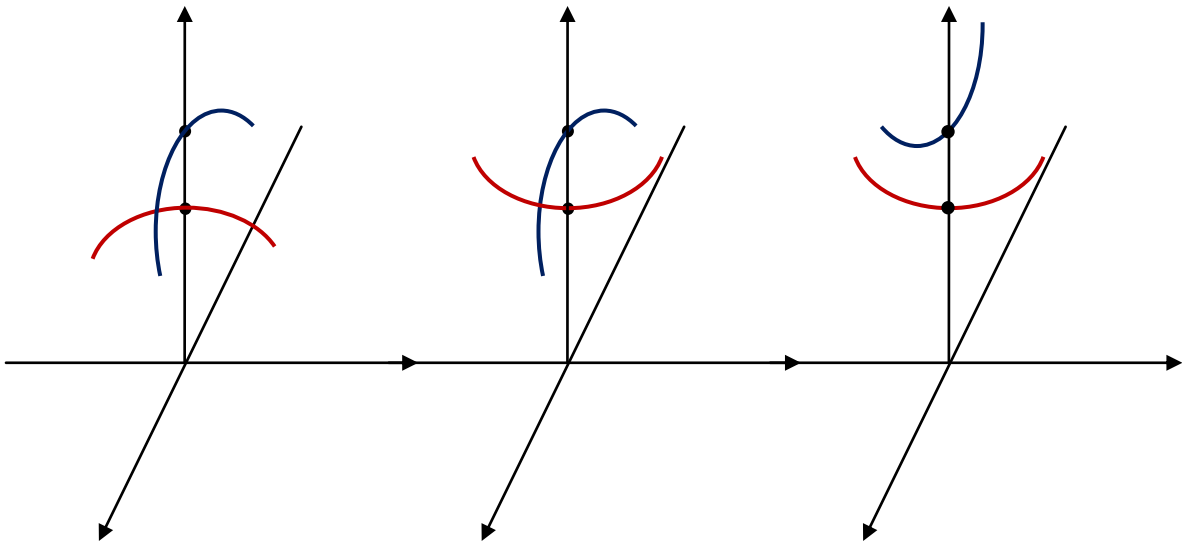




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΠΜΣ: Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών

## Ειδικά θέματα ευστάθειας στατικών συστημάτων



Μεταπτυχιακή εργασία

**Μαρίας Α. Λιβανού**

Επιβλέπων: Χάρης Ι. Γαντές, Καθηγητής ΕΜΠ

**Αθήνα 2013**

ΕΜΚ ΜΕ 2013/15

Λιβανού Μ. Α. (2013)  
Ειδικά θέματα ευστάθειας στατικών συστημάτων  
Μεταπτυχιακή Εργασία ΕΜΚ ΜΕ 2013/15  
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα

Livanou M. A. (2013)  
Special issues on the stability of static systems  
Postgraduate Thesis MSL PT 2013/15  
Metal Structures Laboratory, National Technical University of Athens, Greece



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΔΠΜΣ: Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση Κατασκευών

**Μαρία Α. Λιβανού**

Μεταπτυχιακή Εργασία  
ΕΜΚ ΜΕ 2013/15

## **Ειδικά θέματα ευστάθειας στατικών συστημάτων**

Επιβλέπων: Χάρης Ι. Γαντές, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

### **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στο 1<sup>ο</sup> μέρος της εργασίας, γίνεται μελέτη της δυναμικής (ή κινηματικής) μεθόδου, η οποία εξετάζει την ευστάθεια ή αστάθεια μιας θέσης ισορροπίας ενός στατικού συστήματος παρακολουθώντας την ταλάντωση που πραγματοποιεί, εάν διεγερθεί από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο. Αρχικά, παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της παραπάνω μεθόδου, και στη συνέχεια διατυπώνονται και επιλύονται εξισώσεις για συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας. Στα συστήματα αυτά, ερευνάται η επιρροή διαφόρων παραμέτρων στην τελική συμπεριφορά τους, όπως η ύπαρξη απόσβεσης, το μέγεθος της αρχικής διαταραχής κ.ά.. Τέλος, παρουσιάζονται έξι εφαρμογές, για την επίλυση των οποίων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA, μέσω των οποίων επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν και από την επίλυση των εξισώσεων των μονοβάθμιων συστημάτων.

Στο 2<sup>ο</sup> μέρος της εργασίας, μελετώνται συστήματα δύο ή περισσότερων βαθμών ελευθερίας, λόγω της αδυναμίας περιγραφής διαφόρων φαινομένων με τα μονοβάθμια συστήματα. Συγκεκριμένα, μελετάται η αλληλεπίδραση των μορφών αστοχίας στα πολυβάθμια συστήματα και η επίδραση των αρχικών ατελειών στη συμπεριφορά τους. Αρχικά, επιλέγονται προς μελέτη συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας, των οποίων η μαθηματική επεξεργασία είναι σχετικά απλή. Μέσω της ενεργειακής μεθόδου, μορφώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας τους, και στη συνέχεια, με τη βοήθεια προγράμματος γραμμένου στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB, επιλύονται για διάφορες τιμές των παραμέτρων ελέγχου. Τέλος, σαν πρακτική εφαρμογή του φαινομένου της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών λυγισμού, παρουσιάζονται δύο εφαρμογές σύνθετων υποστυλωμάτων, οι οποίες επιλύθηκαν στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA.





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING  
DEPARTMENT OF STRUCTURAL ENGINEERING  
METAL STRUCTURES LABORATORY

M.Sc.: Analysis and Design of Earthquake Resistant Structures (ADERS)

**Maria A. Livanou**

Postgraduate Thesis  
MSL PT 2013/15

## **Special issues on the stability of static systems**

Supervisor: Charis J. Gantes, Professor

### **ABSTRACT**

The first part of this study examines the dynamic (or kinematic) method, which deals with the stability of an equilibrium position of a static system, by observing its response to a free oscillation around it. Initially, there is a concise description of the basic principles of the method. Then, the formulation of the corresponding equations considering a single-degree of freedom system takes place, accompanied by their analytical solution. The influence of various parameters, e.g. damping, magnitude of the initial disturbance, etc, on the response of the system is investigated. Finally, finite element analyses are performed considering six different applications. These numerical calculations confirm the aforementioned analytical results, leading moreover to some new remarkable conclusions.

The second part of this thesis studies the behavior of multi-degree of freedom systems, considering that the single-degree of freedom ones cannot describe various significant phenomena. Specifically, the interaction between the failure modes in multi-degree of freedom systems and the effect of initial imperfections on their behavior is demonstrated. Initially, we cope with double-degree of freedom systems, whose mathematical treatment is relatively simple. The formulation of the equilibrium equations is carried out by means of the energy method, followed by their numerical solution for various values of the control parameters, using an algorithm which developed in the MATLAB software during this study. Finally, two numerical examples of built-up columns are presented, in order to show the interaction between the failure modes in a real-scale structural system, resulting to several interesting results.



# **Περιεχόμενα**

---

## **ΜΕΡΟΣ 1<sup>ο</sup>: Δυναμικές μέθοδοι μελέτης ευστάθειας**

1.1 Εισαγωγή – Βασικές Αρχές	11
1.2 Μαθηματική διατύπωση για συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας	16
1.2.1 Σύστημα χωρίς απόσβεση	16
1.2.1.1 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής	24
1.2.2 Σύστημα με απόσβεση	28
1.2.2.1 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής	35
1.3 Παραδείγματα εφαρμογής σε μονοβάθμια συστήματα	40
1.3.1 Αστάθεια μέσω συμμετρικού ευσταθούς σημείου διακλάδωσης	40
1.3.1.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας	41
1.3.1.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας	41
1.3.2 Αστάθεια μέσω συμμετρικού ασταθούς σημείου διακλάδωσης	43
1.3.2.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας	44
1.3.2.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας	44
1.3.3 Αστάθεια μέσω ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης	45
1.3.3.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας	46
1.3.3.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας	47
1.4 Παραδείγματα σε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων	48
1.4.1 Παράδειγμα 1	48
1.4.1.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες	49
1.4.1.2 Παρατηρήσεις	52
1.4.1.3 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής	52
1.4.2 Παράδειγμα 2	53
1.4.2.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες	54
1.4.2.2 Παρατηρήσεις	59
1.4.2.3 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής	59
1.4.2.4 Διάγραμμα θλιπτικού φορτίου – ιδιοσυχνότητας	60
1.4.2.5 Επιρροή της απόσβεσης στην αστάθεια	61
1.4.3 Παράδειγμα 3	62
1.4.3.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες	63
1.4.3.2 Παρατηρήσεις	68

1.4.3.3 Φόρτιση με το δεύτερο φορτίο λυγισμού	69
1.4.4 Παράδειγμα 4	69
1.4.4.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες	69
1.4.4.2 Σημείο 1	71
1.4.4.3 Οριακό σημείο	74
1.4.4.4 Σημείο 2	76
1.4.4.5 Σημείο 3	79
1.4.5 Παράδειγμα 5	82
1.4.5.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες	83
1.4.5.2 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής	86
1.4.6 Παράδειγμα 6	87
1.4.6.1 Άκαμπτες ράβδοι	87
1.4.6.2 Μη άκαμπτες ράβδοι	91
1.5 Συμπεράσματα	94

## **ΜΕΡΟΣ 2<sup>ο</sup>: Αλληλεπίδραση μορφών αστοχίας πολυβάθμιων συστημάτων**

2.1 Εισαγωγή	95
2.2 Συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας	96
2.2.1 Ασταθές – Ασταθές	96
2.2.1.1 Το προσομοίωμα	96
2.2.1.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος	97
2.2.1.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού	99
2.2.1.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων	102
2.2.1.5 Συμπεράσματα	113
2.2.1.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA	114
2.2.2 Ασταθές – Ευσταθές	118
2.2.2.1 Το προσομοίωμα	118
2.2.2.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος	119
2.2.2.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού	120
2.2.2.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων	121
2.2.2.5 Συμπεράσματα	138
2.2.2.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA	139
2.2.3 Ευσταθές – Ευσταθές	144
2.2.3.1 Το προσομοίωμα	144



2.2.3.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος	145
2.2.3.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού	146
2.2.3.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων	147
2.2.3.5 Συμπεράσματα	155
2.2.3.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA	155
2.3 Εφαρμογή σε σύνθετο υποσύλωμα	161
2.3.1 Παράδειγμα 1	161
2.3.1.1 Το προσομοίωμα	161
2.3.1.2 Κρίσιμα φορτία λυγισμού	162
2.3.1.3 Μη γραμμικές αναλύσεις γεωμετρίας	163
2.3.1.4 Παραμετρικές αναλύσεις	166
2.3.1.5 Συμπεράσματα	176
2.3.2 Παράδειγμα 2	178
2.3.2.1 Το προσομοίωμα	178
2.3.2.2 Αριθμητική επεξεργασία	178
2.3.2.3 Συμπεράσματα	193
2.4 Συμπεράσματα	193



# ΜΕΡΟΣ 1<sup>ο</sup>

## Δυναμικές μέθοδοι μελέτης ευστάθειας

### 1.1 Εισαγωγή – Βασικές αρχές

Η δυναμική ή κινηματική μέθοδος εξετάζει την ευστάθεια ή αστάθεια μιας θέσης ισορροπίας ενός στατικού συστήματος παρακολουθώντας την ταλάντωση που πραγματοποιεί το σύστημα, εάν του δοθεί μια μικρή διαταραχή από αυτή τη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο. Η διαταραχή μπορεί να έχει τη μορφή επιβαλλόμενης μετακίνησης ή ταχύτητας ή και των δύο. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της δυναμικής μεθόδου είναι ότι εφαρμόζεται τόσο σε συντηρητικά, όσο και σε μη συντηρητικά ελαστικά συστήματα. Την έννοια του δυναμικού κριτηρίου πρώτος εισήγαγε ο Lagrange για συντηρητικά συστήματα και στη συνέχεια ο Zeigler για μη συντηρητικά συστήματα, διακεκριμένα και συνεχή. Υπενθυμίζεται ότι συντηρητικά ονομάζονται τα συστήματα, στα οποία όλες οι δυνάμεις που ενεργούν επί αυτών είναι συντηρητικές, δηλαδή το έργο τους εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική και την τελική θέση του σημείου εφαρμογής τους.

#### Βασικές αρχές

Θεωρείται ένα σύστημα με  $n$  βαθμούς ελευθερίας, του οποίου η θέση προσδιορίζεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) που περιλαμβάνουν μετατοπίσεις και στροφές των κόμβων. Η παραμόρφωση του συστήματος σε μία θέση στατικής ισορροπίας που αντιστοιχεί σε κάποια εξωτερικά φορτία θα περιγράφεται από τις αντίστοιχες τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων,  $q_i^*$  :

$$q_i = q_i^*, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Για λόγους απλούστευσης της μαθηματικής περιγραφής του προβλήματος μπορεί να γίνει ο μετασχηματισμός  $q_i' = q_i - q_i^*$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), οπότε η θέση ισορροπίας του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$q_i' = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Δηλαδή, είναι πάντοτε δυνατή η επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων, ώστε οι τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων στην εξεταζόμενη θέση ισορροπίας να είναι μηδενικές:

$$q_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.1)$$

Για να ερευνηθεί με βάση τη δυναμική μέθοδο κατά πόσο αυτή η θέση ισορροπίας είναι ασταθής ή ευσταθής, στο σύστημα επιβάλλεται τη χρονική στιγμή  $t=0$  μία αρχική διαταραχή που μπορεί να περιλαμβάνει μετακινήσεις  $q_i^0$ , ταχύτητες  $\dot{q}_i^0$ , ή και τα δύο:

$$q_i(0) = q_i^0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t}(0) = \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.2)$$

Η επιβαλλόμενη διαταραχή είναι αρκετά μικρού μεγέθους σε σχέση με το μήκος των βασικών διανυσμάτων που περιγράφουν το χώρο στον οποίο μελετάται το σύστημα, δηλαδή υπάρχει «μικρός» θετικός αριθμός  $\eta$ , ώστε:

$$\|q_i(0)\| < \eta \quad \text{και} \quad \left\| \frac{\partial q_i}{\partial t}(0) \right\| < \eta \quad (1.3)$$

όπου  $\|\dots\|$  κατάλληλη νόρμα του διανύσματος των αρχικών επιβαλλόμενων μετακινήσεων και των αρχικών επιβαλλόμενων ταχυτήτων, π.χ.:

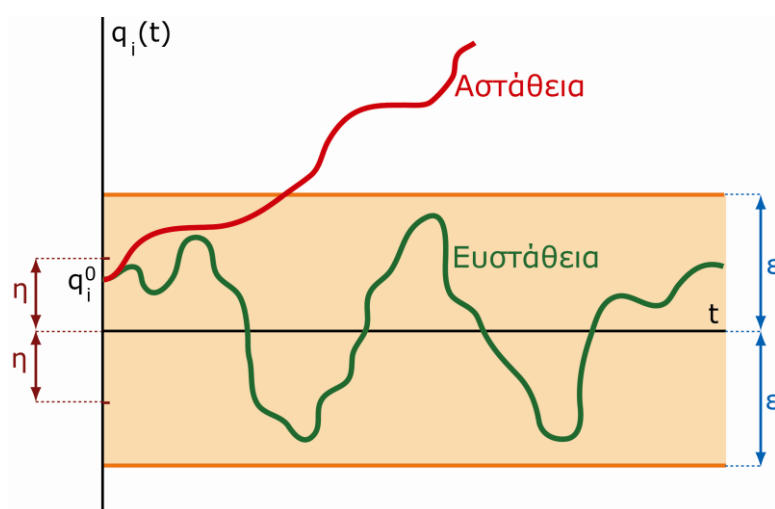
$$\|x_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{ή} \quad \|x_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.4)$$

Στη συνέχεια ο φορέας αφήνεται ελεύθερος, οπότε εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές συνθήκες τις καθοριζόμενες από την εξίσωση (1.2). Η κινηματική κατάσταση του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$  μπορεί να περιγραφεί από τις γενικευμένες μετατοπίσεις  $q_i(t)$  και τις αντίστοιχες ταχύτητες  $\dot{q}_i(t)$ . Για το χαρακτηρισμό της εξεταζόμενης θέσης ισορροπίας ως ευσταθούς ή ασταθούς εξετάζεται κατά πόσο η κίνηση του συστήματος για  $t > 0$  είναι φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχει θετικός αριθμός  $\varepsilon$ , τέτοιος ώστε:

$$|q_i(t)| < \varepsilon \text{ και } \left| \frac{\partial q_i}{\partial t}(t) \right| < \varepsilon \quad (1.5)$$

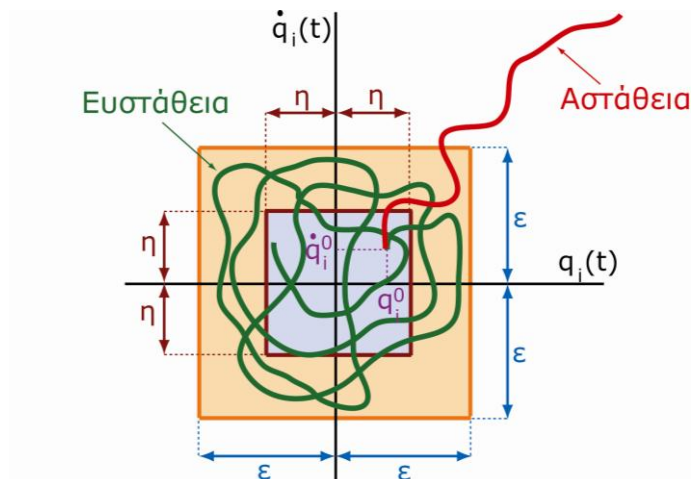
Η εξεταζόμενη θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως **ευσταθής**, εάν για οποιονδήποτε αριθμό  $\varepsilon > 0$  μπορούν να βρεθούν τέτοιες αρχικές συνθήκες  $n=n(\varepsilon)$  που να ικανοποιούν τη σχέση (1.5), δηλαδή να προκύπτει κινηματικώς φραγμένη κατάσταση. Εάν αυτό δε συμβαίνει, η εξεταζόμενη θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως **ασταθής**. Δηλαδή, όταν η αρχική θέση ισορροπίας (1.1) είναι ευσταθής, η ταλάντωση που προκύπτει λόγω της επιβαλλόμενης αρχικής διαταραχής έχει φραγμένο εύρος, ενώ αντίθετα αν η θέση ισορροπίας είναι ασταθής τότε η ταλάντωση έχει συνεχώς αυξανόμενο εύρος.

Η γεωμετρική ερμηνεία της ευσταθούς ή ασταθούς συμπεριφοράς στα πλαίσια της δυναμικής μεθόδου παρουσιάζεται στα σχήματα 1.1 και 1.2. Στο σχήμα 1.1 παρουσιάζεται η εξέλιξη με το χρόνο  $t$  μιας γενικευμένης συντεταγμένης  $q_i$  του συστήματος, όταν αυτό υποβάλλεται σε αρχική διέγερση ( $q_i^0, \dot{q}_i^0, i=1,2,\dots,n$ ) και στη συνέχεια αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση. Εάν για ένα δεδομένο εύρος  $2\varepsilon$ , εντός του οποίου είναι ανεκτό να περιοριστεί το πλάτος της ταλάντωσης, μπορεί να βρεθεί εύρος  $2\eta$ , εντός του οποίου εάν ευρίσκεται η αρχική διέγερση, το πλάτος της απόκρισης είναι φραγμένο, τότε η αρχική θέση ισορροπίας ( $q_i=0, i=1,2,\dots,n$ ) χαρακτηρίζεται από ευστάθεια. Σε διαφορετική περίπτωση η αρχική θέση ισορροπίας ( $q_i=0, i=1,2,\dots,n$ ) είναι ασταθής. Παρόμοια ισχύουν και για τη γραφική παράσταση της ταχύτητας  $\dot{q}_i(t)$  ως προς το χρόνο, καθώς και για τις άλλες γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική ερμηνεία της ευστάθειας και αστάθειας

Ιδιαίτερα εποπτική είναι η παρακολούθηση της απόκρισης του μονοβαθμίου συστήματος σε μία γραφική παράσταση γνωστή ως διάγραμμα φάσεων, στην οποία στον οριζόντιο άξονα καταγράφεται η εξέλιξη με το χρόνο  $t$  μιας γενικευμένης συντεταγμένης  $q_i(t)$  και στον κατακόρυφο άξονα της αντίστοιχης ταχύτητας  $\dot{q}_i(t)$  του συστήματος, όταν αυτό υποβάλλεται σε αρχική διέγερση ( $q_i^0, \dot{q}_i^0, i=1,2,\dots,n$ ) και στη συνέχεια αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση. Η εξεταζόμενη θέση ισορροπίας ( $q_i=0, i=1,2,\dots,n$ ) είναι ευσταθής εφόσον η απόκριση του συστήματος είναι φραγμένη. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει, για δεδομένο  $\epsilon > 0$  να υπάρχει  $n=n(\epsilon) > 0$ , τέτοιο ώστε η κίνηση λόγω αρχικής διαταραχής εντός τετραγώνου με πλευρά  $2n$ , να ευρίσκεται συνεχώς εντός τετραγώνου με πλευρά  $2\epsilon$ . Σε αντίθετη περίπτωση η αρχική θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

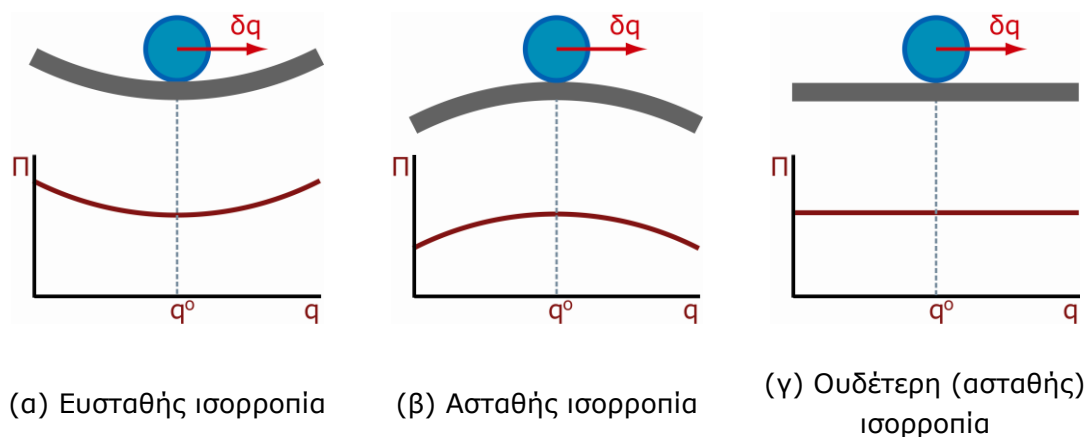


Σχήμα 1.2: Διάγραμμα φάσεων

Η φιλοσοφία της δυναμικής μεθόδου μπορεί επίσης να γίνει ευκολότερα κατανοητή μέσω του εποπτικού παραδείγματος των πιθανών θέσεων πάνω σε μια επιφάνεια μιας σφαίρας που βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας (σχήμα 1.3) και της κίνησης που εκτελεί η σφαίρα εάν εκτραπεί από την αρχική θέση ισορροπίας της. Ανάλογα με την κλίση που έχει η επιφάνεια, η σφαίρα μπορεί να έχει ευσταθή (α), ασταθή (β) ή ουδέτερη (γ) ισορροπία.

Εάν η επιφάνεια στρέφει, στην εξεταζόμενη θέση  $q^0$ , τα κοίλα προς τα πάνω (σχήμα 1.3α), τότε η θέση ισορροπίας είναι στο χαμηλότερο σημείο, όπου η σφαίρα έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια  $\Pi$ . Εάν από τη θέση αυτή επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή  $\delta q$ , η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, εκτελεί ταλάντωση περί την αρχική θέση ισορροπίας, στην

οποία και τελικά επιστρέφει, λόγω τριβών, και ισορροπεί και πάλι. Αυτή η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής.



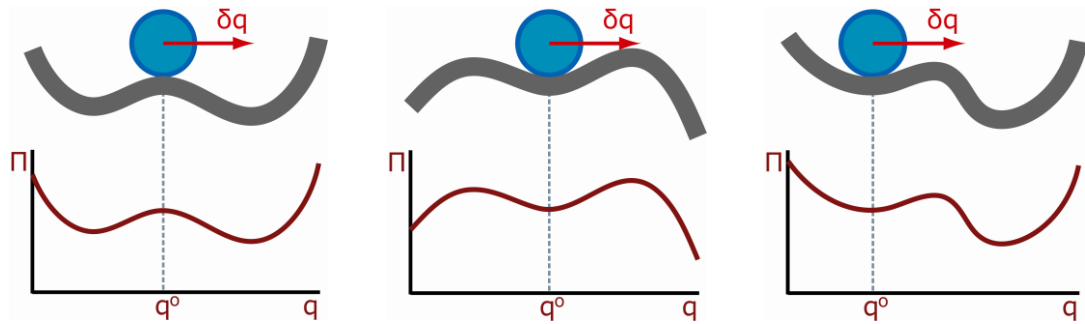
Σχήμα 1.3: Θέσεις ισορροπίας σφαίρας πάνω σε επιφάνεια

Εάν η επιφάνεια στρέφει, στην εξεταζόμενη θέση  $q^\circ$ , τα κοίλα προς τα κάτω (σχήμα 1.3β), τότε η θέση ισορροπίας είναι στο υψηλότερο σημείο, όπου η σφαίρα έχει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια  $\Pi$ . Εάν από τη θέση αυτή επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή  $\delta q$ , η δυναμική ενέργεια μειώνεται και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, απομακρύνεται περισσότερο από την αρχική θέση ισορροπίας, στην οποία δεν επιστρέφει. Αυτή η θέση ισορροπίας είναι ασταθής.

Εάν τέλος η επιφάνεια, περί την εξεταζόμενη θέση  $q^\circ$ , είναι οριζόντια (σχήμα 1.3γ), τότε κάθε γειτονική θέση αποτελεί θέση ισορροπίας, και η σφαίρα έχει σε όλες αυτές τις θέσεις ίση δυναμική ενέργεια  $\Pi$ . Εάν από μια τέτοια θέση επιβληθεί στη σφαίρα μια μικρή διαταραχή  $\delta q$ , η δυναμική ενέργεια παραμένει σταθερή και η σφαίρα, αν αφεθεί ελεύθερη, παραμένει ακίνητη στη νέα θέση, που είναι και αυτή θέση ισορροπίας. Αυτή η θέση ισορροπίας λέγεται ουδέτερη, μπορεί όμως να θεωρηθεί για πρακτικούς σκοπούς ως ασταθής, δεδομένου ότι η σφαίρα δεν επιστρέφει ποτέ στην αρχική θέση ισορροπίας.

Όπως προαναφέρθηκε, το είδος της ισορροπίας μπορεί να εξαρτάται από το μέγεθος της επιβαλλόμενης διαταραχής. Στα τρία παραδείγματα του σχήματος 1.4 παρουσιάζονται περιπτώσεις, στις οποίες το είδος της ισορροπίας μεταβάλλεται ανάλογα με το μέγεθος της διαταραχής. Στο σχήμα 1.4α η ισορροπία είναι ασταθής για μικρή διαταραχή, αλλά ευσταθής, σε νέα όμως θέση, για μεγαλύτερη. Το αντίθετο συμβαίνει στο σχήμα 1.4β, όπου η ισορροπία είναι ευσταθής για μικρή διαταραχή, αλλά ασταθής για μεγαλύτερη. Τέλος, στο σχήμα 1.4γ, η ισορροπία

είναι ευσταθής για μικρή διαταραχή, και παρουσιάζει προσωρινή αστάθεια και τελικά ευστάθεια σε νέα θέση για μεγαλύτερη διαταραχή. Στη διεθνή βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται για τέτοιες περιπτώσεις οι όροι «stability in the small» και «stability in the large».



(α) Αστάθεια για μικρή διαταραχή – ευστάθεια σε νέα θέση για μεγάλη διαταραχή

(β) Ευστάθεια για μικρή διαταραχή – αστάθεια για μεγάλη διαταραχή

(γ) Ευστάθεια για μικρή διαταραχή – ευστάθεια σε νέα θέση για μεγάλη διαταραχή

Σχήμα 1.4: Σύνθετες περιπτώσεις θέσεων ισορροπίας σφαίρας πάνω σε επιφάνεια

## 1.2 Μαθηματική διατύπωση για συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας

### 1.2.1 Σύστημα χωρίς απόσβεση

Θεωρείται σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας  $q$ , χωρίς απόσβεση, που ισορροπεί στη θέση  $q=0$ . Στο σύστημα επιβάλλεται μία αρχική διαταραχή  $(q^0, \dot{q}^0)$  και στη συνέχεια αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση. Εάν  $m$  είναι η μάζα του συστήματος και  $k$  η δυσκαμψία του, τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$m \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + k \cdot q = 0 \quad (1.6)$$

Αναζητείται λύση της μορφής:

$$q = C \cdot e^{\rho t} \quad (1.7)$$

Οπότε, με αντικατάσταση της εξίσωσης (1.7) στην (1.6) προκύπτει:



$$\rho^2 \cdot C \cdot e^{\rho t} + \frac{k}{m} \cdot C \cdot e^{\rho t} = 0 \Rightarrow \left( \rho^2 + \frac{k}{m} \right) \cdot C \cdot e^{\rho t} = 0 \quad (1.8)$$

Όμως  $e^{\rho t} \neq 0$  και  $C \neq 0$ , διαφορετικά από την εξίσωση (1.7) θα προέκυπτε ότι η απόκριση είναι συνεχώς μηδενική, οπότε η εξίσωση (1.8) αληθεύει μόνο όταν μηδενίζεται η παράσταση στην παρένθεση στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.8) δηλαδή όταν:

$$\rho^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad (1.9)$$

Η εξίσωση (1.9) ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης (1.6). Για τη λύση της, και κατά συνέπεια για τη λύση της (1.6), διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο του όρου  $k/m$ :

a) Εάν  $k/m = \omega^2 > 0$

Το μέγεθος  $\omega$  είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, που σε αυτή την περίπτωση είναι πραγματική και θετική. Τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.6) γίνεται:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \omega^2 \cdot q = 0 \quad (1.10)$$

Οι δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.9) είναι:

$$\rho_{1,2} = \pm i \cdot \omega, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.11)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.6) είναι τότε:

$$q(t) = A \cdot e^{\rho_1 t} + B \cdot e^{\rho_2 t} = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t} \quad (1.12)$$

ή ισοδύναμα (αφού  $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \cdot \sin\omega t$ ):

$$q(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1.13)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι σταθερές ολοκλήρωσης που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.14)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη χρειάζεται η έκφραση της ταχύτητας, δηλαδή της πρώτης παραγώγου της μετακίνησης ως προς το χρόνο:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = -\omega \cdot C_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.13) και (1.15) στην (1.14) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

$$C_1 = q^0, C_2 = \frac{\dot{q}^0}{\omega} \quad (1.16)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.16) στις (1.13) και (1.15) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

$$q(t) = q^0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{\dot{q}^0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (1.17)$$

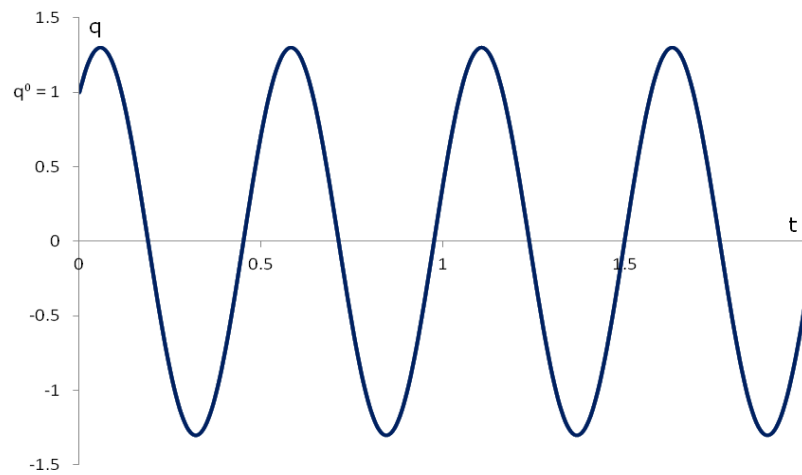
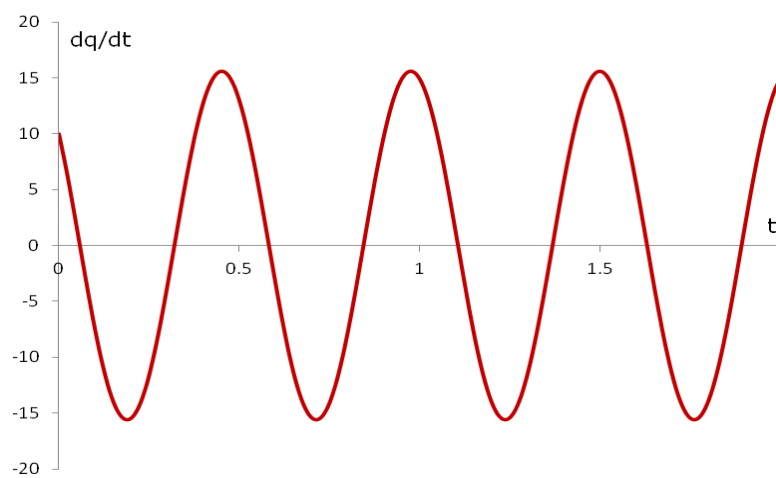
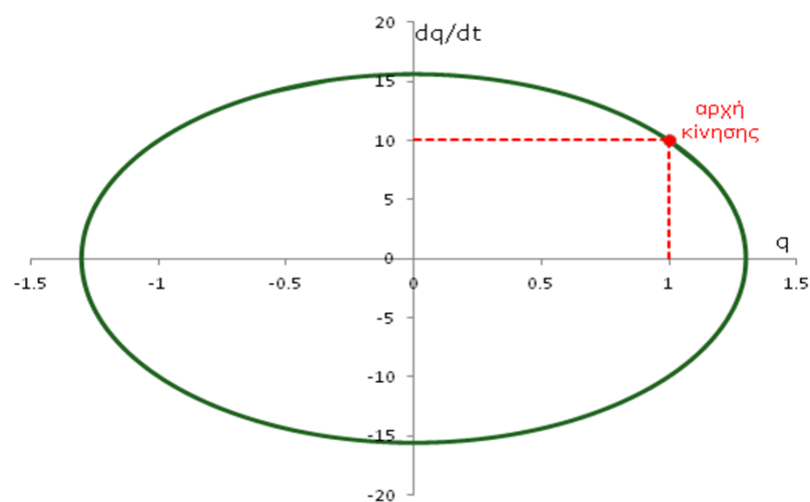
$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = -q^0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + \dot{q}^0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (1.18)$$

Από τις σχέσεις (1.17) και (1.18) προκύπτει ότι η ταλάντωση είναι φραγμένη, και μάλιστα οι μέγιστες δυνατές τιμές της μετακίνησης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα:

$$\max\{q(t)\} = \sqrt{\left(q^0\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}^0}{\omega}\right)^2} \quad (1.19)$$

$$\max\left\{\frac{\partial q}{\partial t}(t)\right\} = \sqrt{\left(q^0 \cdot \omega\right)^2 + \left(\dot{q}^0\right)^2} \quad (1.20)$$

Στο σχήμα 1.5 που ακολουθεί παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ . Όπως είναι εμφανές και από τις σχέσεις (1.17) και (1.18) τα διαγράμματα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$  και ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$  είναι αρμονικής μορφής, ενώ το διάγραμμα φάσης είναι κλειστό ελλειπτικής μορφής. Από τις σχέσεις (1.19) και (1.20) προκύπτει αντίστοιχα ότι η μέγιστη τιμή της μετακίνησης είναι 1.30 και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας 15.62. Επίσης η ιδιοπερίοδος είναι ίση με  $T=2\pi/\omega=0.52$ , κάτι που επιβεβαιώνεται και από τα διαγράμματα 1.5α,β. Συμπερασματικά, στην περίπτωση αυτή το σύστημα εκτελεί αρμονική ελεύθερη ταλάντωση περί την αρχική θέση ευσταθούς στατικής ισορροπίας.

(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  – χρόνου  $t$ (β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  – χρόνου  $t$ (γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  – ταχύτητας  $\partial q/\partial t$ 

Σχήμα 1.5: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για διέγερση ( $q^0=1$ ,  $\dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$

β) Εάν  $k/m = -\omega^2 = 0$

Στην περίπτωση αυτή η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μηδενίζεται. Τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.6) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.9) είναι μηδενικές:

$$\rho_{1,2} = 0 \quad (1.22)$$

και η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.6) είναι:

$$q(t) = C_1 + C_2 \cdot t \quad (1.23)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.24)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη υπολογίζεται η έκφραση της ταχύτητας, δηλαδή της πρώτης παραγώγου της μετακίνησης ως προς το χρόνο:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = C_2 \quad (1.25)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.23) και (1.25) στην (1.24) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

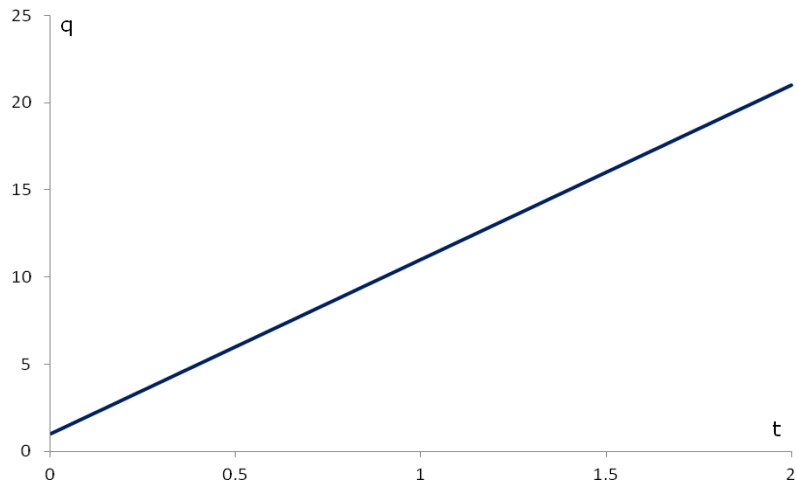
$$C_1 = q^0, C_2 = \dot{q}^0 \quad (1.26)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.26) στις (1.23) και (1.25) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

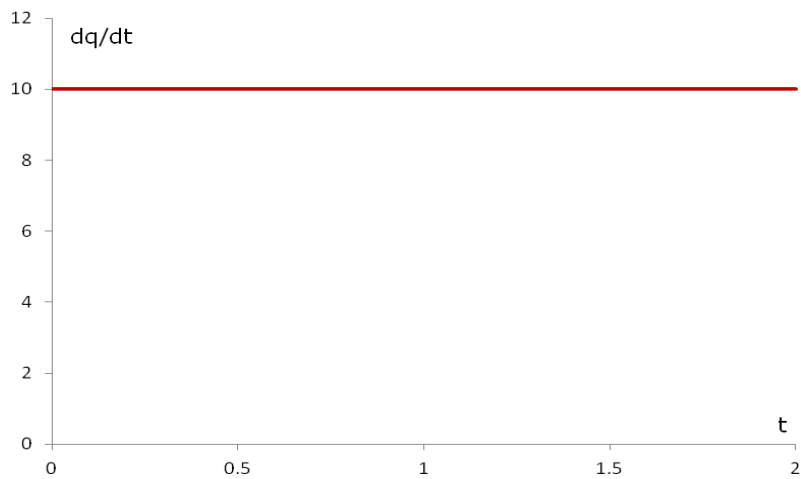
$$q(t) = q^0 + \dot{q}^0 \cdot t \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = \dot{q}^0 \quad (1.28)$$

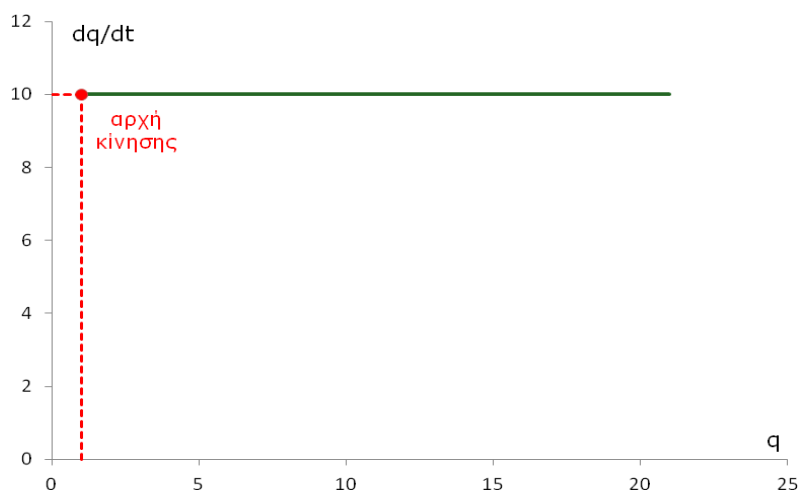
Από τις σχέσεις (1.27) και (1.28) προκύπτει ότι η ταλάντωση δεν είναι φραγμένη, αφού η μετατόπιση αυξάνεται γραμμικά και η ταχύτητα παραμένει σταθερή. Αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 1.6 που ακολουθεί, όπου παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ .



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  – χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  – χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  – ταχύτητας  $\partial q/\partial t$

Σχήμα 1.6: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$

γ) Εάν  $k/m = -\omega^2 < 0$

Στην περίπτωση αυτή η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι φανταστικός αριθμός. Τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.6) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + (i \cdot \omega)^2 \cdot q = 0 \quad (1.29)$$

Οι δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.9) είναι πλέον πραγματικές:

$$\rho_{1,2} = \pm \omega \quad (1.30)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.29) είναι τότε:

$$q(t) = C_1 \cdot e^{\rho_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\rho_2 \cdot t} = C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t} \quad (1.31)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.32)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη υπολογίζεται η έκφραση της ταχύτητας:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = C_1 \cdot \omega \cdot e^{\omega t} - C_2 \cdot \omega \cdot e^{-\omega t} \quad (1.33)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.31) και (1.33) στην (1.32) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

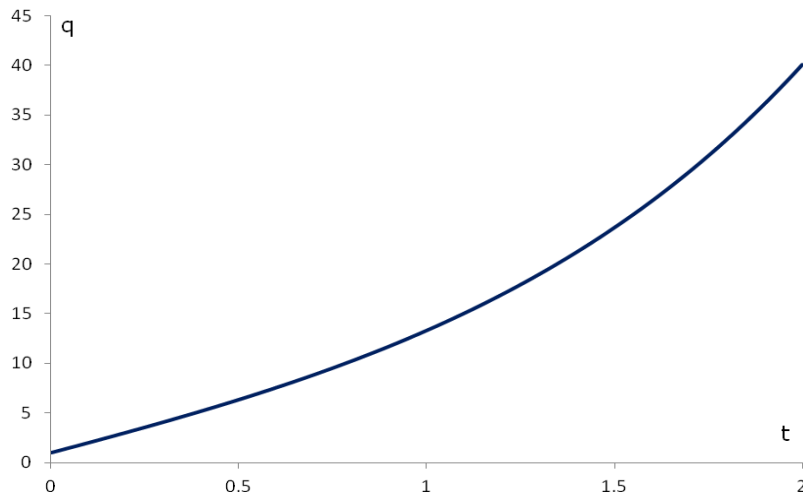
$$C_1 = \frac{1}{2} \left( q^0 + \frac{\dot{q}^0}{\omega} \right), C_2 = \frac{1}{2} \left( q^0 - \frac{\dot{q}^0}{\omega} \right) \quad (1.34)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.34) στις (1.31) και (1.33) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

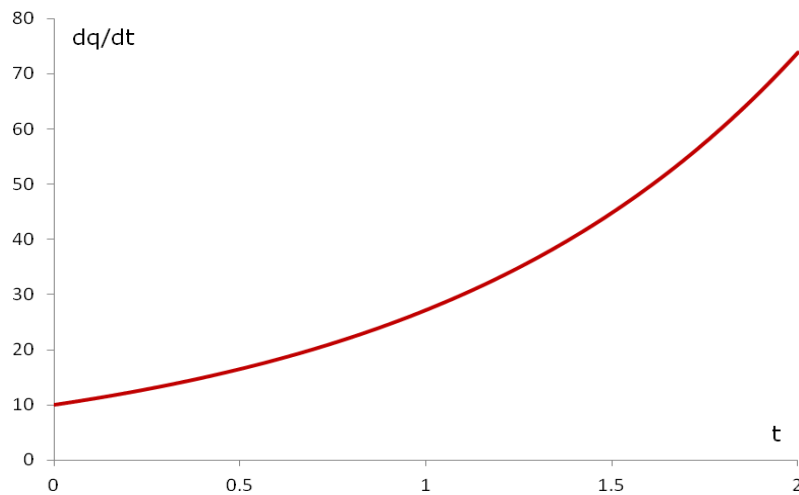
$$q(t) = \frac{1}{2} \left( q^0 + \frac{\dot{q}^0}{\omega} \right) \cdot e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left( q^0 - \frac{\dot{q}^0}{\omega} \right) \cdot e^{-\omega t} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = \frac{1}{2} \left( q^0 \cdot \omega + \dot{q}^0 \right) \cdot e^{\omega t} - \frac{1}{2} \left( q^0 \cdot \omega - \dot{q}^0 \right) \cdot e^{-\omega t} \quad (1.36)$$

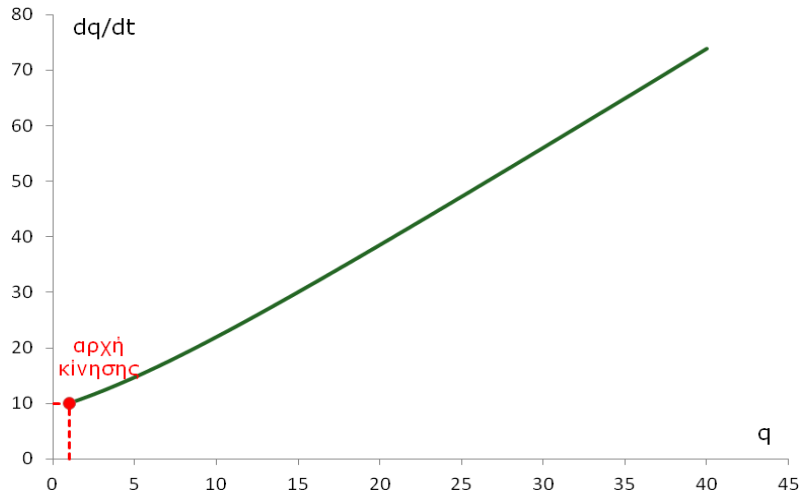
Από τις σχέσεις (1.35) και (1.36) προκύπτει ότι η ταλάντωση δεν είναι φραγμένη, αφού οι όροι με εκθέτη  $i \cdot \omega \cdot t$  αυξάνονται εκθετικά. Αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 1.7 που ακολουθεί, όπου παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=1 \cdot i$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ . Και στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος χαρακτηρίζεται από απόκλιση από την αρχική θέση στατικής ισορροπίας, και μάλιστα η απόκλιση είναι ταχύτερη από ότι στην περίπτωση  $\omega=0$ .



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  - χρόνου  $t$



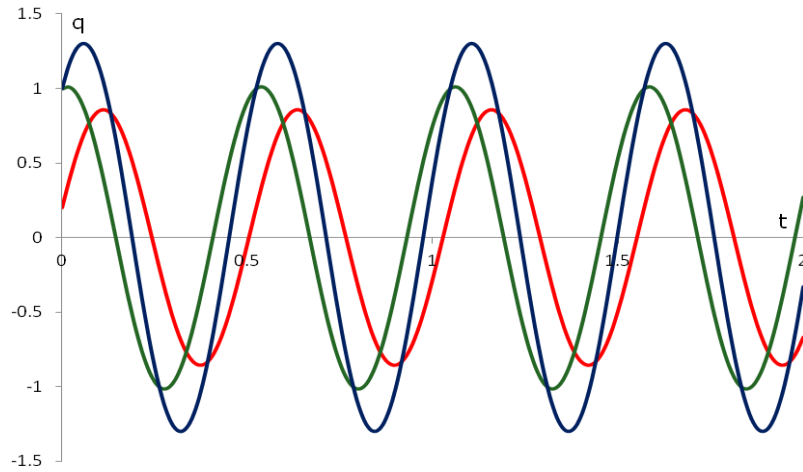
(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  – ταχύτητας  $\partial q/\partial t$

Σχήμα 1.7: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=1 \cdot i$ , για διέγερση ( $q^0=1$ ,  $\dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$

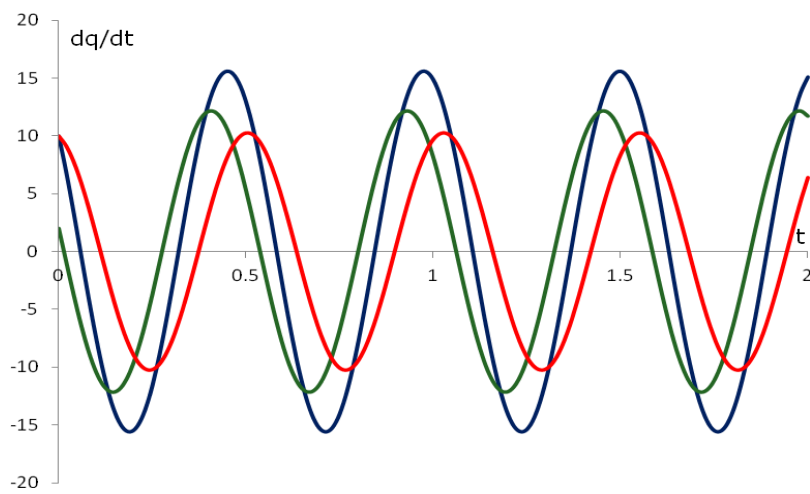
#### 1.2.1.1 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξέταση της επιρροής του μεγέθους της αρχικής διαταραχής στην απόκριση του συστήματος. Όπως προκύπτει από τη μαθηματική επεξεργασία που παρουσιάστηκε και επιβεβαιώνεται από τα σχήμα 1.8, 1.9 και 1.10 που ακολουθούν, το μέγεθος της αρχικής διαταραχής επηρεάζει το εύρος, αλλά όχι το είδος της απόκρισης του συστήματος. Το είδος της απόκρισης εξαρτάται μόνον από τον τύπο ισορροπίας στη θέση από την οποία εκτρέπεται το σύστημα. Εφόσον η αρχική θέση ισορροπίας είναι ευσταθής η ελεύθερη ταλάντωση που προκύπτει μετά την επιβολή της διαταραχής είναι φραγμένη, ενώ αν η αρχική θέση είναι ασταθής ή αντιστοιχεί σε οριακό σημείο, η κίνηση χαρακτηρίζεται από απόκλιση. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση του σχήματος 1.4 στην οποία το είδος της ισορροπίας επηρεάζεται από το μέγεθος της διαταραχής.

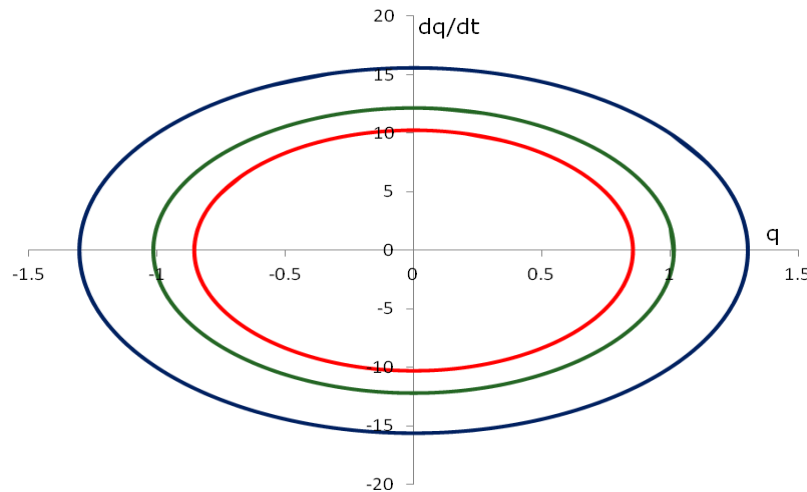




(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



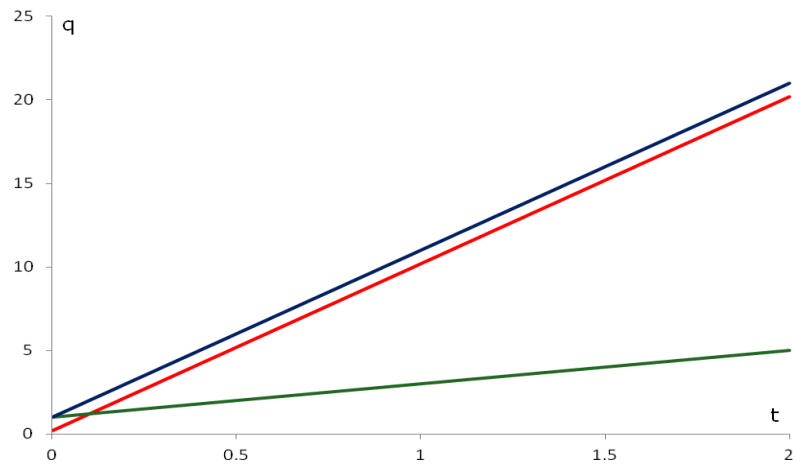
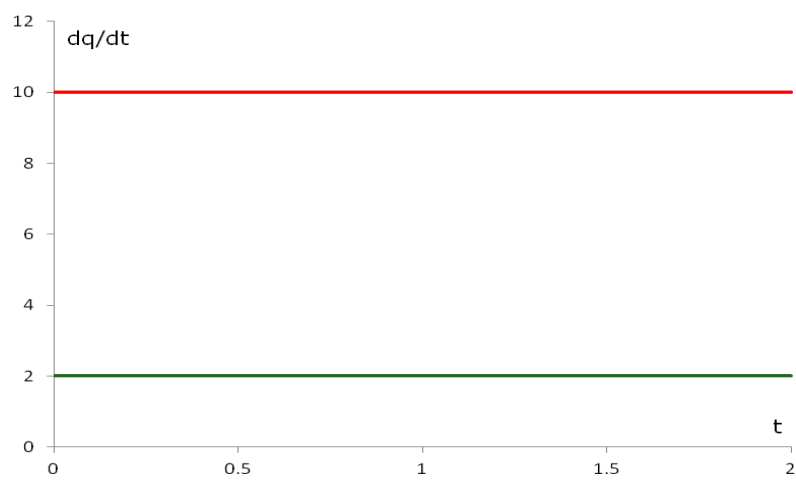
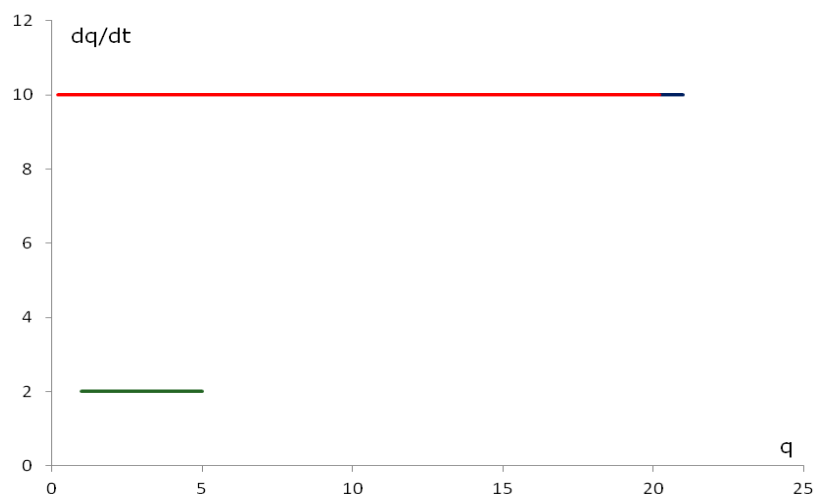
(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  - χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $dq/dt$

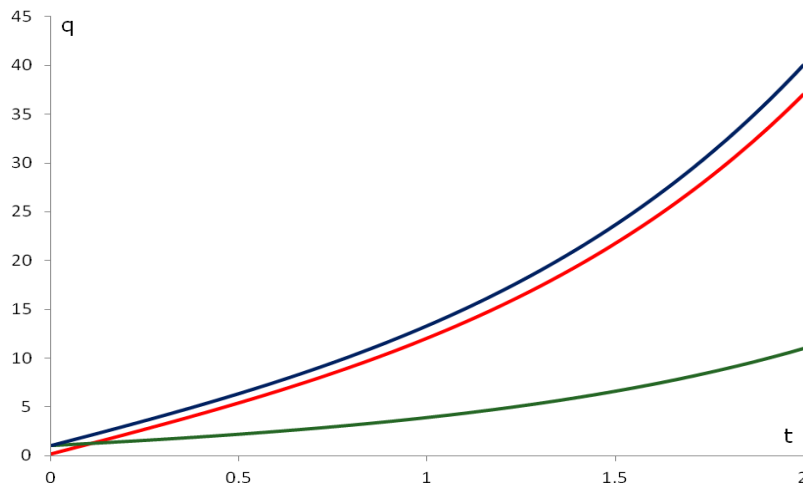
Σχήμα 1.8: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική θέση ισορροπίας

$$q=0: \quad q^0=1, \dot{q}^0=10 \quad - \quad q^0=1, \dot{q}^0=2 \quad - \quad q^0=0.2, \dot{q}^0=10$$

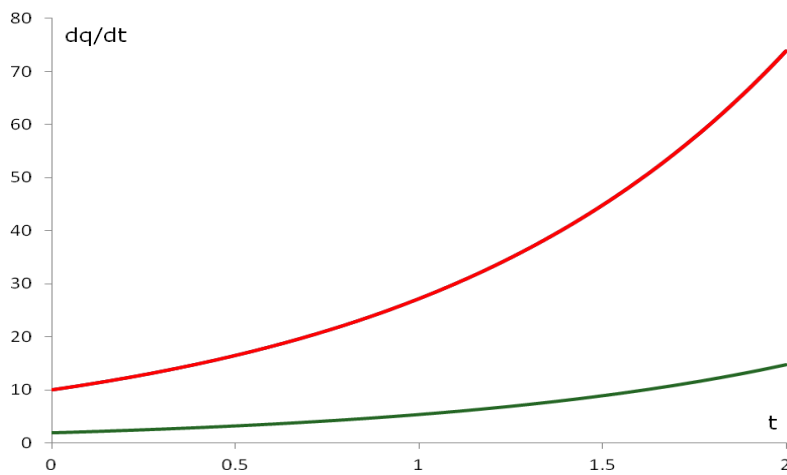
(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$ (β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$ (γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $\partial q/\partial t$ 

Σχήμα 1.9: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική θέση ισορροπίας

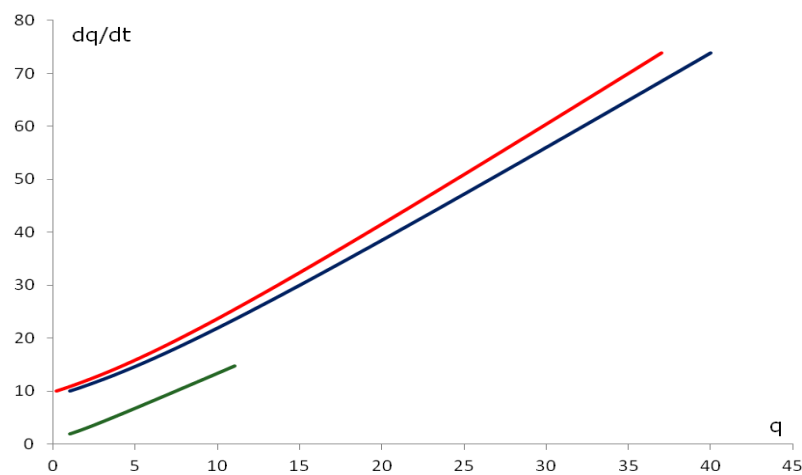
$$q^0=0: \quad q^0=1, \dot{q}^0=10 \quad - \quad q^0=1, \dot{q}^0=2 \quad - \quad q^0=0.2, \dot{q}^0=10$$



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $\partial q/\partial t$

Σχήμα 1.10: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος χωρίς απόσβεση με ιδιοσυχνότητα  $\omega=1 \cdot i$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ :  $q^0=1, \dot{q}^0=10$  -  $q^0=1, \dot{q}^0=2$  -  $q^0=0.2, \dot{q}^0=10$

### 1.2.2 Σύστημα με απόσβεση

Θεωρείται τώρα το ίδιο σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας  $q$ , με απόσβεση, που ισορροπεί στη θέση  $q=0$ . Στο σύστημα επιβάλλεται και πάλι μία αρχική διαταραχή  $(q^0, \dot{q}^0)$  και στη συνέχεια αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση. Εάν  $m$  είναι η μάζα του συστήματος,  $c$  η απόσβεσή του και  $k$  η δυσκαμψία του, τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι:

$$m \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c \cdot \frac{\partial q}{\partial t} + k \cdot q = 0 \quad (1.37)$$

Αναζητείται και πάλι λύση της μορφής:

$$q = A \cdot e^{\rho t} \quad (1.38)$$

Οπότε, με αντικατάσταση της εξίσωσης (1.38) στην (1.37) προκύπτει:

$$\rho^2 \cdot A \cdot e^{\rho t} + \frac{c}{m} \cdot \rho \cdot A \cdot e^{\rho t} + \frac{k}{m} \cdot A \cdot e^{\rho t} = 0 \Rightarrow \left( \rho^2 + \frac{c}{m} \cdot \rho + \frac{k}{m} \right) \cdot A \cdot e^{\rho t} = 0 \quad (1.39)$$

Όμως  $e^{\rho t} \neq 0$  και  $A \neq 0$ , διαφορετικά από την εξίσωση (1.38) θα προέκυπτε ότι η απόκριση είναι συνεχώς μηδενική, οπότε η εξίσωση (1.39) αληθεύει μόνο όταν μηδενίζεται η παράσταση στην παρένθεση στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.39), δηλαδή όταν:

$$\rho^2 + \frac{c}{m} \cdot \rho + \frac{k}{m} = 0 \quad (1.40)$$

Τώρα η (1.40) είναι η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης (1.37), η οποία πλέον είναι δευτέρου βαθμού. Για τη λύση της, και κατά συνέπεια για τη λύση της (1.37), διακρίνονται οι αντίστοιχες περιπτώσεις όπως στο σύστημα χωρίς απόσβεση, ανάλογα με το πρόσημο του όρου  $k/m$ :

α) Εάν  $k/m = \omega^2 > 0$

Σε αυτή την περίπτωση η ιδιοσυχνότητα  $\omega$  του συστήματος είναι πραγματική και θετική. Η διακρίνουσα  $\Delta$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.40) είναι:

$$\Delta = \left( \frac{c}{m} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{k}{m} \right) = \left( \frac{c}{m} \right)^2 - 4 \cdot \omega^2 \quad (1.41)$$

Το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.41) εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας, που με τη σειρά του εξαρτάται από το μέγεθος της

απόσβεσης. Για τη συνηθισμένη για δομικά έργα περίπτωση που η απόσβεση  $c$  είναι μικρότερη από την κρίσιμη απόσβεση  $c_{cr} = 2 \cdot m \cdot \omega$  (περίπτωση υποκρίσιμης απόσβεσης) η διακρίνουσα  $\Delta$  είναι αρνητική, οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση (1.41) έχει δύο διακεκριμένες μιγαδικές ρίζες:

$$\rho_{1,2} = -\zeta \cdot \omega \pm i \cdot \omega \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \quad (1.42)$$

όπου  $\zeta$  το ποσοστό απόσβεσης, δηλαδή ο λόγος της απόσβεσης προς την κρίσιμη απόσβεση:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega} \quad (1.43)$$

Η σχέση (1.42) γράφεται και ως

$$\rho_{1,2} = -\zeta \cdot \omega \pm i \cdot \omega_D \quad (1.44)$$

όπου

$$\omega_D = \omega \sqrt{1-\zeta^2} \quad (1.45)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης θα έχει τότε τη μορφή:

$$q(t) = A \cdot e^{\rho_1 \cdot t} + B \cdot e^{\rho_2 \cdot t} = A \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega + i \cdot \omega_D) \cdot t} + B \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega - i \cdot \omega_D) \cdot t} \quad (1.46)$$

ή ισοδύναμα (αφού  $e^{\pm i \cdot \omega \cdot t} = \cos \omega t \pm i \cdot \sin \omega t$ ):

$$q(t) = e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \cdot [C_1 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \quad (1.47)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι σταθερές ολοκλήρωσης που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.48)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη χρειάζεται η έκφραση της ταχύτητας, δηλαδή της πρώτης παραγώγου της μετακίνησης ως προς το χρόνο:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \cdot \{[-\zeta \cdot \omega \cdot C_1 + \omega_D \cdot C_2] \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - [\zeta \cdot \omega \cdot C_2 + \omega_D \cdot C_1] \cdot \sin(\omega_D \cdot t)\} \quad (1.49)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.47) και (1.49) στην (1.48) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

$$C_1 = q^0, C_2 = \frac{\dot{q}^0 + q^0 \cdot \zeta \cdot \omega}{\omega_D} \quad (1.50)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.50) στις (1.47) και (1.49) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

$$q(t) = e^{-\zeta\omega t} \cdot \left[ q^0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + \frac{\dot{q}^0 + \zeta\omega q^0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right] \quad (1.51)$$

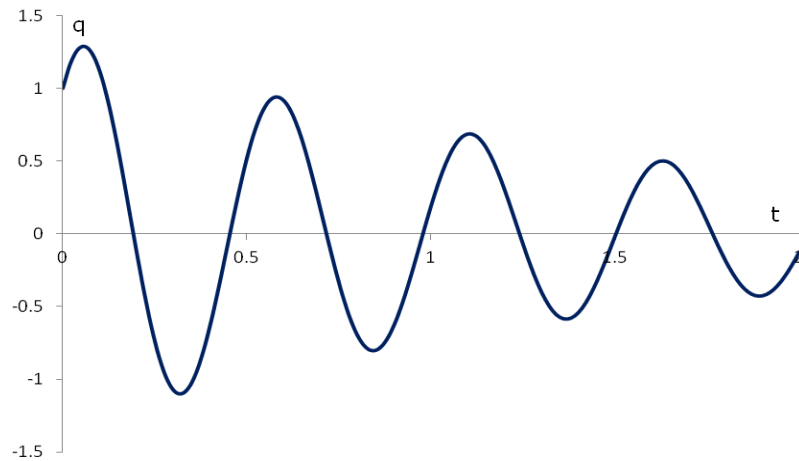
$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = e^{-\zeta\omega t} \left\{ \dot{q}^0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - \left[ \omega_D \cdot q^0 + \frac{\zeta \cdot \omega \cdot \dot{q}^0 + (\zeta \cdot \omega)^2 \cdot q^0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \right] \right\} \quad (1.52)$$

Από τις σχέσεις (1.51) και (1.52) προκύπτει ότι η ταλάντωση είναι φραγμένη, και μάλιστα οι μέγιστες δυνατές τιμές της μετακίνησης και της ταχύτητας είναι αντίστοιχα:

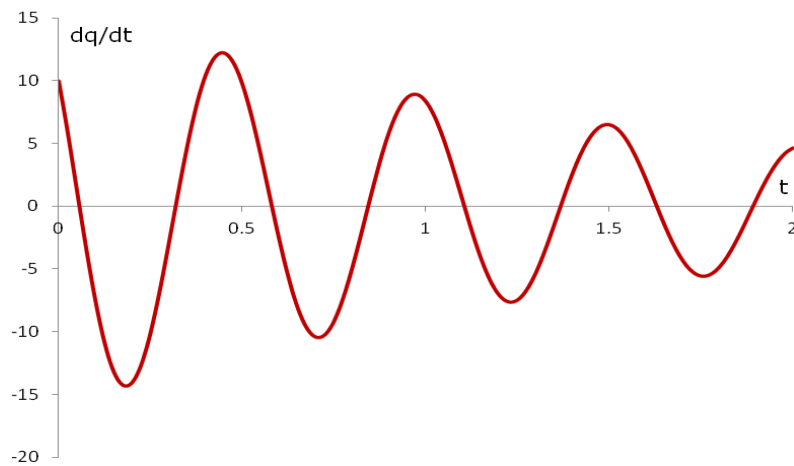
$$\max \{q(t)\} = \sqrt{\left( e^{-\zeta\omega t} \cdot q^0 \right)^2 + \left( e^{-\zeta\omega t} \cdot \frac{\dot{q}^0 + \zeta \cdot \omega \cdot q^0}{\omega_D} \right)^2} \quad (1.53)$$

$$\max \left\{ \frac{\partial q}{\partial t}(t) \right\} = \sqrt{\left( e^{-\zeta\omega t} \cdot \dot{q}^0 \right)^2 + \left( e^{-\zeta\omega t} \cdot \left( \omega_D \cdot q^0 + \frac{\zeta \cdot \omega \cdot \dot{q}^0 + (\zeta \cdot \omega)^2 \cdot q^0}{\omega_D} \right) \right)^2} \quad (1.54)$$

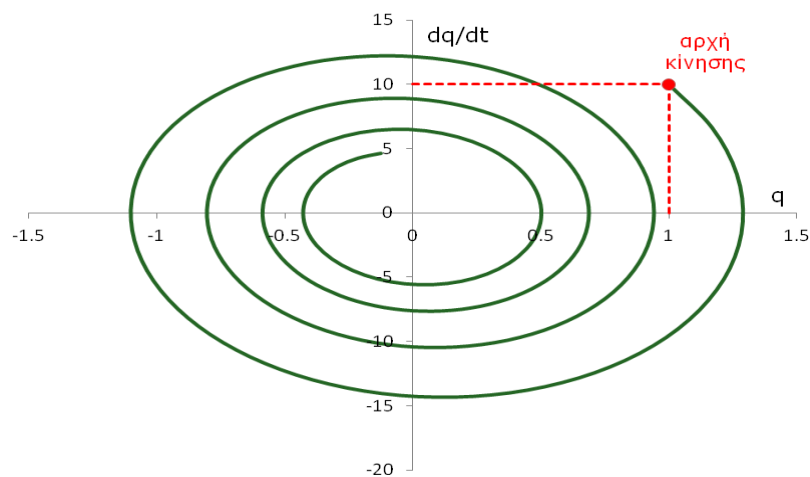
Στο σχήμα 1.11 που ακολουθεί παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ . Όπως είναι εμφανές και από τις σχέσεις (1.51) και (1.52) τα διαγράμματα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$  και ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$  είναι αρμονικής μορφής, ενώ το διάγραμμα φάσης είναι κλειστό ελλειπτικής μορφής. Από τις σχέσεις (1.53) και (1.54) προκύπτει αντίστοιχα ότι η μέγιστη τιμή της μετακίνησης είναι 1.29 και η μέγιστη τιμή της ταχύτητας 14.32. Επίσης η ιδιοπερίοδος είναι ίση με  $T=2\pi/\omega=0.52$ . Συμπερασματικά, στην περίπτωση αυτή το σύστημα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ελεύθερη ταλάντωση περί την αρχική θέση ευσταθούς στατικής ισορροπίας.



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  - χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $dq/dt$

Σχήμα 1.11: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$

β) Εάν  $k/m = -\omega^2 = 0$

Στην περίπτωση αυτή η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μηδενίζεται. Τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.37) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (1.55)$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.40) είναι οι εξής:

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = -\frac{c}{m} \quad (1.56)$$

και η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.55) είναι:

$$q(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-\frac{c}{m}t} \quad (1.57)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.58)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη υπολογίζεται η έκφραση της ταχύτητας, δηλαδή της πρώτης παραγώγου της μετακίνησης ως προς το χρόνο:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = -C_2 \cdot \frac{c}{m} \cdot e^{-\frac{c}{m}t} \quad (1.59)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.58) στις (1.57) και (1.59) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

$$C_1 = q^0 + \frac{\dot{q}^0 \cdot m}{c}, C_2 = -\frac{\dot{q}^0 \cdot m}{c} \quad (1.60)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.60) στις (1.57) και (1.59) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

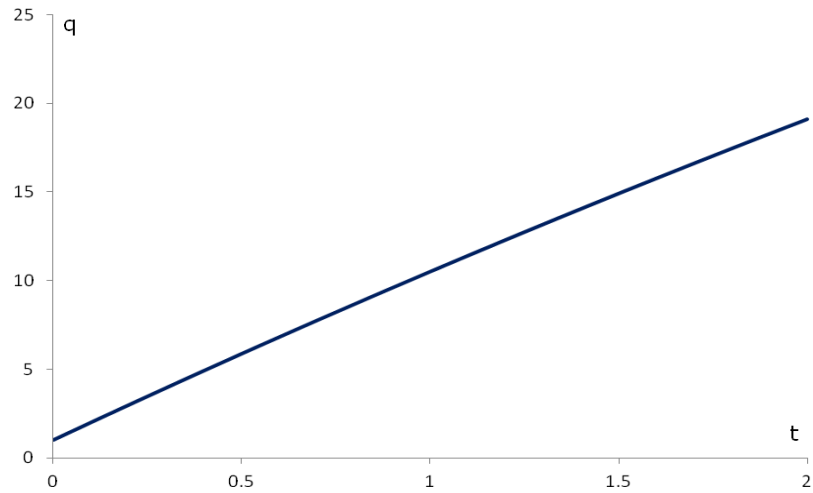
$$q(t) = q^0 + \frac{\dot{q}^0 \cdot m}{c} - \frac{\dot{q}^0 \cdot m}{c} \cdot e^{-\frac{c}{m}t} \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = \dot{q}^0 \cdot e^{-\frac{c}{m}t} \quad (1.62)$$

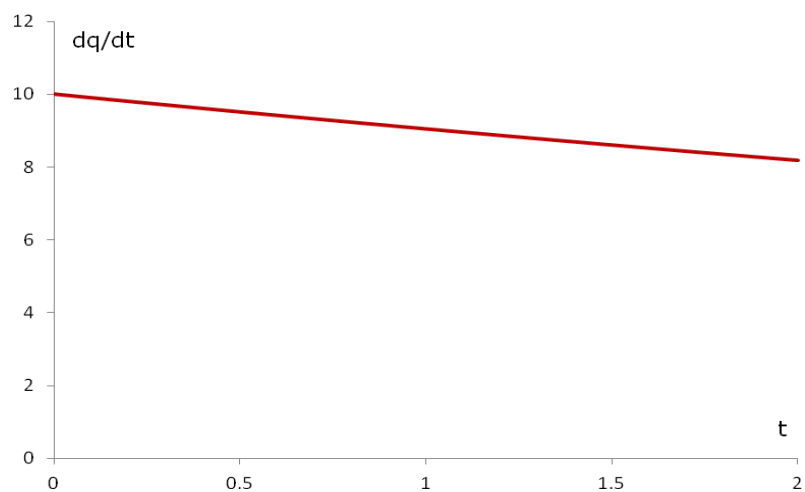
Από τις σχέσεις (1.61) και (1.62) προκύπτει ότι η ταλάντωση δεν είναι φραγμένη. Αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 1.12 που ακολουθεί, όπου παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με συντελεστή απόσβεσης  $c=1$  και



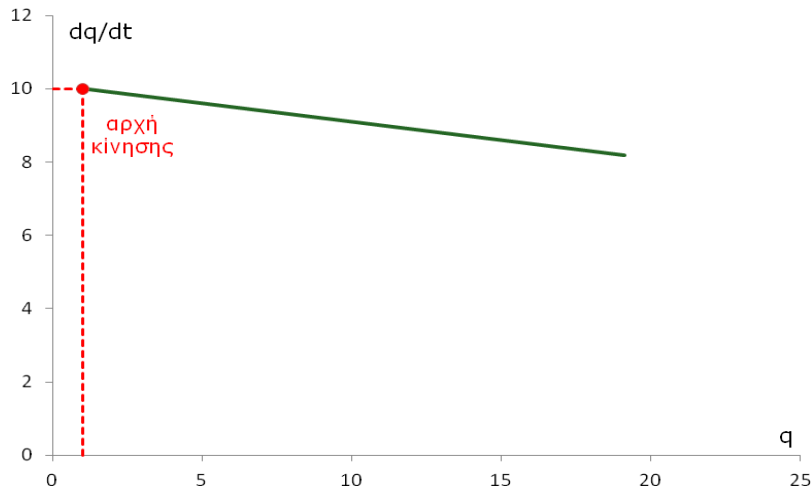
ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ . Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος χαρακτηρίζεται από απόκλιση από την αρχική θέση στατικής ισορροπίας.



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  - χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  – ταχύτητας  $\partial q/\partial t$

Σχήμα 1.12: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με συντελεστή απόσβεσης  $c=1$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$

γ) Εάν  $k/m=-\omega^2 < 0$

Στην περίπτωση αυτή η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι φανταστικός αριθμός. Τότε η διαφορική εξίσωση κίνησης (1.37) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{c}{m} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} + (i \cdot \omega)^2 \cdot q = 0 \quad (1.63)$$

Οι δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.40) είναι πλέον πραγματικές:

$$\rho_{1,2} = -\zeta \cdot \omega \pm \omega \sqrt{\zeta^2 + 1} \quad (1.64)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.37) είναι τότε:

$$q(t) = C_1 \cdot e^{\rho_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\rho_2 \cdot t} = C_1 \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega + \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} + C_2 \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega - \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} \quad (1.65)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  σταθερές ολοκλήρωσης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες:

$$q(0) = q^0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}(0) = \dot{q}^0 \quad (1.66)$$

Για να εφαρμοστεί η δεύτερη συνοριακή συνθήκη υπολογίζεται η έκφραση της ταχύτητας:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = C_1 \cdot (-\zeta \cdot \omega + \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}) e^{(-\zeta \cdot \omega + \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} + C_2 \cdot (-\zeta \cdot \omega - \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}) e^{(-\zeta \cdot \omega - \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} \quad (1.67)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.66) στις (1.65) και (1.67) προκύπτουν οι σταθερές ολοκλήρωσης:

$$C_1 = q^0 - \frac{q^0 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \cdot \zeta \cdot \omega - \dot{q}^0}{2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}}, C_2 = \frac{q^0 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \cdot \zeta \cdot \omega - \dot{q}^0}{2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}} \quad (1.68)$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.68) στις (1.65) και (1.67) καταλήγουμε στις εκφράσεις μεταβολής με το χρόνο της μετακίνησης και της ταχύτητας:

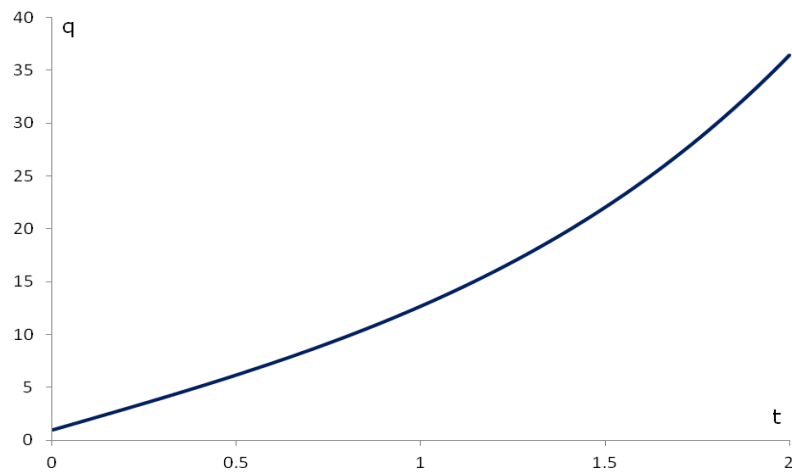
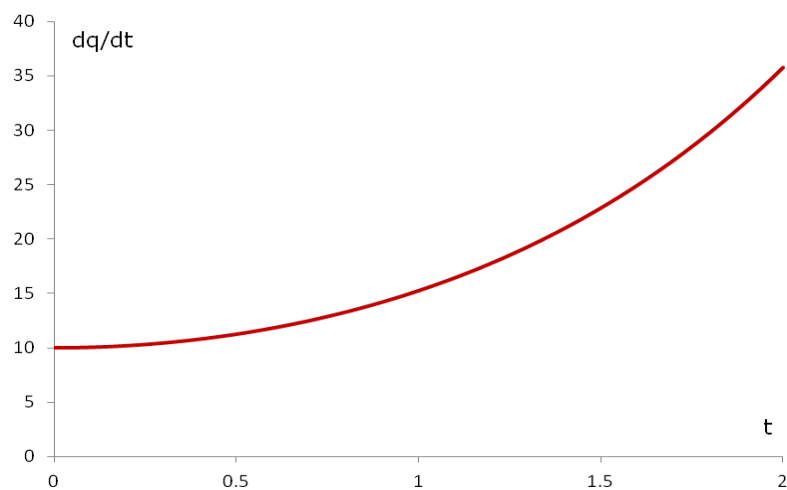
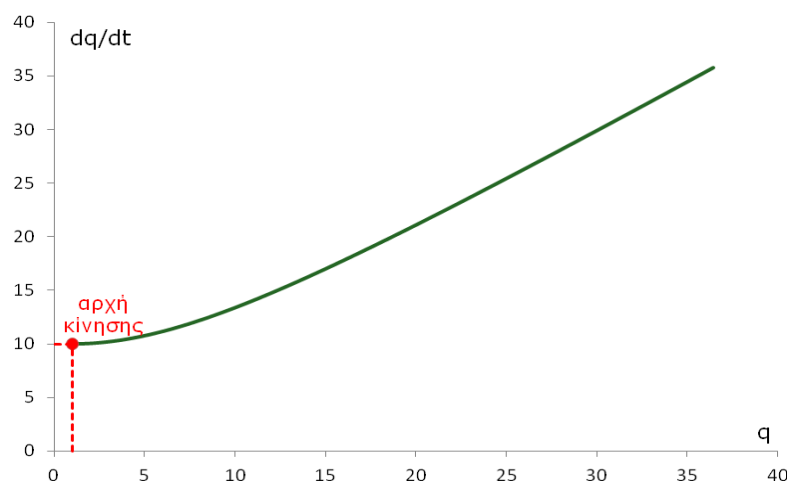
$$q(t) = \left( q^0 - \frac{q^0 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \cdot \zeta \cdot \omega - \dot{q}^0}{2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}} \right) \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega + \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} + \left( \frac{q^0 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \cdot \zeta \cdot \omega - \dot{q}^0}{2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1}} \right) \cdot e^{(-\zeta \cdot \omega - \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t) = \left( q^0 - \frac{q^0 \omega \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \zeta \omega - \dot{q}^0}{2 \omega \sqrt{\zeta^2 + 1}} \right) (-\zeta \omega + \omega \sqrt{\zeta^2 + 1}) e^{(-\zeta \cdot \omega + \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} + \left( \frac{q^0 \omega \sqrt{\zeta^2 + 1} - q^0 \zeta \omega - \dot{q}^0}{2 \omega \sqrt{\zeta^2 + 1}} \right) (-\zeta \omega - \omega \sqrt{\zeta^2 + 1}) e^{(-\zeta \cdot \omega - \omega \cdot \sqrt{\zeta^2 + 1})t} \quad (1.70)$$

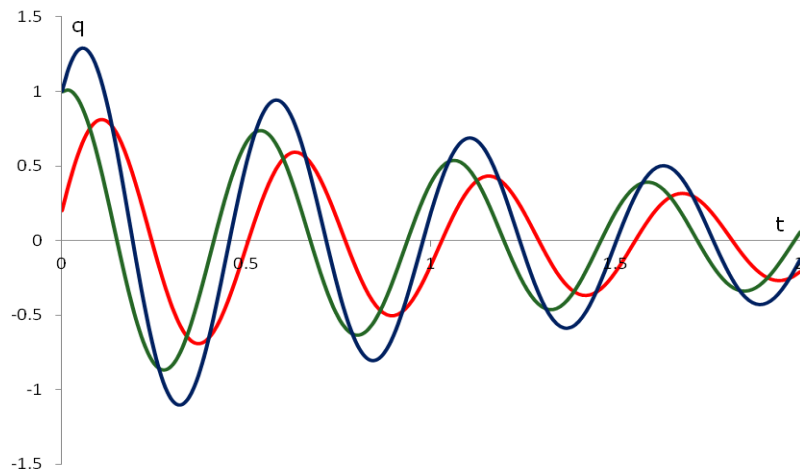
Από τις σχέσεις (1.69) και (1.70) προκύπτει ότι η ταλάντωση δεν είναι φραγμένη. Αυτό επιβεβαιώνεται από το σχήμα 1.13 που ακολουθεί, όπου παρουσιάζεται η απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=1 \cdot i$ , για διέγερση ( $q^0=1, \dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ . Και στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος χαρακτηρίζεται από απόκλιση από την αρχική θέση στατικής ισορροπίας, και μάλιστα η απόκλιση είναι ταχύτερη από ότι στην περίπτωση  $\omega=0$ .

### 1.2.2.1 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής

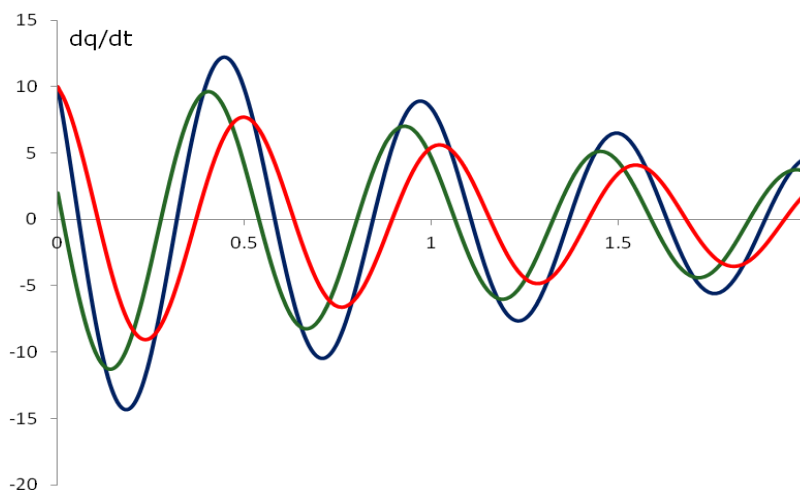
Και σε αυτή την περίπτωση εξετάζεται η επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής στην απόκριση του συστήματος. Όπως προκύπτει από τη μαθηματική επεξεργασία που παρουσιάστηκε και επιβεβαιώνεται από τα σχήμα 1.14, 1.15 και 1.16 που ακολουθούν, το μέγεθος της αρχικής διαταραχής επηρεάζει το εύρος, αλλά όχι το είδος της απόκρισης του συστήματος. Εξάιρεση αποτελεί η περίπτωση που αναφέρθηκε και προηγουμένως, όπου το μέγεθος της διαταραχής μπορεί να μεταβάλλει το είδος της απόκρισης του συστήματος. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα διαγράμματα που προέκυψαν για διάφορες τιμές αρχικής διαταραχής.

(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  – χρόνου  $t$ (β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  – χρόνου  $t$ (γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  – ταχύτητας  $dq/dt$ 

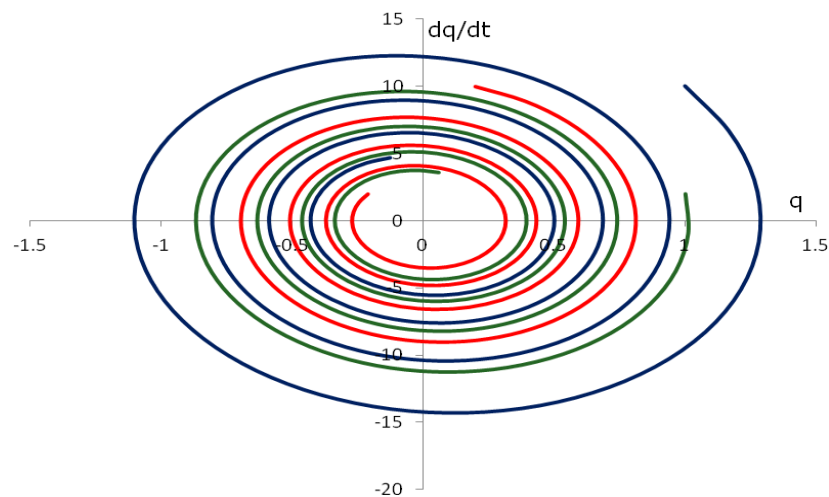
Σχήμα 1.13: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=1 \cdot i$ , για διέγερση ( $q^0=1$ ,  $\dot{q}^0=10$ ) από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$

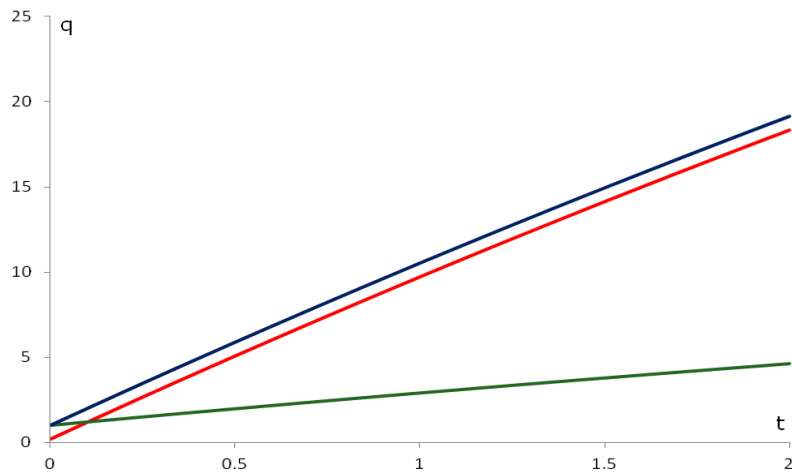
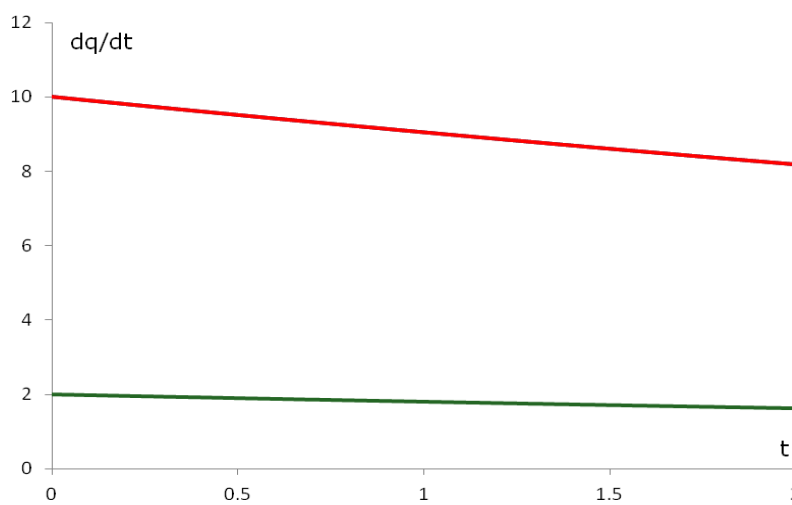
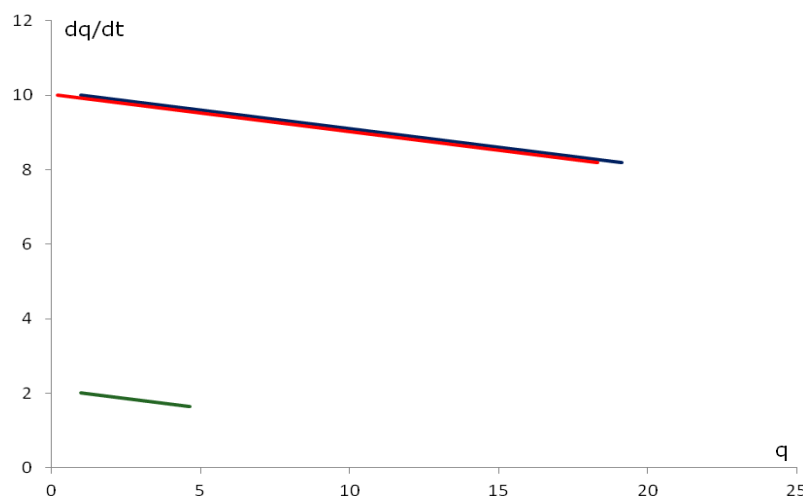


(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $dq/dt$  - χρόνου  $t$



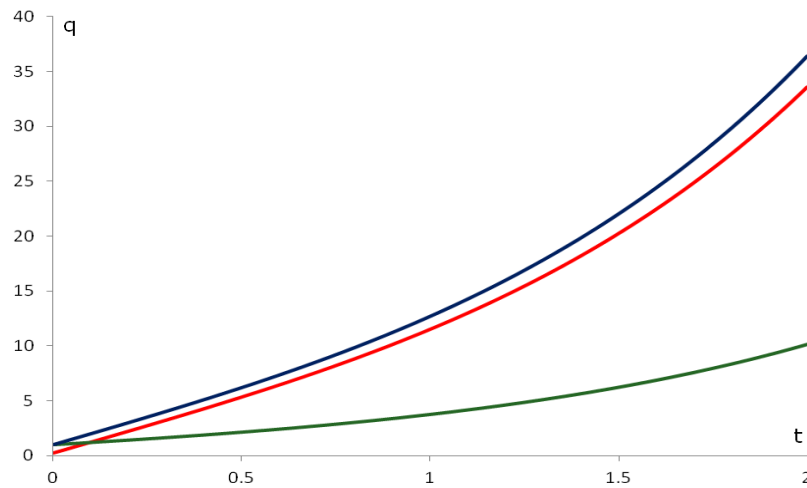
(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $dq/dt$

Σχήμα 1.14: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=12$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική θέση ισορροπίας  $q=0$ :  $q^0=1, \dot{q}^0=10$  -  $q^0=1, \dot{q}^0=2$  -  $q^0=0.2, \dot{q}^0=10$

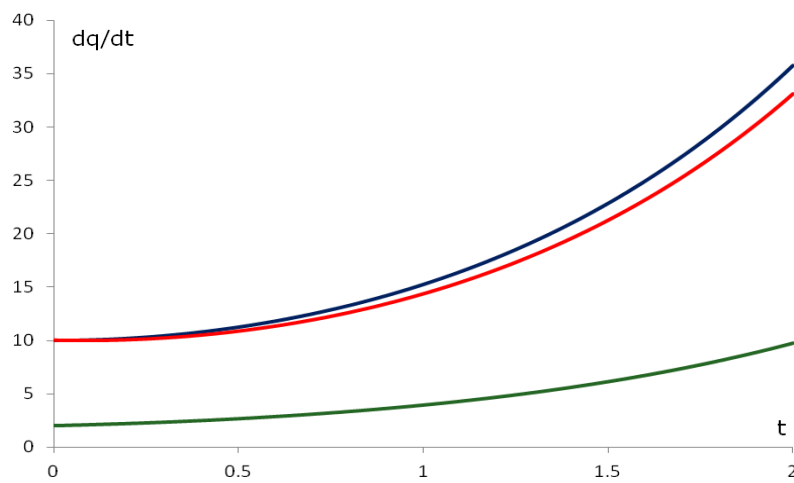
(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$ (β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$ (γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $\partial q/\partial t$ 

Σχήμα 1.15: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με συντελεστή απόσβεσης  $c=1$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=0$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική

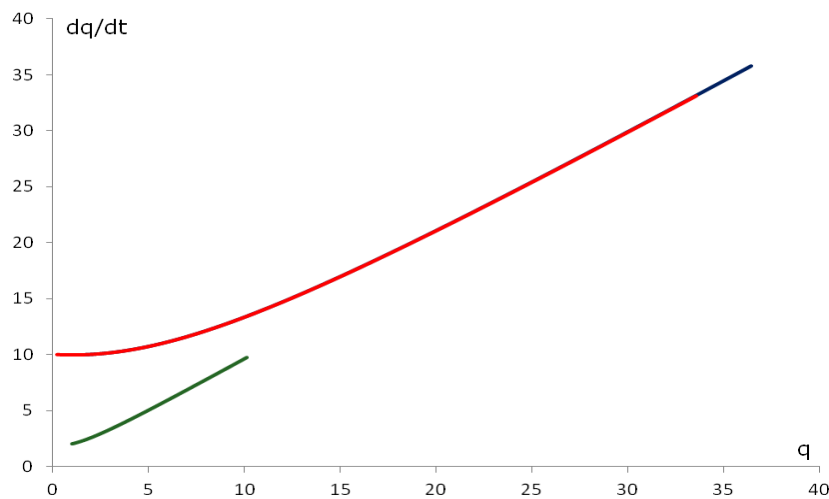
θέση ισορροπίας  $q=0$ :  $q^0=1, \dot{q}^0=10$  -  $q^0=1, \dot{q}^0=2$  -  $q^0=0.2, \dot{q}^0=10$



(α) Διάγραμμα μετακίνησης  $q$  - χρόνου  $t$



(β) Διάγραμμα ταχύτητας  $\partial q/\partial t$  - χρόνου  $t$



(γ) Διάγραμμα φάσης μετακίνησης  $q$  - ταχύτητας  $\partial q/\partial t$

Σχήμα 1.16: Απόκριση μονοβαθμίου συστήματος με απόσβεση  $\zeta=0.05$  και ιδιοσυχνότητα  $\omega=-i$ , για τρεις διαφορετικές αρχικές διεγέρσεις από τη στατική

θέση ισορροπίας  $q=0$ :  $q^0=1, \dot{q}^0=10$  -  $q^0=1, \dot{q}^0=2$  -  $q^0=0.2, \dot{q}^0=10$

## 1.3 Παραδείγματα εφαρμογής σε μονοβάθμια συστήματα

### 1.3.1 Αστάθεια μέσω συμμετρικού ευσταθούς σημείου διακλάδωσης

Θεωρείται άκαμπτη κατακόρυφη ράβδος μήκους  $L$  και ροπής αδράνειας  $I$ , ελαστικά πακτωμένη στο ένα άκρο της με στροφικό ελατήριο ακαμψίας  $c$  που συμπεριφέρεται ελαστικά. Στο άλλο άκρο της, η ράβδος φορτίζεται με θλιπτικό φορτίο  $P$ . Η μελέτη του συστήματος με τη δυναμική μέθοδο θα γίνει για πολύ μικρές γωνίες εκτροπής (γραμμική θεωρία) χωρίς αρχικές ατέλειες, καθώς και με τη μη γραμμική μέθοδο.

Το σύστημα εκτρέπεται κατά μία μικρή γωνία  $\theta$  από τη θέση ισορροπίας. Από το δεύτερο νόμο του Newton ισχύει:

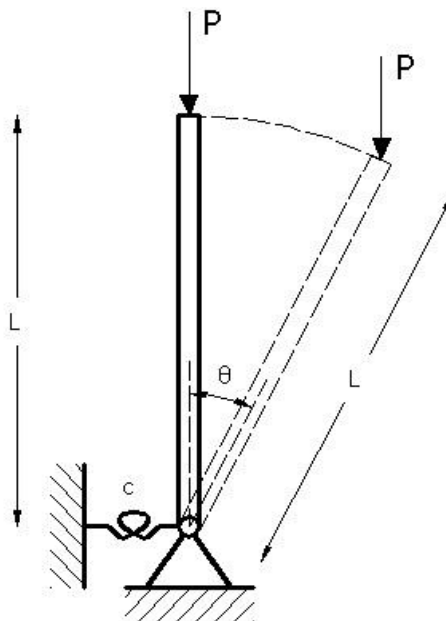
$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = M \quad (1.71)$$

Με ισορροπία ροπών ως προς την άρθρωση προκύπτει:

$$M = P \cdot L \cdot \sin\theta - c \cdot \theta \quad (1.72)$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \sin\theta - c \cdot \theta) = 0 \quad (1.73)$$



Σχήμα 1.17: Ελαστικά πακτωμένη στερεά ράβδος



### 1.3.1.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας

Για πολύ μικρές γωνίες ισχύει  $\sin\theta \approx \theta$  και η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - (P \cdot L - c) \cdot \theta = 0 \quad (1.74)$$

Η γραμμική διαφορική εξίσωση (1.74) λύνεται αν τεθεί  $\theta = Ce^{\lambda t}$  και προκύπτει:

$$\lambda^2 - \frac{(P \cdot L - c)}{I} = 0 \quad (1.75)$$

Αν ισχύει  $(P \cdot L - c) < 0$  τότε η κίνηση είναι αρμονική και άρα φραγμένη, δηλαδή η αρχική θέση ισορροπίας είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Αν  $(P \cdot L - c) > 0$ , η κίνηση είναι απεριόδικη και επομένως δεν υπάρχει ευστάθεια.

Τέλος, αν  $P = c/L$ , το σύστημα θα εξακολουθήσει να κινείται ή θα παραμείνει στη θέση της αρχικής του ισορροπίας.

Δε γίνεται με τη γραμμική θεωρία να βρεθεί αν ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής ή ασταθής. Έχει όμως υπολογιστεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P_{cr} = c/L$ , το οποίο αντιστοιχεί σε μηδενισμό της ιδιοσυχνότητας του συστήματος.

### 1.3.1.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας

Από τη διαφορική εξίσωση (1.73) προκύπτει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \sin\theta - c \cdot \theta) = 0 \quad (1.76)$$

Η εξίσωση (1.76) είναι μη γραμμική και για να λυθεί θα εφαρμοστεί η τεχνική της διαταραχής. Θεωρείται για μία απείρως γειτονική θέση ισορροπίας ότι  $\theta = \theta^* + \theta_0$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \sin(\theta^* + \theta_0) - c \cdot (\theta^* + \theta_0)) = 0 \quad (1.77)$$

Αναπτύσσεται το  $\sin(\theta^* + \theta_0)$  σε σειρά Taylor γύρω από το  $\theta_0$  και προκύπτει:

$$\sin(\theta^* + \theta_0) = \sin\theta_0 + \theta^* \cdot \cos\theta_0 + O(\theta^2) \quad (1.78)$$

όπου  $O(\theta^2)$  είναι το σφάλμα.

Με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (1.77) προκύπτει:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - (P \cdot L \cdot (\sin\theta_0 + \theta^* \cdot \cos\theta_0) - c \cdot (\theta^* + \theta_0)) = 0 \quad (1.79)$$

Επειδή η θέση  $\theta_0$  θα ικανοποιεί την (1.76) διότι η θέση αυτή είναι θέση ισορροπίας του συστήματος, προκύπτει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \theta^* \cdot \cos\theta_0 - c \cdot \theta^*) + \underbrace{I \cdot \frac{d^2\theta_0}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \sin\theta_0 - c \cdot \theta_0)}_{=0} = 0 \quad (1.80)$$

και

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - (P \cdot L \cdot \cos\theta_0 - c) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.81)$$

Για τη θέση  $\theta_0 = 0$  (εκεί που τελειώνει ο κύριος δρόμος ισορροπίας) ισχύει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - (P \cdot L - c) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.82)$$

Θα είναι ευσταθής στην περίπτωση που  $(P \cdot L - c) < 0$ .

Αν  $(P \cdot L - c) > 0$ , η κίνηση είναι απεριοδική και επομένως όχι ευσταθής.

Το κρίσιμο φορτίο θα είναι το  $P = \frac{c}{L}$ .

Για να είναι ευσταθής ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας, θα πρέπει για την τυχαία γωνία  $\theta_0$  (απείρω γειτονική θέση) να ισχύει:

$$(P \cdot L \cdot \cos\theta_0 - c) < 0 \quad (1.83)$$

Για να είναι ασταθής θα πρέπει να ισχύει:

$$(P \cdot L \cdot \cos\theta_0 - c) > 0 \quad (1.84)$$

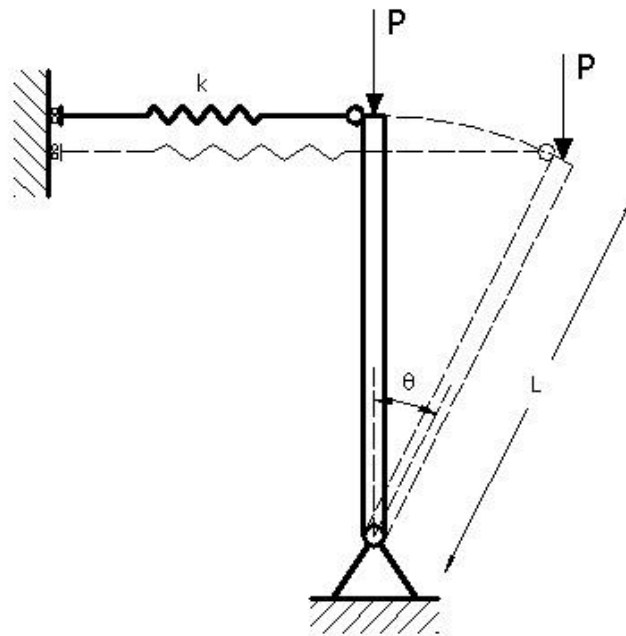
Για να ισχύει η (1.84) θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\theta_0 \cdot \cos\theta_0}{\sin\theta_0} > 1 \quad (1.85)$$

όμως για τις γωνίες  $|\theta_0| < \pi/2$  δεν ισχύει η (1.85), άρα ο δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής.

### 1.3.2 Αστάθεια μέσω συμμετρικού ασταθούς σημείου διακλάδωσης

Θεωρείται άκαμπτη κατακόρυφη ράβδος μήκους  $L$  και ροπής αδράνειας  $I$ , αρθρωμένη στο ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της η ράβδος φορτίζεται με θλιπτικό φορτίο  $P$  και συγκρατείται με ελατήριο ακαμψίας  $k$  το οποίο έχει τη δυνατότητα να παραμένει για οποιαδήποτε θέση της ράβδου οριζόντιο. Η μελέτη του συστήματος με τη δυναμική μέθοδο θα γίνει για πολύ μικρές γωνίες εκτροπής (γραμμική θεωρία) χωρίς αρχικές ατέλειες, καθώς και με τη μη γραμμική μέθοδο. Το σύστημα είναι ενός βαθμού ελευθερίας και θεωρείται ότι ο βαθμός ελευθερίας του είναι η στροφή  $\theta$ .



Σχήμα 1.18: Στερεά ράβδος με άρθρωση στο ένα άκρο και ελαστική στήριξη στο άλλο

Αρχικά υπολογίζεται η δύναμη του ελατηρίου που αναπτύσσεται για εκτροπή του συστήματος από τη θέση ισορροπίας του κατά  $\theta$ . Από τη γεωμετρία του φορέα, προκύπτει:

$$P \cdot L \cdot \sin\theta = k \cdot L \cdot \sin\theta \cdot (L \cdot \cos\theta) = k \cdot L^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \quad (1.86)$$

Είναι γνωστό από την τριγωνομετρία ότι  $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ , οπότε η (1.86) γίνεται:

$$P \cdot L \cdot \sin\theta = k \cdot L \cdot \sin\theta \cdot (L \cdot \cos\theta) = k \cdot L^2 \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta} \quad (1.87)$$

και η διαφορική εξίσωση της κίνησης θα είναι:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta}) \cdot \sin\theta = 0 \quad (1.88)$$

### 1.3.2.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας

Με γραμμικοποίηση, η διαφορική εξίσωση (1.88) γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta^2}) \cdot \theta = 0 \quad (1.89)$$

Επίσης, για πολύ μικρές γωνίες ισχύει  $\sqrt{1 - \theta^2} \approx 1$ , επομένως η διαφορική εξίσωση (1.89) απλοποιείται κι άλλο:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L) \cdot \theta = 0 \quad (1.90)$$

Η αρχική θέση ισορροπίας  $\theta = 0$  είναι ευσταθής αν ισχύει  $(P - k \cdot L) < 0$ . Αν  $(P - k \cdot L) > 0$ , η κίνηση είναι απεριοδική και επομένως όχι ευσταθής.

Το κρίσιμο φορτίο θα είναι το  $P = kL$ . Όπως αναμενόταν, υπάρχει αδυναμία για το αν η κρίσιμη θέση ισορροπίας είναι ευσταθής ή ασταθής.

### 1.3.2.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας (μετρίως μεγάλων γωνιών)

Η διαφορική εξίσωση είναι:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta^2}) \cdot \theta = 0 \quad (1.91)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι μη γραμμική και για να λυθεί θα εφαρμοστεί η τεχνική της διαταραχής. Θεωρείται για μία απείρως γειτονική θέση ισορροπίας ότι  $\theta = \theta^* + \theta_0$ , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)^2}) \cdot (\theta^* + \theta_0) = 0 \quad (1.92)$$

Αναπτύσσεται σε σειρά Taylor η ρίζα και κρατείται μόνο ο πρώτος όρος:

$$\sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)^2} = \sqrt{1 - \theta_0^2} + O(\theta^*) \quad (1.93)$$

Επομένως, η εξίσωση (1.92) γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}) \cdot (\theta^* + \theta_0) = 0 \quad (1.94)$$

Η  $\theta_0$  είναι μία θέση ισορροπίας του συστήματος, άρα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (1.91):

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}) \cdot \theta^* + \underbrace{I \cdot \frac{d^2\theta_0}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}) \cdot \theta_0}_{=0} = 0 \quad (1.95)$$

και επομένως προκύπτει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.96)$$

επειδή η  $\theta_0 = 0$  είναι θέση ισορροπίας, ισχύει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - L \cdot (P - k \cdot L) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.97)$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ίδια με αυτή που επιλύθηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Είναι γνωστό ότι για να είναι ευσταθής η αρχική θέση ισορροπίας  $\theta_0 = 0$  θα πρέπει να ισχύει  $(P - k \cdot L) < 0$ . Αν  $(P - k \cdot L) > 0$ , η κίνηση είναι απεριοδική και επομένως όχι ευσταθής. Το κρίσιμο φορτίο θα είναι το  $P_{cr} = kL$ .

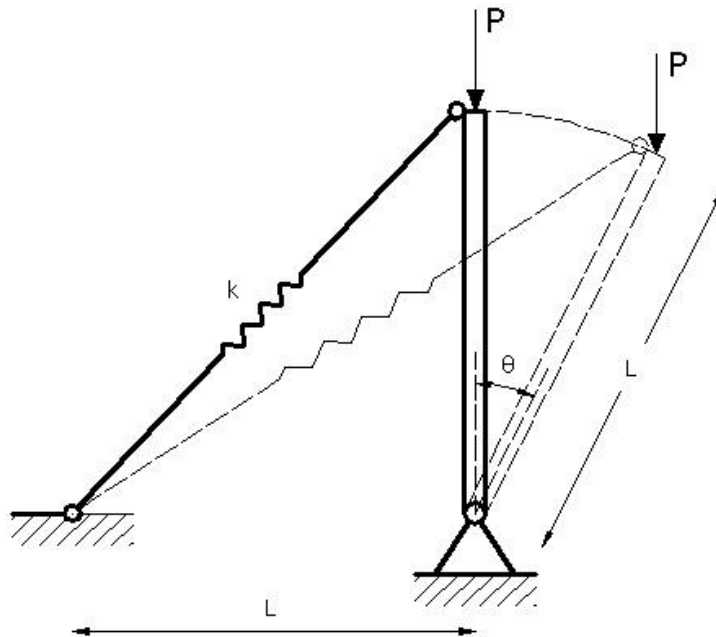
Είναι φανερό ότι οι θέσεις ισορροπίας  $\theta_0 \neq 0$  είναι ευσταθείς όταν  $P < k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}$  ενώ είναι ασταθείς όταν  $P > k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}$ . Σε αυτό το παράδειγμα, ισχύει η δεύτερη σχέση για τις διάφορες τιμές του  $\theta_0$ , άρα το σύστημα χαρακτηρίζεται από ασταθές συμμετρικό σημείο διακλάδωσης και η εξίσωση του δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας είναι  $P = k \cdot L \cdot \sqrt{1 - \theta_0^2}$ .

### 1.3.3 Αστάθεια μέσω ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης

Θεωρείται η απαραμόρφωτη ράβδος του σχήματος 1.19. Το κάτω της άκρο είναι αρθρωμένο, ενώ το άνω της άκρο δέχεται κατακόρυφο θλιπτικό φορτίο  $P$  και είναι δεσμευμένο με ελατήριο σταθεράς  $k$ . Το σύστημα περιγράφεται πλήρως από έναν βαθμό ελευθερίας. Επιλέγεται ότι ο βαθμός αυτός είναι η στροφή  $\theta$ . Το πρόβλημα θα μελετηθεί με τη δυναμική μέθοδο, με βάση τη γραμμική και τη μη γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας, χωρίς αρχικές ατέλειες.

Από τη γεωμετρία, προκύπτει ότι το παραμορφωμένο μήκος του ελατηρίου είναι:

$$L' = \sqrt{(L + L \cdot \sin\theta)^2 + (L \cdot \cos\theta)^2} \quad (1.98)$$



Σχήμα 1.19: Άκαμπτη ράβδος με άρθρωση στο κάτω άκρο και ελαστική στήριξη στο άνω

Η δύναμη του ελατηρίου για εκτροπή κατά γωνία \$\theta\$ είναι:

$$P_k = k \cdot (L \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin\theta} - L \cdot \sqrt{2}) = k \cdot L \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{1 + \sin\theta} - 1) \quad (1.99)$$

Με εξίσωση ισορροπίας ροπών ως προς την άρθρωση για τον παραμορφωμένο φορέα προκύπτει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - \left[ P \cdot L \cdot \sin\theta - k \cdot L^2 \cdot (\sqrt{1 - \sin^2\theta} - \sqrt{1 - \sin\theta}) \right] = 0 \quad (1.100)$$

### 1.3.3.1 Γραμμική θεωρία ευστάθειας

Με γραμμικοποίηση, η διαφορική εξίσωση (1.100) γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - \left[ P \cdot L \cdot \theta - k \cdot L^2 \cdot (\sqrt{1 - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta}) \right] = 0 \quad (1.101)$$

επίσης ισχύει ότι \$\sqrt{1 - \theta^2} \approx 1\$ και \$\sqrt{1 - \theta} \approx 1 - \theta/2\$, οπότε η διαφορική εξίσωση (1.101) γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - L \cdot \left( P - \frac{k \cdot L}{2} \right) \cdot \theta = 0 \quad (1.102)$$

Για να υπάρχει ευστάθεια περί την αρχική θέση ισορροπίας  $\theta = 0$ , θα πρέπει να ισχύει ότι  $P < k \cdot L/2$ . Αν  $P > k \cdot L/2$ , η κίνηση είναι απεριοδική και επομένως όχι ευσταθής. Το κρίσιμο φορτίο θα είναι το  $P_{cr} = k \cdot L/2$ . Αφού εφαρμόστηκε γραμμική θεωρία, δεν είναι γνωστό αν ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής ή ασταθής.

### 1.3.3.2 Μη γραμμική θεωρία ευστάθειας (μετρίως μεγάλων γωνιών)

Για να διαπιστωθεί αν ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι ευσταθής ή ασταθής, θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της διαταραχής. Θα θεωρηθεί πάλι μία απείρως γειτονική θέση ισορροπίας  $\theta = \theta^* + \theta_0$ , οπότε η διαφορική εξίσωση (1.101) γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - \left[ P \cdot L \cdot (\theta^* + \theta_0) - k \cdot L^2 \cdot \left( \sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)^2} - \sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)} \right) \right] = 0 \quad (1.103)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι μη γραμμική. Αναπτύσσονται σε σειρά Taylor οι ρίζες. Κατά τα γνωστά, τα αναπτύγματα Taylor είναι:

$$\sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)^2} = \sqrt{1 - \theta_0^2} + O(\theta^*) \quad (1.104)$$

και

$$\sqrt{1 - (\theta^* + \theta_0)} = \sqrt{1 - \theta_0} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \theta_0}} \cdot \theta^* + O(\theta^{*2}) \quad (1.105)$$

Οπότε η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$I \cdot \frac{d^2(\theta^* + \theta_0)}{dt^2} - \left[ P \cdot L \cdot (\theta^* + \theta_0) - k \cdot L^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \theta_0^2} - \sqrt{1 - \theta_0} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \theta_0}} \theta^* \right) \right] = 0 \quad (1.106)$$

Η εξίσωση (1.106) γίνεται:

$$I \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - \left( PL\theta^* - kL^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\theta_0}} \theta^* \right) + \underbrace{I \frac{d^2\theta_0}{dt^2} - [PL\theta_0 - kL^2 (\sqrt{1-\theta_0^2} - \sqrt{1-\theta_0})]}_{=0} = 0 \quad (1.107)$$

$$\Rightarrow I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - L \cdot \left( P - \frac{k \cdot L}{2 \cdot \sqrt{1 - \theta_0}} \right) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.108)$$

Για  $\theta = 0$  ισχύει:

$$I \cdot \frac{d^2\theta^*}{dt^2} - L \cdot \left( P - \frac{k \cdot L}{2} \right) \cdot \theta^* = 0 \quad (1.109)$$

Αν  $P < k \cdot L/2$ , τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται από ευστάθεια. Αν  $P > k \cdot L/2$ , η κίνηση είναι απεριοδική και επομένως όχι ευσταθής. Το κρίσιμο φορτίο προκύπτει ίσο με  $P_{cr} = k \cdot L/2$ .

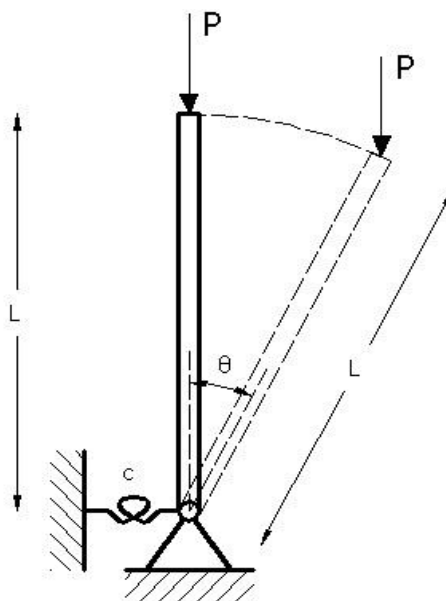
Η εξίσωση του δευτερεύοντα δρόμου ισορροπίας είναι  $P = k \cdot L / (2 \cdot \sqrt{1 - \theta_0})$ . Αν γίνει μελέτη αυτής της σχέσης, διαπιστώνεται ότι η κίνηση είναι φραγμένη για  $\theta_0 < 0$ , διότι ο δευτερεύων δρόμος ισορροπίας είναι ανοδικός, ενώ για  $\theta_0 > 0$  η κίνηση είναι μη φραγμένη. Άρα το σημείο διακλάδωσης είναι ασταθές, πράγμα που βρίσκεται για  $\theta_0 \rightarrow 0$ , και το κρίσιμο φορτίο είναι  $P_{cr} = k \cdot L/2$ .

## 1.4 Παραδείγματα σε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων

### 1.4.1 Παράδειγμα 1

Άκαμπτη ράβδος με στροφικό ελατήριο στη βάση (μονοβάθμιο σύστημα)

Το σύστημα του σχήματος 1.20 έχει επιλυθεί για διάφορες τιμές του θλιπτικού φορτίου  $P$ . Η ανάλυση έγινε με το πρόγραμμα ADINA.



Σχήμα 1.20: Άκαμπτη ράβδος με ελατήριο



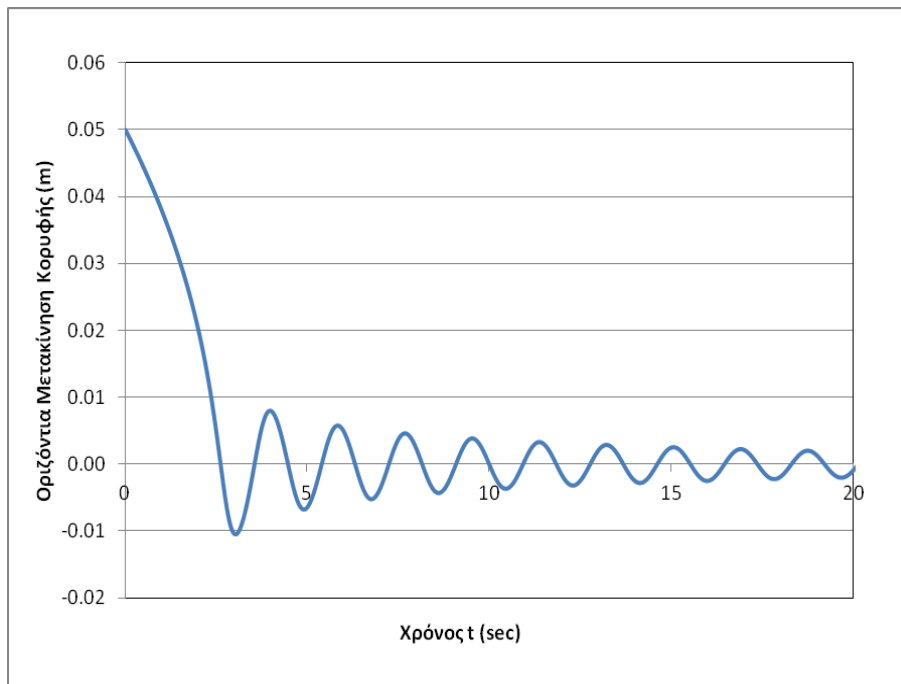
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.20, η ράβδος στηρίζεται αρθρωτά στη βάση της, ενώ υπάρχει και ένα στροφικό ελατήριο σταθεράς  $c$ . Επίσης, στην κορυφή της ράβδου (κόμβος 2) ασκείται φορτίο  $P$ , το οποίο παραμένει συνεχώς κατακόρυφο. Αυτό το παράδειγμα είναι παρόμοιο με το παράδειγμα που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην παράγραφο 1.3.1 για την περίπτωση λυγισμού μέσω συμμετρικού ευσταθούς σημείου διακλάδωσης.

Από τις χρονοϊστορίες του δυναμικού βαθμού που επιλέχθηκαν είναι φανερό ότι το σύστημα για  $P < P_{cr}$  είναι ευσταθές. Για  $P = P_{cr}$  παρουσιάζεται αστάθεια, διότι το πλάτος της ταλάντωσης μετά την αρχική εκτροπή που δίνεται αυξάνει διαρκώς. Για  $P = P_{cr}$ , η χρονοϊστορία που προκύπτει για τα πρώτα 20sec είναι η μαθηματική λύση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα, ενδιαφέρει το πλάτος της μετατόπισης μόνο για τα πρώτα 2-3 sec.

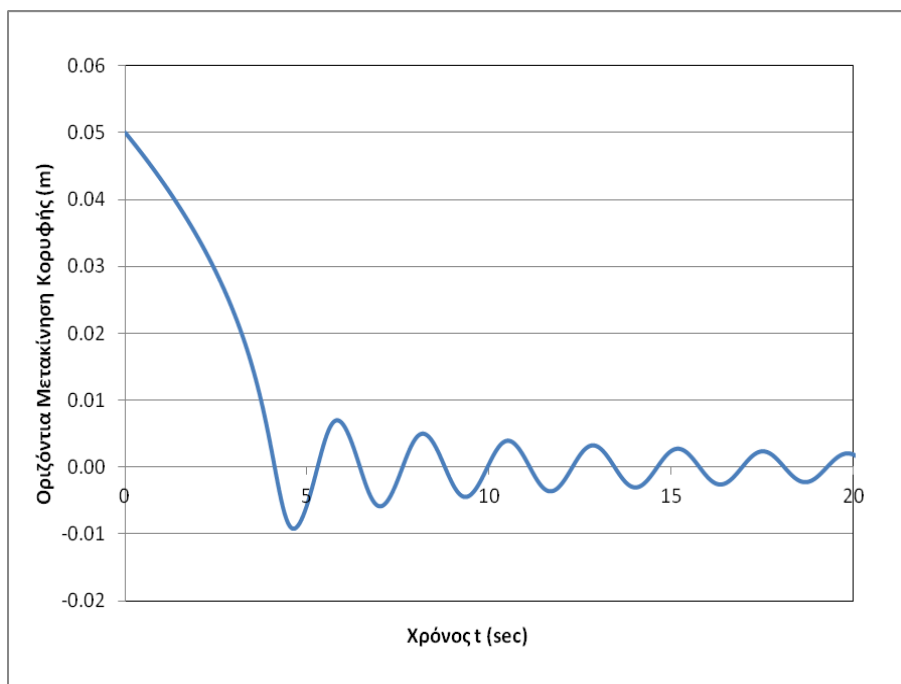
#### 1.4.1.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες

- Μήκος ράβδου  $L = 3.00\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση για οποιαδήποτε θέση της ράβδου.
- Το ελατήριο συμπεριφέρεται γραμμικά.
- Ο κόμβος 2 της ράβδου έχει αρχική μετατόπιση  $u(0) = 0.05\text{m}$ .
- Η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .
- Η σταθερά του ελατηρίου επιλέγεται  $c = 300 \text{ KNm}$ . Αναμένεται ότι το κρίσιμο φορτίο θα είναι  $P_{cr} = c/l = 100 \text{ kN}$ .
- Θεωρείται απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta = 1\%$ .

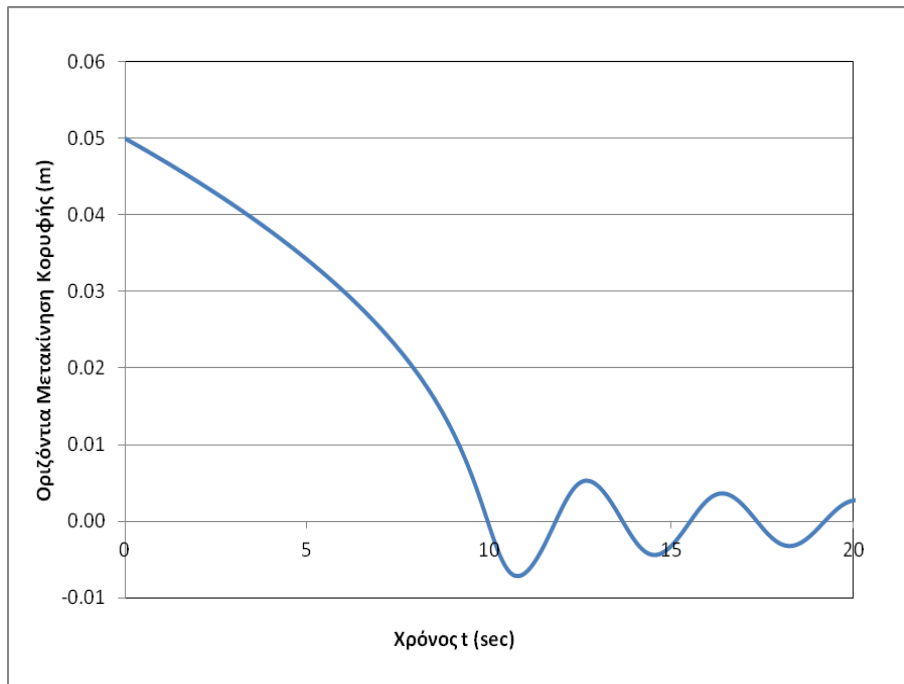
Στα επόμενα σχήματα, παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες για τις διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ . Παρατηρείται ότι η ταλάντωση φθίνει, ώστε κάποια στιγμή να μηδενισθεί. Το ίδιο θα συμβαίνει και για τις επόμενες τιμές φορτίων, μέχρι το φορτίο λυγισμού, για το οποίο η συμπεριφορά του συστήματος θα είναι διαφορετική.



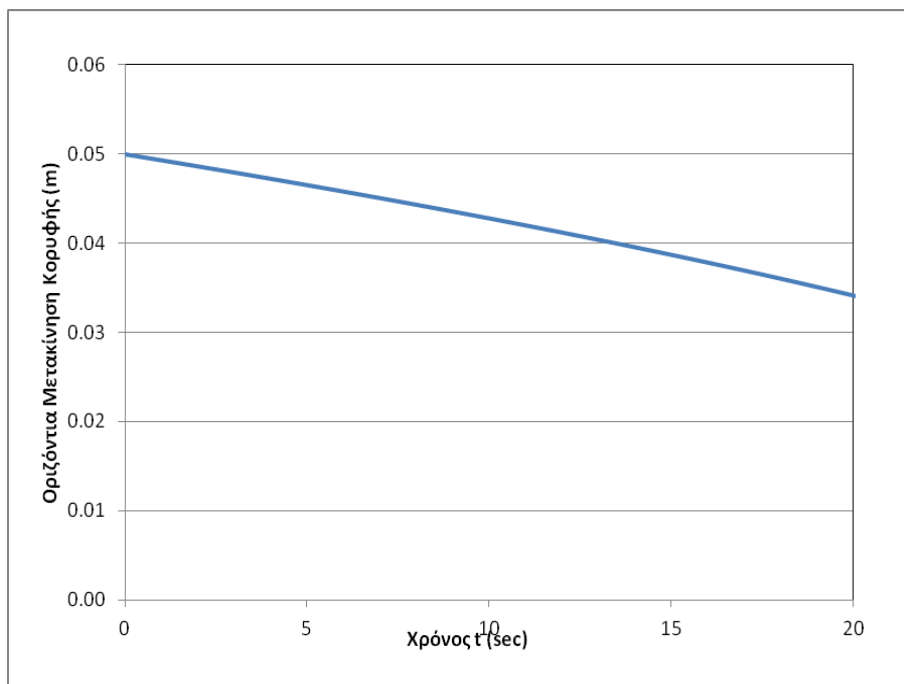
Σχήμα 1.21: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για  $P=20\text{kN}$



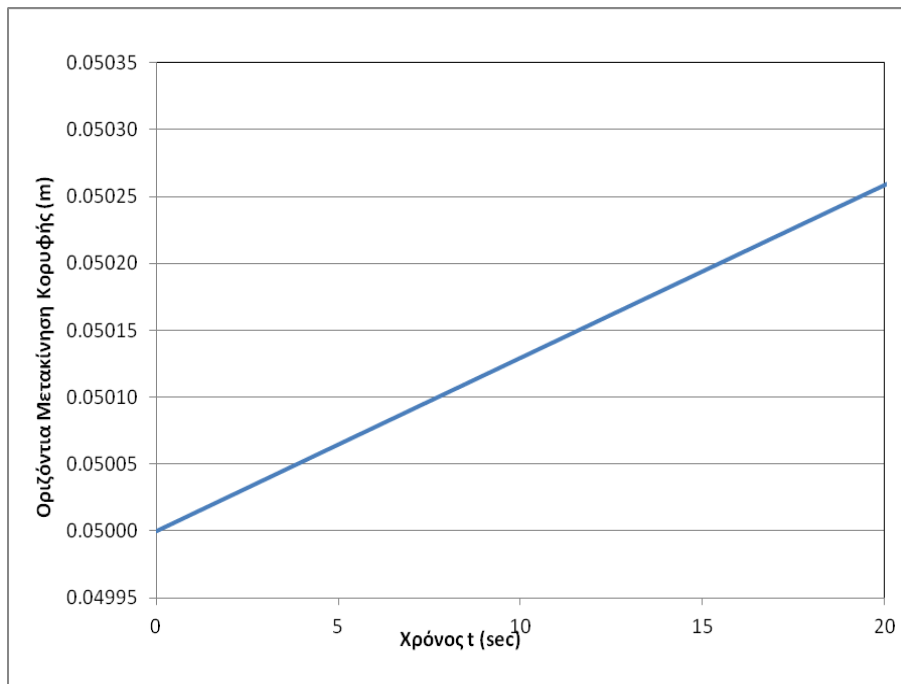
Σχήμα 1.22: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για  $P=50\text{kN}$



Σχήμα 1.23: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=80kN



Σχήμα 1.24: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=95kN



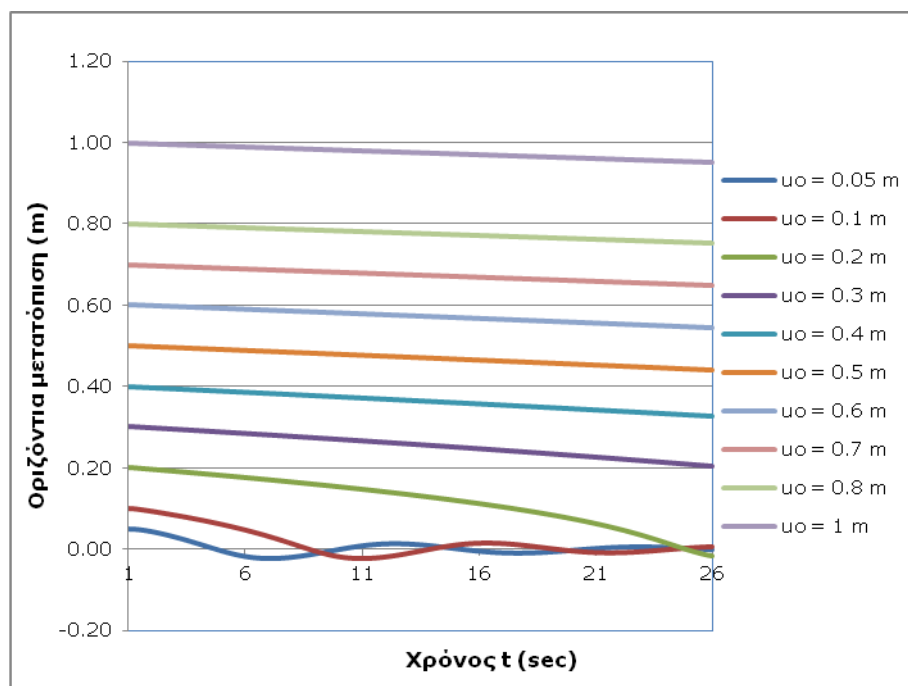
Σχήμα 1.25: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για  $P=100\text{kN}$  (φορτίο λυγισμού)

#### 1.4.1.2 Παρατηρήσεις

- Παρατηρείται ότι όσο το θλιπτικό φορτίο πλησιάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του συστήματος, η ιδιοπερίοδος του συστήματος αυξάνεται, πράγμα αναμενόμενο αφού μειώνεται η δυσκαμψία καθώς το φορτίο μεγαλώνει.
- Όπως αναμενόταν, παρατηρείται ότι το πλάτος της ταλάντωσης για την τιμή του κρίσιμου φορτίου αυξάνει συνεχώς. Πρακτικά η παραπάνω καμπύλη ενδιαφέρει για τα πρώτα 2-3sec.

#### 1.4.1.3 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής

Για φορτίο πολύ κοντά στο φορτίο λυγισμού ( $P=99\text{kN}$ ) επιχειρούμε να αυξήσουμε σταδιακά το μέγεθος της αρχικής διαταραχής  $u_0$ , και να δούμε πως επιδρά αυτό στην ταλάντωση του συστήματος.



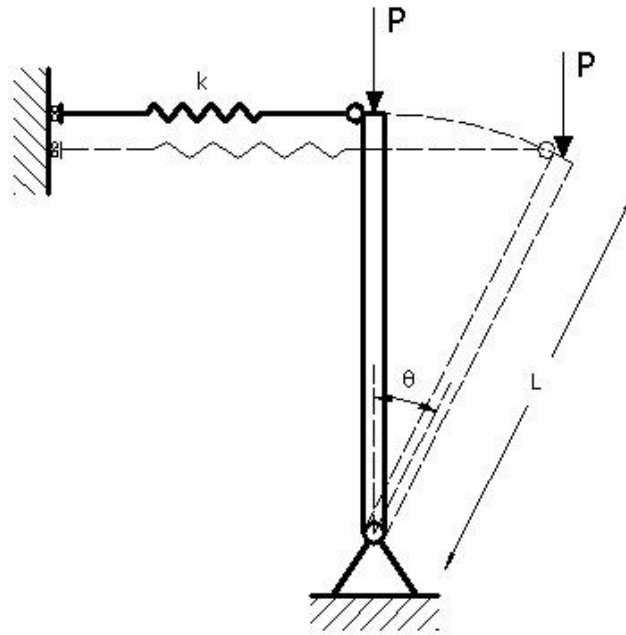
Σχήμα 1.26: Χρονοϊστορίες μετατόπισης κόμβου 2 για διάφορα μεγέθη αρχικής μετατόπισης

- Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, αυξάνεται η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης.
- Ακόμη και για πολύ μεγάλη αρχική διαταραχή ( $\sim 1\text{ m}$ ) το σύστημα εξακολουθεί να είναι ευσταθές, παρόλο που το φορτίο προσεγγίζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

## 1.4.2 Παράδειγμα 2

Άκαμπτη ράβδος με μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή (μονοβάθμιο σύστημα)

Το σύστημα του σχήματος 1.27 έχει επιλυθεί για διάφορες τιμές του θλιπτικού φορτίου  $P$ . Η ανάλυση έγινε με το πρόγραμμα ADINA. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.27, η ράβδος στηρίζεται αρθρωτά στη βάση της, ενώ στην κορυφή της καταλήγει οριζόντιο γραμμικό ελατήριο σταθεράς  $k$ . Επίσης, στην κορυφή της ράβδου ασκείται φορτίο  $P$ , το οποίο παραμένει συνεχώς κατακόρυφο. Αυτό το παράδειγμα είναι παρόμοιο με το παράδειγμα που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην παράγραφο 1.3.2 για την περίπτωση λυγισμού μέσω συμμετρικού ασταθούς σημείου διακλάδωσης.



Σχήμα 1.27: Άκαμπτη ράβδος με μετακινησιακό ελατήριο

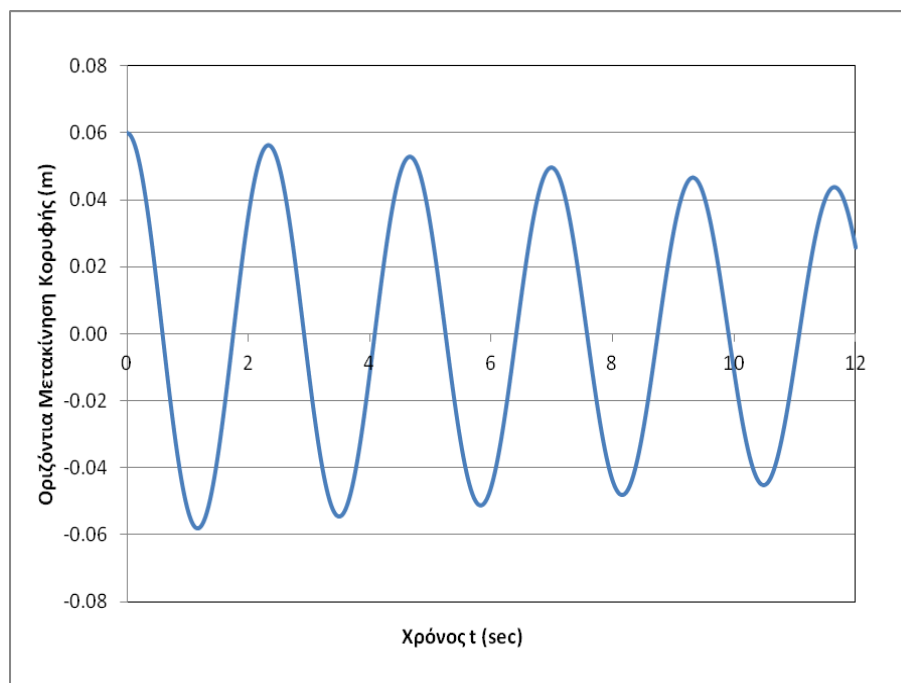
Από τις χρονοϊστορίες του δυναμικού βαθμού που επιλέχθηκαν είναι φανερό ότι το σύστημα για  $P < P_{cr}$  είναι ευσταθές. Για  $P = P_{cr}$  παρουσιάζεται αστάθεια, διότι το πλάτος της ταλάντωσης μετά την αρχική εκτροπή που δίνεται αυξάνει διαρκώς. Για  $P = P_{cr}$ , η χρονοϊστορία που προκύπτει για τα πρώτα 12sec είναι η μαθηματική λύση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα, ενδιαφέρει το πλάτος της μετατόπισης μόνο για τα πρώτα 2-3 sec.

#### 1.4.2.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες

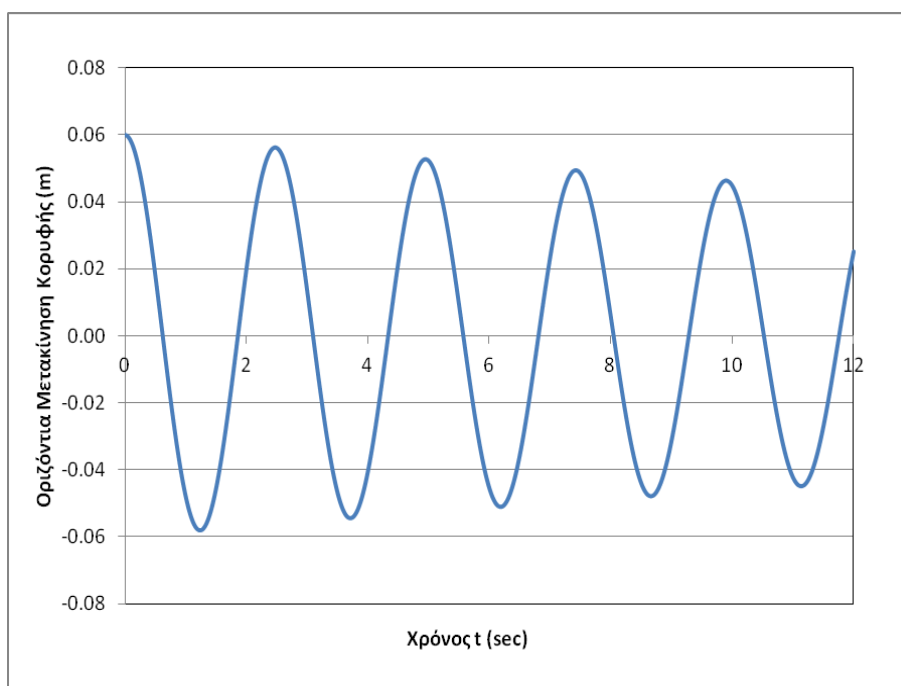
- Επιλέγεται διατομή IPE300,  $E=210000\text{MPa}$ .
- Μήκος ράβδου  $L=6.00\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση για οποιαδήποτε θέση της ράβδου.
- Τα χαρακτηριστικά της διατομής είναι:  $I_x=8360\text{cm}^4$  (ισχυρός άξονας) και  $A=53.8\text{cm}^2$ .
- Το ελατήριο συμπεριφέρεται γραμμικά.

- Θεωρείται αρχική εκτροπή από τη θέση ισορροπίας  $\theta=1^\circ$ , δηλαδή σε όρους μετατοπίσεων ο κόμβος 2 της ράβδου θα έχει αρχική μετατόπιση  $u(0) = 0.06\text{m}$ .
- Η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .
- Η σταθερά του ελατηρίου επιλέγεται  $k = EI/L^3 = 81.67\text{KN/m}$ . Αναμένεται ότι το κρίσιμο φορτίο θα είναι  $P_{cr} = kL = 490\text{kN}$ .
- Θεωρείται απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=1\%$ .

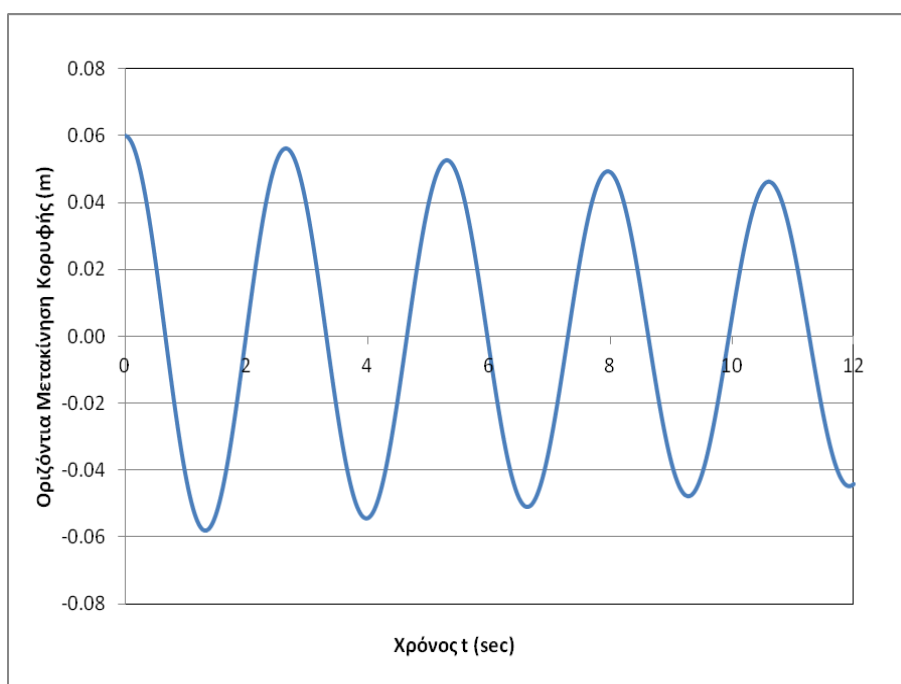
Στα επόμενα σχήματα, παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες για τις διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ . Παρατηρείται ότι η ταλάντωση φθίνει, ώστε κάποια στιγμή να μηδενισθεί. Το ίδιο θα συμβαίνει και για τις επόμενες τιμές φορτίων, μέχρι το φορτίο λυγισμού, για το οποίο η συμπεριφορά του συστήματος θα είναι διαφορετική.



Σχήμα 1.28: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για  $P=50\text{kN}$

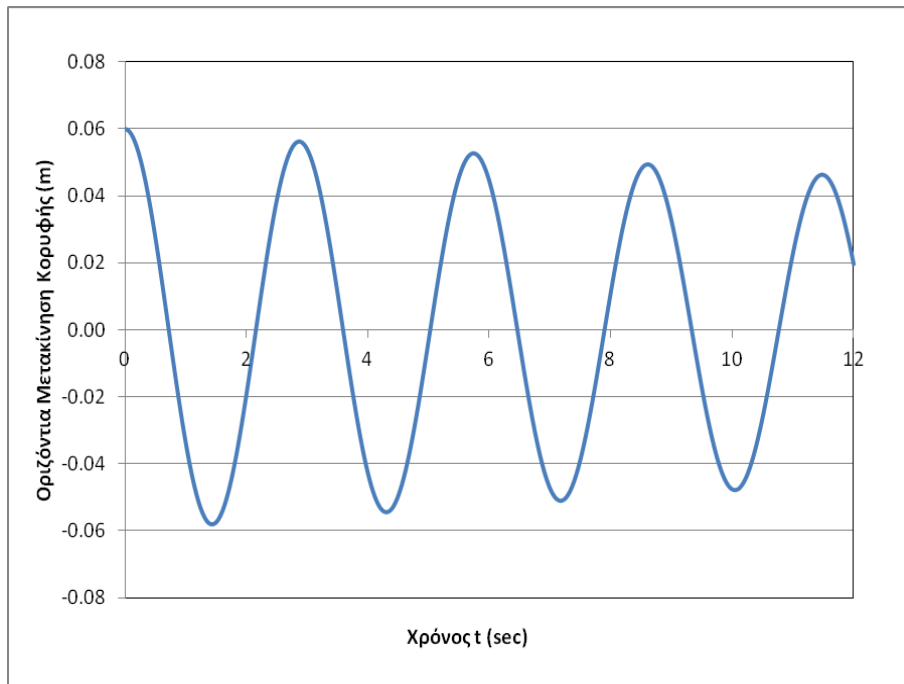


Σχήμα 1.29: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=100kN

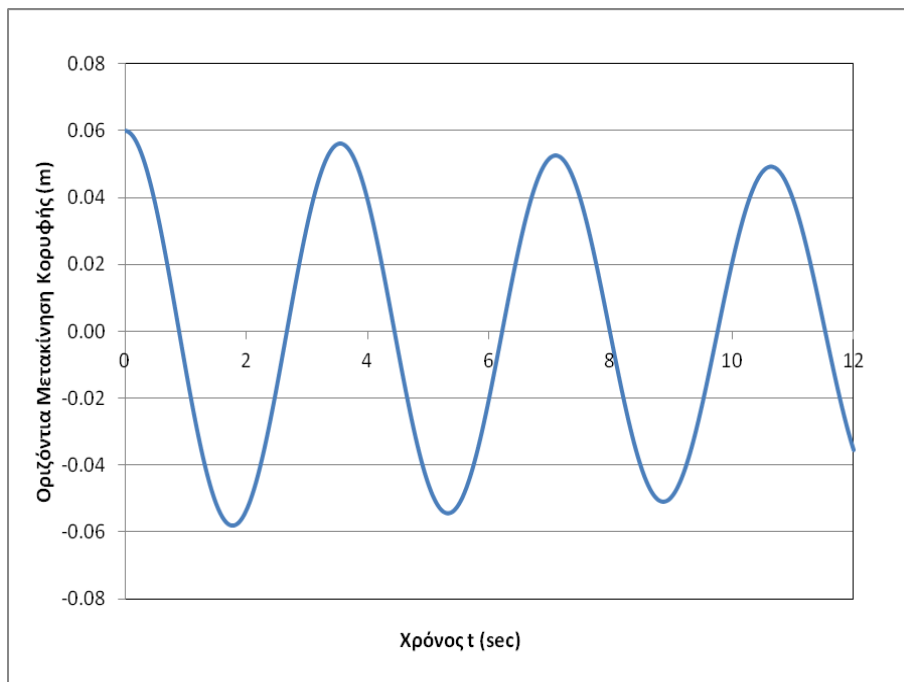


Σχήμα 1.30: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=150kN

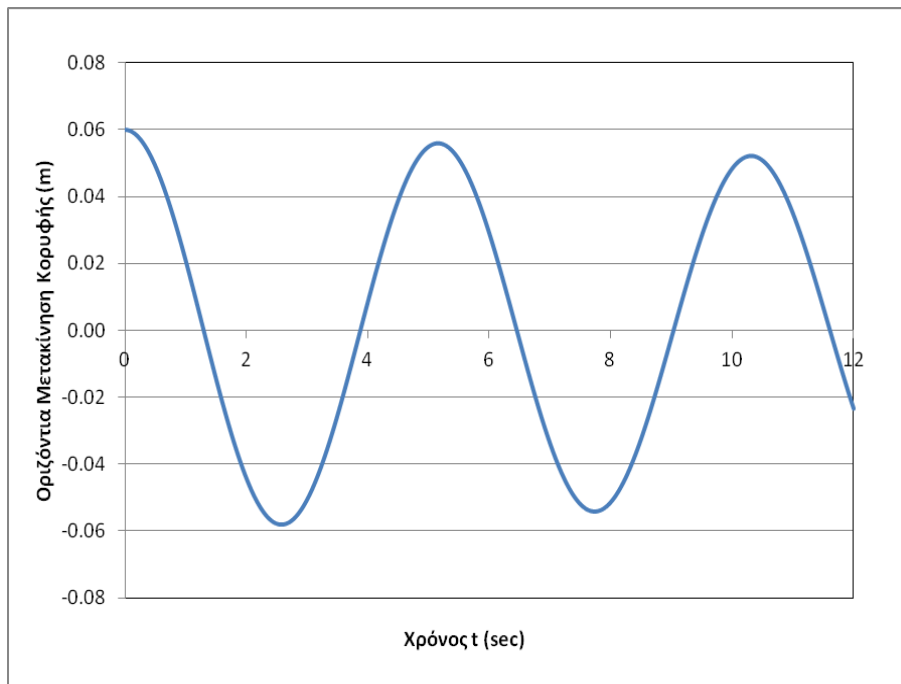




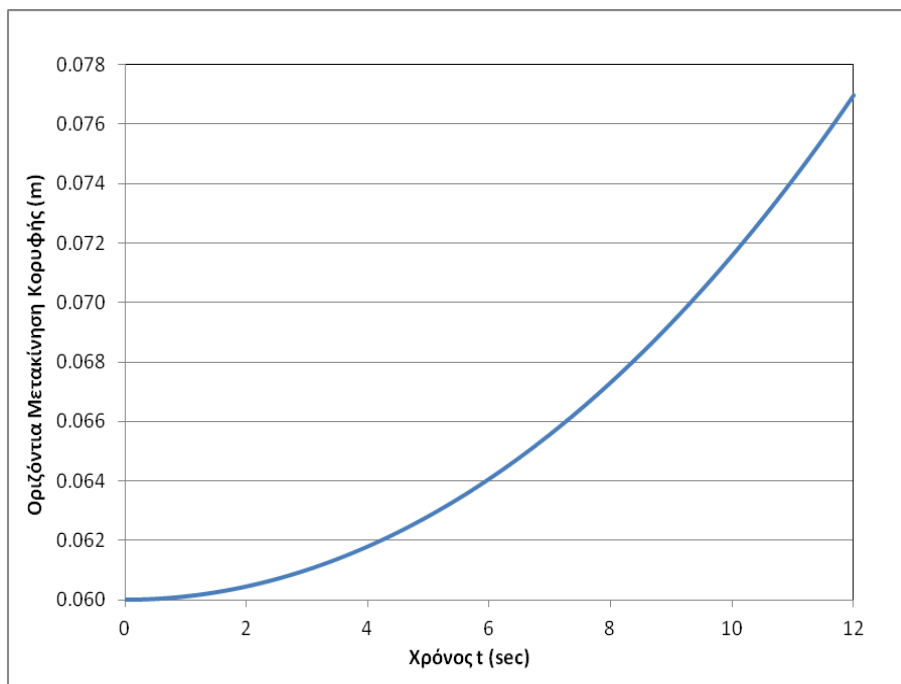
Σχήμα 1.31: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=200kN



Σχήμα 1.32: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=300kN



Σχήμα 1.33: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=400kN



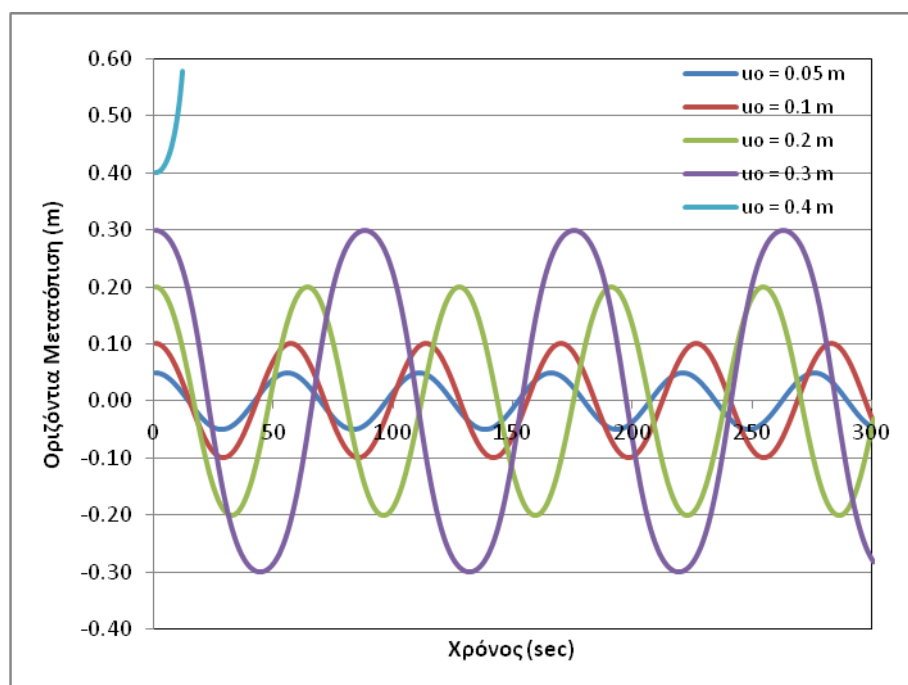
Σχήμα 1.34: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 για P=490kN (φορτίο λυγισμού)

### 1.4.2.2 Παρατηρήσεις

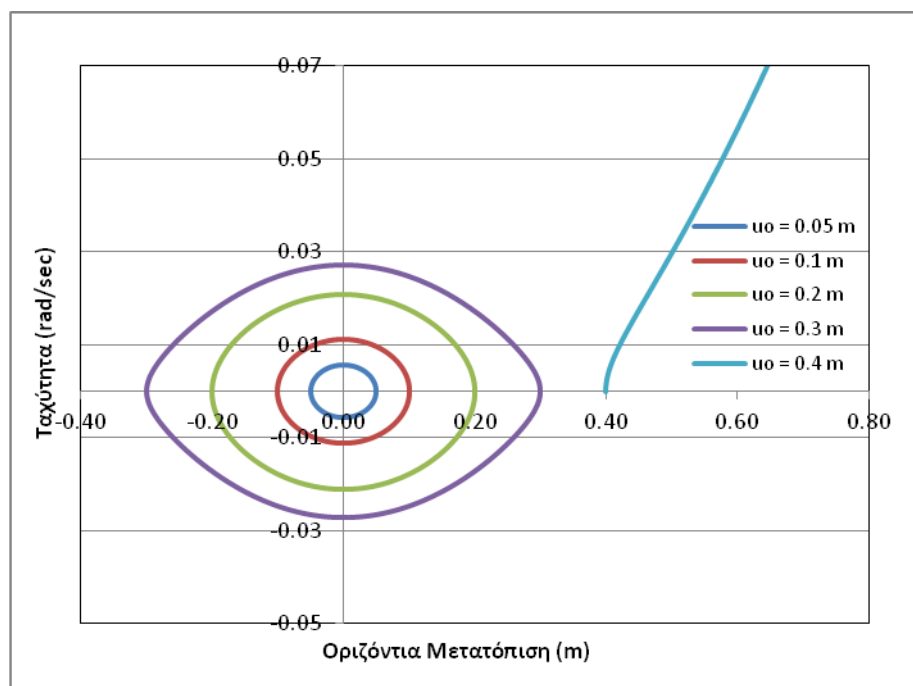
- Παρατηρείται ότι όσο το θλιπτικό φορτίο πλησιάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του συστήματος, το πλάτος της ταλάντωσης με απόσβεση μειώνεται με μικρότερο ρυθμό. Όσο η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου παραμένει κάτω από την τιμή του κρίσιμου φορτίου, η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα.
- Παρατηρείται επίσης ότι καθώς το φορτίο μεγαλώνει, αυξάνεται και η ιδιοπερίοδος του συστήματος.
- Όπως αναμενόταν, παρατηρείται ότι το πλάτος της ταλάντωσης για την τιμή του κρίσιμου φορτίου αυξάνει συνεχώς. Πρακτικά η παραπάνω καμπύλη ενδιαφέρει για τα πρώτα 2-3sec.

### 1.4.2.3 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής

Για φορτίο πολύ κοντά στο φορτίο λυγισμού ( $P=489\text{kN}$ ) επιχειρούμε να αυξήσουμε σταδιακά το μέγεθος της αρχικής διαταραχής  $u_0$ , και να δούμε πως επιδρά αυτό στην ταλάντωση του συστήματος.



Σχήμα 1.35: Χρονοϊστορίες μετατόπισης κόμβου 2 για διάφορα μεγέθη αρχικής διαταραχής



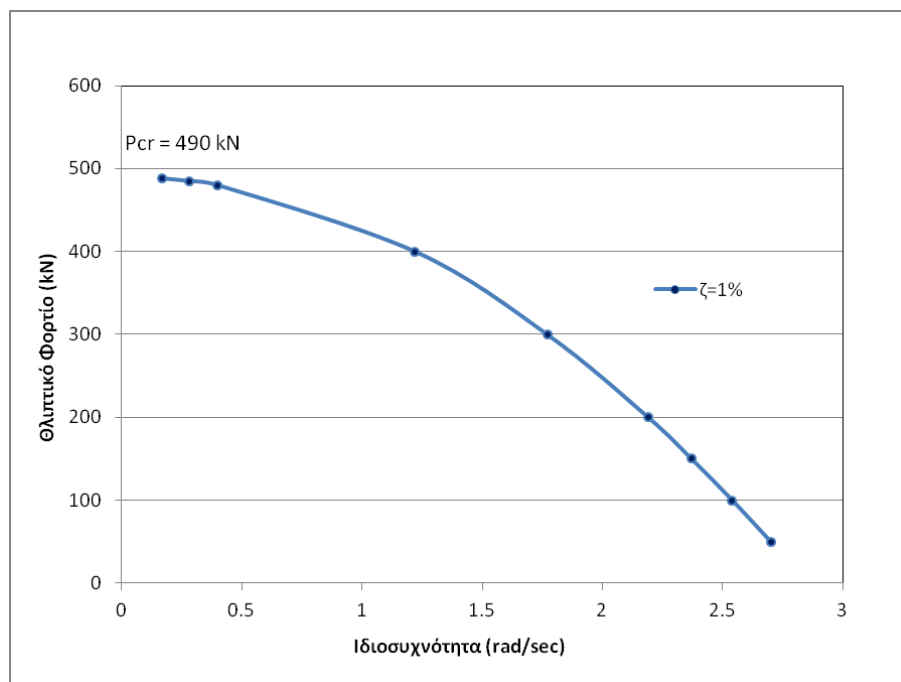
Σχήμα 1.36: Διαγράμματα φάσης κόμβου 2 για διάφορα μεγέθη αρχικής διαταραχής

- Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, αυξάνεται η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης.
- Για αρχική διαταραχή ίση με 0.4m, παρατηρούμε ότι το σύστημα παύει να είναι ευσταθές, και η θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται από αστάθεια. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στον αναλυτικό δρόμο ισορροπίας του συστήματος, για φορτίο ίσο με 489kN, η αντίστοιχη μετατόπιση κορυφής είναι 0.38m.

#### 1.4.2.4 Διάγραμμα θλιπτικού φορτίου - ιδιοσυχνότητας

Για τις διάφορες τιμές του θλιπτικού φορτίου βρέθηκαν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος. Αναμένεται με βάση το δυναμικό κριτήριο, ότι όσο το φορτίο τείνει προς το κρίσιμο φορτίο λυγισμού η ιδιοσυχνότητα του συστήματος θα μειώνεται διαρκώς. Όταν το θλιπτικό φορτίο γίνει ίσο με το κρίσιμο, τότε αναμένεται η τιμή του  $\omega$  να τείνει προς το μηδέν. Για τιμή αποσβέσεως ίση με  $\zeta=1\%$  και σταθερά ελατηρίου ίση με  $k=81.67\text{KN/m}$ , το διάγραμμα του θλιπτικού

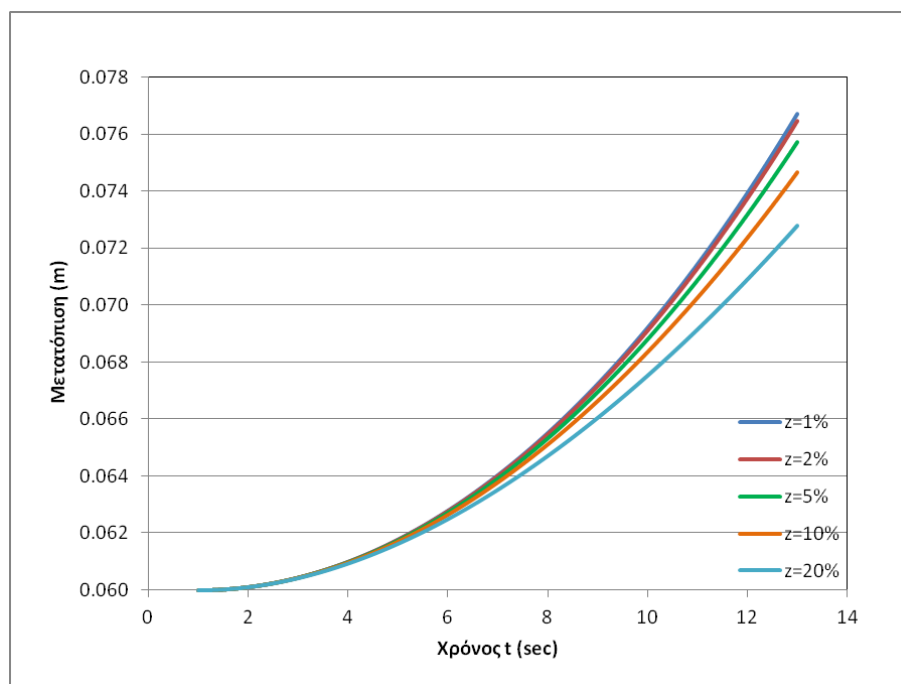
φορτίου σε συνάρτηση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος φαίνεται στο σχήμα 1.37.



Σχήμα 1.37: Ελλειπτικό φορτίο σε συνάρτηση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος

#### 1.4.2.5 Επιρροή της απόσβεσης στην αστάθεια

Για να μελετηθεί η επιρροή της απόσβεσης στην αστάθεια, για διάφορες τιμές της απόσβεσης βρίσκονται οι χρονοϊστορίες του δυναμικού βαθμού ελευθερίας για τιμή ελλειπτικού φορτίου ίση με το κρίσιμο, δηλαδή ίση με 490KN. Οι αποσβέσεις που επιλέγονται είναι  $\zeta=1\%$ ,  $2\%$ ,  $5\%$ ,  $10\%$  και  $20\%$ . Αυτό που αναμένεται αφού το σύστημα είναι συντηρητικό, είναι να παρατηρηθεί πάλι αστάθεια, αλλά το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνει με μικρότερο ρυθμό όσο μειώνεται η απόσβεση. Παρατηρώντας τις χρονοϊστορίες του σχήματος 1.38, διαπιστώνεται ότι, όταν υπάρχει αστάθεια, η απόσβεση έχει ελάχιστη επιρροή στο ρυθμό αύξησης του πλάτους της ταλάντωσης και, όπως είναι φυσικό, δεν καθορίζει αν θα υπάρξει αστάθεια ή όχι.

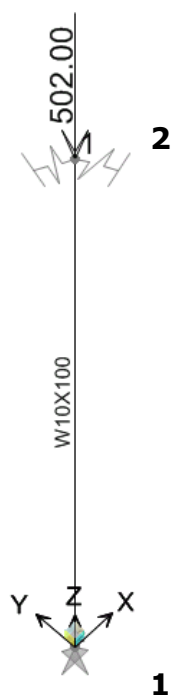


Σχήμα 1.38: Χρονοϊστορία μετατόπισης του κόμβου 2 για διάφορες τιμές της απόσβεσης

### 1.4.3 Παράδειγμα 3

Άκαμπτη ράβδος με μετακινησιακά ελατήρια στους άξονες x και y (διβάθμιο σύστημα)

Το σύστημα του σχήματος 1.39 έχει επιλυθεί για διάφορες τιμές του θλιπτικού φορτίου  $P$ . Η ανάλυση έγινε με το πρόγραμμα ADINA. Από τις χρονοϊστορίες των δυναμικών βαθμών που επιλέχθηκαν (μετατοπίσεις εντός του επιπέδου X-Z και Y-Z) είναι φανερό ότι το σύστημα για  $P < P_{cr}$  είναι ευσταθές και στις δύο διευθύνσεις. Για  $P = P_{1cr}$  προκύπτει αστάθεια στον ασθενή άξονα, διότι το πλάτος της ταλάντωσης στον άξονα αυτό αυξάνει διαρκώς μετά από την αρχική εκτροπή. Για  $P = P_{1cr}$  η χρονοϊστορία που προκύπτει για τα πρώτα 10sec είναι η μαθηματική λύση του προβλήματος. Στην πραγματικότητα, ενδιαφέρει το πλάτος της μετατόπισης για τα πρώτα 2-3sec.



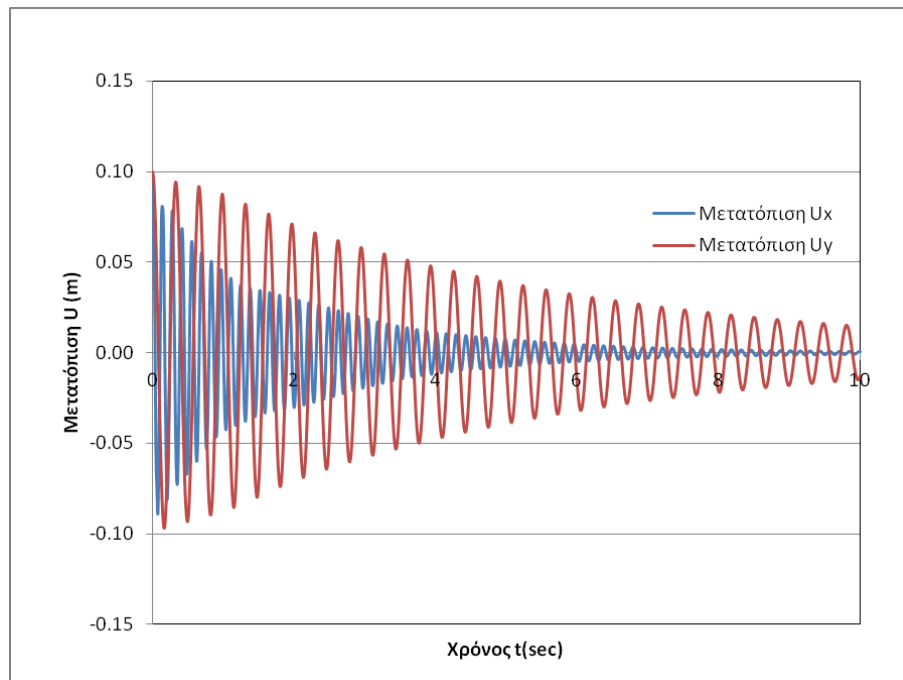
Σχήμα 1.39: Άκαμπτη ράβδος με ελατήριο στους άξονες x και y

#### 1.4.3.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες

- Επιλέγεται διατομή W10X100,  $E=210000\text{MPa}$ .
- Μήκος ράβδου  $L=6.00\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση για οποιαδήποτε θέση της ράβδου.
- Τα χαρακτηριστικά της διατομής είναι:  $I_x=25931\text{cm}^4$  (ισχυρός άξονας)  $I_y=8616\text{cm}^4$  (ασθενής άξονας).
- Τα ελατήρια συμπεριφέρονται γραμμικά.
- Το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά.
- Θεωρείται αρχική εκτροπή από τη θέση ισορροπίας  $\theta=1^\circ$ , δηλαδή σε όρους μετατοπίσεων ο κόμβος 2 της ράβδου θα έχει αρχική μετατόπιση  $u(o) = 0.10\text{m}$  και για τους δύο βαθμούς ελευθερίας.

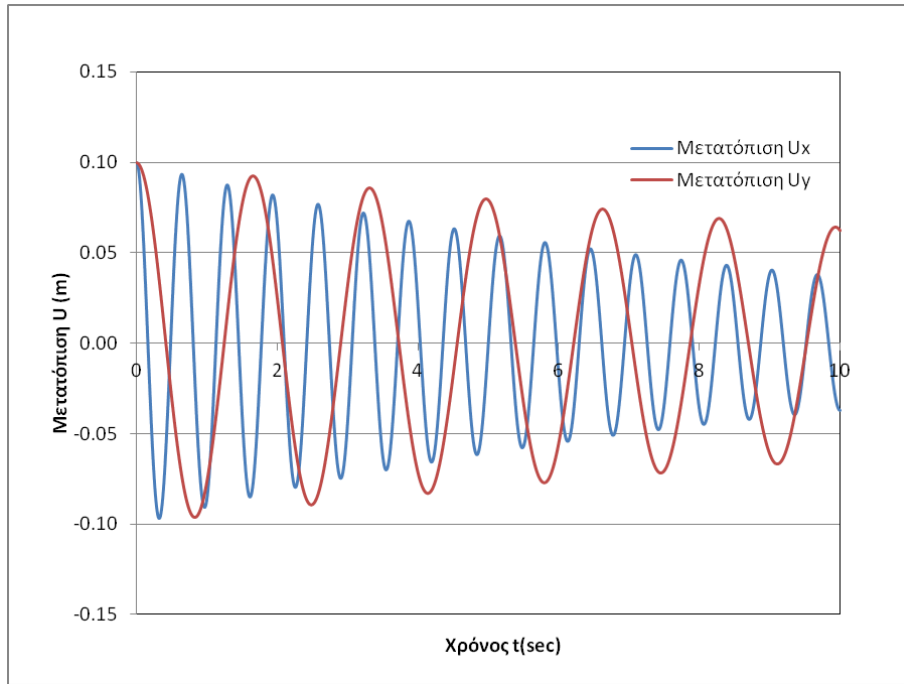
- Η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$  και για τους δύο βαθμούς.
- Η σταθερά του ελατηρίου που τοποθετήθηκε κατά τη διεύθυνση του ασθενούς άξονα επιλέγεται  $k = EI_y/L^3 = 83.60\text{KN/m}$ . Αναμένεται ότι το κρίσιμο φορτίο θα είναι  $P_{1cr} = kL = 502\text{kN}$ . Για το ελατήριο που τοποθετήθηκε κατά τη διεύθυνση του ισχυρού άξονα επιλέγεται σταθερά τέτοια ώστε να είναι ίση με  $k = EI_x/L^3 = 252.09\text{KN/m}$ .
- Θεωρείται απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=1\%$ .
- Χρονικό βήμα για την αριθμητική ολοκλήρωση  $\Delta t=0.01\text{sec}$ .

Οι χρονοϊστορίες που προέκυψαν από την επίλυση (για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$  μέχρι το φορτίο λυγισμού) παρουσιάζονται παρακάτω. Αναμένεται για το μικρότερο φορτίο λυγισμού να προκύπτει αστάθεια κατά τον άξονα  $y$  ενώ στον άξονα  $x$ , επειδή το αντίστοιχο φορτίο λυγισμού είναι αρκετά μεγαλύτερο ( $P_{2cr}=1513\text{KN}$ ), αναμένεται ευστάθεια.

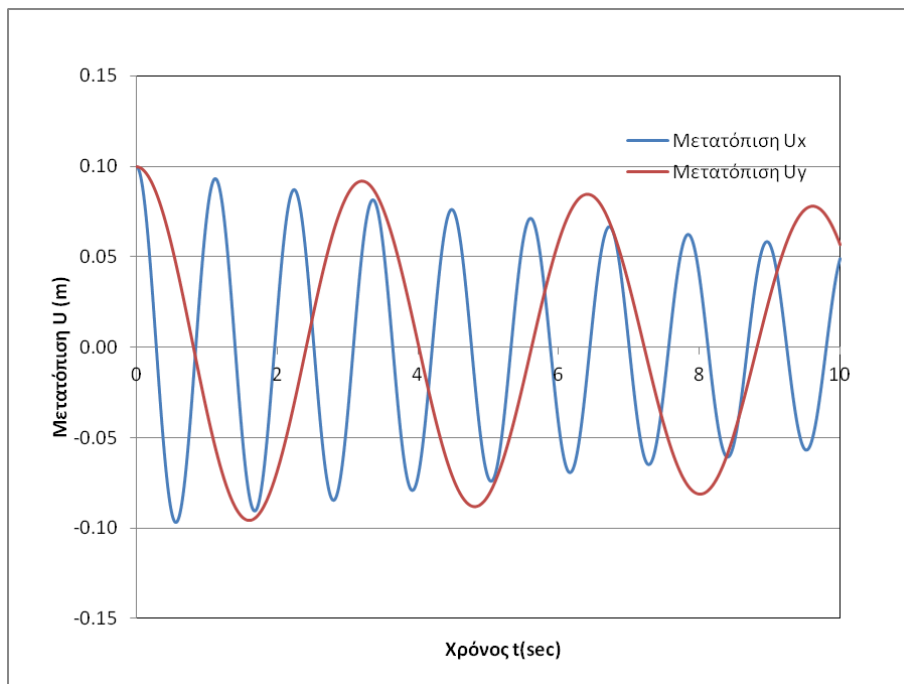


Σχήμα 1.40: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για  $P=0\text{kN}$

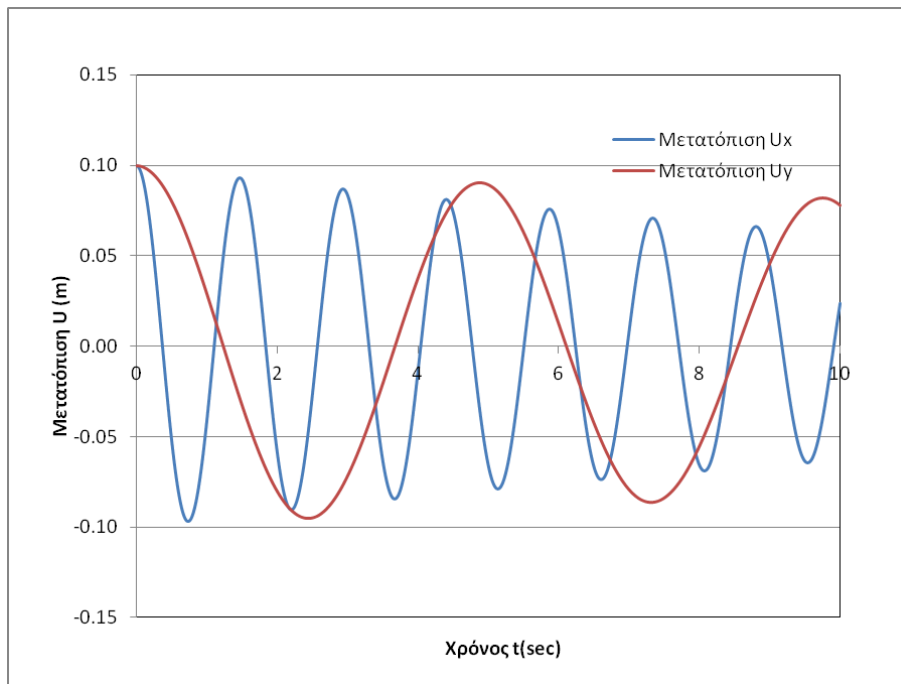




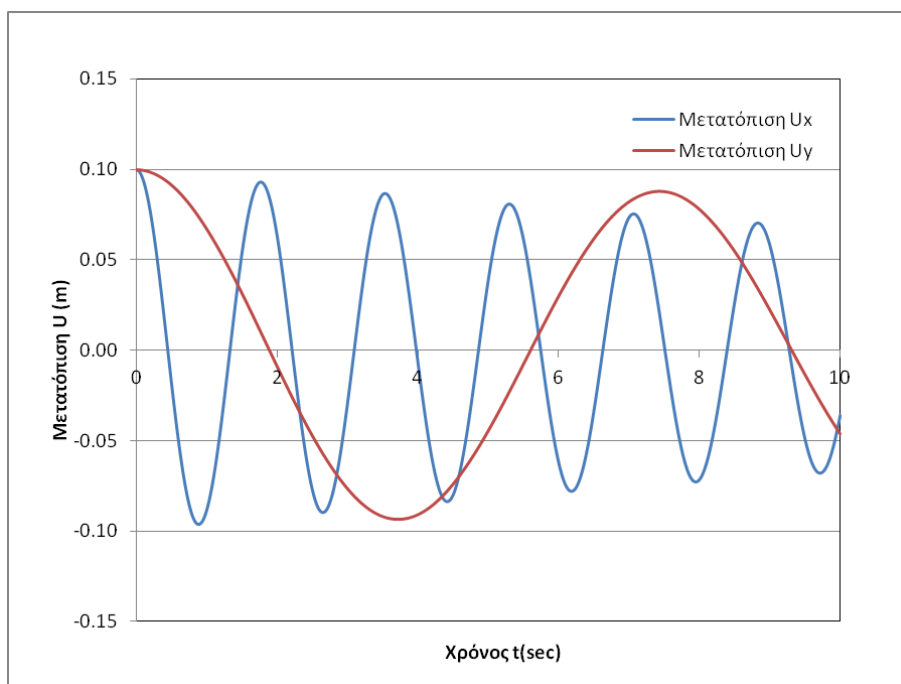
Σχήμα 1.41: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για P=50kN



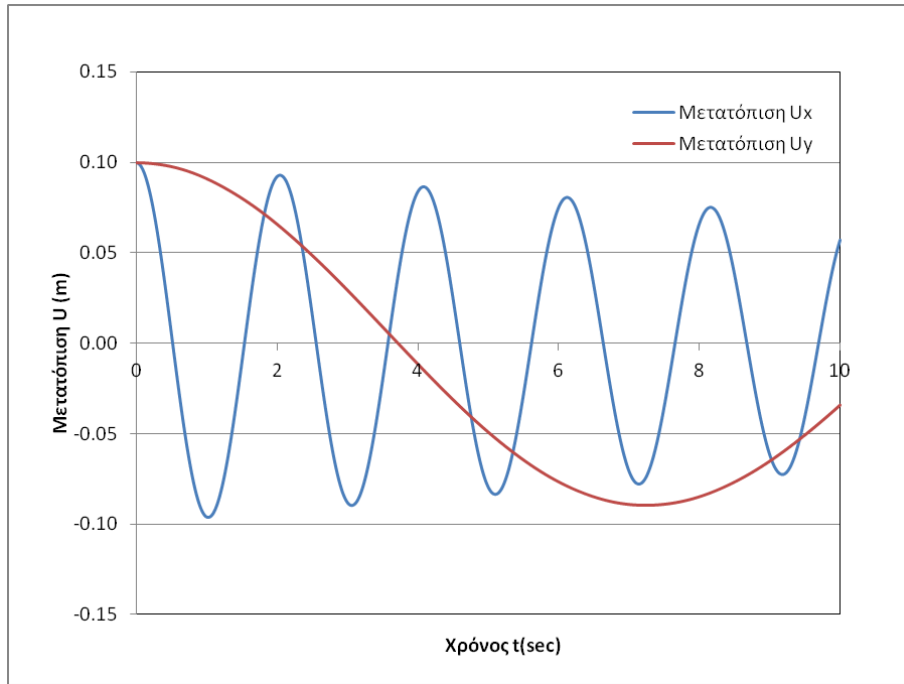
Σχήμα 1.42: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για P=150kN



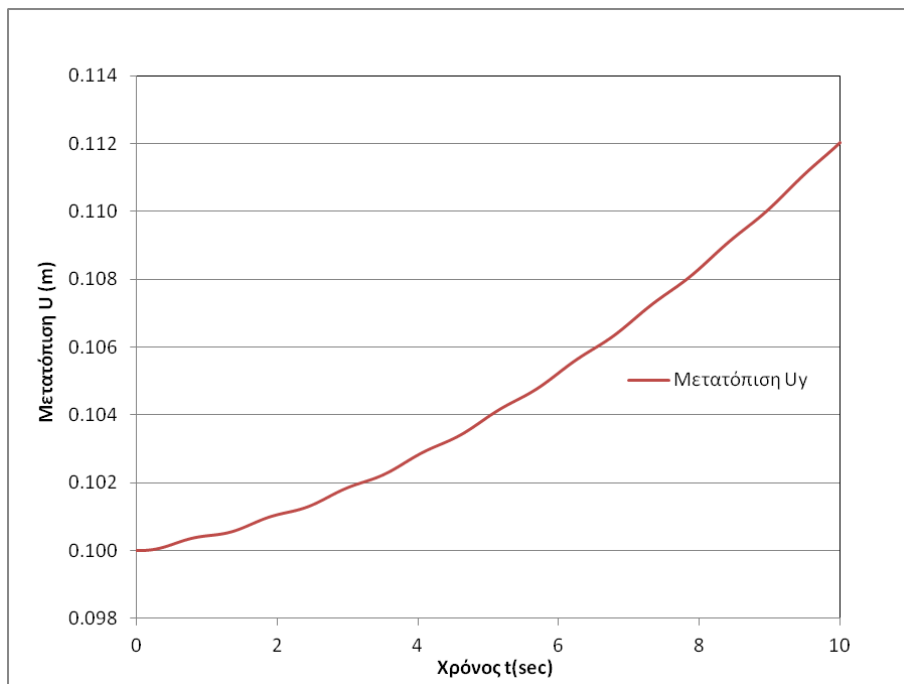
Σχήμα 1.43: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για P=250kN



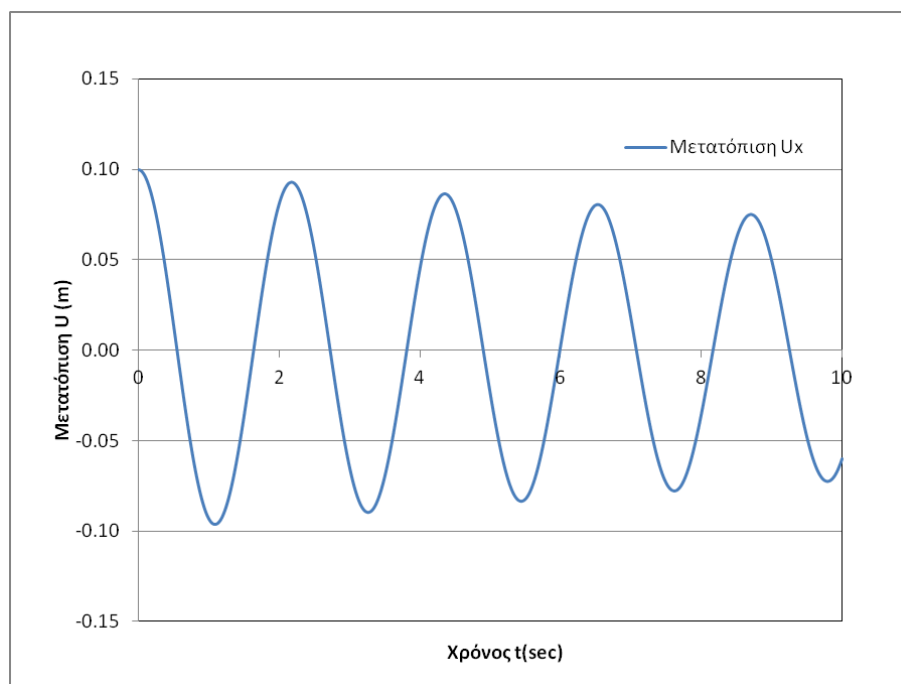
Σχήμα 1.44: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για P=350kN



Σχήμα 1.45: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2, για  $P=450\text{kN}$



Σχήμα 1.46: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 κατά  $y$ , για  $P=502\text{kN}$  (φορτίο λυγισμού)



Σχήμα 1.47: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 κατά  $x$ , για  $P=502\text{kN}$  (φορτίο λυγισμού)

#### 1.4.3.2 Παρατηρήσεις

- Παρατηρείται ότι για τις διάφορες τιμές των φορτίων που χρησιμοποιήθηκαν για τις χρονοϊστορίες των μετατοπίσεων, η μετατόπιση  $U_x$  δε φαίνεται να μεταβάλλεται αισθητά.
- Το πλάτος της ταλάντωσης για τη μετατόπιση  $U_y$  μειώνεται με μικρότερο ρυθμό όσο πλησιάζεται η τιμή του  $P_{cr}$ .
- Κοντά στην τιμή  $P_{cr}$ , παρατηρείται ότι τα πλάτη των ταλαντώσεων στους δύο άξονες διαφέρουν πολύ.
- Για τιμή του φορτίου ίση με τη  $P_{cr}$ , ενδιαφέρει η χρονοϊστορία για τα πρώτα 2-3sec διότι η καμπύλη παριστάνει τη μαθηματική λύση του προβλήματος που μετά τα πρώτα 3 sec δεν έχει καμία φυσική σημασία.

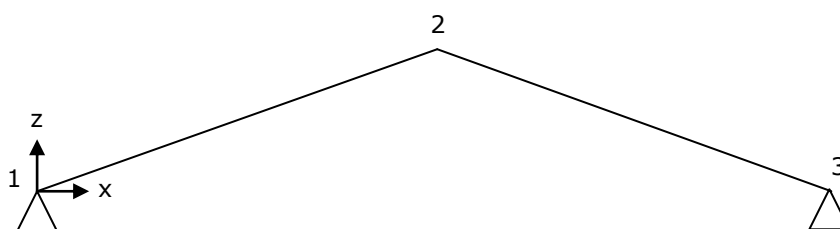
- Ένα ερώτημα που τίθεται είναι ποια θα είναι η συμπεριφορά του συστήματος σε περίπτωση που οι δύο άξονες της διατομής είχαν ροπή αδράνειας της ίδιας τάξης μεγέθους.

### 1.4.3.3 Φόρτιση με το δεύτερο φορτίο λυγισμού

Στη συνέχεια έγινε η προσπάθεια να τροποποιηθούν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος έτσι ώστε το σύστημα να λυγίσει περί τον ισχυρό άξονα. Επιχειρήθηκε να δοθεί ως αρχική εκτροπή από τη θέση ισορροπίας κατά τον άξονα  $x$  μια τιμή αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη κατά τον άξονα  $y$ . Παρόλα αυτά, το σύστημα εξακολούθησε να επιλέγει ως «ευκολότερο» δρόμο (αυτόν που απαιτεί μικρότερη ενέργεια) αυτόν του λυγισμού περί τον ασθενή άξονα.

## **1.4.4 Παράδειγμα 4**

### Τριγωνική αψίδα

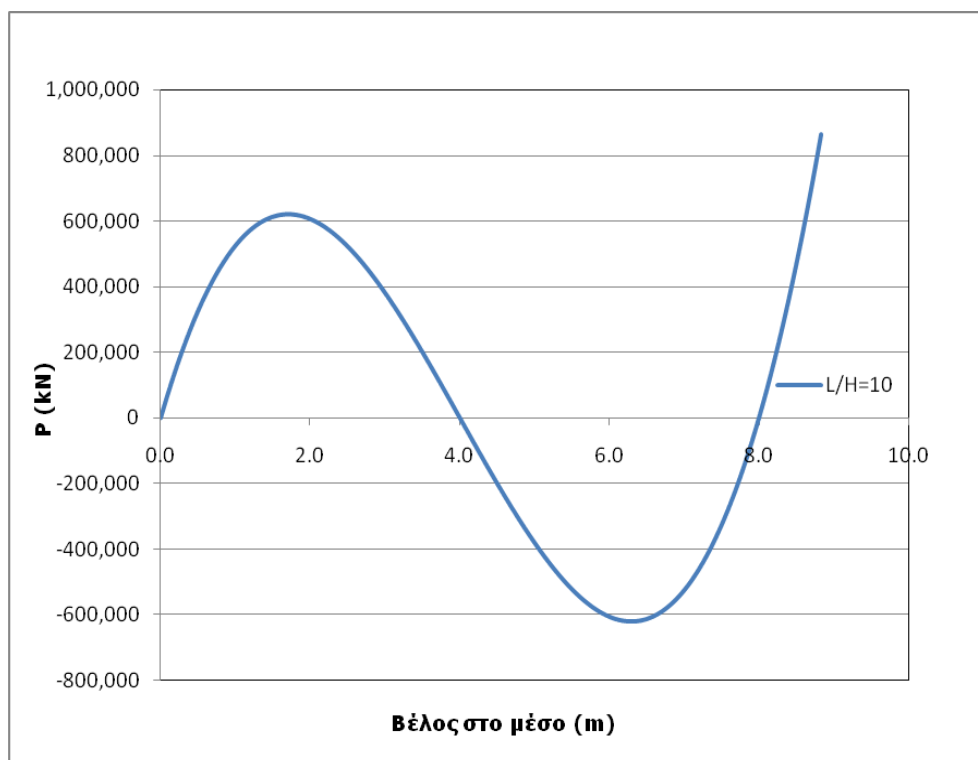


Σχήμα 1.48: Τριγωνική αψίδα

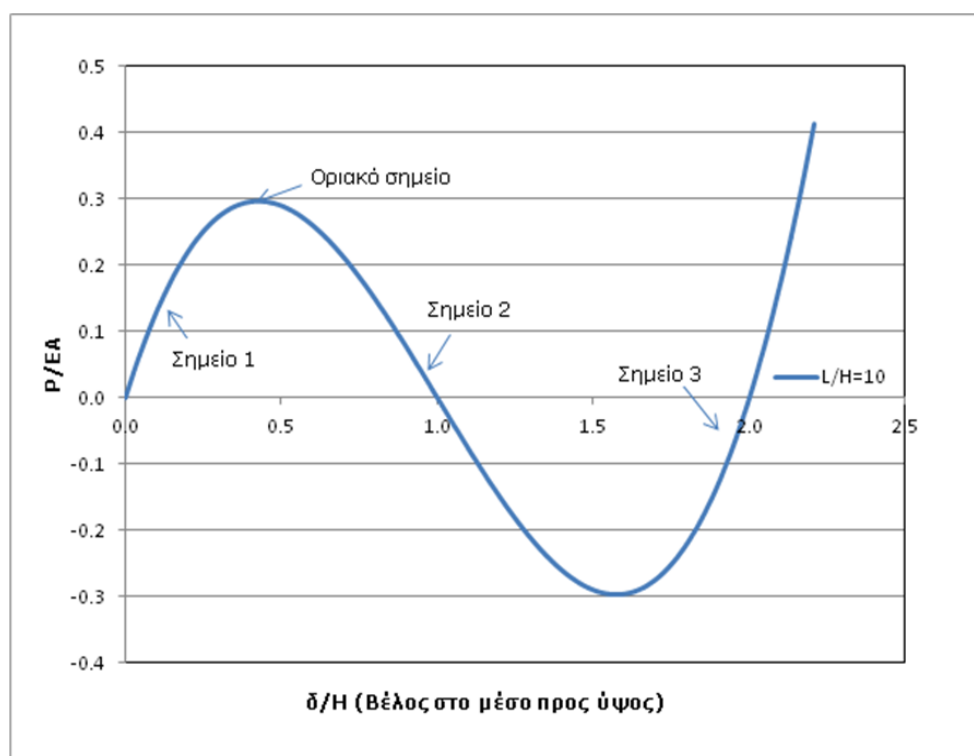
### 1.4.4.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες

- Μήκος αψίδας  $L=40\text{m}$ .
- Ύψος αψίδας  $H =4\text{m}$ .

Ο δρόμος ισορροπίας της τριγωνικής αψίδας που προκύπτει από την ανάλυση και ο αντίστοιχος αδιαστατοποιημένος φαίνονται στο σχήμα 1.49(α) και (β):



Σχήμα 1.49(α): Δρόμος ισορροπίας τριγωνικής αψίδας



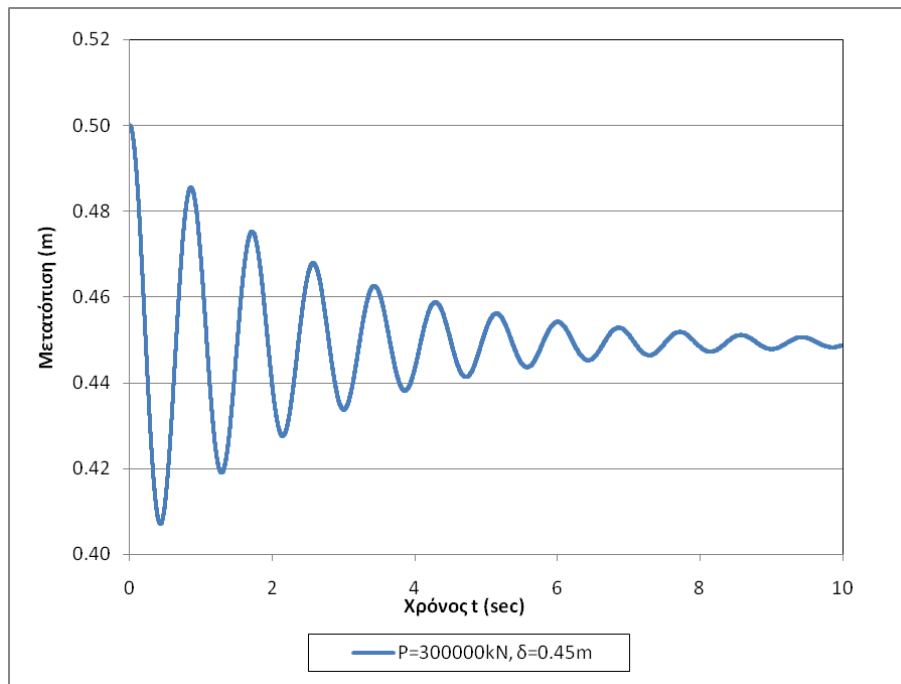
Σχήμα 1.49(β): Αδιαστατοποιημένος δρόμος ισορροπίας τριγωνικής αψίδας

- Επιλέγεται διατομή τετραγωνική  $0.1 \times 0.1$ ,  $E=210000\text{MPa}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό.
- Τα χαρακτηριστικά της διατομής είναι  $I_x=833\text{cm}^4$  (ισχυρός άξονας) και  $I_y=833\text{cm}^4$  (ασθενής άξονας).
- Θεωρείται αρχική εκτροπή από τη θέση ισορροπίας στον κόμβο 2 του συστήματος. Η αρχική μετατόπιση θα είναι  $u(0)=0.05\text{m}=5.0\text{cm}$ .
- Η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι  $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0$ .
- Θεωρείται απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=5\%$ .
- Χρονικό βήμα για την αριθμητική ολοκλήρωση  $\Delta t=0.006\text{sec}$  (κάτι λιγότερο από το  $1/10$  της θεμελιώδους ιδιοπεριόδου ταλάντωσης του συστήματος).
- Θεωρήθηκε ότι το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά.
- Για να έρθει το σύστημα στις θέσεις ισορροπίας που έχουν επιλεγεί για τη μελέτη της ευστάθειάς του με τη δυναμική μέθοδο, εφαρμόστηκε μία μη γραμμική στατική ανάλυση ως τη θέση αυτή. Στη συνέχεια επιβάλλονται οι αρχικές συνθήκες που έχουν επιλεγεί και αφήνεται το σύστημα να ταλαντωθεί, γίνεται δηλαδή μία μη γραμμική ανάλυση με χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης.

Η ανάλυση έγινε και εδώ με το πρόγραμμα ADINA. Οι χρονοϊστορίες που προέκυψαν από την ανάλυση παρουσιάζονται παρακάτω.

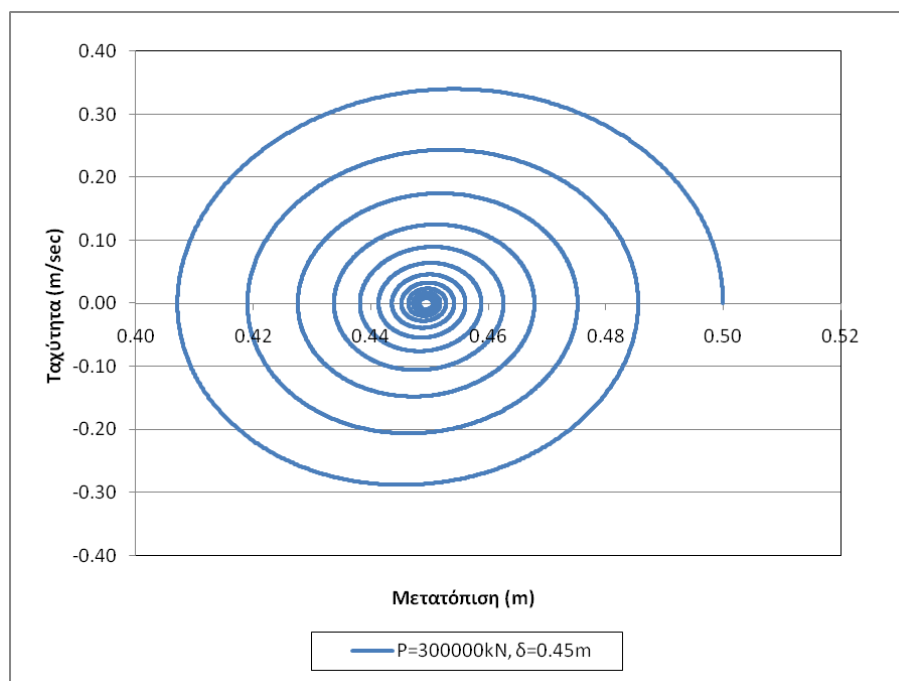
#### 1.4.4.2 Σημείο 1

Το σημείο 1 ανήκει στον 1<sup>ο</sup> ανοδικό (άρα ευσταθή) κλάδο του δρόμου ισορροπίας, επομένως το σύστημα αναμένεται να ταλαντωθεί και να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας του. Δίδεται μια αρχική μικρή μετατόπιση  $\delta_0$  και το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Η χρονοϊστορία της μετατόπισης του κόμβου 2 για τη θέση ισορροπίας 1 (σημείο 1) και το αντίστοιχο διάγραμμα φάσεως φαίνονται στα σχήματα 1.50(a) και 1.51(a).



Σχήμα 1.50(α): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 1) για αρχική διέγερση  $\delta_0$

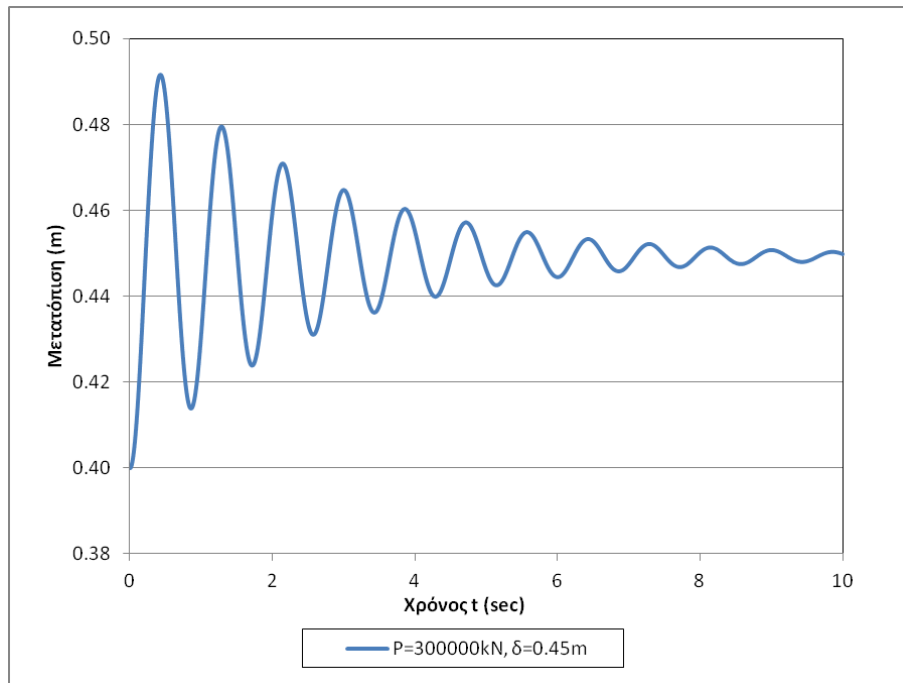
Πράγματι, μετά την ταλάντωση το σύστημα επανήλθε στη θέση ισορροπίας.



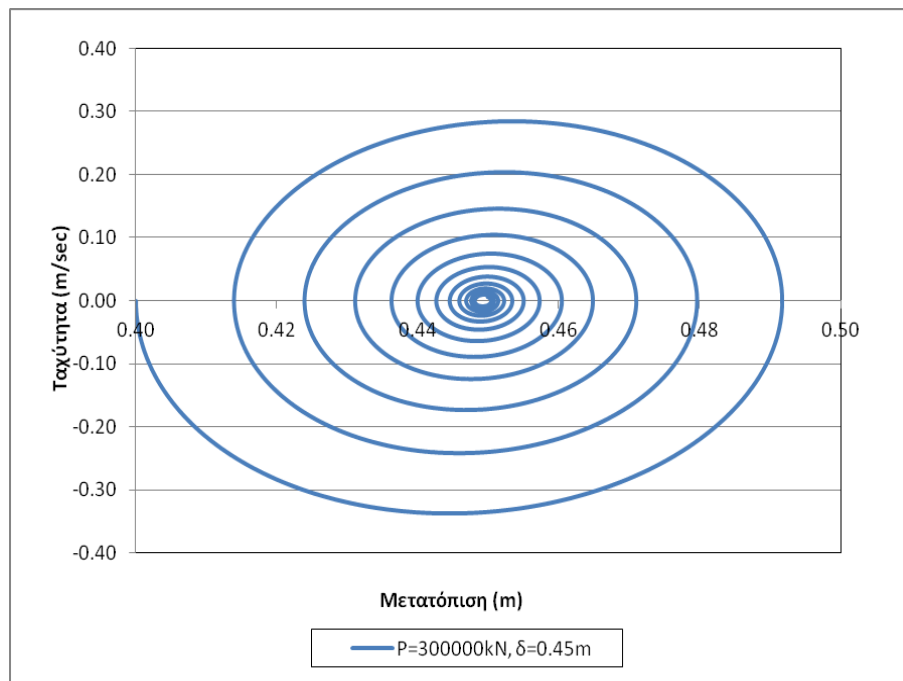
Σχήμα 1.51(α): Διάγραμμα φάσεως για τον κόμβο 2 (σημείο 1) για αρχική διέγερση  $\delta_0$



Στη συνέχεια δίνεται η ίδια τιμή αρχικής μετατόπισης με αντίθετη φορά, και το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Η χρονοϊστορία της μετατόπισης του κόμβου 2 για τη θέση ισορροπίας 1 (σημείο 1) και το αντίστοιχο διάγραμμα φάσεως φαίνονται στα σχήματα 1.50(β) και 1.51(β).



Σχήμα 1.50(β): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 1) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$

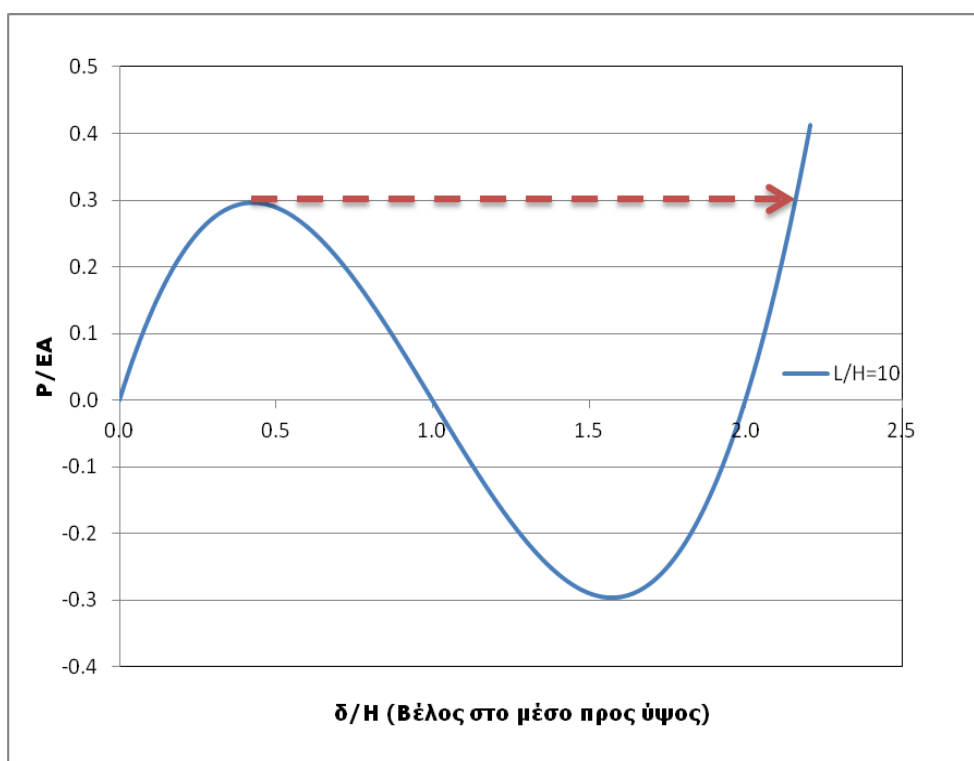


Σχήμα 1.51(β): Διάγραμμα φάσεως για τον κόμβο 2 (σημείο 1) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$

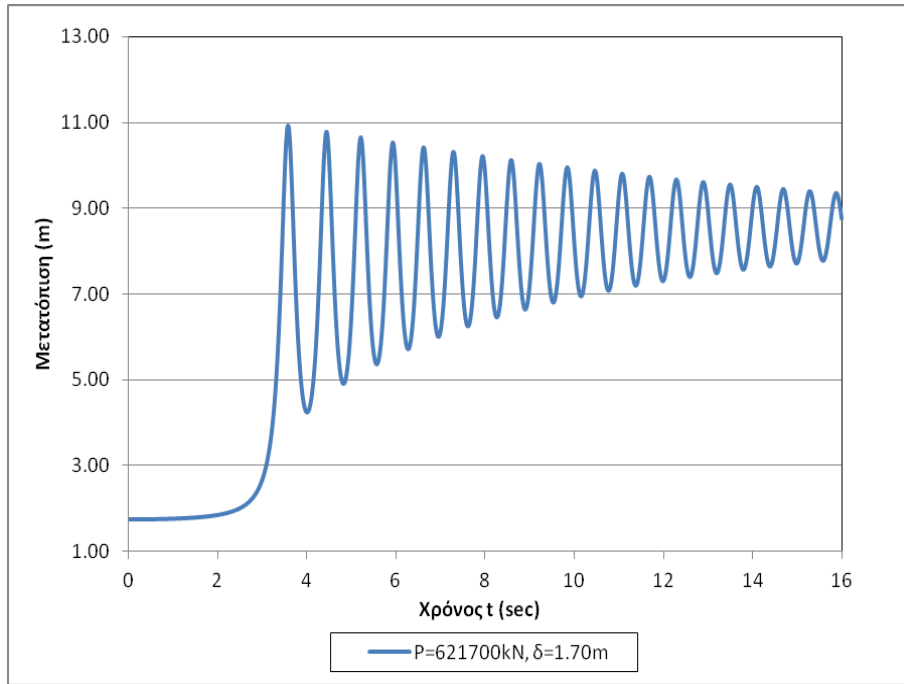
Όπως φαίνεται, η φορά της αρχικής διέγερσης  $\delta_0$  δεν επηρέασε την απόκριση του φορέα, ο οποίος αφού ταλαντώθηκε επέστρεψε στην αρχική του θέση ισορροπίας. Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού η θέση ισορροπίας αυτή είναι ευσταθής (εφόσον ανήκει σε ανοδικό κλάδο του δρόμου ισορροπίας) και άρα όποιας φοράς αρχική διέγερση και να δώσουμε, η απόκριση του φορέα θα είναι η ίδια.

#### 1.4.4.3 Οριακό σημείο

Στην περίπτωση αυτή, αναμένεται το σύστημα να ταλαντωθεί και να περάσει απέναντι στο δρόμο ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.52:

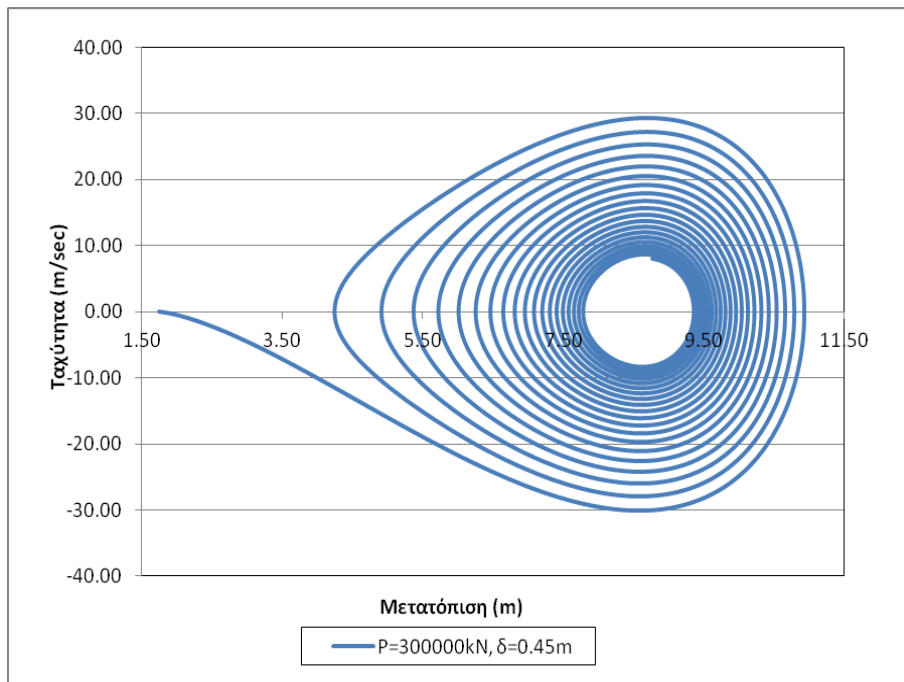


Σχήμα 1.52: Δρόμος ισορροπίας με ακαριαίο λυγισμό



Σχήμα 1.53: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (οριακό σημείο)

Το διάγραμμα φάσεως για το οριακό σημείο είναι:



Σχήμα 1.54: Διάγραμμα φάσεως (οριακό σημείο)

Πράγματι, δίνοντας στο φορέα μια αρχική μετατόπιση, αυτός έπαθε ακαριαίο λυγισμό και άρχισε να ταλαντώνεται γύρω από μια νέα θέση ισορροπίας στην οποία τελικά και ισορρόπησε.

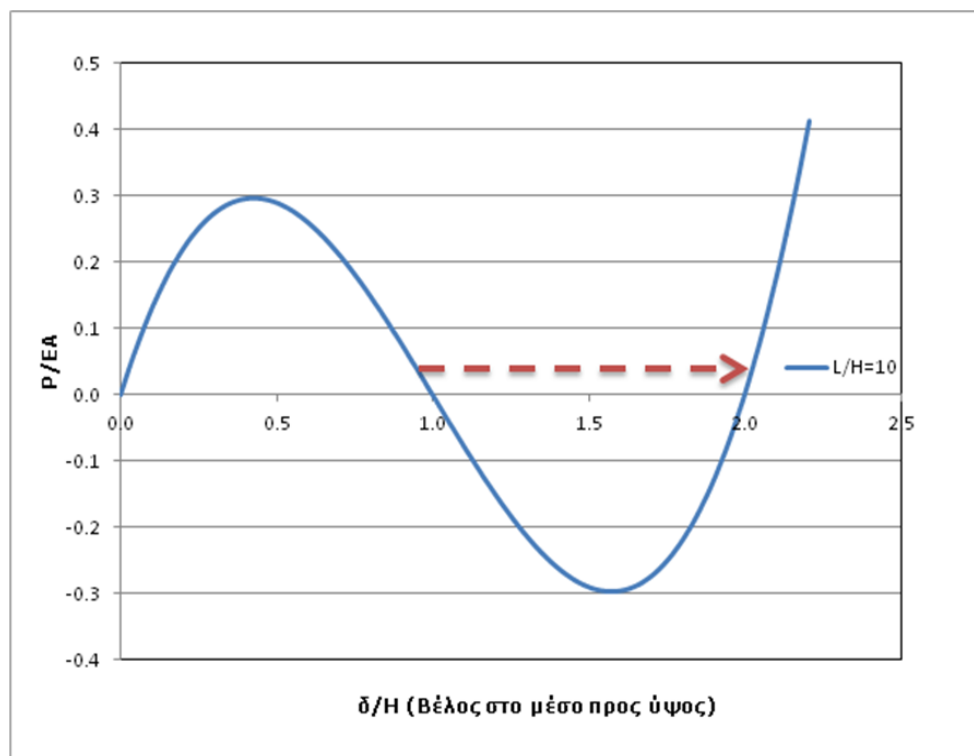
Στη συνέχεια εξετάζονται δύο ακόμη σημεία του δρόμου ισορροπίας του συστήματος.

Το πρώτο είναι το σημείο 2, όπου το οποίο βρίσκεται στον καθοδικό κλάδο του δρόμου ισορροπίας και το φορτίο του είναι αρκετά μικρό.

Το δεύτερο είναι το σημείο 3, όπου ουσιαστικά ο φορέας έχει γυρίσει «ανάποδα» σε σχέση με την αρχική απαραμόρφωτη κατάστασή του και βρίσκεται στον ανοδικό κλάδο του δρόμου ισορροπίας.

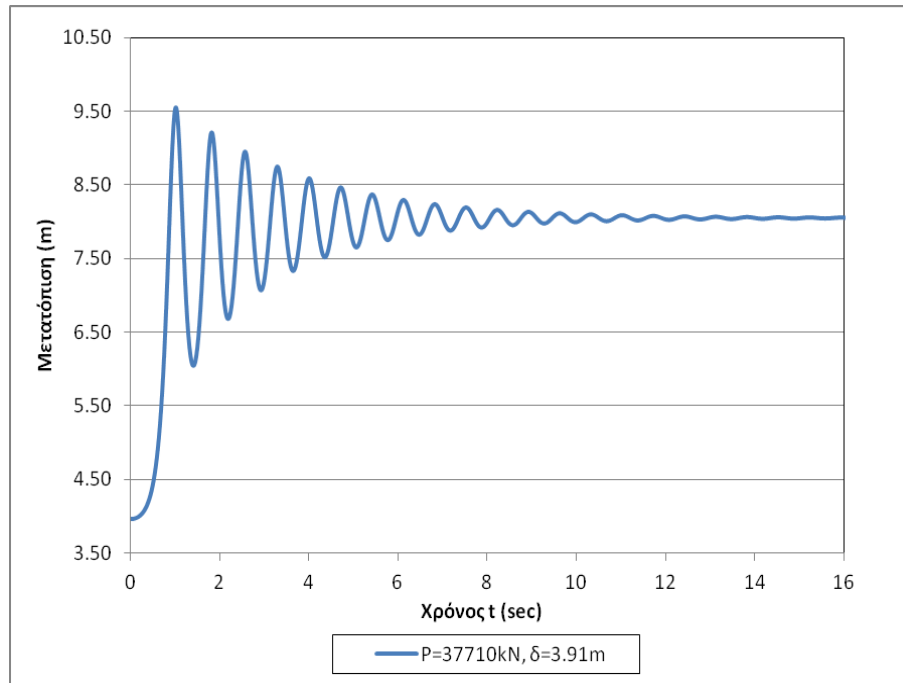
#### 1.4.4.4 Σημείο 2

Αναμένεται να παρατηρηθεί αστάθεια στο σύστημα, το οποίο μάλιστα οδηγείται στη θέση ισορροπίας που φαίνεται στο σχήμα 1.55:

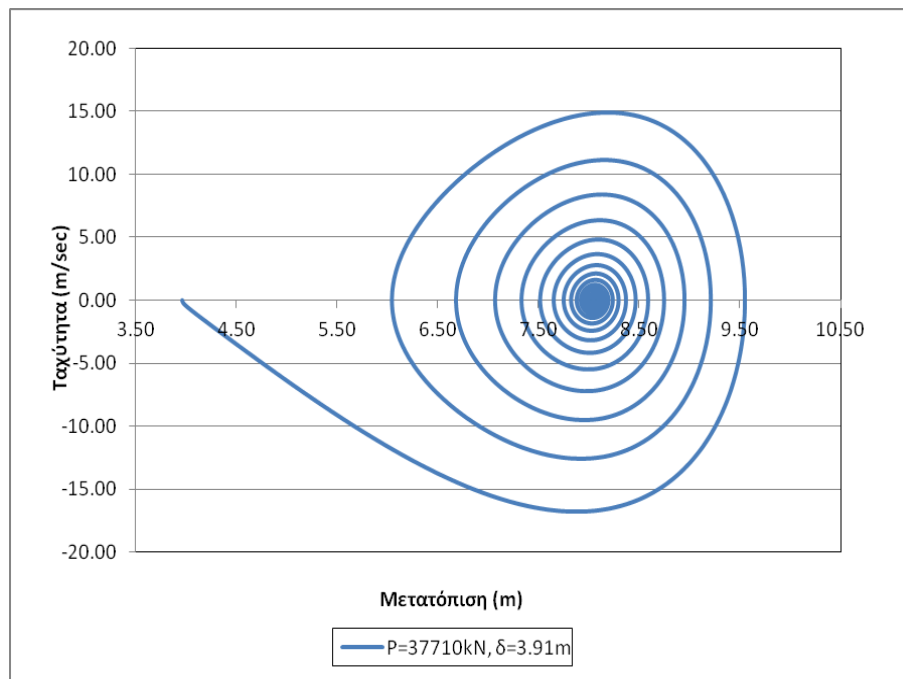


Σχήμα 1.55: Δρόμος ισορροπίας

Πράγματι, αυτό γίνεται όπως διαπιστώνεται και από τα σχήματα 1.56(a) και 1.57(a), που δείχνουν τη χρονοϊστορία της μετατόπισης του κόμβου 2 και το διάγραμμα φάσεως του κόμβου 2 αντίστοιχα.

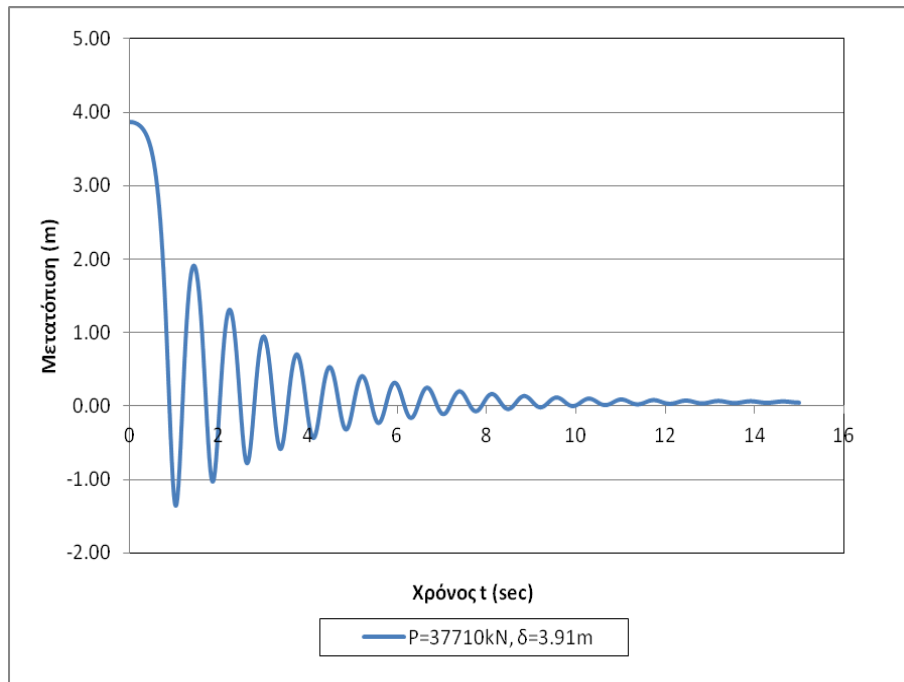


Σχήμα 1.56(a): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 2) για αρχική διέγερση  $\delta_0$

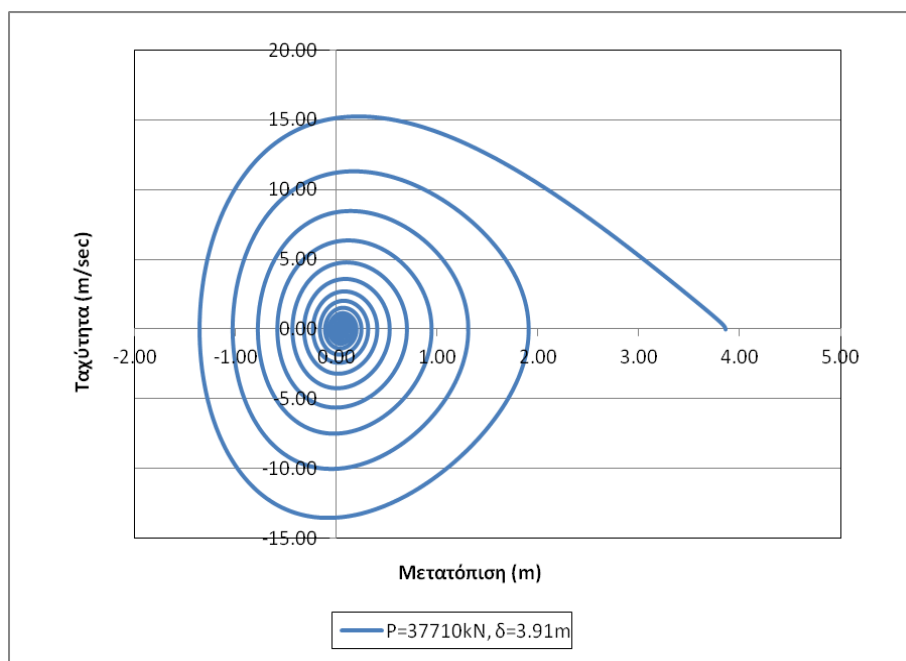


Σχήμα 1.57(a): Διάγραμμα φάσεως κόμβου 2 (σημείο 2) για αρχική διέγερση  $\delta_0$

Στη συνέχεια δίνεται η ίδια τιμή αρχικής μετατόπισης με αντίθετη φορά, και το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Η χρονοϊστορία της μετατόπισης του κόμβου 2 για τη θέση ισορροπίας 2 (σημείο 2) και το αντίστοιχο διάγραμμα φάσεως φαίνονται στα σχήματα 1.56(β) και 1.57(β).

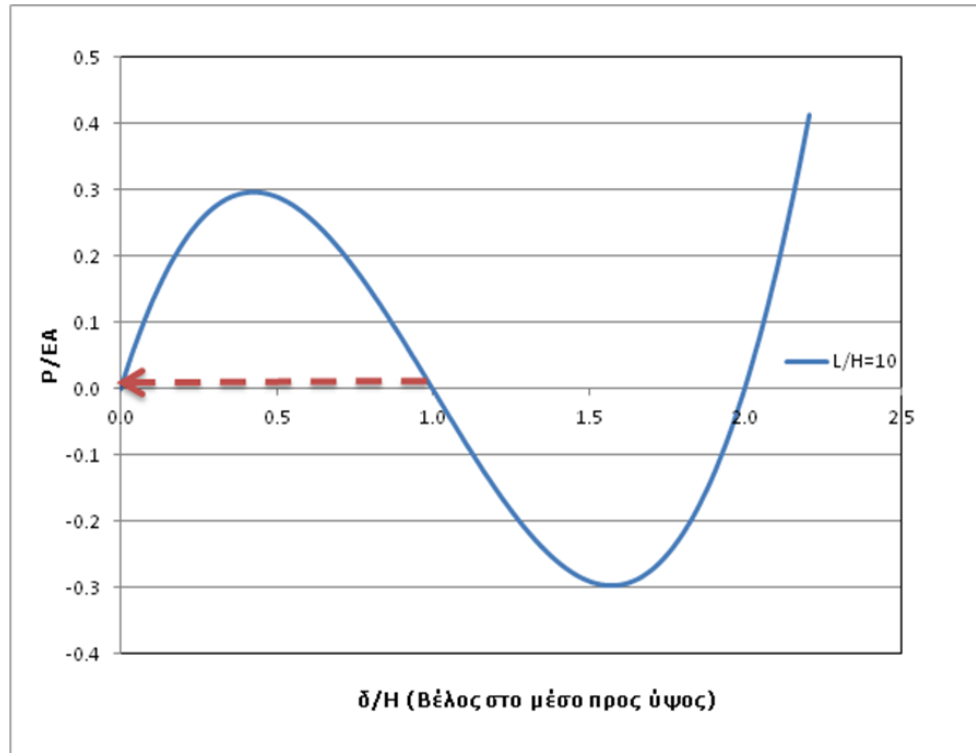


Σχήμα 1.56(β): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 2) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$



Σχήμα 1.57(β): Διάγραμμα φάσεως κόμβου 2 (σημείο 2) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$

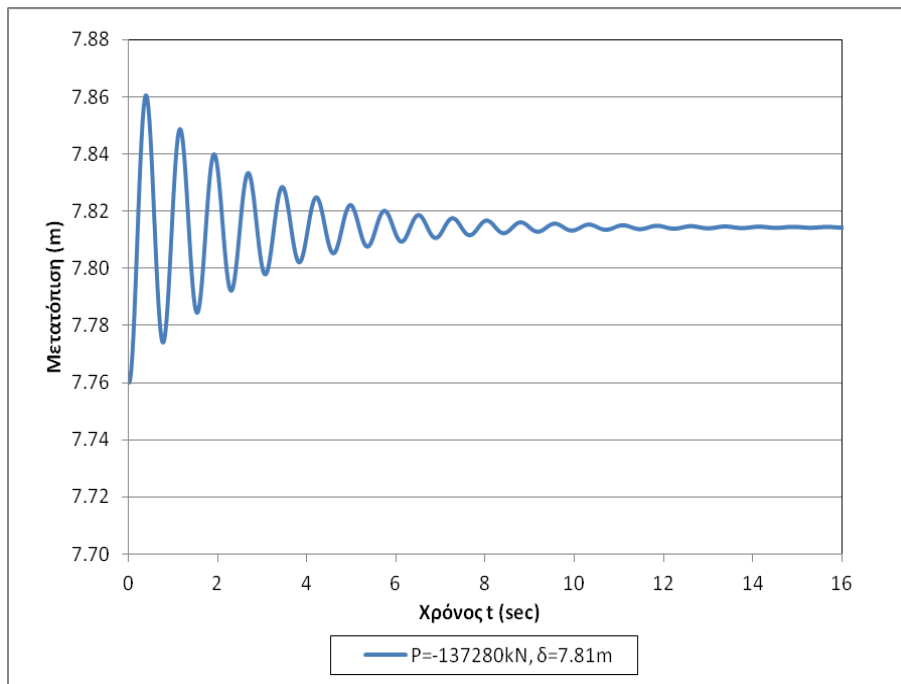
Στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω αποτελέσματα, η φορά της αρχικής διέγερσης  $\delta_0$  επηρέασε τη συμπεριφορά του φορέα, οδηγώντας τον να ταλαντωθεί και τελικά να επιστρέψει στην αρχική του θέση ισορροπίας όπου  $\delta=0$ . Αυτό που συνέβη φαίνεται πιο ξεκάθαρα στο παρακάτω σχήμα:



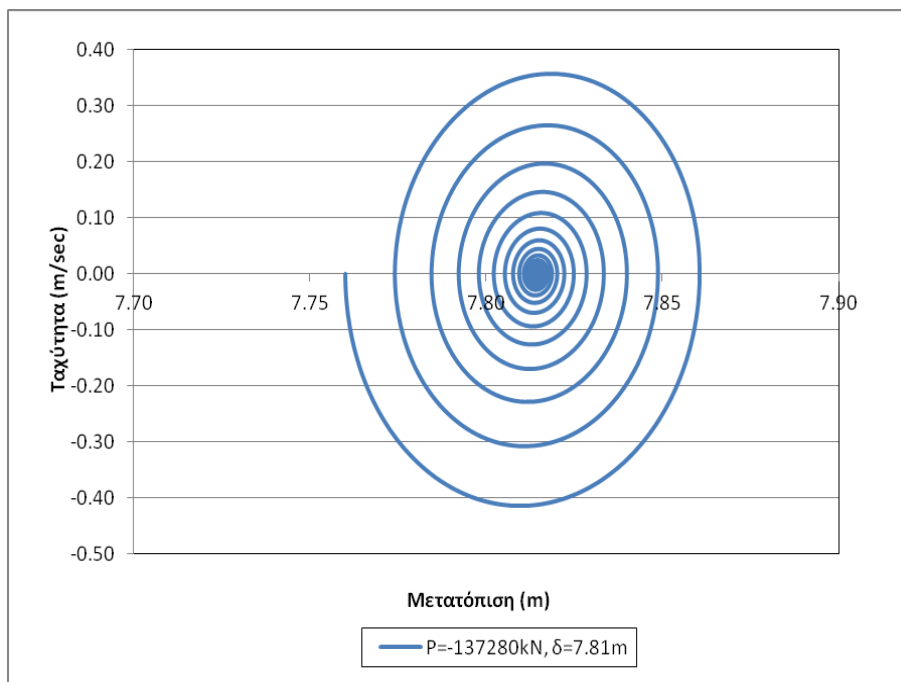
Σχήμα 1.58: Δρόμος ισορροπίας τριγωνικής αψίδας

#### 1.4.4.5 Σημείο 3

Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και για το σημείο 3.



Σχήμα 1.59(a): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 3) για αρχική διέγερση  $\delta_0$



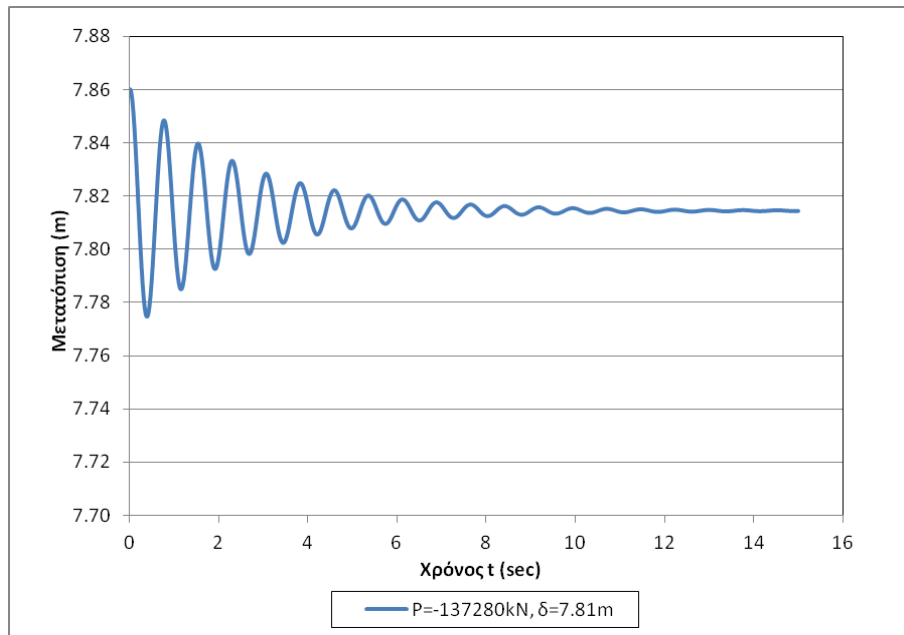
Σχήμα 1.60(a): Διάγραμμα φάσεως κόμβου 2 (σημείο 3) για αρχική διέγερση  $\delta_0$

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι το σημείο 3 είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος, γεγονός αναμενόμενο αφού από το δρόμο ισορροπίας

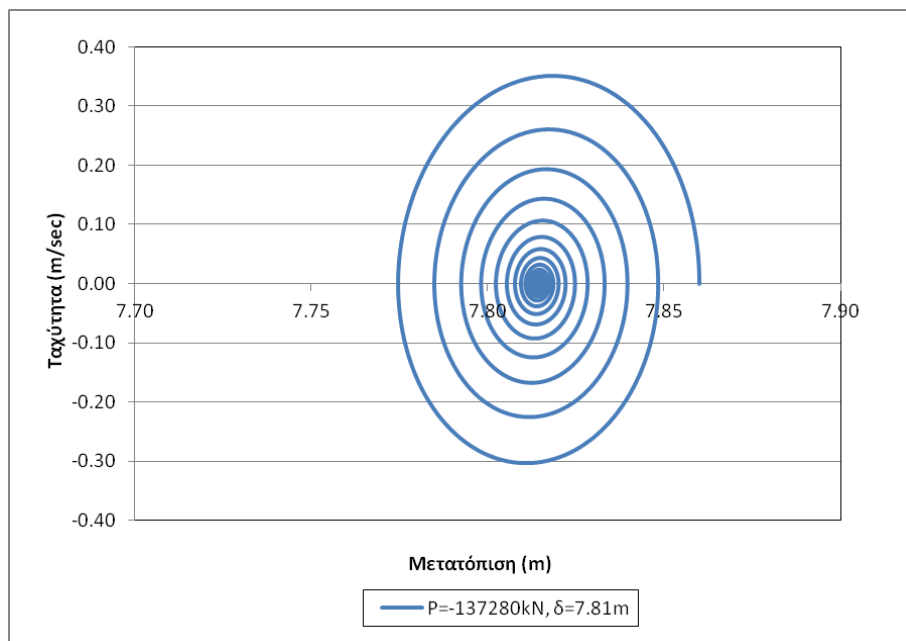


της αψίδας μπορεί να παρατηρηθεί ότι το σημείο 3 βρίσκεται σε ανοδικό (άρα ευσταθή) κλάδο.

Στη συνέχεια δίνεται η ίδια τιμή αρχικής μετατόπισης με αντίθετη φορά, και το σύστημα αφήνεται να ταλαντωθεί. Η χρονοϊστορία της μετατόπισης του κόμβου 2 για τη θέση ισορροπίας 3 (σημείο 3) και το αντίστοιχο διάγραμμα φάσεως φαίνονται στα σχήματα 1.59(β) και 1.60(β).



Σχήμα 1.59(β): Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου 2 (σημείο 3) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$



Σχήμα 1.60(β): Διάγραμμα φάσεως για τον κόμβο 2 (σημείο 3) για αρχική διέγερση  $-\delta_0$



Ο φορέας του σχήματος 1.61 αποτελείται από 3 απαραμόρφωτες ράβδους μήκους  $L$ , οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Στα σημεία  $A$  και  $B$  υπάρχουν εξωτερικές κυλίσεις, ενώ στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  καταλήγουν γραμμικά ελατήρια σταθεράς  $k$ , τα οποία παραμένουν πάντα κατακόρυφα. Η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα μπορεί να περιγραφεί πλήρως με δύο βαθμούς ελευθερίας. Επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν οι γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$ , όπως φαίνονται στο σχήμα 1.61.

Αρχικά πραγματοποιούμε μια γραμμική ανάλυση λυγισμού για να βρούμε τις ιδιομορφές λυγισμού και τα κρίσιμα φορτία. Τα κρίσιμα φορτία έχουν ως εξής:

$$P_{cr,1} = 100\text{kN}$$

$$P_{cr,2} = 300\text{kN}$$

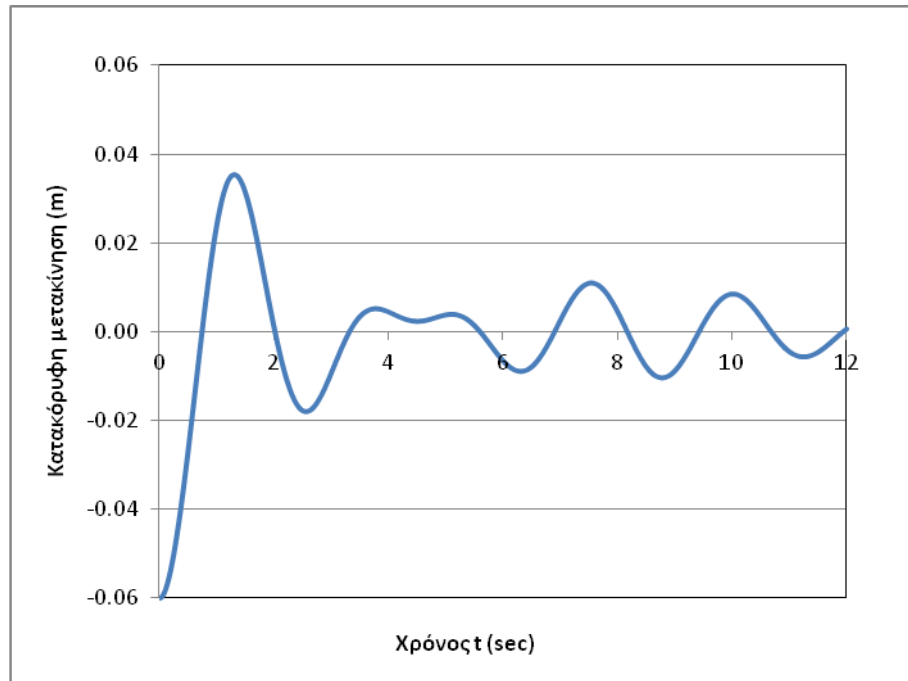
#### 1.4.5.1 Δεδομένα – Παραδοχές – Αρχικές συνθήκες

Στο σημείο αυτό πραγματοποιούνται δυναμικές αναλύσεις με χρήση του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ADINA. Στόχος είναι να μελετηθεί η συμπεριφορά του συστήματος για φορτίο μικρότερο και ίσο του φορτίου λυγισμού.

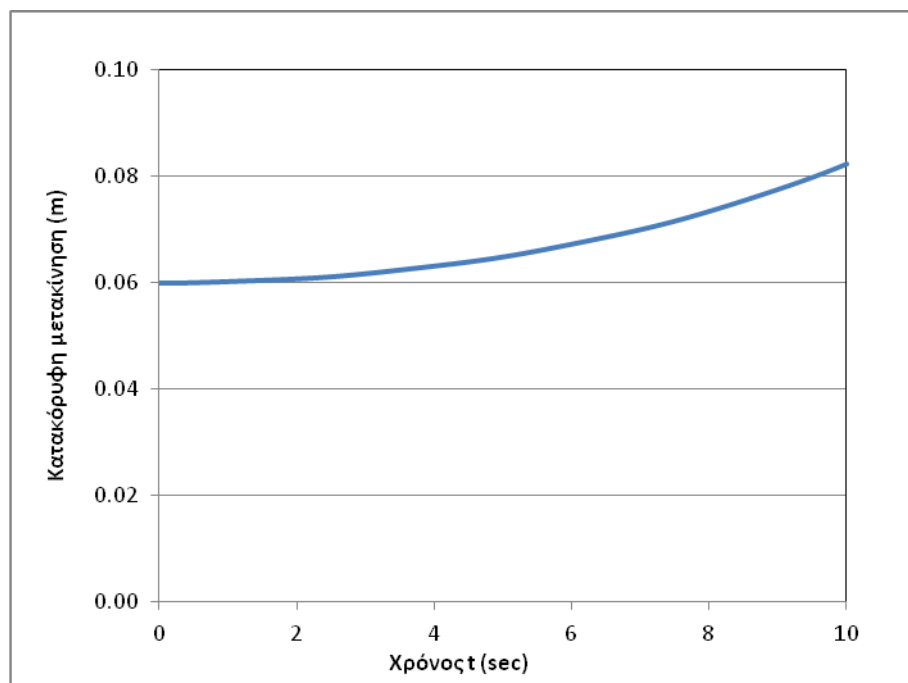
Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

- Επιλέγεται διατομή τετραγωνική  $0.1 \times 0.1$ ,  $E=210000\text{MPa}$ .
- Μήκος ράβδου  $L=3\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο παραμένει διαρκώς οριζόντιο.
- Τα ελατήρια συμπεριφέρονται γραμμικά.
- Θεωρείται αρχική μετατόπιση του συστήματος στο σημείο  $\Gamma$  ίση με  $u_0=-0.06\text{m}$ .
- Θεωρούμε μηδενική αρχική ταχύτητα.
- Η σταθερά των ελατηρίων επιλέγεται  $k=100\text{kN/m}$ .
- Θεωρούμε απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=5\%$ .

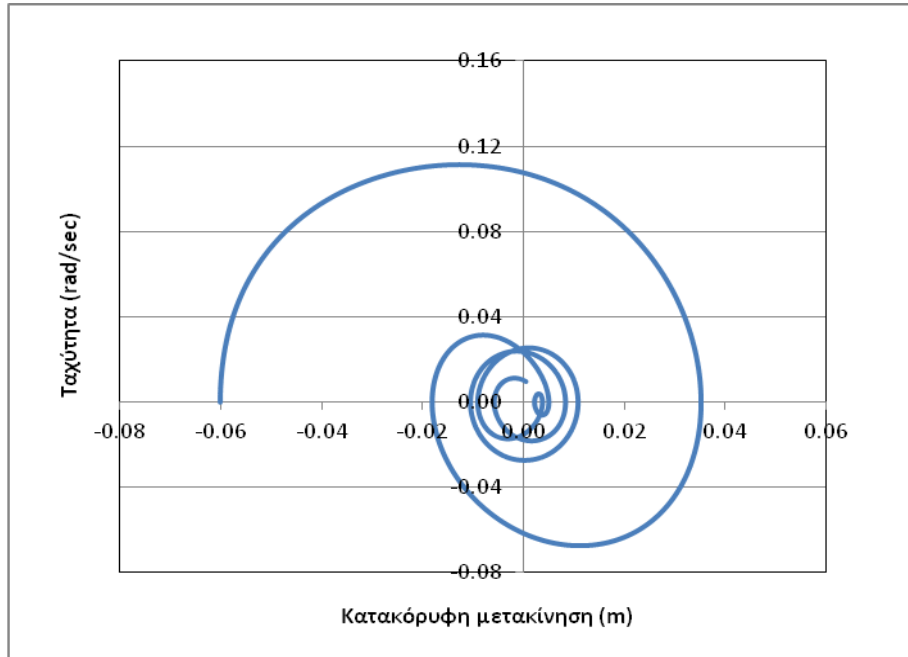
Στα επόμενα σχήματα, παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες και τα διαγράμματα φάσης του συστήματος για φορτίο  $P=50\text{kN}$  και  $P=100\text{kN}$ . Στην πρώτη περίπτωση αναμένουμε ευστάθεια, δηλαδή ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αναμένουμε να παρουσιαστεί αστάθεια.



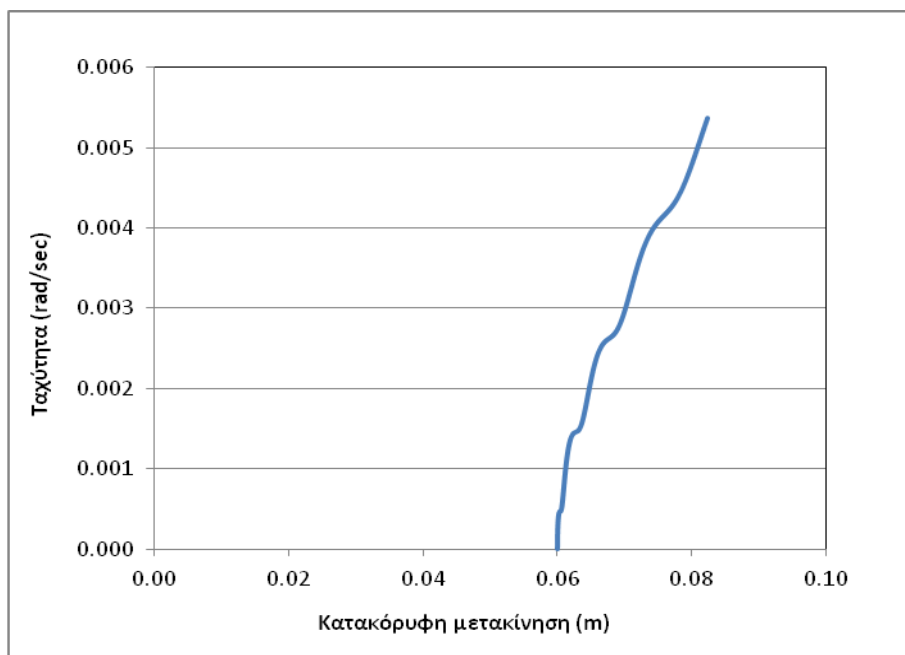
Σχήμα 1.62: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για  $P=50\text{kN}$



Σχήμα 1.63: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για  $P=100\text{kN}$



Σχήμα 1.64: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για P=50kN

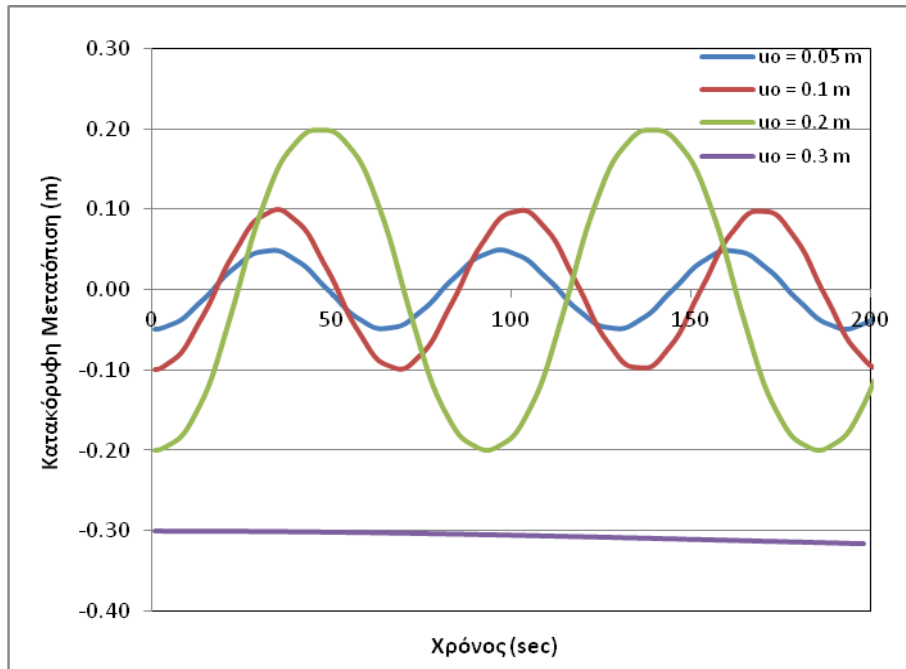


Σχήμα 1.65: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για P=100kN

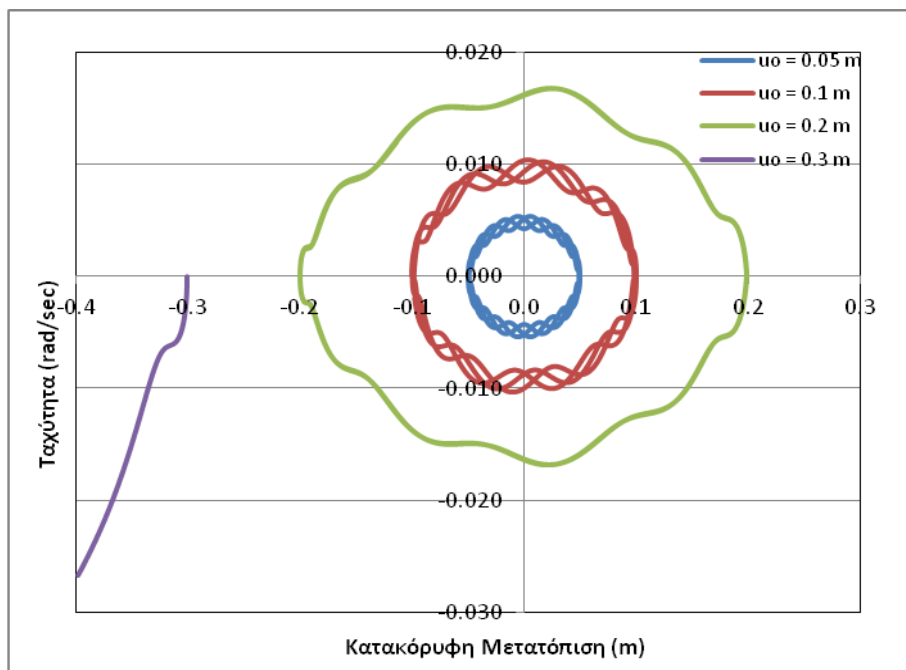
- Όπως ήταν αναμενόμενο, η κίνηση είναι φραγμένη για φορτίο μικρότερο του φορτίου λυγισμού, ενώ για το φορτίο λυγισμού το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει συνεχώς.

### 1.4.5.2 Επιρροή του μεγέθους της αρχικής διαταραχής

Για φορτίο πολύ κοντά στο φορτίο λυγισμού ( $P=99\text{kN}$ ) επιχειρούμε να αυξήσουμε σταδιακά το μέγεθος της αρχικής διαταραχής  $u_0$ , και να δούμε πως επιδρά αυτό στην ταλάντωση του συστήματος.



Σχήμα 1.66: Χρονοϊστορίες μετατόπισης κόμβου Γ για διάφορα μεγέθη αρχικής διαταραχής



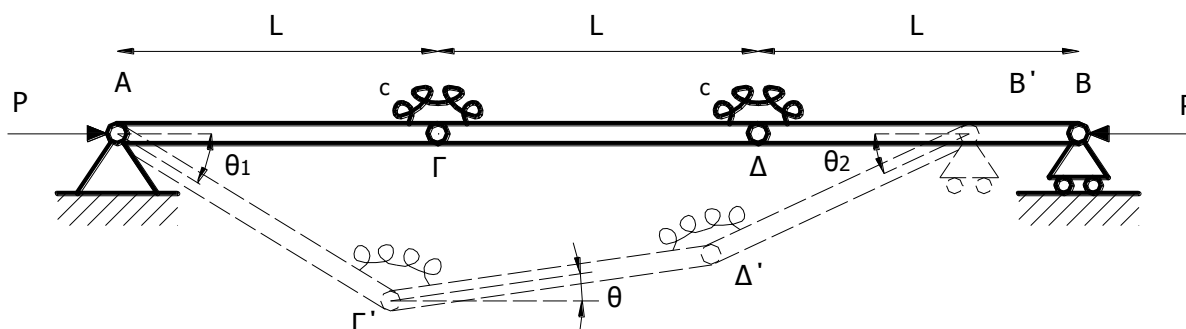
Σχήμα 1.67: Διαγράμματα φάσης κόμβου Γ για διάφορα μεγέθη αρχικής διαταραχής

- Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, αυξάνεται η ιδιοπερίοδος και το πλάτος της ταλάντωσης.
- Για αρχική διαταραχή ίση με 0.3m, παρατηρούμε ότι το σύστημα παύει να είναι ευσταθές, και η θέση ισορροπίας χαρακτηρίζεται από αστάθεια. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στον αναλυτικό δρόμο ισορροπίας του συστήματος, για φορτίο ίσο με 99kN, η αντίστοιχη μετατόπιση είναι 0.25m.

### 1.4.6 Παράδειγμα 6

#### Αστάθεια μέσω συμμετρικού ευσταθούς σημείου διακλάδωσης (διβάθμιο σύστημα)

Ο φορέας του σχήματος 1.68 αποτελείται από 3 ράβδους μήκους  $L$ , οι οποίες συνδέονται αρθρωτά μεταξύ τους στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Στα σημεία  $A$  και  $B$  υπάρχουν εξωτερικές στηρίξεις, ενώ στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  εσωτερικά στροφικά ελατήρια σταθεράς  $c$ . Η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα μπορεί να περιγραφεί πλήρως με δύο βαθμούς ελευθερίας. Επιλέγεται να χρησιμοποιηθούν οι γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$ , όπως φαίνονται στο σχήμα 1.68.



Σχήμα 1.68: Διβάθμιο ευσταθές σύστημα από τρεις στερεές ράβδους

#### 1.4.6.1 Άκαμπτες ράβδοι

Στα παραπάνω παραδείγματα γίνεται η παραδοχή ότι οι ράβδοι είναι άκαμπτες. Όμως αυτό δε συμβαίνει στην πραγματικότητα, και συγκεκριμένα στο παράδειγμα αυτό γίνεται φανερό η διαφορά στο να χρησιμοποιήσουμε άκαμπτα στοιχεία και μη άκαμπτα (σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα στο οποίο και τα μη άκαμπτα στοιχεία έδιναν ίδια αποτελέσματα).

Αρχικά χρησιμοποιούνται άκαμπτα στοιχεία. Αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας τεχνητή δυσκαμψία στα στοιχεία, μέσω αύξησης του εμβαδού της διατομής τους.

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

- Μέτρο ελαστικότητας  $E=210000\text{MPa}$ .
- Μήκος ράβδου  $L=3\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο παραμένει διαρκώς οριζόντιο.
- Τα ελατήρια συμπεριφέρονται γραμμικά.
- Θεωρείται αρχική μετατόπιση του συστήματος στο σημείο Γ ίση με  $u_0=-0.06\text{m}$ .
- Θεωρούμε μηδενική αρχική ταχύτητα.
- Η σταθερά των ελατηρίων επιλέγεται  $c=300\text{kN/m}$ .
- Θεωρούμε απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=5\%$ .

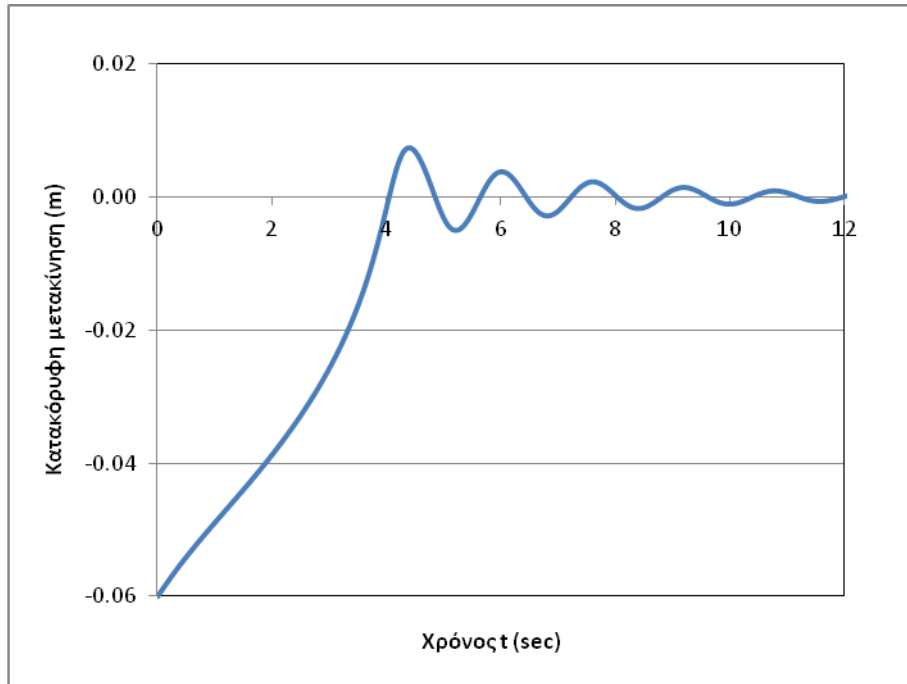
Αρχικά πραγματοποιούμε μια γραμμική ανάλυση λυγισμού για να βρούμε τις ιδιομορφές λυγισμού και τα κρίσιμα φορτία. Τα κρίσιμα φορτία έχουν ως εξής (ίδιες τιμές με τις αντίστοιχες των αναλυτικών λύσεων):

$$P_{cr,1} = 100\text{kN}$$

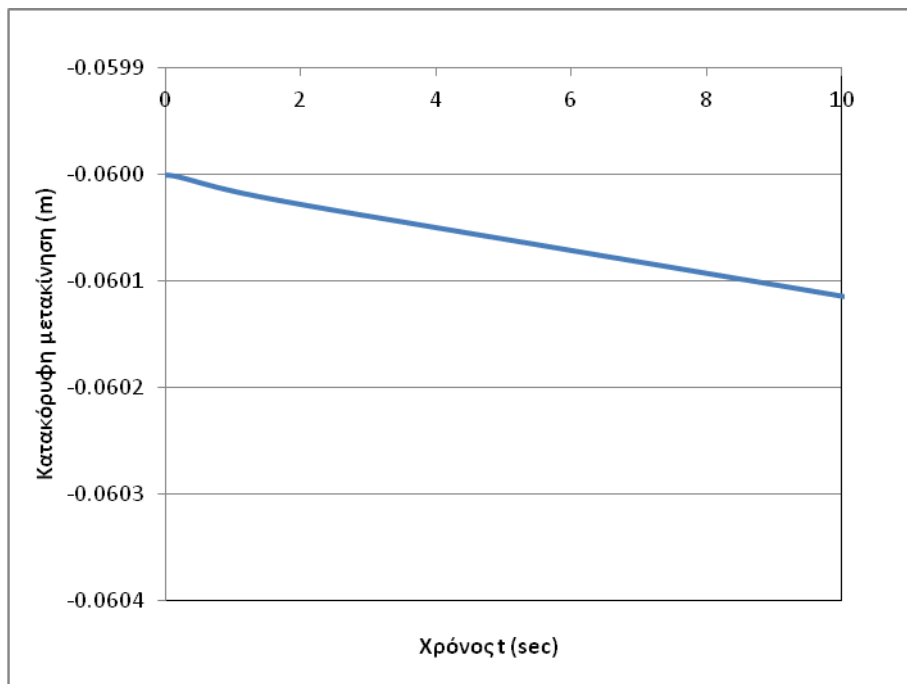
$$P_{cr,2} = 300\text{kN}$$

Στα επόμενα σχήματα, παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες και τα διαγράμματα φάσης του συστήματος για φορτίο  $P=50\text{kN}$  και  $P=100\text{kN}$ . Στην πρώτη περίπτωση αναμένουμε ευστάθεια, δηλαδή ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αναμένουμε να παρουσιαστεί αστάθεια.

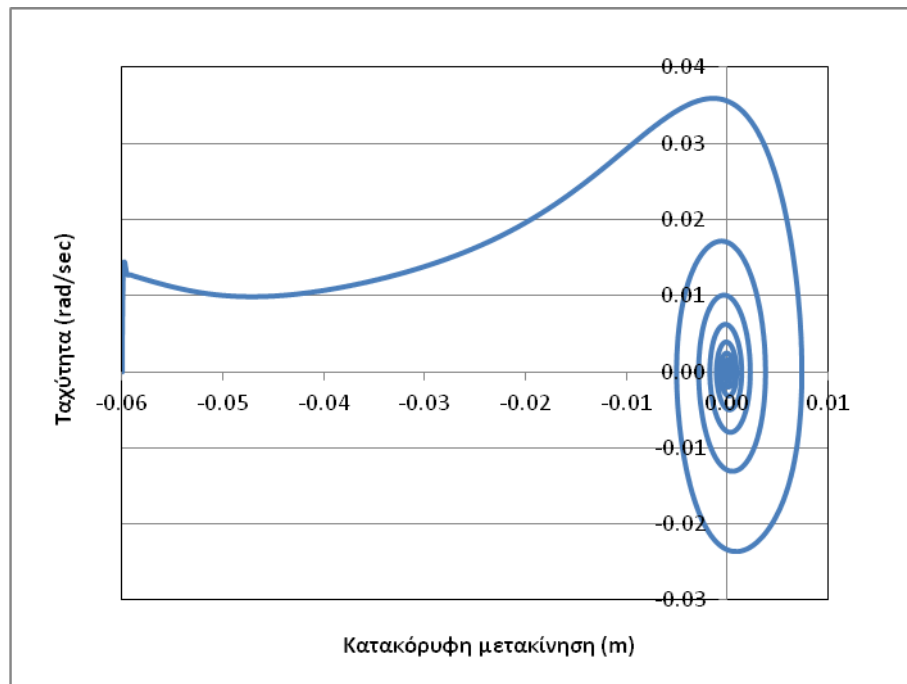




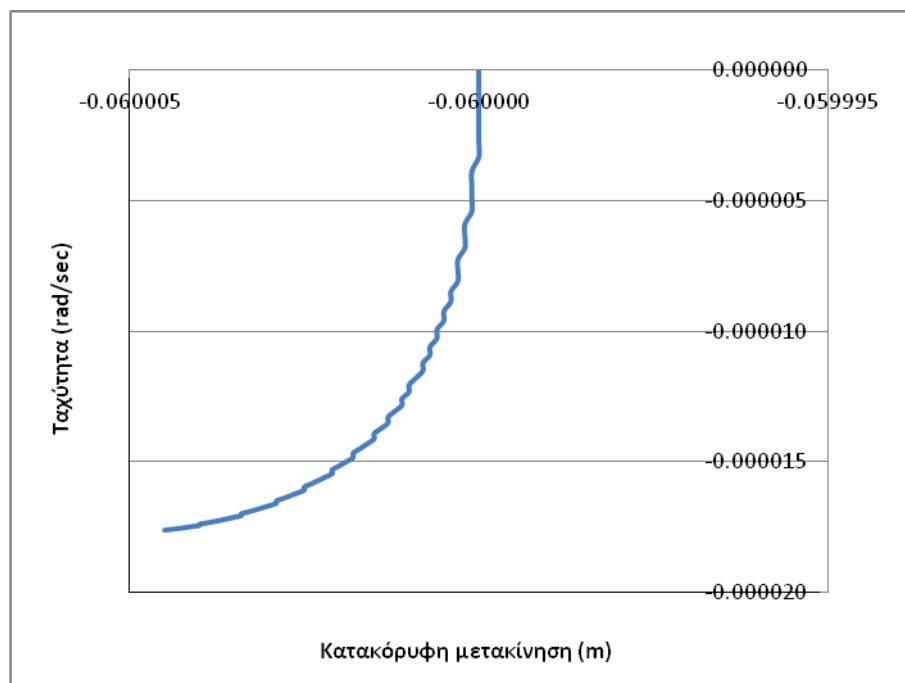
Σχήμα 1.69: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για P=50kN



Σχήμα 1.70: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για P=100kN



Σχήμα 1.71: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για P=50kN



Σχήμα 1.72: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για P=100kN

- Όπως ήταν αναμενόμενο, η κίνηση είναι φραγμένη για φορτίο μικρότερο του φορτίου λυγισμού, ενώ για το φορτίο λυγισμού το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει συνεχώς.
- Παρατηρείται ότι στην περίπτωση όπου η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής ( $P=50\text{kN}$ ), η ταλάντωση σβήνει πολύ γρήγορα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε δώσει μεγάλο εμβαδό διατομής, και συνεπώς μεγάλη δυσκαμψία, και έτσι η απόσβεση προκύπτει πολύ μεγάλη.

#### 1.4.6.2 Μη άκαμπτες ράβδοι

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

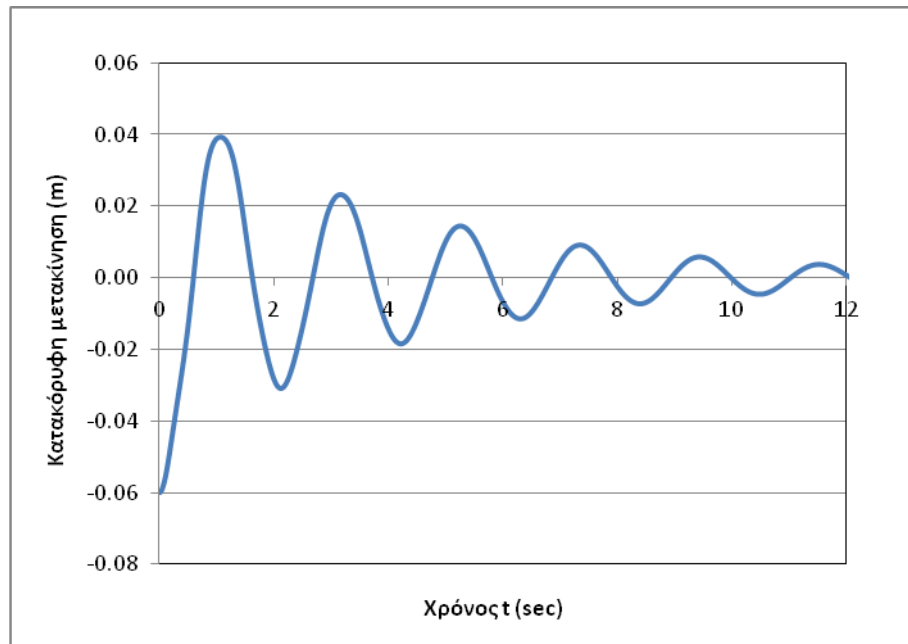
- Επιλέγεται διατομή τετραγωνική  $0.1 \times 0.1$ ,  $E=210000\text{MPa}$ .
- Μήκος ράβδου  $L=3\text{m}$ .
- Το σύστημα είναι συντηρητικό, δηλαδή το θλιπτικό φορτίο παραμένει διαρκώς οριζόντιο.
- Τα ελατήρια συμπεριφέρονται γραμμικά.
- Θεωρείται αρχική μετατόπιση του συστήματος στο σημείο Γ ίση με  $u_0=-0.06\text{m}$ .
- Θεωρούμε μηδενική αρχική ταχύτητα.
- Η σταθερά των ελατηρίων επιλέγεται  $c=300\text{kN/m}$ .
- Θεωρούμε απόσβεση του συστήματος ίση με  $\zeta=5\%$ .

Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η αναλυτική λύση (στην οποία οι ράβδοι συμπεριφέρονται σαν στερεά σώματα) και συνεπώς δε γνωρίζουμε το φορτίο λυγισμού του συστήματος. Κάνοντας μια γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού, τα κρίσιμα φορτία λυγισμού που προκύπτουν είναι τα εξής:

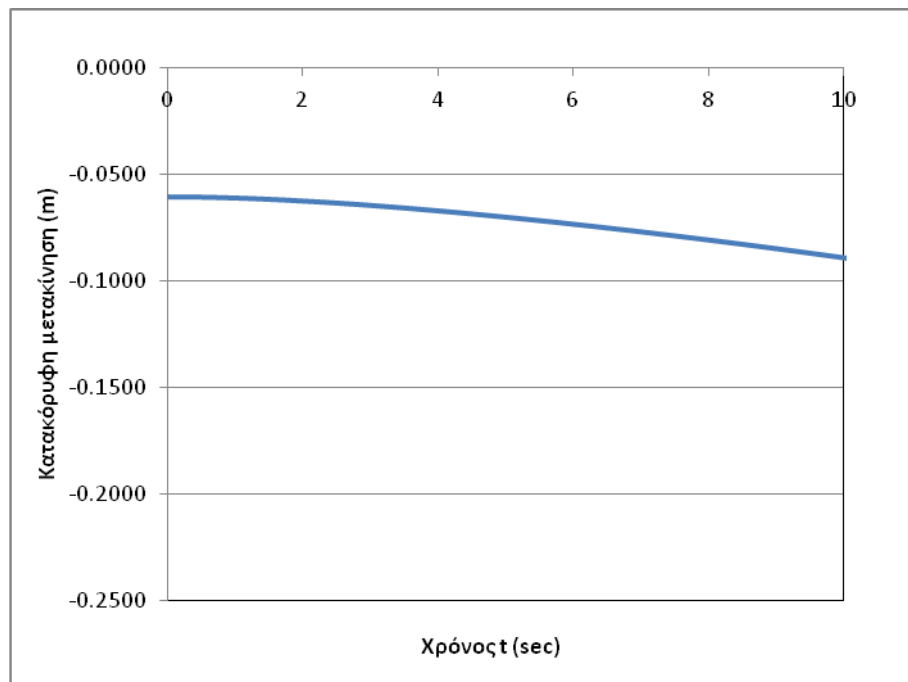
$$P_{cr,1} = 70\text{kN}$$

$$P_{cr,2} = 235.5\text{kN}$$

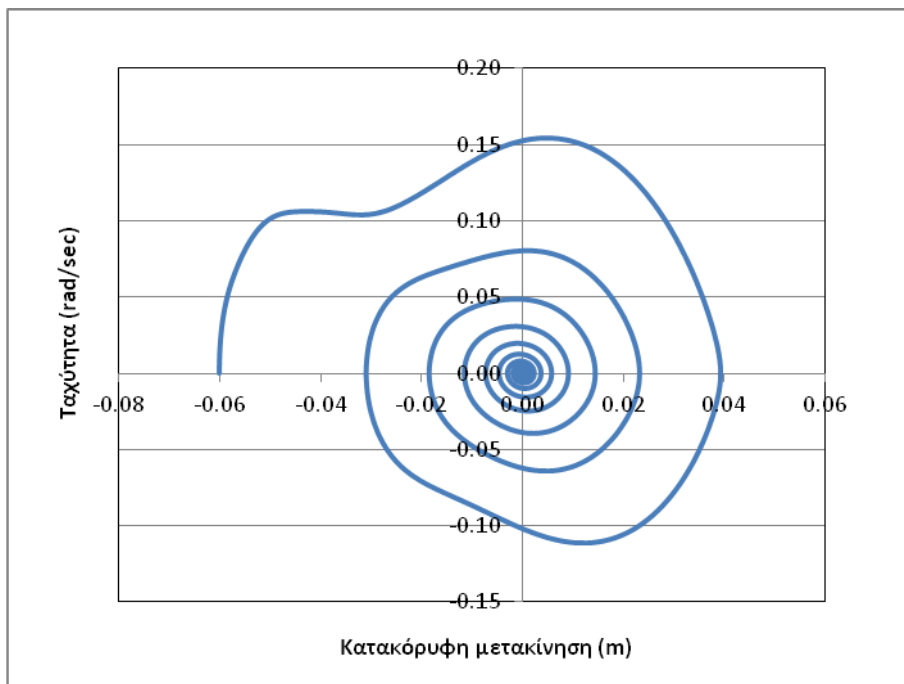
Στα επόμενα σχήματα, παρουσιάζονται οι χρονοϊστορίες και τα διαγράμματα φάσης του συστήματος για φορτίο  $P=35\text{kN}$  και  $P=70\text{kN}$ . Στην πρώτη περίπτωση αναμένουμε ευστάθεια, δηλαδή ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αναμένουμε να παρουσιαστεί αστάθεια.



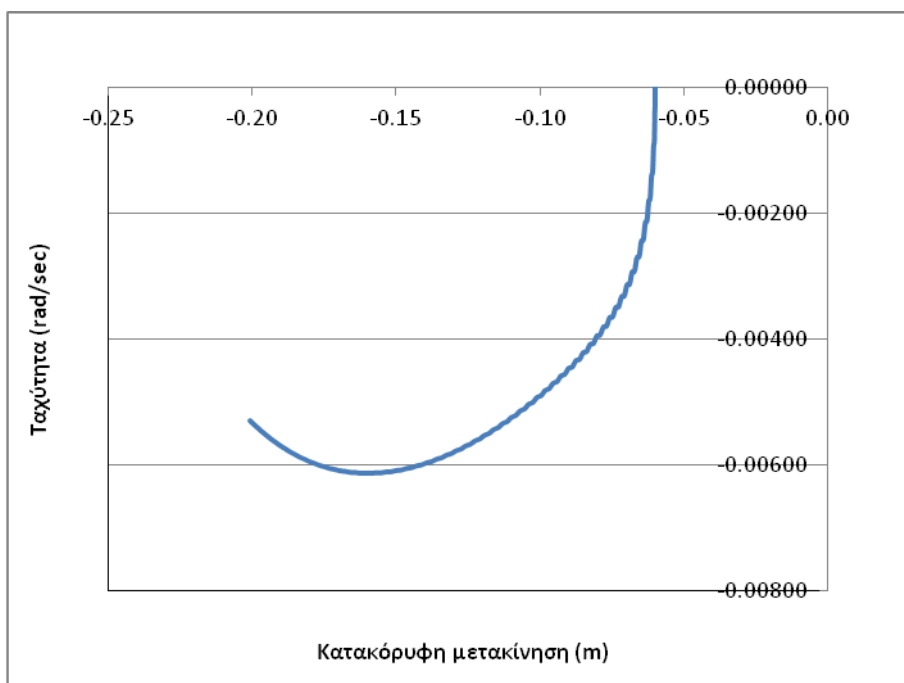
Σχήμα 1.73: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για  $P=35\text{kN}$



Σχήμα 1.74: Χρονοϊστορία μετατόπισης κόμβου Γ για  $P=70\text{kN}$



Σχήμα 1.75: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για  $P=35\text{kN}$



Σχήμα 1.76: Διάγραμμα φάσης κόμβου Γ για  $P=70\text{kN}$

- Όπως ήταν αναμενόμενο, η κίνηση είναι φραγμένη για φορτίο μικρότερο του φορτίου λυγισμού, ενώ για το φορτίο λυγισμού το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει συνεχώς.

## 1.5 Συμπεράσματα

- Η επιβολή μιας αρχικής διαταραχής σε μια θέση ευσταθούς ισορροπίας, οδηγεί σε ταλάντωση του συστήματος γύρω από αυτή τη θέση. Όσο η τιμή του επιβαλλόμενου φορτίου παραμένει κάτω από την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα.
- Όσο αυξάνεται το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, αυξάνεται και το πλάτος της ταλάντωσης.
- Όσο αυξάνεται το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, αυξάνεται και η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης.
- Το μέγεθος της αρχικής διαταραχής, σε κάποιες περιπτώσεις, επηρεάζει το είδος της ισορροπίας σε κάποια θέση (ευστάθεια για μικρή διαταραχή – αστάθεια για μεγάλη διαταραχή).
- Σε κάποιες περιπτώσεις, η φορά της αρχικής διέγερσης επηρεάζει την απόκριση του συστήματος (περίπτωση τριγωνικής αψίδας).
- Καθώς το θλιπτικό φορτίο πλησιάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, η ιδιοπερίοδος του συστήματος αυξάνεται (μείωση ιδιοσυχνότητας). Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού καθώς αυξάνεται το φορτίο, μειώνεται η δυσκαμψία του φορέα.
- Καθώς το θλιπτικό φορτίο πλησιάζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, το πλάτος της ταλάντωσης με απόσβεση, μειώνεται με μικρότερο ρυθμό.
- Η επιρροή της απόσβεσης στην αστάθεια είναι μικρή, και σε καμία περίπτωση δεν καθορίζει την ύπαρξη ή μη αστάθειας. Το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνει με μικρότερο ρυθμό όσο μειώνεται η απόσβεση.

## ΜΕΡΟΣ 2<sup>ο</sup>

# Αλληλεπίδραση μορφών αστοχίας πολυβάθμιων συστημάτων

## 2.1 Εισαγωγή

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας εξετάζεται η συμπεριφορά συστημάτων με δύο ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας. Η προσομοίωση μιας κατασκευής με ένα μονοβάθμιο σύστημα μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρά σφάλματα λόγω της αδυναμίας περιγραφής ορισμένων φαινομένων. Πράγματι, πέραν των μαθηματικών δυσχερειών που απορρέουν από την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, τα πολυβάθμια συστήματα παρουσιάζουν και φαινόμενα τα οποία δεν εμφανίζονται στα μονοβάθμια. Τέτοια είναι οι νέοι τύποι σημείων διακλάδωσης, η πολυκλαδική συμπεριφορά κανονικών μορφών λόγω πολλαπλών κρίσιμων φορτίων, ατελή συστήματα με συμμετρικές ατέλειες, πολύπλοκες συνθήκες ευστάθειας ισορροπίας, κ.λ.π.

Το θέμα το οποίο κυρίως θίγεται, είναι η αλληλεπίδραση των ιδιομορφών λυγισμού. Εξετάζεται η περίπτωση σύζευξης και αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών λυγισμού ενός ελαστικού συστήματος και μελετάται η επίδραση της παρουσίας ατελειών στις παραπάνω κατασκευές. Το παραπάνω φαινόμενο, όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω, μπορεί να οδηγήσει το φορέα σε τελική συμπεριφορά η οποία διαφέρει τελείως από αυτή που θα αναμέναμε.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν κατασκευές στις οποίες υπάρχει γειτνίαση τουλάχιστον δύο ιδιομορφών λυγισμού. Είναι σαφές ότι τέτοιου είδους κατασκευές είναι πολύ πιθανό να παρουσιάσουν φαινόμενα συζευγμένου λυγισμού.

Λόγω της δυσκολίας επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, επιλέγονται αρχικά για μελέτη, συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας. Τα παραπάνω συστήματα δεν απαιτούν περίπλοκη μαθηματική επεξεργασία των εξισώσεων, και παράλληλα εμφανίζουν τα φαινόμενα τα οποία δε μπορούν να περιγραφούν με τη χρήση μονοβάθμιων συστημάτων.

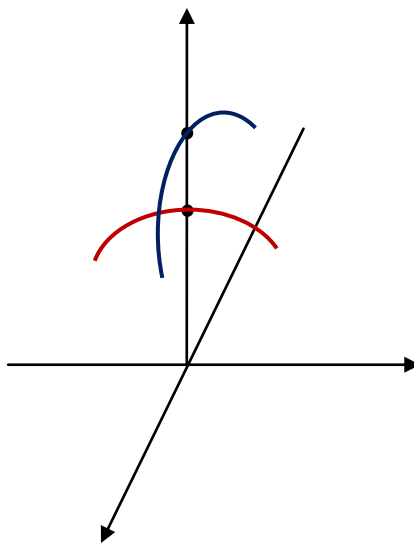
## 2.2 Συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας

Στόχος της παρούσας παραγράφου είναι να δείξουμε μέσα από μια σειρά από απλά και κατανοητά παραδείγματα, την επίδραση της γειτνίασης ή και ταύτισης δύο ή περισσότερων φορτίων λυγισμού στην αντοχή αλλά και τη γενικότερη συμπεριφορά ενός ελαστικού συστήματος. Παράλληλα, εξετάζεται και η επιρροή της ύπαρξης διαφόρων τιμών αρχικών ατελειών στο ίδιο σύστημα. Τα μοντέλα τα οποία επιλέχθηκαν να διερευνηθούν είναι ελαστικά συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας.

### 2.2.1 Ασταθές – ασταθές

#### 2.2.1.1 Το προσομοίωμα

Το πρώτο προσομοίωμα είναι ουσιαστικά μια τροποποιημένη έκδοση του αντίστοιχου μοντέλου που πρώτα χρησιμοποιήθηκε από τον Augusti, με τη διαφορά ότι αντί για δύο στροφικά ελατήρια στη βάση, έχουμε δύο γραμμικά ελαστικά μετακινησιακά ελατήρια στην κορυφή. Όπως είναι γνωστό, το μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή παρουσιάζει ασταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας και συνεπώς, οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού έχουν απολύτως όμοια μεταλυγισμική συμπεριφορά (ασταθής-ασταθής) όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Ανεξάρτητοι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας

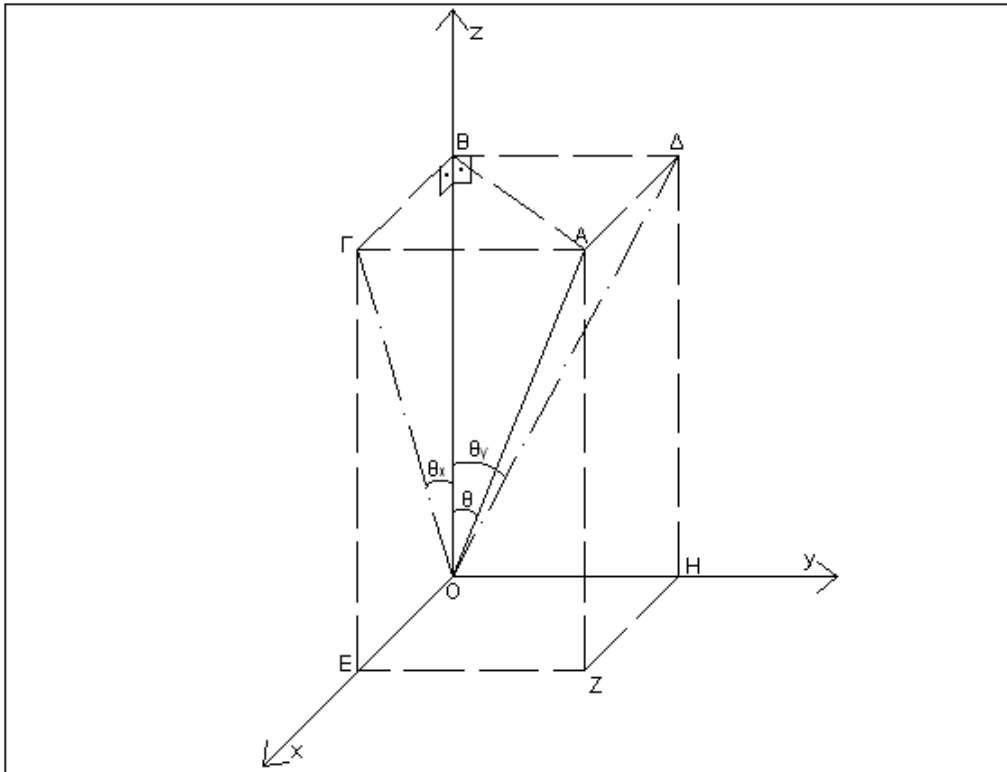


Ο φορέας που εξετάζεται είναι μια απαραμόρφωτη ράβδος μήκους  $L$ , η οποία στη βάση της είναι αρθρωτά εδραζόμενη. Στην κορυφή της υπάρχουν δύο γραμμικά ελαστικά μετακινησιακά ελατήρια (κατά τη διεύθυνση  $x$  και  $y$  αντίστοιχα) τα οποία λειτουργούν παρέχοντας αποκλειστικά οριζόντια αντίδραση. Το ένα από αυτά λειτουργεί μόνο στο επίπεδο  $x-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $k_x$  ενώ το άλλο μόνο στο επίπεδο  $y-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $k_y$ . Στην κορυφή του φορέα ασκείται επίσης ένα φορτίο  $P$  το οποίο παραμένει διαρκώς κατακόρυφο. Η συνολική παραμόρφωση του φορέα μπορεί να εκφραστεί ως προς τους δύο στροφικούς βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Η στροφή  $\theta_x$  αντιστοιχεί στο ελατήριο που βρίσκεται στο επίπεδο  $x-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $x-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ , ενώ η στροφή  $\theta_y$  αντιστοιχεί σε αυτό του επιπέδου  $y-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $y-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ . Στην περίπτωση που γίνεται μελέτη των ατελών συστημάτων, γίνεται εισαγωγή και προσομοίωση των ατελειών αυτών μέσω αρχικών γωνιών  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  που εκφράζουν στα αντίστοιχα επίπεδα κάθε φορά, την αρχική απόκλιση της ράβδου από την κατακόρυφο. Θεωρούμε  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον κατακόρυφο άξονα  $z$  και την αντίστοιχη αρχική ατέλεια  $\varepsilon$ . Στην αρχική ατελή κατάσταση, θεωρούμε ότι τα ελατήρια δεν έχουν ενεργοποιηθεί και συνεπώς, στην τυχαία γωνία  $\theta$  τα ελατήρια εντείνονται με γωνία  $(\theta-\varepsilon)$ .

Το σύστημα στην τέλεια κατάσταση έχει δύο ιδιομορφές λυγισμού με ασταθή δρόμο ισορροπίας η κάθε μία. Τα δύο κρίσιμα φορτία λυγισμού είναι  $P_{cr,x}=k_x \cdot L$  και  $P_{cr,y}=k_y \cdot L$  αντίστοιχα.

### 2.2.1.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος

Η γεωμετρία της ράβδου σε μια τυχαία θέση φαίνεται στο σχήμα 2.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι δε θα πραγματοποιηθεί κανενός είδους προσέγγιση, συνεπώς οι σχέσεις που πρόκειται να εξαχθούν ισχύουν για οσοδήποτε μεγάλες γωνίες, με την προϋπόθεση ότι είναι μικρότερες από  $90^\circ$  λόγω της μορφής της συνάρτησης  $\tan\theta$  στην τιμή αυτή.



Σχήμα 2.2: Γεωμετρία ράβδου σε τυχαία θέση

Τριγωνο ΟΒΔ

$$\tan \theta_y = \frac{B\Delta}{OB} \Rightarrow B\Delta = OB \cdot \tan \theta_y \quad (2.1)$$

Τριγωνο ΟΒΓ

$$\tan \theta_x = \frac{B\Gamma}{OB} \Rightarrow B\Gamma = OB \cdot \tan \theta_x \quad (2.2)$$

Τριγωνο ΑΒΔ

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2$$

Όμως  $A\Delta = B\Gamma$

$$\text{Άρα } AB^2 = B\Delta^2 + B\Gamma^2 \quad (2.3)$$

Τρίγωνο OAB

$$\cos\theta = \frac{OB}{L} \Rightarrow OB = L \cdot \cos\theta \quad (2.4)$$

$$OA^2 = L^2 = AB^2 + OB^2 \Rightarrow (2.3), (2.4)$$

$$L^2 = BA^2 + B\Gamma^2 + L^2 \cdot \cos^2\theta \Rightarrow (2.1), (2.2)$$

$$L^2 = OB^2 \cdot \tan^2\theta_y + OB^2 \cdot \tan^2\theta_x + L^2 \cdot \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$L^2 = L^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta_y + L^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta_x + L^2 \cdot \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$1 = \cos^2\theta \cdot [\tan^2\theta_y + \tan^2\theta_x + 1]$$

$$\text{Άρα} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\theta_y + \tan^2\theta_x + 1}} \quad (2.5)$$

Τρίγωνο OBA

$$\sin\theta_y = \frac{BA}{OA} \Rightarrow BA = OA \cdot \sin\theta_y \quad (2.6)$$

$$\cos\theta_y = \frac{OB}{OA} \Rightarrow OA = \frac{OB}{\cos\theta_y} \Rightarrow (4) \Rightarrow OA = \frac{L \cdot \cos\theta}{\cos\theta_y} \quad (2.7)$$

$$\text{Από (2.6), (2.7)} \Rightarrow BA = L \cdot \cos\theta \cdot \tan\theta_y \quad (2.8)$$

Τρίγωνο OBG

$$\sin\theta_x = \frac{BG}{OG} \Rightarrow BG = OG \cdot \sin\theta_x \quad (2.9)$$

$$\cos\theta_x = \frac{OB}{OG} \Rightarrow OG = \frac{OB}{\cos\theta_x} \Rightarrow (2.4) \Rightarrow OG = \frac{L \cdot \cos\theta}{\cos\theta_x} \quad (2.10)$$

$$\text{Από (2.9), (2.10)} \Rightarrow BG = L \cdot \cos\theta \cdot \tan\theta_x \quad (2.11)$$

2.2.1.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού

Για την ανάλυση και καλύτερη περιγραφή του φαινομένου της σύνθετης συμπεριφοράς του παραπάνω προσομοιώματος, γίνεται χρήση της ενεργειακής μεθόδου.

Έστω ότι η ράβδος βρίσκεται σε μια τυχαία θέση, στην οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία  $\theta$ . Έστω επίσης, ότι στην αρχική θέση η ράβδος έχει αρχική ατέλεια σε μορφή γωνίας  $\varepsilon$ . Για λόγους ευκολίας στην επιβολή των αρχικών ατελειών, θεωρούμε  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  αντίστοιχα τις γωνίες που σχηματίζει κάθε φορά η προβολή της αρχικής θέσης της ράβδου σε κάθε επίπεδο με την κατακόρυφο.

Η συνολική δυναμική ενέργεια της ράβδου στην τυχαία αυτή θέση, με αρχικές ατέλειες  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  γράφεται ως εξής:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot k_y \cdot (L \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta_y - L \cdot \cos \varepsilon \cdot \tan \varepsilon_y)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_x \cdot (L \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta_x - L \cdot \cos \varepsilon \cdot \tan \varepsilon_x)^2 - P \cdot L \cdot (\cos \varepsilon - \cos \theta) \Rightarrow (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \cdot k_y \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot k_x \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_x}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right)^2 - \\ &- P \cdot L \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} \right) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισορροπίας, δηλαδή μηδενίζοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = 0 &\Rightarrow k_x \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_x}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ - \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] \\ &+ k_y \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{(\tan^2 \theta_x + 1) \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - \\ &- P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = 0 \Rightarrow & k_y \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] \\ & + k_x \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_x}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{(\tan^2 \theta_y + 1) \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - \\ & - P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

Προκειμένου τα συμπεράσματά μας να είναι απαλλαγμένα φαινομένων κλίμακας, αδιαστατοποιούμε την εφαρμοζόμενη φόρτιση. Για να γίνει αυτό διαιρούμε το φορτίο  $P$  με το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = k_y \cdot L$ . Η αδιαστατοποίηση έγινε με βάση το κρίσιμο φορτίο που μας παρέχει το ελατήριο σταθεράς  $k_y$  διότι δεχθήκαμε σαν σύμβαση ότι από τα δύο μετακινησιακά ελατήρια, αυτό θα έχει μικρότερη ή το πολύ ίση σταθερά ελατηρίου από το άλλο. Θέτοντας επίσης  $\lambda = P/P_{cr,y}$  και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις, καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{k_y} \cdot \left( \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_x}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] + \\ + \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{(\tan^2 \theta_x + 1) \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - \\ - \lambda \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] + \\ + \frac{k_x}{k_y} \cdot \left( \frac{\tan \theta_x}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_x}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \left[ \frac{(\tan^2 \theta_y + 1) \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - \\ - \lambda \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0 \end{aligned}$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $P$  που τις ικανοποιεί, αποτελεί και μια θέση ισορροπίας. Συνεπώς, λύνοντάς αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ο δρόμος ισορροπίας του συστήματος.

#### 2.2.1.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων

Για την αριθμητική επεξεργασία των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα το οποίο γράφτηκε στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB. Θεωρώντας γνωστή τη μία από τις δύο γωνίες, το πρόγραμμα υπολογίζει την άλλη γωνία και το αδιαστατοποιημένο φορτίο  $\lambda$  λύνοντας αριθμητικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τελικά. Αυτό που επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, είναι το βήμα στο οποίο χωρίζεται το εύρος των πιθανών τιμών που παίρνει η γνωστή γωνία, το κριτήριο σύγκλισης για τον υπολογισμό των δύο αγνώστων, όπως επίσης και οι αρχικές τιμές των δύο αγνώστων σε κάθε βήμα.

Οι παράμετροι ελέγχου του συστήματος που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη του φαινομένου του σύνθετου λυγισμού αυτού του φορέα, είναι οι εξής:

α. Ο λόγος των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των επιμέρους θεμελιωδών ιδιομορφών του φορέα, όπως αυτά καθορίζονται από τη δυσκαμψία των ελατηρίων:

$$dP = \frac{P_{cr,y}}{P_{cr,x}} = \frac{k_y \cdot L}{k_x \cdot L} = \frac{k_y}{k_x}$$

β. Ο λόγος των αρχικών ατελειών που εφαρμόζονται σε κάθε διεύθυνση και οι οποίες αφορούν ξεχωριστά το κάθε ελατήριο:

$$d\epsilon = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$$

γ. Η τιμή της αρχικής ατέλειας σε κάποια διεύθυνση, που επιλέχθηκε να είναι η ατέλεια που επηρεάζει το μετακινησιακό ελατήριο με τη μεγαλύτερη σταθερά και η οποία συμβολίζεται με  $\epsilon_x$ .

Το πλήθος και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν, φαίνονται στον πίνακα 2.1:

dP	0.25, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00
dε	0.25, 0.50, 1.0, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0, 25.0, 30.0, 35.0, 40.0, 45.0, 50.0
$\epsilon_x$	0.001, 0.005, 0.01

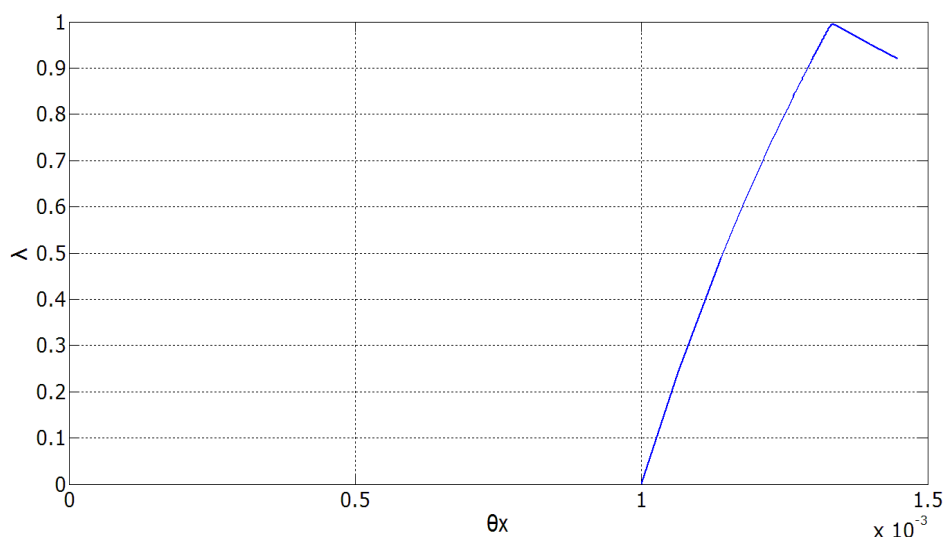
Πίνακας 2.1: Τιμές παραμέτρων ελέγχου

Τα διαγράμματα παράγονται δίνοντας κάθε φορά συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά του μετακνησιακού ελατηρίου  $k_x$  και στην αρχική ατέλεια  $\varepsilon_x$ , ενώ διαφοροποιούνται οι τιμές της σταθεράς του μετακνησιακού ελατηρίου  $k_y$  και της αρχικής ατέλειας  $\varepsilon_y$ , έτσι ώστε να προκύπτουν οι επιθυμητές τιμές των όρων  $dP$  και  $d\varepsilon$ .

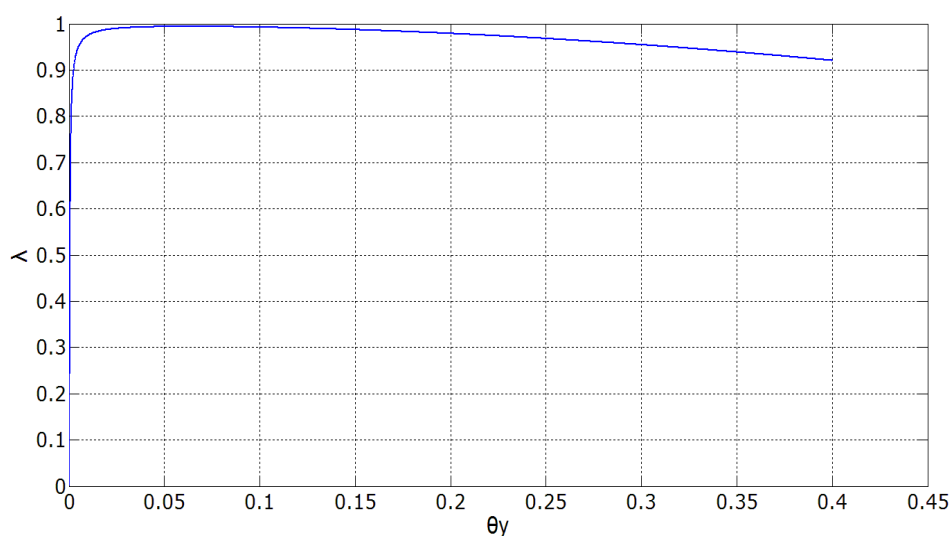
Σε πρώτη φάση, παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια αποτελέσματα για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\varepsilon$  και  $\varepsilon_x$ . Αυτές είναι οι εξής:

$$dP=0.25 \quad d\varepsilon=0.25 \quad \varepsilon_x=0.001$$

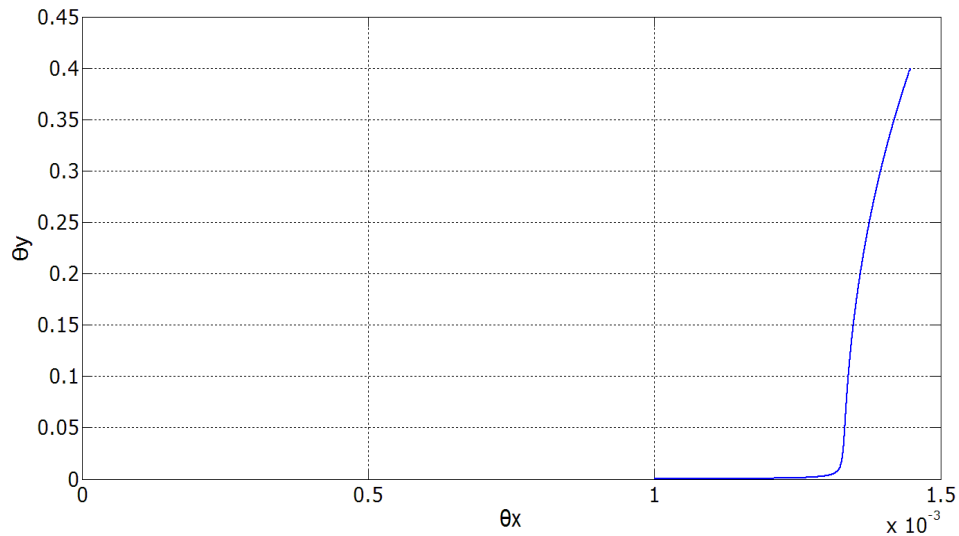
Οι αντίστοιχοι δρόμοι ισορροπίας σε κάθε διεύθυνση όπως και το διάγραμμα των γωνιών  $\theta_x - \theta_y$  φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 2.3: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$



Σχήμα 2.4: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$



Σχήμα 2.5: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Όπως είναι αναμενόμενο, οι δρόμοι ισορροπίας είναι και οι δύο ασταθείς αφού και οι ανεξάρτητες ιδιομορφές έχουν όμοια συμπεριφορά.

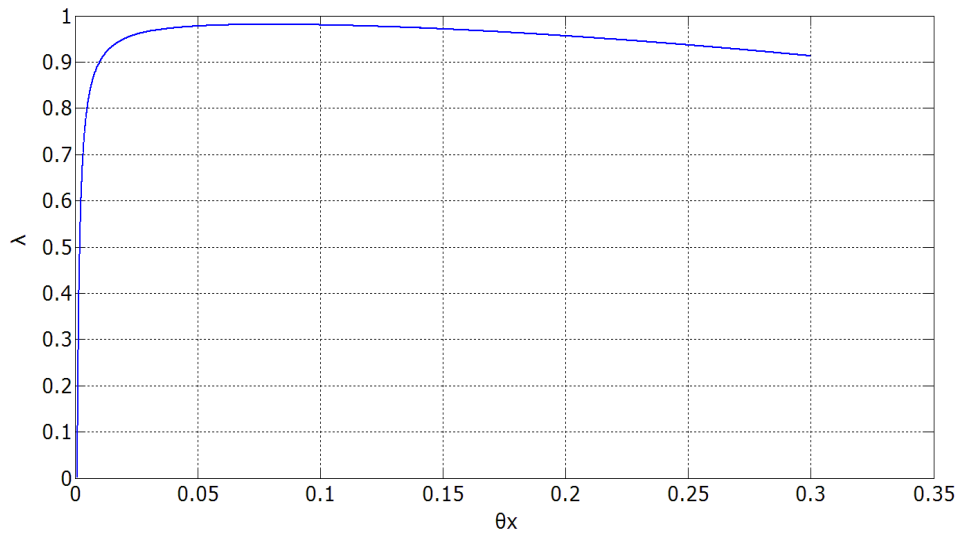
Μικρότερο των φορτίων λυγισμού είναι το  $P_{cr,y}$  και είναι αυτό το οποίο προκαλεί τελικά την αστοχία του φορέα, παρόλο που η αρχική ατέλεια στην ασθενή διεύθυνση είναι εμφανώς μικρότερη της άλλης. Η επιβολή μεγάλης ατέλειας στην ισχυρή διεύθυνση δεν επηρέασε τον τρόπο που λύγισε τελικά το σύστημα, και κυριάρχησε ο λυγισμός κατά την ασθενή διεύθυνση.

Στο σχήμα 2.5 φαίνεται αρχικά η μεγάλη στροφή κατά την ισχυρή διεύθυνση  $x$  λόγω της μεγάλης αρχικής ατέλειας, αλλά στη συνέχεια παρατηρείται η κυριαρχία του λυγισμού κατά την ασθενή διεύθυνση  $y$ .

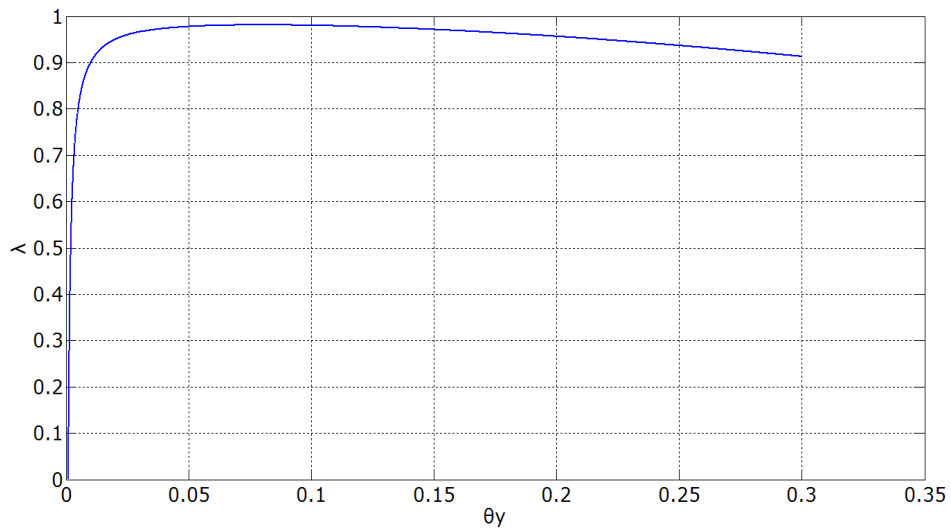


Στη συνέχεια φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τιμές:

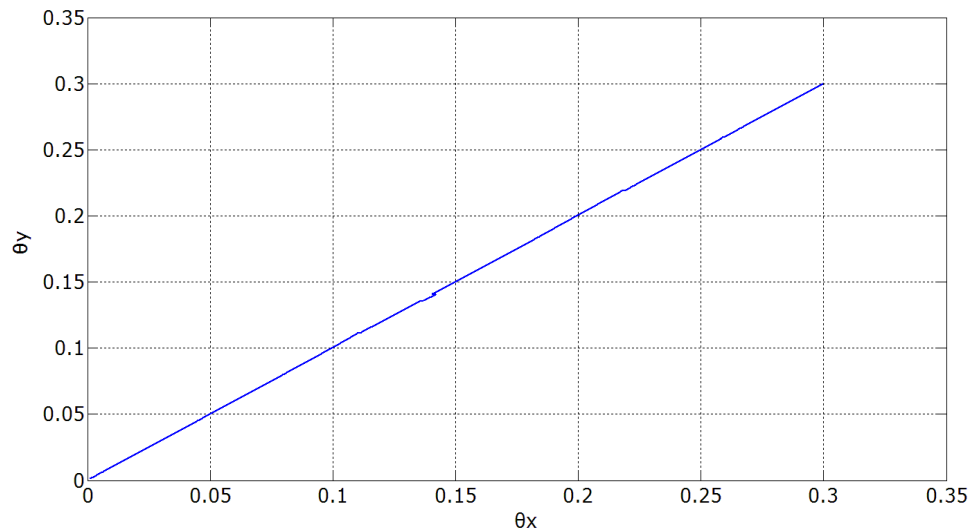
$$dP=1.00 \quad d\varepsilon=1.00 \quad \varepsilon_x=0.001$$



Σχήμα 2.6: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$



Σχήμα 2.7: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$

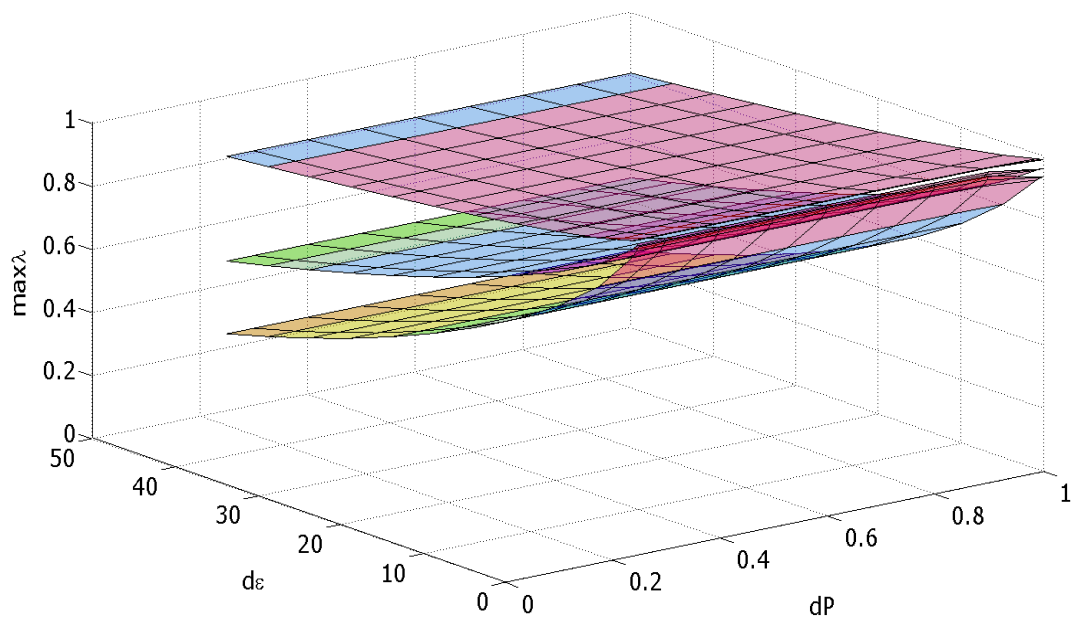


Σχήμα 2.8: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Όπως είναι αναμενόμενο, η συμπεριφορά του φορέα είναι απολύτως συμμετρική, αφού ισχύει  $P_{cr,y} = P_{cr,x}$  και  $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ .

Κατόπιν, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από παραμετρική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας, για τις τιμές των παραμέτρων ελέγχου του πίνακα 2.1.

Στο σχήμα 2.9 φαίνεται η τρισδιάστατη απεικόνιση της μέγιστης τιμής του αδιαστατοποιημένου φορτίου  $\lambda$  καθώς μεταβάλλονται τα  $dP$ ,  $d\varepsilon$  και  $\varepsilon_x$ .

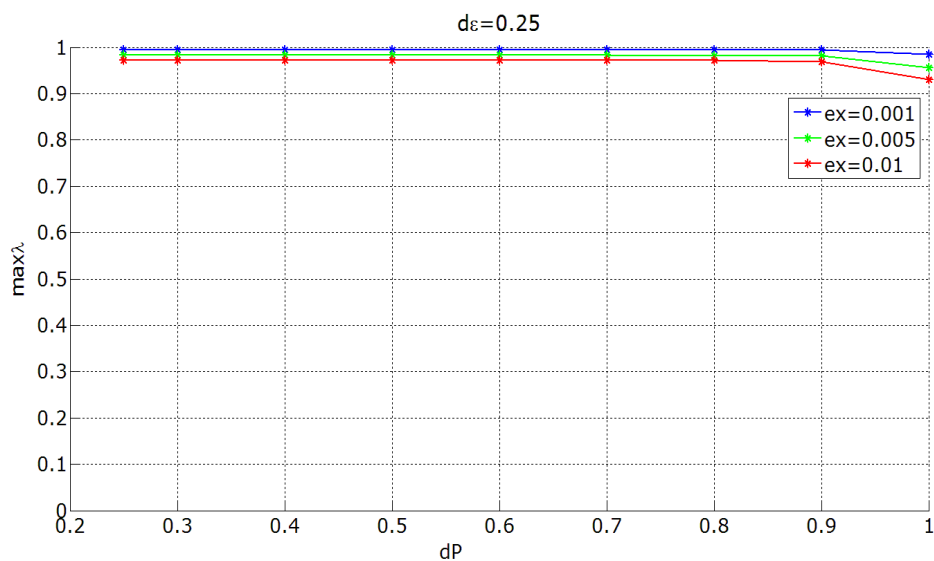


Σχήμα 2.9: Τρισδιάστατη απεικόνιση του οριακού φορτίου για διάφορους συνδυασμούς των  $dP$ ,  $d\varepsilon$ ,  $\varepsilon_x$

Η ανώτερη καμπύλη αφορά στην αρχική ατέλεια  $\varepsilon_x=0.001$ , και ομοίως οι άλλες δύο αφορούν στις ατέλειες  $\varepsilon_x=0.005$  και  $\varepsilon_x=0.01$  αντίστοιχα.

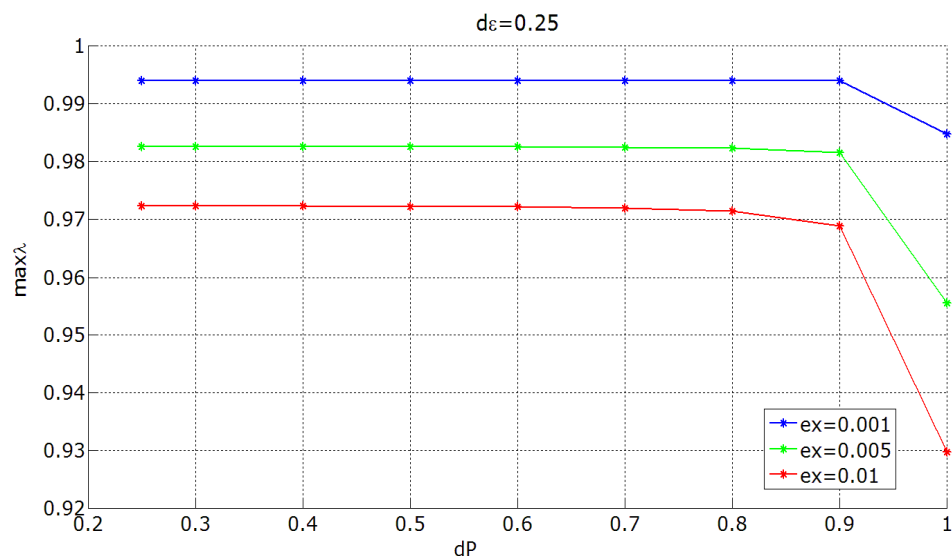
Παρακάτω παρουσιάζονται και κάποιες κατακόρυφες τομές του σχήματος 2.9 για καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

Στο σχήμα 2.10 φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου  $\lambda$  συναρτήσει του  $dP$  για δεδομένο λόγο αρχικών ατελειών  $d\varepsilon=0.25$ .



Σχήμα 2.10: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $dP$

Η επιρροή της αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού στο οριακό φορτίο  $\lambda$  φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.11:

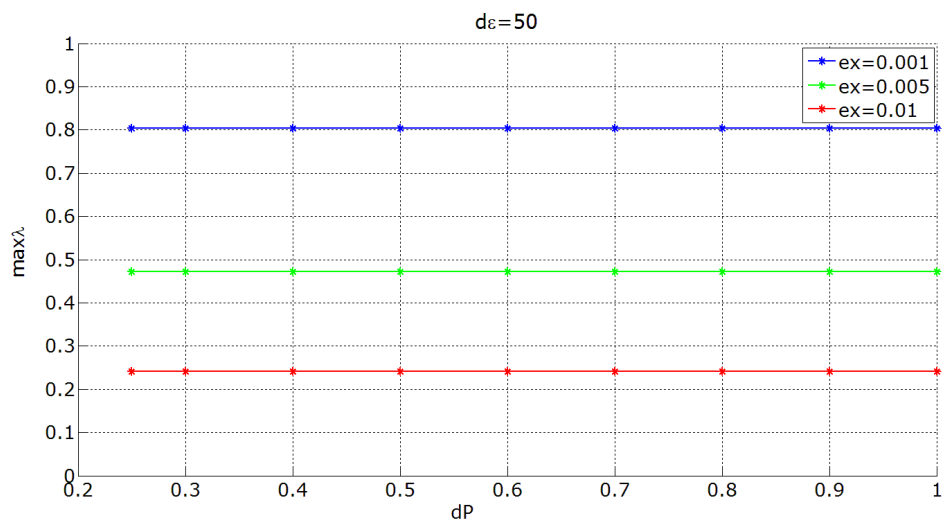


Σχήμα 2.11: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $dP$

Παρατηρούμε τα εξής:

- Όσο πλησιάζουμε στην τιμή  $dP=1$  η τιμή του οριακού φορτίου μειώνεται λόγω αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.
- Για  $\varepsilon_x=0.001$  έχουμε μια μείωση του οριακού φορτίου της τάξης του 1% λόγω αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.
- Για  $\varepsilon_x=0.005$  έχουμε μια μείωση του οριακού φορτίου της τάξης του 2.5% λόγω αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.
- Για  $\varepsilon_x=0.01$  έχουμε μια μείωση του οριακού φορτίου της τάξης του 4.5% λόγω αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.
- Αύξηση της αρχικής ατέλειας κατά μια τάξη μεγέθους συνεπάγεται μείωση του οριακού φορτίου κατά 2% όταν δεν εμφανίζεται αλληλεπίδραση των κρίσιμων φορτίων.
- Αύξηση της αρχικής ατέλειας κατά μια τάξη μεγέθους συνεπάγεται μείωση του οριακού φορτίου κατά 5.5% όταν εμφανίζεται αλληλεπίδραση των κρίσιμων φορτίων.
- Όσο πλησιάζουμε στην τιμή  $dP=1$ , υπάρχει μεγαλύτερη ευαισθησία στις ατέλειες.
- Όσο αυξάνεται η τιμή της αρχικής ατέλειας, αρχίζει νωρίτερα η αλληλεπίδραση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού.

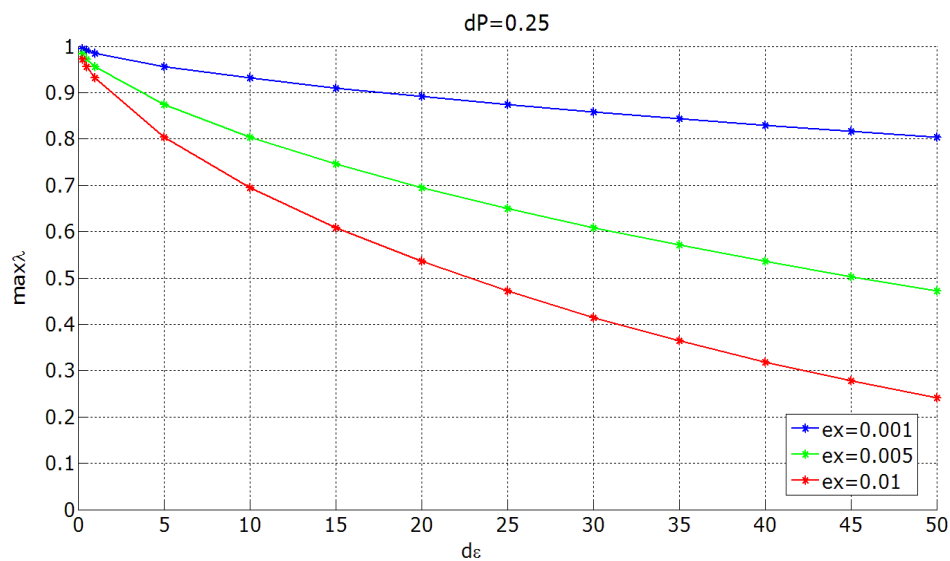
Στο σχήμα 2.12 φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου  $\lambda$  συναρτήσει του  $dP$  για δεδομένο λόγο αρχικών ατελειών  $d\epsilon=50$ .



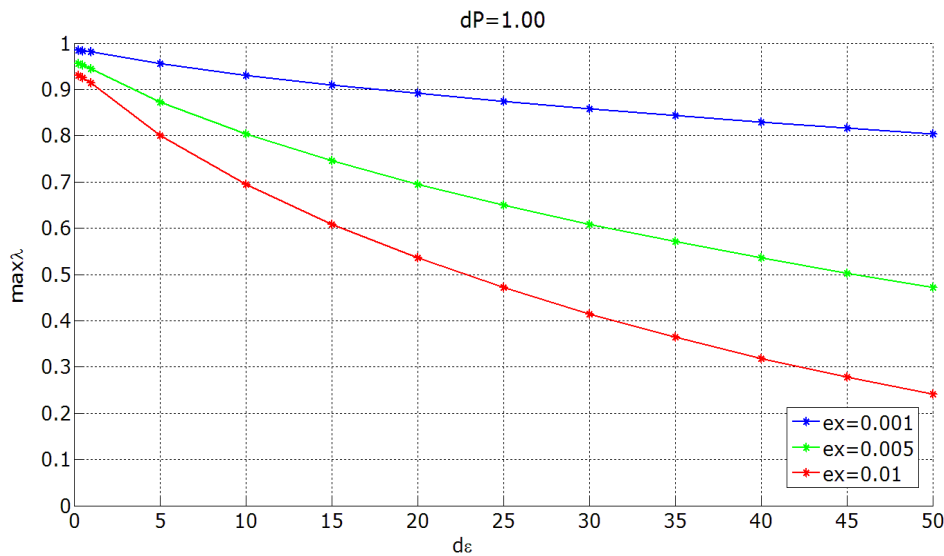
Σχήμα 2.12: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $dP$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλη τιμή του λόγου  $d\epsilon$  (μεγαλύτερη του 5), δεν εμφανίζεται αλληλεπίδραση μεταξύ των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αρχική ατέλεια στη μία διεύθυνση είναι τόσο μεγάλη, που ακόμα και για ίσα κρίσιμα φορτία, η αλληλεπίδραση καθίσταται αδύνατη.

Στα σχήματα 2.13 και 2.14 φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου  $\lambda$  συναρτήσει του  $d\epsilon$  για δεδομένο λόγο κρίσιμων φορτίων  $dP=0.25$  και  $dP=1$ .



Σχήμα 2.13: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $d\epsilon$



Σχήμα 2.14: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $d\varepsilon$

Παρατηρούμε τα εξής:

- Για  $\varepsilon_x=0.001$  παρατηρείται συνολική πτώση του οριακού φορτίου της τάξης του 20% λόγω αύξησης του λόγου  $d\varepsilon$ .
- Για  $\varepsilon_x=0.005$  παρατηρείται συνολική πτώση του οριακού φορτίου της τάξης του 50% λόγω αύξησης του λόγου  $d\varepsilon$ .
- Για  $\varepsilon_x=0.01$  παρατηρείται συνολική πτώση του οριακού φορτίου της τάξης του 75% λόγω αύξησης του λόγου  $d\varepsilon$ .
- Τα σχήματα 2.13 και 2.14 έχουν όμοια μορφή, με τη μόνη διαφορά να παρατηρείται όταν το  $d\varepsilon$  είναι μικρό, όπου και αλληλεπιδρούν τα δύο κρίσιμα φορτία και έτσι οι τιμές του  $\max\lambda$  είναι λίγο μικρότερες για  $dP=1$ .

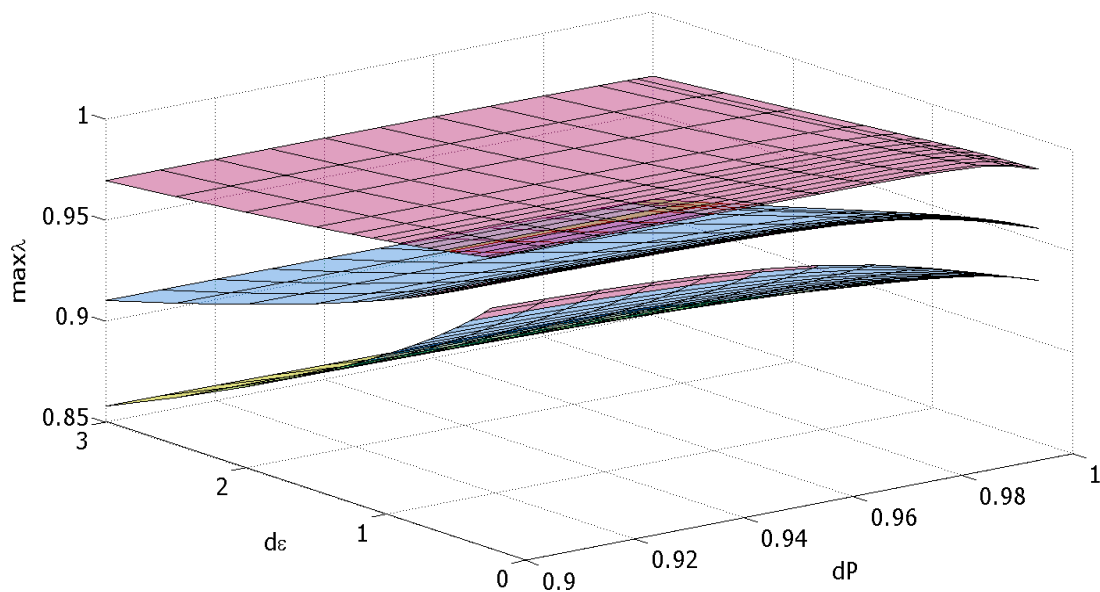
Στη συνέχεια, για να κατανοήσουμε καλύτερα την επιρροή της αλληλεπίδρασης των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών, κάνουμε μια νέα σειρά παραμετρικών αναλύσεων στην περιοχή κοντά στο  $dP=1$  και για  $d\varepsilon \leq 3$  όπου και το φαινόμενο γίνεται εμφανές.

Το πλήθος και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν, φαίνονται στον πίνακα 2.2:

dP	0.90, 0.91, 0.92, 0.93, 0.94, 0.95, 0.96, 0.97, 0.98, 0.99, 0.995, 0.997, 1.00
dε	0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
ε <sub>x</sub>	0.001, 0.005, 0.01

Πίνακας 2.2: Τιμές παραμέτρων ελέγχου

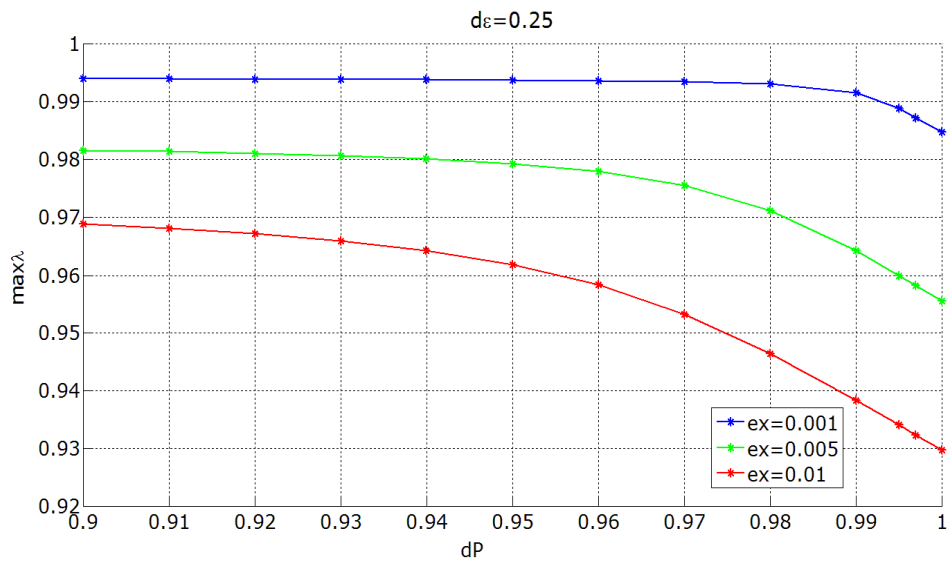
Στο σχήμα 2.15 φαίνεται η τρισδιάστατη απεικόνιση της μέγιστης τιμής του αδιαστατοποιημένου φορτίου λ καθώς μεταβάλλονται τα dP, dε και ε<sub>x</sub>.



Σχήμα 2.15: Τρισδιάστατη απεικόνιση του οριακού φορτίου για διάφορους συνδυασμούς των dP, dε, ε<sub>x</sub> κοντά στην περιοχή dP=1

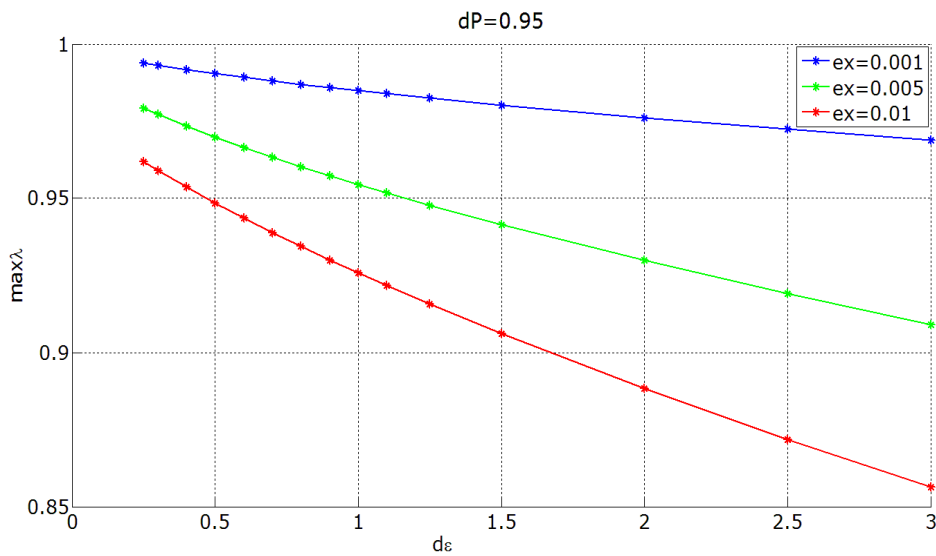
Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες κατακόρυφες τομές του σχήματος 2.15 για καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.

Στο σχήμα 2.16 φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου λ συναρτήσει του dP για δεδομένο λόγο αρχικών ατελειών dε=0.25.



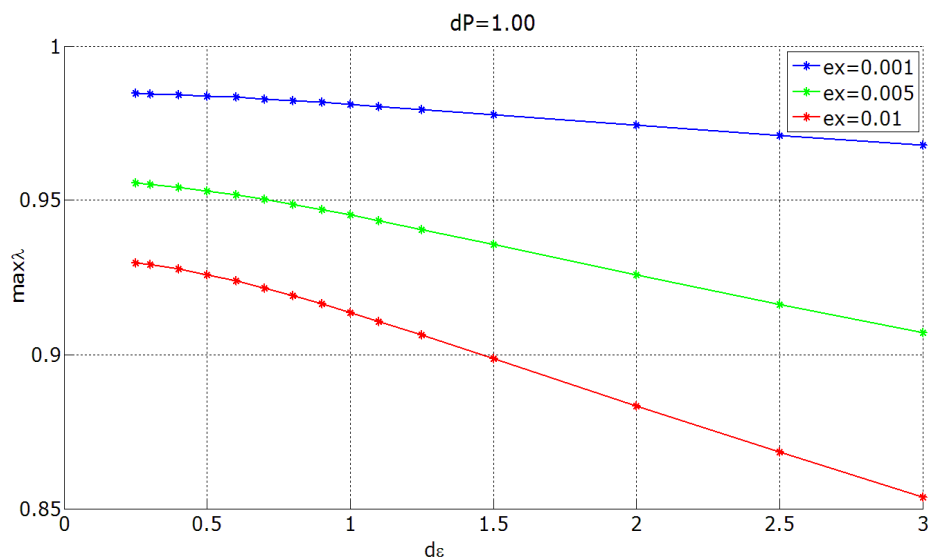
Σχήμα 2.16: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του dP στην περιοχή dP=1

Στα σχήματα 2.17 και 2.18 φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου  $\lambda$  συναρτήσει του  $d_{\varepsilon}$  για δεδομένο λόγο κρίσιμων φορτίων  $dP=0.95$  και  $dP=1$ .



Σχήμα 2.17: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $d_{\varepsilon}$  για  $dP=0.95$





Σχήμα 2.18: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $d\varepsilon$  για  $dP=1.00$

### 2.2.1.5 Συμπεράσματα

Μέσα από την παραμετρική επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας του διβάθμιου συστήματος με τα δύο μετακινησιακά ελατήρια στην κορυφή, καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Στην περίπτωση όπου οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές έχουν ασταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας, το κύριο ποιοτικό συμπέρασμα είναι ότι και ο μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας του συστήματος είναι σε κάθε περίπτωση ασταθής.
- Σε τέτοια συστήματα, των οποίων ο μεταλυγισμικός δρόμος είναι ασταθής, οι ατέλειες παίζουν καθοριστικό ρόλο. Για το παράδειγμά μας και το εύρος τιμών των ατελειών που χρησιμοποιήθηκαν, παρατηρήθηκε πτώση της φέρουσας ικανότητας σε σχέση με αυτή του τέλειου συστήματος μέχρι και 75% (για μεγάλες τιμές ατέλειας).
- Καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων πλησιάζει τη μονάδα, εμφανίζεται το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο ιδιομορφών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του οριακού φορτίου του συστήματος. Στο παράδειγμά μας, αυτή η μείωση δεν ξεπερνά σε καμία περίπτωση το 5%.

- Το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων γίνεται εντονότερο και ξεκινάει νωρίτερα (για μικρότερο λόγο  $dP$ ) καθώς αυξάνεται η αρχική ατέλεια.
- Η αλληλεπίδραση των κρίσιμων φορτίων προκαλεί στο σύστημα μεγαλύτερη ευαισθησία στις ατέλειες.
- Όταν η αρχική ατέλεια στη μία διεύθυνση είναι έντονα μεγαλύτερη της άλλης ( $d\epsilon \geq 5$ ) τότε ακόμη και για  $dP=1$  δεν εμφανίζεται αλληλεπίδραση των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών.

### 2.2.1.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA

#### Προσεγγιστικές σχέσεις

Οι προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται, προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προέκυψαν και οι ακριβείς, με τη διαφορά ότι γίνονται κάποιες παραδοχές κατά τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος. Ο λόγος που έγιναν αυτές οι απλουστευτικές παραδοχές είναι η εύκολη επεξεργασία των μαθηματικών σχέσεων που προκύπτουν.

Από τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος παρατηρούμε ότι για σχετικά μικρές γωνίες, ισχύει η παρακάτω σχέση μεταξύ των γωνιών:

$$\cos^2(90 - \theta_x) + \cos^2(90 - \theta_y) + \cos^2\theta \approx 1$$

από την οποία προκύπτει η σχέση:

$$\cos\theta \approx \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}$$

Επομένως, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \cdot k_x \cdot L^2 \cdot (\sin\theta_x - \sin\epsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_y \cdot L^2 \cdot (\sin\theta_y - \sin\epsilon_y)^2 - \\ & - P \cdot L \cdot \left( \sqrt{1 - \sin^2\epsilon_x - \sin^2\epsilon_y} - \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y} \right) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την έκφραση της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  και μορφώνουμε το παρακάτω σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = k_x \cdot L^2 \cdot (\sin \theta_x - \sin \varepsilon_x) \cdot \cos \theta_x - P \cdot L \cdot \frac{\sin \theta_x \cdot \cos \theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = k_y \cdot L^2 \cdot (\sin \theta_y - \sin \varepsilon_y) \cdot \cos \theta_y - P \cdot L \cdot \frac{\sin \theta_y \cdot \cos \theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}} = 0$$

Αδιαστατοποιώντας με το μικρότερο κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = k_y \cdot L$  και θέτοντας  $P/P_{cr,y} = P/k_y L = \lambda$  προκύπτει το τελικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας:

$$\frac{k_x}{k_y} \cdot (\sin \theta_x - \sin \varepsilon_x) - \lambda \cdot \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}} = 0$$

$$(\sin \theta_y - \sin \varepsilon_y) - \lambda \cdot \frac{\sin \theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}} = 0$$

Κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  και  $\lambda$  που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις, αποτελεί μια θέση ισορροπίας και ανήκει στο δρόμο ισορροπίας του συστήματος. Η επίλυσή τους ακολουθεί την ίδια λογική της αντίστοιχης επίλυσης των ακριβών αναλυτικών σχέσεων, με τη βοήθεια προγράμματος γραμμένου στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB.

Αυτό το οποίο αναμένουμε από τις προσεγγιστικές σχέσεις, είναι να συμπίπτουν με τις ακριβείς μέχρι τουλάχιστον κάποια γωνία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για να προκύψουν, έγινε κάποια γεωμετρική παραδοχή η οποία ισχύει για μικρές γωνίες.

#### Αριθμητικές αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων (ADINA)

Πέρα από την αριθμητική επίλυση των αναλυτικών σχέσεων, κρίθηκε απαραίτητη η επαλήθευσή τους με αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε είναι το ADINA. Στο πρόγραμμα εισήχθησαν όλες οι παραδοχές που έγιναν και για τις αναλυτικές σχέσεις (άκαμπτο μέλος, συντηρητική φόρτιση, οριζόντια αντίδραση μετακινησιακών ελατηρίων). Οι αρχικές ατέλειες επιβλήθηκαν

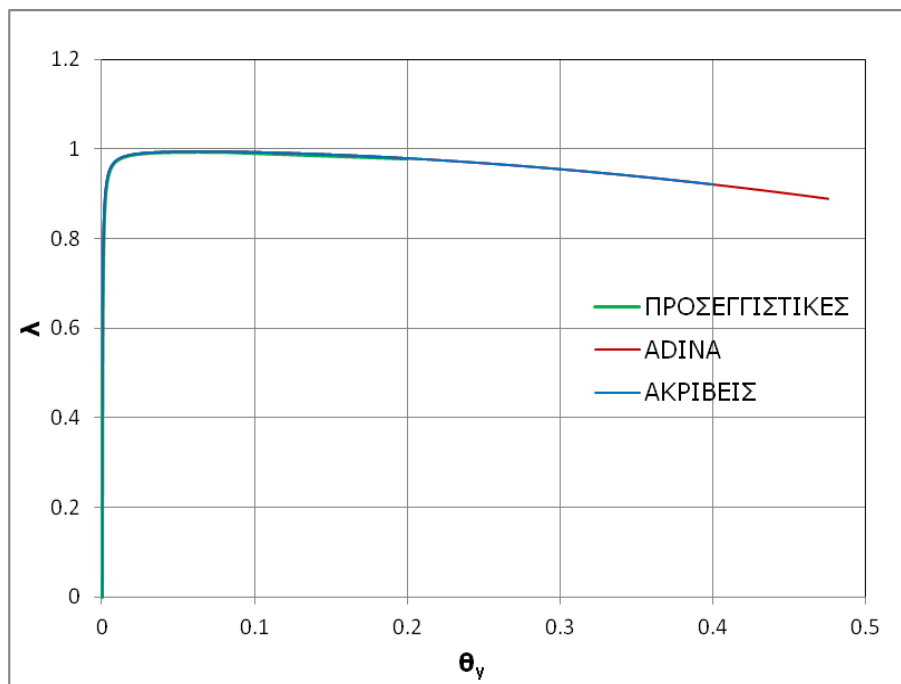
με τη βοήθεια των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών λυγισμού, μετά από μια γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού.

### Σύγκριση

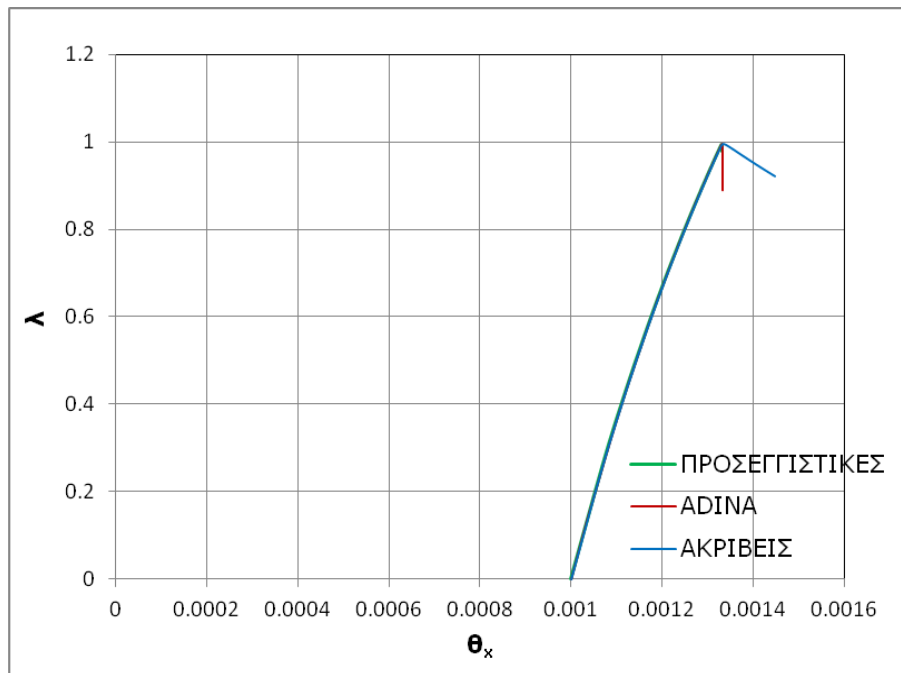
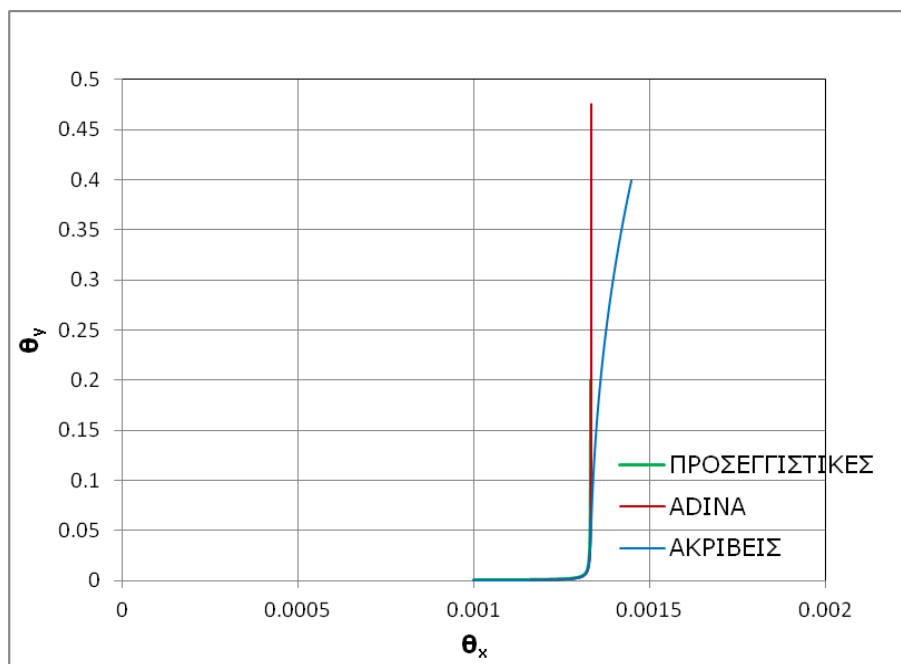
Η σύγκριση των τριών λύσεων του προβλήματος με τα δύο μετακινησιακά ελατήρια στην κορυφή, έγινε για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\varepsilon$  και  $\varepsilon_x$ . Αυτές είναι οι εξής:

$$dP=0.25 \quad d\varepsilon=0.25 \quad \varepsilon_x=0.001$$

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας κατά τις δύο διευθύνσεις και το διάγραμμα των στροφών κατά  $x$  και  $y$ .



Σχήμα 2.19: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$

Σχήμα 2.20: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ 

Σχήμα 2.21: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Το οριακό φορτίο στο οποίο φθάνει το σύστημα είναι το ίδιο και στις τρεις περιπτώσεις.
- Κατά την ασθενή διεύθυνση  $y$ , και οι τρεις λύσεις συμπίπτουν απόλυτα.

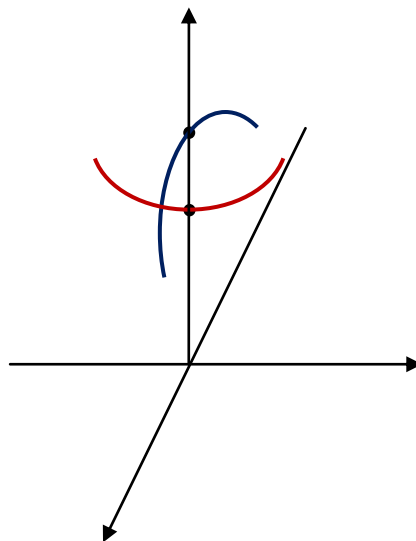
- Κατά την ισχυρή διεύθυνση, μετά το οριακό φορτίο οι ακριβείς σχέσεις διαφοροποιούνται, ενώ οι προσεγγιστικές με τις αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων συνεχίζουν μαζί.

Αυτό που θα περιμέναμε είναι να έχουμε πλήρη ταύτιση μεταξύ των ακριβών σχέσεων και των αναλύσεων με πεπερασμένα στοιχεία. Αντιθέτως, αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι οι αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνουν καλύτερα στις προσεγγιστικές σχέσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού των παραμορφώσεων που χρησιμοποιεί το ADINA.

## 2.2.2 Ασταθές – ευσταθές

### 2.2.2.1 Το προσομοίωμα

Το δεύτερο προσομοίωμα είναι επίσης μια τροποποιημένη έκδοση του αντίστοιχου μοντέλου που πρώτα χρησιμοποιήθηκε από τον Augusti, με τη διαφορά ότι αντί για δύο στροφικά ελατήρια στη βάση, έχουμε το ένα γραμμικό ελαστικό στροφικό ελατήριο στη βάση και ένα γραμμικό ελαστικό μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή. Όπως είναι γνωστό, το μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή παρουσιάζει ασταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας και το στροφικό ελατήριο στη βάση παρουσιάζει ευσταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Συνεπώς, αναμένουμε οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού να έχουν διαφορετική μεταλυγισμική συμπεριφορά (ασταθής-ευσταθής) όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.22.



Σχήμα 2.22: Ανεξάρτητοι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας

Ο φορέας που εξετάζεται είναι μια απαραμόρφωτη ράβδος μήκους  $L$ , η οποία στη βάση της είναι αρθρωτά εδραζόμενη. Στην κορυφή της υπάρχει ένα γραμμικό ελαστικό μετακινησιακό ελατήριο (κατά τη διεύθυνση  $y$ ) το οποίο λειτουργεί παρέχοντας αποκλειστικά οριζόντια αντίδραση. Στη βάση της υπάρχει ένα γραμμικό ελαστικό στροφικό ελατήριο (κατά τη διεύθυνση  $x$ ). Το στροφικό λειτουργεί μόνο στο επίπεδο  $x-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $c$  ενώ το άλλο μόνο στο επίπεδο  $y-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $k$ . Στην κορυφή του φορέα ασκείται επίσης ένα φορτίο  $P$  το οποίο παραμένει διαρκώς κατακόρυφο. Η συνολική παραμόρφωση του φορέα μπορεί να εκφραστεί ως προς τους δύο στροφικούς βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Η στροφή  $\theta_x$  αντιστοιχεί στο ελατήριο που βρίσκεται στο επίπεδο  $x-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $x-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ , ενώ η στροφή  $\theta_y$  αντιστοιχεί σε αυτό του επιπέδου  $y-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $y-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ . Στην περίπτωση που γίνεται μελέτη των ατελών συστημάτων, γίνεται εισαγωγή και προσομοίωση των ατελειών αυτών μέσω αρχικών γωνιών  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  που εκφράζουν στα αντίστοιχα επίπεδα κάθε φορά, την αρχική απόκλιση της ράβδου από την κατακόρυφο. Θεωρούμε  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον κατακόρυφο άξονα  $z$  και την αντίστοιχη αρχική ατέλεια  $\varepsilon$ . Στην αρχική ατελή κατάσταση, θεωρούμε ότι τα ελατήρια δεν έχουν ενεργοποιηθεί και συνεπώς, στην τυχαία γωνία  $\theta$  τα ελατήρια εντείνονται με γωνία  $(\theta-\varepsilon)$ .

Το σύστημα στην τέλεια κατάσταση έχει δύο ιδιομορφές λυγισμού με ασταθή δρόμο ισορροπίας η μία, και ευσταθή δρόμο ισορροπίας η άλλη. Τα δύο κρίσιμα φορτία λυγισμού είναι  $P_{cr,x}=c/L$  και  $P_{cr,y}=k \cdot L$  αντίστοιχα.

#### 2.2.2.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος

Η παράγραφος αυτή παραλείπεται διότι είναι ίδια με αυτή της προηγούμενης παραγράφου 2.2.1.2.

### 2.2.2.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού

Για την ανάλυση και καλύτερη περιγραφή του φαινομένου της σύνθετης συμπεριφοράς του παραπάνω προσομοιώματος, γίνεται χρήση της ενεργειακής μεθόδου.

Έστω ότι η ράβδος βρίσκεται σε μια τυχαία θέση, στην οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία  $\theta$ . Έστω επίσης, ότι στην αρχική θέση η ράβδος έχει αρχική ατέλεια σε μορφή γωνίας  $\varepsilon$ . Για λόγους ευκολίας στην επιβολή των αρχικών ατελειών, θεωρούμε  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  αντίστοιχα τις γωνίες που σχηματίζει κάθε φορά η προβολή της αρχικής θέσης της ράβδου σε κάθε επίπεδο με την κατακόρυφο.

Η συνολική δυναμική ενέργεια της ράβδου στην τυχαία αυτή θέση, με αρχικές ατέλειες  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  γράφεται ως εξής:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (L \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta_y - L \cdot \cos \varepsilon \cdot \tan \varepsilon_y)^2 - P \cdot L \cdot (\cos \varepsilon - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right)^2 -$$

$$- P \cdot L \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} \right)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισορροπίας, δηλαδή μηδενίζοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = 0 \Rightarrow c \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) + k \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[ - \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = 0 \Rightarrow k \cdot L^2 \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{(\tan^2 \theta_x + 1) \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} \right] - P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$



Προκειμένου τα συμπεράσματά μας να είναι απαλλαγμένα φαινομένων κλίμακας, αδιαστατοποιούμε την εφαρμοζόμενη φόρτιση. Για να γίνει αυτό διαιρούμε το φορτίο  $P$  με το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = k \cdot L$ . Θέτοντας επίσης  $\lambda = P/P_{cr,y}$  και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις, καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{c}{k \cdot L} \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - L \cdot \left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot \tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} - \lambda \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

$$\left( \frac{\tan \theta_y}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} - \frac{\tan \varepsilon_y}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} \right) \cdot \frac{(\tan^2 \theta_x + 1) \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} - \lambda \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $P$  που τις ικανοποιεί, αποτελεί και μια θέση ισορροπίας. Συνεπώς, λύνοντάς αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ο δρόμος ισορροπίας του συστήματος.

#### 2.2.2.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων

Για την αριθμητική επεξεργασία των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα το οποίο γράφτηκε στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB. Θεωρώντας γνωστή τη μία από τις δύο γωνίες, το πρόγραμμα υπολογίζει την άλλη γωνία και το αδιαστατοποιημένο φορτίο  $\lambda$  λύνοντας αριθμητικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τελικά. Αυτό που επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, είναι το βήμα στο οποίο χωρίζεται το εύρος των πιθανών τιμών που παίρνει η γνωστή γωνία, το κριτήριο σύγκλισης για τον υπολογισμό των δύο αγνώστων, όπως επίσης και οι αρχικές τιμές των δύο αγνώστων σε κάθε βήμα.

Οι παράμετροι ελέγχου του συστήματος που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη του φαινομένου του σύνθετου λυγισμού αυτού του φορέα, είναι οι εξής:

α. Ο λόγος των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των επιμέρους θεμελιωδών ιδιομορφών του φορέα, όπως αυτά καθορίζονται από τη δυσκαμψία των ελατηρίων:

$$dP = \frac{P_{cr,x}}{P_{cr,y}} = \frac{c/L}{k \cdot L} = \frac{c}{k \cdot L^2}$$

β. Ο λόγος των αρχικών ατελειών που εφαρμόζονται σε κάθε διεύθυνση και οι οποίες αφορούν ξεχωριστά το κάθε ελατήριο:

$$d\epsilon = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}$$

γ. Η τιμή της αρχικής ατέλειας σε κάποια διεύθυνση, που επιλέχθηκε να είναι η ατέλεια που επηρεάζει το μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή και η οποία συμβολίζεται με  $\epsilon_y$ .

Τα διαγράμματα παράγονται δίνοντας κάθε φορά συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά του μετακινησιακού ελατηρίου  $k$  και στην αρχική ατέλεια  $\epsilon_y$ , ενώ διαφοροποιούνται οι τιμές της σταθεράς του στροφικού ελατηρίου  $c$  και της αρχικής ατέλειας  $\epsilon_x$ , έτσι ώστε να προκύπτουν οι επιθυμητές τιμές των όρων  $dP$  και  $d\epsilon$ .

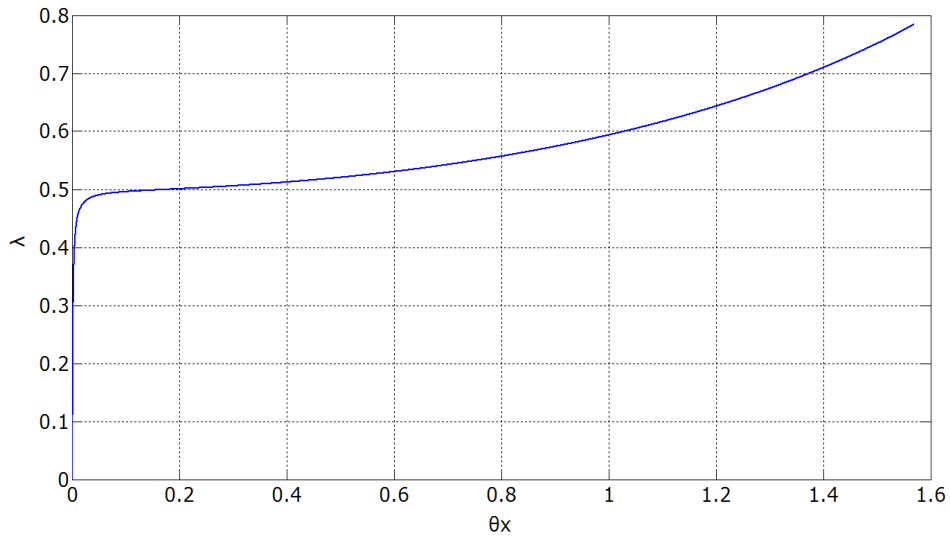
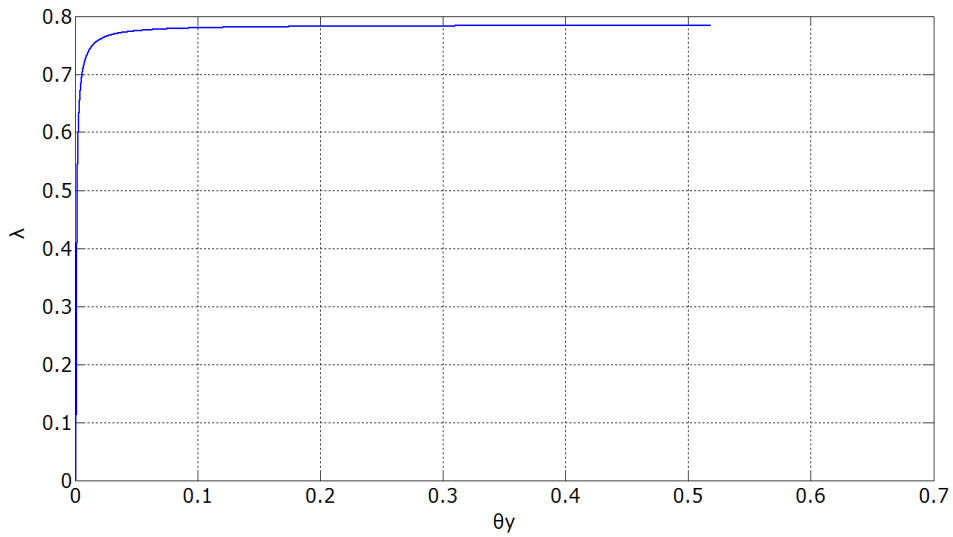
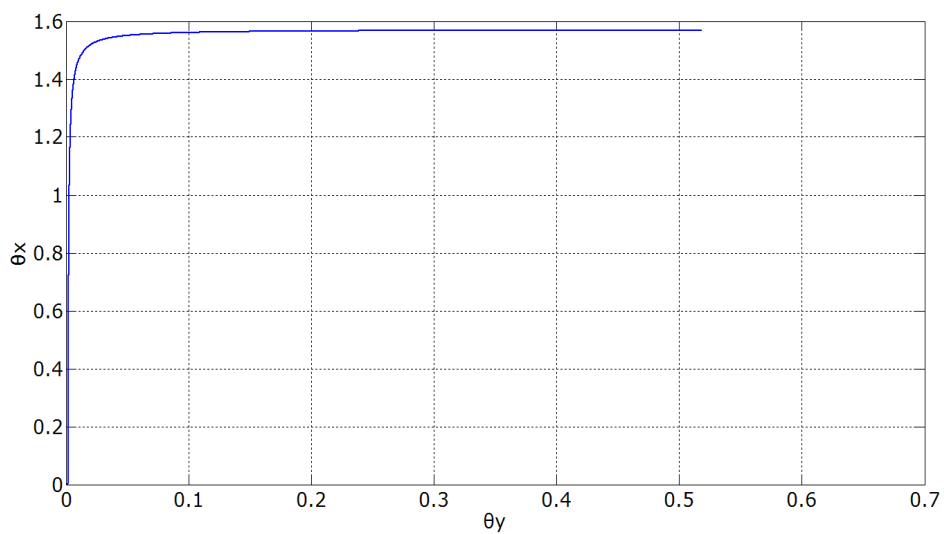
Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια αποτελέσματα για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\epsilon$  και  $\epsilon_y$ .

Αυτό που έχει νόημα να διερευνήσουμε αρχικά, είναι η συμπεριφορά του φορέα ανεξαρτήτως ατέλειας, μεταβάλλοντας μόνο τον όρο  $dP$  λόγω της διαφορετικής φύσης των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών λυγισμού. Για το λόγο αυτό θεωρούμε  $d\epsilon=1$ ,  $\epsilon_y=\epsilon_x=0.001$  και ο λόγος των κρίσιμων φορτίων παίρνει τις τιμές:

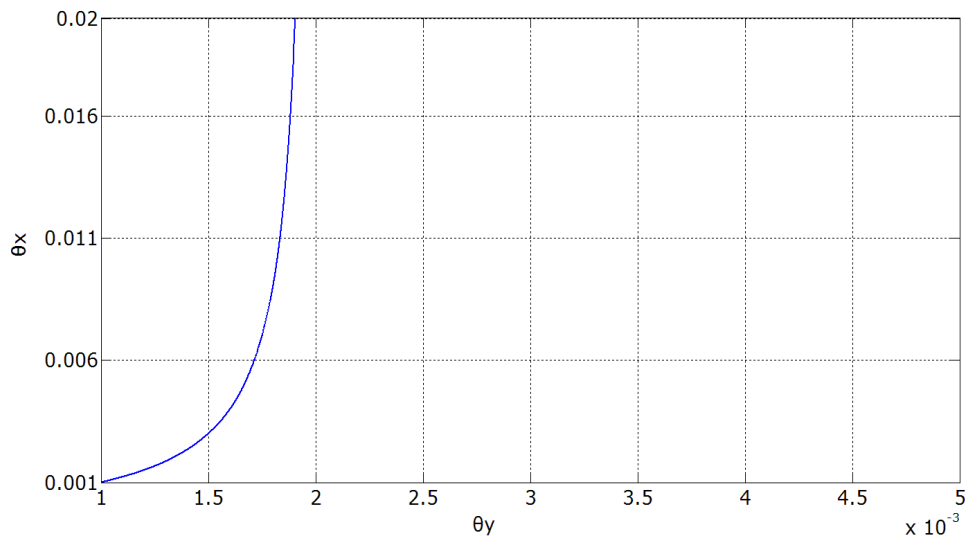
$$dP = [0.5 \quad 0.9 \quad 1.0 \quad 1.5 \quad 2.0]$$

Παρακάτω παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι δρόμοι ισορροπίας σε κάθε διεύθυνση όπως και το διάγραμμα  $\theta_x - \theta_y$  για τις διάφορες τιμές  $dP$ .

$$dP=0.50 \quad d\epsilon=1.00 \quad \epsilon_y=0.001$$

Σχήμα 2.23: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.24: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ Σχήμα 2.25: Στροφή κατά x – Στροφή κατά  $\gamma$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.25 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



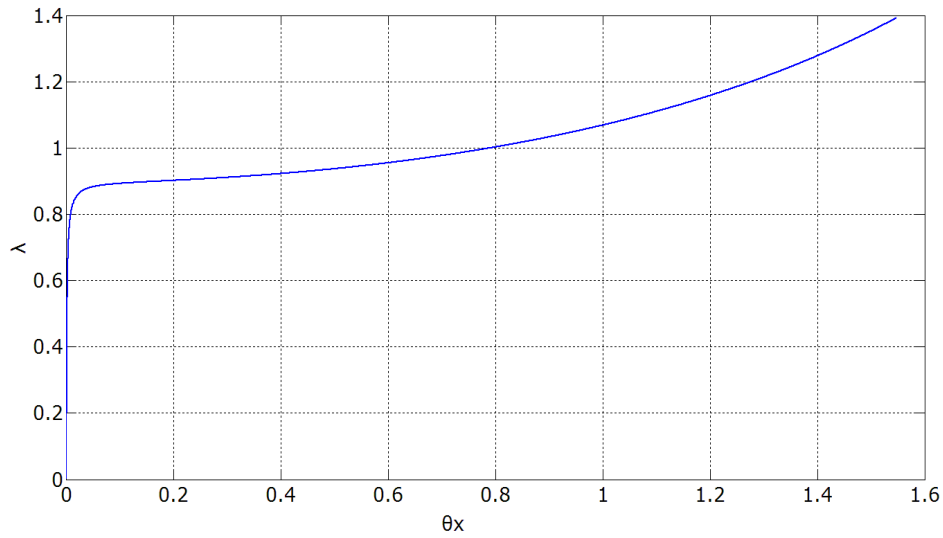
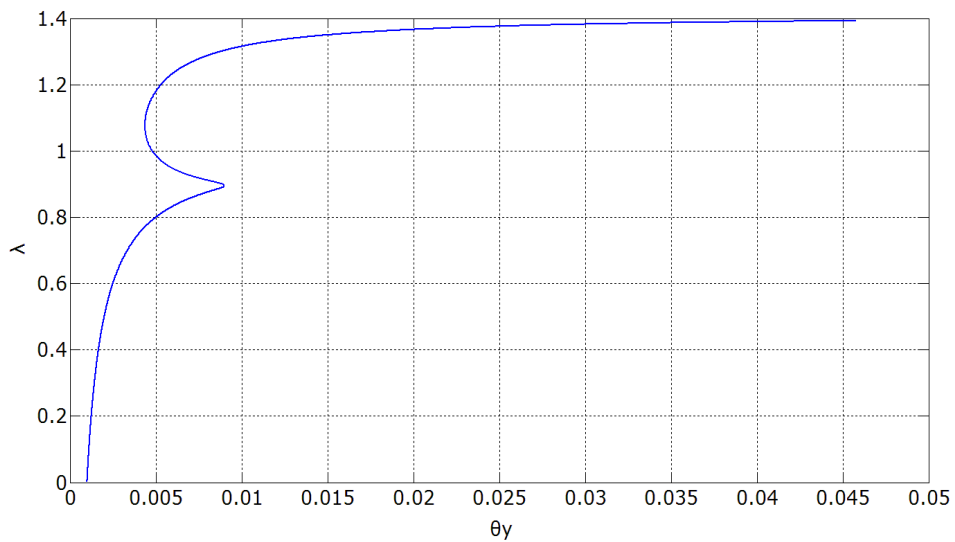
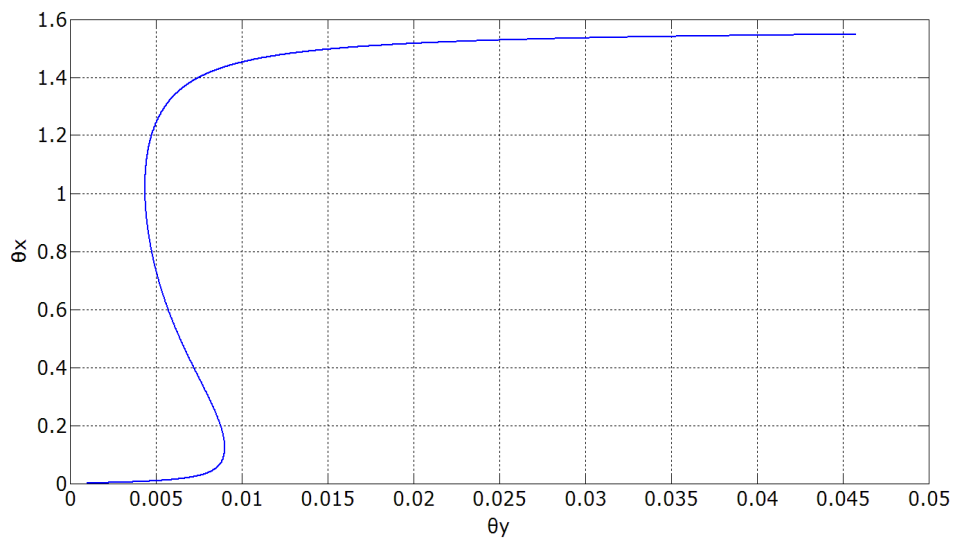
Σχήμα 2.26: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

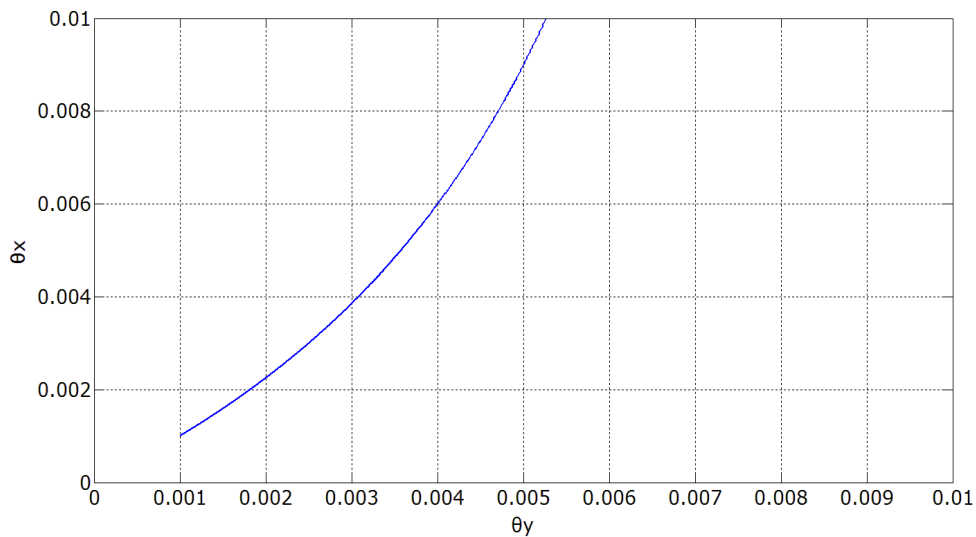
- Όταν κρίσιμος είναι ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, τότε ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.
- Όπως είναι αναμενόμενο, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης y.

Στη συνέχεια φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τιμές:

$$dP=0.90 \quad d\varepsilon=1.00 \quad \varepsilon_y=0.001$$

Σχήμα 2.27: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.28: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$ Σχήμα 2.29: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.29 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



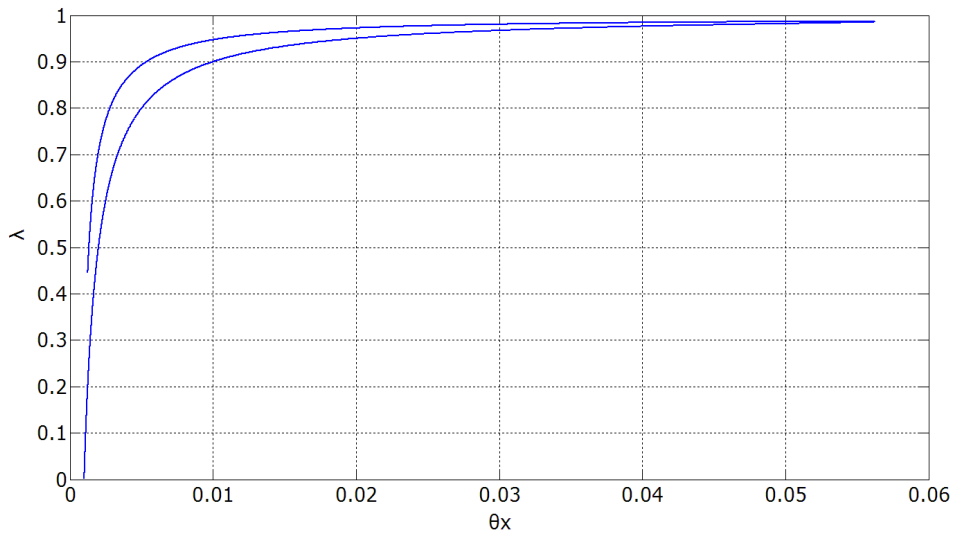
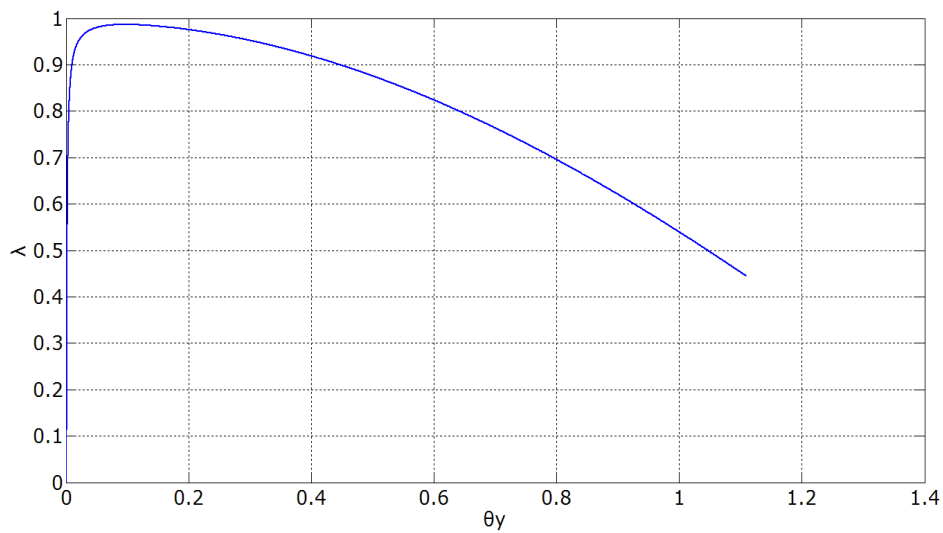
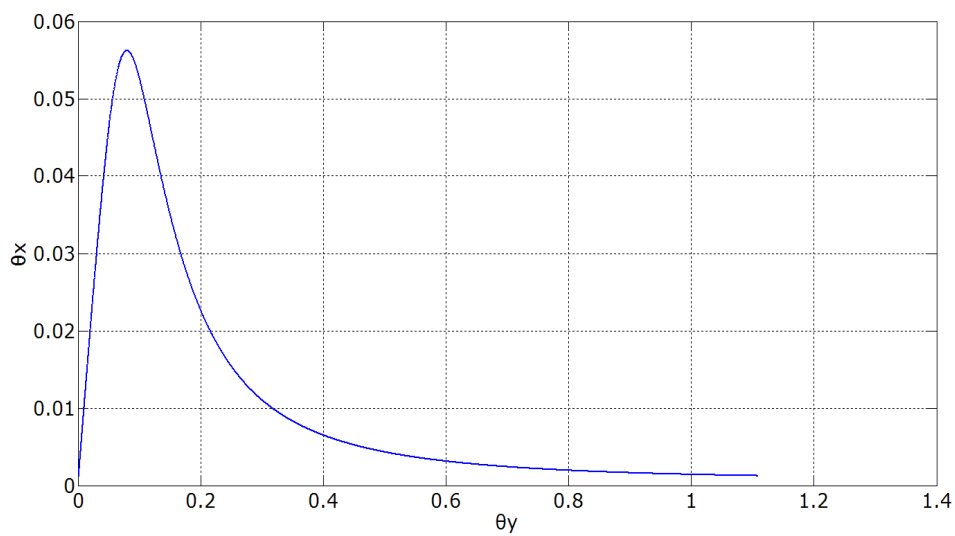
Σχήμα 2.30: Στροφή κατά x – Στροφή κατά γ

Παρατηρούμε τα εξής:

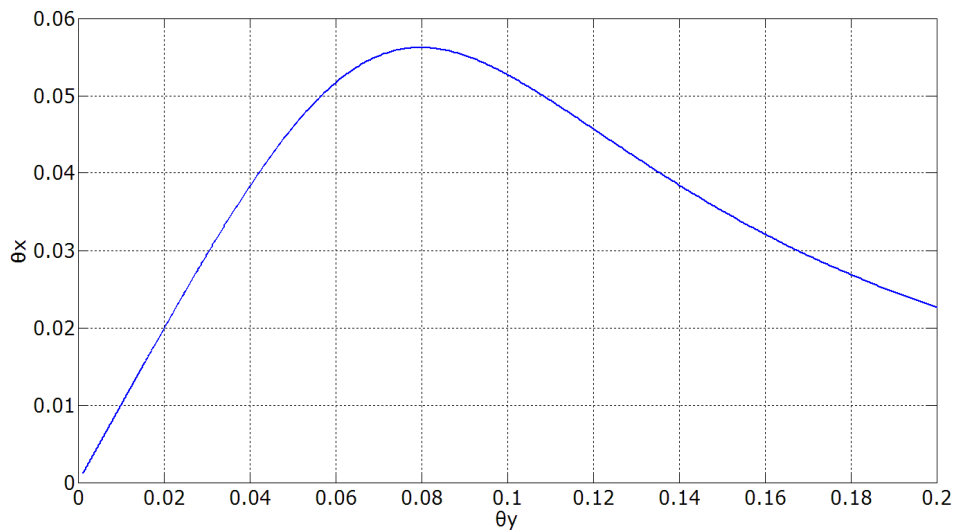
- Ο φορέας εξακολουθεί να παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, παρόλο που ο λόγος των κρίσιμων φορτίων λυγισμού πλησιάζει στη μονάδα ( $dP=0.90$ ).
- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής.

Στη συνέχεια φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τιμές:

$$dP=1.00 \quad d\varepsilon=1.00 \quad \varepsilon_\gamma=0.001$$

Σχήμα 2.31: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.32: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ Σχήμα 2.33: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $\gamma$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.33 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



Σχήμα 2.34: Στροφή κατά  $\chi$  – Στροφή κατά  $\gamma$

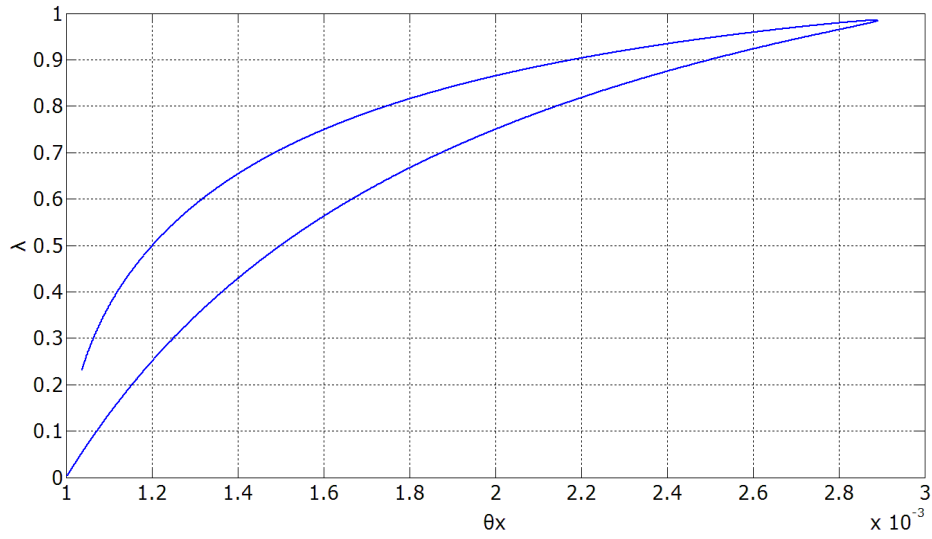
Παρατηρούμε τα εξής:

- Ο φορέας παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας.
- Οι παραμορφώσεις κατά το βαθμό ελευθερίας  $\gamma$  (ασταθής ανεξάρτητη ιδιομορφή λυγισμού) είναι εμφανώς μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του βαθμού ελευθερίας  $\chi$  (ευσταθής ανεξάρτητη ιδιομορφή λυγισμού).
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.34, αρχικά η παραμόρφωση στις δύο διευθύνσεις είναι όμοια, και στη συνέχεια επικρατεί η παραμόρφωση κατά την ασταθή διεύθυνση.

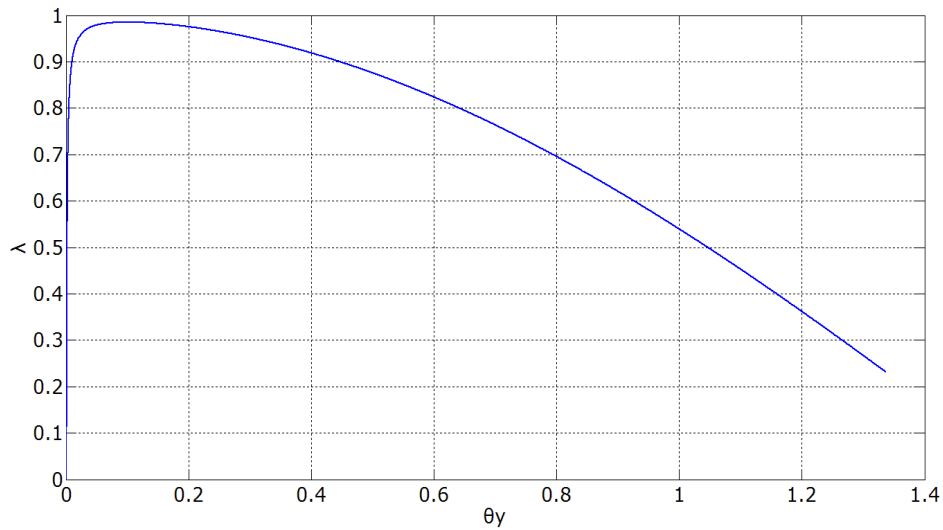
Στη συνέχεια φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τιμές:

$$dP=1.50 \quad d\varepsilon=1.00 \quad \varepsilon_\gamma=0.001$$

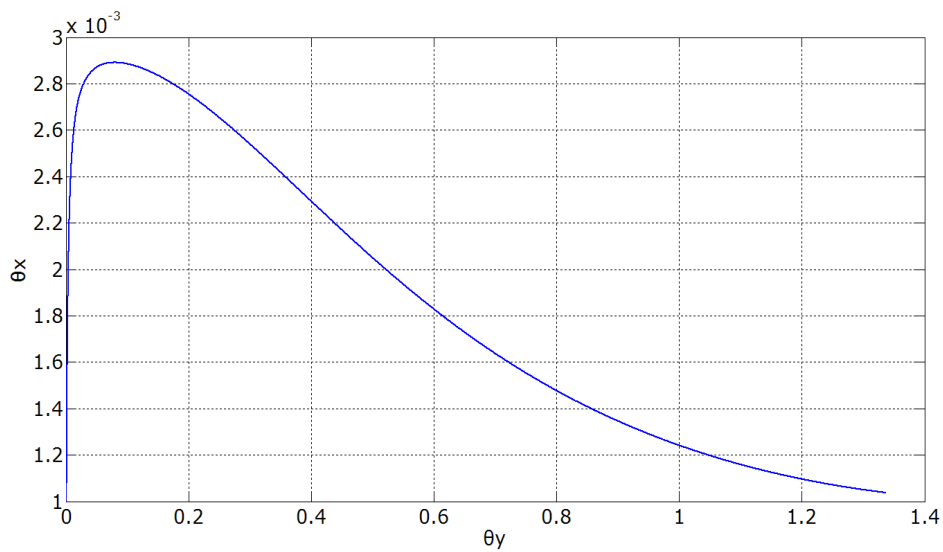




Σχήμα 2.35: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

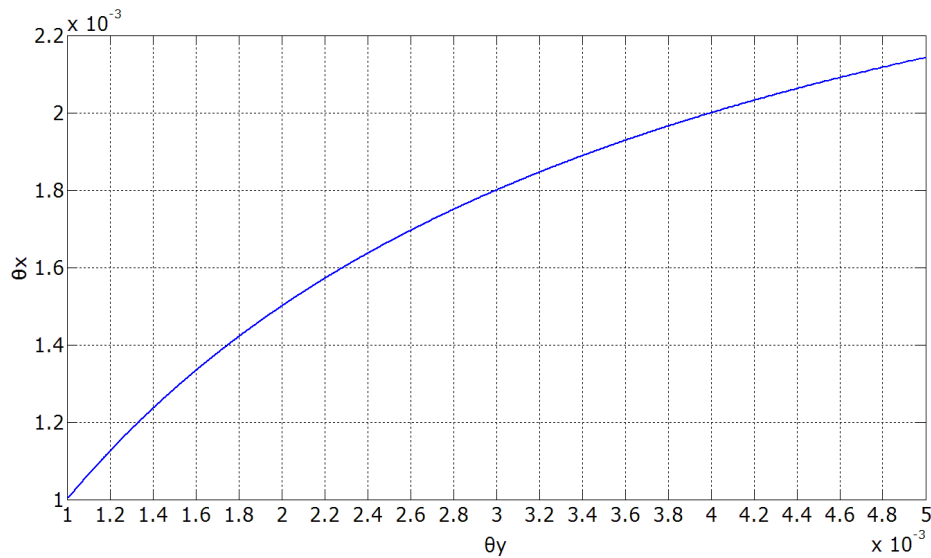


Σχήμα 2.36: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$



Σχήμα 2.37: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.37 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



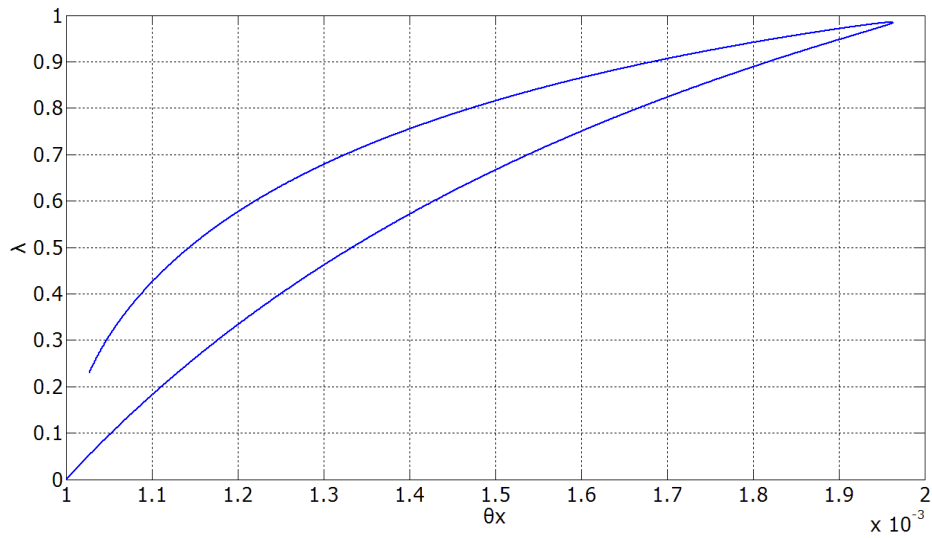
Σχήμα 2.38: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $\gamma$

Παρατηρούμε τα εξής:

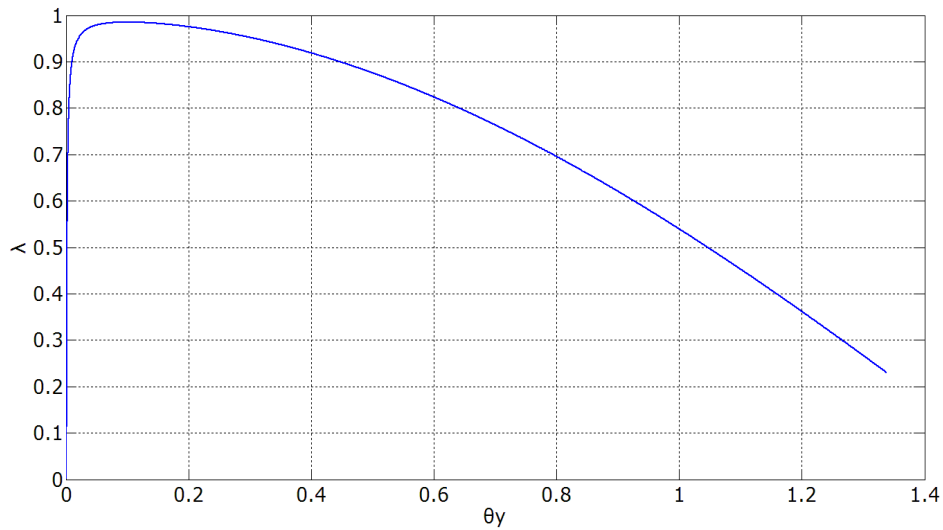
- Ο φορέας παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας.
- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $\gamma$  είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτήν της ισχυρής  $x$ .
- Από το διάγραμμα 2.38 γίνεται φανερό ότι εξαρχής η παραμόρφωση κατά  $\gamma$  είναι εντονότερη, παρόλο που έχουμε ίσες αρχικές ατέλειες.

Στη συνέχεια φαίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τις τιμές:

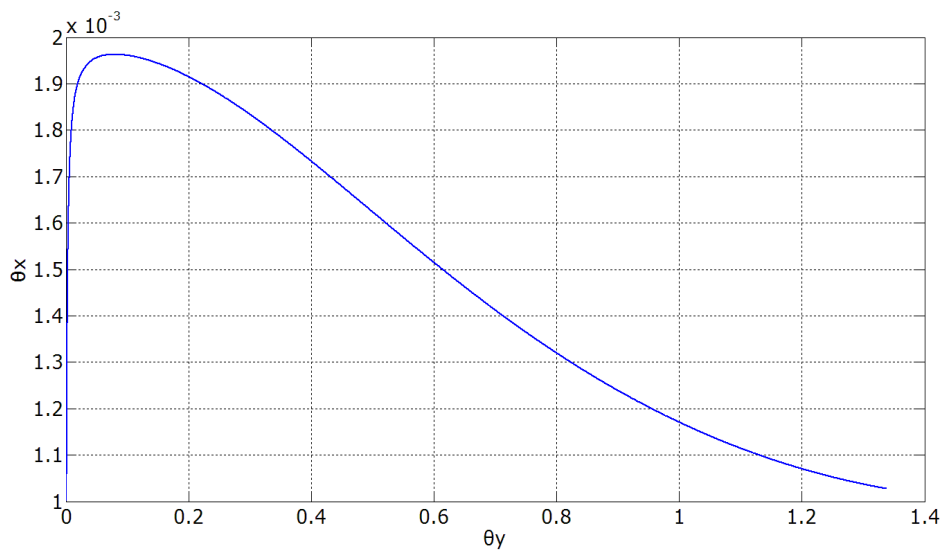
$$dP=2.00 \quad d\varepsilon=1.00 \quad \varepsilon_\gamma=0.001$$



Σχήμα 2.39: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

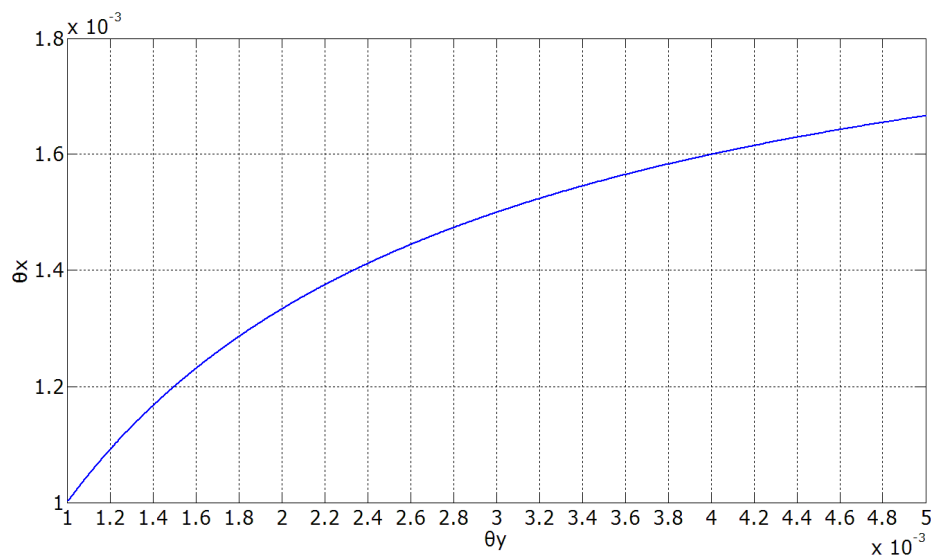


Σχήμα 2.40: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$



Σχήμα 2.41: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.41 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



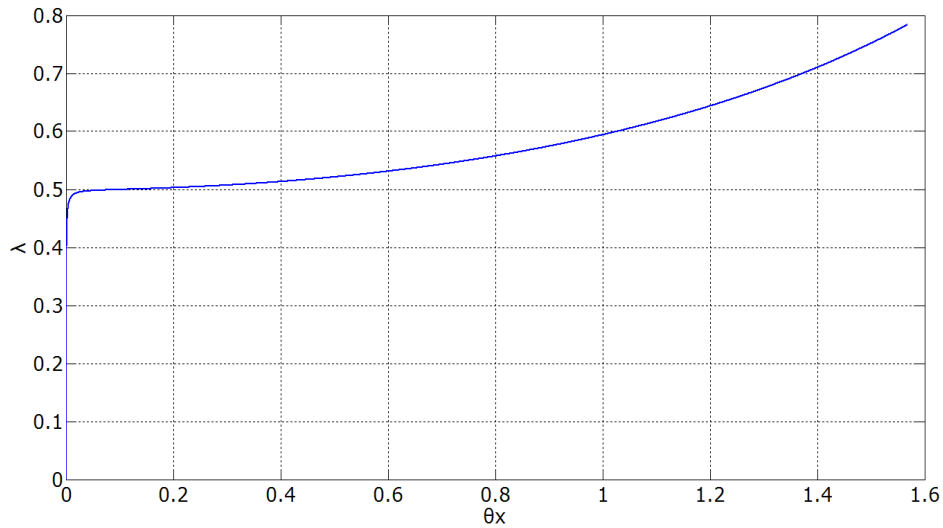
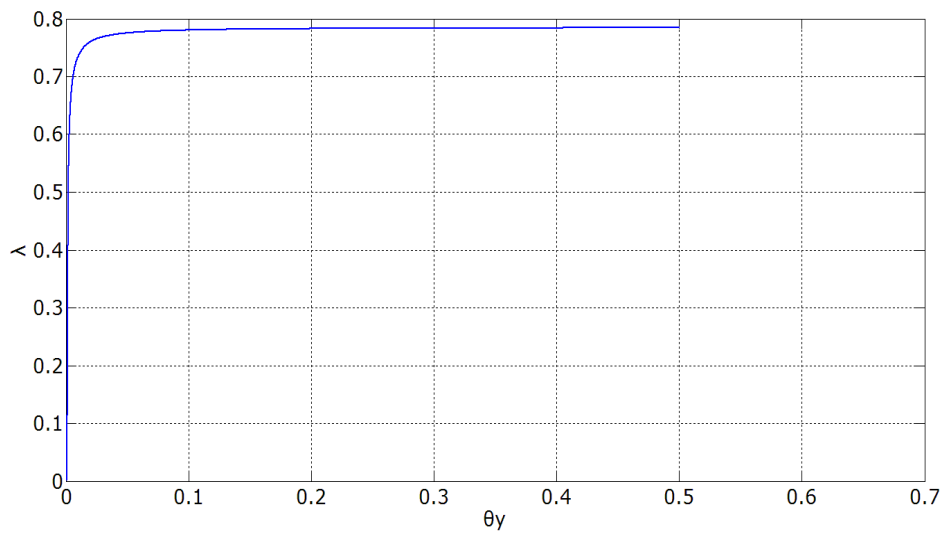
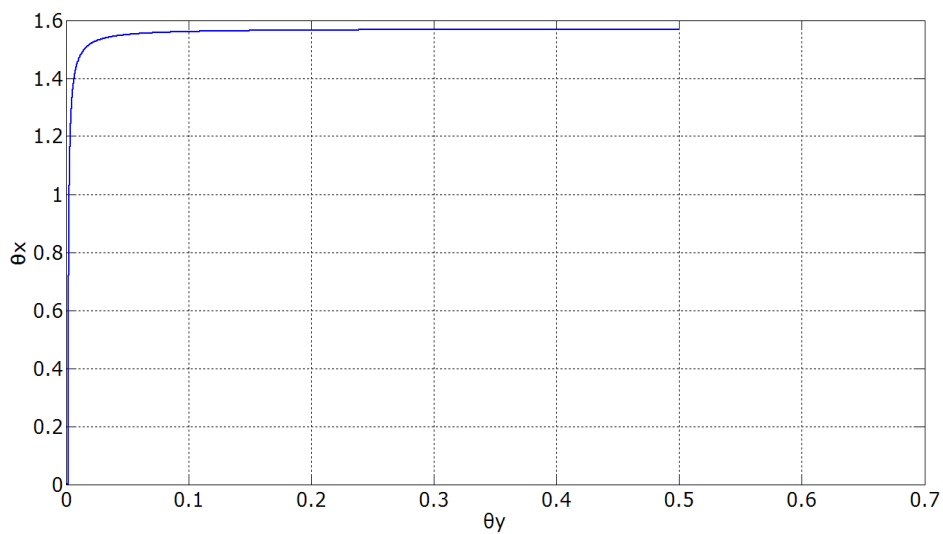
Σχήμα 2.42: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

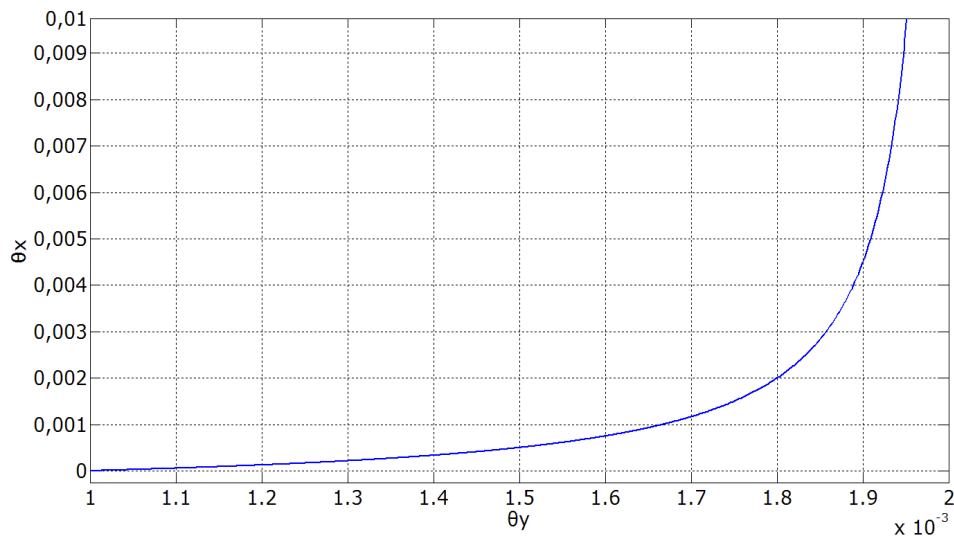
- Ο φορέας παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας.
- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση y είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτήν της ισχυρής x.
- Από το διάγραμμα 2.42 γίνεται φανερό ότι εξ αρχής η παραμόρφωση κατά y είναι εντονότερη, παρόλο που έχουμε ίσες αρχικές ατέλειες.

Στη συνέχεια επιχειρούμε κάθε φορά να δώσουμε μεγάλη ατέλεια κατά την ισχυρή διεύθυνση, για να διαπιστώσουμε κατά πόσον επηρεάζεται το είδος του δρόμου ισορροπίας.

$$dP=0.50 \quad d\varepsilon=0.25 \quad \varepsilon_y=0.001$$

Σχήμα 2.43: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.44: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$ Σχήμα 2.45: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.45 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:

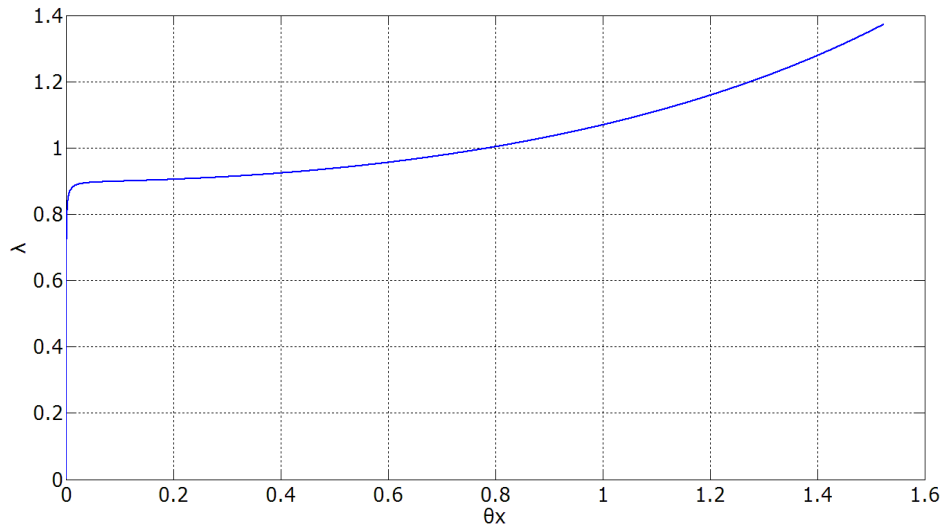


Σχήμα 2.46: Στροφή κατά x – Στροφή κατά γ

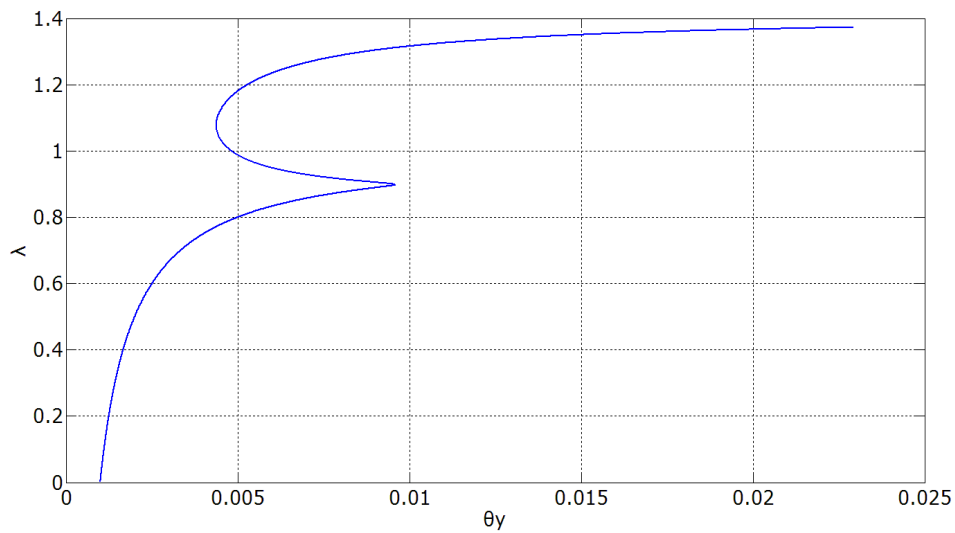
Παρατηρούμε τα εξής:

- Όταν κρίσιμος είναι ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, τότε ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, παρόλο που η αρχική ατέλεια κατά την ισχυρή ασταθή διεύθυνση είναι αρκετά μεγαλύτερη.
- Όπως είναι αναμενόμενο, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης γ.
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.46, αρχικά η παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη κατά την ισχυρή διεύθυνση γ λόγω της μεγάλης αρχικής ατέλειας, αλλά γρήγορα κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x.

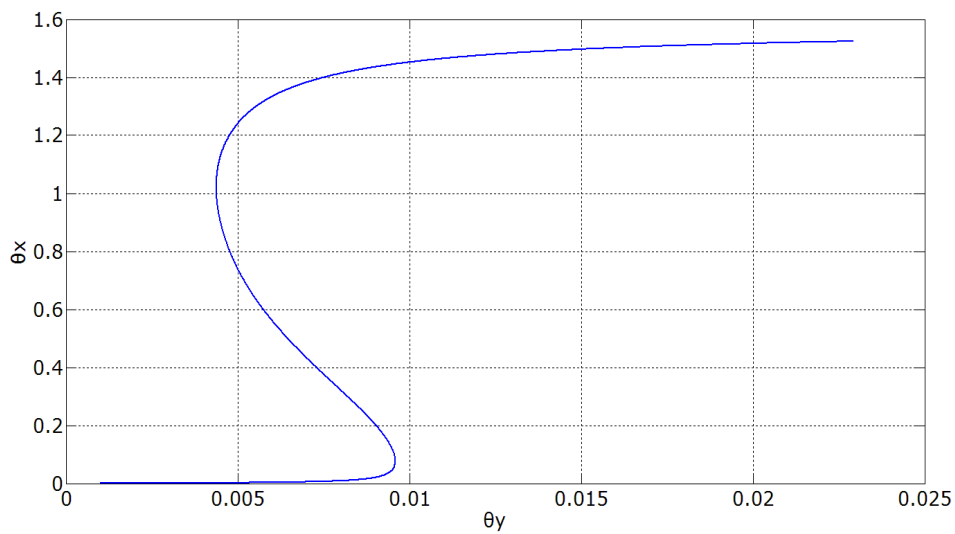
$$dP=0.90 \quad d\epsilon=0.25 \quad \epsilon_\gamma=0.001$$



Σχήμα 2.47: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

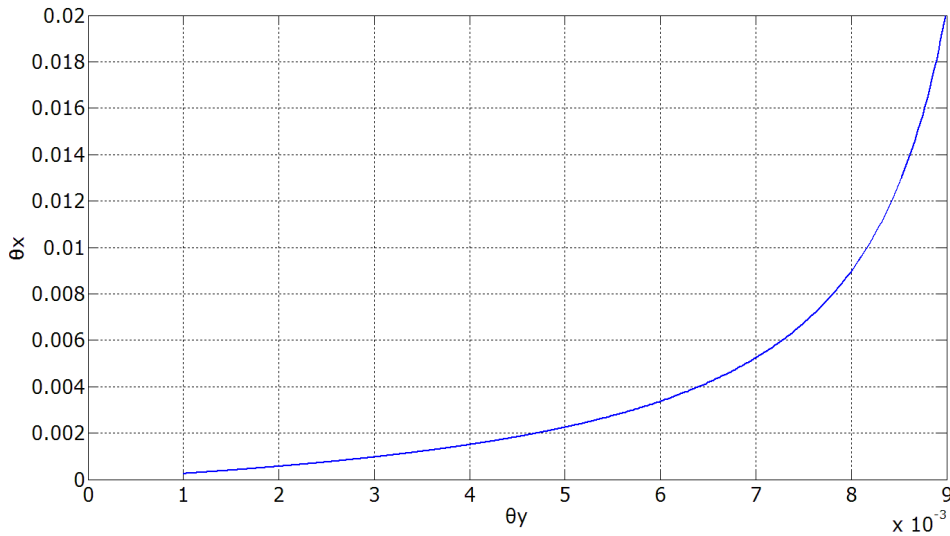


Σχήμα 2.48: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$



Σχήμα 2.49: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.49 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



Σχήμα 2.50: Στροφή κατά x – Στροφή κατά γ

Παρατηρούμε τα εξής:

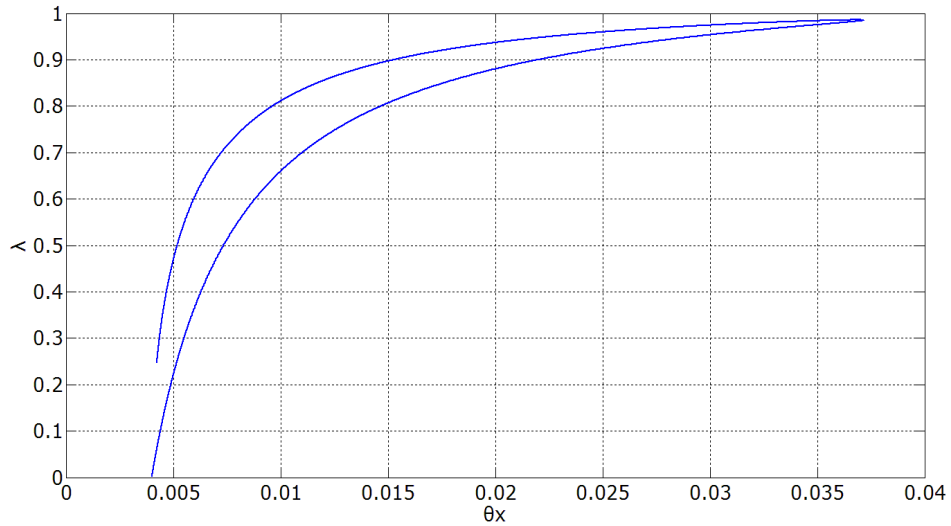
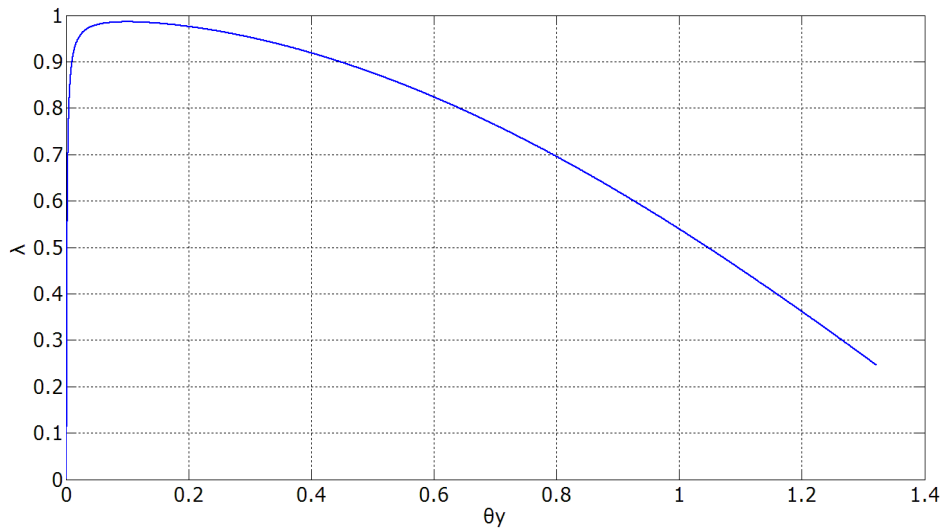
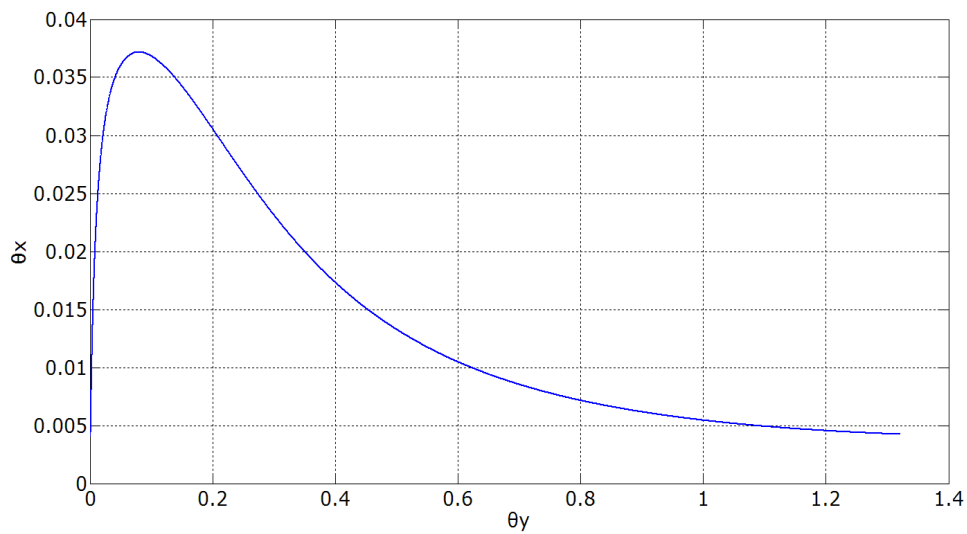
- Όταν κρίσιμος είναι ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, τότε ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας, παρόλο που η αρχική ατέλεια κατά την ισχυρή ασταθή διεύθυνση είναι αρκετά μεγαλύτερη και τα δύο κρίσιμα φορτία είναι πολύ κοντά.
- Όπως είναι αναμενόμενο, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης γ.
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.50, αρχικά η παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη κατά την ισχυρή διεύθυνση γ λόγω της μεγάλης αρχικής ατέλειας, αλλά γρήγορα κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x.

$$dP=1.10$$

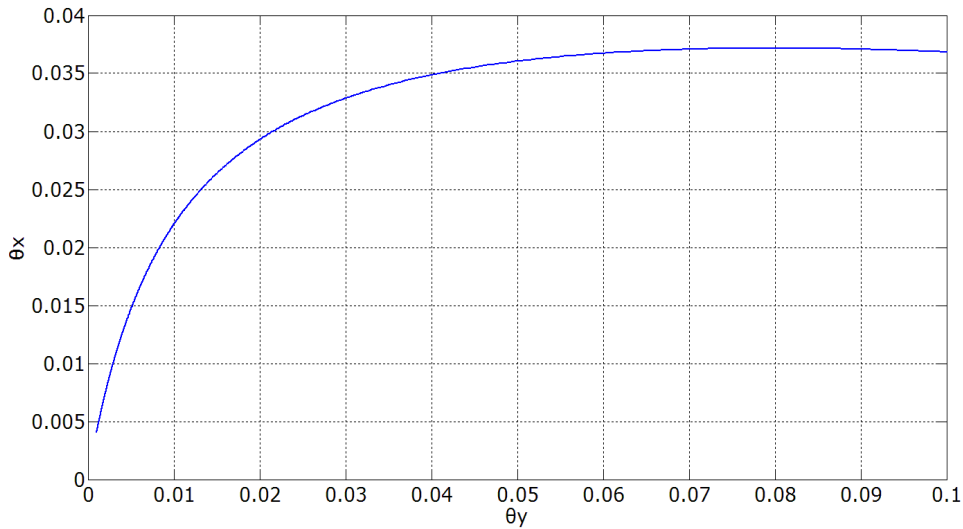
$$dε=4.00$$

$$ε_γ=0.001$$



Σχήμα 2.51: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.52: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$ Σχήμα 2.53: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.53 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



Σχήμα 2.54: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Όταν κρίσιμος είναι ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή έχει ασταθή δρόμο ισορροπίας, τότε ο φορέας παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας, παρόλο που η αρχική ατέλεια κατά την ισχυρή ευσταθή διεύθυνση είναι αρκετά μεγαλύτερη και τα δύο κρίσιμα φορτία είναι πολύ κοντά.
- Όπως είναι αναμενόμενο, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση y είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης x.
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.54, αρχικά η παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη κατά την ισχυρή διεύθυνση x λόγω της μεγάλης αρχικής ατέλειας, αλλά γρήγορα κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση y.

#### 2.2.2.5 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε τα εξής:

- Όταν  $dP < 1$  (κρίσιμος ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή λυγισμού έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας), ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή

δρόμο ισορροπίας, ανεξαρτήτως αρχικών ατελειών και λόγου κρίσιμων φορτίων. Ακόμη και στην περίπτωση που  $dP=0.90$  και η αρχική ατέλεια κατά την ισχυρή (ασταθή) διεύθυνση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την άλλη, εξακολουθεί να εμφανίζεται ευστάθεια.

- Όταν  $dP>1$  (κρίσιμος ο λυγισμός του οποίου η ανεξάρτητη ιδιομορφή λυγισμού έχει ασταθή δρόμο ισορροπίας), ο φορέας παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας, ανεξαρτήτως αρχικών ατελειών και λόγου κρίσιμων φορτίων. Ακόμη και στην περίπτωση που  $dP=1.10$  και η αρχική ατέλεια κατά την ισχυρή (ευσταθή) διεύθυνση είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με την άλλη, εξακολουθεί να εμφανίζεται αστάθεια.
- Όταν  $dP=1$  παρουσιάζεται αστάθεια και κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση  $y$ .
- Σε κάθε περίπτωση, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση κυριαρχεί της άλλης.
- Για  $dP>1$  ισχύει ότι: Καθώς το  $dP$  αυξάνεται η παραμόρφωση κατά την ισχυρή διεύθυνση  $x$  μειώνεται, πράγμα αναμενόμενο αφού αυξάνεται η δυσκαμψία του ελατηρίου κατά  $x$ .

#### 2.2.2.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA

##### Προσεγγιστικές σχέσεις

Οι προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται, προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προέκυψαν και οι ακριβείς, με τη διαφορά ότι γίνονται κάποιες παραδοχές κατά τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος. Ο λόγος που έγιναν αυτές οι απλουστευτικές παραδοχές είναι η εύκολη επεξεργασία των μαθηματικών σχέσεων που προκύπτουν.

Από τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος παρατηρούμε ότι για σχετικά μικρές γωνίες, ισχύει η παρακάτω σχέση μεταξύ των γωνιών:

$$\cos^2(90 - \theta_x) + \cos^2(90 - \theta_y) + \cos^2\theta \approx 1$$

από την οποία προκύπτει η σχέση:

$$\cos\theta \approx \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}$$

Επομένως, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot (\sin\theta_y - \sin\varepsilon_y)^2 - P \cdot L \cdot \left( \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon_x - \sin^2\varepsilon_y} - \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y} \right)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την έκφραση της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  και μορφώνουμε το παρακάτω σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = c \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - P \cdot L \cdot \frac{\sin\theta_x \cdot \cos\theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = k \cdot L^2 \cdot (\sin\theta_y - \sin\varepsilon_y) \cdot \cos\theta_y - P \cdot L \cdot \frac{\sin\theta_y \cdot \cos\theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

Αδιαστατοποιώντας με το κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = k \cdot L$  και θέτοντας  $P/P_{cr,y} = P/kL = \lambda$  προκύπτει το τελικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας:

$$\frac{c}{k \cdot L} \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - \lambda \cdot L \cdot \frac{\sin\theta_x \cdot \cos\theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

$$(\sin\theta_y - \sin\varepsilon_y) - \lambda \frac{\sin\theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

Κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  και  $\lambda$  που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις, αποτελεί μια θέση ισορροπίας και ανήκει στο δρόμο ισορροπίας του συστήματος. Η επίλυση τους ακολουθεί την ίδια λογική της αντίστοιχης επίλυσης των ακριβών αναλυτικών σχέσεων, με τη βοήθεια προγράμματος γραμμένου στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB.

Αυτό το οποίο αναμένουμε από τις προσεγγιστικές σχέσεις, είναι να συμπίπτουν με τις ακριβείς μέχρι τουλάχιστον κάποια γωνία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για να προκύψουν, έγινε κάποια γεωμετρική παραδοχή η οποία ισχύει για μικρές γωνίες.

### Αριθμητικές αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων (ADINA)

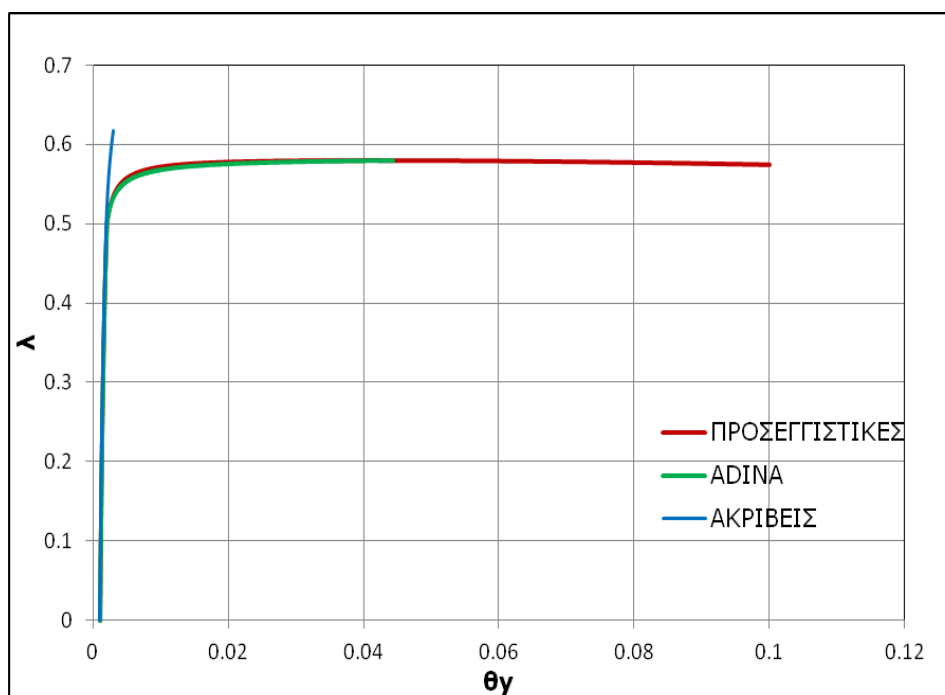
Πέρα από την αριθμητική επίλυση των αναλυτικών σχέσεων, κρίθηκε απαραίτητη η επαλήθευσή τους με αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε είναι το ADINA. Στο πρόγραμμα εισήχθησαν όλες οι παραδοχές που έγιναν και για τις αναλυτικές σχέσεις (άκαμπτο μέλος, συντηρητική φόρτιση, οριζόντια αντίδραση μετακινησιακού ελατηρίου). Οι αρχικές ατέλειες επιβλήθηκαν με τη βοήθεια των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών λυγισμού, μετά από μια γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού.

### Σύγκριση

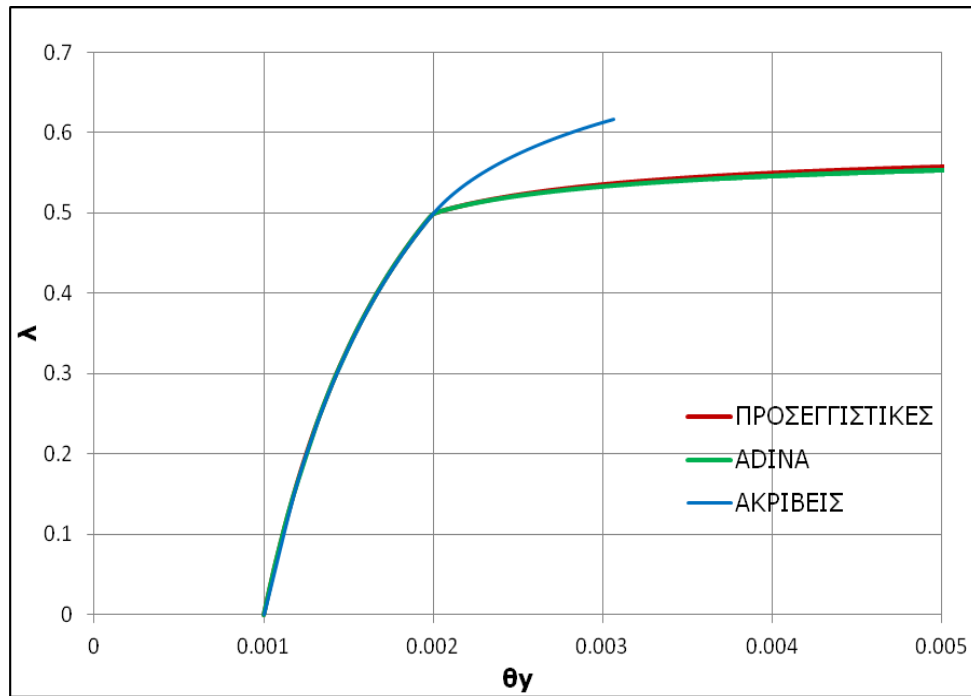
Η σύγκριση των τριών λύσεων του προβλήματος με το ένα μετακινησιακό ελατήριο στην κορυφή και το ένα στροφικό στη βάση, έγινε για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\epsilon$  και  $\epsilon_\gamma$ . Αυτές είναι οι εξής:

$$dP=0.50 \quad d\epsilon=0.25 \quad \epsilon_\gamma=0.001$$

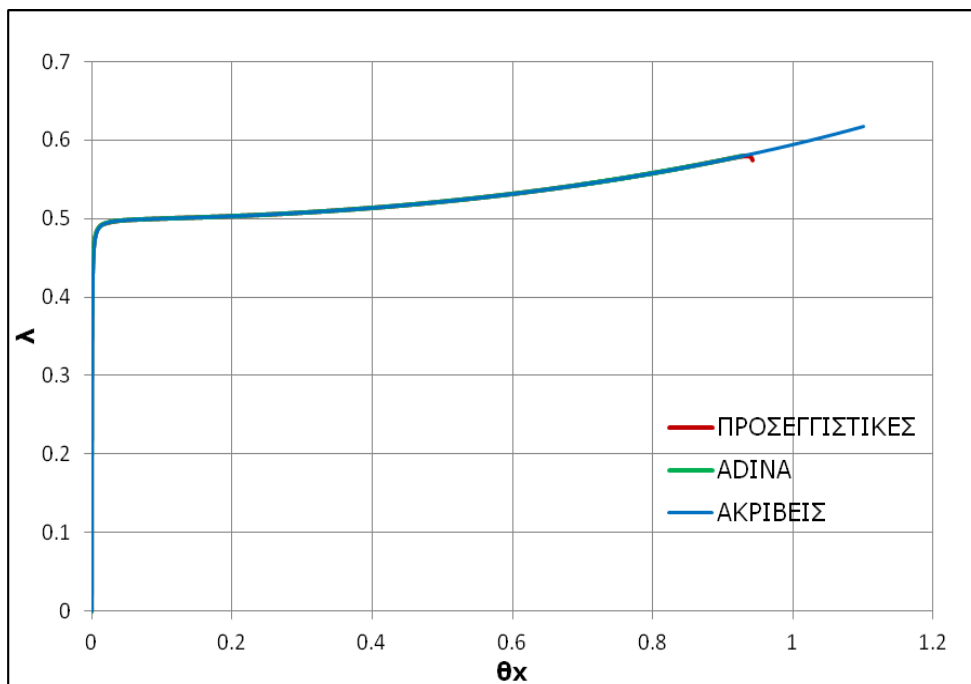
Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας κατά τις δύο διευθύνσεις και το διάγραμμα των στροφών κατά  $x$  και  $y$ .



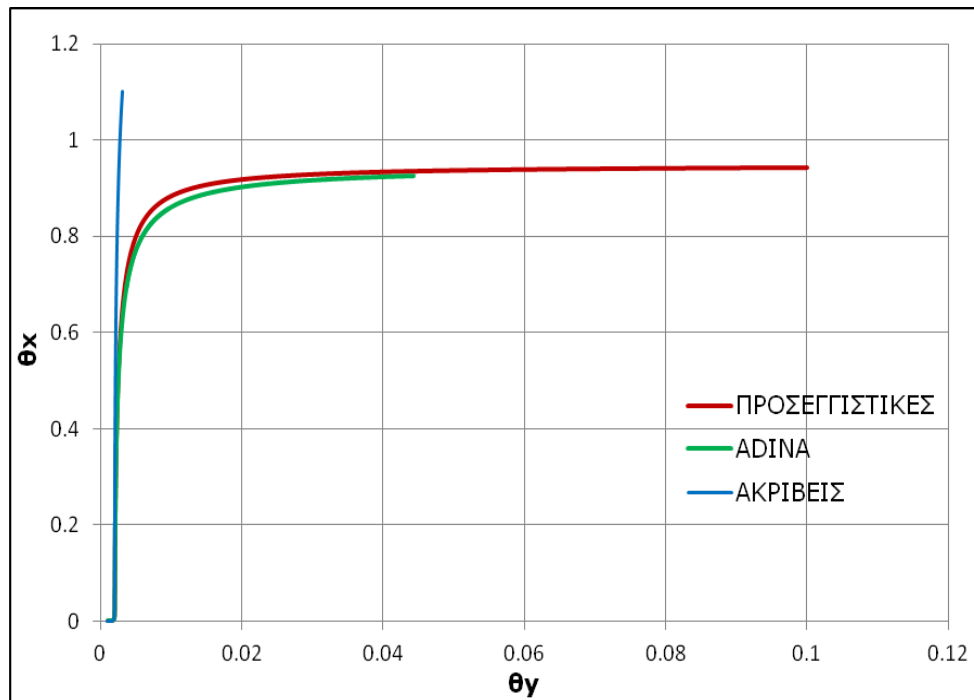
Σχήμα 2.55: Δρόμοι ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$



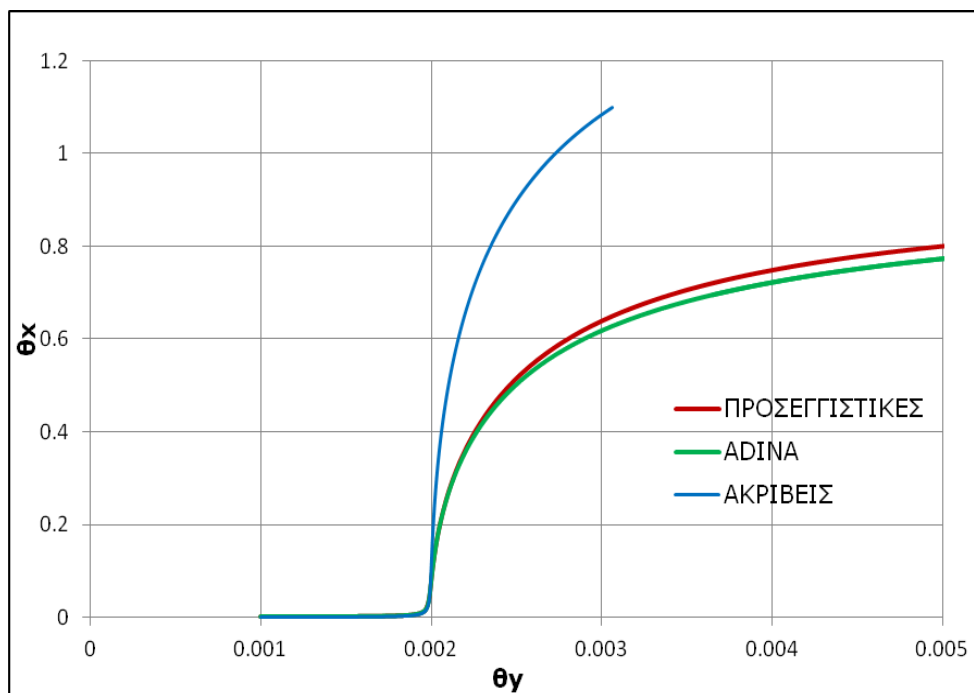
Σχήμα 2.56: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_y$



Σχήμα 2.57: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$



Σχήμα 2.58: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y



Σχήμα 2.59: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Από το σημείο  $\lambda=0.50$  και μετά, οι ακριβείς αναλυτικές σχέσεις διαφοροποιούνται από τις άλλες δύο.

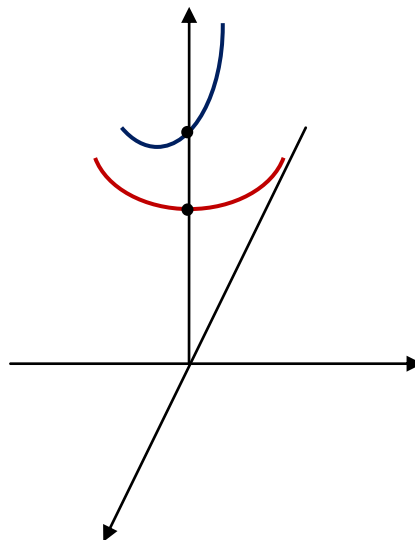
- Κατά την ασθενή διεύθυνση  $x$ , και οι τρεις λύσεις συμπίπτουν μέχρι πολύ μεγάλη τιμή της παραμόρφωσης.
- Οι προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις με τις αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδόν όμοιες.

Αυτό που θα περιμέναμε είναι να έχουμε πλήρη ταύτιση μεταξύ των ακριβών σχέσεων και των αναλύσεων με πεπερασμένα στοιχεία. Αντιθέτως, αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι οι αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνουν καλύτερα στις προσεγγιστικές σχέσεις. Αυτό μπορεί να οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού των παραμορφώσεων που χρησιμοποιεί το ADINA.

### 2.2.3 Ευσταθές – ευσταθές

#### 2.2.3.1 Το προσομοίωμα

Το τρίτο προσομοίωμα είναι ουσιαστικά το ίδιο μοντέλο που πρώτα χρησιμοποιήθηκε από τον Augusti, το οποίο αποτελείται από δύο γραμμικά ελαστικά στροφικά ελατήρια στη βάση. Όπως είναι γνωστό, το στροφικό ελατήριο στη βάση παρουσιάζει ευσταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας. Συνεπώς, αναμένουμε οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού να έχουν πανομοιότυπη μεταλυγισμική συμπεριφορά (ευσταθής-ευσταθής) όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.60.



Σχήμα 2.60: Ανεξάρτητοι μεταλυγισμικοί δρόμοι ισορροπίας



Ο φορέας που εξετάζεται είναι μια απαραμόρφωτη ράβδος μήκους  $L$ , η οποία στη βάση της είναι αρθρωτά εδραζόμενη. Στη βάση της υπάρχουν δύο γραμμικά ελαστικά στροφικά ελατήρια (κατά τη διεύθυνση  $x$  και  $y$  αντίστοιχα). Το ένα στροφικό λειτουργεί μόνο στο επίπεδο  $x-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $c_x$  ενώ το άλλο μόνο στο επίπεδο  $y-z$  και έχει σταθερά ελατηρίου  $c_y$ . Στην κορυφή του φορέα ασκείται επίσης ένα φορτίο  $P$  το οποίο παραμένει διαρκώς κατακόρυφο. Η συνολική παραμόρφωση του φορέα μπορεί να εκφραστεί ως προς τους δύο στροφικούς βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  αντίστοιχα στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων. Η στροφή  $\theta_x$  αντιστοιχεί στο ελατήριο που βρίσκεται στο επίπεδο  $x-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $x-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ , ενώ η στροφή  $\theta_y$  αντιστοιχεί σε αυτό του επιπέδου  $y-z$  και αποτελεί την απόκλιση μεταξύ της προβολής του φορέα στο επίπεδο  $y-z$  και του κατακόρυφου άξονα  $z$ . Στην περίπτωση που γίνεται μελέτη των ατελών συστημάτων, γίνεται εισαγωγή και προσομοίωση των ατελειών αυτών μέσω αρχικών γωνιών  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  που εκφράζουν στα αντίστοιχα επίπεδα κάθε φορά, την αρχική απόκλιση της ράβδου από την κατακόρυφο. Θεωρούμε  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζει ο άξονας της ράβδου με τον κατακόρυφο άξονα  $z$  και την αντίστοιχη αρχική ατέλεια  $\varepsilon$ . Στην αρχική ατελή κατάσταση, θεωρούμε ότι τα ελατήρια δεν έχουν ενεργοποιηθεί και συνεπώς, στην τυχαία γωνία  $\theta$  τα ελατήρια εντείνονται με γωνία  $(\theta-\varepsilon)$ .

Το σύστημα στην τέλεια κατάσταση έχει δύο ιδιομορφές λυγισμού με ευσταθή δρόμο ισορροπίας και οι δύο. Τα δύο κρίσιμα φορτία λυγισμού είναι  $P_{cr,x}=c_x/L$  και  $P_{cr,y}=c_y/L$  αντίστοιχα.

### 2.2.3.2 Γεωμετρική τοποθέτηση προβλήματος

Η παράγραφος αυτή παραλείπεται διότι είναι ίδια με αυτή της προηγούμενης παραγράφου 2.2.1.2.

### 2.2.3.3 Έκφραση συνολικού ενεργειακού δυναμικού

Για την ανάλυση και καλύτερη περιγραφή του φαινομένου της σύνθετης συμπεριφοράς του παραπάνω προσομοιώματος, γίνεται χρήση της ενεργειακής μεθόδου.

Έστω ότι η ράβδος βρίσκεται σε μια τυχαία θέση, στην οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία  $\theta$ . Έστω επίσης, ότι στην αρχική θέση η ράβδος έχει αρχική ατέλεια σε μορφή γωνίας  $\varepsilon$ . Για λόγους ευκολίας στην επιβολή των αρχικών ατελειών, θεωρούμε  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  αντίστοιχα τις γωνίες που σχηματίζει κάθε φορά η προβολή της αρχικής θέσης της ράβδου σε κάθε επίπεδο με την κατακόρυφο.

Η συνολική δυναμική ενέργεια της ράβδου στην τυχαία αυτή θέση, με αρχικές ατέλειες  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  γράφεται ως εξής:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_x \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_y \cdot (\theta_y - \varepsilon_y)^2 - P \cdot L \cdot (\cos \varepsilon - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_x \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_y \cdot (\theta_y - \varepsilon_y)^2 - P \cdot L \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varepsilon_y + \tan^2 \varepsilon_x + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1}} \right)$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο ισορροπίας, δηλαδή μηδενίζοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = 0 \Rightarrow c_x \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = 0 \Rightarrow c_y \cdot (\theta_y - \varepsilon_y) - P \cdot L \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

Προκειμένου τα συμπεράσματά μας να είναι απαλλαγμένα φαινομένων κλίμακας, αδιαστατοποιούμε την εφαρμοζόμενη φόρτιση. Για να γίνει αυτό διαιρούμε το φορτίο  $P$  με το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = c_y/L$ . Θέτοντας επίσης  $\lambda = P/P_{cr,y}$  και κάνοντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις, καταλήγουμε στο σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{c_x}{c_y} \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - \lambda \cdot \frac{\tan \theta_x \cdot (\cos \theta_x)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

$$(\theta_y - \varepsilon_y) - \lambda \cdot \frac{\tan \theta_y \cdot (\cos \theta_y)^{-2}}{(\tan^2 \theta_y + \tan^2 \theta_x + 1)^{3/2}} = 0$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $P$  που τις ικανοποιεί, αποτελεί και μια θέση ισορροπίας. Συνεπώς, λύνοντάς αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ο δρόμος ισορροπίας του συστήματος.

#### 2.2.3.4 Αριθμητική επεξεργασία εξισώσεων

Για την αριθμητική επεξεργασία των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε πρόγραμμα το οποίο γράφτηκε στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB. Θεωρώντας γνωστή τη μία από τις δύο γωνίες, το πρόγραμμα υπολογίζει την άλλη γωνία και το αδιαστατοποιημένο φορτίο  $\lambda$  λύνοντας αριθμητικά ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τελικά. Αυτό που επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, είναι το βήμα στο οποίο χωρίζεται το εύρος των πιθανών τιμών που παίρνει η γνωστή γωνία, το κριτήριο σύγκλισης για τον υπολογισμό των δύο αγνώστων, όπως επίσης και οι αρχικές τιμές των δύο αγνώστων σε κάθε βήμα.

Οι παράμετροι ελέγχου του συστήματος που χρησιμοποιήθηκαν για τη μελέτη του φαινομένου του σύνθετου λυγισμού αυτού του φορέα, είναι οι εξής:

α. Ο λόγος των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των επιμέρους θεμελιωδών ιδιομορφών του φορέα, όπως αυτά καθορίζονται από τη δυσκαμψία των ελατηρίων:

$$dP = \frac{P_{cr,y}}{P_{cr,x}} = \frac{c_y / L}{c_x / L} = \frac{c_y}{c_x}$$

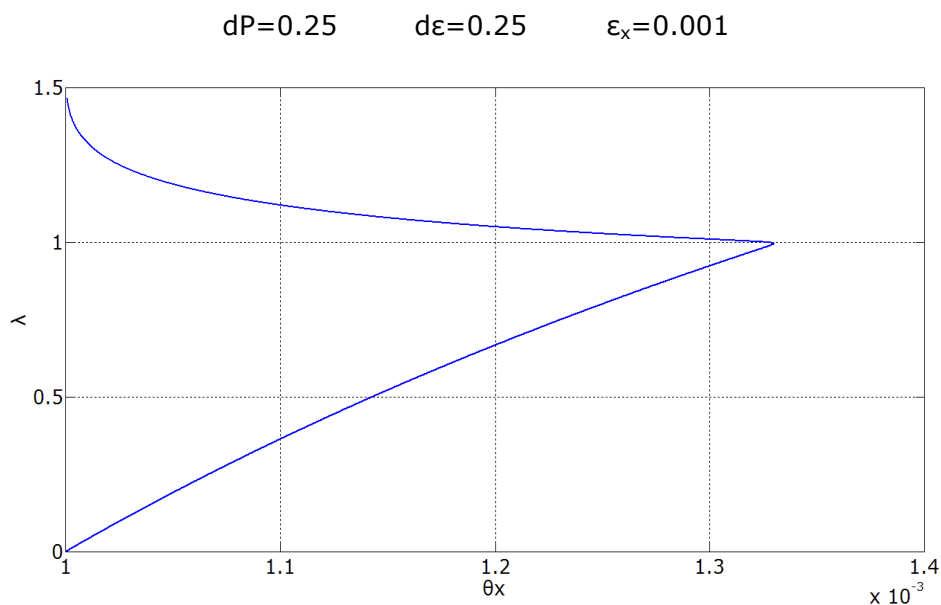
β. Ο λόγος των αρχικών ατελειών που εφαρμόζονται σε κάθε διεύθυνση και οι οποίες αφορούν ξεχωριστά το κάθε ελατήριο:

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

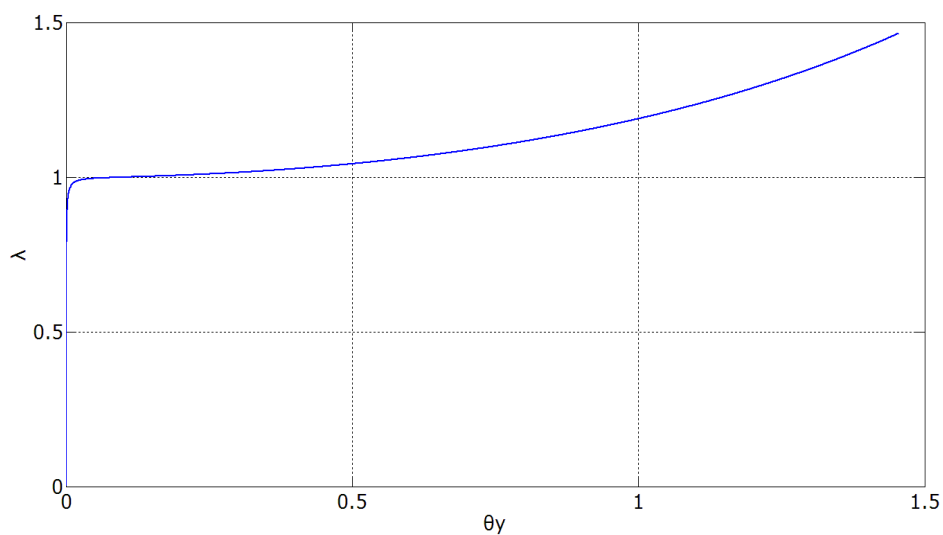
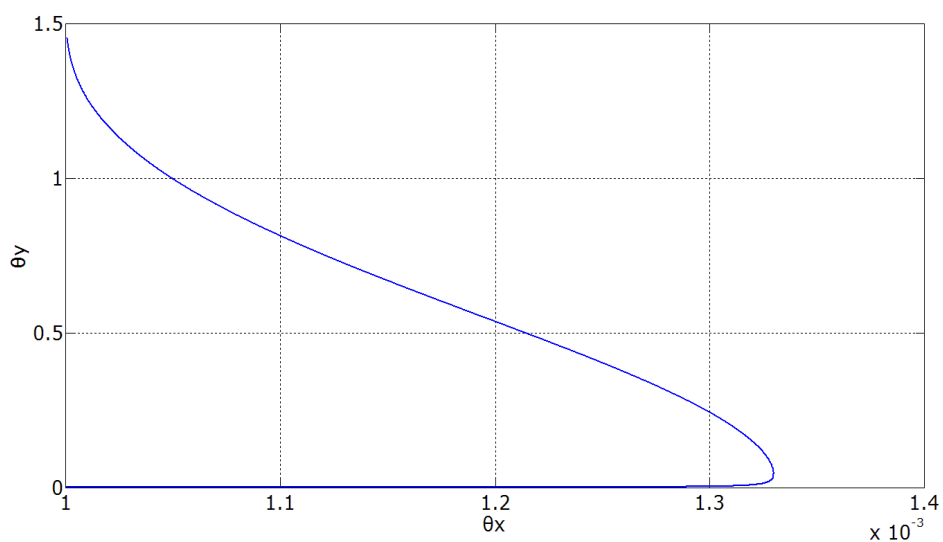
γ. Η τιμή της αρχικής ατέλειας σε κάποια διεύθυνση, που επιλέχθηκε να είναι η ατέλεια που επηρεάζει το στροφικό ελατήριο κατά τη διεύθυνση  $x$  και η οποία συμβολίζεται με  $\varepsilon_x$ .

Τα διαγράμματα παράγονται δίνοντας κάθε φορά συγκεκριμένες τιμές στη σταθερά του στροφικού ελατηρίου  $c_x$  και στην αρχική ατέλεια  $\varepsilon_x$ , ενώ διαφοροποιούνται οι τιμές της σταθεράς του στροφικού ελατηρίου  $c_y$  και της αρχικής ατέλειας  $\varepsilon_y$ , έτσι ώστε να προκύπτουν οι επιθυμητές τιμές των όρων  $dP$  και  $d\varepsilon$ .

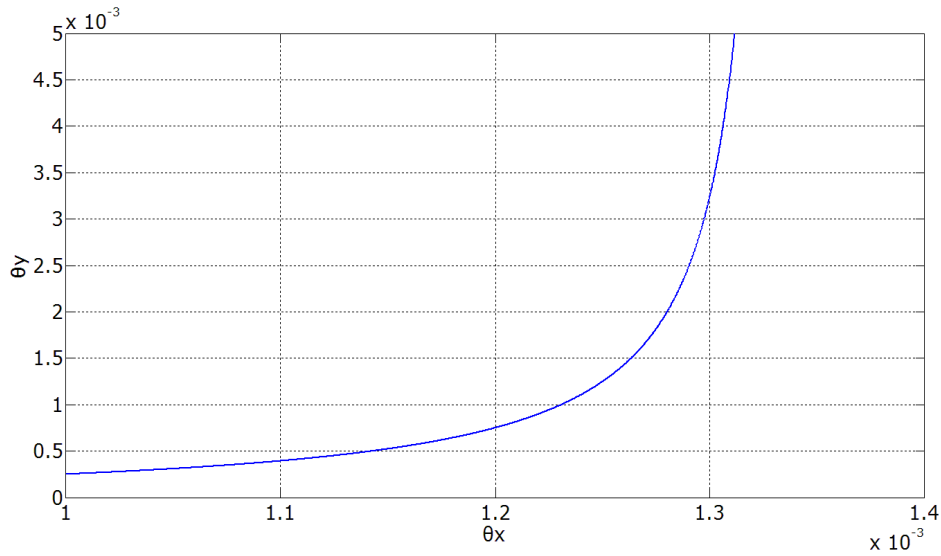
Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά κάποια αποτελέσματα για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\varepsilon$  και  $\varepsilon_y$ .



Σχήμα 2.61: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

Σχήμα 2.62: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ Σχήμα 2.63: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $\gamma$ 

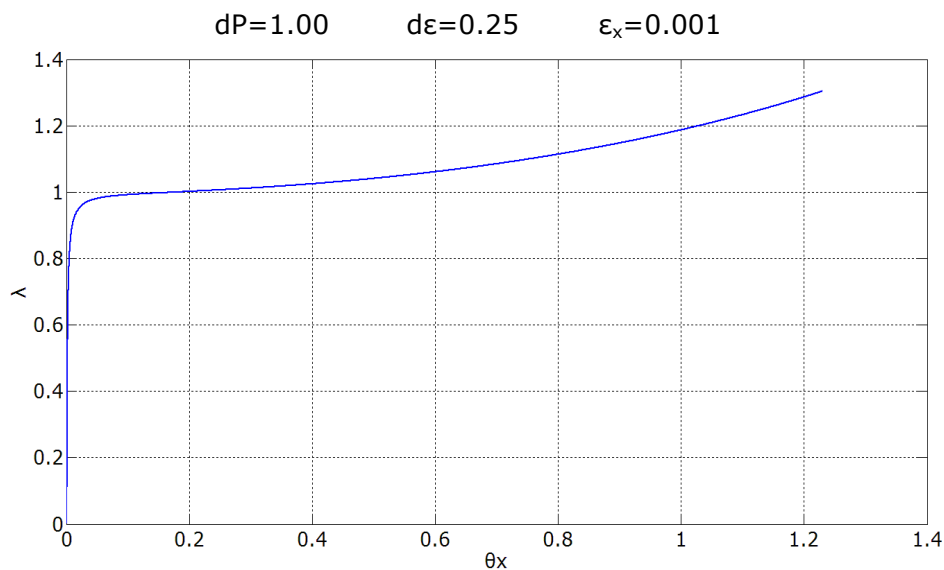
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.63 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



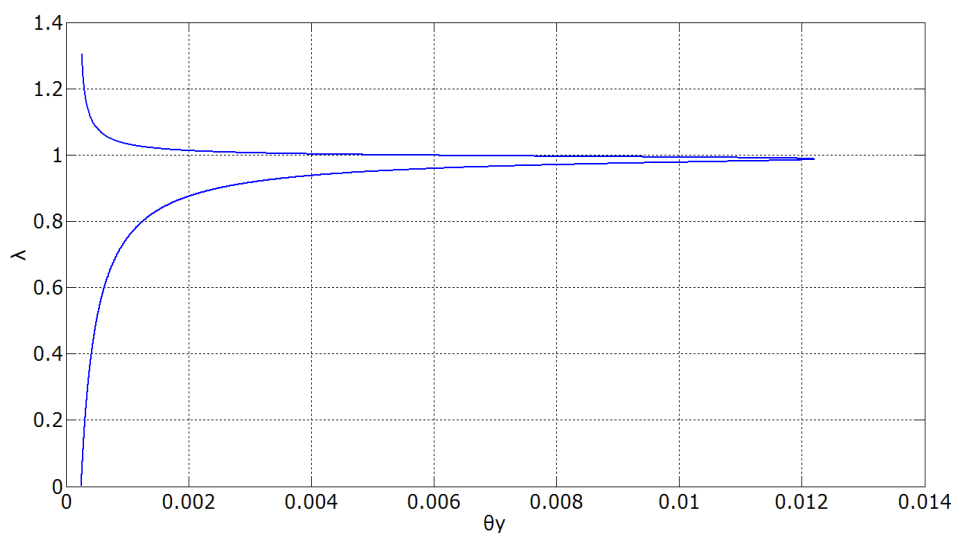
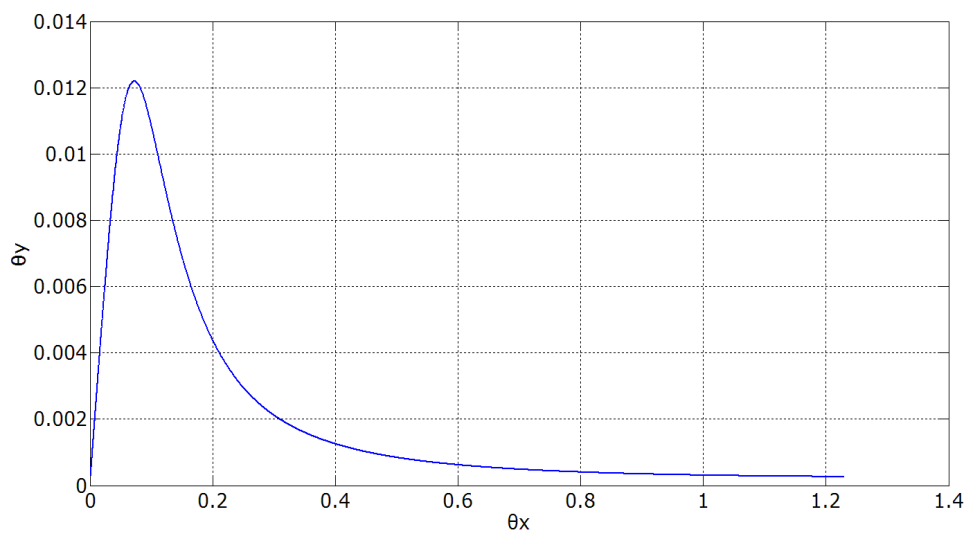
Σχήμα 2.64: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$

Παρατηρούμε τα εξής:

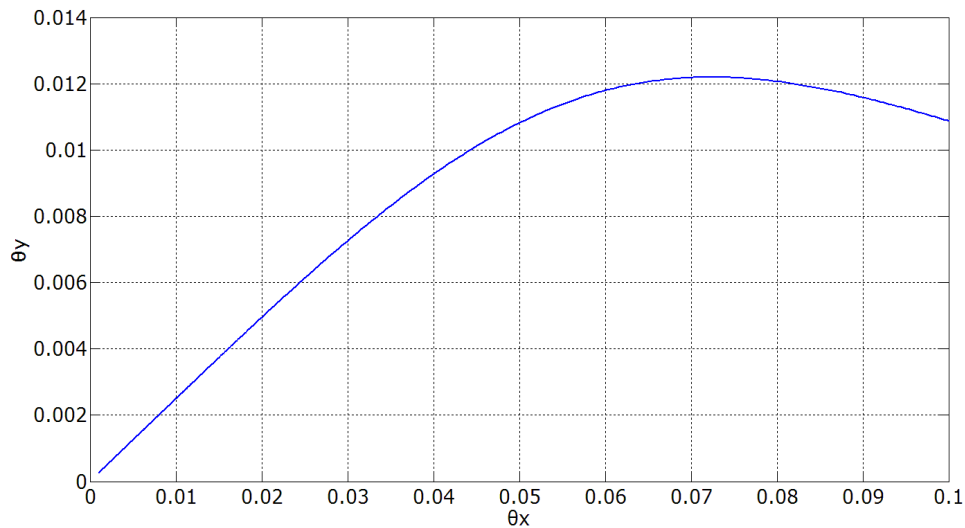
- Ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.
- Όπως είναι αναμενόμενο, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $y$  είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης  $x$ .
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.64, αρχικά η παραμόρφωση κατά την ισχυρή διεύθυνση  $x$  είναι μεγαλύτερη λόγω της μεγαλύτερης αρχικής ατέλειας  $\varepsilon_x$ , αλλά στη συνέχεια κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $y$ .



Σχήμα 2.65: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

Σχήμα 2.66: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ Σχήμα 2.67: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $y$ 

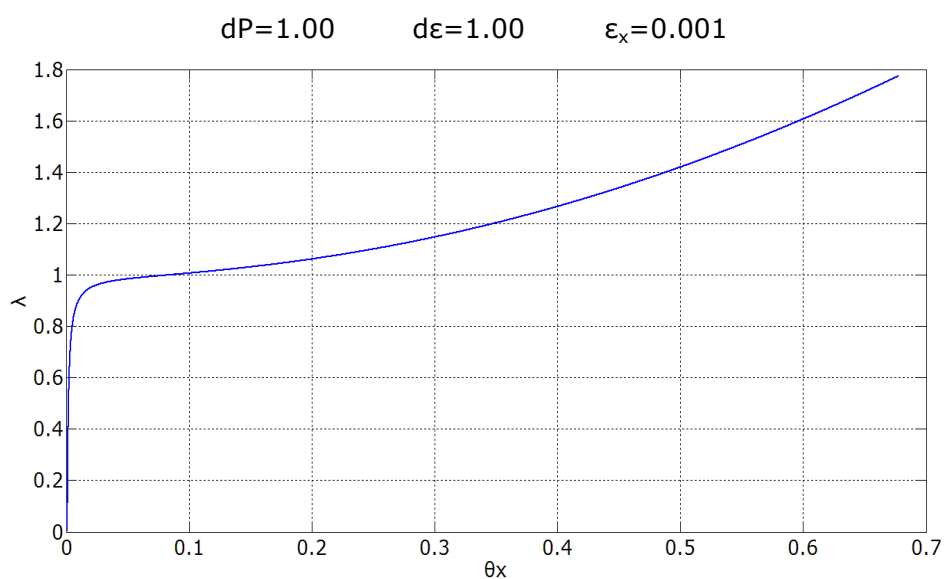
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα 2.67 μεγεθυμένο στην περιοχή της αρχής των αξόνων:



Σχήμα 2.68: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

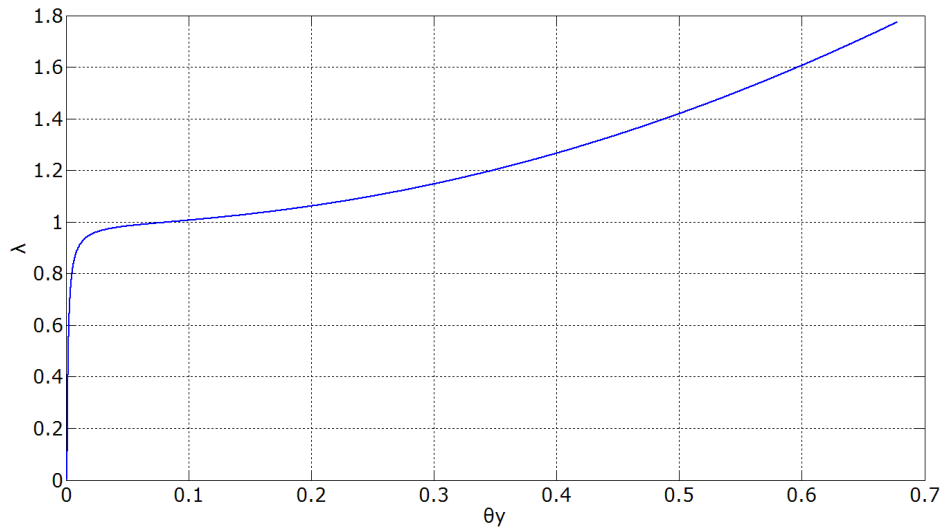
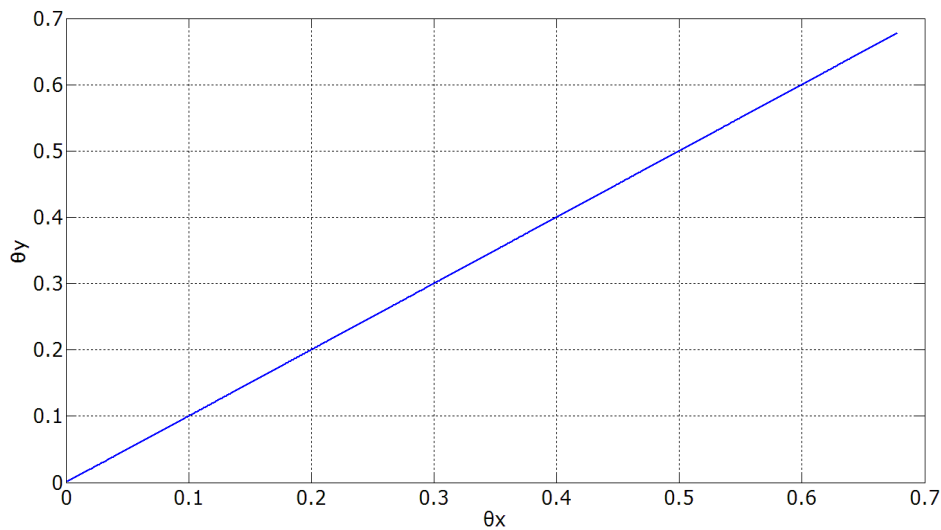
Παρατηρούμε τα εξής:

- Ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.
- Η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση x είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της διεύθυνσης y παρόλο που ο λόγος των κρίσιμων φορτίων ισούται με τη μονάδα, λόγω της μεγαλύτερης αρχικής ατέλειας  $\epsilon_x$ .
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.68, εξαρχής κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά τη διεύθυνση x.



Σχήμα 2.69: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$



Σχήμα 2.70: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ 

Σχήμα 2.71: Στροφή κατά x – Στροφή κατά γ

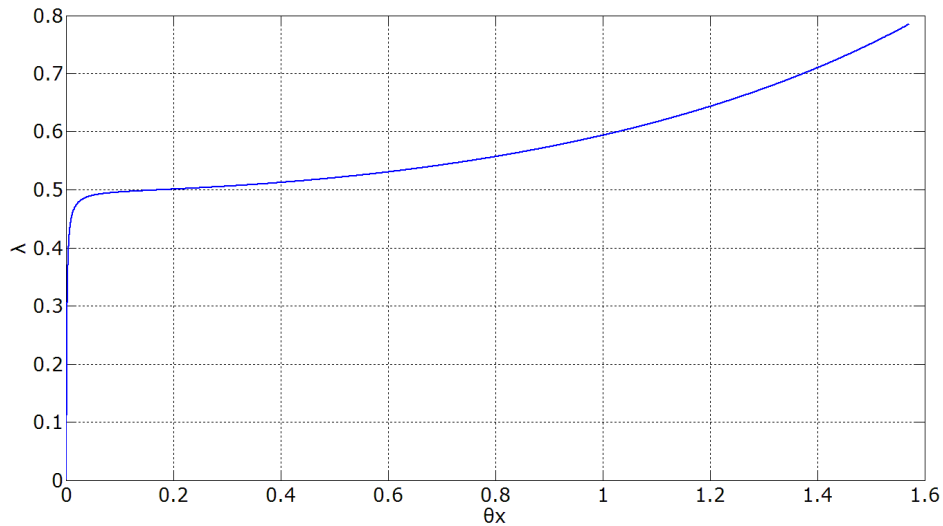
Παρατηρούμε τα εξής:

- Ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.
- Η παραμόρφωση και κατά τις δύο διευθύνσεις είναι απολύτως συμμετρική αφού ο λόγος των κρίσιμων φορτίων είναι μονάδα και οι αρχικές ατέλειες είναι ίσες.

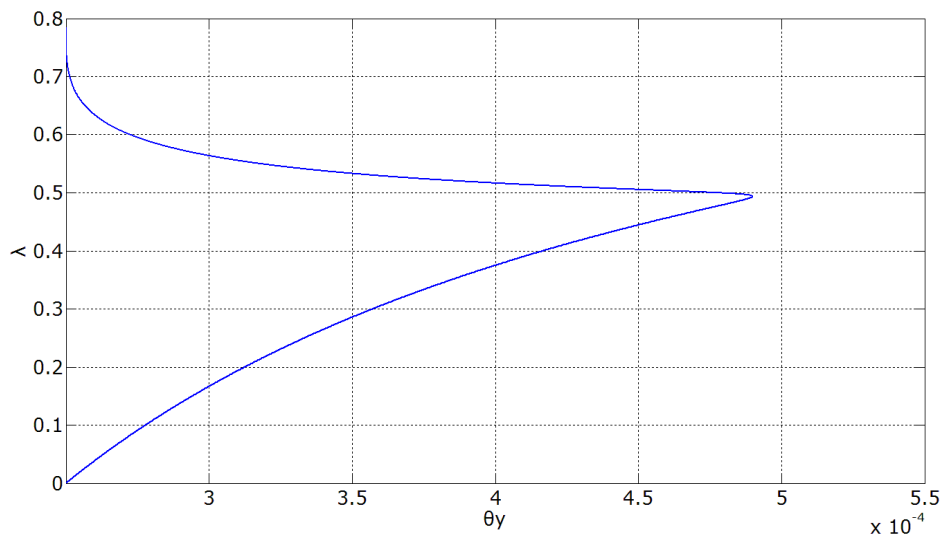
$$dP=2.00$$

$$d\varepsilon=0.25$$

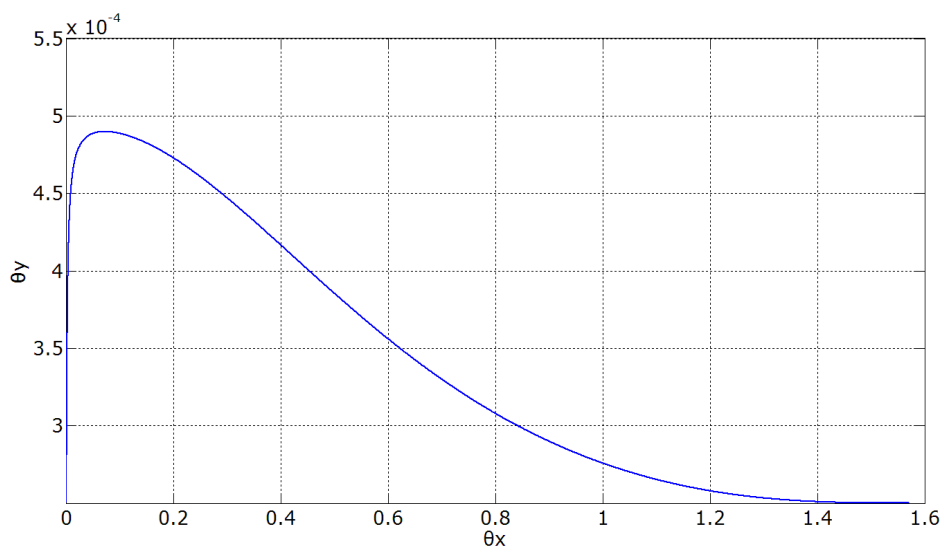
$$\varepsilon_x=0.001$$



Σχήμα 2.72: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$



Σχήμα 2.73: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$



Σχήμα 2.74: Στροφή κατά  $x$  – Στροφή κατά  $\gamma$

Παρατηρούμε τα εξής:

- Ο φορέας παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.
- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $x$  είναι εμφανώς μεγαλύτερη από αυτή της ισχυρής διεύθυνσης  $y$ .
- Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.74, εξαρχής κυριαρχεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $x$ .

### 2.2.3.5 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνουμε τα εξής:

- Ανεξαρτήτως λόγου κρίσιμων φορτίων και λόγου αρχικών ατελειών, ο δρόμος ισορροπίας του φορέα είναι ευσταθής (ακόμη και για  $dP=1$  όπου και αναμένουμε αλληλεπίδραση των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών λυγισμού).
- Όταν  $dP=1$  και  $d\epsilon=1$  η συμπεριφορά του φορέα και κατά τις δύο διευθύνσεις είναι απολύτως συμμετρική.
- Σε κάθε περίπτωση, η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση κυριαρχεί της άλλης.
- Η επιρροή των αρχικών ατελειών είναι επουσιώδης, πράγμα αναμενόμενο για τέτοιου είδους συστήματα που εμφανίζουν ευσταθή δρόμο ισορροπίας.

### 2.2.3.6 Σύγκριση ακριβών σχέσεων – προσεγγιστικών – ADINA

#### Προσεγγιστικές σχέσεις

Οι προσεγγιστικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται, προκύπτουν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που προέκυψαν και οι ακριβείς, με τη διαφορά ότι γίνονται κάποιες παραδοχές κατά τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος. Ο λόγος που έγιναν αυτές οι απλουστευτικές παραδοχές είναι η εύκολη επεξεργασία των μαθηματικών σχέσεων που προκύπτουν.

Από τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος παρατηρούμε ότι για σχετικά μικρές γωνίες, ισχύει η παρακάτω σχέση μεταξύ των γωνιών:

$$\cos^2(90 - \theta_x) + \cos^2(90 - \theta_y) + \cos^2\theta \approx 1$$

από την οποία προκύπτει η σχέση:

$$\cos\theta \approx \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}$$

Επομένως, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot c_x \cdot (\theta_x - \varepsilon_x)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_y \cdot (\theta_y - \varepsilon_y)^2 - P \cdot L \cdot \left( \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon_x - \sin^2\varepsilon_y} - \sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y} \right)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε την έκφραση της συνολικής δυναμικής ενέργειας ως προς τους δύο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας  $\theta_x$  και  $\theta_y$  και μορφώνουμε το παρακάτω σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = c_x \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - P \cdot L \cdot \frac{\sin\theta_x \cdot \cos\theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} = c_y \cdot (\theta_y - \varepsilon_y) - P \cdot L \cdot \frac{\sin\theta_y \cdot \cos\theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

Αδιαστατοποιώντας με το κρίσιμο φορτίο  $P_{cr,y} = c_y / L$  και θέτοντας

$P/P_{cr,y} = P/(c_y/L) = \lambda$  προκύπτει το τελικό σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας:

$$\frac{c_x}{c_y} \cdot (\theta_x - \varepsilon_x) - \lambda \cdot \frac{\sin\theta_x \cdot \cos\theta_x}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

$$(\theta_y - \varepsilon_y) - \lambda \cdot \frac{\sin\theta_y \cdot \cos\theta_y}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_x - \sin^2\theta_y}} = 0$$

Κάθε τριάδα τιμών  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  και  $\lambda$  που ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις, αποτελεί μια θέση ισορροπίας και ανήκει στο δρόμο ισορροπίας του συστήματος. Η επίλυσή τους ακολουθεί την ίδια λογική της αντίστοιχης επίλυσης των ακριβών αναλυτικών σχέσεων, με τη βοήθεια προγράμματος γραμμένου στη γλώσσα προγραμματισμού MATLAB.

Αυτό το οποίο αναμένουμε από τις προσεγγιστικές σχέσεις, είναι να συμπίπτουν με τις ακριβείς μέχρι τουλάχιστον κάποια γωνία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για να προκύψουν, έγινε κάποια γεωμετρική παραδοχή η οποία ισχύει για μικρές γωνίες.

#### Αριθμητικές αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων (ADINA)

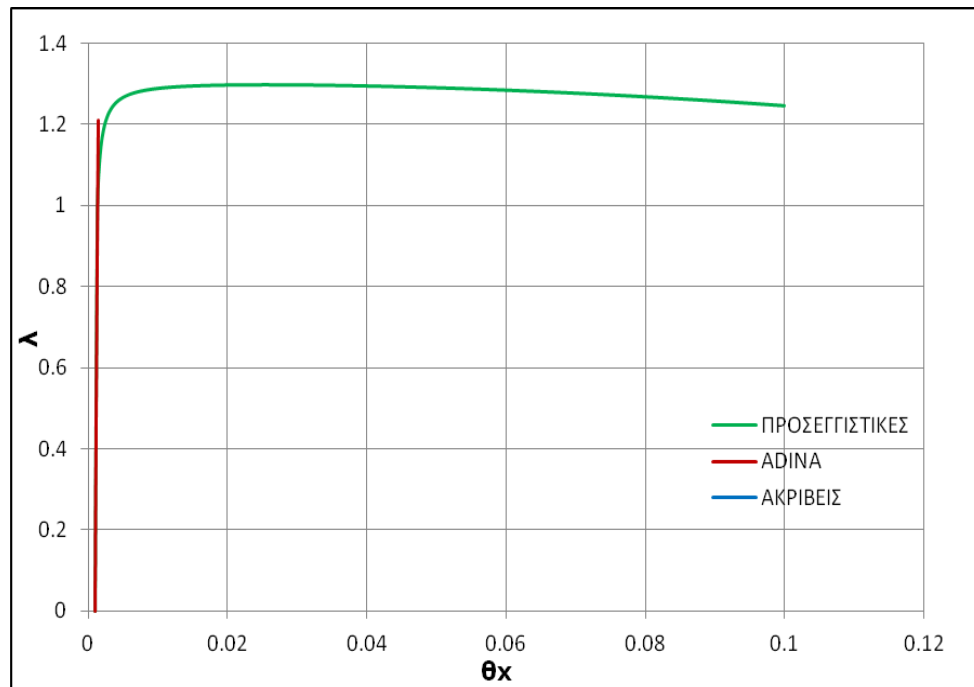
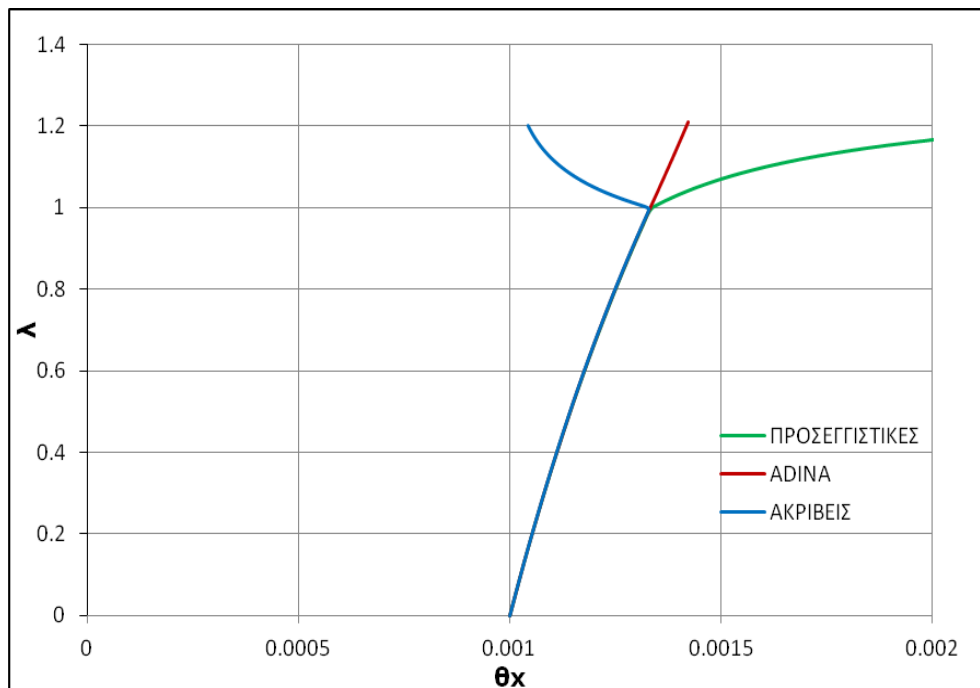
Πέρα από την αριθμητική επίλυση των αναλυτικών σχέσεων, κρίθηκε απαραίτητη η επαλήθευσή τους με αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε είναι το ADINA. Στο πρόγραμμα εισήχθησαν όλες οι παραδοχές που έγιναν και για τις αναλυτικές σχέσεις (άκαμπτο μέλος, συντηρητική φόρτιση). Οι αρχικές ατέλειες επιβλήθηκαν με τη βοήθεια των δύο ανεξάρτητων ιδιομορφών λυγισμού, μετά από μια γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού.

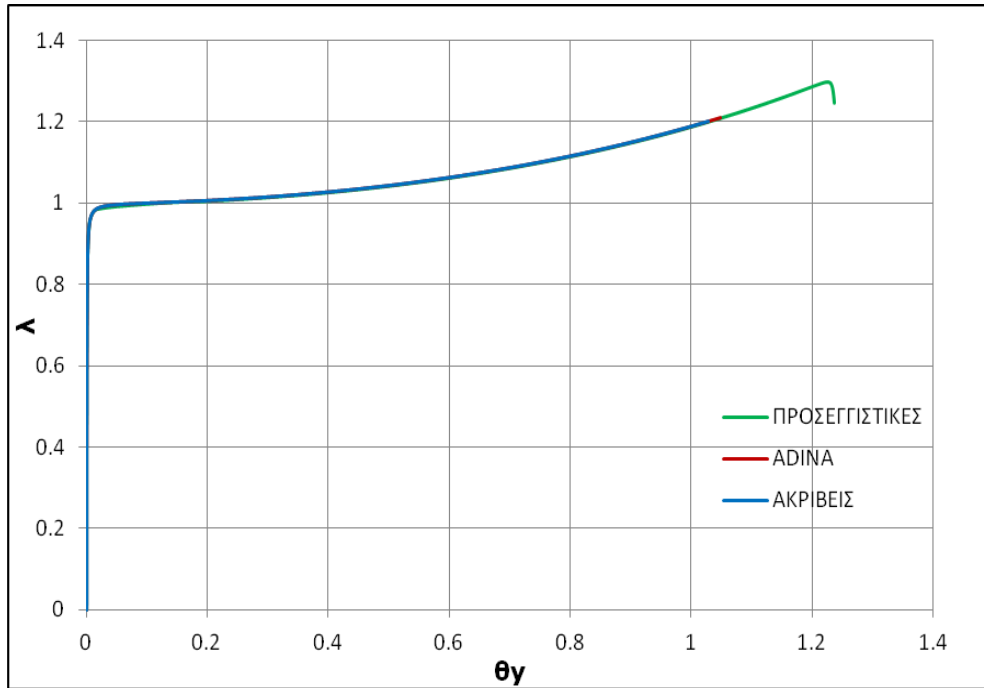
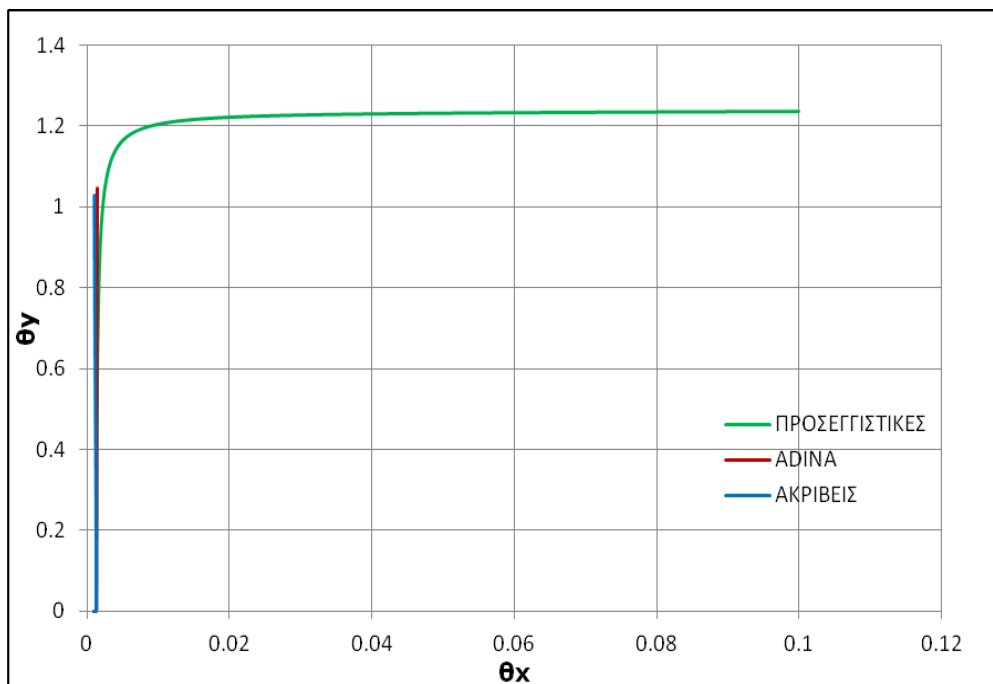
#### Σύγκριση

Η σύγκριση των τριών λύσεων του προβλήματος με τα δύο στροφικά ελατήρια στη βάση, έγινε για συγκεκριμένες τιμές των όρων  $dP$ ,  $d\epsilon$  και  $\epsilon_x$ . Αυτές είναι οι εξής:

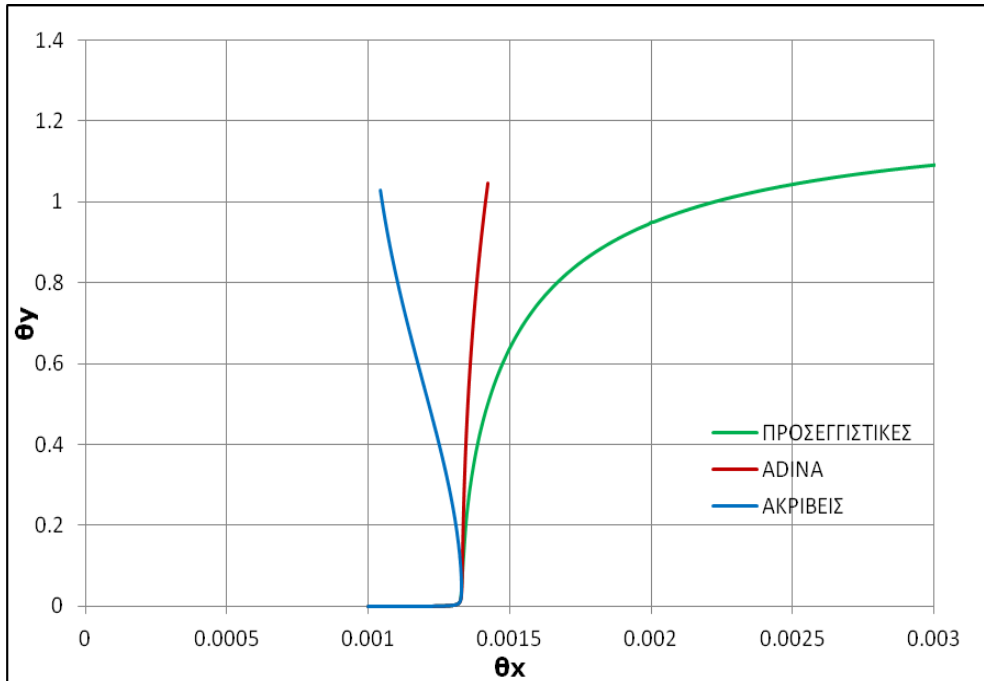
$$dP=0.25 \quad d\epsilon=0.25 \quad \epsilon_x=0.001$$

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι δρόμοι ισορροπίας κατά τις δύο διευθύνσεις και το διάγραμμα των στροφών κατά  $x$  και  $y$ .

Σχήμα 2.75: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$ Σχήμα 2.76: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_x$

Σχήμα 2.77: Δρόμος ισορροπίας κατά το βαθμό ελευθερίας  $\theta_\gamma$ 

Σχήμα 2.78: Στροφή κατά x - Στροφή κατά y



Σχήμα 2.79: Στροφή κατά x – Στροφή κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Από το σημείο  $\lambda=1.00$  και μετά, οι τρεις λύσεις διαφοροποιούνται κατά την ισχυρή διεύθυνση x.
- Κατά την ασθενή διεύθυνση y, και οι τρεις λύσεις συμπίπτουν μέχρι πολύ μεγάλη τιμή της παραμόρφωσης.
- Οι προσεγγιστικές λύσεις δίνουν οριακό σημείο, ενώ οι ακριβείς σχέσεις δίνουν συνεχώς αύξοντα δρόμο ισορροπίας.

Αυτό που θα περιμέναμε είναι να έχουμε πλήρη ταύτιση μεταξύ των ακριβών σχέσεων και των αναλύσεων με πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό που διαπιστώνουμε είναι ότι και οι τρεις λύσεις δίνουν τελείως διαφορετικά αποτελέσματα, πράγμα το οποίο χρήζει περισσότερης μελέτης.



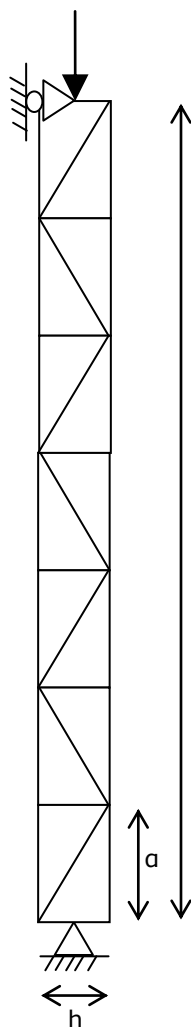
## 2.3 Εφαρμογή σε σύνθετο υποσύλωμα

### 2.3.1 Παράδειγμα 1

#### 2.3.1.1 Το προσομοίωμα

Σαν εφαρμογή του φαινομένου της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών λυγισμού, επιλέγεται η περίπτωση ενός σύνθετου υποστυλώματος. Σε τέτοιου είδους κατασκευές, είναι έντονο το παραπάνω φαινόμενο, και συγκεκριμένα εμφανίζεται αλληλεπίδραση μεταξύ του τοπικού και του καθολικού λυγισμού. Αυτό είναι εμφανές από την παραμόρφωση τέτοιων φορέων αλλά και από τη σημαντική, σε πολλές περιπτώσεις, μείωση της φέρουσας ικανότητάς τους.

Στην περίπτωση μας, επιλέγουμε ένα σύνθετο δικτυωτό υποσύλωμα με δικτύωση  $V$  με ορθοστάτες. Το συνολικό ύψος του είναι 4.20m, αποτελείται από 7 φατνώματα μήκους 0.60m το καθένα, η οριζόντια απόσταση των δύο πελμάτων είναι 0.21m και τα επίπεδα δικτύωσής του είναι 2. Για συνθήκες στήριξης, επιβάλλουμε άρθρωση στο κάτω άκρο και κατακόρυφη κύλιση στο άνω άκρο.



#### Γεωμετρικά στοιχεία

$$L=4.20\text{m}$$

$$a=0.60\text{m}$$

$$h_0=0.21\text{m}$$

$$a=\arctan(a/h_0)=1.234\text{rad}$$

$n=2$  επίπεδα δικτύωσης

$N=7$  φατνώματα

#### Διατομές

Πέλματα  $\rightarrow$  IPE 100  $A_{CH}=10.32\text{cm}^2$   $I_{CH,z}=15.92\text{cm}^2$

Ράβδοι δικτύωσης  $\rightarrow$  Ορθογωνική  $h=3\text{cm}$   $b=0.5\text{cm}$   
 $A_d=1.5\text{cm}^2$

#### Υλικό

Μέτρο ελαστικότητας  $\rightarrow E=210000\text{MPa}$

Λόγος Poisson  $\rightarrow \nu=0.30$

### 2.3.1.2 Κρίσιμα Φορτία Λυγισμού

Υπολογισμός κρίσιμων φορτίων με βάση τις σχέσεις του EC3

Καθολικός λυγισμός

$$I_{\text{eff}} = \frac{A_{\text{CH}} \cdot h_o^2}{2} = 2276 \text{ cm}^4$$

$$P_{\text{cr,EULER}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{eff}}}{(\beta \cdot L)^2} = 2674 \text{ kN}$$

$$S_v = \frac{n \cdot E \cdot A_d \cdot a \cdot h_o^2}{d^3} = 6495 \text{ kN}$$

$$P_{\text{cr,global}} = \frac{1}{\frac{1}{S_v} + \frac{1}{P_{\text{cr,EULER}}}} = 1894 \text{ kN}$$

Τοπικός λυγισμός

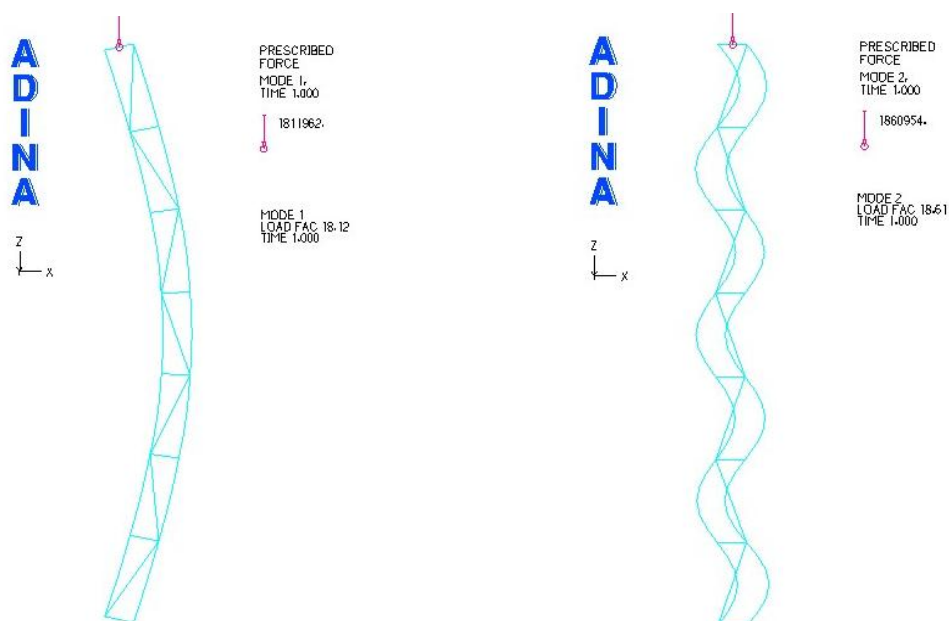
$$P_{\text{cr,EULER,φατν.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{CH,z}}}{a^2} = 917 \text{ kN}$$

$$P_{\text{cr,local}} = 2 \cdot P_{\text{cr,EULER,φατν.}} = 1833 \text{ kN}$$

Λόγος κρίσιμων φορτίων  $\rightarrow n = \frac{P_{\text{cr,global}}}{P_{\text{cr,local}}} = 1.03$

Υπολογισμός κρίσιμων φορτίων με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA

Κάνοντας μια γραμμικοποιημένη ανάλυση λυγισμού, καταλήγουμε στις παρακάτω ιδιομορφές λυγισμού με τα αντίστοιχά τους κρίσιμα φορτία λυγισμού:



Σχήμα 2.80: Καθολική και τοπική ιδιομορφή λυγισμού

$$P_{cr,global}=1812\text{kN} \quad \text{και} \quad P_{cr,local}=1861\text{kN}$$

$$\text{Λόγος κρίσιμων φορτίων} \rightarrow n = \frac{P_{cr,global}}{P_{cr,local}} = 0.995$$

### 2.3.1.3 Μη Γραμμικές Αναλύσεις Γεωμετρίας

#### GNIA με απομόνωση τοπικού λυγισμού

Για να διερευνήσουμε την ευστάθεια ή αστάθεια του δρόμου ισορροπίας για την περίπτωση της τοπικής ιδιομορφής λυγισμού (2<sup>η</sup> ιδιομορφή), επιχειρούμε να απομονώσουμε τον τοπικό λυγισμό και ταυτόχρονα να παρεμποδίσουμε τον καθολικό. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της επιβολής κατακόρυφων κυλίσεων σε κάθε φάτνωμα του σύνθετου υποστυλώματος. Με τον τρόπο αυτό, το υποστυλόμετρο είναι αδύνατο να λυγίσει καθολικά, ενώ ταυτόχρονα ο τοπικός λυγισμός του αφήνεται ελεύθερος.

Επιβλήθηκε τοπική ατέλεια  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012\text{m}$  σύμφωνα με τη 2<sup>η</sup> ιδιομορφή. Ο παραμορφωμένος φορέας και ο δρόμος ισορροπίας της μη γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 2.81: Παραμόρφωση και δρόμος ισορροπίας τοπικού λυγισμού

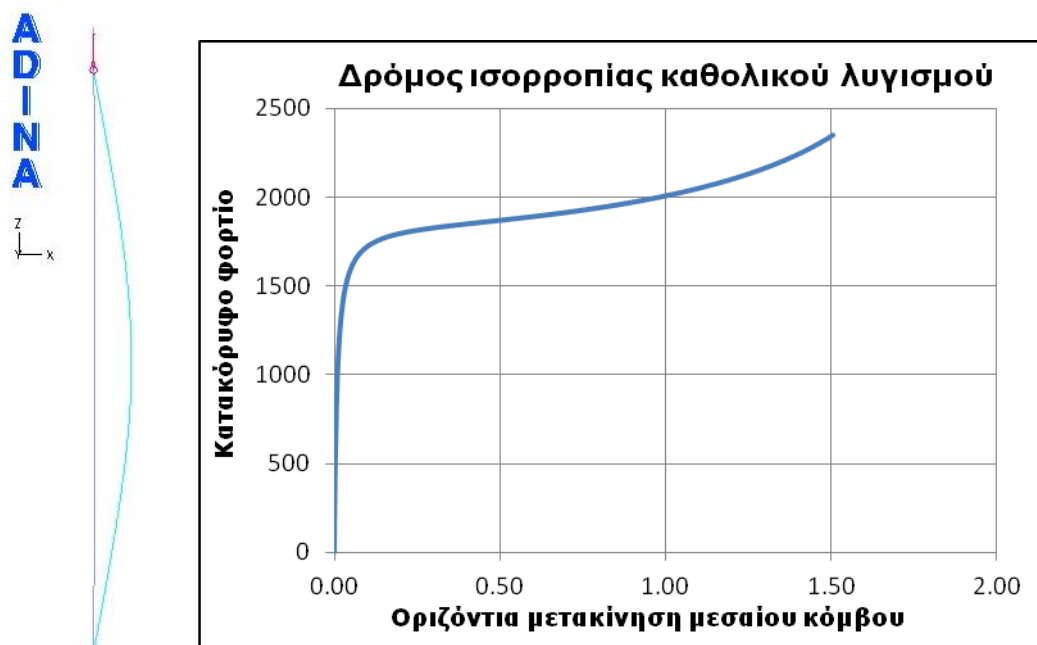
Όπως είναι φανερό από τον παραπάνω δρόμο ισορροπίας, ο τοπικός λυγισμός έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.

#### GNIA με απομόνωση καθολικού λυγισμού

Για να διερευνήσουμε την ευστάθεια ή αστάθεια του δρόμου ισορροπίας για την περίπτωση της καθολικής ιδιομορφής λυγισμού (1<sup>η</sup> ιδιομορφή), επιχειρούμε να απομονώσουμε τον καθολικό λυγισμό και ταυτόχρονα να παρεμποδίσουμε τον τοπικό. Λόγω της δυσκολίας επίτευξης του παραπάνω στόχου, χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο υποσύλωμα με συμπαγή διατομή, έτσι ώστε να αποφύγουμε τον τοπικό λυγισμό των φατνωμάτων του σύνθετου υποστυλώματος. Τα χαρακτηριστικά της είναι τα εξής:

- $h=0.54058\text{cm}$  και  $b=36.63654\text{cm}$  (ορθογωνική διατομή)
- $A_t=2 \cdot A_{CH}=19.805\text{cm}^2$
- $I_t=I_{\text{eff}}=2184\text{cm}^4$
- $k = \frac{S_v}{A_t \cdot G} = 0.0406$

Επιβλήθηκε καθολική ατέλεια  $\varepsilon_{\text{καθ.}}=L/500=0.0084\text{m}$  σύμφωνα με την καθολική ιδιομορφή λυγισμού στο μεσαίο κόμβο. Ο παραμορφωμένος φορέας και ο δρόμος ισορροπίας της μη γραμμικής ανάλυσης γεωμετρίας φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



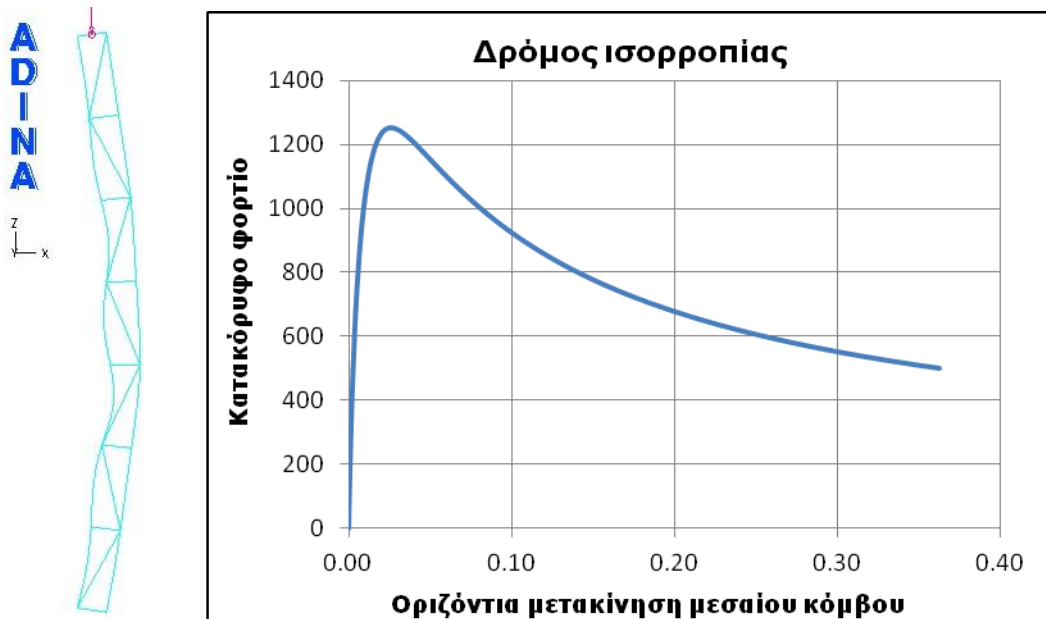
Σχήμα 2.82: Παραμόρφωση και δρόμος ισορροπίας καθολικού λυγισμού

Όπως είναι φανερό από τον παραπάνω δρόμο ισορροπίας, ο καθολικός λυγισμός έχει ευσταθή δρόμο ισορροπίας.

#### GNIA με τοπικό και καθολικό λυγισμό

Από τις παραπάνω αναλύσεις στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA, παρατηρούμε ότι τόσο ο τοπικός όσο και ο καθολικός λυγισμός, έχουν ευσταθή δρόμο ισορροπίας. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας με ατέλειες, για να διαπιστώσουμε την επιρροή που έχει στο σύνθετο υποστύλωμα, η συνύπαρξη αυτών των δύο ευσταθών ιδιομορφών λυγισμού.

Επιβάλλουμε τοπική ατέλεια  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012\text{m}$  σύμφωνα με τη 2<sup>η</sup> ιδιομορφή, και καθολική ατέλεια  $\varepsilon_{\text{καθ.}}=L/500=0.0084\text{m}$  σύμφωνα με τη 1<sup>η</sup> ιδιομορφή. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας και ο δρόμος ισορροπίας του μεσαίου κόμβου.



Σχήμα 2.83: Παραμόρφωση και δρόμος ισορροπίας σύνθετου υποστυλώματος

Παρατηρούμε ότι, παρά το γεγονός ότι οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού έχουν ευσταθείς δρόμους ισορροπίας, η συνύπαρξη τους στο σύνθετο υποστυλώμα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση οριακού σημείου στο δρόμο ισορροπίας. Η αλληλεπίδραση των δύο ιδιομορφών λυγισμού, είχε σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της συμπεριφοράς του φορέα.

#### 2.3.1.4 Παραμετρικές Αναλύσεις

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε μια σειρά από παραμετρικές αναλύσεις για το παραπάνω σύνθετο υποστυλώμα. Αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι ο λόγος των δύο κρίσιμων φορτίων λυγισμού, κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με μεταβολή της διατομής των πελμάτων του υποστυλώματος, η τιμή της τοπικής και της καθολικής ατέλειας. Στόχος είναι να διαπιστώσουμε την επιρροή των ατελειών και του φαινομένου της αλληλεπίδρασης των δύο ιδιομορφών λυγισμού (τοπική και καθολική) στη συμπεριφορά και τη φέρουσα ικανότητα του φορέα.

Το πλήθος και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν, φαίνονται στον πίνακα 2.3:

n	0.50, 0.6737, 0.9099, 0.9737, 0.9914, 1.0037, 1.0162, 1.0417, 1.14622, 1.51597, 1.91804
$\epsilon_{\text{τοπ.}}$	0, $a/1000=0.0006$ , $a/500=0.0012$ , $a/250=0.0024$
$\epsilon_{\text{καθ.}}$	$L/2000=0.0021$ , $L/1000=0.0042$ , $L/500=0.0084$ , $L/250=0.0168$

Πίνακας 2.3: Τιμές παραμέτρων ελέγχου

Για τις παραπάνω τιμές έγιναν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί, και πραγματοποιήθηκαν 176 αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων στο πρόγραμμα ADINA (δεν εξετάστηκε η περίπτωση μηδενικής ατέλειας και κατά τις δύο ιδιομορφές λυγισμού). Στον πίνακα 2.4 φαίνονται οι τιμές του φορτίου αστοχίας για τους διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων ελέγχου:

n	Τοπική ατέλεια $\epsilon_{\text{τοπ.}}$	$\epsilon_{\text{καθολ.}} = L/2000$	$\epsilon_{\text{καθολ.}} = L/1000$	$\epsilon_{\text{καθολ.}} = L/500$	$\epsilon_{\text{καθολ.}} = L/250$
n=0.50	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	972.06	956.664	930.129	885.323
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	966.88	948.431	917.77	868.383
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	955.311	934.248	900.846	849.269
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	925.301	901.535	865.908	813.347
n=0.6737	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2096.24	2043.21	1957.35	1824.85
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	2061.8	1997.96	1901.18	1760.48
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	2000.61	1933.5	1836.19	1698.46
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1876.51	1811.83	1720.69	1593.22
n=0.9099	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	1479.26	1430.3	1355.75	1246.11
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	1457.15	1391.41	1306.71	1193.1
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1394.23	1282.92	1216.63	1120.51
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1208.81	1186.05	1124.09	1037.74
n=0.9737	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	1523.41	1473.58	1395.64	1278.66
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	1496.12	1434.42	1349.66	1233.56
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1406.87	1353.52	1278.36	1173.18
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1278.8	1235.44	1172.58	1082.44
n=0.9914	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2333.27	2253.76	2127.87	1938.89
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	2237.59	2153.8	2030.85	1859.17
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	2092.35	2020.65	1913.09	1759.02
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1888.36	1829.78	1740.69	1610.2
n=1.0037	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2318.83	2251.82	2154.49	1931.54
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	2106.21	1948.9	1861.71	1729.71
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1939.92	1757.71	1685.81	1574.49
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1606.85	1491.38	1438.13	1353.32
n=1.0162	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2286.86	2215.28	2102.91	1937.18
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	2179.43	2089.49	1964.04	1789.79
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	2031.69	1954.14	1844.62	1689.75
	$\epsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1826.61	1761.43	1670.07	1539.59

n=1.0417	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2233.04	2163.44	2052.3	1884.81
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	2139.02	2052.42	1930.76	1760.94
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1996.96	1922.56	1816.21	1664.91
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1799.73	1737.91	1649.19	1521.34
n=1.14622	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	2033.35	1976.79	1882	1733
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	1944.26	1870.62	1764.38	1611.79
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1813.99	1750.29	1657.15	1521.57
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1634.91	1581.46	1503.25	1388.57
n=1.51597	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	1929.49	1885.52	1805.14	1667.65
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	1810.7	1756.87	1672.14	1540.38
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1693.4	1643.96	1567.28	1448.95
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1529.05	1485.19	1418.51	1316.87
n=1.91804	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	1443.97	1415.74	1362.66	1268.05
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	1341.98	1308.8	1254.22	1164.67
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	1258.95	1227.1	1176.15	1094.36
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	1140.25	1110.73	1064.92	993.216

Πίνακας 2.4: Φορτίο αστοχίας σύνθετου υποστυλώματος

Στον πίνακα 2.5 φαίνονται οι τιμές ( $l_{\max}=P_{\max}/\min(P_{cr})$ ) του φορτίου αστοχίας κάθε φορά αδιαστατοποιημένο με το μικρότερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

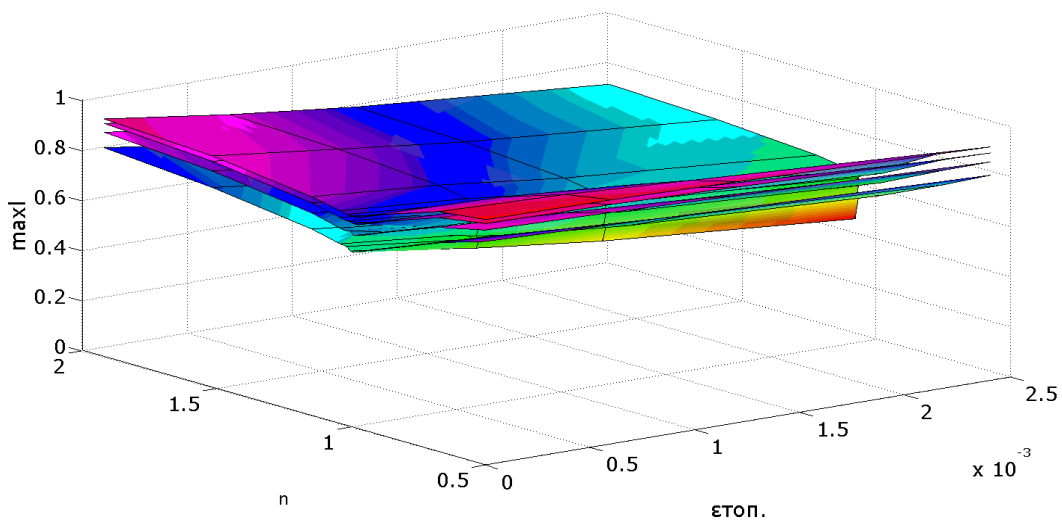
n	Τοπική ατέλεια $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$	$\varepsilon_{\text{καθολ.}}=L/2000$	$\varepsilon_{\text{καθολ.}}=L/1000$	$\varepsilon_{\text{καθολ.}}=L/500$	$\varepsilon_{\text{καθολ.}}=L/250$
n=0.50	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.979	0.963	0.937	0.892
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.974	0.955	0.924	0.875
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.962	0.941	0.907	0.855
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.932	0.908	0.872	0.819
n=0.6737	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.958	0.934	0.895	0.834
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.942	0.913	0.869	0.805
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.914	0.884	0.839	0.776
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.858	0.828	0.786	0.728
n=0.9099	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.873	0.844	0.800	0.735
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.860	0.821	0.771	0.704
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.823	0.757	0.718	0.661
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.713	0.700	0.663	0.612
n=0.9737	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.841	0.813	0.770	0.706
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.826	0.792	0.745	0.681
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.776	0.747	0.706	0.647
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.706	0.682	0.647	0.597
n=0.9914	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.840	0.812	0.766	0.698
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.806	0.776	0.731	0.670
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.754	0.728	0.689	0.633
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.680	0.659	0.627	0.580



n=1.0037	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.841	0.817	0.781	0.700
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.764	0.707	0.675	0.627
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.704	0.637	0.611	0.571
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.583	0.541	0.522	0.491
n=1.0162	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.842	0.816	0.775	0.714
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.803	0.770	0.723	0.659
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.748	0.720	0.679	0.622
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.673	0.649	0.615	0.567
n=1.0417	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.849	0.822	0.780	0.717
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.813	0.780	0.734	0.669
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.759	0.731	0.690	0.633
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.684	0.661	0.627	0.578
n=1.14622	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.873	0.848	0.808	0.744
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.835	0.803	0.757	0.692
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.779	0.751	0.711	0.653
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.702	0.679	0.645	0.596
n=1.51597	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.923	0.902	0.863	0.797
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.866	0.840	0.800	0.737
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.810	0.786	0.749	0.693
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.731	0.710	0.678	0.630
n=1.91804	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=0$	0.948	0.930	0.895	0.833
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/1000=0.0006$	0.881	0.860	0.824	0.765
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/500=0.0012$	0.827	0.806	0.772	0.719
	$\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$	0.749	0.729	0.699	0.652

Πίνακας 2.5: Αδιαστατοποιημένο φορτίο αστοχίας σύνθετου υποστυλώματος

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται η τρισδιάστατη απεικόνιση των παραπάνω αποτελεσμάτων.

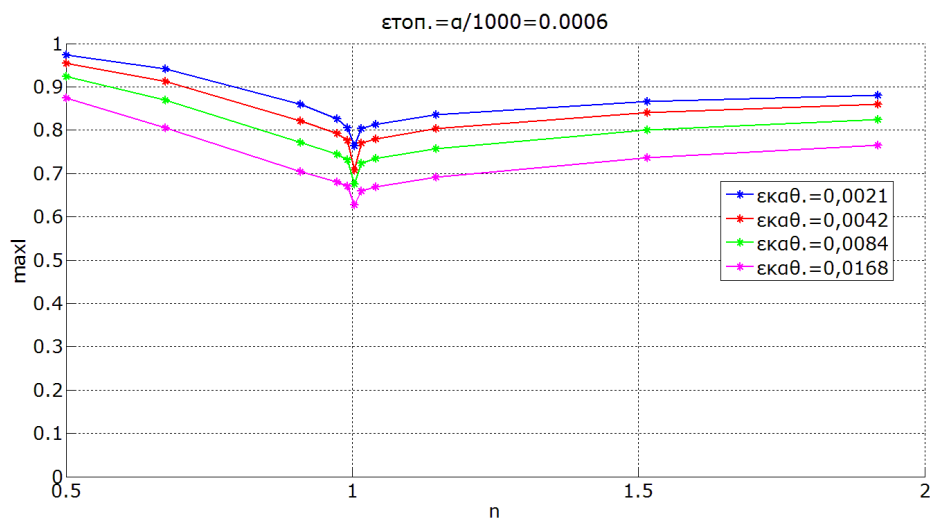


Σχήμα 2.84: Τρισδιάστατη απεικόνιση του οριακού φορτίου για διάφορους συνδυασμούς των  $n$ ,  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ ,  $\varepsilon_{\text{καθ.}}$ .

Η ανώτερη καμπύλη αφορά στην αρχική καθολική ατέλεια  $\epsilon_{καθ.}=0.0021$ , και ομοίως οι άλλες αφορούν στις ατέλειες  $\epsilon_{καθ.}=0.0042$ ,  $\epsilon_{καθ.}=0.0084$ ,  $\epsilon_{καθ.}=0.0168$ .

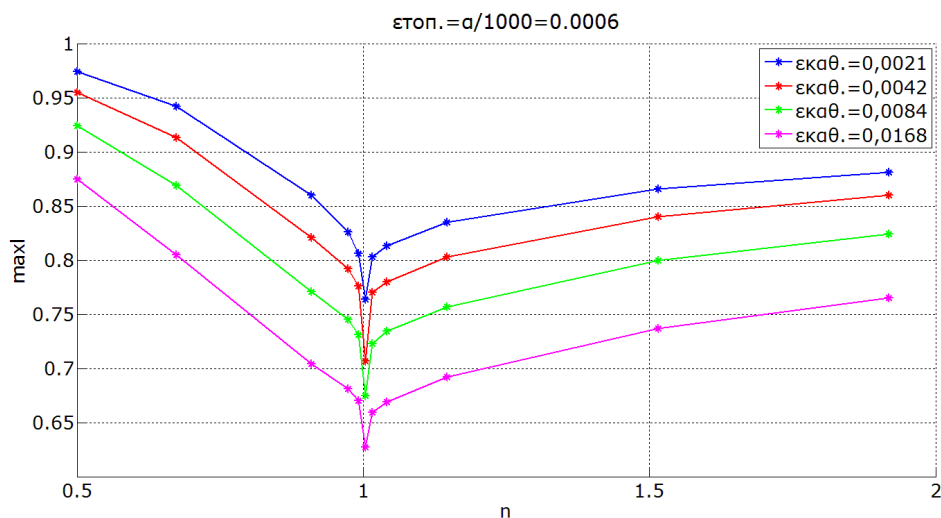
Παρακάτω παρουσιάζονται και κάποιες κατακόρυφες τομές του σχήματος 2.84 για καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις παραμετρικές αναλύσεις.

Στα επόμενα διαγράμματα, φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει του λόγου των κρίσιμων φορτίων, καθώς η τοπική ατέλεια παραμένει σταθερή  $\epsilon_{τοπ.}=a/1000=0.0006$ .



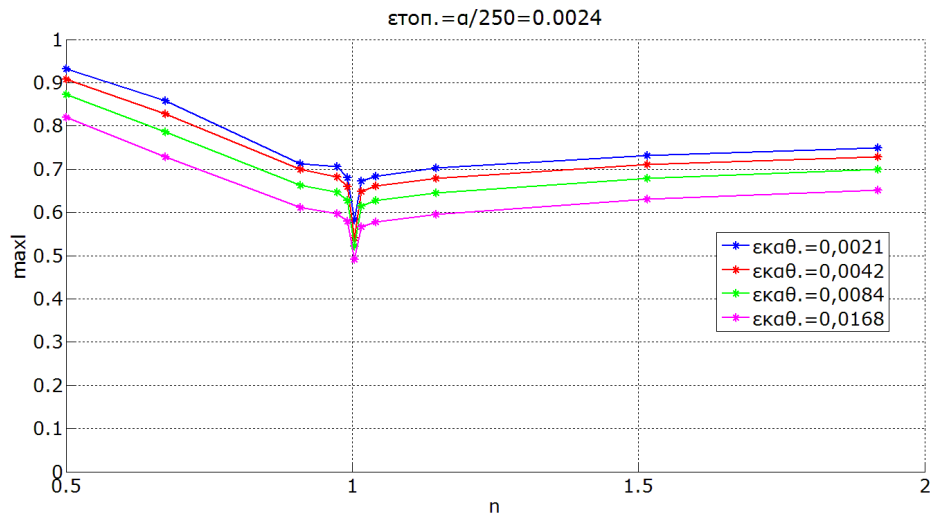
Σχήμα 2.85: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του n

Η επιρροή της αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού στο οριακό φορτίο φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.86:



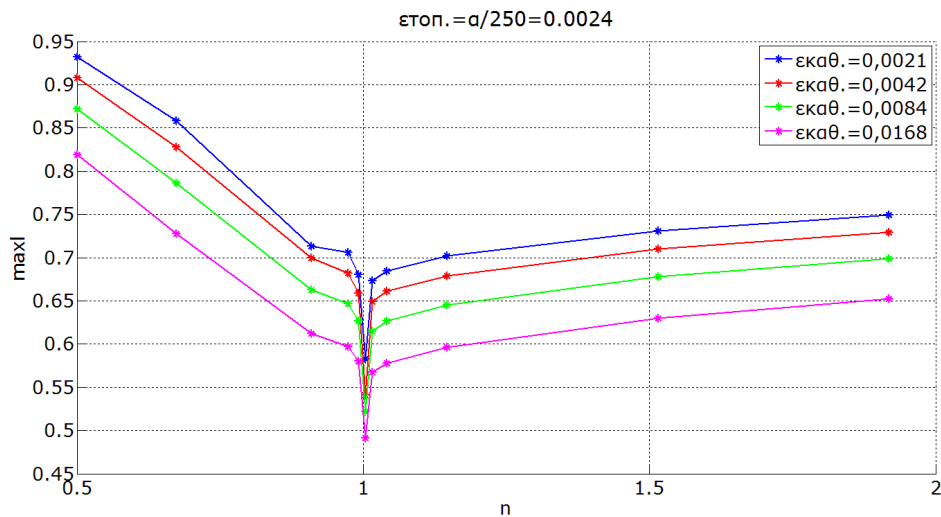
Σχήμα 2.86: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του n

Στα επόμενα διαγράμματα, φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει του λόγου των κρίσιμων φορτίων, καθώς η τοπική ατέλεια παραμένει σταθερή  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}=a/250=0.0024$ .



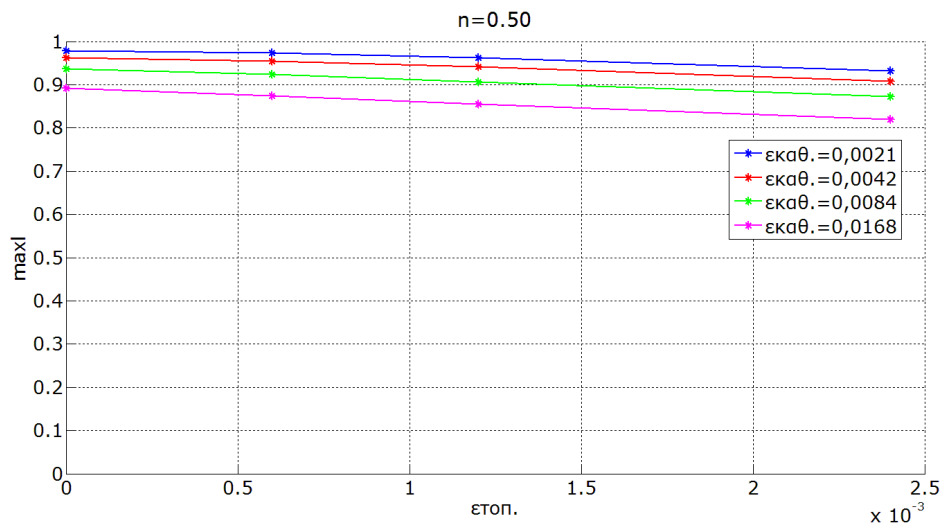
Σχήμα 2.87: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του n

Η επιρροή της αλληλεπίδρασης των κρίσιμων φορτίων λυγισμού στο οριακό φορτίο φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.88:



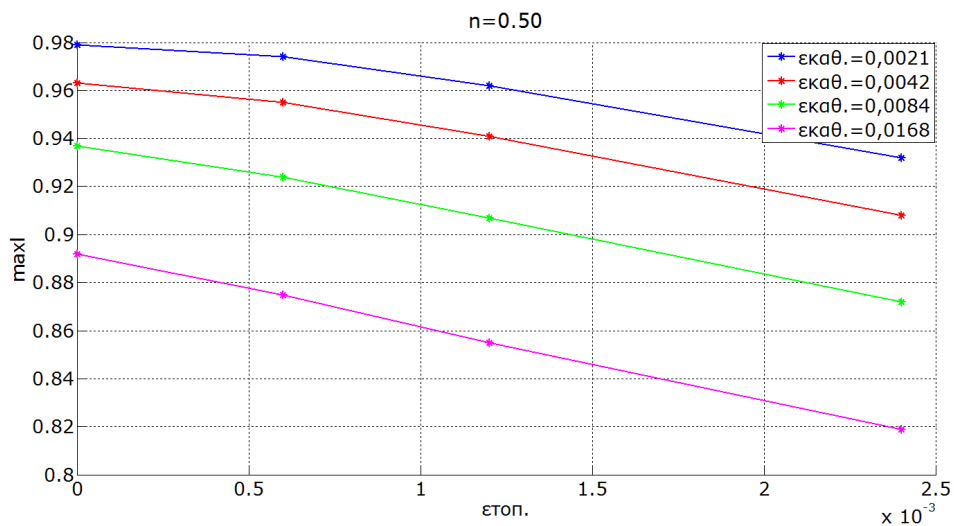
Σχήμα 2.88: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του n

Στα επόμενα διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει της τοπικής ατέλειας  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ , καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων παραμένει σταθερός  $n=0.5$ .



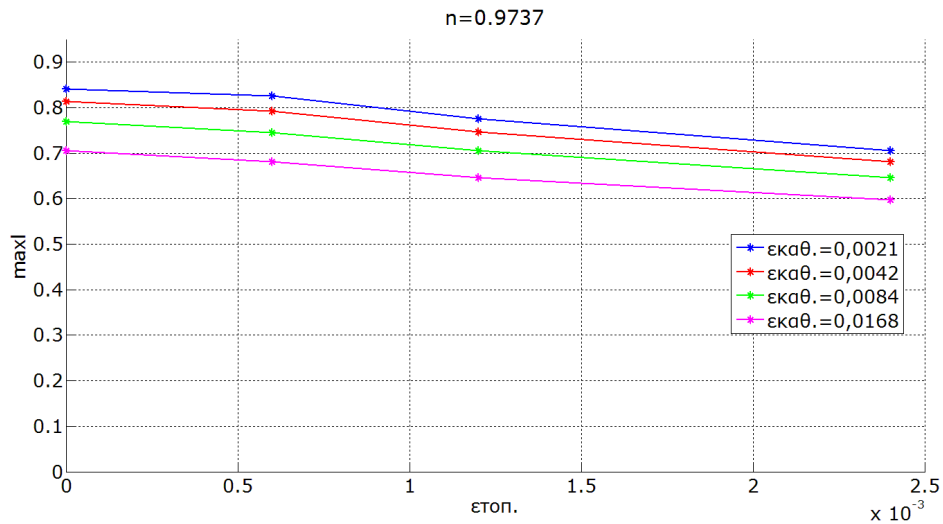
Σχήμα 2.89: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Η επιρροή της τοπικής ατέλειας στη φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστρώματος φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.90:



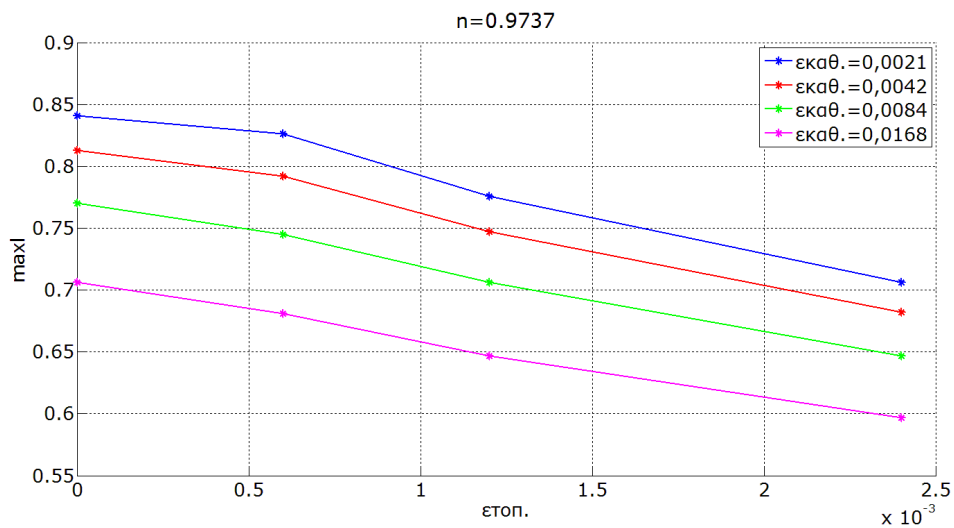
Σχήμα 2.90: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Στα επόμενα διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει της τοπικής ατέλειας  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ , καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων παραμένει σταθερός  $n=0.9737$ .



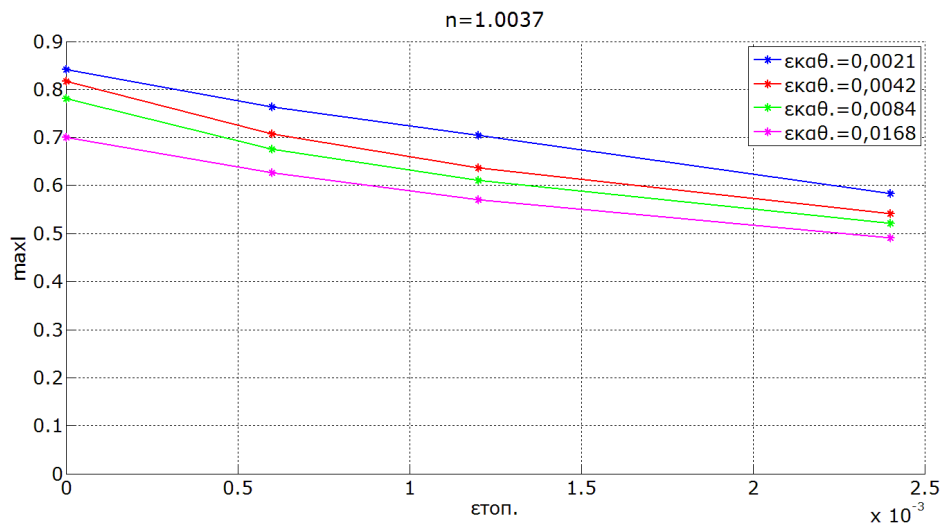
Σχήμα 2.91: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Η επιρροή της τοπικής ατέλειας στη φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστυλώματος φαίνεται πιο καθαρά στο Σχήμα 2.92:



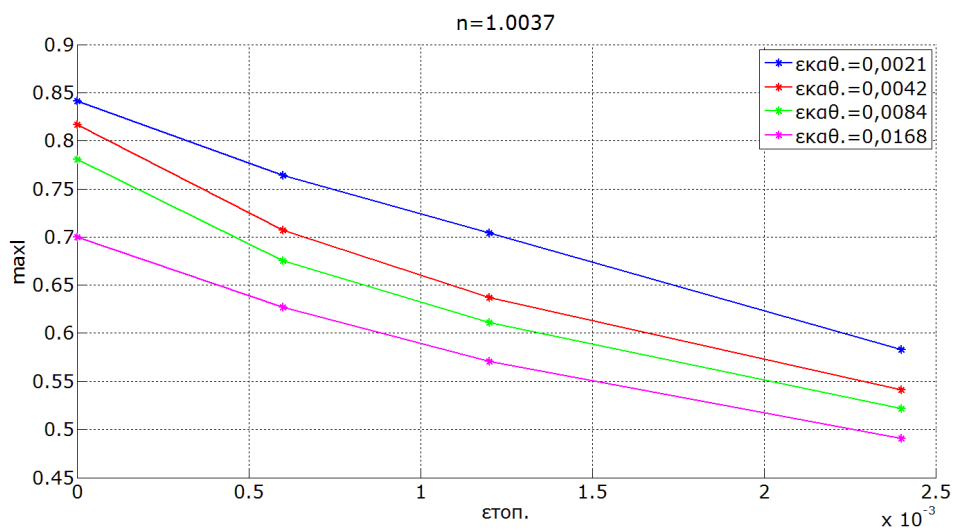
Σχήμα 2.92: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Στα επόμενα διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει της τοπικής ατέλειας  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ , καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων παραμένει σταθερός  $n=1.0037$ .



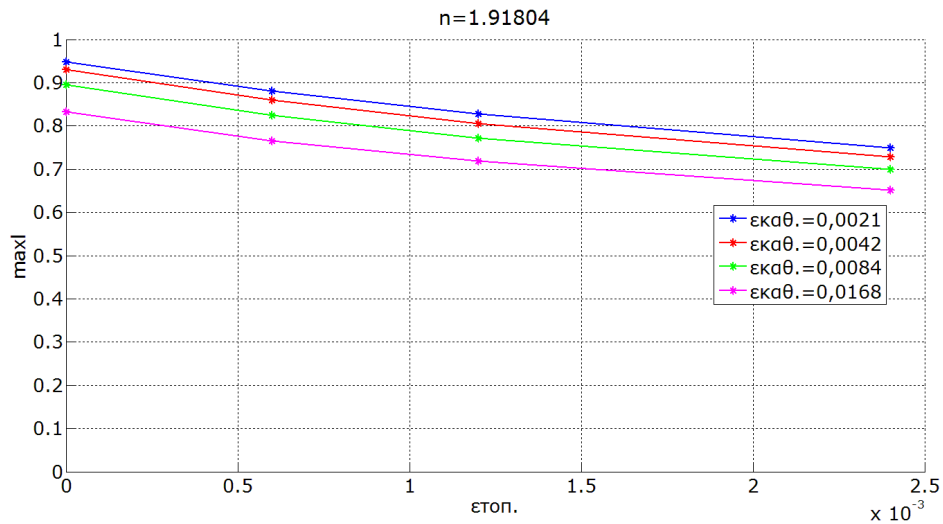
Σχήμα 2.93: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Η επιρροή της τοπικής ατέλειας στη φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστρώματος φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.94:



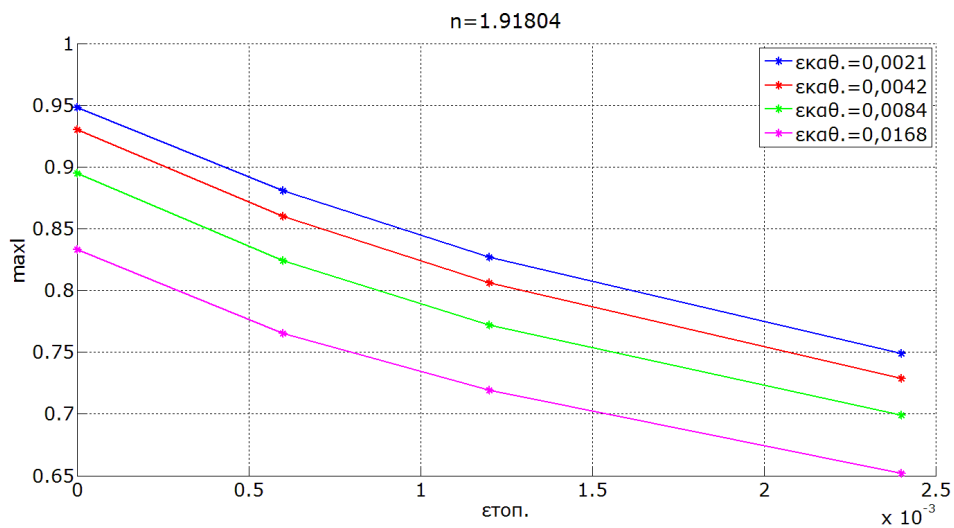
Σχήμα 2.94: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Στα επόμενα διαγράμματα φαίνεται η μεταβολή του οριακού φορτίου συναρτήσει της τοπικής ατέλειας  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ , καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων παραμένει σταθερός  $n=1.91804$ .



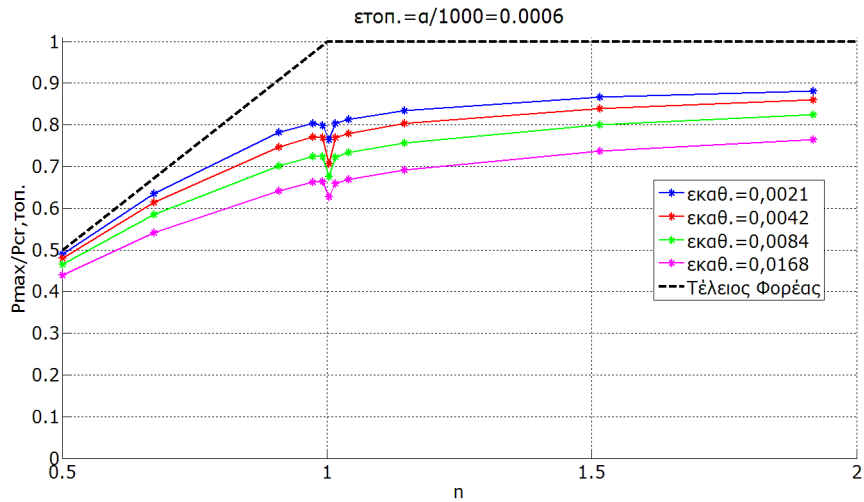
Σχήμα 2.95: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Η επιρροή της τοπικής ατέλεια στη φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστυλώματος φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 2.96:

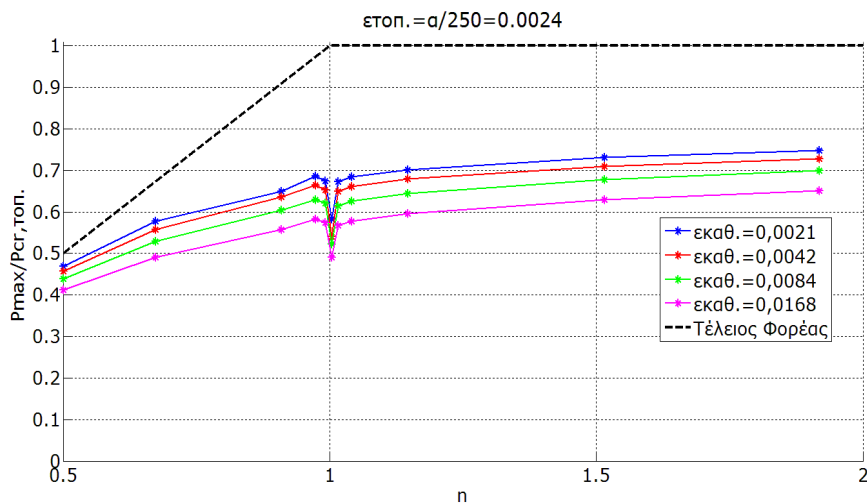


Σχήμα 2.96: Μεταβολή οριακού φορτίου συναρτήσει του  $\varepsilon_{\text{τοπ.}}$ .

Τέλος, για λόγους πληρότητας, παρουσιάζονται τα διαγράμματα ευαισθησίας του φορέα σε αρχική τοπική ατέλεια. Στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζεται το μέγιστο φορτίο διαιρεμένο με το κρίσιμο φορτίο τοπικού λυγισμού, ενώ στον οριζόντιο άξονα ο λόγος των κρίσιμων φορτίων  $n$ .



Σχήμα 2.97: Διάγραμμα ευαισθησίας σε αρχική τοπική ατέλεια



Σχήμα 2.98: Διάγραμμα ευαισθησίας σε αρχική τοπική ατέλεια

### 2.3.1.5 Συμπεράσματα

Από τις παραπάνω παραμετρικές αναλύσεις συμπεραίνουμε τα εξής:

- Όσο η αρχική καθολική ατέλεια αυξάνεται, ενώ η τοπική παραμένει σταθερή, μειώνεται η φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστυλώματος.
- Όσο η αρχική τοπική ατέλεια αυξάνεται, ενώ η καθολική παραμένει σταθερή, μειώνεται η φέρουσα ικανότητα του σύνθετου υποστυλώματος.
- Καθώς ο λόγος των κρίσιμων φορτίων λυγισμού των δύο ιδιομορφών πλησιάζει τη μονάδα, το μέγιστο φορτίο που αντέχει ο φορέας μειώνεται.



Για  $n \sim 1$  ο παραπάνω λόγος παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Αυτό οφείλεται στην έντονη αλληλεπίδραση τοπικής και καθολικής ιδιομορφής λυγισμού. Η μείωση της φέρουσας ικανότητας λόγω του παραπάνω φαινομένου φθάνει έως και το 40% για τις δεδομένες τιμές αρχικών ατελειών.

- Όταν είναι κρίσιμος ο καθολικός λυγισμός ( $n \sim 0.5$ ) δεν είναι τόσο δυσμενές για το υποσύλωμα όπως στην περίπτωση που κρίσιμος είναι ο τοπικός ( $n \sim 2$ ). Παρατηρείται δηλαδή πολύ εντονότερο το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών λυγισμού όταν  $n \sim 2$ , με αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη μείωση της αντοχής του φορέα. Η πτώση της φέρουσας ικανότητάς του, οφείλεται και στο γεγονός ότι η ύπαρξη έστω και μιας μικρής τιμής αρχικής τοπικής ατέλειας, επηρεάζει πολύ περισσότερο στην περίπτωση όπου κρίσιμος είναι ο τοπικός λυγισμός, πράγμα το οποίο είναι εμφανές από τα διαγράμματα ευαισθησίας σε τοπική ατέλεια. Καθώς η τοπική ατέλεια αυξάνεται, το παραπάνω φαινόμενο γίνεται ακόμη εντονότερο.
- Παρατηρείται ότι η επιρροή της καθολικής ατέλειας στη φέρουσα ικανότητα του υποστυλώματος παραμένει σταθερή. Ακόμη και για την περίπτωση ταύτισης των δύο φορτίων λυγισμού ( $n \sim 1$ ), το υποσύλωμα δε φαίνεται να γίνεται πιο ευαίσθητο σε μεταβολές της καθολικής ατέλειας. Για αύξηση της καθολικής ατέλειας από  $L/2000$  σε  $L/250$  έχουμε μια μείωση της αντοχής της τάξεως του 10%-20% ανεξαρτήτως τοπικής ατέλειας και λόγου κρίσιμων φορτίων.
- Παρατηρούμε ότι καθώς  $n \sim 1$  (αλληλεπίδραση ιδιομορφών λυγισμού) έχουμε μεγαλύτερη ευαισθησία στην αύξηση της τοπικής ατέλειας του υποστυλώματος. Για αύξηση της τοπικής ατέλειας από 0 έως  $a/250$  έχουμε μείωση της αντοχής του φορέα ανάλογα με το λόγο κρίσιμων φορτίων που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$n=0.5$	7%
$n=0.9737$	17%
$n=1.0037$	32%
$n=1.0417$	20%
$n=1.91804$	22%

## 2.3.2 Παράδειγμα 2

### 2.3.2.1 Το προσομοίωμα

Στο ίδιο σύνθετο υποστύλωμα με προηγουμένως, εξετάζεται η περίπτωση της αλληλεπίδρασης του καθολικού λυγισμού εντός επιπέδου της σύνθετης λειτουργίας (επίπεδο xz) και του καθολικού λυγισμού εκτός επιπέδου (επίπεδο yz). Για να απαλλαγούμε από φαινόμενα τοπικού λυγισμού των πελμάτων του σύνθετου υποστυλώματος, χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη συμπαγή διατομή με επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων εντός επιπέδου, και χωρίς την επιρροή διατμητικών παραμορφώσεων εκτός επιπέδου.

Κάνοντας μια μη γραμμική ανάλυση γεωμετρίας συμπεραίνουμε ότι και οι δύο ιδιομορφές λυγισμού έχουν ευσταθή δρόμο ισορροπίας.

### 2.3.2.2 Αριθμητική επεξεργασία

Για τον παραπάνω φορέα, πραγματοποιούμε μια σειρά από παραμετρικές αναλύσεις στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ADINA. Αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι ο λόγος των δύο κρίσιμων φορτίων λυγισμού ( $n = P_{cr,x}/P_{cr,y}$ ), κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με μεταβολή της εκτός επιπέδου ροπής αδράνειας του υποστυλώματος, και η τιμή της καθολικής ατέλειας εντός και εκτός επιπέδου. Στόχος είναι να διαπιστώσουμε την επιρροή των ατελειών και του φαινομένου της αλληλεπίδρασης των δύο ιδιομορφών λυγισμού στη συμπεριφορά και τη φέρουσα ικανότητα του φορέα.

Το πλήθος και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων ελέγχου που χρησιμοποιήθηκαν, φαίνονται στον πίνακα 2.6:

n	0.546, 0.996, 1.987
$\epsilon_x$	0, L/1000=0.0042, L/500=0.0084
$\epsilon_y$	L/2000=0.0021, L/1000=0.0042, L/500=0.0084

Πίνακας 2.6: Τιμές παραμέτρων ελέγχου

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δρόμοι ισορροπίας του σύνθετου υποστυλώματος κατά x και κατά y αντίστοιχα, για κάθε λόγο των κρίσιμων φορτίων λυγισμού οι οποίες προέκυψαν από τις 27 αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων.

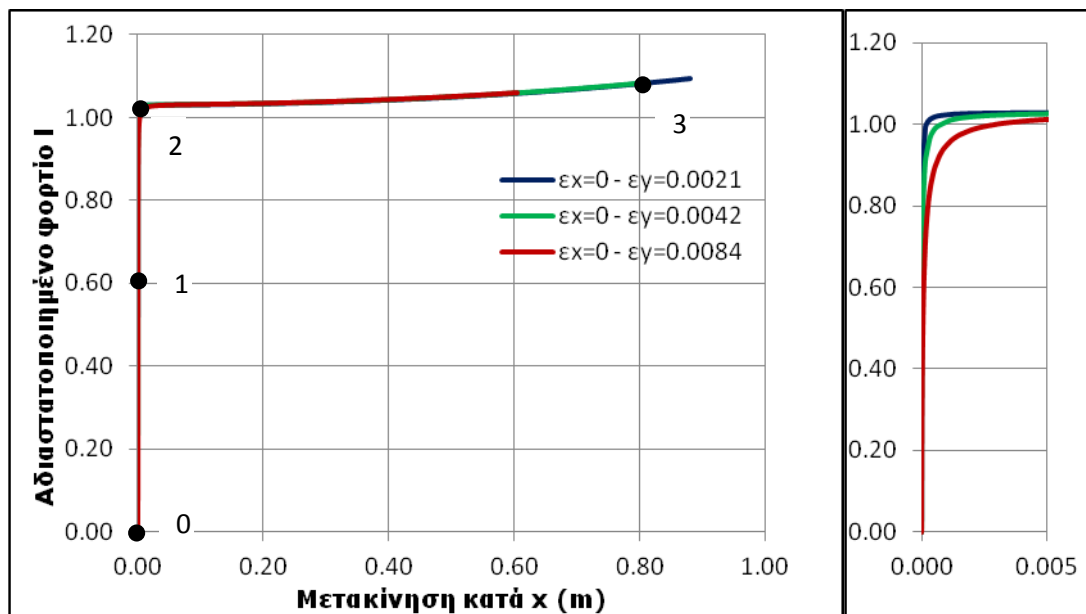
Η παράμετρος  $I$ , αποτελεί το λόγο του μέγιστου φορτίου στο οποίο φθάνει ο φορέας δια το μικρότερο κάθε φορά φορτίο λυγισμού.

$$\eta = 0.546$$

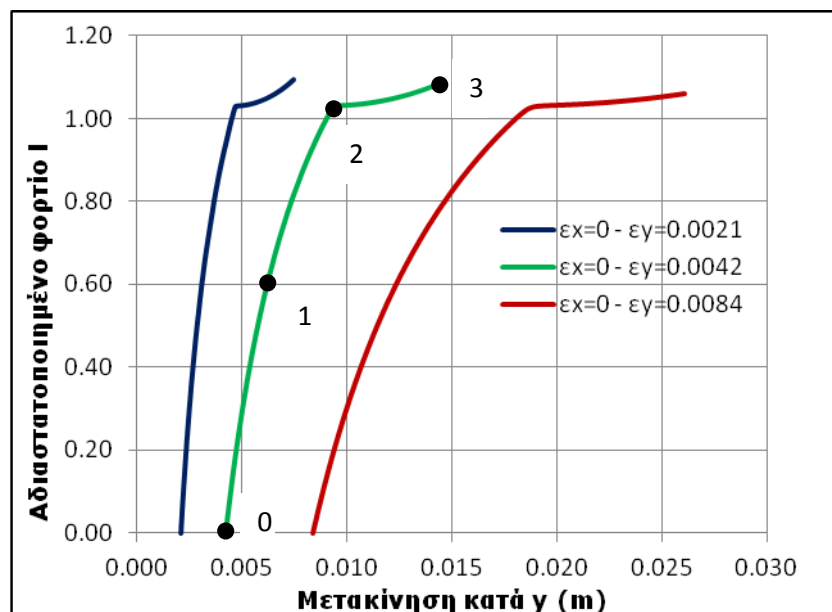
$P_{cr,x} = 6985 \text{ kN}$  (κρίσιμο φορτίο εντός επιπέδου σύνθετης λειτουργίας)

$P_{cr,y} = 12790 \text{ kN}$  (κρίσιμο φορτίο εκτός επιπέδου)

1.  $\varepsilon_x = 0$

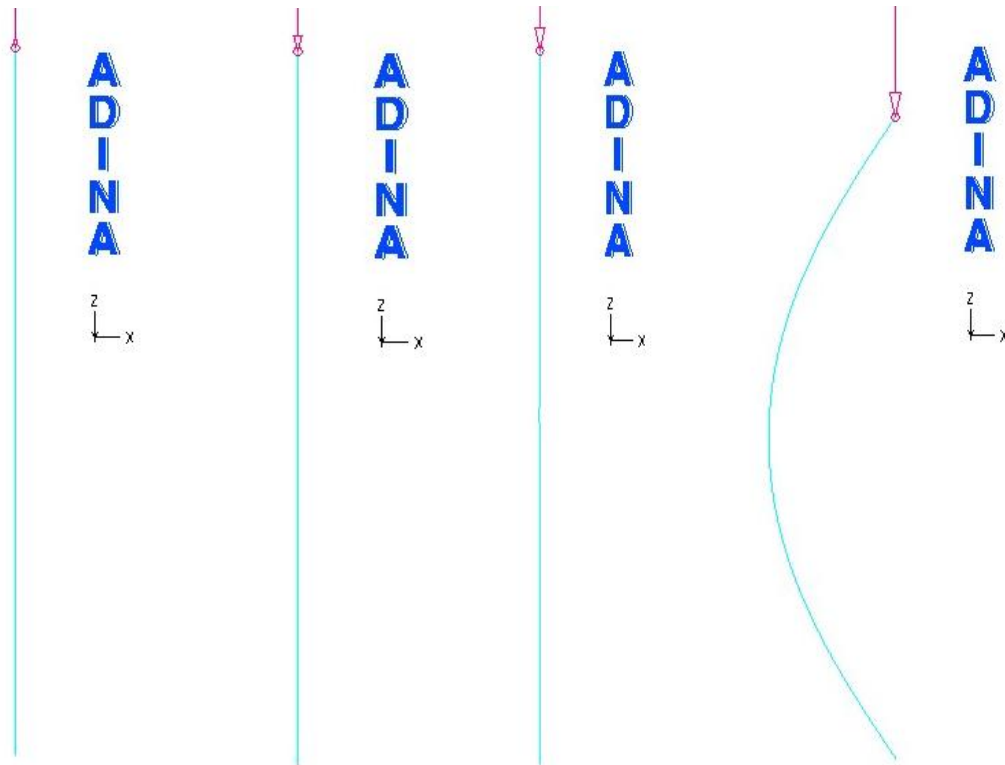


Σχήμα 2.99: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά  $x$

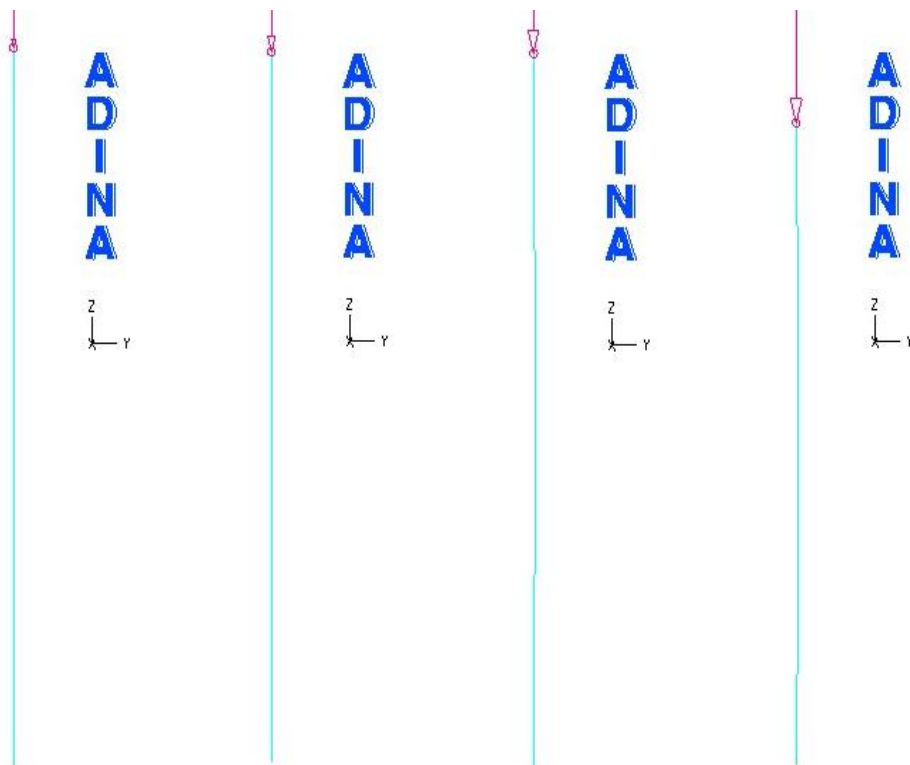


Σχήμα 2.100: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά  $y$

Παρακάτω φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο  $xz$  και στο επίπεδο  $yz$  για την περίπτωση των αρχικών ατελειών  $\varepsilon_{xz}=0$  και  $\varepsilon_{yz}=0.0042$ , σε τέσσερις χαρακτηριστικές θέσεις του δρόμου ισορροπίας (σημείο 0, 1, 2, 3).

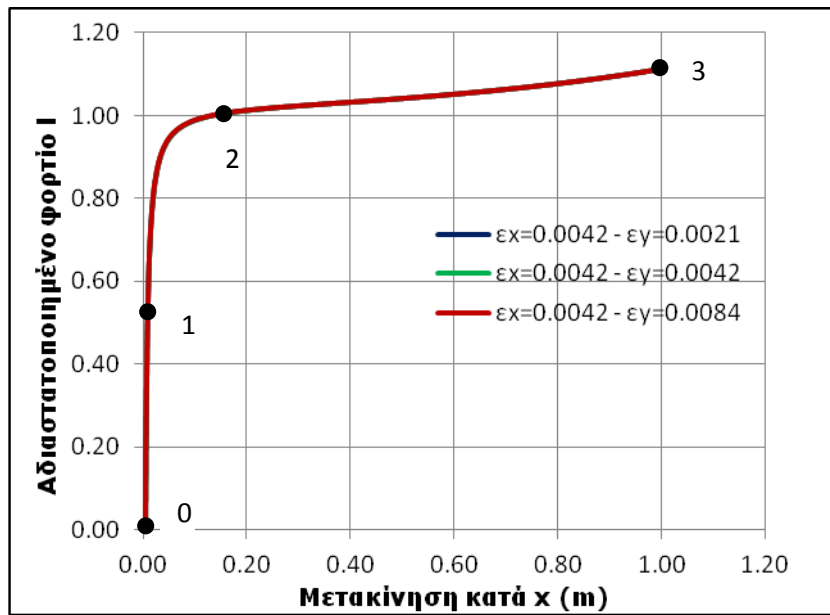


Σχήμα 2.101: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο  $xz$

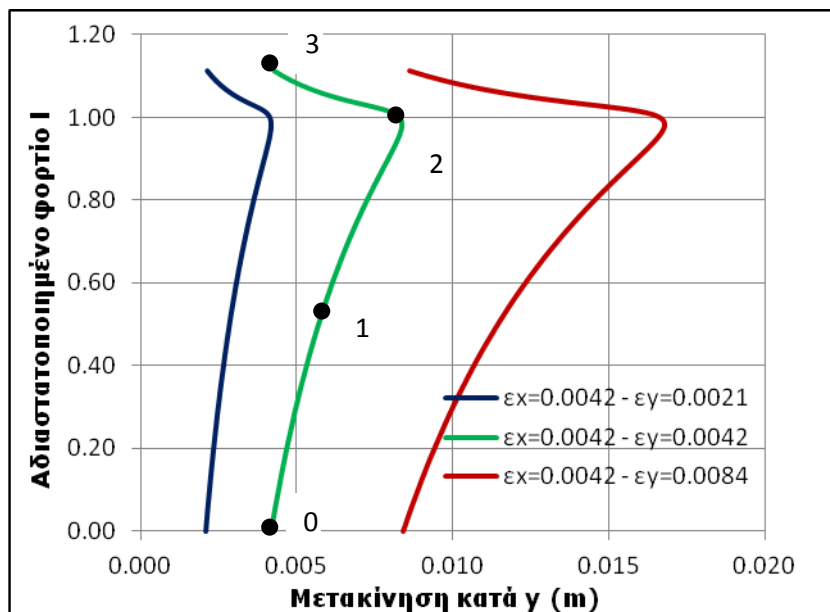


Σχήμα 2.102: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο  $yz$

2.  $\varepsilon_x=0.0042$

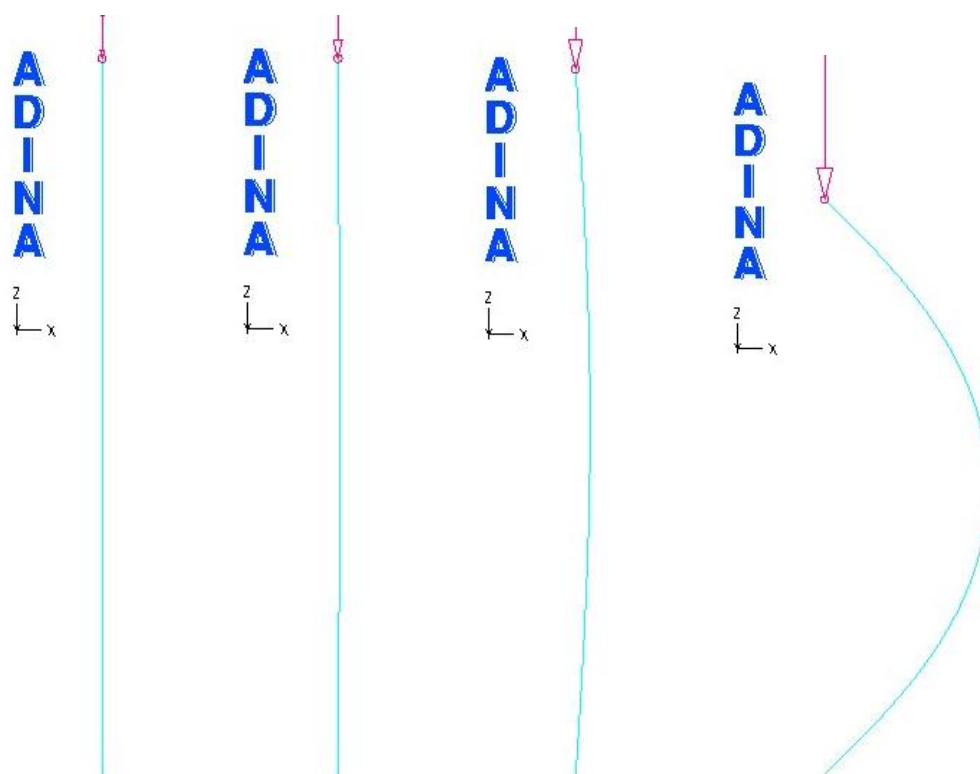


Σχήμα 2.103: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά x

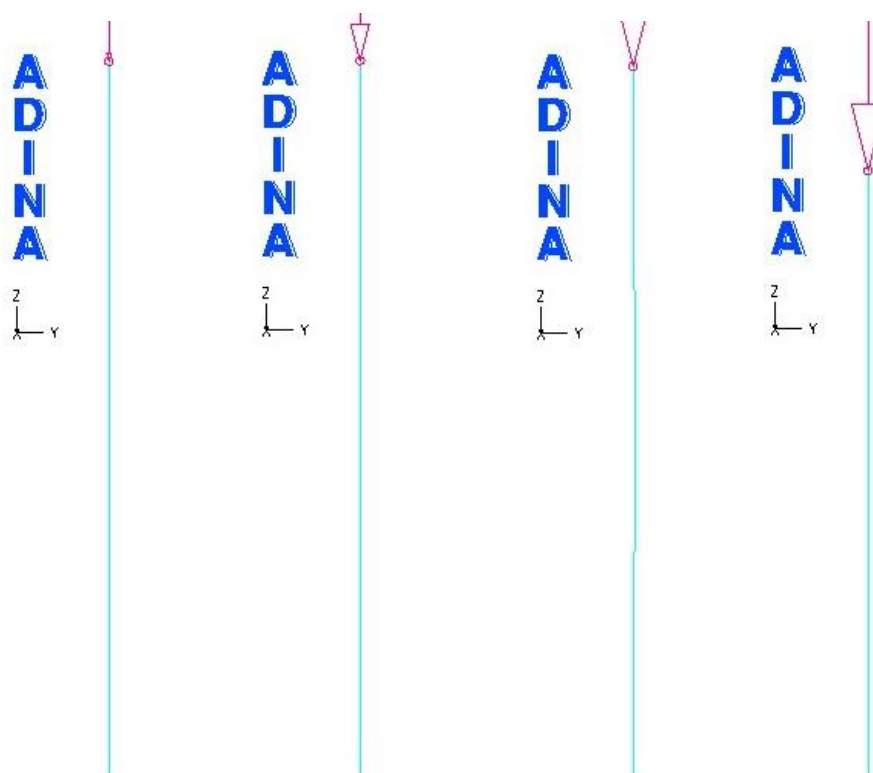


Σχήμα 2.104: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά y

Παρακάτω φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz και στο επίπεδο yz για την περίπτωση των αρχικών ατελειών  $\varepsilon_{xz}=0.0042$  και  $\varepsilon_{yz}=0.0042$ , σε τέσσερις χαρακτηριστικές θέσεις του δρόμου ισορροπίας (σημείο 0, 1, 2, 3).

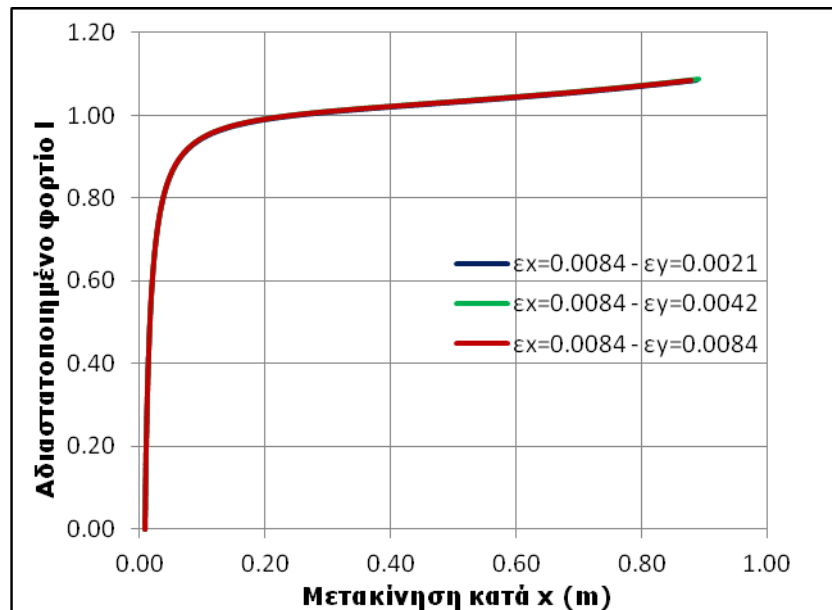


Σχήμα 2.105: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz

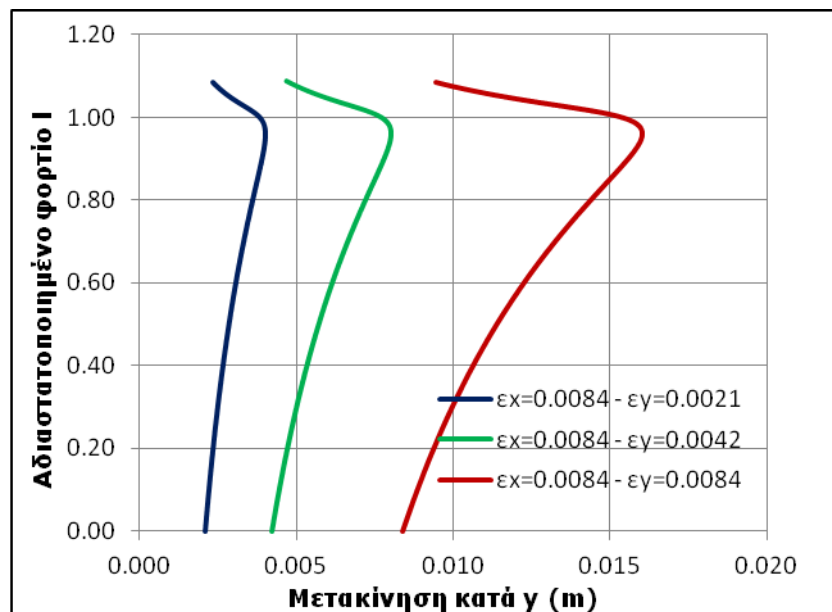


Σχήμα 2.106: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο yz

3.  $\varepsilon_x=0.0084$



Σχήμα 2.107: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά x



Σχήμα 2.108: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση x, είναι εμφανώς (1-2 τάξεις μεγαλύτερη από αυτήν κατά την ισχυρή διεύθυνση y. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το κρίσιμο φορτίο καθολικού λυγισμού κατά x είναι σχεδόν το μισό του άλλου.
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_y$ .
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_x$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$ .

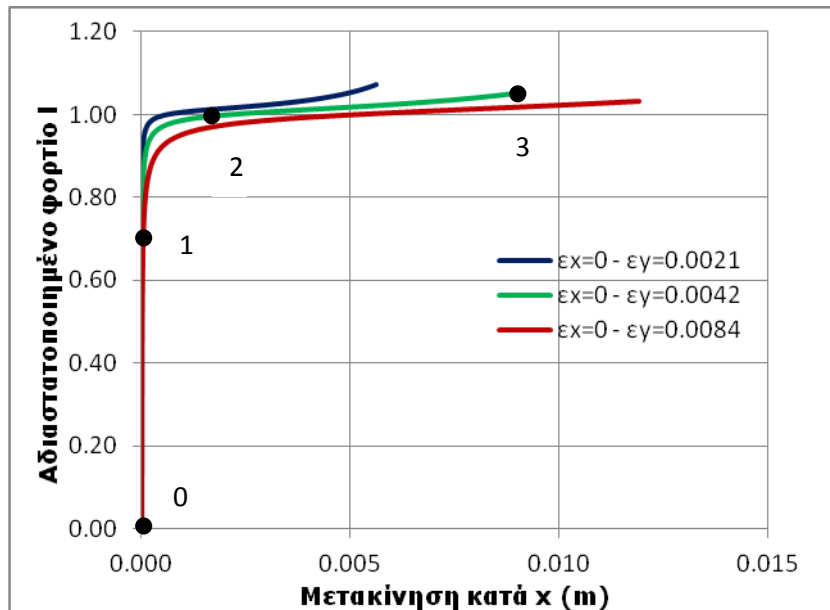
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$  όταν  $\varepsilon_x=0$ .
- Όταν  $\varepsilon_x \neq 0$  η αύξηση της  $\varepsilon_y$  δεν επιφέρει καμία μεταβολή στο δρόμο ισορροπίας του φορέα κατά την ασθενή διεύθυνση  $x$ .

$n=0.996$

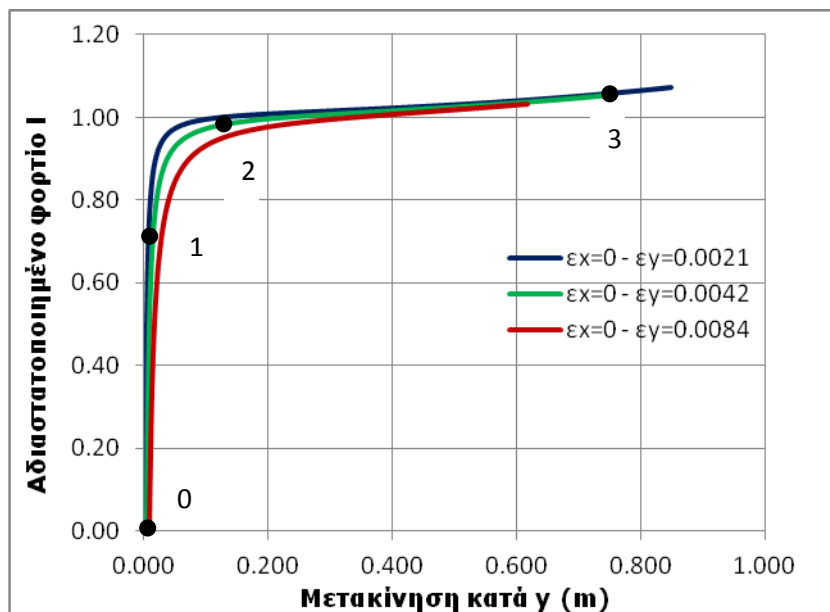
$P_{cr,x} = 6985$  kN (κρίσιμο φορτίο εντός επιπέδου σύνθετης λειτουργίας)

$P_{cr,y} = 7011$  kN (κρίσιμο φορτίο εκτός επιπέδου)

1.  $\varepsilon_x=0$



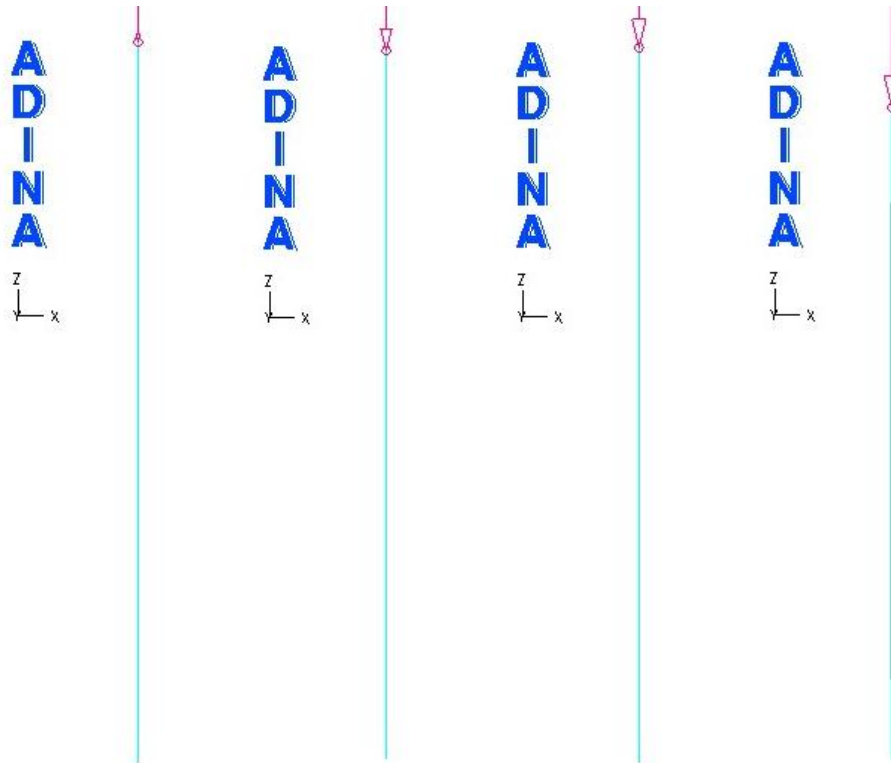
Σχήμα 2.109: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά  $x$



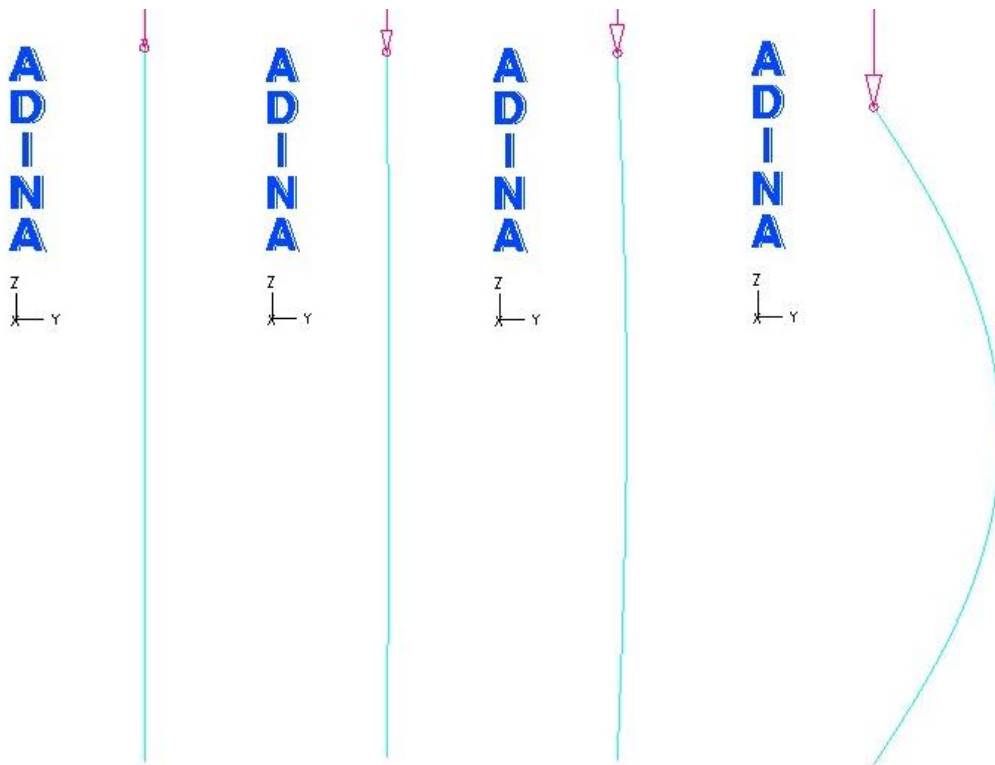
Σχήμα 2.110: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά  $y$



Παρακάτω φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz και στο επίπεδο yz για την περίπτωση των αρχικών ατελειών  $\epsilon_{xz}=0$  και  $\epsilon_{yz}=0.0042$ , σε τέσσερις χαρακτηριστικές θέσεις του δρόμου ισορροπίας (σημείο 0, 1, 2, 3).

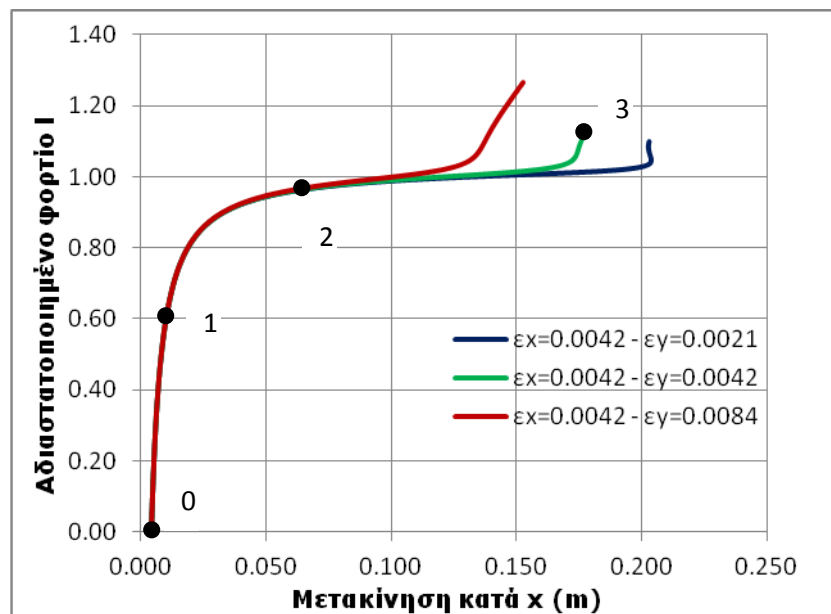


Σχήμα 2.111: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz

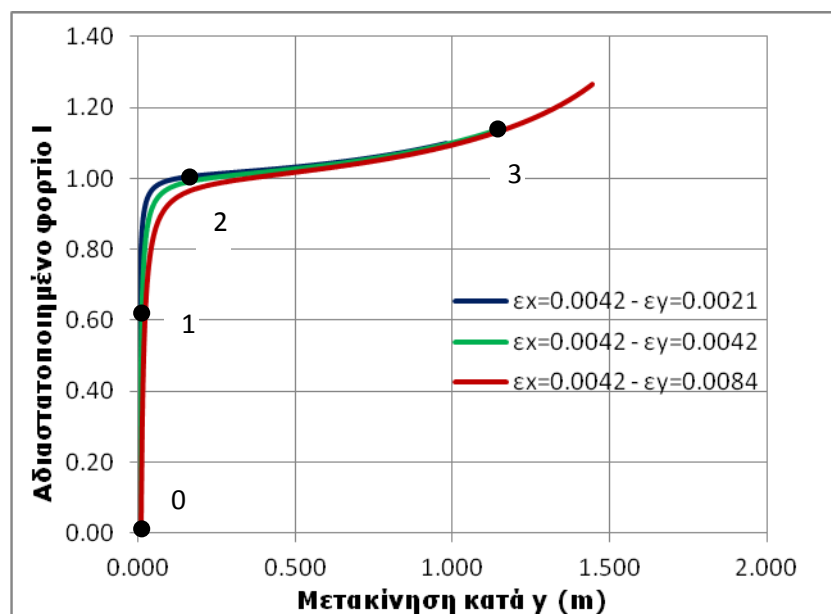


Σχήμα 2.112: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο yz

2.  $\varepsilon_x=0.0042$

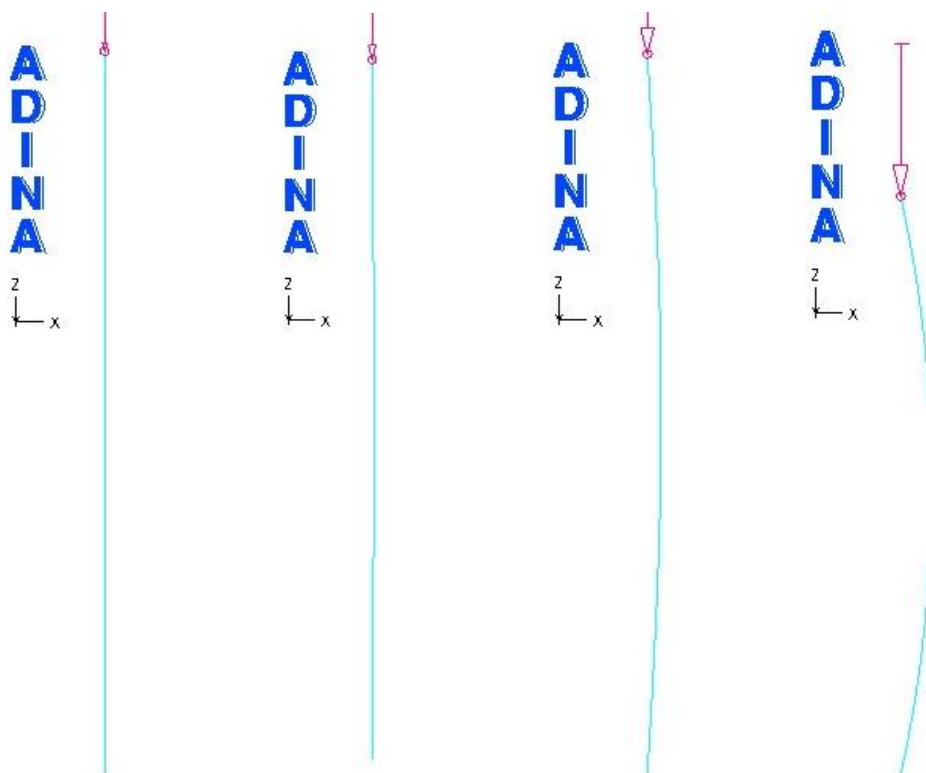


Σχήμα 2.113: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά x

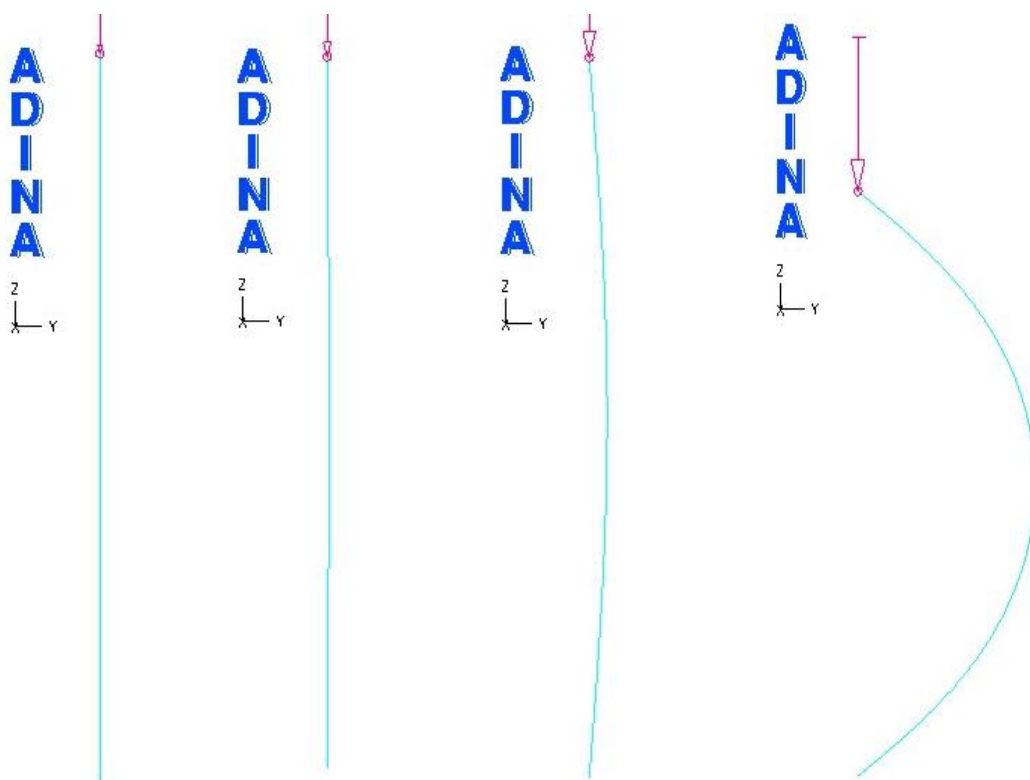


Σχήμα 2.114: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά y

Παρακάτω φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz και στο επίπεδο yz για την περίπτωση των αρχικών ατελειών  $\varepsilon_{xz}=0.0042$  και  $\varepsilon_{yz}=0.0042$ , σε τέσσερις χαρακτηριστικές θέσεις του δρόμου ισορροπίας (σημείο 0, 1, 2, 3).

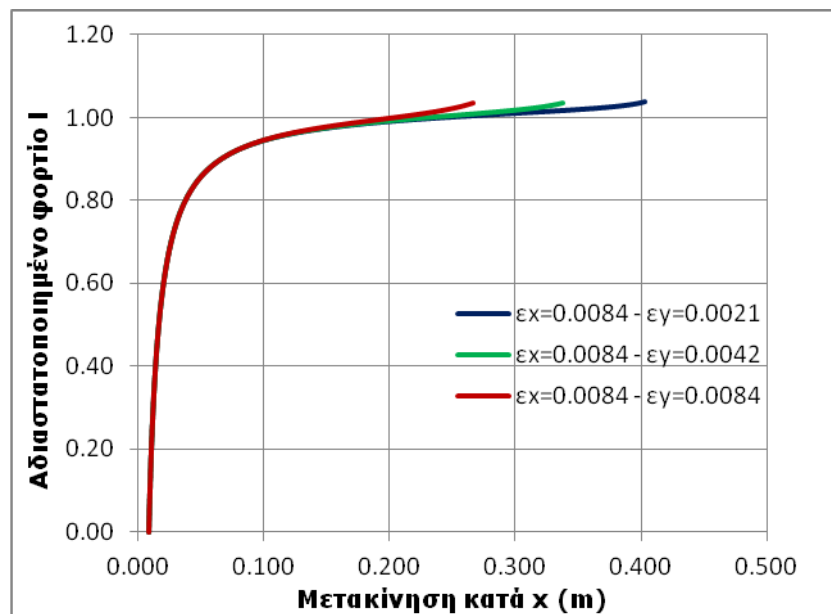


Σχήμα 2.115: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz

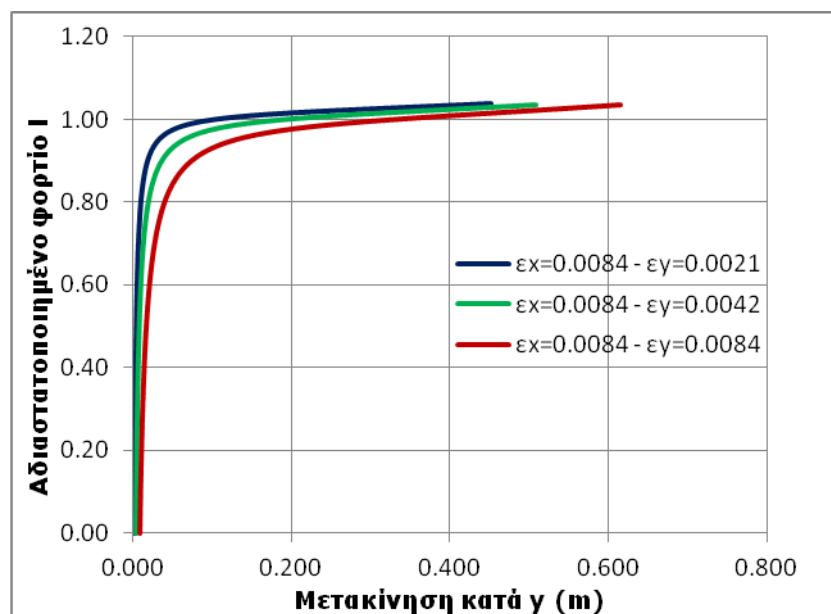


Σχήμα 2.116: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο yz

3.  $\varepsilon_x=0.0084$



Σχήμα 2.117: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά x



Σχήμα 2.118: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_y$ .
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_x$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$ .
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$  όταν  $\varepsilon_x=0$ .

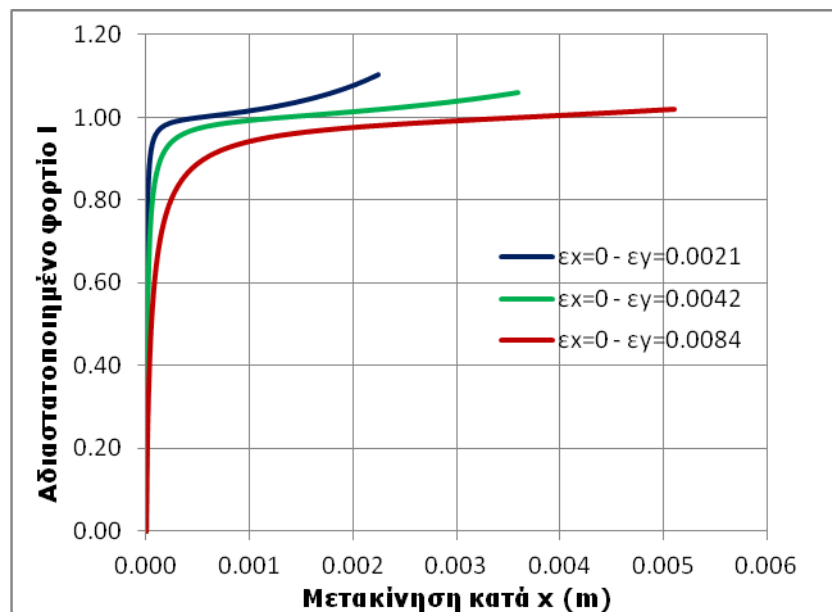
- Όταν  $\varepsilon_x \neq 0$  η αύξηση της  $\varepsilon_y$  επιφέρει ασήμαντη μεταβολή στο δρόμο ισορροπίας του φορέα κατά την ασθενή διεύθυνση  $x$ .

$n=1.987$

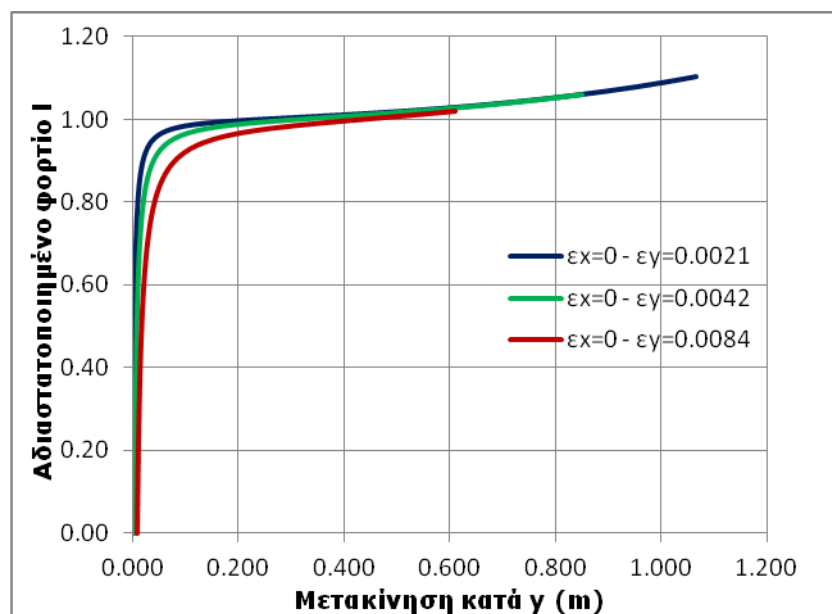
$P_{cr,x} = 6985$  kN (κρίσιμο φορτίο εντός επιπέδου σύνθετης λειτουργίας)

$P_{cr,y} = 3515$  kN (κρίσιμο φορτίο εκτός επιπέδου)

### 1. $\varepsilon_x=0$

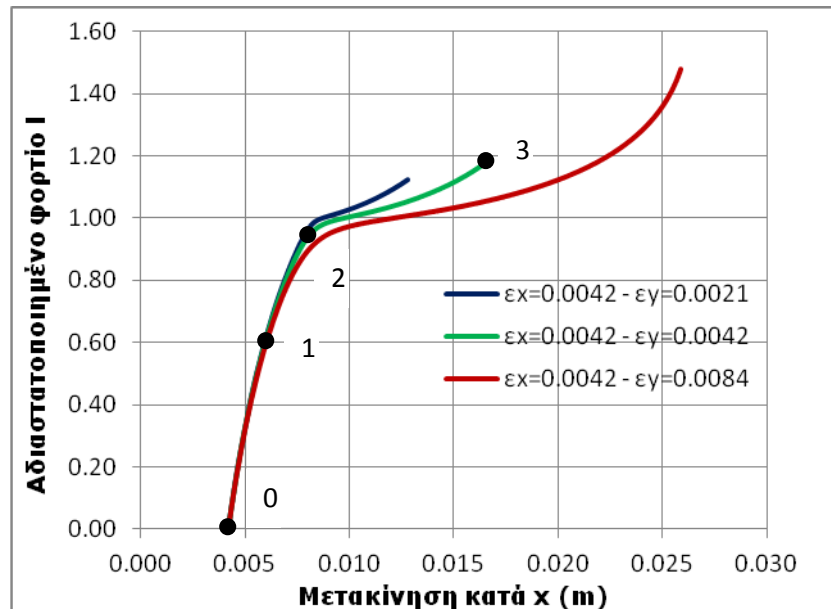


Σχήμα 2.119: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά  $x$

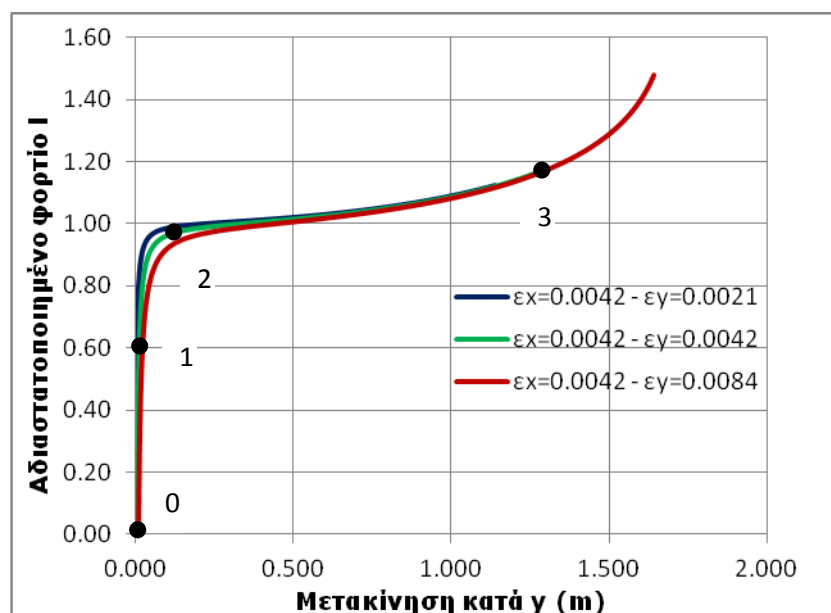


Σχήμα 2.120: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά  $y$

2.  $\varepsilon_x=0.0042$

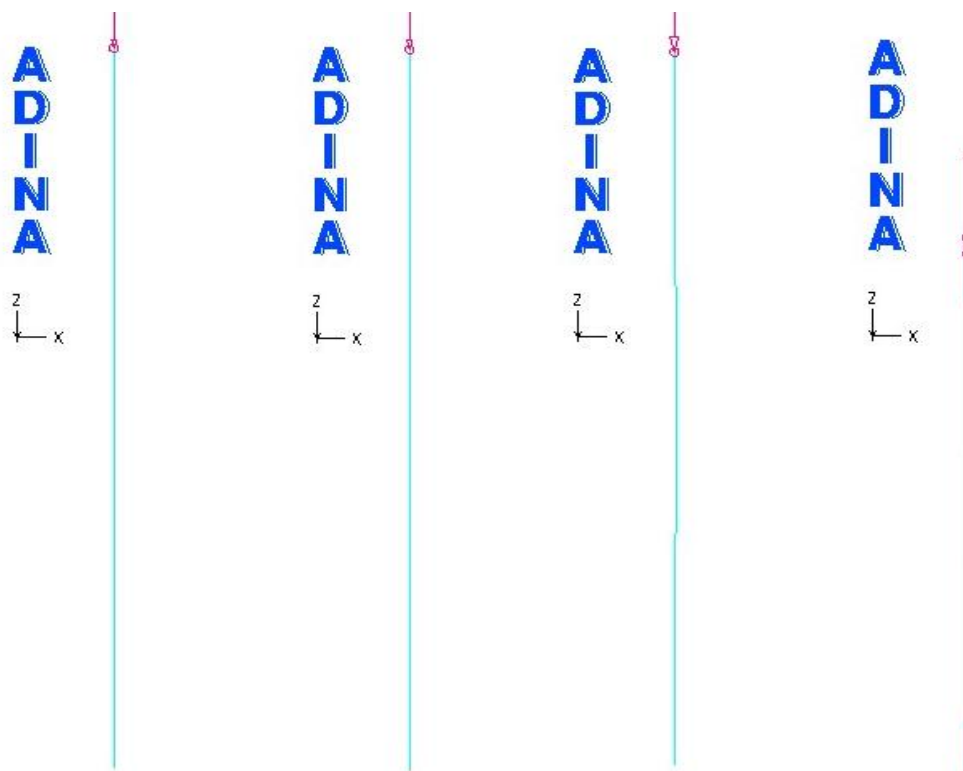


Σχήμα 2.121: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά  $x$

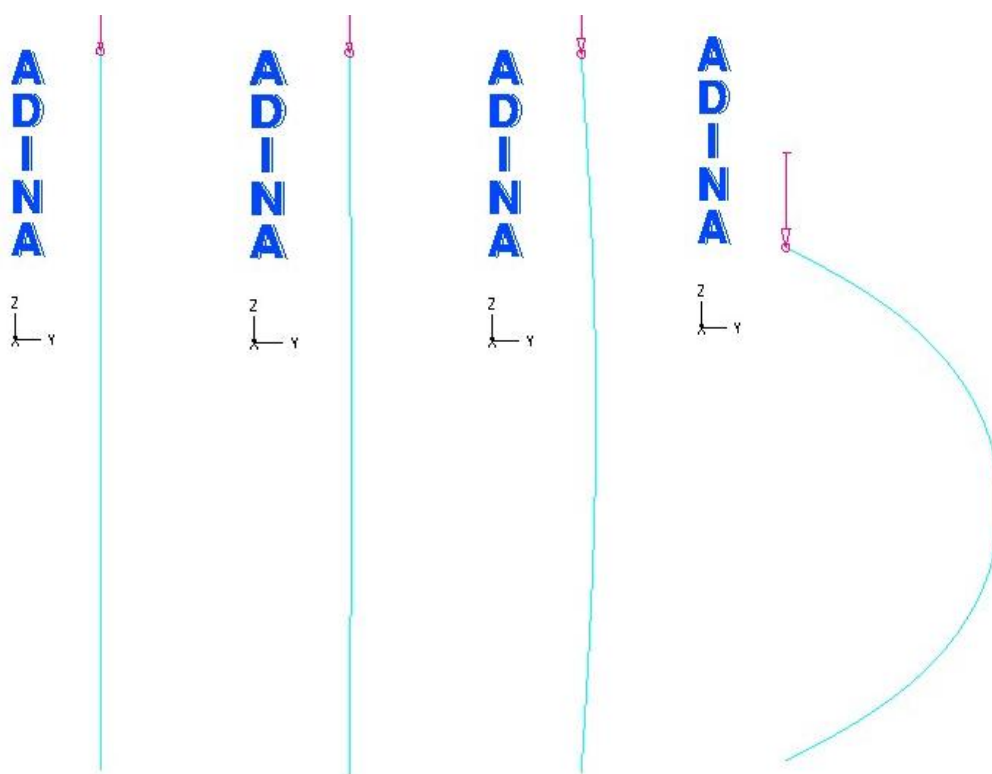


Σχήμα 2.122: Δρόμος ισορροπίας μεσαίου κόμβου κατά  $y$

Παρακάτω φαίνεται ο παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο  $xz$  και στο επίπεδο  $yz$  για την περίπτωση των αρχικών ατελειών  $\varepsilon_{xz}=0.0042$  και  $\varepsilon_{yz}=0.0042$ , σε τέσσερις χαρακτηριστικές θέσεις του δρόμου ισορροπίας (σημείο 0, 1, 2, 3).

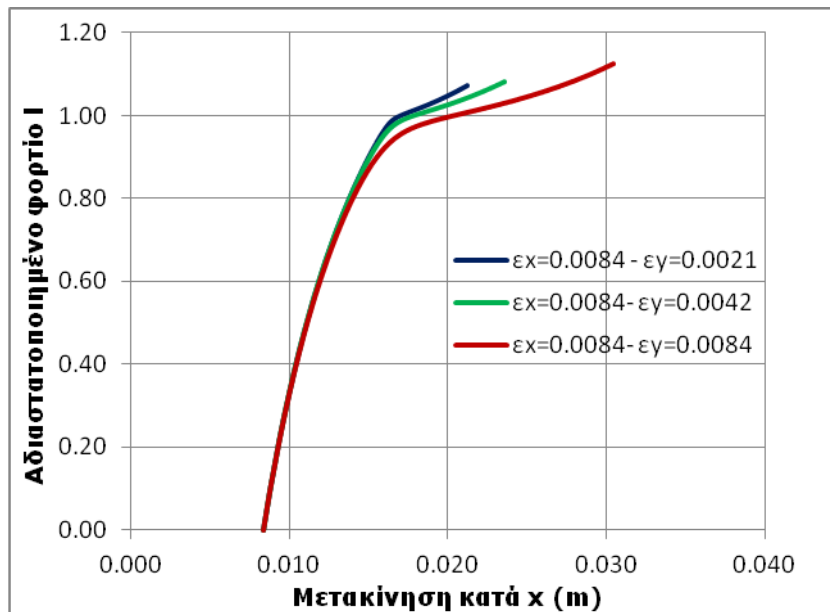


Σχήμα 2.123: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο xz

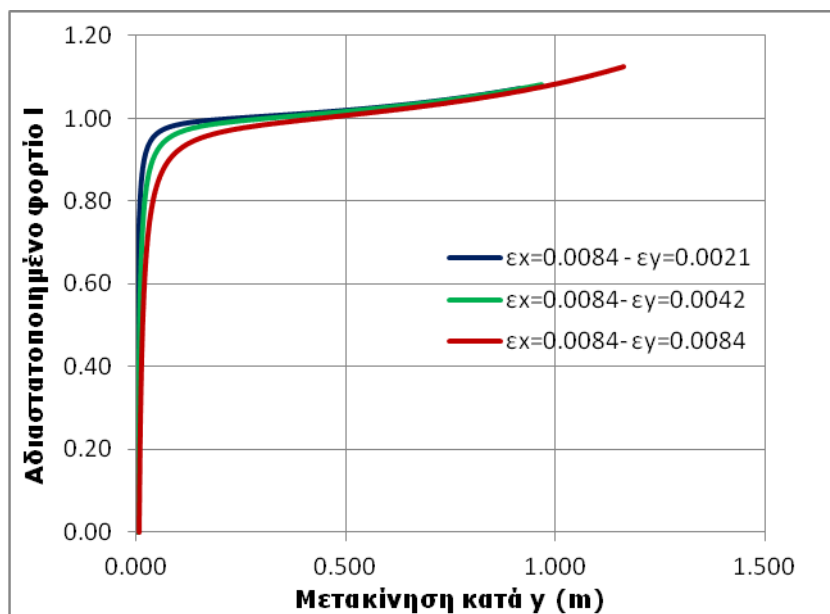


Σχήμα 2.124: Παραμορφωμένος φορέας στο επίπεδο yz

3.  $\varepsilon_x=0.0084$



Σχήμα 2.125: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά x



Σχήμα 2.126: Δρόμος ισορροπίας μεσαιού κόμβου κατά y

Παρατηρούμε τα εξής:

- Η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση  $y$ , είναι εμφανώς (1-2 τάξεις μεγέθους) μεγαλύτερη από αυτήν κατά την ισχυρή διεύθυνση  $x$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το κρίσιμο φορτίο καθολικού λυγισμού κατά  $y$  είναι σχεδόν το μισό του άλλου.
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_y$ .
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_y$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$ .
- Όσο αυξάνεται το  $\varepsilon_x$  μειώνεται η αρχική δυσκαμψία του φορέα  $K_x$ .



### 2.3.2.3 Συμπεράσματα

- Αντίθετα με το παράδειγμα 1 της παραγράφου 2.3.1, στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού με ευσταθή δρόμο ισορροπίας η κάθε μια, των οποίων η αλληλεπίδραση στον τελικό φορέα δίνει επίσης ευσταθή δρόμο ισορροπίας ανεξαρτήτως αρχικών ατελειών και λόγου κρίσιμων φορτίων.
- Η αύξηση των αρχικών ατελειών παίζει επουσιώδη ρόλο στη συμπεριφορά του φορέα, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο για φορείς με ευσταθή δρόμο ισορροπίας, και σε καμία περίπτωση δεν επηρεάζει το είδος της ισορροπίας.
- Η αύξηση της αρχικής ατέλειας κατά μία διεύθυνση, προκαλεί μείωση της αρχικής δυσκαμψίας κατά την ίδια διεύθυνση.
- Σε κάθε περίπτωση, υπερτερεί η παραμόρφωση κατά την ασθενή διεύθυνση.

## **2.4 Συμπεράσματα**

- Για τα συστήματα των δύο βαθμών ελευθερίας που εξετάστηκαν στην παράγραφο 2.2 ισχύει ότι, όταν οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού έχουν ασταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας, τότε και ο δρόμος ισορροπίας του συστήματος θα είναι φθίνων. Το παραπάνω ποιοτικό συμπέρασμα μπορεί να γενικευτεί και για φορείς με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, του οποίου οι δύο πρώτες ιδιομορφές λυγισμού έχουν ασταθή δρόμο ισορροπίας.
- Για τα συστήματα των δύο βαθμών ελευθερίας που εξετάστηκαν στην παράγραφο 2.2 ισχύει ότι, όταν οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού έχουν η μία ευσταθή και η άλλη ασταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας, τότε η μορφή του δρόμου ισορροπίας του συστήματος (ευσταθής ή ασταθής), είναι όμοια με αυτή της κρίσιμης ιδιομορφής λυγισμού (μικρότερο φορτίο λυγισμού). Στην ειδική περίπτωση που τα δύο κρίσιμα φορτία συμπίπτουν, τότε ο φορέας παρουσιάζει αστάθεια.

- Για τα συστήματα των δύο βαθμών ελευθερίας που εξετάστηκαν στην παράγραφο 2.2 ισχύει ότι, όταν οι δύο ανεξάρτητες ιδιομορφές λυγισμού έχουν ευσταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας, τότε και ο δρόμος ισορροπίας του συστήματος θα είναι αύξων. Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση όπου έχουμε ταύτιση των δύο κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Το παραπάνω ποιοτικό συμπέρασμα δε μπορεί να γενικευτεί και για άλλους φορείς, αφού η συμπεριφορά τους μπορεί να αλλάζει ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση. Παράδειγμα αποτελεί το σύνθετο υποσύτλωμα της παραγράφου 2.3, το οποίο παρουσιάζει ασταθή δρόμο ισορροπίας όταν κρίσιμες είναι οι ιδιομορφές του τοπικού λυγισμού και του καθολικού εντός επιπέδου σύνθετης λειτουργίας (ευσταθές+ευσταθές→ασταθές), ενώ παρουσιάζει ευσταθή δρόμο ισορροπίας όταν κρίσιμες είναι οι ιδιομορφές του καθολικού λυγισμού εντός επιπέδου σύνθετης λειτουργίας και του καθολικού εκτός επιπέδου (ευσταθές+ευσταθές→ευσταθές).
- Όταν υπάρχουν συμπίπτοντα κρίσιμα φορτία λυγισμού, εμφανίζεται το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης των ιδιομορφών λυγισμού, το οποίο γίνεται εντονότερο καθώς αυξάνουν οι αρχικές ατέλειες, και το οποίο προκαλεί μεγαλύτερη ευαισθησία στις ατέλειες. Το παραπάνω φαινόμενο είναι σημαντικότερο σε φορείς με ασταθή δρόμο ισορροπίας, στους οποίους εμφανίζεται και πτώση της φέρουσας ικανότητας.
- Σε φορείς με ασταθή δρόμο ισορροπίας, οι αρχικές ατέλειες παίζουν καθοριστικό ρόλο αφού προκαλούν μείωση της αντοχής τους. Για τα μοντέλα που εξετάστηκαν, παρατηρήθηκε πτώση της φέρουσας ικανότητας έως και 75% σε σχέση με αυτή του τέλειου συστήματος (για μεγάλες τιμές αρχικής ατέλειας).
- Σε φορείς με ευσταθή δρόμο ισορροπίας, οι αρχικές ατέλειες παίζουν επουσιώδη ρόλο, και σε καμία περίπτωση δεν επηρεάζουν τον τύπο της ισορροπίας.





## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

- [1] Α.Ν. Κουνάδης, Σιδηρές Κατασκευές, *Συμπεριφορά και Ανάλυση*, Τόμος ΙΙ, Γ' Έκδοση, Συμεών, 1999
- [2] Ι. Βάγιας, Ι. Ερμόπουλος, Γ. Ιωαννίδης, *Σχεδιασμός δομικών έργων από χάλυβα*, Κλειδάριθμος, 2008
- [3] Ι. Βάγιας, Σιδηρές Κατασκευές, *Ανάλυση και διαστασιολόγηση*, Κλειδάριθμος, 2006
- [4] Α.Ν. Κουνάδης, *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, Β' Έκδοση, Συμεών, 1997
- [5] Α.Ν. Κουνάδης, *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, Β' Έκδοση, Συμεών, 2004
- [6] Χ. Ι. Γαντές, Σημειώσεις του μαθήματος 9<sup>ου</sup> εξαμήνου Ε.Μ.Π. «ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ»
- [7] Α. Κ. Chopra, *Δυναμική των Κατασκευών, Θεωρία και Εφαρμογές στη Σεισμική Μηχανική*, Γ' Έκδοση, Μ. Γκιούρδας, 2008
- [8] Μ. Παπαδρακάκης, *Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων*, Β' Έκδοση, Παπασωτηρίου, 2001
- [9] Z. P. Bazant, L. Cedolin, *Stability of Structures*, Oxford University Press, 1991
- [10] G. Augusti, *Stabilità di Strutture Elastiche Elementari in Presenza di Grandi Spostamenti* (in Italian), Atti Accademia Scienze Fis. Mat., Napoli, Vol.4, Series 3, No 5, 1964
- [11] W.T. Koiter, *On the Stability of Elastic Equilibrium*, Thesis, Polytechnic Institute Delft, 1945
- [12] P. X. Bellini, *Post-Buckling Behavior Illustrated by two-DOF Model*, J. Eng. Mech. (ASCE), Vol. 114(2), pp. 314-327, 1988
- [13] W. J. Supple, *Coupled Branching Configurations in the Elastic Buckling of Symmetric Structural Systems*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, pp. 97-112, 1967

- [14] W. J. Supple, *Initial Post-Buckling Behavior of a Class of Elastic Structural Systems*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 4, pp. 23-36, 1969
- [15] A. H. Chilver, *Coupled Modes of Elastic Buckling*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, pp. 15-28, 1967
- [16] D. Ho, *The Influence of Imperfections on Systems with Coincident Buckling Loads*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 7, pp. 311-321, 1972
- [17] D. Ho, *Higher Order Approximations in the Calculation of Elastic Buckling Loads of Imperfect Systems*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 6, pp. 649-661, 1971
- [18] K. C. Johns, A. H. Chilver, *Multiple Path Generation at Coincident Branching Points*, Int. J. mech. Sci., Vol. 13, pp. 899-910, 1971
- [19] J. Roorda, *Stability of Structures with Small Imperfections*, J. Eng. Mech. (ASCE), Vol. 91(1), pp. 87-106, 1965
- [20] CEN, *Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, EN 1993-1-1, 2005
- [21] ADINA, *Theory and Modeling Guide*, ADINA R & D, Inc., Vol. 1, 2005
- [22] MATLAB, *Getting Started Guide*, Mathworks, Inc., 2011
- [23] Θ. Α. Φραγκόπουλος, *Επίδραση Αρχικών Ατελειών στο Σχεδιασμό Ευαίσθητων σε Λυγισμό Κατασκευών*, Μεταπτυχιακή Εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα, 2003
- [24] Μ. Α. Λιβανού, *Διερεύνηση Εναλλακτικών Τρόπων Προσομοίωσης Σύνθετων Υποστυλωμάτων και Σχεδιασμός Πειραματικής Διάταξης*, Διπλωματική Εργασία, ΕΜΠ, Αθήνα, 2011