



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Εύρωστος Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας με Ισοτικούς Περιορισμούς

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεόδωρος Α. Αλεξόπουλος

Επιβλέπων: Γεώργιος Κορρές
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2012



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Εύρωστος Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας με Ισοτικούς Περιορισμούς

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεόδωρος Α. Αλεξόπουλος

Επιβλέπων: Γεώργιος Κορρές
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Νοεμβρίου 2012.

.....
Γ. Κορρές
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Βουρνάς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Π. Γεωργιάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2012

.....
Θεόδωρος Α. Αλεξόπουλος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright© Θεόδωρος Α. Αλεξόπουλος, 2012

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η συμβατική εκτίμηση κατάστασης παρέχει με ακρίβεια μία εκτίμηση για την κατάσταση του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας, βασιζόμενη σε ένα πλεονάζον σύνολο τηλεμετρήσεων, οι οποίες συλλέγονται μέσω του συστήματος εποπτείας και ανάκτησης δεδομένων (SCADA) από απομακρυσμένες τερματικές μονάδες (RTUs) εγκατεστημένες σε υποσταθμούς. Με την αυξανόμενη χρήση μονάδων συγχρονισμένων μετρήσεων (PMUs), η ακρίβεια της εκτίμησης, η ανίχνευση εσφαλμένων δεδομένων, και η παρατηρησιμότητα του συστήματος βελτιώνονται σημαντικά. Μία μονάδα συγχρονισμένων μετρήσεων εγκατεστημένη σε ένα ζυγό παρέχει μετρήσεις για το φασιθέτη τάσης του ζυγού και για τους φασιθέτες του ρεύματος σε ορισμένες ή όλες τις γραμμές που προσπίπτουν στον εν λόγω ζυγό, ως προς αναφορά χρόνου που παρέχεται από το παγκόσμιο σύστημα προσδιορισμού θέσης (GPS).

Στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, υπάρχει μεγάλος αριθμός ζυγών με μηδενική έγχυση ισχύος, γεγονός που παρέχει πληροφορία υψηλής ακρίβειας χωρίς επιπρόσθετο κόστος και, συνεπώς, λαμβάνοντάς την υπόψη αυξάνεται η ακρίβεια και τα χαρακτηριστικά σύγκλισης του εκτιμητή κατάστασης. Λόγω του υψηλού κόστους της υποδομής μετρήσεων και των εγκαταστάσεων τηλεπικοινωνίας και διαχείρισης δεδομένων, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, ώστε να μειωθούν οι ανάγκες ως προς το συνολικό αριθμό εγκατεστημένων μετρητικών συσκευών για την πλήρη παρατηρησιμότητα του συστήματος.

Η εκτίμηση κατάστασης παραδοσιακά μοντελοποιείται ως μη γραμμικό πρόβλημα σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (WLS), το οποίο επιλύεται επαναληπτικά με τη μέθοδο των κανονικών εξισώσεων (NE). Η μήτρα συντελεστών προκύπτει ως θετικά ορισμένη και η τριγωνική παραγοντοποίηση δεν απαιτεί την επιλογή των οδηγών στοιχείων με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια.

Η απόδοση υψηλών τιμών σε βάρη για τη μοντελοποίηση των μηδενικών εγχύσεων οδηγεί σε αύξηση του δείκτη κατάστασης της μήτρας συντελεστών. Ένας τρόπος για την αποφυγή χρήσης υψηλών τιμών στα βάρη είναι η μοντελοποίηση των μηδενικών εγχύσεων ως ισοτικών περιορισμών με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και, εν συνεχεία, η επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (NE/C). Το μειονέκτημα της μεθόδου NE/C βασίζεται στο γεγονός ότι η μήτρα συντελεστών προκύπτει ως αόριστη, με αποτέλεσμα να απαιτείται για την τριγωνική παραγοντοποίηση η συνδυασμένη επιλογή των οδηγών στοιχείων ώστε να εξασφαλίζεται η αριθμητική ευστάθεια και η αραιότητα των παραγόντων. Οι μέθοδοι που εκτελούν παραγοντοποίηση αορίστων μητρών κάνουν χρήση οδηγών στοιχείων διαστάσεων 1×1 ή 2×2 ώστε να διατηρηθεί η συμμετρία της μήτρας συντελεστών. Οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων της μήτρας συντελεστών λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της επιλογής των οδηγών στοιχείων, με αποτέλεσμα την αδυναμία ύπαρξης ξεχωριστής συμβολικής και αριθμητικής φάσης για την παραγοντοποίηση. Η ανάγκη για την επιλογή των οδηγών στοιχείων με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική αύξηση του πραγματικού αριθμού των μη μηδενικών στοιχείων στους παράγοντες σε σχέση με τον προβλεπόμενο αριθμό με βάση τη συμβολική δομή της μήτρας συντελεστών.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εφαρμόζουμε τον περιορισμό κατά Bridson στην αναδιάταξη κόμβων για μήτρες σαγματικού σημείου, ο οποίος εξασφαλίζει τον εφικτό υπολογισμό της LDL^T παραγοντοποίησης μίας τροποποιημένης αόριστης μήτρας συντελεστών για τη NE/C μέθοδο χωρίς την ανάγκη για την επιλογή των οδηγών στοιχείων με βάση την αριθμητική ευστάθεια. Σε σύγκριση με τις μεθόδους NE και NE/C, η προτεινόμενη μέθοδος δίνει καλύτερα αποτελέσματα ως προς τα χαρακτηριστικά σύγκλισης και τον υπολογιστικό χρόνο. Τα δίκτυα IEEE 300 ζυγών και FRCC 3949 ζυγών χρησιμοποιήθηκαν για την πραγματοποίηση των συγκρίσεων.

Λέξεις – Κλειδιά

Εκτίμηση κατάστασης, ισοτικοί περιορισμοί, μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, μήτρα σαγματικού σημείου, διάταξη υπό περιορισμούς.

Abstract

Conventional state estimation finds an accurate and consistent state of the power system, based on redundant telemetered measurements which are collected through the supervisory control and data acquisition (SCADA) system from remote terminal units (RTUs) installed in substations and comprise power flows and injections as well as voltage magnitudes. With the increasing use of phasor measurement units (PMUs), the estimation accuracy, bad data detection, and system observability are extensively improved. A PMU placed at a bus can provide synchronized measurements of the voltage phasor at the bus and the current phasors (flows) on several or all lines incident to that bus, with respect to the time reference obtained from the global positioning system (GPS).

In realistic power systems, there is a large number of buses with zero net injected power, which provide perfect information with no extra cost and their inclusion will improve the accuracy and convergence characteristics of the state estimator. Due to the high cost of the metering infrastructure and the associated communication and data management facilities, it is necessary to take zero injection into consideration, in order to reduce the total number of the installed measuring devices for complete system observability.

The state estimation problem is traditionally formulated as a nonlinear weighted least squares (WLS) problem, which is solved iteratively by normal equations (NE) method. The system coefficient matrix is positive definite and its triangular factorization does not require pivoting for numerical stability.

The use of very high weights for modeling zero injections, leads to ill-conditioning of the coefficient matrix. One way to avoid the use of high weights is to model zero injections as equality constraints by the method of Lagrange multipliers and solve the problem by the normal equations with equality constraints (NE/C) method. However, the drawback of the NE/C method lies in its coefficient matrix being indefinite, which means that pivoting to preserve numerical stability must be combined with sparsity oriented techniques for its triangular factorization. Methods dealing with indefinite matrices use sophisticated techniques, capable of resorting dynamically to 1×1 or 2×2 pivots to preserve the symmetry of the coefficient matrix. The numerical values of the entries are taken into account during pivot selection, so there are not separate symbolic and numerical phases. A well-known problem with such solvers is that, if numerical pivoting is required, the number of entries in the computed factors can be significantly greater than the number predicted on the basis of the sparsity pattern alone.

In the framework of this diploma thesis, we apply the Bridson's constrained ordering approach for saddle-point systems, which allows the LDL^T factorization of a modified indefinite coefficient matrix to be computed without numerical pivoting. Compared to NE and NE/C method with numerical pivoting, it gives better performance in terms of convergence characteristics and computation time. The IEEE 300-bus and the Florida Reliability Coordinating Council (FRCC) 3949-bus systems are used as test beds for this study.

Key Words

State estimation, equality constraints, zero injection measurements, saddle-point matrix, constrained ordering.

Ευχαριστήριο Σημείωμα

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Γεώργιο Κορρέ, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την αμέριστη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή.....	10
1.1 Λειτουργική Κατάσταση Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας.....	10
1.2 Ανάλυση Ασφάλειας.....	11
1.3 Εκτιμητής Κατάστασης.....	12
1.4 Αντικείμενο μελέτης της Διπλωματικής Εργασίας.....	13
Κεφάλαιο 2 - Εκτίμηση Κατάστασης.....	15
2.1 Εισαγωγή.....	15
2.2 Μοντελοποίηση στοιχείων Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας.....	15
2.2.1 Παράσταση γραμμής μεταφοράς.....	15
2.2.2 Παράσταση εγκάρσιας χωρητικότητας ή αυτεπαγωγής.....	16
2.2.3 Παράσταση μετασχηματιστή.....	16
2.2.4 Παράσταση γεννήτριας.....	18
2.2.5 Παράσταση φορτίου.....	18
2.3 Κατασκευή μοντέλου του δικτύου.....	19
2.4 Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.....	19
2.4.1 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κανονική κατανομή.....	20
2.4.2 Συνάρτηση πιθανοφάνειας.....	21
2.5 Μοντέλο μετρήσεων και παραδοχές.....	23
2.6 Αλγόριθμος εκτίμησης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων.....	24
2.6.1 Συνάρτηση μετρήσεων $h(x^k)$	25
2.6.2 Ιακωβιανή μήτρα H	27
2.6.3 Μήτρα κέρδους G	29
2.6.4 Παραγοντοποίηση της μήτρας κέρδους G	30
2.6.5 Προσδιορισμός του διανύσματος Δx^k	31
2.7 Αποζευγμένη μέθοδος επίλυσης εκτίμησης κατάστασης.....	31
2.8 DC εκτίμηση.....	34
2.9 Μειονεκτήματα εκτίμησης κατάστασης με κανονικές εξισώσεις.....	34
2.10 Εκτίμηση κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών.....	38
Κεφάλαιο 3 - Παραγοντοποίηση Συμμετρικών και Αορίστων Μητρών.....	40
3.1 Εισαγωγή.....	40
3.2 Συμμετρική μετάθεση.....	42
3.2.1 Συμμετρική μετάθεση για αλλαγή θέσης διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση (1,1).....	44
3.2.2 Συμμετρική μετάθεση για αλλαγή θέσης μη διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση (2,1).....	45
3.3 Παραγοντοποίηση συμμετρικών και αορίστων μητρών.....	45
3.3.1 Παραγοντοποίηση LDL^T με μπλοκ διαγώνια στοιχεία D_{ii}	46
3.4 Καθορισμός της μήτρας μετάθεσης P και της δομής της μήτρας D	49
3.4.1 Καθορισμός με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια.....	49
3.4.1.1 Αλγόριθμος Bunch-Parlett.....	50
3.4.1.2 Αλγόριθμος Bunch-Kaufman.....	58
3.4.2 Καθορισμός με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια και την αραιότητα των παραγόντων.....	59

Κεφάλαιο 4 - Ανάλυση Παρατηρησιμότητας	67
4.1 Εισαγωγή.....	67
4.2 Αριθμητική μέθοδος ανάλυσης παρατηρησιμότητας.....	67
4.2.1 Προσδιορισμός μη παρατηρήσιμων κλάδων.....	69
4.2.2 Αναγνώριση παρατηρήσιμων νησίδων.....	71
4.2.3 Τοποθέτηση μετρήσεων για αποκατάσταση παρατηρησιμότητας.....	71
4.3 Υβριδική μέθοδος ανάλυσης παρατηρησιμότητας.....	79
4.3.1 Έλεγχος παρατηρησιμότητας.....	79
4.3.2 Αναγνώριση παρατηρήσιμων νησίδων.....	81
4.3.3 Τοποθέτηση μετρήσεων για αποκατάσταση παρατηρησιμότητας.....	82
4.3.4 Τροποποίηση μεθόδου παρουσία συγχρονισμένων μετρήσεων.....	91
Κεφάλαιο 5 - Διάταξη Ελαχίστου Βαθμού.....	93
5.1 Εισαγωγή.....	93
5.2 Γράφος απαλοιφής.....	93
5.3 Παράγοντας γράφος.....	95
5.4 Μη διακρίσιμοι κόμβοι-μεταβλητές και εξωτερικός βαθμός.....	97
5.5 Προσεγγιστικός εξωτερικός βαθμός.....	98
5.6 Αλγόριθμος ελαχίστου προσεγγιστικού βαθμού.....	99
5.7 Στρατηγική επιλογής μεταξύ ισοβάθμιων κόμβων.....	124
Κεφάλαιο 6 - Προτεινόμενος Αλγόριθμος.....	130
6.1 Εισαγωγή.....	129
6.2 Τροποποίηση της μήτρας συντελεστών F	129
6.3 Παραγοντοποίηση της μήτρας συντελεστών \hat{F}	133
6.4 Περιορισμός στην αναδιάταξη των κόμβων.....	134
6.5 Τροποποίηση διάταξης ελαχίστου βαθμού.....	138
6.6 Περιγραφή προτεινόμενου αλγορίθμου.....	142
Κεφάλαιο 7 - Παρουσίαση Συγκρίσεων.....	177
7.1 Εισαγωγή.....	177
7.2 Διαμόρφωση μετρήσεων και αποτελέσματα δοκιμών στο δίκτυο IEEE 300 ζυγών.....	179
7.3 Διαμόρφωση μετρήσεων και αποτελέσματα δοκιμών στο δίκτυο FRCC 3949 ζυγών.....	189
Κεφάλαιο 8 - Επίλογος.....	204
8.1 Συμπέρασμα της εργασίας.....	204
8.2 Περαιτέρω διερεύνηση.....	204
8.3 Εμφωλευμένη ανατομή.....	204
8.3.1 Διαχωριστής γράφου.....	205
8.3.2 Διαδικασία αναδιάταξης κόμβων.....	205
8.3.3 Περιορισμός στην αναδιάταξη κόμβων.....	207
Βιβλιογραφία.....	208
Παράρτημα.....	210

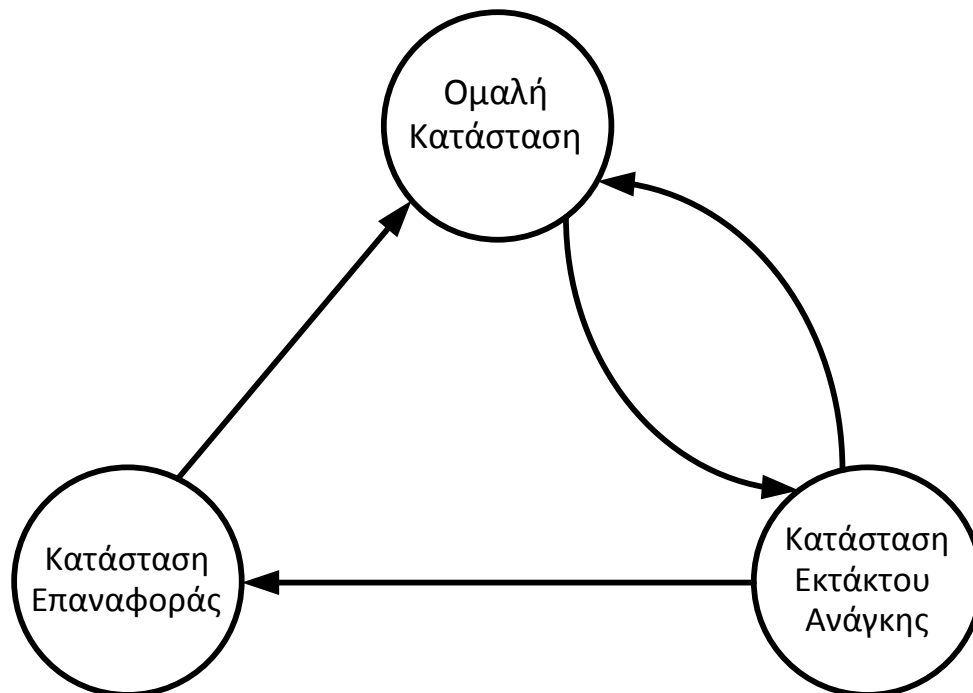
Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

1.1 Λειτουργική Κατάσταση Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας

Η λειτουργική κατάσταση ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας για μία δεδομένη χρονική στιγμή μπορεί να προσδιοριστεί εάν είναι γνωστό το μοντέλο του δικτύου και οι φασιθέτες τάσεις σε όλους τους ζυγούς. Διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις λειτουργικές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να περιέλθει ένα Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας:

- **Ομαλή Κατάσταση:** Το σύστημα βρίσκεται σε ομαλή κατάσταση λειτουργίας εάν όλα τα φορτία μπορούν να τροφοδοτηθούν από την υπάρχουσα παραγωγή χωρίς να παραβιάζεται κανένας λειτουργικός περιορισμός, όπως τα όρια φόρτισης των γραμμών μεταφοράς ή τα όρια των μέτρων των τάσεων στους ζυγούς. Η ομαλή κατάσταση ονομάζεται ασφαλής εάν το σύστημα μπορεί να παραμείνει στην κατάσταση αυτή ακόμα και μετά την παρουσίαση κρίσιμων γεγονότων, όπως η διακοπή λειτουργίας μίας γραμμής μεταφοράς ή μίας γεννήτριας, που μπορεί να οφείλονται είτε σε απροσδόκητα σφάλματα στον εξοπλισμό είτε σε φυσικά αίτια. Διαφορετικά, η ομαλή κατάσταση χαρακτηρίζεται ως μη ασφαλής. Στην περίπτωση της μη ασφαλούς ομαλής κατάστασης, παρότι το ισοζύγιο ισχύος σε κάθε ζυγό καθώς και οι λειτουργικοί περιορισμοί εξακολουθούν να ικανοποιούνται, το σύστημα παραμένει ευάλωτο σε συγκεκριμένα μη προγραμματισμένα γεγονότα. Σε περίπτωση που το σύστημα βρίσκεται σε μη ασφαλή ομαλή κατάσταση λειτουργίας, τότε πρέπει να πραγματοποιηθούν συγκεκριμένες ενέργειες που να εμποδίζουν την αλλαγή της λειτουργικής κατάστασης του συστήματος σε κατάσταση εκτάκτου ανάγκης.
- **Κατάσταση Εκτάκτου Ανάγκης:** Όταν η εμφάνιση διαταραχής οδηγήσει σε παραβίαση ορισμένων λειτουργικών περιορισμών, αλλά το σύστημα συνεχίζει να παρέχει ισχύ σε όλα τα συνδεδεμένα φορτία, τότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση εκτάκτου ανάγκης. Απαιτείται η εφαρμογή διορθωτικών ενεργειών με σκοπό την επιστροφή του συστήματος σε ομαλή κατάσταση λειτουργίας.
- **Κατάσταση Επαναφοράς:** Όσο το σύστημα παραμένει σε κατάσταση εκτάκτου ανάγκης, η κατάρρευσή του μπορεί να αποφευχθεί με διορθωτικές ενέργειες, όπως η αποσύνδεση φορτίων, μετασχηματιστών, γραμμών μεταφοράς ή άλλου εξοπλισμού. Οι εν λόγω διορθωτικές ενέργειες μπορούν να οδηγήσουν στην εξάλειψη των παραβιάσεων στα λειτουργικά όρια και, επομένως, το σύστημα μπορεί να επανέλθει σε ευσταθή λειτουργία, αλλά με μειωμένα φορτία και διαφορετική τοπολογία. Εν συνεχεία, η πλήρης ισορροπία στο ισοζύγιο ισχύος πρέπει να αποκατασταθεί σταδιακά, ώστε να τροφοδοτηθούν όλα τα φορτία που ήταν αρχικά συνδεδεμένα στο σύστημα. Η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα μέχρι να επανέλθει στην αρχική ομαλή κατάσταση ονομάζεται κατάσταση επαναφοράς.

Το ακόλουθο διάγραμμα περιγράφει τις δυνατές μεταβάσεις μεταξύ λειτουργικών καταστάσεων ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας:



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα καταστάσεων λειτουργίας Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί ότι το σύνολο των φασιθετών τάσης καλείται στατική κατάσταση του συστήματος, επειδή καθορίζει πλήρως τη λειτουργία του συστήματος δοσμένου του μοντέλου του δικτύου.

1.2 Ανάλυση Ασφάλειας

Τα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας λειτουργούν υπό την εποπτεία των διαχειριστών στα εκάστοτε Κέντρα Ελέγχου Ενέργειας. Ο στόχος του διαχειριστή είναι να διατηρείται το σύστημα σε ομαλή και ασφαλή κατάσταση λειτουργίας. Για το σκοπό αυτό απαιτείται η συνεχής εποπτεία του συστήματος, η αναγνώριση της κατάστασης λειτουργίας στην οποία βρίσκεται και ο προσδιορισμός των απαραίτητων μέτρων που πρέπει να ληφθούν σε περίπτωση που το σύστημα μεταπέσει σε μη ασφαλή κατάσταση. Η εν λόγω ακολουθία ενεργειών συγκροτεί την ανάλυση ασφάλειας του συστήματος.

Το πρώτο βήμα της ανάλυσης ασφάλειας είναι η εποπτεία της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος. Η εν λόγω ενέργεια απαιτεί τη λήψη μετρήσεων από σημεία του συστήματος και, εν συνεχεία, την επεξεργασία τους για τον προσδιορισμό της λειτουργικής κατάστασής του. Οι κατά τόπους υποσταθμοί είναι εξοπλισμένοι με συσκευές RTU (Remote Terminal Units) ή IED (Intelligent Electronic Devices), οι οποίες συλλέγουν τις μετρήσεις από το δίκτυο και τις αποστέλλουν στο Κέντρο Ελέγχου Ενέργειας. Σε αρκετές περιπτώσεις, συσκευές RTU και IED συνδέονται μέσω τοπικού δικτύου (LAN) και η μεταφορά των δεδομένων προς το Κέντρο Ελέγχου Ενέργειας πραγματοποιείται μέσω ενός τερματικού SCADA

(Supervisory Control and Data Acquisition). Το κεντρικό τερματικό SCADA στο Κέντρο Ελέγχου Ενέργειας λαμβάνει τις μετρήσεις από όλα τα επιμέρους τερματικά των υποσταθμών μέσω τηλεπικοινωνιακού διαύλου.

Οι μετρήσεις που συγκεντρώνονται στο Κέντρο Ελέγχου Ενέργειας περιλαμβάνουν ροές ισχύος στις γραμμές, μέτρα τάσεων στους ζυγούς, μέτρα ρευμάτων στις γραμμές, παραγωγή γεννητριών, φορτία, καταστάσεις αποζευκτών και διακοπών ισχύος, καθώς και δεδομένα από μετασχηματιστές πολλαπλών λήψεων και συστοιχίες αποζεύξιμων πυκνωτών. Τα εν λόγω δεδομένα επεξεργάζονται από τον εκτιμητή κατάσταση, ώστε να φιλτραρισθεί ο θόρυβος που εμπεριέχεται στις μετρήσεις και να εντοπιστούν τυχόν σφάλματα. Ο εκτιμητής κατάσταση παρέχει μία βέλτιστη εκτίμηση για την κατάσταση του συστήματος με βάση τις διαθέσιμες μετρήσεις και το μοντέλο του δικτύου. Η εν λόγω πληροφορία προωθείται σε όλες τις εφαρμογές διαχείρισης ενέργειας του συστήματος (EMS - Energy Management System), όπως ο αυτόματος έλεγχος παραγωγής, η πρόβλεψη φορτίου ή η βέλτιστη ροή φορτίου. Επίσης, μέσω τοπικού δικτύου η πληροφορία του εκτιμητή μεταφέρεται σε επιχειρησιακά γραφεία για εφαρμογές μη πραγματικού χρόνου για την ανάλυση και σχεδίαση του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας.

1.3 Εκτιμητής Κατάστασης

Ο εκτιμητής κατάσταση αποτελεί τον πυρήνα της ανάλυσης ασφάλειας του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Λειτουργεί ως φίλτρο μεταξύ του διαθέσιμου συνόλου μετρήσεων και των εφαρμογών που απαιτούν ως είσοδο δεδομένα υψηλής ακρίβειας που αφορούν την κατάσταση του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας. Οι τυπικές λειτουργίες ενός εκτιμητή κατάσταση έχουν ως εξής:

- Επεξεργασία τοπολογίας: Ο εκτιμητής λαμβάνοντας δεδομένα για την κατάσταση των αποζευκτών και των διακοπών ισχύος προσδιορίζει το τρέχον διάγραμμα με την τοπολογία του συστήματος.
- Ανάλυση παρατηρησιμότητας: Ο εκτιμητής καθορίζει εάν είναι δυνατή η επίλυση του προβλήματος εκτίμησης κατάσταση για το σύστημα με βάση το διαθέσιμο σύνολο μετρήσεων. Σε μη παρατηρήσιμο σύστημα, αναγνωρίζει τους μη παρατηρήσιμους κλάδους και τις παρατηρήσιμες νησίδες, ενώ ορίζει το σύνολο των μετρήσεων που πρέπει να προστεθούν ώστε να αποκατασταθεί η παρατηρησιμότητα.
- Εκτίμηση στατικής κατάστασης: Με βάση το μοντέλο του δικτύου και το υπάρχον σύνολο μετρήσεων ο εκτιμητής προσδιορίζει τη βέλτιστη εκτίμηση για τη στατική κατάσταση του συστήματος, η οποία αποτελείται από τις τάσεις (μέτρο και γωνία) όλων των ζυγών του συστήματος. Επιπρόσθετα, παρέχει βέλτιστες εκτιμήσεις για τις ροές ισχύος στις γραμμές, για τα φορτία, για τις λήψεις των μετασχηματιστών και για την παραγωγή των γεννητριών.
- Ανίχνευση εσφαλμένων μετρήσεων: Ο εκτιμητής εντοπίζει την ύπαρξη σφαλμάτων στο σύνολο των μετρήσεων που παρέχονται. Εν συνεχεία και υπό

την προϋπόθεση ότι υπάρχουν πλεονάζουσες διαθέσιμες μετρήσεις, οι εσφαλμένες μετρήσεις αναγνωρίζονται και εξαλείφονται.

- Εκτίμηση παραμέτρων και ανίχνευση δομικών σφαλμάτων: Παρέχει εκτιμήσεις για παραμέτρους του δικτύου, όπως για τις παραμέτρους των μοντέλων των γραμμών μεταφοράς, των μετασχηματιστών πολλαπλών λήψεων, των εγκάρσιων χωρητικότητων ή αυτεπαγωγών. Επιπροσθέτως, ανιχνεύει δομικά σφάλματα στη διαμόρφωση του δικτύου και αναγνωρίζει εσφαλμένες καταστάσεις αποζευκτών και διακοπών ισχύος, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν πλεονάζουσες διαθέσιμες μετρήσεις.

Εφόσον η εκτίμηση κατάστασης αποτελεί εφαρμογή πραγματικού χρόνου, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη βελτιστοποίηση της υπολογιστικής επίδοσης των αλγορίθμων εκτίμησης, δηλαδή βελτιστοποίηση του χρόνου εκτέλεσης, των απαιτήσεων σε μνήμη και της αριθμητικής ευρωστίας της επίλυσης.

1.4 Αντικείμενο μελέτης της Διπλωματικής Εργασίας

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η μελέτη του προβλήματος εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών, που προκύπτουν από τη μοντελοποίηση των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης, στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας και η παρουσίαση μιας εύρωστης μεθόδου αντιμετώπισής του.

Στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, υπάρχει μεγάλος αριθμός ζυγών με μηδενική έγχυση ισχύος, γεγονός που παρέχει πληροφορία υψηλής ακρίβειας χωρίς επιπρόσθετο κόστος και, συνεπώς, λαμβάνοντάς την υπόψη αυξάνεται η ακρίβεια και τα χαρακτηριστικά σύγκλισης του εκτιμητή κατάστασης. Λόγω του υψηλού κόστους της υποδομής μετρήσεων και των εγκαταστάσεων τηλεπικοινωνίας και διαχείρισης δεδομένων, είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, ώστε να μειωθούν οι ανάγκες ως προς το συνολικό αριθμό εγκατεστημένων μετρητικών συσκευών για την πλήρη παρατηρησιμότητα του συστήματος.

Η εκτίμηση κατάστασης παραδοσιακά μοντελοποιείται ως μη γραμμικό πρόβλημα σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων (WLS), το οποίο επιλύεται επαναληπτικά με τη μέθοδο των κανονικών εξισώσεων (NE). Η μήτρα συντελεστών προκύπτει ως θετικά ορισμένη και η τριγωνική παραγοντοποίηση δεν απαιτεί την επιλογή των οδηγών στοιχείων με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια.

Η απόδοση υψηλών τιμών σε βάρη για τη μοντελοποίηση των μηδενικών εγχύσεων οδηγεί σε αύξηση του δείκτη κατάστασης της μήτρας συντελεστών. Ένας τρόπος για την αποφυγή χρήσης υψηλών τιμών στα βάρη είναι η μοντελοποίηση των μηδενικών εγχύσεων ως ισοτικών περιορισμών με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και, εν συνεχεία, η επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (NE/C). Το μειονέκτημα της μεθόδου NE/C βασίζεται στο γεγονός ότι η μήτρα συντελεστών προκύπτει ως αδύναμη, με αποτέλεσμα να απαιτείται για την τριγωνική παραγοντοποίηση η συνδυασμένη επιλογή των οδηγών στοιχείων ώστε να εξασφαλίζεται η αριθμητική ευστάθεια και η αραιότητα των παραγόντων. Οι

μέθοδοι που εκτελούν παραγοντοποίηση αορίστων μητρών κάνουν χρήση οδηγών στοιχείων διαστάσεων 1×1 ή 2×2 ώστε να διατηρηθεί η συμμετρία της μήτρας συντελεστών. Οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων της μήτρας συντελεστών λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της επιλογής των οδηγών στοιχείων, με αποτέλεσμα την αδυναμία ύπαρξης ξεχωριστής συμβολικής και αριθμητικής φάσης για την παραγοντοποίηση. Η ανάγκη για την επιλογή των οδηγών στοιχείων με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική αύξηση του πραγματικού αριθμού των μη μηδενικών στοιχείων στους παράγοντες σε σχέση με τον προβλεπόμενο αριθμό με βάση τη συμβολική δομή της μήτρας συντελεστών.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εφαρμόζουμε τον περιορισμό κατά Bridson στην αναδιάταξη κόμβων για μήτρες σαγματικού σημείου, ο οποίος εξασφαλίζει τον εφικτό υπολογισμό της LDL^T παραγοντοποίησης μίας τροποποιημένης αόριστης μήτρας συντελεστών για τη NE/C μέθοδο χωρίς την ανάγκη για την επιλογή των οδηγών στοιχείων με βάση την αριθμητική ευστάθεια. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι αριθμητικά ευσταθής και μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί σε ήδη υπάρχοντες εκτιμητές κατάστασης.

Κεφάλαιο 2 – Εκτίμηση Κατάστασης

2.1 Εισαγωγή

Η εκτίμηση στατικής κατάστασης αναφέρεται στη διαδικασία εύρεσης των τάσεων (μέτρο και γωνία) όλων των ζυγών του συστήματος για μία δεδομένη χρονική στιγμή. Η εκτίμηση βασίζεται στη χρήση ενός συνόλου πλεοναζουσών μετρήσεων με σκοπό την αναγνώριση και εξάλειψη τυχόν σφαλμάτων στις μετρήσεις, ώστε να προκύψει μία βέλτιστη εκτίμηση για τη στατική κατάσταση του συστήματος. Η ταυτόχρονη λήψη μετρήσεων σε διαφορετικά σημεία του δικτύου είναι πρακτικά αδύνατη και, επομένως, γίνεται ανεκτή μία μικρή χρονική διαφορά μεταξύ των μετρήσεων σε σύστημα που βρίσκεται υπό ομαλή συνθήκη λειτουργίας.

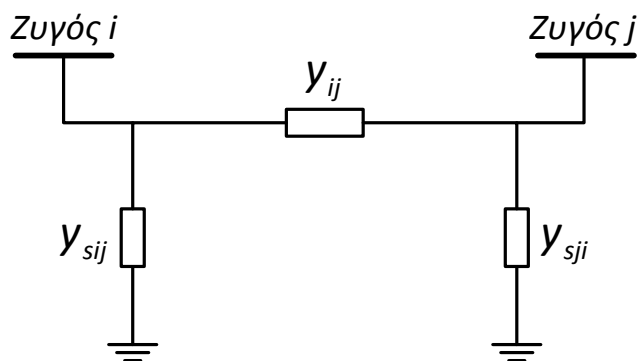
Πραγματοποιείται η παραδοχή ότι η τοπολογία του δικτύου και οι επιμέρους παράμετροι είναι πλήρως καθορισμένα, παρότι είναι δυνατόν να υπάρχουν σφάλματα τόσο στη θεωρούμενη τοπολογία όσο και στις παραμέτρους. Ωστόσο, η ανίχνευση και η αντιμετώπισή τους είναι εκτός του εύρους διερεύνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

2.2 Μοντελοποίηση στοιχείων Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας

Πραγματοποιείται η υπόθεση ότι το Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας βρίσκεται σε μόνιμη και συμμετρική κατάσταση λειτουργίας. Επομένως, για το σκοπό της μοντελοποίησης του συστήματος γίνεται χρήση μόνο μίας φάσης του κυκλώματος θετικής ακολουθίας. Αντίστοιχα, η λύση που θα προκύψει από την εκτίμηση κατάστασης αφορά τη συνιστώσα θετικής ακολουθίας υπό μόνιμη και συμμετρική κατάσταση λειτουργίας. Όλα τα δεδομένα του συστήματος εκφράζονται στο ανά μονάδα σύστημα.

2.2.1 Παράσταση γραμμής μεταφοράς

Η γραμμή μεταφοράς αναπαρίσταται με το δίθυρο μοντέλο του ισοδύναμου κυκλώματος π , οι παράμετροι του οποίου αντιστοιχούν στο ισοδύναμο κύκλωμα θετικής ακολουθίας της γραμμής. Επομένως, η γραμμή μεταφοράς μοντελοποιείται με το ακόλουθο ισοδύναμο κύκλωμα:



Σχήμα 2.1: Ισοδύναμο κύκλωμα π γραμμής μεταφοράς

Στο σχήμα 2.1 η αγωγιμότητα σειράς της γραμμής μεταφοράς παριστάνεται με y_{ij} , ενώ οι εγκάρσιες αγωγιμότητες με y_{sij} και y_{sji} . Οι εν λόγω αγωγιμότητες μπορούν να γραφούν ως:

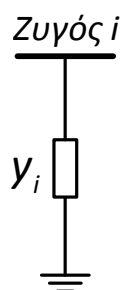
$$y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij}$$

$$y_{sij} = g_{sij} + jb_{sij}$$

$$y_{sji} = g_{sji} + jb_{sji}$$

2.2.2 Παράσταση εγκάρσιας χωρητικότητας ή αυτεπαγωγής

Η εγκάρσια χωρητικότητα ή αυτεπαγωγή αναπαρίσταται με μία εγκάρσια αγωγιμότητα στον αντίστοιχο ζυγό ως εξής:



Σχήμα 2.2: Παράσταση εγκάρσιας χωρητικότητας ή αυτεπαγωγής

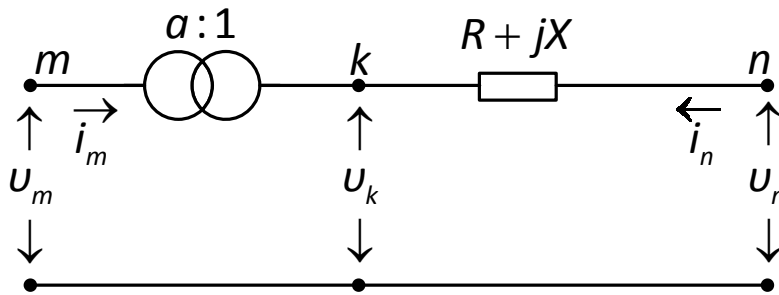
Η αγωγιμότητα y_i είναι της μορφής:

$$y_i = jb_i$$

Το πρόσημο της παραμέτρου b_i εξαρτάται από τον τύπο (χωρητικότητα ή αυτεπαγωγή) του εγκάρσιου στοιχείου. Για την περίπτωση χωρητικότητας προκύπτει θετικό ($b_i > 0$), ενώ για την περίπτωση αυτεπαγωγής προκύπτει αρνητικό ($b_i < 0$).

2.2.3 Παράσταση μετασχηματιστή

Η μοντελοποίηση μετασχηματιστή με συμφασικές λήψεις πραγματοποιείται με την εν σειρά σύνδεση ενός ιδανικού μετασχηματιστή, με λόγο μετασχηματισμού a , με μια ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση $Z = R + jX$. Οι ακροδέκτες του δίθυρου δικτύου που σχηματίζεται, έστω m και n , αντιστοιχούν στους ζυγούς στους οποίους συνδέεται ο πραγματικός μετασχηματιστής.



Σχήμα 2.3: Ισοδύναμο κύκλωμα μετασχηματιστή

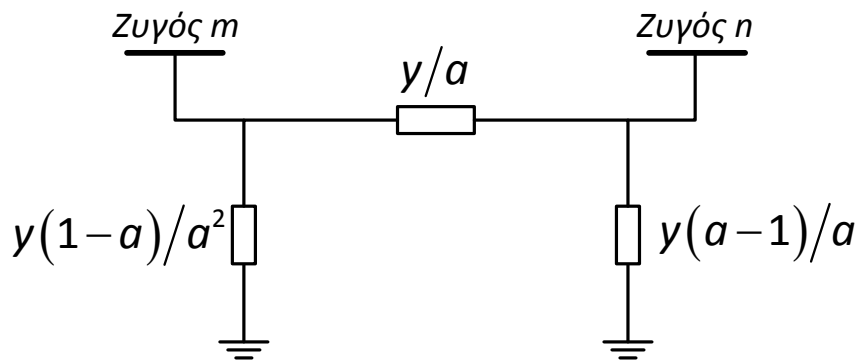
Οι εξισώσεις κόμβων του ανωτέρω δίθυρου δικτύου προκύπτουν εκφράζοντας τα ρεύματα i_{kn} και i_n στα άκρα του κλάδου της σύνθετης αντίστασης συναρτήσει των τάσεων U_k και U_n ως εξής:

$$\begin{pmatrix} i_{kn} \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ U_n \end{pmatrix}, \text{ με } y = 1/Z$$

Αντικαθιστώντας $i_{kn} = ai_m$ και $U_k = U_m/a$ προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} ai_m \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m/a \\ U_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_m \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y/a^2 & -y/a \\ -y/a & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ U_n \end{pmatrix}$$

Η ανωτέρω έκφραση αντιστοιχεί στο ακόλουθο ισοδύναμο κύκλωμα:



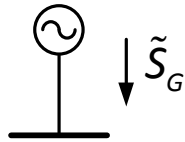
Σχήμα 2.4: Ισοδύναμο κύκλωμα

Για μετασχηματιστή με διαφορά φάσης η μη ονομαστική τιμή των λήψεων a είναι σύνθετη, με αποτέλεσμα να προκύπτει η ακόλουθη έκφραση με μη συμμετρική μήτρα αγωγιμοτήτων:

$$\begin{pmatrix} i_m \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y/|a|^2 & -y/a^* \\ -y/a & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ U_n \end{pmatrix}$$

2.2.4 Παράσταση Γεννήτριας

Η γεννήτρια αναπαρίσταται ως εξής:



Σχήμα 2.5: Παράσταση γεννήτριας

Με \tilde{S}_G συμβολίζεται η μιγαδική παραγόμενη ισχύς και ορίζεται ως:

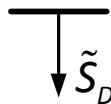
$$\tilde{S}_G = P_G + jQ_G$$

όπου: P_G η ενεργός ισχύς και Q_G η άεργος ισχύς.

2.2.5 Παράσταση Φορτίου

Τα φορτία ταξινομούνται στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:

- Φορτίο σταθερού συντελεστή ισχύος



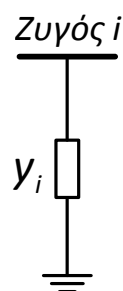
Σχήμα 2.6: Παράσταση φορτίου σταθερού συντελεστή ισχύος

Με \tilde{S}_D συμβολίζεται η μιγαδική ισχύς και ορίζεται ως:

$$\tilde{S}_D = P_D + jQ_D$$

όπου: P_D η ενεργός ισχύς φορτίου και Q_D η άεργος ισχύς φορτίου.

- Φορτίο σταθερής αγωγιμότητας



Σχήμα 2.7: Παράσταση φορτίου σταθερής αγωγιμότητας

Η αγωγιμότητα y_i ορίζεται ως:

$$y_i = g_i + jb_i$$

2.3 Κατασκευή μοντέλου του δικτύου

Με βάση την αναπαράσταση των στοιχείων του Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας, είναι εφικτή η εξαγωγή του μοντέλου του δικτύου ολόκληρου του συστήματος μέσω της εφαρμογής του κανόνα ρευμάτων Kirchhoff σε κάθε ζυγό. Έστω ότι το δίκτυο αποτελείται από N ζυγούς:

$$I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = Y \cdot V$$

όπου: i_k ο φασιθέτης που εκφράζει την καθαρή έγχυση ρεύματος στο ζυγό k

u_k ο φασιθέτης τάσης στο ζυγό k

Πραγματοποιείται η θεώρηση ότι το ρεύμα και η ισχύς που εισέρχονται σε ένα ζυγό λαμβάνονται ως θετικές εγχύσεις. Η μήτρα Y καλείται μήτρα αγωγιμοτήτων ζυγών και έχει τις εξής ιδιότητες:

- Περιλαμβάνει μιγαδικά στοιχεία και μπορεί να γραφεί ως άθροισμα επιμέρους μητρών G και B ως $G + jB$.
- Είναι συμμετρική στη συμβολική της αναπαράσταση. Είναι δυνατό να είναι και αριθμητικά συμμετρική στην περίπτωση όπου απουσιάζουν από το δίκτυο στοιχεία, όπως μετασχηματιστές φάσης που εισάγουν μη συμμετρικές εξισώσεις κόμβων.
- Είναι αραιή μήτρα.
- Είναι αντιστρέψιμη μήτρα, υπό την προϋπόθεση ότι σε κάθε νησίδα του δικτύου υπάρχει μία τουλάχιστον εγκάρσια σύνδεση προς γη.

2.4 Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

Ο σκοπός της εκτίμησης κατάστασης είναι ο προσδιορισμός της πιο πιθανής κατάστασης του συστήματος με βάση τις διαθέσιμες μετρήσεις. Ένας τρόπος για την επίτευξη του στόχου αυτού είναι η χρήση της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας. Πραγματοποιείται η παραδοχή ότι τα σφάλματα που εμπεριέχονται στις μετρήσεις ακολουθούν γνωστή κατανομή πιθανότητας με άγνωστες όμως παραμέτρους. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί για όλες τις μετρήσεις βάσει των άγνωστων παραμέτρων. Η εν λόγω συνάρτηση καλείται

συνάρτηση πιθανοφάνειας και μεγιστοποιείται όταν οι τιμές των άγνωστων παραμέτρων επιλέγονται κατάλληλα ώστε να αποκλίνουν όσο το δυνατόν λιγότερο από τις πραγματικές τους τιμές. Επομένως, προκύπτει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με στόχο τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας συναρτήσει των άγνωστων παραμέτρων της.

Πραγματοποιείται η θεώρηση ότι τα σφάλματα που εμπεριέχονται στις μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss). Οι άγνωστοι παράμετροι που λαμβάνονται υπόψη για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι η μέση τιμή μ και η διακύμανση σ^2 .

2.4.1 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κανονική κατανομή

Έστω z τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της z είναι:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

όπου: μ και σ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της z αντίστοιχα.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που σχετίζεται με την κανονική κατανομή εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων μ και σ . Ωστόσο, μπορεί να τυποποιηθεί πραγματοποιώντας την ακόλουθη αλλαγή τυχαίας μεταβλητής:

$$u = \frac{z - \mu}{\sigma}$$

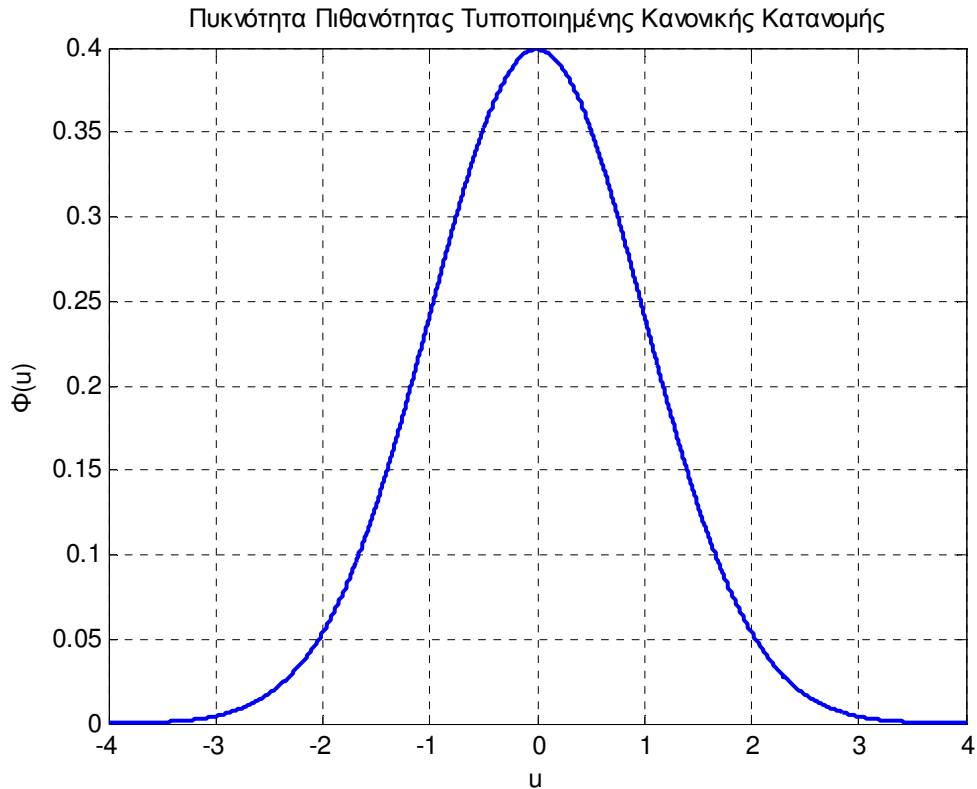
Η μέση ή προσδοκώμενη τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής u έχουν ως εξής:

$$\begin{cases} E(u) = E\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(z)-\mu}{\sigma} & \begin{matrix} E(z)=\mu \\ \Rightarrow \end{matrix} & E(z)=0 \\ Var(u) = Var\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) = \frac{Var(z)}{\sigma^2} & \begin{matrix} Var(z)=\sigma^2 \\ \Rightarrow \end{matrix} & Var(z)=1 \end{cases}$$

Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής u είναι:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

Η ανωτέρω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αντιστοιχεί στην τυποποιημένη κανονική κατανομή και σχηματικά έχει ως εξής:



Σχήμα 2.8 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τυποποιημένη κανονική κατανομή

Εφόσον η ανωτέρω συνάρτηση είναι κυρτή, η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας αποτελεί κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης ως προς τις άγνωστες παραμέτρους.

2.4.2 Συνάρτηση πιθανοφάνειας

Έστω ότι λαμβάνονται m ανεξάρτητες μετρήσεις, όπου κάθε μία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Εφόσον οι επιμέρους μετρήσεις είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2)\dots f(z_m)$$

όπου: z_i η i -οστή μέτρηση και $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$.

Η συνάρτηση $f_m(z)$ αποτελεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας για το διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών z . Ο σκοπός της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας $f_m(z)$ ως προς τις παραμέτρους μ και σ . Για τη διευκόλυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης, λαμβάνεται ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας $f_m(z)$, δηλαδή:

$$\mathcal{L} = \log f_m(z) \Rightarrow \mathcal{L} = \log \prod_{i=1}^m f(z_i) \Rightarrow \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m \log f(z_i) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^m \log \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right) \right) \Rightarrow \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{i=1}^m \log \frac{1}{\sigma_i} \Rightarrow \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 - \frac{m}{2} \log(2\pi) - \sum_{i=1}^m \log \sigma_i\end{aligned}$$

Η ανωτέρω συνάρτηση \mathcal{L} καλείται λογαριθμική συνάντηση πιθανοφάνειας. Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας μεγιστοποιεί τη συνάρτηση \mathcal{L} για ένα δεδομένο σύνολο μετρήσεων z_1, z_2, \dots, z_m .

Έτσι, το πρόβλημα της βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

Μεγιστοποίηση της συνάρτησης $\mathcal{L} \Leftrightarrow$ Ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μπορεί να γραφεί με βάση τα κανονικοποιημένα υπόλοιπα r_i των μετρήσεων, τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$r_i = z_i - \mu_i \Rightarrow r_i = z_i - E(z_i)$$

όπου η μέση τιμή μ_i της μέτρησης z_i , ή ισοδύναμα η προσδοκώμενη τιμή $E(z_i)$, μπορεί να γραφεί ως $h_i(x)$, όπου h_i αποτελεί τη μη γραμμική συνάρτηση που συνδέει το διάνυσμα στατικής κατάστασης x με τη μέτρηση z_i . Το τετράγωνο του κάθε κανονικοποιημένου υπολοίπου r_i^2 σταθμίζεται με βάρος $W_{ii} = \sigma_i^{-2}$.

Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των σταθμισμένων τετραγώνων των κανονικοποιημένων υπολοίπων υπό την παρουσία ισοτικών περιορισμών, δηλαδή:

$$\text{Ελαχιστοποίηση του } \sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2$$

$$\text{Υπό τον ισοτικό περιορισμό } z_i = h_i(x) + r_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Η επίλυση του ανωτέρω προβλήματος ονομάζεται εκτίμηση σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων για το διάνυσμα στατικής κατάστασης x .

2.5 Μοντέλο μετρήσεων και παραδοχές

Έστω σύνολο αποτελούμενο από m μετρήσεις που περιγράφεται από το διάνυσμα $z(m \times 1)$ ως εξής:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = h(x) + e$$

όπου: $h_i(x)$ η μη γραμμική συνάρτηση που συνδέει το διάνυσμα στατικής κατάστασης x με την i -οστή μέτρηση z_i και $e = [e_1, e_2, \dots, e_m]^T$ το διάνυσμα με τα σφάλματα των μετρήσεων.

Για τα σφάλματα μετρήσεων πραγματοποιούνται οι εξής δύο παραδοχές:

- Η μέση τιμή των σφαλμάτων είναι μηδενική, δηλαδή $E(e_i) = 0$ για $i = 1, \dots, m$.
- Τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα, δηλαδή ισχύει $E(e_i e_j) = 0$ για $i \neq j$. Επομένως, για τη συνδιακύμανση ισχύει ότι $Cov(e) = E(ee^T) = R = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\}$.

Η τυπική απόκλιση σ_i αποδίδεται σε κάθε μέτρηση σχετίζεται με την αναμενόμενη ακρίβεια του οργάνου μέτρησης από το οποίο προήλθε η μέτρηση.

Ο εκτιμητής σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιεί την ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση:

$$J(x) = \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(x))^2}{R_{ii}} \Rightarrow J(x) = [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)]$$

Οι αναγκαίες συνθήκες βελτίστου πρώτης τάξης έχουν ως εξής:

$$g(x) = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = -H^T(x) R^{-1} [z - h(x)] = 0, \text{ όπου } H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$$

Αναπτύσσοντας τη μη γραμμική συνάρτηση $g(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το διάνυσμα κατάστασης x^k προκύπτει:

$$g(x) = g(x^k) + G(x^k)(x - x^k) + \dots = 0, \text{ όπου } G(x^k) = \frac{\partial g(x^k)}{\partial x}$$

Παραλείποντας τους μεγιστοτάξιους όρους και θέτοντας $x = x^{k+1}$ προκύπτει:

$$g(x^{k+1}) = g(x^k) + G(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0 \Rightarrow$$

$$x^{k+1} = x^k - (G(x^k))^{-1} g(x^k)$$

όπου: k ο δείκτης επανάληψης, x^k το διάνυσμα κατάστασης στην k -οστή επανάληψη, $G(x^k) = H^T(x^k)R^{-1}H(x^k)$ και $g(x) = -H^T(x^k)R^{-1}[z - h(x)]$.

Η μήτρα $G(x)$ ονομάζεται μήτρα κέρδους. Είναι αραιή, συμμετρική και θετικά ορισμένη δεδομένου ότι το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Η αντίστροφη μήτρα $G^{-1}(x)$ προκύπτει πυκνή, παρά το γεγονός ότι η $G(x)$ είναι αραιή. Για αυτό το λόγο, η μήτρα $G(x)$ παραγοντοποιείται και, εν συνεχεία, πραγματοποιούνται μπρος-πίσω αντικαταστάσεις σε κάθε βήμα k για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$G(x^k)\Delta x^k = H^T(x^k)R^{-1}[z - h(x^k)], \text{ όπου } \Delta x^k = x^{k+1} - x^k$$

Το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων ονομάζεται σύστημα κανονικών εξισώσεων.

2.6 Αλγόριθμος εκτίμησης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων

Ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων επιλύει επαναληπτικά τις κανονικές εξισώσεις. Το διάνυσμα στατικής κατάστασης x αρχικοποιείται θεωρώντας ότι τα μέτρα των τάσεων όλων των ζυγών είναι 1 ανά μονάδα και οι αντίστοιχες γωνίες είναι μηδενικές.

Ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων έχει ως εξής:

Αλγόριθμος Εκτίμησης Κατάστασης Σταθμισμένων Ελαχίστων Τετραγώνων

Βήμα 1 Αρχικοποίηση του μετρητή επαναλήψεων k με $k = 0$.

Βήμα 2 Αρχικοποίηση του διανύσματος κατάστασης x^k με $V_i^k = 1pu$ και $\vartheta_i^k = 0^\circ$.

Βήμα 3 Υπολογισμός της μήτρας κέρδους $G(x^k)$.

Βήμα 4 Υπολογισμός του δεξιού μέλους των κανονικών εξισώσεων:

$$t^k = H^T(x^k)R^{-1}[z - h(x^k)]$$

Βήμα 5 Παραγοντοποίηση της $G(x^k)$.

Βήμα 6 Επίλυση των κανονικών εξισώσεων ως προς Δx^k .

Βήμα 7 Έλεγχος τερματισμού με βάση το κριτήριο σύγκλισης $\max_i |\Delta x_i^k| \leq \varepsilon$.

Βήμα 8 Αν δεν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, τότε ενημερώνεται το διάνυσμα κατάστασης ως $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$, αυξάνεται ο δείκτης επαναλήψεων $k \leftarrow k + 1$ και πραγματοποιείται μετάβαση στο βήμα 3. Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων περιλαμβάνει τους εξής υπολογισμούς σε κάθε επανάληψη k :

- Υπολογισμός του δεξιού μέλους t^k των κανονικών εξισώσεων, ο οποίος απαιτεί τον υπολογισμό των τιμών των μη γραμμικών συναρτήσεων $h(x^k)$ και, εν συνεχεία, την κατασκευή της ιακωβιανής μήτρας $H(x^k)$.
- Υπολογισμός και παραγοντοποίηση της μήτρας κέρδους $G(x^k)$ και, εν συνεχεία, εφαρμογή προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεων για τον προσδιορισμό του διανύσματος Δx^k .

2.6.1 Συνάρτηση μετρήσεων $h(x^k)$

Οι πιο συνηθισμένες μετρήσεις που λαμβάνονται είναι ροές ισχύος στις γραμμές, εγχύσεις ισχύος στους ζυγούς, μέτρα τάσεων ζυγών και μέτρα ρευμάτων στις γραμμές. Οι εν λόγω μετρήσεις μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του διανύσματος κατάστασης του συστήματος. Το διάνυσμα κατάστασης x θεωρώντας ότι ο ζυγός 1 έχει επιλεγεί ως ζυγός αναφοράς για τις γωνίες των τάσεων, δηλαδή $\vartheta_1 = 0^\circ$, προκύπτει ως εξής:

$$x = [\vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_N, V_1, V_2, \dots, V_N]^T$$

Οι συναρτήσεις $h_i(x)$ για κάθε επιμέρους τύπο μέτρησης ορίζονται ως εξής:

- Έγχυση ενεργού και άεργου ισχύος στο ζυγό i :

$$P_i = V_i \sum_{j \in N_i} V_j (G_{ij} \cos \vartheta_{ij} + B_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

$$Q_i = V_i \sum_{j \in N_i} V_j (G_{ij} \sin \vartheta_{ij} - B_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

- Ροή ενεργού και άεργου ισχύος σε κάθε επιμέρους γραμμή που συνδέει το ζυγό i με το ζυγό j :

$$P_{ij} = V_i^2 (g_{si} + g_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \cos \vartheta_{ij} + b_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{si} + b_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \sin \vartheta_{ij} - b_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

- Μέτρο ρεύματος σε κάθε επιμέρους γραμμή που συνδέει το ζυγό i με το ζυγό j :

$$I_{ij} = \frac{\sqrt{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}}{V_i}$$

Αγνοώντας την εγκάρσια αγωγιμότητα $g_{si} + jb_{si}$ προκύπτει:

$$I_{ij} = \sqrt{(g_{ij}^2 + b_{ij}^2)(V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \vartheta_{ij})}$$

Τα μεγέθη που εμφανίζονται στις ανωτέρω ποσότητες ορίζονται ως εξής: V_i και ϑ_i το μέτρο και η γωνία της τάσης του ζυγού i , $\vartheta_{ij} = \vartheta_i - \vartheta_j$, $G_{ij} + jB_{ij}$ το στοιχείο στη θέση ij της μήτρας αγωγιμότητας ζυγών, $g_{ij} + jb_{ij}$ η αγωγιμότητα του κλάδου που συνδέει τους ζυγούς i και j , $g_{si} + jb_{si}$ η εγκάρσια αγωγιμότητα που είναι συνδεδεμένη στο ζυγό i , N_i το σύνολο των ζυγών που είναι συνδεδεμένοι με το ζυγό i .

2.6.2 Ιακωβιανή μήτρα H

Η δομή της ιακωβιανής μήτρας H έχει ως εξής:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{inj}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial P_{inj}}{\partial V} \\ \frac{\partial P_{flow}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial P_{flow}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{inj}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial Q_{inj}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{flow}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial Q_{flow}}{\partial V} \\ \frac{\partial I_{mag}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial I_{mag}}{\partial V} \\ 0 & \frac{\partial V_{mag}}{\partial V} \end{pmatrix}$$

Τα επιμέρους στοιχεία της ιακωβιανής μήτρας προσδιορίζονται ως εξής:

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις εγχύσεων ενεργού ισχύος:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \vartheta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \vartheta_{ij} + B_{ij} \cos \vartheta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \vartheta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \vartheta_{ij} - B_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \vartheta_{ij} + B_{ij} \sin \vartheta_{ij}) + V_i G_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \vartheta_{ij} + B_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις εγχύσεων άεργου ισχύος:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \vartheta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \vartheta_{ij} + B_{ij} \sin \vartheta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \vartheta_j} = V_i V_j (-G_{ij} \cos \vartheta_{ij} - B_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \vartheta_{ij} - B_{ij} \cos \vartheta_{ij}) - V_i B_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \vartheta_{ij} - B_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις ρών ενεργού ισχύος:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \vartheta_i} = V_i V_j (g_{ij} \sin \vartheta_{ij} - b_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \vartheta_j} = -V_i V_j (g_{ij} \sin \vartheta_{ij} - b_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} = -V_j (g_{ij} \cos \vartheta_{ij} + b_{ij} \sin \vartheta_{ij}) + 2(g_{ij} + g_{si}) V_i$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \cos \vartheta_{ij} + b_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις ρών άεργου ισχύος:

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \vartheta_i} = -V_i V_j (g_{ij} \cos \vartheta_{ij} + b_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \vartheta_j} = V_i V_j (g_{ij} \cos \vartheta_{ij} + b_{ij} \sin \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} = -V_j (g_{ij} \sin \vartheta_{ij} - b_{ij} \cos \vartheta_{ij}) - 2(b_{ij} + b_{si}) V_i$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} = -V_i (g_{ij} \sin \vartheta_{ij} - b_{ij} \cos \vartheta_{ij})$$

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις μέτρου τάσης:

$$\frac{\partial V_i}{\partial V_i} = 1, \quad \frac{\partial V_i}{\partial V_j} = 0, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \vartheta_j} = 0$$

- Στοιχεία που αντιστοιχούν σε μετρήσεις μέτρου ρεύματος (αγνοώντας τις εγκάρσιες αγωγιμότητες στους κλάδους):

$$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \vartheta_i} = \frac{g_{ij}^2 + b_{ij}^2}{I_{ij}} V_i V_j \sin \vartheta_{ij}$$

$$\frac{\partial I_{ij}}{\partial \vartheta_j} = -\frac{g_{ij}^2 + b_{ij}^2}{I_{ij}} V_i V_j \sin \vartheta_{ij}$$

$$\frac{\partial I_{ij}}{\partial V_i} = \frac{g_{ij}^2 + b_{ij}^2}{I_{ij}} (V_i - V_j \cos \vartheta_{ij})$$

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial V_j} = \frac{g_{ij}^2 + b_{ij}^2}{l_{ij}} (V_j - V_i \cos \vartheta_{ij})$$

2.6.3 Μήτρα κέρδους G

Η μήτρα κέρδους κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την ιακωβιανή μήτρα H και τη μήτρα διακύμανσης σφαλμάτων R ως εξής:

$$G(x^k) = H^T R^{-1} H$$

Η μήτρα κέρδους G εμφανίζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Είναι δομικά και αριθμητικά συμμετρική μήτρα.
- Είναι αραιή μήτρα.
- Είναι μη αρνητικά ορισμένη μήτρα, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές της είναι μη αρνητικές. Για πλήρως παρατηρήσιμα δίκτυα η μήτρα κέρδους είναι θετικά ορισμένη.

Για λόγους βελτίωσης της υπολογιστικής επίδοσης και της διαχείρισης μνήμης η μήτρα κέρδους G κατασκευάζεται και αποθηκεύεται σε αραιή μορφή. Σχηματίζεται με την επεξεργασία μίας μέτρησης κάθε φορά.

Άρα, με βάση τις μήτρες H και R :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R_{mm} \end{pmatrix}$$

η μήτρα κέρδους κατασκευάζεται ως:

$$G = \sum_{i=1}^m H_i^T R_{ii}^{-1} H_i$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία της μήτρας G υπολογίζονται και αποθηκεύονται σε αραιή μορφή.

2.6.4 Παραγοντοποίηση της μήτρας κέρδους G

Η μήτρα κέρδους G παραγοντοποιείται στη μορφή $G = LDL^T$, όπου οι επιμέρους παράγοντες έχουν την ακόλουθη δομή:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \times & 1 & & & \\ \times & \times & 1 & & \\ & & \dots & \ddots & \\ \times & \times & \times & \times & 1 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times & \times \\ & 1 & \times & \times & \times \\ & & 1 & \times & \times \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \times & & & & \\ & \times & & & \\ & & \times & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \times \end{pmatrix}$$

Υπό την προϋπόθεση πως το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο, η μήτρα κέρδους G είναι θετικά ορισμένη. Επομένως, ισχύουν τα ακόλουθα:

- I. Όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι αυστηρά θετικά ($G(i,i) > 0$ για κάθε i).
- II. Το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο της μήτρας είναι διαγώνιο στοιχείο.
- III. Όλες οι ιδιοτιμές της G είναι πραγματικές και αυστηρά θετικές.
- IV. Κάθε επιμέρους μήτρα που επιλέγεται συμμετρικά από τις σειρές και στήλες της G είναι εξίσου θετικά ορισμένη. Εν προκειμένω, όλες οι επιμέρους 1×1 , 2×2 , ..., $n \times n$ μήτρες που επιλέγονται ξεκινώντας από το άνω αριστερά στοιχείο της είναι θετικά ορισμένες.
- V. Σε κάθε βήμα της παραγοντοποίησης, η εναπομένουσα μήτρα προς παραγοντοποίηση παραμένει θετικά ορισμένη.

Με βάση τις ιδιότητες I και V η παραγοντοποίηση $G = LDL^T$ υπάρχει πάντα, εφόσον η κέρδους G είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη. Μάλιστα, τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας D προκύπτουν αυστηρά θετικά.

Εφόσον η μήτρα κέρδους G είναι θετικά ορισμένη για πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα, η επιλογή των οδηγών στοιχείων μπορεί να γίνει με οποιαδήποτε σειρά χωρίς να προκύπτει μη εφικτή αριθμητική παραγοντοποίηση ή να προκύπτει μη ευσταθής παραγοντοποίηση. Ο λόγος που είναι επιθυμητή η συμμετρική αναδιάταξη της μήτρας κέρδους πριν την αριθμητική παραγοντοποίηση έγκειται στο στόχο μείωσης των μη μηδενικών στοιχείων ℓ_{ij} που εμφανίζονται στον παράγοντα L για $(PGP^T)_{ij} = 0$, όπου P αποτελεί μήτρα μετάθεσης.

Η παραγοντοποίηση δεν είναι εφικτή για συστήματα που δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμα. Επιπροσθέτως, οι παράγοντες L και D της G δεν είναι μοναδικοί και εξαρτώνται από τον τρόπο με τον οποίο διατάσσονται οι γραμμές και στήλες της G για λόγους ελαχιστοποίησης των μη μηδενικών στοιχείων που προκύπτουν στον παράγοντα L .

2.6.5 Προσδιορισμός του διανύσματος Δx^k

Έχοντας υπολογίσει το δεξιό μέλος των κανονικών εξισώσεων, δηλαδή το διάνυσμα $t^k ((2n-1) \times 1)$ και, εν συνεχεία, παραγοντοποιήσει τη μήτρα κέρδους $G(x^k)$, η επίλυση ως προς το διάνυσμα Δx^k έχει ως εξής:

- Ορίζεται το διάνυσμα $u_A ((2n-1) \times 1)$ ως $u_A = DL^T \Delta x^k$. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$LDL^T \Delta x^k = t^k \Rightarrow Lu_A = t^k$$

Με τα εμπρός αντικαταστάσεις υπολογίζεται το διάνυσμα u_A .

- Ορίζεται το διάνυσμα $u_B ((2n-1) \times 1)$ ως $u_B = L^T \Delta x^k$.

$$u_A = DL^T \Delta x^k \Rightarrow Du_B = u_A$$

Εφόσον η μήτρα D είναι διαγώνια, με αντιστροφή της προσδιορίζεται το διάνυσμα $u_B = D^{-1}u_A$.

- Το διάνυσμα Δx^k προσδιορίζεται με το προς τα πίσω αντικαταστάσεις στο σύστημα εξισώσεων $L^T \Delta x^k = u_B$.

Οι προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεις πραγματοποιούνται αποδοτικά βασιζόμενες στην αραιότητα του παράγοντα L .

2.7 Αποζευγμένη μέθοδος επίλυσης εκτίμησης κατάστασης

Ο υπολογιστικός φόρτος της κατασκευής και παραγοντοποίησης της μήτρας κέρδους G σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου μπορεί να αποφευχθεί με τη χρήση μίας σταθερής αλλά προσεγγιστικής μήτρας κέρδους. Η εν λόγω προσέγγιση είναι εφικτή βάσει των εξής δύο παρατηρήσεων:

- Τα στοιχεία της μήτρας κέρδους δε μεταβάλλονται σημαντικά σε σχέση με τις τιμές που έχουν με βάση το διάνυσμα x^0 .
- Η ευαισθησία των μη γραμμικών συναρτήσεων που σχετίζονται με τις μετρήσεις ενεργού και άεργου ισχύος είναι σχετικά μικρή σε αλλαγές του μέτρου και της γωνίας των τάσεων των ζυγών, ιδιαίτερα για συστήματα μεταφοράς υψηλής τάσης.

Για την αποζευγμένη μέθοδο, οι μετρήσεις χωρίζονται σε δύο τμήματα:

- Μετρήσεις ενεργού ισχύος, που περιλαμβάνουν τις εγχύσεις ενεργού ισχύος στους ζυγούς και τις ροές ενεργούς ισχύος στους κλάδους. Στις εν λόγω μετρήσεις αποδίδεται το σύμβολο A (active measurements).
- Μετρήσεις αέργου ισχύος, που περιλαμβάνουν τις εγχύσεις αέργου ισχύος στους ζυγούς και τις ροές αέργου ισχύος στους κλάδους. Στις εν λόγω μετρήσεις αποδίδεται το σύμβολο R (reactive measurements).

Το διάνυσμα μετρήσεων z , η ιακωβιανή μήτρα H και η μήτρα R διαμερίζονται ως εξής:

$$z = \begin{pmatrix} z_A^T & z_B^T \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} H_{AA} & H_{AR} \\ H_{RA} & H_{RR} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_A & 0 \\ 0 & R_R \end{pmatrix}$$

Για την εφαρμογή της αποζευγμένης μεθόδου πραγματοποιούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Θεωρείται για αρχική συνθήκη λειτουργίας ότι τα μέτρα των τάσεων όλων των ζυγών είναι ίσα με 1,0 ανά μονάδα και οι γωνίες των τάσεων ίσες με 0° .
- Αγνοούνται τα μη διαγώνια μπλοκ H_{AR} και H_{RA} της ιακωβιανής μήτρας και υπολογίζεται η μήτρα κέρδους βάσει αυτής της προσέγγισης, με αποτέλεσμα να προκύπτει χωρίς μη διαγώνια μπλοκ ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} G_{AA} = H_{AA}^T R_A^{-1} H_{AA} \\ G_{RR} = H_{RR}^T R_R^{-1} H_{RR} \end{array} \right\} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} G_{AA} & 0 \\ 0 & G_{RR} \end{pmatrix}$$

- Για τον υπολογισμό του διανύσματος του δεξιού μέλους προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \begin{array}{l} T_A = H_{AA}^T R_A^{-1} \Delta z'_A \\ T_R = H_{RR}^T R_R^{-1} \Delta z'_R \end{array} \right\} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} T_A \\ T_R \end{pmatrix}$$

όπου $\Delta z'_A = \Delta z_A / V$, $\Delta z'_R = \Delta z_R / V$, $\Delta z_A = z_A - h_A(x)$ και $\Delta z_R = z_R - h_R(x)$.

Με βάση τα ανωτέρω, ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Αλγόριθμος αποζευγμένης μεθόδου επίλυσης εκτίμησης κατάστασης

Βήμα 1 Αρχικοποίηση τάσεων όλων των ζυγών με $V_i = 1 \text{ pu}$ και $\theta_i = 0^\circ$ για $i = 1, \dots, N$

Βήμα 2 Σχηματισμός και παραγοντοποίηση των μητρών κέρδους G_{AA} και G_{RR} .

Βήμα 3 Υπολογισμός του $T_A = H_{AA}^T R_A^{-1} \Delta z'_A$.

Βήμα 4 Προσδιορισμός του $\Delta\theta$ μέσω της επίλυσης των εξισώσεων $G_{AA}\Delta\theta = T_A$.

Βήμα 5 Έλεγχος εάν τα $\Delta\theta$ και ΔV ικανοποιούν το κριτήριο σύγκλισης. Στην περίπτωση που το ικανοποιούν, τότε τερματισμός ο αλγόριθμος τερματίζει, ειδάλλως συνέχεια στο επόμενο βήμα.

Βήμα 6 Ενημέρωση των γωνιών $\theta^{k+1} = \theta^k + \Delta\theta$.

Βήμα 7 Υπολογισμός του $T_R = H_{RR}^T R_R^{-1} \Delta z'_R$.

Βήμα 8 Προσδιορισμός του ΔV μέσω της επίλυσης των εξισώσεων $G_{RR}\Delta V = T_R$.

Βήμα 9 Έλεγχος εάν τα $\Delta\theta$ και ΔV ικανοποιούν το κριτήριο σύγκλισης. Στην περίπτωση που το ικανοποιούν, τότε τερματισμός ο αλγόριθμος τερματίζει, ειδάλλως συνέχεια στο επόμενο βήμα.

Βήμα 10 Ενημέρωση των μέτρων των τάσεων $V^{k+1} = V^k + \Delta V$.

Βήμα 11 Επιστροφή στο βήμα 3.

Ο ανωτέρω αλγόριθμος εμφανίζει τα εξής σημαντικά χαρακτηριστικά:

- Οι μήτρες G_{AA} και G_{RR} κατασκευάζονται και παραγοντοποιούνται μόνο μία φορά κατά το βήμα 2 του αλγορίθμου.
- Η επίλυση των εξισώσεων $G_{AA}\Delta\theta = T_A$ και $G_{RR}\Delta V = T_R$ γίνεται γρήγορα με αντικαταστάσεις προς τα εμπρός και προς τα πίσω χωρίς να απαιτείται εκ νέου παραγοντοποίηση των μητρών G_{AA} και G_{RR} σε κάθε ανακύκλωση.
- Οι διαστάσεις των μητρών G_{AA} και G_{RR} είναι οι μισές σε σχέση με τις διαστάσεις της ολικής μήτρας κέρδους G , μειώνοντας έτσι τις υπολογιστικές απαιτήσεις.

Με βάση τα ανωτέρω χαρακτηριστικά, ο αλγόριθμος έχει δύο βασικά πλεονεκτήματα συγκριτικά με το μη αποζευγμένη μέθοδο επίλυσης:

- Εμφανίζει μικρότερες απαιτήσεις σε μνήμη για την εκτέλεσή του.
- Είναι υπολογιστικά πιο γρήγορος, δεδομένου ότι οι επιμέρους μήτρες κέρδους έχουν μικρότερες διαστάσεις και είναι σταθερές.

Ωστόσο, η εφαρμογή της αποζευγμένης μεθόδου υπόκειται στον εξής περιορισμό: Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι παράμετροι του δικτύου ή οι λειτουργικές του καταστάσεις δεν ικανοποιούν τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της αποζευγμένης μεθόδου. Σε τέτοιες περιπτώσεις η μέθοδος είτε δεν οδηγεί σε

σύγκλιση είτε οδηγεί σε λανθασμένες εκτιμώμενες τιμές (V, ϑ) . Βέβαια, καταστάσεις όπου δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της αποζευγμένης μεθόδου είναι εξαιρετικά σπάνιες.

2.8 DC Εκτίμηση

Η DC εκτίμηση κατάστασης αποτελεί μία προσεγγιστική μοντελοποίηση του προβλήματος της εκτίμησης κατάστασης. Για την μοντελοποίηση της DC εκτίμησης θεωρείται ότι τα μέτρα των τάσεων σε όλους τους ζυγούς του συστήματος είναι ίσα με 1,0 ανά μονάδα, ενώ αγνοούνται όλα τα εγκάρσια στοιχεία και οι αντιστάσεις των κλάδων.

Η ροή ενεργού ισχύος από το ζυγό k προς το ζυγό m προσεγγίζεται από την σχέση:

$$P_{km} = \frac{\vartheta_k - \vartheta_m}{x_{km}} + e$$

όπου e το σφάλμα μέτρησης, x_{km} η αντίδραση του κλάδου $k-m$, ϑ_k και ϑ_m οι γωνίες της τάσης των ζυγών k και m αντίστοιχα.

Αντίστοιχα, η έγχυση ενεργού ισχύος στο ζυγό i υπολογίζεται ως το άθροισμα των ροών ενεργού ισχύος από το ζυγό i προς όλους τους γειτονικούς ζυγούς:

$$P_i = \sum_{j \in N_j} P_{ij} + e$$

όπου N_j είναι το σύνολο των γειτονικών ζυγών με το ζυγό j .

Επομένως, η DC μοντελοποίηση για μετρήσεις ενεργού ισχύος (ροές και εγχύσεις) εκφράζεται ως:

$$z = H\vartheta + e$$

όπου το διάνυσμα z περιλαμβάνει ροές και εγχύσεις ενεργού ισχύος, η μήτρα H εξαρτάται μόνο από τις αντιδράσεις των κλάδων και e είναι το διάνυσμα σφαλμάτων των μετρήσεων.

2.9 Μειονεκτήματα εκτίμησης κατάστασης με κανονικές εξισώσεις

Η εκτίμηση κατάστασης σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων βασίζεται στην επαναληπτική επίλυση των κανονικών εξισώσεων:

$$G(x^k) \Delta x^k = t^k$$

Διατηρώντας σταθερή τη μήτρα κέρδους $G(x^k)$, μεταβάλλοντας το δεξιό μέλος των κανονικών εξισώσεων με την εισαγωγή μίας διαταραχής $\Delta \tilde{t}$ σε $t^k + \Delta \tilde{t}$ και θεωρώντας ότι η λύση των διαταραγμένων κανονικών εξισώσεων είναι $\Delta x^k + \Delta \tilde{x}$, προκύπτουν τα εξής:

$$G(x^k)(\Delta x^k + \Delta \tilde{x}) = t^k + \Delta \tilde{t} \Rightarrow G(x^k)\Delta x^k + G(x^k)\Delta \tilde{x} = t^k + \Delta \tilde{t} \Rightarrow$$

$$G(x^k)\Delta \tilde{x} = \Delta \tilde{t} \Rightarrow \Delta \tilde{x} = (G(x^k))^{-1} \Delta \tilde{t}$$

Λαμβάνοντας οποιαδήποτε νόρμα μητρών (1, 2 ή ∞) προκύπτει:

$$\|\Delta \tilde{x}\| = \|(G(x^k))^{-1} \Delta \tilde{t}\| \Rightarrow \|\Delta \tilde{x}\| \leq \|(G(x^k))^{-1}\| \|\Delta \tilde{t}\|$$

Επιπροσθέτως, ισχύει το εξής:

$$\|G(x^k)\Delta x^k\| = \|t^k\| \Rightarrow \|t^k\| \leq \|G(x^k)\| \|\Delta x^k\| \Rightarrow \frac{1}{\|\Delta x^k\|} \leq \frac{\|G(x^k)\|}{\|t^k\|}$$

Από το συνδυασμό των ανωτέρω ποσοτήτων προκύπτει ότι:

$$\frac{\|\Delta \tilde{x}\|}{\|\Delta x^k\|} \leq \|G(x^k)\| \|(G(x^k))^{-1}\| \frac{\|\Delta \tilde{t}\|}{\|t^k\|}$$

Η ποσότητα $\|G(x^k)\| \|(G(x^k))^{-1}\|$ αποτελεί συντελεστή ευαισθησίας που προσδιορίζει τη μέγιστη δυνατή σχετική μεταβολή του διανύσματος Δx^k σε σχέση με τη σχετική μεταβολή του διανύσματος t^k . Ο εν λόγω συντελεστής, έστω $k(G(x^k)) = \|G(x^k)\| \|(G(x^k))^{-1}\|$, καλείται δείκτης κατάστασης της μήτρας $G(x^k)$ και είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος της μονάδος. Επιπρόσθετα, ο ίδιος δείκτης καθορίζει πως διαταραχές στη μήτρα κέρδους επηρεάζουν τη λύση του διανύσματος Δx^k . Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Αν $(G(x^k) + \Delta \tilde{G})(\Delta x^k + \Delta \tilde{x}) = t^k$ και $\|G^{-1}(x^k)\| \|\Delta \tilde{G}\| < 1$, τότε προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\|\Delta \tilde{x}\|}{\|\Delta x^k\|} \leq \frac{k(G(x^k)) \|\Delta \tilde{G}\|}{1 - \|G^{-1}(x^k)\| \|\Delta \tilde{G}\| \|G(x^k)\|}$$

- Αν $(G(x^k) + \Delta\tilde{G})(\Delta x^k + \Delta\tilde{x}) = t^k + \Delta\tilde{t}$ και $\|G^{-1}(x^k)\| \|\Delta\tilde{G}\| < 1$, τότε προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\|\Delta\tilde{x}\|}{\|\Delta x^k\|} \leq \frac{k(G(x^k))}{1 - \|G^{-1}(x^k)\| \|\Delta\tilde{G}\|} \left(\frac{\|\Delta\tilde{G}\|}{\|G(x^k)\|} + \frac{\|\Delta\tilde{t}\|}{\|t^k\|} \right)$$

Λόγω της υπολογιστικής πολυπλοκότητας που απαιτείται για τον ακριβή προσδιορισμό του δείκτη κατάστασης, πραγματοποιείται προσεγγιστικός υπολογισμός μέσω της εύρεσης των ιδιοτιμών της μήτρας και του καθορισμού της ποσότητας $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

Στην περίπτωση όπου ισχύει $k(G) \gg 1$, τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων βρίσκεται σε κακή κατάσταση, δηλαδή μικρές μεταβολές στη μήτρα κέρδους G ή στο διάνυσμα t οι οποίες απορρέουν είτε από σφάλματα λόγω αριθμητικής στρογγυλοποίησης με βάση την ακρίβεια του υπολογιστικού συστήματος είτε από εγγενή σφάλματα στις μετρήσεις οδηγούν σε υψηλά σχετικά σφάλματα στο διάνυσμα επίλυσης Δx .

Επιπρόσθετα, θεωρώντας $W=I$ ο δείκτης κατάστασης της μήτρας κέρδους G συνδέεται με το δείκτη κατάστασης της ιακωβιανής μήτρας H ως εξής:

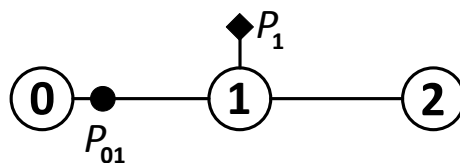
$$k(G) = k(H^T H) = \|H^T H\| \|(H^T H)^{-1}\| = \|H^T H\| \|H^{-1} H^{-T}\| \sim \|H^T\| \|H\| \|H^{-1}\| \|H^{-T}\| \sim \|H\|^2 \|H^{-1}\|^2 = (k(H))^2$$

Μάλιστα, όταν ο δείκτης κατάστασης $k(G)$ τείνει στο άπειρο, η μήτρα κέρδους G μπορεί να προκύψει ως μη αντιστρέψιμη με βάση την υφιστάμενη ακρίβεια του υπολογιστικού συστήματος.

Στον υψηλό δείκτη κατάστασης της μήτρας κέρδους μπορεί να συνεισφέρει δραματικά η χρήση υψηλών τιμών στα βάρη για τη μοντελοποίηση μετρήσεων υψηλής ακρίβειας, όπως οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης.

Παράδειγμα 2.1

Έστω ακόλουθο σύστημα 3 ζυγών, στο οποίο λαμβάνεται μέτρηση ροής ενεργού ισχύος P_{01} και η μέτρηση μηδενικής έγχυσης P_1 .



Θεωρώντας την DC εκτίμηση κατάσταση, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$P_{01} = \frac{1}{x_{01}}(\vartheta_0 - \vartheta_1) \Rightarrow P_{01} = \frac{1}{x_{01}}(-\vartheta_1)$$

$$P_1 = P_{10} + P_{12} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{x_{01}} + \frac{1}{x_{12}} \right) \vartheta_1 + \frac{1}{x_{12}}(-\vartheta_2)$$

Διαμερίζοντας την ιακωβιανή μήτρα σε δύο τμήματα $\begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}$, όπου το H αντιστοιχεί στη μέτρηση της ροής ισχύος και το C στη μέτρηση μηδενικής έγχυσης προκύπτει το εξής:

$$\begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_{01}} & 0 \\ \frac{1}{x_{01}} + \frac{1}{x_{12}} & -\frac{1}{x_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας ότι $x_{01} = x_{12} = 1$ ανά μονάδα, η μήτρα κέρδους G υπολογίζεται ως:

$$G = \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} W_H & 0 \\ 0 & W_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} \Rightarrow G = \begin{pmatrix} W_H + 4W_C & -W_C \\ -W_C & W_C \end{pmatrix}$$

Αν το βάρος W_H που έχει αποδοθεί στη μέτρηση ροής ισχύος είναι αμελητέο σε σχέση με το βάρος W_C της μέτρησης μηδενικής έγχυσης, τότε προκύπτει το εξής:

$$W_H \ll W_C \Rightarrow W_H + 4W_C \approx 4W_C$$

Με βάση την ανωτέρω θεώρηση, η μήτρα κέρδους γίνεται:

$$G \approx \begin{pmatrix} 4W_C & -2W_C \\ -2W_C & W_C \end{pmatrix}$$

Εφόσον γραμμές της μήτρας G προκύπτουν ως γραμμικώς εξαρτημένες, για την τάξη της ισχύει ότι $rank(G) = 1 < 2$. Επομένως, η μήτρα καθίσταται μη αντιστρέψιμη.

Ακολούθως, ως μετρήσεις υψηλής ακρίβειας εξετάζονται μόνο οι μηδενικές εγχύσεις.

Οι ανωτέρω αδυναμίες δεν καθιστούν μη εφαρμόσιμη τη μέθοδο των κανονικών εξισώσεων, αλλά συνιστούν κίνητρο για ανάπτυξη εύρωστων μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων.

2.10 Εκτίμηση κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών

Η απόδοση υψηλών τιμών στα βάρη που αντιστοιχούν σε μετρήσεις μηδενικής έγχυσης αυξάνει την τιμή του δείκτη κατάστασης της μήτρας κέρδους των κανονικών εξισώσεων. Για την αποφυγή χρήσης υψηλών βαρών, οι εν λόγω μετρήσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ισοτικοί περιορισμοί. Έτσι, το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει έχει ως εξής:

$$\text{Ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης } J(x) = \frac{1}{2} [z - h(x)]^T W [z - h(x)]$$

Υπό τον περιορισμό $c(x) = 0$

όπου $c(x) = 0$ αναπαριστά τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται πλέον στο $h(x)$.

Το ανωτέρω πρόβλημα βελτιστοποίησης παρουσία περιορισμών επιλύεται με τη χρήση της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η συνάρτηση Lagrange $\mathcal{L}(x, \lambda)$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T c(x)$$

Οι αναγκαίες συνθήκες βελτίστου πρώτης τάξης έχουν ως εξής:

$$\begin{cases} \nabla J(x) + \lambda^T \nabla c(x) = 0 \\ c(x) = 0 \end{cases}$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται ως:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla J(x) + \lambda^T \nabla c(x) = 0 \\ c(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial J(x)}{\partial x} + \lambda^T \frac{\partial c(x)}{\partial x} = 0 \\ c(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -H^T W [z - h(x)] + \lambda^T C = 0 \\ c(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} H^T W [z - h(x)] - C^T \lambda = 0 \\ c(x) = 0 \end{array} \right\}$$

όπου η μήτρα $C = \frac{\partial c(x)}{\partial x}$ είναι η ιακωβιανή μήτρα της $c(x)$.

Αναπτύσσοντας τη μη γραμμική συνάρτηση $h(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το διάνυσμα κατάστασης x^k και αγνοώντας τους μεγιστοτάξιους όρους προκύπτει το εξής:

$$h(x) = h(x^k) - H(x^k)(x - x^k) \Rightarrow z - h(x) = z - h(x^k) - H(x^k)(x - x^k) \Rightarrow$$

$$z - h(x^{k+1}) = z - h(x^k) - H(x^k)(x^{k+1} - x^k) \Rightarrow z - h(x^{k+1}) = \Delta z^k - H(x^k)\Delta x^k$$

$\Delta z^k = z - h(x^k)$
 $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$

Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση $c(x)$ προκύπτει:

$$c(x) = c(x^k) + C(x^k)\Delta x^k \Rightarrow C(x^k)\Delta x^k = -c(x^k) \Rightarrow C(x^k)\Delta x^k = \Delta c^k$$

$\Delta c^k = -c(x^k)$

Με βάση τα ανωτέρω έχουμε τα εξής:

$$\left. \begin{aligned} (H(x^k))^T W [\Delta z^k - H(x^k)\Delta x^k] - C^T \lambda^k &= 0 \\ C(x^k)\Delta x^k &= \Delta c^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (H(x^k))^T W H(x^k)\Delta x^k + C^T \lambda^k &= (H(x^k))^T W \Delta z^k \\ C(x^k)\Delta x^k &= \Delta c^k \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} H^T W H & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T W \Delta z^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, η εκτίμηση κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών βασίζεται στην επίλυση των ανωτέρω επαναληπτικών εξισώσεων. Ορίζεται ως F η μήτρα συντελεστών $F = \begin{pmatrix} G & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$, όπου $G = H^T W H$.

Πλέον, η μήτρα W δεν εμφανίζει τις υψηλές τιμές στα βάρη που θα αντιστοιχούσαν στις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης. Ωστόσο, το μειονέκτημα της μοντελοποίησης της εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών βασίζεται στο γεγονός ότι η μήτρα F είναι αόριστη, με αποτέλεσμα να απαιτείται για την τριγωνική παραγοντοποίηση ο συνδυασμός της επιλογής των οδηγών στοιχείων για την εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας με τεχνικές μείωσης των επιπρόσθετων μηδενικών στοιχείων. Οι μέθοδοι που εκτελούν παραγοντοποίηση αόριστων μητρών κάνουν χρήση οδηγών στοιχείων διαστάσεων 1×1 ή 2×2 ώστε να διατηρηθεί η συμμετρία της μήτρας συντελεστών. Οι αριθμητικές τιμές των στοιχείων της μήτρας συντελεστών εξετάζονται κατά τη διαδικασία επιλογής οδηγών στοιχείων, με αποτέλεσμα την αδυναμία ύπαρξης ξεχωριστής συμβολικής και αριθμητικής φάσης για την παραγοντοποίηση. Η ανάγκη για επιλογή οδηγών στοιχείων με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια οδηγεί σε αύξηση του πραγματικού αριθμού των στοιχείων στους παράγοντες σε σχέση με τον προβλεπόμενο αριθμό με βάση τη συμβολική δομή της μήτρας.

Κεφάλαιο 3 – Παραγοντοποίηση Συμμετρικών και Αόριστων Μητρών

3.1 Εισαγωγή

Στην περίπτωση των κανονικών εξισώσεων η μήτρα κέρδους G είναι θετικά ορισμένη για πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα και, επομένως, η παραγοντοποίησή της μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$G = \begin{pmatrix} d_1 & u_1^T \\ u_1 & B_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_1/d_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & B_1 - u_1 u_1^T / d_1 \end{pmatrix}}_{G_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1^T / d_1 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}}_{L_1^T} \quad (3.1)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 & u_2^T \\ & u_2 & B_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & u_2^T / d_2 \\ & u_2 / d_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 & \\ & & B_2 - u_2 u_2^T / d_2 \end{pmatrix}}_{G_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & u_2^T / d_2 \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}}_{L_2^T}$$

...

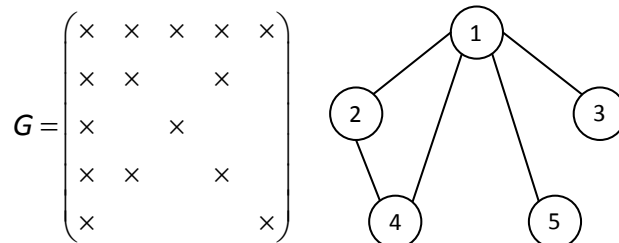
$$G_{n-1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

Ο παράγοντας D ισούται με τη διαγώνια μήτρα G_{n-1} , ενώ ο παράγοντας L προκύπτει ως το γινόμενο των επιμέρους παραγόντων L_i , δηλαδή $L = L_1 L_2 \dots L_{n-1}$.

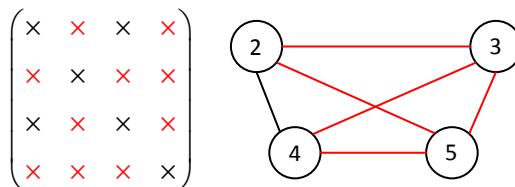
Η ποσότητα $B_1 - u_1 u_1^T / d_1$ στη σχέση (3.1) ορίζεται ως το συμπλήρωμα Schur του d_1 στη μήτρα G . Αντίστοιχα, για το δεύτερο βήμα της παραγοντοποίησης η ποσότητα $B_2 - u_2 u_2^T / d_2$ αποτελεί το νέο συμπλήρωμα Schur.

Ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων που εμφανίζονται στα συμπληρώματα Schur εξαρτάται από την αναδιάταξη της εκάστοτε μήτρας G_i . Υπάρχει περίπτωση ο τελικός παράγοντας L να προκύψει πυκνός παρά το γεγονός ότι η μήτρα G είναι αραιή. Οι απαιτήσεις σε μνήμη και ο υπολογιστικός φόρτος για τον υπολογισμό της παραγοντοποίησης εξαρτώνται από τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων που προκύπτουν στον παράγοντα L . Ως εκ τούτου, είναι επιθυμητό να προκύψει ως αραιή μήτρα. Ο περιορισμός των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων μπορεί να επιτευχθεί μέσω συμμετρικής αναδιάταξης των σειρών και στηλών της μήτρας G .

Η σημασία της επιλογής των οδηγών στοιχείων σκιαγραφείται στα επόμενα δύο σχήματα. Στο σχήμα 3.1 περιγράφεται η δομή μίας μήτρας G και η ισοδύναμη αναπαράστασή της σε γράφο. Εάν επιλεγεί το στοιχείο στη θέση $(1,1)$ ως οδηγό στοιχείο, τότε το συμπλήρωμα Schur προκύπτει ως πυκνή μήτρα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2, όπου με κόκκινο χρώμα υποδεικνύονται τα επιπρόσθετα μη μηδενικά στοιχεία $\ell_{ij} \neq 0$ για $a_{ij} = 0$.



Σχήμα 3.1: Δομή και γράφος γειτνίασης 5×5 συμμετρικής μήτρας



Σχήμα 3.2: Δομή και γράφος γειτνίασης 4×4 συμπληρώματος Schur επιλέγοντας τον κόμβο 1 ως οδηγό στοιχείο

Εφόσον η μήτρα G είναι θετικά ορισμένη, οποιαδήποτε συμμετρική αναδιάταξη οδηγεί σε εφικτή παραγοντοποίηση, δηλαδή είναι εξασφαλισμένη η εμφάνιση μη μηδενικών στοιχείων d_i . Επιπροσθέτως, λόγω αντικαταστάσεων προς τα εμπρός και προς τα πίσω είναι επιθυμητό τα στοιχεία στους παράγοντες L και D να μη λαμβάνουν ακραίες τιμές ώστε να διατηρείται η αριθμητική ευστάθεια της λύσης $\Delta x^k = L^{-T} D^{-1} L^{-1} t^k$. Ο δείκτης αύξησης ορίζεται ως η απόλυτη κατά μέγιστο τιμή που εμφανίζεται ανάμεσα σε όλα τα συμπληρώματα Schur που δημιουργούνται κατά την παραγοντοποίηση προς τη μέγιστη κατά απόλυτο τιμή στοιχείου της αρχικής μήτρας A και αποτελεί κριτήριο για την εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας.

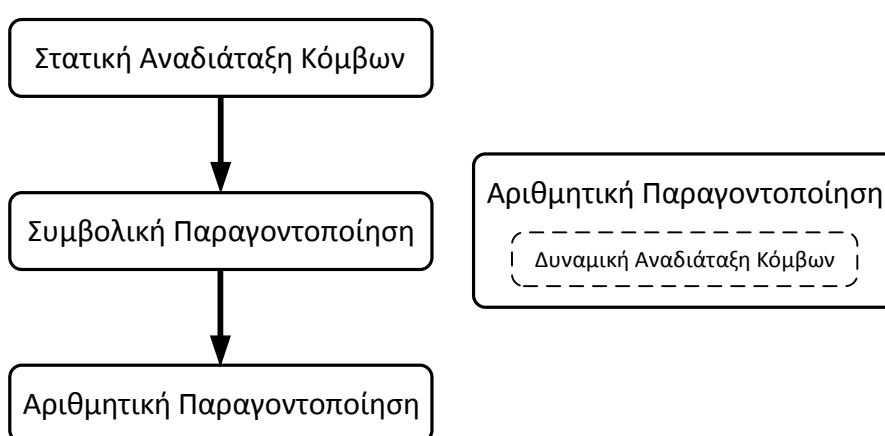
$$\rho = \frac{\max_{k,i,j} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \quad (3.2)$$

Στην περίπτωση της συμμετρικής και θετικά ορισμένης μήτρας ο δείκτης αύξησης είναι $\rho = 1$ για οποιαδήποτε αναδιάταξη γραμμών και στηλών. Επομένως, η αριθμητική ευστάθεια είναι εξασφαλισμένη.

Ωστόσο, η μήτρα συντελεστών F στη μοντελοποίηση της εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών προκύπτει ως αόριστη και, συνεπώς, δεν είναι εξασφαλισμένη η εφικτή παραγοντοποίηση καθώς και η αριθμητική ευστάθειά της για κάθε αναδιάταξη των γραμμών και στηλών της. Εν αντιθέσει με τη μήτρα κέρδους G , η αναδιάταξη και, επομένως, η επιλογή των οδηγών στοιχείων

πραγματοποιείται δυναμικά σε κάθε στάδιο της παραγοντοποίησης, λαμβάνοντας υπόψη τις αριθμητικές τιμές των στοιχείων της μήτρας.

Συνεπώς, η παραγοντοποίηση της θετικά ορισμένης μήτρας G αποτελείται από τρία επιμέρους διακριτά μεταξύ τους στάδια: τη συμμετρική μετάθεση της μήτρας, η οποία ισοδυναμεί με τη στατική αναδιάταξη των κόμβων του γράφου γειτνίασης, τη συμβολική παραγοντοποίηση με βάση τη δομή της μήτρας και, εν συνεχεία, την αριθμητική παραγοντοποίηση για τον υπολογισμό των στοιχείων του παράγοντα L . Ωστόσο, εφόσον για την αόριστη μήτρα συντελεστών F απαιτείται η δυναμική επιλογή των οδηγών στοιχείων, η οποία ισοδυναμεί με δυναμική συμμετρική μετάθεση της εναπομένουσας μήτρας προς παραγοντοποίηση ή αντίστοιχα δυναμική αναδιάταξη των κόμβων, δεν υπάρχουν διακριτά στάδια παραγοντοποίησης όπως στην περίπτωση της μήτρας κέρδους G .



Σχήμα 3.3: Στάδια παραγοντοποίησης θετικά ορισμένης μήτρας (αριστερά) και αόριστης μήτρας (δεξιά)

Στο παράρτημα της εργασίας περιγράφεται η διαδικασία της συμβολικής και αριθμητικής παραγοντοποίησης για την περίπτωση θετικά ορισμένης μήτρας και παρατίθενται δύο επιμέρους ρουτίνες σε C.

3.2 Συμμετρική Μετάθεση

Η συμμετρική μετάθεση έγκειται στην αντιμετάθεση σειρών και στηλών μίας μήτρας A κατά τρόπο που να επιτρέπει την αλλαγή θέσης συγκεκριμένων στοιχείων. Ορίζεται ως P η μήτρα μετάθεσης, της οποίας οι γραμμές συγκροτούνται από διανύσματα e_i^T της μορφής:

$$e_i^T = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{i\text{-οστή θέση}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)$$

Για συντομία, η μήτρα μετάθεσης P μπορεί να περιγραφεί μόνο με την παράθεση των δεικτών i των διανυσμάτων e_i^T που σχηματίζουν τις γραμμές της.

Η συμμετρική μετάθεση εκτελείται με τον από δεξιά πολλαπλασιασμό της μήτρας A με τη μήτρα P^T και, εν συνεχεία, με τον από αριστερά πολλαπλασιασμό της με τη μήτρα P , δηλαδή:

$$A \xrightarrow{\text{συμμετρική μετάθεση}} PAP^T$$

Παράδειγμα 3.1

Έστω ότι έχουμε την ακόλουθη συμμετρική μήτρα A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Είναι επιθυμητή η μεταφορά του διαγώνιου στοιχείου $a_{33} = 8$ στη θέση $(1,1)$. Για να πραγματοποιηθεί η μετάθεση αυτή χρειάζεται να γίνει αντιμετάθεση της στήλης 3 με τη στήλη 1 και της σειράς 3 με τη σειρά 1. Για αυτό το σκοπό ορίζεται η μήτρα μετάθεσης P ως εξής:

$$P = (3,2,1,4) = \begin{pmatrix} e_3^T \\ e_2^T \\ e_1^T \\ e_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά τη μήτρα A με P^T πραγματοποιείται αντιμετάθεση των στηλών $3 \leftrightarrow 1$ ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow AP^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τη μήτρα AP^T με P πραγματοποιείται αντιμετάθεση των σειρών $3 \leftrightarrow 1$ ως εξής:

$$AP^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow PAP^T = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Έτσι, το στοιχείο $a_{33} = 8$ πλέον βρίσκεται στη θέση $(1,1)$.

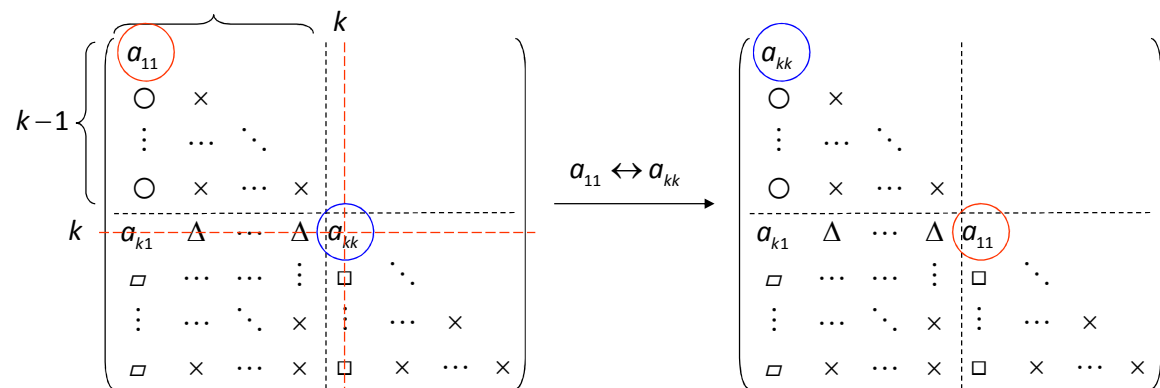
Ο συστηματικός τρόπος εκτέλεσης συμμετρικής μετάθεσης για την αλλαγή θέσης διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση $(1,1)$, καθώς και μη διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση $(2,1)$ παρουσιάζεται ακολούθως. Η επιλογή των θέσεων $(1,1)$ και $(2,1)$ πραγματοποιείται για το λόγο ότι χρησιμοποιούνται ευρέως στους αλγορίθμους παραγοντοποίησης αορίστων μητρών και αντιστοιχούν σε θέσεις της αρχικής μήτρας για το πρώτο βήμα της παραγοντοποίησης και, εν συνεχεία, του συμπληρώματος Schur για τα επόμενα βήματα.

Εφόσον η υπό εξέταση μήτρα A είναι συμμετρική, οι ενέργειες που απαιτούνται για τις μεταθέσεις περιγράφονται μόνο για το κάτω τριγωνικό τμήμα της μήτρας A .

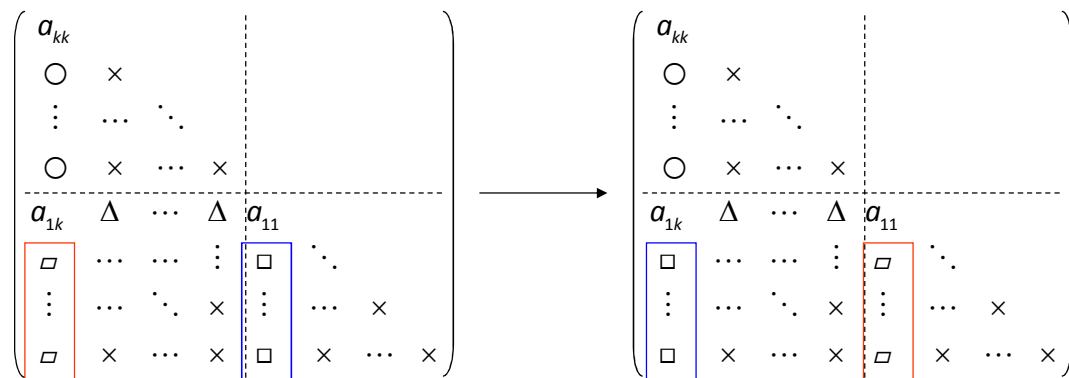
3.2.1 Συμμετρική μετάθεση για αλλαγή θέσης διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση $(1,1)$

Έστω ότι το στοιχείο a_{kk} πρέπει να αλλάξει αμοιβαία θέση με το στοιχείο a_{11} . Απαιτείται η αντιμετάθεση της $1^{ης}$ γραμμής και στήλης με την k -οστή γραμμή και στήλη αντίστοιχα. Ορίζεται η μετάθεση $P=(k,2,3,\dots,k-1,1,k+1,\dots,n)$ και η πραγματοποίησή της γίνεται ως εξής:

Βήμα 1 Αντιμετατίθενται τα στοιχεία a_{11} και a_{kk} , δηλαδή $a_{11} \leftrightarrow a_{kk}$.



Βήμα 2 Αλλάζουν αμοιβαία θέσεις τα στοιχεία της στήλης 1 και της στήλης k που βρίσκονται κάτω από τη γραμμή $k+1$, δηλαδή $A(k+1:n,1) \leftrightarrow A(k+1:n,k)$.



Βήμα 3 Αλλάζουν αμοιβαία θέσεις τα στοιχεία της στήλης 1 από τη γραμμή 2 μέχρι και τη γραμμή $k-1$ με τα στοιχεία της γραμμής k από τη στήλη 2 μέχρι και τη στήλη $k-1$, δηλαδή $A(2:k-1,1) \leftrightarrow A(k,2:k-1)$.

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} a_{kk} & & & & & & & \\ \hline \circ & \times & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \circ & \times & \dots & \times & & & & \\ \hline a_{1k} & \Delta & \dots & \Delta & a_{11} & & & \\ \square & \dots & \dots & \vdots & \square & \ddots & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \times & \vdots & \dots & \times & \\ \square & \times & \dots & \times & \square & \times & \dots & \times \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} a_{kk} & & & & & & & \\ \hline \Delta & \times & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \Delta & \times & \dots & \times & & & & \\ \hline a_{1k} & \circ & \dots & \circ & a_{11} & & & \\ \square & \dots & \dots & \vdots & \square & \ddots & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \times & \vdots & \dots & \times & \\ \square & \times & \dots & \times & \square & \times & \dots & \times \end{array} \right)$$

Οι ανωτέρω επιμέρους αντιμεταθέσεις εκτελούνται συμμετρικά και για το άνω τριγωνικό τμήμα της μήτρας A .

3.2.2 Συμμετρική μετάθεση αλλαγής θέσης μη διαγώνιου στοιχείου προς τη θέση (2,1)

Έστω ότι το στοιχείο a_{rq} πρέπει να λάβει τη θέση του στοιχείου a_{21} . Απαιτείται η αντιμετάθεση της q -οστής γραμμής και στήλης με την $1^{\text{η}}$ γραμμή και στήλη αντίστοιχα και, εν συνεχεία η αντιμετάθεση της r -οστής γραμμής και στήλης με την $2^{\text{η}}$ γραμμή και στήλη αντίστοιχα. Η μετάθεση P ορίζεται ως το γινόμενο δύο επιμέρους μεταθέσεων ως:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = (q, 2, 3, \dots, q-1, 1, q+1, \dots, n) \\ P_2 = (1, r, 3, \dots, r-1, 2, r+1, \dots, n) \end{array} \right\} \Rightarrow P = P_2 P_1$$

Οι ανωτέρω επιμέρους αντιμεταθέσεις εκτελούνται συμμετρικά και για το άνω τριγωνικό τμήμα της μήτρας A .

3.3 Παραγοντοποίηση συμμετρικών και αορίστων μητρώων

Έστω συμμετρική και αόριστη μήτρα A . Η ύπαρξη παραγοντοποίησης της μορφής $PAP^T = LDL^T$, όπου P μήτρα μετάθεσης, L κάτω τριγωνική μήτρα και D διαγώνια μήτρα με 1×1 στοιχεία, δεν είναι εξασφαλισμένη, όπως συμβαίνει στην περίπτωση μιας συμμετρικής και ορισμένης μήτρας.

Παράδειγμα 3.2

Έστω η συμμετρική μήτρα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Οποιαδήποτε συμμετρική αναδιάταξη οδηγεί στην ίδια μήτρα, δηλαδή ισχύει $PAP^T = A$ για κάθε μήτρα μετάθεσης P .

Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών της έχουμε: $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Άρα, η μήτρα A είναι αόριστη. Η LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας A με 1×1 διαγώνια στοιχεία στον παράγοντα D γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ l_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ d_1 l_{21} = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα εξισώσεων και, επομένως, δεν είναι εφικτή η LDL^T παραγοντοποίηση για τη μήτρα A με 1×1 διαγώνια στοιχεία στον παράγοντα D .

3.3.1 Παραγοντοποίηση LDL^T με μπλοκ διαγώνια στοιχεία D_i

Υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα A είναι αντιστρέψιμη, υπάρχει μήτρα μετάθεσης P τέτοια ώστε:

- είτε το στοιχείο στη θέση $(1,1)$ της μήτρας PAP^T να είναι μη μηδενικό,
- είτε το άνω αριστερά 2×2 μπλοκ της μήτρας PAP^T να είναι αντιστρέψιμο.

Η ανωτέρω ιδιότητα εξασφαλίζει την ύπαρξη της παραγοντοποίησης $PAP^T = LDL^T$ με 1×1 ή 2×2 μπλοκ διαγώνια στοιχεία στον παράγοντα D .

Για δεδομένη μήτρα μετάθεσης P , η παραγοντοποίηση είναι μοναδική μόνο εάν ο αριθμός και οι επιμέρους διαστάσεις (1×1 ή 2×2) των μπλοκ της μήτρας D είναι γνωστά πριν από τον υπολογισμό των παραγόντων L και D . Έστω t ο αριθμός των μπλοκ-διαγώνιων στοιχείων D_i της μήτρας D και k_i η διάσταση του κάθε επιμέρους μπλοκ D_i , έτσι ώστε να ισχύει $D = \text{diag}(D_i)$ με $i = 1, \dots, t$ και το μπλοκ D_i να είναι είτε αριθμός (διαστάσεις 1×1 , δηλαδή $k_i = 1$) είτε συμμετρικό μπλοκ (διαστάσεις 2×2 , δηλαδή $k_i = 2$).

Παράδειγμα 3.3

Έστω η συμμετρική και αόριστη μήτρα $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$, για την οποία ισχύει ότι

$PAP^T = A$ για οποιαδήποτε συμμετρική αναδιάταξη. Η LDL^T παραγοντοποίησή της μπορεί να λάβει τις ακόλουθες δύο μορφές ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων t και k_i .

- 1^η περίπτωση: Για $t = 1$ και $k_1 = 2$, δηλαδή η μήτρα D αποτελείται από 1 μπλοκ διαστάσεων 2×2 , οι παράγοντες L και D προκύπτουν ως:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- 2^η περίπτωση: Για $t=2$ και $k_1=k_2=1$, δηλαδή η μήτρα D αποτελείται από 2 μπλοκ με επιμέρους διαστάσεις 1×1 , οι παράγοντες L και D προκύπτουν ως:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι για την $n \times n$ συμμετρική και αόριστη μήτρα A είναι γνωστές εκ των προτέρων η μήτρα μετάθεσης P και η δομή της μήτρας D , δηλαδή οι παράμετροι t και k_i , η παραγοντοποίηση LDL^T μπορεί να πραγματοποιηθεί με τον απευθείας υπολογισμό των στοιχείων των παραγόντων L και D από τα στοιχεία της μήτρας A .

Στην περίπτωση όπου το οδηγό στοιχείο D_1 είναι 1×1 ($k_1=1$), δηλαδή αριθμός, έχουμε τα εξής:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & u_1^T \\ \hline u_1 & B_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_1 = a_{11} \\ u_1 = (a_{21} \ a_{31} \ \cdots \ a_{n1})^T \\ B_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Άρα, προκύπτει ότι:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & u_1^T \\ \hline u_1 & B_1 \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline u_1/D_1 & I \end{array} \right)}_{L^{(1)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} D_1 & \\ \hline B_1 - u_1 u_1^T / D_1 & \end{array} \right)}_{A^{(2)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline u_1/D_1 & I \end{array} \right)}_{(L^{(1)})^T}$$

Στην περίπτωση όπου το οδηγό στοιχείο D_1 είναι 2×2 ($k_1=2$), δηλαδή μπλοκ, έχουμε τα εξής:

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & u_1^T \\ \hline u_1 & B_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ u_1 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} \\ B_1 = \begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Άρα, προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & u_1^T \\ \hline u_1 & B_1 \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline u_1 D_1^{-1} & I \end{array} \right)}_{L^{(1)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} D_1 \\ B_1 - u_1 D_1^{-1} u_1^T \end{array} \right)}_{A^{(3)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} I \\ u_1 D_1^{-1} \end{array} \right)^T}_{(L^{(1)})^T}$$

$$D_1^{-1} = \frac{1}{\det D_1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad u_1 D_1^{-1} = \frac{1}{\det D_1} \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Το επόμενο βήμα της παραγοντοποίησης συνεχίζει με την $A^{(1+k_i)}$ και η διαδικασία ολοκληρώνεται με την επιλογή t οδηγών στοιχείων.

Παράδειγμα 3.4

Έστω η συμμετρικά αναδιατεταγμένη αόριστη μήτρα $PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, για τον

παράγοντα D της οποίας δίνεται ότι $t=2$, $k_1=2$ και $k_2=1$.

Άρα, με βάση τις τιμές των παραμέτρων t και k_i προκύπτει ότι η μήτρα D αποτελείται από 2 μπλοκ, όπου το πρώτο έχει διαστάσεις 2×2 και το δεύτερο 1×1 . Συνεπώς, η παραγοντοποίηση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$PAP^T = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline L_{21} & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} D_1 & \\ \hline & D_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline L_{21} & & 1 \end{array} \right)^T$$

Χρησιμοποιώντας ως οδηγό στοιχείο το άνω αριστερά 2×2 της PAP^T προκύπτει:

$$PAP^T = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} D_1 \\ u_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} u_1^T \\ B_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (3 \ 6) \\ D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ B_1 = 5 \end{cases}$$

Εν συνεχεία, προκύπτουν τα εξής:

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{21} = u_1 D_1^{-1} \Rightarrow L_{21} = (3 \ 6) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_{21} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Άρα, οι παράγοντες προκύπτουν ως:

$$L = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & & \\ & & & 1 \end{array} \right) \text{ και } D = \left(\begin{array}{cc|c} & 2 & \\ & 1 & \\ \hline & & \frac{43}{4} \end{array} \right).$$

3.4 Καθορισμός της μήτρας μετάθεσης P και της δομής της μήτρας D

Τόσο η μήτρα μετάθεσης P και όσο και η δομή της μήτρας D δεν είναι γνωστά εξαρχής, αλλά προσδιορίζονται δυναμικά κατά τη διάρκεια της αριθμητικής παραγοντοποίησης, ώστε να εξασφαλίζεται είτε μόνο η αριθμητική ευστάθεια είτε η αριθμητική ευστάθεια μαζί με την αραιότητα του παράγοντα L .

Σε κάθε στάδιο της παραγοντοποίησης πρέπει να ληφθούν οι εξής δύο αποφάσεις:

- Επιλογή ανάμεσα σε 1×1 ή 2×2 οδηγό στοιχείο.
- Πραγματοποίηση συμμετρικής μετάθεσης σειρών και στηλών.

3.4.1 Καθορισμός με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια

Για τον δυναμικό καθορισμό της μήτρας P και της δομής της μήτρας D με κριτήριο μόνο την αριθμητική ευστάθεια παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι Bunch-Parlett και Bunch-Kaufman.

Εφόσον η αναδιατάξεις πραγματοποιούνται δυναμικά, ο εκάστοτε παράγοντας L που προκύπτει σε προηγούμενο στάδιο της παραγοντοποίησης πρέπει να αναδιαταχθεί συμμετρικά με βάση τη μετάθεση που ορίζεται στο τρέχον στάδιο.

Έστω ότι μετά το πρώτο στάδιο της παραγοντοποίησης προκύπτει με επιλογή 2×2 οδηγού στοιχείου:

$$P_1 A^{(1)} P_1^T = L^{(1)} A^{(3)} \left(L^{(1)} \right)^T$$

Στο αμέσως επόμενο στάδιο, η μετάθεση P_3 που ορίζεται για την αναδιάταξη της μήτρας $A^{(3)}$ ως $\tilde{A}^{(3)} = P_3 A^{(3)} P_3^T$ πρέπει να εφαρμοστεί συμμετρικά και στον αμέσως προηγούμενο παράγοντα $L^{(1)}$ ως $\tilde{L}^{(1)} = P_3 L^{(1)} P_3^T$, ώστε να προκύψει ορθή παραγοντοποίηση, δηλαδή:

$$P_3 P_1 A^{(1)} P_1^T P_3^T = \tilde{L}^{(1)} L^{(3)} A^{(4)} \left(L^{(3)} \right)^T \left(\tilde{L}^{(1)} \right)^T$$

3.4.1.1 Αλγόριθμος Bunch-Parlett

Δοθείσας μίας συμμετρικής και αόριστης μήτρας $A(n \times n)$, πραγματοποιούνται οι εξής αρχικοποιήσεις:

- $A^{(1)} = A$,
- $L^{(0)} = I_{n \times n}$,
- $P_0 = (1, 2, \dots, n)$,
- $t = 0$,
- $pivot(1 \times n) = (0, 0, \dots, 0)$,
- $\tau = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \approx 0,6404$
- $k = 1$

Όσο ισχύει $k \leq (n-1)$, υπολογίζεται η παραγοντοποίηση:

$$P_k A^{(k)} (P_k)^T = L^{(k)} A^{(k+s)} (L^{(k)})^T, \quad s=1(s=2) \text{ για } 1 \times 1(2 \times 2) \text{ οδηγό στοιχείο}$$

όπου:

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} D_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & D_{k-1} & \dots & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & 0 & a_{k,k}^{(k)} & \dots & a_{n,k}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{array} \right) \text{ με } D_i \text{ } 1 \times 1 \text{ ή } 2 \times 2 \text{ οδηγά στοιχεία}$$

Βήμα 1 Υπολογισμός των στοιχείων $\mu_0 = \max_{\substack{k \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} |a_{ij}^{(k)}| = |a_{rq}^{(k)}|$ και $\mu_1 = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ii}^{(k)}| = |a_{pp}^{(k)}|$

Βήμα 2 Εάν ισχύει $\mu_1 \geq \tau \mu_0$, εκτελούνται τα βήματα 3 έως 5. Στην περίπτωση όπου $\mu_1 < \tau \mu_0$, εκτελούνται τα βήματα 6 έως 8.

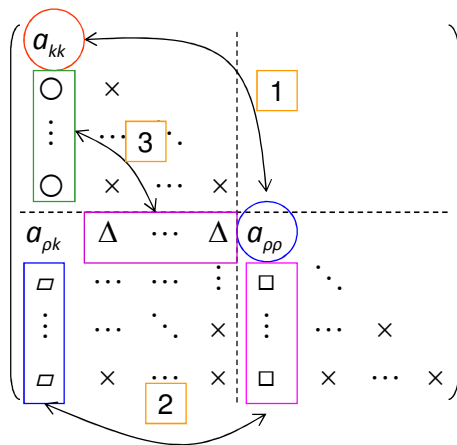
Βήμα 3 Ορίζεται μήτρα μετάθεσης για τη μεταφορά του διαγώνιου στοιχείου a_{pp} στη θέση (k, k) :

$$P_k = (1, 2, \dots, k-1, p, k+1, \dots, p-1, k, p+1, \dots, n)$$

Για τον αποδοτικό υπολογισμό της μήτρας $\tilde{A}^{(k)} = P_k A^{(k)} P_k^T$ πραγματοποιούνται οι εξής εναλλαγές στο κάτω τριγωνικό τμήμα του $A^{(k)}$:

- 1 $A(k, k) \leftrightarrow A(\rho, \rho)$
- 2 $A(\rho+1:n, k) \leftrightarrow A(\rho+1:n, \rho)$
- 3 $A(k+1:\rho-1, k) \leftrightarrow A(\rho, k+1:\rho-1)$

Σχηματικά, οι ανωτέρω εναλλαγές έχουν ως εξής:



Η μήτρα $\tilde{A}^{(k)}$ λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(\begin{array}{c|cc} \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \hline & a_{kk}^{(k)} & u_k^T \\ \hline & u_k & B_k \end{array} \right), \text{ με } a_{kk}^{(k)} = a_{\rho\rho}$$

Αντίστοιχα, για τη συμμετρική μετάθεση του αμέσως προηγούμενου παράγοντα $\tilde{L}^{(k-1)} = P_k L^{(k-1)} P_k^T$, εάν το αμέσως προηγούμενο οδηγό στοιχείο ήταν 1×1 , ή $\tilde{L}^{(k-2)} = P_k L^{(k-2)} P_k^T$, εάν το αμέσως προηγούμενο οδηγό στοιχείο ήταν 2×2 , πραγματοποιείται η εξής αντιμετάθεση στον $L^{(k-1)}$ ή $L^{(k-2)}$:

$$L(k, 1:k-1) \leftrightarrow L(\rho, 1:k-1)$$

Σχηματικά, η ανωτέρω εναλλαγή έχει ως εξής:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ \times & 1 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \times & \times & \dots & 1 & \\ \hline \ell_{k,1} & \ell_{k,2} & \dots & \ell_{k,k-1} & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & 1 \\ \hline \ell_{\rho,1} & \ell_{\rho,2} & \dots & \ell_{\rho,k-1} & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & 1 \end{array} \right)$$

Βήμα 4 Εκτελείται η παραγοντοποίηση με 1×1 οδηγό στοιχείο ως εξής:

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c} \vdots & \\ \hline & a_{kk}^{(k)} \quad u_k^T \\ & u_k \quad B_k \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & 1 \\ & u_k/a_{kk}^{(k)} \quad I \end{array} \right)}_{L^{(k)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \vdots & \\ \hline & a_{kk}^{(k)} \\ & B_k - u_k u_k^T / a_{kk}^{(k)} \end{array} \right)}_{A^{(k+1)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & 1 \\ & u_k/a_{kk}^{(k)} \quad I \end{array} \right)^T}_{(L^{(k)})^T}$$

Βήμα 5 $k \leftarrow k+1$, $\text{pivot}(k) = 1$ και επιστροφή στο βήμα 1.

Βήμα 6 Ορίζεται μήτρα μετάθεσης για τη μεταφορά του στοιχείου a_{rq} στη θέση $(k+1, k)$:

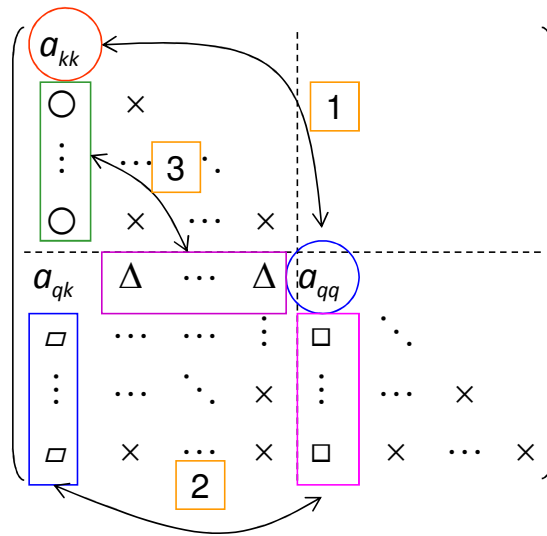
$$P_k = (1, 2, \dots, k, r, k+2, \dots, r-1, k+1, r+1, \dots, n) (1, 2, \dots, k-1, q, k+1, \dots, q-1, k, q+1, \dots, n)$$

Για τον αποδοτικό υπολογισμό της μήτρας $\tilde{A}^{(k)}$ ως $\tilde{A}^{(k)} = P_k A^{(k)} P_k^T$ πραγματοποιούνται οι ακόλουθες επιμέρους αντιμεταθέσεις στο κάτω τριγωνικό τμήμα της μήτρας $A^{(k)}$.

- Συμμετρική μετάθεση γραμμής/στήλης $k \leftrightarrow q$

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & A(k, k) \leftrightarrow A(q, q) \\ \boxed{2} \quad & A(q+1:n, k) \leftrightarrow A(q+1:n, q) \\ \boxed{3} \quad & A(k+1:q-1, k) \leftrightarrow A(q, k+1:q-1) \end{aligned}$$

Σχηματικά, οι ανωτέρω εναλλαγές έχουν ως εξής:



Η μήτρα $A^{(k)}$ λαμβάνει τη μορφή: $A^{(k)} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & a_{qq}^{(k)} & & u^T \\ & u & & B \end{pmatrix}$.

- Συμμετρική μετάθεση γραμμής/στήλης $k+1 \leftrightarrow r$

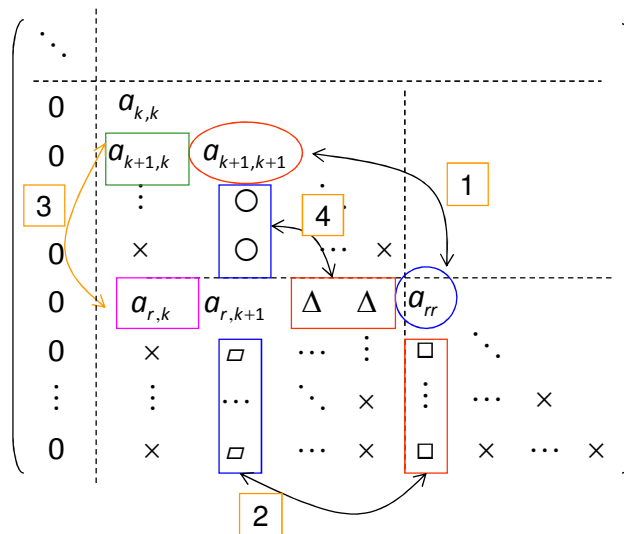
1 $A(k+1, k+1) \leftrightarrow A(r, r)$

2 $A(r+1:n, k+1) \leftrightarrow A(r+1:n, r)$

3 $A(k+1, k) \leftrightarrow A(r, k)$

4 $A(k+2:r-1, k+1) \leftrightarrow A(r, k+2:r-1)$

Σχηματικά, οι ανωτέρω εναλλαγές έχουν ως εξής:



Άρα, η μήτρα $\tilde{A}^{(k)}$ λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(\begin{array}{c|cc} \vdots & & \\ \hline & D_k & u_k^T \\ u_k & & B_k \end{array} \right), \text{ όπου } D_k = \begin{pmatrix} a_{qq}^{(k)} & a_{qr}^{(k)} \\ a_{rq}^{(k)} & a_{rr}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα, για τη συμμετρική μετάθεση του αμέσως προηγούμενου παράγοντα $\tilde{L}^{(k-1)} = P_k L^{(k-1)} P_k^T$, εάν το αμέσως προηγούμενο οδηγό στοιχείο ήταν 1×1 , ή $\tilde{L}^{(k-2)} = P_k L^{(k-2)} P_k^T$, εάν το αμέσως προηγούμενο οδηγό στοιχείο ήταν 2×2 , πραγματοποιείται η εξής αντιμετάθεση στον $L^{(k-1)}$ ή $L^{(k-2)}$:

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad & L(k, 1:k-1) \leftrightarrow L(q, 1:k-1) \\ \boxed{2} \quad & L(k+1, 1:k-1) \leftrightarrow L(r, 1:k-1) \end{aligned}$$

Σχηματικά, οι ανωτέρω εναλλαγές έχουν ως εξής:

$$\begin{array}{l} \boxed{1} \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & & & \\ \times & 1 & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & \\ \times & \times & \dots & 1 & & & \\ \hline l_{k,1} & l_{k,2} & \dots & l_{k,k-1} & 1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & & 1 & \\ l_{q,1} & l_{q,2} & \ddots & l_{q,k-1} & & \dots & \\ \times & \times & \dots & \times & & & 1 \end{array} \right) \\ \boxed{2} \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & & & \\ \times & 1 & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & \\ l_{k,1} & l_{k,2} & \dots & 1 & & & \\ \hline l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k-1} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & & 1 & \\ l_{r,1} & \dots & l_{r,k-1} & 0 & & \dots & \\ \times & \times & \dots & 0 & & & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Βήμα 7 Εκτελείται η παραγοντοποίηση με 2×2 οδηγό στοιχείο ως εξής:

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(\begin{array}{c|cc} \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \hline & D_k & u_k^T \\ \hline & u_k & B_k \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} I & & \\ \hline & I & \\ \hline & u_k D_k^{-1} & I \end{array} \right)}_{L^{(k)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \hline & D_k & \\ \hline & & B_k - u_k D_k^{-1} u_k^T \end{array} \right)}_{A^{(k+2)}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} I & & \\ \hline & I & \\ \hline & u_k D_k^{-1} & I \end{array} \right)^T}_{(L^{(k)})^T}$$

όπου: $D_k = \begin{pmatrix} a_{qq}^{(k)} & a_{qr}^{(k)} \\ a_{rq}^{(k)} & a_{rr}^{(k)} \end{pmatrix}$

Βήμα 8 $k \leftarrow k + 2$, $\text{pivot}(k, k + 1) = (2, 0)$ και επιστροφή στο βήμα 1.

Σημειώνεται ότι εάν μετά την ολοκλήρωση του αλγορίθμου το στοιχείο $\text{pivot}(n-1) = (0)$, το στοιχείο $\text{pivot}(n)$ λαμβάνει τιμή $\text{pivot}(n) = (1)$.

Οι παράμετροι t και k_i που αναφέρονται στη μπλοκ δομή της μήτρας D εξάγονται με βάση τον αριθμό και την τιμή των μη μηδενικών στοιχείων αντίστοιχα του πίνακα pivot .

Παράδειγμα 3.5

Έστω η συμμετρική και αόριστη μήτρα $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & & & \\ & 3 & 4 & 6 & \\ & & 4 & 1 & 5 \\ & & & 5 & \\ & 6 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Για $k = 1$ ορίζεται $A^{(1)} = A$. Προσδιορίζονται οι τιμές μ_0 και μ_1 με αναζήτηση στη μήτρα $A^{(1)}$.

$$\mu_0 = \max_{1 \leq i, j \leq 5} |a_{ij}^{(1)}| = |a_{52}^{(1)}| = 6 \Rightarrow \tau\mu_0 = 3,8423$$

$$\mu_1 = \max_{1 \leq i \leq 5} |a_{ii}^{(1)}| = |a_{11}^{(1)}| = 2$$

Εφόσον προκύπτει ότι $\mu_1 < \tau\mu_0$, πρέπει να επιλεγεί το μπλοκ $D_1 = \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{25}^{(1)} \\ a_{52}^{(1)} & a_{55}^{(1)} \end{pmatrix} 2 \times 2$

οδηγό στοιχείο. Προκειμένου το στοιχείο $a_{52}^{(1)}$ να μεταφερθεί στη θέση $(2, 1)$, ορίζεται η μετάθεση P_1 ως δύο διαδοχικές μεταθέσεις:

$$P_1 = (1, 5, 3, 4, 2)(2, 1, 3, 4, 5)$$

Η μετάθεση πραγματοποιείται στη μήτρα $A^{(1)}$ ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \leftrightarrow 5} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα, η αναδιατεταγμένη μήτρα A είναι $\tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$ και επιλέγεται ως

οδηγό στοιχείο το άνω αριστερά 2×2 μπλοκ $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Πραγματοποιείται η παραγοντοποίηση $\tilde{A}^{(1)} = L^{(1)} A^{(3)} (L^{(1)})^T$ και προκύπτει τα εξής:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ -0,1111 & 0,6667 & & & \\ & & 1 & & \\ -0,0833 & 0,5 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & 6 & & & \\ 6 & 1 & & & \\ & & 1,4444 & 5 & 0,3333 \\ & & 5 & & \\ & & 0,3333 & & 2,2500 \end{pmatrix}$$

Ανανεώνεται η τιμή του k και τα στοιχεία του πίνακα *pivot* ως $k=3$ και $\text{pivot}(1,2) = (2,0)$.

Προσδιορίζονται οι τιμές μ_0 και μ_1 με αναζήτηση στη μήτρα $A^{(3)}$.

$$\mu_0 = \max_{3 \leq i, j \leq 5} |a_{ij}^{(3)}| = |a_{43}^{(3)}| = 5 \Rightarrow \tau\mu_0 = 3,2019$$

$$\mu_1 = \max_{3 \leq i \leq 5} |a_{ii}^{(3)}| = |a_{55}^{(3)}| = 2,25$$

Εφόσον προκύπτει ότι $\mu_1 < \tau\mu_0$, πρέπει να επιλεγεί το μπλοκ $D_3 = \begin{pmatrix} a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}$ ως

2×2 οδηγό στοιχείο. Εφόσον το στοιχείο $a_{43}^{(3)}$ βρίσκεται ήδη στην επιθυμητή θέση $(4,3)$, δεν πραγματοποιείται καμία συμμετρική μετάθεση και, επομένως, ισχύει ότι:

$$P_3 = (1,2,3,4,5), \tilde{L}^{(1)} = L^{(1)}, \tilde{A}^{(3)} = A^{(3)}$$

Επιλέγεται $D_3 = \begin{pmatrix} 1,4444 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ και πραγματοποιείται η παραγοντοποίηση $\tilde{A}^{(3)} = L^{(3)}A^{(5)}(L^{(3)})^T$. Προκύπτουν τα εξής:

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0,0667 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(5)} = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & 6 & & & & \\ 6 & 1 & & & & \\ & & 1,4444 & 5 & & \\ & & & 5 & & \\ & & & & & 2,25 \end{pmatrix}$$

Ανανεώνεται η τιμή του k και τα στοιχεία του πίνακα *pivot* ως $k=5$ και $\text{pivot}(3,4) = (2,0)$.

Ο αλγόριθμος τερματίζει και, εφόσον ισχύει $\text{pivot}(4) = (0)$, προκύπτει $\text{pivot}(5) = (1)$. Οι παράγοντες έχουν ως εξής:

$$L = \tilde{L}^{(1)}L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ -0,1111 & 0,6667 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -0,0833 & 0,5 & & & 0,0667 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 6 & \\ 6 & 1 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 1,4444 & 5 \\ & 5 \end{matrix} & & \\ & & & \begin{matrix} 2,2500 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Οι παράμετροι t και k για τη δομή του παράγοντα για τη δομή του παράγοντα D προκύπτουν από τα στοιχεία του πίνακα $pivot$:

$$pivot(1:5) = (2,0,2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ k_1 = 2 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 1 \end{cases}$$

Η ολική μετάθεση P προκύπτει ως το γινόμενο των επιμέρους μεταθέσεων, δηλαδή:

$$P = P_3 P_1 \Rightarrow P = (1,2,3,4,5)(1,5,3,4,2)(2,1,3,4,5) \Rightarrow P = (2,5,3,4,1)$$

3.4.1.2 Αλγόριθμος Bunch-Kaufman

Ο αλγόριθμος Bunch-Kaufman μειώνει τον υπολογιστικό φόρτο σε σχέση με τον αλγόριθμο Bunch-Parlett, καθώς για την εύρεση κατάλληλου οδηγού στοιχείου πραγματοποιείται αναζήτηση σε δύο μόνο στήλες και όχι στο σύνολο της εκάστοτε μήτρας προς παραγοντοποίηση, δηλαδή της αρχικής μήτρας για $k=1$ και, εν συνεχεία, των συμπληρωμάτων Schur για $k > 1$.

Ωστόσο, ο εν λόγω αλγόριθμος οδηγεί σε λιγότερο αριθμητικά ευσταθείς επιλογές οδηγών στοιχείων σε σχέση με τον αλγόριθμο Bunch-Parlett.

Για κάθε στάδιο k της παραγοντοποίησης πραγματοποιούνται τα ακόλουθα βήματα μέχρις ότου $k > n-1$:

Βήμα 1 Εύρεση του μη διαγώνιου στοιχείου της στήλης k με τη μέγιστη κατά απόλυτο τιμή. Έστω $a_{rk}^{(k)}$ το ζητούμενο στοιχείο, όπου r η σειρά στην οποία ανήκει.

Βήμα 2 Εάν ισχύει $|a_{kk}^{(k)}| \geq \tau |a_{rk}^{(k)}|$, τότε δεν πραγματοποιείται καμία μετάθεση και το στοιχείο $a_{kk}^{(k)}$ επιλέγεται ως 1×1 pivot.

Βήμα 3 Εάν ισχύει $|a_{kk}^{(k)}| < \tau |a_{rk}^{(k)}|$, αναζητείται στη στήλη r το μη διαγώνιο στοιχείο με τη μέγιστη κατά απόλυτο τιμή, εξαιρουμένου του στοιχείου $a_{kr}^{(k)}$. Έστω β_r το ζητούμενο στοιχείο.

Βήμα 4 Εάν ισχύει $|a_{kk}^{(k)}\beta_r| \geq \tau(a_{rk}^{(k)})^2$, τότε δεν πραγματοποιείται καμία μετάθεση και το στοιχείο $a_{kk}^{(k)}$ επιλέγεται ως 1×1 ρινोट.

Βήμα 5 Εάν ισχύει $|a_{kk}^{(k)}\beta_r| < \tau(a_{rk}^{(k)})^2$ και $|a_{rr}^{(k)}| \geq \tau|\beta_r|$, διαμορφώνεται κατάλληλα η μήτρα μετάθεσης P ώστε να αλλάξουν αμοιβαία θέση οι γραμμές και στήλες k και r και, επομένως, το στοιχείο $a_{rr}^{(k)}$ επιλέγεται ως 1×1 ρινोट.

Βήμα 6 Εάν καμία από τις ανωτέρω προϋποθέσεις δεν ικανοποιείται, τότε διαμορφώνεται κατάλληλα η μήτρα μετάθεσης P ώστε να αλλάξουν αμοιβαία θέση οι σειρές και στήλες k και r και επιλέγεται το μπλοκ $\begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} & a_{kr}^{(k)} \\ a_{rk}^{(k)} & a_{rr}^{(k)} \end{pmatrix}$ ως 2×2 ρινोट.

3.4.2 Καθορισμός με κριτήριο την αριθμητική ευστάθεια και την αραιότητα των παραγόντων

Είναι επιθυμητό η επιλογή του οδηγού στοιχείου να πραγματοποιηθεί με σκοπό την εξασφάλιση τόσο της αριθμητικής ευστάθειας όσο και της αραιότητας των παραγόντων, ώστε να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος και οι απαιτήσεις σε μνήμη.

Για την εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας ένα μη μηδενικό διαγώνιο 1×1 οδηγό στοιχείο a_{ii} είναι αποδεκτό εάν ικανοποιεί τη σχέση:

$$|a_{ii}| \geq u \max_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα, ένα αντιστρέψιμο 2×2 οδηγό στοιχείο είναι αποδεκτό εάν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left| \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}^{-1} \right| \left(\begin{matrix} \max_{j \neq i} |a_{ij}| \\ \max_{i \neq j} |a_{ji}| \end{matrix} \right) \leq \begin{pmatrix} u^{-1} \\ u^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

όπου η παράμετρος u λαμβάνει τιμές στο διάστημα $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$.

Η επιλογή της τιμής της παραμέτρου u επηρεάζει την παραγοντοποίηση ως εξής: Αυξάνοντας την τιμή της παραμέτρου u δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας σε βάρος της αραιότητας του παράγοντα L .

Ως υποψήφια 2×2 οδηγά στοιχεία εξετάζονται αντιστρέψιμα μπλοκ $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ με $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$ και διακρίνονται οι ακόλουθες τρεις κατηγορίες:

- Το οδηγό στοιχείο $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ όπου $a_{ii} = a_{jj} = 0$ καλείται *oxo* οδηγό στοιχείο.
- Το οδηγό στοιχείο $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ όπου αποκλειστικά $a_{ii} = 0$ ή $a_{jj} = 0$, αλλά όχι $a_{ii} = a_{jj} = 0$, καλείται *tile* οδηγό στοιχείο.
- Το οδηγό στοιχείο $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ όπου $a_{ii} \neq 0$ και $a_{jj} \neq 0$ καλείται *full* οδηγό στοιχείο.

Από πλευράς μείωσης των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L η επιλογή μεταξύ αποδεκτών διαγώνιων 1×1 οδηγών στοιχείων γίνεται με βάση τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων στην τρέχουσες στήλες στις οποίες βρίσκονται. Η επιλογή ανάμεσα σε αποδεκτά 2×2 οδηγά στοιχεία πραγματοποιείται με βάση το κόστος Markowitz, το οποίο εκφράζει το άνω όριο των επιπλέον μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L που δύνανται να προκύψουν με την επιλογή του εκάστοτε 2×2 οδηγού στοιχείου. Ορίζεται η ποσότητα n_i ως ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων της στήλης i της μήτρας $A^{(k)}$ ($k:n, k:n$). Επίσης, ορίζεται η ποσότητα \hat{n}_{ij} ως $\hat{n}_{ij} = \min(n_i + n_j - 4, z - 2)$, όπου $z = n - k + 1$.

Το κόστος Markowitz για κάθε επιμέρους κατηγορία 2×2 οδηγού στοιχείου υπολογίζεται με βάση τον ακόλουθο πίνακα:

	Κόστος Markowitz
<i>oxo</i>	$(n_i - 1)(n_j - 1)$
<i>tile</i>	$\begin{cases} (n_i - 1)(\hat{n}_{ij} + 1), a_{ii} = 0 \\ (n_j - 1)(\hat{n}_{ij} + 1), a_{jj} = 0 \end{cases}$
<i>full</i>	$(\hat{n}_{ij})^2$

Ο αλγόριθμος επιλογής οδηγού στοιχείου έχει ως εξής:

Σε κάθε βήμα της αριθμητικής παραγοντοποίησης πραγματοποιούνται οι ακόλουθες δύο αναζητήσεις για διαδοχικά αυξανόμενες τιμές της παραμέτρου r ($r=1,2,\dots$) μέχρις ότου επιλεγεί το πρώτο αριθμητικά ευσταθές οδηγό στοιχείο:

- Αναζήτηση για 1×1 οδηγό στοιχείο: Εξετάζονται διαδοχικά τα στοιχεία a_{ii} με $n_i = r$. Όσα στοιχεία a_{ii} είναι μηδενικά χαρακτηρίζονται ως μη ευσταθή 1×1 οδηγά στοιχεία. Όταν βρεθεί μη μηδενικό στοιχείο a_{ii} που να ικανοποιεί το κριτήριο ευστάθειας (3.3), επιλέγεται ως ευσταθές 1×1 οδηγό στοιχείο και η διαδικασία επιλογής τερματίζεται. Σε διαφορετική περίπτωση, όλα τα μη μηδενικά στοιχεία a_{ii} χαρακτηρίζονται ως μη ευσταθή 1×1 οδηγά στοιχεία.
- Αναζήτηση για 2×2 οδηγό στοιχείο: Για κάθε μη ευσταθές 1×1 οδηγό στοιχείο a_{ii} , εξετάζονται πιθανά 2×2 οδηγά στοιχεία της μορφής $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ με $a_{ji} \neq 0$. Θεωρούνται ως υποψήφια μόνο όσα εμφανίζουν κόστος Markowitz μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο όριο του πίνακα:

	Όριο κόστους
<i>oxo</i>	$(r-1)^2$
<i>tile</i>	$(r-1)(2r-3)$
<i>full</i>	$(2r-4)^2$

Όταν βρεθεί υποψήφιο 2×2 μπλοκ που να ικανοποιεί το κριτήριο ευστάθειας (3.4), επιλέγεται ως ευσταθές 2×2 οδηγό στοιχείο και η διαδικασία επιλογής τερματίζεται.

Επομένως, σε κάθε βήμα της παραγοντοποίησης επιλέγεται το 1×1 ή 2×2 οδηγό στοιχείο που είναι αποδεκτό από πλευράς αριθμητικής ευστάθειας και οδηγεί σε μείωση της εμφάνισης επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L .

Παράδειγμα 3.6

Έστω η συμμετρική και αόριστη μήτρα $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & & & \\ 3 & & 4 & 6 & \\ & 4 & 1 & 5 & \\ & & 5 & & \\ 6 & & & & 1 \end{pmatrix}$.

Ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων κάθε στήλης έχει ως εξής:

Στήλη i	n_i
1	2
2	3
3	3
4	1
5	2

Για $r=1$ έχουμε τα εξής:

Το στοιχείο a_{44} επιλέγεται ως το μοναδικό υποψήφιο 1×1 οδηγό στοιχείο. Εφόσον είναι μηδενικό, χαρακτηρίζεται ως μη ευσταθές 1×1 οδηγό στοιχείο.

Το υποψήφιο 2×2 οδηγό στοιχείο με μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις $(1,2)$ και $(2,1)$ έχοντας στη θέση $(1,1)$ το στοιχείο a_{44} είναι μόνο το εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{44} & a_{43} \\ a_{34} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφόσον το στοιχείο στη θέση $(1,1)$ είναι μηδενικό, το ανωτέρω υποψήφιο 2×2 οδηγό στοιχείο αποτελεί *tile* οδηγό στοιχείο.

Αρχικά, εξετάζεται εάν ικανοποιεί το κριτήριο για την αραιότητα προσδιορίζοντας το κόστος Markowitz και συγκρίνοντάς το με το αντίστοιχο όριο για *tile* οδηγό στοιχείο.

$$\hat{n}_{43} = \min(n_4 + n_3 - 4, 5 - 2) \Rightarrow \hat{n}_{43} = \min(0, 3) \Rightarrow \hat{n}_{43} = 0$$

Το κόστος Markowitz και το αντίστοιχο όριο προκύπτουν αντίστοιχα ως:

$$(n_4 - 1)(\hat{n}_{43} + 1) = 0, (r - 1)(2r - 3)|_{r=1} = 0$$

Εφόσον προκύπτει $(n_4 - 1)(\hat{n}_{43} + 1) \leq (r - 1)(2r - 3)|_{r=1}$, το υποψήφιο 2×2 οδηγό στοιχείο ικανοποιεί το κριτήριο αραιότητας. Εν συνεχεία, εξετάζεται εάν είναι αποδεκτό με βάση το κριτήριο ευστάθειας.

$$\begin{pmatrix} a_{44} & a_{43} \\ a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \max_{j \neq 4} |a_{4j}| \\ \max_{i \neq 3} |a_{3i}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως, το *tile* οδηγό στοιχείο $\begin{pmatrix} a_{44} & a_{43} \\ a_{34} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ επιλέγεται ως ευσταθές 2×2 οδηγό στοιχείο.

Η μήτρα μετάθεσης και οι τιμές των παραμέτρων t και k_i είναι αντίστοιχα:

$$P_1 = (4, 3, 1, 2, 5) \text{ και } t = 1, k_1 = 2$$

Η αρχική μήτρα αναδιατάσσεται και προκύπτει η $\tilde{A}^{(1)}$ με την ακόλουθη διαμέριση:

$$\tilde{A}^{(1)} = P_1 A P_1^T = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Εκτελώντας την παραγοντοποίηση $\tilde{A}^{(1)} = L^{(1)} A^{(3)} (L^{(1)})^T$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0,8 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 5 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & \\ & & 3 & & 6 \\ & & & & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του επόμενου οδηγού στοιχείου εξετάζεται το κάτω δεξιά 3×3 τμήμα της $A^{(3)}$, δηλαδή:

$$A^{(3)}(3:5, 3:5) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Στήλη i	n_i
3	2
4	2
5	2

Για $r = 1$ δεν υπάρχει υποψήφιο 1×1 οδηγό στοιχείο.

Για $r=2$ έχουμε τα εξής:

Εξετάζονται διαδοχικά τα στοιχεία a_{33} , a_{44} και a_{55} μέχρις ότου επιλεγεί ευσταθές οδηγό στοιχείο.

Εφόσον ισχύει $\max_{j \neq 3} |a_{3j}| = 3$, προκύπτει $|a_{33}| = 2 \geq \frac{1}{2} \cdot \max_{j \neq 3} |a_{3j}| = \frac{3}{2}$. Επομένως, το στοιχείο a_{33} επιλέγεται ως ευσταθές 1×1 οδηγό στοιχείο.

Η μήτρα μετάθεσης και οι τιμές των παραμέτρων t και k_i είναι αντίστοιχα:

$$P_3 = (1, 2, 3, 4, 5) \text{ και } t = 2, k_1 = 2, k_2 = 1.$$

Εφόσον η μήτρα μετάθεσης αντιστοιχεί στη μοναδιαία μήτρα, ο παράγοντας $\tilde{L}^{(1)}$ είναι ίδιος με τον $L^{(1)}$. Αντίστοιχα, η μήτρα $\tilde{A}^{(3)}$ προκύπτει ίδια με την $A^{(3)}$ και έχει την ακόλουθη διαμέριση:

$$\tilde{A}^{(3)} = P_3 A^{(3)} P_3^T = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 5 & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & \\ & & 3 & & 6 \\ & & & & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_3 = 2 \\ U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Εκτελώντας την παραγοντοποίηση $\tilde{A}^{(3)} = L^{(3)} A^{(4)} (L^{(3)})^T$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & 1,5 & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, A^{(4)} = \begin{pmatrix} & & 5 & & \\ & & 5 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & -4,5 & 6 \\ & & & & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του επόμενου οδηγού στοιχείου εξετάζεται το κάτω δεξιά 2×2 τμήμα της $A^{(4)}$, δηλαδή το μπλοκ:

$$A^{(4)}(4:5, 4:5) = \begin{pmatrix} -4,5 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Στήλη i	n_i
4	2
5	2

Για $r=1$ δεν υπάρχει υποψήφιο 1×1 οδηγό στοιχείο.

Για $r=2$ έχουμε τα εξής:

Εξετάζονται διαδοχικά τα στοιχεία a_{44} και a_{55} μέχρις ότου επιλεγεί ευσταθές οδηγό στοιχείο.

Εφόσον ισχύει $\max_{j \neq 4} |a_{4j}| = 6$, προκύπτει $|a_{44}| = 4,5 \geq \frac{1}{2} \cdot \max_{j \neq 4} |a_{4j}| = 3$. Επομένως, το στοιχείο a_{44} επιλέγεται ως ευσταθές 1×1 οδηγό στοιχείο.

Η μήτρα μετάθεσης και οι τιμές των παραμέτρων t και k_i είναι αντίστοιχα:

$$P_4 = (1, 2, 3, 4, 5) \text{ και } t = 3, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1.$$

Εφόσον η μήτρα μετάθεσης αντιστοιχεί στη μοναδιαία μήτρα, ο παράγοντας $\tilde{L}^{(3)}$ είναι ίδιος με τον $L^{(3)}$. Αντίστοιχα, η μήτρα $\tilde{A}^{(4)}$ προκύπτει ίδια με την $A^{(4)}$ και έχει την ακόλουθη διαμέριση:

$$\tilde{A}^{(4)} = P_4 A^{(4)} P_4^T = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 5 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -4,5 & 6 \\ & & & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_4 = -4,5 \\ u_4 = 6 \\ B_4 = 1 \end{cases}$$

Εκτελώντας την παραγοντοποίηση $\tilde{A}^{(4)} = L^{(4)} A^{(5)} (L^{(4)})^T$ προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$L^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & -1, \bar{3} & 1 \end{pmatrix}, A^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 5 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -4,5 & \\ & & & & 9 \end{pmatrix}$$

Άρα, η ολική μήτρα μετάθεσης P προκύπτει ως:

$$P = P_4 P_3 P_1 = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)(4 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5) \Rightarrow$$

$$P = (4 \ 3 \ 1 \ 2 \ 5)$$

Η δομή του παράγοντα D περιγράφεται από τις παραμέτρους:

$$t = 4, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 1.$$

Οι παράγοντες L και D έχουν ως εξής:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ 0,8 & & 1,5 & 1 & \\ & & & -1,3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \boxed{5} & & & & \\ \boxed{5} & \boxed{1} & & & \\ & \textcircled{2} & & & \\ & & \boxed{-4,5} & & \\ & & & \textcircled{9} & \end{pmatrix}$$

Η χρήση της ανωτέρω μεθόδου για την επίλυση του προβλήματος της εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών εμφανίζει το μειονέκτημα ότι σε κάθε επανάληψη η ενημέρωση των στοιχείων της μήτρας συντελεστών $F(x^k)$ απαιτεί την εκ νέου παραγοντοποίηση της μήτρας με πιθανώς διαφορετική επιλογή οδηγών στοιχείων, ώστε να εξασφαλιστεί η αριθμητική ευστάθεια με βάση τις νέες τιμές των στοιχείων. Με άλλα λόγια, η συνολική μετάθεση P που προκύπτει στο πρώτο βήμα της εκτίμησης κατάστασης δεν μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί σε επόμενα βήματα για την επιτάχυνση της παραγοντοποίησης.

Κεφάλαιο 4 – Ανάλυση Παρατηρησιμότητας

4.1 Εισαγωγή

Η ανάλυση παρατηρησιμότητας καθορίζει εάν ένα δεδομένο σύνολο μετρήσεων επαρκεί για την εύρεση εκτίμησης για την κατάσταση του συστήματος. Στην περίπτωση επαρκούς συνόλου μετρήσεων το σύστημα ορίζεται ως παρατηρήσιμο, ενώ σε αντίθεση περίπτωση ως μη παρατηρήσιμο. Σε μη παρατηρήσιμο σύστημα αναγνωρίζονται οι επιμέρους παρατηρήσιμες νησίδες και προσδιορίζεται το ελάχιστο σύνολο μη πλεοναζουσών μετρήσεων που πρέπει να συμπεριληφθούν στο ήδη υπάρχον σύνολο ώστε να αποκατασταθεί η παρατηρησιμότητα.

Η εν λόγω ανάλυση μπορεί να εκτελεστεί πριν την εγκατάσταση του εκτιμητή, ώστε να ελεγχθεί η επάρκεια του υφιστάμενου συνόλου μετρήσεων και η πιθανή ανάγκη για τοποθέτηση επιπλέον μετρητικών οργάνων σε συγκεκριμένες θέσεις του συστήματος. Μετά την εγκατάσταση του εκτιμητή, η ανάλυση παρατηρησιμότητας πραγματοποιείται πριν από κάθε εκτέλεση του αλγορίθμου εκτίμησης κατάστασης, ώστε να ελεγχθεί η δυνατότητα εύρεσης μοναδικής εκτίμησης με βάση το σύνολο των πρόσφατων μετρήσεων που ελήφθησαν. Τηλεπικοινωνιακά σφάλματα, αλλαγές στην τοπολογία του δικτύου ή αστοχίες των μετρητικών οργάνων μπορεί να οδηγήσουν σε αδυναμία εύρεσης εκτίμησης για την κατάσταση του συστήματος.

Η παρατηρησιμότητα καθορίζεται από τον τύπο και τη θέση των υφιστάμενων μετρήσεων, καθώς και από την τοπολογία του δικτύου. Παρουσιάζονται δύο μέθοδοι για την ανάλυση παρατηρησιμότητας: μία αριθμητική και μία υβριδική μέθοδος.

4.2 Αριθμητική μέθοδος ανάλυσης παρατηρησιμότητας

Έστω ότι το υπό εξέταση δίκτυο αποτελείται από n ζυγούς και, αντίστοιχα, το σύνολο μετρήσεων αποτελείται από m μετρήσεις. Προκειμένου να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος για την ανάλυση παρατηρησιμότητας, πραγματοποιείται η υπόθεση, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι όλες οι μετρήσεις ισχύος είναι σε ζεύγη ενεργού-αέργου ισχύος, ενώ αγνοούνται όλες οι εγκάρσιες αγωγιμότητες. Επιπροσθέτως, τα μέτρα των τάσεων σε όλους τους ζυγούς του δικτύου θεωρούνται ίσα με 1,0 ανά μονάδα.

Το γεγονός ότι όλες οι μετρήσεις ισχύος είναι σε ζεύγη ενεργού-αέργου ισχύος επιτρέπει την ξεχωριστή μελέτη παρατηρησιμότητας για το $P-\theta$ και το $Q-V$ υποπρόβλημα της εκτίμησης κατάστασης. Μέσω του μοντέλου της DC εκτίμησης μπορεί να πραγματοποιηθεί η $P-\theta$ ανάλυση. Η $Q-V$ ανάλυση ακολουθεί τα συμπεράσματα της $P-\theta$ ανάλυσης, αλλά απαιτεί την ύπαρξη μίας τουλάχιστον μέτρησης μέτρου τάσης. Συνεπώς, για πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα σύμφωνα με τα αποτελέσματα της $P-\theta$ ανάλυσης απαιτείται η παρουσία μίας τουλάχιστον μέτρησης μέτρου τάσης.

Με τις ανωτέρω υποθέσεις, η ανάλυση μπορεί να πραγματοποιηθεί λαμβάνοντας υπόψη το μοντέλο της DC εκτίμησης κατάστασης:

$$z = H\vartheta + e$$

όπου $z(m \times 1)$ το διάνυσμα μετρήσεων, $H(m \times n)$ η ιακωβιανή μήτρα, $\vartheta(n \times 1)$ το διάνυσμα των γωνιών των τάσεων των ζυγών, συμπεριλαμβανομένου του ζυγού αναφοράς, και $e(m \times 1)$ το διάνυσμα των τυχαίων σφαλμάτων μηδενικής μέσης τιμής και μήτρας συνδιακύμανσης R ίσης με τη μοναδιαία μήτρα.

Με βάση τα ανωτέρω, η ιακωβιανή μήτρα H έχει την εξής δομή:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \dots & \vartheta_i & \dots & \vartheta_j & \dots & \vartheta_k & \dots & \vartheta_l & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ -b_{ij} & & \dots & b_{ij} & & & & & \\ -(b_{ij} + b_{ik} + b_{il} + \dots) & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{il} & \dots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ P_{ij} \\ P_i \\ \vdots \end{matrix}$$

όπου b_{ij} το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας του κλάδου $i-j$, P_{ij} η ροή ενεργού ισχύος από το ζυγό i προς το ζυγό j , P_i η έγχυση ενεργού ισχύος στο ζυγό i , δ_i η γωνία της τάσης στο ζυγό i , και j, k, l, \dots οι ζυγοί που συνδέονται με το ζυγό i . Εφόσον η παρατηρησιμότητα του δικτύου δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους των κλάδων, υποθέτουμε ότι ισχύει $b_{ij} = -1$ για όλους τους κλάδους $i-j$ του δικτύου.

Εφόσον ο ζυγός αναφοράς συμπεριλαμβάνεται στην ανωτέρω μοντελοποίηση, το δίκτυο θα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν ισχύει:

$$\text{rank}(H) = n - 1 \Leftrightarrow \text{nullity}(H) = n - \text{rank}(H) = 1$$

Ορίζεται η μήτρα προσπτώσεων ζυγών A ως μήτρα $b \times n$, όπου b ο αριθμός των κλάδων, της οποίας οι τιμές καθορίζονται ως ακολούθως:

- $a_{ij} = 1$, εάν ο κλάδος i συνδέεται με το ζυγό j και ο προσανατολισμός του απομακρύνεται από αυτόν,
- $a_{ij} = -1$, εάν ο κλάδος i συνδέεται με το ζυγό j και ο προσανατολισμός του κατευθύνεται προς αυτόν,
- $a_{ij} = 0$, εάν ο κλάδος i δε συνδέεται με το ζυγό j .

Η DC ροή ισχύος στους κλάδους του συστήματος μπορεί να γραφεί ως:

$$P_b = A\vartheta$$

όπου: P_b το διάνυσμα των ρών ενεργού ισχύος στους κλάδους, A η μήτρα προσπτώσεων ζυγών και ϑ το διάνυσμα των γωνιών της τάσης των ζυγών.

Στην περίπτωση όπου η εκτιμώμενη κατάσταση $\hat{\vartheta}$ είναι μηδενική, τότε οι ροές ενεργού ισχύος σε όλους τους κλάδους θα είναι μηδενικές. Αγνοώντας τα σφάλματα, λαμβάνεται το εξής:

$$H\vartheta = z$$

Η εκτίμηση $\hat{\vartheta}$ προκύπτει ως:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\vartheta} = (H^T H)^{-1} H^T z \\ G = H^T H \\ t = H^T z \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\vartheta} = G^{-1} t$$

Στην περίπτωση ενός πλήρως παρατηρήσιμου συστήματος, το διάνυσμα εκτίμησης $\hat{\vartheta}$ θα προκύψει μηδενικό μόνο εάν όλες οι μετρήσεις z είναι μηδενικές.

Η κατάσταση του συστήματος θα είναι μη παρατηρήσιμη στην περίπτωση όπου υπάρχει διάνυσμα εκτίμησης $\hat{\vartheta}$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις εξισώσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} H\hat{\vartheta} = 0 \\ P_b = A\hat{\vartheta} \neq 0 \end{array} \right.$$

Στην περίπτωση του μη παρατηρήσιμου συστήματος, οι κλάδοι που εμφανίζουν μη μηδενική ροή ισχύος χαρακτηρίζονται ως μη παρατηρήσιμοι κλάδοι.

4.2.1 Προσδιορισμός μη παρατηρήσιμων κλάδων

Εάν το σύστημα προκύψει ότι είναι μη παρατηρήσιμο, τότε μπορούν να προσδιοριστούν οι παρατηρήσιμες νησίδες του συστήματος που διαχωρίζονται από τους μη παρατηρήσιμους κλάδους. Οι κλάδοι στους οποίους αφενός δεν υπάρχουν μετρήσεις και αφετέρου δεν συνδέονται σε ζυγούς στους οποίους υπάρχουν μετρήσεις μπορούν να απομακρυνθούν από το δίκτυο στα πλαίσια της ανάλυσης παρατηρησιμότητας, καθώς η εκτιμώμενη κατάσταση είναι ανεξάρτητη από την παρουσία και τις παραμέτρους τους.

Όταν όλες οι μετρήσεις είναι μηδενικές ισχύει:

$$(H^T H)\hat{\vartheta} = H^T z = t = 0$$

Εφόσον η γωνία του ζυγού αναφοράς έχει περιληφθεί στο διάνυσμα κατάστασης ϑ , η μήτρα $G = H^T H$ προκύπτει ως μη αντιστρέψιμη, ακόμα και για πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα. Ωστόσο, μπορεί να διαμεριστεί σε επιμέρους υπομήτρες

(μπλοκ) με κατάλληλη αναδιάταξη γραμμών και στηλών μέσω μήτρας μετάθεσης P_G , έτσι ώστε το μπλοκ στη θέση (1,1) να είναι αντιστρέψιμο, δηλαδή:

$$P_G G P_G^T = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \hline \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{array} \right), \text{ όπου } \tilde{G}_{11} \text{ αντιστρέψιμη μήτρα}$$

Αντίστοιχα, το διάνυσμα εκτίμησης κατάστασης $\hat{\vartheta}$ θα διαμεριστεί σε:

$$P_G \hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_a \\ \hat{\vartheta}_b \end{pmatrix}$$

Έτσι, προκύπτει το σύστημα:

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \hline \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_a \\ \hat{\vartheta}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{G}_{11} \hat{\vartheta}_a + \tilde{G}_{12} \hat{\vartheta}_b = 0 \\ \tilde{G}_{21} \hat{\vartheta}_a + \tilde{G}_{22} \hat{\vartheta}_b = 0 \end{cases}$$

Αναθέτοντας τυχαίες αλλά διακριτές μεταξύ τους τιμές στο διάνυσμα $\hat{\vartheta}_b$ και δεδομένης της αντιστρεψιμότητας της μήτρας \tilde{G}_{11} , το διάνυσμα εκτίμησης $\hat{\vartheta}_a$ προκύπτει ως:

$$\hat{\vartheta}_a = -\tilde{G}_{11}^{-1} \tilde{G}_{12} \hat{\vartheta}_b$$

Η ροή ενεργού ισχύος στους κλάδους που αντιστοιχεί στη λύση $(\hat{\vartheta}_a \hat{\vartheta}_b)^T$ είναι:

$$P_G P_b = P_G A P_G^T \begin{pmatrix} \hat{\vartheta}_a \\ \hat{\vartheta}_b \end{pmatrix}$$

Οι κλάδοι για τους οποίους αντιστοιχεί μη μηδενική ροή ισχύος προκύπτουν ως μη παρατηρήσιμοι.

Ωστόσο, η ανωτέρω διαδικασία βασίζεται στην εύρεση μήτρας μετάθεσης P_G η οποία εξασφαλίζει τη διαμέριση της μήτρας G σε επιμέρους μπλοκ όπου το μπλοκ στη θέση (1,1) είναι αντιστρέψιμο. Επειδή η εν λόγω διαδικασία είναι πολύπλοκη, ο προσδιορισμός των μη παρατηρήσιμων κλάδων πραγματοποιείται μέσω της αριθμητικής παραγοντοποίησης της μήτρας G . Εφόσον η G είναι μη αντιστρέψιμη, τουλάχιστον ένα οδηγό στοιχείο κατά τη διάρκεια της παραγοντοποίησης θα προκύψει μηδενικό. Σε αυτή την περίπτωση, το μηδενικό οδηγό στοιχείο αντικαθίσταται με την τιμή 1,0 και το αντίστοιχο στοιχείο στο διάνυσμα t λαμβάνει τυχαία τιμή. Οι τυχαίες τιμές που θα χρειαστεί να αποδοθούν σε στοιχεία της t πρέπει να είναι διακριτές μεταξύ τους. Για λόγους απλότητας, επιλέγεται η ανάθεση

ακέραιων τιμών σε αύξουσα σειρά κατά την εμφάνιση μηδενικών οδηγών στοιχείων, δηλαδή $\{0,1,2,\dots\}$.

4.2.2 Αναγνώριση παρατηρήσιμων νησίδων

Ο αλγόριθμος αναγνώρισης παρατηρήσιμων νησίδων βασίζεται στη διαδικασία της παραγράφου 4.2.1 για την αναγνώριση των μη παρατηρήσιμων κλάδων. Η εν λόγω διαδικασία πρέπει να εκτελεστεί επαναληπτικά, απομακρύνοντας εγχύσεις που προσπίπτουν σε μη παρατηρήσιμους κλάδους, έως ότου εντοπιστούν όλες οι παρατηρήσιμες νησίδες του δικτύου. Ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Βήμα 1 Απομάκρυνση των κλάδων στους οποίους δεν υπάρχουν μετρήσεις και, επιπλέον, δε συνδέονται σε ζυγούς στους οποίους λαμβάνονται μετρήσεις.

Βήμα 2 Κατασκευή της μήτρας κέρδους $G = H^T H$.

Βήμα 3 Παραγοντοποίηση της μήτρας G . Σε περίπτωση εμφάνισης μηδενικού οδηγού στοιχείου, ακολουθείται η διαδικασία της παραγράφου 4.2.1, δηλαδή το εν λόγω στοιχείο αντικαθίσταται με την τιμή 1,0 και το αντίστοιχο στοιχείο στο διάνυσμα t λαμβάνει κατάλληλη τιμή από το σύνολο $\{0,1,2,\dots\}$ ανάλογα με τον αριθμό των μηδενικών οδηγών στοιχείων που έχουν παρουσιαστεί σε προηγούμενο στάδιο.

Βήμα 4 Αναγνώριση και απομάκρυνση των μη παρατηρήσιμων κλάδων και όλων των εγχύσεων σε ζυγούς στους οποίους συνδέονται μη παρατηρήσιμοι κλάδοι.

Βήμα 5 Εάν δεν προκύψουν νέοι μη παρατηρήσιμοι κλάδοι κατά το βήμα 4, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει και αναγνωρίζονται ως παρατηρήσιμες οι νησίδες που διαχωρίζονται από τους μη παρατηρήσιμους κλάδους. Σε διαφορετική περίπτωση η εκτέλεση του αλγορίθμου συνεχίζει από το βήμα 2.

4.2.3 Τοποθέτηση μετρήσεων για αποκατάσταση παρατηρησιμότητας

Εφόσον έχουν αναγνωρισθεί οι παρατηρήσιμες νησίδες, μπορούν να προστεθούν επιπλέον μετρήσεις έτσι ώστε οι επιμέρους νησίδες να ενωθούν σε μία ενιαία παρατηρήσιμη νησίδα, δηλαδή το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο. Οι υποψήφιες μετρήσεις που δύνανται να ενώσουν επιμέρους παρατηρήσιμες νησίδες είναι:

- ροές ισχύος σε κλάδους που ενώνουν παρατηρήσιμες νησίδες, δηλαδή ροές σε μη παρατηρήσιμους κλάδους
- εγχύσεις ισχύος σε συνοριακούς ζυγούς παρατηρήσιμων νησίδων

Θεωρούμε την μήτρα κέρδους $G = H^T H$. Ο ζυγός ταλάντωσης έχει περιληφθεί στη διαμόρφωση της μήτρας H και, επομένως, και της μήτρας G . Άρα, για την τάξη (rank) της H και της G ισχύει:

$$\text{rank}(H) = \text{rank}(G) \leq n - 1$$

όπου n ο αριθμός των ζυγών του δικτύου.

Στην περίπτωση του πλήρους παρατηρήσιμου συστήματος, ισχύει ότι:

$$\text{rank}(H) = \text{rank}(G) = n - 1$$

Συνεπώς, κατά την παραγοντοποίηση της μήτρας κέρδους G θα εμφανιστεί τουλάχιστον ένα μηδενικό οδηγό στοιχείο. Έστω ότι το πρώτο μηδενικό οδηγό στοιχείο εμφανίζεται αμέσως μετά το i -οστό βήμα της παραγοντοποίησης:

$$G^{(i)} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & \\ & d_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & d_i & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & \times & \times & \times \\ & & & & \vdots & \times & \times & \times \\ & & & & 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $L_{i+1} = I_{n \times n}$ η παραγοντοποίηση της $G^{(i)}$ συνεχίζεται με το $i+2$ βήμα. Η εν λόγω διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε επανεμφάνιση μηδενικού οδηγού στοιχείου.

Η μήτρα D εφόσον έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο είναι μη αντιστρέψιμη. Τα όποια διαγώνια μηδενικά στοιχεία έχουν εμφανιστεί στη μήτρα D αντιστοιχούν σε μηδενικά οδηγά στοιχεία που προέκυψαν κατά την παραγοντοποίηση. Απεναντίας, η κάτω τριγωνική μήτρα $L = L_1 L_2 \dots L_n$ προκύπτει αντιστρέψιμη.

Η προσθήκη μίας νέας μέτρησης στο σύνολο μετρήσεων έχει ως αποτέλεσμα την τροποποίηση της ιακωβιανής μήτρας H και, αντίστοιχα, της μήτρας κέρδους G . Εάν h_k είναι η επιπλέον γραμμή στην ιακωβιανή μήτρα H που περιγράφει τη νέα μέτρηση, η μήτρα κέρδους τροποποιείται ως εξής:

$$G' = G + h_k^T h_k$$

Εν συνεχεία, για την παραγοντοποίηση της G' έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} G' &= LDL^T + h_k^T h_k \\ M &= L^{-1} h_k^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow G' = LDL^T + LMM^T L^T \Rightarrow G' = L(D + MM^T)L^T$$

Η τάξη της μήτρας G' προκύπτει αυξημένη κατά 1 σε σχέση με την τάξη της G , αν και μόνο αν η διαγώνια μήτρα MM^T εμφανίζει μη μηδενικό στοιχείο σε θέση μηδενικού διαγώνιου στοιχείου της μήτρας D .

Έστω W η μήτρα που περιλαμβάνει τις γραμμές της L^{-1} που αντιστοιχούν σε μηδενικά οδηγία στοιχεία της μήτρας D . Η εν λόγω μήτρα κατασκευάζεται μέσω διαδοχικών προσδιορισμών διανυσμάτων w από τη σχέση:

$$L^T w^T = e_i$$

όπου e_i διάνυσμα $n \times 1$ που περιέχει το μοναδικό του μη μηδενικό στοιχείο, ίσο με τη μονάδα, στη γραμμή i για την οποία $D(i,i) = 0$.

Ο αλγόριθμος τοποθέτησης μετρήσεων για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας έχει ως εξής:

Βήμα 1 Κατασκευάζεται η μήτρα κέρδους $G = H^T H$ και παραγοντοποιείται ως $G = LDL^T$, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σε περίπτωση εμφάνισης μηδενικού οδηγού στοιχείου.

Βήμα 2 Εάν η μήτρα D έχει μόνο ένα μηδενικό διαγώνιο στοιχείο, τότε το σύστημα προκύπτει ως πλήρως παρατηρήσιμο και ο αλγόριθμος τερματίζεται. Σε διαφορετική περίπτωση, υπολογίζεται η μήτρα W .

Βήμα 3 Κατασκευάζεται το σύνολο με τις υποψήφια προς τοποθέτηση μετρήσεις. Οι εν λόγω μετρήσεις μπορεί να είναι ροές ισχύος σε μη παρατηρήσιμους κλάδους, αλλά και εγχύσεις σε συνοριακούς ζυγούς παρατηρήσιμων νησίδων.

Βήμα 4 Κατασκευάζεται η ιακωβιανή μήτρα H_c που αντιστοιχεί στις υποψήφια προς τοποθέτηση μετρήσεις.

Βήμα 5 Υπολογίζεται η μήτρα $B = H_c W^T$ και σχηματίζεται η απλοποιημένη με απαλοιφές κατά Gauss μορφή της, έστω E . Οι γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές της E αντιστοιχούν στις μετρήσεις που πρέπει να προστεθούν, ώστε το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

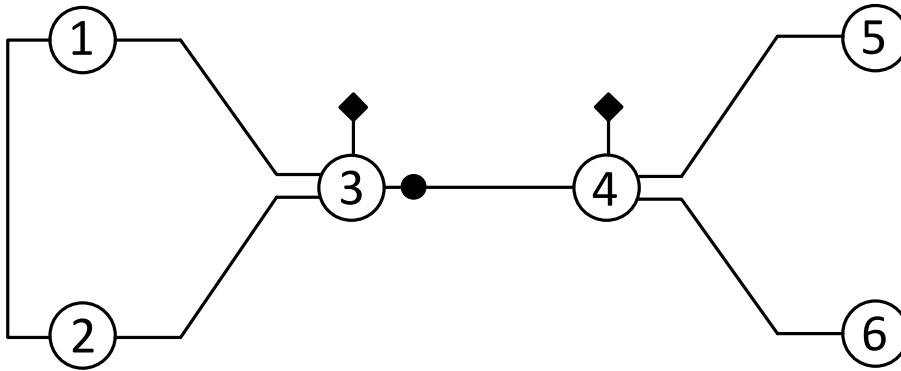
Σημειώνεται ότι η μήτρα E εμφανίζει τις εξής ιδιότητες:

- Όλες οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται στις τελευταίες θέσεις.

- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής μετά την 1^η γραμμή εμφανίζεται σε δεξιότερη θέση σε σχέση με το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.
- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι η μονάδα.
- Όλα τα στοιχεία στη στήλη ενός αρχικού μοναδιαίου στοιχείου μη μηδενικής γραμμής είναι μηδενικά.

Παράδειγμα 4.1

Έστω το ακόλουθο δίκτυο 6 ζυγών. Στα πλαίσια της ανάλυσης παρατηρησιμότητας θεωρούνται μόνο οι μετρήσεις P_{3-4} , P_3 και P_4 .



Σχήμα 4.1: Δίκτυο 6 ζυγών

Η ιακωβιανή μήτρα H έχει ως εξής:

$$H = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & \vartheta_5 & \vartheta_6 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_3 \\ P_4 \\ P_{34} \end{matrix}$$

Αντίστοιχα, η μήτρα κέρδους G προκύπτει ως:

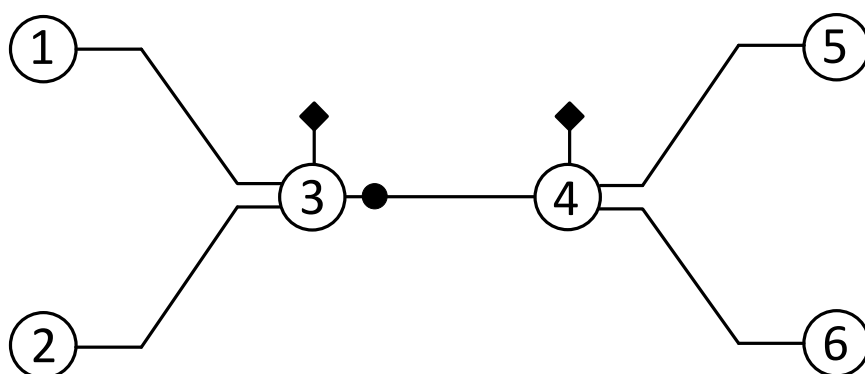
$$G = H^T H \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 11 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -7 & 11 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Κατά την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας G εμφανίζονται 3 μηδενικά οδηγά στοιχεία και ο παράγοντας D προκύπτει ως:

$$D = (1 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0)$$

Επομένως, το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο και επιμερίζεται σε παρατηρήσιμες νησίδες.

Ο κλάδος 1-2 δεν εμφανίζει μέτρηση ροής ισχύος και δεν συνδέεται σε κλάδο στον οποίο υπάρχει μέτρηση έγχυσης. Επομένως απομακρύνεται από το δίκτυο στα πλαίσια της ανάλυσης παρατηρησιμότητας.



Σχήμα 4.2: Δίκτυο 6 ζυγών μετά την αφαίρεση του κλάδου 1-2

Η μήτρα προσπτώσεως ζυγών για το δίκτυο του σχήματος 4.2 είναι:

$$A = \begin{matrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{34} \\ e_{45} \\ e_{46} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

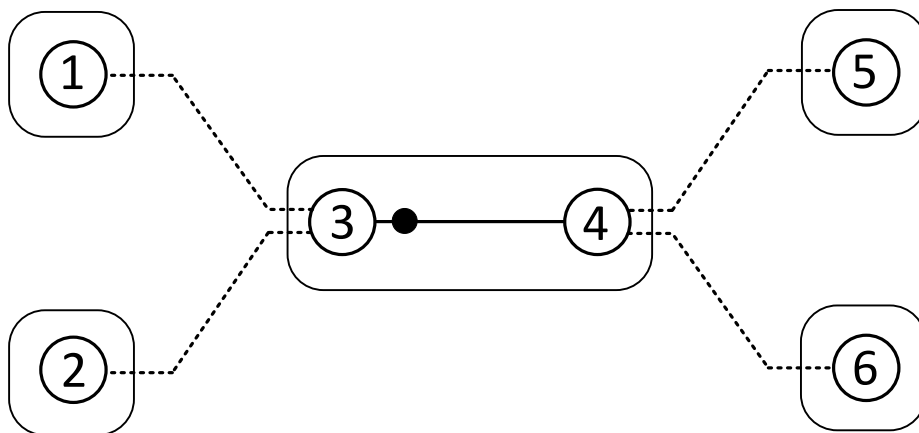
Για την πρώτη επανάληψη αναγνώρισης μη παρατηρήσιμων κλάδων και παρατηρήσιμων νησίδων ορίζονται οι μήτρες $H^{(1)} = H$ και $G^{(1)} = G$. Ο παράγοντας L_1 και το διάνυσμα $t^{(1)}$ κατά την LDL^T παραγοντοποίηση της $G^{(1)}$ προκύπτει ως:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ -3 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 1 & \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα εκτιμώμενης κατάστασης και οι ροές ισχύος στους κλάδους έχουν ως εξής:

$$\hat{\vartheta}^{(1)} = (L_1 L_1^T)^{-1} t^{(1)} \Rightarrow \hat{\vartheta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_b^{(1)} = A \hat{\vartheta}^{(1)} \Rightarrow P_b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{34} \\ P_{45} \\ P_{46} \end{matrix}$$

Οι κλάδοι 1-3, 2-3, 4-5 και 4-6 εμφανίζουν μη μηδενικές ροές ισχύος. Άρα, προκύπτουν ως μη παρατηρήσιμοι και απομακρύνονται από το δίκτυο. Επιπροσθέτως, οι εγχύσεις στους ζυγούς 3 και 4 απομακρύνονται από το δίκτυο ως προσπίπτουσες σε ζυγούς που συνδέονται με μη παρατηρήσιμους κλάδους.



Σχήμα 4.3: Δίκτυο 6 ζυγών μετά την πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου αναγνώρισης παρατηρήσιμων νησίδων

Η ιακωβιανή μήτρα $H^{(2)}$ και η μήτρα κέρδους $G^{(2)}$ για το δίκτυο του σχήματος 4.3 έχουν ως εξής:

$$H^{(2)} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & \vartheta_5 & \vartheta_6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{34}, G^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

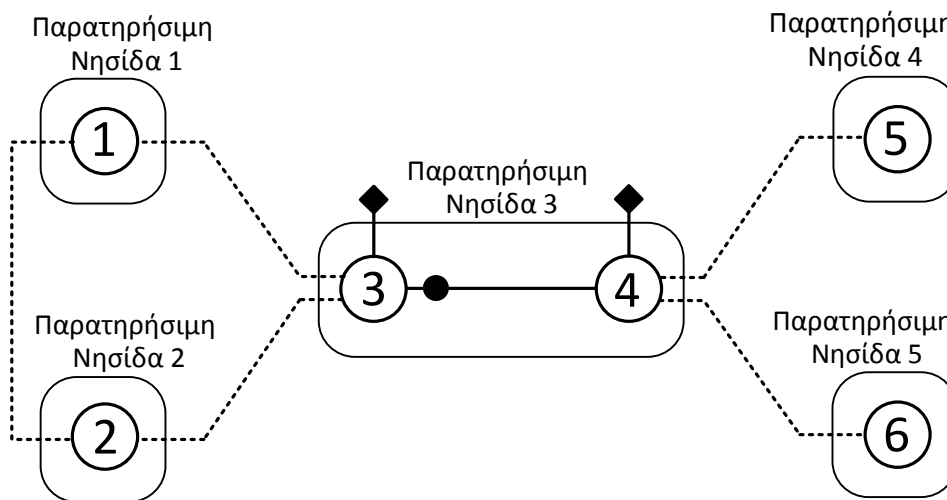
Ο παράγοντας L_2 και το διάνυσμα $t^{(2)}$ κατά την LDL^T παραγοντοποίηση της $G^{(2)}$, όπου προέκυψαν 5 μηδενικά οδηγία στοιχεία, προκύπτει ως:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}, t^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα εκτιμούμενης κατάστασης και οι ροές ισχύος στους κλάδους έχουν ως εξής:

$$\hat{\vartheta}^{(2)} = (L_2 L_2^T)^{-1} t^{(2)} \Rightarrow \hat{\vartheta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, P_b^{(2)} = A \hat{\vartheta}^{(2)} \Rightarrow P_b^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{34} \\ P_{45} \\ P_{46} \end{matrix}$$

Εφόσον δεν αναγνωρίζονται επιπλέον κλάδοι ως μη παρατηρήσιμοι, ο αλγόριθμος εύρεσης παρατηρήσιμων νησίδων τερματίζεται. Επομένως, το δίκτυο διαμερίζεται στις ακόλουθες 5 παρατηρήσιμες νησίδες:



Σχήμα 4.4: Αναγνώριση 5 παρατηρήσιμων νησίδων

Για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας του συστήματος, απαιτείται η προσθήκη επιπλέον μετρήσεων.

Αρχικά, σχηματίζεται η μήτρα $W = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ χρησιμοποιώντας την $2^{\text{η}}$, $5^{\text{η}}$ και $6^{\text{η}}$ σειρά του L_1^{-1} ως εξής:

$$L_1^T w_1^T = e_2 \Rightarrow w_1^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_1^T w_2^T = e_5 \Rightarrow w_2^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L_1^T w_3^T = e_6 \Rightarrow w_3^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, η μήτρα $W = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ είναι:

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας του συστήματος θα θεωρηθούν μόνο οι μετρήσεις εγχύσεων σε συνοριακούς ζυγούς των παρατηρήσιμων νησίδων, δηλαδή οι μετρήσεις P_1 , P_2 , P_3 και P_4 . Η ιακωβιανή μήτρα H_c για τις εν λόγω μετρήσεις έχει ως εξής:

$$H_c = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 & \vartheta_5 & \vartheta_6 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix}$$

Σχηματίζεται η μήτρα $B = H_c W^T$ και, εν συνεχεία, υπολογίζεται η απλοποιημένη μορφή της, E :

$$B = \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 & 1,5 & 1,5 \\ 3 & -1,5 & -1,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_5 \\ P_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow E = \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

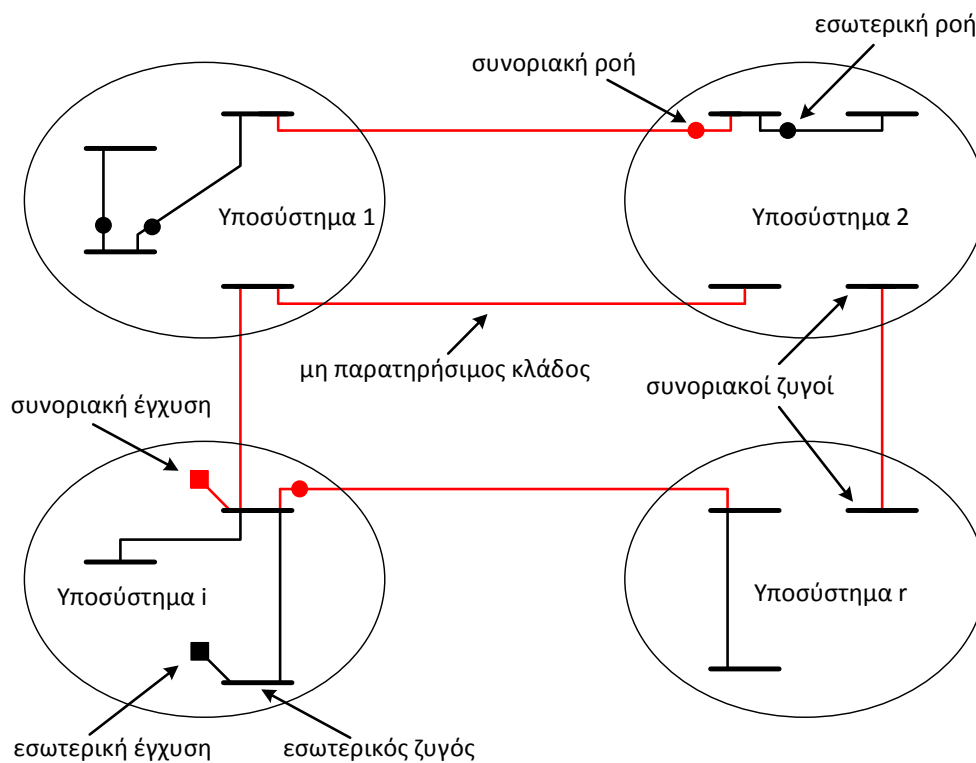
Οι γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές 1 και 2 αντιστοιχούν στις εγχύσεις στους ζυγούς 1 και 5. Άρα, οι μετρήσεις P_1 και P_5 πρέπει να προστεθούν στο υπάρχον σύνολο μετρήσεων προκειμένου το σύστημα να γίνει πλήρως παρατηρήσιμο.

4.3 Υβριδική Μέθοδος Ανάλυσης Παρατηρησιμότητας

Η εν λόγω μέθοδος βασίζεται στην τοπολογική επεξεργασία του αρχικού δικτύου και, εν συνεχεία, στην αριθμητική επεξεργασία μίας Gramian μήτρας που προκύπτει από ιακωβιανή μήτρα μετρήσεων με μικρότερες διαστάσεις σε σχέση με την κλασική ιακωβιανή μήτρα της προηγούμενης μεθόδου. Επιπροσθέτως, για μη παρατηρήσιμο σύστημα καθορίζει τις παρατηρήσιμες νησίδες χωρίς την ανάγκη επαναλήψεων για την αναγνώριση μη παρατηρήσιμων κλάδων, ενώ παρέχει το μη πλεονάζον σύνολο μετρήσεων που πρέπει να προστεθεί για την αποκατάσταση της πλήρους παρατηρησιμότητας.

4.3.1 Έλεγχος Παρατηρησιμότητας

Στο σχήμα 4.5 παρουσιάζεται ένα τμήμα δικτύου ηλεκτρικής ενέργειας που έχει διαμεριστεί σε r μη επικαλυπτόμενα παρατηρήσιμα υποσυστήματα με βάση τις υπάρχουσες μετρήσεις.



Σχήμα 4.5: Διαμέριση δικτύου σε επιμέρους παρατηρήσιμα υποσυστήματα

Η ιακωβιανή μήτρα H μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & & & \\ & H_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & H_r & \\ \text{---} & & & & \\ & H_b & & & \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} H_1 & & & & \\ & H_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & H_r & \\ \text{---} & & & & \\ H_{b1} & H_{b2} & \cdots & H_{br} & \end{pmatrix}$$

όπου $H_b(m_b \times n)$ αντιστοιχεί στις συνοριακές μετρήσεις στα παρατηρήσιμα υποσυστήματα, $H_i(m_i \times n_i)$ αντιστοιχεί στις εσωτερικές μετρήσεις του i -οστού παρατηρήσιμου υποσυστήματος, m_i ο αριθμός των εσωτερικών μετρήσεων στο i -οστό παρατηρήσιμο υποσύστημα, n_i ο αριθμός των ζυγών στο i -οστό παρατηρήσιμο υποσύστημα, και m_b ο αριθμός των συνοριακών μετρήσεων. Για το i -οστό παρατηρήσιμο υποσύστημα ισχύει:

$$\text{rank}(H_i) = n_i - 1 \Leftrightarrow \text{nullity}(H_i) = n_i - \text{rank}(H_i) = 1$$

Ορίζεται η μήτρα $W_b(m_b \times r)$ ως εξής:

$$W_b = (w_{b1} \quad w_{b2} \quad \cdots \quad w_{br})$$

όπου η κάθε στήλη w_{bi} είναι το άθροισμα των στηλών του H_{bi} . Η μήτρα W_b πρακτικά αποτελεί την ιακωβιανή μήτρα ενός «απλοποιημένου» δικτύου που έχει r κόμβους, όπου κάθε υποσύστημα i αναπαρίσταται από έναν «υπερκόμβο» i .

Για την απώλεια βαθμού (*nullity*) της ιακωβιανής μήτρας H και της ιακωβιανής W_b ισχύει το εξής:

$$\text{nullity}(H) = \text{nullity}(W_b) = q$$

Τα παρατηρήσιμα υποσυστήματα ορίζονται εφεξής ως νησίδες ροής και προσδιορίζονται από τους συνεκτικούς υπογράφους που προκύπτουν από το αρχικό δίκτυο έπειτα από τοπολογική επεξεργασία των κλάδων στους οποίους υπάρχουν μετρήσεις ροής ισχύος.

Σημειώνεται ότι οι ροές ισχύος και οι εσωτερικές εγχύσεις δε λαμβάνονται υπόψη σε μετέπειτα στάδια και, συνεπώς, η ιακωβιανή μήτρα W_b περιλαμβάνει μόνο μετρήσεις έγχυσης σε συνοριακούς ζυγούς των νησίδων ροής. Η Gramian μήτρα που προκύπτει από την W_b έχει ως εξής:

$$M_b = W_b W_b^T$$

Για την τάξη της μήτρας M_b ισχύει ότι:

$$\text{rank}(M_b) = \text{rank}(W_b) = r - \text{nullity}(W_b) = r - q$$

Παραγοντοποιώντας τη μήτρα M_b ως LDL^T και μετρώντας τον αριθμό των μη μηδενικών οδηγών στοιχείων που προκύπτουν, προσδιορίζεται ο βαθμός της μήτρας M_b , δηλαδή εάν ορίσουμε ως p τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων της μήτρας D , τότε ισχύει ότι $\text{rank}(M_b) = p$.

Εάν προκύψουν $r-1$ μη μηδενικά στοιχεία στη μήτρα D , τότε προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{rank}(M_b) = r-1 \\ \text{rank}(M_b) = r-q \end{array} \right\} \Rightarrow q=1 \Rightarrow \text{nullity}(W_b) = 1 \Rightarrow \text{nullity}(H) = 1$$

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Εάν προέκυπτε $p < r-1$, τότε το σύστημα θα ήταν μη παρατηρήσιμο και θα διαμεριζόταν σε επιμέρους παρατηρήσιμες νησίδες.

4.3.2 Αναγνώριση παρατηρήσιμων νησίδων

Ορίζεται η $(m_b + r) \times (m_b + r)$ θετικά ημιορισμένη μήτρα M_{bi} ως:

$$M_{bi} = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{r \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_b \\ I_{r \times r} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} W_b W_b^T & W_b \\ W_b^T & I_{r \times r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_b & W_b \\ W_b^T & I_{r \times r} \end{pmatrix}$$

όπου $I_{r \times r}$ είναι μοναδιαίος διαγώνιος πίνακας τάξης r .

Η μήτρα M_{bi} παραγοντοποιείται κατά LDL^T , όπου η μήτρα D εμφανίζει ένα τουλάχιστον μηδενικό διαγώνιο στοιχείο. Η k -οστή στήλη του M_{bi} για την οποία ισχύει $D_{kk} > 0$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητη από τις στήλες $1, \dots, k-1$. Αν $D_{kk} = 0$, τότε η k -οστή στήλη είναι γραμμικώς εξαρτημένη με τις προηγούμενες $k-1$ στήλες.

Έστω C η $(m_b + r) \times q$ μήτρα που σχηματίζεται από τις στήλες c_k με $k > m_b$ της L^{-T} για τις οποίες ισχύει $D_{kk} > 0$. Το διάνυσμα c_k υπολογίζεται με αντίστροφη αντικατάσταση από την εξίσωση:

$$L^T c_k = e_k$$

όπου e_k είναι διάνυσμα στήλης με όλα τα στοιχεία μηδενικά εκτός από το k -οστό που είναι ίσο με 1.

Εν συνεχεία, υπολογίζεται η παρακάτω μήτρα:

$$T = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{r \times r} \end{pmatrix}^T C$$

Ταυτόσημες σειρές της μήτρας T με ένα τουλάχιστον μη μηδενικό στοιχείο αναδεικνύουν υπερκόμβους, δηλαδή νησίδες ροής, που συγχωνεύονται στην ίδια παρατηρήσιμη νησίδα.

4.3.3 Τοποθέτηση μετρήσεων για αποκατάσταση παρατηρησιμότητας

Προκειμένου το δίκτυο να καταστεί πλήρως παρατηρήσιμο, απαιτούνται $(q-1)$ μη πλεονάζουσες μετρήσεις σε σχέση με τις ήδη υπάρχουσες.

Έστω r' ο αριθμός των παρατηρήσιμων νησίδων που έχουν ανιχνευτεί και m'_b ο αριθμός των μετρήσεων έγχυσης ισχύος σε συνοριακούς ζυγούς των παρατηρήσιμων νησίδων. Με βάση αυτές τις εγχύσεις σχηματίζεται η ιακωβιανή μήτρα $W'_b (m'_b \times r')$.

Οι υποψήφιες προς τοποθέτηση μετρήσεις για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας προκύπτουν από εγχύσεις σε μη μετρούμενους συνοριακούς ζυγούς στις παρατηρήσιμες νησίδες. Έστω ότι οι υποψήφιες μετρήσεις είναι m_c τον αριθμό. Έτσι, σχηματίζεται η ιακωβιανή μήτρα $W_c (m_c \times r')$.

Εν συνεχεία, κατασκευάζεται η ακόλουθη ιακωβιανή μήτρα διαστάσεων $(m'_b + m_c) \times r'$:

$$W_{bc} = \begin{pmatrix} W'_b \\ W_c \end{pmatrix}$$

Ισχύει ότι:

$$\text{nullity}(H_{bc}) = \text{nullity}(W_{bc})$$

όπου $H(m \times n)$ είναι η κλασική ιακωβιανή μήτρα των ήδη υπάρχουσών μετρήσεων και $H_{bc}((m+m_c) \times n) = \begin{pmatrix} H \\ H_c \end{pmatrix}$.

Άρα, η πληροφορία για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας μπορεί να εξαχθεί από τη ιακωβιανή μήτρα W_{bc} αντί της ιακωβιανής H_{bc} .

Η Gramian μήτρα M_{bc} που σχετίζεται με την W_{bc} προκύπτει ως:

$$M_{bc} = W_{bc} W_{bc}^T$$

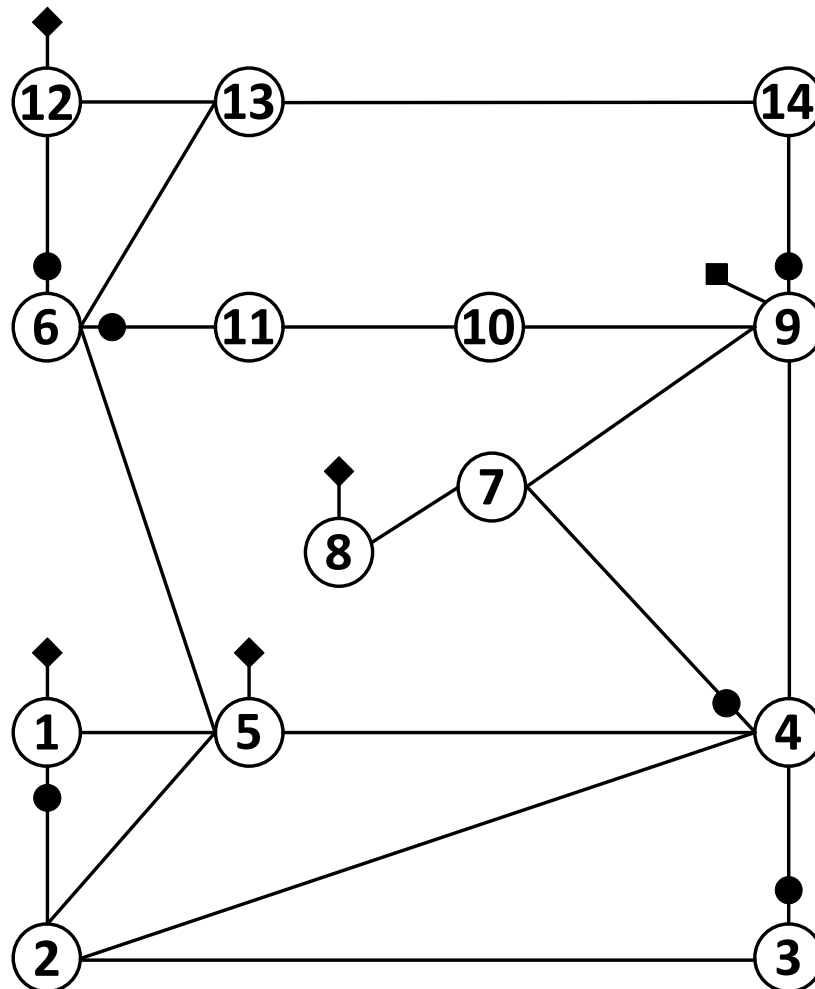
Η μη αντιστρέψιμη συμμετρική μήτρα M_{bc} παραγοντοποιείται κατά LDL^T . Εάν το k -οστό διαγώνιο στοιχείο της D είναι μη μηδενικό, τότε η k -οστή γραμμή της M_{bc} είναι γραμμικώς ανεξάρτητη από τις πρώτες $(k-1)$ -οστές γραμμές της M_{bc} . Συνεπώς, η k -οστή μέτρηση προκύπτει ως μη πλεονάζουσα σε σχέση με τις προηγούμενες $(k-1)$ -οστές μετρήσεις.

Επομένως, οι υποψήφιες συνοριακές εγχύσεις που αντιστοιχούν στα μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία της D επιλέγονται ως το ελάχιστο αναγκαίο σύνολο μετρήσεων

που πρέπει να συμπεριληφθούν για την αποκατάσταση της πλήρους παρατηρησιμότητας. Ο αριθμός αυτών των μετρήσεων είναι ίσος με $(q-1)$.

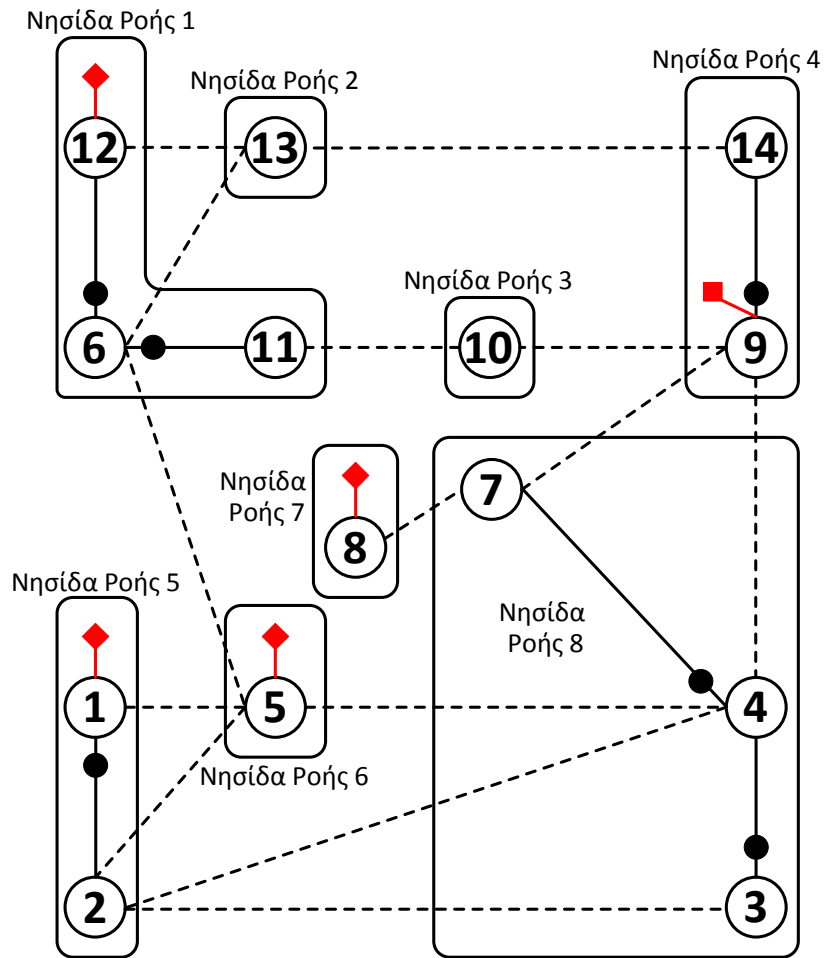
Παράδειγμα 4.2

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος ανάλυσης παρατηρησιμότητας εφαρμόζεται στο δίκτυο IEEE 14-ζυγών με βάση το σύνολο μετρήσεων του σχήματος 4.6. Μετρήσεις ροής ισχύος λαμβάνονται στους κλάδους 1-2, 3-4, 4-7, 6-11, 6-12 και 9-14, ενώ μετρήσεις έγχυσης ισχύος λαμβάνονται στους ζυγούς 1, 5, 8, 9 και 12.



Σχήμα 4.6: Δίκτυο IEEE-14 ζυγών και διαμόρφωση μετρήσεων

Αρχικά, διερευνάται εάν το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο.



Σχήμα 4.7: Διαμέριση του δικτύου σε νησίδες ροής

Με τοπολογική επεξεργασία των κλάδων του δικτύου, προκύπτουν οι ακόλουθες 8 νησίδες ροής, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.7:

Νησίδες Ροής	Ζυγοί
1	{6, 11, 12}
2	{13}
3	{10}
4	{9, 14}
5	{1, 2}
6	{5}
7	{8}
8	{3, 4, 7}

Οι μετρήσεις έγχυσης στους κλάδους 1, 5, 8, 9 και 12 αποτελούν συνοριακές μετρήσεις έγχυσης.

Σχηματίζεται η μειωμένης τάξεως ιακωβιανή μήτρα $W_b (5 \times 8)$ και, εν συνεχεία, η αντίστοιχη Gramian μήτρα $M_b (5 \times 5)$ ως $M_b = W_b W_b^T$:

$$W_b = \begin{pmatrix} Fl_1 & Fl_2 & Fl_3 & Fl_4 & Fl_5 & Fl_6 & Fl_7 & Fl_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{12} \end{matrix}$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 22 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 14 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_5 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{12} \end{matrix}$$

Οι παράγοντες L και D που προκύπτουν από την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας M_b έχουν ως εξής:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -3 & 1 & & & \\ 0 & 0,25 & 1 & & \\ 0 & 0,50 & 0,8571 & 1 & \\ 0 & -0,25 & 0,1429 & 0,0244 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(2 \quad 4 \quad 1,75 \quad 11,7143 \quad 1,7073)$$

Εφόσον δεν εμφανίστηκε μηδενικό οδηγό στοιχείο κατά την παραγοντοποίηση της μήτρας M_b , προκύπτει ότι η M_b είναι πλήρους τάξης, δηλαδή:

$$\text{rank}(M_b) = 5$$

Επιπροσθέτως, ισχύουν τα εξής:

$$\left. \begin{matrix} \text{rank}(W_b) = \text{rank}(M_b) \\ \text{nullity}(W_b) = 8 - \text{rank}(W_b) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{rank}(W_b) = 5 \\ \text{nullity}(W_b) = 3 \end{matrix}$$

Εφόσον έχουμε $\text{nullity}(W_b) = 3 > 1$, το δίκτυο είναι μη παρατηρήσιμο. Για να καταστεί πλήρως παρατηρήσιμο, απαιτείται η προσθήκη $\text{nullity}(W_b) - 1 = 2$ μη πλεοναζουσών μετρήσεων σε σχέση με τις ήδη υπάρχουσες. Εν συνεχεία, πραγματοποιείται ανίχνευση των παρατηρήσιμων νησίδων.

Σχηματίζονται οι μήτρες $\begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}$ και $M_{bi} = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}^T = \left(\begin{array}{c|c} W_b W_b^T & W_b \\ \hline W_b^T & I_{8 \times 8} \end{array} \right)$ ως εξής:

$$\begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{bi} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 22 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 14 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο παράγοντες D που προκύπτει από την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας M_{bi} έχει ως εξής:

$$D = \text{diag}(2 \quad 4 \quad 1,75 \quad 11,7143 \quad 1,7073 \quad 0,4143 \quad 0 \quad 0,9138 \quad 0,1509 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Τα μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία της μήτρας D στις θέσεις 6, 8 και 9 αναδεικνύουν ότι οι σειρές 6, 8 και 9 της μήτρας M_{bi} είναι γραμμικά ανεξάρτητες ως προς τις σειρές 1 έως 5.

Ο υπολογισμός των στηλών 6, 8 και 9 της μήτρας L^{-T} για το σχηματισμό της μήτρας $C = (c_6 \ c_8 \ c_9)$ πραγματοποιείται ως εξής:

$$L^T c_6 = e_6 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_6 = (0,5143 \ 0,1714 \ -0,0714 \ -0,0143 \ -0,4143 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_8 = e_8 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_8 = (-0,1034 \ -0,0345 \ -0,0690 \ 0,0862 \ 0 \ -0,0345 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_9 = e_9 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$c_9 = (0,3396 \ 0,1132 \ 0,2264 \ -0,2830 \ 0 \ 0,1132 \ 0 \ -0,2830 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Άρα, η μήτρα $C = (c_6 \ c_8 \ c_9)$ είναι:

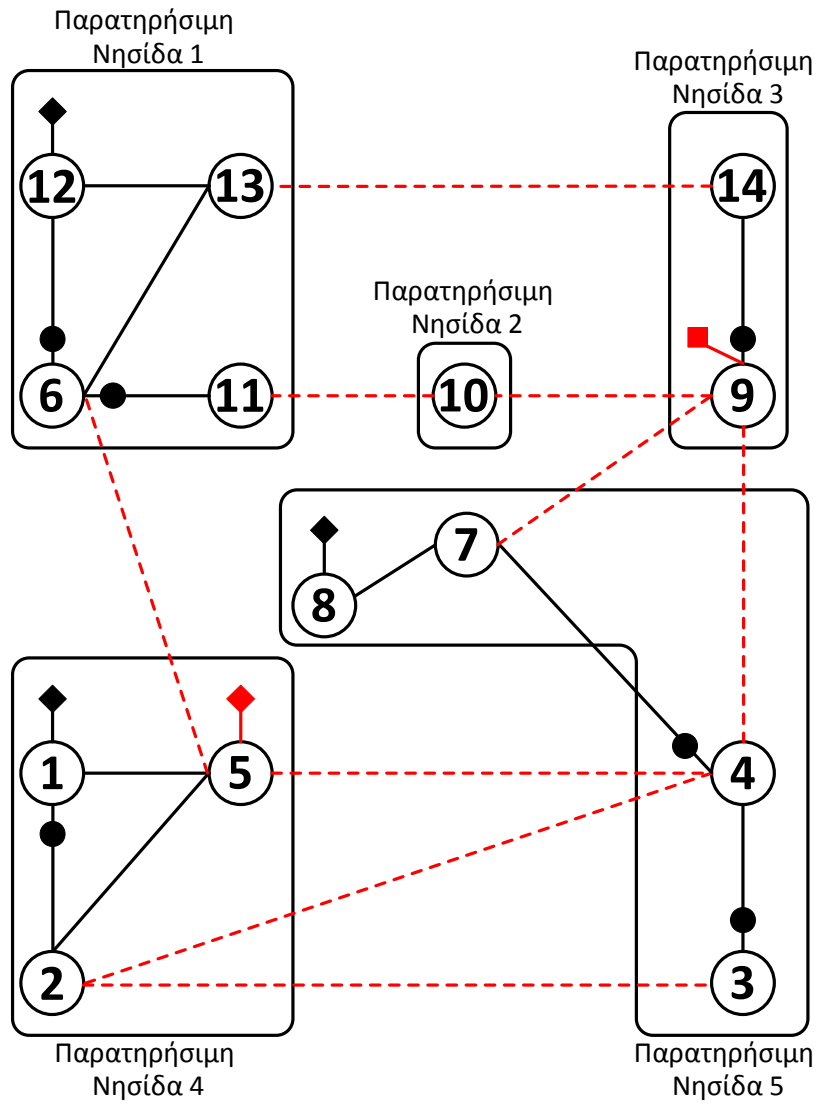
$$C = \begin{pmatrix} 0,5143 & -0,1034 & 0,3396 \\ 0,1714 & -0,0345 & 0,1132 \\ -0,0714 & -0,0690 & 0,2264 \\ -0,0143 & 0,0862 & -0,2830 \\ -0,4143 & 0 & 0 \\ 1 & -0,0345 & 0,1132 \\ 0 & 1 & -0,2830 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εν συνεχεία, σχηματίζεται η μήτρα $T = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}^T C$:

$$T = \begin{pmatrix} 0,4143 & 0 & 0 \\ 0,4143 & 0 & 0 \\ 0,0143 & 0,9138 & 0 \\ -0,0429 & 0,2586 & 0,1509 \\ 0,1714 & -0,0345 & 0,1132 \\ 0,1714 & -0,0345 & 0,1132 \\ -0,0714 & -0,0690 & 0,2264 \\ -0,0714 & -0,0690 & 0,2264 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Νησίδα Ροής 1} \\ \text{Νησίδα Ροής 2} \\ \text{Νησίδα Ροής 3} \\ \text{Νησίδα Ροής 4} \\ \text{Νησίδα Ροής 5} \\ \text{Νησίδα Ροής 6} \\ \text{Νησίδα Ροής 7} \\ \text{Νησίδα Ροής 8} \end{matrix}$$

Οι νησίδες ροής των οποίων οι γραμμές στη μήτρα T είναι ίδιες συγχωνεύονται στην ίδια παρατηρήσιμη νησίδα. Έτσι, προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσιμες νησίδες.

Παρατηρήσιμη Νησίδα	Ζυγοί
1	{6, 11, 12, 13}
2	{10}
3	{9, 14}
4	{1, 2, 5}
5	{3, 4, 7, 8}



Σχήμα 4.8: Διαμέριση του δικτύου σε παρατηρήσιμες νησίδες

Μετά την αναγνώριση των παρατηρήσιμων νησίδων, οι μετρήσεις έγχυσης ισχύος P_1 , P_8 και P_{12} καθίστανται εσωτερικές μετρήσεις, ενώ οι μετρήσεις P_5 και P_9 παραμένουν συνοριακές. Οι υποψήφιες προς τοποθέτηση μετρήσεις για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας του δικτύου είναι οι εγχύσεις στους μη μετρούμενους συνοριακούς ζυγούς, οι οποίοι είναι οι 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13 και 14. Οι ιακωβιανές μήτρες $W'_b (2 \times 5)$ και $W_c (9 \times 5)$, για τις υπάρχουσες και υποψήφιες προς τοποθέτηση μετρήσεις αντίστοιχα, είναι:

$$W'_b = \begin{pmatrix} OI_1 & OI_2 & OI_3 & OI_4 & OI_5 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_5 \\ P_9 \end{matrix}$$

$$W_c = \begin{pmatrix} OI_1 & OI_2 & OI_3 & OI_4 & OI_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

Σχηματίζεται η Gramian μήτρα $M_{bc} = \begin{pmatrix} W_b' \\ W_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_b' \\ W_c \end{pmatrix}^T$:

$$M_{bc} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & -3 & -7 & -3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 4 & -2 & -9 & 0 & -5 & -5 & 1 & -3 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & -4 & -10 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & -10 & 5 & 14 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -2 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_5 \\ P_9 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

Ο παράγοντας D της μήτρας M_{bc} προκύπτει ως:

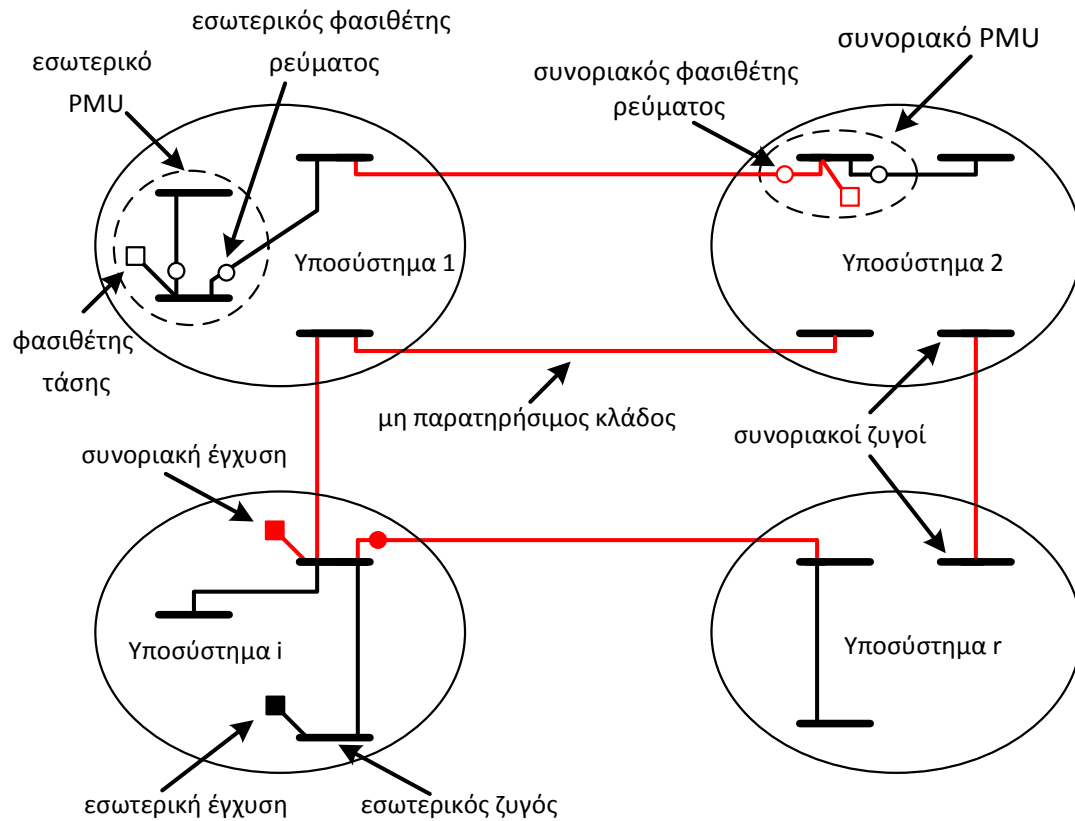
$$D = \text{diag}(6 \quad 13,3333 \quad 1,7 \quad 0 \quad 0,1471 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Η μήτρα D εμφανίζει μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία στις θέσεις 1 (P_5), 2 (P_9), 3 (P_2) και 5 (P_4). Επομένως, οι υποψήφιες μετρήσεις έγχυσης στους ζυγούς 2 και 4 είναι μη πλεονάζουσες σε σχέση με τις υπάρχουσες μετρήσεις έγχυσης στους ζυγούς 5 και 9.

Άρα, οι μετρήσεις έγχυσης P_2 και P_4 επιλέγονται ως το ελάχιστο προς τοποθέτηση σύνολο μετρήσεων για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας του δικτύου.

4.3.4 Τροποποίηση μεθόδου παρουσία συγχρονισμένων μετρήσεων

Θεωρώντας ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του παρόντος κεφαλαίου για την ανάλυση παρατηρησιμότητας, η παρουσία συγχρονισμένων μετρήσεων από PMU έχει ως αποτέλεσμα την εισαγωγή μετρήσεων γωνίας τάσης και πραγματικού μέρους φασιθέτη ρεύματος στο $P-\vartheta$ υποπρόβλημα της ανάλυσης.



Σχήμα 4.9: Διαμέριση δικτύου σε επιμέρους παρατηρήσιμα υποσυστήματα

Οι μετρήσεις γωνίας τάσης και πραγματικού μέρους φασιθέτη ρεύματος από ένα PMU τοποθετημένο στο ζυγό i μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\vartheta_i^{meas} = \vartheta_i + e_{\vartheta_i}, \quad I_{ij,r}^{meas} = (\vartheta_i - \vartheta_j) + e_{I_{ij,r}}$$

Η ιακωβιανή μήτρα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \delta_i}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial I_{ij,r}}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \dots & \vartheta_i & \dots & \vartheta_j & \dots & \vartheta_k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \ell_i & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ P_{ij} \\ P_i \\ \vartheta_i \\ I_{ij,r} \\ \vdots \end{matrix}$$

όπου ℓ_i είναι ο αριθμός των γραμμών που προσπίπτουν στο ζυγό i και j, k, \dots οι γειτονικοί ζυγοί με το ζυγό i .

Πλέον, το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο εάν ισχύει:

$$\text{nullity}(H) = 0$$

Τα παρατηρήσιμα υποσυστήματα, δηλαδή οι νησίδες ροής, προσδιορίζονται από τους συνεκτικούς υπογράφους που προκύπτουν από το αρχικό δίκτυο έπειτα από τοπολογική επεξεργασία των κλάδων στους οποίους υπάρχουν μετρήσεις ροής ισχύος ή φασιθέτη ρεύματος. Επίσης, εάν σε δύο γειτονικές ροονησίδες υπάρχουν μετρήσεις φασιθέτη τάσης, τότε οι εν λόγω νησίδες ροής συγχωνεύονται.

Επιπροσθέτως, η ιακωβιανή μήτρα W_b εκτός από τις συνοριακές μετρήσεις περιλαμβάνει και όλες τις μετρήσεις γωνίας.

Ισχύει επίσης η σχέση:

$$\text{nullity}(H) = \text{nullity}(W_b) = q$$

Εάν κατά την LDL^T παραγοντοποίηση της Gramian μήτρας $M_b = W_b W_b^T$ προκύψουν $p = r$ μη μηδενικά στοιχεία στον παράγοντα D , τότε έχουμε $\text{nullity}(W_b) = 0$ και, συνεπώς, πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα. Εάν προκύψουν λιγότερα μη μηδενικά στοιχεία, δηλαδή $p < r$, τότε το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο και, επομένως, επιμερίζεται σε παρατηρήσιμες νησίδες. Σε περίπτωση μη παρατηρήσιμου συστήματος, η αναγνώριση των παρατηρήσιμων νησίδων εκτελείται χωρίς καμία αλλαγή.

Για την αποκατάσταση της πλήρους παρατηρησιμότητας απαιτείται η προσθήκη q μη πλεοναζουσών μετρήσεων ως προς το υπάρχον σύνολο μετρήσεων. Υποψήφιος προς τοποθέτηση μετρήσεις αποτελούν πλέον, μαζί με τις εγχύσεις σε μη μετρούμενους συνοριακούς ζυγούς παρατηρήσιμων νησίδων, οι μετρήσεις φασιθετών τάσης και ρεύματος από PMUs σε συνοριακούς ζυγούς. Η σειρά με την οποία προστίθενται στη λίστα με τις υποψήφιες μετρήσεις PMUs είναι με βάση τον αριθμό των γειτονικών παρατηρήσιμων νησίδων που συνδέονται στο συνοριακό ζυγό κάθε PMU, ώστε να αυξηθεί ο αριθμός των συγχωνεύσεων μεταξύ μη παρατηρήσιμων νησίδων και να μειωθεί ο αριθμός των PMUs που πρόκειται να τοποθετηθούν.

Για το σχηματισμό της μήτρας $W_{bc} = \begin{pmatrix} W'_b \\ W_c \end{pmatrix}$, η μήτρα W'_b περιλαμβάνει τις υπάρχουσες συνοριακές μετρήσεις έγχυσης, καθώς και όλες τις μετρήσεις γωνίας, ενώ η μήτρα W_c περιλαμβάνει τις υποψήφιες συνοριακές μετρήσεις έγχυσης, καθώς και τις υποψήφιες μετρήσεις γωνιών και πραγματικού μέρους φασιθέτη ρεύματος.

Κεφάλαιο 5 – Διάταξη Ελαχίστου Βαθμού

5.1 Εισαγωγή

Ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού αποσκοπεί στον προσδιορισμό μίας μήτρας μετάθεσης P για μία συμμετρική και αραιή μήτρα A , έτσι ώστε οι παράγοντες της συμμετρικά αναδιατεταγμένης μήτρας PAP^T να εμφανίζουν λιγότερα μη μηδενικά στοιχεία σε σχέση με τους αντίστοιχους της αρχικά μη αναδιατεταγμένης μήτρας. Ο εξεταζόμενος αλγόριθμος οδηγεί στη δημιουργία παραγόντων με σχετικά μικρό αριθμό μη μηδενικών στοιχείων για ένα μεγάλο εύρος συμμετρικών και αραιών μητρών για τις οποίες είναι εφικτή η παραγοντοποίηση. Τονίζεται ότι η εύρεση της μετάθεσης P ώστε οι παράγοντες να έχουν τον ελάχιστο δυνατό αριθμό μη μηδενικών στοιχείων ανήκει στην κλάση των NP-Complete υπολογιστικών προβλημάτων.

Ο βαθμός του κόμβου ενός γράφου ορίζεται ως ο αριθμός των γειτονικών προς αυτόν κόμβων. Η ονομασία του αλγορίθμου οφείλεται στο ότι η διαδικασία επιλογής του εκάστοτε κόμβου, που αντιστοιχεί σε διαγώνιο στοιχείο της μήτρας προς παραγοντοποίηση, ως οδηγό στοιχείο εξετάζει το βαθμό των κόμβων και επιλέγει τον κόμβο με τον ελάχιστο βαθμό.

Η επιλογή των κόμβων πραγματοποιείται χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η αριθμητική τιμή των στοιχείων της μήτρας. Επομένως, η εύρεση της μετάθεσης P βασίζεται μόνο στη συμβολική δομή της μήτρας και, συνεπώς, εκτελείται συμβολική παραγοντοποίηση κατά τη διαδικασία επιλογής των οδηγών στοιχείων.

5.2 Γράφος απαλοιφής

Η συμβολική δομή μίας συμμετρικής $n \times n$ μήτρας A , δηλαδή η περιγραφή της με βάση το διαχωρισμό των στοιχείων της σε μηδενικά και μη μηδενικά, μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός γράφου $G^0 = (V^0, E^0)$, με κόμβους $V^0 = \{1, \dots, n\}$ και ακμές E^0 . Μία ακμή μεταξύ των κόμβων i και j με $i \neq j$ ανήκει στο σύνολο E^0 αν και μόνο αν ισχύει $a_{ij} \neq 0$. Εφόσον η μήτρα A είναι συμμετρική, ο γράφος G^0 είναι μη κατευθυνόμενος, δηλαδή δεν ανατίθενται κατευθύνσεις στις ακμές του.

Ο γράφος απαλοιφής $G^k = (V^k, E^k)$ περιγράφει τη συμβολική δομή της εναπομένουσας προς παραγοντοποίηση μήτρας που προκύπτει από την αρχική μήτρα A μετά από την επιλογή και απαλοιφή των πρώτων k οδηγών στοιχείων. Ο γράφος G^k παραμένει μη κατευθυνόμενος, εφόσον η εναπομένουσα μήτρα παραμένει συμμετρική.

Για την πραγματοποίηση του βήματος k της συμβολικής παραγοντοποίησης, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ο γράφος απαλοιφής G^k εξαρτάται από τον G^{k-1} και από την επιλογή του κατάλληλου κόμβου p από το σύνολο V^{k-1} για το k -οστό οδηγό στοιχείο.
- Στο σύνολο ακμών E^{k-1} προστίθενται νέες ακμές κατά τέτοιον τρόπο ώστε όλοι οι γειτονικοί με τον p κόμβο, ο οποίος αντιστοιχεί στο k -οστό οδηγό στοιχείο, να σχηματίσουν κλίκα, δηλαδή έναν πλήρως διασυνδεδεμένο υπογράφο.
- Κάθε νέα ακμή της μορφής (i, j) που προστίθεται στο βήμα k της συμβολικής παραγοντοποίησης αντιστοιχεί σε θέση μη μηδενικού στοιχείου $\ell_{ij} \neq 0$ στον παράγοντα L , τη στιγμή όπου η θέση (i, j) στη συμμετρικά αναδιατεταγμένη μήτρα A αντιστοιχεί σε μηδενικό στοιχείο, δηλαδή ισχύει $(PAP^T)_{ij} = 0$. Ο σκοπός της αναδιάταξης των κόμβων είναι η μείωση των εν λόγω επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων ℓ_{ij} .
- Ο κόμβος p και οι προσπίπτουσες σε αυτόν ακμές αφαιρούνται από το γράφο G^{k-1} για το σχηματισμό του G^k .

Ορίζεται ως $\text{Adj}_{G^k}(i)$ το σύνολο των γειτονικών κόμβων με τον i -οστό κόμβο στο γράφο G^k . Όταν ο κόμβος p απαλειφθεί, ο γράφος $G^k = (V^k, E^k)$ προκύπτει ως:

$$V^k = V^{k-1} \setminus \{p\}$$

$$E^k = \left(E^{k-1} \cup \left(\text{Adj}_{G^{k-1}}(p) \times \text{Adj}_{G^{k-1}}(p) \right) \right) \cap (V^k \times V^k)$$

Η επιλογή ενός κόμβου i ως το k -οστό οδηγό στοιχείο δημιουργεί το πολύ $(t_i^2 - t_i)/2$ επιπρόσθετες ακμές στο γράφο απαλοιφής G , όπου $t_i = |\text{Adj}_{G^{k-1}}(i)|$ ο βαθμός του κόμβου i (ο τελεστής $|\dots|$ συμβολίζει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου). Ο αλγόριθμος ελαχίστου βαθμού επιλέγει για k -οστό οδηγό στοιχείο τον κόμβο p του οποίου ο βαθμός είναι ο ελάχιστος συγκριτικά με τους βαθμούς των υπόλοιπων κόμβων του συνόλου V^{k-1} . Με βάση το ανωτέρω κριτήριο, ο αλγόριθμος ελαχιστοποιεί το άνω όριο του αριθμού των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων ℓ_{ij} του παράγοντα L που δημιουργούνται σε θέσεις (i, j) για τις οποίες ισχύει $(PAP^T)_{ij} = 0$.

Το βασικό μειονέκτημα της χρήσης του γράφου απαλοιφής για τον αλγόριθμο ελαχίστου βαθμού βασίζεται στο γεγονός ότι οι επιπρόσθετες ακμές δημιουργούνται δυναμικά κατά τη συμβολική παραγοντοποίηση και, επομένως, δεν είναι εξ αρχής γνωστός ο αριθμός τους. Συνεπώς, δεν είναι εφικτός ο ακριβής και εκ των προτέρων προσδιορισμός των αναγκών του αλγορίθμου σε μνήμη.

5.3 Παράγοντας γράφος

Το βασικό μειονέκτημα της χρήσης του γράφου απαλοιφής αντιμετωπίζεται με τη χρήση του παράγοντα γράφου, η μοντελοποίηση του οποίου απαιτεί χώρο μνήμης που δεν ξεπερνά την απαιτούμενη μνήμη για την αναπαράσταση του αρχικού γράφου απαλοιφής G^0 για κάθε βήμα της συμβολικής παραγοντοποίησης. Για την ακόλουθη ανάλυση, οι κόμβοι του παράγοντα γράφου που αντιστοιχούν σε κόμβους που έχουν απαλειφθεί από το γράφο απαλοιφής ορίζονται ως κόμβοι-στοιχεία, ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι ως κόμβοι-μεταβλητές.

Ο παράγοντας γράφος \mathcal{G} περιγράφεται από το σύνολο $\mathcal{G}^k = (V^k, \bar{V}^k, E^k, \bar{E}^k)$. Οι κόμβοι του \mathcal{G} αποτελούνται από κόμβους-μεταβλητές (σύνολο V^k) και από κόμβους-στοιχεία (σύνολο \bar{V}^k). Οι ακμές διακρίνονται σε δύο επιμέρους υποσύνολα: ακμές μεταξύ κόμβων-μεταβλητών (σύνολο $E^k \subseteq V^k \times V^k$) και ακμές μεταξύ κόμβων-μεταβλητών και κόμβων-στοιχείων (σύνολο $\bar{E}^k \subseteq V^k \times \bar{V}^k$). Οι ακμές μεταξύ κόμβων-στοιχείων δεν είναι απαραίτητες για τη μοντελοποίηση, διότι ο γράφος απαλοιφής G μπορεί να ανακατασκευαστεί χωρίς αυτές από τον παράγοντα γράφο \mathcal{G} . Για $k=0$ ο παράγοντας γράφος $\mathcal{G}^0 = (V^0, \bar{V}^0, E^0, \bar{E}^0)$ ταυτίζεται με το γράφο απαλοιφής G^0 , έχοντας $V^0 = V$, $\bar{V}^0 = \emptyset$, $E^0 = E$ και $\bar{E}^0 = \emptyset$.

Ορίζονται τα ακόλουθα σύνολα:

- το σύνολο \mathcal{A}_i ως το σύνολο των κόμβων-μεταβλητών που είναι γειτονικοί με τον κόμβο-μεταβλητή i στο γράφο \mathcal{G} :

$$\mathcal{A}_i = \{j : (i, j) \in E\} \subseteq V$$

Ουσιαστικά, το σύνολο \mathcal{A}_i αποτελεί σε κάθε βήμα της συμβολικής παραγοντοποίησης υποσύνολο των μη μηδενικών στοιχείων της γραμμής i της αρχικής μήτρας A . Για $k=0$ ισχύει ότι $\mathcal{A}_i^0 = \{j : a_{ij} \neq 0, j \neq i\}$ και, επιπροσθέτως, $\mathcal{A}_i^k \subseteq \mathcal{A}_i^{k-1}$ για $1 \leq k \leq n$.

- το σύνολο \mathcal{E}_i ως το σύνολο των κόμβων-στοιχείων που είναι γειτονικοί με τον κόμβο-μεταβλητή i στο γράφο \mathcal{G} :

$$\mathcal{E}_i = \{e : (i, e) \in \bar{E}\} \subseteq \bar{V}$$

- το σύνολο \mathcal{L}_e ως το σύνολο των κόμβων-μεταβλητών που είναι γειτονικοί με τον κόμβο-στοιχείο e στο γράφο \mathcal{G} , δηλαδή:

$$\mathcal{L}_e = \text{Adj}_{\mathcal{G}}(e) = \{i : (i, e) \in \bar{E}\} \subseteq V$$

Με βάση τα ανωτέρω, οι γειτονικοί κόμβοι ενός κόμβου-μεταβλητής προσδιορίζονται ως εξής:

$$\text{Adj}_G(i) = (\mathcal{A}_i \cup \mathcal{E}_i) \subseteq (V \cup \bar{V})$$

Οι ακμές των συνόλων E και \bar{E} αναπαρίστανται στο γράφο G μέσω των συνόλων \mathcal{A}_i και \mathcal{E}_i για κάθε κόμβο-μεταβλητή και των συνόλων \mathcal{L}_e για κάθε κόμβο-στοιχείο.

Ο γράφος απαλοιφής G είναι στενά συνδεδεμένος με τον παράγοντα γράφο G . Εάν ένας κόμβος i δεν έχει απαλειφθεί από το γράφο G , τότε δεν έχει απαλειφθεί ούτε από το γράφο G και, επιπρόσθετα, ισχύει:

$$\text{Adj}_G(i) = \left(\mathcal{A}_i \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_i} \mathcal{L}_e \right) \setminus \{i\} \quad (4.1)$$

όπου ο τελεστής " \setminus " υποδηλώνει αφαίρεση στοιχείου από σύνολο.

Κατά το βήμα k της συμβολικής παραγοντοποίησης ισχύουν τα ακόλουθα:

- Όταν ένας κόμβος-μεταβλητή p επιλεγεί στο βήμα k ως οδηγό στοιχείο, αφαιρείται από το σύνολο V και προστίθεται στο σύνολο \bar{V} . Πλέον, ο κόμβος p θεωρείται ως κόμβος-στοιχείο.
- Το σύνολο $\mathcal{L}_p = \text{Adj}_G(p)$ περιγράφει τη δομή της στήλης k του κάτω τριγωνικού παράγοντα L ως εξής: Εάν ένας κόμβος-μεταβλητή $i \in \mathcal{L}_p$ και επιλεγεί σε επόμενο βήμα, έστω m ($m > k$), ως οδηγό στοιχείο, τότε το στοιχείο ℓ_{mk} προκύπτει μη μηδενικό.
- Η σχέση (4.1) υποδηλώνει ότι ισχύει $\mathcal{L}_e \setminus \{p\} \subseteq \mathcal{L}_p$ για όλους τους κόμβους-στοιχεία e που είναι γειτονικοί με τον κόμβο p που επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο. Επομένως, όλοι οι κόμβοι-μεταβλητές οι οποίοι είναι γειτονικοί με έναν κόμβο-στοιχείο $e \in \mathcal{E}_p$ είναι επιπρόσθετα γειτονικοί και με τον κόμβο p . Ως εκ τούτου, οι κόμβοι-στοιχεία $e \in \mathcal{E}_p$ απορροφούνται από τον κόμβο p και αφαιρούνται από όλα τα σύνολα \mathcal{E}_i . Οποιαδήποτε αναφορά σε αυτούς τους κόμβους καθιστά πλέον αναφορά στον κόμβο p . Ο κόμβος p προστίθεται στα σύνολα \mathcal{E}_i για κάθε κόμβο-μεταβλητή i που είναι γειτονικός με τον κόμβο p και, εν συνεχεία, τα σύνολα \mathcal{A}_p και \mathcal{E}_p διαγράφονται.

- Κάθε κόμβος j του συνόλου \mathcal{A}_i , ο οποίος βρίσκεται μαζί με τον κόμβο i στο σύνολο \mathcal{L}_p , αποτελεί πλεονάζουσα πληροφορία και διαγράφεται από το σύνολο \mathcal{A}_i . Επομένως, ισχύει ότι $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{L}_e = \emptyset$ για κάθε $e \in \mathcal{E}_i$.

Συνοψίζοντας, οι ακόλουθες σχέσεις περιγράφουν τον τρόπο ανανέωσης των συνόλων \mathcal{E} και \mathcal{A} , όταν επιλέγεται ένας κόμβος p ως οδηγό στοιχείο:

$$\mathcal{E}^k = \left(\mathcal{E}^{k-1} \setminus \bigcup_{e \in \mathcal{E}_p} e \right) \cup \{p\}$$

$$\mathcal{A}^k = \left(\mathcal{A}^{k-1} \setminus (\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_p) \right) \cup (V^k \times V^k)$$

5.4 Μη διακρίσιμοι κόμβοι-μεταβλητές και εξωτερικός βαθμός

Με βάση τη χρήση του παράγοντα γράφου \mathcal{G} , ο αλγόριθμος ελαχίστου βαθμού αφού επιλέξει ως οδηγό στοιχείο τον κόμβο p στο βήμα k της συμβολικής παραγοντοποίησης, ανανεώνει το βαθμό των κόμβων που ανήκουν στο σύνολο \mathcal{L}_p χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1). Η ενημέρωση των βαθμών των κόμβων αποτελεί το πιο χρονοβόρο υπολογιστικό τμήμα του αλγορίθμου.

Η μείωση του αριθμού των ανανεώσεων των βαθμών των κόμβων μπορεί να επιτευχθεί μέσω της αναζήτησης μη διακρίσιμων κόμβων-μεταβλητών. Εάν δύο κόμβοι-μεταβλητές, έστω i και j , σε κάποιο στάδιο εμφανίσουν ίδια σύνολα \mathcal{A} και \mathcal{E} , δηλαδή $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$ και $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_j$, τότε θα συνεχίσουν να φέρουν αυτή την ιδιότητα μέχρις ότου ένας εκ των δύο επιλεγεί ως οδηγό στοιχείο, δεδομένου ότι είτε και οι δύο είναι γειτονικοί με το εκάστοτε οδηγό στοιχείο που επιλέγεται είτε και οι δύο δεν είναι. Όταν ένας εκ των δύο κόμβων i και j προκύψει ως ο κόμβος με το μικρότερο βαθμό, τότε και ο έτερος αποτελεί κόμβο ελαχίστου βαθμού και μπορεί να επιλεγεί ως το αμέσως επόμενο οδηγό στοιχείο. Επομένως, είναι εφικτή η ταυτόχρονη επιλογή των κόμβων i και j ως οδηγό στοιχείο χωρίς την ανάγκη για ενημέρωση των βαθμών των κόμβων στο ενδιάμεσο στάδιο της επιλογής ενός εκ των δύο ως οδηγό στοιχείο. Άρα, όταν αναγνωριστούν ως μη διακρίσιμοι οι κόμβοι-μεταβλητές i και j , χρησιμοποιείται το σύνολο $\mathbf{i} = \{i, j\}$ για να περιγράψει έναν υπερκόμβο που περιλαμβάνει τους εν λόγω μη διακρίσιμους κόμβους. Στην περίπτωση όπου το σύνολο \mathcal{L}_i αναφέρεται σε υπερκόμβο δεν εκφράζει πλήρως τη δομή της αντίστοιχης στήλης του αναδιαταγμένου παράγοντα L , καθώς τα ήδη υπάρχοντα μη μηδενικά στις θέσεις $(i+1, j-1)$ δεν περιλαμβάνονται πλέον στο σύνολο \mathcal{L}_i . Ωστόσο, τα εν λόγω μη μηδενικά στοιχεία δεν αποτελούν επιπρόσθετα μη μηδενικά.

Η αναζήτηση για μη διακρίσιμους κόμβους-μεταβλητές πραγματοποιείται σε κάθε βήμα k της συμβολικής παραγοντοποίησης μεταξύ των κόμβων που ανήκουν στο

εκάστοτε σύνολο \mathcal{L}_p , όπου p είναι ο κόμβος που επιλέχθηκε ως το k -οστό οδηγό στοιχείο.

Ο εξωτερικός βαθμός ενός κόμβου-μεταβλητής ορίζεται ως $d_i \equiv t_i - |\mathbf{i}| + 1$ και υπολογίζεται βάση της ακόλουθης σχέσης:

$$d_i = |\text{Adj}_G(i) \setminus \mathbf{i}| \Rightarrow d_i = |\mathcal{A}_i \setminus \mathbf{i}| + \left| \left(\bigcup_{e \in \mathcal{E}_i} \mathcal{L}_e \right) \setminus \mathbf{i} \right|$$

δεδομένου ότι $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{L}_e = \emptyset$ για κάθε $e \in \mathcal{E}_i$.

Ισχύει ότι $d_i \leq t_i$. Η επιλογή ενός μεμονωμένου κόμβου i ή ενός υπερκόμβου \mathbf{i} ως οδηγό στοιχείο, δημιουργεί το πολύ $(d_i^2 - d_i)/2$ μη μηδενικά ℓ_{ij} για $(PAP^T)_{ij} = 0$. Συνεπώς, η επιλογή του οδηγού στοιχείου με βάση το κριτήριο του ελαχίστου εξωτερικού βαθμού d_i σε σχέση με τον πραγματικό βαθμό t_i τείνει να οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα ως προς τον αριθμό των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L .

5.5 Προσεγγιστικός εξωτερικός βαθμός

Προκειμένω να απλοποιηθεί περαιτέρω ο υπολογισμός βαθμού, χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός εξωτερικός βαθμός για έναν κόμβο i ή υπερκόμβο \mathbf{i} , όπως ορίζεται από τη σχέση (5.2), αντί του εξωτερικού βαθμού d_i .

$$\bar{d}_i^k = \min \left\{ \begin{array}{c} n-k \\ \bar{d}_i^{k-1} + |\mathcal{L}_p \setminus \mathbf{i}| \\ |\mathcal{A}_i \setminus \mathbf{i}| + |\mathcal{L}_p \setminus \mathbf{i}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_i \setminus \{p\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p| \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Η ποσότητα $n-k$ αποτελεί τη διάσταση του εκάστοτε συμπληρώματος Schur, ενώ η ποσότητα $\bar{d}_i^{k-1} + |\mathcal{L}_p \setminus \mathbf{i}|$ αντιστοιχεί στη χειρότερη περίπτωση επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων ℓ_{ij} για $(PAP^T)_{ij} = 0$.

Ο υπολογισμός της ποσότητας $|\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p|$ πραγματοποιείται μέσω του παρακάτω αλγορίθμου:

Αλγόριθμος υπολογισμού $|\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p|$ για κάθε $e \in \bar{V}$

assume $w(k) < 0$ for $k = 1, 2, \dots, n$

for each supervariable $\mathbf{i} \in \mathcal{L}_p$ **do**

for each node-element $e \in \mathcal{E}_i$ **do**

if $(w(e) < 0)$ **then** $w(e) = |\mathcal{L}_e|$

$w(e) = w(e) - |\mathbf{i}|$

end for

end for

$$|\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p| = \begin{cases} w(e) & \text{if } w(e) \geq 0 \\ |\mathcal{L}_e| & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ for all } e \in \bar{V}$$

5.6 Αλγόριθμος Ελαχίστου Προσεγγιστικού Βαθμού

Ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού με βάση τον παράγοντα γράφο \mathcal{G} και τη χρήση του προσεγγιστικού εξωτερικού βαθμού περιγράφεται ως εξής για μία μήτρα $A(n \times n)$:

Αλγόριθμος Διάταξης Ελαχίστου Προσεγγιστικού Βαθμού

$V = \{1 \dots n\}$

$\bar{V} = \emptyset$

for $i=1$ **to** n **do**

$\mathcal{A}_i = \{j : a_{ij} \neq 0, i \neq j\}$

$\mathcal{E}_i = \emptyset$

$\bar{d}_i = t_i = |\mathcal{A}_i|$

$\mathbf{i} = \{i\}$

end for

$k=1$

while $k \leq n$ **do**

select node-variable $p \in V$ with minimum degree \bar{d}_i

$\mathcal{L}_p = \left(\mathcal{A}_p \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_p} \mathcal{L}_e \right) \setminus p$

for each $\mathbf{i} \in \mathcal{L}_p$ **do**

$\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i \setminus \mathcal{L}_p) \setminus p$

$\mathcal{E}_i = (\mathcal{E}_i \setminus \mathcal{E}_p) \cup \{p\}$

$\bar{d}_i^k = \min \left\{ \begin{array}{c} n-k \\ \bar{d}_i^{k-1} + |\mathcal{L}_p \setminus \mathbf{i}| \\ |\mathcal{A}_i \setminus \mathbf{i}| + |\mathcal{L}_p \setminus \mathbf{i}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_i \setminus \{p\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p| \end{array} \right\}$

end for

for each pair \mathbf{i} and $\mathbf{j} \in \mathcal{L}_p$ **do**

if \mathbf{i} and \mathbf{j} are indistinguishable **then**

$\mathbf{i} = \mathbf{i} \cup \mathbf{j}$

$\bar{d}_i = \bar{d}_i - |\mathbf{j}|$

$V = V \setminus \{j\}$

$\mathcal{A}_j = 0$

$\mathcal{E}_j = 0$

end if

```

end for
 $\bar{V} = (\bar{V} \cup \{p\}) \setminus \mathcal{E}_p$ 
 $V = V \setminus \{p\}$ 
 $\mathcal{A}_p = \emptyset$ 
 $\mathcal{E}_p = \emptyset$ 
 $k = k + |p|$ 

```

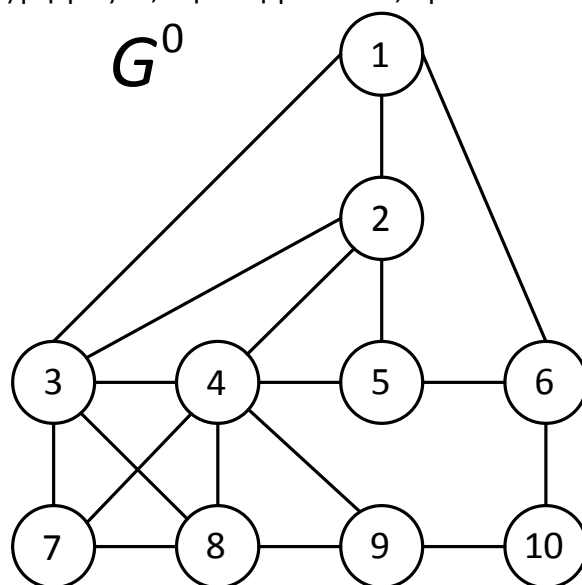
end while

Παράδειγμα 5.1

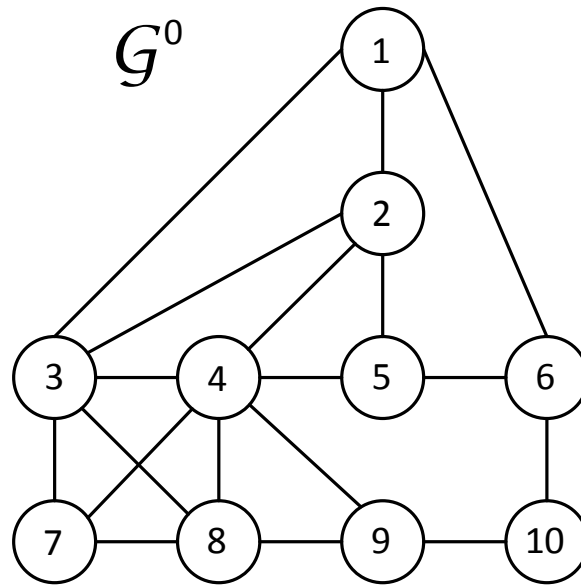
Έστω η συμμετρική μήτρα $A(10 \times 10)$ με την ακόλουθη συμβολική δομή, όπου με \times ορίζεται θέση μη μηδενικού στοιχείου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & & & \times & & & & \\ \times & 2 & \times & \times & \times & & & & & \\ \times & \times & 3 & \times & & & \times & \times & & \\ & \times & \times & 4 & \times & & \times & \times & \times & \\ & \times & & \times & 5 & \times & & & & \\ \times & & & & \times & 6 & & & & \times \\ & & \times & \times & & & 7 & \times & & \\ & & \times & \times & & \times & \times & 8 & \times & \\ & & & \times & & & \times & \times & 9 & \times \\ & & & & \times & & & \times & \times & 10 \end{pmatrix}$$

Ο γράφος απαλοιφής G και ο παράγοντας γράφος \mathcal{G} που περιγράφουν τη συμβολική δομή της μήτρας A , δηλαδή για $k=0$, προκύπτουν ως εξής:



Σχήμα 1-A: Γράφος απαλοιφής για $k=0$



Σχήμα 1-B: Παράγοντας γράφος για $k=0$

Τα σύνολα επιμέρους σύνολα κόμβων \mathcal{A} , \mathcal{E} , \mathcal{L} , V , \bar{V} , \mathbf{i} , η διάταξη κόμβων P και ο προσεγγιστικός βαθμός \bar{d} για $k=0$ έχουν ως εξής:

$V^{(0)} = \{1, \dots, 10\}$					
$\bar{V}^{(0)} = \emptyset$					
$P^{(0)} = \emptyset$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(0)}$	\mathbf{i}
1	{2,3,6}	\emptyset	\emptyset	3	1
2	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	2
3	{1,2,4,7,8}	\emptyset	\emptyset	5	3
4	{2,3,5,7,8,9}	\emptyset	\emptyset	6	4
5	{2,4,6}	\emptyset	\emptyset	3	5
6	{1,5,10}	\emptyset	\emptyset	3	6
7	{3,4,8}	\emptyset	\emptyset	3	7
8	{3,4,7,9}	\emptyset	\emptyset	4	8
9	{4,8,10}	\emptyset	\emptyset	3	9
10	{6,9}	\emptyset	\emptyset	2	10

Για $k=1$ έχουμε:

Εφόσον $\bar{d}_{10}^{(0)} = 2$, ο κόμβος 10 επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο, δηλαδή $p=10$.

Το σύνολο \mathcal{L}_{10} προσδιορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_{10} = \left(\mathcal{A}_{10} \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_{10}} \mathcal{L}_e \right) \setminus \{10\} \Rightarrow \mathcal{L}_{10} = (\{6,9\} \cup \emptyset) \setminus \{10\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_{10} = \{6,9\}}$$

Για $i = 6$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_6 = (\mathcal{A}_6 \setminus \mathcal{L}_{10}) \setminus \{10\} \Rightarrow \mathcal{A}_6 = (\{1,5,10\} \setminus \{6,9\}) \setminus \{10\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_6 = \{1,5\}}$$

$$\mathcal{E}_6 = (\mathcal{E}_6 \setminus \mathcal{E}_{10}) \cup \{10\} \Rightarrow \mathcal{E}_6 = \emptyset \cup \{10\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_6 = \{10\}}$$

Για $i = 9$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_9 = (\mathcal{A}_9 \setminus \mathcal{L}_{10}) \setminus \{10\} \Rightarrow \mathcal{A}_9 = (\{4,8,10\} \setminus \{6,9\}) \setminus \{10\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_9 = \{4,8\}}$$

$$\mathcal{E}_9 = (\mathcal{E}_9 \setminus \mathcal{E}_{10}) \cup \{10\} \Rightarrow \mathcal{E}_9 = \emptyset \cup \{10\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_9 = \{10\}}$$

Θεωρούμε ότι $w(k) < 0$ για $k = 1, 2, \dots, 10$

Για κάθε $i \in \mathcal{L}_{10} = \{6, 9\}$ έχουμε:

- $i = 6$: $\mathcal{E}_6 = \{10\}$
 $e = 10$
 $w(10) < 0 \Rightarrow w(10) = |\mathcal{L}_{10}| \Rightarrow w(10) = 2$
 $w(10) = w(10) - |\{6\}| \Rightarrow w(10) = 1$
- $i = 9$: $\mathcal{E}_9 = \{10\}$
 $e = 10$
 $w(10) = w(10) - |\{9\}| \Rightarrow w(10) = 0$

$$\bar{d}_6^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-1 \\ \bar{d}_4^{(0)} + |\mathcal{L}_{10} \setminus \{6\}| \\ |\mathcal{A}_6 \setminus \{6\}| + |\mathcal{L}_{10} \setminus \{6\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_6 \setminus \{10\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_{10}| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_6^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 3 + |\{6,9\} \setminus \{6\}| \\ |\{1,5\} \setminus \{6\}| + |\{6,9\} \setminus \{6\}| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_6^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_6^{(1)} = 3}$$

$$\bar{d}_9^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-1 \\ \bar{d}_9^{(0)} + |\mathcal{L}_{10} \setminus \{9\}| \\ |\mathcal{A}_9 \setminus \{9\}| + |\mathcal{L}_{10} \setminus \{9\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_9 \setminus \{10\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_{10}| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_9^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 3 + |\{6,9\} \setminus \{9\}| \\ |\{4,8\} \setminus \{9\}| + |\{6,9\} \setminus \{9\}| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_9^{(1)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_9^{(1)} = 3}$$

Για τους κόμβους του συνόλου \mathcal{L}_{10} έχουμε:

$\mathcal{A}_6 = \{1,5\}$	$\mathcal{A}_9 = \{4,8\}$
$\mathcal{E}_6 = \{10\}$	$\mathcal{E}_9 = \{10\}$

Επομένως, οι κόμβοι-μεταβλητές 6 και 9 αποτελούν διακρίσιμους κόμβους.

$$\bar{V}^{(1)} = (\bar{V}^{(0)} \cup \{10\}) \setminus \mathcal{E}_{10} \Rightarrow \boxed{\bar{V}^{(1)} = \{10\}}$$

$$V^{(1)} = V^{(0)} \setminus \{10\} \Rightarrow \boxed{V^{(1)} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$$

$$\mathcal{A}_{10} = \emptyset$$

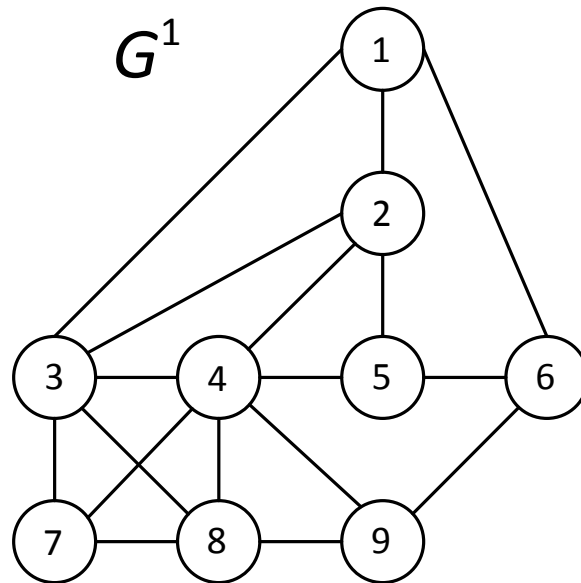
$$\mathcal{E}_{10} = \emptyset$$

$$k = k + |\{10\}| \Rightarrow k = 2$$

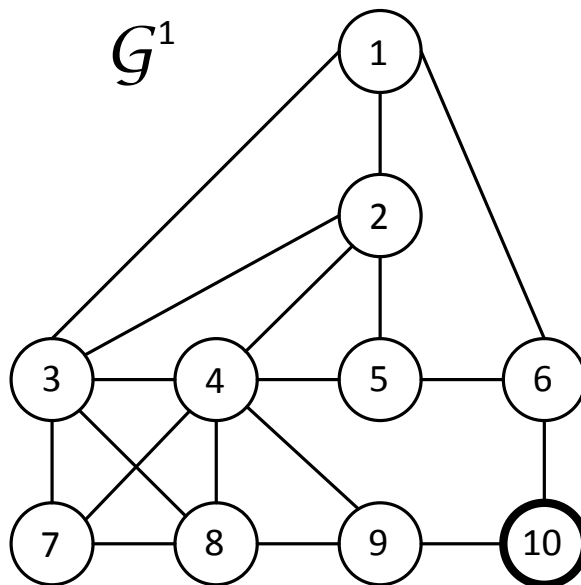
Συνοπτικά, για το 1^ο βήμα του αλγορίθμου προκύπτουν τα εξής:

$V^{(1)} = \{1, \dots, 9\}$					
$\bar{V}^{(1)} = \{10\}$					
$\rho^{(1)} = \{10\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(1)}$	i
1	{2,3,6}	\emptyset	\emptyset	3	1
2	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	2
3	{1,2,4,7,8}	\emptyset	\emptyset	5	3
4	{2,3,5,7,8,9}	\emptyset	\emptyset	6	4
5	{2,4,6}	\emptyset	\emptyset	3	5
6	{1,5}	{10}	\emptyset	3	6
7	{3,4,8}	\emptyset	\emptyset	3	7
8	{3,4,7,9}	\emptyset	\emptyset	4	8
9	{4,8}	{10}	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	{6,9}	-	10

Αντίστοιχα, οι γράφοι G και \mathcal{G} έχουν ως εξής:



Σχήμα 2-A: Γράφος απαλοιφής για $k = 1$



Σχήμα 2-B: Παράγοντας γράφος για $k = 1$

Για $k = 2$ έχουμε:

Εφόσον $\bar{d}_1^{(1)} = 3$, ο κόμβος 1 επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο, δηλαδή $p = 1$.

Το σύνολο \mathcal{L}_1 προσδιορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_1 = \left(\mathcal{A}_1 \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_1} \mathcal{L}_e \right) \setminus \{1\} \Rightarrow \mathcal{L}_1 = (\{2, 3, 6\} \cup \emptyset) \setminus \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_1 = \{2, 3, 6\}}$$

Για $i=2$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{L}_1) \setminus \{1\} \Rightarrow \mathcal{A}_2 = (\{1,3,4,5\} \setminus \{2,3,6\}) \setminus \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_2 = \{4,5\}}$$

$$\mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1) \cup \{1\} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \emptyset \cup \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_2 = \{1\}}$$

Για $i=3$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_3 = (\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{L}_1) \setminus \{1\} \Rightarrow \mathcal{A}_3 = (\{1,2,4,7,8\} \setminus \{2,3,6\}) \setminus \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_3 = \{4,7,8\}}$$

$$\mathcal{E}_3 = (\mathcal{E}_3 \setminus \mathcal{E}_1) \cup \{1\} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \emptyset \cup \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_3 = \{1\}}$$

Για $i=6$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_6 = (\mathcal{A}_6 \setminus \mathcal{L}_1) \setminus \{1\} \Rightarrow \mathcal{A}_6 = (\{1,5\} \setminus \{2,3,6\}) \setminus \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_6 = \{5\}}$$

$$\mathcal{E}_6 = (\mathcal{E}_6 \setminus \mathcal{E}_1) \cup \{1\} \Rightarrow \mathcal{E}_6 = \{10\} \cup \{1\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_6 = \{1,10\}}$$

Θεωρούμε ότι $w(k) < 0$ για $k=1,2,\dots,10$

Για κάθε $i \in \mathcal{L}_1 = \{2,3,6\}$ έχουμε:

- $i=2$:
 $\mathcal{E}_2 = \{1\}$
 $e=1$
 $w(1) < 0 \Rightarrow w(1) = |\mathcal{L}_1| \Rightarrow w(1) = 3$
 $w(1) = w(1) - |\{2\}| \Rightarrow w(1) = 2$
- $i=3$:
 $\mathcal{E}_3 = \{1\}$
 $e=1$
 $w(1) = w(1) - |\{3\}| \Rightarrow w(1) = 1$
- $i=6$:
 $\mathcal{E}_6 = \{1,10\}$
 $e=1$
 $w(1) = w(1) - |\{6\}| \Rightarrow w(1) = 0$
 $e=10$
 $w(10) < 0 \Rightarrow w(10) = |\mathcal{L}_{10}| \Rightarrow w(10) = 2$
 $w(10) = w(10) - |\{6\}| \Rightarrow w(10) = 1$

$$\bar{d}_2^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-2 \\ \bar{d}_2^{(1)} + |\mathcal{L}_1 \setminus \{2\}| \\ |\mathcal{A}_2 \setminus \{2\}| + |\mathcal{L}_1 \setminus \{2\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_2 \setminus \{1\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_1| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_2^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 4 + |\{2,3,6\} \setminus \{2\}| \\ |\{4,5\} \setminus \{2\}| + |\{2,3,6\} \setminus \{2\}| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_2^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 6 \\ 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_2^{(2)} = 4}$$

$$\bar{d}_3^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-2 \\ \bar{d}_3^{(1)} + |\mathcal{L}_1 \setminus \{3\}| \\ |\mathcal{A}_3 \setminus \{3\}| + |\mathcal{L}_1 \setminus \{3\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_3 \setminus \{1\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_1| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_3^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 5 + |\{2,3,6\} \setminus \{3\}| \\ |\{4,7,8\} \setminus \{3\}| + |\{2,3,6\} \setminus \{3\}| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_3^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 7 \\ 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_3^{(2)} = 5}$$

$$\bar{d}_6^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-2 \\ \bar{d}_6^{(1)} + |\mathcal{L}_1 \setminus \{6\}| \\ |\mathcal{A}_6 \setminus \{6\}| + |\mathcal{L}_1 \setminus \{6\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_6 \setminus \{1\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_2| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_6^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 3 + |\{2,3,6\} \setminus \{6\}| \\ |\{5\} \setminus \{6\}| + |\{2,3,6\} \setminus \{6\}| + |\mathcal{L}_{10} \setminus \mathcal{L}_2| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_6^{(2)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ 5 \\ 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_6^{(2)} = 4}$$

Για τους κόμβους του συνόλου \mathcal{L}_1 έχουμε:

$\mathcal{A}_2 = \{4,5\}$	$\mathcal{E}_2 = \{1\}$
$\mathcal{A}_3 = \{4,7,8\}$	$\mathcal{E}_3 = \{1\}$
$\mathcal{A}_6 = \{5\}$	$\mathcal{E}_6 = \{1,10\}$

Επομένως, οι κόμβοι-μεταβλητές 2, 3 και 6 αποτελούν διακρίσιμους κόμβους.

$$\bar{V}^{(2)} = (\bar{V}^{(1)} \cup \{1\}) \setminus \mathcal{E}_1 \Rightarrow \boxed{\bar{V}^{(2)} = \{1, 10\}}$$

$$V^{(2)} = V^{(1)} \setminus \{1\} \Rightarrow \boxed{V^{(2)} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$$

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset$$

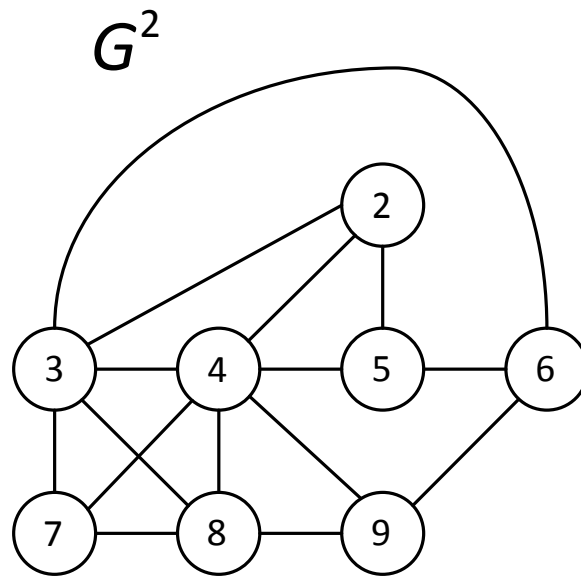
$$\mathcal{E}_1 = \emptyset$$

$$k = k + |\{1\}| \Rightarrow k = 3$$

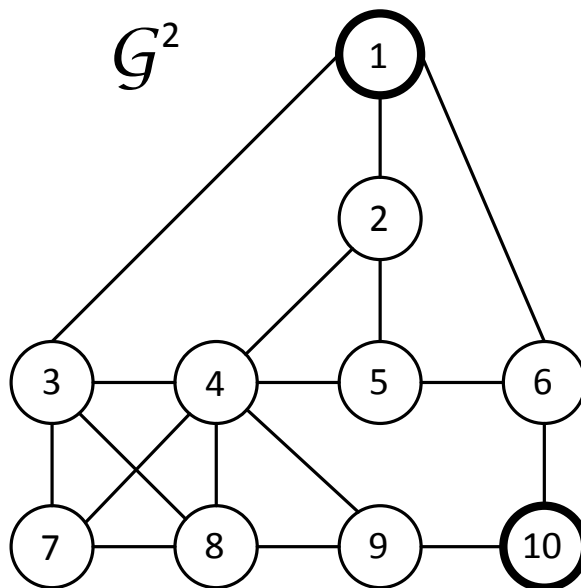
Συνοπτικά, για το 2^ο βήμα του αλγορίθμου προκύπτουν τα εξής:

$V^{(2)} = \{2, \dots, 9\}$					
$\bar{V}^{(2)} = \{1, 10\}$					
$\rho^{(2)} = \{10, 1\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(2)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2, 3, 6\}$	-	1
2	$\{4, 5\}$	$\{1\}$	\emptyset	4	2
3	$\{4, 7, 8\}$	$\{1\}$	\emptyset	5	3
4	$\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
5	$\{2, 4, 6\}$	\emptyset	\emptyset	3	5
6	$\{5\}$	$\{1, 10\}$	\emptyset	4	6
7	$\{3, 4, 8\}$	\emptyset	\emptyset	3	7
8	$\{3, 4, 7, 9\}$	\emptyset	\emptyset	4	8
9	$\{4, 8\}$	$\{10\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6, 9\}$	-	10

Αντίστοιχα, οι γράφοι G και \mathcal{G} έχουν ως εξής:



Σχήμα 3-A: Γράφος απαλοιφής για $k = 2$



Σχήμα 3-B: Παράγοντας γράφος για $k = 2$

Για $k = 3$ έχουμε:

Εφόσον $\bar{a}_5^{(2)} = 3$, ο κόμβος 5 επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο, δηλαδή $p = 5$.

Το σύνολο \mathcal{L}_5 προσδιορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_5 = \left(\mathcal{A}_5 \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_5} \mathcal{L}_e \right) \setminus \{5\} \Rightarrow \mathcal{L}_5 = (\{2, 4, 6\} \cup \emptyset) \setminus \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_5 = \{2, 4, 6\}}$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{L}_5) \setminus \{5\} \Rightarrow \mathcal{A}_2 = (\{4,5\} \setminus \{2,4,6\}) \setminus \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_2 = \emptyset}$$

$$\mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_5) \cup \{5\} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \{1\} \cup \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_2 = \{1,5\}}$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_4 = (\mathcal{A}_4 \setminus \mathcal{L}_5) \setminus \{5\} \Rightarrow \mathcal{A}_4 = (\{2,3,5,7,8,9\} \setminus \{2,4,6\}) \setminus \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_4 = \{3,7,8,9\}}$$

$$\mathcal{E}_4 = (\mathcal{E}_4 \setminus \mathcal{E}_5) \cup \{5\} \Rightarrow \mathcal{E}_4 = \emptyset \cup \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_4 = \{5\}}$$

Για $i = 6$ έχουμε:

$$\mathcal{A}_6 = (\mathcal{A}_6 \setminus \mathcal{L}_5) \setminus \{5\} \Rightarrow \mathcal{A}_6 = (\{5\} \setminus \{2,4,6\}) \setminus \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_6 = \emptyset}$$

$$\mathcal{E}_6 = (\mathcal{E}_6 \setminus \mathcal{E}_5) \cup \{5\} \Rightarrow \mathcal{E}_6 = \{1,10\} \cup \{5\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_6 = \{1,5,10\}}$$

Θεωρούμε ότι $w(k) < 0$ για $k = 1, 2, \dots, 10$

Για κάθε $i \in \mathcal{L}_5 = \{2, 4, 6\}$ έχουμε:

- $i = 2$: $\mathcal{E}_2 = \{1, 5\}$
 $e = 1$
 $w(1) < 0 \Rightarrow w(1) = |\mathcal{L}_1| \Rightarrow w(1) = 3$
 $w(1) = w(1) - |\{2\}| \Rightarrow w(1) = 2$
 $e = 5$
 $w(5) < 0 \Rightarrow w(5) = |\mathcal{L}_5| \Rightarrow w(5) = 3$
 $w(5) = w(5) - |\{2\}| \Rightarrow w(5) = 2$
- $i = 4$: $\mathcal{E}_4 = \{5\}$
 $e = 5$
 $w(5) = w(5) - |\{4\}| \Rightarrow w(5) = 1$
- $i = 6$: $\mathcal{E}_6 = \{1, 5, 10\}$
 $e = 1$
 $w(1) = w(1) - |\{6\}| \Rightarrow w(1) = 1$
 $e = 5$
 $w(5) = w(5) - |\{6\}| \Rightarrow w(5) = 0$
 $e = 10$

$$w(10) < 0 \Rightarrow w(10) = |\mathcal{L}_{10}| \Rightarrow w(10) = 2$$

$$w(10) = w(10) - |\{6\}| \Rightarrow w(10) = 1$$

$$\bar{d}_2^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-3 \\ \bar{d}_2^{(2)} + |\mathcal{L}_5 \setminus \{2\}| \\ |\mathcal{A}_2 \setminus \{2\}| + |\mathcal{L}_5 \setminus \{2\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_2 \setminus \{5\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_5| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_2^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 4 + |\{2,4,6\} \setminus \{2\}| \\ |\emptyset \setminus \{2\}| + |\{2,4,6\} \setminus \{2\}| + |\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_5| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_2^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 6 \\ 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_2^{(3)} = 3}$$

$$\bar{d}_4^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-3 \\ \bar{d}_4^{(2)} + |\mathcal{L}_5 \setminus \{4\}| \\ |\mathcal{A}_4 \setminus \{4\}| + |\mathcal{L}_5 \setminus \{4\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_4 \setminus \{5\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_5| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_4^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 6 + |\{2,4,6\} \setminus \{4\}| \\ |\{3,7,8,9\} \setminus \{4\}| + |\{2,4,6\} \setminus \{4\}| \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{d}_4^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_4^{(3)} = 6}$$

$$\bar{d}_6^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 10-3 \\ \bar{d}_6^{(2)} + |\mathcal{L}_5 \setminus \{6\}| \\ |\mathcal{A}_6 \setminus \{6\}| + |\mathcal{L}_5 \setminus \{6\}| + \sum_{e \in \mathcal{E}_6 \setminus \{5\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_5| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_6^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 4 + |\{2,4,6\} \setminus \{6\}| \\ |\emptyset \setminus \{6\}| + |\{2,4,6\} \setminus \{6\}| + |\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_5| + |\mathcal{L}_{10} \setminus \mathcal{L}_5| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\bar{d}_6^{(3)} = \min \left\{ \begin{array}{c} 7 \\ 6 \\ 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\bar{d}_6^{(3)} = 4}$$

Για τους κόμβους του συνόλου \mathcal{L}_5 έχουμε:

$\mathcal{A}_2 = \emptyset$	$\mathcal{E}_2 = \{1,5\}$
$\mathcal{A}_4 = \{3,7,8,9\}$	$\mathcal{E}_4 = \{5\}$
$\mathcal{A}_6 = \emptyset$	$\mathcal{E}_6 = \{1,5,10\}$

Επομένως, οι κόμβοι-μεταβλητές 2, 4 και 6 αποτελούν διακρίσιμους κόμβους.

$$\bar{V}^{(3)} = (\bar{V}^{(3)} \cup \{5\}) \setminus \mathcal{E}_5 \Rightarrow \bar{V}^{(3)} = \{1,10\} \cup \{5\} \Rightarrow \boxed{\bar{V}^{(3)} = \{1,5,10\}}$$

$$V^{(3)} = V^{(3)} \setminus \{5\} \Rightarrow \boxed{V^{(3)} = \{2,3,4,6,7,8,9\}}$$

$$\mathcal{A}_5 = \emptyset$$

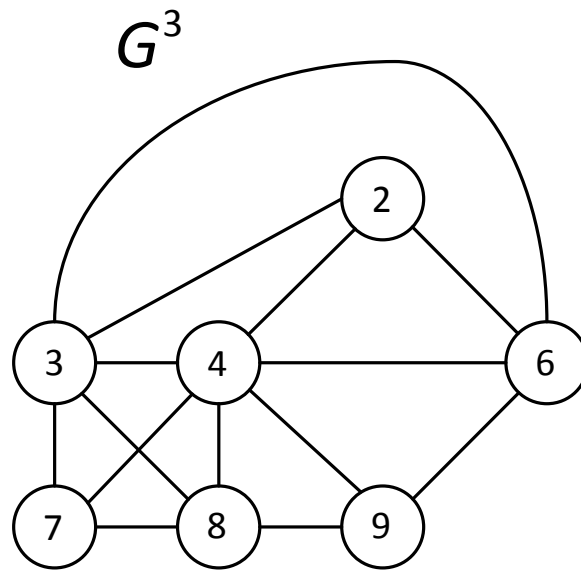
$$\mathcal{E}_5 = \emptyset$$

$$k = k + |\{5\}| \Rightarrow k = 4$$

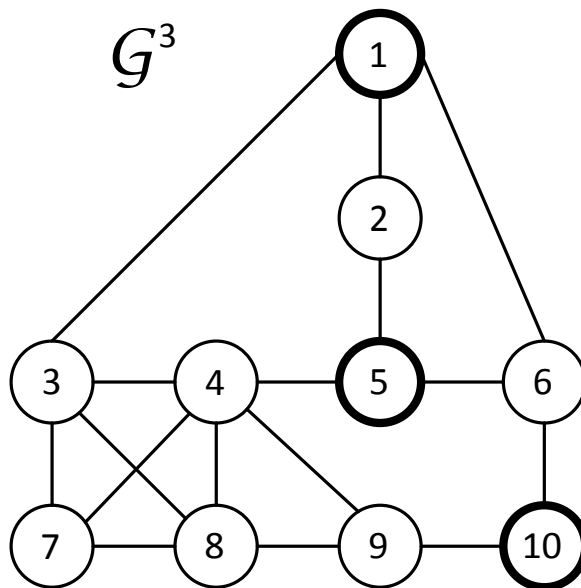
Συνοπτικά, για το 3^ο βήμα του αλγορίθμου προκύπτουν τα εξής:

$V^{(3)} = \{2,3,4,6,7,8,9\}$					
$\bar{V}^{(3)} = \{1,5,10\}$					
$P^{(3)} = \{10,1,5\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(3)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	$\{1,5\}$	\emptyset	3	2
3	$\{4,7,8\}$	$\{1\}$	\emptyset	5	3
4	$\{3,7,8,9\}$	$\{5\}$	\emptyset	6	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	$\{1,5,10\}$	\emptyset	4	6
7	$\{3,4,8\}$	\emptyset	\emptyset	3	7
8	$\{3,4,7,9\}$	\emptyset	\emptyset	4	8
9	$\{4,8\}$	$\{10\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Αντίστοιχα, οι γράφοι G και \mathcal{G} έχουν ως εξής:



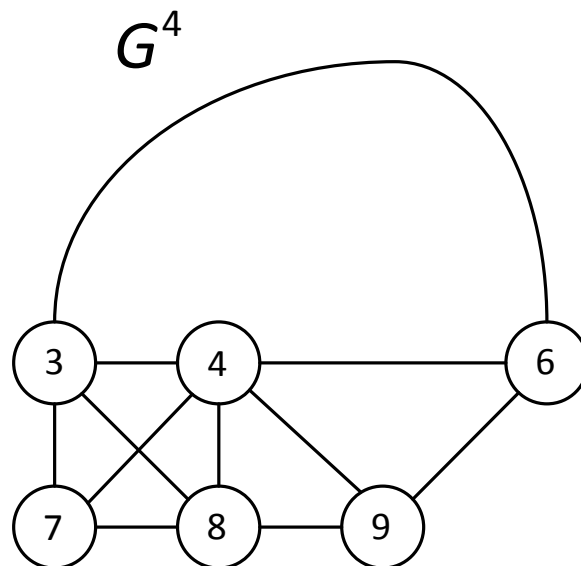
Σχήμα 4-A: Γράφος απαλοιφής για $k = 3$



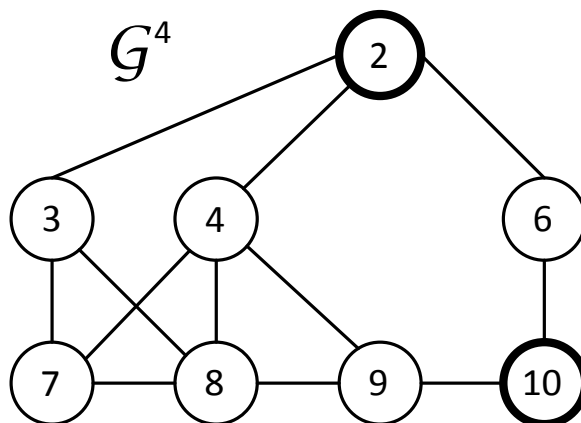
Σχήμα 4-B: Παράγοντας γράφος για $k = 3$

Για $k=4$ έχουμε:

$V^{(4)} = \{3,4,6,7,8,9\}$					
$\bar{V}^{(4)} = \{2,10\}$					
$\rho^{(4)} = \{10,1,5,2\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(4)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	$\{7,8\}$	$\{2\}$	\emptyset	4	3
4	$\{7,8,9\}$	$\{2\}$	\emptyset	5	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	$\{2,10\}$	\emptyset	3	6
7	$\{3,4,8\}$	\emptyset	\emptyset	3	7
8	$\{3,4,7,9\}$	\emptyset	\emptyset	4	8
9	$\{4,8\}$	$\{10\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10



Σχήμα 5-A: Γράφος απαλοιφής για $k=4$

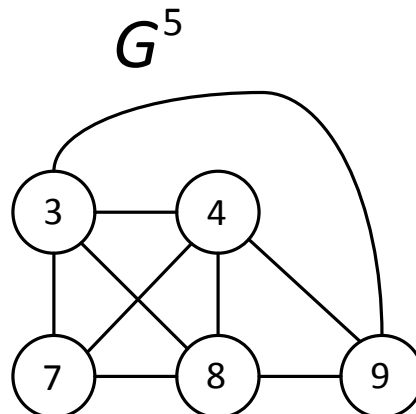


Σχήμα 5-B: Παράγοντας γράφος για $k=4$

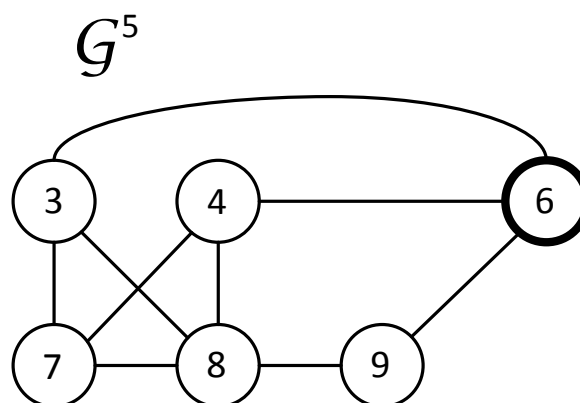
Για $k=5$ έχουμε:

$V^{(5)} = \{3,4,7,8,9\}$					
$\bar{V}^{(5)} = \{6\}$					
$\rho^{(5)} = \{10,1,5,2,6\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(5)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	$\{7,8\}$	$\{6\}$	\emptyset	4	3
4	$\{7,8\}$	$\{6\}$	\emptyset	4	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	$\{3,4,8\}$	\emptyset	\emptyset	3	7
8	$\{3,4,7,9\}$	\emptyset	\emptyset	4	8
9	$\{8\}$	$\{6\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Οι κόμβοι 3 και 4 αποτελούν μη διακρίσιμο ζεύγος και μπορούν να σχηματίσουν υπερκόμβο. Ωστόσο, συνεχίζεται η εκτέλεση του αλγορίθμου χωρίς το σχηματισμό του υπερκόμβου.



Σχήμα 6-A: Γράφος απαλοιφής για $k=5$

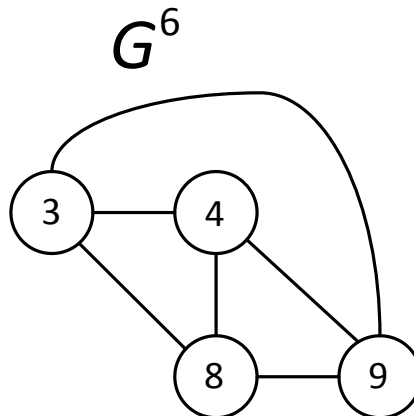


Σχήμα 6-B: Παράγοντας γράφος για $k=5$

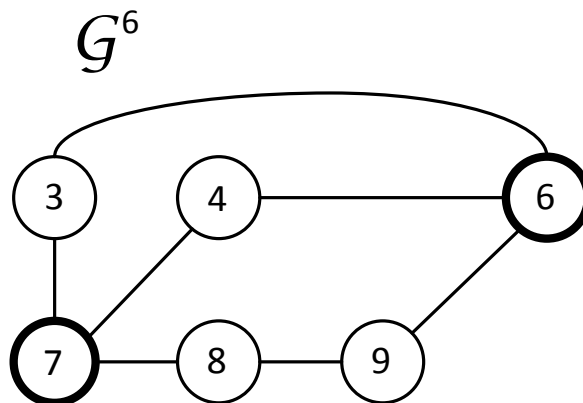
Για $k=6$ έχουμε:

$V^{(6)} = \{3,4,8,9\}$					
$\bar{V}^{(6)} = \{6,7\}$					
$\rho^{(6)} = \{10,1,5,2,6,7\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(6)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	$\{6,7\}$	\emptyset	3	3
4	\emptyset	$\{6,7\}$	\emptyset	3	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,8\}$	-	7
8	$\{9\}$	$\{7\}$	\emptyset	3	8
9	$\{8\}$	$\{6\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Παρατηρούμε ότι οι κόμβοι 3 και 4 εξακολουθούν όπως είναι αναμενόμενο να είναι μη διακρίσιμοι χωρίς το σχηματισμό του υπερκόμβου.



Σχήμα 7-A: Γράφος απαλοιφής για $k=6$



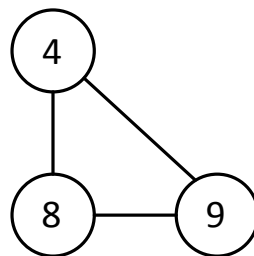
Σχήμα 7-B: Παράγων γράφος για $k=6$

Για $k=7$ έχουμε:

$V^{(7)} = \{4,8,9\}$					
$\bar{V}^{(7)} = \{3\}$					
$\rho^{(7)} = \{10,1,5,2,6,7,3\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(7)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{4,8,9\}$	-	3
4	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,8\}$	-	7
8	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	8
9	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

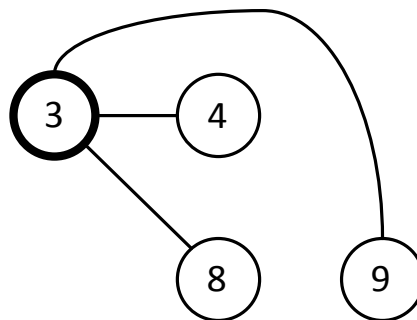
Οι κόμβοι 3, 8 και 9 αποτελούν μη διακρίσιμο ζεύγος και μπορούν να σχηματίσουν υπερκόμβο. Ωστόσο, συνεχίζεται η εκτέλεση του αλγορίθμου χωρίς το σχηματισμό του υπερκόμβου.

G^7



Σχήμα 8-A: Γράφος απαλοιφής για $k=7$

G^7



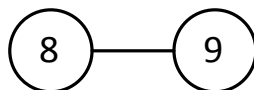
Σχήμα 8-B: Παράγοντας γράφος για $k=7$

Για $k=8$ έχουμε:

$V^{(8)} = \{8,9\}$					
$\bar{V}^{(8)} = \{4\}$					
$\rho^{(8)} = \{10,1,5,2,6,7,3,4\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(8)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{4,8,9\}$	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{8,9\}$	-	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,8\}$	-	7
8	\emptyset	$\{4\}$	\emptyset	1	8
9	\emptyset	$\{4\}$	\emptyset	1	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

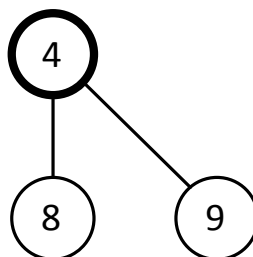
Η μη διακρισιμότητα των κόμβων 8 και 9 εξακολουθεί να υφίσταται μετά την επιλογή του κόμβου 4 ως οδηγό στοιχείο. Συνεχίζεται η εκτέλεση του αλγορίθμου χωρίς το σχηματισμό του υπερκόμβου $\{8,9\}$.

G^8



Σχήμα 9-A: Γράφος απαλοιφής για $k=8$

G^8



Σχήμα 9-B: Παράγοντας γράφος για $k=8$

Για $k=9$ έχουμε:

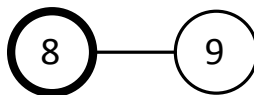
$V^{(9)} = \{9\}$					
$\bar{V}^{(9)} = \{8\}$					
$\rho^{(9)} = \{10,1,5,2,6,7,3,4,8\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(9)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{4,8,9\}$	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{8,9\}$	-	4
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,8\}$	-	7
8	\emptyset	\emptyset	$\{9\}$	-	8
9	\emptyset	$\{8\}$	\emptyset	0	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

G^9



Σχήμα 10-A: Γράφος απαλοιφής για $k=9$

G^9



Σχήμα 10-B: Παράγων γράφος για $k=9$

Για $k=10$ έχουμε:

$V^{(10)} = \emptyset$					
$\bar{V}^{(10)} = \emptyset$					
$P^{(10)} = \{10,1,5,2,6,7,3,4,8,9\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(10)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	{2,3,6}	-	1
2	\emptyset	\emptyset	{3,4,6}	-	2
3	\emptyset	\emptyset	{4,8,9}	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{8,9}	-	4
5	\emptyset	\emptyset	{2,4,6}	-	5
6	\emptyset	\emptyset	{3,4,9}	-	6
7	\emptyset	\emptyset	{3,4,8}	-	7
8	\emptyset	\emptyset	{9}	-	8
9	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	9
10	\emptyset	\emptyset	{6,9}	-	10

Άρα, η διάταξη των κόμβων και, συνεπώς, η μετάθεση που πρέπει να εφαρμοστεί στη μήτρα A είναι:

$$P = \{10,1,5,2,6,7,3,4,8,9\}$$

Αντίστοιχα, η συμμετρικά αναδιατεταγμένη μήτρα A έχει ως εξής:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 10 & & & \times & & & & & & \times \\ & 1 & & \times & \times & & \times & & & \\ & & 5 & \times & \times & & & & \times & \\ & \times & \times & 2 & & & & & \times & \times \\ \times & \times & \times & & 6 & & & & & \\ & & & & & 7 & \times & \times & \times & \\ & \times & & \times & & \times & 3 & \times & \times & \\ & & \times & \times & & \times & \times & 4 & \times & \times \\ & & & & & \times & \times & \times & 8 & \times \\ \times & & & & & & & \times & \times & 9 \end{pmatrix}$$

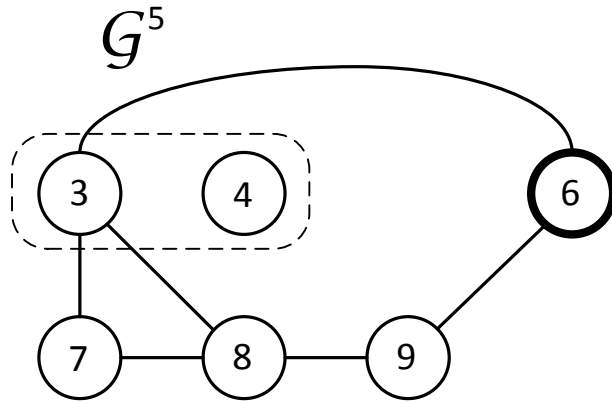
Η συμβολική δομή του παράγοντα L έχει ως εξής με βάση τα στοιχεία των συνόλων \mathcal{L}_i :

$$L = \begin{pmatrix} 10 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & & \times \times & 2 & & & & & & \\ \times & \times & \times & \otimes & 6 & & & & & \\ & & & & & 7 & & & & \\ & & \times & \times & \otimes & \times & 3 & & & \\ & & & \times & \times & \otimes & \times & \times & 4 & \\ & & & & & & \times & \times & \times & 8 \\ \times & & & & \otimes & & \otimes & \times & \times & 9 \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία που συμβολίζονται με \otimes αντιστοιχούν σε επιπρόσθετα μη μηδενικά στοιχεία του παράγοντα L , δηλαδή στοιχεία $\ell_{ij} \neq 0$ για $(PAP^T)_{ij} = 0$.

Χωρίς το σχηματισμό των υπερκόμβων από μη διακρίσιμους κόμβους, ο αλγόριθμος χρειάστηκε 10 βήματα για την ολοκλήρωσή του. Ωστόσο, εάν στο βήμα $k=5$ σχηματιστεί ο υπερκόμβος $\{3,4\}$, τότε συγκεντρωτικά για το $k=5$ έχουμε τα εξής:

<hr/>					
$V^{(5)} = \{3,4,7,8,9\}$					
<hr/>					
$\bar{V}^{(5)} = \{6\}$					
<hr/>					
$P^{(5)} = \{10,1,5,2,6\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(5)}$	i
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	$\{7,8\}$	$\{6\}$	\emptyset	3	$\{3,4\}$
4	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	-
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	$\{3,4,8\}$	\emptyset	\emptyset	3	7
8	$\{3,4,7,9\}$	\emptyset	\emptyset	4	8
9	$\{8\}$	$\{6\}$	\emptyset	3	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10



Σχήμα 11: Παράγοντας γράφος για $k=5$ με αναγνώριση υπερκόμβου

Οποιαδήποτε αναφορά είτε στον κόμβο 3 είτε στον 4 στα επιμέρους σύνολα αποτελεί αναφορά στον υπερκόμβο $\{3,4\}$.

Στο επόμενο βήμα, για $k=6$, ο υπερκόμβος $\{3,4\}$ επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο ελαχίστου βαθμού, δηλαδή $\mathbf{p} = \{3,4\}$, και προκύπτουν τα εξής μετά την ολοκλήρωσή του:

$$V^{(7)} = \{7,8,9\}$$

$$\bar{V}^{(7)} = \{3\}$$

$$\rho^{(7)} = \{10,1,5,2,6,3,4\}$$

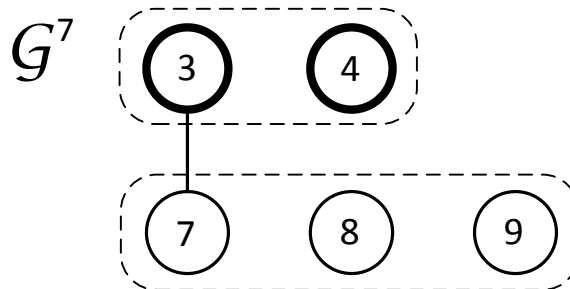
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(7)}$	\mathbf{i}
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{7,8,9\}$	-	$\{3,4\}$
4	\emptyset	\emptyset	-	-	-
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	7
8	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	8
9	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	2	9
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιείται ο δείκτης (7), διότι το οδηγό στοιχείο που επιλέχθηκε ήταν υπερκόμβος αποτελούμενος από 2 κόμβους.

Οι κόμβοι 7, 8 και 9 προκύπτουν ως μη διακρίσιμοι και σχηματίζουν τον υπερκόμβο $\{7,8,9\}$. Επομένως, ο ανωτέρω πίνακας τροποποιείται στον ακόλουθο με την αναγνώριση υπερκόμβου:

$V^{(7)} = \{7,8,9\}$					
$\bar{V}^{(7)} = \{3\}$					
$\rho^{(7)} = \{10,1,5,2,6,3,4\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(7)}$	\mathbf{i}
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{7,8,9\}$	-	$\{3,4\}$
4	\emptyset	\emptyset	-	-	-
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	0	$\{7,8,9\}$
8	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	-
9	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	-
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Ο παράγοντας γράφος μετά την αναγνώριση του υπερκόμβου $\{7,8,9\}$ έχει ως εξής:



Σχήμα 12: Παράγοντας γράφος για $k=7$ με αναγνώριση υπερκόμβου

Στο επόμενο βήμα, προκύπτει:

$V^{(10)} = \emptyset$					
$\bar{V}^{(10)} = \emptyset$					
$\rho^{(10)} = \{10,1,5,2,6,3,4,7,8,9\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(10)}$	\mathbf{i}
1	\emptyset	\emptyset	$\{2,3,6\}$	-	1
2	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,6\}$	-	2
3	\emptyset	\emptyset	$\{7,8,9\}$	-	$\{3,4\}$
4	\emptyset	\emptyset	-	-	-
5	\emptyset	\emptyset	$\{2,4,6\}$	-	5
6	\emptyset	\emptyset	$\{3,4,9\}$	-	6
7	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset	-	$\{7,8,9\}$
8	\emptyset	\emptyset	-	-	-
9	\emptyset	\emptyset	-	-	-
10	\emptyset	\emptyset	$\{6,9\}$	-	10

Η αναδιάταξη προκύπτει ως $P = \{10, 1, 5, 2, 6, 3, 4, 7, 8, 9\}$, η οποία είναι διαφορετική από την αναδιάταξη χωρίς την ανίχνευση υπερκόμβων.

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 10 & & & \times & & & & & & \times \\ & 1 & & \times & \times & \times & & & & \\ & & 5 & \times & \times & & \times & & & \\ & \times & \times & 2 & & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & & 6 & & & & & \\ & \times & & \times & & 3 & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & & \times & 4 & \times & \times & \times \\ & & & & & & \times & \times & 7 & \times \\ & & & & & & \times & \times & \times & 8 & \times \\ \times & & & & & & & \times & & \times & 9 \end{pmatrix}$$

Η συμβολική δομή του παράγοντα L έχει ως εξής με βάση τα στοιχεία των συνόλων \mathcal{L}_i :

$$L = \begin{pmatrix} 10 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & \times & \times & 2 & & & & & & \\ \times & \times & \times & \otimes & 6 & & & & & \\ & \times & & \times & \otimes & 3 & & & & \\ & & \times & \times & \otimes & \oplus & 4 & & & \\ & & & & & \times & \times & 7 & & \\ & & & & & \times & \times & \oplus & 8 & \\ \times & & & \otimes & \otimes & \times & & \oplus & 9 & \end{pmatrix}$$

Ο αριθμός των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων \otimes διατηρήθηκε στο ίδιο επίπεδο σε σχέση με τη μη ανίχνευση υπερκόμβων. Τα μη μηδενικά στοιχεία με το σύμβολο \oplus , παρότι δεν εκφράζονται μέσω των συνόλων \mathcal{L}_i , βρίσκονται σε θέσεις $(i+1, j-1)$ όπου $(PAP^T)_{i+1, j-1} \neq 0$ και εκφράζουν την ύπαρξη υπερκόμβου σχηματιζόμενου από τους κόμβους (i, j) . Σημειώνεται ότι δεν αποτελούν επιπρόσθετα μη μηδενικά στοιχεία.

Μέσω της ανίχνευσης υπερκόμβων ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού ολοκληρώθηκε μετά από 7 βήματα, γεγονός που αποτελεί υπολογιστική επιτάχυνση σε σχέση με την εκτέλεση χωρίς την ανίχνευση υπερκόμβων.

5.7 Στρατηγική επιλογής μεταξύ ισοβάθμιων κόμβων

Στα ενδιάμεσα βήματα του αλγορίθμου ελαχίστου βαθμού η επιλογή μεταξύ ισοβάθμιων κόμβων εξαρτάται από την αρχική αρίθμηση των κόμβων, δηλαδή από την αρχική διάταξη των γραμμών και στηλών της μήτρας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η επιλογή να πραγματοποιείται με τυχαίο τρόπο δεδομένου ότι εάν είχαν διαταχθεί αρχικά οι κόμβοι με διαφορετική σειρά θα προέκυπτε διαφορετική επιλογή μεταξύ ισοβάθμιων κόμβων.

Η ευαισθησία της τελικής αναδιάταξης ως προς την αρχική διάταξη πρέπει να αντιμετωπιστεί κατά τρόπο που να εξασφαλίζει αφενός την ανεξαρτησία ως προς την αρχική διάταξη και αφετέρου την επιλογή του κατάλληλου κόμβου μεταξύ ισοβάθμιων για το σκοπό της ελαχιστοποίησης των επιπλέον μη μηδενικών στοιχείων των παραγόντων.

Μία απλή από πλευράς υπολογιστικού φόρτου αντιμετώπιση του ζητήματος είναι η τροποποίηση της αρχικής διάταξης των κόμβων, πριν εφαρμοστεί ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού, κατά τρόπο που να μειώνεται το εύρος ζώνης της αρχικής μήτρας. Ως εύρος ζώνης μίας μήτρας A ορίζεται η ποσότητα:

$$\max_{i,j} |i - j| \text{ για } a_{ij} \neq 0$$

Ανάμεσα στους αλγορίθμους που οδηγούν σε μείωση του εύρους ζώνης μίας μήτρας είναι ο αντίστροφος Cuthill-McKee αλγόριθμος. Επομένως, η ολική διαδικασία αναδιάταξης έχει ως εξής:

$$A \xrightarrow{\substack{\text{Reverse} \\ \text{Cuthill-McKee}}} \tilde{A} = P_r A P_r^T \xrightarrow{\substack{\text{Minimum Degree} \\ \text{Ordering}}} P \tilde{A} P^T$$

Αντίστροφος Cuthill-McKee Αλγόριθμος

Βήμα 1 Δημιουργία κενής ουράς Q και μονοδιάστατου πίνακα R .

Βήμα 2 Επιλέγεται ο κόμβος του γράφου G με το μικρότερο βαθμό που δεν έχει εισαχθεί σε προηγούμενη επανάληψη στον πίνακα R . Έστω P ο κόμβος που επιλέγεται. Σε περίπτωση κόμβων με τον ίδιο βαθμό, η επιλογή πραγματοποιείται τυχαία.

Βήμα 3 Ο κόμβος P εισάγεται στην πρώτη ελεύθερη θέση του πίνακα R .

Βήμα 4 Εισάγονται στην ουρά Q όλοι οι κόμβοι που είναι γειτονικοί με τον P με αύξουσα σειρά βαθμού.

Βήμα 5 Εξάγεται ο πρώτος κόμβος, έστω C , από την ουρά Q .

Βήμα 6 Εάν ο κόμβος C δεν έχει εισαχθεί σε προηγούμενη επανάληψη στον πίνακα R , εισάγεται στην πρώτη διαθέσιμη θέση του πίνακα R και εισάγονται στην ουρά Q κατά αύξουσα σειρά βαθμού οι γειτονικοί κόμβοι του C οι οποίοι δεν βρίσκονται

στον πίνακα R . Εάν οι θέσεις του πίνακα R συμπληρωθούν, τότε αδειάζει η ουρά Q .

Βήμα 7 Εάν η ουρά Q δεν είναι κενή, τότε συνέχεια στο βήμα 5.

Βήμα 8 Αντιστρέφεται η σειρά του πίνακα R , δηλαδή $R[i] \leftrightarrow R[n+1-i]$.

Ο πίνακας R περιέχει την αναδιάταξη των κόμβων, δηλαδή η ποσότητα $R[j]=i$ δηλώνει ότι ο κόμβος i πρέπει να αναδιαταχθεί ως κόμβος j .

Παράδειγμα 4.2

Για τη μήτρα A του παραδείγματος 4.1 ισχύουν τα εξής:

i	\mathcal{A}_i	$\bar{d}_i^{(0)}$
1	{2,3,6}	3
2	{1,3,4,5}	4
3	{1,2,4,7,8}	5
4	{2,3,5,7,8,9}	6
5	{2,4,6}	3
6	{1,5,10}	3
7	{3,4,8}	3
8	{3,4,7,9}	4
9	{4,8,10}	3
10	{6,9}	2

Εφόσον ο κόμβος με το μικρότερο βαθμό είναι ο 10, επιλέγεται $P=10$ και εισάγεται στην πρώτη θέση του πίνακα R και, εν συνεχεία, οι γειτονικοί του κόμβοι 6 και 9 εισάγονται στην ουρά Q κατά αύξοντα βαθμό.

R	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
6	$\bar{d}_6^{(0)} = 3$
9	$\bar{d}_9^{(0)} = 3$

Εξάγεται από την κεφαλή της ουράς Q ο κόμβος $C=6$. Εφόσον δεν έχει τοποθετηθεί σε προηγούμενο στάδιο στον πίνακα R , εισάγεται στην πρώτη διαθέσιμη θέση του πίνακα R και, εν συνεχεία, εισάγονται στην ουρά Q οι γειτονικοί του κόμβοι 1 και 5 κατά αύξοντα βαθμό. Ο κόμβος 10 παρότι είναι γειτονικός με τον 6 δεν εισάγεται στην ουρά δεδομένου ότι ήδη έχει εισαχθεί στον πίνακα R .

R	10	6	-	-	-	-	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
9	$\bar{d}_9^{(0)} = 3$
1	$\bar{d}_1^{(0)} = 3$
5	$\bar{d}_5^{(0)} = 3$

Αντίστοιχα, για κάθε επόμενη εξαγωγή κόμβου από την κεφαλή της ουράς Q προκύπτουν τα ακόλουθα:

Εξάγοντας $C = 9$ έχουμε:

R	10	6	9	-	-	-	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
1	$\bar{d}_1^{(0)} = 3$
5	$\bar{d}_5^{(0)} = 3$
8	$\bar{d}_8^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$

Εξάγοντας $C = 1$ έχουμε:

R	10	6	9	1	-	-	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
5	$\bar{d}_5^{(0)} = 3$
8	$\bar{d}_8^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$

Εξάγοντας $C = 5$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	-	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
8	$\bar{d}_8^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$

Εξάγοντας $C = 8$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	8	-	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$

Εξάγοντας $C = 4$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	8	4	-	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$

Εξάγοντας $C = 2$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	8	4	2	-	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$

Εξάγοντας $C = 3$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	8	4	2	3	-
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$

Εφόσον οι διαδοχικές εξαγωγές $C = 2$ και $C = 4$ έχουν ήδη εισαχθεί στον πίνακα R δεν πραγματοποιείται καμία αλλαγή, πέραν των δύο εξαγωγών από την ουρά Q .

Εξάγοντας $C = 7$ έχουμε:

R	10	6	9	1	5	8	4	2	3	7
-----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Q	
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
4	$\bar{d}_4^{(0)} = 6$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$
2	$\bar{d}_2^{(0)} = 4$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
3	$\bar{d}_3^{(0)} = 5$
7	$\bar{d}_7^{(0)} = 3$

Εφόσον οι θέσεις του πίνακα έχουν συμπληρωθεί, η ουρά Q αδειάζει και αντιστρέφεται η σειρά στον πίνακα R . Επομένως, προκύπτει:

R	7	3	2	4	8	5	1	9	6	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Συνεπώς, οι κόμβοι πρέπει να αναδιαταχθούν με τη σειρά που καθορίζεται από τον πίνακα R , δηλαδή ως $\{7,3,2,4,8,5,1,9,6,10\}$, πριν την εισαγωγή τους στον αλγόριθμο διάταξης ελαχίστου βαθμού.

Κεφάλαιο 6 – Προτεινόμενος Αλγόριθμος

6.1 Εισαγωγή

Η προτεινόμενη μέθοδος επίλυσης του προβλήματος της εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών έγκειται στην τροποποίηση της αόριστης μήτρας συντελεστών F (6.1) και στην εφαρμογή στατικής αναδιάταξης κόμβων υπό περιορισμό, ο οποίος καθιστά εφικτή την εκτέλεση της παραγοντοποίησης με χρήση αποκλειστικά 1×1 οδηγών στοιχείων.

$$F = \begin{pmatrix} G & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$F \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Σημειώνεται ότι η μήτρα G είναι θετικά ημιορισμένη, ενώ η μήτρα C εμφανίζει πλήρη τάξη κατά γραμμές.

6.2 Τροποποίηση της μήτρας συντελεστών F

Ο σκοπός της τροποποίησης της μήτρας F είναι η εύρεση μήτρας συντελεστών ισοδυνάμου συστήματος με το (6.2) για την οποία το μπλοκ στη θέση (1,1) προκύπτει ως θετικά ορισμένο.

Ορίζεται για μία μήτρα A ο πυρήνας $\ker(A)$ ως το σύνολο των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων x για τα οποία ισχύει $Ax = 0$. Εξ' ορισμού, το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ότι ανήκει στον πυρήνα της μήτρας A . Ο αριθμός των μη μηδενικών διανυσμάτων x αντιστοιχεί στην ποσότητα $nullity(A)$, η οποία χρησιμοποιήθηκε στο κεφάλαιο 4 στα πλαίσια της ανάλυσης παρατηρησιμότητας.

Παρουσιάζονται δύο προτάσεις για τη μήτρα συντελεστών F .

Πρόταση 6.1 Εφόσον η μήτρα G είναι θετικά ημιορισμένη και η μήτρα C εμφανίζει πλήρη τάξη κατά γραμμές, τότε η μήτρα συντελεστών F είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν ισχύει $\ker(G) \cap \ker(C) = \{0\}$.

Απόδειξη 6.1

Αρχικά, αποδεικνύεται ότι η συνθήκη είναι ικανή:

Έστω διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε $Fu = 0$. Συνεπώς, ισχύει:

$$\begin{pmatrix} G & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} Gx + C^T y = 0 & (1) \\ Cx = 0 & (2) \end{cases}$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $x \in \ker(C)$.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$Gx = -C^T y \Rightarrow x^T Gx = -x^T C^T y \Rightarrow x^T Gx = -(Cx)^T y \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^T Gx = 0$$

Εφόσον η συμμετρική μήτρα G είναι θετικά ημιορισμένη, ισχύει ότι:

$$x^T Gx = 0 \Rightarrow Gx = 0 \Rightarrow x \in \ker(G)$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $x \in \ker(G) \cap \ker(C)$. Επιπρόσθετα, το διάνυσμα x είναι μη μηδενικό, εφόσον η μήτρα C εμφανίζει πλήρη τάξη κατά γραμμές.

Ξαναγράφοντας τη σχέση (1) έχουμε:

$$C^T y = -Gx \Rightarrow C^T y = 0$$

Δεδομένου ότι η μήτρα C^T εμφανίζει πλήρη τάξη κατά στήλες, το διάνυσμα y είναι μηδενικό. Άρα, το διάνυσμα u είναι επίσης μηδενικό και η μήτρα F προκύπτει ως αντιστρέψιμη.

Εν συνεχεία, αποδεικνύεται ότι η συνθήκη είναι και αναγκαία:

Έστω ότι $\ker(G) \cap \ker(C) \neq \{0\}$. Επιλέγεται $x \in \ker(G) \cap \ker(C)$ με $x \neq 0$. Ορίζεται το διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι:

$$Fu = \begin{pmatrix} G & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Gx \\ Cx \end{pmatrix} \stackrel{x \in \ker(G) \cap \ker(C)}{\Rightarrow} Fu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Άρα, η μήτρα F προκύπτει ως μη αντιστρέψιμη.

Πρόταση 6.2 Εφόσον η μήτρα G είναι θετικά ημιορισμένη και ισχύει $\ker(G) \cap \ker(C) = \{0\}$, τότε η μήτρα $G + C^T W^{-1} C$, όπου $W^{-1} = \gamma I$, προκύπτει ως θετικά ορισμένη για κάθε $\gamma > 0$.

Απόδειξη 6.2

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x που ικανοποιεί τη σχέση $x^T Gx = 0$ δεν μπορεί να ικανοποιεί και την $x^T C^T Cx = 0$, δεδομένου ότι τα σύνολα διανυσμάτων $\ker(G)$ και $\ker(C)$ δεν έχουν εμφανίζουν κοινά μη μηδενικά διανύσματα.

Άρα, για πλήρως παρατηρήσιμο σύστημα, δηλαδή $nullity \begin{pmatrix} H \\ C \end{pmatrix} = 0$ παρουσία συγχρονισμένων μετρήσεων, μπορεί να σχηματιστεί η μήτρα \bar{F} , όπως ορίζεται στη σχέση (6.3), η οποία αποτελεί τη μήτρα συντελεστών στο ισοδύναμο με το (6.2) σύστημα εξισώσεων (6.4).

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} G + C^T W^{-1} C & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\bar{F} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k + C^T W^{-1} \Delta c^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Ουσιαστικά, το μπλοκ στη θέση (1,1) της μήτρας \bar{F} αποτελεί τη μήτρα κέρδους των κανονικών εξισώσεων με την προσθήκη όλων των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης, αλλά με ελεύθερη επιλογή βαρών γ στη μήτρα $W^{-1} = \gamma I$.

Ωστόσο, η προσθήκη όλων των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης στο μπλοκ της θέσης (1,1) τροποποιεί τη συμβολική του δομή με την εισαγωγή επιπλέον μη μηδενικών στοιχείων, δεδομένου ότι η δομή της μήτρας G διαφέρει εν γένει από τη δομή της $C^T C$. Προκειμένου να περιοριστεί η επιβάρυνση του εν λόγω μπλοκ με μη μηδενικά στοιχεία, είναι εφικτή η επιλογή κατάλληλης μήτρας C_1 , ώστε η μήτρα $G + C_1^T W_1 C_1$ να προκύψει ως θετικά ορισμένη, δηλαδή αντί να προστεθούν στη μήτρα κέρδους G όλες οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, επιλέγεται ένα μη πλεονάζον υποσύνολό τους. Η μήτρα συντελεστών και το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει περιγράφονται από τις σχέσεις (6.5) και (6.6) αντίστοιχα. Η εύρεση του ελάχιστου συνόλου μετρήσεων μηδενικής έγχυσης μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της ανάλυσης παρατηρησιμότητας.

Επομένως, το πρόβλημα της μετατροπής του μπλοκ στη θέση (1,1) της μήτρας F ανάγεται σε πρόβλημα αποκατάστασης παρατηρησιμότητας σε σύστημα με μετρήσεις μηδενικής έγχυσης ως μοναδικές υποψήφιες μετρήσεις προς τοποθέτηση.

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} G + C_1^T W_1^{-1} C_1 & C_1^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\hat{F} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k + C_1^T W_1^{-1} \Delta c_1^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Σημειώνεται ότι η εάν η μήτρα G είναι θετικά ορισμένη, τότε έχουμε $C_1 = 0$ και η μήτρα \hat{F} ταυτίζεται με την F .

6.3 Παραγοντοποίηση της μήτρας συντελεστών \hat{F}

Ορίζονται ως G – κόμβοι οι κόμβοι του γράφου γειτνίασης, και επομένως του γράφου απαλοιφής και του παράγοντα γράφου, της μήτρας \hat{F} που αντιστοιχούν σε διαγώνια στοιχεία της μήτρας $\hat{G} = G + C_1^T W_1^{-1} C_1$. Αντίστοιχα, ορίζονται ως C – κόμβοι οι κόμβοι που αντιστοιχούν σε διαγώνια στοιχεία της μηδενικής κάτω δεξιά μήτρας.

Η LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας \hat{F} λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{G} & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_{11} D_{11} L_{11}^T = \hat{G} \\ L_{21} = C L_{11}^{-T} D_{11}^{-1} \\ L_{22} D_{22} L_{22}^T = -C \hat{G}^{-1} C^T \end{cases}$$

Από την ανωτέρω παραγοντοποίηση προκύπτουν τα εξής:

- Οι παράγοντες L_{11} και D_{11} αντιστοιχούν στην LDL^T παραγοντοποίηση της θετικά ορισμένης μήτρας \hat{G} και, επομένως, τα διαγώνια 1×1 στοιχεία της μήτρας D_{11} εμφανίζουν μόνο θετικές τιμές.
- Οι παράγοντες L_{22} και D_{22} αντιστοιχούν στην LDL^T παραγοντοποίηση του αρνητικά ορισμένου συμπληρώματος Schur $-C \hat{G}^{-1} C^T$ και, επομένως, τα διαγώνια 1×1 στοιχεία της μήτρας D_{22} εμφανίζουν μόνο αρνητικές τιμές

Το συμπλήρωμα Schur $-C \hat{G}^{-1} C^T$ προκύπτει ως αρνητικά ορισμένο, διότι η μήτρα η μήτρα C είναι πλήρους τάξης και η μήτρα \hat{G} είναι θετικά ορισμένη.

Εάν πραγματοποιηθούν δύο επιμέρους αναδιατάξεις, όπου όλοι οι G – κόμβοι αναδιαταχθούν μεταξύ τους πριν από όλους τους C – κόμβους οι οποίοι με τη σειρά τους αναδιατάσσονται μεταξύ τους, η αρχική 2×2 μπλοκ δομή της μήτρας \hat{F} διατηρείται στη συμμετρικά αναδιαταγμένη μήτρα $P \hat{F} P^T$ που προκύπτει. Λόγω διατήρησης της δομής, οι παρατηρήσεις που ακολουθούν μπορούν να εξαχθούν από την αρχική μήτρα \hat{F} και για την αναδιατεταγμένη $P \hat{F} P^T$.

Συνεπώς, με την επιμέρους αναδιάταξη των G – κόμβων μεταξύ τους και έπειτα των C – κόμβων μεταξύ τους, διατηρώντας την αρχική μπλοκ δομή της μήτρας \hat{F} , προκύπτουν τα εξής για τους επιμέρους παράγοντες L_{ij} :

- Ο αριθμός των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L_{11} και πιθανώς στον L_{21} μπορεί να μειωθεί με βάση αποκλειστικά την αναδιάταξη των G – κόμβων μεταξύ τους.

- Ο παράγοντας L_{22} που αντιστοιχεί στην παραγοντοποίηση του συμπληρώματος Schur εμφανίζει αρκετά επιπρόσθετα μη μηδενικά στοιχεία ανεξαρτήτως της αναδιάταξης των C – κόμβων μεταξύ τους, δεδομένου ότι το συμπλήρωμα Schur προκύπτει ως πυκνή μήτρα.

Η ολική αναδιάταξη των G – και C – κόμβων μεταξύ τους χωρίς διαχωρισμό με στόχο τη μείωση των επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στους παράγοντες μπορεί να οδηγήσει σε μη εφικτή παραγοντοποίηση λόγω της μη διατήρησης της αρχικής 2×2 μπλοκ δομής της μήτρας \hat{F} .

Η ανωτέρω παρατήρηση μπορεί να σκιαγραφηθεί στην ακόλουθη περίπτωση: Όταν ένας C – κόμβος που αντιστοιχεί σε μηδενικό διαγώνιο στοιχείο της μήτρας \hat{F} διαταχθεί πρώτος, τότε το αρχικό οδηγό στοιχείο για την αριθμητική παραγοντοποίηση προκύπτει μηδενικό.

Επομένως, για να είναι εφικτή η αριθμητική παραγοντοποίηση και για να μειωθεί η εμφάνιση επιπρόσθετων μη μηδενικών στοιχείων στους παράγοντες πρέπει να εφαρμοστεί ολική αναδιάταξη όλων των κόμβων μεταξύ τους χωρίς διαχωρισμό, υπό την παρουσία όμως περιορισμού κατά τη διαδικασία της αναδιάταξης.

6.4 Περιορισμός στην αναδιάταξη των κόμβων

Ο περιορισμός που πρέπει να εφαρμοστεί για την ολική αναδιάταξη των κόμβων προκύπτει από τον περιορισμό κατά Bridson για επιμέρους κλάση μητρών σαγματικού σημείου.

Ως μήτρα σαγματικού σημείου καλείται η συμμετρική και αόριστη μήτρα, έστω $K((n+m) \times (n+m))$, με την ακόλουθη 2×2 μπλοκ δομή:

$$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & -A_{22} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

όπου οι συμμετρικές μήτρες $A_{11}(n \times n)$ και $A_{22}(m \times m)$ είναι θετικά ημιορισμένες και ισχύει $n \geq m$.

Ο περιορισμός κατά Bridson προϋποθέτει τα εξής:

- Η συμμετρική μήτρα $A_{11}(n \times n)$ πρέπει να είναι θετικά ορισμένη.
- Η μήτρα $A_{21}(m \times n)$ πρέπει είναι πλήρους τάξης, δηλαδή $rank(A_{21}) = m$.

Έστω ότι τα πρώτα $i-1$ βήματα της παραγοντοποίησης έχουν διεξαχθεί επιτυχώς. Για τον υπολογισμό της i – οστής γραμμής $\ell_{i0}(1 \times (i-1))$ του παράγοντα L και του i – οστού διαγώνιου στοιχείου $d_{ii}(1 \times 1)$ του παράγοντα D της συμμετρικά αναδιατεταγμένης μήτρας K έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \hat{K} & k_{i0}^T \\ k_{i0} & k_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L} & 0 \\ \ell_{i0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{D} & 0 \\ 0 & d_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L} & 0 \\ \ell_{i0} & 1 \end{pmatrix}^T \Rightarrow \begin{cases} \ell_{i0} = k_{i0} \hat{L}^{-T} \hat{D}^{-1} \\ d_{ii} = k_{ii} - \ell_{i0} \hat{D} \ell_{i0}^T \end{cases}$$

όπου: $\hat{K}((i-1) \times (i-1))$, $\hat{L}((i-1) \times (i-1))$, $\hat{D}((i-1) \times (i-1))$ και $k_{i0}(1 \times (i-1))$.

Για το στοιχείο d_{ii} με αντικατάσταση της σχέσης που δίνει τη γραμμή ℓ_{i0} προκύπτει το εξής:

$$d_{ii} = k_{ii} - \ell_{i0} \hat{D} \ell_{i0}^T \Rightarrow d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{L}^{-T} \hat{D}^{-1} \hat{D} [k_{i0} \hat{L}^{-T} \hat{D}^{-1}]^T \Rightarrow$$

$$d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{L}^{-T} \hat{D}^{-1} \hat{L}^{-1} k_{i0}^T \Rightarrow d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{L}^{-T} \hat{D}^{-1} \hat{L}^{-1} k_{i0}^T \Rightarrow$$

$$d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{K}^{-1} k_{i0}^T$$

Για να προκύψει εφικτή η συνέχεια της αριθμητικής παραγοντοποίησης πρέπει το οδηγό στοιχείο d_{ii} να είναι μη μηδενικό. Για λόγους αριθμητικής ευστάθειας το d_{ii} δεν πρέπει να λαμβάνει ακραίες ελάχιστες κατά απόλυτο τιμές, ενώ το μέγιστο κατά απόλυτο τιμή στοιχείο της γραμμής ℓ_{i0} δεν πρέπει να λαμβάνει ανεξέλεγκτα υψηλές τιμές, αλλά να είναι φραγμένη από άνω όριο. Η εφικτή παραγοντοποίηση εξασφαλίζεται από την εφαρμογή του περιορισμού, που παρουσιάζεται ακολούθως, στην αναδιάταξη των κόμβων. Για την αριθμητική ευστάθεια αρκεί ο δείκτης κατάστασης της μήτρας A_{11} καθώς και του αρνητικού συμπλήρωμα Schur $A_{22} + A_{21} A_{11}^{-1} A_{21}^T$ να μην λαμβάνουν ακραίες τιμές και, επιπροσθέτως οι οριζουσές τους να εμφανίζουν συγκρίσιμα μεταξύ τους μεγέθη.

Ο περιορισμός στη διαδικασία αναδιάταξης των κόμβων για την εξασφάλιση εφικτής παραγοντοποίησης έχει ως εξής:

Κάθε A_{22} – κόμβος μπορεί να αναδιαταχθεί αφότου όλοι οι γειτονικοί προς αυτόν A_{11} – κόμβοι της μήτρας K έχουν αναδιαταχθεί σε προηγούμενες από αυτόν θέσεις.

Με βάση τον ανωτέρω περιορισμό προκύπτει ότι ο κόμβος που καταλαμβάνει την πρώτη θέση στην αναδιάταξη είναι οπωσδήποτε A_{11} – κόμβος και το αντίστοιχο οδηγό στοιχείο d_{11} είναι θετικό. Για να ήταν δυνατή η κατάληψη της πρώτης θέσης από έναν A_{22} – κόμβος, ο εν λόγω κόμβος δεν θα είχε κανένα γειτονικό A_{11} – κόμβο, δηλαδή θα υπήρχε μηδενική γραμμή στη μήτρα A_{21} , με αποτέλεσμα την παραβίαση της αρχικής υπόθεσης ότι η μήτρα A_{21} εμφανίζει πλήρη τάξη γραμμών.

Θεωρώντας ότι τα πρώτα $i-1$ βήματα της αριθμητικής παραγοντοποίησης έχουν πραγματοποιηθεί επιτυχώς, για το i – οστό οδηγό στοιχείο ισχύει $d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{K}^{-1} k_{i0}^T$. Το 1×1 στοιχείο $k_{i0} \hat{K}^{-1} k_{i0}^T$ είναι ανεξάρτητο από την επιμέρους αναδιάταξη των

κόμβων που αντιστοιχούν σε διαγώνια στοιχεία της \hat{K} και, επομένως, η αριθμητική τιμή του οδηγού στοιχείου d_{ii} δεν επηρεάζεται από τις προηγούμενες αναδιατάξεις κόμβων. Άρα, για το i -οστό βήμα η μήτρα \hat{K} και αντίστοιχα το διάνυσμα k_{i0} μπορούν να διαμεριστούν ανεξάρτητα από την πραγματική τους αναδιάταξη σε τμήματα που αντιστοιχούν σε A_{11} – και A_{22} – κόμβους ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{K} & k_{i0}^T \\ \hline k_{i0} & k_{ii} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21}^T & u^T \\ \hline \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{22} & u^T \\ \hline u & u & k_{ii} \end{array} \right)$$

Η μήτρα \hat{A}_{11} είναι θετικά ορισμένη, εφόσον αποτελεί τμήμα της μήτρας A_{11} . Επίσης, με βάση τον περιορισμό στην αναδιάταξη, όλα τα μη μηδενικά στοιχεία της γραμμής της μήτρας A_{21} που αντιστοιχούν σε γειτονικούς A_{11} – κόμβους ενός A_{22} – κόμβου που έχει ήδη διαταχθεί πρέπει να βρίσκονται σε θέσεις της αντίστοιχης γραμμής της μήτρας \hat{A}_{21} . Επομένως, εφόσον η μήτρα A_{21} εμφανίζει πλήρη τάξη κατά γραμμές, προκύπτει ότι και η μήτρα \hat{A}_{21} είναι εξίσου πλήρους τάξης κατά γραμμές.

Διακρίνονται οι ακόλουθες 2 περιπτώσεις ανάλογα με το εάν ο κόμβος που επιλέγεται ως οδηγό στοιχείο για το i -οστό βήμα της αριθμητικής παραγοντοποίησης είναι A_{11} – ή A_{22} – κόμβος.

- 1^η Περίπτωση: Το i -οστό οδηγό στοιχείο αντιστοιχεί σε A_{11} – κόμβο.

Λόγω του περιορισμού στη διάταξη, ο κόμβος i δεν πρέπει να έχει κανένα γειτονικό A_{22} – κόμβο διατεταγμένο πριν από αυτόν. Άρα, προκύπτει ότι $u = 0$. Για το οδηγό στοιχείο d_{ii} έχουμε τα εξής:

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{K} & k_{i0}^T \\ \hline k_{i0} & k_{ii} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21}^T & u^T \\ \hline \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{22} & 0 \\ \hline u & 0 & k_{ii} \end{array} \right) \Rightarrow d_{ii} = k_{ii} - (u \ 0) \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21}^T \\ \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{ii} = k_{ii} - k_{i0} \hat{K}^{-1} k_{i0}^T$$

Η αντίστροφη μήτρα που προκύπτει για την επιμέρους μήτρα \hat{K} είναι:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21}^T \\ \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11}^{-1} - \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} & \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \\ \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} & -\hat{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

όπου \hat{S} το αρνητικό συμπλήρωμα Schur, δηλαδή:

$$\hat{S} = \hat{A}_{22} + \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T$$

Άρα, το στοιχείο d_{ii} μπορεί να γραφεί ως:

$$d_{ii} = k_{ii} - u \left(\hat{A}_{11}^{-1} - \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} \right) u^T \Rightarrow$$

$$d_{ii} = k_{ii} - u \hat{A}_{11}^{-1} u^T + u \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} u^T$$

Το οδηγό στοιχείο d_{ii} διαμερίζεται στα εξής δύο τμήματα: $(k_{ii} - u \hat{A}_{11}^{-1} u^T)$ και $u \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} u^T$. Για κάθε επιμέρους τμήμα έχουμε τα εξής:

- Η μήτρα $\left(\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & u^T \\ \hline u & k_{ii} \end{array} \right)$ είναι θετικά ορισμένη, εφόσον αποτελεί επιμέρους τμήμα της θετικά ορισμένης μήτρας A_{11} . Άρα, το τμήμα του οδηγού στοιχείου που σχετίζεται με την ανωτέρω μήτρα είναι θετικό, δηλαδή $k_{ii} - u \hat{A}_{11}^{-1} u^T > 0$.
- Εφόσον το αρνητικό συμπλήρωμα Schur \hat{S} είναι θετικά ορισμένο, το τμήμα του οδηγού στοιχείου που αντιστοιχεί στο έτερο τμήμα είναι θετικό, δηλαδή $u \hat{A}_{11}^{-1} \hat{A}_{21}^T \hat{S}^{-1} \hat{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} u^T$.

Με βάση τα ανωτέρω, το στοιχείο d_{ii} που αντιστοιχεί σε A_{11} – κόμβο προκύπτει ως θετικό.

- 2^η Περίπτωση: Το i – οστό οδηγό στοιχείο αντιστοιχεί σε A_{22} – κόμβο.

Εφόσον το οδηγό στοιχείο αντιστοιχεί σε A_{22} – κόμβο, το διάνυσμα u μπορεί να ενσωματωθεί στη μήτρα \hat{A}_{21} , ενώ το διάνυσμα u και το στοιχείο k_{ii} στη μήτρα $-\hat{A}_{22}$. Άρα, για το i – οστό βήμα η μήτρα \hat{K} και αντίστοιχα το διάνυσμα k_{i0} μπορούν να διαμεριστούν κόμβους ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c|c} \hat{K} & k_{i0}^T \\ \hline k_{i0} & k_{ii} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21}^T & u^T \\ \hline \hat{A}_{21} & -\hat{A}_{22} & u^T \\ \hline u & u & k_{ii} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \tilde{A}_{21}^T \\ \hline \tilde{A}_{21} & -\tilde{A}_{22} \end{array} \right)$$

Ο αντίστροφος της ανωτέρω μήτρας προκύπτει ως:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \tilde{A}_{21}^T \\ \tilde{A}_{21} & -\tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11}^{-1} - \hat{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{21}^T \tilde{S}^{-1} \tilde{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} & \hat{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{21}^T \tilde{S}^{-1} \\ \tilde{S}^{-1} \tilde{A}_{21} \hat{A}_{11}^{-1} & -\tilde{S}^{-1} \end{pmatrix}$$

Εφόσον το αρνητικό συμπλήρωμα Schur \tilde{S} είναι θετικά ορισμένο, προκύπτει ότι η μήτρα $-\tilde{S}^{-1}$ είναι αρνητικά ορισμένη. Επιπροσθέτως, το i -οδηγό στοιχείο ισούται με το αντίστροφο του στοιχείου στη θέση (i, i) του ανωτέρω αντιστρόφου, δηλαδή με το αντίστροφο στοιχείο του τελευταίου διαγώνιου στοιχείου της μήτρας $-\tilde{S}^{-1}$. Επομένως, το i -οδηγό στοιχείο d_{ii} που αντιστοιχεί σε A_{22} -κόμβο είναι αρνητικό, δηλαδή $d_{ii} < 0$.

Άρα, και στις δύο περιπτώσεις το οδηγό στοιχείο που προκύπτει στο i -οστό βήμα της αριθμητικής παραγοντοποίησης είναι μη μηδενικό. Μάλιστα, το οδηγό στοιχείο που αντιστοιχεί σε A_{11} -κόμβο είναι θετικό, ενώ προκύπτει αρνητικό όταν αντιστοιχεί σε A_{22} -κόμβο. Ξεκινώντας με οδηγό στοιχείο που αντιστοιχεί σε A_{11} -κόμβο και αποδεικνύοντας ότι η αριθμητική παραγοντοποίηση είναι εφικτή για το i -οστό βήμα, θεωρώντας ότι τα προηγούμενα $i-1$ βήματα ήταν εφικτά, προκύπτει επαγωγικά ότι η αναδιάταξη με βάση τον περιορισμό μεταξύ A_{11} - και A_{22} -κόμβων οδηγεί σε εφικτή LDL^T αριθμητική παραγοντοποίηση.

Η μήτρα \hat{F} αποτελεί μήτρα σαγματικού σημείου της μορφής (6.7) με $A_{11} = \hat{G}$, $A_{21} = C$ και $A_{22} = 0$. Επιπρόσθετα, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή του περιορισμού κατά Bridson, εφόσον η μήτρα \hat{G} είναι θετικά ορισμένη και η μήτρα C εμφανίζει πλήρη τάξη κατά γραμμές.

Με την αποφυγή χρήσης πολύ χαμηλών τιμών στην τυπική απόκλιση για τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης, τα βάρη της μήτρας W_1 δεν λαμβάνουν ακραίες τιμές. Επομένως, εξασφαλίζεται ότι οι δείκτες κατάστασης της \hat{G} και του συμπληρώματος Schur $-C\hat{G}C^T$ δεν λαμβάνουν υψηλές τιμές.

6.5 Τροποποίηση διάταξης ελαχίστου βαθμού

Για την εφαρμογή του περιορισμού στη διάταξη ελαχίστου βαθμού περιγράφονται δύο εναλλακτικές μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος αφορά την τροποποίηση του αλγορίθμου ελαχίστου βαθμού, ώστε ο περιορισμός να εφαρμόζεται κατά τη διαδικασία της επιλογής των κόμβων. Η δεύτερη μέθοδος λαμβάνει την αναδιάταξη που προκύπτει από τον αλγόριθμο ελαχίστου βαθμού και, εν συνεχεία, την τροποποιεί ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός.

Ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5 μπορεί να ενσωματώσει τον περιορισμό κατά τη διαδικασία επιλογής κόμβων μέσω των εξής αλλαγών:

- Το σύνολο V με τους κόμβους-μεταβλητές διασπάται σε δύο επιμέρους σύνολα V_G και V_C , τα οποία περιλαμβάνουν τους G - και C -κόμβους-μεταβλητές αντίστοιχα. Η επιλογή του εκάστοτε κόμβου ως οδηγό στοιχείο πραγματοποιείται μόνο από το σύνολο V_G .
- Εισάγεται για κάθε αρχικό C -κόμβο το σύνολο \mathcal{R}_i το οποίο περιλαμβάνει τους γειτονικούς προς αυτόν G -κόμβους που δεν έχουν επιλεγεί και διαταχθεί σε προηγούμενο βήμα. Όταν για ένα C -κόμβο προκύψει κενό σύνολο \mathcal{R}_i , τότε μετατρέπεται σε G -κόμβο, εξάγεται από το σύνολο V_C και εισάγεται στο σύνολο V_G .
- Η αναζήτηση υπερκόμβων πραγματοποιείται ανάμεσα σε ζεύγη κόμβων ή υπερκόμβων του συνόλου $(\mathcal{L}_p \cap V_G)$, ώστε να αποτραπεί η ενσωμάτωση ενός C -κόμβου σε υπερκόμβο με G -κόμβο χωρίς να έχουν διαταχθεί προηγουμένως όλοι οι γειτονικοί του G -κόμβοι.

Συνεπώς, ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού με περιορισμό έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 2 (Αλγόριθμος Διάταξης Ελαχίστου Βαθμού με Περιορισμούς)

$V_G = \{1, \dots, n_G\}$

$V_C = \{n_G + 1, \dots, n\}$

$\bar{V} = \emptyset$

for $i=1$ **to** n **do**

$\mathcal{A}_i = \{j: a_{ij} \neq 0, i \neq j\}$

$\mathcal{E}_i = \emptyset$

$\bar{d}_i = t_i = |\mathcal{A}_i|$

$\mathbf{i} = \{i\}$

end for

for $i=n_G+1$ **to** n **do**

$\mathcal{R}_i = \mathcal{A}_i$

end for

$k=1$

while $k \leq n$ **do**

select node-variable $p \in V_G$ with minimum degree \bar{d}_p

$\mathcal{L}_p = \left(\mathcal{A}_p \cup \bigcup_{e \in \mathcal{E}_p} \mathcal{L}_e \right) \setminus \mathbf{p}$

for each $\mathbf{i} \in \mathcal{L}_p$ **do**

$\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_i \setminus \mathcal{L}_p) \setminus \mathbf{p}$

$$\mathcal{E}_i = (\mathcal{E}_i \setminus \mathcal{E}_p) \cup \{p\}$$

$$\bar{d}_i^k = \min \left\{ \begin{array}{c} n-k \\ \bar{d}_i^{k-1} + |\mathcal{L}_p \setminus i| \\ |\mathcal{A}_i \setminus i| + |\mathcal{L}_p \setminus i| + \sum_{e \in \mathcal{E}_i \setminus \{p\}} |\mathcal{L}_e \setminus \mathcal{L}_p| \end{array} \right\}$$

end for

for $i = n_G + 1$ **to** n **do**

if $\mathcal{R}_i == \emptyset$ **then**

$$V_G = V_G \cup \{i\}$$

$$V_C = V_C \setminus \{i\}$$

end if

end for

for each pair i **and** $j \in (\mathcal{L}_p \cap V_G)$ **do**

if i **and** j **are indistinguishable then**

$$i = i \cup j$$

$$d_i = d_i - |j|$$

$$V = V \setminus \{j\}$$

$$\mathcal{A}_i = 0$$

$$\mathcal{E}_i = 0$$

end if

end for

$$\bar{V} = (\bar{V} \cup \{p\}) \setminus \mathcal{E}_p$$

$$V = V \setminus \{p\}$$

$$\mathcal{A}_p = \emptyset$$

$$\mathcal{E}_p = \emptyset$$

$$k = k + |p|$$

end while

Εφόσον είναι επιθυμητή η ενδιάμεση αναδιάταξη των κόμβων με σκοπό την εξασφάλιση της ανεξαρτησίας του αλγορίθμου από την αρχική αρίθμηση ως προς την επιλογή μεταξύ ισοβάθμιων κόμβων, η πληροφορία της ενδιάμεσης αναδιάταξης πρέπει να μεταφερθεί ως όρισμα στον αλγόριθμο διάταξης ελαχίστου βαθμού μαζί με τον αριθμό των G -κόμβων. Ο λόγος για τον οποίο είναι απαραίτητη η εν λόγω πληροφορία έγκειται στο ότι η αρχική δομή της μήτρας συντελεστών \hat{F} τροποποιείται με αποτέλεσμα να απαιτείται η αναζήτηση μηδενικών στοιχείων στη διαγώνιο της αναδιατεταγμένης μήτρας \hat{F} για την αναγνώριση των C -κόμβων.

Σε περίπτωση όπου δεν ενσωματωθεί ο περιορισμός εντός του αλγορίθμου διάταξης, είναι εφικτή μία εναλλακτική προσέγγιση: Εκτελείται ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού χωρίς κανένα περιορισμό και, εν συνεχεία, στην αναδιάταξη που προκύπτει εφαρμόζεται ο περιορισμός τροποποιώντας τη θέση που έχει λάβει κάθε C -κόμβος που έχει διαταχθεί πριν από τουλάχιστον ένα γειτονικό του G -κόμβο. Η υλοποίηση έχει ως εξής:

- Για κάθε εξεταζόμενο C -κόμβο εκτελείται αναζήτηση του ιδίου και των γειτονικών του G -κόμβων ξεκινώντας από το τέλος της αναδιάταξης.
- Εάν ευρεθεί πρώτα ο C -κόμβος χωρίς την προηγούμενη εύρεση γειτονικού G -κόμβου, η αναζήτηση τερματίζεται, καθώς ο εν λόγω C -κόμβος ικανοποιεί τον περιορισμό.
- Εάν ευρεθεί γειτονικός G -κόμβος, η αναζήτηση τερματίζεται και πραγματοποιείται μεταφορά του C -κόμβου αμέσως μετά το γειτονικό του G -κόμβο.

Παρότι η εν λόγω εναλλακτική μέθοδος είναι απλή, δίνει εξίσου ποιοτικά αποτελέσματα ως προς την αραιότητα του παράγοντα L σε σχέση με την ενσωμάτωση του περιορισμού εντός του αλγορίθμου σύμφωνα με τα αποτελέσματα των συγκρίσεων που διεξήχθησαν και παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.

6.6 Περιγραφή προτεινόμενου αλγορίθμου

Συνοπτικά, ο προτεινόμενος αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

- Βήμα 1** Κατασκευάζονται οι ιακωβιανές μήτρες H και C για το δοσμένο σύστημα και διαμόρφωση μετρήσεων.
- Βήμα 2** Εξετάζεται η παρατηρησιμότητα του συστήματος. Σε περίπτωση μη παρατηρήσιμου συστήματος ο αλγόριθμος τερματίζεται και αναζητούνται επιπλέον μετρήσεις εκτός της δοσμένης διαμόρφωσης μετρήσεων για την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας.
- Βήμα 3** Σε περίπτωση πλήρους παρατηρήσιμου συστήματος, αφαιρούνται από τη διαμόρφωση μετρήσεων όλες οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης και εξετάζεται εκ νέου η παρατηρησιμότητα του συστήματος με βάση το μειωμένο σύνολο μετρήσεων. Εάν προκύψει μη παρατηρήσιμο σύστημα με $nullity(H)=q$, τότε επιλέγονται q μη πλεονάζουσες μετρήσεις μηδενικής έγχυσης για το σχηματισμό της ιακωβιανής μήτρας C_1 και την αποκατάσταση της παρατηρησιμότητας. Οι υποψήφιες μετρήσεις μηδενικής έγχυσης επεξεργάζονται κατά αύξοντα αριθμό συνδέσεων του ζυγού μηδενικής έγχυσης με γειτονικούς ζυγούς. Εν συνεχεία, σχηματίζεται η μήτρα $\hat{G}=H^T H+C_1^T C_1$ και η \hat{F} . Σε περίπτωση παρατηρήσιμου συστήματος με $nullity(H)=0$, οι μήτρες \hat{G} και \hat{F} ταυτίζονται με τις G και F αντίστοιχα.
- Βήμα 4** Καταγράφονται οι G – και C – κόμβοι με βάση τη διαμέριση της μήτρας συντελεστών \hat{F} . Οι κόμβοι αναδιατάσσονται με βάση την εφαρμογή αλγορίθμου μείωσης του εύρους ζώνης της μήτρας \hat{F} . Στην προσωρινά συμμετρικά αναδιατεταγμένη μήτρα \hat{F} εφαρμόζεται αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού υπό περιορισμό, ώστε κάθε C – κόμβος να διατάσσεται μετά από όλους τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους.
- Βήμα 5** Ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης εκτελείται με βάση τη μήτρα συντελεστών \hat{F} (6.5), χωρίς τη χρήση υψηλών τιμών στα βάρη της μήτρας W_1^{-1} για τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης της C_1 , και τη διάταξη κόμβων του βήματος 4 για την επαναληπτική επίλυση των εξισώσεων (6.6).

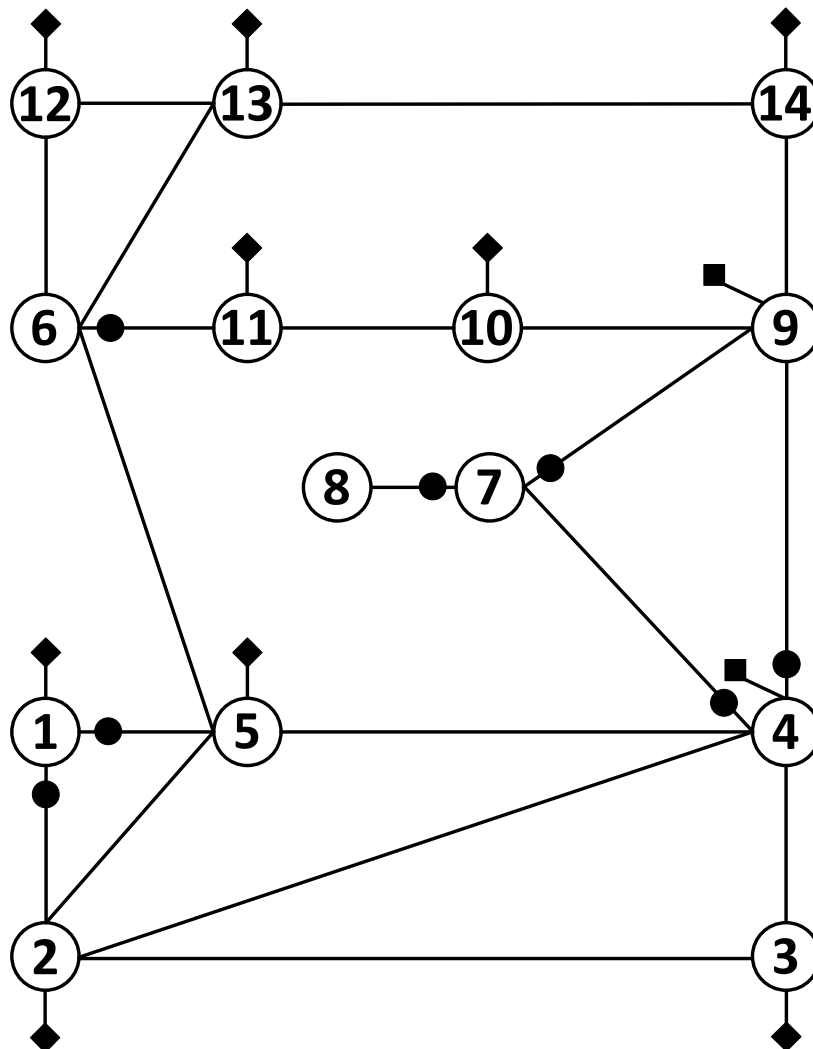
Σημείωση 1 Για τα βήματα 1 έως 4, πραγματοποιούνται οι εξής θεωρήσεις: Όλες οι εγκάρσιες αγωγιμότητες αγνοούνται, τα μέτρα των τάσεων σε όλους τους ζυγούς του δικτύου θεωρούνται ίσα με 1 ανά μονάδα, ενώ για την αγωγιμότητα $y_{ij} = j b_{ij}$ κάθε κλάδου $i-j$ του δικτύου λαμβάνεται η υπόθεση ότι ισχύει $b_{ij} = -1$ ανά μονάδα.

Σημείωση 2 Σε περίπτωση όπου η διαμόρφωση μετρήσεων δεν περιλαμβάνει συγχρονισμένες μετρήσεις, εάν το σύστημα χωρίς τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης προκύψει ως μη παρατηρήσιμο με $nullity(H)=q$, τότε απαιτούνται $q-1$ μη πλεονάζουσες μετρήσεις μηδενικής έγχυσης για το σχηματισμό της μήτρας C_1 .

Σημείωση 3 Εναλλακτικά για το βήμα 4, μπορεί να εφαρμοστεί αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού στην προσωρινά αναδιατεταγμένη μήτρα \hat{F} και η αναδιάταξη που προκύπτει τροποποιείται κατάλληλα, ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός.

Παράδειγμα 6.1

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόζεται στο δίκτυο IEEE 14-ζυγών με βάση το σύνολο μετρήσεων του σχήματος 4.6.

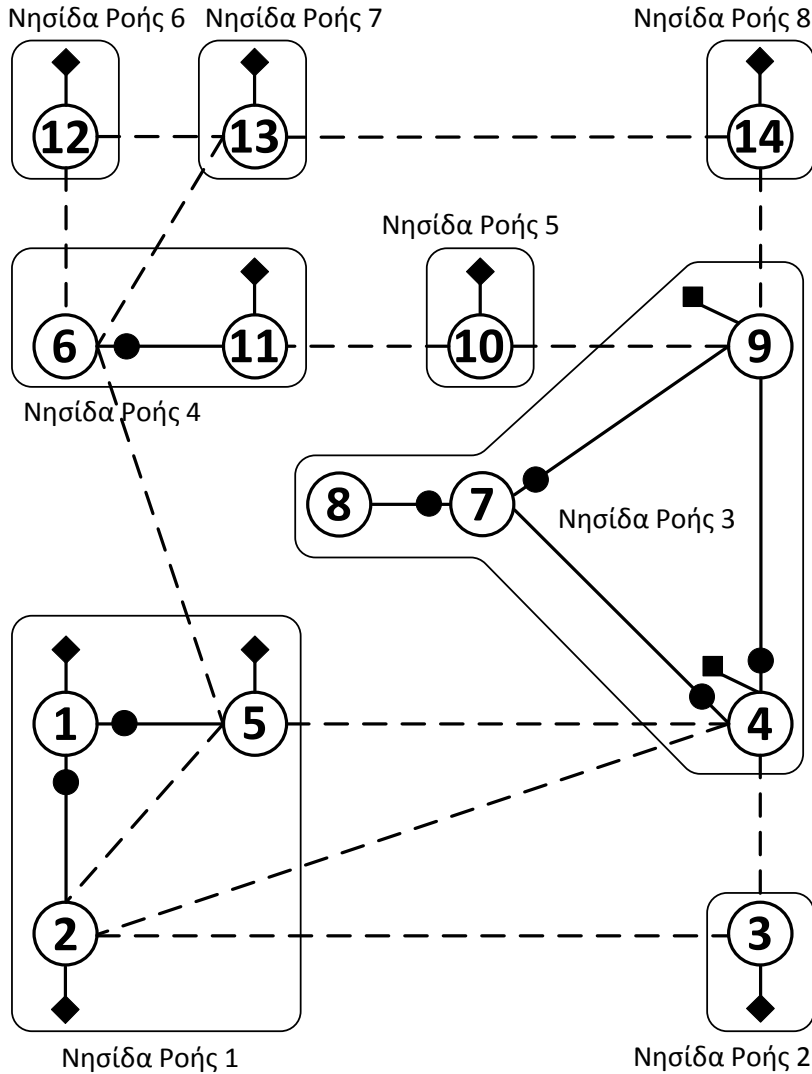


Σχήμα 6.1: Δίκτυο IEEE-14 ζυγών και διαμόρφωση μετρήσεων

Το σύνολο των μετρήσεων, εξαιρουμένων μετρήσεων μηδενικής έγχυσης, για το ανωτέρω δίκτυο αποτελείται από τις ροές ισχύος P_{1-2} , P_{1-5} , P_{4-7} , P_{4-9} , P_{6-11} , P_{7-8} και P_{7-9} , καθώς και από τις εγχύσεις ισχύος P_1 , P_2 , P_3 και P_4 . Οι ζυγοί 5, 9, 10, 11, 12, 13

και 14 αποτελούν ζυγούς μηδενικής έγχυσης και οι αντίστοιχες εγχύσεις $P_5, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}$ και P_{14} εκφράζουν μετρήσεις μηδενικής έγχυσης.

Αρχικά, εξετάζεται η παρατηρησιμότητα του συστήματος συμπεριλαμβανομένων όλων των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης.



Σχήμα 6.2: Διαμέριση του δικτύου σε νησίδες ροής

Με τοπολογική επεξεργασία των μετρούμενων κλάδων του δικτύου, προκύπτουν οι ακόλουθες 8 νησίδες ροής, όπως περιγράφονται και στο σχήμα 6.2:

Νησίδες Ροής	Ζυγοί
1	{1,2,5}
2	{3}
3	{4,7,8,9}
4	{6,11}
5	{10}
6	{12}
7	{13}
8	{14}

Οι μετρήσεις έγχυσης στους ζυγούς 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13 και 14 αποτελούν συνοριακές μετρήσεις έγχυσης.

Σχηματίζεται η μειωμένης τάξης ιακωβιανή μήτρα $W_b (10 \times 8)$ και, εν συνεχεία, η αντίστοιχη Gramian μήτρα $M_b (10 \times 10)$ ως $M_b = W_b W_b^T$:

$$W_b = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & P_9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & P_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & P_{13} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & P_{14} \end{pmatrix}$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 14 & -7 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & -7 & 6 & -2 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & -2 & 6 & -4 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -4 & 6 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & 12 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

Ο παράγοντας D που προκύπτει από την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας M_b έχει ως εξής:

$$D = \text{diag}(6 \quad 4,5 \quad 0 \quad 1,3333 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 5,1667 \quad 6,4516 \quad 0)$$

Εφόσον εμφανίζονται 3 μηδενικά οδηγά στοιχεία κατά την παραγοντοποίηση της μήτρας M_b , προκύπτει ότι η M_b είναι δεν πλήρους τάξης, αλλά ισχύει το εξής:

$$\text{rank}(M_b) = 10 - 3 \Rightarrow \text{rank}(M_b) = 7$$

Επιπροσθέτως, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left. \begin{array}{l} \text{rank}(W_b) = \text{rank}(M_b) \\ \text{nullity}(W_b) = 8 - \text{rank}(W_b) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rank}(W_b) = 7 \\ \text{nullity}(W_b) = 1 \end{array}$$

Εφόσον έχουμε $\text{nullity}(W_b) = 1$, το δίκτυο είναι πλήρως παρατηρήσιμο, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν συγχρονισμένες μετρήσεις.

Η ιακωβιανή μήτρα H , λαμβάνοντας υπόψη στη μοντελοποίηση και το ζυγό αναφοράς, έχει ως εξής:

$$H = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{1-2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{1-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{4-9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{6-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{7-9} \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα, η ιακωβιανή μήτρα C των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης έχει ως εξής:

$$C = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \hline -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & P_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & P_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & P_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & P_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & P_{14} \end{pmatrix}$$

Εν συνεχεία, εξετάζεται η παρατηρησιμότητα του συστήματος με βάση μόνο τις μετρήσεις που συγκροτούν την ιακωβιανή μήτρα H .

Το δίκτυο υπό την παρουσία μόνο του συνόλου των μετρήσεων $P_{1-2}, P_{1-5}, P_{4-7}, P_{4-9}, P_{6-11}, P_{7-8}, P_{7-9}, P_1, P_2, P_3$ και P_4 αποτελείται από τις ίδιες νησίδες ροής σε σχέση με την αρχική διαμόρφωση μετρήσεων, όπως παρουσιάζονται στο σχήμα 6.2.

Οι μετρήσεις έγχυσης στους ζυγούς 2, 3 και 4 αποτελούν συνοριακές μετρήσεις έγχυσης.

Σχηματίζεται η μειωμένης τάξης ιακωβιανή μήτρα $W_b(3 \times 8)$ και, εν συνεχεία, η Gramian μήτρα $M_b(3 \times 3)$ ως $M_b = W_b W_b^T$:

$$W_b = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & -3 \\ -6 & -3 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}$$

Οι παράγοντες L και D που προκύπτουν από την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας M_b έχουν ως εξής:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -0,5 & 1 & & \\ -1 & -1,3333 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(6 \quad 4,5 \quad 0)$$

Εφόσον εμφανίστηκε 1 μηδενικό οδηγό στοιχείο κατά την παραγοντοποίηση της μήτρας M_b , προκύπτει ότι η M_b είναι δεν είναι πλήρους τάξης, δηλαδή:

$$\text{rank}(M_b) = 3 - 1 \Rightarrow \text{rank}(M_b) = 2$$

Επιπροσθέτως, ισχύουν τα εξής:

$$\left. \begin{matrix} \text{rank}(W_b) = \text{rank}(M_b) \\ \text{nullity}(W_b) = 8 - \text{rank}(W_b) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{rank}(W_b) = 2 \\ \text{nullity}(W_b) = 6 \end{matrix}$$

Εφόσον έχουμε $\text{nullity}(W_b) = 6 > 1$, το δίκτυο είναι μη παρατηρήσιμο χωρίς τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης. Για να καταστεί πλήρως παρατηρήσιμο, απαιτείται η προσθήκη $\text{nullity}(W_b) - 1 = 5$ μη πλεοναζουσών μετρήσεων μηδενικής έγχυσης σε σχέση με τις ήδη υπάρχουσες.

Σχηματίζονται οι μήτρες $\begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}$ και $M_{bi} = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}^T = \left(\begin{array}{c|c} W_b W_b^T & W_b \\ \hline W_b^T & I_{8 \times 8} \end{array} \right)$ ως εξής:

$$\begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{bi} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 14 & -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο παράγοντας D που προκύπτει από την LDL^T παραγοντοποίηση της μήτρας M_{bi} έχει ως εξής:

$$D = \text{diag}(6 \quad 4,5 \quad 0 \quad 0,3333 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

Τα μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία της μήτρας D στις θέσεις 4, 7, 8, 9, 10 και 11 αναδεικνύουν ότι οι σειρές 4, 7, 8, 9, 10 και 11 της μήτρας M_{bi} είναι γραμμικά ανεξάρτητες ως προς τις σειρές 1 έως 3.

Ο υπολογισμός των στηλών 4, 7, 8, 9, 10 και 11 της μήτρας L^{-T} για το σχηματισμό της μήτρας $C = (c_4 \quad c_7 \quad c_8 \quad c_9 \quad c_{10} \quad c_{11})$ πραγματοποιείται ως εξής:

$$L^T c_4 = e_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_4 = (-0,333 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_7 = e_7 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_7 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_8 = e_8 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_8 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_9 = e_9 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_9 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_{10} = e_{10} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_{10} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$$

$$L^T c_{11} = e_{11} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \Rightarrow$$

$$c_{11} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$$

Άρα, η μήτρα $C = (c_4 \ c_7 \ c_8 \ c_9 \ c_{10} \ c_{11})$ είναι:

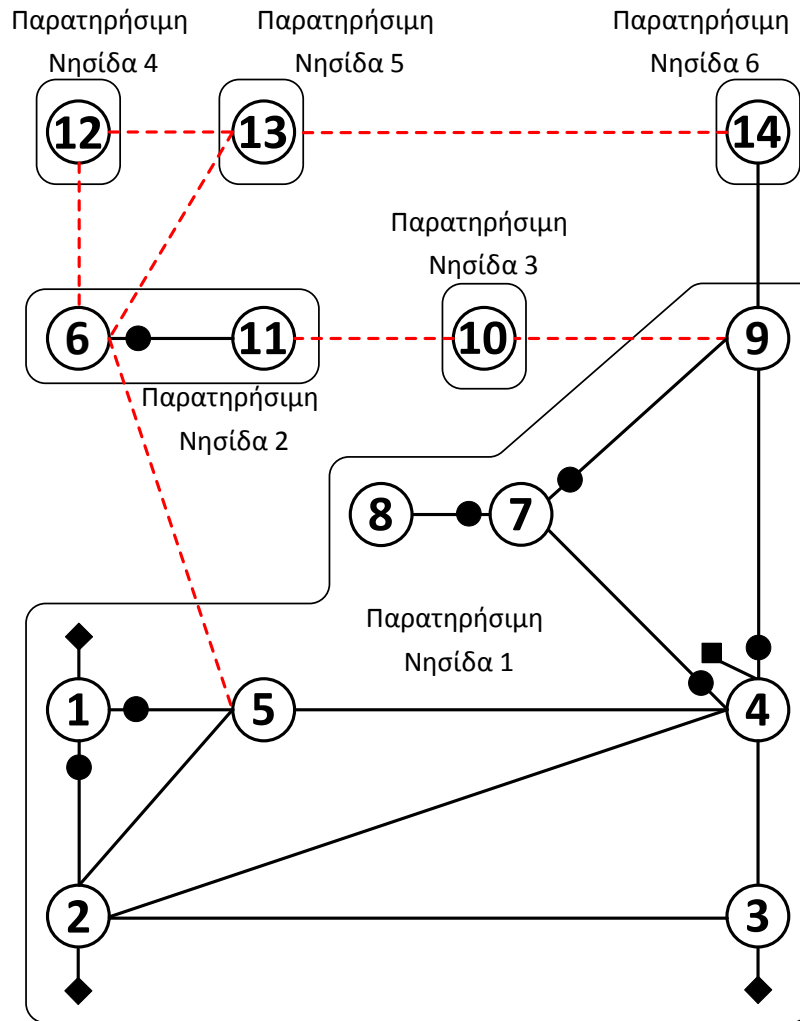
$$C = \begin{pmatrix} -0,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εν συνεχεία, σχηματίζεται η μήτρα $T = \begin{pmatrix} W_b \\ I_{8 \times 8} \end{pmatrix}^T C$:

$$T = \begin{pmatrix} 0,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Νησίδα Ροής 1} \\ \text{Νησίδα Ροής 2} \\ \text{Νησίδα Ροής 3} \\ \text{Νησίδα Ροής 4} \\ \text{Νησίδα Ροής 5} \\ \text{Νησίδα Ροής 6} \\ \text{Νησίδα Ροής 7} \\ \text{Νησίδα Ροής 8} \end{matrix}$$

Οι νησίδες ροής των οποίων οι γραμμές στη μήτρα T είναι ίδιες συγχωνεύονται στην ίδια παρατηρήσιμη νησίδα. Έτσι, προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσιμες νησίδες.

Παρατηρήσιμη Νησίδα	Ζυγοί
1	{1,2,3,4,5,7,8,9}
2	{6,11}
3	{10}
4	{12}
5	{13}
6	{14}



Σχήμα 6.3: Διαμέριση του δικτύου σε παρατηρήσιμες νησίδες

Μετά την αναγνώριση των ανωτέρω 6 παρατηρήσιμων νησίδων, οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης στους ζυγούς 5, 9, 10, 11, 12, 13 και 14 είναι συνοριακές. Επομένως, προκύπτουν ως υποψήφιες για το σχηματισμό της μήτρας $C_1(5 \times 13)$. Επίσης, οι εγχύσεις στους ζυγούς 1, 2, 3 και 4 καθίστανται εσωτερικές μετρήσεις. Άρα, η ιακωβιανή μήτρα W'_b απουσιάζει πλήρως από την περαιτέρω επεξεργασία. Η σειρά με την οποία προστίθενται οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης στη μήτρα W_c εξαρτάται από το βαθμό του κόμβου που αντιστοιχεί στο ζυγό μηδενικής έγχυσης.

Ζυγός Μηδενικής Έγχυσης	Βαθμός Κόμβου
5	4
9	4
10	2
11	2
12	2
13	3
14	2

Άρα, οι ζυγοί μηδενικής έγχυσης διατάσσονται στη μήτρα W_c (7×6) ως 10, 11, 12, 14, 13, 5 και 9.

$$W_c = \begin{pmatrix} OI_1 & OI_2 & OI_3 & OI_4 & OI_5 & OI_6 \\ \hline -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{14} \\ P_{13} \\ P_5 \\ P_9 \end{matrix}$$

Σχηματίζεται η Gramian μήτρα $M_{bc} = \begin{pmatrix} W'_b \\ W_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W'_b \\ W_c \end{pmatrix}^T \Rightarrow M_{bc} = W_c W_c^T$:

$$M_{bc} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & -5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & -5 & 12 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{14} \\ P_{13} \\ P_5 \\ P_9 \end{matrix}$$

Ο παράγοντας D της μήτρας M_{bc} προκύπτει ως:

$$D = \text{diag}(6 \quad 0,5 \quad 5,3333 \quad 5 \quad 4,8 \quad 0 \quad 0)$$

Η μήτρα D εμφανίζει μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία στις θέσεις 1 (P_{10}), 2 (P_{11}), 3 (P_{12}), 4 (P_{14}) και 5 (P_{13}). Επομένως, οι υποψήφιες μετρήσεις μηδενικής έγχυσης στους ζυγούς 10, 11, 12, 13 και 14 αποτελούν το ελάχιστο σύνολο μη πλεοναζουσών μετρήσεων μηδενικής έγχυσης που συγκροτούν τη μήτρα C_1 .

$$C_1 = \begin{pmatrix} \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{matrix}$$

Κατασκευάζεται η μήτρα $\hat{F} = \begin{pmatrix} G + C_1^T C_1 & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}$, η οποία έχει διαστάσεις 20×20 .

Με βάση τη συμβολική δομή της μήτρας \hat{F} προσδιορίζονται γειτονικοί G – κόμβοι για κάθε C – κόμβο.

C – κόμβος	Γειτονικοί G – κόμβοι
14	{1,3,4,5}
15	{3,6,8,9,13}
16	{8,9,10}
17	{5,9,10}
18	{5,11,12}
19	{5,11,12,13}
20	{8,12,13}

Εν συνεχεία, εφαρμόζεται ο αντίστροφος αλγόριθμος Cuthill-McKee για τη μείωση του εύρους ζώνης της μήτρας \hat{F} , με τον πίνακα R να προκύπτει ως:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R	18	11	19	5	17	12	10	20	16	14	13	9	8	3	4	1	15	2	6	7

Οι κόμβοι εισάγονται στον αλγόριθμο διάταξης με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στον πίνακα R και εκτελείται αναδιάταξη κόμβων υπό περιορισμό με δύο τρόπους στα πλαίσια του παραδείγματος. Αρχικά, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού χωρίς περιορισμό και τροποποιείται κατάλληλα η διάταξη που προκύπτει ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός. Έπειτα, εφαρμόζεται ο τροποποιημένος αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού με ενσωματωμένο τον περιορισμό. Σημειώνεται ότι και στις δύο περιπτώσεις δεν πραγματοποιήθηκε αναζήτηση για υπερκόμβους.

$V^0 = \{1, \dots, 20\}$					
$\bar{V}^0 = \emptyset$					
$P_{unconstrained}^{(0)} = \emptyset$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(0)}$	i
18	{5,11,12}	\emptyset	\emptyset	3	18
11	{5,12,13,18,19}	\emptyset	\emptyset	5	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	4	19
5	{9,10,11,12,13,14,17,18,19}	\emptyset	\emptyset	9	5
17	{5,9,10}	\emptyset	\emptyset	3	17
12	{5,8,11,13,18,19,20}	\emptyset	\emptyset	7	12
10	{5,8,9,16,17}	\emptyset	\emptyset	5	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	3	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	{5,8,11,12,15,19,20}	\emptyset	\emptyset	7	13
9	{5,8,10,15,16,17}	\emptyset	\emptyset	6	9
8	{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20}	\emptyset	\emptyset	11	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,7,15}	\emptyset	\emptyset	6	6
7	{6}	\emptyset	\emptyset	1	7

$V^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$					
$\bar{V}^1 = \{7\}$					
$P_{unconstrained}^{(1)} = \{7\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(1)}$	i
18	{5,11,12}	\emptyset	\emptyset	3	18
11	{5,12,13,18,19}	\emptyset	\emptyset	5	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	4	19
5	{9,10,11,12,13,14,17,18,19}	\emptyset	\emptyset	9	5
17	{5,9,10}	\emptyset	\emptyset	3	17
12	{5,8,11,13,18,19,20}	\emptyset	\emptyset	7	12
10	{5,8,9,16,17}	\emptyset	\emptyset	5	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	3	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	{5,8,11,12,15,19,20}	\emptyset	\emptyset	7	13
9	{5,8,10,15,16,17}	\emptyset	\emptyset	6	9
8	{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20}	\emptyset	\emptyset	11	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^2 = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20\}$$

$$\bar{V}^2 = \{7,18\}$$

$$\rho_{unconstrained}^{(2)} = \{7,18\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(2)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	$\{13,19\}$	$\{18\}$	\emptyset	4	11
19	$\{5,11,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	4	19
5	$\{9,10,13,14,17,19\}$	$\{18\}$	\emptyset	8	5
17	$\{5,9,10\}$	\emptyset	\emptyset	3	17
12	$\{8,13,19,20\}$	$\{18\}$	\emptyset	6	12
10	$\{5,8,9,16,17\}$	\emptyset	\emptyset	5	10
20	$\{8,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	3	20
16	$\{8,9,10\}$	\emptyset	\emptyset	3	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{5,8,11,12,15,19,20\}$	\emptyset	\emptyset	7	13
9	$\{5,8,10,15,16,17\}$	\emptyset	\emptyset	6	9
8	$\{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20\}$	\emptyset	\emptyset	11	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,8,9,13\}$	\emptyset	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$$V^3 = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,19,20\}$$

$$\bar{V}^3 = \{7,17,18\}$$

$$\rho_{unconstrained}^{(3)} = \{7,18,17\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(3)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	$\{13,19\}$	$\{18\}$	\emptyset	4	11
19	$\{5,11,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	4	19
5	$\{13,14,19\}$	$\{17,18\}$	\emptyset	7	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{5,9,10\}$	-	17
12	$\{8,13,19,20\}$	$\{18\}$	\emptyset	6	12
10	$\{8,16\}$	$\{17\}$	\emptyset	4	10
20	$\{8,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	3	20
16	$\{8,9,10\}$	\emptyset	\emptyset	3	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{5,8,11,12,15,19,20\}$	\emptyset	\emptyset	7	13
9	$\{8,15,16\}$	$\{17\}$	\emptyset	5	9
8	$\{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20\}$	\emptyset	\emptyset	11	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,8,9,13\}$	\emptyset	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$$V^4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19\}$$

$$\bar{V}^4 = \{7, 17, 18, 20\}$$

$$P_{unconstrained}^{(4)} = \{7, 18, 17, 20\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(4)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	{13,19}	{18}	\emptyset	4	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	4	19
5	{13,14,19}	{17,18}	\emptyset	7	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	{19}	{18,20}	\emptyset	5	12
10	{8,16}	{17}	\emptyset	4	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	{5,11,15,19}	{20}	\emptyset	6	13
9	{8,15,16}	{17}	\emptyset	5	9
8	{1,2,3,4,9,10,15,16}	{20}	\emptyset	10	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19\}$$

$$\bar{V}^5 = \{7, 16, 17, 18, 20\}$$

$$P_{unconstrained}^{(5)} = \{7, 18, 17, 20, 16\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(5)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	{13,19}	{18}	\emptyset	4	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	4	19
5	{13,14,19}	{17,18}	\emptyset	7	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	{19}	{18,20}	\emptyset	5	12
10	\emptyset	{16,17}	\emptyset	3	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	{5,11,15,19}	{20}	\emptyset	6	13
9	{15}	{16,17}	\emptyset	4	9
8	{1,2,3,4,15}	{16,20}	\emptyset	9	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^6 = \{1,2,3,4,5,6,8,9,11,12,13,14,15,19\}$$

$$\bar{V}^6 = \{7,10,18,20\}$$

$$P_{unconstrained}^{(6)} = \{7,18,17,20,16,10\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(6)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	$\{13,19\}$	$\{18\}$	\emptyset	4	11
19	$\{5,11,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	4	19
5	$\{13,14,19\}$	$\{10,18\}$	\emptyset	7	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{5,9,10\}$	-	17
12	$\{19\}$	$\{18,20\}$	\emptyset	5	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9\}$	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	-	20
16	\emptyset	\emptyset	$\{8,9,10\}$	-	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{5,11,15,19\}$	$\{20\}$	\emptyset	6	13
9	$\{15\}$	$\{10\}$	\emptyset	3	9
8	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{10,20\}$	\emptyset	9	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,8,9,13\}$	\emptyset	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$$V^7 = \{1,2,3,4,5,6,8,11,12,13,14,15,19\}$$

$$\bar{V}^7 = \{7,9,18,20\}$$

$$P_{unconstrained}^{(7)} = \{7,18,17,20,16,10,9\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(7)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	$\{13,19\}$	$\{18\}$	\emptyset	4	11
19	$\{5,11,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	4	19
5	$\{13,14,19\}$	$\{9,18\}$	\emptyset	7	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{5,9,10\}$	-	17
12	$\{19\}$	$\{18,20\}$	\emptyset	5	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9\}$	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	-	20
16	\emptyset	\emptyset	$\{8,9,10\}$	-	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{5,11,15,19\}$	$\{20\}$	\emptyset	6	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15\}$	-	9
8	$\{1,2,3,4\}$	$\{9,20\}$	\emptyset	8	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,13\}$	$\{9\}$	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$V^8 = \{1,2,3,4,5,6,8,12,13,14,15,19\}$					
$\bar{V}^8 = \{7,9,11,20\}$					
$P_{unconstrained}^{(8)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(8)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,19\}$	-	11
19	\emptyset	$\{11\}$	\emptyset	3	19
5	$\{14\}$	$\{9,11\}$	\emptyset	6	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{5,9,10\}$	-	17
12	\emptyset	$\{11,20\}$	\emptyset	4	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9\}$	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	-	20
16	\emptyset	\emptyset	$\{8,9,10\}$	-	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{15\}$	$\{11,20\}$	\emptyset	5	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15\}$	-	9
8	$\{1,2,3,4\}$	$\{9,20\}$	\emptyset	8	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,13\}$	$\{9\}$	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$V^9 = \{1,2,3,4,5,6,8,12,13,14,15\}$					
$\bar{V}^9 = \{7,9,19,20\}$					
$P_{unconstrained}^{(9)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11,19\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(9)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{5,11,12\}$	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,19\}$	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13\}$	-	19
5	$\{14\}$	$\{9,19\}$	\emptyset	5	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{5,9,10\}$	-	17
12	\emptyset	$\{19,20\}$	\emptyset	3	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9\}$	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	-	20
16	\emptyset	\emptyset	$\{8,9,10\}$	-	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	4	14
13	$\{15\}$	$\{19,20\}$	\emptyset	4	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15\}$	-	9
8	$\{1,2,3,4\}$	$\{9,20\}$	\emptyset	8	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	6	1
15	$\{3,6,13\}$	$\{9\}$	\emptyset	5	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	7

$$V^{10} = \{1,2,3,4,5,6,8,13,14,15\}$$

$$\bar{V}^{10} = \{7,9,12\}$$

$$P_{unconstrained}^{(10)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11,19,12\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(10)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	{14}	{9,19}	\emptyset	4	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	{15}	{19,20}	\emptyset	3	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	{1,2,3,4}	{9,20}	\emptyset	7	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6,13}	{9}	\emptyset	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{11} = \{1,2,3,4,5,6,8,14,15\}$$

$$\bar{V}^{11} = \{7,9,13\}$$

$$P_{unconstrained}^{(11)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11,19,12,13\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(11)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	{14}	{9,13}	\emptyset	3	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	4	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	{1,2,3,4}	{9,13}	\emptyset	6	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6}	{9,13}	\emptyset	4	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{12} = \{1,2,3,4,6,8,14,15\}$$

$$\bar{V}^{12} = \{5,7\}$$

$$P_{unconstrained}^{(12)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11,19,12,13,5\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(12)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	{1,3,4}	{5}	\emptyset	5	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	{1,2,3,4}	{5}	\emptyset	6	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	{3,6}	{5}	\emptyset	4	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{13} = \{1,2,3,4,6,8,14\}$$

$$\bar{V}^{13} = \{7,15\}$$

$$P_{unconstrained}^{(13)} = \{7,18,17,20,16,10,9,11,19,12,13,5,15\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(13)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	{1,4}	{15}	\emptyset	5	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	{1,2,4}	{15}	\emptyset	6	8
3	{1,2,4}	{15}	\emptyset	6	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	6	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{1,2,4}	{7,15}	\emptyset	6	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{14} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\bar{V}^{14} = \{7, 14\}$$

$$P_{unconstrained}^{(14)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(14)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	{2}	{14}	\emptyset	5	8
3	{2}	{14}	\emptyset	5	3
4	{2}	{14}	\emptyset	5	4
1	{2}	{14}	\emptyset	5	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	5	2
6	{2}	{7,14}	\emptyset	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{15} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\bar{V}^{15} = \{7, 8\}$$

$$P_{unconstrained}^{(15)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(15)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	{8}	\emptyset	4	3
4	\emptyset	{8}	\emptyset	4	4
1	\emptyset	{8}	\emptyset	4	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	{8}	\emptyset	4	2
6	\emptyset	{7,8}	\emptyset	4	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{16} = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$\bar{V}^{16} = \{3, 7\}$$

$$P_{unconstrained}^{(16)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(16)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{1,2,4,6}	-	3
4	\emptyset	{3}	\emptyset	3	4
1	\emptyset	{3}	\emptyset	3	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	{3}	\emptyset	3	2
6	\emptyset	{3,7}	\emptyset	3	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$$V^{17} = \{1, 2, 6\}$$

$$\bar{V}^{17} = \{4, 7\}$$

$$P_{unconstrained}^{(17)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3, 4\}$$

i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(17)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{1,2,4,6}	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,2,6}	-	4
1	\emptyset	{4}	\emptyset	2	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	{4}	\emptyset	2	2
6	\emptyset	{4,7}	\emptyset	2	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$V^{18} = \{2, 6\}$					
$\bar{V}^{18} = \{1, 7\}$					
$\rho_{unconstrained}^{(18)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3, 4, 1\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(18)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{1,2,4,6}	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,2,6}	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{2,6}	-	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	{1}	\emptyset	1	2
6	\emptyset	{1,7}	\emptyset	1	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$V^{19} = \{6\}$					
$\bar{V}^{19} = \{2, 7\}$					
$\rho_{unconstrained}^{(19)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3, 4, 1, 2\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(19)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{1,2,4,6}	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,2,6}	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{2,6}	-	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	\emptyset	{6}	-	2
6	\emptyset	{2,7}	\emptyset	0	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

$V^{20} = \emptyset$					
$\bar{V}^{20} = \emptyset$					
$P_{unconstrained}^{(20)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3, 4, 1, 2, 6\}$					
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	$\bar{d}_i^{(20)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,19}	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{5,12,13}	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13}	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9}	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15}	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{1,2,3,4,6}	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{1,2,4,6}	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,2,6}	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{2,6}	-	1
15	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	15
2	\emptyset	\emptyset	{6}	-	2
6	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	7

Άρα, η αναδιάταξη χωρίς περιορισμό προκύπτει ως:

$$P_{unconstrained} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 14, 8, 3, 4, 1, 2, 6\}$$

C – κόμβος	Γειτονικοί G – κόμβοι
14	{1,3,4,5}
15	{3,6,8,9,13}
16	{8,9,10}
17	{5,9,10}
18	{5,11,12}
19	{5,11,12,13}
20	{8,12,13}

Ο κόμβος 16 που αντιστοιχεί σε μέτρηση μηδενικής έγχυσης έχει διαταχθεί τουλάχιστον πριν από έναν εκ των γειτονικών προς αυτόν G – κόμβων {8,9,10}. Άρα, η διάταξη που προκύπτει χωρίς περιορισμό οδηγεί σε μη εφικτή αριθμητική παραγοντοποίηση. Συνεπώς, τροποποιείται η διάταξη ώστε να ικανοποιεί τον περιορισμό.

- Ο C – κόμβος 14 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{1,3,4\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(1)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 15, 8, 3, 4, 1, 14, 2, 6\}$$

- Ο C – κόμβος 15 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{3,6,8\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(2)} = \{7, 18, 17, 20, 16, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 8, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

- Ο C – κόμβος 16 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{8,9,10\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(3)} = \{7, 18, 17, 20, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 8, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

- Ο C – κόμβος 17 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{5,9,10\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(4)} = \{7, 18, 20, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 17, 8, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

- Ο C – κόμβος 18 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{5,11,12\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(5)} = \{7, 20, 10, 9, 11, 19, 12, 13, 5, 18, 17, 8, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

- Ο C – κόμβος 19 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{5,12,13\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(6)} = \{7, 20, 10, 9, 11, 12, 13, 5, 19, 18, 17, 8, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

- Ο C – κόμβος 20 έχει διαταχθεί πριν από τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους $\{8,12,13\}$. Άρα, η διάταξη τροποποιείται ως:

$$P_{constrained}^{(7)} = \{7, 10, 9, 11, 12, 13, 5, 19, 18, 17, 8, 20, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$$

Η διάταξη $P_{constrained} = \{7, 10, 9, 11, 12, 13, 5, 19, 18, 17, 8, 20, 16, 3, 4, 1, 14, 2, 6, 15\}$ πλέον ικανοποιεί τον περιορισμό και οδηγεί σε εφικτή αριθμητική παραγοντοποίηση.

Έπειτα, εφαρμόζεται ο τροποποιημένος αλγόριθμος διάταξης ελαχίστου βαθμού με ενσωματωμένο τον περιορισμό.

$V_G^0 = \{1, \dots, 13\}$				$V_C^0 = \{14, \dots, 20\}$		
$\bar{V}^0 = \emptyset$						
$\rho_{constrained}^{(0)} = \emptyset$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(0)}$	i
18	{5,11,12}	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	3	18
11	{5,12,13,18,19}	\emptyset	\emptyset	-	5	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	{5,11,12,13}	4	19
5	{9,10,11,12,13,14,17,18,19}	\emptyset	\emptyset	-	9	5
17	{5,9,10}	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	3	17
12	{5,8,11,13,18,19,20}	\emptyset	\emptyset	-	7	12
10	{5,8,9,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	5	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,5}	4	14
13	{5,8,11,12,15,19,20}	\emptyset	\emptyset	-	7	13
9	{5,8,10,15,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	6	9
8	{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20}	\emptyset	\emptyset	-	11	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	-	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,9,13}	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	-	5	2
6	{1,2,3,4,7,15}	\emptyset	\emptyset	-	6	6
7	{6}	\emptyset	\emptyset	-	1	7

$V_G^1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$				$V_C^1 = \{14, \dots, 20\}$		
$\bar{V}^1 = \{7\}$						
$\rho_{constrained}^{(1)} = \{7\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(1)}$	i
18	{5,11,12}	\emptyset	\emptyset	{5,11,12}	3	18
11	{5,12,13,18,19}	\emptyset	\emptyset	-	5	11
19	{5,11,12,13}	\emptyset	\emptyset	{5,11,12,13}	4	19
5	{9,10,11,12,13,14,17,18,19}	\emptyset	\emptyset	-	9	5
17	{5,9,10}	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	3	17
12	{5,8,11,13,18,19,20}	\emptyset	\emptyset	-	7	12
10	{5,8,9,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	5	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,5}	4	14
13	{5,8,11,12,15,19,20}	\emptyset	\emptyset	-	7	13
9	{5,8,10,15,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	6	9
8	{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20}	\emptyset	\emptyset	-	11	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	-	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,9,13}	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	-	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^2 = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13\}$				$V_C^2 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^2 = \{7,11\}$						
$P_{constrained}^{(2)} = \{7,11\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(2)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{9,10,14,17}	{11}	\emptyset	-	8	5
17	{5,9,10}	\emptyset	\emptyset	{5,9,10}	3	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	{5,8,9,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	5	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	{8,9,10}	\emptyset	\emptyset	{8,9,10}	3	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,5}	4	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	{5,8,10,15,16,17}	\emptyset	\emptyset	-	6	9
8	{1,2,3,4,9,10,12,13,15,16,20}	\emptyset	\emptyset	-	11	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	-	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,9,13}	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	-	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^3 = \{1,2,3,4,5,6,8,9,12,13\}$				$V_C^3 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^3 = \{7,10,11\}$						
$P_{constrained}^{(3)} = \{7,11,10\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(3)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{14}	{10,11}	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	{10}	\emptyset	{5,9}	4	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	\emptyset	{10}	\emptyset	{8,9}	4	16
14	{1,3,4,5}	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,5}	4	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	{15}	{10}	\emptyset	-	5	9
8	{1,2,3,4,12,13,15,20}	{10}	\emptyset	-	12	8
3	{1,2,4,6,8,14,15}	\emptyset	\emptyset	-	7	3
4	{1,2,3,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	4
1	{2,3,4,6,8,14}	\emptyset	\emptyset	-	6	1
15	{3,6,8,9,13}	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,9,13}	5	15
2	{1,3,4,6,8}	\emptyset	\emptyset	-	5	2
6	{1,2,3,4,15}	{7}	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^4 = \{1,2,3,4,5,6,8,12,13\}$				$V_C^4 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^4 = \{7,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(4)} = \{7,11,10,9\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(4)}$	i
18	\emptyset	$\{11\}$	\emptyset	$\{5,12\}$	4	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	$\{11\}$	\emptyset	$\{5,12,13\}$	4	19
5	$\{14\}$	$\{9,11\}$	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	$\{9\}$	\emptyset	$\{5\}$	4	17
12	$\{8,20\}$	$\{11\}$	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	$\{8,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	3	20
16	\emptyset	$\{9\}$	\emptyset	$\{8\}$	4	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,5\}$	4	14
13	$\{8,15,20\}$	$\{11\}$	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	$\{1,2,3,4,12,13,20\}$	$\{9\}$	\emptyset	-	11	8
3	$\{1,2,4,6,8,14,15\}$	\emptyset	\emptyset	-	7	3
4	$\{1,2,3,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	-	6	4
1	$\{2,3,4,6,8,14\}$	\emptyset	\emptyset	-	6	1
15	$\{3,6,13\}$	$\{9\}$	\emptyset	$\{3,6,8,13\}$	7	15
2	$\{1,3,4,6,8\}$	\emptyset	\emptyset	-	5	2
6	$\{1,2,3,4,15\}$	$\{7\}$	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^5 = \{1,3,4,5,6,8,12,13\}$				$V_C^5 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^5 = \{2,7,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(5)} = \{7,11,10,9,2\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(5)}$	i
18	\emptyset	$\{11\}$	\emptyset	$\{5,12\}$	4	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	$\{11\}$	\emptyset	$\{5,12,13\}$	4	19
5	$\{14\}$	$\{9,11\}$	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	$\{9\}$	\emptyset	$\{5\}$	4	17
12	$\{8,20\}$	$\{11\}$	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	$\{8,12,13\}$	\emptyset	\emptyset	$\{8,12,13\}$	3	20
16	\emptyset	$\{9\}$	\emptyset	$\{8\}$	4	16
14	$\{1,3,4,5\}$	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,5\}$	4	14
13	$\{8,15,20\}$	$\{11\}$	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	$\{12,13,20\}$	$\{2,9\}$	\emptyset	-	11	8
3	$\{14,15\}$	$\{2\}$	\emptyset	-	6	3
4	$\{14\}$	$\{2\}$	\emptyset	-	5	4
1	$\{14\}$	$\{2\}$	\emptyset	-	5	1
15	$\{3,6,13\}$	$\{9\}$	\emptyset	$\{3,6,8,13\}$	7	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	$\{15\}$	$\{2,7\}$	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^6 = \{1,3,5,6,8,12,13\}$				$V_C^6 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^6 = \{4,7,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(6)} = \{7,11,10,9,2,4\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{a}_i^{(6)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{14}	{9,11}	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16
14	{5}	{4}	\emptyset	{1,3,5}	5	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9
8	{12,13,20}	{4,9}	\emptyset	-	11	8
3	{15}	{4}	\emptyset	-	5	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4
1	\emptyset	{4}	\emptyset	-	4	1
15	{3,6,13}	{9}	\emptyset	{3,6,8,13}	7	15
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2
6	{15}	{4,7}	\emptyset	-	5	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^7 = \{3,5,6,8,12,13\}$				$V_C^7 = \{14,\dots,20\}$		
$\bar{V}^7 = \{1,7,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(7)} = \{7,11,10,9,2,4,1\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{a}_i^{(7)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{14}	{9,11}	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16
14	{5}	{1}	\emptyset	{3,5}	4	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9
8	{12,13,20}	{1,9}	\emptyset	-	10	8
3	{15}	{1}	\emptyset	-	4	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1
15	{3,6,13}	{9}	\emptyset	{3,6,8,13}	7	15
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2
6	{15}	{1,7}	\emptyset	-	4	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^8 = \{5,6,8,12,13\}$			$V_C^8 = \{14,\dots,20\}$			
$\bar{V}^8 = \{3,7,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(8)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(8)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{14}	{9,11}	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16
14	{5}	{3}	\emptyset	{5}	4	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9
8	{12,13,20}	{3,9}	\emptyset	-	9	8
3	\emptyset	\emptyset	{6,8,14,15}	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1
15	{13}	{3,9}	\emptyset	{6,8,13}	7	15
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2
6	\emptyset	{3,7}	\emptyset	-	3	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^9 = \{5,8,12,13\}$			$V_C^9 = \{14,\dots,20\}$			
$\bar{V}^9 = \{6,9,11\}$						
$P_{constrained}^{(9)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(9)}$	i
18	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12}	4	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	{11}	\emptyset	{5,12,13}	4	19
5	{14}	{9,11}	\emptyset	-	9	5
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17
12	{8,20}	{11}	\emptyset	-	6	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	{8,12,13}	\emptyset	\emptyset	{8,12,13}	3	20
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16
14	{5}	{6}	\emptyset	{5}	3	14
13	{8,15,20}	{11}	\emptyset	-	7	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9
8	{12,13,20}	{6,9}	\emptyset	-	8	8
3	\emptyset	\emptyset	{6,8,14,15}	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1
15	{13}	{6,9}	\emptyset	{8,13}	6	15
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

$V_G^{10} = \{5, 8, 13\}$				$V_C^{10} = \{14, \dots, 20\}$			
$\bar{V}^{10} = \{6, 9, 12\}$							
$P_{constrained}^{(10)} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12\}$							
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(10)}$	i	
18	\emptyset	{12}	\emptyset	{5}	5	18	
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11	
19	\emptyset	{12}	\emptyset	{5,13}	5	19	
5	{14}	{9,12}	\emptyset	-	9	5	
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17	
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13,18,19,20}	-	-	12	
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10	
20	\emptyset	{12}	\emptyset	{8,13}	5	20	
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16	
14	{5}	{6}	\emptyset	{5}	3	14	
13	{15}	{12}	\emptyset	-	6	13	
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9	
8	\emptyset	{6,9,12}	\emptyset	-	10	8	
3	\emptyset	\emptyset	{6,8,14,15}	-	-	3	
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4	
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1	
15	{13}	{6,9}	\emptyset	{8,13}	6	15	
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2	
6	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	-	6	
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7	

$V_G^{11} = \{5, 8\}$				$V_C^{11} = \{14, \dots, 20\}$			
$\bar{V}^{11} = \{6, 9, 13\}$							
$P_{constrained}^{(11)} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12, 13\}$							
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(11)}$	i	
18	\emptyset	{13}	\emptyset	{5}	5	18	
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11	
19	\emptyset	{13}	\emptyset	{5}	5	19	
5	{14}	{9,13}	\emptyset	-	8	5	
17	\emptyset	{9}	\emptyset	{5}	4	17	
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13,18,19,20}	-	-	12	
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10	
20	\emptyset	{13}	\emptyset	{8}	5	20	
16	\emptyset	{9}	\emptyset	{8}	4	16	
14	{5}	{6}	\emptyset	{5}	3	14	
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,18,19,20}	-	-	13	
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9	
8	\emptyset	{6,9,13}	\emptyset	-	8	8	
3	\emptyset	\emptyset	{6,8,14,15}	-	-	3	
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4	
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1	
15	\emptyset	{6,9,13}	\emptyset	{8}	8	15	
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2	
6	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	-	6	
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7	

$V_G^{12} = \{8\}$			$V_C^{12} = \{14, \dots, 20\}$			
$\bar{V}^{12} = \{5, 6\}$						
$P_{constrained}^{(12)} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12, 13, 5\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(12)}$	i
18	\emptyset	$\{5\}$	\emptyset	-	7	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5, 12, 13, 18, 19\}$	-	-	11
19	\emptyset	$\{5\}$	\emptyset	-	7	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$	-	-	5
17	\emptyset	$\{5\}$	\emptyset	-	7	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 13, 18, 19, 20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 9, 16, 17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{5\}$	\emptyset	$\{8\}$	7	20
16	\emptyset	$\{5\}$	\emptyset	$\{8\}$	7	16
14	\emptyset	$\{5, 6\}$	\emptyset	-	7	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 15, 18, 19, 20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 15, 16, 17\}$	-	-	9
8	\emptyset	$\{5, 6\}$	\emptyset	-	7	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6, 8, 14, 15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1, 3, 6, 8, 14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3, 6, 8, 14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{5, 6\}$	\emptyset	$\{8\}$	7	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1, 3, 4, 6, 8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8, 14, 15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{13} = \{8\}$			$V_C^{13} = \{14, 15, 16, 17, 19, 20\}$			
$\bar{V}^{13} = \{6, 18\}$						
$P_{constrained}^{(13)} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12, 13, 5, 18\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(13)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5, 12, 13, 18, 19\}$	-	-	11
19	\emptyset	$\{18\}$	-	-	6	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$	-	-	5
17	\emptyset	$\{18\}$	-	-	6	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 13, 18, 19, 20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 9, 16, 17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{18\}$	\emptyset	$\{8\}$	6	20
16	\emptyset	$\{18\}$	\emptyset	$\{8\}$	6	16
14	\emptyset	$\{6, 18\}$	\emptyset	-	6	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 15, 18, 19, 20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5, 8, 15, 16, 17\}$	-	-	9
8	\emptyset	$\{6, 18\}$	\emptyset	-	6	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6, 8, 14, 15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1, 3, 6, 8, 14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3, 6, 8, 14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{6, 18\}$	\emptyset	$\{8\}$	6	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1, 3, 4, 6, 8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8, 14, 15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{14} = \{8\}$			$V_C^{14} = \{14,15,16,17,20\}$			
$\bar{V}^{14} = \{6,19\}$						
$P_{constrained}^{(14)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(14)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	$\{19\}$	-	-	5	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{19\}$	\emptyset	$\{8\}$	5	20
16	\emptyset	$\{19\}$	\emptyset	$\{8\}$	5	16
14	\emptyset	$\{6,19\}$	\emptyset	-	5	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	$\{6,19\}$	\emptyset	-	5	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{6,19\}$	\emptyset	$\{8\}$	5	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{15} = \{8\}$			$V_C^{15} = \{14,15,16,20\}$			
$\bar{V}^{15} = \{6,17\}$						
$P_{constrained}^{(15)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19,17\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(15)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,20\}$	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{17\}$	\emptyset	$\{8\}$	4	20
16	\emptyset	$\{17\}$	\emptyset	$\{8\}$	4	16
14	\emptyset	$\{6,17\}$	\emptyset	-	4	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	$\{6,17\}$	\emptyset	-	4	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{6,17\}$	\emptyset	$\{8\}$	4	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{16} = \{8\}$			$V_C^{16} = \{15,16,20\}$			
$\bar{V}^{16} = \{14\}$						
$P_{constrained}^{(16)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19,17,14\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(16)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,20\}$	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	$\{8\}$	3	20
16	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	$\{8\}$	3	16
14	\emptyset	\emptyset	$\{8,15,16,20\}$	-	-	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	-	3	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	$\{8\}$	3	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{17} = \emptyset$			$V_C^{17} = \{15,16,20\}$			
$\bar{V}^{17} = \{8\}$						
$P_{constrained}^{(17)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19,17,14,8\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(17)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,20\}$	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	-	2	20
16	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	-	2	16
14	\emptyset	\emptyset	$\{8,15,16,20\}$	-	-	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	\emptyset	$\{15,16,20\}$	-	-	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{14\}$	\emptyset	-	2	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{18} = \emptyset$			$V_C^{18} = \{15,16\}$			
$\bar{V}^{18} = \{20\}$						
$P_{constrained}^{(18)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19,17,14,8,20\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(18)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,20\}$	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{15,16\}$	-	-	20
16	\emptyset	$\{20\}$	\emptyset	-	1	16
14	\emptyset	\emptyset	$\{8,15,16,20\}$	-	-	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	\emptyset	$\{15,16,20\}$	-	-	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{20\}$	\emptyset	-	1	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{19} = \emptyset$			$V_C^{19} = \{15\}$			
$\bar{V}^{19} = \{16\}$						
$P_{constrained}^{(19)} = \{7,11,10,9,2,4,1,3,6,12,13,5,18,19,17,14,8,20,16\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(19)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,19,20\}$	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	$\{5,12,13,18,19\}$	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,20\}$	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,17,18,19,20\}$	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15,16,20\}$	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,13,18,19,20\}$	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,9,16,17\}$	-	-	10
20	\emptyset	\emptyset	$\{15,16\}$	-	-	20
16	\emptyset	\emptyset	$\{15\}$	-	-	16
14	\emptyset	\emptyset	$\{8,15,16,20\}$	-	-	14
13	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,18,19,20\}$	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	$\{5,8,15,16,17\}$	-	-	9
8	\emptyset	\emptyset	$\{15,16,20\}$	-	-	8
3	\emptyset	\emptyset	$\{6,8,14,15\}$	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,6,8,14\}$	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	$\{3,6,8,14\}$	-	-	1
15	\emptyset	$\{16\}$	\emptyset	-	0	15
2	\emptyset	\emptyset	$\{1,3,4,6,8\}$	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	$\{8,14,15\}$	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	$\{6\}$	-	-	7

$V_G^{20} = \emptyset$			$V_C^{20} = \emptyset$			
$\bar{V}^{20} = \emptyset$						
$P_{constrained}^{(20)} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12, 13, 5, 18, 19, 17, 14, 8, 20, 16, 15\}$						
i	\mathcal{A}_i	\mathcal{E}_i	\mathcal{L}_i	\mathcal{R}_i	$\bar{d}_i^{(20)}$	i
18	\emptyset	\emptyset	{8,14,15,16,17,19,20}	-	-	18
11	\emptyset	\emptyset	{5,12,13,18,19}	-	-	11
19	\emptyset	\emptyset	{8,14,15,16,17,20}	-	-	19
5	\emptyset	\emptyset	{8,14,15,16,17,18,19,20}	-	-	5
17	\emptyset	\emptyset	{8,14,15,16,20}	-	-	17
12	\emptyset	\emptyset	{5,8,13,18,19,20}	-	-	12
10	\emptyset	\emptyset	{5,8,9,16,17}	-	-	10
20	\emptyset	\emptyset	{15,16}	-	-	20
16	\emptyset	\emptyset	{15}	-	-	16
14	\emptyset	\emptyset	{8,15,16,20}	-	-	14
13	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,18,19,20}	-	-	13
9	\emptyset	\emptyset	{5,8,15,16,17}	-	-	9
8	\emptyset	\emptyset	{15,16,20}	-	-	8
3	\emptyset	\emptyset	{6,8,14,15}	-	-	3
4	\emptyset	\emptyset	{1,3,6,8,14}	-	-	4
1	\emptyset	\emptyset	{3,6,8,14}	-	-	1
15	\emptyset	\emptyset	\emptyset	-	-	15
2	\emptyset	\emptyset	{1,3,4,6,8}	-	-	2
6	\emptyset	\emptyset	{8,14,15}	-	-	6
7	\emptyset	\emptyset	{6}	-	-	7

Άρα, η αναδιάταξη των κόμβων προκύπτει ως:

$$P_{constrained} = \{7, 11, 10, 9, 2, 4, 1, 3, 6, 12, 13, 5, 18, 19, 17, 14, 8, 20, 16, 15\}$$

Κάθε C – κόμβος έχει διαταχθεί μετά από όλους τους γειτονικούς προς αυτόν G – κόμβους και, συνεπώς, η αριθμητική παραγοντοποίηση είναι εφικτή.

Άρα, με βάση την αναδιάταξη που υπολογίστηκε είτε μέσω επεξεργασίας διάταξης χωρίς περιορισμό είτε μέσω τροποποιημένου αλγορίθμου ο αλγόριθμος εκτίμησης κατάστασης εκτελείται με τη μήτρα συντελεστών \hat{F} .

Κεφάλαιο 7 – Παρουσίαση Συγκρίσεων

7.1 Εισαγωγή

Στη μοντελοποίηση της εκτίμησης κατάστασης με κανονικές εξισώσεις (NE), οι μετρήσεις μηδενικής έγχυσης προστίθενται στη μήτρα κέρδους G , σταθμισμένες με υψηλά βάρη, ως εξής:

$$\tilde{G}\Delta x^k = H^T R^{-1} \Delta z^k + C^T W^{-1} \Delta c^k, \quad \tilde{G} = H^T R^{-1} H + C^T W^{-1} C \quad (7.1)$$

Στη μοντελοποίηση με κανονικές εξισώσεις παρουσία ισοτικών περιορισμών (NE/C), οι μηδενικές εγχύσεις αντιμετωπίζονται ως ισοτικοί περιορισμοί με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange ως εξής:

$$F \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} G & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Στην προτεινόμενη μέθοδο εξασφαλίζεται ότι το μπλοκ στη θέση (1,1) της μήτρας συντελεστών είναι θετικά ορισμένο με την προσθήκη στη μήτρα κέρδους ενός υποσυνόλου μετρήσεων μηδενικής έγχυσης, οι οποίες σταθμίζονται με βάρη ίδιας τάξης με τα αντίστοιχα για τις συμβατικές μετρήσεις έγχυσης, ως εξής:

$$\hat{F} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k + C_1^T W_1^{-1} \Delta c_1^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} G + C_1^T W_1^{-1} C_1 & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Ορίζεται ως σχήμα αναδιάταξης *Bridson-1* η εφαρμογή του περιορισμού *Bridson* στην αναδιάταξη κόμβων μέσω της τροποποίησης του τελικού αποτελέσματος του αλγορίθμου διάταξης ελαχίστου βαθμού ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός. Αντίστοιχα, ορίζεται ως σχήμα αναδιάταξης *Bridson-2* η εφαρμογή του περιορισμού *Bridson* μέσω της τροποποίησης του αλγορίθμου διάταξης ελαχίστου βαθμού ώστε να ενσωματώνει τον περιορισμό.

Για την αξιολόγηση της υπολογιστικής επίδοσης της προτεινόμενης μεθόδου πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις ως προς τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L , το χρόνο εκτέλεσης και τα χαρακτηριστικά σύγκλισης μεταξύ των ακόλουθων μεθόδων:

- I. Μέθοδος κανονικών εξισώσεων (7.1) με αναδιάταξη χωρίς περιορισμό των κόμβων της μήτρας \tilde{G} .
- II. Μέθοδος κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (7.2) με δυναμική επιλογή οδηγών στοιχείων.

- III. Τροποποιημένη μέθοδος κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (7.3) με μερική αναδιάταξη των κόμβων της \hat{F} ώστε όλοι οι C -κόμβοι να αναδιατάσσονται μετά από όλους τους G -κόμβους.
- IV. Τροποποιημένη μέθοδος κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (7.3) με αναδιάταξη των κόμβων της \hat{F} σύμφωνα με το σχήμα αναδιάταξης *Bridson-1*.
- V. Τροποποιημένη μέθοδος κανονικών εξισώσεων παρουσία ισοτικών περιορισμών (7.3) με αναδιάταξη των κόμβων της \hat{F} σύμφωνα με το σχήμα αναδιάταξης *Bridson-2*.

Οι μέθοδοι IV και V συνιστούν τις προτεινόμενες εναλλακτικές. Για τη μέθοδο II χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα MA57 [20], ανεπτυγμένη σε FORTRAN, της Harwell Subroutine Library, η οποία επιλύει συστήματα με συμμετρική και αόριστη μήτρα συντελεστών εφαρμόζοντας δυναμική επιλογή 1×1 ή 2×2 οδηγών στοιχείων για την εξασφάλιση της αριθμητικής ευστάθειας της παραγοντοποίησης και της αραιότητας του παράγοντα L . Για τις μεθόδους I και IV ως αλγόριθμος αναδιάταξης κόμβων χρησιμοποιήθηκε η ρουτίνα AMD [22], ανεπτυγμένη σε C, η οποία εφαρμόζει τη διάταξη ελαχίστου προσεγγιστικού βαθμού. Η εν λόγω ρουτίνα τροποποιήθηκε κατάλληλα, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 6, για την ενσωμάτωση του περιορισμού κατά *Bridson* και τη χρήση της στη μέθοδο V. Για τη μέθοδο III η ρουτίνα AMD τροποποιήθηκε ώστε να περιλαμβάνει δύο λίστες degree (gdegree και cdegree). Μέχρις ότου προκύψουν ως κενές οι επιμέρους λίστες της κατηγορίας gdegree, επιλέγονται κόμβοι μόνο από αυτές τις λίστες, δηλαδή μόνο G -κόμβοι. Έπειτα, η επιλογή των κόμβων γίνεται από τις λίστες της κατηγορίας cdegree.

Συγκρίσεις πραγματοποιήθηκαν για διάφορες διαμορφώσεις μετρήσεων στο δίκτυο IEEE 300 ζυγών [25] και στο δίκτυο FRCC (Florida Reliability Coordinating Council) 3949 ζυγών [26]. Σε όλες τις διαμορφώσεις, οι μετρήσεις ενεργού και αέργου ισχύος βρίσκονται σε ζεύγη. Οι συγχρονισμένες μετρήσεις φασιθέτη τάσης λαμβάνονται ως μέτρο και γωνία, ενώ συγχρονισμένες μετρήσεις φασιθέτη ρεύματος ως πραγματικό και φανταστικό μέρος. Οι δοκιμές πραγματοποιήθηκαν σε προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Athlon 64x2, συχνότητας 2,21 GHz, και μνήμη RAM 1 GB.

Οι ιακωβιανές μήτρες και οι μήτρες συντελεστών υπολογίζονται στην αποζευγμένη τους μορφή. Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων παρουσιάζονται μόνο για το $P-\theta$ τμήμα της εκτίμησης κατάστασης. Η τιμή του κριτηρίου σύγκλισης για την ολοκλήρωση των ανακυκλώσεων επιλέγεται ως 0,001 ανά μονάδα για το μέτρο της τάσης και 0,001 ακτίνια για τη γωνία της τάσης. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός ανακυκλώσεων ορίζεται ίσος με 15.

Στον πίνακα 7.1 παρουσιάζεται η τυπική απόκλιση που ανατίθεται σε κάθε επιμέρους τύπο μέτρησης. Από κάθε μονάδα συγχρονισμένων μετρήσεων εγκατεστημένη σε ζυγό, εκτός από το φασιθέτη τάσης του ζυγού λαμβάνουμε επιπλέον ως μετρήσεις τους φασιθέτες ρεύματος σε κάθε γραμμή που είναι συνδεδεμένη με το ζυγό. Για όλες τις διαμορφώσεις μετρήσεων λαμβάνεται μία μέτρηση μέτρου τάσης στο ζυγό αναφοράς. Για την μέθοδο I αποδίδεται τυπική απόκλιση ίση με 10^{-7} στις μηδενικές εγχύσεις, ώστε να προσομοιωθούν ως

μετρήσεις υψηλής ακρίβειας. Οι πραγματικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης λαμβάνονται από την εκτέλεση αλγορίθμου ροής φορτίου. Οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε τύπο μέτρησης χρησιμοποιήθηκαν για την ενσωμάτωση σφαλμάτων στη λύση της ροής φορτίου, ώστε να προκύψουν οι τιμές για τις μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτίμηση κατάστασης.

Συμβατικές μετρήσεις				Συγχρονισμένες μετρήσεις	
Μέτρο τάσης	Ροή ισχύος	Έγχυση ισχύος	Μηδενική έγχυση	Φασιθέτης τάσης	Φασιθέτης ρεύματος
0,004	0,008	0,01	0,0000001	0,0001	0,0001

Πίνακας 7.1: Τυπική απόκλιση για συμβατικές και συγχρονισμένες μετρήσεις

7.2 Διαμόρφωση μετρήσεων και αποτελέσματα δοκιμών στο δίκτυο IEEE 300 ζυγών

Για το δίκτυο IEEE 300 ζυγών εξετάστηκαν 4 περιπτώσεις διαμόρφωσης μετρήσεων, όπως περιγράφονται ακολούθως:

Διαμόρφωση μετρήσεων	$nullity(H)$	Συμβατικές μετρήσεις				Συγχρονισμένες μετρήσεις	
		Μέτρο τάσης	Ροή ισχύος	Έγχυση ισχύος	Έγχυση μηδενικής ισχύος	Φασιθέτης τάσης	Φασιθέτης ρεύματος
1	0	1	369	239	61	7	42
2	0	1	369	0	61	7	42
3	60	1	0	239	61	0	0
4	12	1	283	44	61	7	42

Πίνακας 7.2: Διαμόρφωση μετρήσεων για το δίκτυο IEEE 300 ζυγών

Οι διαμορφώσεις 1, 2 και 4 περιλαμβάνουν 7 PMUs εγκατεστημένα στους ζυγούς 3, 7, 23, 37, 41, 73 και 77 αντίστοιχα.

Διαμόρφωση μετρήσεων	Μέθοδος				
	I	II	III	IV	V
1	2889/ 2004	2941/ 3966	2941/ 4720	2941/ 2955	2941/ 2954
2	1593/ 947	1629/ 2034	1629/ 3384	1629/ 1539	1629/ 1682
3	2889/ 2004	2852/ 3966	3403/ 5546	3403/ 3505	3403/ 3536
4	1895/ 1079	1903/ 2321	2039/ 3546	2039/ 1889	2039/ 1771

Πίνακας 7.3: Αριθμός μη μηδενικών στοιχείων στη μήτρα συντελεστών/στον παράγοντα L

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα 7.3, οι μέθοδοι IV και V εμφανίζουν μικρότερο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L σε σχέση με τις II και III. Ωστόσο, η μέθοδος I που αφορά τη μοντελοποίηση με κανονικές εξισώσεις εμφανίζει το μικρότερο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων.

Διαμόρφωση μετρήσεων	Μέθοδος				
	I	II	III	IV	V
1	1.00	3.48	2.05	2.10	5.34
2	0.72	2.65	1.60	1.92	3.95
3	0.98	3.49	2.35	2.33	5.42
4	0.73	2.80	1.69	1.92	4.15

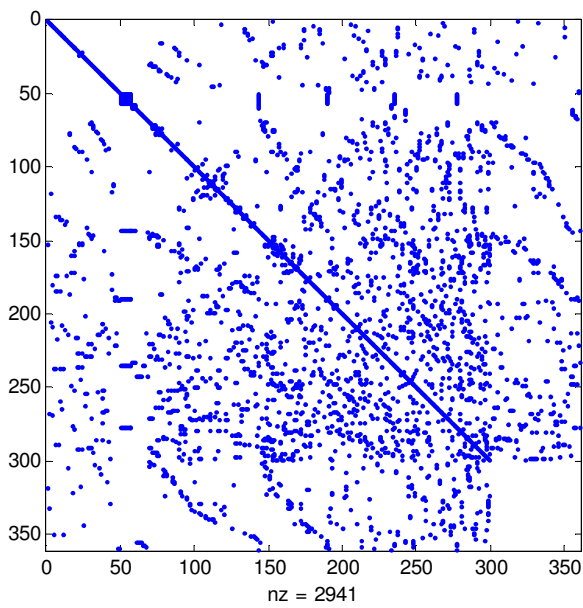
Πίνακας 7.4: Χρόνος CPU σε msec για την εκτέλεση παραγοντοποίησης της μήτρας συντελεστών

Σύμφωνα με τον πίνακα 7.4, η μέθοδος I απαιτεί το μικρότερο χρόνο για την παραγοντοποίηση της αντίστοιχης μήτρας συντελεστών, γεγονός που οφείλεται στην εμφάνιση του μικρότερου αριθμού μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L . Η μέθοδος II είναι υπολογιστικά πιο απαιτητική σε σχέση με την προτεινόμενη εναλλακτική IV. Η μέθοδος V απαιτεί περισσότερο χρόνο σε σχέση με την IV, λόγω της ενσωμάτωσης του περιορισμού αναδιάταξης στη διαδικασία επιλογής κόμβων του αλγορίθμου ελαχίστου βαθμού.

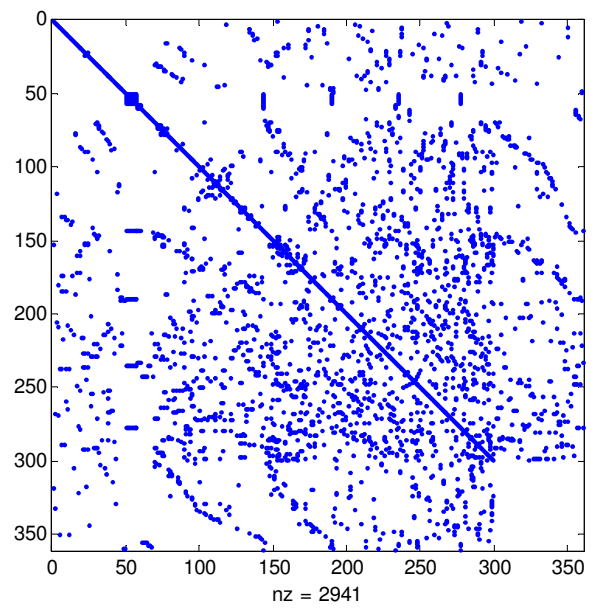
Σημειώνεται ότι οι μέθοδοι II-V συνέκλιναν μετά από 4 ανακυκλώσεις στο ίδιο διάλυμα κατάστασης. Λόγω της χρήσης υψηλών βαρών για τη μοντελοποίηση των μετρήσεων μηδενικής έγχυσης, η μέθοδος συνέκλινε μετά από 7 ανακυκλώσεις με διάλυμα λύσης κοντά στην πραγματικό.

Ακολούθως παρατίθενται μέσω της χρήσης του MATLAB διαγράμματα με τη συμβολική δομή των μητρών F και \hat{F} , καθώς και των συμμετρικών μεταθέσεων τους με βάση αναδιατάξεις χωρίς περιορισμό ή με περιορισμό με τα σχήματα αναδιάταξης *Bridson-1* και *Bridson-2*. Επιπροσθέτως, για κάθε αναδιάταξη παρατίθεται η συμβολική δομή του παράγοντα L . Η αναδιάταξη χωρίς περιορισμό της μήτρας \hat{F} οδηγεί σε μη εφικτή αριθμητική παραγοντοποίηση, λόγω της εμφάνισης μηδενικών οδηγών στοιχείων. Ωστόσο, η συμβολική παραγοντοποίηση δεν επηρεάζεται και ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων που προβλέπονται για τον παράγοντα L συνιστούν μέτρο σύγκρισης για την απόκλιση των μη μηδενικών στοιχείων που προκύπτουν στις εφικτές παραγοντοποιήσεις των μεθόδων IV και V με βάση τα σχήματα αναδιάταξης *Bridson-1* και *Bridson-2* αντίστοιχα. Για τις διαμορφώσεις μετρήσεων 1 και 2, εφόσον το μπλοκ στη θέση (1,1) της μήτρας F είναι θετικά ορισμένο, οι μήτρες F και \hat{F} ταυτίζονται.

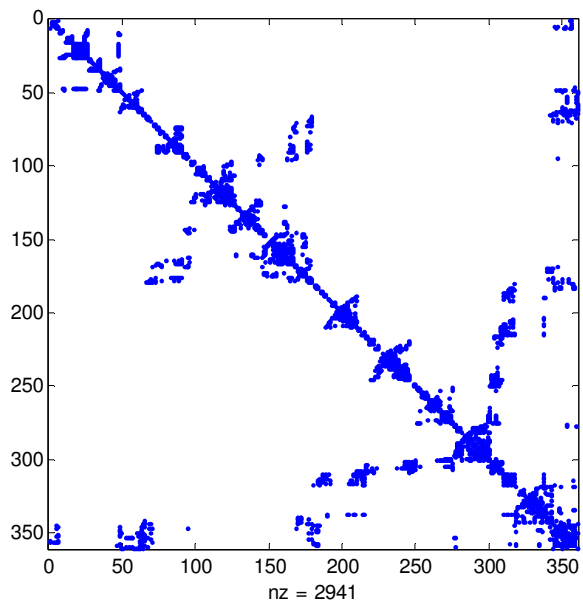
IEEE-300 (Διαμόρφωση μετρήσεων 1)



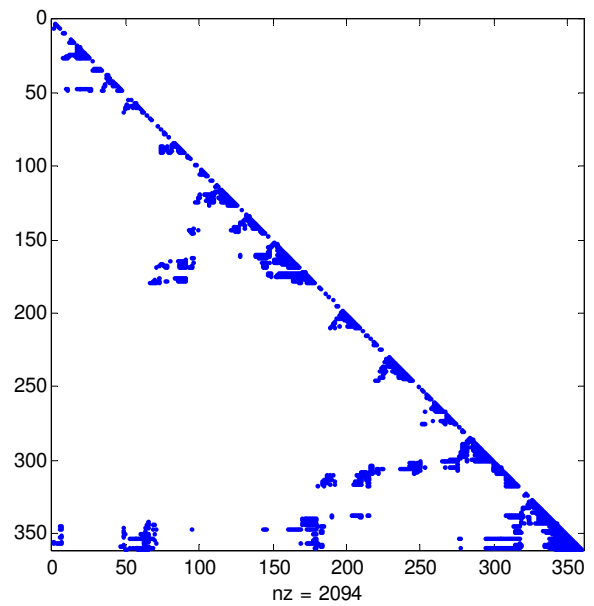
Σχήμα 7.1.1: Μήτρα F



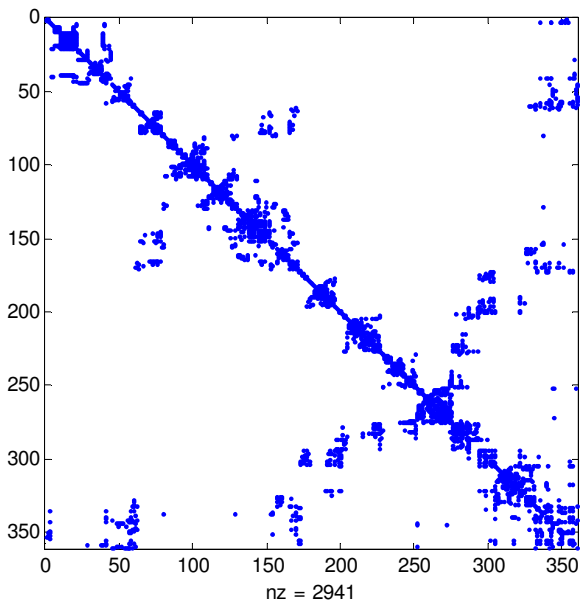
Σχήμα 7.1.2: Μήτρα \hat{F}



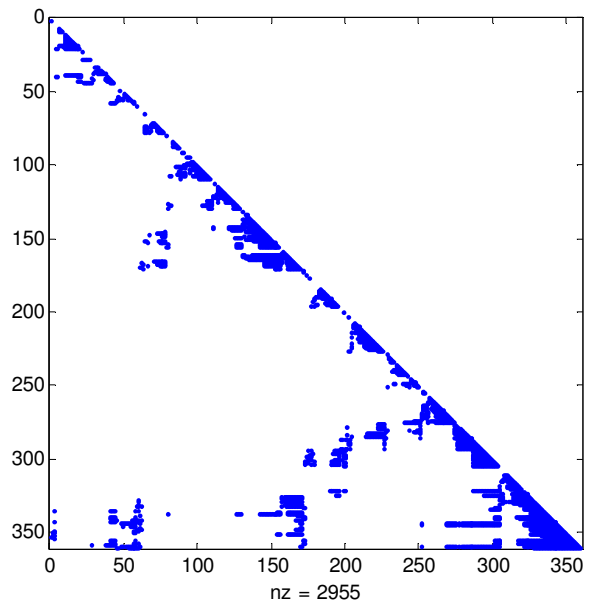
Σχήμα 7.1.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



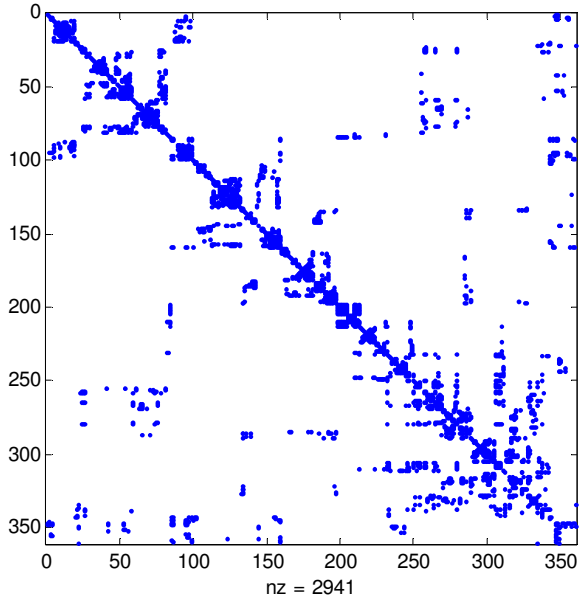
Σχήμα 7.1.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



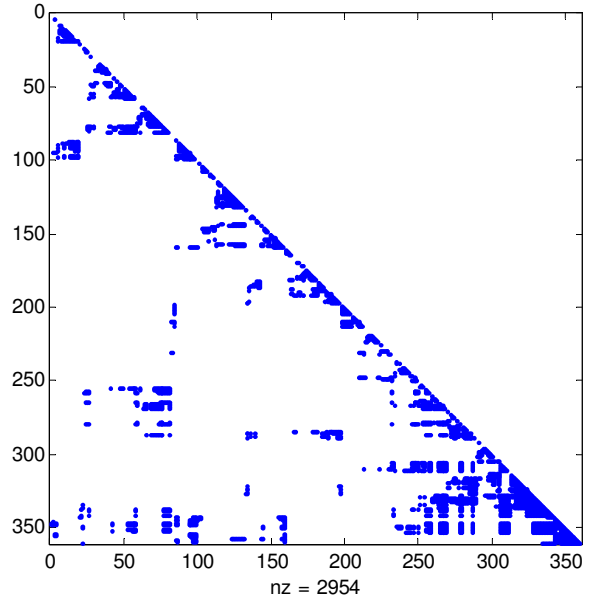
Σχήμα 7.1.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.1.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

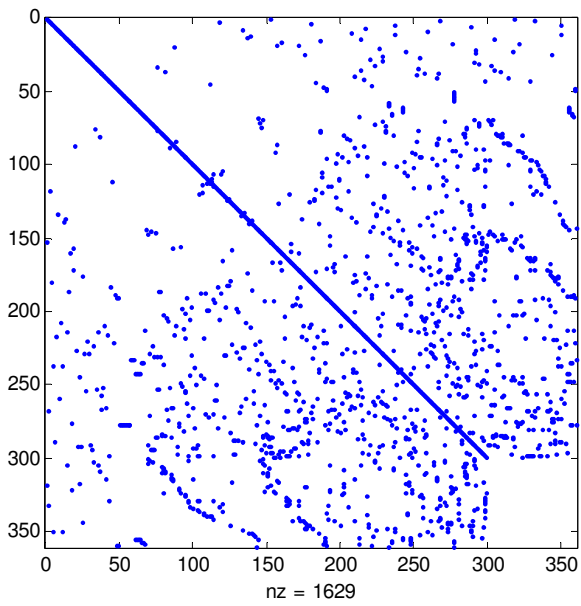


Σχήμα 7.1.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

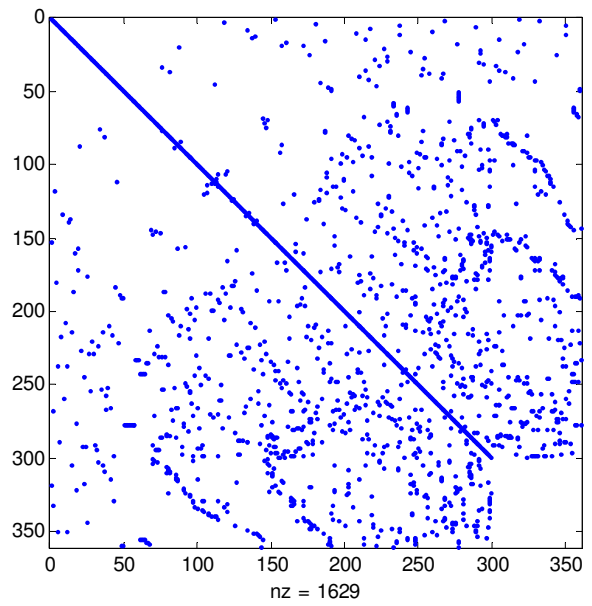


Σχήμα 7.1.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

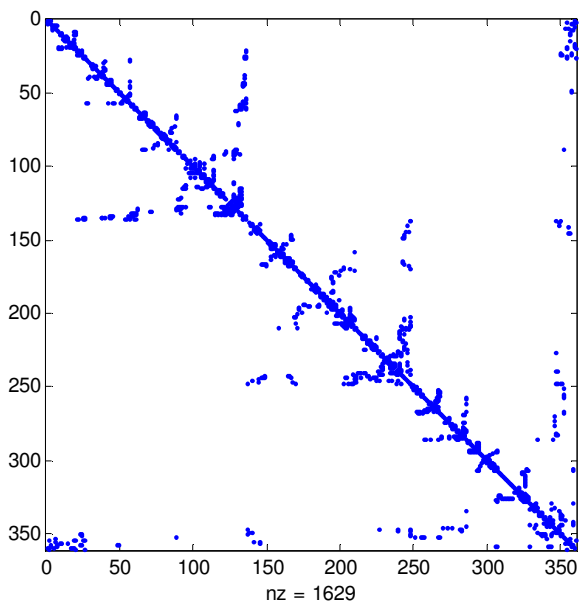
IEEE-300 (Διαμόρφωση μετρήσεων 2)



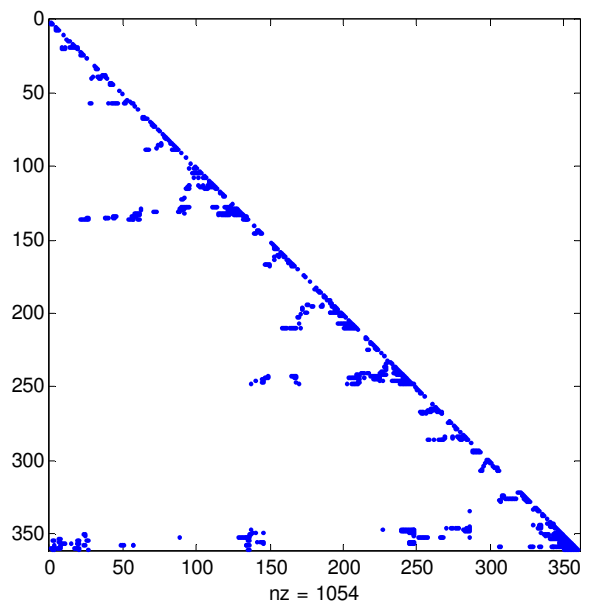
Σχήμα 7.2.1: Μήτρα F



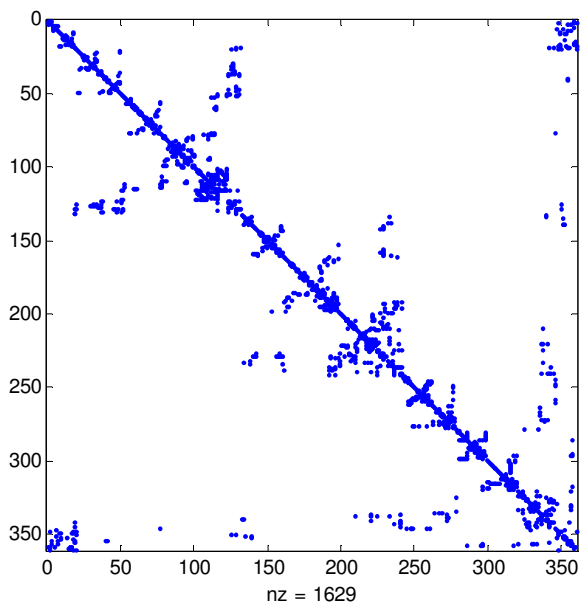
Σχήμα 7.2.2: Μήτρα \hat{F}



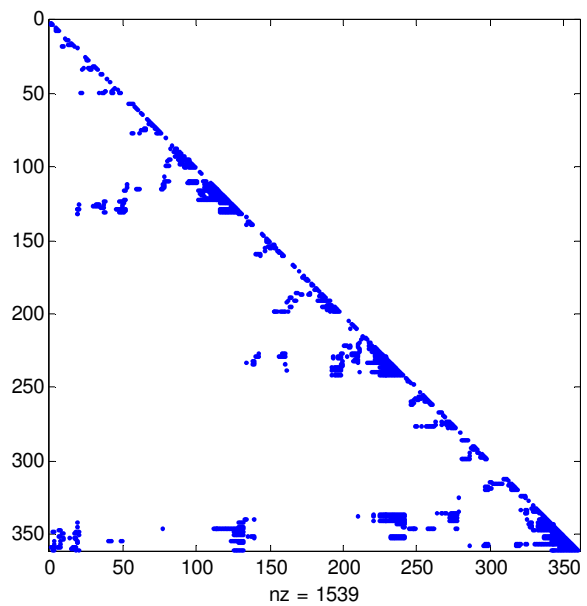
Σχήμα 7.2.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



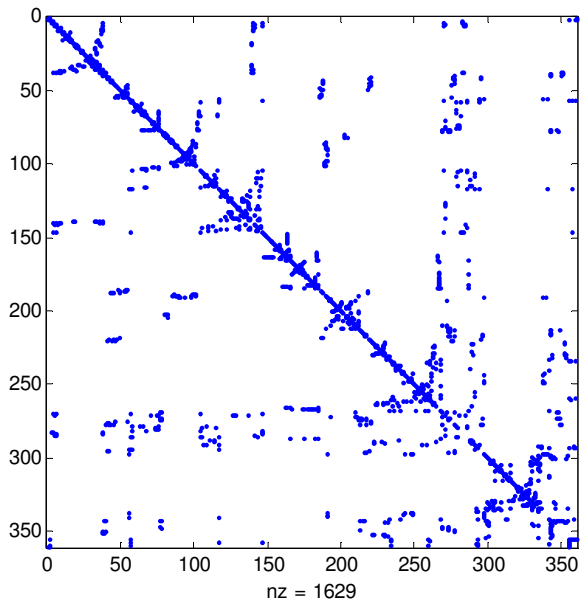
Σχήμα 7.2.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



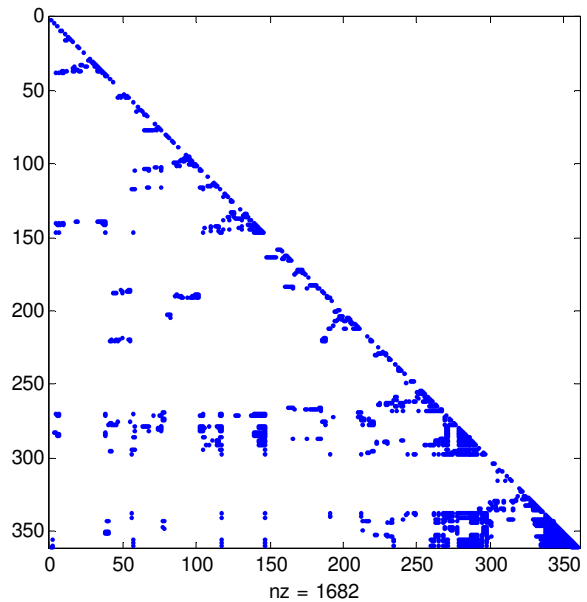
Σχήμα 7.2.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.2.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

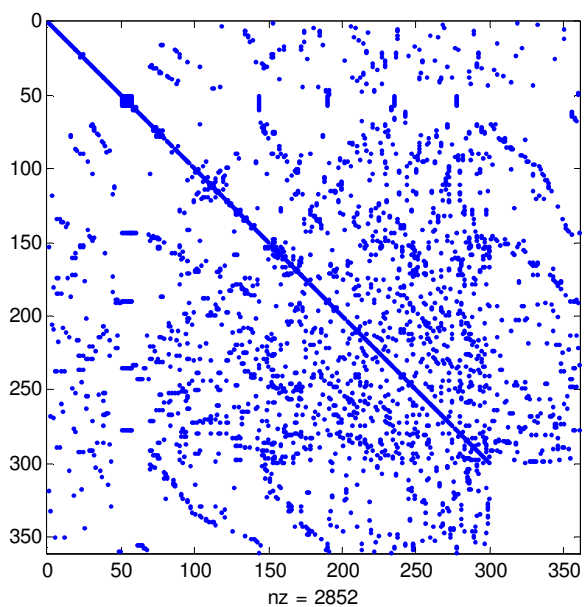


Σχήμα 7.2.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

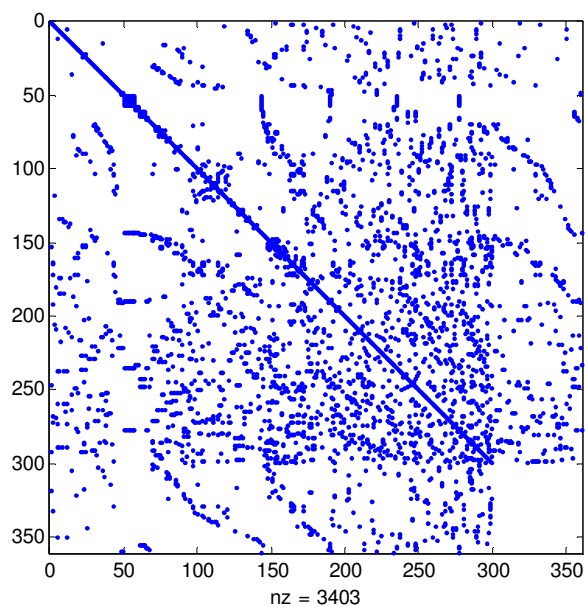


Σχήμα 7.2.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

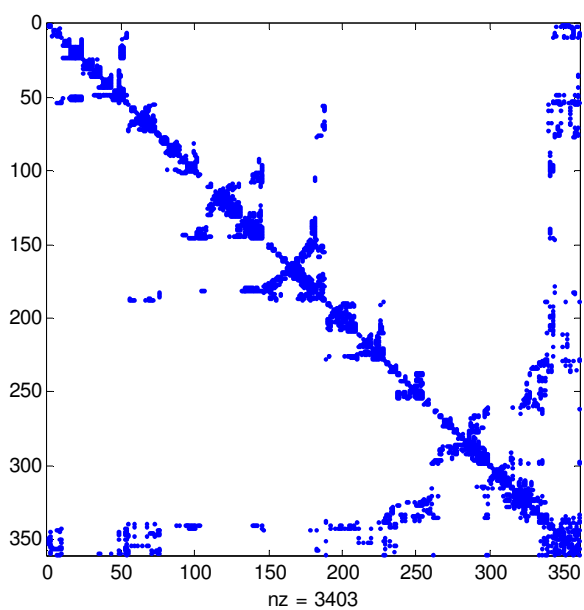
IEEE-300 (Διαμόρφωση μετρήσεων 3)



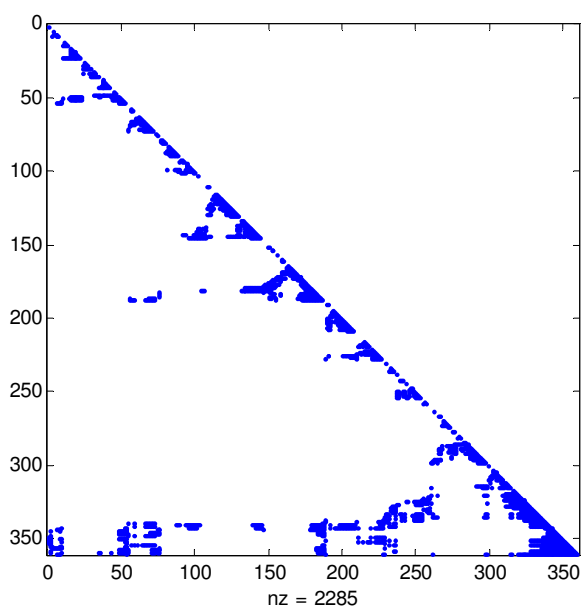
Σχήμα 7.3.1: Μήτρα F



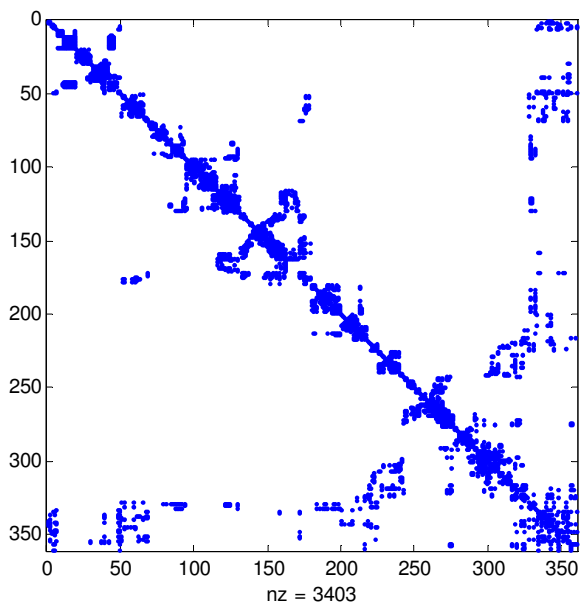
Σχήμα 7.3.2: Μήτρα \hat{F}



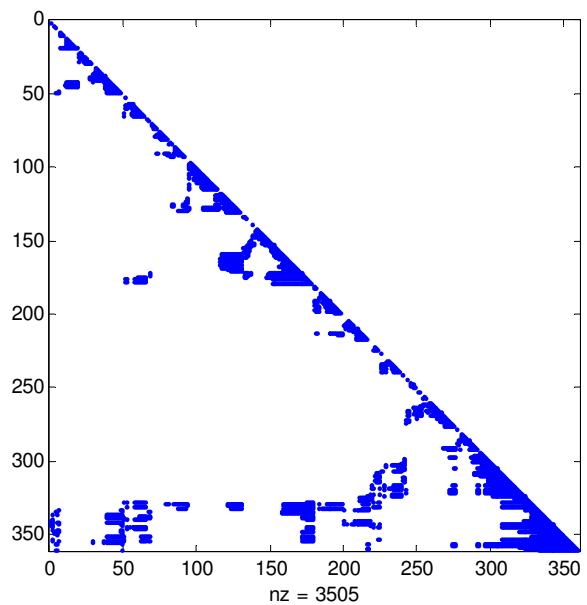
Σχήμα 7.3.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



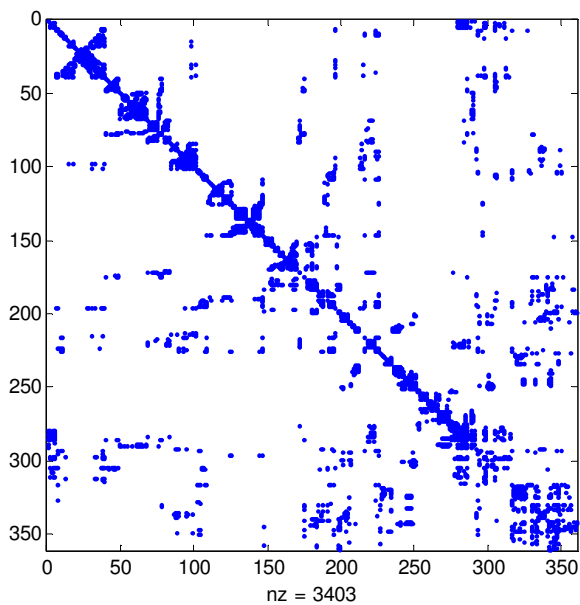
Σχήμα 7.3.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



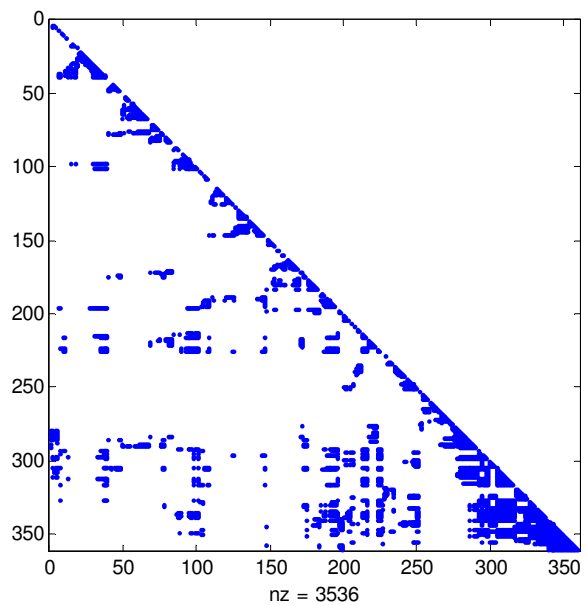
Σχήμα 7.3.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.3.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

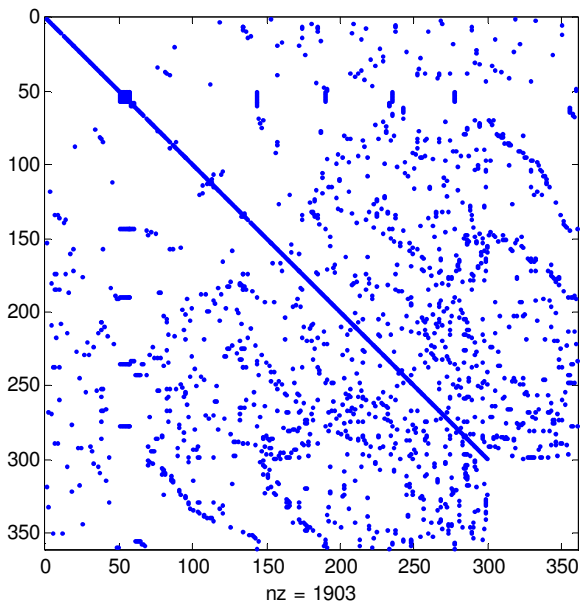


Σχήμα 7.3.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

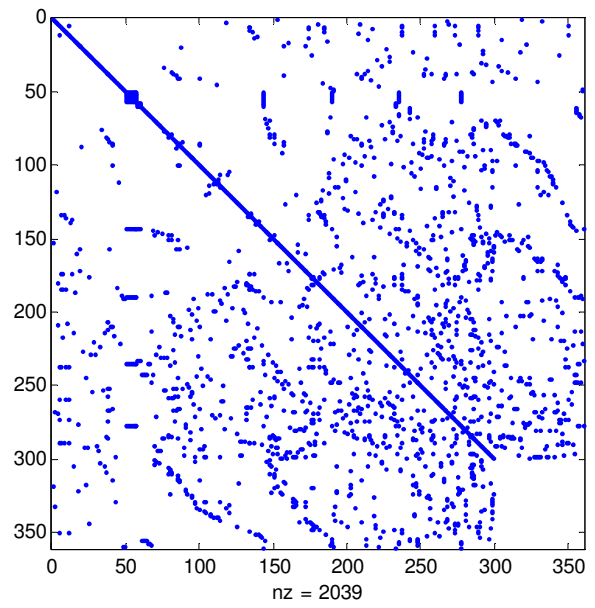


Σχήμα 7.3.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

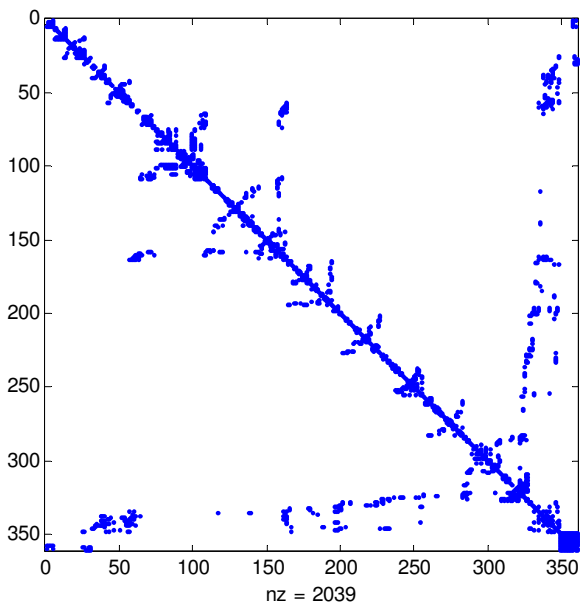
IEEE-300 (Διαμόρφωση μετρήσεων 4)



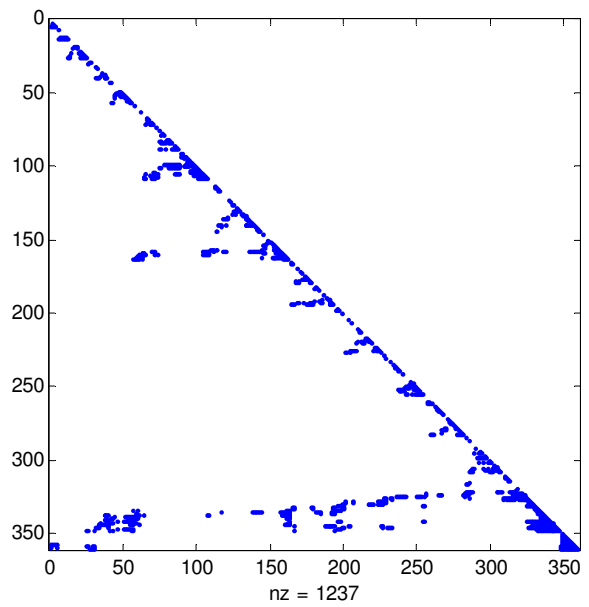
Σχήμα 7.4.1: Μήτρα F



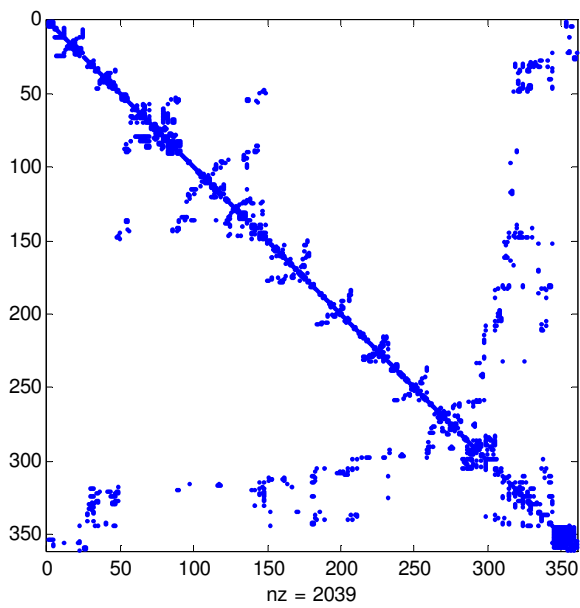
Σχήμα 7.4.2: Μήτρα \hat{F}



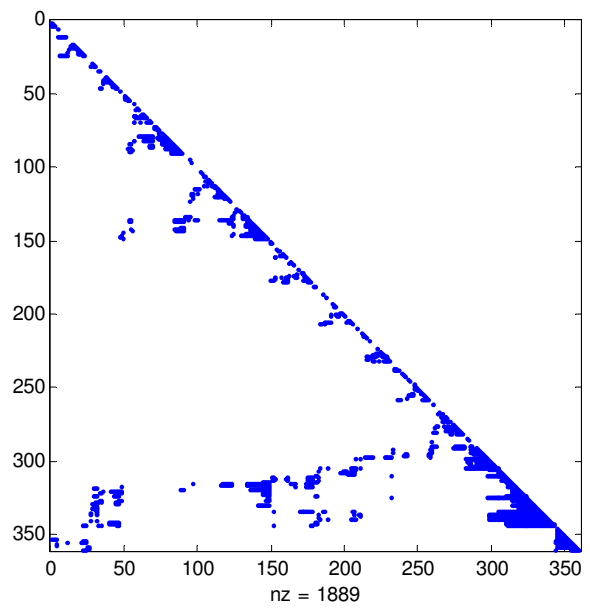
Σχήμα 7.4.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



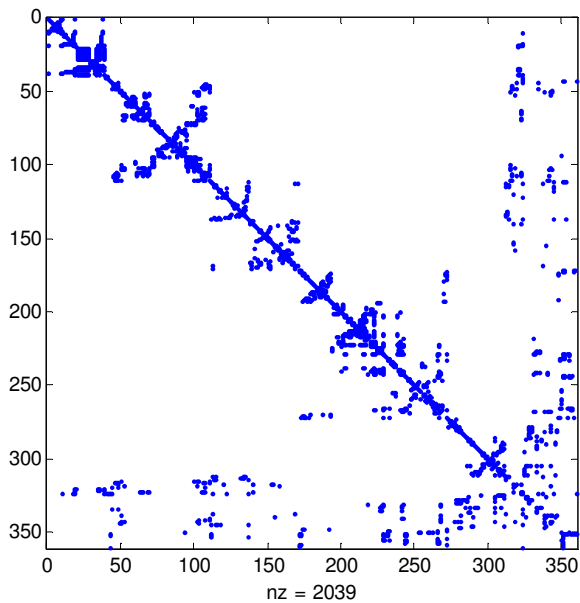
Σχήμα 7.4.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



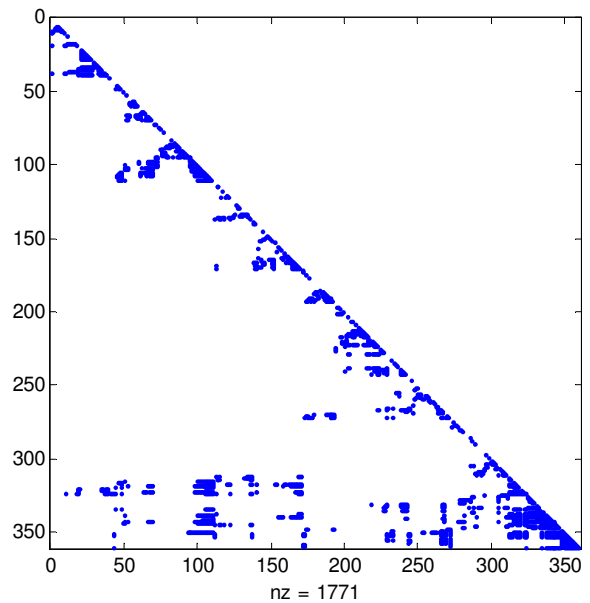
Σχήμα 7.4.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.4.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.4.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο



Σχήμα 7.4.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

7.3 Διαμόρφωση μετρήσεων και αποτελέσματα δοκιμών στο δίκτυο FRCC 3949 ζυγών

Το δίκτυο FRCC 3949 ζυγών αποτελείται από 6038 κλάδους. Για τις διαμορφώσεις μετρήσεων 1 έως 4 λαμβάνονται μετρήσεις ροής σε όλους τους κλάδους. Ειδικότερα, στη διαμόρφωση 4 μετρήσεις έγχυσης λαμβάνονται σε όλους τους ζυγούς.

Διαμόρφωση μετρήσεων	nullity(H)	Συμβατικές μετρήσεις				Συγχρονισμένες μετρήσεις	
		Μέτρο τάσης	Ροή ισχύος	Έγχυση ισχύος	Έγχυση μηδενικής ισχύος	Φασιθέτης τάσης	Φασιθέτης ρεύματος
1	0	1	6014	0	300	4	24
2	0	1	6014	0	600	4	24
3	0	1	6014	0	934	4	24
4	0	1	6014	3015	934	4	24
5	25	1	5964	3	934	4	24
6	63	1	5896	10	934	4	24

Πίνακας 7.5: Διαμόρφωση μετρήσεων για το δίκτυο FRCC 3949 ζυγών

Διαμόρφωση μετρήσεων	Μέθοδος				
	I	II	III	IV	V
1	15912/ 11831	17100/ 26640	17100/ 70447	17100/ 14741	17100/ 15846
2	17648/ 12660	19500/ 29923	19500/ 217781	19500/ 20464	19500/ 21533
3	23578/ 19124	23124/ 38266	23124/ 489361	23124/ 37629	23124/ 40468
4	45638/ 52190	45294/ 81565	45294/ 544691	45294/ 80191	45294/ 81468
5	23636/ 18815	23074/ 38544	23236/ 495066	23236/ 37866	23236/ 38229
6	23736/ 18972	22985/ 39110	23612/ 489459	23612/ 37071	23612/ 39605

Πίνακας 7.6: Αριθμός μη μηδενικών στοιχείων στη μήτρα συντελεστών/στον παράγοντα L

Παρατηρούμε ότι οι προτεινόμενες εναλλακτικές IV και V οδηγούν σε μικρότερο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων στον παράγοντα L , εξαιρούμενης της μεθόδου I. Η μέθοδος III, με τη μερική αναδιάταξη των κόμβων, εμφανίζει πυκνούς παράγοντες L .

Για την πραγματοποίηση σύγκρισης ως προς την ακρίβεια της εκτίμησης κατάστασης, ορίζεται ο ακόλουθος δείκτης:

$$x_i^{error\%} = 100 \times \frac{|x_i^{est} - x_i^{true}|}{|x_i^{true}|}$$

όπου x_i^{est} και x_i^{true} αποτελούν την εκτιμώμενη και πραγματική τιμή αντίστοιχα της i -οστής μεταβλητής κατάστασης.

Ο πίνακας 7.7 παρέχει για κάθε μέθοδο προς σύγκριση το χρόνο CPU για την κατασκευή και παραγοντοποίηση της αντίστοιχης μήτρας συντελεστών, για την εκτέλεση μίας ανακύκλωσης, καθώς και το συνολικό χρόνο για την εύρεση της εκτίμησης. Επίσης, παρέχεται ο αριθμός των πραγματοποιηθέντων ανακυκλώσεων και η ακρίβεια της εκτίμησης με βάση το κριτήριο $\max_i(x_i^{error\%})$.

Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος I οδηγεί σε παράγοντες L με το μικρότερο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων και απαιτεί το λιγότερο υπολογιστικό χρόνο για τις περιπτώσεις όπου υπήρξε σύγκλιση, επιτυγχάνει τη μικρότερη ακρίβεια και απαιτεί περισσότερες ανακυκλώσεις για επίτευξη σύγκλισης. Επιπροσθέτως, η διαμόρφωση μετρήσεων 4 οδήγησε σε αδυναμία σύγκλισης. Για τις μεθόδους II-V η σύγκλιση πραγματοποιήθηκε μετά από 7 ανακυκλώσεις, ενώ παρουσιάζεται η ίδια ακρίβεια εκτίμησης, δεδομένου ότι αντιμετωπίζουν τις μετρήσεις μηδενικής έγχυσης ως ισοτικούς περιορισμούς. Η προτεινόμενη εναλλακτική IV εμφανίζει αραιότερους παράγοντες L σε σχέση με τις II, III και V, ενώ απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό χρόνο.

Με βάση τα ανωτέρω, η μέθοδος IV εμφανίζει καλύτερα χαρακτηριστικά ως προς το συνδυασμό της υπολογιστικής ταχύτητας και της επίδοσης σύγκλισης.

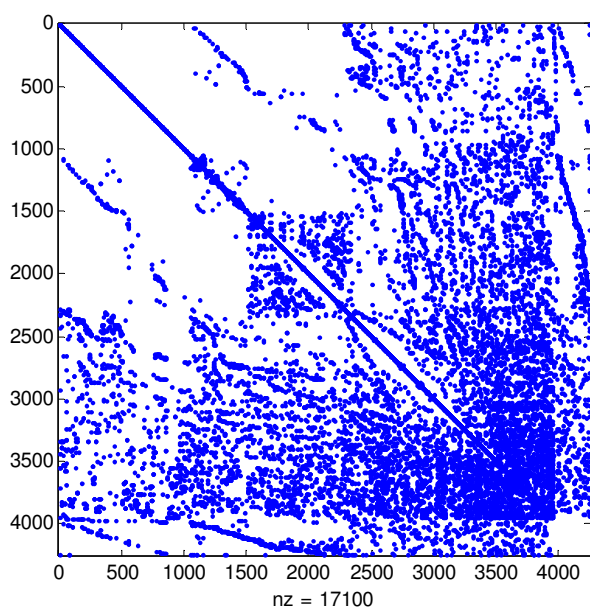
Ακολούθως, παρέχονται, κατά αντιστοιχία με την παράγραφο 7.2, διαγράμματα με τη συμβολική δομή των μητρών F , \hat{F} και L .

Διαμόρφωση μετρήσεων	Κατασκευή και παραγοντοποίηση μήτρας συντελεστών					Ανακύκλωση εκτίμησης κατάστασης					Αριθμός ανακυκλώσεων		Συνολικός χρόνος εκτέλεσης					$\max(x_i^{error\%})$	
	Μέθοδος					Μέθοδος					Μέθοδος		Μέθοδος					Μέθοδος	
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II-V	I	II	III	IV	V	I $\times 10^{-3}$	II-V $\times 10^{-7}$
1	6.1	29.2	74.7	17.6	36.9	0.4	0.6	3.9	0.4	0.4	6	7	8.2	33.1	102.2	20.4	40.0	2.3	3.4
2	6.3	33.9	481.9	20.2	38.9	0.4	0.7	5.7	0.5	0.5	10	7	10.5	38.5	521.6	23.6	42.5	6.5	5.6
3	8.3	38.0	1652.8	26.5	58.7	0.7	0.9	22.5	0.9	1.0	12	7	16.5	44.3	1810.5	32.4	65.5	25	23
4	22.1	68.0	1740.4	47.4	100.7	1.9	2.2	29.4	2.1	2.2	*	7	*	83.3	1946.5	62.0	115.8	*	150
5	8.2	38.0	1691.7	28.2	52.1	0.6	0.9	23.7	0.8	0.9	13	7	16.5	44.3	1857.8	33.9	58.3	29	25
6	8.4	38.6	1646.6	24.5	58.7	0.7	1.0	23.1	0.8	1.0	13	7	17.0	45.3	1808.3	30.3	65.3	94	78

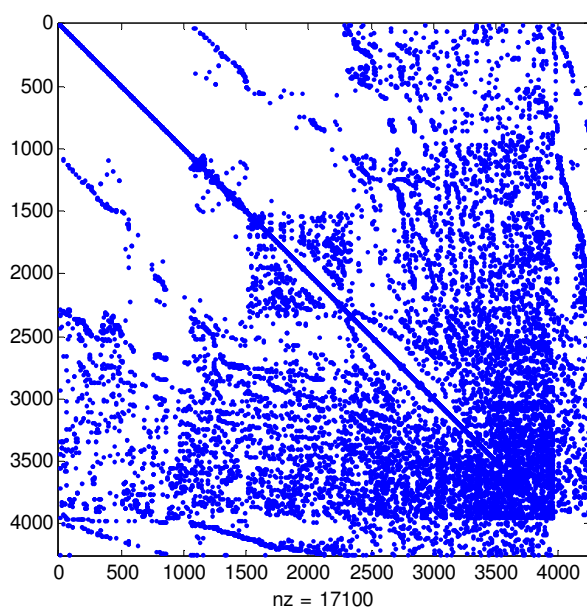
* αποτυχία σύγκλισης

Πίνακας 7.7: Χρόνος CPU σε msec, αριθμός ανακυκλώσεων και ακρίβεια (%) των επιμέρους μεθόδων για το δίκτυο FRCC-3949 ζυγών

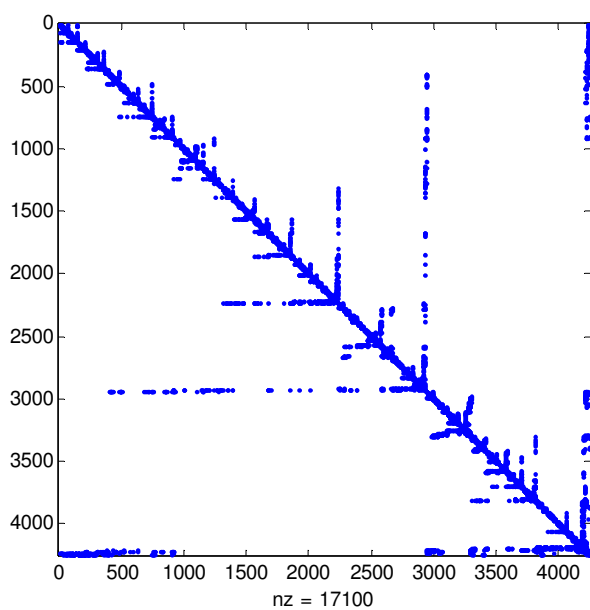
FRCC-3949 (Διαμόρφωση μετρήσεων 1)



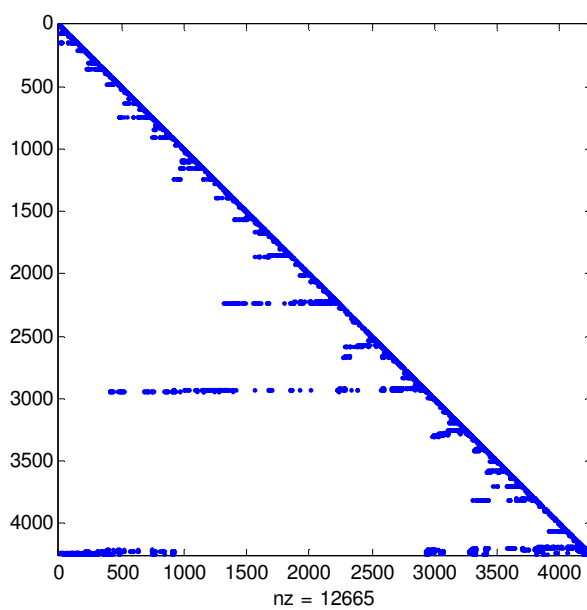
Σχήμα 7.5.1: Μήτρα F



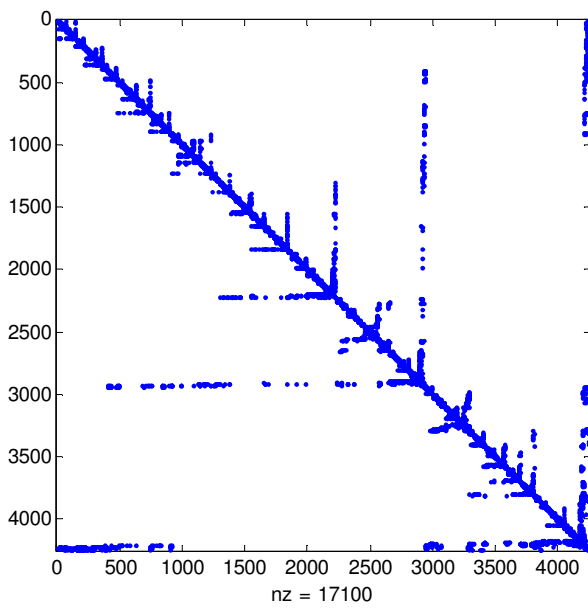
Σχήμα 7.5.2: Μήτρα \hat{F}



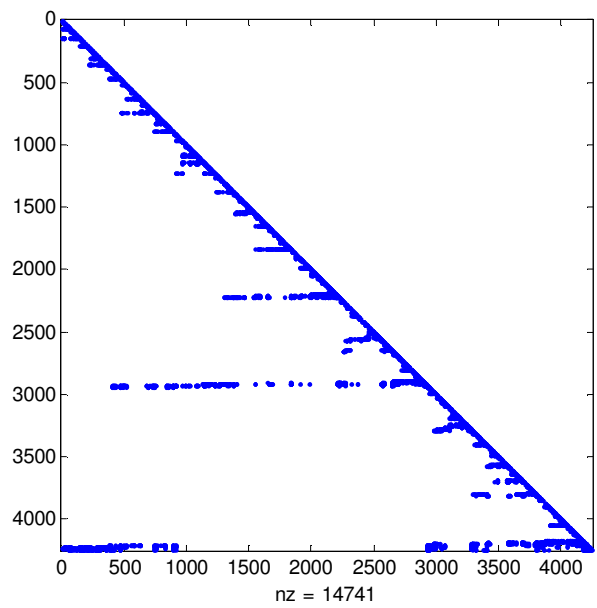
Σχήμα 7.5.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



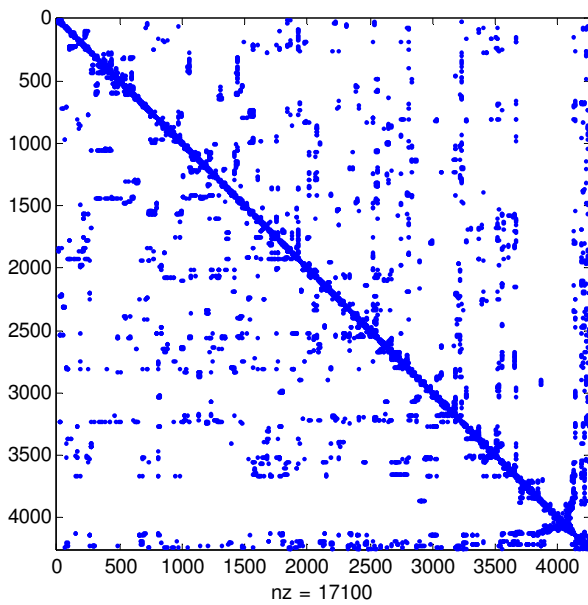
Σχήμα 7.5.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



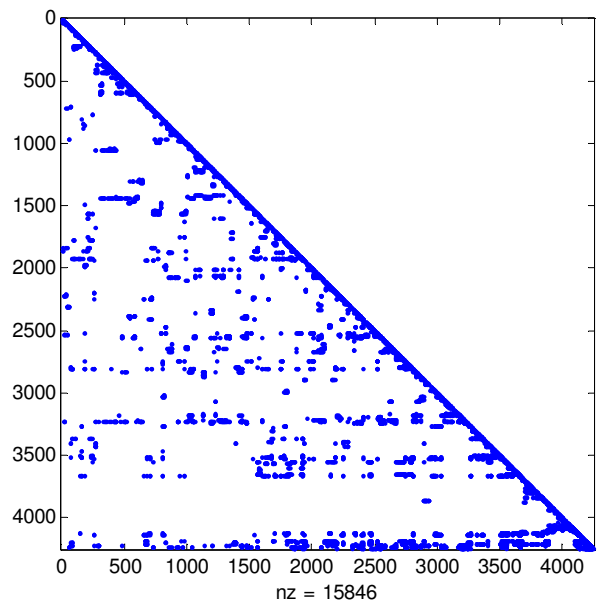
Σχήμα 7.5.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.5.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

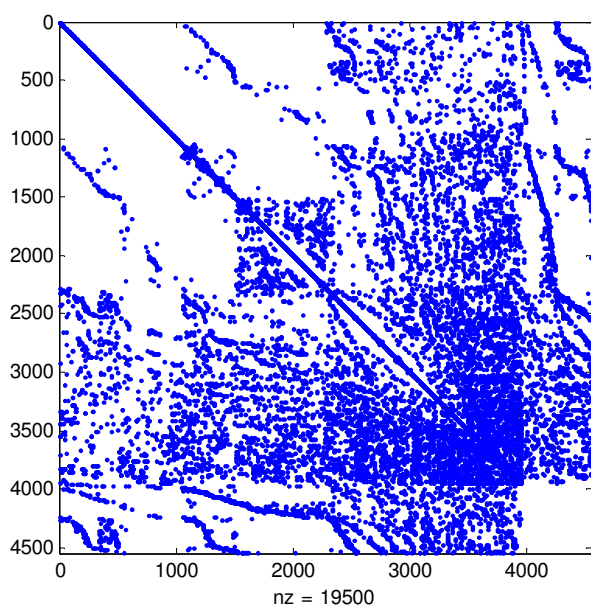


Σχήμα 7.5.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

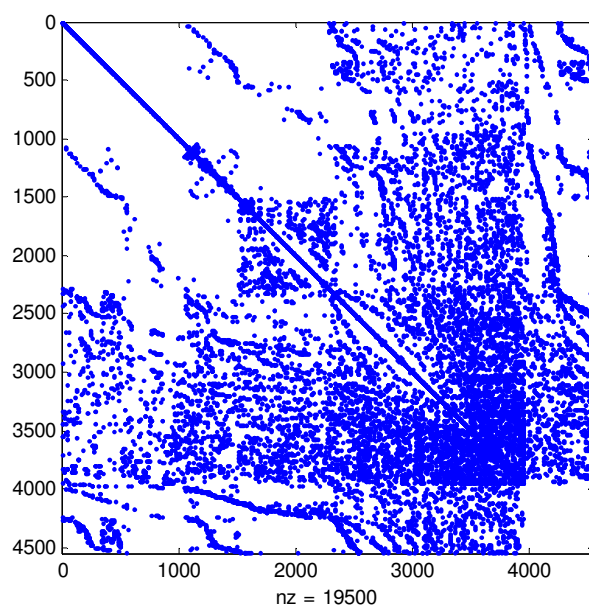


Σχήμα 7.5.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

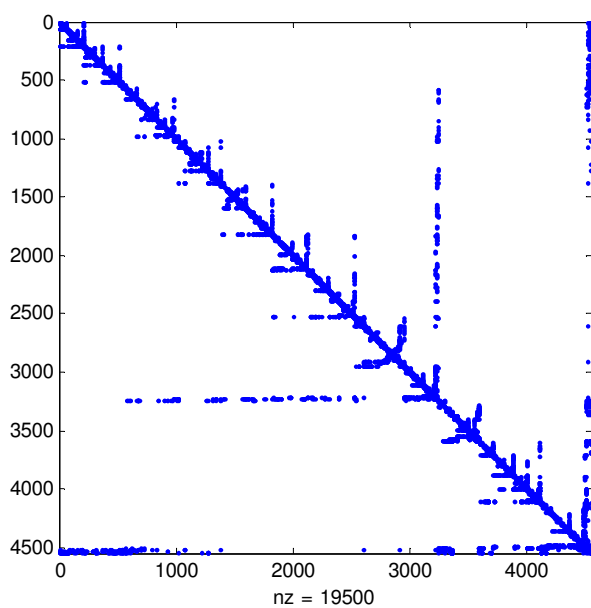
FRCC-3949 (Διαμόρφωση μετρήσεων 2)



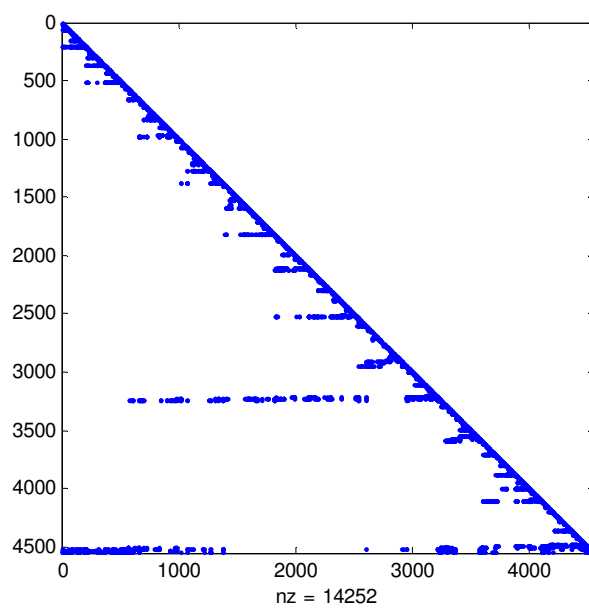
Σχήμα 7.6.1: Μήτρα F



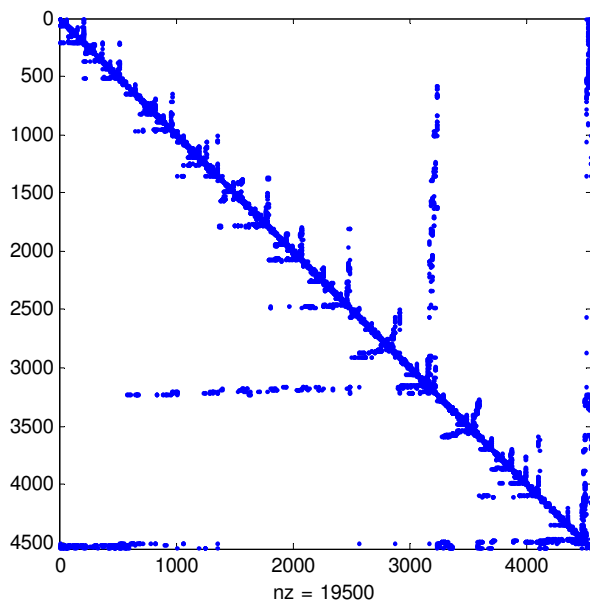
Σχήμα 7.6.2: Μήτρα \hat{F}



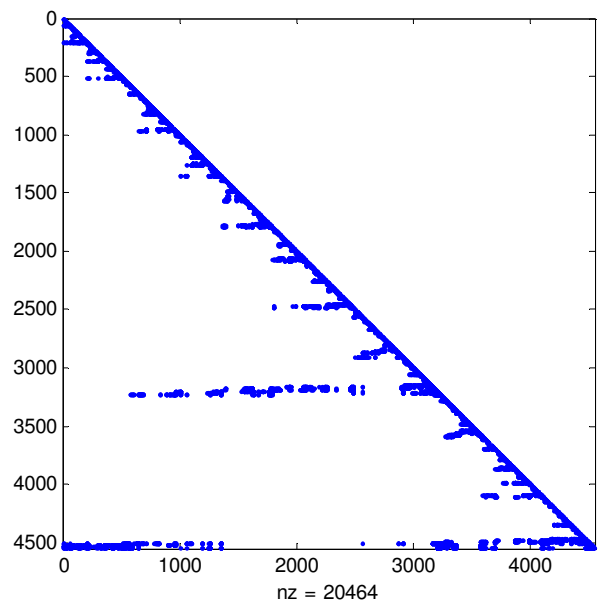
Σχήμα 7.6.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



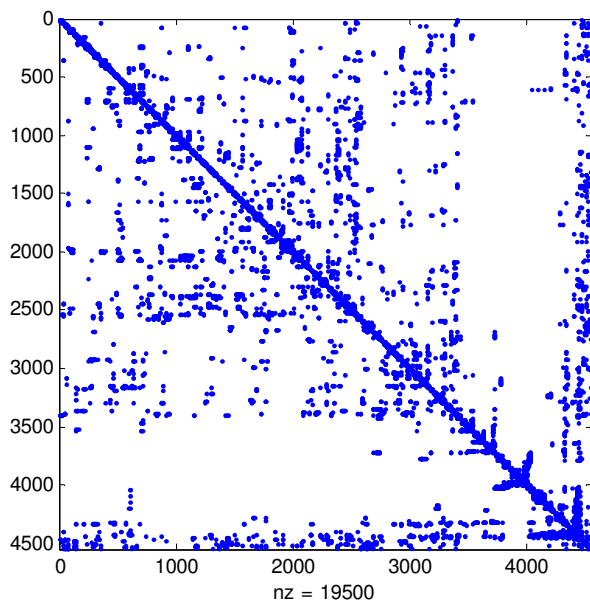
Σχήμα 7.6.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



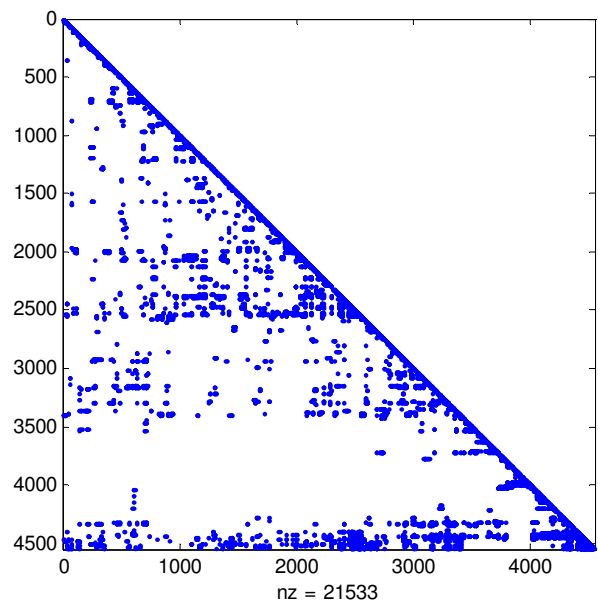
Σχήμα 7.6.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.6.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

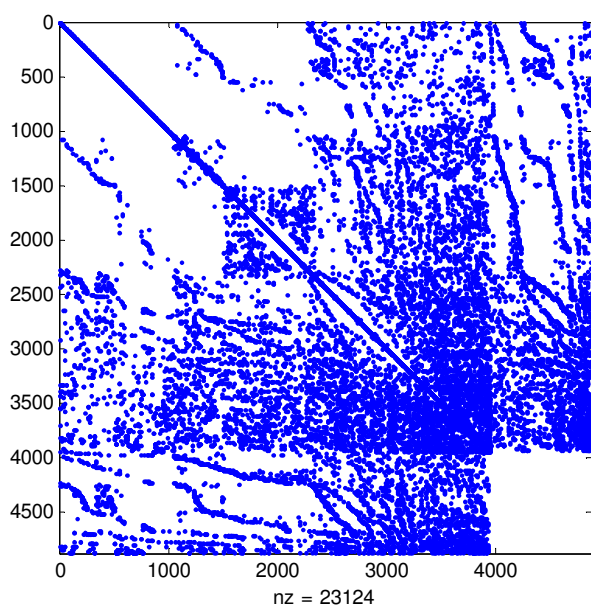


Σχήμα 7.6.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

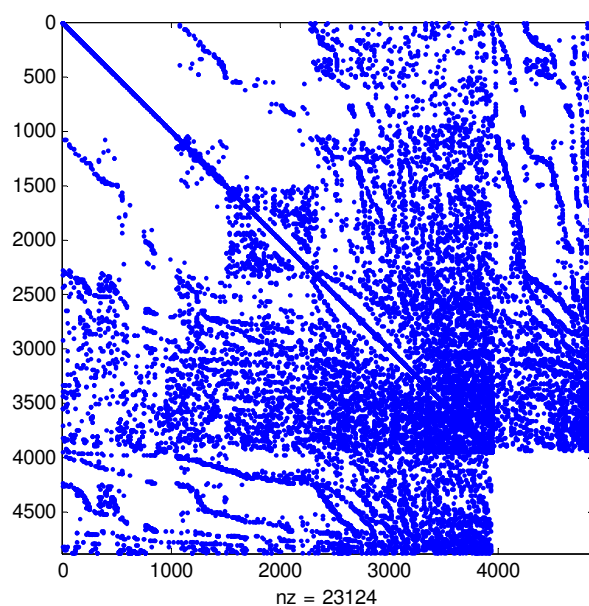


Σχήμα 7.6.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

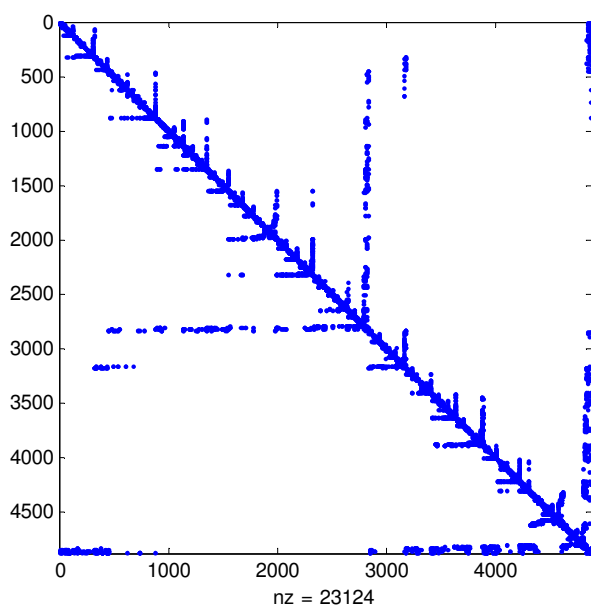
FRCC-3949 (Διαμόρφωση μετρήσεων 3)



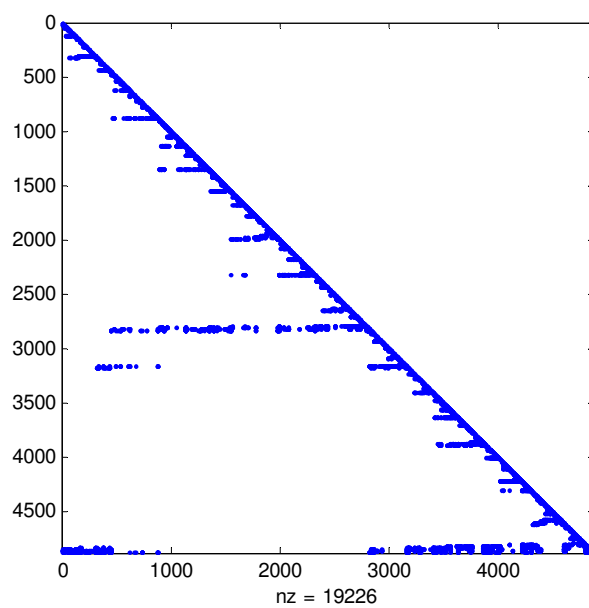
Σχήμα 7.7.1: Μήτρα F



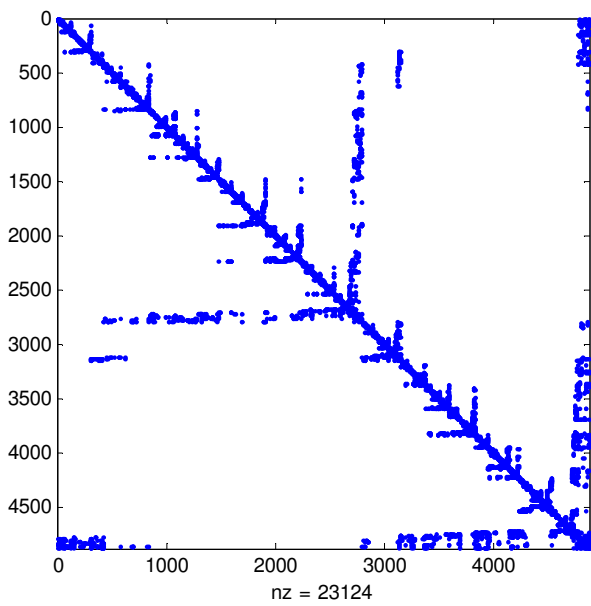
Σχήμα 7.7.2: Μήτρα \hat{F}



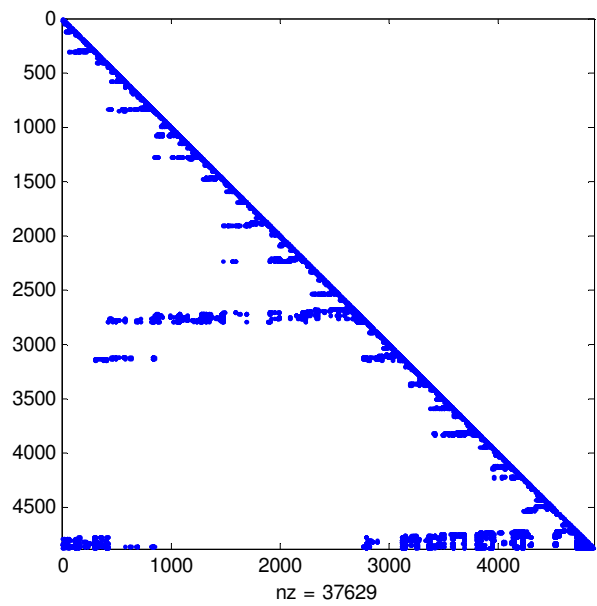
Σχήμα 7.7.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



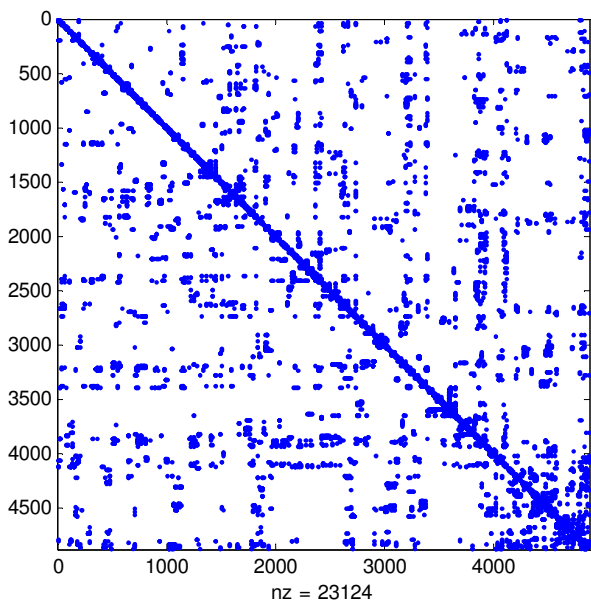
Σχήμα 7.7.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



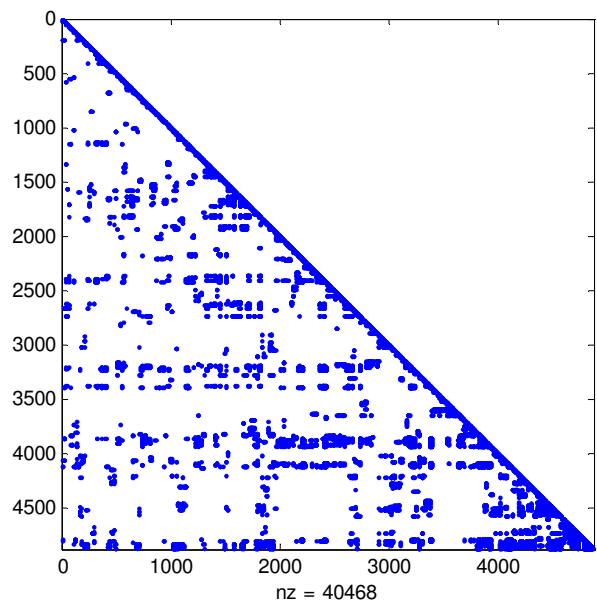
Σχήμα 7.7.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.7.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

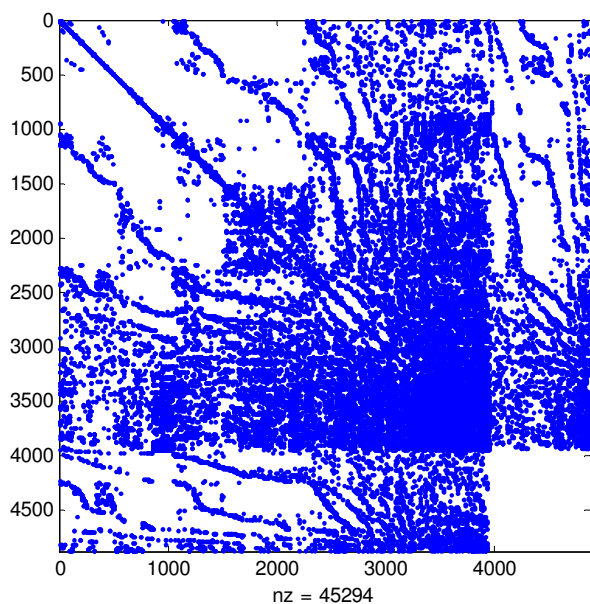


Σχήμα 7.7.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

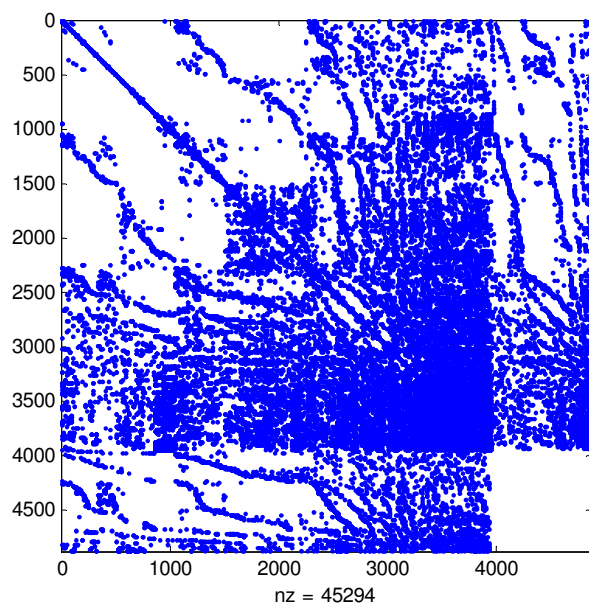


Σχήμα 7.7.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

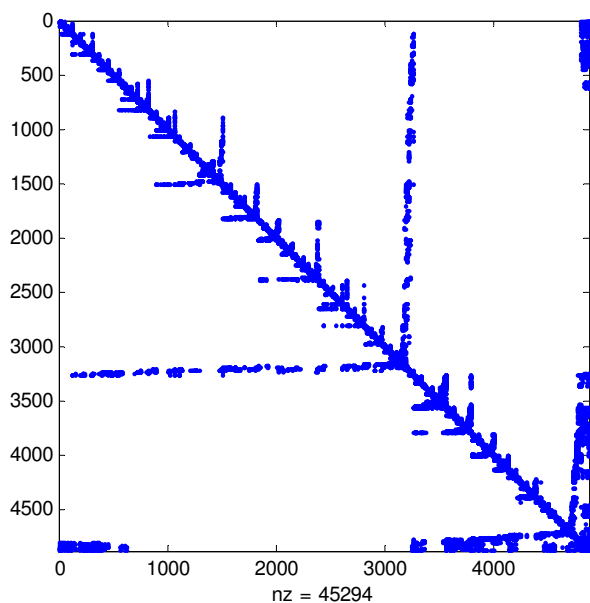
FRCC-3949 (Διαμόρφωση μετρήσεων 4)



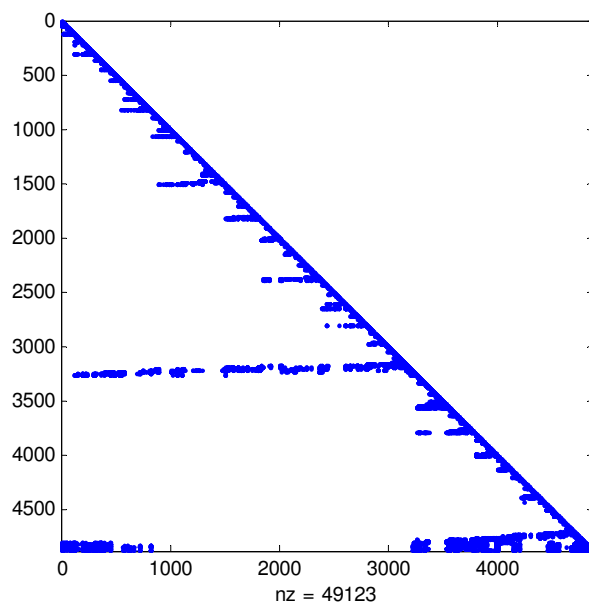
Σχήμα 7.8.1: Μήτρα F



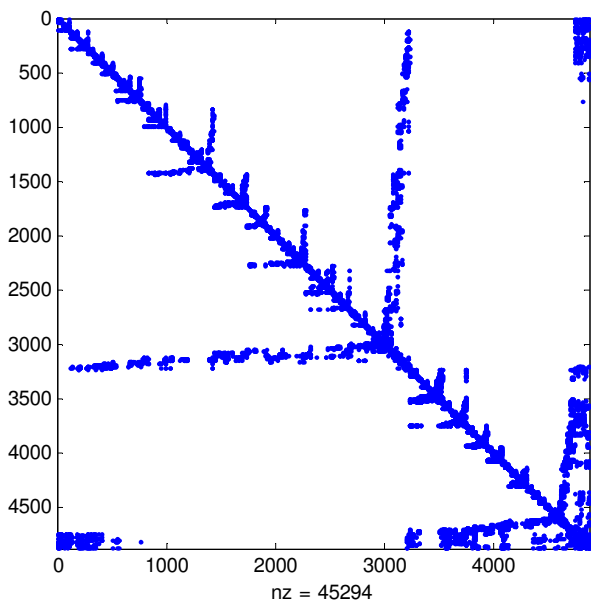
Σχήμα 7.8.2: Μήτρα \hat{F}



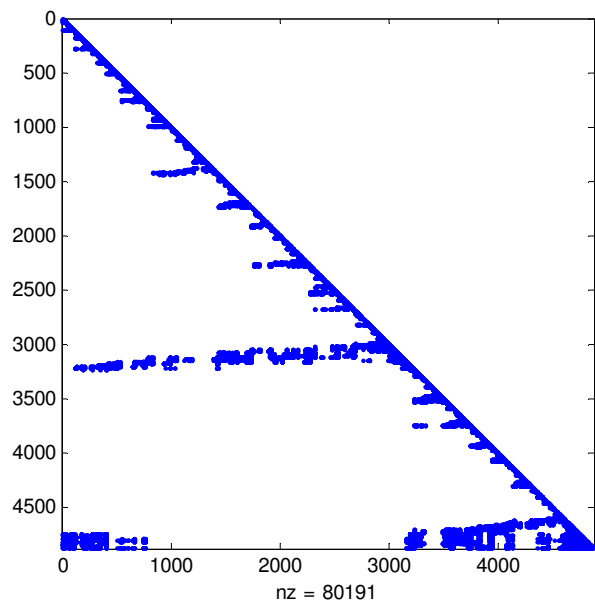
Σχήμα 7.8.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



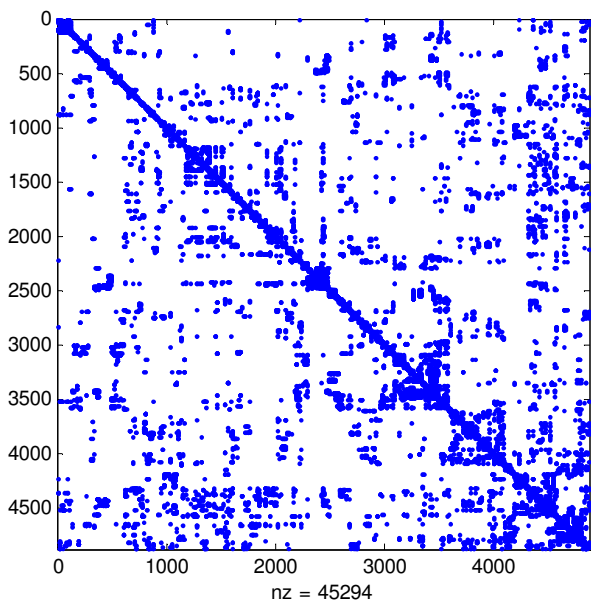
Σχήμα 7.8.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



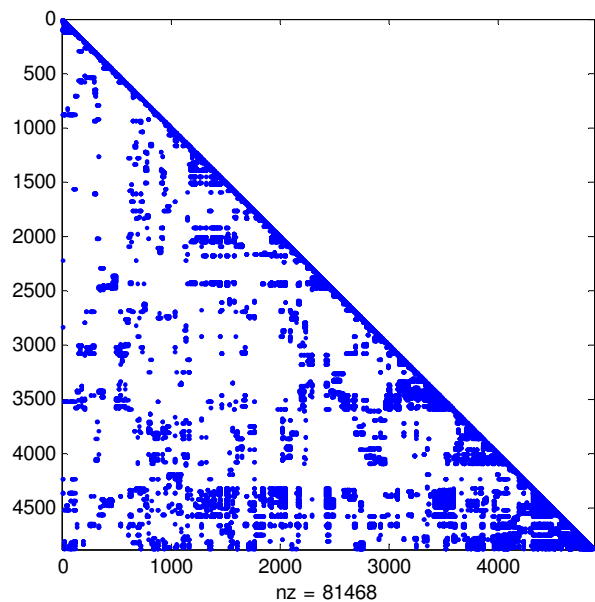
Σχήμα 7.8.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.8.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο

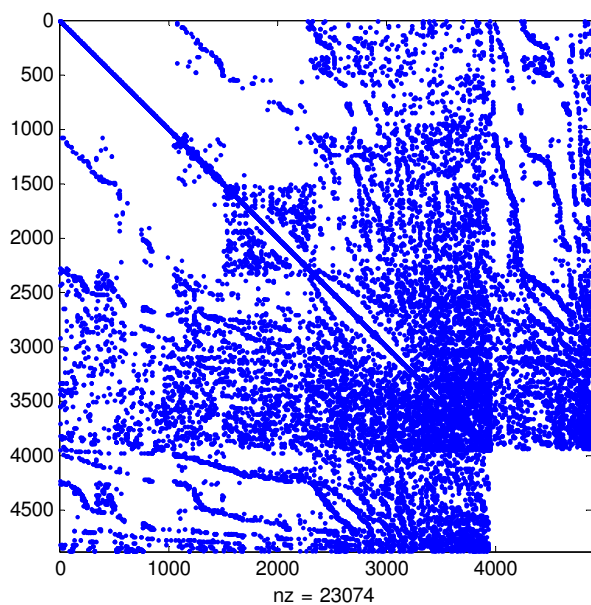


Σχήμα 7.8.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

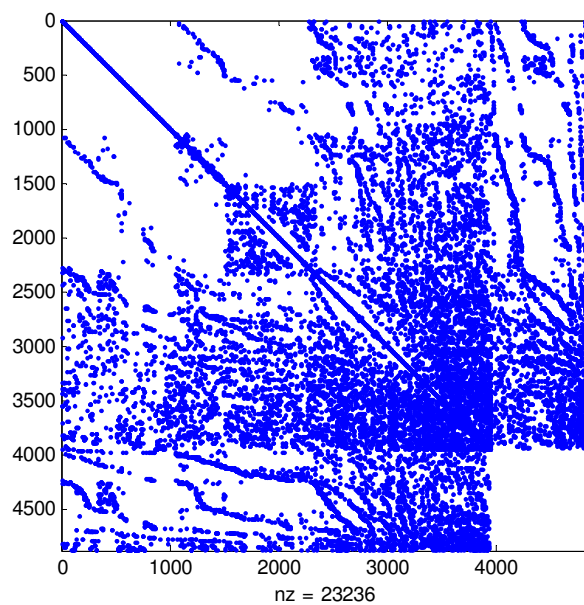


Σχήμα 7.8.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

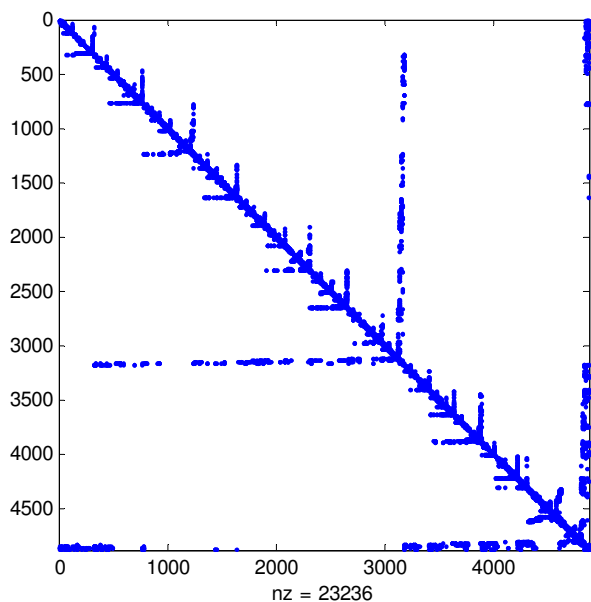
FRCC-3949 (Διαμόρφωση μετρήσεων 5)



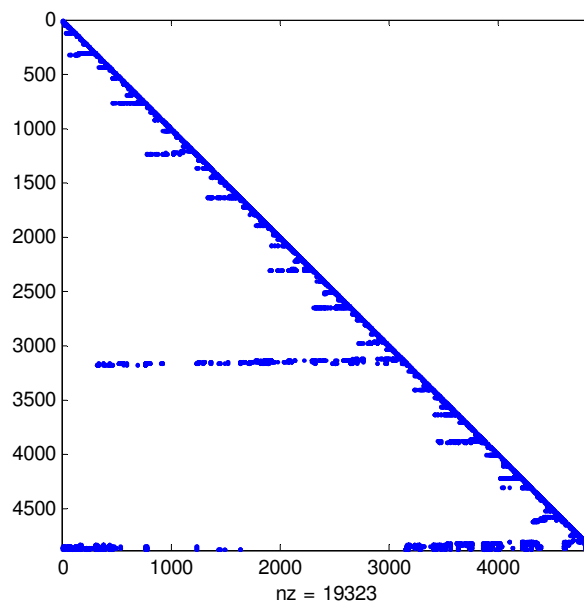
Σχήμα 7.9.1: Μήτρα F



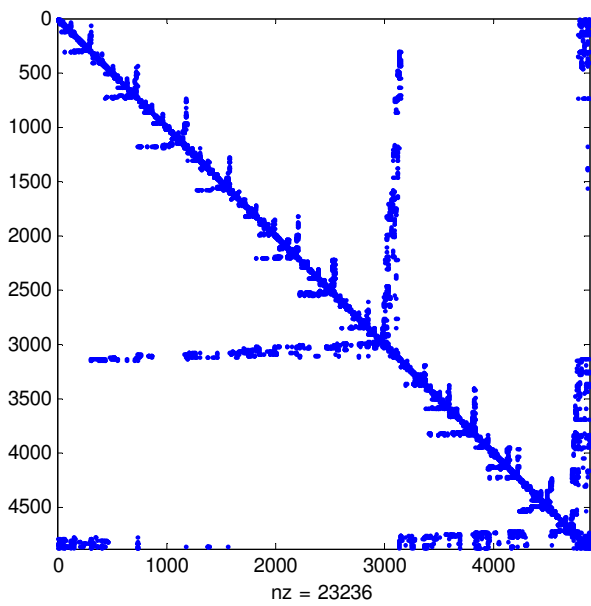
Σχήμα 7.9.2: Μήτρα \hat{F}



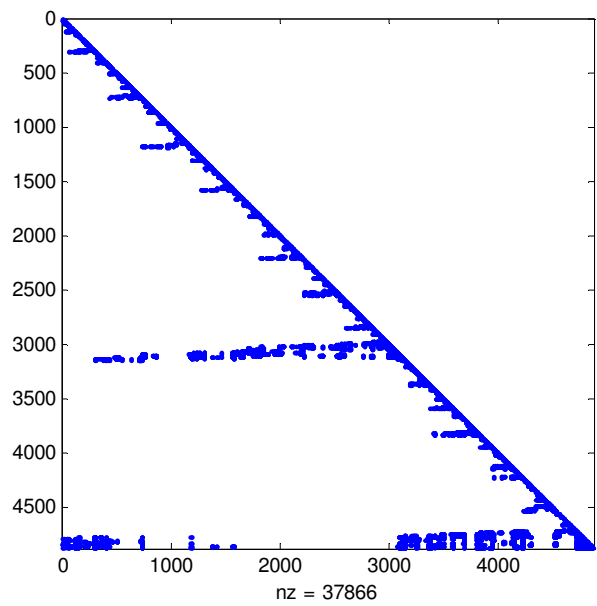
Σχήμα 7.9.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



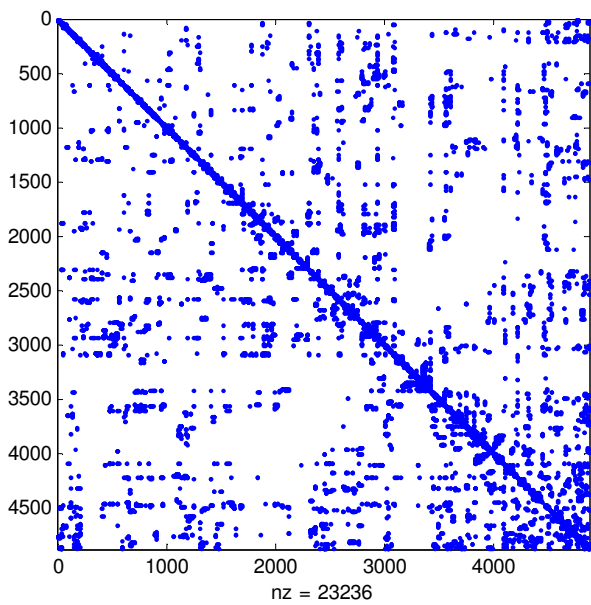
Σχήμα 7.9.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



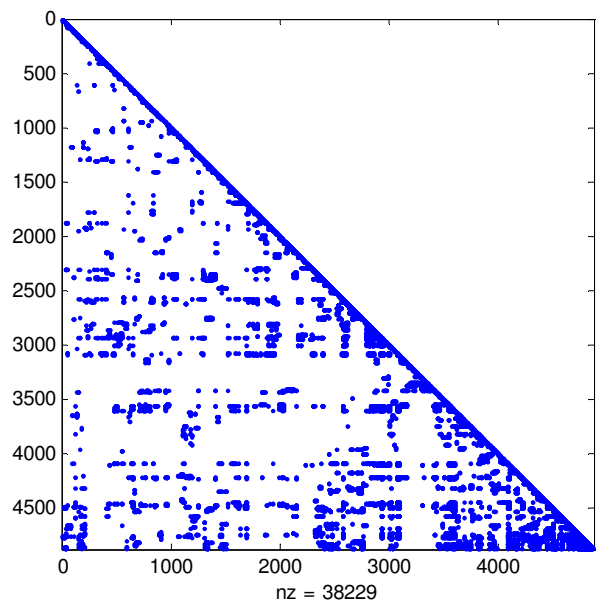
Σχήμα 7.9.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



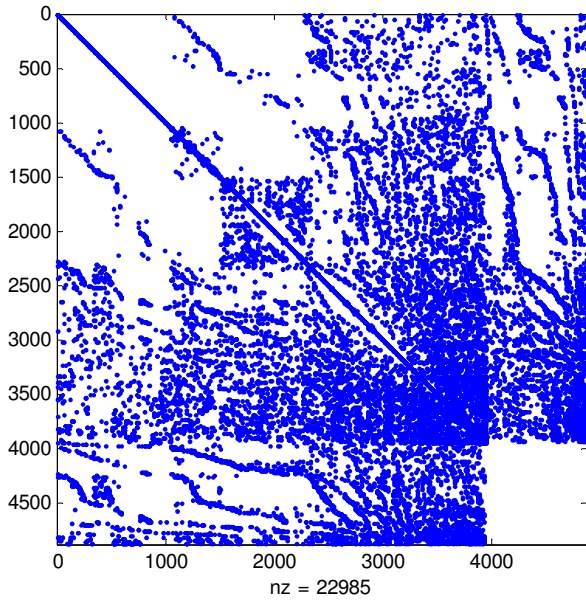
Σχήμα 7.9.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



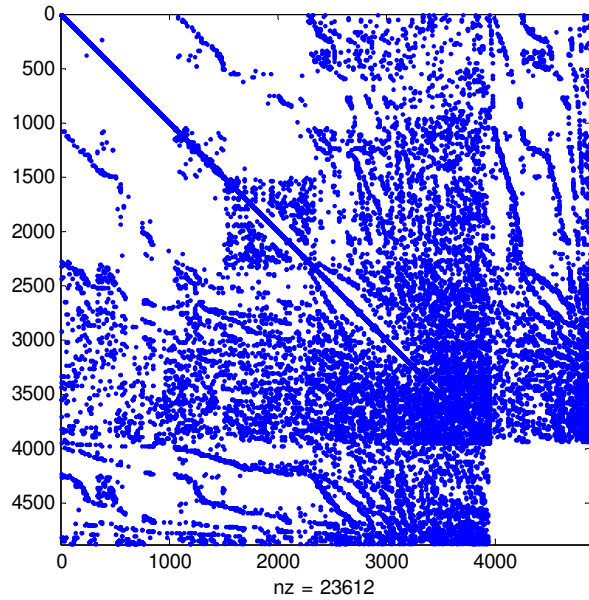
Σχήμα 7.9.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο



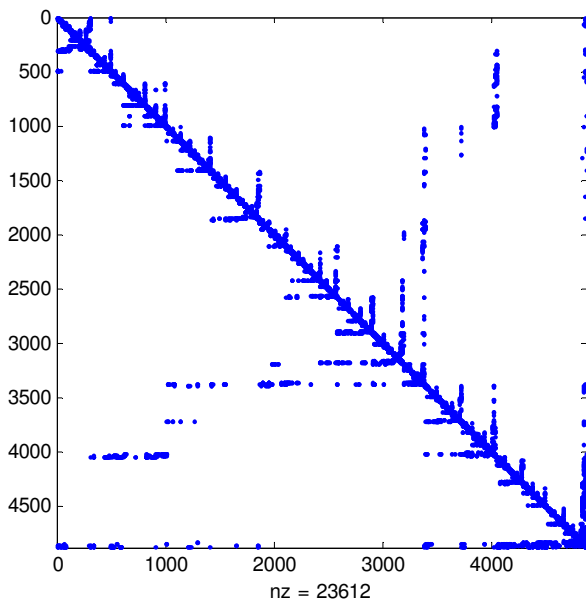
Σχήμα 7.9.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο



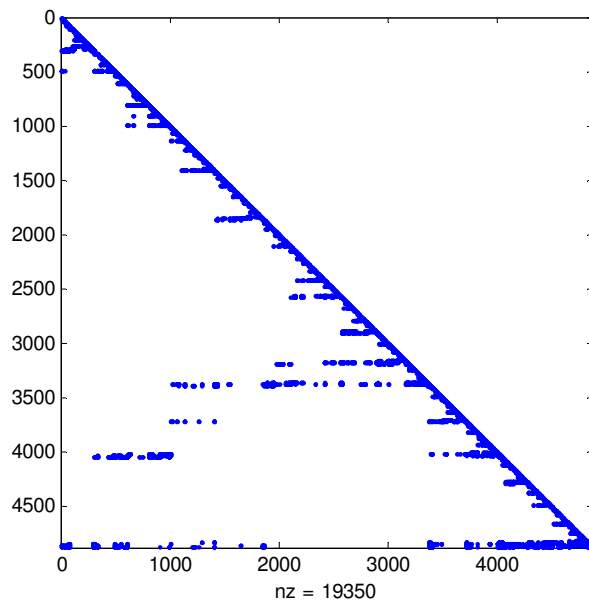
Σχήμα 7.10.1: Μήτρα F



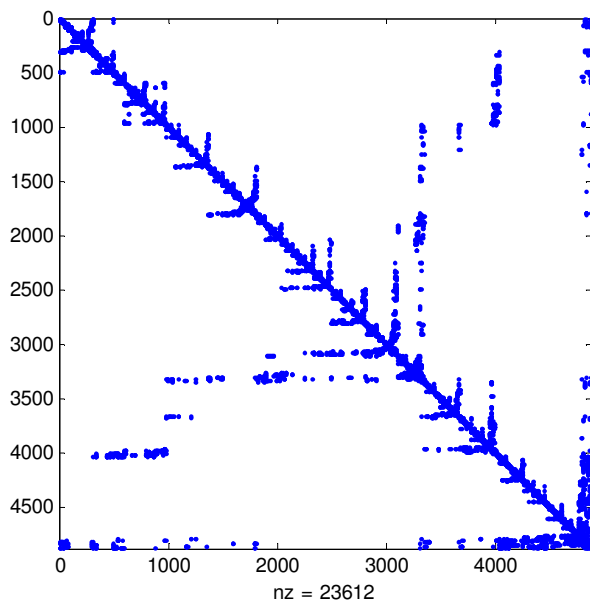
Σχήμα 7.10.2: Μήτρα \hat{F}



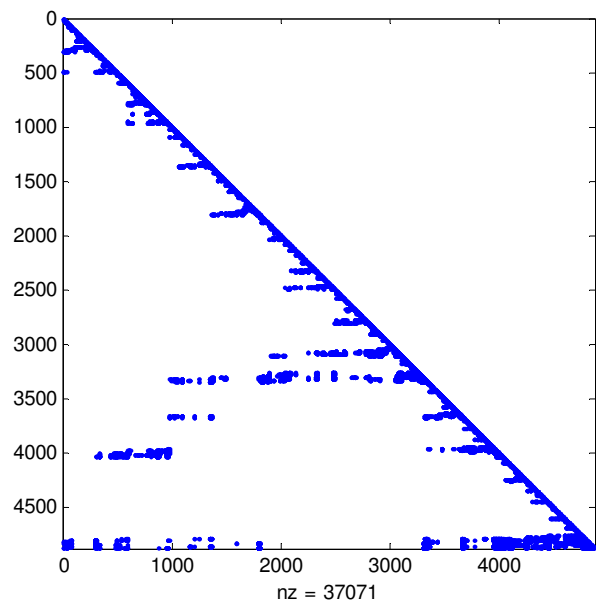
Σχήμα 7.10.3: Αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F}



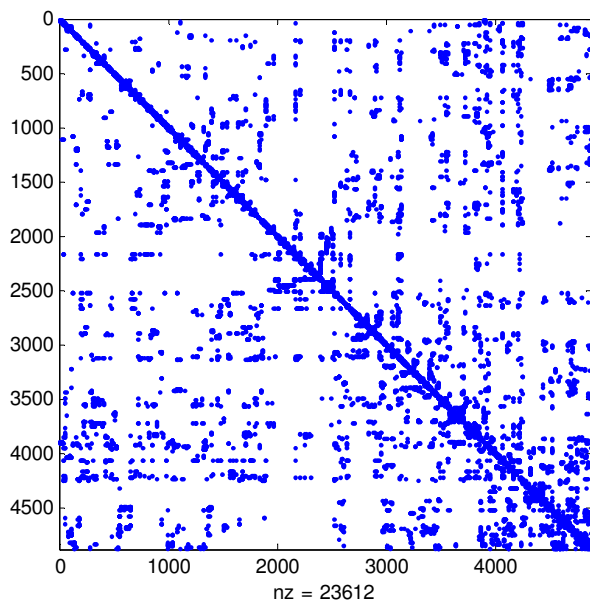
Σχήμα 7.10.4: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη χωρίς περιορισμό μήτρα \hat{F} (μη εφικτή παραγοντοποίηση)



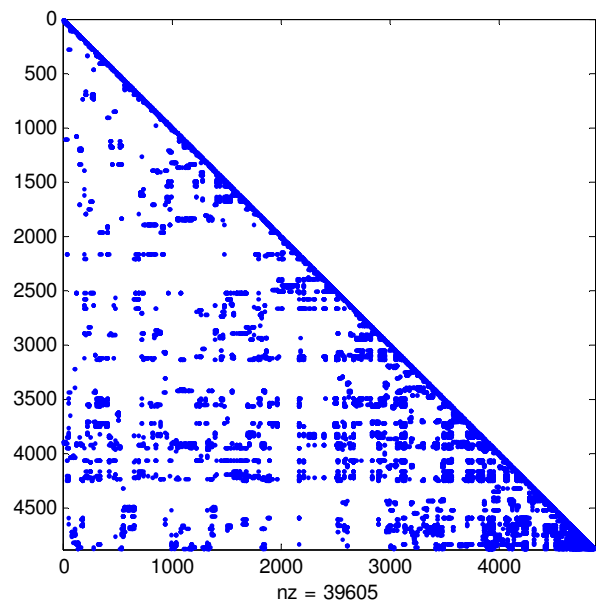
Σχήμα 7.10.5: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.10.6: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την IV μέθοδο



Σχήμα 7.10.7: Αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο



Σχήμα 7.10.8: Παράγοντας L που αντιστοιχεί στην αναδιατεταγμένη υπό περιορισμό μήτρα \hat{F} με βάση την V μέθοδο

Κεφάλαιο 8 – Επίλογος

8.1 Συμπέρασμα της εργασίας

Η προτεινόμενη μέθοδος για την επίλυση της εκτίμησης κατάστασης παρουσία ισοτικών περιορισμών βασίζεται στην ανάλυση παρατηρησιμότητας για την τροποποίηση της μήτρας συντελεστών F και, εν συνεχεία, στην αναδιάταξη υπό περιορισμό των κόμβων που αντιστοιχούν σε διαγώνια στοιχεία της τροποποιημένης μήτρας συντελεστών.

Με βάση τις συγκρίσεις που πραγματοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 7, η προτεινόμενη μέθοδος εμφανίζει καλύτερα χαρακτηριστικά ως προς την υπολογιστική επίδοση σε σχέση με τις εναλλακτικές υλοποιήσεις.

Μάλιστα, το γεγονός ότι η τροποποίηση της τελικής διάταξης κόμβων που προκύπτει από την εκτέλεση του αλγορίθμου διάταξης ελαχίστου βαθμού παρείχε ίδιας τάξης αποτελέσματα ως προς την αραιότητα του παράγοντα L σε σχέση με την εναλλακτική της ενσωμάτωσης του περιορισμού εντός του αλγορίθμου διάταξης, καθιστά την προτεινόμενη μέθοδο εύκολα υλοποιήσιμη σε ήδη εγκατεστημένους εκτιμητές κατάστασης.

8.2 Περαιτέρω διερεύνηση

Ενδιαφέρον προς περαιτέρω διερεύνηση εμφανίζει η χρησιμοποίηση άλλων αλγορίθμων για την αναδιάταξη των κόμβων της μήτρας συντελεστών \hat{F} με σκοπό τη διασφάλιση της αραιότητας του παράγοντα L .

Αφού σχηματιστούν οι εξισώσεις (8.1), η παραγοντοποίηση μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε εφαρμόζοντας τον περιορισμό στη διάταξη κόμβων που παρέχεται από οποιοδήποτε αλγόριθμο αναδιάταξης είτε ενσωματώνοντας τον περιορισμό εντός του αλγορίθμου.

$$\hat{F} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T R^{-1} \Delta z^k + C_1^T W_1^{-1} \Delta c_1^k \\ \Delta c^k \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} G + C_1^T W_1^{-1} C_1 & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Μία εναλλακτική προς τον αλγόριθμο ελαχίστου βαθμού μέθοδος για την αναδιάταξη κόμβων αποτελεί η εμφωλευμένη ανατομή.

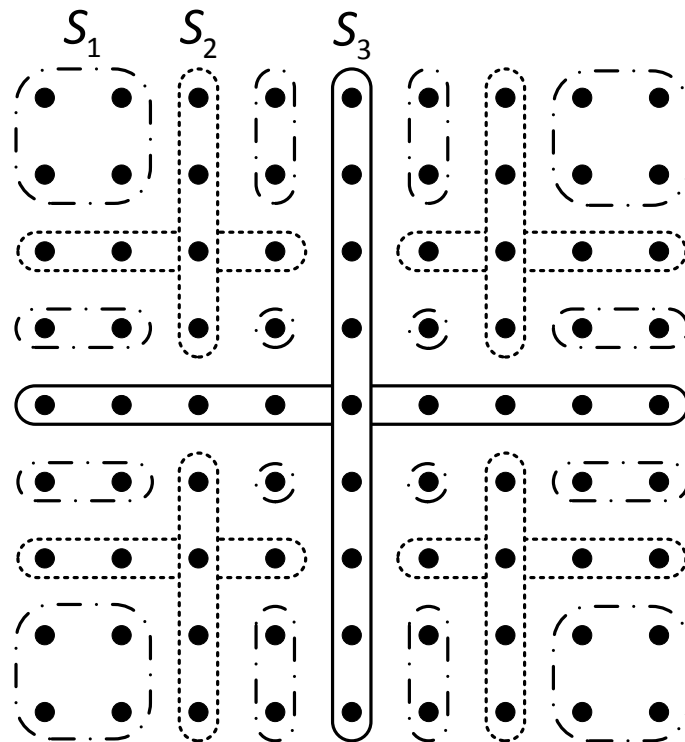
8.3 Εμφωλευμένη ανατομή

Η εμφωλευμένη ανατομή βασίζεται στην εύρεση ενός συνόλου κόμβων ενός γράφου, η απομάκρυνση των οποίων οδηγεί στη δημιουργία τουλάχιστον δύο νέων συνεκτικών επιμέρους γράφων, στους οποίους η παραγοντοποίηση μπορεί να εκτελεστεί ξεχωριστά.

8.3.1 Διαχωριστής γράφου

Το σύνολο των κόμβων των οποίων η απομάκρυνση οδηγεί στη δημιουργία επιμέρους μικρότερων συνεκτικών γράφων καλείται διαχωριστής γράφου. Η εύρεση διαχωριστών πραγματοποιείται μέσω αναδρομής, δηλαδή σε πρώτο στάδιο επιλέγεται ένας διαχωριστής για τον αρχικό γράφο και, εν συνεχεία, για κάθε νέα συνιστώσα επιλέγεται κατάλληλος διαχωριστής.

Ένα παράδειγμα διαμέρισης ενός 9×9 πλέγματος κόμβων με τη χρήση διαδοχικών διαχωριστών S_3 , S_2 και S_1 παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 8.1: Διαμέριση 9×9 πλέγματος

8.3.2 Διαδικασία αναδιάταξης κόμβων

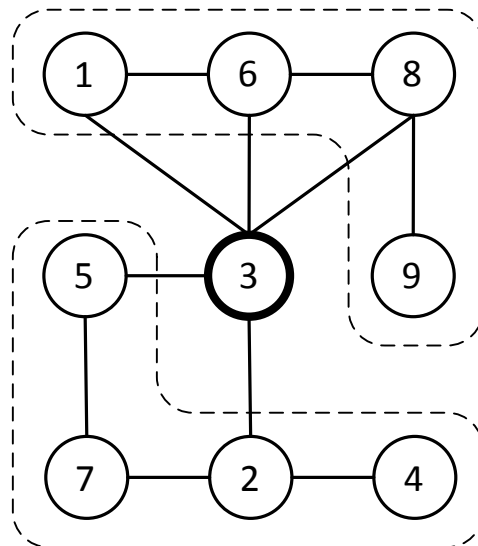
Έστω γράφος G με n κόμβους. Η διαδικασία αναδιάταξης κόμβων με τη χρήση εμφωλευμένης ανατομής αριθμεί τους κόμβους του γράφου με τιμές από 1 μέχρι n ως εξής:

- Επιλέγεται διαχωριστής S του γράφου G , ώστε η απομάκρυνσή του να οδηγεί στη δημιουργία συνεκτικών επιμέρους γράφων T_1, T_2, \dots, T_k .
- Αριθμούνται με τυχαία σειρά οι κόμβοι που συγκροτούν το διαχωριστή S με τιμές από $n - |S| + 1$ μέχρι και n .

- Αναδρομικά, με την εύρεση νέων διαχωριστών σε κάθε νέα συνεκτική συνιστώσα αριθμούνται οι κόμβοι: στην T_1 με τιμές από 1 μέχρι $|T_1|$, T_2 από $|T_1|+1$ μέχρι $|T_1|+|T_2|$ και ούτω καθεξής.
- Η αναδρομική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι την αρίθμηση όλων των κόμβων. Τυπικά, η αναδρομή σταματάει όταν ο αριθμός των προς αρίθμηση κόμβων σε μία συνεκτική συνιστώσα του αρχικού γράφου λάβει μία οριακή ελάχιστη τιμή. Οι κόμβοι σε αυτή τη συνιστώσα λαμβάνουν αριθμούς κατά τυχαία σειρά.
- Η τελική αναδιάταξη πραγματοποιείται με βάση την ταξινόμηση των κόμβων με αυξανόμενη αρίθμηση.

Η αποδοτικότητα της διάταξης που προκύπτει από την εμφωλευμένη ανατομή ως προς την εξασφάλιση της αραιότητας του παράγοντα L έγκειται στην επιλογή των διαχωριστών σε κάθε στάδιο της αναδρομής για κάθε επιμέρους συνεκτική συνιστώσα. Η αναλυτική περιγραφή των μεθόδων επιλογής διαχωριστών δεν ανήκει στα πλαίσια του σκοπού του παρόντος κεφαλαίου. Ωστόσο, σε γενικές γραμμές η στρατηγική επιλογής έγκειται στην αναζήτηση του μικρότερου δυνατού αριθμού κόμβων προς το σχηματισμό διαχωριστή ώστε ο γράφος να διασπαστεί σε δύο τουλάχιστον τμήματα με σχεδόν ίδιο αριθμό κόμβων.

Για παράδειγμα, στο γράφο του σχήματος 8.2 η επιλογή του κόμβου 3 ως διαχωριστή οδηγεί σε διαμέριση με δύο επιμέρους συνεκτικές συνιστώσες αποτελούμενες από τον ίδιο αριθμό κόμβων $T_1 = \{1,6,8,9\}$ και $T_2 = \{2,4,5,7\}$. Ο κόμβος 3 αριθμείται με τη μεγαλύτερη τιμή, δηλαδή με το 9, και, συνεπώς, στην αναδιάταξη κόμβων θα βρίσκεται στην τελευταία θέση.



Σχήμα 8.2: Επιλογή διαχωριστή και διαμέριση γράφου

8.3.3 Περιορισμός στην αναδιάταξη κόμβων

Η εφαρμογή του περιορισμού στην αναδιάταξη κόμβων για την εξασφάλιση εφικτής αριθμητικής παραγοντοποίησης του συστήματος εξισώσεων (8.1) μπορεί να γίνει απευθείας στην τελική διάταξη που παρέχεται από τον αλγόριθμο εμφωλευμένης ανατομής, αλλάζοντας θέση σε όσους C – κόμβους έχουν διαταχθεί πριν από γειτονικούς προς αυτούς G – κόμβους.

Εναλλακτικά, η ενσωμάτωση του περιορισμού εντός του αλγορίθμου της εμφωλευμένης ανατομής μπορεί να πραγματοποιηθεί αποτρέποντας έναν G – κόμβο να συμπεριληφθεί σε τρέχοντα διαχωριστή εάν οι γειτονικοί του C – κόμβοι δεν έχουν συμπεριληφθεί σε προηγούμενους ή στον τρέχοντα διαχωριστή. Σε αντίθετη περίπτωση, ο G – κόμβος θα αριθμηθεί με μεγαλύτερο αριθμό σε σχέση με έναν τουλάχιστον γειτονικό του C – κόμβο με αποτέλεσμα η διάταξη που θα προκύψει να οδηγεί σε μη εφικτή παραγοντοποίηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] A. Abur and A. G. Exposito, "Power System State Estimation: Theory and Implementation", New York: Marcel Dekker, 2004.
- [2] J. W. Gu, K. A. Clements, G. R. Krumpholz, and P.W. Davis, "The solution of ill-conditioned power system state estimation problems", *IEEE Trans. Power App. Syst.*, vol. PAS-102, pp. 3473-3480, Oct.1983.
- [3] F. C. Aschmoneit, N. M. Peterson, and E. C. Adrian, "State estimation with equality constraints", in *Proc. 10th PICA Conf.*, May 1977, pp.427-430.
- [4] F. F.Wu, W.-H. E. Liu, and S.-M. Lun, "Observability analysis and bad data processing for state estimation with equality constraints", *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 3, no. 2, pp. 541-548, May 1988.
- [5] A. G. Phadke, J. S. Thorp, and K. J. Karimi, "State estimation with phasor measurements", *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 1, no. 1, pp.233-238, Feb. 1986.
- [6] T. S. Bi, X. H. Qin, and Q. X. Yang, "A novel hybrid state estimator for including synchronized phasor measurements", *Elect. Power Syst. Res.*, vol. 78, pp. 1343-1352, 2008.
- [7] S. Chakrabarti, E. Kyriakides, G. Ledwich, and A. Ghosh, "Inclusion of PMU current phasor measurements in a power system state estimator", *IET Gen., Transm., Distrib.*, vol. 4, no. 10, pp. 1104-1115, 2010.
- [8] G. N. Korres, "Observability analysis based on echelon form of a reduced dimensional Jacobian matrix", *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 4, pp. 2572-2573, Nov. 2011.
- [9] G. N. Korres, "A Gram Matrix-Based Method for Observability Restoration", *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 4, pp. 2569-2571, Nov. 2011.
- [10] G. N. Korres and N. M. Manousakis, "State estimation and bad data processing for systems including PMU and SCADA measurements", *Elect. Power Syst. Res.*, vol. 81, pp. 1514-1524, 2011.
- [11] G. N. Korres and N. M. Manousakis, "Observability analysis and restoration for state estimation using SCADA and PMU data", *Power and Energy Society General Meeting*, 2012 IEEE.
- [12] G. N. Korres and T. A. Alexopoulos, "A Constrained Ordering for Solving the Equality Constrained State Estimation", *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 4, pp. 1998-2005, Nov. 2012.
- [13] J. A. George and J.W.-H. Liu, "Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems", Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- [14] M. Benzi, G. H. Golub, and J. Liesen, "Numerical solution of saddle point problems", *Acta Numer.*, vol. 14, pp. 1-137, 2005.

- [15] C. Greif, G. H. Golub, and J. M. Varah, "Augmented lagrangian techniques for solving saddle point linear systems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 27, pp. 779-792, 2003.
- [16] M. Tuma, "A note on the LDL^T decomposition of matrices from saddle-point problems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 23, no. 4, pp. 903-915, 2002.
- [17] A. C. de Niet and F. W. Wubs, "Numerically stable LDL^T -factorization of F -type saddle point matrices", *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 29, pp. 208-234, 2009.
- [18] HSL, A collection of Fortran Codes for Large-Scale Scientific Computation, 2007. [Online]. Available: <http://www.hsl.rs.ac.uk>.
- [19] I. S. Duff, N. I. M. Gould, J. K. Reid, J. A. Scott, and K. Turner, "The factorization of sparse symmetric indefinite matrices," *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 11, no. 2, pp. 181-204, 1991.
- [20] I. S. Duff, "MA57-A code for the solution of sparse symmetric definite and indefinite systems," *ACM Trans. Math. Softw.*, vol. 30, no. 2, pp. 118-144, Jun. 2004.
- [21] P. Amestoy, T. A. Davis, and I. S. Duff, "An approximate minimum degree ordering algorithm", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 17, no. 4, pp. 886-905, Dec. 1996.
- [22] P. Amestoy, T. A. Davis, and I. S. Duff, "Algorithm 837: AMD, An approximate minimum degree ordering algorithm", *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol 30, no. 3, pp. 381-388, Sept. 2004.
- [23] R. Bridson, "An Ordering Method for the Direct Solution of Saddle-Point Matrices". [Online]. Available: <http://people.cs.ubc.ca/~rbridson/kktdirect/kktdirect.pdf>.
- [24] P. E. Gill, W. Murray, and M. Wright, "Numerical Linear Algebra and Optimization: Volume 1", Redwood City, California: Addison-Wesley, 1991.
- [25] [Online]. Available: <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>.
- [26] PowerWorld Test Case Archives. [Online]. Available: <http://www.powerworld.com>.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ο προσδιορισμός κάθε γραμμής k του παράγοντα L και κάθε διαγώνιου στοιχείου d_{kk} της μήτρας D απαιτεί τις ακόλουθες ενέργειες:

Αλγόριθμος 1 - LDL^T παραγοντοποίηση συμμετρικής μήτρας $A(n \times n)$

```
for  $k=1$  to  $n$ 
    Solve  $L_{1:k-1,1:k-1}y = A_{1:k-1,k}$  for  $y$ 
     $L_{k,1:k-1} = (D_{1:k-1,1:k-1}^{-1}y)^T$ 
     $\ell_{kk} = 1$ 
     $d_{kk} = a_{kk} - L_{k,1:k-1}y$ 
end for
```

Στον ανωτέρω αλγόριθμο ο υπολογισμός του διανύσματος y στο σύστημα εξισώσεων $L_{1:k-1,1:k-1}y = A_{1:k-1,k}$ απαιτεί το μεγαλύτερο υπολογιστικό φόρτο σε σχέση με τα υπόλοιπα βήματα. Ορίζονται οι ποσότητες \mathcal{Y} και \mathcal{A}_k ως τα σύνολα που περιλαμβάνουν τους δείκτες των μη μηδενικών στοιχείων στο διάνυσμα y και στη στήλη $A_{1:k-1,k}$, δηλαδή περιγράφουν τη συμβολική δομή τους. Για να υπολογιστεί αποδοτικά το διάνυσμα y , πρέπει πρώτα να είναι γνωστή η συμβολική δομή του, δηλαδή το σύνολο \mathcal{Y} .

Για κάθε στήλη, έστω i , του παράγοντα $L_{1:k-1,1:k-1}$ ορίζεται η ακόλουθη ποσότητα:

$$parent(i) = \min\{j : (i < j < k-1) \cap (\ell_{ji} \neq 0)\}$$

Ορίζεται ως δέντρο απαλοιφής για τον παράγοντα $L_{1:k-1,1:k-1}$ ο κατευθυνόμενος γράφος $G=(V,E)$ με $V=\{1,\dots,k-1\}$ και $E=\{(j,i) \in V \times V : i = parent(j)\}$. Οι ακμές (j,i) υποδηλώνουν κατεύθυνση από τον κόμβο j προς τον κόμβο i . Ως ρίζα του δέντρου ορίζεται ο κόμβος i για τον οποίο δεν υπάρχει κόμβος $parent(i)$. Σε αυτή την περίπτωση αποδίδεται η τιμή $parent(i) = \infty$. Σημειώνεται ότι στο σημείο αυτό ο όρος δέντρο χρησιμοποιείται καταχρηστικά, καθώς είναι δυνατό ο γράφος G να προκύψει ως δάσος.

Η δομή του διανύσματος y προκύπτει από την ένωση όλων των κόμβων που συγκροτούν μονοπάτια από οποιοδήποτε κόμβο i , όπου το στοιχείο $A_{i,k}$ είναι μη μηδενικό, προς τη ρίζα του δέντρου απαλοιφής. Για τη δημιουργία των μονοπατιών, το δέντρο απαλοιφής διασχίζεται ως εξής: Επιλέγεται οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο $A_{i,k}$ και ακολουθείται το μονοπάτι από τον κόμβο i προς τη ρίζα του δέντρου. Οι κόμβοι που συγκροτούν το μονοπάτι εισάγονται διαδοχικά σε στοίβα, με τον κόμβο i να βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας και τη ρίζα του δέντρου στο τέλος. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $A_{i,k}$ με


```

void ldl_symbolic (int n, int Ap[ ], int Ai[ ], int Lp[ ],
int Parent[ ], int Lnz[ ], int Flag[ ]){
    int i, k, p, p2;
    for (k = 0; k < n; k++){
        /* Η δομή της γραμμής L(k,:) προσδιορίζεται με βάση τους κόμβους
        που είναι προσβάσιμοι από τους κόμβους που αντιστοιχούν σε μη
        μηδενικά στοιχεία της στήλης A(0:k-1,k) */
        /* Ο κόμβος-πατέρας του κόμβου k δεν είναι γνωστός */
        Parent[k] = -1;
        /* Σημειώνεται ο κόμβος k ως κόμβος που έχει προσπελαστεί */
        Flag[k] = k;
        /* Αρχικοποιείται ο μετρητής μη μηδενικών στοιχείων
        της στήλης k του παράγοντα L */
        Lnz[k] = 0;
        p2 = Ap[k+1] ;
        for (p = Ap[k]; p < p2; p++){
            i = Ai[p];
            if (i < k)
                /* Διασχίζεται το μονοπάτι από τον κόμβο i
                προς τη ρίζα του δέντρου απαλοιφής */
                for (; Flag[i] != k; i = Parent[i]){
                    if (Parent[i] == -1)
                        Parent[i] = k;
                    /* Το στοιχείο L(k,i) είναι μη μηδενικό) */
                    Lnz[i]++;
                    /* Σημειώνεται ο κόμβος i ως προσπελασμένος */
                    Flag[i] = k;
                }
        }
    }
    /* Σχηματίζεται ο πίνακας Lp για την αναπαράσταση του παράγοντα L
    στη μορφή Harwell-Boeing */
    Lp [0] = 0;
    for (k = 0; k < n; k++)
        Lp[k+1] = Lp[k] + Lnz[k];
}

```

Ο πίνακας Parent περιγράφει το δέντρο απαλοιφής ως εξής:

$$\text{Parent}[i] = k, \text{ αν ο κόμβος } k \text{ είναι κόμβος-πατέρας του } i$$

Ο πίνακας Lnz[k] παρέχει τον αριθμό των μη μηδενικών της στήλης k του παράγοντα L, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τα μοναδιαία διαγώνια στοιχεία ℓ_{kk} .

Ο αριθμός των πράξεων κινητής υποδιαστολής που απαιτούνται για τον υπολογισμό του παράγοντα L κατά την αριθμητική παραγοντοποίηση προκύπτει από το αποτέλεσμα της συμβολικής παραγοντοποίησης ως:

$$\sum_{k=0..n-1} [\text{Lnz}[k](\text{Lnz}[k]+2)]$$

Συνεπώς, ο υπολογιστικός φόρτος της αριθμητικής παραγοντοποίησης συνδέεται με τον αριθμό των μη μηδενικών στοιχείων που προκύπτουν στον παράγοντα L.

```

int ldl_numeric(n, int Ap[ ], int Ai[ ], double Ax[ ], int Lp[ ],
int Parent[ ], int Lnz[ ], int Li[ ], double Lx[ ], double D[ ], double Y[ ],
int Pattern[ ], int Flag[ ]){
    double yi, l_ki;
    int i, k, p, kk, p2, len, top;
    for (k = 0; k < n; k++){
        /* Κατασκευή της δομής της γραμμής k του παράγοντα L */
        Y[k] = 0.0;
        /* Η στοίβα αρχικά είναι κενή */
        top = n;
        Flag[k] = k;
        Lnz[k] = 0;
        p2 = Ap[k+1];
        for (p = Ap[k]; p < p2; p++){
            i = Ai[p];
            if (i <= k){
                Y[i] += Ax[p];
                for (len = 0; Flag[i] != k; i = Parent[i]){
                    /* Το στοιχείο L(k,i) προκύπτει μη μηδενικό */
                    Pattern[len++] = i;
                    Flag[i] = k;
                }
                while (len > 0)
                    Pattern[--top] = Pattern[--len];
            }
        }
        /* Υπολογισμός των αριθμητικών τιμών της γραμμής k
        του παράγοντα L */
        /* Λαμβάνεται το στοιχείο D(k,k) */
        D[k] = Y[k];
        Y[k] = 0.0;
        for (; top < n; top++){
            /* Η δομή της γραμμής k του παράγοντα L προκύπτει με βάση
            τα στοιχεία Pattern[top:n-1] */
            i = Pattern[top];
            yi = Y[i];
            Y[i] = 0.0;
            p2 = Lp[i] + Lnz[i];
            for (p = Lp[i]; p < p2; p++){
                Y[Li[p]] -= Lx[p] * yi;
            }
            /* Η μεταβλητή l_ki αντιστοιχεί στην τιμή του
            στοιχείου L(k,i) */
            l_ki = yi / D[i];
            D[k] -= l_ki * yi;
            /* Αποθηκεύεται το στοιχείο L(k,i) κατά τη μορφή
            Harwell-Boeing */
            Li[p] = k;
            Lx[p] = l_ki;
            Lnz[i]++;
        }
    }
    return(n);
}

```