



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

**Ανάλυση ακτινοβολίας φασικής στοιχειοκεραίας  
κυματοδηγών παράλληλων πλακών με διηλεκτρικό  
φορτίο**

Διπλωματική εργασία  
του  
Αναστάσιου Θ. Κακκαβά

Επιβλέπων: Ιωάννης Λ. Τσαλαμέγκας  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

**Ανάλυση ακτινοβολίας φασικής στοιχειοκεραίας  
κυματοδηγών παράλληλων πλακών με διηλεκτρικό  
φορτίο**

Διπλωματική εργασία  
του  
Αναστάσιου Θ. Κακκαβά

Επιβλέπων: Ιωάννης Λ. Τσαλαμέγκας  
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την .....

.....  
Ιωάννης Τσαλαμέγκας  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Ιωάννης Ρουμελιώτης  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Ηλίας Γλύτσας  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2012

.....  
Αναστάσιος Θ. Κακκαβάς

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright © Αναστάσιος Θ. Κακκαβάς, 2012.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετώνται τα χαρακτηριστικά ακτινοβολίας μιας φασικής στοιχειοκεραίας που αποτελείται από σχισμές σε ένα αγωγίμο επίπεδο, τροφοδοτούμενες από κυματοδηγούς παράλληλων πλακών με διηλεκτρικό φορτίο. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών διατυπώνεται μέσω ενός συστήματος συζευγμένων ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων, με αγνώστους τα μαγνητικά ρεύματα πάνω στις σχισμές. Για την επίλυση του συστήματος εφαρμόζεται μια εκθετικά συγκλίνουσα εκδοχή της μεθόδου Nyström. Η απομόνωση της ιδιομορφίας του πυρήνα, μέσω της έκφρασης του ως άθροισμα μιας αναλυτικής και μιας ιδιομορφης συνάρτησης, καθώς και η επιτάχυνση της σύγκλισης της σειράς που εμφανίζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση, είναι εξαιρετικής σημασίας για την επιτυχία της μεθόδου. Η εκθετική σύγκλιση του αλγορίθμου καθιστά εφικτή τη λήψη αποτελεσμάτων εξαιρετικής ακρίβειας με μικρή τάξη συστήματος. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το χαμηλό υπολογιστικό της κόστος, λόγω της μικρής τάξης του συστήματος και της αποφυγής της ανάγκης αριθμητικών ολοκληρώσεων κατά τον υπολογισμό των στοιχείων της μήτρας του συστήματος, σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει σε διάφορες υλοποιήσεις της μεθόδου των ροπών. Το πλεονέκτημα αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για στοιχειοκεραίες πολλών στοιχείων. Η ορθότητα της μεθόδου επιβεβαιώνεται μέσω της αρχής διατήρησης της ισχύος, της ισότητας των διαγραμμάτων εκπομπής και λήψης και με πλήθος συγκρίσεων με άλλες εργασίες. Μέσα από διάφορα αριθμητικά παραδείγματα δείχνουμε ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της διάταξης μπορεί να επιτευχθεί πολύ υψηλή απόδοση προσαρμογής, ακόμα και για πολύ μικρό εύρος της σχισμής.

### Λέξεις κλειδιά:

φασική στοιχειοκεραία, ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις, μέθοδος Nyström



## **ABSTRACT**

The subject of this work is the investigation of the radiation characteristics of a finite phased array of slots, fed by dielectrically loaded parallel-plate waveguides, and radiating through a common ground plane. The boundary-value problem is formulated in terms of a system of coupled singular integral equations, with unknowns the magnetic currents on the slots. The system is solved in the framework of an exponentially converging Nyström method taking full account both of the singularities of the kernels and the singularities at the edges (edge conditions). The isolation of the singularity of the kernel, by writing it as the sum of an analytic part and a singular part, is of paramount importance for the successful application of the method. The exponential convergence of the algorithm allows us to obtain highly accurate results with low matrix sizes. This is a very important advantage of the presented method (especially useful in studying large arrays) which, in conjunction with the obviation of the need for numerical integrations in evaluating the matrix elements, leads to low computational cost. This stands in contrast with many well-known implementations of conventional MoM, which require the evaluation of several inner product integrals. The correctness of the implementation is confirmed by testing the principle of power conservation, the equality of the transmission and reception patterns, and by comparing our results with those of previously published works. Numerical examples are presented which show how, by properly selecting the physical and geometrical parameters of the structure, a very high matching efficiency can be achieved even for very narrow slot width.

### **Keywords:**

phased array, singular integral equations, Nyström method

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας και των προπτυχιακών σπουδών μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κύριο Ιωάννη Τσαλαμέγκα, για την δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, για τη συνεργασία και την καθοδήγηση κατά την εκπόνηση της εργασίας, καθώς και για το σπουδαίο διδακτικό του έργο στα μαθήματα της σχολής. Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τη Βανέσσα, το Δημήτρη, τη Δώρα και το Θωμά για τη διαρκή στήριξή τους.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή .....	1
Κεφάλαιο 2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	3
2.1 Γεωμετρία της διάταξης .....	3
2.2 Το προσπίπτον πεδίο.....	4
2.3 Πεδίο στο εσωτερικό των κυματοδηγών .....	5
Πεδίο διέγερσης.....	6
Σκεδαζόμενο πεδίο .....	9
2.4 Πεδίο στην περιοχή $y > 0$ .....	13
2.5 Ολοκληρωτικές εξισώσεις.....	16
2.6 Το πρόβλημα σκεδάσεως: Πρόσπτωση επίπεδου $TM_y$ κύματος .....	17
Κεφάλαιο 3 Επίλυση του συστήματος ολοκληρωτικών εξισώσεων.....	19
3.1 Επεξεργασία των ολοκληρωτικών εξισώσεων .....	19
Απομόνωση της λογαριθμικής ιδιομορφίας του πυρηνά.....	20
Επιτάχυνση της σύγκλισης της σειράς.....	21
3.2 Διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων .....	23
3.3 Μακρινό πεδίο.....	26
Κεφάλαιο 4 Έλεγχος ορθότητας και αριθμητικά αποτελέσματα .....	29
4.1 Σύγκλιση και έλεγχος ορθότητας .....	29
Διατήρηση της ισχύος.....	29
Θεώρημα της αμοιβαιότητας .....	30
Σύγκλιση του αλγορίθμου .....	31
4.2 Μαγνητικά ρεύματα και διάγραμμα ακτινοβολίας .....	33
4.3 Σύζευξη μεταξύ των στοιχείων ακτινοβολίας .....	37
4.4 Συντελεστές ανάκλασης.....	42
4.5 Απόδοση της κεραίας .....	46
Παράρτημα I: Εκφράσεις της $S_{2m+1}(z)$ .....	51
Παράρτημα II: Ισότητα διαγραμμάτων εκπομπής και λήψης.....	52
Παράρτημα III: Μέθοδος των ροπών .....	55
Βιβλιογραφία.....	57



---

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

---

Οι φασικές στοιχειοκεραίες που τροφοδοτούνται από κυματοδηγούς χρησιμοποιούνται ευρέως σε τηλεπικοινωνιακά συστήματα και συστήματα ραντάρ. Συνήθως επιλέγεται η παρουσία διηλεκτρικού φορτίου στο εσωτερικό των κυματοδηγών, με στόχο την επίτευξη καλύτερης προσαρμογής.

Οι τροφοδοτούμενες από κυματοδηγούς παράλληλων πλακών κεραίες έχουν μελετηθεί σε πλήθος εργασιών ([1] - [5]) με διάφορες παραλλαγές. Στην [1] η σχισμή της κεραίας είναι καλυμμένη με ένα διηλεκτρικό ημικύλινδρο, ενώ στην [2] με ένα επίπεδο στρώμα διηλεκτρικού. Η διάταξη της [4] περιλαμβάνει μια μεταλλική ταινία παρουσία ενός διηλεκτρικού κυλίνδρου και στην [5] το φορτίο της κεραίας αποτελείται από μια εξωτερική και μια εσωτερική μεταλλική ταινία, καθώς και στρώματα διηλεκτρικού εντός του κυματοδηγού. Οι φασικές στοιχειοκεραίες κυματοδηγών παράλληλων πλακών έχουν μελετηθεί στις [6] - [8].

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των χαρακτηριστικών ακτινοβολίας μιας φασικής στοιχειοκεραίας, αποτελούμενης από σχισμές που τροφοδοτούνται από κυματοδηγούς παράλληλων πλακών παρουσία επάλληλων στρωμάτων διηλεκτρικού φορτίου.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος. Μελετούμε την πιο πρακτική περίπτωση όπου η διέγερση της διάταξης είναι ο  $TM_{L0}$  ρυθμός που προσπίπτει από το εσωτερικό των κυματοδηγών (εκπομπή), αλλά και εκείνη κατά την οποία η διάταξη διεγείρεται από ένα  $TM$  πολωμένο επίπεδο κύμα που προσπίπτει από τον ελεύθερο χώρο (λήψη). Με χρήση της θεωρίας των συναρτήσεων Green και του θεωρήματος της αμοιβαιότητας, καταλήγουμε σε ένα σύστημα  $S \times S$  (όπου  $S$  το πλήθος των σχισμών) συζευγμένων ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων με αγνώστους τα επιφανειακά μαγνητικά ρεύματα (ή ισοδύναμα το ηλεκτρικό πεδίο) πάνω στις σχισμές.

Για την επίλυση του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων, στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιείται η μέθοδος Nystrom (NM). Η κεντρική ιδέα στη NM είναι η εξής [9]: προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα με έναν κατάλληλο κανόνα ολοκλήρωσης που εμπλέκει τις τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων (κόμβων) και στη συνέχεια ικανοποιούμε τις προκύπτουσες αλγεβρικές εξισώσεις στα σημεία αυτά. Η επιλογή κατάλληλου κανόνα ολοκλήρωσης είναι εξαιρετικά σημαντική για την επιτυχία της μεθόδου. Όταν ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι ιδιόμορφος, όπως στην δική μας περίπτωση, απομονώνουμε την ιδιομορφία, γράφουμε τον πυρήνα ως άθροισμα δύο κατάλληλων όρων - ενός ιδιόμορφου και ενός ομαλού - και χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικούς κανόνες ολοκλήρωσης με κοινούς κόμβους. Πριν την εφαρμογή της NM για τη διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων, χειριζόμαστε κατάλληλα τις σειρές που υπάρχουν σε αυτές ώστε να επιταχύνουμε τη σύγκλισή τους.

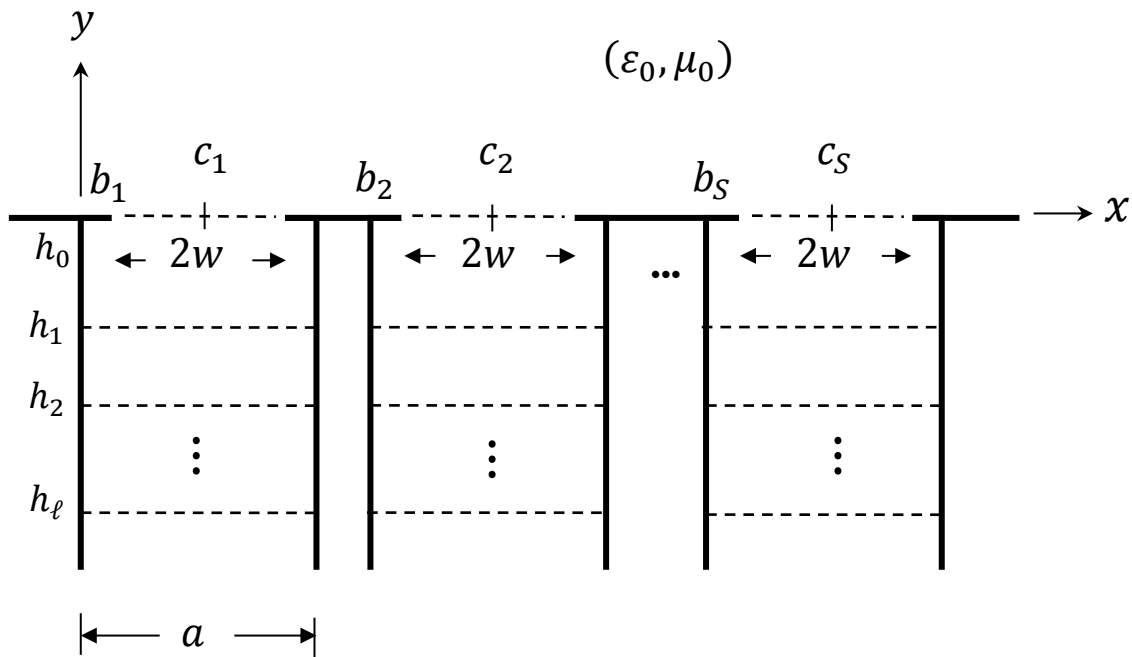
Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, αρχικά ελέγχουμε την ορθότητά της μεθόδου, επιβεβαιώνοντας την αρχή διατήρησης της ισχύος και την ισότητα των διαγραμμάτων εκπομπής και λήψης. Εξετάζουμε, επίσης, τη σύγκλιση του αλγορίθμου και διαπιστώνουμε ότι είναι εξαιρετικά ταχεία (εκθετική), γεγονός που μας επιτρέπει να λαμβάνουμε αποτελέσματα υψηλής ακρίβειας με μικρή τάξη συστήματος. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορα μεγέθη πρακτικού ενδιαφέροντος, κάνοντας παράλληλα εκτεταμένες συγκρίσεις με αποτελέσματα άλλων εργασιών, με σκοπό την περαιτέρω επιβεβαίωση της ορθότητας της μεθόδου. Ιδιαίτερη

---

έμφαση δίνεται στην αναζήτηση των παραμέτρων της διάταξης, και κυρίως του διηλεκτρικού φορτίου, για τις οποίες επιτυγχάνεται υψηλή απόδοση προσαρμογής.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

### 2.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ



ΣΧΗΜΑ 1: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, η υπό μελέτη στοιχειοκεραία αποτελείται από  $S$  στοιχεία δύο διαστάσεων (η διάταξη θεωρείται άπειρη ως προς  $z$ ). Τα στοιχεία αυτά είναι σχισμές, τροφοδοτούμενες από κυματοδηγούς παράλληλων πλακών, στο αγωγίμο επίπεδο  $y = 0$ . Οι σχισμές έχουν πλάτη  $2w$  και τα κέντρα τους βρίσκονται στα σημεία  $x = c_q, q = 1, 2, \dots, S$ . Οι κυματοδηγοί έχουν πλάτος  $a$  και περιέχουν  $\ell + 1$  επάλληλα επίπεδα στρώματα διηλεκτρικού. Οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του  $i$ -οστού στρώματος περιγράφονται με τις συντακτικές παραμέτρους του  $(\epsilon_i, \mu_i)^1, i = 1, \dots, \ell + 1$ , ενώ το πάχος του για  $i \neq \ell + 1$  είναι  $h_{i-1} - h_i$ . Το τελευταίο στρώμα ( $\ell + 1$ ) θεωρούμε ότι εκτείνεται ως το άπειρο.

Η γενίκευση στην περίπτωση στοιχειοκεραίων όπου η σχετική θέση των στοιχείων, το εύρος των σχισμών, το πλήθος και η σύνθεση των διηλεκτρικών στρωμάτων είναι αυθαίρετη αποτελεί απλή επέκταση του βασικού αλγορίθμου που θα αναπτύξουμε στην εργασία.

<sup>1</sup> Εάν το υλικό έχει απώλειες, αυτές περιγράφονται από το φανταστικό μέρος της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού.

## 2.2 ΤΟ ΠΡΟΣΠΙΠΤΟΝ ΠΕΔΙΟ

Θεωρούμε ως διέγερση κάθε στοιχείου της διάταξης τον ρυθμό  $TM_{L0}$ , ο οποίος προσπίπτει από την περιοχή  $(\ell + 1)$  του κυματοδηγού, με μια γραμμική ολίσθηση της φάσης από στοιχείο σε στοιχείο. Σε όλο το κείμενο υποθέτουμε ότι η χρονική εξάρτηση της διέγερσης, άρα και όλων των υπόλοιπων πεδιακών μεγεθών, έχει τη μορφή  $e^{j\omega t}$  που, για συντομία, παραλείπεται. Επομένως

$$\vec{H}_{inc}^{(p)} = \hat{z}H_{z,inc}^{(p)}(x, y) = \hat{z}H^{(p)}(\delta)\psi_L^{(p)}(x)e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (2.2.1)$$

όπου

$$H^{(p)}(\delta) = H_0^{(p)}e^{-jp\delta}, \quad p = 1, 2, \dots, S \quad (2.2.2)$$

με  $H_0^{(p)}$  το πλάτος της διέγερσης στον  $p$ -οστό κυματοδηγό και  $\delta$  την ολίσθηση φάσης μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων, για την οποία επιλέγουμε συνήθως

$$\delta = k_0 d \sin \theta_{sc} \quad (2.2.3)$$

όπου  $\theta_{sc}$  η γωνία σάρωσης. Ακόμα, στην (2.2.1)

$$\psi_L^{(p)}(x) = \cos \frac{L\pi(x - b_p)}{a} \quad (2.2.4)$$

$$\gamma_L^{(\ell+1)} = \left( \left( \frac{L\pi}{a} \right)^2 - \omega^2 \varepsilon_{\ell+1} \mu_{\ell+1} \right)^{1/2} = \left( \left( \frac{L\pi}{a} \right)^2 - k_{\ell+1}^2 \right)^{1/2}, \quad 0 \leq \arg(\gamma_L^{(\ell+1)}) \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.2.5)$$

$$k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \quad (2.2.6)$$

Πηγή του ρυθμού αυτού μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι, π.χ., ένα επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα

$$\vec{M}_u^{(p)} = \hat{z}M_o^{(p)}\psi_L^{(p)}(x) \quad (2.2.7)$$

στο κάτω άκρο ( $y \rightarrow -\infty$ ) της περιοχής  $(\ell + 1)$  του  $p$ -οστού κυματοδηγού. Το πεδίο σε όλο το χώρο θα έχει τις συνιστώσες  $(E_x, E_y, H_z)$ , με

$$E_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.2.8.a)$$

$$E_y = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.2.8.b)$$

όπως εύκολα προκύπτει από την εξίσωση Maxwell-Ampere

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

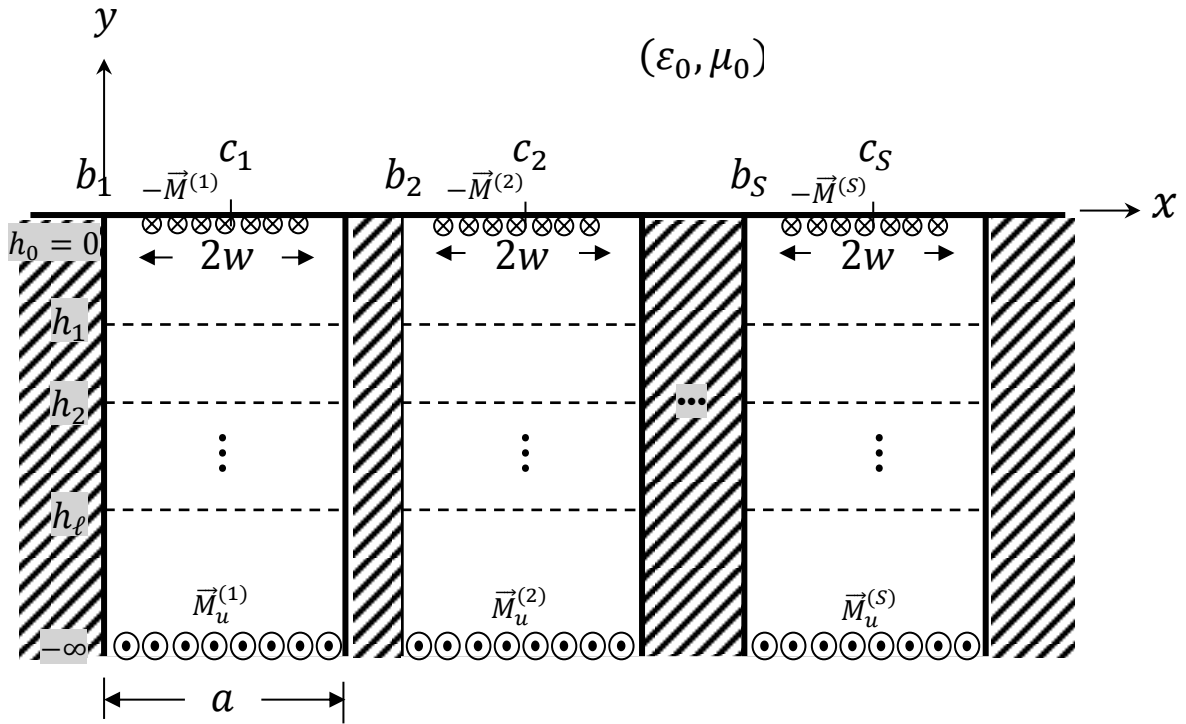
Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις εκφράσεις του πεδίου τόσο στο εσωτερικό των κυματοδηγών ( $y < 0$ ), όσο και στον ελεύθερο χώρο ( $y > 0$ ). Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη για την συνέχεια της εφαπτομενικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου ( $H_z$ ), θα εξάγουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις του προβλήματος.

## 2.3 ΠΕΔΙΟ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας των πεδίων (field equivalence principle), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πεδίο στο εσωτερικό των κυματοδηγών ( $y < 0$ ) ισούται με το πεδίο της διάταξης που φαίνεται στο Σχήμα 2. Η διάταξη αυτή προκύπτει από την αρχική αν βραχυκυκλώσουμε τις σχισμές και στις θέσεις που κατείχαν οι σχισμές ( $c_p - w_p \leq x \leq c_p + w_p, p = 1, 2, \dots, S, y = 0$ ) τοποθετήσουμε τα ισοδύναμα επιφανειακά μαγνητικά ρεύματα  $-\vec{M}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, S$ . Το ισοδύναμο μαγνητικό ρεύμα στον  $p$ -οστό κυματοδηγό δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \vec{M}^{(p)} &= \vec{E}_{tot}^{(p)}(x, 0) \times \hat{y} = \left( \hat{x}E_{x,tot}^{(p)}(x, 0) + \hat{y}E_{y,tot}^{(p)}(x, 0) \right) \times \hat{y} = \hat{z}E_{x,tot}^{(p)}(x, 0) \\ &= \hat{z}M_z^{(p)}(x), x \in [c_p - w, c_p + w] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

όπου  $\vec{E}_{tot}^{(p)}(x, 0)$  είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην  $p$ -οστή σχισμή.



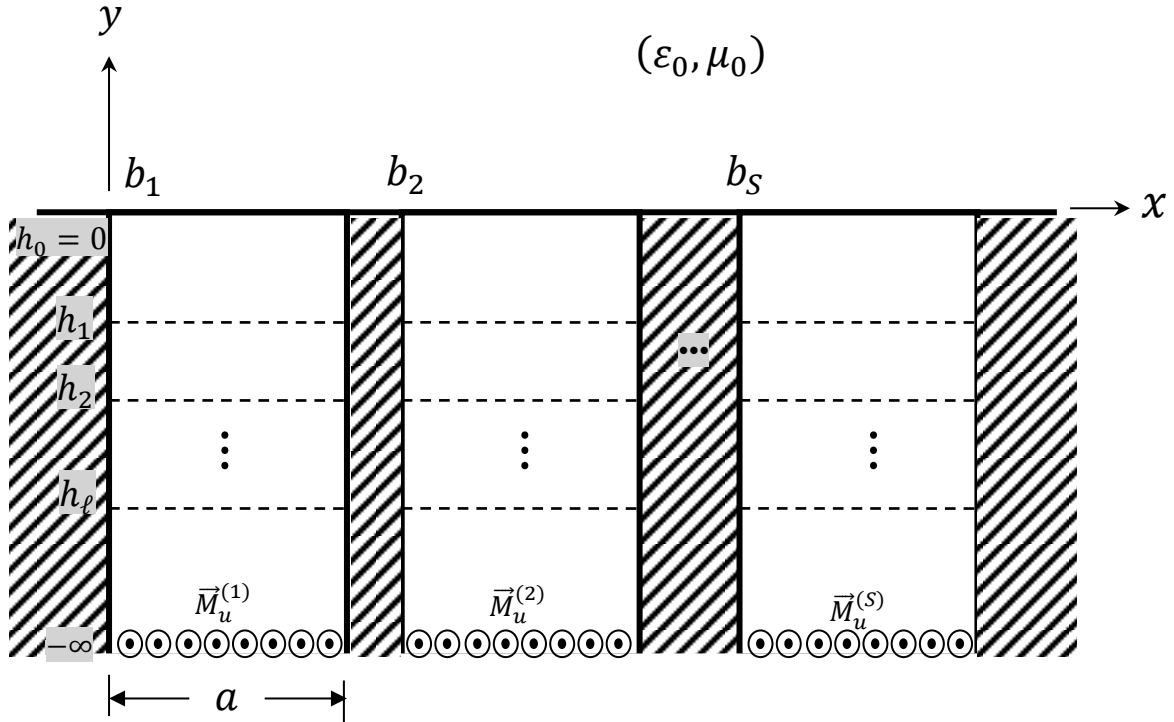
ΣΧΗΜΑ 2: ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

Μπορούμε, λοιπόν, να εκφράσουμε το πεδίο στο εσωτερικό του κάθε (βραχυκυκλωμένου πλέον στη θέση  $y = 0$ ) κυματοδηγού σαν υπέρθεση του πεδίου των πηγών  $\vec{M}_u^{(p)}$  και  $-\vec{M}^{(p)} = -\hat{z}M_z^{(p)}(x)$ . Το πεδίο διέγερσης - excitation field ( $\vec{E}_{exc}^{(p)}, \vec{H}_{exc}^{(p)}$ ) οφείλεται στην πηγή  $\vec{M}_u^{(p)}$ , ενώ το σκεδαζόμενο πεδίο ( $\vec{E}_M^{(p)}, \vec{H}_M^{(p)}$ ) προκύπτει ως η απόκριση στην πηγή  $\vec{M}^{(p)}$ . Προφανώς, ισχύει ότι:

$$\left( \vec{E}_{tot}^{(p)}, \vec{H}_{tot}^{(p)} \right) = \left( \vec{E}_{exc}^{(p)}, \vec{H}_{exc}^{(p)} \right) + \left( \vec{E}_M^{(p)}, \vec{H}_M^{(p)} \right) \quad (2.3.2)$$

## ΠΕΔΙΟ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το πεδίο διέγερσης  $(\vec{E}_{exc}^{(p)}, \vec{H}_{exc}^{(p)})$  στο στοιχείο  $p$  ( $p = 1, 2, \dots, S$ ) είναι το πεδίο που οφείλεται αποκλειστικά στα μαγνητικά ρεύματα  $\vec{M}_u^{(p)}$ , δηλαδή στην πρόσπτωση του ρυθμού  $TM_{L0}$ , όταν ολόκληρο το επίπεδο  $y = 0$  είναι τέλειος αγωγός. Για ευκολία απεικονίζουμε τα παραπάνω στο Σχήμα 3.



ΣΧΗΜΑ 3: ΔΙΑΤΑΞΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ

Το πεδίο  $H_{z,exc}^{(p)}$  ικανοποιεί τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)H_{z,exc}^{(p)} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) H_{z,exc}^{(p)} = 0 \quad (2.3.3)$$

Οι εκφράσεις των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου διέγερσης μπορούν να βρεθούν από το μαγνητικό πεδίο με απλές παραγωγίσεις, σύμφωνα με τις (2.2.8).

Με επίλυση της (2.3.3) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών προκύπτουν οι εκφράσεις:

- Για  $i \neq \ell + 1$ :

$$H_{z,exc}^{(p,i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_m^{(p,i)} \cosh\left(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})\right) + B_m^{(p,i)} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})\right) \right] \psi_m^{(p)}(x) \quad (2.3.4)$$



$$E_{x,exc}^{(p,i)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(i)}}{j\omega\varepsilon_i} \left[ A_m^{(p,i)} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})\right) + B_m^{(p,i)} \cosh\left(\gamma_m^{(p,i)}(y - h_{i-1})\right) \right] \psi_m^{(p)}(x) \quad (2.3.5)$$

- Για  $i = \ell + 1$ :

$$H_{z,exc}^{(p,\ell+1)} = H^{(p)}(\delta)\psi_L(x)e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} + \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(p)} H^{(p)}(\delta)\psi_m^{(p)}(x)e^{\gamma_m^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (2.3.6)$$

$$E_{z,exc}^{(p,\ell+1)} = -\frac{\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\varepsilon_{\ell+1}} H^{(p)}(\delta)\psi_L(x)e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(i)}}{j\omega\varepsilon_i} R_m^{(p)} H^{(p)}(\delta)\psi_m^{(p)}(x)e^{\gamma_m^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (2.3.7)$$

Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $\{A_m^{(p,i)}\}$ ,  $\{B_m^{(p,i)}\}$  και  $\{R_m^{(p)}\}$ . Εφαρμόζοντας τις συνθήκες συνέχειας των  $H_{z,exc}$  και  $E_{x,exc}$  στις διαχωριστικές επιφάνειες των στρωμάτων και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας των  $\{\psi_m(x)\}$  στο διάστημα  $[b_p, b_p + a]$ , καταλήγουμε στα εξής:

- Για  $m \neq L$  προκύπτουν για τους συντελεστές  $\{A_m^{(p,i)}\}$ ,  $\{B_m^{(p,i)}\}$  και  $\{R_m^{(p)}\}$  συστήματα ομογενών αλγεβρικών εξισώσεων, των οποίων η λύση θα είναι η τετριμμένη, δηλαδή η μηδενική.
- Οι συντελεστές  $\{A_L^{(p,i)}\}$ ,  $\{B_L^{(p,i)}\}$  και  $\{R_L^{(p)}\}$  εμπλέκονται σε μη ομογενείς αλγεβρικές εξισώσεις, επομένως θα χρειαστεί να τους υπολογίσουμε με τη μέθοδο που θα περιγράψουμε παρακάτω.

Γίνεται, λοιπόν, εμφανές ότι το πεδίο διέγερσης αποτελείται μόνο από τον  $TM_{L0}$  ρυθμό, κάτι που όπως θα δούμε στη συνέχεια δεν ισχύει για το σκεδαζόμενο πεδίο στο εσωτερικό του κυματοδηγού, όπου στη γενική περίπτωση διεγείρονται όλοι οι  $TM_{m0}$  ρυθμοί. Τελικά, στη θέση των εκφράσεων (2.3.4)-(2.3.7) έχουμε τις:

- Για  $i \neq \ell + 1$ :

$$H_{z,exc}^{(p,i)} = \left[ A_L^{(p,i)} \cosh\left(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1})\right) + B_L^{(p,i)} \sinh\left(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1})\right) \right] \psi_L^{(p)}(x) \quad (2.3.8)$$

$$E_{x,exc}^{(p,i)} = \frac{\gamma_L^{(i)}}{j\omega\varepsilon_i} \left[ A_L^{(p,i)} \sinh\left(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1})\right) + B_L^{(p,i)} \cosh\left(\gamma_L^{(p,i)}(y - h_{i-1})\right) \right] \psi_L^{(p)}(x) \quad (2.3.9)$$

- Για  $i = \ell + 1$ :

$$H_{z,exc}^{(p,\ell+1)} = H^{(p)}(\delta)\psi_L(x)e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} + R_L^{(p)} H^{(p)}(\delta)\psi_L^{(p)}(x)e^{\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (2.3.10)$$

$$E_{z,exc}^{(p,\ell+1)} = -\frac{\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\varepsilon_{\ell+1}} H^{(p)}(\delta)\psi_L(x)e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} + \frac{\gamma_L^{(i)}}{j\omega\varepsilon_i} R_L^{(p)} H^{(p)}(\delta)\psi_L^{(p)}(x)e^{\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (2.3.11)$$

Η μέθοδος που προαναφέρθηκε πως θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των αγνώστων συντελεστών είναι η μέθοδος του εγκάρσιου συντονισμού (transverse resonance method) και η εφαρμογή της είναι απόλυτα ισοδύναμη με την εφαρμογή των οριακών συνθηκών σε κάθε μια από τις διαχωριστικές επιφάνειες, με τη διαφορά ότι διευκολύνει σε μεγάλο βαθμό τους αλγεβρικούς χειρισμούς. Η φυσική ερμηνεία της μεθόδου είναι ότι αντιμετωπίζουμε τους κυματοδηγούς ως γραμμές μεταφοράς.

Ορίζουμε, αρχικά, τη σύνθετη αντίσταση στη θέση  $y$  για τον  $TM_{L0}$  ρυθμό ως εξής:

$$\vec{Z}_L(y) = -\frac{E_{x,exc}^{(p)}(x,y)}{H_{z,exc}^{(p)}(x,y)} \quad (2.3.12)$$

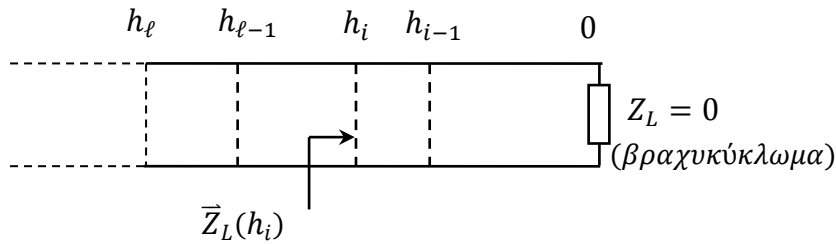
Εφόσον το επίπεδο  $y = 0$  είναι τέλειος αγωγός, είναι

$$E_{x,exc}^{(p)}(x,0) = 0$$

οπότε, θα είναι

$$\vec{Z}_L(0) = 0 \quad (2.3.13)$$

δηλαδή η γραμμή μεταφοράς είναι βραχυκυκλωμένη στο  $y = 0$ . Ο ορισμός της σύνθετης αντίστασης απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 4.



ΣΧΗΜΑ 4: ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ  $\vec{Z}_L(h_i)$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (2.3.8) και (2.3.9), για  $y \in [h_{i-1}, h_i]$  έχουμε:

$$\vec{Z}_L(y) = -\zeta_L^{(i)} \frac{A_L^{(p,i)} \sinh(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1})) + B_L^{(p,i)} \cosh(\gamma_L^{(p,i)}(y - h_{i-1}))}{A_L^{(p,i)} \cosh(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1})) + B_L^{(p,i)} \sinh(\gamma_L^{(i)}(y - h_{i-1}))} \quad (2.3.14)$$

όπου

$$\zeta_L^{(i)} = \frac{\gamma_L^{(i)}}{j\omega\varepsilon_i}$$

είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του μέσου για τον ρυθμό  $TM_{L0}$ . Θέτοντας στην (2.3.14)  $y = h_{i-1}$  προκύπτει

$$\vec{Z}_L(h_{i-1}) = -\zeta_L^{(i)} \frac{B_L^{(p,i)}}{A_L^{(p,i)}} \Rightarrow \frac{B_L^{(p,i)}}{A_L^{(p,i)}} = -\frac{\vec{Z}_L(h_{i-1})}{\zeta_L^{(i)}} \quad (2.3.15)$$

Υπολογίζουμε τώρα την (2.3.14) για  $y = h_i$  και σε συνδυασμό με την (2.3.15) έπειτα από μερικές πράξεις, καταλήγουμε στην παρακάτω αναδρομική σχέση για τη σύνθετη αντίσταση:

$$\vec{Z}_L(h_i) = \zeta_L^{(i)} \frac{\vec{Z}_L(h_{i-1}) + \zeta_L^{(i)} \tanh(\gamma_L^{(i)}(h_{i-1} - h_i))}{\zeta_L^{(i)} + \vec{Z}_L(h_{i-1}) \tanh(\gamma_L^{(i)}(h_{i-1} - h_i))}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.3.16)$$

Η έκφραση αυτή είναι ακριβώς ίδια με τη γνωστή σχέση για την σύνθετη αντίσταση μιας γραμμής μεταφοράς.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (2.3.13), υπολογίζουμε αναδρομικά τις  $\vec{Z}_L(h_i)$  για όλα τα  $i = 1, 2, \dots, \ell$ . Γνωρίζοντας, πλέον, τις  $\vec{Z}_L(h_i)$ , βρίσκουμε ότι λόγω της συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια  $y = h_\ell$  ισχύει:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_L(h_\ell) &= -\frac{E_{x,exc}^{(p,\ell+1)}(x, h_\ell)}{H_{z,exc}^{(p,\ell+1)}(x, h_\ell)} = \zeta_L^{(\ell+1)} \frac{1 - R_L^{(p)}}{1 + R_L^{(p)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow R_L^{(p)} &= \frac{\zeta_L^{(\ell+1)} - \vec{Z}_L(h_\ell)}{\zeta_L^{(\ell+1)} + \vec{Z}_L(h_\ell)}\end{aligned}\quad (2.3.17)$$

Έχοντας υπολογίσει τον συντελεστή  $R_L^{(p)}$  μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο σε κάθε σημείο της περιοχής  $(\ell + 1)$ . Προκύπτει, έτσι, ότι για  $y = h_\ell$

$$H_{z,exc}^{(p,\ell+1)}(x, h_\ell) = H^{(p)}(\delta) \left(1 + R_L^{(p)}\right) \psi_L(x) \quad (2.3.18)$$

Τη σχέση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε λίγο παρακάτω στην εξίσωση (2.3.21).

Από την (2.3.8) για  $y = h_{i-1}$  προκύπτει

$$H_{z,exc}^{(p,i)}(x, h_{i-1}) = A_L^{(p,i)} \psi_L^{(p)}(x) \quad (2.3.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.3.15) και (2.3.19), η (2.3.8) γίνεται:

$$H_{z,exc}^{(p,i)}(x, y) = H_{z,exc}^{(p,i)}(x, h_{i-1}) \left[ \cosh\left(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})\right) - \frac{\vec{Z}_L(h_{i-1})}{\zeta_L^{(i)}} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})\right) \right] \quad (2.3.20)$$

Θέτοντας  $y = h_i$  στην παραπάνω εξίσωση και λύνοντας ως προς  $H_{z,exc}^{(p,i)}(x, h_{i-1})$  παίρνουμε την αναδρομική σχέση:

$$H_{z,exc}^{(p)}(x, h_{i-1}) = \frac{H_{z,exc}^{(p)}(x, h_i)}{\cosh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right) + \frac{\vec{Z}_L(h_{i-1})}{\zeta_L^{(i)}} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right)}, \quad i = \ell, \ell - 1, \dots, 1 \quad (2.3.21)$$

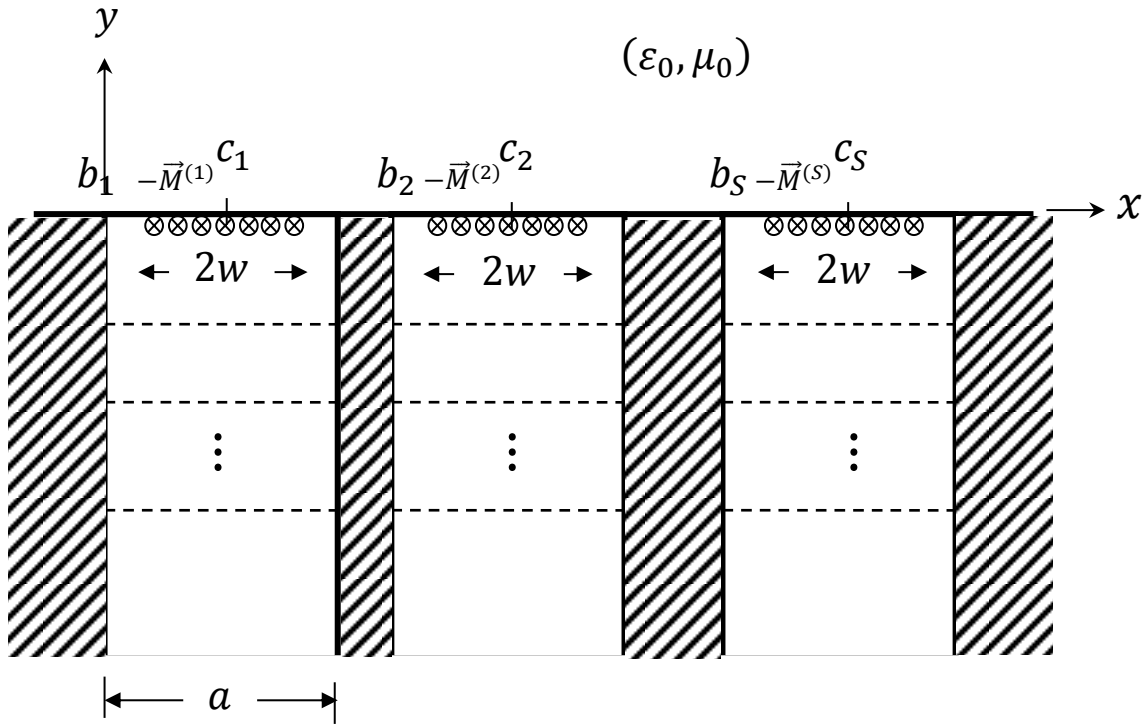
Η σχέση αυτή, σε συνδυασμό με την (2.3.18), μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα μαγνητικό, και κατ' επέκταση το ηλεκτρικό, πεδίο διέγερσης σε όλο το χώρο εντός των κυματοδηγών.

---

### ΣΚΕΔΑΖΟΜΕΝΟ ΠΕΔΙΟ

---

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5, το σκεδαζόμενο πεδίο  $(\vec{E}_M^{(p)}, \vec{H}_M^{(p)})$  οφείλεται στα ισοδύναμα μαγνητικά ρεύματα  $-\vec{M}^{(p)}$ , τα οποία τοποθετούνται στις θέσεις που βρίσκονταν αρχικά οι σχισμές, δηλαδή στις ταινίες  $c_p - w_p \leq x \leq c_p + w_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, S$ , πάνω στο αγωγίμο επίπεδο  $y = 0$ .



ΣΧΗΜΑ 5: ΔΙΑΤΑΞΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΚΕΔΑΖΟΜΕΝΟ ΠΕΔΙΟ

Όπως το  $H_{z,exc}^{(p)}$ , έτσι και το  $H_{z,M}^{(p)}$  (και οι υπόλοιπες συνιστώσες του πεδίου) ικανοποιεί την βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Οπότε, ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα παίρνουμε τις εκφράσεις

- Για  $i \neq \ell + 1$ :

$$\begin{aligned} H_{z,M}^{(p,i)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ C_m^{(p,i)} \cosh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) + D_m^{(p,i)} \sinh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) \right] \psi_m^{(p)}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} H_{z,m}^{(p,i)} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

$$\begin{aligned} E_{x,M}^{(p,i)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(i)}}{j\omega\epsilon_i} \left[ C_m^{(p,i)} \sinh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) + D_m^{(p,i)} \cosh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) \right] \psi_m^{(p)}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{x,m}^{(p,i)} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

- Για  $i = \ell + 1$ :

$$H_{z,M}^{(p,\ell+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{(p)} \psi_m^{(p)}(x) e^{\gamma_m^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} = \sum_{m=0}^{\infty} H_{z,m}^{(p,\ell+1)}(x, y) \quad (2.3.24)$$

$$E_{x,M}^{(p,\ell+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m^{(i)}}{j\omega\epsilon_i} T_m^{(p)} \psi_m^{(p)}(x) e^{\gamma_m^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{x,m}^{(p,\ell+1)}(x, y) \quad (2.3.25)$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, τις οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες των στρωμάτων, και, πιο συγκεκριμένα, τη συνθήκη για  $y = 0$  που επιβάλλει ότι

$$E_{x,tot}^{(p,\ell+1)}(x,0) \equiv E_{x,M}^{(p,\ell+1)}(x,0) = M_z^{(p)}(x)$$

παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι συντελεστές  $\{C_m^{(p,i)}\}$ ,  $\{D_m^{(p,i)}\}$  και  $\{T_m^{(p)}\}$  εμπλέκονται σε συστήματα μη ομογενών αλγεβρικών εξισώσεων. Προκύπτει λοιπόν ότι, όπως αναμέναμε, το σκεδαζόμενο πεδίο περιλαμβάνει εν γένει όλους τους  $\{TM_{m0}\}$  ρυθμούς.

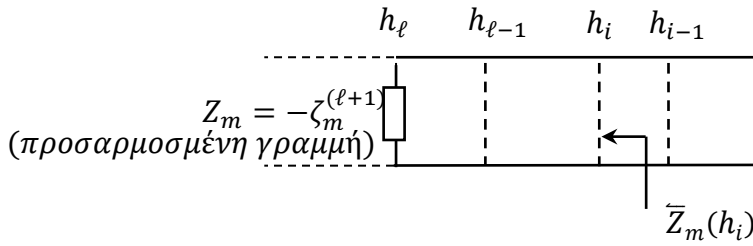
Για να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές, θα κάνουμε και εδώ χρήση της μεθόδου του εγκάρσιου συντονισμού. Ορίζουμε τη σύνθετη αντίσταση στη θέση  $y$  για τον ρυθμό  $TM_{m0}$  με τη σχέση

$$\tilde{Z}_m(y) = -\frac{E_{x,m}^{(p)}(x,y)}{H_{z,m}^{(p)}(x,y)} \quad (2.3.26)$$

Σύμφωνα με τις (2.3.24) και (2.3.25), για κάθε σημείο  $(x,y)$  της περιοχής  $(\ell+1)$  ισχύει:

$$\tilde{Z}_m(y) = -\frac{E_{x,m}^{(p,\ell+1)}(x,y)}{H_{z,m}^{(p,\ell+1)}(x,y)} = -\zeta_m^{(\ell+1)} \quad (2.3.27)$$

Συμπεραίνουμε ότι, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6, το ισοδύναμο μοντέλο για τον  $TM_{m0}$  ρυθμό είναι ουσιαστικά μια γραμμή μεταφοράς προσαρμοσμένη στο  $y = -\infty$ .



ΣΧΗΜΑ 6: ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΑΝΙΣΤΑΣΗΣ  $\tilde{Z}_m(h_i)$

Με την ίδια διαδικασία που οδήγησε στην (2.3.14), βρίσκουμε την σχέση

$$\tilde{Z}_m(y) = -\zeta_m^{(i)} \frac{C_m^{(p,i)} \sinh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) + D_m^{(p,i)} \cosh(\gamma_m^{(p,i)}(y - h_{i-1}))}{C_m^{(p,i)} \cosh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1})) + D_m^{(p,i)} \sinh(\gamma_m^{(i)}(y - h_{i-1}))} \quad (2.3.28)$$

απ' όπου για  $y = h_{i-1}$  παίρνουμε:

$$\tilde{Z}_m(h_{i-1}) = -\zeta_m^{(i)} \frac{D_m^{(p,i)}}{C_m^{(p,i)}} \Rightarrow \frac{D_m^{(p,i)}}{C_m^{(p,i)}} = -\frac{\tilde{Z}_m(h_{i-1})}{\zeta_m^{(i)}} \quad (2.3.29)$$

Θέτοντας  $y = h_i$  στην (2.3.28) και χρησιμοποιώντας την (2.3.29) προκύπτει η παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$\tilde{Z}_m(h_i) = \zeta_m^{(i)} \frac{\tilde{Z}_m(h_{i-1}) + \zeta_m^{(i)} \tanh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right)}{\zeta_m^{(i)} + \tilde{Z}_m(h_{i-1}) \tanh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right)}, i = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.3.30)$$

η οποία με αναδιάρθρωση των όρων μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\tilde{Z}_m(h_{i-1}) = \zeta_m^{(i)} \frac{\tilde{Z}_m(h_i) - \zeta_m^{(i)} \tanh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right)}{\zeta_m^{(i)} - \tilde{Z}_m(h_i) \tanh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right)}, i = \ell, \ell - 1, \dots, 1 \quad (2.3.31)$$

Ξεκινώντας την αναδρομική σχέση για  $i = \ell$  και γνωρίζοντας ότι  $\tilde{Z}_m(h_\ell) = -\zeta_m^{(\ell+1)}$ , μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικά τις  $\tilde{Z}_m(h_i)$  για  $i = \ell - 1, \dots, 0$ .

Συνεχίζουμε παρατηρώντας ότι

$$H_{z,m}^{(p)}(x, h_{i-1}) = C_m^{(p,i)} \psi_m^{(p)}(x) \quad (2.3.32)$$

και με τη βοήθεια της (2.3.29) γράφουμε

$$H_{z,m}^{(p,i)}(x, y) = H_{z,m}^{(p)}(x, h_{i-1}) \left[ \cosh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - y)\right) + \frac{\tilde{Z}_m(h_{i-1})}{\zeta_m^{(i)}} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - y)\right) \right] \quad (2.3.33)$$

Θέτοντας  $y = h_i$  στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε

$$H_{z,m}^{(p)}(x, h_i) = H_{z,m}^{(p)}(x, h_{i-1}) \left[ \cosh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right) + \frac{\tilde{Z}_m(h_{i-1})}{\zeta_m^{(i)}} \sinh\left(\gamma_m^{(i)}(h_{i-1} - h_i)\right) \right] \quad (2.3.34)$$

Είναι εμφανές ότι αρκεί να γνωρίζουμε το  $H_{z,M,m}^{(p)}(x, 0)$  για να υπολογίσουμε μέσω των (2.3.33) και (2.3.34) το σκεδαζόμενο μαγνητικό και, μέσω των (2.2.8), το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο παντού μέσα στους κυματοδηγούς.

Απομένει τώρα να εφαρμόσουμε την οριακή συνθήκη για το ηλεκτρικό πεδίο για  $y = 0$ :

$$E_{x,tot}^{(p)}(x, 0^-) \equiv E_{x,M}^{(p)}(x, 0^-) = M_z^{(p)}(x) \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m^{(1)} D_m^{(p,1)} \psi_m^{(p)}(x) = M_z^{(p)}(x) \quad (2.3.35)$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά στην παραπάνω εξίσωση είναι το ανάπτυγμα σε ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις  $\{\psi_m^{(p)}(x)\}$  του  $M_z^{(p)}(x)$ . Συνεπώς, για να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $\{D_m^{(p,1)}\}$ , εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα των  $\{\psi_m^{(p)}(x)\}$  στο  $[b_p, b_p + a]$ , πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.3.35) με  $\psi_n^{(p)}(x)$  και ολοκληρώνουμε από  $x = b_p$  ως  $x = b_p + a$ , οπότε προκύπτουν τα εξής:

- Για  $m = n = 0$

$$\zeta_0^{(1)} D_0^{(p,1)} a = \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x) dx \Rightarrow D_0^{(p,1)} = \frac{1}{a \zeta_0^{(1)}} \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x) dx \quad (2.3.36)$$

- Για  $m = n \neq 0$

$$\zeta_n^{(1)} D_n^{(p,1)} \frac{a}{2} = \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x) \psi_n^{(p)}(x) dx \Rightarrow D_n^{(p,1)} = \frac{2}{a \zeta_n^{(1)}} \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x) \psi_n^{(p)}(x) dx \quad (2.3.37)$$

δηλαδή

$$D_n^{(p,1)} = \frac{\hat{\epsilon}_n}{a \zeta_n^{(1)}} \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x) \psi_n^{(p)}(x) dx \quad (2.3.38)$$

όπου

$$\hat{\epsilon}_n = 2 - \delta_{n0}, \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

Συνεπώς, λόγω της (2.3.29), το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο πάνω στη σχισμή θα είναι:

$$H_{z,M}^{(p)}(x, 0^-) = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\zeta_n^{(1)}} \psi_n^{(p)}(x) \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x') \psi_n^{(p)}(x') dx' \quad (2.3.39)$$

#### 2.4 ΠΕΔΙΟ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ $y > 0$

Με αναφορά στη διάταξη του Σχήματος 7, σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας το πεδίο στον ελεύθερο χώρο ( $y > 0$ ) οφείλεται στην συνεισφορά όλων των επιφανειακών μαγνητικών ρευμάτων  $M_z^{(p)}(x)$ ,  $p = 1, \dots, S$ ,  $x \in [c_p - w, c_p + w]$ , τοποθετημένων στο τελείως αγωγίμο επίπεδο  $y = 0$  (σχισμές βραχυκυκλωμένες).

Στη συνέχεια, θα βρούμε για το πεδίο  $(\vec{E}_{tot}, \vec{H}_{tot})$  μια ολοκληρωτική αναπαράσταση χρησιμοποιώντας το θεώρημα της αμοιβαιότητας (reciprocity theorem - [10]).

Προηγουμένως, θα υπολογίσουμε το πεδίο  $(\vec{E}_G, \vec{H}_G)$  που διεγείρεται από μια μοναδιαία γραμμική μαγνητική πηγή

$$\vec{M}_G = \hat{z} \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (2.4.1)$$

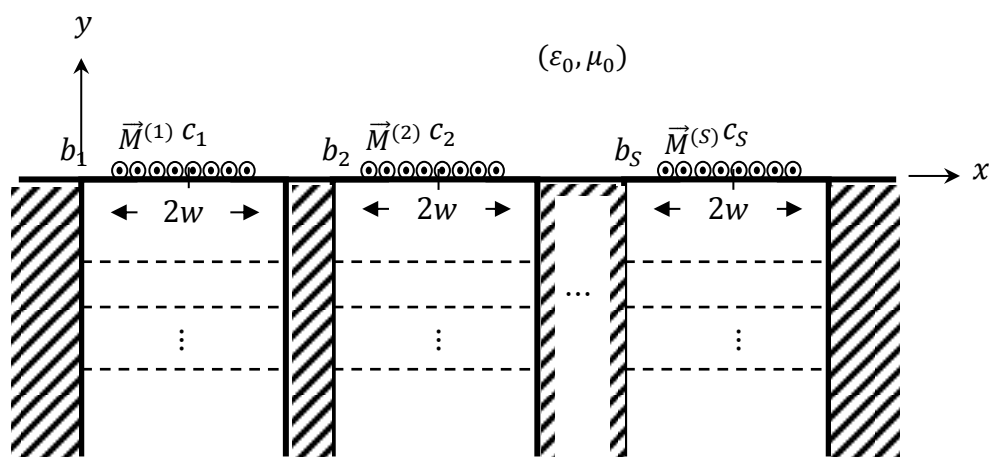
τοποθετημένη στη θέση  $(x', y')$ , παράλληλη στον άξονα  $z$ , πάνω από το τέλεια αγωγίμο επίπεδο  $y = 0$ . Οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\nabla \times \vec{E}_G = -\vec{M}_G - j\omega\mu_0 \vec{H}_G \quad (2.4.2)$$

$$\nabla \times \vec{H}_G = j\omega\epsilon_0 \vec{E}_G \quad (2.4.3)$$

Παίρνοντας την περιστροφή της (2.4.3) και με τη βοήθεια της (2.4.2) προκύπτει:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}_G = -k_0^2 \vec{H}_G - j\omega\epsilon_0 \vec{M}_G \quad (2.4.4)$$



ΣΧΗΜΑ 7: ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΟΝ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΧΩΡΟ

Γνωρίζουμε, όμως, ότι για μια διανυσματική συνάρτηση  $\vec{F}$  ισχύει:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

και αφού

$$\nabla \cdot \vec{H}_G = 0$$

προκύπτει τελικά η διανυσματική μη ομογενής εξίσωση Helmholtz για το μαγνητικό πεδίο:

$$(\nabla^2 + k_0^2)\vec{H}_G = j\omega\epsilon_0\vec{M}_G \quad (2.4.5)$$

Αφού  $\vec{M}_G = \hat{z}M_{z,G}$ , από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει, όπως άλλωστε αναμέναμε, ότι

$$H_{x,G} = H_{y,G} = 0$$

και ότι η z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $H_{z,G}$  ικανοποιεί την βαθμωτή μη ομογενή εξίσωση Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k_0^2)H_{z,G}(x, y, x', y') = j\omega\epsilon_0\delta(x - x')\delta(y - y') \quad (2.4.6)$$

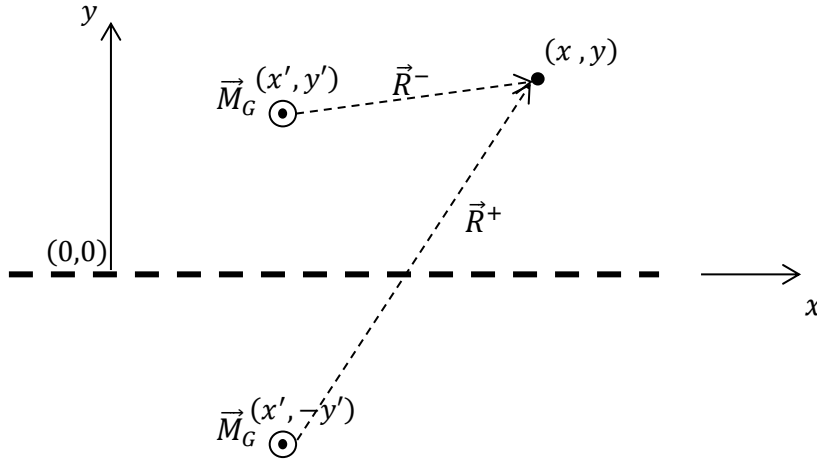
όπου  $\delta(u)$  είναι το συναρτησιακό του Dirac, το οποίο ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(u - u')du = f(u') \quad (2.4.7)$$

Η θεωρία ειδώλων (image theory - [10]) προβλέπει ότι η ισοδύναμη διάταξη για μαγνητική πηγή στη θέση  $(x', y')$  υπεράνω του αγωγίμου επιπέδου  $y = 0$  είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 8, όπου απουσιάζει το αγωγίμο επίπεδο και αντί αυτού έχει τοποθετηθεί γραμμική μαγνητική πηγή ίδιου μέτρου και κατεύθυνσης στην κατοπτρική θέση  $(x', -y')$ . Αμφότερες οι πηγές δρουν στον άπειρο χώρο  $(\epsilon_0, \mu_0)$ . Πρέπει να



σημειώσουμε ότι το ισοδύναμο μοντέλο του Σχήματος 8 ισχύει μόνο για την περιοχή ( $y > 0$ ).



ΣΧΗΜΑ 8: ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΗΓΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΙΔΩΛΟ ΤΗΣ

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τελικά η λύση της (2.4.6) θα είναι:

$$H_{z,G}(x, y, x', y') = -\frac{\omega \epsilon_0}{4} \left[ H_0^{(2)}(k_0 R^-) + H_0^{(2)}(k_0 R^+) \right] \quad (2.4.8)$$

όπου:

$H_0^{(2)}(u)$ : η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους μηδενικής τάξης

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$R^\pm = |\vec{R}^\pm| = \sqrt{(x - x')^2 + (y \pm y')^2}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της αμοιβαιότητας, θεωρώντας ως  $V$  την περιοχή ( $y > 0$ ) θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \iiint_V \vec{H}_G \sum_{q=1}^S \vec{M}^{(p)} dV &= \iiint_V \vec{H}_{tot} \vec{M}_G dV \Rightarrow \\ \stackrel{(2.4.7)}{\implies} H_{z,tot}(x', y') &= -\frac{\omega \epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_q^-}^{c_q^+} M_z^{(q)}(x) H_0^{(2)} \left( k_0 \sqrt{(x - x')^2 + y'^2} \right) dx \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Εναλλάσσοντας τα  $x, x'$  και  $y, y'$  έχουμε την τελική έκφραση για το πεδίο:

$$H_{z,tot}(x, y) = -\frac{\omega\epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_{q-w}}^{c_{q+w}} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0 R) dx' \quad (2.4.10)$$

$$E_{x,tot}(x, y) = -\frac{1}{j2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{q=1}^S \int_{c_{q-w}}^{c_{q+w}} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0 R) dx' \right] \quad (2.4.11)$$

όπου

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}$$

Σύμφωνα με την (2.4.10), το μαγνητικό πεδίο λίγο πάνω από τη σχισμή θα είναι

$$H_{z,tot}(x, 0^+) = -\frac{\omega\epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_{q-w}}^{c_{q+w}} M_z^{(p)}(x') H_0^{(2)}(k_0 |x - x'|) dx' \quad (2.4.12)$$

## 2.5 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στις προηγούμενες παραγράφους υπολογίσαμε τις εκφράσεις για το πεδίο διέγερσης, το σκεδαζόμενο πεδίο εντός του κυματοδηγού, καθώς και το ακτινοβολούμενο πεδίο (πεδίο στην περιοχή  $y > 0$ ). Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτά, εφαρμόζουμε τη συνθήκη συνέχειας της εφαπτομενικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου σε κάθε μια από τις σχισμές. Έχουμε λοιπόν για την  $p$ -οστή σχισμή:

$$\hat{y} \times [\vec{H}_{tot}(x, 0^+) - \vec{H}_{tot}(x, 0^-)] = 0 \Rightarrow H_{z,tot}(x, 0^-) = H_{z,tot}(x, 0^+) \quad (2.5.1)$$

$$\Rightarrow H_{z,exc}^{(p)}(x, 0^-) + H_{z,M}^{(p)}(x, 0^-) = H_{z,tot}(x, 0^+) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\hat{Z}_n(0)} \psi_n^{(p)}(x) \int_{c_{p-w}}^{c_{p+w}} M_z^{(p)}(x') \psi_n^{(p)}(x') dx' \\ - \frac{\omega\epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_{q-w}}^{c_{q+w}} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0 |x - x'|) dx' = H_{z,exc}^{(p)}(x, 0^-), \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

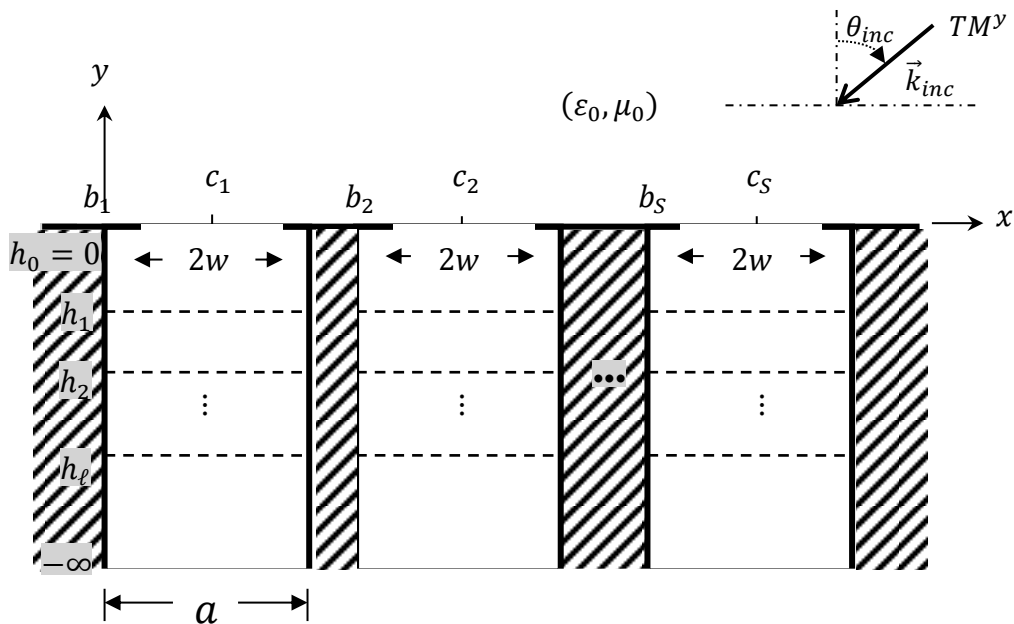
$$c_p - w \leq x \leq c_p + w, p = 1, 2, \dots, S$$

Προκύπτει, έτσι, ένα σύστημα  $S \times S$  ( $S$  το πλήθος των σχισμών) συζευγμένων ιδίομορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων με αγνώστους τα επιφανειακά μαγνητικά ρεύματα  $\vec{M}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, S$ . Το παραπάνω σύστημα θα επιλύσουμε στο Κεφάλαιο 3 με τη μέθοδο Nyström.

Είναι φανερό από την παραπάνω ανάλυση ότι ο υπολογισμός των μαγνητικών ρευμάτων μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το πεδίο σε όλο τον χώρο, όπως επίσης και οποιοδήποτε άλλο μέγεθος πρακτικού ενδιαφέροντος.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα σκεδάσεως, στο οποίο η διάταξη λειτουργεί ως κεραία λήψης, έχοντας ως διέγερση ένα προσπίπτον επίπεδο κύμα πολωμένο στην κατεύθυνση  $y$  ( $TM^y$ ) και προερχόμενο από τον ελεύθερο χώρο.

## 2.6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΚΕΔΑΣΕΩΣ: ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ $TM^y$ ΚΥΜΑΤΟΣ



ΣΧΗΜΑ 9: ΠΡΟΣΠΤΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΧΗ ( $y > 0$ )

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 9, η διάταξη σε αυτή την περίπτωση διεγείρεται από ένα επίπεδο  $TM^y$  κύμα που προσπίπτει υπό γωνία  $\theta_{inc}$  προερχόμενο από την περιοχή  $y > 0$ . Το κύμα περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\vec{H}_{inc} = \hat{z} H_0 e^{j\vec{k}_{inc}\vec{r}} \quad (2.6.1)$$

$$\vec{E}_{inc} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \vec{H}_{inc} = \zeta_0 H_0 (\hat{x} \cos \theta_{inc} - \hat{y} \sin \theta_{inc}) e^{j\vec{k}_{inc}\vec{r}} \quad (2.6.2)$$

όπου

$$\vec{k}_{inc} = k_0 (\hat{x} \sin \theta_{inc} + \hat{y} \cos \theta_{inc}), \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$$

$$\zeta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

Η ανάλυση του προβλήματος είναι ακριβώς ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Θεωρούμε και πάλι την ισοδύναμη διάταξη όπου οι σχισμές είναι βραχυκυκλωμένες και στη θέση τους τοποθετούμε τα ισοδύναμα μαγνητικά ρεύματα  $\vec{M}^{(p)}, p = 1, 2, \dots, S$ . Τα πεδία που οφείλονται στα μαγνητικά ρεύματα (εντός και εκτός των κυματοδηγών) είναι ακριβώς ίδια με αυτά που υπολογίσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Αυτό που αλλάζει είναι το πεδίο διέγερσης, που πλέον βρίσκεται στην περιοχή  $y > 0$ , το οποίο και θα υπολογίσουμε.

Το πεδίο διέγερσης θα είναι η υπέρθεση του προσπίπτοντος κύματος ( $\vec{E}_{inc}, \vec{H}_{inc}$ ) και του ανακλώμενου ( $\vec{E}_R, \vec{H}_R$ ) από το τελείως αγωγίμο επίπεδο  $y = 0$ .

$$\vec{H}_R = \hat{z}RH_0e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} \quad (2.6.3)$$

$$\vec{E}_R = \zeta_0RH_0(-\hat{x}\cos\theta_r - \hat{y}\sin\theta_r)e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} \quad (2.6.4)$$

όπου

$$\vec{k}_r = k_0(-\hat{x}\sin\theta_r + \hat{y}\cos\theta_r)$$

και  $\theta_r$  η γωνία ανάκλασης.

Εφαρμόζοντας την συνθήκη μηδενισμού του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο επίπεδο  $y = 0$  προκύπτει ότι  $R = 1$  και  $\theta_r = \theta_{inc}$ . Οπότε θα είναι:

$$H_{z,exc} = H_{z,inc} + H_{z,R} = 2H_0e^{jk_0x\sin\theta_{inc}}\cos(k_0y\cos\theta_{inc}) \quad (2.6.5)$$

Άρα πάνω στο επίπεδο  $y = 0$  το μαγνητικό πεδίο διέγερσης είναι:

$$H_{z,exc}(x, 0^+) = 2H_0e^{jk_0x\sin\theta_{inc}} \quad (2.6.6)$$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη συνέχειας του εφαπτομενικού μαγνητικού πεδίου πάνω σε κάθε σχισμή παίρνουμε τις ακόλουθες ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} H_{z,tot}(x, 0^-) = H_{z,tot}(x, 0^+) \Rightarrow H_{z,M}^{(p)}(x, 0^-) = H_{z,exc}(x, 0^+) + H_z(x, 0^+) \Rightarrow \\ -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\hat{Z}_n(0)} \psi_n^{(p)}(x) \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x') \psi_n^{(p)}(x') dx' \\ + \frac{\omega\epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_q-w}^{c_q+w} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0|x-x'|) dx' = 2H_0e^{jk_0x\sin\theta_{inc}}, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

για  $x \in [c_p - w, c_p + w], p = 1, 2, \dots, S$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

### 3.1 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Γράφουμε ξανά, για ευκολία, τις ολοκληρωτικές εξισώσεις για το πρόβλημα ακτινοβολίας:

$$\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\xi}_n}{\hat{z}_n(0)} \psi_n^{(p)}(x) \int_{c_p-w}^{c_p+w} M_z^{(p)}(x') \psi_n^{(p)}(x') dx' - \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_q-w}^{c_q+w} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0|x-x'|) dx' = H_{z,exc}^{(p)}(x, 0^-), \quad (3.1.1)$$

για  $c_p - w \leq x \leq c_p + w$ ,  $p = 1, 2, \dots, S$ .

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα επιλυθεί με τη μέθοδο Nyström. Η επιλογή της NM:

- Μας επιτρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την ιδιομορφία της λύσης  $\{M_z^{(q)}(x')\}$  στα άκρα των διαστημάτων  $[c_q - w, c_q + w]$  και την ιδιομορφία των ολοκληρωτέων συναρτήσεων για  $x = x'$ .
- Μας απαλλάσσει από την υπολογιστική επιβάρυνση που εισάγει ο υπολογισμός εσωτερικών γινομένων με συναρτήσεις βάσης (μέθοδος Galerkin).
- Μας παρέχει λύσεις που συγκλίνουν εκθετικά σε συνάρτηση με το μέγεθος της μήτρας του συστήματος.

Αρχικά, για  $x, x' \in [c_q - w, c_q + w]$  κάνουμε τις εξής αλλαγές μεταβλητών:

$$x = wt + c_p \quad (3.1.2)$$

$$x' = w\tau + c_q \quad (3.1.3)$$

όπου

$$-1 \leq t, \tau \leq 1$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη των άκρων, αναζητούμε τα  $M_z^{(q)}(\tau)$  στην παρακάτω μορφή:

$$M_z^{(q)}(\tau) = \frac{m_z^{(q)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad q = 1, 2, \dots, S \quad (3.1.4)$$

οπότε, η (3.1.1) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \frac{w}{a} \frac{1}{\tilde{Z}_0(0)} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau + \frac{2w}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{Z}_n(0)} \psi_n^{(p)}(x(t)) \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \psi_n^{(p)}(x'(\tau)) d\tau \\ & - \frac{\omega \varepsilon_0 w}{2} \sum_{q=1}^s \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(q)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} H_0^{(2)}(k_0 |w(t-\tau) + c_p - c_q|) d\tau = H_{z,exc}^{(p)}(x(t), 0^-) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Στο εξής, για ευκολία, θα γράφουμε  $H_{z,exc}(t, 0^-)$ ,  $\psi_n(t)$  και  $\psi_n(\tau)$  αντί για  $H_{z,exc}(x(t), 0^-)$ ,  $\psi_n(x(t))$  και  $\psi_n(x'(\tau))$  αντίστοιχα.

---

#### ΑΠΟΜΟΝΩΣΗ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΑΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΑ

---

Σύμφωνα με τη σχέση ( [11] )

$$H_0^{(2)}(z) = \left[ 1 - j \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{z}{2} + \gamma \right) \right] J_0(z) + j \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{J_{2n}(z)}{n} \quad (3.1.6)$$

όπου

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = 0.5772156 \dots$$

η γνωστή σταθερά του Euler και  $J_n(z)$  η συνάρτηση Bessel n-οστής τάξης, η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (3.1.5) όταν  $p = q$  παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία στο  $t = \tau$ . Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με την (3.1.6), για  $p = q$  γράφουμε:

$$H_0^{(2)}(k_0 w |t - \tau|) = -j \frac{2}{\pi} \ln |t - \tau| J_0(k_0 w (t - \tau)) + \mathcal{R}_1(t, \tau) \quad (3.1.7)$$

όπου η

$$\mathcal{R}_1(t, \tau) = H_0^{(2)}(k_0 w |t - \tau|) + j \frac{2}{\pi} \ln |t - \tau| J_0(k_0 w (t - \tau)) \quad (3.1.8)$$

είναι αναλυτική συνάρτηση. Χωρίζουμε λοιπόν την  $H_0^{(2)}(k_0 w |t - \tau|)$  σε ένα αναλυτικό και σε ένα ιδιόμορφο κομμάτι.

Είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι η αναλυτικότητα της  $\mathcal{R}_1(t, \tau)$  είναι ιδιαίτερα σημαντική για την ταχεία σύγκλιση του αλγορίθμου μας. Αν, για παράδειγμα, επιλέγαμε

$$H_0^{(2)}(k_0 w |t - \tau|) = -j \frac{2}{\pi} \ln |t - \tau| + Q_0(t, \tau)$$

θα βλέπαμε ότι η  $Q_0(t, \tau)$  είναι συνεχής, αλλά δεν είναι αναλυτική, αφού οι 2<sup>ης</sup> και παραπάνω τάξης παράγωγοί της είναι ιδιόμορφες. Αυτό, όπως τονίζεται στην [9] θα επιβράδυνε αρκετά τη σύγκλιση της μεθόδου.

## ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ

Ο γενικός όρος της σειράς στην ολοκληρωτική εξίσωση φθίνει ως  $\frac{1}{n}$  και, συνεπώς, είναι αναγκαίο να επιταχύνουμε τη σύγκλιση της. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n(0)} = \frac{1}{\zeta_n^{(1)}} \frac{\zeta_n^{(1)} - \tilde{Z}_n(h_1) \tanh(-\gamma_n^{(1)} h_1)}{\tilde{Z}_n(h_1) - \zeta_n^{(1)} \tanh(-\gamma_n^{(1)} h_1)} \sim -\frac{j\omega\varepsilon_1}{\gamma_n^{(1)}}$$

όταν  $h_1 \rightarrow \infty$ , οπότε θέτουμε:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_n(0)} = -\frac{j\omega\varepsilon_1}{\gamma_n^{(1)}} - Q_n \quad (3.1.9)$$

έτσι ώστε

$$Q_n = -\frac{j\omega\varepsilon_1}{\gamma_n^{(1)}} \frac{\tilde{Z}_n(h_1) + \zeta_n^{(1)}}{\tilde{Z}_n(h_1) - \zeta_n^{(1)} \tanh(-\gamma_n^{(1)} h_1)} \frac{2}{1 + e^{-2\gamma_n^{(1)} h_1}} \quad (3.1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η  $Q_n$  φθίνει ραγδαία (εκθετικά) με το  $n$ . Η σειρά στην (3.1.5) με χρήση της (3.1.9) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{Z}_n(0)} \psi_n^{(p)}(t) \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \psi_n^{(p)}(\tau) d\tau = \\ & = -\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \psi_n^{(p)}(t) \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \psi_n^{(p)}(\tau) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon_1}{\gamma_n^{(1)}} \psi_n^{(p)}(t) \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \psi_n^{(p)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Η σειρά που περιέχει το  $Q_n$  συγκλίνει εκθετικά, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν.

Επειδή

$$\frac{1}{\gamma_n^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k_1^2}}$$

είναι εμφανές ότι η σειρά που περιέχει το  $\frac{1}{\gamma_n^{(1)}}$  συγκλίνει ως  $\frac{1}{n}$ , όπως η αρχική. Για την επιτάχυνση της σύγκλισης της ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, αναπτύσσουμε το  $\frac{1}{\gamma_n^{(1)}}$  ως

$$\frac{1}{\gamma_n^{(1)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_m}{n^{2m+1}} \quad (3.1.12)$$

όπου

$$u_m = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} (\omega^2 \varepsilon_1 \mu_1)^m \left(\frac{a}{\pi}\right)^{2m+1} \quad (3.1.13)$$

Θέτουμε

$$g_n^{(k)} = \sum_{m=0}^k \frac{u_m}{n^{2m+1}} \quad (3.1.14)$$

όπου  $k$  είναι προεπιλεγμένος θετικός ακέραιος. Ονομάζουμε το  $k$  τάξη της επιτάχυνσης. Σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\frac{1}{\gamma_n^{(1)}} = \left( \frac{1}{\gamma_n^{(1)}} - g_n^{(k)} \right) + g_n^{(k)} = P_n^{(k)} + g_n^{(k)} \quad (3.1.15)$$

με

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{\gamma_n^{(1)}} - g_n^{(k)} \quad (3.1.16)$$

Η σειρά στην (3.1.11), που περιέχει το  $\frac{1}{\gamma_n^{(1)}}$  γίνεται τώρα:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega\varepsilon_1}{\gamma_n^{(1)}} \psi_n^{(p)}(t) \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \psi_n^{(p)}(\tau) d\tau &= \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} j\omega\varepsilon_1 P_n^{(k)} \psi_n^{(p)}(t) \psi_n^{(p)}(\tau) dt + \\ &+ j\omega\varepsilon_1 \sum_{m=0}^k u_m \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \psi_n^{(p)}(t) \psi_n^{(p)}(\tau) dt \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Η σειρά που περιέχει το  $P_n^{(k)}$  συγκλίνει ως  $\frac{1}{n^{2k+3}}$ . Μπορούμε, δηλαδή, να την κάνουμε να συγκλίνει όσο γρήγορα επιθυμούμε επιλέγοντας κατάλληλη τιμή του  $k$ . Συνήθως, αρκεί να επιλέξουμε  $k \leq 3$  ώστε να επιτύχουμε αρκετά ταχεία σύγκλιση.

Απομένει τώρα να χειριστούμε κατάλληλα την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \psi_n^{(p)}(t) \psi_n^{(p)}(\tau)$$

Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια της πολυλογαριθμικής συνάρτησης  $Li_n(z)$ , η οποία μπορεί να υπολογιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια και ορίζεται ως

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (3.1.18)$$

Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την [9] ορίζουμε:

$$\tilde{S}_{2m+1}(t, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \cos \left[ \frac{n\pi(wt + c_p - b_p)}{a} \right] \cos \left[ \frac{n\pi(w\tau + c_p - b_p)}{a} \right] \quad (3.1.19)$$

Θέτοντας

$$S_{2m+1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} \cos(nz) = \frac{1}{2} [Li_{2m+1}(e^{jz}) + Li_{2m+1}(e^{-jz})], 0 \leq z \leq 2\pi \quad (3.1.20)$$

προκύπτει ότι



$$\tilde{S}_{2m+1}(t, \tau) = S_{2m+1} \left[ \frac{\pi w}{a} |t - \tau| \right] + S_{2m+1} \left[ \frac{\pi}{a} \left( w(t + \tau) + 2(c_p - b_p) \right) \right] \quad (3.1.21)$$

Όπως μπορεί κανείς να δει από τις εκφράσεις της συνάρτησης  $S_{2m+1}(z)$ , για  $m = 0, 1, \dots$  (βλέπε [9], [12] και Παράρτημα I), η  $S_{2m+1} \left[ \frac{\pi w}{a} |t - \tau| \right]$  παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία για  $t = \tau$ . Οπότε, εντελώς ανάλογα με ό,τι κάναμε παραπάνω για την  $H_0^{(2)}(k_0 w |t - \tau|)$ , χωρίζουμε την  $\tilde{S}_{2m+1}(t, \tau)$  σε αναλυτικό και ιδιόμορφο μέρος:

$$\tilde{S}_{2m+1}(t, \tau) = d_{2m+1}(t - \tau)^{2m} \ln|t - \tau| + \Gamma_{2m+1}(t, \tau) \quad (3.1.22)$$

όπου οι συντελεστές  $d_{2m+1}$  δίνονται από τη σχέση:

$$d_{2m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \left( \frac{\pi w}{a} \right)^{2m} \quad (3.1.23)$$

ενώ

$$\Gamma_{2m+1}(t, \tau) = \tilde{S}_{2m+1}(t, \tau) - d_{2m+1}(t - \tau)^{2m} \ln|t - \tau| \quad (3.1.24)$$

είναι το αναλυτικό κομμάτι της  $\tilde{S}_{2m+1}(t, \tau)$ .

Τελικά, οι (3.1.5) γίνονται:

$$\begin{aligned} & \frac{w}{a} \frac{1}{\tilde{Z}_0(0)} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau - \frac{2w}{a} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( Q_n + j\omega \varepsilon_1 P_n^{(k)} \right) \psi_n^{(p)}(t) \psi_n^{(p)}(\tau) d\tau + \\ & - \frac{j\omega \varepsilon_1 w}{a} \sum_{m=0}^k u_m \left( d_{2m+1} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} (t - \tau)^{2m} \ln|t - \tau| d\tau + \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \Gamma_{2m+1}(t, \tau) d\tau \right) \\ & - \frac{\omega \varepsilon_0 w}{2} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \mathcal{R}_1(t, \tau) d\tau + \frac{j\omega \varepsilon_0 w}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(p)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} J_0(k_0 w(t - \tau)) \ln|t - \tau| d\tau - \\ & - \frac{\omega \varepsilon_0 w}{2} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^S \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(q)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} H_0^{(2)}(k_0 |w(t - \tau) + c_p - c_q|) d\tau = H_{z,exc}(t, 0^-) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

για  $p = 1, 2, \dots, S$  και  $|t| \leq 1$ .

### 3.2 ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ

Αφού έχουμε φέρει τις ολοκληρωτικές εξισώσεις στην κατάλληλη μορφή (3.1.25), θα τις διακριτοποιήσουμε προκειμένου να λάβουμε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, του οποίου η λύση θα μας δώσει τη λύση του προβλήματος.

Παρατηρούμε ότι στις ολοκληρωτικές εξισώσεις συναντούμε τους εξής δυο τύπους ολοκληρωμάτων:

$$I_a(t) = \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(q)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \mathcal{F}(t, \tau) d\tau \quad (3.2.1)$$

και

$$I_b(t) = \int_{-1}^1 \frac{m_z^{(q)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \mathcal{F}(t, \tau) \ln|t-\tau| d\tau \quad (3.2.2)$$

για  $q = 1, 2, \dots, S$  και η  $\mathcal{F}(t, \tau)$  είναι αναλυτική συνάρτηση. Θα υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην [9].

Για τα πρώτα, σύμφωνα με τον κανόνα Gauss - Chebyshev, έχουμε:

$$I_a(t) \approx \frac{\pi}{L} \sum_{\nu=1}^L m_z^{(q)}(t_\nu) \mathcal{F}(t, t_\nu) \quad (3.2.3)$$

όπου

$$t_\nu = \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2L} \quad (3.2.4)$$

είναι οι ρίζες του πολωνύμου Chebyshev α' είδους L-βαθμού. Όπως θα δούμε αργότερα, η ακέραια παράμετρος  $L$  καθορίζει την  $(S \cdot L \times S \cdot L)$  τάξη του γραμμικού συστήματος Nyström.

Για τα  $I_b(t)$ , ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στην [9], προκύπτει:

$$I_b(t) \approx \sum_{\nu=1}^L m_z^{(q)}(t_\nu) A(t, t_\nu) \quad (3.2.5)$$

όπου

$$A(t, t_\nu) = \frac{1}{L} \mathcal{F}(t, t_\nu) \sigma(t, t_\nu) \quad (3.2.6)$$

και

$$\sigma(t, t_\nu) = \sum_{N=0}^{L-1} \hat{\epsilon}_N T_N(t_\nu) \xi_N(t) \quad (3.2.7)$$

με

$$\xi_N(t) = \int_{-1}^1 \frac{T_N(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln|t-\tau| d\tau = \begin{cases} -\pi \ln 2, & N = 0 \\ -\frac{\pi}{N} T_N(t), & N \neq 0 \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Ο παραπάνω υπολογισμός των ολοκληρωμάτων  $I_a(t)$  και  $I_b(t)$  στηρίζεται στην ορθογωνιότητα των πολωνύμων Chebyshev α' είδους στο διάστημα  $(-1, 1)$  με συνάρτηση βάρους την

$$w(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$$

Η σχέση ορθογωνιότητας είναι η εξής:

$$\int_{-1}^1 T_N(\tau)T_M(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \begin{cases} 0, N \neq M \\ \pi, N = M = 0 \\ \frac{\pi}{2}, N = M \neq 0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Οι εξισώσεις (3.1.25) γίνονται λοιπόν:

$$\sum_{\nu=1}^L K(t, t_\nu) m_z^{(p)}(t_\nu) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^S \sum_{\nu=1}^L \Lambda^{(pq)}(t, t_\nu) m_z^{(q)}(t_\nu) = H_{z,exc}^{(p)}(t, 0^-) \quad (3.2.10)$$

για  $p = 1, 2, \dots, S$  και  $|t| \leq 1$ , όπου

$$\begin{aligned} K(t, t_\nu) = & \frac{\pi w}{aL} \left[ \frac{1}{\tilde{Z}_0(0)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n + j\omega \varepsilon_1 P_n^{(k)}) \psi_n^{(p)}(t) \psi_n^{(p)}(t_\nu) \right] - \\ & - \frac{j\omega \varepsilon_1 w}{aL} \sum_{m=0}^k u_m [d_{2m+1}(t - t_\nu)^{2m} \sigma(t, t_\nu) + \pi \Gamma_{2m+1}(t, t_\nu)] + \\ & + \frac{\omega \varepsilon_0 w}{2L} \left[ \frac{j2}{\pi} J_0(k_0 w(t - t_\nu)) \sigma(t, t_\nu) - \pi \mathcal{R}_1(t, t_\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

και

$$\Lambda^{(pq)}(t, t_\nu) = -\frac{\omega \varepsilon_0 w \pi}{2L} H_0^{(2)}(k_0 |w(t - t_\nu) + c_p - c_q|) \quad (3.2.12)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για την περίπτωση την οποία εξετάζουμε (περιοδικά διατεταγμένα στοιχεία), ισχύει:  $c_p - c_q = (p - q)d$ .

Στο τελευταίο μας βήμα ικανοποιούμε για κάθε σχισμή την εξίσωση (3.2.10) στα σημεία  $\{t_\mu\}$ , τα οποία είναι όμοια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων και, έτσι, προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{\nu=1}^L K(t_\mu, t_\nu) m_z^{(p)}(t_\nu) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^S \sum_{\nu=1}^L \Lambda^{(pq)}(t_\mu, t_\nu) m_z^{(q)}(t_\nu) = H_{z,exc}^{(p)}(t_\mu, 0^-) \quad (3.2.13)$$

για  $\mu = 1, 2, \dots, L$ . Οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} & \tilde{\Lambda}^{(12)} & \dots & \tilde{\Lambda}^{(1S)} \\ \tilde{\Lambda}^{(21)} & \tilde{K} & & \tilde{\Lambda}^{(2S)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Lambda}^{(S1)} & \tilde{\Lambda}^{(S2)} & \dots & \tilde{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}^{(1)} \\ \tilde{m}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{m}^{(S)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}^{(1)} \\ \tilde{H}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{H}^{(S)} \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

όπου οι  $\tilde{K}$  και  $\tilde{\Lambda}^{(pq)}$  είναι  $L \times L$  υποπίνακες των οποίων το στοιχείο της  $\mu$ -οστής γραμμής και της  $\nu$ -οστής στήλης είναι  $\tilde{K}_{\mu\nu} = K(t_\mu, t_\nu)$  και  $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}^{(pq)} = \Lambda^{(pq)}(t_\mu, t_\nu)$ . Ακόμα, τα  $\tilde{m}^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, \dots, S$ , είναι διανύσματα διάστασης  $L$  με  $\nu$ -οστό στοιχείο το  $\tilde{m}_\nu^{(p)} = m_z^{(p)}(t_\nu)$  και τα  $\tilde{H}^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, \dots, S$ , είναι επίσης διανύσματα διάστασης  $L$  με  $\mu$ -οστό στοιχείο το

$\tilde{H}_\mu^{(p)} = H_{z,exc}^{(p)}(t_\mu, 0)$ . Σημειώνουμε ότι σε διάταξη αποτελούμενη από ανόμοια τυχαία διατεταγμένα στοιχεία, από τη μήτρα του συστήματος θα άλλαζε μόνο ο υποπίνακας  $\tilde{K}$ , ο οποίος θα έπρεπε να υπολογιστεί ξεχωριστά για κάθε στοιχείο. Η λύση του συστήματος της (3.2.14) μας δίνει τη λύση του προβλήματος. Τα μαγνητικά ρεύματα δίνονται από τον τύπο παρεμβολής [9]:

$$M_z^{(p)}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{N=0}^{L-1} a_N^{(p)} T_N(t) \quad (3.2.15)$$

με

$$a_N^{(p)} = \frac{\hat{\epsilon}_N}{L} \sum_{v=1}^L m_z^{(p)}(t_v) T_N(t_v) \quad (3.2.16)$$

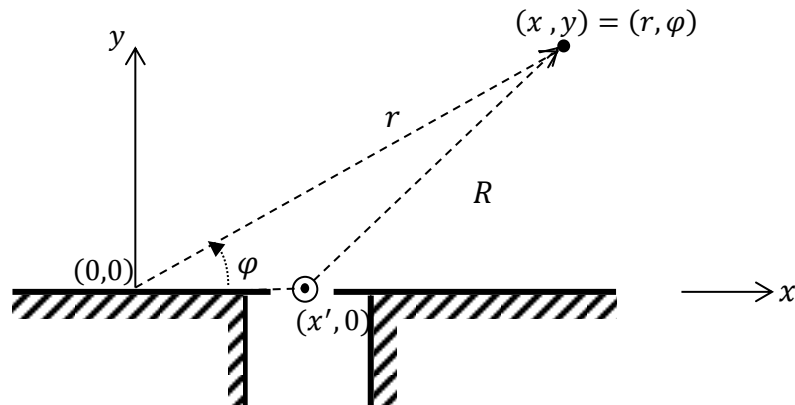
Πριν προχωρήσουμε στο κεφάλαιο της παρουσίασης των αποτελεσμάτων, θα δείξουμε πώς, γνωρίζοντας τα μαγνητικά ρεύματα, υπολογίζουμε ένα από τα πιο χαρακτηριστικά μεγέθη μιας κεραίας, το μακρινό πεδίο.

### 3.3 ΜΑΚΡΙΝΟ ΠΕΔΙΟ

Το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή  $y > 0$  δίνεται από την εξίσωση (2.4.10), την οποία ξαναγράφουμε εδώ για ευκολία:

$$H_{z,tot}(x, y) = -\frac{\omega\epsilon_0}{2} \sum_{q=1}^S \int_{c_q-w}^{c_q+w} M_z^{(q)}(x') H_0^{(2)}(k_0 R) dx' \quad (3.3.1)$$

Με αναφορά στο Σχήμα 10, σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:



ΣΧΗΜΑ 10

$$R = \sqrt{r^2 + x'^2 - 2rx' \cos \varphi} = r \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{r}\right)^2 - 2\frac{x'}{r} \cos \varphi}$$

Για το μακρινό πεδίο, δηλαδή όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται μακριά από την πηγή, ισχύει  $r \gg x'$ , οπότε προκύπτει η προσεγγιστική σχέση:

$$R = r \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{r}\right)^2 - 2 \frac{x'}{r} \cos \varphi} \approx r \sqrt{1 - 2 \frac{x'}{r} \cos \varphi} \approx r - x' \cos \varphi \quad (3.3.2)$$

Επιπλέον, η ασυμπτωτική έκφραση της  $H_0^{(2)}(z)$  για μεγάλα ορίσματα είναι ([11]):

$$H_0^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi z}} e^{-jz} \quad (3.3.3)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση (3.3.2) για τη φάση της ασυμπτωτικής έκφρασης της  $H_0^{(2)}(k_0 R)$  και τη σχέση  $R \approx r$  για το μέτρο της, όπως συνήθως επιλέγεται για την εύρεση του μακρινού πεδίου μιας κεραίας, η (3.3.1), για  $k_0 R \gg 1$  (μακρινό πεδίο) γίνεται:

$$\begin{aligned} H_{z,tot}(r, \varphi) &= -\frac{\omega \varepsilon_0}{2} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \sum_{q=1}^S \int_{c_q-w}^{c_q+w} M_z^{(q)}(x') e^{jk_0 x' \cos \varphi} dx' = \\ &= -\frac{\omega \varepsilon_0 W}{2} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \sum_{q=1}^S \int_{-1}^1 M_z^{(q)}(\tau) e^{jk_0 (w\tau + c_q) \cos \varphi} d\tau \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητής  $x' = c_q + w\tau$ .

Από εδώ μπορούμε να συνεχίσουμε με δυο τρόπους, είτε χρησιμοποιώντας την έκφραση (3.2.15), είτε χρησιμοποιώντας και πάλι τον κανόνα Gauss - Chebyshev για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

- $\alpha'$  τρόπος

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την (3.2.15) και κάνοντας στη συνέχεια την αλλαγή μεταβλητής  $\tau = \cos \theta$  προκύπτει:

$$H_{z,tot}(r, \varphi) = -\frac{\omega \varepsilon_0 W}{2} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \sum_{q=1}^S e^{jk_0 c_q \cos \varphi} \sum_{N=0}^{L-1} a_N^{(p)} \int_0^\pi \cos(N\theta) e^{jk_0 w \cos \theta \cos \varphi} d\theta$$

Από το [11], γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση Bessel N-οστής τάξης ισχύει:

$$J_N(z) = \frac{j^{-N}}{\pi} \int_0^\pi \cos(N\theta) e^{jz \cos \theta} d\theta$$

Οπότε, τελικά, το μακρινό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$H_{z,tot}(r, \varphi) = -\frac{\omega \varepsilon_0 W \pi}{2} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \sum_{q=1}^S e^{j c_q \cos \varphi} \sum_{N=0}^{L-1} a_N^{(p)} j^N J_N(k_0 \cos \varphi) \quad (3.3.5)$$

- β' τρόπος

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα στην (3.3.4) χρησιμοποιώντας τον κανόνα Gauss-Chebyshev έχουμε:

$$H_{z,tot}(r, \varphi) = -\frac{\omega \varepsilon_0 W \pi}{2L} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} \sum_{q=1}^S \sum_{v=1}^L m_z^{(p)}(t_v) e^{j(\omega t_v + c_q) \cos \varphi} \quad (3.3.6)$$

Ο δεύτερος τρόπος υπολογισμού είναι αρκετά πιο απλός, χωρίς να υπολείπεται σε ακρίβεια.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΈΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έχοντας υπολογίσει πλέον τα ισοδύναμα μαγνητικά ρεύματα στη θέση των σχισμών, θέλουμε, προτού υπολογίσουμε τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν, να ελέγξουμε την ορθότητα της μεθόδου. Αρχικά, θα επιβεβαιώσουμε την αρχή διατήρησης της ισχύος και στην συνέχεια θα ελέγξουμε την ισχύ του θεωρήματος της αμοιβαιότητας. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε τη σύγκλιση του αλγορίθμου συναρτήσεως της τάξης  $L$  του κανόνα Gauss - Chebyshev. Τέλος, κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα πραγματοποιήσουμε συγκρίσεις με αποτελέσματα άλλων εργασιών. Πιο συγκεκριμένα, σε πολλές περιπτώσεις θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με τα αντίστοιχα των [3] και [6], όπου το πρόβλημα που εξετάζουμε λύνεται με χρήση της μεθόδου των ροπών (MoM). Η μέθοδος περιγράφεται συνοπτικά στο Παράρτημα III.

### 4.1 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ

#### ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

Ένας πρώτος τρόπος να ελέγξουμε τη μέθοδο μας είναι να εξετάσουμε την διατήρηση της ισχύος στη διάταξη. Αυτή περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$P_{inc} = P_{rad} + P_{refl} \quad (4.1.1)$$

όπου  $P_{inc}$ ,  $P_{rad}$  και  $P_{refl}$  είναι η προσπίπτουσα, η ακτινοβολούμενη και η ανακλώμενη ισχύς ανά μονάδα μήκους (ως προς  $z$ ) αντίστοιχα. Από τις σχέσεις ([13])

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (4.1.2)$$

και

$$P = Re \left\{ \oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma} \right\} \quad (4.1.3)$$

όπου  $\vec{S}$  είναι το μιγαδικό διάνυσμα Poynting,  $P$  είναι η πραγματική ισχύς που διασχίζει την (άπειρη ως προς  $z$ ) επιφάνεια  $\Sigma$ ,  $z^*$  είναι ο συζυγής μιγαδικός του  $z$  και  $Re\{z\}$  είναι το πραγματικό μέρος του  $z$ , έχουμε:

$$P_{inc} = \frac{a |\gamma_L^{(\ell+1)}|}{2(2 - \delta_{L0})\omega \varepsilon_{\ell+1}} \sum_{q=1}^S |H^{(q)}(\delta)|^2 \quad (4.1.4)$$

$$P_{refl} = \frac{a}{2\omega \varepsilon_{\ell+1}} \sum_{q=1}^S \sum_{m=0}^{N_{exc}} \frac{|\gamma_L^{(\ell+1)}|}{2 - \delta_{m0}} \left| \delta_{mL} R H^{(q)}(\delta) + T_m^{(p)} \right|^2 \quad (4.1.5)$$

όπου  $N_{exc} + 1$  είναι το πλήθος των διεγερόμενων ρυθμών. Προς αποφυγή συγχύσεως σημειώνουμε ότι το  $L$  αντιστοιχεί στον προσπίπτοντα ρυθμό,  $\delta$  είναι η διαφορά φάσης της διέγερσης μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων και  $\delta_{mn}$  το γνωστό δέλτα του Kronecker.

Για τον υπολογισμό της  $P_{rad}$  επιλέγουμε ως επιφάνεια ολοκλήρωσης τον άπειρο ως προς  $z$  ημικύλινδρο ακτίνας  $r \rightarrow \infty$ . Σύμφωνα με το [14], οι συνιστώσες του μακρινού πεδίου  $\vec{E}$  και  $\vec{H}$  είναι κάθετες μεταξύ τους και σχηματίζουν ένα πεδίο  $TEM^r$ . Ισχύει

$$\vec{E} = -\zeta_0 \hat{r} \times \vec{H} \quad (4.1.6)$$

Η ανά μονάδα μήκους ως προς  $z$  ακτινοβολούμενη ισχύς θα είναι

$$P_{rad} = \frac{\zeta_0}{2} \int_0^\pi r |H_{z,tot}(r, \varphi)|^2 d\varphi \quad (4.1.7)$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (3.3.6) μετά από μερικές πράξεις προκύπτει:

$$P_{rad} = \frac{\omega \varepsilon_0 W^2 \pi}{4L^2} \int_0^\pi \left| \sum_{q=1}^S \sum_{v=1}^L m_z^{(p)}(t_v) e^{j(\omega t_v + c_q) \cos \varphi} \right|^2 d\varphi \quad (4.1.8)$$

( $L$  είναι η τάξη του κανόνα Gauss - Chebyshev που καθορίζει την τάξη  $S \cdot L \times S \cdot L$  του συστήματος).

Στους Πίνακες 4.1 και 4.2 παρουσιάζουμε αποτελέσματα για διαφορετικές παραμέτρους της διάταξης, στα οποία επιβεβαιώνεται η αρχή διατήρησης της ισχύος με ακρίβεια 14 σημαντικών ψηφίων. Σημειώνουμε ότι η διατήρηση της ισχύος είναι συνθήκη αναγκαία, αλλά όχι ικανή να μας εξασφαλίσει την ορθότητα των αποτελεσμάτων

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1:  $N = 13, TM_{00}, \theta_{sc} = 0, a = 0.2\lambda, d = 0.4\lambda, w = 0.3a, \ell = 0, H_0^{(p)} = 1 \forall p = 1, 2, \dots, S$

$L$	$P_{rad}/P_{inc}$	$P_{refl}/P_{inc}$	$(P_{rad} + P_{refl})/P_{inc}$
16	0,82016725455259	0,17983274544741	1,00000000000000

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2:  $N = 13, TM_{00}, \theta_{sc} = \pi/3, a = 0.2\lambda, d = 0.4\lambda, w = 0.3a, \ell = 1, \varepsilon_1 = 2\varepsilon_0, |h_1| = 0.3\lambda, H_0^{(p)} = 1 \forall p = 1, 2, \dots, S$

$L$	$P_{rad}/P_{inc}$	$P_{refl}/P_{inc}$	$(P_{rad} + P_{refl})/P_{inc}$
16	0,929949158781404	0,0700508412185960	1,00000000000000

## ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

Ένα ακόμα κριτήριο για την ορθότητα της μεθόδου είναι η ισότητα των διαγραμμάτων λήψης και εκπομπής, όπως προκύπτει από το θεώρημα της αμοιβαιότητας. Αν:

- Στην περίπτωση της εκπομπής διέγερση είναι αυτή που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2 και το μακρινό πεδίο έχει τη μορφή



$$H_z(r, \varphi) = \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} F(\varphi) \quad (4.1.9)$$

- Στην περίπτωση της λήψης διέγερση είναι ένα επίπεδο  $TM^y$  κύμα πλάτους  $H_{rec}$  που προσπίπτει υπό γωνία  $\varphi_{inc}$  με τον άξονα  $x$  και  $T_L^{(p)}$  είναι ο συντελεστής μετάδοσης του ρυθμού  $TM_{L0}$  στον  $p$ -οστό κυματοδηγό

τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$(1 + \delta_{L0}) \sum_{p=1}^S H^{(p)}(\delta) T_L^{(p)} = j H_{rec} \frac{\varepsilon_{\ell+1}}{\varepsilon_0} \frac{4}{\alpha \gamma_L^{(\ell+1)}} F(\varphi_{inc}) \quad (4.1.10)$$

Η απόδειξη του παραπάνω τύπου δίνεται στο Παράρτημα II.

Βλέπουμε λοιπόν στον Πίνακα 4.3 ότι το παραπάνω κριτήριο ικανοποιείται για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων της διάταξης με ακρίβεια τουλάχιστον 14 δεκαδικών ψηφίων

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3: Έλεγχος Ισοτιμίας Διαγραμμάτων Εκπομπής και Λήψης

	Αριστερό μέλος της (4.1.10)	Δεξί μέλος της (4.1.10)
I	5,92329150935102 + 13,8161577701759j	5,92329150935102 + 13,8161577701759j
II	-0,938128843483190 - 0,614273893867535j	-0,938128843483190 - 0,614273893867535j
III	-0,660787480008743 + 2,47297640262716j	-0,660787480008746 + 2,47297640262719j
IV	33,9492468285049 - 4,14230177051364i	33,9492468285049 - 4,14230177051364i

όπου

$$\text{I: } TM_{00}, S = 7, a = 0.4\lambda, \ell = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0, \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, w = 0.3a, d = 1.2a, |h_1| = 0.5a, |h_2| = 1.2a, \theta_{sc} = 0, \varphi_{inc} = \pi/2$$

$$\text{II: } TM_{00}, S = 7, a = 0.4\lambda, \ell = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0, \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, w = 0.3a, d = 1.2a, |h_1| = 0.5a, |h_2| = 1.2a, \theta_{sc} = 0, \varphi_{inc} = 0$$

$$\text{III: } TM_{00}, S = 25, a = 0.4\lambda, \ell = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0, \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, w = 0.3a, d = 1.2a, |h_1| = 0.5a, |h_2| = 1.2a, \theta_{sc} = \pi/3, \varphi_{inc} = \pi/4$$

$$\text{IV: } TM_{00}, S = 13, a = 0.2\lambda, \ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, w = 0.5a, d = 2a, \theta_{sc} = 0, \varphi_{inc} = \pi/2$$

## ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Θα εξετάσουμε τώρα τη σύγκλιση της μεθόδου που αναπτύξαμε ως προς την τάξη  $L$  του συστήματος. Στον Πίνακα 4.4 υπολογίζουμε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου ή αλλιώς του μαγνητικού ρεύματος στο κέντρο του κεντρικού στοιχείου κεραίας αποτελούμενης από 7 κυματοδηγούς. Ελέγχουμε τη σύγκλιση για  $k = 3$  (υπενθυμίζουμε ότι το  $k$  είναι η τάξη της επιτάχυνσης της σειράς στην ολοκληρωτική εξίσωση)

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.4: ΈΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ  $\theta_{sc} = 0$ ,  $a = 0.4\lambda$ ,  $d = 1.2a$ ,  $w = 0.3a$ ,  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $H_0^{(p)} = 1 \forall p = 1, 2, \dots, S$

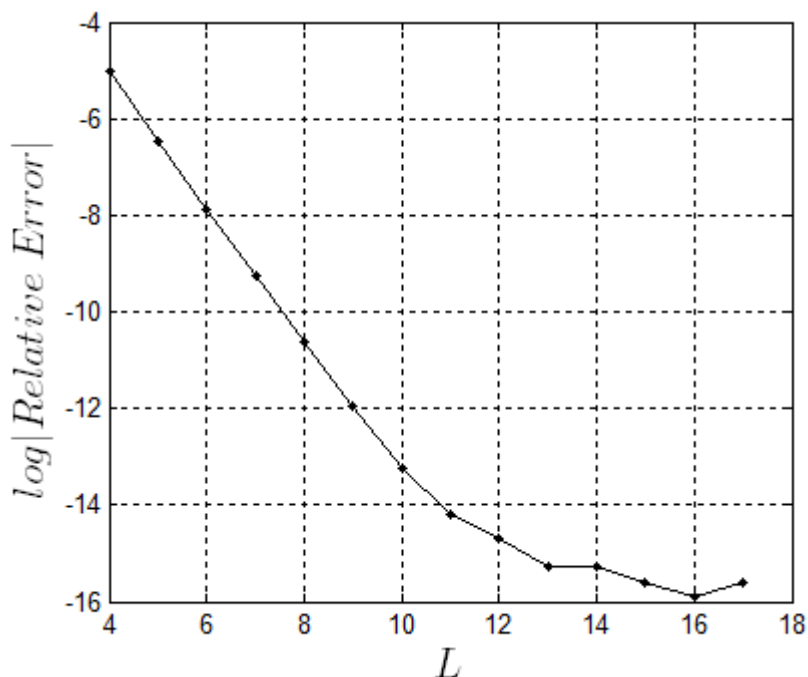
L	$ M_z^{(4)}(0)  \cdot 10^{-3}$
4	0,4804863047
6	0,4793223420
8	0,4793582932
12	0,4793569851
16	0,4793569827
24	0,4793569824

Για να εκτιμήσουμε καλύτερα την ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου, ορίζουμε

$$\|M_z(L)\| = \sqrt{\sum_{N=0}^{L-1} |a_N|^2} \quad (4.1.11)$$

όπου οι  $a_N$  ορίζονται από την (3.2.16). Στο Σχήμα 11 δείχνουμε, σαν συνάρτηση του  $L$ , το σχετικό σφάλμα

$$\text{Σχετικό σφάλμα} = \frac{\| \|M_z^{exact}\| - \|M_z\| \|}{\|M_z^{exact}\|} \quad (4.1.12)$$



ΣΧΗΜΑ 11: ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ( $S = 7$ ,  $a = 0.4\lambda$ ,  $w = 0.3a$ ,  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $d = 1.2a$ ,  $\theta_{sc} = 0$ )

( $\|M_z^{exact}\|$  είναι η τιμή στην οποία καταλήγει η (4.1.11) για κατάλληλα μεγάλα  $L$ )

Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, ο αλγόριθμος συγκλίνει εκθετικά και για  $L \geq 13$  το σφάλμα είναι μικρότερο του  $10^{-15}$ .

Προτού προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα, θα ελέγξουμε την ορθότητα, αλλά και τη σύγκλιση της μεθόδου, κάνοντας συγκρίσεις με αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην [1]. Για  $S = 1$  και για  $\alpha/\lambda = 0.4, w/a = 0.3, \ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0$  υπολογίζουμε τον συντελεστή ανάκλασης για τον ρυθμό  $TM_{00}$  για διάφορες τιμές του  $L$ . Τα αποτελέσματά μας, καθώς και αυτά της [1], φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

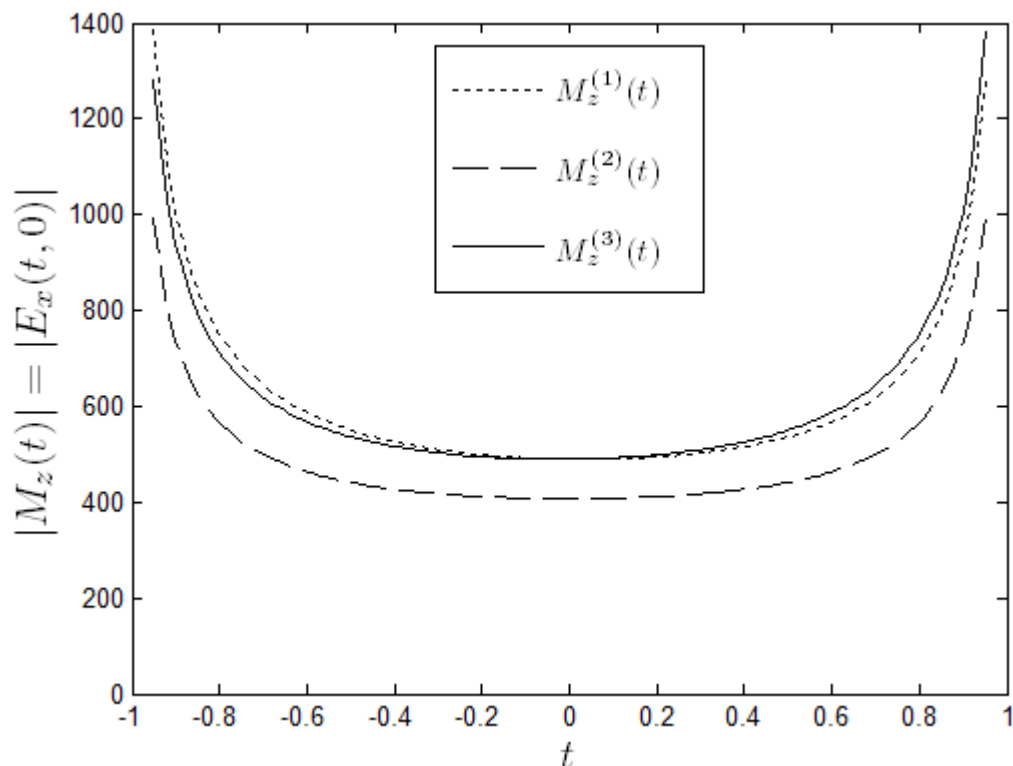
ΠΙΝΑΚΑΣ 4.5: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ [1]

$L$	$ R $	$\angle R$ (°)
2	0,413394557105	119,76740047119
4	0,414059824873	120,04165315180
6	0,414059621358	120,04173933835
8	0,414059620748	120,04173938802
16	0,414059620747	120,04173938808
[1]	0,4140596	120,0417394

#### 4.2 ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΡΕΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε αποτελέσματα για τα μαγνητικά ρεύματα (ή ισοδύναμα την  $E_x$  συνιστώσα του πεδίου) πάνω στις σχισμές. Επίσης, θα μελετήσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας και πώς αυτό μεταβάλλεται όταν αλλάζουμε τις φυσικές ή/και τις ηλεκτρικές παραμέτρους της κεραίας.

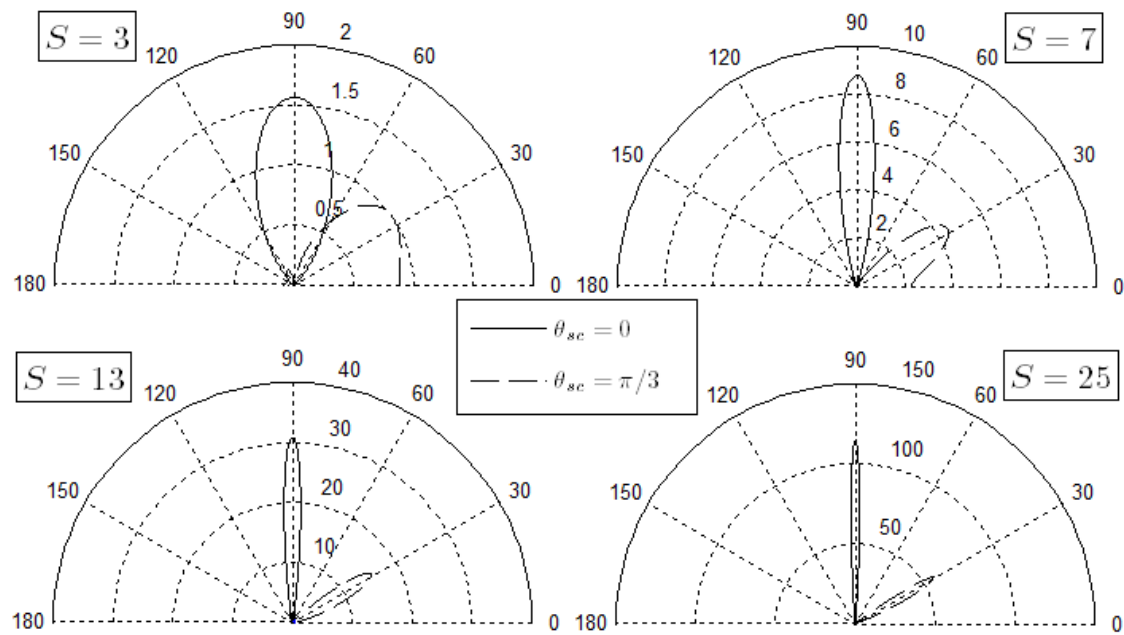
Η απεικόνιση των μαγνητικών ρευμάτων είναι ενδιαφέρουσα καθώς μας παρέχει εποπτεία του κοντινού πεδίου της διάταξης. Για στοιχειοκεραία τριών κυματοδηγών ( $S = 3$ ) με παραμέτρους  $\alpha = 0.2\lambda$ ,  $w = 0.3a$ ,  $d = 1.2a$ ,  $\ell = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ ,  $\theta_{sc} = 0$  παρουσιάζουμε στο Σχήμα 12 τα μαγνητικά ρεύματα πάνω στις σχισμές. Παρατηρούμε ότι, όπως υπαγορεύει η γεωμετρία του προβλήματος, το ηλεκτρικό πεδίο είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα  $y$ .



ΣΧΗΜΑ 12: ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΡΕΥΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΣΧΙΣΜΕΣ

Συνεχίζουμε με τα αποτελέσματα για το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας. Αρχικά, δείχνουμε στο Σχήμα 13 πως μεταβάλλεται το εύρος του κύριου λοβού καθώς αυξάνεται το πλήθος των στοιχείων

Είναι εμφανές από αυτά τα διαγράμματα ότι το εύρος του κύριου λοβού μειώνεται καθώς αυξάνεται το πλήθος των στοιχείων, ενώ παράλληλα αυξάνεται η (μέγιστη) κατευθυντικότητα της κεραίας. Δείχνουμε τα παραπάνω και αριθμητικά στον Πίνακα 4.6, όπου υπολογίζουμε το εύρος δέσμης μισής ισχύος *HPBW* και την κατευθυντικότητα  $D_{max}$ .



ΣΧΗΜΑ 13: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

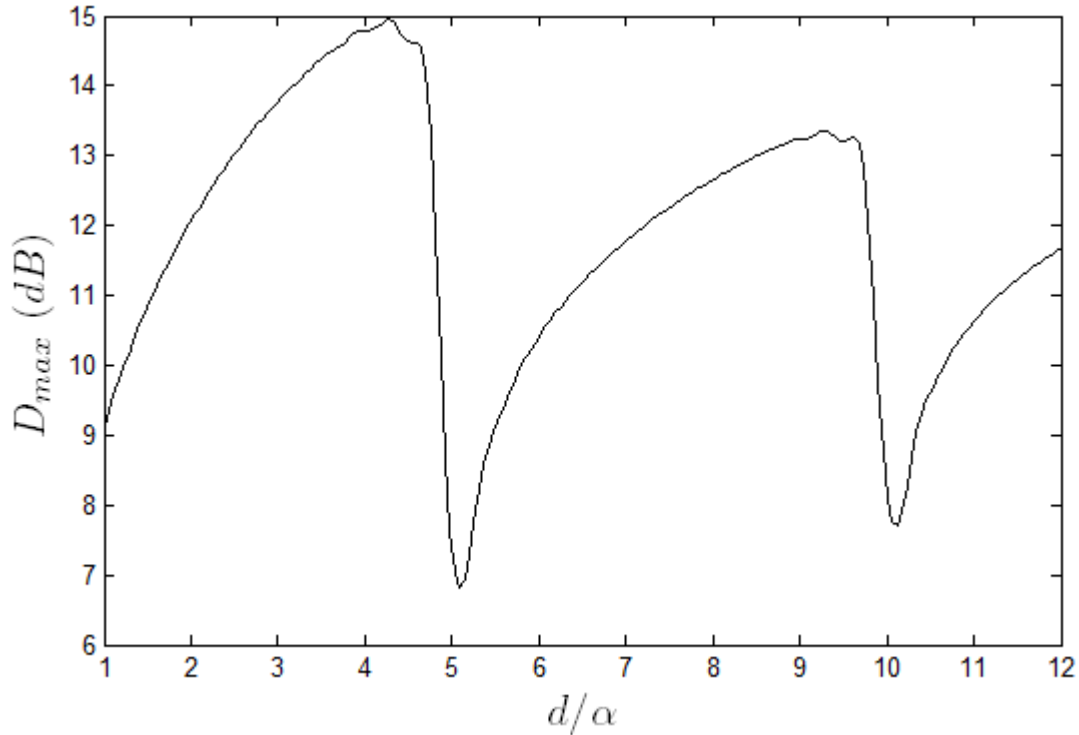
$$(\alpha = 0.2\lambda, d = 0.4\lambda, \ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, w = 0.3\alpha, H_0^{(p)} = 1 \forall p = 1, 2, \dots, S)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.6:  $HPBW$  ΚΑΙ  $D_{max}$  ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΣΕΙΡΑΣ

$S$	$HPBW$ ( $^\circ$ )		$D_{max}$	
	$\theta_{sc} = 0$	$\theta_{sc} = \pi/3$	$\theta_{sc} = 0$	$\theta_{sc} = \pi/3$
<b>3</b>	46.4	—	3.62	2.65
<b>7</b>	18.6	53.4	8.51	4.56
<b>13</b>	9.8	21.8	16.09	8.18
<b>25</b>	5.0	11.0	31.16	15.75

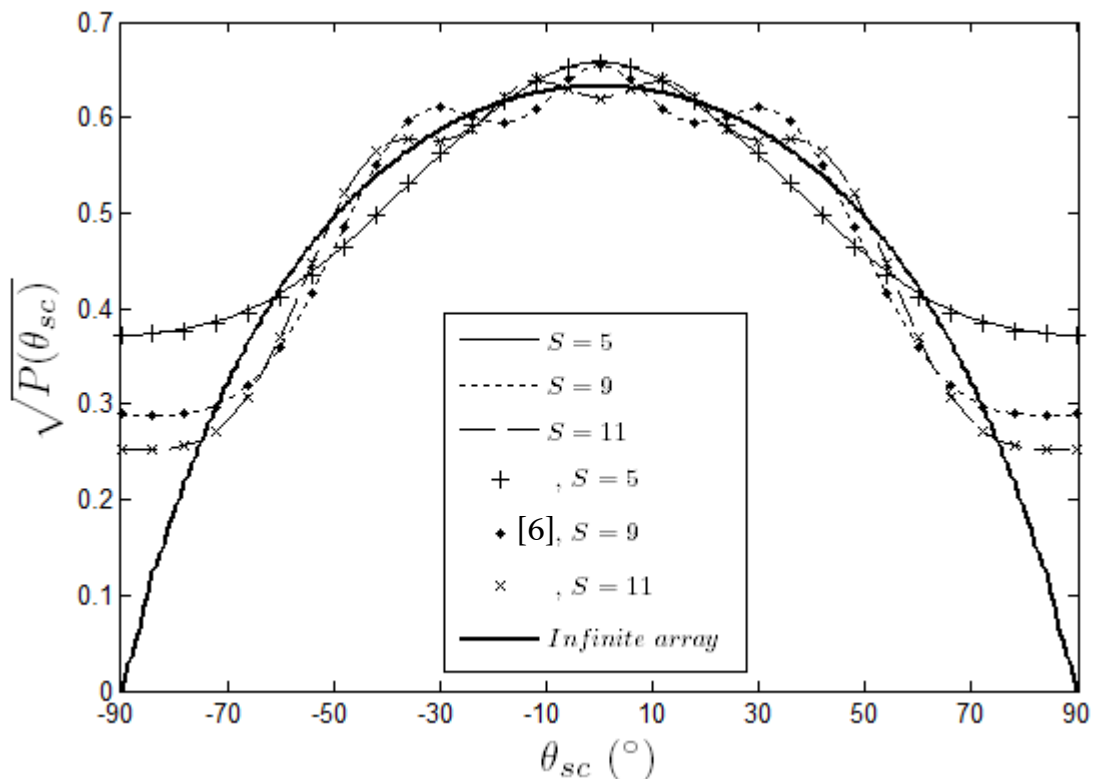
Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ικανότητα μας να εστιάζουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας σε μια συγκεκριμένη γωνία δεν είναι ίδια για όλες τις γωνίες. Αυτό φαίνεται πιο χαρακτηριστικά για τη γωνία  $\theta_{sc} = \pi/2$  όπου ο κύριος λοβός δεν μπορεί να γίνει τόσο στενός όσο στις παραπάνω περιπτώσεις ακόμα και για μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων (π.χ.  $S = 51$ ).

Στο Σχήμα 14 φαίνεται η σημαντική επίδραση που έχει η απόσταση μεταξύ των στοιχείων στο διάγραμμα ακτινοβολίας. Όσο αυξάνεται η απόσταση αυτή, τόσο “καλύτερο” γίνεται το διάγραμμα, δηλαδή στενεύει ο κύριος λοβός και αυξάνεται η κατευθυντικότητα. Από κάποιο σημείο και πέρα, όμως, η αύξηση του  $d$  προκαλεί την εμφάνιση ισχυρών δευτερευόντων λοβών (grating lobes) γιατί πλέον τα κύματα από το κάθε στοιχείο συμβάλλουν θετικά και στις γωνίες εμφάνισης αυτών των λοβών. Στο σχήμα απεικονίζεται καθαρά η απότομη πτώση της κατευθυντικότητας λόγω της εμφάνισης των ισχυρών δευτερευόντων λοβών.



ΣΧΗΜΑ 14: ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ  
 $\alpha = 0.2\lambda, \ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, w = 0.3\alpha, \theta_{sc} = 0, H_0^{(p)} = 1 \forall p = 1, 2, \dots, S$

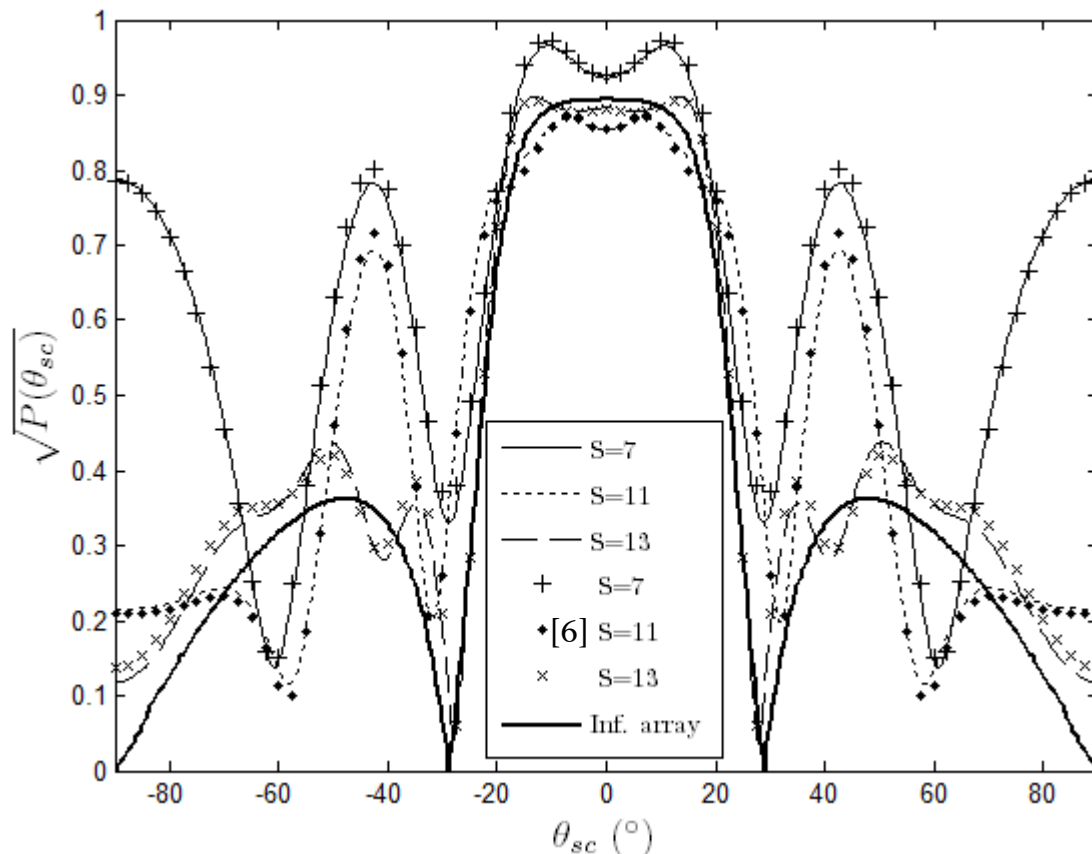
Τέλος, για περαιτέρω επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων μας, υπολογίζουμε το διάγραμμα της ισχύος που ακτινοβολείται από το κεντρικό στοιχείο συναρτήσει της γωνίας σάρωσης  $\theta_{sc}$ , όπως στην [6]. Κάθε στοιχείο τροφοδοτείται με μοναδιαία ισχύ.



ΣΧΗΜΑ 15: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΑΡΩΣΗΣ ( $\alpha/\lambda = 0.4, d/\lambda = 0.4, w/a = 0.5, \ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0$ )

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 15, τα αποτελέσματα βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με την [6].

Στο Σχήμα 16 εξετάζουμε την επίδραση που έχει στο διάγραμμα ακτινοβολίας του κεντρικού στοιχείου η εισαγωγή διηλεκτρικού φορτίου στους κυματοδηγούς.



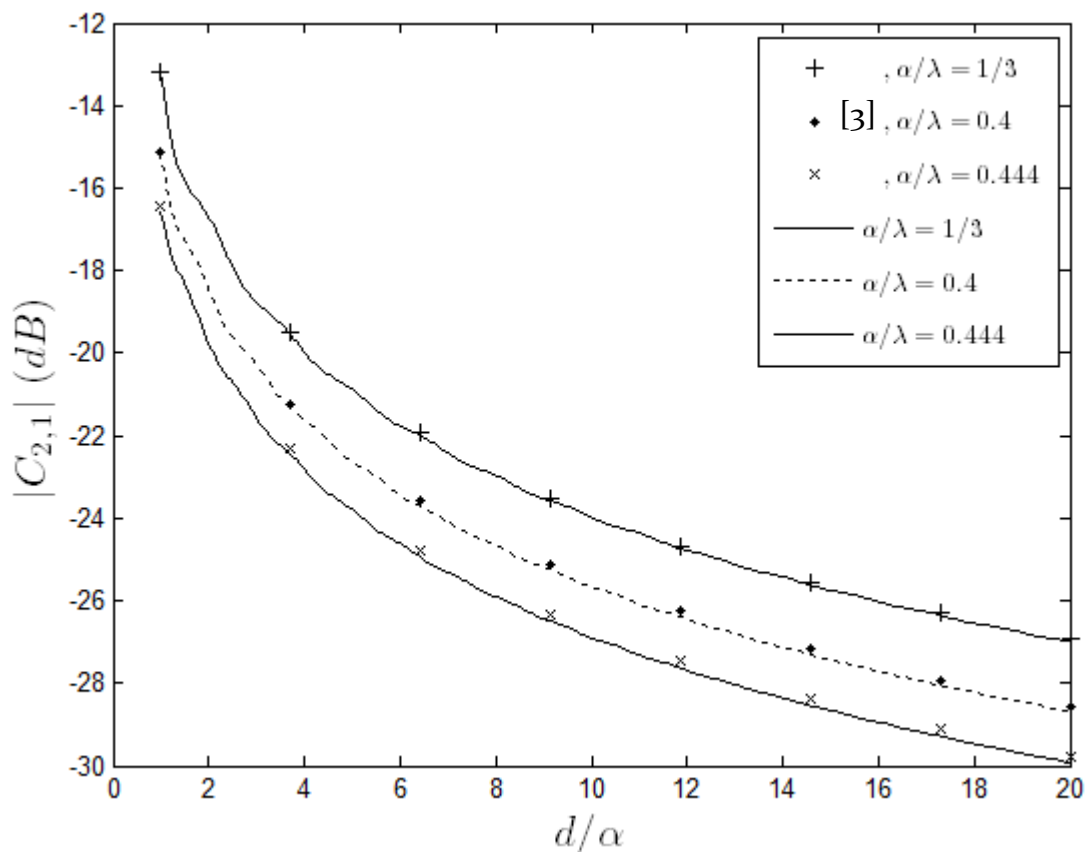
ΣΧΗΜΑ 16: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΑΡΩΣΗΣ ( $\alpha/\lambda = 0.4, d/\lambda = 0.4, w/a = 0.5, \ell = 1, \epsilon_1 = 4\epsilon_0, |h_1| = 0.6375a, \epsilon_2 = \epsilon_0$ )

Για την άπειρη στοιχειοκεραία ( $S \rightarrow \infty$ ) προβλέπεται η ύπαρξη μηδενικού για  $\theta_{sc} = 29^\circ$ . Κοντά σε αυτή τη γωνία σάρωσης παρουσιάζουν και οι πεπερασμένες στοιχειοσειρές τοπικό ελάχιστο. Παρατηρούμε ότι, όπως άλλωστε αναμέναμε, όσο αυξάνεται το πλήθος των στοιχείων της κεραίας τόσο περισσότερο το διάγραμμα προσεγγίζει αυτό της άπειρης στοιχειοσειράς.

### 4.3 ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

Η σύζευξη είναι ένα πολύ σημαντικό μέγεθος και έχει μελετηθεί εκτενώς σε πλήθος εργασιών (π.χ. [3], [6]). Ορίζουμε ως συντελεστή σύζευξης  $C_{p,q}$  την τάση που επάγεται στη σχισμή του  $p$ -οστού κυματοδηγού όταν διεγείρεται μόνο ο  $q$ -οστός κυματοδηγός με μοναδιαία τάση.

Αρχικά μελετούμε την περίπτωση δυο κυματοδηγών χωρίς διηλεκτρικό φορτίο. Παρατηρούμε ότι η σύζευξη μειώνεται καθώς αυξάνεται ο λόγος  $a/\lambda$ . Επιπλέον, η σύζευξη ελαττώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση  $d$  των στοιχείων και, μάλιστα, για μεγάλες αποστάσεις η μείωση είναι ανάλογη του  $\sqrt{d}$ .

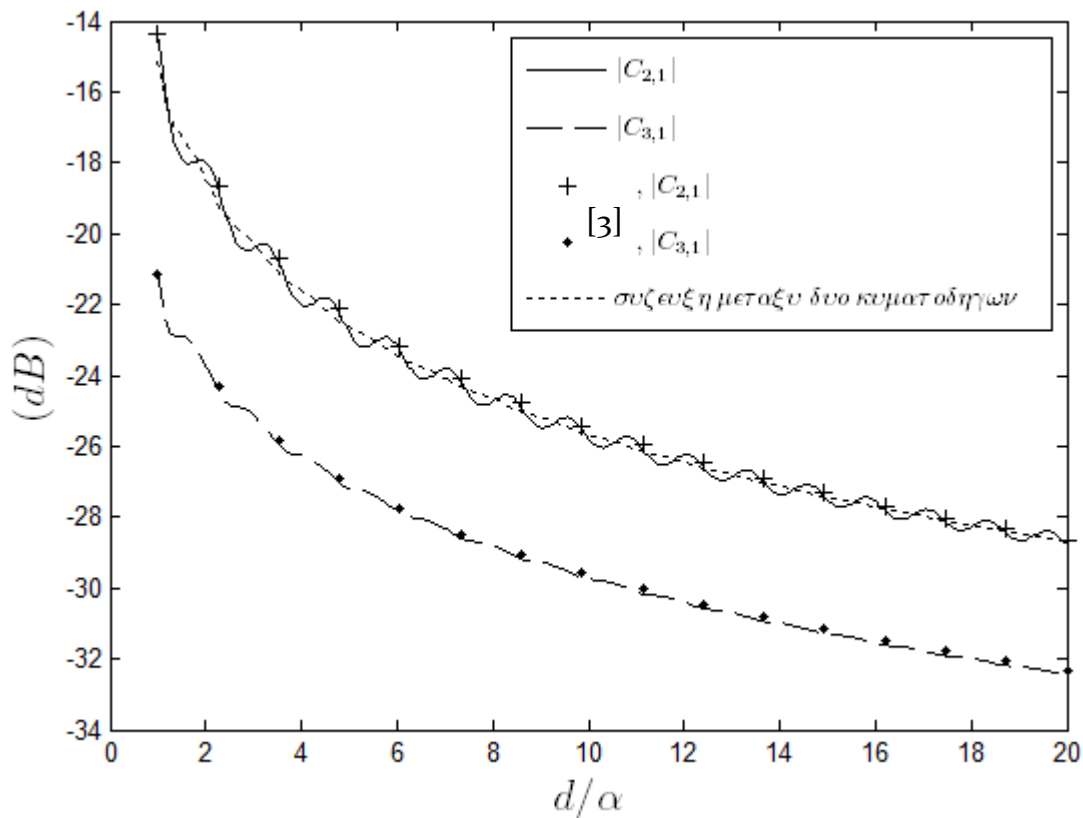


ΣΧΗΜΑ 17: ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥΣ ( $\ell = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, w = 0.5a$ )

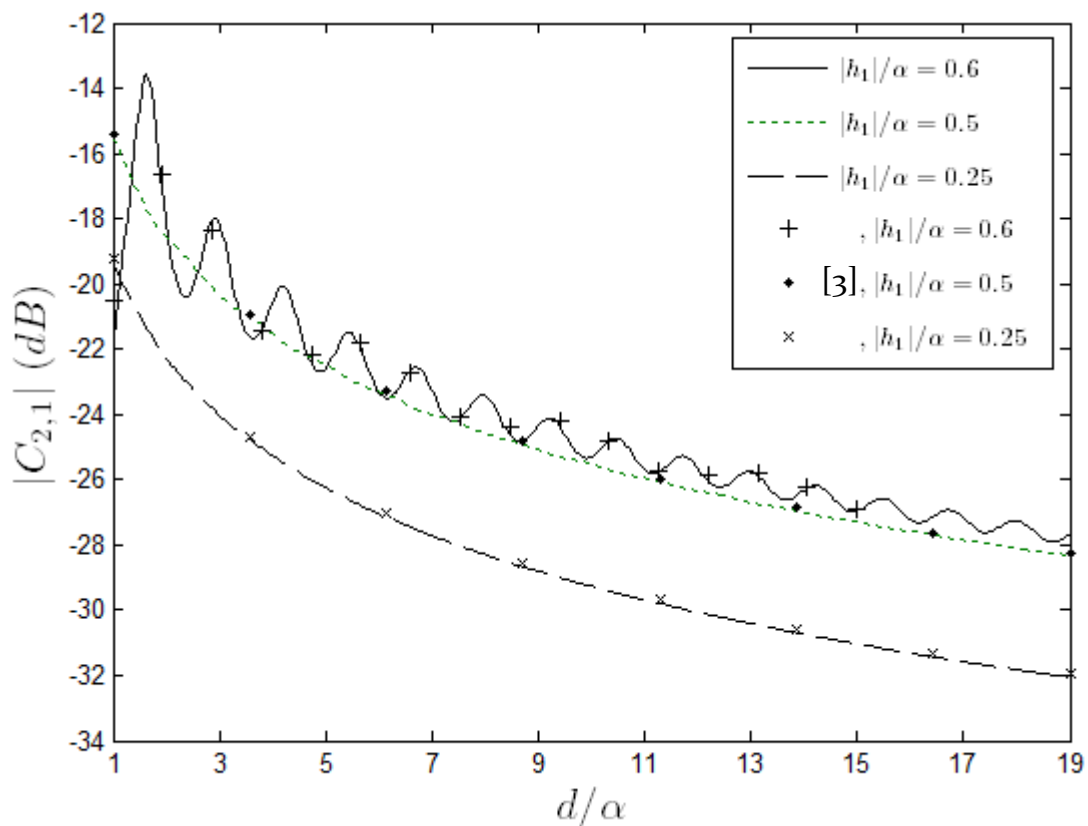
Στη συνέχεια, στο Σχήμα 18, παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την περίπτωση τριών κυματοδηγών, όπου διεγείρεται ένας από τους ακριανούς. Παρατηρείται μια ταλαντωτική συμπεριφορά του συντελεστή σύζευξης  $|C_{2,1}|$ , η οποία οφείλεται στην παρουσία του άλλου ακριανού στοιχείου. Επίσης, υπάρχει μείωση της σύζευξης μεταξύ των δύο ακριανών στοιχείων σε σχέση με την περίπτωση που το ενδιάμεσο στοιχείο απουσιάζει.

Εξετάζουμε τώρα την επίδραση που έχει στη σύζευξη η εισαγωγή διηλεκτρικού στρώματος στο εσωτερικό των κυματοδηγών (από  $h_0 = 0$  μέχρι  $h_1$ ). Στο Σχήμα 19 φαίνεται η σύζευξη μεταξύ δυο κυματοδηγών πλάτους  $a = 0.4\lambda$ , με ένα στρώμα διηλεκτρικού σταθεράς  $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$ , συναρτήσε της απόστασής τους, για διάφορες τιμές του πάχους του διηλεκτρικού στρώματος. Οι υπόλοιπες παράμετροι της κεραίας παραμένουν ίδιες με τις προηγούμενες περιπτώσεις. Η επιλογή αυτή των παραμέτρων έχει ως αποτέλεσμα τη διέγερση στην περιοχή του διηλεκτρικού δύο ρυθμών. Ο ρυθμός  $TM_{10}$ , όμως, δεν μπορεί να μεταδοθεί στην περιοχή εντός του κυματοδηγού που περιέχει αέρα και γι' αυτό ανακλάται και ακτινοβολείται ξανά. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της επίδρασης του διηλεκτρικού φορτίου. Βλέπουμε, λοιπόν, στο Σχήμα 19 ότι εισάγοντας στρώματα διηλεκτρικού μπορούμε να αυξήσουμε ή να ελαττώσουμε τη σύζευξη μεταξύ των στοιχείων, επιλέγοντας κατάλληλα τις παραμέτρους του διηλεκτρικού. Μάλιστα, όπως δείχνει η καμπύλη για  $|h_1|/a = 0.6$  υπάρχει μια περιοχή τιμών των παραμέτρων για τις οποίες η σύζευξη παρουσιάζει έντονα ταλαντωτική συμπεριφορά.





ΣΧΗΜΑ 18: ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ  $d/\alpha$  ( $\ell = 0, \epsilon_1 = \epsilon_0, w = 0.5\alpha$ )

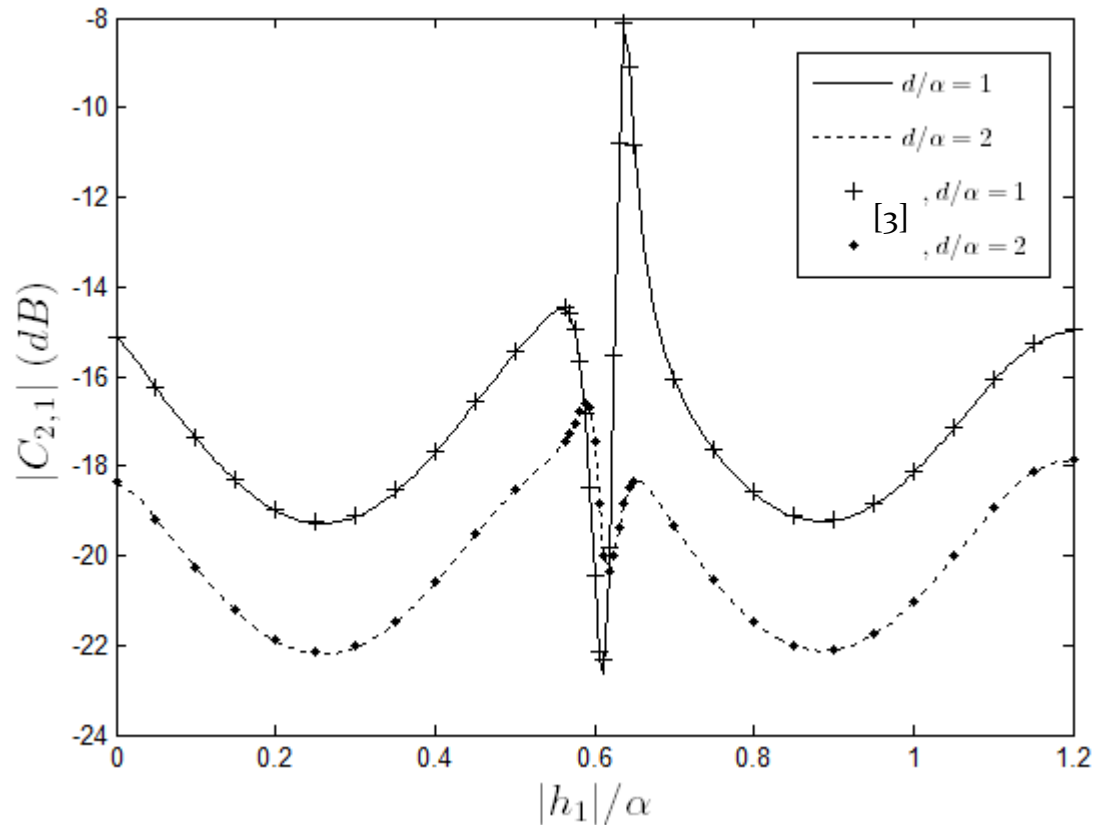


ΣΧΗΜΑ 19: ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥΣ ( $\ell = 1, \epsilon_1 = 4\epsilon_0, \epsilon_2 = \epsilon_0, w = 0.5\alpha$ )

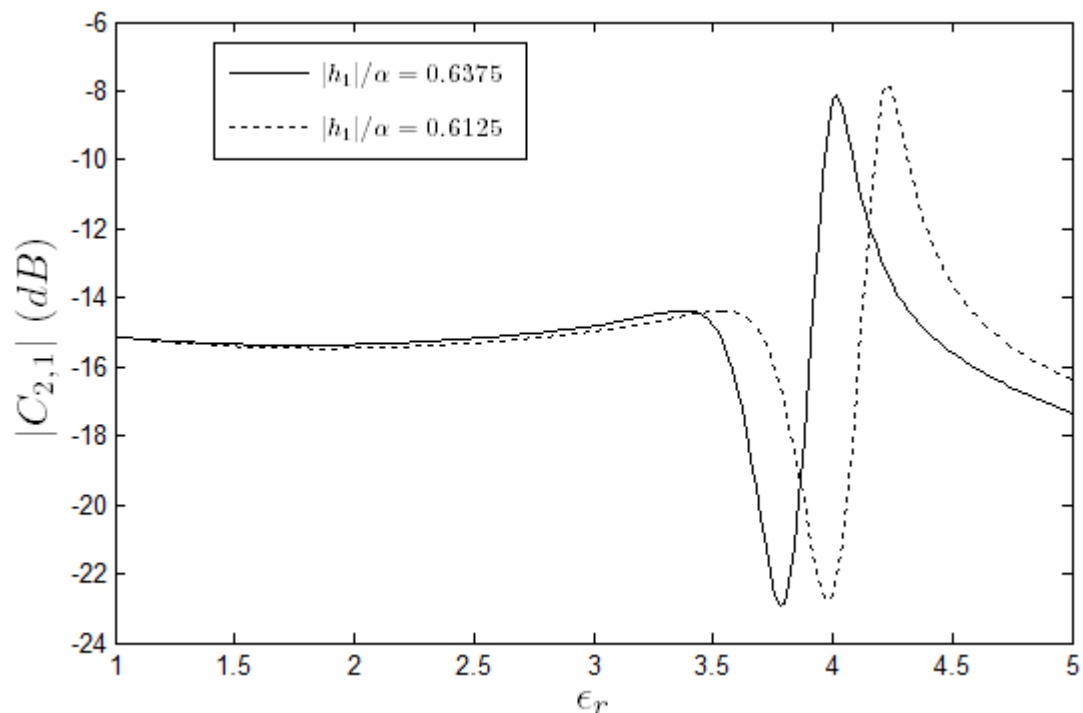
Για να διερευνήσουμε περαιτέρω την επίδραση του διηλεκτρικού στρώματος, στα Σχήματα 20 και 21 υπολογίζεται η σύζευξη συναρτήσεως του πάχους του διηλεκτρικού στρώματος  $|h_1|$  και της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\epsilon_r = \epsilon_1/\epsilon_0$ .

Στο Σχήμα 20 φαίνεται η μεταβολή της σύζευξης των δύο στοιχείων συναρτήσεως του  $|h_1|/\alpha$ . Παρατηρούμε ότι η μεταβολή έχει τη μορφή στάσιμου κύματος, με εξαίρεση μια μικρή περιοχή. Στην περιοχή αυτή υπάρχουν έντονες μεταβολές της σύζευξης για πολύ μικρές μεταβολές του πάχους του διηλεκτρικού. Πιο συγκεκριμένα, όταν  $d = a$  για  $|h_1|/\alpha = 0.6125$  ο συντελεστής σύζευξης είναι  $-22.29 \text{ dB}$ , ενώ για  $|h_1|/\alpha = 0.6375$  είναι  $-8.1 \text{ dB}$ . Όσο μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των στοιχείων το φαινόμενο αυτό γίνεται λιγότερο έντονο.

Στο Σχήμα 21 εξετάζουμε τη μεταβολή της σύζευξης συναρτήσεως του  $\epsilon_r$  για  $|h_1|/\alpha = 0.6375$ , δηλαδή για το πάχος διηλεκτρικού για το οποίο διαπιστώσαμε ότι μεγιστοποιείται η σύζευξη στην προηγούμενη περίπτωση. Η σύζευξη παραμένει σχεδόν αμετάβλητη για ένα μεγάλο εύρος τιμών της διηλεκτρικής σταθεράς, ενώ και πάλι μεταβάλλεται έντονα σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Φυσικά, η περιοχή αυτή αλλάζει όταν αλλάζουν οι άλλες παράμετροι της διάταξης.

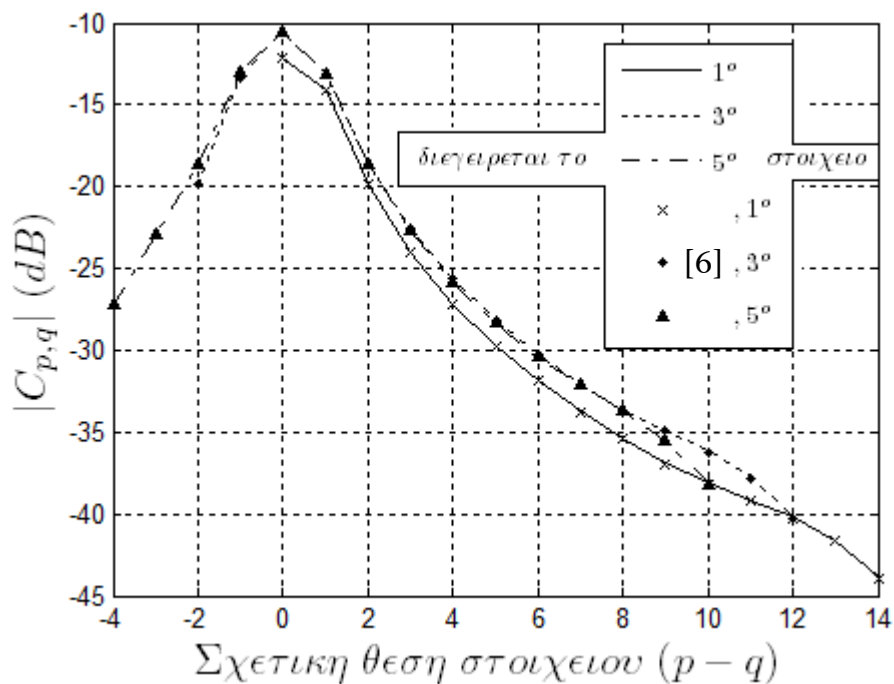


ΣΧΗΜΑ 20: ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ( $\alpha = 0.4\lambda$ ,  $\ell = 1$ ,  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $w = 0.5\alpha$ )



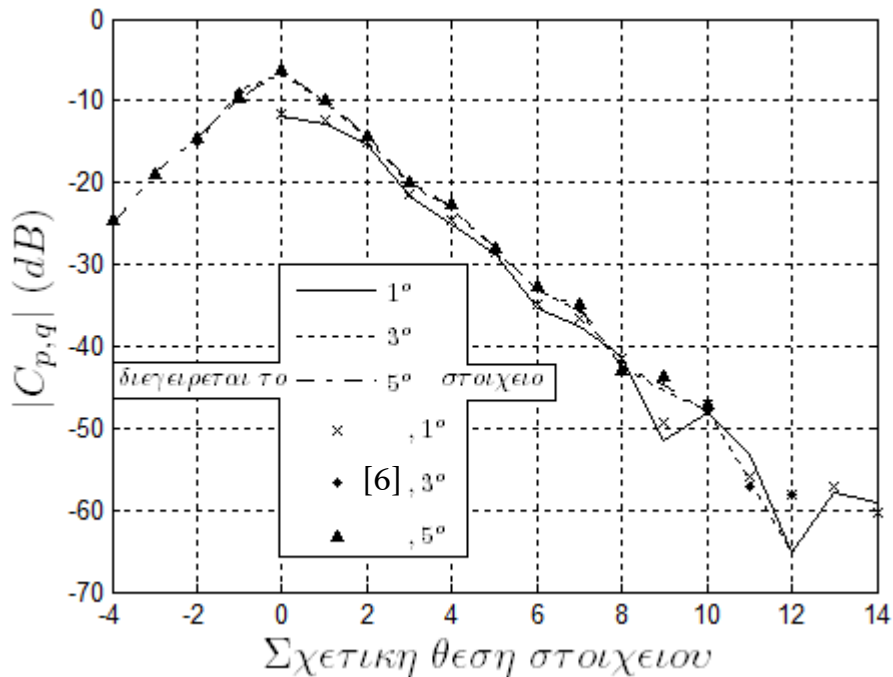
ΣΧΗΜΑ 21: ΣΥΖΕΥΞΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΜΕ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ( $\alpha = 0.4\lambda, d = 0.4\lambda, \ell = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_0, w = 0.5\alpha$ )

Στο Σχήμα 22 παρουσιάζουμε τη σύζευξη σε μια στοιχειοκεραία 15 στοιχείων χωρίς διηλεκτρικό φορτίο. Η σύζευξη μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση του εξεταζόμενου στοιχείου από το διεγυρόμενο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η σύζευξη επηρεάζεται κυρίως από τη σχετική θέση του στοιχείου και όχι τόσο από την θέση του στοιχείου στην κεραία.



ΣΧΗΜΑ 22: ΣΥΖΕΥΞΗ ΣΕ ΜΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΑ 15 ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΧΩΡΙΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ( $\alpha = 0.4\lambda, d = 0.4\lambda, \ell = 0, w = 0.5\alpha$ )

Στη συνέχεια, στο Σχήμα 23 εξετάζουμε και πάλι την επίδραση που έχει στη σύζευξη η εισαγωγή διηλεκτρικού φορτίου. Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι η σύζευξη δεν μειώνεται πάντα με την αύξηση της απόστασης των στοιχείων

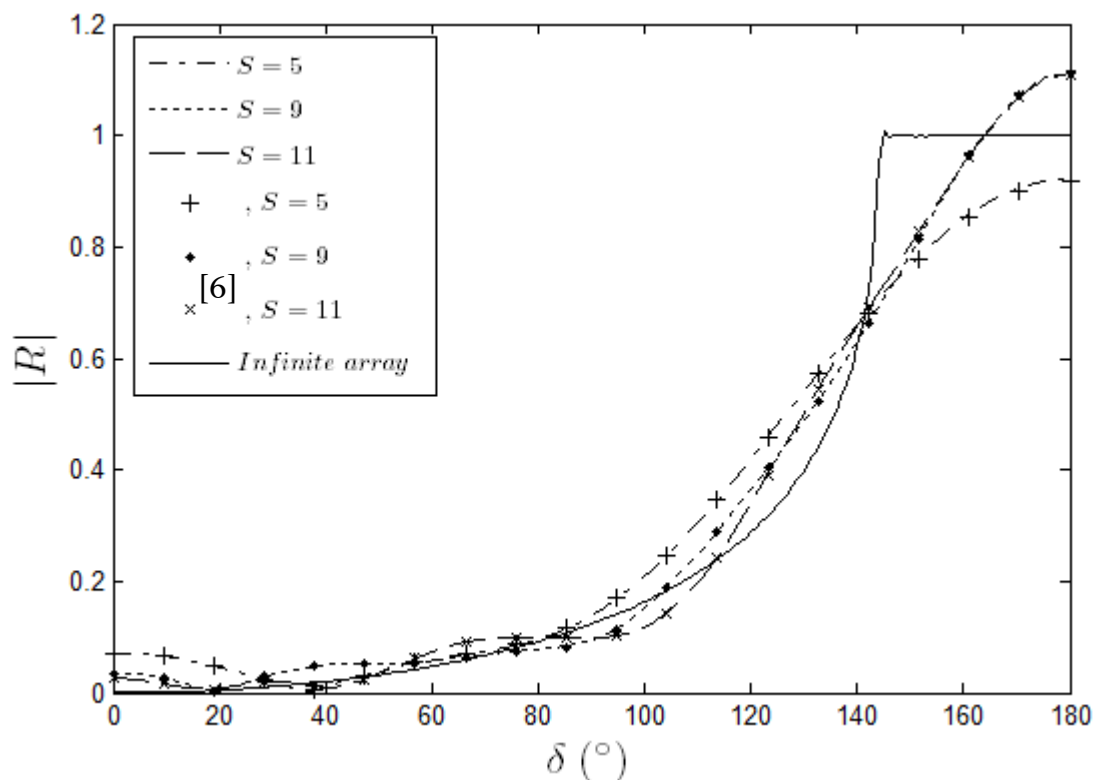


ΣΧΗΜΑ 23: ΣΥΖΕΥΞΗ ΣΕ ΜΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΑ 15 ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΧΩΡΙΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ( $\alpha = 0.4\lambda$ ,  $d = 0.4\lambda$ ,  $\ell = 1$ ,  $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ ,  $|h_1| = 0.6245a$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $w = 0.5a$ )

#### 4.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

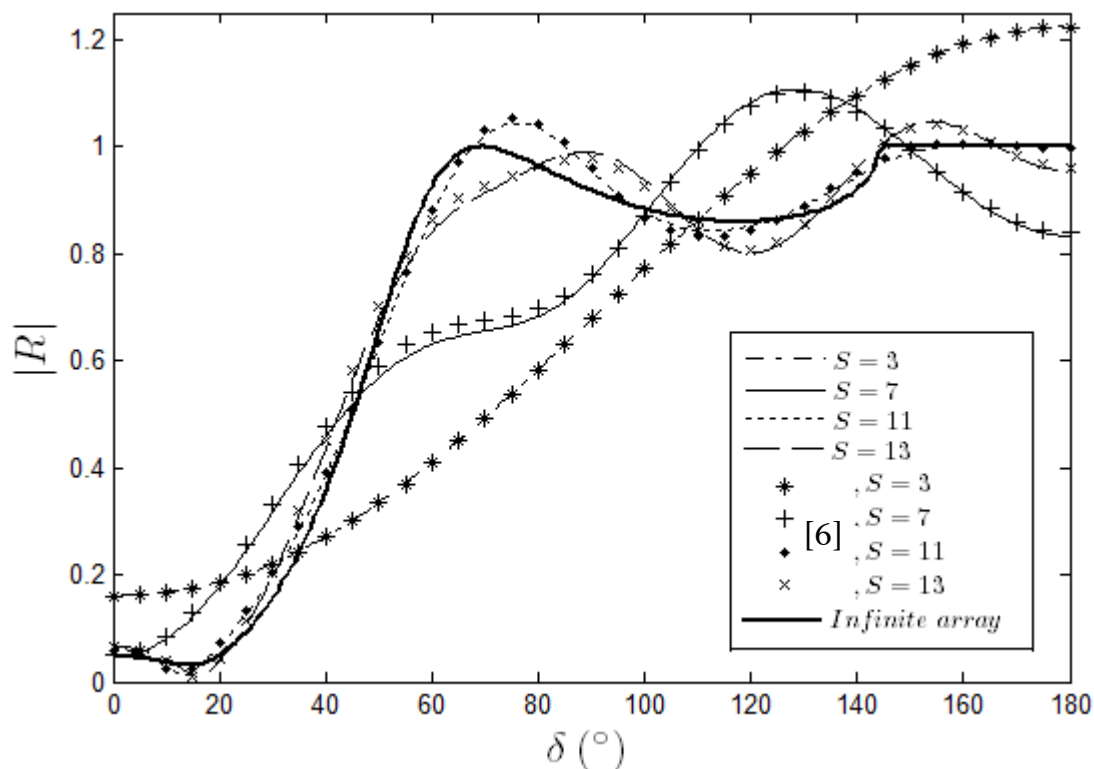
Ο συντελεστής ανάκλασης σε ένα κυματοδηγό ορίζεται ως ο λόγος της ανακλώμενης τάσης στον κυματοδηγό προς την προσπίπτουσα. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πώς μεταβάλλονται οι συντελεστές ανάκλασης με την αλλαγή της γωνίας σάρωσης, αλλά και με την παρουσία διηλεκτρικού στρώματος.

Αρχικά, στο Σχήμα 24 εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται ο συντελεστής ανάκλασης του κεντρικού στοιχείου συναρτήσει του  $\delta$ . Φαίνεται ότι σε αντίθεση με τις άπειρες ( $S \rightarrow \infty$ ) στοιχειοσειρές, για τις οποίες προβλέπεται ολική ανάκλαση της ισχύος για  $\delta > 144^\circ \Leftrightarrow \theta_{sc} > 90^\circ$ , οι πεπερασμένες στοιχειοσειρές ακτινοβολούν για αυτές τις τιμές του  $\delta$ . Παρατηρούμε, ακόμα, ότι το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης για κάποιες τιμές του  $\delta$  λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μέρος της ανακλώμενης ισχύος προσδίδεται από τα άλλα στοιχεία της διάταξης.



ΣΧΗΜΑ 24: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ  $\delta$  ( $\alpha/\lambda = 0.4, d/\lambda = 0.4, w/a = 0.5, \ell = 0, \epsilon_1 = \epsilon_0$ )

Εξετάζουμε τώρα, στο Σχήμα 25, την επίδραση της εισαγωγής διηλεκτρικού φορτίου στους κυματοδηγούς.

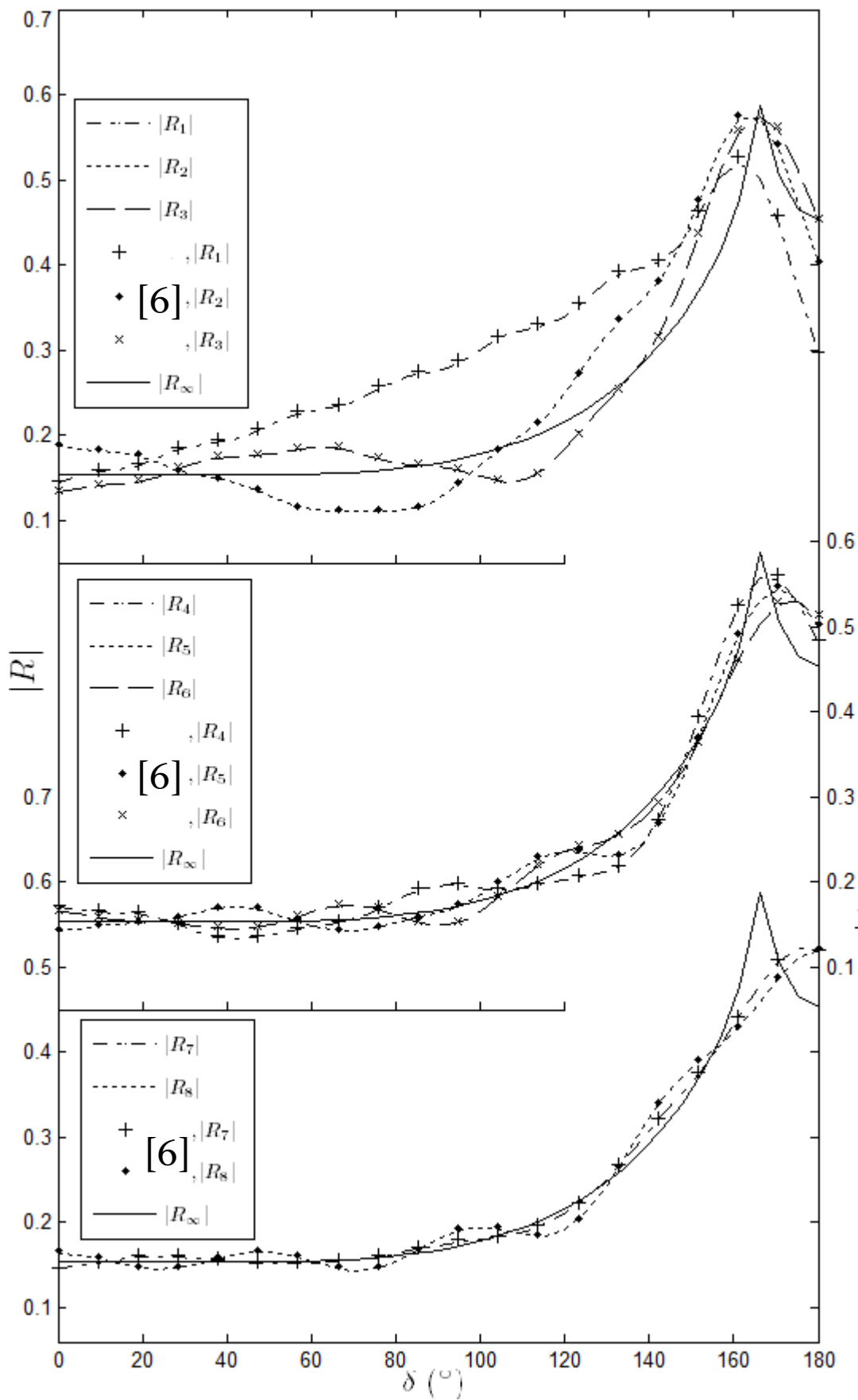


ΣΧΗΜΑ 25: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΙΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ  $\delta$  ( $\alpha/\lambda = 0.4, d/\lambda = 0.4, w/a = 0.5, \ell = 1, \epsilon_1 = 4\epsilon_0, |h_1| = 0.6375a, \epsilon_2 = \epsilon_0$ )

Είναι εμφανής η έντονη μεταβολή του συντελεστή ανάκλασης σε σχέση με την περίπτωση των άδειων κυματοδηγών, αφού πλέον λαμβάνει υψηλές τιμές και σε γωνίες μικρότερες των  $100^\circ$ . Στις γωνίες αυτές παρατηρείται πτώση της ακτινοβολούμενης ισχύος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.

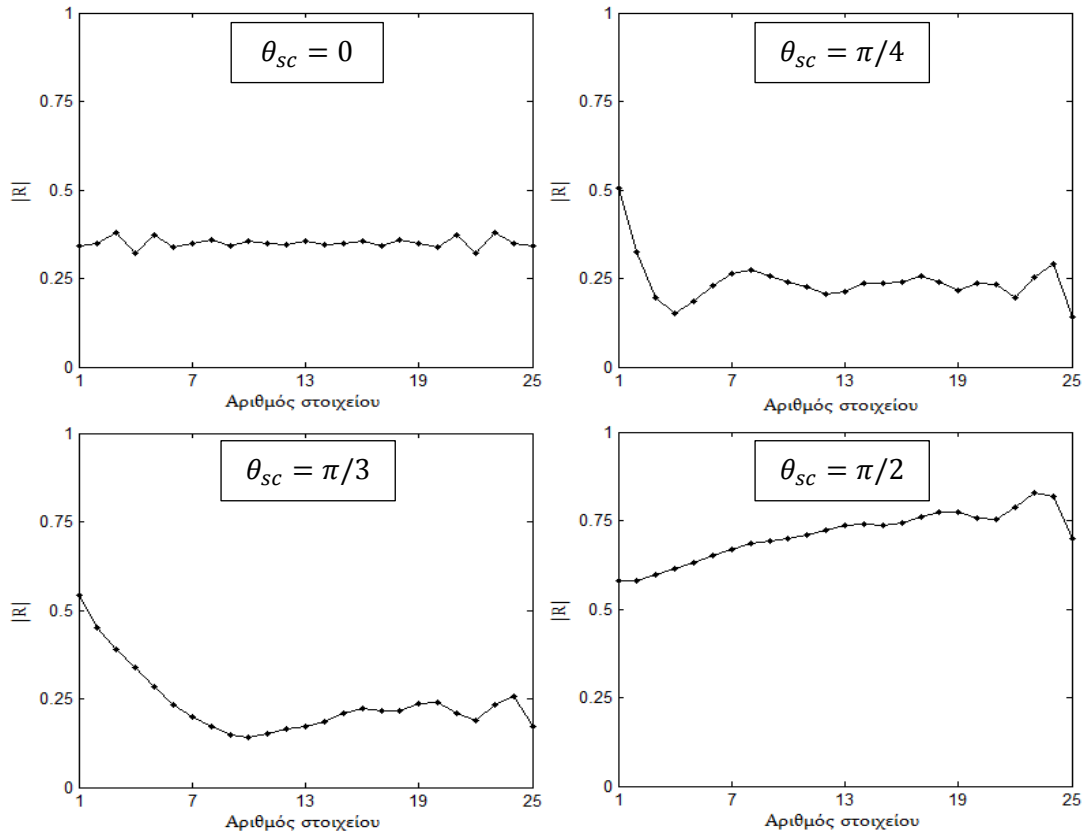
Στη συνέχεια, δείχνουμε στο Σχήμα 26 πως μεταβάλλονται οι συντελεστές ανάκλασης των στοιχείων μιας κεραίας 15 στοιχείων συναρτήσει του  $\delta$ . Είναι εμφανές ότι όσο πιο κοντά στο κέντρο είναι ένα στοιχείο τόσο πιο πολύ προσεγγίζει η καμπύλη του συντελεστή ανάκλασης την καμπύλη που αντιστοιχεί σε στοιχείο άπειρης στοιχειοκεραίας. Αυτό είναι λογικό καθώς το περιβάλλον ενός κεντρικού στοιχείου πλησιάζει περισσότερο το περιβάλλον ενός στοιχείου άπειρης στοιχειοκεραίας.

Τα αποτελέσματα μας σε όλα τα παραπάνω σχήματα βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με αυτά των [3] και [6]. Τα αποτελέσματα σε αυτές τις εργασίες βασίζονται στην MoM.



ΣΧΗΜΑ 26: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΑΣ 15 ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ  $\delta$  ( $\alpha/\lambda = 0.4, d/\lambda = 0.536, w/a = 0.5, \ell = 0, \epsilon_1 = \epsilon_0$ )

Στο Σχήμα 27 δείχνουμε τους συντελεστές ανάκλασης των στοιχείων κεραίας μεγέθους  $S = 25$  για διάφορες τιμές της γωνίας σάρωσης. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για  $\theta_{sc} = \pi/2$  οι το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης όλων των στοιχείων είναι υψηλό, επομένως η κεραία, όπως θα δούμε και παρακάτω, έχει χαμηλή απόδοση γι' αυτή τη γωνία.



ΣΧΗΜΑ 27: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΑΡΩΣΗΣ ( $S = 25, \alpha/\lambda = 0.2, d/\lambda = 0.4, w/a = 0.5, \ell = 0, \epsilon_1 = \epsilon_0$ )

#### 4.5 ΑΠΟΔΟΣΗ ΤΗΣ ΚΕΡΑΙΑΣ

Ορίζουμε ως συντελεστή απόδοσης της κεραίας τον λόγο της ακτινοβολούμενης προς την προσπίπτουσα ισχύ. Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε πως μεταβάλλεται ο συντελεστής απόδοσης της κεραίας καθώς μεταβάλλονται οι διάφορες παράμετροι της και θα επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες η κεραία λειτουργεί πιο αποδοτικά.

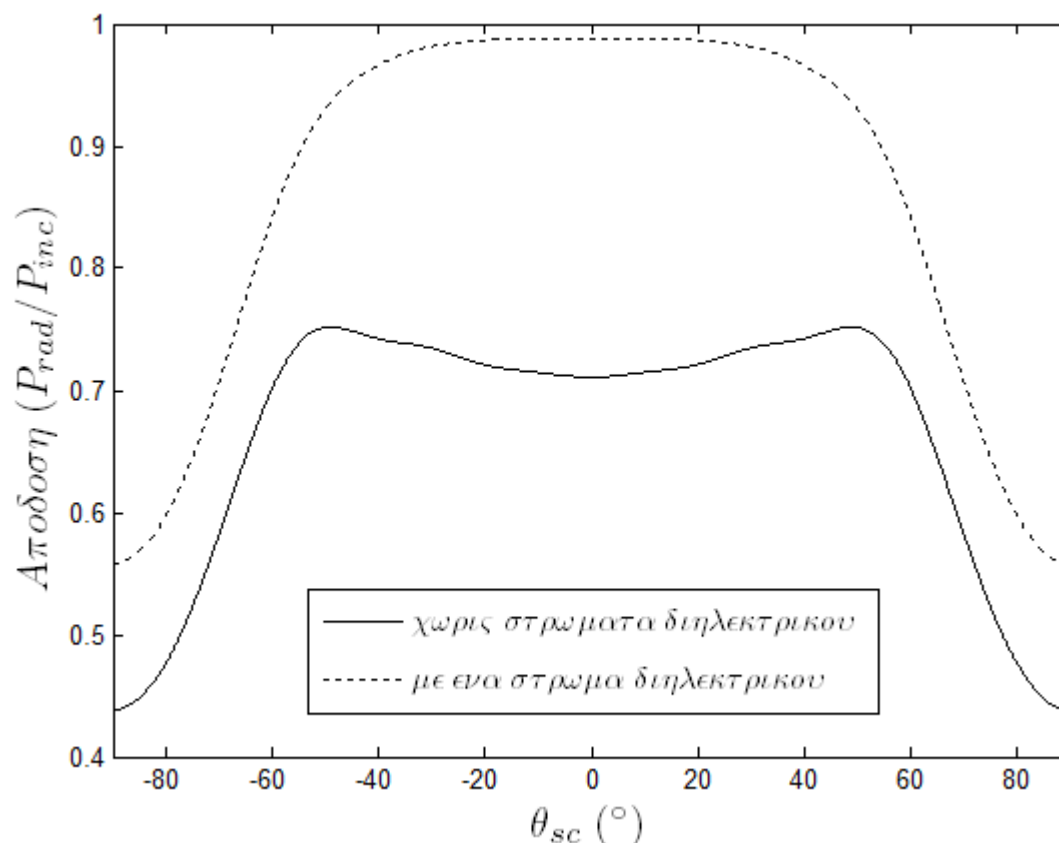
Έχουμε δει στις προηγούμενες ενότητες ότι τα χαρακτηριστικά ακτινοβολίας της διάταξης παρουσιάζουν σημαντικές μεταβολές όταν αλλάζει η γωνία σάρωσης. Στο Σχήμα 28 μελετούμε την απόδοση συναρτήσει της γωνίας σάρωσης. Και στις δύο περιπτώσεις που παρουσιάζονται, οι παράμετροι της κεραίας είναι

$$S = 13, \alpha = 0.2\lambda, d = 1.3a, w = 0.1a$$

Παρατηρούμε τα εξής:

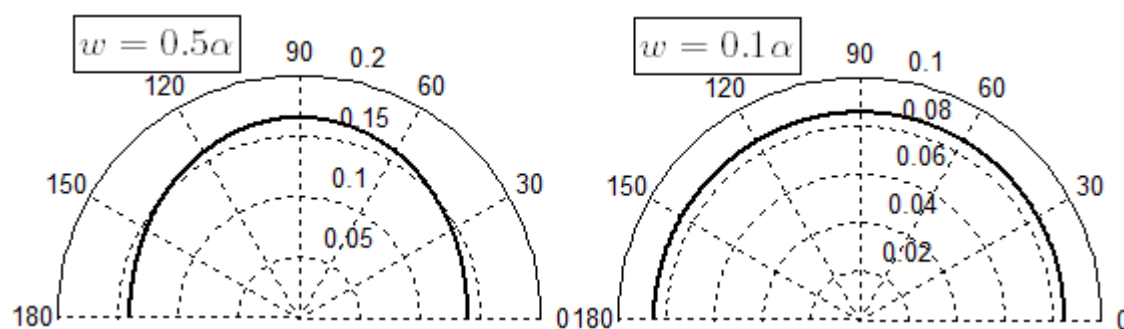


- Η απόδοση της κεραίας επηρεάζεται σημαντικά από τη γωνία σάρωσης. Για την περίπτωση των άδειων κυματοδηγών παίρνει τιμές από 0.752 για  $\theta_{sc} = \pm 48.9^\circ$  ως 0.4384 για  $\theta_{sc} = \pm 90^\circ$ , για τις γεωμετρικές παραμέτρους που επιλέξαμε.
- Η εισαγωγή ενός διηλεκτρικού στρώματος σταθεράς  $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$  πάχους  $0.7a$  σε απόσταση  $0.5a$  από το επίπεδο  $y = 0$  βελτιώνει αισθητά την απόδοση. Μάλιστα για  $\theta_{sc} \in [-45^\circ, 45^\circ]$  η απόδοση είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0.95.



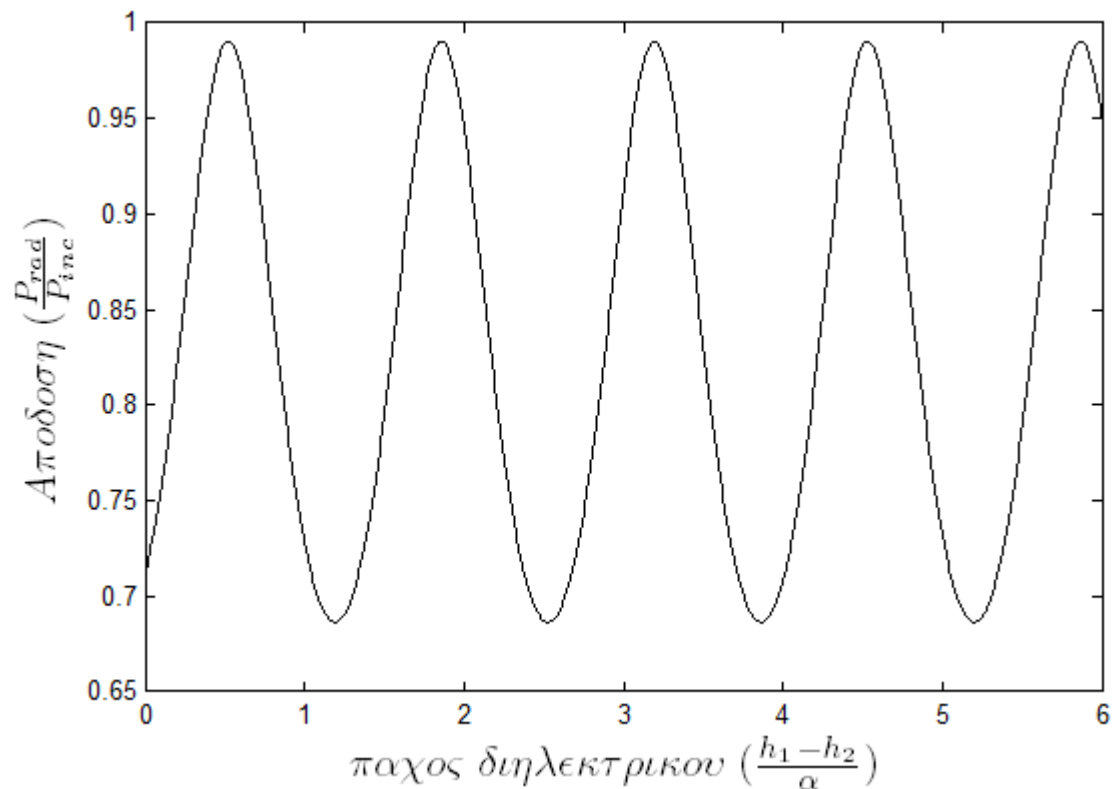
ΣΧΗΜΑ 28: ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΣΑΡΩΣΗΣ

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 29, και όπως περιμέναμε, το διάγραμμα ακτινοβολίας της απλής ( $S = 1$ ) σχισμοκεραίας, όταν ελαττώνεται το πλάτος της σχισμής, προσεγγίζει αυτό ενός ιστροπικού ακτινοβολητή, δηλαδή μιας γραμμικής μαγνητικής πηγής. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι σημαντικό, γιατί με τέτοια στοιχεία μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε στοιχειοκεραίες με οποιοδήποτε επιθυμητό διάγραμμα ακτινοβολίας, χρησιμοποιώντας γνωστές μεθόδους από τη θεωρία σύνθεσης κεραίων.

ΣΧΗΜΑ 29: ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΑΠΛΗΣ ΣΧΙΣΜΟΚΕΡΑΙΑΣ ( $\alpha = 0.2\lambda$ ,  $\ell = 0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ )

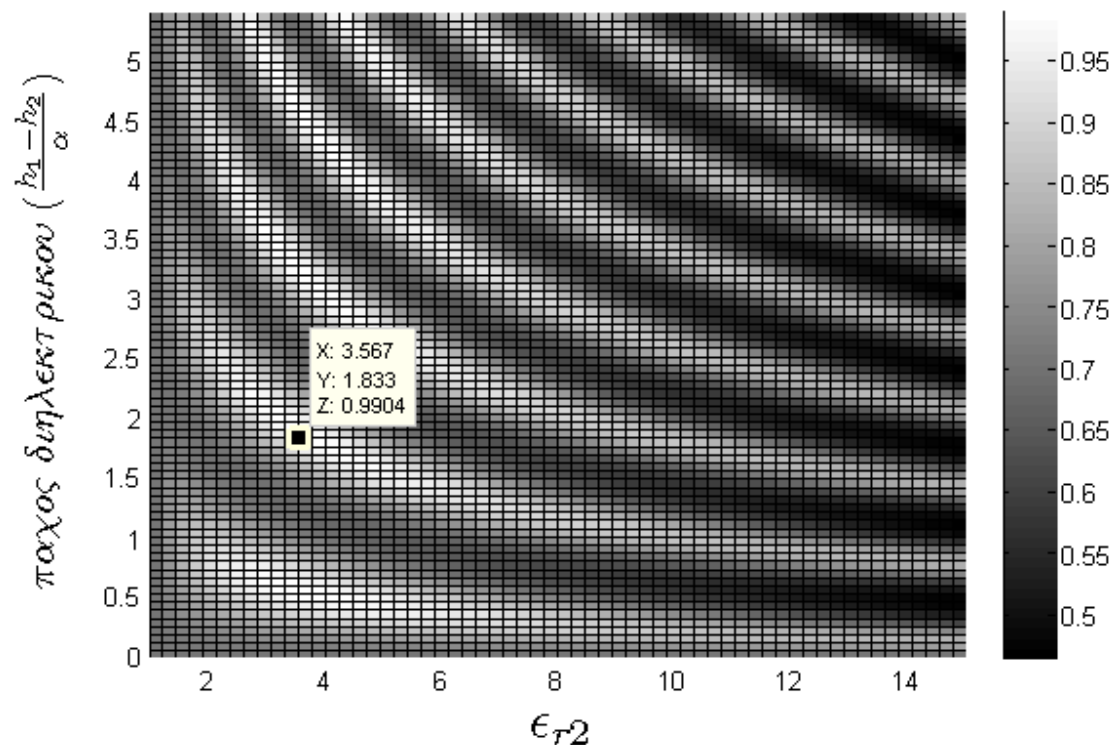
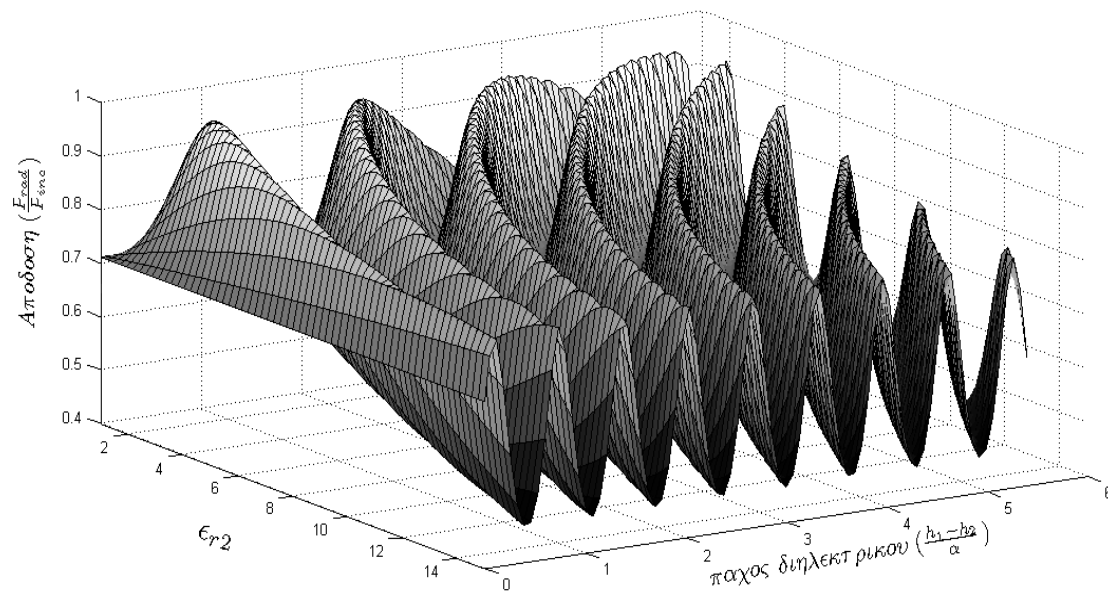
Θα μελετήσουμε λοιπόν για την περίπτωση αυτή ( $\alpha = 0.2\lambda$  και  $w = 0.1a$ ), πώς μεταβάλλεται η απόδοση της κεραίας όταν μεταβάλλεται το διηλεκτρικό φορτίο των κυματοδηγών.

Στο Σχήμα 30 υπολογίζουμε την απόδοση της κεραίας συναρτήσει του πάχους του διηλεκτρικού. Η απόδοση της διάταξης έχει ημιτονοειδή μεταβολή καθώς αυξάνεται το πάχος του διηλεκτρικού στρώματος.



ΣΧΗΜΑ 30: ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ( $S = 13, d = 1.3a, \ell = 2, \epsilon_1 = \epsilon_0, |h_1| = 0.6a, \epsilon_2/\epsilon_0 = \epsilon_{r2} = 3.5$ )

Στο Σχήμα 31 εξετάζουμε και πάλι την απόδοση της κεραίας, αυτή τη φορά μεταβάλλοντας δύο παραμέτρους: την διηλεκτρική σταθερά και το πάχος του διηλεκτρικού στρώματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλές και σχετικά ευρείες περιοχές τιμών των παραμέτρων για τις οποίες επιτυγχάνουμε υψηλή απόδοση παρά το μικρό εύρος της σχισμής.



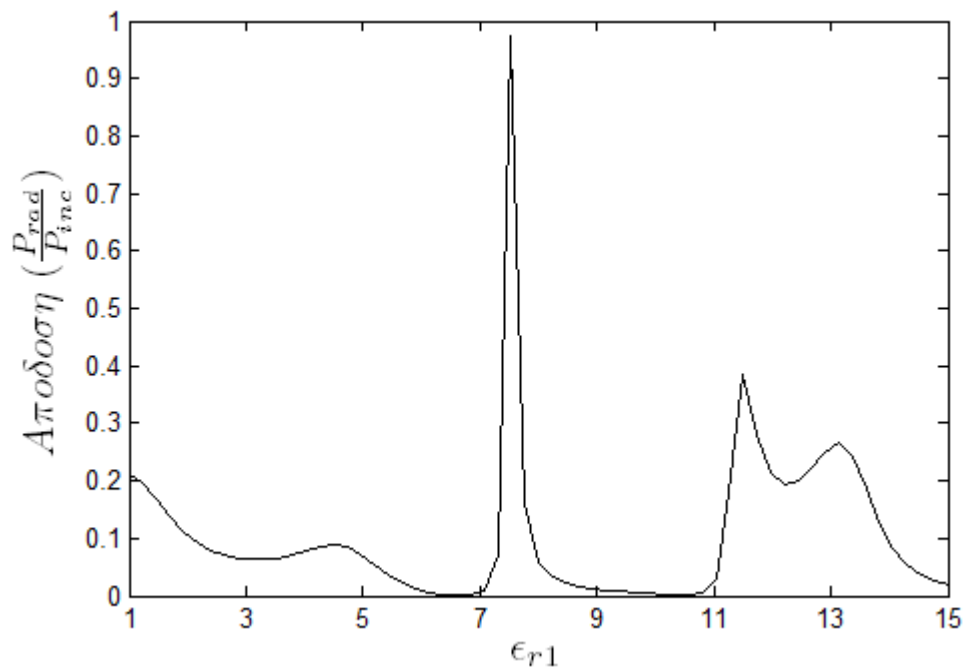
ΣΧΗΜΑ 31: ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ ΤΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ( $S = 13, a = 0.2\lambda, w = 0.1a, \ell = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, |h_1| = 0.6a, d = 1.3a$ )

Στο Σχήμα 32, βλέπουμε ότι για  $a = 0.4\lambda$  και  $w = 0.05a$  ο συντονισμός, ο οποίος εξασφαλίζει υψηλής ποιότητας προσαρμογή, είναι πολύ πιο οξύς.

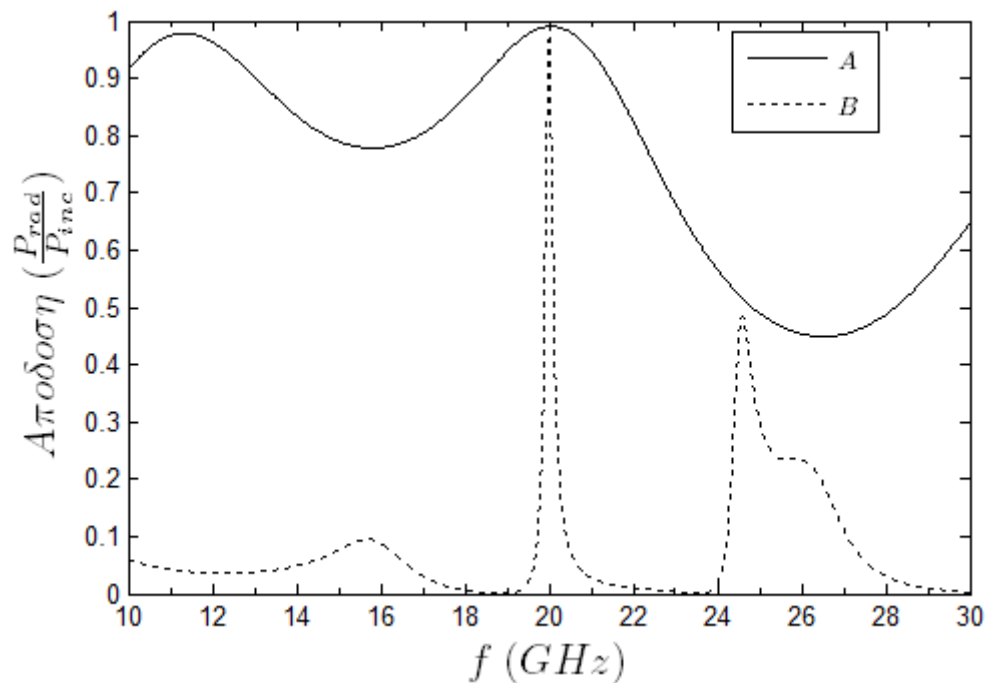
Τέλος, στο Σχήμα 33 μελετούμε την απόδοση της κεραίας συναρτήσει της συχνότητας για τις εξής δυο περιπτώσεις, στις οποίες είδαμε παραπάνω ότι η κεραία ακτινοβολεί αποδοτικά:

- A:  $S = 13, a = 0.2\lambda_{20}, w = 0.1a, \ell = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, |h_1| = 0.6a, \varepsilon_2 = 3.5\varepsilon_0, |h_2| = -2.45a, d = 1.3a$
- B:  $S = 13, a = 0.2\lambda_{20}, w = 0.1a, \ell = 1, \varepsilon_1 = 7.54\varepsilon_0, |h_1| = 0.89a, d = 1.3a$

όπου  $\lambda_{20}$  είναι το μήκος κύματος στον ελεύθερο χώρο για συχνότητα  $20\text{ GHz}$ . Είναι εμφανές ότι στην περίπτωση A η κεραία μπορεί να λειτουργήσει αποδοτικά για ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων, κάτι που δεν ισχύει για την περίπτωση B.



ΣΧΗΜΑ 32: ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ( $S = 13, a = 0.4\lambda, w = 0.05a, \ell = 1, |h_1| = 0.89a, \epsilon_2 = \epsilon_0, d = 1.3a$ )



ΣΧΗΜΑ 33: ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ  $S_{2m+1}(z)$ 

Οι παρακάτω εκφράσεις παρατίθενται και στο Appendix A του [9]. Ο υπολογισμός τους περιγράφεται αναλυτικά στο Mathematical Appendix (A.6) του [12].

Εφόσον  $S_{2m+1}(z) = S_{2m+1}(2\pi - z)$ , αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση  $0 \leq z \leq \pi$ . Θέτουμε

$$P_{2m} = \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi)^{2m} \frac{\zeta(2k)}{k \prod_{n=1}^{2m} (2k+n)} \left(\frac{z}{2\pi}\right)^{2k+2m} \quad (I.1)$$

όπου  $\zeta(\cdot)$  είναι η συνάρτηση ζήτα του Riemann. Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω εκφράσεις:

$$S_1(z) = -\ln\left(2 \sin \frac{z}{2}\right) \quad (I.2)$$

$$S_3(z) = \zeta(3) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln z\right) z^2 - P_2 \quad (I.3)$$

$$S_5(z) = \zeta(5) - \zeta(3) \frac{z^2}{2} + \left(\frac{25}{288} - \frac{1}{24} \ln z\right) z^4 + P_4 \quad (I.4)$$

$$S_7(z) = \zeta(7) - \zeta(5) \frac{z^2}{2} + \zeta(3) \frac{z^4}{24} - \left(\frac{49}{14400} - \frac{1}{720} \ln z\right) z^6 - P_6 \quad (I.5)$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΕΚΠΟΜΠΗΣ ΚΑΙ ΛΗΨΗΣ

Θα αποδείξουμε εδώ τη σχέση (4.1.10), η οποία εκφράζει την ισότητα των διαγραμμάτων εκπομπής και λήψης.

### Εκπομπή

Όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, πηγή του προσπίπτοντος  $TM_{L0}$  στον  $p$ -οστό κυματοδηγό είναι ένα επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα, τοποθετημένο στο  $y' \rightarrow -\infty$ , που δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\vec{M}_u^{(p)} = \hat{z}V^{(p)} e^{-jp\delta} \psi_L(x) \delta(y - y') \quad (\text{II.1})$$

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η πηγή αυτή είναι

$$\vec{H} = \hat{z}\psi_L(x) \begin{cases} A_1 e^{\gamma_L^{(\ell+1)}(y-y')}, & y < y' \\ A_2 e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-y')}, & y > y' \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Η συνθήκη συνέχειας του μαγνητικού πεδίου για  $y = y'$  επιβάλλει

$$A_1 = A_2 = A$$

οπότε τελικά θα είναι

$$\vec{H} = \hat{z}A\psi_L(x) e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}|y-y'|} \quad (\text{II.3})$$

Η  $x$ -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon_{\ell+1}} \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\epsilon_{\ell+1}} A\psi_L(x) \text{sgn}(y - y') e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}|y-y'|} \quad (\text{II.4})$$

όπου  $\text{sgn}(z)$  είναι η συνάρτηση προσήμου.

Εφαρμόζουμε τώρα την οριακή συνθήκη για την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου για  $y = y'$ .

$$[\vec{E}^> - \vec{E}^<]_{y=y'} \times \hat{y} = \vec{M}_u^{(p)} \quad (\text{II.5})$$

όπου  $\vec{E}^>$  και  $\vec{E}^<$  το ηλεκτρικό πεδίο για  $y > y'$  και  $y < y'$  αντίστοιχα. Οπότε

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\epsilon_{\ell+1}} A\psi_L(x) - \frac{\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\epsilon_{\ell+1}} A\psi_L(x) &= V^{(p)} e^{-jp\delta} \psi_L(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -\frac{j\omega\epsilon_{\ell+1}}{2\gamma_L^{(\ell+1)}} V^{(p)} e^{-jp\delta} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Τελικά το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή  $y > y'$  είναι:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\hat{z} \frac{j\omega\varepsilon_{\ell+1}}{2\gamma_L^{(\ell+1)}} V^{(p)} e^{-jp\delta} \psi_L(x) e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-y')} = \\ &= -\hat{z} \frac{j\omega\varepsilon_{\ell+1}}{2\gamma_L^{(\ell+1)}} V^{(p)} e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(h_\ell-y')} e^{-jp\delta} \psi_L(x) e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)}\end{aligned}\quad (\text{II.7})$$

Δηλαδή

$$\vec{H} = \hat{z} H_0^{(p)} e^{-jp\delta} \psi_L(x) e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (\text{II.8})$$

με

$$H_0^{(p)} = -\frac{j\omega\varepsilon_{\ell+1}}{2\gamma_L^{(\ell+1)}} V^{(p)} e^{-\gamma_L^{(\ell+1)}(h_\ell-y')} \quad (\text{II.9})$$

Αποτέλεσμα της διέγερσης των κυματοδηγών με τα παραπάνω ρεύματα είναι το μακρινό πεδίο στην περιοχή  $y > 0$  που περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{H}_{rad} = \hat{z} \frac{2j}{\sqrt{\pi k_0 r}} e^{-jk_0 r} F(\varphi) \quad (\text{II.10})$$

### Λήψη

Διέγερση στην περίπτωση αυτή είναι ένα προσπίπτον επίπεδο κύμα από την περιοχή  $y > 0$ , του οποίου το μαγνητικό πεδίο δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\vec{H} = \hat{z} H_0 e^{-j\vec{k}_{inc}\vec{r}} = \hat{z} H_0 e^{jk_0(x\cos\varphi_{inc} + y\sin\varphi_{inc})} \quad (\text{II.11})$$

Θα δείξουμε ότι ως πηγή αυτού του κύματος μπορεί να θεωρηθεί μια γραμμική μαγνητική πηγή

$$\vec{M}_L = \hat{z} M_L \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (\text{II.12})$$

τοποθετημένη στη θέση  $\left(\begin{smallmatrix} x_0, y_0 \\ R_0, \varphi_{inc} \end{smallmatrix}\right)$ , παράλληλα στον άξονα  $z$ . Είναι γνωστό ότι μια τέτοια πηγή δημιουργεί στη θέση  $\left(\begin{smallmatrix} x, y \\ r, \varphi \end{smallmatrix}\right)$  το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{H} = -\hat{z} M_L \frac{\omega\varepsilon_0}{4} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (\text{II.13})$$

όπου

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0\cos(\varphi - \varphi_{inc})} \quad (\text{II.14})$$

Αν υποθέσουμε ότι η απόσταση της πηγής από την αρχή των αξόνων είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν του σημείου παρατήρησης από την αρχή, δηλαδή  $R_0 \gg r$ , τότε

$$R \approx R_0 \sqrt{1 - \frac{2r}{R_0} \cos(\varphi - \varphi_{inc})} \approx R_0 - r \cos(\varphi - \varphi_{inc}) \quad (\text{II.15})$$

και χρησιμοποιώντας τη γνωστή ασυμπτωτική σχέση της συνάρτησης Hankel για μεγάλα ορίσματα έχουμε

$$\begin{aligned}
H_0^{(2)}(k_0 R) &= \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 R_0}} e^{-jk_0 R_0} e^{jk_0 r \cos(\varphi - \varphi_{inc})} = \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 R_0}} e^{-jk_0 R_0} e^{jk_0 (r \cos \varphi \cos \varphi_{inc} + r \sin \varphi \sin \varphi_{inc})} \\
&= \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 R_0}} e^{-jk_0 R_0} e^{jk_0 (x \cos \varphi_{inc} + y \sin \varphi_{inc})} \quad (II.16)
\end{aligned}$$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$\vec{H} = -\hat{z} M_L \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 R_0}} e^{-jk_0 R_0} e^{jk_0 (x \cos \varphi_{inc} + y \sin \varphi_{inc})} \quad (II.17)$$

Δηλαδή για

$$H_0 = -M_L \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \sqrt{\frac{2j}{\pi k_0 R_0}} e^{-jk_0 R_0} \quad (II.18)$$

προκύπτει η σχέση (II.11).

Η πηγή αυτή διεγείρει στην περιοχή  $\ell + 1$  του  $p$ -οστού κυματοδηγού τον  $TM_{L0}$  ρυθμό, το μαγνητικό πεδίο του οποίου είναι

$$\vec{H}_{rec} = \hat{z} T_L \psi_L(x) e^{\gamma_L^{(\ell+1)}(y-h_\ell)} \quad (II.19)$$

### Εφαρμογή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας

Εφαρμόζουμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας για τις πηγές  $\vec{M}_u$  και  $\vec{M}_L$  όπου

$$\vec{M}_u = \vec{M}_u^{(p)} \text{ για } x \in [c_p - w, c_p + w], p = 1, 2, \dots, S \quad (II.20)$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \vec{M}_u \vec{H}_{rec} dV = \iiint_V \vec{M}_L \vec{H}_{rad} dV \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{2\gamma_L^{(\ell+1)}}{j\omega\varepsilon_{\ell+1}} \sum_{p=1}^S H_0^{(p)} e^{-jp\delta} T_L^{(p)} \frac{(1 + \delta_{L0})a}{2} = \frac{4H_0}{\omega\varepsilon_0} F(\varphi_{inc}) \Rightarrow \\
&(1 + \delta_{L0}) \sum_{p=1}^S H_0^{(p)} e^{-jp\delta} T_L^{(p)} = jH_0 \frac{\varepsilon_{\ell+1}}{\varepsilon_0} \frac{4}{a\gamma_L^{(\ell+1)}} F(\varphi_{inc}) \quad (II.21)
\end{aligned}$$



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ: ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ

Θα περιγράψουμε εδώ τη μέθοδο των ροπών, η οποία εφαρμόζεται στο [6] για την επίλυση του προβλήματος ακτινοβολίας από σειρά περιοδικά διατεταγμένων κυματοδηγών, ανοιχτών στο επίπεδο  $y = 0$ , με ένα ή κανένα στρώμα διηλεκτρικού φορτίου.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με το Κεφάλαιο 2, καταλήγουμε στην παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^S H_{z,exc}^{(p)}(x, 0^-) = \\ & = \int_{C_1 \cup \dots \cup C_S} \left\{ \sum_{p=1}^S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\alpha \tilde{Z}_n(0)} \varphi_{np}(x) \varphi_{np}(x') - \frac{\omega \epsilon_0}{2} H_0^{(2)}(k_0 |x - x'|) \right\} E_x(x', 0) dx' \end{aligned} \quad (III.1)$$

όπου

$$\varphi_{np}(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}(x - (p-1)d)\right), & (p-1)d < x < (p-1)d + a \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (III.2)$$

και το  $H_{z,exc}^{(p)}(x, 0^-)$  είναι όπως υπολογίστηκε στο Κεφάλαιο 2, αντικαθιστώντας όπου  $\psi_n^{(p)}(x)$  το  $\varphi_{np}(x)$ .

Θέτουμε

$$E_x(x, 0) = \sum_{u=1}^{S \cdot L} E_u U_u(x) \quad (III.3)$$

όπου

$$U_u(x) = \begin{cases} 1, & x_{u-1} \leq x \leq x'_u \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (III.4)$$

με

$$x_{u-1} = \left\lfloor \frac{u-\xi}{L} \right\rfloor d + \left( u-1 - \left\lfloor \frac{u-\xi}{L} \right\rfloor L \right) \frac{a}{L} \quad (III.5)$$

$$x'_u = \left\lfloor \frac{u-\xi}{L} \right\rfloor d + \left( u - \left\lfloor \frac{u-\xi}{L} \right\rfloor L \right) \frac{a}{L} \quad (III.6)$$

και  $\xi \in (0,1)$ .

Αντικαθιστώντας στην (III.1) την (III.3) και ικανοποιώντας την προκύπτουσα εξίσωση στα σημεία

$$\bar{x}_v = \left\lfloor \frac{v-\xi}{L} \right\rfloor d + \left( v - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{v-\xi}{L} \right\rfloor L \right) \frac{a}{L}, \quad v = 1, 2, \dots, S \cdot L \quad (III.7)$$

παίρνουμε το εξής  $S \cdot L \times S \cdot L$  αλγεβρικό σύστημα:

$$A \cdot e = f \quad (\text{III.8})$$

όπου

$$A_{v,u} = \int_{x_{u-1}}^{x'_u} \left\{ \sum_{p=1}^S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\epsilon}_n}{\alpha \bar{Z}_n(0)} \varphi_{np}(\bar{x}_v) \varphi_{np}(x') - \frac{\omega \epsilon_0}{2} H_0^{(2)}(k_0 |\bar{x}_v - x'| \right\} dx' \quad (\text{III.9})$$

$$e_u = E_u \quad (\text{III.10})$$

και

$$f_v = \sum_{p=1}^S H_{z,exc}^{(p)}(\bar{x}_v, 0^-) \quad (\text{III.11})$$

Τα στοιχεία του πίνακα στην (III.9) υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση, σε αντίθεση με την παρούσα εργασία, στην οποία δεν εμπλέκονται αριθμητικές ολοκληρώσεις. Η λύση του συστήματος της (III.8) μας δίνει το ζητούμενο ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο επίπεδο  $y = 0$ .

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] J. L. Tsalamengas, «A parallel plate-fed slot antenna loaded by a dielectric semicylinder,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 7, pp. 1031-1040, July 1996.
- [2] C. P. Wu, «Integral equation solutions for the radiation from a waveguide through a dielectric slab,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol.17, no. 6, pp. 733-739, November 1969.
- [3] C. P. Wu, «Numerical solutions for the coupling between waveguides in finite arrays,» *Radio Science*, vol. 4, no. 3, pp. 245-254, March 1969.
- [4] J. L. Tsalamengas and V. N. Kourkoulos, «Radiation and receiving characteristics of parallel plate-fed slot antennas loaded by dielectric-coated infinite strip conductors,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 8, pp. 1972-1981, August 2003.
- [5] J. L. Tsalamengas, T. K. Dikaliotis and E. C. Pitsavos, «Strip-loaded slot antennas driven by multilayered parallel-plate waveguides with optimized matching and enhanced gain: TM and TE cases,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 5, pp. 1423-1432, May 2006.
- [6] C. P. Wu, «Analysis of finite parallel-plate waveguide arrays,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol AP-18, no. 3, pp. 328-334, May 1970.
- [7] B. Tomasic, «Analysis of finite arrays - A new approach,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol.47, no. 3, pp. 555-565, March 1999.
- [8] G. V. Borgiotti, «Edge effects in finite arrays of uniform slits on a ground plane,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. 593-599, September 1971.
- [9] J. L. Tsalamengas, «Exponentially converging Nystrom's methods for systems of singular integral equations with applications to open/closed strip- or slot-loaded 2-D structures,» *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. 1549-1558, May 2006.
- [10] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, New York: John Wiley & Sons, 1989.
- [11] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1972.
- [12] R. E. Collin, *Field theory of guided waves*, New York: IEEE Press, 1991.
- [13] Ι. Τσαλαμέγκας, Ι. Ρουμελιώτης, *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία*, Τόμος Α':

Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.

- [14] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [15] R. C. Hansen, *Phased Array Antennas*, John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- [16] A. Bondeson, T. Rylander and P. Ingelström, *Computational Electromagnetics*, Springer, 2005.
- [17] A.-M. Wazwaz, *Linear and nonlinear integral equations*, Springer, 2011.
- [18] Σ. Τραχανάς, *Μερικές διαφορικές εξισώσεις*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.