



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Δ.Μ.Π.Σ.ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΒΑΘΜΙΔΟΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γούσιας Νίκος

Επιβλέπων : Λαζόπουλος Κωνσταντίνος

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	2
ABSTRACT.....	3
1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1.1. Σύγχρονη τεχνολογία και βαθμιβοελαστικότητα	4
1.2. Το αντικείμενο της εργασίας.....	5
1.3. Η δομή της εργασίας.....	6
2.ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	7
3.ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	11
4.ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ.....	13
5. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟ-ΠΛΑΚΑΣ.....	18
6. ΣΤΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΒΑΘΜΙΔΟΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΜΙΚΡΟ-ΠΛΑΚΑΣ.....	33
6.1.Κυκλική μικρό-πλάκα με πακτωμένες πλευρές.....	36
6.2. Κυκλική μικρό-πλάκα με απλώς στηριζόμενες πλευρές.....	37
7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ.....	39
8.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	44
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	46
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	48

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία τίθεται υπό μελέτης το καμπτικό πρόβλημα για λεπτές βαθμιδοελαστικές πλάκες. Υιοθετώντας τη θεωρία πλακών του Kirchhoff, και με βάση την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, αποκτούνται η εξίσωση ισορροπίας και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, μέσω μιας μεταβολικής μελέτης. Αποδεικνύεται ότι, νέοι όροι εισάγονται, οι οποίοι αναδεικνύουν τη σημασία της διατομής στην κάμψη λεπτών πλακών. Οι όροι αυτοί αυξάνουν ιδιαίτερα την ακαμψία της λεπτής πλάκας. Επιπλέον, αναλύονται οι φυσικές συχνότητες και οι στατικές παραμορφώσεις δύο κυκλικών βαθμιδοελαστικών πλακών (πακτωμένη και απλώς στηριζόμενη στις άκρες). Τα αποτελέσματα είναι πολύ σημαντικά στο σχεδιασμό της δομής των μικρό-κατασκευών στα μικρό-ηλεκτρομηχανικά και νάνο-ηλεκτρομηχανικά συστήματα.

ABSTRACT

Bending of strain gradient elastic thin plates is studied, adopting Kirchhoff's theory of plates. Based on the principal of minimum potential energy, the governing equation, with its boundary conditions are derived through a variational method. It turns out that new terms are introduced, indicating the importance of the cross-section area in bending of thin plates. Those terms are missing from the existing strain gradient plate theories; however they strongly increase the stiffness of the thin plate. In addition, the static deformations and the natural frequencies of two circular gradient elastic micro-plates, clamped and simply supported at edges, are analyzed. The results are very important for the design of the structure of the micro-structures in the MEMS or NEMS.

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1)Σύγχρονη τεχνολογία και βαθμιδοελαστικότητα

Η σύγχρονη τεχνολογία εστιάζει την έρευνά της σε όλο και μικρότερους όγκους και κλίμακες (μίκρο-κλίμακα και νάνο-κλίμακα). Στις κλίμακες αυτές παρουσιάζονται δραστικές αλλαγές των τάσεων και των παραμορφώσεων από σημείο σε σημείο και εμφανίζονται αντίστοιχα κλίσεις (βαθμίδες) αυτών των πεδίων. Οι κλίσεις αυτές σχετίζονται με τη μικροδομή των υλικών και καθορίζονται από εσωτερικά και γεωμετρικά μεγέθη. Τέτοια υλικά με έντονη μικροδομή είναι τα κοκκώδη, τα αφρώδη, τα πολυμερή, τα πολυκρυσταλλικά, κτλ...

Η κλασσική θεωρία ελαστικότητας δεν μπορεί να περιγράψει τα φαινόμενα κλίμακας (size effects) που παρουσιάζουν τα μικροδομικά υλικά, καθώς δεν περιλαμβάνει όρους εσωτερικού μεγέθους-μήκους (intrinsic length). Η τεχνολογική εξέλιξη και έμφαση σε μίκρο- και νάνο- κατασκευές καθιστά ανίσχυρη την κλασσική θεωρία ελαστικότητας, η οποία δεν μπορεί να προβλέψει συγκεκριμένα πειραματικά επιβεβαιωμένα φαινόμενα, και γίνεται φανερή η ανάγκη για την επέκτασή της.

Έτσι προέκυψαν μη κλασσικές θεωρίες που συγκεντρώνουν το ενδιαφέρον των ερευνητών για περισσότερο από έναν αιώνα. Η βασική ιδέα των θεωριών αυτών είναι ότι η τάση δεν εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη παραμόρφωση. Αυτό σημαίνει ότι το *αξίωμα της τοπικής δράσης* (axiom of local action) δεν ισχύει σε αυτές τις περιπτώσεις. Οι μη κλασσικές θεωρίες, θεωρούν πως η τάση εξαρτάται και από την παραμόρφωση της γειτονιάς. Αναπτύσσοντας την ενέργεια παραμόρφωσης σε ανάπτυγμα Taylor γύρω από το συγκεκριμένο σημείο η πρώτη προσέγγιση περιλαμβάνει τις παραγώγους της παραμόρφωσης. Αυτή είναι θεωρία πρώτης βαθμίδας. Για θεωρίες ανώτερης βαθμίδας στο ανάπτυγμα της ενέργειας παραμόρφω-

σης συμπεριλαμβάνονται και παράγωγοι ανώτερης τάξης. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από αυτές τις μη κλασσικές θεωρίες οδηγούν σε λύση προβλημάτων συνοριακών τιμών με πρόσθετες οριακές συνθήκες, των οποίων η λύση επιτρέπει συμπεράσματα για τα φαινόμενα κλίμακας.

Ο πρώτος που τόνισε το ρόλο των βαθμιακών όρων στην ελαστικότητα ήταν ο Voigt (1887), ενώ η πρώτη ολοκληρωμένη θεωρία γενικευμένης ελαστικότητας διατυπώθηκε το 1909 από τους αδελφούς Cosserat, οι οποίοι εισήγαγαν βαθμίδες του τανυστή περιστροφής και επιπλέον αντισυμμετρικούς τανυστές τάσης. Τη δεκαετία του '60 προέκυψε πληθώρα θεωριών από τους Tourin (1962), Kroner(1967), Mindlin(1968), Eringen(1972). Η πλέον ώριμη από αυτές αποδείχθηκε η θεωρία βαθμίδας του Mindlin, η οποία περιελάμβανε 5 επιπλέον σταθερές από αυτές της κλασσικής ελαστικότητας.

1.2) Το αντικείμενο της εργασίας

Η θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας έχει εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα μηχανικής επιλύοντας ιδιομορφίες σε προβλήματα ρωγμών (Altan and Aifantis (1997)), προβλήματα συγκεντρωμένων δυνάμεων (Lazar and Maugin, 2006), προβλήματα δυναμικής εξαρμώσεων (Fleck and Hutchinson, 1993), προβλήματα κάμψης λεπτών πλακών και λεπτών δοκών (Papargyri-Beskou et al.(2008), Lazopoulos (2004).

Η θεωρία λεπτών δοκών και λεπτών πλακών έχει βρει πολλές εφαρμογές στους τομείς της μικρομηχανικής και της νανομηχανικής. Οι λεπτές ταινίες (φιλμς), τα μικροηλεκτρομηχανικά (MEMS) και τα νανοηλεκτρομηχανικά (NEMS) συστήματα είναι τυπικές εφαρμογές της θεωρίας λεπτών κατασκευών, όπου έχουν παρατηρηθεί φαινόμενα κλίμακας. Πολλοί ερευνητές, Papargyri-Beskou et al.(2003), Park and Gao (2006), Altan and Aifantis (1997), Ru and Aifantis (1993) Yang et al. (2002), έχουν συσχετίσει τη θεωρία λεπτών δοκών και πλακών με τη θεωρία βαθμίδας του Mindlin(1965).

Στην παρούσα εργασία, η καμπτική θεωρία πλακών του Kirchhoff τίθεται υπό συζήτηση στα πλαίσια μίας απλοποιημένης θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας, η οποία περιλαμβάνει όρους φυσικού μήκους οι οποίοι αυξάνουν δραστικά την ακαμψία της

πλάκας. Με βάση την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας εξάγονται ταυτόχρονα οι συνθήκες ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες της νάνο-πλάκας. Οι συνθήκες αυτές εξετάζονται εν συνεχεία σε κυκλική νάνο-πλάκα απλώς στηριζόμενη, πακτωμένη και εντελώς ελεύθερης.

1.3) Η δομή της εργασίας

Η δομή της εργασίας είναι η ακόλουθη: στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας του Mindlin. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μορφοποιημένη θεωρία που θα χρησιμοποιηθεί ως βάση της καμπτικής θεωρίας νάνο-πλακών για τη συγκεκριμένη εργασία. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γενική καμπτική θεωρία βαθμιδοελαστικών δοκών, η οποία αποτελεί τη βάση για την επίλυση του καμπτικού προβλήματος της μικρο-πλάκας. Στο πέμπτο κεφάλαιο εξάγονται οι καταστατικές εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος κάμψης της βαθμιδοελαστικής νάνο-πλάκας. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η στατική ανάλυση της βαθμιδοελαστικής κυκλικής νάνο-πλάκας για τις περιπτώσεις που: α) η πλάκα είναι απλώς στηριζόμενη, β) η πλάκα είναι πακτωμένη. Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση των φυσικών συχνοτήτων της μικρο-πλάκας. Τέλος στο κεφάλαιο οκτώ παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

2.ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Τη δεκαετία του '60 ο Mindlin ανέπτυξε μια θεωρία ελαστικότητας ανώτερης τάξης. Η κύρια διαφορά ανάμεσα στη θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας και στη συμβατική θεωρία ελαστικότητας είναι ότι η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης, w εξαρτάται τόσο από τη συμβατική τροπή όσο και από τη βαθμίδα τροπής

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ijk}) \quad (2.1)$$

Όπου, ε_{ij} ο τανυστής τροπής και ε_{ijk} ο τανυστής βαθμίδας τροπής.

Στην εξίσωση (2.1) οι τανυστές τροπής και βαθμίδας τροπής ορίζονται αντίστοιχα ως ακολούθως:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad , \quad \varepsilon_{ijk} = \partial_{ij} u_k \quad (2.2)$$

Όπου, ∂_i , είναι ο τελεστής βαθμίδας και u_i , το διάνυσμα μετατόπισης.

Ο τανυστής τροπής περιλαμβάνει 6 ανεξάρτητες συμμετρικές συνιστώσες και ο τανυστής βαθμίδας τροπής περιλαμβάνει 18 ανεξάρτητες συνιστώσες που είναι συμμετρικές στους δύο πρώτες δείκτες.

Στις παραγωγίσεις του Mindlin (1965), ο τανυστής τάσεων του Cauchy, σ_{ij} , και ο διπλός τανυστής τάσης, μ_{ijk} , συνδέονται με τους τανυστές τροπής και βαθμίδας τροπής αντίστοιχα μέσω των ακόλουθων σχέσεων

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad , \quad \mu_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ijk}} \quad (2.3)$$

Η μεταβολή της ολικής ενέργειας παραμόρφωσης σώματος με όγκο V , μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\delta \int_V w dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \delta \varepsilon_{ijk}) dV \quad (2.4)$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης του Gauss στην εξίσωση (2.4) δίνει στη μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης την ακόλουθη μορφή

$$\delta \int_V w dV = - \int_V (\partial_i \sigma_{ik} - \partial_{ij} \mu_{ijk}) \delta u_k dV + \int_{\partial V} [n_j (\sigma_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta u_k + n_i \mu_{ijk} \partial_j \delta u_k] dS \quad (2.5)$$

Όπου n_i , το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια του συνόρου, ∂V , του όγκου V . Η βαθμίδα της μεταβολής των μετατοπίσεων στην επιφάνεια του συνόρου στην εξίσωση (2.5) μπορεί να αναλυθεί σε μία επιφανειακή και μία κάθετη βαθμίδα

$$\partial_j \delta u_k = D_j \delta u_k + n_j D \delta u_k \quad (2.6)$$

Όπου ο επιφανειακός βαθμιδικός τελεστής, D_j , και κάθετος βαθμιδικός τελεστής, D , ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$D_j = (\delta_{jk} - n_j n_k) \partial_k \quad , \quad D = n_k \partial_k \quad (2.7)$$

Η επιφάνεια του συνόρου θεωρείται ότι διαιρείται σε πεπερασμένο αριθμό λείων τμημάτων S_n , καθένα από τα οποία οριοθετείται από μία ακμή C_n . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιφανειακής απόκλισης του Stokes στη λεία επιφάνεια S_n προκύπτει

$$\int_{S_n} D_j (n_i \mu_{ijk} \delta u_k) dS = \oint_{C_n} n_i k_j \mu_{ijk} \delta u_k ds + \int_{S_n} (D_p n_p) n_i n_j \mu_{ijk} \delta u_k dS \quad (2.8)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2.5) γίνεται

$$\int_{\partial V} \left\{ \left[n_j (\sigma_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) + n_i n_j \mu_{ijk} (D_l n_l) - D_j (n_i \mu_{ijk}) \right] \delta u_k + n_i n_j \mu_{ijk} D \delta u_k \right\} dx \quad (2.9)$$

Όπου k_j , το επιφανειακό μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην άκρη C_m , και m ο αριθμός των πλευρών.

Η τελική μορφή της αρχής δυνατών έργων είναι

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \delta \varepsilon_{ijk}) dV = \int_V f_k \delta u_k dV + \int_{\partial V} (t_k \delta u_k + r_k D \delta u_k) dS + \sum_m \oint_{C_m} p_k \delta u_k ds \quad (2.10)$$

Όπου η καθολική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι f_k , ο επιφανειακός ελκυστής στην επιφάνεια S είναι t_k , και η υπερ-τάση είναι r_k και η κατανεμημένη φόρτιση στις πλευρές C_m , είναι p_k .

Οπότε η εξίσωση ισορροπίας του σώματος είναι

$$\partial_i \sigma_{jk} - \partial_{ij} \mu_{ijk} + f_k = 0 \quad \text{στον όγκο } V \quad (2.11)$$

Και οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S και κατά μήκος των άκρων C_m αντίστοιχα είναι

$$n_j (\sigma_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) + n_i n_j \mu_{ijk} (D_l n_l) - D_i (n_j \mu_{ijk}) = \bar{t}_k \quad \text{ή} \quad u_k = \bar{u}_k$$

$$n_i n_j \mu_{ijk} = \bar{r}_k \quad \text{ή} \quad Du_k = \bar{Du}_k$$

Για γραμμικά ισότροπα ελαστικά υλικά, ο Mindlin (1965), ορίζει την πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης ως

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} + \alpha_1 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ikk} + \alpha_2 \varepsilon_{iik} \varepsilon_{kjj} + \alpha_3 \varepsilon_{iik} \varepsilon_{jjk} + \alpha_4 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} + \alpha_5 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kji} \quad (2.12)$$

Όπου λ, μ , είναι οι σταθερές του Lamé που αντιστοιχούν στις αναλλοίωτες της τροπής και a_n ($n=1,2,\dots,5$), είναι οι πέντε επιπλέον δεύτερης τάξης ελαστικές σταθερές που αντιστοιχούν στις αναλλοίωτες των βαθμίδων παραμόρφωσης.

3. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται μια θεωρία μικρό-ελαστικότητας, βασισμένη στην απλή εκδοχή της θεωρίας γραμμικής ελαστικότητας με μικροδομή του Mindlin, η οποία εκτός από τις σταθερές του Lamé, θεωρεί και ακόμη έναν καταστατικό συντελεστή, τον όρο του φυσικού μήκους του υλικού που θα συμβολίζεται εδώ με το γράμμα g .

Για την παρούσα περίπτωση, η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης εκφράζεται ως ακολούθως

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{mm} \varepsilon_{nn} + G \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm} + g^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{knn} + G \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{knn} \right) \quad (3.1)$$

όπου, ε_{ij} υποδηλώνει την απειροστή τροπή και ε_{ijk} , την απειροστή βαθμίδα τροπής με

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad , \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \partial_i \varepsilon_{kj} \quad (3.2)$$

και $u_i = u_i(x_k)$, το απειροστό πεδίο μετατοπίσεων. Ο όρος φυσικό μήκος g , περιγράφει τη μικροδομή του υλικού.

Οι καταστατικές τάσεις ορίζονται από τις σχέσεις

$$\tau_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad , \quad k = x \text{ ή } y \quad (3.3)$$

Και οι υπερ-τάσεις από τις σχέσεις

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ijk}} = g^2 (\lambda \varepsilon_{inn} \delta_{jk} + 2G \varepsilon_{ijk}) \quad (3.4)$$

Η παραμορφωσιακή ενέργεια U ενός γραμμικά ισότροπου ελαστικού σώματος όγκου V που καταλαμβάνει την περιοχή S_m ορίζεται ως

$$U = \frac{1}{2} \int_{S_m} (\tau_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \varepsilon_{ijk}) dV \quad (3.5)$$

Υπενθυμίζεται πως οι τάσεις και οι υπερ-τάσεις μετά από αντικατάσταση των σταθερών του Lamé με το μέτρο ελαστικότητας E και τον λόγου Poisson ν του υλικού γράφονται ως εξής

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{ij}] \quad (3.6)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{g^2 E}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon_{inn} \delta_{jk} + (1-\nu) \varepsilon_{ijk}] \quad (3.7)$$

Όπου g , το φυσικό μήκος του υλικού και δ_{ij} , το δέλτα του Kronecker.

4. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΗΣ ΔΟΚΟΥ

Με βάση το τροποποιημένο μοντέλο βαθμίδας παραμόρφωσης που υιοθετείται στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα εξετασθεί και θα παρουσιασθεί διεξοδικά στο κεφάλαιο αυτό, μία γενική καμπτική θεωρία, η οποία εισάγει νέους όρους, που εξαρτώνται από το εμβαδό της διατομής της μικρό-κατασκευής. Οι όροι αυτοί, αποκτούν μεγάλη σημασία για πολύ μικρά πάχη και αυξάνουν δραστικά την ακαμψία της μικρό-κατασκευής.

Για την παρουσίαση και ανάλυση αυτής της γενικής καμπτικής θεωρίας, θεωρούμε λεπτή δοκό όπως φαίνεται στο σχήμα (4.1). Ο άξονας- x είναι ο άξονας της δοκού, ενώ ο άξονας- y είναι ο άξονας του βέλους κάμψης. Η ελαστική γραμμή έγκειται στο $x - y$ επίπεδο.



Σχήμα 4.1. Η γεωμετρία της λεπτής δοκού.

Από την αρχή των Bernoulli-Euler, η απειροστή τροπή της δοκού ορίζεται ως

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

Όπου w , η μετατόπιση της ελαστικής γραμμής.

Για την διατύπωση του προβλήματος χρειάζονται οι τάσεις

$$\tau_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xx}} = E \varepsilon_{xx} \quad (4.2)$$

Και οι υπέρ-τάσεις

$$\mu_{xxx} = g^2 E \varepsilon_{xxx} \quad (4.3)$$

$$\mu_{yxx} = g^2 E \varepsilon_{yxx} \quad (4.4)$$

Όπου οι υπέρ-τροπές

$$\varepsilon_{xxx} = -y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{yxx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.5)$$

Οι όροι μ_{yxx} και ε_{xxx} λείπουν από τις υπάρχουσες θεωρίες λεπτών βαθμιδοελαστικών δοκών. Οι όροι αυτοί λείπουν από την έκφραση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης και επηρεάζουν πολύ τις τάσεις.

Η αρχή δυνατών έργων απαιτεί

$$\delta V = \delta U - \delta W \quad (4.6)$$

Όπου W , το έργο των εξωτερικών δυνάμεων, U , η παραμορφωσιακή ενέργεια της δοκού και V , το συνολικό δυναμικό. Επιπλέον, η μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας της δοκού ορίζεται ως

$$\delta U = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \mu_{xxx} \delta \varepsilon_{xxx} + \mu_{yxx} \delta \varepsilon_{yxx}) dx dy \quad (4.7)$$

Όπου, L , το μήκος της δοκού και h , το πάχος της δοκού.

Η μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση

$$\delta W = -\int_0^L q \delta w dx - [Q_n \delta w]_0^L + [M_n \delta w_{,x}]_0^L + [M_m \delta w_{,xx}]_0^L \quad (4.8)$$

Όπου q , η κατανεμημένη φόρτιση, Q_n η τέμνουσα δύναμη, M_n , η καμπτική ροπή και M_m , καμπτική υπέρ-ροπή της δοκού.

Μέσω των εξισώσεων (4.1)-(4.4) προκύπτει

$$\delta U = \int_0^L \left\{ \left[E(I + g^2 A) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta w_{,xx} + \left(E g^2 I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_{,xxx} \right\} dx \quad (4.9)$$

Όπου I , η ροπή αδράνειας της διατομής και A το εμβαδό της διατομής .

Επίσης συμβολίζοντας με

$$\Phi_1 = E(I + g^2 A) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

Και

$$\Phi_2 = E g^2 I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (4.11)$$

Η μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας της δοκού γράφεται ως

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} \right) \delta w dx + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \delta w \right]_0^L \\ & + \left[\left(\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \delta w_{,x} \right]_0^L + [\Phi_2 \delta w_{,xx}]_0^L \end{aligned} \quad (4.12)$$

Μέσω των εξισώσεων (4.8) και (4.12), η εξίσωση (4.6) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \delta(U - W) = & \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} + q \right) \delta w dx + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + Q_n \right) \delta w \right]_0^L \\ & + \left[\left(\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - M_n \right) \delta w_{,x} \right]_0^L + \left[(\Phi_2 - M_{nn}) \delta w_{,xx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (4.13)$$

Η μεταβολική εξίσωση (4.13) επιβάλλει μηδενική τιμή για κάθε της όρο.

Έτσι, προκύπτει η εξίσωση ισορροπίας, ως

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^3} + q = 0 \quad (4.14)$$

Επίσης οι ακόλουθες εξισώσεις ικανοποιούνται από τις συνοριακές συνθήκες

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + Q_n \right) \delta w = 0 \quad \text{στα } x = 0, L \quad (4.15)$$

$$\left(\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - M_n \right) \delta w_{,x} = 0 \quad \text{στα } x = 0, L \quad (4.16)$$

$$(\Phi_2 - M_{nn}) \delta w_{,xx} = 0 \quad \text{στα } x = 0, L \quad (4.17)$$

Υπενθυμίζοντας τις εκφράσεις των Φ_1 και Φ_2 από τις εξισώσεις (4.10) και (4.11), η εξίσωση ισορροπίας (4.14), μπορεί να γραφεί ως εξής

$$E(I + g^2 A) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - g^2 EI \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + q = 0 \quad (4.18)$$

Και οι συνοριακές συνθήκες

$$Q_n = E(I + g^2 A) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - g^2 EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \quad \text{ή } \delta w = 0 \quad \text{στα } x = 0, L \quad (4.19)$$

$$M_n = E(I + g^2 A) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g^2 EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad \text{ή} \quad \delta w_{,x} = 0 \quad \text{στα} \quad x=0, L \quad (4.20)$$

$$M_{nn} = EIg^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \text{ή} \quad \delta w_{,xx} = 0 \quad \text{στα} \quad x=0, L \quad (4.21)$$

Η εξίσωση ισορροπίας καθώς και οι συνοριακές συνθήκες που εξάγονται μέσω αυτής της καμπτικής θεωρίας είναι διαφορετικές από τις εξισώσεις που έχουν εξάγει άλλοι ερευνητές (Papargyri-Beskou et.al. (2003), Park and Gao (2006)). Η διαφορά εντοπίζεται στην προσθήκη του όρου $g^2 A$, στη ροπή αδράνειας. Η ποσότητα αυτή αυξάνει την ακαμψία της βαθμιδοελαστικής δοκού. Η προσθήκη του όρου αυτού προκύπτει από τη συνεισφορά της υπέρ-τάσης $\mu_{,xxx}$ η οποία απουσιάζει από τις υπόλοιπες υπάρχουσες θεωρίες βαθμιδοελαστικών δοκών. Για λεπτές δοκούς, όπου το ύψος h μπορεί είναι συγκρίσιμο με το φυσικό μήκος g του υλικού, η συνεισφορά αυτών των όρων κρίνεται μείζονος σημασίας.

Η ανωτέρω θεωρία δεν περιορίζεται μόνο στην μελέτη των λεπτών δοκών. Προτείνει μία γενική θεωρία κάμψης που μπορεί να βρει εφαρμογή σε κάθε είδους κατασκευή.

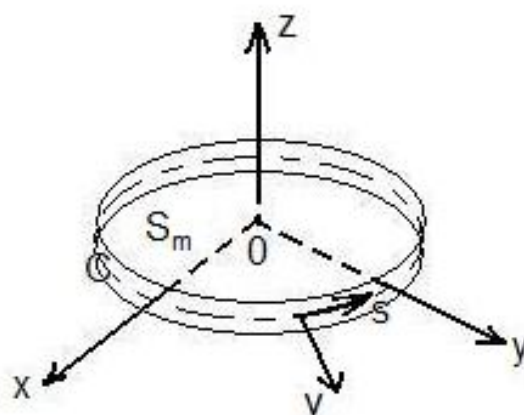
Η θεωρία αυτή χρησιμοποιείται στα επόμενα κεφάλαια, για την περιγραφή του καμπτικού προβλήματος κυκλικών βαθμιδοελαστικών πλακών.

5. ΜΕΤΑΒΟΛΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟ-ΠΛΑΚΑΣ

Θεωρούμε μία λεπτή επίπεδη πλάκα με ομοιόμορφο πάχος h (Σχήμα 1) που περιγράφεται γεωμετρικά από τη μεσαία της επιφάνεια στο (x, y) επίπεδο και το σύνορο S . Η πλάκα σημειώνει ένα εγκάρσιο βέλος $w = w(x, y)$ κατά μήκος του z -άξονα εξαιτίας μιας εγκάρσιας στατικής δύναμης $q = q(x, y)$ κατανεμημένης στην άνω επίπεδη επιφάνειά της.

Σύμφωνα με τη θεωρία πλακών του Kirchhoff, το πεδίο μετατοπίσεων μπορεί να περιγραφεί ως

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad w(x, y, z) = w \quad (5.1)$$



Σχήμα 1. Η γεωμετρία της μικρό-πλάκας.

Αντικαθιστώντας την Εξ. (5.1) στην Εξ.(3.2) οι απειροστές τροπές γράφονται ως εξής

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.2)$$

Με αντικατάσταση της Εξ.(5.2) στην Εξ.(3.2) οι απειροστές βαθμίδες τροπής γράφονται ως εξής

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxx} &= -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \varepsilon_{xyy} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad \varepsilon_{xxy} = \varepsilon_{yyx} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \\ \varepsilon_{yyy} &= -z \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad \varepsilon_{yxx} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \quad \varepsilon_{yyx} = \varepsilon_{xyy} = -z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ \varepsilon_{zxx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{zyy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{zxy} = \varepsilon_{zyx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ πως στις ήδη υπάρχουσες θεωρίες βαθμιδοελασικών πλακών η συνεισφορά των όρων ε_{zij} δεν υφίσταται. Στην παρούσα εργασία οι όροι αυτοί συμπεριλαμβάνονται ως αρκετά σημαντικοί για μικρό πάχος, όταν το πάχος συγκρίνεται με το φυσικό μήκος του υλικού.

Σύμφωνα με τις κλασσικές σχέσεις τάσεων-τροπών οι τανυστές τάσης γράφονται ως εξής

$$\tau_{xx} = \frac{-zE}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad \tau_{yy} = \frac{-zE}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{-zE}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.4)$$

Επίσης αντικαθιστώντας τις απειροστές βαθμίδες τροπής στην Εξ.(3.7) προκύπτουν οι τανυστές υπερ-τάσης ως εξής

$$\mu_{xxx} = -\frac{g^2 E z}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right], \quad \mu_{yyy} = -\frac{g^2 E z}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2},$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{xxy} &= -\frac{g^2 Ez\nu}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \frac{g^2 Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}, \quad \mu_{yxx} = -\frac{g^2 Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}, \\
 \mu_{yyy} &= -\frac{g^2 Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right], \quad \mu_{yxx} = -\frac{g^2 Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}, \\
 \mu_{yyx} &= -\frac{g^2 Ez\nu}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] - \frac{g^2 Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad \mu_{xyx} = -\frac{g^2 Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \\
 \mu_{zxx} &= -\frac{g^2 E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \mu_{zyy} = -\frac{g^2 E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \mu_{zxy} = \mu_{zyx} = -\frac{g^2 E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.2)-(5.5) στην εξίσωση (3.5) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για την παραμορφωσιακή ενέργεια U

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} D_1 \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} D_2 \int_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\
 &+ \frac{1}{2} D_3 \int_A \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)^2 \right] dx dy + \frac{3}{2} D_3 \int_A \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)^2 \right] dx dy + \\
 &+ \frac{1}{2} D_4 \int_A \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right)^2 \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Όπου

$$D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Eg^2 h}{1-\nu^2}, \quad D_2 = \frac{Eh^3}{6(1+\nu)} + \frac{2Eg^2 h}{1+\nu}$$

$$D_3 = \frac{Eg^2 h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_4 = \frac{Eg^2 h^3 \nu}{6(1-\nu^2)}$$

Παίρνοντας τη μεταβολή της U προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \delta U = & D_1 \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dx dy + D_1 \int_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dx dy + \\
 & + D_3 \int_A \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \right) dx dy + 3D_3 \int_A \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right) dx dy - \\
 & - \frac{1}{2} D_2 \int_A \left[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_A \left(\frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right) dx dy + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_A \left(\frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right) dx dy \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Η μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας δU θα υπολογιστεί εν συνεχεία θεωρώντας τυχόν σύνορο (S) της μικρό-πλάκας, αλλάζοντας συντεταγμένες από το σύστημα (x, y) , στο σύστημα (n, s) .

Για τον υπολογισμό της μεταβολής της παραμορφωσιακής ενέργειας θα χρησιμοποιηθούν μετασχηματισμοί οι οποίοι περιγράφονται αναλυτικά ως υπόδειγμα για τον πρώτο όρο της εξίσωσης δU .

Η μικρή μεταβολή του όρου αυτού είναι

$$\int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right] dx dy \quad (5.8)$$

Για κάθε εξίσωση F του x και y ισχύουν οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί

$$\int_A \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_S F \cos ads, \quad \int_A \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int_S F \sin ads \quad (5.9)$$

Όπου α , η γωνία μεταξύ του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος n στο σύνορο S της πλάκας.

Οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί επεκτείνουν μέχρι το σύνορο S τα απλά ολοκληρώματα.

Για την αλλαγή συντεταγμένων από το (x, y) σύστημα στο σύστημα συντεταγμένων (n, s) ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial n} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial n} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial n^2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Μέσω αυτών των μετασχηματισμών η Εξ.(5.8) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy &= \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy - \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \cos \alpha ds + \\ &+ \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \right) \cos \alpha ds \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη προκύπτει

$$\int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \delta w \right| - \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds \quad (5.12)$$

Ο όρος $\left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \delta w \right|$ ισούται με το μηδέν καθότι υπόκειται σε ολοκλήρωση κατά μήκος του κλειστού συνόρου της πλάκας.

Συνεπώς η Εξ. (5.12) γράφεται ως εξής

$$\int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = - \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \right) \delta w ds \quad (5.13)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ.(5.13) στην Εξ.(5.11) προκύπτει τελικά η μεταβολή του πρώτου όρου της δU με την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy &= \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\ &+ \int_s \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos a \right] \delta w ds \end{aligned} \quad (5.14)$$

Μετασχηματίζοντας με αντίστοιχο τρόπο τις μεταβολές των υπόλοιπων όρων της εξίσωσης μεταβολής της παραμορφωσιακής ενέργειας προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dx dy &= \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy + \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\ &- \int_s \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \right] \delta w ds \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dx dy &= \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy + \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 &\quad - \int_s \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right] \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy &= \int_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy + \int_s \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 a \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 &\quad + \int_s \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin a \cos a \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \cos a \right] \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} dx dy &= \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos^3 a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds - \int_A \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \delta w dx dy + \\
 &\quad + \int_s \left[2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin a \cos^2 a \right) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cos^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 &\quad + \int_s \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \sin^2 a \cos a \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a \right] \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} dx dy &= \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^3 a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds - \int_A \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \delta w dx dy + \\
 &\quad + \int_s \left[-2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin^2 a \cos a \right) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 &\quad + \int_s \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin a \cos^2 a \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a \right] \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} dx dy &= \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin^2 a \cos a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds - \int_A \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \delta w dx dy + \\
 &- \int_s \left[2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \sin a \cos^2 a \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 &+ \int_s \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos^3 a \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a \right] \delta w ds \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} dx dy &= \int_s \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \cos^2 a \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds - \int_A \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \delta w dx dy + \\
 &+ \int_s \left[2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^2 a \cos a \right) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cos^2 a \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 &+ \int_s \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin^3 a \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin a \cos a \right) + \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a \right] \delta w ds \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

Υπολογίζονται χωριστά οι όροι που έχουν συντελεστές της μορφής $D_i/2$.

Ο όρος με συντελεστή $D_2/2$ υπολογίζεται ως ακολούθως

$$I = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (5.22)$$

Κάνοντας χρήση της Εξ.(5.9) στην Εξ.(5.22) με ταυτόχρονο μετασχηματισμό του (x, y) συστήματος σε σύστημα συντεταγμένων (n, s) στις παραγώγους του δw προκύπτει μετασχηματισμένη έκφραση της ακόλουθης μορφής

$$\begin{aligned}
 I = & \int_s \left(\cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 & + \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Μετασχηματίζοντας με όμοιο τρόπο τους όρους που έχουν συντελεστή $D_4/2$ προκύπτει η μορφή

$$\begin{aligned}
 J = & \int_s \left[(\cos^2 a - \sin^2 a) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a \right) + \right. \\
 & + \sin a \cos^2 a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \sin^2 a \cos a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \left. \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds - \\
 & - \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left[(\cos^2 a - \sin^2 a) \left(\cos a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \sin a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) + \right. \\
 & + 4 \sin a \cos a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin a - \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \cos a \right) \left. \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 & - \int_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[(\cos^2 a - \sin^2 a) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos a - \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \sin a \right) + \right. \\
 & + \sin a \cos a \left(\cos a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \sin a \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \left. \right] \delta w ds
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Με αντικατάσταση όλων των προηγούμενων μετασχηματισμών, η εξίσωση μεταβολής της παραμορφωσιακής ενέργειας παίρνει την ακόλουθη αντιπροσωπευτική μορφή

$$\begin{aligned}
 \delta U = & D_1 \int_A \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \delta w dx dy - D_3 \int_A \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right) \delta w dx dy - \\
 & + D_3 \int_s \left(\cos^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sin^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \sin a \cos a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_s \left[\begin{aligned} & \left(\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\ & \cos a \sin^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left(2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds + \\
 & + D_1 \int_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \frac{1}{2} D_2 \int_s \left(\cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 & - D_3 \int_s \left(\cos^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sin^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 & - D_3 \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(2 \sin a \cos a \left(3 \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3 \sin a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \sin a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\sin^3 a - \cos^2 a \sin a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\cos^3 a - 5 \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(5 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} - \left(\cos^3 a - \sin^2 a \cos a \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\
 & - D_1 \int_s \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos a + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin a \right] \delta w ds - \\
 & - D_3 \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right) \delta w ds + \\
 & + D_3 \int_s \left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \cos a + \frac{\partial^5 w}{\partial y^5} \sin a + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \sin a + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \cos a \right) \delta w ds -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}D_2 \int_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w ds + \\
 & + D_3 \int_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \left(\cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3 \sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \cos^2 a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \right) \delta w ds + \\
 & + \frac{1}{2}D_4 \int_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \delta w ds + \\
 & + \frac{1}{2}D_4 \int_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(-(\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w ds \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Η μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων έχει τη μορφή

$$\delta W = \int_A q \delta w dx dy + \int_s \overline{Q}_n \delta w ds - \int_s \overline{M}_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int_s \overline{M}_{nn} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds \quad (5.26)$$

Όπου:

\overline{Q}_n είναι η τέμνουσα δύναμη, \overline{M}_n η καμπτική ροπή και \overline{M}_{nn} η καμπτική υπερ-ροπή στις άκρες τις βαθμιδοελαστικής μικρο-πλάκας.

Με χρήση της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας καταλήγουμε στην ακόλουθη διατύπωση του προβλήματος κάμψης βαθμιδοελαστικής μικρο-πλάκας

$$\delta (U - W) = 0 \quad (5.27)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ.(5.25) και Εξ.(5.26) στην Εξ.(5.27) και υπενθυμίζοντας πως οι ποσότητες δw , $\partial \delta w / \partial n$, $\partial^2 \delta w / \partial n^2$ είναι πολύ μικρές που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες συμπεραίνεται πως η Εξ.(5.27) θα ικανοποιείται εφόσον και μόνον ικανοποιούνται οι ακόλουθες τέσσερις εξισώσεις

$$\iint \left\{ \begin{aligned} & D_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \\ & - D_3 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right) - q \end{aligned} \right\} \delta w dx dy = 0 \quad (5.28)$$

$$\iint \left\{ \begin{aligned}
 & D_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos a + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin a - \\
 & - D_3 \left(\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \cos a + \left(\frac{\partial^5 w}{\partial y^5} + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \sin a \right) \\
 & - \frac{1}{2} D_2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\
 & + D_3 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right) - \\
 & - D_3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \left(\cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3 \sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + \cos^2 a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left((\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \bar{Q}_n
 \end{aligned} \right\} \delta w ds = 0 \quad (5.29)$$

$$\iint \left\{ \begin{aligned}
 & D_3 \left(\cos^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sin^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \right. \\
 & \left. + 3 \sin a \cos a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \int_s \left[(\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \right. \\
 & \left. \cos a \sin^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \bar{M}_{mn}
 \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial n^2} ds = 0 \quad (5.30)$$

$$\iint \left\{ \begin{aligned} & D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} D_2 \left(\begin{aligned} & \cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \\ & + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \right) - \\ & - D_3 \left(\cos^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sin^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - \\ & - D_3 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(2 \sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2 \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) - \\ & - D_3 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\begin{aligned} & 6 \sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \\ & - 6 \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \end{aligned} \right) + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial}{\partial s} \left[\begin{aligned} & (\cos^2 a \sin a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & + (5 \sin^2 a \cos a - \cos^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right] - \\ & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial}{\partial s} \left[\begin{aligned} & -(5 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \\ & + (\cos^3 a - \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{aligned} \right] + \bar{M}_n \end{aligned} \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds = 0 \quad (5.31)$$

Η Εξ.(5.28) ικανοποιείται μόνο αν ικανοποιείται μόνο αν ικανοποιείται κάθε σημείο της μέσης επιφάνειας της πλάκας. Συνεπώς

$$D_1 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D_3 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + 3 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right) - q = 0 \quad (5.32)$$

Η Εξ.(5.35) αποτελεί την εξίσωση ισορροπίας της επιφάνειας παραμόρφωσης της μικρό-πλάκας ενώ οι εξισώσεις (5.32)-(5.34) δίνουν τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

Εάν η πλάκα είναι πακτωμένη στις άκρες θα ισχύει

$$w|_s = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_s = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_s = 0 \quad (5.33)$$

Και οι εξισώσεις (5.29)-(5.31) ικανοποιούνται.

Στην περίπτωση απλώς στηριζόμενης πλάκας θα πρέπει

$$w = 0, \quad \overline{M}_n = 0 \quad \text{και} \quad \overline{M}_{mn} = 0 \quad (5.34)$$

Επομένως η Εξ.(5.29) ικανοποιείται και οι εξισώσεις (5.30) και (5.31) ικανοποιούνται εφόσον

$$\begin{aligned} M_{mn}|_S = & D_3 \left(\cos^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sin^3 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \sin a \cos a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} D_4 \int_S \left[\begin{aligned} & (\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \\ & \cos a \sin^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} M_n|_S = & D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} D_2 \left(\cos^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \sin a \cos a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \sin^2 a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \\ & - D_3 \left(\cos^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sin^2 a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - \\ & - D_3 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(2 \sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2 \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) - \\ & - D_3 \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(6 \sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 6 \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) + 3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial}{\partial s} \left[(\cos^2 a \sin a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (5 \sin^2 a \cos a - \cos^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - \\ & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial}{\partial s} \left[-(5 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + (\cos^3 a - \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Εάν το άκρο της πλάκας είναι εντελώς ελεύθερο οι συνοριακές συνθήκες θα είναι $\overline{Q}_n = 0, \quad \overline{M}_n = 0 \quad \text{και} \quad \overline{M}_{mn} = 0$.

Συνεπώς, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις (5.35)-(5.36) αλλά θα πρέπει να ικανοποιείται και η σχέση

$$\begin{aligned}
 Q_n|_S = & D_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos a + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin a - \\
 & - D_3 \left(\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \cos a + \left(\frac{\partial^5 w}{\partial y^5} + 3 \frac{\partial^5 w}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \sin a \right) - \\
 & + D_3 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\sin a \cos a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \\
 & - D_3 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \left(\cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3 \sin a \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \cos^2 a \left(\sin a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 3 \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\sin^2 a \cos a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (2 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} D_4 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left((\cos^3 a - 2 \sin^2 a \cos a) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \sin a \cos^2 a \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = 0 \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

Η παρούσα θεωρία βαθμιοελαστικών πλακών βασίστηκε στην θεωρία ελαστικότητας βαθμίδας και εκτός από τις δύο κλασσικές παραμέτρους θεωρεί και μια τρίτη παράμετρο, μία παράμετρο φυσικού μήκους του υλικού (*intrinsic bulk length g*). Εάν η παράμετρος g μηδενιστεί η εξίσωση (5.32) απλοποιείται σε

$$D\nabla^4 w = q$$

που είναι όμοια με την εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας πλακών Kirchhoff της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας.

6. ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΒΑΘΜΙΔΟΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, το μη κλασσικό μοντέλο βαθμίδας τροπής που αποκτήθηκε προηγουμένως, εφαρμόζεται για να εξαχθούν οι λύσεις για στατική παραμόρφωση στην περίπτωση κυκλικών βαθμιδοελαστικών πλακών. Οι λύσεις εν συνεχεία θα εξειδικευθούν στις περιπτώσεις α) κυκλικής βαθμιδοελαστικής πλάκας με πακτωμένες άκρες, β) κυκλικής βαθμιδοελαστικής πλάκας με απλώς στηριζόμενες άκρες.

Υποθέτουμε ότι η φόρτιση στην κυκλική πλάκα είναι συμμετρικώς κατανεμημένη γύρω από τον κάθετο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της πλάκας. Έτσι, η παραμόρφωσης της μέσης επιφάνειας της πλάκας θα είναι επίσης συμμετρική.

Με βάση την προηγούμενη συνθήκη, θα ισχύει για την παραμόρφωση της πλάκας $w = w(r)$, όπου r , η ακτινική συντεταγμένη.

Η εξίσωση ισορροπίας μπορεί συνεπώς να γραφεί ως

$$(D_1 - D_3 \nabla^2) \nabla^4 w = q \quad (6.1)$$

Όπου

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad \nabla^4 = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr}$$

Από τις εξισώσεις (5.38)- (5.40), η καμπτική υπερ-ροπή M_m , η καμπτική ροπή M_n , και η τέμνουσα δύναμη Q_n , μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις μόνο του r ως ακολούθως

$$M_{rr} = -D_3 \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{2} D_4 \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} M_r = & -D_1 \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{1}{2} D_2 \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + D_3 \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + 3 \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} D_4 \left(\frac{3}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} Q_r = & -D_1 \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{1}{2} D_2 \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) - \frac{1}{2} D_4 \frac{d}{dr} \left(\frac{3}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) \\ & + D_3 \left(\frac{d^5 w}{dr^5} + 3 \frac{d^3}{dr^3} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + 3 \frac{d}{dr} \left(\frac{3}{r} \frac{dw}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Η γενική λύση της Εξ. (6.1), αποκτάται ως το άθροισμα της λύσης w_s , του ομογενούς τμήματος της (6.1) και μίας ειδικής λύσης w_p .

Το ομογενές τμήμα της (6.1) είναι

$$(D_1 - D_3 \nabla^2) \nabla^4 w_s = 0 \quad (6.5)$$

Η λύση της (6.5) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$w_s = w_{s1} + w_{s2}, \quad \nabla^4 w_{s1} = 0, \quad (D_1 - D_3 \nabla^2) w_{s2} = 0 \quad (6.6)$$

Από κλασσικά κείμενα η λύση w_{s1} , έχει τη μορφή

$$w_{s1} = c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r \quad (6.7)$$

Το τρίτο μέρος της (6.6) μπορεί να γραφεί ως

$$r^2 \frac{d^2 w_{s2}}{dr^2} + r \frac{dw_{s2}}{dr} - \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right)^2 w_{s2} = 0 \quad (6.8)$$

Η λύση w_{s2} είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης

$$w_{s2} = c_5 I_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + c_6 K_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) \quad (6.9)$$

Για σταθερό επιφανειακό φορτίο $q = q_0$ επί της πλάκας, εύκολα αποκτάται η ειδική λύση w_p ως

$$w_p = \frac{q_0 r^4}{64 D_1} \quad (6.10)$$

Η γενική λύση της (6.1) γράφεται

$$\begin{aligned} w(r) = w_{s1} + w_{s2} + w_p = & c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r + \\ & + c_5 I_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + c_6 K_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + \frac{q_0 r^4}{64 D_1} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Όπου $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, είναι σταθερές προς προσδιορισμό από τις συνοριακές συνθήκες της βαθμιοελαστικής πλάκας. Για κυκλική πλάκα χωρίς οπή στο κέντρο, η

παραμόρφωση, η καμπτική ροπή, και η καμπτική υπέρ-ροπή , πρέπει να είναι πεπερασμένες, οπότε $c_3 = c_4 = c_6 = 0$.

Τελικά η γενική λύση έχει την ακόλουθη μορφή

$$w(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_5 I_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + \frac{q_0 r^4}{64 D_1} \quad (6.12)$$

Όπου c_1, c_2, c_5 , οι σταθερές που θα προσδιορισθούν από τις συνοριακές συνθήκες στα όρια της μικρο-πλάκας, $r = R$.

5.1.Κυκλική πλάκα με πακτωμένες άκρες

Θεωρούμε, για την πρώτη εφαρμογή, μια κυκλική πλάκα με πακτωμένες άκρες. Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει για $r = R$

$$w|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}|_{r=R} = 0 \quad (6.13)$$

Από την εξίσωση (6.12) παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{dw}{dr} = 2c_2 r + c_5 \sqrt{\frac{D_1}{D_3}} I_1 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + \frac{q_0 r^3}{16 D_1} \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 2c_2 + c_5 \frac{D_1}{2 D_3} \left(I_0 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) + I_2 \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_3}} r \right) \right) + \frac{3 q_0 r^2}{16 D_1} \quad (6.15)$$

Όπου I_1, I_2 , είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel πρώτους είδους και τάξης 1 και 2 αντίστοιχα. Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών (6.13) , και μέσω των εξισώσεων (6.12),(6.14),(6.15) προσδιορίζονται οι σταθερές c_1, c_2, c_5 .

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{q_0 R^4}{64D_1} \left[\frac{10\sqrt{D_1 D_3} I_1 - RD_1 (I_0 + I_2) - 16(D_3/R) I_0}{2\sqrt{D_1 D_3} I_1 - RD_1 (I_0 + I_2)} \right] \\
 c_2 &= -\frac{q_0 R^2}{32D_1} \left[\frac{6\sqrt{D_1} I_1 - R\sqrt{D_1} (I_0 + I_2)}{2\sqrt{D_3} I_1 - RD_1 (I_0 + I_2)} \right] \\
 c_5 &= \frac{q_0 R^3}{4D_1} \left[\frac{D_3}{2\sqrt{D_1 D_3} I_1 - RD_1 (I_0 + I_2)} \right]
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Παρατηρείται πως εάν η ποσότητα του φυσικού μήκους μηδενιστεί ($g \rightarrow 0$), τότε οι προηγούμενες εκφράσεις γίνονται

$$c_1 = \frac{q_0 R^4}{64D} , \quad c_2 = -\frac{q_0 R^2}{32D} , \quad c_5 = 0 \tag{6.17}$$

και η παραμόρφωση γράφεται

$$w(r) = \frac{q_0 R^4}{64D} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \tag{6.18}$$

η οποία συμφωνεί με τις λύσεις των κλασσικών κειμένων για την κλασσική ελαστικότητα.

5.2.Κυκλική πλάκα με απλώς στηριζόμενες άκρες

Για τη δεύτερη εφαρμογή θεωρούμε μια κυκλική πλάκα με απλώς στηριζόμενες άκρες. Στην περίπτωση αυτή για $r = R$, οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$w|_{r=R} = 0, \quad \bar{M}_r|_{r=R} = 0 \quad \text{και} \quad \bar{M}_{rr}|_{r=R} = 0 \tag{6.19}$$

Μέσω των συνθηκών (6.19) και των εξισώσεων (6.2), (6.3), (6.4) μπορούν να προσδιορισθούν οι σταθερές c_1, c_2, c_5 , ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{q_0 R^4}{64 D_1} - c_2 R^2 - c_5 I_0 \\
 c_2 &= -\left[\frac{(8 D_1 - D_2) - 4(6 D_3 + D_4)/R^2}{(4 D_1 - D_2)} \right] \frac{q_0 R^2}{32 D_1} + \\
 &\quad + \frac{R^2 D_1^2 (I_4 - I_0) - 2 D_1 (12 D_3 - 5 D_4) (I_0 + I_2)}{8 D_3 R^2 (4 D_1 - D_2)} c_5 + \\
 &\quad + \left(\frac{(6 D_1 D_3 - D_1 D_4) (3 I_1 + I_3) - (8 D_1 D_3 - 4 D_2 D_3) I_1}{8 D_3 R (4 D_1 - D_2)} + \frac{(12 D_3 - 5 D_4) I_1}{2 R^2 (4 D_1 - D_2)} \right) \sqrt{\frac{D_1}{D_3}} c_5 \\
 c_5 &= \frac{(6 D_3 + D_4) D_k}{2 D_4 \sqrt{D_1/D_3} I_1 - R^2 D_1 \sqrt{D_1/D_3} (3 I_1 + I_3) - R D_1 D_4 (I_0 + I_2)} \frac{q_0 R^3}{4 D_1} \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

Εάν η παράμετρος του φυσικού μήκους μηδενιστεί, $g \rightarrow 0$, παρατηρείται

$$c_1 = \frac{q_0 R^4}{64 D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right), \quad c_2 = -\frac{q_0 R^2}{32 D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \right), \quad c_5 = 0 \tag{6.21}$$

και η παραμόρφωση θα είναι

$$w(r) = \frac{q_0 R^4}{64 D} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \tag{6.22}$$

η οποία συμφωνεί με τις λύσεις της κλασσικής βιβλιογραφίας για την κλασσική ελαστικότητα.

7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΒΑΘΜΙΔΟΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η εφαρμογή του τροποποιημένου μοντέλου βαθμίδας παραμόρφωσης για το πρόβλημα ελεύθερων δονήσεων μιας κυκλικής πλάκας. Καμία εξωτερική δύναμη δεν εφαρμόζεται στη μικρό-πλάκα.

Η εξίσωση ισοροπίας γράφεται

$$(D_1 - D_3 \nabla^2) \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (7.1)$$

Προκειμένου να αποκτηθεί η λύση ελεύθερων δονήσεων κυκλικής βαθμιδοελαστικής πλάκας, είναι βολικό να εκφρασθεί η εξίσωση ισοροπίας σε πολικές συντεταγμένες. Καθώς η Εξ. (7.1) έχει αμετάβλητη μορφή, απαιτείται να εκφραστούν σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , μόνο οι τελεστές ∇^2 και ∇^4 .

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (7.2)$$

Για ανάλυση δονήσεων κυκλικής πλάκας, η εγκάρσια παραμόρφωση w , υποτίθεται ως

$$w(r, \theta, t) = \sum W(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (7.3)$$

Με αντικατάσταση της (7.3) στην (7.1) προκύπτει

$$(D_1 - D_3 \nabla^2) \nabla^4 W - \rho h \omega^2 W = (\nabla^2 - s_1^2)(\nabla^2 - s_2^2)(\nabla^2 - s_2^2) W = 0 \quad (7.4)$$

Στην οποία, s_j , ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$s^6 - \beta^2 s^4 + \lambda^6 = 0 \quad (7.5)$$

Όπου

$$\beta^2 = \frac{D_1}{D_3}, \quad \lambda^6 = \frac{\rho h \omega^2}{D_3}$$

Συμβολίζοντας με $s^2 = \alpha + \beta^2/3$, η εξίσωση (7.5) γίνεται κυβική εξίσωση ως προς α

$$\alpha^3 - 3\left(\frac{1}{9}\beta^4\right)\alpha - 2\left(\frac{1}{27}\beta^6 - \frac{1}{2}\lambda^6\right) = 0 \quad (7.6)$$

Η λύση της εξίσωσης (7.6) μπορεί να εκφρασθεί ρητά ως

$$a_j = \begin{cases} 2\sqrt{S} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{T}{S^{3/2}} \right) + \frac{2(j-i)\pi}{3} \right], & \text{for } T^2 \leq S^3 \\ 2\sqrt{S} \cosh \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{T}{S^{3/2}} \right) + \frac{2i(j-1)\pi}{3} \right], & \text{for } T^2 \geq S^3 \end{cases} \quad (7.7)$$

Όπου $i = \sqrt{-1}$, $j = 1, 2, 3$, και

$$S = \frac{1}{9}\beta^4, \quad T = \frac{1}{27}\beta^6 - \frac{1}{2}\lambda^6 \quad (7.8)$$

Προφανώς, τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες α_j ($j=1,2,3$) υπάρχουν στην περίπτωση $S^3 - T^2 > 0$. Δύο διακριτές πραγματικές ρίζες, $2\sqrt{S}$ και $-\sqrt{S}$ στην περίπτωση $S^3 - T^2 = 0$. Τέλος, υπάρχει και μία θετική πραγματική ρίζα και ένα

ζευγάρι συζυγών μιγαδικών ριζών για την περίπτωση $S^3 - T^2 < 0$. Μόλις αποκτηθούν όλες οι ρίζες του α_j , το s_j^2 μπορεί να εκφρασθεί ως

$$s_j^2 = \alpha_j + \beta^2/3 \quad (7.9)$$

Για μεγάλο β , υπάρχουν τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες και το s_j^2 μπορεί να γραφεί ξανά ως

$$s_j^2 = \frac{\beta^2}{3} \left[1 + 2 \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{2\beta^6 - 27\lambda^6}{2\beta^6} \right) + \frac{2(j-i)\pi}{3} \right] \right] \quad (7.10)$$

Όπως δείχθηκε προηγουμένως, για μεγάλο β , υπάρχουν μία αρνητική τιμή και δύο θετικές τιμές. Έτσι ορίζουμε την ποσότητα s_1^2 ως την αρνητική τιμή και τις ποσότητες s_2^2 και s_3^2 ως τις θετικές τιμές.

Η εξίσωση (7.4) ικανοποιείται όταν οι λύσεις των ακόλουθων εξισώσεων ικανοποιούνται

$$(\nabla^2 - s_1^2)W = 0 \quad , \quad (\nabla^2 - s_2^2)W = 0 \quad , \quad (\nabla^2 - s_3^2)W = 0 \quad (7.11)$$

Είναι εφικτό να χωριστούν οι μεταβλητές κάνοντας την ακόλουθη αντικατάσταση

$$W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (7.12)$$

Έτσι προκύπτει

$$r^2 \left[\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) - s_j^2 \right] = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (7.13)$$

Η εξίσωση (7.12) ικανοποιείται μόνο εάν κάθε έκφραση ισούται με μία ίδια σταθερά k^2 . Με αυτό τον τρόπο μπορούν να γραφούν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2\Theta = 0 \quad (7.14)$$

και

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(-s_j^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (7.15)$$

Η λύση της εξίσωσης (7.14) έχει τη μορφή

$$\Theta = C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta \quad (7.16)$$

Γενικά η ποσότητα k , μπορεί να είναι κάποιος ρητός αριθμός. Όμως για την περίπτωση κυκλικής πλάκας, που είναι κλειστές κατά την διεύθυνση θ , θα πρέπει η Θ να είναι μία συνάρτηση με περίοδο 2π . Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση το k , γίνεται ακέραιος αριθμός ώστε η παράμετρος C_2 να μηδενίζεται.

Εισάγοντας τώρα την νέα μεταβλητή

$$\xi = \begin{cases} s_j r, & \text{for } s_j^2 > 0 \\ i s_j r, & \text{for } s_j^2 < 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

Μέσω της (6.16) η εξίσωση (6.14) γράφεται ως εξής

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left(1 - \frac{k^2}{\xi^2} \right) R = 0 \quad (7.18)$$

η εξίσωση (7.17) αποτελεί εξίσωση Bessel, κλασματικής τάξης, η λύση της οποίας δίνεται σε μορφή σειράς. Για $\xi = s_j r$, η λύση δίνεται σε όρους συναρτήσεων Bessel του πρώτου και δεύτερου είδους, $J_k(s_j r)$ και $Y_k(s_j r)$. Για $\xi = i s_j r$, η λύση δίνεται

σε όρους τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, $I_k(s_j r)$ και $K_k(s_j r)$.

Για την ειδική περίπτωση των κυκλικών πλακών, η λύση είναι κλειστή στην διεύθυνση θ , έτσι ώστε $k = n$.

Η λύση $R(r)$ αποκτάται ως ακολούθως

$$R(r) = B_1 J_n(s_1 r) + B_2 I_n(s_2 r) + B_3 I_n(s_3 r) + B_4 Y_n(s_4 r) + B_5 K_n(s_5 r) + B_6 K_n(s_6 r) \quad (7.19)$$

Επειδή για $r = 0$, οι συναρτήσεις $Y_k(s_j r)$ και $K_k(s_j r)$ είναι ιδιόμορφες θέτουμε για κυκλική πλάκα χωρίς οπή στο κέντρο $B_4 = B_5 = B_6 = 0$. Έτσι, η εξίσωση (7.18) γίνεται

$$R(r) = B_1 J_n(s_1 r) + B_2 I_n(s_2 r) + B_3 I_n(s_3 r) \quad (7.20)$$

Όπου s_j είναι η ιδιοτιμή.

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (7.16) και (7.20) στην εξίσωση (7.12) προκύπτει

$$W(r, \theta) = [A_1 J_n(s_1 r) + A_2 I_n(s_2 r) + A_3 I_n(s_3 r)] \cos n\theta \quad (7.21)$$

Όπου A_i , είναι άγνωστες σταθερές προς προσδιορισμό μέσω των συνοριακών συνθηκών στις άκρες της πλάκας και επίσης $A_i = C_1 B_i$. Όπου n , είναι ο αριθμός των διαμετρικών γραμμών.

Θέτοντας αυθαίρετες συνοριακές συνθήκες στο $r = R$ και θέτοντας την ορίζουσα της μήτρας των συντελεστών ίση με το μηδέν, αποκτούνται οι ακριβείς φυσικές συχνότητες της κυκλικής μικρό-πλάκας.

8.ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, παρουσιάστηκε αρχικά εν συντομία η γενική θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας, όπως αυτή διατυπώθηκε τη δεκαετία του '60 από τον Mindlin. Στην θεωρία αυτή, η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης εξαρτάται όχι μόνο από τη συμβατική τροπή, αλλά και από τη βαθμίδα της τροπής, και εκτός από τις συμβατικές σταθερές της ελαστικότητας περιλαμβάνει και άλλες 5 σταθερές εσωτερικού μεγέθους που αντιστοιχούν στις βαθμίδες τροπής.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε το μοντέλο βαθμίδας παραμόρφωσης στο οποίο βασίζεται η εργασία. Το μοντέλο αυτό είναι μια απλοποιημένη μορφή της θεωρίας γραμμικής ελαστικότητας με μικροδομή του Mindlin, η οποία εκτός από τις σταθερές του Lamé, θεωρεί ακόμη έναν καταστατικό συντελεστή, τον όρο φυσικού μήκους του υλικού, g .

Με βάση το μοντέλο αυτό, παρουσιάστηκε μία γενική θεωρία κάμψης, εφαρμοσμένη σε λεπτή δοκό, η οποία εισάγει νέους όρους, που εξαρτώνται από το εμβαδό της διατομής της μικρό-κατασκευής. και προτείνεται για προβλήματα κάμψης σε κάθε είδους κατασκευή.

Εν συνεχεία, τίθεται υπό διερεύνηση το καμπτικό πρόβλημα βαθμιδοελαστικών πλακών. Με βάση την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και μέσω μιας μεταβολικής μελέτης, εξάγονται η εξίσωση ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες της μικρό-πλάκας. Τονίζεται εδώ πως, στη μεταβολική μελέτη έχουν συμπεριληφθεί οι όροι ε_{zij} , οι οποίοι δεν υφίστανται στις υπόλοιπες υπάρχουσες θεωρίες βαθμιδοελαστικών πλακών. Οι όροι αυτοί θεωρούνται ως αρκετά σημαντικοί για

μικρό πάχος πλάκας (όταν το πάχος συγκρίνεται με το φυσικό μήκος του υλικού) καθότι αυξάνουν δραστικά την ακαμψία της πλάκας. Παρατηρείται επίσης πως με μηδενισμό των βαθμιδικών όρων, το καμπτικό πρόβλημα ανάγεται στις κλασσικές μορφές της θεωρίας πλακών του Kirchhoff.

Τέλος, οι εξισώσεις που αποκτήθηκαν, τίθενται σε εφαρμογή για τη μελέτη της συμπεριφοράς κυκλικής μικρό-πλάκας σε διάφορες περιπτώσεις. Παρουσιάζονται αναλυτικά, οι λύσεις για στατική παραμόρφωση κυκλικής μικρό-πλάκας με πακτωμένες άκρες και κυκλικής απλώς στηριζόμενης μικρό-πλάκας , καθώς και μια ανάλυση ελεύθερων δονήσεων, όπου αποκτούνται οι φυσικές συχνότητες κυκλικής μικρό-πλάκας. Σε όλες τις εφαρμογές παρατηρείται πως με μηδενισμό των βαθμιδικών όρων, οι λύσεις συμφωνούν απόλυτα με τις λύσεις της κλασσικής βιβλιογραφίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P., (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 51:1477-1508.

Toupin R.A. , (1962) , Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11:385-414.

Mindlin R.D., (1964), Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16:51-78.

Mindlin R.D., (1965), Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* , 1:417-438.

Mindlin R.D., Tiersten H.F., (1962), Effects of couple stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11:415-448.

Tsiatas G.C., (2009), A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. *Int. J. Solids Struct.* , 46:2757-2764.

Wang B.L., Zhou S.J., Zhao J.F., Chen X., (2011), A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory. *Eur. J. Mech. A. Solids* 30: 517-524.

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., (1959), *Theory of Plates and Shells*, second edition McGraw-Hill Book Company, New York.

Fleck N.A., Hutchinson J.W., (1997), Strain gradient plasticity. In: Hutchinson JW, Wu TY (Eds.) *Advances in Applied Mechanics*, Vol 33. Academic Press, New York, pp. 295-361.

Koiter W.T., (1964), Couple stresses in the theory of elasticity. I and II. *Proc. K. Ned. Akad. Wet. (B)* 67, 17-44.

Nix W.D., (1989), Mechanical properties of thin films. *Metall. Trans. A* 20, 2217-2245.

Toupin RA, (1962), Elastic materials with couple stresses. Arch. Rational. Mech. Anal. 11, 385-414.

Lam D.C.C, Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. , (2002), Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int. J. Solids Struct., 39: 2731-2743.

Ru CQ, Aifantis EC, (1993), A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity. Acta. Mech. 101, 59-68.

Aifantis EC, (1999), Strain gradient interpretation of size-effects. Int. J. Fract. 95: 299-314.

Lazopoulos KA, (2004), On the gradient strain elasticity theory of plates. Eur. J. Mech. A/Solids 23: 843-852.

Lazopoulos KA, Lazopoulos AK, (2010), Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. Eur. J. Mech. A/Solids 29: 837-843.

Lazopoulos KA, Lazopoulos AK, (2011), Nonlinear strain gradient elastic thin shallow shells. Eur. J. Mech. A/Solids 30: 1-7.

Lazopoulos KA, (2009), On bending of strain gradient elastic micro-plates.. Mech. Reas. Com. 36: 777-783.

Papargyri-Beskou S., Beskos D., (2008), Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates. Arch. Appl. Mech. 78:625-635.

Papargyri-Beskou S., Tsepoura K.G., Polyzos D., Beskos D., (2003), Bending and stability analysis of gradient elastic beams. Int. J. Solids Struct.. 40:385-400.

Ventsel E., Krauthammer Th., (2001), Thin Plates and Shells: Theory, analysis and applications. Marcel Dekker Inc., New York.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Μετατοπίσεις στην πακτωμένη πλάκα

Μέσω της Mathematica θα εξαχθούν οι γραφικές παραστάσεις που αναπαριστούν τις μετατοπίσεις στην περίπτωση πακτωμένης στις άκρες αξονοσυμμετρικής βαθμιδοελαστικής μικρό-πλάκας συναρτήσει της ακτίνας r .

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή θα χρησιμοποιηθούν

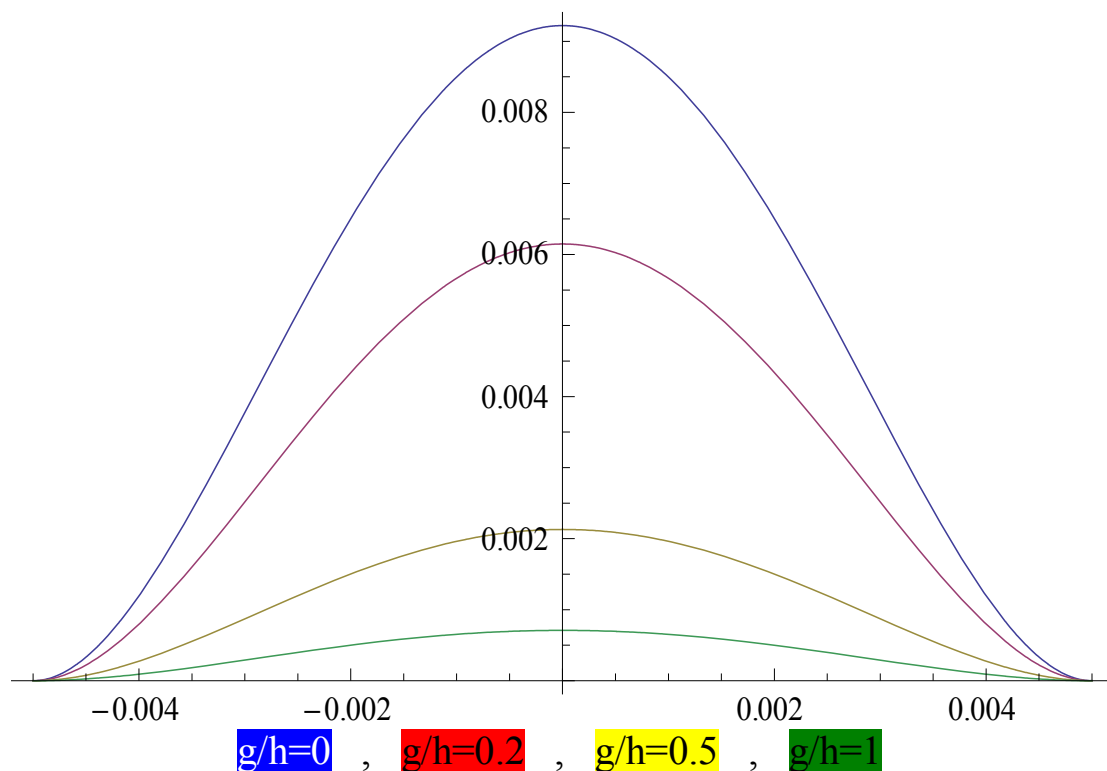
$$R=0.005$$

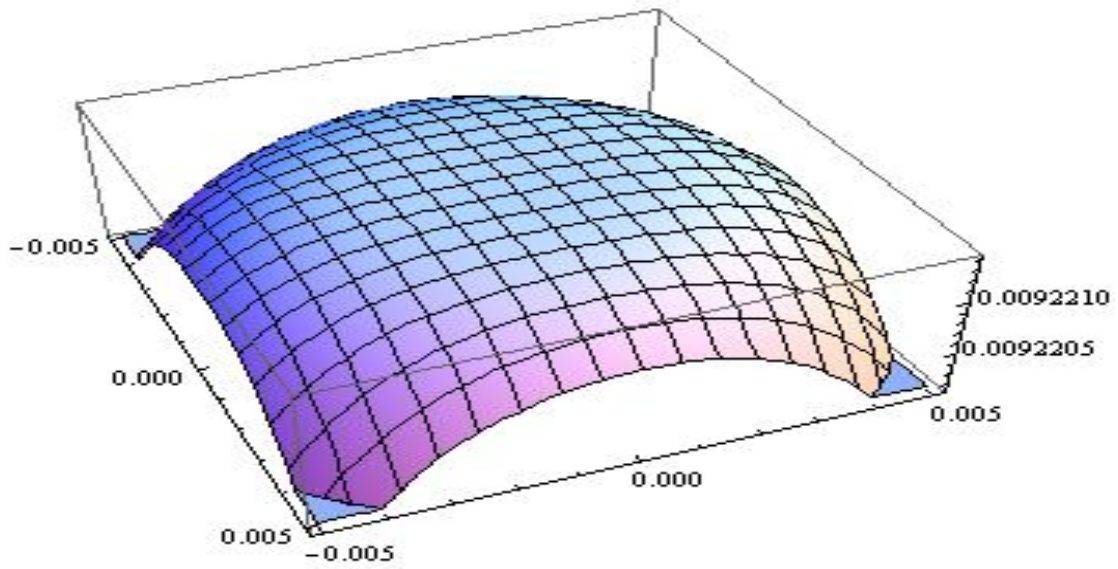
$$\nu=0.38$$

$$E=1.44 \text{ GPa}$$

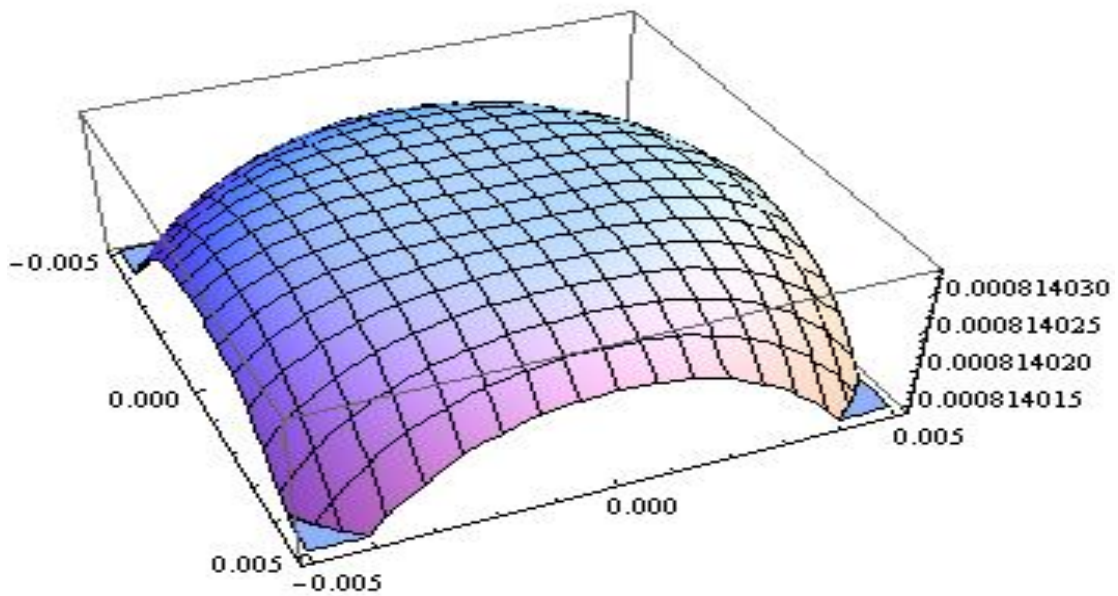
$$q= 250 \text{ } \mu\text{N/m}^2$$

οι παραστάσεις θα σχηματισθούν για διάφορες τιμές του λόγου φυσικού μήκους g του υλικού, προς το πάχος της μικρό-πλάκας

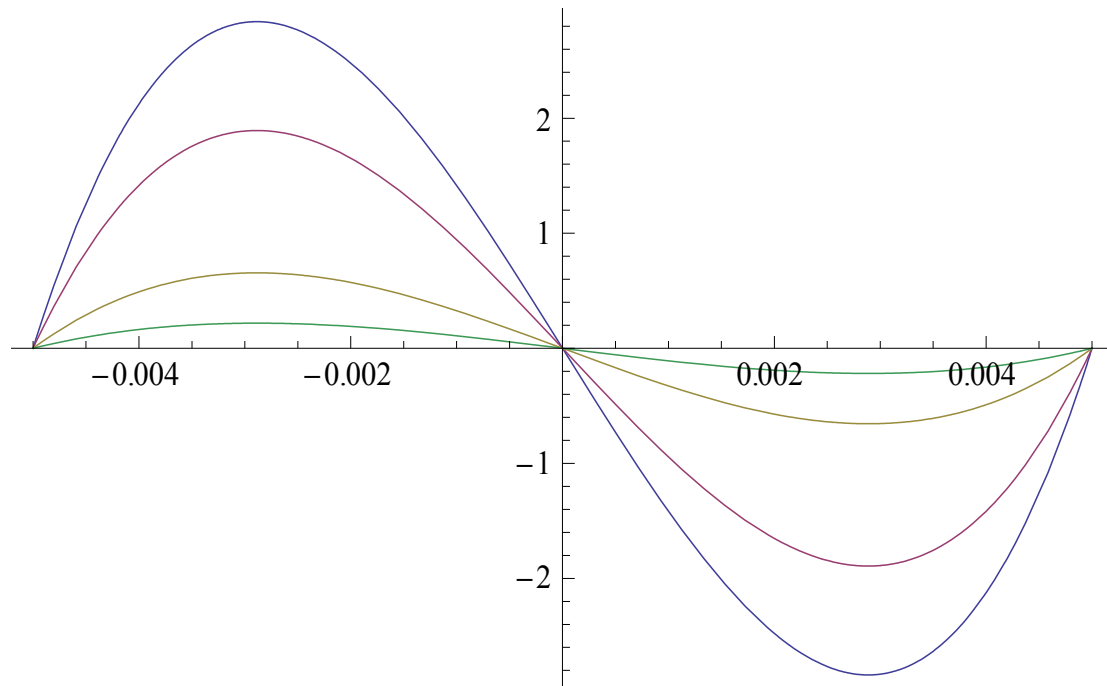




Τριδιάστατη αναπαράσταση κλασσικού μοντέλου



Τριδιάστατη αναπαράσταση βαθμιδοελαστικού μοντέλου όταν $g=h$



Βαθμίδα μετατόπισης. (gradient $w(r)$)

Παρατηρούμε πως όσο ο λόγος g/h πλησιάζει τη μονάδα τόσο πιο έντονες είναι οι διαφορές μεταξύ του βαθμυδοελαστικού και του κλασσικού μοντέλου. Συγκεκριμένα για λόγο 0.2 οι μετατοπίσεις είναι 1.4 φορές μικρότερες, ενώ για λόγο ίσο με τη μονάδα οι μετατοπίσεις φτάνουν τις 23 φορές μικρότερες.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως όσο πλησιάζει το πάχος h , της πλάκας στο χαρακτηριστικό μήκος, g , τόσο πιο στιβαρή (stiff) και πιο άκαμπτη γίνεται η μικρόπλάκα.

2.Μετατοπίσεις στην απλώς στηριζόμενη πλάκα

Μέσω της Mathematica θα εξαχθούν οι γραφικές παραστάσεις που αναπαριστούν τις μετατοπίσεις στην περίπτωση απλώς στηριζόμενης αξονοσυμμετρικής βαθμειδοελαστικής μικρό-πλάκας συναρτήσει της ακτίνας r .

Για την συγκεκριμένη εφαρμογή θα χρησιμοποιηθούν

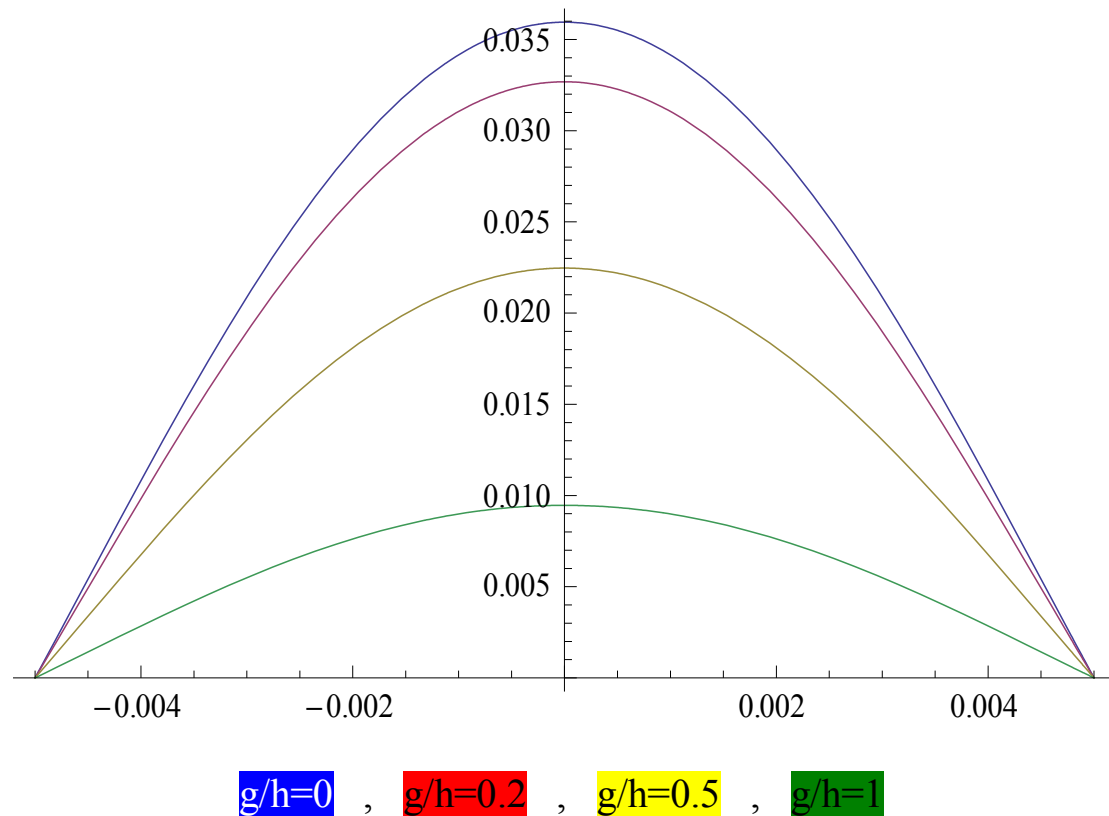
$$R=0.005$$

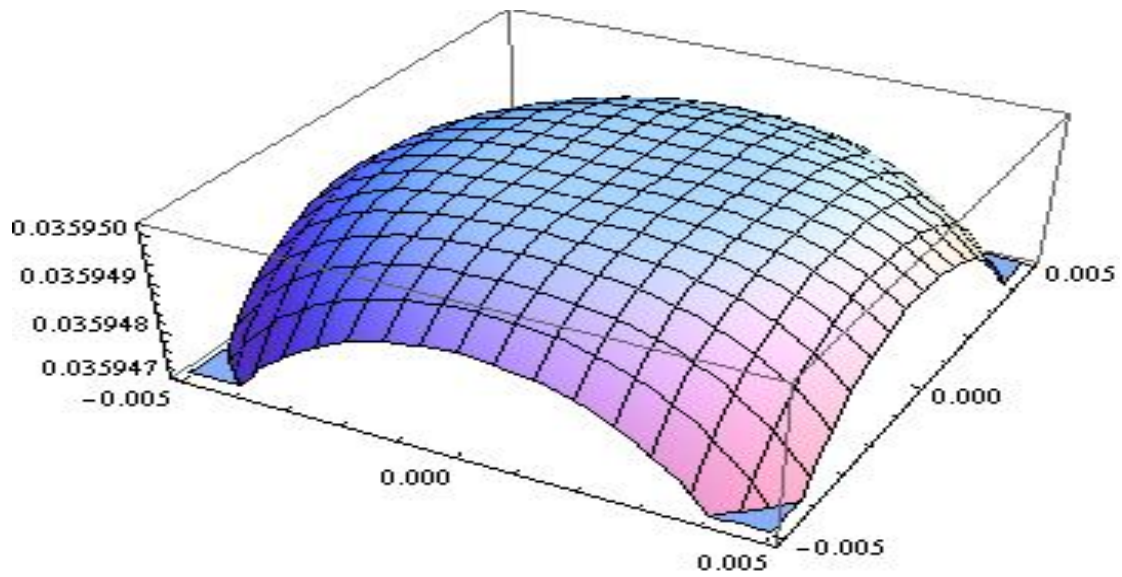
$$\nu=0.38$$

$$E=1.44 \text{ GPa}$$

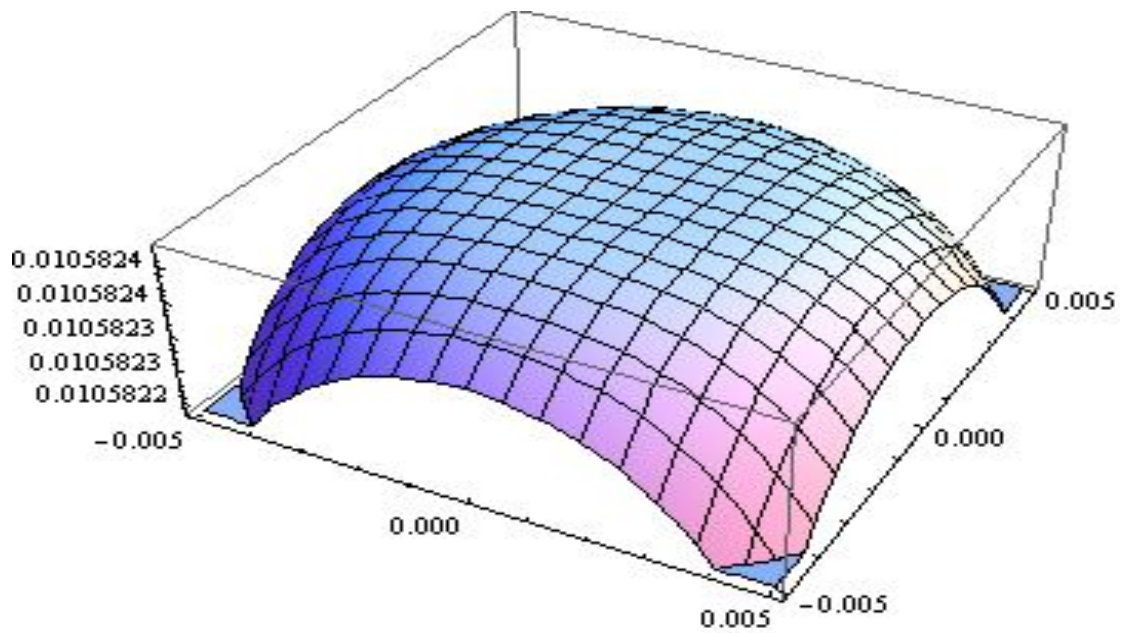
$$q= 250 \text{ } \mu\text{N/m}^2$$

Οι παραστάσεις θα σχηματισθούν για διάφορες τιμές του λόγου φυσικού μήκους g του υλικού, προς το πάχος h , της μικρό-πλάκας.

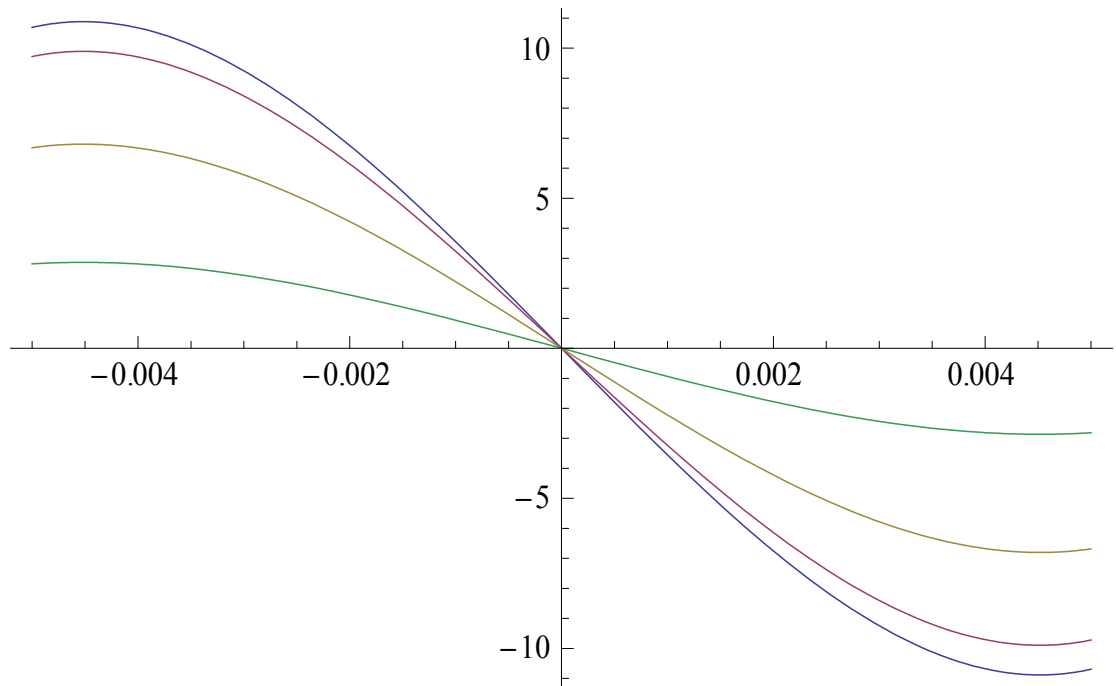




Τριδιάστατη αναπαράσταση κλασσικού μοντέλου.



Τριδιάστατη αναπαράσταση βαθμοελαστικού μοντέλου όταν $g=h$.



Βαθμίδα μετατόπισης.

Παρατηρούμε πως όσο ο λόγος g/h πλησιάζει τη μονάδα τόσο πιο έντονες είναι οι διαφορές μεταξύ του βαθμιδοελαστικού και του κλασσικού μοντέλου. Συγκεκριμένα για λόγο 0.2 οι μετατοπίσεις είναι 1.1 φορές μικρότερες, ενώ για λόγο ίσο με τη μονάδα οι μετατοπίσεις φτάνουν τις 4 φορές μικρότερες.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως όσο πλησιάζει το πάχος h , της πλάκας στο χαρακτηριστικό μήκος, g , τόσο πιο στιβαρή (stiff) και πιο άκαμπτη γίνεται η μικρό-πλάκα.