Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Β. Παπανικολάου, Καθηγητή Ε.Μ.Π.. Η ολοκλήρωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής οφείλεται κυρίως στην γενναιόδωρη και συνεχή καθοδήγηση του.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής μου επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Γ. Κοκολάκη και τον Αναπληρωτή καθηγητή κ. Ι. Σπηλιώτη για την υποστήριξη τους και τις χρήσιμες συμβουλές τους που μου παρείχαν καθ΄ όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον τομέα Μαθηματικών για το άριστο ακαδημαικό κλίμα, στοιχείο που συνέβαλε στην άρτια ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Τέλος ευχαριστώ ιδιαιτέρως το Ι.Κ.Υ. (Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών) για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε κατά την διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής.

Περιεχόμενα

Κίνηση Brown στην Σφαίρα Διάστασης n

Δήμητρα Κουλουμπού

Πρόλογος

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε κάποια προβλήματα της κίνησης Brown πάνω στην σφαίρα διάστασης n, S^n. Κυρίως αποδεικνύουμε αποτελέσματα για τις περιπτώσεις $n = 2$ και $n = 3$, λόγω του ότι οι διαστάσεις αυτές παρουσιάζουν πρακτικές εφαρμογές. Για $n = 2$ η S^2 περιγράφει την επιφάνεια της γης και συνεπώς η τυχαία κίνηση πάνω στην S^2 μπορεί να χρησιμεύσει για επιδημιολογικά μοντέλα, μοντέλα μόλυνσης περιβάλλοντος κ.α. Ενώ για $n = 3$ η S^3 εμφανίζεται στην θεωρία της σχετικότητας.

Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο υπολογίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown πάνω στην σφαίρα S^n, για $n = 1, 2, 3$, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο υπολογίζουμε την μέση τιμή του χρόνου εξόδου T της κίνησης Brown από μια περιοχή της S^n. Υπολογίζονται επίσης οι πιθανότητες εξόδου και οι ροπογεννήτριες συναρτήσεις του χρόνου εξόδου T. Στο τέλος του κεφαλαίου 3 αποδεικνύουμε την Αρχή της Ανακλάσεως (Reflection Principle) για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής διαφόρων χρόνων εξόδου T από την S^n. Επίσης δίνονται και εφαρμογές της αρχής αυτής.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής κάνουμε χρήση του ορισμού της ανακλώμενης κίνησης Brown Y_t και του συνοριακού τοπικού χρόνου συνόρου L_t της Y_t ενός δοσμένου συνόρου ∂D. Συγκεκριμένα η διάχυση Y_t συμπεριφέρεται σαν την κίνηση Brown στην S^n στο εσωτερικό D του συνόρου ∂D, αλλά ανακλάται πίσω στο D όταν φτάνει στο σύνορο του. Υπολογίζουμε τέλος την ροπογεννήτρια συνάρτηση του L_T, όπου T είναι ο χρόνος εξόδου της Y_t από ένα δοσμένο υποσύνολο της S^n.

Στο πρώτο κεφάλαιο προσαρμόστηκαν και εξειδικεύτηκαν διάφοροι γενικοί ορισμοί και σχετικά εργαλεία για τα παραπάνω υπό θεώρηση προβλήματα.

Μερικά αποτελέσματα της παρούσας διατριβής έχουν ανακοινωθεί σε συνέδρια και έχουν δημοσιευθεί σε επιστημονικά περιοδικά (Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G., The Random Motion on the Sphere Generated by the Laplace-Beltrami Operator, *Journal of Applied Functional Analysis,* **7** (1-2) 26-41 (2012) και Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.,Certain Calculation

Regarding the Brownian Motion *Journal of Concrete and Applicable Mathematics on the Sphere*, υπό δημοσίευση), καθώς και σε πρακτικά συνεδρίων (The 2010 Joint Statistical Meetings Vancouver, Canada και 13ο Πανελλήνιο συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Ιωάννινα 2010).

Abstract

In this thesis, we study the Brownian motion on a n-dimensional sphere. Mainly we prove results in cases of $n = 2$ and $n = 3$, due to the fact that these dimensions have applications. For $n = 2$, S^2 describes the surface of the earth. Hence Brownian motion on S^2 can be utilized for epidemiological models and environmental pollution models. Also for $n = 3$, S^3 appears in Relativity theory.

Chapter 1 is a brief introduction of the basic definitions and theorems. In Chapter 2 using the Laplace-Beltrami operator we construct the Brownian motion process on the n-dimensional sphere, using Spherical and Stereographic coordinates as local coordinates. Following, we evaluate explicitly certain quantities related to this diffusion process. We start with the transition density for the cases $n = 1, 2$ and 3. Also, we give the Stochastic Differential Equation of the Brownian Motion in those local coordinates.

We continue in Chapter 3 with the calculation of expectations of exit times of specific domains possessing certain symmetries. Furthermore, some other probabilistic quantities regarding these exit times are calculated such as moment generating functions. In the end of Chapter 3 we discuss the reflection principle on S^2. Everything extends easily to S^n. The reflection principle can help to calculate the distribution functions of certain exit times. In Chapter 4 we evaluate certain probabilistic quantities related to the Boundary Local Time of a certain domain until First Hitting.

Some of the results of the present thesis have been announced in conferences (The 2010 Joint Statistical Meetings Vancouver, 13th and 14th Panhellenic Conferences in Mathematical Analysis) and have been publish in scientific journals. (Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G., The Random Motion on the Sphere Generated by the Laplace-Beltrami Operator, Journal of Applied Functional Analysis, 7 (1-2) 26-41 (2012) and Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.,Certain Calculation Regarding the Brownian Motion Journal of Concrete and Applicable Mathematics on the Sphere, to appear).

1 Εισαγωγικά

1.1 Η Σφαίρα Διάστασης n, S^n

Ορισμός 1.1 *Έστω $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Η σφαίρα διάστασης n, (την οποία συμβολίζουμε με S^n) , με κέντρο $(c_1, ..., c_{n+1})$ και ακτίνα $a > 0$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των σημείων $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ που ικανοποιούν την σχέση $(x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_{n+1} - c_{n+1})^2 = a^2$.*
Επομένως,

$$S^n = \{ \ (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ \Big| \ (x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_{n+1} - c_{n+1})^2 = a^2 \ \}.$$

1.2 Στερεογραφική Προβολή

Ορισμός 1.2 *Θεωρούμε $\mathbb{R}^n$ μέσα στο $\mathbb{R}^{n+1}$ το υπερεπίπεδο, το οποίο δίνεται από την σχέση $x^{n+1} = 0$. Για λόγους ευκολίας, έστω $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ οι συντεταγμένες του $\mathbb{R}^{n+1}$ και $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ οι συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*
Έστω

$$S^n = \{ \ (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ \Big| \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_{n+1} - a)^2 = a^2 \ \}.$$

Οι στερεογραφικές συντεταγμένες του S^n είναι η απεικόνιση $\Phi : S^n - \{0, 0, \ldots, 2a\} \to \mathbb{R}^n$ η οποία δίνεται από την σχέση

$$\Phi\,(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{2ax_1}{2a - x_{n+1}}, ..., \frac{2ax_n}{2a - x_{n+1}} \right).$$

Η απεικόνιση αυτή ορίζει συντεταγμένες $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ στο S^n, έτσι ώστε το τυχόν σημείο $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ του S^n να έχει συντεταγμένες $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, όπου

$$\xi_1 = \frac{2ax_1}{2a - x_{n+1}} \ , \ \ldots \ , \ \xi_n = \frac{2ax_n}{2a - x_{n+1}}.$$

Η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από την σχέση

$$x_1 = \frac{4a^2\xi_1}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2} \ , \ \ldots \ , \ x_n = \frac{4a^2\xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2}, \ x_{n+1} = \frac{2a\,(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2}.$$

1.3 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Τα σημεία της σφαίρας διάστασης n με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα a, μπορούν να περιγραφούν και σε σφαιρικές συντεταγμένες με τον ακόλουθο τρόπο:

- Για $n = 1$

  $S^1 = \{x = (a\cos\varphi, a\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$
  δηλαδή,
  $x_1 = a\cos\varphi$

  $x_2 = a\sin\varphi, \quad$ όπου $\; 0 \leq \varphi < 2\pi.$

- Για $n = 2$

  $S^2 = \{x = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3 |\, 0 \leq \theta < 2\pi, \; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$
  δηλαδή,
  $x_1 = a\cos\theta\sin\varphi$

  $x_2 = a\sin\theta\sin\varphi$

  $x_3 = a\cos\varphi, \quad$ όπου $\; 0 \leq \theta < 2\pi$ και $\; 0 \leq \varphi \leq \pi.$

- Για $n = 3$

  $S^3 = \{x = (a\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi, a\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi, a\cos\theta_2\sin\varphi, a\cos\varphi) \in \mathbb{R}^4 |\, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \; 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$
  δηλαδή,
  $x_1 = a\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi$

  $x_2 = a\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\varphi$

  $x_3 = a\cos\theta_2\sin\varphi$

  $x_4 = a\cos\varphi, \quad$ όπου $\; 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \; 0 \leq \theta_2 \leq \pi$ και $\; 0 \leq \varphi \leq \pi.$

- Γενικά για $n \geq 4$
  $x_1 = a\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1}\sin\varphi$

  $x_2 = a\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 ... \sin\theta_{n-1}\sin\varphi$

  $x_k = a\cos\theta_{k-1}\sin\theta_k ... \sin\theta_{n-1}\sin\varphi \quad$ για $\; k = 3, 4, ..., n$

  $x_{n+1} = a\cos\varphi, \;$ όπου $\; 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \;\; 0 \leq \theta_i \leq \pi, \;$ για $\; i = 2, 3, ..., n-1,$ και $\; 0 \leq \varphi \leq \pi.$

1.4 Ο Τελεστής Laplace-Beltrami

Ορισμός 1.3 *Μία C^∞ διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n (differentiable manifold of dimension n) ορίζεται να είναι ένα σύνολο M μαζί με μια οικογένεια ένα προς ένα απεικονίσεων $x_\alpha : U_\alpha \to M$ από ανοιχτά σύνολα $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ στο M τέτοια ώστε*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M.$

2. *Για κάθε ζεύγος* α, β *με* $x_\alpha(U_\alpha) \bigcap x_\beta(U_\beta) = W \neq \varnothing$, *τα* $x_\alpha^{-1}(W), x_\beta^{-1}(W)$ *είναι ανοιχτά σύνολα του* $\mathbb{R}^n$ *και οι* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha,\ x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ *είναι* C^∞ *διαφορίσιμες απεικονίσεις.*

3. *Η οικογένεια* $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ *είναι μεγιστική αναφορικά με τις συνθήκες 1 και 2.*

Κάθε ζεύγος (x_α, U_α) καλείται χάρτης συντεταγμένων (a coordinate chart) στον M.
(Για περισσότερες λεπτομέρεις βλέπε [3])

Ορισμός 1.4 *Μία* C^r *συνάρτηση* $f : M \to \mathbb{R}$, *όπου* M *είναι μία* C^∞ *διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι μία συνάρτηση* f, *τέτοια ώστε* $f \circ x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ *είναι* C^r *για κάθε χάρτη συντεταγμένων* (x_α, U_α) *στον* M.

Έστω $g = [g_{ij}]$ ένας μετρικός τανυστής Riemman σε μια πολλαπλότητα Riemman M. Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε χάρτη συντεταγμένων $(x_1, x_2, ..., x_n)$ στην M, το στοιχειώδες μήκος υπολογίζεται από την σχέση

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Με δοσμένες τοπικές συντεταγμένες $(x_1, \ldots, x_n)$, , ο πίνακας $g = [g_{ij}]$ υπολογίζεται από το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο.

$$g_{ij} = \frac{\partial x_a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_a}{\partial x_j}$$

(βλέπε [3]). Συμβολίζουμε με g^{ij} τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα g^{-1}.

Ορισμός 1.5 *Ο τελεστής Laplace-Beltrami* $\Delta = \Delta_M$ *της πολλαπλότητας* M *αναφορικά με την μετρική* g *ορίζεται από την σχέση*

$$\Delta_M f = \frac{1}{\sqrt{det(g)}} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{det(g)} \cdot \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{1.1}$$

όπου f *είναι μία* C^r *συνάρτηση στην* M.

Στην εργασία αυτή, ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση όπου $M = S^n$, η σφαίρα διάστασης n. Θα συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami της S^n με Δ_n ή απλά με Δ.

Παράδειγμα 1.1 *(Σφαιρικές Συντεταγμένες). Αν $M = S^1$, δηλαδή*

$$M = S^1 = \{\ x = (a\cos\varphi, a\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \varphi < 2\pi\},$$

έχουμε ότι:

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi)$$
$$g = x_\varphi x_\varphi,$$

δηλαδή,

$$g = a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi,$$

ή

$$g = a^2$$

και

$$g^{-1} = \frac{1}{a^2}.$$

Επομένως ο τελεστής Laplace-Beltrami μιας ομαλής συνάρτησης f στην S^1 δίνεται από την σχέση

$$\Delta_1 f = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right),$$

ή

$$\Delta_1 f = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \tag{1.2}$$

Παράδειγμα 1.2 *(Σφαιρικές συντεταγμένες). Αν $M = S^2$, δηλαδή*

$$M = S^2 = \{\ x = (a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\},$$

έχουμε ότι:

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial\theta} = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$x_\varphi = \frac{\partial x}{\partial\varphi} = (a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\varphi)$$

$$g = [g_{ij}] = \begin{pmatrix} x_\theta x_\theta & x_\theta x_\varphi \\ x_\varphi x_\theta & x_\varphi x_\varphi \end{pmatrix},$$

δηλαδή,

$$g = [g_{ij}] = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

και

$$g^{-1} = \left[g^{ij}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Επομένως ο τελεστής Laplace-Beltrami μιας ομαλής συνάρτησης f στην S^2 δίνεται από την σχέση

$$\Delta_2 f = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^2 \sin \varphi \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

όπου $x_1 = \theta \quad$ και $\quad x_2 = \varphi$.
Άρα,

$$\Delta_2 f = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a^2 \sin \varphi \left(g^{i1} f_\theta + g^{i2} f_\varphi \right) \right]$$

ή

$$\Delta_2 f = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left(\frac{f_{\theta\theta}}{\sin \varphi} + f_\varphi \cos \varphi + f_{\varphi\varphi} \sin \varphi \right). \tag{1.3}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι ανεξάρτητη από το θ, ο τελεστής Laplace-Beltrami της f είναι ο

$$\Delta_2 f = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left(f_\varphi \cos \varphi + f_{\varphi\varphi} \sin \varphi \right). \tag{1.4}$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ο τελεστής Laplace-Beltrami μιας ομαλής συνάρτησης f στην S^3 δίνεται από την σχέση

$$\Delta_3 f = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_1^2} + \frac{1}{a^2 \sin \theta_2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin^2 \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \tag{1.5}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι ανεξάρτητη από τα $\theta_1 \quad$ και θ_2, ο τελεστής Laplace-Beltrami της f είναι ο

$$\Delta_3 f = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{2 \cos \varphi}{a^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \tag{1.6}$$

Γενικά, ο τελεστής Laplace-Beltrami μιας ομαλής συνάρτησης f στην S^n στις σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την σχέση

$$\Delta_n f = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\sqrt{\det(g)} \cdot \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \right), \tag{1.7}$$

όπου

$$\det(g) = a^{2n} \prod_{k=2}^{n} (\sin \theta_k)^{2(k-1)}, \tag{1.8}$$

$$g^{ij} = 0, \text{ αν } i \neq j, \quad g^{ii} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_{i+1} \cdot ... \cdot \sin^2 \theta_n} \quad \text{και } \theta_n = \varphi.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η f είναι ανεξάρτητη από τα $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}$, ο τελεστής Laplace-Beltrami της f είναι ο

$$\Delta_n f = \frac{1}{a^2} \left((n-1) \cot \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right). \tag{1.9}$$

Παράδειγμα 1.3 *Χρησιμοποιώντας στερεογραφικές συντεταγμένες, αν* $M = S^n$, *δηλαδή*

$$M = S^n = \{x = \left(\frac{4a^2 \xi_1}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2}, \ldots, \frac{4a^2 \xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2}, \frac{2a\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right)}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2} \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\Big|\, , \xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R} \Big\},$$

τότε έχουμε:

$$x_{\xi_k} = \frac{\partial x}{\partial \xi_k} =$$

$$= \left(\frac{-8a^2 \xi_1 \xi_k}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}, \ldots, \frac{-8a^2 \xi_{k-1} \xi_k}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}, \frac{4a^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 - 2\xi_k^2 + 4a^2\right)}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{-8a^2 \xi_{k+1} \xi_k}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}, \ldots, \frac{-8a^2 \xi_n \xi_k}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}, \frac{16a^3 \xi_k}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2} \right).$$

άρα

$$g_{ii} = \frac{16a^4}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2} \quad \textit{και} \quad g_{ij} = 0, \quad \textit{αν} \quad i \neq j.$$

έτσι προκύπτει ότι

$$g^{ii} = \frac{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)^2}{16a^4}, \quad g^{ij} = 0, \quad \textit{αν} \quad i \neq j, \quad \textit{και} \quad \sqrt{det(g)} = \frac{(4a^2)^n}{\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2\right)^n}.$$

Επομένως ο τελεστής Laplace-Beltrami μιας ομαλής συνάρτησης f *στην* S^n, *χρησιμοποιώντας στερεογραφικές συντεταγμένες, δίνεται από την σχέση*

$$\Delta_n f = \frac{\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2\right)^2}{16a^4} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2} - \frac{2(n-2)}{(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + 4a^2)} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right). \tag{1.10}$$

Ειδικά, για $n = 2$ *και* $n = 3$ *έχουμε*

$$\Delta_2 f = \frac{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4a^2\right)^2}{16a^4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2} \right) \tag{1.11}$$

και

$$\Delta_3 f = \frac{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 4a^2\right)^2}{16a^4} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2} - \frac{2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 4a^2)} \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right). \tag{1.12}$$

2 Κίνηση Brown στην Σφαίρα Διάστασης n

2.1 Κίνηση Brown σε μια Πολλαπλότητα Riemann

Ορισμός 2.1 *Έστω M μία πολλαπλότητα Riemann (βλέπε* **Ορισμό 1.5***) και ο τελεστής Laplace-Beltrami της M. Κάθε συνάρτηση $P(t,x,y)$, με πεδίο ορισμού το $(0,\infty)\times M\times M$ που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση*

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta_x P=0, \tag{2.1}$$

όπου Δ_x είναι ο τελεστής Δ εφαρμοζόμενος στις μεταβλητές x και με αρχικές συνθήκες

$$P\,(t,x,y)\to\delta_x(y)\quad \textit{όταν},\quad t\to 0^+ \tag{2.2}$$

(όπου $\delta_x(y)$ είναι η συνάρτηση δέλτα στο $x\in M$) καλείται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας (Heat equation) στην M.

Η μικρότερη θετική θεμελειώδης λύση της εξίσωσης (2.1) και (2.2) ονομάζεται πυρήνας θερμότητας (heat kernel) στην M . Έχει αποδειχθεί από τον J. Dodziak [5], ότι ο πυρήνας θερμότητας υπάρχει πάντα και ότι είναι ομαλή συνάρτηση για κάθε (t,x,y). Επιπλέων ο πυρήνας θερμότητας ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Είναι συμμετρική συνάρτηση ως προς τα x,y, δηλαδή

   $$P(t,x,y)=P(t,y,x)$$

2. Έχει την ιδιότητα της ημιομάδας: Για κάθε $s\in(0,t)$

   $$P(t,x,y)=\int_M P(s,x,z)P(t-s,z,y)d\mu(z),$$

   όπου $d\mu$ είναι το στοιχειώδες εμβαδόν της M.
   Σε σφαιρικές συντεταγμένες $d\mu=\sqrt{|g|}d\theta_1\ldots\theta_n$, όπου $\theta_n=\varphi$ και $|g|$ δίνεται από την σχέση (1.8).

3. Για κάθε $t>0$ και $x\in M$

   $$\int_M P(t,x,y)d\mu(y)\leq 1. \tag{2.3}$$

Στην περίπτωση που η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής και ομαλή υπάρχει μοναδική λύση των (2.1) και (2.2) η οποία είναι θετική και ικανοποιεί την σχέση

$$\int_M P(t,x,y)d\mu(y)=1. \tag{2.4}$$

Ορισμός 2.2 *Μια στοχαστική ανέλιξη $X_t, t \geq 0$ καλείται Μαρκοβιανή ανέλιξη (Markov process) αν για κάθε $t, s \geq 0$, η δεσμευμένη κατανομή της X_{t+s}, για δεδομένες τιμές των X_u, για $u \leq t$, ισούται με την δεσμευμένη κατανομή της X_{t+s} δεδομένου της X_t.*

Ορισμός 2.3 *Η κίνηση Brown X_t, $t \geq 0$, σε μια πολλαπλότητα Riemann M είναι η Μαρκοβιανή ανέλιξη με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(t, x, y)$, τον πυρήνα θερμότητας που αντιστοιχεί στον τελεστή Laplace-Beltrami.*

Με άλλα λόγια η κίνηση Brown στην M είναι η Μαρκοβιανή ανέλιξη στην M με γενήτορα $\frac{1}{2}\Delta_M$.

Στην ειδική περίπτωση όπου $M = S^n$, $n \geq 2$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(t, x, y)$ της κίνησης Brown X_t εξαρτάται μόνο από το t και την απόσταση μεταξύ των x και y, $d(x, y)$. Δηλαδή σε σφαιρικές συντεταγμένες η X_t εξαρτάται μόνο από το t και την γωνία φ μεταξύ των x και y. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown μπορεί να γραφτεί ως

$$P(t, x, y) = p(t, \varphi), \tag{2.5}$$

όπου $p(t, \varphi)$ είναι η λύση της

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_n p = \frac{1}{2a^2}\left((n-1)\cot\varphi \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}\right) \tag{2.6}$$

και

$$\lim_{t \to 0^+} a A_{n-1} p(t, \varphi) \cdot \sin^{n-1}(\varphi) = \delta(\varphi). \tag{2.7}$$

Με $\delta(\cdot)$ συμβολίζουμε την συνάρτηση δέλτα του Dirac στο $\mathbb{R}$ και με A_n το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας διάστασης n , S^n με ακτίνα a. Είναι γνωστό ότι [9]

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} a^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}, \tag{2.8}$$

Όπου $\Gamma(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Ειδικότερα

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} a^n}{(\frac{n-1}{2})!} \qquad \text{για n περιττό} \tag{2.9}$$

$$A_n = \frac{2^n(\frac{n}{2}-1)!\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{(n-1)!} \qquad \text{για n άρτιο} \tag{2.10}$$

Παρατήρηση 2.1 *Το γεγονός ότι η S^n είναι συμπαγής και ομαλή έχει ως αποτέλεσμα οι εξισώσεις (2.6) - (2.7) να έχουν μοναδική θετική λύση η οποία ικανοποιεί την σχέση*

$$\int_{S^n} P(t,x,y)d\mu(y) = 1. \tag{2.11}$$

Επιπλέον, καθώς $t \to \infty, \quad P(t,x,y) \to c,$ *όπου*

$$c = \frac{1}{A_n}.$$

Στο εξής για λόγους ευκολίας θα γράφουμε X_t αντί για $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

2.2 Ειδικές Μορφές του Πυρήνα Θερμότητας των S^1, S^2 και S^3

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(t,\varphi)$ της κίνησης Brown $X_t, \ t > 0$ στην S^1, S^2 και S^3 σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αρχικά αποδεικνύουμε δύο λήμματα.

Λήμμα 2.1 *Έστω η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(\varphi,t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right), \tag{2.12}$$

με $(t,\varphi) \in [\delta,\infty) \times (0,\pi),$ *όπου* $\delta > 0$ *είναι μια αυθαίρετη θετική σταθερά και* $f_n(\varphi,t)$ *είναι μια συνάρτηση που παίρνει μιγαδικές τιμές.*

α. *Αν υπάρχουν σταθερές* $M, k > 0$ *τέτοιες ώστε*

$$|f_n(\varphi,t)| \leq Mn^k$$

και

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi} f_n(\varphi,t)\right| \leq Mn^k$$

στο σύνολο $[\delta,\infty) \times (0,\pi),$ *τότε*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(\varphi,t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_n(\varphi,t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right].$$

β. *Αν υπάρχουν σταθερές* $M, k > 0$ *τέτοιες ώστε*

$$|f_n(\varphi, t)| \leq M n^k$$

και

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f_n(\varphi, t) \right| \leq M n^k$$

στο σύνολο $[\delta, \infty) \times (0, \pi)$, *τότε*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(\varphi, t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial t} \left[f_n(\varphi, t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \right].$$

Απόδειξη.

α. Ισχύει ότι

$$\left| f_n(\varphi, t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \right| \leq M n^k \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \quad \text{για} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

και για κάθε $\varphi \in (0, \pi)$. Επιπλέον

$$\sqrt[n]{M n^k \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)} = M^{1/n} \left(n^{1/n}\right)^k \exp\left(-\frac{n t}{2a^2}\right)$$

η οποία συγκλίνει στο 0 (το οποίο είναι μικρότερο του 1) καθώς $n \to \infty$.

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας για την σύγκλιση σειρών έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} M n^k exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $t \in [\delta, \infty)$.
Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass, (Weierstrass M-test) η σειρά

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(\varphi, t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, \pi)$ για κάθε $t \in [\delta, \infty)$.
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα φ_0 για το οποίο η σειρά

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(\varphi_0, t) \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \quad \text{συγκλίνει.} \tag{2.13}$$

Όμως,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right]\right| \leq Mn^k\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)$$

και έχουμε δείξει ότι η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Mn^k exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $t\in[\delta,\infty)$.

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο του Weirstrass η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right] \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα στο} \quad (0,\pi) \tag{2.14}$$

για κάθε $\quad t\in[\delta,\infty)$.
Τελικά, από τις (2.13) , (2.14) και σύμφωνα με το θεώρημα παραγώγισης σειράς (βλέπε [15])

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right].$$

β. Έχουμε ότι

$$\left|f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right| \leq Mn^k\exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right) \quad \text{για} \quad n=1,2,\ldots,$$

και για κάθε $\quad t\in[\delta,\infty)$. Επιπλέον,

$$\sqrt[n]{Mn^k\exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right)} = M^{1/n}\left(n^{1/n}\right)^k\exp\left(-\frac{n\delta}{2a^2}\right)$$

η οποία συγκλίνει στο $\quad 0 \quad$ (το οποίο είναι μικρότερο του 1) $\quad$ καθώς $n\to\infty$.

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας για την σύγκλιση σειρών έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Mn^k exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει. Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta,\infty)$.
Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $t_0\in[\delta,\infty)$ για το οποίο η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(\varphi,t_0)\exp\left(-\frac{n^2t_0}{2a^2}\right) \tag{2.15}$$

συγκλίνει .Όμως,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right]\right| = \left|\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(f_n(\varphi,t)\right) - \frac{n^2 f_n(\varphi,t)}{2a^2}\right]\exp\left(\frac{-n^2t}{2a^2}\right)\right|,$$

επομένως,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right]\right| \le Mn^k\left(1+\frac{n^2}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right).$$

Επιπλέον,

$$\sqrt[n]{Mn^k\left(1+\frac{n}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right)} = M^{1/n}\left(n^{1/n}\right)^{k+2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2a^2}\right)^{1/n}\exp\left(-\frac{n\delta}{2a^2}\right),$$

η οποία συγκλίνει στο 0 (που είναι μικρότερο του 1) καθώς $n\to\infty$.

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας, η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Mn^k\left(1+\frac{n}{2a^2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\delta}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει. Συνεπώς, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial t}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right] \tag{2.16}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta,\infty)$ για κάθε $\varphi\in(0,2\pi)$. Τελικά, από τις (2.15) , (2.16) και σύμφωνα με το θεώρημα παραγώγισης σειράς (βλέπε [15])

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial t}\left[f_n(\varphi,t)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right].$$

■

Λήμμα 2.2 *Αν* $s > 0$ *και* $z, \gamma \in \mathbb{C}$, *τότε*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-s^2(z+n)^2 - i\gamma n\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{s} \exp\left(i\gamma z - \frac{\gamma^2}{4s^2}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2}{s^2} - \frac{\pi\gamma n}{s^2} + 2\pi i z n\right). \tag{2.17}$$

Υπενθύμιση. Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση στον χώρο Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, (Υπενθυμίζουμε ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ αποτελείται από το σύνολο όλων των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων f στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε η f και όλες οι παράγωγοί της $f, f', \ldots, f^{(l)}, \ldots,$ είναι ταχύτατα φθίνουσες, με την έννοια ότι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left|f^{(l)}(x)\right| < \infty \quad \text{για κάθε} \quad k, l \geq 0).$$

Τότε

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) \exp(inx). \tag{2.18}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) \exp(inx). \tag{2.19}$$

Όπου με $F(\xi)$ συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x)$, δηλαδή,

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Η παραπάνω σχέση καλείται Poisson summation formula. (βλέπε [17])

Απόδειξη του Λήμματος 2.2

Αν

$$f(x) = \exp(-Ax^2 + Bx), \quad A > 0, \quad B \in \mathbb{C},$$

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{(i\xi - B)^2}{4A}\right).$$

Επομένως από την (2.19)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[-A(x - 2\pi n)^2 + B(x - 2\pi n)\right] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{(in - B)^2}{4A} + inx\right). \tag{2.21}$$

Έστω
$$A = \frac{1}{4s^2}, \quad B = -iz \quad \text{και} \quad x = -\gamma,$$
όπου $z \in \mathbb{C}$ και $s > 0$. Τότε η (2.21) δίνει
$$\frac{\sqrt{\pi}}{s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left[-\frac{1}{4s^2}(\gamma + 2\pi n)^2 + iz(\gamma + 2\pi n) \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-s^2(n+z)^2 - i\gamma n \right),$$
ή
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-s^2(z+n)^2 - i\gamma n \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{s} \exp\left(i\gamma z - \frac{\gamma^2}{4s^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-\pi^2 n^2}{s^2} - \frac{\pi \gamma n}{s^2} + 2\pi i z n \right).$$
Τέλος παρατηρούμε ότι με αναλυτική επέκταση η παραπάνω σχέση αληθεύει για κάθε $\gamma \in \mathbb{C}$.

■

2.2.1 Η Περίπτωση S^1

Έστω X_t, $t \geq 0$ η κίνηση Brown στην επιφάνεια της μονοδιάστατης σφαίρας S^1 με ακτίνα a. Από τον **Ορισμό 2.2** και την **Παρατήρηση 2.1** η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(t,\varphi)$ της X_t είναι μοναδική λύση της
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_1 p \tag{2.22}$$
και
$$\lim_{t \to 0^+} ap(t,\varphi) = \delta(\varphi). \tag{2.23}$$
Εδώ με Δ_1 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami της S^1. Από την (1.2) έχουμε ότι η $p(t,\varphi)$ είναι μοναδική λύση των
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial \varphi^2} \tag{2.24}$$
και
$$\lim_{t \to 0^+} a \cdot p(t,\varphi) = \delta(\varphi). \tag{2.25}$$
Θεωρούμε την συνάρτηση
$$p : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$
με
$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + in\varphi \right) \tag{2.26}$$

Πρόταση 2.1 *Η συνάρτηση (2.26) μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί και με τις ακόλουθες μορφές*

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right] - \frac{1}{2\pi a} \tag{2.27}$$

και

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi - 2\pi n\right)^2\right]. \tag{2.28}$$

Απόδειξη.

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + in\varphi\right),$$

επομένως,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} - in\varphi\right) + 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + in\varphi\right)\right],$$

δηλαδή,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\left(\exp\left(in\varphi\right) + \exp\left(-in\varphi\right)\right) + 1\right],$$

ή

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}^*}2\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi) + 1\right].$$

Άρα,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}2\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi) - 1\right],$$

συνεπώς,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right] - \frac{1}{2\pi a}.$$

Για την δεύτερη σχέση έχουμε ότι

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + in\varphi\right),$$

δηλαδή,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}a}\right)^2 n^2 - i(-\varphi)n\right).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2 για $s = \sqrt{t}/\sqrt{2}a$, $z = 0$ και $\gamma = -\varphi$ έχουμε ότι

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\sqrt{2\pi}a}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\varphi^2 2a^2}{4t}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{2\pi^2 n^2 a^2}{t} + \frac{2\pi n\varphi a^2}{t}\right).$$

Τελικά,

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left[-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi - 2\pi n\right)^2\right].$$

■

Πρόταση 2.2 *Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown $X_t, t \geq 0$ στην S^1 με ακτίνα a είναι η συνάρτηση (2.26). Δηλαδή,*

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + in\varphi\right). \tag{2.29}$$

Απόδειξη.
Από την (2.27)

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right] - \frac{1}{2\pi a},$$

επομένως,

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right],$$

έτσι από το **Λήμμα 2.1β**

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial t}\left[\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right].$$

Άρα,

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi a^3}\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\pi a}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right].$$

Χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 2.1α** έχουμε ότι

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right)\right]$$

και άρα
$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}} -n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right).$$
Επομένως,
$$\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\cos(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right). \tag{2.31}$$
Συνεπώς απο τις (2.30) και (2.31)
$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{2a^2}\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial \varphi^2}.$$
Τώρα θα δείξουμε ότι
$$\lim_{t\to 0^+} ap(t,\varphi) = \delta(\varphi).$$
Αν $\varphi \in (0,2\pi)$ από την σχέση (2.28) έχουμε ότι
$$\lim_{t\to 0^+} ap(t,\varphi) = \lim_{t\to 0^+}\frac{a}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right),$$
δηλαδή,
$$\lim_{t\to 0^+} ap(t,\varphi) = a\lim_{t\to 0^+}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi t}}.$$
αλλά,
$$\left|\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi t}}\right| \leq \frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2t_0}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi t_0}}$$
για κάθε $t\in[0,t_0],\ t_0>0$ και η σειρά
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2t_0}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi t_0}}$$
συγκλίνει.
Επομένως,
$$\lim_{t\to 0^+} a\cdot p(t,\varphi) = a\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2t}\left(\varphi-2\pi n\right)^2\right)}{\sqrt{2\pi t}}.$$
Άρα αν $\varphi\in(0,2\pi)$
$$\lim_{t\to 0^+} ap(t,\varphi) = 0. \tag{2.32}$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{2\pi} ap(t,\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} a\left(\frac{1}{\pi a}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right] - \frac{1}{2\pi a}\right)d\varphi,$$

ή

$$\int_0^{2\pi} ap(t,\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right]d\varphi - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\varphi,$$

δηλαδή,

$$\int_0^{2\pi} ap(t,\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)\right]d\varphi - 1. \qquad (2.33)$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

με

$$f_n(\varphi) = \cos(n\varphi)\cdot\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right).$$

Παρατηρήστε ότι οι $f_n(\varphi)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0,2\pi]$. Επιπλέον, η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\varphi)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,2\pi]$ διότι

$$|f_n(\varphi)| \leq \exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)$$

συγκλίνει. (Αποδεικνύεται εύκολα χρισημοποιώντας το κριτήριο της ρίζας). Έτσι η (2.33) δίνει ότι

$$\int_0^{2\pi} a\cdot p(t,\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi)d\varphi - 1.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} a\cdot p(t,\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi)d\varphi\right]+\int_0^{2\pi}1d\varphi\right)-1,$$

ή

$$\int_0^{2\pi} ap(t,\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi - 1,$$

δηλαδή,

$$\int_0^{2\pi} ap(t,\varphi)d\varphi = 1, \text{ για κάθε } t>0. \tag{2.34}$$

Από τις σχέσεις (2.32) και (2.34) έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+} ap(t,\varphi) = \delta(\varphi)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ∎

2.2.2 Η Περίπτωση S^2

Έστω $X_t,\ t\geq 0$ η κίνηση Brown στην σφαίρα διάστασης 2, S^2 με ακτίνα a. Από τις σχέσεις (2.6), (2.7) και (2.9) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(t,\varphi)$ της X_t είναι η μοναδική λύση των

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2a^2\sin\varphi}\left(\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi\right) \tag{2.35}$$

και

$$\lim_{t\to 0^+} 2\pi a^2\sin\varphi\cdot p(t,\varphi) = \delta(\varphi). \tag{2.36}$$

Έχει αποδειχθεί ότι (βλέπε [4]) η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial K(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial K(t,\varphi)}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial^2 K(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right) \tag{2.37}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\lim_{t\to 0^+} 2\pi\sin(\varphi)K(t,\varphi) = \delta(\varphi) \tag{2.38}$$

δίνεται από την συνάρτηση

$$K(t,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}}(2n+1)\exp\left(-n(n+1)\sqrt{2t}\right)P_n^0(\cos\varphi). \tag{2.39}$$

Με P_n^0, $n = 0, 1, 2, \ldots$ συμβολίζουμε τα πολυώνυμα του Legendre τάξης 0, δηλαδή

$$P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{2.40}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

Πρόταση 2.3 *Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown X_t, $t \geq 0$ στην S^2 με ακτίνα a δίνεται από την έκφραση*

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{4\pi a^2}\sum_{n\in\mathbb{N}}(2n+1)\exp\left(-\frac{n(n+1)\sqrt{t}}{a}\right)P_n^0(\cos\varphi). \tag{2.41}$$

Απόδειξη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι η $p(t,\varphi)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2a^2\sin\varphi}\left(\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\cos\varphi\right).$$

Έχουμε ότι

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{a^2}K\left(\frac{t}{2a^2},\varphi\right),$$

όπου η $K(t,\varphi)$ δίνεται από την (2.39), άρα

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{2a^4}\frac{\partial K}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial K}{\partial\varphi} \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}.$$

Όμως από την (2.37)

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial K}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}\right), \tag{2.42}$$

επομένως,

$$2a^4\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(a^2\cos\varphi\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial\varphi} + a^2\sin\varphi\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right),$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t} = \frac{1}{2a^2\sin\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\partial^2 p(t,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right).$$

Επιπλέον η $p(t,\varphi)$ ικανοποιεί την εξής σχέση

$$\lim_{t\to 0^+} 2\pi \sin(\varphi) p(t,\varphi) = \lim_{t\to 0^+} 2\pi a^2 \frac{1}{a^2} \sin(\varphi) K\left(\frac{t}{2a^2}, \varphi\right)$$

και αν θέσουμε $u = \frac{t}{2a^2}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t\to 0^+} 2\pi \sin(\varphi) K\left(\frac{t}{2a^2}, \varphi\right) = \lim_{u\to 0^+} 2\pi \sin(\varphi) K(u,\varphi) = \delta(\varphi).$$

Τελικά,

$$\lim_{t\to 0^+} 2\pi a^2 \sin(\varphi) p(t,\varphi) = \delta(\varphi).$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

2.2.3 Η Περίπτωση S^3

Έστω $X_t,\ t \geq 0$ η κίνηση Brown στην σφαίρα διάστασης 3 με ακτίνα a. Από τις σχέσεις (2.6), (2.7) και (2.10) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(t,\varphi)$ της X_t είναι η μοναδική λύση των

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + 2\cot\varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi}\right) \tag{2.43}$$

και

$$\lim_{t\to 0^+} 4\pi a^3 \sin^2(\varphi) p(t,\varphi) = \delta(\varphi). \tag{2.44}$$

Η συνάρτηση $p(t,\varphi)$ ικανοποιεί τα εξής:

1.
$$p(t,\varphi) > 0 \qquad \text{για κάθε} \qquad (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [o,\pi]$$

2.
$$4\pi a^3 \int_0^\pi p(t,\varphi)\sin^2(\varphi) d\varphi = 1$$

3.
$$p(t,\varphi) \to \frac{1}{A_3} \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty$$

   επομένως από την (2.9)

$$p(t,\varphi) \to \frac{1}{2\pi^2 a^3} \quad \text{καθώς} \quad t \to \infty.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$p : \mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

με

$$p(t,\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2t\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi + 2n\pi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right), \quad (2.45)$$

Πρόταση 2.4 *Αν $\varphi \in (0,\pi)$, η συνάρτηση (2.45) μπορεί να εκφραστεί και με τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές*

$$p(t,\varphi) = -\frac{i}{4\pi^2 a^3 \sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2} + i\varphi n\right) \quad (2.46)$$

και

$$p(t,\varphi) = \frac{1}{2\pi^2 a^3 \sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{N}} n \sin(n\varphi) \exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right) \quad (2.47)$$

Απόδειξη.

$$p(t,\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2t\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi + 2n\pi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right),$$

δηλαδή,

$$p(t,\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2t\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} -\frac{t}{a^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right)$$

ή

$$p(t,\varphi) = -\frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{t}\sin\varphi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right).$$

Με παρόμοιο του **Λήμματος 2.1** τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι η παράγωγος και το άθροισμα μπορούν να εναλλαχθούν. Επομένως,

$$p(t,\varphi) = -\frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{t}\sin\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right)\right]. \quad (2.48)$$

Θέτουμε

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{(\varphi + 2n\pi)^2 a^2}{2t}\right).$$

Άρα

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 \left(\frac{\varphi}{2\pi} + n\right)^2 a^2}{2t}\right)$$

ή

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{2}\pi a}{\sqrt{t}}\right)^2 \left(\frac{\varphi}{2\pi} + n\right)^2\right).$$

Από την (2.17) για $s = \frac{\sqrt{2}\pi a}{\sqrt{t}}$, $z = \frac{\varphi}{2\pi}$ και $\gamma = 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{2}\pi a}{\sqrt{t}}\right)^2 \left(\frac{\varphi}{2\pi} + n\right)^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\pi a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 t}{2\pi^2 a^2} + 2\pi \frac{i\varphi}{2\pi} n\right),$$

δηλαδή,

$$S = \sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2} + i\varphi n\right)$$

ή

$$S = \sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(i\varphi n\right).$$

Δηλαδή,

$$S = \sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(i\varphi n\right) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(-i\varphi n\right) - 1\right),$$

επομένως,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} S = \sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(i\varphi n\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(-i\varphi n\right)\right).$$

Έτσι από το **Λήμμα 2.1α**

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} S = \sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(i\varphi n\right)\right] + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \exp\left(-i\varphi n\right)\right]\right),$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}S=\sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} in\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\exp\left(i\varphi n\right)+\sum_{n\in\mathbb{N}}-in\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\exp\left(-i\varphi n\right)\right),$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}S=\sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}+i\varphi n\right).$$

Επομένως,

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}S=i\sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}+i\varphi n\right). \tag{2.49}$$

Από τις (2.48) και (2.49) προκύπτει ότι

$$p(t,\varphi)=-\frac{i\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}{a^2\sqrt{t}\sin\varphi}\sqrt{\frac{t}{2\pi a^2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}+i\varphi n\right)$$

από την οποία έπεται η μορφή (2.46). Η (2.46) δίνει

$$p(t,\varphi)=-\frac{i}{4\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}} n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}+i\varphi n\right)-n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}-i\varphi n\right)$$

ή

$$p(t,\varphi)=-\frac{i}{4\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}} n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)\left(e^{i\varphi n}-e^{-i\varphi n}\right).$$

Συνεπώς,
$p(t,\varphi)=$

$$=\frac{-i}{4\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}} n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)\left[(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))-(\cos(n\varphi)-i\sin(n\varphi))\right],$$

δηλαδή,

$$p(t,\varphi)=-\frac{i}{4\pi^2a^3\sin\varphi}\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}} 2in\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right),$$

Από την οποία προκύπτει άμεσα η (2.47). ■

Παρατήρηση 2.2 *Από την (2.47) συνεπάγεται ότι η $p(t,\varphi)$ είναι αναλυτική ως προς φ ακόμα και για $\varphi=0$ και $\varphi=\pi$. Ποιο συγκεκριμένα*

$$p(t,0)=\lim_{\varphi\to 0^+}p(t,\varphi)=\frac{1}{2\pi^2a^3}\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right) \tag{2.50}$$

και

$$p(t,\pi)=\lim_{\varphi\to \pi^-}p(t,\varphi)=\frac{1}{2\pi^2a^3}\sum_{n\in\mathbb{N}}n^2(-1)^n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right). \tag{2.51}$$

Πρόταση 2.5 *Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown $X_t, t\geq 0$ στην S^3 με ακτίνα α είναι η συνάρτηση (2.45), δηλαδή*

$$p(t,\varphi)=\frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)(2t\pi)^{-\frac{3}{2}}}{\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\varphi+2n\pi)\exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2a^2}{2t}\right).$$

Απόδειξη.
Αρχικά θα δείξουμε ότι η $p(t,\varphi)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta_3 p.$$

Από την σχέση (2.47)

$$p(t,\varphi)=\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)$$

ή

$$p(t,\varphi)=\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}&\left[\frac{1}{2a^2}\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right.\\&\left.+\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right)\right],\end{aligned}$$

από την οποία με την βοήθεια του **Λήμματος 2.1α** μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}\left[\frac{1}{2a^2}\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right.$$

$$+\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\partial}{\partial t}\left(n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{n^2t}{2a^2}\right)\right)\Bigg]$$

ή

$$\frac{\partial p(t,\varphi)}{\partial t}=-\frac{1}{4\pi^2a^5\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}n(n^2-1)\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{(n^2-1)t}{2a^2}\right). \quad (2.52)$$

Χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 2.1α** μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[n^2\cos(n\varphi)-n\cot\varphi\sin(n\varphi)\right]\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right) \quad (2.53)$$

και

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=$$

$$\frac{1}{2\pi^2a^3\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[\sin(n\varphi)\left(\frac{n}{\sin^2\varphi}+n\cot^2\varphi-n^3\right)-2n^2\cot\varphi\cos(n\varphi)\right]\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right). \quad (2.54)$$

Η $p(t,\varphi)$ είναι ανεξάρτητη των $\theta_1,\theta_2,$ άρα αν εφαρμόσουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami της S^3 στην p παίρνουμε (βλέπε (1.6))

$$\Delta_3 p=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{2\cos\varphi}{a^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varphi}.$$

Επίσης από τις (2.53) και (2.54)

$$\Delta_3 p=-\frac{1}{2\pi^2a^5\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}n(n^2-1)\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2}\Delta_3 p=-\frac{1}{4\pi^2a^5\sin\varphi}\sum_{n\in\mathbb{N}}n(n^2-1)\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right),$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta_3 p.$$

Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t\to0^+}4\pi a^3\sin^2\varphi\cdot p(t,\varphi)=\delta(\varphi).$$

Έστω
$$I_\epsilon = \int_0^\epsilon 4\pi a^3 \sin^2(\varphi) p(t,\varphi) d\varphi.$$
όπου $\epsilon > 0,$ αρκούντος μικρό. Ίσχύει ότι
$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \left(4\pi a^3 \int_0^\epsilon p(t,\varphi)\sin^2(\varphi) d\varphi\right),$$
δηλαδή, (βλέπε (2.45»
$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \left[4\pi a^3 \int_0^\epsilon \frac{\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sin\varphi(2t\pi)^{3/2}} \sin^2(\varphi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi + 2n\pi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi\right],$$
ή
$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \left(\int_0^\epsilon \varphi \sin(\varphi) \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi \right.$$
$$\left. + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_0^\epsilon (\varphi + 2n\pi) \sin(\varphi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi\right).$$
Όμως,
$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_0^\epsilon (\varphi + 2n\pi)\sin(\varphi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_0^\epsilon (2|n|+1)\pi \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi$$
και
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \int_0^\epsilon (2|n|+1)\pi \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi = \epsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} (2|n|+1)\pi \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{2t}\right),$$
η οποία τείνει στο 0 καθώς $t \to 0^+$, σύμφωνα με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (Lebesgue's Dominated Convergence Theorem).
Επομένως,
$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \int_0^\epsilon \varphi \sin\varphi \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi.$$
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Laplace για ολοκληρώματα [1] έχουμε
$$\int_0^\epsilon \varphi \sin(\varphi) \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi \sim \int_0^\epsilon \varphi^2 \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi \sim \int_0^\infty \varphi^2 \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi.$$

Όταν $\quad t \to 0^+, \quad$ όπου με το σύμβολο $A \sim B$ εννοούμε ότι $\frac{A}{B} \to 1$. Συνεπώς,

$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \varphi^2 \exp\left(-\frac{\varphi^2 a^2}{2t}\right) d\varphi,$$

ή, για

$$u = \frac{\varphi a}{\sqrt{t}}$$

$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{u^2 t}{a^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{\sqrt{t}}{a} du,$$

δηλαδή,

$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} 2\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right) \int_0^\infty \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Έτσι,

$$\lim_{t\to 0^+} I_\epsilon = \lim_{t\to 0^+} 2\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1. \tag{2.55}$$

Επιπλέον, για κάθε $t > 0$, έχουμε

$$I = \int_0^\pi 4\pi a^3 \sin^2(\varphi) p(t,\varphi) d\varphi, \tag{2.56}$$

άρα, από την (2.45)

$$I = \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \int_0^\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi + 2n\pi \sin\varphi) \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi.$$

Η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varphi + 2n\pi) \sin\varphi \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\quad [0,\pi] \quad$ για κάθε $\quad t > 0, \quad$ διότι

$$\left| (\varphi + 2n\pi) \sin\varphi \exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) \right| \le 2|n|\pi \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{2t}\right)$$

και η σειρά

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n,$$

όπου

$$M_n = 2|n|\pi \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{2t}\right)$$

συγκλίνει (π.χ. από το κριτήριο της ρίζας).

Επομένως, η (2.56) συνεπάγεται ότι

$$I = \frac{4\pi a^3 \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{(2t\pi)^{3/2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\pi} (\varphi + 2n\pi)\sin(\varphi)\exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi.$$

Έτσι,

$$I = -\frac{2a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right)\right) d\varphi,$$

δηλαδή,

$$I = \frac{2a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\pi} \cos(\varphi)\exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi.$$

Επομένως,

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{\pi} [\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)]\exp\left(-\frac{(\varphi+2n\pi)^2 a^2}{2t}\right) d\varphi. \tag{2.57}$$

Έστω $u = \varphi + 2n\pi$. Τότε από την (2.57) έχουμε ότι

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} [\exp\left(i(u-2n\pi)\right)+\exp\left(-i(u-2n\pi)\right)]\exp\left(-\frac{u^2 a^2}{2t}\right) du,$$

ή

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} [\exp(iu)+\exp(-iu)]\exp\left(-\frac{u^2 a^2}{2t}\right) du.$$

Άρα,

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} [\exp(iu)+\exp(-iu)]\exp\left(-\frac{u^2 a^2}{2t}\right) du\right.$$
$$\left. + \int_{-2n\pi}^{(-2n+1)\pi} [\exp(iu)+\exp(-iu)]\exp\left(-\frac{u^2 a^2}{2t}\right) du\right),$$

συνεπώς,

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} [\exp(iu) + \exp(-iu)] \exp\left(-\frac{u^2a^2}{2t}\right) du \right.$$

$$\left. + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} [\exp(iu) + \exp(-iu)] \exp\left(-\frac{u^2a^2}{2t}\right) du \right),$$

δηλαδή,

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \int_0^{+\infty} [\exp(iu) + \exp(-iu)] \exp\left(-\frac{u^2a^2}{2t}\right) du,$$

ή

$$I = \frac{a \exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)}{\sqrt{2t\pi}} \left[\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{ua}{\sqrt{2t}} + \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}a}\right)^2\right] \cdot \exp\left(-\frac{t}{2a^2}\right) du \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{ua}{\sqrt{2t}} - \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}a}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{t}{2a^2}\right) du \right].$$

Τελικά,

$$I = \frac{a}{\sqrt{2t\pi}} \left(\frac{\sqrt{2t\pi}}{2a} + \frac{\sqrt{2t\pi}}{2a} \right) = 1$$

για κάθε $t > 0$. Πιο συγκεκριμένα

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^{\pi} 4\pi a^3 \sin^2(\varphi) p(t,\varphi) d\varphi = 1. \tag{2.58}$$

Από τις (2.55) και (2.58) έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0^+} 4\pi a^3 \sin^2(\varphi) p(t,\varphi) d\varphi = \delta(\varphi)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Υπενθύμιση. Η συνάρτηση ϑ_3 του Jacobi (ϑ_3 function of Jacobi) είναι η

$$\vartheta_3(z,r) = 1 + 2\sum_{\mathbb{N}} \exp\left(i\pi r n^2\right) \cos(2nz), \tag{2.59}$$

όπου $r \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Im}\{r\} > 0$.

Παρατήρηση 2.3 *Αν θέσουμε*

$$z = \frac{\varphi}{2}$$

και

$$r = \frac{ti}{2a^2\pi},$$

προκύπτει ότι

$$\vartheta_3\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{ti}{2a^2\pi}\right) = 1 + 2\sum_{\mathbb{N}} \exp\left(-\frac{tn^2}{2a^2}\right)\cos(n\varphi)$$

και

$$\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{ti}{2a^2\pi}\right)}{\partial\varphi} = -2\sum_{\mathbb{N}} n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{tn^2}{2a^2}\right).$$

Επομένως,

$$p(t,\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2a^3\sin\varphi}\exp\left(\frac{t}{2a^2}\right)\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{ti}{2a^2\pi}\right)}{\partial\varphi}. \tag{2.60}$$

2.3 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις της Κίνησης Brown σε Τοπικές Συντεταγμένες

Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη το παρακάτω

Θεώρημα 2.1 *Έστω ο πίνακας*

$$\sigma(x) = [\sigma_{jk}(x)], \quad \mu\epsilon \quad 1 \le j \le n, 1 \le k \le m$$

τέτοιος ώστε ο πίνακας $a(x) = \sigma(x)\sigma^T(x)$ *να είναι θετικά ορισμένος. Αν* X_t *είναι μια διάχυση Ito*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{2.61}$$

τότε, ο γεννήτορας της, ο A *δίνεται από την σχέση*

$$Af(x) = \sum_i b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Αντίστροφα, ο παραπάνω τελεστής A *είναι ο γεννήτορας της διάχυσης (2.61).*

Για την απόδειξη βλέπε [13].

2.3.1 Σφαιρικές Συντεταγμένες

Όπως έχουμε πει ο γεννήτορας της κίνησης Brown είναι ο $\frac{1}{2}\Delta_M$ όπου Δ_M ο τελεστής Laplace Beltrami. Άρα:

Παράδειγμα 2.1 *Ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^1 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι*

$$Af = \frac{1}{2}\Delta_1 f,$$

δηλαδή,

$$Af = \frac{1}{2a^2}\frac{d^2 f}{d\varphi^2}$$

(με περιοδικές συνθήκες στο $\varphi = 0$ και στο $\varphi = 2\pi$).
Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^1 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \frac{1}{a}dB_t.$$

Παράδειγμα 2.2 *Ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι*

$$Af = \frac{1}{2}\Delta_2 f,$$

δηλαδή,

$$Af = \frac{\cos\varphi}{2a^2\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right).$$

Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \left(0, \frac{\cos\varphi(t)}{2a^2\sin\varphi(t)}\right)dt + \begin{pmatrix} \frac{1}{a\sin\varphi(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix},$$

όπου

$$X_t = (\theta(t), \varphi(t)).$$

Παράδειγμα 2.3 *Ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^3 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι*

$$Af = \frac{1}{2}\Delta_3 f,$$

δηλαδή,

$$Af = \frac{\cos\theta_2}{2a^2\sin\theta_2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\varphi}{a^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2\sin^2\theta_2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \frac{1}{a^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_2^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right).$$

Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^3 σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \left(0, \frac{\cos\theta_2(t)}{2a^2\sin\theta_2(t)\sin^2\varphi(t)}, \frac{\cos\varphi(t)}{a^2\sin\varphi(t)}\right) dt + \begin{pmatrix} \frac{1}{a\sin\theta_2(t)\sin\varphi(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a\sin\varphi(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \\ dB_3(t) \end{pmatrix}.$$

όπου

$$X_t = (\theta_1(t), \theta_2(t), \varphi(t))\,.$$

Παράδειγμα 2.4 *Ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^n σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι*

$$Af = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(\sqrt{\det(g)} \cdot \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial\theta_i} \right)$$

όπου

$$\sqrt{\det(g)} = a^n \prod_{k=2}^{n} (\sin\theta_k)^{k-1}$$

$$g^{ij} = 0 \quad \text{αν} \quad i \neq j \quad \text{και} \quad g^{ii} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta_{i+1}\ldots\sin^2\theta_n},$$

Επομένως, για $\quad i = 1$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\sqrt{\det(g)} = 0$$

και για $\quad i > 1$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\sqrt{\det(g)} = a^n(i-1)\left(\sin\theta_i\right)^{i-2}\cos\theta_i \prod_{k=2,\, k\neq i}^{n} (\sin\theta_k)^{k-1}\,.$$

Άρα,

$$Af = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left(\sqrt{\det(g)}\; g^{i1}\frac{\partial f}{\partial\theta_1} + \sqrt{\det(g)}\; g^{i2}\frac{\partial f}{\partial\theta_2} + \cdots + \sqrt{\det(g)}\; g^{in}\frac{\partial f}{\partial\theta_n} \right),$$

δηλαδή,

$$Af = \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} \left(\sqrt{\det(g)}\; g^{11}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2} + \cdots + \sqrt{\det(g)}\; g^{nn}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_n^2} \right) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\det(g)}}\left[a^n\sum_{i=2}^{n}(i-1)\left((\sin\theta_i)^{i-2}\cos\theta_i\prod_{k=2,\,k\neq i}^{n}(\sin\theta_k)^{k-1}g^{ii}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right)\right],$$

ή

$$Af=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_1^2}+\cdots+\frac{1}{a^2\sin^2\theta_{i+1}\ldots\sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i^2}+\cdots+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_n^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{\cos\theta_2}{a^2\sin\theta_2\sin^2\theta_3\ldots\sin^2\theta_n}\frac{\partial f}{\partial\theta_2}+\cdots+\frac{(i-1)\cos\theta_i}{a^2\sin\theta_i\sin^2\theta_{i+1}\ldots\sin^2\theta_n}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{(n-1)\cos\theta_n}{2a^2\sin\theta_n}\frac{\partial f}{\partial\theta_n}\right).$$

Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^n σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t=\left(0,\frac{\cos\theta_2(t)}{2a^2\sin\theta_2(t)\sin^2\theta_3(t)\ldots\sin^2\theta_n(t)},\cdots,\frac{(i-1)\cos\theta_i(t)}{2a^2\sin\theta_i(t)\sin^2\theta_{i+1}(t)\ldots\sin^2\theta_n(t)},\cdots\right.$$
$$\left.\cdots,\frac{(n-1)\cos\theta_n(t)}{2a^2\sin\theta_n(t)}\right)dt$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{1}{a\sin\theta_2(t)\ldots\sin\theta_n(t)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{a\sin\theta_3(t)\ldots\sin\theta_n(t)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_1(t)\\ dB_2(t)\\ \vdots\\ dB_n(t)\end{pmatrix},$$

όπου

$$X_t=(\theta_1(t),\theta_2(t),\ldots,\theta_n(t)).$$

2.3.2 Στερεογραφικές Συντεταγμένες

Παράδειγμα 2.5 *Στις στερεογραφικές συντεταγμένες, ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^2 είναι*

$$Af=\frac{1}{2}\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2)}{16a^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2^2}\right).$$

Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^2 στις στερεογραφικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \begin{pmatrix} \frac{\left(x_1(t)^2+x_2^2(t)+4a^2\right)}{4a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)+4a^2\right)}{4a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix}. \qquad (2.62)$$

όπου

$$X_t = (x_1(t), x_2(t)).$$

Παράδειγμα 2.6 *Στις στερεογραφικές συντεταγμένες, ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην S^3 είναι*

$$Af = -\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+4a^2)}{16a^4}\left(\xi_1\frac{\partial f}{\partial \xi_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial \xi_2}+\xi_3\frac{\partial f}{\partial \xi_3}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+4a^2)^2}{16a^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_3^2}\right).$$

Συνεπώς η κίνηση Brown στην S^3 στις στερεογραφικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = -\frac{(x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+4a^2)}{16a^4}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\,dt+$$

$$\frac{(x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+4a^2)}{4a^2}\begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \\ dB_3(t) \end{pmatrix},$$

όπου

$$X_t = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Παράδειγμα 2.7 *Στις στερεογραφικές συντεταγμένες, ο γεννήτορας της κίνησης Brown στην $S^n, n \geq 2$ είναι*

$$Af = \frac{1}{2}\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2+4a^2)^2}{16a^4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_n^2}\right)+$$

$$(2-n)\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2+4a^2)}{16a^4}\left(\xi_1\frac{\partial f}{\partial \xi_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial \xi_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right).$$

Συνεπώς, η κίνηση Brown στην S^n στις στερεογραφικές συντεταγμένες είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = (2-n)\frac{(x_1^2(t)+\cdots+x_n^2(t)+4a^2)}{16a^4}(x_1(t),\cdots,x_n(t))\,dt+$$

$$\frac{(x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) + 4a^2)}{4a^2} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \\ \vdots \\ dB_n(t) \end{pmatrix},$$

όπου

$$X_t = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) .$$

3 Χρόνοι Εξόδου

Υπενθυμίζουμε κάποιους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1 *Ένας μετρήσιμος χώρος $\Omega, \mathcal{F}$ λέμε ότι είναι εφοδιασμένος με μία διύλιση (filtration) $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, +\infty)$, όταν για κάθε $t \geq 0$, η $\mathcal{F}_t$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ και επιπλέον για κάθε $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ με $t_1 < t_2$, ισύει ότι $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.*

Ορισμός 3.2 *Έστω ο μετρήσιμος χώρος $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ εφοδιασμένος με την διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$. Μια τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to [0, +\infty)$ λέγεται χρόνος διακοπής (stopping time) της $\{\mathcal{F}_t\}$, αν για κάθε $t \geq 0$*

$$\{\omega \in \Omega |\, T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Για περισσότερες λεπτομέριες βλέπε [18].
Έστω X_t η κίνηση Brown στην S^n και $D \subset S^n$. Τότε ο

$$T = \inf\{t \geq 0 |\, X_t \notin D\}$$

είναι χρόνος διακοπής της $\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s, 0 \leq s \leq t\right)$, και καλείται χρόνος εξόδου (exit time) του ∂D .

3.1 Μέση Τιμή Χρόνων Εξόδου στην S^n

Πρόταση 3.1 *Έστω δύο δοθέντα $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, με $\varphi_1 < \varphi_2$, . Θεωρούμε το σύνολο D στην S^1,*

$$D = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^1 ακτίνας a, η οποία ξεκινάει από ένα σημείο

$$\varphi \in D,$$

τότε η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T δίνεται από την σχέση

$$E^{\varphi}[T] = -a^2\left(\varphi - \varphi_1\right)\left(\varphi - \varphi_2\right). \tag{3.1}$$

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι, (βλέπε [6]), η συνάρτηση $E^{\varphi}[T]$ ικανοποιεί την εξίσωση του

Poisson στο D με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Από την μοναδικότητα της λύσης,

$$u(\varphi) = E^{\varphi}[T]$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_1 u = -1, \tag{3.2}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = u(\varphi_2) = 0. \tag{3.3}$$

Με Δ_1 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^1. Επομένως από την (1.2) η διαφορική εξίσωση (3.2) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -1. \tag{3.4}$$

Από τις (3.3) και (3.4) προκύπτει ότι

$$u(\varphi) = -a^2\left(\varphi - \varphi_1\right)\left(\varphi - \varphi_2\right).$$

Δηλαδή,

$$E^{\varphi}[T] = -a^2\left(\varphi - \varphi_1\right)\left(\varphi - \varphi_2\right).$$

■

Πρόταση 3.2 *Έστω δοθέν* $\varphi_0 \in (0, \pi)$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* $S^n, n \geq 2$

$$D = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) \right| \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi], \quad i = 2, \dots, n-1, \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0, \varphi_0) \left.\right\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) \right| \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi], \quad i = 2, \dots, n-1, \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_0 \left.\right\}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^n *ακτίνας* a, *η οποία ξεκινάει από ένα σημείο*

$$A = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) \in D,$$

τότε η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T *δίνεται από την σχέση*

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx. \tag{3.5}$$

Απόδειξη.
Από [6],

$$u(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},\varphi)=E^A[T]$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_n u=-1, \tag{3.6}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},\varphi_0)=0.$$

Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n.
Από την συμμετρία του D, προκύπτει ότι η μέση τιμή του T είναι ανεξάρτητη των $\theta_1,\dots,\theta_{n-1}$. Άρα η u είναι ανεξάρτητη των θ_i, για $i=1,\dots,n-1$. Από την (1.9) η διαφορική εξίσωση (3.6) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)\frac{du}{d\varphi}+\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]=-1, \tag{3.7}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_0)=0. \tag{3.8}$$

Θέτουμε

$$f(\varphi)=\frac{du}{d\varphi}.$$

Επομένως, από την (3.7) έχουμε ότι

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)f(\varphi)+\frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right]=-1,$$

ή

$$(n-1)\cos(\varphi)f(\varphi)+\sin(\varphi)\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=-2a^2\sin(\varphi),$$

πολλαπλασιάζοντας με $(\sin\varphi)^{n-2}$ προκύπτει ότι

$$(n-1)(\sin\varphi)^{n-2}\cos(\varphi)f(\varphi)+(\sin\varphi)^{n-1}\frac{df(\varphi)}{d\varphi}=-2a^2(\sin\varphi)^{n-1}.$$

Άρα

$$f(\varphi)=-\frac{2a^2}{(\sin\varphi)^{n-1}}\int_0^{\varphi}(\sin\omega)^{n-1}d\omega+\frac{c_1}{(\sin\varphi)^{n-1}}.$$

Συνεπώς,

$$u(\varphi) = -2a^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_2. \tag{3.9}$$

Όμως, (βλέπε [13])

$$u(\varphi) = E^A[T] < \infty, \quad \text{για} \quad \varphi \in (0, \varphi_0)$$

Επομένως,

$$c_1 = 0.$$

Επιπλέον,

$$u(\varphi_0) = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad c_2 = 0$$

έτσι,

$$u(\varphi) = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx.$$

Τελικά,

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx. \tag{3.10}$$

■

Παρατήρηση 3.1 *Η $u(\varphi)$ είναι στοιχειώδης συνάρτηση εφόσον το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί για κάθε $n \geq 2$ μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων στην (3.10).*

Παράδειγμα 3.1 *Έστω δοθέν $\varphi_0 \in [0, \pi)$. Θεωρούμε το σύνολο D στην S^2,*

$$D = \{(\theta, \varphi) | \, \theta \in [0, 2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0, \varphi_0)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{(\theta, \varphi) | \, \theta \in [0, 2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_0\}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^2 ακτίνας a, η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta, \varphi) \in D,$$

τότε από την σχέση (3.5) η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T δίνεται από την

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\int_0^x (\sin\omega) d\omega}{\sin x} dx.$$

Άρα,

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{1-\cos x}{\sin x} dx,$$

ή

$$E^A[T] = 2a^2 \left(\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{1}{\sin x} dx - \int_{\varphi}^{\varphi_0} (\cot x) dx \right),$$

επομένως,

$$E^A[T] = 2a^2 \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) - \ln(\sin\varphi_0) + \ln(\sin\varphi) \right].$$

Τελικά

$$E^A[T] = 2a^2 \ln\left(\frac{1+\cos\varphi}{1+\cos\varphi_0}\right). \tag{3.11}$$

Παράδειγμα 3.2 *Έστω δοθέν* $\varphi_0 \in [0,\pi)$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^3,

$$D = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0,\varphi_0)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_0\}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^3 *ακτίνας* a, *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1,\theta_2,\varphi) \in D,$$

τότε από την σχέση (3.5) η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T *δίνεται από την*

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^2 d\omega}{(\sin x)^2} dx,$$

Άρα,

$$E^A[T] = 2a^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}}{(\sin x)^2} dx,$$

ή

$$E^A[T] = a^2 \left(\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{x}{(\sin x)^2} dx - \int_{\varphi}^{\varphi_0} (\cot x) dx \right),$$

Επομένως,

$$E^A[T] = a^2 (\varphi\cot\varphi - \varphi_0\cot\varphi_0). \tag{3.12}$$

Πρόταση 3.3 *Έστω δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, *τέτοια ώστε* $\varphi_1 < \varphi_2$, . *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* $S^n, n \geq 2$,

$$D = \{(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi)|\ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi], \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi)|\ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi], \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1$$
$$\textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2\}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^n *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) \in D$$

τότε η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T *δίνεται από την*

$$E^A[T] = 2a^2 \left(\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx \right). \tag{3.13}$$

Απόδειξη.
Από [6], η $E^{\varphi}[t]$ ικανοποιεί την εξίσωση Poisson στο D με Dirichlet συνοριακές συνθήκες. Από μοναδικότητα,

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) = E^A[T]$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.6), δηλαδή

$$\frac{1}{2}\Delta_n u = -1,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_2) = 0.$$

Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n.
Από συμμετρία του D, προκύπτει ότι η μέση τιμή του T είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Επομένως η u είναι ανεξάρτητη των θ_i, για $i = 1, \ldots, n-1$. Από (1.9) η διαφορική εξίσωση (3.6) παίρνει την μορφή (3.7) με συνοριακές συνθήκες

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_2) = 0. \tag{3.14}$$

Άρα από (3.9)

$$u(\varphi) = -2a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_2.$$

Ωστόσο,

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_2) = 0,$$

δηλαδή,

$$-2a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_2 = 0$$

και

$$-2a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_1 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + c_2 = 0.$$

Συνεπώς,

$$c_1 = 2a^2 \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}$$

και

$$c_2 = 0.$$

Τελικά,

$$E^A[T] = 2a^2 \left(\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^{n-1} d\omega}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx \right).$$

■

Παράδειγμα 3.3 *Έστω δοθέντα $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$, με $\varphi_1 < \varphi_2$. Θεωρούμε το σύνολο D στην S^2,*

$$D = \{ (\theta, \varphi) | \ \theta \in [0, 2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{ (\theta, \varphi) | \ \theta \in [0, 2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1 \quad \textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2 \}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^2 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta, \varphi) \in D,$$

τότε από την σχέση (3.13) η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T δίνεται από την

$$E^A[T] = 2a^2 \left(\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\int_0^x (\sin\omega) d\omega}{\sin x} dx + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega) d\omega}{(\sin x)} dx}{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{\sin x} dx \right).$$

Δηλαδή,

$$E^A[T] = 2a^2 \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi} (\cot x) dx - \frac{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} (\cot x) dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{\sin x} dx \right),$$

άρα,

$$E^A[T] = \frac{2a^2}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)} \left[\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)} \right) \cdot \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)} \right) \right.$$

$$\left. - \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)} \right) \cdot \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) \right],$$

από την οποία και συμπεραίνουμε ότι

$$E^A[T] = \frac{4a^2}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)} \left[\ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)} \right) \cdot \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)} \right) - \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right) \cdot \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)} \right) \right]. \tag{3.15}$$

Παράδειγμα 3.4 *Έστω δοθέντα $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$, με $\varphi_1 < \varphi_2$. Θεωρούμε το σύνολο D στην S^3,*

$$D = \{ (\theta_1, \theta_2, \varphi) |\ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_2 \in [0, \pi], \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{ (\theta_1, \theta_2, \varphi) |\ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_2 \in [0, \pi] \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1 \quad \textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2 \}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^3 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta, \varphi) \in D,$$

τότε από την σχέση (3.13) η μέση τιμή του χρόνου εξόδου T δίνεται από την

$$E^A[T] = 2a^2 \left[\int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^2 d\omega}{(\sin x)^2} dx + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\int_0^x (\sin\omega)^2 d\omega}{(\sin x)^2} dx}{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^2} dx \right],$$

Δηλαδή,

$$E^A[T] = a^2 \left[\int_{\varphi}^{\varphi_1} \left(\frac{x}{(\sin x)^2} - \cot x \right) dx + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{x}{(\sin x)^2} - \cot x}{\int_{\varphi 1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^2} dx \right],$$

ή

$$E^A[T] = a^2 \left[\varphi \cot \varphi - \varphi_1 \cot \varphi_1 + \frac{\varphi_1 \cot \varphi_1 - \varphi_2 \cot \varphi_2}{\cot \varphi_1 - \cot \varphi_2} (\cot \varphi_1 - \cot \varphi) \right].$$

Άρα,

$$E^A[T] = \frac{a^2 \left[(\varphi - \varphi_1) \cot \varphi \cot \varphi_1 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cot \varphi_1 \cot \varphi_2 + (\varphi_2 - \varphi) \cot \varphi_2 \cot \varphi \right]}{\cot \varphi_1 - \cot \varphi_2}. \tag{3.16}$$

Πρόταση 3.4 *Θεωρούμε την σφαίρα διάστασης* 2, S^2 *ακτίνας* a. *Έστω δύο κύκλοι που παιρνούν από τον Βόρειο πόλο, έτσι ώστε στις στερεογραφικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε δύο παράλληλες γραμμές* $\xi_2 = b$ *και* $\xi_2 = c$, *όπου* $b, c \in \mathbb{R}$, *με* $b < c$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^2, *του οποίου οι στερεογραφικές συντεταγμένες είναι*

$$D = \{ (\xi_1, \xi_2) \,|\, \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 \in (b, c) \}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{ (\xi_1, \xi_2) \,|\, \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 = b \quad \textit{ή} \quad \xi_2 = c \}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^2 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο* A, *του οποίου οι στερεογραφικές συντεταγμένες είναι οι*

$$(\xi_1, \xi_2) \in D.$$

και

$$T = \inf \{ t \geq 0 \,|\, X_t \in D \},$$

τότε

$$E^A[T] = f(\xi_1, \xi_2) - 2a^2 \ln \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4a^2 \right), \tag{3.17}$$

όπου

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\eta, c) \exp\left(\frac{\pi \xi_1}{c-b}\right) \sin\left(\frac{\pi(\xi_2 - b)}{c-b}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi \xi_1}{c-b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(\xi_2 - b)}{c-b}\right) + \left(\exp\left(\frac{\pi \xi_1}{c-b}\right) \cos\left(\frac{\pi(\xi_2 - b)}{c-b}\right) + \eta\right)^2} d\eta$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g(\eta,b)\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)+\left(\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\cos\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)-\eta\right)^2}d\eta \quad (3.18)$$

και

$$g(\xi,t)=2a^2\ln\left(\frac{(c-b)^2\ln^2|\xi|}{\pi^2}+t^2+4a^2\right). \quad (3.19)$$

Απόδειξη

Όπως έχουμε ήδη δει η συνάρτηση

$$E^A[T]=U(\xi_1,\xi_2)$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\Delta_2 U=-1$$

με συνοριακές συνθήκες

$$U(\xi_1,b)=U(\xi_1,c)=0.$$

Με Δ_2 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^2 ο οποίος εκφράζεται στις στερεογραφικές συντεταγμένες. Επομένως η διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2}\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2)^2}{16a^4}\cdot\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_2^2}\right)=-1,$$

ή

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_2^2}=-\frac{32a^4}{(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2)^2}. \quad (3.20)$$

Ωστόσο, η συνάρτηση

$$U_1(\xi_1,\xi_2)=-2a^2\ln(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2)$$

ικανοποεί την διαφορική εξίσωση (3.20). Άρα,

$$U(\xi_1,\xi_2)=-2a^2\ln(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2)+f(\xi_1,\xi_2)$$

όπου η $f(\xi_1,\xi_2)$ ικανοποιεί την

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_2^2}=0,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$f(\xi_1, b) = 2a^2 \ln(\xi_1^2 + b^2 + 4a^2)$$

και

$$f(\xi_1, c) = 2a^2 \ln(\xi_1^2 + c^2 + 4a^2).$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $x = \xi_1$, $y = \xi_2 - b$ και θέτοντας $\phi(x, y) = f(\xi_1, \xi_2)$, η $\phi(x, y)$ ικανοποιεί

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\phi(x, 0) = 2a^2 \ln(x^2 + b^2 + 4a^2)$$

και

$$\phi(x, \beta) = 2a^2 \ln(x^2 + c^2 + 4a^2)$$

όπου $\beta = c - b$.
Στην συνέχεια θέτουμε $z = x + yi$ και $w = \exp\left(\frac{\pi z}{\beta}\right)$, δηλαδή $z = \frac{\beta \ln w}{\pi}$.
Έτσι, αν $w = u + vi,\ u, v \in \mathbb{R}$ τότε

$$u = \exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{\beta}\right) \quad \text{και} \quad v = \exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right). \tag{3.21}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\psi(u, v) = \phi(x, y)$. Προκύπτει ότι η $\psi(u, v)$ ικανοποιεί ότι

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial\ u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial\ v^2} = 0,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\psi(u, 0) = 2a^2 \ln\left(\frac{\beta^2 \ln^2 u}{\pi^2} + b^2 + 4a^2\right), \quad \text{για} \quad u > 0$$

και

$$\psi(u, 0) = 2a^2 \ln\left(\frac{\beta^2 \ln^2 |u|}{\pi^2} + c^2 + 4a^2\right), \quad \text{για} \quad u < 0.$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι το πρόβλημα Dirichlet για την ημιευθεία και είναι γνωστό ότι η λύση του δίνεται από τον ολοκληρωτικό τύπο του Poisson για το ημιεπίπεδο (βλέπε [16]):

$$\psi(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \psi(\xi, 0)}{v^2 + (u - \xi)^2} d\xi,$$

ή
$$\psi(u,v)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{vg(\xi,c)}{v^2+(u-\xi)^2}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{vg(\xi,b)}{v^2+(u-\xi)^2}d\xi,$$
όπου
$$g(\xi,t)=2a^2\ln\left(\frac{\beta^2\ln^2|\xi|}{\pi^2}+t^2+4a^2\right).$$
Παρατηρούμε ότι $g(-\xi,t)=g(\xi,t)$. Επομένως,
$$\psi(u,v)=\frac{1}{\pi}v\int_{0}^{\infty}\left(\frac{g(\xi,c)}{v^2+(u+\xi)^2}+\frac{g(\xi,b)}{v^2+(u-\xi)^2}\right)d\xi,$$

όπου u,v δίνονται από την (3.21). Συνεπώς,
$$\phi(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)\int_0^\infty\frac{g(\eta,c)}{\exp\left(\frac{2\pi x}{\beta}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)+\left(\exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)+\eta\right)^2}d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)\int_0^\infty\frac{g(\eta,b)}{\exp\left(\frac{2\pi x}{\beta}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)+\left(\exp\left(\frac{\pi x}{\beta}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)-\eta\right)^2}d\eta,$$

δηλαδή,

$$f(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{g(\eta,c)\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)+\left(\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\cos\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)+\eta\right)^2}d\eta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{g(\eta,b)\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)}{\exp\left(\frac{2\pi\xi_1}{c-b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)+\left(\exp\left(\frac{\pi\xi_1}{c-b}\right)\cos\left(\frac{\pi(\xi_2-b)}{c-b}\right)-\eta\right)^2}d\eta.$$

Τελικά,
$$E^A[T]=f(\xi_1,\xi_2)-2a^2\ln\left(\xi_1^2+\xi_2^2+4a^2\right).$$

■

3.2 Μέση Τιμή της $f(X_T)$

Πρόταση 3.5 *Έστω δύο δοθέντα* $\varphi_1,\varphi_2\in[0,2\pi)$, *τέτοια ώστε* $\varphi_1<\varphi_2$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^1,
$$D=(\varphi_1,\varphi_2).$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{\varphi_1, \varphi_2\}\,.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^1 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$\varphi \in D,$$

και f *είναι μια συνάρτηση στο* ∂D, *τότε η μέση τιμή της* $f(X_T)$ *δίνεται από την σχέση*

$$E^{\varphi}[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_2)(\varphi - \varphi_1) + f(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi)}{\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{3.22}$$

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι (βλέπε [13]) η συνάρτηση

$$u(\varphi) = E^{\varphi}[f(X_T)]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\Delta_1 u = 0,$$

δηλαδή,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0, \tag{3.23}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u = f \quad \text{ον} \quad \partial D.$$

Από μοναδικότητα,

$$u(\varphi) = E^{\varphi}[f(X_T)]$$

είναι η μοναδίκή λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.23) με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = f(\varphi_1) \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = f(\varphi_2). \tag{3.24}$$

Από (3.23) και (3.24) έπεται ότι

$$u(\varphi) = \frac{f(\varphi_2)(\varphi - \varphi_1) + f(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi)}{\varphi_2 - \varphi_1},$$

δηλαδή,

$$E^{\varphi}[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_2)(\varphi - \varphi_1) + f(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi)}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

■

Πρόταση 3.6 *Έστω δύο δοθέντα $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, τέτοια ώστε $\varphi_1 < \varphi_2$. Θεωρούμε το σύνολο D στην $S^n, n \geq 2$,*

$$D = \{ (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) | \ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi] \quad \textit{για} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{ (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) | \ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi] \quad \textit{για} \quad i = 2, \dots, n-1 \quad \textit{και}$$

$$\varphi = \varphi_1 \quad \textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2 \quad \}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^n ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) \in D$$

και

$$f : \partial D \to \mathbb{R}$$

με

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n, \varphi_1) = f(\varphi_1)$$

και

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n, \varphi_2) = f(\varphi_2)$$

είναι μία συνάρτηση στο ∂D, τότε η μέση τιμή της $f(X_T)$ δίνεται από την σχέση

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1) \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + f(\varphi_2) \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}. \tag{3.25}$$

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι (βλέπε [13]), η

$$u(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi) = E^A[f(X_T)]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2} \Delta_n u = 0, \tag{3.26}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u = f \quad \text{στο} \quad \partial D.$$

Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n.
Η $E^A[f(X_T)]$, είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Επομένως από την (1.9) η διαφορική εξίσωση (3.26) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)\frac{du}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] = 0, \tag{3.27}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = f(\varphi_1) \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = f(\varphi_2). \tag{3.28}$$

Θέτουμε

$$g(\varphi) = \frac{du}{d\varphi},$$

επομένως από την (3.27)

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)g(\varphi) + \frac{dg(\varphi)}{d\varphi}\right] = 0,$$

ή

$$(n-1)\cos(\varphi)g(\varphi) + \sin(\varphi)\frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(\sin\varphi)^{n-2}$ προκύπτει ότι

$$(n-1)(\sin\varphi)^{n-2}\cos(\varphi)g(\varphi) + (\sin\varphi)^{n-1}\frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = 0,$$

ή

$$\frac{d}{d\varphi}\left[(\sin\varphi)^{n-1}g(\varphi)\right] = 0.$$

Άρα

$$g(\varphi) = \frac{c_1}{(\sin\varphi)^{n-1}},$$

δηλαδή,

$$u(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{c_1}{(\sin x)^{n-1}}dx + c_2. \tag{3.29}$$

Ωστόσο,

$$u(\varphi_1) = f(\varphi_1) \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = f(\varphi_2),$$

επομένως,

$$c_1 = \frac{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}$$

και

$$c_2 = f(\varphi_2).$$

Συνεπώς,

$$u(\varphi) = \frac{f(\varphi_1)\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx + f(\varphi_2)\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}.$$

Τελικά,

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1)\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx + f(\varphi_2)\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}.$$

■

Παράδειγμα 3.5 *Έστω δύο δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, *τέτοια ώστε* $\varphi_1 < \varphi_2$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^2,

$$D = \{(\theta,\varphi)|\ \theta \in [0,2\pi), \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{(\theta,\varphi)|\ \theta \in [0,2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1 \quad \textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2\}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^2 *ακτίνας* a, *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta,\varphi) \in D,$$

και

$$f : \partial D \to \mathbb{R}$$

με

$$f(\theta,\varphi_1) = f(\varphi_1)$$

και

$$f(\theta,\varphi_2) = f(\varphi_2),$$

τότε από την (3.25) η μέση τιμή της $f(X_T)$ *δίνεται από την σχέση*

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1)\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x}dx + f(\varphi_2)\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{\sin x}dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x}dx},$$

δηλαδή,

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1)\cdot \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right) + f(\varphi_2)\cdot \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)}. \tag{3.30}$$

Παράδειγμα 3.6 *Έστω δύο δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$, *τέτοια ώστε* $\varphi_1 < \varphi_2$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^3,

$$D = \{ (\theta_1, \theta_2, \varphi) | \ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_2 \in [0, \pi] \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) \} .$$

Προφανώς,

$$\partial D = \{ (\theta_1, \theta_2, \varphi) | \ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_2 \in [0, \pi] \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1 \quad \textit{ή} \quad \varphi = \varphi_2 \} .$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^3 *ακτίνας* a, *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1, \theta_2, \varphi) \in D,$$

και

$$f : \partial D \to \mathbb{R}$$

με

$$f(\theta_1, \theta_2, \varphi_1) = f(\varphi_1)$$

και

$$f(\theta_1, \theta_2, \varphi_2) = f(\varphi_2),$$

τότε από την (3.25) η μέση τιμή της $f(X_T)$ *δίνεται από την σχέση*

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1) \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx + f(\varphi_2) \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^2} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx},$$

δηλαδή,

$$E^A[f(X_T)] = \frac{f(\varphi_1) (\cot \varphi - \cot \varphi_2) + f(\varphi_2) (\cot \varphi_1 - \cot \varphi)}{\cot \varphi_1 - \cot \varphi_2}. \tag{3.31}$$

3.3 Πιθανότητες Εξόδου

Πρόταση 3.7 *Έστω δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, *με* $\varphi_1 < \varphi_2$, . *Θεωρούμε τα σύνολα* D_1, D_2 *στην* S^1,

$$D_1 = (\varphi_1, 2\pi) \quad \textit{και} \quad D_2 = [0, \varphi_2)$$

Προφανώς,

$$\partial D_1 = \{\varphi_1\} \quad \textit{και} \quad \partial D_2 = \{\varphi_2\} .$$

Έστω X_t *η κίνηση Brown στην* S^1 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$\varphi \in D_1 \cap D_2.$$

Αν

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1\},$$
$$T_2 = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_2\}$$

και

$$T = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1 \cap D_2\},$$

τότε οι πιθανότητες

$$Pr^{\varphi}\{T = T_1\} \quad \textit{και} \quad Pr^{\varphi}\{T = T_2\}$$

δίνονται από τις σχέσεις

$$Pr^{\varphi}\{T = T_1\} = \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1} \tag{3.32}$$

και

$$Pr^{\varphi}\{T = T_2\} = \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}. \tag{3.33}$$

Απόδειξη.
Γνωρίζουμε ότι (βλέπε [11]) η συνάρτηση

$$u(\varphi) = Pr^{\varphi}\{T = T_1\}$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_1 u = 0, \tag{3.34}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = 1 \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = 0. \tag{3.35}$$

Με Δ_1 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^1. Επομένως από την (1.2) η διαφορική εξίσωση (3.34) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0. \tag{3.36}$$

Από τις σχέσεις (3.35) και (3.36) συμπεραίνουμε ότι

$$u(\varphi) = \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Δηλαδή,

$$Pr^{\varphi}\{T = T_1\} = \frac{\varphi_2 - \varphi}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Επιπλέον,

$$Pr^{\varphi}\{T=T_2\} = 1 - Pr^{\varphi}\{T=T_1\},$$

άρα,

$$Pr^{\varphi}\{T=T_2\} = \frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1}.$$

$\blacksquare$

Δεύτερος τρόπος απόδειξης.
Από την σχέση (3.22) για $f(x)=x$ έχουμε ότι

$$E^{\varphi}[X_T] = \varphi$$

Ωστόσο,

$$E^{\varphi}[X_T] = \varphi_1 \cdot Pr^{\varphi}\{T=T_1\} + \varphi_2 \cdot Pr^{\varphi}\{T=T_2\},$$

δηλαδή

$$\varphi = \varphi_1 \cdot Pr^{\varphi}\{T=T_1\} + \varphi_2 \cdot (1 - Pr^{\varphi}\{T=T_1\}).$$

Τελικά,

$$Pr^{\varphi}\{T=T_1\} = \frac{\varphi_2-\varphi}{\varphi_2-\varphi_1}.$$

και

$$Pr^{\varphi}\{T=T_2\} = \frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1}.$$

$\blacksquare$

Πρόταση 3.8 *Έστω δοθέντα $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, με $\varphi_1 < \varphi_2$, . Θεωρούμε τα σύνολα D_1, D_2 στην $S^n, n \geq 2$,*

$$D_1 = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i=2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1,\pi]\}$$

και

$$D_2 = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i=2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0,\varphi_2)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D_1 = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i=2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1\}$$

και

$$\partial D_2 = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i=2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_2\}.$$

Έστω X_t η κίνηση Brown στην S^n ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) \in D_1 \cap D_2.$$

Αν

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1\},$$

$$T_2 = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_2\}$$

και

$$T = \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1 \cap D_2\},$$

τότε οι πιθανότητες

$$Pr^A\{T = T_1\} \quad \textit{και} \quad Pr^A\{T = T_2\}$$

δίνονται από τις σχέσεις

$$Pr^A\{T = T_1\} = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx} \tag{3.37}$$

και

$$Pr^A\{T = T_2\} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}. \tag{3.38}$$

Απόδειξη.
Γνωρίζουμε ότι (βλέπε [11]), η

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) = Pr^A\{T = T_1\}$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_n u = 0, \tag{3.39}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = 1 \quad \text{και} \quad u(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_2) = 0.$$

Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n.
Από την συμμετρία του D, προκύπτει ότι η πιθανότητα $Pr^A\{T = T_1\}$ είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Επομένως η u είναι ανεξάρτητη των θ_i, για $i = 1, \ldots, n-1$. Από την (1.9) η διαφορική εξίσωση (3.39) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)\frac{du}{d\varphi} + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] = 0, \tag{3.40}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = 1 \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = 0. \tag{3.41}$$

Θέτουμε

$$f(\varphi) = \frac{du}{d\varphi},$$

επομένως από την (3.40)

$$\frac{1}{2a^2}\left[(n-1)\cot(\varphi)f(\varphi) + \frac{df(\varphi)}{d\varphi}\right] = 0,$$

ή

$$(n-1)\cos(\varphi)f(\varphi) + \sin(\varphi)\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\quad (\sin\varphi)^{n-2} \quad$ έπεται ότι

$$(n-1)(\sin\varphi)^{n-2}\cos(\varphi)f(\varphi) + (\sin\varphi)^{n-1}\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0,$$

ή

$$\frac{d}{d\varphi}\left[(\sin\varphi)^{n-1}f(\varphi)\right] = 0.$$

Έτσι,

$$f(\varphi) = \frac{c_1}{(\sin\varphi)^{n-1}},$$

δηλαδή,

$$u(\varphi) = \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{c_1}{(\sin x)^{n-1}}dx + c_2. \tag{3.42}$$

Ωστόσο,

$$u(\varphi_1) = 1 \quad \text{και} \quad u(\varphi_2) = 0,$$

επομένως,

$$c_1 = -\frac{1}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}$$

και

$$c_2 = 0.$$

Άρα

$$u(\varphi) = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx}.$$

Συνεπώς,

$$Pr^A\left\{T=T_1\right\} = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}.$$

Επιπλέων,

$$Pr^A\left\{T=T_2\right\} = 1 - Pr^A\left\{T=T_1\right\},$$

δηλαδή,

$$Pr^A\left\{T=T_2\right\} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}.$$

■

Δεύτερος τρόπος απόδειξης.
Από την σχέση (3.25) για

$$f : S^n \to \mathbb{R},$$

με

$$f(\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi) = \varphi,$$

$$E^A[f(X_T)] = \frac{\varphi_1 \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + \varphi_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}. \tag{3.43}$$

Ωστόσο,

$$E^A[f(X_T)] = \varphi_1 \cdot Pr^A\left\{T=T_1\right\} + \varphi_2 \cdot Pr^A\left\{T=T_2\right\},$$

δηλαδή,

$$\frac{\varphi_1 \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx + \varphi_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx} = \varphi_1 \cdot Pr^A\left\{T=T_1\right\} + \varphi_2 \cdot \left(1 - Pr^A\left\{T=T_1\right\}\right).$$

Τελικά,

$$Pr^A\left\{T=T_1\right\} = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}$$

και

$$Pr^{\varphi}\left\{T=T_2\right\} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^{n-1}} dx}.$$

■

Παράδειγμα 3.7 *Έστω δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, *με* $\varphi_1 < \varphi_2$, . *Θεωρούμε τα σύνολα* D_1, D_2 *στην* S^2,

$$D_1 = \{ (\theta,\varphi) | \ \theta \in [0,2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_1, \pi] \}$$

και

$$D_2 = \{ (\theta,\varphi) | \ \theta \in [0,2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0, \varphi_2) \} .$$

Προφανώς,

$$\partial D_1 = \{ (\theta,\varphi) | \ \theta \in [0,2\pi), \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_1 \}$$

και

$$\partial D_2 = \{ (\theta,\varphi) | \ \theta_1 \in [0,2\pi), \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_2 \} .$$

Έστω X_t *η κίνηση Brown στην* S^2 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta,\varphi) \in D_1 \cap D_2.$$

Αν

$$T_1 = \inf \{ t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1 \} ,$$
$$T_2 = \inf \{ t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_2 \}$$

και

$$T = \inf \{ t \geq 0 \,|\, X_t \notin D_1 \cap D_2 \} ,$$

τότε από τις σχέσεις (3.37) και (3.38) οι πιθανότητες

$$Pr^A \{T = T_1\} \quad \textit{και} \quad Pr^A \{T = T_2\}$$

δίνονται από τις εκφράσεις

$$Pr^A \{T = T_1\} = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x} dx}$$

και

$$Pr^A \{T = T_2\} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{\sin x} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin x} dx},$$

δηλαδή,

$$Pr^A \{T = T_1\} = \frac{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)} \tag{3.44}$$

και

$$Pr^A \{T = T_2\} = \frac{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)}. \tag{3.45}$$

Παράδειγμα 3.8 *Έστω δύο δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0,\pi)$, *με* $\varphi_1 < \varphi_2$, . *Θεωρούμε τα σύνολα* D_1, D_2 *στην* S^3

$$D_1 = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \text{και} \quad \varphi \in (\varphi_1,\pi]\}$$

και

$$D_2 = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \text{και} \quad \varphi \in [0,\varphi_2)\}.$$

Προφανώς,

$$\partial D_1 = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \text{και} \quad \varphi = \varphi_1\}$$

και

$$\partial D_2 = \{(\theta_1,\theta_2,\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi] \quad \text{και} \quad \varphi = \varphi_2\}.$$

Έστω X_t *η κίνηση Brown στην* S^3 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1,\theta_2,\varphi) \in D_1 \cap D_2.$$

Αν

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin D_1\},$$
$$T_2 = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin D_2\}$$

και

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \notin D_1 \cap D_2\},$$

τότε από τις σχέσεις (3.37) και (3.38) οι πιθανότητες

$$Pr^A\{T = T_1\} \quad \text{και} \quad Pr^A\{T = T_2\}$$

δίνονται από τις εκφράσεις

$$Pr^A\{T = T_1\} = \frac{\int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx}$$

και

$$Pr^A\{T = T_2\} = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{1}{(\sin x)^2} dx}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx},$$

δηλαδή,

$$Pr^A\{T = T_1\} = \frac{\cot\varphi - \cot\varphi_2}{\cot\varphi_1 - \cot\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 \sin(\varphi_2 - \varphi)}{\sin\varphi \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{3.46}$$

και

$$Pr^A\{T = T_2\} = \frac{\cot\varphi_1 - \cot\varphi}{\cot\varphi_1 - \cot\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_2 \sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin\varphi \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{3.47}$$

Παρατήρηση 3.2 *Οι εκφράσεις των παραπάνω πιθανοτήτων για* $n = 2$ *είναι αρκετά διαφορετικές από τις αντίστοιχες για* $n = 3$ *. Το παραπάνω γεγονός είναι μια ειδική περίπτωση του γενικότερου φαινομένου που αφορά άρτιες και περιττές διαστάσεις.*

Πρόταση 3.9 *Θεωρούμε την σφαίρα διάστασης* 2, S^2 *ακτίνας* a*. Έστω δύο κύκλοι που παιρνούν από τον Βόρειο πόλο, έτσι ώστε στις στερεογραφικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε δύο παράλληλες γραμμές* $\xi_2 = b$ *και* $\xi_2 = c$*, όπου* $b, c \in \mathbb{R}$*, με* $b < c$*.*
Στην συνέχεια θεωρούμε τα σύνολα D_1, D_2 *στην* S^2*, των οποίων οι στερεογραφικές συνταταγμένες είναι*

$$D_1 = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 \in (b, +\infty)\}$$

και

$$D_2 = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 \in (-\infty, c)\}.$$

Σαφώς,

$$\partial D_1 = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 = b\}$$

και

$$\partial D_2 = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in \mathbb{R} \quad \textit{και} \quad \xi_2 = c\}.$$

Έστω X_t *η κίνηση Brown στην* S^2 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο* A*, του οποίου οι στερεογραφικές συντεταγμένες είναι οι*

$$(\xi_1, \xi_2) \in D_1 \cap D_2.$$

Αν

$$T_1 = \inf \{t \geq 0 \mid X_t \notin D_1\},$$

$$T_2 = \inf \{t \geq 0 \mid X_t \notin D_2\}$$

και

$$T = \inf \{t \geq 0 \mid X_t \notin D_1 \cap D_2\},$$

τότε

$$Pr^A \{T = T_1\} = \frac{c - \xi_2}{c - b} \quad \textit{και} \quad Pr^A \{T = T_2\} = \frac{\xi_2 - b}{c - b}. \tag{3.48}$$

Απόδειξη
Είναι γνωστό ότι (βλέπε [11]) η συνάρτηση

$$u(\xi_1, \xi_2) = Pr^A \{T = T_1\}$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_2 u = 0 \tag{3.49}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\xi_1, b) = 1 \quad \text{και} \quad u(\xi_1, c) = 0. \tag{3.50}$$

Με Δ_2 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^2 ο οποίος εκφράζεται στις στερεογραφικές συντεταγμένες. Επομένως από την σχέση (1.11) η διαφορική εξίσωση (3.49) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2}\frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4a^2)^2}{16a^4} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}\right) = 0,$$

ή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} = 0. \tag{3.51}$$

Από τις σχέσεις (3.50) και (3.51) προκύπτει άμεσα ότι

$$u(\xi_1, \xi_2) = \frac{c - \xi_2}{c - b}.$$

Τελικά,

$$Pr^A\{T = T_1\} = \frac{c - \xi_2}{c - b} \quad \text{και} \quad Pr^A\{T = T_2\} = \frac{\xi_2 - b}{c - b}.$$

■

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε την προσπάθεια επίλυσης του παραπάνω προβλήματος για την περίπτωση της διάστασης $n = 3$: Θεωρούμε την σφαίρα S^3 ακτίνας a. Έστω δύο υπερεπίπεδα β, γ της S^3 τα οποία διέρχονται από τον Βόρειο πόλο, έτσι ώστε στις στερεογραφικές συντεταγμένες να αντιστοιχούν σε δύο παράλληλες γραμμές $\xi_3 = b$ και $\xi_3 = c$ αντίστοιχα, όπου $b, c \in \mathbb{R}$, με $b < c$.
Θεωρούμε τα σύνολα D_1, D_2 στην S^3, των οποίων οι στερεογραφικές συντεταγμένες είναι οι

$$\hat{D}_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \xi_3 \in (b, +\infty)\}$$

και

$$\hat{D}_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \xi_3 \in (-\infty, c)\}.$$

Βεβαίως,

$$\beta = \partial \hat{D}_1 \quad \text{και} \quad \gamma = \partial \hat{D}_2$$

Έστω X_t η κίνηση Brown στην S^3 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο A, του οποίου οι στερεογραφικές συντεταγμένες είναι

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \hat{D}_1 \cap \hat{D}_2.$$

Θέτουμε

$$T_1 = \inf \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, X_t \notin \hat{D}_1 \right\},$$

$$T_2 = \inf \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, X_t \notin \hat{D}_2 \right\}$$

και

$$T = \inf \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, X_t \notin \hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 \right\}.$$

Είναι γνωστό ότι (βλέπε [11]), η συνάρτηση

$$u(\xi_1, \xi_2) = Pr^A \left\{ T = T_2 \right\}$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2} \Delta_3 u = 0 \tag{3.52}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\xi_1, \xi_2, b) = 0 \quad \text{και} \quad u(\xi_1, \xi_2, c) = 1. \tag{3.53}$$

Με Δ_3 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^3 ο οποίος εκφράζεται στις στερεογραφικές συντεταγμένες.

Παρατήρηση 3.3 *Στις στερεογραφικές συτεταγμένες μια συνάρτηση είναι αρμονική αναφορικά με τον Δ_2, (τον τελεστη Laplace-Beltrami της S^2), αν και μόνο αν είναι αρμονική με τον Ευκλείδιο τελεστή. Το γεγονός αυτό δεν ισχύει και στην περίπτωση της σφαίρας $S^n, n \geq 3$.*

Η παραπάνω παρατήρηση είναι και ένας κύριος λόγος που η περίπτωση $n = 3$ είναι αρκετά δυσκολότερη από την περίπτωση $n = 2$. Παρουσιάζουμε μια ατελή απόπειρα επίλυσης των (3.52)-(3.53).
Από την σχέση (1.10) η διαφορική εξίσωση (3.52) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 4a^2\right)^2}{16a^4} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} - \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 4a^2} \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right) = 0,$$

δηλαδή,

$$\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+4a^2\right)\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i^2}-2\sum_{i=1}^{3}\xi_i\frac{\partial u}{\partial\xi_i}=0 \tag{3.54}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+4a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\right)=0. \tag{3.55}$$

Αν η συνάρτηση u εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες, δηλαδή,

$$\xi_1=\rho\cos\theta,\ \xi_2=\rho\sin\theta \quad \text{όπου} \quad \theta\in(0,\pi) \quad \text{και} \quad \rho>0,$$

τότε

$$\frac{\partial u}{\partial\xi_1}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho},$$
$$\frac{\partial u}{\partial\xi_2}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

και

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_2^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

Επομένως από την (3.54) προκύπτει ότι

$$\left(\rho^2+\xi_3^2+4a^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\left(-\rho+\frac{\xi_3^2}{\rho}+\frac{4a^2}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}+\left(1+\frac{\xi_3^2}{\rho^2}+\frac{4a^2}{\rho^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+$$
$$\left(\rho^2+\xi_3^2+4a^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_3^2}-2\xi_3\frac{\partial u}{\partial\xi_3}=0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η u είναι ανεξάρτητη των θ, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\left(\rho^2+\xi_3^2+4a^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\left(-\rho+\frac{\xi_3^2}{\rho}+\frac{4a^2}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}+\left(\rho^2+\xi_3^2+4a^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_3^2}-2\xi_3\frac{\partial u}{\partial\xi_3}=0,$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{\rho^2+\xi_3^2+4a^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{\rho}{\rho^2+\xi_3^2+4a^2}\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\right)=0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι απλούστερη από την (3.55), αλλά παραμένει ανοιχτό ερώτημα ο τρόπος επίλυσης της.

3.4 Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις

Πρόταση 3.10 *Έστω δοθέντα* $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, *με* $\varphi_1 < \varphi_2$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^1,

$$D = (\varphi_1, \varphi_2) .$$

Βεβαίως,

$$\partial D = \{\varphi_1, \varphi_2\} .$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^1 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$\varphi \in D,$$

τότε η μέση τιμή $E[\exp(-\lambda T)]$ *δίνεται από την έκφραση*

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2 - \varphi)\right) + \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi - \varphi_1)\right)}{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)} \tag{3.56}$$

για κάθε $\lambda > -\frac{\pi}{2a^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2}$.

Υπενθύμιση. Έστω $\lambda > -\frac{\lambda_1}{2}$, όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή του Dirichlet στο $D \subset S^n$. Αν

$$u(x) = E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)],$$

τότε η $u(x)$ ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{1}{2}\Delta_1 u = \lambda u(\varphi)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u\,|_{\partial D} = 1$$

(βλέπε [13]).

Απόδειξη της Πρότασης 3.10 .

Η πρώτη ιδιοτιμή του Dirichlet στο $D \subset S^1$ είναι η $\lambda = \frac{\pi^2}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2}$. Επομένως αν $\lambda > -\frac{\pi}{2a^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2}$, τότε η

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\Delta_1 u = \lambda u(\varphi) \tag{3.57}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_1) = u(\varphi_2) = 1. \tag{3.58}$$

Με Δ_1 συμβόλίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^1. Επομένως από την (1.2) η διαφορική εξίσωση (3.57) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \lambda u(\varphi).$$

δηλάδή

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} - 2a^2\lambda u(\varphi) = 0.$$

Αν $\lambda \geq 0$, τότε η λύση της (3.57) είναι η

$$u(\varphi) = c_1 \exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi\right) + c_2 \exp\left(-a\sqrt{2\lambda}\varphi\right). \tag{3.59}$$

Ωστόσο από την (3.58)

$$u(\varphi_1) = u(\varphi_2) = 1,$$

άρα

$$c_1 = \frac{1}{\exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_1\right) + \exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_2\right)}$$

και

$$c_2 = \frac{\exp\left(a\sqrt{2\lambda}\,(\varphi_1+\varphi_2)\right)}{\exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_1\right) + \exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_2\right)}.$$

Συνεπώς,

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi\right) + \exp\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi)\right)}{\exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_1\right) + \exp\left(a\sqrt{2\lambda}\varphi_2\right)}.$$

ή

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi)\right) + \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi-\varphi_1)\right)}{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi_1)\right)}.$$

Αν τώρα

$$-\frac{\pi^2}{2a^2(\varphi_2-\varphi_1)^2} < \lambda < 0,$$

τότε

$$u(\varphi) = c_1 \cos\left(a\sqrt{-2\lambda\varphi}\right) + c_2 \sin\left(a\sqrt{-2\lambda\varphi}\right).$$

Ωστόσο

$$u(\varphi_1) = u(\varphi_2) = 1,$$

συνεπώς,

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\sin\left(a\sqrt{-2\lambda}(\varphi_2-\varphi)\right) + \sin\left(a\sqrt{-2\lambda}(\varphi-\varphi_1)\right)}{\sin\left(a\sqrt{-2\lambda}(\varphi_2-\varphi_1)\right)}.$$

Όμως $\sin(iz) = i\sinh(z)$, άρα

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi)\right) + \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi-\varphi_1)\right)}{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi_1)\right)}.$$

Τελικά, για κάθε $\lambda > -\frac{\pi^2}{2a^2(\varphi_2-\varphi_1)^2}$

$$E^{\varphi}[\exp(-\lambda T)] = \frac{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi)\right) + \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi-\varphi_1)\right)}{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}(\varphi_2-\varphi_1)\right)}.$$

■

Πρόταση 3.11 *Έστω δοθέν $\varphi_0 \in [0,\pi)$. Θεωρούμε το σύνολο D στην S^2,*

$$D = \{(\theta,\varphi) | \, \theta \in [0,2\pi), \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0,\varphi_0)\}.$$

Βεβαίως,

$$\partial D = \{(\theta,\varphi) | \, \theta \in [0,2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_0\}.$$

Αν X_t είναι η κίνηση Brown στην S^2 η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta,\varphi) \in D,$$

τότε η μέση τιμή $E[\exp(-\lambda T)]$ δίνεται από την έκφραση

$$E^{A}[\exp(-\lambda T)] = \frac{P_\nu(\cos\varphi)}{P_\nu(\cos\varphi_0)}, \tag{3.60}$$

όπου ν είναι αριθμός τέτοιος ώστε $\nu(\nu+1) = -2a^2\lambda$ και $P_\nu(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Legendre

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu}d\varphi,$$

όπου η πλειονότιμη συνάρτηση $(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu}$ ορίζεται με τρόπο τέτοιο ώστε για $\varphi = \frac{\pi}{2}$ να ισούται με (την πρωτεύουσα τιμή της) z^{ν} (η οποία είναι πραγματικός αριθμός για θετικό αριθμό z και πραγματικό αριθμό ν).

Απόδειξη.
Αν $\lambda > -\frac{\lambda_1}{2}$, όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή του Dirichlet στο $D \subset S^2$, τότε η

$$E^A[\exp(-\lambda T)]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\Delta_2 u = \lambda u(\varphi) \tag{3.61}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_0) = 1. \tag{3.62}$$

Με Δ_2 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^2.
Από την συμμετρία του D, προκύπτει ότι η μέση τιμή του $\exp[-\lambda T]$ είναι ανεξάρτητη του θ. Έτσι η u είναι ανεξάρτητη του θ. Από την (1.4) η διαφορική εξίσωση (3.61) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2 \sin\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\sin\varphi\right) = \lambda u(\varphi),$$

δηλαδή,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\sin\varphi\right) - \left(2\lambda a^2 \sin\varphi\right)u(\varphi) = 0. \tag{3.63}$$

Αν θέσουμε

$$z = \cos\varphi,$$

τότε

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sin\varphi \frac{du}{dz}$$

και η (3.63) μετατρέπεται σε

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} - 2\lambda a^2 u = 0,$$

ή

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \nu(\nu+1)u = 0.$$

Η οποία είναι η διαφορική εξίσωση του Legendre.
Ωστόσο, η $u(\varphi)$ είναι φραγμένη για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$ και $u(\varphi_0) = 1$. Άρα (βλέπε[17]), η λύση της (3.63) είναι η

$$u(\varphi) = \frac{P_\nu(\cos\varphi)}{P_\nu(\cos\varphi_0)},$$

δηλαδή,

$$E^A[\exp(-\lambda T) = \frac{P_\nu(\cos\varphi)}{P_\nu(\cos\varphi_0)},$$

όπου ν είναι αριθμός τέτοιος ώστε $\nu(\nu+1) = -2a^2\lambda.$ ■

Πρόταση 3.12 *Έστω δοθέν* $\varphi_0 \in (0,\pi)$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* $S^n, n \geq 2$

$$D = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i = 2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi \in [0,\varphi_0)\}.$$

Βεβαίως,

$$\partial D = \{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \textit{για} \quad i = 2,\ldots,n-1 \quad \textit{και} \quad \varphi = \varphi_0\}.$$

Αν X_t *είναι η κίνηση Brown στην* S^n *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi) \in D,$$

τότε η μέση τιμή της $exp(-\lambda T)$ *δίνεται από την σχέση*

$$E^A[\exp(-\lambda T)] = \frac{(\sin\varphi)^{1-\frac{n}{2}}\, P^\mu_\nu(\cos\varphi)}{(\sin\varphi_0)^{1-\frac{n}{2}}\, P^\mu_\nu(\cos\varphi_0)}, \tag{3.64}$$

όπου

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(n-1)^2 - 8a^2\lambda} - 1\right) \quad \textit{και} \quad \mu = \frac{1}{2}(n-2).$$

Η συνάρτηση $P^\mu_\nu(\cdot)$ *είναι η προσηρτημένη συνάρτηση Legendre, συγκεκριμένα*

$$P^\mu_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1-\mu)n!}\left(\frac{1-z}{z}\right)^n.$$

όπου με $\Gamma(\cdot)$ *συμβολίζουμε την συνάρτηση Γάμμα.*

Απόδειξη
Είναι γνωστό ότι (βλέπε [13]) η μέση τιμή

$$E^A[\exp(-\lambda T)]$$

είναι η μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{1}{2}\Delta_n u = \lambda u(\varphi) \tag{3.65}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(\varphi_0) = 1. \tag{3.66}$$

Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n.
Λόγω της συμμετρίας της D, η μέση τιμή της $\exp[-\lambda T]$ είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Επομένως η u είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Από την σχέση (1.9) η διαφορική εξίσωση (3.65) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2a^2}\left((n-1)\cos\varphi\frac{du}{d\varphi} + \sin\varphi\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = \lambda u \sin\varphi.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(\sin\varphi)^{n-2}$ έχουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{d\varphi}\left((\sin\varphi)^{n-1}\frac{du}{d\varphi}\right) = 2\lambda a^2(\sin\varphi)^{n-1}u. \tag{3.67}$$

Θέτωντας

$$z = \cos\varphi,$$

έχουμε ότι

$$\frac{du}{d\varphi} = -\sin\varphi\frac{du}{dz}$$

και η (3.67) μετατρέπεται στην παρακάτω έκφραση

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - nz\frac{du}{dz} - 2\lambda a^2 u = 0.$$

Είναι γνωστό ότι (*Mathematica*) η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίνεται με όρους της προσηρτημένης συνάρτησης Legendre. Ωστόσο, η $u(\varphi)$ είναι φραγμένη για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$ και $u(\varphi_0) = 1$. Επομένως

$$u(\varphi) = \frac{(\sin\varphi)^{1-\frac{n}{2}}\, P_\nu^\mu(\cos\varphi)}{(\sin\varphi_0)^{1-\frac{n}{2}}\, P_\nu^\mu(\cos\varphi_0)},$$

όπου

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(n-1)^2 - 8a^2\lambda} - 1\right)$$

και

$$\mu = \frac{1}{2}(n-2).$$

■

3.5 Η Αρχή της Ανακλάσεως

Θεώρημα 3.1 *Έστω* $X_t,\ t \geq 0$ *η κίνηση Brown στην σφαίρα* S^1 *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο* $\varphi \in D$, *όπου*

$$D = (\pi, 2\pi).$$

Αν

$$T = \inf\left\{t \geq 0 |\ X_t \notin D\right\},$$

τότε

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t\right\} = 2Pr^{\varphi}\left\{X_t \notin D\right\}. \tag{3.68}$$

Απόδειξη.

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t\right\} = Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \notin D\right\} + Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \in D\right\}. \tag{3.69}$$

Ωστόσο, αν $X_t \notin D$ τότε προφανώς $T < t$.
Άρα,

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \notin D\right\} = Pr^{\varphi}\left\{X_t \notin D\right\}. \tag{3.70}$$

Από την άλλη μεριά, αν θέσουμε

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t, & \text{αν} \quad t \leq T \\ 2\pi - X_t, & \text{αν} \quad t > T \end{cases},$$

τότε, από την ισχυρή ιδιότητα Markov της X_t

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \in D\right\} = Pr^{\varphi}\left\{T < t, \tilde{X}_t \in D\right\},$$

όμως αν $\tilde{X}_t \in D$ τότε $X_t \notin D$.
Επομένως,

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \in D\right\} = Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \notin D\right\},$$

ή

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t, X_t \in D\right\} = Pr^{\varphi}\left\{X_t \notin D\right\}, \tag{3.71}$$

Τελικά από τις (3.69), (3.70) και (3.71) συμπεραίνουμε ότι

$$Pr^{\varphi}\left\{T < t\right\} = 2Pr^{\varphi}\left\{X_t \notin D\right\}.$$

■

Η παρακάτω σημείωση θα χρησιμοποιηθεί στο **Θεώρημα 3.2**.

Σημείωση Για κάθε $A = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$ συμβολίζουμε με $\hat{A}$ το σημείο $(x_1, x_2, \ldots, -x_{n+1}) \in S^n$, το οποίο και ονομάζουμε συμμετρικό του A ως προς το $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-υπερεπίπεδο.

Θεώρημα 3.2 *Έστω* $X_t,\ t \geq 0$ *η κίνηση Brown στην σφαίρα* $S^n,\ \ n \geq 2,$ *ακτίνας* a *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A = (\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi) \in D,$$

όπου

$$D = \left\{ (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) \in S^n | \ \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi] \quad \text{για} \quad i = 2, \ldots, n-1 \quad \text{και} \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right] \right\}.$$

Αν

$$T = \inf \{ t \geq 0 | \ X_t \notin D \},$$

τότε

$$Pr^A \{ T < t \} = 2 Pr^A \{ X_t \notin D \}. \tag{3.72}$$

Απόδειξη.

$$Pr^A \{ T < t \} = Pr^A \{ T < t, X_t \notin D \} + Pr^A \{ T < t, X_t \in D \}. \tag{3.73}$$

Ωστόσο, αν $X_t \notin D$ τότε προφανώς $T < t.$
Άρα,

$$Pr^A \{ T < t, X_t \notin D \} = Pr^A \{ X_t \notin D \}. \tag{3.74}$$

Από την άλλη μεριά, αν θέσουμε

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t, & \text{αν} \quad t \leq T \\ \hat{X}_t, & \text{αν} \quad t > T \end{cases},$$

τότε, από την ισχυρή ιδιότητα Markov της X_t

$$Pr^A \{ T < t, X_t \in D \} = Pr^A \left\{ T < t, \tilde{X}_t \in D \right\},$$

όμως αν $\tilde{X}_t \in D$ τότε $X_t \notin D.$
Επομένως,

$$Pr^A \{ T < t, X_t \in D \} = Pr^A \{ T < t, X_t \notin D \},$$

ή

$$Pr^A \{ T < t, X_t \in D \} = Pr^A \{ X_t \notin D \}. \tag{3.75}$$

Τελικά από τις (3.73), (3.74) και (3.75) συμπεραίνουμε ότι

$$Pr^A \{ T < t \} = 2 Pr^A \{ X_t \notin D \}.$$

■

3.5.1 Εφαρμογές της Αρχής της Ανακλάσεως

Η αρχή της ανακλάσεως (reflection principle), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής διαφόρων χρόνων εξόδου.

Η περίπτωση S^1

Έστω X_t η κίνηση Brown στην σφαίρα S^1 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο φ. Αν $D = (\pi, 2\pi)$, τότε

$$Pr\{X_t \notin D\} = \int_0^{\pi} a \cdot p(t, x - \varphi)dx = \int_{-\varphi}^{\pi-\varphi} a \cdot p(t, y)dy,$$

όπου $p(t, \varphi)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown στην S^1 ακτίνας a. Επομένως, από την σχέση (2.27)

$$Pr\{X_t \notin D\} = \int_{-\varphi}^{\pi-\varphi} a \left[\frac{1}{\pi a} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \cos(ny)\right) - \frac{1}{2\pi a}\right] dy,$$

ή

$$Pr\{X_t \notin D\} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \int_{-\varphi}^{\pi-\varphi} \cos(ny)dy\right].$$

άρα

$$Pr\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \frac{\sin(n\pi - n\varphi) + \sin(n\varphi)}{n}\right],$$

δηλαδή,

$$Pr\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \frac{\sin(n\varphi)\left(1 - (-1)^n\right)}{n}\right].$$

Συνεπώς,

$$Pr\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ odd}} \left(\frac{\exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \sin(n\varphi)}{n}\right).$$

Τελικά με χρήση του **Θεωρήματος 3.1**, αν $T = \inf\{t \geq 0 |\ X_t \notin D\}$, τότε

$$Pr^{\varphi}\{T < t\} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ odd}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 t}{2a^2}\right) \sin(n\varphi), \tag{3.76}$$

για κάθε $\varphi \in (\pi, 2\pi)$.

Η περίπτωση S^2

Έστω X_t η κίνηση Brown στην σφαίρα S^2 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο $N(0,0)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αν

$$D = \left\{ (\theta, \varphi) \in S^2 \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}$$

τότε

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p(t,\varphi) a^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi.$$

Δηλαδή,

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(t,\varphi)\sin(\varphi) d\varphi,$$

όπου $p(t,\varphi)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown στην S^2 ακτίνας a. Επομένως από την σχέση (2.41)

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi a^2} \sin\varphi \sum_{n\in\mathbb{N}} (2n+1) \exp\left(-\frac{n(n+1)\sqrt{t}}{a}\right) P_n^0(\cos\varphi) d\varphi,$$

ή

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (2n+1) \exp\left(-\frac{n(n+1)\sqrt{t}}{a}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n^0(\cos\varphi)\sin(\varphi) d\varphi. \tag{3.77}$$

Ωστόσο για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_n^0(\cos\varphi)\sin(\varphi) d\varphi = \int_0^1 P_n^0(x) dx.$$

Είναι γνωστό ότι (βλέπε [17])

$$P_n^0(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} \left[P_{n+1}^0(x) - P_{n-1}^0(x) \right].$$

Όμως $P_n^0(1) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα,

$$I = \frac{1}{2n+1} \left(P_{n+1}^0(1) - P_{n-1}^0(1) - P_{n+1}^0(0) + P_{n-1}^0(0) \right),$$

ή

$$I = \frac{1}{2n+1} \left(P_{n-1}^0(0) - P_{n+1}^0(0) \right).$$

Είναι επίσης γνωστό ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{2n}^0(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \text{και} \quad P_{2n+1}^0(0) = 0.$$

Έτσι, αν n είναι άρτιος, τότε $I = 0$.
Αν n είναι περιττός, δηλαδή, $n = 2k+1$, τότε

$$I_n = \frac{1}{4k+3}\left(P_{2k}^0(0) - P_{2(n+1)}^0(0)\right),$$

δηλαδή,

$$I_n = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)}. \tag{3.78}$$

Από τις σχέσεις (3.77) και (3.78) συμπεραίνουμε ότι

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \exp\left(-\frac{(2n+1)(2n+2)\sqrt{t}}{a}\right)\cdot\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}. \tag{3.79}$$

Επιπλέον, αν $S(0,\pi)$, τότε

$$Pr^S\{X_t \notin D\} = Pr^N\{\hat{X}_t \notin D\} = Pr^N\{X_t \in D\} = 1 - Pr^N\{X_t \notin D\}.$$

Συνεπώς,

$$Pr^S\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \exp\left(-\frac{(2n+1)(2n+1)\sqrt{t}}{a}\right)\cdot\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}. \tag{3.80}$$

Με χρήση του **Θεωρήματος 3.2**, αν $T = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin D\}$, τότε

$$Pr^S\{T < t\} = 1-\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \exp\left(-\frac{(2n+1)(2n+1)\sqrt{t}}{a}\right)\cdot\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}. \tag{3.81}$$

Η περίπτωση S^3

Έστω X_t η κίνηση Brown στην σφαίρα S^3 ακτίνας a η οποία ξεκινάει από το σημείο $N(0,0,0)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αν

$$D = \left\{(\theta_1,\theta_2,\varphi) \in S^3 \;\middle|\; \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_2 \in [0,\pi], \varphi \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\right\}$$

τότε

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p(t,\varphi)a^3 \sin\theta_2 \sin^2(\varphi) d\theta_1 d\theta_2 d\varphi.$$

Δηλαδή,

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = 4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(t,\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi,$$

όπου $p(t,\varphi)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κίνησης Brown στην S^3 ακτίνας a. Επομένως από την σχέση (2.47)

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = 4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\frac{1}{2\pi^2 a^3 \sin(\varphi)} \sum_{n\in\mathbb{N}} n\sin(n\varphi)\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)d\varphi,$$

ή

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} n\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi. \quad (3.82)$$

Θέτουμε

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi.$$

Αν $n=1$, τότε $I = \frac{\pi}{4}$.
Αν $n>1$, τότε

$$I = -\frac{n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-1}.$$

Επομένως από την σχέση (3.82),

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} n^2\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ωστόσο, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ για κάθε n περιττό. Συνεπώς,

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\ even} n^2\exp\left(-\frac{t(n^2-1)}{2a^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

ή

$$Pr^N\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\cdot n^2\exp\left(-\frac{t(4n^2-1)}{2a^2}\right).$$

Επιπλέον, αν $S=(0,0,\pi)$ τότε,

$$Pr^S\{X_t \notin D\} = Pr^N\{\hat{X}_t \notin D\} = Pr^N\{X_t \in D\} = 1 - Pr^N\{X_t \notin D\}.$$

Άρα,

$$Pr^S\{X_t \notin D\} = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\cdot n^2\exp\left(-\frac{t(4n^2-1)}{2a^2}\right). \quad (3.83)$$

Κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 3.2**, αν $T = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin D\}$, τότε

$$Pr^S\{T < t\} = 1 + \frac{16}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \cdot n^2 \exp\left(-\frac{t(4n^2 - 1)}{2a^2}\right). \tag{3.84}$$

4 Τοπικός Χρόνος

Ορισμός 4.1 *Έστω δοθέν* $\varphi_1 \in [0, \pi]$, *και*

$D_1 = \{ (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) \mid \theta_1 \in [0, 2\pi), \theta_i \in [0, \pi] \quad \text{για} \quad i = 2, \ldots, n-1 \quad \text{και} \quad \varphi \in (0, \varphi_1] \}$,

ένα υποσύνολο του S^n. *Η ανακλώμενη κίνηση Brown (reflected Brownian motion) στο* D_1 *ορίζεται να είναι η διάχυση* Y_t *της οποίας ο γεννήτορας είναι ο* Δ_n *στο* D_1 *με Neuman συνοριακές συνθήκες στο* ∂D_1.

Γενικά μιλώντας, η Y_t συμπεριφέρεται σαν την X_t στο εσωτερικό του D_1 αλλά όταν φτάνει στο σύνορο του ανακλάται πίσω στο D_1.

Ορισμός 4.2 *Έστω ένα δοθέν ανοιχτό σύνολο* $D \subset S^n$ *με* C^3-*σύνορο* ∂D. *Αν* Y_t *είναι η ανακλώμενη κίνηση Brown στο* D, *και* D_δ *το σύνολο*

$$D_\delta = \{x \in D : d(x, \partial D) < \delta\},$$

τότε ορίζουμε τον τοπικό χρόνο συνόρου (boundary local time) L_t *της* Y_t, *ως*

$$L_t := \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_0^t 1_{D_\delta}(Y_s) ds.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό υπάρχει ως προς την L_2 *νόρμα.*

4.1 Τοπικός Χρόνος Συνόρου Μέχρι την Πρώτη Έξοδο

Πρόταση 4.1 *Έστω δοθέντα* $\varphi_0, \varphi_1 \in [0, 2\pi)$, *με* $\varphi_0 < \varphi_1$. *Θεωρούμε το σύνολο* D *στην* S^1, *τέτοιο ώστε*

$$D = (\varphi_0, \varphi_1)$$

Έστω Y_t *η ανακλώμενη κίνηση Brown στο* D *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$\varphi \in D.$$

Αν

$$T = \inf \{ t \geq 0 | \, X_t = \varphi_0 \}$$

και L_t *είναι ο τοπικός χρόνος συνόρου της* Y_t, *τότε*

$$E^\varphi [\, \exp (\lambda L_T) \,] = \frac{1 - \lambda(\varphi_1 - \varphi)}{1 - \lambda(\varphi_1 - \varphi_0)}, \quad \text{αν} \quad \lambda < \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \tag{4.1}$$

και

$$E^\varphi [\, \exp (\lambda L_T) \,] = +\infty, \quad \text{αν} \quad \lambda \geq \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0}. \tag{4.2}$$

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση

$$z(\varphi) = E^{\varphi}\left[\, \exp\left(\lambda L_T\right)\,\right]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\Delta_1 z = 0,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$z(\varphi_0) = 1 \quad \text{και} \quad -\frac{dz}{d\varphi}(\varphi_1) + \lambda z(\varphi_1) = 0. \tag{4.3}$$

όσο η συνάρτηση z είναι θετική (βλέπε [14]). Εδώ με Δ_1 συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^1, επομένως

$$z(\varphi) = c_1\varphi + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Από την (4.3) έπεται ότι

$$z(\varphi) = \frac{1-\lambda(\varphi_1-\varphi)}{1-\lambda(\varphi_1-\varphi_0)}.$$

Ωστόσο,

$$z(\varphi) > 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lambda < \frac{1}{\varphi_1-\varphi_0}.$$

Άρα,

$$E^{\varphi}\left[\, \exp\left(\lambda L_T\right)\,\right] = \frac{1-\lambda(\varphi_1-\varphi)}{1-\lambda(\varphi_1-\varphi_0)}, \quad \text{αν} \quad \lambda < \frac{1}{\varphi_1-\varphi_0}$$

και

$$E^{\varphi}\left[\, \exp\left(\lambda L_T\right)\,\right] = +\infty, \quad \text{αν} \quad \lambda \geq \frac{1}{\varphi_1-\varphi_0}.$$

■

Πρόταση 4.2 *Έστω δοθέντα* $\varphi_0, \varphi_1 \in (0,\pi)$, *με* $\varphi_0 < \varphi_1$. *Θεωρούμε τα σύνολα* D, Γ_0 *στην* $S^n, n \geq 2$, *τέτοια ώστε*

$$D = \left\{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi)\,|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \text{για} \quad i=2,\ldots,n-1 \quad \text{και} \quad \varphi \in (\varphi_0,\varphi_1)\right\}.$$

και

$$\Gamma_0 = \left\{(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\varphi_0)\,|\ \theta_1 \in [0,2\pi), \theta_i \in [0,\pi] \quad \text{για} \quad i=2,\ldots,n-1\right\}$$

Έστω Y_t η ανακλώμενη κίνηση Brown στο Γ_0 η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) \in D.$$

Αν

$$T = \inf\{\, t \geq 0 |\, X_t \in \Gamma_0\}$$

και L_t *ο τοπικός χρόνος συνόρου της* Y_t, *τότε*

$$E^A[\,\exp(\lambda L_T)\,] = \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda\int_{\varphi}^{\varphi_1}(\sin x)^{1-n}dx}{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\sin x)^{1-n}dx}, \quad \text{αν} \quad \lambda < \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n}}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\sin x)^{1-n}dx} \tag{4.4}$$

και

$$E^A[\,\exp(\lambda L_T)] = +\infty, \quad \text{αν} \quad \lambda \geq \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n}}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}(\sin x)^{1-n}dx}. \tag{4.5}$$

Απόδειξη.
Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση

$$z(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi) = E^A[\,\exp(\lambda L_T)\,]$$

ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\Delta_n z = 0$$

με συνοριακές συνθήκες

$$z(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_0) = 1$$

και

$$-\frac{\partial z}{\partial\varphi}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) + \lambda z(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = 0,$$

όσο η συνάρτηση z είναι θετική (βλέπε [14]). Με Δ_n συμβολίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami στην S^n. Από την συμμετρία του D προκύπτει ότι η $E^A[\,\exp(\lambda L_T)\,]$ είναι ανεξάρτητη των $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Από την σχέση (1.9) η διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$(n-1)\cot(\varphi)\frac{dz}{d\varphi} + \frac{d^2z}{d^2\varphi} = 0. \tag{4.6}$$

Έχουμε δείξει ότι η λύση της (4.6) είναι η

$$z(\varphi) = c_1\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{1}{(\sin x)^{n-1}}dx + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ωστόσο,

$$z(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_0) = 1$$

και

$$-\frac{\partial z}{\partial \varphi}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) + \lambda z(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \varphi_1) = 0.$$

Άρα

$$c_1 = \frac{\lambda}{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}$$

και

$$c_2 = 1.$$

Επομένως,

$$z(\varphi) = \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda \int_{\varphi}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}.$$

Όμως,

$$z(\varphi) > 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lambda < \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n}}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}.$$

Τελικά,

$$E^A \left[\, \exp(\lambda L_T) \,\right] = \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda \int_{\varphi}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}{(\sin\varphi_1)^{1-n} - \lambda \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}, \quad \text{αν} \quad \lambda < \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n}}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}$$

και

$$E^A \left[\, \exp(\lambda L_T)\right] = +\infty, \quad \text{αν} \quad \lambda \geq \frac{(\sin\varphi_1)^{1-n}}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\sin x)^{1-n} dx}.$$

■

Παράδειγμα 4.1 *Έστω δοθέντα $\varphi_0, \varphi_1 \in (0, \pi)$, με $\varphi_0 < \varphi_1$. Θεωρούμε τα σύνολα D, Γ_0 στην S^2, τέτοια ώστε*

$$D = \{\, (\theta, \varphi) |\ \theta \in [0, 2\pi) \quad \textit{και} \quad \varphi \in (\varphi_0, \varphi_1] \}\,.$$

και

$$\Gamma_0 = \{\, (\theta, \varphi_0) |\ \theta \in [0, 2\pi) \}\,.$$

Έστω Y_t η ανακλώμενη κίνηση Brown στο Γ_0 η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$A = (\theta, \varphi) \in D.$$

Αν

$$T = \inf \{\, t \geq 0 |\ X_t \in \Gamma_0 \}$$

και L_t *ο τοπικός χρόνος συνόρου της* Y_t, *τότε από τις σχέσεις (4.4) και (4.5),*

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\,\right]=\frac{\frac{1}{\sin\varphi_1}-\lambda\int_{\varphi}^{\varphi_1}\frac{1}{\sin x}dx}{\frac{1}{\sin\varphi_1}-\lambda\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{\sin x}dx},\quad \text{αν}\quad \lambda<\frac{1}{\sin(\varphi_1)\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{\sin x}dx}$$

και

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\right]=+\infty,\quad \text{αν}\quad \lambda\geq\frac{1}{\sin(\varphi_1)\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{\sin x}dx},$$

δηλαδή,

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\,\right]=\frac{\frac{1}{\sin\varphi_1}-\lambda\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)}{\frac{1}{\sin\varphi_1}-\lambda\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)},\quad \text{αν}\quad \lambda<\frac{1}{\sin(\varphi_1)\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)} \tag{4.7}$$

και

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\right]=+\infty,\quad \text{αν}\quad \lambda\geq\frac{1}{\sin(\varphi_1)\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)}\right)}. \tag{4.8}$$

Παράδειγμα 4.2 *Έστω δοθέντα* $\varphi_0,\varphi_1\in(0,\pi)$, *με* $\varphi_0<\varphi_1$. *Θεωρούμε τα σύνολα* D,Γ_0 *στην* S^3, *τέτοια ώστε*

$$D=\left\{(\theta_1,\theta_2,\varphi)\,|\;\theta_1\in[0,2\pi),\theta_2\in[0,\pi]\quad \text{και}\quad \varphi\in(\varphi_0,\varphi_1]\right\}$$

και

$$\Gamma_0=\left\{(\theta_1,\theta_2,\varphi_0)\,|\;\theta_1\in[0,2\pi),\theta_2\in[0,\pi]\right\}.$$

Έστω Y_t *η ανακλώμενη κίνηση Brown στο* Γ_0 *η οποία ξεκινάει από το σημείο*

$$A=(\theta_1,\theta_2,\varphi)\in D.$$

Αν

$$T=\inf\left\{t\geq 0|\,X_t\in\Gamma_0\right\}$$

και L_t *ο τοπικός χρόνος συνόρου της* Y_t, *τότε από τις σχέσεις (4.4) και (4.5),*

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\,\right]=\frac{\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2}-\lambda\int_{\varphi}^{\varphi_1}\frac{1}{(\sin x)^2}dx}{\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2}-\lambda\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{(\sin x)^2dx}},\quad \text{αν}\quad \lambda<\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{(\sin x)^2}dx}$$

και

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\right]=+\infty,\quad \text{αν}\quad \lambda\geq\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{1}{(\sin x)^2}dx},$$

δηλαδή,

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\,\right] = \frac{\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2} - \lambda(\cot\varphi - \cot\varphi_1)}{\frac{1}{(\sin\varphi_1)^2} - \lambda(\cot\varphi_0 - \cot\varphi_1)}, \quad \textit{αν} \quad \lambda < \frac{1}{(\sin\varphi_1)^2(\cot\varphi_0 - \cot\varphi_1)} \tag{4.9}$$

και

$$E^A\left[\,\exp\left(\lambda L_T\right)\right] = +\infty, \quad \textit{αν} \quad \lambda \geq \frac{1}{(\sin\varphi_1)^2(\cot\varphi_0 - \cot\varphi_1)}. \tag{4.10}$$

5 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

1. Ορισμός της γέφυρας Brown στην σφαίρα. Υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Ιδιότητες.

2. Κίνηση Brown στην σφαίρα με drift.

3. Ακτινική διάχυση στην σφαίρα.

Ερευνητικό Έργο

- **Δημοσιεύσεις**

  1. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**, The Random Motion on the Sphere Generated by the Laplace-Beltrami Operator, *Journal of Applied Functional Analysis,* **7** (1-2) 26-41 (2012).
  2. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**, Certain Calculation Regarding the Brownian Motion on the Sphere, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics* , to appear.

- **Δημοσιεύσεις σε Πρακτικά Συνεδρείων**

  1. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**, Random Motion on Symmetric Spaces, Proceedings of the 2010 JSM (The Joint Statistical Meetings) Vancouver, Canada (July 31 - August 5 2010).
  2. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**,Brownian motion on Spheres, 13ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης Ιωάννινα (28-29 Μαίου 2010).

- **Ανακοινώσεις σε Συνέδρια**

  1. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**, Certain Calculation Regarding the Brownian Motion on the Sphere, 14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης Πάτρα (18-19 Μαίου 2012).
  2. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**, Random Motion on Symmetric Spaces, Proceedings of the 2010 JSM (The Joint Statistical Meetings) Vancouver, Canada (July 31 - August 5 2010).
  3. **Kouloumpou D. and Papanicolaou V.G.**,Brownian motion on Spheres, 13ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης Ιωάννινα (28-29 Μαίου 2010).

- **Ερευνητικά Προγράμματα**

  1. **Ντετερμινιστικά και Στοχαστικά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές στις Οικονομικές και Περιβαλλοντικές Επιστήμες** (2008-2011) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Π.Ε.Β.Ε.

Αναφορές

[1] Bender M. and Orszag S., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, USA (1978).

[2] Camporesi R., Harmonic Analysis and Propagators on Homogeneous Spaces, *Physics Reports* , **196** (7). (1990), 1–134.

[3] Do Carmo, M.P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces* Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey (1976).

[4] Chung M.K., Heat Kernel Smoothing On Unit Sphere, *Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI), (2006),* 992–995.

[5] Dodziuk J., Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds, *Indiana Univ. Math. J.*, **32** (no.5)(1983), 115–142.

[6] Dynkin E.B., *Markov processes, vol. 2* Springer, Berlin (1965).

[7] Grigor'yan A. and Saloff-Coste L., Hitting Probabilities for Brownian Motion on Riemannian Manifolds, *J. Math. Pures et Appl.* **81** (2002), 115–142.

[8] Hsu E.P., A brief Introduction to Brownian Motion on a Riemannian Manifold, *Lecture notes*, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/Kyushu.pdf .

[9] John F., *Partial Differential Equations,* Springer, USA (1982).

[10] Karatzas I. and Shreve S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, USA (1991).

[11] Klebaner F.C., *Introduction to Stochastic Calculus with Applications,* Imperial College Press, Melbourne (2004).

[12] Κοκολάκης Γ., *Σημειώσεις στοχαστικών Ανελίξεων* (2003) .

[13] Øksendal B., *Stochastic Differential Equations,* Springer-Verlag (1995).

[14] Papanicolaou V.G. , The probabilistic solution of the third boundary value problem for second order elliptic equations *Probability Theory and related fields,* **87** (1990) 27–77.

[15] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill, Inc., New York (1953).

[16] Spiegel M. R., *Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and Its Applications,* Schaum's Outline Series (1999).

[17] Strauss W.A., *Partial Differential Equations,* John Wiley and Sons, Inc (1992).

[18] Σπηλιώτης Ι., *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Εκδόσεις Συμεών (2004).

Ευρετήριο