σ-μοντέλα και αναγωγή Pohlmeyer: Θεωρία και εφαρμογές στην αντιστοιχία AdS/CFT

Μητσούλας Ιωάννης

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπων: Καθηγητής Ιωάννης Μπάκας

Δ.Π.Μ.Σ
Φυσική και Τεχνολογικές Εφαρμογές

Τμήμα Φυσικής
ΣΕΜΦΕ
ΕΜΠ

Πρόλογος

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετώνται τα σ-μοντέλα σε χώρους πηλίκο. Όπως είναι γνωστό τα σ-μοντέλα παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία χορδών, μιας και η δράση της μποζονικής θεωρίας χορδών είναι ένα σ-μοντέλο. Επιπλέον τα σ-μοντέλα αποτελούν κλασικά ολοκληρώσιμες θεωρίες. Ο λόγος που μελετούμε τα σ-μοντέλα σε χώρους πηλίκο είναι ότι πολλοί χώροι στους οποίους μελετάται η θεωρία χορδών μπορούν να γραφούν ως χώροι πηλίκο, όπως για παράδειγμα $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, ή $AdS_n = SO(2, n-1)/SO(1, n-1)$. Τελευταία έχει μελετηθεί στα πλαίσια της αντιστοιχίας AdS/CFT η θεωρία χορδών στο χώρο $AdS_5 \times S^5$, όπου βρίσκουν εφαρμογή τα παραπάνω.
Βλέπουμε στην παρούσα εργασία πως τα σ-μοντέλα σε χώρους της μορφής F/G συνδέονται μέσω μίας διαδικασίας, η οποία είναι γνωστή ως αναγωγή Pohlmeyer, με βαθμωμένα μοντέλα WZW σε χώρους της μορφής G/H με έναν επιπλέον όρο δυναμικού, όπου $H \subset G \subset F$ είναι Lie ομάδες. Αυτά τα βαθμωμένα WZW μοντέλα αποτελούν ολοκληρώσιμες θεωρίες με εξισώσεις κίνησης, οι οποίες δεν είναι τίποτα άλλο από πολυπεδιακές γενικεύσεις της μη-γραμμικης εξίσωσης sine-Gordon . Στη συνέχεια μελετάται μία εφαρμογή των παραπάνω στην περίπτωση της διάδοσης χορδών σε καμπύλους χωρόχρονους, ενώ τέλος παρουσιάζονται κάποιες συγκεκριμένες λύσεις των εξισώσεων κίνησης των σ-μοντέλων, τα μαγνόνια, καθώς και μέσω της αναγωγής Pohlmeyer οι αντίστοιχες σολιτονικές λύσεις της ανηγμένης θεωρίας.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Μπάκα για την καθοδήγηση και τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κ. Νικόλαο Καραΐσκο και κ. Βασίλειο Καρανικόλα για τις ενδιαφέρουσες και διαφωτιστικές συζητήσεις που είχαμε, σε σχέση με θέματα που παρουσιάζονται σε αυτή τη διπλωματική εργασία. Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ. Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή που εξέτασε αυτή την εργασία.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και τη γυναίκα μου Ειρήνη Συμιδαλά, χωρίς

την ηθική και υλική υποστήριξη της οποίας θα ήταν αδύνατη η φοίτηση μου στο συγκεκριμένο μεταπτυχιακό πρόγραμμα.

Αθήνα, 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Γενικά περί σ-μοντέλων

1.1 σ-μοντέλα

Τα σ-μοντέλα είναι μία ενδιαφέρουσα κλάση θεωριών που γενικεύουν τις εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου (ή ελεύθερων πεδίων) σε καμπυλομένο χώρο. Ορίζονται από τη δράση

$$S = -\frac{1}{2}\int dxdt g_{\alpha\beta}(\phi)\partial_\mu\phi^\alpha\partial^\mu\phi^\beta \tag{1.1}$$

όπου τα διδιάστατα πεδία $\{\phi^\alpha(x,t)\}, \quad \alpha = 1,\ldots,D$ παίρνουν τιμές σε ένα καμπυλομένο χώρο διάστασης D με μετρική $g_{\alpha\beta}(\phi)$.
Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από την (1.1) με λογισμό μεταβολών ως προς $\delta\phi^\alpha$ είναι

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\partial_\mu\phi^\beta\partial^\mu\phi^\gamma = 0 \tag{1.2}$$

όπου

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial\phi^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial\phi^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial\phi^\delta}\right) \tag{1.3}$$

λέγονται τα σύμβολα του Christoffel για τη μετρική $g_{\alpha\beta}(\phi)$.
Για χωρικά ανεξάρτητα πεδία, δηλαδή $\phi^\alpha = \phi^\alpha(t)$, η εξίσωση κίνησης (1.2) ανάγεται στην εξίσωση

$$\ddot{\phi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{\phi}^\beta\dot{\phi}^\gamma = 0 \tag{1.4}$$

που είναι η γεωδεσιακή εξίσωση στον D-διάστατο χώρο με μετρική $g_{\alpha\beta}$. Βλέπουμε ότι στον επίπεδο χώρο $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ και $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ η εξίσωση (1.4) όντως ανάγεται στην κίνηση ελευθέρων σωματιδίων $\ddot{\phi}^\alpha = 0$ με συντεταγμένες $\phi^\alpha(t)$
Άρα οι εξισώσεις κίνησης των σ-μοντέλων αποτελούν την πεδιακή γενίκευση των γεωδεσιακών εξισώσεων, οι δε λύσεις που περιγράφουν

$$\phi^\alpha : \quad (x,t) \to \phi^\alpha(x,t) \tag{1.5}$$

ονομάζονται αρμονικές απεικονίσεις.

1.1.1 σ-μοντέλο στο χώρο S^2

Το απλούστερο παράδειγμα καμπυλομένου χώρου είναι η διδιάστατη σφαίρα με μετρική

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2 \tag{1.6}$$

δηλαδή

$$g(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Τότε η δράση του σχετικού σ-μοντέλου θα είναι

$$S = -\frac{1}{2}\int dxdt(\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + \sin^2\theta\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi) \tag{1.8}$$

Εισάγουμε τώρα συντεταγμένες κώνου φωτός στο χώρο Minkowski στον οποίο ορίζονται τα πεδία θ, ψ

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(x \pm t), \qquad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial\sigma^\pm} \tag{1.9}$$

και τις παρακάτω συντεταγμένες στο διδιάστατο χώρο τιμών S^2 του σ-μοντέλου

$$u = \cot\frac{\theta}{2}e^{i\psi} \qquad \bar{u} = \cot\frac{\theta}{2}e^{-i\psi} \tag{1.10}$$

Η μετρική (1.6) παίρνει τώρα την απλούστερη μορφή

$$ds^2 = \frac{1}{(1+u\bar{u})^2}dud\bar{u} \tag{1.11}$$

Η δράση γράφεται τώρα

$$S = \int d^2\sigma\frac{\partial_+ u\partial_-\bar{u} + \partial_+\bar{u}\partial_- u}{(1+u\bar{u})^2} \tag{1.12}$$

Οι εξισώσεις κίνησης σε αυτές τις συντεταγμένες γράφονται

$$\partial_+\partial_- u = 2\frac{\bar{u}\partial_+ u\partial_- u}{1+u\bar{u}} \tag{1.13}$$

$$\partial_+\partial_-\bar{u} = 2\frac{u\partial_+\bar{u}\partial_-\bar{u}}{1+u\bar{u}} \tag{1.14}$$

Αυτή η μορφή των εξισώσεων κίνησης είναι πολύ χρήσιμη, διότι μπορούμε αμέσως να αναγνωρίσουμε μία κλάση λύσεων. Πιο συγκεκριμένα

$$\partial_+\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}(\sigma_-) \tag{1.15}$$

$$\partial_- u = 0 \Rightarrow u = u(\sigma_+) \tag{1.16}$$

Αν κάνουμε την περιστροφή Wick δηλαδή $t \to it$ τότε $\partial_+ = \partial$ και $\partial_- = \bar{\partial}$ και οι εξισώσεις (1.13) και (1.14) γίνονται μιγαδικά συζυγείς. Οι λύσεις (1.15) και (1.16) σε αυτή την περίπτωση ονομάζονται λύσεις instanton και anti-instanton αντίστοιχα και αντιστοιχούν στο κάτω φράγμα του συναρτησιακού της δράσης στον ευκλείδιο χωρόχρονο.

1.1.2 Συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας

Για να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης του σ-μοντέλου σαν συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας ορίζουμε τον πίνακα

$$P(\sigma_+, \sigma_-) = \frac{1}{1+u\bar{u}} \begin{pmatrix} 1-u\bar{u} & -2u \\ -2\bar{u} & u\bar{u}-1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο παραπάνω πίνακα ικανοποιεί τις σχέσεις

$$P = P^\dagger \tag{1.18}$$

$$TrP = 0 \tag{1.19}$$

$$detP = -1 \tag{1.20}$$

$$P^2 = 1 \tag{1.21}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τις ποσότητες

$$J_+ = P^{-1}\partial_+ P \tag{1.22}$$

και

$$J_- = P^{-1}\partial_- P \tag{1.23}$$

Η δράση (1.12) μπορεί να γραφεί τώρα στη μορφή

$$S = \int d^2\sigma \frac{\partial_+ u \partial_- \bar{u} + \partial_+ \bar{u} \partial_- u}{(1+u\bar{u})^2} = -\frac{1}{4}\int d^2\sigma Tr(J_+ J_-) \tag{1.24}$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης του μοντέλου μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα ως

$$\partial_+ J_- + \partial_- J_+ = 0 \tag{1.25}$$

Δηλαδή οι εξισώσεις δίνονται από το νόμο διατήρησης των ρευμάτων πινάκων.Τέλος να παρατηρήσουμε ότι εξ ορισμού οι ποσότητες (1.22) και (1.23) υπακούουν τη σχέση:

$$[\partial_+ + J_+, \partial_- + J_-] = 0 \tag{1.26}$$

η οποία είναι μία σχέση μηδενικής καμπυλότητας.

1.1.3 Νόμοι διατήρησης

Για να προσδιορίσουμε τους νόμους διατήρησης του σ-μοντέλου ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:
Ορίζουμε αρχικά τις ποσότητες

$$D_+ = \partial_+ + J_+ \qquad D_- = \partial_- + J_- \tag{1.27}$$

Οι σχέσεις (1.25) και (1.26) γράφονται τώρα:

$$\partial_+ D_- + \partial_- D_+ = D_+ \partial_- + D_- \partial_+ \tag{1.28}$$

$$[D_+, D_-] = 0 \tag{1.29}$$

Από τη μορφή της εξίσωσης (1.25) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση χ_1 τέτοια ώστε

$$J_+ = \partial_+ \chi_1 \qquad J_- = -\partial_- \chi_1 \tag{1.30}$$

Ορίζουμε τώρα τα νέα ρεύματα

$$J_{2+} = D_+ \chi_1 \qquad J_{2-} = D_- \chi_1 \tag{1.31}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα νέα ρεύματα διατηρούνται

$$\partial_- J_{2+} + \partial_+ J_{2-} = 0 \tag{1.32}$$

λόγω της σχέσης (1.28). Αλλά τότε θα πρέπει να υπάρχει συνάρτηση χ_2 τέτοια ώστε

$$J_{2+} = \partial_+ \chi_2 \qquad J_{2-} = -\partial_- \chi_2 \tag{1.33}$$

Σε αναλογία με τα προηγούμενα ορίζουμε ένα νέο ρεύμα

$$J_{3+} = D_+ \chi_2 \qquad J_{3-} = D_- \chi_2 \tag{1.34}$$

το οποίο διατηρείται

$$\partial_- J_{3+} + \partial_+ J_{3-} = 0 \tag{1.35}$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ΄ άπειρον.
Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι το σ-μοντέλο έχει άπειρους νόμους διατήρησης.

1.2 Μη γραμμικά σ-μοντέλα

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα μη γραμμικά σ-μοντέλα τα οποία ορίζονται από τη δράση

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int dxdtTr'(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) \tag{1.36}$$

ως ένα πρώτο βήμα στην κατεύθυνση των μοντέλων WZW.
Η παραπάνω δράση περιγράφει ένα μποζονικό πεδίο $g(x,t)$ το οποίο παίρνει τιμές με μία πολλαπλότητα ομάδας G, με g τη σχετικά άλγεβρα Lie. Για να είναι πραγματική η δράση θα πρέπει το πεδίο g να παίρνει τιμές σε μία μοναδιακή αναπαράσταση της άλγεβρας Lie. Το ίχνος Tr' συνδέεται με το κανονικό ίχνος με τη σχέση

$$Tr' = \frac{1}{x_{rep}} Tr \tag{1.37}$$

όπου x_{rep} είναι ο δείκτης Dynkin της αναπαράστασης.
Επειδή το g είναι μοναδιακό, η ποσότητα $g^{-1}\partial_\mu g$ είναι αντιερμιτιανή, διότι:

$$(g^{-1}\partial_\mu g)^\dagger = \partial_\mu g^- 1 g = -g^{-1}\partial_\mu g \tag{1.38}$$

Επιπλέον η δράση θα είναι θετική, αφού

$$Tr'(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) = Tr'((\partial^\mu g)^\dagger \partial_\mu g) \geq 0 \tag{1.39}$$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης του μοντέλου θεωρούμε μεταβολές της μορφής $g \to g + \delta g$. Η μεταβολή της δράσης θα είναι

$$\delta S_0 = \frac{1}{4a^2}\int dxdtTr'(g^{-1}\delta g\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g)) \tag{1.40}$$

άρα και οι εξισώσεις κίνησης θα έχουν τη μορφή

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) = 0 \tag{1.41}$$

Στην παραπάνω σχέση εύκολα αναγνωρίζουμε το ρεύμα διατήρησης

$$J_\mu = g^{-1}\partial_\mu g \tag{1.42}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τις συντεταγμένες

$$z = x + it \qquad \bar{z} = x - it \tag{1.43}$$

και τις παραγώγους

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} \qquad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tag{1.44}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης παίρνουμε ότι

$$\partial J_z + \bar{\partial} J_{\bar{z}} = 0 \tag{1.45}$$

Γνωρίζουμε ότι για μία σύμμορφη θεωρία πεδίου θα πρέπει ο κάθε όρος στο αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης να διατηρείται ξεχωριστά. Για να γίνει αυτό, να διατηρούνται ξεχωριστά το ολόμορφο και το αντιολόμορφο ρεύμα, θα πρέπει να διατηρείται και το δυικό ρεύμα $\epsilon^{\mu\nu}J_\nu$. Όμως επειδή

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu + [J_\mu, J_\nu] = 0 \tag{1.46}$$

έχουμε ότι

$$\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu}J_\nu) = -\epsilon^{\mu\nu}J_\mu J_\nu \neq 0 \tag{1.47}$$

Καταλήγουμε στο ότι θα πρέπει να τροποποιήσουμε κάπως την αρχική μας δράση έτσι ώστε να πάρουμε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου.

1.3 μοντέλα WZW

Η ζητούμενη γενίκευση της δράσης του μη-γραμμικού σ-μοντέλου κάθε άλλο παρά τετριμμένη είναι. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να προσθέσουμε έναν όρο στην δράση της μορφής

$$\Gamma = \frac{-i}{24\pi}\int_B d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr'(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}) \tag{1.48}$$

ο οποίος ονομάζεται όρος Wess-Zumino.
Η παραπάνω ποσότητα ορίζεται σε μια τριδιάστατη πολλαπλότητα B, της οποίας το σύνορο είναι η συμπαγοποίηση του αρχικού μας διδιάστατου χώρου. Με $\tilde{g}$ συμβολίζουμε την επέκταση του πεδίου g σε αυτή την τριδιάστατη πολλαπλότητα.
Η τελική μορφή της δράσης θα είναι:

$$S = S_0 + \kappa\Gamma \tag{1.49}$$

όπου κ ακέραιος. Στη συνέχεια θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησης για το μοντέλο WZW.Θεωρούμε μεταβολές της μορφής $g + \delta g$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \delta\Gamma &= \frac{-i}{24\pi}\int_B d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}[Tr'(\delta\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g} \\ &+ \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\delta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\delta\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g} \\ &+ \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\delta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\delta\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g} \\ &+ \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g})] \end{aligned} \tag{1.50}$$

Ο πρώτος, ο τρίτος και ο πέμπτος όρος αποτελούν μιά συμμετρική ποσότητα και το γινόμενο αυτής με το σύμβολο Levi-Civita είναι μηδέν. Άρα μένουν μόνο οι άλλοι τρεις όροι. Στη συνέχεια κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων $\partial^\alpha g^{-1} = -g^{-1}\partial^\alpha g g^{-1}$ και $Tr(AB) = Tr(BA)$ καθώς και της αντισυμμετρικότητας του συμβόλου Levi-Civita και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\delta\Gamma = \frac{i}{8\pi}\int dxdt\epsilon_{\mu\nu}Tr'(\tilde{g}^{-1}\delta\tilde{g}\partial^\mu(\tilde{g}^{-1}\partial^\nu\tilde{g})) \tag{1.51}$$

Από τις σχέσεις (1.40), (1.41) και (1.52) έχουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2 i\kappa}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g)) = 0 \tag{1.52}$$

Σε συντεταγμένες $z, \bar{z}$ έχουμε

$$\left(1 + \frac{a^2\kappa}{4\pi}\right)\partial(g^{-1}\bar{\partial}g) + \left(1 - \frac{a^2\kappa}{4\pi}\right)\bar{\partial}(g^{-1}\partial g) = 0 \tag{1.53}$$

Παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε την τιμή της σταθερά σύζευξης a να είναι

$$a^2 = \frac{4\pi}{\kappa} \tag{1.54}$$

τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\partial(g^{-1}\bar{\partial}g) = 0 \tag{1.55}$$

και μιγαδικά συζυγής της προηγούμενης. Το ρεύμα διατήρησης είναι της μορφής

$$J_\alpha = g^{-1}\partial_\alpha g \tag{1.56}$$

και είναι προφανές ότι διατηρείται ξεχωριστά το ολόμορφο και το αντιολόμορφο μέρος του ρεύματος, το οποίο ήταν και το ζητούμενο. Γράφουμε λοιπόν τη δράση του συγκεκριμένου μοντέλου, το οποίο ονομάζεται μοντέλο Wess-Zumino-Witten.

$$\begin{aligned} S_{WZW} &= \frac{\kappa}{16\pi}\int dxdtTr(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) \\ &- \frac{i\kappa}{24\pi}\int_B d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}) \end{aligned} \tag{1.57}$$

Η ξεχωριστή διατήρηση των συνιστωσών J_z και $J_{\bar{z}}$ έχει ως αποτέλεσμα το αναλλοίωτο της δράσης κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega(z)g(z,\bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \tag{1.58}$$

όπου Ω και $\bar{\Omega}$ δύο τυχαίοι πίνακες που παίρνουν τιμές στην ομάδα G. Πράγματι αν θεωρήσουμε τους απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\Omega(z) = 1 + \omega(z) \qquad \bar{\Omega}(\bar{z}) = 1 - \omega(\bar{z}) \tag{1.59}$$

η ποσότητα g μετασχηματίζεται ως εξής

$$\delta_\omega g = \omega g \qquad \delta_{\bar{\omega}} g = -\bar{\omega} g \tag{1.60}$$

Συνεπώς για μεταβολές της μορφής $g \to g + \delta_\omega g + \delta_{\bar{\omega}} g$ η μεταβολή της δράσης θα είναι

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\kappa}{2\pi}\int dzd\bar{z}Tr'(g^{-1}\delta g[\partial(g^{-1}\bar{\partial}g)]) \\ &= \frac{\kappa}{2\pi}\int dzd\bar{z}Tr'[\omega(z)\bar{\partial}(\partial g g^{-1}) - \bar{\omega}(\bar{z})\partial(g^{-1}\bar{\partial}g)] \end{aligned} \tag{1.61}$$

η οποία μηδενίζεται μετά από ολοκλήρωση κατά μέρη. Έτσι αποδεικνύεται και το αναλλοίωτο της δράσης κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής (1.59).

Κεφάλαιο 2

σ-μοντέλα σε συμμετρικούς χώρους

2.1 σ-μοντέλα στο χώρο F/G

Υποθέτουμε ότι F είναι μία Lie ομάδα και f είναι η αντίστοιχη Lie άλγεβρα, εφοδιασμένη με μια θετική, αναλλοίωτη διγραμμική απεικόνιση $<,>$. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι η F είναι μια ομάδα πινάκων και $< a, b >= Tr(ab)$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι G είναι μία υποομάδα της F και g η αντίστοιχη Lie άλγεβρα. Έστω $M = F/G$ ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο, ο οποίος επιπλέον είναι συμμετρικός, δηλαδή:

$$f = p \oplus g, \quad [g, g] \subset g, \quad [g, p] \subset p, \quad [p, p] \subset g \tag{2.1}$$

όπου p είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα της g στην f. Η δράση που περιγράφει το σχετικό σ-μοντέλο είναι η εξής:

$$S = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} Tr[(f^{-1}\partial_\alpha f)_p (f^{-1}\partial_\beta f)_p], \quad \alpha, \beta = 0, 1 \tag{2.2}$$

όπου συμβολίζουμε με $(\ldots)_p$ την ορθογώνια προβολή στο p, δηλαδή:

$$J = f^{-1}df = A + P, \quad A \in g, \quad P \in p \tag{2.3}$$

Η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό βαθμίδας $f \to fg$ για μία τυχαία συνάρτηση g, η οποία παίρνει τιμές στην ομάδα G. Πράγματι κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό το ρεύμα J μετασχηματίζεται ως εξής

$$J = f^{-1}df \to g^{-1}(f^{-1}df)g + g^{-1}dg \tag{2.4}$$

έτσι ώστε η ποσότητα P να μετασχηματίζεται σε $g^{-1}Pg$, διασφαλίζοντας το αναλλοίωτο της δράσης. Το ρεύμα και συνεπώς και η δράση είναι αναλλοίωτα επίσης κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής $f \to f_0 f$,όπου $f_0 \in F$ σταθερά. Τέλος η δράση του κλασικού σ-μοντέλου σε χώρο πηλίκο είναι αναλλοίωτη κάτω

από διδιάστατους σύμμορφους μετασχηματισμούς.
Οι εξισώσεις κίνησης του μοντέλου είναι:

$$D_\alpha (f^{-1}\partial^\alpha f)_p = 0 \tag{2.5}$$

όπου

$$D_\alpha = \partial_\alpha + [A_\alpha, \quad], \quad A_\alpha = (f^{-1}\partial_\alpha f)_g \tag{2.6}$$

Σε συντεταγμένες κώνου φωτός έχουμε ότι:

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2}(t \pm x), \quad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm} \tag{2.7}$$

άρα οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$D_+ P_- + D_- P_+ = 0 \tag{2.8}$$

όπου

$$P_\pm = (f^{-1}\partial_\pm f)_p \tag{2.9}$$

Οι ποσότητες $J_\pm$ υπακούουν εκ κατασκευής υπακούουν στη συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + [J_+, J_-] = 0 \tag{2.10}$$

Προβάλλοντας στο χώρο p έχουμε από την προηγούμενη σχέση

$$D_+ P_- - D_- P_+ = 0 \tag{2.11}$$

άρα

$$\begin{aligned} D_+ P_- &= 0 \\ D_- P_+ &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή ενέργειας-ορμής είναι

$$T_{++} = -\frac{1}{2} Tr(P_+ P_+) \quad , \quad T_{--} = -\frac{1}{2} Tr(P_- P_-) \tag{2.13}$$

Οι εξισώσεις κίνησης υποννοούν τους νόμους διατήρησης

$$\partial_- T_{++} = 0 \quad , \quad \partial_+ T_{--} = 0 \tag{2.14}$$

Κάνοντας χρήση της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς μπορούμε να θέσουμε $T_{\pm\pm} = \mu^2 = const.$

2.2 Λαγκρανζιανή διατύπωση μοντέλων sine-Gordon συμμετρικού χώρου

Έστω ότι F/G είναι ένας συμμετρικός χώρος. Η Lie άλγεβρα f αναλύεται σε $f = g \oplus k$ και υπακούει στις παρακάτω σχέσεις

$$[g, g] \subset g, \quad [g, k] \subset k, \quad [k, k] \subset g \tag{2.15}$$

Θεωρούμε δύο τυχαία στοιχεία $T_+, T_- \in k$ και ορίζουμε το σύνολο h ως το ταυτόχρονο κέντρο των T_+, T_-, δηλαδή

$$h = C_g(T_+, T_-) = \{R \in g : [R, T_+] = 0 = [R, T_-]\} \tag{2.16}$$

Τότε η Λαγκρανζιανή διατύπωση του μοντέλου SSSG δίνεται από την παρακάτω δράση

$$\begin{aligned} S &= S_{WZW}(g) + \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(-A_+\partial_- g g^{-1} + A_- g^{-1}\partial_+ g + A_+ g A_- g^{-1} \\ &- A_+A_-) - S_P(g, T_+, T_-) \end{aligned} \tag{2.17}$$

όπου S_{WZW} είναι η δράση του μοντέλου WZW για μία απεικόνιση $g : M \to G \subset F$ μιας Lie ομάδας G ορισμένη στο διδιάστατο χώρο Minkowski M.
Το δυναμικό S_P δίνεται συναρτήσει των T_+, T_- από τη σχέση

$$S_P(g, T_+, T_-) = \frac{m^2}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(gT_+g^{-1}T_-) \tag{2.18}$$

όπου m^2 είναι μία παράμετρος μάζας,και

$$A_+ = h^{-1}\partial_+ h \qquad A_- = h^{-1}\partial_- h \tag{2.19}$$

Η παραπάνω δράση χωρίς τον όρο δυναμικού είναι ακριβώς η δράση μίας σύμμορφης θεωρίας πεδίου στο χώρο G/H. Για αυτό το μοντέλο (2.14) περιγράφει μία ολοκληρώσιμη διαταραχή αυτής της σύμμορφης θεωρίας πεδίου μέσω, η οποία εξαρτάται από τα στοιχεία T_+, T_-, δηλαδή εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο είναι εμβαπτισμένη η ομάδα G στην F.
Στη συνέχεια θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησης, που απορρέουν από τη δράση (2.14)
Από λογισμό μεταβολών για τον όρο διαταραχής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta S_P &= \frac{m^2}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(\delta g T_+ g^{-1}T_- + gT_+\delta g^{-1}T_- \\ &= \frac{m^2}{2\pi}\int d^2\sigma \left[Tr(\delta g T_+ g^{-1}T_- g g^{-1}) - Tr(gT_+g^{-1}\delta g g^{-1}T_-)\right] \\ &= \frac{m^2}{2\pi}\int d^2\sigma Tr\left(g^{-1}\delta g[T_+, g^{-1}T_- g]\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Για τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (2.14) έχουμε ότι η μεταβολή του θα δίνεται από την

$$\begin{aligned}\delta S' &= \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(-A_+\partial_-\delta g g^{-1} - A_+\partial_- g\delta g^{-1} + A_-\delta g^{-1}\partial_+ g) \\ &+ A_- g^{-1}\partial_+\delta g + A_+\delta g A_- g^{-1} + A_+ g A_-\delta g^{-1}) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Πετώντας τους όρους με ολικές παραγώγους έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\delta S' &= \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr[g^{-1}\delta g(g^{-1}\partial_- A_+ g - g^{-1}\partial_- g g^{-1}A_+ g + g^{-1}A_+\partial_- g \\ &- g^{-1}\partial_+ g A_- - \partial_+ A_- + A_- g^{-1}\partial_+ g + A_- g^{-1}A_+ g \\ &- g^{-1}A_+ g A_-)] \end{aligned} \tag{2.22}$$

ή

$$\delta S' = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr[\partial_- + A_-, \partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g] \tag{2.23}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\delta S_{WZW} = 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(([\partial_- + A_-, \partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g] \\ &- m^2[T_+, g^{-1}T_- g])g^{-1}\delta g) = 0\end{aligned}$$

και οι εξισώσεις κίνησης έχουν τη μορφή

$$[\partial_- + A_-, \partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g] - m^2[T_+, g^{-1}T_- g] = 0 \tag{2.24}$$

Λόγω του ότι τα $A_\pm$ μετατίθενται με τα $T_\pm$ έχουμε την ταυτότητα

$$[\partial_- + A_-, T_+] = 0 \tag{2.25}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned}[g^{-1}\partial g + g^{-1}A_+ g, g^{-1}T_- g] &= [g^{-1}\partial_+ g, g^{-1}T_- g] + [g^{-1}A_+ g, g^{-1}T_- g] \\ &= g^{-1}\partial_+ g g^{-1}T_- g - g^{-1}T_-\partial_+ g + g^{-1}[A_+, T_-]g \\ &= -\partial_+ g^{-1}T_- g - g^{-1}T_-\partial_+ g \\ &= -\partial_+(g^{-1}T_- g)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.21),(2.22) και (2.23) μπορούμε να γράψουμε τη σχετική συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας

$$[\partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g + \lambda T_+, \partial_- + A_- + \frac{m^2}{\lambda}g^{-1}T_- g] = 0 \tag{2.27}$$

όπου λ η φασματική παράμετρος. Η τελευταία σχέση προκύπτει ως σχέση συμβατότητας για το σύστημα

$$(\partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g + \lambda T_+)\Psi = 0 \quad , \quad (\partial_- + A_- + \frac{m^2}{\lambda}g^{-1}T_- g)\Psi = 0 \tag{2.28}$$

Σε μηδενική τάξη η συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας γράφεται

$$[\partial_+ + g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g, \partial_- + A_-] = 0 \tag{2.29}$$

Οι εξισώσεις των δεσμών λόγω του λογισμού μεταβολών της δράσης ως προς $\delta A_\pm$ είναι

$$\delta_{A_+} S = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(-\partial_- g g^{-1} + gA_- g^{-1} - A_-)\delta A_+ = 0 \tag{2.30}$$

άρα

$$-\partial_- g g^{-1} + gA_- g^{-1} - A_- = 0 \tag{2.31}$$

και

$$\delta_{A_-} S = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma Tr(g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - A)\delta A_- = 0 \tag{2.32}$$

άρα

$$g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A_+ g - A_+ = 0 \tag{2.33}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.28) και (2.30) με τη σχέση (2.26) έχουμε ότι

$$[\partial_+ + A_+, \partial_- + A_-] = 0 \tag{2.34}$$

Αυτό μας επιτρέπει να επιλέξουμε βαθμίδα και να θέσουμε από εδώ και στο εξής $A_\pm = 0$. Η σχέση (2.24) γράφεται

$$\partial_-(g^{-1}\partial_+ g) - m^2[T_+, g^{-1}T_- g] = 0 \tag{2.35}$$

ενώ οι εξισώσεις των δεσμών γράφονται

$$(g^{-1}\partial_+ g)_h = 0 \qquad (\partial_- g g^{-1})_h = 0 \tag{2.36}$$

όπου ο δείκτης h δηλώνει την προβολή στην υποάλγεβρα h.

2.2.1 Η περίπτωση $F/G = SO(n+1)/SO(n)$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα έτσι ώστε να γίνουν πιο σαφή. Έστω ότι έχουμε την περίπτωση του χώρου πηλίκο $F/G = SO(n+1)/SO(n)$.Θεωρούμε ότι η ομάδα G είναι εμβαπτισμένη κατα τετριμμένο τρόπο στην F, δηλαδή

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g \in SO(n) & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in SO(n+1) \tag{2.37}$$

όπου $\tilde{g}$ η επέκταση του στοιχείου g στην ομάδα $SO(n+1)$. Επιλέγουμε επίσης τα στοιχεία $T_{\pm}$, τα οποία είναι στο ορθογώνιο συμπληρωμα της G να έχουν τη μορφή

$$T_+ = T_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

έτσι ώστε η ομάδα ευστάθειας να είναι $H = SO(n-1)$. Στη συνέχεια παραμετροποιούμε τις ποσότητες $g^{-1}T_-g$ και $g^{-1}\partial_+ g$ ως εξής

$$g^{-1}T_-g = \begin{pmatrix} 0 & V_0 & \dots & V_{n-1} \\ -V_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -V_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

και

$$g^{-1}\partial_+ g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & \dots & E_{n-1} \\ 0 & -E_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A=0 & \\ 0 & -E_{n-1} & & & \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση του δεσμού

$$(g^{-1}\partial_+ g)_h = 0 \tag{2.41}$$

Επιπλέον τα στοιχεία $V_i = -g_{1,i+1}$ όπου $i = 0, 1, \dots, n-1$ ικανοποιούν τη σχέση νορμαλισμού

$$V_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} V_k^2 = \sum_{k=1}^{n} g_{1k}^2 = 1 \tag{2.42}$$

Από την ταυτότητα (2.23) έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_+ V_0 & \dots & \partial_+ V_{n-1} \\ -\partial_+ V_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\partial_+ V_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E_iV_i & -E_1V_0 & \dots & -E_{n-1}V_0 \\ -E_iV_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ E_1V_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{n-1}V_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.43}$$

Άρα έχουμε τις σχέσεις

$$\partial_+ V_0 + E_k V_k = 0, \quad \partial_+ V_i - V_0 E_i = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.44}$$

όμως

$$V_0 = \sqrt{1 - V_k V_k} \tag{2.45}$$

άρα

$$E_i = \frac{\partial_+ V_i}{\sqrt{1 - V_k V_k}} \tag{2.46}$$

Τότε τις σχέσεις (2.35),(2.36),(2.37) και (2.42) στη (2.32) και έχουμε

$$\partial_- E_i - m^2 V_i = \partial_- \frac{\partial_+ V_i}{\sqrt{1 - V_k V_k}} - m^2 V_i = 0 \tag{2.47}$$

που είναι μία διανυσματικού τύπου εξίσωση SSSG, η οποία αναπαράγει το SSSG μοντέλο στο χώρο $SO(n+1)/SO(n)$ μέσω ενός βαθμωμένου WZW μοντέλου στο χώρο $SO(n)/SO(n-1)$.

2.3 Θεωρία αναγωγής για το F/G σ-μοντέλο

Σκοπός μας είναι να συσχετίσουμε τις εξισώσεις κίνησης του σ-μοντέλου στο χώρο F/G με αυτές του βαθμωμένου WZW μοντέλου στο χώρο G/H. Αυτό το κατεφέρουμε επιλέγοντας μια κατάλληλη βαθμίδα αναγωγής για τις εξισώσεις κίνησης του F/G σ-μοντέλου και κάνοντας χρήση της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς, για να απαλείψουμε έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας.

2.3.1 Εξισώσεις κίνησης και βαθμίδα αναγωγής

Ο συσχετισμός μεταξύ του F/G σ-μοντέλου και του G/H gWZW μοντέλου είναι δυνατός όταν ικανοποιούνται συγκεκριμένες συνθήκες για τις άλγεβρες f, g και h. Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται στην περίπτωση $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, όπως θα γίνει σαφές παρακάτω.
Έστω a ο μέγιστος αβελιανός υπόχωρος του ορθογώνιου συμπληρώματος p της άλγεβρας g. Έστω h το κέντρο του a στην g. Θα υποθέσουμε ότι οι εν λόγω άλγεβρες υπακούουν στις παρακάτω συνθήκες:

$$f = p \oplus g, \quad p = a \oplus n, \quad g = m \oplus h, \quad [a,a] = 0, \quad [h,a] = 0 \tag{2.48}$$

$$[m,m] \subset h, \quad [m,h] \subset m, \quad [m,a] \subset n, \quad [a,n] \subset m \tag{2.49}$$

Επιπλέον θεωρούμε το ρεύμα $J = f^{-1}df$ με $f \in F$ και θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

$$A_\alpha = (f^{-1}\partial_\alpha f)_h, \quad B_\alpha = (f^{-1}\partial_\alpha f)_m, \quad P_\alpha = (f^{-1}\partial_\alpha f)_p \tag{2.50}$$

Σύμφωνα με αυτά που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο οι εξισώσεις κίνησης για το F/G σ-μοντέλο γράφονται στη μορφή:

$$D_+ P_- = 0, \quad D_- P_+ = 0 \tag{2.51}$$

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + [J_+, J_-] = 0 \tag{2.52}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$\partial_+(A_- + B_-) - \partial_-(A_+ + B_+) + [A_+ + B_+, A_- + B_-] = [P_-, P_+] \quad (2.53)$$

όπου $D_\pm = \partial_\pm + [A_\pm + B_\pm, \quad]$.
Η επιλογή βαθμίδας στηρίζεται στο θεώρημα polar decomposition , σύμφωνα με το οποίο, για κάθε $k \in p$ υπάρχει $g_0 \in G$ τέτοιο ώστε $g_0^{-1} k g_0 \in a$. Χρησιμοποιώντας τη G συμμετρία βαθμίδας των εξισώσεων κίνησης μπορούμε να θέσουμε $P_+ \in a$. Τότε έχουμε από την εξίσωση $D_- P_+ = 0$ ότι

$$\partial_- P_+ + [B_-, P_+] = 0 \quad (2.54)$$

όμως $\partial_- P_+ \in g$ και $[B_-, P_+] \in n \subset p$ άρα ο μόνος τρόπος να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση είναι αν

$$\partial_- P_+ = 0, \qquad [B_-, P_+] = 0 \quad (2.55)$$

Στην περίπτωση που $dim a = 1$ τότε έχουμε ότι:

$$[B_-, P_+] = 0 \Rightarrow B_- = 0 \quad (2.56)$$

Συνοψίζοντας έχουμε τι εξής εξισώσεις κίνησης

$$\partial_- P_+ = 0, \quad \partial_+ P_- + [A_+, P_-] + [B_+, P_-] = 0 \quad (2.57)$$

$$\partial_- B_+ + [A_-, B_+] = [P_+, P_-] \quad (2.58)$$

$$\partial_- A_+ - \partial_+ A_- + [A_-, A_+] = 0 \quad (2.59)$$

όπου οι δύο τελευταίες σχέσεις είναι οι προβολές στους χώρους m και h αντίστοιχα της σχέσης (2.53).
Σε αυτή τη βαθμίδα αναγωγής η αρχική G συμμετρία βαθμίδας ανάγεται στην H συμμετρία βαθμίδας. Κάτω από τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς τα $A_\pm$ μετασχηματίζονται ως πεδία βαθμίδας, ενώ τα $B_\pm$ και $P_\pm$ μετασχηματίζονται συναλλοίωτα. Ειδικότερα το P_+ είναι αναλλοίωτο λόγω του ότι παίρνει τιμές στο χώρο a και ισχύει ότι $[a, h] = 0$.
Η σχέση (2.59) μας επιτρέπει να επιλέξουμε τη βαθμίδα $A_\pm = 0$, σύμφωνα με αυτά που αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 2.2. Τότε οι εξισώσεις (2.57) και (2.58) γράφονται

$$\partial_- P_+ = 0, \quad \partial_+ P_- = [P_-, B_+], \quad \partial_- B_+ = [P_+, P_-] \quad (2.60)$$

2.3.2 Επιλογή βαθμίδας και σύνδεση με το βαθμωμένο μοντέλο WZW

Από τη σχέση $\partial_- P_+ = 0$ έχουμε ότι $P_+ = P_+(\sigma^+)$. Επιπλέον κάνοντας χρήση της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς $P_+ d\sigma^+ = P'_+ d\sigma'^+$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο του πίνακα P_+ να έχει συγκεκριμένη μορφή. Η ποσότητα P_+ ανήκει στον αβελιανό υπόχωρο $a \subset p$. Αν υποθέσουμε ότι $dima = 1$ τότε μπορούμε πάντα να θέσουμε $P_+ = \mu T_+$, όπου $T_+ \in a$ είναι ένας σταθερός πίνακας στην άλγεβρα f και είναι βασικό στοιχείο του υπόχωρου a. Μπορούμε επιπλέον να νορμαλίσουμε το στοιχείο T_+ έτσι ώστε $Tr(T_+T_+) = -2$. Τέλος αναφέρουμε πως η επιλογή μας αυτή, δηλαδή ότι $P_+ = \mu T_+$, ισοδύναμα σημαίνει για τον τανυστή ενέργειας ορμής ότι $T_{++} = \mu^2$. Από τις σχέσεις (2.13) και (2.60) έχουμε ότι $\partial_+ T_{--} = 0$. Κάνοντας χρήση πάλι της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς, δηλαδή $\sigma^- \to \sigma'^-(\sigma^-)$ και ακολουθώντας ένα παρόμοιο επιχείρημα με το παραπάνω μπορούμε να θέσουμε $T_{--} = \mu^2$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι αν $dima = 1$ και κάνοντας χρήση της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς έχουμε ότι

$$P_+ = \mu T_+, \qquad -\frac{1}{2}Tr(P_\pm P_\pm) = \mu^2 \tag{2.61}$$

$$T_{\pm\pm} = \mu^2 \qquad \mu, T_+ = const \tag{2.62}$$

Με την πρώτη σχέση της (2.61) επιλέγουμε έναν ανεξάρτητο βαθμό ελευθερίας του πίνακα P_+ στην περίπτωση $dima = 1$, ενώ με τη δεύτερη σχέση της (2.61) μειώνουμε κατά έναν τους ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας του πίνακα P_-. Η συνθήκη νορμαλισμού του P_- μπορεί να λυθεί

$$P_- = \mu g^{-1} T_- g, \quad T_- = const \tag{2.63}$$

όπου $g \in G$ είναι μία νέα μεταβλητή του πεδίου και $T_- \in a$ είναι ένας σταθερός πίνακας. Την ύπαρξη της μεταβλητής g την εγγυάται το θεώρημα polar decomposition και η απαίτηση $T_{--} = \mu^2$ συνεπάγεται ότι $Tr(T_-T_-) = -2$. Στην περίπτωση που $dima = 1$, η οποία μας ενδιαφέρει, έχουμε ότι

$$T_+ = T_- = T \tag{2.64}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση(2.63) στη σχέση (2.60) για το P_- και έχουμε ότι:

$$\partial_+(g^{-1}T_- g) + [\mathcal{A}_+, g^{-1}T_- g] = 0 \tag{2.65}$$

όπου $\mathcal{A}_+ = A_+ + B_+$. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο την ποσότητα $\mathcal{A}_+ \in g$, τότε η γενική λύση της παράπανω εξίσωσης γράφεται

$$\mathcal{A}_+ = g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A'_+ g \tag{2.66}$$

όπου $A'_+ \in h$. Πράγματι αν θυμηθούμε ότι $[h, a] = 0$ και αντικαταστήσουμε τη σχέση (2.66) στη σχέση (2.65) βλέπουμε ότι την ικανοποιεί. Συνεπώς

$$A_+ = (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A'_+ g)_h, \quad B_+ = (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A'_+ g)_m \tag{2.67}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι οι εξισώσεις κίνησης (2.57), καθώς και η εξίσωση (2.53), η οποία γράφεται ως εξής

$$\partial_-(g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A'_+ g) - \partial_+ A_- + [A_-, g^{-1}\partial_+ g + g^{-1}A'_+ g] = \mu^2 [T_+, g^{-1}T_- g] \tag{2.68}$$

δεν είναι τίποτα άλλο από τις εξισώσεις κίνησης που βρήκαμε για το βαθμωμένο μοντέλο WZW (2.24), υπό την έννοια ότι πάντα μπορούμε να κάνουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό βαθμίδας ώστε να ικανοποιούνται οι δεσμοί

$$A'_{+} = (g^{-1}\partial_{+}g + g^{-1}A'_{+}g)_h, \quad A_{-} = (-\partial_{-}gg^{-1} + gA_{-}g^{-1})_h \tag{2.69}$$

Μετονομάζοντας το A'_{+} σε A_{+} βλέπουμε ότι τα παραπάνω συμπίπτουν με τις εξισώσεις κίνησης και τους δεσμούς μου βρήκαμε για το βαθμωμένο μοντέλο WZW , δηλαδή τις σχέσεις (2.24), (2.31) και (2.33).

2.4 Αναγωγή των εξισώσεων κίνησης στην περίπτωση $F/G = SO(n+1)/SO(n)$ στη βαθμίδα $A_{\pm} = 0$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε αυτά που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο στην περίπτωση ενός σ-μοντέλου στό χώρο πηλίκο $F/G = SO(n+1)/SO(n)$ και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με αυτά της ενότητας (2.2.1).
Θεωρούμε ότι η ομάδα $G = SO(n)$ είναι διαγώνια εμβαπτισμένη στην ομάδα $F = SO(n+1)$ καθώς και ότι οι πίνακες $T_{\pm}$ έχουν μη μηδενικό μόνο το πάνω 2×2 τμήμα τους, έτσι ώστε και η υποομάδα $H = SO(n-1)$ να είναι διαγώνια εμβαπτισμένη στην G. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$P_{+} = \mu T_{+} = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

Επιπλέον παραμετροποιώ το P_{-} ως εξής

$$P_{-} = \mu g^{-1}T_{-}g = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & \dots & k_n \\ -k_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

Οι παραπάνω παραμετροποιήσεις ικανοποιούν τη συνθήκη $-\frac{1}{2}Tr(P_{\pm}P_{\pm}) = \mu^2$ αρκεί να ισχύει

$$\sum_{s=1}^{n} k_s k_s = 1 \tag{2.72}$$

Οι υποάλγεβρες $g = so(n)$ και $h = so(n-1)$ είναι επίσης διαγώνια εμβαπτισμένες στην άλγεβρα $f = so(n+1)$. Επίσης από τη σχέση (2.56) έχουμε ότι

$B_- = 0$, άρα $B_+ = (\mathcal{A})_m$ με την παραμετροποίηση

$$B_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.73}$$

Στην περίπτωση αυτή η σχέση (2.58) μπορεί να λυθεί αλγεβρικά ως προς B_+. Η λύση είναι:

$$b_l = \frac{\partial_+ k_l}{\sqrt{1 - \sum_{m=2}^{n} k_m k_m}}, \qquad l = 2, \dots, n \tag{2.74}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την εξίσωση (2.46). Στη συνέχεια με αντικατάσταση των σχέσεων (2.71), (2.73) και (2.74) στην (2.58) παίρνουμε την εξίσωση

$$\partial_- \frac{\partial_+ k_l}{\sqrt{1 - \sum_{m=2}^{n} k_m k_m}} = -\mu^2 k_l, \qquad l = 2, \dots, n \tag{2.75}$$

η οποία είναι ίδια με την εξίσωση (2.47). Άρα με τη μέθοδο αναγωγής που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.3 το σ-μοντέλο του συμμετρικό χώρου F/G είναι ισοδύναμο με ένα βαθμωμένο μοντέλο WZW συν έναν όρο δυναμικού. Είναι χρήσιμο να ξαναγράψουμε την εξίσωση (2.75) συναρτήσει των νέων μεταβλητών (ϕ, u_m), οι οποίες ορίζονται έτσι ώστε η συνθήκη (2.72) να ικανοποιείται

$$k_1 = \cos 2\phi, \quad k_l = u_l \sin(2\phi), \quad u_l u_l = 1, \quad l = 2, \dots, n \tag{2.76}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.75) έχουμε:

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{1}{2}\tan 2\phi \partial_+ u_l \partial_- u_l + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.77}$$

και

$$\partial_+\partial_- u_l + (\partial_+ u_m \partial_- u_m) u_l + \frac{2}{\sin 2\phi}(\cos 2\phi \partial_+\phi \partial_- u_l + \frac{1}{\cos 2\phi}\partial_-\phi\partial_+ u_l) = 0 \tag{2.78}$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση του P_- ως προς k_l, μπορούμε να ξεκινήσουμε με μία συγκεκριμένη επιλογή για το $g \in G$ και να προσδιορίσουμε τη μορφή του P_- από τη σχέση (2.63). Αν παραμετροποιήσουμε το g με τη βοήθεια των γενικευμένων γωνιών Euler και εκφράσουμε το P_- συναρήσει αυτών τότε θα καταλήξουμε σε μία συγκεκριμένη πολυπεδιακή γενίκευση της εξίσωσης sine-Gordon. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση $F/G = SO(3)/SO(2)$ έχουμε ότι

$$g = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

με

$$k_1 = \cos 2\phi, \quad k_2 = \sin 2\phi, \quad u_2 = 1 \tag{2.80}$$

η εξίσωση (2.77) γίνεται:

$$\partial_+\partial_-\phi + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.81}$$

Στην περίπτωση $F/G = SO(4)/SO(3)$ μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το στοιχείο g ως εξής

$$g = g_2 g_1 g_2, \quad g_1 = e^{2\phi R_1}, \quad g_2 = e^{\chi R_2} \tag{2.82}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος k_l είναι

$$k_1 = \cos 2\phi, \quad k_2 = \sin 2\phi \cos\chi, \quad k_3 = \sin 2\phi \sin\chi_1 \tag{2.84}$$

Οι εξισώσεις κίνησης (2.77) και (2.78) παίρνουν τη μορφή

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{1}{2}\tan 2\phi\partial_+\chi\partial_-\chi + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.85}$$

και

$$\partial_+\partial_-\chi + \frac{2}{\sin 2\phi}\left(\cos 2\phi\partial_+\phi\partial_-\chi + \frac{1}{\cos 2\phi}\partial_-\phi\partial_+\chi\right) = 0 \tag{2.86}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τον μετασχηματισμό $\chi \to \theta$, όπου

$$\partial_+\theta = \frac{\cos^2\phi}{\cos 2\phi}\partial_+\chi, \quad \partial_-\theta = \cos^2\phi\partial_-\chi \tag{2.87}$$

και έχουμε

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.88}$$

$$\partial_+\partial_-\theta + \frac{2}{\sin 2\phi}(\partial_+\phi\partial_-\theta + \partial_-\phi\partial_+\theta) = 0 \tag{2.89}$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις κίνησης για τη Λαγκρανζιανή του μιγαδικού sine-Gordon μοντέλου. Αντί να χρησιμοποιήσουμε την παραμετροποίηση του P_- ως προς k_l στη σχέση (2.71) μπορούμε να ξεκινήσουμε με μία συγκεκριμένη επιλογή για το $g \in G$, από την οποία θα προσδιορίσουμε το P_- μέσω της (2.63). Παραμετρίζοντας το στοιχείο $g \in G = SO(n)$ μέσω των γενικευμένων γωνιών Euler και εκφράζοντας το P_- συναρτήσει αυτών παίρνουμε πολυπεδιακές γενικεύσεις της εξίσωσης sine-Gordon . Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση $SO(3)/SO(2)$ παίρνουμε την εξίσωση sine-Gordon

$$g = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix}, \qquad k_1 = \cos 2\phi, \quad k_2 = \sin 2\phi \tag{2.90}$$

Άρα η σχέση (2.77) δίνει

$$\partial_+\partial_-\phi + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.91}$$

Στην περίπτωση $SO(4)/SO(3)$ μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το $g \in SO(3)$ ως εξής

$$g = g_2 g_1 g_2, \quad g_1 = e^{2\phi R_1}, \quad g_2 = e^{\chi R_2} \tag{2.92}$$

όπου

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.93}$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος k_l είναι

$$k_1 = \cos 2\phi, \quad k_2 = \sin 2\phi \cos\chi, \quad k_3 = \sin 2\phi \sin\chi \tag{2.94}$$

Οι εξισώσεις (2.77), (2.78) παίρνουν την μορφή

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{1}{2}\tan 2\phi \partial_+\chi\partial_-\chi + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.95}$$

$$\partial_+\partial_-\chi + \frac{2}{\sin 2\phi}\left(\cos 2\phi\partial_+\phi\partial_-\chi + \frac{1}{\cos 2\phi}\partial_-\phi\partial_+\chi\right) = 0 \tag{2.96}$$

Αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην στάνταρ μορφή των εξισώσεων κίνησης του μιγαδικού sine-Gordon μοντέλου μέσω του παρακάτω μή τοπικού μετασχηματισμού

$$\partial_+\theta = \frac{\cos^2\phi}{\cos 2\phi}\partial_+\chi, \qquad \partial_-\theta = \cos^2\phi\partial_-\chi \tag{2.97}$$

Πράγματι παίρνουμε τις σχέσεις

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{2.98}$$

$$\partial_+\partial_-\theta + \frac{2}{\sin 2\phi}(\partial_+\phi\partial_-\theta + \partial_-\phi + \partial_+\theta) = 0 \tag{2.99}$$

Κεφάλαιο 3

Αναγωγή Pohlmeyer

3.1 Χορδές στους χώρους $R_t \times S^2$ και $R_t \times S^3$

Αρχικά θα μελετήσουμε την αναγωγή του σ-μοντέλου στη σφαίρα S^2 στο μοντέλο sine-Gordon. Θεωρούμε αρχικά τη δράση του σ-μοντέλου

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma L \tag{3.1}$$

όπου

$$L = \partial_+ X^m \partial_- X^m - \Lambda(X^m X^m - 1), \quad m = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

Από λογισμό μεταβολών έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\partial_+ \partial_- X^m + \Lambda X^m = 0 \tag{3.3}$$

και

$$\Lambda = \partial_+ X^m \partial_- X^m, \quad X^m X^m = 1 \tag{3.4}$$

Ο τανυστής ενέργειας ορμής ικανοποιεί τις σχέσεις

$$T_{+-} = 0, \quad \partial_+ T_{--} = 0, \quad \partial_- T_{++} = 0, \quad T_{\pm\pm} = \partial_\pm X^m \partial_\pm X^m \tag{3.5}$$

έτσι ώστε $T_{++} = T_{++}(\sigma^+)$ και $T_{--} = T_{--}(\sigma^-)$. Κάνοντας χρήση της συμμετρίας κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς μπορούμε να θέσουμε $T_{\pm\pm} = \mu^2$, δηλαδή:

$$\partial_\pm X^m \partial_\pm X^m = \mu^2, \qquad \mu = const \tag{3.6}$$

Έτσι έχουμε προσδιορίσει το ένα από τα δύο πεδία στον S^2 και καταλήγουμε σε μία μονοδιάστατη "ανηγμένη" θεωρία. Πράγματι αν εισάγουμε τη νέα μεταβλητή ϕ μέσω του παρακάτω μετασχηματισμού

$$\mu^2 \cos 2\phi = \partial_+ X^m \partial_- X^m \tag{3.7}$$

τότε για να λύνονται οι εξισώσεις (3.3), (3.4) και να ικανοποιούνται οι συνθήκες (3.6) πρέπει η νέα μεταβλητή ϕ να ικανοποιεί την εξίσωση sine-Gordon.

$$\partial_-\partial_+\phi + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \tag{3.8}$$

η οποία προέρχεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \partial_+\phi\partial_-\phi + \frac{\mu^2}{2}\cos 2\phi \tag{3.9}$$

Η αναγωγή του σ-μοντέλου στη σφαίρα στη θεωρία sine-Gordon έχει και μία άλλη ερμηνεία σαν μια αναλογία της κλασικής θεωρίας για μποζονικές χορδές στο χώρο $R_t \times S^2$ σε μία συγκεκριμένη βαθμίδα και της θεωρίας sine-Gordon. Πράγματι αν ξεκινήσει κανείς με τη δράση του Polyakov , η οποία περιέχει επιπλέον τον όρο $-\partial_+t\partial_-t$ εκτός από τους όρους που σχετίζονται με το χώρο S^2, και επιλέξει τη σύμμορφη βαθμίδα καθώς και $t = \mu\tau$ θα καταλήξει στις ίδιες συνθήκες (3.6), οι οποίες ερμηνεύονται σε αυτό το πλαίσιο ως σύμμορφοι δεσμοί ή δεσμοί Virasoro. Τότε οι εξισώσεις κίνησης της κλασικής χορδής στο χώρο $R_t \times S^2$ γίνονται ισοδύναμες με την εξίσωση sine-Gordon για τον εναπομείναντα βαθμό ελευθερίας που τον παραμετροποιούμε με ϕ.
Η παραπάνω αναγωγή γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση που ο χώρος S^2 αντικατασταθεί από το χώρο S^3. Το ανηγμένο μοντέλο που αντιστοιχεί στις χορδές στο χώρο $R_t \times S^3$ είναι το μιγαδικό sine-Gordon μοντέλο με Λαγκρανζιανή

$$L = \partial_+\phi\partial_-\phi + \tan^2\phi\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\cos 2\phi \tag{3.10}$$

όπου οι μεταβλητές ϕ και θ εισάγονται από τις σχέσεις

$$\mu^2\cos 2\phi = \partial_+X^m\partial_-X^m, \qquad \mu^3\sin^2\phi\partial_\pm\theta = \mp\frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}X^m\partial_+X^n\partial_-X^k\partial_\pm^2X^l \tag{3.11}$$

Πάλι οι ολοκληρώσιμες δομές και οι σολιτονικές λύσεις των δύο μοντέλων σχετίζονται στενά.
Την κατασκευή του ανηγμένου μοντέλου, η οποία βασίζεται στη σύμμορφη βαθμίδα και στη χρήση των υπολοίπων σύμμορφων μετασχηματισμών $t = \mu\tau$, την εφαρμόσαμε στην περίπτωση των μποζονικών χορδών στο χώρο $R_t \times S^n$. Το ίδιο μπορεί να γίνει και για την περίπτωση της μποζονικής θεωρίας χορδών στο χώρο $AdS_n \times S^1$ στη σύμμορφη βαθμίδα θέτοντας τη γωνία του κύκλου S^1 ίση με $\alpha = \mu\tau$. Αν συμβολίσουμε τις συντεταγμένες του χώρου AdS_n με Y_s, (με $Y^sY_s = -Y_0^2 - Y_{-1}^2 + Y_1^2 + \ldots + Y_n^2 = -1$) τότε η Λαγκρανζιανή γράφεται

$$L = \partial_+Y^s\partial_-Y_s - \tilde{\Lambda}(Y^sY_s - 1) \tag{3.12}$$

με τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης καθώς και τους παρακάτω δεσμούς

$$\partial_+\partial_-Y_s + \tilde{\Lambda}Y_s = 0, \quad \tilde{\Lambda} = -\partial_+Y^s\partial_-Y_s, \quad Y^sY_s = -1 \tag{3.13}$$

$$\partial_+ Y_s \partial_+ Y^s = -\mu^2, \qquad \partial_- Y_s \partial_- Y^s = -\mu^2 \tag{3.14}$$

Αν επικεντρωθούμε στο επίπεδο που ορίζουν τα νορμαλισμένα διανύσματα $\partial_+ Y^s$ και $\partial_- Y^s$, τα οποία είναι κάθετα στο Y^s, τότε μπορούμε να θέσουμε το γινόμενό τους ίσο με

$$\partial_+ Y^s \partial_- Y_s = -\mu^2 \cosh 2\phi \tag{3.15}$$

Τότε για την περίπτωση του χώρου AdS_2 παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση για τη μεταβλητή ϕ

$$\partial_+ \partial_- \phi + \frac{\mu^2}{2} \sinh 2\phi = 0 \tag{3.16}$$

η οποία απορρέει από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \partial_+ \phi \partial_- \phi - \frac{\mu^2}{2} \cosh 2\phi \tag{3.17}$$

Στη συνέχεια θα σκιαγραφήσουμε τον τρόπο με τον οποίο γενικεύονται τα παραπάνω στην περίπτωση των μποζονικών χορδών στο χώρο $AdS_n \times S^n$. Η συνθήκη σύμμορφης βαθμίδας σημαίνει το μηδενισμό του συνολικού τανυστή ενέργειας ορμής

$$T_{\pm\pm}(Y) + T_{\pm\pm}(X) = 0 \tag{3.18}$$

Επειδή στη σύμμορφη βαθμίδα οι εξισώσεις κίνησης για τα Y_s και τα X^m παραγοντοποιούνται, οι αντίστοιχοι τανυστές ενέργειας ορμής διατηρούνται ξεχωριστά και έχουν ίχνος μηδέν. Αντί να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $t = \mu\tau$ και $\alpha = \mu\tau$ μπορούμε να επιλέξουμε βαθμίδα κάνοντας χρήση των υπολοίπων σύμμορφων μετασχηματισμών και να απαιτήσουμε ότι $T_{\pm\pm}(X) = \mu^2$, το οποίο συνπάγεται ότι

$$T_{\pm\pm}(X) = \mu^2, \qquad T_{\pm\pm}(Y) = -\mu^2 \tag{3.19}$$

Έτσι παίρνουμε δύο αποσυζευγμένα σ-μοντέλα στους χώρους AdS_n και S^n στα οποία μπορούμε ξεχωριστά να εφαρμόσουμε την αναγωγή Pohlmeyer . Με αυτόν τον τρόπο απαλείφουμε $1+1$ βαθμούς ελευθερίας.

3.2 Λαγκρανζιανή της ανηγμένης θεωρίας για το σ-μοντέλο στο χώρο $S^n = SO(n+1)/SO(n)$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο οι εξισώσεις κίνησης ενός σ-μοντέλου στο χώρο πηλίκο F/G ανάγονται μέσω μίας κατάλληλης διαδικασίας στις εξισώσεις κίνησης ενός βαθμωμένου μοντέλου WZW με ένα ολοκληρώσιμο δυναμικό. Για να βρούμε μια Λαγκρανζιανή διατύπωση της ανηγμένης θεωρίας, η οποία αντιστοιχεί στο σ-μοντέλο στο χώρο F/G ή ισοδύναμα στην μποζονική θεωρία χορδών στο χώρο $R_t \times F/G$ σε σύμμορφη βαθμίδα μπορούμε να ξεκινήσουμε από το σχετικό βαθμωμένο WZW μοντέλο στο χώρο G/H, να επιλέξουμε μία H-βαθμίδα στο $g \in G$ και να λύσουμε για το auxiliary πεδίο $A_\pm$. Με αυτόν τον τρόπο θα βρούμε ένα κλασικά ισούναμο ολοκληρώσιμο σύστημα.

3.2.1 Γενική δομή της ανηγμένης Λαγκρανζιανής

Στην περίπτωση που $F/G = S^n$, δηλαδή $G/H = SO(n)/SO(n-1)$ θα καταλήξουμε με ένα $n-1$-διάστατο σ-μοντέλο συν έναν όρο δυναμικού.

$$L = G_{mk}(x)\partial_+ x^m \partial_- x^k - \mu^2 U(x) \tag{3.20}$$

όπου $G_{mk}(x)$ η μετρική του χώρου στον οποίο παίρνουν τιμές τα πεδία του σ-μοντέλου. Οι ειδικές περιπτώσεις για $n = 2$ (3.9) και $n = 3$ (3.10) μελετήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Εδώ x^m είναι οι $n-1$ ανεξάρτητες συνιστώσες του g αφού έχει γίνει η επιλογή βαθμίδας H. Σε αντίθεση με την μετρική του χώρου πηλίκο $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$ η μετρική G_{mk} από το συμμετρικά βαθμωμένο WZW στο χώρο $G/H = SO(n)/SO(n-1)$ θα έχει εν γένει ανωμαλίες και μη-αβελιανές ισομετρίες.
Τις γεωμετρίες που προέρχονται από σύμμορφα $\frac{SO(n)}{SO(n-1)}$ gWZW μοντέλα τις ονομάζουμε σύμμορφα συσύνολα, ή σύμμορφες σφαίρες και τις συμβολίζουμε με Σ^{n-1}. Αντί για τη σχέση $R_{mk} = cG_{mk}$ που ικανοποιείται για μετρικές που περιγράφουν σφαίρες η μετρική των Σ^{n-1} ικανοποιεί τη σχέση $R_{mk}+2\nabla_m\nabla_k\Phi = 0$, όπου Φ είναι το αντίστοιχο πεδίο dilaton , το οποίο προκύπτει ύστερα από ολοκλήρωση του A_α.
Ο όρος δυναμικού (ταχυονικός όρος) της σχέσης (3.20) προκύπτει άμεσα από τον αντίστοιχο όρο δυναμικού της δράσης (2.17). Είναι μία ολοκληρώσιμη διαταραχή του βαθμωμένου WZW μοντέλου, συνεπώς και της ανηγμένης γεωμετρίας και θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{\sqrt{G}e^{-2\Phi}}\partial_m(\sqrt{G}e^{-2\Phi}G^{mk}\partial_k)U - M^2 U = 0 \tag{3.21}$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως προκύπτει η μετρική G_{mk}.
Το πρώτο βήμα στη διαδικασία που θα ακολουθηθεί είναι να παραμετροποιήσουμε το στοιχείο g κάνοντας χρήση των γενικευμένων γωνιών του Euler. Ορίζουμε τις μονοπαραμετρικές υποομάδες που αντιστοιχούν στους γεννήτορες $R_{m+1,m}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$ της ομάδας $SO(n+1)$.

$$g_M(\theta) = e^{\theta R_m} \tag{3.22}$$

όπου

$$(R_m)_i^j = (R_{m+1,m})_i^j = \delta_m^j \delta_{m+1,i} - \delta_{mi}\delta_{m+1}^j \tag{3.23}$$

Τότε οι ποσότητες $T_\pm = T$ της σχέσης (2.18) είναι ισοδύναμες με τον γεννήτορα R_0 που αντιστοιχεί στο g_0.

$$T = R_0 \tag{3.24}$$

και οι γεννήτορες της υποομάδας $H = SO(n-1)$, η οποία μετατίθεται με τα στοιχεία $T_\pm$ περιέχουν τα $R_{m+1,m}$ με $m = 2, 3, \ldots, n-1$. Ένα τυχαίο στοιχείο της G παραμετροποιείται ως εξής

$$g = g_{n-1}(\theta_{n-1}) \ldots g_2(\theta_2) g_1(\theta_1) h \tag{3.25}$$

όπου $h \in H$. Μία βολική επιλογή βαθμίδας είναι τότε

$$g = g_{n-1}(\theta_{n-1}) \dots g_2(\theta_2) g_1(2\phi) g_2(\theta_2) \dots g_{n-1}(\theta_{n-1}) \tag{3.26}$$

έτσι ώστε $\phi = \frac{1}{2}\theta_1$ και $\theta_p, \quad p = 2, \dots, n-1)$ να είναι οι συντεταγμένες του χώρου Σ^{n-1} με το ϕ να παίζει ξεχωριστό ρόλο.
Με αυτή την παραμετροποίηση αποδεικνύεται ότι το δυναμικό U της σχέσης (3.20) έχει μία γενική μορφή για κάθε διάσταση n, δηλαδή είναι ανάλογο του $\cos 2\phi$. Πράγματι, αφού $[T_\pm, g_k] = 0$, βρίσκουμε ότι:

$$Tr(T_+ g^{-1} T_- g) = Tr(T_+ g_1^{-1} T_- g_1) = 2\cos 2\phi \tag{3.27}$$

Η μετρική και το πεδίο dilaton , που προκύπτουν από την ολοκλήρωση του πεδίου βαθμίδας A_α ικανοποιούν τις σχέσεις

$$ds^2 = G_{mk} dx^m dx^k = d\phi^2 + g_{pq}(\phi, \theta) d\theta^p d\theta^q, \quad \sqrt{G} e^{-2\Phi} = (\sin 2\phi)^{n-2} \tag{3.28}$$

έτσι ώστε η εξίσωση (3.21) να λύνεται, με

$$U = -\frac{1}{2}\cos 2\phi, \qquad M^2 = -4(n-1) \tag{3.29}$$

3.2.2 Παραδείγματα ανηγμένων Λαγκρανζιανών

Θα δείξουμε αρχικά πως μπορούμε να πάρουμε τη Λαγκρανζιανή του μιγαδικού sine-Gordon μοντέλου από το gWZW μοντέλο στο χώρο $\frac{SO(3)}{SO(2)}$. Από τη σχέση (2.33) έχουμε ότι

$$A_+ = (g^{-1}\partial_+ g + g^{-1} A_+ g)_h \tag{3.30}$$

Επίσης από τη σχέση (3.26) έχουμε

$$g = g_2(\theta) g_1(2\phi) g_2(\theta) \tag{3.31}$$

όπου

$$g_1 = e^{2\phi R_1}, \quad g_2 = e^{\theta R_2} \tag{3.32}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Στην περίπτωση αυτή

$$g^{-1} = e^{-\theta R_2} e^{-2\phi R_1} e^{-\theta R_2} \tag{3.34}$$

και

$$\begin{aligned}(g^{-1}\partial_+ g)_h &= (e^{-\theta R_2} e^{-2\phi R_1} R_2 \partial_+ \theta e^{2\phi R_1} e^{\theta R_2} \\ &+ e^{-\theta R_2} 2 R_1 \partial_+ \phi e^{\theta R_2} + R_2 \partial_+ \theta)_h\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε από τη σχέση (3.33) και έχουμε ότι

$$(g^{-1}\partial_+ g)_h =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2\partial_+\phi\cos\theta + \partial_+\theta\sin\theta\sin 2\phi & 2\partial_+\phi\sin\theta - \partial_+\theta\cos\theta\sin 2\phi \\ -2\partial_+\phi\cos\theta - \partial_+\theta\sin\theta\sin 2\phi & 0 & \partial_+\theta\cos 2\phi \\ -2\partial_+\phi\sin\theta + \partial_+\theta\cos\theta\sin 2\phi & -\partial_+\theta\cos 2\phi & 0 \end{pmatrix}_h$$
$$+(\partial_+\theta R_2)_h$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο μοναδικός γεννήτορας της άλγεβρας h που αντιστοιχεί στην ομάδα H είναι σύμφωνα με το φορμαλισμό που αναπτύξαμε παραπάνω ο R_2. Συνεπώς η προβολή στην άλγεβρα h ισοδυναμεί με το να αγνοήσουμε τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα που δεν βρίσκονται στο κάτω δεξιά 2×2 μπλόκ. Άρα έχουμε

$$(g^{-1}\partial_+ g)_h = (1+\cos 2\phi)R_2\partial_+\theta \tag{3.35}$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$(\partial_- g g^{-1})_h = (1-\cos 2\phi)R_2\partial_-\theta \tag{3.36}$$

Επειδή $A_+ \in h$ υποθέτουμε ότι $A_+ = \lambda R_2$ και από τη σχέση (3.30) έχουμε ότι

$$A_+ = \frac{1+\cos 2\phi}{1-\cos 2\phi}R_2\partial_+\theta \tag{3.37}$$

Επιπλέον βρίσκουμε ότι

$$-\frac{1}{2}Tr(g^{-1}\partial_+ g g^{-1}\partial_- g) = 2(1+\cos 2\phi)\partial_+\theta\partial_-\theta + 4\partial_+\phi\partial_-\phi \tag{3.38}$$

$$Tr(A_+\partial_- g g^{-1}) = -2\frac{(1+\cos 2\phi)^2}{1-\cos 2\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta \tag{3.39}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.27) παίρνουμε τελικά την Λαγκρανζιανή

$$\tilde{L} = \partial_+\phi\partial_-\phi + \cot^2\phi\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\cos 2\phi \tag{3.40}$$

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή και η Λαγκρανζιανή του μιγαδικού sine-Gordon μοντέλου συνδέονται με τον $2d$ δυϊσμό

$$\phi \to \phi + \frac{\pi}{2}, \qquad \mu^2 \to m^2 \tag{3.41}$$

Η ακριβής μορφή της μετρικής Σ^{n-1} με $n = 2, 3, 4$ όπως βρέθηκε από τη δράση (2.17) με την παραμέτριση (3.26) είναι

$$ds^2_{n=2} = d\phi^2, \qquad ds^2_{n=3} = d\phi^2 + \cot^2\phi d\theta^2 \tag{3.42}$$

$$ds^2_{n=4} = d\phi^2 + \cot^2\phi(d\theta_2 + \tan\theta_3\cot_{\theta_2} d\theta_3)^2 + \tan^2\phi\frac{d\theta_3^2}{\sin^2\theta_2} \tag{3.43}$$

Αφού κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητών ($x = \cos\theta_2\cos\theta_3,\ \ y = \sin\theta_3$) παίρνουμε τη μετρική του χώρου Σ^3

$$(ds^2)_{n=4} = d\phi^2 + \frac{\cot^2\phi s x^2 + \tan^2\phi d y^2}{1 - x^2 - y_2} \tag{3.44}$$

Συνεπώς στην περίπτωση $n = 4$, δηλαδή για μία χορδή που διαδίδεται στον χώρο $R_t \times S^4$, η ανηγμένη θεωρία περιγράφεται από την Λαγκρανζιανή

$$\tilde{L} = \partial_+\phi + \partial_-\phi + \frac{\cot^2\phi\partial_+ x\partial_- x + \tan^2\phi\partial_+ y\partial_- y}{1 - x^2 - y^2} + \frac{\mu^2}{2}\cos 2\phi \tag{3.45}$$

Μία ισοδύναμη μορφή της μετρικής Σ^3, η οποία βρέθηκε από τους I.Bars και K.Σφέτσο, είναι η παρακάτω

$$(ds^2)_{n=4} = \frac{db^2}{4(1-b^2)} - \frac{1+b}{4(1-b)}\frac{dv^2}{v(v-u-2)} + \frac{1-b}{4(1+b)}\frac{du^2}{u(v-u-2)} \tag{3.46}$$

όπως μπορεί να δει κανείς θέτοντας $b = \cos 2\phi, u = -2y^2, v = 2x^2$. Το υπόβαθρο μετρικής και πεδίου dilaton για την περίπτωση Σ^4, βρέθηκε σε παρόμοιες συντεταγμένες (b, u, v, w) από τους I.Bars και K.Σφέτσο. Θέτοντας $b = \cos 2\phi, w = \cos\alpha, v\cos\beta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}(ds^2)_{n=5} &= d\phi^2 + \tan^2\phi\frac{du^2}{(\cos\beta - u)(u - \cos\alpha)} \\ &+ \cot^2\phi(\cos\beta - \cos\alpha)\left[\frac{d\alpha^2}{4(u-\cos\alpha)} + \frac{d\beta^2}{4(\cos\beta - u)}\right]\end{aligned} \tag{3.47}$$

Μαζί με το όρο δυναμικού $\cos 2\phi$ η παραπάνω μετρική ορίζει το ανηγμένο μοντέλο για τη μποζονική χορδή στο χώρο $R_t \times S^5$.

3.3 Ανηγμένο μοντέλο για μποζονικές χορδές στο χώρο $AdS_n \times S^n$

Μπορεί κανείς να βρεί παρόμοιες ανηγμένες Λαγκρανζιανές για την περίπτωση ενός σ-μοντέλου στο χ $F/G = AdS_n = SO(2, n-1)/SO(1, n-1)$. Αυτά τα ανηγμένα μοντέλα περιγράφουν χορδές σε χώρους της μορφής $AdS_n \times S^1$ στη σύμμορφη βαθμίδα με συγκεκριμένη επιλογή βαθμίδας για την υπολειπόμενη σύμμορφη συμμετρία, δηλαδή επιλέγοντας για τη γωνία α του S^1 τη βαθμίδα $\alpha = \mu\tau$.
Όπως έχει ήδη συζητηθεί στην παράγραφο 3.1 το ανηγμένο μοντέλο για τη μποζονική χορδή στο χώρο $AdS_n \times S^n$ δίνεται συνδυάζοντας απλά τα ανηγμενα μοντέλα για τη μποζονική χορδή στον $AdS_n \times S^1$ και $R_t \times S^n$.
Για παράδειγμα στην περίπτωση $AdS_2 \times S^2$ έχουμε από τις σχέσεις (3.9) και (3.17)

$$\tilde{L} = \partial_+\phi_1\partial_-\phi_1 + \partial_+\phi_2\partial_-\phi_2 + \frac{\mu^2}{2}(\cos 2\phi_1 - \cosh 2\phi_2) \tag{3.48}$$

Για μία χορδή στο χώρο $AdS_3 \times S^3$ έχουμε (βλ. 3.10) ότι

$$\begin{aligned}\tilde{L} = \partial_+\phi_1\partial_-\phi_1 + \tan^2\phi_1\partial_+\theta\partial_-\theta \quad &+ \quad \partial_+\phi_2\partial_-\phi_2 + \tanh^2\phi_2\partial_+\chi\partial_-\chi \\ &+ \quad \frac{\mu^2}{2}(\cos 2\phi_1 - \cos 2\phi_2) \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Παρόμοιες δράσεις μπρούν να βρεθούν και για τις περιπτώσεις $AdS_4 \times S^4$ και $AdS_5 \times S^5$, διαπλασιάζοντας τις δράσεις που αναλογούν στις σχέσεις (3.47) και (3.49) με το υπερβολικό τους ανάλογο. Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε τη δράση για την περίπτωση AdS_n από τη δράση για την περίπτωση S^n είναι να αντικαθιστούμε $\phi_1 \to i\phi_2$ και να αλλάζουμε το συνολικό πρόσημο της Λαγκρανζιανής.

Κεφάλαιο 4

Διάδοση χορδών σε καμπυλωμένο υπόβαθρο

4.1 Δυναμική των χορδών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη διάδοση των χορδών σε υπόβαθρα με Lorentzian signature , και θα συσχετίσουμε το πρόβλημα της δυναμικής των χορδών με ένα γεωμετρικό πρόβλημα εμβάπτισης επιφανειών. Στη συνέχεια θα εξειδικεύσουμε στις περιπτώσεις υποβάθρων με χωρικό κομμάτι, το οποίο είναι είτε επίπεδο είτε WZW μοντέλο.

4.1.1 Εξισώσεις Gauss-Codazzi

Έστω ένας D-διάστατος χώρος M_D με στοιχείο μήκους

$$ds_D^2 = G_{\mu\nu}(y)dy^\mu dy^\nu, \quad \mu,\nu = 1,\ldots,D \tag{4.1}$$

Η παραπάνω ποσότητα λέγεται και θεμελιώδης τετραγωνική μορφή. Ένας d-διάστατος υπόχωρος M_d του M_D, με τοπικές συντεταγμένες x_i, $i = 1,\ldots,d$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μία εμβαπτισμένη επιφάνεια, η οποία ορίζεται από τις εξισώσεις $y^\mu = y^\mu(x^1,\ldots,x^d)$. Το στοιχείο μήκους στον υπόχωρο M_d είναι

$$ds_d^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad i,j = 1,\ldots,d \tag{4.2}$$

Αν περιορίσουμε το στοιχείο μήκους (4.1) στον υπόχωρο M_d θα πρέπει να είναι ίσο με το στοιχείο μήκους (4.2), άρα έχουμε τη σχέση

$$g_{ij}(x) = G_{\mu\nu}(y)\partial_i y^\mu \partial_j y^\nu \tag{4.3}$$

Η εμβαπτισμένη επιφάνεια καθορίζεται πλήρως από τα διανύσματα $\{\xi_\sigma^\mu, \sigma = d+1,\ldots,D\}$, τα οποία είναι κάθετα σε αυτήν. Τα διανύσματα αυτά επιλέγονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιούν τη σχέση

$$G_{\mu\nu}\xi_\sigma^\mu \xi_\tau^\nu = \delta_{\sigma\tau} \tag{4.4}$$

Επιπλέον εξ ορισμού τα διανύσματα αυτά είναι κάθετα στα εφαπτόμενα διανύσματα $\partial_i y^\mu$ της εμβαπτισμένης επιφάνειας, άρα

$$G_{\mu\nu}\partial_i y^\mu \xi^\nu_\sigma = 0 \tag{4.5}$$

Το σύνολο των διανυσμάτων $\{\partial_i y^\mu, \xi^\mu_\sigma\}$ ικανοποιούν την παρακάτω σχέση πληρότητας στον χώρο M_D

$$g^{ij}\partial_i y^\mu \partial_j y^\nu + \xi^\mu_\sigma \xi^\nu_\tau \delta^{\sigma\tau} = G^{\mu\nu} \tag{4.6}$$

Η δυναμική της εμβαπτισμένης επιφάνειας καθορίζεται από την εξέλιξη των διανυσμάτων $\partial_i y^\mu$ και ξ^μ_σ ως συναρτήσεις των μεταβλητών x_i στο χώρο M_d. Εδώ θα παρουσιάσουμε κατευθείαν τις τελικές εξισώσεις. Παραπάνω λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην βιβλιογραφία [10]. Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο την έννοια της δεύτερης θεμελιώδους μορφής

$$\Omega^\sigma_{ij} = G_{\mu\nu}\xi^\mu_\sigma \left(D_i D_j y^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha}\partial_i y^\lambda \partial_j y^\alpha \right) \tag{4.7}$$

καθώς και της τρίτης θεμελιώδους μορφής

$$\mu_i^{\sigma\tau} = G_{\mu\nu}\xi^\mu_\sigma \left(\partial_i \xi^\nu_\tau + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha}\xi^\lambda_\tau \partial_i y^\alpha \right) \tag{4.8}$$

Οι εξισώσεις, οι οποίες καθορίζουν τη δυναμική της εμβαπτισμένης επιφάνειας γράφονται

$$D_i D_j y^\mu = \Omega^\sigma_{ij}\xi^\mu_\sigma - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_i y^\nu \partial_j y^\lambda \tag{4.9}$$

και

$$\partial_i \xi^\mu_\sigma = -\Omega^\sigma_{ij} g^{ik}\partial_k y^\mu + \mu_i^{\tau\sigma}\xi^\mu_\tau - \Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\partial_i y^\lambda \xi^\alpha_\sigma \tag{4.10}$$

Οι σχετικές εξισώσεις συμβατότητας είναι

$$R_{ijkl} = R_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_i t^\mu \partial_j y^\nu \partial_k y^\alpha \partial_l y^\beta + \Omega^\tau_{k[i}\Omega^\tau_{j]l} \tag{4.11}$$

$$D_{[k}\Omega^\sigma_{j]i} = \mu^{\tau\sigma}_{[k}\Omega^\tau_{j]i} + R_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_i y^\mu \partial_j y^\alpha \partial_k y^\beta \xi^\nu_\sigma \tag{4.12}$$

και

$$D_{[k}\mu^{\sigma\tau}_{j]} + \mu^{\rho\sigma}_{[j}\mu^{\rho\nu}_{k]} + \Omega^\sigma_{l[j}\Omega^\tau_{k]i}g^{li} + R_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_j y^\mu \partial_k y^\nu \xi^\alpha_\sigma \xi^\beta_\tau = 0 \tag{4.13}$$

Οι εξισώσεις (4.11) και (4.12) ονομάζονται εξισώσεις Gauss-Codazzi για την περίπτωση μιας διδιάστατης επιφάνειας εμπβαπτισμένης στον τριδιάστατο Ευκλείδιο χώρο, ενώ η εξίσωση (4.13) ονομάζεται εξίσωση Ricci για την περίπτωση μιας επιφάνειας εμπβαπτισμένης σε Ευκλείδιο χώρο.

4.1.2 Διάδοση των χορδών στο χώρο $M_D = R \otimes K_{D-1}$

Θεωρούμε κλασικά την διάδοση χορδών σε μία D-διάστατη πολλαπλότητα, η οποία είναι το ευθύ γινόμενο της ευθείας των πραγματικών αριθμών R (χρονικό τμήμα) και μίας $D-1$-διάστατης πολλαπλότητας (χωρικό τμήμα). Οι αντίστοιχες συντεταγμένες είναι $y^0(\sigma^+, \sigma^-)$ και $y^\mu(\sigma^+, \sigma^-)$, $\mu = 1, \ldots, D-1$. Η δράση του διδιάστατου σ-μοντέλου έχει τη μορφή

$$S = \frac{1}{2}\int_\Sigma Q^+_{\mu\nu}\partial_+ y^\mu \partial_- y^\nu - \partial_+ y^0 \partial_- y^0, \quad Q^+_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \tag{4.14}$$

όπου Σ είναι η διδιάστατη κοσμική επιφάνεια της χορδής. G, B είναι η μετρική και το αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο που αντιστοιχούν στο μη τετριμμένο τμήμα του υποβάθρου των χορδών. Οι κλασικές εξισώσεις κίνησης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\delta y^0 \;:\qquad \partial_+\partial_- y^0 = 0 \tag{4.15}$$

$$\delta y^\mu \;:\qquad \partial_+\partial_- y^\mu + (\Gamma^-)^\mu_{\nu\lambda}\partial_+ y^\nu \partial_- y^\lambda = 0 \tag{4.16}$$

όπου $(\Gamma^\pm)^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \pm \frac{1}{2}H^\mu_{\nu\lambda}$ είναι η γενίκευση των συμβόλων Christoffel στην περίπτωση που υπάρχει στρέψη $H_{\mu\nu\lambda} = \partial_{[\mu}B_{\nu\lambda]}$. Λόγω του ότι είμαστε στη σύμμορφη βαθμίδα (βλ.Παράρτημα Β) έχουμε επιπλέον τους παρακάτω περιορισμούς

$$T_{\pm\pm} = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}\partial_\pm y^\mu \partial_\pm y^\nu - \frac{1}{4}\partial_\pm y^0 \partial_\pm y^0 = 0 \tag{4.17}$$

Η σύμμορφη βαθμίδα επιτρέπει μετασχηματισμούς της μορφής $\sigma^\pm \to f^\pm(\sigma^\pm)$. Επιλέγουμε τη βαθμίδα $y = \tau$. Η εξίσωση (4.15) ικανοποιείται, ενώ η εξίσωση (4.16) παραμένει ίδια. Οι εξισώσεις των δεσμών (4.17) παίρνουν τη μορφή

$$G_{\mu\nu}\partial_\pm y^\mu \partial_\pm y^\nu = 1 \tag{4.18}$$

Στην συγκεκριμένη βαθμίδα μπορούμε να περιορίσουμε την ανάλυσή μας μόνο στο χώρο K_{D-1} και στην προβολή της κοσμικής επιφάνειας πάνω στην υπερεπιφάνεια $y^0 = \tau$. Η διδιάστατη επιφάνεια S που προκύπτει έχει μετρική

$$\begin{aligned} ds^2 &= G_{\mu\nu}dy^\mu dy^\nu \\ &= G_{\mu\nu}\left(\partial_+ y^\mu \partial_+ y^\nu d\sigma^{+^2} + \partial_- y^\mu \partial_- y^\nu d\sigma^{-^2} + 2\partial_+ y^\mu \partial_- y^\nu d\sigma^+ d\sigma^-\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

ή

$$ds^2 = d\sigma^{+^2} + d\sigma^{-^2} + 2\cos\theta d\sigma^+ d\sigma^- \tag{4.20}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$G_{\mu\nu}\partial_+ y^\mu \partial_- y^\nu = \cos\theta \tag{4.21}$$

Συνεπώς, στη βαθμίδα $y^0 = \tau$ το κλασικό πρόβλημα της χρονικής εξέλιξης της χορδής ισοδυναμεί με το πρόβλημα εμβάπτισης της επιφάνειας S στο χώρο

K_{D-1}.
Τα μη μηδενικά σύμβολα του Christoffel καθώς και η καμπυλότητα Riemann για τη μετρική (4.20) δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\Gamma^{\pm}_{\pm\pm} = \cot\theta\partial_{\pm}\theta, \quad \Gamma^{\pm}_{\mp\mp} = -\frac{1}{\sin\theta}\partial_{\mp}\theta, \quad R_{+-+-} = -\sin\theta\partial_{+}\partial_{-}\theta \tag{4.22}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις εξισώσεις κίνησης (4.16) με $G_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}_{\sigma}$ όπου $\sigma = 3,\ldots,D-1$ παίρνουμε ότι

$$\Omega^{\sigma}_{+-} = \Omega^{\sigma}_{-+} = \frac{1}{2}H_{\mu\nu\lambda}\xi^{\mu}_{\sigma}\partial_{+}y^{\nu}\partial_{-}y^{\lambda}, \quad \sigma = 3,\ldots,D-1 \tag{4.23}$$

Για τη συνέχεια είναι χρήσιμο να τροποποιήσουμε λίγο τον ορισμό της στρέψης $\mu^{\sigma\tau}_{\pm}$ ως εξής

$$\begin{aligned} M^{\sigma\tau}_{\pm} &= \mu^{\sigma\tau}_{\pm} \pm \frac{1}{2}H_{\mu\nu\lambda}\xi^{\mu}_{\sigma}\xi^{\nu}_{\tau}\partial_{\pm}y^{\lambda} \\ &= G_{\mu\nu}\xi^{\mu}_{\sigma}\left(\partial_{\pm}\xi^{\nu}_{\tau} + (\Gamma^{\pm})^{\nu}_{\lambda\alpha}\xi^{\lambda}_{\tau}\partial_{\pm}y^{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Μετά από κάποιες μακροσκελείς πράξεις έχουμε ότι οι σχέσεις (4.11) - (4.13) παίρνουν τη μορφή

$$\Omega^{\tau}_{++}\Omega^{\tau}_{--} + \sin\theta\partial_{+}\partial_{-}\theta = -R^{+}_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{+}y^{\mu}\partial_{+}y^{\alpha}\partial_{-}y^{\nu}\partial_{-}y^{\beta} \tag{4.25}$$

$$\partial_{\mp}\Omega^{\sigma}_{\pm\pm} - M^{\tau\sigma}_{\mp}\Omega^{\tau}_{\pm\pm} - \frac{1}{\sin\theta}\partial_{\pm}\theta\Omega^{\sigma}_{\mp\mp} = R^{\mp}_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\pm}y^{\mu}\partial_{\pm}y^{\alpha}\partial_{\mp}y^{\beta}\xi^{\nu}_{\sigma} \tag{4.26}$$

και

$$\partial_{+}M^{\sigma_{\tau}}_{-} - \partial_{-}M^{\sigma\tau}_{+} - M^{\rho[\sigma}_{-}M^{\tau]\rho}_{+} + \frac{\cos\theta}{\sin^{2}\theta}\Omega^{[\sigma}_{++}\Omega^{\tau]}_{--} = (R^{-}_{\mu\nu\alpha\beta} - D^{-}_{\mu}H_{\nu\alpha\beta})\partial_{+}y^{\mu}\partial_{-}y^{\nu}\xi^{\alpha}_{\sigma}\xi^{\beta}_{\tau} \tag{4.27}$$

όπου

$$R^{\pm}_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = -\partial_{[\mu}(\Gamma^{\pm})^{\beta}_{\nu]\alpha} + (\Gamma^{\mp})^{\gamma}_{\alpha[\mu}(\Gamma^{\pm})^{\beta}_{\nu]\gamma} \tag{4.28}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι συναλλοίωτες παράγωγοι $D^{\pm}_{\mu}$.

4.1.3 Υπόβαθρα WZW

Είναι πολύ δύσκολο να λύσουμε τις εξισώσεις (4.25)-(4.27) στην γενική περίπτωση για κάποιον χώρο K_{D-1}. Το πρόβλημα όμως απλοποιείται σημαντικά αν ο χώρος αυτός είναι είτε ο επίπεδος χώρος είτε είναι ένα τυχαίο μοντέλο WZW , ορισμένο σε μία ημιαπλή συμπαγή ομάδα G με $dim(G) = D-1$. Σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$R^{\pm}_{\mu\nu\alpha\beta} = D^{\pm}_{\mu}H_{\nu\alpha\beta} = 0 \tag{4.29}$$

όπότε οι σχέσεις (4.25)-(4.27) απλοποιούνται σημαντικά, αφού τα δεξιά τους μέλη μηδενίζονται. Για να προχωρήσουμε χρειάζεται να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού των ποσοτήτων Ω^{σ}_{++} και $M^{\sigma\tau}_{\pm}$ προσθέτοντάς τους τις παρακάτω συνιστώσες

$$\Omega^2_{++} = \partial_+\theta, \quad M^{\sigma 2}_{+} = \cot\theta\Omega^{\sigma}_{++}, \quad M^{\sigma 2}_{-} = -\frac{1}{\sin\theta}\Omega^{\sigma}_{--} \tag{4.30}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις (4.26), (4.27) στη μορφή

$$\partial_-\Omega^a_{++} + M^{ab}_{-}\Omega^b_{++} = 0 \tag{4.31}$$

$$\partial_+ M^{ab}_{-} - \partial_- M^{ab}_{+} + [M_+, M_-]^{ab} = 0 \tag{4.32}$$

όπου ο νέος δείκτης a παίρνει τις τιμές $(2,\sigma)$. Η σχέση (4.32) είναι μία συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας για τους πίνακες $M_{\pm}$ και ικανοποιείται για

$$M_{\pm} = \Lambda^{-1}\partial_{\pm}\Lambda, \qquad \Lambda \in SO(D-2) \tag{4.33}$$

Τότε η σχέση (4.31) παίρνει τη μορφή

$$\partial_-(\Lambda^{ab}\Omega^b_{++}) = \partial_-(\Lambda^{a2}\partial_+\theta + \partial_+\Lambda^{a2}\tan\theta) = 0 \tag{4.34}$$

Το διάνυσμα Λ^{a2} έχει μοναδιαίο μέτρο. Μπορούμε να ενσωματώσουμε αυτόν τον περιορισμό αν ορίσουμε

$$Y^a = \Lambda^{a2}\sin\theta \tag{4.35}$$

Τότε η σχέση (4.32) παίρνει τη μορφή

$$\partial_-\left(\frac{\partial_+ Y^a}{\sqrt{1-Y^2}}\right) = 0, \quad a,b = 2,3,\ldots,D-1 \tag{4.36}$$

όπου $Y^2 = Y^bY^b$. Οι παραπάνω εξισώσεις είχαν ήδη βρεθεί κατά την περιγραφή της δυναμικής ελεύθερων χορδών σε ένα D-διάστατο επίπεδο χωρόχρονο. Το περίεργο είναι ότι παραμένουν ίδιες αν αντικαταστήσουμε το $D-1$-διάστατο χωρικό κομμάτι με ένα WZW μοντέλο. Θα ήταν χρήσιμο αν είχαμε μία κατάλληλη Λαγκρανζιανή, η οποία θα είχε τις εξισώσεις (4.36) ως κλασικές εξισώσεις κίνησης. Πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι οι εν λόγω εξισώσεις προκύπτουν ως εξισώσεις κίνησης για το βαθμωμένο μοντέλο WZW στο χώρο $SO(D-1)/SO(D-2)$ στο άμαζο όριο, όπως φαίνεται από τη σχέση (2.47)

4.2 Λαγκρανζιανή περιγραφή και παραφερμιόνια

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η δράση του βαθμωμένου μοντέλου WZW είναι

$$S = I_{WZW}(g) + \frac{k}{\pi}\int Tr(A_+\partial_- g g^{-1} - g^{-1}\partial_+ g A_- + A_+ g A_- g^{-1} - A_+A_-) \tag{4.37}$$

όπου $g \in G$ και $A_\pm$ είναι πεδία βαθμίδας που παίρνουν τιμές στη Lie άλγεβρα μιάς υποομάδας $H \subset G$. Ο σχετικός τανυστής δύναμης του πεδίου είναι

$$F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] \tag{4.38}$$

Επιπλέον χωρίζουμε τους δείκτες ως εξής $A = (a, \alpha)$, όπου $a \in H$ και $\alpha \in G/H$. Οι σχετικές εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} \delta A_+ &: D_- g g^{-1}|_H = 0 && (4.39)\\ \delta A_- &: g^{-1} D_+ g|_H = 0 && (4.40)\\ \delta g &: D_-(g^{-1} D_+ g) + F_{+-} = 0 && (4.41) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (4.40) στην (4.41) παίρνουμε τη συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας on-shell και

$$D_-(g^{-1} D_+ g)|_{G/H} = 0 \tag{4.42}$$

Παραμετρίζουμε τα πεδία βαθμίδας ως εξής

$$A_\pm = (\partial_\pm h_\pm) h_\pm^{-1} \tag{4.43}$$

όπου $h_\pm \in H$, άρα έχουμε ότι

$$h_+^{-1} = P e^{-\int^{\sigma^+} A_+}, \quad h_-^{-1} = P e^{-\int^{\sigma^-} A_-} \tag{4.44}$$

όπου με P συμβολίζουμε τη διάταξη κατά διαδρομές. Κάνοντας χρήση του παρακάτω στοιχείου της ομάδας, το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$f = h_+^{-1} g h_+ \in G \tag{4.45}$$

και της συνθήκης μηδενικής καμπυλότητας on-shell μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (4.42) ως εξής

$$\partial_- \Psi_+ = 0, \qquad \Psi_+ = \frac{ik}{\pi} f^{-1} \partial_+ f \in G/H \tag{4.46}$$

Άρα ο πίνακας Ψ_+, ο οποίος παίρνει τιμές στο χώρο πηλίκο G/H, διατηρείται χειραλικά. Επιπλέον η ποσότητα Ψ_+ δεν είναι τίποτα άλλο από το κλασικό παραφερμιόνιο.[12],[13]

Τα παραφερμιόνια είναι μη τοπικά αντικείμενα όπως φαίνεται στην άλγεβρα που υπακούουν

$$\begin{aligned} \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)\} &= -\frac{k}{\pi}\delta_{\alpha\beta}\delta'(x-y) - f_{\alpha\beta\gamma}\Psi_\gamma(y)\delta(x-y)\\ &\quad -\frac{\pi}{2k} f_{c\alpha\gamma} f_{c\beta\delta}\epsilon(x-y)\Psi_\gamma(x)\Psi_\delta(y) \qquad (4.47) \end{aligned}$$

όπου με x, y συμβολίζουμε διαφορετικές τιμές της μεταβλητής σ^+. Επίσης $\epsilon(x-y)$ είναι η αντισυμμετρική συνάρτηση βήματος, η οποία ορίζεται ως εξής

$$\epsilon(x-y) = \begin{cases} +1, & x > y \\ -1, & x < y \end{cases} \tag{4.48}$$

Μπορούμε να βρούμε το διδιάστατο σ-μοντέλο, το οποίο να έχει τις παραπάνω συμμετρίες ως εξής. Πρώτα επιλουμε μία μοναδιακή βαθμίδα επιλέγοντας $dim(H)$ το πλήθος παραμέτρους από τις $dim(G)$ το πλήθος παραμέτρους του στοιχείου ομάδας g. Άρα μας μένουν $dim(G/H)$ το πλήθος παράμετροι, τις οποίες θα συμβολίσουμε X^μ. Στη συνέχεια απαλείφουμε τα πεδία βαθμίδας στη δράση (4.37) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης (4.39) και (4.40), οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A_+^a &= +i(C^T - I)^{-1}_{ab} L^b_\mu \partial_+ X^\mu && (4.49) \\ A_-^a &= -i(C - I)^{-1}_{ab} R^b_\mu \partial_- X^\mu && (4.50) \end{aligned}$$

όπου

$$L^a_\mu = -iTr(t^a g^{-1}\partial_\mu g), \quad R^a_\mu = -iTr(t^a \partial_\mu g g^{-1}), \quad C^{ab} = Tr(t^a g t^b g^{-1}) \tag{4.51}$$

Τέλος παίρνουμε τη δράση για το σ-μοντέλο

$$S = I_{WZW}(g) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma R^a_\mu (C^T - I)^{-1}_{ab} L^b_\nu \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \tag{4.52}$$

4.2.1 Η περίπτωση $SO(D-1)/SO(D-2)$

Θα εξειδικεύσουμε τώρα για την περίπτωση του βαθμωμένου μοντέλου WZW στον χώρο $SO(D-1)/SO(D-2)$ και θα δείξουμε ότι η σχέση (4.36) είναι ισοδύναμη με τη σχέση (4.46).

Το στοιχείο ομάδας $g \in SO(D-1)$ μπορεί να γραφεί αναλύοντας ως προς το δεξί συσύνολο $g = \tilde{h}t$, όπου

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \in SO(D-2) \end{pmatrix} \tag{4.53}$$

και το στοιχείο $t \in SO(D-1)/SO(D-2)$ το παραμετρίζουμε μέσω ενός D_2-διάστατου διανύσματος $\vec{X}$ ως εξής

$$t = \begin{pmatrix} b & X^j \\ -X^i & \delta_{ij} - \frac{1}{b+1}X^i X^j \end{pmatrix}, \qquad b = \sqrt{1 - \vec{X}^2} \tag{4.54}$$

Το πεδίο τιμών των παραμέτρων X^i περιορίζεται από τον περιορισμό $\vec{X}^2 \leq 1$, ενώ η τιμή του b είναι τέτοια ώστε $t \in SO(D-1)$, δηλαδή $t^{-1} = t^T$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις παρακάτω ποσότητες

$$dtt^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & dX^j + \frac{\vec{X}\cdot d\vec{x}}{b(b+1)}X^j \\ -dX^i - \frac{\vec{X}\cdot d\vec{X}}{b(b+1)}X^i & \frac{1}{b+1}dX^{[i}X^{j]} \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

και

$$t^{-1}dt = \begin{pmatrix} 0 & dX^j + \frac{\vec{X}\cdot d\vec{x}}{b(b+1)}X^j \\ -dX^i - \frac{\vec{X}\cdot d\vec{X}}{b(b+1)}X^i & -\frac{1}{b+1}dX^{[i}X^{j]} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Στη συνέχεια γράφουμε τον δεσμό (4.40) ως εξής

$$(f^{-1}\partial_+ f)_{ij} = (T^{-1}\partial_+ T)_{ij} + (T^{-1}H^{-1}\partial_+ HT)_{ij} = 0 \tag{4.57}$$

όπου $H + h_+^{-1}hh_+$ και $T + h_+^{-1}th_+$. Η ακριβής μορφή του T είναι όπως ακριβώς η σχέση (4.54) με την αντικατάσταση $X^i \to Y^i = X^j(h_+)^{ji}$. Λύνουμε τότε ως προς

$$(H^{-1}\partial_+ H)_{ij} = \frac{1}{b(b+1)}\partial_+ Y^{[i}Y^{j]} \tag{4.58}$$

Το παραφερμιόνιο της σχέσης (4.46) υπολογίζεται γράφοντας $\Psi^i = \frac{ik}{\pi}(f^{-1}\partial_+ f)_{0i}$ και κάνοντας χρήση της σχέσης (4.58). Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\Psi^i = \frac{ik}{\pi}\frac{\partial_+ Y^i}{\sqrt{1-\vec{Y}^2}} = \frac{ik}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\vec{X}^2}}(D_+X)^j h_+^{ji} \tag{4.59}$$

$$(D_+X)^j = \partial_+ X^j - A_+^{jk}X^k \tag{4.60}$$

Άρα η αντίστοιχη εξίσωση $\partial_-\Psi^i = 0$ είναι ακριβώς η σχέση (4.36). Τα Y^i συνδέονται μη τοπικά με τις μεταβλητές του σ-μοντέλου ως εξής

$$Y^i = X^j(h_+)^{ji}, \qquad h_+^{-1} = Pe^{-\int^{\sigma^+} A_+} \tag{4.61}$$

όπου το πεδίο βαθμίδας A_+ δίνεται από τη σχέση (4.49).// Μένει να επιλέξουμε βαθμίδα και να υπολογίσουμε αναλυτικά το A_+ και τη δράση του σ-μοντέλου (4.52). Είναι βολικό να διαχωρίσουμε την περίπτωση, που το D είναι άρτιο από την περίπτωση που το D είναι περιττό.
Στην περίπτωση $D = 2N+2$ μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα $h \in SO(2N)$ και το διάνυσμα $\vec{X}$ στη μορφή

$$h = \begin{pmatrix} \cos 2\phi_1 & \sin 2\phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\sin 2\phi_1 & \cos 2\phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cos 2\phi_N & \sin 2\phi_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin 2\phi_N & \cos 2\phi_N \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \\ X_4 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{2N} \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

Το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών του h και του $\vec{X}$ είναι $2N = D-2$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Αντίστοιχα για την περίπτωση $D + 2N + 3$ έχουμε ότι

$$h = \begin{pmatrix} \cos 2\phi_1 & \sin 2\phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 2\phi_1 & \cos 2\phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cos 2\phi_N & \sin 2\phi_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\sin 2\phi_N & \cos 2\phi_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \\ X_4 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{2N} \\ X_{2N+1} \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

Πάλι ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι $2N + 1 = D - 2$. Κάνοντας χρήση της παραπάνω επιλογής βαθμίδας μαζί με την (4.56) και την ταυτότητα των Polyakov-Wiegman βρίσκει κανείς ότι η δράση του μοντέλου WZW συνεισφέρει στο συνολικό στοιχείο μήκους

$$ds^2_{WZW} = d\vec{\phi}^2 + \frac{1}{2(1+b)} d\vec{X}^2 + \frac{1+2b}{4b^2(1+b)^2} (\vec{Q} \cdot d\vec{X})^2 \tag{4.65}$$

και έχει μηδενική συνεισφορά στον συνολικό αντισυμμετρικό τανυστή.

4.2.2 Η περίπτωση $SO(3)/SO(2)$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει κατά την μελέτη της διάδοσης χορδών σε 4-διάστατο χωρόχρονο Minkowski ή όταν ο χωρόχρονος είναι το ευθύ γινόμενο της ευθείας των πραγματικών αριθμών R και του μοντέλου WZW για την ομάδα $SU(2)$. Χρησιμοποιούμε την παραμέτριση (4.62) με $X_2 = \sin 2\theta$ και βρίσκουμε ότι η λύση για τα πεδία βαθμίδας είναι

$$A_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (1 \mp \cot^2 \theta) \partial_\pm \phi \tag{4.66}$$

και ότι το σχετικό υπόβαθρο έχει μετρική

$$ds^2 = d\theta^2 + \cot^2 \theta d\phi^2 \tag{4.67}$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (4.60) τα σχετικά αβελιανά παραφερμιόνια $\Psi_\pm = \Psi_2 \pm i\Psi_1$ παίρνουν τη μορφή

$$\Psi_\pm = (\partial_+ \theta \pm i \cot \theta \partial_+ \phi) e^{\mp i\phi \pm i \int \cot^2 \theta \partial_+ \phi} \tag{4.68}$$

Μπορούμε επίσης να δούμε τα παραφερμιόνια απ' ευθείας από το αρχικό σύστημα εξισώσεων εμβάπτισης (4.25)-(4.27). Επειδή οι δείκτες σ, τ παίρνουν μόνο μία τιμή έχουμε ότι $\mu_{\pm} = 0$. Θέτουμε $\Omega_{\pm\pm} = \cot\frac{\theta}{2}\partial_{\pm}\phi$ και παίρνουμε από τις εξισώσεις (4.25) και (4.26)

$$\partial_+ \left(\cot^2 \frac{\theta}{2}\partial_- \phi\right) + \partial_- \left(\cot^2 \frac{\theta}{2}\partial_+ \phi\right) = 0 \tag{4.69}$$

$$\partial_+\partial_-\theta + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^3\frac{\theta}{2}}\partial_+\phi\partial_-\phi = 0 \tag{4.70}$$

οι οποίες είναι οι κλασικές εξισώσεις κίνησης για το χώρο πηλίκο $SO(3)/SO(2)$ και έχουν τα παραφερμιόνια ως φυσικά χειραλικά αντικείμενα.

Ανακεφαλαιώνοντας μελετήσαμε κάποιες γενικές ιδιότητες της διάδοσης χορδών σε καμπυλομένα υπόβαθρα της μορφής $R \times K_{D-1}$. Αν ο χώρος K_{D-1} είναι ο επίπεδος χώρος, ή αν είναι ένα μοντέλο WZW ορισμένο σε μία γενική ημιαπλή ομάδα Lie διάστασης $D-1$ τότε από τη μελέτη των εξισώσεων Gauss-Codazzi προκύπτει ότι υπάρχουν $D-2$ βαθμοί ελευθερίας που ακολουθούν τη δυναμική μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου ορισμένη στο χώρο πηλίκο $SO(D-1)/SO(D-2) = S^{D-2}$. Μία άλλη περίπτωση που έχει μελετηθεί είναι όταν το υπόβαθρο έχει signature $(2, D-2)$. Στην περίπτωση αυτή οι φυσικοί βαθμοί ελευθερίας ακολουθούν τη δυναμική μιας σύμμορφης θεωρίας πεδίου στο χώρο πηλίκο $SO(2, D-3)/SO(1, D-3) = AdS_{D-2}$.
Υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ της δυναμικής των χορδών στο κλασικό επίπεδο και της μελέτης των διδιάστατων WZW μοντέλων που είδαμε στο κεφάλαιο 2. Αν αγνοήσουμε τον όρο δυναμικού που εμφανίζεται στη σχέση (2.17) καθώς και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των χορδών οι κινητικοί όροι στη Λαγκρανζιανή των δύο προβλημάτων, δηλαδή για τη διάδοση των χορδών καθώς και για τη μελέτη των μοντέλων sine-Gordon συμμετρικού τύπου είναι ίδιοι.

Κεφάλαιο 5

Μαγνόνια

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε μία εναλλακτική προσέγγιση του προβλήματος ενός σ-μοντέλου σε έναν συμμετρικό χώρο και μέσω αυτής θα παρουσιάσουμε την έννοια των μαγνονίων.

5.1 Εναλλακτική μελέτη των σ-μοντέλων σε συμμετρικούς χώρους

Θεωρούμε κατά τα γνωστά ένα διδιάστατο σ-μοντέλο στον χώρο F/G,όπου F, G είναι ομάδες Lie με $G \subset F$. Η ομάδα F είναι εφοδιασμένη με μία απεικόνιση $\sigma_- : F \to F$

$$\sigma_-(g) = g, \quad \forall g \in G \tag{5.1}$$

η οποία καθορίζει την υποομάδα $G \subset F$. Η δράση του αυτομορφισμού σ_- στην Lie άλγεβρα f της F, ορίζει την παρακάτω ανάλυση της άλγεβρας f

$$f = g \oplus p, \quad [g, g] \subset g, \quad [g, p] \subset p, \quad [p, p] \subset g \tag{5.2}$$

όπου g είναι η Lie άλγεβρα της G και p το ορθογώνιο συμπλήρωμά της. Τότε κατά γνωστά το σ-μοντέλο στον χώρο F/G μπορεί να περιγραφεί ως ένα ένα σ-μοντέλο με ένα πεδίο $f \in F$ και τη συμμετρία βαθμίδας $f \to fg^{-1}$. Μερικές φορές είναι όμως βολικό να δουλέψει κανείς απευθείας στο χώρο πηλίκο F/G, ορίζοντας το πεδίο $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \sigma_-(f) f^{-1} \tag{5.3}$$

το οποίο παίρνει τιμές στην F. Το πεδίο $\mathcal{F}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε ώς ένα πεδίο που παίρνει τιμές στην ομάδα F και υπόκειται στον περιορισμό

$$\sigma_-(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{-1} \tag{5.4}$$

Η Λαγκρανζιανή του σ-μοντέλου είναι απλά

$$L = -\frac{1}{8\kappa} Tr \mathcal{J}_\mu \mathcal{J}^\mu \tag{5.5}$$

όπου

$$\mathcal{J}_\mu = \partial_\mu \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \tag{5.6}$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{F} \to \sigma_-(\mathcal{F})$ αφήνει τη Λαγκρανζιανή, άρα και τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες. Η ποσότητα $\mathcal{J}_\mu$ μετασχηματίζεται σε

$$\mathcal{J}_\mu = -\mathcal{F}^{-1}\partial_\mu \mathcal{F} \tag{5.7}$$

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \tag{5.8}$$

Συνεπώς η ποσότητα $\mathcal{J}_\mu$ είναι το ρεύμα διατήρησης που αντιστοιχεί στην ολική συμμετρία $F_L \times F_R$ του σ-μοντέλου, κάτω από την οποία το πεδίο $\mathcal{F}$ μετασχηματίζεται ως εξής

$$\mathcal{F} \to U\mathcal{F}V, \quad U, V \in F \tag{5.9}$$

Το αριστερό και δεξί ρεύμα διατήρησης θα είναι αντίστοιχα

$$\mathcal{J}_\mu^L = \partial_\mu \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{J}_\mu, \qquad \mathcal{J}_\mu^R = \mathcal{F}^{-1}\partial_\mu \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{J}_\mu \mathcal{F} \tag{5.10}$$

και μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες

$$\mathcal{Q}_L = \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_0 \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \tag{5.11}$$

και

$$\mathcal{Q}_R = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{F}^{-1}\partial_0 \mathcal{F} \tag{5.12}$$

Η συμμετρία (5.9) αποτελεί μία συμμετρία του σ-μοντέλου στον χώρο F. Επειδή εμείς ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση F/G θα πρέπει να λάβουμε υπ΄ όψιν τον περιορισμό (5.4), οπότε τα στοιχεία U, V δεν θα είναι ανεξάρτητα και το σ-μοντέλο θα είναι αναλλοίωτο κάτω από τους παρακάτω μετασχηματισμούς

$$\mathcal{F} \to \sigma_-(U)\mathcal{F}U^{-1}, \quad U \in F \tag{5.13}$$

Συνεπώς και τα διατηρούμενα φορτία (5.11) και (5.12) δεν θα είναι ανεξάρτητα, αλλά θα συνδέονται με τη σχέση

$$\sigma_-(\mathcal{Q}_L) = -\mathcal{Q}_R \tag{5.14}$$

Σε συντεταγμένες κώνου φωτός, οι συνιστώσες του ρεύματος (5.6) είναι $\mathcal{J}_\pm = \partial_\pm \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ και ικανοποιούν την εξίσωση Maurer-Cartan

$$\partial_+ \mathcal{J}_- - \partial_- \mathcal{J}_+ - [\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = 0 \tag{5.15}$$

Οι εξισώσεις κίνησης και η ταυτότητα (5.15) μπορούν να γραφούν στη μορφή μιας συνθήκης μηδενικής καμπυλότητας

$$\left[\partial_+ - \frac{\mathcal{J}_+}{1+\lambda}, \partial_- - \frac{\mathcal{J}_-}{1-\lambda}\right] = 0 \tag{5.16}$$

όπου λ είναι η φασματική παράμετρος. Από τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα για $\lambda = \pm 1$ παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\mp\partial_\pm \mathcal{J}_\mp + \frac{1}{2}[\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = 0 \tag{5.17}$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις (5.8) και (5.15).

5.1.1 Αναγωγή Pohlmeyer

Σε αλγεβρικό επίπεδο η αναγωγή Pohlmeyer ισοδυναμεί με την απαίτηση να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες [7],[14]

$$\partial_\pm \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = f_\pm \Lambda_\pm f_\pm^{-1} \tag{5.18}$$

όπου $\Lambda_\pm$ είναι σταθερά στοιχεία σε έναν μέγιστο αβελιανό υπόχωρο a του p στην (5.2) και $f_\pm \in F$. Ο φυσικός βαθμός ελευθερίας, ο οποίος μένει μετά την αναγωγή είναι $\gamma = f_-^{-1} f_+$, ο οποίος παίρνει τιμές στην $G \subset F$. Δρώντας με την απεικόνιση σ_- στην παραπάνω συνθήκη έχουμε, για το αριστερό μέλος

$$\sigma_-(\partial_\pm \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}) = -\mathcal{F}^{-1}\partial_\pm \mathcal{F} \tag{5.19}$$

ενώ για το δεξί έχουμε ότι

$$\sigma_-(f_\pm \Lambda_\pm f_\pm^{-1}) = -\sigma_-(f_\pm)\Lambda_\pm \sigma_-(f_\pm^{-1}) \tag{5.20}$$

Οι σχέσεις (5.19), (5.20) είναι συμβατές αν

$$\sigma_-(f_\pm) = \mathcal{F}^{-1} f_\pm \tag{5.21}$$

έτσι έχουμε ότι

$$\sigma_-(\gamma) = f_-^{-1}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f_+ = \gamma \tag{5.22}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\gamma \in G$. Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ποσότητες $f_\pm$ στη σχέση (5.18) δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Είναι προφανές ότι αν

$$f_\pm \to f_\pm f', \quad f' \in F: \quad [f', \Lambda_\pm] = 0 \tag{5.23}$$

η σχέση (5.18) παραμένει αναλλοίωτη. Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή η ελευθερία επιλογής των ποσοτήτων $f_\pm$ αντιστοιχεί σε μία συμμετρία βαθμίδας του ανηγμένου μοντέλου. Έχοντας εφαρμόσει τη συνθήκη (5.18) τα διατηρούμενα φορτία $\mathcal{Q}_L$ γράφονται

$$\mathcal{Q}_L = \int_{-\infty}^{\infty} dx (f_+\Lambda_+ f_+^{-1} + f_-\Lambda_- f_-^{-1}) \tag{5.24}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (5.17) τα ρεύματα $\mathcal{J}_\pm = f_\pm \Lambda_\pm f_\pm^{-1}$ και έχουμε ότι

$$[f_+^{-1}\partial_- f_+ - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\Lambda_-\gamma, \Lambda_+] = 0 \tag{5.25}$$

Δηλαδή

$$f_+^{-1}\partial_- f_+ - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\Lambda_-\gamma = A_-^R \tag{5.26}$$

όπου A_-^R είναι ένα άγνωστο στοιχείο, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $[A_-^R, \Lambda_+] = 0$. Επιπλέον έχουμε ότι $\sigma_-(A_-^R) = A_-^R$, το οποία σημαίνει ότι το A_-^R παίρνει τιμές σε μία υποομάδα $H^{(+)} \subset G$, της οποίας τα στοιχεία μετατίθενται με το Λ_+. Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$[-f_+^{-1}\partial_+ f_+ + \gamma^{-1}\partial_+\gamma + \frac{1}{2}\Lambda_+, \gamma^{-1}\Lambda_-\gamma] = 0 \tag{5.27}$$

που σημαίνει ότι

$$f_+^{-1}\partial_+ f_+ - \gamma^{-1}\partial_+\gamma - \frac{1}{2}\Lambda_+ = \gamma^{-1}A_+^L\gamma \tag{5.28}$$

Εδώ έχουμε ότι $[A_+^L, \Lambda_-] = 0$ και ότι $\sigma_-(A_+^L) = A_+^L$. Άρα το στοιχείο A_+^L παίρνει τιμές σε μία υποομάδα $H^{(-)} \subset G$, της οποίας τα στοιχεία μετατίθενται με το Λ_-.
Επίσης έχουμε για τη συνθήκη ολοκληρωσιμότητας

$$[\partial_+ - \mathcal{J}_+, \partial_- - \mathcal{J}_-] = [\partial_+ - f_+\Lambda_+ f_+^{-1}, \partial_- - f_-\Lambda_- f_-^{-1}] = 0 \tag{5.29}$$

Μετά από κάποιες πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$[\partial_+ + f_+^{-1}\partial_+ f_+ - \Lambda_+, \partial_- + f_+^{-1}\partial_- f_+ - \gamma^{-1}\Lambda_-\gamma] = 0 \tag{5.30}$$

Αντικαθιστούμε από τις σχέσεις (5.26) και (5.28) και παίρνουμε

$$[\partial_+ + \gamma^{-1}\partial_+\gamma + \gamma^{-1}A_+^L\gamma - \frac{1}{2}\Lambda_+, \partial_- + A_-^R - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\Lambda_-\gamma] = 0 \tag{5.31}$$

Η τελευταία σχέση είναι οι εξισώσεις κίνησης μοντέλου sine-Gordon σε συμμετρικούς χώρους γραμμένη σε μορφή συνθήκης μηδενικής καμπυλότητας.(βλ. 2.27) Συνέπεια της συνθήκης (5.18) είναι ότι αυτές οι εξισώσεις κίνησης έχουν μία συμμετρία βαθμίδας $H_L^{(-)} \times H_R^{(+)}$ κάτω από την οποία

$$f_\pm \to f_\pm h_\pm^{-1} \tag{5.32}$$

όπου $h_\pm \in H^{(\pm)} \subset G$. Τα στοιχεία γ, A_-^R, A_+^L μετασχηματίζονται ως εξής

$$\gamma \to h_-\gamma h_+^{-1} \tag{5.33}$$

$$A_-^R \to h_+(A_-^R + \partial_-)h_+^{-1} \qquad A_+^L \to h_-(A_+^L + \partial_+)h_-^{-1} \tag{5.34}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα συμπίπτουν με αυτά που βρήκαμε στο 2ο κεφάλαιο και αποδεικνύεται έτσι εκ των υστέρων ότι οι δύο μέθοδοι, του κεφαλαίου 2 με τα πεδία βαθμίδας και αυτού του κεφαλαίου είναι ισοδύναμες. Όπως είναι ήδη γνωστό οι εξισώσεις (5.31) είναι ολοκληρώσιμες. Προβάλλοντας τη σχέση

(5.31) στην υποάλγεβρα $h^{(+)}$ παίρνουμε την παρακάτω σχέση μηδενικής καμπυλότητας

$$[\partial_+ + A_+^R, \partial_- + A_-^R] = 0 \tag{5.35}$$

όπου

$$A_+^R = (\gamma^{-1}\partial_+\gamma + \gamma^{-1}A_+^L\gamma)|_{h^{(+)}} \tag{5.36}$$

και πολλαπλασιάζοντας την (5.31) από αριστερά με γ και από δεξιά με γ^{-1} και προβάλλοντας στην υποάλγεβρα $h^{(-)}$ παίρνουμε τη σχέση

$$A_-^L = (-\partial_-\gamma\gamma^{-1} + \gamma A_-^R\gamma^{-1})|_{h^{(-)}} \tag{5.37}$$

Οι παραπάνω συνθήκες μηδενικής καμπυλότητας είναι αυτές που μας επιτρέπουν την επιλογή της βαθμίδας $A_\pm^{(R/L)} = 0$ όπως έχουμε ήδη δει στο κεφάλαιο 2. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε τα διατηρούμενα φορτία των εξισώσεων sine-Gordon συμμετρικού χώρου.
Κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας έχουμε ότι

$$A_\pm^R \to h_+(A_\pm^R + \partial_\pm)h^{+-1}, \quad A_\pm^L \to h_-(A_\pm^L + \partial_\pm)h_-^{-1} \tag{5.38}$$

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $\gamma_0 \in G$ τέτοιο ώστε κάθε πεδίο γ να μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\gamma = \phi_L\gamma_0\phi_R^{-1}, \quad \phi_L \in H^{(-)}, \quad \phi_R \in H^{(+)} \tag{5.39}$$

Κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής (5.33) βλέπουμε ότι το γ_0 παραμένει αναλλοίωτο, ενώ $\phi_L \to h_-\phi_L$ και $\phi_R \to h_+\phi_R$ Τότε έυκολα βρίσκει κανείς ότι οι ποσότητες

$$\tilde{A}_\pm^R = \phi_R^{-1}(A_\pm^R + \partial_\pm)\phi_R, \qquad \tilde{A}_\pm^L = \phi_L^{-1}(A_\pm^L + \partial_\pm)\phi_L \tag{5.40}$$

είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Επιπλέον

$$[\partial_+ + \tilde{A}_+^{(R/L)}, \partial_- + \tilde{A}_-^{(R/L)}] = 0 \tag{5.41}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε για τις υποομάδες $H^{(\pm)}$ ότι

$$H^{(\pm)} = U(1)^{p_\pm} \times H_{ss}^{(\pm)} \tag{5.42}$$

όπου $p_\pm$ είναι θετικοί ακέραιοι και $H_{ss}^{(\pm)}$ ημιαπλοί παράγοντες. Οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\phi_{R/L} = e^{\alpha_{R/L}}\phi_{R/L} \tag{5.43}$$

με $e^{\alpha_{R/L}} \in U(1)^{p_\pm}$ και $\phi_{R/L} \in H_{ss}^{(\pm)}$. Προβάλλοντας τη σχέση (5.41) στην Lie άλγεβρα $U(1)^{p_\pm}$ παίρνουμε ότι

$$\partial_+\left[\tilde{A}_-^{(R/L)}|_{u(1)^{p_\pm}}\right] - \partial_-\left[\tilde{A}_+^{(R/L)}|_{u(1)^{p_\pm}}\right] = 0 \tag{5.44}$$

Άρα έχουμε το παρακάτψω ρεύμα διατήρησης

$$J^{\mu}_{R/L} = \epsilon^{\mu\nu}\left(\tilde{A}^{(R/L)}_{\nu}|_{u(1)^{p\pm}}\right) = \epsilon^{\mu\nu}\left(A^{(R/L)}_{\nu}|_{u(1)^{p\pm}} + \partial_{\nu}\alpha_{R/L}\right) \tag{5.45}$$

Οπότε παίρνουμε τα φορτία διατήρησης

$$Q_{R/L} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^{0}_{R/L} = \alpha_{R/L}(+\infty) - \alpha_{R/L}(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx A^{(R/L)}_{1}|_{u(1)^{p\pm}} \in u(1)^{p\pm} \tag{5.46}$$

Ομοίως προβάλλοντας τη σχέση (5.41) στη Lie άλγεβρα της $H^{(\pm)}_{ss}$ παίρνουμε τα φορτία

$$\Omega_{R/L} = \phi^{-1}_{R/L}(+\infty) P e^{-\int_{-\infty}^{+\infty} dx A^{(R/L)}_{1}|_{h^{(\pm)}_{ss}}} \phi_{R/L}(-\infty) \in h^{(\pm)}_{ss} \tag{5.47}$$

Με P έχουμε συμβολίσει τον τελεστή διάταξης κατά διαδρομές. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα παραπάνω φορτία δεν είναι τα ίδια με τα φορτία $\mathcal{Q}_{R/L}$ των σχέσεων (5.11) και (5.12).

5.1.2 Λαγκρανζιανή διατύπωση

Μέχρι στιγμής έχουν βρεθεί Λαγκρανζιανές διατυπώσεις των εξισώσεων του μοντέλου sine-Gordon συμμετρικού χώρου μόνο όταν οι υποομάδες $H^{(-)}$ και $H^{(+)}$ είναι ισομορφικές και της μορφής

$$H^{(+)} = \epsilon_R(H), \qquad H^{(-)}_{L} = \epsilon_L(H) \tag{5.48}$$

όπου H είναι μία ομάδα Lie και $\epsilon_{L,R} : H \to G$ είναι δύο κατάλληλοι ομομομορφισμοί ομάδας. Γράφουμε τότε

$$A^{L}_{+} = \epsilon_L(\mathcal{A}_{+}) \qquad A^{R}_{-} = \epsilon_R(\mathcal{A}_{-}) \tag{5.49}$$

όπου τα $\mathcal{A}_{\pm}$ παίρνουν τιμές στη Lie άλγεβρα h. Επιπλέον απαιτούμε να ισχύουν οι περιορισμοί

$$\left(\gamma^{-1}\partial_{+}\gamma + \gamma^{-1}\epsilon_L(\mathcal{A}_{+})\gamma\right)|_{h_{+}} = \epsilon_R(\mathcal{A}_{+}) \tag{5.50}$$

$$\left(-\partial_{-}\gamma\gamma^{-1} + \gamma\epsilon_R(\mathcal{A}_{-})\gamma^{-1}\right)|_{h_{-}} = \epsilon_L(\mathcal{A}_{-}) \tag{5.51}$$

οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν ως μία μερική επιλογή βαθμίδας και γράφονται επίσης

$$A^{L}_{-} = \epsilon_L(\mathcal{A}_{-}), \qquad A^{R}_{+} = \epsilon_R(\mathcal{A}_{+}) \tag{5.52}$$

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας (5.33) γράφονται

$$\gamma \to \epsilon_L(h)\gamma\epsilon_R(h^{-1}) \tag{5.53}$$

και οι συνιστώσες $\mathcal{A}_{\mu}$ μετασχηματίζονται ως εξής

$$\mathcal{A}_{\mu} \to h(\mathcal{A}_{\mu} + \partial_{\mu})h^{-1} \tag{5.54}$$

Οι περιορισμοί (5.50) και (5.51) είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής

$$\gamma \to e^{\epsilon_L(\rho)}\gamma e^{\epsilon_R(\rho)}, \qquad \mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu \tag{5.55}$$

όπου e^ρ είναι το κέντρο της H. Τότε οι εξισώσεις κίνησης (5.31) γράφονται

$$[\partial_+ + \gamma^{-1}\partial_+\gamma + \gamma^{-1}\epsilon_L(\mathcal{A}_+)\gamma, \partial_- + \epsilon_R(\mathcal{A}_-)] = \frac{1}{4}[\Lambda_+, \gamma^{-1}\Lambda_-\gamma] \tag{5.56}$$

Όπως έχουμε ήδη δει στο κεφάλαιο 2 οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης απορρέουν από τη Λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{WZW}(\gamma) + \frac{1}{2\pi}Tr(-\epsilon_L(\mathcal{A}_+)\partial_-\gamma\gamma^{-1} + \epsilon_R(\mathcal{A}_-)\gamma^{-1}\partial_+\gamma \\ &+ \gamma^{-1}\epsilon_L(\mathcal{A}_+)\gamma\epsilon_R(\mathcal{A}_-) - \epsilon_L(\mathcal{A}_+)\epsilon_R(\mathcal{A}_-) - \frac{1}{4}\Lambda_+\gamma^{-1}\Lambda_-\gamma) \end{aligned} \tag{5.57}$$

Στη συνέχεια θα δούμε τις συμμετρίες της παραπάνω Λαγκρανζιανής και το πως συνδέονται αυτές με τα φορτία $Q_{R/L}$ της προηγούμενης ενότητας.
Θα περιορίσουμε την ανάλυσή μας στην περίπτωση που η ομάδα H είναι αβελιανή. Η Λαγκρανζιανή (5.57) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους αβελιανούς μετασχηματισμούς

$$\gamma \to e^{\epsilon_L(u)}\gamma e^{-\epsilon_R(v)}, \quad \mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu, \qquad u, v \in h \tag{5.58}$$

Θεωρούμε μεταβολές της δράσης κάτω από τους απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\gamma^{-1}\delta\gamma = \gamma^{-1}\epsilon_L(u)\gamma - \epsilon_R(v), \qquad \delta\mathcal{A}_\mu = 0 \tag{5.59}$$

με $u = u(\sigma^\pm)$ και $v = v(\sigma^\pm)$. Τότε

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^2\sigma Tr([\partial_+ + \gamma^{-1}\partial_+\gamma + \gamma^{-1}\epsilon_L(\mathcal{A}_+)\gamma - \frac{1}{2}\Lambda_+, \\ &\quad \partial_- + \epsilon_R(\mathcal{A}_-) - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\Lambda_-\gamma]\gamma^{-1}\delta\gamma) \\ &= \int d^2\sigma Tr[(\partial_+\mathcal{A}_- - \partial_-\mathcal{A}_+)(u - v) + \\ &\quad +\partial_-((\gamma^{-1}\partial_+\gamma + \gamma^{-1}\epsilon_L(\mathcal{A}_+)\gamma))|_{h_+} - \epsilon_R(\mathcal{A}_+))\epsilon_R(v) + \\ &\quad +\partial_+((-\partial_-\gamma\gamma^{-1} + \gamma\epsilon_R(\mathcal{A}_-)\gamma^{-1})|_{h_-} - \epsilon_L(\mathcal{A}_-))\epsilon_L(u)] \end{aligned} \tag{5.60}$$

Πρέπει $\delta S = 0$ για κάθε u, v άρα καταλήγουμε στη σχέση

$$\partial_+\mathcal{A}_- - \partial_-\mathcal{A}_+ = 0 \tag{5.61}$$

και έχουμε το ρεύμα διατήρησης

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu}\mathcal{A}_\nu \tag{5.62}$$

Το ρεύμα αυτό όμως δεν είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής (5.53), (5.54), που στην προκειμένη περίπτωση γράφονται

$$\gamma \to e^{\epsilon_L(u)}\gamma e^{-\epsilon_R(v)}, \quad \mathcal{A}_\mu \to \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu u \tag{5.63}$$

Για να κατασκευάσουμε αναλλοίωτες ποσότητες θα ακολουθήσουμε τη 'συνταγή' (5.39), η οποία γράφεται στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$\gamma = \phi_L \gamma_0 \phi_R^{-1} = e^{\epsilon_L(\alpha+\beta)}\gamma_0 e^{-\epsilon_R(\alpha-\beta)} \tag{5.64}$$

έτσι ώστε κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής (5.63) να έχουμε ότι $\alpha \to \alpha + u$ ενώ τα γ_0, β να παραμένουν αναλλοίωτα. Τότε το αναλλοίωτο ρεύμα διατήρησης γράφεται

$$\tilde{J}^\mu = \epsilon^{\mu\nu}(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \alpha) \tag{5.65}$$

και το σχετικό διατηρούμενο φορτίο

$$Q^N = \alpha(+\infty) - \alpha(-\infty) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{A}_1 \tag{5.66}$$

Για να συσχετίσουμε το φορτίο Q^N με τα φορτία $Q_{R/L}$ παίρνουμε από τις σχέσεις (5.46), (5.49) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\alpha_{R/L} = \epsilon_{R/L}(\alpha \mp \beta)$ έχουμε ότι

$$Q_L = \epsilon_L(Q^N + Q^T), \qquad Q_R = \epsilon_R(Q^N - Q^T) \tag{5.67}$$

όπου η ποσότητα

$$Q^T = \beta(+\infty) - \beta(-\infty) \tag{5.68}$$

είναι ένα είδος τοπολογικού φορτίου.
Συνοψίζοντας αναμένουμε ότι τα σολιτόνια στην Λαγκρανζιανή διατύπωση θα φέρουν και φορτίο Noether Q^N και τοπολογικό φορτίο Q^T. Αναφέρουμε τέλος ότι δύο συνηθισμένες επιλογές για τους ομομορφισμούς $\epsilon_{R/L}$ είναι

$$\epsilon_L(\alpha) = \epsilon_R(\alpha) = \alpha \tag{5.69}$$

και

$$\epsilon_L(\alpha) = -\epsilon_R(\alpha) = \alpha \tag{5.70}$$

5.1.3 Εφαρμογή στο μοντέλο CP^2

Για να γίνουν σαφή τα προηγούμενα θα τα εφαρμόσουμε σέ ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, στον χώρο $CP^2 = SU(3)/U(2)$. Επιλέγουμε για τους πίνακες $\Lambda_\pm$

$$\Lambda_+ = \Lambda_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

Σε αυτή την περίπτωση $H^{(\pm)} = U(1)$.Επιπλέον επιλέγουμε την παρακάτω παραμετροποίηση για το στοιχείο γ

$$\gamma = e^{a_L h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta e^{i\phi} & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{-a_R h} \tag{5.72}$$

όπου h είναι ο γεννήτορας της άλγεβρας που αντιστοιχεί στην ομάδα H, δηλαδή

$$h = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

Επιλέγουμε για τους ομομορφισμούς $\epsilon_{R/L}$ τη μορφή (5.69) και λύνουμε τις σχέσεις (5.50) και (5.51). Επιπλέον φέρνουμε το γ στη μορφή (5.64)

$$\gamma = e^{a_L h}\gamma_0 e^{-a_R h} = e^{\alpha+\beta}\gamma_0 e^{-(\alpha-\beta)} \tag{5.74}$$

με

$$\alpha = \frac{a_L + a_R}{2}h, \qquad \beta = \frac{a_L - a_R}{2}h \tag{5.75}$$

Από τη λύση των εξισώσεων (5.50) και (5.51) βρίσκουμε τις ποσότητες $\mathcal{A}_\mu$

$$\mathcal{A}_\pm = \left(\pm\frac{i}{3}\cot^2\theta\partial_+\phi\right) h \tag{5.76}$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω αποτελέσματος βρίσκουμε από τη σχέση (5.65) ότι το ρεύμα Noether, το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας είναι

$$\tilde{J}^{(V)\mu} = \epsilon^{\mu\nu}\left(\mathcal{A}_\nu + \partial_\nu\alpha\right) = \frac{1}{3}\left((\frac{1}{2} + 2\cot^2\theta)\partial^\mu(a_L - a_R) + \cot^2\theta\partial^\mu\phi\right) h \tag{5.77}$$

Επιπλέον έχουμε από τις σχέσεις (5.56) ότι οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\partial^\mu\partial_\mu\psi = -4\cos\theta\sin\phi \tag{5.78}$$

$$\partial^\mu\partial_\mu\theta + \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\partial_\mu(\phi+\psi)\partial^\mu(\phi+\psi) = -\sin\theta\cos\phi \tag{5.79}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + \frac{1}{4}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi + \cot^2\theta\partial_\mu(\psi+\phi)\partial^\mu(\psi+\phi) + 2\cos\theta\cos\phi \tag{5.80}$$

5.2 Γιγάντια Μαγνόνια

Γιγάντιο μαγνόνιο ονομάζεται στα πλαίσια της θεωρίας χορδών ένα σολιτόνιο του ανηγμένου μοντέλου στον χώρο F/G. Θα μελετήσουμε την περίπτωση που ο χώρος είναι της μορφής $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, διότι αυτή σχετίζεται με την αντιστοιχία AdS/CFT για την περίπτωση $AdS_5 \times S^5$
Η απεικόνιση (5.4) για την περίπτωση $F/G = SO(n+1)/SO(n)$ είναι

$$\sigma_-(\mathcal{F}) = \theta\mathcal{F}\theta^{-1} \tag{5.81}$$

όπου

$$\theta = diag(-1, 1, \dots, 1) \tag{5.82}$$

Μια n-διάστατη σφαίρα μπορούμε να την παραμετρίσουμε μέσω ενός πραγματικού μοναδιαίου $n+1$-διάστατου διανύσματος $\mathbf{X}$ με συνιστώσες $X_\alpha, |\mathbf{X}| = 1$. Για το πεδίο $\mathcal{F}$ έχουμε τότε ότι

$$\mathcal{F} = \theta(1 - 2\mathbf{X}\mathbf{X}^T) \tag{5.83}$$

Τα γιγάντια μαγνόνια μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές γύρω από τη θεμελιώδη κατάσταση, η οποία είναι η απλούστερη λύση συμβατή με τις εξισώσεις κίνησης και τους περιορισμούς Pohlmeyer . Πιο συγκεκριμένα για θεμελιώδη κατάσταση, η κενό θα πάρουμε τη λύση

$$f_\pm = 1 \tag{5.84}$$

Από τις σχέσεις (5.18) έχουμε ότι

$$\mathcal{F}_0 = e^{x_+\Lambda_+ + x_-\Lambda_-} \tag{5.85}$$

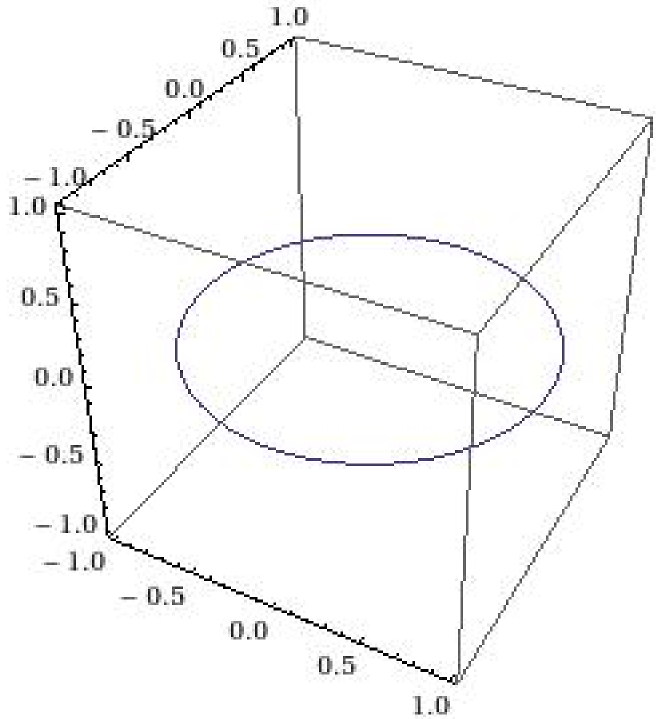
όπου με $x_\pm$ συμβολίζουμε τις συντεταγμένες κώνου φωτός για να μην υπάρξει σύγχυση με την απεικόνιση σ_-.
Επιλέγουμε για τα στοιχεία $\Lambda_\pm$

$$\Lambda_+ = \Lambda_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.86}$$

Η λύση (5.75) αντιστοιχεί σε σφαιρικές συντεταγμένες σε

$$\mathbf{X}_0 = \vec{e}_1 \cos t - \vec{e}_2 \sin t \tag{5.87}$$

όπου $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1}$ είναι ένα σύνολο ορθοκανονικών διανυσμάτων στον R^{n+1}. Η φυσική ερμηνεία είναι ότι η χορδή περιορίζεται σε ένα σημείο που κινείται στον μέγιστο κύκλο του S^n που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και ταξιδεύει με



Σχήμα 5.1: Γεωμετρικός τόπος της θεμελιώδους κατάστασης για $t \in [0, 2\pi]$

την ταχύτητα του φωτός. Επειδή το κενό φέρει άπειρο φορτίο $\mathcal{Q}_L$ η ποσότητα που έχει νόημα για το φορτίο μίας κατάστασης είναι το σχετικό φορτίο ως προς το κενό

$$\Delta\mathcal{Q}_L = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(\partial_0\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} - \partial_0\mathcal{F}_0\mathcal{F}_0^{-1}) \tag{5.88}$$

Για την περίπτωση της σφαίρας έχουμε ότι

$$\mathcal{Q}_{L,ab} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx(\partial_0 X_a X_b - X_a\partial_0 X_b) \tag{5.89}$$

5.2.1 Γιγάντια Μαγνόνια στη σφαίρα S^n

Το αρχικό γιγάντιο μαγνόνιο παρουσιάστηκε από τους Hofman και Maldacena. Είναι μία λύση η οποία παίρνει τιμές στον υπόχωρο $S^2 \subset S^n$, ο οποίος ορίζεται από τρία μεταξύ τους ορθονορμαλισμένα διανύσματα $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{\Omega}\}$. Τα διανύσματα έχουν ήδη προσδιοριστεί από την επιλογή του κενού (5.87), ενώ το διάνυσμα $\mathbf{\Omega}$ περιγράφει έναν υπόχωρο $S^{n-2} \subset S^n$ και παίζει το ρόλο μίας εσωτερικής, συγκεντρωτικής συντεταγμένης του μαγνονίου. Αν (θ, ϕ) είναι πολικές συντεταγμένες στον S^2 τότε η λύση που βρήκαν οι Hofman και Maldacena γράφεται

$$\cos\theta = \frac{\sin\frac{p}{2}}{\cosh x'}, \quad \tan(\phi - t) = \tan\frac{p}{2}\tanh x' \tag{5.90}$$

όπου οι συντεταγμένες (x', t') ορίζονται μέσω των μετασχηματισμών Lorentz

$$x' = x\cosh\theta - t\sinh\theta, \quad t' = t\cosh\theta - x\sinh\theta \tag{5.91}$$

όπου

$$\tanh\theta = v \tag{5.92}$$

Για το μαγνόνιο των Hofman και Maldacena έχουμε ότι

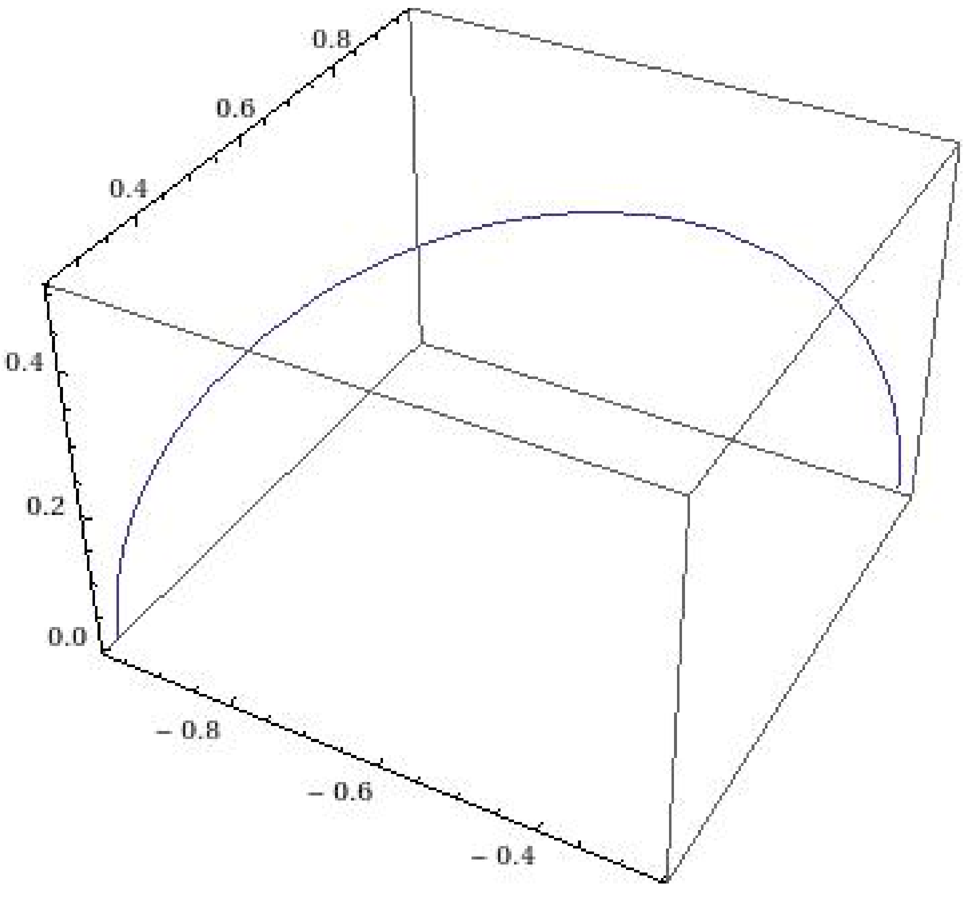
$$\tanh\theta = \cos\frac{p}{2} \tag{5.93}$$

Η λύση γράφεται ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{X}$ ως εξής

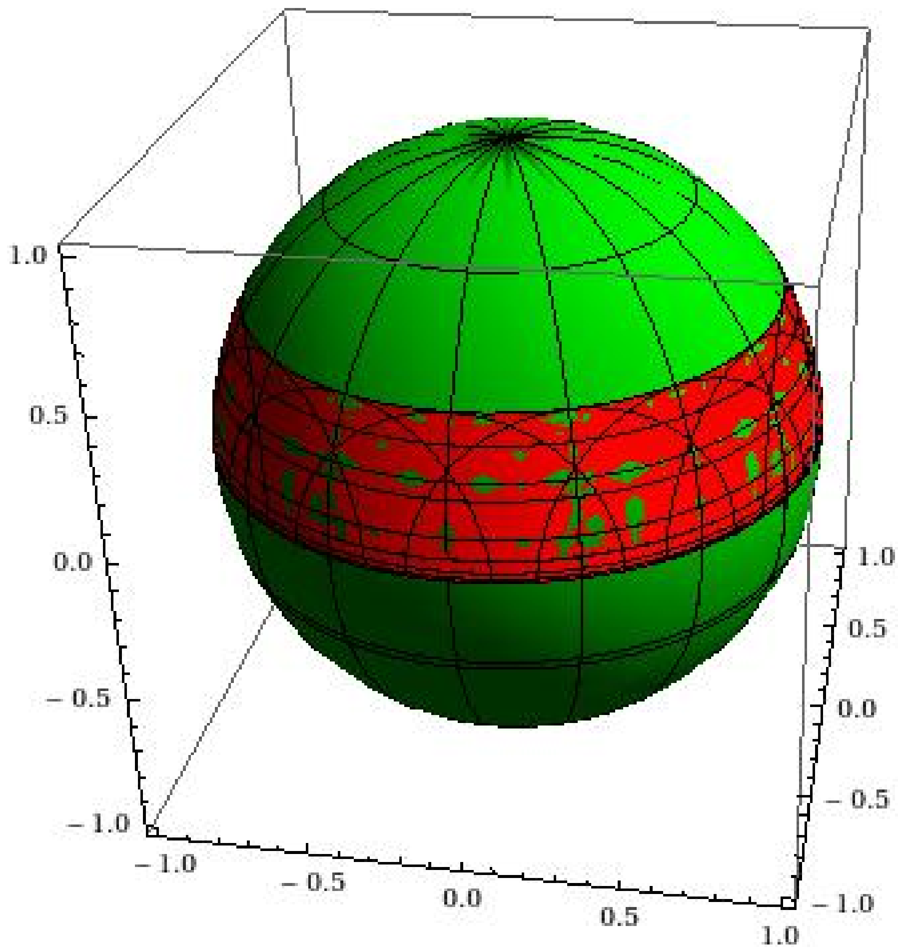
$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \left[\sin t\sin\frac{p}{2}\tanh x' - \cos t\cos\frac{p}{2}\right]\mathbf{e}_1 \\ &+ \left[\cos t\sin\frac{p}{2}\tanh x' + \sin t\cos\frac{p}{2}\right]\mathbf{e}_2 + \sin\frac{p}{2}x'\Omega\end{aligned} \tag{5.94}$$

Το αντίστοιχο σολιτόνιο στο αντίστοιχο μοντέλο sine-Gordon συμμετρικού χώρου βρίσκει κανείς ότι είναι

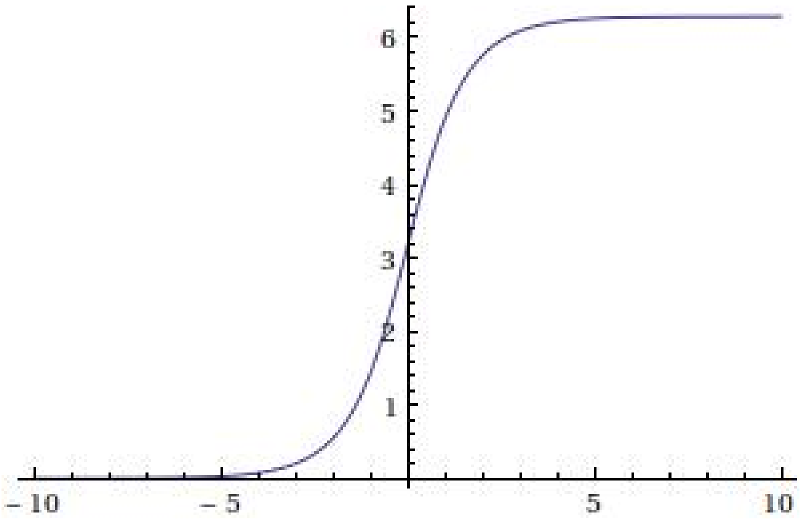
$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\cos\theta(x) & \sin\theta(x)\mathbf{\Omega}_3 & \dots & \sin\theta(x)\mathbf{\Omega}_n \\ 0 & \sin\theta\mathbf{\Omega}_3 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{I} + (\cos\theta(x) - 1)\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T & \\ 0 & \sin\theta\mathbf{\Omega}_n & & & \end{pmatrix} \tag{5.95}$$



Σχήμα 5.2: Στιγμιότυπο Μαγνονίου για $p = \frac{\pi}{3}$ και $t = \frac{\pi}{4}$



Σχήμα 5.3: Γεωμετρικός Τόπος Μαγνονίων για $p = \frac{\pi}{3}$



Σχήμα 5.4: $\theta = 4\tan^{-1}(e^x)$

ενώ για τα πεδία βαθμίδας έχουμε ότι $A_+^L = A_-^R = 0$. Στα παραπάνω $\theta(x)$ είναι η σολιτονική λύση της εξίσωσης sine-Gordon. $\partial_\mu \partial^\mu \theta = -\sin\theta, \quad \theta = 4\tan^{-1}(e^x)$

5.2.2 Μαγνόνια και Σολιτόνια 'ντύνοντας' το κενό

Ένας τρόπος κατασκευής μαγνονίων είναι μέσω μίας διαδικασίας, η οποία είναι γνωστή ως dressing transformation και συνδέεται στενά με τους μετασχηματισμούς Bäcklund. Η συγκεκριμένη διαδικασία ξεκινάει από την απλούστερη δυνατή λύση, το κενό δηλαδή, και μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού παράγει ένα σολιτόνιο. Είναι σημαντικό για τον μετασχηματισμό να παράγει λύσεις οι οποίες θα είναι συμβατές με τους περιορισμούς Pohlmeyer (5.18) αν η αρχική λύση είναι συμβατή με αυτούς τους περιορισμούς.
Η διαδικασία ξεκινάει με την επιλογή του κενού, η οποία θα είναι η απλούστερη λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς (5.18), δηλαδή

$$f_\pm = 1 \tag{5.96}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε την ομάδα F ως υποομάδα της $SL(n, C)$ μέσω μίας ή περισσότερων κατάλληλων απεικονίσεων σ_- , ενώ μέσω μίας ακόμη απεικόνισης σ_- ορίζουμε τον χώρο F/G. Πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση $F/G = SO(n+1)/SO(n)$ έχουμε τις εξής απεικονίσεις

$$\sigma_+^{(1)}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{\dagger -1} \tag{5.97}$$

$$\sigma_+^{(2)}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{*} \tag{5.98}$$

οι οποίες ορίζουν την υποομάδα $SO(n+1) \subset SL(n,C)$ και την απεικόνιση (5.76)

$$\sigma_-(\mathcal{F}) \;=\; \theta\mathcal{F}\theta \tag{5.99}$$

η οποία ορίζει τον χώρο $SO(n+1)/SO(n)$. Στην ομάδα $SL(n,C)$ οι εξισώσεις κίνησης του σ-μοντέλου γραμμένες ως συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας έχουν τη μορφή (5.16) και το σχετικό γραμμικό σύστημα είναι

$$\begin{aligned} \partial_+\Psi(x;\lambda) &= \frac{\partial_+\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}}{1+\lambda}\Psi(x;\lambda) \\ \partial_-\Psi(x;\lambda) &= \frac{\partial_-\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}}{1-\lambda}\Psi(x;\lambda) \end{aligned} \tag{5.100}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{F}(x) = \Psi(x;0) \tag{5.101}$$

Η διαδικασία dressing transformation περιλαμβάνει την κατασκευή μίας λύσης Ψ για το παραπάνω σύστημα της μορφής

$$\Psi(x;\lambda) = \chi(x;\lambda)\Psi_0(x;\lambda) \tag{5.102}$$

από μία παλαιότερη γνωστή λύση Ψ_0, η οποία για την περίπτωσή μας είναι

$$\Psi_0(x;\lambda) = e^{\left[\frac{x_+}{1+\lambda}\Lambda_+ + \frac{x_-}{1-\lambda}\Lambda_-\right]} \tag{5.103}$$

Παίρνοντας τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της ποσότητας $\partial_\pm\Psi(\lambda)\Psi(\lambda)^{-1}$ στις θέσεις $\lambda = \pm 1$ έχουμε ότι

$$\partial_\pm\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \chi(\mp 1)\Lambda_\pm\chi(\mp 1)^{-1} \tag{5.104}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι ο μετασχηματισμός που μελετάμε είναι συμβατός με την αναγωγή Pohlmeyer . Επιπλέον έχουμε ότι

$$f_\pm = \chi(\mp 1)\Phi \tag{5.105}$$

όπου Φ είναι ένα άγνωστο στοιχείο τέτοιο ώστε

$$[\Phi, \Lambda_\pm] = 0 \tag{5.106}$$

Επιπλέον το στοιχείο Φ θα επιλεγεί κατάλληλα ώστε

$$\gamma = f_-^{-1}f_+ = \Phi^{-1}\chi(+1)^{-1}\chi(-1)\Phi \in G \subset F \tag{5.107}$$

Βρίσκει κανείς ότι η μορφή του στοιχείου Φ είναι

$$\Phi = \mathcal{F}_0^{1/2} = e^{\left[\frac{x_+\Lambda_+}{2} + \frac{x_-\Lambda_-}{2}\right]} \tag{5.108}$$

Θα δούμε συνοπτικά τώρα τη μορφή του παράγοντα $\chi(\lambda)$. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [14],[15]
Η γενική μορφή του παράγοντα $\chi(\lambda)$ είναι

$$\chi(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{Q_i}{\lambda - \lambda_i}, \qquad \chi(\lambda)^{-1} = 1 + \sum_i \frac{R_i}{\lambda - \mu_i} \tag{5.109}$$

όπου τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα Q_i, R_i είναι πίνακες της μορφής

$$Q_i = \mathbf{X}_i \mathbf{F}_i^\dagger, \qquad R_i = \mathbf{H}_i \mathbf{K}_i^\dagger \tag{5.110}$$

όπου τα $\mathbf{X}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{K}_i$ είναι διανύσματα. Η μορφή των παραπάνω διανυσμάτων είναι

$$\mathbf{F}_i = \left(\Psi_0(\lambda_i)^\dagger\right)^{-1} \omega_i, \quad \mathbf{H}_i = \Psi_0(\mu_i)\pi_i \tag{5.111}$$

όπου ω_i, π_i είναι σταθερά μιγαδικά n-διάστατα διανύσματα. Και

$$\mathbf{X}_i \Gamma_{ij} = \mathbf{H}_j, \qquad \mathbf{K}_i (\Gamma^\dagger)_{ij} = -\mathbf{F}_j \tag{5.112}$$

όπου

$$\Gamma_{ij} = \frac{\mathbf{F}_i^\dagger \mathbf{H}_j}{\lambda_i - \mu_j} \tag{5.113}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι μία τυχαία λύση $\Psi(x;\lambda)$, η οποία προκύπτει μέσω της παραπάνω διαδικασίας δίνει το γ όπως είναι γραμμένο στη σχέση (5.107) με το Φ όπως δίνεται από τη σχέση (5.108) και ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης του σ-μοντέλου στη βαθμίδα $A_+^{(L)} = A_-^{(R)} = 0$, δηλαδή

$$\partial_-(\gamma^{-1}\partial_+\gamma) = \frac{1}{4}[\Lambda_+, \gamma^{-1}\Lambda_-\gamma] \tag{5.114}$$

μαζί με τους περιορισμούς

$$(\gamma^{-1}\partial_+\gamma)|_{h_+} = 0, \qquad (\partial_-\gamma\gamma^{-1})|_{h_-} = 0 \tag{5.115}$$

Επιπλέον αντικαθιστώντας στη σχέση (5.107) τα $\chi(-1)$ και $\chi(+1)^{-1}$ με τα ίσα τους από τις σχέσεις (5.109) - (5.113) έχουμε ότι

$$\gamma = 1 - \frac{2}{(1-\mu_i)(1+\lambda_i)} \mathcal{F}_0^{-1/2} \mathbf{H}_i (\Gamma^{-1})_{ij} \mathbf{F}_j^\dagger \mathcal{F}_0^{1/2} \tag{5.116}$$

Τέλος για τα φορτία $\mathcal{Q}_{L/R}$ βρίσκει κανείς ότι

$$\Delta\mathcal{Q}_L = \sum_i Q_i|_{x=\infty} - \sum_i Q_i|_{x=-\infty} \tag{5.117}$$

και

$$\Delta\mathcal{Q}_R = -\Delta\mathcal{Q}_L|_{\lambda_i \to \lambda_i^{-1}, \mu_i \to \mu_i^{-1}, \Lambda_\pm \to -\Lambda_\pm} \tag{5.118}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε απλά περιγράψει το μετασχηματισμό Bäcklund για την περίπτωση της ομάδας $SL(n, C)$. Επιπλέον θα πρέπει να απαιτήσουμε να ι-σχύουν κάποιοι επιπλέον περιορισμοί σ_+, οι οποίοι θα ορίζουν την ομάδα $F \subset SL(n, C)$ καθώς και ένας άλλος περιορισμός σ_-, ο οποίος θα ορίζει το χώρο F/G.

Υπάρχουν οι παρακάτω τέσσερεις τύποι αυτομορφισμών, οι οποίοι ορίζουν τις ομάδες $G \subset F \subset SL(n, C)$.

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathcal{F}) &= \theta \mathcal{F} \theta^{-1} \\ \sigma_2(\mathcal{F}) &= \theta \mathcal{F}^* \theta^{-1} \\ \sigma_3(\mathcal{F}) &= \theta (\mathcal{F}^T)^{-1} \theta^{-1} \\ \sigma_4(\mathcal{F}) &= \theta \mathcal{F}^{\dagger -1} \theta^{-1} \end{aligned} \tag{5.119}$$

όπου θ είναι ένας συμμετρικός, ή αντισυμμετρικός, ή ερμιτιανός, ή αντι-ερμιτιανός πίνακας. Οι απεικονίσεις σ_1, σ_3 είναι ολομορφικές, ενώ οι απεικονίσεις σ_2, σ_4 είναι αντιολομορφικές.

Ο σωστός τρόπος να εφαρμόσουμε τις παρακάτω απεικονίσεις στο $\Psi(x; \lambda)$ είναι

$$\Psi(\lambda) = \sigma_+ \left(\Psi(\tilde{\lambda}) \right) \tag{5.120}$$

$$\Psi(1/\lambda) = \mathcal{F} \sigma_- \left(\Psi(\tilde{\lambda}) \right) \tag{5.121}$$

όπου $\tilde{\lambda} = \lambda, \lambda^*$, αν η απεικόνιση $\sigma_\pm$ είναι ολομορφική ή αντιολομορφική αν-τίστοιχα. Οι παραπάνω συνθήκες γράφονται για την ποσότητα $\chi(\lambda)$ ως εξής

$$\chi(\lambda) = \sigma_+ \left(\chi(\tilde{\lambda}) \right) \tag{5.122}$$

$$\chi(1/\lambda) = \mathcal{F} \sigma_- \left(\chi(\tilde{\lambda}) \right) \mathcal{F}_0^{-1} \tag{5.123}$$

5.2.3 Εφαρμογή στα κύρια χειραλικά μοντέλα

Ας εξειδικεύσουμε τώρα για την περίπτωση των κύριων χειραλικών μοντέλων. Μπορούμε να δούμε αυτές τις θεωρίες ως σ-μοντέλα ορισμένα στον συμμετρικό χώρο $\mathcal{M} = G \times G/G$, ή αλλιώς ως σ-μοντέλα ορισμένα στην ομάδα G. Για την παρακάτω ανάλυση είναι χρήσιμη η δεύτερη οπτική γωνία. Θα θεωρήσουμε ότι $G = SU(n)$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο έναν αυτομορφισμό

$$\sigma_+(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{\dagger -1} \tag{5.124}$$

και είναι τύπου σ_4 με $\theta = \mathbf{I}$. Συνεπώς έχουμε τον περιορισμό (5.122)

$$\chi(\lambda) = \left(\chi^\dagger(\lambda^*) \right)^{-1} \tag{5.125}$$

Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται αν

$$\mu_i = \lambda_i^* \tag{5.126}$$

και

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{F}_i, \qquad \mathbf{K}_i = \mathbf{X}_i \tag{5.127}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\omega_i = \pi_i, \quad \forall i \tag{5.128}$$

και ότι

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{K}_i = \mathbf{F}_j \left(\Gamma^{-1}\right)_{ji} \tag{5.129}$$

όπου

$$\Gamma_{ij} = \frac{\mathbf{F}_i^\dagger \mathbf{F}_j}{\lambda_i - \lambda_j^*} \tag{5.130}$$

Για τους παράγοντες $\chi(\lambda)$ και $\chi(\lambda)^{-1}$ έχουμε ότι

$$\chi(\lambda) = 1 + \frac{\mathbf{F}_i \left(\Gamma^{-1}\right)_{ij} \mathbf{F}_j^\dagger}{\lambda - \lambda_j} \tag{5.131}$$

και

$$\chi(\lambda)^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{F}_i \left(\Gamma^{-1}\right)_{ij} \mathbf{F}_j^\dagger}{\lambda - \lambda_i^*} \tag{5.132}$$

Χρησιμοποιώντας τότε τις σχέσεις (5.101) και (5.102) έχουμε ότι το μαγνόνιο για το κύριο χειραλικό μοντέλο της $SU(n)$ είναι

$$\mathcal{F} = \chi(0)\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 - \frac{\mathbf{F}_i \left(\Gamma^{-1}\right)_{ij} \mathbf{F}_j^\dagger \mathcal{F}_0}{\lambda_j} \tag{5.133}$$

ενώ το αντίστοιχο σολιτόνιο του αντίστοιχου μοντέλου sine-Gordon συμμετρικού χώρου είναι

$$\gamma = 1 - \frac{2}{(1-\lambda_i^*)(1+\lambda_j)} \mathcal{F}_0^{-1/2} \mathbf{F}_i \left(\Gamma^{-1}\right)_{ij} \mathbf{F}_j^\dagger \mathcal{F}_0^{1/2} \tag{5.134}$$

όπου

$$\mathbf{F} = \Psi_0(\lambda_i^*)\omega_i \tag{5.135}$$

Εν γένει ίσως χρειαστεί να πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις (5.133) και (5.134) με σταθερούς παράγοντες φάσης, έτσι ώστε να έχουμε ότι $det\mathcal{F} = 1$ και $det\gamma = 1$.

Παράρτημα Α΄

Βασικά στοιχεία των ολοκληρώσιμων συστημάτων

Α΄.1 Ολοκληρωσιμότητα κατα Liouville και ζεύγη Lax

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας, το οποίο περιγράφεται από τη Hamiltonian $H(q_i, p_i), \quad i = 1 \ldots n$, η οποία είναι ορισμένη στον αντίστοιχο φασικό χώρο $2n$ διαστάσεων. Αν υπάρχουν n συναρτήσεις $I_i(q_i, p_i)$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} \{H, I_i\} &= 0 \\ \{I_i, I_j\} &= 0, \quad i, j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{Α΄.1}$$

τότε το σύστημα λέγεται πλήρως ολοκληρώσιμο. Οι συναρτήσεις I_i διατηρούνται διότι

$$\dot{I}_i = \{H, I_i\} = 0, \quad i = 1 \ldots n \tag{Α΄.2}$$

και ονομάζονται ολοκληρώματα της κίνησης.

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι κατά τα γνωστά οι

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{Α΄.3}$$

Στην περίπτωση αυτή είναι δυνατόν να εισάγουμε ένα συμπληρωματικό σύνολο συναρτήσεων $\phi_j(q_i, p_i), i = 1 \ldots n$ και να κάνουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$(q_i, p_i) \to (I_i, \phi_i) \tag{Α΄.4}$$

Οι καινούριες συντεταγμένες ονομάζονται μεταβλητές δράσης - γωνίας. Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{I}_i = H, I_i = 0 \quad &\Rightarrow \quad I_i(t) = const \\ \dot{\phi}_i = H, \phi_i = \omega_i(I_j) \quad &\Rightarrow \quad \phi_i(t) = \phi_i(0) + \omega_i t \end{aligned} \tag{Α'.5}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν Hermitian πίνακες $L(q_i, p_i), M(q_i, p_i)$ διάστασης $n \times n$ τέτοιοι ώστε το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων να μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή

$$\dot{L} = i[L, M] \tag{Α'.6}$$

Αυτό το ζεύγος πινάκων ονομάζεται ζεύγος του Lax.Θεωρούμε στη συνέχεια τις ποσότητες

$$I_k = Tr(L^k), \quad k = 1, \dots n \tag{Α'.7}$$

για τις οποίες ισχύει εκ κατασκευής ότι

$$\dot{I}_k = kTr(L^{k-1}\dot{L}) = ikTr(L^k M - L^{k-1} M L) = 0, \quad k = 1 \dots n \tag{Α'.8}$$

Συνεπώς οι ποσότητες I_k είναι ολοκληρώματα της κίνησης του συστήματος. Αν αποδείξουμε επιπλέον ότι $\{I_i, I_j\} = 0$, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο κατά Liouville.Η εξέλιξη που περιγράφουν οι πίνακες L και M ονομάζεται ισοφασματική μεταβολή. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι αφού οι ποσότητες I_k είναι διατηρήσιμες, τότε και όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $L(t)$ θα παραμένουν χρονικά αναλλοίωτες. Έτσι στη μέθοδο του Lax η έννοια της ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος αντικαθίσταται από την έννοια της ισοφασματικής μεταβολής κατάλληλα επιλεγμένων πινάκων.

Α'.2 Η περίπτωση των διδιάστατων πεδιακών θεωριών

Αναζητώντας την κατάλληλη επέκταση του ζεύγους Lax για την πεδιακή γενίκευση του συστήματος καταλήγουμε στη μορφή

$$[\partial + A(z, \bar{z}), \bar{\partial} + B(z, \bar{z})] = 0 \tag{Α'.9}$$

όπου $A(z, \bar{z})$ και $B(z, \bar{z})$ είναι κατάλληλα επιλεγμένοι πίνακες. Εκφράσεις της μορφής (Α.9) ονομάζονται συνθήκες μηδενικής καμπυλότητας.

Κάθε τέτοια συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας μπορεί να θεωρηθεί ως η σχέση συμβατότητας ενός απλούστερου γραμμικού συστήματος πινάκων που είναι πρώτου βαθμού ως προς της παραγώγους χώρου - χρόνου. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε το σύστημα:

$$\partial G(z, \bar{z}) = GA \tag{Α'.10}$$

$$\bar{\partial} G(z, \bar{z}) = GB \tag{Α'.11}$$

Πράγματι βλέπουμε ότι για να είναι συμβατό το σύστημα θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση (Α.9). Λέμε τότε ότι έχει γίνει γραμμικοποίηση του αρχικού μη γραμμικού προβλήματος.

Α′.3 Μετασχηματισμοί Bäcklund και σολιτόνια

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση

$$P\Big(u(z,\bar{z})\Big) = 0 \tag{Α′.12}$$

και έστω ότι υπάρχει μία άλλη συνάρτηση $v(z,\bar{z})$, η οποία ικανοποιεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\partial u(z,\bar{z}) = f\Big(u(z,\bar{z}), v(z,\bar{z})\Big) \tag{Α′.13}$$

$$\bar{\partial} u(z,\bar{z}) = g\Big(u(z,\bar{z}), v(z,\bar{z})\Big) \tag{Α′.14}$$

Αν το παραπάνω σύστημα είναι συμβατό, δηλαδή $\bar{\partial} f = \partial g$ και η συνθήκη συμβατότητας είναι ισοδύναμη με την αρχική διαφορική εξίσωση (Α.12), τότε ο μετασχηματισμός $u(z,\bar{z}) \to v(z,\bar{z})$ ονομάζεται μετασχηματισμός Bäcklund.

Α′.3.1 Εξίσωση Liouville

Θεωρούμε την εξίσωση Liouville

$$\partial\bar{\partial} u(z,\bar{z}) = 2e^{u(z,\bar{z})} \tag{Α′.15}$$

και τον μετασχηματισμό Bäcklund

$$\begin{aligned} \partial u &= -\partial v - 2e^{\frac{1}{2}(u-v)} \\ \bar{\partial} u &= \bar{\partial} v - 2e^{\frac{1}{2}(u+v)} \end{aligned} \tag{Α′.16}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι συμβατό με την προϋπόθεση ότι

$$\partial\bar{\partial} v = 0 \tag{Α′.17}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση Laplace.Βλέπουμε λοιπόν ότι ο μετασχηματισμός Bäcklund συνδέει τις λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Liouville με αυτές της γραμμικής εξίσωσης Laplace.

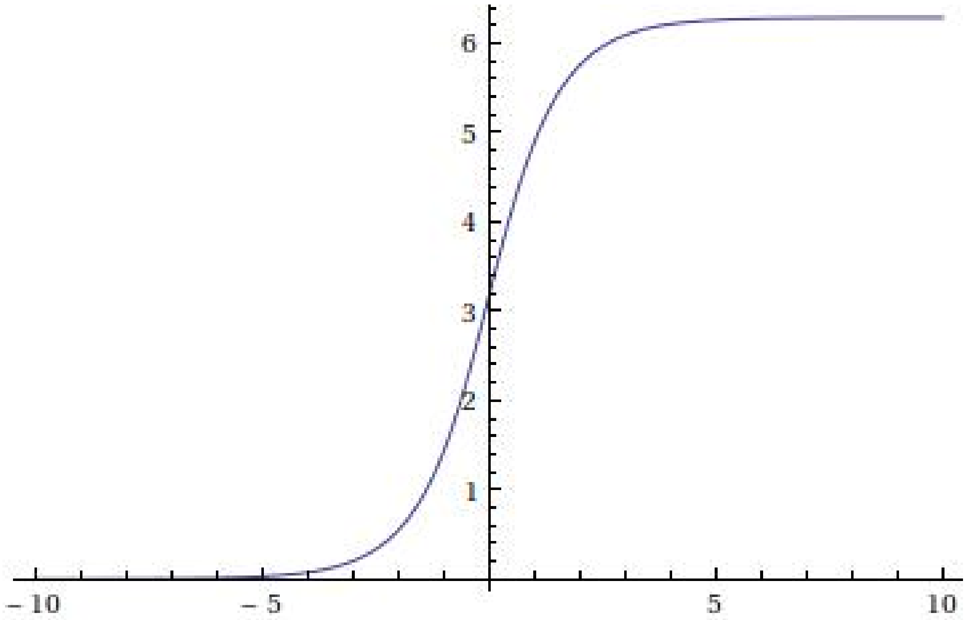
Α′.3.2 Εξίσωση sine-Gordon και σολιτόνια

Η εξίσωση sine-Gordon είναι μία ολοκληρώσιμη μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση, η οποία έχει τη μορφή:

$$\partial\bar{\partial} u = 4g^2 \sin u \tag{Α′.18}$$

Θεωρούμε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} \partial u &= \partial v + 4\alpha g \sin\frac{u+v}{2} \\ \bar{\partial} v &= -\bar{\partial} v + \frac{4g}{\alpha} \sin\frac{u-v}{2} \end{aligned} \tag{Α′.19}$$



Σχήμα Α′.1: $u(z,\bar{z})$ για $\alpha = 1$

για κάθε τιμή της παραμέτρου α. Εύκολα βλέπει κανείς ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι Bäcklund και ότι το σύστημα είναι συμβατό υπό την προϋπόθεση ότι

$$\partial\bar{\partial}v = 4g^2 \sin v \tag{Α′.20}$$

Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις u και v υπακούουν στην ίδια εξίσωση. Για αυτό το λόγο ο μετασχηματισμός Bäcklund δρά στο χώρο των λύσεων της εξίσωσης sine-Gordon. Για παράδειγμα ξεκινώντας από την τετριμμένη λύση $v = 0$ εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Bäcklund παίρνουμε τη λύση

$$u(z,\bar{z}) = 4\tan^{-1}\left(\beta e^{2g(\alpha z + \frac{1}{\alpha}\bar{z})}\right) \tag{Α′.21}$$

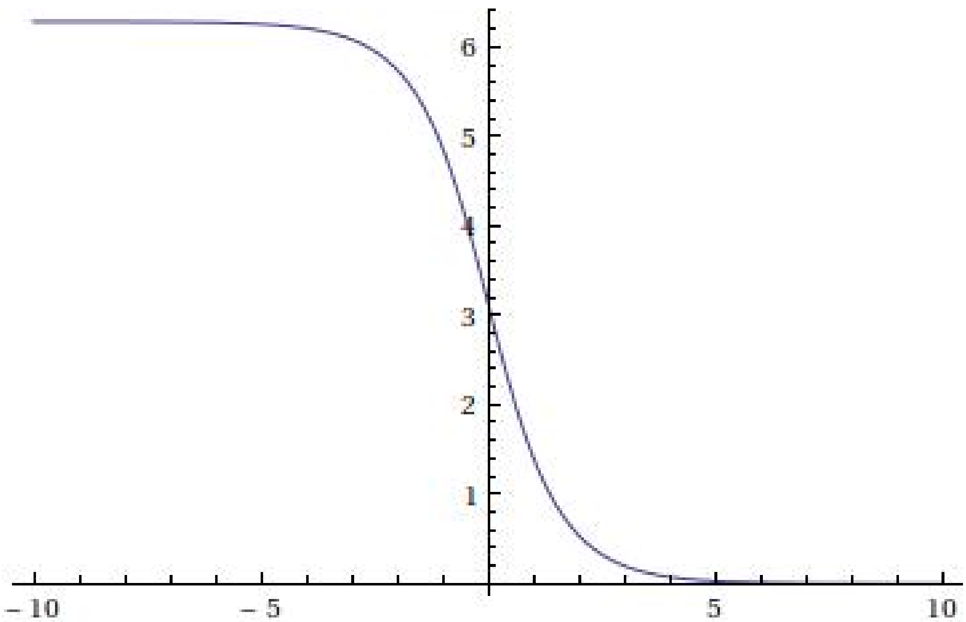
Για $\alpha = 1$ η λύση (A.21) περιγράφει μία στατική λύση.

Για $\alpha \neq 1$ η (A.21) περιγράφει μία χρονικά εξαρτώμενη λύση, η οποία προκύπτει με μετασχηματισμό Lorentz της στατικής λύσης. Περιγράφει δηλαδή μια διαταραχή της μορφής που φαίνεται στα σχήματα (A.1) και (A.2) και κινείται με σταθερή ταχύτητα

$$v = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \tag{Α′.22}$$

σε μονάδες που η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 1$.

Παρατηρούμε ότι αυτές οι στατικές λύσεις τείνουν ασυμπτοτικά προς την τετριμμένη λύση $u \to 0$ ή 2π για $x \to \pm\infty$. Επίσης περιγράφουν ένα μη-γραμμικό κύμα τοπικού χαρακτήρα, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $0 < v < 1$ χωρίς να αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά του με την πάροδο του χρόνου. Οι



Σχήμα Α΄.2: $u \to 2\pi - u$

λύσεις μη γραμμικών εξισώσεων με αυτά τα κύρια χαρακτηριστικά λέγονται σολιτόνια ή αντισολιτόνια, άναλογα με το αν είναι αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις του x αντίστοιχα,και μπορούν να θεωρηθούν σαν σωματίδια με εκτεταμένη δομή. Πιο συγκεκριμένα τα σολιτόνια είναι στατικές λύσεις που έχουν κυματικό χαρακτήρα και συνδέουν μεταξύ τους διαφορετικές θεμελιώδεις καταστάσεις σε θεωρίες πεδίου. Συνεπώς αναγκαία συνθήκη για να επιδέχεται ένα σύστημα σολιτονικές λύσεις είναι η ύπαρξη περισσότερων από μία θεμελιωδών καταστάσεων. Τέλος μία ποσότητα που διαχωρίζει μια λύση σολιτονική από μία άλλη είναι το τοπολογικό φορτίο

$$T = u(+\infty) - u(-\infty) \tag{Α΄.23}$$

Προφανώς αυτή η ποσότητα είναι μη μηδενική για σολιτονικές λύσεις, ενώ για όλες τις άλλες περιπτώσεις ισχύει $T = 0$.

Α΄.3.3 Λαγκρανζιανή περιγραφή και μιγαδικό μοντέλο sine-Gordon

Θεωρούμε στη συνέχεια την παρακάτω δράση

$$S = \int d^2\sigma \left(\partial_+ u \partial_- u + \frac{\mu^2}{2} \cos 2u \right) \tag{Α΄.24}$$

Θεωρούμε μεταβολές ως προς δu και έχουμε ότι

$$0 = \delta S \quad = \quad \int d^2\sigma \left[\partial_+ \delta u \partial_- u + \partial_+ u \partial_- \delta u - \mu^2 \sin 2u \delta u \right]$$

$$= \int d^2\sigma \left[-2\partial_+\partial_- u - \mu^2 \sin 2u\right] \delta u, \qquad \forall \delta u \qquad (\text{A}'.25)$$

όπου έχουμε αγνοήσει τους επιφανειακούς όρους. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η κλασική εξίσωση κίνησης της παραπάνω δράσης είναι η εξίσωση sine-Gordon .

$$\partial_+\partial_- u + \frac{\mu^2}{2}\sin 2u = 0 \qquad (\text{A}'.26)$$

Θεωρούμε στη συνέχεια την εξής γενίκευση για την δράση

$$S = \int d^2\sigma \left[\partial_+\phi\partial_-\phi + \tan^2\phi\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\cos 2\phi\right] \qquad (\text{A}'.27)$$

Το παραπάνω μοντέλο ονομάζεται μιγαδικό μοντέλο sine-Gordon. Από λογισμό μεταβολών ως προς $\delta\phi$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^2\sigma \left[\partial_+\delta\phi\partial_-\phi + \partial_+\phi\partial_-\delta\phi + 2\frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta\delta\phi - \mu^2\sin 2\phi\delta\phi\right] \\ &= \int d^2\sigma \left[-2\partial_+\partial_-\phi + 2\frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta - \mu^2\sin 2\phi\right]\delta\phi, \quad \forall\delta\phi\,(\text{A}'.28) \end{aligned}$$

άρα έχουμε την εξίσωση κίνησης

$$\partial_+\partial_-\phi - \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\partial_+\theta\partial_-\theta + \frac{\mu^2}{2}\sin 2\phi = 0 \qquad (\text{A}'.29)$$

Από λογισμό μεταβολών ως προς $\delta\theta$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^2\sigma \left[\tan^2\phi(\partial_+\delta\theta\partial_-\theta + \partial_+\theta\partial_-\delta\theta)\right] \\ &= \int d^2\sigma \left[-\partial_+(\tan^2\phi\partial_-\theta) - \partial_-(\tan^2\phi\partial_+\theta)\right]\delta\theta, \quad \forall\delta\theta(\text{A}'.30) \end{aligned}$$

άρα έχουμε και την δεύτερη εξίσωση κίνησης

$$\partial_+(\tan^2\phi\partial_-\theta) + \partial_-(\tan^2\phi\partial_+\theta) = 0 \qquad (\text{A}'.31)$$

Παράρτημα Β′

Εισαγωγή στην μποζονική θεωρία χορδών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε βασικές έννοιες τις μποζονικής θεωρίας χορδών. Παρ′ όλο που η μποζονική θεωρία χορδών δεν είναι ρεαλιστική, μιάς και δεν περιέχει φερμιόνια, είναι το πρώτο βήμα που έχει να κάνει κάποιος πριν μελετήσει τη θεωρία υπερχορδών, λόγω του ότι πολλές από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι κοινές για την μποζονική θεωρία χορδών και τη θεωρία υπερχορδών.

Β′.1 Η δράση της χορδής

Θεωρούμε μια χορδή η οποία διαδίδεται σε έναν επίπεδο D-διάστατο χωρόχρονο Minkowski . Καθώς κινείται η χορδή καλύπτει μία διδάστατη νοητή επιφάνεια, την κοσμική επιφάνεια της χορδής, κατ′ αναλογία με την κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου. Παραμετροποιούμε αυτήν την κοσμική επιφάνεια με τις συντατγμένες (τ, σ), οι οποίες είναι χρονική και χωρική αντίστοιχα. Αν η συντεταγμένη σ είναι περιοδική, τότε περιγράφει μία κλειστή χορδή. Η εμβάπτιση της κοσμικής επιφανείας της χορδής μέσα στον D-διάστατο χωρόχρονο περιγράφεται από συναρτήσεις της μορφής $X^\mu(\sigma, \tau)$. Eϊμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τη δράση για τη χορδή

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \qquad (\text{Β}'.1)$$

όπου

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \qquad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \qquad (\text{Β}'.2)$$

Η παραπάνω δράση ονομάζεται δράση Nambu-Gotto . Η φυσική σημασία της δράσης αυτής είναι ότι περιγράφει ουσιαστικά το εμβαδόν της κοσμικής επιφάνειας. Οι εξισώσεις κίνησης, που προκύπτουν από λογισμό μεταβολών, οδηγούν στην ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) της κοσμικής επιφάνειας, κατ′

αναλογία με την περίπτωση του σωματιδίου το οποίο κινείται πάνω σε μία γεωδεσιακή.
Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω δράση είναι ισοδύναμη με την εξής δράση

$$S_\sigma = -\frac{1}{2}T\int d^2\sigma\sqrt{-\det h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\cdot\partial_\beta X \tag{B′.3}$$

η οποία περιγράφει ουσιαστικά ένα σ-μοντέλο. Έχουμε εισάγει εδώ την auxiliary μετρική της κοσμικής επιφάνειας $h_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)$. Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι οι δράσεις (B.1) και (B.3) δίνουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης.

B′.2 Συμμετρίες και επιλογή βαθμίδας

Ας δούμε τις συμμετρίες της δράσης (B.3). Η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Poincare , οι οποίοι έχουν τη μορφή

$$\delta X^\mu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu, \quad \delta h^{\alpha\beta} = 0 \tag{B′.4}$$

Οι ποσότητες a^μ_ν αντιστοιχούν σε απειροστούς μετασχηματισμούς Lorentz , ενώ οι ποσότητες b^μ αντιστοιχούν σε χωροχρονικές μετατοπίσεις.
Η δράση (B.3) είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από επαναπαραμετροποιήσεις της κοσμικής επιφάνειας, δηλαδή κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής

$$\sigma^\alpha \to f^\alpha(\sigma) = \sigma'^\alpha, \quad h_{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial f^\delta}{\partial\sigma^\beta}h_{\gamma\delta}(\sigma') \tag{B′.5}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί λέγονται και διαφορομορφισμοί. Τέλος η δράση (B.3) είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Weyl .

$$h_{\alpha\beta} \to e^{\phi(\sigma,\tau)}h_{\alpha,\beta}, \qquad \delta X^\mu = 0 \tag{B′.6}$$

Το αναλλοίωτο της δράσης κάτω από μετασχηματισμούς Poincare αποτελεί μία ολική συμμετρία, ενώ το αναλλοίωτο κάτω από διαφορομορφισμούς και μετασχηματισμούς Weyl είναι τοπική συμμετρία. Μπορούμε να κάνουμε χρήση αυτής της τοπικής συμμετρίας και να επιλέξουμε κάποια βαθμίδα, στην οποία η μετρική $h_{\alpha\beta}$ θα έχει συγκεκριμένη μορφή.
Η μετρική $h_{\alpha\beta}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής και εν γένει θα έχει τη μορφή

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{pmatrix} \tag{B′.7}$$

Κάνοντας χρήση του αναλλοίωτου κάτω από διαφορομορφισμούς μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή 2 από τα 3 ανεξάρτητα στοιχεία της μετρικής. Επιπλέον κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Weyl μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή και του τρίτου στοιχείου της μετρικής. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε

$$h = \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B′.8}$$

Αυτή η επιλογή βαθμίδας ονομάζεται σύμμορφη βαθμίδα. Στη σύμμορφη βαθμίδα η δράση (Β.3) γράφεται

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma (\dot{X}^2 - X'^2) \tag{Β′.9}$$

Β′.3 Εξισώσεις κίνησης

Κάνοντας λογισμό μεταβολών στην (Β.9) παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0 \tag{Β′.10}$$

Για τον τανυστή ενέργειας-ορμής στην κοσμική επιφάνεια έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-\det h}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}} \\ &= \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X \end{aligned} \tag{Β′.11}$$

Στη σύμμορφη βαθμίδα έχουμε ότι

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X', \qquad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) \tag{Β′.12}$$

Παρατηρούμε ότι

$$TrT = \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0 \tag{Β′.13}$$

το οποίο οφείλεται στη συμμετρία Weyl . Επιπλέον υπάρχει ο περιορισμός $T_{\alpha\beta} = 0$. Αυτό φαίνεται αν πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης για την auxiliary μετρική $h_{\alpha\beta}$, οι οποίες προκύπτουν από λογισμό μεταβολών της δράσης (Β.3). Κατά την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης (Β.10) δεν αναφέραμε κάτι για τον επιφανειακό όρο, οποίος προκύπτει κατά το λογισμό μεταβολών και έχει τη μορφή

$$-T \int d\tau [X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}] = 0 \tag{Β′.14}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε τις διάφορες συνοριακές συνθήκες για τις οποίες μηδενίζεται αυτός ο όρος. Επιλέγουμε στο σημείο αυτό τη συντεταγμένη σ να παίρνει τιμές $0 \leq \sigma \leq \pi$

Αν έχουμε κλειστές χορδές τότε

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) \tag{Β′.15}$$

και η σχέση (Β.14) ικανοποιείται. Η επόμενη περίπτωση είναι να έχουμε ανοικτές χορδές με συνοριακές συνθήκες Neumann . Τότε

$$X'^\mu(0, \tau) = X'^\mu(\pi, \tau) = 0 \tag{Β′.16}$$

Τέλος υπάρχει και η περίπτωση ανοικτών χορδών με συνοριακές συνθήκες Dirichlet . Τότε τα άκρα των χορδών παραμένουν σταθερά και έχουμε ότι

$$\delta X^\mu|_{\sigma=\pi} = \delta X^\mu|_{\sigma=0} = 0 \tag{Β′.17}$$

Β΄.4 Λύσεις των εξισώσεων κίνησης για την περίπτωση κλειστών χορδών

Πριν γράψουμε τη λύση των εξισώσεων κίνησης (Β.10) θα επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα σε συντεταγμένες κώνου φωτός

$$\sigma^{\pm} = \tau \pm \sigma \tag{Β΄.18}$$

με

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \tag{Β΄.19}$$

και

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{Β΄.20}$$

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0 \tag{Β΄.21}$$

ενώ για τον τανυστή ενέργειας-ορμής έχουμε

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0 \tag{Β΄.22}$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0 \tag{Β΄.23}$$

και

$$T_{+-} = T_{-+} = 0 \tag{Β΄.24}$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στην επίλυση της κυματική εξίσωσης (Β.10). Η πιο γενική λύση της εξίσωσης (Β.10) είναι

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_R^\mu(\tau-\sigma) + X_L^\mu(\tau+\sigma) \tag{Β΄.25}$$

όπου X_R^μ και X_L^μ αναφέρονται σε διαταραχές της χορδής που διαδίδονται προς τα δεξιά και προς τα αριστερά αντίστοιχα. Στην περίπτωση των κλειστών χορδών η πιο γενική λύση που μπορούμε να γράψουμε είναι

$$X_R^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{Β΄.26}$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}l_s^2 p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}l_s \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \tag{Β΄.27}$$

όπου x^μ είναι το κέντρο μάζας της χορδής, p^μ είναι η ολική ορμή της χορδής και l_s η κλίμακα μήκους χορδής, η οποία συνδέεται με την τάση T της χορδής με τις σχέσεις

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \qquad \frac{1}{2}l_s^2 = \alpha' \tag{Β΄.28}$$

Αναφέρουμε εδώ ότι από την απαίτηση να είναι πραγματικές οι ποσότητες X_R^μ, X_L^μ έχουμε ότι και οι ποσότητες x^μ, p^μ θα είναι πραγματικές, καθώς και τις παρακάτω σχέσεις

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*, \qquad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^* \tag{Β΄.29}$$

Β′.5 Κανονική κβάντωση

Για να προχωρήσουμε σε κανονική κβάντωση της θεωρίας μας, χρειαζεται να εισάγουμε την έννοια της συζυγούς ορμής P^μ για την μεταβλητή X^μ. Σύμφωνα με την κλασική μηχανική έχουμε ότι

$$P^\mu(\sigma,\tau) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = T\dot{X}^\mu \tag{Β′.30}$$

και κατά τα γνωστά έχουμε τις παρακάτω αγκύλες Poisson

$$\{P^\mu(\sigma,\tau), P^\nu(\sigma',\tau)\} = \{X^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)\} = 0 \tag{Β′.31}$$

και

$$\{P^\mu(\sigma,\tau), X^\nu(\sigma',\tau)\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{Β′.32}$$

ενώ για τους συντελεστές Fourier των λύσεων της κυματικής εξίσωσης έχουμε τις παρακάτω αγκύλες Poisson

$$\{\alpha^\mu_m, \alpha^\mu_n\} = \{\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n\} = im\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \tag{Β′.33}$$

και

$$\{\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n\} = 0 \tag{Β′.34}$$

Για να κβαντίσουμε τη θεωρία μας θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή 'συνταγή', σύμφωνα με την οποία αντικαθιστούμε τις αγκύλες Poisson με μεταθέτες

$$\{\ldots\} \to i[\ldots] \tag{Β′.35}$$

και θα αναβαθμίσουμε σε τελεστές τους συντελεστές Fourier $\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n$. Παίρνουμε τότε τη σχέση

$$[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = [\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}, \quad [\alpha^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n] = 0 \tag{Β′.36}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια τους τελεστές

$$a^\mu_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^\mu_m \quad \textit{και} \quad a^{\mu\,\dagger}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^\mu_{-m} \quad \textit{για} \quad m>0 \tag{Β′.37}$$

Οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν την άλγεβρα των γνωστών τελεστών δημιουργίας-καταστροφής του κβαντομηχανικού αρμονικού ταλαντωτή

$$[a^\mu_m, a^{\nu\dagger}_n] = [\tilde{a}^\mu_m, \tilde{a}^{\nu\dagger}_n] = \eta^{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}, \quad m,n>0 \tag{Β′.38}$$

Αν υποθέσουμε ότι $|0>$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση, η οποία ικανοποιεί εξ ορισμού τη σχέση

$$a^\mu_m|0>=0 \tag{Β′.39}$$

το φάσμα κατασκευάζεται αν δράσουμε με τελεστές δημιουργίας πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση. Επιπλέον μπορούμε να βρούμε την ορμή k^μ που έχει μία κατάσταση $|\phi>$

$$|\phi>= \alpha_{m_1}^{\mu_1}{}^{\dagger}\alpha_{m_2}^{\mu_2}{}^{\dagger}\ldots\alpha_{m_n}^{\mu_n}{}^{\dagger}|0;k> \tag{Β΄.40}$$

η οποία θα είναι η ιδιοτιμή του τελεστή της ορμής p^μ

$$p^\mu|\phi>= k^\mu|\phi> \tag{Β΄.41}$$

Παρουσιάζεται όμως ένα πρόβλημα. Υπάρχουν καταστάσεις με αρνητική norm . Αν θεωρήσουμε την κατάσταση

$$\alpha_m^0{}^{\dagger}|0> \tag{Β΄.42}$$

αυτή έχει norm

$$<0|\alpha_m^0\alpha_m^0{}^{\dagger}|0>= -1 \tag{Β΄.43}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση της σχέσης (B.38) και έχουμε υποθέσει $<0|0>=1$. Ευτυχώς υπάρχει τρόπος να γλιτώσουμε από αυτές τις καταστάσεις αρνητικής norm.

Παράρτημα Γ′

Διάταξη κατά διαδρομές

Η έννοια της διάταξης κατά διαδρομές υπεισέρχεται αναπόφευκτα στον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ενός ολοκληρώματος με μη αβελιανά στοιχεία, δηλαδή ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$e^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy} \tag{Γ′.1}$$

όπου $A(y)$ παίρνει τιμές σε μία Lie άλγεβρα. Η ύψωση του ολοκληρώματος κατά διατεταγμένες διαδρομές ορίζεται ως εξής

$$Pe^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_1)A(x_2)\ldots A(x_n) \tag{Γ′.2}$$

όπου $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x$. Όταν τα $A(x_i)$ είναι στοιχεία μιας αβελιανής άλγεβρας, τότε η διάταξη δεν έχει σημασία και ο ορισμός (Γ.2) οδηγεί στη συνήθη εκθετική συνάρτηση. Επίσης έχουμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητες

$$\frac{d}{dx}\left(Pe^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy}\right) = \left(Pe^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy}\right) A(x) \tag{Γ′.3}$$

$$\left(Pe^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy}\right)^{-1} = Pe^{-\int_{x_0}^{x} A(y)dy} \tag{Γ′.4}$$

Η διάταξη των τελεστών στη (Γ.3) γίνεται με αύξοντα τρόπο προς τα δεξιά ($x_n > \ldots > x_1$) και για αυτό στη σχέση (Γ.2) το $A(x)$ βρίσκεται δεξιά. Αν είχαμε ορίσει αντίστροφα τη διάταξη στη σειρά (Γ.2), τότε το $A(x)$ θα εμφανιζόταν αριστερά. Βάζοντας ενδεικτικά βέλη για να ξεχωρίσουμε τις δύο διατάξεις έχουμε ότι

$$\overrightarrow{P} e^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy} = \left(\overleftarrow{P} e^{\int_{x_0}^{x} A(y)dy}\right)^{-1} = \overleftarrow{P} e^{-\int_{x_0}^{x} A(y)dy} \tag{Γ′.5}$$

Τα διατεταγμένα ολοκληρώματα εμφανίζονται στα ολοκληρώσιμα συστήματα λόγω της γραμμικοποίησης (Α.10), (Α.11) που θεωρήσαμε. Από την ιδιότητα (Γ.3) έπεται ότι ο πίνακας G που γραμμικοποιεί ένα πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως $Pe^{\{\cdots\}}$ του αντίστοιχου ζεύγους Lax.

Βιβλιογραφία

[1] Ιωάννης Μπάκας: Στοιχεία Ολοκληρώσιμων Συστημάτων, Πάτρα 1997

[2] M.Grigoriev and A.A. Tseytlin: Pohlmeyer reduction of $AdS_5 \times S^5$ sigma model, arxiv:hep-th/0711.0155v4

[3] Philippe Di Francesco, Pierre Mathieu and David Senechal: Conformal Field Theory, Springer 1997

[4] Ioannis Bakas, Q-Han Park and Hyun-Jong Shin: Lagrangian Formulation of Symmetric Space sine-Gordon Models, arxiv:hep-th/9512030v1

[5] Ioannis Bakas and Konstantinos Sfetsos: Universal Aspects of String Propagation on Curved Backgrounds, arxiv:hep-th/9604195v2

[6] Katrin Becker, Melanie Becker and John H. Schwarz: String Theory and M-Theory A Modern Introduction, Cambridge 2007

[7] Timothy J. Hollowod and J. Luis Miramontes: Magnons, their Solitonic Avatars and the Pohlmeyer Reduction, arxiv:hep-th/0902.2405v1

[8] I. Bars and K. Sfetsos: Generalised Duality and Singular Strings in Higher Dimensions, arxiv:hep-th/9110054

[9] I. Bars and K. Sfetsos: A Superstring Theory in Four Curved Spacetime Dimensions, arxiv:hep-th/9111040

[10] I.Bars and K. Sfetsos: Global Analysis of New Gravitational Singularities in String and Particle Theories, arxiv:hep-th/9205037

[11] B. Barbashov, V. Nesterenko and A. Chervyakov, Theor. Math. Phys. 59 (1984) 458

[12] K. Bardakci, M. Crescimanno and E. Rabinovici, Nucl. Phys. B344 (1990) 344

[13] K. Bardakci, M. Crescimanno and S.A. Hotes, Nucl. Phys. B349 (1991) 439

[14] J. Luis Miramontes: Pohlmeyer Reduction Revisited, arxiv:hep-th/0808.3365v3

[15] J. P. Harnad, Y. Saint Aubin and S. Shnider, Commun. Math. Phys. 92 (1984) 329

[16] Βασίλειος Δ. Καρανικόλας: Ολοκληρωσιμότητα στα πλαίσια της θεωρίας χορδών, Πανεπιστήμιο Πατρών 2009