



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ
ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ
ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΟΛΗΣ ΣΕ ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ
ΥΛΙΚΑ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ**

ΖΟΥΜΠΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
Α. ΣΙΔΕΡΙΔΗΣ**

Αθήνα 2013

Περιεχόμενα	
1.Εισαγωγή	9
1.1 Ιστορικό Σύνθετων Υλικών	9
1.2.1 Η εξέλιξη των πολυμερών	10
1.2 Εποξειδικές ρητίνες	10
1.2.1 Γενικά - ορισμός	10
1.2.2. Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών	11
1.3 Σύνθετα υλικά-Εγκλείσματα στις εποξειδικές ρητίνες	14
1.3.1 Γενικά - Ορισμοί	14
1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό	14
1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση των σύνθετων υλικών	15
1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.	15
1.4.1 Γενική περιγραφή	15
1.4.2 Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό	16
1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)	18
2. Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών	20
2.1 Ελαστικές Σταθερές (ν, E)	20
2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών	22
2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα	23
2.1.3 Περιορισμοί Θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των συνθέτων υλικών	26
2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού	29
2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών	29
2.2.1 Τάση Θραύσης	30
2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών.	34
2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή.	35
2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα	37
3. Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης	39
3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία	41
3.1.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης	43
3.1.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) T_g	45

4. Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων	47
4.1 Γενικά	47
4.2 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 1	47
4.3 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 2	52
4.4 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 1	56
4.5 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 2.....	60
4.6 Γεωμετρικοί περιορισμοί.....	64
4.6.1 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 1	65
4.6.2 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 2.....	66
4.6.3 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 1.....	67
4.6. Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 2.....	68
5. Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης	70
5.1 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εννιαφασικού μοντέλου.....	70
5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση	78
5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο	79
5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο	80
5.2.3 Εκθετικό Μοντέλο	81
5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο	82
5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο.....	83
5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα.....	85
6. Ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων	98
6.1 Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου.....	98
6.2 Εννιαφασικό μοντέλο.....	98
6.3 Μέτρο ελαστικότητας για διαφορετική επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως.....	128
7. Σύγκριση με άλλα μοντέλα.....	135
7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία.....	135
7.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα	140
8 . Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας	146
8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός.....	146
8.2 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εντεκαφασικού μοντέλου.....	146
8.3 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού	159
8.4 Σύγκριση με άλλα μοντέλα.....	176
9.Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής α_c	188
9.1 Θεωρητικός Υπολογισμός Θερμικής Διαστολής α_c	188
9.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα	203
9.2.1 Τύποι συντελεστή θερμικής διαστολής α_c	203

10. Γενικά συμπεράσματα.....	209
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	211

Abstract

The elastic modulus and the thermal expansion coefficient of particle-reinforced polymers were evaluated using four variations of a theoretical model which takes into account the adhesion efficiency between the inclusions and the matrix- an important factor affecting the thermomechanical properties of a composite. To measure the adhesion efficiency a boundary interphase, i.e. a layer between the matrix and the fillers having a structure and properties different from those of the constituent phases, was considered. This layer is assumed to have varying properties.

To obtain information about the extent of the interphase, the results from an experimental study of the thermal behaviour of iron-epoxy composites were used according to an existing theory. The effect of the progressive variation of the interphase properties to the final results concerning the composite, was estimated by applying five simple laws of variation.

Finally, the values of the elastic modulus and the thermal expansion coefficient, predicted by these models, were compared with theoretical results obtained by other authors and with experimental results.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου που θα βασίζεται στην θεωρία ελαστικότητας και θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας E_c , καθώς και τον λόγο Poisson ν_c ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μ m, λαμβάνοντας υπόψη μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Γι αυτό θα προχωρήσουμε σταδιακά. Θα αναπτύξουμε αρχικά το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπόψη την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων. Αυτό μας οδηγεί σε εξαφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο και ένα στοιχειώδες οκτάεδρο, δημιουργούνται δύο πιθανά κυβικά εξαφασικά μοντέλα και δυο οκταεδρικά εξαφασικά μοντέλα.

Παρόλο που η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου, δηλαδή θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα τέσσερα μοντέλα, η διάταξη των εγκλεισμάτων του σιδήρου στο υλικό επηρεάζει τα αποτελέσματα μας. Αυτό συμβαίνει διότι δημιουργεί αφ' ενός γεωμετρικούς περιορισμούς σχετικά με το ποιά είναι η μέγιστη δυνατή περιεκτικότητα που μπορεί να αναπτυχθεί για κόκκους του μεγέθους που εξετάζουμε σε κυβική και οκταεδρική διάταξη, ενώ αφ' ετέρου επηρεάζει την τελική τιμή του E_c και του ν_c που θα προσδιορίσουμε, διότι μεταβάλλονται αναλόγως με την διάταξη των κόκκων σιδήρου, τα πάχη των φάσεων.

Αυτό είναι ούτως ή αλλιώς αναμενόμενο, αφού μιλάμε για μοντέλα. Η διάταξη των κόκκων στην μήτρα είναι στην πραγματικότητα τυχαία και ακανόνιστη. Κάποιο μοντέλο λοιπόν αναμένουμε να προσεγγίζει περισσότερο την πραγματικότητα, ενώ κάποιο άλλο όχι τόσο.

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως, η ύπαρξη της οποίας έχει παρατηρηθεί πειραματικά, σε κάθε σύνορο μεταξύ της μήτρας μας και του εγκλείσματος. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας έγινε επίσης ανάπτυξη της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως καθώς και διαφορετικές προσεγγίσεις του τρόπου μεταβολής αυτής, συναρτήσει της ακτίνας του ισοδύναμου σφαιρικού μας μοντέλου το οποίο χρησιμοποιήσαμε και το αναπτύξαμε μέσω της θεωρίας ελαστικότητας.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιάμεσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το εγκλείσμα, οδηγούμαστε σε ένα εννιαφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε στο όριο μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας.

Τελικά εξετάζοντας την επίδραση των γειτονικών κόκκων ταυτόχρονα με την επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως, προκύπτουν τέσσερα εννιαφασικά μοντέλα τα όποια και συγκρίναμε με ήδη υπάρχοντα μοντέλα από την διεθνή βιβλιογραφία σε σχέση με πειραματικά δεδομένα που είχαμε στην διάθεση μας από το εργαστήριο της αντοχής των υλικών. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι πολύ ικανοποιητικά, αφού τα μοντέλα μας προσεγγίζουν τα πειραματικά δεδομένα με ακρίβεια εφάμιλλη του μοντέλου Counto, το οποίο θεωρείται έως τώρα ίσως το καλύτερο μοντέλο που έχει αναπτυχθεί.

Ένα δεύτερο σκέλος της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός **προσεγγιστικού μοντέλου** που θα μπορεί να προσδιορίσει το μέτρο ελαστικότητας E_c , καθώς και τον λόγο Poisson ν_c ενός σύνθετου υλικού, συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μ m, λαμβάνοντας υπόψη μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος.

Το προσεγγιστικό αυτό μοντέλο θα το επιτύχουμε σταδιακά. Αρχικά θεωρούμε πως θα αναπτύξουμε το μοντέλο μας λαμβάνοντας υπόψη την δημιουργία επιπλέον φάσεων μόνο λόγω της επίδρασης των γειτονικών κόκκων. Αυτό μας οδηγεί σε εξαφασικό μοντέλο. Επειδή η διάταξη των κόκκων του σιδήρου μέσα στην μήτρα θεωρούμε ότι μπορεί να προσεγγισθεί από έναν στοιχειώδη κύβο και ένα στοιχειώδες οκτάεδρο, δημιουργούνται δυο πιθανά κυβικά εξαφασικά μοντέλα και δυο οκταεδρικά εξαφασικά μοντέλα. Όπως και παραπάνω επειδή η ανάπτυξη του μοντέλου μας δεν επηρεάζεται από την κατανομή των κόκκων σιδήρου θα προκύψει μια μόνο εξίσωση και για τα τέσσερα μοντέλα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως ανάμεσα στην μήτρα και το έγκλεισμα, για λόγους απλοποίησης οδηγούμαστε σε ένα εντεκαφασικό μοντέλο. Την ενδιάμεση φάση την τοποθετούμε ενδιάμεσα από το έγκλεισμα και την μήτρα. Τελικά το εντεκαφασικό μοντέλο το συγκρίναμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών.

Τέλος, στην εργασία αυτή αναπτύξαμε όμοια με προηγουμένως τα αντίστοιχα γεωμετρικώς καταμεμημένα μοντέλα για τον προσδιορισμό του συντελεστή θερμικής διαστολής α_c ενός σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων κόκκου σιδήρου διαμέτρου 150 μ m, λαμβάνοντας υπόψη μας και την επίδραση των γειτονικών κόκκων αλλά και την ανάπτυξη ενδιαμέσου φάσεως μεταξύ της μήτρας από εποξειδική ρητίνη και του εγκλείσματος. Τελικά τα εννιαφασικά μοντέλα που καταλήγουμε τα συγκρίνουμε με άλλα θεωρητικά μοντέλα και με πειραματικές τιμές που έχουν ληφθεί από πείραμα του εργαστηρίου Αντοχής Υλικών.

1.Εισαγωγή

1.1 Ιστορικό Συνθέτων Υλικών

Ο όρος σύνθετο υλικό απλοποιητικά σημαίνει ότι δύο ή περισσότερα υλικά συνδυαζόμενα μακροσκοπικά μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο υλικό που συνήθως παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από εκείνες των αρχικών υλικών κάτι που συχνά ακόμη μπορεί να εμφανίζει και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε.

Με βάση αυτό τον απλό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι ο άνθρωπος επινόησε και χρησιμοποίησε σύνθετα υλικά από τα πολύ παλιά χρόνια. Έτσι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν το άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος «κόντρα πλακέ» όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου μπορούν να συνδυασθούν κατάλληλα ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την υγρασία. Επίσης στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία εμφανίστηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου «δεμένο» με άσφαλτο. Οι Ασύριοι έφτιαξαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Στον Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πιο πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής / βάρους και ακαμψίας / βάρους χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές στις οποίες το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα, όπως π.χ. σε αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα βήματα της ζωής του είχε «δαισθανθεί» ότι συνδυάζοντας δύο ή περισσότερα υλικά μπορούσε να κατασκευάσει ένα τρίτο «σύνθετο υλικό», που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των συνθέτων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα διά μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19^ο αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19^{ου} αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λ.π., ούτε σε ποιότητα, ούτε σε μεθόδους κατασκευής. Η πραγματικά αλματώδης εξέλιξη των σύνθετων υλικών σημειώνεται τον 20^ο αιώνα και θα μπορούσαμε να πούμε τα τελευταία 30 χρόνια και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης: της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.

1.2.1 Η εξέλιξη των πολυμερών

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) που αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Οι δομικές αυτές μονάδες είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμά τους και τον πυρήνα τους, αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής πάνω στις ιδιότητές τους ήταν άγνωστες ως πριν λίγες δεκαετίες.

Ευθύς μόλις ανακαλύφθηκε ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη οργανωμένες αλυσίδες μικρότερων μορίων, ο άνθρωπος κατόρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών – πράγμα που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο - αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή, που δεν απαντώνται στη φύση. Τα τελευταία αυτά είναι και τα πιο ενδιαφέροντα από τη σκοπιά των συνθέτων υλικών. Το αποτέλεσμα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών, τεράστιας σπουδαιότητας σήμερα, που παράγουν μια τρομακτική ποικιλία από πλαστικές ύλες, συνθετικές υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

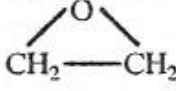
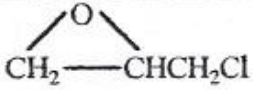
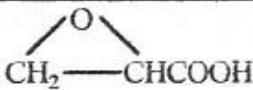

Ένα πολυμερές υλικό ικανοποιεί τον ορισμό του συνθέτου υλικού, που δόθηκε στην §1.1 σε μικροσκοπική κλίμακα γιατί αποτελείται από δομικές μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά που συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές του.

1.2 Εποξειδικές ρητίνες

1.2.1 Γενικά - ορισμός

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξειδία τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξειδίο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξειδίου του αιθυλενίου
	επιχλωροϋδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Σχήμα 1.1 συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση, το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.2.2. Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες (low viscosity), καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα τη εύκολη κατεργασία τους.
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων). κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα την ποικιλία των εφαρμογών.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. . Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση. Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.
- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες , ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι Περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).

2. Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλει στεγανότητας.

3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα

4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated retins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.

5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την Κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.

6. Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μήτρων, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetcome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγραμόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.
- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος Κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.
- Για την υγραμόνωση πισινών και δεξαμενών.
- Για την υγραμόνωση υπόγειων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λ.π.

Μειονέκτημα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.3 Σύνθετα υλικά-Εγκλείσματα στις εποξειδικές ρητίνες

1.3.1 Γενικά - Ορισμοί

Στην κατηγορία των σύνθετων υλικών ανήκουν τα πολυμερή και οι ρητίνες με εγκλείσματα. Ένα υλικό χαρακτηρίζεται ως σύνθετο εξεταζόμενο μακροσκοπικά όταν σχηματίζεται από τον συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διαφορετικές από τα αρχικά υλικά που το δημιούργησαν. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επιμέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές από αυτά. Τις περισσότερες φορές τα αρχικά υλικά του συνθέτου αντιδρούν χημικά μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει μια νέα φάση. Με τον όρο “φάση” εννοούμε κάθε ομογενές τμήμα του σύνθετου υλικού. Με τον όρο “ενδιάμεση φάση” στα σύνθετα υλικά εννοούμε την περιοχή μεταξύ των ορίων των φάσεων που εμφανίζει διαφορετικές φυσικές ιδιότητες από τα αρχικά υλικά. Τα σύνθετα υλικά μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από μια συνεχή μήτρα με μια ή περισσότερες διάχυτες φάσεις (τα εγκλείσματα). Το απλούστερο σύνθετο υλικό αποτελείται από δύο υλικά από τα οποία το ένα είναι η μήτρα (matrix) και το δεύτερο το έγκλεισμα (filler).

1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό

Για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού θα πρέπει να αναφέρουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- τη συγκέντρωση και την κατανομή συγκέντρωσης των σωματιδίων
- το σχήμα των σωματιδίων
- το μέγεθος και την κατανομή μεγέθους των σωματιδίων
- το προσανατολισμό των σωματιδίων
- την τοπολογία των σωματιδίων

Η συμπεριφορά ενός σύνθετου υλικού εξαρτάται σημαντικά από περιεκτικότητα των αρχικών υλικών. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν για την περιγραφή ενός σύνθετου υλικού με μια ή περισσότερες διάχυτες μέσα σε μια συνεχή είναι:

α) το είδος των υλικών των διάχυτων φάσεων (εγκλεισμάτων)

β) η γεωμετρία της διάχυτης φάσης

γ) το είδος του υλικού που χρησιμοποιείται ως μήτρα.

1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση των σύνθετων υλικών

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη φύση μήτρας και των συστατικών πρόσμειξης των εγκλεισμάτων ως εξής:

1. Διάκριση ως προς την προέλευση της μήτρας:

- σύνθετα με πλαστική μήτρα
- σύνθετα με μεταλλική μήτρα.
- Σύνθετα με κεραμική μήτρα

2. Διάκριση ως προς τη μορφή του εγκλείσματος:

- έγκλεισμα με μορφή ινών
- έγκλεισμα με μορφή κόκκων έγκλεισμα με μορφή φύλλων

1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.

1.4.1 Γενική περιγραφή

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά που χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015μ. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό σε μια πιο στερεή μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Τα εγκλείσματα Πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του σύνθετου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμειξη.

1.4.2 Ιδιότητες - Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες, γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται και η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητα της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

- **Συστολή**

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

- **Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση**

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ. το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία, τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά. Τα εγκλείσματα επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

- Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητά τους. Έτσι η Παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος σύνθετου υλικού.

- Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

- Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση δεν είναι γραμμική.

- Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

- Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

- Θερμική αγωγιμότητα

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών αν και σε μεγάλες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών, συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

- Αντοχή στη συμπίεση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

- Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

- Συμπεριφορά στην κάμψη

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

- Σκληρότητα επιφάνειας - Αντίσταση στην τριβή

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση τριβής.

1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από κόκκους ενός υλικού μέσα σε μήτρα ενός άλλου. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή όχι, όπως και η μήτρα. Έτσι, από αυτή την άποψη, έχουμε Τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς.

A. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το σκυρόδεμα (όχι το οπλισμένο). Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας.

Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό να προκύψει, ένα σύνθετο υλικό αυτού του είδους.

B. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευαστεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας. Παράδειγμα, τέτοιου υλικού είναι έγκλεισμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με έγκλεισμα από μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

Γ. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό εγκλείσμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα.

Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

Δ. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας.

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα προκύπτοντα υλικά ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δύο ειδών ανάλογα με το εγκλείσμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην Κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα. Έτσι το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξειδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κλπ. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

2. Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών

2.1 Ελαστικές Σταθερές (ν, E)

Από τη μηχανική γνωρίζουμε ότι εφόσον τα φορτία δεν υπερβαίνουν μια ορισμένη τιμή, οι παραμορφώσεις που προκαλούν είναι ανάλογες των τάσεων. Η αναλογία αυτή στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (2.1)$$

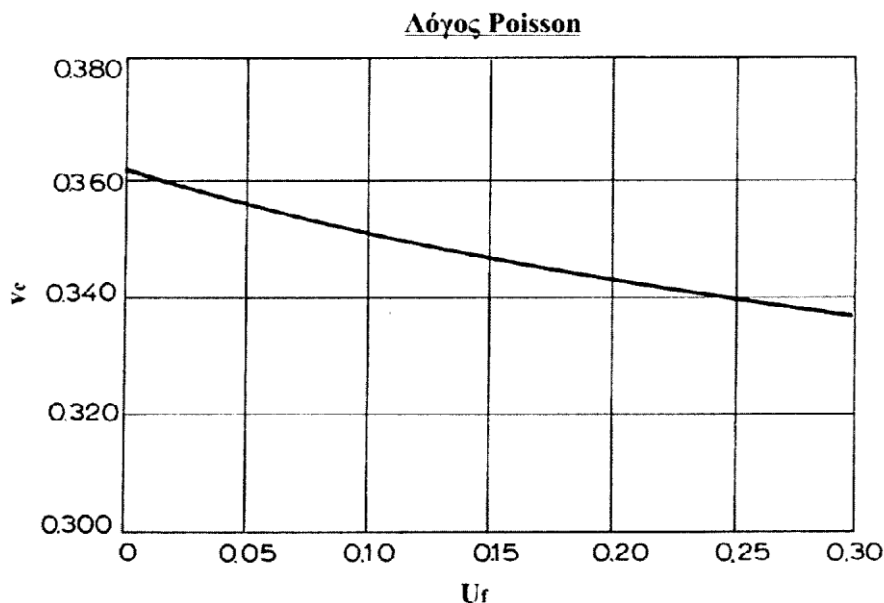
που είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου του Hooke. Η σχέση αυτή, είναι γραμμική και γι' αυτό τα υλικά για τα οποία ισχύει ονομάζονται και γραμμικά.

Ο συντελεστής αναλογίας E ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Εξάλλου η αρχική επιμήκυνση μιας ράβδου που εφελκύεται, συνοδεύεται πάντοτε από κάποια πλευρική συστολή. Έχει αποδειχθεί ότι τα πηλίκα των ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων ε_x και ε_y κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό ν , σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται λόγος του Poisson ή συντελεστής εγκάρσιας συστολής.

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = \varepsilon_x / \varepsilon_z = -\varepsilon_y / \varepsilon_z \quad (2.2)$$

Η γραφική παράσταση του λόγου Poisson ν_c για τα σύνθετα υλικά συναρτήσει της κατ' όγκον περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων U_f φαίνεται στο διάγραμμα [2.1] που ακολουθεί:



Σχήμα 2.1 Γραφική παράσταση λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί δικαιολογεί το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.2) αφού ο λόγος του Poisson εκφράζεται με ένα θετικό αριθμό, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος από 1/2 ο λόγος αυτός για όλα τα υλικά παίρνει οριακά την τιμή 1/2 όταν αυτά δεν καταπονούνται με φορτία μέσα στην ελαστική περιοχή, στην περιοχή δηλαδή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke, αλλά με φορτία μεγαλύτερα, που βρίσκονται δηλαδή στην πλαστική περιοχή.

Η παράμετρος $\Delta V/V$ (ανηγμένη μεταβολή του όγκου ή μέτρο διογκώσεως) σχετίζεται με τον λόγο του Poisson [1], με βάση τη σχέση:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.3)$$

Όπου $\rho = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ είναι η υδροστατική συνιστώσα των τάσεων

2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το Μέτρο Ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών

Από πολλούς ερευνητές αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Τα μοντέλα αυτά και οι εξισώσεις που προέκυψαν, είναι άλλοτε απλά και άλλοτε πολύπλοκα ανάλογα με τις παραδοχές που ο καθένας χρησιμοποίησε.

Εδώ αναφερόμαστε σε ορισμένα από αυτά τα μοντέλα.

2.1.1.1 Το μοντέλο του Counto [2]

Το μοντέλο για τα σύνθετα υλικά δύο φάσεων το οποίο προτάθηκε από τον Counto προϋποθέτει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στον κόκκο και τη μήτρα. Το μέτρο του σύνθετου υλικού, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1-U_f^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{(1-U_f^{1/2})U_f E_m + E_f} \quad (2.4)$$

όπου E_f , E_m , E_c οι κατ' όγκον περιεκτικότητες του εγκλείσματος, της μήτρας και του συνθέτου αντιστοίχως.

Αυτό το μοντέλο προβλέπει τα μέτρα ελαστικότητας και συμφωνεί με μια ευρεία σειρά από πειραματικά δεδομένα, κυρίως για υλικά από σκυρόδεμα.

2.1.1.2 Το μοντέλο του Paul [3]

Στην προσεγγιστική λύση του Paul τα συστατικά (οι φάσεις) του σύνθετου υλικού, υποτίθεται ότι είναι στην κατάσταση μακροσκοπικώς ομοιογενούς τάσης. Η πρόσφυση υποτίθεται ότι υπάρχει στην ενδιάμεση επιφάνεια ενός κυβικού εγκλείσματος. το οποίο είναι μέσα σε κυβική μήτρα. Όταν μια ομοιόμορφη τάση εφαρμοστεί στο σύνορο, το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού δίνεται από τη σχέση:

$$E_c = E_m \left\{ \frac{1+(m-1)U_f^{2/3}}{1+(m-1)(U_f^{2/3}-U_f)} \right\} \quad (2.5)$$

2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επίσης τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους, που δε μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς.

Για τα σύνθετα υλικά όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί. Με βάση αυτή την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά συνθέτων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα ήταν ο Einstein [4], όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διασπαρμένων σε κάποιο Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f) \quad (2.6)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε έγκλεισμα και για περιπτώσεις πλήρους συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο τέλεια συνοχή εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας-σωματιδίων, κατά τη διάρκεια φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας-σωματιδίου.

Προϋπόθεση για την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το έγκλεισμα είναι σκληρότερο υλικό από τη μήτρα. Ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος για την εξίσωση και όχι το βάρος του. Τέλος το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση. Συνέχισαν την έρευνα οι Guth και Smallwood [5, 6] προτείνοντας την εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \quad (2.7)$$

Αργότερα συνέχισε ο Kerner [7] με τη σχέση

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\frac{U_f G_f}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}}{\frac{U_f G_m}{(7-5\nu_m)G_m + (8-10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1-\nu_m)}} \quad (2.8)$$

Όπου G , το μέτρο διάτμησης και ν , ο λόγος Poisson.

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η εξίσωση (2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-\nu_m)}{8-10\nu_m} \quad (2.9)$$

Στην πραγματικότητα δεν ισχύει η προϋπόθεση συνοχής μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε παραπάνω παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίζεται θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου.

Ο Einstein [4], κατά τις παρατηρήσεις που έκανε το 1906 και αναφέρονται παραπάνω κατέληξε πως όταν μεταξύ του αιωρήματος στερεών σφαιρών και του Νευτώνιου υγρού δεν υπάρχει τέλεια συνοχή ισχύει η εξίσωση:

$$E_c = E_m (1 + U_f) \quad (2.10)$$

Εάν τα σωματίδια είναι φυσαλίδες αέρα ή βρίσκονται μέσα σε κενά τότε η εξίσωση Kerner γράφεται:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1-\nu_m)}{7-5\nu_m} \quad (2.11)$$

Τέλος, ο Takahashi [8] πρότεινε την παρακάτω πιο σύνθετη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1 - \nu_m)U_f \frac{E_f(1 - 2\nu_m) - E_m(1 - \nu_f) + 10(1 + \nu_m) - E_m(1 + \nu_f)}{E_f(1 + \nu_m) + 2E_m(1 - 2\nu_f) + 2E_f(4 - 5\nu_m)(1 + \nu_m) + E_m(7 - 5\nu_m)(1 + \nu_f)} \quad (2.12)$$

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και αυτό οφείλεται στο ότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού.

Για την περίπτωση ενάρξεως των συσσωματωμάτων ο Mooney [9] διέτυπωσε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp\left(\frac{2.5U_f}{1 - S \cdot U_f}\right) \quad (2.13)$$

Όπου S ορίζεται από τη σχέση :

S=φαινόμενος όγκος εγκλείσματος/πραγματικός όγκος εγκλείσματος

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις το κυμαίνεται από 1 .2 μέχρι 2.

Μια άλλη Θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van-Dyck [10] περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{kU_f}{1 - S \cdot U_f} \quad (2.14)$$

όπου k και S είναι με τιμές 1 .25 και 1 .20 αντίστοιχα.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη, πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης που έχει μελετηθεί προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκωδών εγκλεισμάτων. Ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και k, είναι μια παράμετρος που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης:

$$E_c = E_f U_f k + E_m U_m + E_i U_i \quad (2.15)$$

Καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε μελέτη του καθηγητή Π.Σ. Θεοχάρη [11,12], όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο-φάση μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας.

Επίσης μια άλλη εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας συνθέτου υλικού με εγκλείσματα πρότειναν αργότερα οι E.Sideridis, P.S. Theocaris [13]:

$$\frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} = \frac{2\lambda^2 U_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \frac{U_f(1-\lambda)^2(1+\nu_m) + 2(\lambda U_f - 1)^2(1-2\nu_m)}{1-U_f} \quad (2.16)$$

Όπου τα ν_c και λ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$1/\nu_c = U_f/\nu_f + U_m/\nu_m$$

$$\lambda = \frac{3(1-\nu_m)E_f}{\left[[2U_f(1-2\nu_m) + 1 + \nu_m]E_f + 2(1-2\nu_f)(1-U_f)E_m \right]}$$

2.1.3 Περιορισμοί Θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των συνθέτων υλικών.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι στην ανασκόπηση δεν έγινε καμιά προσπάθεια για να συζητηθούν οι προσεγγίσεις, αλλά να δειχθεί ένας αριθμός σε χρήσιμες θεωρητικές υποθέσεις που περιγράφουν τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων. Για τη λεπτομερή συζήτηση των θεωριών γίνεται αναφορά στους Hashin και Hill [14,15].

Στην πράξη τα εγκλείσματα κόκκων δεν μπορούν τελείως να αποχωρισθούν το ένα από το άλλο και η ενίσχυση του στοιχείου μπορεί να είναι σε μικρή κλίμακα, στην πραγματικότητα είναι ένα συσσωμάτωμα από μικρούς κόκκους. Έτσι λοιπόν ως απάντηση στο εφαρμοζόμενο φορτίο, η τάση θα κατανομηθεί ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόκκους και τα συσσωματώματα και η παραδοχή τάση ή ομοιόμορφη επιμήκυνση (παραμόρφωση) είναι καθαρά υπεραπλούστευση.

Οι θεωρίες που ασχολούνται με συστήματα εγκλεισμάτων δέχονται ότι τα μέτρα ελαστικότητας για δεδομένο έγκλεισμα και μήτρα εξαρτώνται μόνο από την περιεκτικότητα σε όγκο του εγκλείσματος και όχι από το μέγεθος των κόκκων. Όμως γενικά το μέτρο αυξάνει όσο το μέγεθος των κόκκων μειώνεται. Οι Lewis

και Nielsen [16] παραδέχονται ότι όσο το μέγεθος του κόκκου μειώνεται η επιφάνεια των κόκκων αυξάνεται παρέχοντας ένα πιο ενεργό επιφανειακό δεσμό μεταξύ των δύο φάσεων . Αυτό θα μπορούσε να συνοδευθεί από μια κλίση για την αύξηση συσσώρευσης των κόκκων (συσσωματώματα). Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών μπορούν επίσης να μεταβάλλονται, όταν αλλάζει το σχήμα (μορφή) κόκκου, Ο Bueche [17, 18] παρατήρησε ότι διαφορετικές μορφές εγκλεισμάτων καταλήγουν σε διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα έντονο με μεγαλύτερους ή μη σφαιρικούς (μη σφαιροειδείς) κόκκους όπου ένας προτιμώμενος προσανατολισμός θα μπορούσε να τροποποιήσει τη συμπεριφορά παραμόρφωσης.

Ο Wu [19] απέδειξε θεωρητικά ότι κόκκοι σε μορφή δίσκου έδωσαν καλύτερη ενίσχυση από βελονοειδούς ή σφαιρικής μορφής κόκκους, αλλά αγνόησε την ανισοτροπία η οποία συνδέεται με τη χρήση μη σφαιρικών κόκκων σε σύνθετα υλικά.

Ο Chow [20] έχει ασχοληθεί με πρόβλημα για ευθυγραμμισμένους ελλεισοειδείς κόκκους και προέβλεψε το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Οι επιδράσεις από το μέγεθος του εγκλείσματος και από την επιφάνεια του εγκλείσματος αγνοήθηκαν. Όμως είναι απίθανο στην πράξη ότι τα εγκλείσματα μπορούν να διαταχθούν ομοιόμορφα με τρόπο που παραδέχεται ο Chow έτσι ώστε η πειραματική επιβεβαίωση των δύο θεωριών να είναι απαραίτητη.

Η κατανομή του μεγέθους των κόκκων επηρεάζει την περιεκτικότητα του εγκλείσματος στη μήτρα. Μίγματα από κόκκους με διαφορετικό μέγεθος εγκλεισμάτων μπορούν να διαταχθούν πιο πυκνά από εγκλείσματα ενός μεγέθους διότι τα μικρά εγκλείσματα μπορούν να γεμίσουν το χώρο μεταξύ των στενά διατεταγμένων μεγάλων εγκλεισμάτων και να σχηματίσουν συσσωματώματα. Αυτοί οι κόκκοι που συσσωματώνονται είναι ικανοί να μεταφέρουν ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας για την ίδια περιεκτικότητα που προβλέπεται από τις περισσότερες θεωρίες.

Αυτή η επίδραση δημιουργείται όπου υπάρχει μια διαφορετική ενισχυτική ικανότητα άμμου, όπως έχει παρατηρηθεί από τους Ahmed και Jones [21]. Μια εμπειρική τροποποίηση στην εξίσωση Kerner η οποία περιλαμβάνει ένα συντελεστή αλληλεπίδρασης εγκλείσματος προτάθηκε από τον Dickie [22]. Κάθε μια από τις εξισώσεις εμφανίζεται ικανοποιητική στο να περιγράφει τα δεδομένα των διαφόρων ερευνητών.

Πρέπει να σημειωθεί το σχόλιο από τον Christensen [23] επάνω στην εξίσωση του Kerner, ότι το σαφές σφάλμα σ' αυτή την εξίσωση δεν μπορεί να δειχθεί λόγω της συντομίας της παραγωγίσεως. Αυτό συνεπώς δημιουργεί αμφιβολίες στην εξίσωση του Kerner και στις επακόλουθες τροποποιήσεις.

Οι περισσότερες από τις θεωρίες οι οποίες εξηγούν την ενισχυτική δράση των εγκλεισμάτων παραδέχονται τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στα εγκλείσματα και την πολυμερική μήτρα. Η περίπτωση της ελλιπούς προσφύσεως ήταν στην ελαστική περιοχή, όπως συζητήθηκε από τους Sato και Furukawa [24]. Αυτοί παραδέχονται ότι οι συνδεδεμένοι κόκκοι λειτουργούν ως οπές και προβλέπουν μείωση στα μέτρα ελαστικότητας με την αύξηση της περιεκτικότητας σε εγκλείσμα.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μη συνδεδεμένοι κόκκοι δεν λειτουργούν εντελώς ως οπές, επειδή αυτοί συγκρατούν τη μήτρα από την κατάρρευση. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας συστήματος εγκλεισμάτων πρέπει να αυξάνει με την αύξηση περιεκτικότητας του εγκλείσματος, η οποία είναι η γενικώς αναμενόμενη συμπεριφορά.

Μια μεταβολή στην πρόσφυση μήτρας-εγκλεισμάτων έχει μικρότερη επίδραση στα μέτρα ελαστικότητας από ότι στην αντοχή. Το τελευταίο είναι περισσότερο εξαρτώμενο από την κατεργασία της επιφάνειας [24]. Στην πραγματικότητα ο βαθμός πρόσφυσης δεν φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας όσο οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στις φάσεις δεν υπερβαίνονται από την εφαρμοζόμενη τάση.

Οι Spanoudakis και Young [24] εξέτασαν εγκλείσματα γυαλιού σε εποξειδική ρητίνη και βρήκαν ότι οι καλύτερες συνολικές μηχανικές ιδιότητες αποκτήθηκαν από σύνθετα υλικά που περιείχαν κόκκους οι οποίοι είχαν εμβαπτισθεί σε ουσία (coupling agent) προς αύξηση της προσφύσεως μήτρας - εγκλείσματος.

Είναι ξεκάθαρο από τις προηγούμενες αναφορές ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων είναι μια λεπτομερειακή συνάρτηση της μικροδομής, όπως επίσης και της ποιότητας πρόσφυσης μεταξύ των δύο φάσεων.

2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού.

Η Θεωρητική μελέτη που ακολουθεί βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές: .Οι φάσεις του σύνθετου υλικού (έγκλεισμα και μήτρα) θεωρούνται ελαστικά ισότροπα και ομογενή υλικά.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο (μακροσκοπικώς ισότροπο υλικό).
- Το έγκλεισμα αποτελείται από κόκκους που έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων είναι αρκετά μικρή, έτσι ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών να μπορεί να αμεληθεί.

Για τον προσδιορισμό των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας (E_c) του συνθέτου υλικού, θα εφαρμόσουμε την θεωρία της ελαστικότητας στον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό όγκο του συνθέτου, όπου θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους συνθέτου υλικού.

2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών

Όπως έχει επισημανθεί από τον Nielsen [25] οι θεωρίες για την αντοχή των συνθέτων υλικών με εγκλείσματα είναι λιγότερο αναπτυγμένες από αυτές για τα μέτρα ελαστικότητας. Εκτός από την περίπτωση για ελαστικό (rubber) με εγκλείσματα, υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί.

2.2.1 Τάση Θραύσης

2.2.1.1 Μοντέλο του Broutman

Στην προσέγγιση του Broutman [26], υποτίθεται ότι το σύνθετο υλικό αστοχεί όταν ένα στοιχείο υποστεί θραύση ως αποτέλεσμα μιας συγκεντρώσεως τάσεως γύρω από το έγκλεισμα. Έπεται ότι η αντοχή πείπτει ταχέως με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων εγκλεισμάτων και παραμένει βασικά σε αυτό το επίπεδο με περαιτέρω προσθήκες εγκλεισμάτων.

Με αυτήν την υπόθεση αυτοί χρησιμοποίησαν την ανάλυση για πεπερασμένα στοιχεία για να μοντελοποιήσουν το σύνθετο υλικό και συσχέτισαν τα αποτελέσματα με τις πειραματικές αντοχές υλικού με εγκλείσματα από σφαίρα γυαλιού μέσα σε θερμοσκληρυνόμενη ρητίνη.

Οι θεωρητικές προβλέψεις δεν έχουν καλή σύμπτωση με τα πειραματικά δεδομένα διότι το μοντέλο αγνοεί αλληλεπίδραση κόκκων. Επιπλέον τα σύνθετα υλικά είναι πιθανόν να μην έχουν αστοχήσει ως αποτέλεσμα της αστοχίας του πρώτου στοιχείου.

2.2.1.2 Ο νόμος των δυνάμεων (The power law)

Η δεύτερη προσέγγιση υποθέτει ότι η αντοχή συνθέτου υλικού προσδιορίζεται από την (υπάρχουσα) έκταση της φέρουσας φορτίο μήτρας λόγω της παρουσίας του εγκλείσματος [27,28].

Στην περίπτωση μιας πτωχής προσφύσεως ανάμεσα στη μήτρα και το έγκλεισμα και της απουσίας συγκέντρωσης τάσεως στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας, η αντοχή περιγράφεται από το νόμο δυνάμεως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - aU_f^n) \quad (2.17)$$

όπου σ_{cu} και σ_{mu} οι αντοχές (τάσεις θραύσεως) του συνθέτου και της μήτρας αντιστοίχως, a και n είναι σταθερές εξαρτώμενες από το υποτιθέμενο σχήμα κόκκου και την ταξινόμηση στο μοντέλο του συνθέτου.

Ο Nielsen [27] έχει εισηγηθεί έναν παράγοντα συγκεντρώσεως τάσεως, K με προτεινόμενη τιμή την 0,5. Για κυβικούς κόκκους μέσα σε κυβική μήτρα η Εξ. μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - U_f^{2/3}) K \quad (2.18)$$

Οι Nicolais και Narkis [28] θεώρησαν μια κυβική μήτρα ενισχυμένη με ομοιομόρφως διασκορπισμένους κόκκους όπου υποτίθεται ότι η θραύση γίνεται στην ελάχιστη εγκάρσια διατομή συνεχούς φάσεως. Η σχέση για την αντοχή δίνεται ως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - 1,21U_f^{2/3}) \quad (2.19)$$

Ο Piggott και Leidner [29] υποστήριξαν ότι η υποτιθέμενη ομοιόμορφη κατανομή των εγκλεισμάτων σε πάρα πολλά μοντέλα είχε μικρή πιθανότητα επιτεύξεως στην πράξη και προτείνουν μια εμπειρική σχέση:

$$\sigma_{cu} = K\sigma_{mu} - bU_f \quad (2.20)$$

όπου K : συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων και b μια σταθερά εξαρτώμενη από την πρόσφυση κόκκου - μήτρας.

Ο Landon [30] πρότεινε μια εξίσωση όμοια:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} (1 - U_f) K U_f d \quad (2.21)$$

όπου d είναι η μέση διάμετρος κόκκου και K είναι η κλίση στο διάγραμμα εφελκυσμένης αντοχής μέσης διαμέτρου κόκκου.

2.2.1.3 Η εξίσωση των Leidner – Woodhams

Μια απλούστερη αλλά πιο λεπτομερής προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τον Leidner [31] όπου το μοντέλο του σύνθετου υλικού αποτελείται από σφαιρικούς κόκκους μέσα σε μη ελαστική μήτρα. Για να εφαρμοστεί η θεωρία ενισχύσεως το μέγεθος κόκκου θα προσεγγισθεί στον κύλινδρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί η κατανομή τάσεων στο έγκλεισμα στο σημείο θραύσεως.

Στην περίπτωση μη καλώς συνδεδεμένων κόκκων, η μεταβίβαση τάσεως ανάμεσα στον κόκκο και την μήτρα υποτίθεται ότι γίνεται ως αποτέλεσμα του συνδυασμού της τριβής μεταξύ κόκκου - μήτρας και των παραμενουσών θλιπτικών τάσεων οι οποίες ενεργούν επάνω στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου - μήτρας.

Στην περίπτωση από καλά συνδεδεμένους κόκκους οι τάσεις μεταβιβάζονται δια μέσου μηχανισμού διάτμησης. Η μέγιστη τάση είναι στο κόκκο, συνεπώς εξαρτάται από την αντοχή του δεσμού κόκκου - μήτρας.

Η τελική εφελκυστική τάση (αντοχή) του συνθέτου ελήφθη απλά ως το άθροισμα του μεγίστου φορτίου που αναλαμβάνεται από την μήτρα και από το έγκλεισμα και δίνεται ως:

$$\sigma_{cu} = (\sigma_a + 0,83\tau_m) + \sigma_a K(1 - U_f) \quad (2.22)$$

για καλή πρόσφυση μεταξύ των δύο φάσεων και

$$\sigma_{cu} = 0,83\sigma_{th}aU_f + k\sigma_{mu}(1 - U_f) \quad (2.23)$$

στην περίπτωση μη προσφύσεως μεταξύ των δύο φάσεων. Τα σ_a και σ_{mu} είναι η αντοχή του ενδιάμεσου επιφανειακού δεσμού και η αντοχή της μήτρας αντιστοίχως, T_m είναι η αντοχή σε διάτμηση της μήτρας, K είναι ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων, k είναι μια παράμετρος η οποία εξαρτάται από το μέγεθος και σχήμα των κόκκων, και είναι η θλιπτική θερμική τάση η οποία ενεργεί επάνω στο σύνορο του κόκκου και a είναι ο συντελεστής τριβής.

Υπήρξαν προσπάθειες για τον συσχετισμό της αντοχής των συνθέτων υλικών ενισχυμένων με κόκκους με την διάμετρο d των εγκλεισμάτων. Για παράδειγμα: ο Hojo [32, 33] έχει βρει ότι η αντοχή εποξειδικής ρητίνης με εγκλείσματα πυριτίου ελαττώνεται όταν το μέγεθος κόκκου αυξάνει ακολουθώντας μια σχέση της μορφής:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} kd^{-1/2} \quad (2.24)$$

όπου k είναι σταθερά και d είναι η μέση διάμετρος κόκκου.

Ο Schragar [34] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις προηγούμενες

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} \exp(-rU_f) \quad (2.25)$$

με $r=2.66$ που βρέθηκε πειραματικά.

Το μειονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι είναι ακριβώς για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων. Η Εξ.(2.26) είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore [35] για την περίπτωση των πορωδών συστημάτων:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fo} \exp(-aP) \quad (2.26)$$

όπου σ_{fo} είναι η αντοχή της μήτρας χωρίς πόρους, a μια σταθερά και P η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε πόρους.

2.2.1.4 Περιορισμοί των θεωρητικών μοντέλων σχετικά με την αντοχή των σύνθετων υλικών.

Όπως προαναφέρθη, το μέγεθος των κόκκων επηρεάζει πολύ την αντοχή σε εφελκυσμό των συστημάτων. Γενικά η αντοχή σε εφελκυσμό αυξάνει με την ελάττωση του μεγέθους. Η αύξηση της ενδιάμεσης επιφάνειας μεταξύ δύο φάσεων παρέχει έναν πολύ αποτελεσματικό δεσμό στην επιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων και θεωρείται ότι είναι πολύ σημαντικός παράγων. Το μέγεθος κόκκου είναι επίσης σχετικό με την εξάρτηση από το μέγεθος της ατέλειας του υλικού.

Ο Goodier [1] έχει αποδείξει ότι το τασικό πεδίο κοντά σ' έναν κόκκο, είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του κόκκου. Όμως ο όγκος του πολυμερούς που υφίσταται συγκέντρωση τάσεων, αυξήθηκε με την αύξηση στο μέγεθος του κόκκου, άρα η πιθανότητα εύρεσης μιας μεγάλης ατέλειας αυξάνει με την αύξηση του μεγέθους του κόκκου.

Η επίδραση από την διεπιφανειακή (λεπτή επιφάνεια μεταξύ δύο φάσεων) πρόσφυση επί της αντοχής μπορεί να δικαιολογηθεί με όμοιο τρόπο εφόσον ένας αδύναμος δεσμός μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας θα δράσει ως μια υπάρχουσα ατέλεια που θα παράγει μια κοιλότητα ίση με το μέγεθος της.

Η μορφή (σχήμα) εγκλείσματος αναμένεται να παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων. Όταν έχουμε εγκλείσματα τα οποία δεν έχουν κανονική μορφή η εξασθένηση της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων οφείλεται σε μεγάλη συγκέντρωση τάσεων που συζευγνύεται με επίδραση μεγέθους. Σε στρογγυλεμένες ρωγμές και εγκλείσματα, η συγκέντρωση τάσης είναι ολιγότερο σημαντική παρά σε εγκλείσματα με οξείες (κοπτερές) γωνίες.

Η προαναφερθείσα αναφορά αποδεικνύει καθαρά ότι αυτά τα υπάρχοντα μοντέλα για την πρόβλεψη της αντοχής θέτουν ένα άνω όριο στην αντοχή ενός συστήματος εγκλεισμάτων.

Όταν γίνεται πρόβλεψη της αντοχής ενός υλικού με έγκλεισμα με την χρησιμοποίηση του νόμου των δυνάμεων (power law) η εκλογή των κατάλληλων σταθερών επηρεάζεται από το σχήμα των κόκκων και την διάταξη τους μέσα στο γεωμετρικό μοντέλο. Επιπλέον η συγκέντρωση τάσεων θα χαμηλώσει αυτές τις τιμές κατά ακαθόριστη ποσότητα.

Απ' την άλλη, στις αναλύσεις των Leidner και Woodhams [31], οι θερμικές τάσεις (σ_{th}) και της αντοχής του δεσμού μήτρας - κόκκου σε είναι δύσκολο να μετρηθούν για πραγματικά σύνθετα υλικά. Στις πολύ χαμηλές περιεκτικότητες κατ' όγκο U_f μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις για τις θερμικές τάσεις, αλλά σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες κατ' όγκο U_f οι υπολογισμοί περιπλέκονται από την παρουσία γειτονικών κόκκων.

2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών.

Παρακάτω αναφέρονται τα διάφορα θεωρητικά μοντέλα που έχουν προβλεφθεί από τους διάφορους ερευνητές για την Παραμόρφωση θραύσης.

ο Smith [36] πρότεινε τον παρακάτω τύπο με ϵ_c και ϵ_m την παραμόρφωση θραύσης του σύνθετου και της μήτρας αντίστοιχα:

$$\epsilon_c = \epsilon_m (1 - 1,106 U_f^{1/3}) \quad (2.27)$$

Ο Bueche [17, 18] πρότεινε μια αντίστοιχη εξίσωση χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη:

$$\epsilon_c = \epsilon_m (1 - U_f^{1/3}) \quad (2.28)$$

Ο Nielsen [25, 27] πρότεινε την εξίσωση που έχει την ίδια μορφή με την παραπάνω εξίσωση:

$$\epsilon_c = \epsilon_m (1 - U_f^{1/3}) \quad (2.29)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη Θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεω- παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, των συσσωματωμάτων του μεγέθους των σωματιδίων , του μέτρου πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στην μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών.

2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή.

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινωδών υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσης συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων του υλικού, αν και η βασικότερη επιδίωξη μας είναι η βελτίωση των φυσικοχημικών ιδιοτήτων.

Ανάλογα με την αποτελεσματικότητα τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά (είναι εκείνα που προκαλούν ενίσχυση) και σε αδρανή (είναι εκείνα που δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν μόνο αλλαγή χρωματισμού και μείωση του κόστους).

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητα τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο δομική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς. Έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μέγεθος, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων.

Με τον όρο κινητική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του συνθέτου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετισθεί με την ενέργεια W θραύσης του πολυμερούς. Μετρίεται από το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη τάσεων - παραμορφώσεων . Όπου L_b το μήκος του δοκιμίου στη θραύση L_0 το αρχικό μήκος και σ η επιβαλλόμενη τάση.

$$W = \int_{L_0}^{L_{bT_0}} \sigma dL \quad (2.30)$$

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου με την παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση.

Έτσι τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή της ελάττωσης εξαρτάται από τη φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των συνθέτων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλείσματος. Ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του συνθέτου υλικού είναι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μηχανική αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού, σαν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους.

Παράλληλα η αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, με τη βέλτιστη (Optimum) περιεκτικότητα όπου προκαλείται κορεσμός των κέντρων προσρόφησης μακρομορίων επάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.

2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα.

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματος τους. Η αλλαγή όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή των παραμορφώσεων). Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με νέες διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος μπορεί να -επιτευχθεί με δύο τρόπους:

α. Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (πχ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).

β. Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων του στοιχειώδους κύβου οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή σχήματος επιτυγχάνεται και από ορθές, και από διατμητικές τάσεις και άρα παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που προσφέρεται από τη μηχανή επιβολής των φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμορφώσεων η οποία αποτελείται από δύο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται ενέργεια μεταβολής όγκου και έναν που αντιστοιχεί σε αλλαγές σχήματος ή στρέβλωση του υλικού και καλείται στροφική ενέργεια. Προφανώς το άθροισμα των δύο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμορφώσεων που αποθηκεύτηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη σ - ϵ και τον άξονα των παραμορφώσεων παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας των παραμορφώσεων που έχει αποθηκευτεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από αρχή της φορτίσεως μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ και η αντίστοιχη παραμόρφωση ϵ . Όταν το ζεύγος (σ, ϵ) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως Θ του

υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεων καλείται στερρότητα (toughness) του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

3. Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης.

3.1.1 Εισαγωγή

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών από πολυμερή είναι η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των κόκκων των εγκλεισμάτων, όπως επίσης και η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων. Η προσρόφηση των πολυμερικών μορίων εντός των κόκκων, είναι η κυρία αιτία για την δημιουργία διαφορετικών διαμορφώσεων των μακρομορίων στα περιχώρα των κόκκων. Η αλλαγή της μορφής των μακρομορίων προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι η παρουσία εγκλεισμάτων μέσα στην πολυμερική μήτρα καταλήγει σε μια ατέλεια του πολυμερικού δικτύου.

Είναι γνωστό [37-43] ότι οι ιδιότητες κατά την χαλάρωση των πολυμερικών συνθέτων υλικών επηρεάζονται πολύ από την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς αυτών των συνθέτων και η διαλογή πληροφοριών οι οποίες αφορούν την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του συνθέτου συστήματος.

Όμως, η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, μεταξύ άλλων, από την πειραματική μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται στις δοκιμές και αυτό διότι κάθε μία από τις πειραματικές μεθόδους χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Έτσι, κάθε μέθοδος τείνει να επιδείξει έναν ιδιαίτερο τύπο μοριακών κινήσεων ως συνέπεια των παραπάνω διαφορών τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους είναι συχνά διαφορετικά, όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι οι διαφορετικές τιμές για την θερμοκρασία μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση, T_g , οι οποίες λαμβάνονται από διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, όπως η θερμιδομετρία, διαστολομετρία, δυναμικές μετρήσεις κ.λ.π. [44,45].

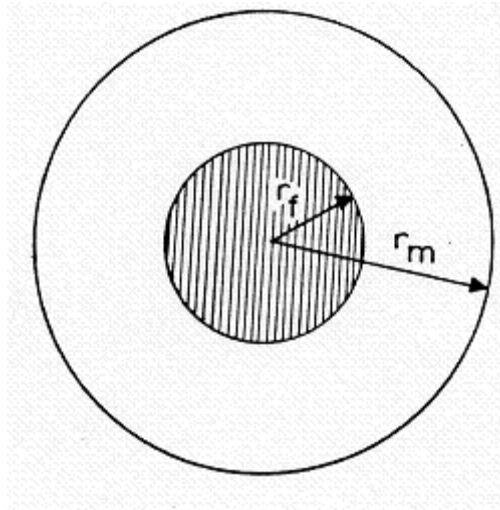
Επίσης, υπάρχουν διαφορές όσον αφορά την επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων, U_f , στην θερμοκρασία T_g [46]. Αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα των κόκκων, αυξάνεται και η T_g , και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι όμως βρήκαν ότι η T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιεκτικότητα [47,48,49]. Μετρήσεις διαστολομετρίας οι οποίες έγιναν [50] σε

ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους μετάλλου έδειξαν ότι οι τιμές της T_g εξαρτώνται πολύ από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα.

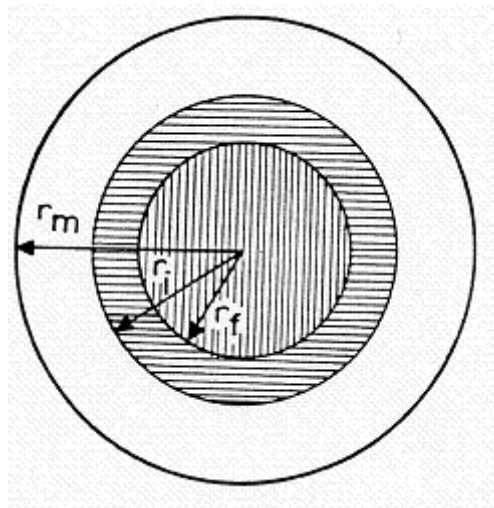
Στην περίπτωση μετρήσεων θερμιδομετρίας ή διαστολομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στη θέση των μεταβατικών θερμοκρασιών, είναι ο ρυθμός θέρμανσης. Έχει παρατηρηθεί [51,52,53] ότι, σε μετρήσεις D.S.C, η εξάρτηση από τον ρυθμό θέρμανσης, H_r , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν στις μεταβατικές θερμοκρασίες του πολυμερούς.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμών εποξειδικής ρητίνης και κόκκων σιδήρου [53]. Η επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων και της διαμέτρου αυτών στην θερμική συμπεριφορά των δοκιμών του συνθέτου υλικού έχει μελετηθεί εκτενώς. Έχει διερευνηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης επί της T_g και έχει υπολογισθεί το πάχος και ο όγκος της ενδιάμεσης φάσης με βάση αυτές τις θερμικές μετρήσεις. Επίσης, έχουν γίνει ορισμένα πειράματα μικρότερης έκτασης (μία διάμετρος κόκκων) με δοκίμια εποξειδικής ρητίνης και κόκκους αλουμινίου για την διερεύνηση της επίδρασης της περιεκτικότητας, ρυθμού θέρμανσης και τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης.

Ένα μοντέλο με τρεις φάσεις, εγκλείσμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση, το οποίο προκύπτει από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 3.1), με την ενδιάμεση φάση να έχει μεταβαλλόμενες ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, συντελεστής θερμικής διαστολής), έχει χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και συντελεστή θερμικής διαστολής του συνθέτου υλικού, με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας (Σχήμα 3.2). Οι θεωρητικοί τύποι, οι οποίοι προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του μοντέλου, δύνανται να συγκριθούν με άλλους θεωρητικούς τύπους της βιβλιογραφίας καθώς επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 3.1 Μοντέλο Διφασικό (Εγκλεισμα-Μήτρα)



Σχήμα 3.2 Μοντέλο Τριφασικό (Εέγκλεισμα-ενδιάμεση φάση-μήτρα)

3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάστηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Η μήτρα των συνθέτων υλικών, ήταν σε όλες τις περιπτώσεις εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384, και με ιξώδες 15000cP στους 25°C, πολυμεριζομένη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλική τετραμίνη. Εξ' άλλου, χρησιμοποιήθηκαν κόκκοι σκόνης σιδήρου ως εξής (Πίνακας 3.1):

Μέγεθος κόκκου (<i>mm</i>)	Ειδικός όγκος (<i>cm³/100gr</i>)	Φαινόμενη πυκνότητα (<i>gr/cm³</i>)
0,15	38-41	2,60-2,40

Πίνακας 3.1

Οι ιδιότητες των συνιστωσών υλικών του συνθέτου υλικού μας είναι όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα 3.2.

Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	λ μ M	N/m^2 N/m^2	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m^2	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m^2	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr/cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	a	C^{-1}	$15,00 \times 10^{-6}$	$65,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 3.2

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας E και ν έχουν μετρηθεί κατά την διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους $20^\circ C$ και σε χρόνο 15sec από την αρχή του πειράματος. Πρέπει να διευκρινισθεί ότι με a συμβολίζουμε τον συντελεστή θερμικής διαστολής για θερμοκρασίες κάτω της υαλώδους θερμοκρασίας T_g .

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμών, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους $30^\circ C$ περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατώνουμε το μίγμα, και στην συνέχεια το τοποθετούμε σε θάλαμο κενού, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρος τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στην συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων $250 \times 250 \times 50 \text{ mm}$, το οποίο σφραγίσθηκε με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ νέου ανάδευση του μίγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατόν ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επί 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διάρκειας 7 ημερών ως εξής:

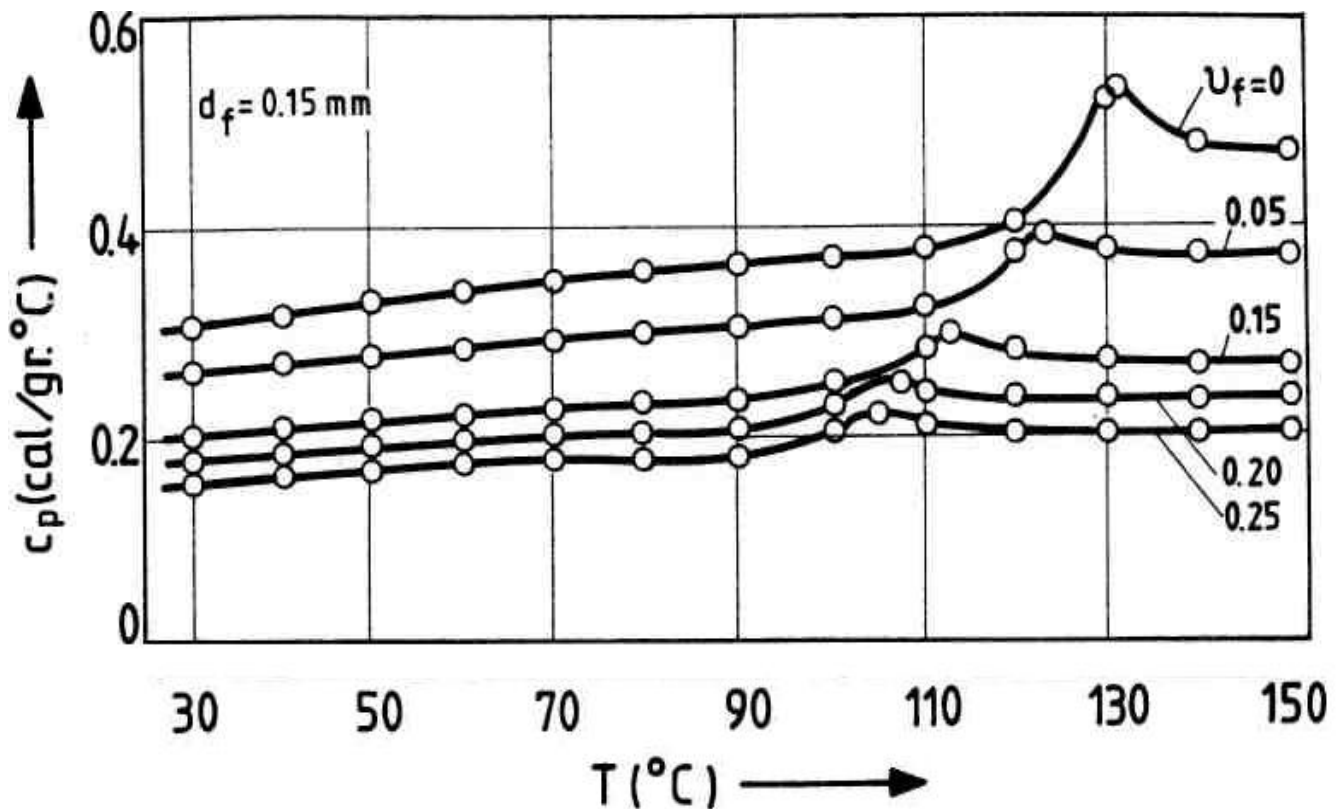
Εισήχθη σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά 5° C/h , στη συνέχεια να παραμείνει σταθερά στους 100° C και τέλος να ελαττώνεται κατά 1° C/h έως την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σ' ένα διάστημα που το σύνθετο υλικό να μη παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά.

Δοκίμια με διάμετρο 4mm και πάχους 1-1,50mm κόπηκαν από κάθε υλικό με διαφορετική περιεκτικότητα και διάμετρο κόκκων του μετάλλου. Οι μετρήσεις έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή (DSC) Du-Pont 900. Η τοποθέτηση των δοκιμίων έγινε όταν η συσκευή ήταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και μετά η αύξηση της θερμοκρασίας έγινε με σταθερό ρυθμό. Για να μελετηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ρυθμοί θέρμανσης ($5, 10$ και 205° C/min). Η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβάλλεται από 5% έως 25%.

3.1.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης

Η μεταβολή της ειδικής θερμότητας (C_p) με την θερμοκρασία για κόκκους σιδήρου με $d_i=150\mu\text{m}$, εξετάζεται για πέντε περιεκτικότητες ($U_i=0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25$) με ρυθμό θέρμανσης $H_r=5^\circ \text{ C/min}$. Από το (Σχήμα 3.3) παρατηρούμε όχι μόνο μια μεταβολή στην θέση της μεταβατικής περιοχής, η οποία εκδηλώνεται με μια απότομη μεταβολή στην ειδική θερμότητα, αλλά επίσης και μια μείωση της ΔC_p στην υαλώδη μεταβατική περιοχή όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα του εγκλείσματος.



Σχήμα 3.3 (Μεταβολή ειδικής θερμότητας για κόκκους σιδήρου)

Όταν η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα επίσης αυξάνεται, έτσι ώστε ο αριθμός των μακρομορίων, τα οποία συμμετέχουν στην διαδικασία της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g ελαττώνεται. Αυτό είναι ισοδύναμο με μια αύξηση του όγκου της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δηλαδή υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ΔC_p και του όγκου της ενδιάμεσης φάσης [55], η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0}$$

(3.1)

όπου ΔC_p^f και ΔC_p^0 είναι τα άλματα (απότομη μεταβολή) της ειδικής θερμότητας στην μεταβατική περιοχή για το ενισχυμένο και μη ενισχυμένο πολυμερές αντιστοίχως, ενώ λ είναι μία σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με

την περιεκτικότητα του εγκλείσματος U_f ώστε να ληφθή υπ' όψιν η συνεισφορά του όγκου της ενδιάμεσης φάσης στην θερμομηχανική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού.

Εάν r_f , r_i , r_m συμβολίζουν τις εξωτερικές ακτίνες του εγκλείσματος, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντιστοίχως, τότε οι όγκοι των τριών φάσεων δίνονται ως εξής:

$$U_f = \frac{r_f^3}{r_m^3} \quad (3.2)$$

$$U_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3} \quad (3.3)$$

$$U_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3} \quad (3.4)$$

$$\text{με } U_f + U_i + U_m = 1$$

Για να προσδιορισθεί η ακτίνα του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ενδιάμεση φάση εκφράζουμε αυτό ως $r_i = r_f + \Delta r_i$, όπου Δr_i το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και χρησιμοποιούμε την σχέση η οποία δίνεται από τον Lipatov.

$$\frac{(r_f + \Delta r_i)^3}{r_f^3} - 1 = \frac{\lambda U_f}{1 - U_f}$$

$$(3.5)$$

3.1.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) T_g .

Όταν ένα πολυμερές θερμαίνεται η ψύχεται, υφίσταται ορισμένα είδη μεταβατικών καταστάσεων οι οποίες δημιουργούν μεταβολές στις φυσικές ιδιότητες του. Μία από τις σημαντικότερες είναι η υαλώδης μεταβατική θερμοκρασία ή η θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως ενός άμορφου πολυμερούς το οποίο μεταβάλλεται από ένα στερεό ως ύαλο υλικό (glassy) σε μαλακό υλικό (rubbery) όταν αυτό θερμανθεί.

U_f	$\Delta r_i (\mu m)$	U_i
0,05	0,30	0,0013
0,10	1,06	0,0040
0,15	2,12	0,0130
0,20	3,53	0,0280
0,25	5,00	0,0500

Πίνακας 3.3

4. Γεωμετρική μοντελοποίηση της κατανομής των εγκλεισμάτων

4.1 Γενικά

Τα μικροδομικά, γεωμετρικά μοντέλα μελέτης των μηχανικών ιδιοτήτων των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα , βασίζονται κυρίως στις εξής παραδοχές:

- Μια τυπική γεωμετρική δομή υιοθετείται για την εξομοίωση της διάταξης των εγκλεισμάτων στο χώρο. Συνήθως μία σφαίρα ή ένας κύλινδρος.
- Οι υπολογισμοί που γίνονται κατά τη μελέτη του μοντέλου , είναι βασισμένοι στη συνήθη γεωμετρία και τοπολογία.

Τα μοντέλα αυτά μπορεί να είναι είτε επίπεδα, είτε τριδιάστατα-ηλιοκεντρικά.

Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι τα βασικά δομικά κύτταρα του σύνθετου υλικού έχουν κυβική και οκταεδρική μορφή, ενώ τα εγκλείσματα κατανέμονται με διάφορους τρόπους στο χώρο δίνοντας έτσι δυο διαφορετικά κυβικά και δυο οκταεδρικά μοντέλα κάθε φορά .

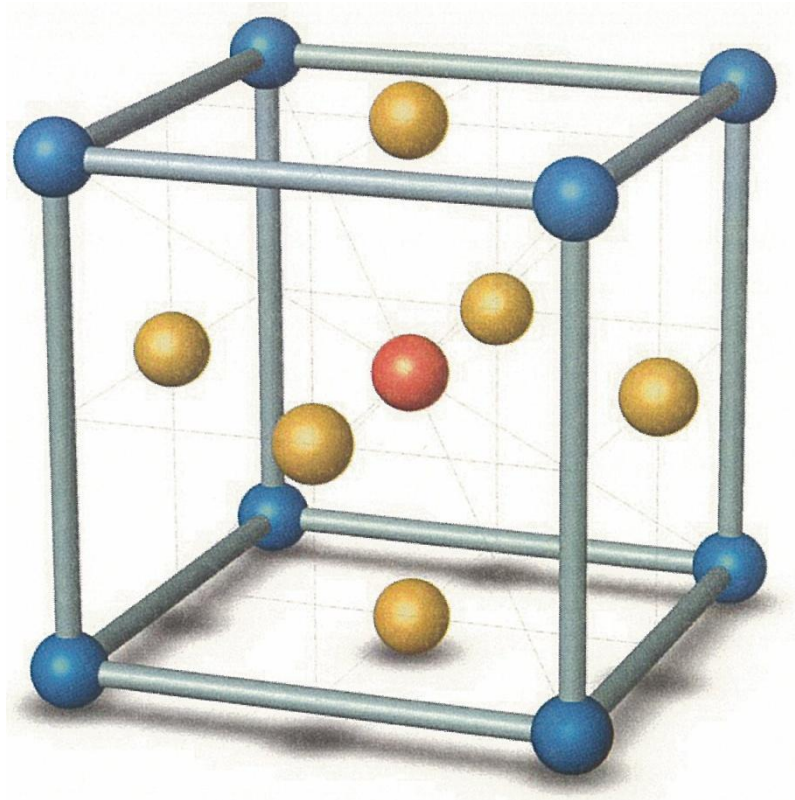
Τέλος καθένα από αυτά τα μοντέλα θα προσομοιώνεται με ένα αντίστοιχο σφαιρικό πολυφασικό μοντέλο για λόγους απλούστευσης της κατανομής των τάσεων στο δομικό κύτταρο, και άρα απλούστευσης των υπολογισμών (λόγω και της σφαιρικής συμμετρίας).

4.2 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 1

Πρώτο βήμα είναι η θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται οι κόκκοι (σφαιρικά εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας. Θεωρούμε λοιπόν ότι **1 σφαιρικό εγκλείσμα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους ενός Κύβου** ακμής λ , **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές του Κύβου** και **6 σφαιρικά εγκλείσματα** τα μέσα των πλευρών του. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

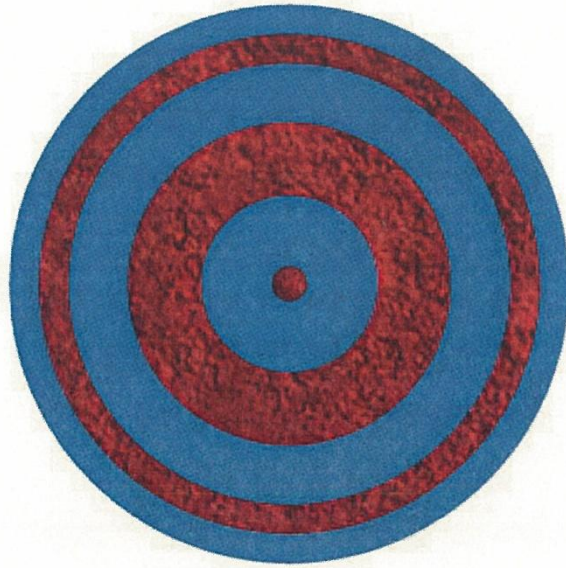
Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα “ισοδύναμο” σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο Κύβος αυτός ακμής λ , ο οποίος περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής 2λ , δημιουργώντας έτσι το δομικό “κύτταρο” του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ’ όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού .



Σχήμα 4.1Κυβικό μοντέλο 1

Τον κύβο ακμής 2λ θα τον ανάγουμε σε ένα εξαφασικό μοντέλο αποτελούμενο από έξι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a , b , c , d , f και h αντίστοιχα ($a < b < c < d < f < h$).



Σχήμα 4.2 Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 1 με αντίστοιχο σφαιρικό (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη, η τρίτη και η πέμπτη φάση, που τις αποτελούν η σφαίρα με ακτίνα a , ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα d και εξωτερική f , αντιπροσωπεύουν το υλικό του εγκλείσματος. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b (δεύτερη φάση), ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική d (τέταρτη φάση) και με εσωτερική ακτίνα f και εξωτερική h (έκτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο της μήτρας.

Ο όγκος του κύβου ακμής 2λ θα είναι:

$$V_{2\lambda} = (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = 8\lambda^3$$

Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους r_f . Για τον κύβο ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου της σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου, των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του και των 6 σφαιρών που βρίσκονται στο κέντρο των πλευρών του κύβου, προς τον όγκο του κύβου ακμής 2λ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 6\frac{4}{3}\pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{20}{8\lambda^3}\pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{5\pi}{2U_f}}$$

Ο όγκος του κύβου ακμής 2λ στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας h , ισχύει λοιπόν:

$$8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi h^3 \Rightarrow h = \lambda \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow h = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{15}{U_f}}$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής λ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Κύβου έως τα μέσα των πλευρών του ισούται με το

$$\text{μήκος } \lambda \frac{1}{2}$$

Αν ονομάσουμε w_1 αυτήν την απόσταση, το w_1 αντιπροσωπεύει την

απόσταση του κέντρου βάρους του Κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στα μέσα των πλευρών του.

$$w_1 = \lambda \frac{1}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έως τις κορυφές του και τα μέσα των σφαιριδίων που βρίσκονται εκεί, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$w_2 = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από έγκλεισμα. Επομένως, έχουμε ότι

$$a = r_f$$

Η φάση 3 αποτελείται από τα 6 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3) = 6 \frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (c^3 - b^3) = 6r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a και b , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_1 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - w_1^3) = \frac{4}{3}\pi(w_1^3 - b^3) \Rightarrow (b^3 + c^3) = 2w_1^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη έχω :

$$c = \sqrt[3]{w_1^3 + 3r_f^3}$$

Και

$$b = \sqrt[3]{w_1^3 - 3r_f^3}$$

Η φάση 5 αποτελείται από τα 8 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της δεύτερης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - d^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (f^3 - d^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_2 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η πέμπτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - w_2^3) = \frac{4}{3}\pi(w_2^3 - d^3) \Rightarrow (f^3 + d^3) = 2w_2^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω:

$$f = \sqrt[3]{w_2^3 + 4r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{w_2^3 - 4r_f^3}$$

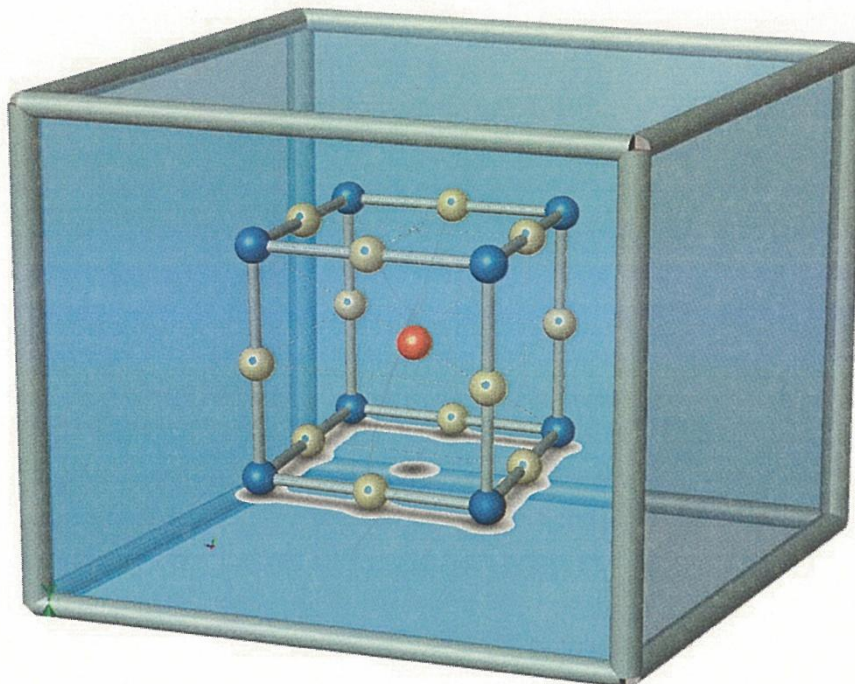
Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c , d , f και h συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

4.3 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 2

Θεωρούμε ότι 1 σφαιρικό έγκλεισμα βρίσκεται στο κέντρο βάρους ενός Κύβου ακμής λ , 8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές του και 12 σφαιρικά εγκλείσματα τα μέσα των ακμών του. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

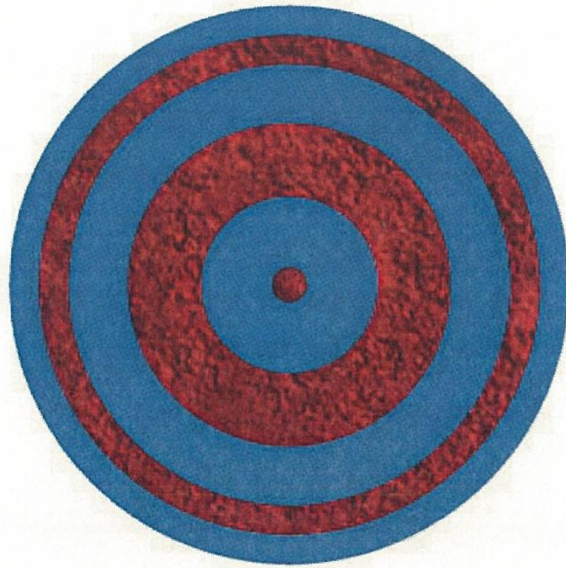
Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα "ισοδύναμο" σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο Κύβος αυτός ακμής λ , ο οποίος περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής 2λ , δημιουργώντας έτσι το δομικό "κύτταρο" του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ' όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού.



Σχήμα 4.3 Κυβικό μοντέλο 2

Τον κύβο ακμής 2λ θα τον ανάγουμε σε ένα εξαφασικό μοντέλο αποτελούμενο από έξι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a, b, c, d, f και h αντίστοιχα ($a < b < c < d < f < h$).



Σχήμα 4.4 Προσομοίωση κυβικού μοντέλου 2 με αντίστοιχο σφαιρικό χωρίς ενδιάμεση φάση (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, όμοια με το προηγούμενο, η πρώτη, η τρίτη και η πέμπτη φάση αποτελούν το υλικό του εγκλείσματος, ενώ οι υπόλοιπες το υλικό της μήτρας.

Ο όγκος του κύβου ακμής 2λ θα είναι:

$$V_{2\lambda} = (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = 8\lambda^3$$

Για τον κύβο ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου της σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του κύβου, των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου και των 12 σφαιρών που βρίσκονται στα μέσα των ακμών του κύβου, προς τον όγκο του Κύβου ακμής 2λ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 12\frac{4}{3}\pi r_f^3}{8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{21}{6\lambda^3}\pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{7\pi}{2U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής 2λ στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας h , ισχύει λοιπόν:

$$8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi h^3 \Rightarrow h = \lambda^3 \sqrt{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = \lambda^3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow h = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{21}{U_f}}$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής λ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Κύβου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει

$$\text{μήκος } \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αν ονομάσουμε w_2 αυτήν την απόσταση, το w_2 αντιπροσωπεύει την απόσταση του κέντρου βάρους του Κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w_2 = \lambda \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έως τα μέσα των ακμών του κύβου, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$w_1 = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από ένα έγκλεισμα, άρα

$$a = r_f.$$

Η φάση 3 αποτελείται από τα 12 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3) = 12 \frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (c^3 - b^3) = 12r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_1 . Με αφετηρία

δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - w_1^3) = \frac{4}{3}\pi(w_1^3 - b^3) \Rightarrow (c^3 + b^3) = 2w_1^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$c = \sqrt[3]{w_1^3 + 6r_f^3}$$

Και

$$b = \sqrt[3]{w_1^3 - 6r_f^3}$$

Η φάση 5 αποτελείται από τα 8 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της πέμπτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - d^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (f^3 - d^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της πέμπτης φάσης κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_2 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η πέμπτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - w_2^3) = \frac{4}{3}\pi(w_2^3 - d^3) \Rightarrow (f^3 + d^3) = 2w_2^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$f = \sqrt[3]{w_2^3 + 4r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{w_2^3 - 4r_f^3}$$

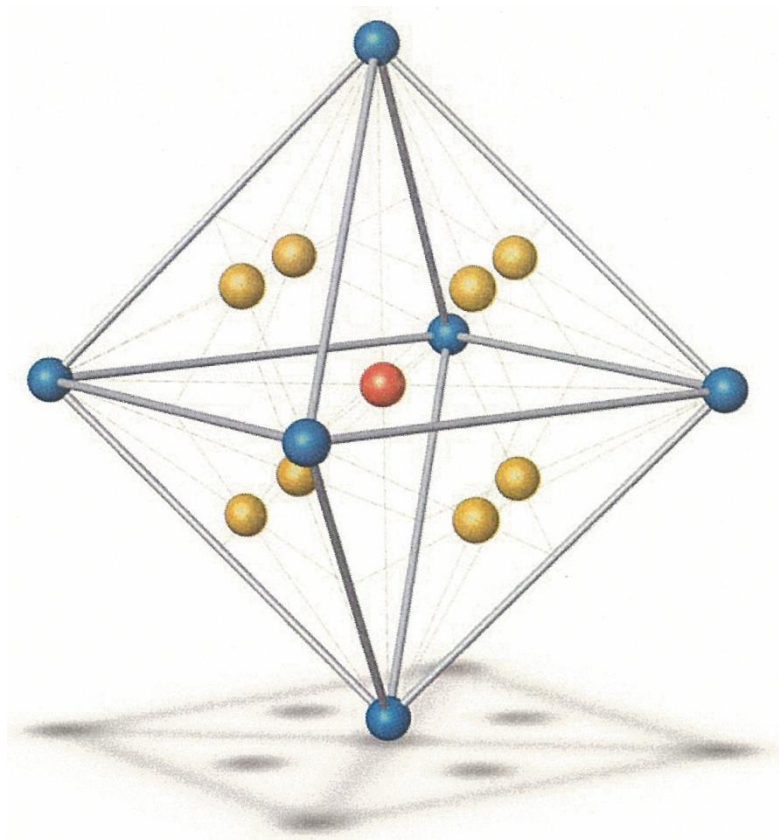
Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c , d , f και h συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

4.4 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 1

Θεωρούμε ότι **1 σφαιρικό έγκλεισμα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους ενός Οκταέδρου** ακμής λ , **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τα κέντρα βάρους των πλευρών του Οκταέδρου** και **6 σφαιρικά εγκλείσματα** κορυφές του. Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω οκταεδρικό μοντέλο σε ένα “ισοδύναμο” σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Το οκτάεδρο αυτό ακμής λ , το οποίο περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε ένα Οκτάεδρο ακμής 2λ , δημιουργώντας έτσι το δομικό “κύτταρο” του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ’ όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού.



Σχήμα 4.5 Οκταεδρικό μοντέλο 1

Το οκτάεδρο ακμής 2λ θα το ανάγουμε σε ένα εξαφασικό μοντέλο αποτελούμενο από έξι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a, b, c, d, f και h αντίστοιχα ($a < b < c < d < f < h$).



Σχήμα 4.6 Προσομοίωση οκταεδρικού μοντέλου 1 με αντίστοιχο σφαιρικό χωρίς ενδιάμεση φάση (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη, η τρίτη και η πέμπτη φάση, που τις αποτελούν η σφαίρα με ακτίνα a , ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα d και εξωτερική f , αντιπροσωπεύουν το υλικό του εγκλείσματος. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b (δεύτερη φάση), ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική d (τέταρτη φάση) και με εσωτερική ακτίνα f και εξωτερική h (έκτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο της μήτρας.

Ο όγκος του οκταέδρου ακμής 2λ θα είναι:

$$V_{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3}(2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3}8\lambda^3$$

Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους r_f . Για το οκτάεδρο ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου της σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του οκταέδρου, των 6 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του και των 8 σφαιρών που βρίσκονται στα κέντρα βάρους των πλευρών του οκταέδρου, προς τον όγκο του Οκταέδρου ακμής 2λ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 6\frac{4}{3}\pi r_f^3}{\frac{\sqrt{2}}{3}8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{60}{8\sqrt{2}\lambda^3}\pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{15\sqrt{2}\pi}{4U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής 2λ στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας h , ισχύει λοιπόν:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi h^3 \Rightarrow h = \lambda \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}} \Rightarrow h = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{15}{U_f}}$$

Θεωρούμε το οκτάεδρο ακμής λ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Οκταέδρου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει

$$\text{μήκος } \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Αν ονομάσουμε w_2 αυτήν την απόσταση, το w_2 αντιπροσωπεύει την

απόσταση του κέντρου βάρους του οκταέδρου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w_2 = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του οκταέδρου έως τα κέντρα βάρους των πλευρών του, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$w_1 = \frac{\lambda\sqrt{6}}{6}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από ένα έγκλεισμα. Άρα έχουμε

$$a = r_f$$

Η φάση 3 αποτελείται από τα 8 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (c^3 - b^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_1 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - w_1^3) = \frac{4}{3}\pi(w_1^3 - b^3) \Rightarrow (c^3 + b^3) = 2w_1^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$c = \sqrt[3]{w_1^3 + 4r_f^3}$$

Και

$$b = \sqrt[3]{w_1^3 - 4r_f^3}$$

Η φάση 5 αποτελείται από τα 6 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της πέμπτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - d^3) = 6\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (f^3 - d^3) = 6r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_2 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η πέμπτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - w_2^3) = \frac{4}{3}\pi(w_2^3 - d^3) \Rightarrow (f^3 + d^3) = 2w_2^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$f = \sqrt[3]{w_2^3 + 3r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{w_2^3 - 3r_f^3}$$

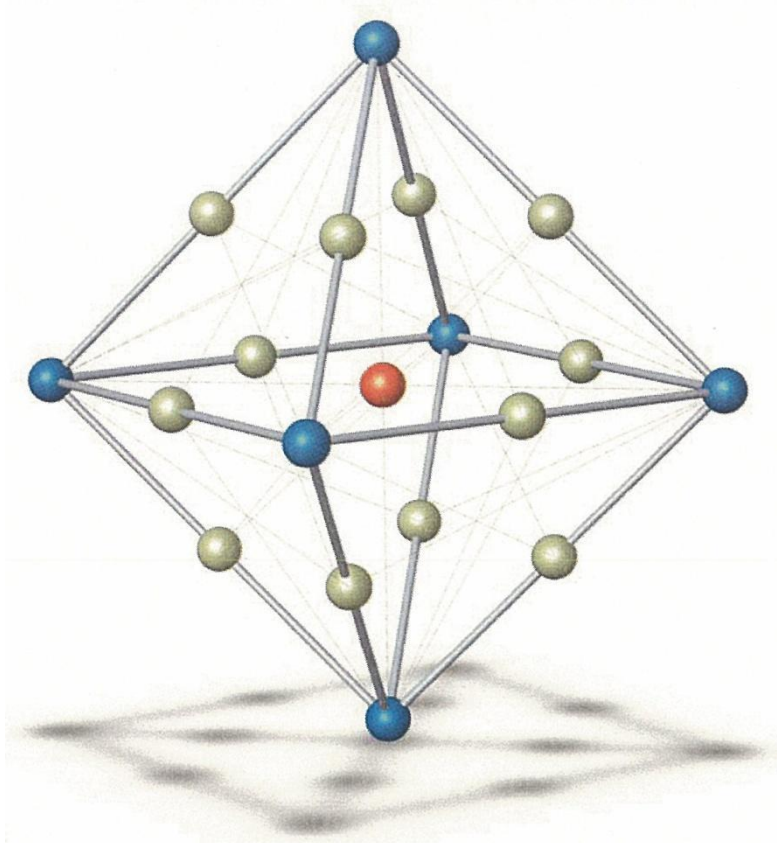
Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c , d , f και h συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

4.5 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 2

Θεωρούμε ότι **1 σφαιρικό έγκλεισμα καταλαμβάνει το κέντρο βάρους Οκταέδρου ακμής λ , 12 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τα μέσα των ακμών του οκταέδρου και 6 σφαιρικά εγκλείσματα τις κορυφές του οκταέδρου.** Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού.

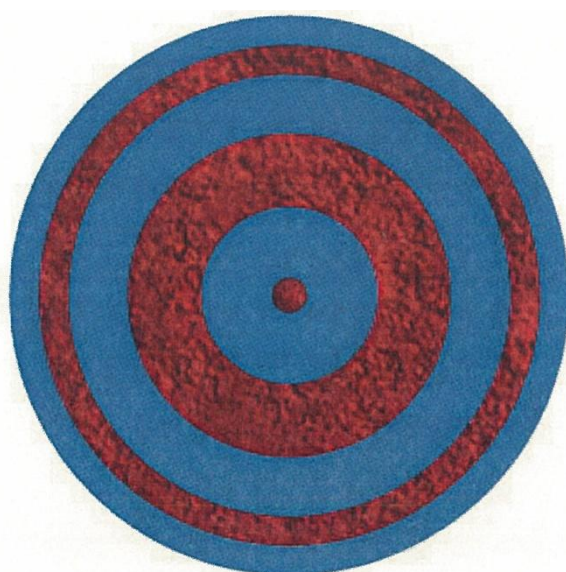
Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω οκταεδρικό μοντέλο σε ένα “ισοδύναμο” σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Το οκτάεδρο αυτό ακμής λ το οποίο περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε ένα δεύτερο Οκτάεδρο ακμής 2λ , δημιουργώντας έτσι το δομικό “κύτταρο” του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ’ όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού .



Σχήμα 4.7 Οκταεδρικό μοντέλο 2

Το οκτάεδρο ακμής 2λ θα το ανάγουμε σε ένα εξαφασικό μοντέλο αποτελούμενο από έξι ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a , b , c , d , f και h αντίστοιχα ($a < b < c < d < f < h$).



Σχήμα 4.8 Προσομοίωση οκταεδρικού μοντέλου 2 με αντίστοιχο σφαιρικό χωρίς ενδιάμεση φάση (σε τομή)

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη, η τρίτη και η πέμπτη φάση, που τις αποτελούν η σφαίρα με ακτίνα a , ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα d και εξωτερική f , αντιπροσωπεύουν το υλικό του εγκλείσματος. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b (δεύτερη φάση), ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική d (τέταρτη φάση) και με εσωτερική ακτίνα f και εξωτερική h (έκτη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο της μήτρας.

Ο όγκος του οκταέδρου ακμής 2λ θα είναι:

$$V_{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3} (2\lambda)^3 \Rightarrow V_{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3} 8\lambda^3$$

Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους r_f . Για το οκτάεδρο ακμής 2λ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου της σφαίρας που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του οκταέδρου, των 6 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του και των 12 σφαιρών που βρίσκονται στα μέσα των ακμών του οκταέδρου, προς τον όγκο του Οκταέδρου ακμής 2λ , δηλαδή:

$$U_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r_f^3 + 12 \frac{4}{3}\pi r_f^3 + 6 \frac{4}{3}\pi r_f^3}{\frac{\sqrt{2}}{3} 8\lambda^3} \Rightarrow U_f = \frac{19}{8\sqrt{2}\lambda^3} \pi r_f^3 \Rightarrow \lambda = r_f \sqrt[3]{\frac{19\sqrt{2}\pi}{4U_f}}$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής 2λ στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας h , ισχύει λοιπόν:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} 8\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi h^3 \Rightarrow h = \lambda \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}} \Rightarrow h = r_f \cdot \sqrt[3]{\frac{19}{U_f}}$$

Θεωρούμε το οκτάεδρο ακμής λ . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του Οκταέδρου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει

$$\text{μήκος } \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Αν ονομάσουμε w_2 αυτήν την απόσταση, το w_2 αντιπροσωπεύει την

απόσταση του κέντρου βάρους του οκταέδρου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

$$w_2 = \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του οκταέδρου έως τα κέντρα βάρους των πλευρών του, προκύπτει από τη γεωμετρία

$$w_1 = \lambda \frac{1}{2}$$

Η πρώτη φάση αποτελείται από ένα έγκλεισμα. Άρα έχουμε

$$a = r_f$$

Η φάση 3 αποτελείται από τα 12 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3) = 12\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (c^3 - b^3) = 8r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_1 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η τρίτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(c^3 - w_1^3) = \frac{4}{3}\pi(w_1^3 - b^3) \Rightarrow (c^3 + b^3) = 2w_1^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω :

$$c = \sqrt[3]{w_1^3 + 6r_f^3}$$

Και

$$b = \sqrt[3]{w_1^3 - 6r_f^3}$$

Η φάση 5 αποτελείται από τα 6 εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της πέμπτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - d^3) = 6\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (f^3 - d^3) = 6r_f^3$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός της φάσης αυτής κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w_2 . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η πέμπτη φάση “απλώνεται” κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi(f^3 - w_2^3) = \frac{4}{3}\pi(w_2^3 - d^3) \Rightarrow (f^3 + d^3) = 2w_2^3$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη και έχω:

$$f = \sqrt[3]{w_2^3 + 3r_f^3}$$

$$d = \sqrt[3]{w_2^3 - 3r_f^3}$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε τις ακτίνες a , b , c , d , f και h συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f .

4.6 Γεωμετρικοί περιορισμοί

Στο παρών κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν από το κάθε κυβικό μοντέλο, λόγω της διάταξης των μορίων του σιδήρου που θεωρούμε κάθε φορά. Επειδή η ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσεως γίνεται μέσα στην περιοχή της μήτρας, γι αυτό άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και σαν αλλοιωμένη μήτρα, δεν προσθέτει κάποιον επιπλέον γεωμετρικό περιορισμό σχετικά με τις μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες που μπορεί να έχουμε στο κάθε μοντέλο. Για αυτό και θα τους εξετάσουμε στα εξαφασικά μοντέλα μας, αγνοώντας την επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως.

4.6.1 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 1

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w_1^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{14\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0.376851$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 6r_f^3 < w_2^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 6r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \frac{19\pi}{18\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.535924$$

$$e < f \Leftrightarrow e^3 < f^3 \Leftrightarrow w_2 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{19}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 3r_f^3 < \frac{19}{U_f} r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{152 - 19\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 3.84$$

$$b > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \frac{19\pi}{96\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.439660$$

$$d > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \frac{19\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 2.48$$

$$\mathbf{U_f < 0,245436}$$

4.6.2 Εξαφασικό κυβικό μοντέλο 2

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w_1^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 21\pi}{42} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0.555360$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 6r_f^3 < w_2^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 + 6r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] 21\pi}{3(12+8)} \Leftrightarrow U_f < 0.325431$$

$$e < f \Leftrightarrow e^3 < f^3 \Leftrightarrow w_2 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{21}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 + 4r_f^3 < \frac{21}{U_f} r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{21}{8} 2 \left[1 - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \pi}{6} \right] \Leftrightarrow U_f < 3.46$$

$$b > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{36} \Leftrightarrow U_f < 0.647920$$

$$d > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{6U_f} r_f^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{21\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 1.78$$

$$U_f < 0,325431$$

4.6.3 Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 1

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w_1^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 4r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \frac{15\pi}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$U_f < 0.226724$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 4r_f^3 < w_2^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 4r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \right] \frac{15\pi}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.679551$$

$$e < f \Leftrightarrow e^3 < f^3 \Leftrightarrow w_2 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{15}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 3r_f^3 < \frac{15}{U_f} r_f^3 \Leftrightarrow$$

$$U_f < \frac{120 - 15\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 3.03$$

$$b > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 4r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^3 \frac{15\pi}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.283406$$

$$d > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{15\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \frac{15\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 1.96$$

$$\mathbf{U_f < 0,226724}$$

4.6. Εξαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 2

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \Leftrightarrow r_f^3 < w_1^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow r_f^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 6r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{14\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.376851$$

$$c < d \Leftrightarrow c^3 < d^3 \Leftrightarrow w_1^3 + 6r_f^3 < w_2^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 6r_f^3 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \frac{19\pi}{18\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.535924$$

$$e < f \Leftrightarrow e^3 < f^3 \Leftrightarrow w_2 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{19}{U_f} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 + 3r_f^3 < \frac{19}{U_f} r_f^3 \Leftrightarrow U_f < \frac{152 - 19\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 3.84$$

$$b > 0 \Leftrightarrow w_1^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 6r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \frac{19\pi}{96\sqrt{2}} \Leftrightarrow U_f < 0.439660$$

$$d > 0 \Leftrightarrow w_2^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{19\pi}{2\sqrt{2}U_f} r_f^3 - 3r_f^3 > 0 \Leftrightarrow U_f < \frac{19\pi}{24} \Leftrightarrow U_f < 2.48$$

U_f < 0,376851

Άρα τελικά οι μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο είναι :

	Κυβικό Μοντέλο 1	Κυβικό Μοντέλο 2	Οκταεδρικό μοντέλο 1	Οκταεδρικό μοντέλο 2
Μέγιστη Δυνατή Περιεκτικότητα U _f	24,45%	32,54%	22,67%	37,68%

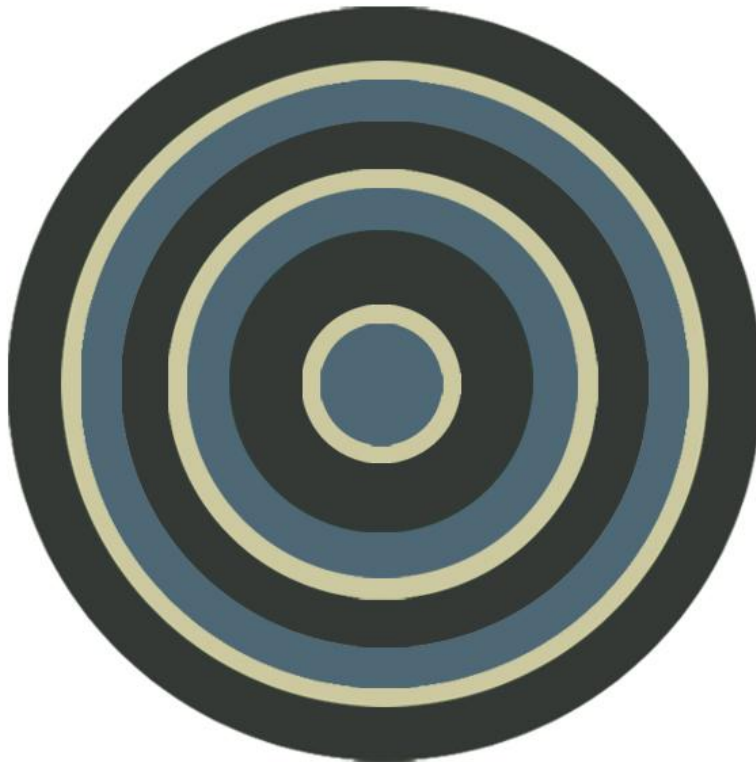
Πίνακας 4.1

Τελικά, για το Κυβικό μοντέλο 1 το τελευταίο σημείο περιεκτικότητας εγκλεισμάτων σιδήρου που θα μελετηθεί είναι το $U_f=0.24\%$, ενώ για το Οκταεδρικό μοντέλο 1 θα είναι το $U_f=0.22\%$, προκειμένου και στις δυο περιπτώσεις να βρισκόμαστε εντός των επιτρεπτών περιεκτικότητων που προέκυψαν παραπάνω.

5. Ανάπτυξη μοντέλων ενδιάμεσης φάσης

5.1 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εννιαφασικού μοντέλου

Το εννιαφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από τρεις περιοχές εγλεισμάτων κόκκων σιδήρου (μπλε περιοχές 1,4 και 7) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (γκρι περιοχές 3,6 και 9). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (άσπρες περιοχές 2,5 και 8).



Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί E_2, E_5, E_8 και ν_2, ν_5, ν_8 χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson ν_c .

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι :

$$E_1 = E_4 = E_7 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_3 = E_6 = E_9 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

Αν με U_f συμβολίσουμε την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος με U_i την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και U_m την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της μήτρας τότε θα ισχύει,

$$U_f = U_1 + U_4 + U_7$$

$$U_i = U_2 + U_5 + U_8$$

Και

$$U_m = U_3 + U_6 + U_9$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις τρεις περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,3}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = K$$

$$U_2 = k \cdot U_3 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3} \pi r_9^3} = k \frac{\frac{4}{3} \pi (r_3^3 - r_2^3)}{\frac{4}{3} \pi r_9^3} \Rightarrow (r_2^3 - r_1^3) = k r_3^3 - k r_2^3 \Rightarrow$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{k r_3^3 + r_1^3}{k + 1}}$$

$$U_5 = K \cdot U_6 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_6^3 - r_5^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_5^3 - r_4^3) = k(r_6^3 - r_5^3) \Rightarrow$$

$$r_5 = \sqrt[3]{\frac{Kr_6^3 + r_4^3}{K+1}}$$

$$U_8 = K \cdot U_9 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_8^3 - r_7^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_9^3 - r_8^3)}{\frac{4}{3}\pi r_9^3} \Rightarrow (r_8^3 - r_7^3) = k(r_9^3 - r_8^3) \Rightarrow$$

$$r_8 = \sqrt[3]{\frac{Kr_9^3 + r_7^3}{K+1}}$$

Για τις κατά όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_1^3}{R_9^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_9^3}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_3^3 - R_2^3}{R_9^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_4^3 - R_3^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_4^3 - R_3^3}{R_9^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_5^3 - R_4^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_5^3 - R_4^3}{R_9^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_6^3 - R_5^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_6^3 - R_5^3}{R_9^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_7^3 - R_6^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_7^3 - R_6^3}{R_9^3}$$

$$U_8 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_8^3 - R_7^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_8^3 - R_7^3}{R_9^3}$$

$$U_9 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_9^3 - R_8^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_9^3)} = \frac{R_9^3 - R_8^3}{R_9^3}$$

Οι ακτίνες των φάσεων 1, 3, 4, 6, 7 και 9 βρίσκονται στο κεφάλαιο 4 για κάθε κυβικό μοντέλο όπου πλέον οι ακτίνες με ονομασία a,b,c,d,f και h αντιστοιχούν στις ακτίνες r_1, r_3, r_4, r_6, r_7 και r_9 .

Από τον πίνακα 3.3, σε κάθε σύσταση U_f αντιστοιχεί μια σύσταση U_i για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη:

U_f (%)	U_i (%)
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,02
0,25	0,05

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών (U_f, U_i) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm :

Κυβικό Μοντέλο 1:

U_f	U_i	R₁(μm)	R₂(μm)	R₃(μm)	R₄(μm)	R₅(μm)	R₆(μm)	R₇(μm)	R₈(μm)	R₉(μm)
0,05	0,0013	75	75,53111	191,455	212,155	212,477	345,813	354,976	355,272	502,0747
0,1	0,004	75	75,64089	142,211	175,520	176,211	270,687	285,2441	285,971	398,497
0,15	0,013	75	75,96072	114,357	159,093	160,813	233,065	252,1675	254,247	348,1192
0,2	0,02	75	75,56371	93,0343	149,427	151,538	208,569	231,7577	234,697	316,2872
0,25	0,05	75	75,14874	77,2002	144,086	148,480	193,807	220,0458	226,943	297,6377

Πίνακας 5.1

Ενώ η **περιεκτικότητα** της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

U_f	U_i	U₁	U₂	U₃	U₄	U₅	U₆	U₇	U₈	U₉
0,05	0,0013	0,003333	7,13173E-05	0,052045	0,02	0,000344	0,25096	0,026667	0,000885	0,645694
0,1	0,004	0,006667	0,00017237	0,038611	0,04	0,001013	0,226958	0,053333	0,002814	0,630432
0,15	0,013	0,01	0,000389233	0,025061	0,06	0,00313	0,201508	0,08	0,009481	0,610432
0,2	0,02	0,013333	0,000302913	0,011814	0,08	0,004533	0,176772	0,106667	0,015164	0,591415
0,25	0,05	0,016	9,53847E-05	0,001354	0,096	0,0107	0,151938	0,128	0,039205	0,556708

Πίνακας 5.2

Κυβικό Μοντέλο 2:

Uf	Ui	R ₁ (μm)	R ₂ (μm)	R ₃ (μm)	R ₄ (μm)	R ₅ (μm)	R ₆ (μm)	R ₇ (μm)	R ₈ (μm)	R ₉ (μm)
0,05	0,0013	75	77,3462465	311,6517	328,1383	328,2368	388,3554	395,6758	396,0113	561,6654
0,1	0,004	75	78,38648031	240,2615	266,5202	266,7184	305,2488	316,8742	317,7097	445,7941
0,15	0,013	75	81,62961041	203,2987	237,9037	238,3473	263,996	279,2408	281,6577	389,4371
0,2	0,02	75	82,08344411	178,3071	220,5735	221,0258	237,3866	255,8732	259,3322	353,827
0,25	0,05	75	87,16892748	159,1221	208,7105	209,3579	218,0289	239,5091	247,6358	328,4639

Πίνακας 5.3

Ενώ η **περιεκτικότητα** της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

Uf	Ui	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	U ₆	U ₇	U ₈	U ₉
0,05	0,0013	0,002381	0,000230515	0,168223	0,028571	0,000179	0,130978	0,019048	0,00089	0,649499
0,1	0,004	0,004762	0,000674608	0,151112	0,057143	0,000477	0,106871	0,038095	0,002848	0,638017
0,15	0,013	0,007143	0,002066543	0,133054	0,085714	0,001278	0,082261	0,057143	0,009656	0,621685
0,2	0,02	0,009524	0,002961336	0,115492	0,114286	0,001493	0,058236	0,07619	0,015545	0,606272
0,25	0,05	0,011905	0,006785786	0,095001	0,142857	0,002395	0,033525	0,095238	0,04082	0,571474

Πίνακας 5.4

Οκταεδρικό μοντέλο 1:

U _f	U _i	R ₁ (μ m)	R ₂ (μ m)	R ₃ (μ m)	R ₄ (μ m)	R ₅ (μ m)	R ₆ (μ m)	R ₇ (μ m)	R ₈ (μ m)	R ₉ (μ m)
0,05	0,0013	75	75,59977605	198,9736	224,0866	224,4238	364,5195	370,762	371,0127	502,0747
0,1	0,004	75	75,6975201	145,7312	182,1964	182,9757	286,7771	296,69	297,3141	398,497
0,15	0,013	75	75,96538702	114,4923	164,5312	166,5492	248,2619	261,2593	263,0658	348,1192
0,2	0,02	75	75,41527328	88,94823	154,0646	156,6549	223,4686	239,2271	241,8127	316,2872
0,25	0,05	75	75,24413888	78,64133	150,9492	156,8925	215,6591	232,4582	238,6963	306,3967

Πίνακας 5.5

Ενώ η **περιεκτικότητα** της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

U _f	U _i	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	U ₆	U ₇	U ₈	U ₉
0,05	0,0013	0,003333	8,06114E-05	0,058828	0,026667	0,000402	0,293389	0,02	0,000817	0,596484
0,1	0,004	0,006667	0,000187741	0,042054	0,046667	0,001232	0,275892	0,04	0,00261	0,584691
0,15	0,013	0,01	0,000391147	0,025184	0,07	0,003932	0,253192	0,06	0,008829	0,568472
0,2	0,02	0,013333	0,000222708	0,008686	0,093333	0,005928	0,231196	0,08	0,014183	0,553118
0,25	0,05	0,014667	0,000143695	0,002098	0,102667	0,014687	0,214437	0,088	0,036109	0,527192

Πίνακας 5.6

Οκταεδρικό μοντέλο 2:

U _f	U _i	R ₁ (μ m)	R ₂ (μ m)	R ₃ (μ m)	R ₄ (μ m)	R ₅ (μ m)	R ₆ (μ m)	R ₇ (μ m)	R ₈ (μ m)	R ₉ (μ m)
0,05	0,0013	75	76,53386381	270,199	291,577	291,7749	395,1262	400,4582	400,7314	543,2367
0,1	0,004	75	77,09426711	204,8613	239,048	239,4764	311,4523	319,9183	320,6031	431,1673
0,15	0,013	75	78,84704193	169,7114	215,0875	216,1587	270,1656	281,2633	283,2589	376,6593
0,2	0,02	75	78,68464446	144,755	200,7943	202,1039	243,6986	257,1497	260,0252	342,2177
0,25	0,05	75	80,5056872	124,296	191,1364	193,7421	224,569	240,1882	247,0057	317,6868

Πίνακας 5.7

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης για κάθε περίπτωση σύστασης είναι :

U _f	U _i	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	U ₆	U ₇	U ₈	U ₉
0,05	0,0013	0,002632	0,000164784	0,120254	0,031579	0,000315	0,22986	0,015789	0,00082	0,598586
0,1	0,004	0,005263	0,000453324	0,101545	0,063158	0,000918	0,205573	0,031579	0,002629	0,588883
0,15	0,013	0,007895	0,001278235	0,082299	0,094737	0,002796	0,18001	0,047368	0,008926	0,574691
0,2	0,02	0,010526	0,001628897	0,063527	0,126316	0,003978	0,155144	0,063158	0,014393	0,561329
0,25	0,05	0,013158	0,003115655	0,043619	0,157895	0,009029	0,126409	0,078947	0,037855	0,529972

Πίνακας 5.8

5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, το οποίο δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου.

Γενικώς, το μέτρο ελαστικότητας E_i και ο λόγος Poisson ν_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή την ακτίνα r .

Δηλαδή:

$$E_i(r) = f(r) \text{ και } \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots, \quad \nu_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

όπου $r_f \leq r \leq r_i$

Στην μελέτη αυτή, για απλουστευτικούς λόγους, λαμβάνουμε υπ' όψιν την γραμμική, την υπερβολική, την λογαριθμική και την παραβολική και εκθετική μεταβολή των $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$.

Θεωρούμε ότι $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$ και $\nu_f \leq \nu_i(r) \leq \nu_m$, όταν $r_f \leq r \leq r_i$. Οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\text{Στο } r = r_f : E_i(r) = \eta E_f \text{ και } \nu_i(r) = \xi \nu_f$$

$$\text{Στο } r = r_i : E_i(r) = E_m \text{ και } \nu_i(r) = \nu_m$$

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$ της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με την μήτρα είναι ίσα με E_m και ν_m αντιστοίχως, ενώ στο όριο αυτής με το εγκλείσμα είναι τμήμα των E_f και ν_f αντιστοίχως, που εκφράζεται με τους συντελεστές η και ξ . Όμως, για να εκτιμήσουμε την μέγιστη δυνατή επίδραση

της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f και v_f αντιστοίχως, δηλαδή ότι $\eta = \xi = 1$.

5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br \text{ και } v_i(r) = A' + B'r \text{ με } r_f \leq r \leq r_i$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει:

$$A = nE_f + \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f} r_f$$

$$B = \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει ότι

$$E_i = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} (A - Br) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{v_i} 4\pi \left[A \frac{r^3}{3} - B \frac{r^4}{4} \right]_{r_f}^{r_i}$$

Όπου dV ο όγκος της στοιχειώδους περιοχής της ενδιάμεσης φάσης ίσος με:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

Επομένως προκύπτει:

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) - \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) \right]$$

5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = Ar^2 + Br + C \quad \text{και} \quad v_i(r) = A'r^2 + B'r + C' \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των A , B , C και A' , B' , C' εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η $E_i(r)$ παρουσιάζει ελάχιστο και η $v_i(r)$ παρουσιάζει μέγιστο για $r = r_i$. Δηλαδή:

$$\text{Στο } r = r_i: \frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{και} \quad \frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$A = \frac{nE_f - E_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = - \frac{(nE_f - E_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = \frac{nE_f r_i^2 + E_m r_f - 2E_m r_f r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει όπως και παραπάνω ότι

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br + C) 4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{5} (r_i^5 - r_f^5) + \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{C}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right]$$

5.2.3 Εκθετικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E = Ae^{Br}$$

Με τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες βρίσκουμε:

$$E_m = Ae^{Br_i}$$

$$nE_f = Ae^{Br_f}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{E_m}{nE_f} = e^{B(r_i - r_f)} \Rightarrow \ln \left(\frac{E_m}{nE_f} \right) = B (r_i - r_f) \Rightarrow$$

Άρα:

$$B = \frac{\ln\left(\frac{E_m}{nE_f}\right)}{r_i - r_f}$$

και

$$A = \frac{E_m}{e^{Br_i}}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A e^{Br} 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{4\pi}{V_i} A \int_{r_f}^{r_i} e^{Br} 4r^2 dr \Rightarrow$$

και τελικά προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i B^3} 4\pi A [e^{Br_i} (Br_i (Br_i - 2) + 2) - e^{Br_f} (Br_f (Br_f - 2) + 2)]$$

5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A και B:

$$B = \frac{r_i r_f}{r_i - r_f} (nE_f - E_m)$$

$$A = nE_f - \frac{B}{r_f}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει όπως και για τις προηγούμενες προσεγγίσεις ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV$$

Οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} \left(A + \frac{B}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br) dr$$

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} r^3 + \frac{B}{2} r^2 \right]_{r_f}^{r_i}$$

Άρα τελικά :

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{B}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right]$$

5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A \ln\left(\frac{B}{r}\right)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες προκύπτουν οι τιμές των σταθερών ίσες με :

$$A = \frac{nE_f - E_m}{\ln \frac{r_i}{r_f}}$$

$$B = r_i e^{\frac{E_m}{A}}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln\left(\frac{B}{r}\right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A (\ln B - \ln r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln B 4\pi r^2 dr - \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln r 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

Οπότε τελικά προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \frac{r_i^3 - r_f^3}{3} - \frac{4\pi A}{V_i} \left[\frac{3r^3 \ln r - r^3}{9} \right]_{r_f}^{r_i}$$

⇒

$$E_i = \frac{4\pi A \ln B}{V_i} \frac{(r_i^3 - r_f^3)}{3} - \frac{4\pi A}{9V_i} (3r_i^3 \ln r_i - r_i^3 - 3r_f^3 \ln r_f + r_f^3)$$

Και στις πέντε παραπάνω προσεγγίσεις που εξετάσαμε η διαδικασία για την εύρεση των v_i είναι ακριβώς η ίδια όπως άλλωστε εξηγήσαμε ήδη, γι αυτό και οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ακριβώς όπως είναι και για τα v_i . Αυτό που αλλάζει μόνο είναι οι τιμές των συντελεστών που έχουμε βάλει (οι τιμές των A και B δηλαδή) και οι οποίες προσδιορίζονται με βάση τις οριακές τιμές του λόγου Poisson στα όρια των δύο φάσεων.

Οι τιμές των E και ν της ενδιάμεσου φάσεως, για κάθε ακτίνα, καθώς και η μορφή της συνάρτησής τους σε σχέση με την ακτίνα r του ισοδύναμου εννιαφασικού μας μοντέλου, σχεδιάστηκαν για την φάση 2, το κυβικό μοντέλο 2 και για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως, δηλαδή για $n=\xi=0,2$, $n=\xi=0,4$, $n=\xi=0,6$, $n=\xi=0,8$, $n=\xi=1$, και φαίνονται στους πίνακες και τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν.

5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα

r (μm)	E (Gra) (Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75	42	84	126	168	210
75,2346	38,15	75,95	113,75	151,55	189,35
75,4692	34,3	67,9	101,5	135,1	168,7
75,7039	30,45	59,85	89,25	118,65	148,05
75,9385	26,6	51,8	77	102,2	127,4
76,1731	22,75	43,75	64,75	85,75	106,75
76,4077	18,9	35,7	52,5	69,3	86,1
76,6424	15,05	27,65	40,25	52,85	65,45
76,877	11,2	19,6	28	36,4	44,8
77,1116	7,35	11,55	15,75	19,95	24,15
77,3462	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας 5.9

r (μm)	E (Gra) (Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75	42	84	126	168	210
75,23462	34,685	68,705	102,725	136,745	170,765
75,46925	28,14	55,02	81,9	108,78	135,66
75,70387	22,365	42,945	63,525	84,105	104,685
75,9385	17,36	32,48	47,6	62,72	77,84
76,17312	13,125	23,625	34,125	44,625	55,125
76,40775	9,66	16,38	23,1	29,82	36,54
76,64237	6,965	10,745	14,525	18,305	22,085
76,877	5,04	6,72	8,4	10,08	11,76
77,11162	3,885	4,305	4,725	5,145	5,565
77,34625	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας 5.10

r (μm)	E (Gra) (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	42	84	126	168	210
75,23462465	38,04194145	75,7240594	113,4061774	151,0882953	188,7704133
75,4692493	34,10849315	67,49957658	100,89066	134,2817434	167,6728269
75,70387395	30,19942626	59,32607309	88,45271991	117,5793667	146,7060136
75,9384986	26,3145148	51,20307639	76,09163799	100,9801996	125,8687612
76,17312325	22,45353556	43,1301198	63,80670405	84,48328829	105,1598725
76,4077479	18,61626807	35,10674233	51,59721659	68,08769085	84,57816511
76,64237255	14,80249458	27,13248866	39,46248274	51,79247682	64,12247091
76,8769972	11,01199996	19,20690901	27,40181806	35,59672711	43,79163616
77,11162185	7,24457174	11,32955909	15,41454645	19,4995338	23,58452115
77,3462465	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

Πίνακας 5.11

r (μm)	E (Gra) (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	42	84	126	168	210
75,23462	38,09619186	75,83749207	113,5787923	151,3200925	189,0613927
75,46925	34,20453909	67,70039992	101,1962607	134,6921216	168,1879824
75,70387	30,32496624	59,58856577	88,8521653	118,1157648	147,3793644
75,9385	26,45739854	51,5018333	76,54626807	101,5907028	126,6351376
76,17312	22,60176192	43,44004765	64,27833338	85,11661911	105,9549048
76,40775	18,757983	35,40305536	52,04812771	68,69320007	85,33827243
76,64237	14,92598906	27,3907044	39,85541973	52,32013507	64,78485041
76,877	11,10570806	19,40284413	27,6999802	35,99711627	44,29425234
77,11162	7,297068622	11,4393253	15,58158198	19,72383866	23,86609533
77,34625	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

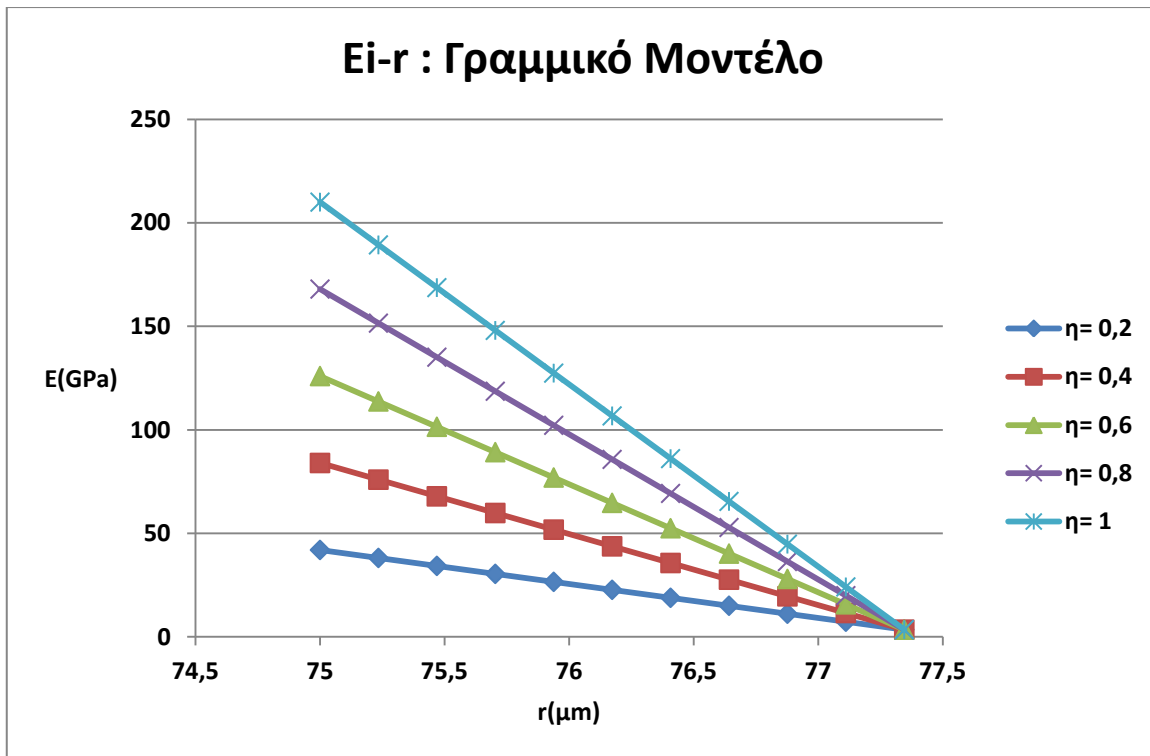
Πίνακας 5.12

r (μm)	E (Gra) (Εκθετικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	42	84	126	168	210
75,23462	32,75903996	61,13053011	88,05221697	114,0736028	139,4453927
75,46925	25,55130236	44,48740132	61,53327708	77,45706456	92,59532165
75,70387	19,92943179	32,37545745	43,00112273	52,5940858	61,48567138
75,9385	15,54450124	23,56105805	30,0503507	35,71188602	40,82806472
76,17312	12,12435565	17,1464282	21	24,24871131	27,11088342
76,40775	9,45672027	12,47821721	14,67536949	16,46510632	18,00232279
76,64237	7,376025648	9,080952769	10,25554618	11,17996427	11,95400462
76,877	5,753131403	6,608612579	7,166853789	7,591302398	7,937766043
77,11162	4,487310989	4,809380836	5,008391784	5,154566751	5,270880491
77,34625	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

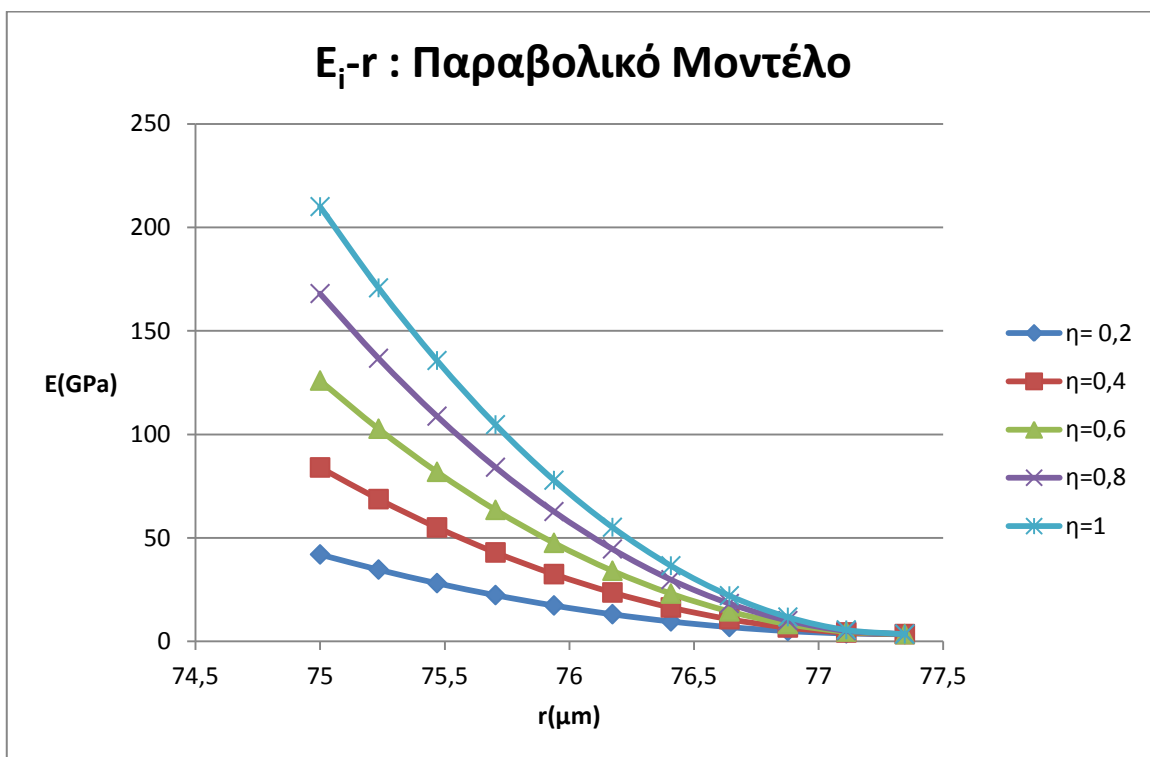
Πίνακας 5.13

r (μm)	E(GPa) (για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
207,98	210	210	210	210	210
208,02	189,35	170,765	188,7704133	189,0613927	139,4453927
208,05	168,7	135,66	167,6728269	168,1879824	92,59532165
208,08	148,05	104,685	146,7060136	147,3793644	61,48567138
208,11	127,4	77,84	125,8687612	126,6351376	40,82806472
208,14	106,75	55,125	105,1598725	105,9549048	27,11088342
208,17	86,1	36,54	84,57816511	85,33827243	18,00232279
208,20	65,45	22,085	64,12247091	64,78485041	11,95400462
208,23	44,8	11,76	43,79163616	44,29425234	7,937766043
208,26	24,15	5,565	23,58452115	23,86609533	5,270880491
208,29	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5

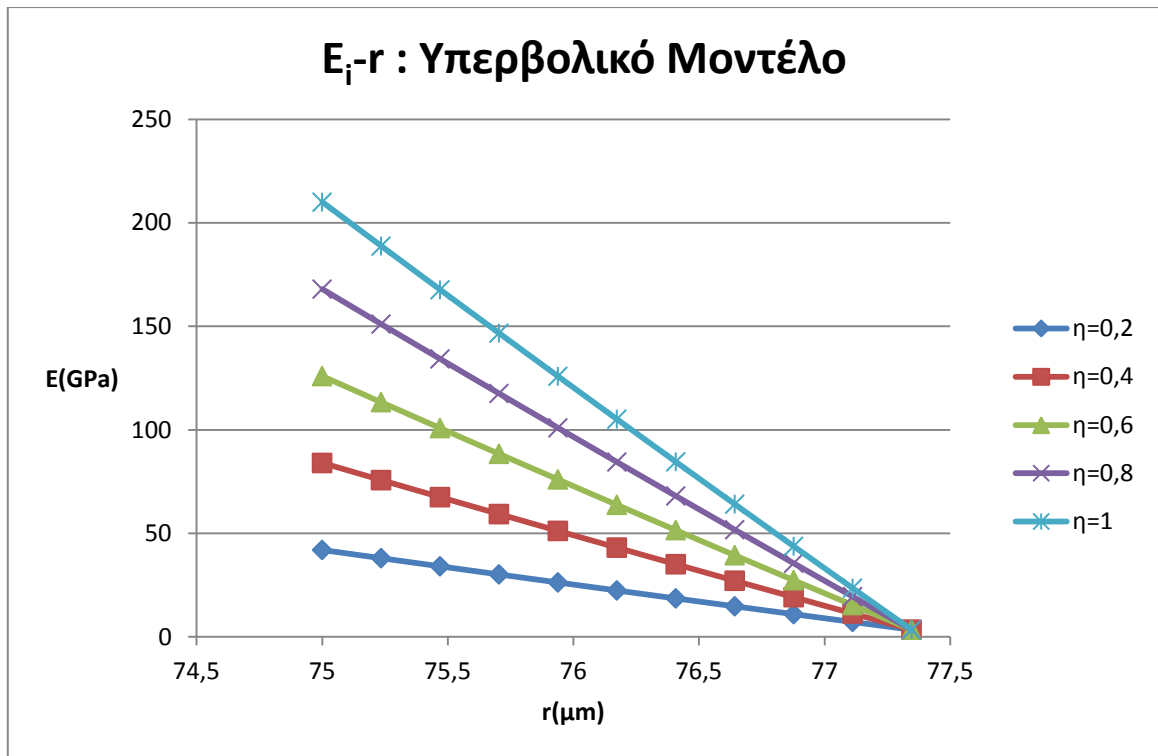
Πίνακας 5.14



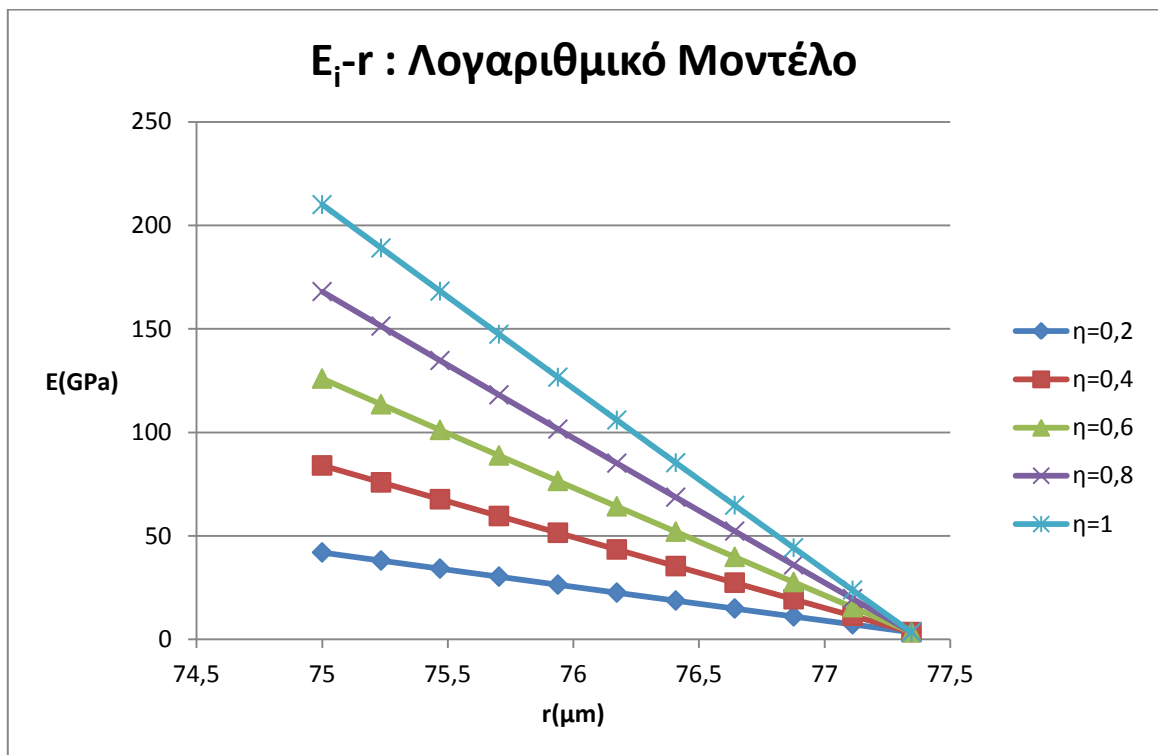
Διάγραμμα 5.1



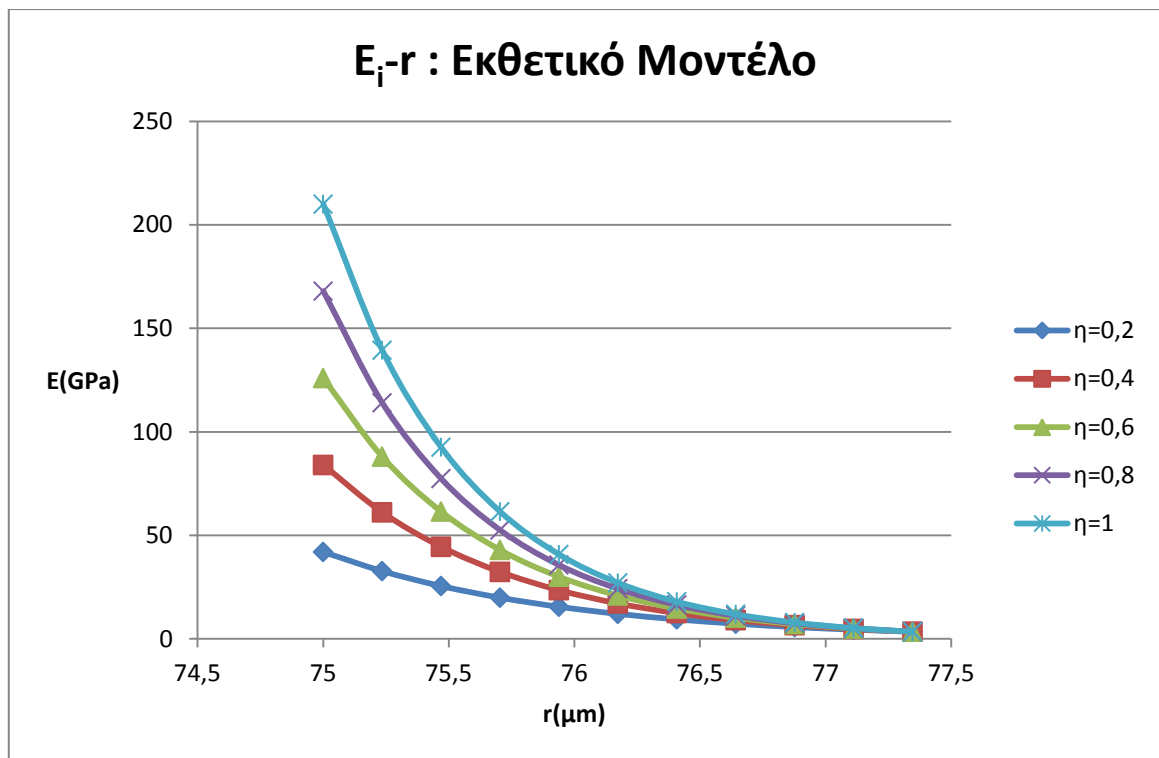
Διάγραμμα 5.2



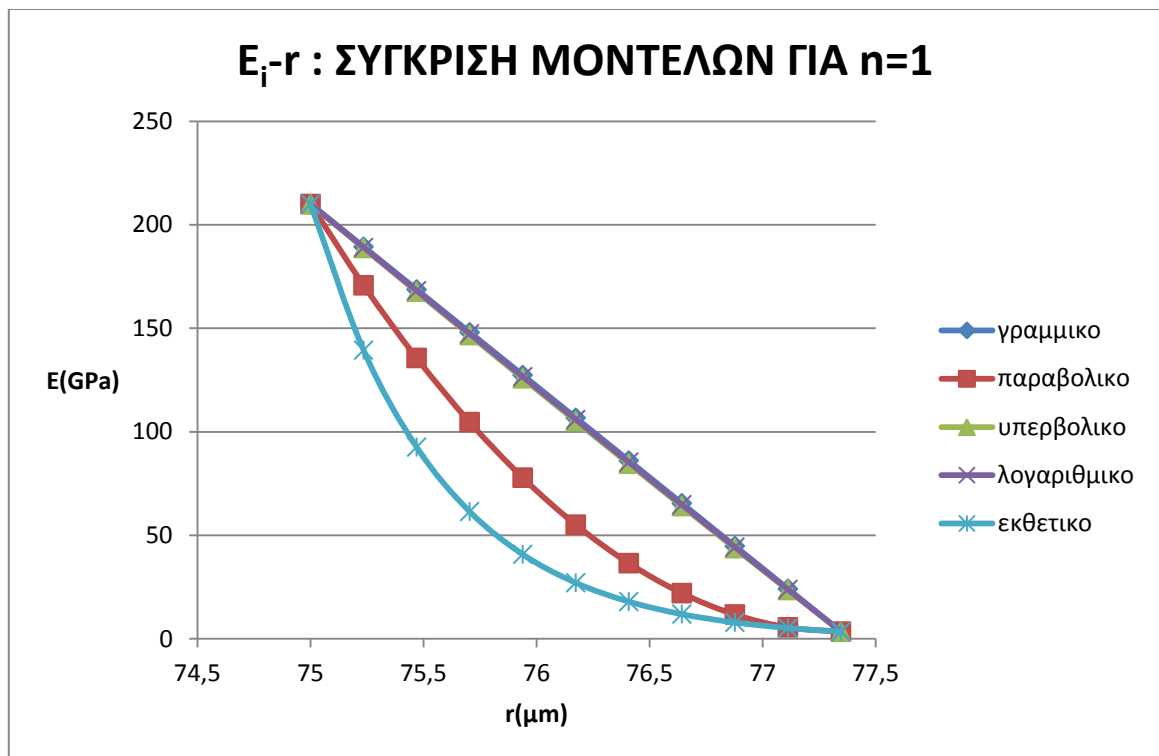
Διάγραμμα 5.3



Διάγραμμα 5.4



Διάγραμμα 5.5



Διάγραμμα 5.6

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή των E πέφτει καθώς αυξάνεται η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενη της ακτίνας r , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

r (μm)	v (Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75	0,058	0,116	0,174	0,232	0,29
75,2346	0,0882	0,1404	0,1926	0,2448	0,297
75,4692	0,1184	0,1648	0,2112	0,2576	0,304
75,7039	0,1486	0,1892	0,2298	0,2704	0,311
75,9385	0,1788	0,2136	0,2484	0,2832	0,318
76,1731	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
76,4077	0,2392	0,2624	0,2856	0,3088	0,332
76,6424	0,2694	0,2868	0,3042	0,3216	0,339
76,877	0,2996	0,3112	0,3228	0,3344	0,346
77,1116	0,3298	0,3356	0,3414	0,3472	0,353
77,3462	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

Πίνακας 5.15

r (μm)	v (Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75	0,058	0,116	0,174	0,232	0,29
75,23462	0,11538	0,16236	0,20934	0,25632	0,3033
75,46925	0,16672	0,20384	0,24096	0,27808	0,3152
75,70387	0,21202	0,24044	0,26886	0,29728	0,3257
75,9385	0,25128	0,27216	0,29304	0,31392	0,3348
76,17312	0,2845	0,299	0,3135	0,328	0,3425
76,40775	0,31168	0,32096	0,33024	0,33952	0,3488
76,64237	0,33282	0,33804	0,34326	0,34848	0,3537
76,877	0,34792	0,35024	0,35256	0,35488	0,3572
77,11162	0,35698	0,35756	0,35814	0,35872	0,3593
77,34625	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

Πίνακας 5.16

r (μm)	ν (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	0,058	0,116	0,174	0,232	0,29
75,23462	0,089047628	0,141084839	0,193122	0,245159	0,297196
75,46925	0,11990221	0,166013706	0,212125	0,258237	0,304348
75,70387	0,150565539	0,190788052	0,231011	0,271233	0,311456
75,9385	0,18103939	0,215409309	0,249779	0,284149	0,318519
76,17312	0,211325513	0,239878892	0,268432	0,296986	0,325539
76,40775	0,241425637	0,264198197	0,286971	0,309743	0,332516
76,64237	0,271341471	0,288368606	0,305396	0,322423	0,33945
76,877	0,301074702	0,312391481	0,323708	0,335025	0,346342
77,11162	0,330626996	0,336268169	0,341909	0,347551	0,353192
77,34625	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

Πίνακας 5.17

r (μm)	ν (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	0,058	0,116	0,174	0,232	0,29
75,23462	0,088622079	0,140741018	0,19286	0,244979	0,297097833
75,46925	0,11914881	0,165404999	0,211661	0,257917	0,304173565
75,70387	0,149580784	0,189992422	0,230404	0,270816	0,311227334
75,9385	0,179918588	0,21450376	0,249089	0,283674	0,318259275
76,17312	0,210162803	0,238939483	0,267716	0,296493	0,325269524
76,40775	0,240314004	0,263300056	0,286286	0,309272	0,332258213
76,64237	0,270372761	0,287585939	0,304799	0,322012	0,339225474
76,877	0,300339641	0,31179759	0,323256	0,334713	0,34617144
77,11162	0,330215202	0,335935461	0,341656	0,347376	0,353096239
77,34625	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

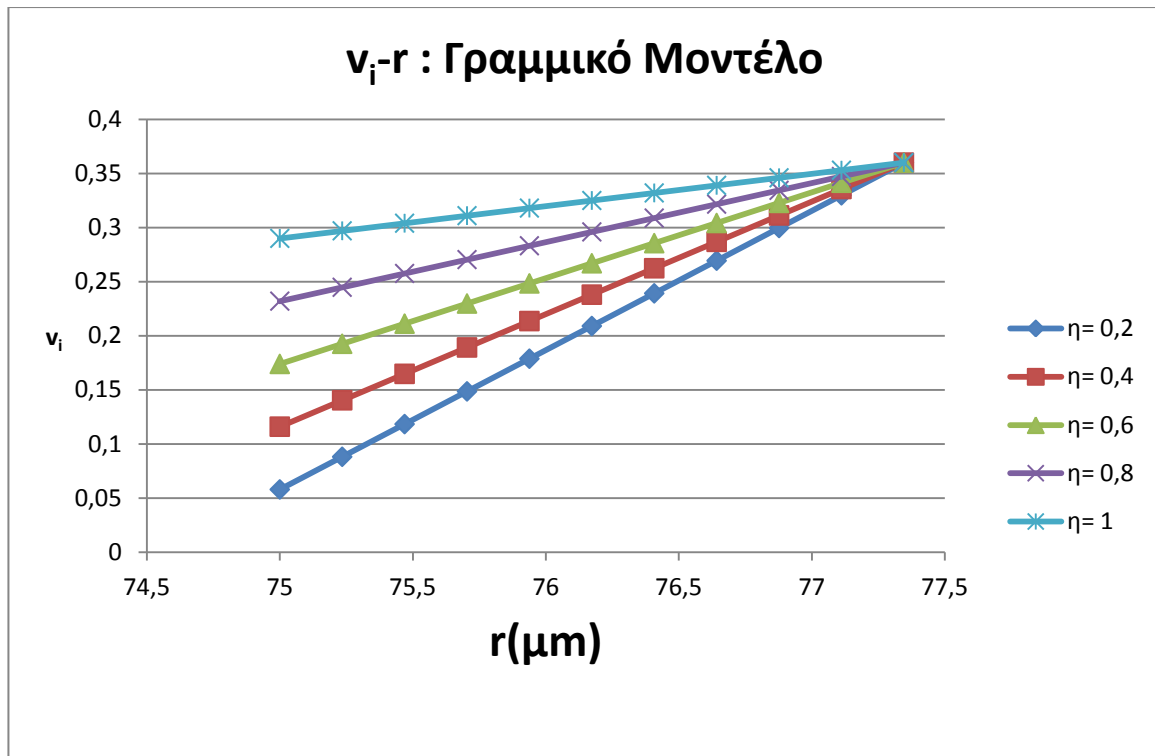
Πίνακας 5.18

r (μm)	ν (Εκθετικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
75	0,058	0,116	0,174	0,232	0,29
75,23462	0,069617	0,129909957	0,187122	0,242421	0,296339
75,46925	0,0835609	0,145487905	0,201233	0,253309	0,302816
75,70387	0,1002976	0,162933859	0,216409	0,264687	0,309435
75,9385	0,1203865	0,182471816	0,232729	0,276576	0,316198
76,17312	0,1444991	0,204352636	0,25028	0,288998	0,32311
76,40775	0,1734414	0,228857261	0,269154	0,301979	0,330172
76,64237	0,2081805	0,256300319	0,289452	0,315543	0,337389
76,877	0,2498778	0,287034169	0,31128	0,329716	0,344764
77,11162	0,2999266	0,321453419	0,334755	0,344525	0,3523
77,34625	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

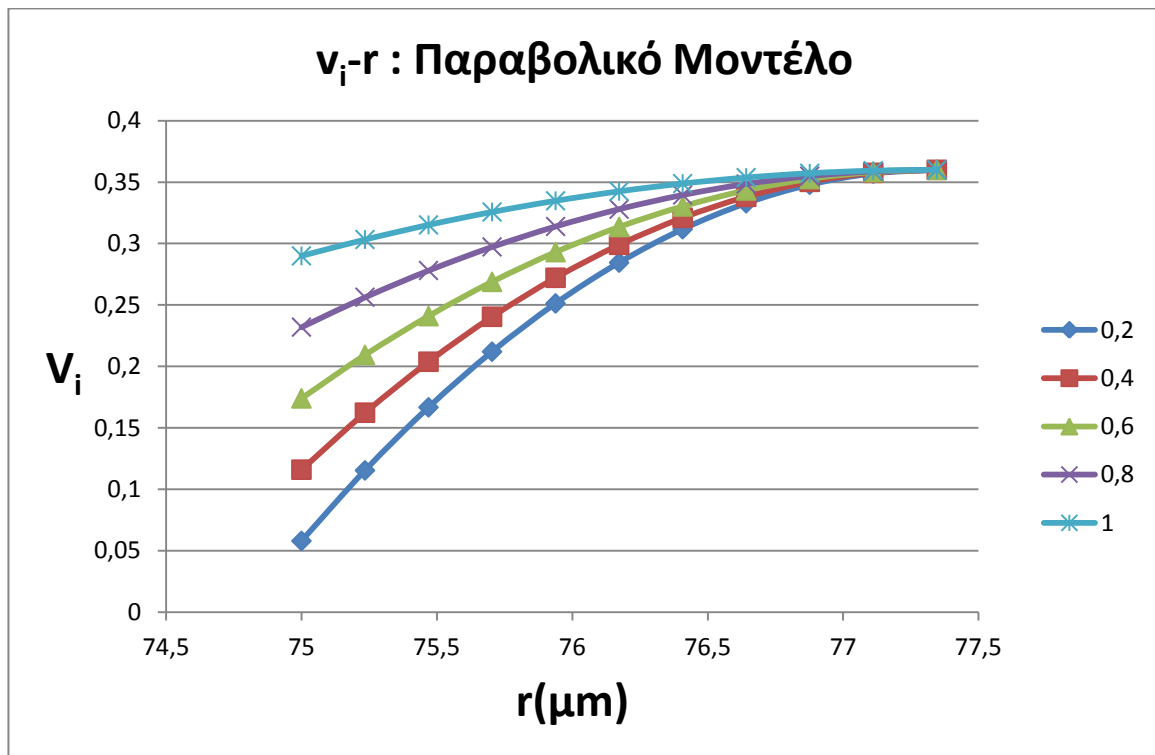
Πίνακας 5.19

r (μm)	ν (για η= 1)				
	Γραμμικό	Παραβολικό	Υπερβολικό	Λογαριθμικό	Εκθετικό
75	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
75,2346	0,297	0,3033	0,29719647	0,297097833	0,296339
75,4692	0,304	0,3152	0,304348194	0,304173565	0,302816
75,7039	0,311	0,3257	0,311455589	0,311227334	0,309435
75,9385	0,318	0,3348	0,318519064	0,318259275	0,316198
76,1731	0,325	0,3425	0,325539026	0,325269524	0,32311
76,4077	0,332	0,3488	0,332515876	0,332258213	0,330172
76,6424	0,339	0,3537	0,33945001	0,339225474	0,337389
76,877	0,346	0,3572	0,346341818	0,34617144	0,344764
77,1116	0,353	0,3593	0,353191688	0,353096239	0,3523
77,3462	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36

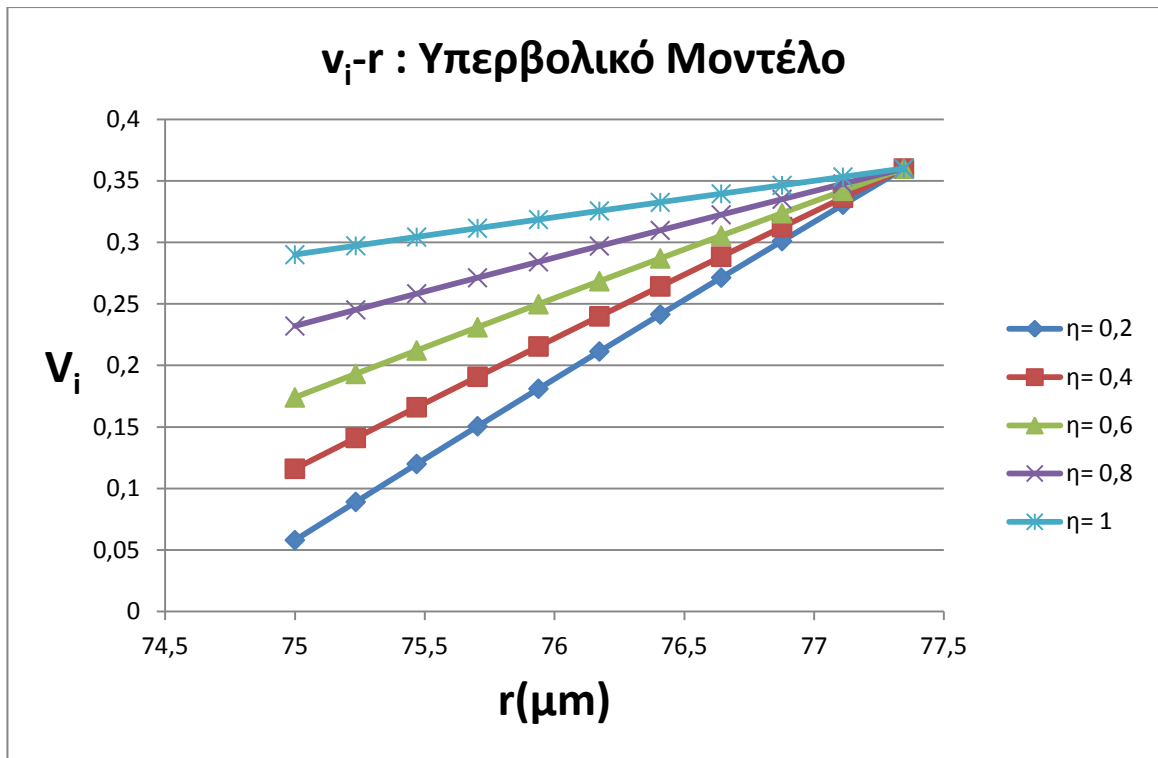
Πίνακας 5.20



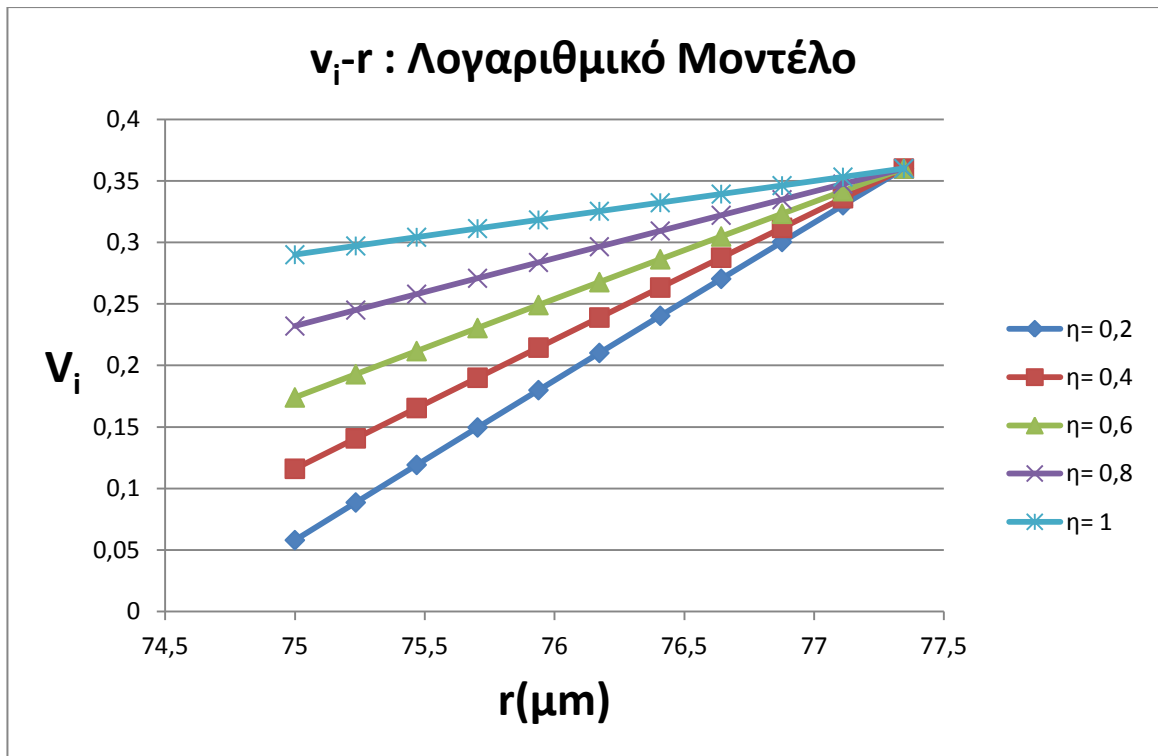
Διάγραμμα 5.7



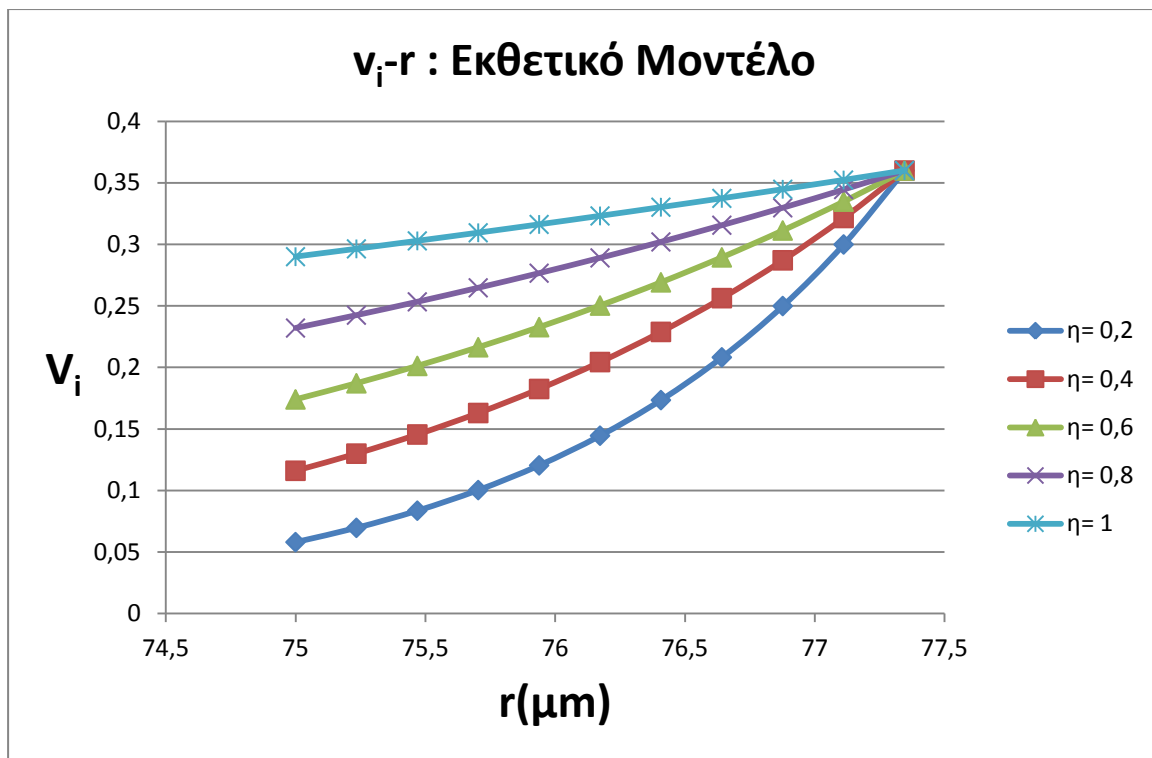
Διάγραμμα 5.8



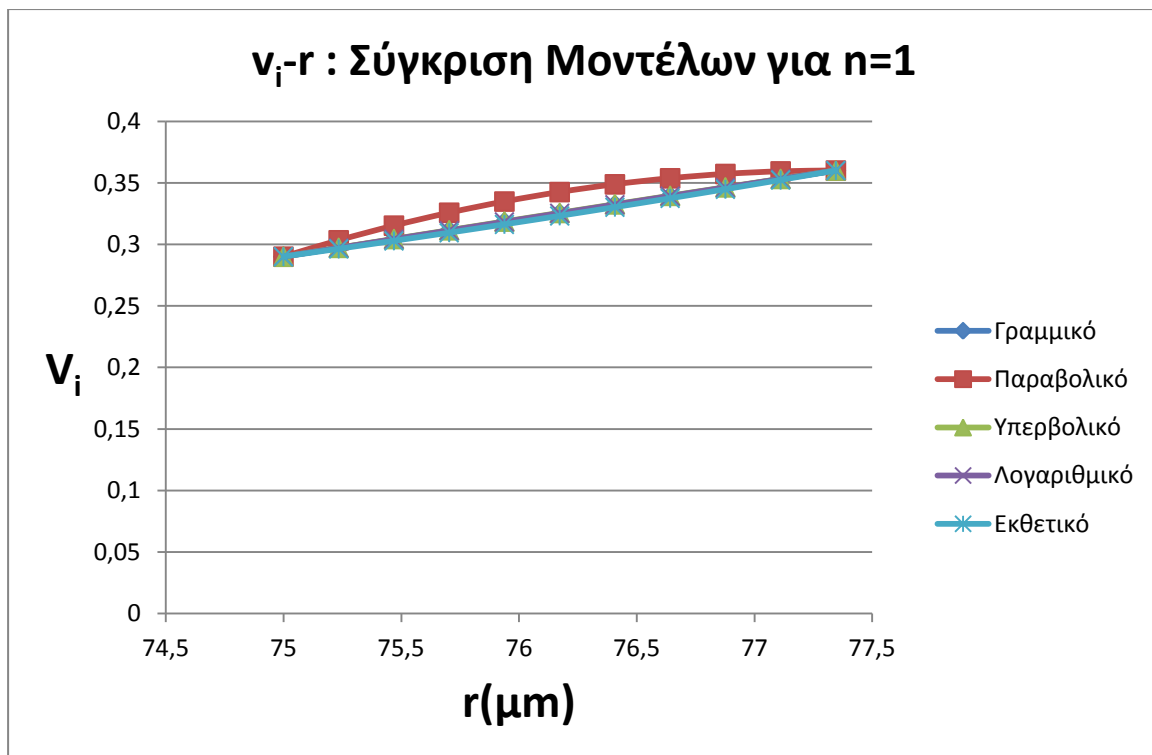
Διάγραμμα 5.9



Διάγραμμα 5.10



Διάγραμμα 5.11



Διάγραμμα 5.12

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή του v αυξάνει καθώς αυξάνεται η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού

αυξανόμενης της ακτίνας r , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

6. Ανάπτυξη θεωρητικών μοντέλων

6.1 Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου

Η μοντελοποίηση του πραγματικού σύνθετου υλικού για να γίνει η μελέτη του με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας βασίζεται στις εξής παραδοχές :

- Το έγκλεισμα (filler) αποτελείται από κόκκους οι οποίοι έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα και είναι όλοι του ίδιου μεγέθους με διάμετρο $d_f = 150\mu\text{m}$.

- Οι φάσεις του συνθέτου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο.

- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

6.2 Εννιαφασικό μοντέλο

Θεωρούμε το εννιαφασικό, σφαιρικό μοντέλο.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση P_0 . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 8ης και 9ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια πίεση που την καλούμε P_1 . Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 7ης και 8ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_2 , λόγω αλληλεπίδρασης 6ης και 7ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_3 , λόγω αλληλεπίδρασης 5ης και 6ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_4 , λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 5ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_5 , λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_6 , λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_7 και λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 1ης φάσης θα ασκείται στο σύνορό τους μια δύναμη P_8 .

Η τασική συνάρτηση Φ σε σφαιρικές συντεταγμένες, που περιγράφει το πρόβλημα μας είναι:

$$\Phi = K_1 / r + K_2 r^2$$

Κάθε μια από τις εννιά φάσεις έχει τη δική της τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = A / r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C / r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = F / r + Hr^2$$

$$\Phi_4 = J / r + Lr^2$$

$$\Phi_5 = M / r + Nr^2$$

$$\Phi_6 = O / r + Qr^2$$

$$\Phi_7 = R / r + Sr^2$$

$$\Phi_8 = T / r + Xr^2$$

$$\Phi_9 = Y / r + Zr^2$$

Στην θέση $r=0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για $r=0$ πρέπει $A=0$.

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την σχέση :

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

Όπου G το μέτρο διάτμησης

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\phi, = u_\theta = 0$$

$$u_{r1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r4} = \frac{-\frac{J}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

$$u_{r5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5}$$

$$u_{r6} = \frac{-\frac{O}{r^2} + 2Qr}{2G_6}$$

$$u_{r7} = \frac{-\frac{R}{r^2} + 2Sr}{2G_7}$$

$$u_{r8} = \frac{-\frac{T}{r^2} + 2Xr}{2G_8}$$

$$u_{r9} = \frac{-\frac{Y}{r^2} + 2Zr}{2G_9}$$

Οι Παραμορφώσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

άρα

$$\varepsilon_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D\right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H\right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3}\right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2J}{r^3} + 2L\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = \left(-\frac{J}{r^3} + 2L\right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4}\right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2M}{r^3} + 2N\right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = \left(-\frac{M}{r^3} + 2N\right) \left(\frac{1+\nu_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2O}{r^3} + 2Q\right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\varphi6} = \left(-\frac{O}{r^3} + 2Q\right) \left(\frac{1+\nu_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2R}{r^3} + 2S\right) \left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\varphi 7} = \left(-\frac{R}{r^3} + 2S\right)\left(\frac{1+\nu_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{r 8} = \left(\frac{2T}{r^3} + 2X\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \varepsilon_{\varphi 8} = \left(-\frac{T}{r^3} + 2X\right)\left(\frac{1+\nu_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{r 9} = \left(\frac{2Y}{r^3} + 2Z\right)\left(\frac{1+\nu_9}{E_9}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta 9} = \varepsilon_{\varphi 9} = \left(-\frac{Y}{r^3} + 2Z\right)\left(\frac{1+\nu_9}{E_9}\right)$$

Από το βιβλίο «Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων Ι» του Τσαμασφύρου [56]

Έχουμε την εξής σχέση για τις ορθές τάσεις:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

Όπου

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{\theta}$$

Άρα προκύπτουν :

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1 \nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}\end{aligned}$$

$$\sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\phi 2} + \varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[\frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] \Rightarrow$$

$$\frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D = \sigma_{r2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\frac{E_2}{1+\nu_2} \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2 \nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} [2D + 4D] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\phi 2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{-C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\phi 2}$$

Αντίστοιχα έχουμε και τα υπόλοιπα:

$$\sigma_{r3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \frac{-F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta4} = \frac{-J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5}$$

$$\sigma_{\theta5} = \frac{-M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \sigma_{\varphi5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta6} = \frac{-O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi6}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta7} = \frac{-R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi7}$$

$$\sigma_{\theta8} = \frac{-T}{r^3} + \frac{2X(1+\nu_8)}{1-2\nu_8} = \sigma_{\varphi8}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{2T}{r^3} + \frac{2X(1+\nu_8)}{1-2\nu_8}$$

$$\sigma_{r9} = \frac{2Y}{r^3} + \frac{2Z(1+\nu_9)}{1-2\nu_9}$$

$$\sigma_{\theta9} = \frac{-Y}{r^3} + \frac{2Z(1+\nu_9)}{1-2\nu_9} = \sigma_{\varphi9}$$

Συνοριακές συνθήκες τάσεων:

Για

$$r=a: \sigma_{r1} = \sigma_{r2} = -P_8$$

$$r=b: \sigma_{r2} = \sigma_{r3} = -P_7$$

$$r=c: \sigma_{r3} = \sigma_{r4} = -P_6$$

$$r=d: \sigma_{r4} = \sigma_{r5} = -P_5$$

$$r=f: \sigma_{r5} = \sigma_{r6} = -P_4$$

$$r=h: \sigma_{r6} = \sigma_{r7} = -P_3$$

$$r=m: \sigma_{r7} = \sigma_{r8} = -P_2$$

$$r=n: \sigma_{r8} = \sigma_{r9} = -P_1$$

$$r=q: \sigma_{r9} = -P_0$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες στις σχέσεις τάσεων που υπολόγισα έχω:

$$B = \frac{P_8(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)}$$

$$\frac{2C}{a^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_8$$

$$\frac{2C}{b^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} = -P_7$$

$$\Rightarrow C = \frac{(P_7 - P_8)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$C = \frac{(P_7 - P_8)b^3 a^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$$\frac{2(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} D(a^3 - b^3) = P_7 b^3 - P_8 a^3 \Rightarrow$$

$$D = \frac{(a^3 P_8 - b^3 P_7)(1 - 2v_2)}{2(b^3 - a^3)(1 + v_2)}$$

$$\frac{2F}{b^3} + 2H \frac{(1 + v_3)}{(1 - 2v_3)} = -P_7$$

$$\frac{2F}{c^3} + 2H \frac{(1 + v_3)}{(1 - 2v_3)} = -P_6$$

$$\Rightarrow 2F \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^3} \right) = P_6 - P_7 \Rightarrow$$

$$F = \frac{(P_6 - P_7)b^3 c^3}{2(c^3 - b^3)}$$

$$\frac{2(1 + v_3)}{1 - 2v_3} F(c^3 - b^3) = P_7 b^3 - P_6 c^3 \Rightarrow$$

$$H = \frac{(b^3 P_7 - c^3 P_6)(1 - 2v_3)}{2(c^3 - b^3)(1 + v_3)}$$

Συμμετρικά προκύπτει :

$$J = \frac{(P_5 - P_6)d^3 c^3}{2(d^3 - c^3)}$$

$$L = \frac{(c^3 P_6 - d^3 P_5)(1 - 2v_4)}{2(d^3 - c^3)(1 + v_4)}$$

$$M = \frac{(P_4 - P_5)f^3 d^3}{2(f^3 - d^3)}$$

$$N = \frac{(d^3 P_5 - f^3 P_4)(1 - 2v_5)}{2(f^3 - d^3)(1 + v_5)}$$

$$O = \frac{(P_3 - P_4)f^3 h^3}{2(h^3 - f^3)}$$

$$Q = \frac{(f^3 P_4 - h^3 P_3)(1 - 2v_6)}{2(h^3 - f^3)(1 + v_6)}$$

$$R = \frac{(P_2 - P_3)m^3h^3}{2(m^3 - h^3)}$$

$$S = \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)(1 - 2\nu_7)}{2(m^3 - h^3)(1 + \nu_7)}$$

$$T = \frac{(P_1 - P_2)n^3m^3}{2(n^3 - m^3)}$$

$$X = \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)(1 - 2\nu_8)}{2(n^3 - m^3)(1 + \nu_8)}$$

$$Y = \frac{(P_0 - P_1)n^3q^3}{2(q^3 - n^3)}$$

$$Z = \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)(1 - 2\nu_9)}{2(q^3 - n^3)(1 + \nu_9)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των μετατοπίσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$u_{r1} = -\frac{P_0(1 - 2\nu_1)}{E_1} r \tag{6.1}$$

$$u_{r2} = -\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1 + \nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)(1 - 2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2} r \tag{6.2}$$

$$u_{r3} = -\frac{(P_6 - P_7)b^3c^3(1 + \nu_3)}{2(c^3 - b^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(b^3P_7 - c^3P_6)(1 - 2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3} r \tag{6.3}$$

$$u_{r4} = -\frac{(P_5 - P_6)c^3d^3(1 + \nu_4)}{2(d^3 - c^3)E_4} \frac{1}{r^2} + \frac{(c^3P_6 - d^3P_5)(1 - 2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4} r \tag{6.4}$$

$$u_{r5} = -\frac{(P_4 - P_5)d^3f^3(1 + \nu_5)}{2(f^3 - d^3)E_5} \frac{1}{r^2} + \frac{(d^3P_5 - f^3P_4)(1 - 2\nu_5)}{(f^3 - d^3)E_5} r \tag{6.5}$$

$$u_{r6} = -\frac{(P_3 - P_4)h^3f^3(1 + \nu_6)}{2(h^3 - f^3)E_6} \frac{1}{r^2} + \frac{(f^3P_4 - h^3P_3)(1 - 2\nu_6)}{(h^3 - f^3)E_6} r \tag{6.6}$$

$$u_{r,7} = -\frac{(P_2 - P_3)h^3 m^3 (1 + \nu_7)}{2(m^3 - h^3)E_7} \frac{1}{r^2} + \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)(1 - 2\nu_7)}{(m^3 - h^3)E_7} r \quad (6.7)$$

$$u_{r,8} = -\frac{(P_1 - P_2)m^3 n^3 (1 + \nu_8)}{2(n^3 - m^3)E_8} \frac{1}{r^2} + \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)(1 - 2\nu_8)}{(n^3 - m^3)E_8} r \quad (6.8)$$

$$u_{r,9} = -\frac{(P_0 - P_1)q^3 n^3 (1 + \nu_9)}{2(q^3 - n^3)E_9} \frac{1}{r^2} + \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)(1 - 2\nu_9)}{(q^3 - n^3)E_9} r \quad (6.9)$$

Συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων:

Για $r=a$: $u_{r1}=u_{r2}$

$r=b$: $u_{r2}=u_{r3}$

$r=c$: $u_{r3}=u_{r4}$

$r=d$: $u_{r4}=u_{r5}$

$r=f$: $u_{r5}=u_{r6}$

$r=h$: $u_{r6}=u_{r7}$

$r=m$: $u_{r7}=u_{r8}$

$r=n$: $u_{r8}=u_{r9}$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.1) και (6.2) για u_{r1} και u_{r2} για $r = \alpha$ έχω:

$$\begin{aligned}
 u_{r1} = u_{r2} &\Rightarrow -\frac{P_8(1-2\nu_1)}{E_1}a = -\frac{(P_7-P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{a^2} + \frac{(a^3P_8-b^3P_7)(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}a \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2P_8(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 + (P_7-P_8)b^3(1+\nu_2)E_1 - 2(a^3P_8-b^3P_7)(1-2\nu_2)E_1 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -2P_8(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 + b^3E_1P_7 + b^3\nu_2E_1P_7 - b^3\nu_2E_1P_8 - P_8b^3E_1 - 2a^3E_1P_8 + 4a^3\nu_2E_1P_8 + 2b^3E_1P_7 - \\
 &\quad -4b^3\nu_2E_1P_7 = 0 \\
 &\Rightarrow 3b^3E_1(1-\nu_2)P_7 - 2P_8(1-2\nu_1)(b^3-a^3)E_2 - [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)]EP_8 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P_7[3b^3(1-\nu_2)E_1] = P_8[2(b^3-a^3)(1-2\nu_1)E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)E_1]] \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P_8 = \mu P_7 \Rightarrow \mu = \frac{3b^3(1-\nu_2)E_1}{\{2(b^3-a^3)(1-2\nu_1)E_2 + [b^3(1+\nu_2) + 2a^3(1-2\nu_2)E_1]\}E_1} \\
 u_{r2} = u_{r3} &\Rightarrow -\frac{(P_7-P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3-a^3)E_2} \frac{1}{b^2} + \frac{(a^3P_8-b^3P_7)(1-2\nu_2)}{(b^3-a^3)E_2}r = -\frac{(P_6-P_7)b^3c^3(1+\nu_3)}{2(c^3-b^3)E_3} \frac{1}{b^2} + \\
 &\frac{(b^3P_7-c^3P_6)(1-2\nu_3)}{(c^3-b^3)E_3}b \Rightarrow -(P_7-P_8)a^3b^3(1+\nu_2)(c^3-b^3)E_3 + 2b^3(c^3-b^3)(a^3P_8-b^3P_7)(1-2\nu_2)E_3 + \\
 &+ 2(b^3-a^3)(P_6-P_7) - b^3c^3(1+\nu_3)E_2 - 2(b^3-a^3)b^3(b^3P_7-c^3P_6)(1-2\nu_3)E_2 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (a^3c^3 - a^3b^3 + a^3c^3 - a^3b^3\nu_2)E_3(P_8 - P_7) + 2(a^3P_8 - b^3P_7)(c^3 - b^3 - 2c^3\nu_2 + 2b^3\nu_2)E_3 \\
 &+ (P_6 - P_7)(b^3c^3 - a^3c^3 + b^3c^3\nu_2 - a^3c^3\nu_2)E_2 - 2(b^3P_7 - c^3P_6)(b^3 - a^3 - 2b^3\nu_3 + 2a^3\nu_3)E_2 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (a^3c^3P_8 - a^3b^3P_8 - a^3c^3\nu_2E_3P_8 - a^3b^3\nu_2E_3P_8 + 2a^3c^3E_3P_8 - 2a^3b^3E_3P_8 - 2a^3c^3\nu_2E_3P_8 + 2a^3b^3\nu_2E_3P_8) \\
 &- (-a^3c^3E_3P_1 + a^3b^3E_3P_7 - a^3c^3\nu_2E_1 + P_7 + a^3b^3\nu_2E_3P_7 - 2b^3c^3E_3P_7 + 2b^6E_3P_7 + 4b^3c^3\nu_2E_3P_7 - 4b^6\nu_2E_3P_7) + \\
 &(-b^3c^3E_2P_7 + a^3c^3E_2P_7 - b^3c^3\nu_3E_2P_7 + a^3c^3\nu_3E_2P_7 - 2b^6E_2P_7 + 2a^3b^3E_2P_7 + 4b^6\nu_3E_2P_7 \\
 &- 4a^3b^3\nu_3E_2P_7) + (b^3c^3E_2P_6 - a^3c^3E_2P_6 + b^3c^3\nu_3E_2P_6 - a^3c^3\nu_3E_2P_6 + 2b^3c^3E_2P_6 - 2a^3c^3E_2P_6 \\
 &- 4b^3c^3\nu_3E_2P_6 + 4a^3c^3\nu_3E_2P_6) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow [3a^3c^3 - 3a^3b^3 - a^3c^3 - \nu_2 + a^3b^3\nu_2]E_3P_8 + (-a^3c^3 + a^3b^3 - a^3c^3\nu_2 \\
 &+ a^3b^3\nu_2 - 2b^3c^3 + 2b^6 + 4b^3c^3\nu_2 - 4b^6\nu_2)E_3P_7 + (-b^3c^3 + a^3c^3 - b^3c^3\nu_3 + \\
 &a^3c^3\nu_3 - 2b^6 + 2a^3b^3 + 4b^6\nu_3 - 4a^3b^3\nu_3)E_2P_7 + (3b^3c^3 - 3a^3c^3 - 3b^3c^3\nu_3 + 3a^3c^3\nu_3)E_2P_6 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P_8E_3[3a^3c^3(1-\nu_2) - 3a^3b^3(1-\nu_2) + E_3P_7] + \\
 &E_3P_7[-a^3c^3(1+\nu_2) + a^3b^3(1+\nu_2) - 2b^3(c^3-b^3) + 4b^3\nu_2(c^3-b^3)] \\
 &E_2P_7[(1+\nu_3)(a^3c^3 - b^3c^3) + (1-2\nu_3)(2b^6 + 2a^3b^3(1-2\nu_3))] \\
 &E_2P_6[3b^3c^3(1-\nu_3) - 3a^3c^3(1-\nu_3)] = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_8 E_3 (1 - \nu_2) (3a^3 c^3 - 3a^3 b^3) + E_3 P_7 \left[(1 + \nu_2) (-a^3 c^3 + a^3 b^3) + (c^3 - b^3) (4b^3 \nu_2 - 2b^3) \right] + \\
& E_2 P_7 \left[(1 + \nu_3) (a^3 c^3 - b^3 c^3) + (1 - 2\nu_3) (2b^6 + 2a^3 b^3 (1 - 2\nu_3)) \right] + \\
& E_2 P_6 \left[(3b^3 c^3 (1 - \nu_3) - 3a^3 c^3 (1 - \nu_3)) \right] = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow P_8 \left[3a^3 (c^3 - b^3) (1 - \nu_2) E_3 \right] + P_6 \left[3c^3 (1 - \nu_3) (b^3 - a^3) E_2 \right] + \\
& P_7 \left[a^3 (1 + \nu_2) + 2b^3 (1 - 2\nu_2) (b^3 - c^3) E_3 \right] + \left[c^3 (1 + \nu_3) + 2b^3 (1 - 2\nu_3) (a^3 - b^3) E_2 \right] = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow P_8 = \mu P_7
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_6 (3c^3 (1 - \nu_3) (b^3 - a^3) E_2) = P_7 \begin{bmatrix} a^3 (1 + \nu_2) + 2b^3 (1 - 2\nu_2) (c^3 - b^3) E_3 \\ + (c^3 (1 + \nu_3) + 2b^3 (1 - 2\nu_3)) (b^3 - a^3) E_2 \\ - \mu a^3 (c^3 - b^3) (1 - \nu_2) E_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_7 = \lambda P_6 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{3c^3 (1 - \nu_3) (b^3 - a^3) E_2}{(a^3 (1 + \nu_2) + 2b^3 (1 - 2\nu_2)) (c^3 - b^3) E_3 + (c^3 (1 + \nu_3) + 2b^3 (1 - 2\nu_3)) (b^3 - a^3) E_2 - 3\mu a^3 (c^3 - b^3) (1 - \nu_2) E_3}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.3) και (6.4) για u_{r2} και u_{r3} για $r = c$ έχω:

$$\begin{aligned}
& P_7 \left[3b^3 (d^3 - c^3) (1 - \nu_3) E_4 \right] + P_5 \left[3d^3 (1 - \nu_4) (c^3 - b^3) E_3 \right] = \\
& = P_6 \left[b^3 (1 + \nu_3) + 2c^3 (1 - 2\nu_3) \right] (d^3 - c^3) E_4 + \left[d^3 (1 + \nu_4) + 2c^3 (1 - 2\nu_4) (c^3 - b^3) E_3 \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow P_6 = \lambda_2 P_5 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow_3 \left[3d^2 (1 - \nu_4) (c^3 - b^3) E_3 \right] = P_6 \begin{bmatrix} (b^3 (1 + \nu_3) + 2c^3 (1 - 2\nu_3)) (d^3 - c^3) E_4 \\ (d^3 (1 + \nu_4) + 2c^3 (1 - 2\nu_4)) (c^3 - b^3) E_3 \\ - 3\lambda_1 b^3 (d^3 - c^3) (1 - \nu_3) E_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_6 = \lambda_2 P_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3d^2 (1 - \nu_4) (c^3 - b^3) E_3}{(b^3 (1 + \nu_3) + 2c^3 (1 - 2\nu_3)) (d^3 - c^3) E_4 + (d^3 (1 + \nu_4) + 2c^3 (1 - 2\nu_4)) (c^3 - b^3) E_3 - 3\lambda_1 b^3 (d^3 - c^3) (1 - \nu_3) E_4}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.4) και (6.5) για $r=d$ έχουμε

$$\Rightarrow P_5 = \lambda_3 P_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{3f^2(1-v_5)(d^3 - c^3)E_4}{(c^3(1+v_4) + 2d^3(1-2v_4))(f^3 - d^3)E_5 + (f^3(1+v_5) + 2d^3(1-2v_5))(d^3 - c^3)E_4 - 3\lambda_2 c^3(f^3 - d^3)(1-v_4)E_5}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.5) και (6.6) για r=f :

$$\Rightarrow P_4 = \lambda_4 P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \frac{3h^2(1-v_6)(f^3 - d^3)E_5}{(d^3(1+v_5) + 2f^3(1-2v_5))(h^3 - f^3)E_6 + (h^3(1+v_6) + 2f^3(1-2v_6))(f^3 - d^3)E_5 - 3\lambda_3 d^3(h^3 - f^3)(1-v_5)E_6}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.6) και (6.7) για r=h:

$$\Rightarrow P_3 = \lambda_5 P_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_5 = \frac{3m^2(1-v_7)(h^3 - f^3)E_6}{(f^3(1+v_6) + 2h^3(1-2v_6))(m^3 - h^3)E_7 + (m^3(1+v_7) + 2h^3(1-2v_7))(h^3 - f^3)E_6 - 3\lambda_4 f^3(m^3 - h^3)(1-v_6)E_7}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.7) και (6.8) για r=m:

$$\Rightarrow P_2 = \lambda_6 P_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_6 = \frac{3n^2(1-v_8)(m^3 - h^3)E_7}{(h^3(1+v_7) + 2m^3(1-2v_7))(n^3 - m^3)E_8 + (h^3(1+v_8) + 2m^3(1-2v_8))(m^3 - h^3)E_7 - 3\lambda_5 h^3(n^3 - m^3)(1-v_7)E_8}$$

$$\Rightarrow P_1 = \lambda_7 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_7 = \frac{3q^3(1-v_9)(n^3 - m^3)E_8}{(m^3(1+v_8) + 2n^3(1-2v_8))(q^3 - n^3)E_9 + (q^3(1+v_9) + 2n^3(1-2v_9))(n^3 - m^3)E_8 - 3\lambda_6 m^3(q^3 - n^3)(1-v_8)E_9}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.8) και (6.9) για r=n:

$$\Rightarrow P_1 = \lambda_7 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_7 = \frac{3q^2(1-v_9)(n^3 - m^3)E_8}{(m^3(1+v_8) + 2n^3(1-2v_8))(q^3 - n^3)E_9 + (q^3(1+v_9) + 2n^3(1-2v_9))(n^3 - m^3)E_8 - 3\lambda_6 m^3(q^3 - n^3)(1-v_8)E_9}$$

Για να υπολογίσω το μέτρο ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού, Θεωρώ ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των οκτώ φάσεων από τις οποίες αποτελείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_0^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r1}\varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1}\varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1}\varepsilon_{\varphi1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2}\varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2}\varepsilon_{\varphi2}) dV_2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3}\varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3}\varepsilon_{\varphi3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4}\varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4}\varepsilon_{\varphi4}) dV_4 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r5}\varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5}\varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5}\varepsilon_{\varphi5}) dV_5 + \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r6}\varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6}\varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6}\varepsilon_{\varphi6}) dV_6 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r7}\varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7}\varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7}\varepsilon_{\varphi7}) dV_7 + \frac{1}{2} \int_{V_8} (\sigma_{r8}\varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8}\varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8}\varepsilon_{\varphi8}) dV_8 + \frac{1}{2} \int_{V_9} (\sigma_{r9}\varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9}\varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9}\varepsilon_{\varphi9}) dV_9 \end{aligned}$$

(6.10)

Όπου

$$K_c = \frac{E_c}{3(1-2v_c)}$$

Είναι το μέτρο διόγκωσης σύνθετου υλικού και :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των τάσεων:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma_{\varphi1} = -2 \frac{(1+\nu_1) P_8(1-2\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{1}{1+\nu_1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r2} &= \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} = \frac{2}{r^3} (P_7 - P_8) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_8 - b^3 P_7)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{r2} &= \frac{(P_8 - P_7)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3 P_8 - b^3 P_7}{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta2} = \sigma_{\varphi2} &= \frac{-C}{r^3} + 2D \frac{1+\nu_2}{1-2\nu_2} = \frac{-1}{r^3} (P_7 - P_8) \frac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} + 2 \frac{(a^3 P_8 - b^3 P_7)(1-2\nu_2)}{2(b^3 - a^3)(1+\nu_2)} \frac{(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{\theta2} = \sigma_{\varphi2} &= -\frac{(P_7 - P_8)a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3 P_8 - b^3 P_7}{b^3 - a^3} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{(P_6 - P_7)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{r^3} + \frac{b^3 P_7 - c^3 P_6}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \sigma_{\varphi3} = -\frac{(P_6 - P_7)b^3 c^3}{c^3 - b^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{b^3 P_7 - c^3 P_6}{c^3 - b^3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{(P_5 - P_6)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{r^3} + \frac{c^3 P_6 - d^3 P_5}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{\theta4} = \sigma_{\varphi4} = -\frac{(P_5 - P_6)c^3 d^3}{d^3 - c^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{c^3 P_6 - d^3 P_5}{d^3 - c^3}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{(P_4 - P_5)d^3 e^3}{f^3 - d^3} \frac{1}{r^3} + \frac{d^3 P_5 - e^3 P_4}{f^3 - d^3}$$

$$\sigma_{\theta5} = \sigma_{\varphi5} = -\frac{(P_4 - P_5)d^3 e^3}{f^3 - d^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{d^3 P_5 - e^3 P_4}{f^3 - d^3}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{(P_3 - P_4)f^3h^3}{h^3 - f^3} \frac{1}{r^3} + \frac{f^3P_4 - h^3P_3}{h^3 - f^3}$$

$$\sigma_{\theta6} = \sigma_{\varphi6} = -\frac{(P_3 - P_4)f^3h^3}{h^3 - f^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{f^3P_4 - h^3P_3}{h^3 - f^3}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{(P_2 - P_3)h^3m^3}{m^3 - h^3} \frac{1}{r^3} + \frac{h^3P_3 - m^3P_2}{m^3 - h^3}$$

$$\sigma_{\theta7} = \sigma_{\varphi7} = -\frac{(P_2 - P_3)h^3m^3}{m^3 - h^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{h^3P_3 - m^3P_2}{m^3 - h^3}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{(P_1 - P_2)m^3n^3}{n^3 - m^3} \frac{1}{r^3} + \frac{m^3P_2 - n^3P_1}{n^3 - m^3}$$

$$\sigma_{\theta8} = \sigma_{\varphi8} = -\frac{(P_1 - P_2)m^3n^3}{n^3 - m^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{m^3P_2 - n^3P_1}{n^3 - m^3}$$

$$\sigma_{r9} = \frac{(P_0 - P_1)n^3q^3}{q^3 - n^3} \frac{1}{r^3} + \frac{n^3P_1 - q^3P_0}{q^3 - n^3}$$

$$\sigma_{\theta9} = \sigma_{\varphi9} = -\frac{(P_0 - P_1)n^3q^3}{q^3 - n^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{n^3P_1 - q^3P_0}{q^3 - n^3}$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = 2 \frac{-P_8(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)} \frac{(1+\nu_1)}{E_1} = -P_8 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left[\frac{2C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{r2} = \frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \left[\frac{-C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} = \left[-\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{2}{2} \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \frac{1}{1+\nu_2} \right] \frac{1+\nu_2}{E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = \frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{r3} = \frac{(P_6 - P_7)b^3 a^3(1+v_3)}{(c^3 - b^3)E_3 r^3} + \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{b^3 P_7 - c^3 P_6}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \varepsilon_{\varphi 3} = \frac{(P_6 - P_7)c^3 b^3(1+v_4)}{2(c^3 - b^3)E_4 r^3} + \frac{1-2v_4}{E_4} \frac{b^3 P_6 - c^3 P_5}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{r4} = \frac{(P_5 - P_6)c^3 b^3(1+v_4)}{(d^3 - c^3)E_4 r^3} + \frac{1-2v_4}{E_3} \frac{c^3 P_6 - d^3 P_5}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \varepsilon_{\varphi 4} = \frac{(P_5 - P_6)c^3 d^3(1+v_4)}{2(d^3 - c^3)E_4 r^3} + \frac{1-2v_4}{E_3} \frac{c^3 P_6 - d^3 P_5}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{r5} = \frac{(P_4 - P_5)d^3 c^3(1+v_5)}{(f^3 - d^3)E_5 r^3} + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{d^3 P_5 - f^3 P_4}{f^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \varepsilon_{\varphi 5} = \frac{(P_4 - P_5)d^3 f^3(1+v_5)}{2(f^3 - d^3)E_5 r^3} + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{d^3 P_5 - f^3 P_4}{f^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{r6} = \frac{(P_3 - P_4)f^3 h^3(1+v_6)}{(h^3 - f^3)E_6 r^3} + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{f^3 P_4 - h^3 P_3}{h^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \varepsilon_{\varphi 6} = \frac{(P_3 - P_4)f^3 h^3(1+v_6)}{2(h^3 - f^3)E_6 r^3} + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{f^3 P_4 - h^3 P_3}{h^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{r7} = \frac{(P_2 - P_3)h^3 m^3(1+v_7)}{(m^3 - h^3)E_7 r^3} + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{h^3 P_3 - m^3 P_2}{m^3 - h^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \varepsilon_{\varphi 7} = \frac{(P_2 - P_3)h^3 m^3(1+v_7)}{2(m^3 - h^3)E_7 r^3} + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{h^3 P_3 - m^3 P_2}{m^3 - h^3}$$

$$\varepsilon_{r8} = \frac{(P_1 - P_2)m^3n^3(1+v_8)}{(n^3 - m^3)E_8r^3} + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{m^3P_2 - n^3P_1}{n^3 - m^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \varepsilon_{\varphi 8} = \frac{(P_1 - P_2)m^3n^3(1+v_8)}{2(n^3 - m^3)E_8r^3} + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{m^3P_2 - n^3P_1}{n^3 - m^3}$$

$$\varepsilon_{r9} = \frac{(P_0 - P_1)n^3q^3(1+v_9)}{(q^3 - n^3)E_9r^3} + \frac{1-2v_9}{E_9} \frac{n^3P_1 - q^3P_0}{q^3 - n^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 9} = \varepsilon_{\varphi 9} = \frac{(P_0 - P_1)n^3q^3(1+v_9)}{2(q^3 - n^3)E_9r^3} + \frac{1-2v_9}{E_9} \frac{n^3P_1 - q^3P_0}{q^3 - n^3}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους γινόμενα:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \sigma_{\varphi 1} = -P_8$$

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\varphi 1} = -P_8 \frac{(1-2v_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r1}\sigma_{r1} + \varepsilon_{\theta 1}\sigma_{\theta 1} + \varepsilon_{\varphi 1}\sigma_{\varphi 1} = 3P_8^2 \frac{(1-2v_1)}{E_1}$$

$$\sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2}\sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2}\sigma_{\varphi 2} = \left(\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1+v_2)}{(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \right) \left(\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{r^3} + \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \right) +$$

$$2 \left(\left(-\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3}{b^3 - a^3} \frac{1}{2r^3} + \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \right) \left(\frac{(P_7 - P_8)a^3b^3(1+v_2)}{2(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(P_7 - P_8)^2 a^6 b^6 (1+v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)(P_7 - P_8)a^3b^3}{(b^3 - a^3)r^3} + \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)(P_7 - P_8)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)r^3}$$

$$- 2 \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)(P_7 - P_8)a^3b^3}{2(b^3 - a^3)^2} \frac{1}{r^3} + 2 \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)}{(b^3 - a^3)^2} = \sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2}\sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2}\sigma_{\varphi 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{r2}\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2}\sigma_{\theta 2} + \varepsilon_{\varphi 2}\sigma_{\varphi 2} = \frac{3}{2} \frac{(P_7 - P_8)^2 a^6 b^6 (1+v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)^2}{(b^3 - a^3)^2}$$

$$\frac{(P_7 - P_8)^2 a^6 b^6 (1+v_2)}{(b^3 - a^3)^2 E_2} = A_1$$

$$\frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3P_8 - b^3P_7)^2}{(b^3 - a^3)^2} = B_1$$

$$\sigma_{r3}\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{\theta 3}\sigma_{\theta 3} + \varepsilon_{\varphi 3}\sigma_{\varphi 3} = \frac{3}{2} \frac{(P_6 - P_7)^2 b^6 c^6 (1+v_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{(b^3P_7 - c^3P_6)^2}{(c^3 - b^3)^2}$$

$$\frac{(P_6 - P_7)^2 b^6 c^6 (1 + v_3)}{(c^3 - b^3)^2 E_3} = \Gamma_1$$

$$\frac{1 - 2v_3}{E_3} \frac{(b^3 P_7 - c^3 P_6)^2}{(c^3 - b^3)^2} = \Delta_1$$

$$\sigma_{r_4} \varepsilon_{r_4} + \varepsilon_{\theta_4} \sigma_{\theta_4} + \varepsilon_{\varphi_4} \sigma_{\varphi_4} = \frac{3}{2} \frac{(P_5 - P_6)^2 d^6 c^6 (1 + v_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_6 - d^3 P_5)^2}{(d^3 - c^3)^2}$$

$$\frac{(P_5 - P_6)^2 d^6 c^6 (1 + v_4)}{(d^3 - c^3)^2 E_4} = E_1$$

$$\frac{1 - 2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_6 - d^3 P_5)^2}{(d^3 - c^3)^2} = Z_1$$

$$\sigma_{r_5} \varepsilon_{r_5} + \varepsilon_{\theta_5} \sigma_{\theta_5} + \varepsilon_{\varphi_5} \sigma_{\varphi_5} = \frac{3}{2} \frac{(P_4 - P_5)^2 f^6 d^6 (1 + v_5)}{(f^3 - d^3)^2 E_5} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_5 - f^3 P_4)^2}{(f^3 - d^3)^2}$$

$$\frac{(P_4 - P_5)^2 f^6 d^6 (1 + v_5)}{(f^3 - d^3)^2 E_5} = H_1$$

$$\frac{1 - 2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_5 - f^3 P_4)^2}{(f^3 - d^3)^2} = \Theta_1$$

$$\sigma_{r_6} \varepsilon_{r_6} + \varepsilon_{\theta_6} \sigma_{\theta_6} + \varepsilon_{\varphi_6} \sigma_{\varphi_6} = \frac{3}{2} \frac{(P_3 - P_4)^2 h^6 f^6 (1 + v_6)}{(h^3 - f^3)^2 E_6} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{(f^3 P_4 - h^3 P_3)^2}{(h^3 - f^3)^2}$$

$$\frac{(P_3 - P_4)^2 h^6 f^6 (1 + v_6)}{(h^3 - f^3)^2 E_6} = I_1$$

$$\frac{1 - 2v_6}{E_6} \frac{(f^3 P_4 - h^3 P_3)^2}{(h^3 - f^3)^2} = K_1$$

$$\sigma_{r_7} \varepsilon_{r_7} + \varepsilon_{\theta_7} \sigma_{\theta_7} + \varepsilon_{\varphi_7} \sigma_{\varphi_7} = \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_3)^2 m^6 h^6 (1 + v_7)}{(m^3 - h^3)^2 E_7} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)^2}{(m^3 - h^3)^2}$$

$$\frac{(P_2 - P_3)^2 m^6 h^6 (1 + v_7)}{(m^3 - h^3)^2 E_7} = \Lambda_1$$

$$\frac{1 - 2v_7}{E_7} \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)^2}{(m^3 - h^3)^2} = M_1$$

$$\sigma_{r_8}\varepsilon_{r_8} + \varepsilon_{\theta_8}\sigma_{\theta_8} + \varepsilon_{\varphi_8}\sigma_{\varphi_8} = \frac{3(P_1 - P_2)^2 n^6 m^6 (1 + v_8)}{2(n^3 - m^3)^2 E_8} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_8}{E_8} \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)^2}{(n^3 - m^3)^2}$$

$$\frac{(P_1 - P_2)^2 n^6 m^6 (1 + v_8)}{(n^3 - m^3)^2 E_8} = N_1$$

$$\frac{1 - 2v_8}{E_8} \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)^2}{(n^3 - m^3)^2} = \Xi_1$$

$$\sigma_{r_9}\varepsilon_{r_9} + \varepsilon_{\theta_9}\sigma_{\theta_9} + \varepsilon_{\varphi_9}\sigma_{\varphi_9} = \frac{3(P_0 - P_1)^2 q^6 n^6 (1 + v_9)}{2(q^3 - n^3)^2 E_9} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{1 - 2v_9}{E_9} \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)^2}{(q^3 - n^3)^2}$$

$$\frac{(P_0 - P_1)^2 q^6 n^6 (1 + v_9)}{(q^3 - n^3)^2 E_9} = O_1$$

$$\frac{1 - 2v_9}{E_9} \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)^2}{(q^3 - n^3)^2} = \Pi_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P_0^2 (1 - 2v_c) q^3}{E_c} &= 3P_8^2 \frac{1 - 2v_1}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} A_1 \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3} \right) + B_1 (b^3 - a^3) - \frac{1}{2} \Gamma_1 \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \Delta_1 (c^3 - b^3) - \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3} \right) \\ &+ Z_1 (d^3 - c^3) - \frac{1}{2} H_1 \left(\frac{1}{f^3} - \frac{1}{d^3} \right) + \Theta_1 (f^3 - d^3) - \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{f^3} \right) + K_1 (h^3 - f^3) - \frac{1}{2} \Lambda_1 \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{h^3} \right) + M_1 (m^3 - h^3) \\ &- \frac{1}{2} N_1 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3} \right) + \Xi_1 (n^3 - m^3) - \frac{1}{2} O_1 \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \Pi_1 (q^3 - n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{3P_0^2 (1 - 2v_c)}{E_c} r^2 dr &= \int_0^a 3P_8^2 \frac{1 - 2v_1}{E_1} r^2 dr + \int_a^b \left(\frac{3}{2} A_1 \frac{1}{r^6} + 3B_1 \right) r^2 dr + \int_b^c \left(\frac{3}{2} \Gamma_1 \frac{1}{r^6} + 3\Delta_1 \right) r^2 dr \\ &+ \int_c^d \left(\frac{3}{2} E_1 \frac{1}{r^6} + 3Z_1 \right) r^2 dr + \int_d^f \left(\frac{3}{2} H_1 \frac{1}{r^6} + 3\Theta_1 \right) r^2 dr + \int_f^h \left(\frac{3}{2} I_1 \frac{1}{r^6} + 3K_1 \right) r^2 dr + \int_h^m \left(\frac{3}{2} \Lambda_1 \frac{1}{r^6} + 3M_1 \right) r^2 dr \\ &+ \int_m^n \left(\frac{3}{2} N_1 \frac{1}{r^6} + 3\Xi_1 \right) r^2 dr \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{P_0^2 (1 - 2v_c) q^3}{E_c} &= 3P_8^2 \frac{1 - 2v_1}{E_1} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a + \frac{3}{2} A_1 \int_a^b r^{-4} dr + 3B_1 \int_a^b r^2 dr + \frac{3}{2} \Gamma_1 \int_b^c r^{-4} dr + 3\Delta_1 \int_b^c r^2 dr + \\ &\frac{3}{2} E_1 \int_c^d r^{-4} dr + 3Z_1 \int_c^d r^2 dr + \frac{3}{2} H_1 \int_d^f r^{-4} dr + 3\Theta_1 \int_d^f r^2 dr + \frac{3}{2} I_1 \int_f^h r^{-4} dr + 3K_1 \int_f^h r^2 dr + \frac{3}{2} \Lambda_1 \int_h^m r^{-4} dr + 3M_1 \int_h^m r^2 dr + \\ &+ \frac{3}{2} N_1 \int_m^n r^{-4} dr + 3\Xi_1 \int_m^n r^2 dr + \frac{3}{2} O_1 \int_n^q r^{-4} dr + 3\Pi_1 \int_n^q r^2 dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{P_0^2(1-2v_c)q^3}{E_c} &= 3P_8^2 \frac{1-2v_1}{E_1} a^3 - \frac{1}{2} \frac{(P_7-P_8)^2 a^6 b^6 (1+v_2)}{(b^3-a^3)^2 E_2} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_8 - b^3 P_7)^2}{(b^3-a^3)^2} (b^3-a^3) \\
&- \frac{1}{2} \frac{(P_6-P_7)^2 b^6 c^6 (1+v_3)}{(c^3-b^3)^2 E_3} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right) + \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{(b^3 P_7 - c^3 P_6)^2}{(c^3-b^3)^2} (c^3-b^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_5-P_6)^2 d^6 c^6 (1+v_4)}{(d^3-c^3)^2 E_4} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3}\right) \\
&+ \frac{1-2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_6 - d^3 P_5)^2}{(d^3-c^3)^2} (d^3-c^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_4-P_3)^2 f^6 d^6 (1+v_5)}{(f^3-d^3)^2 E_5} \left(\frac{1}{f^3} - \frac{1}{d^3}\right) + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_5 - e^3 P_4)^2}{(f^3-d^3)^2} (f^3-d^3) \\
&- \frac{1}{2} \frac{(P_3-P_4)^2 h^6 f^6 (1+v_6)}{(h^3-f^3)^2 E_6} \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{f^3}\right) + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{(f^3 P_4 - h^3 P_3)^2}{(h^3-f^3)^2} (h^3-f^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_2-P_3)^2 m^6 h^6 (1+v_7)}{(m^3-h^3)^2 E_7} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{h^3}\right) \\
&+ \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)^2}{(m^3-h^3)^2} (m^3-h^3) - \frac{1}{2} \frac{(P_1-P_2)^2 n^6 m^6 (1+v_8)}{(n^3-m^3)^2 E_8} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right) + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)^2}{(n^3-m^3)^2} (n^3-m^3) \\
&- \frac{1}{2} \frac{(P_0-P_1)^2 q^6 n^6 (1+v_9)}{(q^3-n^3)^2 E_9} \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1-2v_9}{E_9} \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)^2}{(q^3-n^3)^2} (q^3-n^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{2P_0^2(1-2v_c)q^3}{E_c} &= 2P_8^2 \frac{1-2v_1}{E_1} a^3 + \frac{(P_7-P_8)^2 a^3 b^3 (1+v_2)}{(b^3-a^3)E_2} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1-2v_2}{E_2} \frac{(a^3 P_8 - b^3 P_7)^2}{(b^3-a^3)} 2 \\
&+ \frac{(P_6-P_7)^2 b^3 c^3 (1+v_3)}{(c^3-b^3)^2 E_3} \left(\frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3}\right) + \frac{1-2v_3}{E_3} \frac{(b^3 P_7 - c^3 P_6)^2}{(c^3-b^3)} (c^3-b^3) 2 \\
&+ \frac{(P_5-P_6)^2 d^3 c^3 (1+v_4)}{(d^3-c^3)^2 E_4} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{c^3}\right) + \frac{1-2v_4}{E_4} \frac{(c^3 P_6 - d^3 P_5)^2}{(d^3-c^3)} (d^3-c^3) 2 \\
&+ \frac{(P_4-P_5)^2 f^3 d^3 (1+v_5)}{(f^3-d^3)^2 E_5} \left(\frac{1}{f^3} - \frac{1}{d^3}\right) + \frac{1-2v_5}{E_5} \frac{(d^3 P_5 - e^3 P_4)^2}{(f^3-d^3)} (f^3-d^3) 2 \\
&+ \frac{(P_3-P_4)^2 h^3 f^3 (1+v_6)}{(h^3-f^3)^2 E_6} \left(\frac{1}{h^3} - \frac{1}{f^3}\right) + \frac{1-2v_6}{E_6} \frac{(f^3 P_4 - h^3 P_3)^2}{(h^3-f^3)} (h^3-f^3) 2 \\
&+ \frac{(P_2-P_3)^2 m^3 h^3 (1+v_7)}{(m^3-h^3)^2 E_7} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{h^3}\right) + \frac{1-2v_7}{E_7} \frac{(h^3 P_3 - m^3 P_2)^2}{(m^3-h^3)} (m^3-h^3) 2 \\
&+ \frac{(P_1-P_2)^2 n^3 m^3 (1+v_8)}{(n^3-m^3)^2 E_8} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3}\right) + \frac{1-2v_8}{E_8} \frac{(m^3 P_2 - n^3 P_1)^2}{(n^3-m^3)} (n^3-m^3) 2 \\
&+ \frac{(P_0-P_1)^2 q^3 n^3 (1+v_9)}{(q^3-n^3)^2 E_8} \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1-2v_9}{E_9} \frac{(n^3 P_1 - q^3 P_0)^2}{(q^3-n^3)} (q^3-n^3) 2
\end{aligned}$$

λοχύει

$$U_1 = \frac{a^3}{q^3}$$

$$U_2 = \frac{b^3 - a^3}{q^3}$$

$$U_3 = \frac{c^3 - b^3}{q^3}$$

$$U_4 = \frac{d^3 - c^3}{q^3}$$

$$U_5 = \frac{f^3 - d^3}{q^3}$$

$$U_6 = \frac{h^3 - f^3}{q^3}$$

$$U_7 = \frac{m^3 - h^3}{q^3}$$

$$U_8 = \frac{n^3 - m^3}{q^3}$$

$$U_9 = \frac{q^3 - n^3}{q^3}$$

$$P_8 = \mu P_7, P_7 = \lambda_1 P_6, P_6 = \lambda_2 P_5, P_5 = \lambda_3 P_4, P_4 = \lambda_4 P_3, P_3 = \lambda_5 P_2, P_2 = \lambda_6 P_1, P_1 = \lambda_7 P_0$$

$$P_8 = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 P_0$$

$$\frac{P_8}{P_0} = \mu \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_7}{P_0} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_6}{P_0} = \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_5}{P_0} = \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_4}{P_0} = \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_3}{P_0} = \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_2}{P_0} = \lambda_6 \lambda_7,$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \lambda_7$$

$$U_1 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 = 1$$

$$\frac{a^3}{q^3} = U_1, \frac{b^3}{q^3} = U_1 + U_2, \frac{c^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$\frac{d^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4, \frac{f^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5,$$

$$\frac{h^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6, \frac{m^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7,$$

$$\frac{n^3}{q^3} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{2(\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2(1-2\nu_1)a^3}{q^3 E_1} + \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 a^3 b^3 (1+2\nu_2)}{(b^3 - a^3)E_2 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_2)(a^3 \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - b^3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_2 (b^3 - a^3) q^3} + \frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 b^3 c^3 (1+2\nu_3)}{(c^3 - b^3)E_3 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_3)(b^3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - c^3 \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_3 (c^3 - b^3) q^3} + \frac{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 c^3 d^3 (1+2\nu_4)}{(d^3 - c^3)E_4 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_4)(c^3 \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - d^3 \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_4 (d^3 - c^3) q^3} + \frac{(\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 d^3 f^3 (1+2\nu_5)}{(f^3 - d^3)E_5 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_5)(d^3 \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - f^3 \lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_5 (f^3 - d^3) q^3} + \frac{(\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 f^3 h^3 (1+2\nu_6)}{(h^3 - f^3)E_6 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_6)(f^3 \lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - h^3 \lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_6 (h^3 - f^3) q^3} + \frac{(\lambda_6\lambda_7 - \lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 h^3 m^3 (1+2\nu_7)}{(m^3 - h^3)E_7 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_7)(h^3 \lambda_5\lambda_6\lambda_7 - m^3 \lambda_6\lambda_7)^2}{E_7 (m^3 - h^3) q^3} + \frac{(\lambda_7 - \lambda_6\lambda_7)^2 m^3 n^3 (1+2\nu_8)}{(n^3 - m^3)E_8 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_8)(m^3 \lambda_6\lambda_7 - \lambda_7 n^3)^2}{E_8 (n^3 - m^3) q^3} + \frac{(1-\lambda_7)^2 n^3 q^3 (1+2\nu_9)}{(q^3 - n^3)E_9 q^3} + \\ &\frac{2(1-2\nu_9)(n^3 \lambda_7 - q^3)^2}{E_9 (q^3 - n^3) q^3} \end{aligned}$$

(6.12)

Μετά από πράξεις και αντικαταστάσεις των συμβόλων ο παραπάνω τύπος συναρτήσει των περιεκτικότητων είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2v_c)}{E_c} &= \frac{2(\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2(1-2v_1)U_1^3}{E_1} + \\
&\frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 U_1(U_1+U_2)(1+2v_2)}{U_2 E_2} + \\
&\frac{2(1-2v_2)(U_1\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (U_1+U_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_2 U_2} + \\
&\frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 (U_1+U_2)(U_1+U_2+U_3)(1+2v_3)}{U_3 E_3} + \\
&\frac{2(1-2v_3)((U_1+U_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (U_1+U_2+U_3)\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_3 U_3} + \\
&\frac{(\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 (U_1+U_2+U_3)(U_1+U_2+U_3+U_4)(1+2v_4)}{U_4 E_4} + \\
&\frac{2(1-2v_4)((U_1+U_2+U_3)\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (U_1+U_2+U_3+U_4)\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_4 U_4} + \\
&\frac{(\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 (U_1+U_2+U_3+U_4)(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1+2v_5)}{U_5 E_5} + \\
&\frac{2(1-2v_5)((U_1+U_2+U_3+U_4)\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_5 U_5} + \\
&\frac{(\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - \lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)(1+2v_6)}{U_6 E_6} + \\
&\frac{2(1-2v_6)((U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)\lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2}{E_6 U_6} + \\
&\frac{(\lambda_6\lambda_7 - \lambda_5\lambda_6\lambda_7)^2 (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)(1-U_9-U_8)(1+2v_7)}{U_7 E_7} + \\
&\frac{2(1-2v_7)((U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)\lambda_5\lambda_6\lambda_7 - (1-U_8-U_9)\lambda_6\lambda_7)^2}{E_7 U_7} + \\
&\frac{(\lambda_7 - \lambda_6\lambda_7)^2 (1-U_9-U_8)(1-U_8)(1+2v_8)}{U_8 E_8} + \frac{2(1-2v_8)((1-U_8-U_9)\lambda_6\lambda_7 - (1-U_9)\lambda_7)^2}{E_8 U_8} + \\
&\frac{(1-\lambda_7)^2 (1-U_9)(1+2v_9)}{U_9 E_9} + \frac{2(1-2v_9)((1-U_9)\lambda_7 - 1)^2}{E_9 U_9}
\end{aligned}$$

(6.13)

Ο λόγος Poisson του συνθέτου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι ο εξής :

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{U_6}{\nu_6} + \frac{U_7}{\nu_7} + \frac{U_8}{\nu_8} + \frac{U_9}{\nu_9} \quad (6.14)$$

Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα και αποτελέσματα για τη μέγιστη επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως, δηλαδή για $n=\xi=1$ και παραβολική μεταβολή της ενδιάμεσης φάσης.

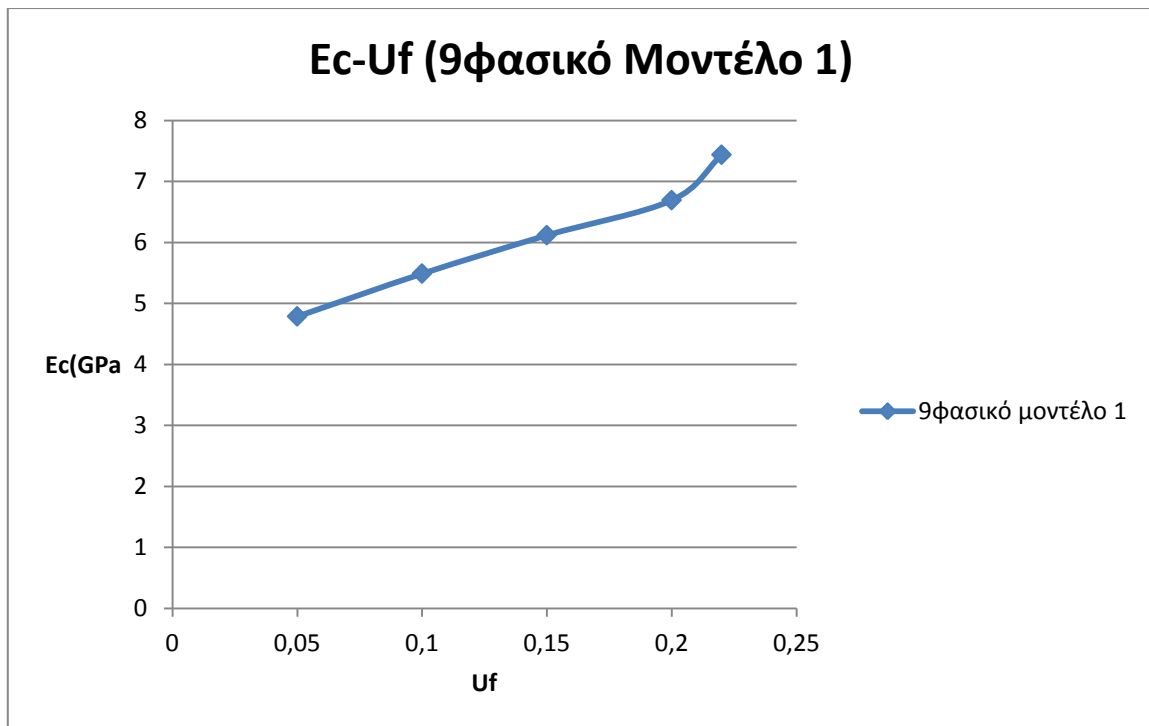
U_f	E_c για 9φασικό Κυβικό Μοντέλο 1 (GPa)	E_c για 9φασικό Κυβικό Μοντέλο 2 (GPa)	E_c για 9φασικό Οκταεδρικό Μοντέλο 1 (GPa)	E_c για 9φασικό Οκταεδρικό Μοντέλο 2 (GPa)
0.05	4,787	4,859	4,742	4,789
0.1	5,488	5,523	5,432	5,477
0.15	6,118	6,117	6,086	6,110
0.2	6,692	6,667	6,672	6,685
0.25	7,436	7,518	7,214	7,536

Πίνακας 6.1

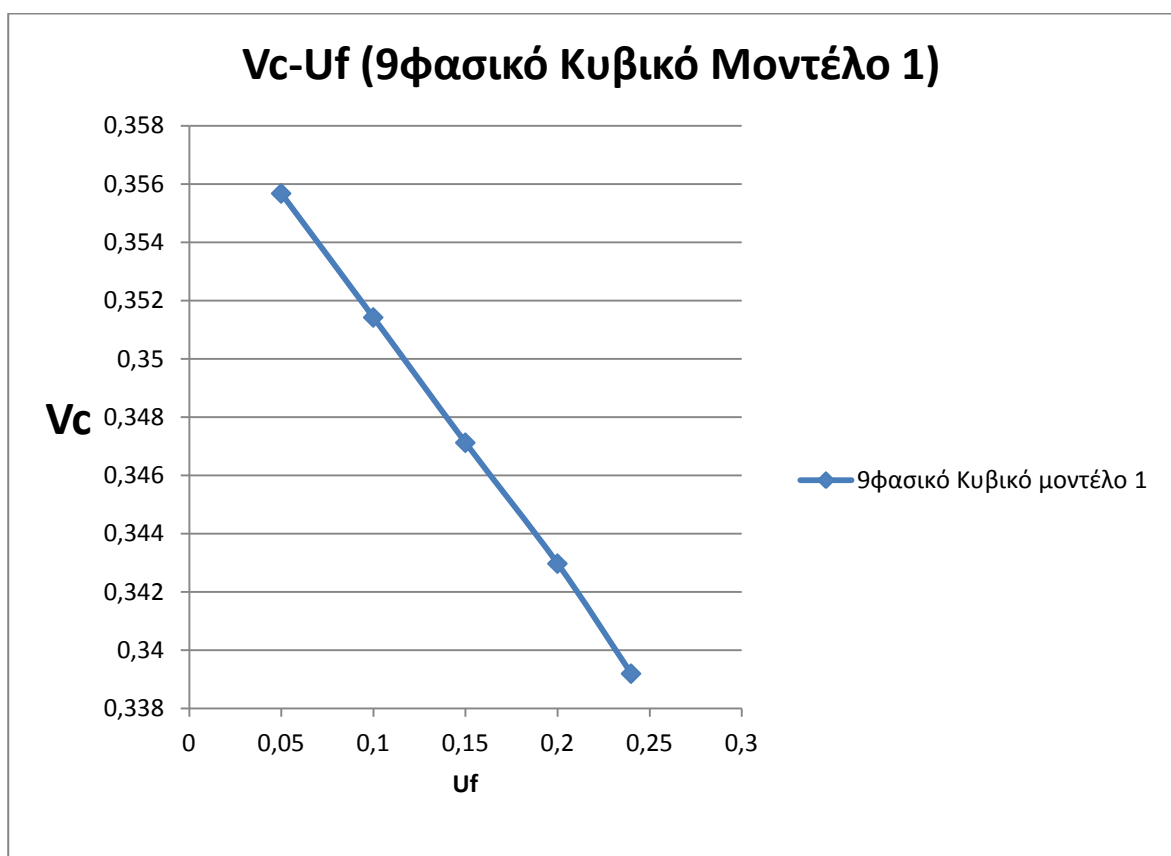
U_f	ν_c για 9φασικό Κυβικό Μοντέλο 1	ν_c για 9φασικό Κυβικό Μοντέλο 2	ν_c για 9φασικό Οκταεδρικό Μοντέλο 1	ν_c για 9φασικό Οκταεδρικό Μοντέλο 2
0.05	0,356459815	0,355675	0,355675	0,355675
0.1	0,352878041	0,351421	0,351972	0,35142
0.15	0,349111628	0,347122	0,347927	0,347121
0.2	0,345414576	0,342973	0,344018	0,342944
0.25	0,341789347	0,338434	0,341868	0,338423

Πίνακας 6.2

Εννιαφασικό κυβικό μοντέλο 1

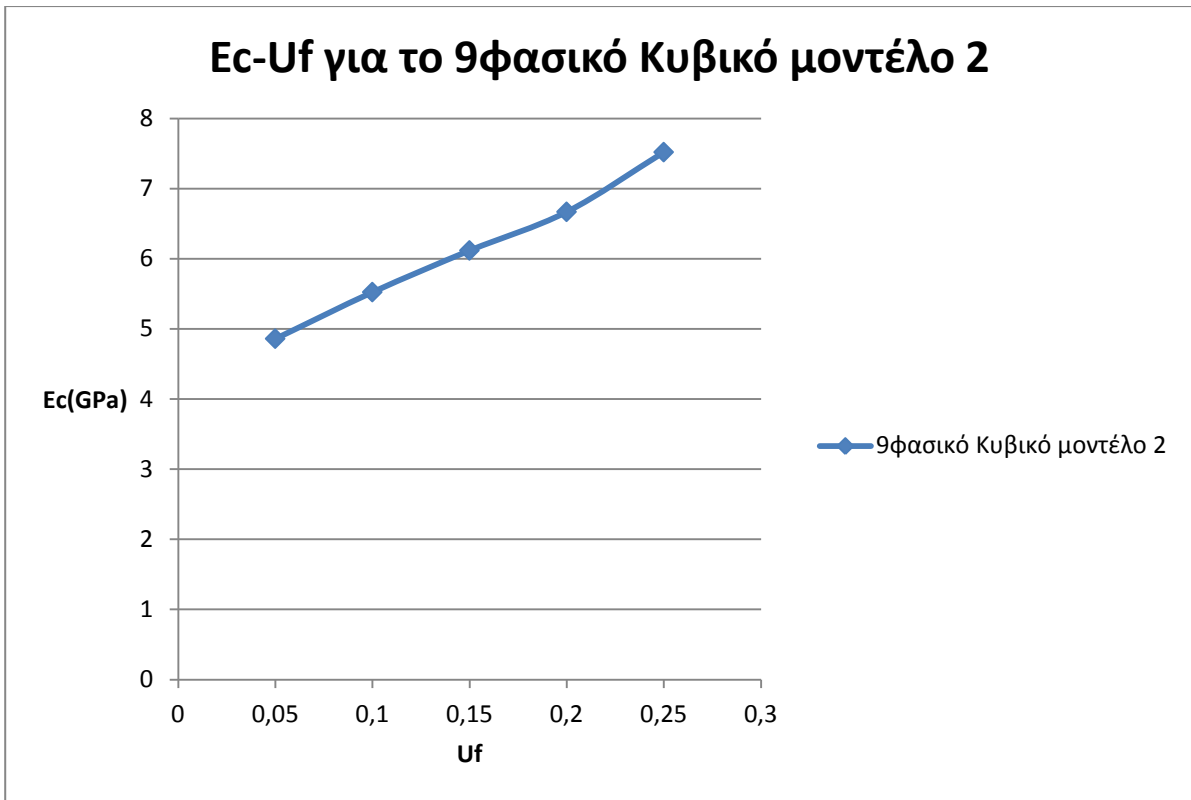


Διάγραμμα 6.1

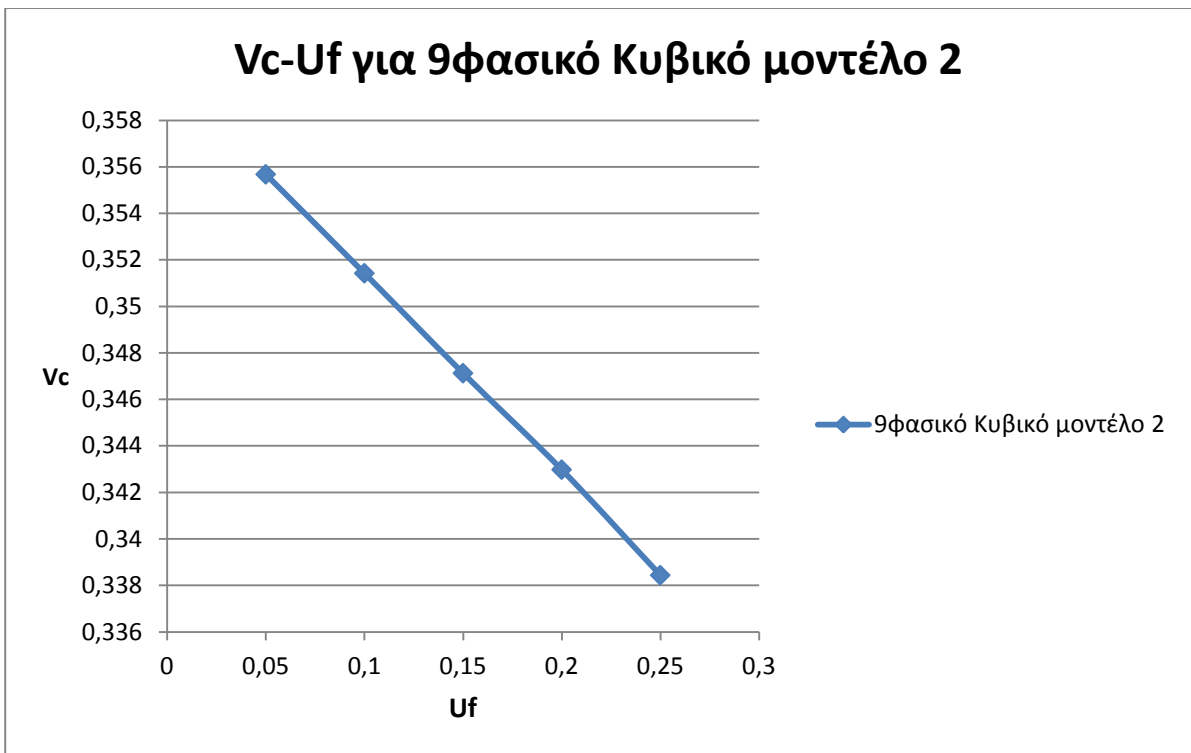


Διάγραμμα 6.2

Εννιαφασικό κυβικό μοντέλο 2

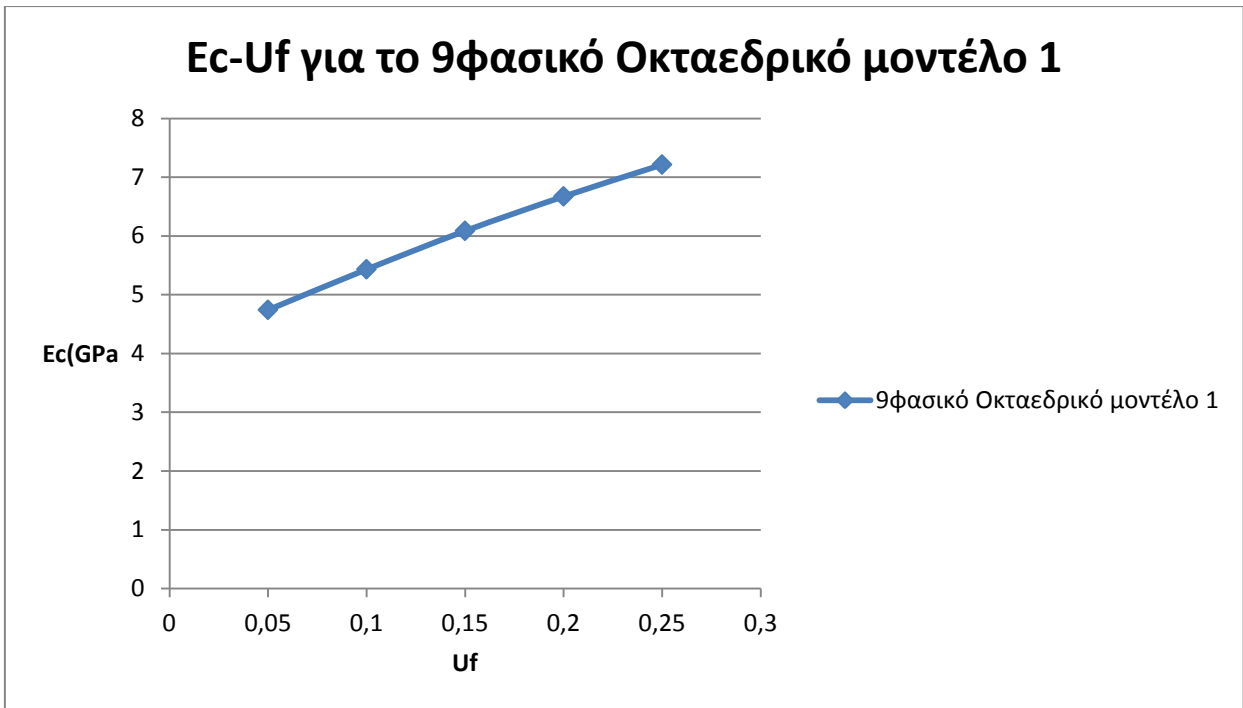


Διάγραμμα 6.3

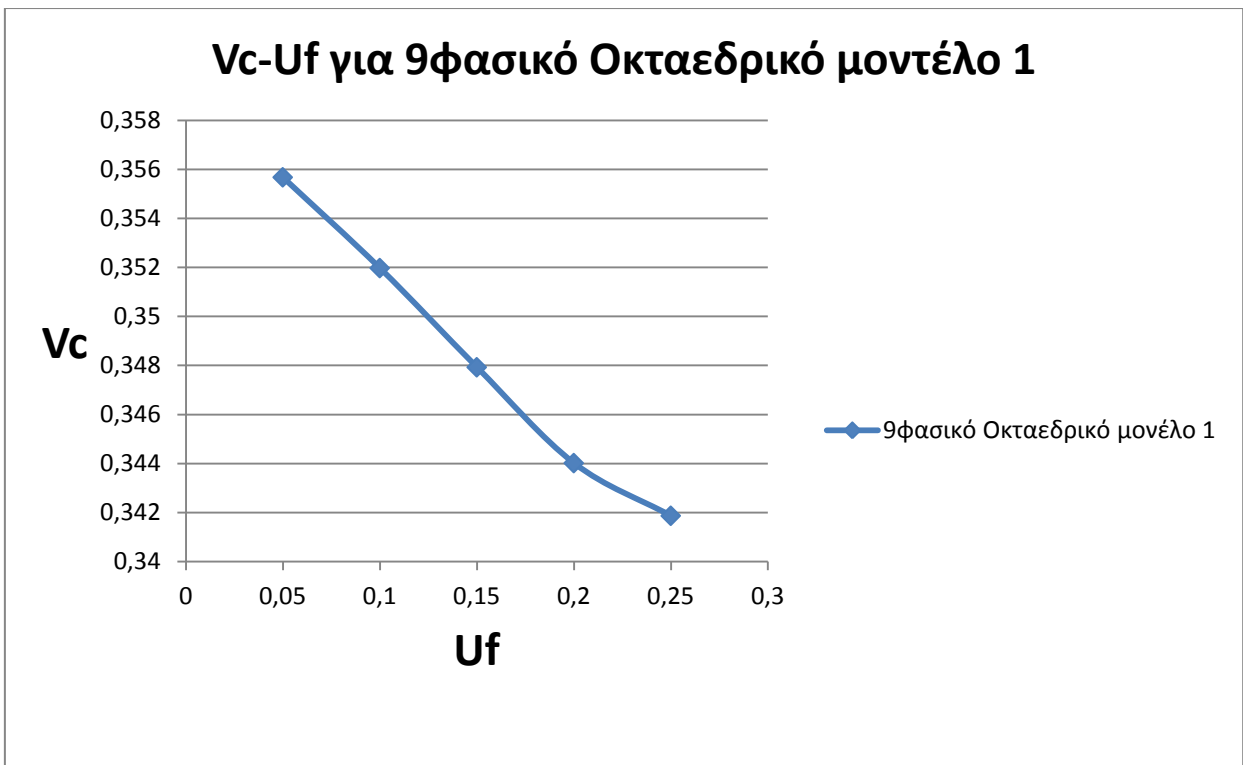


Διάγραμμα 6.4

Εννιαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 1

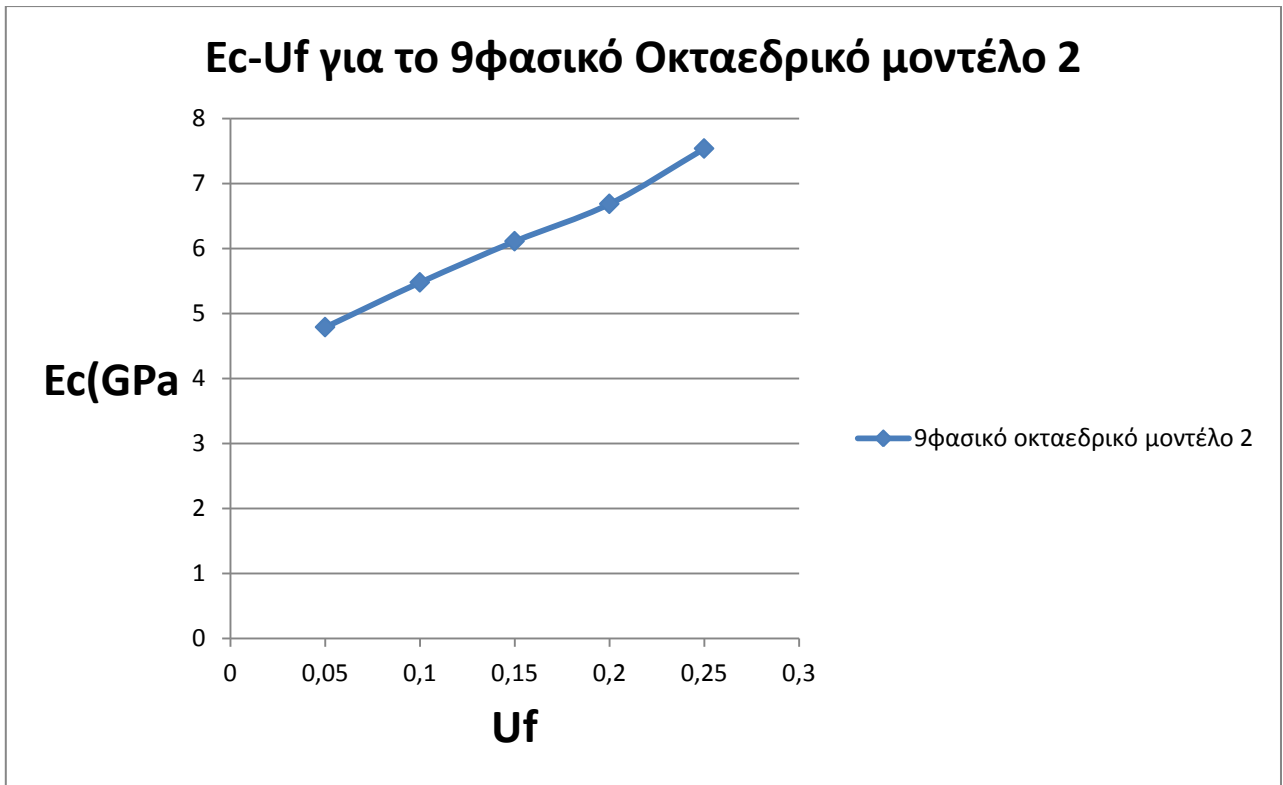


Διάγραμμα 6.5

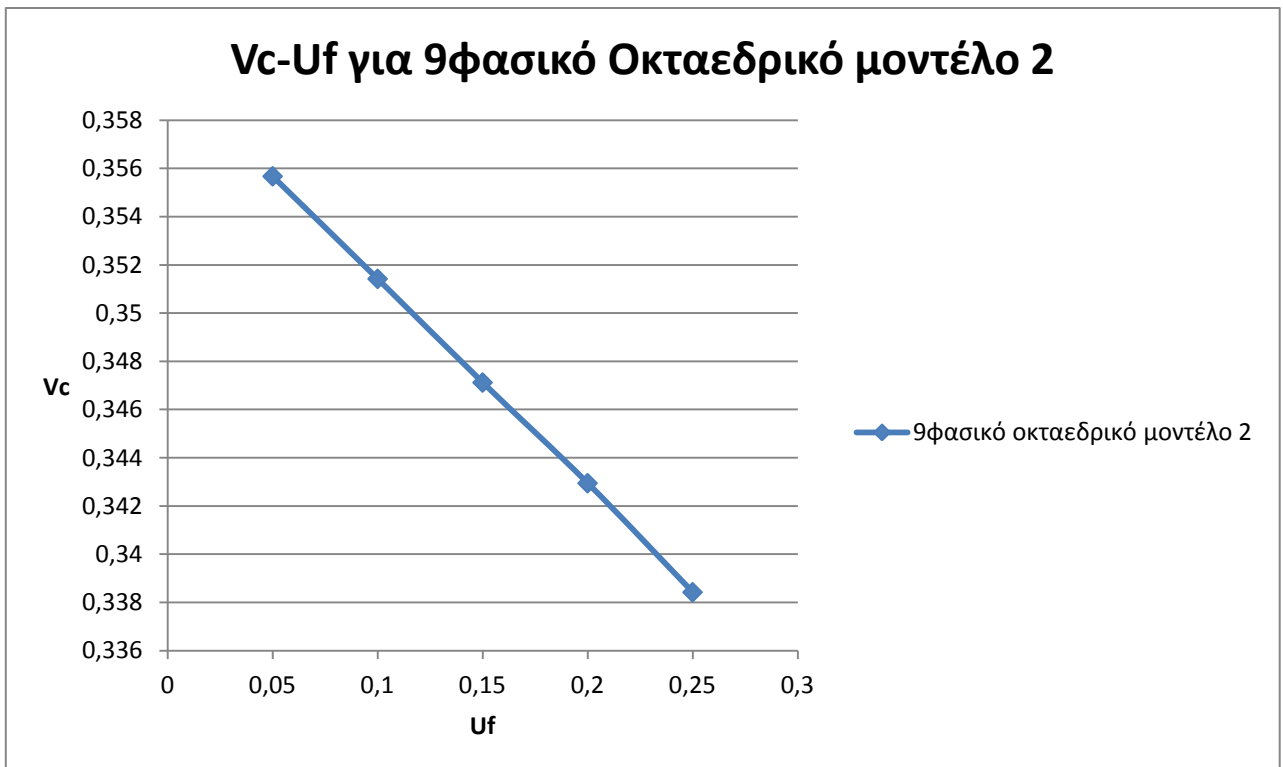


Διάγραμμα 6.6

Εννιαφασικό οκταεδρικό μοντέλο 2



Διάγραμμα 6.7



Διάγραμμα 6.8

6.3 Μέτρο ελαστικότητας για διαφορετική επίδραση της ενδιάμεσου φάσεως

Στη συνέχεια, ενδεικτικά για το οκταεδρικό μοντέλο 2 παραθέτουμε πίνακες και διαγράμματα του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson του σύνθετου υλικού, για διαφορετική επίδραση των ελαστικών σταθερών της ενδιάμεσου φάσεως, η οποία γίνεται μέσω του συντελεστή n , δηλαδή για $n=0,2$, $n=0,4$, $n=0,6$, $n=0,8$. Η επίδραση αυτή είναι πολύ πιο σημαντική στο μέτρο ελαστικότητας $E_c(r)$ όπου η διαφορά μεταξύ των μέτρων του εγκλείσματος και της μήτρας είναι πολύ μεγάλη ($E_f = 60E_m$) έν σχέσει με την διαφορά των λόγων Poisson ν_f και ν_m των δύο φάσεων.

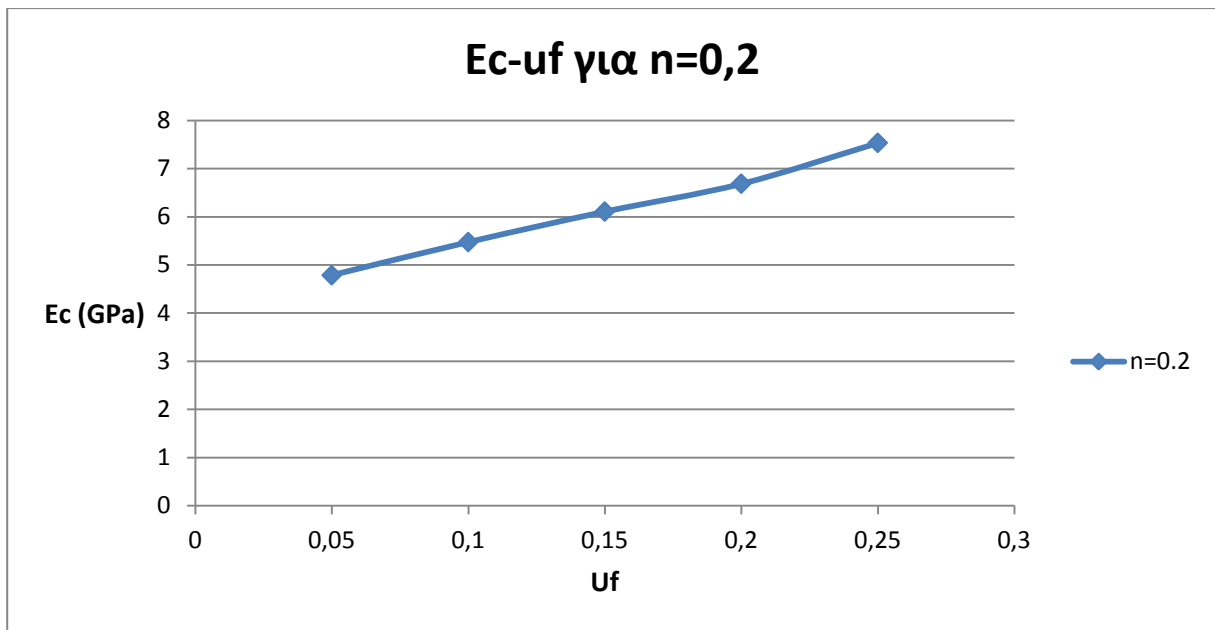
U_f	E_c οκταεδρικού μοντέλου 2 (Gra)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,05	4,78505	4,786026	4,786753	4,78758	4,788574
0,10	5,473288	5,475078	5,475609	5,476259	5,477287
0,15	6,106685	6,111851	6,1112	6,110318	6,110294
0,2	6,684682	6,693654	6,690973	6,68709	6,685213
0,25	7,533482	7,568282	7,562215	7,549185	7,536307

Πίνακας 6.3

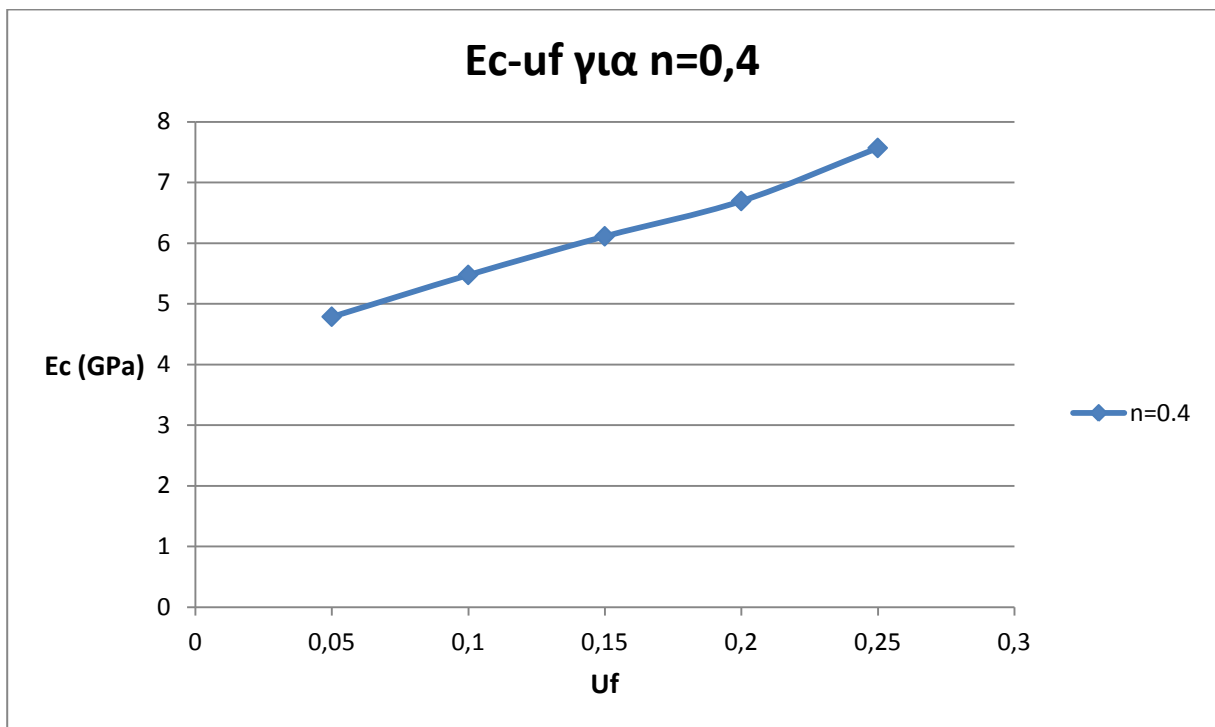
U_f	ν_c οκταεδρικού μοντέλου 2				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,05	0,35553	0,355574	0,355612	0,355646	0,355675
0,10	0,350985	0,351116	0,351231	0,351331	0,35142
0,15	0,34575	0,346162	0,346522	0,346839	0,347121
0,2	0,340919	0,341535	0,342074	0,342549	0,342944
0,25	0,333525	0,334985	0,336269	0,337407	0,338423

Πίνακας 6.4

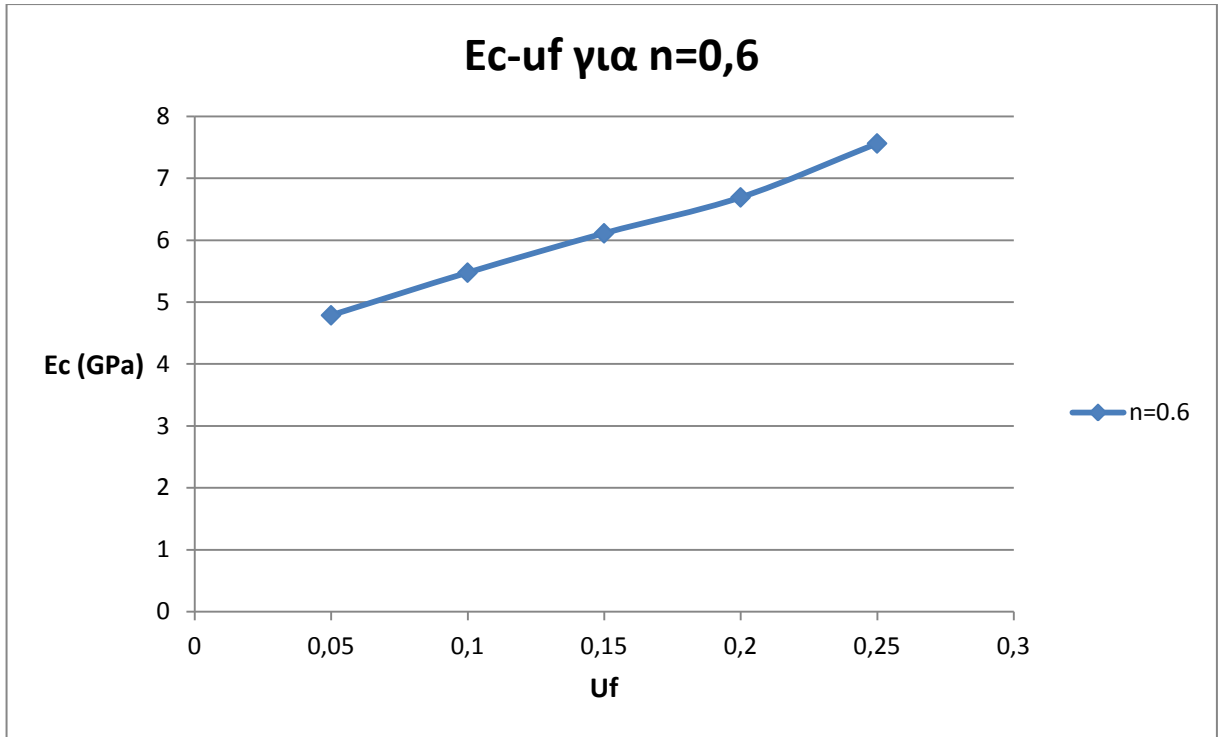
Οκταφασικό Κυβικό Μοντέλο 1



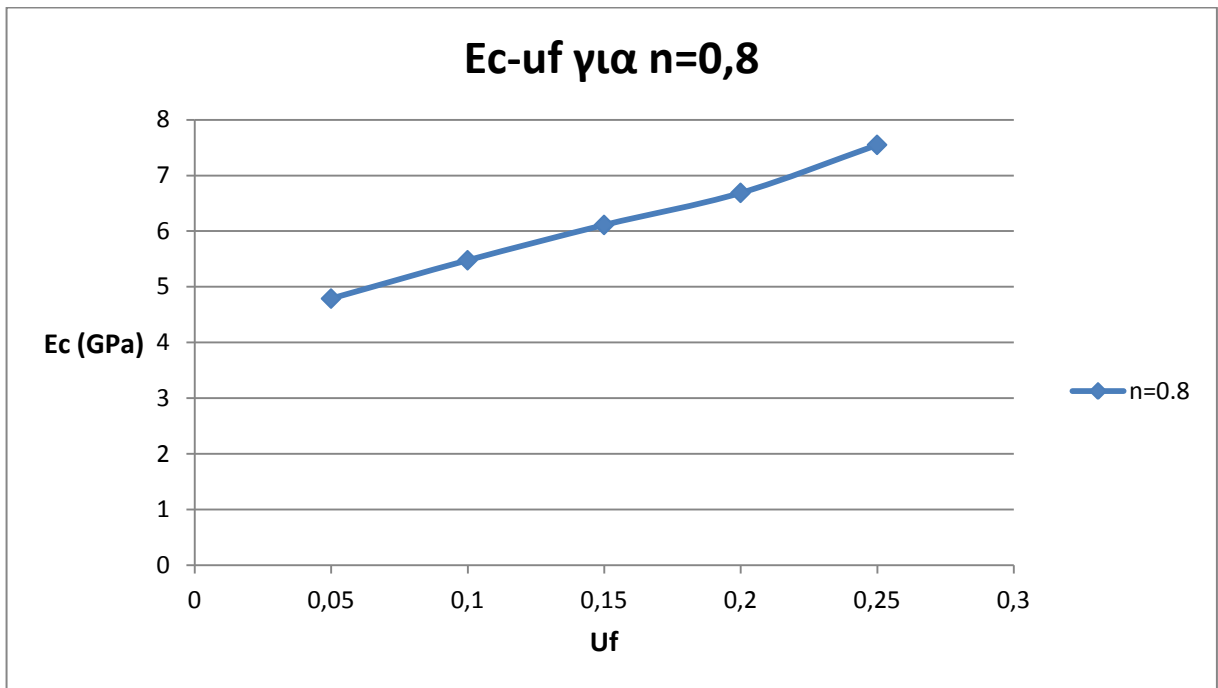
Διάγραμμα 6.9



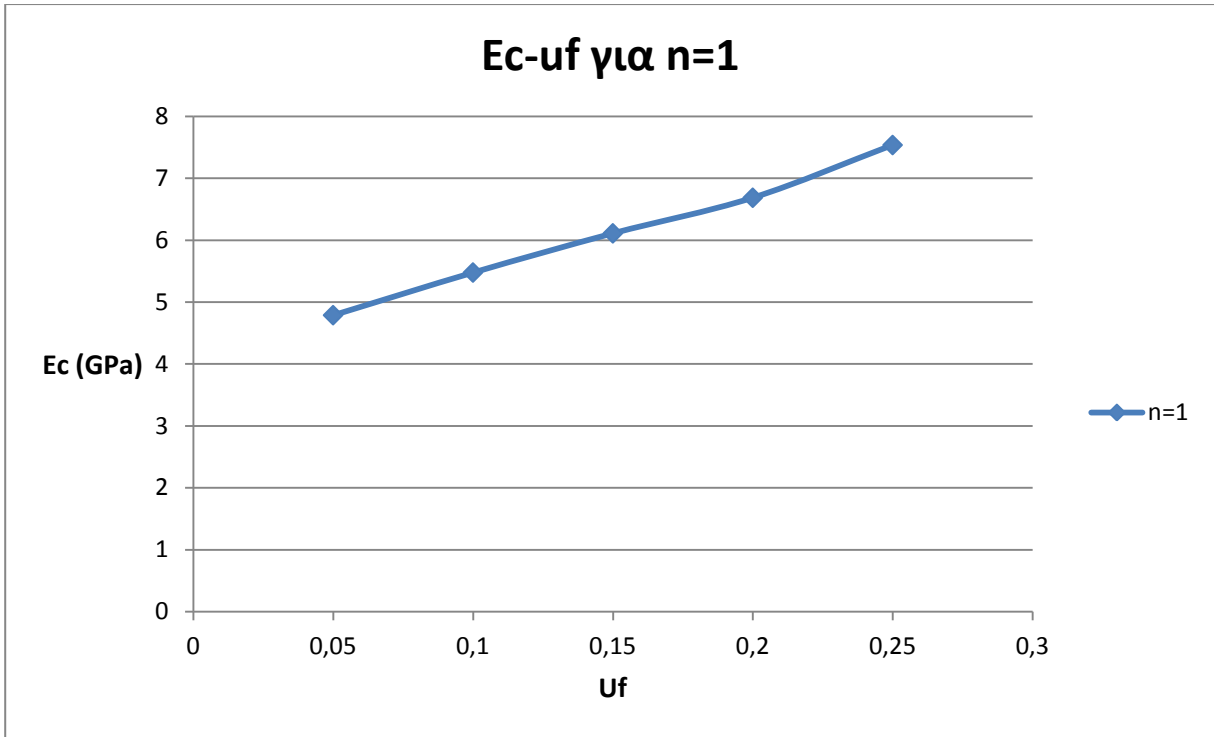
Διάγραμμα 6.10



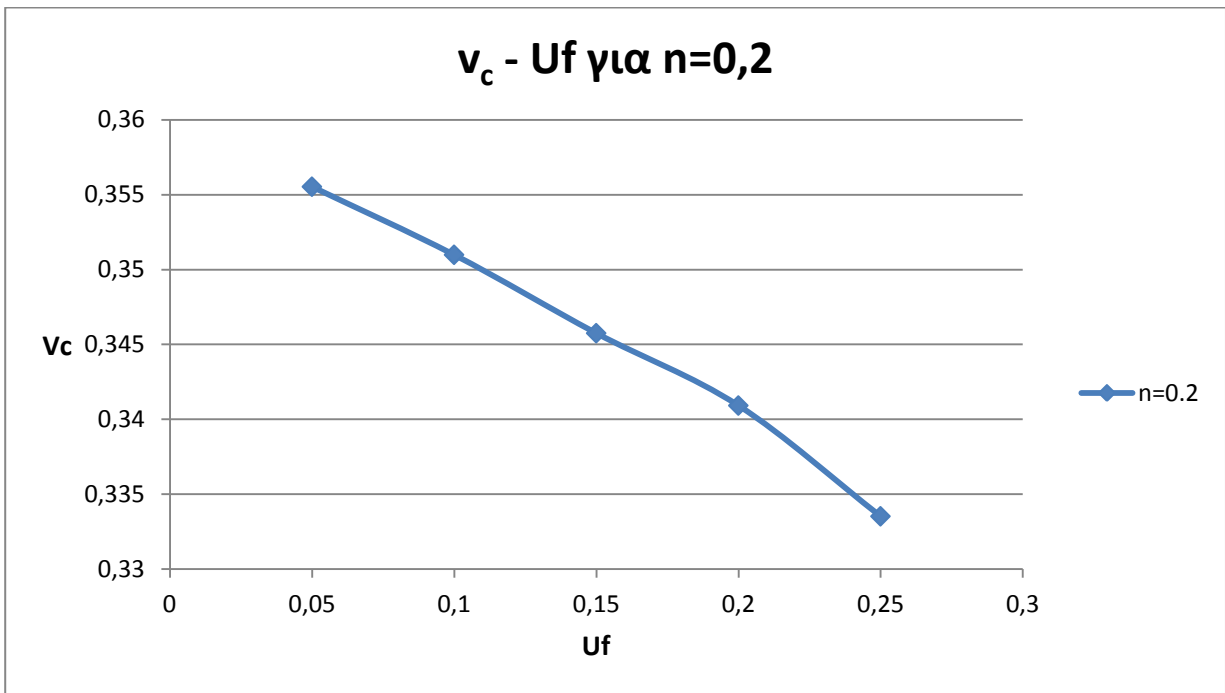
Διάγραμμα 6.11



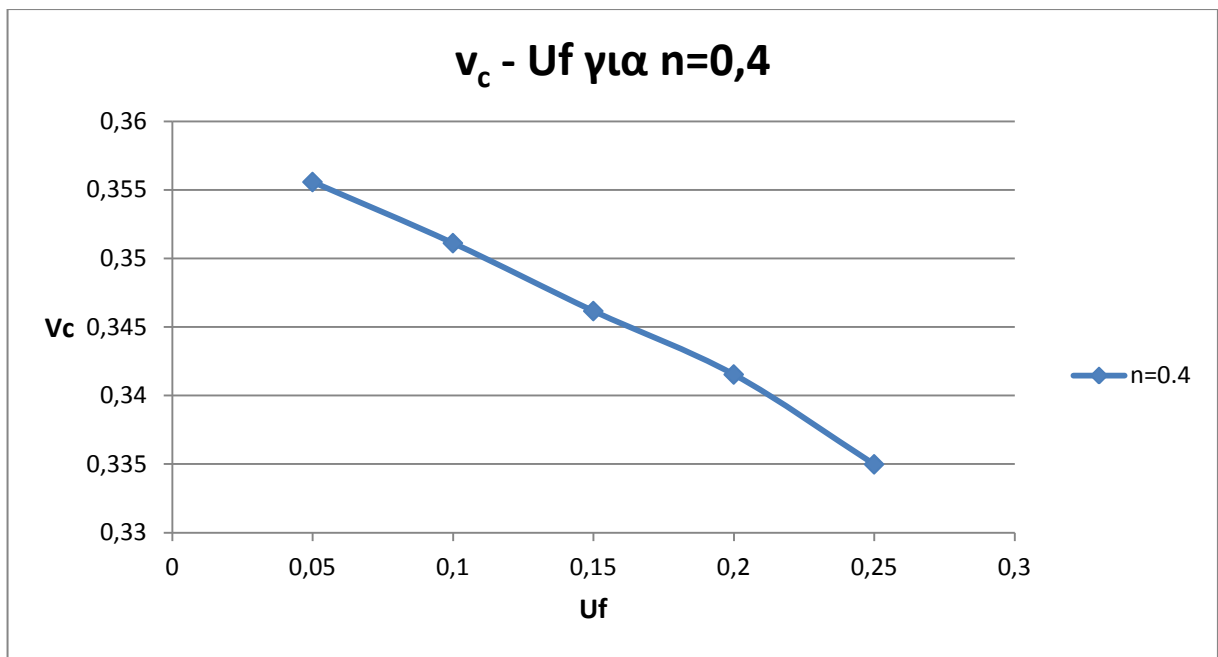
Διάγραμμα 6.12



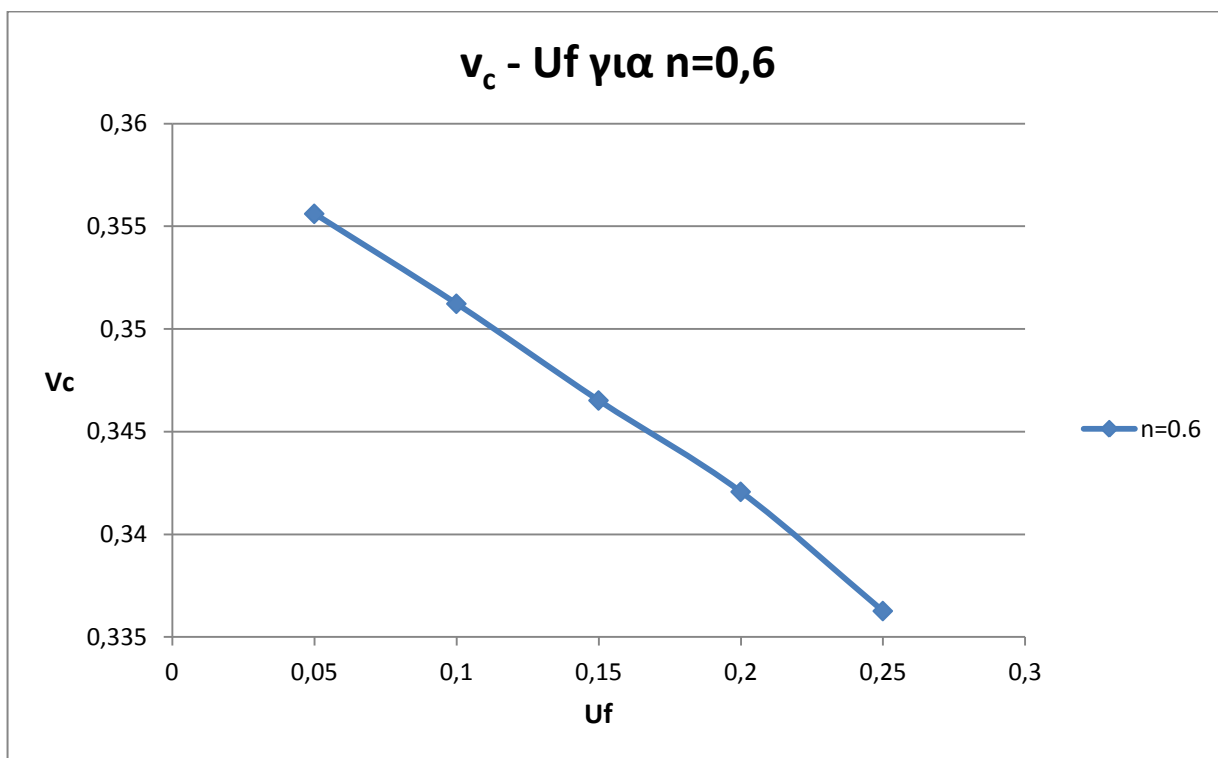
Διάγραμμα 6.13



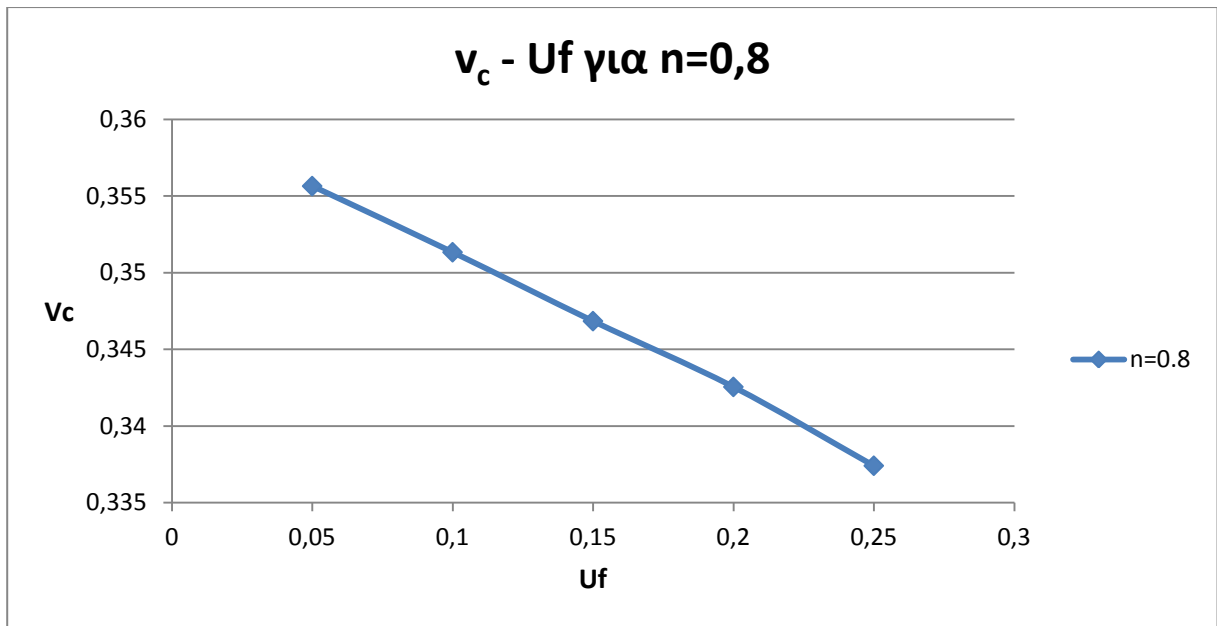
Διάγραμμα 6.14



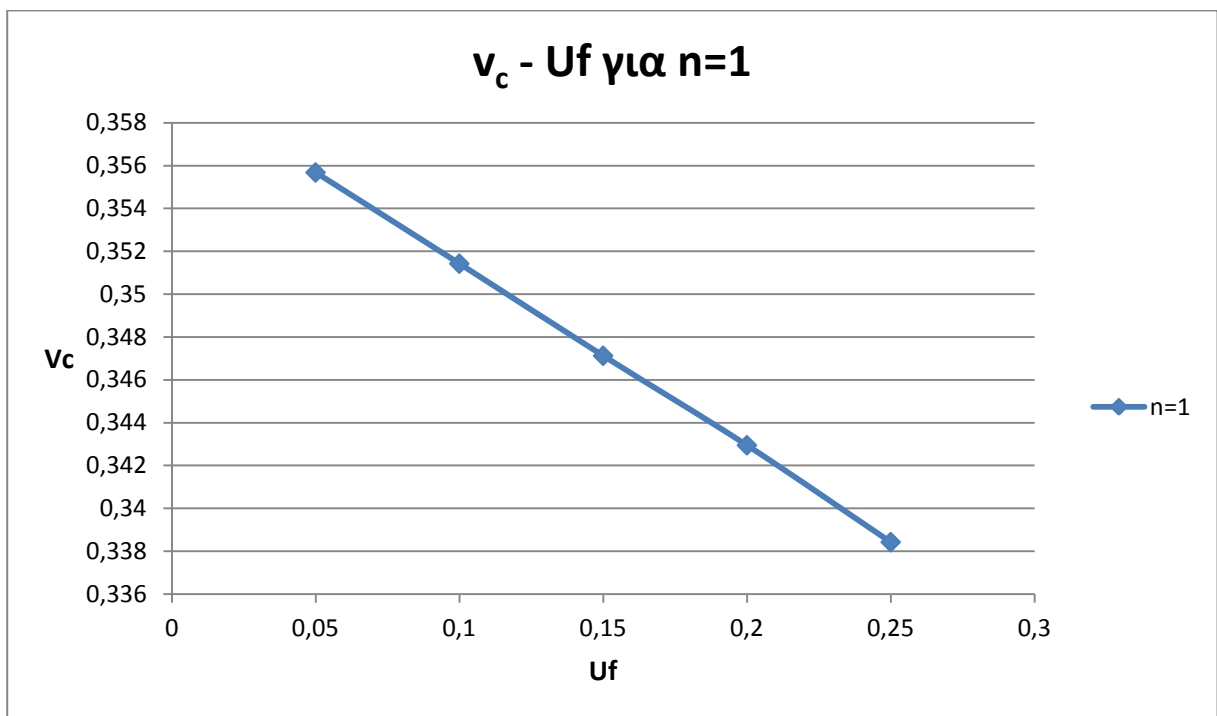
Διάγραμμα 6.15



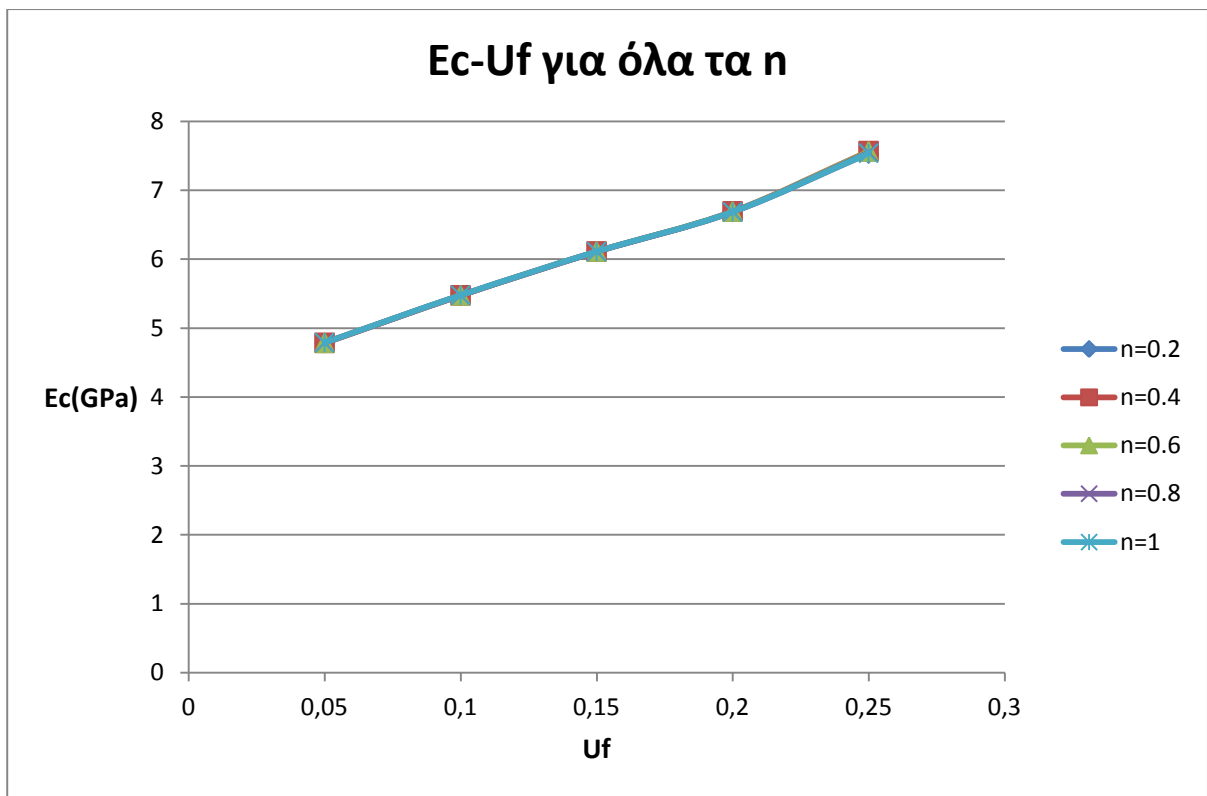
Διάγραμμα 6.16



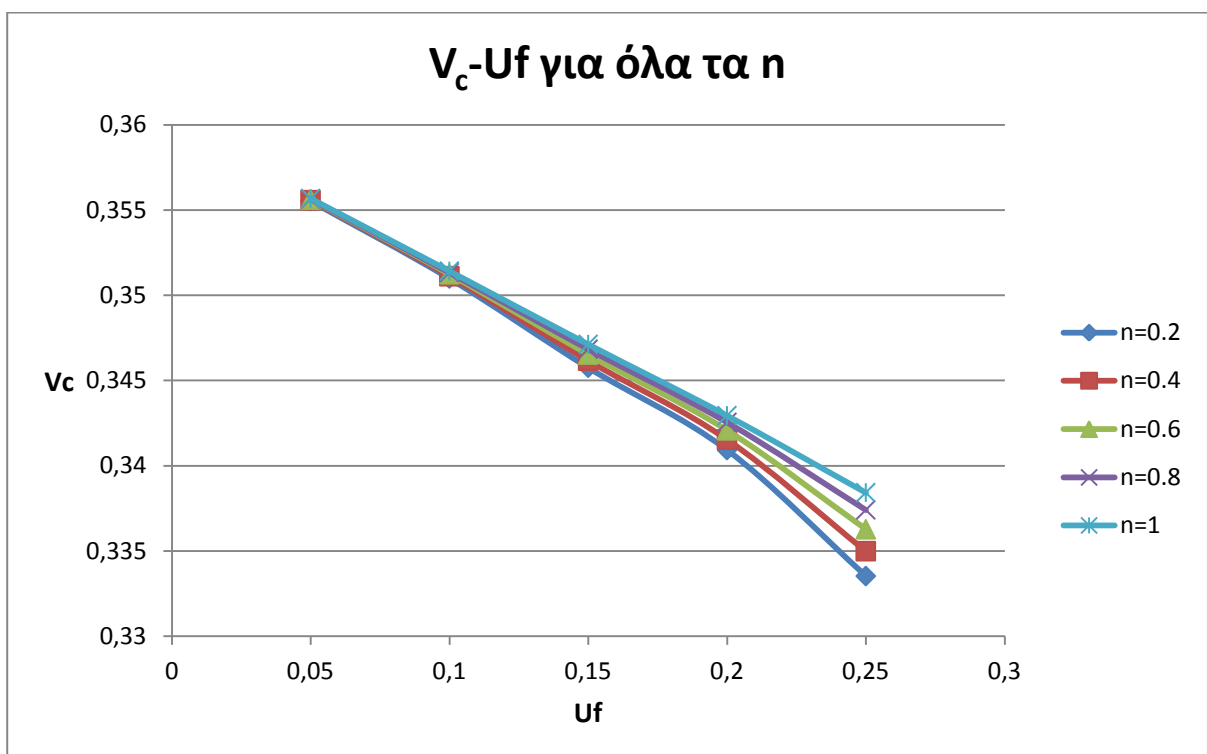
Διάγραμμα 6.17



Διάγραμμα 6.18



Διάγραμμα 6.19



Διάγραμμα 6.20

7. Σύγκριση με άλλα μοντέλα

7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά και οκταεδρικά εννιαφασικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση χρησιμοποιήσαμε πειραματικά δεδομένα από πειράματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών.

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα έχουν ως μήτρα εποξειδική ρητίνη τύπου DGEBA (Dyglycidyl Ether Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384 και με ιξώδες 15000P στους 25°C, πολυμεριζόμενα εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη.

Τα υλικά παρασκευάζονται ως εξής:

Το προ-πολυμερές θερμαίνεται σε θερμοκρασία πάνω από τους 30°C ώστε να μειωθεί το ιξώδες του και στη συνέχεια σε κατάλληλη ποσότητα αυτού προστίθεται κονιοποιημένος σίδηρος με διάμετρο κόκκων 150 μm. Το μίγμα αφού ανακατευτεί πλήρως τοποθετείται σε θάλαμο χαμηλής πίεσης για περίπου 15 λεπτά για απομαγνητισμό.

Στη συνέχεια τοποθετείται σε ορθογώνιο καλούπι από plexiglass, με κατάλληλο όγκο και σχήμα, επενδυμένο με σιλικόνη ώστε να μην κολλήσει.

Έπειτα κλείνεται έτσι ώστε να είναι δυνατό να περιστραφεί, για να αποτραπεί η κατακρήση των εγκλεισμάτων σιδήρου και να προκύψει όσο το δυνατό ομοιογενές υλικό. Ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται για να «πήξει» το υλικό, για θερμοκρασία 20°C είναι 20-25 λεπτά, χρόνος ο οποίος μειώνεται ελαφρά από την παρουσία εγκλεισμάτων. Μετά την πάροδο των 20-25 λεπτών το ανακάτεμα δεν είναι πλέον απαραίτητο.

Το καλούπι απομακρύνεται 24 ώρες αργότερα και το χυτό υποβάλλεται σε θερμική επεξεργασία που περιλαμβάνει:

- Αύξηση της θερμοκρασίας με ρυθμό 5°C/h, σταθερή διατήρηση στους 100°C

- Τελική μείωση σε θερμοκρασία περιβάλλοντος με ρυθμό 1°C/h.

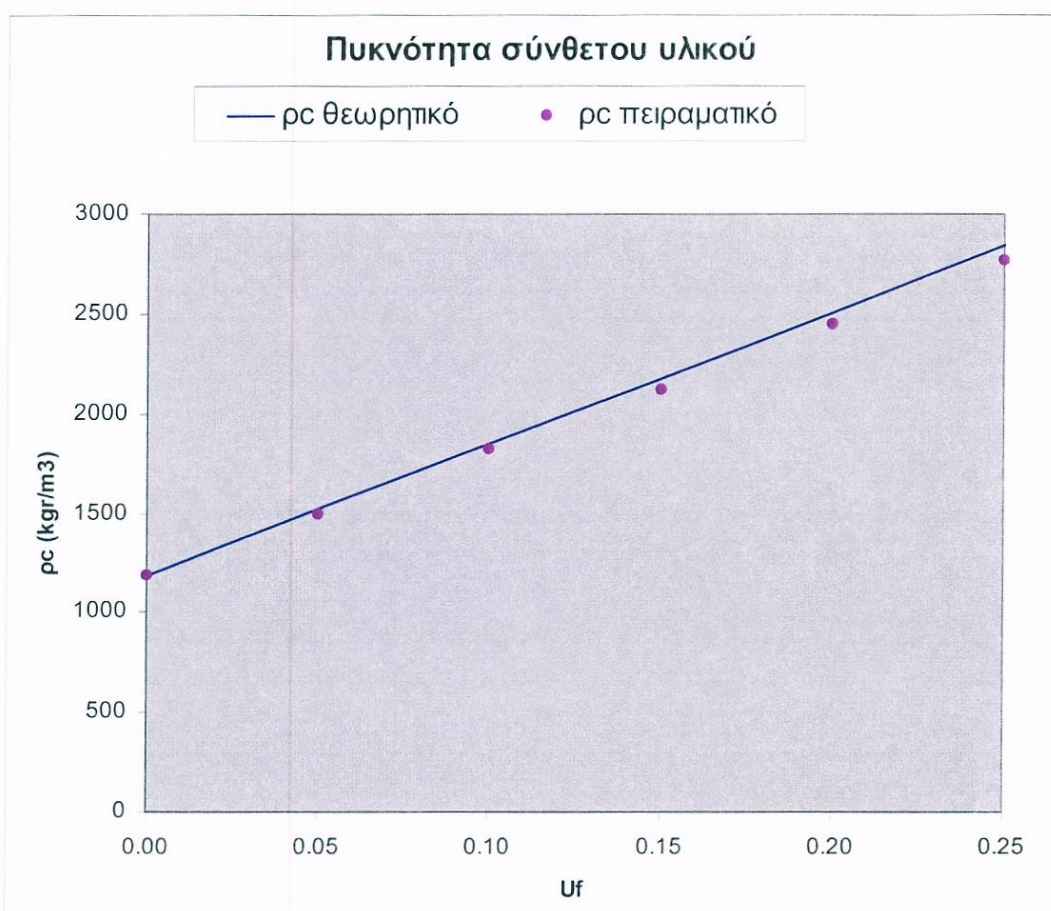
Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε πλήρη πολυμερισμό του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί ως μήτρα και επομένως οι ιδιότητες του τελικού προϊόντος είναι οι επιθυμητές.

Στα επεξεργασμένα δοκίμια γίνεται μέτρηση της πυκνότητας και η τιμή αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη θεωρητική που προκύπτει από τη σχέση:

$$\rho_c = \rho_f U_f + \rho_m U_m$$

Τα αποτελέσματα από αυτή τη μέτρηση φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί. Οι πυκνότητες δίδονται σε kg/m³:

Uf (%)	0	5	10	15	20	25
ρ_c θεωρητικό	1190	1520,5	1851	2181,5	2512	2842,5
ρ_c πειραματικό	1190	1500	1820	2120	2450	2770

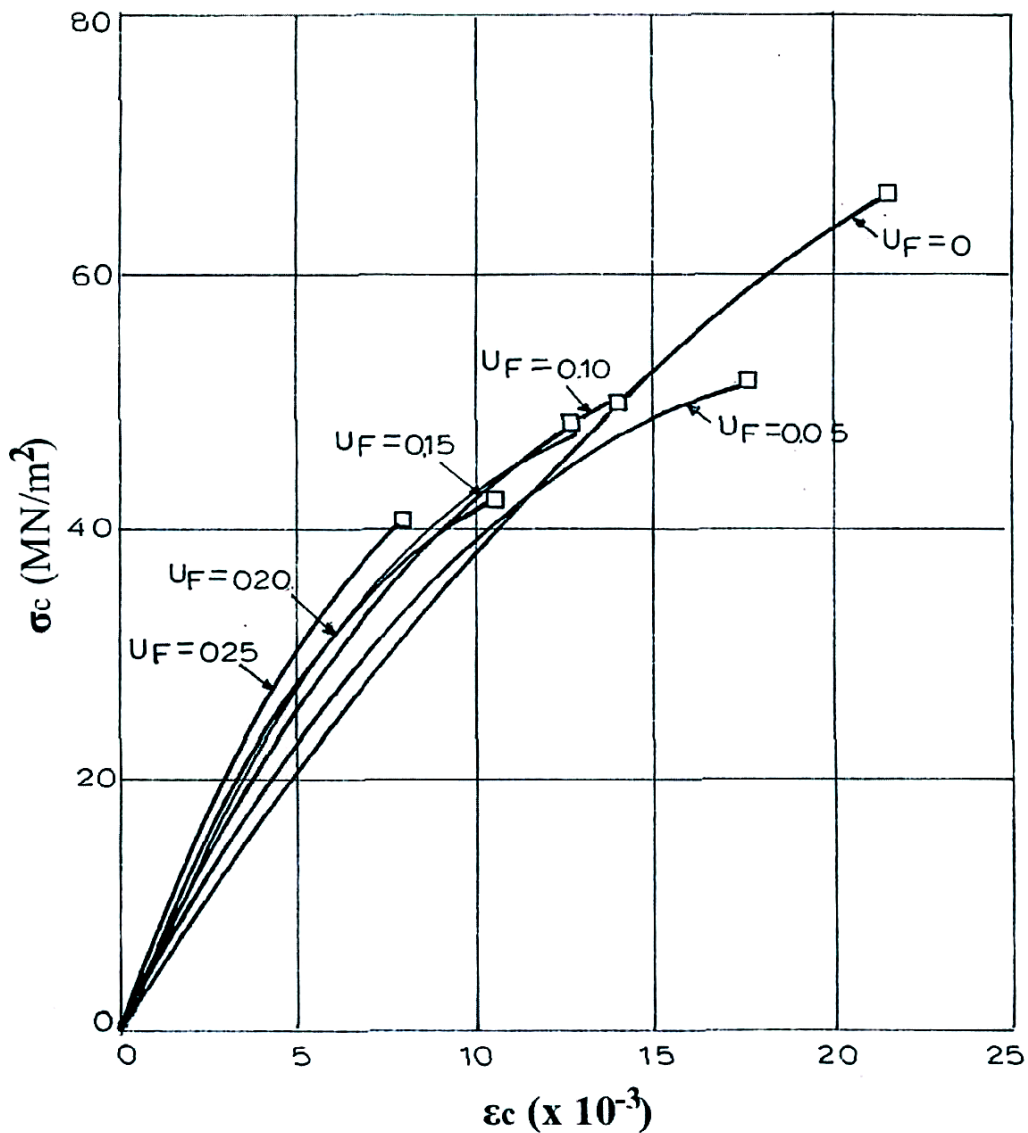


Σχήμα 7.1 Πυκνότητα σύνθετου υλικού συναρτήσει της περιεκτικότητας του σε εγκλείσματα

Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά μας αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση από τα θεωρητικά, οπότε το υλικό μας μπορεί να θεωρηθεί συμπαγές και χωρίς ατέλειες (ασυνέχειες, κενά αέρος κ.λ.π.).

Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του κοκκώδους σύνθετου υλικού έγιναν πειράματα εφελκυσμού με συσκευή τύπου instron σε θερμοκρασία δωματίου. 5 δοκίμια διαστάσεων 45x6x3mm χρησιμοποιήθηκαν για κάθε περιεκτικότητα. Η ταχύτητα φόρτισης c ήταν 0,1 cm/min.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου.



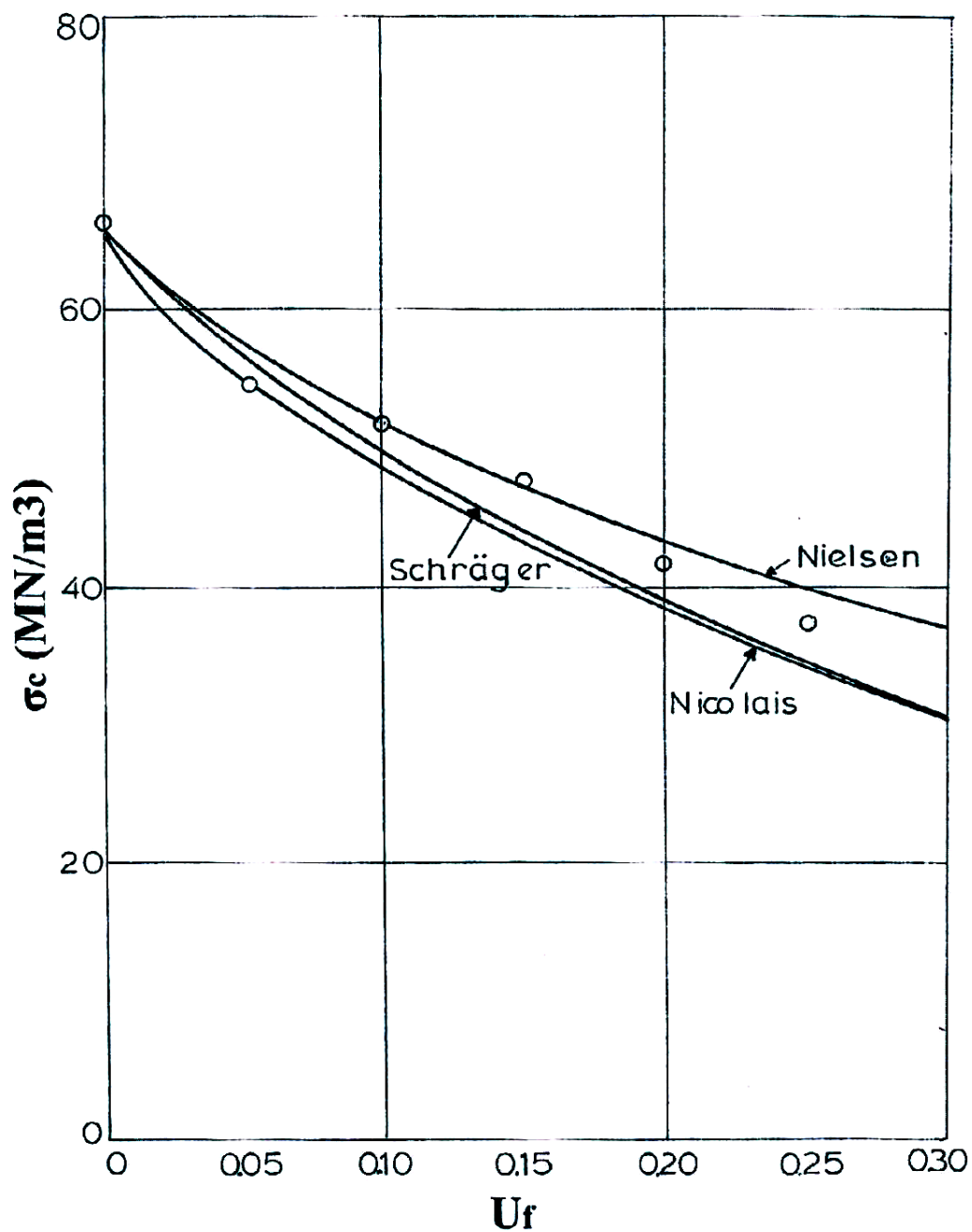
Σχήμα 7.2 καμπύλες τάσεων – παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου

Από τις καμπύλες αυτές φαίνεται η επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε σίδηρο στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού. Η μορφή των καμπυλών αυτών δείχνει ότι γενικά τα σύνθετα αυτά υλικά εμφανίζουν μη γραμμικότητα. Επειδή η μήτρα είναι βισκοελαστικό υλικό, η μη γραμμική συμπεριφορά η οποία παρατηρείται δύναται να οφείλεται σε παράγοντες εξαρτώμενους από το χρόνο. Είναι φανερό ότι ελαστική συμπεριφορά παρατηρείται μόνο στο αρχικό τμήμα τάσεων παραμορφώσεων.

Από τις ίδιες καμπύλες φαίνεται ότι καθώς αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, προκύπτει μια πλέον ελαστική συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το έγκλεισμα είναι καθαρά ελαστικό υλικό και η παρουσία του αποδυναμώνει την βισκοελαστική συμπεριφορά της μήτρας.

Τέλος μετρήθηκε η τάση θραύσης για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως $c=0,1\text{cm/min}$. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.

ΤΑΣΕΙΣ ΘΡΑΥΣΗΣ

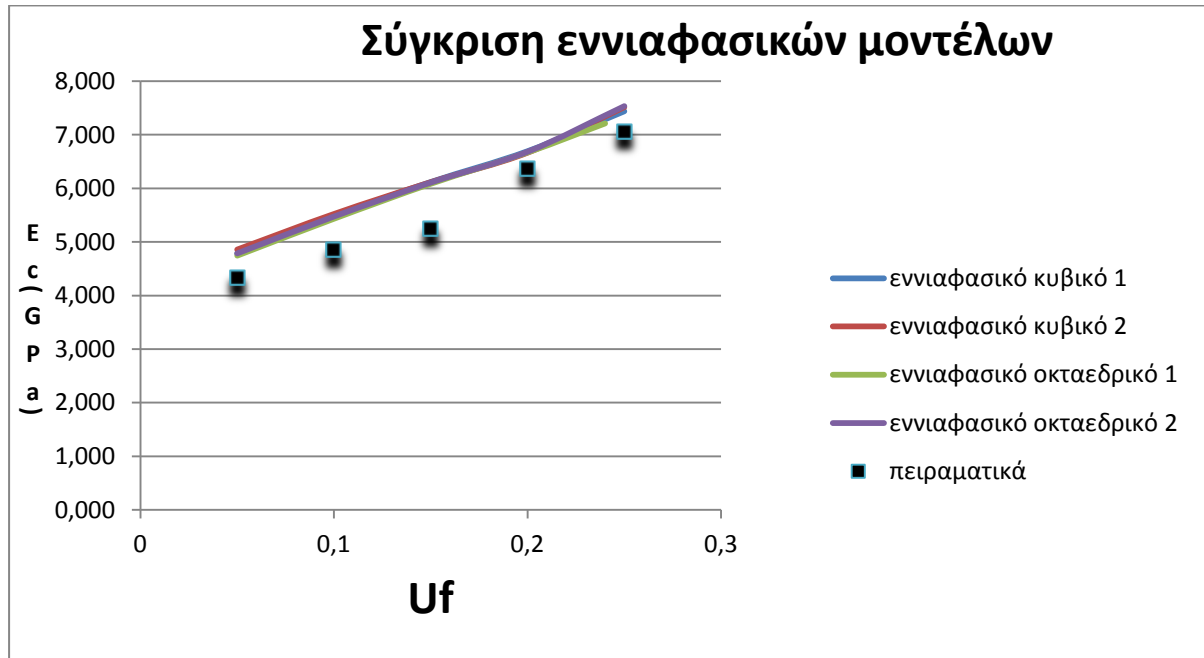


Σχήμα 7.3 τάση θραύσης σύνθετου υλικού για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως $c=0,1\text{cm/min}$

Η κάποια διασπορά η οποία εμφανίζεται στα αποτελέσματα βρίσκεται μέσα στα όρια των θεωρητικών καμπυλών των Nielsen, Nicolais και Schragger.

7.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

-Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας E_c των κυβικών μοντέλων



Διάγραμμα 7.1

U_f	Πειραματικά	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Οκταεδρικό 1	Οκταεδρικό 2
	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,05	4,33	4,787	4,859	4,742	4,788
0,1	4,86	5,488	5,523	5,432	5,477
0,15	5,25	6,118	6,117	6,086	6,110
0,2	6,37	6,692	6,668	6,672	6,685
0,25	7,07	7,437	7,519	7,214	7,536

Πίνακας 7.1

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 1]$. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

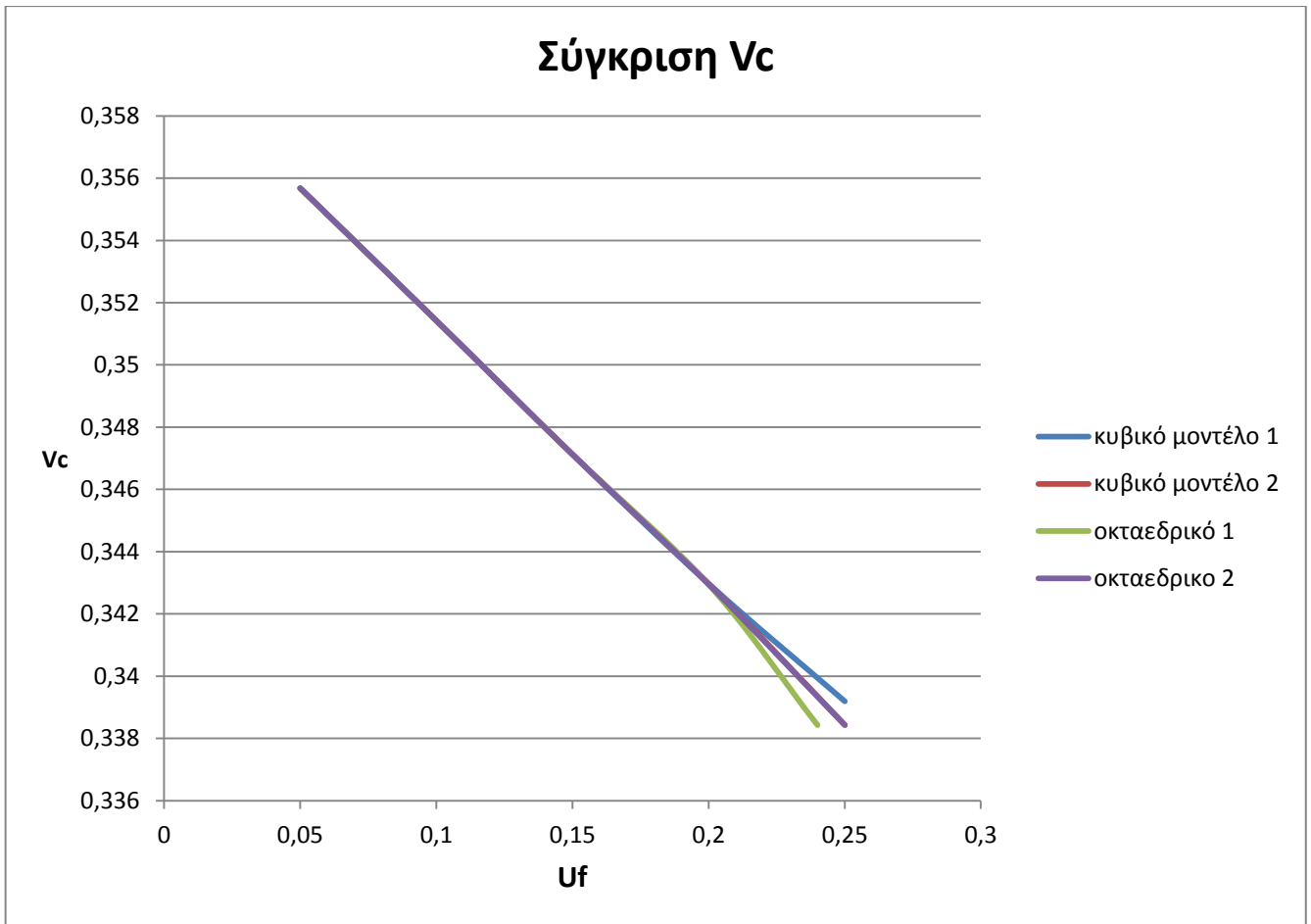
Για τον συντελεστή προσαρμογής των κυβικών και οκταεδρικών μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελεστής Προσαρμογής
$\Gamma_{\text{κυβικού 1}}$	0,9826%
$\Gamma_{\text{κυβικού 2}}$	0,9823%
$\Gamma_{\text{οκταεδρικού 1}}$	0,986%
$\Gamma_{\text{οκταεδρικού 2}}$	0,982%

Πίνακας 7.2

Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται το ίδιο καλά και από τα τέσσερα μοντέλα.

-Υπολογισμός λόγου Poisson των μοντέλων

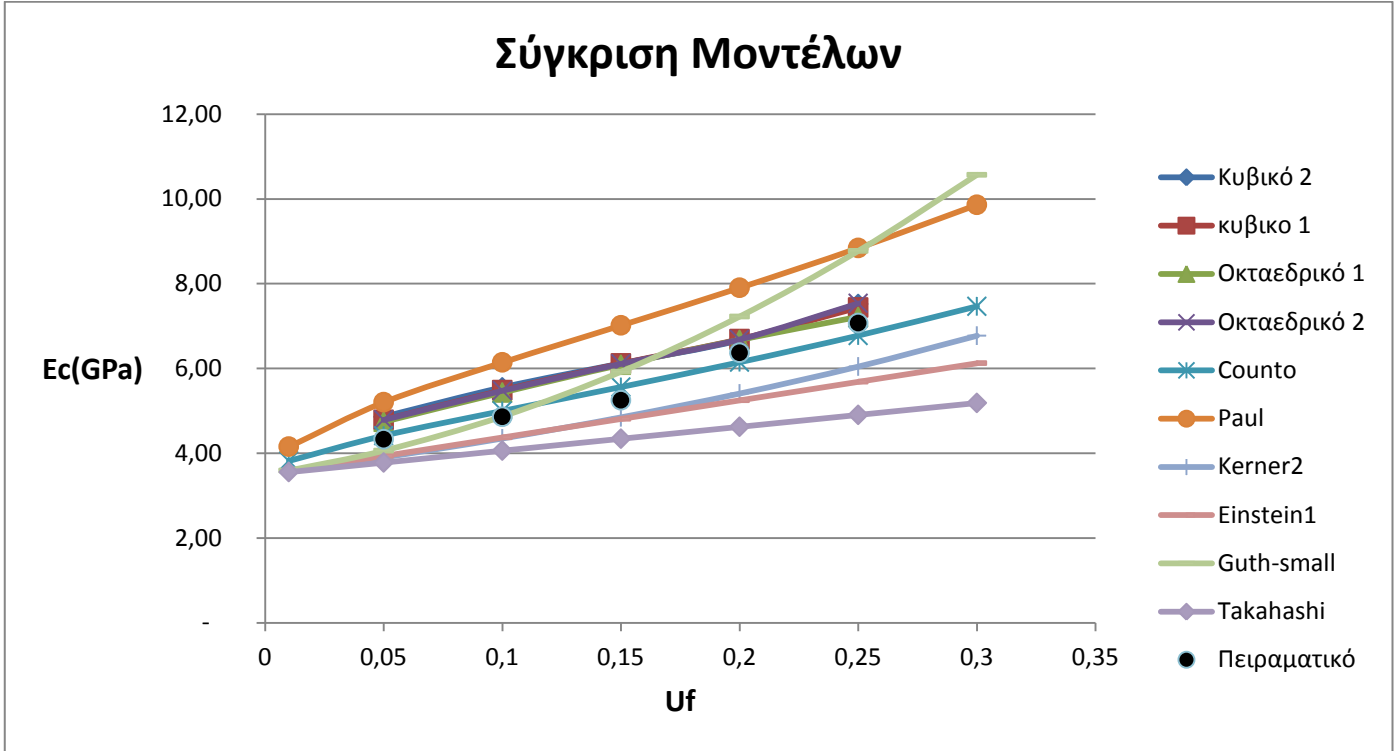


Διάγραμμα 7.2

U_f	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Οκταεδρικό 1	Οκταεδρικό 2
	V_c	V_c	V_c	V_c
0,05	0,355675	0,355675	0,355675	0,355675
0,1	0,35142	0,351421	0,351972	0,35142
0,15	0,347121	0,347122	0,347927	0,347121
0,2	0,342971	0,342973	0,344018	0,342944
0,25	0,339194	0,338434	0,341868	0,338423

Πίνακας 7.3

Για την τιμή του ν_c παρατηρούμε ότι και τα διαγράμματα συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί το εύρος μεταβολής του ν_c , είναι πολύ μικρό, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα μοντέλα.



Διάγραμμα 7.3

	Counto	Paul	Kerner2	Einstein	Guth-small	Takahashi
U_f	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,01	3,82	4,16	3,58	3,59	3,59	3,56
0,05	4,41	5,20	3,90	3,94	4,06	3,78
0,1	5,00	6,14	4,35	4,38	4,87	4,06
0,15	5,56	7,02	4,85	4,81	5,92	4,34
0,2	6,15	7,90	5,41	5,25	7,22	4,62
0,25	6,78	8,84	6,05	5,69	8,77	4,91
0,3	7,46	9,86	6,77	6,13	10,57	5,19

Πίνακας 7.4

Στο διάγραμμα 7.3, παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού E_c , συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f . Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα παρόντα κυβικά και οκταεδρικά μοντέλα 1 και 2, τα πειραματικά αποτελέσματα και οι τιμές από κάποια θεωρητικά μοντέλα γνωστών ερευνητών. Παρατηρούμε ότι τα μοντέλα των Paul και Takahashi

παρουσιάζουν απόκλιση από τις πειραματικές τιμές. Τα μοντέλα Counto, Guth-Smallwood και Kerner 2, είναι σε σύγκλιση με τα πειραματικά με αυτό του Counto όμως να προσεγγίζει καλύτερα από όλα τα υπόλοιπα τα πειραματικά δεδομένα. Επίσης, παρατηρούμε ότι τα κυβικά και οκταεδρικά μοντέλα 1 και 2 που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία, δίνουν τιμές παραπλήσιες και με πολύ καλή σύγκλιση στα πειραματικά δεδομένα. Μάλιστα οι τιμές που δίνουν είναι πολύ κοντά σε αυτές του μοντέλου Counto και με την αμέσως επόμενη καλύτερη σύγκλιση από το μοντέλο αυτό που θεωρείται και από τα καλύτερα μοντέλα για το σύνθετο υλικό που εξετάζουμε. Συμπερασματικά, τα μοντέλα μας αποτελούν μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του σύνθετου υλικού μας, δηλαδή ενός σύνθετου υλικού που έχει ως έγκλεισμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα εποξειδική ρητίνη.

Αυτό επιβεβαιώνεται και μαθηματικά, εάν υπολογίσουμε την τιμή του r για κάθε ερευνητή, οπότε προκύπτει:

Ερευνητής	r (%)
COUNTO	99,74
ΚΥΒΙΚΟ ΕΝΝΙΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	0,9826
ΚΥΒΙΚΟ ΕΝΝΙΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	0,9823
ΟΚΤΑΕΔΡΙΚΟ ΕΝΝΙΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	0,986
ΟΚΤΑΕΔΡΙΚΟ ΕΝΝΙΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	0,982
GUTH-SMALLWOOD	97,41
KERNER 2	97,07
EINSTEIN	95,69
PAUL	92,39
TAKAHASHI	85,88

Πίνακας 7.5

Η απόκλιση των θεωρητικών μας προβλέψεων για το E_c από τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.

2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φουσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρα, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Τα θεωρητικά μοντέλα προβλέπουν τέλεια γεωμετρικά σχήματα (σφαιρικοί κόκκοι) ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία.

8 . Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας

8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός

Εδώ θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το θεωρητικό μας μοντέλο μέσω κάποιων παραδοχών ώστε να έχουμε μια πλέον συμπαγή έκφραση.

Θα θεωρήσουμε ένα εντεκαφασικό μοντέλο το οποίο θα αποτελείται από έντεκα φάσεις, αντί για εννιά οι οποίες ήταν οι φάσεις στα μοντέλα που αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, για λόγους απλούστευσης.

Στο προσεγγιστικό μοντέλο που όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το σύνθετο υλικό αποτελείται από έντεκα φάσεις οι οποίες απεικονίζουν τα εγκλείσματα, τη μήτρα και την ενδιάμεση φάση.

Η θεωρητική ανάλυση βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Τα εγκλείσματα και η μήτρα είναι ελαστικά, ισότροπα και ομοιογενή υλικά, ενώ η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής και έχει μεταβλητές ιδιότητες κατά την ακτινική διεύθυνση.

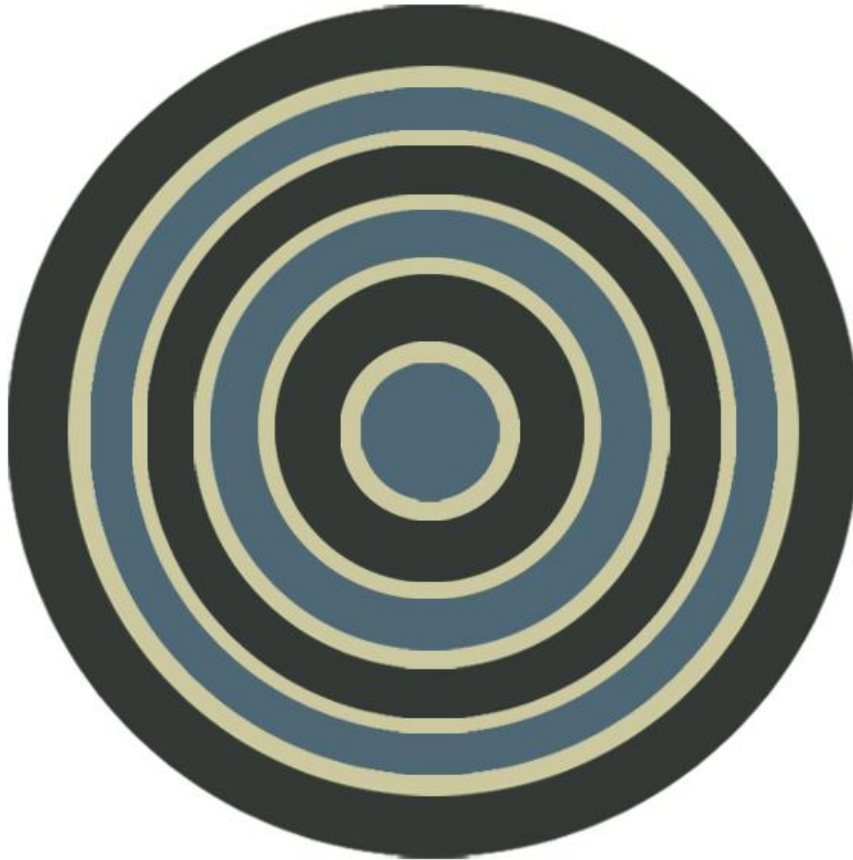
- Τα εγκλείσματα έχουν σχήμα σφαιρικό.

- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να δύναται να θεωρηθεί ως μακροσκοπικά ομοιογενές και ισότροπο.

- Οι εφαρμοζόμενες καταπονήσεις στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να διατηρείται η γραμμικότητα στις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

8.2 Υπολογισμός ακτίνων του ισοδύναμου εντεκαφασικού μοντέλου

Το εντεκαφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από τρεις περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (μπλε περιοχές 1,5 και 9) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (γκρι περιοχές 3,7 και 11). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (άσπρες περιοχές 2,4,6,8 και 10).



Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί $E_2, E_4, E_6, E_8, E_{10}$ και $\nu_2, \nu_4, \nu_6, \nu_8, \nu_{10}$ χρειάζεται αρχικά να προσδιοριστούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson ν_c .

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι :

$$E_1 = E_5 = E_9 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_3 = E_7 = E_{11} = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

Αν με U_f συμβολίσουμε την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος με U_i την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και U_m την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα της μήτρας τότε θα ισχύει,

$$U_f = U_1 + U_5 + U_9$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_6 + U_8 + U_{10}$$

Και

$$U_m = U_3 + U_7 + U_{11}$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,3}}{U_{m,3}} = \frac{U_{i,4}}{U_{m,4}} = \frac{U_{i,5}}{U_{m,5}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = K$$

$$U_2 = K \cdot U_3 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_3^3 - r_2^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} \Rightarrow (r_2^3 - r_1^3) = k(r_3^3 - r_2^3) \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{kr_3^3 + r_1^3}{k+1}}$$

$$U_4 = K \cdot U_3 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_3^3 - r_2^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} \Rightarrow (r_4^3 - r_3^3) = k(r_3^3 - r_2^3) \Rightarrow r_3 = \sqrt[3]{\frac{(k+1)r_4^3 - kr_1^3}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$U_6 = K \cdot U_7 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_6^3 - r_5^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_7^3 - r_6^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} \Rightarrow (r_6^3 - r_5^3) = k(r_7^3 - r_6^3) \Rightarrow$$

$$r_6 = \sqrt[3]{\left(r_5^3 + \frac{kr_8^3}{k+1}\right) \frac{k+1}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$U_8 = K \cdot U_7 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_8^3 - r_7^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_7^3 - r_6^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} \Rightarrow (r_8^3 - r_7^3) = k(r_7^3 - r_6^3) \Rightarrow$$

$$r_7 = \sqrt[3]{\frac{kr_6^3 + r_8^3}{k+1}}$$

$$U_{10} = K \cdot U_{11} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_{10}^3 - r_9^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} = K \frac{\frac{4}{3}\pi(r_{11}^3 - r_{10}^3)}{\frac{4}{3}\pi r_{11}^3} \Rightarrow (r_{10}^3 - r_9^3) = k(r_{11}^3 - r_{10}^3) \Rightarrow$$

$$r_{10} = \sqrt[3]{\frac{Kr_{11}^3 + r_9^3}{K+1}}$$

$$U_2 + U_4 + U_6 + U_8 = U_i$$

Για τις κατά όγκο περιεκτικότητες των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_1^3}{R_{11}^3}$$

$$U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_{11}^3}$$

$$U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_3^3 - R_2^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_3^3 - R_2^3}{R_{11}^3}$$

$$U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_4^3 - R_3^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_4^3 - R_3^3}{R_{11}^3}$$

$$U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_5^3 - R_4^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_5^3 - R_4^3}{R_{11}^3}$$

$$U_6 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_6^3 - R_5^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_6^3 - R_5^3}{R_{11}^3}$$

$$U_7 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_7^3 - R_6^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_7^3 - R_6^3}{R_{11}^3}$$

$$U_8 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_8^3 - R_7^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_8^3 - R_7^3}{R_{11}^3}$$

$$U_9 = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_9^3 - R_8^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_9^3 - R_8^3}{R_{11}^3}$$

$$U_{10} = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_{10}^3 - R_9^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_{10}^3 - R_9^3}{R_{11}^3}$$

$$U_{11} = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3 - R_{10}^3)}{\frac{4}{3}\pi(R_{11}^3)} = \frac{R_{11}^3 - R_{10}^3}{R_{11}^3}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τις σχέσεις που υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο τέσσερα δίνουν τις σχέσεις όλων των ακτίνων για τις φάσεις του απλοποιημένου μοντέλου.

Τελικά έχουμε τις εξής σχέσεις:

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{kc^3 + r_f^3}{k+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{(k+1)d^3 - kr_f^3}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$d = \sqrt[3]{w_1^3 - 3r_f^3}$$

$$f = \sqrt[3]{w_1^3 + 3r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\left(f^3 + \frac{kn^3}{k+1}\right) \frac{k+1}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{n^3 + kh^3}{k+1}}$$

$$n = \sqrt[3]{w_2^3 - 4r_f^3}$$

$$q = \sqrt[3]{w_2^3 + 4r_f^3}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{kt^3 + q^3}{k+1}}$$

$$t = r_f \sqrt[3]{\frac{15}{U_f}}$$

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{kc^3 + r_f^3}{k+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{(k+1)d^3 - kr_f^3}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$d = \sqrt[3]{w_1^3 - 6r_f^3}$$

$$f = \sqrt[3]{w_1^3 + 6r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\left(f^3 + \frac{kn^3}{k+1}\right) \frac{k+1}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{n^3 + kh^3}{k+1}}$$

$$n = \sqrt[3]{w_2^3 - 4r_f^3}$$

$$q = \sqrt[3]{w_2^3 + 4r_f^3}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{kt^3 + q^3}{k+1}}$$

$$t = r_f \sqrt[3]{\frac{21}{U_f}}$$

Προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 1

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{kc^3 + r_f^3}{k+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{(k+1)d^3 - kr_f^3}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$d = \sqrt[3]{w_1^3 - 4r_f^3}$$

$$f = \sqrt[3]{w_1^3 + 4r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\left(f^3 + \frac{kn^3}{k+1}\right) \frac{k+1}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{n^3 + kh^3}{k+1}}$$

$$n = \sqrt[3]{w_2^3 - 3r_f^3}$$

$$q = \sqrt[3]{w_2^3 + 3r_f^3}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{kt^3 + q^3}{k+1}}$$

$$t = r_f \sqrt[3]{\frac{15}{U_f}}$$

Προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 2

$$a = r_f$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{kc^3 + r_f^3}{k+1}}$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{(k+1)d^3 - kr_f^3}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$d = \sqrt[3]{w_1^3 - 6r_f^3}$$

$$f = \sqrt[3]{w_1^3 + 6r_f^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\left(f^3 + \frac{kn^3}{k+1}\right) \frac{k+1}{(k+1)^2 - k^2}}$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{n^3 + kh^3}{k+1}}$$

$$n = \sqrt[3]{w_2^3 - 3r_f^3}$$

$$q = \sqrt[3]{w_2^3 + 3r_f^3}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{kt^3 + q^3}{k+1}}$$

$$t = r_f \sqrt[3]{\frac{19}{U_f}}$$

Από τον πίνακα 3.3, σε κάθε σύσταση U_f αντιστοιχεί μια σύσταση U_i για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

$U_f(\%)$	$U_i(\%)$
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,02
0,25	0,05

Πίνακας 8.1

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών (U_f , U_i) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm :

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1

U_f	a	b	c	d	f	h	m	n	q	s	t
0.05	75	75,5303	191,3633	191,4558	212,1556	212,477	345,6924	345,8136	354,976	355,272	502,0747
0.1	75	75,63712	141,9709	142,2119	175,5209	176,2088	270,3964	270,6871	285,2441	285,9719	398,497
0.15	75	75,9352	113,6169	114,3579	159,0937	160,7883	232,2643	233,0651	252,1675	254,247	348,1192
0.2	75	75,52001	91,86714	93,03437	149,4274	151,4877	207,4922	208,5699	231,7577	234,6979	316,2872
0.25	75	74,93673	74,02655	77,20021	144,0863	148,2169	191,4291	193,8073	220,0458	226,9436	297,6377

Πίνακας 8.2

U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}
0.05	0,003333	7,12E-05	0,051965	8,03E-05	0,02	0,000343	0,250617	0,000343	0,026667	0,000885	0,645694
0.1	0,006667	0,000171	0,038381	0,000231	0,04	0,001009	0,225953	0,001009	0,053333	0,002814	0,630432
0.15	0,01	0,000379	0,024386	0,000685	0,06	0,003083	0,198472	0,003083	0,08	0,009481	0,610432
0.2	0,013333	0,000279	0,010891	0,000946	0,08	0,004422	0,17246	0,004422	0,106667	0,015164	0,591415
0.25	0,016	-4E-05	-0,00057	0,002065	0,096	0,010039	0,142559	0,010039	0,128	0,039205	0,556708

Πίνακας 8.3

Προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2

U_f	a	b	c	d	f	h	m	n	q	s	t
0.05	75	77,34305	311,5077	311,6517	328,1383	328,2366	388,2852	388,3554	395,6758	396,0113	561,6654
0.1	75	78,37123	239,8958	240,2615	266,5202	266,7175	305,0982	305,2488	316,8742	317,7097	445,7941
0.15	75	81,52778	202,2209	203,2987	237,9037	238,3406	263,6401	263,996	279,2408	281,6577	389,4371
0.2	75	81,89929	176,7358	178,3071	220,5735	221,0148	237,0043	237,3866	255,8732	259,3322	353,827
0.25	75	86,34766	155,3722	159,1221	208,7105	209,3175	217,4696	218,0289	239,5091	247,6358	328,4639

Πίνακας 8.4

U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}
0.05	0,002381	0,00023	0,167987	0,000237	0,028571	0,000179	0,130799	0,000179	0,019048	0,00089	0,649499
0.1	0,004762	0,000671	0,150402	0,000714	0,057143	0,000475	0,106398	0,000475	0,038095	0,002848	0,638017
0.15	0,007143	0,002032	0,130837	0,002251	0,085714	0,001258	0,081022	0,001258	0,057143	0,009656	0,621685
0.2	0,009524	0,002877	0,112222	0,003354	0,114286	0,001457	0,056816	0,001457	0,07619	0,015545	0,606272
0.25	0,011905	0,006262	0,087675	0,00785	0,142857	0,002245	0,03143	0,002245	0,095238	0,04082	0,571474

Πίνακας 8.5

Προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 1

U_f	a	b	c	d	f	h	m	n	q	s	t
0.05	75	75,59887	198,878	198,9736	224,0866	224,4233	364,392	364,5195	370,762	371,0127	502,0747
0.1	75	75,6935	145,4866	145,7312	186,3378	187,062	286,4698	286,7771	296,69	297,3141	398,497
0.15	75	75,93979	113,751	114,4923	169,5701	171,3715	247,4096	248,2619	261,2593	263,0658	348,1192
0.2	75	75,37503	87,77618	88,94823	159,7749	161,9989	222,3098	223,4686	239,2271	241,8127	316,2872
0.25	75	75,03708	75,57434	78,64133	156,8844	161,7638	212,9621	215,6591	232,4582	238,6963	306,3967

Πίνακας 8.6

U_f	U₁	U₂	U₃	U₄	U₅	U₆	U₇	U₈	U₉	U₁₀	U₁₁
0.05	0,003333	8,05E-05	0,058738	8,96E-05	0,026667	0,000401	0,292988	0,000401	0,02	0,000817	0,596484
0.1	0,006667	0,000187	0,041809	0,000246	0,053333	0,001197	0,268064	0,001197	0,04	0,00261	0,584691
0.15	0,01	0,000381	0,024508	0,000687	0,08	0,003723	0,239679	0,003723	0,06	0,008829	0,568472
0.2	0,013333	0,000201	0,00784	0,000868	0,106667	0,005458	0,212874	0,005458	0,08	0,014183	0,553118
0.25	0,014667	2,18E-05	0,000318	0,001902	0,117333	0,012919	0,188619	0,012919	0,088	0,036109	0,527192

Πίνακας 8.7

Προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 2

U_f	a	b	c	d	f	h	m	n	q	s	t
0.05	75	76,53172	270,0732	270,199	291,577	291,7746	395,0185	395,1262	400,4582	400,7314	543,2367
0.1	75	77,08432	204,5438	204,8613	239,048	239,4745	311,2004	311,4523	319,9183	320,6031	431,1673
0.15	75	78,7814	168,7806	169,7114	215,0875	216,1426	269,4919	270,1656	281,2633	283,2589	376,6593
0.2	75	78,57105	143,4019	144,755	200,7943	202,0722	242,8224	243,6986	257,1497	260,0252	342,2177
0.25	75	80,0006	121,0538	124,296	191,1364	193,5813	222,7606	224,569	240,1882	247,0057	317,6868

Πίνακας 8.8

U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}
0.05	0,002632	0,000165	0,120083	0,000172	0,031579	0,000315	0,229546	0,000315	0,015789	0,00082	0,598586
0.1	0,005263	0,000451	0,101049	0,000498	0,063158	0,000914	0,204663	0,000914	0,031579	0,002629	0,588883
0.15	0,007895	0,001255	0,080825	0,001497	0,094737	0,002754	0,177299	0,002754	0,047368	0,008926	0,574691
0.2	0,010526	0,001576	0,061477	0,002103	0,126316	0,003881	0,15136	0,003881	0,063158	0,014393	0,561329
0.25	0,013158	0,002811	0,039358	0,004566	0,157895	0,008465	0,118508	0,008465	0,078947	0,037855	0,529972

Πίνακας 8.9

8.3 Προσεγγιστικός Υπολογισμός Μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού

Για την εύρεση των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού, θα εφαρμοστεί, όπως και πριν, η θεωρία ελαστικότητας στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου των πέντε ομόκεντρων σφαιρών, το οποίο θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζεται μια εξωτερική πίεση P_0 . Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του εφαρμοζομένου εξωτερικού φορτίου, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις μόνο της ακτίνας r , μη εξαρτώμενες από τις γωνίες θ και φ .

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = A/r + Br^2$$

$$\Phi_2 = C/r + Dr^2$$

$$\Phi_3 = F/r + Hr^2$$

$$\Phi_4 = J/r + Lr^2$$

$$\Phi_5 = M/r + Nr^2$$

$$\Phi_6 = O/r + Qr^2$$

$$\Phi_7 = R/r + Sr^2$$

$$\Phi_8 = T/r + Xr^2$$

$$\Phi_9 = Y/r + Zr^2$$

$$\Phi_{10} = \Theta/r + \Phi r^2$$

$$\Phi_{11} = \Xi/r + \Psi r^2$$

Στην θέση $r=0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να παίρνει τιμή, οπότε για $r=0$ πρέπει $A=0$.

Οι μετατοπίσεις δίνονται από την σχέση :

$$\bar{u} = \frac{1}{2G} \text{grad}\Phi$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις ϕ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\phi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι :

$$u_{r1} = \frac{Br}{G_1} = \frac{Br2(1+\nu_1)}{E_1}$$

$$u_{r2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2}$$

$$u_{r3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3} = \left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr \right) \frac{(1+\nu_3)}{E_3}$$

$$u_{r4} = \frac{-\frac{J}{r^2} + 2Lr}{2G_4} = \left(-\frac{J}{r^2} + 2Lr \right) \frac{(1+\nu_4)}{E_4}$$

$$u_{r5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5} = \left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr \right) \frac{(1+\nu_5)}{E_5}$$

$$u_{r6} = \frac{-\frac{O}{r^2} + 2Qr}{2G_6} = \left(-\frac{O}{r^2} + 2Qr \right) \frac{(1+\nu_6)}{E_6}$$

$$u_{r7} = \frac{-\frac{R}{r^2} + 2Sr}{2G_7} = \left(-\frac{R}{r^2} + 2Sr \right) \frac{(1+\nu_7)}{E_7}$$

$$u_{r8} = \frac{-\frac{T}{r^2} + 2Xr}{2G_8} = \left(-\frac{T}{r^2} + 2Xr \right) \frac{(1+\nu_8)}{E_8}$$

$$u_{r9} = \frac{-\frac{Y}{r^2} + 2Zr}{2G_9} = \left(-\frac{Y}{r^2} + 2Zr \right) \frac{(1+\nu_9)}{E_9}$$

$$u_{r10} = \frac{-\frac{\Theta}{r^2} + 2\Phi r}{2G_{10}} = \left(-\frac{\Theta}{r^2} + 2\Phi r \right) \frac{(1+\nu_{10})}{E_{10}}$$

$$u_{r11} = \frac{-\frac{\Xi}{r^2} + 2\Psi r}{2G_{11}} = \left(-\frac{\Xi}{r^2} + 2\Psi r \right) \frac{(1+\nu_{11})}{E_{11}}$$

Οι παραμορφώσεις είναι :

$$\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = \varepsilon_{\theta 1} = \varepsilon_{\varphi 1}$$

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \varepsilon_{\varphi 2} = \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \left(\frac{1+\nu_2}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon_{r3} = \left(\frac{2F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \varepsilon_{\varphi 3} = \left(-\frac{F}{r^3} + 2H \right) \left(\frac{1+\nu_3}{E_3} \right)$$

$$\varepsilon_{r4} = \left(\frac{2J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \varepsilon_{\varphi 4} = \left(-\frac{J}{r^3} + 2L \right) \left(\frac{1+\nu_4}{E_4} \right)$$

$$\varepsilon_{r5} = \left(\frac{2M}{r^3} + 2N\right)\left(\frac{1+v_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\phi5} = \left(-\frac{M}{r^3} + 2N\right)\left(\frac{1+v_5}{E_5}\right)$$

$$\varepsilon_{r6} = \left(\frac{2O}{r^3} + 2Q\right)\left(\frac{1+v_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\phi6} = \left(-\frac{O}{r^3} + 2Q\right)\left(\frac{1+v_6}{E_6}\right)$$

$$\varepsilon_{r7} = \left(\frac{2R}{r^3} + 2S\right)\left(\frac{1+v_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta7} = \varepsilon_{\phi7} = \left(-\frac{R}{r^3} + 2S\right)\left(\frac{1+v_7}{E_7}\right)$$

$$\varepsilon_{r8} = \left(\frac{2T}{r^3} + 2X\right)\left(\frac{1+v_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta8} = \varepsilon_{\phi8} = \left(-\frac{T}{r^3} + 2X\right)\left(\frac{1+v_8}{E_8}\right)$$

$$\varepsilon_{r9} = \left(\frac{2Y}{r^3} + 2Z\right)\left(\frac{1+v_9}{E_9}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta9} = \varepsilon_{\phi9} = \left(-\frac{Y}{r^3} + 2Z\right)\left(\frac{1+v_9}{E_9}\right)$$

$$\varepsilon_{r10} = \left(\frac{2\Theta}{r^3} + 2\Phi\right)\left(\frac{1+v_{10}}{E_{10}}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta10} = \varepsilon_{\phi10} = \left(-\frac{\Theta}{r^3} + 2\Phi\right)\left(\frac{1+v_{10}}{E_{10}}\right)$$

$$\varepsilon_{r11} = \left(\frac{2\Xi}{r^3} + 2\Psi\right)\left(\frac{1+v_{11}}{E_{11}}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta11} = \varepsilon_{\phi11} = \left(-\frac{\Xi}{r^3} + 2\Psi\right)\left(\frac{1+v_{11}}{E_{11}}\right)$$

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \theta = \frac{E_1}{1+\nu_1} \varepsilon_{r1} + \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} (\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_\theta) \\ &= \frac{E_1}{1+\nu_1} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} + 3 \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} 2B \frac{1+\nu_1}{E_1} = 2B + \frac{6B\nu_1}{1-2\nu_1} \Rightarrow \sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \end{aligned}$$

$$\sigma_{r1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{r2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\phi 2} + \varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} \left[\frac{2C}{r^3} + 2D - \frac{2C}{r^3} + 4D \right] \Rightarrow$$

$$\frac{2C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D = \sigma_{r2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} (\varepsilon_{r2} + 2\varepsilon_{\theta 2}) \Rightarrow$$

$$\frac{E_2}{1+\nu_2} \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} \left[\left(\frac{2C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} + 2 \left(-\frac{C}{r^3} + 2D \right) \frac{1+\nu_2}{E_2} \right] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} [2D + 4D] \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1-2\nu_2)}{1-2\nu_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2} 6D \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta 2} = -\frac{C}{r^3} + 2D \frac{(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\phi 2}$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{-C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \sigma_{\phi 2}$$

Αντίστοιχα έχουμε και τα υπόλοιπα:

$$\sigma_{r3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3}$$

$$\sigma_{\theta3} = \frac{-F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \sigma_{\varphi3}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4}$$

$$\sigma_{\theta4} = \frac{-J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \sigma_{\varphi4}$$

$$\sigma_{r5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5}$$

$$\sigma_{\theta5} = \frac{-M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \sigma_{\varphi5}$$

$$\sigma_{r6} = \frac{2O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6}$$

$$\sigma_{\theta6} = \frac{-O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \sigma_{\varphi6}$$

$$\sigma_{r7} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7}$$

$$\sigma_{\theta7} = \frac{-R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \sigma_{\varphi7}$$

$$\sigma_{\theta8} = \frac{-T}{r^3} + \frac{2X(1+\nu_8)}{1-2\nu_8} = \sigma_{\varphi8}$$

$$\sigma_{r8} = \frac{2T}{r^3} + \frac{2X(1+\nu_8)}{1-2\nu_8}$$

$$\sigma_{r9} = \frac{2Y}{r^3} + \frac{2Z(1+\nu_9)}{1-2\nu_9}$$

$$\sigma_{\theta9} = \frac{-Y}{r^3} + \frac{2Z(1+\nu_9)}{1-2\nu_9} = \sigma_{\varphi9}$$

$$\sigma_{r10} = \frac{2\Theta}{r^3} + \frac{2\Phi(1+\nu_{10})}{1-2\nu_{10}}$$

$$\sigma_{\theta10} = \frac{-\Theta}{r^3} + \frac{2\Phi(1+\nu_{10})}{1-2\nu_{10}} = \sigma_{\varphi10}$$

$$\sigma_{r11} = \frac{2\Xi}{r^3} + \frac{2\Psi(1+\nu_{11})}{1-2\nu_{11}}$$

$$\sigma_{\theta11} = \frac{-\Xi}{r^3} + \frac{2\Psi(1+\nu_{11})}{1-2\nu_{11}} = \sigma_{\varphi11}$$

Στη μελέτη αυτή, λαμβάνουμε υπ' όψιν την παραβολική μεταβολή των $Ei(r)$ και $vi(r)$ (κεφάλαιο 5), η οποία θεωρείται η πλέον αντιπροσωπευτική.

Οι οριακές συνθήκες τις οποίες λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

- Στο $r=a \Rightarrow Ei(r)=\eta E_f$ και $vi(r)=\eta v_f$
- Στο $r=b \Rightarrow Ei(r)=E_m$ και $vi(r)=v_m$
- Στο $r=c \Rightarrow Ei(r)=E_m$ και $vi(r)=v_m$
- Στο $r=d \Rightarrow Ei(r)=\eta E_f$ και $vi(r)=\eta v_f$
- Στο $r=f \Rightarrow Ei(r)=\eta E_f$ και $vi(r)=\eta v_f$
- Στο $r=h \Rightarrow Ei(r)=E_m$ και $vi(r)=v_m$
- Στο $r=m \Rightarrow Ei(r)=E_m$ και $vi(r)=v_m$
- Στο $r=n \Rightarrow Ei(r)=\eta E_f$ και $vi(r)=\eta v_f$
- Στο $r=q \Rightarrow Ei(r)=\eta E_f$ και $vi(r)=\eta v_f$
- Στο $r=s \Rightarrow Ei(r)=E_m$ και $vi(r)=v_m$

Ακόμη όπως είδαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια η τελική τιμή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού εξαρτάται σε πολύ μικρό βαθμό από το n και έτσι για λόγους απλούστευσης θεωρούμε το $n=1$.

Οπότε προκύπτουν οι εξής συνοριακές συνθήκες τάσεων:

Για $r=a$: $\sigma_{r,1}=\sigma_{r,2}$ και $u_{r,1}=u_{r,2}$ δηλ.

$$\frac{2B(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} \Rightarrow \frac{2B(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_f)}{1-2\nu_f}$$

$$\frac{Br2(1+\nu_1)}{E_1} = \left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2} \Rightarrow \frac{Ba2(1+\nu_f)}{E_f} = \left(-\frac{C}{a^2} + 2Da \right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f}$$

Για $r=b$: $\sigma_{r,2}=\sigma_{r,3}$ και $u_{r,2}=u_{r,3}$

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2D(1+\nu_2)}{1-2\nu_2} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} \Rightarrow$$

$$\frac{2C}{b^3} + \frac{2D(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2F}{b^3} + \frac{2H(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

και

$$\left(-\frac{C}{r^2} + 2Dr \right) \frac{(1+\nu_2)}{E_2} = \left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr \right) \frac{(1+\nu_3)}{E_3} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{C}{b^2} + 2Db \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{F}{b^2} + 2Hb \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

Για $r=c$: $\sigma_{r,3}=\sigma_{r,4}$ και $u_{r,3}=u_{r,4}$

$$\frac{2F}{r^3} + \frac{2H(1+\nu_3)}{1-2\nu_3} = \frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} \Rightarrow$$

$$\frac{2F}{c^3} + \frac{2H(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2J}{c^3} + \frac{2L(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

και

$$\left(-\frac{F}{r^2} + 2Hr \right) \frac{(1+\nu_3)}{E_3} = \left(-\frac{J}{r^2} + 2Lr \right) \frac{(1+\nu_4)}{E_4} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{F}{c^2} + 2Hc \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{J}{c^2} + 2Lc \right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

Για $r=d$: $\sigma_{r,4}=\sigma_{r,5}$ και $u_{r,4}=u_{r,5}$

$$\frac{2J}{r^3} + \frac{2L(1+\nu_4)}{1-2\nu_4} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} \Rightarrow$$

$$\frac{2J}{d^3} + \frac{2L(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} = \frac{2M}{d^3} + \frac{2N(1+\nu_f)}{1-2\nu_f}$$

και

$$\left(-\frac{J}{r^2} + 2Lr\right) \frac{(1+\nu_4)}{E_4} = \left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr\right) \frac{(1+\nu_5)}{E_5} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{J}{d^2} + 2Lb\right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f} = \left(-\frac{M}{d^2} + 2Nd\right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f}$$

Για $r=f$: $\sigma_{r,5}=\sigma_{r,6}$ και $u_{r,5}=u_{r,6}$

$$\frac{2M}{r^3} + \frac{2N(1+\nu_5)}{1-2\nu_5} = \frac{2O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} \Rightarrow$$

$$\frac{2M}{f^3} + \frac{2N(1+\nu_f)}{1-2\nu_f} = \frac{2O}{f^3} + \frac{2Q(1+\nu_f)}{1-2\nu_f}$$

και

$$\left(-\frac{M}{r^2} + 2Nr\right) \frac{(1+\nu_5)}{E_5} = \left(-\frac{O}{r^2} + 2Qr\right) \frac{(1+\nu_6)}{E_6} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{M}{f^2} + 2Nf\right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f} = \left(-\frac{O}{f^2} + 2Qf\right) \frac{(1+\nu_f)}{E_f}$$

Για $r=h$: $\sigma_{r,6}=\sigma_{r,7}$ και $u_{r,6}=u_{r,7}$

$$\frac{2O}{r^3} + \frac{2Q(1+\nu_6)}{1-2\nu_6} = \frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} \Rightarrow$$

$$\frac{2O}{h^3} + \frac{2Q(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2R}{h^3} + \frac{2S(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

και

$$\left(-\frac{O}{r^2} + 2Qr\right) \frac{(1+\nu_6)}{E_6} = \left(-\frac{R}{r^2} + 2Sr\right) \frac{(1+\nu_7)}{E_7} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{O}{h^2} + 2Qh\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{R}{h^2} + 2Sh\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

Για $r=m$: $\sigma_{r,7}=\sigma_{r,8}$ και $u_{r,7}=u_{r,8}$

$$\frac{2R}{r^3} + \frac{2S(1+\nu_7)}{1-2\nu_7} = \frac{2T}{r^3} + \frac{2X(1+\nu_8)}{1-2\nu_8} \Rightarrow$$

$$\frac{2R}{m^3} + \frac{2S(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = \frac{2T}{m^3} + \frac{2X(1+\nu_m)}{1-2\nu_m}$$

και

$$\left(-\frac{R}{r^2} + 2Sr\right) \frac{(1+v_7)}{E_7} = \left(-\frac{T}{r^2} + 2Xr\right) \frac{(1+v_8)}{E_8} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{R}{m^2} + 2Sm\right) \frac{(1+v_m)}{E_m} = \left(-\frac{T}{m^2} + 2Xm\right) \frac{(1+v_m)}{E_m}$$

Για $r=n$: $\sigma_{r,8}=\sigma_{r,9}$ και $u_{r,8}=u_{r,9}$

$$\frac{2T}{r^3} + \frac{2X(1+v_8)}{1-2v_8} = \frac{2Y}{r^3} + \frac{2Z(1+v_9)}{1-2v_9} \Rightarrow$$

$$\frac{2T}{n^3} + \frac{2X(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2Y}{n^3} + \frac{2Z(1+v_f)}{1-2v_f}$$

και

$$\left(-\frac{T}{r^2} + 2Xr\right) \frac{(1+v_8)}{E_8} = \left(-\frac{Y}{r^2} + 2Zr\right) \frac{(1+v_9)}{E_9} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{T}{n^2} + 2Xh\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{Y}{n^2} + 2Zn\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

Για $r=q$: $\sigma_{r,9}=\sigma_{r,10}$ και $u_{r,9}=u_{r,10}$

$$\frac{2Y}{r^3} + \frac{2Z(1+v_9)}{1-2v_9} = \frac{2\Theta}{r^3} + \frac{2\Phi(1+v_{10})}{1-2v_{10}} \Rightarrow$$

$$\frac{2Y}{q^3} + \frac{2Z(1+v_f)}{1-2v_f} = \frac{2\Theta}{q^3} + \frac{2\Phi(1+v_f)}{1-2v_f}$$

και

$$\left(-\frac{Y}{r^2} + 2Zr\right) \frac{(1+v_9)}{E_9} = \left(-\frac{\Theta}{r^2} + 2\Phi r\right) \frac{(1+v_{10})}{E_{10}} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{Y}{q^2} + 2Zq\right) \frac{(1+v_f)}{E_f} = \left(-\frac{\Theta}{q^2} + 2\Phi q\right) \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

Για $r=s$: $\sigma_{r,10}=\sigma_{r,11}$ και $u_{r,10}=u_{r,11}$

$$\frac{2\Theta}{r^3} + \frac{2\Phi(1+v_{10})}{1-2v_{10}} = \frac{2\Xi}{r^3} + \frac{2\Psi(1+v_{11})}{1-2v_{11}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\Theta}{s^3} + \frac{2\Phi(1+v_m)}{1-2v_m} = \frac{2\Xi}{s^3} + \frac{2\Psi(1+v_m)}{1-2v_m}$$

και

$$\left(-\frac{\Theta}{r^2} + 2\Phi r\right) \frac{(1+\nu_{10})}{E_{10}} = \left(-\frac{\Xi}{r^2} + 2\Psi r\right) \frac{(1+\nu_{11})}{E_{11}} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{\Theta}{s^2} + 2\Phi s\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m} = \left(-\frac{\Xi}{s^2} + 2\Psi s\right) \frac{(1+\nu_m)}{E_m}$$

Για r=t: $\sigma_{r11} = -P_0$

$$\frac{2\Xi}{t^3} + \frac{2\Psi(1+\nu_m)}{1-2\nu_m} = -P_0$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων προκύπτουν οι εξής λύσεις των σταθερών:

$$A, C, F, J, M, O, R, T, Y, \Theta, \Xi = 0$$

$$B, D, H, L, N, Q, S, X, Z, \Phi, \Psi = \frac{-P_0(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των τάσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \left(-P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,2} = \sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = \frac{2(1+\nu_{i,1})}{(1-2\nu_{i,1})} \left(-P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,3} = \sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = -P_0$$

$$\sigma_{r,4} = \sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = \frac{2(1+\nu_{i,2})}{(1-2\nu_{i,2})} \left(-P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,5} = \sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \left(-P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,6} = \sigma_{\theta,6} = \sigma_{\varphi,6} = \frac{2(1+\nu_{i,3})}{(1-2\nu_{i,3})} \left(-P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{2(1+\nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,7} = \sigma_{\theta,7} = \sigma_{\varphi,7} = -P_0$$

$$\sigma_{r8} = \sigma_{\theta8} = \sigma_{\varphi8} = \frac{2(1+v_{i,4})}{(1-2v_{i,4})} \left(-P_0 \frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)} \right)$$

$$\sigma_{r9} = \sigma_{\theta9} = \sigma_{\varphi9} = \frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)} \left(-P_0 \frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)} \right)$$

$$\sigma_{r10} = \sigma_{\theta10} = \sigma_{\varphi10} = \frac{2(1+v_{i,5})}{(1-2v_{i,5})} \left(-P_0 \frac{(1-2v_m)}{2(1+v_m)} \right)$$

$$\sigma_{r11} = \sigma_{\theta11} = \sigma_{\varphi11} = -P_0$$

Και στις παραμορφώσεις έχω:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{\theta1} = \varepsilon_{\varphi1} = -P_0 \frac{1-2v_m}{E_m} \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

$$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{\theta2} = \varepsilon_{\varphi2} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,1})}{E_{i,1}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r3} = \varepsilon_{\theta3} = \varepsilon_{\varphi3} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m}$$

$$\varepsilon_{r4} = \varepsilon_{\theta4} = \varepsilon_{\varphi4} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,2})}{E_{i,2}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r5} = \varepsilon_{\theta5} = \varepsilon_{\varphi5} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

$$\varepsilon_{r6} = \varepsilon_{\theta6} = \varepsilon_{\varphi6} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,3})}{E_{i,3}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r7} = \varepsilon_{\theta7} = \varepsilon_{\varphi7} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{E_m}$$

$$\varepsilon_{r8} = \varepsilon_{\theta8} = \varepsilon_{\varphi8} = -P_0 \frac{(1-2v_m)(1+v_{i,4})}{E_{i,4}(1+v_m)}$$

$$\varepsilon_{r9} = \varepsilon_{\theta9} = \varepsilon_{\varphi9} = -P_0 \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{E_f}$$

$$\varepsilon_{r10} = \varepsilon_{\theta10} = \varepsilon_{\varphi10} = -P_0 \frac{(1-2\nu_m)(1+\nu_{i,5})}{E_{i,5}(1+\nu_m)}$$

$$\varepsilon_{r11} = \varepsilon_{\theta11} = \varepsilon_{\varphi11} = -P_0 \frac{(1-2\nu_m)}{E_m}$$

Για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας E_c του κοκκώδους σύνθετου υλικού θα εφαρμοσθεί η συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο σφαιρικό εντεκαφασικό μοντέλο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{P_0^2}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_0^a (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) dV + \frac{1}{2} \int_a^b (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_b^c (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) dV + \frac{1}{2} \int_c^d (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_d^f (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) dV + \frac{1}{2} \int_f^h (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_h^m (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) dV + \frac{1}{2} \int_m^n (\sigma_{r8} \varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8} \varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8} \varepsilon_{\varphi8}) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_n^q (\sigma_{r9} \varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9} \varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9} \varepsilon_{\varphi9}) dV + \frac{1}{2} \int_q^s (\sigma_{r10} \varepsilon_{r10} + \sigma_{\theta10} \varepsilon_{\theta10} + \sigma_{\varphi10} \varepsilon_{\varphi10}) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_s^t (\sigma_{r11} \varepsilon_{r11} + \sigma_{\theta11} \varepsilon_{\theta11} + \sigma_{\varphi11} \varepsilon_{\varphi11}) dV \end{aligned}$$

Όπου

$$K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$$

Είναι το μέτρο διόγκωσης σύνθετου υλικού και :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Άρα

$$\begin{aligned}
& \int_0^t 3 \frac{P_0^2 (1-2\nu_c)}{K_c E_c} r^2 dr = \int_0^a (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr + \int_a^b (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr \\
& + \int_b^c (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr + \int_c^d (\sigma_{r4} \varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4} \varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4} \varepsilon_{\varphi4}) r^2 dr + \\
& + \int_d^f (\sigma_{r5} \varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5} \varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5} \varepsilon_{\varphi5}) r^2 dr + \int_f^h (\sigma_{r6} \varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6} \varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6} \varepsilon_{\varphi6}) r^2 dr \\
& + \int_h^m (\sigma_{r7} \varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7} \varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7} \varepsilon_{\varphi7}) r^2 dr + \int_m^n (\sigma_{r8} \varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8} \varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8} \varepsilon_{\varphi8}) r^2 dr \\
& + \int_n^q (\sigma_{r9} \varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9} \varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9} \varepsilon_{\varphi9}) r^2 dr + \int_q^s (\sigma_{r10} \varepsilon_{r10} + \sigma_{\theta10} \varepsilon_{\theta10} + \sigma_{\varphi10} \varepsilon_{\varphi10}) r^2 dr \\
& + \int_s^t (\sigma_{r11} \varepsilon_{r11} + \sigma_{\theta11} \varepsilon_{\theta11} + \sigma_{\varphi11} \varepsilon_{\varphi11}) r^2 dr
\end{aligned}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_0^t \frac{3P_0^2 (1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr = \frac{3P_0^2 (1-2\nu_c)}{E_c} \int_0^t r^2 dr = \frac{3P_0^2 (1-2\nu_c)}{E_c} \frac{t^3}{3} = \frac{P_0^2 (1-2\nu_c) t^3}{E_c}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a (\sigma_{r1} \varepsilon_{r1} + \sigma_{\theta1} \varepsilon_{\theta1} + \sigma_{\varphi1} \varepsilon_{\varphi1}) r^2 dr = \int_0^a (-P_0) \frac{(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)} \frac{(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)} \left(\frac{1-2\nu_m}{(1+\nu_m)} \frac{1+\nu_f}{E_f} (-P_0) \right) r^2 dr = \\
& = \frac{P_0^2 (1+\nu_f)^2 (1-2\nu_m)^2 a^3}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (\sigma_{r2} \varepsilon_{r2} + \sigma_{\theta2} \varepsilon_{\theta2} + \sigma_{\varphi2} \varepsilon_{\varphi2}) r^2 dr = \int_a^b 3 \frac{2(1+\nu_{i,1})}{(1-2\nu_{i,1})} \left(-P_0 \frac{1-2\nu_m}{(1+\nu_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+\nu_{i,1})(1-2\nu_m)}{E_{i,1}(1+\nu_m)} \right) r^2 dr \\
& = 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_a^b \frac{(1+\nu_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2\nu_{i,1})} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_b^c (\sigma_{r3} \varepsilon_{r3} + \sigma_{\theta3} \varepsilon_{\theta3} + \sigma_{\varphi3} \varepsilon_{\varphi3}) r^2 dr = \int_b^c 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} r^2 dr \\
& = P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} (c^3 - b^3)
\end{aligned}$$

$$\int_c^d (\sigma_{r4}\varepsilon_{r4} + \sigma_{\theta4}\varepsilon_{\theta4} + \sigma_{\varphi4}\varepsilon_{\varphi4})r^2 dr = \int_c^d 3 \frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_{i,2})(1-2v_m)}{E_{i,2}(1+v_m)} \right) r^2 dr$$

$$= 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_c^d \frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2} r^2 dr$$

$$\int_d^f (\sigma_{r5}\varepsilon_{r5} + \sigma_{\theta5}\varepsilon_{\theta5} + \sigma_{\varphi5}\varepsilon_{\varphi5})r^2 dr = \int_d^f 3(-P_0) \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{1+v_f}{E_f} \left(\frac{1-2v_m}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{(1-2v_f)} (-P_0) \right) r^2 dr =$$

$$= P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2(1+v_f)^2}{(1+v_m)^2(1-2v_f)E_f} (f^3 - d^3)$$

$$\int_f^h (\sigma_{r6}\varepsilon_{r6} + \sigma_{\theta6}\varepsilon_{\theta6} + \sigma_{\varphi6}\varepsilon_{\varphi6})r^2 dr = \int_f^h 3 \frac{2(1+v_{i,3})}{(1-2v_{i,3})} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_{i,3})(1-2v_m)}{E_{i,3}(1+v_m)} \right) r^2 dr$$

$$= 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_f^h \frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})} r^2 dr$$

$$\int_h^m (\sigma_{r7}\varepsilon_{r7} + \sigma_{\theta7}\varepsilon_{\theta7} + \sigma_{\varphi7}\varepsilon_{\varphi7})r^2 dr = \int_h^m 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} r^2 dr = P_0^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (m^3 - h^3)$$

$$\int_m^n (\sigma_{r8}\varepsilon_{r8} + \sigma_{\theta8}\varepsilon_{\theta8} + \sigma_{\varphi8}\varepsilon_{\varphi8})r^2 dr = \int_m^n 3 \frac{2(1+v_{i,4})}{(1-2v_{i,4})} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_{i,4})(1-2v_m)}{E_{i,4}(1+v_m)} \right) r^2 dr$$

$$= 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_m^n \frac{(1+v_{i,4})^2}{E_{i,4}(1-2v_{i,4})^2} r^2 dr$$

$$\int_n^q (\sigma_{r9}\varepsilon_{r9} + \sigma_{\theta9}\varepsilon_{\theta9} + \sigma_{\varphi9}\varepsilon_{\varphi9})r^2 dr = \int_n^q 3(-P_0) \frac{(1-2v_m)}{(1+v_m)} \frac{(1+v_f)}{(1-2v_f)} \left(\frac{(1+v_f)(1-2v_m)}{E_f(1+v_m)} (-P_0) \right) r^2 dr =$$

$$\frac{P_0^2(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \frac{(1+v_f)^2}{(1-2v_f)E_f} (q^3 - n^3)$$

$$\begin{aligned}
& \int_q^s (\sigma_{r10} \varepsilon_{r10} + \sigma_{\theta10} \varepsilon_{\theta10} + \sigma_{\varphi10} \varepsilon_{\varphi10}) r^2 dr = \int_q^s 3 \frac{2(1+v_{i,5})}{(1-2v_{i,5})} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_{i,5})(1-2v_m)}{E_{i,5}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_q^s \frac{(1+v_{i,5})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,5})^2} r^2 dr \\
& \int_s^t (\sigma_{r11} \varepsilon_{r11} + \sigma_{\theta11} \varepsilon_{\theta11} + \sigma_{\varphi11} \varepsilon_{\varphi11}) r^2 dr = \int_s^t 3P_o^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} r^2 dr = P_o^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (s^3 - t^3)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$\begin{aligned}
& \frac{P_0^2 (1-2v_c) t^3}{E_c} = \frac{P_0^2 (1+v_f)^2 (1-2v_m)^2 a^3}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} + 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_a^b \frac{(1+v_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2v_{i,1})} r^2 dr + \\
& P_0^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (c^3 - b^3) + 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_c^d \frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,2})^2} r^2 dr + \\
& P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2 (1+v_f)^2}{(1+v_m)^2 (1-2v_f) E_f} (f^3 - d^3) + 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_f^h \frac{(1+v_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2v_{i,3})} r^2 dr + \\
& P_o^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (m^3 - h^3) + 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_m^n \frac{(1+v_{i,4})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,4})^2} r^2 dr + \\
& \frac{P_0^2 (1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \frac{(1+v_f)^2}{(1-2v_f) E_f} (q^3 - n^3) + 3P_0^2 \frac{(1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_q^s \frac{(1+v_{i,5})^2}{E_{i,2}(1-2v_{i,5})^2} r^2 dr + \\
& P_o^2 \frac{(1-2v_m)}{E_m} (s^3 - t^3)
\end{aligned}$$

όπου με απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned} \frac{(1-2\nu_c)}{E_c} &= \frac{(1+\nu_f)^2(1-2\nu_m)^2 U_1}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f} + 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2 t^3} \int_a^b \frac{(1+\nu_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2\nu_{i,1})} r^2 dr + \\ \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} U_3 &+ 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2 t^3} \int_c^d \frac{(1+\nu_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,2})^2} r^2 dr + \\ \frac{(1-2\nu_m)^2(1+\nu_f)^2}{(1+\nu_m)^2(1-2\nu_f)E_f} U_5 &+ 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2 t^3} \int_f^h \frac{(1+\nu_{i,3})^2}{E_{i,3}(1-2\nu_{i,3})} r^2 dr + \\ \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} U_7 &+ 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2 t^3} \int_m^n \frac{(1+\nu_{i,4})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,4})^2} r^2 dr + \\ \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \frac{(1+\nu_f)^2}{(1-2\nu_f)E_f} U_9 &+ 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2 t^3} \int_q^s \frac{(1+\nu_{i,5})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,5})^2} r^2 dr + \\ \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} U_{11} & \end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι:

$$V_c = \nu_f U_1 + \nu_{i,1} U_2 + \nu_m U_3 + \nu_{i,2} U_3 + \nu_f U_5 + \nu_{i,3} U_6 + \nu_m U_7 + \nu_{i,4} U_8 + \nu_f U_9 + \nu_{i,5} U_{10} + \nu_m U_{11}$$

8.4 Σύγκριση με άλλα μοντέλα

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση που υπολογίσθηκαν με την προσεγγιστική μέθοδο χρησιμοποιούμε τα ίδια πειραματικά δεδομένα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 7. Κάνουμε τη διαδικασία και για τις δύο περιπτώσεις κατανομής των κόκκων σε αντιστοιχία με τα κυβικά και οκταεδρικά μοντέλα του κεφαλαίου 6.

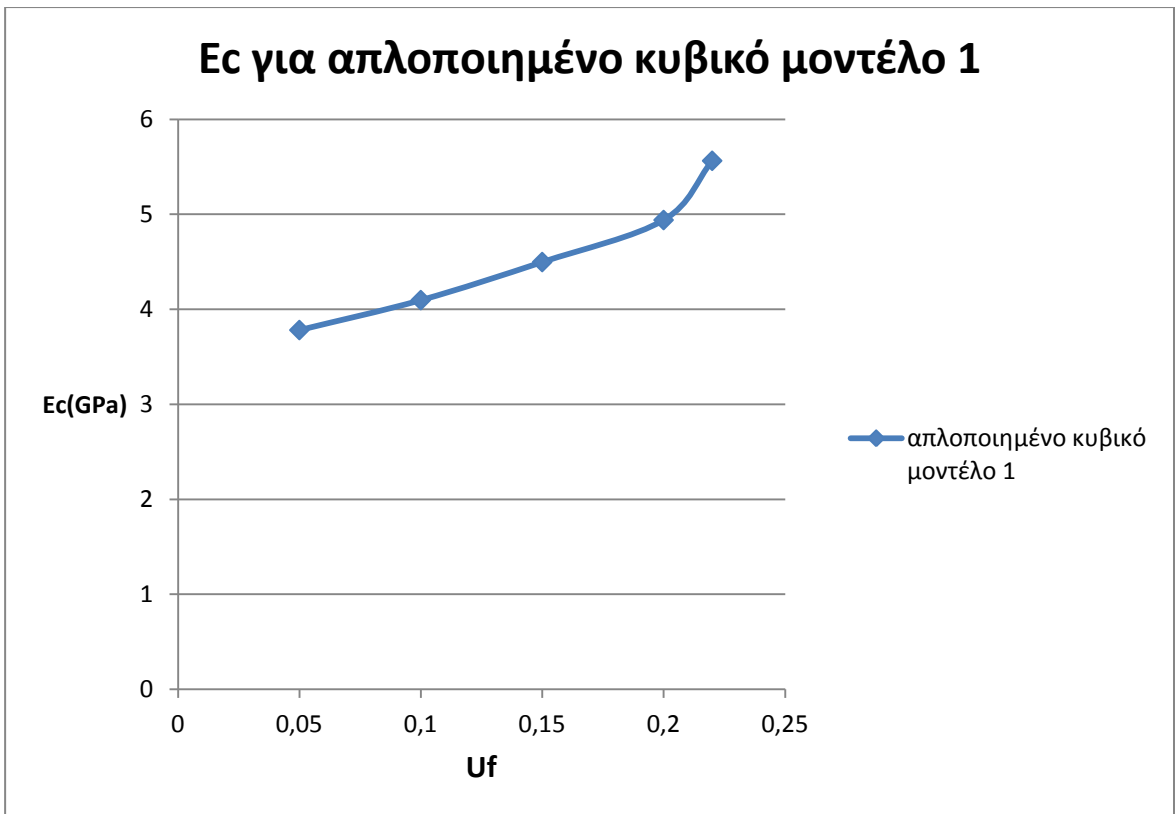
Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες και διαγράμματα των αποτελεσμάτων των υπολογισμών του προσεγγιστικού θεωρητικού υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας.

Uf	Ec για απλοποιημένο κυβικό μοντέλο1 (GPa)	Ec για απλοποιημένο κυβικό μοντέλο2 (GPa)	Ec για απλοποιημένο οκταεδρικό μοντέλο1 (GPa)	Ec για απλοποιημένο οκταεδρικό μοντέλο2 (GPa)
0.05	3,781968389	3,781931	3,782267037	3,78224486
0.1	4,096774718	4,104811	4,09773773	4,105938886
0.15	4,497568433	4,513554	4,501065551	4,517908042
0.2	4,940025583	4,964936	4,946050317	4,972916072
0.25	5,563491079	5,710088	5,386198355	5,734629766

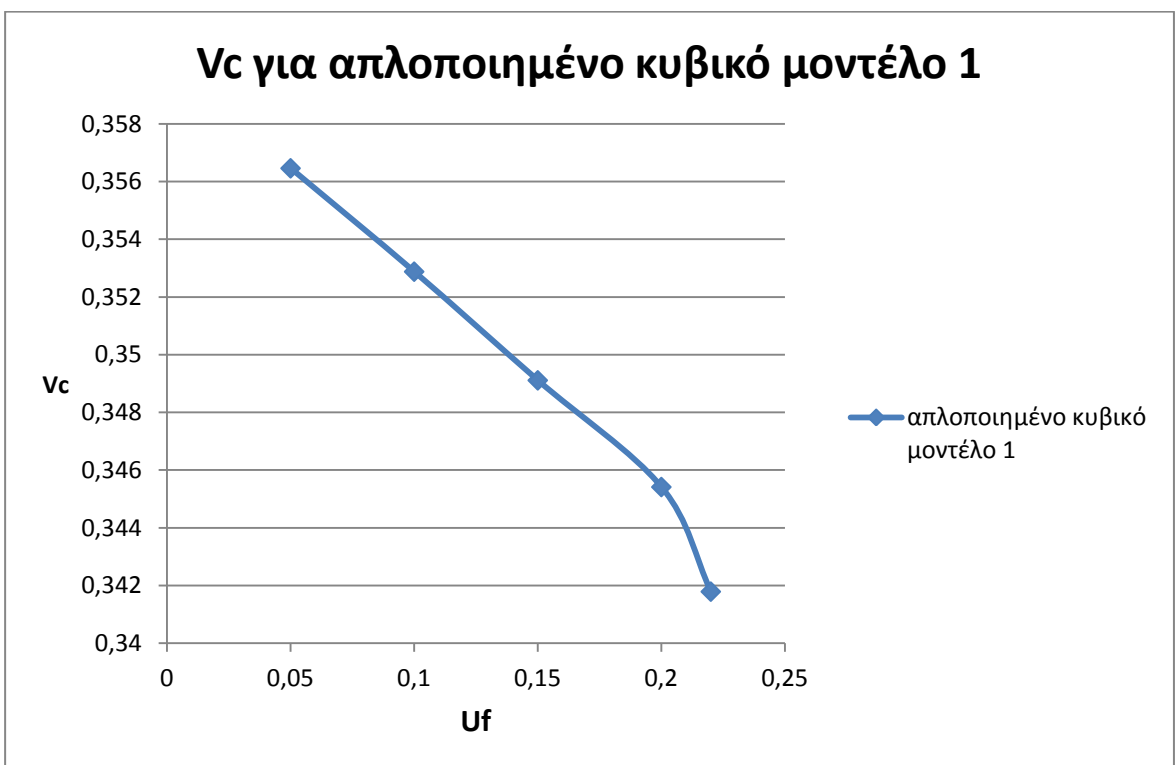
Πίνακας 8.10

Uf	Vc για απλοποιημένο κυβικό μοντέλο 1	Vc για απλοποιημένο κυβικό μοντέλο 2	Vc για απλοποιημένο οκταεδρικό μοντέλο 1	Vc για απλοποιημένο οκταεδρικό μοντέλο 2
0.05	0,356459815	0,35646	0,356458247	0,356458
0.1	0,352878041	0,35288	0,352873313	0,352874
0.15	0,349111628	0,349119	0,349096785	0,349101
0.2	0,345414576	0,34543	0,345392552	0,345401
0.25	0,341789347	0,341142	0,343128206	0,341067

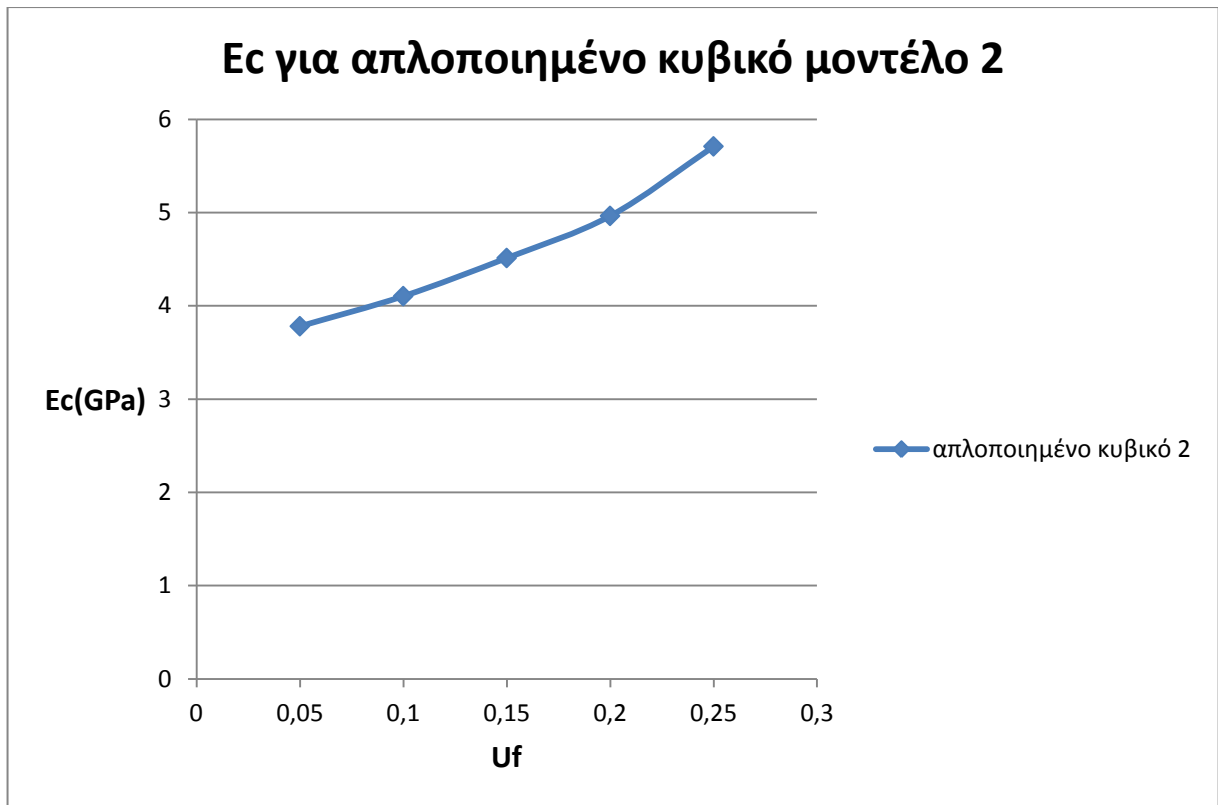
Πίνακας 8.11



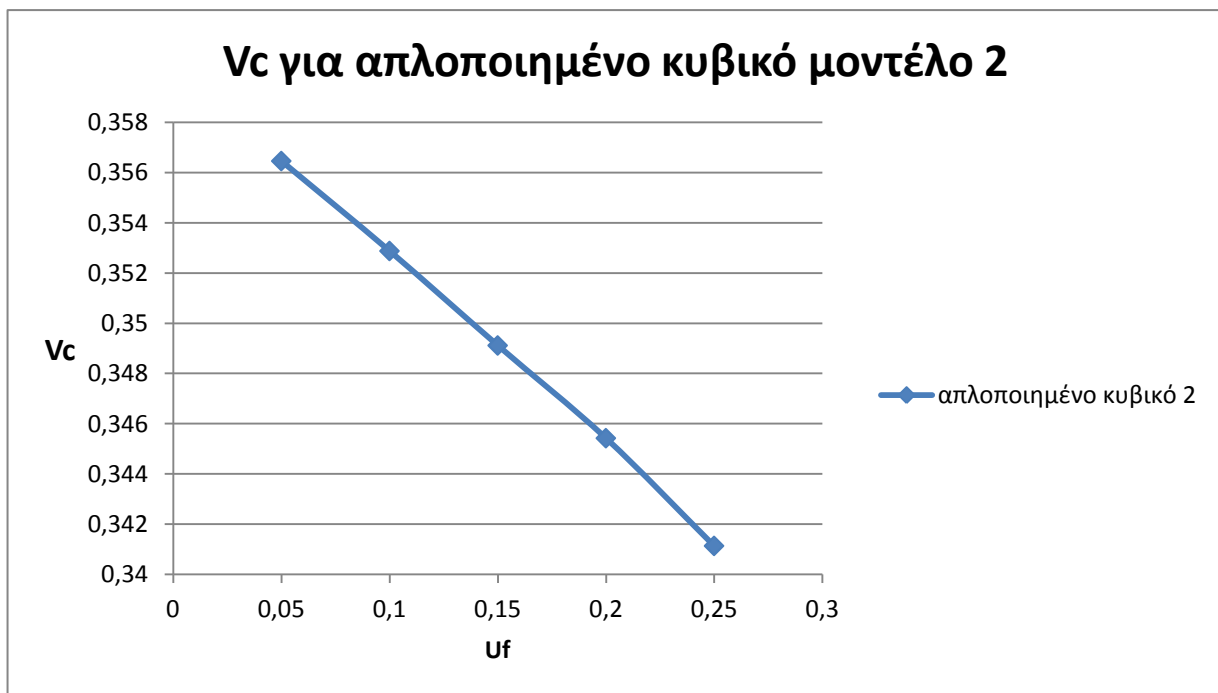
Διάγραμμα 8.1



Διάγραμμα 8.2

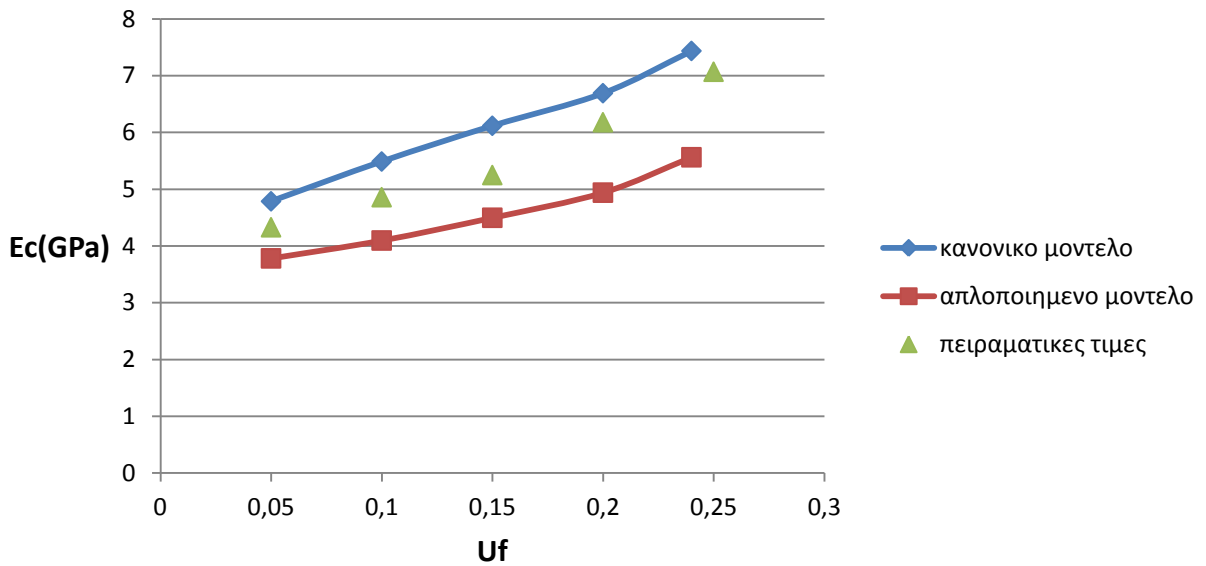


Διάγραμμα 8.3



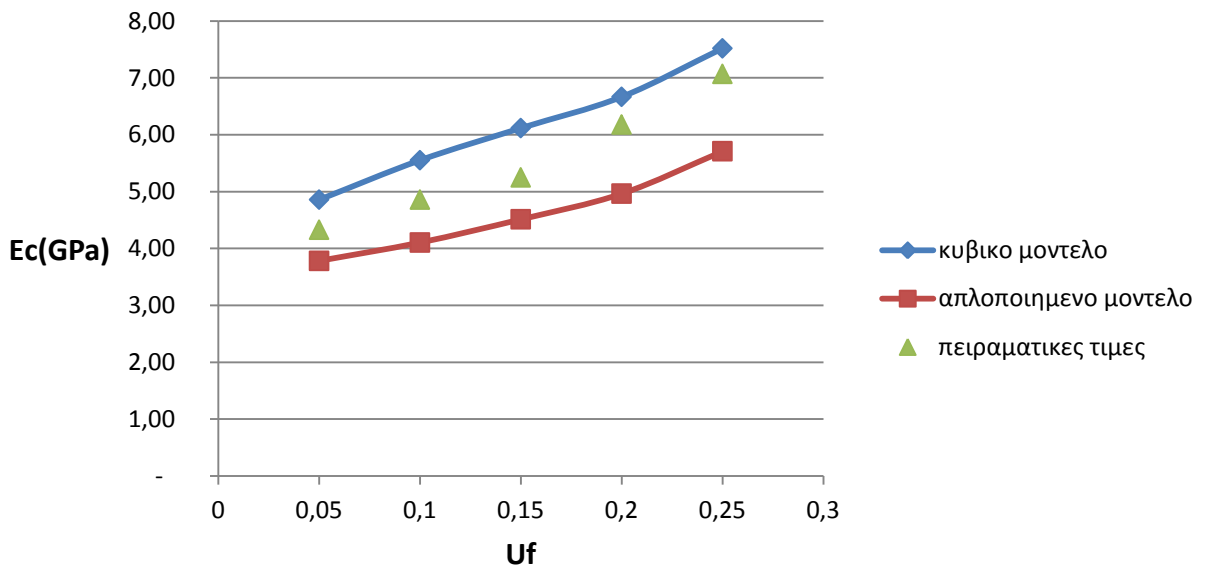
Διάγραμμα 8.4

Σύγκριση κυβικού και απλοποιημένου κυβικού μοντέλου 1

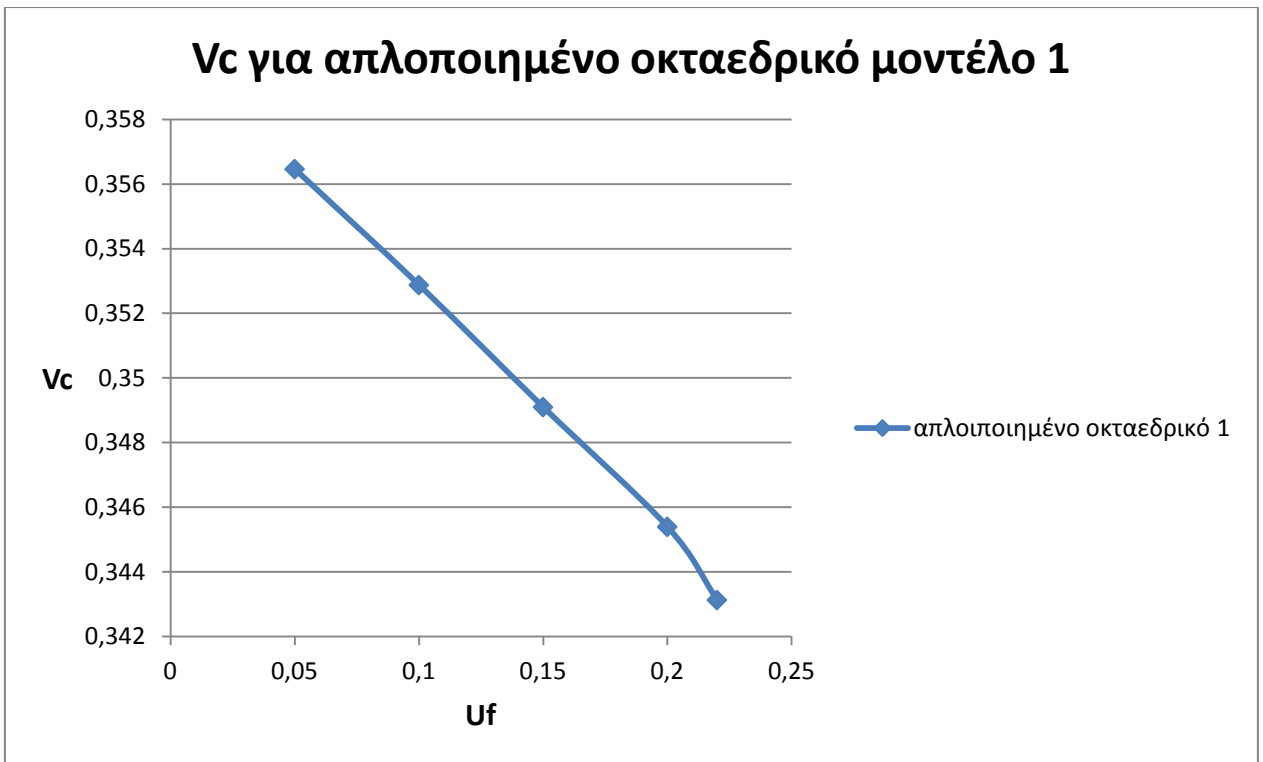
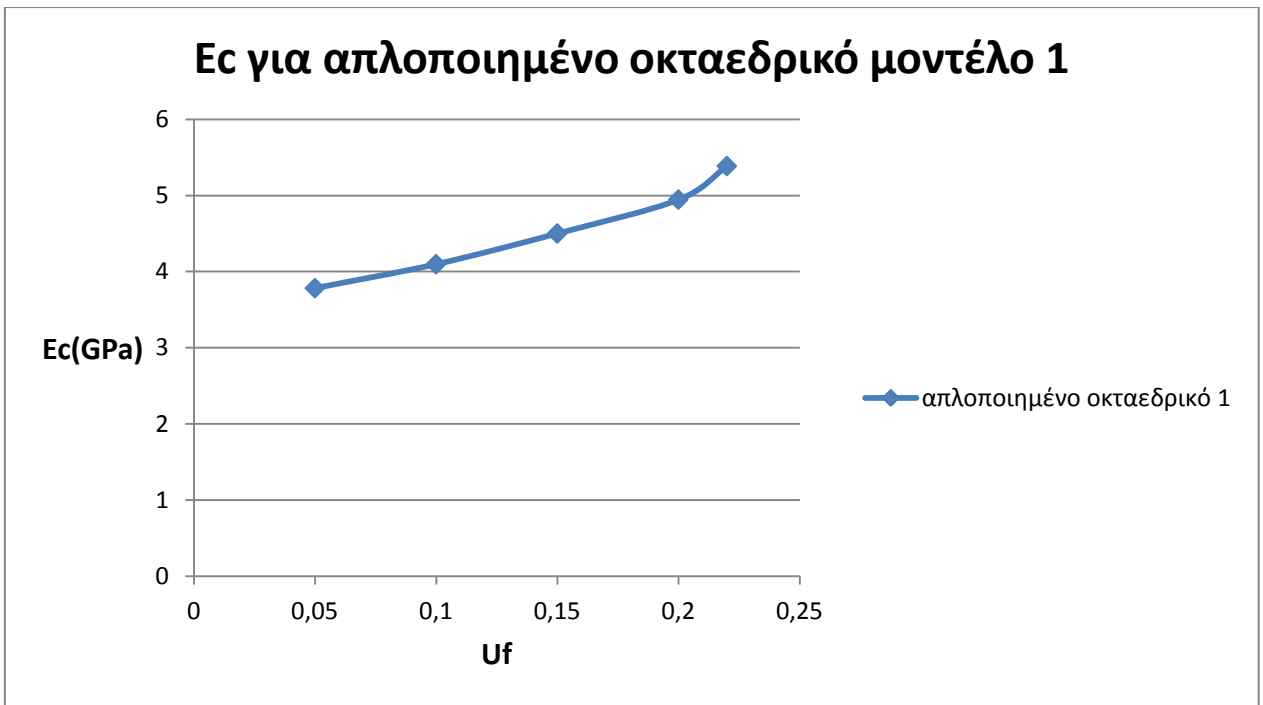


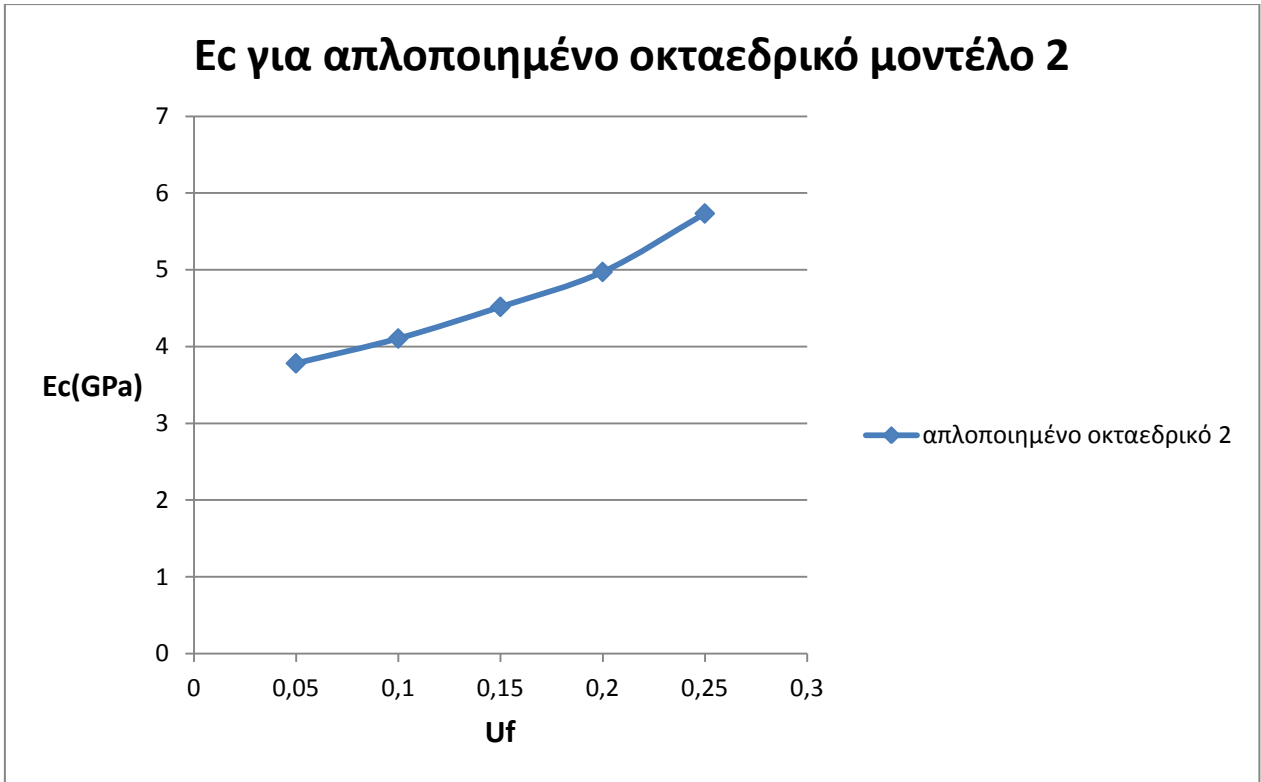
Διάγραμμα 8.5

Σύγκριση κυβικού και απλοποιημένου κυβικού μοντέλου 2

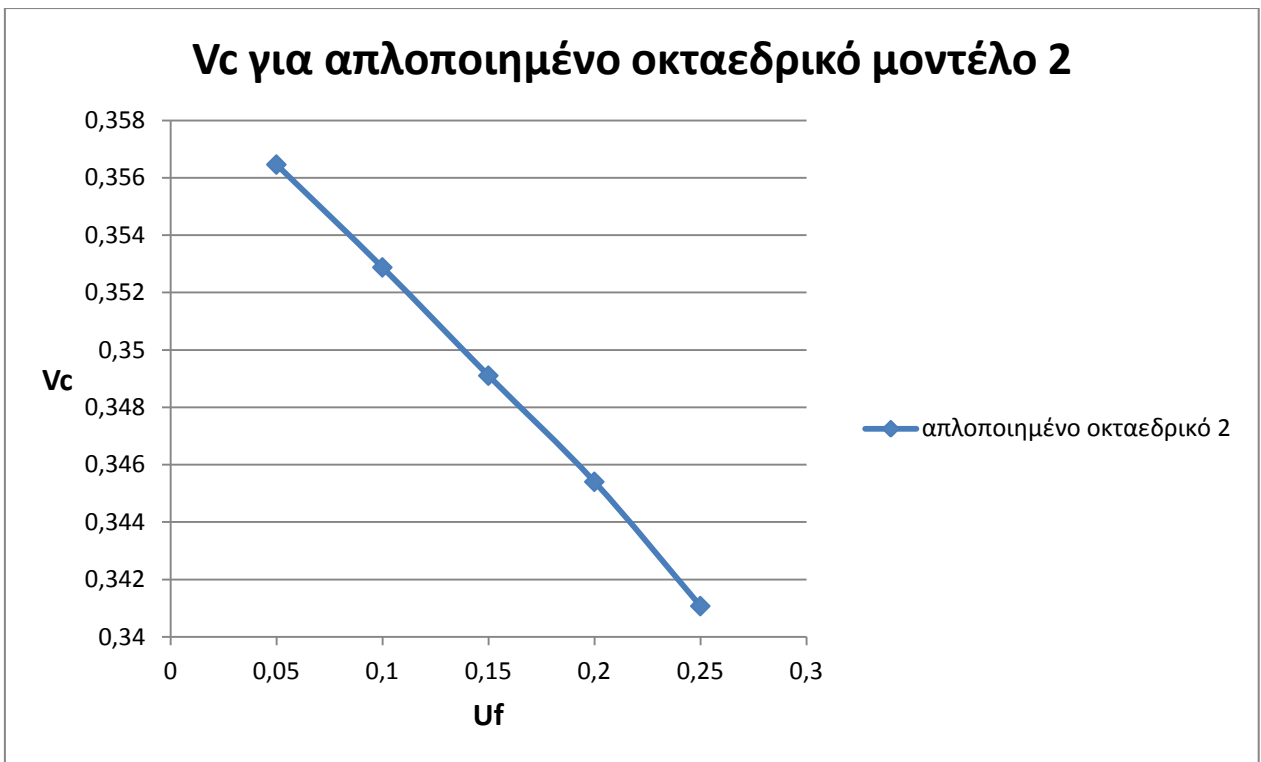


Διάγραμμα 8.6



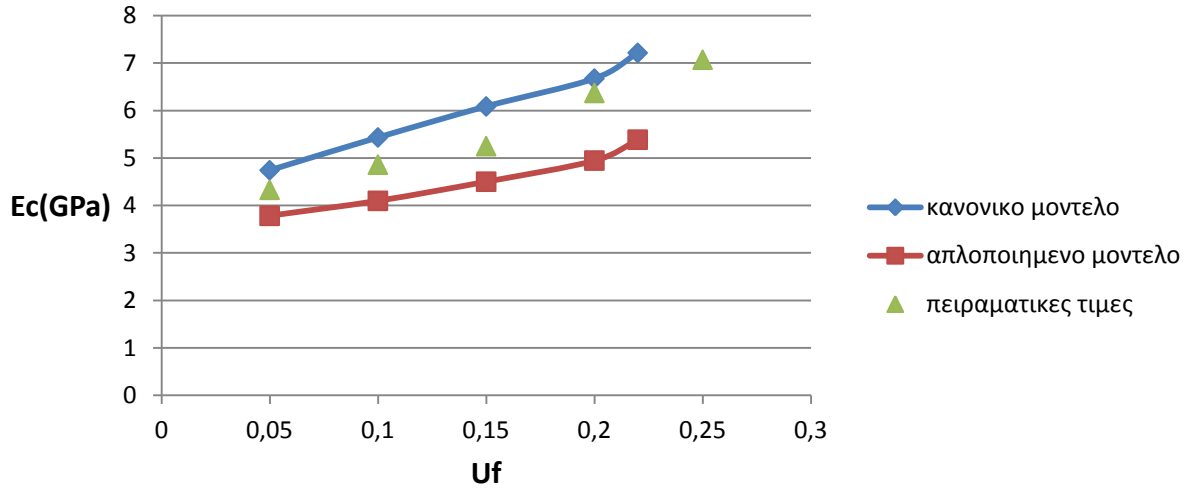


Διάγραμμα 8.9



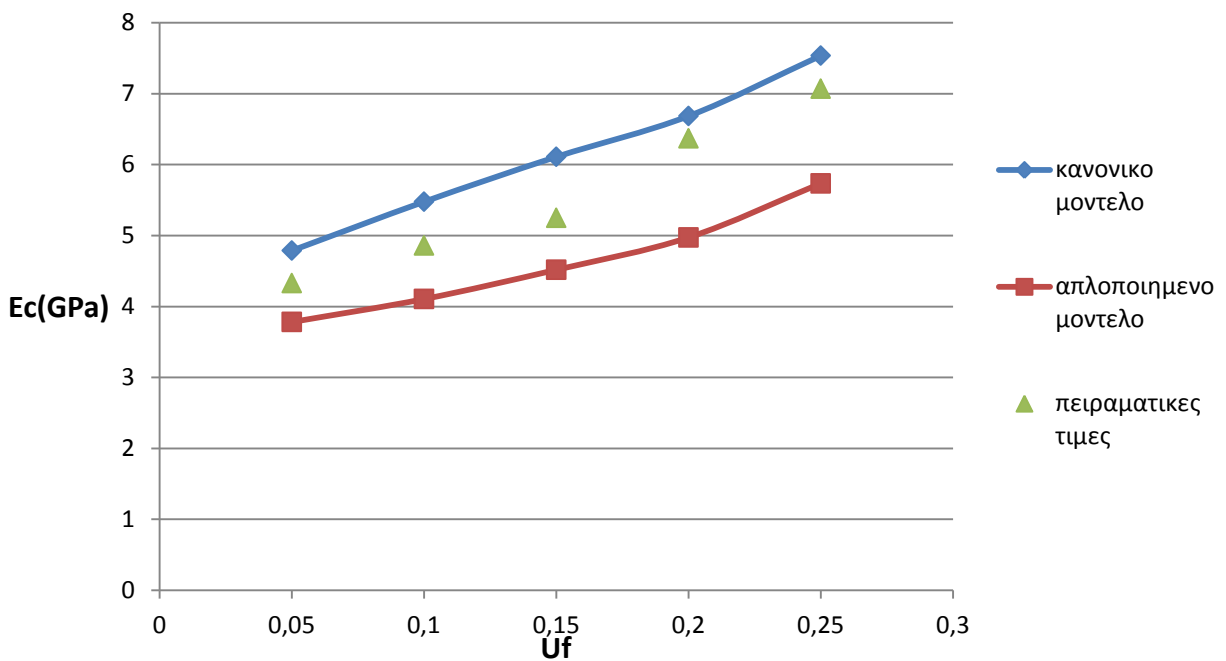
Διάγραμμα 8.10

Σύγκριση κυβικού και απλοποιημένου οκταεδρικού μοντέλου 1

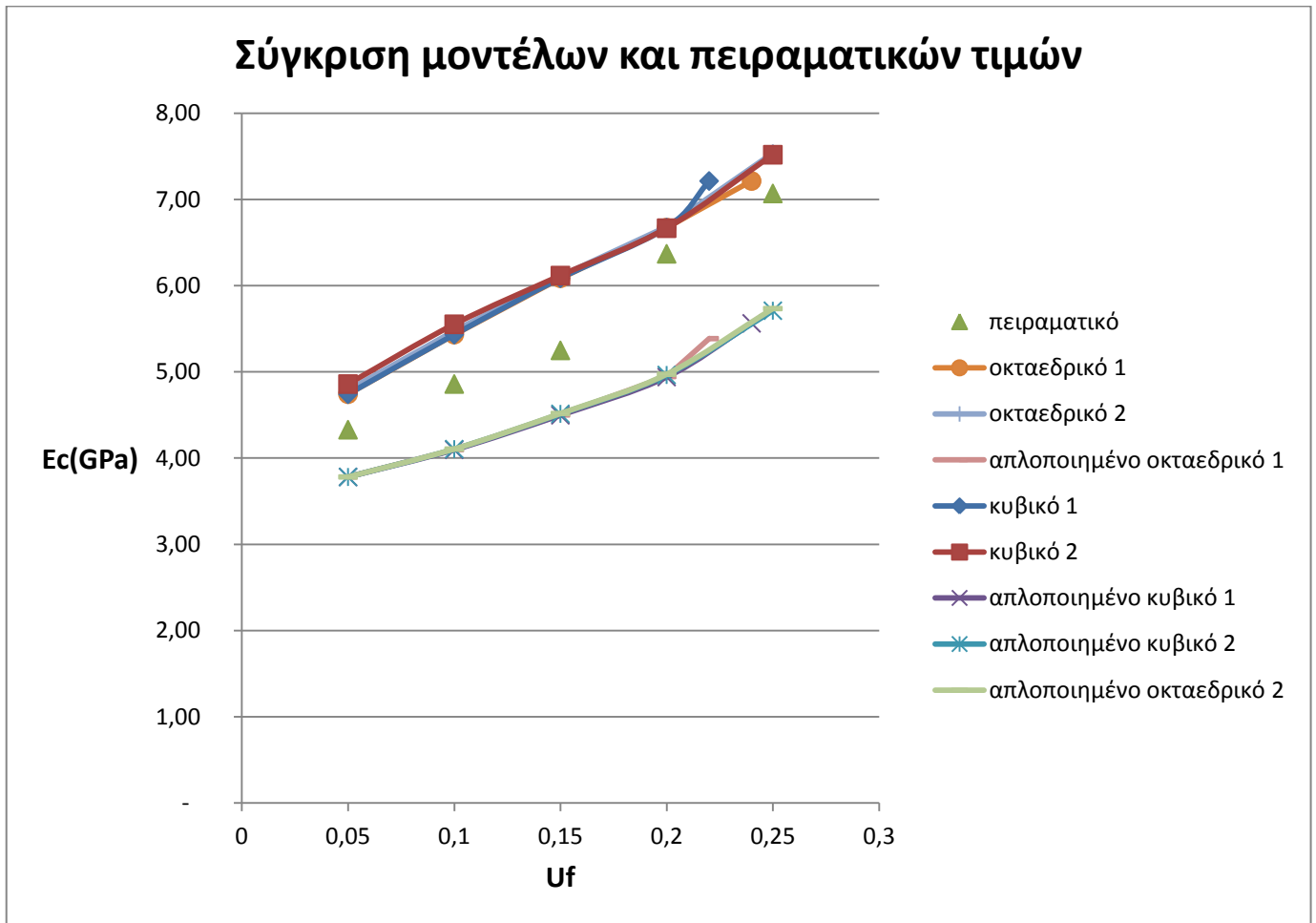


Διάγραμμα 8.11

Σύγκριση κυβικού και απλοποιημένου οκταεδρικού μοντέλου 2



Διάγραμμα 8.12



Διάγραμμα 8.13

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$r = 100 \left[1 - \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i} \right] \%$$

όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα [0, 1]. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

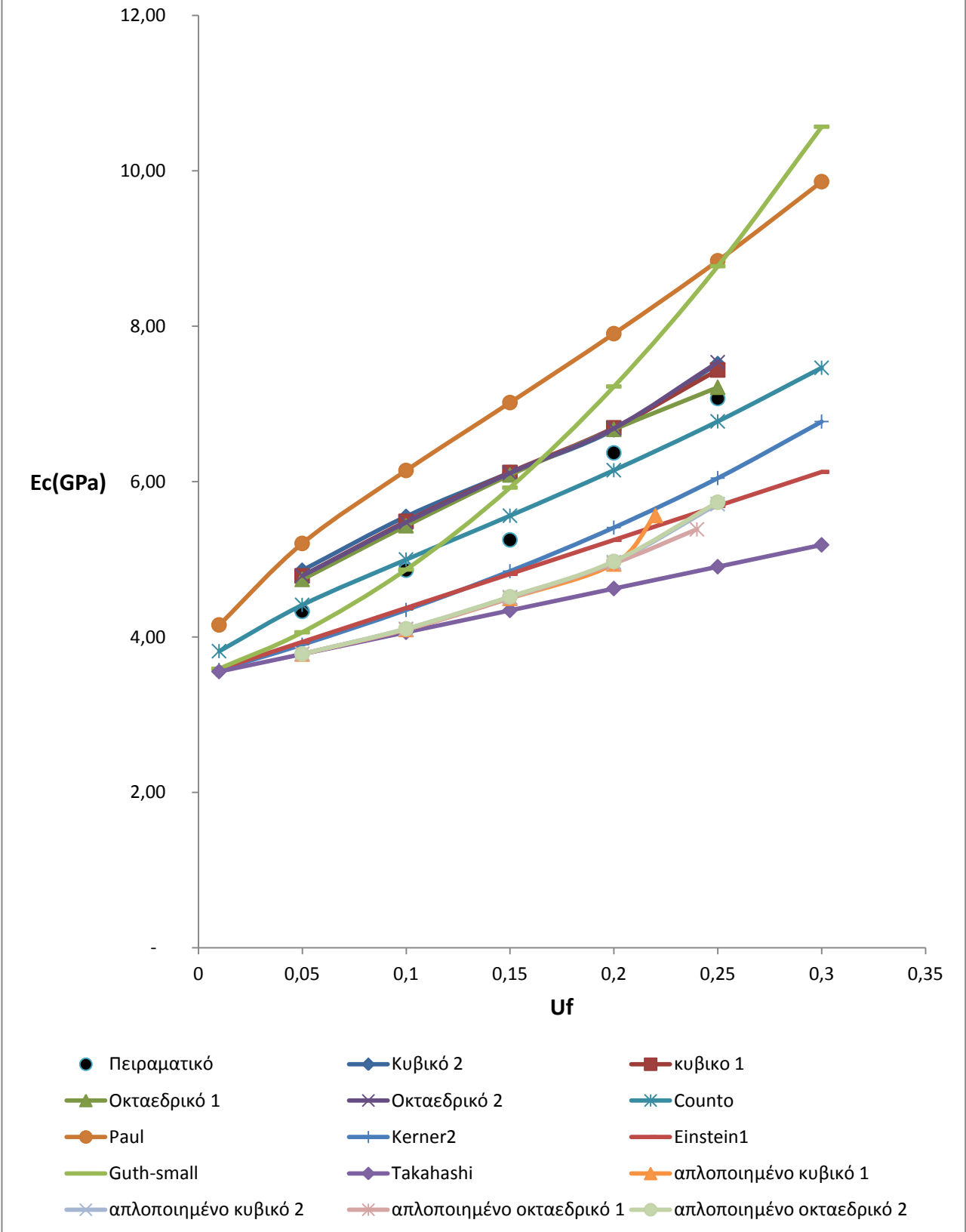
Για τον συντελεστή προσαρμογής των απλοποιημένων μοντέλων σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελεστής Προσαρμογής
Γ_{κυβικό 1}	0,922045%
Γ_{κυβικό 2}	0,927240%
Γ_{οκταεδρι κό 1}	0,912042%
Γ_{οκταεδρι κό 2}	0,92863%

Πίνακας 8.12

Συνεπώς, όπως αναμενόταν τα προσεγγιστικά μοντέλα έχουν μικρότερη προσέγγιση στα πειραματικά δεδομένα από ότι τα αντίστοιχα κανονικά μοντέλα. Αυτό σαφώς οφείλεται στις επιπλέον παραδοχές που έγιναν, κάτι που εξιδανίκευσε περισσότερο τα θεωρητικά μοντέλα μας. Παρόλα αυτά, η σύγκλιση και των απλοποιημένων μοντέλων κρίνεται ικανοποιητική.

Σύγκριση Μοντέλων



Διάγραμμα 8.14

Uf	κυβικό μοντέλο 1	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 1	κυβικό μοντέλο 2	προσεγγιστικό κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές τιμές
0,05	4,79	3,781	4,86	3,781	4,33
0,1	5,49	4,096	5,55	4,104	4,86
0,15	6,12	4,497	6,12	4,513	5,25
0,2	6,69	4,940	6,67	4,964	6,37
0,25	7,44	5,563	7,52	5,710	7,07

Πίνακας 8.13

Uf	οκταεδρι κό μοντέλο 1	προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 1	οκταεδρι κό μοντέλο 2	προσεγγιστικό οκταεδρικό μοντέλο 2	Πειραματικές τιμές
0,05	4,742	3,782	4,789	3,7822	4,33
0,1	5,433	4,098	5,477	4,106	4,86
0,15	6,086	4,501	6,110	4,518	5,25
0,2	6,673	4,946	6,685	4,973	6,37
0,25	7,214	5,386	7,536	5,735	7,07

Πίνακας 8.14

Uf	Count o	Paul	Kerne r2	Einstein 1	Guth -small	Takahas hi	Count o
0,05	4,4136	5,2045	3,9019	3,9375	4,0609	3,781	4,4136
0,1	4,9973	6,1437	4,3485	4,375	4,8685	4,062	4,9973
0,15	5,5617	7,0174	4,8476	4,8125	5,9229	4,3431	5,5617
0,2	6,147	7,9041	5,4091	5,25	7,224	4,6241	6,147
0,25	6,7751	8,8419	6,0455	5,6875	8,7719	4,9051	6,7751

Πίνακας 8.15

Στο διάγραμμα 8.14 παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου E_c συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα U_f όπου οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας οι οποίες προκύπτουν από τα προσεγγιστικά μοντέλα μας συγκρίνονται με τις τιμές που προκύπτουν από θεωρητικά μοντέλα άλλων ερευνητών της βιβλιογραφίας, με τα κυβικά και οκταεδρικά μοντέλα των προηγούμενων κεφαλαίων ως επίσης και με τα πειραματικά αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι τα προσεγγιστικά μοντέλα παρουσιάζουν μεγαλύτερη απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και το μοντέλο Counto σε σχέση με τα μοντέλα που αναλύσαμε στο 6^ο κεφάλαιο. Προφανώς οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές οδήγησαν σε αυτό το αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το E_c που αυξάνουν αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος κάτι που δικαιολογείται από την αυξανόμενη περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων, τα οποία έχουν μεγαλύτερο E_c από την μήτρα. Τα μοντέλα μας αποτελούν μια καλή και συνοπτική προσέγγιση της πραγματικότητας του συνθέτου υλικού μας, δηλαδή ενός συνθέτου υλικού που έχει ως έγκλεισμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμα μας είναι ικανοποιητικό διότι είναι συμπαγής σαν τύπος και δίνει τιμές πολύ κοντά στις πειραματικές αλλά και σε αυτές των μοντέλων άλλων μεγάλων ερευνητών.

9.Υπολογισμός Συντελεστή Θερμικής Διαστολής α_c

9.1 Θεωρητικός Υπολογισμός Θερμικής Διαστολής α_c

Θεωρούμε και πάλι τα σφαιρικά μοντέλα που περιγράφονται στο κεφάλαιο 4. Τα εννιαφασικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από τρεις περιοχές εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχές 1, 4 και 7) και τρεις περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 3, 6 και 9). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2,5 και 8).

Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί E_2, E_5, E_8 και ν_2, ν_5, ν_8 προσδιορίστηκαν στο κεφάλαιο 6 όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Έστω ότι μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία του σύνθετου υλικού κατά ΔT . Εξαιτίας αυτής της θερμοκρασιακής μεταβολής εμφανίζονται εσωτερικές τάσεις στο υλικό. Έστω P_1 η πίεση που ασκείται στο σύνορο 9ης και 8ης φάσης. Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 8ης και 7ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_2 , λόγω αλληλεπίδρασης 7ης και 6ης φάση, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_3 , λόγω αλληλεπίδρασης 6ης και 5ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_4 , λόγω αλληλεπίδρασης 5ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_5 , λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_6 , λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 2ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_7 και λόγω αλληλεπίδρασης 2ης και 1ης φάσης, στο σύνορο τους θα ασκείται μια δύναμη P_8 .

Οι παραμορφώσεις ως προς τη διεύθυνση θ σύμφωνα και με τους προηγούμενους θεωρητικούς υπολογισμούς δίνονται από τους τύπους:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = \frac{2B(1+\nu_1)}{E_1} = 2 \frac{-P_8(1-2\nu_1)}{2(1+\nu_1)} \frac{(1+\nu_1)}{E_1} = -P_8 \frac{(1-2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \frac{-(P_7 - P_8)a^3b^3(1+\nu_2)}{2(b^3 - a^3)E_2r^3} + \frac{1-2\nu_2}{E_2} \frac{a^3P_8 - b^3P_7}{b^3 - a^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 3} = \frac{-(P_6 - P_7)c^3b^3(1+v_4)}{2(c^3 - b^3)E_4r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_4} \frac{b^3P_6 - c^3P_5}{c^3 - b^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 4} = \frac{-(P_5 - P_6)c^3d^3(1+v_4)}{2(d^3 - c^3)E_4r^3} + \frac{1-2\nu_4}{E_3} \frac{c^3P_6 - d^3P_5}{d^3 - c^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 5} = \frac{-(P_4 - P_5)d^3f^3(1+v_5)}{2(f^3 - d^3)E_5r^3} + \frac{1-2\nu_5}{E_5} \frac{d^3P_5 - f^3P_4}{f^3 - d^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 6} = \frac{-(P_3 - P_4)f^3h^3(1+v_6)}{2(h^3 - f^3)E_6r^3} + \frac{1-2\nu_6}{E_6} \frac{f^3P_4 - h^3P_3}{h^3 - f^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 7} = \frac{-(P_2 - P_3)h^3m^3(1+v_7)}{2(m^3 - h^3)E_7r^3} + \frac{1-2\nu_7}{E_7} \frac{h^3P_3 - m^3P_2}{m^3 - h^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 8} = \frac{-(P_1 - P_2)m^3n^3(1+v_8)}{2(n^3 - m^3)E_8r^3} + \frac{1-2\nu_8}{E_8} \frac{m^3P_2 - n^3P_1}{n^3 - m^3}$$

$$\varepsilon_{\theta 9} = \frac{P_1n^3q^3(1+v_9)}{2(q^3 - n^3)E_9r^3} + \frac{1-2\nu_9}{E_9} \frac{n^3P_1}{q^3 - n^3} = \frac{P_1n^3[q^3(1+v_9) + 2r^3(1-2\nu_9)]}{2(q^3 - n^3)E_9r^3}$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$\text{Για } r=a : \varepsilon_{\theta 1} = \alpha_1 \Delta T$$

$$r=b : \varepsilon_{\theta 2} = \alpha_2 \Delta T$$

$$r=c : \varepsilon_{\theta 3} = \alpha_3 \Delta T$$

$$r=d : \varepsilon_{\theta 4} = \alpha_4 \Delta T$$

$$r=f : \varepsilon_{\theta 5} = \alpha_5 \Delta T$$

$$r=h : \varepsilon_{\theta 6} = \alpha_6 \Delta T$$

$$r=m : \varepsilon_{\theta 7} = \alpha_7 \Delta T$$

$$r=n : \varepsilon_{\theta 8} = \alpha_8 \Delta T$$

$$r=q : \varepsilon_{\theta 9} = \alpha_9 \Delta T$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\varepsilon_{\theta 2}-\varepsilon_{\theta 1}=(\alpha_2-\alpha_1)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 3}-\varepsilon_{\theta 2}=(\alpha_3-\alpha_2)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 4}-\varepsilon_{\theta 3}=(\alpha_4-\alpha_3)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 5}-\varepsilon_{\theta 4}=(\alpha_5-\alpha_4)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 6}-\varepsilon_{\theta 5}=(\alpha_6-\alpha_5)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 7}-\varepsilon_{\theta 6}=(\alpha_7-\alpha_6)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 8}-\varepsilon_{\theta 7}=(\alpha_8-\alpha_7)\Delta T$$

$$\varepsilon_{\theta 9}-\varepsilon_{\theta 8}=(\alpha_9-\alpha_8)\Delta T$$

Ισχύει :

$$U_1 = \frac{a^3}{q^3}$$

$$U_2 = \frac{b^3 - a^3}{q^3}$$

$$U_3 = \frac{c^3 - b^3}{q^3}$$

$$U_4 = \frac{d^3 - c^3}{q^3}$$

$$U_5 = \frac{f^3 - d^3}{q^3}$$

$$U_6 = \frac{h^3 - f^3}{q^3}$$

$$U_7 = \frac{m^3 - h^3}{q^3}$$

$$U_8 = \frac{n^3 - m^3}{q^3}$$

$$U_9 = \frac{q^3 - n^3}{q^3}$$

Ύστερα από πράξεις έχουμε :

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T = \frac{P_8 \left\{ \left[(U_1 + U_2)(1 + v_2) + 2U_1(1 - 2v_2) \right] E_1 + 2U_2(1 - 2v_1)E_2 \right\} - P_1 3(U_1 + U_2)(1 - v_2)E_1}{2U_2 E_1 E_2}$$

$$(a_3 - a_2)\Delta T = \frac{P_7 \left\{ U_2 E_2 \left[(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_3) \right] + \left[E_3 U_3 \left[U_1(1 + v_2) + 2(U_1 + U_2)(1 - 2v_2) \right] \right] \right\} - P_8 E_3 U_3 3U_1(1 - v_2) - P_6 E_2 U_2 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_3)}{2U_3 U_2 E_2 E_3}$$

$$(a_4 - a_3)\Delta T = \frac{P_6 \left\{ U_3 E_3 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_4) \right] + \left[E_4 U_4 \left[(U_1 + U_2)(1 + v_3) + 2(U_1 + U_2 + U_3)(1 - 2v_3) \right] \right] \right\} - P_7 E_4 U_4 3(U_1 + U_2)(1 - v_3) - P_5 E_3 U_3 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_4)}{2U_4 U_3 E_4 E_3}$$

$$(a_5 - a_4)\Delta T = \frac{P_5 \left\{ U_4 E_4 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_5) \right] + \left[E_5 U_5 \left[(U_1 + U_2 + U_3)(1 + v_4) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - 2v_4) \right] \right] \right\} - P_6 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3)(1 - v_4) - P_4 E_4 U_4 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_5)}{2U_5 U_4 E_5 E_4}$$

$$(a_6 - a_5)\Delta T = \frac{P_4 \left\{ U_5 E_5 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_6) \right] + \left[E_6 U_6 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 + v_5) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - 2v_5) \right] \right] \right\} - P_5 E_6 U_6 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4)(1 - v_5) - P_3 E_5 U_5 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)}{2U_5 U_6 E_5 E_6}$$

$$(a_7 - a_6)\Delta T = \frac{P_3 \left\{ U_6 E_6 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + \left[E_7 U_7 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right] \right] \right\} - P_4 E_7 U_7 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6) - P_2 E_6 U_6 3(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - v_7)}{2U_7 U_6 E_7 E_6}$$

$$(a_8 - a_7) \Delta T = \frac{P_2 \left\{ U_7 E_7 [(1-U_9)(1+v_8) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7)(1-2v_8)] + E_8 U_8 [(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)(1+v_7) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7)(1-2v_7)] \right\} - P_3 E_8 U_8 3(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)(1-v_7) - P_1 E_7 U_7 3(1-U_9)(1-v_8)}{2U_7 U_8 E_7 E_8}$$

$$(a_9 - a_8) \Delta T = \frac{P_1 \left\{ U_8 E_8 [(1+v_9) + 2(1-U_9)(1-2v_9)] + E_9 U_9 [(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7)(1+v_8) + 2(1-U_9)(1-2v_8)] \right\} - P_2 E_9 U_9 3(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7)(1-v_8)}{2U_9 U_8 E_9 E_8}$$

Θέτω τους εξής συντελεστές :

$$A = [(U_1+U_2)(1+v_2) + 2U_1(1-2v_2)] E_1 + 2U_2(1-2v_1) E_2$$

$$B = 3(U_1+U_2)(1-v_2) E_1$$

$$\Gamma = U_2 E_2 [(U_1+U_2+U_3)(1+v_3) + 2(U_1+U_2)(1-2v_3)] + E_3 U_3 [U_1(1+v_2) + 2(U_1+U_2)(1-2v_2)]$$

$$\Delta = 3E_3 U_3 (U_1)(1-v_2)$$

$$Z = 3E_2 U_2 (U_1+U_2+U_3)(1-v_3)$$

$$H = U_3 E_3 [(U_1+U_2+U_3+U_4)(1+v_4) + 2(U_1+U_2+U_3)(1-2v_4)] + E_4 U_4 [(U_1+U_2)(1+v_3) + 2(U_1+U_2+U_3)(1-2v_3)]$$

$$\Theta = 3E_4 U_4 (U_1+U_2)(1-v_3)$$

$$I = 3E_3 U_3 (U_1+U_2+U_3+U_4)(1-v_4)$$

$$K = U_4 E_4 [(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1+v_5) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4)(1-2v_5)] + E_5 U_5 \left[\frac{(U_1+U_2+U_3)(1+v_4) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4)(1-2v_4)}{2(U_1+U_2+U_3+U_4)(1-2v_4)} \right]$$

$$\Lambda = 3E_5 U_5 (U_1+U_2+U_3)(1-v_4)$$

$$M = 3E_4 U_4 (U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1-v_5)$$

$$N = U_5 E_5 [(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6)(1+v_6) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1-2v_6)] + E_6 U_6 \left[\frac{(U_1+U_2+U_3+U_4)(1+v_5) + 2(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1-2v_5)}{2(U_1+U_2+U_3+U_4+U_5)(1-2v_5)} \right]$$

$$\Xi = 3E_6 U_6 (U_1+U_2+U_3+U_4)(1-v_5)$$

$$O = 3E_5U_5(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_6)$$

$$\Pi = U_6E_6 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_7) \right] + E_7U_7 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 + v_6) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - 2v_6) \right]$$

$$P = 3E_7U_7(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5)(1 - v_6)$$

$$\Sigma = 3E_6U_6(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - v_7)$$

$$Y = U_7E_7 \left[(1 - U_9)(1 + v_8) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - 2v_8) \right] + E_8U_8 \left[(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 + v_7) + 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - 2v_7) \right]$$

$$\Phi = 3E_8U_8(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6)(1 - v_7)$$

$$X = 3E_7U_7(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8)(1 - v_8)$$

$$\Psi = U_8E_8 \left\{ [(1 + v_9) + 2(1 - U_9)(1 - 2v_9)] + E_9U_9(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 + v_8) + 2(1 - U_9)(1 - 2v_8) \right\}$$

$$\Omega = 3E_9U_9(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7)(1 - v_8)$$

Άρα προκύπτει:

$$(\alpha_2 - \alpha_1)2\Delta TU_2 E_2 E_1 = AP_8 - BP_7 \quad (1)$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2)2\Delta TU_3 U_2 E_2 E_3 = \Gamma P_7 - \Delta P_8 - ZP_6 \quad (2)$$

$$(\alpha_4 - \alpha_3)2\Delta TU_4 U_3 E_4 E_3 = HP_6 - \Theta P_7 - IP_5 \quad (3)$$

$$(\alpha_5 - \alpha_4)2\Delta TU_5 U_4 E_4 E_5 = KP_5 - \Lambda P_6 - MP_4 \quad (4)$$

$$(\alpha_6 - \alpha_5)2\Delta TU_6 U_5 E_5 E_6 = NP_4 - \Xi P_5 - OP_3 \quad (5)$$

$$(\alpha_7 - \alpha_6)2\Delta TU_7 U_6 E_6 E_7 = \Pi P_3 - \rho P_4 - \Sigma P_2 \quad (6)$$

$$(\alpha_8 - \alpha_7)2\Delta TU_8 U_7 E_7 E_8 = \Upsilon P_2 - \Phi P_3 - \chi P_2 \quad (7)$$

$$(\alpha_9 - \alpha_8)2\Delta TU_9 U_8 E_8 E_9 = \Psi P_1 - \Omega P_2 \quad (8)$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει :

$$P_1 = \left[\begin{aligned} & \{(a_9 - a_8)2 \cdot \Delta T \cdot U_9 U_8 E_9 E_8 k\} + \\ & \{(\alpha_8 - \alpha_7)2 \cdot \Delta T \cdot U_8 U_7 E_8 E_7 \Omega (\Pi \Xi - \text{ΡΟΚΗΓΑ} + \text{ΡΟΚΗΔΒ} + \text{ΡΟΚΘΖΑ} + \text{ΡΟΛΙΓΑ} - \text{ΡΟΛΙΒΔ})\} + \\ & \{(a_7 - a_6)2 \cdot \Delta T \cdot U_7 U_6 E_7 E_6 \Omega \Phi \Xi\} + \\ & \{(a_6 - a_5)2 \cdot \Delta T \cdot U_6 U_5 E_6 E_5 \Omega \Phi \text{Ρ} (\text{ΚΗΓΑ} - \text{ΚΗΔΒ} - \text{ΚΘΖΑ} - \text{ΛΙΓΑ} + \text{ΛΙΒΔ})\} + \\ & \{(a_5 - a_4)2 \cdot \Delta T \cdot U_5 U_4 E_5 E_4 \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi (\text{ΗΓΑ} - \text{ΗΒΔ} - \text{ΘΖΑ})\} + \\ & \{(a_4 - a_3)2 \cdot \Delta T \cdot U_4 U_3 E_4 E_3 \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda (\Gamma \text{Α} - \Delta \text{Β})\} + \\ & \{(a_3 - a_2)2 \cdot \Delta T \cdot U_3 U_2 E_3 E_2 \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda \Theta \text{Α}\} + \\ & \{(a_2 - a_1)2 \cdot \Delta T \cdot U_2 E_2 E_1 \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda \Delta \Theta\} \end{aligned} \right] \cdot$$

$$[\Psi k - \Omega \chi (\Pi \Xi - \text{ΡΟΚΗΓΑ} + \text{ΡΟΚΗΔΒ} + \text{ΡΟΚΘΖΑ} + \text{ΡΟΛΙΓΑ} - \text{ΡΟΛΙΒΔ})]^{(-1)}$$

ή αλλιώς

$$P_1 = \left[\begin{aligned} & \{(a_m - a_{i3})2 \cdot \Delta T \cdot U_m U_{i3} E_m E_{i3} k\} + \\ & \{(\alpha_{i3} - \alpha_f)2 \cdot \Delta T \cdot U_{i3} U_f E_{i3} E_f \Omega (\Pi \Xi - \text{ΡΟΚΗΓΑ} + \text{ΡΟΚΗΔΒ} + \text{ΡΟΚΘΖΑ} + \text{ΡΟΛΙΓΑ} - \text{ΡΟΛΙΒΔ})\} + \\ & \{(a_f - a_m)2 \cdot \Delta T \cdot U_f U_m E_f E_m \Omega \Phi \Xi\} + \\ & \{(a_m - a_{i2})2 \cdot \Delta T \cdot U_m U_{i2} E_m E_{i2} \Omega \Phi \text{Ρ} (\text{ΚΗΓΑ} - \text{ΚΗΔΒ} - \text{ΚΘΖΑ} - \text{ΛΙΓΑ} + \text{ΛΙΒΔ})\} + \\ & \{(a_{i2} - a_f)2 \cdot \Delta T \cdot U_{i2} U_f E_{i2} E_f \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi (\text{ΗΓΑ} - \text{ΗΒΔ} - \text{ΘΖΑ})\} + \\ & \{(a_f - a_m)2 \cdot \Delta T \cdot U_f U_m E_f E_m \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda (\Gamma \text{Α} - \Delta \text{Β})\} + \\ & \{(a_m - a_{i1})2 \cdot \Delta T \cdot U_m U_{i1} E_m E_{i1} \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda \Theta \text{Α}\} + \\ & \{(a_{i1} - a_f)2 \cdot \Delta T \cdot U_{i1} E_{i1} E_f \Omega \Phi \text{Ρ}\Xi \Lambda \Delta \Theta\} \end{aligned} \right] \cdot$$

$$[\Psi k - \Omega \chi (\Pi \Xi - \text{ΡΟΚΗΓΑ} + \text{ΡΟΚΗΔΒ} + \text{ΡΟΚΘΖΑ} + \text{ΡΟΛΙΓΑ} - \text{ΡΟΛΙΒΔ})]^{(-1)}$$

όπου

$$\Xi = \{[\text{ΝΚ}(\text{ΗΓΑ} - \text{ΗΒΔ} - \text{ΘΖΑ})] + [\text{ΝΛ}(\text{ΙΒΔ} - \text{ΙΓΑ})] + [\text{ΞΜ}(-\text{ΗΓΑ} + \text{ΗΔΒ} + \text{ΘΖΑ})]\}$$

και

$$k = \Xi (\Upsilon \Pi - \Phi \Sigma) - [\Upsilon \text{ΡΟ}[(\text{Κ}(\text{ΗΓΑ} + \text{ΗΒΔ} + \text{ΘΖΑ}) + \Lambda(\text{ΙΓΑ} - \text{ΙΒΔ}))]]$$

Και τελικά

$$\alpha_c = \alpha_m - \frac{P_1 n^3 3(1 - \nu_m)}{2(q^3 - n^3)E_m \Delta T}$$

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, η οποία δημιουργείται κατά την παραγωγή του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου υλικού.

Όπως και στο 5^ο κεφάλαιο και εδώ χρησιμοποιούμε διαφορετικές μεταβολές του μέτρου ελαστικότητας, του λόγου Poisson και του συντελεστή θερμικής διαστολής.

Για το μέτρο ελαστικότητας και τον λόγο Poisson ισχύουν οι ίδιες τιμές όπως στο κεφάλαιο 5 για το κάθε ένα από τα τέσσερα εννιαφασικά μοντέλα.

Για τον συντελεστή θερμικής διαστολής για την πρώτη ενδιάμεση φάση του κυβικού εννιαφασικού κυβικού μοντέλου 2, δηλαδή την δεύτερη φάση του εννιαφασικού κυβικού μοντέλου 2 έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα για διαφορετική μεταβολή και διαφορετική επίδραση n . Θεωρούμε και πάλι την ενδιάμεση φάση σαν αλλοιωμένη μήτρα.

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Γραμμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	3	6	9	12	15
75,23	8,726	11,426	14,126	16,826	19,526
75,47	14,452	16,852	19,252	21,652	24,052
75,70	20,178	22,278	24,378	26,478	28,578
75,94	25,904	27,704	29,504	31,304	33,104
76,17	31,63	33,13	34,63	36,13	37,63
76,41	37,356	38,556	39,756	40,956	42,156
76,64	43,082	43,982	44,882	45,782	46,682
76,88	48,808	49,408	50,008	50,608	51,208
77,11	54,534	54,834	55,134	55,434	55,734
77,35	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

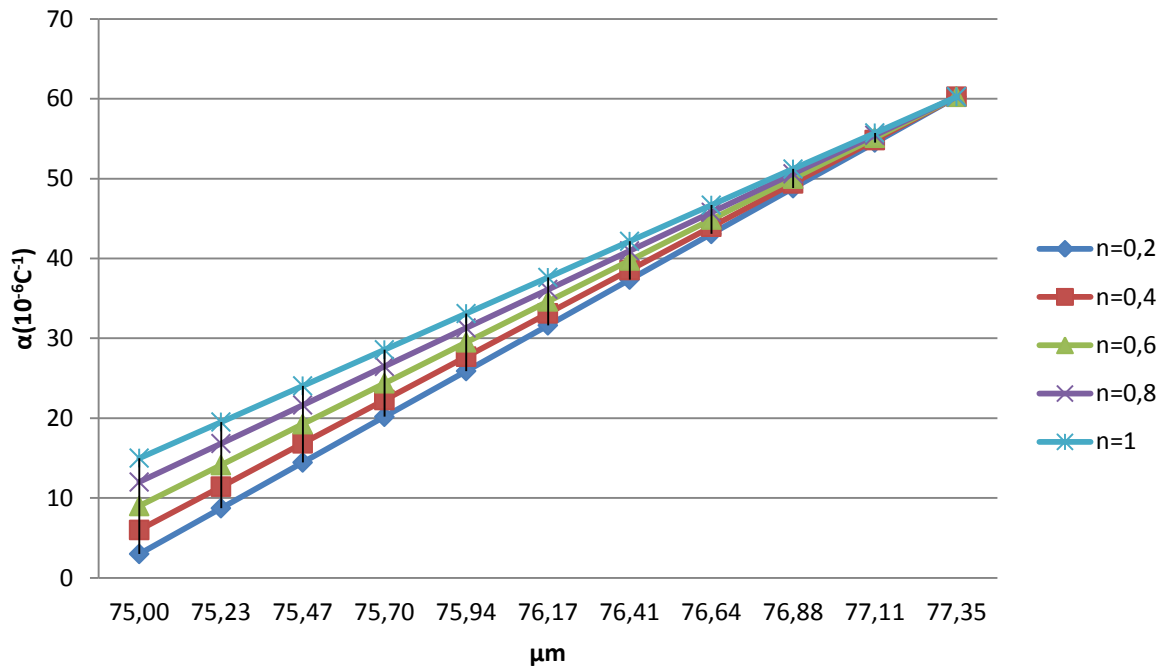
r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$				
	(Παραβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	3	6	9	12	15
75,23	13,8794	16,3094	18,7394	21,1694	23,5994
75,47	23,61359999	25,5336	27,4536	29,3736	31,2936
75,70	32,2026	33,6726	35,1426	36,6126	38,0826
75,94	39,6464	40,7264	41,8064	42,8864	43,9664
76,17	45,94499999	46,695	47,445	48,195	48,945
76,41	51,0984	51,5784	52,0584	52,5384	53,0184
76,64	55,1066	55,3766	55,6466	55,9166	56,1866
76,88	57,9696	58,0896	58,2096	58,3296	58,4496
77,11	59,6874	59,7174	59,7474	59,7774	59,8074
77,35	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$ (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	3	6	9	12	15
75,23	8,886712528	11,57829238	14,26987	16,96145	19,65303
75,47	14,73682292	17,12190031	19,50698	21,89206	24,27713
75,70	20,55067149	22,63114627	24,71162	26,7921	28,87257
75,94	26,32859436	28,10634876	29,8841	31,66186	33,43961
76,17	32,07092348	33,54782236	35,02472	36,50162	37,97852
76,41	37,77798676	38,95587778	40,13377	41,31166	42,48955
76,64	43,45010807	44,33082193	45,21154	46,09225	46,97296
76,88	49,08760733	49,67295798	50,25831	50,84366	51,42901
77,11	54,69080058	54,98258539	55,27437	55,56616	55,85794
77,35	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$ (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	3	6	9	12	15
75,23	8,806027383	11,50183454	14,19764	16,89345	19,58925601
75,47	14,59397641	16,98653789	19,3791	21,77166	24,16422236
75,70	20,3639593	22,45421641	24,54447	26,63473	28,72498774
75,94	26,11608727	27,90497546	29,69386	31,48275	33,27164006
76,17	31,85047046	33,33891944	34,82737	36,31582	37,80426638
76,41	37,56721802	38,75615176	39,94509	41,13402	42,32295298
76,64	43,26643809	44,1567749	45,04711	45,93745	46,82778533
76,88	48,94823783	49,5408904	50,13354	50,7262	51,31884813
77,11	54,6127234	54,90859887	55,20447	55,50035	55,7962253
77,35	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

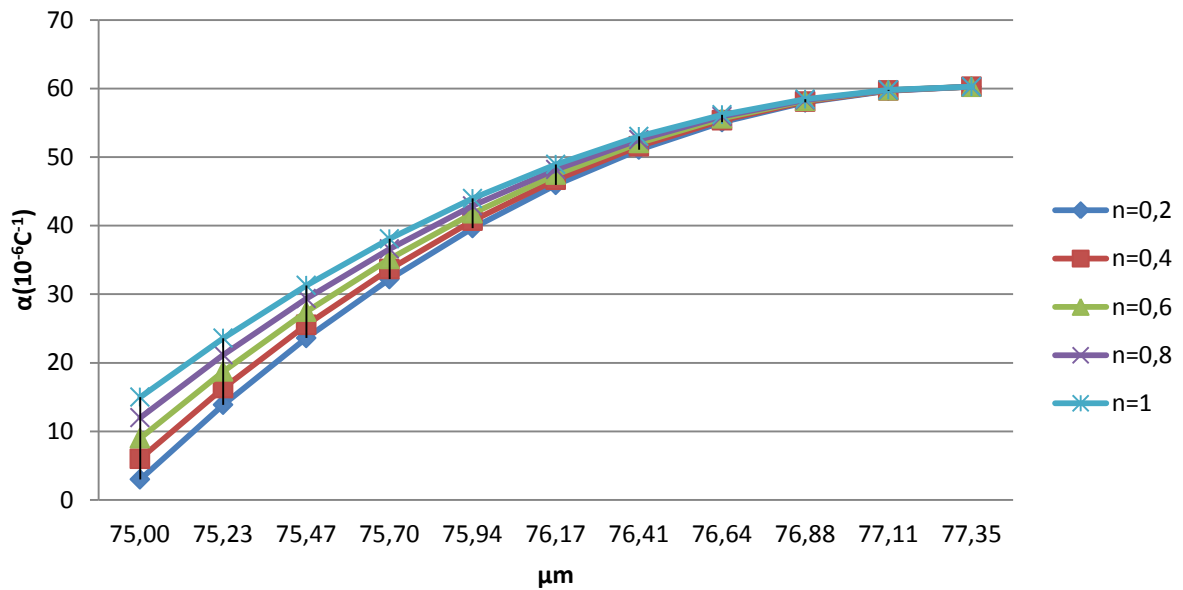
r (μm)	Συντελεστής θερμικής διαστολής $\alpha(10^{-6}\text{C}^{-1})$ (Εκθετικό Μοντέλο)				
	$\eta= 0,2$	$\eta= 0,4$	$\eta= 0,6$	$\eta= 0,8$	$\eta= 1$
75,00	3	6	9	12	15
75,23	4,0495992	7,556819312	10,88482	14,10152	17,23793
75,47	5,4664179	9,517586351	13,16436	16,57108	19,80974
75,70	7,3789338	11,98711339	15,9213	19,47312	22,76526
75,94	9,9605749	15,09740833	19,2556	22,88339	26,16173
76,17	13,445445	19,01473113	23,28819	26,89089	30,06493
76,41	18,149555	23,94848124	28,16531	31,60021	34,55047
76,64	24,499474	30,16239091	34,0638	37,13426	39,70523
76,88	33,071017	37,98862302	41,19759	43,63747	45,62906
77,11	44,641455	47,84552668	49,82536	51,27957	52,4367
77,35	60,26	60,26	60,26	60,26	60,26

Συντελεστής θερμικής διαστολής α (Γραμμικό Μοντέλο)



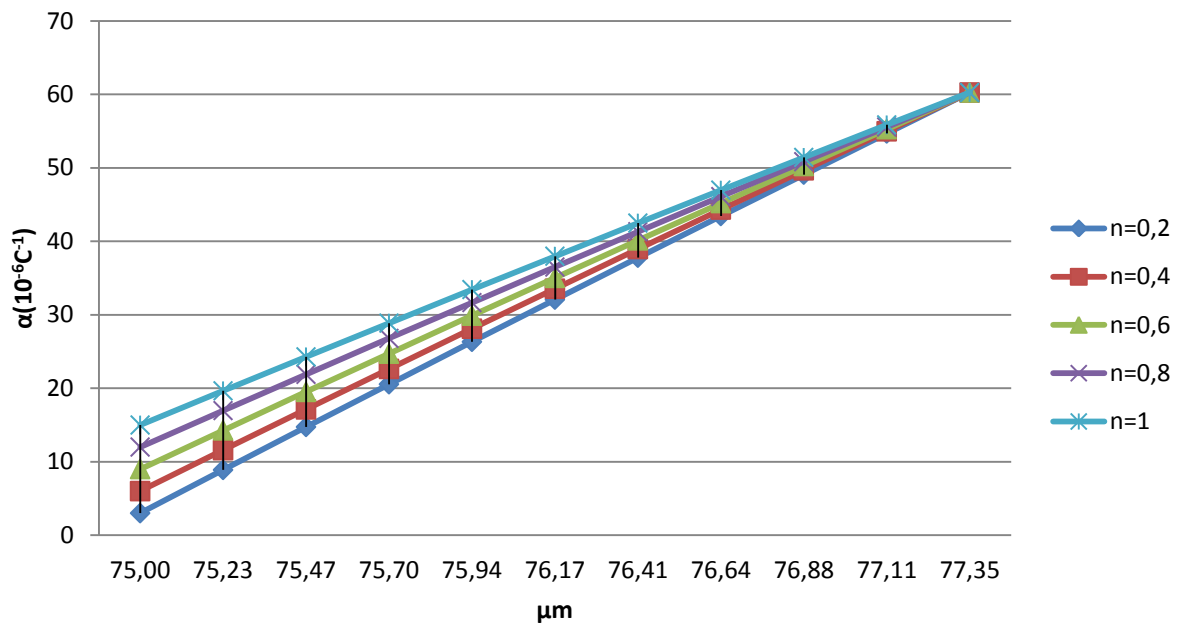
Διάγραμμα 9.1

Συντελεστής θερμικής διαστολής α (Παραβολικό Μοντέλο)



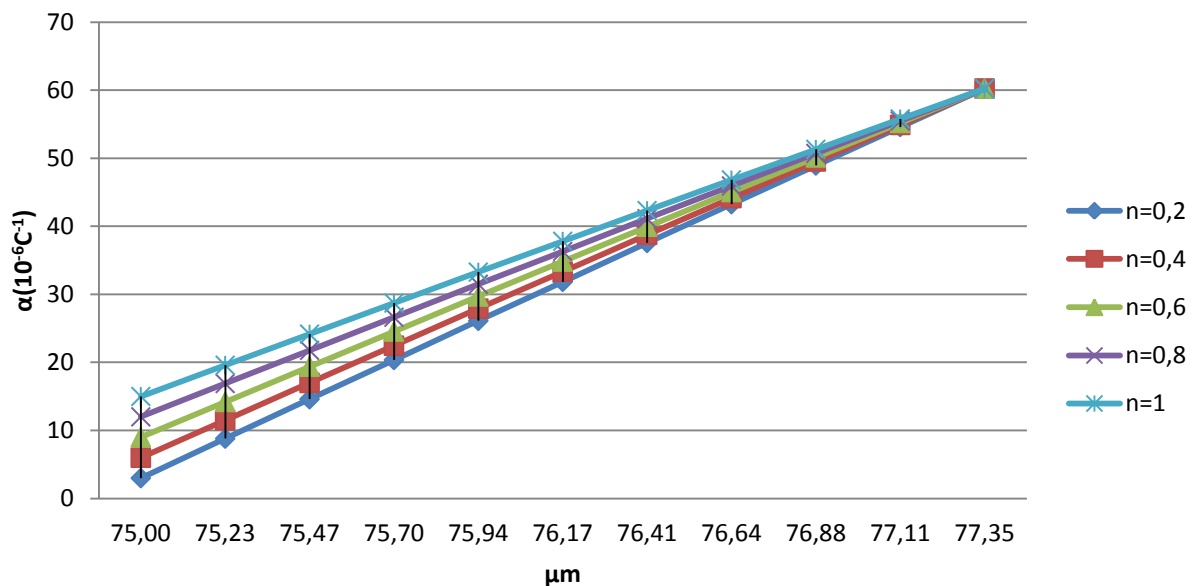
Διάγραμμα 9.2

Συντελεστής θερμικής διαστολής α (Υπερβολικό Μοντέλο)



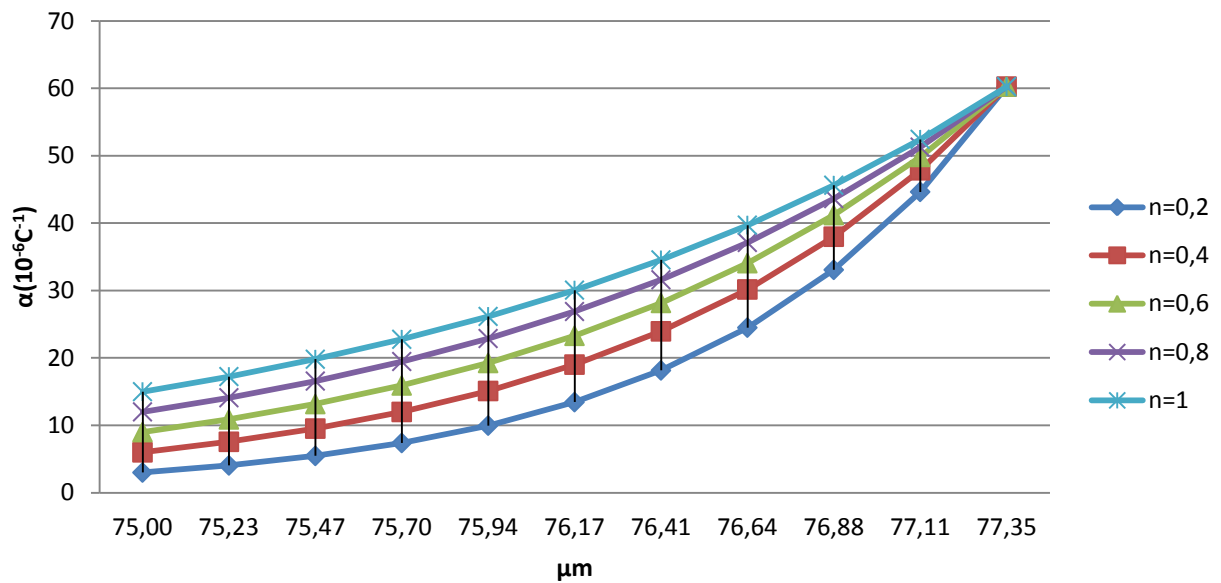
Διάγραμμα 9.3

Συντελεστής θερμικής διαστολής α (Λογαριθμικό Μοντέλο)



Διάγραμμα 9.4

Συντελεστής θερμικής διαστολής α (Εθετικό Μοντέλο)



Διάγραμμα 9.5

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε πως ο η τιμή του συντελεστή θερμικής διαστολής αυξάνεται ανάλογα με την ακτίνα. Αυτό είναι και αναμενόμενο διότι όσο αυξάνει η ακτίνα απομακρύνεται από την περιοχή του εγκλείσματος και φτάνει στην περιοχή της μήτρας .

9.2 Σύγκριση με άλλα θεωρητικά μοντέλα

9.2.1 Τύποι συντελεστή θερμικής διαστολής α_c

Στις παρακάτω σχέσεις το σύμβολο γ εκφράζει το συντελεστή κυβικής διαστολής ο οποίος για ένα ομογενές και ισότροπο υλικό, συνδέεται με το συντελεστή γραμμικής διαστολής α με τη σχέση

$$\gamma = 3\alpha$$

Εξίσωση Kerner[56]:

$$\gamma_c = U_f \gamma_f + U_m \gamma_m + U_m \nu_f (\gamma_m - \gamma_c) q$$

Όπου η παράμετρος q δίνεται από τη σχέση :

$$q = \frac{\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f}}{\frac{U_f}{K_f} + \frac{U_m}{K_m} + 3 \frac{1}{4G_m}}$$

Και K το μέτρο διόγκωσης.

Εξίσωση Blackburn[57]:

$$\gamma_c = \gamma_f + \frac{\frac{3}{2}(1-\nu_f)U_m(\gamma_m - \gamma_f)}{\frac{1}{2}(1+\nu_f) + U_m(1-2\nu_f) + (1-2\nu_m)\frac{E_f}{E_m}U_f}$$

Εξίσωση Tummala-Friedberg[58]:

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$

Όπου

$$q = \frac{\frac{1+\nu_m}{2E_m}}{\frac{1+\nu_m}{2E_m} + \frac{1-2\nu_f}{E_f}}$$

Εξίσωση Wang-Kwei[59]:

$$\gamma_c = \gamma_m - U_f q (\gamma_m - \gamma_f)$$

Όπου

$$q = \frac{\frac{3E_f}{E_m} U_f}{\frac{E_f}{E_m} [2U_f(1-2\nu_m) + (1+\nu_m)] + 2U_m(1-2\nu_f)}$$

Εξίσωση Turner[60]:

$$\gamma_c = \frac{U_m \gamma_m k_m + U_f \gamma_f k_f}{U_m k_m + U_f k_f}$$

Εξίσωση Fahmi-Ragai[61]:

$$a_c = a_m - \frac{3U_f (a_m - a_f)(1-\nu_m)}{2(1-2\nu_f)(1-U_f) \frac{E_m}{E_f} + 2U_f(1-2\nu_m) + (1+\nu_m)}$$

9.2.2 Εφαρμογή των Μοντέλων και των Θεωρητικών Σχέσεων

Η εφαρμογή των θεωρητικών σχέσεων έγινε για ένα κοκκώδες σύνθετο υλικό αποτελούμενο από εποξειδική ρητίνη και κόκκους σιδήρου.

Οι τιμές των ελαστικών σταθερών των παραπάνω υλικών παραθέτονται στον παρακάτω Πίνακα.

Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολ	Μονά	Σίδηρο	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	$\lambda \mu M$	N/m^2 N/m^2	$11,20 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m^2	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m^2	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr/cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	a	C^{-1}	$15,00 \times 10^{-6}$	$60,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 9.1

Η διάμετρος των σφαιρικών εγκλεισμάτων σιδήρου είναι ίση με 150 μ m, άρα λοιπόν

η ακτίνα r_f , της οποίας η τιμή απαιτείται στους υπολογισμούς είναι:

$$r_f = 75 \mu m$$

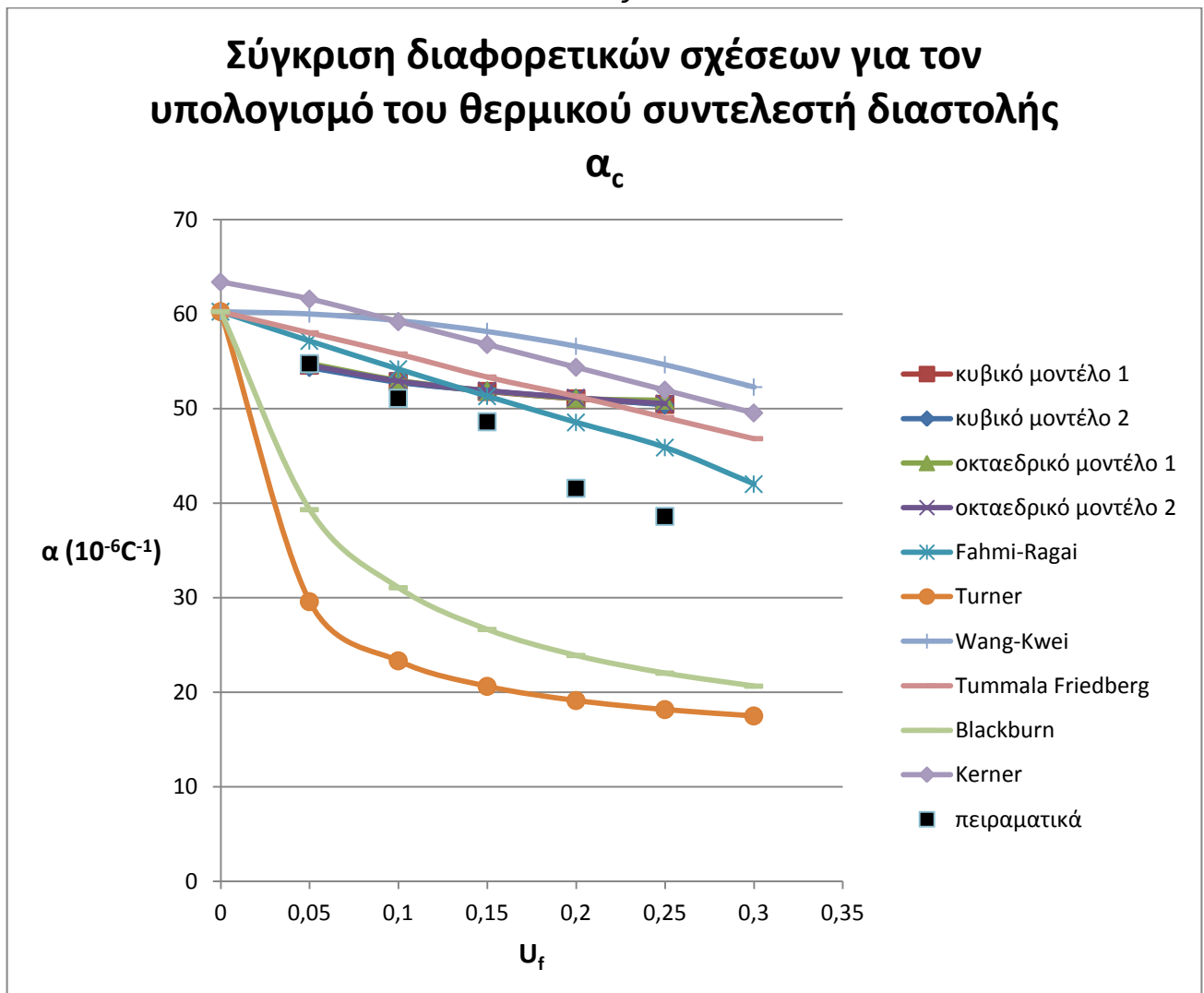
Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα.

U_f	Κυβικό Μοντέλο 1 ($10^{-6}C^{-1}$)	Κυβικό Μοντέλο 2 ($10^{-6}C^{-1}$)	Οκταεδρικό Μοντέλο 1 ($10^{-6}C^{-1}$)	Οκταεδρικό Μοντέλο 2 ($10^{-6}C^{-1}$)
0,05	54,59380983	54,34361833	54,77259899	54,60217
0,1	52,86137394	52,78014473	52,99527422	52,9254
0,15	51,8129061	51,85364687	51,89465077	51,91562
0,2	51,02877092	51,11989905	51,09465613	51,15672
0,25	50,4479743	50,39392599	50,88470533	50,53889

Πίνακας 9.2

α ($10^{-6}C^{-1}$)	Κατ' όγκον περιεκτικότητα U_f						
	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%
Kerner	63,39	61,59	59,19	56,78	54,37	51,96	49,54
Blackburn	60,26	39,31	31,05	26,63	23,88	22,01	20,64
Tummala Friedberg	60,26	58,02	55,78	53,34	51,30	49,06	46,82
Wang-Kwei	60,26	60,02	59,31	58,16	56,60	54,64	52,28
Turner	60,26	29,58	23,32	20,62	19,12	18,16	17,49
Fahmi-Ragai	60,26	57,16	54,18	51,31	48,54	45,88	42,01
Πειραματικά αποτελέσματα	-	54,76	51,09	48,61	41,57	38,6	-

Πίνακας 9.3



Διάγραμμα 9.6

Στο διάγραμμα 9.6 παρουσιάζεται η μεταβολή του συντελεστή θερμικής διαστολής α_c του σύνθετου υλικού, συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος U_f . Στο διάγραμμα απεικονίζονται τα παρόντα κυβικά και οκταεδρικά μοντέλα 1 και 2, τα πειραματικά αποτελέσματα και οι τιμές από κάποια θεωρητικά μοντέλα γνωστών ερευνητών. Παρατηρούμε ότι τα μοντέλα Turner και Blackburn χαρακτηρίζονται από μεγάλη απόκλιση σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα. Το μοντέλο Tummala-Friedberg παρουσιάζει πολύ καλή προσέγγιση, όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο είναι το Fahmi-Ragai. Τα αναπτυχθέντα μοντέλα της παρούσας εργασίας δίνουν παραπλήσια αποτελέσματα μεταξύ τους και παρουσιάζουν σημαντική σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα για χαμηλές τιμές της περιεκτικότητας U_f . Όμως, αυξανόμενης της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων τα αποτελέσματα αποκλίνουν όλο και περισσότερο από τα πειραματικά δεδομένα, μικραίνοντας έτσι το γενικό βαθμό σύγκλισης των μοντέλων αυτών.

Μια πιο εποπτική εικόνα του βαθμού σύγκλισης του κάθε θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα, δίνει ο δείκτης προσαρμογής που χρησιμοποιήθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια. Για το λόγο αυτό στο πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζεται ο δείκτης προσαρμογής για κάθε μοντέλο που παρουσιάστηκε στην εργασία αυτή.

Ερευνητής	r (%)
Fahmi-Ragai	0,9821
Tummala Friedberg	0,9668
Kerner	0,9422
Wang-Kwei	0,9298
Blackburn	0,2102
Turner	0,1203
Κυβικό μοντέλο 1	0,96851
Κυβικό μοντέλο 2	0,968444
Οκταεδρικό μοντέλο 1	0,967222
Οκταεδρικό μοντέλο 2	0,967937

Πίνακας 9.7

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο υψηλός δείκτης προσαρμογής των κυβικών και οκταεδρικών μοντέλων οφείλεται στη πολύ ικανοποιητική σύγκλιση που παρουσιάζουν με τις πειραματικές τιμές για μικρές περιεκτικότητες εγκλεισμάτων κάτι που παύει να ισχύει για τιμές του U_f άνω του 15%.

10. Γενικά συμπεράσματα

Τα συμπεράσματα που εξάγονται από τα αποτελέσματα της δουλειάς που έχει γίνει στην παρούσα εργασία είναι τα εξής:

1) Τα ακριβή θεωρητικά μοντέλα που παρουσιάστηκαν για το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο Poisson, προσεγγίζουν σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό τις πειραματικές τιμές και μάλιστα με παραπλήσιο βαθμό προσέγγισης μεταξύ τους.

2) Το μοντέλο Counto παρουσιάζει τη καλύτερη σύγκλιση με τις πειραματικές τιμές σε σχέση με όλα τα μοντέλα που εξετάστηκαν παραπάνω. Οι τιμές που προέκυψαν από τα μοντέλα που εισήχθησαν στην εργασία αυτή, βρίσκονται πολύ κοντά στο θεωρητικό μοντέλο Counto, με ελάχιστα μεγαλύτερη απόκλιση από τις δοθείσες τιμές του συγκεκριμένου ερευνητή.

3) Τα προσεγγιστικά θεωρητικά μοντέλα που ερευνώνται στην εργασία παράγουν αποτελέσματα με μεγαλύτερη απόκλιση από ότι τα αντίστοιχα ακριβή, όπως αναμενόταν λόγω των περισσότερων απλοποιητικών παραδοχών που θεωρήσαμε για την ανάπτυξή τους. Παρόλα αυτά, η σύγκλισή τους κυμαίνεται σε αρκετά ικανοποιητικά επίπεδα, με βασικό πλεονέκτημα τη πιο συμπαγή μορφή του τελικού τύπου υπολογισμού των ελαστικών σταθερών.

4) Τα θεωρητικά μοντέλα που αναπτύχθηκαν για τον προσδιορισμό του συντελεστή θερμικής διαστολής, παράγουν τιμές που συγκλίνουν σε μεγάλο βαθμό με τις πειραματικές για μικρές περιεκτικότητες εγκλεισμάτων. Αυξανόμενης της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων σιδήρου, τα αποτελέσματα παρουσιάζουν σημαντική απόκλιση με τις πειραματικές τιμές, αυτή όμως η απόκλιση κυμαίνεται σε χαμηλότερες τιμές σε σχέση με τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα των άλλων ερευνητών, όπως αυτά των Turner, Wang-Kwei και Blackburn.

5) Το μοντέλο με την καλύτερη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα του συντελεστή θερμικής διαστολής στο μεγαλύτερο μήκος μεταβολής της περιεκτικότητας εγκλεισμάτων, είναι το Fahmi-Ragai. Πρέπει να αναφερθεί όμως ότι για τις χαμηλές τιμές περιεκτικότητας εγκλεισμάτων, τα μοντέλα που εισήχθησαν στην παρούσα εργασία, όλα συγκλίνουν ακριβέστερα στα πειραματικά δεδομένα από ότι ακόμα και το μοντέλο Fahmi-Ragai.

Τέλος, στους δυο πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται συνοπτικά τα τελικά αποτελέσματα όλων των μοντέλων που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία.

U f	Κυβικό Μοντέλο 1		Κυβικό Μοντέλο 2		Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 1	Προσεγγιστικό Κυβικό μοντέλο 2	Πειραματικές Τιμές	
	Εc	α	Εc	α	Εc	Εc	Εc	α
0,05	4,787	54,593	4,859	54,343	3,782	3,782	4,33	54,76
0,1	5,488	52,861	5,523	52,780	4,097	4,105	4,86	51,09
0,15	6,118	51,812	6,117	51,853	4,498	4,514	5,25	48,61
0,2	6,692	51,028	6,667	51,119	4,940	4,965	6,37	41,57
0,25	7,437	50,447	7,518	50,394	5,563	5,710	7,07	38,6

Πίνακας 10.1

U f	Οκταεδρικό Μοντέλο 1		Οκταεδρικό Μοντέλο 2		Προσεγγιστικό Οκταεδρικό μοντέλο 1	Προσεγγιστικό Οκταεδρικό μοντέλο 2	Πειραματικές Τιμές	
	Εc	α	Εc	A	Εc	Εc	Εc	α
0,05	4,742	54,773	4,789	54,602	3,782	3,782	4,33	54,76
0,1	5,433	52,995	5,477	52,925	4,098	4,106	4,86	51,09
0,15	6,086	51,895	6,110	51,916	4,501	4,518	5,25	48,61
0,2	6,673	51,095	6,685	51,157	4,946	4,973	6,37	41,57
0,25	7,214	50,885	7,536	50,539	5,386	5,735	7,07	38,6

Πίνακας 10.2

BIBΛIOΓΡΑΦΙΑ

1. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill (1983).
2. Counto, Mag. Concr. Res 16 (1964) 129.
3. Paul, Trans Amer. Inst. Mech. Eng. 36 (1960) 218.
4. A. Einstein, "Über die von Molekularkinetischen theorie der. Warme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Ann Physic, Vol. 17, p. 549, (1905), "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Ann Physic, Vol 19, p. 289, (1906), "Berichtigung zu meiner Arbeit Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Vol. 34, p. 591, (1911).
5. Guth, J. Appl. Phys 15 (1945) 20.
6. H. M. Smallwood, "Limiting Law of the Reinforcement of Rubber", Jnl. Appl. Phys, Vol. 15, pp. 758-762, (1944).
7. E. H. Kerner, "The Elastic and Thermoelastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. 698, pp. 808-813, (1956).
8. K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa and K. Tanaka, "Analysis of the Effect of Intefacial Slippage on the Elastic Moduli of a Particle - Filled Polymer", Jnl. Pol. Phys. Ed., Vol. 16, pp. 415-421, (1978).
9. M Mooney, "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical Particles", Jnl. Colloid Sci. Vol. 6, pp. 162-169, (1951).
10. H. Eilers and Van Dyck, kolloid Z, Vol. 97, pp. 313-318, (1941).
11. P. S. Thcocharis, "The Mesophase and its influence on the Mechanical Behaviour of Composites", Advances in Polymer Science 66, Springer - Verlag Berlin, pp. 149-186, (1985).
12. P. S. Theocharis, "The Adhesion Quality and the Extent of the Mesophase in Particulates", Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 204 2331, (1984).
13. P. S. Theocharis and E. Sideridis, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 29, 2997-3011 (1984).
14. Z. Hashin and B. W. Rosen, J. Appl. Mech. 31 (1964) 223.
15. R. Hill, J. Mech, Phys. Solids 13 (1965) 213.
16. T .Lewis and L. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 14 (1970) 1449.
17. F. Bueche, "Molecular Basis for the Mullins Effect", Jnl. Appl. Polym. Sci., Vol. 4, pp. 107-114,(1960).
18. A. M. Bueche, J. Polym. Sci. 25 (1957) 139.

19. T. T. Wu, *Int. J. Solids Struc.* 2 (1966) 1.
20. T. S. Chow, *J. Polym. Phys.* 16 (1978) 959.
21. S. Ahmed and F. R. Jones, *Composites* 19 (1988) 277.
22. R. A. Dickie, *J. Appl. Polym. Sci.*, 17 (1973) 454.
23. R. M. Christensen, "Mechanics of Composite Materials", (Wiley New York, 1979).
24. Y. Sato and Furukawa, "A Molecular Theory of Filler Reinforcement based upon the conception of the internal Deformation", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 35, pp. 857-862, (1962).
24. J. Spanoudakis and R. J. Young, *J. Mater. Sci.* 19 (1984) 487.
25. L. E. Nielsen, *J. Appl. Polym. Sci.* 10 (1966) 97.
26. J. Broutman and R. H. Krock, "Modern Composite Materials" (Addison Wesley), Reading, Mass, (1967).
27. L. F. Nielsen, *J. Compos. Mater.* 1 (1967) 100.
28. L. Nicolais and M. Narkis, *ibid* 11 (1971) 194.
29. M. R. Piggott and J. Leidner, *J. Appl. Polym. Sci.* 18 (1974) 1619.
30. G. Landon, G. Lewis and G. Boden, *J. Mater. Sci* 12 (1977) 1605.
31. J. Leidner and R. T. Woodhams, *J. Appl. Polym. Sci.* 18 (1974) 1639.
32. H. Hojo and W. Toyoshima, 31st ANTEC, SPE Montreal, Canada (1973) (Technomic, 1973), p. 163.
33. H. Hojo, W. Tanura and N. Kawanura, *Polym. Eng. Sci.* 14 (1974) 604.
34. M. Schragger, *Jnl, Appl. Pol. Sci.*, Vol 32, p 2379 (1978)
35. Passmore, *J. Appl. Polym. Sci.*, 17 (1989).
36. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, *J. Appl. Polym. Sci.*, 18, p. 1213 (1974).
37. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, *Adsorption of Polymer*, New York, (1974).
38. Yu.S. Lipatov, *Plaste Kautschuk*, 10, p. 738 (1973).
39. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, *Vysokomol, Soedin, B10*, p. 848 (1968).
40. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, *Vysokomol, Soedin*, 8, p. 592, (1966).
41. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, *J. Appl. Polym. Sci.*, 16, p. 2131 (1972).

42. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, J. Appl. Polymer Sci., 20, p. 1787 (1976).
43. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, Colloid and Polymer Sci., 257, 3, p. 239 (1979).
44. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, Colloid and Polymer Sci., 258, 9, p. 1044 (1980).
45. R.F. Landel and T.L. Smith, American Rocket Society Jnl., p. 599 (1961).
46. S. Turner, Appl. Mat. Res., p. 10, (1965).
47. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, J. Appl. Pol. Sci., 9, p. 2143 (1965).
48. C.A. Kumins and J. Roteman, J. Pol. Sci., 1-A, p. 527 (1963).
49. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, J. Appl. Pol. Sci., 21, p. 689 (1977).
50. S. Strella and P.F. Erhardt, J. Appl. Pol. Sci., 13, p. 1373 (1969).
51. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 569 (1963).
52. S. Strella, J. Appl. Pol. Sci., 7, p. 1281 (1963).
53. Αιμ. Σιδερίδης, "Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως", Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
54. Yu.S. Lipatov, Physical Chemistry of Filled Polymers, Translated from the Russian by R.J. Moseley, International Polymer Science and Technology Monograph No 2, Originally Published "Khimiya", Moscow, (1977).
55. Γ.Ι. Τσαμασφύρος, Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι, Εκδόσεις Συμμετρία 1991
56. Kerner E.H.,(1956),Proc.Phys.Soc. 69B:808
57. Artur C.,Coulson JA,(1964), J.Appl.Phys. 11:5104
58. Tummala RR.,Friedberg AL.,(1970),J. Appl.Phys. 11:5104
59. Wang TT., Kwei TK.,(1969) J.Polym.Sc.A-2, 7:889.
60. Turner PS, (1946) J. Res.NBS 37:239.
61. Fahmi AA.,Ragai Al.,(1970)J.Appl. Phys. 41:5108.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Αιμίλιο Σιδερίδη για την υποδειγματική συνεργασία και για την άριστη επιστημονική καθοδήγηση κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την υποστήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.