ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Λήμμα του Urysohn και Εφαργογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΑΝΤΙΓΟΝΗΣ ΓΕΩΡΓΙΑΔΟΥ

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2013

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Λήμμα του Urysohn και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΑΝΤΙΓΟΝΗΣ ΓΕΩΡΓΙΑΔΟΥ

Επιβλέπων: Ιωάννης Πολυράκης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή:

Ιωάννης Πολυράκης	Αλέξανδρος Αρβανιτάκης	Σωτήρης Καρανάσιος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2013

(Υπογραφή)

Ιωάννης Πολυράκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2013

Για την επιτυχία και την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Ιωάννη Πολυράκη και τον άντρα μου Αριστείδη.

Περίληψη

The main components of this Thesis are Urysohn's Lemma and the Theorem of Tietze, whereas there has been a detailed analysis of the fundamental concepts of Topology for the former's substantiated proof. First of all, the definitions of Regular and Haussdorf spaces are provided. Moreover, there is a reference to various examples of Topological spaces and, to proceed, the definitions of Closure and Interior are given. Furthermore, a meticulous description of Filters and Nets is incorporated. In this section, a number of Lemmas, concerning their converge, is quoted in addition to their connecting points. Another point is the detailed approach of Dense Sets. In order to proceed to the proof of Tietze's Theorem the definition of continuity between topological spaces is emboded. Ultimately, this Thesis projects Urysohn's Lemma, to its different interpretations.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ο Pavel Samuilovich Urysohn υπήρξε ένας Σοβιετικός Μαθηματικός εβραικής καταγωγής, ο οποίος είναι γνωστός για τη συνεισφορά του στα μαθηματικά και κυρίως για το Μετρικό Θεώρημα και για το Λήμμα του *Urysohn*. Το όνομά του έχει συνδεθεί, επίσης, με τον όρο Merger-Urysonh dimensionκαι με τον όρο *Urysohnintegralequation*. Ο μοντέρνος ορισμός της συμπάγειας δόθηκε από τον ίδιο και τον Pavel Alexandrov, το 1923.
Στις αρχές της δεκαετίας του 1920 ο Pavel Urysohn απέδειξε το περίφημο Θεώρημά του, το οποίο ειναι γνωστό και ως ένα πρώτο μη τετριμμένο αποτέλεσμα στην τοπολογία στοιχείων συνόλο. Πέρα από τις εφαρμογές που είναι γνωστό οτι έχει το Λήμμα υπήρξε οργανικό στοιχείο για την απόδειξη της υπόθεσης ότι κάθε τοπολογικός χώρος ειναι μετρήσιμος.
Από το 1919 ήδη μία σύνθετη μαθηματική θεωρία σχετική με τα προαναφερθέντα αποδείχθηκε πειραματικά πως ήταν εξαιρετικά χρήσιμη στην ερμηνεία και απόδειξη φυσικών φαινομένων. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια της ηλιακής έκλειψης αποδείχθηκε η Θεωρία της Σχετικότητας, η οποία χρησιμοποιεί ψευδο-Riemann χώρους. Εμπνεόμενος από αυτή την επιτυχία ο Urysohn , ξεκίνησε να δουλεύει πάνω στην επέκταση του Λήμματος και πάνω στο Μετρικό Θεώρημα (metrization theorem), σε διατεταγμένους τοπολογικούς χώρους και στις αντίστοιχες ψευδο-μετρικές.
Ο Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924) αν και είχε λίγα μόνο χρόνια επιστημονικής έρευνας λόγω του πρόωρου θανάτου του από πνιγμό σε ηλικία μόλις 26 ετών είχε να επιδείξει μεγάλης σημασίας έργο πάνω στην Τοπολογία. Μετά τον θάνατο του Urysohn το έργο του συνεχίστηκε στη Σοβιετική Ένωση,από τον μαθητή του Vadim Efremovich , από τον μαθητή του τελευταίου Revolt Pimenov και από τους φοιτητές του Pimenov .Μέχρι το 1970, οι διάφορες παραλλαγές του Λήμματος, που αφορούσαν το χωρο-χρόνο, είχαν αποδειχθεί.
Ο *Urysohn* σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας από το 1915 έως το 1921. Ο επιβλέπων καθηγητής του ήταν ο Nikolai Luzin . Έπειτα έγινε επίκουρος στο ίδιο Πανεπιστήμιο. Πνίγηκε το 1924 ενώ κολυμπούσε στις ακτές της Γαλλίας.
Το Λήμμα του Urysohn αφορά σε *κανονικούς* τοπολογικούς χώρους.Στις περισσότερες των περιπτώσεων, στους κανονικούς τοπολογικούς χώρους περιλαμβάνεται και ο ν-διάστατος Ευκλείδιος χώρος.

Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός: Τοπολογία τ ενός συνόλου X είναι μία συλλογή υποσυνόλων του X, για την οποία ισχύει:

1. $\emptyset$, $X \in \tau$.
2. η τ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές.
3. η τ είναι κλειστή ως προς τις αυθαίρετες ενώσεις.

Ορισμός: Τοπολογικός χώρος ονομάζεται κάθε μη κενό σύνολο X, που είναι εφοδιασμένο με μία τοπολογία τ.

Ένας τοπολογικός χώρος συμβολίζεται ως το ζεύγος (X, τ). Κάθε στοιχείο του τ καλείται **ανοιχτό σύνολο στον** X. Το συμπληρωματικό κάθε ανοιχτού συνόλου καλείται **κλειστό σύνολο.**

Ένα σύνολο μπορεί να είναι ταυτόχρονα κλειστό και ανοιχτό ή και τίποτα από τα δύο.Πιο συγκεκριμένα, τα σύνολα $\emptyset, X$ είναι ταυτόχρονα κλειστά και ανοικτά σύνολα.Η οικογένεια κλειστών συνόλων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, που είναι συμπληρωματικές, ως προς εκείνες των κλειστών συνόλων.

- Τα $\emptyset$, X είναι κλειστά.
- Η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
- Η αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστή.

Παραδείγματα τοπολογικών χώρων:

1. Η **τετριμμένη τοπολογία** σε ένα σύνολο X απαρτίζεται μόνο από τα $\emptyset, X$.

2. Η **διακριτή τοπολογία** σε ένα σύνολο X αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του X. Γι΄ αυτό κάθε σύνολο είναι ταυτόχρονα κλειστό και ανοιχτό.

3. Η **ημιμετρική** d (*semimetric*), σε έναν χώρο X είναι μία πραγματική συνάρτηση επί του $X \times X$, μη αρνητική, συμμετρική, που ικανοποιεί τη σχέση $d(x,x) = 0, \forall x$ και την τριγωνική ανισότητα, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Η **μετρική** είναι μία ημιμετρική, που για τη σχέση $d(x,y) = 0$, δίνει $x = y$. Το ζεύγος (X, d) καλείται **μετρικός χώρος** , με d να είναι η μετρική του χώρου.
   $\Longrightarrow$ Δοθείσης μίας ημιμετρικής d έστω $B_\varepsilon(x) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\}$ η **ανοικτή ε-μπάλα** του x. Ένα σύνολο U είναι ανοικτό σε μία ημιμετρική τοπολογία που παράγεται από την d αν ισχύει ότι για κάθε σημείο x στο U υπάρχει ε> 0, για το οποίο έχουμε $B_\varepsilon(x) \subset U$. Με την τριγωνική ανισότητα εξασφαλίζουμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

   Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος καλείται **μετρικός** αν υπάρχει μετρική d στον X η οποία παράγει τον X.

   Η **διακριτή μετρική** για την οποία ισχύει ότι $d(x,y) = 1$ αν $x \neq y$ και $d(x,y) = 0$ αν $x = y$, παράγει τη διακριτή τοπολογία. Η μηδενική τοπολογία, που ορίζεται από την $d(x,y) = 0, \forall x, y$, παράγει την τετριμμένη τοπολογία.

4. Η μετρική $|x - y|$ ορίζει μία τοπολογία στη γραμμή των πραγματικών αριθμών.
   Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) είναι, επίσης, ανοικτό στην τοπολογία. Επιπλέον, κάθε ανοικτό σύνολο προκύπτει από τη αριθμήσιμη ένωση ανεξάρτητων ανοικτών διαστημάτων. Αυτό συμβαίνει καθώς κάθε στοιχείο ενός ανοικτού συνόλου πρέπει να περιέχεται σε ένα μέγιστο ανοικτό διάστημα. Όμως, κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει τουλάχιστον έναν τυχαίο αριθμό και το σύνολο των τυχαίων αριθμών από τη μεριά του είναι αριθμήσιμο σύνολο.

5. Η **Ευκλείδια μετρική** στον $\mathbb{R}^n$ με $d(x,y) = [\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2]^{(1/2)}$ ορίζει τη συνήθη τοπολογία που αλλιώς ονομάζεται και **Ευκλείδια τοπολο-**

γία .

6. Η εκτεταμένη γραμμή των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ έχει, επίσης, τοπολογία η οποία αποτελείται από όλα τα υποσύνολα U, όπου για κάθε $x \in U$ ισχύει ότι:
   - Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε θα υπάρχει $\epsilon > 0$, με $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.
   - Αν $x = \infty$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}$, όπου $(y, \infty] \subset U$.
   - Και, αν $x = -\infty$, τότε υπάρχει $y \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $[-\infty, y) \subset U$.
7. Μία διαφορετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ αποτελείται από όλα τα σύνολα Α για τα οποία για κάθε $x \in A$ υπάρχει ένα σύνολο της μορφής $U \setminus C \subset A$, όπου το U είναι ανοικτό ως προς τη συνήθη μετρική το C είναι μετρήσιμο και $x \in U \setminus C$.
8. Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Η συλλογή συνόλων που αποτελούνται από το κενό σύνολο και όλα τα σύνολα που περίεχουν το 1 είναι τοπολογία στον $\mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση, τα κλειστά σύνολα είναι το ίδιο το $\mathbb{N}$ και όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν το 1.
9. Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ και $U_n = \{n, n + 1, ...\}$. Τότε, το κενό σύνολο και όλα τα U_n αποτελούν μία τοπολογία στο $\mathbb{N}$. Τα κλειστά σύνολα της τοπολογίας θα είναι τα αρχικά τμήματα $\{1, 2, ...n\}$ και το ίδιο το $\mathbb{N}$.

Διάταξη στις τοπολογίες: Είδαμε προηγούμενα ότι κάθε μη τετριμμένο σύνολο X μπορεί να έχει διαφορετικές τοπολογίες. Η οικογένεια που απαρτίζεται από όλες τις τοπολογίες στον X είναι μερικά διατεταγμένη ως προς τη διάταξη συνόλων.
Αν $\tau' \subset \tau$ δηλαδή αν κάθε **τ′-ανοικτό** σύνολο είναι και **τ-ανοικτό**, τότε λέμε ότι η τ′ είναι **ασθενέστερη** από την τ και ότι η τ είναι **ισχυρότερη** σε σχέση με την τ′.

Η τομή μιας οικογένειας τοπολογιών σε ένα σύνολο είναι, επίσης, τοπολογία. Έστω $\mathcal{A}$ μία τυχαία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε υπάρχει η μικρότερη τοπολογία που περιλαμβάνει το $\mathcal{A}$ η οποία ακολουθεί τη διάταξη συνόλων. Δηλαδή, η τομή των τοπολογιών περιέχει την $\mathcal{A}$. Ισχύει, δε, ότι η διακριτή τοπολογία περιέχει πάντα την $\mathcal{A}$. Αυτή η τοπολογία λέγεται **γεννήτρια της** $\mathcal{A}$ και περιέχει, ακριβώς, τα $\emptyset$ και X και όλα τα σύνολα της μορφής $\bigcup_a V_a$, όπου κάθε V_a είναι η πεπερασμένη τομή συνόλων του $\mathcal{A}$.

Ορισμός: Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subset \tau$. Η $\mathcal{B}$ είναι **βάση** την τ, αν και μόνο αν κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή αν για κάθε $G \in$ τ, υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}, i \in I$, τέτοια ώστε $G = \bigcap_{i \in I} B_i$.
Αναλυτικά, η **βάση** μίας τοπολογίας τ είναι μία υπο-οικογένεια $\mathcal{B}$ του τ, τέτοια ώστε κάθε $U \in \tau$ να είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Ισοδύναμα, $\mathcal{B}$ είναι μία βάση του τ, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει το x, υπάρχει ανοικτό σύνολο $V \in \mathcal{B}$, που ικανοποιεί την $x \in V \subset U$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{B}$ είναι μία οικογένεια συνόλων που είναι κλειστή, ως προς την πράξη της πεπερασμένης τομής και $\bigcap \mathcal{B} = X$, τότε η οικογένεια τ όλων των ενώσεων από στοιχεία του $\mathcal{B}$, είναι μία τοπολογία, που είναι βάση της τ.

Ορισμός: Εστω $\mathcal{S}$ μία υπο-οικογένεια μιας τοπολογίας. Η $\mathcal{S}$ είναι **υποβάση** της τ, αν η συλλογή όλων των πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathcal{S}$ αποτελεί βάση της τ.
Να σημειωθεί ότι αν τα $\emptyset$ και X ανήκουν σε μία συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{S}$, τότε η $\mathcal{S}$ αποτελεί υποβάση για την τοπολογία που παράγει.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος καλείται **αριθμήσιμος** εάν έχει αριθμήσιμη βάση.

Παρατήρηση: Μία τοπολογία έχει αριθμήσιμη βάση αν και μόνον αν έχει αριθμήσιμη υποβάση.

Ορισμός: Σχετική τοπολογία ή **τοπολογία που επάγεται από την τ, στο** Y καλείται η συλλογή τ_Y υποσυνόλων του Y, όπου Y υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου (X, τ), με:

$$\tau_Y = \{V \cap Y : V \in \tau\}.$$

$\Longrightarrow$ Όταν $Y \subset X$ είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία, ο Y καλείται **τοπολογικός υπόχωρος του** X.

Ένα σύνολο τ_Y είναι **(σχετικά) ανοικτό** στον X. Για παράδειγμα, για $X \in \tau$ και $Y \cap X$, ο Y είναι σχετικά ανοικτός ως προς τον εαυτό του.

Για τον ορισμό της τοπολογίας απαιτείται να αναφέρουμε ότι η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων, είναι ανοικτό σύνολο. Ωστόσο, για αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων, δεν ισχύει πάντα ότι είναι ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, το $\{0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων στο $\mathbb{R}$, που δεν είναι ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό σύνολο.

Αντίστοιχα, αν και η πεπερασμένη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, για αριθμήσιμη τομή τυχαίας κλειστών συνόλων, δεν είναι κατ΄ ανάγκη κλειστό σύνολο. Για παράδειγμα, το $(0, 1] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ είναι αριθμήσιμη τομή κλειστών συνόλων στο $\mathbb{R}$, που δεν είναι ούτε κλειστό, ούτε ανοικτό σύνολο.

Κλειστότητα και Εσωτερικό

Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και έστω A ένα υποσύνολο του X. Η τοπολογία τ ορίζει δύο σύνολα, τα οποία σχετίζονται άμεσα με το A. Το **εσωτερικό του A**, που συμβολίζεται ως A^o είναι το μεγαλύτερο, σύμφωνα με την αρχή της διάταξης, ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A. Είναι, δηλαδή, η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X. Το εσωτερικό ενός μη κενού συνόλου μπορεί να είναι κενό.
Κλειστότητα του A καλείται το μικρότερο κλειστό υποσύνολο, που περιέχεται στο A, και συμβολίζεται ως $\overline{A}$ και είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων, που περιέχουν το A.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι για $A \subset B$, ισχύει $A^o \subset B^o$ και $\overline{A} \subset \overline{B}$. Επίσης, ένα σύνολο είναι ανοικτό αν και μόνον αν $A = A^o$ και ένα σύνολο B είναι κλειστό αν και μόνον αν $B = \overline{B}$. Κατά συνέπεια, για κάθε σύνολο A, ισχύει:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \text{ και } (A^o)^o = A^o$$

Λήμμα: Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Για κάθε υποσύνολο A του X, ισχύει: $A^o = \overline{(A^c)}^c$

Απόδειξη: Ισχύει ότι,

$$A^o \subset A \Rightarrow A^c \subset (A^o)^c \Rightarrow \overline{A^c} \subset \overline{(A^o)}^c = (A^o)^c \Rightarrow A^o \subset \overline{(A^c)}^c$$

Επίσης, αφού $A^c \subset \overline{A^c}$, ισχύει ότι $(\overline{A^c})^c \subset A$. Αφού το $(\overline{A^c})^c$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και A^o είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο A, παρατηρούμε ότι $A^o = (\overline{A^c})^c$. □

Περιοχή ενός στοιχείου x είναι ένα σύνολο V που περιέχει το x στο εσωτερικό του. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το x **είναι εσωτερικό σημείο** του V. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε μία περιοχή του x δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί ανοικτό σύνολο. Ωστόσο, σε κάποια βιβλία συναντάμε αυτή την υπόθεση. Προφανώς ισχύει το εξής:

ενα σύνολο είναι ανοικτό, αν και μόνον αν το ίδιο το σύνολο αποτελεί την περιοχή για κάθε σημείο, που περιέχεται σε αυτό.

Ορισμός: Η συλλογή όλων των περιοχών ενός σημείου x καλείται **βάση περιοχών** ή **σύστημα περιοχών** στο x και συμβολίζεται ως $\mathcal{N}_x$. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. $X \in \mathcal{N}_x$.
2. Για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$, έχουμε ότι $x \in V$(δηλαδή, $\emptyset \notin \mathcal{N}_x$).
3. Αν $V, U \in \mathcal{N}_x$, τότε $V \cap U \in \mathcal{N}_x$.
4. Αν $V \in \mathcal{N}_x$ και $V \subset W$, τότε $W \in \mathcal{N}_x$.

Κανονικοί και $Hausdorff$ Τοπολογικοί Χώροι

Ορισμος: Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται **κανονικός** αν είναι $hausdorff$ και αν κάθε δύο ξένα κλειστά σύνολα, περιέχονται το καθένα σε δύο ανοιχτά σύνολα, ξένα μεταξύ τους.

Ορισμος: Ένας τοπολογικός χώρος Χ λέγεται **τοπικά συμπαγής** αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή του x με συμπαγή κλειστότητα .

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται **Hausdorff** αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν περιοχές U, V των x, y αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$.

Μία σημαντική συνέπεια, που προκύπτει είναι η εξής:

Στους χώρους $hausdorff$ τα μοναδιαία σύνολα είναι κλειστά. Επίσης, οι τοπολογίες που ορίζονται από μετρικούς χώρους είναι $hausdorff$. Για παράδειγμα, η τετριμμένη τοπολόγια δεν είναι χώρος $hausdorff$.

Η **βάση περιοχών** στο x είναι μία συλλογή $\mathcal{B}$ περιοχών του x, με την ιδιότητα ότι, αν U είναι μία περιοχή του x, τότε υπάρχει περιοχή $V \in \mathcal{B}$, με $V \subset U$.

Ορισμός:Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται **1-αριθμήσιμος**, αν κάθε σημείο έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Κάθε ημιμετρικός χώρος είναι 1-αριθμήσιμος: οι μπάλες ακτίνας $\frac{1}{n}$ γύρω από το x, σχηματίζουν μία αριθμήσιμη βάση περιοχών στο x. Προφανώς, κάθε 2-αριθμήσιμος χώρος είναι και 1-αριθμήσιμος, όμως το αντίστροφο δεν ισχύει.
Ένα σημείο x είναι **σημείο κλειστότητας** ενός συνόλου Α, αν κάθε περιοχή του x τέμνει το Α. Επίσης, ισχύει ότι το $\overline{A}$ ταυτίζεται με το σύνολο που περιέχει τα σημεία κλειστότητας του Α.
Ένα στοιχείο x είναι **σημείο συσσώρευσης** (ή οριακό σημείο) του Α, αν για κάθε περιοχή V του x, ισχύει $(V \backslash \{x\}) \bigcap A \neq \emptyset$.
Ονομάζουμε ένα σημείο x του Α **συνοριακό σημείο**, αν για κάθε περιοχή V του x ισχύει $V \bigcap A \neq \emptyset$ και $V \bigcap A^c \neq \emptyset$. Προφανώς , τα σημεία συσσώρευσης και τα συνοριακά σημεία, ανήκουν στην κλειστότητα του Α. Έστω $A^{'}$ το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του Α και έστω ∂A το σύνορο

του A, το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\overline{A} = A^o \cup \partial A \text{ και } \partial A = \partial A^c = \overline{A} \cup \overline{A}^c$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι ένα σύνολο A είναι κλειστό, αν και μόνον αν $A^{'} \subset A$ και αν και μόνον αν $\partial A \subset A$. Γενικά,

Ένα σύνολο είναι κλειστό, αν και μόνον αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.

Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X είναι **τέλειο**, στον X, αν είναι κλειστό και κάθε στοιχείο του A είναι σημείο συσσώρευσης του A. Συγκεκριμένα, κάθε περιοχή του στοιχείου x στο A, περιέχει στοιχείο του A, το οποίο είναι διαφορετικό από το x. Ο χώρος X είναι τέλειος, αν όλα τα στοιχεία του είναι σημεία συσσώρευσης.
Ένα στοιχείο $x \in A$ είναι **απομονωμένο στοιχείο** του A αν υπάρχει περιοχή $(V \backslash \{x\}) \cap A = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι, το $\{x\}$ είναι ένα σχετικά ανοικτό υποσύνολο του A. Ένα σύνολο είναι τέλειο αν και μόνον αν είναι κλειστό και όλα του τα σημεία είναι απομονωμένα σημεία. Τότε η κλειστότητά του, $\overline{A}$, είναι τέλειο σύνολο στο X. Σημειώνουμε ότι το κενό σύνολο είναι τέλειο.

Πυκνά σύνολα

Ορισμός:Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X καλείται **πυκνό** στον X, αν $\overline{D} = X$.

Συγκεκριμένα, ένα σύνολο D είναι πυνό, αν και μόνον αν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει ένα στοιχείο στο D. Δηλαδή, αν D πυκνό στον X και $x \in X$, τότε κάθε περιοχή του x, περιέχει ένα στοιχείο στο D. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του X προσεγγίζεται, με καλή προσέγγιση, από ένα στοιχείο του D. Ένα σύνολο N δεν είναι πουθενά πυκνό, αν η κλειστότητά του έχει κενό εσωτερικό.

Ορισμός:Ένας τοπολογικός χώρος είναι **διαχωρίσιμος**, να περιέχει ένα αριθμήσιμο πύκνο υποσύνολο.

Λήμμα: Κάθε 2-διαχωρίσιμος χώρος είναι διαχωρίσιμος.
Το αντίστροφο ισχύει για μετρικούς χώρους, όμως δεν ισχύει γενικά.

Ορισμός: Δύο υποσύνολα A και B ενός τοπολογικού χώρου X ξένα μεταξύ τους είναι:

1. **διαχωρισμένα από ανοικτά σύνολα** αν υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα V και W ξένα μεταξύ τους για τα οποία να ισχύει ότι $A \subseteq V$ και $B \subseteq W$, και
2. **διαχωρισμένα από συνεχή συνάρτηση** αν υπάρχει συνεχής $f : X \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $f(a) = 0, f(b) = 1 \forall a \in A$ και $\forall b \in B$.

Λήμμα: Αν δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου είναι διαχωρισμένα από συνεχή συνάρτηση, τότε είναι επίσης διαχωρισμένα από ανοικτά σύνολα.

Απόδειξη: Έστω A και B δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $f : X \to [0, 1]$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) = 0, \forall a \in A$ και έστω $f(b) = 1, \forall b \in B$. Αν $V = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\}$ και $W = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2}\}$, τότε τα V και W είναι δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα για τα οποία ισχύει ότι $A \subseteq V$ και $B \subseteq W$. $\square$

Τοπολογικοί χώροι των οποίων τα κλειστά ξένα υποσύνολα διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα παίζουν σημαντικό ρόλο στη μαθηματική ανάλυση και αποτελούν τους κανονικούς χώρους.

Παραδείγματα (Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, με μη αριθμήσιμη βάση) Δίνουμε δύο παραδείγματα διαχωρίσιμων χώρων, που δεν έχουν αριθμήσιμες βάσεις.

1. Έστω X ένα μη αριθμήσιμο σύνολο και έστω $x \in X$. Ορίζουμε τοπολογία, που αποτελείται από το κενό σύνολο και από όλα τα σύνολα που περιέχουν το x. Το σύνολο $\{x_o\}$ είναι πυκνό στον X, άρα το X είναι διαχωρίσιμο. Επιπλέον, κάθε σύνολο της μορφής $\{x_o, x\}, x \in X$, είναι ανοικτό, άρα δεν υπάρχει αριθμήσιμη βάση.

2. Το επόμενο παράδειγμα αφορά στον l_1 χώρο, όλων των- κατά απόλυτη τιμή- αθροίσιμων πραγματικών συναρτήσεων, που είναι εφοδιασμένες με την ασθενή τοπολογία $\sigma(l_1, l_\infty)$. Το αριθμήσιμο σύνολο όλων των τελικά μηδενικών ακολουθιών, είναι ένα πυκνό υποσύνολο του l_1, άρα $(l_1, \sigma(l_1, l_\infty))$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος $Hausdorff$. Ωστόσο, ο χώρος $\sigma(l_1, l_\infty)$ δεν είναι αριθμήσιμος.

Δίκτυα

Μία **ακολουθία** στον X είναι μία συνάρτηση φυσικών αριθμών, στο X. Συνήθως θεωρούμε ότι μία ακολουθία, ως ένα υποσύνολο του X, με δείκτες που βρίσκονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Ένα δίκτυο είναι μία ευθεία γενίκευση της έννοιας της ακολουθίας. Αντί για φυσικούς αριθμούς, το δίκτυο έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί και άλλα σύνολα αριθμών. Η ουσία είναι ότι το σύνολο των δεικτών περιέχει την έννοια της διάταξης.

Η έννοια της **διάταξης** σε ένα, όχι κατ΄ ανάγκη άπειρο, σύνολο D, είναι μία αυτοπαθητική($reflexive$) διμελής σχέση, με την ιδιότητα ότι κάθε ζεύγος έχει άνω όριο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ζεύγος $\alpha, \beta \in D$ υπάρχει $\gamma \in D$, για τα οποία ικανοποιούνται οι σχέσεις $\gamma \succeq \alpha$ και $\gamma \succeq \beta$.
Μία διάταξη δεν είναι υποχρεωτικό να είναι μερική, αφού δεν μας χρειάζεται η αντισυμμετριότητα. Πρακτικά, όμως, στις περισσότερες περιπτώσεις οι διατάξεις που συναντάμε είναι μερικές. Επίσης, στις διατάξεις ισχύει ότι όταν έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο, υπάρχει άνω όριο.

Ένα **διατεταγμένο σύνολο**, είναι ένα σύνολο D, εφοδιασμένο με τη διάταξη $\succeq$. Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα:

1. Το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, εφοδιασμένο με την πράξη της διάταξης $\succeq$, που ορίζεται, ως εξής: για $m \geq n$,ισχύει $m \succeq n$.

2. Το σύνολο $(0, \infty)$, εφοδιασμένο με την πράξη της διάταξης, όπου $x \succeq y$, όταν $x \geq y$.

3. Το σύνολο (0, 1), εφοδιασμένο με την πράξη της διάταξης, όπου $x \succeq y$, όταν $x \geq y$.

4. Το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$, ενός σημείου x σε έναν τοπολογικό χώρο, που είναι εφοδιασμένος με την πράξη της διάταξης $\succeq$, όπου $V \succeq W$, όταν $V \subset W$. Το ότι ένα σύστημα περιοχών του x είναι διατεταγμένο σύνολο, δείχνει κατά πόσο είναι χρήσιμα τα δίκτυα.

5. Η συλλογή Φ όλων των πεπερασμέων υποσυνόλων ενός συνόλου X,εφοδιασμένου με την πράξη της διάταξης $\succeq$, που ορίζεται, ως εξής: για $A \subset B$,ισχύει $A \succeq B$.

Αν D διατεταγμένο σύνολο, τότε είναι σύνηθες να συμβολίζουμε τη διάταξη $\succeq$, ως $\geq$. Αν A και B είναι διατεταγμένα σύνολα, το Καρτεσιανό τους γινόμενο A $\times$ B είναι, επίσης, διατεταγμένο σύνολο, εφοδιασμένο με την πράξη **διάταξης γινομένου**, ο οποία ορίζεται ως (α, β) $\geq$ (γ, δ), όταν α $\geq$ γ και β $\geq$ δ. Συγκεκριμένα, αν $\{D_i : i \in I\}$ μία οικογένεια διατεταγμένων συνόλων, τότε το Καρτεσιανό της γινόμενο $D = \Pi_{i \in I} D_i$, είναι -επίσης, διατεταγμένο, με την πράξη της διάταξης, όπου $(a_i)_{i\in I} \geq (b_i)_{i\in I}$, όταν $a_i \geq b_i, \forall i \in I$. Θα θεωρούμε ότι τι Καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας διατεταγμένων συνόλων είναι διατεταγμένο, μέσω της διάταξης γινομένου, εκτός και αν μας δίνεται κάτι διαφορετικό.

Ορισμός: Έστω D είναι ένα διατεταγμένο σύνολο. Θα ονομάζουμε **δίκτυο** ενός συνόλου X, τη συνάρτηση $x : D \to X$. Το διατεταγμένο σύνολο D καλείται **σύνολο δεικτών** του συνόλου και τα στοιχεία του D λέγονται δείκτες.

Ειδικότερα, κάθε ακολουθία είναι δίκτυο. Είναι σύνηθες να συμβολίζουμε τη συνάρτηση $x(\cdot)$, ως $\{x_a\}$, το οποίο εμπεριέχει την έννοια της διάταξης. Ωστόσο, όποτε υπάρχει η ανάγκη να υπογραμμίσουμε το σύνολο δεικτών D, το δίκτυο συμβολίζεται $\{x_a\}_{a\in D}$. Παρατηρούμε ότι κάθε διατεταγμένο σύνολο D είναι δίκτυο του εαυτού του, μέσω της ταυτοτικής συνάρτησης.

Ένα δίκτυο $\{x_a\}$ σε έναν τοπολογικό χώρο **συγκλίνει** σε ένα σημείο x, αν τελικά περιέχεται σε κάθε περιοχή του x. Δηλαδή, αν για κάθε περιοχή V του x, υπάρχει a_o(που εξαρτάται από το V), τέτοια ώστε $x_a \in V, \forall a \geq a_o$. Το x είναι **όριο** του δικτύου και γράφουμε $x_a \to x$. Για ένα μετρικό χώρο, έχουμε $x_a \to x$, αν και μόνον αν $d(x_a, x) \to 0$. Στούς χώρους $Hausdorff$ τα όρια είναι μοναδικά.

Ενώ σε μετρικούς χώρους οι ακολουθίες περιγράφουν ικανοποιητικά τα σημεία κλειστότητας ενός συνόλου, για παράδειγμα,τα δίκτυα χρειάζονται στην περιγραφή παρόμοιων ιδιοτήτων, για γενικούς τοπολογικούς χώρους.

Παραδείγματα:

Θεωρούμε την τοπολογία του παραδείγματος 7, όπως την είχαμε ορίσει προηγούμενα, στα παραδείγματα τοπολογικών χώρων. Τα σύνολα της μορφής $U\backslash C$, όπου U ανοικτό με τη συνήθη τοπολογία και C μετρήσιμο, το οποίο αποτελεί βάση της τοπολογίας. Σε αυτή την τοπολογία, οι μόνες ακολουθίες που συγκλίνουν στο σημείο x, είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.
Η κλειστότητα του διαστήματος (0,1), γι΄ αυτή την τοπολογία είναι το [0,1].Ωστόσο, δεν υπάρχει ακολουθία στο (0,1), που να συγκλίνει είτε στο 0, είτε στο 1.(Αν $\{x_1, x_2, ...\}$ είναι μία ακολουθία στο (0,1), τότε το (0,2) $\backslash\{x_1, x_2, ...\}$, είναι μία περιοχή του 1, που δεν περιέχει κανένα σημείο του x).

Λήμμα:Ένα στοιχείο ανήκει στην κλειστότητα ενός συνόλου, αν και μόνον αν αυτό είναι το όριο ενός δικτύου του συνόλου.

Απόδειξη:

Έστω x σημείο κλειστότητας του A. Άν $V \in \aleph_x$, τότε $V \cap A \neq \emptyset$, έτσι ώστε να υπάρχει ένα $x_v \in V \cap A$. Τότε, το $\{x_v\}_{V \in \aleph_x}$ είναι ένα δίκτυο (όπου $\aleph_x$ είναι διατεταγμένο, σύμφωνα με τη σχέση $V \leq W$, όταν $V \subset W$) και $x_v \to x$.

Η έννοια του υποδικτύου γενικεύει την έννοια της υπακολουθίας.

Ορισμός: Ένα δίκτυο $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ καλείται **υποδίκτυο** ενός δικτύου$\{x_a\}_{a \in A}$, αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi : \Lambda \to A$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\psi_\lambda = x_{\varphi_\lambda}, \forall \varphi_\lambda$, όπου $\varphi_\lambda = \varphi(\lambda)$.
2. Για κάθε $\alpha_o \in A$, υπάρχει κάποιο $\lambda_o \in \Lambda$, έτσι ώστε $\lambda \geq \lambda_o$, με $\varphi_\lambda \geq \alpha_o$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν, περιγράφουν την έννοια του υποδικτύου.

- Κάθε υπακολουθία μιάς ακολουθίας είναι υποδίκτυο.
- Το δίκτυο $\{y_{m,n}\}_{(m,n) \in N \times N}$, όταν $y_{m,n} = m^2 + 2mn + n^2 + 1$, είναι ένα υποδίκτυο της ακολουθίας $\{x_n\}$, όπου $x_n = n^2 + 1$. Για να συμβαίνει αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : N \times N \to N$, όπου $\varphi(m, n) = m + n$.

Επίσης, επισημαίνεται ότι το δίκτυο $\{y_{m,n}\}$ δεν είναι υπακολουθία της $\{x_n\}$.

- Θεωρούμε τα δίκτυα $\{y_\lambda\}_{\lambda\in(0,1)}$ και $\{x_\alpha\}_{\alpha\in(1,\infty)}$, όπου:
  - $y_\lambda = \frac{1}{\lambda}$, όπου $(0,1)$ είναι διατεταγμένο σύνολο, με $\lambda \succeq \mu$. Και
  - $x_\alpha = \alpha$, όπου $(1,\infty)$ είναι διατεταγμένο, με $\alpha \succeq \beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$.

Τότε, το $\{y_\lambda\}$ είναι ένα υποδίκτυο του $\{x_\alpha\}$ και αντίστροφα. Αυτό συμβαίνει, αν θέσουμε στη συνάρτηση $\varphi : (0,1) \to (1,\infty)$, τη σχέση $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Τα υποδίκτυα συνδέονται με τα οριακά σημεία των δικτύων. Ένα στοιχείο x, σε έναν τοπολογικό χώρο είναι **οριακό σημείο** ενός δικτύου $\{x_\alpha\}$, αν για κάθε περιοχή V του x και για κάθε δείκτη α, υπάρχει κάποιο $\beta \geq \alpha$, τέτοιο ώστε $x_\beta \in V$. Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του $\{x_a\}$ συμβολίζεται $Lim\{x_\alpha\}$.

Θεώρημα: Ένα σημείο είναι οριακό σημείο ενός δικτύου, αν και μόνον αν είναι όριο κάποιου υποσυνόλου του.

Απόδειξη:

Έστω x ένα οριακό σημείο ενός δικτύου$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, σε έναν τοπολογικό χώρο. Για κάθε $(\alpha, V) \in A \times \aleph_x$, (όπου $A \times \aleph_x$ είναι διατεταγμένο, από την διάταξη του γινομένου), επιλέγω ένα $\phi_{\alpha,V} \in A$, με $\phi_{\alpha,V} \geq \alpha$ και $x_{\phi_{\alpha,V}} \in V$. Κατόπιν , ορίζουμε το δίκτυο $\{y_{\alpha,V}\}$, έτσι ώστε $y_{\alpha,V} = x_{\phi_{\alpha,V}}$ και συγκρκριμένα ισχύει ότι $\{y_{\alpha,V}\}_{(\alpha,V)\in A\times\aleph_x}$ είναι ένα υποδίκτυο του $\{x_\alpha\}$, που συγκλίνει στο x.
Για το αντίθετο, υποθέτουμε ότι σε έναν τοπολογικό χώρο ένα υποδίκτυο $\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ενός δικτύου $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, συγκλίνει σε ένα σημείο x. Θεωρώ $\alpha_o \in A$ και μία περιοχή V του x και έστω $\phi : \Lambda \to A$, μία απεικόνιση, που περιγράφει το υποδίκτυο. Επίδης, επιλέγουμε ένα $\lambda_o \in \Lambda$, για το οποίο να ισχύει $y_\lambda \in V$, για κάθε $\lambda \geq \lambda_o$. Έπειτα, επιλέγουμε $\lambda_1 \in \Lambda$, τέτοιο ώστε $\phi_\lambda \geq \alpha_o$, για κάθε $\lambda \geq \lambda_1$. Αν το $\lambda_2 \geq \lambda_o$, ικανοποιεί τη σχέση $\lambda_2 \geq \lambda_1$ και $\lambda_2 \geq \lambda_o$, τότε ο δείκτης $\beta = \phi_{\lambda_2}$ ικανοποιεί τη σχέση $\beta \geq \alpha_o$ και $x_\beta = x_{\phi_{\lambda_2}} = y_{\lambda_2}$, έτσι ώστε το x να είναι το οριακό σημείο του δικτύου $\{x_\alpha\}$.

Λήμμα: Ένα δίκτυο συγκλίνει σε ένα σημείο, αν και μόνον αν κάθε υποσύνολό του συγκλίνει στο ίδιο σημείο.

Απόδειξη:

Έστω $\{x_\alpha\}$ ένα δίκτυο σε έναν τοπολογικό χώρπ X. Προφανώς, για κάθε υποδίκτυο $\{y_\lambda\}$ του $\{x_\alpha\}$, $y_\lambda \to x$. Για το αντίθετο, υποθέτουμε ότι κάθε υποδίκτυο του $\{x_\alpha\}$ συγκλίνει στο x και έστω ότι το $\{x_\alpha\}$ δε συγκλίνει στο x. Τότε, υπάρχει περιοχή V του x, τέτοια ώστε για κάθε δείκτη $\alpha \in A$ υπάρχει $\phi_\alpha \geq \alpha$, με $x_{\phi_\alpha} \notin V$. Αν $y_\alpha = x_{\phi_\alpha}$, τότε $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ είναι υποδίκτυο του $\{x_\alpha\}$, το οποίο- όμως- δε συκλίνει στο x.Άτοπο. Αφού θα έπρεπε $x_\alpha \to x$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα όρια, δεν απαιτείται να είναι μοναδικά. $\square$.

• Όπως και με τις ακολουθίες, κάθε φραγμένο δίκτυο $\{x_\alpha\}$ πραγματικών αριθμών, έχει μέγιστο και ελάχιστο όριο. Το μέγιστο όριο του $\{x_\alpha\}$ καλείται *limit superior* και γράφεται $limsup_\alpha\{x_\alpha\}$. Το μικρότερο όριο καλείται *limit inferior*, το οποίο γράφεται $liminf_\alpha\{x_\alpha\}$. Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_a inf\{x_\alpha\} = \sup_a \inf_{\beta \geq a}\{x_\beta\} \leq \lim_a sup\{x_\alpha\} = \inf_a \sup_{\beta \geq a}\{x_\beta\}$$

Επίσης, $x_\alpha \to x$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει, αν και μόνον αν:

$$x = \lim_a inf\{x_\alpha\} = \lim_a sup\{x_\alpha\}.$$

Φίλτρα

Η χρησιμότητα των φίλτρων στην τοπολογία έχει να κάνει με το σύστημα περιοχών $\mathcal{N}_x$, ενός σημείου x, σε έναν τοπολογικό χώρο.

Ορισμός: Ένα **φίλτρο** σε ένα σύνολο X, είναι μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων, που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ και $X \in \mathcal{F}$.
2. Αν A, B $\in \mathcal{F}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Αν $A \subset B$ και $A \in \mathcal{F}$, τότε $B \in \mathcal{F}$.

Ένα **ελεύθερο φίλτρο** είναι ένα φίλτρο $\mathcal{F}$, με κενή τομή, $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$. Τα φίλτρα που δεν είναι ελεύθερα καλούνται **καθορισμένα**.

Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα φίλτρων.

- Έστω X ένα τυχαίο σύνολο και έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του X. Τότε, η συλλογή συνόλων

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : S \subset A\}$$

  είναι ένα φίλτρο. Συγκεκριμένα, αυτό το φίλτρο είναι καθορισμένο.

- Έστω X ένα άπειρο σύνολο και θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{F}$ πεπερασμένων συνόλων.(Ένα συνολο είναι $cofinite$, αν είναι το συμπληρωματικό ενός πεπερασμένου συνόλου). Δηλαδή,

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A^c \text{ πεπερασμένο}\}$$

  Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο φίλτρο.

Ένα φίλτρο $\mathcal{G}$ είναι **υποφίλτρο** ενός φίλτρου $\mathcal{F}$, αν $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το $\mathcal{G}$ είναι $finer$ του $\mathcal{F}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μερική διάταξη στα φίλτρα έχει την αντίθετη έννοια από αυτή της διάταξης.

Δηλαδή, $\mathcal{U}$ είναι ένα υποφίλτρο αν $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$, σε ένα φίλτρο $\mathcal{G}$, σημαίνει $\mathcal{U} = \mathcal{G}$.

Θεώρημα στα υπερφίλτρα: Κάθε φίλτρο περιέχεται σε ένα τουλάχιστον υπερφίλτρο. Κατά συνέπεια, κάθε άπειρο σύνολο έχει ένα ελεύθερο υπερφίλτρο.

Απόδειξη:

Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο ενός συνόλου X και έστω $\mathcal{C}$ μία μη κενή συλλογή όλων των υποφίλτρων του $\mathcal{F}$. Δηλαδή,

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ φίλτρο και } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}.$$

Η συλλογή $\mathcal{C}$ είναι μερικά διατεταγμένη. Δοθείσης αλυσίδας $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{C}$, η οικογένεια $\{A = A :\in \mathcal{G}, \text{για κάποιο } \mathcal{G} \in \mathcal{B}\}$ είναι φίλτρο, που είναι άνω φραγμένο για το $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{C}$. Άρα οι προυποθέσεις του Θερήματος $Zorn$ ικανοποιούνται, δηλαδή το $\mathcal{C}$ έχει μεγιστικό στοιχείο. Ισχύει ότι κάθε μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{C}$, είναι υπερφίλτρο που περιέχει το $\mathcal{F}$.
Για το τελευταίο κομμάτι της απόδειξης, ισχύει ότι αν το X είναι άπειρο σύνολο, τότε το

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A_c \text{ πεπερασμένο } \}.$$

είναι ελέυθερο φίλτρο. Κάθε υπερφίλτρο που περιέχει το $\mathcal{F}$ είναι ελεύθερο.$\square$.

Λήμμα: Κάθε καθορισμένο υπερφίλτρο σε ένα σύνολο X, της μορφής

$$\mathcal{U} = \{A \subset X : x \in A\}$$

, για μοναδικό $x \in X$.

Απόδειξη:Έστω $\mathcal{U}$ καθορισμένο υπερφίλτρο στο X και έστω $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$. Τότε, το $\mathcal{U}_x = \{A \subset X : x \in A\}$ είναι ένα φίλτρο στο X, όπου $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_x$. Άρα, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$.$\square$

Μία μη κενή συλλογή $\mathcal{B}\}$ υποσυνόλων του X είναι μία **βάση φίλτρου**, αν

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$

2. αν A, B $\in \mathcal{B}$, τότε υπάρχει κάποιο $C \in \mathcal{B}$, με $C \subset A \cap B$.

Κάθε φίλτρο, αποτελεί βάση του εαυτού του. Απ΄ την άλλη, αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση φίλτρου για ένα σύνολο X, τότε το σύνολο

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{A \subset X : B \subset A, \text{για κάποιο} B \in \mathcal{B}\},$$

είναι δίκτυο, το οποίο ονομάζεται **φίλτρο παραγόμενο από τη** $\mathcal{B}$. Για παράδειγμα, η ανοικτή περιοχή ενός σημείου x, ενός τοπολογικού χώρου, σχηματίζει μία βάση φίλτρου $\mathcal{B}$, που ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \mathcal{N}_x$, που αποτελεί φίλτρο για κάθε περιοχή του x.

Λήμμα:Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$, σε ένα σύνολο X, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

1. Αν $A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{U}$, τότε $A_i \in \mathcal{U}$, για κάποιο i.
2. Αν $A \cap B \neq \emptyset$, για κάθε $B \in \mathcal{U}$, τότε $A \in \mathcal{U}$.

Απόδειξη:

(1) Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο X και έστω $A \cup B \in \mathcal{U}$. Αν $A \notin \mathcal{U}$, τότε η συλλογή συνόλων $\mathcal{F} = \{C \subset X : A \cup C \in \mathcal{U}\}$ είναι ένα φίλτρο, όπου $B \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Τότε, $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, άρα $B \in \mathcal{U}$. Η γενική περίπτωση προκύπτει με επαγωγή.
(2) Υποθέτουμε ότι $A \cap B \neq \emptyset$ για κάθε $B \in \mathcal{U}$. Αν $B = \{A \cap B : B \in \mathcal{U}\}$, τότε το $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση φίλτρου και το φίλτρο $\mathcal{F}$ που παράγει ικανοποιεί τις σχέσεις $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ και $A \in \mathcal{F}$. Αφού το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο, παρατηρούμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ και $A \in \mathcal{U}$.$\square$

Λήμμα: Αν $\mathcal{U}$ είναι ένα ελεύθερο υπερφίλτρο σε ένα σύνολο του X, τότε δε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του X. Συγκεκριμένα, μόνο άπειρα σύνολα συναντάμε σε υπερφίλτρα.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι τα ελεύθερα φίλτρα δεν περιέχουν μονοσύνολα. Γι΄ αυτό το

λόγο, αν $\{x\} \in \mathcal{U}$, τότε $\{x\} \cap A \neq \emptyset$, για κάθε $A \in \mathcal{U}$, άρα $x \in A$ για κάθε $A \in \mathcal{U}$. Δηλαδή,$\bigcap_{A \in \mathcal{U}} A \neq \emptyset$. Άτοπο.
Τώρα, για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$, αν $\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \bigcup_n \{x_i\} \in \mathcal{U}$, έχουμε $\{x_i\} \in \mathcal{U}$, για κάποιο i, αντίθετα με την αρχική υπόθεση. Άρα, δεν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του X, που να ανήκει στο $\mathcal{U}$. □

Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$, σε έναν τοπολογικό χώρο X, **συγκλίνει** σε ένα σημείο x, με $\mathcal{F} \to x$, αν το $\mathcal{F}$ περιέχει την περιοχή φίλτρων $\mathcal{N}_x$, σε ένα x, όπου $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$.
Όμοια, μία βάση φίλτρων $\mathcal{B}$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο x, με $\mathcal{B} \to x$, αν το φίλτρο που παράγεται από από το $\mathcal{B}$ συγκλίνει στο x. Προφανώς, $\mathcal{N}_x \to x$.
Ένα στοιχείο x, σε έναν τοπολογικό χώρο, είναι **οριακό σημείο** ενός φίλτρου $\mathcal{F}$, όταν $x \in \overline{A}$, για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του $\mathcal{F}$ γράφεται $Lim\mathcal{F}$. Προφανώς, $Lim\mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$. Όπως και με τα δίκτυα, τα οριακά σημεία ενός φίλτρου, είναι ακριβώς τα οριακά σημεία των υποφίλτρων του.

Θεώρημα: Ένα στοιχείο είναι οριακό στοιχείο ενός φίλτρου αν και μόνο αν υπάρχει υποφίλτρο, που να συγκλίνει σε αυτό.

Απόδειξη:

Έστω x οριακό σημείο ενός φίλτρου $\mathcal{F}$ σε έναν τοπολογικό χώρο. Δηλαδή, έστω $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$. Τότε, η συλλογή συνόλων

$$\mathcal{B} = \{V \subset A : V \in \mathcal{N}_x \text{ και } A \in \mathcal{F}\}$$

αποτελεί βάση του φίλτρου. Επιπλέον, αν $\mathcal{G}$ είναι το φίλτρο που παράγει, τότε ισχύει $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ και $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{G}$.Αυτό σημαίνει ότι το $\mathcal{G}$ είναι υπερφίλτρο του $\mathcal{F}$, που συγκλίνει στο x.
Για το αντίθετο, υποθέτουμε ότι το $\mathcal{G}$ υπερφίλτρο του $\mathcal{F}$ (δηλαδή, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$) για το οποίο ισχύει ότι $\mathcal{G} \to x$ (δηλαδή, $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{G}$). Τοτε, για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}$, αυτά θα ανήκουν στο $\mathcal{G}$. Συνεπώς, $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$. □

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τον ακόλουθο χαρακτηρισμό της σύγκλισης.

Λήμμα: Ένα φίλτρο συγκλίνει σε ένα στοιχείο αν και μόνο αν κάθε υποφίλτρο του συγκλίνει στο ίδιο ακριβώς στοιχείο.

Δίκτυα και φίλτρα

Υπάρχει άμεση σχέση ανάμεσα σε δίκτυα και φίλτρα. Έστω $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ δίκτυο ενός τοπολογικού χώρου X. Για κάθε α ορίζουμε το **τμήμα** ή την **ουρά** $F_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ και έστω $\mathcal{B} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ οικογένεια συνόλων. Είναι τετριμμένο ότι το $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση φίλτρου. Το φίλτρο $\mathcal{F}$, που παράγεται από τη $\mathcal{B}$ ορίζεται ως **τμήμα φίλτρου**$(section filter)$ ή ως **το φίλτρο που παράγεται από το δίκτυο** $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.
Το δίκτυο $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ και το τμήμα του φίλτρου $\mathcal{F}$ έχουν τα ίδια οριακά σημεία. Δηλαδή, $Lim\{x_\alpha\} = Lim\mathcal{F}$. Πράγματι, αν $x \in Lim\{x_\alpha\}$, τότε το x είναι όριο κάποιου υποσυνόλου$\{y_\lambda\}$ του $\{x_\alpha\}$. Διαπιστώνουμε ότι το φίλτρο $\mathcal{G}$ που παράγεται από το $\{y_\lambda\}$, είναι υποφίλτρο του $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G} \to x$. Αντίστροφα, αν $x \in Lim\mathcal{F}$, για κάθε α και για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$, έχουμε ότι $V \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Γι΄ αυτό επιλέγουμε ένα $y_{a,V} \in V \cap F_\alpha$, τότε το $\{y_{a,V}\}_{(\alpha,V)\in D\times\mathcal{N}_x}$, ορίζει ένα υποδίκτυο του $\{x_\alpha\}$, τέτοιο ώστε $y_{a,V} \to x$, με $x \in Lim\{x_\alpha\}$.
Επειτα, θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ σε ένα τοπολογικό χώρο X και ένα σύνολο $D = \{(\alpha, A) : A \in \mathcal{F}$ και $\alpha \in A\}$. Το σύνολο D διαθέτει μία φυσική διάταξη $\geq$, που ορίζεται από τη σχέση $(\alpha, A) \geq (\beta, B)$, όταν $A \subset B$, με τέτοιο τρόπο που ο τύπος $x_{\alpha,A=\alpha}$ να ορίζει ένα δίκτυο στον X. Αυτό το δίκτυο καλείται **δίκτυο που παράγεται από το φίλτρο** $\mathcal{F}$. Παρατηρούμε ότι $F_{\alpha,A} = A$, άρα το φίλτρο που παράγεται από το δίκτυο $\{x_{\alpha,A}\}$ είναι το ίδιο το $\mathcal{F}$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι $Lim\{x_{\alpha,A}\} = Lim\mathcal{F}$.

Θεώρημα (Αντιστοιχία δικτύων και φίλτρων)

Ένα δίκτυο και το φίλτρο, που εκείνο παράγει, έχουν τα ίδια οριακά σημεία. Αντίστοιχα, ε΄να φίλτρο και το δίκτυο που αυτό παράγει, έχουν τα ίδια οριακά σημεία.

ΗΜΙΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμος 1 *Μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται κάτω ημισυνεχής , αν το σύνολο $\{x : f(x) > B\}$ είναι ανοιχτό για κάθε $B \in \mathbb{R}$. Επίσης, μία συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, λέγεται άνω ημισυνεχής αν το $\{x : f(x) < B\}$ είναι ανοιχτό, για κάθε $B \in \mathbb{R}$.*

Προταση 1 *Κάθε supremum μιας κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης είναι και το ιδιο κάτω ημισυνεχές. Ένα infimum μιας άνω ημισυνεχούς συνάρτησης είναι, επίσης, κάτω ημισυνεχές.*

Απόδειξη : Έστω G ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων όπου g κάτω ημισυνεχής για κάθε $g \in G$ και έστω f το supremum $\forall g$. Θεωρώ τυχαίο B $\in \mathbb{R}$ και έστω

$$\mathrm{Q} = \{x \in X : f(x) > B\}$$

και

$$\mathrm{M} = \bigcup \{x \in X : g(x) > b\}, g \in G$$

Αφού το M ειναι μια τυχαία ένωση ανοικτών συνόλων, το M θα είναι και το ίδιο ανοικτό. Θα δείξουμε ότι M= Q . Θεωρούμε x $\in$ X . Τότε, x $\in$ X, αν και μόνο αν το B δεν είναι άνω φράγμα στο $\{g(x) : g \in G\}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $f(x) > B$, αφού το να ειναι μικρότερο από το μικρότερο άνω φράγμα δίνει άτοπο για την υπόθεση ότι το B είναι άνω φράγμα. Επίσης, από $f(x) > B$, έχουμε ακριβώς ότι x$\in$ Q .
Άρα, M = Q . Δηλαδή, το $\{x : f(x) > B\}$ είναι ανοιχτό $\forall B \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι κάτω ημισυνεχής.

Ένα από τα σημαντικότερα καθήκοντα της τοπολογίας είναι να ορίσει την κατηγορία των συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ ανάμεσα σε δύο τοπολογικούς χώρους

καλείται **συνεχής**, αν το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό σύνολο, για κάθε ανοικτό σύνολο U.
Λέμε ότι **η** f **συνεχής σε σημείο** x, αν $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x, όταν και η V είναι περιοχή του $f(x)$.

Το ακόλουθο Λήμμα χαρακτηρίζει τους κανονικούς τοπολογικούς χώρους και είναι γνωστό ως το Λήμμα του $Urysohn$.

Το Λήμμα του Urysohn : Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. ο X είναι κανονικός.
2. Αν Α κλειστό και V ανοικτό υποσύνολο του X για τα οποία ισχύει ότι $A \subseteq V$, τότε υπάρχει ανοικτό W τέτοιο ώστε $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.
3. Κάθε ζεύγος ξένων μεταξύ τους συνόλων διαχωρίζεται από μία συνεχή συνάρτηση.
4. Αν C είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X και $f : C \to [0, 1]$ μία συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής επέκταση της f στον X για όλες τις τιμές στο [0,1].

Απόδειξη: (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω Α κλειστό και V ανοικτό σύνολο έτσι ώστε $A \subseteq V$. Θέτω $C = V^c$ με Α και C ξένα μεταξύ τους κλειστά σύνολα. Άρα, υπάρχουν δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα W και U για τα οποία ισχύει ότι $A \subseteq W$ και $C \subseteq U$. Επειδή $W \cap U = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι $\overline{W} \cap U = \emptyset$ και άρα $\overline{W} \subseteq U^c \subseteq C^c = V$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω Α και Β ξένα μεταξύ τους κλειστά σύνολα. Θέτω $V = B^c$ και ορίζουμε $A \subseteq V$. Έπειτα θέτω $r_o = 0, r_1 = 1$ και έστω $\{r_2, r_3, ...\}$ μία αρίθμηση τυχαίων αριθμών στο ανοικτό διάστημα (0,1). Λόγω της υπόθεσής μας υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα V_{r_0} και V_{r_1} τέτοια ώστε $A \subseteq V_{r_1} \subseteq \overline{V_{r_1}} \subseteq V_{r_0} \subseteq \overline{V_{r_0}} \subseteq V$. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε επαγωγικά. Θεωρώ τα ανοικτά σύνολα $V_{r_0}, ..., V_{r_n}$ έτσι ώστε για $r_i < r_j$ ισχύει ότι $A \subseteq V_{r_j} \subseteq \overline{V_{r_j}} \subseteq V_{r_i}$. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ακριβώς δύο αριθμοί υπάρχουν οι r_i και r_j ανάμεσα στους $r_0, r_1, ...$ για τους οποίους ισχύει ότι $r_i < r_{n+1} < r_j$ κι έτσι κανένας άλλος αριθμός δε βρίσκεται στο διάστημα (r_i, r_j). Προφανώς, $r_i = max\{r_k : r_k < r_{n+1}, 0 \leq k \leq n\}$. Όμοια, $r_j = min\{r_k : r_{n+1} < r_k, 0 \leq k \leq n\}$. Από υπόθεση, υπάρχει ανοικτό σύνολο V_{r_n+1} τέτοιο ώστε

$$\overline{V_{r_j}} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V_{r_{n+1}}} \subseteq V_{r_i}.$$

Άρα, αν $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία συλλογή ανοικτών συνόλων $\{V_r : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$, με τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. $A \subseteq V_r \subseteq V$ για κάθε $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
2. Αν τα $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ικανοποιούν τη σχέση $s > r$, τότε $\overline{V_s} \subseteq V_r$.

Ακολούθως ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to [0,1]$, ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} sup\{r : x \in V_r\} & if\ x \in V_0; \\ 0 & if\ x \notin V_0. \end{cases}$$

Προφανώς, $f(x) = 1 \forall x \in A$ και $f(x) = 0 \forall x \in V^c = B$. Ισχυριζομαστε οτι η συνάρτηση είναι συνεχής. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό θέτουμε $a \in X$ και ένα $\epsilon > 0$.
Θεωρώ αρχικά ότι $0 \leq f(a) < 1$. Έπειτα επιλέγω δύο τυχαίους αριθμούς s, t στο διάστημα $[0,1]$, τέτοιους ώστε $f(a) \leq s \leq t \leq f(a) + \epsilon$. Από τις σχέσεις $\overline{V_t} \subseteq \overline{V_s}, f(a) < s$ προκύπτει ότι $a \notin \overline{V_t}$.
Αν $f(a) > 0$ θα επιλέξουμε τυχαίο αριθμό $r \in (0,1)$ τέτοιον ώστε $f(a) - \epsilon \leq r \leq f(a)$ και $a \in V_r$. Θέτω $U = V_r \setminus \overline{V_t}$. Προφανώς, U είναι περιοχή του a. Επίσης, $|f(x) - f(a)| < \epsilon, \forall x \in U$.
Αν $f(a) = 0$ θέτω $U = X \setminus \overline{V_t}$. Τότε, η U είναι περιοχή του a και για κάθε $x \in U$, έχουμε ότι $0 \leq f(x) \leq t$. Άρα, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ ισχύει $\forall x \in U$. Επομένως, η f είναι σε κάθε περίπτωση συνεχής.
Τελικά, στην περίπτωση όπου $f(a) = 1$, επιλέγουμε τυχαίο αριθμό $r \in (0,1)$ τέτοιον ώστε $a \in V_r$ και $1 - \epsilon < r$. Προφανώς, V_r είναι περιοχή του a. Επίσης, αν $x \in V_r$ τότε $r \leq f(x) \leq 1$, από το οποίο προκύπτει ότι $|f(x) - f(a)| < \epsilon, \forall x \in V_r$. Οι παραπάνω ισχυρισμοί αποδεικνύουν πως η f είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε στοιχείο a του X και ως εκ τούτου η f είναι συνεχής με την ιδιότητα ότι διαχωρίζει τα A και B.
(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω C ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του X και έστω $f : C \to [0,1]$ συνεχής. Θα χρειαστεί να θεωρήσουμε f συνεχή από το C στο $[-1,1]$.
Ξεκινάμε παρατηρώντας ότι αν A και B δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X και $[a,b]$ είναι τυχαίο κλειστό διάστημα, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [a,b]$, με $\phi = a$ στο A και $\phi = b$ στο B. (Πράγματι, αν $\psi : X \to [0,1]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση έτσι ώστε ψ $= 0$ και ψ $= 1$ για το A και το B αντίστοιχα, τότε η συνεχής συνάρτηση $\phi = (b-a)$ ψ $+a$ παίρνει τίς ζητούμενες

τιμές).
Η επέκταση της f βασίζεται στην ακόλουθη ιδιότητα(Ε): Αν $h : C \to [-r, r]$ συνεχής, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{3}r, \forall x \in X \text{ και } |h(c) - g(c)| \leq \tfrac{2}{3}, \forall c \in C.$$

Για να αποδείξουμε την (Ε) ισχυριζόμαστε ότι: Έστω $A = h^{-1}([-r, -\frac{r}{3}])$ και $B = h^{-1}([-\frac{r}{3}, r])$. Η συνέχεια της h μας εξασφαλίζει ότι τα ξένα μεταξύ τους σύνολα Α και Β είναι κλειστά στο C. Αφού, C κλειστό υποσύνολο του X, αυτό σημαίνει ότι τα Α και Β είναι κι αυτά κλειστά υποσύνολα στον X. Άρα, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ (με $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r, \forall x \in X$) τέτοια ώστε $g = -\frac{r}{3}$ στο Α και $g = \frac{r}{3}$ στο Β. Στη συνέχεια θεωρώ $c \in C$. Αν $c \in A$, τότε $-r \leq h(c) \leq -\frac{r}{3} = g(c)$ και τότε $|h(c) - g(c)| \leq \frac{2}{3}r$. Αν $c \in B$, τότε $\frac{r}{3} \leq h(c) \leq r = g(c)$ και τότε $|h(c) - g(c)| \leq \frac{2}{3}r$. Τελικά, αν $c \notin A \cup B$, τότε $-\frac{r}{3} \leq h(c) \leq \frac{r}{3}$, από το οποίο προκύπτει επίσης ότι $|h(c) - g(c)| \leq \frac{2}{3}r$.
Τώρα, θα ισχυριστούμε ότι υπάρχει ακολουθία g_n συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στον X τέτοιες ώστε για κάθε n έχουμε

$$|g_n(x)| \leq \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^{n-1} \text{ για κάθε } x \in X \qquad (\star).$$

και

$$|f(c) - \sum_{i=1}^{n} g_i(c)| \leq (\tfrac{2}{3})^n \text{ για κάθε } c \in C. \qquad (\star\star)$$

Η ύπαρξη ακολουθίας g_a αποδεικνύεται επαγωγικά ως ακολούθως: Για $n = 1$, εφαρμόζουμε την ιδιότητα (E) με $r = 1$ και $h = f$. Άρα, υπάρχει συνεχης συνάρτηση $g_1 : X \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ για κάθε $x \in X$ και $|f(c) - g_1(c)| \leq \frac{2}{3}$ για κάθε $c \in C$. Τώρα επαγωγικά θεωρούμε ότι $f_1, f_2, ..., f_n$ επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιέι τις $(\star)$ και $(\star\star)$. Εφαρμόζωντας την ιδιότητα (Ε) με $r = (\frac{2}{3})^n$ και $h = f - \sum_{i=1}^{n} g_i$, παρατηρούμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_{n+1} : X \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση $g_{n+1}(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ για κάθε $x \in X$ και

$$|[f(c) - \sum_{i=1}^{n} g_i(c)] - g_{n+1}(c)| = |[f(c) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(c)| \leq (\tfrac{2}{3})^{n+1}$$

για κάθε $c \in C$.
Από τη σχέση $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = 1$ και $(\star)$, βλέπουμε ότι η σειρά $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_n(x)$

συγκλίνει ομοιόμορφα και άρα η g ορίζει συνεχή συνάρτηση από τον X επί του [-1,1]. Τώρα, παρατηρώντας την $(\star\star)$ βλέπουμε ότι εξασφαλίζεται ότι $g(c) = f(c), \forall c \in C$. Έπειτα, φαίνεται ότι η συνάρτηση $|f| : X \to [0,1]$ και ότι η $|g|$ είναι συνεχής επέκταση της f για όλα τα στοιχεία του X.
(4) $\to$ (1) Έστω A και B δύο μη κενά κλειστά ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X. Τότε, $A \cup C$ είναι κλειστό σύνολο και η συνάρτηση $f : A \cup B \to [0,1]$, για την οποία $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$ και $f(b) = 1$ για κάθε $b \in B$ συνεχής. Πράγματι, αν $a \in A$ και $\epsilon > 0$, τότε B^c είναι μία περιοχή του a και $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$ ισχύει για κάθε $x \in (A \cup B) \cap B^c$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι συνεχής στο $a \in A$. Όμοια, η f είναι συνεχής για κάθε $b \in B$. Αν g συνεχής επέκταση της f για όλα τα X με τιμές στο $[0,1]$, τότε η g με προφανή τρόπο διαχωρίζει τα A και B και το B μπορεί να διαχωριστεί από ανοικτά σύνολα. Άρα ο X είναι είναι κανονικός χώρος. $\square$

Το θεώρημα επέκτασης του Tietze

Έστω C κλειστό υποσύνολο ενός κανονικού τοπολογικού χώρου X και έστω $f : C \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει συνεχής επέκταση της f για κάθε στοιχείο του x, με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη:

Έστω $f : C \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου C είναι ένα κλειστό υποσύνολο κανονικού χώρου X. Θεωρώ αρχικά ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in C$. Θέτω $h = \frac{f}{1+f}$ και θεωρώ ότι $h : C \to (0,1) \subseteq [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Από το Λήμμα του $Urysohn$ υπάρχει συνεχής επέκταση $h_0 : X \to [0,1]$.
Έπειτα , έστω $B = h_0^{-1}(-1)$ και έστω B κλειστό. Επίσης, αφού $0 < h_0(x) < 1$ για κάθε $x \in C$ παρατηρούμε ότι $A \cap B = \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του $Urysohn$ για μία κόμα φορά παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποια συνεχής συνάρτηση $\phi : X \to [0,1]$ τέτοιο ώστε $\phi(c) = 1$ για κάθε $c \in C$ και $\phi(b) = 0$ για κάθε $b \in B$. Τώρα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $g = \frac{phih_0}{1-\phi h_0}$ είναι συνεχής επέκταση της f για κάθε στοιχείο του X, με τιμές στο $\mathbb{R}$.
Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε ότι $f : C \to \mathbb{R}$ συνεχής και γράφουμε $f = f^+ - f^-$, με $f^+ = f \vee 0 : C \to \mathbb{R}$ και $f^- = (-f) \vee 0 : C \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις μη αρνητικές. Από πιο πάνω, ισχύει ότι υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2 : C \to \mathbb{R}$ που επεκτείνουν τις f^+ και f^-, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι $\phi = \phi_1 - \phi_1 : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής επέκταση της f. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border. Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide.

[2] Adam Boocher. A Proof of the Tietze Extension Theorem Using Urysohn's Lemma, August 22, 2005.

[3] George F. Simmons. Introduction to topology and modern analysis.New York : McGraw-Hill Book Company , c1963