τελευταίο θέμα το οποίο παρουσιάζει έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον είναι αυτό της ενσωμάτωσης των απτών πεδίων σε εκφραστικές ασαφείς ΠΛ. Το θέμα αυτό έχει μελετηθεί έως τώρα για ασαφείς ΠΛ χωρίς κυκλικά αξιώματα υπαγωγών. Μένει να μελετηθεί ποιες είναι οι συνθήκες οι οποίες διασφαλίζουν ότι οι γλώσσες αυτές παραμένουν αποφάνσιμες όταν επιτρέπεται στη γνώση τους να περιέχονται τόσο απτά πεδία, όσο και κυκλικά αξιώματα υπαγωγών.

Παράρτημα Α΄

Αποδόσεις Ξένων Όρων

abstract syntax	:	αφηρημένη σύνταξη
acyclic terminological box	:	μη κυκλικό σώμα ορολογίας
admissible	:	επιτρεπτό, αποδεκτό
aggregation	:	συνάθροιση
answer set programming	:	προγραμματισμός συνόλου απαντήσεων
arity	:	βαθμός
artificial intelligence	:	τεχνητή νοημοσύνη
assertion	:	ισχυρισμός
assertional box	:	σώμα ισχυρισμών
assertional box consistency	:	συνέπεια σώματος ισχυρισμών
associative	:	προσεταιριστική
atomic concept	:	ατομική έννοια
atomic role	:	ατομικός ρόλος
atoms	:	άτομα
binary predicate	:	δυαδικό κατηγόρημα
blocking	:	μπλοκάρισμα
bottom concept	:	κενή έννοια
cardinality of a relation	:	βαθμός μίας σχέσης
cardinality of a set	:	πληθάριθμος ενός συνόλου
characteristic function	:	χαρακτηριστική συνάρτηση
clash	:	αντίφαση
clash free	:	ελεύθερο αντιφάσεων
class free	:	ελεύθερο αντιφάσεων
cognitive science	:	γνωσιακή επιστήμη
colposcopy	:	κολποσκόπηση

commutative	:	αντιμεταθετική
complement	:	συμπλήρωμα
complete (forest/graph)	:	πλήρης (δάσος/γράφος)
complete algorithm	:	πλήρης αλγόριθμος
completion forest	:	δάσος ολοκλήρωσης
completion rule	:	κανόνας ολοκλήρωσης
completion tree	:	δέντρο ολοκλήρωσης
component	:	σώμα
concept	:	έννοια
concept definition	:	ορισμός έννοιας
concept description	:	περιγραφή έννοιας
concept equivalence	:	ισοδυναμία εννοιών
concept instance	:	στιγμιότυπο έννοιας
concept satisfiability	:	ικανοποιησιμότητα έννοιας
concept subsumption	:	υπαγωγή εννοιών
concrete domain	:	απτό πεδίο
conjugate	:	αντικρουόμενο
conjunct	:	συζευκτέος
conjunctive query	:	συζευκτικό ερώτημα
consistency	:	λογική συνέπεια
consistent ontology	:	συνεπής οντολογία
constraint systems	:	συστήματα περιορισμών
convex	:	κυρτός
cytology	:	κυτταρολογική εξέταση
descendant	:	απόγονος
description logics	:	περιγραφικές λογικές
deterministic	:	αιτιοκρατικό
directed edge	:	κατευθυνόμενη ακμή
disjoint	:	ξένα
entailment	:	λογική συνεπαγωγή
equisatisfiable	:	αμοιβαία ικανοποιήσιμες
equivalent	:	ισοδύναμοι
existential entailment	:	υπαρξιακή συνεπαγωγή
expansion rules	:	κανόνες επέκτασης
feature	:	χαρακτηριστικό
first order logic	:	λογική πρώτης τάξης
formal logic	:	τυπική λογική
formula	:	τύπος
fuzzy complement	:	ασαφές συμπλήρωμα
fuzzy intersection	:	ασαφής τομή

fuzzy logic	:	ασαφής λογική
fuzzy modifiers	:	τελεστές ασαφούς τροποποίησης
fuzzy relation	:	ασαφής σχέση
fuzzy set	:	ασαφές σύνολο
fuzzy set theory	:	ασαφής συνολοθεωρία
fuzzy union	:	ασαφής ένωση
general concept inclusion axiom	:	γενικευμένο αξίωμα υπαγωγής εννοιών
greatest lower bound problem	:	πρόβλημα μέγιστου κάτω φράγματος
halting problem	:	πρόβλημα τερματισμού
histology	:	ιστολογική εξέταση
imprecise	:	ατελής
induction	:	επαγωγή
infimum	:	μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου αριθμών
information retrieval	:	ανάκτηση πληροφορίας
instance	:	στιγμιότυπο
instance problem	:	πρόβλημα στιγμιότυπου
intelligence	:	νοημοσύνη
interpretation	:	διερμηνεία
involutive negation	:	ενελικτική άρνηση
lattice theory	:	θεωρία πλεγμάτων
lesion	:	ανωμαλία στον ιστό
linear programming	:	γραμμικός προγραμματισμός
local reflexivity	:	τοπική ανακλαστικότητα
logic	:	λογική
logic entailment	:	λογική συνεπαγωγή
many valued logic	:	πλειότιμη λογική
mathematical logic	:	μαθηματική λογική
mixed integer programming	:	προγραμματισμός μικτών ακεραίων
modal logic	:	τροπική λογική
model-theoretic	:	μοντελοθεωρητική
multimedia applications	:	πολυμεσικές εφαρμογές
node	:	κόμβος
nominal	:	ονοματική έννοια
nominal	:	ονοματικός
norm	:	νόρμα
normalization	:	κανονικοποίηση
number restriction	:	περιορισμός πληθικότητας

object	:	αντικείμενο
ontology	:	οντολογία
ontology alignment	:	ευθυγράμμιση οντολογιών
ontology classification	:	ταξινόμηση οντολογίας
operator	:	τελεστής
possibilistic theory	:	θεωρία δυνατοτήτων
predecessor	:	προκάτοχος
predicate	:	κατηγόρημα
predicate logic	:	κατηγορηματικός λογισμού
primitive	:	πρωταρχικός
probabilistic theory	:	θεωρία πιθανοτήτων
property	:	ιδιότητα
propositional logic	:	προτασιακή λογική
range restrictions	:	περιορισμοί πεδίου τιμών
ranking degree	:	βαθμός διαβάθμισης
reasoner	:	μηχανή συλλογιστικής
reasoning	:	συλλογιστική
reasoning services	:	υπηρεσίες συλλογιστικής
redundant	:	πλεονάζουσα πληροφορία
retrieval	:	εύρεση
role	:	ρόλος
role descriptions	:	περιγραφές ρόλων
role inclusion	:	υπαγωγή ρόλων
rule languages	:	γλώσσες κανόνων
safe variables	:	ασφαλείς μεταβλητές
satisfiability	:	ικανοποιησιμότητα
scalable	:	κλιμακούμενου μεγέθους
semantic web	:	σημασιολογικός ιστός
semantics	:	σημασιολογία
sentence	:	έκφραση
shortest path problem	:	πρόβλημα ελαχίστου μονοπατιού
signature	:	οπλισμός/υπογραφή μίας γλώσσας
singleton	:	μονοσύνολο
social intelligence	:	κοινωνική νοημοσύνη
sound algorithm	:	ορθός αλγόριθμος
soundness	:	ορθότητα
subsumption	:	υπαγωγή
successor	:	διάδοχος
supremum	:	ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου αριθμών
tableau algorithms	:	αλγόριθμοι tableau

term	:	όρος
terminating algorithm	:	τερματιζόμενος αλγόριθμος
termination	:	τερματισμός
terminological box	:	ορολογικό σώμα
terminology	:	ορολογία
top concept	:	καθολική έννοια
tractable	:	βατός
transitive	:	μεταβατικός
tree equivalence	:	ισοδυναμία δέντρων
trivially	:	στοιχειωδώς
unary predicate	:	μοναδιαίο κατηγόρημα
uncertainty	:	αβεβαιότητα
undecidable language	:	μη αποφάνσιμη γλώσσα
union of conjunctive queries	:	ένωση συζευκτικών ερωτημάτων
unique name assumption	:	συνθήκη μοναδικής ονοματοδοσίας
universaly quantified	:	καθολικά ποσοτικοποιημένες
vague	:	ασαφής
value restriction	:	περιορισμός τιμής
variable assignment	:	ανάθεση μεταβλητής
weighted directed graphs	:	κατευθυνόμενος γράφος με βάρη
weighted rule	:	κανόνας με βάρη
World Wide Web	:	παγκόσμιος ιστός
worst case complexity	:	πολυπλοκότητα χείριστης περίπτωσης

Παράρτημα Β΄

Γλωσσάριο

Αλγόριθμος Συλλογιστικής (Reasoning algorithm) Ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει (decides) τα προβλήματα συλλογιστικής (υπηρεσίες εξαγωγής συμπερασμάτων) μιας γλώσσας αναπαράστασης γνώσης.

Απτό Πεδίο (concrete domain) Το **σταθερό** σύνολο (πεδίο) το οποίο αποτελεί την ερμηνεία των τύπων δεδομένων μας (datatypes).

Ασαφές σύνολο (fuzzy set) Η γενίκευση ενός κλασικού (crisp) συνόλου, το οποίο περιλαμβάνει στοιχεία τα οποία ανήκουν στο ασαφές σύνολο σε κάποιο βαθμό συμμετοχής σε αντίθεση με το να ανήκουν ή όχι πλήρως.

ASSIST Ευρωπαϊκό έργο που μελετά τους παράγοντες που σχετίζονται με τον καρκίνο της μήτρας.

Ατομική έννοια (ρόλος) (atomic concept (role)) Μια έννοια (ρόλος) που σε μια βάση γνώσης δεν αναλύεται σε άλλες απλούστερες, είναι δηλαδή πρωτογενής.

Άτομο (individual) Μια οντότητα η οποία δίνει ταυτότητα σε ένα αντικείμενο στη σύνταξη της γλώσσας και με τη χρήση του οποίου μπορούμε να δημιουργήσουμε σχέσεις στιγμιοτύπου ανάμεσα σε αυτό και μια έννοια ή ανάμεσα σε αυτό, κάποιο άλλο άτομο και έναν ρόλο.

Αξιώμα υπαγωγής γενικευμένων εννοιών (general concept inclusion axiom) Ένα αξίωμα υπαγωγής εννοιών στο οποίο και οι δυο έννοιες που συμμετέχουν είναι σύνθετες έννοιες.

Βαθμός ο βαθμός ενός κατηγορήματος ή μίας συνάρτησης ορίζεται ως ο αριθμός των ορισμάτων του.

Βάση γνώσης (knowledge base) Ένα σύνολο αξιωμάτων το οποίο περιγράφει τα στοιχεία (έννοιες, σχέσεις, αντικείμενα ή άτομα) και τις μεταξύ τους συσχετίσεις σε ένα συγκεκριμένο πεδίο (domain).

Γενικευμένο σώμα ορολογίας (General TBox) Ένα σώμα ορολογίας στο οποίο εμφανίζονται αξιώματα υπαγωγής γενικευμένων εννοιών.

Διερμηνεία (interpretation) Μια μαθηματική δομή η οποία μας δίνει μια συγκεκριμένη τυπική σημασία για τα στοιχεία μιας γλώσσας και κατ' επέκταση και της βάσης γνώσης.

Έννοια (concept) Ένα μοναδιαίο (unary) κατηγόρημα το οποίο αντιπροσωπεύει ένα σύνολο αντικειμένων.

Ισοδυναμία εννοιών (concept equivalence) Ένα αξίωμα της μορφής $C \equiv D$ το οποίο δηλώνει ότι οι έννοιες C και D είναι ισοδύναμες.

Ισχυρισμός (assertion) Μία σχέση στιγμιοτύπου (ή αλλιώς αξίωμα ατόμων) ανάμεσα σε ένα άτομο και μια έννοια ή ανάμεσα σε ένα ζεύγος ατόμων και ένα ρόλο.

Κανονικοποίηση (Normalization) Η διαδικασία αντικατάστασης των ασαφών ισχυρισμών ενός σώματος ισχυρισμών που χρησιμοποιούν τις αυστηρές ανισότητες $>$ και $<$ με ισχυρισμούς που χρησιμοποιούν τις ανισότητες $\geq$ και $\leq$.

Κυκλικό σώμα ορολογίας (Cylic TBox) Ένα σώμα ορολογίας που εμφανίζονται αξιώματα στα οποία μια έννοια του αριστερού μέλους κάποιου αξιώματος ορίζεται είτε άμεσα είτε έμμεσα (μεταβατικά μέσω άλλων αξιωμάτων υπαγωγής εννοιών) από τον εαυτό της.

Λογική Συνεπαγωγή (entailment) Το σύνολο (πεδίο) πάνω στο οποίο ερμηνεύουμε τη βάση γνώσης μας.

Μοντέλο (model) Μία ερμηνεία η οποία ικανοποιεί ένα αξίωμα υπαγωγής, ρόλων ή ατόμου, ένα σώμα ορολογίας, ρόλων ή ισχυρισμών ή μια βάση γνώσης.

Νοημοσύνη Το σύνολο των ικανοτήτων των έμβιων όντων που σχετίζονται με λειτουργίες του εγκεφάλου όπως αυτή της αφαιρετικής σκέψης, της κατανόησης, της επικοινωνίας, της συλλογιστικής, της μάθησης, της μάθησης μέσω εμπειρίας, του σχεδιασμού, της επίλυσης προβλημάτων κοκ.

Οπλισμός (signature) Στη μαθηματική λογική, ο όρος οπλισμός αναφέρεται στο σύνολο των μη λογικών συμβόλων μίας τυπικής γλώσσας.

Ρόλος (role) Ένα δυαδικό (binary) κατηγόρημα το οποίο αντιπροσωπεύει ένα σύνολο από ζεύγη αντικειμένων.

Σημασιολογία (semantics) Μια μαθηματική θεωρία με βάση την οποία περιγράφεται το πώς μπορούμε να δώσουμε ερμηνεία (σημασία) στα στοιχεία μιας γλώσσας.

Σημασιολογικός Ιστός (Semantic Web) *Ο Σημασιολογικός Ιστός είναι μία επέκταση του τωρινού Παγκόσμιου Ιστού όπου για κάθε πληροφορία δίνεται και μία σαφώς ορισμένη ερμηνεία, επιτρέποντας την συνεργασία μεταξύ υπολογιστών και ανθρώπων.*

Σώμα Ισχυρισμών (ABox) Ένα σύνολο από ισχυρισμούς.

Σώμα Ορολογίας (TBox) Ένα σύνολο από αξιώματα υπαγωγής ($C \sqsubseteq D$) και ισοδυναμίας εννοιών ($C \equiv D$).

Σύνθετη έννοια (Έννοια Περιγραφής) (Complex concept (Concept Description)) Μία έννοια η οποία χρησιμοποιεί τις ατομικές έννοιες με σκοπό να περιγράψει περισσότερο σύνθετες έννοιες.

Τεχνητή νοημοσύνη Η προσπάθεια προσομοίωσης της ανθρώπινης σκέψης από κάποιο Υπολογιστικό Σύστημα.

Turing Test Μία δοκιμασία κατά την οποία για να χαρακτηριστεί μία μηχανή ως ευφυής θα πρέπει σε ένα σύνολο ερωτημάτων που θα της τεθούν από κάποιον κριτή να μην μπορεί ο κριτής να διαχωρίσει εάν οι απαντήσεις δόθηκαν από κάποιον άνθρωπο ή από κάποιον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή.

Χώρος διερμηνείας (domain of interpretation) Μια μαθηματική δομή η οποία μας δίνει μια συγκεκριμένη τυπική σημασία για τα στοιχεία μιας γλώσσας και κατ' επέκταση και της βάσης γνώσης.

Υπαγωγή εννοιών (ρόλων) (concept (role) subsumption) Ένα αξίωμα της μορφής $C \sqsubseteq D$ ($R \sqsubseteq S$) το οποίο δηλώνει ότι η έννοια C (ρόλος R) είναι υποέννοια, εξειδίκευση ή αλλιώς λιγότερο γενική (υπο-ρόλος) της έννοιας D (του ρόλου S).

Βιβλιογραφία

A. Achs and A. Kiss. Fixpoint query in fuzzy datalog. In *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp*, volume 15, pages 223–231, 1995.

G. Antoniou, C. Viegas Damasio, B. Grosof, I. Horrocks, M. Kifer, J. Maluszynski, and Peter F. Patel-Schneider. Combining rules and ontologies. a survey, 2006.

F. Baader. *The description logic handbook: theory, implementation, and applications*. Cambridge Univ Pr, 2003. ISBN 0521781760.

F. Baader and R. Peñaloza. Gcis make reasoning in fuzzy dl with the product t-norm undecidable. In *Proceedings of the 24th International Workshop on Description Logics (DL 2011)*, 2011a.

F. Baader, P. Hanschke, and Deutsches Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz. *A scheme for integrating concrete domains into concept languages*. Citeseer, 1991.

F. Baader, S. Brandt, and C. Lutz. Pushing the EL envelope. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, volume 19, page 364. Citeseer, 2005.

F. Baader, D. Calvanese, D.L. McGuinness, D. Nardi, and P.F. Patel-Schneider. *The description logic handbook*. Cambridge University Press New York, NY, USA, 2007. ISBN 0521876257.

Franz Baader and Bernhard Hollunder. A terminological knowledge representation system with complete inference algorithms. In Harold Boley and Michael M. Richter, editors, *Processing Declarative Knowledge, International Workshop PDK 91*, pages 67–86, Kaiserslautern, Germany, 1991. Springer.

Franz Baader and Rafael Peñaloza. On the undecidability of fuzzy description logics with gcis and product t-norm. In Cesare Tinelli and Viorica Sofronie-Stokkermans, editors, *FroCos*, volume 6989 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–70. Springer, 2011b. ISBN 978-3-642-24363-9.

Franz Baader and Rafael Peñaloza. Are fuzzy description logics with general concept inclusion axioms decidable? In *FUZZ-IEEE*, pages 1735–1742. IEEE, 2011c. ISBN 978-1-4244-7315-1.

Franz Baader, Sebastian Brandt, and Carsten Lutz. Pushing the el envelope further. In Kendall Clark and Peter F. Patel-Schneider, editors, *In Proceedings of the OWLED 2008 DC Workshop on OWL: Experiences and Directions*, 2008.

Franz Baader, Martin Knechtel, and Rafael Peñaloza. A generic approach for large-scale ontological reasoning in the presence of access restrictions to the ontology's axioms. In Abraham Bernstein, David R. Karger, Tom Heath, Lee Feigenbaum, Diana Maynard, Enrico Motta, and Krishnaprasad Thirunarayan, editors, *International Semantic Web Conference*, volume 5823 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 49–64. Springer, 2009. ISBN 978-3-642-04929-3. URL `http://dblp.uni-trier.de/db/conf/semweb/iswc2009.html#BaaderKP09`.

J. Barwise. An introduction to first-order logic. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 90:5–46, 1977. ISSN 0049-237X.

F. Bobillo and U. Straccia. A fuzzy description logic with product t-norm. In *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, pages 1–6. IEEE, 2007.

F. Bobillo and U. Straccia. Reasoning with the finitely many-valued łukasiewicz fuzzy description logic sroiq. *Information Sciences*, 181(4):758–778, 2011.

F. Bobillo, M. Delgado, and J. Gómez-Romero. A crisp representation for fuzzy shoin with fuzzy nominals and general concept inclusions. *Uncertainty Reasoning for the Semantic Web I*, pages 174–188, 2008.

Fernando Bobillo and Umberto Straccia. Extending datatype restrictions in fuzzy description logics. In *ISDA*, pages 785–790, 2009a.

Fernando Bobillo and Umberto Straccia. Fuzzy description logics with general t-norms and datatypes. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(23):3382–3402, 2009b.

Fernando Bobillo, Miguel Delgado, and Juan Gómez-Romero. Optimizing the crisp representation of the fuzzy description logic sroiq. In Fernando Bobillo, Paulo Cesar G. da Costa, Claudia d'Amato, Nicola Fanizzi, Francis Fung, Thomas Lukasiewicz, Trevor Martin, Matthias Nickles, Yun Peng, Michael Pool, Pavel Smrz, and Peter Vojtás, editors, *URSW*, volume 327 of *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org, 2007.

O Bobillo, Miguel Delgado, and Juan Gómez-Romero. A crisp representation for fuzzy shoin with fuzzy nominals and general concept inclusions. In *In Proc. of the 2nd*

International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web (URSW 06), 2006.

S. Borgwardt and R. Peñaloza. Description logics over lattices with multi-valued ontologies. In *Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2011.

S. Borgwardt and R. Penaloza. Fuzzy ontologies over lattices with t-norms. In *Proceedings of the 24th International Workshop on Description Logics (DL 2011), CEUR Electronic Workshop Proceedings (to appear, 2011)*, 2011.

Diego Calvanese, Domenico Lembo, Maurizio Lenzerini, and Riccardo Rosati. Dl-lite: Tractable description logics for ontologies. In *Proc. of AAAI*, 2005.

Bin Cao and Antonio Badia. Exploiting maximal redundancy to optimize sql queries. *Knowledge and Information Systems*, 20:187–220, 2009.

Ramón Alberto Carrasco, María Amparo Vila, and José Galindo. Fsql: a flexible query language for data mining. *Enterprise information systems IV*, pages 68–74, 2003.

M. Cerami, F. Esteva, and F. Bou. Decidability of a description logic over infinite-valued product logic. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Twelfth International Conference, KR*, pages 9–13, 2010.

Alexandros Chortaras, Giorgos Stamou, and Andreas Stafylopatis. Integrated query answering with weighted fuzzy rules. In Khaled Mellouli, editor, *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty, 9th European Conference, ECSQARU 2007*, pages 767–778, Hammamet, Tunisia, 2007. Springer.

P. Cimiano, P. Haase, Q. Ji, T. Mailis, G. Stamou, G. Stoilos, T. Tran, and V. Tzouvaras. Reasoning with large a-boxes in fuzzy description logics using dl reasoners: An experimental evaluation. In *Proceedings of the 1st Workshop on Advancing Reasoning on the Web: Scalability and Commonsense (ARea2008)*, 2008.

S. Dasiopoulou, I. Kompatsiaris, and M.G. Strintzis. Using fuzzy DLs to enhance semantic image analysis. In *Proc. 3rd Interantional Conference on Semantic and digital Media Technology (SAMT), Koblenz, Germany*, 2008.

Francesco M. Donini, Maurizio Lenzerini, Daniele Nardi, and Andrea Schaerf. Al-log: Integrating datalog and description logics. *Journal of Intelligent Information Systems*, 10(3):227–252, 1998.

Ronald Fagin. Fuzzy queries in multimedia database systems. In *Proceedings of the seventeenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of database systems*, pages 1 – 10, Seattle, Washington, United States, 1998. ACM.

Manolis Falelakis, Christos Maramis, Irini Lekka, Pericles Mitkas, and Anastasios Delopoulos. An ontology for supporting clinical research on cervical cancer. In *International Conference on Knowledge Engineering and Ontology Development*, Madeira, Portugal, October 2009.

S. Feng, D. Ouyang, Y. Zhang, H. Che, and J. Liu. The Logical Difference For Fuzzy EL+ Ontologies. In *23rd International Workshop on Description Logics DL2010*, page 351. Citeseer, 2010.

D. Fensel, F. Van Harmelen, I. Horrocks, D.L. McGuinness, and P.F. Patel-Schneider. OIL: An ontology infrastructure for the semantic web. *Intelligent Systems, IEEE*, 16 (2):38–45, 2005. ISSN 1541-1672.

A. Ferrara, D. Lorusso, G. Stamou, G. Stoilos, V. Tzouvaras, and T. Venetis. Resolution of conflicts among ontology mappings: a fuzzy approach. In *International Workshop on Ontology Matching (OM2008), Karlsruhe*, 2008. URL `http://www.image.ece.ntua.gr/publications.php`.

R.W. Floyd. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962. ISSN 0001-0782.

Enrico Franconi and Sergio Tessaris. Rules and queries with ontologies: Unified logical framework. In Hans Jürgen Ohlbach and Sebastian Schaffert, editors, *Principles and Practice of Semantic Web Reasoning, Second International Workshop, PPSWR 2004*, pages 50–60, St Malo, France, 2004. Springer.

G. Frege. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. *From Frege to G*
"odel: A source book in mathematical logic, 1931:1–82, 1879.

Zhiguo Gong and Qian Liu. Improving keyword based web image search with visual feature distribution and term expansion. *Knowledge and Information Systems*, 21: 113–132, 2009.

B.C. Grau, I. Horrocks, B. Motik, B. Parsia, P. Patel-Schneider, and U. Sattler. OWL 2: The next step for OWL. *Web Semantics: Science, Services and Agents on the World Wide Web*, 6(4):309–322, 2008. ISSN 1570-8268.

Benjamin N. Grosof, Ian Horrocks, Raphael Volz, and Stefan Decker. Description logic programs: combining logic programs with description logic. In *Proceedings of the 12th international conference on World Wide Web*, pages 48–57, Budapest, Hungary, 2003. ACM New York.

Reiner Hahnle. *Advanced many-valued logics*, volume 2 of *Handbook of Philosophical Logic*. Kluwer, Dordrecht, Holland, 2nd edition edition, 2001.

P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic*. Springer, 1998. ISBN 0792352386.

P. Hájek. Making fuzzy description logic more general. *Fuzzy Sets and Systems*, 154(1): 1–15, 2005. ISSN 0165-0114.

S. Hölldobler, T.D. Khang, and H.P. Störr. A fuzzy description logic with hedges as concept modifiers. In *Proceedings InTech/VJFuzzy*, volume 2002, pages 25–34, 2002.

S. Hölldobler, H.P. Störr, and T.D. Khang. The fuzzy description logic alcfh with hedge algebras as concept modifiers. *Journal of Advanced Computational Intelligence*, 7(3): 294–305, 2003.

Steffen Hölldobler, Tran Dinh Khang, and Hans peter Störr. A fuzzy description logic with hedges as concept modifiers. In *In Proceedings InTech VJFuzzy2002*, pages 25–34. Publishing House, 2002.

I. Horrocks and P. Patel-Schneider. The generation of DAML+ OIL. In *Proc. of the 2001 Description Logic Workshop (DL 2001)*, volume 49, pages 30–35, 2001.

I. Horrocks, P.F. Patel-Schneider, H. Boley, S. Tabet, B. Grosof, and M. Dean. SWRL: A semantic web rule language combining OWL and RuleML. *W3C Member submission*, 21, 2004.

Ian Horrocks and Peter F. Patel-Schneider. A proposal for an owl rules language. In Stuart I. Feldman, Mike Uretsky, Marc Najork, and Craig E. Wills, editors, *Proceedings of the 13th international conference on World Wide Web, WWW 2004*, pages 723–731, New York, USA, 2004. ACM.

Ian Horrocks, Peter F. Patel-Schneider, and Frank Van Harmelen. From shiq and rdf to owl: The making of a web ontology language. *Journal of Web Semantics*, 1:7–26, 2003.

Ian Horrocks, Oliver Kutz, and Ulrike Sattler. The even more irresistible sroiq. In Patrick Doherty, John Mylopoulos, and Christopher A. Welty, editors, *Proceedings, Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 57–67, Lake District of the United Kingdom, 2006. AAAI Press.

G.E. Hughes, M.J. Cresswell, and Inc ebrary. *An introduction to modal logic*, volume 19. Methuen London, 1968.

S.V. Ioannou, A.T. Raouzaiou, V.A. Tzouvaras, T.P. Mailis, K.C. Karpouzis, and S.D. Kollias. Emotion recognition through facial expression analysis based on a neurofuzzy network. *Neural Networks*, 18(4):423–435, 2005.

M. Ishizuka and N. Kanai. Prolog-elf incorporating fuzzy logic. *New Generation Computing*, 3(4):479–486, 1985.

Yixin Jing, Dongwon Jeong, and Doo-Kwon Baik. Sparql graph pattern rewriting for owl-dl inference queries. *Knowledge and Information Systems*, 20:243–262, 2008.

Yevgeny Kazakov. Consequence-driven reasoning for horn SHIQ ontologies. In Bernardo Cuenca Grau, Ian Horrocks, Boris Motik, and Ulrike Sattler, editors, *Proceedings of the 22nd International Workshop on Description Logics (DL 2009)*, volume 477, Oxford, United Kindgom, July 2009. CEUR Workshop Proceedings. URL `http://ceur-ws.org/Vol-477/paper_69.pdf`.

Michael Kifer, Georg Lausen, and James Wu. Logical foundations of object-oriented and frame-based languages. *Journal of the ACM*, 42(4):741–843, 1995.

E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(1):5–26, 2004. ISSN 0165-0114.

G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, USA, 1995. ISBN 0131011715.

M. Krötzsch, S. Rudolph, and P. Hitzler. Description logic rules. In *Proceeding of the 2008 conference on ECAI 2008: 18th European Conference on Artificial Intelligence*, pages 80–84. IOS Press, 2008a.

Markus Krötzsch, Sebastian Rudolph, and Pascal Hitzler. Elp: Tractable rules for owl 2. In Amit P. Sheth, Steffen Staab, Mike Dean, Massimo Paolucci, Diana Maynard, Timothy W. Finin, and Krishnaprasad Thirunarayan, editors, *Proceedings of 7th International SemanticWeb Conference, ISWC 2008*, pages 649–664, Karlsruhe, Germany, 2008b. Springer.

T.B. Lee, J. Hendler, O. Lassila, et al. The semantic web. *Scientific American*, 284(5): 34–43, 2001.

H.J. Levesque and R.J. Brachman. Expressiveness and tractability in knowledge representation and reasoning1. *Computational intelligence*, 3(1):78–93, 1987.

Alon Y. Levy and Marie-Christine Rousset. Combining horn rules and description logics in carin. *Artificial Intelligence*, 104(1-2):165–209, 1998.

Y. Li, B. Xu, J. Lu, D. Kang, and P. Wang. Extended fuzzy description logic alcn. In *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems*, pages 906–906. Springer, 2005.

Y. Li, B. Xu, J. Lu, and D. Kang. Reasoning technique for extended fuzzy alcq\ cal {ALCQ}. *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2006*, pages 1179–1188, 2006.

T. Lukasiewicz and U. Straccia. Tightly integrated fuzzy description logic programs under the answer set semantics for the semantic web. In *Proceedings of the 1st international conference on Web reasoning and rule systems*, pages 289–298. Springer-Verlag, 2007.

Thomas Lukasiewicz. Fuzzy description logic programs under the answer set semantics for the semantic web. In Thomas Eiter, Enrico Franconi, Ralph Hodgson, and Susie Stephens, editors, *Rules and Rule Markup Languages for the Semantic Web, Second International Conference, RuleML 2006*, pages 89–96, Athens, Georgia, USA, 2006. IEEE Computer Society.

C. Lutz. Description logics with concrete domains–-a survey. In *Advances in Modal Logics Volume 4*. King's College Publications, 2003.

T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Expressive reasoning with horn rules and fuzzy description logics. In Massimo Marchiori, Jeff Z. Pan, and Christian de Sainte Marie, editors, *Web Reasoning and Rule Systems, RR, Proceedings*, volume 4524 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–57, Innsbruck , Austria, 2007. Springer.

T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Expressive reasoning with horn rules and fuzzy description logics. *Knowledge and Information Systems*, 25(1):105–136, 2010.

Theofilos P. Mailis, Giorgos Stoilos, Nikos Simou, and Giorgos B. Stamou. Tractable reasoning based on the fuzzy el++ algorithm. In *Proceedings of the Fourth International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web, Karlsruhe, Germany, October 26, 2008*, 2008.

Theofilos P. Mailis, Giorgos Stoilos, Nikos Simou, Giorgos B. Stamou, and Stefanos D. Kollias. Tractable reasoning with vague knowledge using fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2012.

G. Malinowski. *Many-valued logics*. Oxford University Press, USA, 1993. ISBN 0198537875.

J.D. Mayer, P. Salovey, D. Caruso, and W.L. Strategies. Models of emotional intelligence. *Emotional Intelligence: Key Readings on the Mayer and Salovey Model*, 2004.

D.L. McGuinness, F. Van Harmelen, et al. Owl web ontology language overview. *W3C recommendation*, 10:2004–03, 2004.

C. Meghini, F. Sebastiani, and U. Straccia. A model of multimedia information retrieval. *Journal of the ACM (JACM)*, 48(5):909–970, 2001. ISSN 0004-5411.

P. Mitkas, V. Koutkias, A. Symeonidis, M. Falelakis, C. Diou, I. Lekka, A. Delopoulos, T. Agorastos, and N. Maglaveras. Association studies on cervical cancer facilitated by inference and semantic technologies: the ASSIST approach. *Stud Health Technol Inform*, 136:241–6, 2008.

B. Motik, P.F. Patel-Schneider, B. Parsia, C. Bock, A. Fokoue, P. Haase, R. Hoekstra, I. Horrocks, A. Ruttenberg, U. Sattler, et al. OWL 2 web ontology language: Structural specification and functional-style syntax. *W3C Working Draft, W3C*, 2008.

Damian O'Dea, Sean Geoghegan, and Chris Ekins. Dealing with geospatial information in the semantic web. In Thomas Meyer and Mehmet A. Orgun, editors, *AOW '05: Proceedings of the 2005 Australasian Ontology Workshop*, pages 69–73, Darlinghurst, Australia, 2005. Australian Computer Society, Inc. ISBN 1-920-68240-6.

Magdalena Ortiz, Diego Calvanese, and Thomas Eiter. Characterizing data complexity for conjunctive query answering in expressive description logics. In *Proceedings, The Twenty-First National Conference on Artificial Intelligence and the Eighteenth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference*, pages 275–280, Boston, Massachusetts, USA, 2006. AAAI Press.

J. Pan, G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, and I. Horrocks. f-swrl: A fuzzy extension of swrl. *Journal on Data Semantics VI*, pages 28–46, 2006.

Jeff Z. Pan, Giorgos Stamou, Giorgos Stoilos, , and Edward Thomas. Expressive querying over fuzzy dl-lite ontologies. In Diego Calvanese, Enrico Franconi, Volker Haarslev, Domenico Lembo, Boris Motik, Anni-Yasmin Turhan, and Sergio Tessaris, editors, *Proceedings of the 2007 International Workshop on Description Logics (DL2007)*, Bozen-Bolzano, Italy, 2007a. CEUR-WS.org.

Jeff Z. Pan, Giorgos B. Stamou, Giorgos Stoilos, and Edward Thomas. Expressive querying over fuzzy dl-lite ontologies. In Diego Calvanese, Enrico Franconi, Volker Haarslev, Domenico Lembo, Boris Motik, Anni-Yasmin Turhan, and Sergio Tessaris, editors, *Description Logics*, volume 250 of *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org, 2007b.

P.F. Patel-Schneider, P. Hayes, I. Horrocks, et al. OWL web ontology language semantics and abstract syntax. *W3C recommendation*, 10, 2004.

D. Sánchez and A. Tettamanzi. Generalizing quantification in fuzzy description logics. *Computational Intelligence, Theory and Applications*, pages 397–411, 2005.

D. Sánchez and A. Tettamanzi. Reasoning and quantification in fuzzy description logics. *Fuzzy Logic and Applications*, pages 81–88, 2006a.

D. Sánchez and A.G.B. Tettamanzi. Fuzzy quantification in fuzzy description logics. *Capturing Intelligence*, 1:135–159, 2006b.

M. Schmidt-Schaufl and G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial intelligence*, 48(1):1–26, 1991. ISSN 0004-3702.

N. Simou, Th. Athanasiadis, G. Stoilos, and S. Kollias. Image indexing and retrieval using expressive fuzzy description logics. *Signal, Image and Video Processing, Springer, Volume 2, Number 4, pp. 321-335, December 2008*, 2008.

N. Simou, T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Optimization techniques for fuzzy description logics. In *23rd International Workshop on Description Logics DL2010*, page 244. 23rd International Workshop on Description Logics (DL 10), Waterloo, Canada, 2010, 2010. URL `http://www.image.ece.ntua.gr/publications.php`.

E. Spyrou, H. Le Borgne, T. Mailis, E. Cooke, Y. Avrithis, and N. O'Connor. Fusing mpeg-7 visual descriptors for image classification. *Artificial Neural Networks: Formal Models and Their Applications–ICANN 2005*, pages 747–747, 2005a.

E. Spyrou, H. LeBorgne, T. Mailis, E. Cooke, Y. Avrithis, and N. O'Connor. *Fusing MPEG-7 visual descriptors for image classiffication.* W.Duch, J.Kacprzyk, E.Oja, and S.Zadrozny(Eds.), Artificial Neural Networks,Part II: Formal Models and their Applications, Springer, Vol. 3697, 2005, pp 847-852, 2005b. URL `http://www.image.ece.ntua.gr/publications.php`.

G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan, and I. Horrocks. A fuzzy description logic for multimedia knowledge representation. In *Proceedings of the International Workshop on Multimedia and the Semantic Web*, 2005a.

Giorgos Stoilos, Giorgos B. Stamou, Vassilis Tzouvaras, Jeff Z. Pan, and Ian Horrocks. The fuzzy description logic f-shin. In Paulo Cesar G. da Costa, Kathryn B. Laskey, Kenneth J. Laskey, and Michael Pool, editors, *International Semantic Web Conference, ISWC 2005, Workshop 3: Uncertainty Reasoning for the Semantic Web*, pages 67–76, Galway, Ireland, 2005b.

Giorgos Stoilos, Umberto Straccia, Giorgos B. Stamou, and Jeff Z. Pan. General concept inclusions in fuzzy description logics. In Gerhard Brewka, Silvia Coradeschi, Anna Perini, and Paolo Traverso, editors, *ECAI 2006, 17th European Conference on Artificial Intelligence*, pages 457–461, Riva del Garda, Italy, 2006. IOS Press.

Giorgos Stoilos, Giorgos Stamou, Jeff Z. Pan, Vassilis Tzouvaras, and Ian Horrocks. Horrocks i.: Reasoning with very expressive fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 30:273–320, 2007.

Giorgos Stoilos, Giorgos B. Stamou, and Jeff Z. Pan. Classifying fuzzy subsumption in fuzzy-el+. In Franz Baader, Carsten Lutz, and Boris Motik, editors, *Description Logics*, volume 353 of *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org, 2008.

U. Straccia. Transforming fuzzy description logics into classical description logics. *Logics in Artificial Intelligence*, pages 385–399, 2004.

Umberto Straccia. Reasoning within fuzzy description logics. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 14:137–166, 2001.

Umberto Straccia. Towards a fuzzy description logic for the semantic web (preliminary report). In Asunción Gómez-Pérez and Jérôme Euzenat, editors, *ESWC*, volume 3532 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 167–181. Springer, 2005a. ISBN 3-540-26124-9.

Umberto Straccia. Description logics with fuzzy concrete domains. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-05)*, pages 559–567, 2005b.

Umberto Straccia. Towards top-k query answering in description logics: The case of dl-lite. In Michael Fisher, Wiebe van der Hoek, Boris Konev, and Alexei Lisitsa, editors, *JELIA*, volume 4160 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 439–451. Springer, 2006a. ISBN 3-540-39625-X.

Umberto Straccia. Uncertainty and description logic programs over lattices. In Elie Sanchez, editor, *Fuzzy Logic and the Semantic Web*, Capturing Intelligence, chapter 7, pages 115–133. Elsevier, 2006b.

Umberto Straccia. A fuzzy description logic for the semantic web. In Elie Sanchez, editor, *Fuzzy Logic and the Semantic Web*, Capturing Intelligence, chapter 4, pages 73–90. Elsevier, 2006c.

Umberto Straccia. Fuzzy description logic programs. In *Proceedings of the 11th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, (IPMU-06)*, pages 1818–1825, 2006d.

Kamal Taha and Ramez Elmasri. Bussengine: a business search engine. *Knowledge and Information Systems*, 23:153–197, 2008.

C.B. Tresp, R. Molitor, et al. A description logic for vague knowledge. In *In Proc. of the 13th European Conf. on Artificial Intelligence (ECAI-98*. Citeseer, 1998.

Dmitry Tsarkov, Ian Horrocks, and Peter F. Patel-Schneider. Optimizing terminological reasoning for expressive description logics. *Journal of Automated Reasoning*, 39(3): 277–316, 2007. doi: 10.1007/s10817-007-9077-y.

A.M. Turing. Computing machinery and intelligence. *Parsing the Turing Test*, pages 23–65, 2009.

Veronika Vaneková and Peter Vojtáš. Comparison of scoring and order approach in description logic el(d). In Jan van Leeuwen, Anca Muscholl, David Peleg, Jaroslav Pokorný, and Bernhard Rumpe, editors, *SOFSEM 2010: Theory and Practice of Computer Science*, volume 5901 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 709–720. Springer Berlin / Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-11265-2. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11266-9_59`.

Tassos Venetis, Giorgos Stoilos, Giorgos B. Stamou, and Stefanos D. Kollias. f-dlps: Extending description logic programs with fuzzy sets and fuzzy logic. In *FUZZ-IEEE 2007, IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–6, London, UK, 2007. IEEE.

Peter Vojtáš. *EL description logic with aggregation of user preference concepts*, volume 154 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications ISSN 0922-6389*, chapter EL description logic with aggregation of user preference concepts, pages 154–166. IOS Press Amsterdam, 1 edition, 2007. ISBN ISBN 978-1-58603-710-9.

J. Yen. Generalizing term subsumption languages to fuzzy logic. In *In Proc of the 12th Int. Joint Conf on Artificial Intelligence (IJCAI-91)*, pages 472–477. Citeseer, 1991.

Ευρετήριο

Κατάλογος δημοσιεύσεων του συγγραφέα

Περιοδικά

- Theofilos P. Mailis, Giorgos Stoilos, Nikos Simou, Giorgos B. Stamou, and Stefanos D. Kollias. Tractable reasoning with vague knowledge using fuzzy $\mathcal{EL}^{++}$. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2012. **(υπό δημοσίευση)**

- T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Expressive reasoning with horn rules and fuzzy description logics. *Knowledge and Information Systems*, 25(1):105–136, 2010.

- S.V. Ioannou, A.T. Raouzaiou, V.A. Tzouvaras, T.P. Mailis, K.C. Karpouzis, and S.D. Kollias. Emotion recognition through facial expression analysis based on a neurofuzzy network. *Neural Networks*, 18(4):423–435, 2005.

Βιβλία

- E. Spyrou, H. LeBorgne, T. Mailis, E. Cooke, Y. Avrithis, and N. O'Connor. *Fusing MPEG-7 visual descriptors for image classiffication.* W.Duch, J.Kacprzyk, E.Oja, and S.Zadrozny(Eds.), Artificial Neural Networks,Part II: Formal Models and their Applications, Springer, Vol. 3697, 2005, pp 847-852, 2005b.

Συνέδρια

- P. Cimiano, P. Haase, Q. Ji, T. Mailis, G. Stamou, G. Stoilos, T. Tran, and V. Tzouvaras. Reasoning with large a-boxes in fuzzy description logics using dl reasoners: An experimental evaluation. In *Proceedings of the 1st Workshop on Advancing Reasoning on the Web: Scalability and Commonsense (ARea2008)*, 2008.

- T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Expressive reasoning with horn rules and fuzzy description logics. In Massimo Marchiori, Jeff Z. Pan, and Christian de Sainte Marie, editors, *Web Reasoning and Rule Systems, RR, Proceedings*, volume 4524 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–57, Innsbruck, Austria, 2007. Springer.

- Theofilos P. Mailis, Giorgos Stoilos, Nikos Simou, and Giorgos B. Stamou. Tractable reasoning based on the fuzzy el++ algorithm. In *Proceedings of the Fourth International Workshop on Uncertainty Reasoning for the Semantic Web, Karlsruhe, Germany, October 26, 2008*, 2008.

- N. Simou, T. Mailis, G. Stoilos, and G. Stamou. Optimization techniques for fuzzy description logics. In *23rd International Workshop on Description Logics DL2010*, page 244. 23rd International Workshop on Description Logics (DL 10), Waterloo, Canada, 2010, 2010.

- E. Spyrou, H. Le Borgne, T. Mailis, E. Cooke, Y. Avrithis, and N. O'Connor. Fusing mpeg-7 visual descriptors for image classification. *Artificial Neural Networks: Formal Models and Their Applications–ICANN 2005*, pages 747–747, 2005a.

Βιογραφικό Σημείωμα

Προσωπικά Στοιχεία

Όνομα	:	Θεόφιλος Μαΐλης
Ημερομηνία Γέννησης	:	4 Ιανουαρίου 1981
Οικογενιακή Κατάσταση	:	Άγγαμος
Υπηκοότητα	:	Ελληνική

Σπουδές

Νοέμβριος 2005 - Μάρτιος 2012	:	Υποψήφιος Διδάκτωρ της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σεπτέμβριος 1998 - Ιούνιος 2004	:	Πτυχίο Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συμμετοχή σε Ερευνητικά Προγράμματα

2011 - Σήμερα	:	ECLAP (CIP-ICT-PSP Best Practice Network)
2007 - 2008	:	X-Media (FP6 IP)
2006 - 2008	:	VideoStar (ΓΓΕΤ)
2006 - 2009	:	ASSIST (FP6)
2004 - 2005	:	ERMIS (IST-2000)

Συμμετοχή σε Διεθνείς Ερευνητικές Ομάδες

2005 - 2007	:	Fuzzy RuleML TG

Διδακτική Δραστηριότητα

2008 - 2011	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Νευρωνικά Δίκτυα
2007 - 2009	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Έμπειρα Συστήματα και Εφαρμογές στη Πληροφορική
2005 - 2008	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Τεχνολογία και Ανάλυση Εικόνων & Βίντεο
2005 - 2006	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Γραφική με Υπολογιστές
2005 - 2006	:	Βοηθός εργαστηρίου στο μάθημα Προγραμματισμός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών

Περίληψη Δημοσιεύσεων

Ο Θεόφιλος Μαΐλης έχει δημοσιεύσει μέχρι τον Μάρτιο του 2012 τρία άρθρα στα έγκριτα επιστημονικά περιοδικά *Springer Knowledge and Information Systems*, *Springer Intelligent Information Systems*, *Elsevier Neural Networks* με impact factors 2.008, 0.875, 1.955 αντίστοιχα (στοιχεία 2010). Έχει συμμετάσχει στη συγγραφή ενός κεφαλαίου βιβλίου, ενώ εργασίες του έχουν δημοσιευτεί σε διάφορα συνέδρια όπως International Conference on Web Reasoning and Rule Systems, International Conference on Artificial Neural Networks, και International Workshop on Description Logics.

□