



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

***ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ
ΚΑΙΜΑΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ
ΥΠΟΦΟΡΕΩΝ***

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΠΑΠΑΓΙΑΝΝΑΚΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΡΑΚΑΚΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Από αυτή τη θέση θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα της εν λόγω εργασίας Καθ. Μ. Παπαδρακάκη, ο οποίος με ενέταξε σε επιστημονικές περιοχές που βρίσκονται στην αιχμή της σύγχρονης έρευνας και τεχνολογίας. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για τις γνώσεις που με βοήθησε να αποκτήσω κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας, την πολύτιμη καθοδήγησή του και την αμέριστη συμπαράστασή του.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υποψήφιους Διδάκτορες Α. Καραταράκη και Π. Μέτση για την βοήθειά τους κατά την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας.

Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής έγινε στο πλαίσιο της υλοποίησης του μεταπτυχιακού προγράμματος το οποίο συγχρηματοδοτήθηκε μέσω της Πράξης “**Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών Ι.Κ.Υ. με διαδικασία εξατομικευμένης αξιολόγησης ακαδ. έτους 2011-2012**” από πόρους του Ε.Π. “Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση” του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (ΕΚΤ) και του ΕΣΠΑ, του 2007-2013.

*Αριστοτέλης Παπαγιαννάκης
Αθήνα, Φεβρουάριος 2013*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ-1
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	vii
SUMMARY (ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΣΤΑ ΑΓΓΛΙΚΑ)	viii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Η ΜΕΘΟΔΟΣ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

1.1	Εισαγωγή	1-1
1.2	Η μέθοδος FETI σε ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων	1-1
1.2.1	Σύνδεση υποφορέων με non-conforming δίκτυα	1-2
1.2.2	Πύκνωση υποφορέων και επίλυση προβλήματος συνοριακών τιμών (BVP)	1-8
1.2.3	Μέθοδος χαλάρωσης (relaxation process)	1-10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI

2.1	Εισαγωγή	2-1
2.2	Κλασσική μέθοδος FETI	2-1
2.3	Προσταθεροποιητές κλασσικής μεθόδου FETI	2-3
2.4	Ενσωμάτωση LMPC στη μέθοδο FETI	2-5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

3.1	Εισαγωγή	3-1
3.2	Εφαρμογή 1	3-1
3.3	Εφαρμογή 2	3-13
3.4	Load Balancing	3-29

3.5	Συμπεράσματα	3-30
-----	--------------	------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : FEM – EFG

4.1	Εισαγωγή	4-1
4.2	Εφαρμογή 1	4-1
4.3	Εφαρμογή 2	4-5
4.4	Coupled FEM-EFG – Convergence Test	4-9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΣΧΟΛΙΑ

5.1	Σχόλια για τη διεξαγωγή των παραδειγμάτων	5-1
5.2	Σχόλια για μελλοντική έρευνα	5-1

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ-ΑΡΘΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ανέκαθεν ένας καίριος τομέας έρευνας της Υπολογιστικής Μηχανικής ήταν η ανάπτυξη μεθόδων με περιορισμένες απαιτήσεις υπολογιστικού χρόνου και μνήμης για την ανάλυση προσομοιωμάτων μεγάλης κλίμακας (large-scale models). Με τον όρο “προσομοιώματα μεγάλης κλίμακας” εννοούμε λεπτομερή προσομοιώματα κατασκευών με μεγάλο πλήθος αγνώστων βαθμών ελευθερίας, προσομοιώματα δηλαδή που συχνά εξαντλούν τις δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών από την άποψη χρόνου επίλυσης και απαιτούμενης μνήμης.

Έτσι λοιπόν έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που αποσκοπούν στην αποτελεσματική επίλυση τέτοιων προσομοιωμάτων και χαρακτηρίζονται ως “μέθοδοι υψηλών επιδόσεων” (“high-performance solution methods”). Τις τελευταίες δεκαετίες, ο τομέας των μεθόδων υψηλών επιδόσεων έχει μονοπωληθεί από τις μεθόδους επίλυσης με υποφορείς (Domain Decomposition Methods – DDM). Οι εν λόγω μέθοδοι έχουν αποδειχθεί ταχύτερες από άλλες δημοφιλείς κατηγορίες μεθόδων σε σειριακή και κυρίως παράλληλη επεξεργασία, η οποία γνωρίζει ιδιαίτερη άνθιση στα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα.

Στη συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία, στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφεται πώς η πλέον διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης με υποφορείς FETI προσαρμόζεται στις ανάγκες επίλυσης προβλημάτων που χρησιμοποιούν τη μέθοδο ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων, μια μέθοδος που συναντάται πλέον συχνά σε προβλήματα μηχανικής. Στο δεύτερο κεφάλαιο, αναλύονται τα θεωρητικά στοιχεία των γενικευμένων προσταθεροποιητών της μεθόδου FETI, η χρήση των οποίων θα αποδειχθεί απαραίτητη σε μια ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων. Στη συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας πραγματοποιούνται εφαρμογές της μεθόδου FETI σε ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων και ελέγχεται η απόδοση των γενικευμένων προσταθεροποιητών που περιγράφηκαν προηγουμένως. Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η επίλυση φορέων που διακριτοποιούνται τόσο με κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία (FEM) όσο και με μια μη πλεγματική μέθοδο (Element Free Galerkin – EFG) με τις μεθόδους επίλυσης με υποφορείς FETI, FETI-DP και P-FETIDP, και στη συνέχεια ελέγχεται η μέθοδος coupling με ramp functions μεταξύ FEM και EFG. Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας, αναφέρονται κάποια σχόλια για τη διεξαγωγή των παραδειγμάτων καθώς και σχόλια για μελλοντική έρευνα.

SUMMARY

“Solution of Multiscale Problems with Domain Decomposition Methods”

The development of methods with minimum computational cost and memory requirements for the solution of large-scale models has always constituted a key research area in Computational Mechanics. In general, large-scale models are considered to be comprehensive models with a large number of unknown degrees of freedom, whom the solution is meant to be a challenging task in terms of solution time, accuracy and memory requirements for the computer system.

In order to handle efficiently such models, methods known as “High-performance solution methods” have attracted the efforts of many research groups around the world. Over the last few decades the field of “High-performance computing” has been monopolized by Domain Decomposition Methods (DDM). The latter have surpassed other popular categories of methods, after being proved more efficient in sequential and particularly in parallel processing environments.

In the first chapter of the present thesis, it is analyzed how the most renowned DD method, the FETI method, is transformed in order to accommodate the solution of problems which stem from a multiscale analysis, a type of analysis which is common in contemporary engineering simulations. In the second chapter, the extended preconditioners of the FETI method are described. We will demonstrate that their use will be valuable in a multiscale analysis. In the third chapter of the current thesis, we apply the FETI method in the general framework of a multiscale analysis and the performance of the extended preconditioners is checked. Next, in the fourth chapter, we employ the DD methods FETI, FETI-DP and P-FETIDP for the solution of domains discretized both with Finite Elements (FEM) and the Element Free Galerkin Method (EFG) and later we check the performance of the coupling method with ramp functions between FEM and EFG. Finally, in the fifth chapter, some comments on the execution of the examples and comments on future research are presented.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

*Η ΜΕΘΟΔΟΣ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ*

1.1 Εισαγωγή

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες και αποτελεσματικές τεχνικές ανάλυσης που χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια στον τομέα της υπολογιστικής μηχανικής, για την επίλυση ενός μεγάλου πλήθους προβλημάτων μηχανικής είναι εκείνη της ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες (multiscale analysis). Ο βασικός σκοπός αυτών των μεθόδων είναι να προσομοιάσουν την επίδραση που έχουν οι αλλαγές σε επίπεδο μικροκλίμακας ή μεσοκλίμακας του υλικού στο επίπεδο της συμπεριφοράς σε μακροκλίμακα. Ως εκ τούτου τέτοιες τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διευκόλυνση της αριθμητικής ανάλυσης μιας κατασκευής με λεπτομερές επίπεδο ακρίβειας, καθώς και στη συμβολή για τη μελέτη και δημιουργία νέων υλικών. Ένας χαρακτηριστικός τομέας εφαρμογής της ανάλυσης σε πολλαπλές κλίμακες είναι η μελέτη του φαινομένου της δημιουργίας και διάδοσης ρωγμών (crack propagation).

Η σημασία μιας τέτοιας ανάλυσης μπορεί να γίνει κατανοητή αν σκεφτεί κανείς ότι για την παρακολούθηση και σωστή προσομοίωση τοπικών φαινομένων (π.χ. συγκέντρωση τάσεων σε μια περιοχή) με τις κλασσικές μεθόδους ανάλυσης απαιτείται η πύκνωση όλου του φορέα, γεγονός που οδηγεί σε προσομοιώματα με πολύ υψηλές απαιτήσεις τόσο σε υπολογιστική μνήμη όσο και σε υπολογιστικό κόστος. Αντίθετα ο προσαρμοστικός χαρακτήρας που διακρίνει μια ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων, δηλαδή η επιλεκτική πύκνωση του φορέα σε περιοχές ενδιαφέροντος (αντικατάσταση ενός αραιού υποφορέα με αντίστοιχο πυκνό στις εν λόγω περιοχές), σε συνδυασμό με τις μεθόδους επίλυσης με υποφορείς, αναδεικνύει την υπεροχή του συγκεκριμένου τρόπου ανάλυσης.

Στη συγκεκριμένη εργασία θα δοθεί περισσότερη έμφαση στην ανάλυση σε πολλαπλές κλίμακες με τη βοήθεια της μεθόδου των υποφορέων (domain decomposition methods) και πώς η πλέον διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης με υποφορείς FETI προσαρμόζεται στο πλαίσιο μιας τέτοιας ανάλυσης και όχι στην συμπεριφορά του υλικού σε μια μη γραμμική ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων. Τέλος αξίζει να αναφερθεί ότι στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη concurrent προσέγγιση των διαφορετικών κλιμάκων, δηλαδή οι διαφορετικές κλίμακες ανάλυσης του υλικού που θα εμφανίζονται θα μελετώνται ταυτόχρονα στο φορέα.

1.2 Η μέθοδος FETI σε ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η εργασία αυτή θα δώσει μεγαλύτερη βάση στο πώς επεκτείνεται η μέθοδος FETI στις περιπτώσεις αναλύσεων πολλαπλών κλιμάκων. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις υπάρχουσες τεχνικές ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη διατιθέμενη βιβλιογραφία στο τέλος της εργασίας.

Η κλασσική μέθοδος FETI μπορεί να επεκταθεί και στην επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων

αρκεί να ενταχθεί σε ένα γενικότερο περιβάλλον τύπου Newton-Raphson, όπου το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων αντικαθίσταται από μια σειρά γραμμικών εξισώσεων.

Ακολουθούν οι αλλαγές – επεκτάσεις που πρέπει να γίνουν στην κλασσική μέθοδο FETI για την προσαρμογή της σε περιβάλλον ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων, έτσι ώστε οι διαφορετικές κλίμακες (ή αλλιώς τα επίπεδα ανάλυσης του υλικού) να συνυπάρχουν στην επίλυση. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικά επίπεδα κλίμακας, που θα αναφέρονται ως αραιό (coarse) και πυκνό (fine) για περιοχές χαμηλής ανάλυσης (low-resolution) και υψηλής (high-resolution) αντίστοιχα. Εν τούτοις η ύπαρξη περισσότερων επιπέδων ανάλυσης είναι εφικτή.

Τα βασικά στοιχεία για την προσαρμογή της μεθόδου FETI στις συνθήκες της ανάλυσης που εφαρμόζουμε είναι τρία :

- i. Μια τεχνική για τη σύνδεση υποφορέων με δίκτυα διαφορετικής πυκνότητας στο σύνορο. Τέτοιοι υποφορείς αναφέρονται και ως υποφορείς με non-conforming (μη-σύμφωνα) δίκτυα.
- ii. Μια στρατηγική (zoom-in strategy) με την οποία ένας υποφορέας θα αποκτά πυκνότερο πλέγμα στοιχείων και θα επιλύεται με διαφορετική πυκνότητα δικτύου από τους υπόλοιπους.
- iii. Μια τεχνική κατά την οποία μέσω κάποιου αριθμού καθολικών επαναλήψεων θα αποκαθίσταται το συμβιβαστό των μετατοπίσεων καθώς και η ισορροπία σε επίπεδο φορέα.

1.2.1 Σύνδεση υποφορέων με non-conforming δίκτυα

Στη συγκεκριμένη υποενότητα θα μελετήσουμε την πρώτη αναγκαία επέκταση της μεθόδου FETI και δεν είναι άλλη από την ανάγκη σύνδεσης υποφορέων με σύνορα τα οποία δεν ταυτίζονται. Όπως είναι κατανοητό το συγκεκριμένο φαινόμενο θα εμφανιστεί σίγουρα κατά τη διάρκεια μιας ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων, επομένως η σύνδεσή τους έχει προσελκύσει κατά καιρούς το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών.

Έστω ότι έχουμε δύο υποφορείς Ω^f και Ω^c , όπου οι δείκτες f και c αναφέρονται σε fine και coarse υποφορείς αντίστοιχα, και Γ_I το σύνορο μεταξύ τους. Για να ισχύει το συμβιβαστό των μετατοπίσεων θα πρέπει να ισχύει :

$$\mathbf{u}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^c(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I \quad (1.1)$$

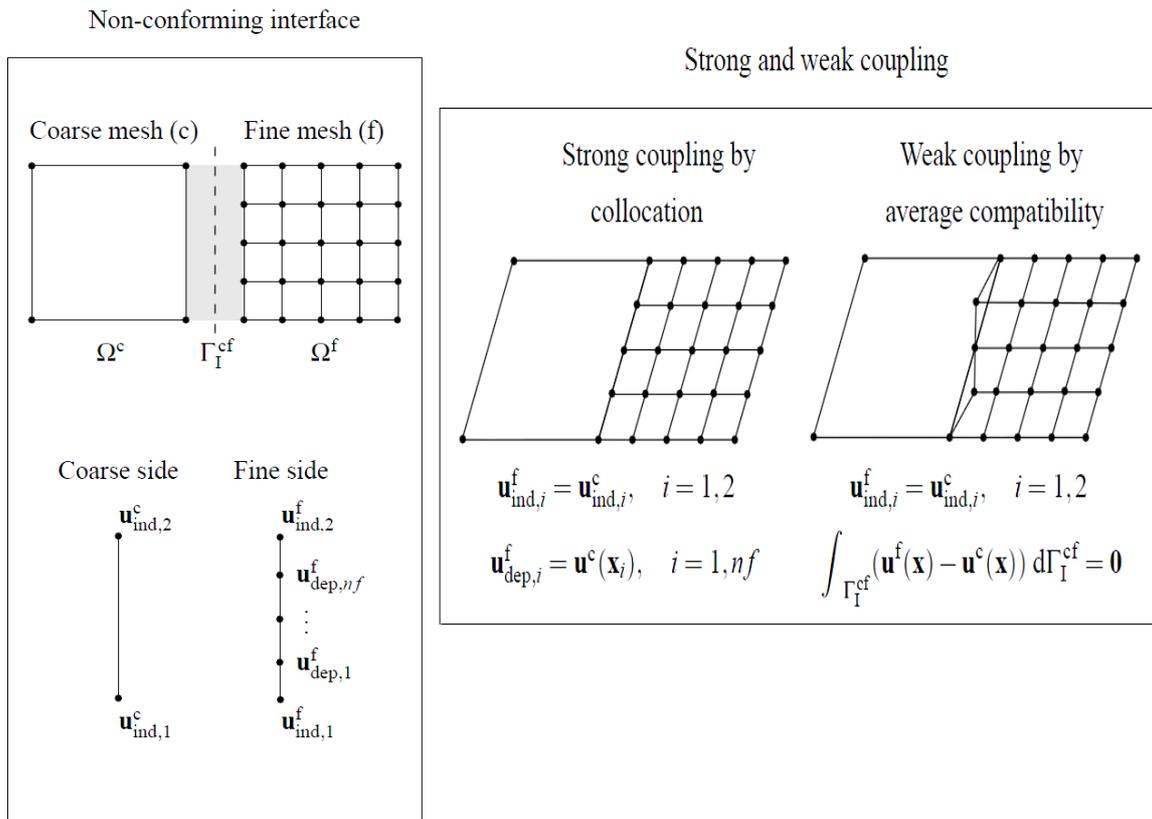
δηλαδή οι μετατοπίσεις των δύο υποφορέων θα πρέπει να ταυτίζονται για κάθε σημείο του συνόρου. Οι δύο πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές για τη σύνδεση μη-ταυτιζόμενων δικτύων αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως collocation και μέθοδοι mortar. Η ασθενής διατύπωση της σχέσεως (1.1) ορίζεται ως :

$$\int_{\Gamma_I} w(\mathbf{x})(\mathbf{u}^f(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^c(\mathbf{x})) d\Gamma_I = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

Η μέθοδος collocation (η οποία θα χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία) θέτει τους συντελεστές w ίσους με τη συνάρτηση Dirac δ για κάθε κόμβο του υποφορέα Ω^f στο σύνορο Γ_I . Επομένως οι μετατοπίσεις του υποφορέα Ω^f στο σύνορο Γ_I μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις σχήματος N^c των coarse στοιχείων περιορισμένες στο σύνορο και τις μετατοπίσεις $\mathbf{u}^c(\mathbf{x})$ ως εξής :

$$\mathbf{u}^f = \mathbf{N}^c \mathbf{u}^c \text{ στο σύνορο } \Gamma_I \quad (1.3)$$

Αντίθετα στην περίπτωση των mortar μεθόδων το συμβιβαστό των μετατοπίσεων ικανοποιείται μόνο κατά την έννοια ενός μέσου όρου όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1 : Non-conforming σύνορα μεταξύ υποφορέων. Ισχυρή και ασθενής διατύπωση του συμβιβαστού των μετατοπίσεων.

Σημειώνουμε ότι στο Σχήμα 1 ως ανεξάρτητοι κόμβοι (independent nodes) ορίζονται εκείνοι που έχουν ομόλογο και στους δύο υποφορείς (fine και coarse), ενώ εκείνοι που δεν έχουν ομόλογο χαρακτηρίζονται ως εξαρτημένοι (dependent). Επίσης στη βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί και αρκετές άλλες μέθοδοι σύνδεσης (όπως λόγου χάρη εκείνες που βασίζονται σε μια ασθενή σύνδεση με βάση τη στιβαρότητα των συνδεόμενων υποφορέων στην περίπτωση των ετερογενών υλικών), όπου μελετάται η επίδραση του τρόπου σύνδεσης των υποφορέων στην ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων.

Το πεδίο των μετατοπίσεων σε έναν πυκνό (fine) υποφορέα στο σύνορο μπορεί να διασπαστεί σε δύο κομμάτια, το μικροσκοπικό (m) και το μακροσκοπικό (M) ως εξής

$$\mathbf{u}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_m^f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_M^f(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

Αν λάβουμε υπόψη το μακροσκοπικό κομμάτι του πεδίου των μετατοπίσεων ως την παρεμβολή του αραιού δικτύου στο σύνορο, έχουμε

$$\mathbf{u}_M^f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^c(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

Λαμβάνοντας όμως υπόψη την εξίσωση (1.3), η οποία ουσιαστικά ορίζει τις μετατοπίσεις του πυκνού υποφορέα στο σύνορο ως την παρεμβολή του αντίστοιχου αραιού υποφορέα στο σύνορο, καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathbf{u}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^c(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I \quad (1.6)$$

η οποία καταλήγει σε ένα μηδενικό πεδίο μικροσκοπικών μετατοπίσεων στο σύνορο, δηλαδή

$$\mathbf{u}_m^f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I \quad (1.7)$$

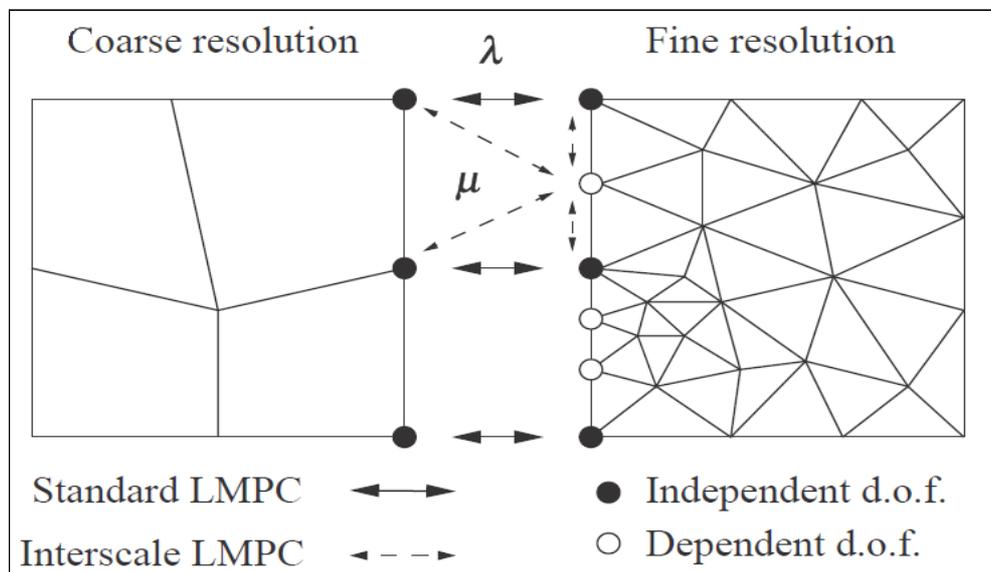
Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν στη θέση μιας τεχνικής collocation για το συμβιβαστό των μετατοπίσεων χρησιμοποιήσουμε μια mortar μέθοδο τότε η σχέση (1.6) ικανοποιείται μόνο σε ασθενή μορφή. Έτσι το μικροσκοπικό πεδίο των μετατοπίσεων δεν θα είναι μηδενικό στο σύνορο.

Επιπλέον, η χρήση της μεθόδου collocation στο σύνορο εξασφαλίζει μηδενικό μικροσκοπικό πεδίο μετατοπίσεων μόνο στην περίπτωση που οι κόμβοι του αραιού δικτύου αντιστοιχίζονται ακριβώς απέναντι με τους κόμβους του πυκνού δικτύου. Η αντίστοιχη εικόνα φαίνεται στο Σχήμα 1, μέσω του οποίου δώσαμε και τον ορισμό των εξαρτημένων και ανεξάρτητων κόμβων. Στην παρούσα εργασία λοιπόν, όπου

εφαρμόστηκε η τεχνική collocation, κάθε συνοριακός κόμβος του αραιού δικτύου έχει τον ομόλογο του στο πυκνό δίκτυο. Το συγκεκριμένο στοιχείο επιτυγχάνεται ως εξής : Κατά τη διαδικασία μιας πύκνωσης οι προϋπάρχοντες κόμβοι του αραιού δικτύου παραμένουν στις ίδιες θέσεις και στο πυκνό δίκτυο και απλά προστίθενται και άλλα στοιχεία και κόμβοι στον υποφορέα για να γίνει περισσότερο πυκνός.

Για τη σύνδεση μεταξύ κόμβων όπως υπαγορεύει η μέθοδος FETI, χρησιμοποιείται η έννοια των Linear Multipoint Constraints (LMPC). Τα LMPC χρησιμεύουν στη δέσμευση των εξαρτημένων κόμβων του πυκνού υποφορέα για να ικανοποιείται το συμβιβαστό των μετατοπίσεων. Οι συγκεκριμένες δεσμεύσεις αναφέρονται και ως interscale LMPC, σε αντίθεση με τα standard LMPC που έχουν εφαρμογή και στην κλασική μέθοδο FETI για την ικανοποίηση του συμβιβαστού των μετατοπίσεων στο σύνορο των υποφορέων.

Έτσι λοιπόν στο πλαίσιο της μεθόδου FETI, εκτός από τους πολλαπλασιαστές Lagrange οι οποίοι συνδέουν τους ανεξάρτητους κόμβους του συνόρου και είναι γνωστοί από την κλασική μέθοδο FETI (συμβολίζονται παρακάτω ως λ), απαιτείται ένα επιπλέον σύνολο πολλαπλασιαστών Lagrange που ορίζουν τα interscale LMPC για τη σύνδεση των εξαρτημένων κόμβων και θα συμβολίζονται με το γράμμα μ . Στο Σχήμα 2 απεικονίζονται τα παραπάνω.



Σχήμα 2 : Linear Multipoint Constraints σε γειτονικούς υποφορείς

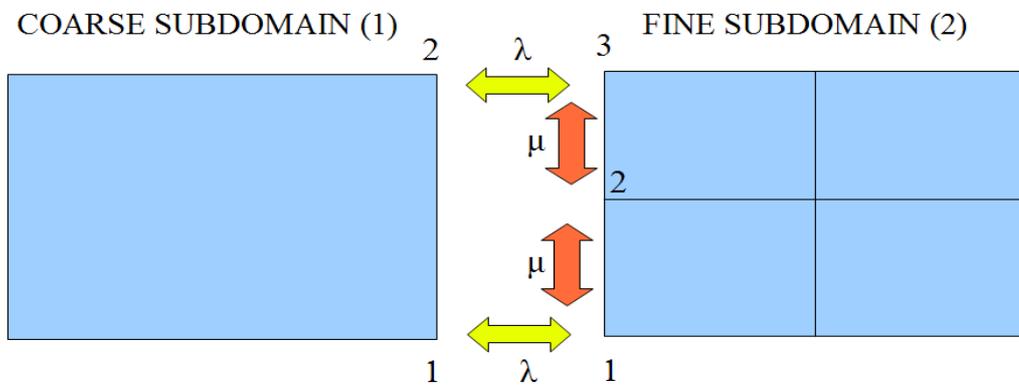
Σε μητρική μορφή το σύνολο των interscale LMPC διατυπώνεται ως εξής :

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \left[\mathbf{C}^{(1)} \quad \mathbf{C}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{C}^{(Ns)} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(Ns)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

όπου N_s είναι το πλήθος των υποφορέων.

Το μητρώο $\mathbf{C}^{(s)}$, το οποίο περιέχει τα interscale LMPC, συνδέει τους εξαρτημένους με τους ανεξάρτητους ενδοσυνοριακούς κόμβους του υποφορέα s . Η σύνδεση μεταξύ τους γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις συναρτήσεις σχήματος του αραιού υποφορέα στο σύνορο, όπως υπαγορεύει η σχέση (1.3).

Για τη μόρφωση του μητρώου $\mathbf{C}^{(s)}$ στην περίπτωση της ύπαρξης δύο πολύ απλών υποφορέων εξετάζουμε την παρακάτω περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3 : Παράδειγμα μόρφωσης μητρώου C

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζονται δύο υποφορείς. Ο υποφορέας 1 είναι διακριτοποιημένος με αραιό δίκτυο, ενώ ο υποφορέας 2 με πυκνό. Με κίτρινο χρώμα απεικονίζονται οι standard πολλαπλασιαστές Lagrange της μεθόδου FETI, ενώ με πορτοκαλί χρώμα απεικονίζονται οι interscale πολλαπλασιαστές Lagrange. Για τον υποφορέα 2 εξαρτημένος κόμβος είναι μόνο ο κόμβος 2 (ο οποίος στη συγκεκριμένη

περίπτωση είναι στη μέση των κόμβων 1 και 2 του αραιού υποφορέα 1) , ενώ για τους ανεξάρτητους κόμβους 1 και 3 ισχύει ό,τι και στη μέθοδο FETI όπου το συμβιβαστό των μετατοπίσεων επιβάλλεται μέσω του γνωστού boolean μητρώου \mathbf{B} όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

Έτσι λοιπόν η συνθήκη συμβιβαστού για τον εξαρτημένο κόμβο του υποφορέα 2 υπαγορεύει :

$$\mathbf{u}_2^{(2)} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1^{(2)} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3^{(2)} = \mathbf{0}$$

ή αλλιώς σε μητρική μορφή

$$\mathbf{C}^{(2)} \mathbf{u}^{(2)} = [-1/2 \quad 1 \quad -1/2] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{(2)} \\ \mathbf{u}_2^{(2)} \\ \mathbf{u}_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει ότι μετά την παραμόρφωση του φορέα ο κόμβος 2 του υποφορέα 2 θα είναι στην ευθεία που ορίζουν οι κόμβοι 1 και 2 του υποφορέα 1. Σημειώνουμε ότι ο κόμβοι 1 και 2 του υποφορέα 1 με τους αντίστοιχους κόμβους 1 και 3 του υποφορέα 2 θα ταυτίζονται μετά την παραμόρφωση λόγω της ύπαρξης του μητρώου \mathbf{B} της μεθόδου FETI.

Το σύνολο των interscale LMPC που απαιτούνται σε μια ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων μπορεί να πραγματοποιηθεί στη μέθοδο FETI με τη προσθήκη επιπλέον εξισώσεων που αντιστοιχούν στους πρόσθετους πολλαπλασιαστές Lagrange. Αυτές οι επιπλέον εξισώσεις προστίθενται στο μητρώο \mathbf{B} της FETI, δημιουργώντας έτσι μια επέκταση του μητρώου που θα συμβολίζεται με $\bar{\mathbf{B}}$, το οποίο συγκεντρώνει το κλασσικό μητρώο \mathbf{B} με το μητρώο \mathbf{C} ως εξής :

$$[\bar{\mathbf{B}}^{(1)} \quad \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{B}}^{(Ns)}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(1)} & \mathbf{C}^{(2)} & \dots & \mathbf{C}^{(Ns)} \\ \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} & \dots & \mathbf{B}^{(Ns)} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Ορίζεται λοιπόν αντίστοιχα και μια επέκταση του πεδίου των πολλαπλασιαστών Lagrange, το οποίο θα συμβολίζεται με Λ και περιέχει τους πολλαπλασιαστές Lagrange λ και μ όπως αυτοί ορίστηκαν προηγουμένως, δηλαδή

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Η συνθήκη συμβιβαστού των μετατοπίσεων που θα λαμβάνει υπόψη τους ανεξάρτητους αλλά και τους

εξαρτημένους κόμβους παίρνει τώρα τη μορφή :

$$\sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

Με αυτό τον τρόπο η εξίσωση ισορροπίας του φορέα

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

που στις ανάγκες της μεθόδου FETI έπαιρνε τη μορφή του συστήματος

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & (\mathbf{B}^e)^T \\ \mathbf{B}^e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

τώρα παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & (\bar{\mathbf{B}}^e)^T \\ \bar{\mathbf{B}}^e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Το πώς προσαρμόζονται στη συνέχεια τα μητρώα και το σύστημα της μεθόδου FETI, καθώς και οι προσαρμοσμένες θα το δούμε αναλυτικά σε επόμενο κεφάλαιο.

Πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι το μητρώο στιβαρότητας κάθε υποφορέα παραμένει αναλλοίωτο από αυτή τη διαδικασία, ενώ το μητρώο $\bar{\mathbf{B}}$ δεν είναι πλέον ένα Boolean μητρώο λόγω της εισαγωγή του μητρώου \mathbf{C} . Σε κάθε βήμα μιας ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων ο αριθμός των πυκνών και αραιών υποφορέων συνεχώς μεταβάλλεται, επομένως τα μητρώα του ενδοσυνοριακού προβλήματος πρέπει να υπολογίζονται ξανά κάθε φορά που κάποιος αραιός υποφορέας γίνεται πυκνός.

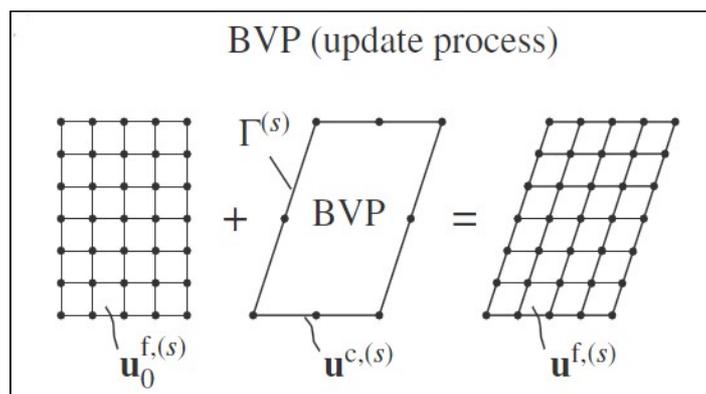
1.2.2 Πύκνωση υποφορέων και επίλυση προβλήματος συνοριακών τιμών (Boundary Value Problem)

Κατά τη διάρκεια της ανάλυσης, όπως θα προκύψει από κάποιο κριτήριο (π.χ. αστοχίας υλικού, διάδοσης ρωγμών) οι αραιοί υποφορείς σε συγκεκριμένες θέσεις θα χρειαστεί να αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους πυκνούς για την ακριβέστερη προσομοίωση του φαινομένου που μελετάμε. Για την πραγματοποίηση της διαδικασίας αυτής απαιτείται η επίλυση ενός Συνοριακού Προβλήματος (Boundary

Value Problem – BVP), με σκοπό ο νέος πυκνός υποφορέας να έχει τις ίδιες μετατοπίσεις στο σύνορο με εκείνες που είχε ο αντίστοιχος αραιός πριν την πύκνωση. Επομένως, πρέπει να πραγματοποιηθεί μία επίλυση του νέου πυκνού (fine) υποφορέα με επιβαλλόμενες συνοριακές μετατοπίσεις ίσες με τις αντίστοιχες του παλαιού αραιού (coarse), δηλαδή

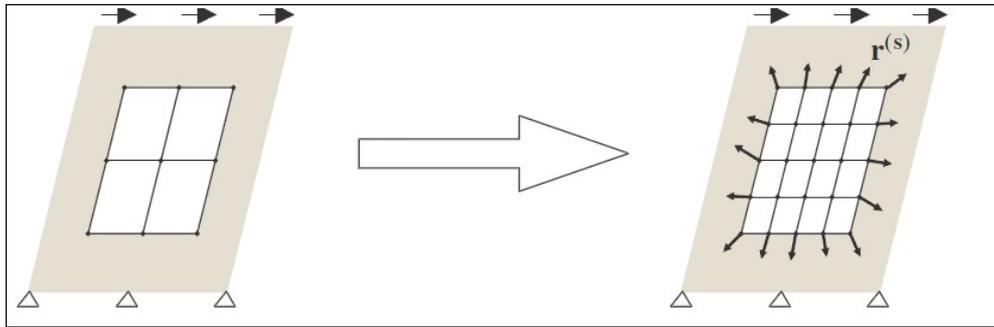
$$\mathbf{u}_f^{(s)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_c^{(s)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^{(s)} \quad (1.12)$$

Προφανώς κατά την επίλυση του BVP θα πρέπει να εισαχθούν και οι κατάλληλοι περιορισμοί στους υπόλοιπους κόμβους στο σύνορο του πυκνού υποφορέα για να παρακολουθήσουν τη μετατόπιση των επιβαλλόμενων συνοριακών μετατοπίσεων, οπότε να έχουμε τη διαδικασία που απεικονίζεται στο Σχήμα 4. Πιο αναλυτικά για αυτή τη διαδικασία θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο των εφαρμογών.



Σχήμα 4 : Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Boundary Value Problem – BVP)

Όπως γίνεται αντιληπτό, μετά την επίλυση του BVP, θα εμφανιστούν στους κόμβους του υποφορέα κάποιες υπολειμματικές δράσεις $\mathbf{r}^{(s)}$ που οφείλονται στη διαφορά μεταξύ των προϋπαρχόντων εξωτερικών δυνάμεων στη προγενέστερη κατάσταση παραμόρφωσης του υποφορέα και των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μετά την επίλυση του BVP. Με άλλα λόγια οι εξωτερικές και οι εσωτερικές δυνάμεις στο σύνορο αντιστοιχούν σε διαφορετικές καταστάσεις παραμόρφωσης του υποφορέα. Η συγκεκριμένη κατάσταση απεικονίζεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5 : Υπολειμματικό διάνυσμα δράσεων μετά την επίλυση του BVP

Λεπτομέρειες για τον υπολογισμό του υπολειμματικού διανύσματος δράσεων, αλλά και τον τρόπο χειρισμού του προβλήματος δίνονται σε επόμενη ενότητα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται πρόσθετα και ανεξάρτητα από τη μέθοδο FETI. Εντούτοις, η εν λόγω διαδικασία πραγματοποιείται μόνο στην περίπτωση ανάγκης πύκνωσης ενός υποφορέα και από εκείνο το σημείο και μετά οι διαφορετικές κλίμακες (αραιός – πυκνός υποφορέας) αντιμετωπίζονται ταυτόχρονα.

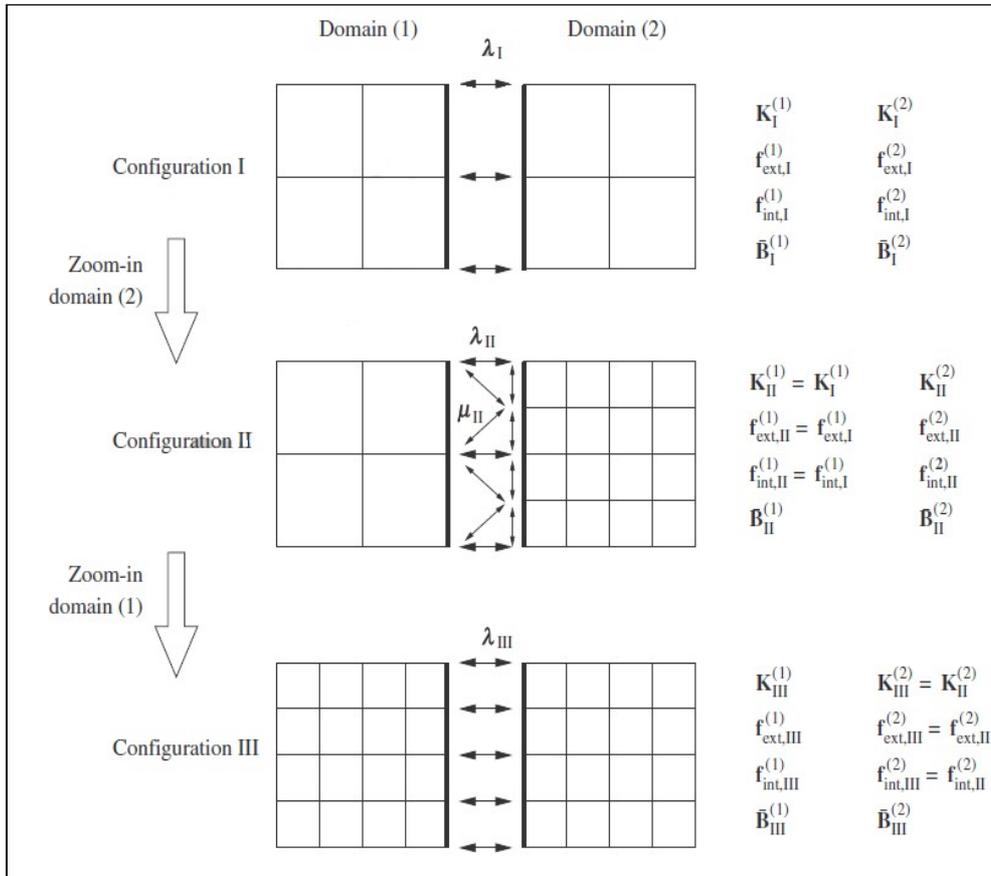
1.2.3 Μέθοδος χαλάρωσης (relaxation process)

Μέτα από τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως ισχύει το συμβιβαστό των μετατοπίσεων στο σύνορο μεταξύ των υποφορέων, καθώς οι μετατοπίσεις του πυκνού υποφορέα υπολογίστηκαν ως η παρεμβολή των μετατοπίσεων του αραιού. Όμως με αυτό τον τρόπο δεν έχει εξασφαλιστεί και η ισορροπία στο καθολικό επίπεδο του φορέα. Πράγματι, όπως είδαμε και προηγουμένως, εμφανίζεται ένα διάνυσμα υπολειμματικών δράσεων το οποίο δηλώνει ότι δεν ισχύει η ισορροπία. Για την αποκατάστασή της λοιπόν εφαρμόζεται η τεχνική της (καθολικής) χαλάρωσης (global relaxation process).

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση ύπαρξης δύο υποφορέων. Η διαδικασία της χαλάρωσης αποτελείται από ένα σύνολο επαναλήψεων με σκοπό την αποκατάσταση της ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή την ικανοποίηση των σχέσεων :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{(1)} \delta \mathbf{u}^{(1)} + \bar{\mathbf{B}}^{(1)T} \delta \boldsymbol{\Lambda}^{(1)} &= \mathbf{f}_{ext}^{(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{(1)T} \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{f}_{internal}^{(1)} \\
 \mathbf{K}^{(2)} \delta \mathbf{u}^{(2)} + \bar{\mathbf{B}}^{(2)T} \delta \boldsymbol{\Lambda}^{(2)} &= \mathbf{f}_{ext}^{(2)} - \bar{\mathbf{B}}^{(2)T} \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{f}_{internal}^{(2)} \\
 \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \delta \mathbf{u}^{(1)} + \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \delta \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις θα επιλυθούν με τη μέθοδο FETI. Σημειώνουμε ότι ο όρος $\bar{\mathbf{B}}^{(s)T} \mathbf{\Lambda}$ περιέχει τις συνολικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των υποφορέων. Επειδή αυτές οι δυνάμεις αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη ενδοσυνοριακή κατάσταση, ύστερα από την πύκνωση κάποιου υποφορέα θα πρέπει να ενσωματώνονται στη προηγούμενη κατάσταση. Έτσι λοιπόν έχουμε την ακόλουθη περίπτωση που απεικονίζεται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6 : Διαφορετικές περιπτώσεις αραιού – πυκνού υποφορέα

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μόνο τους κλασσικούς πολλαπλασιαστές Lagrange της μεθόδου FETI, καθώς δεν έχουμε σύνδεση υποφορέων με διαφορετική πυκνότητα δικτύου. Οπότε ισχύει

$$\mathbf{\Lambda}_I = \lambda_I \tag{1.14}$$

Στη συνέχεια πραγματοποιείται πύκνωση του δεύτερου υποφορέα. Σε αυτή την περίπτωση αλλάζει το μητρώο δυσκαμψίας του υποφορέα 2 και οι εσωτερικές δυνάμεις του υποφορέα 2 υπολογίζονται με βάση τις μετατοπίσεις που προκύπτουν από την επίλυση του BVP. Οι εξωτερικές δυνάμεις προσαρμόζονται στο νέο δίκτυο, ενώ σχετικά με τους πολλαπλασιαστές Lagrange απαιτείται επιπλέον η προσθήκη των interscale LMPC για τη σύνδεση των διαφορετικής πυκνότητας δικτύων. Για τις αρχικές συνθήκες λοιπόν του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange Λ χρησιμοποιούνται εκείνοι της προηγούμενης επίλυσης, δηλαδή :

$$\Lambda_{II} = \mathbf{R}_{\lambda, II} \lambda_I \quad (1.15)$$

Το μητρώο $\mathbf{R}_{\lambda, II}$ είναι ένα μητρώο το οποίο μας προσαρμόζει τους πολλαπλασιαστές Lagrange της προηγούμενης κατάστασης (I) στην τρέχουσα (II). Επομένως πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι σε αυτό το βήμα μεταφοράς από τη μια κατάσταση στην επόμενη οι πολλαπλασιαστές μ_{II} είναι μηδενικοί.

Στη συνέχεια με την πύκνωση του υποφορέα 1 ακολουθεί παρόμοια διαδικασία, δηλαδή υπολογίζεται το νέο μητρώο δυσκαμψίας του υποφορέα, οι εσωτερικές δυνάμεις προκύπτουν από τις μετατοπίσεις του BVP και το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης προσαρμόζεται στο νέο δίκτυο. Σχετικά με τους πολλαπλασιαστές Lagrange ισχύει η αρχικοποίηση :

$$\Lambda_{III} = \mathbf{R}_{\lambda, III} \lambda_{II} + \mathbf{R}_{\mu, III} \mu_{II} \quad (1.16)$$

Τα μητρώα $\mathbf{R}_{\lambda, III}$ και $\mathbf{R}_{\mu, III}$ αποσκοπούν στην ενσωμάτωση των ήδη υπολογισμένων πολλαπλασιαστών Lagrange λ_{II} και μ_{II} στο νέο δίκτυο του συνόρου μεταξύ των υποφορέων. Στην περίπτωση πλεοναζόντων πολλαπλασιαστών Lagrange απλά προστίθενται επιπλέον όροι στα μητρώα \mathbf{R} για να λάβουν υπόψη τις επιπλέον εξισώσεις, άρα δεν αλλάζει κάτι στη μεθοδολογία.

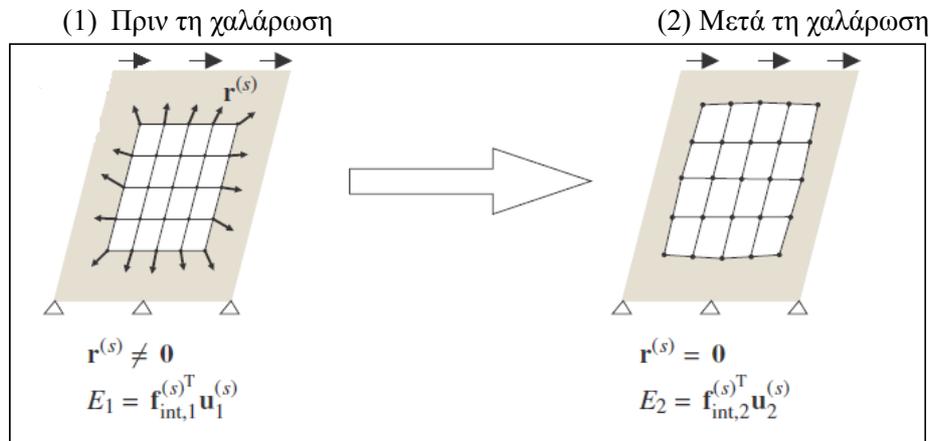
Σκοπός της διαδικασίας της χαλάρωσης είναι ο μηδενισμός του υπολειμματικού διανύσματος

$$\mathbf{r}^{(s)} = \mathbf{f}_{ext}^{(s)} - \bar{\mathbf{B}}^{(s)T} \Lambda - \mathbf{f}_{internal}^{(s)} \quad (1.17)$$

Σε κάθε βήμα της διαδικασίας της χαλάρωσης είναι εφικτό να παρακολουθούμε την ενεργειακή διαφορά μεταξύ των καταστάσεων προ της εισαγωγής ενός πυκνού υποφορέα και μετά την εισαγωγή, δηλαδή

$$E_{12} = |E_1 - E_2| \quad (1.18)$$

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7



Σχήμα 7 : Υποφορέας πριν και μετά τη χαλάρωση

Η ενέργεια στο βήμα n μπορεί να υπολογιστεί ως

$$E_n = \mathbf{f}_{\text{internal},n}^{(s)T} \mathbf{u}_n^{(s)} \quad (1.19)$$

Επιπλέον μπορεί να υπολογιστεί η ενεργειακή διαφορά

$$E_{r12} = E_{12} |E_1|^{(-1)} \quad (1.20)$$

Χαμηλές τιμές της ενέργειας E_{r12} υποδηλώνουν ότι η ενέργεια παραμόρφωσης μεταξύ του αραιού και του πυκνού υποφορέα δεν διαφέρουν αρκετά.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι εκτός από την επίλυση μέσω Πύκνωσης – BVP – Relaxation, μπορούμε μετά την πύκνωση να επιλύσουμε κατευθείαν το νέο φορέα με τη μέθοδο FETI αποφεύγοντας τα δύο τελευταία βήματα της προηγούμενης διαδικασίας. Σε επόμενο κεφάλαιο θα γίνει σύγκριση των δύο προσεγγίσεων επίλυσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

*ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ
ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΕΣ ΤΗΣ
ΜΕΘΟΔΟΥ FETI*

2.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων (multiscale) καθώς και αρκετά ακόμα, από τη σκοπιά της μεθόδου επίλυσης με υποφορές FETI, ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων με Linear Multipoint Constraints (LMPC) για την αναπαράσταση συγκεκριμένων συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι στην περίπτωση των προβλημάτων ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων απαιτείται η προσθήκη επιπλέον εξισώσεων για την επίτευξη του συμβιβαστού των μετατοπίσεων στο σύνορο υποφορέων διαφορετικής κλίμακας. Αυτό επιτυγχάνεται με την προσθήκη των λεγόμενων interscale LMPC, που εκφράζουν το συμβιβαστό των μετατοπίσεων στο σύνορο μεταξύ ενός υποφορέα με αραιό δίκτυο και ενός υποφορέα με πυκνότερο.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα δούμε πώς η μέθοδος FETI επεκτείνεται προκειμένου να ενσωματώσει τέτοιες αλλαγές, τροποποιώντας τις εξισώσεις της μεθόδου και κυρίως τη χρήση κατάλληλων προσταθεροποιητών.

2.2 Κλασσική μέθοδος FETI

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε επιγραμματικά ορισμένα στοιχεία της κλασσικής μεθόδου FETI. Σημειώνουμε ότι στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής μητρωικούς συμβολισμούς :

- Με \mathbf{K} θα συμβολίζουμε το μητρώο δυσκαμψίας που περιέχει τα αντίστοιχα μητρώα δυσκαμψίας των υποφορέων (N_s σε σύνολο) ως εξής

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{K}^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

- Με \mathbf{u} θα συμβολίζουμε το διάνυσμα των μετατοπίσεων για το οποίο ισχύει

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- Με \mathbf{f} θα συμβολίζουμε το διάνυσμα των εξωτερικών δράσεων για το οποίο ισχύει

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(N_s)} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

- Με \mathbf{B} θα συμβολίζουμε το μητρώο Boolean το οποίο συγκεντρώνει όλα τα μητρώα Boolean των υποφορέων ως εξής

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{B}^{(s)} \quad \dots \quad \mathbf{B}^{(N_s)}] \quad (2.4)$$

- Με \mathbf{L} θα συμβολίζουμε το μητρώο Boolean το οποίο συγκεντρώνει όλα τα μητρώα Boolean των υποφορέων τα οποία αντιστοιχίζουν τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας των υποφορέων στους καθολικούς βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος. Ισχύει

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}^{(1)} \quad \dots \quad \mathbf{L}^{(s)} \quad \dots \quad \mathbf{L}^{(N_s)}]^T \quad (2.5)$$

Επίσης ισχύει η σχέση :

$$\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{u}_g \quad (2.6)$$

όπου με \mathbf{u}_g συμβολίζεται το καθολικό διάνυσμα μετατοπίσεων του φορέα.

Ακόμη παρατηρούμε ότι το συμβιβαστό των μετατοπίσεων στο σύνορο των υποφορέων διατυπώνεται ως

$$\sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{B}^s \mathbf{u}^s = \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

ενώ έχουμε δει ότι το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας του φορέα για τη μέθοδο FETI έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & (\mathbf{B})^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Τελικώς το σύστημα της μεθόδου FETI έχει την εξής μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_I & -\mathbf{G}_I \\ -\mathbf{G}_I^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ -\mathbf{e} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

όπου

$$\mathbf{F}_I = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{F}_I^s = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{B}^s (\mathbf{K}^s)^+ (\mathbf{B}^s)^T = \mathbf{B} \mathbf{K}^+ \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{d} = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{d}^s = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{B}^s (\mathbf{K}^s)^+ \mathbf{f}^s = \mathbf{B} \mathbf{K}^+ \mathbf{f}$$

$$\mathbf{G}_I = [\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} \quad \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{R}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{B}^{(N_s)} \mathbf{R}^{(N_s)}] = \mathbf{B} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N_s)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{R}^{(1)})^T \mathbf{f}^{(1)} \\ \vdots \\ (\mathbf{R}^{(N_s)})^T \mathbf{f}^{(N_s)} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}$$

Στη συνέχεια γίνεται επίλυση κατά τα γνωστά (με επίλυση μέσω της μεθόδου PCPG) και ακολουθεί η εύρεση όλων των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν.

2.3 Προσταθεροποιητές κλασικής μεθόδου FETI

Όπως γνωρίζουμε στην κλασική μέθοδο FETI, οι βασικοί προσταθεροποιητές Dirichlet και Lumped έχουν αντίστοιχα εκφράσεις :

$$\tilde{\mathbf{F}}_I^{-1} = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{W}^s \mathbf{B}^s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^s - (\mathbf{K}_{ib}^s)^T (\mathbf{D}_{ii}^s)^{-1} \mathbf{K}_{ib}^s \end{bmatrix} (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{W}^s \quad (2.10)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_I^{-1} = \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{W}^s \mathbf{B}^s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^s \end{bmatrix} (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{W}^s \quad (2.11)$$

όπου το μητρώο \mathbf{W} (multiplicity scaling matrix) που εμφανίζεται σε όλες τις εκφράσεις των

προσταθεροποιητών, είναι ένα διαγώνιο μητρώο διαστάσεων $[N_b \times N_b]$ με κάθε διαγώνιο όρο ίσο με το αντίστροφο της πολλαπλότητας του αντίστοιχου β.ε. Ως πολλαπλότητα ενός β.ε. ορίζουμε τον αριθμό των υποφορέων στους οποίους ανήκει ο συγκεκριμένος β.ε.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΠΡΟΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΩΝ

Η γενικευμένη έκφραση των προσταθεροποιητών μπορεί να γραφεί ως

$$\tilde{\mathbf{F}}_I^{-1} = (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \vdots & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^s \text{ or } \mathbf{S}_{bb}^s & & \\ \mathbf{0} & & & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1} \quad (2.12)$$

Σημειώνουμε ότι για να μπορεί να οριστεί ο αντίστροφος $(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1}$ πρέπει η σχέση (2.12) να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις όπου δεν ορίζονται πλεονάζοντες (redundant) πολλαπλασιαστές Lagrange, διότι σε αντίθετη περίπτωση το μητρώο $(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)$ είναι ιδιάζον (singular). Στην περίπτωση λοιπόν όπου χρησιμοποιούνται πλεονάζοντες πολλαπλασιαστές Lagrange είναι εφικτός ο υπολογισμός του γενικευμένου αντιστρώφου του μητρώου, ο οποίος θα συμβολίζεται με $(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^+$. Οι γραμμές και στήλες που θα πρέπει να “αφαιρεθούν” από το μητρώο για να υπολογιστεί ο γενικευμένος αντίστροφος αντιστοιχούν στις γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις που ορίζουν οι πλεονάζοντες πολλαπλασιαστές Lagrange. Υπολογιστικά η εύρεση των θέσεων του μητρώου που πρέπει να αφαιρεθούν υπολογίζεται μέσω μιας παραγοντοποίησης του μητρώου και εύρεσης των θέσεων των μηδενικών διαγώνιων στοιχείων.

Οι εξισώσεις (2.10) και (2.11) προκύπτουν από τη γενική σχέση (2.12) με κατάλληλη επιλογή του μητρώου \mathbf{A} , δηλαδή :

- Οι επαναλήψεις της μεθόδου FETI χωρίς τη χρήση πλεοναζόντων πολλαπλασιαστών Lagrange με τη χρήση $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ στον προσταθεροποιητή (2.12) έχουν ακριβώς το ίδιο υπολειμματικό διάνυσμα με την περίπτωση της χρήσης του προστεθεροποιητή (2.10) και τη χρήση του multiplicity scaling matrix. Στην περίπτωση ετερογενών προβλημάτων η χρήση του προσταθεροποιητή (2.12) με $\mathbf{A} = (\text{diag}(\mathbf{K}))^{-1}$ ισοδυναμεί με τη χρήση του προσταθεροποιητή (2.10) και τη χρήση του superlumped scaling matrix.
- Στην περίπτωση όπου ορίζονται πλεονάζοντες πολλαπλασιαστές Lagrange, το μητρώο $\mathbf{A} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1}$ είναι ισοδύναμο με το multiplicity και superlumped scaling matrix αντίστοιχα αν

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \text{ ή } \mathbf{A} = (\text{diag}(\mathbf{K}))^{-1}$$

Έτσι στην περίπτωση της κλασσικής μεθόδου FETI, παρόλο που η έκφραση (2.12) είναι βολική για μαθηματική ανάλυση, στην πράξη χρησιμοποιούνται οι προσταθεροποιητές της σχέσης (2.10) ή (2.11) όπου αποφεύγεται η αντιστροφή του μητρώου $(\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)$.

2.4 Ενσωμάτωση LMPC στη μέθοδο FETI

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε την εφαρμογή της μεθόδου FETI στην περίπτωση που έχουμε LMPC. Έστω λοιπόν ότι στο καθολικό επίπεδο (global) έχουμε ένα σύνολο LMPC που εκφράζονται από την παρακάτω σχέση :

$$\mathbf{C}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Στην περίπτωση που έχουμε m σε πλήθος LMPC το πρόβλημα ισορροπίας του φορέα γράφεται στη μορφή :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & (\mathbf{C}_g)^T \\ \mathbf{C}_g & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_g \\ \boldsymbol{\mu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_g \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

όπου το \mathbf{C}_g είναι ένα μητρώο διαστάσεων $[m \times n]$.

Σύμφωνα με τις επιταγές της μεθόδου FETI η εξίσωση ισορροπίας του φορέα γράφεται

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

όπου το \mathbf{C} είναι ένα μητρώο διαστάσεων $\left[m \times \sum_{s=1}^{s=N_s} n^{(s)} \right]$, ενώ με $n^{(s)}$ συμβολίζεται το πλήθος των β.ε. του υποφορέα s.

Προκειμένου οι σχέσεις (2.14) και (2.15) να είναι ισοδύναμες, πρέπει να ισχύει

$$\mathbf{C}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ όταν } \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

δηλαδή

$$\mathbf{C}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Η επίλυση του συστήματος (2.15) μπορεί να γίνει με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Οι δύο πρώτοι είναι με εξωτερικές επαναλήψεις ως προς $\boldsymbol{\mu}$ και εσωτερικές ως προς $\boldsymbol{\lambda}$ και αντίστροφα. Η τρίτη μέθοδος, που θα εφαρμοστεί και στην εν λόγω εργασία, πραγματοποιεί παράλληλες επαναλήψεις ως προς $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\lambda}$. Σύμφωνα με αυτή την τακτική το σύστημα επιλύεται όπως και στη κλασική μέθοδο FETI, θεωρώντας ένα ενιαίο διάνυσμα πολλαπλασιαστών Lagrange $\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}$ και χρησιμοποιώντας διαφορετικές εκφράσεις προσταθεροποιητών από τις σχέσεις (2.10) και (2.11) γιατί αυτές δεν είναι επαρκείς σε αυτή την περίπτωση, όπως θα διαπιστώσουμε και από τις εφαρμογές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύστημα (2.15) της μεθόδου FETI παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & (\bar{\mathbf{B}})^T \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

όπου

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}^{(1)} & \bar{\mathbf{B}}^{(2)} & \dots & \bar{\mathbf{B}}^{(Ns)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(1)} & \mathbf{C}^{(2)} & \dots & \mathbf{C}^{(Ns)} \\ \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} & \dots & \mathbf{B}^{(Ns)} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ενώ καταλήγουμε στο σύστημα :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 & -\bar{\mathbf{G}}_1 \\ -\bar{\mathbf{G}}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ -\mathbf{e} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{K}^+ \bar{\mathbf{B}}^T \quad (2.22)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{K}^+ \mathbf{f} \quad (2.23)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R} \quad (2.24)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις είναι ίδιες με τις αντίστοιχες της κλασσικής μεθόδου FETI, χρησιμοποιώντας όμως τα γενικευμένα μητρώα.

Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τη γενικευμένη έκφραση προσταθεροποιητών τροποποιώντας την ως εξής :

$$\tilde{\mathbf{F}}_1^{-1} = (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddots & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^s \text{ or } \mathbf{S}_{bb}^s & & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T)^{-1} \quad (2.25)$$

όπου με το δείκτη b αναφερόμαστε τόσο στους ενδοσυνοριακούς βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με τους κλασσικούς πολλαπλασιαστές Lagrange της μεθόδου FETI όσο και με τους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με τους LMPC. Το επιπλέον κόστος της παραπάνω έκφρασης σε σχέση με τις εκφράσεις (2.10) και (2.11) της κλασσικής μεθόδου FETI έγκειται στην αντιστροφή (ή τη γενικευμένη αντιστροφή στην περίπτωση ύπαρξης πλεοναζόντων πολλαπλασιαστών Lagrange) του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^T)$ η οποία θα δούμε στη συνέχεια πώς μπορεί να πραγματοποιηθεί με το ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Το μητρώο $(\bar{\mathbf{B}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^T)$ έχει την έννοια ενός μητρώου βάρους όπως για παράδειγμα το scaling μητρώο που εμφανίζεται στους προσταθεροποιητές της κλασσικής μεθόδου FETI. Από τη σχέση (2.20) ισχύει :

$$\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{C}^T & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Στην περίπτωση μας ο όρος $\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}^T$ είναι διάφορος του μηδενός, διότι τα LMPC περιλαμβάνουν ενδοσυνοριακούς βαθμούς ελευθερίας. Επομένως κατανοούμε ότι η αντιστροφή του μητρώου (2.26), είτε με την έννοια της πλήρους αντιστροφής είτε με την έννοια εύρεσης του γενικευμένου αντιστρόφου, αποτελεί ένα σημείο προς βελτιστοποίηση, καθώς η αντιστροφή ενός πλήρους μητρώου έχει πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

Η λύση στο πρόβλημα αυτό δίνεται μέσω της κατάλληλης επιλογής του μητρώου \mathbf{C} . Καταρχήν η

επιλογή του μητρώου \mathbf{C} πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι δεσμεύσεις που επιβάλλονται μέσω των LMPC στο διάνυσμα των μετατοπίσεων \mathbf{u} να είναι ισοδύναμες με τις δεσμεύσεις που επιβάλλονται στο καθολικό διάνυσμα των μετατοπίσεων του φορέα \mathbf{u}_g , όπως ορίζουν οι σχέσεις (2.16) και (2.17). Έτσι λοιπόν επιλέγουμε :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_g (\mathbf{L}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{A}^{-1} \quad (2.27)$$

για την οποία, μέσω της σχέσης $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u}_g$, ισχύει $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$.

Η δημιουργία του μητρώου \mathbf{C} μέσω της εξίσωσης (2.27) είναι αρκετά απλή, καθώς το μητρώο \mathbf{C}_g υπαγορεύεται από τα LMPC του φορέα και το μητρώο $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ είναι ένα διαγώνιο μητρώο με τιμές ίσες με την πολλαπλότητα των βαθμών ελευθερίας. Επομένως στην περίπτωση που $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ η εξίσωση (2.27) αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο διαχωρισμός των συντελεστών των LMPC γίνεται με βάση την πολλαπλότητα του κάθε ενδοσυνοριακού βαθμού ελευθερίας. Αντίστοιχα, σε ετερογενή προβλήματα όπου $\mathbf{A}^{-1} = (\text{diag}(\mathbf{K}))$, το μητρώο $(\mathbf{L}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L})^{-1}$ αντιστοιχεί σε ένα σταθμισμένο διαχωρισμό με βάση τη στιβαρότητα του κάθε υποφορέα, έχουμε δηλαδή τη χρήση του λεγόμενου superlumped scaling μητρώου στον προσταθεροποιητή. Επομένως, εφόσον το μητρώο \mathbf{C} οριστεί όπως στη σχέση (2.27) ο διαχωρισμός των συντελεστών των LMPC μπορεί να γίνει είτε με βάση τη πολλαπλότητα του κάθε ενδοσυνοριακού βαθμού ελευθερίας (ενδείκνυται για ομογενή προβλήματα) είτε με βάση τη δυσκαμψία των υποφορέων (ενδείκνυται για ετερογενή προβλήματα).

Με την επιλογή του μητρώου \mathbf{C} μέσω της σχέσης (2.27) η γενικευμένη έκφραση του προσταθεροποιητή (2.25) γράφεται :

$$\tilde{\mathbf{F}}_1^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ (\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{A} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^s \text{ or } \mathbf{S}_{bb}^s & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ (\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{A} \end{bmatrix}^T \quad (2.28)$$

Στη παραπάνω έκφραση του προσταθεροποιητή, ο όρος $(\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{A}$ αντιστοιχεί στη διαδικασία scaling της κλασικής μεθόδου FETI και επομένως δεν απαιτεί επιπλέον υπολογιστικό κόστος. Το μόνο πρόσθετο κόστος προκύπτει από τη κατασκευή και παραγοντοποίηση του μητρώου $(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T)$, το οποίο όμως έχει διαστάσεις ίσες με το πλήθος των LMPC βαθμών ελευθερίας. Επομένως το κόστος του προσταθεροποιητή της σχέσης (2.28) είναι αρκετά συγκρίσιμο με το κόστος των κλασικών προσταθεροποιητών της μεθόδου

FETI.

Στο κεφάλαιο των εφαρμογών θα δούμε πώς η επιλογή του μητρώου \mathbf{C} μέσω της σχέσης (2.27) βελτιώνει τη μορφή του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^T)$ ώστε να είναι εφικτή η παραγοντοποίησή του και ο υπολογισμός του γενικευμένου αντιστρόφου του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

*ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI
ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ
ΚΛΙΜΑΚΩΝ*

3.1 Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα εξετάσουμε κάποιες εφαρμογές της μεθόδου FETI σε ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων (multiscale analysis). Σημειώνουμε ότι δεν θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του υλικού στην παρούσα ανάλυση, αλλά θα εστιάσουμε στη μέθοδο επίλυσης και την εφαρμογή της. Κατά τη διάρκεια των εφαρμογών θα δίνονται και σχετικές διευκρινήσεις καθώς και συμπεράσματα που προέκυψαν κατά την υλοποίηση των εφαρμογών και αναφέρονται στην τροποποίηση και προσαρμογή της μεθόδου FETI σε προβλήματα πολλαπλών κλιμάκων και προβλήματα με μη-σύμφωνα (non-conforming) δίκτυα στοιχείων. Τέλος πρέπει να τονίσουμε ότι τα επόμενα παραδείγματα αφορούν γραμμική ανάλυση. Ανάλογα μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος (και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον) σε ένα περιβάλλον μη-γραμμικής ανάλυσης, με την ενσωμάτωση παράλληλα κάποιου νόμου υλικού, όπου θα παρακολουθείται και η εξέλιξη της αστοχίας.

3.2 Εφαρμογή 1

Στην παρούσα εφαρμογή θα εξετάσουμε ένα πολύ απλό πρόβλημα, ο οποίος απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Ο λόγος που εξετάζουμε ένα τόσο απλό παράδειγμα είναι η κατανόηση των εννοιών και του τρόπου εφαρμογής της μεθόδου FETI σε ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων.

Σημειώνουμε ότι η ανάλυση περιλαμβάνει διάφορες φάσεις, όπως θα δούμε και στη συνέχεια. Σε κάθε φάση πραγματοποιείται πύκνωση ενός υποφορέα και εκτελούνται όλες οι απαραίτητες ενέργειες που περιγράφονται στο θεωρητικό μέρος.

Τέλος αναφέρουμε ότι κάθε φάση επιλύεται με δύο διαφορετικούς τρόπους όπως αναφέρεται στη θεωρία. Ο ένας είναι μέσω της διαδικασίας Πύκνωση – BVP – Relaxation, ενώ ο άλλος είναι με απευθείας επίλυση του νέου φορέα μετά την πύκνωση με τη μέθοδο FETI (αναφέρεται στα αποτελέσματα ως Global FETI).

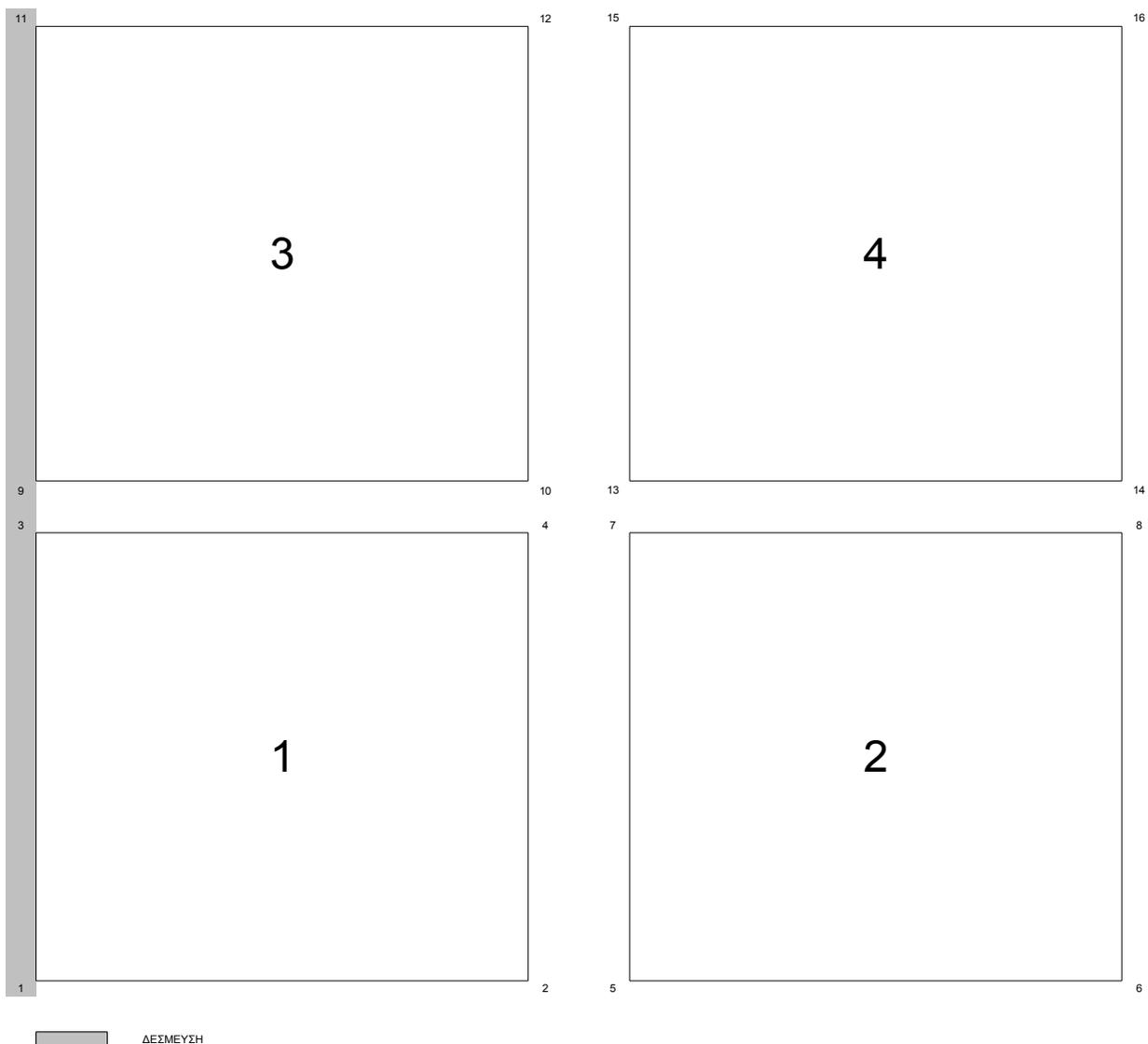
ΦΑΣΗ 0

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 1) ο φορέας είναι αραιός με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 12
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 18
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβλημα
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 1.0 (m)

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 1.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 1 : Phase 0 – Example 1

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

Στο στάδιο αυτό ο φορέας, όπως παρατηρούμε, δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα οπότε επιλύεται με τη μέθοδο FETI κατά τα γνωστά και λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα. Στα αποτελέσματα θα απεικονίζονται οι δύο διαφορετικοί τρόποι επίλυσης του προβλήματος πολλαπλών κλιμάκων (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως) καθώς και η χρήση των κλασσικών προσταθεροποιητών της μεθόδου μέσω του multiplicity scaling μητρώου W σύμφωνα με τις σχέσεις (2.10) και (2.11), ή η χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών μέσω του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T)$ σύμφωνα με τη σχέση (2.12).

PHASE 0

FINE SUBDOMAINS :	NULL
COARSE SUBDOMAINS:	1, 2, 3, 4
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	18
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	NULL
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	NULL

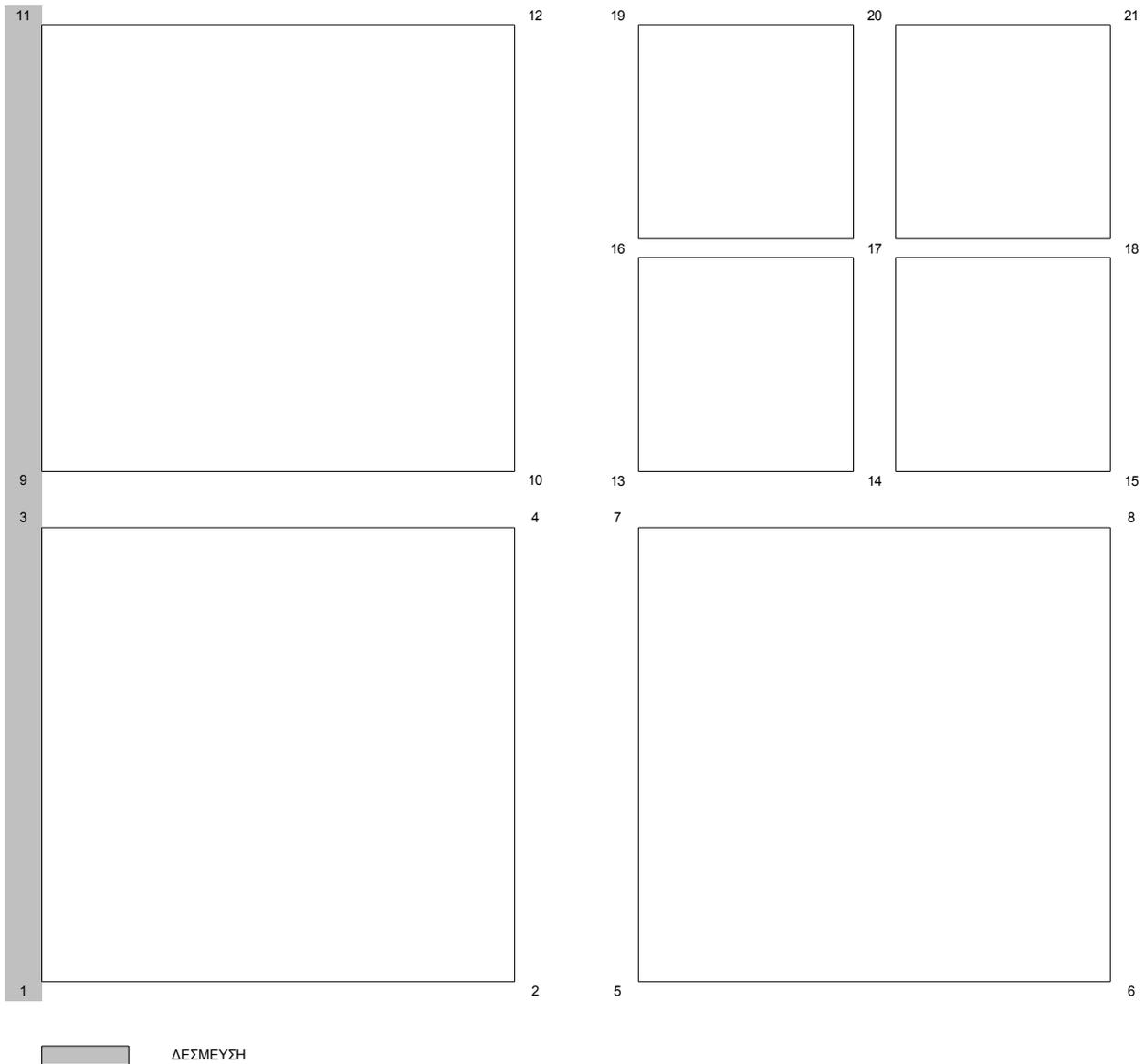
GLOBAL FETI

	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS	TOLERANCE
DIRICHLET	7	7	1,00E-07
LUMPED	7	7	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	7	7	1,00E-07

ΦΑΣΗ 1

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 2) πυκνώνουμε τον υποφορέα 4 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 22
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 26
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 1.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 1.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ε : 10^{-7}



Σχήμα 2 : Phase 1 – Example 1

Στην παρούσα φάση έχουμε ένα πυκνό υποφορέα (υποφορέας 4). Σημειώνουμε ότι σχετικά με τους interscale Lagrange multipliers (μητρώο C) μπορεί να έχουμε redundant και non-redundant υλοποίηση. Έτσι στη non-redundant υλοποίηση ο κόμβος 16 σχετίζεται μόνο με τους κόμβους 13 και 19, ενώ στη redundant υλοποίηση συνδέεται επιπλέον με τους κόμβους 10 και 12 του γειτονικού αραιού υποφορέα. Τέλος αναφέρουμε ότι το μητρώο C μπορεί να οριστεί κατάλληλα ώστε να μειωθεί το υπολογιστικό κόστος για τη χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών. Η συγκεκριμένη λεπτομέρεια όμως θα μελετηθεί στην επόμενη εφαρμογή.

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

Σχετικά με την επίλυση του BVP πρέπει να αναφέρουμε το εξής ιδιαίτερο σημείο. Κατά την επίλυση του BVP είναι γνωστές από το προηγούμενο βήμα οι μετατοπίσεις των κόμβων 13, 15, 19 και 21 και επιλύουμε ως προς τις υπόλοιπες. Προκειμένου όμως να ταυτίζεται η λύση μας με τη λύση της Global FETI, είναι απαραίτητο να επιβάλουμε επιπλέον συνθήκες ώστε μετά την επίλυση του BVP οι κόμβοι 14 και 16 να παρακολουθήσουν την παραμόρφωση των κόμβων (7-8) και (10-12) αντίστοιχα. Επομένως πρέπει να επιβάλουμε τις σχέσεις που ορίζει το μητρώο **C**.

Όσον αφορά το Relaxation σημειώνουμε ότι ως κριτήριο εξόδου της διαδικασίας χρησιμοποιούμε το μηδενισμό της νόρμας του υπολειμματικού διανύσματος δράσεων του υποφορέα κανονικοποιημένο προς τη νόρμα των εξωτερικών δράσεων του φορέα.

Τέλος για τη σύγκριση των μετατοπίσεων που θα λάβουμε μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας του Relaxation σχετικά με τις μετατοπίσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο FETI, χρησιμοποιούμε τη νόρμα

$$\frac{\| \mathbf{u}^{GLOBAL} - \mathbf{u}^{RELAXATION} \|}{\| \mathbf{u}^{GLOBAL} \|}$$

PHASE 1

FINE SUBDOMAINS :	4
COARSE SUBDOMAINS:	1, 2, 3
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	18
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	4
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	4

GLOBAL FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C
	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	11	11	8	8
LUMPED	11	11	9	9
DIRICHLET DIAGONAL	11	11	8	8

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	11	8
LUMPED	11	9
DIRICHLET DIAGONAL	11	8

Επίσης αναφέρουμε ότι και σε αυτή τη φάση όπως και στις επόμενες, για τις λύσεις στις οποίες έχουμε συγκλίνει ισχύει :

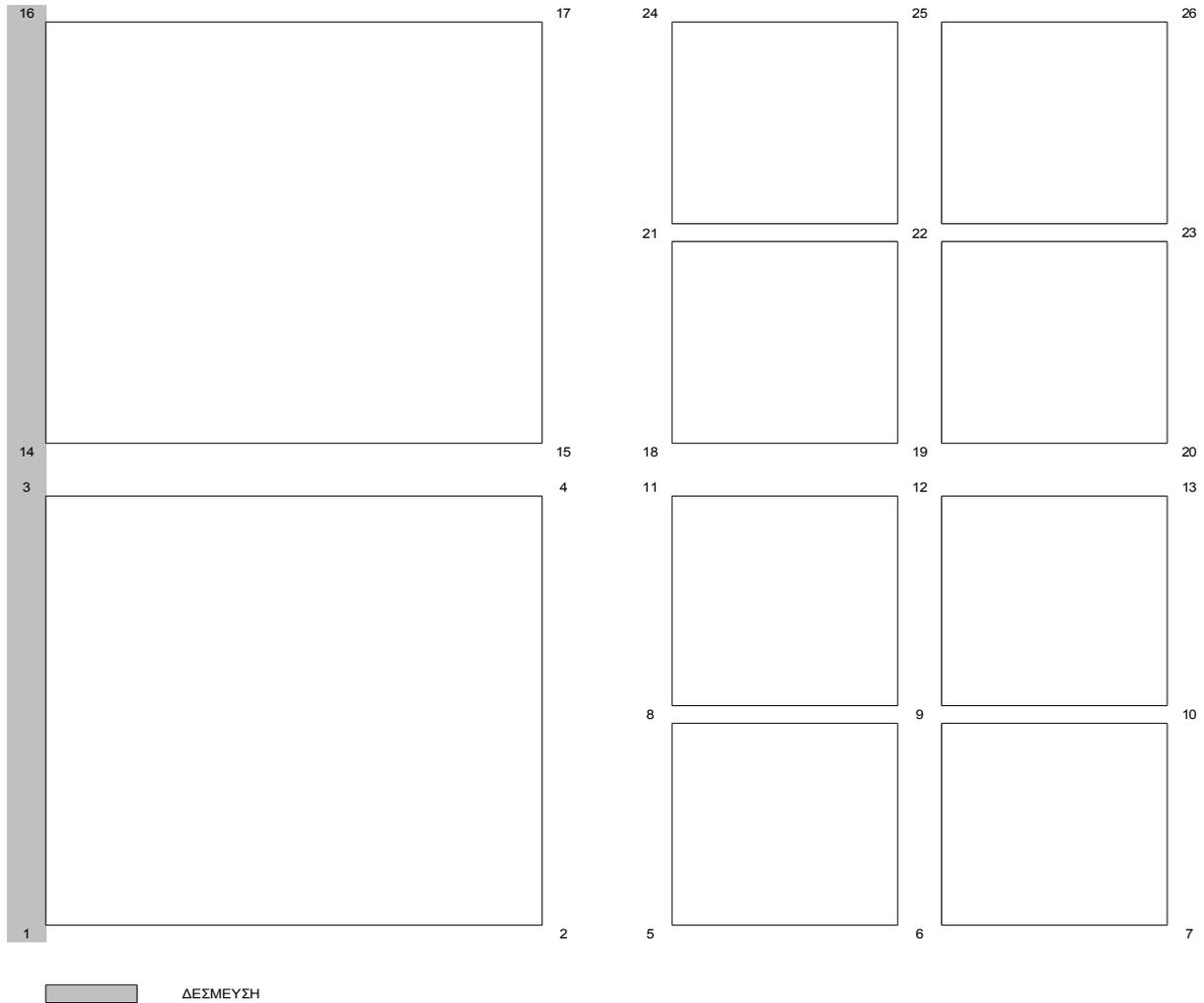
$$\frac{\|\mathbf{u}^{GLOBAL} - \mathbf{u}^{RELAXATION}\|}{\|\mathbf{u}^{GLOBAL}\|} \approx 10^{-10}$$

Ακόμη παρατηρούμε μια μικρή μείωση του αριθμού των επαναλήψεων κατά τη χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών σε σχέση με τη χρήση των κλασικών προσταθεροποιητών όπου εφαρμόζεται το multiplicity scaling μητρώο \mathbf{W} . Το εν λόγω φαινόμενο θα σχολιαστεί σε επόμενη εφαρμογή εκτενέστερα. Επίσης παρατηρούμε ότι οι επαναλήψεις της Global FETI είναι ίδιες με εκείνες της FETI του Relaxation και μάλιστα για σύγκλιση απαιτείται μόνο ένα βήμα Relaxation. Πράγματι σε γραμμική ανάλυση απαιτείται μόνο ένα βήμα Relaxation για σύγκλιση και αποκατάσταση της ισορροπίας του φορέα. Σε μια μη-γραμμική ανάλυση όμως όπου θα απαιτούνται περισσότερα βήματα Relaxation και εντός του κάθε βήματος θα έχουμε την επίλυση ενός συστήματος της μεθόδου FETI, είναι αμφίβολο αν θα είναι από άποψη υπολογιστικού κόστους πιο οικονομικό από την επίλυση της Global FETI.

ΦΑΣΗ 2

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 3) πυκνώνουμε τον υποφορέα 2 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 30
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 28
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 1.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 1.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ε : 10^{-7}



Σχήμα 3 : Phase 2 – Example 1

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

PHASE 2

FINE SUBDOMAINS :	2,4
COARSE SUBDOMAINS:	1,3
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	20
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	4
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	4

GLOBAL FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C
	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	12	12	8	8
LUMPED	12	12	9	9
DIRICHLET DIAGONAL	11	12	8	9

BVP – RELAXATION

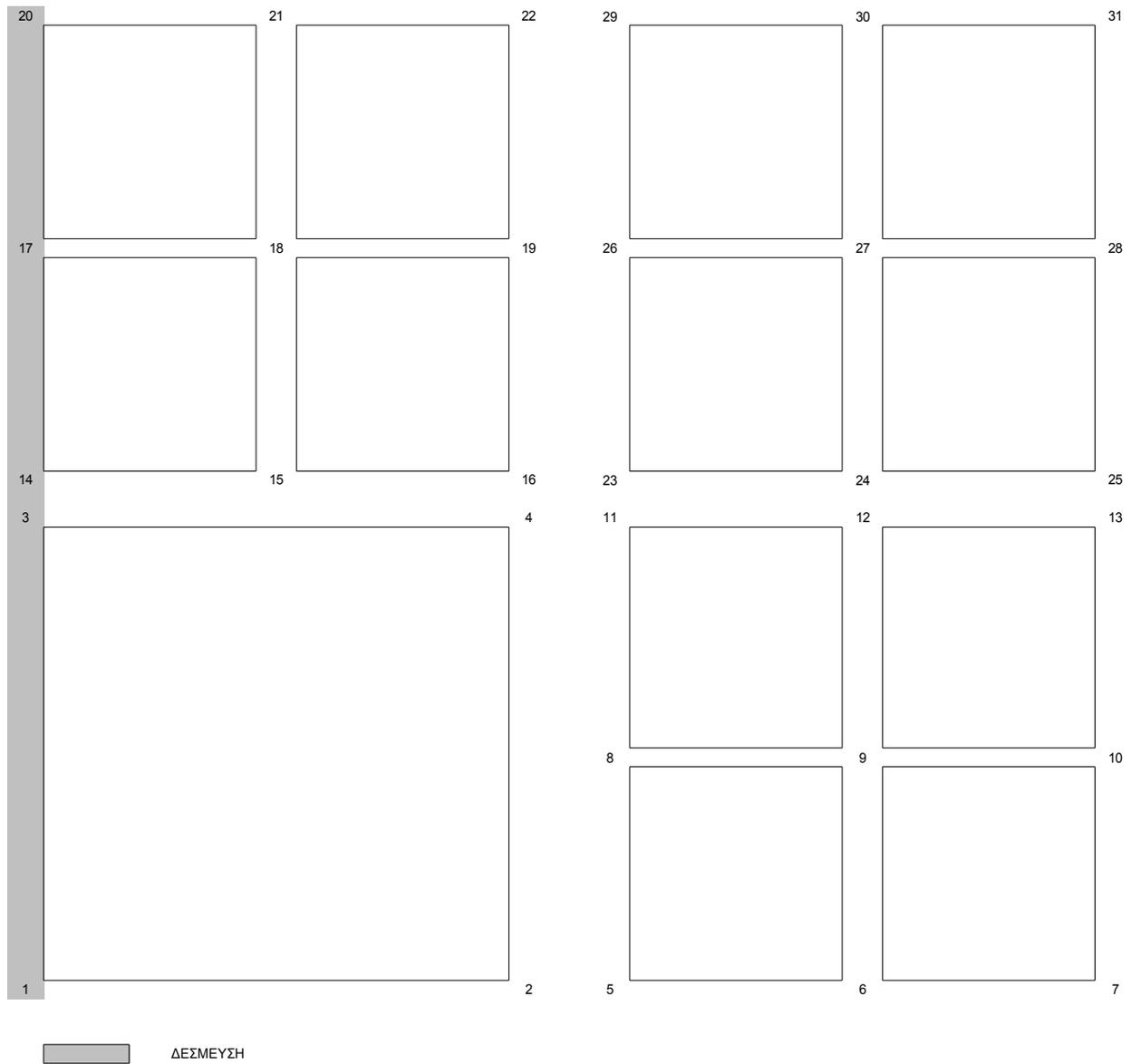
RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	12	8
LUMPED	12	9
DIRICHLET DIAGONAL	12	8

ΦΑΣΗ 3

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 4) πυκνώνουμε τον υποφορέα 3 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 36
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 30
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 1.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 1.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 4 : Phase 3 – Example 1

PHASE 3

FINE SUBDOMAINS :	2, 3, 4
COARSE SUBDOMAINS:	1
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	22
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	4
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	4

GLOBAL FETI

	CLASSIC PRECONDITIONERS WITH REDUNDANT C	CLASSIC PRECONDITIONERS WITH NON-REDUNDANT C	EXTENDED PRECONDITIONERS WITH REDUNDANT C	EXTENDED PRECONDITIONERS WITH NON-REDUNDANT C
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	11	14	8	8
LUMPED	11	14	9	10
DIRICHLET DIAGONAL	12	14	9	9

BVP – RELAXATION

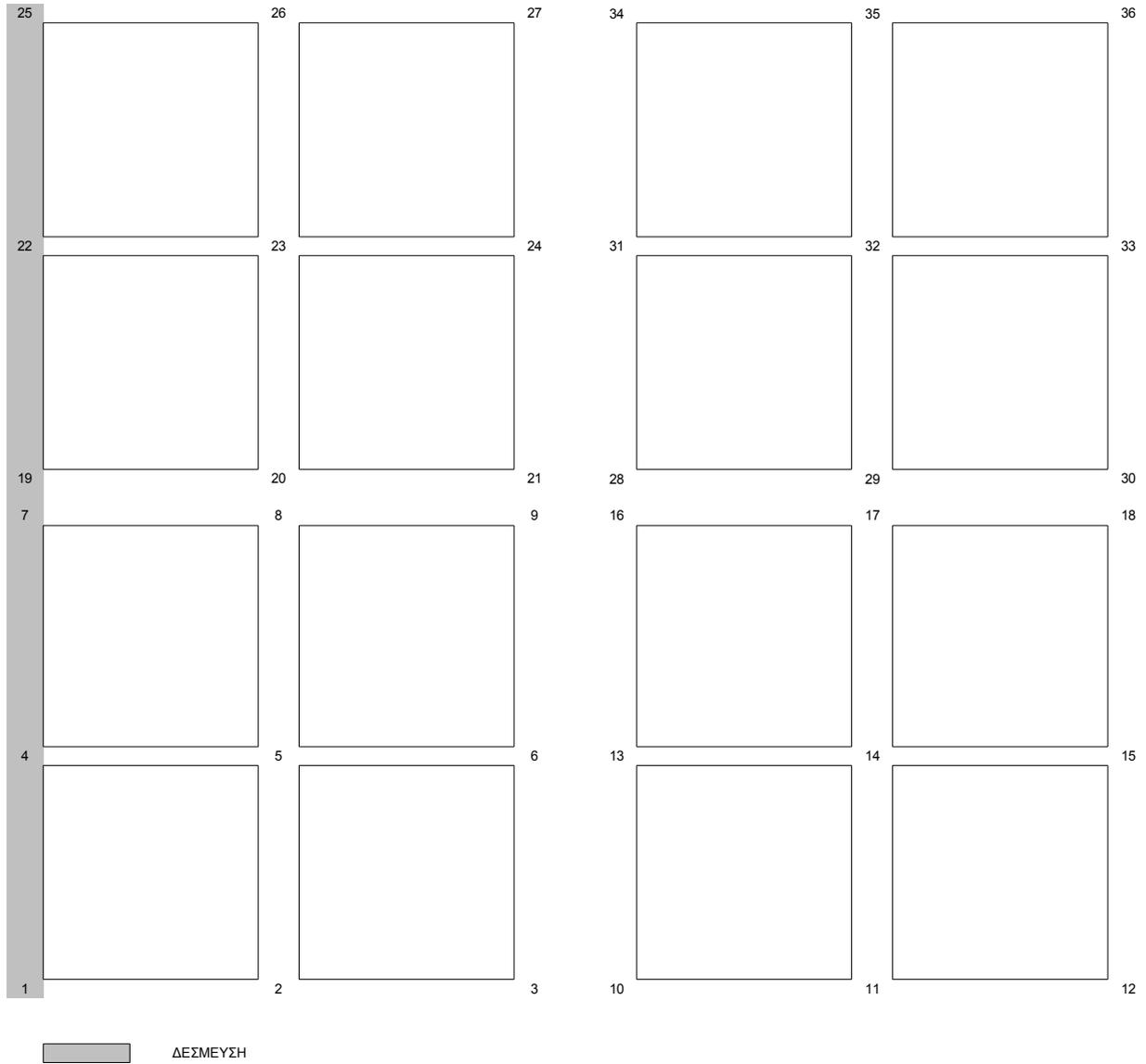
RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

	CLASSIC PRECONDITIONERS ITERATIONS	EXTENDED PRECONDITIONERS ITERATIONS
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	11	8
LUMPED	11	9
DIRICHLET DIAGONAL	12	9

ΦΑΣΗ 4

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 5) πυκνώνουμε τον υποφορέα 1 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 40
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 26
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 1.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 1.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 5 : Phase 4 – Example 1

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

PHASE 4

FINE SUBDOMAINS :	1, 2, 3, 4
COARSE SUBDOMAINS:	NULL
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	26
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	NULL
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	NULL

GLOBAL FETI

	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS	TOLERANCE
DIRICHLET	8	8	1,00E-07
LUMPED	9	9	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	9	9	1,00E-07

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	8	8
LUMPED	9	9
DIRICHLET DIAGONAL	9	9

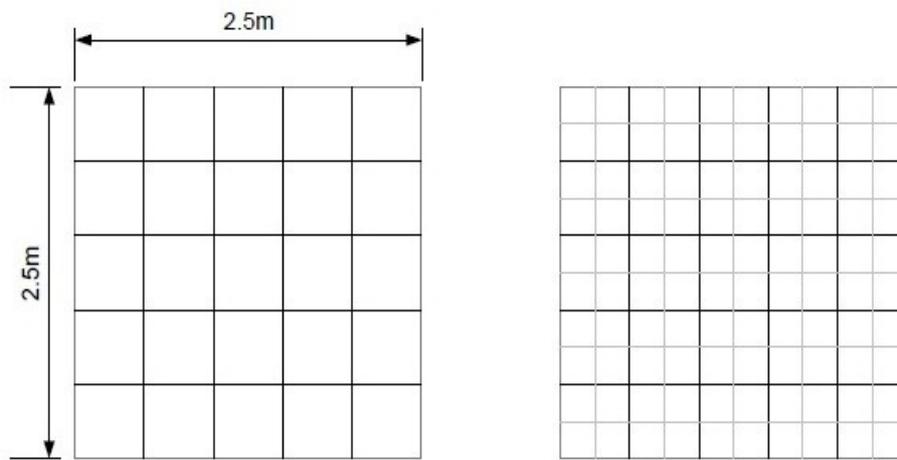
Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της χρήσης των κλασσικών προσταθεροποιητών ταυτίζονται με εκείνα της χρήσης των γενικευμένων, καθώς σε αυτή τη φάση δεν έχουμε interscale LMPC άρα ο τύπος των γενικευμένων προσταθεροποιητών καταλήγει σε εκείνο των κλασσικών.

3.3 Εφαρμογή 2

Στην εν λόγω εφαρμογή θα εξετάσουμε ένα φορέα παρόμοιο με της προηγούμενης εφαρμογής όμως αρκετά μεγαλύτερο σε πλήθος βαθμών ελευθερίας. Τονίζεται ότι και σε αυτή την εφαρμογή ισχύουν τα σχόλια που έγιναν στην προηγούμενη σχετικά με την επίλυση του BVP, του Relaxation και τους προσταθεροποιητές. Η διαφορά είναι ότι τώρα θα σχολιάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τη χρήση των προσταθεροποιητών στην περίπτωση ύπαρξης non-conforming δικτύων.

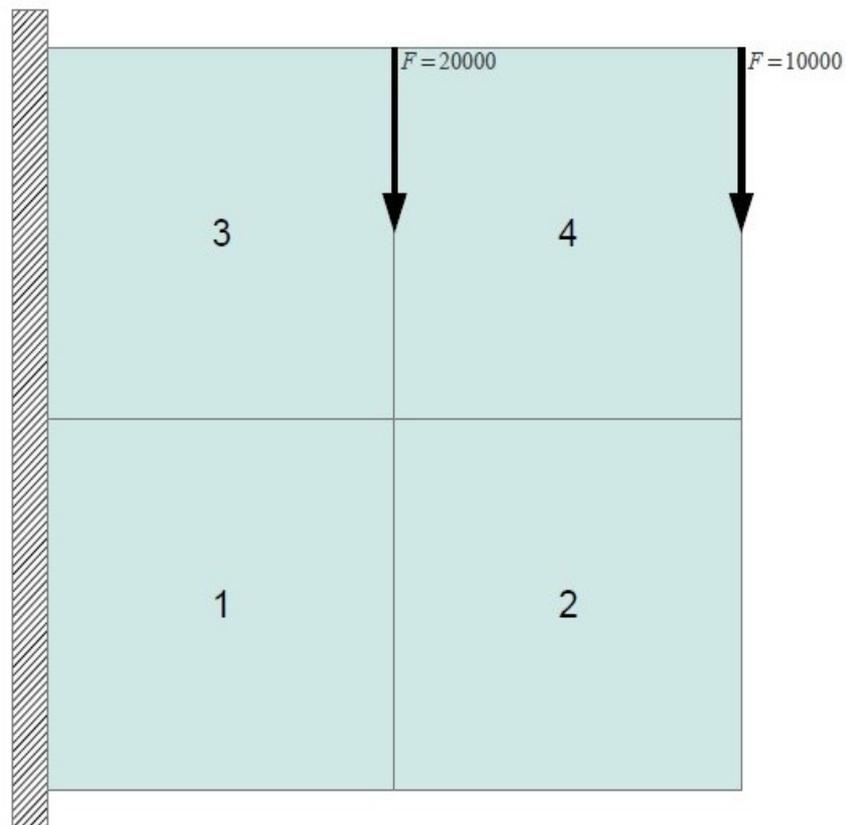
Οι φάσεις οι οποίες εμφανίζονται στην ανάλυση είναι ίδιες με της προηγούμενης εφαρμογής και απεικονίζονται στη συνέχεια. Ο φορέας έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$

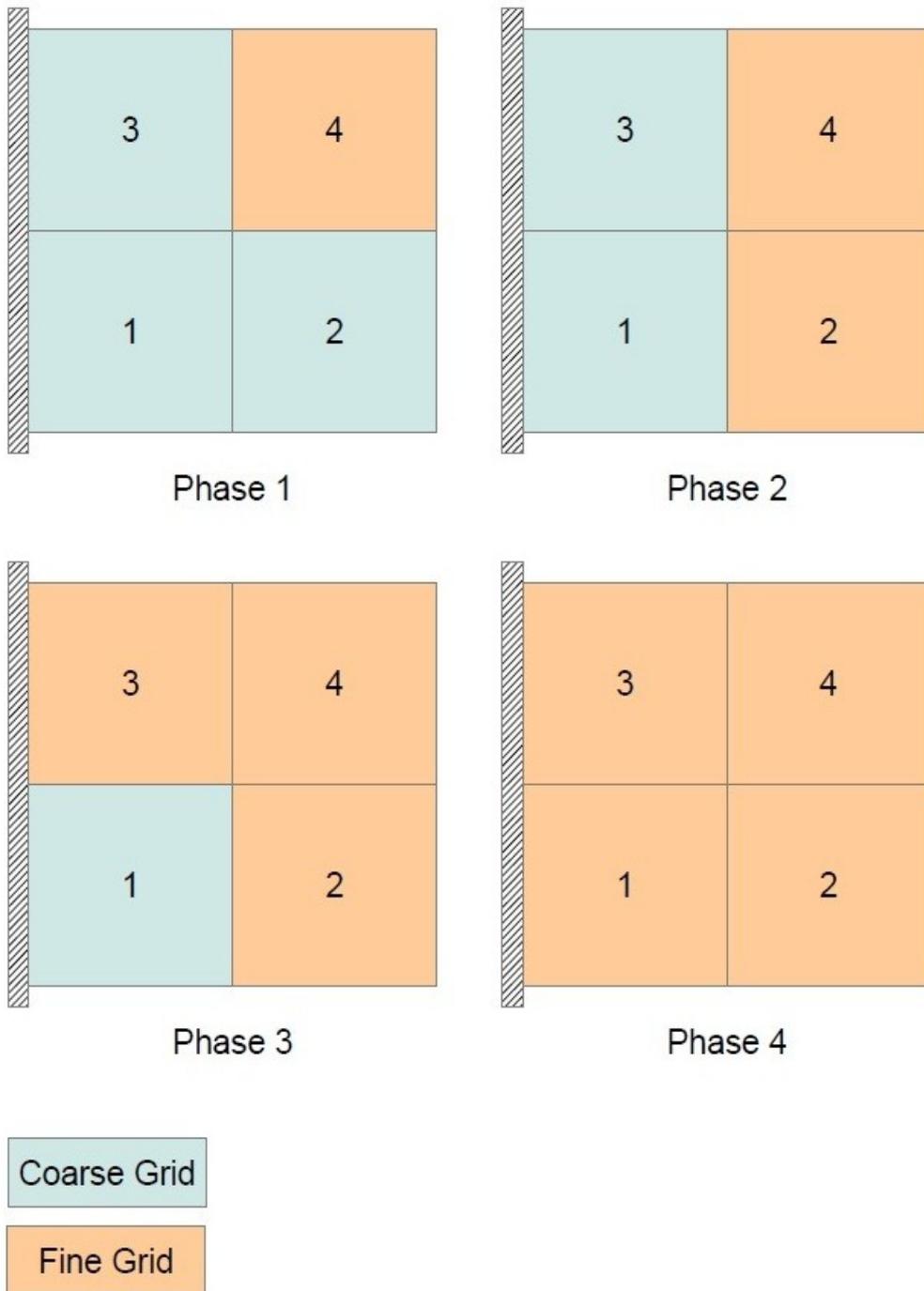


Coarse Grid 6x6

Fine Grid 11x11



Phase 0



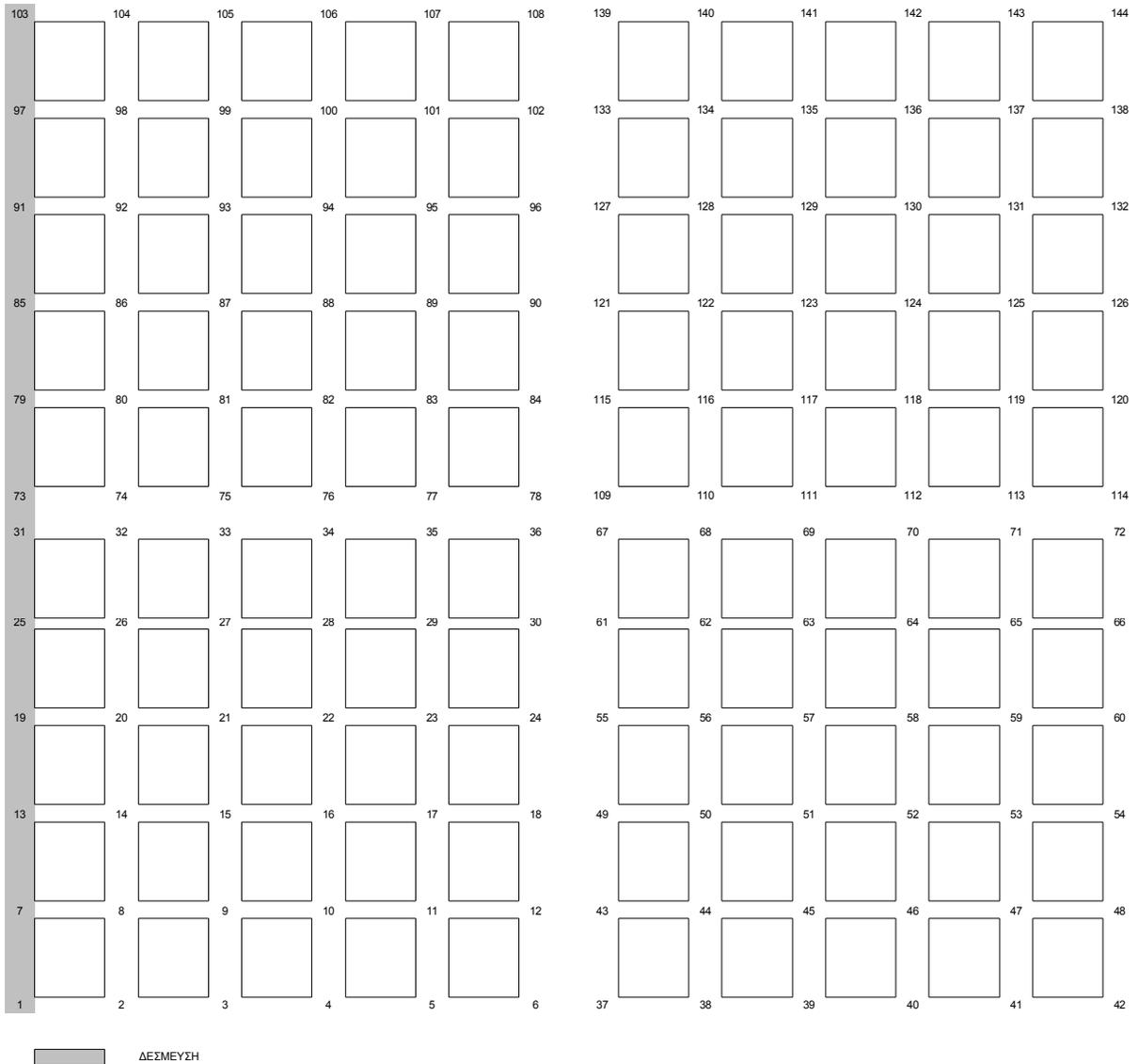
ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

Επιπλέον για τα αποτελέσματα που θα ακολουθήσουν σημειώνουμε τα εξής. Κατά τη χρήση του μητρώου **W** στους προσταθεροποιητές θα πραγματοποιηθεί και redundant και non-redundant υλοποίηση στο μητρώο των interscale LMPC C. Κατά τη χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών δεν παρατηρήθηκε διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ redundant και non-redundant υλοποίησης, οπότε θα αναφερθεί η non-redundant.

ΦΑΣΗ 0

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 6) όλοι οι υποφορείς είναι αραιοί και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 242
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 50
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 6 : Phase 0 – Example 2

PHASE 0

FINE SUBDOMAINS :	NULL
COARSE SUBDOMAINS:	1, 2, 3, 4
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	50
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	NULL
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	NULL

GLOBAL FETI

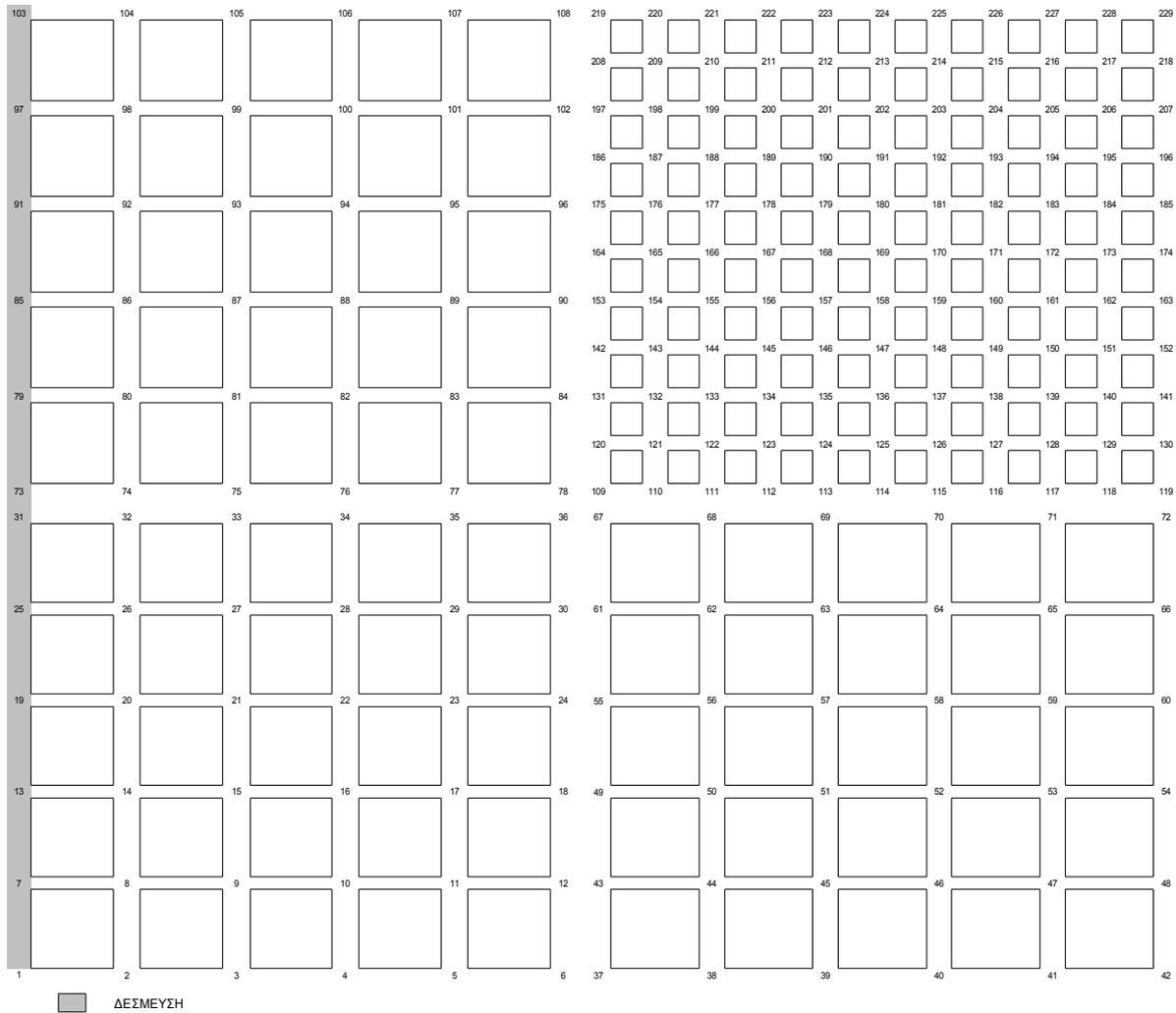
PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	TOLERANCE
	ITERATIONS	ITERATIONS	
DIRICHLET	10	10	1,00E-07
LUMPED	15	15	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	12	12	1,00E-07

Παρατηρούμε, όπως άλλωστε αναμενόταν, ότι στην κλασσική μέθοδο FETI οι κλασσικοί προσταθεροποιητές ταυτίζονται με τους γενικευμένους.

ΦΑΣΗ 1

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 7) πυκνώνουμε τον υποφορέα 4 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 390
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 70 (non-redundant) – 90 (redundant)
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 7 : Phase 1 – Example 2

PHASE 1

FINE SUBDOMAINS :	4
COARSE SUBDOMAINS:	1, 2, 3
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	50
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	20
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	20

GLOBAL FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C	ITERATIONS
	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	18	30	11
LUMPED	21	30	17
DIRICHLET DIAGONAL	19	29	15

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	ITERATIONS
	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	17	11
LUMPED	21	17
DIRICHLET DIAGONAL	18	14

Επίσης αναφέρουμε ότι και σε αυτή τη φάση όπως και στις επόμενες, για τις λύσεις στις οποίες έχουμε συγκλίνει ισχύει :

$$\frac{\|\mathbf{u}^{GLOBAL} - \mathbf{u}^{RELAXATION}\|}{\|\mathbf{u}^{GLOBAL}\|} \approx 10^{-9}$$

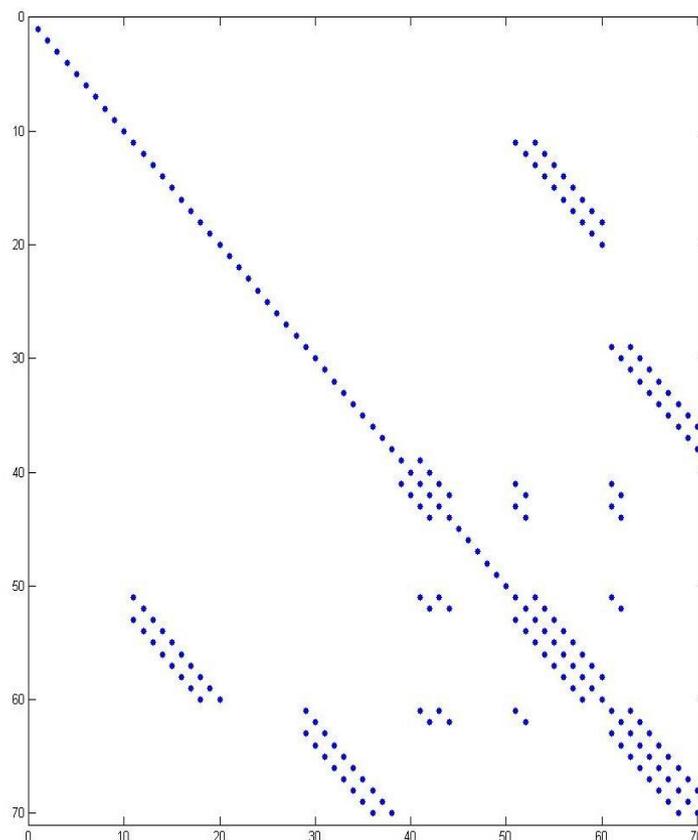
Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε μια υπεροχή των γενικευμένων προσταθεροποιητών έναντι των κλασσικών, στην περίπτωση που έχουμε non-conforming δίκτυα και επομένως interscale LMPC. Η συγκεκριμένη υπεροχή θα γίνει ακόμα πιο εμφανής στη συνέχεια. Οφείλουμε όμως να αναλογιστούμε (από άποψη υπολογιστικού κόστους) ότι η χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών απαιτεί, όπως αναφέρεται και στο θεωρητικό μέρος, τον υπολογισμό του γενικευμένου αντιστρόφου $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)^+$. Παρόλα αυτά η κατάλληλη επιλογή του μητρώου \mathbf{C} μέσω της σχέσης :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_g (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T$$

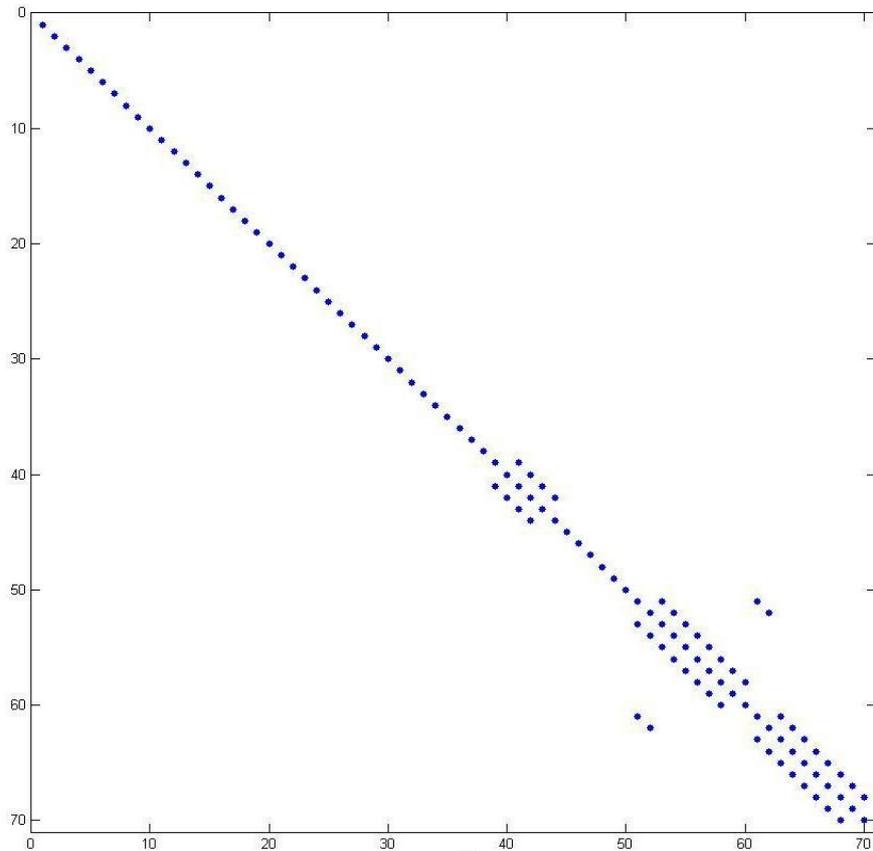
οδηγεί σε τέτοια μορφή το μητρώο $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)$ ώστε η παραγοντοποίηση και επίλυσή του δεν αποτελεί σημαντικό υπολογιστικό εμπόδιο. Έτσι λοιπόν στο Σχήμα 8 απεικονίζονται τα μη μηδενικά στοιχεία του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)$ αν το μητρώο \mathbf{C} υπολογιστεί συμβατικά σε κάθε υποφορέα, ενώ στο Σχήμα 9 απεικονίζονται τα μη μηδενικά στοιχεία του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)$ αν το μητρώο \mathbf{C} υπολογιστεί με βάση τη σχέση

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_g (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T$$

Παρατηρούμε τη σημαντική διαφορά στο εύρος των μη μηδενικών στοιχείων περί την κύρια διαγώνιο, καθώς και συμπεραίνουμε ότι η κατάλληλη επιλογή του μητρώου \mathbf{C} μπορεί να οδηγήσει σε οικονομική μορφή του μητρώου $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)$ και συγκρίσιμη σε υπολογιστικό κόστος με εκείνη της χρήσης των κλασσικών προσταθεροποιητών.



Σχήμα 8 : Μη μηδενικά στοιχεία μητρώου $(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T)$ με συμβατικό υπολογισμό του μητρώου \mathbf{C} σε κάθε υποφορέα



Σχήμα 9 : Μη μηδενικά στοιχεία μητρώου $(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T)$ με υπολογισμό του μητρώου \mathbf{C} από τη σχέση

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_g (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T$$

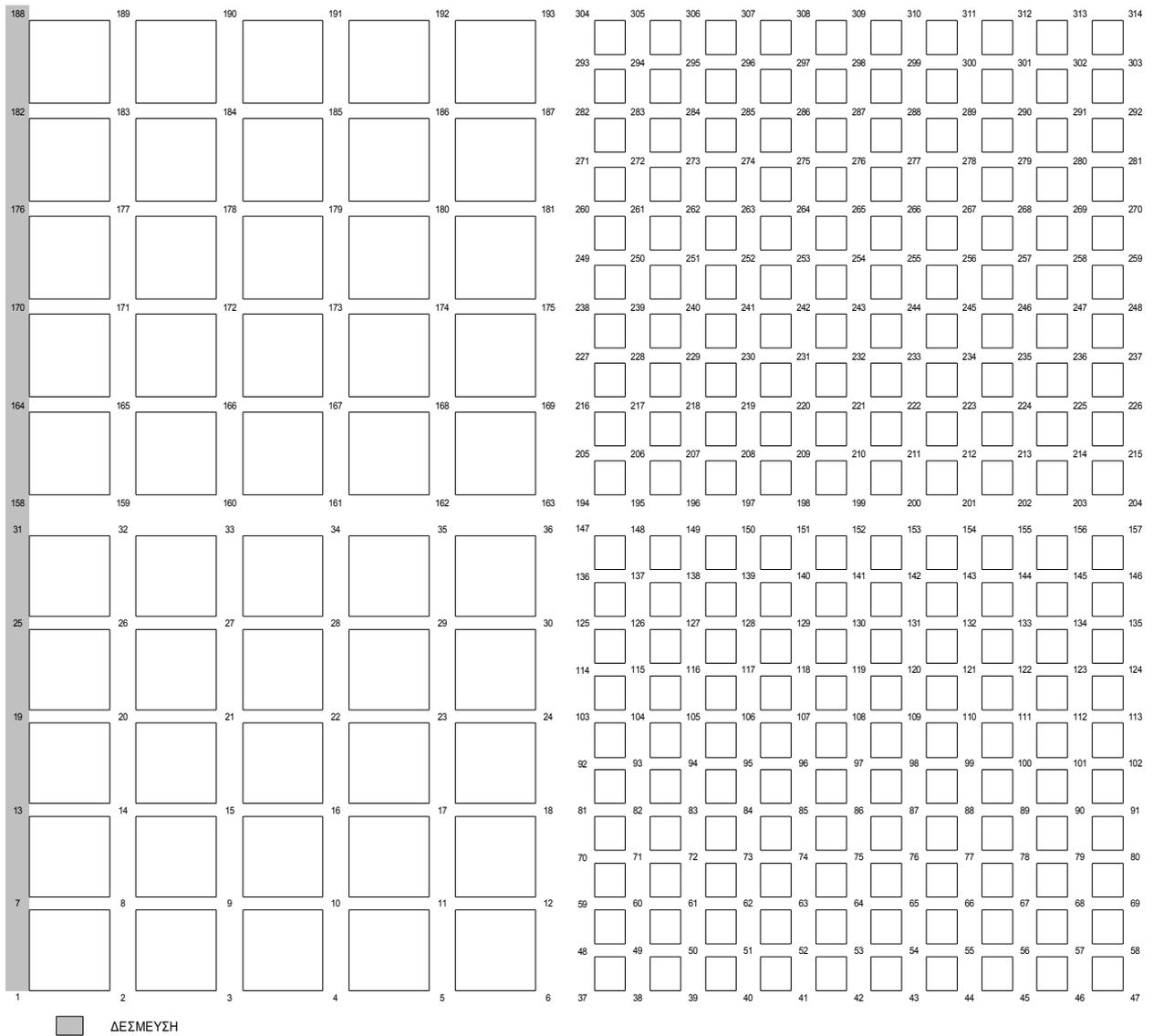
ΦΑΣΗ 2

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 10) πυκνώνουμε τον υποφορέα 2 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 550
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 80 (non-redundant) – 100 (redundant)
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης $\epsilon : 10^{-7}$



Σχήμα 10 : Phase 2 – Example 2

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

PHASE 2

FINE SUBDOMAINS :	2,4
COARSE SUBDOMAINS:	1,3
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	60
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	20
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	20

GLOBAL FETI

	CLASSIC PRECONDITIONERS WITH REDUNDANT C	CLASSIC PRECONDITIONERS WITH NON-REDUNDANT C	EXTENDED PRECONDITIONERS
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	18	32	11
LUMPED	22	32	19
DIRICHLET DIAGONAL	20	31	15

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

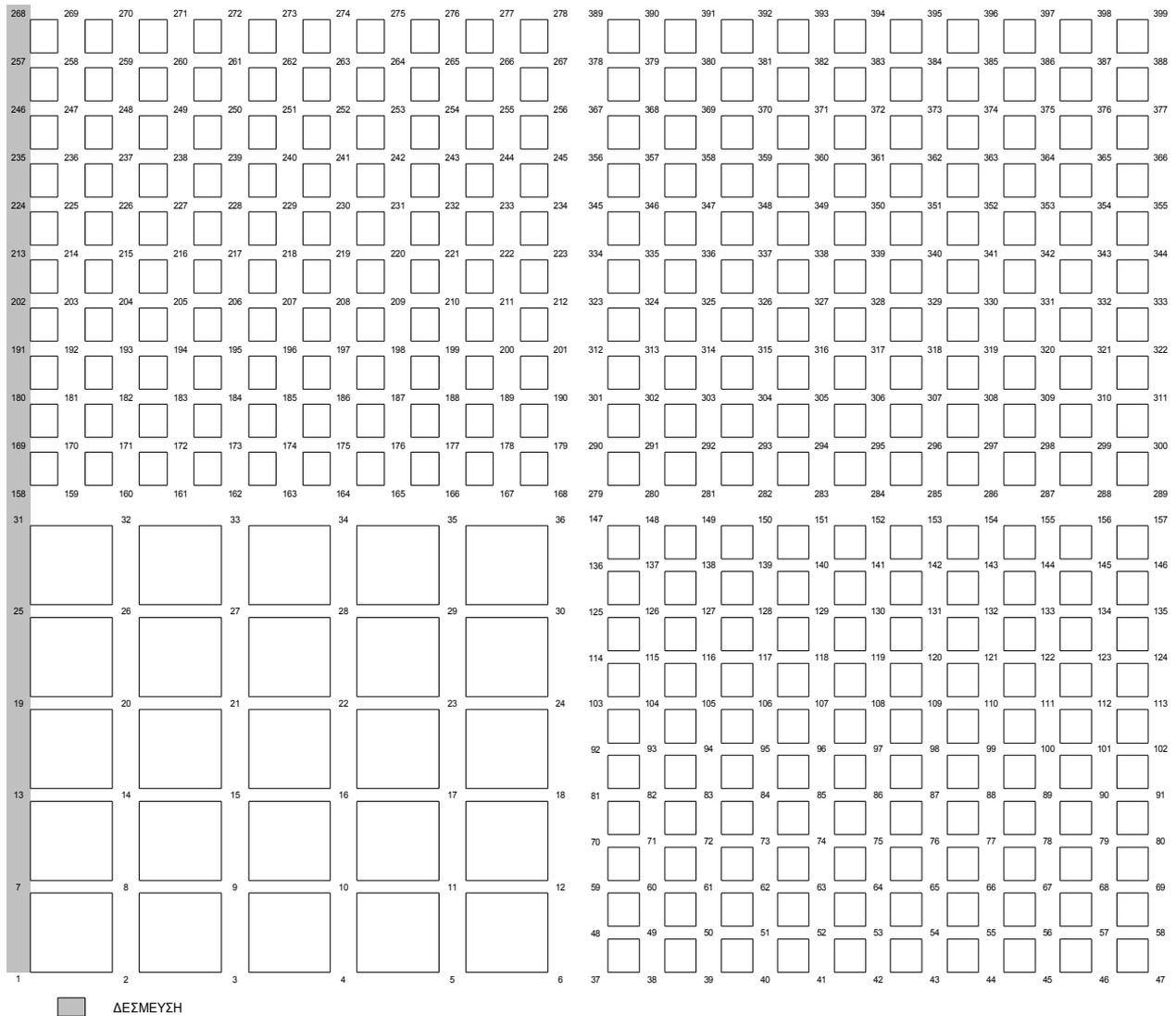
	CLASSIC PRECONDITIONERS WITH REDUNDANT C	EXTENDED PRECONDITIONERS
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	18	11
LUMPED	22	19
DIRICHLET DIAGONAL	20	15

ΦΑΣΗ 3

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 11) πυκνώνουμε τον υποφορέα 3 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 700
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 90 (non-redundant) – 110 (redundant)
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ



Σχήμα 11 : Phase 3 – Example 2

PHASE 3

FINE SUBDOMAINS :	2, 3, 4
COARSE SUBDOMAINS:	1
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	70
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	20
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	20

GLOBAL FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	WITH NON-REDUNDANT C	
	ITERATIONS	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	72	44	12
LUMPED	85	52	20
DIRICHLET DIAGONAL	77	49	16

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

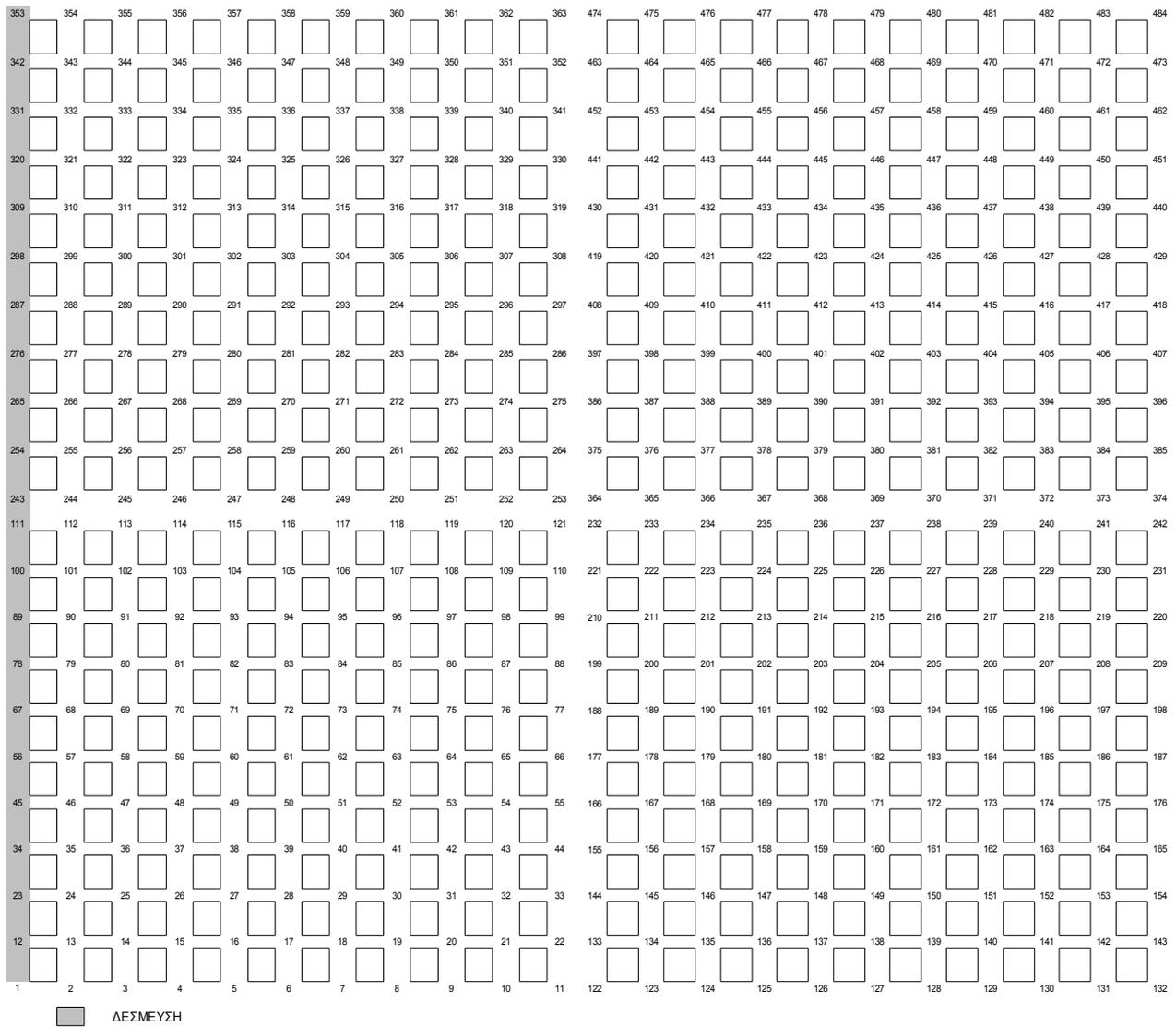
PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
	WITH REDUNDANT C	
	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	70	12
LUMPED	85	20
DIRICHLET DIAGONAL	78	16

ΦΑΣΗ 4

Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 12) πυκνώνουμε τον υποφορέα 1 και έχουμε :

- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 840
- ◆ Πλήθος Ενδοσυνοριακών Βαθμών Ελευθερίας : 90
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 5.0 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 5.0 (m)
- ◆ Αριθμός Υποφορέων : 4 (Διαχωρισμός σε 2 υποφορείς κατά x και 2 υποφορείς κατά y)
- ◆ Πάχος Πεπερασμένων Στοιχείων : 0.3
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $2.1 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}

ΚΕΦ. 3 : ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FETI ΣΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ



Σχήμα 12 : Phase 4 – Example 2

PHASE 4

FINE SUBDOMAINS :	1, 2, 3, 4
COARSE SUBDOMAINS:	NULL
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	90
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	NULL
LMPC MATRIX C NON-REDUNDANT DOF :	NULL

GLOBAL FETI

	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS	TOLERANCE
DIRICHLET	11	11	1,00E-07
LUMPED	20	20	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	16	16	1,00E-07

BVP – RELAXATION

RELAXATION FETI TOLERANCE :	1,00E-07
MAX(normR/normF) TOLERANCE :	1,00E-10
RELAXATION STEPS :	1

	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS
PRECONDITIONER	ITERATIONS	ITERATIONS
DIRICHLET	11	11
LUMPED	20	20
DIRICHLET DIAGONAL	16	16

3.4 Load Balancing

Κατά τη διάρκεια μιας ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων είναι σίγουρο ότι θα συνυπάρχουν στο φορέα υποφορείς με σημαντικά διαφορετικό πλήθος στοιχείων, δηλαδή αρκετά αραιοί και αρκετά πυκνοί. Σε μια τέτοια περίπτωση και σε ένα παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον είναι σημαντική η έννοια του Load Balancing, δηλαδή η ανάθεση υποφορέων σε επεξεργαστές με σχετικά ίδιο υπολογιστικό κόστος. Έτσι λοιπόν θα απαιτείται ο διαχωρισμός των πιο πυκνών υποφορέων σε περισσότερους υποφορείς ώστε κάθε επεξεργαστής να έχει τον ίδιο υπολογιστικό φόρτο.

Για παράδειγμα θα ελέγξουμε ποια είναι η συμπεριφορά της μεθόδου FETI στην περίπτωση που ο υποφορέας 4 (ο πυκνός υποφορέας) στη Φάση 1 της Εφαρμογής 2 (βλ. Σχήμα 7) χωριστεί σε δύο υποφορείς με μια οριζόντια τομή, ώστε όλοι οι υποφορείς να έχουν το ίδιο σχεδόν μέγεθος.

INTERFACE DOF BEFORE THE PARTITION : 70

INTERFACE DOF AFTER THE PARTITION : 92

PRECONDITIONER	BEFORE PARTITION	AFTER PARTITION	TOLERANCE
	EXTENDED PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	
	ITERATIONS	ITERATIONS	
DIRICHLET	11	12	1,00E-07
LUMPED	17	18	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	14	15	1,00E-07

Παρατηρούμε λοιπόν ότι παρά το διαχωρισμός του υποφορέα 4 σε δύο υποφορείς και την ταυτόχρονη αύξηση του ενδοσυνοριακού προβλήματος οι επαναλήψεις της μεθόδου FETI δεν επηρεάστηκαν. Επομένως είναι εφικτή (και ταυτόχρονα απαραίτητη σε παράλληλη επεξεργασία) η διαδικασία του Load Balancing.

3.5 Συμπεράσματα

Από τις δύο προηγούμενες εφαρμογές μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα για την εφαρμογή της μεθόδου FETI σε μια ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων (multiscale analysis) και γενικότερα στην περίπτωση εφαρμογών με μη-σύμφωνα (non-conforming) δίκτυα :

- Στην παρούσα εργασία εφαρμόζονται δύο τεχνικές. Η πρώτη αντιμετωπίζει το φορέα μετά από μια πύκνωση ανεξάρτητα από τα προηγούμενα βήματα και στα προηγηθέντα αποτελέσματα αναφέρεται ως Global FETI. Η δεύτερη κρατά πληροφορίες προ της πύκνωσης ενός υποφορέα και μετά την πύκνωση ακολουθεί η επίλυση ενός BVP και μιας επίλυσης Relaxation για την αποκατάσταση της καθολικής ισορροπίας. Σε μια γραμμική ανάλυση απαιτείται μόνο ένα βήμα της μεθόδου Relaxation. Σε μια μη-γραμμική ανάλυση θα απαιτούνται περισσότερα. Επομένως σε εκείνη την περίπτωση δεν είναι βέβαιο ότι το Relaxation θα είναι οικονομικότερο της Global FETI, καθώς θα πρέπει να επιλυθεί το πρόβλημα ισορροπίας περισσότερες από μια φορές.
- Κατά την επίλυση του BVP, προκειμένου τα αποτελέσματα μετά το Relaxation να ταυτίζονται με τα αποτελέσματα της Global FETI, πρέπει να τεθούν οι κατάλληλες συνθήκες στους συνοριακούς κόμβους που επηρεάζονται από το μητρώο \mathbf{C} της μεθόδου FETI και να μην αφεθούν ελεύθεροι να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές.
- Στην περίπτωση επίλυσης προβλημάτων με μη-σύμφωνα δίκτυα, όπου απαιτείται η χρήση interscale LMPC, η χρήση των κλασσικών προσταθεροποιητών της μεθόδου FETI εμφανίζει πολύ πιο αργή σύγκλιση σε σχέση με τη χρήση των γενικευμένων προσταθεροποιητών.
- Στην περίπτωση που έχουμε σύμφωνα δίκτυα (conforming meshes) και επομένως έχουμε την εφαρμογή της κλασσικής μεθόδου FETI, οι κλασσικοί προσταθεροποιητές της μεθόδου ταυτίζονται με τον γενικευμένο προσταθεροποιητή.
- Το κόστος του υπολογισμού του γενικευμένου προσταθεροποιητή μπορεί να μειωθεί ικανοποιητικά με τον κατάλληλο υπολογισμό του μητρώου \mathbf{C} . Αν το μητρώο \mathbf{C} υπολογιστεί από τη σχέση $\mathbf{C} = \mathbf{C}_g (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T$ τότε το μητρώο $(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{B}}^T)$ έχει τέτοια μορφή ώστε είναι οικονομική η παραγοντοποίηση και επίλυσή του.
- Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στο Load Balancing κατά την εφαρμογή της μεθόδου FETI (με υποφορείς διαφορετικού μεγέθους) σε παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

FEM – EFG

4.1 Εισαγωγή

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε εφαρμογές των μεθόδων επίλυσης με υποφορείς κατά τις οποίες ο φορέας διακριτοποιείται όχι μόνο με τα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία (πεπερασμένα στοιχεία επίπεδης έντασης) αλλά και με τη μη πλεγματική μέθοδο Element Free Galerkin (EFG) ταυτόχρονα. Πιο συγκεκριμένα στις εφαρμογές που ακολουθούν ένα τμήμα του φορέα (υποφορέας) προσομοιώνεται με τα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία ενώ κάποιο άλλο τμήμα με μη πλεγματική μέθοδο. Η συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου ο μηχανικός θέλει να εστιάσει την προσοχή του σε ένα συγκεκριμένο σημείο της κατασκευής στην οποία θα απαιτείται μια πιο ακριβής προσομοίωση (πχ σε κάποιο σημείο συγκέντρωσης τάσεων ή σε κάποια περιοχή με ιδιαίτερες συνοριακές συνθήκες). Στην περιοχή εκείνη μπορεί να πραγματοποιήσει μια ανάλυση με μια μη πλεγματική μέθοδο η οποία θα του προσδώσει την επιθυμητή ακρίβεια και μάλιστα τυχόν πύκνωση δεν φέρει τον υπολογιστικό φόρτο της επαναδιακριτοποίησης με κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία. Από την άλλη μεριά όμως, επειδή οι μη πλεγματικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται συνήθως από υψηλό υπολογιστικό κόστος, στην υπόλοιπη κατασκευή (που δεν παρουσιάζει κάποια ιδιαιτερότητα) η προσομοίωση μπορεί να γίνει με κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία που θα διακρίνονται από χαμηλότερη ακρίβεια αλλά χαμηλότερο υπολογιστικό κόστος. Έτσι λοιπόν με μια τέτοια τεχνική μπορούμε να ρυθμίσουμε τη σχέση υπολογιστικής ακρίβειας και υπολογιστικού κόστους κατά τη διάρκεια μιας ανάλυσης.

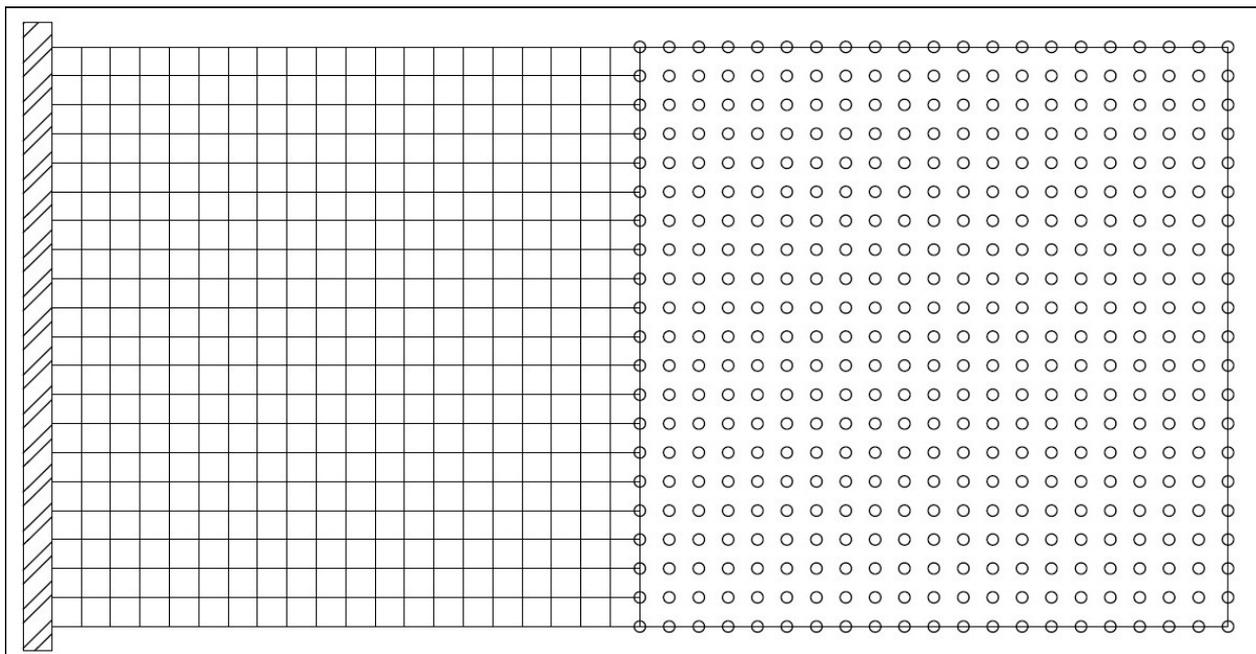
Στις εν λόγω εφαρμογές θα εξετάσουμε μόνο τη συμπεριφορά των μεθόδων επίλυσης με υποφορείς. Για θεωρητικά στοιχεία στις μη πλεγματικές μεθόδους ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία που αναφέρεται στο τέλος της εργασίας.

4.2 Εφαρμογή 1

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των μεθόδων FETI, FETI-DP και P-FETIDP στην περίπτωση που ένας φορέας προσομοιώνεται τόσο με κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία όσο και με τη μη πλεγματική μέθοδο EFG. Τα στοιχεία του προβλήματος αναφέρονται με λεπτομέρεια στη συνέχεια. Σημειώνουμε ότι για την παραγωγή του μητρώου στιβαρότητας του υποφορέα EFG χρησιμοποιείται η non-overlapping μέθοδος που αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία.

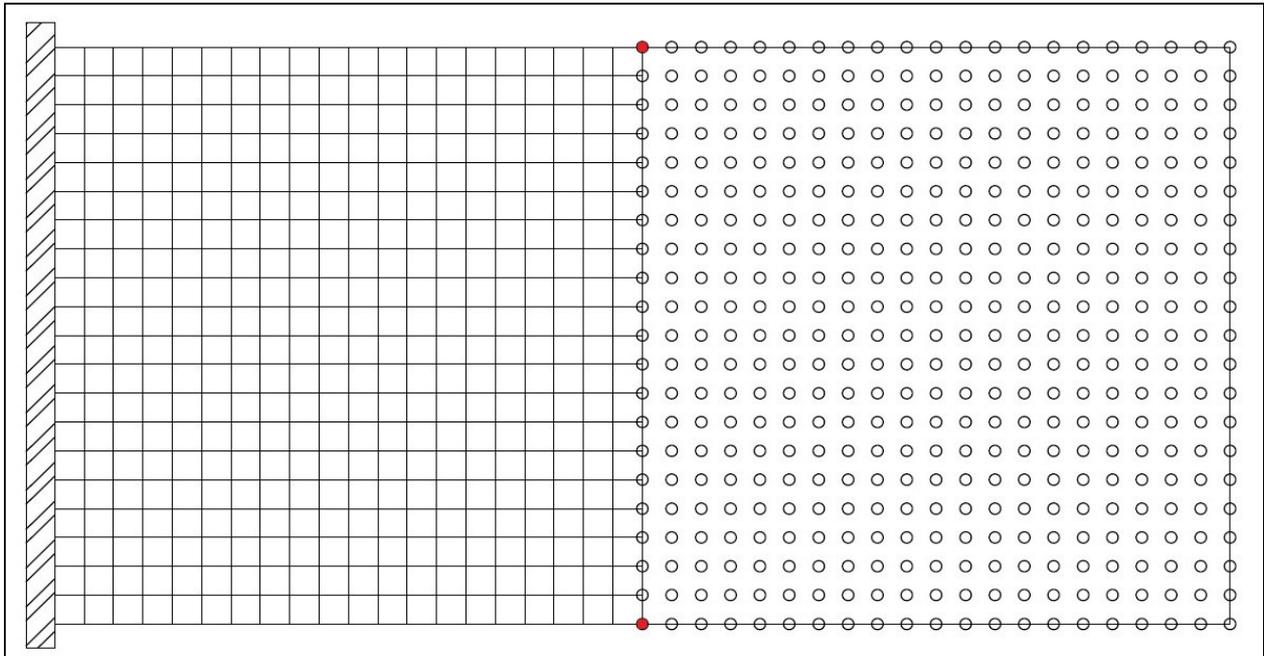
- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας Φορέα : 1680
- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας FEM : 840
- ◆ Πλήθος Βαθμών Ελευθερίας EFG : 882
- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Φόρτιση παραβολική στη δεξιά παρειά και ίση συνολικά με -100 KN
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 4 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 2 (m)
- ◆ Πάχος Στοιχείων : 0.1 (m)
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $3 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-6}

Στο ακόλουθο σχήμα (Σχήμα 1) απεικονίζεται ο φορέας ο οποίος χωρίζεται σε δύο υποφορείς (FEM – EFG).



Σχήμα 1 : Φορέας Εφαρμογής 1

Στο Σχήμα 2 απεικονίζεται ξανά ο φορέας, αλλά με κόκκινο χρώμα τονίζονται οι κόμβοι που χρησιμοποιήθηκαν ως corner nodes κατά την εφαρμογή των μεθόδων FETI-DP και P-FETIDP.



Σχήμα 2 : Φορέας Εφαρμογής 1 – Με κόκκινο χρώμα οι Corner Nodes

Στη συνέχεια ακολουθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε μεθόδου, καθώς και η απόδοσή τους σε όρους επαναλήψεων. Σημειώνεται ότι σε κάθε μέθοδο που ακολουθεί εμφανίζεται και μια στήλη όπου υπολογίζεται μια νόρμα της απόκλισης των μετατοπίσεων όπως αυτές προκύπτουν από την μέθοδο επίλυσης με υποφορείς, σε σχέση με τις μετατοπίσεις που προκύπτουν από την άμεση επίλυση του καθολικού προβλήματος ισορροπίας.

Μέθοδος FETI

- Πλήθος πολλαπλασιαστών Lagrange : 42

PRECONDITIONER	ITERATIONS	TOLERANCE	NORM DISP
DIRICHLET	20	1,00E-06	3,7E-009
LUMPED	19	1,00E-06	2,9E-009
DIAGONAL DIRICHLET	20	1,00E-06	2,10E-08

Μέθοδος FETI-DP

- Πλήθος Corner Nodes : 2 (Συνολικά 4 β.ε.)
- Μέγεθος ενδοσυνοριακού προβλήματος (β.ε.) – πλήθος πολλαπλασιαστών Lagrange : 38

PRECONDITIONER	ITERATIONS	TOLERANCE	NORM DISP
DIRICHLET	20	1,00E-06	7,80E-08
LUMPED	19	1,00E-06	1,70E-08
DIAGONAL DIRICHLET	21	1,00E-06	1,78E-07

Μέθοδος P-FETIDP

- Μέγεθος ενδοσυνοριακού προβλήματος (β.ε.) : 42 (Primal Substructuring Method - PSM)
- Πλήθος Corner Nodes : 2 (Συνολικά 4 β.ε.)

PRECONDITIONER	ITERATIONS	TOLERANCE	NORM DISP
P-FETIDP	22	1,00E-06	9,20E-09

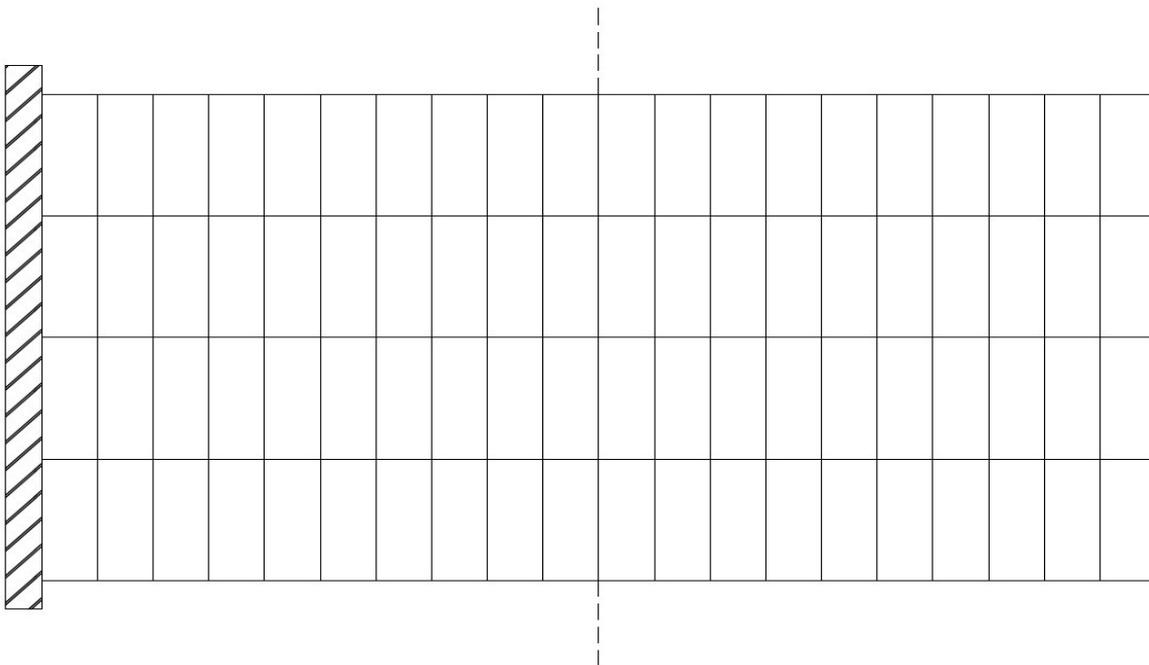
Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι πρακτικά και οι τρεις μέθοδοι είναι ισοδύναμες σε όρους επαναλήψεων. Οι μέθοδοι FETI και FETI-DP εκτελούν τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων, με τη διαφορά ότι η FETI έχει συγκλίνει σε λίγο πιο ακριβή αποτελέσματα. Σχετικά με τη σύγκριση των μεθόδων FETI-DP και P-FETIDP παρατηρούμε ότι η τελευταία έχει εκτελέσει περισσότερες επαναλήψεις, τούτο όμως μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι έχει συγκλίνει σε πιο ακριβή αποτελέσματα (βλ. Norm Disp). Προφανώς για μια πιο ολοκληρωμένη σύγκριση των μεθόδων πρέπει κάποιος να εξετάσει και τους χρόνους επίλυσης (πχ σε όρους CPU time) και τις απαιτήσεις της κάθε μεθόδου σε υπολογιστική μνήμη.

4.3 Εφαρμογή 2

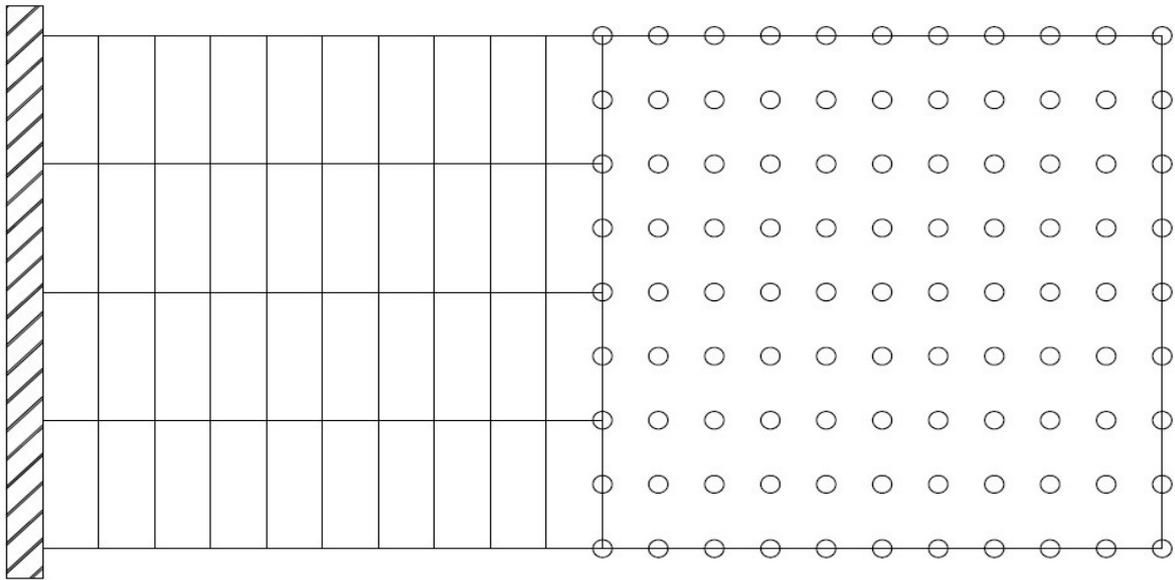
Στην παρούσα εφαρμογή θα μελετήσουμε ένα φορέα στον οποίο θα πραγματοποιήσουμε μια ανάλυση σε τρία στάδια. Στο πρώτο στάδιο (Phase 0) ο φορέας αποτελείται από ένα αραιό δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων και χωρίζεται σε δύο υποφορείς, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Στη συνέχεια περνάμε στο επόμενο στάδιο (Phase 1) όπου, για λόγους μη γραμμικότητας για παράδειγμα, αντικαθιστούμε τον ένα υποφορέα που προσομοιώνεται με κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία, με έναν υποφορέα που προσομοιώνεται με μη πλεγματική μέθοδο και έχει πυκνότερο δίκτυο κόμβων (βλ. Σχήμα 4). Ως αποτέλεσμα τα δίκτυα των δύο υποφορέων δεν ταυτίζονται στο σύνορο. Εφαρμόζεται λοιπόν η μέθοδος FETI προσαρμοσμένη στην περίπτωση υποφορέων με non-conforming interfaces. Στο τρίτο και τελικό στάδιο (Phase 2) πυκνώνεται και το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων, οπότε καταλήγουμε σε υποφορείς που ταυτίζονται τα δίκτυά τους στο σύνορο (βλ. Σχήμα 5). Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι για την παραγωγή του μητρώου στιβαρότητας του υποφορέα EFG χρησιμοποιείται η non-overlapping μέθοδος, έτσι ώστε να μην επιτρέπεται η διείσδυση των συναρτήσεων σχήματος από τον υποφορέα EFG στον υποφορέα με τα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία. Το σφάλμα που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία στη συνέχεια αντιμετωπίζεται με κατάλληλες μεθόδους, όμως η σκοπιά της συγκεκριμένης εφαρμογής προσανατολίζεται στην επίλυση και όχι τη διατύπωση του προβλήματος.

- ◆ Στατικό Προσομοίωμα : Πρόβολος
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά x : 4 (m)
- ◆ Διάσταση Φορέα κατά y : 2 (m)
- ◆ Πάχος Στοιχείων : 0.1 (m)

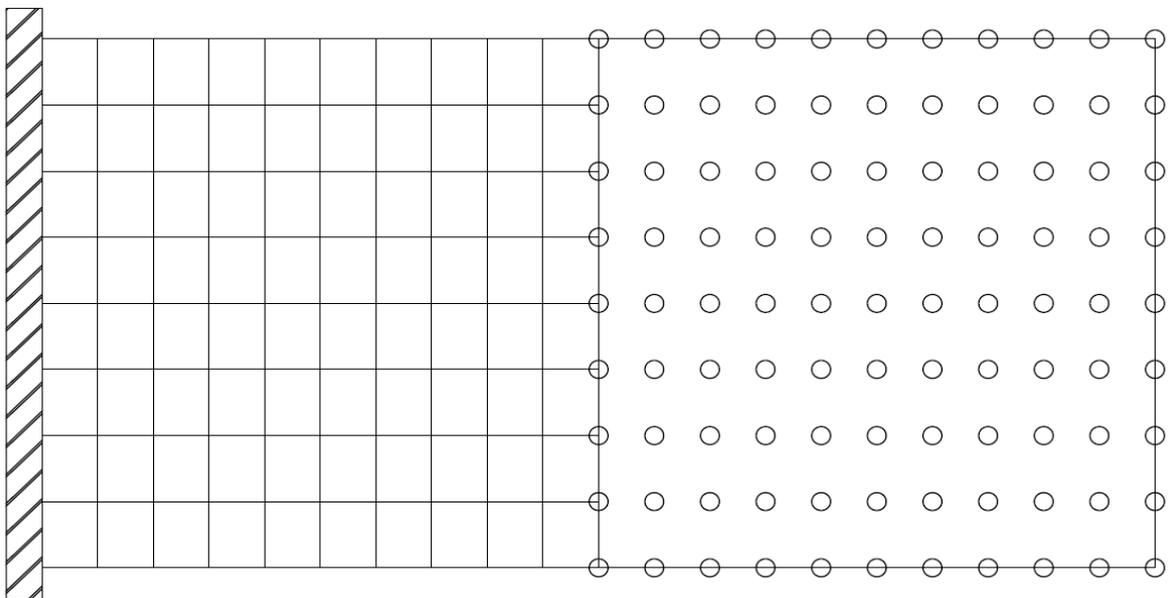
- ◆ Λόγος Poisson : 0.3
- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας : $3 \cdot 10^7 (KN/m^2)$
- ◆ Ακρίβεια Σύγκλισης ϵ : 10^{-7}



Σχήμα 3 : Φορέας Εφαρμογής 2 – Phase 0



Σχήμα 4 : Φορέας Εφαρμογής 2 – Phase 1



Σχήμα 5 : Φορέας Εφαρμογής 2 – Phase 2

Στη συνέχεια απεικονίζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης :

PHASE 0

FEM SUBDOMAINS :	2
EFG SUBDOMAINS:	NULL
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	10
LMPC MATRIX C DOF :	NULL
TOTAL DOF :	200

FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	TOLERANCE
	ITERATIONS	ITERATIONS	
DIRICHLET	6	6	1,00E-07
LUMPED	8	8	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	7	7	1,00E-07

PHASE 1

FEM SUBDOMAINS :	1
EFG SUBDOMAINS:	1
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	10
LMPC MATRIX C REDUNDANT DOF :	8
TOTAL DOF :	288

FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	TOLERANCE
	ITERATIONS	ITERATIONS	
DIRICHLET	9	9	1,00E-07
LUMPED	13	11	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	12	11	1,00E-07

PHASE 2

FEM SUBDOMAINS :	1
EFG SUBDOMAINS:	1
BOOLEAN B INTERFACE DOF (ROWS) :	18
LMPC MATRIX C DOF :	NULL
TOTAL DOF :	360

FETI

PRECONDITIONER	CLASSIC PRECONDITIONERS	EXTENDED PRECONDITIONERS	TOLERANCE
	ITERATIONS	ITERATIONS	
DIRICHLET	13	13	1,00E-07
LUMPED	14	14	1,00E-07
DIRICHLET DIAGONAL	14	14	1,00E-07

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε και στη συγκεκριμένη εφαρμογή, όπως και στις αντίστοιχες εφαρμογές με non-conforming interfaces στα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία, την υπεροχή (αν και αρκετά μικρότερη στο συγκεκριμένο πρόβλημα) των γενικευμένων προσταθεροποιητών έναντι των κλασσικών της μεθόδου FETI.

4.4 Coupled FEM-EFG – Convergence Test

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της σύζευξης (coupling) μεταξύ FEM και EFG, μέσω της μεθόδου σύζευξης με ramp functions. Για λεπτομέρειες σχετικά με τη συγκεκριμένη μέθοδο σύζευξης ο αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στην αντίστοιχη βιβλιογραφική αναφορά [6]. Συγκεκριμένα θα εκτελέσουμε για ένα πρόβλημα έναν έλεγχο σύγκλισης (convergence test). Σύμφωνα με το εν λόγω τεστ, επιλύεται ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (Boundary Value Problem) κατά το οποίο με γνωστές μετατοπίσεις από μια αναλυτική λύση στο “δεσμευμένο” άκρο και δοσμένη παραβολική φόρτιση (όπως η κατανομή της διατμητικής τάσης) στο ελεύθερο άκρο, επιλύουμε ως προς το διάνυσμα των μετατοπίσεων του φορέα και στη συνέχεια ελέγχουμε το σφάλμα συγκριτικά με τη γνωστή αναλυτική λύση. Εν συνεχεία πραγματοποιείται πύκνωση του φορέα και εκτελείται ξανά η ίδια διαδικασία για τον έλεγχο απομείωσης του σφάλματος με την αντίστοιχη αύξηση των βαθμών ελευθερίας του φορέα. Για τον έλεγχο

σφάλματος χρησιμοποιήθηκαν δύο νόρμες, η ενεργειακή νόρμα και η νόρμα τάσεων.

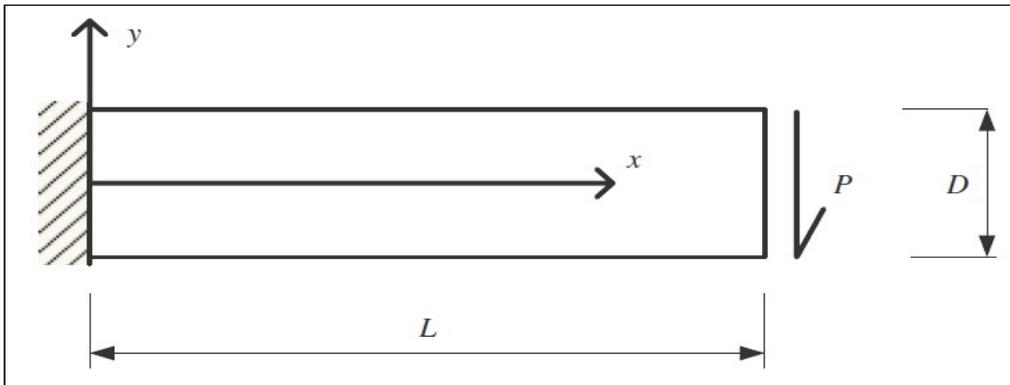
Η ενεργειακή νόρμα δίνεται από τη σχέση :

$$\|E\|_e = \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^{exact})^T (\sigma - \sigma^{exact}) d\Omega \right]^{(1/2)} \quad (4.1)$$

ενώ για τη νόρμα τάσεων χρησιμοποιείται η σχέση :

$$\frac{\|\sigma - \sigma^{exact}\|}{\|\sigma^{exact}\|} \quad (4.2)$$

Για την εκτέλεση του convergence test έχουμε τον ακόλουθο φορέα, γνωστός και ως Timoshenko Beam (Σχήμα 6) :



Σχήμα 6 : Timoshenko Beam

Για τον φορέα αυτό ισχύουν οι ακόλουθες αναλυτικές σχέσεις για τις μετατοπίσεις του φορέα και το τασικό πεδίο :

$$\sigma_{xx} = \frac{P(L-x)y}{I} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (4.4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (4.5)$$

$$u_x = \frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\nu) \left[y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \right] \quad (4.6)$$

$$u_y = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (4.7)$$

όπου :

- ◆ L : Μήκος Φορέα
- ◆ D : Ύψος Διατομής
- ◆ E : Μέτρο Ελαστικότητας
- ◆ ν : Λόγος Poisson
- ◆ I : Ροπή αδράνειας διατομής
- ◆ P : Φόρτιση

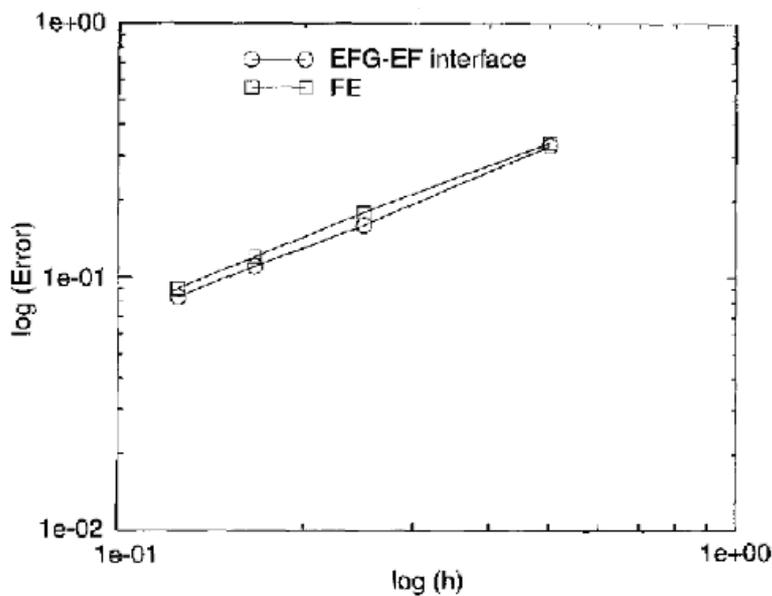
Convergence Test – Error Analysis

Στη συγκεκριμένη εργασία πραγματοποιήθηκε ένα τεστ σύγκλισης στο ίδιο πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο T. Belytschko στην ερευνητική του εργασία [6] για την άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων και επέκτασή τους.

Τα χαρακτηριστικά του προβλήματος είναι τα ακόλουθα :

- ◆ Μέτρο Ελαστικότητας $E = 1000$
- ◆ Λόγος Poisson $\nu = 0.3$
- ◆ $D = 1$
- ◆ $L = 8$
- ◆ Πάχος στοιχείων $t = 1$
- ◆ $P = 1$

Τα αποτελέσματα του Belytschko για ανάλυση του φορέα με FEM και για Coupled FEM-EFG με ramp functions (και διαχωρισμό στο 50% του φορέα, δηλαδή ο μισός φορέα αναλύεται με FEM και ο υπόλοιπος μισός με EFG) απεικονίζονται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7 : Αποτελέσματα Belytschko – Convergence Test

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε πώς απομειώνεται η ενεργειακή νόρμα του σφάλματος με τη μείωση της διάστασης του στοιχείου h (επομένως με την πυκνώση του φορέα) για ανάλυση με FEM και με Coupled FEM-EFG (Διαχωρισμός στο 50% του φορέα). Σημειώνεται επίσης ότι τα αποτελέσματα αφορούν τέσσερα δίκτυα με 51 κόμβους, 155 κόμβους, 343 κόμβους και 585 κόμβους. Τα αποτελέσματα θα σχολιασθούν στη συνέχεια.

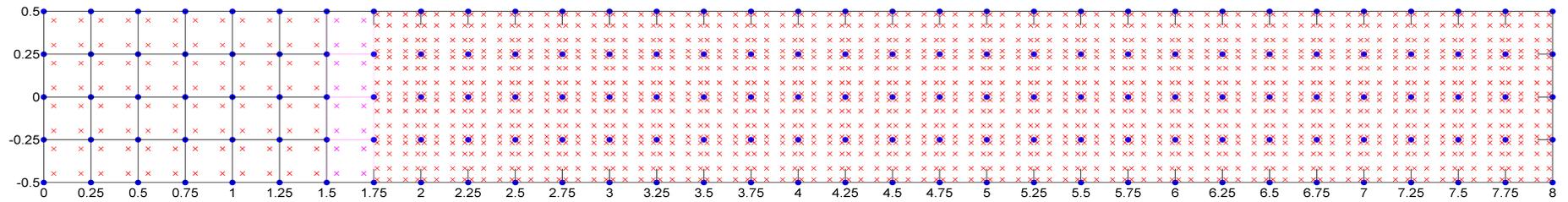
Για την παραγωγή των δικών μας αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκαν οι ίδιες αναλύσεις με του T. Belytschko και επιπλέον ανάλυση μόνο με EFG, ανάλυση με Coupled FEM-EFG με διαχωρισμό στο 20% του μήκους του φορέα (δηλαδή 20% FEM – 80% EFG), τοπικός έλεγχος σφάλματος στις περιοχές FEM και EFG και έλεγχος του σφάλματος με νόρμα τάσεων.

Στα Σχήματα 8 και 9 απεικονίζεται ο φορέας διακριτοποιημένος με 20% FEM – 80% EFG και 50% FEM – 50% EFG αντίστοιχα. Ο αριστερός υποφορέας προσομοιώνεται με FEM, ο δεξιός υποφορέας προσομοιώνεται με EFG, ενώ στα σχήματα φαίνεται και η περιοχή σύζευξης. Στα εν λόγω σχήματα απεικονίζονται οι κόμβοι του φορέα καθώς και τα gauss points.

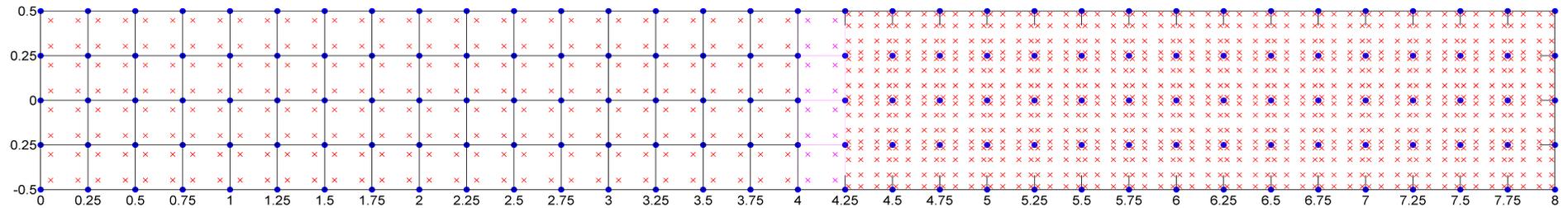
Στα Σχήματα 10, 11 και 12 απεικονίζονται τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας και συγκεκριμένα στο Σχήμα 10 απεικονίζεται το σφάλμα σε όρους ενεργειακής νόρμας ως προς το μέγεθος του στοιχείου (για ανάλυση μόνο με FEM, με Coupled FEM-EFG και διαχωρισμό στο 20% και το 50% του φορέα και ανάλυση μόνο με EFG), ενώ στα σχήματα 11 και 12 γίνεται έλεγχος του τοπικού σφάλματος (της ανάλυσης Coupled FEM-EFG) στον υποφορέα των FEM και τον υποφορέα των EFG για διαχωρισμό στο 20% και στο 50% του φορέα αντίστοιχα.

Στα σχήματα 13, 14 και 15 απεικονίζεται το σφάλμα σε όρους νόρμας τάσεων ενώ και πάλι γίνεται έλεγχος του τοπικού σφάλματος στον υποφορέα των FEM και τον υποφορέα των EFG για διαχωρισμό στο 50% του φορέα, καθώς και για ανάλυση μόνο με EFG και μόνο με FEM-QUAD4.

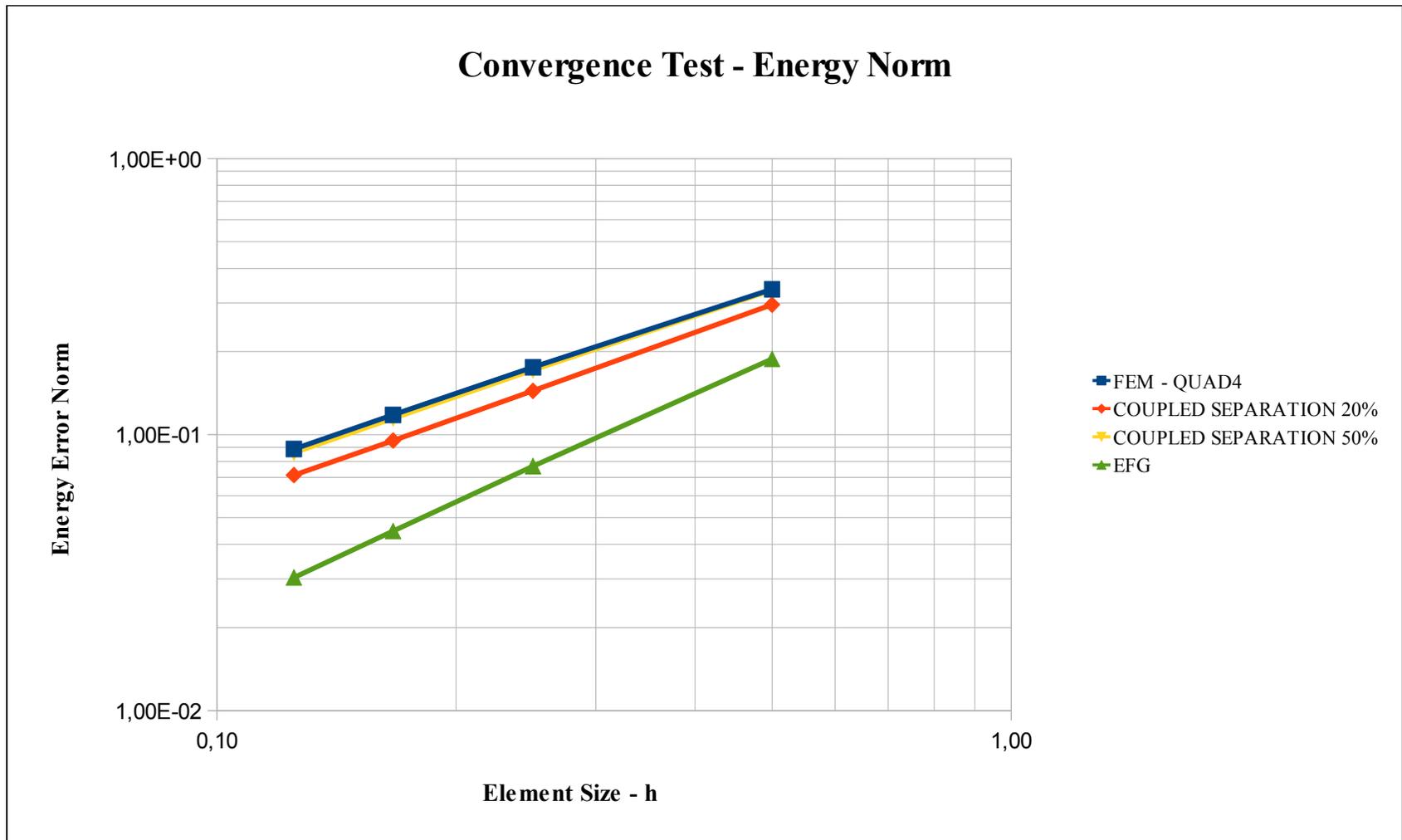
Σχόλια και συμπεράσματα αναφέρονται συγκεντρωτικά στη συνέχεια.



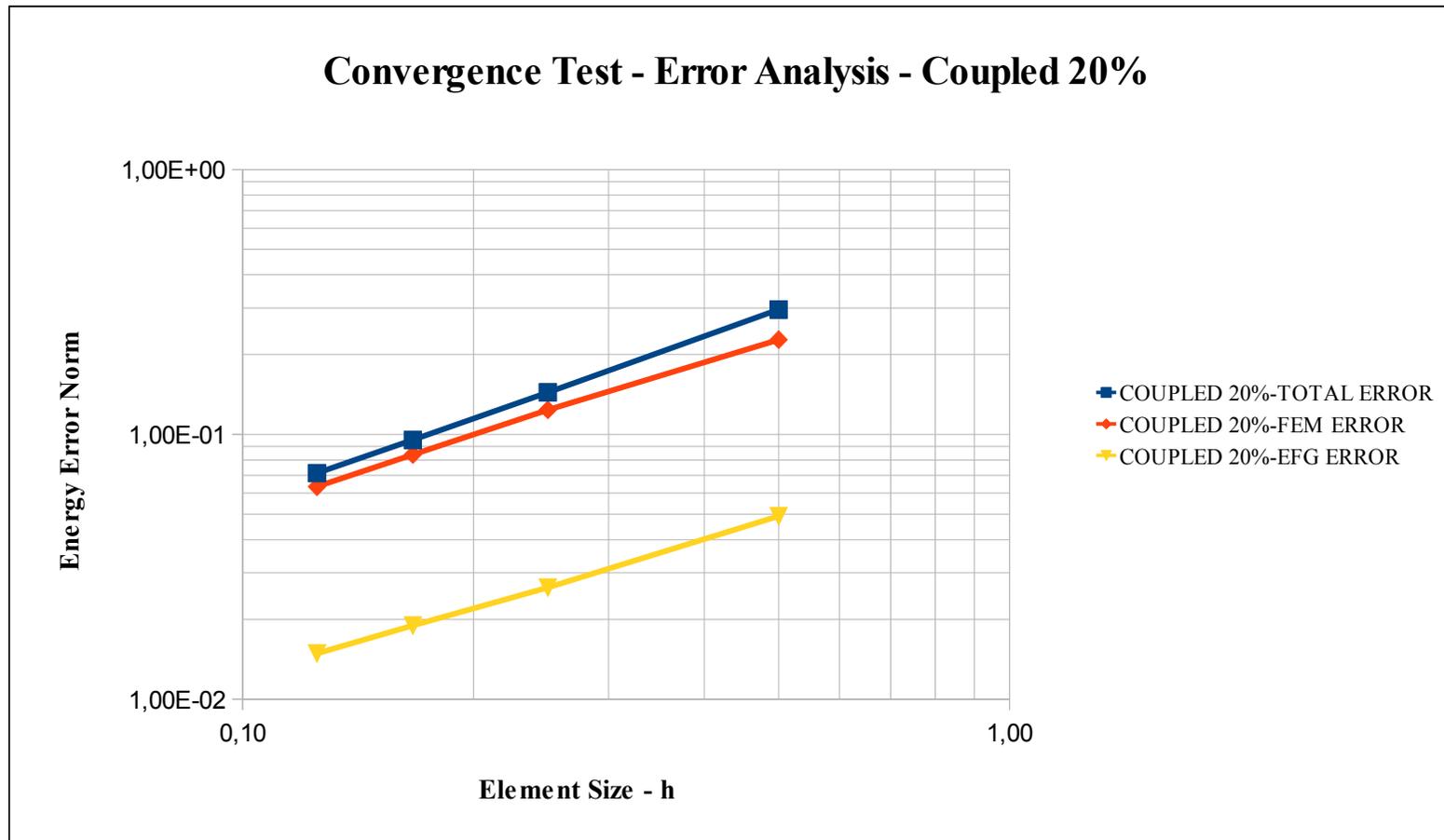
Σχήμα 8 : Coupled FEM-EFG – Separation 20%



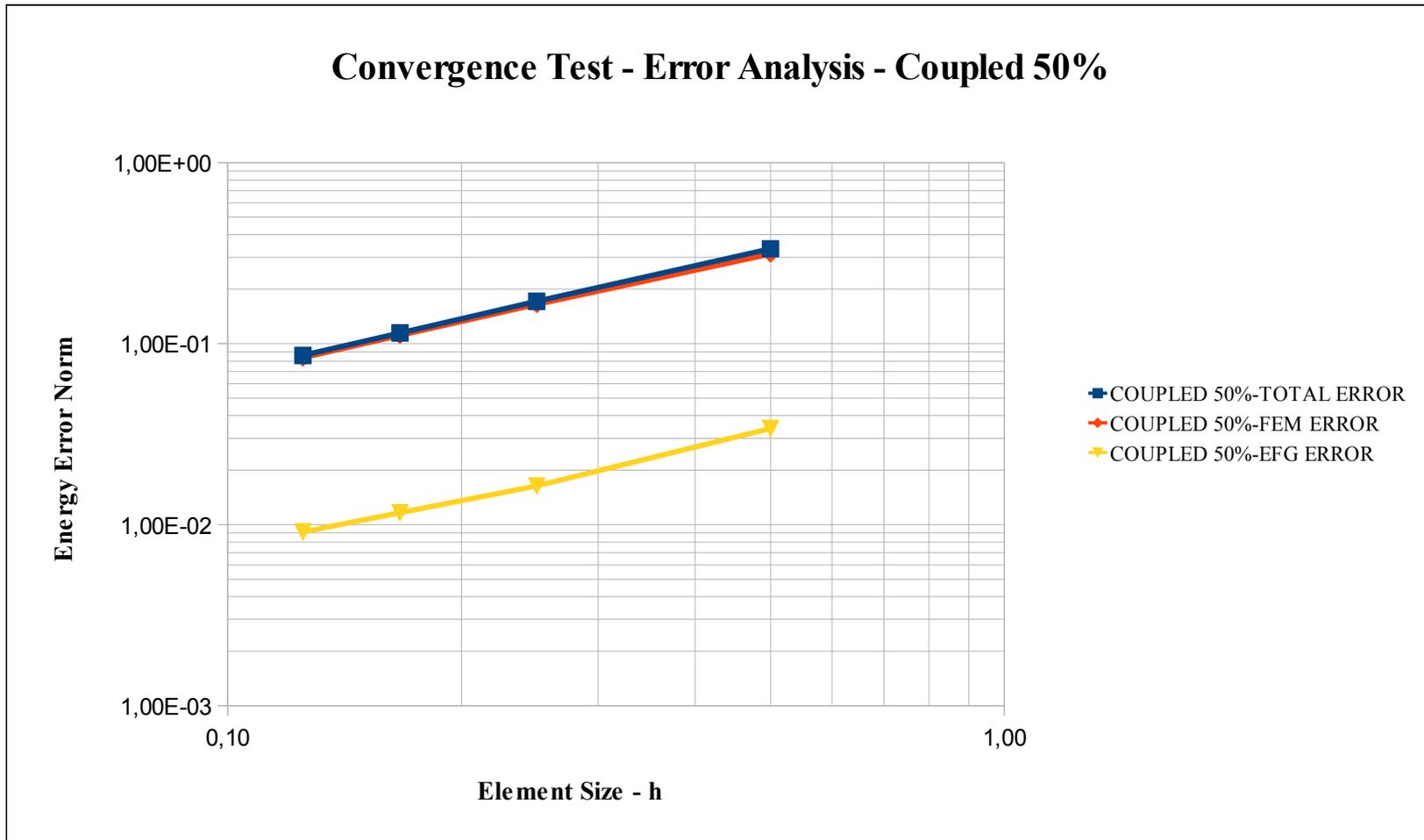
Σχήμα 9 : Coupled FEM-EFG – Separation 50%



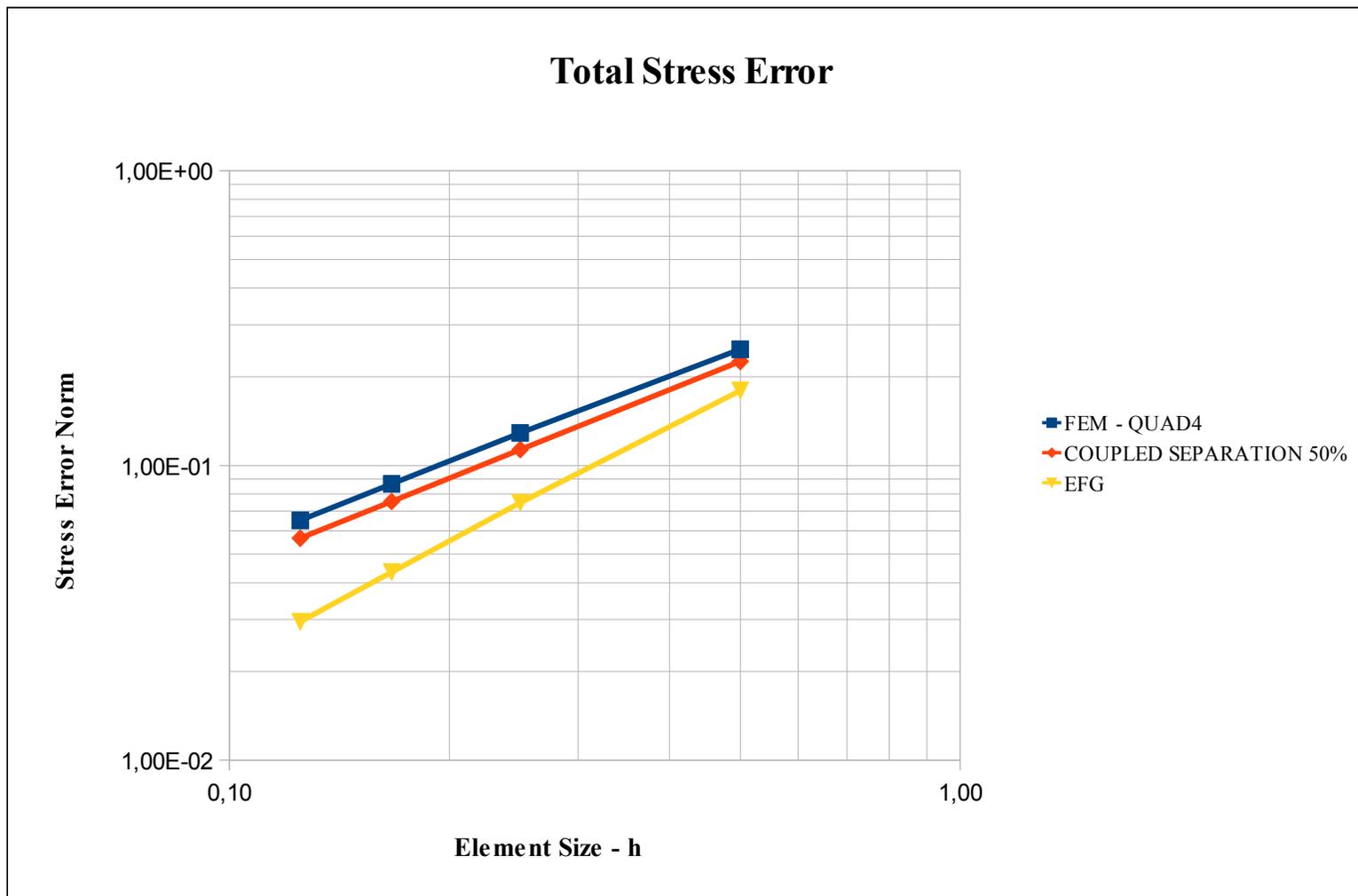
Σχήμα 10 : Convergence Test – Energy Norm



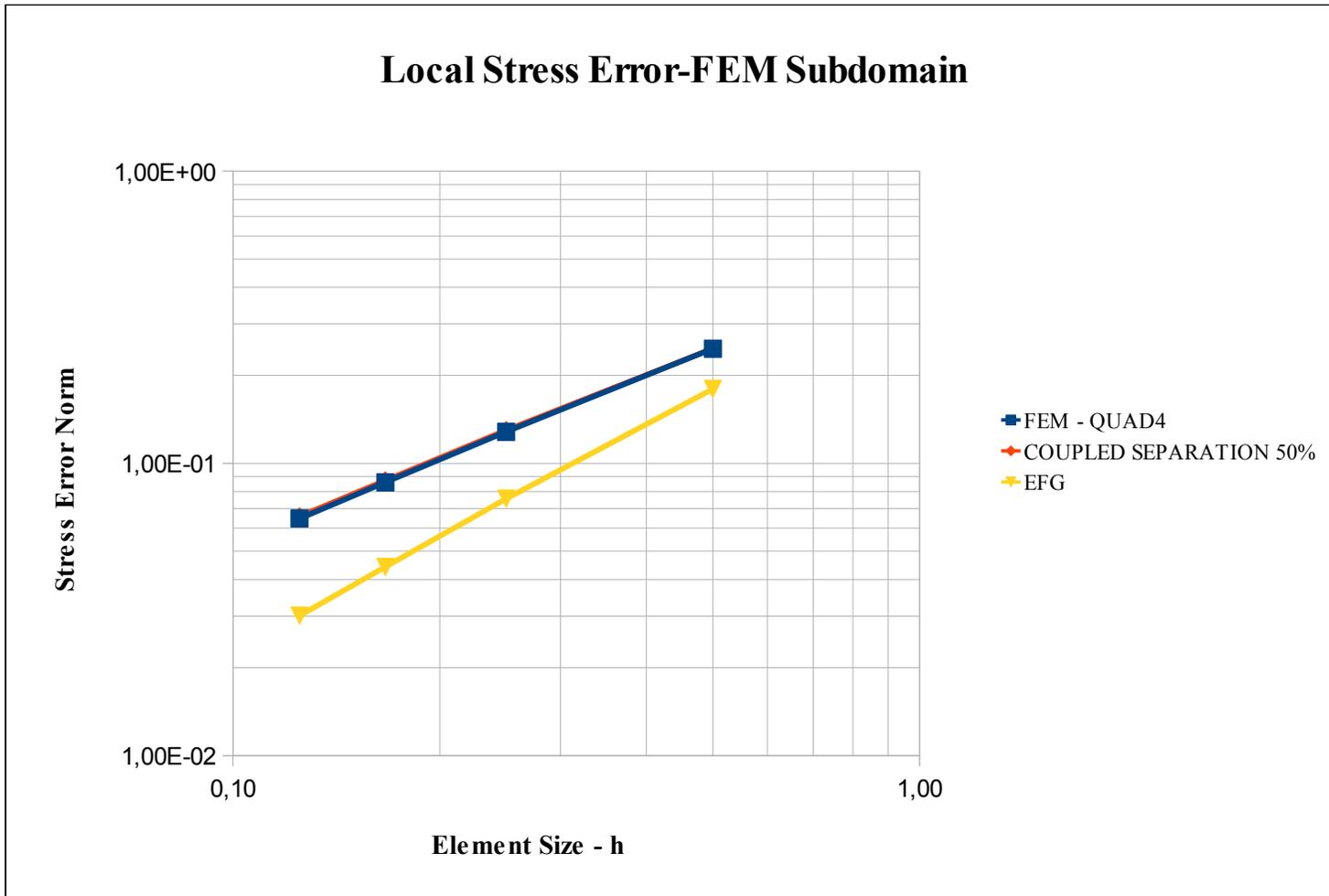
Σχήμα 11 : Convergence Test – Energy Norm / Error Analysis Separation 20%



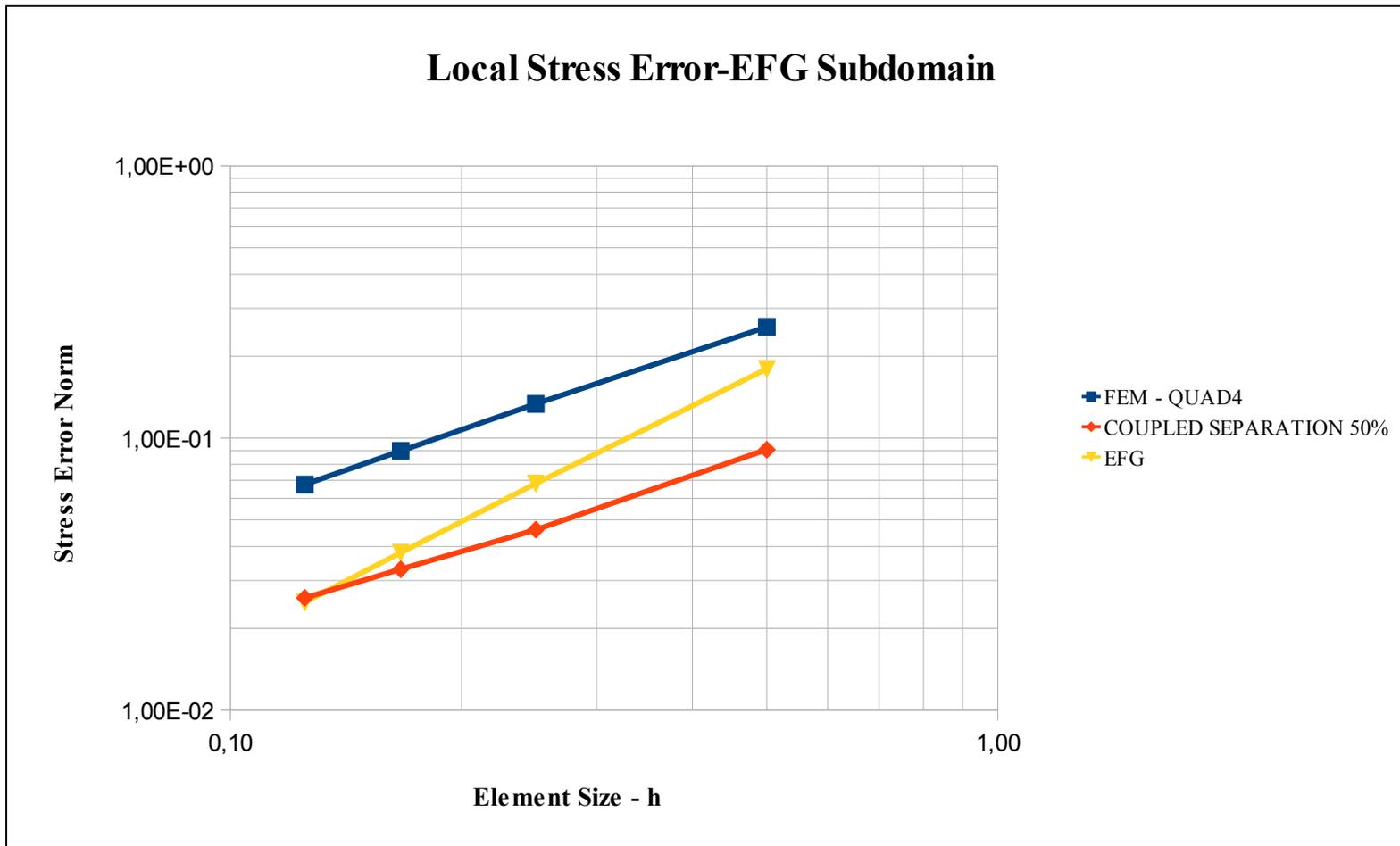
Σχήμα 12 : Convergence Test – Energy Norm / Error Analysis Separation 50%



Σχήμα 13 : Convergence Test – Stress Norm



Σχήμα 14 : Convergence Test – Stress Norm / Error Analysis FEM Subdomain



Σχήμα 15 : Convergence Test – Stress Norm / Error Analysis EFG Subdomain

Σχόλια – Συμπεράσματα

- Από το Σχήμα 10 παρατηρούμε ότι οι καμπύλες μας για ανάλυση με FEM και ανάλυση με Coupled FEM-EFG (Separation 50%) ταυτίζονται με εκείνες του Belytschko.
- Από το Σχήμα 10 (καθώς και το Σχήμα 13) παρατηρούμε ότι το καθολικό σφάλμα της λύσης με Coupled FEM-EFG επηρεάζεται κυρίως από το σφάλμα των FEM. Επομένως σε επίπεδο καθολικού σφάλματος δεν μπορούμε να πετύχουμε την ακρίβεια των EFG, καθώς τα FEM είναι υπεύθυνα για το σύνολο σχεδόν του σφάλματος. Από το ίδιο σχήμα επιπλέον παρατηρούμε ότι ακόμα και αν η περιοχή FEM είναι μικρή (διαχωρισμός στο 20% του φορέα) η επιρροή της στο σφάλμα είναι σημαντική.
- Παρά το προηγούμενο συμπέρασμα τα Σχήματα 11, 12, 14 και 15 αναδεικνύουν ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον στοιχείο. Παρόλο που το καθολικό σφάλμα κατά την ανάλυση με Coupled FEM-EFG είναι αντίστοιχο με μιας ανάλυσης αποκλειστικά με FEM, στην περιοχή του φορέα όπου η διακριτοποίηση γίνεται με EFG το τοπικό σφάλμα είναι πολύ μικρότερο από την περίπτωση που το συγκεκριμένο τμήμα του φορέα θα είχε διακριτοποιηθεί με FEM. Επομένως συμπεραίνουμε ότι το Coupling μεταξύ FEM και EFG έχει πραγματικό νόημα, καθώς ο σκοπός μιας τέτοιας ανάλυσης είναι να πετύχουμε τοπικά μεγάλη ακρίβεια (μέσω της διακριτοποίησης με EFG) σε μια περιοχή ενδιαφέροντος (όπως είναι η περιοχή συγκέντρωσης τάσεων, διάδοσης ρωγμών κλπ), ενώ στον υπόλοιπο φορέα που δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια η ανάλυση μπορεί να γίνει με FEM που παρουσιάζουν μικρότερο υπολογιστικό κόστος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΧΟΛΙΑ

5.1 Σχόλια για τη διεξαγωγή των παραδειγμάτων

- Οι κώδικες για όλα τα παραδείγματα της παρούσας εργασίας έχουν προγραμματιστεί με τη χρήση Matlab.
- Αναλυτικά σχόλια σχετικά με τις εφαρμογές και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτές παρέχονται στο κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά, αμέσως μετά την εμφάνιση των αποτελεσμάτων.
- Λεπτομέρειες που αφορούν τα χαρακτηριστικά των προς επίλυση φορέων, καθώς και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και της αντίστοιχης μεθόδου επίλυσης δίνονται αναλυτικά στο εκάστοτε κεφάλαιο.
- Οι αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη εργασία με τις μεθόδους επίλυσης με υποφορείς είναι στατικές και γραμμικές.

5.2 Σχόλια για μελλοντική έρευνα

- Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των μεθόδων επίλυσης με υποφορείς, το οποίο τις κατέστησε πρωταγωνίστριες στον τομέα των μεθόδων επίλυσης υψηλής απόδοσης της Υπολογιστικής Μηχανικής, είναι η εύκολη και άμεση εφαρμογή τους σε παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον. Έτσι λοιπόν, ένα επόμενο στάδιο της συγκεκριμένης εργασίας μπορεί να αποτελέσει η εφαρμογή των μεθόδων σε ένα τέτοιο περιβάλλον.
- Στο πλαίσιο της προηγούμενης παρατήρησης περί παραλληλίας, μπορεί να προστεθεί ο προγραμματισμός των μεθόδων με στόχο την εκμετάλλευση της επεξεργαστικής ικανότητας της κάρτας γραφικών ενός υπολογιστικού συστήματος (GPU) παράλληλα με την CPU.
- Ένα ακόμη σημαντικό μελλοντικό βήμα που αφορά την εφαρμογή της μεθόδου των υποφορέων σε αναλύσεις πολλαπλών κλιμάκων είναι η ενσωμάτωση στους κώδικες δυνατότητας μη-γραμμικής ανάλυσης και κριτηρίων αστοχίας υλικού, ώστε να επιτευχθεί η ρεαλιστική ανάλυση πολλαπλών κλιμάκων από τη σκοπιά του υλικού αυτή τη φορά, καθώς η παρούσα εργασία περιορίζεται στη σκοπιά της μεθόδου επίλυσης με υποφορείς.
- Στο αντικείμενο του coupling μεταξύ FEM και EFG είναι σκόπιμη η διεύρυνση των υπαρχόντων κωδίκων. Μάλιστα ενδιαφέρον παρουσιάζει ο συνδυασμός μια ανάλυσης πολλαπλών κλιμάκων με τη σύζευξη FEM-EFG.
- Ήδη κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης της εν λόγω εργασίας παρατηρήθηκε ότι το σφάλμα που παρουσιάζει η επίλυση ενός φορέα που διακριτοποιείται με FEM – QUAD8 είναι πολύ μικρότερο από την αντίστοιχη επίλυση ενός φορέα που διακριτοποιείται με FEM – QUAD4. Επομένως είναι

ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η ανάπτυξη μιας μεθόδου coupling FEM-EFG, όπου τα FEM θα είναι QUAD8.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) **Παπαγιαννάκης Α.** (2011), “Εφαρμογές των Μεθόδων των Υποφορέων για την Επίλυση Μεγάλης Κλίμακας Προβλημάτων με Πεπερασμένα Στοιχεία”, Ιούλιος 2011 Αθήνα
- 2) **Χαρμπής Δ.Χ.** (2002), “Ανάλυση Φορέων με Συμβατικά, Προσαρμοστικά και Στοχαστικά Πεπερασμένα Στοιχεία σε Διαδικτυωμένους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές”, Δεκέμβριος 2002 Αθήνα
- 3) **Φραγκάκης Ι.** (2004), “Μέθοδοι Υψηλών Επιδόσεων για τη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Φορέων με Πεπερασμένα Στοιχεία”, Ιανουάριος 2004 Αθήνα
- 4) **Καραταράκης Α.** (2009), “Επίλυση Προβλημάτων Πεπερασμένων Στοιχείων με τη Δυϊκή Συνοριακή Μέθοδο με Υποφορείς FETI”, Νοέμβριος 2009 Αθήνα
- 5) **Παπαδρακάκης Μ.** (2001), “Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων”, Εκδόσεις Παπασωτηρίου
- 6) **Belytschko T., Organ D., Krongauz Y.** (1995), “A coupled finite element – element-free Galerkin method”, *Computational Mechanics* 17 (1995) 186-195
- 7) **O. Lloberas-Valls, D.J. Rixen, A. Simone, L.J. Sluys** (2012), “On micro-to-macro connections in domain decomposition multiscale methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*
- 8) **Jörg F. Unger, Stefan Eckardt** (2011), “Multiscale Modeling of Concrete – From Mesoscale to Macroscale”, *Arch Comput Methods Eng* (2011) 18:341–393
- 9) **D.J. Rixen** (2002), “Extended preconditioners for the FETI method applied to constrained problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2002; 54:1–26
- 10) **P. Gosselet, C. Rey** (2006), “Non-overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics”, *Arch. Comput. Meth. Engng. Vol. 13, 4*, 515-572 (2006)
- 11) **O. Lloberas-Valls, D.J. Rixen, A. Simone, L.J. Sluys** (2011), “Domain decomposition techniques for the efficient modeling of brittle heterogeneous materials”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (2011) 1577-1590
- 12) **T. Rabczuk, S.P. Xiao, M. Sauer** (2000), “Coupling of meshfree methods with finite elements: Basic concepts and test results”, *Communications in Numerical Methods and Engineering*
- 13) **Charles E. Augardea, Andrew J. Deeks** (2008), “The use of Timoshenko’s exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis”, *Finite Elements in Analysis and Design*
- 14) **Metsis P., Papadrakakis M.** (2012), “Overlapping and non-overlapping domain decomposition methods for large-scale meshless EFG simulations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*