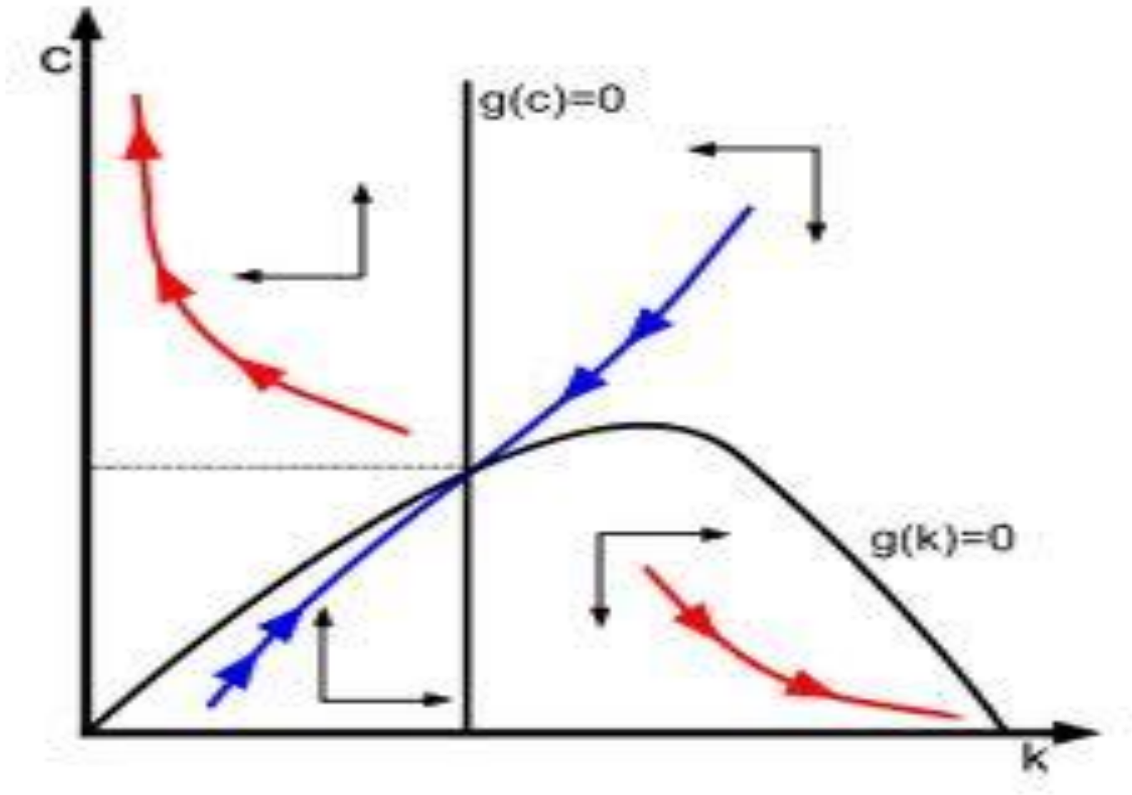
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Μεταπτυχιακό

Μαθηματική Προτυποποίηση στις Σύγχρονες Τεχνολογίες και στην Οικονομία

Μελέτη του μοντέλου ανάπτυξης Ramsey – Cass – Koopmans – Αριθμητική επίλυση.



<u>ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ</u>

Α. ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΣ
Λ. ΚΩΣΤΕΛΕΤΟΥ
Γ. ΛΕΒΕΝΤΙΔΗΣ

ΒΥΡΩΝΑΣ Κ. ΔΙΚΗΣ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

Πίνακας περιεχομένων

0. Εισαγωγή

Στην ανάλυση του μονοτομεακού υποδείγματος «σίτου» (corn model) του Solow υποθέτουμε ότι το ποσοστό αποταμίευσης είναι εξωγενώς δεδομένο. Σε ένα όμως αμιγώς νεοκλασικό υπόδειγμα το ποσοστό αποταμίευσης πρέπει να προκύπτει από τις αποφάσεις των οικονομικών δρώντων. Ο λόγος που ο Solow το εξέλαβε ως δεδομένο ήταν κυρίως ότι ήθελε να κάνει κριτική στο υπόδειγμα Harrod καταδεικνύοντας ότι τα αποτελέσματά του τελευταίου οφείλονται – όπως νόμιζε – στο γεγονός ότι ο Harrod υπέθετε έναν σταθερό λόγο κεφαλαίου-προϊόντος. Ως εκ τούτου διατήρησε τις υπόλοιπες υποθέσεις του Harrod σταθερές και εισήγαγε την υπόθεση της νεοκλασικής συνάρτησης παραγωγής.

Το υπόδειγμα που θα εξετάσουμε σε αυτήν την διάλεξη εισάγει την έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας του νοικοκυριού και εξάγει ενδογενώς το ποσοστό αποταμίευσης.

Στην μορφή που θα το αναπτύξουμε, το υπόδειγμα χρονολογείται από το 1965 με δύο άρθρα των David Cass και Tjalling C. Koopmans. Προηγήθηκε όμως το 1928 ένα εντυπωσιακό άρθρο στο επιστημονικό περιοδικό *Economic Journal,* εξαιρετικά πρωτοποριακό για την εποχή του, από τον νεαρό Frank Ramsey23 με τίτλο «Μια μαθηματική θεωρία της αποταμίευσης», το οποίο διαφέρει αρκετά από αυτό που θα εξετάσουμε εδώ.

Το υπόδειγμα που θα εξετάσουμε εδώ διαφέρει από το υπόδειγμα Solow στο ότι η μακροοικονομική ισορροπία προκύπτει από αποφάσεις που παίρνουν οι οικονομικοί δρώντες (agents) – επιχειρήσεις και νοικοκυριά – σε μικροοικονομικό επίπεδο. Έτσι, το ποσοστό αποταμίευσης δεν δίνεται εξωγενώς, αλλά προκύπτει από την οικονομική απόφαση των νοικοκυριών που μεγιστοποιούν την χρησιμότητά τους με δεδομένο τον εισοδηματικό περιορισμό. Βρισκόμαστε σε έναν τέλειο νεοκλασικό κόσμο. Υποθέτουμε πάλι, όπως και στο υπόδειγμα Solow ότι η εργασία και η «αποδοτικότητα της εργασίας» μεγεθύνονται με σταθερό εξωγενώς δεδομένο ρυθμό.

Ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, όλες ίδιες μεταξύ τους, προσλαμβάνουν εργάτες μισθώνουν κεφάλαιο και πωλούν προϊόν σε αγορές συντελεστών παραγωγής και προϊόντος σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού.

Ένας συγκεκριμένος αριθμός νοικοκυριών, ίδια μεταξύ τους, κατέχουν όλο το κεφάλαιο της οικονομίας, παρέχουν όλη την εργασία, καταναλώνουν και αποταμιεύουν. Η οικονομία λειτουργεί στο συναθροιστικό επίπεδο και είναι μονοτομεακή. Το παραγόμενο προϊόν και το κεφάλαιο είναι το ίδιο.

Ένα χαρακτηριστικό του υποδείγματος είναι ότι **ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος** (infinite time horizon models) και η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας γίνεται για όλη την (άπειρη) ζωή (lifetime) των νοικοκυριών. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με τις παραδοχές του υποδείγματος.

1.2. Το υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans

1.2.1. Επιχειρήσεις

Υποθέτουμε μία ανταγωνιστική οικονομία μ' ένα μεγάλο αριθμό επιχειρήσεων, οι οποίες είναι όλες ίδιες μεταξύ τους. Η συνάρτηση παραγωγής σε κάθε μία από αυτές τις επιχειρήσεις είναι $\boxed{\mathbf{Y \sim F(K,\ AL)}}$, Οι επιχειρήσεις προσλαμβάνουν **εργασία (L)** και ενοικιάζουν **κεφάλαιο (K)** από τα νοικοκυριά σε ανταγωνιστικές αγορές συντελεστών παραγωγής και παράγουν ένα ομογενές **προϊόν (Y),** το οποίο πωλούν σε μία επίσης ανταγωνιστική αγορά προϊόντος, με σκοπό τη μεγιστοποίηση των κερδών τους. Τα κέρδη αυτά, αν υπάρχουν, διανέμονται στους ιδιοκτήτες των επιχειρήσεων, οι οποίοι ταυτόχρονα αποτελούν και νοικοκυριά. Όπως και στο Κεφάλαιο 1, το επίπεδο της τεχνολογίας (A) είναι μία εξωγενής μεταβλητή, η οποία αυξάνεται μ' ένα σταθερό ρυθμό g.

Εφόσον η οικονομία είναι ανταγωνιστική, οι συντελεστές παραγωγής αμείβονται με τα οριακά τους προϊόντα. Ας εξετάσουμε την αμοιβή του κεφαλαίου. Η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου (το πραγματικό επιτόκιο, r) είναι ίση με το οριακό προϊόν του κεφαλαίου (MPK) μείον το ρυθμό αποσβέσεως, **δ**. Και επειδή **MPK = f'(k**), έπεται ότι η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου είναι $\boxed{\mathbf{r = f'(k) - \delta}}$. Χάριν απλότητας, θα υποθέσουμε ότι δ = 0, οπότε

$$\boxed{\mathbf{r = f(k)}} \qquad (1.1)$$

Η αμοιβή της εργασίας είναι ο **πραγματικός μισθός (W),** οπότε W = MPL.

Γνωρίζουμε ότι $\boxed{\mathbf{MPL = Af(k) - f'(k)x(K/L) = A[f(k) - kf'(k)]}}$, οπότε

$$\boxed{\mathbf{W = A[f(k) - kf'(k)]}} \qquad (1.2)$$

Το W συμβολίζει την αμοιβή μίας μονάδας εργασίας. Αν συμβολίσουμε με μικρό w την αμοιβή μίας μονάδας αποτελεσματικής εργασίας, δηλαδή $\boxed{\mathbf{w=W/A}}$, τότε από την Εξ. (1.2) παίρνουμε

$$\boxed{\mathbf{W\ =\ f(k) - kf(k)}} \qquad (1.3)$$

Ας σημειωθεί ότι, υπό συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και σταθερών αποδόσεων κλίμακας, τα κέρδη των επιχειρήσεων είναι μηδέν. Διότι, υπ' αυτές τις συνθήκες, αν για μία επιχείρηση υπάρξουν ποτέ θετικά κέρδη, τότε αυτά θα τείνουν να γίνουν απεριόριστα μεγάλα και δεν θα υπάρχει ένα παραγωγικό σχέδιο μεγιστοποιήσεως των κερδών. Δηλαδή, αν για μία επιχείρηση i ισχύει ότι $\boxed{\mathbf{\pi_i =\ pF(K_i,\ AL_i) - rK_i - WL_i > 0}}$, όπου **$\pi_i$ = κέρδη** και **p=τιμή του προϊόντος**, τότε, εξ αιτίας των σταθερών αποδόσεων κλίμακας, για **λ>1**, θα ισχύει και ότι

$$pF(\lambda K_i, A\lambda L_i) - r\lambda K_i, - W\lambda L_i = p\lambda F(\lambda K_i, AL_i) - r\lambda Ki - W\lambda L_i = \\ =\lambda[pF(K\, AL_i) - rK_i - WL_i] = \lambda\pi_i > \pi_i \quad (1.4)$$

Ωστόσο, τα μεγάλα κέρδη της επιχειρήσεως ί δεν θα μείνουν απαρατήρητα. Θα δημιουργηθούν νέες επιχειρήσεις, εξαφανίζοντας έτσι κάθε ευκαιρία κέρδους.

1.2.2 Νοικοκυριά

1.2.2.1 Η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας του νοικοκυριού

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας μεγάλος και σταθερός **αριθμός (Η) νοικοκυριών**, τα οποία είναι όλα ίδια μεταξύ τους και τα οποία απαρτίζουν τον πληθυσμό. Εφόσον τα Η αυτά νοικοκυριά είναι όλα ίδια μεταξύ τους, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά ενός μόνον «αντιπροσωπευτικού» νοικοκυριού. Αν συμβολίσουμε με **L το μέγεθος του πληθυσμού**, τότε ο αριθμός των μελών του νοικοκυριού είναι L/H. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός L/H αυξάνει με ρυθμό n, που σημαίνει ότι το L αυξάνει με ρυθμό n, εφόσον το Η είναι σταθερό.
Τα νοικοκυριά ενοικιάζουν στις επιχειρήσεις το κεφάλαιο που κατέχουν. Αν το **αρχικό απόθεμα κεφαλαίου** στην οικονομία ως σύνολο είναι **K(0)** , τότε το αρχικό κεφάλαιο κατά νοικοκυριό είναι K(0)/H. Κάθε μέλος του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού προσφέρει μία μονάδα εργασίας σε κάθε χρονική στιγμή t, η **αμοιβή της οποίας είναι W(t**) (Υποθέτουμε συνεχή χρόνο). Το εισόδημα που αποκτά το κάθε νοικοκυριό από την εργασία, το κεφάλαιο και τα κέρδη (τα οποία, όπως προαναφέρθηκε, αναμένονται να είναι μηδενικά) είτε το καταναλώνει είτε το αποταμιεύει, σε μία προσπάθεια να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση χρησιμότητάς του.

Η τελευταία δεν αναφέρεται μόνο στην παρούσα χρονική στιγμή (t), αλλά και στο μέλλον, εφόσον το νοικοκυριό ζει για πάντα και σχεδιάζει για ένα άπειρο χρονικό ορίζοντα. Αυτή η συμπεριφορά θα μπορούσε να ερμηνευθεί και ως συμπεριφορά ενός νοικοκυριού-δυναστείας, όπου το νοικοκυριό δεν ζει για πάντα, αλλά νοιάζεται και για τους απογόνους του, στους οποίους μεταβιβάζει τον πλούτο του όταν πεθαίνει. 'Εστω **u(C(t)) η στιγμιαία συνάρτηση** χρησιμότητας ενός μέλους του νοικοκυριού, όπου **C(t) είναι η κατανάλωση** αυτού του ατόμου κατά τη στιγμή t. Όπως προαναφέρθηκε, το κάθε νοικοκυριό αριθμεί L(t)/H μέλη, οπότε η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας (instantaneous utility function) ή συνάρτηση χρησιμότητας μίας περιόδου (one-period utility function) ολοκλήρου του νοικοκυριού θα είναι u(C(t))L(t)/H. Συνεπώς, εάν το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό προεξοφλεί μελλοντικές μονάδες χρησιμότητας με ρυθμό p > O, τότε η συνάρτηση χρησιμότητάς του για ολόκληρο το χρονικό ορίζοντα, την οποία ας ονομάσουμε **συνάρτηση χρησιμότητας διάρκειας ζωής** (lifetime utility function) ή **συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας** (intertemporal utility function), θα είναι

$$\mathbf{U} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t}\, u\big(C(t)\big)\frac{L(t)}{H}\, dt \quad (1.5)$$

Η παράμετρος ρ > Ο στην Εξ. (2.5) είναι ο **υποκειμενικός ρυθμός προεξοφλήσεως** (subjective discount rate) μίας προσδοκώμενης μελλοντικής αξίας. Αντανακλά την προτίμηση ενός ατόμου για κατανάλωση στο παρόν παρά στο μέλλον, γι αυτό και ονομάζεται και ρυθμός διαχρονικής προτιμήσεως (rate of time preference). Όσο μεγαλύτερο είναι το p ενός ατόμου τόσο πιο ανυπόμονο (impatient) είναι αυτό το άτομο για κατανάλωση στο παρόν παρά στο μέλλον. Είναι ο ρυθμός με τον οποίο μία μελλοντική αξία μετατρέπεται σε παρούσα αξία (present value, PV). Για παράδειγμα, σε διακριτό χρόνο, αν ένα άτομο έχει ρ = 0,10, τότε γι αυτό το άτομο η παρούσα αξία €1000 που αναμένει να λάβει σ' ένα έτος από σήμερα είναι PV = €1000/(1 + 0,10) = €909,09. Αν ρ = 0,20, τότε η σημερινή αξία €1000 που αναμένονται να ληφθούν σ' ένα έτος από σήμερα είναι μόνο €833,33 =€1000/(1 + 0,20). Σ' αυτό το παράδειγμα, το κλάσμα 1/(1 + ρ) ονομάζεται παράγων προεξοφλήσεως (discount factor), διότι μετατρέπει μία μονάδα εισοδήματος που θ' αποκτηθεί σ' ένα έτος από σήμερα σε μία ισοδύναμη μονάδα σημερινού εισοδήματος. Σε συνεχή χρόνο, κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου από 0 μέχρι t, ο παράγων προεξοφλήσεως είναι $e^{-\rho t}$. Αν ρ = 0, τότε η σημερινή και η μελλοντική κατανάλωση έχουν την ίδια αξία. Εφόσον, όμως, υποθέτουμε ότι ρ > 0 από την (1.5) είναι φανερό ότι οι μελλοντικές μονάδες χρησιμότητας συμβάλλουν λιγότερο στη συνολική χρησιμότητα, και μάλιστα τόσο λιγότερο όσο πιο απομακρυσμένη είναι η μελλοντική περίοδος από σήμερα. Αν αντί της υποθέσεως ότι το νοικοκυριό ζει για πάντα υιοθετήσουμε την υπόθεση του νοικοκυριού - δυναστείας, την οποία προαναφέραμε, τότε η ερμηνεία του ρ > 0 είναι ότι η χρησιμότητα των μελλοντικών γενεών έχει μικρότερη σημασία από αυτή του σημερινού νοικοκυριού. Αυτό υπονοεί μία εγωιστική συμπεριφορά του σημερινού νοικοκυριού έναντι των απογόνων του.

Ας σημειωθεί ότι, σε διακριτό χρόνο, η αντίστοιχη της (1.5) συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας του νοικοκυριού γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{U = \sum_{t=0}^{\infty}(1+\rho)^{-t}\, u(C_t)\frac{L_i}{H}} \qquad \mathbf{1.6}$$

Υποθέτουμε ότι η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας (σε συνεχή χρόνο) έχει την μορφή

$$\mathbf{u\big(C(t)\big) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}} \quad \boldsymbol{\theta>0} \qquad \mathbf{1.7}$$

Για τη συνάρτηση χρησιμότητας (1.7), ισχύει ότι **$u' = C(t)^{-\theta}$ >** 0 και **$u'' = -\theta C(t)^{-\theta-1}$ < 0**. Το γεγονός ότι **u" > 0** σημαίνει ότι το άτομο θα θέλει να εξομαλύνει την κατανάλωσή του διαχρονικά. Θα προσπαθεί, δηλαδή, ν' αποφεύγει μία διαχρονική κατανομή καταναλώσεων που περιέχει πολύ υψηλά, αλλά και πολύ χαμηλά επίπεδα καταναλώσεως. Διότι, εφόσον u'' > 0 , έπεται ότι για μεγάλες τιμές του C, η οριακή χρησιμότητα, u', είναι χαμηλή ενώ, για μικρές τιμές του C, η u' είναι υψηλή. Συνεπώς, όταν το επίπεδο καταναλώσεως είναι σχετικά χαμηλό, το άτομο δεν θα είναι πρόθυμο να το μειώσει ακόμη περισσότερο, προκειμένου ν' αποταμιεύσει και ν' απολαύσει έτσι υψηλότερα επίπεδα καταναλώσεως σε μία μελλοντική χρονική περίοδο όπου το C θα είναι σχετικά υψηλό. Διότι τότε η u' θα είναι χαμηλή (λόγω του μεγαλυτέρου C) και άρα η επιπλέον κατανάλωση που θα υπάρχει (εξ αιτίας της αποταμιεύσεως που προηγήθηκε) δεν θ' αυξήσει κατά πολύ τη χρησιμότητά του. Δηλαδή, η χρησιμότητα διάρκειας ζωής (U) είναι χαμηλότερη όταν η διαχρονική κατανομή καταναλώσεων περιέχει πολύ άνισα επίπεδα του C απ' ότι είναι όταν η κατανομή αυτή περιέχει λιγότερο άνισα επίπεδα του C.

Η συναρτησιακή μορφή (1.7) μας χρειάζεται για να βρούμε σύγκλιση σε τροχιά ισόρροπου μεγεθύνσεως Η μορφή αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση χρησιμότητας CRRA (Constant Relative Risk Aversion utility function), επειδή γι αυτή τη συνάρτηση ο συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου (coefficient of relative risk aversion), ο οποίος ορίζεται ως

$$\mathbf{r_R} = -\boldsymbol{C u''/u'} \qquad (1.8)$$

είναι σταθερός και ίσος με θ. Συνεπώς, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του θ τόσο πιο επιφυλακτικός είναι ο καταναλωτής - εργαζόμενος στην ανάληψη οικονομικών κινδύνων. Επειδή, όμως, εδώ υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα, δεν μας ενδιαφέρει τόσο αυτή η ερμηνεία του θ. Εδώ, η τιμή του θ μας ενδιαφέρει κυρίως επειδή προσδιορίζει και ένα άλλο χρήσιμο μέγεθος, την **ελαστικότητα διαχρονικής υποκαταστάσεως στην κατανάλωση** (elasticity of intertemporal substitution consumption), την οποία ας συμβολίσουμε με **σ**. Η παράμετρος σ ορίζεται ευκολότερα σε διακριτό χρόνο, δηλαδή όταν η συνάρτηση χρησιμότητας διάρκειας ζωής είναι η (1.6). Σ' αυτή την περίπτωση, το σ ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{dln}\left(\frac{\mathbf{C_{t+1}}}{\mathbf{C_t}}\right)}{\mathbf{dln}\left(\mathbf{MRS}_{\mathbf{c_{t+1}}}^{\mathbf{C_t}}\right)} \qquad \mathbf{(1.9)}$$

Όπου

$$\mathbf{MRS}_{\mathbf{c_{t+1}}}^{\mathbf{C_t}} = \frac{\partial U/\partial C_t}{\partial U/\partial C_{t+1}}$$

Είναι ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ C_t και C_{t+1} ο οποίος μετρά το οριακό όφελος που προκύπτει από την κατανάλωση μίας επιπλέον μονάδας στην περίοδο t. Σύμφωνα με τον ορισμό (1.9), το σ είναι η ποσοστιαία μεταβολή του λόγου C_{t+1}/C_t προς την ποσοστιαία μεταβολή του $\mathbf{MRS}_{\mathbf{c_{t+1}}}^{\mathbf{C_t}}$

,.,

Παράδειγμα. Όταν η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας έχει τη μορφή CRRA, δηλαδή $\mathbf{u}(\mathbf{C}(\mathbf{t})) = \frac{\mathbf{C}(\mathbf{t})^{\mathbf{1-\theta}}}{\mathbf{1-\theta}}$ τότε η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας (1.6) γράφεται ως

$$\boldsymbol{U} = \sum_{t=0}^{\infty} (\mathbf{1}+\boldsymbol{\rho})^{-t} \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L_i}{H} \qquad \mathbf{(1.10)}$$

Οπότε έχουμε

$$\mathrm{MRS}_{\mathrm{c_{t+1}}}^{\mathrm{C_t}} = \frac{\partial U/\partial C_t}{\partial U/\partial C_{t+1}} = \frac{(1+\rho)^{-1}C_t^{-\theta}L_t/H}{(1+\rho)^{-(t+1)}C_{t+1}^{-\theta}L_{t+1}/H} = (1+\rho)\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\theta}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{-1} = \frac{(1+\rho)}{(1+n)}\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\theta}$$

(1.11)

$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + \frac{L_{t+1}}{L_t} - 1 = 1 + \frac{(L_{t+1}-L_t)}{L_t}$=(1+n)

Εφόσον η αναλογική αύξηση του L είναι n. Από την (1.11) έχουμε

$$\ln(\mathrm{MRS}_{\mathrm{c_{t+1}}}^{\mathrm{C_t}}) = \ln(1+\rho) - \ln(1+n) + \theta ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{dln}(\mathrm{MRS}_{\mathrm{c_{t+1}}}^{\mathrm{C_t}}) = \theta dln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)$$

Εφόσον τα ρ και n είναι σταθερά. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (1.9) προκύπτει

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{dln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)}{\theta dln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)} = \frac{1}{r_R} = \frac{1}{\theta}} \qquad \textbf{(1.12)}$$

Δηλαδή, στην περίπτωση που η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας έχει τη μορφή CRRA, η ελαστικότητα διαχρονικής υποκαταστάσεως (σ) ισούται με το αντίστροφο του συντελεστή σχετικής αποστροφής κινδύνου (r_R),

Αυτό σημαίνει ότι, στο συγκεκριμένο υπόδειγμα που έχουμε υιοθετήσει, όσο πιο επιφυλακτικό είναι ένα νοικοκυριό στην ανάληψη οικονομικών κινδύνων (δηλαδή, όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του r_R = θ) τόσο πιο απρόθυμο είναι να υποκαταστήσει τρέχουσα με μελλοντική κατανάλωση (δηλαδή, τόσο πιο μικρή είναι η τιμή του σ = 1/θ). Όπως παρατηρεί ο Hall (1988, σ. 343), η στενή αυτή σχέση μεταξύ του r_R και του σ αποτελεί μειονέκτημα του υποδείγματος, διότι δεν είναι σύμφωνη με τα εμπειρικά ευρήματα. Συγκεκριμένα, έχει βρεθεί ότι η τιμή του σ είναι κοντά στο μηδέν. Αν στην πραγματικότητα υπήρχε η παραπάνω στενή σχέση, τότε η τιμή του r_R θα έπρεπε να τείνει στο άπειρο, δηλαδή ουδείς θα ήταν πρόθυμος ν' αναλάβει οικονομικούς κινδύνους. Αυτό, όμως, δεν συμβαίνει, διότι στην πραγματικότητα πολλοί αναλαμβάνουν οικονομικούς κινδύνους.

Ας σημειωθεί ότι ο λόγος για τον οποίο στην Εξ. (1.7) διαιρούμε το $C^{1-\theta \text{ με}}$ 1-θ είναι για να καταστήσουμε την οριακή χρησιμότητα της καταναλώσεως θετική για κάθε τιμή του θ. Διότι, αν αντί της (1.7) είχαμε u(C(t)) = $C(t)^{1-\theta}$, τότε u '(C(t)) = (1 - θ) $C(t)^{-\theta}$, οπότε**, για θ > 1, u '(C(t)) < 0.**

Στην Βιβλιογραφία βλέπουμε συχνά και την ακόλουθη στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας

$$\mathbf{U(C(t))=lnC(t)} \quad (1.13)$$

Η οποία προκύπτει από την

$$\mathbf{u(C(t)) = \frac{C(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}} \quad \mathbf{1.14}$$

θ>0

Όταν το θ → 1. Αυτό μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί με μία εφαρμογή του κανόνα l; Hospital:

$$\lim_{\theta\to 1} \mathbf{u(C(t))} = \lim_{\theta\to 1} \frac{\frac{\partial(\mathbf{C(t)^{1-\theta}-1})}{\partial\theta}}{\frac{\partial(\mathbf{1-\theta})}{\partial\theta}} = \lim_{\theta\to 1} \frac{-\mathbf{C(t)^{1-\theta}}\boldsymbol{lnC(t)}}{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{lnC(t)}$$

Βεβαίως, οι συναρτήσεις (1.7) και (1.14) αντανακλούν την ίδια συμπεριφορά, εφόσον διαφέρουν μόνο κατά ένα σταθερό αριθμό το -1 στον αριθμητή της (1.14)], ο οποίος όμως χάνεται όταν παραγωγίζουμε κατά τη διαδικασία της αριστοποιήσεως. Ας σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις (1.7) και (1.14) είναι αυστηρώς κοίλες (strictlyy concave) για θ > 0, εφόσον u"(C(t)) = - $\theta C(t)^{-\theta-1} < 0$ για C(t) > 0. Συνεπώς, για ρ > O, τόσο η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας (1.5) όσο και η συνάρτηση (1.6) είναι επίσης αυστηρώς κοίλες.

1.2.2.2 Ο διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός του νοικοκυριού

Όπως προαναφέραμε, το εισόδημα του νοικοκυριού προέρχεται από εργασία και από ενοικίαση κεφαλαίου στις επιχειρήσεις (κέρδη δεν υπάρχουν). Από την Εξ. (1.3), γνωρίζουμε ότι η αμοιβή μίας μονάδας αποτελεσματικής εργασίας είναι w = f(k) - kf"(k), ενώ από την Εξ. (1.1) γνωρίζουμε ότι η αμοιβή μίας μονάδας κεφαλαίου είναι r = f'(k). Εφόσον τόσο το w όσο και το r είναι συναρτήσεις του k, το οποίο μεταβάλλεται διαχρονικά, θα θεωρήσουμε ότι και τα w και r μεταβάλλονται διαχρονικά, οπότε θα τα γράφουμε ως w(t) και r(t).

Εάν το r ήταν σταθερό, τότε μία μονάδα κεφαλαίου ενοικιαζόμενη για το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι t θα αυξανόταν σε e^{rt} μονάδες, ενώ, οι K(0) μονάδες κεφαλαίου θα αυξανόταν σε $K(t) = K(0)e^{rt}$ μονάδες. Από την τελευταία αυτή εξίσωση, είναι φανερό ότι η παρούσα αξία των K(t) μονάδων κεφαλαίου της περιόδου t ισοδυναμεί με $K(0) = K(t)e^{rt}$ μονάδες της περιόδου 0. Δηλαδή, ο παράγων προεξοφλήσεως είναι τώρα e^{rt}.

Όπως προαναφέρθηκε, όμως, το πραγματικό επιτόκιο δεν είναι σταθερό διαχρονικά. Μπορεί, ωστόσο, να θεωρηθεί ως το μέσο πραγματικό επιτόκιο ($\bar{r}$), το οποίο επεκράτησε κατά το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι t. Δηλαδή,

$$\mathbf{\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\int_{\tau=0}^{t} r(\tau)d\tau} \quad (1.15)$$

οπότε ο παράγων προεξοφλήσεως θα είναι $e^{-\bar{r}(t)t}$. Θέτοντας

$$\boldsymbol{R(t) = \bar{r}(\mathrm{t})\mathrm{t}} \tag{1.16}$$

μπορούμε να συμβολίσουμε τον παράγοντα προεξοφλήσεως ως εξής: $e^{-R(t)}$

Ας παρατηρήσουμε ότι, εφόσον $\bar{r}$ είναι το μέσο επιτόκιο που επεκράτησε κατά το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι t, έπεται ότι η Εξ. (1.16) δίνει το συνολικό επιτόκιο, R(t), για ολόκληρο το χρονικό αυτό διάστημα.

Τώρα, εφόσον:

1. C(t) είναι η κατανάλωση ενός μέλους του νοικοκυριού
2. το κάθε μέλος προσφέρει μία μονάδα εργασίας σε κάθε χρονική στιγμή t και η αμοιβή αυτής της εργασίας είναι W(t)
3. το νοικοκυριό αριθμεί L(t)/H μέλη και
4. το αρχικό κεφάλαιο του νοικοκυριού είναι K(0)/H

έπεται ότι ο εισοδηματικός περιορισμός διάρκειας ζωής (lifetime budget constraint) του νοικοκυριού, ή διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός (intertemporal budget constraint) σε όρους παρούσας αξίας κατά τη χρονική στιγμή 0 είναι

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} W(t) \frac{L(t)}{H} dt \tag{1.17}$$

Όπως σε κάθε εισοδηματικό περιορισμό, το δεξιό σκέλος της (1.17) παριστάνει τις πηγές εισοδήματος, ενώ το αριστερό τις χρήσεις του. Πιο συγκεκριμένα, το δεξιό σκέλος της (1.17) είναι η παρούσα αξία του εισοδήματος, το οποίο το νοικοκυριό αναμένει ν' αποκτήσει από ενοίκια και μισθούς. Όπως είδαμε λίγο πιο πάνω, η παρούσα αξία των K(t) μονάδων κεφαλαίου της περιόδου t ισοδυναμεί με K(0) K(t)e^{-rt} μονάδες της περιόδου 0. Συνεπώς, ο όρος K(0)/H παριστάνει την κατά την χρονική στιγμή 0 παρούσα αξία όλων των μελλοντικών ενοικίων που θα εισπράξει το νοικοκυριό. Το αριστερό σκέλος της (1.17) είναι η παρούσα αξία της καταναλώσεως. Η Εξ. (1.17) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} [W(t) - C(t)] \frac{L(t)}{H} dt \geq 0 \tag{1.18}$$

Είναι χρήσιμο να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά της οικονομίας καθώς το t →∞. Γι αυτό, ξαναγράφουμε την (1.18) ως εξής:

$$\lim_{s\to\infty} \left(\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} [W(t) - C(t)] \frac{L(t)}{H} dt \right) \geq 0 \tag{1.19}$$

Ας δούμε τώρα πόσο είναι το κεφάλαιο που κατέχει το νοικοκυριό στο χρόνο s, δηλαδή το K(s)/H. Η συσσώρευση κεφαλαίου οφείλεται σε δύο λόγους. Πρώτον, οφείλεται στην απόδοση του αρχικού κεφαλαίου που κατέχει το νοικοκυριό στο χρόνο 0, K(0)/H, η αξία του οποίου στο χρόνο s θα είναι **$e^{R(s)}K(0)/H$**, εφόσον R(s) είναι το επιτόκιο για ολόκληρο το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι s. Δεύτερον, οφείλεται στην αποταμίευση του νοικοκυριού κατά το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι s. Η αποταμίευση του νοικοκυριού στο χρόνο t είναι **[W(t) - C(t)]L(t)/H**. Εξ αιτίας του ανατοκισμού, όμως, όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ t και s τόσο περισσότερο συμβάλλει η αποταμίευση του χρόνου t στη συσσώρευση κεφαλαίου. Για την ακρίβεια, στο χρόνο s η αξία της αποταμιεύσεως που έγινε στο χρόνο t θα είναι **$e^{R(s)-R(t)}[W(t) – C(t)]L(t)/H$**. Μετά από αυτή τη συζήτηση, είναι φανερό ότι

$$\frac{K(s)}{H} = e^{R(s)}\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{R(s)-R(t)}[W(t) - C(t)]\frac{L(t)}{H}dt \qquad \textbf{(1.20)}$$

Η οποία μπορεί να γραφεί και

$$e^{-R(s)}\frac{K(s)}{H} = \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{-R(t)}[W(t) - C(t)]\frac{L(t)}{H}dt \qquad \textbf{(1.21)}$$

Το δεξιό σκέλος της (1.21) ισούται με τον όρο που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες της (1.19), ο οποίος, συνεπώς, μπορεί ν' αντικατασταθεί με το αριστερό σκέλος της (1.21). Δηλαδή, η (1.19) γράφεται και ως

$$\lim_{s\leftrightarrow\infty} e^{-R(s)}\frac{K(s)}{H} \geq 0 \qquad (1.22)$$

Η (2.22) λέει ότι η κατά τη χρονική στιγμή 0 παρούσα αξία της περιουσίας που θα έχει το νοικοκυριό κατά το χρόνο s είναι μη αρνητικός αριθμός. (Αρνητική αξία περιουσίας σημαίνει χρέος.) Η (1.22) είναι γνωστή ως συνθήκη **μη Ponzí παιγνίου (no-Ponzi-game condition).**

Εάν αντί του νοικοκυριού που ζει για πάντα, δεχθούμε την εκδοχή του νοικοκυριού-δυναστεία που νοιάζεται για τους απογόνου ς του, τότε η ερμηνεία της (1.22) είναι ότι όταν σ' ένα νοικοκυριό πεθαίνουν οι γονείς, δεν αφήνουν χρέος στους απογόνους των. Η συνήθης ερμηνεία της (1.22) είναι ότι οι χρηματοπιστωτικές αγορές δεν επιτρέπουν στο νοικοκυριό να διατηρεί χρέος στο διηνεκές, δανειζόμενο συνεχώς για να πληρώνει χρέη που οσονούπω λήγουν. Εάν κάτι τέτοιο ήταν δυνατό, τότε η παρούσα αξία της καταναλώσεως του νοικοκυριού θα μπορούσε να υπερβαίνει την παρούσα αξία του εισοδήματός του. Για να συμβεί κάτι τέτοιο, όμως, θα πρέπει να υπάρχουν άλλα νοικοκυριά των οποίων η παρούσα αξία της καταναλώσεώς των να υπολείπεται της παρούσας αξίας του εισοδήματός των. Εφόσον εδώ έχουμε πεπερασμένο αριθμό νοικοκυριών, τα οποία είναι όλα ίδια μεταξύ τους, αποκλείονται παίγνια **Ponzí**. Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι αν είχαμε άπειρο αριθμό νοικοκυριών, τα οποία δεν ήταν όλα ίδια μεταξύ τους, τότε θα μπορούσε ένα από αυτά να διατηρήσει το χρέος του για πάντα, δανειζόμενο κάθε φορά που λήγει το χρέος του από διαφορετικά άτομα για να πληρώσει τους προηγουμένους δανειστές του.

Για παράδειγμα, θα μπορούσε το νοικοκυριό να δανεισθεί κατά την τρέχουσα περίοδο (0) ένα ποσό (π.χ. €1000) και ν' αυξήσει την κατανάλωσή του κατά το ποσό αυτό. Όταν λήγει η προθεσμία αποπληρωμής του δανείου, θα μπορούσε πάλι να δανεισθεί για να πληρώσει το αρχικό δάνειο των €1000 συν τους τόκους. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία (το παίγνιο **Ponzi**.), το χρέος του νοικοκυριού θ' αυξανόταν συνεχώς με ρυθμό r (= πραγματικό επιτόκιο). Επειδή, όμως, το νοικοκυριό ουδέποτε πρόκειται να πληρώσει κάτι από την «τσέπη» του, έπεται ότι η επιπλέον κατανάλωση των €1000, την οποία έκανε κατά την περίοδο 0, ήταν ουσιαστικά δωρεάν! Ο περιορισμός (1.22) σημαίνει ότι αν στην περίοδο s το νοικοκυριό είναι χρεωμένο, δηλαδή K(s) < O, τότε το χρέος του δεν μπορεί ν' αυξάνει με ρυθμό r, αλλά μ' ένα μικρότερο ρυθμό κ, όπου κ < r. Έτσι, στην (1.22) θα έχουμε

$$e^{-R(s)}K(s)/H = e^{-rs}[K(0)e^{ks}/H] = e^{-(r-k)rs}\, k(0)/H.$$

Καθώς το s → ∞, ο τελευταίος αυτός όρος τείνει στο μηδέν, εφόσον **- (r - κ) < 0.**

1.2.2.3 Το πρόβλημα της αριστοποιήσεως του νοικοκυριού

Το πρόβλημα του νοικοκυριού είναι να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας (1.5), όπου η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας είναι η (1.7), υπό τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό (1.17). Πριν προχωρήσουμε στη λύση αυτού του προβλήματος, ας εκφράσουμε και πάλι τις μεταβλητές σε όρους αποτελεσματικής εργασίας. Εφόσον C(t) είναι κατανάλωση κατά εργαζόμενο, έπεται ότι **c(t) = C(t)/A(t)** είναι κατανάλωση κατά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Από τον ορισμό αυτόν, και έχοντας υπ' όψη ότι **$A(t) = A(0)e^{gt}$**, προκύπτει ότι

$$\mathbf{C(t) = A(t)c(t) = A(0)e^{gt}c(t)} \qquad (1.23)$$

Συνεπώς η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας (1.7) μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{u\big(C(t)\big) = \frac{[A(0)e^{gt}c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}} \qquad (1.24)$$

Αντικαθιστούμε την (1.24) καθώς και την **$L(t) = L(0)e^{nt}$** στην (1.5) προκύπτει

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} A(0)^{1-\theta}\, e^{(1-\theta)gt}\, \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(0)e^{nt}}{H}\, dt =$$

$$A(0)^{1-\theta}\, \frac{L(0)}{H} \int_{t=0}^{\infty} e^{(1-\theta)gt-nt-\rho t}\, \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\, dt$$

Δηλαδή σε όρους c(t) η συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας είναι:

$$\mathbf{U = B\int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}}dt \qquad (1.25)$$

Όπου

$$B = A(0)^{1-\theta}\frac{L(0)}{H}$$

Και

$$\boldsymbol{\beta = \rho - n - (1-\theta)g} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Για να είναι το επίπεδο της διαχρονικής χρησιμότητας πεπερασμένος αριθμός υποθέτουμε ότι:

$$\boldsymbol{\beta > 0} \qquad (1.27)$$

Διότι, αν $\beta \leq 0$, τότε, από την (1.25) είναι φανερό ότι $U \to \infty$.
Ας γράψουμε τώρα τον εισοδηματικό περιορισμό (1.17) σε όρους αποτελεσματικής εργασίας. Εξ ορισμού, έχουμε **w(t) = W(t)/A(t)** και **k(t) = K(t)/A(t)L(t)**. Επομένως, κατ' αναλογία και προς την (1.23), έχουμε ότι

$$\mathbf{W(t) = A(t)w(t) = A(0)e^{gt}w(t)} \qquad (1.28)$$

και

$$\mathbf{K(0) = k(0)A(0)L(0)} \qquad (1.29)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.17) όπου $L(t) = L(0)e^{nt}$, καθώς και τις Εξ. (1.23), (1.28) και (1.29), προκύπτει ότι

$$\mathbf{\frac{A(0)L(0)}{H}\int_{t=0}^{\infty} e^{(g-n)t-R(t)}c(t)dt \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{(g+n)t-R(t)}w(t)dt} \qquad (1.30)$$

Διαιρώντας την (1.30) με A(0)L(0)/H προκύπτει ο διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός

$$\mathbf{\int_{t=0}^{\infty} e^{(g+n)t-R(t)}c(t)dt \leq k(0)+} \qquad \textbf{(1.31)}$$

Τέλος εφόσον **$k(s)=K(s)/(A(s)L(s)) \Rightarrow K(s)=k(s)A(s)L(s)=k(s)A(0)L(0)e^{(g+n)s}$**

Και η συνθήκη μη Ponzi (1.22) γράφεται

$$\boldsymbol{\frac{A(0)L(0)}{H}\lim_{s\to\infty} e^{(g+n)s-R(s)}k(s) \geq 0} \qquad \textbf{(1.32)}$$

Διαιρώντας την 1.32 με A(0)L(0)/H>0 προκύπτει η ακόλουθη μορφή της συνθήκης μη Ponzi παιγνίου:

$$\lim_{s\to\infty} e^{(g+n)s-R(s)}k(s) \geq 0 \qquad \textbf{(1.33)}$$

Συνοπτικά, το πρόβλημα του νοικοκυριού είναι να επιλέξει μία τροχιά της c(t) που να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση διαχρονικής χρησιμότητας (1.25) υπό τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό (1.31) και να ικανοποιεί τη συνθήκη (1.33). Επειδή η οριακή χρησιμότητα της καταναλώσεως κατά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{c}(\mathbf{t})} = \mathbf{B}\mathbf{e}^{-\mathbf{B}\mathbf{t}}\mathbf{c}(\mathbf{t})^{-\boldsymbol{\theta}}$$

Είναι θετικός αριθμός για c(t)>0 έπεται ότι το νοικοκυριό δεν θα αφήσει αχρησιμοποίητους πόρους, αλλά θα τους καταναλώσει όλους. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή ο εισοδηματικός περιορισμός (1.31) θα ικανοποιείται με το σύμβολο της ισότητας και ποτέ με αυτό της ανισότητας.

Ως μία πρώτη προσέγγιση, το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί «ανεπισήμως» με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange.3 Η συνάρτηση του Lagrange είναι

$$l = B\int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt + \lambda\left[k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{(g+n)t-R(t)}w(t)dt - \int_{t=0}^{\infty} e^{(g+n)t-R(t)}c(t)dt\right] \qquad \textbf{(1.34)}$$

Θέτοντας την πρώτη παράγωγο της (2.34) ως προς c(t) ίση με μηδέν

$$\frac{\partial l}{\partial c(t)} = 0$$

προκύπτει ότι

$$Bc(t)^{-\theta}e^{-\beta t} = \lambda e^{(g+n)t-R(t)} \qquad \textbf{(1.35)}$$

Λογαριθμίζοντας την (1.35), παίρνουμε

$$\ln B - \theta \ln c(t) - \beta t = \ln\lambda + (g+n)t - R(t) \qquad (\alpha)$$

Από τις εξισώσεις (1.15) – (1.16), όμως γνωρίζουμε ότι :

$$R(t) = \int_{\tau=0}^{t} r(t)d\tau \qquad \textbf{(1.36)}$$

Αντικαθιστώντας την (1.36) στην (α) προκύπτει ότι:

$$\ln B - \theta \ln c(t) - \beta t = \ln \lambda + (g+n)t - R(t) - \int_{\tau=0}^{t} r(t) d\tau \quad \textbf{(1.37)}$$

Παραγωγίζουμε την (1.37) ως προς το χρόνο. Για την παράγωγο του τελευταίου όρου της (1.37), χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Leibniz, επειδή τα όρια του ολοκληρώματος είναι συναρτήσεις του t, και βρίσκουμε ότι η παράγωγος αυτή είναι ίση με r(t). Συνεπώς, η παράγωγος της (1.37) ως προς t είναι: $0 - \theta\dot{c}(t)/(c(t) - \beta = 0 + (g+n) - r(t)$. Αντικαθιστώντας β=ρ-n-(1-θ)g [Εξ. 1.26] προκύπτει ότι $-\theta\dot{c}(t)/(c(t) - [\rho - n - (1-\theta)g] = (g+n) - r(t)$ ή

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} \quad \textbf{(1.38)}$$

Η Εξίσωση (2.38) είναι η **συνθήκη διαχρονικής αποτελεσματικότητας** (intertemporal efficiency condition)) και είναι γνωστή ως **εξίσωση του Euler** για την κατανάλωση κατά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Λέει ότι, όταν το νοικοκυριό επιλέγει το άριστο επίπεδο της *c(t),* τότε δεν είναι δυνατή η παραπέρα αύξηση της διαχρονικής χρησιμότητας του με τη μμεταφορά μμονάδων c από το σημείο *t,* στο σημείο *t2* (αποταμίευση) ή από το σημείο t_2 στο σημείο t_1 (αρνητική αποταμίευση). Η (1.38) είναι αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση της συναρτήσεως (2.25) υπό τον περιορισμό (1.31). Εφόσον, όμως, όπως αναφέραμε στο τέλος η συνάρτηση (1.5) είναι αυστηρώς κοίλη για *P* > O, οπότε και η συνάρτηση (1.25) είναι αυστηρώς κοίλη, έπεται ότι η (1.38) είναι όχι μόνο αναγκαία συνθήκη για μέγιστο, αλλά είναι και ικανή.

O Romer (2006, σ. 56) παραθέτει και το ακόλουθο λογικό επιχείρημα για την απόδειξη της Εξ. (1.38). 'Εστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t το νοικοκυριό μειώνει το c κατά μία πολύ μικρή ποσότητα, Δc, την οποία αποταμιεύει, προκειμένου ν' αυξήσει το c κατά τη μελλοντική περίοδο t + Δt, αφήνοντας ανέπαφα τα c όλων των άλλων χρονικών περιόδων. Εφόσον το πραγματικό επιτόκιο είναι r(t), έπεται ότι κατά το χρονικό διάστημα Δt το επίπεδο αποταμιεύσεως S(t) θ' αυξηθεί σε $S(t+\Delta t) = e^{r(t)\Delta(t)}S(t)$. Για να μετατρέψουμε το S σε αποταμίευση κατά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας (s), διαιρούμε την τελευταία εξίσωση με $A(t+\Delta t)L(t+\Delta t) = A(t)L(t)e^{(g+n)\Delta t}$, οπότε προκύπτει ότι $S(t+\Delta t)A(t+\Delta t)L(t+\Delta t) = e^{[r(t)-g-n]\Delta t}S(t)/A(t)L(t)$ ή

$$s(t+\Delta t) = e^{[r(t)-g-n]\Delta t}s(t) \quad \textbf{(1.39)}$$

Σύμφωνα με την Εξ. (1.39), αν το s(t) αυξηθεί κατά Δc μονάδες, από s(t) σε s(t) + Δc, τότε το s(t+Δt) θ' αυξηθεί κατά $e^{[r(t)-g-n]\Delta t}$ Δc μονάδες. Κατά συνέπεια, η c(t+Δt) μπορεί ν' αυξηθεί κατά $e^{[r(t)-g-n]\Delta t}$ Δc μονάδες. Ας υπολογίσουμε το κόστος και το όφελος της αποταμιεύσεως των Δc μονάδων.

Εφόσον η οριακή χρησιμότητα της c(t) είναι $\partial U / \partial c(t) = Bc(t)^{-\theta} e^{-\beta t}$ [βλ. Εξ. (1.25)], έπεται ότι το οριακό κόστος (σε όρους χρησιμότητας) της μειώσεως της c(t) κατά Δc είναι

$$\text{Οριακό όφελος} = \mathrm{B}c(t)^{-\theta} e^{-\beta t} \Delta c \qquad \textbf{(1.41)}$$

Δηλαδή, από μόνη της, η μείωση του c(t) κατά Δc κατά τη χρονική στιγμή t μειώνει τη χρησιμότητα του νοικοκυριού κατά $\mathrm{B}c(t)^{-\theta} e^{-\beta t} \Delta$. Εφόσον, όμως, η μείωση αυτή του c(t) οδηγεί σε αύξηση του c(t+Δt) κατά $e^{[r(t)-g-n]\Delta t} \Delta c$, έπεται ότι το οριακό όφελος (πάλι σε όρους χρησιμότητας) από αυτή την ενέργεια είναι ίσο με την οριακή χρησιμότητα της c(t+Δt), η οποία είναι $\mathrm{B}c(t+\Delta t)^{-\theta} e^{-\beta(t+\Delta t)}$, επί $e^{[r(t)-g-n]\Delta t} \Delta c$. Δηλαδή,

$$\text{Οριακό όφελος} = \mathrm{B}c(t+\Delta t)^{-\theta} e^{-\beta(t+\Delta t)} e^{[r(t)-g-n]\Delta t} \Delta c \qquad \textbf{(1.42)}$$

Τώρα, εφόσον το c αυξάνεται με ρυθμό $\dot{c}(t)/c(t)$, έπεται ότι c(t+Δt) Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην (2.42), προκύπτει ότι

$$\text{Οριακό όφελος} = \mathrm{B}[c(t) e^{[\dot{c}(t)/c(t)]\Delta t}]^{-\theta} e^{-\beta(t+\Delta t)} e^{[r(t)-g-n]\Delta t} \Delta c \qquad \textbf{(1.43)}$$

Ως συνήθως, για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας, είναι ανάγκη το οριακό κόστος να ισούται με το οριακό όφελος. Επομένως, με βάση τις Εξ. (1.41) και (1.43), έχουμε ότι

$$\mathrm{B}c(t)^{-\theta} e^{-\beta t} \Delta c = \mathrm{B}[c(t) e^{[\dot{c}(t)/c(t)]\Delta t}]^{-\theta} e^{-\beta(t+\Delta t)} e^{[r(t)-g-n]\Delta t} \Delta c \qquad \textbf{(1.44)}$$

Απλοποιώντας την (1.44), προκύπτει ότι $e^{[-\theta \dot{c}(t)/c(t)-\beta+r(t)-g-n]\Delta t} = 1$. Λογαριθμίζοντας αυτή την εξίσωση, προκύπτει ότι $[-\theta \dot{c}(t)/c(t)-\beta+r(t)-g-n]\Delta t = 0$. Διαιρώντας με Δt και κατόπιν αντικαθιστώντας σ' αυτήν την εξίσωση όπου β=ρ-n-(1-θ)g [βλ. Εξ. (1.26)], προκύπτει ότι

$$-\theta \dot{c}(t)/c(t) - [\rho - n - (1-\theta)g] + r(t) - g - n = 0 \ \text{ ή } \ -\theta \dot{c}(t)/c(t) - \rho - \theta g + r(t) = 0.$$

Λύνοντας την τελευταία αυτή εξίσωση ως προς $\dot{c}(t)/c(t)$ προκύπτει η (1.38).

Τέλος, ας γράψουμε την (1.38) σε όρους της καταναλώσεως κατά εργαζόμενο (C). Εφόσον $c(t) = C(t)/A(t)$ [βλ. Εξ. (1.23)], έπεται ότι

$$\dot{c}(t)/c(t) = \dot{C}(t)/C(t) - \dot{A}(t)/A(t) = \dot{C}(t)/C(t) - g$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην Εξ. (1.38), προκύπτει ότι η εξίσωση του Euler για την κατανάλωση κατά εργαζόμενο είναι

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{r(t) - \rho}{\theta} \qquad \textbf{(1.38}^{\alpha}\textbf{)}$$

Από την Εξ. (1.38α), είναι φανερό ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του θ, τόσο πιο μικρές είναι οι αντιδράσεις της καταναλώσεως κατά εργαζόμενο (C) στις μεταβολές του πραγματικού επιτοκίου σε σχέση με το ρυθμό προεξοφλήσεως, δηλαδή στις μεταβολές της διαφοράς **r - ρ**. Η παρατήρηση αυτή δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, εφόσον όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του θ, τόσο πιο μικρή είναι η ελαστικότητα διαχρονικής υποκαταστάσεως, **σ = 1/θ** [βλ. Εξ. (1.12)]. Μικρή τιμή του σ ακριβώς σημαίνει μικρές αντιδράσεις της C στις μεταβολές του r.

Τέλος, ας λύσουμε το ίδιο πρόβλημα και μ' ένα τρίτο τρόπο, που είναι ο πιο συνηθισμένος και που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση του Hamilton. Και για να δείξουμε αυτό που αναφέραμε λίγο πριν την Εξ. (1.8), ότι δηλαδή η συναρτησιακή μορφή CRRA, Εξ. (1.7), μας χρειάζεται για να βρούμε σύγκλιση σε τροχιά ισόρροπου μεγεθύνσεως, ας χρησιμοποιήσουμε τη γενική μορφή της στιγμιαίας συναρτήσεως χρησιμότητας, u(C(t)), αντί της μορφής CRRA.

Το πρόβλημα συνίσταται στη μεγιστοποίηση της συναρτήσεως (1.5) υπό τον περιορισμό που δείχνει πώς εξελίσσονται τα περιουσιακά στοιχεία (δηλαδή το κεφάλαιο) του νοικοκυριού από στιγμή σε στιγμή. Ο περιορισμός αυτός δίνεται λίγο παρακάτω από την Εξ. (1.51) και είναι εκφρασμένος σε μονάδες αποτελεσματικής εργασίας. Επομένως, ας γράψουμε και την (1.5) σε όρους της μεταβλητής c(t), χρησιμοποιώντας την (1.23). Γράφουμε επίσης $L(t)/H = L(0)e^{nt/H}$, 'Ετσι, έχουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$U = \frac{L(0)}{H}\int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-n)t}u(A(0)e^{gt}c(t))dt$$

υπό τον περιορισμό [βλ. Εξ. (1.51) παρακάτω]

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (g+n)k(t)$$

Υποθέτουμε ότι η οικονομία αρχίζει με μία θετική ποσότητα κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας, k(0) > 0, έτσι ώστε να είναι δυνατή η παραγωγή ευθύς εξ αρχής.

Στην προκειμένη περίπτωση, η **<u>συνάρτηση του Hamilton</u>** ορίζεται ως εξής:

$$J = e^{-(\rho-n)t}u(A(0)e^{gtc}c(t)L(0)/H + \mu(t)[f(k(t)) - c(t) - (g+n)k(t)]$$

όπου ο πολλαπλασιαστής μ(t) είναι η κατά τη χρονική στιγμή 0 οριακή αξία (σε όρους μονάδων χρησιμότητας) μίας επιπλέον μονάδας κεφαλαίου που αποκτάται κατά τη χρονική στιγμή t. Δηλαδή, μ(t) είναι η παρούσα αξία της σκιώδους τιμής (shadow price) μίας μονάδας κεφαλαίου. Υπό τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για τη συνάρτηση χρησιμότητας και τη συνάρτηση παραγωγής, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για μία άριστη πορεία των μεταβλητών είναι:

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0$$

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial J}{\partial k}$$

$$\lim_{t\to\infty}[\mu(t)k(t)] = 0$$

Η δεύτερη συνθήκη είναι η **εξίσωση του Euler ή κανόνας του Ramsey**, που πρέπει να ικανοποιείται για να είναι άριστη η συμπεριφορά του νοικοκυριού διαχρονικά. Η τρίτη συνθήκη ονομάζεται τερματική συνθήκη (transversality condition) και απαιτεί η αξία των περιουσιακών στοιχείων του νοικοκυριού, η οποία ισούται με την σκιώδη τιμή, μ(t), επί την ποσότητα, k(t), να τείνει στο μηδέν καθώς t → ∞. Αν θεωρήσουμε το άπειρο ως το τέλος του χρονικού ορίζοντα για τον οποίο σχεδιάζει το νοικοκυριό, τότε η τερματική συνθήκη ερμηνεύεται συνήθως ως εξής: ένα νοικοκυριό με αριστοποιητική συμπεριφορά δεν θ' αφήσει τίποτε πολύτιμο μετά το τέλος του, διότι θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει όλα τα περιουσιακά του στοιχεία εφόσον ζει, αυξάνοντας έτσι την ευημερία του. Για τα υποδείγματα που εξετάζουμε εδώ, όπου οι μελλοντικές αξίες προεξοφλούνται και η συνάρτηση χρησιμότητας διάρκειας ζωής συγκλίνει σ' ένα πεπερασμένο αριθμό [βλ. π.χ. τη συζήτηση κάτω από την Εξ. (1.25)], η ερμηνεία αυτή είναι σωστή. Ωστόσο, σε υποδείγματα τα οποία δεν πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις, η τερματική συνθήκη δεν είναι οπωσδήποτε αναγκαία για άριστη συμπεριφορά

Οι δύο πρώτες συνθήκες αριστοποιήσεως δίνουν τα εξής αποτελέσματα:

$$u' e^{(-\rho-n-g)t} A(0)L(0)/H = \mu(\tau)$$

και

$$\dot{\mu}(t) = \mu(t)[f'(k(t)) - g - n] = -\mu(t)[r(t) - g - n]$$

Εφόσον f’(k(t))=r(t) [Εξ. (1.1)]

Λογαριθμίζοντας την πρώτη από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\ln(u') - (\rho - n - g)t + \ln[A(0)L(0)/H] = \ln[\mu(t)]$$

Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση ως προς το χρόνο, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt}-(\rho-n-g)=\frac{\dot{\mu}}{\mu} \qquad \textbf{(2.38β)}$$

Αλλά

$$\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt}=\frac{u''}{u'}[A(0)ge^{gt}c(t)+A(0)e^{gt}\dot{c}(t)]=\frac{u''A(0)e^{gt}c(t)}{u'}[g+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}]=$$

$$=\frac{u''C(t)}{u'}[g+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}]=-r_g[g+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}]$$

όπου στην προτελευταία γραμμή έχει γίνει χρήση της Εξ. (1.23), ενώ στην τελευταία γραμμή έχει γίνει χρήση της (1.8). Αντικαθιστούμε στην Εξ. (1.38β) αυτό το αποτέλεσμα, καθώς και το αποτέλεσμα $\dot{\mu}(t)=-\mu(t)[r(t)-g-n]$, που βρήκαμε λίγο πιο πάνω, οπότε προκύπτει ότι

$$-r_g=[g+\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}]-(\rho-n-g)=-[r(t)-g-n]$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-\rho-r_R g}{r_R} \qquad \textbf{(1.38γ)}$$

Κατ' αρχήν, παρατηρούμε ότι για r_R = θ, η (1.38γ) είναι ίδια με την (1.38). Τώρα, από την (1.38γ) είναι φανερό ότι, για να υπάρχει μία ισορροπία σταθερής καταστάσεως όπου c(t)/ C(t) και r(t) θα είναι σταθερά, θα πρέπει ο συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου, r_R, να είναι σταθερός. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε τη συναρτησιακή μορφή CRRA, Εξ. (1.7), όπου r_R = θ (σταθερό). Η επιλογή αυτή αποτελεί κοινή πρακτική.

1.3. Η δυναμική του υποδείγματος

Θα περιγράψουμε τη δυναμική του υποδείγματος σε όρους εξελίξεως των μεταβλητών c και k.

Στο υπόδειγμα Solow-Swan είχαμε μία μόνο θεμελιώδη διαφορική εξίσωση, την η οποία περιέγραφε την εξέλιξη του k. Εδώ έχουμε μία ακόμη τέτοια εξίσωση, την (1.38), η οποία περιγράφει την εξέλιξη του c. Με τη βοήθεια των δύο αυτών εξισώσεων, θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε το σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως.

1.3.1 Η δυναμική του c

Αντικαθιστώντας την r(t) = f'(k(t)) [Εξ. (1.1)] στην (1.38), προκύπτει ότι

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta} \qquad (1.45)$$

Από την (2.45) είναι φανερό ότι για **f'(k(t)) = ρ + θg,** $\dot{c}(t) = 0$. Ας συμβολίσουμε με k* το επίπεδο του k όπου f'(k(t)) = ρ + θg. Η σχέση αυτή δεν εξαρτάται από c, οπότε στο Διάγραμμα 1.1 (βλ. παρακάτω) παριστάνεται με μία ευθεία κάθετη στο σημείο k* . Για k > k* , ισχύει ότι **f'(k(t)) <ρ+θg** (εξ αιτίας του φθίνοντος οριακού προϊόντος του κεφαλαίου), οπότε $\dot{c}(t) < 0$, δηλαδή το c μειώνεται ενώ, για k < k* , ισχύει ότι f'(k(t)) > ρ + θg, οπότε $\dot{c}(t) > 0$ δηλαδή το c αυξάνεται.

1.3.2 Η δυναμική του k

Για να δούμε πώς εξελίσσεται το k, ας ξεκινήσουμε από την Εξ. $I = \dot{K} + \delta K$, η οποία, εφόσον εδώ υποθέτουμε ότι δ = 0, γράφεται ως εξής:

$$I = \dot{K} \qquad (1.46)$$

Διαιρώντας την (1.46) με AL, προκύπτει

$$I = \dot{K} / AL \qquad (1.47)$$

όπου í = I/AL. Για να εισαγάγουμε το k στην (1.47), ας θυμηθούμε ότι

$$\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{k} + k\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L}\right) = \dot{k} + (g+n)k \qquad (1.48)$$

Αντικαθιστώντας την (1.48) στην (1.47) και αναδιατάσσοντας τους όρους, προκύπτει ότι

$$\dot{k} = i - (g+n)k \qquad (1.49)$$

Ισχύει ότι I = Y - C ή, αν διαιρέσουμε με AL, í = y - c, η οποία γράφεται και ως

$$\dot{i}(t) = f(k(t)) - c(t) \quad \textbf{(1.50)}$$

Αντικαθιστώντας την (1.50) στην (1.49), προκύπτει ότι

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (g+n)k(t) \quad \textbf{(1.51)}$$

Η εξίσωση αυτή λέγει ότι, για ν' αυξηθεί το k, θα πρέπει το προϊόν, f(k(t)), να υπερβαίνει τις δαπάνες για κατανάλωση, c(t), και εξισορροπητική επένδυση, (g + n)k(t). Από την (1.51), είναι φανερό ότι όταν

$$c = f(k) - (g+n)k \quad \textbf{(1.52)}$$

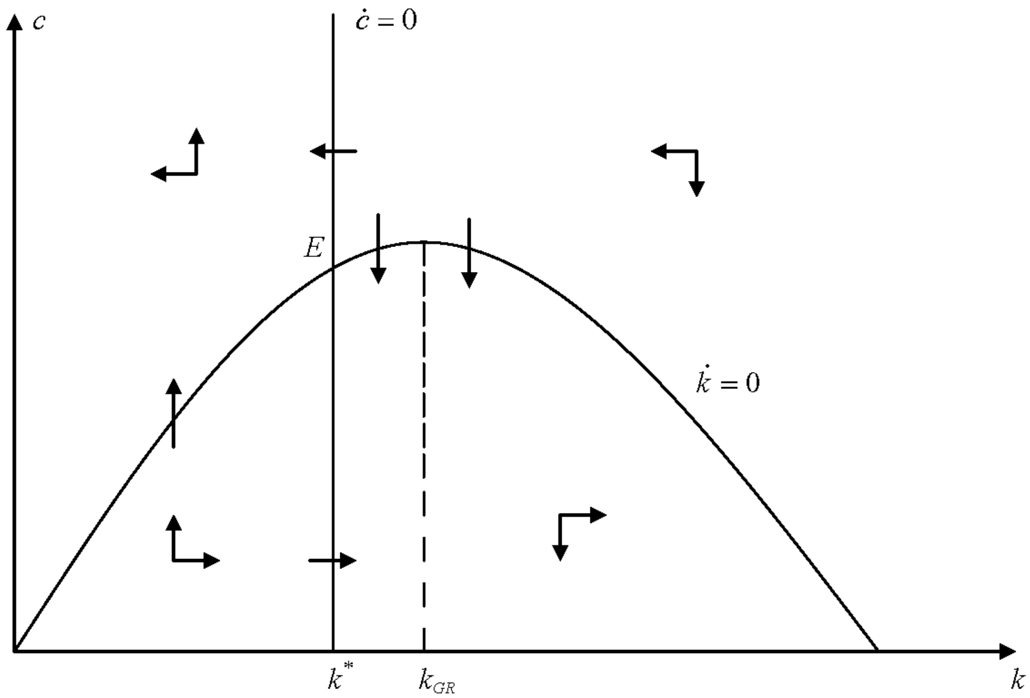
δηλαδή όταν η κατανάλωση ισούται με τη διαφορά του προϊόντος μείον την εξισορροπητική επένδυση (όλα κατά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας), τότε $\dot{k} = 0$. Τώρα, για να έχει μέγιστο η συνάρτηση (1.52) θα πρέπει να ισχύει ότι $\partial c / \partial k = 0$ ή

$$f'(k) = g + n \quad \textbf{(1.53)}$$

Ας συμβολίσουμε με k_{GR} το επίπεδο του k που ικανοποιεί την (1.53). Στο Διάγραμμα 1.1, το οποίο ακολουθεί, το k_{GR} αντιστοιχεί στην κορυφή της καμπύλης $\dot{k} = 0$. Εφόσον $\partial^2 c / \partial k^2 = f''(k) < 0$, έπεται ότι η συνάρτηση (1.52) είναι αυστηρώς κοίλη και ότι το k_{GR} μεγιστοποιεί τη συνάρτηση (1.52), είναι δηλαδή το επίπεδο του «χρυσού κανόνα» (golden rule) συσσωρεύσεως κεφαλαίου. Ας σημειωθεί ότι στο παρόν υπόδειγμα η οικονομία δεν θα ισορροπήσει στο σημείο του «χρυσού κανόνα», αλλά στο σημείο του «τροποποιημένου χρυσού κανόνα» (modified golden rule). Στο υπόδειγμα Solow-Swan ήταν δυνατό ισορροπία και «χρυσός κανόνας» να συμπέσουν, αν το s πάρει τη συγκεκριμένη τιμή $s = s_{GR}$.

1.3.3 Το διάγραμμα φάσεως.

Η συνάρτηση (1.52) παριστάνεται γραφικά με μία καμπύλη όπως αυτή του Διαγράμματος 1.1.
Η καμπύλη αυτή είναι ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) των σημείων όπου $\dot{k} = 0$, επειδή, όπως είδαμε παραπάνω, η (1.52) προκύπτει από την (1.51) για $\dot{k} = 0$. Από την (1.51) είναι φανερό ότι για c > f(k)-(g+n)k, δηλαδή για όλα τα σημεία που είναι πάνω από τον γ.τ. $\dot{k} = 0$, ισχύει ότι $\dot{k} < 0$, οπότε το k μειώνεται ενώ, για c < f(k) - (g + n)k, δηλαδή για όλα τα σημεία που είναι κάτω από τον γ. τ. $\dot{k} = 0$, ισχύει ότι $\dot{k} > 0$, οπότε το k αυξάνεται.



Διάγραμμα 1.1. Η δυναμική των c και k

Στο Διάγραμμα 1.1, οι κατευθύνσεις των μεταβολών του k, όταν η αφετηρία είναι ένα σημείο εκτός του γ.τ. $\dot{k}=0$, σημειώνονται με βέλη. Επίσης, υπάρχουν και βέλη που δείχνουν τις κατευθύνσεις των μεταβολών του c, τις οποίες αναφέραμε στο Τμήμα 1.3.1, ότι δηλαδή, για k < k*, το c αυξάνεται, ενώ για k > k* , το c μειώνεται. Στο σημείο Ε του Διαγράμματος, ισχύει ότι $\dot{c}=\dot{k}=0$. Συνεπώς, αν η οικονομία φθάσει στο σημείο Ε, τότε τείνει να παραμείνει εκεί, εφόσον τα c και k δεν μεταβάλλονται. Σε όλα τα άλλα σημεία του Διαγράμματος υπάρχει τάση για μεταβολή, όπως δείχνουν τα βέλη, οπότε φαίνεται σε ποια φάση της δυναμικής της βρίσκεται η οικονομία. Γι αυτό το λόγο, το Διάγραμμα 1.1 ονομάζεται διάγραμμα φάσεως (phase diagram).

Το γεγονός ότι στο Διάγραμμα 1.1 ισχύει ότι k* < k_{GR} δεν είναι τυχαίο. Όπως είδαμε πιο πάνω, το k* ορίζεται από τη σχέση $f'(k)=\rho+\theta g$, η οποία σημαίνει ότι $\dot{c}=0$ [βλ. Εξ. (1.45)] ενώ, το k_{GR} ορίζεται από τη σχέση. $f'(k)=g+n$ η οποία δίνει το μέγιστο c [βλ. Εξ. (1.53)]. Δηλαδή, έχουμε ότι

$$f'(k)=\rho+\theta g \qquad \textbf{(1.54)}$$

και

$$f'(k_{GR})=g+n \qquad \textbf{(1.55)}$$

Από τη συνθήκη (1.27), όμως, έχουμε ότι β > 0 ή ρ - n - (1 - θ)g > 0, που γράφεται και ως

$$\rho + \theta g > g + n \qquad \textbf{(2.56)}$$

Από τις Εξ. (1.54)-(1.55), είναι φανερό ότι η συνθήκη ρ + θg > g + n σημαίνει ότι $f'(k^*) > f(k_{GR})$. Από την ανισότητα αυτή, όμως, προκύπτει ότι $k < k_{GR}$, επειδή $f''(k) < o$.

1.3.4 Η αρχική τιμή του c

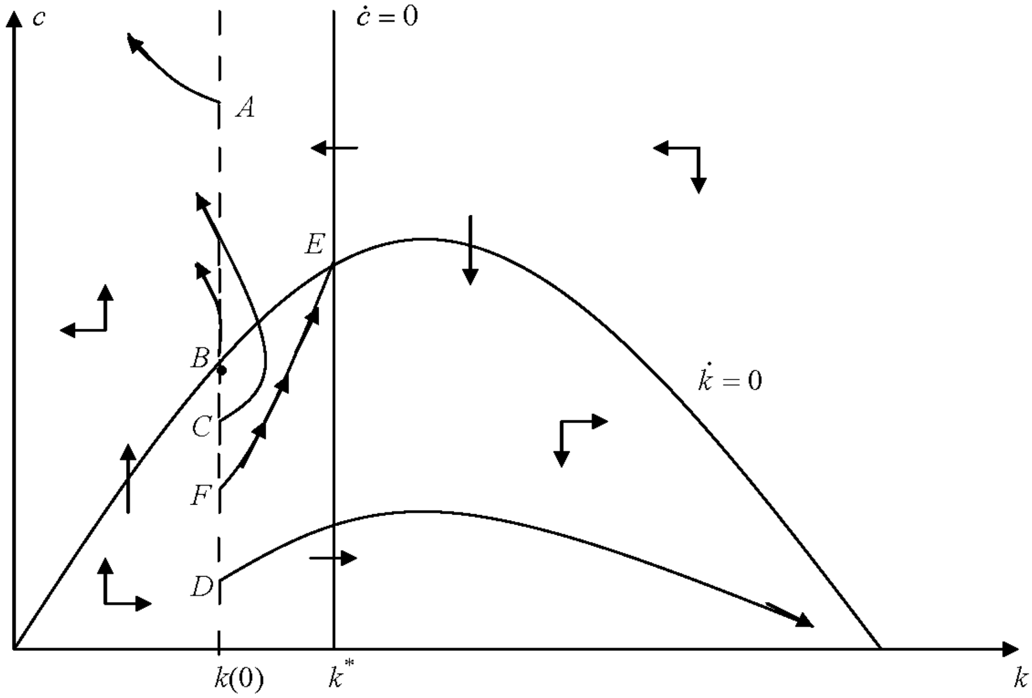
'Εστω (k(0), c(0)) το σημείο όπου βρίσκεται αρχικά η οικονομία. Άραγε, από οποιοδήποτε σημείο του Διαγράμματος 1.1 και αν ξεκινήσει η οικονομία θα φθάσει τελικά στο σημείο Ε; Με τη βοήθεια του Διαγράμματος 1.2, θα δούμε ότι η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Χάριν παραδείγματος, έστω ότι η οικονομία βρίσκεται αρχικά στο σημείο (0,0), αν και αυτό παραβιάζει την υπόθεση k(0) > 0, την οποία έχουμε ήδη υιοθετήσει. Εφόσον η (1.45) γράφεται και ως

$$\dot{c}(t) = c(t)\left[f'(k(t)) - \rho - \theta g \right] / \theta \qquad \textbf{(1.57)}$$

είναι φανερό ότι αν c(t) =0, τότε $\dot{c}(t) = 0$, οπότε το c(t) θα παραμείνει στο μηδέν. Επίσης, εφόσον $\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (g+n)k(t)$ [Εξ. (1.51)], έπεται ότι για k = 0 και c = 0, ισχύει ότι $\dot{k}(t) = 0$, οπότε και το k θα παραμείνει στο μηδέν. Δηλαδή, αν η οικονομία ξεκινήσει από το σημείο (0,0), θα παραμείνει εκεί, διότι, εφόσον k(0) = 0, τα νοικοκυριά δεν έχουν άλλη επιλογή από την c(0) =0.

Ως ένα άλλο παράδειγμα, έστω ότι η οικονομία βρίσκεται αρχικά στο σημείο όπου ο γ.τ. $\dot{k} = 0$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα. Σ' αυτό το σημείο, ισχύει ότι c(0)=0, οπότε, με βάση την (1.57), θα ισχύει και ότι $\dot{c} = 0$. Και εφόσον σ' αυτό το σημείο έχουμε $\dot{k} = 0$ και $\dot{c} = 0$, έπεται ότι η οικονομία θα παραμείνει εκεί. Ωστόσο, το νοικοκυριό ποτέ δεν θα επιλέξει αυτό το σημείο:

εφόσον εκεί ισχύει ότι k(0) > O, έπεται ότι Y(0) > O, οπότε είναι εφικτό για το νοικοκυριό να έχει c(0) > 0. Δηλαδή, δεν θα αφήσει αχρησιμοποίητους πόρους.



Διάγραμμα 1.2. Η δυναμική των c και k για διάφορες αρχικές τιμές του c, δεδομένου ότι k(0) < k*

Τα δύο παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι η αρχική θέση της οικονομίας έχει σημασία για τη δυναμική της. Στο Διάγραμμα 1.2, εξετάζουμε τη δυναμική στην οποία οδηγούν διάφορες αρχικές τιμές του c, δεδομένης μίας αρχικής τιμής του k, k(0), για την οποία υποτίθεται ότι k(0) < k*. Αν το c(0) είναι πάνω από τον γ.τ. $\dot{k}=0$, σ' ένα σημείο όπως το A, τότε, όπως δείχνουν τα βέλη, το c αυξάνεται και το k μειώνεται, δηλαδή η οικονομία πηγαίνει προς τα πάνω και αριστερά, όπως δείχνει το βέλος που ξεκινά από το σημείο A. Το ίδιο θα συμβεί και αν το c(0) είναι επί του γ.τ. $\dot{k}=0$, σ' ένα σημείο όπως το B. Αν το c(0) είναι ελαφρώς πιο κάτω από τον γ.τ. $\dot{k}=0$, σ' ένα σημείο όπως το C, τότε τόσο το c όσο και το k κατ' αρχήν αυξάνονται. Επειδή, όμως, υποθέσαμε ότι το C(0) είναι ελαφρώς μόνο κάτω από τον γ.τ. $\dot{k}=0$, από την Εξ. (1.51) είναι φανερό ότι η αύξηση του k είναι μικρή. Αντίθετα, η αύξηση του c είναι μεγάλη, διότι στο σημείο C το C(0) είναι υψηλό (υπενθυμίζεται ότι στον κάθετο άξονα μετρούμε το C) και άρα, με βάση την (1.57), το $\dot{c}$ είναι επίσης υψηλό. Συνεπώς, η οικονομία μετακινείται κατ' αρχήν προς τα πάνω και δεξιά, αλλά πολύ γρήγορα (πριν φθάσει το γ.τ. $\dot{c}=0$) θα περάσει πάνω από τον γ.τ. $\dot{k}=0$, οπότε το μεν c θα συνεχίσει ν' αυξάνεται το δε k θ' αρχίσει να μειώνεται.

Στην αντίθετη προς την τελευταία περίπτωση, υποθέτουμε ότι το C(0) είναι πολύ μικρό, δηλαδή πολύ πιο κάτω από τον γ.τ. $\dot{k}=0$, σ' ένα σημείο όπως το D. Με βάση την (1.57), το $\dot{c}$ είναι επίσης πολύ μικρό, ενώ, με βάση την (1.51), το k θα είναι υψηλό. Συνεπώς, η οικονομία μετακινείται κατ' αρχήν προς τα πάνω και δεξιά, αλλά πολύ γρήγορα θα περάσει απέναντι από τη γραμμή $\dot{c}=0$, οπότε το μεν c θ' αρχίσει να μειώνεται το δε k θα συνεχίσει ν' αυξάνεται.

Επειδή $\dot{c}$ και k είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών c και k, έπεται ότι υπάρχει κάποιο σημείο μεταξύ C και D τέτοιο ώστε, αν η οικονομία ξεκινήσει από αυτό το σημείο, τότε θα περάσει από το σημείο E, όπου $\dot{c} = \dot{k} = 0$, οπότε θα παραμείνει εκεί. Στο Διάγραμμα 1.2, το σημείο αυτό σημειώνεται με F.

Στην προηγηθείσα συζήτηση επί του Διαγράμματος 1.2, κάθε τροχιά που εξετάσαμε ικανοποιεί μεν τις συνθήκες (1.51) και (1.57), αλλά όχι απαραίτητα και δύο ακόμη συνθήκες, τις οποίες πρέπει να λάβουμε υπ' όψη: τη συνθήκη μη **Ponzi παιγνίου (1.33)** και τον περιορισμό k>0. Λαμβάνοντας υπ' όψη τους δύο αυτούς περιορισμούς, θα δούμε τώρα ότι η μόνη δυνατή τροχιά των μεταβλητών c και k είναι αυτή που ξεκινά από το σημείο F και καταλήγει στο σημείο E. Οι υπόλοιπες αποκλείονται, διότι παραβιάζουν τους εν λόγω δύο περιορισμούς.

Κατ' αρχήν, ας εξετάσουμε τροχιές που ξεκινούν πάνω από το σημείο F. Όπως είδαμε, σ' αυτήν την περίπτωση, το c αυξάνεται και το k μειώνεται, είτε αμέσως (όταν η αφετηρία είναι πάνω από τον γ.τ. $\dot{k} = 0$), είτε μετά από λίγο (όταν η αφετηρία είναι κάτω από τον γ.τ. $\dot{k} = 0$,αλλά, όπως είπαμε, πάνω από το F). Από την (1.51), όμως, βλέπουμε ότι η συνεχής αύξηση του c και η συνεχής μείωση του k θα καταλήξει στο σημείο όπου k=0. Τώρα, για να συνεχίσει το c ν' αυξάνεται, έτσι ώστε να ικανοποιείται η (1.57), το k θα πρέπει να μειωθεί ακόμη περισσότερο, δηλαδή να γίνει αρνητικός αριθμός. Αυτό, όμως, δεν είναι δυνατό. Μόλις η οικονομία φθάσει στο σημείο όπου k=0, εκεί θα ισχύει και ότι y=0, οπότε c=0. Συνεπώς, η (2.57), η οποία θέλει το c ν' αυξάνεται, δεν θα ικανοποιείται. Αλλά, η (1.57) είναι αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση χρησιμότητας, οπότε, εφόσον κατά μήκος αυτής της τροχιάς η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, έπεται ότι το νοικοκυριό δεν θα επιλέξει μία τέτοια τροχιά.
Ας εξετάσουμε τώρα τροχιές που ξεκινούν κάτω από το σημείο F, π.χ. από το σημείο D. Όπως είδαμε παραπάνω, σ' αυτήν την περίπτωση, το k αυξάνεται συνεχώς, οπότε το f’(k) μειώνεται συνεχώς. Όταν το k ξεπεράσει το επίπεδο του «χρυσού κανόνα», δηλαδή για k > k_{GR}, τότε, αντί της (1.55), ισχύει ότι **f’(k)<g + n**. Αλλά, με βάση την (1.1), f’(k) = r. Συνεπώς, για k > k_{GR}, έχουμε ότι r < g + n. Συνεπώς, με βάση την (2.16), R(s) = $\bar{r}s$ < (g + n)s. Αυτό σημαίνει ότι στην (1.33), η οποία είναι $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(g+n)s-R(s)} \geq 0$, ο όρος $e^{(g+n)s-R(s)}$αυξάνει. Όπως προαναφέρθηκε, όμως, το k(s) επίσης αυξάνει συνεχώς, οπότε στην (1.33), καθώς το $s \to \infty$, $e^{(g+n)s-R(s)} \to \infty$. Αλλ' από την απόδειξη της (1.33) γνωρίζουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν η παρούσα αξία του εισοδήματος του νοικοκυριού είναι απείρως μεγαλύτερη της παρούσας αξίας της καταναλώσεως. Αν όμως συνέβαινε κάτι τέτοιο, τότε το νοικοκυριό θα μπορούσε ν' αυξήσει την κατανάλωσή του (και τη χρησιμότητά του) σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτό θα σήμαινε ότι το νοικοκυριό δεν μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του. Άρα αποκλείουμε και όλα τα σημεία κάτω από το σημείο F.

Τέλος, ας εξετάσουμε την τροχιά που ξεκινά από το σημείο F και φθάνει στο σημείο E, όπου ισχύει η (1.54) $f(k^*) = \rho + \theta g$ ή $r = \rho + \theta g$. Με βάση τη συνθήκη (1.56), όμως, έχουμε ότι $\rho + \theta g > g + n$, οπότε r > g + n και άρα $R(s) = \bar{r}s > (g+n)s$. Αυτό σημαίνει ότι στην (1.33), ο όρος $e^{(g+n)s-R(s)}$ μειώνεται με ρυθμό $\bar{r}-(g+n)=\rho+\theta g-(g+n)=\rho-n-(1-\theta)g=\beta>0$.Όπως προαναφέρθηκε, όμως, το k(s) συγκλίνει στο επίπεδο k*, όπου και παραμένει σταθερό, οπότε στην (1.33), καθώς το $s\to\infty$, $e^{(g+n)s-R(s)}\to 0$. Αυτό σημαίνει ότι το νοικοκυριό αφενός χρησιμοποιεί όλους τους πόρους του και αφετέρου δεν είναι χρεωμένο στο διηνεκές, δανειζόμενο συνεχώς για να πληρώνει τα χρέη του λίγο πριν λήξουν. Με άλλα λόγια, η τροχιά που ξεκινά από το σημείο F και φθάνει στο σημείο E ικανοποιεί:

1. τη συνθήκη μεγιστοποιήσεως της διαχρονικής χρησιμότητας (1.57)
2. τη συνθήκη εξελίξεως του k (1.51) και
3. την τερματική συνθήκη (terminal condition) ότι το νοικοκυριό δεν αφήνει αχρησιμοποίητους πόρους, αλλά ούτε και είναι χρεωμένο στο διηνεκές.

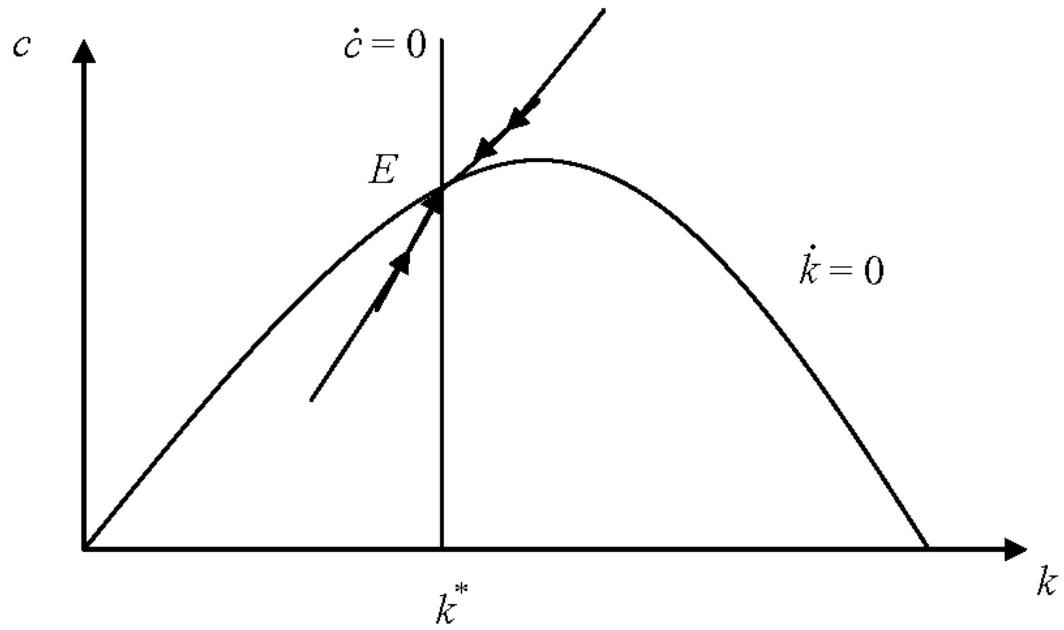
Εφόσον η τροχιά που ξεκινά από το σημείο F και φθάνει στο σημείο E είναι η μόνη που ικανοποιεί όλες αυτές οι συνθήκες και στο σημείο E τα c και k παραμένουν σταθερά διαχρονικά έπεται ότι η εν λόγω τροχιά είναι η μόνη δυνατή και το σημείο E είναι το μόνο δυνατό σημείο **ισορροπίας σταθερής καταστάσεως** (steady-state equilibrium).

1.3.5 Η σαγματική τροχιά

Στην προηγηθείσα ανάλυση, εξετάσαμε τη δυναμική της οικονομίας για μία συγκεκριμένη αρχική τιμή του k, k(0) < k* . Ωστόσο, για κάθε θετική αρχική τιμή του k, k(0) >0 O, υπάρχει μία αρχική τιμή του c, c(0), που ικανοποιεί

1. τη συνθήκη μεγιστοποιήσεως της διαχρονικής χρησιμότητας (1.57)
2. τη συνθήκη εξελίξεως του k (1.51) και
3. την τερματική συνθήκη ότι το νοικοκυριό δεν αφήνει αχρησιμοποίητους πόρους, ούτε είναι χρεωμένο στο διηνεκές.

Δηλαδή, το c(0) είναι μία συνάρτηση του k(0), η οποία ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες και η οποία παράγει τη μοναδική πορεία προς το σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως E. Η πορεία αυτή ονομάζεται **σαγματική τροχιά** (saddle path), από τη λέξη σάγμα, που σημαίνει σαμάρι, επειδή το σημείο E είναι ελάχιστο αν ξεκινήσουμε από επάνω, αλλά μέγιστο αν ξεκινήσουμε κάτω από αυτό (βλ. Διάγραμμα 1.3). Ονομάζεται και **τροχιά συγκλίσεως** (convergence path). Για κάθε k(0) > 0, υπάρχει ένα c(0) επί αυτής της τροχιάς και η οικονομία μετακινείται προς το σημείο E.



Διάγραμμα 1.3. Η σαγματική τροχιά

1.4 Ευημερία

Στα Διαγράμματα 1.2 και 1.3, είδαμε ότι η οικονομία καταλήγει στο σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως Ε. Το ερώτημα είναι αν σ' αυτό το σημείο μεγιστοποιείται η κοινωνική ευημερία. Εφόσον σ' αυτό το σημείο το «αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό» μεγιστοποιεί την ευημερία του και εφόσον όλα τα νοικοκυριά της οικονομίας είναι ίδια μεταξύ τους έπεται ότι στο σημείο Ε μεγιστοποιείται η κοινωνική ευημερία. Σύμφωνα με το **πρώτο θεμελιώδες θεώρημα ευημερίας**, το αποτέλεσμα που επιτυγχάνεται στο σημείο Ε είναι **άριστο κατά Pareto**, δηλαδή δεν είναι δυνατό ν' αυξηθεί παραπέρα η ευημερία ενός νοικοκυριού χωρίς να μειωθεί η ευημερία κάποιου άλλου.

Το εν λόγω θεώρημα λέει ότι αν

1. τα αγαθά ανταλλάσσονται σε αγορές όπου οι τιμές είναι σε όλους γνωστές
2. υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός νοικοκυριών και επιχειρήσεων (οπότε αποκλείονται παίγνια Ponzi), που συμπεριφέρονται ανταγωνιστικά, οπότε θεωρούν τις τιμές ως δεδομένες και
3. δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις

τότε το αποτέλεσμα της **αποκεντρωμένης** (decentralized) ή **ανταγωνιστικής** (competitive) αυτής οικονομίας είναι **άριστο κατά Pareto**. Οι προϋποθέσεις εφαρμογής αυτού του θεωρήματος υπάρχουν στη συγκεκριμένη περίπτωση που μας απασχολεί, οπότε ισχύει και το συμπέρασμα. Συνεπώς, αν ένας **κοινωνικός σχεδιαστής** (social planner) είχε την εξουσία να κάνει αυτός (αντί της αγοράς) την κατανομή των οικονομικών πόρων, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της κοινωνικής ευημερίας, δεν θα μπορούσε να επιτύχει καλύτερο αποτέλεσμα (με την έννοια του Pareto) από αυτό που επιτυγχάνει η αγορά.

1.5 Τροχιά ισόρροπου μεγεθύνσεως

Όπως είδαμε στα Διαγράμματα 1.1 - 1.3, η οικονομία συγκλίνει στο σημείο Ε, το οποίο είναι σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως. Από τη στιγμή που θα φθάσει εκεί και μετά, η συμπεριφορά της είναι ίδια με αυτή που προβλέπει το υπόδειγμα Solow-Swan. Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά της κάθε μίας μεταβλητής ξεχωριστά. Πρώτον, εφόσον στο σημείο Ε το k είναι σταθερό, όπου k = K/AL = (K/L)/A και εφόσον τα A και L αυξάνονται με ρυθμό g και n, αντίστοιχα, έπεται ότι το K αυξάνεται με ρυθμό g + n, ενώ το K/L αυξάνεται με ρυθμό g.

Δεύτερον, εφόσον το k είναι σταθερό και y = f(k), έπεται ότι το y είναι επίσης σταθερό, όπου y = Y/AL = (Y/L)/A. Συνεπώς, το y αυξάνεται με ρυθμό g + n, ενώ το Y/L αυξάνεται με ρυθμό g. Τρίτον, εφόσον στο σημείο Ε το c είναι σταθερό (όπου c = C/A και C = κατανάλωση κατά εργαζόμενο,), έπεται ότι το C αυξάνεται με ρυθμό g. Τέταρτον, η μέση ροπή προς αποταμίευση είναι S = S/Y, όπου Y = συνολικό προϊόν και S = συνολική αποταμίευση = Y – C'(όπου C' = συνολική κατανάλωση). Συνεπώς, η κατανάλωση κατά εργαζόμενο (C) γράφεται ως C = C'/L, από την οποία προκύπτει ότι C' = LC. Από τους ορισμούς αυτούς προκύπτει ότι s = SY = (Y – C')/Y = (Y - LC)/Y. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με AL, προκύπτει ότι S = (y - c)/y, εφόσον c = C/A. Συνεπώς, εφόσον s = (y - c)/y και στο σημείο Ε τα y και c είναι σταθερά, έπεται ότι στο σημείο Ε είναι και το s σταθερό.

Συνεπώς, το κεντρικό μήνυμα του υποδείγματος Solow-Swan παραμένει: ο ρυθμός μεγεθύνσεως της μέσης παραγωγικότητας της εργασίας (Y/L) ισούται με το ρυθμό μεγεθύνσεως της τεχνολογίας, g. Αν δεν υπάρχει πρόοδος της τεχνολογίας (g = 0), τότε ούτε αύξηση της παραγωγικότητας της εργασίας θα υπάρχει. Το γεγονός ότι στο παρόν υπόδειγμα το s δεν θεωρήθηκε εξωγενώς δεδομένο (όπως στο υπόδειγμα Solow-Swan), αλλά προσδιορίστηκε από την αριστοποιητική συμπεριφορά του νοικοκυριού, δεν μετέβαλε το κεντρικό αυτό συμπέρασμα του υποδείγματος Solow-Swan. Επίσης, δεν μετέβαλε και τα συμπεράσματα ότι υπάρχει ισορροπία σταθερής καταστάσεως και τροχιά ισόρροπου μεγεθύνσεως.

Η μόνη σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο υποδειγμάτων είναι ότι στο παρόν υπόδειγμα δεν είναι δυνατό να έχουμε ισορροπία σταθερής καταστάσεως για $k > k_{GR}$, ενώ αυτό ήταν δυνατό να συμβεί στο υπόδειγμα Solow-Swan για $s > s_{GR}$. Στο υπόδειγμα Solow-Swan για $s > s_{GR}$, το $c < c_{GR}$, οπότε τα νοικοκυριά θα ήθελαν να μειώσουν το s, μεταβαίνοντας έτσι στο σημείο $k = k_{GR}$, όπου μεγιστοποιείται το c. Επειδή, όμως, στο υπόδειγμα Solow-Swan το s θεωρείται εξωγενώς δεδομένο, έπεται ότι είναι πιθανό η οικονομία να φθάσει σε μία ισορροπία σταθερής καταστάσεως όπου $k > k_{GR}$. Στο υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans, αυτό δεν είναι δυνατό να συμβεί, διότι θα σήμαινε ότι το νοικοκυριό δεν μεγιστοποιεί τη διαχρονική του χρησιμότητα. Στο Διάγραμμα 1.3, έστω ότι η αρχική τιμή του k είναι $k(0) > k_{GR}$. Η αρχική τιμή του c θα πρέπει να είναι πάνω από την καμπύλη $\dot{k} = 0$ και επί της τροχιάς συγκλίσεως, διότι, όπως είδαμε, όλες οι άλλες τροχιές αποκλείονται. Επομένως, το k μειώνεται και φθάνει τελικά στο $k^* < k_{GR}$.

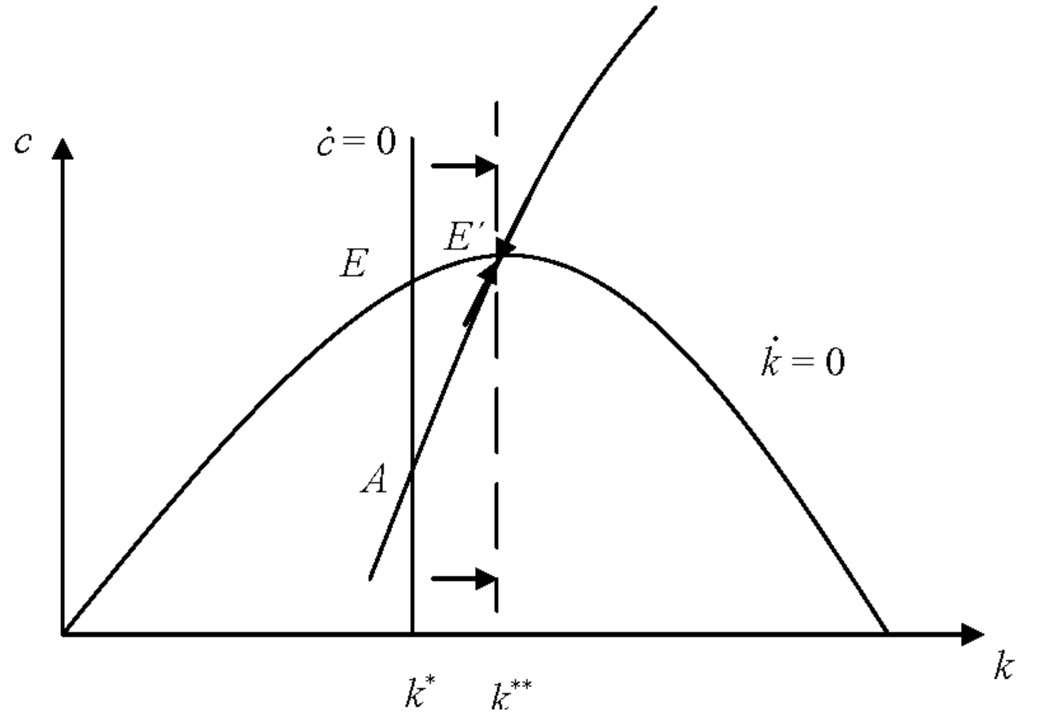
Όπως είδαμε στα Διαγράμματα 1.1 - 1.3, η οικονομία συγκλίνει στο σημείο Ε, το οποίο είναι σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως, αλλά σ' αυτό το σημείο δεν μεγιστοποιείται το c. εφόσον $k^* < k_{GR}$. Επομένως, τίθεται το ακόλουθο ερώτημα: Εφόσον στο υπόδειγμα Ramsey-Cass- Koopmans το s δεν είναι εξωγενώς δεδομένο, αλλά τα νοικοκυριά αποφασίζουν ποιά θα είναι η τιμή του, τότε γιατί δεν επιλέγουν εκείνο το s που μεγιστοποιεί το c. Εφόσον $k < k_{GR}$, έπεται ότι για ν' αυξηθεί το k πέρα από το επίπεδο k* και να φθάσει στο επίπεδο k_{GR}, θα χρειαζόταν αύξηση της αποταμιεύσεως, δηλαδή μείωση της σημερινής καταναλώσεως. (Βλ. Διάγραμμα 1.1, όπου στα δεξιά του k* το c μειώνεται.) Επειδή, όμως, ρ > 0, δηλαδή τα νοικοκυριά προτιμούν τη σημερινή από τη μελλοντική κατανάλωση, δεν κάμνουν αυτή τη θυσία προκειμένου να επιτύχουν το επίπεδο k_{GR}, διότι αυτό θα μείωνε τη διαχρονική χρησιμότητά τους. 'Ετσι, παραμένουν στο σημείο Ε, όπου $k = k^* < k_{GR}$ είναι το άριστο επίπεδο του k. Συνεπώς, αντί της συνθήκης του «χρυσού κανόνα», $f'(k_{GR}) = g + n$ [Εξ. (1.55)], το άριστο αποτέλεσμα εδώ επιτυγχάνεται όταν ισχύει η συνθήκη $f'(k^*) = \rho + \theta g$ [Εξ. (1.54)]. Η συνθήκη αυτή ονομάζεται «**τροποποιημένος χρυσός κανόνας συσσωρεύσεως κεφαλαίου**» (modified golden rule).

1.6 Οι επιδράσεις μιάς μείωσης του ρ

Ας υποθέσουμε ότι η οικονομία βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία σταθερής καταστάσεως, όταν ξαφνικά συμβαίνει μία μείωση του ρ. Θα υποθέσουμε ότι η μείωση αυτή είναι μόνιμη. Δηλαδή, τα νοικοκυριά γίνονται λιγότερο ανυπόμονα για κατανάλωση στο παρόν παρά στο μέλλον. (Στο υπόδειγμα Solow-Swan, η μείωση του ρ αντιστοιχεί σε μία αύξηση του s.)

1.6.1 Οι ποιοτικές επιδράσεις της μειώσεως του ρ

Από την (1.54), . $f'(k^*) = \rho + \theta g$, και από το γεγονός ότι $f''(k) < O$, συμπεραίνουμε ότι η μείωση του ρ θα οδηγήσει τελικά σε αύξηση του k . Συνεπώς, στα Διαγράμματα 1.1 – 1 .3, ο γ.τ. $\dot{c} = 0$, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $f'(k) = \rho + \theta g$ [βλ. Εξ. (1.45)], θα μετατοπισθεί προς τα δεξιά. Διότι, εφόσον μειώνεται το ρ, έπεται ότι, στο τρέχον επίπεδο του k, θα ισχύει ότι $f'(k) > \rho + \theta g$. Άρα, για κάθε επίπεδο του c, θ' απαιτείται μεγαλύτερο k, για να επανέλθει η ισότητα $f'(k) = \rho + \theta g$ και να ισχύει και πάλι ότι $\dot{c}(t) = 0$. Από την (1.45), όμως, είναι φανερό ότι το άμεσο αποτέλεσμα της μειώσεως του ρ είναι η αύξηση του $\dot{c}(t)/c(t)$, η οποία είναι δυνατή μόνο με τη μείωση του c(t), εφόσον για ν' αυξηθεί η μελλοντική κατανάλωση πρέπει να μειωθεί η τρέχουσα.



Διάγραμμα 1.4. Τα αποτελέσματα μίας μείωσης του ρ

Στο Διάγραμμα 1.4, η μείωση του ρ έχει ως άμεσο αποτέλεσμα τη μετατόπιση της τροχιάς συγκλίσεως προς τα κάτω, έτσι ώστε να τέμνει το γ.τ. $\dot{c}=0$ σ' ένα σημείο όπως το Α. Από την (1.51), $\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(g+n)k(t)$, είναι φανερό ότι η μείωση του c(t) σημαίνει ότι $\dot{k}(t)>0$, οπότε το k θ' αρχίσει ν' αυξάνεται. Συνεπώς, τα y και c επίσης θ' αυξάνονται μέχρι να φθάσουν στη νέα ισορροπία σταθερής καταστάσεως, στο σημείο Ε, όπου k = k** > k*. Όπως μία μόνιμη αύξηση του s στο υπόδειγμα Solow-Swan είχε ως συνέπεια την προσωρινή αύξηση στους ρυθμούς μεγεθύνσεως r_K και $r_{Y/L}$ (βλ. Διαγράμματα 1.4 και 1.6), έτσι κι εδώ, μία μόνιμη μείωση του ρ αυξάνει προσωρινά τους ρυθμούς αυτούς.

Ας εξετάσουμε τώρα μία ποσοτική προσέγγιση του ρυθμού μεταβολής των μεταβλητών c και k προς το σημείο ισορροπίας σταθερής καταστάσεως, (k* , c*), όταν οι τιμές των μεταβλητών αυτών απομακρύνονται από αυτό το σημείο εξ αιτίας κάποιας διαταράξεως, όπως είναι π.χ. μία μείωση του ρ. Ο ευκολότερος τρόπος να επιτύχουμε μία τέτοια προσέγγιση είναι να πάρουμε γραμμικές προσεγγίσεις των Εξ. (1.45) και (1.51), οι οποίες, όπως είδαμε, περιγράφουν τη δυναμική των μεταβλητών c και k. Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν τις μεταβλητές $\dot{c}$ και $\dot{k}$ ως μη γραμμικές συναρτήσεις των c και k, οπότε μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{c}(k^*,c^*)$$

και

$$\dot{k}(k^*, c^*)$$

Η προσέγγιση αυτών των εξισώσεων με πολυώνυμα πρώτου βαθμού κατά Taylor είναι:

$$\dot{c} = \left(\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \bigg|_{c=c^*}^{k=k^*} \right)(k-k^*) + \left(\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \bigg|_{c=c^*}^{k=k^*} \right)(c-c^*) \qquad \textbf{(1.58)}$$

$$\dot{k} = \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \bigg|_{c=c^*}^{k=k^*} \right)(k-k^*) + \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \bigg|_{c=c^*}^{k=k^*} \right)(c-c^*) \qquad \textbf{(1.59)}$$

Όπου ο συμβολισμός $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \bigg|_{c=c^*}^{k=k^*}$ σημαίνει ότι η παράγωγος $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ εκτιμάται στο σημείο (k*,c*). Ας σημειωθεί ότι, χάριν πληρότητας, στην Εξ. (1.58) θα έπρεπε να υπάρχει και ένας όρος $\dot{c}(k^*, c^*)$, ενώ στην εξίσωση (1.59) θα έπρεπε να υπάρχει και ένας όρος $\dot{k}(k^*, c^*)$. Οι όροι αυτοί παραλείπονται, διότι στο σημείο (k*,c*) οι συναρτήσεις $\dot{c} = \dot{c}(k,c)$ και $\dot{k} = \dot{k}(k,c)$ παίρνουν την τιμή 0.

Ας ορίσουμε τώρα τις ακόλουθες δύο μεταβλητές:

$$\tilde{c} = c - c^* \qquad \textbf{(1.60)}$$

και

$$\tilde{k} = k - k^* \qquad \textbf{(1.61)}$$

Προφανώς εφόσον k* και c* είναι σταθερές από τους ορισμούς (1.60) και (1,61) προκύπτει ότι :

$$\tilde{c} = \dot{c} \qquad \textbf{(1.62)}$$

Και

$$\tilde{k} = \dot{k} \qquad \textbf{(1.63)}$$

Με βάση τις (1.60) - (1.63), οι Εξ. (1.58) - (1.59) γράφονται ως εξής:

$$\dot{\tilde{c}} = \left(\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} \right) \tilde{k} + \left(\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} \right) \tilde{c} \qquad \textbf{(1.64)}$$

$$\dot{\tilde{k}} = \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} \right) \tilde{k} + \left(\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} \right) \tilde{c} \qquad \textbf{(1.65)}$$

Από την Εξ. (1.57), όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\dot{c}(t) = c(t)\left[f'(k(t)) - \rho - \theta g \right] / \theta$$

οπότε υπολογίζουμε

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} = c* f''(k*) / \theta$$

και

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} = [\, f'(k*) - \rho - \theta g \,] / \theta = 0$$

Αντικαθιστώντας τα δύο αυτά αποτελέσματα στην (1.64), προκύπτει ότι

$$\dot{\tilde{c}} \approx \frac{f''(k*)c*}{\theta} \tilde{k} \qquad \textbf{(1.66)}$$

Επίσης από την Εξ. (1.51), γνωρίζουμε ότι

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (g+n)k(t)$$

Οπότε υπολογίζουμε από Εξ. (1.54) και (1.26) ότι :

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \bigg|_{c=c*}^{k=k*} = f'(k*) - (g+n) = (\rho + \theta g) - (g+n) = \beta$$

και

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}\Bigg|\begin{matrix} k = k^* \\ c = c^* \end{matrix} = -1$$

Αντικαθιστώντας τα δύο αυτά αποτελέσματα στην (1.65), προκύπτει ότι

$$\dot{\tilde{k}} \approx \beta\tilde{k} - \tilde{c} \qquad \textbf{(1.67)}$$

Διαιρώντας την Εξ. (1.66) με $\tilde{c}$ και την (1.67) με $\tilde{k}$, προκύπτει το ακόλουθο σύστημα:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{\tilde{k}}{\tilde{c}} \qquad \textbf{(2.68)}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} \approx \beta - \frac{\tilde{c}}{\tilde{k}} \qquad \textbf{(2.69)}$$

Οι Εξ. (1.68) και (1.69) δείχνουν ότι οι ρυθμοί μεγεθύνσεως των μεταβλητών $\tilde{c}$ και $\tilde{k}$ εξαρτώνται μόνο από το λόγο $\tilde{c}/\tilde{k}$. Υποθέσατε ότι ο λόγος αυτός είναι σταθερός, που σημαίνει ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής μεταβάλλονται προς την ίδια κατεύθυνση και με τον ίδιο ρυθμό, έστω μ, δηλαδή

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \mu \qquad \textbf{(1.70)}$$

Αντικαθιστώντας την (1.70) στην (1.68) και λύνοντας ως προς $\tilde{c}/\tilde{k}$, προκύπτει ότι

$$\frac{\tilde{c}}{\tilde{k}} \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta}\frac{1}{\mu} \qquad \textbf{(1.71)}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (1.70) και (1.71) στην (1.69), προκύπτει η εξίσωση

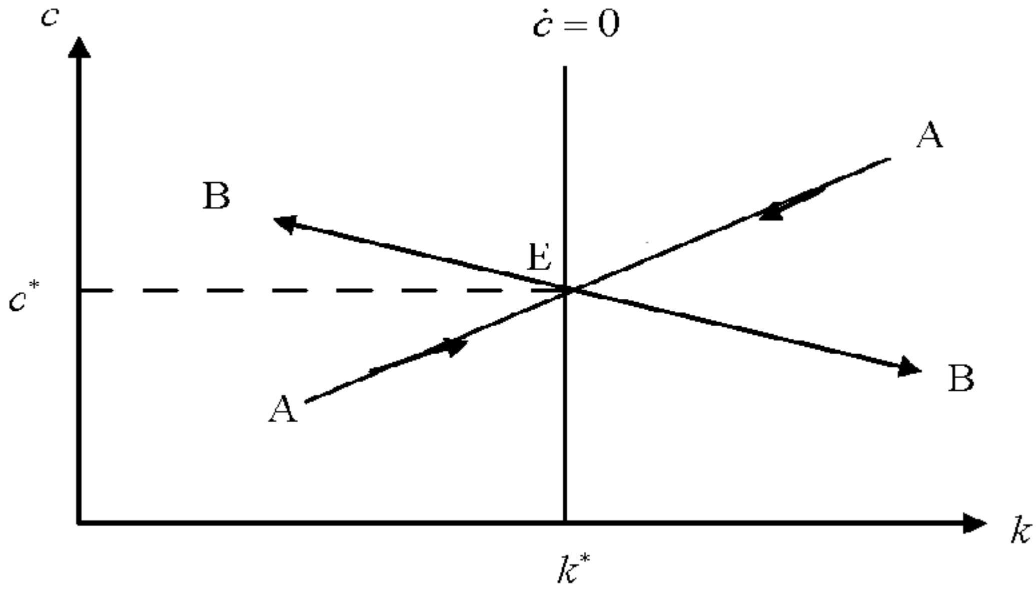
$$\mu^2 - \beta\mu + f''(k^*)c^*/\theta = 0 \qquad \textbf{(1.72)}$$

Οι δύο ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι :

$$\mu_1 = \left[\beta - \sqrt{\left[\beta^2 - 4f''(k^*)c^*/\theta\right]}\right]/2 \qquad \textbf{(1.73)}$$

$$\mu_2 = \left[\beta + \sqrt{\left[\beta^2 - 4f''(k^*)c^*/\theta\right]}\right]/2 \qquad \textbf{(1.74)}$$

Εφόσον υποθέτουμε ότι β > O [Εξ. (1.27)], f” <0 O και θ > 0 [Εξ. (1.7)], έπεται ότι $\mu_2 > 0$. Από την Εξ. (1.70), βλέπουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση (δηλαδή όταν μ> O) οι απόλυτες τιμές των $\tilde{c} = c - c^*$ και $\tilde{k} = k - k^*$ αυξάνονται, που σημαίνει ότι οι τιμές των c και k απομακρύνονται από τις τιμές c* και k* , αντίστοιχα. Δηλαδή, για μ > 0, αν η οικονομία βρίσκεται εκτός του σημείου (k*, c*), τότε δεν συγκλίνει σ' αυτό το σημείο. Από την Εξ. (1.71), βλέπουμε ότι, σ' αυτή την περίπτωση (δηλαδή όταν μ > O), οι μεταβλητές $\tilde{c}$ και $\tilde{k}$ (άρα και οι μεταβλητές c και k) συνδέονται με μία γραμμική σχέση που έχει αρνητική κλίση, εφόσον f"(k*) < O και θ > 0. Στο Διάγραμμα 1.5, η σχέση αυτή παριστάνεται με τη γραμμή ΒΒ.



Διάγραμμα 1.5. Διάγραμμα φάσεως για το γραμμικοποιημένο σύστημα

Αποκλείουμε την περίπτωση η αρχική τιμή του (k, c), (k(0), c(0)), να βρίσκεται πάνω στη γραμμή ΒΒ, οπότε απορρίπτουμε τη ρίζα μ_2. Διότι, αν μεν το σημείο (k(0), C(0)) βρισκόταν στ' αριστερά του σημείου (k*, c*) και πάνω στη γραμμή ΒΒ, τότε το k θα μειωνόταν συνεχώς και θα παραβιαζόταν τελικά ο περιορισμός k ≥ 0 ενώ, αν βρισκόταν στα δεξιά του σημείου (k*, c*) και πάνω στη γραμμή ΒΒ, τότε το k (άρα και το y) θα αυξανόταν συνεχώς, δηλαδή τα νοικοκυριά θα κατανάλωναν όλο και λιγότερο, ενώ θα είχαν τη δυνατότητα να καταναλώνουν όλο και περισσότερο. Όπως είδαμε στο Τμήμα 1.3.4, όμως, τα νοικοκυριά δεν κάνουν τέτοιες επιλογές.

Για να συγκλίνει η οικονομία στο σημείο (k*, c*), πρέπει οι απόλυτες τιμές των διαφορών $\tilde{c} = c - c^*$ και $\tilde{k} = k - k^*$ να μειώνονται σταδιακά μέχρις ότου μηδενισθούν. Από την Εξ. (1.70), βλέπουμε ότι για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να ισχύει ότι μ < 0. Υποθέτουμε, συνεπώς, ότι $\mu_1 < 0$, δηλαδή ότι οι διαφορές $\tilde{c}$ και $\tilde{k}$ μειώνονται με τον ίδιο ρυθμό. Από την Εξ. (1.71), βλέπουμε ότι όταν μ < 0, οι μεταβλητές c και k συνδέονται με μία γραμμική σχέση που έχει θετική κλίση. Στο Διάγραμμα 1.5, η σχέση αυτή παριστάνεται με τη γραμμή ΑΑ, η οποία είναι η σαγματική τροχιά.

Ας περιγράψουμε τώρα τη δυναμική των μεταβλητών c και k με εξισώσεις για την περίπτωση $\mu = \mu_1$. Κατ' αρχήν, με βάση την Εξ. (1.71), εφόσον $\tilde{c} \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta\mu}\tilde{k}$ ή $c \approx \frac{f''(k^*)c^*}{\theta\mu}(k - k^*) + c^*$, έπεται ότι η αρχική τιμή του c, c(0), δίνεται από την εξίσωση

$$c = \frac{f''(k^*)c^*}{\theta\mu_1}(k(0) - k^*) + c^* = c^*\left[\frac{f''(k^*)}{\theta\mu_1}(k(0) - k^*) + 1\right] \quad \textbf{(1.75)}$$

Για να βρούμε πώς εξελίσσονται κατόπιν οι τιμές των μεταβλητών c και k, παίρνουμε από την Εξ. (1.70) τις ακόλουθες δύο γραμμικές διαφορικές εξισώσεις: $\frac{d\tilde{c}}{dt} = \tilde{c}\mu_1$ και $\frac{d\tilde{k}}{dt} = \tilde{k}\mu_1$ ή

$$\frac{d\tilde{c}(t)}{dt} - \mu_1\tilde{c}(t) = 0 \quad \textbf{(1.76)}$$

και

$$\frac{d\tilde{k}(t)}{dt} - \mu_1\tilde{k}(t) = 0 \quad \textbf{(1.77)}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (1.49), όπου p(t) = - μ_1 και q(t) = 0, η γενική λύση της (1.76) είναι :

$$\tilde{c}(t) = e^{-\int(-\mu_1)dt}\left[\int 0 e^{\int(-\mu_1)dt} + b_c\right] = b_c e^{\mu_1 t}$$

όπου b_c είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Για να προσδιορίσουμε την τιμή της, θέτουμε στην τελευταία εξίσωση όπου t = O, οπότε προκύπτει ότι $b_c = \tilde{c}(0) = c(0) - c^*$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του b_c στη γενική λύση, προκύπτει ότι $\tilde{c}(t) = [c(0) - c^*]e^{\mu_1 t}$ ή $c(t) - c^* = [c(0) - c^*]e^{\mu_1 t}$ ή

$$c(t) = [c(0) - c^*]e^{\mu_1 t} + c^* \quad \textbf{(1.78)}$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε και ότι

$$k(t) = \left[k(0) - k^*\right]e^{\mu_1 t} + k^* \qquad \textbf{(1.79)}$$

Η Εξ. (1.78), η οποία μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{c(t) - c^*}{c(0) - c^*} = e^{\mu_1 t} \qquad (1.78α)$$

ερμηνεύεται ως εξής: η απόσταση c(t) – c* , η οποία απομένει έως ότου το c συγκλίνει στο c*, μετρούμενη ως κλάσμα της συνολικής αποστάσεως, c(0) - c, η οποία πρέπει να διανυθεί αν η οικονομία ξεκινήσει από t = 0, μειώνεται με ετήσιο ρυθμό – μ_1 > 0, όπου το μ_1 ορίζεται από την Εξ. (1.73), εφόσον η ρίζα που δίνεται από την Εξ. (1.74) έχει απορριφθεί, διότι όταν μ > O, τότε δεν οδηγούμεθα σε σύγκλιση. Ανάλογη είναι και η ερμηνεία της (1.79).

1.6.3 Η ταχύτητα συγκλίσεως στο σημείο (k*,c*)

Προκειμένου να καταλάβουμε το ρόλο των παραμέτρων του συστήματος στην ταχύτητα συγκλίσεως της οικονομίας στο σημείο (k*, c*) και να συγκρίνουμε αυτή την ταχύτητα με την ταχύτητα συγκλίσεως που έχουμε στο υπόδειγμα Solow-Swan, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής Cobb-Douglas, δηλαδή $f(k) = k^a$, οπότε $f'(k^*) = a(a-1)(k^*)^{a-2}$. Σ' αυτή την περίπτωση, η (1.52) δίνει $c^* = (k^*)^a - (g-n)k^*$, οπότε η Εξ. (1.73) γράφεται ως εξής:

$$\mu_1 = \left[\beta - \sqrt{\left[\beta^2 - 4\alpha(\alpha-1)(k^*)^{a-2}\right]\left[(k^*)^a - (g+n)k^*]/\theta\right]}\right]/2$$

$$\mu_1 = \left[\beta - \sqrt{\left[\beta^2 - 4\alpha(\alpha-1)(k^*)^{2(a-1)}/\theta + 4\alpha(\alpha-1)(k^*)^{\alpha-1}(g+n)]/\theta\right]}\right]/2 \qquad \textbf{(1.80)}$$

Ας σημειωθεί και πάλι ότι ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε την Εξ. (1.74) είναι ότι η ρίζα μ_2 > 0 έχει απορριφθεί. Για να υπολογίσουμε την τιμή του k*, χρησιμοποιούμε την (1.54) $f'(k^*) = \rho + \theta g$. Συνεπώς, έχουμε ότι $a(k^*)^{a-1} = \rho + \theta g$, από την οποία προκύπτει ότι

$$k^* = \left(\frac{\rho + \theta g}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} \qquad \textbf{(1.81)}$$

Αντικαθιστώντας την (1.81) στην (1.80) και κάνοντας πράξεις, προκύπτει ότι

$$\mu_1 = \left[\beta - \sqrt{\left[\beta^2 + \left[4(\alpha-1)(\rho+\theta g)/(a\theta)\right)\right]\left[(\rho + \theta g - a(g+n)\right]\right]}\right]/2 \qquad \textbf{(1.82)}$$

Έστω, για παράδειγμα, ότι α = 1/3, ρ = 0,04, n = 0,02, g = 0,01 και θ = 1. Συνεπώς, με βάση την Εξ. (1.26),

B = ρ – n – (1- θ) g = **0,04 -0,02 – 0 = 0,**

ενώ με βάση την (1.81), υπολογίζουμε ότι k* = 17,213. Συνεπώς, σε ισορροπία σταθερής καταστάσεως, έχουμε

$$y^* = (k^*)^a = 17,213^{1/3} = 2,582$$

$$c^* = (k^*)^a - (g+n)k^* = 2,582 - (0,01+0,02)17,213 = 2,066$$

$$s^* = (y^* - c^*)/y^* = (2,582 - 2,066)/2,582 = 0,2$$

$$r^* = f'(k^*) = a(k^*)^{a-1} = (1/3)17,213^{-2/3} = 0,05$$

$$\mu_1 = -,054$$

Το τελευταίο, σύμφωνα με την (1.78α), σημαίνει ότι η απόσταση c(t) – c* , η οποία απομένει έως ότου το c συγκλίνει στο c*, μετρούμενη ως κλάσμα της συνολικής αποστάσεως, c(0) – c*, μειώνεται με ετήσιο ρυθμό 5,4%. Με τα ίδια δεδομένα, στο υπόδειγμα Solow-Swan ο ρυθμός συγκλίσεως θα ήταν μόνο 2%. Ο λόγος για τον οποίο η σύγκλιση πραγματοποιείται πιο γρήγορα εδώ είναι ότι στο υπόδειγμα Solow-Swan το ποσοστό του εισοδήματος που αποταμιεύεται είναι σταθερό και ίσο με s, ενώ εδώ, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, για k < k*, το ποσοστό αυτό, s(t), είναι μεγαλύτερο από ό,τι είναι όταν k = k* , δηλαδή s(t) > s , οπότε αυξάνονται οι επενδύσεις- ενώ, για k > k*, ισχύει ότι s(t) < s* , οπότε μειώνονται οι επενδύσεις.

Πράγματι, εφόσον:

1. μας ενδιαφέρει το σημείο (k(0), c(0)), διότι θέλουμε ν' απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα: «αν ξεκινήσουμε από ένα αρχικό σημείο (k(0), c(0)), πόσο γρήγορα θα φθάσουμε στο σημείο (k*, c*).
2. εξ ορισμού, έχουμε ότι $s(t) = [y(t) - c(t)]/y(t) = 1 - c(t)/y(t)$
3. από την Εξ. (1.75) έχουμε ότι $c(0) = c^*[1 + f''(k^*)[k(0) - k^*]/(\theta\mu_1)]$ και
4. για τα παραπάνω δεδομένα, έχουμε ότι Υ(t) $y(t) = f(k(t)) = k(t)^{1/3}$, οπότε $f'(k) = k^{-2/3}/3$), και άρα $f''(k) = -2k^{-5/3}/9 = -0,001937$ έπεται ότι

$$s = 1 - c^*\{1 + f''(k^*)[k(0) - k^*]/(\theta\mu_1)\}/f(k) = 1 - 2,066[1 + 0,0358619(k(0) - 17,213)]/k(0)^{1/3}$$

(1.83)

Από την Εξ. (1.83), υπολογίζουμε ότι όταν $k(0) = k^* = 17,213$, τότε $s^* = 1 - 2,066/17,213^{1/3} = 0,20$ (όπως ακριβώς βρήκαμε και πιο πάνω). Όταν, όμως, $k(0) < 17,213$, τότε $s > 0,20$ ενώ, όταν $k(0) < 17,213$, τότε $s > 0,20$. Συνεπώς, επιβεβαιώνεται ο παραπάνω ισχυρισμός μας.

2. Αριθμητική επίλυση του μοντέλου RAMSEY – CASS – COOPMANS στην σταθερή κατάσταση

Η παραγωγικότητα του κεφαλαίου και το προεξοφλητικό επιτόκιο για μελλοντική κατανάλωση είναι πιο σημαντικοί παράγοντες για την οικονομική ανάπτυξη από το κόστος χρηματοοικονομικής διαμεσολάβησης. Χρησιμοποιώντας αναλυτικά και αριθμητικά παραδείγματα από το μοντέλο του Ramsey, αυτή η μελέτη απεικονίζει πώς οι παράμετροι των προτιμήσεων στην κατανάλωση, της παραγωγικότητας καθώς επίσης και ο ρυθμός απόσβεσης του κεφαλαίου και του κόστους της χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης αλληλεπιδρούν και προσδιορίζουν τα επίπεδα της παραγωγής, κατανάλωσης, επενδύσεων και μετοχικού κεφαλαίου σε μια αναπτυσσόμενη οικονομία.

Το μοντέλο του Ramsey (1928) σχετικά με τη βέλτιστης κατανάλωση και τις αποταμιεύσεις σε μια αναπτυσσόμενη οικονομία, το οποίο επεκτάθηκε από τους Goodwin (1961) και Cass (1965) καθώς και από άλλους, εφαρμόζεται συχνά στην ανάλυση της κατανάλωσης, αποταμιεύσεων, επενδύσεων και την συσσώρευση κεφαλαίων. Επικεντρώνεται στο βέλτιστο ποσοστό της αποταμίευσης και στη μακροπρόθεσμη ανάπτυξη σε αντίθεση με ένα μοντέλο με ένα συνεχές και εξωγενές σταθερό επιτόκιο αποταμιεύσεων το οποίο ασχολείται με τις διακυμάνσεις στη βραχυπρόθεσμη περίοδο όπως τα μοντέλα του Keynes (1936), Hicks (1937) και των συνεχιστών τους. Το μοντέλο Ramsey χρησιμοποιείται κυρίως τα τελευταία χρόνια σαν benchmarking για αναλύσεις σχετικές με τη κατανάλωση και τις αποταμιεύσεις. Επιπλέον, είναι δύσκολο να βρεθεί μια άλλη μελέτη που να συνδέει την παραγωγικότητα του μετοχικού κεφαλαίου , το κόστος της χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης καθώς και τις επιπτώσεις αυτών στην κατανάλωση, την αποταμίευση, τις επενδύσεις ,την συσσώρευση κεφαλαίου και την οικονομική ανάπτυξη. Χρησιμοποιώντας αναλυτικές λύσεις και αριθμητικά παραδείγματα αυτή η μελέτη δείχνει πως η παραγωγή, το μετοχικό κεφάλαιο, η κατανάλωση και η αποταμίευση μπορεί να αλληλεπιδρούν με τις παραμέτρους των προτιμήσεων, της παραγωγής και της χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης σε μια αναπτυσσόμενη οικονομία. Οι αναλύσεις που περιέχονται εδώ συμπληρώνουν άλλες μελέτες που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία στην Εφαρμοσμένη Οικονομική τα τελευταία χρόνια , που χρησιμοποιούν είτε ένα υπόδειγμα VAR για την ώθηση αναλύσεις απάντηση ή μακροοικονομικά μοντέλα για προσομοιώσεις ή πάνελ ή πολλαπλά μοντέλα παλινδρόμησης για την εξέταση οικονομικών υποθέσεων,π.χ. Dawson (2003), Kim (2003), Ataullah et al. (2004), Liu και Shu (2004), Mallick (2004), Πάρκο και Lim (2004).

Ο Ramsey (1928),μέσα από το μοντέλο του βελτιστοποιεί την ωφέλεια από την κατανάλωση σε κάθε περίοδο ενώ ταυτόχρονα οι αποταμιεύσεις με τις επενδύσεις βρίσκονται σε ισορροπία. Η επένδυση δημιουργεί επιπλέον μετοχικό κεφάλαιο και βελτιώνει τα επίπεδα παραγωγής της οικονομίας. Το μοντέλο του Ramsey μπορεί να εκφραστεί με πέντε συναρτήσεις, επεξηγώντας έτσι τη χρησιμότητα ενός αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού, της παραγωγή μιας επιχείρησης, τη διαδικασία συσσώρευσης κεφαλαίου, προϋποθέσεις δηλαδή για την εκκαθάριση της αγοράς και την αρχικό στάδιο της οικονομίας:

Προτιμήσεις:

$$\text{Max}\, U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(C_t) \quad 0 < \beta < 1 \qquad (1)$$

Υπόκεινται στην παραγωγή και σε τεχνολογικούς περιορισμούς:

$$Y_t = AK_t^{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (2)$$

Συνθήκες εκκαθάρισης αγοράς:

$$C_t + I_t = Y_t \qquad (3)$$

Δημιουργία κεφαλαίου:

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_t \quad 0 < \delta < 1 \qquad (4)$$

Οριακή συνθήκη

:

$$K_0 = K_0 \qquad (5)$$

Η λύση για τη βέλτιστη κατανάλωση στο συγκεκριμένο μοντέλο μπορεί να επιτευχθεί αντικαθιστώντας την κατανάλωση (C) από τη σχέση 3 (συνθήκη εκκαθάρισης αγοράς) στη σχέση 1 (συνάρτηση χρησιμότητας) και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας . Επίσης πρέπει να αναλυθούν οι βέλτιστες συνθήκες για οποιαδήποτε από τις δύο περιόδους από πλευράς ελέγχου και μεταβλητών κατάστασης που εφαρμόζεται σε όλες τις άλλες χρονικές περιόδους στο μοντέλο. Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει:

$$\bar{C}_t = Y_t - I_t \rightarrow C_t = AK_t^{\alpha} - K_{t+1} - K_t(1-\delta) \qquad (6)$$

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(AK_t^{\alpha} - K_{t+1} + K_t(1-\delta)\right) \qquad (7)$$

Δυο διαδοχικές χρονικοί περίοδοι, διαμορφώνουν την συνάρτηση χρησιμότητας ως εξής:

$$\begin{aligned} U_t = &+ \beta^t \ln\left(AK_t^{\alpha} - K_{t+1} + K_t(1-\delta)\right) \\ &+ \beta^{t+1} \ln\left(AK_{t+1}^{\alpha} - K_{t+2} + K_{t+1}(1-\delta)\right) + \cdots + \end{aligned} \qquad (8)$$

Για το βέλτιστο επίπεδο κατανάλωσης και αποταμίευσης, η απώλεια χρησιμότητα από τη μη κατανάλωση την περίοδο t θα πρέπει να ισούται με κέρδος από την από την παραγωγή την επόμενη περίοδο, t+1. Αυτό μπορεί να εξακριβωθεί συγκρίνοντας την συνθήκη πρώτης τάξης ή εξίσωση Euler λαμβάνοντας την κατανάλωση και την επένδυση σαν ελεγχόμενες μεταβλητές και το μετοχικού κεφαλαίο ως μεταβλητή κατάστασης.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_t}{\partial C_t}\frac{\partial C_t}{\partial C_{t+1}}\frac{\partial C_{t+1}}{\partial K_{t+1}} &= +\frac{\beta^t}{C_t} + \frac{\beta^{t+1}}{C_{t+1}}\left(\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) + \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\rightarrow \frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta\left(\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \qquad (10)$$

Αυτή η εξίσωση υποδηλώνει ότι η αναλογία της κατανάλωσης μεταξύ δύο περιόδων θα πρέπει να ισούται με την προεξοφλημένη αξία του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου στην επόμενη περίοδο, και σε μια ανταγωνιστική ισορροπία αυτή θα πρέπει να ισούται με το ακαθάριστο επιτόκιο.

Το επίπεδο της κατανάλωσης και το μετοχικό κεφάλαιο είναι σταθερά σε σταθερή κατάσταση είναι:

$$\cdots = K_{t-1} = K_t = K_{t+1} = \cdots = \overline{K} \text{ and } \cdots = C_{t-1} = C_t = C_{t+1} = \cdots = \overline{C}.$$

Όταν σε αυτή τη σταθερή κατάσταση η τιμή του μετοχικού κεφαλαίου αντικαθίσταται από τη σχέση 7, η χρησιμότητα γίνεται σταθερός αριθμός και ο όρος Κ μπορεί να ληφθεί από το σημείο άθροισης ως εξής:

$$U_t = \ln(A\overline{K}^{\alpha} - \underline{K} + \overline{K}(1-\delta)) \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t.$$

Στη σταθερή κατάσταση το μετοχικό κεφάλαιο Κ μπορεί να βρεθεί με τη χρησιμοποίηση σταθερών τιμών στην κατανάλωση. Η σχέση 10 λοιπόν γίνεται:

$$\begin{aligned}
\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{\overline{C}}{\overline{C}} &= \beta\left(\alpha A\overline{K}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \to \left(\alpha A\overline{K}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\beta}\right) \to \left(\overline{K}^{\alpha-1}\right) = \frac{1}{\alpha A}\left(\frac{1}{\beta} - (1-\delta)\right) \\
&\times \left(\overline{K}^{\alpha-1}\right) = \frac{1}{\alpha A}\left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta}\right) \to \overline{K} \\
&= \left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\alpha A\beta}\right)^{1/(\alpha-1)} \to \overline{K} \\
&= \left(\frac{\alpha A\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (11)
\end{aligned}$$

Η παραγωγή σε σταθερή κατάσταση διαμορφώνεται με την αντικατάσταση του μετοχικού κεφαλαίου στην συνάρτηση παραγωγής:

$$\overline{Y} = A\overline{K}^{\alpha} \to \overline{Y} = A^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}\left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta(1-\delta)}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \qquad (12)$$

Αντίστοιχα για τις επενδύσεις και την κατανάλωση ισχύει:

$$\bar{I} = \overline{K} - (1 - \delta)\overline{K} \rightarrow \bar{I} = \delta\overline{K} \rightarrow \bar{I} = \delta\overline{K}$$
$$= \delta\left(\frac{\alpha A\beta}{1 - \beta(1 - \delta)}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (13)$$
$$\overline{C} = \overline{Y} - \bar{I} \rightarrow \overline{C} = \left(\frac{\alpha A\beta}{1 - \beta(1 - \delta)}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$
$$- \delta\left(\frac{\alpha A\beta}{1 - \beta(1 - \delta)}\right)^{1/(1-\alpha)}. \qquad (14)$$

Έτσι, η παραγωγή, το μετοχικό κεφάλαιο και η κατανάλωση στη σταθερή κατάσταση της οικονομίας είναι τελικά συναρτήσεις των προτιμήσεων του αντιπροσωπευτικού καταναλωτή, (β), του τεχνολογικού παράγοντα (Α), της ελαστικότητα της παραγωγής στο μετοχικό κεφάλαιο (α) και το ποσοστό της απόσβεσης (δ). Οι επιπτώσεις ενός υψηλότερου ή χαμηλότερου ποσοστού απόσβεσης για μακροπρόθεσμη ανάπτυξη της οικονομίας είναι ξεκάθαρες με βάση τα παραπάνω, αφού οι τιμές της κατανάλωσης, των επενδύσεων και του μετοχικού κεφαλαίου διαφέρουν σημαντικά αν 0<δ<1 συγκριτικά με το ενδεχόμενο δ=1.

2.1. ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΣΗΣ

Τα παραπάνω δύο σενάρια θεωρούν ότι υπάρχει μία ομαλή αγορά και ένας ιδανικός καταναλωτής. Οι χρηματοπιστωτικές αγορές είναι ατελείς στον πραγματικό κόσμο και οι επενδύσεις δεν ισούνται με τις αποταμιεύσεις λόγω του κόστους διαμεσολάβησης. Έστω ότι θ αντιπροσωπεύει ένα κόστος που επιβλήθηκε από ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα στην διαδικασία διαμεσολάβησης, με μία υψηλότερη αξία του θ να αντιπροσωπεύει μία περισσότερο αναποτελεσματική αγορά. Τότε φ=(1+θ) αποταμιεύσεις απαιτούνται για την δημιουργία μίας μονάδα επενδύσεων. Υψηλότερο κόστος διαμεσολάβησης (μεγαλύτερη τιμή του θ) συνεπάγεται μείωση κεφαλαίου, παραγωγής κατανάλωσης και επενδύσεων. Η μακροοικονομική ισορροπία τροποποιείται λοιπόν ως εξής:

$$C_t = Y_t - I_t \rightarrow C_t = AK_t^{\alpha} - \phi\{K_{t+1} - K_t(1 - \delta)\} \qquad (15)$$

Τώρα, το χρηματοπιστωτικό σύστημα αποκλίνει από το πρότυπο Arrow-Debreau για την ανταγωνιστική ισορροπία. Μόνο το 1/(1+θ) των αποταμιεύσεων διοχετεύεται για επενδύσεις, έτσι η επένδυση ισούται με τις καθαρές αποταμιεύσεις του κόστους διαμεσολάβησης, $S_t = \phi I_t = (1+\theta)I_t$ όπως στο Pagano (1993). θ +It ποσό αποταμιεύσεων σπαταλείται στη διαδικασίας της χρηματοπιστωτικής διαμεσολάβησης. Συνεπώς, μία υψηλότερη τιμή του φ αντιπροσωπεύει μεγαλύτερη αναποτελεσματικότητα στην οικονομία. Λύσεις από τα μοντέλα με 0 <δ<1 και φ>=1 τροποποιούνται ως εξής:

$$C_t = Y_t - I_t \rightarrow C_t = AK_t^{\alpha} - \phi\{K_{t+1} - K_t(1-\delta)\} \qquad (16)$$

$$U_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left[AK_t^{\alpha} - \phi\{K_{t+1} - K_t(1-\delta)\}\right] \qquad (17)$$

Αντίστοιχα όπως στο προηγούμενο μοντέλο:

$$U_t = +\beta^t \ln\left[AK_t^{\alpha} - \phi\{K_{t+1} - K_t(1-\delta)\}\right] + \beta^{t+1} \ln\left[AK_{t+1}^{\alpha} - \phi\{K_{t+2} - K_{t+1}(1-\delta)\}\right] + \cdots +$$

Για το βέλτιστο επίπεδο κατανάλωσης και αποταμίευσης, η απώλεια χρησιμότητας από τη μη κατανάλωση την περίοδο t θα πρέπει να ισούται με κέρδος από την από την παραγωγή (κατανάλωσης) την επόμενη περίοδο, t+1. Αυτό μπορεί να εξακριβωθεί συγκρίνοντας την συνθήκη πρώτης τάξης ή εξίσωση Euler λαμβάνοντας την κατανάλωση και την επενδύση σαν ελεγχόμενες μεταβλητές και το μετοχικού κεφαλαίο ως μεταβλητή κατάστασης:

$$\frac{\partial U_t}{\partial C_t} = +\frac{\phi\beta^t}{C_t} + \frac{\beta^{t+1}}{C_{t+1}}\left(\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + \phi(1-\delta)\right) + = 0 \rightarrow \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{\beta}{\phi}\left(\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + \phi(1-\delta)\right) \qquad (18)$$

Όπως και παραπάνω, αυτή η εξίσωση υποδηλώνει ότι η αναλογία της κατανάλωσης μεταξύ δύο περιόδων θα πρέπει να ισούται με την προεξοφλημένη αξία του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου στην επόμενη περίοδο, και σε μια ανταγωνιστική ισορροπία αυτή θα πρέπει να ισούται με το ακαθάριστο επιτόκιο. Πάλι για τη βέλτιστη κατανομή μεταξύ της κατανάλωσης και αποταμιεύσεων, η απώλεια χρησιμότητας από τη μη κατανάλωση τώρα θα πρέπει να ισούται με το κέρδος από την παραγωγή της επόμενης περιόδου.

Το επίπεδο της κατανάλωσης και το μετοχικό κεφάλαιο είναι σταθερά σε σταθερή κατάσταση:

$$\cdots = K_{t-1} = K_t = K_{t+1} = \cdots = \overline{K} \text{ and also } \cdots = C_{t-1} = C_t = C_{t+1} = \ldots = \overline{C}.$$

Όταν σε αυτή τη σταθερή κατάσταση η τιμή του μετοχικού κεφαλαίου αντικαθίσταται από τη σχέση 17, η χρησιμότητα γίνεται σταθερός αριθμό και ο όρος K μπορεί να ληφθεί από το σημείο άθροισης ως εξής:

$$U_t = \ln(A\overline{K}^{\alpha} - \phi\overline{K} + \overline{K}\phi(1-\delta)) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t.$$

Στη σταθερή κατάσταση το μετοχικό κεφάλαιο K μπορεί να βρεθεί με τη χρησιμοποίηση σταθερών τιμών στην κατανάλωση. Η σχέση 18 λοιπόν έχει ως εξής:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{\overline{C}}{\overline{C}} = \frac{\beta}{\phi}(\alpha A\overline{K}^{\alpha-1} + \phi(1-\delta))$$

$$\rightarrow (\alpha A\overline{K}^{\alpha-1} + \phi(1-\delta)) = \left(\frac{\phi}{\beta}\right) \rightarrow (\overline{K}^{\alpha-1})$$

$$= \frac{1}{\alpha A}\left(\frac{\phi}{\beta} - \phi(1-\delta)\right) \rightarrow (\overline{K}^{\alpha-1})$$

$$= \frac{1}{\alpha A}\left(\frac{\phi - \beta\phi(1-\delta)}{\beta}\right) \rightarrow \overline{K}$$

$$= \left(\frac{\phi - \beta\phi(1-\delta)}{\alpha A\beta}\right)^{1/(\alpha-1)} \rightarrow \overline{K}$$

$$= \left(\frac{\alpha A\beta}{\phi - \beta\phi(1-\delta)}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad (19)$$

Ως εκ τούτου, σε περίπτωση ύπαρξης χρηματοοικονομικής διαμεσολάβησης, η παραγωγή, οι επενδύσεις και η κατανάλωση σε σταθερή κατάσταση διαμορφώνονται:

$$\overline{Y} = A\overline{K}^{\alpha} \rightarrow \overline{Y} = \left(\frac{\alpha A\beta}{\phi - \beta\phi(1-\delta)}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \quad (20)$$

$$\bar{I} = \overline{K} - (1-\delta)\overline{K} \rightarrow \bar{I} = \delta\overline{K} \rightarrow \bar{I} = \delta\overline{K}$$

$$= \delta\left(\frac{\alpha A\beta}{\phi - \beta\phi(1-\delta)}\right)^{1/(1-\alpha)} \quad (21)$$

$$\overline{C} = \overline{Y} - \bar{I} \rightarrow \overline{C} = \left(\frac{\alpha A\beta}{\phi - \beta\phi(1-\delta)}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$- \delta\left(\frac{\alpha A\beta}{\phi - \beta\phi(1-\delta)}\right)^{1/(1-\alpha)} \quad (22)$$

Εκτός λοιπόν από τα β,Α,α, και δ, η κατανάλωση, οι επενδύσεις και το μετοχικό κεφάλαιο εξαρτώνται επίσης από το κόστος διαμεσολάβησης φ=(1+θ).

Παρόλο που είδαμε τις πιθανές λύσεις του μοντέλου θα χρησιμοποιήσουμε και την αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του μοντέλου χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους:

$$K = \left(\frac{aAr}{\varphi - r\varphi(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-a}} \quad \textbf{(1.83)}$$

$$\mathrm{Y} = \left(\frac{aAr}{\varphi - r\varphi(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-a}} \quad \textbf{(1.84)}$$

$$\mathrm{I} = \delta\left(\frac{aAr}{\varphi - r\varphi(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-a}} \quad \textbf{(1.85)}$$

$$C = \mathrm{Y} - I = \left(\frac{aAr}{\varphi - r\varphi(1-\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-a}} - \delta\left(\frac{aAr}{\varphi - r\varphi(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-a}} \quad \textbf{(1.86)}$$

2.2. ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΚΟΣΤΟΣ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΣΗΣ

Στον πραγματικό οικονομία , οι τράπεζες βοηθούν μέσω της κατανομής των κονδυλίων από τους αποταμιευτές στους δανειολήπτες με έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο, λόγω της καλύτερης κατανόησης των αναγκών και της δομής της αγοράς. Η διαμεσολάβηση αυτή δημιουργεί μία προστιθέμενη αξία. Η προστιθέμενη αυτή αξία από τις υπηρεσίες διαμεσολάβησης ισούται με το δανειζόμενο ποσό από τις τράπεζες προς τους δανειολήπτες (νοικοκυριά/επιχειρήσεις) μείον το ποσό δανεισμού από τους αποταμιευτές προς τις τράπεζες. Ιδανικά, σε κατάσταση ισορροπίας, η αξία των 2 παραπάνω δανείων ταυτίζεται. Στην πραγματική οικονομία ωστόσο, η τιμή της υπηρεσίας διαμεσολάβησης είναι ίση με τη διαφορά των επιτοκίων των δύο δανείων. Βελτιώσεις στο χρηματοπιστωτικό σύστημα που μειώνουν αυτή τη διαφορά οδηγούν σε βελτίωση της αποδοτικότητας.

Πρακτικά το παραπάνω επεξηγείται ως εξής:

Ο διαμεσολαβητής λαμβάνει επιτόκιο δανεισμού Re από το ποσό που δανείζει προς τα νοικοκυριά/επιχειρήσεις και πληρώνει επιτόκιο R δανεισμού στα νοικοκυριά από τα οποία δανείζεται. Η ισοροπία λοιπόν στην αγορά επιτοκίων, με δεδομένη την τεχνολογία, εκφράζεται από τη σχέση $\varphi=Re-R$. Το φ λοιπόν απεικονίζει το κόστος διαμεσολάβησης.

2.3. Σενάρια στο μοντέλο

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΕΝ. 1	ΣΕΝ. 2	ΣΕΝ. 3	ΣΕΝ. 4	ΣΕΝ. 5	ΣΕΝ. 6	ΣΕΝ. 7	ΣΕΝ. 8	ΣΕΝ. 9
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	44	44	44	44	44	44	100	100	100
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,4	0,4	0,2	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,6
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100	100	100	100	100	100	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1	0,05	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1	1	1	1	1,2	1,05	1	1	1,05
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ									
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	**278**	**1.005**	**120**	**92.293**	**70.210**	**85.780**	**1.090**	**3.950**	**667.967**
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	**100**	**125**	**7**	**17.186**	**10.895**	**15.212**	**392**	**490**	**118.457**
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	**178**	**881**	**112**	**75.108**	**59.315**	**70.568**	**698**	**3.460**	**549.509**
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	**100**	**2.496**	**148**	**343.713**	**217.893**	**304.245**	**392**	**9.807**	**2.369.142**

2.3. Σχόλια

2.3.1. Σενάριο 1

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΕΝ. 1	ΣΕΝ. 2	ΣΕΝ. 3	ΣΕΝ. 4
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	44	44	44	44
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,4	0,4	0,2	0,6
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	1	0,05	0,05	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1	1	1	1
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ				
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	**278**	**1.005**	**120**	**92.293**
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	**100**	**125**	**7**	**17.186**
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	**178**	**881**	**112**	**75.108**
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	**100**	**2.496**	**148**	**343.713**

Όσο μεγαλύτερη είναι η παραγωγικότητα του κεφαλαίου τόσο μεγαλύτερα είναι το ύψος του μετοχικού κεφαλαίου, η παραγωγή, η κατανάλωση και οι επενδύσεις σε σταθερή κατάσταση (1-4). Αυτό σημαίνει ότι οι χώρες με υψηλότερο μερίδιο κεφαλαίου ή με υψηλότερη παραγωγικότητα του κεφαλαίου έχουν υψηλότερο επίπεδο παραγωγής και κατανάλωσης.

2.3.2. Σενάριο 2

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΕΝ. 5	ΣΕΝ. 6
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	44	44
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,6	0,6
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	0,05	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1,2	1,05
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	**70.210**	**85.780**
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	**10.895**	**15.212**
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	**59.315**	**70.568**
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	**217.893**	**304.245**

Μεγαλύτερο intermediation cost μειώνει το επίπεδο της παραγωγής στη σταθερή κατάσταση, αλλά είναι λιγότερο σημαντικό από ότι η παραγωγικότητα του κεφαλαίου (5-6). Υψηλότερη παραγωγικότητα των κεφαλαίων μπορεί να αντισταθμίσει το υψηλότερο κόστος του intermediation cost . Οικονομίες που μπορούν απασχολήσουν το κεφάλαιο περισσότερο αποτελεσματικά μπορούν να αναπτυχθούν ταχύτερα σε αντίθεση με το υψηλότερο κόστος συναλλαγής του intermediation cost.

2.3.3. Σενάριο 3

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΕΝ. 7	ΣΕΝ. 8	ΣΕΝ. 9
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	100	100	100
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,4	0,4	0,6
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	1	0,05	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1	1	1,05
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ			
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	**1.090**	**3.950**	**667.967**
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	**392**	**490**	**118.457**
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	**698**	**3.460**	**549.509**
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	**392**	**9.807**	**2.369.142**

Υψηλότερο ποσοστό της τεχνολογικής προόδου ***(A)*** οδηγεί σε υψηλότερο επίπεδο εισοδήματος στην σταθερή κατάσταση (7 – 9). Οι χώρες που μπορούν να συμπληρώσουν την τεχνική πρόοδο με μεγαλύτερο ύψος των κεφαλαίων έχουν καλύτερη προοπτική οικονομικής ανάπτυξης

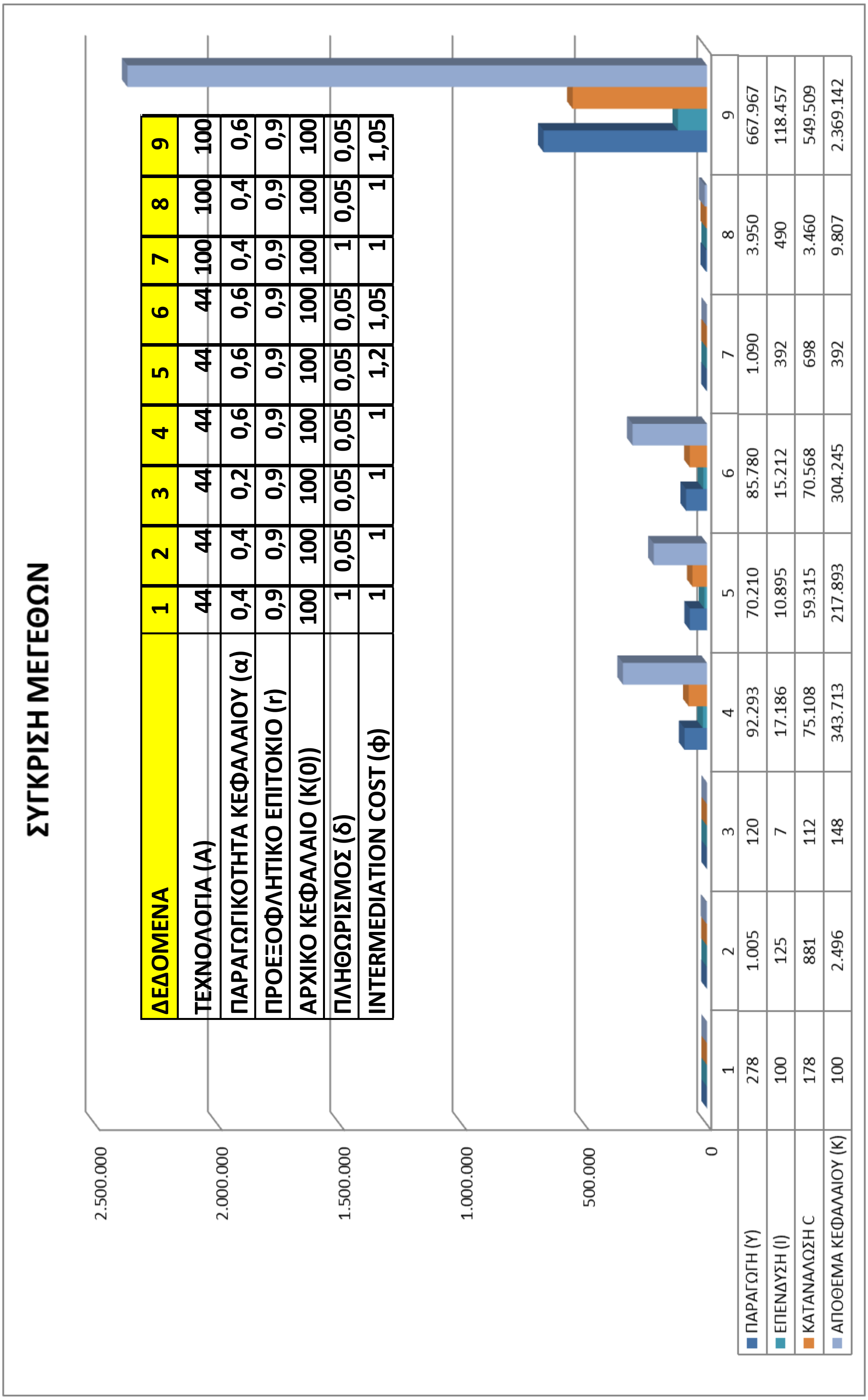
2.3.4. Σενάριο 4

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	**ΣΕΝ. 1**	**ΣΕΝ. 2**
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	44	44
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,4	0,4
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	1	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1	1
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	**278**	**1.005**
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	**100**	**125**
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	**178**	**881**
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	**100**	**2.496**

Οι χώρες με το υψηλότερο ποσοστό απόσβεσης του κεφαλαίου (δ) παρουσιάζουν χαμηλότερο ποσοστό αύξησης της παραγωγής (1 και 2).

2.4. ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.

Όλα τα σενάρια συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα. Τα αποτελέσματα δίνονται συνοπτικά στο παρακάτω διάγραμμα που αποδεικνύουν και το αυτονόητο η **τεχνολογία η παραγωγικότητα κεφαλαίου και το χαμηλό κόστος διαμεσολάβησης (intermediation cost)** μας δίνει την σαφώς **άριστη λύση.**



ΔΕΔΟΜΕΝΑ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ (A)	44	44	44	44	44	44	100	100	100
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (α)	0,4	0,4	0,2	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,6
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (r)	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (K(0))	100	100	100	100	100	100	100	100	100
ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (δ)	1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1	0,05	0,05
INTERMEDIATION COST (φ)	1	1	1	1	1,2	1,05	1	1	1,05

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ΠΑΡΑΓΩΓΗ (Y)	278	1.005	120	92.293	70.210	85.780	1.090	3.950	667.967
ΕΠΕΝΔΥΣΗ (I)	100	125	7	17.186	10.895	15.212	392	490	118.457
ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ C	178	881	112	75.108	59.315	70.568	698	3.460	549.509
ΑΠΟΘΕΜΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ (K)	100	2.496	148	343.713	217.893	304.245	392	9.807	2.369.142

4.Σκέψεις

Ένα από τα πιο εμφανή, ενδιαφέροντα και ανησυχητικά εμπειρικά φαινόμενα του σύγχρονου κόσμου είναι το τεράστιο χάσμα μεταξύ πλουσίων και φτωχών χωρών σε όρους του κατά κεφαλήν εισοδήματός τους. Το χάσμα αυτό είναι μάλιστα τόσο έντονο και οι εκφάνσεις του τόσο ορατές που η παράθεση συγκεκριμένων στατιστικών στοιχείων με σκοπό την απόδειξη της ύπαρξής του είναι μάλλον περιττή. Καθώς το κατά κεφαλήν ΑΕΠ αποτελεί, παρά τις όποιες ατέλειές του, έναν σημαντικό δείκτη του πλούτου και της ευημερίας μιας κοινωνίας, οι πρακτικές συνέπειες των ανισοτήτων αυτών για το βιοτικό επίπεδο δισεκατομμυρίων ανθρώπων είναι προφανείς, ιδίως αν κανείς λάβει υπ’ όψη το γεγονός ότι στις φτωχές και σχετικά υπανάπτυκτες χώρες της Υποσαχάριας Αφρικής, της Κεντρικής και Ανατολικής Ασίας, καθώς και της Λατινικής Αμερικής, κατοικεί η πλειοψηφία του παγκόσμιου πληθυσμού.

Εξ ίσου προφανές είναι το ότι η θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης αποτελεί ίσως το πλέον πρόσφορο έδαφος για την πραγμάτευση των παραπάνω ζητημάτων. Αφενός διότι το χάσμα αυτό έχει προκύψει ακριβώς λόγω της άνισης μεγέθυνσης των διαφόρων οικονομιών κατά το παρελθόν και αφετέρου επειδή μπορεί να καλυφθεί μόνο μέσω της ταχείας μεγέθυνσης των φτωχών και υπανάπτυκτων χωρών.

Το κρίσιμο λοιπόν, θεωρητικό και εμπειρικό, ερώτημα που προκύπτει είναι το εάν και κατά πόσο υπάρχουν, στα πλαίσια ενός συστήματος οικονομίας της αγοράς, μηχανισμοί οι οποίοι θα τείνουν αυτόματα να μειώσουν (ή να αυξήσουν) το παραπάνω χάσμα. Επιπλέον, εάν τέτοιου είδους μηχανισμοί πράγματι υπάρχουν, τι είναι αυτό που τους έχει εμποδίσει να λειτουργήσουν στην περίπτωση χωρών οι οποίες δεν έχουν καταφέρει να αναπτυχθούν αρκετά γρήγορα (σε κάποιες περιπτώσεις καθόλου) ώστε να προσεγγίσουν το επίπεδο των πλουσίων χωρών. Εάν, πάλι, τέτοιοι μηχανισμοί δεν υπάρχουν, τι είδους πολιτικές πρέπει να ακολουθήσουν οι φτωχές χώρες για να ξεπεράσουν την υπανάπτυξή τους; Οι διάφορες θεωρητικές και εμπειρικές μελέτες περί σύγκλισης προσπαθούν να απαντήσουν στα παραπάνω ερωτήματα. Δυστυχώς, είναι μάλλον αδύνατο να διατυπώσουμε στο σημείο αυτό έναν σαφέστερο ορισμό της έννοιας της σύγκλισης, για τον απλό λόγο ότι στα πλαίσια της σχετικής βιβλιογραφίας η έννοια αυτή δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Αντιθέτως, υπάρχουν, διάφορες μορφές σύγκλισης, σε κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχούν διαφορετικά είδη στατιστικών ελέγχων. Ο βασικός λόγος για τον οποίον συμβαίνει αυτό είναι, σε τελική ανάλυση, ο ίδιος λόγος για τον οποίον ο αριθμός των θεωρητικών και κυρίως των εμπειρικών μελετών πάνω στα ζητήματα αυτά έχει εκτοξευτεί κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, καθώς και για τον οποίον έχουν αυξηθεί – μαζί με τον αριθμό των σχετικών μελετών – και ενταθεί και οι σχετικές διαμάχες.

Αντίθετα ίσως με ότι θα ανέμενε κανείς, η βασική αιτία όλων των παραπάνω δεν ήταν η αναγνώριση της τεράστιας σημασίας των ζητημάτων αυτών για πρακτικούς λόγους. Ο πρωταρχικός όμως λόγος που οδήγησε τόσο στην αύξηση της ενασχόλησης των οικονομολόγων με ζητήματα σύγκλισης όσο και στην εμφάνιση διαφόρων μορφών της έννοιας αυτής, συνδέεται μάλλον με θεωρητικά ζητήματα.

5.Συμπεράσματα

Η μελέτη της αριστοποιητικής συμπεριφοράς του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού στο υπόδειγμα Ramsey δίνει μια νέα διάσταση στη μελέτη της οικονομικής μεγέθυνσης, γιατί δεν υιοθετεί αυθαίρετα κάποιο ποσοστό του εισοδήματος ως αποταμίευση, αλλά ενσωματώνει τις αποφάσεις των νοικοκυριών σε ένα διαχρονικό πλαίσιο άριστης συμπεριφοράς. Είναι σημαντικό ότι τα βασικά αποτελέσματα του υποδείγματος Ramsey δεν διαφέρουν από αυτά του υποδείγματος Solow – Swan. Και στο υπόδειγμα Ramsey οι φθίνουσες αποδόσεις παίζουν κυρίαρχο ρόλο οδηγώντας την οικονομία σε μια κατάσταση σταθερού εισοδήματος, εκτός εάν υποτεθεί εξωγενής τεχνολογική πρόοδος. Αυτό έγινε φανερό με την παρουσίαση του υποδείγματος ΑΚ: η ύπαρξη σταθερών αποδόσεων στη συνάρτηση παραγωγής οδηγεί σε σταθερό ρυθμό οικονομικής μεγέθυνσης, ανεξάρτητα από το εάν τα νοικοκυριά ακολουθούν αριστοποιητική συμπεριφορά. Η μόνη αξιοσημείωτη διαφορά στο άριστο επίπεδο του εισοδήματος μακροχρόνιας ισορροπίας, το οποίο στο υπόδειγμα Ramsey είναι χαμηλότερο λόγω της ύπαρξης του συντελεστή διαχρονικής προτίμησης στη συνάρτηση χρησιμότητας, ο οποίος καθιστά τα νοικοκυριά πιο «ανυπόμονα» με το υπόδειγμα Solow – Swan.

Τέλος το υπόδειγμα Ramsey είναι κατάλληλο για τη μελέτη της άριστης λύσης από πλευράς κατανομής των πόρων της οικονομίας μέσω της επίλυσης του προβλήματος του κοινωνικού σχεδιαστή. Στο υπόδειγμα Ramsey, η λύση της ανταγωνιστικής ισορροπίας συμπίπτει με τη λύση του **κοινωνικού σχεδιαστή** είναι δηλαδή **άριστη κατά Pareto**. Η οικονομία μπορεί, λοιπόν, να αφεθεί στο **«αόρατο χέρι»** της αγοράς και να καταλήξει σε μια ισορροπία, η οποία είναι **βέλτιστη από πλευράς κοινωνικής ευημερίας**.

Παράρτημα 1

Μεταβλητές και παράμετροι του υποδείγματος Ramsey

Μεταβλητές

$Y(t)$ = Προϊόν (Output)

$K(t)$ = Κεφάλαιο (Capital). Το συνολικό κεφάλαιο της οικονομίας.

$L(t)$ = Εργασία (Labor) Η συνολική εργασία της οικονομίας, δηλαδή ο συνολικός αριθμός μελών των νοικοκυριών

$A(t)$ = "Γνώση" ή "Αποδοτικότητα της εργασίας" ("Knowledge" or "effectiveness of labor") Αρα A(t)L(t) η συνολική αποδοτική εργασία (effective labor) της οικονομίας

$C(t)$ = Κατανάλωση ανά μέλος νοικοκυριού

$r(t)$ = επιτόκιο, αμοιβή μονάδας κεφαλαίου

$w(t)$ = μισθός ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας

U = χρησιμότητα (utility) της συνολικής ζωής του νοικοκυριού

$u(t)$ = στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας (instantaneous utility function)

$R(t)$ = απόδοση κεφαλαίου από την αρχική στιγμή έως την στιγμή t.

t = χρόνος (time) Αρχική στιγμή t=0.

Μεταβλητές σε εντατική μορφή

$y = Y(t)/[A(t)L(t)]$ προϊόν ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας

$k = K(t)/[A(t)L(t)]$ κεφάλαιο ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας

$c = C(t)/A(t)$ κατανάλωση ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας

Παράμετροι

n = ρυθμός αύξησης εργασίας

g = ρυθμός αύξησης γνώσης

ρ = συντελεστής προεξόφλησης

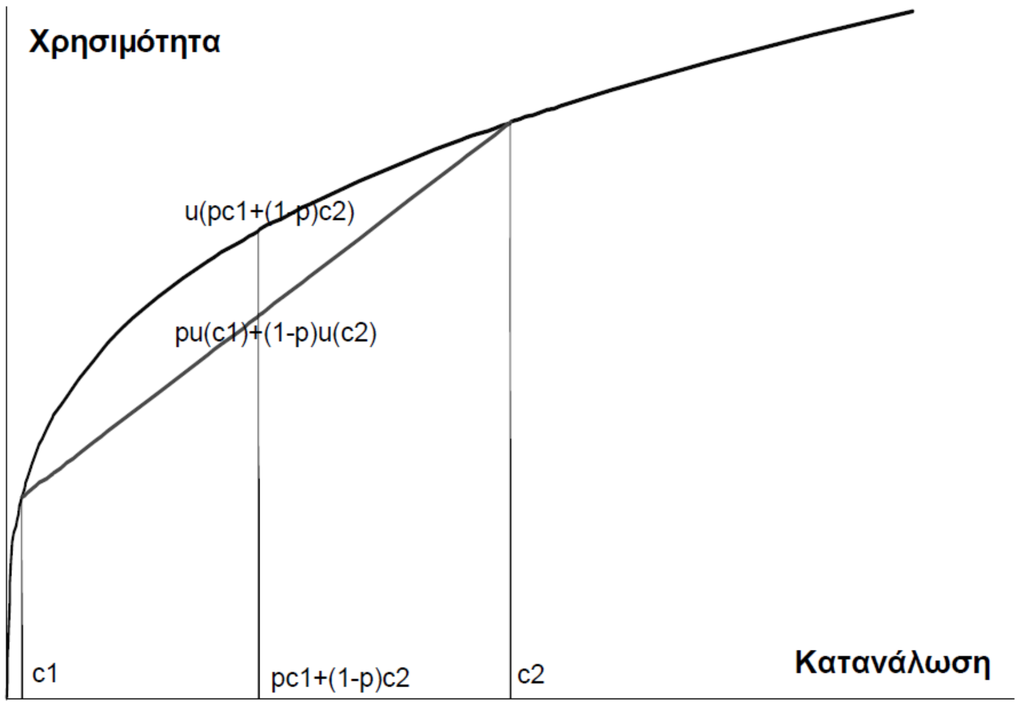
θ = παράμετρος συνάρτησης χρησιμότητας Constant Relative Risk Aversion

H = αριθμός νοικοκυριών στην οικονομία

Παράρτημα 2

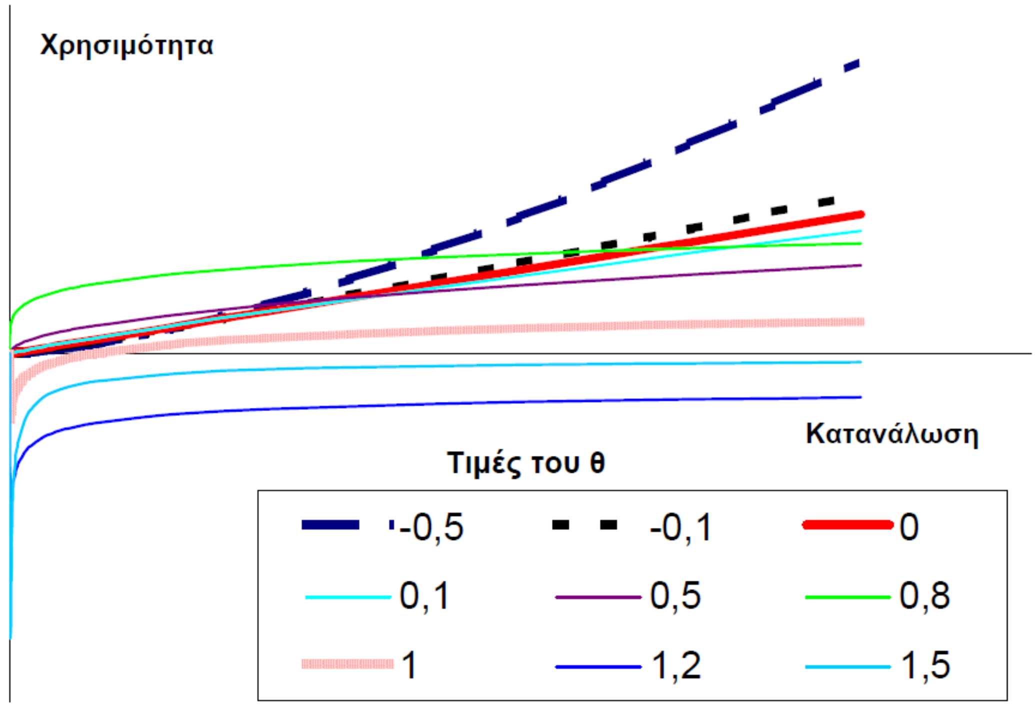
Αβεβαιότητα και συνάρτηση χρησιμότητας

Αβεβαιότητα και συνάρτηση χρησιμότητας



Παράρτημα 3

CRRA συνάρτηση χρησιμότητας για διαφορετικές τιμές του θ



6.Βιβλιογραφία

David Romer, 2006, Μακροοικονομικη.

Keshab Bhattarai, 2005, Consumption, investment and financial intermediation in a Ramsey model, Applied Financial Economics Letters, 1, 329 – 333.

Christopher D. Carroll, 2000, Requiem for the Representative Consumer Aggregate Implications of Microeconomic Consumption Behavior.

Paul Pichler Gerhand Sorger, October 2006, Markov Perfect Equilibria in the Ramsey Mosel, Department of Economics University of Vienna.

F. P. Ramsey, Dec. 1928, A Mathemarical of Theory of Saving, The Economic Journal, Vol 38, No 152 (Dec. 1928). 543 – 549.

Νίκος Θεοχαράκης & Λευτέρης Τσερκέζης, 2009, Σημειώσεις στη Θεωρία της Οικονομικής Μεγέθυνσης.

Alexander Tabarrok, Λύση του υποδείγματος Ramsey-Cass-Koopmans στο Mathematica.

Hywel G. Jones, 1993, Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης, Κριτική.

Ερωτόκριτος Βαρελάς, 12/2003, Εξωγενής οικονομική μεγέθυνση, Κριτική.

Π. Καλαϊτζιδάκης, Σ. Καλυβίτης, 2008, Οικονομική μεγέθυνση – Θεωρία και Πολιτική, Κριτική.