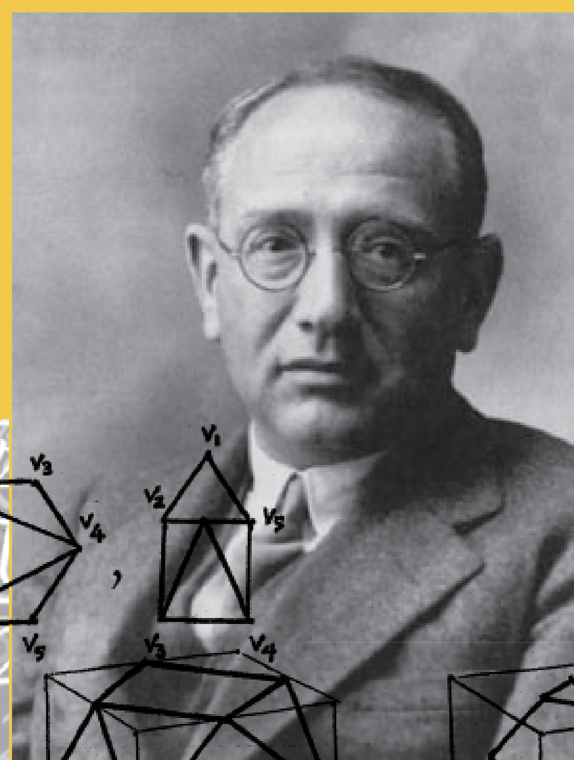
Το θεώρημα του Pólya

Διπλωματική Εργασία

Τσιλώνη Βεργίνα

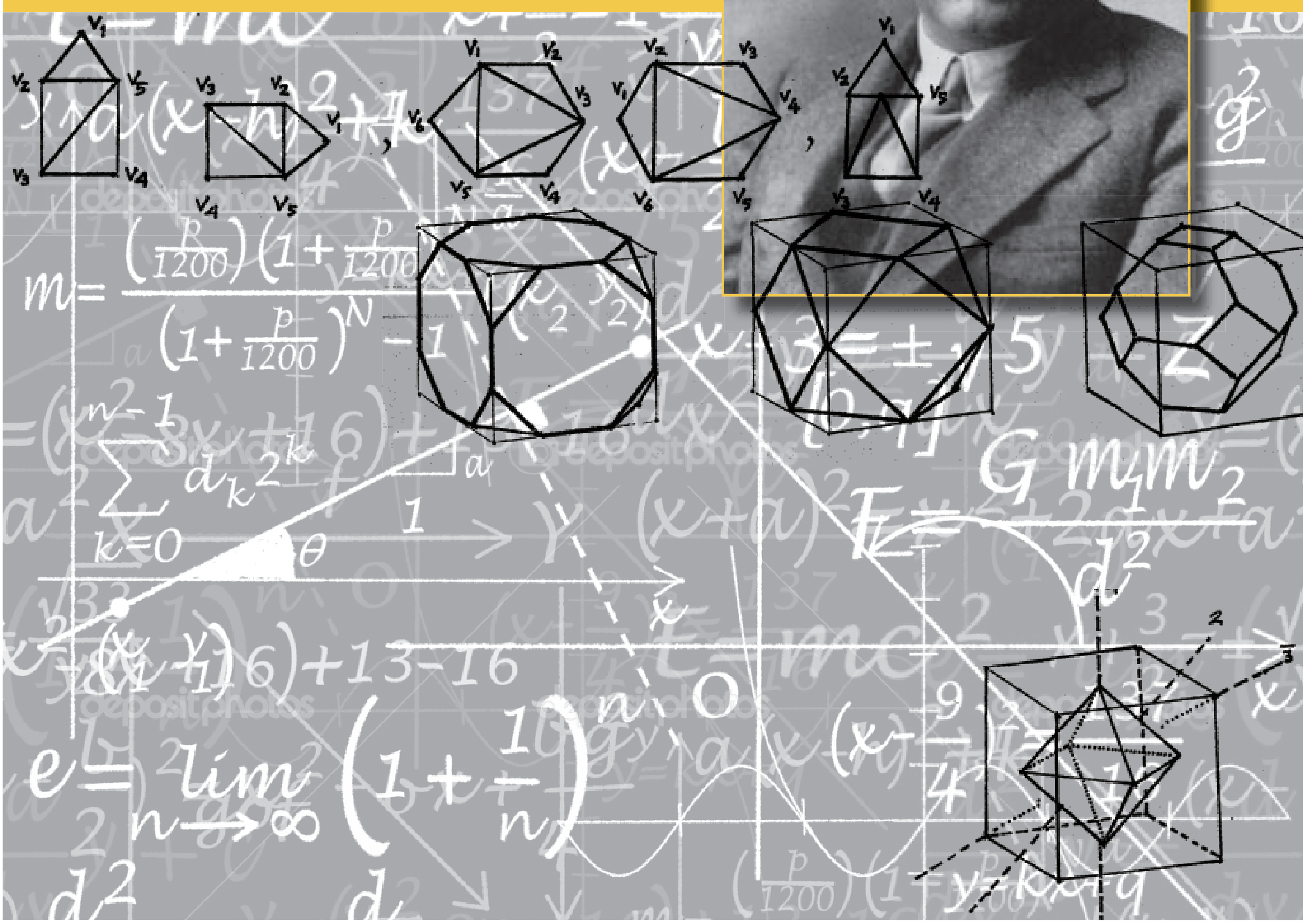
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Χ. Κουκουβίνος, ***Καθηγητής ΕΜΠ***
Α. Παπαϊωάννου, ***Αναπ. Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων)***
Π. Στεφανέας, ***Λέκτορας ΕΜΠ***



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα 2013



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

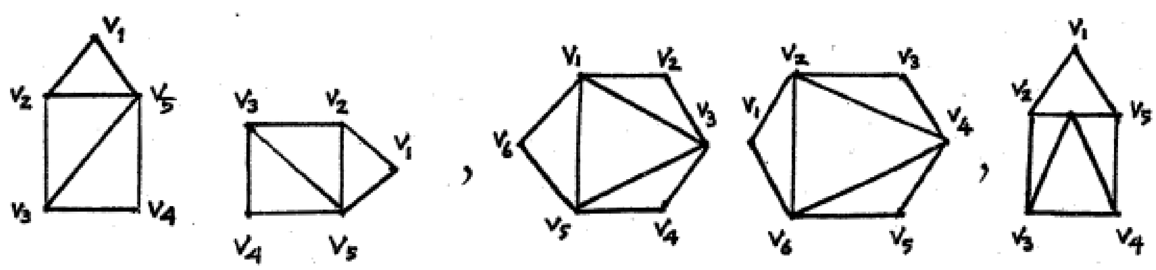
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. ΠαπαΪωάννου Αλέξανδρο για την άριστη συνεργασία που είχαμε και την πολύτιμη βοήθειά του. Τον ευχαριστώ επίσης για το ενδιαφέρον και την υπομονή του καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου. Τέλος ευχαριστώ τους γονείς μου διότι δίχως αυτούς τίποτα δεν θα ήταν δυνατόν.

Η ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΔΕΝΤΡΩΝ ΜΕ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΚΑΙ ΡΙΖΑ*

Ενας **τριγωνισμός** ενός κυρτού n-γώνου είναι μία διαμέριση του εσωτερικού του n-γώνου σε τρίγωνα με ευθείες που είναι μη τεμνόμενες διαγώνιες του n-γώνου.

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η διαδικασία του τριγωνισμού δεν αυξάνει το πλήθος των κορυφών του n-γώνου. Αν θεωρήσουμε τις κορυφές του n-γώνου να έχουν ονόματα (η κορυφή 1, η κορυφή 2, .. η κορυφή n) τότε δυό τριγωνισμοί είναι ισοδύναμοι αν περιέχουν ακριβώς τις ίδιες διαγώνιες.



Με τον ορισμό αυτό οι δύο πρώτοι τριγωνισμοί του πενταγώνου είναι ισοδύναμοι, ενώ οι δύο τριγωνισμοί του εξαγώνου είναι διαφορετικοί.
Τέλος η διαμέριση του πενταγώνου της κάτω γραμμής δεν είναι τριγωνισμός διότι χρησιμοποιεί μία νέα εσωτερική κορυφή.

Συμβολίζουμε με T_n το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γώνου. Ο Euler υπολόγισε πρώτος την τιμή του T_n.

Παρατηρούμε ότι αν ενώσουμε κάποια κορυφή του n-γώνου (έστω την v_1) με όλες τις άλλες κορυφές κατασκευάζουμε έναν τριγωνισμό με n-2 τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών αυτών των n-2 τριγώνων είναι (n-2)π, το οποίο προφανώς θα ισούται και με το άθροισμα των γωνιών του n-γώνου. Κάθε άλλος τριγωνισμός θα έχει το ίδιο άθροισμα γωνιών αφού οι γωνίες του τυχόντος τριγωνισμού αναφέρονται σε κάποια διαμέριση των γωνιών του n-γώνου. Αρα οποιοσδήποτε τριγωνισμός θα αποτελείται πάλι από n-2 τρίγωνα.

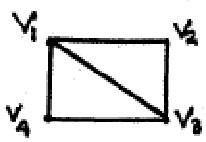
* ordered rooted trees στην διεθνή βιβλιογραφία.

Εστω x το πλήθος των εσωτερικών διαγωνίων ενός τριγωνισμού. Τα n-2 τρίγωνα του τυχόντος τριγωνισμού έχουν 3(n-2)=3n-6 πλευρές. Καθεμία από τις x εσωτερικές διαγωνίους μετράται δύο φορές διότι είναι πλευρά σε δύο τρίγωνα. Κάθε μία από τις n πλευρές του n-γώνου μετράται ακριβώς μία φορά σαν πλευρά ενός από τα n-2 τρίγωνα. Αρα ο συνολικός αριθμός των πλευρών των n-2 τριγώνων μετράται αλλοιώς σαν 2x+n. Αρα

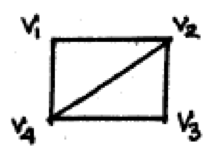
$$2x+n=3n-6 \Rightarrow x=n-3$$

Αρα κάθε τριγωνισμός ενός n-γώνου χρησιμοποιεί ακριβώς n-3 διαγωνίους.

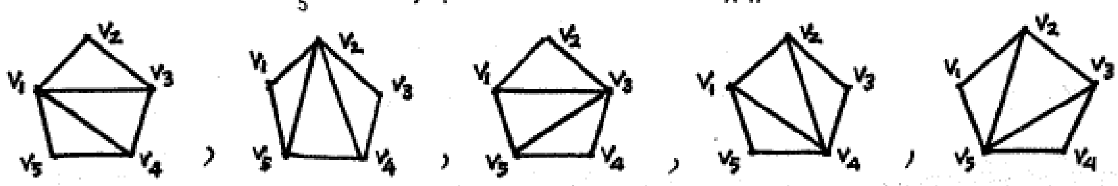
Ορίζουμε αυθαίρετα $T_1=0$, $T_2=1$. Το T_3 δηλαδή το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός τριγώνου, που χρησιμοποιεί n-3=0 διαγώνιους, θα ισούται με 1. Κάθε τριγωνισμός του 4-γώνου χρησιμοποιεί n-3=1 διαγώνιοι για να σχηματίσει n-2=2 τρίγωνα. Αρα $T_4=2$ ήτοι



καί



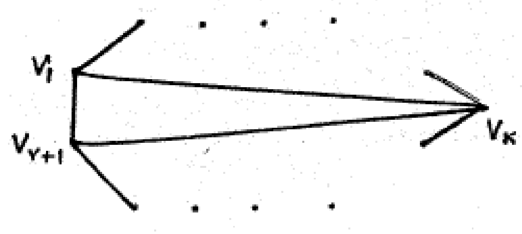
Για n=5 έχουμε $T_5=5$ όπως φαίνεται και στο σχήμα



το παρακάτω θεώρημα δίνει μία μη γραμμική αναδρομική σχέση που επαληθεύουν οι αριθμοί αυτοί οφείλεται στον von Segner (1704-1777).

Θεώρημα 1: $T_{n+1}=T_2T_n+T_3T_{n-1}+\ldots+T_nT_2$.

Απόδειξη. Εστω το n+1-γωνο $v_1,v_2,\ldots,v_{n+1}$. Τότε η πλευρά $v_{n+1}v_1$ ανήκει σε ένα μόνο τρίγωνο σε κάθε τριγωνισμό. Η τρίτη κορυφή του τριγώνου που χρησιμοποιεί την πλευρά $v_{n+1}v_1$ θα είναι η κορυφή v_k k=2,3,...,n. Ας μετρήσουμε το πλήθος των τρόπων εκλογής της τρίτης κορυφής v_k.

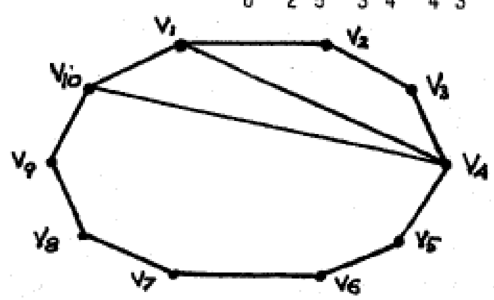


Το τρίγωνο $v_kv_1v_{n+1}$ χωρίζει το n+1-γωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα.

Πάνω μεν σ'ενα κ-γωνο με κορυφές $v_1, v_2 \ldots v_k$, και κάτω σ'ενα $(n-k+2)$-γωνο με κορυφές v_k, $v_{k+1}, \ldots v_{n+1}$.

Το πάνω k-γωνο τριγωνοποιείται με T_k τρόπους ενώ το κάτω $(n-k+2)$-γωνο με T_{n-k+2} τρόπους. Αρα από τον κανόνα του γινομένου το πλήθος των τριγωνισμών στους οποίους εμφανίζεται το τρίγωνο $v_1 v_k v_{n+1}$ είναι $T_k \cdot T_{n-k+2}$. Αρα το συνολικό πλήθος των τριγωνισμών του $(n+1)$-γώνου θα είναι $\sum_{k=2}^{n} T_k T_{n-k+2} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \ldots + T_n T_2$. ∎

Παράδειγμα 1. $T_6 = T_2 T_5 + T_3 T_4 + T_4 T_3 + T_5 T_2 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$.



Το τρίγωνο $v_1 v_4 v_{10}$ $(n=9, k=4)$ χωρίζει το 10-γωνο σ'ενα πάνω 4-γωνο και σ'ενα κάτω 7-γωνο. ∎

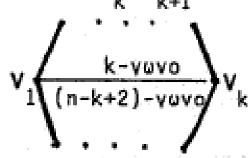
Θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για το T_n, δηλαδή θα προσπαθήσουμε να λύσουμε την αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1. Ενα ενδιάμεσο βήμα προς την κατεύθυνση αυτή είναι το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2:

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}\left(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3\right)$$

Απόδειξη. Εστω πάλι το n-γωνο $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και η διαγώνιος $v_1 v_k$ η οποία χωρίζει το n-γωνο:

πάνω σ'ενα k-γωνο με κορυφές v_1, v_2, $\ldots, v_k$ και
κάτω σ'ενα $(n-k+2)$-γωνο με $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n, v_1$.



Οπως και στο θεώρημα 1 το πλήθος των τριγωνισμών που περιέχουν την διαγώνιο $v_1\ v_k$ θα είναι:

$$T_k \cdot T_{n-k+2}$$

Από την κορυφή v_1 έχω συνολικά n-3 διαγωνίους, τις $v_1 v_3, v_1 v_4, \ldots, v_1 v_{n-1}$. Εχω λοιπόν:

στην διαγώνια $v_1 v_3$ $(k=3)$ αντιστοιχεί: το $T_3\ T_{n-1}$

στην διαγώνια v_1v_4 (k=4) αντιστοιχεί: το $T_4\,T_{n-2}$
στην διαγώνια v_1v_{n-1}(k=n-1 αντιστοιχεί: το $T_{n-1}\,T_3$.
Αρα στην κορυφή v_1 αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3.$$

Από την συμμετρία του n-γώνου το άθροισμα είναι ένα ίδιο για οποιαδήποτε από τις n κορυφές του n-γώνου, αρα η παράσταση

$$n(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3)$$

μέτρα για κάθε δυνατή διαγώνια τον ολικό αριθμό τριγωνισμών που χρησιμοποιούν την διαγώνια αυτή δύο φορές (μία για κάθε άκρο της διαγωνίου) οπότε και η παράσταση

$$\frac{n}{2}\,(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3) \qquad (1)$$

μετρά για κάθε δυνατή διαγώνιο τον ολικό αριθμό τριγωνισμών που χρησιμοποιούν την διαγώνια αυτή. Επειδή όμως κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί n-3 διαγωνίους η παράσταση (1) μετρά τους τριγωνισμούς του n-γώνου ακριβώς (n-3) φορές ήτοι

$$(n-3)T_n=\frac{n}{2}(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3)\ . \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 2. i) για n=6 έχω:

$$(6-3)T_6=\frac{6}{2}\,(T_3T_5+T_4T_4+T_5T_3) \Rightarrow 3T_6=$$
$$=3(1\cdot5+2\cdot2+5\cdot1) \Rightarrow T_6=14.$$

ii) για n=7 έχω

$$(7-3)T_7=\frac{7}{2}\,(T_3T_6+T_4T_5+T_5T_4+T_6T_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4T_7=\frac{7}{2}\,(1\cdot14+2\cdot5+5\cdot2+14\cdot1) \Rightarrow T_7=42.$$

Θεώρημα 3: $\qquad T_n=\dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$.

Απόδειξη.
Η σχέση του θεωρήματος 1 γράφεται (αφού $T_2=1$)

$$T_{n+1}-2T_n=T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3 \quad \text{ή}$$

$$\frac{n}{2}(T_{n+1}-2T_n)=\frac{n}{2}\,(T_3T_{n-1}+T_4T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_3) \quad \text{και}$$

εφαρμόζοντας στο δεξί μέλος το θεώρημα 2 έχουμε:

$$\frac{n}{2}\,(T_{n+1}-2T_n)=(n-3)T_n \quad \text{ή}$$

$$\frac{n}{2}\,T_{n+1}-nT_n=(n-3)T_n \quad \text{ή}$$

$$n\,T_{n+1}=(4n-6)T_n \qquad (2)$$

ας αντικαταστήσουμε το T_n με το E_n που ορίζεται από την σχέση:

$$n\,T_{n+1}=E_{n+1}$$

παρατηρούμε ότι για n=1 έχουμε $1\cdot T_2=E_2 \Rightarrow E_2=1$.

Η σχέση (2) γίνεται λοιπόν

$$E_{n+1}=(4n-6)\frac{E_n}{n-1} \quad ή \quad \frac{E_{n+1}}{E_n}=\frac{4n-6}{n-1}=\frac{2(2n-3)}{(n-1)}=$$

$$=\frac{2(n-1)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}=\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)} \qquad (3)$$

Αλλά ισχύει προφανώς

$$E_{n+1}=\frac{E_{n+1}}{E_n}\cdot\frac{E_n}{E_{n-1}}\cdot\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}}\cdots\frac{E_3}{E_2}=\text{από την (3)}=$$

$$=\left[\frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}\right]\cdot\left[\frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-2)(n-2)}\right]\left[\frac{(2n-6)(2n-7)}{(n-3)(n-3)}\right]\cdot\cdot\left[\frac{2\cdot 1}{(1)(1)}\right]=$$

$$=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\binom{2n-2}{n-1}.$$

Αν επιστρέψουμε στα T_n και T_{n+1} έχουμε

$n\,T_{n+1}=\binom{2n-2}{n-1}$ και θέτωντας όπου n+1 το n έχουμε

$(n-1)T_n=\binom{2n-4}{n-2}$ που αποδεικνύει το θεώρημά μας.

Η ακολουθία $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ήτοι η ακολουθία που οι τιμές της φαίνονται στον πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1.430	4.862	16.796...

απαντάται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης και ονομάζεται ακολουθία αριθμών Catalan προς τιμήν του Eugène Catalan (1814-1894) που την ανακάλυψε το 1838 λύνοντας το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο.

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα αυτό αρχικά μ'ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.

i) Στο γινόμενο $x_1x_2x_3$ μπορεί να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ήτοι:

$$((x_1x_2)x_3) \quad και \quad (x_1(x_2x_3))$$

ii) Στο γινόμενο $x_1x_2x_3x_4$ έχουμε πέντε διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης παρενθέσεων ήτοι:

$$((x_1x_2)(x_3x_4))$$

$$(((x_1x_2)x_3)x_4)$$
$$((x_1(x_2x_3))x_4)$$
$$(x_1((x_2x_3)x_4))$$
$$(x_1(x_2(x_3x_4))).$$

Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα εξετάζει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθετήσεως παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο όπου δεν αλλάζει η σειρά των όρων και όπου κάθε υπογινόμενο να είναι γινόμενο δύο ακριβώς παραγόντων.

Θεώρημα 4:

Εστω a_n το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο με n παράγοντες. Τότε $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Απόδειξη. Το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει δύο παράγοντες. Ο πρώτος είναι ένα γινόμενο r παραγόντων με $1 \le r < n$ ήτοι της μορφής $x_1 \cdot x_2 \ldots x_r$ και ο δεύτερος ένα γινόμενο n-r παραγόντων ήτοι της μορφής $x_{r+1} \ldots x_n$. Στον πρώτο παράγοντα μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά a_r τρόπους και στον δεύτερο κατά a_{n-r} τρόπους. Αρα το πλήθος των τρόπων κατά τους οποίους το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει τα r το πλήθος $x_1 \ldots x_r$ με τα n-r το πλήθος $x_{r+1} \ldots x_n$ είναι: $a_r \cdot a_{n-r}$.

Αθροίζοντας για r=1,2,...n-1 έχουμε

$$a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_1$$

ή θέτοντας $a_n = T_{n+1}$ έχουμε ότι οι αριθμοί a_n επαληθεύουν την αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1.

Αλλά επιπλέον οι δύο ακολουθίες a_n και T_{n+1} έχουν και τις ίδιες αρχικές τιμές ήτοι:

$a_1 = T_2 = 1$	ήτοι η τοποθέτηση	(x_1)
$a_2 = T_3 = 1$	ήτοι η τοποθέτηση	(x_1x_2)
$a_3 = T_4 = 2$	ήτοι η τοποθέτηση	του παραδείγματος 3
$a_4 = T_5 = 5$	ήτοι η τοποθέτηση	του παραδείγματος 3.

Αρα οι δύο ακολουθίες συμπίπτουν και από το θεώρημα 3 έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}. \qquad \blacksquare$$

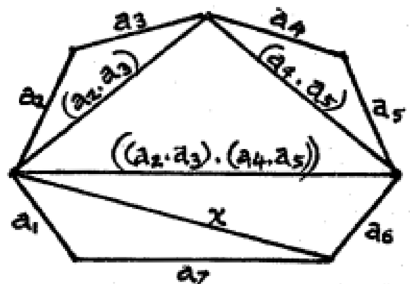
Δείξαμε λοιπόν ότι το πλήθος a_n της τοποθέτησης παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο n παραγόντων ισούται με τον αριθμό Catalan n-1 τάξης C_{n-1}. Το θεώρημα 3 λέγει ότι το πλήθος T_n των τριγωνισμών ενός n-γώνου ισούται με τον αριθμό Catalan (n-2) τάξης C_{n-2}. Το παρακάτω παράδειγμα κάνει σαφέστερη την αντιστοιχία.

Παράδειγμα 4.

i) Εστω το γινόμενο με n=6 όρους $\left\{a_1\left[\left((a_2a_3)(a_4a_5)\right)a_6\right]\right\}$.

Σ'αυτό θα αντιστοιχήσουμε έναν τριγωνισμό του κανονικού επταγώνου με πλευρές $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ και

$$a_7=\left\{a_1\left[\left((a_2a_3)\cdot(a_4a_5)\right)\cdot a_6\right]\right\}$$



$$x = \left[\left((a_2\cdot a_3).(a_4\cdot a_5)\right).a_6\right]$$

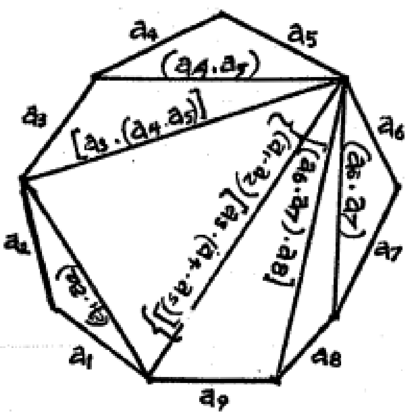
$$a_7=\left\{a_1\left[\left((a_2a_3)\cdot(a_4a_5)\right)\cdot a_6\right]\right\}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σ'έναν από τους πολλαπλασιασμούς εκτός από του τελευταίου που αντιστοιχεί στην βάση του επταγώνου.

ii) Εστω το γινόμενο με n=8 όρους:

$$\left[\left\{(a_1\cdot a_2)\cdot[a_3\cdot(a_4\cdot a_5)]\right\}\ \cdot\ [(a_6\cdot a_7)\cdot a_8]\right]= a_9.$$

Σ'αυτό θα αντιστοιχήσουμε τον παρακάτω τριγωνισμό του κανονικού εννεαγώνου με πλευρές $a_1,\dots,a_8,a_9$



$$a_9=\left[\left\{(a_1\cdot a_2)\cdot[a_3\cdot(a_4a_5)]\right\}\cdot[(a_6a_7)\cdot a_8]\right]$$

■

Τονίζουμε ότι στο πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων θεωρήσαμε ότι οι αριθμοί $x_1, x_2, \dots x_n$ έχουν μία ορισμένη διάταξη. Αν θεωρήσουμε το διαφορετικό πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο n αριθμών όπου οι αριθμοί δεν έχουν καμμία διάταξη τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων β_n

θα είναι πολύ μεγαλύτερο από το a_n και συγκεκριμένα θα έχουμε:

$\beta_n = n!a_n$ ήτοι αφού $a_n = C_{n-1}$ θά έχουμε

$$\beta_n = n!C_{n-1} = n!\,\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = (n-1)!\binom{2n-2}{n-1}.$$

Παράδειγμα 5. Για n=3 θα έχουμε $\beta_n = 2!\binom{4}{2} = 12$ τρόποι συγκεκριμένα οι:

$\left[(a_1a_2)\cdot a_3\right]$, $\left[a_2\cdot(a_1a_3)\right]$, $\left[a_3\cdot(a_1\cdot a_2)\right]$, $\left[(a_2\cdot a_3)\cdot a_1\right]$, $\left[(a_1a_3)\cdot a_2\right]$,

$\left[a_1\cdot(a_3a_2)\right]$, $\left[a_1(a_2a_3)\right]$, $\left[a_2\cdot(a_3a_1)\right]$, $\left[a_3\cdot(a_2\cdot a_1)\right]$, $\left[(a_3\cdot a_2)\cdot a_1\right]$,

$\left[(a_3\cdot a_1)\cdot a_2\right]$, $\left[(a_2\cdot a_1)\cdot a_3\right]$

ενώ $a_3 = 2$ ο πρώτος και ο έβδομος τρόπος. ∎

Θα εξετάσουμε μερικές εφαρμογές των αριθμών Catalan πρίν προχωρήσουμε στην απαρίθμηση των δέντρων με προσανατολισμό και ρίζα που γίνεται με την βοήθεια των αριθμών αυτών.

Θεώρημα 5: Το πλήθος των ακολουθιών με 2n όρους $a_1a_2\ldots a_{2n}$ που σχηματίζονται από n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1 αλλά των οποίων τα μερικά αθροίσματα: $a_1+a_2+\ldots+a_k \geq 0$ $k=1,2,\ldots,2n$ ισούται με τον n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $n\geq 0$.

Απόδειξη.

Ας ονομάσουμε μία ακολουθία με n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1 παραδεκτή αν ικανοποιεί την συνθήκη $a_1+a_2+\ldots+a_k \geq 0$ $k=1,2,\ldots,2n$ και απαράδεκτη αν δεν την ικανοποιεί. Εστω A_n το πλήθος των παραδεκτών ακολουθιών με n το πλήθος +1 (άρα με n το πλήθος -1) και U_n το πλήθος των απαράδεκτων ακολουθιών. Το συνολικό πλήθος των ακολουθιών με n άσσους και n το πλήθος -1 προσδιορίζεται από τους n άσσους και ισούται με : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$.

Αρα $A_n + U_n = \binom{2n}{n}$ και $A_n = \binom{2n}{n} - U_n$.

Θα υπολογίσουμε τον αριθμό U_n.

Εστω μία απαράδεκτη ακολουθία με n το πλήθος 1 και n το πλήθος -1 . Αφού είναι απαράδεκτη θα υπάρχει κάποιος μικρότερος δείκτης k τέτοιος ώστε το μερικό άθροισμα να μην ικανοποιεί την συνθήκη άρα $a_1+a_2+\ldots+a_k<0$. Αφού ο k είναι ο μικρότερος τέτοιος δείκτης θα υπάρχει ένα ίσο πλήθος από +1 και -1 πρίν από τον όρο a_k και θα έχουμε

$$a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}=0 \quad \text{και} \quad a_k=-1$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ακέραιος k είναι περιττός.

Ας αντικαταστήσουμε τους αριθμούς $a_1,a_2,\ldots,a_k$ με τους $-a_1,-a_2,\ldots,-a_k$ δηλαδή ας αντικαταστήσουμε τον a_i με τον $-a_i$ για $i=1,2,\ldots,k$ και ας αφήσουμε αμετάβλητους τους αριθμούς $a_{k+1},\ldots,a_{2n}$. Η προκύπτουσα ακολουθία $a'_1,a'_2,\ldots,a'_{2n}$ είναι πάλι μία ακολουθία από +1 και -1 αλλά έχει n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1.

Αλλά η διαδικασία αυτή αντιστρέφεται. Αν μας δοθεί μία ακολουθία με n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1 κάποτε το πλήθος των +1 θα ξεπεράσει το πλήθος των -1 (αφού έχουμε περισσότερα +1). Αν από την αρχή της ακολουθίας μέχρι τον δείκτη αυτόν αντιστρέψουμε τα πρόσημα των όρων της ακολουθίας θα προκύψει μία απαράδεκτη ακολουθία. Αρα έχουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ απαράδεκτων ακολουθιών και ακολουθιών με n+1 το πλήθος +1 και n-1 το πλήθος -1. Αλλά το πλήθος των ακολουθιών αυτών με 2n όρους προσδιορίζεται από τους n+1 άσσους δηλαδή ισούται με:

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

Αρα $U_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$ οπότε

$$A_n = \binom{2n}{n} - U_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 6.

i) για n=3 έχουμε $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$ ακολουθίες με 6 όρους τις:

1,1,1,-1,-1,-1	1,-1,1,1-1,-1
1,1,-1,1,-1,-1	1,-1,1,-1,1,-1
1,1,-1,-1,1,-1	

ii) για n=4 έχουμε $C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = 2\cdot 7 = 14$ ακολουθίες με 8 όρους τις:

1111-1-1-1-1	1-1111-1-1-1
111-11-1-1-1	1-111-111-1
111-1-11-1-1	1-111-1-11-1
111-1-1-11-1	1-11-111-1-1
11-111-1-1-1	1-11-11-11-1
11-11-11-1-1	
11-11-1-11-1	

11-1-111-1-1
11-1-11-11-1

όπου όλα τα μερικά αθροίσματα είναι πάντα ≥0.

Παράδειγμα 7.

2n το πλήθος άνθρωποι θέλουν να πάνε σε κάποιον κινηματογράφο που έχει είσοδο 500 δρχ. Οι μισοί από τους 2n ανθρώπους έχουν ένα πεντακοσόδραχμο και οι άλλοι μισοί ένα χιλιάρικο. Το ταμείο του κινηματογράφου όταν ανοίγει είναι άδειο και κάθε άνθρωπος μπορεί να αγοράσει ένα μόνο εισητήριο. Κατά πόσους τρόπους μπορούν οι άνθρωποι αυτοί να τοποθετηθούν σε σειρά έτσι ώστε όποτε ένας με χιλιάρικο φθάνει στο ταμείο να έχει ο ταμίας ένα πεντακοσάρικο για να του δώσει ρέστα.

Αν θεωρήσουμε ότι οι 2n άνθρωποι είναι μη διακεκριμένοι και ταυτίσουμε όσους έχουν πεντακοσάρικο με τον αριθμό +1 και όσους έχουν χιλιάρικο με το -1 τότε ζητάμε το πλήθος των παραδεκτών ακολουθιών με 2n όρους και n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1. Από το θεώρημα 5 το πλήθος αυτό είναι $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Αν οι άνθρωποι θεωρηθούν διακεκριμένοι ο ένας από τον άλλον η παραπάνω απάντηση θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί το πλήθος των μεταθέσεων των n ανθρώπων που έχουν πεντακοσάρικο (που είναι n!) και επί το πλήθος των μεταθέσεων των n ανθρώπων που έχουν χιλιάρικο (που είναι πάλι n!) άρα θα έχουμε:

$$n!n!C_n = n!n!\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n+1}$$

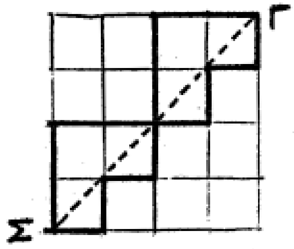
π.χ. για n=2 έχουμε τις δύο ακολουθίες: 11-1-1, 1-11-1 που αναλύονται στις εξής 8 αν ονομάσω Α,Β τους δύο με πεντακοσάρικο και α,β τους δύο με χιλιάρικο:

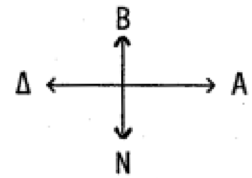
ΑΒαβ, ΑΒβα, ΒΑαβ, ΒΑβα,
ΑαΒβ, ΒαΑβ, ΑβΒα, ΒβΑα. ■

Παράδειγμα 8.

Ενας άνθρωπος εργάζεται σ'ένα γραφείο n τετράγωνα βόρεια και n τετράγωνα ανατολικά από το σπίτι του. Κάθε πρωί περπατά 2n τετράγωνα από το σπίτι στο γραφείο του όπως φαίνεται στον χάρτη για n=4. Πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να χρησιμοποιήσει αν επιτρέπεται να περπατάει μόνο προς τα βόρεια και μόνο προς τα ανατολικά και επίσης δεν επιτρέπεται να διασχίσει την διαγώνιο ΣΓ.

(Αν και μπορεί να την συναντήσει κατά την διαδρομή του);





Με παχύτερη γραμμή έχουν σημειωθεί δύο δυνατές διαδρομές, η μία πάνω και η άλλη κάτω από την διαγώνιο.

Προφανώς κάθε παραδεκτή διαδρομή ή θα είναι πάνω ή κάτω από την διαγώνιο. Το σύνολο λοιπόν θα ισούται με το διπλάσιο των παραδεκτών διαδρομών πάνω από την διαγώνιο. Κάθε παραδεκτή διαδρομή είναι μία ακολουθία n βορείων και n ανατολικών τετραγώνων. Ας αντιστοιχήσουμε τον αριθμό +1 στην προς τα βόρεια κίνηση και τον -1 στην προς ανατολάς κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μία ακολουθία $a_1\ a_2 \ldots a_{2n}$ με n το πλήθος +1 και n το πλήθος -1 και η παραδοχή ότι δεν διασχίζεται η διαγώνιος αντιστοιχεί στο ότι τα μερικά αθροίσματα $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ (k=1,1,...,2n).

Από το θεώρημα 5 το πλήθος των παραδεκτών διαδρομών θα είναι $2C_n = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$. ∎

Παράδειγμα 9.

Θεωρούμε ένα κανονικό 2n-γωνο εγγεγραμένο σε κύκλο θα δείξουμε ότι το πλήθος των τρόπων για να ενώσουμε τα 2n σημεία με n μη τεμνόμενες διαγωνίους ισούται με τον αριθμό Catalan C_n.

Απόδειξη.

Εστω a_n ο ζητούμενος αριθμός. Εστω P ένα από τα 2n σημεία και ας το ενώσουμε με μία διαγώνιο με το Q. Προφανώς η διαγώνια PQ πρέπει να έχει άρτιο πλήθος σημείων του κύκλου και από τις δύο πλευρές της. (π.χ. η διαγώνιος 15 δεν μπορεί να υπάρχει διότι αφήνει 3 σημεία από την μία μεριά και 2n-5 από την άλλη που είναι περιττοί αριθμοί). Το επιχείρημα αυτό μας οδηγεί στην αναδρομική σχέση

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0 \quad \text{με} \quad a_0 = 1.$$

Αν θέσουμε $b_n = a_{n-1}$ $n \geq 1$ η αναδρομική σχέση γίνεται $\beta_{n+1} = \beta_1\beta_n + \beta_2\beta_{n-1} + \ldots + \beta_n\beta_1$ με $\beta_1 = 1$ δηλαδή η αναδρομική σχέση του θεωρήματος 1.

Αρα ο β_{n+1} είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης ήτοι

$$a_n=\beta_{n+1}=C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} . \qquad ■$$

Τελειώνοντας παρατηρούμε ότι οι αριθμοί Catalan ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$C_n=\frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n} , \quad C_{n-1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

και διαιρώντας κατά μέλη $\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{n}{n+1}\,\frac{(2n)!(n-1)!(n-1)!}{n!n!(2n-2)!}=\frac{n\;2n\;2n-1}{n+1\cdot n\cdot n}=$

$$=\frac{4\cdot n-2}{n+1} \quad \text{ήτοι}$$

$$C_n=\frac{4\cdot n-2}{n+1} \quad n\geq 1 \quad C_1=1$$

η οποία λύνεται όπως είδαμε στο θεώρημα 3.

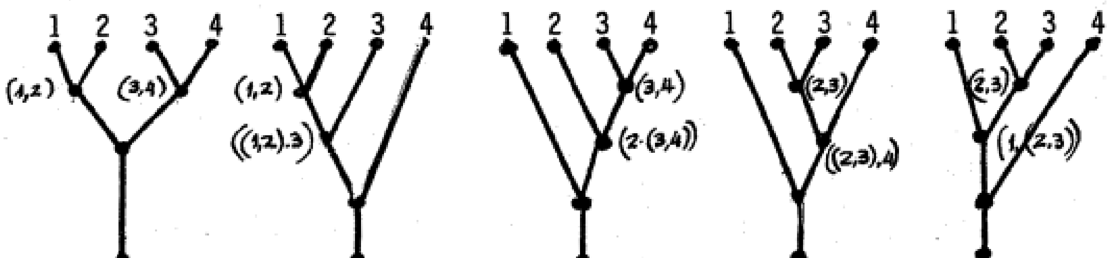
Θα δούμε τώρα πως με την βοήθεια των αριθμών Catalan μπορούμε να απαριθμήσουμε μία κατηγορία δέντρων και συγκεκριμένα τα δέντρα με προσανατολισμό και ρίζα που έχουν κορυφές βαθμού 1 ή 3.
Για γραφοθεωρητικούς ορισμούς και για δέντρα δες [6], [17].

Η ρίζα ενός δέντρου είναι κάποια κορυφή που διακρίναμε από τις άλλες. Συνήθως σαν ρίζα εκλέγεται κάποια κορυφή βαθμού 1 και στην σχεδίαση του δέντρου η ρίζα συμπίπτει με την χαμηλώτερη κορυφή του διαγράμματος.
Οι υπόλοιπες κορυφές βαθμού 1 λέγονται **φύλλα** του δέντρου και στην σχεδίαση του δέντρου τα φύλλα τοποθετούνται όλα στο πάνω μέρος του διαγράμματος.
Υποθέτουμε επίσης ότι τα δέντρα με ρίζα και βαθμούς 1 και 3 έχουν επίσης προσανατολισμό. Δηλαδή τα δύο παρακάτω δέντρα, αν και συμμετρικά, θεωρούνται διαφορετικά.

Θεώρημα 6: Το πλήθος των δέντρων με προσανατολισμό και ρίζα, με βαθμούς κορυφών 1 ή 3 και με n φύλλα ισούται με τον αριθμό Catalan (n-1) τάξης $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Απόδειξη 1. Δείξαμε ότι οι αριθμοί Catalan μετρούν το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων σ'ένα γινόμενο. Θα κατασκευάσουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τοποθέτησης παρενθέσεων σε γινόμενα n παραγόντων και δέντρων με ρίζα και προσανατολισμό, βαθμούς κορυφών 1 ή τρία και n το πλήθος φύλλα. Εστω ένα τέτοιο δέντρο. Αριθμούμε τα φύλλα του με τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Τώρα αν οι κορυφές a_k και a_{k+1} συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3 ονομάζω αυτήν με το ζεύγος (a_k, a_{k+1}). Συνεχίζουμε την διαδικασία αυτή κατευθυνόμενοι προς την ρίζα. Αν η κορυφή (x) και η κορυφή (y) συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3 η νέα αυτή κορυφή και πλησιέστερα προς την ρίζα θα πάρει το όνομα ((x)(y)). Οταν φθάσουμε στην ρίζα θα έχουμε ένα πλήρως παρενθεσοποιημένο γινόμενο $a_1 \ldots a_n$. Η κατασκευή αυτή μας δίνει την 1-1 αντιστοιχία. ∎

Παράδειγμα 10. Τα δέντρα με προσανατολισμό και ρίζα πούχουν κορυφές βαθμού 1 και 3 και 4 φύλλα είναι $\frac{1}{4}\binom{6}{3}=5$.



((12)(34))   (((12)3)4)   (1(2(34)))   (1((23)4))   ((1(23))4)

Παρατηρούμε ότι οι ονομασίες των 5 ριζών είναι οι 5 παρενθεσοποιήσεις του γινομένου 1234 που είδαμε στο παράδειγμα 3.

Απόδειξη 2. Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί Catalan μετρούν το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γώνου. Θα κατασκευάσουμε λοιπόν μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των τριγωνισμών αυτών και των δέντρων με ρίζα και προσανατολισμό, με κορυφές βαθμού 1 ή 3 και με n-1 φύλλα. Πράγματι έστω ένας τριγωνισμός (με μη τεμνόμενες διαγωνίους) ενός n-γώνου. Τότε:

i) προσθέτουμε μία κορυφή μέσα σε κάθε τρίγωνο και μία κορυφή έξω από κάθε πλευρά του n-γώνου.

ii) Συνδέουμε δύο κορυφές αν υπάρχει μεταξύ τους πλευρά τριγώνου.

Η κατασκευή αυτή δίνει: κάθε νέα κορυφή εσωτερική σε τρίγωνο θα έχει βαθμό ακριβώς 3 στο γράφημα που θα προκύψει κάθε νέα κορυφή έξω από κάποια πλευρά του n-γωνου θάχει βαθμό 1 στο γράφημα που θα προκύψει.

Το γράφημα θα είναι συνεκτικό και χωρίς κύκλους (διότι αν υπήρχαν κύκλοι το αρχικό n-γωνο δεν θα ήταν κυρτό όπως υποθέσαμε γι'όλα τα

n-γωνα του κεφαλαίου αυτού) άρα είναι δέντρο.
Αν επιλέξουμε στο δέντρο αυτό μία κορυφή βαθμού 1 σαν ρίζα θα έχουμε ότι κάθε τριγωνισμός οδηγεί σε κατάλληλο δέντρο.

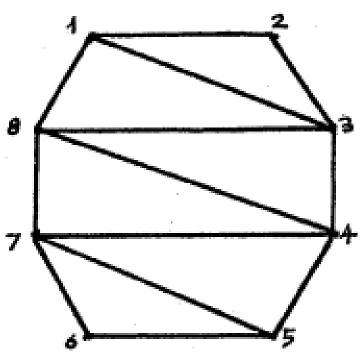
Θα περιγράψουμε τώρα την αντίστροφη κατασκευή: Πως οποιοδήποτε δέντρο με προσανατολισμό και ρίζα, με κορυφές βαθμού 1 ή 3 και με n-1 φύλλα οδηγεί σε κάποιον τριγωνισμό του n-γώνου.

i) Εισάγουμε n νέες κορυφές μία μεταξύ δύο διαδοχικών φύλλων του δομένου δέντρου.

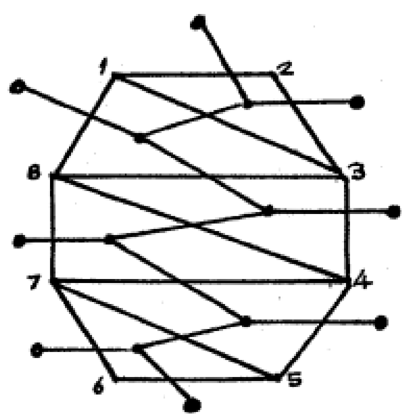
ii) Ενώνουμε τις n αυτές κορυφές με πλευρές έτσι ώστε να τέμνουν τις αντίστοιχες πλευρές του δέντρου.

Η κατασκευή αυτή δίνει έναν τριγωνισμό του n-γώνου και εξασφαλίζει την 1-1 αντιστοιχία. ■

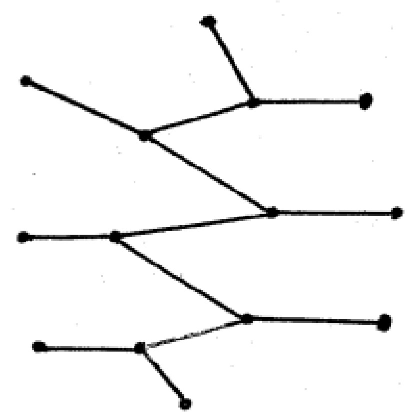
Παράδειγμα 11.



Ενας τριγωνισμός του 8-γώνου.

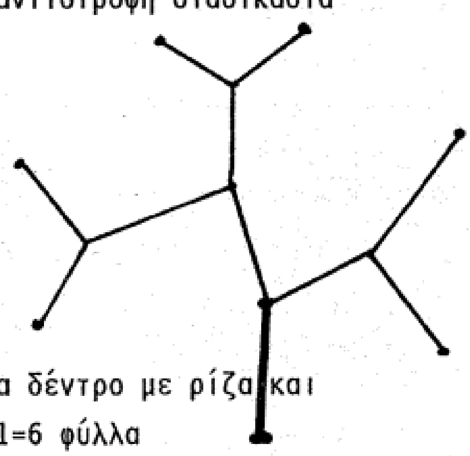


Τριγωνισμός και δέντρο

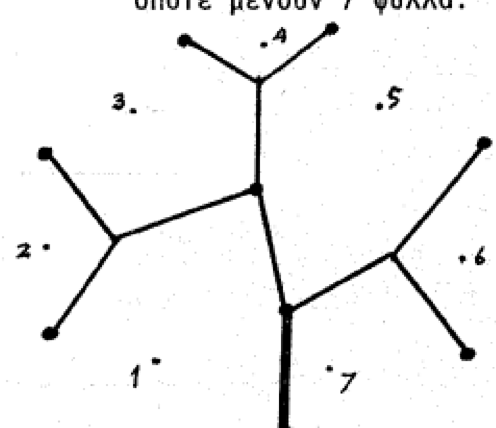


Το αντίστοιχο δέντρο με 14 κορυφές και 13 πλευρές. Μια από τις 8 κορυφές βάθρου 1 επιλέγεται σαν ρίζα οπότε μένουν 7 φύλλα.

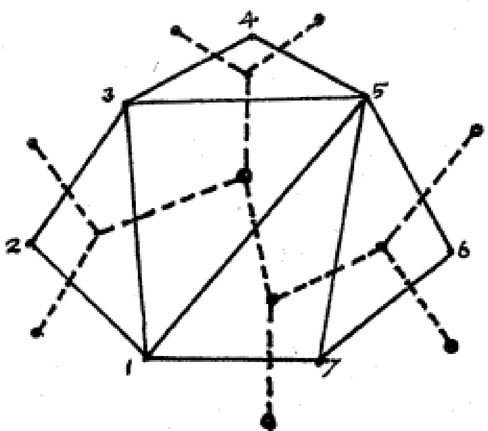
Η αντίστροφη διαδικασία



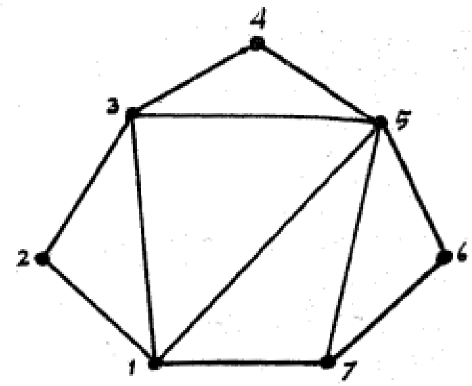
Ενα δέντρο με ρίζα και n-1=6 φύλλα



Το δέντρο και οι n=7 επιπλέον κορυφές.



Ολη η κατασκευή.
Το δέντρο σχεδιάστηκε διακεκομέννα.



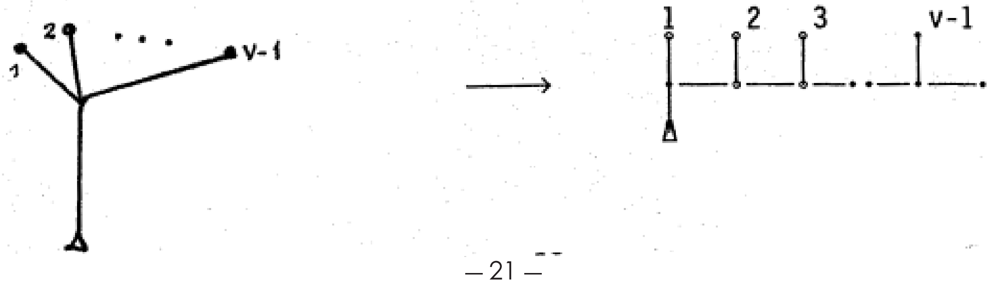
Ο τριγωνισμός του επταγώνου.

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε το γενικότερο πρόβλημά του να μετρήσουμε τα δέντρα με ρίζα, προσανατολισμό και n φύλλα. Δεν ισχύει πιά δηλαδή ο περιορισμός: το δέντρο νάχει κορυφές βαθμού μόνο ένα ή τρία.

Θεώρημα 7: Το πλήθος των δέντρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα δίδεται από τον αριθμό Catalan n-2 τάξης ήτοι $\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$.

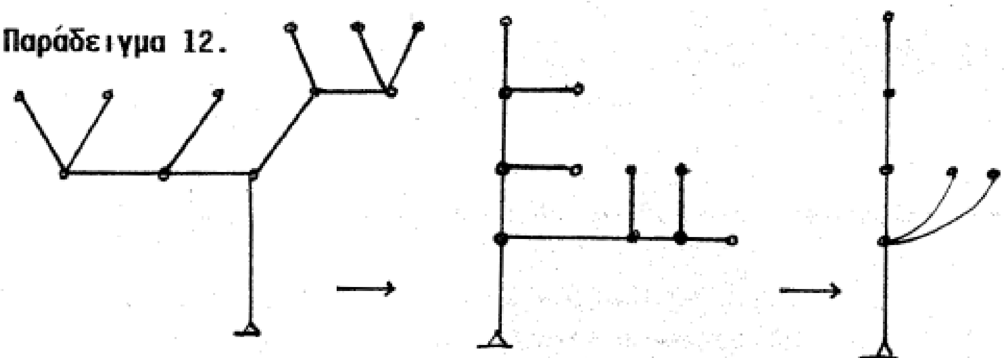
Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των δέντρων με προσανατολισμό ρίζα, βαθμούς 1 ή 3 και με n-1 φύλλα (που από το θεώρημα 6 το πλήθος τους είναι ο αριθμός Catalan n-2 τάξης) και των δέντρων με προσανατολισμό ρίζα και n φύλλα.
Η αντιστοιχία κατασκευάζεται ως εξής:

Εστω ένα δέντρο με προσανατολισμό, ρίζα, n-1 φύλλα και με βαθμούς 1 ή 3. Το σχεδιάζουμε, αρχίζοντας από την ρίζα, έτσι ώστε σε κάθε κορυφή βαθμού 3 οι 3 πλευρές που διέρχονται από αυτήν να έχουν διεύθυνση προς βορρά ή προς ανατολάς. Ακολούθως συμπτύσσουμε όλες τις πλευρές με διεύθυνση προς ανατολάς αφήνοντας μόνο πλευρές με διεύθυνση προς βορράν. Συμπτύσσοντας, τα δύο άκρα μίας πλευράς ταυτίζονται και η πλευρά εξαφανίζεται. Ετσι όλες οι εσωτερικές κορυφές βαθμού 3 εξαφανίζονται και μένουν μόνο τα n-1 φύλλα σαν **κορυφές** στο νέο δέντρο .
Η αντίστροφη κατασκευή:
Κάθε κορυφή βαθμού ν θα σπάσει σε ν φύλλα και σε ν-1 κορυφές βαθμού 3 όπως φαίνεται και στο σχήμα.



■

Παράδειγμα 12.

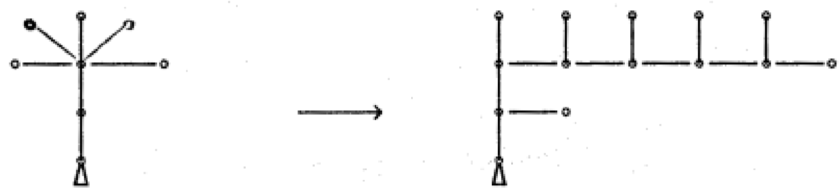


το δέντρο με 6 φύλλα

το ίδιο δέντρο με πλευρές προς βορράν+ανατολάς

Μετά την σύμπτυξη των προς ανατολάς πλευρών

Η αντίστροφη διαδικασία



■

Μπορούμε να γενικεύσουμε και άλλο το πρόβλημά μας, έτσι ώστε η ρίζα να έχει οποιονδήποτε βαθμό (και όχι υποχρεωτικά 1) και να καταργηθεί ο προσανατολισμός (οπότε δεν ξεχωρίζουμε πλέον δύο συμμετρικά δέντρα). Τότε, αν συμβολίσουμε με r_n το πλήθος των δέντρων με ρίζα που έχουν n ***κορυφές***, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας αυτής έχει την μορφή:

$$R(x)=x+x^2+2x^3+4x^4+9x^5+20x^6+48x^7+\ldots$$

ενώ αν συμβολίσουμε με t_n το πλήθος των δέντρων με n κορυφές η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας t_n έχει την μορφή:

$$T(x)=x+x^2+x^3+2x^4+3x^5+6x^6+11x^7+23x^8+\ldots.$$

Για να αποδείξουμε τις δύο αυτές σχέσεις χρειαζόμαστε για μεν την πρώτη το θεώρημα του Pólya, ενώ η δεύτερη προκύπτει όπως απέδειξαν οι Pólya και Richard Otter από την πρώτη αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση:

$$T(x) = R(x) - \frac{1}{2} R(x)^2 + \frac{1}{2} R(x^2) .$$

θα δούμε τα δύο αυτά προβλήματα αναλυτικά στην παράγραφο 1 του κεφαλαίου 4.

Μια μετάθεση $\pi=\begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a'_1 a'_2 \dots a'_n \end{pmatrix}$ n διακεκριμένων στοιχείων ονομάζεται **κυκλική μετάθεση** ή απλούστερα **κύκλος** αν $a'_1=a_2$, $a'_2=a_3$, $a'_{n-1}=a_n$, $a'_n=a_1$.

Οι μεταθέσεις $\begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι κύκλοι. Μάλιστα γράφονται απλούστερα (a b c d) και (1 2 3) αντίστοιχα όπου θεωρούμε ότι η εικόνα κάθε στοιχείου είναι το γειτονικό προς τα δεξιά στοιχείο.

Αν θεωρήσουμε μεταθέσεις με 8 στοιχεία τα $s_1, s_2, \dots s_8$ τότε ο κύκλος $(s_1\ s_5\ s_8)$ παριστά την μετάθεση $\pi=\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ s_5 & s_2 & s_3 & s_4 & s_8 & s_6 & s_7 & s_1 \end{pmatrix}$ όπου τα στοιχεία που δεν εμφανίζονται στον κύκλο θεωρούμε ότι παραμένουν αμετάβλητα.

Θεώρημα 1.

Κάθε μετάθεση π μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο κύκλων οι οποίοι δεν έχουν ανά δύο κοινό στοιχείο.

Απόδειξη: Εκλέγω ένα τυχόν στοιχείο s_i $1\le i\le n$ και θέτω $s'_i=\pi(s_i)$. Ακολούθως θέτω $(s'_i)'=s''_i=\pi^2(s_i)$ κ.ο.κ.
Εφόσον υπάρχουν n το πλήθος διαφορετικά στοιχεία s_i θα ξαναφτάσουμε τελικά στο s_i μετά από r εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας ήτοι $s_i=\pi^r(s_i)=s_i^{(r)}$ και έτσι έχουμε δημιουργήσει τον κύκλο

$$\sigma_1=\left(s_i\ s'_i\ s''_i\ s_i^{(r-1)}\right) .$$

Αν r=n η μετάθεση π αποτελείται από τον κύκλο σ.

Αν r<n υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο s_j που δεν ανήκει στον κύκλο σ_1. Αρχίζοντας από το στοιχείο αυτό δημιουργούμε παρόμοια τον κύκλο $\sigma_2=\left(s_j\quad s'_j \dots s_j^{(k-1)}\right)$ και συνεχίζοντας δημιουργόντας παρόμοιους κύκλους θα καταλήξουμε έχοντας εκφράσει την μετάθεση π σαν γινόμενο κύκλων που δεν έχουν ανά δύο κοινό στοιχείο. Ενα στοιχείο s_k που δεν μεταβάλλεται στην π παράγει κατά την διαδικασία αυτή τον κύκλο (s_k) που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο ή ισοδύναμα έχει **μήκος 1.** ∎

Παράδειγμα 1.

θα κάνουμε σαφέστερη την αποδεικτική διαδικασία του θεωρήματος 1.

$$\text{Εστω η μετάθεση } \pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 3 & 5 & 9 & 6 & 2 & 7 & 4 & 8 & 1\end{pmatrix}$$

Ας εκλέξουμε το στοιχείο 4 τότε $\pi(4)=6$ $\pi^2(4)=\pi(6)=7$, $\pi^3(4)=\pi^2(6)=\pi(7)=4$ οπότε σχηματίστηκε ο κύκλος (4 6 7). Αν πάρω ένα στοιχείο που δεν ανήκει στον κύκλο αυτό (έστω το 5) η ίδια διαδικασία δίνει $5 \to 2 \to 5$ δηλαδή τον κύκλο (5 2).

Αν πάρω ένα στοιχείο που δεν ανήκει σε κανένα από τους δύο κύκλους (έστω το 3) η διαδικασία δίνει $3 \to 9 \to 1 \to 3$ δηλαδή τον κύκλο (1 3 9) δεδομένου ότι (1 3 9)=(3 9 1)=(9 1 3) και το μη μεταβαλλόμενο στοιχείο 8 δημιουργεί τον κύκλο (8) άρα

$$\pi=(1\ 3\ 9)(4\ 6\ 7)(2\ 5)\ (8)$$ ■

Αν και η ανάλυση μίας μετάθεσης σε γινόμενο κύκλων είναι βασικά μοναδική υπάρχουν δύο προφανείς τρόπους για να αλλάξουμε τον συμβολισμό χωρίς να μεταβάλλουμε την μετάθεση. Πρώτον κάθε κύκλος μπορεί να αρχίζει με οποιοδήποτε στοιχείο του δηλαδή όπως είδαμε παραπάνω τα σύμβολα (1 3 9) (3 9 1) και (9 1 3) παριστούν τον ίδιο κύκλο. Δεύτερον αφού οι κύκλοι έχουν διαφορετικά στοιχεία ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα δηλαδή τα σύμβολα (α β γ) (δ ε) και (δ ε) (α β γ) παριστάνουν την ίδια μετάθεση. Το σημαντικό λοιπόν στην ανάλυση μίας μετάθεσης σε γινόμενο κύκλων είναι τα μήκη των κύκλων και το πλήθος των κύκλων τα οποία και προσδιορίζονται μοναδικά.

Ορισμός: Εστω η μετάθεση π που ενεργεί πάνω σ'ένα σύνολο S με n στοιχεία. Αν η μετάθεση π μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο k_1 κύκλων μήκους 1, k_2 κύκλων μήκους 2,...,k_r κύκλων μήκους r... (όπου οι κύκλοι δεν έχουν ανά δύο κοινό στοιχείο) τότε η μετάθεση π λέμε ότι είναι **τύπου** $\{k_1,k_2,\ldots,k_r\ldots\}$.

Προφανώς ισχύει $k_1+2k_2+\ldots+rk_r+\ldots=n$ διότι το άθροισμα των μηκών των κύκλων θα ισούται με το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S.

Παράδειγμα 2.

$$\text{Οι μεταθέσεις } \pi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\end{pmatrix}=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$$

$$\pi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}=(124875)(36)$$

$$\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}=(12)(34)(56)$$

$$\pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}=(123456)$$

είναι αντίστοιχα τύπου: η $\pi_1(8,0,0,0,0,0,0,0)$, η $\pi_2(0,1,0,0,0,1)$, η $\pi_3(0,3,0,0,0,0)$ και η $\pi_4(0,0,0,0,0,1)$. Παρατηρούμε για την π_1:$8\cdot 1=8$, για την π_2:$1\cdot 2+1\cdot 6=8$, για την π_3:$3\cdot 2=6$ και για την π_4:$1\cdot 6=6$. ■

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του κυκλικού δείκτη μίας ομάδας μεταθέσεων G.

Ορισμός: Εστω μία ομάδα G τα στοιχεία της οποίας είναι μεταθέσεις ενός συνόλου S με n στοιχεία.

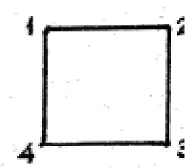
Αν η μετάθεση $g\in G$ είναι τύπου $\{k_1,k_2,\ldots,k_r,\ldots\}$ σχηματίζουμε το γινόμενο $x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ όπου τα x_1, $x_2,\ldots n_n$ είναι n το πλήθος μεταβλητές. Αν αθροίσουμε τα γινόμενα αυτά ένα για κάθε μετάθεση $g\in G$ και διαιρέσουμε με το πλήθος των στοιχείων της G έχουμε το πολυώνυμο

$$P_G(x_1,x_2,\ldots x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x_1^{k_1(g)}\cdot x_2^{k_2(g)}\ldots x_n^{k_n(g)}\ .$$

το οποίο ονομάζεται κυκλικός δείκτης (cycle index) της ομάδας G.

Παράδειγμα 3.

Ας θεωρήσω την ομάδα συμμετριών G ενός τετραγώνου G του οποίου οι κορυφές έχουν ονομασθεί 1,2,3,4 όπως φαίνεται στο σχήμα



Οι συμμετρίες του τετραγώνου, δηλαδή οι κινήσεις του τετραγώνου που διατηρούν το σχήμα αναλλοίωτο είναι οι εξής:

α) Περιστροφές περί το κέντρο βάρους του τετραγώνου
- i) περιστροφή με φορά την των δεικτών του ρολογίου κατά 0^o
- ii) περιστροφή με την ίδια φορά κατά 90^o
- iii) περιστροφή με την ίδια φορά κατά 180^o
- iv) περιστροφή με την ίδια φορά κατά 270^o.

β) Κατοπτρισμοί με άξονες
- i) την διαγώνιο 13

ii) την διαγώνιο 24

iii) την μεσοκάθετο του 12

iv) την μεσοκάθετο του 14.

Κάθε μία από τις 8 αυτές συμμετρίες παράγει μία μετάθεση του συνόλου {1, 2, 3, 4} όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Συμμετρία	**Μετάθεση**
Περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)
Περιστροφή κατά 90°	(1234)
Περιστροφή κατά 180°	(13)(24)
Περιστροφή κατά 270°	(1432)
Κατοπτρισμός κατά την 13	(24)(1)(3)
Κατοπτρισμός κατά την 24	(13)(2)(4)
Κατοπτρισμός κατά την μεσοκάετο του 12	(12)(34)
Κατοπτρισμός κατά την μεσοκάθετο του 14	(14)(23) .

Είναι εύκολο να αποδείξουμε είτε εξετάζοντας τα αξιώματα της ομάδας, είτε κάνοντας τις συνθέσεις των 8 αυτών κινήσεων ότι οι 8 αυτές μεταθέσεις αποτελούν μία ομάδα G η οποία μάλιστα είναι υποομάδα της S_4.

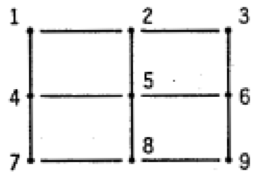
Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τους τύπους των 8 αυτών μεταθέσεων:

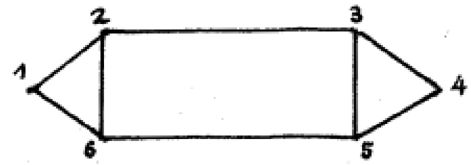
Μετάθεση:	k_1	k_2	k_3	k_4	αντίστοιχο γινόμενο
(1)(2)(3)(4)	4	0	0	0	x_1^4
(1234)	0	0	0	1	x_4
(13)(24)	0	2	0	0	x_2^2
(1432)	0	0	0	1	x_4
(1)(3)(24)	2	1	0	0	$x_1^2\ x_2$
(2)(4)(13)	2	1	0	0	$x_1^2\ x_2$
(12)(34)	0	2	0	0	x_2^2
(14)(23)	0	2	0	0	x_2^2 .

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας συμμετρίας G του τετραγώνου θα είναι λοιπόν το άθροισμα των γινομένων αυτών αφού διαιρεθεί με το πλήθος των στοιχείων της ομάδας ήτοι:

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{8}\left(x_1^4+ 2x_1^2x_2+ 3x_2^2+ 2x_4\right).$$

Παράδειγμα 4. θεωρούμε τα γραφήματα





Να βρεθούν οι κυκλικοί δείκτες των ομάδων συμμετριών των δύο αυτών γραφημάτων.

Λύση. Στην περίπτωση των γραφημάτων οι συμμετρίες είναι οι μεταθέσεις των κορυφών που απεικονίζουν πλευρές σε πλευρές και μη πλευρές σε μή πλευρές. Τέτοιες μεταθέσεις ονομάζονται **αυτομορφισμοί** και το σύνολο όλων των αυτομορφισμών ενός γραφήματος αποτελεί μία ομάδα που ονομάζεται **ομάδα αυτομορφισμών** του γραφήματος.

Στο δεύτερο γράφημα η μετάθεση (26)·(35) είναι ένας αυτομορφισμός ενώ η μετάθεση (123456) δεν είναι διότι η πλευρά 35 έχει σαν εικόνα την 46 η οποία δεν είναι πλευρά του G.

α) Το γράφημα έχει 8 αυτομορφισμούς ήτοι 4 περιστροφές κατά γωνίες 0°, 90°, 180°, 270° και κέντρο περιστροφής την κορυφή 5 και τέσσερεις κατοπτρισμούς με άξονες τους 456, 258, 159, 357. Οι αυτομορφισμοί, οι αντίστοιχες μεταθέσεις και τα γινόμενα περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Αυτομορφισμός	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	x_1^9
περιστροφή κατά 90°	(1397)(2684)(5)	$x_1\ x_4^2$
περιστροφή κατά 180°	(19)(28)(37)(46)(5)	$x_1\ x_2^4$
περιστροφή κατά 270°	(1793)(2486)(5)	$x_1\ x_4^2$
κατοπτρισμός με άξονα 456	(17)(28)(39)(4)(5)(6)	$x_1^3\ x_2^3$
κατοπτρισμός με άξονα 258	(13)(46)(79)(2)(5)(8)	$x_1^3\ x_2^3$
κατοπτρισμός με άξονα 159	(24)(68)(37)(1)(5)(9)	$x_1^3\ x_2^3$
κατοπτρισμός με άξονα 357	(26)(48)(19)(3)(5)(7)	$x_1^3\ x_2^3$.

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας αυτομορφισμών G του γραφήματος αυτού θα είναι λοιπόν

$$P_G(x_1,x_2,\ldots,x_9) = \frac{1}{8}\left(x_1^9 + 2x_1x_4^2 + 4x_1^3x_2^3 + x_1x_2^4\right)$$

β) Το γράφημα έχει 4 αυτομορφισμούς ήτοι:
2 περιστροφές περί το κέντρο βάρους του κατά γωνίες 0°, 180°
2 κατοπτρισμούς ως προς άξονες την 14 και τη μεσοκάθετο της 23
όπως φαίνεται και στον πίνακα:

Αυτομορφισμός	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
περιστροφή κατά 0°	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	x_1^6
περιστροφή κατά 180°	(14)(23)(56)	x_2^3
κατοπτρισμός με άξονα την 14	(1)(4)(26)(35)	$x_1^2\ x_2^2$
κατοπτρισμός με άξονα την μεσοκάθετο του 23	(14)(25)(36)	x_2^3 .

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας αυτομορφισμών G του γραφήματος αυτού είναι:

$$P_G(x_1,x_2,\ldots,x_6) = \frac{1}{4}\left(x_1^6 + 2x_2^3 + x_1^2\ x_2^2\right) . \qquad \blacksquare$$

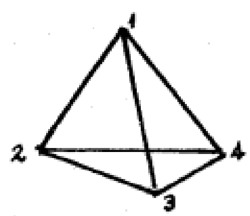
Παράδειγμα 5. Νε βρεθούν οι κυκλικοί δείκτες των περιστροφικών ομάδων συμμετριών G των πέντε Πλατωνικών στερεών.

Λύση: **α)** Το τετράεδρο

Οι περιστροφικές συμμετρίες του τετραέδρου είναι 12 και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συμμετρία	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
Περιστροφή κατά 0°περί το ύψος του τετραέδρου που διέρχεται από την κορυφή 1	(1)(2)(3)(4)~~(5)(6)~~	x_1^6 4
κατά 120° περί ύψος που διέρχεται απο την κορυφή 1	(1)(234)	$x_1\ x_3$
κατά 240° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 1	(1)(243)	$x_1\ x_3$
κατά 120° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 2	(2)(134)	$x_1\ x_3$
κατά 240° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 2	(2)(143)	$x_1\ x_3$
κατά 120° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 3	(3)(124)	$x_1\ x_3$
κατά 240° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 3	(3)(142)	$x_1\ x_3$

κατά 120° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 4	(4)(123)	$x_1\ x_3$
κατά 240° περί ύψος που διέρχεται από την κορυφή 4	(4)(132)	$x_1\ x_3$
περιστροφή κατά 180° περί την μεσοκάθετο των άκρων 12 και 34	(12)(34)	x_2^2
μεσοκάθετο των άκρων 13 και 24	(13)(24)	x_2^2
μεσοκάθετο των άκρων 14 και 23	(14)(23)	x_2^2

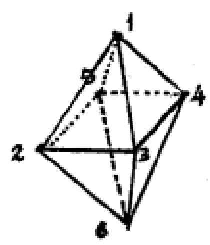


Αρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του τετραέδρου είναι:

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{12}\left(x_1^4 + 3x_2^2 + 8x_1x_3\right)$$

β) Το οκτάεδρο

Οι περιστροφικές συμμετρίες του οκταέδρου είναι 24 οι εξής



i) Περιστροφές κατά 0°, 90°, 180°, 270° περί άξονες που διέρχονται από δύο απέναντι κορυφές του οκταγώνου.

Εφόσον υπάρχουν 3 ζεύγη απέναντι κορυφών θα υπάρχουν 3 τέτοιοι άξονες περιστροφής και συγκεκριμένα οι 16, 24, 35.

ii) Περιστροφές κατά 180° περί άξονες που είναι μεσοκάθετοι σε δύο απέναντι ακμές.

Εφόσον υπάρχουν 6 ζεύγη απέναντι ακμών θα υπάρχουν 6 τέτοιοι άξονες και συγκεκριμένα:

Μεσοκάθετος των 14, 26
" " 13, 56
" " 12, 46
" " 15, 36

" " 23, 45
" " 25, 43.

iii) Περιστροφές κατά 120° και 240° περί άξονες που διέρχονται κάθετα από τα κέντρα βάρους δύο απέναντι εδρών. Οι 8 έδρες δίνουν 4 ζεύγη απέναντι εδρών και συγκεκριμένα:

Αξονας κάθετος στις έδρες 134 - 256
Αξονας κάθετος στις έδρες 145 - 236
Αξονας κάθετος στις έδρες 125 - 346
Αξονας κάθετος στις έδρες 123 - 456.

Οι 24 αυτές συμμετρίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Συμμετρία	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
Περιστροφή κατά 0° περί άξονα 16	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	x_1^6
περιστροφή κατά 90° περί άξονα 16	(1) (2345) (6)	$x_1^2\ x_4$
περιστροφή κατά 180° περί άξονα 16	(1) (24)(35) (6)	$x_1^2\ x_2^2$
περιστροφή κατά 270° περί άξονα 16	(1) (2543) (6)	$x_1^2\ x_4$
περιστροφή κατά 90° περί άξονα 24	(2) (4) (1563)	$x_1^2\ x_4$
περιστροφή κατά 180° περί άξονα 24	(2)(4) (16)(35)	$x_1^2\ x_2^2$
περιστροφή κατά 270° περί άξονα 24	(2)(4) (1365)	$x_1^2\ x_4$
περιστροφή κατά 90° περί άξονα 35	(3)(5) (1264)	$x_1^2\ x_4$
περιστροφή κατά 180° περί άξονα 35	(3)(5) (16)(24)	$x_1^2\ x_2^2$
περιστροφή κατά 270° περί άξονα 35	(3)(5) (1462)	$x_1^2\ x_4$
Μεσοκάθετο 14, 26	(14) (26) (35)	x_2^3
μεσοκάθετο 13, 56	(13) (56) (24)	x_2^3
μεσοκάθετο 12, 46	(12) (35) (46)	x_2^3
μεσοκάθετο 15, 36	(15) (24) (36)	x_2^3
μεσοκάθετο 23, 45	(16) (23) (45)	x_2^3
μεσοκάθετο 25, 43	(16) (25) (43)	x_2^3
Περιστροφή 120° περί άξονα 134-256	(134) (265)	x_3^2
περιστροφή 240° περί άξονα 134-256	(143) (256)	x_3^2
περιστροφή 120° περί άξονα 145-236	(236) (145)	x_3^2

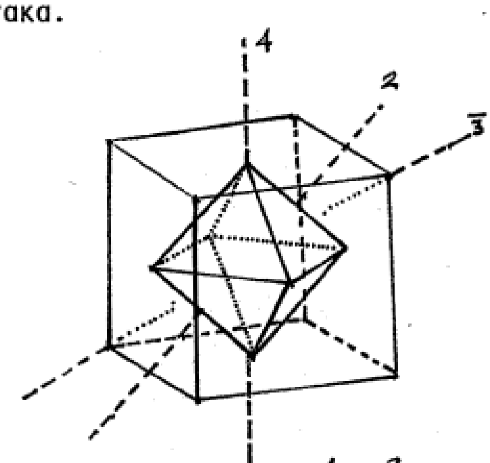
περιστροφή 240° περί άξονα 145-236	(263) (154)	x_3^2
περιστροφή 120° περί άξονα 125-346	(346) (152)	x_3^2
περιστροφή 240° περί άξονα 125-346	(125) (364)	x_3^2
περιστροφή 120° περί άξονα 123-456	(123) (456)	x_3^2
περιστροφή 240° περί άξονα 123-456	(132) (465)	x_3^2

Αρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του οκταέδρου είναι

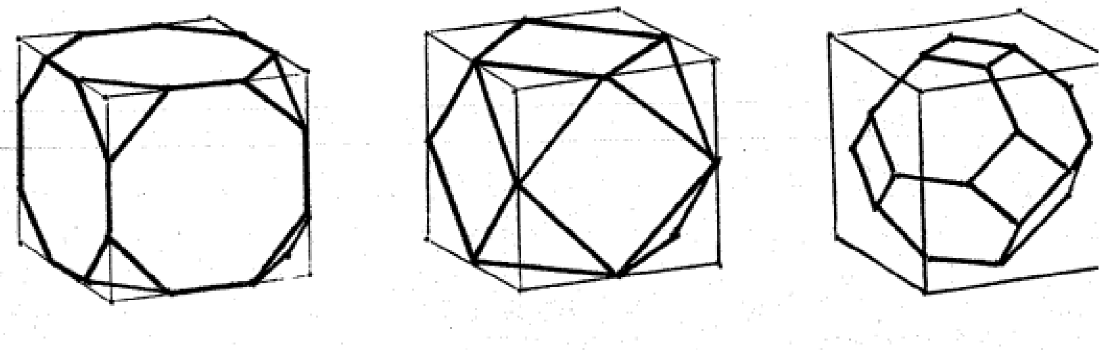
$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \frac{1}{24}\left(x_1^6+6x_1^2\ x_4+3x_1^2\ x_2^2+6x_2^3+\ 8x_3^2\right)$$

γ) Ο Κύβος.

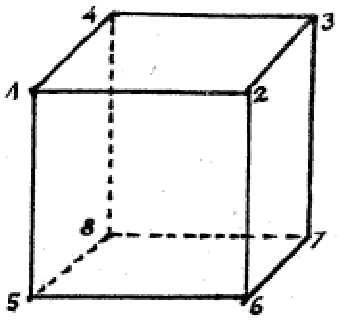
Οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου είναι πάλι 24 αντίστοιχες με αυτές του οκταέδρου. Οι 24 περιστροφικές συμμετρίες, οι 24 κατοπτρισμοί και η διαδικασία μετασχηματισμού του κύβου σε οκτάεδρο φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Οι 24 περιστροφές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.



$\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$



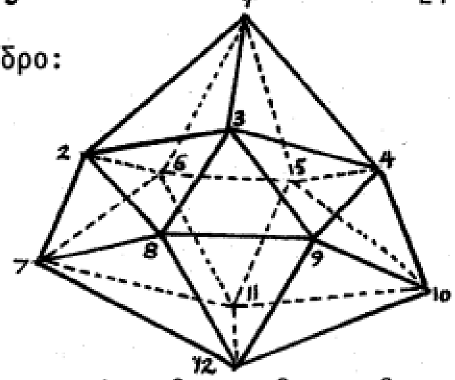
Συμμετρία	**Μετάθεση**	**Γινόμενο**
Αξονας από κ.β. έδρας 1234 και 5678		
Περιστροφή περί άξονα κατά 0^o	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	x_1^8
περιστροφή περί άξονα κατά 90^o	(1234) (5478)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180^o	(13)(24)(57)(68)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270^o	(1432) (5876)	x_4^2
Αξονας από κ.β. εδρών 1256 και 3487		
Περιστροφή περί άξονα κατά 90^o	(1265) (4378)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180^o	(16)(25)(47)(38)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270^o	(1562) (4873)	x_4^2
Αξονας από κ.β. εδρών 1584 και 2673		
περιστροφή περί άξονα κατά 90^o	(1584) (2673)	x_4^2
περιστροφή περί άξονα κατά 180^o	(18)(54)(27)(63)	x_2^4
περιστροφή περί άξονα κατά 270^o	(1485) (2376)	x_4^2
Μεσοκάθετος 14-67	(14)(28)(67)(35)	x_2^4
μεσοκάθετος 23-58	(23)(58)(46)(17)	x_2^4
μεσοκάθετος 12-78	(12)(78)(35)(46)	x_2^4
μεσοκάθετος 34-56	(34)(56)(28)(17)	x_2^4
μεσοκάθετος 15-37	(15)(37)(28)(64)	x_2^4
μεσοκάθετος 26-48	(26)(48)(17)(53)	x_2^4
Περιστροφή κατά 120^o περί τον 28	(136)(2)(8)(547)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 240^o περί τον 28	(163)(2)(8)(574)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 120^o περί τον 17	(1)(7)(254)(368)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 240^o περί τον 17	(1)(7)(245)(386)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 120^o περί τον 35	(3)(5)(247)(186)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 240^o περί τον 35	(3)(5)(274)(168)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 120^o περί τον 46	(4)(6)(138)(257)	$x_1^2\ x_3^2$
περιστροφή κατά 240^o περί τον 46	(4)(6)(183)(275)	$x_1^2\ x_3^2$



Αρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας συμμετριών G του κύβου είναι:

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)=$$
$$=\frac{1}{24}\left(x_1^8+ 8x_1^2\ x_3^2+ 9x_2^4+ 6x_4^2\right).$$

δ) Το εικοσάεδρο:



i) Περιστροφές κατά 72^o, 144^o, 216^o και 288^o περί άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές.
Υπάρχουν έξι τέτοιοι άξονες οι: 112, 210, 311, 47, 58, 69 άρα 24 τέτοιες μεταθέσεις.
Περιστροφή 72^o περί τον άξονα 112 δίνει την μετάθεση (1) (12) (2 3 4 5 6) (7 8 9 10 11) στην οποία αντιστοιχεί το $x_1^2\ x_5^2$. Οι 24 λοιπόν αυτές μεταθέσεις θα δώσουν τον προσθετέο 24 $x_1^2\ x_5^2$ στον κυκλικό δείκτη.

ii) Περιστροφή κατά 180^o περί άξονα που διχοτομεί τις απέναντι ακμές. Υπάρχουν 15 ζεύγη απέναντι ακμών άρα 15 τέτοιοι άξονες.
Περιστροφή κατά 180^o περί έναν από αυτούς δίνει μετάθεση στην οποία αντιστοιχεί το γινόμενο x_2^6. Οι 15 λοιπόν τέτοιες μεταθέσεις θα δώσουν τον προσθετέο 15 x_2^6 στον κυκλικό δείκτη.

iii) Περιστροφή κατά 120^o και 240^o περί άξονα που διέρχεται κάθετα από τα κέντρα βάρους δύο απέναντι εδρών. Υπάρχουν 10 ζεύγη απέναντι εδρών άρα $2\times10=20$ τέτοιες μεταθέσεις. Σε μία τέτοια μετάθεση αντιστοιχεί το x_3^4. Οι 20 λοιπόν αυτές μεταθέσεις θα δώσουν τον προσθετέο 20 x_3^4 στον κυκλικό δείκτη.
iv) Η ταυτοτική μετάθεση που δίνει τον προσθετέο x_1^{12}.

Αρα ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας του 20-εδρου είναι:

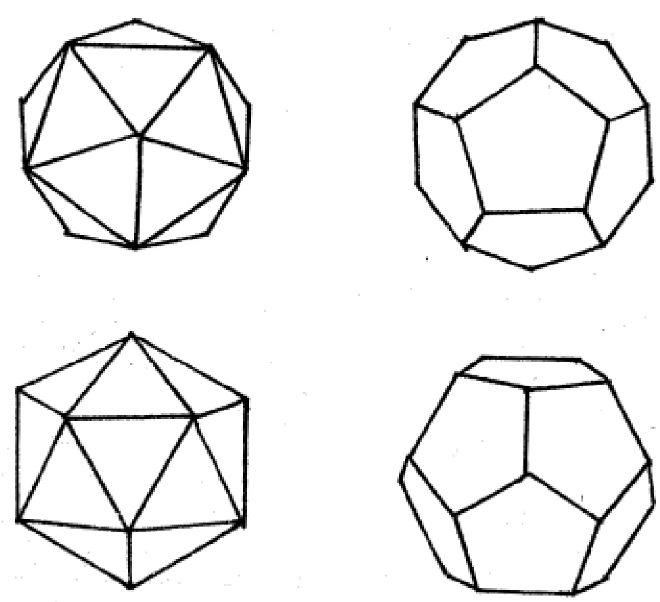
$$P_G(x_1,\ldots,x_{12})=\frac{1}{60}\left(x_1^{12}+ 24x_1^2\ x_3^2+ 15x_2^6+ 20x_3^4\right)$$

ε) Το δωδεκάεδρο.

Οι περιστροφικές συμμετρίες του δωδεκαέδρου είναι πάλι 60 αντίστοιχες με αυτές του 20-έδρου.
Η διαδικασία μετασχηματισμού του 12-έδρου σε 20-έδρο φάνεται στο σχήμα. Ο κυκλικός δείκτης της περιστροφικής ομάδας του 12-έδρου είναι:

$$P_G(x_1,\ldots,x_{20}) = \frac{1}{60}\left(x_1^{20} + 20x_1^2\, x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4\right). \qquad \blacksquare$$

Τελειώνοντας τονίζουμε ότι για τους παραπάνω κυκλικούς δείκτες των κανονικών πολυέδρων δεν ελήφθησαν υπ'όψη οι κατοπτρισμοί. Αν ληφθούν τότε οι κυκλικοί δείκτες γίνονται πιό πολύπλοκοι δεδομένου ότι ο κύβος άρα και το οκτάεδρο έχουν 48 συμμετρίες το καθένα ενώ το δωδεκάεδρο και το 20-εδρο από 120. Για περισσότερες λεπτομέρειες στην συμμετρία δες [18].



Παράδειγμα 6. Το ευθύ γινόμενο δύο ομάδων μεταθέσεων.
Εστω η ομάδα μεταθέσεων G που δρα πάνω στο σύνολο S και η ομάδα μεταθέσεων H που δρα πάνω στο σύνολο H με $S \cap H = \varnothing$ και $S \cup H = U$.

Σε κάθε εκλογή $g \in G$ σε κάθε εκλογή $h \in H$ αντιστοιχεί μία μετάθεση του συνόλου U που ορίζεται:

$$u \longrightarrow gu \quad \text{αν} \quad u \in S$$
$$u \longrightarrow hu \quad \text{αν} \quad u \in T.$$

Η μετάθεση αυτή του συνόλου U συμβολίζεται με $g \times h$. Οι μεταθέσεις αυτές αποτελούν μία ομάδα που έχει τάξη το γινόμενο των τάξεων των ομάδων G και H και η οποία ονομάζεται ευθύ γινόμενο των G και H και η οποία συμβολίζεται με $G \times H$.

Αν $g \in G$ και $h \in H$ και η g είναι τύπου $\{b_1, b_2, \ldots\}$ και η h τύπου $\{c_1, c_2, \ldots\}$ τότε η $g \times h$ είναι μετάθεση τύπου $\{b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots\}$ αφού ο κάθε κύκλος του U ευρίσκεται όλος μέσα στο S ή όλος μέσα στο T.

Αρα ο όρος του κυκλικού δείκτη της $G \times H$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $g \times h$ ισούται με το γινόμενο του όρου του κυκλικού δείκτη P_G που αντιστοιχεί στο g επί τον όρο του P_H που αντιστοιχεί στο h.

Εφαρμόζοντας την παρατήρηση αυτή σε όλους τους όρους του P_G και του P_H έχουμε:

$$P_{G \times H} = P_G \cdot P_H$$

Θεώρημα 2: Εστω C_n η κυκλική ομάδα μεταθέσεων που παράγεται από την $\pi = (1\ 2\ 3 \ldots n)$. Τότε για κάθε διαιρέτη d του n υπάρχουν $\varphi(d)$ μεταθέσεις στο C_n που έχουν $\frac{n}{d}$ κύκλους μήκους d.
Από αυτά συνάγεται ότι ο κυκλικός δείκτης της C_n είναι:

$$P_{C_n}(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \varphi(d) \cdot X_d^{\frac{n}{d}}$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σ'όλους τους διαιρέτες του n και $\varphi(d)$ η γνωστή συνάρτηση του Euler.

Απόδειξη.
Από την θεωρία των κυκλικών ομάδων έχουμε ότι μία κυκλική ομάδα τάξης n περιέχει ακριβώς $\varphi(d)$ στοιχεία τάξης d για κάθε διαιρέτη d του n. Στην περίπτωσή μας οι $\varphi(d)$ μεταθέσεις έχουν την μορφή $\pi^{kn/d}$ όπου $1 \le k \le d$ και Μ.Κ.Δ. $(k,d)=1$ θα δείξουμε ότι οι μεταθέσεις αυτές έχουν $\frac{n}{d}$ κύκλους μήκους d.

Εστω m το μήκος του μικρότερου κύκλου της μετάθεσης π^i $1 \le i \le n-1$

και έστω x ένα στοιχείο που ανήκει σε έναν κύκλο μήκους m.

$$\text{Τότε } \pi^{im}(x)=(\pi^{i})^{m}(x)=x.$$

Για κάθε $y\in\{1,2,\ldots,n\}$ και το x και το y ανήκουν στον ένα μόνο κύκλο της π άρα $\pi^{r}(x)=y$ για κάποιο r. Αλλά τότε

$$(\pi^{i})^{m}(y)=\pi^{im}\pi^{r}(x)=\pi^{r}\pi^{im}(x)=\pi^{r}(x)=y$$

Αρα το στοιχείο y ανήκει σε κάποιο κύκλο της π^{i} που το μήκος του διαιρεί το m. Εφόσον το m είναι το μήκος του μικρότερου κύκλου έπεται ότι και ο κύκλος αυτός (της π^{i}) έχει μήκος m. Ολοι λοιπόν οι κύκλοι της π^{i} έχουν μήκος m. Αν η τάξη της π^{i} είναι d έχουμε d=m άρα υπάρχουν $\frac{n}{d}$ κύκλοι μήκους d. ■

Παράδειγμα 7. Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τον κυκλικό δείκτη της ομάδας C_{12}.

Αφού n=12 η ομάδα έχει 12 μεταθέσεις και μάλιστα τις:

	τύπος	προσθετέος
$e=(1)(2)\ldots(12)$	$\{12,0,0,\ldots\}$	x_1^{12}
$\pi=(12\ldots\ldots12)$	$\{0,0,\ldots,1\}$	x_{12}
$\pi^2=(1357911)(24681012)$	$\{0,0,0,0,0,2\}$	x_6^2
$\pi^3=(14710)(25811)(36912)$	$\{0,0,0,3\}$	x_4^3
$\pi^4=(159)(2610)(3711)(4812)$	$\{0,0,4\}$	x_3^4
$\pi^5=(16,11,4927,12,5,10,38)$	$\{0,0,\ldots1\}$	x_{12}^1
$\pi^6=(17)(28)(39)(410)(511)(612)$	$\{0,6,0\ldots\}$	x_2^6
$\pi^7=(183,10,5,12,7294,11,6)$	$\{0,0,\ldots,1\}$	x_{12}
$\pi^8=(195)(2106)(3117)(4128)$	$\{0,0,4,0\ldots\}$	x_3^4
$\pi^9=(1,10,74)(2,11,85)(3,12,96)$	$\{0,0,0,3\}$	x_4^3
$\pi^{10}=(1,11,9753)(2,12,10864)$	$\{0,0,0,0,0,2\}$	x_6^2
$\pi^{11}=(1,12,11,10,98765432)$	$\{0,0,0\ldots,1\}$	x_{12}

όπου τοποθετήθηκαν κόμματα σε ορισμένους 12-κύκλους για να ξεχωρίσουν το στοιχείο 12 από το 1,2 κ.ο.κ.

Οι διαιρέτες του 12 είναι:

d=1 $\varphi(1)=1 \Rightarrow \exists$ 1 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{1}=12$ κύκλους μήκους 1 (η e)

d=2 $\varphi(2)=1 \Rightarrow \exists$ 1 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{2}=6$ κύκλους μήκους 2 (η π^6)

d=3 $\varphi(3)=2 \Rightarrow \exists$ 2 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{3}=4$ κύκλους μήκους 3 (οι π^4,π^8)

$d=4$ $\varphi(4)=2 \Rightarrow \exists$ 2 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{4}=3$ κύκλους μήκους 4 (οι π^3,π^8)

$d=6$ $\varphi(6)=2 \Rightarrow \exists$ 2 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{6}=2$ κύκλους μήκους 6 (οι π^2,π^{10})

$d=12$ $\varphi(12)=4 \Rightarrow \exists$ 4 μετάθεση στο C_{12} $\frac{12}{12}=1$ κύκλους μήκους 12 (οι $\pi^1,\pi^5,\pi^7,\pi^{11}$).

Αρα ο κυκλικός δείκτης της c_{12} είναι:

$$\frac{1}{12}\left(\varphi(1)x_1^{12}+ \varphi(2)x_2^6+ \varphi(3)x_3^4+ \varphi(4)x_4^3+ \varphi(6)x_6^2+ \varphi(12)x_{12}^1\right)=$$

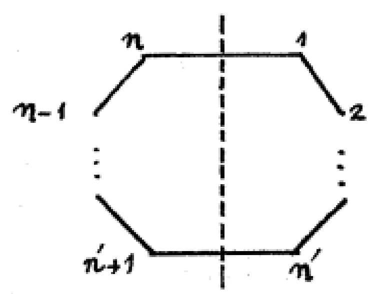
$$= \frac{1}{12}\left(x_1^{12}+ x_2^6+ 2x_3^4+ 2x_4^3+ 2x_6^2+ 4x_{12}\right).$$

Παρατήρηση: Αν θέσουμε στο θεώρημα 2 $x=1$ έχουμε την γνωστή ταυτότητα για την συνάρτηση του Euler: $\frac{1}{n}\sum_{d/n}\varphi(d)=1$.

Στο παράδειγμα 7 ισχύει $\frac{1}{12}(1+1+2+2+2+4)=1$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η ομάδα συμμετριών ενός n-γωνου δεν αποτελείται μόνο από τις περιστροφές (οπότε $G=C_n$) αλλά υπάρχουν και κατοπτρισμοί.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι n άρτιος, ≥4 και ας θέσουμε $n'=\frac{1}{2}n$ οπότε οι κορυφές του n-γώνου ονομάζονται $1,2,\ldots n',n'+1,\ldots n$.



Ας θεωρήσουμε τους κατοπτρισμούς περί άξονα την μεσοκάθετο της 1n (και φυσικά της n' $n'+1$).

Η αντίστοιχη μετάθεση είναι η $\sigma=(1n)(2\ n-1)\ldots(n'\ n'+1)$.

Θέτωντας $\pi=(12\ldots n)$ έχουμε ότι η μετάθεση $\sigma\pi$ (όπου ως συνήθως πρώτα γίνεται η π και μετά η σ) ισούται με $(1\ n-1)\ (2\ n-2)\ (3\ n-3)\ (n'-1,\ n'+1)\ (n')\ (n)$ η οποία είναι κατοπτρισμός περί την ευθεία nn'. Το πλήθος των κατοπτρισμών με άξονες τις μεσοκάθετες του n-γώνου είναι $\frac{1}{2}n=n'$ οι οποίες οδηγούν στις μεταθέσεις

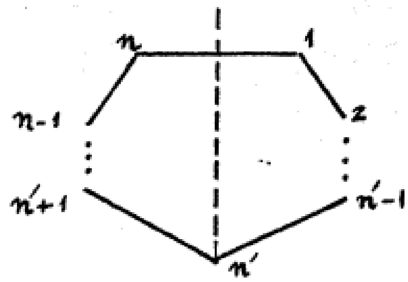
$$\sigma,\ \sigma\pi^2,\ \sigma\pi^4,\ldots,\sigma\pi^{n-2}$$

Υπάρχουν όμως και $n'=\frac{1}{2}n$ κατοπτρισμοί με άξονες τις ευθείες που ενώνουν δύο απέναντι κορυφές του n-γώνου και οι οποίες αντιστοιχούν στις μεταθέσεις

$$\sigma\pi,\ \sigma\pi^3,\ \sigma\pi^5,\ldots,\sigma\pi^{n-1}.$$

Εχουμε λοιπόν συνολικά μία ομάδα από 2n μεταθέσεις: τις n περιστροφές π^i καθώς και τους n κατοπτρισμούς της μορφής $\sigma\pi^i$

$0 \le i \le n-1$. Η ομάδα αυτή ονομάζεται διεδρή ομάδα και συμβολίζεται με D_{2n}. Προσοχή όμως διότι ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο D_n αντί του D_{2n}. Οταν ο n είναι περιττός η κατάσταση είναι ακόμα απλούστερη. Εστω $n=2n'+1$. Πάλι θα έχουμε n κατοπτρισμούς αλλά τώρα όλοι τους είναι της ίδιας μορφής, δηλαδή περί άξονα που ενώνει μία κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.



Εχουμε λοιπόν

$\sigma=(1n)\ (2\ n-1)\ (n-1\ n'+1)\ (n')$

Πάλι λοιπόν θα υπάρχει μία δίεδρη ομάδα που αποτελείται από n περιστροφές π^i και n κατοπτρισμούς $\sigma\pi^i$ $0 \le i \le n-1$.

Μετά από τις παρατηρήσεις αυτές η απόδειξη του θεωρήματος 3 είναι άμεση.

Θεώρημα 3: Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας D_{2n} ισούται με

$$P_{D_{2n}} = \frac{1}{2} P_{C_n}(x_1,\dots,x_n) + \begin{cases} \frac{1}{4} x_2^{n/2} + \frac{1}{4} x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} & n \ \text{άρτιος} \\ \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}} & n \ \text{περιττός} \end{cases}.$$

Απόδειξη.

Αν n άρτιος η D_{2n} περιέχει τα n στοιχεία της C_n τους $\frac{n}{2}$ κατοπτρισμούς όπως η σ τύπου $\{0,n/2\}$ και τους $\frac{n}{2}$ κατοπτρισμούς όπως η σπ τύπου $\{2, \frac{n}{2}-1\}$ άρα ο κυκλικός δείκτης

$$P_{D_{2n}} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{d/n} \varphi(d) x_d^{n/d} + \frac{n}{2} x_2^{n/2} + \frac{n}{2} x_1^2 x_2^{n/2-1}\right)$$

που ισούται με το ζητούμενο.

Αν n περιττός η D_{2n} περιέχει τις n μεταθέσεις της C_n και τους n κατοπτρισμούς τύπου $\{1, \frac{n-1}{2}\}$ και έχουμε πάλι το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα 8.

Θα βρούμε τον κυκλικό δείκτη της D_{32}.

Εχουμε n=16 και ο κυκλικός δείκτης της C_{16} είναι:

$$P_{C_{16}}(x_1,\ldots,x_{16})=\frac{1}{16}\left(\varphi(1)x_1^{16}+\varphi(2)x_2^8+\varphi_4x_4^4+\varphi(8)x_8^2+\varphi(16)x_{16}^1\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x_1^{16}+x_2^8+2x_4^4+4x_8^2+8x_{16}\right)$$

Αρα $P_{D_{32}} = \frac{1}{2} P_{C_{16}} + \frac{1}{4} x_2^8 + \frac{1}{4} x_1^2 x^7 = \frac{1}{32}\left[\left(x_1^{16}+x_2^8+2x_4^4+4x_8^2+8x_{16}\right)+\right.$

$$\left.+\left(8x_2^8+8x_1^2x_2^7\right)\right]=\frac{1}{32}\left(x_1^{16}+9x_2^8+2x_4^4+4x_8^2+8x_{16}+8x_1^2x_2^7\right)$$

όπου ο προσθετέος $8x_2^8$ οφείλεται στους 8 κατοπτρισμούς τύπου $\{0, \frac{n}{2}\}$ περί τις μεσοκαθέτους των απέναντι πλευρών και ο προσθετέος $8x_1^2 x_2^7$ οφείλεται στους 8 κατοπτρισμούς τύπου $\{2, \frac{n}{2} -1\}$ περί άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές. ■

Θα υπολογίσουμε τώρα τον κυκλικό δείκτη της συμμετρικής ομάδας S_n. Κατά τα γνωστά μία μετάθεση που έχει K_1 κύκλους μήκους 1, K_2 μήκους 2 κ.ο.κ. λέμε ότι είναι τύπου $\{k_1, k_2,\ldots\}$ ή και επίσης $1^{k_1}\ 2^{k_2}\ldots\ldots$ όπου βέβαια $1k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$ όπου n πλήθος των στοιχείων της μετάθεσης. Εαν συμβολίσουμε με $C(k_1, k_2\ldots)$ το πλήθος των μεταθέσεων n στοιχείων τύπου $\{k_1, k_2\ldots\}$ θέλουμε να βρούμε μία έκφραση για την παράσταση αυτή.

Για να βρούμε μίαν τέτοια έκφραση ας πάρουμε μία τυχούσα μετάθεση με n στοιχεία του δοσμένου τύπου και ας μεταθέσουμε τα στοιχεία της με όλους τους δυνατούς τρόπους που είναι n! Οι μεταθέσεις που προκύπτουν δεν είναι όλες διαφορετικές για ακριβώς δύο λόγους

i) όλοι οι κύκλοι που περιέχουν τα ίδια στοιχεία με την ίδια κυκλική σειρά συμπίπτουν π.χ. (1234)=(2341)=(3412)=(4123) και

ii) Μεταθέσεις που αποτελούνται από τους ίδιους κύκλους αλλά με διαφορετική σειρά συμπίπτουν π.χ. (123)(45)(67)=(123)(67)(45) κοκ.

Για την πρώτη κατηγορία ας θεωρήσουμε έναν κύκλο μήκους r. Εχουμε r δυνατές θέσεις για το πρώτο στοιχείο άρα r δυνατές ταυτίσεις του r-κύκλου με τον εαυτό του. Το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών ταυτίσεων αφού ο κύκλος είναι τύπου $\{k_1, k_2,\ldots,k_n\}$ θα είναι $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot 3^{k_3}\cdot\ \ldots n^{k_n}$.

Για την δεύτερη κατηγορία έχουμε ότι k_r το πλήθος κύκλοι μήκους r μπορούν να μετατεθούν κατά $k_r!$ τρόπους. Το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών ταυτίσεων της κατηγορίας αυτής αφού ο κύκλος είναι τύπου $\{k_1, k_2,\dots,k_n\}$ θα είναι λοιπόν

$$k_1!k_2!\dots k_n!$$

Αρα
$$C(k_1,k_2,\dots,k_n)=\frac{n!}{1^{k_1}\cdot k_1!2^{k_2}k_2!3^{k_3}k_3!n^{k_n}k_n!}$$

όπου $k_1+2k_2+\dots+nk_n=n=\sum_{i=1}^{n} ik_i$.

Παράδειγμα 9.

α) Οι 6 μεταθέσεις του S_3 χωρίζονται σε 3 ομάδες:

Μεταθέσεις	**Πλήθος**	**Τύπος**
(123), (132)	2	{0,0,1}
(12)(3),(13)(2),(23)(1)	3	{1,1}
(1)(2)(3)	1	{3,0.}

που αντιστοιχούν στις 3 διαμερίσεις του αριθμού 3

3=3

3=2+1

3=1+1+1

β) Οι μεταθέσεις του S_n τύπου $\{0,0,\dots,1\}$ ή $1^0 2^0\dots n^1$ (δηλαδή με $k_n=1$, $k_r=0$ για $r\neq n$) δίνονται από τον τύπο

$$C(0,0,\dots,1)=\frac{n!}{1^0\cdot 0!2^0 0!\dots n^1 1!}=(n-1)!\ .$$

Συνδυαστικά φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν θεωρήσουμε ότι σ'ένα κύκλο μήκους n το πρώτο στοιχείο είναι το 1 και υπάρχουν (n-1)! διαφορετικοί τρόποι για την τοποθέτηση των (n-1) υπολοίπων στοιχείων.

Επίσης η μετάθεση τύπου $\{n,0,0,.0\}$ ή $1^n\cdot 2^0\dots n^0$ αντιστοιχεί στο μοναδιαίο στοιχείο του $S_n\begin{pmatrix} 1 & 2 & n\\ 1 & 2 & n\end{pmatrix}=(1)(2)\dots(n)$. ■

Η γεννήτρια συνάρτηση για τους αριθμούς $C(k_1,k_2,\dots k_n)$ με $\sum_{i=1}^{n} ik_i=n$ ορίζεται από την σχέση:

$$C_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum C(k_1,k_2,\dots,k_n)x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις δυνατές διαμερίσεις του ακεραίου n σε ακέραια μη αρνητικά μέρη $k_1,\dots,k_n$ με $\sum^{n} ik_i=n$.

Αν αντικαταστήσουμε το $C(k_1,\dots,k_n)$ με το ίσο του έχουμε:

$$C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum \frac{n!}{1^{k_1}\cdot k_1!2^{k_2}k_2!\ldots n^{k_n}k_n!}\, x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\,.$$

Αλλά η έκφραση $\frac{1}{n!}\,C(x_1,\ldots,x_n)$ είναι εξ'ορισμού ο κυκλικός δείκτης της ομάδας S_n οπότε έχουμε τον τύπο

$$P_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i}k_i!}\, x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του n ήτοι

$$n=\sum_{n=1}^{n} ik_i.$$

Δείξαμε λοιπόν το θεώρημα:

Θεώρημα 4: $P_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i}k_i!}\, x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις (διατεταγμένες) διαμερίσεις του n ήτοι $n=\sum_{n=1}^{n} ik_i$. ■

Παράδειγμα 10.

Ας υπολογίσουμε τον κυκλικό δείκτη της S_4 και της S_5 αναλυτικά.

i) για την ομάδα S_4 έχουμε:

Οι διαμερίσεις του ακεραίου 4 είναι:

4=4

4=3+1

4=2+2

4=2+1+1

4=1+1+1+1

Αρα θα έχουμε 5 προσθετέους στον ζητούμενο κυκλικό δείκτη.

Η πρώτη διαμέριση αντιστοιχεί στην μετάθεση (1234) που είναι τύπου (0,0,0,1) άρα $k_1=k_2=k_3=0$ $k_4=1$ που ικανοποιεί την σχέση $k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3+k_4\cdot 4=4$.

Ο προσθετέος θα έχει συντελεστή $\frac{24}{1^0 0!2^0\cdot 0!3^0\cdot 0!4^1\cdot 1!}=6$ και αντιστοιχεί στον προσθετέο $6x_4$ στον κυκλικό δείκτη.

Η δεύτερη διαμέριση 4=3+1 παρίσταται από μία μετάθεση που αναλύεται σε έναν 3-κύκλο και έναν 1-κύκλο όπως η (123)(4) και είναι τύπου {1,0,1} άρα $k_1=1$, $k_3=1$, $k_2=k_4=0$. Πράγματι ικανοποιείται η $1\cdot 1+3\cdot 1=4$.

Ο συντελεστής του αντίστοιχου προσθετέου είναι:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i!} \longrightarrow \frac{24}{1^1 1! 2^0 \cdot 0! 3^1 \cdot 1!}=8$$

και ο αντίστοιχος προσθετέος $8x_1^1\, x_2^0\, x_3^1\, x_4^0=8x_1\, x_3$.

Η τρίτη διαμέριση 4=2+2 παρίσταται από μία μετάθεση που αναλύεται σε ένα γινόμενο δύο 2-κύκλων όπως η (12)(34) και είναι τύπου {0,2,0,0} άρα $k_1=0$, $k_1=2$, $k_3=k_4=0$ και ικανοποιεί την $0\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 3+0\cdot 4=4$. Ο συντελεστής είναι $\dfrac{24}{1^0 0! 2^2\cdot 2! 3^0\cdot 0! 4^0\cdot 0!}=3$ και ο προσθετέος είναι ο $3x_1^0\, x_2^2\, x_3^0\, x_4^0=3x_2^2$.

Η διαμέριση 4=2+1+1 παρίσταται από μία μετάθεση που αναλύεται σε ένα γινόμενο δύο κύκλων μήκους 1 και ενός κύκλου μήκους 2 όπως η (12)(3)(4) τύπου {2,1,0,0} άρα $k_1=2$ $k_2=1$, $k_3=k_4=0$ που ικανοποιεί την $2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 3+0\cdot 4=4$.

Ο συντελεστής είναι $\dfrac{24}{1^2\cdot 2! 2^1\cdot 1! 3^0\cdot 0! 4^0\cdot 0!}=6$ και ο αντίστοιχος προσθετέος ο $6x_1^2\, x_2^1\, x_3^0\, x_4^0=6x_1^2\, x_2$.

Τέλος η διαμέριση 4=1+1+1+1 παρίσταται από μία μετάθεση που αναλύεται σε γινόμενο τεσσάρων 1-κύκλων όπως η (1)(2)(3)(4) τύπου {4,0,0,0} άρα $k_1=4$, $k_2=k_3=k_4=0$ που ικανοποιεί την $4\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 3+0\cdot 4=4$.

Ο συντελεστής είναι $\dfrac{24}{1^4\cdot 4! 2^0\cdot 0! 3^0\cdot 0! 4^0\cdot 0!}=1$ και ο αντίστοιχος προσθετέος ο $1\, x_1^4\, x_2^0\, x_2^0\, x_3^0\, x_4^0=x_1^4$.

Αρα έχουμε: $\quad P_{S_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}\left(x_1^4+6x_1^2x_2+3x_2^2+8x_1x_3+6x_4\right)$.

ii) για την S_5 έχουμε:

Διαμέριση	**Μετάθεση**	**Τύπος**
1+1+1+1+1	(1)(2)(3)(4)(5)	{5,0,0,0,0}
2+1+1+1	(12)(3)(4)(5)	{3,1,0,0,0}
2+2+1	(12)(34)(5)	{1,2,0,0,0}
3+2	(12)(345)	{0,1,1,0,0}
3+1+1	(123)(4)(5)	{2,0,1,0,0}
4+1	(1234)(5)	{1,0,0,1,0}
5	(12345)	{0,0,0,0,1}

... Τύπος	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	Συντελεστής	Προσθετέος του P_{S_5}
...{5,0,0,0,0}	5	0	0	0	0	$\frac{120}{1^5\cdot 5!}=1$	x_1^5
...{3,1,0,0,0}	3	1	0	0	0	$\frac{120}{1^3\cdot 3!2^1\cdot 1!}=10$	$10x_1^3x_2$
...{1,2,0,0,0}	1	2	0	0	0	$\frac{120}{1^1\cdot 1!2^2\cdot 2!}=15$	$15x_1x_2^2$
...{0,1,1,0,0}	0	1	1	0	0	$\frac{120}{2^1\cdot 1!3^1\cdot 1!}=20$	$20x_2x_3$
...{2,0,1,0,0}	2	0	1	0	0	$\frac{120}{1^2\cdot 2!3^1\cdot 1!}=20$	$20x_1^2x_3$
...{1,0,0,1,0}	1	0	0	1	0	$\frac{120}{1^1\cdot 1!4^1\cdot 1!}=30$	$30x_1x_4$
...{0,0,0,0,1}	0	0	0	0	1	$\frac{120}{5^1\cdot 1!}=24$	$24x_5$

Αρα
$$P_{S_5}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{1}{120}\Big(x_1^5+10x_1^3x_2+15x_1x_2^2+20x_2x_3+20x_1^2x_3+ +30x_1x_4+24x_5\Big)\ .$$ ■

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ ΤΗΣ S_n

$$P_{S_1}(x_1) = x_1$$

$$P_{S_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2+ x_2\right)$$

$$P_{S_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{6}\left(x_1^3+3x_1x_2+2x_3\right)$$

P_{S_4}, P_{S_5} δες παράδειγμα 8.

$$P_{S_6}= \frac{1}{720}\Big(x_1^6+15x_1^4x_2+45x_1^2x_2^2+40x_1^3x_3+15x_2^3+120x_1x_2x_3+90x_1^2x_4+ +40x_3^2+90x_2x_4+144x_1x_5+120x^6\Big)\ .$$

$$P_{S_7}= \frac{1}{7!}\Big(x_1^7+21x_1^5x_2+105x_1^3x_2^2+70x_1^4x_3+105x_1x_2^3+420x_1^2x_2x_3+ +210x_1^3x_4+210x_2^2x_3+280x_1x_3^2+630x_1x_2x_4+504x_1^2x_5+ +420x_3x_4+504x_2x_5+840x_1x_6+720x_7\Big)\ .$$

Η σχέση

$c_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum C(k_1,k_2,\ldots,k_n)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ γίνεται για $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$.

$$c_n(1,\ 1,\ldots,1) = \sum C(k_1,k_2,\ldots,k_n)\ .$$

Αλλά κάθε μία από τις n! μεταθέσεις του S_n έχει κάποιο τύπο ανήκει λοιπόν σε κάποιον από τους προσθετέους του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης. Εφόσον το S_n έχει n! μεταθέσεις το άθροισμα του δευτέρου μέλους της παραπάνω σχέσης ισούται με n! ήτοι

$$c_n(1,1,1,\ldots,1)= \sum C(k_1,k_2,\ldots,k_n)=n!$$

οπότε η σχέση του θεωρήματος 4 γίνεται

$$\sum \frac{1}{1^{k_1}k_1!2^{k_2}k_2!\ldots n^{k_n}k_n!} = 1\ .$$

και καταλήξαμε έτσι την γνωστή ταυτότητα του Cauchy.

Υπενθυμίζουμε στις τέσσερις τελευταίες σχέσεις ότι η άθροιση γίνεται κατά τα γνωστά πάνω σε όλες τις (διατεταγμένες) διαμερίσεις του αριθμού n.

Τέλος από τον πίνακα της προηγούμενης σελίδας έχουμε:

$$P_{S_3}(x_1,x_2,x_3)= \frac{1}{6}\left(x_1^3+3x_1x_2+2x_3\right)$$

$$P_{S_3}(x_1,-\ x_2,x_3)= \frac{1}{6}\left(x_1^3-3x_1x_2+2x_3\right)$$

Αν προσθέσω τις δύο σχέσεις έχω

$$P_{S_3}(x_1,x_2,x_3)+P_{S_3}(x_1,-x_2,x_3)= \frac{1}{3}\left(x_1^3+2x_3\right)$$

δηλαδή βρήκαμε τον κυκλικό δείκτη κάποιας ομάδας η οποία έχει τα μισά στοιχεία από την S_3 και όλες οι μεταθέσεις της αναλύονται σε κύκλους με ζυγό μήκος. Δηλαδή πρόκειται για τον κυκλικό δείκτη της εναλλάσουσας ομάδας A_3 (alternating group) ήτοι

$$S_{A_3}(x_1,x_2,x_3)= \frac{1}{3}\left(x_1^3+2x_3\right)=P_{S_3}(x_1,x_2,x_3)+P_{S_3}(x_1,-x_2,x_3)\ .$$

Παρόμοια έχουμε $P_{S_4}= \frac{1}{24}\left(x_1^4+6x_1^2x_2+3x_2^2+8x_1x_3+6x_4\right)$

και

$$P_{S_4}(x_1,-x_2,x_3,-x_4)= \frac{1}{24}\left(x_1^4-6x_1^2x_2+3x_2^2+8x_1x_3-6x_4\right)$$

άρα $\qquad P_{S_4}+P_{S_4}(x_1,-x_2,x_3-x_4)=\frac{1}{12}\left(x_1^4+3x_2^2+8x_1x_3\right)=P_{A_4}$

Πρόκειται για μια ομάδα με τις μισές μεταθέσεις της S_4 και όλες ζυγές άρα είναι η A_4.

Παρόμοια:

$$P_{S_5}=\frac{1}{120}\left(x_1^5+10x_1^3x_2+15x_1x_2^2+20x_2x_3+20x_1^2x_3+30x_1x_4+24x_5\right)$$

$$P_{S_5}(x_1,-x_2,x_3-x_4,x_5)=\frac{1}{120}\left(x_1^5-10x_1^3x_2+15x_1x_2^2-20x_2x_3+20x_1^2x_3-\right.$$

$$\left.-30x_1x_4+24x_5\right).$$

Προσθέτουμε

$$P_{S_5}+P_{S_5}(x_1,-x_2,x_3,-x_4,x_5)=\frac{1}{60}\left(x_1^5+15x_1x_2^2+20x_1^2x_3+24x_5\right)=$$

$$=P_{A_5}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).$$

Η ίδια διαδικασία δίνει εν γένει

$$P_{A_n}(x_1,\ldots,x_n)=P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)+P_{S_n}(x_1,-x_2,x_3-x_4,\ldots).$$

Λήμμα 5.

Εκλέγουμε μία μετάθεση της S_n (θεωρώντας ότι όλες οι μεταθέσεις έχουν την ίδια πιθανότητα).

Ποιά είναι η πιθανότητα στη μετάθεση που εκλέξαμε ο κύκλος που περιέχει το στοιχείο 1 να έχει μήκος k.

Απόδειξη.

Εστω π η μετάθεση που εκλέξαμε και το στοιχείο 1 βρίσκεται σε κάποιο κύκλο c μήκους k όπου $1\le k\le n$. Τα υπόλοιπα στοιχεία του κύκλου c μπορούν να εκλεγούν κατά $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους.

Αφού εκλεγούν μπορούν να δώσουν $(k-1)!$ διαφορετικούς κύκλους, οι οποίοι μπορούν να δώσουν αν συνδυαστούν με τα υπόλοιπα $(n-k)$ στοιχεία που δεν ανήκουν στον c $(n-k)!$ μεταθέσεις.

Το ζητούμενο πλήθος θα είναι λοιπόν

$$\binom{n-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!=(n-1)!$$

Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$. ∎

Παράδειγμα 11.

Για n=6, k=4 ισχύει:

Εχουμε $\binom{6-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10$ δυνατές εκλογές για στοιχεία του κύκλου c

οι: 1234 - 1243 - 1324 - 1342 - 1423 - 1432

1235 - ...

1236 - ...

1245 - ...

1246 - ...

1256 - ...

1345 - ...

1346 - ...

1356 - ...

1456 - ...

Η καθεμία από αυτές δημιουργεί 3!=6 μεταθέσεις.

Η καθεμία από τις 10×6=60 μεταθέσεις των 4 αντικειμένων συμπληρώνεται σε μετάθεση των 6 αντικειμένων αν συμπληρωθεί με (n-k)=2! κύκλους ήτοι τους: (5)(6),(56).

Αρα το σύνολο των μεταθέσεων του S_6 που έχουν το στοιχείο 1 σε κύκλο μήκους 4 είναι 2×60=120.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι λοιπόν $\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$. ∎

Θα αποδείξουμε τώρα μία αρκετά χρήσιμη ταυτότητα η οποία μας επιτρέπει να αθροίσουμε τους κυκλικούς δείκτες όλων των συμμετρικών ομάδων.

Θεώρημα 6: $$\sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)y^n=e^{x_1y+\frac{x_2}{2}y^2+\ldots+\frac{x_k}{k}y^k+\ldots}$$

όπου θέσαμε $p_0=1$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του κυκλικού δείκτη έχουμε:

$$n!P_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\pi\in S_n} x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ \ldots\ldots x_n^{k_n}$$

Ας θεωρήσουμε το στοιχείο ν∈{1,...n} και ας καλέσουμε c_π τον κύκλο της π μήκους l_π που περιέχει το στοιχείο ν. Εστω d_π η μετάθεση των $n-l_\pi$ στοιχείων που δεν ανήκουν στον κύκλο c_π που παράγεται από την π.

Αρα $\quad n!P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{\pi\in S_n} x_{l_\pi}\cdot x_1^{k_1(d_\pi)}x_2^{k_2(d_\pi)}\ldots x_{n-l_\pi}^{k_{n-l_\pi}(d_\pi)}$

τα l_π στοιχεία του κύκλου c_π μπορούν να εκλεγούν κατά 1 τρόπο για το ν, (n-1) τρόπους για το δεύτερο στοιχείο, n-2 για το τρίτο κ.ο.κ. ..., $n-l_\pi+1$ τρόπους για το l_π στοιχείο άρα κατά $(n-1)(n-2)\ldots(n-l_\pi+1)$ τρόπους.

Σε καθένα από τους κύκλους αυτούς αντιστοιχούμε μία μετάθεση q_π των υπολοίπων $n-l_\pi$ στοιχείων.

Αθροίζοντας πάνω στις μεταθέσεις παίρνουμε:

$$n!P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{l=1}^{n}(n-1)\ldots(n-l+1)x_l(n-l)!\;P_{S_{n-l}}(x_1,\ldots,x_{n-l})=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}(n-1)!x_lP_{S_{n-l}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-l}).$$

Αν απλοποιήσουμε με το (n-1)! καταλήγουμε στην

$$n\cdot P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{l=1}^{n}x_lP_{S_{n-l}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-l}).$$

Ας θέσουμε $\quad f(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)y^n\quad$ οπότε έχουμε

$$f'(y)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot P_{S_n}(x_1,x_n)y^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}x_lP_{S_{n-l}}(x_1,\ldots,x_{n-l})y^{n-1}=$$

που ισούται αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών n-l=n′

$$=\sum_{l=1}^{\infty}x_ly^{l-1}\sum_{n=1}^{\infty}P_{S_{n-l}}(x_1,\ldots,x_{n-l})y^{n-l}=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}x_ly^{l-1}\sum_{n'=0}^{\infty}P_{S_{n'}}(x_1,\ldots,x_{n'})y^{n'}=$$

$$=\left(\sum_{l=1}^{\infty}x_ly^{l-1}\right)f(y).$$

$$\frac{f'(y)}{f(y)}=x_1+x_2y+x_3y^2+x_4y^3+\ldots+x_ky^{k-1}+\ldots$$

$$\ln f(y) = c+x_1 y+x_2\frac{y^2}{2} + x^3\frac{y^3}{3}+\ldots+x_k\frac{y^k}{k}+\ldots,$$

και για y=0 έχουμε c=0 οπότε

$$f(y)=e^{\left(x_1 y+x_2\frac{y^2}{2}+\ldots+x_k\frac{y^k}{k}+\ldots\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n}(x_1,\ldots,x_n)y^n. \qquad \blacksquare$$

Αν θέσω y=1 και κάνω την αντικατάσταση

$x_1 \longrightarrow h(x)$

$x_2 \longrightarrow h(x^2)$ για οποιαδήποτε συνάρτηση h(x)

$\vdots$

η σχέση μας παίρνει την πιό γνωστή της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{S_n}\left(h(x),h(x^2)\ldots\right)=\exp\left[\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\ (h(x^r))\right].$$

1. Εισαγωγή.

Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χρωματίσουμε τα 4 τετράγωνα μίας 2×2 σκακιέρας με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο.

1	2
4	3

Προφανώς υπάρχουν $2^4=16$ δυνατοί χρωματισμοί (όσες είναι και οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{1,2,3,4\}$ και πεδίο τιμών το σύνολο $\{A,M\}$) και κάθε τέτοια συνάρτηση αντιστοιχεί σ'έναν χρωματισμό.

Οι 16 συναρτήσεις ή χρωματισμοί είναι οι εξείς:

f_1: και τα 4 τετράγωνα άσπρα
f_2: το τετράγωνο 1 μαύρο τα άλλα τρία άσπρα
f_3: το τετράγωνο 2 μαύρο τα άλλα τρία άσπρα
f_4: το τετράγωνο 3 μαύρο τα άλλα τρία άσπρα
f_5: το τετράγωνο 4 μαύρο τα άλλα τρία άσπρα
f_6: τα τετράγωνα 1,2 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_7: τα τετράγωνα 1,3 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_8: τα τετράγωνα 1,4 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_9: τα τετράγωνα 2,3 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_{10}: τα τετράγωνα 2,4 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_{11}: τα τετράγωνα 3,4 μαύρα τα άλλα δύο άσπρα
f_{12}: τα τετράγωνα 1,2,3 μαύρα το άλλο άσπρο
f_{13}: τα τετράγωνα 1,2,3 μαύρα το άλλο άσπρο
f_{14}: τα τετράγωνα 1,3,4 μαύρα το άλλο άσπρο
f_{15}: τα τετράγωνα 2,3,4 μαύρα το άλλο άσπρο
f_{16}: και τα 4 τετράγωνα μαύρα.

Αν όμως λάβουμε υπ'όψη τις περιστροφικές συμμετρίες της σκακιέρας δηλαδή την περιστροφή της κατά 90°, 180° και 270° ορισμένοι από τους χρηματισμούς αυτούς συμπίπτουν (π.χ. ο f_2 συμπίπτει με τον f_3 αν η σκακιέρα περιστραφεί κατά 90°, με τον f_4 αν περιστραφεί κατά 180° και με τον f_5 αν περιστραφεί κατά 270° κ.ο.κ). Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι οι σκακιέρες αυτές είναι "ισοδύναμες" ή "ουσιαστικά μη διαφορετικές".

Υπάρχουν όμως 6 χρωματισμοί και συγκεκριμένα οι f_1, f_2, f_6,

f_7, f_{12} και f_{16} οι οποίοι είναι ουσιαστικά διαφορετικοί.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με παρόμοια προβλήματα δηλαδή τρόπους απαρίθμησης μη ισοδυνάμων αντικειμένων όταν λαμβάνονται υπ'όψη και οι συμμετρίες του αντικειμένου. Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή είναι το λεγόμενο λήμμα του Burnside (θεώρημα 4)* αν και φαίνεται ότι ήταν γνωστό στους Frobenius, Schur και άλλους προγενέστερους.

Το κύριο αποτέλεσμα, το κλασσικό πιά απαριθμητικό θεώρημα του Pólya ή και Hauptsatz πρωτοδημοσιεύτηκε το 1937 από τον Ούγγρο μαθηματικό György Pólya (1887-1985).

Διάφορα σημαντικά αποτελέσματα και μέθοδοι κυρίως στην απαρίθμηση γραφημάτων δημοσιεύτηκαν το 1927 από τον Αμερικανό μαθηματικό, μηχανικό και γλωσσολόγο J. Howard Redfield (-1944) αλλά η σημασία των ανακαλύψεων του Redfield έγινε φανερή αρκετά αργότερα περί το 1960.

Το θεώρημα του Pólya γενικεύτηκε σημαντικά από τον Nikolaas Govert de Bruijn.

2. Το Λήμμα του Burnside.

Εστω η υποομάδα G της S_n, της συμμετρικής ομάδας τάξης n. Το S_n έχει κατά τα γνωστά n! στοιχεία, όλες τις μεταθέσεις των ακεραίων 1,2,...,n. Ορίζουμε σαν **τροχιά** του αριθμού $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ το σύνολο των ακεραίων οι οποίοι αποτελούν εικόνες του k στις μεταθέσεις της ομάδας G.
Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με O_k.

Παράδειγμα 1. i) Εστω η υποομάδα $G=\{I, (12), (34), (12)(34)\}$ της S_4. Τότε $O_1=\{1,2\}$
$O_2=\{1,2\}$
$O_3=\{3,4\}$
$O_4=\{3,4\}$.

ii) Εστω η υποομάδα A_4 της S_4 η οποία αποτελείται από τις ζυγές μεταθέσεις της S_4 (alternating group).

---

* προς τιμή του William S. Burnside (1852-1927).

Τα στοιχεία της είναι οι 12 μεταθέσεις

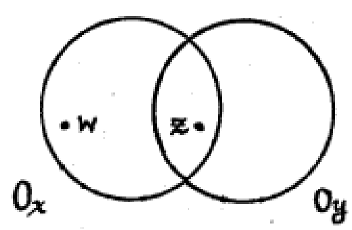
A_4={I,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34), (13)(24),(14)(23)}.

Οι τροχιές 0_1, 0_2 0_3 και 0_4 ισούνται όλες με το σύνολο {1,2,3,4}.

Στα δύο αυτά παραδείγματα βλέπουμε ότι τα σύνολα 0_x και 0_y ή συμπίπτουν ή είναι ξένα μεταξύ τους. Τούτο ισχύει γενικά όπως θα αποδείξουμε παρακάτω. Εχουμε επίσης προφανώς ότι $x\in 0_x$ και αν $x\in 0_y$ τότε υπάρχουν $\pi\in G$ με $\pi(y)=x$ αλλά επειδή το G είναι ομάδα έπεται ότι $\pi^{-1}\in G$ άρα $y=\pi^{-1}(x)$ ήτοι $y\in 0_x$.

Θεώρημα 1: Εστω G υποομάδα της S_n και οι τροχιές 0_x και 0_y. Τότε ισχύει ή $0_x=0_y$ ή $0_x\cap 0_y=\varnothing$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι τροχιές 0_x και 0_y ούτε συμπίπτουν ούτε είναι ξένες μεταξύ τους και έστω $z\in 0_x\cap 0_y$ και $w\in 0_x$ αλλά $w\notin 0_y$. Θα οδηγηθούμε σε αντίφαση.



Εφόσον $z\in 0_x$ υπάρχει $\pi\in G$ με $\pi(x)=z$ οπότε και η $\pi^{-1}\in G$ δίνει $\pi^{-1}(z)=x$.

Εφόσον $w\in 0_x$ υπάρχει $\pi'\in G$ με $\pi'(x)=w$. Αλλά τότε η $\pi'\pi^{-1}\in G$ δίνει $\pi'\pi^{-1}(z)=\pi'(x)=w$.

Εφόσον $z\in 0_y$ υπάρχει $\pi''\in G$ με $\pi''(y)=z$. Πολλαπλασιάζοντας επί την προηγούμενη μετάθεση έχουμε:

$$\pi'\pi^{-1}\pi''(y)=\pi'\pi^{-1}(z)=w$$

όπου $\pi'\pi^{-1}\pi''\in G$. Αρα βρήκαμε μία μετάθεση του G που μεταθέτει το y στο w άρα $w\in 0_y$ άτοπον. ■

Εστω πάλι η υποομάδα G της S_n. Ο σταθερωτής (Stabilizer) του αριθμού $k\in\{1,\ldots,n\}$ που συμβολίζεται με T_k είναι το σύνολο των μεταθέσεων του G που αφήνουν το στοιχείο k αμετάβλητο.

Προσοχή στο ότι το σύνολο T_k είναι ένα σύνολο μεταθέσεων του G και όχι ένα σύνολο αριθμών όπως το σύνολο 0_k.

Παράδειγμα 2.

i) Εστω πάλι η ομάδα $G=\{I, (12), (34), (12)(34)\}$.

Τότε
$T_1=\{I, (34)\}$
$T_2=\{I, (34)\}$
$T_3=\{I, (12)\}$
$T_4=\{I, (12)\}$

ii) Εστω πάλι η υποομάδα A_4 της S_4.

Τότε
$T_1=\{I, (234),(243)\}$
$T_2=\{I, (134),(143)\}$
$T_3=\{I, (124),(142)\}$
$T_4=\{I, (123),(132)\}$.

Θεώρημα 2: Για κάθε υποομάδα G της S_n και κάθε ακέραιο $k\in\{1,...n\}$ το σύνολο T_k είναι επίσης ομάδα.

Απόδειξη. Η ταυτοτική μετάθεση I στέλνει το k στο k άρα $I\in T_k$. Αν $p_1\in G$ και $p_2\in G$ αφήνουν το k αμετάβλητο (άρα p_1, $p_2\in T_k$) τότε αφού το G είναι ομάδα έχουμε ότι $p_2p_1(k)=k$ και $p_2p_1\in G$ άρα $p_2p_1\in T_k$. Τέλος και η μετάθεση p_1^{-1} αφήνει το k αμετάβλητο άρα $p^{-1}\in T_k$. Εφόσον στο σύνολο T_k εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης των μεταθέσεων ισχύουν τα αξιώματα της ομάδας έπεται ότι ο Stabilizer T_k είναι ομάδα. ■

Θεώρημα 3: Για κάθε υποομάδα G της S_n και κάθε ακέραιο $k\in\{1,...,n\}$ ισχύει: $|O_k|\cdot|T_k|=|G|$.

Απόδειξη. Θα αντικαταστήσουμε το αριθμοσύνολο O_k με ένα σύνολο μεταθέσεων P με τον ίδιο πληθάριθμο.

Εστω $O_k=\{a_1,a_2,a_3,...\}$. Επιλέγω ένα σύνολο μεταθέσεων $P=\{p_1,p_2,p_3,...\}$ από στοιχεία της G με:

Η μετάθεση p_1 απεικονίζει τον k στον a_1.
Η μετάθεση p_2 απεικονίζει τον k στον a_2.
Η μετάθεση p_3 απεικονίζει τον k στον a_3
. . . . κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι $|P|=|O_k|$. Επίσης αφού το $a_k\in O_k$ υπάρχει πάντα μετάθεση $p\in G$ που να απεικονίζει το k στο a_k.

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε μετάθεση $g\in G$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα σαν γινόμενο δύο μεταθέσεων μίας από το P και μίας από το T_k.

Πράγματι έστω $g\in G$. Η μετάθεση αυτή απεικονίζει τον k στον αριθμό a_m. Αλλά τότε η μετάθεση $P_m^{-1}g\in G$ απεικονίζει τον k στον k. Πράγματι

$$p_m^{-1}g(k)=p_m^{-1}(a_m)=k.$$

Αρα η μετάθεση $p_m^{-1}g$ είναι κάποιο στοιχείο s του stabilizer T_k ήτοι $p_m^{-1}g=s \Rightarrow g=p_m s$. Κάθε λοιπόν στοιχείο $g\in G$ γράφεται σαν γινόμενο μίας μετάθεσης $p_m\in P$ και μίας μετάθεσης $s\in T_k$. Θα δείξουμε ότι αυτό γίνεται κατά μοναδικό τρόπο.

Εστω ότι $\quad g=p_m s_a=p_n s_b$

το γινόμενο $p_m s_a$ δίνει $p_m s_a(K) = p_m(K)=a_m$ ενώ το γινόμενο $p_n s_b$ δίνει $p_n s_b(K)=p_n(K)=a_n$. Εφόσον τα δύο γινόμενα είναι ίσα έχουμε $a_m=a_n$ και $m=n$. Απλοποιώντας έχω $s_a=s_b$ και έτσι αποδείχτηκε και η μοναδικότητα.

Αρα ο αριθμός των διαφόρων τρόπων επιλογής ενός στοιχείου από το T_k και ενός από το P ισούται με το πλήθος των στοιχείων του G. Ητοι από την αρχή του γινόμενου $|G|=|T_k|\cdot|P|=|T_k|\cdot|O_k|$. ■

Παράδειγμα 3.

i) Για το A_4 έχω: οι τροχιές έχουν και οι τέσσερεις από 4 στοιχεία. Οι τέσσερεις Stabilizers έχουν από 3 στοιχεία ο καθένας. Αρα

$$|O_1|\cdot|T_1|=|O_2|\cdot|T_2|=|O_3|\,|T_3|=|O_4|\cdot|T_4|=4\cdot 3=12=|A_4|.$$

ii) Αν $G=S_3=\{I,12,13,23,123,132\}$ έχουμε

$O_1=O_2=O_3=\{1,2,3\} \Rightarrow |O_1|=|O_2|=|O_3|=3$

$T_1=\{I,23\} \qquad \Rightarrow |T_1|=|T_2|=|T_3|=2$

$T_2=\{I,13\}$

$T_3=\{I,12\}$

Αρα $|O_1|\,|T_1|=|O_2|\,|T_2|=|O_3|\cdot|T_3|=3\cdot 2=6=|S_3|$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα [4] είναι γνωστό σαν λήμμα του Burnside από τον William Burnside (1852-1927) αν και απαντάται και προγενέστερα. Είναι ένα σημαντικό απαριθμητικό αποτέλεσμα διότι μας δίνει το πλήθος των ουσιαστικά διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν σε μία ομάδα G αν ληφθούν υπ'όψιν και οι περιστροφικές συμμετρίες του γεωμετρικού σώματος στο οποίο αντιστοιχεί η ομάδα μεταθέσεων G. Η απαρίθμηση γίνεται μετρώντας τα στοιχεία που αφίνουν σταθερά οι μεταθέσεις της ομάδας G.

Ας συμβολίσουμε με $\lambda_1(g)$ το πλήθος των κύκλων μήκους 1 της μετάθεσης $g \in G$, δηλαδή το πλήθος των αριθμών που η μετάθεση $g \in G$ αφήνει αμετάβλητους.

Θεώρημα 4: (Λήμμα του Burnside).

Εστω G μία υποομάδα της S_n. Τότε το πλήθος των διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν στην ομάδα G ισούται με $\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(g_i)$ όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις $g \in G$.

Απόδειξη.

$$\text{Το άθροισμα } \lambda_1(g_1)+\lambda_1(g_2)+\lambda_1(g_3)+\ldots \qquad (1)$$

μετρά το πόσοι αριθμοί μένουν σταθεροί για όλες τις μεταθέσεις της ομάδας G. Αλλά ο αριθμός k μένει σταθερός μόνο για τις μεταθέσεις $g \in T_k$ άρα ο k προσφέρει $|T_k|$ μονάδες στο άθροισμα (1). Το άθροισμα (1) λοιπόν ισούται με

$$|T_1|+|T_2|+\ldots+|T_k|+\ldots . \qquad (2)$$

Αν διαιρέσουμε κάθε προσθετέο της σχέσης (2) με $|G|$ θα έχουμε από το θεώρημα 3

$$\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{n}|T_i|=\frac{1}{|O_1|}+\frac{1}{|O_2|}+\ldots+\frac{1}{|O_k|}+\ldots \qquad (3)$$

Παρατηρούμε όμως ότι αν η τροχιά O_{k_1} έχει t στοιχεία, έστω τα $k_1,k_2,\ldots,k_t$ τότε από το θεώρημα 1 ισχύει:

$$\frac{1}{|O_{k_1}|}+\frac{1}{|O_{k_2}|}+\ldots+\frac{1}{|O_{k_t}|}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+\ldots+\frac{1}{t}=1$$

διότι στο τελευταίο άθροισμα έχουμε t προσθεταίους.

Αρα το άθροισμα (3) αναλύεται σ'ένα αριθμό μερικών αθροισμάτων το καθένα από τα οποία ισούται με την μονάδα και το πλήθος των οποίων ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τροχιών που αντιστοιχούν στην ομάδα G.

Αρα: το πλήθος των διαφορετικών τροχιών της G ισούται με $\frac{1}{|G|}\sum \lambda_1(g)$. ■

Παράδειγμα 4. i) Εστω πάλι η ομάδα $G=\{I,(12),(34),(12)(34)\}$.

Η μετάθεση I	$= (1)(2)(3)(4)$	έχει 4 κύκλους μήκους 1
(12)	$= (12)(3)(4)$	έχει 2 κύκλους μήκους 1
(34)	$= (1)(2)(34)$	έχει 2 κύκλους μήκους 1
$(12)(34)$		έχει 0 κύκλους μήκους 1 .

Αρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών ισούται με $\frac{1}{4}(4+2+2+0)=\frac{8}{4}=2$.

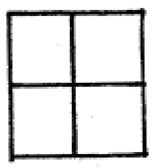
ii) Για το A_4 με τις 12 μεταθέσεις έχουμε

$I=(1)(2)(3)(4)$ με 4 στοιχεία σταθερά

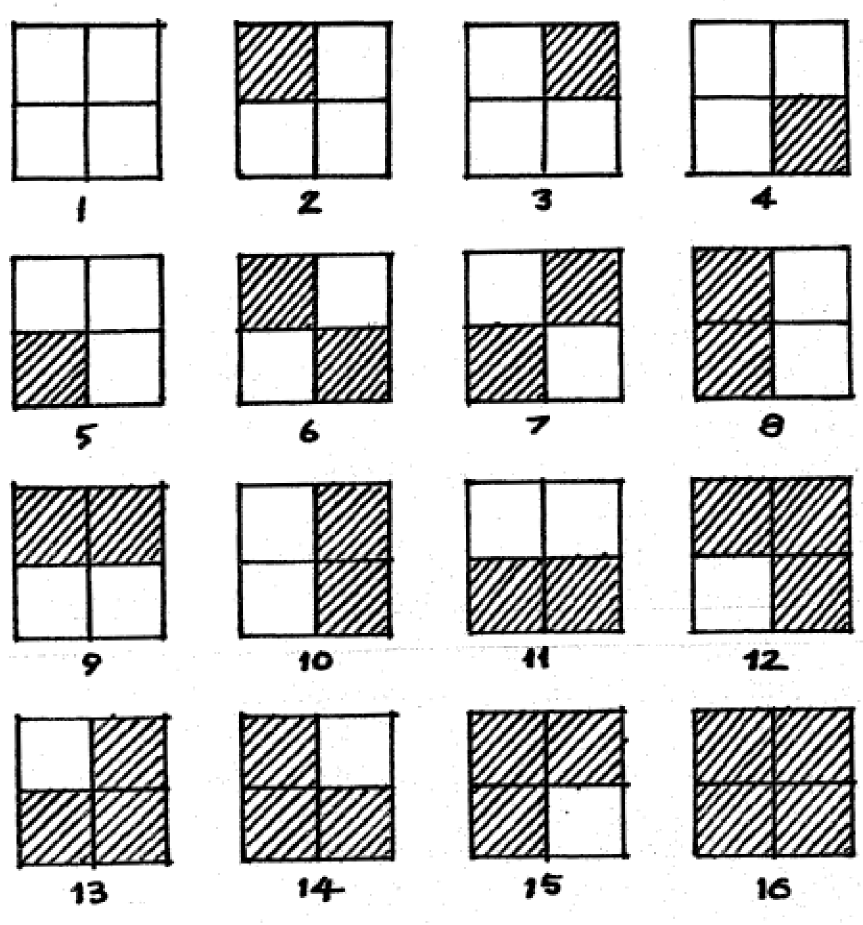
υπάρχουν 8 μεταθέσεις σαν την $(123)(4)$ με ένα σταθερό στοιχείο η καθεμία, τέλος οι υπόλοιπες 3 μεταθέσεις δεν έχουν σταθερό στοιχείο. Αρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών είναι:

$$\frac{1}{12}(8+4)=1 \quad \text{όπως είδαμε η } \{1,2,3,4\} \;.$$

iii) Εστω ότι θέλουμε να χρωματίσουμε τα 4 τετραγωνίδια του σχήματος με δύο χρώματα έστω άσπρο και μαύρο.



Εφόσον έχουμε τέσσερα τετραγωνίδια καθένα από τα οποία χρωματίζεται με δύο χρώματα ανεξάρτητα από το χρώμα των άλλων τετραγωνιδίων θάχουμε $2^4=16$ δυνατούς χρωματισμούς τους οποίους παραθέτουμε παρακάτω αριθμημένους



Αν όμως λάβουμε υπ'όψη τις περιστροφικές συμμετρίες του σχήματος παρατηρούμε ότι ορισμένοι από τους χρωματισμούς αυτούς συμπίπτουν. π.χ. ο 3 προκύπτει από τον 2 αν το σχήμα περιστραφεί κατά 90° περί το κέντρο βάρους του (η περιστροφή ακολουθεί τους δείκτες ρολογιού). Υπάρχουν 4 διαφορετικές περιστροφές κατά γωνία 0°, 90°, 180° και 270°. Η κάθε μία από αυτές θεωρούμε ότι είναι μία μετάθεση των 16 χρωματισμών. Μία τροχιά μίας μετάθεσης είναι το σύνολο των χρωματισμών που είναι ισοδύναμοι από την αντίστοιχη περιστροφή.

Από το λήμμα του Burnside μπορούμε να μετρήσουμε τις ουσιαστικά διαφορετικές τροχιές δηλαδή τους ουσιαστικά διαφορετικούς χρωματισμούς μετρώντας τα σταθερά στοιχεία της κάθε μίας μετάθεσης (περιστροφής).

Εχουμε $G=\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ όπου η ταυτοτική μετάθεση

$$g_0=\begin{pmatrix}12 & \ldots & 16\\ 12 & & 16\end{pmatrix}=(1)\ (2)\ldots(16)$$ αφήνει σταθερούς και τους 16 χρωματισμούς, η περιστροφή κατά 90° μετάθεση

$$g_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\ 1&3&4&5&2&7&6&9&10&11&8&13&14&15&12&16\end{pmatrix}=$$

$$=(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11)(12\ 13\ 14\ 15)(16)$$

αφήνει σταθερούς δύο μόνο χρωματισμούς, η περιστροφή κατά 180° μετάθεση

$$g_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\ 1&4&5&2&3&6&7&10&11&8&9&14&15&12&13&16\end{pmatrix}=$$

$$=(1)(2\ 3)(3\ 5)(6)(7)(8\ 10)(9\ 11)(12\ 14)(13\ 15)(16)$$

αφήνει σταθερούς τέσσερεις χρωματισμούς και τέλος η περιστροφή κατά 270° μετάθεση

$$g_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\ 1&5&2&3&4&7&6&11&8&9&10&15&12&13&14&16\end{pmatrix}=$$

$$=(1)(2\ 5\ 4\ 3)(6\ 7)(8\ 11\ 10\ 9)(12\ 15\ 14\ 13)(16)$$

αφήνει σταθερούς δύο χρωματισμούς.

Αρα το πλήθος των διαφορικών χρωματισμών είναι $\frac{1}{4}(16+2+4+2)=6$ ήτοι οι 6 χρωματισμοί 1, 2 ή 3 ή 4 ή 5, 6 ή 7, 8 ή 9 ή 10 ή 11, 12 ή 13 ή 14 ή 15, 16. ∎

iv) θεωρούμε όλα τα κομπολόγια με 5 χάντρες οι οποίες χρωματίζονται κόκκινες ή μπλέ ή πράσινες. Δύο κομπολόγια θεωρούνται ισοδύναμα αν το ένα προκύπτει από το άλλο με περιστροφή. Κατοπτρισμοί δεν επιτρέπονται. Πόσα διαφορετικά κομπολόγια υπάρχουν;

Λύση.

Υπάρχουν προφανώς $3^5=243$ χρωματισμοί αλλά δεν είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Η ομάδα G είναι η C_5 η κυκλική ομάδα τάξεως 5 ήτοι η G={(1)(2)(3)(4)(5),(12345),(13524),(14253),(15432)} με |G|=5.

Η ταυτοτική μετάθεση αφήνει αμετάβλητα και τα 243 κομπολόγια, ενώ οι άλλες 4 μεταθέσεις αφήνουν αμετάβλητα μόνο τα 3 μονοχρωματικά κομπολόγια ήτοι τα ΚΚΚΚΚ, ΜΜΜΜΜ, ΠΠΠΠΠ.

Αρα το πλήθος των διαφορετικών τροχιών του G είναι

$$\frac{1}{5}(243+3+3+3+3)=51.$$

Οι 51 αυτές τροχιές είναι οι εξείς:

Κομπολόϊ	Μορφή	Πλήθος
Μονοχρωματικό	ΚΚΚΚΚ	3
Διχρωματικό	ΚΚΚΚΜ	6
"	ΚΚΚΜΜ	6
"	ΚΚΜΚΜ	6
τριχρωματικό	ΚΚΚΜΠ	3
"	ΚΚΚΠΜ	3
"	ΚΚΜΚΠ	3
"	ΚΚΠΚΜ	3
"	ΚΚΜΜΠ	3
"	ΠΜΜΚΚ	3
"	ΚΚΜΠΜ	3
"	ΜΠΜΚΚ	3
"	ΚΠΜΚΜ	3
"	ΜΚΜΠΚ	3 .
		51

■

v) Πόσα διαφορετικά κομπολόγια μπορούν να κατασκευαστούν με 13 άσπρες και 3 μαύρες χάνρες. Δύο κομπολόγια θεωρούνται ισοδύναμα αν το ένα προκύπτει από το άλλο μετά από κατάλληλη περιστροφή ή μετά από κάποιον κατοπτρισμό.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα τέτοιο κομπολόϊ σαν ένα κανονικό 16-γωνο με κορυφές τις 16 χάντρες και κάθε ένα από τα διαφορετικά κομπολόγια (το πλήθος των οποίων ζητούμε) θα προσδιορίζεται από τις 3 κορυφές που έχουν μαύρες χάντρες. Εχουμε λοιπόν $\binom{16}{3}=560$

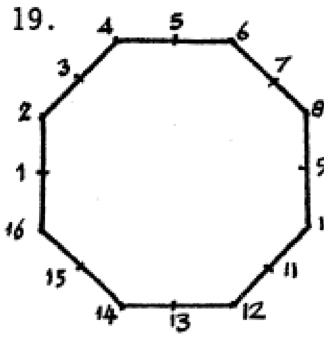
κομπολόγια όπου όμως δύο από αυτά μπορεί να συμπίπτουν αν το ένα λαμβάνεται από το άλλο από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας του 16-γώνου, δηλαδή από μία περιστροφή ή από έναν κατοπτρισμό. (Στο προηγούμενο παράδειγμα δεν είχαμε λάβει υπόψη τους κατοπτρισμούς).
Οι 32 συμμετρίες του κανονικού 16-γώνου είναι:

i) η ταυτοτική η οποία αφήνει αμετάβλητα και τα 560 κομπολόγια

ii) η περιστροφή κατά γωνία $\frac{2\pi n}{16}$ n=1,2,...,15.

Υπάρχουν 15 τέτοιες περιστροφές. Ας θεωρήσουμε την περιστροφή κατά 45°(n=2) οποιαδήποτε τριάδα κορυφών και αν πάρουμε δεν μπορεί να μείνει αμετάβλητη (τούτο θα ήταν δυνατόν αν οι 3 κορυφές και το κέντρο περιστροφής σχημάτιζαν γωνίες 120° αλλά δεν συναντάται τέτοια γωνία στις περιστροφικές συμμετρίες του 16-γώνου). Και οι 15 αυτές περιστροφές δεν αφήνουν αμετάβλητο κανένα κομπολόϊ.

iii) Κατοπτρισμός περί άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές π.χ. ο 19.



Μια τριάδα κορυφών παραμένει αμετάβλητη αν δύο κορυφές είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα 19 και η τρίτη κορυφή είναι η 1 ή η 9.
Υπάρχουν 14 τέτοιες τριάδες (αναλυτικά οι: 1 2 16, 9 2 16,1 3 15, 9 3 15, 1 4 14,9 4 14,1 5 13, 9 5 13, 1 6 12, 9 6 12, 1 7 11, 9 7 11, 1 8 10, και 9 8 10).
Υπάρχουν 8 τέτοιοι κατοπτρισμοί που δίνουν $8\times14=112$ αμετάβλητα κομπολόγια.

iv) Κατοπτρισμοί περί άξονα μεσοκάθετο σε δύο απέναντι πλευρές π.χ. η μεσοκάθετος των 12, 910 όπως και στην περίπτωση ii) δεν υπάρχει πάλι τριάδα που να μένει αμετάβλητη. Υπάρχουν 8 τέτοιοι κατοπτρισμοί οι οποίοι όμως δεν αφήνουν αμετάβλητο κανένα κομπολόϊ.

Η ομάδα συμμετριών G του 16-γώνου έχει $|G|=1+15+8+8=32$ και από το λήμμα του Burnside το πλήθος των διαφορετικών κομπολογιών ισούται με

$$\frac{1}{32}\,(560+0+112+0)=21. \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα vi.
Θα δείξουμε με την βοήθεια του λήμματος του Burnside ότι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων n διαφορετικών αντικειμένων είναι (n-1)!.

Απόδειξη.
Το ζητούμενο πλήθος θα ισούται με το πλήθος των χρωματισμών των κορυφών ενός κανονικού n-γώνου με n διαφορετικά χρώματα οι οποίοι είναι μη ισοδύναμοι ως προς την ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του n-γώνου.

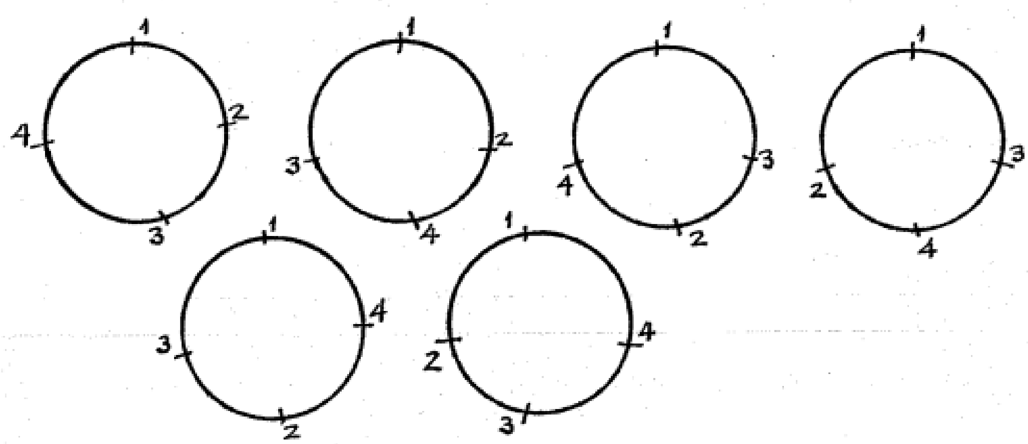
Ας θεωρήσουμε το σύνολο A των χρωματισμών των κορυφών του κανονικού n-γώνου. Ο πληθικός αριθμός του συνόλου A είναι προφανώς n! ενώ η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του κανονικού n-γώνου είναι

$$C_n=\left\{i=\rho_n^0,\ \rho_n^1,\ldots,\rho_n^{n-1}\right\}$$

όπου κατά τα γνωστά ρ_n η περιστροφή του n-γώνου κατά γωνία 2π/n.

Η ταυτοτική μετάθεση i προφανώς αφήνει σταθερούς και τους n! χρωματισμούς του συνόλου A. Ολες οι άλλες μεταθέσεις της ομάδας C_n δεν διατηρούν σταθερό κανέναν χρωματισμό του A διότι σε κάθε χρωματισμό του A δύο κορυφές του n-γώνου πρέπει νάχουν διαφορετικό χρώμα.

Αρα από το λήμμα του Burnside το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών του A είναι $\frac{1}{n}$ (n+0+0+...+0)=(n-1)!. όπου το άθροισμα έχει (n-1) μηδενικά π.χ. Για n=4 οι 3!=6 κυκλικές μεταθέσεις του {1,2,3,4} είναι οι



■

Ανακεφαλαιόνοντας μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι.

Εστω G μία ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου S. Ορίζουμε μία διμελή σχέση πάνω στο S (η οποία ονομάζεται η **διμελής σχέση που παράγεται** από το G) ως εξής:

$\forall$ a,b $\in$ S a~b αν και μόνο αν υπάρχει μετάθεση π$\in$G που να απεικονίζει το a στο b.

Θεώρημα 5: Η διμελής αυτή σχέση είναι μία σχέση ισοδυναμίας και το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζεται το S από την σχέση αυτή ισούται με $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda_1(g)$.

Απόδειξη.
Εστω S={a,b,...} και G μία ομάδα μεταθέσεων του S. Τότε
i) Αν e το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας G έχουμε ότι a~a διότι η ταυτοτική μετάθεση e$\in$G απεικονίζει το τυχόν στοιχείο a$\in$S στον εαυτό του.
ii) Εστω $\pi_1\in G$ που να απεικονίζει το a στο b αλλά τότε $\pi_1^{-1}\in G$ απεικονίζει το b στο a ήτοι από a~b $\Rightarrow$ b~a, δηλαδή η διμελής σχέση ικανοποιεί και την συμμετρική ιδιότητα.
iii) Αν $\pi_1\in G$ απεικονίζει το a στο b ήτοι a~b και η $\pi_2\in G$ το b στο c ήτοι b~c (a,b,c $\in$ S) τότε η μετάθεση $\pi_2\pi_1\in G$ απεικονίζει το a στο c ήτοι a~c. Η διμελής σχέση ~ ικανοποιεί και την μεταβατική ιδιότητα.

Αρα πρόκειται για μία σχέση ισοδυναμίας. Το ότι το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας είναι $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\lambda_1(g)$ είναι ακριβώς το λήμμα του Burnside δηλαδή το θεώρημα 4 που αποδείξαμε. ∎

Παράδειγμα 5. Εστω S={a,b,c,d} και η ομάδα μεταθέσεων G={π_1=(a)(b)(c)(d), π_2=(ab)(c)(d) π_3=(a)(b)(cd) και π_4=(ab)(cd)}.
Η διμελής σχέση που παράγεται από το G μας δίνει ότι a~a, (διότι π_1(a)=a), a~b (διότι υπάρχει $\pi_2\in G$ με π_2(a)=b), c~c (π_1(c)=c), c~d (π_3(c)=d) κ.ο.κ.
Οι δύο κλάσεις ισοδυναμίας φαίνονται από το καρτεσιανό γινόμενο S×S. Αλλά και από το λήμμα του Burnside

✓	✓			a
✓	✓			b
		✓	✓	c
		✓	✓	d
a	b	c	d	

$$\frac{1}{4}(4+2+2)=2.$$

∎

Θα γενικεύσουμε τώρα την παραπάνω πρόταση στην περίπτωση που η ομάδα G δεν είναι μία ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου S αλλά γενικότερα μία τυχούσα πεπερασμένη ομάδα Q τα στοιχεία της οποίας παράγουν μεταθέσεις του συνόλου S. Τότε αν η απεικόνιση από το Q στο S_n δηλαδή το σύνολο όλων των μεταθέσεων του συνόλου S το οποίο προφανώς είναι ομάδα, ικανοποιεί την λεγόμενη συνθήκη ομομορφίας, μπορούμε πάλι να ορίσουμε μία διμελή σχέση στο S η οποία να παράγεται από το Q και η οποία είναι σχέση ισοδυναμίας. Ισχύει δε πάλι το λήμμα του Burnside.

Αναλυτικότερα έστω η πεπερασμένη ομάδα Q τα στοιχεία της οποίας παράγουν μεταθέσεις του πεπερασμένου συνόλου $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ δηλαδή υπάρχει μία απεικόνιση π

$$\pi:Q \longrightarrow S_n$$

και για την απεικόνιση αυτή π ισχύει η **συνθήκη ομομορφίας**:

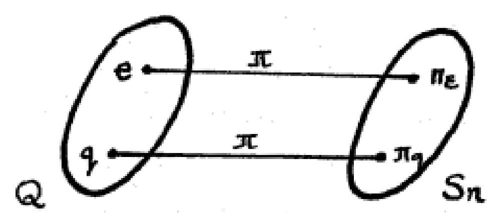
$\pi_{q_1}\cdot\pi_{q_2}=\pi_{q_1\cdot q_2}$ για κάθε $q_1,q_2\in Q$.

Η πράξη στο αριστερό μέλος της συνθήκης είναι η σύνθεση μεταθέσεων ενώ στο δεξί μέλος η πράξη της ομάδας Q.

Ορίζουμε τώρα μία διμελή σχέση στο S η οποία λέμε ότι παράγεται από την ομάδα Q ως εξής:

Λέμε ότι $a_1\sim a_2$ όπου $a_1,a_2\in S$ αν και μόνο αν υπάρχει $q\in Q$ η αντίστοιχη μετάθεση του οποίου να απεικονίζει το a_1 στο a_2 ήτοι $\pi_q a_1=a_2$.

Σχηματικά έχουμε:



όπου $n=|Q|$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $q\in Q$ και e το μοναδιαίο στοιχείο της Q ισχύει $qe=q$ και $\Pi eq=\Pi q$ αλλά από την συνθήκη ομομορφίας έχουμε $\Pi eq=\Pi e\Pi q=\Pi q$ άρα η Πe είναι το μοναδιαίο στοιχείο της S_n.

Το θεώρημα 6 είναι η προφανής γενίκευση του θεωρήματος 5.

Θεώρημα 6: Η διμελής σχέση που παράγεται από την ομάδα Q είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο S και το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες διαμερίζεται το σύνολο S από την σχέση αυτή ισούται με $\frac{1}{|Q|}\sum_{q\in Q}\lambda_1(\pi_q)$ όπου $\lambda_1(\pi_Q)$ το πλήθος των στοιχείων του S που δεν μεταβάλλονται από την μετάθεση π_q που αντιστοιχεί στο στοιχείο $q\in Q$.

Απόδειξη.

Η διμελής σχέση που ορίσαμε ικανοποιεί τα 3 αξιώματα της σχέσης ισοδυναμίας διότι

i) Η Π_e, η μοναδιαία μετάθεση της ομάδας S_n απεικονίζει κάθε στοιχείο $s \in S$ στον εαυτό του άρα $s \sim s$.

ii) Αν $s_1 \sim s_2$ τότε υπάρχουν $\Pi_q \in S_n$ τέτοια ώστε $\pi_q s_1 = s_2$ αλλά $q^{-1} \in Q$ (διότι η Q είναι ομάδα) οπότε

$\Pi_{q^{-1}} s_2 = \Pi_{q^{-1}} \Pi_q s_1 = \Pi_{q^{-1}q} s_1 = \Pi_e s_1 = s_1$ άρα $s_2 \sim s_1$ όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει από την συνθήκη ομομορφίας .

iii) $s_1 \sim s_2 \Rightarrow$ υπάρχουν $\Pi_{q_1} \in S_n$ με $\Pi_{q_1} s_1 = s_2$

$s_2 \sim s_3 \Rightarrow$ υπάρχουν $\Pi_{q_2} \in S_n$ με $\Pi_{q_2} s_2 = s_3$ αλλά τότε

$\Pi_{q_2 q_1} S_1 = \Pi_{q_2} (\Pi_{q_1} s_1) = \Pi_{q_2} s_2 = s_3$ άρα $s_1 \sim s_3$

και προφανώς $q_2 q_1 \in Q$ αφού η Q είναι ομάδα.

Η απόδειξη της σχέσης $\frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} \lambda_1(\pi_q)$ είναι πάλι η απόδειξη του λήμματος του Burnside. ■

3. Ισοδύναμες κλάσεις συναρτήσεων. Βάρη και κατάλογοι συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε συναρτήσεις από ένα πεπερασμένο σύνολο D σ'ένα άλλο R. Συνήθως το σύνολο R είναι ένα σύνολο χρωμάτων με τα οποία χρωματίζονται τα στοιχεία του D οπότε στην ειδική αυτή περίπτωση η κάθε συνάρτηση από το D στο R (και υπάρχουν $|R|^{|D|}$ τέτοιες συναρτήσεις) αντιστοιχεί σε έναν χρωματισμό των στοιχείων του D με $|R|$ το πλήθος χρώματα αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο. Επίσης κάθε συνάρτηση f αντιστοιχεί σε έναν τρόπο να τοποθετήσουμε $|D|$ αντικείμενα σε $|R|$ κάλπες.

Εστω λοιπόν D και R δύο σύνολα και G μία ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου D. Λέμε ότι οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει $\pi \in G$ τέτοια ώστε $f_1(d) = f_2[\pi(d)]$ $\forall\, d \in D$.

Θα δείξουμε ότι η διμελής αυτή σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

i) Αν θεωρήσουμε το μοναδιαίο στοιχείο $e \in G$ τότε $f_1(d) = f_1[e(d)]$ $\forall\, d \in D$ οπότε ικανοποιείται η αυτοπαθής ιδιότητα.

ii) Αν $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_1(d) = f_2[\pi(d)]$ $\forall\, d \in D$ και $f_2(d) = f_1[\pi^{-1}(d)]$ $\forall\, d \in D$ με $\pi^{-1} \in G$ άρα ικανοποιείται και η συμμετρική ιδιότητα.

iii) $f_1(d) = f_2[\pi_1(d)]$ και $f_2(d) = f_3[\pi_2(d)]$ $\forall\, d \in D$. Αλλά τότε $f_1(d) = f_3[\pi_2 \pi_1(d)]$ $\forall\, d \in D$. Επειδή $\pi_2 \pi_1 \in G$ ικανοποιείται και η μεταβατική ιδιότητα. Πρόκειται λοιπόν για μία σχέση ισοδυναμίας.

Αρα οι συναρτήσεις από το D στο R χωρίζονται σε κλάσεις ισοδυναμίας από την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε[1].

Παράδειγμα 6.

Εστω $D=\{a,b,c,d\}$ $R=\{x,y\}$ και $G=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$ όπου $\pi_1=\begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}$, $\pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $\pi_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, $\pi_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

Τότε οι $2^4=16$ συναρτήσεις από το D στο R είναι

	f(a)	**f(b)**	**f(c)**	**f(d)**
f_1	x	x	x	x
f_2	y	x	x	x
f_3	x	y	x	x
f_4	x	x	y	x
f_5	x	x	x	y
f_6	y	y	x	x
f_7	y	x	y	x
f_8	y	x	x	y
f_9	x	y	y	x
f_{10}	x	y	x	y
f_{11}	x	x	y	y
f_{12}	y	y	y	x
f_{13}	y	y	x	y
f_{14}	y	x	y	y
f_{15}	x	y	y	y
f_{16}	y	y	y	y

Βλέπουμε ότι

$$f_3[\pi_1(a)] = f_3(b) = y = f_2(a)$$
$$f_3[\pi_1(b)] = f_3(c) = x = f_2(b)$$
$$f_3[\pi_1(c)] = f_3(d) = x = f_2(c)$$
$$f_3[\pi_1(d)] = f_3(a) = x = f_2(d).$$

Αρα οι συναρτήσεις f_3 και f_2 είναι ισοδύναμες.

Παρόμοια διαπιστώνουμε ότι οι 16 συναρτήσεις διαιρούνται σε 6 κλάσεις ισοδύναμων συναρτήσεων τις $\{f_1\}$, $\{f_2,f_3,f_4,f_5\}$, $\{f_6,f_8,f_9,f_{11}\}$, $\{f_7,f_{10}\}$, $\{f_{12},f_{13},f_{14},f_{15}\}$ και $\{f_{16}\}$.

---

[1] Στην διεθνή βιβλιογραφία οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται patterns ή schemata.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο D σαν τα τέσσερα τετραγωνίδια της 2×2 σκακιέρας {a,b,c,d} και το σύνολο R σαν τους διχρωματισμούς τους

a	b
d	c

με δύο χρώματα {x και y} και τις 4 μεταθέσεις της ομάδας G σαν π_1: περιστροφή κατά 90°, π_3 περιστροφή κατά 270° π_2 περιστροφή κατά 180° π_4 περιστροφή κατά 0° το παράδειγμά μας ανάγεται στο παράδειγμα που έχουμε δει προηγούμενα (εισαγωγή - παράδειγμα Burnside) του διχρωματισμού των 4 τετραγώνων της σκακιέρας έτσι ώστε δύο σκακιέρες θεωρούνται ισοδύναμες αν η μία προκύπτει από την άλλη κατά τις περιστροφές της ομάδας G. Οι 16 συναρτήσεις f_i είναι οι 16 δυνατοί χρωματισμοί C_i και οι 6 διαφορετικές κλάσεις ισοδύναμων συναρτήσεων οι 6 ουσιαστικά διαφορετικοί χρωματισμοί. ■

Παράδειγμα 7.

Εστω ότι το σύνολο D είναι το σύνολο των 6 εδρών ενός κύβου το σύνολο R={A,M} $f:D \longrightarrow R$ και G η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του κύβου που δρα στις 6 έδρες του.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τους διαφορετικούς χρωματισμούς των εδρών του κύβου με δύο χρώματα Α και Μ αν ληφθούν υπόψη οι περιστροφικές συμμετρίες του κύβου.

Προφανώς οι διχρωματισμοί του κύβου είναι $2^6=64$ αλλά πολλοί από αυτούς είναι ισοδύναμοι.

α.α.	**χρωματισμοί**	**τρόποι**
1)	6 έδρες χρώματος Α-0 έδρα Μ	1
2)	5 έδρες χρώματος Α-1 έδρα Μ	6
3)	4 έδρες χρώματος Α-2 απέναντι έδρες Μ	3
4)	4 έδρες χρώματος Α-2 διαδοχικές έδρες Μ	12
5)	3 έδρες χρώματος Α που σχηματίζουν τριεδρή γωνία- 3 έδρες χρώματος Μ που σχηματίζουν τριεδρή γωνία.	8
6)	3 έδρες χρώματος Α που σχηματίζουν 3 δίεδρες γωνίες 3 έδρες χρώματος Μ που σχηματίζουν 3 δίεδρες γωνίες	12
7)	2 έδρες χρώματος Α διαδοχικές -4 έδρες χρώματος Μ	12
8)	2 έδρες χρώματος Α απέναντι -4 έδρες χρώματος Μ	3
9)	1 έδρα χρώματος Α -5 έδρες χρώματος Μ	6
10)	0 έδρες χρώματος Α -6 έδρες χρώματος Μ	1
		64

Αρα με την εξαντλητική μέθοδο υπολογίσαμε 10 διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

Θέλουμε να φθάσουμε στο αποτέλεσμα αυτό με μία κομψότερη μέθοδο. ■

Θέλουμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε στοιχείο του συνόλου R έναν αριθμό ή ένα σύμβολο, κυρίως για να μπορούμε να ξεχωρίσουμε την δράση των στοιχείων του συνόλου R. Αν $r \in R$ το σύμβολο $w(r)$ παριστά το **βάρος** του στοιχείου r.

Ο κατάλογος[2] **του συνόλου** R ορίζεται σαν το άθροισμα των βάρων όλων των στοιχείων του R ήτοι το άθροισμα $\sum_{r \in R} w(r)$.

Το βάρος μίας συνάρτησης $f: D \longrightarrow R$ ορίζεται από την σχέση $W(f) = \prod_{d \in D} w[f(d)]$ δηλαδή ισούται με το γινόμενο όλων των βάρων των εικόνων των στοιχείων του D κάτω από την συνάρτηση f.

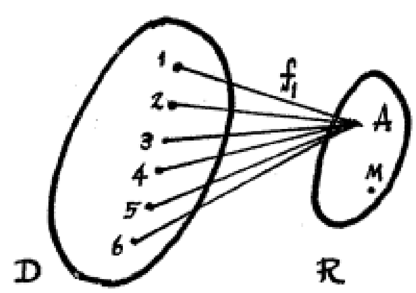
Τέλος ο **κατάλογος ενός συνόλου συναρτήσεων** $S \subseteq R^D$ ισούται με το άθροισμα όλων των βάρων των συναρτήσεων f του συνόλου S ήτοι $\sum_{f \in S} W(f)$.

Παράδειγμα 7. (συνέχεια).

Αν στο προηγούμενο παράδειγμα θέσουμε

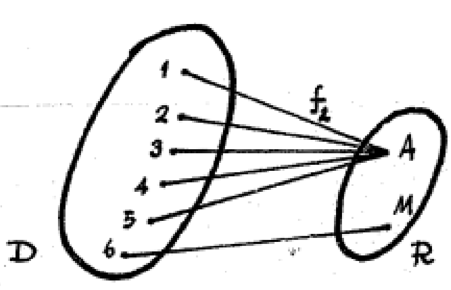
$w(M)=1, \quad w(A)=2$

Η συνάρτηση f_1 έχει βάρος 2^6 ήτοι $W(f_1)=32$.



(Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί στον χρωματισμό και των 6 εδρών με το χρώμα Α).

Η συνάρτηση f_2 που αντιστοιχεί στον χρωματισμό των 5 εδρών Α και μίας με χρώμα Μ έχει βάρος $W(f_2)=16$.



κ.ο.κ.

[2] στην διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος store enumerator ή inventory.

Παρατηρούμε ότι για το βάρος συνάρτησης χρησιμοποιούμε το κεφάλαιο σύμβολο W ενώ για το βάρος στοιχείου το μικρό w.
Επίσης ο κατάλογος του συνόλου R είναι 2+1=3 μας πληροφορεί ότι ένα στοιχείο του D θα έχει την τιμή 1 ή την 2. Αν $w(A)=a$ και $w(M)=m$ τότε ο κατάλογος θα ήταν $a+m$ πράγμα που κάνει την έννοια αυτή να συμπεριφέρεται ανάλογα με τις γεννήτριες συναρτήσεις. ■

Μία σημαντική παρατήρηση είναι η εξής:
Ορίσαμε ότι $f_1 \sim f_2$ αν $\forall\ d \in D\ \ f_1[\pi(d)]=f_2(d)$. Αλλά τότε έχουμε αν θέσουμε $|D|=n$

$$W(f_1) = w\left[f_1(d_1)\right]\cdot w\left[f_1(d_2)\right]\ldots w\left[f_1(d_n)\right] = \prod_{d\in D} w\left[f_1(d)\right]$$

$$W\left[f_1(\pi(d_1))\right]\cdot w\left[f_1(\pi(d_2))\right]\ldots\ w\left[f_1(\pi(d_n))\right] = \prod_{d\in D} w\left[f_1(\pi(d))\right]$$

αλλά εφόσον $\pi \in G \leq S_n$ τα δύο γινόμενα αυτά είναι ίσα διότι περιέχουν τους ίδιους όρους με διαφορετική σειρά
Αρα

$$W(f_1) = \prod_{d\in D}\left[f_1(d)\right] = \prod_{d\in D}\left[f_1(\pi(d))\right] = \prod_{d\in D}\left[f_2(d)\right] = W(f_2).$$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει από το γεγονός ότι $f_1 \sim f_2$ και η τελευταία από τον ορισμό του βάρους μίας συνάρτησης. Δείξαμε λοιπόν ότι αν $f_1 \sim f_2 \Rightarrow W(f_1)=W(f_2)$. Προφανώς το αντίστροφο δεν ισχύει δηλαδή συναρτήσεις με το ίδιο βάρος μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

Ορίζουμε λοιπόν το βάρος μίας κλάσης ισοδυναμίας F σαν το βάρος οποιασδήποτε συνάρτησης που ανήκει στην κλάση αυτή ήτοι $W(F)=W(f)$ για οποιαδήποτε $f \in F$.

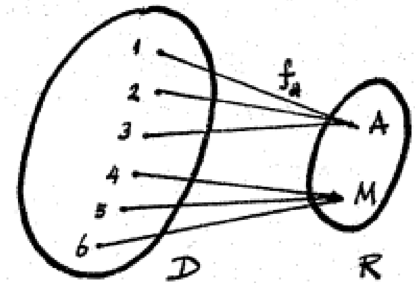
Παράδειγμα 7. (συνέχεια).
Θέτωντας πάλι $w(A)=2$, $w(M)=1$ έχουμε:

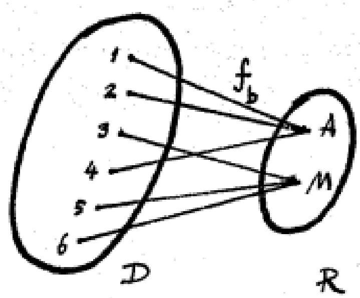
$$W(I) = W(f_1) = 2^6=32$$

όπου θέσαμε I την κλάση με αύξοντα αριθμό 1 κ.ο.κ.

$$W(II) = W(f_2)=2^5.$$

Προσοχή όμως $W(V) = W(f_a)=2^3=8$ $W(VI) = W(f_b)=2^3=8$





αλλά οι δύο συναρτήσεις f_a και f_b δεν είναι ισοδύναμες.

Πράγματι η f_a χρωματίζει με το Α 3 έδρες που αποτελούν τρίεδρη γωνία (και άλλες 3 με το Β που αποτελούν επίσης τρίεδρη γωνία) ενώ η f_b χρωματίζει με το Α 3 έδρες που αποτελούν 3 δίεδρες γωνίες (και άλλες τρείς με το Μ).

Ο κατάλογος του συνόλου R^D (που έχει $2^6=64$ συναρτήσεις ή χρωματισμούς) είναι εξ ορισμού $\sum_{f\in R^D} W(f)$

ήτοι:
$$1\cdot 2^6+6\cdot 2^5+3\cdot 2^4+12\cdot 2^4+8\cdot 2^3+12\cdot 2^3+12\cdot 2^2+3\cdot 2^2+6\cdot 2^1+1\cdot 1=$$
$$=1\cdot 2^6\cdot 1^0+6\cdot 2^5\cdot 1^1+15\cdot 2^4\cdot 1^2+20\cdot 2^3\cdot 1^3+15\cdot 2^2\cdot 1^4+6\cdot 2^1\cdot 1^5+1\cdot 2^0\cdot 1^6=$$
$$=(2+1)^6 = 3^6 =729$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό θεώρημα. ∎

Η σχέση αυτή γενικεύεται ήτοι ισχύει εν γένει:

Θεώρημα 7: $$\sum_{f\in R^D} W(f) = \left[\sum_{r\in R} w(r)\right]^{|D|}.$$

Απόδειξη.

Το δεξί μέλος της προς απόδειξην σχέσης ισούται σύμφωνα με το πολυωνυμικό θεώρημα:

$$\left(w(r_1) + w(r_2)+\ldots+ w(r_{|R|})\right)^{|D|} = \sum \frac{|D|!}{x_1!x_2!\ldots x_{|R|}!}\cdot$$
$$\cdot w(r_1)^{x_1}\cdot w(r_2)^{x_2}\ldots w(r_{|R|})^{x_{|R|}}$$

όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις μη διατεταγμένες διαμερίσεις* του αριθμού $|D|$ σε $|R|$ το πλήθος ακέραια μη αρνητικά μέρη δηλαδή σε όλες τις $|R|$-αδες με μη αρνητικές ακέραιες συνιστώσες $\left(x_1,x_2,\ldots,x_{|R|}\right)$ που έχουν άθροισμα συνιστωσών $|D|$.

$$\left(x_i\geq 0, \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{|R|} x_i=|D|\right).$$

Παράδειγμα 8. Οι μη διατεταγμένες διαμερίσεις του ακεραίου 4 σε 3 το πολύ μέρη είναι

4=4+0+0 , 0+4+0 , 0+0+4
4=3+1+0 , 3+0+1 , 1+3+0 , 1+0+3 , 0+1+3 , 0+3+1
4=2+2+0 , 2+0+2 , 0+2+2
4=2+1+1 , 1+2+1 , 1+1+2

* στην διεθνή βιβλιογραφία partitions.

$$\text{άρα: } (a+\beta+\gamma)^4 = \binom{4}{400}a^4 + \binom{4}{400}b^4 + \binom{4}{400}\gamma^4 + \binom{4}{310}a^3b + \binom{4}{130}ab^3 +$$

$$+ \binom{4}{301}a^3\gamma + \binom{4}{103}a\gamma^3 + \binom{4}{031}\beta^3\gamma + \binom{4}{013}\beta\gamma^3 +$$

$$+ \binom{4}{220}a^2b^2 + \binom{4}{202}a^2\gamma^2 + \binom{4}{022}b^2\gamma^2 + \binom{4}{211}a^2\beta\gamma +$$

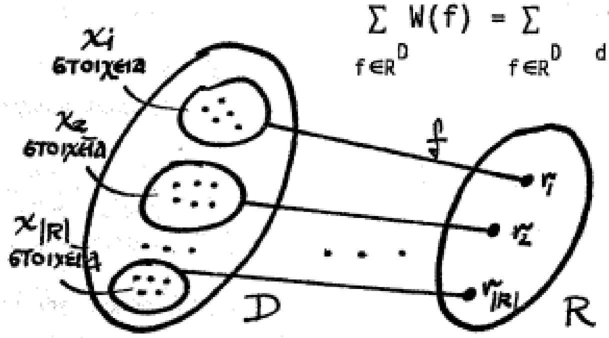
$$+ \binom{4}{121}a\beta^2\gamma + \binom{4}{112}a\beta\gamma^2 =$$

$$= 1\cdot a^4+1\cdot \beta^4+1\cdot \gamma^4+4a^3b+4ab^3+4a^3\gamma+4a\gamma^3+4b^3\gamma+4b\gamma^3+$$

$$+ 6a^2b^2+6a^2\gamma^2+6\beta^2\gamma^2+12a^2b\gamma+12a\beta^2\gamma+12a\beta\gamma^2 \quad \blacksquare$$

Το αριστερό μέλος της προς απόδειξην σχέσης είναι:

$$\sum_{f\in R^D} W(f) = \sum_{f\in R^D} \prod_{d\in D} w(f(d))$$



Θεωρώ μία συνάρτηση $f:D \longrightarrow R$ η οποία απεικονίζει

x_1 το πλήθος στοιχεία του D στο $r_1 \in R$

x_2 το πλήθος από τα υπόλοιπα στοιχεία του D στο $r_2 \in R$

. . .

$x_{|R|}$ το πλήθος τα εναπομείνοντα στοιχεία του D στο $r_{|R|} \in R$

και αθροίζω για όλες τις συναρτήσεις $f \in R^D$. Προφανώς κάθε συνάρτηση $f \in R^D$ είναι αυτής της μορφής (όπου επιτρέπεται $x_i = 0$ για διάφορες τιμές του i).

Πόσες τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν; Μπορώ να διαλέξω x_1 στοιχεία του D κατά $\binom{|D|}{x_1}$ τρόπους, από τα υπόλοιπα $|D|-x_1$ διαλέγω x_2 κατά $\binom{|D|-x_1}{x_2}$ τρόπους από τα υπόλοιπα $|D|-x_1-x_2$ διαλέγω x_3 κατά $\binom{|D|-x_1-x_2}{x_3}$ τρόπους κ.ο.κ. Η τελευταία επιλογή είναι από τα εναπομείνοντα $|D| - \sum_{j=1}^{|R|-1} x_j$ να επιλέξω $x_{|R|}$ στοιχεία η οποία θα γίνει κατά $\begin{pmatrix} |D|-\sum_{j=1}^{|R|-1} x_j \\ x_{|R|} \end{pmatrix} = 1$ τρόπους διότι $\sum_{i=1}^{|R|} x_i = D$.

Αρα από το πολλαπλασιαστικό αξίωμα το πλήθος των συναρτήσεων αυτών θα είναι

$$\binom{|D|}{x_1} \cdot \binom{|D|-x_1}{x_2} \cdots \begin{pmatrix} |D|-\sum_{j=1}^{|R|-1} x_j \\ x_{|R|} \end{pmatrix}$$

το βάρος της καθεμίας είναι $w(x_1)^{r_1} \cdot w(x_2)^{r_2} \cdots w(x_{|R|})^{r_{|R|}}$.
Το να αθροίσουμε για κάθε $f \in R^D$ αντιστοιχεί στο να πάρουμε όλες τις $|R|$-αδες $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{|R|})$ με $x_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{|R|} = |D|$.
Αρα το αριστερό μέλος της προς απόδειξην σχέσης γίνεται

$$\sum_{f \in R^D} W(f) = \sum_{f \in R^D} \prod_{d \in D} w(f(d)) = \sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_{|R|}=|D| \\ x_i \geq 0}} \binom{|D|}{x_1} \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} |D|-\sum_{j=1}^{|R|-1} x_j \\ x_{|R|} \end{pmatrix} w(r_1)^{x_1} \ldots w(r_{|R|})^{x_{|R|}}$$

αλλά η παράσταση

$$\binom{|D|}{x_1} \cdot \binom{|D|-x_1}{x_2} \cdots \begin{pmatrix} |D|-\sum_{j=1}^{|R|-1} x_j \\ x_{|R|} \end{pmatrix} = \frac{|D|!}{x_1!(|D|-x_1)!} \cdot \frac{(|D|-x_1)!}{x_2!(|D|-x_1-x_2)!}$$

$$\cdots \frac{(|D|-x_1-x_2-\ldots-x_{|R|-1})!}{\underbrace{(|D|-x_1-x_2-x_{|R|-1}-x_{|R|})}_{=0}!\,x_{|R|}!} = \frac{|D|!}{x_1!x_2!\ldots x_{|R|}!}$$

διότι $0!=1$.

Αρα $\sum_{f \in R^D} W(f) = \sum_{\substack{x_1+x_2+\ldots+x_{|R|}=|D| \\ x_i \geq 0}} \frac{|D|!}{x_1!x_2!\ldots x_{|R|}!} w(r_1)^{x_1} \ldots w(r_{|R|})^{x_{|R|}}$

η ίδια παράσταση με την οποία ισούται και το δεξί μέλος. Εφόσον και τα δύο μέλη ισούνται με την ίδια παράσταση η ισότητα ισχύει. ∎

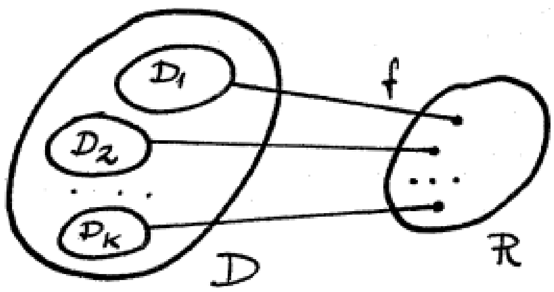
Θα υπολογίσουμε τώρα τον κατάλογο ενός ειδικού συνόλου συναρτήσεων $S\subset R^D$.

Εστω $D_1,D_2,\ldots,D_k$ μία διαμέριση του D ήτοι $\bigcup_{i=1}^{k} D_i=D$ με $D_i\cap D_j=\varnothing$ αν $i\neq j$. Φυσικά $|D|=|D_1|+|D_2|+\ldots+|D_k|$.

Εστω το υποσύνολο του R^D.

$$S=\left\{f\in R^D:\ f(d_1)=f(d_2)\ \forall\ d_1,d_2\in D_i\quad i=1,\ldots,k\right\}$$

δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή σε κάθε υποσύνολο της διαμέρισης όπως φαίνεται και στο σχήμα:

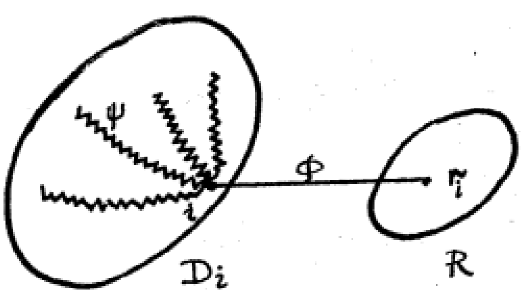


Θεώρημα 8: Κατάλογος του S $\overset{o\rho}{=} \sum_{f\in S} W(f)=\prod_{i=1}^{k}\ \sum_{r\in R}[w(r)]^{|D_i|}$.

Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι αν $f\in S$ η f μπορεί να θεωρηθεί σαν μία σύνθετη συνάρτηση $f=\varphi\cdot\psi$ όπου ψ: $d\longrightarrow i\ \ \forall\ d\in D_i$ ήτοι $\psi(d)=i$

και φ: $(1,2,\ldots,k)\longrightarrow R$ όπως φαίνεται και στο σχήμα



Αν δοθεί η διαμέριση $\{D_1,D_2,\ldots,D_k\}$ τότε υπάρχουν $1^{|D_i|}=1$ μόνο συνάρτηση ψ ενώ υπάρχουν $|R|^k$ συναρτήσεις φ οπότε και $|S|=|R|^k$.

Το δεξί μέλος της προς απόδειξην σχέσης γράφεται:

$$\left[w(r_1)^{|D_1|}+w(r_2)^{|D_1|}+\ldots+w(r_{|R|})^{|D_1|}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[w(r_1)^{|D_2|}+w(r_2)^{|D_2|}+\ldots+w(r_{|R|})^{|D_2|}\right]\ldots$$

$$\ldots\left[w(r_1)^{|D_k|} + w(r_2)^{|D_k|} + \ldots + w(r_{|R|})^{|D_k|}\right].$$

Αν πάρουμε έναν προσθετέο του παραπάνω αναπτύγματος αυτός θα είναι ένα γινόμενο που θα περιέχει έναν όρο από την πρώτη αγκύλη, έναν από την δεύτερη κ.ο.κ. έναν από την τελευταία ήτοι θα έχει την μορφή

$$w\left(r_{i_1}\right)^{|D_1|} \cdot w\left(r_{i_2}\right)^{|D_2|} \ldots w\left(r_{i_k}\right)^{|D_k|} = \prod_{j=1}^{k} w\left(r_{i_j}\right)^{|D_j|}$$

όπου έχουμε θεωρήσει μία απεικόνιση φ τέτοια ώστε

φ: $1 \longrightarrow r_{i_1}$, $2 \longrightarrow r_{i_2}$, $k \longrightarrow r_{i_k}$ ήτοι

$\varphi(1)=r_{i_1}$, $\varphi(2)=r_{i_2}, \ldots, \varphi(k)=r_{i_k}$ η οποία συμπεριφέρεται ακριβώς σαν την φ που ορίσαμε στην αρχή της απόδειξης.

Εάν $f=\varphi\psi$ όπου ψ η συνάρτηση που ορίσαμε στην αρχή της απόδειξης τότε έχουμε ότι ο ένας προσθετέος του αναπτύγματος του δεξιού μέλους γίνεται

$$\prod_{j=1}^{k} w\left(r_{i_j}\right)^{|D_j|} = \prod_{j=1}^{k} w(\varphi(j))^{|D_j|} = \prod_{j=1}^{k} \prod_{d\in D_j} w\{\varphi[\psi(d)]\}=$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \prod_{d\in D_j} w[f(d)]=W(f) .$$

Αρα κάθε συνάρτηση $f\in S$ αντιστοιχεί σε έναν όρο του αναπτύγματος του δεξιού μέλους άρα κάθε συνάρτηση $f\in S$ λαμβάνεται μία μόνο φορά στο ανάπτυγμα αυτό.

Το πλήρες λοιπόν ανάπτυγμα του δεύτερου μέλους θα είναι

$$\sum_{f\in S} W(f)$$

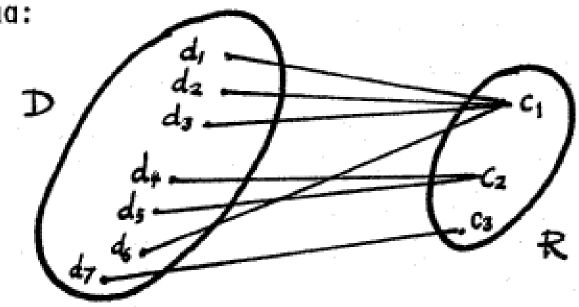
αλλά το άθροισμα αυτό εξ ορισμού μας δίδει τον κατάλογο του συνόλου S. ∎

Παράδειγμα 9.

Εστω ότι επτά άτομα θέλουν να επισκεφθούν μία από 3 πόλεις. Αν τρείς από τους επτά αποτελούν μία οικογένεια και άλλοι δύο μία άλλη οικογένεια πόσα διαφορετικά ταξίδια είναι δυνατόν να γίνουν αν κάθε οικογένεια επισκέπτεται την ίδια πόλη.

Λύση. Εστω d_1,d_2,d_3 η πρώτη οικογένεια d_4,d_5 η δεύτερη d_6 και d_7 τα 7 άτομα και c_1,c_2,c_3 οι 3 πόλεις.

θέτουμε $w(c_1)=\alpha$, $w(c_2)=\beta$ $w(c_3)=\gamma$. Ενα δυνατό ταξίδι αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση $f:D \longrightarrow R$ όπου $D=\{d_1,\dots,d_7\}$ και $R=\{c_1,c_2,c_3\}$ όπως φαίνεται και στό σχήμα:



Η συμβολική αναπαράσταση των δυνατών ταξιδίων που μπορεί να κάνει η οικογένεια $\{d_1,d_2,d_3\}$ είναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$. Παρόμοια για την οικογένεια $\{d_4,d_5\}$ έχουμε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ για το άτομο d_6 $\alpha+\beta+\gamma$ καθώς και για τον d_7 οπότε τα διαφορετικά δυνατά ταξίδια είναι από το προηγούμενο θεώρημα:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^7+2\alpha^6\beta+2\alpha^6\gamma+2\alpha^5\beta\gamma+2\alpha^5\beta^2+$$
$$+2\alpha^5\gamma^2+3\alpha^4\gamma^3+3\alpha^4\beta^3+2\alpha^4\beta^2\gamma+2\alpha^4\beta\gamma^2+3\alpha^3\beta^4+3\alpha^3\gamma^4+2\alpha^3\beta^2\gamma^2+4\alpha^3\beta\gamma^3+$$
$$+4\alpha^3\beta^3\gamma+2\alpha^2\beta^5+2\alpha^2\gamma^5+2\alpha^2\beta^2\gamma^3+2\alpha^2\beta^3\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma^4+2\alpha^2\beta^4\gamma+4\alpha\beta^3\gamma^3+$$
$$+2\alpha\beta^6+2\alpha\gamma^6+2\alpha\beta\gamma^5+2\alpha\beta^5\gamma+2\alpha\beta^4\gamma^2+2\alpha\beta^2\gamma^4+\beta^7+2\beta^6\gamma+2\beta^5\gamma^2+3\beta^4\gamma^3+$$
$$+3\beta^3\gamma^4+2\beta^2\gamma^5+2\beta\gamma^6+\gamma^7.$$

Ο συντελεστής 4 του όρου $\alpha\beta^3\gamma^3$ υποδηλώνει ότι υπάρχουν 4 διαφορετικά ταξίδια όπου ένα άτομο επισκέπτεται την πόλη c_1, 3 την c_2 και 3 την c_3 ήτοι τα:

$d_6 \longrightarrow c_1$, $\{d_1,d_2,d_3\} \longrightarrow c_2$, $\{d_4,d_5\}$ και $d_7 \longrightarrow c_3$

$d_7 \longrightarrow c_1$, $\{d_1,d_2,d_3\} \longrightarrow c_2$, $\{d_4,d_5\}$ και $d_6 \longrightarrow c_3$

$d_7 \longrightarrow c_1$, $\{d_4,d_5\},d_6 \longrightarrow c_2$, $\{d_1,d_2,d_3\} \longrightarrow c_3$

$d_6 \longrightarrow c_1$, $\{d_4,d_5\},d_7 \longrightarrow c_2$, $\{d_1,d_2,d_3\} \longrightarrow c_3$.

Το σύνολο των διαφορετικών ταξιδίων θα είναι το άθροισμα των συντελεστών των διαφορών προσθετέων που είναι 81. Στο ίδιο αποτέλεσμα φθάνουμε αν θέσουμε $\alpha=\beta=\gamma=1$ οπότε το πλήθος των διαφορετικών ταξιδίων είναι $3\cdot3\cdot3\cdot3=81$.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $w(c_1)=\alpha$, $w(c_2)=\beta$, $w(c_3)=\gamma$ έχουμε την γεννήτρια συνάρτηση των διαφορετικών ταξιδίων η οποία μας δίνει πολύ περισσότερη πληροφορία από το απλά πόσα διαφορετικά ταξίδια υπάρχουν. ∎

4. Το Θεώρημα του Pólya.

Θεωρούμε πάλι το σύνολο D το σύνολο R και μία ομάδα μεταθέσεων του D. Το πρόβλημα μας είναι να βρούμε το πλήθος και γενικότερα τον κατάλογο των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων από το D στο R. Ο κατάλογος αυτός όπως είδαμε προηγούμενα είναι μία αναπαράσταση όλων των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης $|D|$ αντικειμένων σε $|R|$ θέσεις.

Οι $|R|^{|D|}$ το πλήθος συναρτήσεις κατατάσσονται σύμφωνα με τα βάρη τους. Εστω ότι το σύνολο των συναρτήσεων F_i έχει βάρος W_i. Τότε όπως είδαμε στην αρχή της παραγράφου 3 σε κάθε μετάθεση $\pi\in G$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση $\pi^{(i)}$ του F_i στον εαυτό του που ορίζεται από: $\quad \pi^{(i)}: f_1\in F_i \longrightarrow f_2\in F_i$ αν $f_1(d)=f_2[\pi(d)]\ \forall\ d\in D$.

Προφανώς οι συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν το ίδιο βάρος.

Λήμμα 9. Η συνάρτηση $\pi^{(i)}$ είναι μία μετάθεση του συνόλου συναρτήσεων F_i.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν δύο συναρτήσεις του F_i να απεικονισθούν στην ίδια συνάρτηση. Εστω ότι $\pi^{(i)} f_1 \longrightarrow f_2$ και $\pi^{(i)} f_3 \longrightarrow f_2$. Τότε $f_1=f_3$.

Πράγματι η πρώτη σχέση δίνει $f_1(d)=f_2[\pi(d)]\ \forall\ d\in D$

και η δεύτερη σχέση δίνει $\quad f_3(d)=f_2[\pi(d)]\ \forall\ d\in D$

οπότε $f_1(d)=f_3(d)\ \ \forall\ d\in D$ άρα πρόκειται για την ίδια συνάρτηση. ∎

Η μετάθεση $\pi^{(i)}$ ικανοποιεί και την συνθήκη ομομορφίας που είδαμε στην παράγραφο 2 ήτοι ισχύει

Λήμμα 10. $(\pi_1\pi_2)^{(i)} = \pi_1^{(i)}\pi_2^{(i)}$.

Απόδειξη.

Εστω πάλι $\pi_2^{(i)}: f_1 \longrightarrow f_2 \Rightarrow f_1(d)=f_2[\pi_2(d)]\ \ \forall\ d\in D$

και $\pi_1^{(i)}: f_2 \longrightarrow f_3 \Rightarrow f_2(d)=f_3[\pi_1(d)]\ \ \forall\ d\in D$

οπότε $\quad \pi_1^{(i)}\cdot\pi_2^{(i)}: f_1 \longrightarrow f_3$

αλλά τότε έχω ότι $f_1(d)=f_3\Big[\pi_1[\pi_2(d)]\Big]=f_3[\pi_1\pi_2(d)]\ \ \forall\ d\in D$.

Αρα και η $(\pi_1\pi_2)^{(i)}$ απεικονίζει την f_1 στην f_3. ∎

Συμβολίζω με $\lambda(g)$ τον αριθμό των κύκλων της μετάθεσης $g\in G$ όπου υπολογίζονται και οι κύκλοι μήκους ένα ήτοι:

$g=(123)(45)(6)(7) \in S_7$ έχει $\lambda(g)=4$
$g=(1234) \in S_4$ έχει $\lambda(g)=1$
$g=(123)(4)(5) \in S_5$ έχει $\lambda(g)=3$ κ.ο.κ.

Το θεώρημα του Pólya [19,20] αντιμετωπίζει διάφορες περιπτώσεις όπου η χρήση του λήμματος του Burnside είναι δύσκολη ή και πρακτικά αδύνατη όπως όταν το σύνολο D είναι αρκετά μεγάλο οπότε ο προσδιορισμός των στοιχείων του D που μένουν αμετάβλητα από τις μεταθέσεις του G πολύπλοκος. Επίσης το θεώρημα δίνει περισσότερες πληροφορίες από απλά πόσες είναι οι διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Συγκεκριμένα μας δίνει την γεννήτρια συνάρτησή τους. Η απόδειξη στηρίζεται στην εξής παρατήρηση.

Ας χρησιμοποιήσουμε την χρωματική ορολογία δηλαδή ας θεωρήσουμε το σύνολο R σαν ένα σύνολο m χρωμάτων με τα οποία χρωματίζονται τα $|D|$ στοιχεία του D. Εχουμε ότι η καθεμία από τις $|R|^{|D|}$ συναρτήσεις f είναι ένας χρωματισμός.

Θέλουμε λοιπόν η μετάθεση $g^{(i)}$ δηλαδή ο χρωματισμός $g^{(i)}$ να παραμένει σταθερός, αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει η αντίστοιχη μετάθεση $g \in G$ να αναλύεται σε κύκλους και οι αριθμοί (στοιχεία του D) που βρίσκονται στον κάθε κύκλο να έχουν το ίδιο χρώμα. Αλλά το πλήθος των διαφορετικών τρόπων για να χρωματιστούν οι $\lambda(g)$ κύκλοι της μετάθεσης $g \in G$ με m το πλήθος χρώματα έτσι ώστε τα στοιχεία κάθε κύκλου να έχουν το ίδιο χρώμα είναι προφανώς $m^{\lambda(g)}$.

Αν δεν θέλαμε μόνο το πλήθος των χρωματισμών αλλά την γεννήτρια συνάρτηση τους, πρέπει να αντικαταστήσουμε τον αριθμό m με κάποια κατάλληλη παράσταση στο πνεύμα του θεωρήματος 8.

Θεώρημα 11 (Pólya):
Η γεννήτρια συνάρτηση των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων από το D στο R ισούται με:

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r),\ \sum_{r\in R}[w(r)]^2,\dots,\ \sum_{r\in R}[w(r)]^k\dots\right)$$

δηλαδή προκύπτει αν γίνουν οι αντικαταστάσεις

$$x_1 \longrightarrow w(r_1) + w(r_2)+\dots+ w(r_{|R|})$$

$$x_2 \longrightarrow w^2(r_1) + w^2(r_2)+\dots+ w^2(r_{|R|})$$

$$x_k \longrightarrow w(r_1)^k + w(r_2)^k+\dots+ w(r_{|R|})^k$$

στον κυκλικό δείκτη* της ομάδας μεταθέσεων G του D.

Απόδειξη.

Ας θέσουμε m_i το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας των συναρτήσεων από το D στο R που έχουν βάρος W_i.

Ο κατάλογος αυτών θα είναι το άθροισμα για κάθε σύνολο F_i του πλήθους αυτών m_i επί το βάρος τους W_i ήτοι θα ισούται με

$$\sum_i m_i W_i \,.$$

Αν εφαρμόσουμε για την μετάθεση $\pi^{(i)}$ που ικανοποεί την συνθήκη ομομορφίας (από τα Λήμματα 9 και 10), το Λήμμα του Burnside (πρόταση 6 της παραγράφου 2) έχουμε:

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} \lambda_1(\pi^i).$$

Αρα ο κατάλογος θα είναι:

$$\sum_i m_i W_i = \sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} \lambda_1(\pi^i) W_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} \left[\sum_i \lambda_1(\pi^i) W_i \right].$$

Η παράσταση μέσα στην αγκύλη $\sum_i \lambda_1(\pi^i) W_i$ είναι ο κατάλογος όλων των συναρτήσεων $f \in R^D$ για τις οποίες ισχύει $f(d)=f[\pi(d)]$ $\forall d\in D$. Αλλά από την παρατήρηση που κάναμε πριν το θεώρημα η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι τα στοιχεία του D που ανήκουν στον ίδιο κύκλο της π έχουν την ίδια τιμή στην συνάρτηση f (έχουν το ίδιο χρώμα αν χρησιμοποιήσουμε την χρωματική ορολογία).

Αρα από το θεώρημα 8

$$\sum_i \lambda_1(\pi^i) W_i = \left[\sum_{r\in R} w(r) \right]^{b_1} \cdot \left[\sum_{r\in R} w(r)^2 \right]^{b_2} \cdots \left[\sum_{r\in R} w(r)^k \right]^{b_k} \cdots$$

όπου $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$ είναι αντίστοιχα το πλήθος των κύκλων μήκους 1, μήκους 2,..., μήκους k,... στην μετάθεση π.

Αρα έχουμε ότι

$$\sum_i m_i W_i = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} \left\{ \left[\sum_{r\in R} w(r) \right]^{b_1} \cdot \left[\sum_{r\in R} w(r)^2 \right]^{b_2} \cdots \left[\sum_{r\in R} w(r)^k \right]^{b_k} \cdots \right\}$$

αλλά εξ ορισμού

---

* Πολλοί συγγραφείς συμβολίζουν τον κυκλικό δείκτη μίας ομάδας με το σύμβολο $Z(x_1, x_2, .., x_n)$.

$$P_G(x_1,x_2,..x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} x_1^{b_1}\, x_2^{b_2}\, x_n^{b_n} \qquad \text{άρα}$$

$$\sum_i m_i W_i = P_G\left(\sum_{r\in R} w(r),\ \sum_{r\in R}[w(r)]^2,\dots,\ \sum_{r\in R}[w(r)]^n\right) . \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 10. Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Pólya στο παράδειγμα 7 θα έχουμε:

D={οι 6 έδρες του κύβου}

R={χρώμα Α, χρώμα Μ}

G: η ομάδα που δημιουργούν οι περιστροφές του κύβου αλλά

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{24}\left(x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2\right).$$

Αρα $P_G(2,2,2,2) = \frac{1}{24}\left(2^6+3\cdot2^2\cdot2^2+6\cdot2^2\cdot2+6\cdot2^3+8\cdot2^2\right)=10$ όπως είχαμε βρεί εξαντλητικά στην παράγραφο 3. ■

Πόρισμα 12. Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας θα ισούται με $P_G(|R|,|R|,\dots,|R|)$.

Απόδειξη. Αν $w(1)=w(2)=\dots w(|R|)=1$, δηλαδή όλα τα στοιχεία του R έχουν βάρος 1 τότε το βάρος κάθε κλάσης ισοδυναμίας θα είναι 1. Ο κατάλογος λοιπόν θα ισούται με το πλήθος των κλάσεων. ■

Παράδειγμα 11.

1) Χρωματίζουμε τα 9 τετράγωνα μίας 3×3 σκακιέρας με τα χρώματα R και B.

Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς και το ολικό πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών αν

i) οι κατοπτρισμοί της σκακιέρας δεν επιτρέπονται

ii) επιτρέπονται και οι κατοπτρισμοί

Λύση. i)

Εστω η σκακιέρα

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Η ομάδα συμμετριών της σκακιέρας αν οι κατοπτρισμοί δεν ληφθούν υπ'όψη είναι

		Τύπος	Συμβολή
Περιστροφή κατά	0^o: (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)	{9,0,0,...}	x_1^9
	90^o: (1379)(5)(2684)	{1,0,0,4}	$x_1x_4^2$
	180^o: (19)(28)(37)(46)(5)	{1,4,0}	$x_1x_2^4$
	270^o: όπως και η 90^o	{1,0,0,4}	$x_1x_4^2$

αρα

$$P_G(x_1,x_2,x_3\ldots) = \frac{1}{4}\left(x_1^9+2x_1x_4^2+x_1x_2^4\right)$$

και $$P_G(2,2,\ldots.) = \frac{1}{4}\ 2^3+2\cdot 2\cdot 2^2+2\cdot 2^4=2^7+2^2+2^3=140$$

ενώ η αντικατάσταση $x_i \longrightarrow (R+B)^i$ δίνει

$$B^9+3B^8R+10B^7R^2+22B^6R^3+34R^5R^4+34B^4R^5+22B^3R^6+10B^2R^7+3BR^8+R^9$$

με άθροισμα συντελεστών 140.

Με λήμμα Burnside: $C_4=\{1,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3\}$

όλοι οι δυνατοί χρωματισμοί $2^9=512$.

Η ταυτοτική διατηρεί και τους 512 .

Η ρ_4 (και η ρ_4^3) διατηρεί $\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1} = 2^3$.

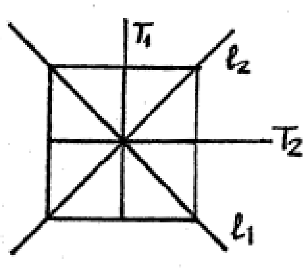
Η ρ_4^2 διατηρεί τους: $\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1} = 2^5$.

X	Ψ	Z
A	M	A
Z	Ψ	X

Αρα έχω: $\dfrac{2^9+2\cdot 2^3+2^5}{4} = 2^7+2^2+2^3=140$

ii) επιτρέπονται και οι κατοπτρισμοί.

Με λήμμα Burnside:



$l_1:\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&4&7&2&5&8&3&6&9\end{pmatrix}=$

$=(1)(5)(9)(24)(37)(68)$

παρόμοια και η l_2

$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&2&1&6&5&4&9&8&7\end{pmatrix}=$

$=(13)(46)(2)(5)(9)(78)$

παρόμοια και η τ_2

$G=\{1,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,l_1,l_2\}$.

Η l_1 διατηρεί τους $\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{2} = 2^6$

Η τ_1 διατηρεί τους $\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1} = 2^6$.

Αρα $\frac{1}{8}\left(2^9+2\cdot 2^3+2^5+2\cdot 2^6+2\cdot 2^6\right)=102$ (οι 140 ελλατώθηκαν σε 102)

με Pólya: Τύπος της l_1 (και της l_2) $x_1^3\,x_2^3$

τύπος της τ_1 (και της τ_2) $x_1^3\,x_2^3$

άρα ο κυκλικός δείκτης θα έχει ακόμα τον προσθετέο $4x_1^3x_2^3$. Η γεννήτρια συνάρτηση θα έχει και τον προσθετέο $4(R+B)^3(R^2+B^2)^3$ ήτοι θα είναι

$$B^9+3B^8R+8B^7R^2+16B^6R^3+23B^5R^4+23B^4R^5+16B^3R^6+8B^2R^7+3BR^8+R^9$$

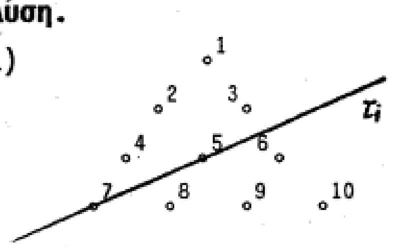
με άθροισμα συντελεστών 102. ■

Παράδειγμα 12.

Σχηματίζουμε με 10 μπάλλες ένα ισόπλευρο τρίγωνο με 1 μπάλλα στην πρώτη γραμμή 2 στην δεύτερη 3 στην τρίτη και 4 στην τέταρτη.
Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση για τους μη ισοδύναμους χρωματισμούς με τα χρώματα R, B αν i) δεν επιτρέπονται οι κατοπτρισμοί και ii) επιτρέπονται κατοπτρισμοί.

Λύση.

i)



$$C_3=\{i,\rho_3,\rho_3^2\}$$

$$\rho_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 10 & 6 & 9 & 3 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix}=$$

$$=(1\,10\,7)(2\,6\,8)(3\,9\,4)(5)$$

παρόμοια η ρ_3^2

κυκλικός δείκτης $\frac{1}{3}\left(x_1^{10}+2x_1x_3^3\right)$

γεννήτρια συνάρτηση $R^{10}+4R^9B+15R^8B^2+41R^7B^3+72R^6B^4+84R^5B^5+72R^4B^6+$
$+41R^3B^7+15R^2B^8+4RB^9+B^{10}$ άθροισμα 352.

ii) θα υπάρχει και μεταθέσεις τ_1, τ_2, τ_3 όπου

$$\tau_1\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 10 & 9 & 6 & 8 & 5 & 3 & 7 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=(1\,10)(2\,9)(3\,6)(4\,8)(5)(7)$$

τύπου (2,4,0,0...)

παρόμοια δρούν και οι τ_2, τ_3 .

Ο κυκλικός δείκτης θα είναι $\frac{1}{6}\left(x_1^{10}+2x_1x_3^3+3x_1^2x_2^4\right)$
που δίνει την γεννήτρια συνάρτηση.

$$R^{10}+3R^9B+10R^8B^2+25R^7B^3+41R^6B^4+48R^5B^5+41R^4B^6+25R^3B^7+10R^2B^8+3RB^9+B^{10}$$

με άθροισμα συντελεστών 208. ■

Παράδειγμα 13.

Εστω D το σύνολο των 6 εδρών ενός κύβου, και έστω G η ομάδα G όλων των δυνατών περιστροφών του κύβου.

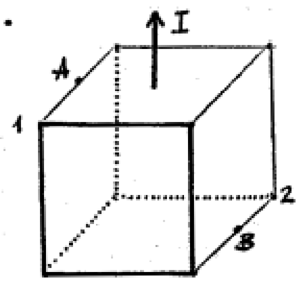
i) Ποιός ο κυκλικός δείκτης της G

ii) Αν οι 6 έδρες χρωματιστού/ με διαφορετικά χρώματα πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν;

iii) Αν ένα από τα 6 χρώματα είναι το R πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί υπάρχουν με ακριβώς 3 έδρες χρώματος R;

iv) Αν έχουμε 4 χρώματα A, B, C, D πόσοι χρωματισμοί υπάρχουν με 2 έδρες χρώματος A, 2B,1C, 1D;

Λύση.



Οι περιστροφές του κύβου δρούν στο σύνολο των **εδρών:**

i) η ταυτοτική τύπου (6,0,0...)

ii) 3 περιστροφές κατά 180° περί τον άξονα I που διέρχεται από το κέντρο δύο απέναντι εδρών:
Δύο έδρες σταθερές, οι υπόλοιπες 4 αναλύονται σε δύο 2-κύκλους άρα τύπος: (2,2,0...)

iii) 6 περιστροφές (3 κατά 90° 3 κατά 270°) περί τον ίδιο άξονα:
Δύο έδρες σταθερές οι υπόλοιπες 4 σχηματίζουν έναν 4-κύκλο άρα τύπος (2,0,0,1)

iv) Περιστροφή κατά 180° περί άξονα που διέρχεται από τα μέσα δύο απέναντι ακμών. Υπάρχουν 6 ζεύγη απέναντι ακμών άρα 6 τέτοιες περιστροφές.

Η περιστροφή περί τον άξονα AB απεικονίζει κάθε έδρα στην απέναντί της άρα αναλύεται σε τρείς 2-κύκλους ήτοι ο τύπος της είναι (0,3,0...).

v) Περιστροφές κατά 120° και 240° περί άξονες που διέρχονται από δύο απέναντι κορυφές. Εχουμε 4 τέτοιους άξονες όπως ο 12 άρα 8 τέτοιες περιστροφές. Η περιστροφή κατά 120° περί τον 12 δημιουργεί δύο 3-κύκλους (ο ένας αποτελείται από τις 3 έδρες της τριέδρου με κορυφή 1 και 0 άλλος από τις 3 έδρες της

τριέδρου με κορυφή 2) ήτοι ο τύπος είναι (0,0,2...).
Ο κυκλικός δείκτης είναι λοιπόν

$$P_G = \frac{1}{24}\left(x_1^6+3x_1^2x_2^2+6x_1^2x_4+6x_2^3+8x_3^2\right)$$

ii) από το λήμμα του Burnside θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσες από τις μεταθέσεις αυτές αφήνουν αμετάβλητους τους 6!=720 δυνατούς χρωματισμούς των εδρών του κύβου με 6 χρώματα.
Η ταυτοτική αφήνει και τους 720 χρωματισμούς αμετάβλητους. Ολες οι άλλες περιστροφές εφόσον κάθε έδρα έχει διαφορετικό χρώμα δεν αφήνουν αμετάβλητο κανένα χρωματισμό.
Αρα το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών είναι $\frac{1}{24}(720+0+\ldots+0)=30$.

iii) Εστω x το βάρος του χρώματος R και 1 το βάρος του καθενός από τα 5 άλλα χρώματα. Θα βρούμε τον συντελεστή του x^3 στην παράσταση που προκύπτει από την αντικατάσταση $x_i \to (5+x)^i$ ήτοι την

$$\frac{1}{24}\left[(5+x)^6+3(5+x)^2(5+x^2)^2+6(5+x)^2(5+x^4)+6(5+x^2)^3+8(5+x^3)^2\right]$$

ο συντελεστής του x^3 είναι λοιπόν

$$\frac{1}{24}\left(\binom{6}{3}\cdot 5^3+ 3\cdot 10\cdot 2\cdot 5 + 0 + 0\cdot + 8\cdot 2\cdot 5\right)=120.$$

iv) θέλουμε τον συντελεστή του όρου $x^2y^2z\omega$ αν x,y,z,ω τα βάρη των χρωμάτων A,B,C,D αντίστοιχα.
η γεννήτρια συνάρτηση είναι αν θέσουμε $x_i \to (x+y+z+\omega)^i$

$$\frac{1}{24}\left[(x+y+z+\omega)^6+3(x+y+z+\omega)^2(x^2+y^2+z^2+\omega^2)^2+\right.$$
$$\left.+6(x+y+z+\omega)^2(x^4+y^4+z^4+\omega^4)+6(x^2+y^2z^2+\omega^2)^3+8(x^3+y^3+z^3+\omega^3)^2\right]$$

ο συντελεστής του $x^2y^2z\omega$ είναι από τον 1ον προσθετέο $\binom{6}{2211}$
από τον 2ο προσθετέο $3(\ldots+2z\omega+\ldots)(\ldots+2x^2y^2+\ldots)=3\cdot 2\cdot 2$
από τους υπόλοιπους προσθετέους 0
άρα ο συντελεστής του $x^2y^2z\omega$ είναι συνολικά $\frac{1}{24}(180+12+0)=8$. ∎

Παράδειγμα 14.

Θεωρώ τις περιστροφές ενός κύβου και τους χρωματισμούς των **κορυφών** του με δύο χρώματα B,W.

i) Να βρεθεί ο κυκλικός δείκτης της ομάδας G .

ii) Με πόσους τρόπους μπορώ να χρωματίσω 5 κορυφές R και 3 B.

iii) Ποιά η γεννήτρια συνάρτηση αν έχω 2 χρώματα; Αν έχω n χρώματα;

iv) Δείξτε ότι το $n^8+17n^4+6n^2$ διαιρείται με το 24 $\forall$ $n\in N$.

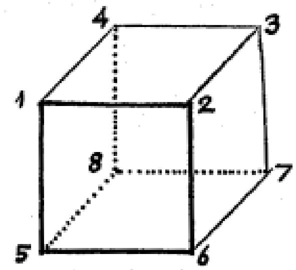
Λύση.

Ακολουθώντας την αρίθμηση των συμμετριών του κύβου του προηγούμενου παραδείγματος έχω:

i) η ταυτοτική τύπου (8,0,0....)

ii) 3 περιστροφές κατά 180° της μορφής (13)(24)(57)(68) τύπου (0,4,0...)

iii) 6 περιστροφές (3 κατά 90° 3 κατά 270°) της μορφής (1234)(5678) τύπου (0,0,0,2)



iv) 6 περιστροφές κατά 180° της μορφής (14)(67)(35)(28) τύπου (0,0,0,2)

v) 8 περιστροφές κατά 120° και 240^0 της μορφής (1)(524)(7)(386) τύπου (2,0,2,...)

άρα ο κυκλικός δείκτης είναι

$$\frac{1}{24}\left(x_1^8+9x_2^4+8x_1^2x_3^2+6x_4^2\right).$$

ii) Πρέπει να βρώ τον συντελεστή του όρου B^5W^3 αν κάνω την αντικατάσταση $x_i \longrightarrow (B+W)^i$ έχω

$$\frac{1}{24}\left[(8+W)^8+9(B^2+W^2)^4+8(B+W)^2(B^3+W^3)^2+6(B^4+W^4)^2\right]$$

ο όρος B^5W^3 θάχει συντελεστή

από τον 1ο προσθετέο $\binom{8}{5}$

από τον 2ο προσθετέο 0 (όλοι άρτιοι)

από τον 3ο προσθετέο $8(B^2+2BW+W^2)(B^6+2B^3W^3+W^6)=8\cdot 1\cdot 2$

από τον 4ο προσθετέο 0 (όλοι οι όροι άρτιοι)

άρα ο συντελεστής είναι

$$\frac{1}{24}\left[\binom{8}{5}+16\right]=3$$

αυτοί είναι οι i) 1W 2W 3W υπόλοιπα B
ii) 1W 2W 8W υπόλοιπα B
iii) 1W 3W 8W υπόλοιπα B.

iii) Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$b^8+b^7w+3b^6w^2+3b^5w^3+7b^4w^4+3b^3w^5+3b^2w^6+b^7w+w^8$$

το σύνολο των χρωμάτων είναι 23 που προκύπτει και από τον κυκλικό δείκτη αν θέσω $x_i=2$ χρώματα .

Αν n χρώματα η γεννήτρια συνάρτηση γίνεται αντικαθιστώντας στον κυκλικό δείκτη.

$$P_G(n,n,\ldots,n)=\frac{1}{24}(n^8+9n^4+8n^2n^2+6n^2)=\frac{1}{24}(n^8+17n^4+6n^2).$$

vi) Ο αριθμός $\frac{1}{24}(n^8+17n^4+6n^2)$ εφόσον μας δίνει το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των κορυφών ενός κύβου με n χρώματα πρέπει νάναι προφανώς ακέραιος άρα $24|n^8+17n^4+6n^2$. ■

Παράδειγμα 15.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να τοποθετήσω 6 μπάλλες (3 χρώματος R-2W-1B) σε 3 **διαφορετικά** κουτιά.

1η λύση. Pólya

Εστω r_1 r_2 r_3 w_1 w_2 b οι 6 μπάλλες.

Θα βρώ τις ισοδύναμες μεταθέσεις: 1) η ταυτοτική $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & w_1 & w_2 & b \\ r_1 & r_2 & r_3 & w_1 & w_2 & b \end{pmatrix}$

καταγράφω και τις υπόλοιπες αναφέροντας μόνο τη δεύτερη γραμμή.

2)	r_1 r_2 r_3 w_2 w_1 b	9)	r_3 r_1 r_2 w_1 w_2 b
3)	r_1 r_3 r_2 w_1 w_2 b	10)	r_3 r_1 r_2 w_2 w_1 b
4)	r_1 r_3 r_2 w_2 w_1 b	11)	r_3 r_2 r_1 w_1 w_2 b
5)	r_2 r_1 r_3 w_1 w_2 b	12)	r_3 r_2 r_1 w_2 w_1 b
6)	r_2 r_1 r_3 w_2 w_1 b		
7)	r_2 r_3 r_1 w_1 w_2 b		Σύνολο 12 μεταθέσεις.
8)	r_2 r_3 r_1 w_2 w_1 b		

Η πρώτη έχει τύπο (6,0,0...).

Η 2η, 3η, 5η και 11η έχουν τύπο (4,1,0).

Η 4η 6η και 12η έχουν τύπο (2,2,0).

Η 7η και 9η έχουν τύπο (3,0,1).

Η 8η και 10η έχουν τύπο (1,1,1).

Αρα $$P_G=\frac{1}{12}\left(x_1^6+4x_1^4x_2+3x_1^2x_2^2+2x_1^3x_3+2x_1x_2x_3\right)$$

και $$P_G(3,3,3)=\frac{1}{2}\,(3^6+4\cdot3^4\cdot3+3\cdot3^2\cdot3^2+2\cdot3^3\cdot3+2\cdot3\cdot3\cdot3)=180.$$

2η Λύση. Αν και τα 3 κουτιά είναι ίδια θάχω (εξαντλητικά) τις εξης λύσεις

1)	BRRRWW	-	-	*
2)	BWWRR	R		
3)	BWWR	RR		
4)	BWWR	R	R	*
5)	BWW	RRR		

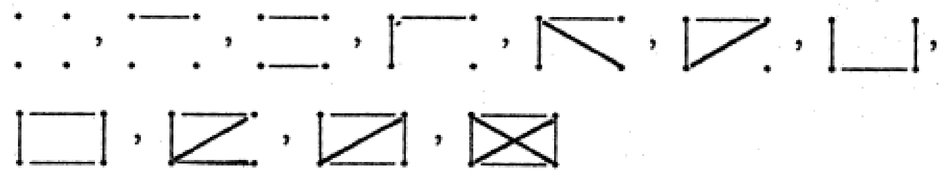
6) BWW	RR	R	
7) BWRRR	W		
8) BWRR	WR		
9) BWRR	W	R	
10) BWR	WRR		
11) BWR	WR	R	
12) BWR	W	RR	
13) BW	WRRR		
14) BW	WRR	R	
15) BW	WR	RR	
16) BW	W	RRR	
17) BRRR	WW		
18) BRRR	W	W	*
19) BRR	WWR		
20) BRR	WW	R	
21) BRR	WR	W	
22) BR	WWRR		
23) BR	WWR	R	
24) BR	WW	RR	
25) BR	WRR	W	
26) BR	WR	WR	*
27) B	WWRRR		
28) B	WWRR	R	
29) B	WWR	RR	
30) B	WW	RRR	
31) B	WRR	WR	
32) B	WR	WRR	

Η καθεμία από τις 32 αυτές λύσεις δημιουργεί 3!=6 λύσεις αν τα κουτιά είναι διαφορετικά εκτός από τις λύσεις 1-4-18-26 που λόγω συμμετρίας δημιουργούν $\frac{1}{2}$ 3!=3 λύσεις.

Αρα αν τα κουτιά είναι διακεκριμένα θάχω 28x6+4x3=168+12=180 λύσεις όπως βρήκαμε και πρίν. ∎

Παράδειγμα 16.

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος του Pólya θα απαριθμήσουμε όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα με n κορυφές και κάθε δυνατό αριθμό πλευρών e όπου $0 \leq e \leq \binom{n}{2}$ στην απλή περίπτωση όπου n=4. Φυσικά το πρόβλημα στην ειδική αυτή περίπτωση λύνεται πολύ πιό εύκολα σχεδιάζοντας απλά τα 11 δυνατά μή ισόμορφα γραφήματα που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα γράφημα χωρίς πλευρές, ένα με 1, δύο με 2, τρία διαφορετικά γραφήματα με 3 πλευρές δύο με 4 πλευρές, ένα με 5 και ένα με 6 το K_4.

Ας ονομάσουμε $\mathcal{G}_4$ το σύνολο όλων των γραφημάτων τάξης 4 με σύνολο κορυφών V={1,2,3,4} και σύνολο πλευρών E⊆X={12, 13, 14, 23, 24, 34} όπου χρησιμοποιήσαμε την συντομογραφία 12={1,2} κ.ο.κ.

Ενα τέτοιο γράφημα $H=(V,E)\in\mathcal{G}_4$ είναι το διπλανό γράφημα όπου E={13,23,34,14}.

Το γράφημα H μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας χρωματισμός των πλευρών του συνόλου X με δύο χρώματα, το χρώμα N (ναί) και το χρώμα O (όχι) όπου οι πλευρές του E(H) παίρνουν το χρώμα N και τα στοιχεία του X που δεν ανήκουν στο E(H) παίρνουν το χρώμα O.

Στο παράδειγμά μας το H μας δίνει τον χρωματισμό (O,N,N,N,O,N) διότι 12 ∉ E(H) άρα η πλευρά 12 παίρνει το χρώμα O, 13 ∈ E(H) άρα η πλευρά 13 χρωματίζεται N κ.ο.κ.

Υπάρχει λοιπόν μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των 64 γραφημάτων με ονομασία και των 64 διχρωματισμών του συνόλου X.

Ας θεωρήσουμε τα γραφήματα $H_1=(V,E_1)$ και $H_2=(V,E_2)$. Εξ ορισμού τα γραφήματα H_1 και H_2 ονομάζονται ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει μία μετάθεση f του συνόλου V={1,2,3,4} (ήτοι $f\in S_4$) τέτοια ώστε $\{i,j\}=ij\in E_1(H_1)$ αν και μόνον εάν $f(i)f(j)=\{f(i),f(j)\}\in E_2(H_2)$.

Θα εξετάσουμε πως η καθεμία από τις 24 μεταθέσεις του S_4 δρα στο σύνολο X.

Οι μεταθέσεις του S_4 είναι οι εξείς

i) (1)(2)(3)(4)

ii) (12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2)

iii) (123)(4), (124)(3), (134)(2), (134)(1), (132)(4), (142)(3),
(143)(2), (243)(1)

iv) (12)(34), (13)(24), (14)(23)

v) (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432).

Η ταυτοτική μετάθεση $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ μεταθέτει την πλευρά ij={i,j} στην πλευρά f(i)f(j)={f(i),f(j)}={i,j}=ij άρα δρά στο σύνολο X ως εξής: $\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\end{pmatrix}$ η οποία αναλύεται σε έξι κύκλους μήκους 1 (σε έξι 1-κύκλους).

Καθεμία από τις 6 μεταθέσεις της κατηγορίας (ii) π.χ. η (1)(2)(34) δρά στο X ως εξής: $\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 12 & 14 & 13 & 24 & 23 & 34\end{pmatrix}$ η οποία αναλύεται σε δύο 1-κύκλους και σε δύο 2-κύκλους.

Καθεμία από τις 8 μεταθέσεις της κατηγορίας (iii) π.χ. η (134)(2) δρά στο X ως εξής: $\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 23 & 34 & 13 & 24 & 12 & 14\end{pmatrix}$ δηλαδή αναλύεται σε δύο 3-κύκλους.

Καθεμία από τις 3 μεταθέσεις της κατηγορίας iv π.χ. η (13)(24) δρα στο X ως εξής: $\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 34 & 13 & 23 & 14 & 24 & 12\end{pmatrix}$ δηλαδή αναλύεται σε δύο 1-κύκλους και δύο 2-κύκλους όπως οι μεταθέσεις της κατηγορίας (ii).

Τέλος καθεμία από τις 6 μεταθέσεις της κατηγορίας (v) π.χ. η (1342) δρά στο X ως εξής: $\begin{pmatrix}12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34\\ 13 & 34 & 23 & 14 & 12 & 24\end{pmatrix}$ δηλαδή αναλύεται σε έναν 4-κύκλο και έναν 2-κύκλο.

Ας ονομάσουμε G την ομάδα μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου X που προκύπτει έτσι. Θέλουμε λοιπόν να μετρήσουμε τους διχρωματισμούς του συνόλου X οι οποίοι δεν είναι ισοδύναμοι σε σχέση με την ομάδα G. Αλλά αυτό σύμφωνα με το θεώρημα του Pólya γίνεται αν βρούμε τον κυκλικό δείκτη του G, πράγμα που έχουμε περίπου πετύχει.

Η ταυτοτική μετάθεση έχει τύπο (6,0,0,0,0,0) και συνεισφέρει στον κυκλικό δείκτη τον προσθετέο x_1^6.

Οι 6 μεταθέσεις της κατηγορίας (ii) παράγουν 6 μεταθέσεις τύπου (2,2,0,0,0,0). Τον ίδιο τύπο έχουν και οι 3 μεταθέσεις που παράγονται από τις μεταθέσεις της κατηγορίας (iv). Οι 9 αυτές συνολικά μεταθέσεις συνεισφέρουν στον κυκλικό δείκτη τον προσθετέο 9 $x_1^2\, x_2^2$.

Οι 8 μεταθέσεις της κατηγορίας (iii) παράγουν 8 μεταθέσεις με τύπο (0,0,2,0,0,0) και συνεισφέρουν στον κυκλικό δείκτη τον προσθετέο 8 x_3^2.

Τέλος οι 6 μεταθέσεις της κατηγορίας (v) παράγουν 6 μεταθέσεις με τύπο (0,1,0,1,0,0) και συνεισφέρουν στον κυκλικό δείκτη τον προσθετέο 6 x_2x_4.

Αρα ο κυκλικός δείκτης της ομάδας G είναι $P_G(x_1,x_2,\ldots,x_6)$ = $=\frac{1}{24}\left(x_1^6+9\ x_1^2x_2^2+8\ x_3^2+6\ x_2x_4\right)$.

Η γεννήτρια συνάρτηση που μας δίνει το πλήθος των μη ισοδύναμων διχρωματισμών προκύπτει σύμφωνα με το θεώρημα του Pólya αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις $x_i \longrightarrow N^i + O^i$ $1 \le i \le 6$ οπότε παίρνουμε

$$\frac{1}{24}\left[(N+O)^6 + 9(N+O)^2(N^2+O^2)^2 + 8(N^3+O^3)^2 + 6(N^2+O^2)(N^4+O^4)\right] =$$
$$= N^6+N^5O+2N^4O^2+3N^3O^3+2N^2O^4+N\ O^5+O^6.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων τάξης 4 με 6 πλευρές είναι 1 (ο συντελεστής του προσθετέου N^6), με 4 πλευρές είναι 2 (ο συντελεστής του N^4O^2), με 3 πλευρές είναι 3 (ο συντελεστής του N^3O^3) κ.ο.κ. Τα γραφήματα αυτά φαίνονται στο σχήμα που είναι στην αρχή του παραδείγματος αυτού. ■

Παράδειγμα 17.

Θα εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα αν n=5. Ο πίνακας που μας δίνει τα 34 μη ισοδύναμα γραφήματα τάξης 5 είναι ο εξής:

e: 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9-10

G: 1 1 2 4 6 6 6 4 2 1 1 .

Το σύνολο X που θα χρωματιστεί πάλι με τα δύο χρώματα N και O είναι τώρα το

X={12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45} ενώ οι 5! = 120 μεταθέσεις της S_5 είναι οι:

i)	(1)(2)(3)(4)(5)	υπάρχει 1	μετάθεση στην κατηγορία αυτή
ii)	(12)(3)(4)(5)	υπάρχουν 10	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή
iii)	(123)(4)(5)	υπάρχουν 20	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή
iv)	(123)(45)	υπάρχουν 20	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή
v)	(1234)(5)	υπάρχουν 30	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή
vi)	(12)(34)(5)	υπάρχουν 15	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή
vii)	(12345)	υπάρχουν 24	μεταθέσεις στην κατηγορία αυτή

Εξετάζουμε πως δρούν οι 120 αυτές μεταθέσεις της S_5 στο σύνολο X.

i) Η ταυτοτική μετάθεση παράγει την ταυτοτική μετάθεση της ομάδας G η οποία αναλύεται σε δέκα 1-κύκλους και συνεισφέρει τον προσθετέο x_1^{10} στον κυκλικό δείκτη της G.

ii) Καθεμία από τις 10 μεταθέσεις της κατηγορίας (ii) π.χ. η (12)(3)(4)(5) δρα στο X ως εξής:

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 23 & 24 & 25 & 13 & 14 & 15 & 34 & 35 & 45 \end{pmatrix}$ που αναλύεται σε τέσσερεις 1-κύκλους και τρείς 2-κύκλους συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $10\ x_1^4\ x_2^3$ στον κυκλικό δείκτη της G.

iii) Καθεμία από τις 20 μεταθέσεις της κατηγορίας (iii) π.χ. η (123)(4)(5) δρά στο X ως εξής:

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 12 & 24 & 25 & 13 & 34 & 35 & 14 & 15 & 45 \end{pmatrix}$ που αναλύεται σε έναν 1-κύκλο και τρείς 3-κύκλους συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $20\ x_1\ x_3^3$ στον κυκλικό δείκτη της G .

iv) Καθεμία από τις 20 μεταθέσεις της κατηγορίας (iv) π.χ. η (123)(45) δρά στο X ως εξής:

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 12 & 25 & 24 & 13 & 35 & 34 & 15 & 14 & 45 \end{pmatrix}$ που αναλύεται έναν 1-κύκλο έναν 3-κύκλο και έναν 6-κύκλο συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $20\ x_1x_3x_6$ στον κυκλικό δείκτη της G.

v) Καθεμία από τις 30 μεταθέσεις της κατηγορίας (v) π.χ. η (1234)(5) δρά στο X ως εξής:

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 12 & 25 & 34 & 13 & 35 & 14 & 45 & 15 \end{pmatrix}$ που αναλύεται σε έναν 2-κύκλο και σε δύο 4-κύκλους συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $30\ x_2x_4^2$ στον κυκλικό δείκτη της G.

vi) Καθεμία από τις 15 μεταθέσεις της κατηγορίας (vi) π.χ. η (12)(34)(5) δρά στο X ως εξής:

$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 12 & 24 & 23 & 25 & 14 & 13 & 15 & 34 & 45 & 35 \end{pmatrix}$ που αναλύεται σε δύο 1-κύκλους και τέσσερεις 2-κύκλους συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $15\ x_1^2\ x_2^4$ στον κυκλικό δείκτη της G.

vii) Τέλος καθεμία από τις 24 μεταθέσεις της κατηγορίας (vii) π.χ. η (12345) δρά στο X ως εξής:

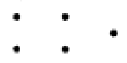
$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 & 23 & 24 & 25 & 34 & 35 & 45 \\ 23 & 24 & 25 & 12 & 34 & 35 & 13 & 45 & 14 & 15 \end{pmatrix}$ που αναλύεται σε δύο 5-κύκλους συνεισφέρει λοιπόν τον προσθετέο $24\ x_5^2$ στον κυκλικό δείκτη της G. Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας G είναι λοιπόν

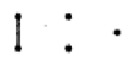
$$P_6(x_1,\ldots,x_{10})=\frac{1}{120}\left(x_1^{10}+10x_1^4x_2^3+20x_1x_3^3+20x_1x_3x_6+30x_2x_4^2+15x_1^2x_2^4+24x_5^2\right).$$

Οπότε η αντικατάσταση $X_i=N^i+O^i \quad 1\le i\le 10$ μας δίνει από το θεώρημα του Pólya την ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση:

$$\frac{1}{120}\Big[(N+O)^{10}+10(N+O)^4(N^2+O^2)^3+20(N+O)(N^3+O^3)^3+$$
$$+20(N+O)(N^3+O^3)(N^6+O^6)+30(N^2+O^2)(N^4+O^4)^2+15(N+O)^2(N^2+O^2)^4+$$
$$+24(N^5+O^5)^2\Big] = N^{10}+N^9O+2N^8O^2+4N^7O^3+6N^6O^4+6N^5O^5+6N^4O^6+$$
$$=4N^3O^7+2N^2O^8+NO^9+O^{10}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πλήθος των μη ισομόρφων γραφημάτων με n=5 κορυφές και 7 πλευρές είναι 4 (ο συντελεστής του όρου N^7O^3) με 3 πλευρές είναι πάλι 4 (ο συντελεστής του όρου N^3O^7) κ.ο.κ. τα γραφήματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα όπου $0\le e\le 5$. Για $6\le e\le 10$ τα γραφήματα είναι τα συμπληρωματικά των γραφημάτων του σχήματος

e=0 

e=1 

e=2 

e=3 

e=4 

e=5 

e=6 τα συμπληρωματικά των 6 γραφημάτων με e=4
e=7 τα συμπληρωματικά των 3 γραφημάτων με e=3
e=8 τα συμπληρωματικά των 2 γραφημάτων με e=2
e=9 το συμπληρωματικό του γραφήματος με e=1
e=10:K_5 το συμπληρωματικό του γραφήματος με e=0. ∎

Παράδειγμα 18.

Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών χρωματισμών των κορυφών ενός τετραγώνου με k=3 χρώματα.

Λύση. Θα λύσουμε το απλό αυτό πρόβλημα με δύο τρόπους i) με την βοήθεια του λήματος του Burnside και ii) με την βοήθεια του θεωρήματος του Pólya.

i) Burnside

Θα βρούμε την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου . Αυτή κατά τα γνωστά θα έχει 8 στοιχεία τις μεταθέσεις $i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ περιστροφή περί το κέντρο κατά 0^o

$\rho_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ περιστροφή περί το κέντρο κατά 90^o

$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ περιστροφή περί το κέντρο κατά 180^o

$\rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ περιστροφή περί το κέντρο κατά 270^o

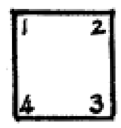
$l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ κατοπτρισμός με άξονα την 13

$l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ κατοπτρισμός με άξονα την 24

$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ κατοπτρισμός με άξονα την μεσοκάθετο των 12, 34

$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ κατοπτρισμός με άξονα την μεθοκάθετο των 14, 23

ήτοι $D_4=\{i,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,l_1,l_2,\tau_1,\tau_2\}$.



Το σύνολο όλων των δυνατών χρωματισμών των 4 κορυφών με k=3 χρώματα είναι k^4 ήτοι 3^4=81 χρωματισμοί πολλοί όμως από αυτούς συμπίπτουν αν λάβουμε υπ'όψη τις συμμετρίες της ομάδας D_4.

Σύμφωνα με το λήμμα του Burnside πρέπει να υπολογίσουμε πόσοι από τους χρωματισμούς αυτούς μένουν σταθεροί από τις 8 μεταθέσεις της ομάδας D_4.

Η ταυτοτική μετάθεση i αφήνει σταθερούς προφανώς και τους 81 χρωματισμούς του τετραγώνου.

Η μετάθεση ρ_4 αφήνει σταθερούς μόνο τους 3 χρωματισμούς του τετραγώνου που χρησιμοποιούν ένα μόνο χρώμα ήτοι αν τα 3 χρώματα είναι R, B, G αφήνει σταθερούς τους χρωματισμούς (R,R,R,R), (B,B,B,B) και (G,G,G,G). Παρόμοια συμπεριφέρεται και η ρ_4^3.

Η ρ_4^2 αφήνει αμετάβλητους τους χρωματισμούς που έχουν το ίδιο χρώμα στα άκρα της κάθε διαγωνίου ήτοι τους RRRR, RBRB, RGRG, BRBR, BBBB, BGBG, GRGR, GBGB, GGGG σύνολο 9 χρωματισμούς.

Η μετάθεση l_1 αφήνει αμετάβλητους τους χρωματισμούς που έχουν ίδιο χρώμα στα άκρα της διαγωνίου 24 ανεξάρτητα από το τι χρώμα έχουν οι κορυφές 1 και 3 ήτοι τους χρωματισμούς XRYR, XBYB, XGYG με όπου τα X, Y παίρνουν τις τιμές R,B,G. Σύνολο 27 τέτοιοι χρωματισμοί. Παρόμοια η l_2 αφήνει αμετάβλητους τους 27 χρωματισμούς της μορφής RXRY, GXGY, BXBY.

Η μετάθεση τ_1 αφήνει αμετάβλητους τους χρωματισμούς όπου οι κορυφές 1 και 2 έχουν το ίδιο χρώμα και επίσης οι 3 και 4 έχουν το ίδιο χρώμα ήτοι τους XXYY που είναι 9. Παρόμοια η τ_2 αφήνει αμετάβλητους τους 9 χρωματισμούς της μορφής XYYX.

Αρα από το λήμμα του Burnside έχουμε ότι το ζητούμενο πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών των κορυφών ενός τετραγώνου με k=3 χρώματα ισούται με

$$\frac{1}{8}\,(81+3+9+3+27+27+9+9) = \frac{168}{8}\ 21. \qquad \blacksquare$$

ii) με το θεώρημα του Pólya.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τον κυκλικό δείκτη της ομάδας D_4.

Η μετάθεση $i=(1)(2)(3)(4)$ είναι τύπου $(4,0,0,0)$

Η μετάθεση $\rho_4=(1234)$ είναι τύπου $(0,0,0,1)$

Η μετάθεση $\rho_4^2=(13)(24)$ είναι τύπου $(0,2,0,0)$

Η μετάθεση $\rho_4^3=(1432)$ είναι τύπου $(0,0,0,1)$

Η μετάθεση $l_1=(1)(3)(24)$ είναι τύπου $(2,1,0,0)$

Η μετάθεση $l_2=(13)(2)(4)$ είναι τύπου $(2,1,0,0)$

Η μετάθεση $\tau_1=(12)(34)$ είναι τύπου $(0,2,0,0)$

Η μετάθεση $\tau_2=(14)(23)$ είναι τύπου $(0,2,0,0)$

Αρα ο κυκλικός δείκτης της D_4 είναι

$$P_{D_4}(x_1,\ldots x_4) = \frac{1}{8}\left(x_1^4+ 2x_1^2x_2+ 3x_2^2+ 2x_4\right)$$

Η απλή μορφή του θεωρήματος του Pólya δίνει ότι το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών των κορυφών του τετραγώνου με k=3 χρώματα προκύπτει αν στον κυκλικό δείκτη θέσω $z_1=z_1=z_3=z_4=k=3$

$$\text{ήτοι}\quad \frac{1}{8}\,(3^4+2\cdot 3^2\cdot 3+3\cdot 9+2\cdot 3) = \frac{1}{8}\,(81+54+27+6)=21.$$

Αν στον κυκλικό δείκτη κάνουμε την αντικατάσταση $x_i=(B+R+G)^i$ $1\le i\le 4$ θα πάρουμε από το θεώρημα του Pólya την γεννήτρια συνάρτηση των μη ισοδύναμων χρωματισμών ήτοι

$$\frac{1}{8}\left[(B+R+G)^4+2(B+R+G)^2(B^2+R^2+G^2)+3\left(B^2+R^2+G^2\right)^2+2(B^4+R^4+G^4)\right]=$$
$$= B^4+R^4+G^4+B^3R+BR^3+B^3G+BG^3+R^3G+RG^3+2B^2R^2+2B^2G^2+2R^2G^2+$$
$$+\ 2B^2RG+2R^2BG+2G^2BR$$

που μας λέει επιπλέον ότι υπάρχουν δύο μη ισοδύναμοι χρωματισμοί με 2B 1R και 1G κορυφές (ο συντελεστής του B^2RG) και συγκεκριμένα ο BBRG και BRBG ένας μόνο χρωματισμός με 3B και 1G (ο συντελεστής του B^3G) κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ακόμα ότι το άθροισμα των συντελεστών των διαφόρων μονωνύμων είναι πάλι 21.

Στην γενική περίπτωση που έχουμε k χρώματα το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών των κορυφών του τετραγώνου θα είναι

$$P_{D_4}(K,K,K,K) = \frac{K^4+2K^3+3K^2+2K}{8} \ . \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 19.

Πόσα κομπολόγια κατασκευάζονται με 3 μαύρες και 13 άσπρες χάντρες; Λύσαμε το παράδειγμα αυτό με την βοήθεια του λήμματος του Burnside και βρήκαμε 21 κομπολόγια. Τώρα θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Pólya.

Οι 32 συμμετρίες του κανονικού 16-γώνου χωρίζονται σε 16 περιστροφές και 16 κατοπτρισμούς.

Οι 16 περιστροφές κατά γωνία $k\cdot 22^{\circ}\cdot 30'$ $0\leq k\leq 15$ περιγράφονται από τις εξής 16 μεταθέσεις

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16) τύπου (16,0,0...) (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16) ένας 16-κύκλος
(1 3 5 7 9 11 13 15) (1 4 6 8 10 12 14 16) τύπου (0,0,0,0,0,0,0,2)
(1 4 7 10 13 16 3 6 9 12 15 2 5 8 11 14) ένας 16-κύκλος
(1 5 9 13) (2 6 10 14) (3 7 11 15) (4 8 12 16) τύπου (0,0,0,4)
(1 6 11 16 5 10 15 4 9 14 3 8 13 2 7 12) ένας 16-κύκλος
(1 7 13 3 9 15 5 11) (2 8 14 4 10 16 6 12) τύπου (0,0,0,0,0,0,0,2)
(1 8 15 6 13 4 11 2 9 16 7 14 5 12 3 10) ένας 16-κύκλος
(19)(2 10)(3 11)(4 12)(5 13)(6 14)(7 15)(8 16) τύπου (0,8,0,0,...)
(1 10 3 12 5 14 7 16 9 2 11 4 13 6 15 8) ένας 16-κύκλος
(1 11 5 15 9 3 13 7)(2 12 6 16 10 4 14 8) τύπου (0,0,0,0,0,0,0,2)
(1 12 7 2 13 8 3 14 9 4 15 10 5 16 11 6) ένας 16-κύκλος
(1 13 9 5)(2 14 10 6)(3 15 11 7)(4 16 12 8) τύπου (0,0,0,4)
(1 14 11 8 5 2 15 12 9 6 3 16 13 10 7 4) ένας 16-κύκλος
(1 15 13 11 9 7 5 3)(2 16 14 12 8 6 4) τύπου (0,0,0,0,0,0,0,2)
(1 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2) ένας 16-κύκλος.

Οι 16 κατοπτρισμοί 8 περί άξονα μεσοκάθετο σε δύο απέναντι πλευρές και 8 περί άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές αναλύονται σε κύκλους ως εξής:

i) Οι 8 περί άξονα μεσοκάθετο κοκ δίνουν ο καθένας 8 2-κύκλους άρα έχουμε 8 μεταθέσεις τύπου (0,8,0,0...) π.χ. ο κατοπτρισμός περί την κοινή μεσοκάθετο των πλευρών 12 και 9 10 περιγράφεται από την μετάθεση

(12)(3 16)(4 15)(5 14)(6 13)(7 12)(8 11)(9 10) τύπου (0,8,...) και

ii) οι 8 περί άξονα που διέρχεται από δύο απέναντι κορυφές αναλύονται ο καθένας σε δύο 1-κύκλους και επτά 2-κύκλους π.χ. ο κατοπτρισμός περί τον άξονα 1 9 περιγράφεται από την μετάθεση

(1) (2 16) (3 15) (4 14) (5 13) (6 12) (7 11) (8 10) (9) τύπου (2,7,...)

Ο κυκλικός δείκτης λοιπόν του κανονικού 16-γώνου είναι

$$\frac{1}{32}\left(x_1^{16}+9x_2^8+8x_1^2x_2^7+8x_{16}+2x_4^4+4x_8^2\right).$$

Θα κάνουμε την αντικατάσταση $X_i \longrightarrow (B+W)^i$ οπότε θα πάρουμε την γεννήτρια συνάρτηση για τους μη ισοδύναμους διχρωματισμούς των κορυφών του κανονικού 16-γώνου ήτοι

$$\frac{1}{16}\left[(\underline{b+w})^{16}+9(b^2+w^2)^8+\underline{8(b+w)^2(b^2+w^2)^7}+8(b^{16}+w^{16})+\right.$$
$$\left.+2(b^4+w^4)^4+4(b^8+w^8)^2\right].$$

Εμείς θέλουμε να βρούμε στο ανάπτυγμα αυτό τον συντελεστή του όρου b^3w^{13}. Μονούς όρους όμως δίνουν μόνο ο πρώτος προσθετέος και ο τρίτος προσθετέος ήτοι ο

$(b+w)^{16}$ και ο $8(b^2+\underline{2bw}+w^2)\cdot(b^{14}+7b^{12}w^2+21b^{10}w^4+35b^8w^6+35b^6w^8+$
$+21b^4w^{10}+7\underline{b^2w^{12}}+w^{14})$.

Ο συντελεστής λοιπόν του όρου b^3w^{13} στον πρώτο προσθετέο θα είναι από το διωνυμικό θεώρημα $\binom{16}{13}$ και από τον τρίτο προσθετέο το γινόμενο $8\cdot2\cdot7$ άρα ο συντελεστής του όρου b^3w^{13} είναι συνολικά

$$\frac{1}{32}\left[\binom{16}{13}+8\cdot2\cdot7\right]=21. \qquad \blacksquare$$

Παράδειγμα 20.

Οι οργανικές ενώσεις της μορφής

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ X & - & C & - & X \\ & & X & & \end{array}$$

όπου C ένα άτομο άνθρακα και όπου συμβολίζουμε με X ένα μεθύλιο (CH_3) είτε ένα αιθύλιο (C_2H_5) είτε ένα χλώριο (Cl) είτε ένα υδρογόνο (H). Π.χ. Δύο τέτοια τυπικά μόρια είναι τα:

$$\begin{matrix} & C_2H_5 & \\ CH_3 & - C - & Cl \\ & H & \end{matrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{matrix} & H & \\ CH_3 & - C - & H \\ & Cl & \end{matrix}$$

Κάθε τέτοιο μόριο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κανονικό τετράεδρο όπου το άτομο του άνθρακα ευρίσκεται στο κέντρο βάρους και κάθε άτομο X στις 4 κορυφές. Πόσα διαφορετικά μόρια υπάρχουν και ποιά είναι η μορφή τους.

Ο κυκλικός δείκτης της ομάδας μετάθεσης G είναι

$$P_G(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{12}\left(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right).$$

Αρα το πλήθος των διαφορετικών μορίων είναι

$$P_G(4,4,4) = \frac{1}{12}\left(4^4 + 8\cdot 4\cdot 4 + 3\cdot 4^2\right) = \frac{1}{12}(256+128+48)=36.$$

Αρα υπάρχουν 36 διαφορετικά μόρια. Πόσα από αυτά δεν περιέχουν H?

Θέτουμε το βάρος 1 στο C_2H_5, στο CH_3 και στο Cl και το βάρος 0 στο H οπότε έχουμε

$P_G(3,3,3) = \frac{1}{12}\left(3^4 + 8\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 3^2\right)=15$ και συγκεκριμένα τα

$4CH_3$- $4C_2H_5$- $4Cl$ - $3CH_3Cl$ - $3CH_3C_2H_5$- $3Cl\ CH_3$- $3Cl\ C_2H_5$- $3C_2H_5Cl$ -
- $3C_2H_5CH_3$- $2CH_32C_2H_5$- $2CH_32Cl$- $2Cl\ 2C_2H_5$-$2CH_3Cl\ C_2H_5$- $2Cl\ CH_3C_2H_5$
$2C_2H_5\ Cl\ CH_3$.

Ποιά η γεννήτρια συνάρτηση για τα H;

Θέτουμε $W(C_2H_5) = W(CH_3) = W(Cl)=1$
$W(H) = h$

και έχουμε

$$P_G(h+3,h^2+3,h^3+3) = \frac{1}{12}\left[(h+3)^4+8(h+3)(h^3+3)+3(h^2+3)^2\right]=$$
$$= h^3+3h^3+6h^2+11h+15$$

άρα υπάρχει 1 μόριο με 4 υδρογόνα (το μεθάνιο)
άρα υπάρχουν 3 μόρια με 3 υδρογόνα (CH_3Cl-CH_3CH_3 $CH_3C_2H_5$)
άρα υπάρχουν 6 μόρια με 2 υδρογόνα

$H_2CC\ H_3CH_3$ - $H_2\ C\ C_2H_5\ C_2H_5$ - $H_2\ C\ Cl\ C_2H_5$
$H_2\ C\ Cl\ Cl$ - $H_2\ C\ \ Cl\ \ CH_3$ - $H_2\ C\ CH_3\ C_2H_5$

υπάρχουν 11 μόρια με 1 άτομο H

υπάρχουν 15 μόρια χωρίς άτομο H (που τα είδαμε παραπάνω)
τα 11 μόρια με 1 άτομο H είναι τα

$HC\ CH_3\ CH_3CH_3$ - $HC\ C_2H_5\ C_2H_5\ Cl$ - $HC\ CH_3\ C_2H_5\ Cl$

$HC\ Cl\ Cl\ Cl$ - $HC\ C_2H_5\ C_2H_5\ CH_3$ - $HC\ CH_3Cl\ C_2H_5$

$HC\ C_2H_5C_2H_5C_2H_5$ - $HC\ CH_3CH_3\ Cl$ -

$HC\ CH_3CH_3\ C_2H_5$ -

$HC\ Cl\ Cl\ C_2H_5$ -

$HC\ Cl\ Cl\ CH_3$ - ■