



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΑΤΕΛΩΝ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΣΤΗΝ ΤΑΣΙΚΗ
ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΕΣ
ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ COSSERAT**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γκουτή Έλλη

Επιβλέπων: Ευταξινόπουλος Δημήτριος

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
----------------	---

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

COSSERAT	5
2.1 Οι εξισώσεις ισορροπίας	5
2.2 Οι συνιστώσες παραμόρφωσης και οι καταστατικές εξισώσεις	7
2.3 Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας	10
2.4 Οι τασικές συναρτήσεις του Mindlin	12
2.5 Οι εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης της ελαστικότητας Cosserat σε κυλινδρικές συντεταγμένες	14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΜΗΤΡΑ

ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ	16
3.1 Διατύπωση του προβλήματος και συνοριακές συνθήκες	16
3.2 Οι τασικές συναρτήσεις του Mindlin για το διφασικό ελαστικό σύστημα	18
3.3 Προσδιορισμός των σταθερών που υπεισέρχονται στις τασικές συναρτήσεις	22

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	24
4.1 Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης	24
4.2 Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cosserat	26
4.3 Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cauchy και Μήτρα Cauchy/ανομοιογένεια Cosserat	28

4.4	Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια άκαμπτη	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5		
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	34
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	36
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Τα μητρώα A , B και x	39
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Διαγράμματα διαξονικής φόρτισης.....	41
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Διαγράμματα καθαρής κάμψης ($\sigma_y^\infty = -\sigma_x^\infty$).....	49
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Το λογισμικό πρόγραμμα <i>COSSERAT-INH</i>	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για την διασαφήνιση του ρόλου των διεπιφανειών στην συνολική μηχανική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών, έχουν εισαχθεί δύο μοντέλα διεπιφανειακής σύνδεσης: το μοντέλο του ελατηρίου και το μοντέλο της ελαστικής μεμβράνης. Το πρώτο μοντέλο περιγράφει την συμπεριφορά μιας ασθενούς σύνδεσης των φάσεων του σύνθετου υλικού, που επιτρέπει μία ασυνέχεια των μετατοπίσεων των συνδεόμενων επιφανειών. Οι εφαπτομενικές και οι ορθές συνιστώσες της ασυνέχειας αυτής θεωρούνται ότι συσχετίζονται αναλογικά με τις αντίστοιχες συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή. Το δεύτερο μοντέλο περιγράφει μία ισχυρή διεπιφανειακή σύνδεση των φάσεων του σύνθετου υλικού, που επιτυγχάνεται από τις αναπτυσσόμενες (μεμβρανικές) τάσεις στην ελαστική μεμβράνη. Οι μεμβρανικές αυτές τάσεις, που έχουν διαστάσεις δύναμη/μήκος, βρίσκονται σε ισορροπία με τους διεπιφανειακούς ελκυστές που αναπτύσσονται στις επιμέρους φάσεις του σύνθετου υλικού. Τα δύο αυτά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως, στα πλαίσια της κλασικής ελαστικότητας Cauchy, για να προβλέψουν την συμπεριφορά σε αστοχία ενός σύνθετου υλικού, καθώς επίσης, για να εκτιμηθεί η επίδραση των διεπιφανειών στις μακροσκοπικές ελαστικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών [1-5].

Στη παρούσα εργασία, το μοντέλο ελατηρίου επεκτείνεται σε σύνθετα υλικά της ελαστικότητας Cosserat προσομοιώνοντας την σύνδεση των επιμέρους φάσεων τους με ελατήρια δύναμης και ελατήρια ροπής, που διανέμονται με ένα συνεχή τρόπο πάνω στη διεπιφάνεια. Όπως στην ελαστικότητα Cauchy, η μηχανική συμπεριφορά του διεπιφανειακού ελατηρίου δύναμης περιγράφεται με μία διεπιφανειακή ασυνέχεια των μετατοπίσεων, της οποίας οι εφαπτομενικές και ορθές συνιστώσες είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή από δύναμη. Η μηχανική συμπεριφορά του διεπιφανειακού ελατηρίου ροπής περιγράφεται από μία ασυνέχεια των διεπιφανειακών στροφών, της οποίας οι εφαπτομενικές συνιστώσες είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή από ροπή. Για μία τέτοια

διεπιφάνεια, ο ελκυστής από δύναμη και ο ελκυστής από ροπή θεωρούνται ότι είναι συνεχείς κατά μήκος της διεπιφάνειας. Στην παρούσα εργασία, το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιείται για να διερευνήσει την επίδραση μίας υποβαθμισμένης διεπιφανειακής σύνδεσης, πάνω στη συγκέντρωση τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια. Τα ελαστικά πεδία στο σύστημα προσδιορίζονται για μία ομοιόμορφη απομακρυσμένη τάση από δύναμη στη μήτρα, επιλύοντας το αντίστοιχο συνοριακό ελαστικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας τασικές συναρτήσεις Mindlin [6]. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν και παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων δείχνουν ότι τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα εξαρτώνται από τις διαστάσεις της ανομοιογένειας, και ότι η παρουσία μίας ασθενούς διεπιφάνειας στο σύστημα αυξάνει τον συντελεστή έντασης των τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια.

Η ελαστική θεωρία που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, εισήχθηκε, αρχικά, από τον Voigt [7] και τους αδελφούς Cosserat [8], και αργότερα, αναπτύχθηκε παραπέρα από πολλούς ερευνητές. Ο Voigt [7], προκειμένου να ξεπεράσει τις αδυναμίες της κλασσικής ελαστικότητας να περιγράψει φαινόμενα σε περιοχές, όπου η μικροδομή του υλικού είναι σημαντική, εισήγαγε την υπόθεση ότι, μία στοιχειώδης επιφάνειά dA σε ένα παραμορφωμένο σώμα δεν μεταβιβάζει μόνο την δύναμη $\mathbf{t}dA$, αλλά, επίσης, και μία ροπή $\boldsymbol{\mu}dA$. Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε σημείο του σώματος, εκτός από τις τάσεις από δύναμη σ_{ij} , αναπτύσσεται και τάσεις από ροπή μ_{ij} . Όμως, η πλήρης ελαστική θεωρία, που στηρίζεται στην παραπάνω υπόθεση, αναπτύχθηκε αργότερα από του αδελφούς Francois και Eugene Cosserat [8] και δημοσιεύθηκε το 1909 με τίτλο “Théorie des corps déformables”. Για την ανάπτυξη της θεωρίας αυτής, οι αδελφοί Cosserat υπέθεσαν, επιπρόσθετα, ότι ένα υλικό σωματίδιο (particle) του σώματος, που στα πλαίσια της μηχανικής του συνεχούς μέσου αντιπροσωπεύονται με τον στοιχειώδη όγκο dV , κατά την παραμόρφωση, υφίστανται μία μετατόπιση $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ και μία περιστροφή $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)$, που είναι συναρτήσεις της θέσης \mathbf{x} του σωματιδίου και του χρόνου t . Τα διανύσματα \mathbf{u} και $\boldsymbol{\omega}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και περιγράφουν πλήρως την παραμορφωσιακή ελαστική κατάσταση του σώματος. Για πολλά χρόνια, στην θεωρία των αδελφών Cosserat δεν δόθηκε η ανάλογη σημασία, επειδή η ανάπτυξή της ήταν πολύ γενική και ξέφευγε από τα όρια της θεωρίας της ελαστικότητας. Η ραγδαία ανάπτυξη της μηχανικής των συνεχών μέσων και της θερμοδυναμικής, στις δεκαετίες του '60 και του '70, έφερε στο προσκήνιο την θεωρία των αδελφών Cosserat. Η αναζήτηση νέων μοντέλων, που να περιγράφουν περισσότερο αυστηρά την πραγματική συμπεριφορά των υλικών, οδήγησε

σε θεωρίες παρόμοιες ή ταυτόσημες με αυτή των αδελφών Cosserat [9-14]. Στην αρχή, οι περισσότεροι από τους ερευνητές αυτή την περίοδο ασχολήθηκαν με την απλοποιημένη περίπτωση της θεωρίας των αδελφών Cosserat, όπου η παραμόρφωση του σώματος περιγράφεται μόνο από το διάνυσμα παραμόρφωσης \mathbf{u} . Την ίδια περίοδο, ένας μεγάλος αριθμός ευρωπαϊών ερευνητών αναφέρεται απ' ευθείας στο έργο των αδελφών Cosserat, το οποίο το συμπληρώνουν με καταστατικές εξισώσεις [15-18]. Επίσης, την ίδια εποχή, σοβιετικοί ερευνητές, προφανώς μη ενημερωμένοι για το σχετικό έργο στην δύση, επαναδιατύπωσαν την θεωρία των Cosserat στηριζόμενοι στις ίδιες υποθέσεις [19-20]. Επίσης, αξίζει να μνημονευθεί και το εκτεταμένο έργο του Eringen και των συνεργατών του πάνω στην θεωρία των αδελφών Cosserat, που δημοσιεύθηκε την ίδια περίοδο και λίγο αργότερα [21, 22].

Κατά τις τελευταίες δεκαετίες, ένας σημαντικός αριθμός ερευνητικών εργασιών έχει εμφανισθεί στην περιοχή της ελαστικότητας Cosserat. Το ανανεωμένο ενδιαφέρον στην θεωρία αυτή έχει προκύψει από την ανάγκη περιγραφής της συμπεριφοράς των κοκκωδών και άλλων γεωυλικών, την διερεύνηση δυναμικών φαινομένων σε κοκκώδη και άλλα υλικά, και την ανάλυση της επίδρασης των διαστάσεων των υλικών στην συνολική μηχανική συμπεριφορά τους [23-26].

Τα πρόσφατα χρόνια, η ραγδαία ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας έχει φέρει, στο προσκήνιο, νέα θέματα προς έρευνα, που σχετίζονται με την δομή του υλικού στην νανοκλίμακα. Τα θέματα αυτά σχετίζονται με την επίδραση των συνόρων και των διεπιφανειών των νανο-υλικών στην συνολική μηχανική τους συμπεριφορά. Η μελέτη των θεμάτων αυτών, στα πλαίσια της μηχανικής των συνεχών μέσων, έχει δημιουργήσει έναν νέο κλάδο της εφαρμοσμένης μηχανικής, που είναι γνωστά ως νανο-μηχανική. Η φύση των θεμάτων αυτών και η κλίμακα του υλικού στην οποία πρέπει να διερευνηθούν, καθιστούν την ελαστικότητα Cosserat ως μία κατάλληλη θεωρητική βάση για την μελέτη αυτών των θεμάτων. Παρόλα αυτά, οι σχετικές εργασίες, που έχουν εμφανισθεί μέχρι τώρα στην περιοχή της νανομηχανικής είναι σχετικά λίγες [27-29].

Η παρούσα διπλωματική εργασία, εκτός από την εισαγωγή που αποτελεί το κεφάλαιο 1, περιλαμβάνει άλλα τέσσερα κεφάλαια και τέσσερα παραρτήματα. Στο κεφάλαιο 2, παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης της ελαστικότητας Cosserat, έτσι όπως αυτές χρησιμοποιούνται στο επόμενο κεφάλαιο. Στο κεφάλαιο 3, περιγράφεται το ελαστικό πρόβλημα της κυκλικής ανομοιογένειας και εισάγονται οι ελατηριακές διεπιφανειακές συνθήκες ανομοιογένειας-μήτρας, που είναι συμβατές με την

ελαστική θεωρία Cosserat. Στην συνέχεια, το ελαστικό πρόβλημα επιλύεται χρησιμοποιώντας τασικές συναρτήσεις Mindlin. Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα σε μορφή διαγραμμάτων, για διάφορες περιπτώσεις φόρτισης και ελαστικών παραμέτρων του συστήματος ανομοιογένειας-μήτρας. Στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας. Στα παραρτήματα έχουν καταχωρηθεί το μητρικό σύστημα για τον προσδιορισμό των αγνώστων παραμέτρων των τασικών συναρτήσεων Mindlin (Παράρτημα Α), τα διαγράμματα για διαξονική φόρτιση του συστήματος (Παράρτημα Β), τα διαγράμματα για καθαρή διάτμηση (Παράρτημα Γ), και τα σχετικά λογισμικά προγράμματα που αναπτύχθηκαν για την απόκτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων (Παράρτημα Δ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ COSSERAT

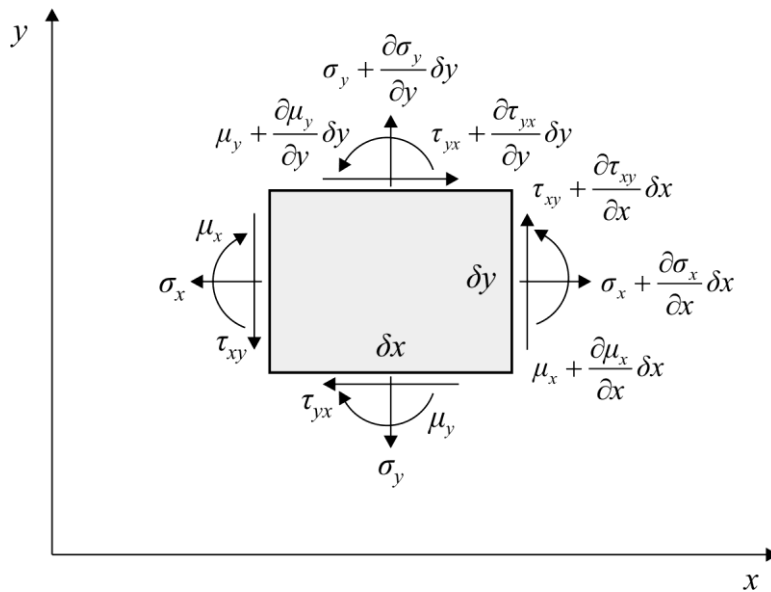
2.1 Οι εξισώσεις ισορροπίας

Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναπτυχθούν οι εξισώσεις της διδιάστατης θεωρίας της ελαστικότητας Cosserat, ακολουθώντας τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε από τους Timosenko και Goodier [30], για την εξαγωγή των αντίστοιχων εξισώσεων της ελαστικότητας Cauchy. Έστω ένα ομογενές, ισότροπο και ελαστικό υλικό με συμπεριφορά υλικού Cosserat, που έχει παραμορφωθεί από εξωτερικές δυνάμεις, έτσι ώστε, αναφορικά με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) , οι συνιστώσες των μετατοπίσεων u και v στις διευθύνσεις των x , y να είναι συναρτήσεις μόνο των x και y , και η τρίτη συνιστώσα να είναι μηδέν. Κατά αντιστοιχία με την ελαστικότητα Cauchy, η παραμόρφωση αυτή του σώματος θα χαρακτηρίζεται επίπεδη παραμόρφωση. Στο Σχήμα 2.1 δείχνονται οι συνιστώσες των τάσεων, που επενεργούν σε ένα στοιχειώδες τμήμα του σώματος με διαστάσεις δx , δy και μοναδιαίο πάχος. Οι ποσότητες σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} είναι οι καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων, που προέρχονται από δύναμη και μ_x , μ_y οι συνιστώσες των τάσεων που προέρχονται από ροπή. Θα υποθεθεί ότι οι παραπάνω συνιστώσες των τάσεων είναι συναρτήσεις μόνο των x και y , και ακόμα, ότι στο σώμα δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις και ροπές.

Από την ισορροπία των ροπών του ορθογωνικού στοιχείου, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0. \quad (2.1)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η ισότητα των διατμητικών τάσεων τ_{xy} και τ_{yx} της ελαστικότητας Cauchy, δεν ισχύει στην περίπτωση της ελαστικότητας Cosserat.



Σχήμα 2.1 Οι συνιστώσες των τάσεων από δύναμη και οι συνιστώσες των τάσεων από ροπή που επενεργούν σε ένα ορθογωνικό στοιχείο του σώματος

Στην ελαστικότητα Cosserat, η ισότητα των διατμητικών τάσεων ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι τάσεις από ροπή είναι σταθερές.

Η θεώρηση της ισορροπίας του ορθογωνικού στοιχείου, στις διευθύνσεις των αξόνων x και y , οδηγεί στις σχέσεις

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Οι σχέσεις ισορροπίας (2.2) είναι φορμαλιστικά ίδιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις της ελαστικότητας Cauchy, με την διευκρίνιση ότι, στις παραπάνω σχέσεις, δεν ισχύει η ισότητα των διατμητικών τάσεων.

2.2 Οι συνιστώσες παραμόρφωσης και οι καταστατικές εξισώσεις

Στην επίπεδη παραμόρφωση της ελαστικότητας Cosserat, οι ορθές παραμορφώσεις ε_x , ε_y , γ_{xy} και η στροφή ω_z του ορθογωνικού στοιχείου, που δείχνονται το Σχήμα 2.1, ορίζονται, όπως στην ελαστικότητα Cauchy, με τις σχέσεις

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

Όπως στην ελαστικότητα Cauchy, θα υποθεθεί ότι οι ορθές παραμορφώσεις ε_x και ε_y συνδέονται με τις ορθές τάσεις από δύναμη, γραμμικά, με τις παρακάτω γραμμικές σχέσεις:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad (2.5)$$

όπου E και ν είναι το μέτρο του Young και ο λόγος του Poisson, αντίστοιχα. Η σχέση που συνδέει τις διατμητικές τάσεις, που επενεργούν στο ορθογωνικό στοιχείο του σώματος, με τις αντίστοιχες διατμητικές παραμορφώσεις, θα συζητηθεί αμέσως παρακάτω ορίζοντας, πρώτα, τις ποσότητες τ_{xy}^S και τ_{xy}^A με τις σχέσεις

$$\tau_{xy}^S = \frac{1}{2} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \quad \tau_{xy}^A = \frac{1}{2} (\tau_{xy} - \tau_{yx}). \quad (2.6)$$

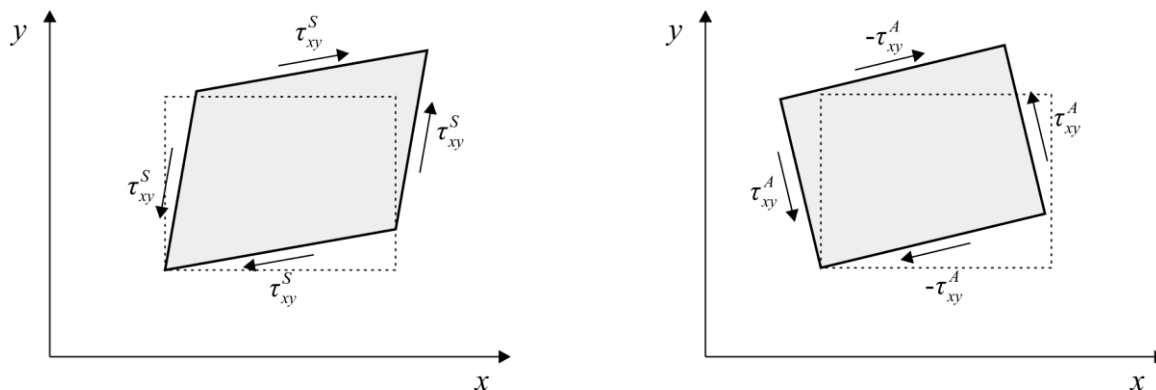
Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^A + \tau_{xy}^S, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}^A - \tau_{xy}^S. \quad (2.7)$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι για τις ποσότητες αυτές ισχύει

$$\tau_{xy}^S = \tau_{yx}^S, \quad \tau_{xy}^A = -\tau_{yx}^A. \quad (2.8)$$

Οι σχέσεις (2.7) δείχνουν ότι οι διατμητικές τάσεις, που επενεργούν στο ορθογώνιο στοιχείο του σώματος, μπορούν να γραφτούν σε όρους μίας συμμετρικής διατμητικής τάσης τ_{xy}^S και μίας αντισυμμετρικής διατμητικής τάσης τ_{xy}^A .



Σχήμα 2.2 Το συμμετρικό (α) και το αντισυμμετρικό (β) μέρος της διατμητικής τάσης

Η ποσότητα τ_{xy}^S , που αποτελεί το συμμετρικό τμήμα των διατμητικών τάσεων τ_{xy} και τ_{yx} , θα υποθεθεί ότι προκαλεί την γωνιακή παραμόρφωση γ_{xy} του ορθογωνικού στοιχείου, και ότι συνδέεται με αυτή γραμμικά, με τη σχέση

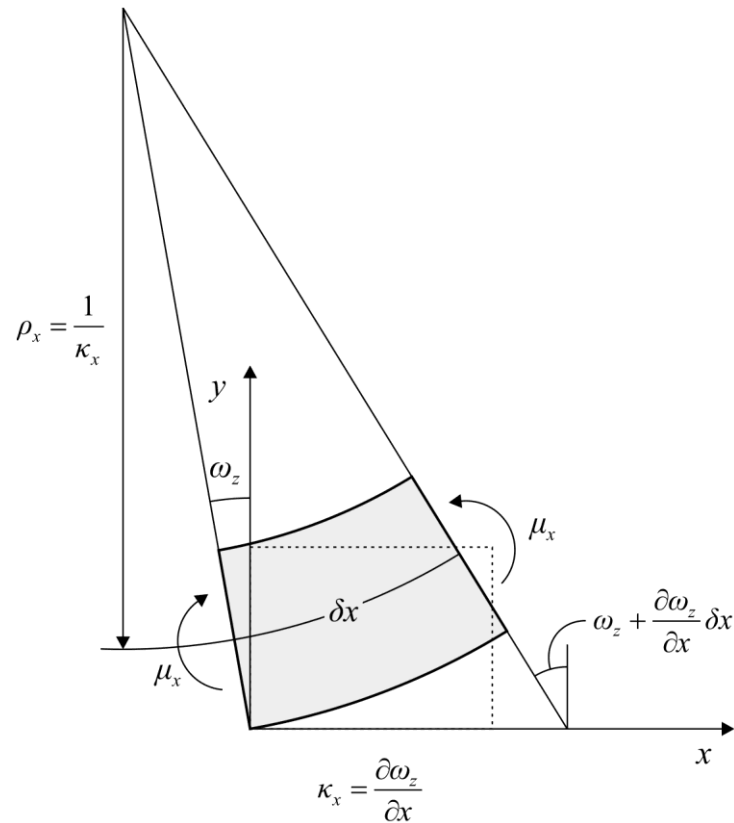
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}^S, \quad (2.9)$$

όπου G είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού. Λαμβάνοντας υπόψη την πρώτη από τις (2.6), η (2.9) γράφεται

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy} + \tau_{yx}). \quad (2.10)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί την τρίτη καταστατική σχέση, που συνδέει τις διατμητικές τάσεις από δύναμη, με την προξενούμενη γωνιακή παραμόρφωση γ_{xy} του ορθογωνικού στοιχείου. Το αντισυμμετρικό τμήμα τ_{xy}^A των διατμητικών τάσεων προκαλεί την περιστροφή ω_z του ορθογωνικού στοιχείου, που είναι συνάρτηση των μεταβλητών x και y . Η μεταβολή της περιστροφής ω_z προκαλεί τις καμπυλότητες στο ορθογωνικό

στοιχείο. Στο Σχήμα 2.3 δείχνεται η καμπυλότητα που προξενείται από την τάση από ροπή μ_x .



Σχήμα 2.3 Η καμπυλότητα που παράγεται στο στοιχείο από την τάση από ροπή μ_x

Από τη γεωμετρία του σχήματος αυτού προκύπτει ότι οι προκαλούμενες καμπυλότητες στο στοιχείο, στις διευθύνσεις x και y , αντίστοιχα, έχουν την μορφή

$$\kappa_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}. \quad (2.11)$$

Οι καμπυλότητες αυτές θα υποθεθεί ότι συνδέονται, γραμμικά, με τις τάσεις από ροπή μ_x και μ_y , με τις σχέσεις

$$\kappa_x = \frac{1}{4B} \mu_x, \quad \kappa_y = \frac{1}{4B} \mu_y, \quad (2.12)$$

όπου B είναι μία σταθερά του υλικού, που έχει διαστάσεις δύναμης. Οι σχέσεις (2.12), μαζί με τις (2.4), (2.5) και (2.10) αποτελούν τις πέντε καταστατικές εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης στην ελαστικότητα Cosserat. Στις παραπάνω καταστατικές σχέσεις υπεισέρχονται τρεις ανεξάρτητες σταθερές E , ν και B , που περιγράφουν τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού.

2.3 Οι εξισώσεις συμβιβαστότητας

Από τις γεωμετρικές συνθήκες που παρουσιάστηκαν προηγούμενα, προκύπτει ότι οι παραμορφώσεις ε_x , ε_y , γ_{xy} , η στροφή ω_z και οι καμπυλότητες κ_x , κ_y εκφράζονται σε όρους των παραγώγων των μετατοπίσεων u και v . Έτσι, αν είναι δεδομένες οι έξι αυτές ποσότητες, ο προσδιορισμός των δύο συναρτήσεων u και v απαιτεί την ολοκλήρωση των σχετικών σχέσεων που συνδέουν τις ποσότητες αυτές με τις παραγωγίσεις των μετατοπίσεων u και v . Προκειμένου η ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών να εξασφαλίζει την ύπαρξη μονότιμων συνεχών συναρτήσεων u και v , θα πρέπει να επιβληθούν περιορισμοί μεταξύ των παραμορφώσεων, της στροφής και των καμπυλοτήτων.

Οι περιορισμοί αυτοί αποτελούν σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων αυτών και είναι γνωστά ως εξισώσεις συμβιβαστότητας. Οι σχέσεις αυτές θα προκύψουν από τις γεωμετρικές σχέσεις των παραμορφώσεων που διατυπώθηκαν παραπάνω, με απαλοιφή των μετατοπίσεων u και v , που υπεισέρχονται στις σχέσεις αυτές.

Έτσι, απαλοίφοντας τις μετατοπίσεις u και v από τις τρεις πρώτες εξισώσεις της σχέσης (3.3), προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.13)$$

Όμοια από τις εξισώσεις (2.11), με απαλοιφή της περιστροφής ω_z προκύπτει

$$\frac{\partial \kappa_x}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_y}{\partial x}. \quad (2.14)$$

Επίσης, από τις εξισώσεις (3.3) προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Οι εξισώσεις (2.13)-(2.16) αποτελούν τις τέσσερις σχέσεις συμβιβαστότητας του προβλήματος της επίπεδης παραμόρφωσης της ελαστικότητας Cosserat. Αν οι (2.15) και (2.16) εισαχθούν στις (2.11), βρίσκεται ότι

$$\kappa_x = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \quad \kappa_y = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι από τις εξισώσεις (2.17), άμεσα προκύπτει η εξίσωση (2.14). Αυτό σημαίνει ότι, από τις παραπάνω τέσσερις εξισώσεις συμβιβαστότητας, οι τρεις μόνο είναι ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, οι παραπάνω τέσσερις σχέσεις συμβιβαστότητας θα γραφτούν σε όρους των τάσεων, χρησιμοποιώντας τις καταστατικές εξισώσεις που διατυπώθηκε προηγούμενα. Αντικαθιστώντας τις (2.4), (2.5), (2.10) και (2.12) στις παραπάνω τέσσερις εξισώσεις συμβιβαστότητας, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2 (\tau_{xy} + \tau_{yx})}{\partial x \partial y}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x}, \quad (2.19)$$

$$\mu_x = l^2 \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - 2l^2 \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], \quad (2.20)$$

$$\mu_y = 2l^2 \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] - l^2 \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \quad (2.21)$$

όπου

$$l^2 = \frac{2(1+\nu)B}{E} = \frac{B}{G}. \quad (2.22)$$

Η σταθερά l , που υπεισέρχεται στις παραπάνω εξισώσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά αντί της σταθεράς B , για να χαρακτηρίσει την μικροδομή του υλικού. Αν $l=0$ ($B=0$), το υλικό δεν επιδεικνύει τοπική καμπυλότητα και η παραμόρφωση που περιγράφεται με την ελαστικότητα Cauchy. Σημειώνεται ότι, από τις εξισώσεις συμβιβαστότητας (2.18), (2.20) και (2.21), μπορεί να παραχθεί, άμεσα, η εξίσωση (3.19).

2.4 Οι τασικές συναρτήσεις του Mindlin

Η πρώτη από τις εξισώσεις ισορροπίας (2.2) ικανοποιείται αυτόματα, αν εισαχθεί μία συνάρτηση $\varphi_1(x, y)$ με τις σχέσεις

$$\sigma_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Η ικανοποίηση της δεύτερης συνθήκης ισορροπίας της (3.2) επιτυγχάνεται εισάγοντας μία δεύτερη συνάρτηση $\varphi_2(x, y)$ με τις σχέσεις

$$\sigma_y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \quad (2.24)$$

Επίσης, η συνθήκη (2.19) ικανοποιείται, αν εισαχθεί μία τρίτη συνάρτηση $\psi(x, y)$ με τις σχέσεις

$$\mu_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mu_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.25)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.23), (2.24) και (2.25) στην (2.1), προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 \right) = 0. \quad (2.26)$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται, αν εισαχθεί μία νέα συνάρτηση φ με τις σχέσεις

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} - \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.27)$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.28)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.22), βρίσκεται ότι

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (2.29)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (2.30)$$

Οι παραπάνω σχέσεις, μαζί με την (3.20), εκφράζουν τις συνιστώσες της τάσης από δύναμη και τις συνιστώσες της τάσης από ροπή σε όρους δύο συναρτήσεων φ και ψ . Αν $\psi = 0$, οι τάσεις από ροπή εξαφανίζονται, και οι εξισώσεις (2.29) και (2.30) ανάγονται στις γνωστές εκφράσεις των τασικών συναρτήσεων του Airy της ελαστικότητας Cauchy.

Για την εξαγωγή των σχέσεων (2.29) και (2.30), χρησιμοποιήθηκαν οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας που παρέχονται από τις σχέσεις (2.1) και (2.2), καθώς και η εξίσωση (2.19), από τις εξισώσεις συμβιβαστότητας. Οι διαφορικές εξισώσεις, που πρέπει να ικανοποιούνται από τις τασικές συναρτήσεις φ και ψ , θα προκύψουν από τις υπόλοιπες εξισώσεις συμβιβαστότητας. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.29) και (2.30) στην εξίσωση (2.18), προκύπτει

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad (2.32)$$

όπου $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 \varphi$. Έτσι, η τασική συνάρτηση φ θα πρέπει να ικανοποιεί την ίδια διαφορική εξίσωση με αυτήν της ελαστικότητας Cosserat. Στη συνέχεια, εισάγοντας τις (2.29), (2.30) στις (2.20) και (2.21), αποκτώνται οι σχέσεις

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) = -2(1 - \nu) l^2 \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \varphi), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\psi - l^2 \nabla^2 \psi) = 2(1-\nu)l^2 \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \varphi). \quad (2.34)$$

Από τις σχέσεις αυτές συνάγεται ότι οι συναρτήσεις $\psi - l^2 \nabla^2 \psi$ και $2(1-\nu)l^2 \nabla^2 \varphi = 0$ θα πρέπει να ικανοποιούν την συνάρτηση Laplace. Παραγωγίζοντας την (2.33) ως προς x , και την (2.34) ως προς y , προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί τη συνάρτηση ψ

$$\nabla^2 \psi - l^2 \nabla^4 \psi = 0. \quad (2.35)$$

Έτσι, η κατάσταση της επίπεδης παραμόρφωσης της ελαστικότητας Cosserat, όταν στο σώμα δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις από δύναμη και ροπή, περιγράφεται, πλήρως, από τις συναρτήσεις φ και ψ , που ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις (2.32) και (2.35) και συσχετίζονται με τις εξισώσεις (2.33) και (2.34).

2.5 Οι εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης της ελαστικότητας Cosserat σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι συνιστώσες των τάσεων από δύναμη και ροπή, που προέκυψαν παραπάνω, ως προς το πολικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ) (Σχήμα 2.3), παίρνουν την μορφή

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.36)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{\theta r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad (2.39)$$

$$\mu_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.40)$$

$$\mu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (2.41)$$

Οι συνιστώσες μετατόπισης και η στροφή ως προς το πολικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ) έχουν την μορφή:

$$2\mu_r = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - (1-\nu)r \frac{\partial x}{\partial \theta} \right], \quad (2.42)$$

$$2\mu_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - (1-\nu)r^2 \frac{\partial x}{\partial r} \right], \quad (2.43)$$

$$2\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (2.44)$$

όπου

$$\frac{\partial^2 (rx)}{\partial r \partial \theta} = \nabla^2 \varphi, \quad \nabla^2 x = 0. \quad (2.45)$$

Οι συνθήκες συμβιβαστότητας (2.33) και (2.32), όταν μετασχηματιστούν σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουν την μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) = -2(1-\nu)l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \varphi, \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi - l^2 \nabla^2 \psi) = 2(1-\nu)l^2 \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \varphi, \quad (2.47)$$

όπου

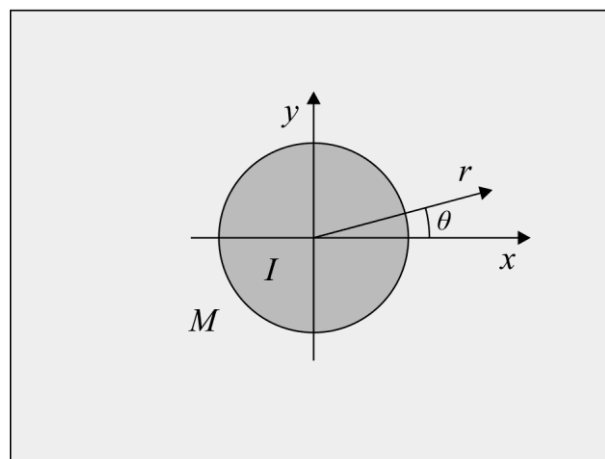
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.48)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΜΗΤΡΑ ΜΕ ΕΛΑΤΗΡΙΑΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

3.1 Διατύπωση του προβλήματος και συνοριακές συνθήκες

Το Σχήμα 3.1 δείχνει την συνεπίπεδη παραμόρφωση ενός ελαστικού συστήματος, που αποτελείται από μία ελαστική μήτρα που περιέχει μία κυλινδρική ανομοιογένεια, κυκλικής διατομής R .



Σχήμα 3.1 Το ελαστικό σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας

Η παραμόρφωση του συστήματος περιγράφεται σε σχέση με ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) , του οποίου ο άξονας z συμπίπτει με τον άξονα της

κυλινδρικής ανομοιογένειας. Το σύστημα φορτίζεται από μία ομοιόμορφη τάση σ_{xx}^{∞} , που εφαρμόζεται στο απομακρυσμένο σύνορο της μήτρας. Το σύστημα θα αναλυθεί στα πλαίσια της ελαστικότητας των Cosserat, για μία ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, που προσομοιώνει μία ασθενή σύνδεση των δύο υλικών. Η συμπεριφορά μίας τέτοιας διεπιφάνειας, μπορεί να περιγραφεί με τις παρακάτω σχέσεις:

$$u_r^M(R, \theta) - u_r^I(R, \theta) = \frac{1}{N_r} \sigma_{rr}^M = \frac{1}{N_r} \sigma_{rr}^I, \quad u_{\theta}^M(R, \theta) - u_{\theta}^I(R, \theta) = \frac{1}{N_{\theta}} \tau_{r\theta}^M = \frac{1}{N_{\theta}} \tau_{r\theta}^I, \quad (3.1)$$

$$\omega_z^M(R, \theta) - \omega_z^I(R, \theta) = \frac{1}{N_{\omega}} \mu_r^M = \frac{1}{N_{\omega}} \mu_r^I, \quad (3.2)$$

$$\sigma_{rr}^I(R, \theta) = \sigma_{rr}^M(R, \theta), \quad \tau_{r\theta}^I(R, \theta) = \tau_{r\theta}^M(R, \theta), \quad \mu_r^I(R, \theta) = \mu_r^M(R, \theta). \quad (3.3)$$

Οι τρεις πρώτες σχέσεις αποτελούν τον “καταστατικό νόμο” της ασθενούς διεπιφάνειας του συστήματος. Στις σχέσεις αυτές οι διεπιφανειακές ποσότητες $u_r^M - u_r^I$, $u_{\theta}^M - u_{\theta}^I$ αντιπροσωπεύουν την ελατηριακή επέκταση του διεπιφανειακού ελατηρίου, που βρίσκεται στο ελατηριακό στοιχείο dS , ενώ οι ποσότητες $\sigma_{rr}^M dS (= \sigma_{rr}^I dS)$, $\sigma_{r\theta}^M dS (= \sigma_{r\theta}^I dS)$ αποτελούν τις αντίστοιχες ελατηριακές δυνάμεις. Αντίστοιχα, η διεπιφανειακή ποσότητα $\omega_z^M - \omega_z^I$ αντιπροσωπεύει την περιστροφή του ελατηρίου ροπής που βρίσκεται στο διεπιφανειακό στοιχείο dS , και η ποσότητα $\mu_r^M dS (= \mu_r^I dS)$ αντιπροσωπεύει την ροπή των ελατηρίων. Οι συνθήκες ισορροπίας του διεπιφανειακού στοιχείου dS επιβάλλουν την συνέχεια των διεπιφανειακών ελκυστών από δύναμη και ροπή των δύο υλικών, που περιγράφεται από τις υπόλοιπες σχέσεις (3.3). Στις παραπάνω σχέσεις και στο εξής, οι άνω δείκτες M και I χρησιμοποιούνται για να δηλώνουν ποσότητες, που συνδέονται με τη μήτρα και την ανομοιογένεια του ελαστικού συστήματος που εξετάζεται. Οι παράμετροι N_r , N_{θ} και N_{ω} , που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις ελαστικές σταθερές των διεπιφανειακών ελατηρίων, για τα οποία έχει υποθεθεί γραμμική συμπεριφορά. Για μεγάλες τιμές των παραμέτρων αυτών, δηλαδή όταν N_r , N_{θ} και N_{ω} προσεγγίζουν το άπειρο, η συμπεριφορά της διεπιφάνειας προσεγγίζει αυτή της τέλει διεπιφάνειας. Αντίθετα, όταν N_r , N_{θ} και N_{ω}

τείνουν στο μηδέν, οι παραπάνω σχέσεις περιγράφουν τον πλήρη διαχωρισμό των δύο μέσων. Όταν $N_r \rightarrow \infty$, $N_\theta \rightarrow 0$ και $N_\omega \rightarrow 0$, η διεπιφάνεια προσεγγίζει την συμπεριφορά μίας ολισθένουσας διεπιφάνειας.

3.2 Οι τασικές συναρτήσεις του Mindlin για το διφασικό ελαστικό σύστημα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάστηκε συνοπτικά η γενική λύση που έδωσε ο Mindlin [16] για το συνεπίπεδο πρόβλημα της ελαστικότητας Cosserat σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Σύμφωνα με την λύση αυτή, τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται σε ένα συνεπίπεδο πρόβλημα, που εμπλέκει κυκλικά σύνορα, μπορούν να εκφραστούν σε όρους δύο τασικών συναρτήσεων $\varphi = \varphi(r, \theta)$ και $\psi = \psi(r, \theta)$, που αποτελούν λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (2.32) και (2.35). Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές είναι η γνωστή διαρμονική εξίσωση της διδιάστατης ελαστικότητας Cauchy, και οι εκφράσεις των συναρτήσεων φ , που ικανοποιούν την εξίσωση αυτή, είναι γνωστές ως συναρτήσεις Airy. Η επίλυση συνοριακών προβλημάτων στα πλαίσια της ελαστικότητας Cauchy με την κατάλληλη επιλογή συναρτήσεων Airy, που να ικανοποιούν τις συνοριακές διεπιφανειακές συνθήκες των σχετικών προβλημάτων, έχει αποτελέσει μία ιδιαίτερη τεχνική στην θεωρία της κλασσικής ελαστικότητας. Η δεύτερη εξίσωση είναι μία πιο σύνθετη εξίσωση από την διαρμονική. Η αναζήτηση λύσεων της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε προβλήματα με κυκλικά σύνορα, χρησιμοποιώντας την τεχνική των χωριζόμενων μεταβλητών, οδηγεί σε εκφράσεις λύσεων που εμπλέκουν συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους. Επιπλέον, οι εξισώσεις συμβιβαστότητας μεταξύ καμπυλοτήτων και παραμορφώσεων επιβάλλουν συγκεκριμένες συνθήκες εξάρτησης μεταξύ των λύσεων φ και ψ , που θα επιλεγθούν να αντιπροσωπεύουν την γενική λύση του σχετικού συνοριακού προβλήματος. Οι συνθήκες αυτές, σε πολικές συντεταγμένες παρέχονται από τις σχέσεις (2.46) και (2.47). Για το συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάται επιλέγονται οι παρακάτω τασικές συναρτήσεις

$$\varphi^I = A_1 r^2 + (B_1 + C_1 r^2) r^2 \cos 2\theta, \quad \psi^I = \left[D_1 r^2 + E_1 I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \sin 2\theta \quad (3.4)$$

για την ανομοιογένεια, και

$$\varphi^M = \frac{\sigma_x^\infty}{4} r^2 + A_2 \log r + \left(-\frac{\sigma_x^\infty}{4} r^2 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 \right) \cos 2\theta, \quad \psi^M = \left[\frac{D_2^2}{r^2} + E_2 K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \sin 2\theta \quad (3.5)$$

για τη μήτρα. Στις παραπάνω σχέσεις, I_2 και K_2 είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel, πρώτου και δεύτερου τύπου, αντίστοιχα. Στις σχέσεις αυτές, τα A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 και A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 είναι πραγματικές σταθερές που θα προσδιορισθούν παρακάτω. Οι συναρτήσεις φ_I, ψ_I και φ_M, ψ_M ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις (2.32) και (2.35), όχι όμως και τις συνθήκες (2.46) και (2.47). Η απαίτηση ικανοποίησης των τελευταίων συνθηκών, οδηγεί στις σχέσεις

$$D_1 = 24(1 - \nu_I) l_I^2 C_1, \quad D_2 = 8(1 - \nu_M) l_M^2 C_2. \quad (3.6)$$

Στη συνέχεια, με βάση τις τασικές συναρτήσεις (3.4)-(3.5), που επιλέχθηκαν θα προσδιορισθούν οι εκφράσεις των ελαστικών πεδίων στην μήτρα και στην ανομοιογένεια. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.36)-(2.45), προκύπτουν τα παρακάτω ελαστικά πεδία για την ανομοιογένεια

$$\sigma_r^I = 2A_1 - 2 \left\{ B_1 + 24(1 - \nu_I) l_I^2 C_1 + \frac{1}{r^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - 3I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \right\} \cos 2\theta, \quad (3.7)$$

$$\sigma_\theta^I = 2A_1 + 2 \left\{ B_1 + 6 \left[r^2 + 4(1 - \nu_I) l_I^2 \right] C_1 + \frac{1}{r^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - 3I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \right\} \cos 2\theta, \quad (3.8)$$

$$\tau_{r\theta}^I = \left\{ 2B_1 + 6 \left[r^2 + 8(1 - \nu_I) l_I^2 \right] C_1 - \frac{1}{r^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - 6I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \right\} \sin 2\theta, \quad (3.9)$$

$$\tau_{\theta r}^I = \left\{ 2B_1 + 6 \left[r^2 + 8(1 - \nu_I) l_I^2 \right] C_1 - \frac{1}{r^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - (6 - \lambda_I^2) I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \right\} \sin 2\theta, \quad (3.10)$$

$$\mu_r^I = \left\{ 48(1 - \nu_I) l_I^2 r C_1 + \frac{1}{r} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - 2I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \right\} \sin 2\theta, \quad (3.11)$$

$$\mu_{\theta}^I = 2 \left[24(1-\nu_I)l_I^2 r C_1 + \frac{1}{r} E_1 I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \cos 2\theta, \quad (3.12)$$

$$2\mu_I u_r^I = 2(1-2\nu_I)rA_1 - 2 \left\{ B_1 r + 2r \left[\nu_I r^2 + 12(1-\nu_I)l_I^2 \right] C_1 - \frac{1}{r} E_1 I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right\} \cos 2\theta, \quad (3.13)$$

$$2\mu_I u_{\theta}^I = \left\{ 2B_1 r + 2r \left[(3-2\nu_I)r^2 + 24(1-\nu_I)l_I^2 \right] C_1 \right\} \sin 2\theta + \frac{1}{r} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{r}{l_I} \right) - 2I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \sin 2\theta, \quad (3.14)$$

$$2\mu_I \omega_z^I = \left[12r^2(1-\nu_I)C_1 - \frac{1}{2l_I^2} E_1 I_2 \left(\frac{r}{l_I} \right) \right] \sin 2\theta, \quad (3.15)$$

Όμοια, τα αντίστοιχα ελαστικά πεδία που αποκτώνται για τη μήτρα έχουν μορφή

$$\sigma_r^M = \frac{\sigma_x^{\infty}}{2} + \frac{1}{r^2} A_2 + \left\{ \frac{\sigma_x^{\infty}}{2} - \frac{6}{r^4} B_2 - \frac{4}{r^2} \left[1 - \frac{12}{r^2} (1-\nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} \right] C_2 \right\} \cos 2\theta + \frac{2}{r} E_2 \left[\frac{1}{l_M} K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) + \frac{3}{r} K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \cos 2\theta, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{\theta}^M = \frac{\sigma_x^{\infty}}{2} - \frac{1}{r^2} A_2 + \left[-\frac{\sigma_x^{\infty}}{2} + \frac{6}{r^4} B_2 - \frac{48}{r^4} (1-\nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} C_2 \right] \cos 2\theta - \frac{2}{r} E_2 \left[\frac{1}{l_M} K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) + \frac{3}{r} K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \cos 2\theta, \quad (3.17)$$

$$\tau_{r\theta}^M = \left\{ -\frac{\sigma_x^{\infty}}{2} - \frac{6}{r^4} B_2 - \frac{2}{r^2} \left[1 - \frac{24}{r^2} (1-\nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} \right] C_2 \right\} \sin 2\theta + \frac{1}{r} E_2 \left[\frac{1}{l_M} K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) + \frac{6}{r} K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \sin 2\theta, \quad (3.18)$$

$$\tau_{\theta r}^M = - \left\{ \frac{\sigma_x^\infty}{2} + \frac{6}{r^4} B_2 + \frac{2}{r^2} \left[1 - \frac{24}{r^2} (1 - \nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} \right] C_2 \right\} \sin 2\theta - \quad (3.19)$$

$$- \left[\frac{1}{r} (1 - l_M) K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) - \left(\frac{1}{l_M} + \frac{2l_M}{r^2} (1 + 2l_M) \right) K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$\mu_r^M = \left\{ -\frac{16}{r^3} (1 - \nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} C_2 - \frac{1}{r} E_2 \left[\lambda_M K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) + 2K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \right\} \sin 2\theta, \quad (3.20)$$

$$\mu_\theta^M = \left[\frac{16}{r^3} (1 - \nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} C_2 + \frac{2}{r} E_2 K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \cos 2\theta, \quad (3.21)$$

$$2\mu_M u_r^M = \left(\frac{1}{2} - \nu_M \right) r \sigma_x^\infty - \frac{1}{r} A_2 + \quad (3.22)$$

$$+ \left[-\frac{\sigma_x^\infty}{2} r - \frac{2}{r^3} B_2 - \frac{4}{r} (1 - \nu_M) \left(1 - \frac{4}{r^2} \frac{R^2}{\lambda_M^2} \right) C_2 + \frac{2}{r} E_2 K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$2\mu_M u_\theta^M = - \left\{ \frac{\sigma_x^\infty}{2} r - \frac{2}{r^3} B_2 + \frac{2}{r} \left[(1 - 2\nu_M) + \frac{8}{r^2} (1 - \nu_M) \frac{R^2}{\lambda_M^2} \right] C_2 \right\} \sin 2\theta \quad (3.23)$$

$$- \frac{1}{r} E_2 \left[\lambda_M K_1 \left(\frac{r}{l_M} \right) + 2K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$2\mu_M \omega_z^M = \left\{ \frac{4}{r^2} (1 - \nu_M) C_2 + \frac{1}{2l_M} E_2 K_2 \left(\frac{r}{l_M} \right) \right\} \sin 2\theta, \quad (3.24)$$

Στις παραπάνω σχέσεις των ελαστικών πεδίων, δεν επεισέρχονται οι σταθερές D_1 και D_2 , επειδή έχουν απαλειφθεί κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.6). Επιπλέον, από την επιλογή των τασικών συναρτήσεων, οι συνοριακές συνθήκες των τάσεων στην περιοχή του απείρου, ικανοποιούνται αυτόματα. Πράγματι, από τις (3.7)-(3.12) και (3.16)-(3.21), όταν $r \rightarrow \infty$ και $\theta = 0$, προκύπτει $\sigma_r \rightarrow \sigma_{xx}^\infty$, $\sigma_{r\theta} \rightarrow 0$ και $\mu_r \rightarrow 0$.

3.3 Προσδιορισμός των σταθερών που υπεισέρχονται στις τασικές συναρτήσεις

Οι υπολοιπόμενες οκτώ σταθερές που υπεισέρχονται, δηλαδή οι σταθερές A_1, B_1, C_1, E_1 για την ανομοιογένεια και οι A_2, B_2, C_2, E_2 για τη μήτρα, θα προσδιορισθούν από την απαίτηση ικανοποίησης των διεπιφανειακών συνθηκών (3.1)-(3.3). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις των ελαστικών πεδίων (3.7)-(3.24), στις σχέσεις (3.1)-(3.3) από την απαίτηση οι σχέσεις αυτές να ισχύουν για κάθε θ και r , προκύπτουν οι παρακάτω οκτώ γραμμικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό ισάριθμου αγνώστων σταθερών:

$$2A_1 - \frac{1}{R^2} A_2 = \frac{\sigma_x^\infty}{2} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & -2B_1 - 48(1-\nu_I)l_I^2 C_1 - \frac{2}{R^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{R}{l_I} \right) - 3I_2 \left(\frac{R}{l_I} \right) \right] + \frac{6}{R^4} B_2 + \\ & + \frac{4}{R^2} \left[1 - \frac{12}{\lambda_M^2} (1-\nu_M) \right] C_2 - E_2 \left[\frac{2}{Rl_M} K_1 \left(\frac{R}{l_M} \right) + \frac{6}{R^2} K_2 \left(\frac{R}{l_M} \right) \right] = \frac{\sigma_x^\infty}{2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & 2B_1 + 6 \left[R^2 + \frac{8}{\lambda_I^2} (1-\nu_I) \right] C_1 - \frac{1}{R^2} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{R}{l_I} \right) - 6I_2 \left(\frac{R}{l_I} \right) \right] + \frac{6}{R^4} B_2 + \\ & + \frac{2}{R^2} \left[1 - \frac{24}{\lambda_M^2} (1-\nu_M) \right] C_2 - \frac{1}{R} E_2 \left[\lambda_M K_1 \left(\frac{R}{l_M} \right) + \frac{6}{R} K_2 \left(\frac{R}{l_M} \right) \right] = -\frac{\sigma_x^\infty}{2}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & 48(1-\nu_I) \frac{R^3}{\lambda_I^2} C_1 + \frac{1}{R} E_1 \left[\lambda_I I_1 \left(\frac{R}{l_I} \right) - 2I_2 \left(\frac{R}{l_I} \right) \right] + \\ & + \frac{16}{R\lambda_M^2} (1-\nu_M) C_2 + \frac{1}{R} E_2 \left[\lambda_M K_1 \left(\frac{R}{l_M} \right) + 2K_2 \left(\frac{R}{l_M} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$2(1-2\nu_I)RA_1 + \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{2}{R} \frac{\mu_I}{Nr} \right) A_2 = - \left[(2\nu_M - 1) \frac{\mu_I}{\mu_M} R + \frac{\mu_I}{Nr} \right] \frac{\sigma_x^\infty}{2}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
 & 2B_1R + 4R^3[v_I + \frac{12}{\lambda_I^2}(1-v_I)]C_1 + \frac{2}{R}E_1I_2\left(\frac{R}{l_I}\right) + \frac{2}{R^3}\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{6}{R}\frac{\mu_I}{N_r}\right)B_2 + \\
 & + \frac{4}{R}\left\{(1-v_M)\left(1 - \frac{4}{\lambda_M^2}\right)\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{2}{R}\left[1 - \frac{12}{\lambda_M^2}(1-v_M)\right]\frac{\mu_I}{N_R}\right\}C_2 - \\
 & - \frac{1}{R}E_2\left\{\frac{4\mu_I}{N_r l_M}K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) + 2\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{6}{R}\frac{\mu_I}{N_r}\right)K_2\left(\frac{R}{l_M}\right)\right\} = -\left(\frac{\mu_I}{\mu_M}R - \frac{2\mu_I}{N_r}\right)\frac{\sigma_x^\infty}{2}
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
 & 2B_1R + 2R^3[(3-2v_I) + \frac{24}{\lambda_I^2}(1-v_I)]C_1 + \\
 & + \frac{1}{R}E_1\left[\lambda_I I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) - 2I_2\left(\frac{R}{l_I}\right)\right] - \frac{2}{R^3}\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{6}{R}\frac{\mu_I}{N_\theta}\right)B_2 + \\
 & + \frac{2}{R}\left\{\left[(1-2v_M) + \frac{8}{\lambda_M^2}(1-v_M)\right]\frac{\mu_I}{\mu_M} - \frac{2}{R}\left[1 - \frac{24}{\lambda_M^2}(1-v_M)\right]\frac{\mu_I}{N_\theta}\right\}C_2 +, \\
 & + \frac{1}{R}E_2\left\{\lambda_M\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{2}{R}\frac{\mu_I}{N_\theta}\right)K_1\left(\frac{R}{l_M}\right) + 2\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + \frac{6}{R}\frac{\mu_I}{N_\theta}\right)K_2\left(\frac{R}{l_M}\right)\right\} = \\
 & = -\left(\frac{\mu_I}{\mu_M}R - \frac{2\mu_I}{N_\theta}\right)\frac{\sigma_x^\infty}{2}
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
 & -24(1-v_I)R^2\left[1 + \frac{8}{\lambda_I^2}R\frac{\mu_I}{N_\omega}\right]C_1 - \left[\frac{4}{l_I}\frac{\mu_I}{N_\omega}I_1\left(\frac{R}{l_I}\right) - \left(\frac{R^2}{\lambda_I^2} + \frac{8}{R}\frac{\mu_I}{N_\omega}\right)I_2\left(\frac{R}{l_I}\right)\right]E_1 + \\
 & + \frac{8}{R^2}(1-v_M)\frac{\mu_I}{\mu_M}C_2 + \frac{1}{l_M}\frac{\mu_I}{\mu_M}E_2K_2\left(\frac{R}{l_M}\right) = 0
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

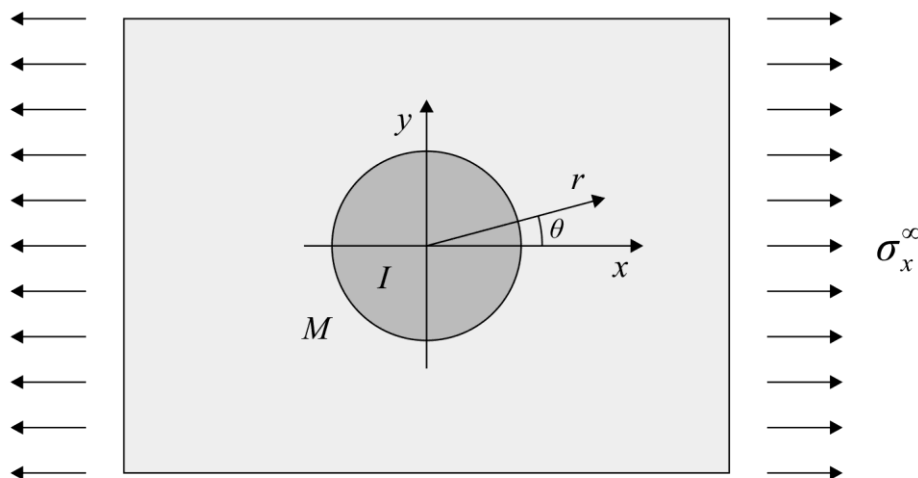
Το σύστημα αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα οκτώ εξισώσεων με άγνωστες ποσότητες τις σταθερές των τασικών συναρτήσεων. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών μπορεί να γίνει αριθμητικά για συγκεκριμένες τιμές των ελαστικών και γεωμετρικών παραμέτρων του συστήματος μήτρας ανομοιογένειας. Το παραπάνω σύστημα εκφράζεται στην μητρική μορφή $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ και επιλύεται αριθμητικά. Τα μητρώα \mathbf{A} , \mathbf{B} και \mathbf{x} ορίζονται στο Παράρτημα Α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης

Στη συνέχεια, με βάση τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα μελετηθεί η επίδραση μίας ελατηριακής σύνδεσης στην συγκέντρωση τάσεων κοντά στην διεπιφάνεια της κυλινδρικής ανομοιογένειας.



Σχήμα 4.1 Το ελαστικό σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας

Για τις φορτίσεις που θα εξετασθούν, ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων SCF, κοντά στην διεπιφάνεια της ανομοιογένειας, ορίζεται ως ο λόγος της μέγιστης εφαπτομενικής τάσης από δύναμη $\max \sigma_{\theta}(R, \theta)$ προς την εφαρμοσμένη εξωτερική τάση σ_x^{∞} , δηλαδή

$$SCF = \frac{\max \sigma_{\theta}(r = R, \theta)}{\sigma_x^{\infty}}. \quad (4.1)$$

Για την περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας στο σύστημα, ο προσδιορισμός του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων έχει γίνει από τον Weitsman [31] και από τους Hartranft και Sih [32]. Τα αριθμητικά αποτελέσματα, που αποκτώνται στην παρούσα εργασία, συγκρίνονται με αυτά που παρουσιάζονται στις παραπάνω αναφορές.

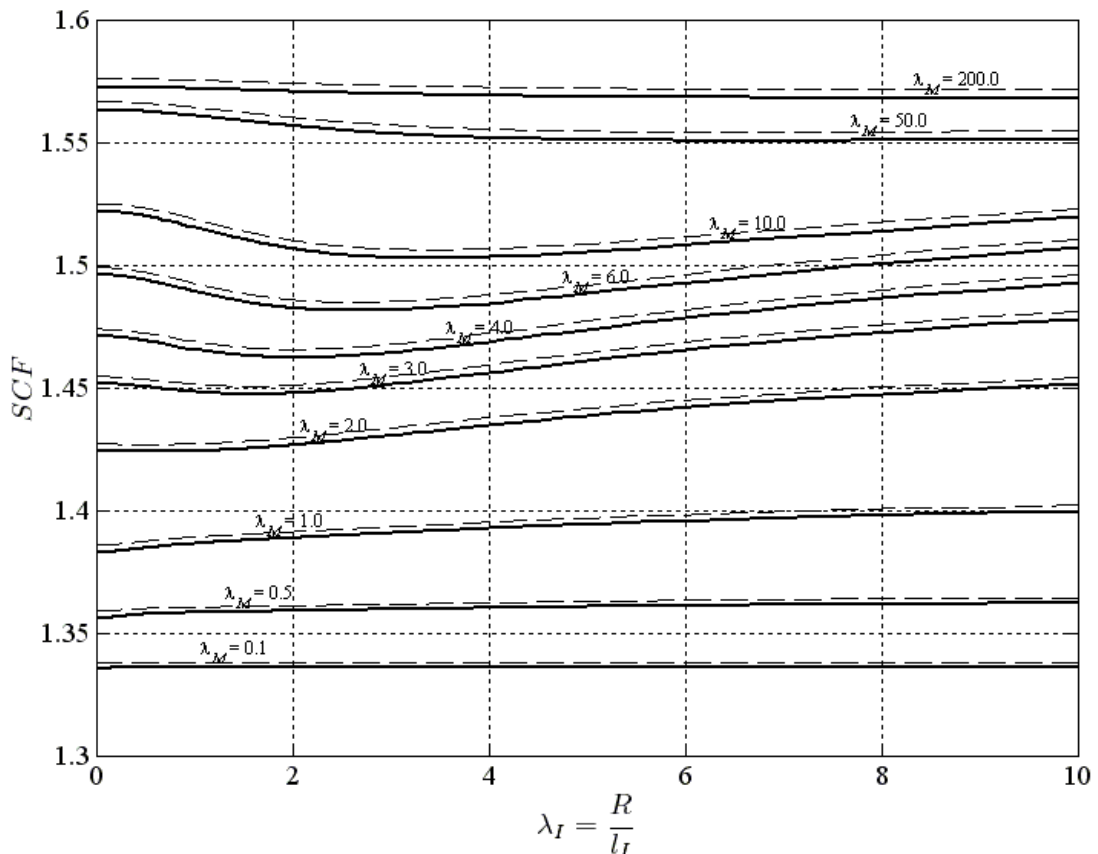
Στην συνέχεια, παρουσιάζονται, σε μορφή διαγραμμάτων, τα αριθμητικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν για μονοαξονική φόρτιση του συστήματος με τάση σ_x^{∞} στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Αντίστοιχα αποτελέσματα αποκτώνται για διαξονική φόρτιση και για καθαρή κάμψη στο άπειρο σύνορο της μήτρας, που καταχωρούνται στα Παράρτηματα Β και Γ, αντίστοιχα, της παρούσας εργασίας. Στο Παράρτημα Δ καταχωρείται το λογισμικό πρόγραμμα COSSERAT-INH, που συντάχθηκε για τον προσδιορισμό των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Για όλες τις φορτίσεις που θεωρούνται, αριθμητικά αποτελέσματα εξάγονται, ξεχωριστά, για τους παρακάτω συνδυασμών υλικών των συστήματος μήτρας/ανομοιογένειας:

- Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cosserat
- Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cauchy και Μήτρα Cauchy/ανομοιογένεια Cosserat
- Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια άκαμπτη

4.2 Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cosserat

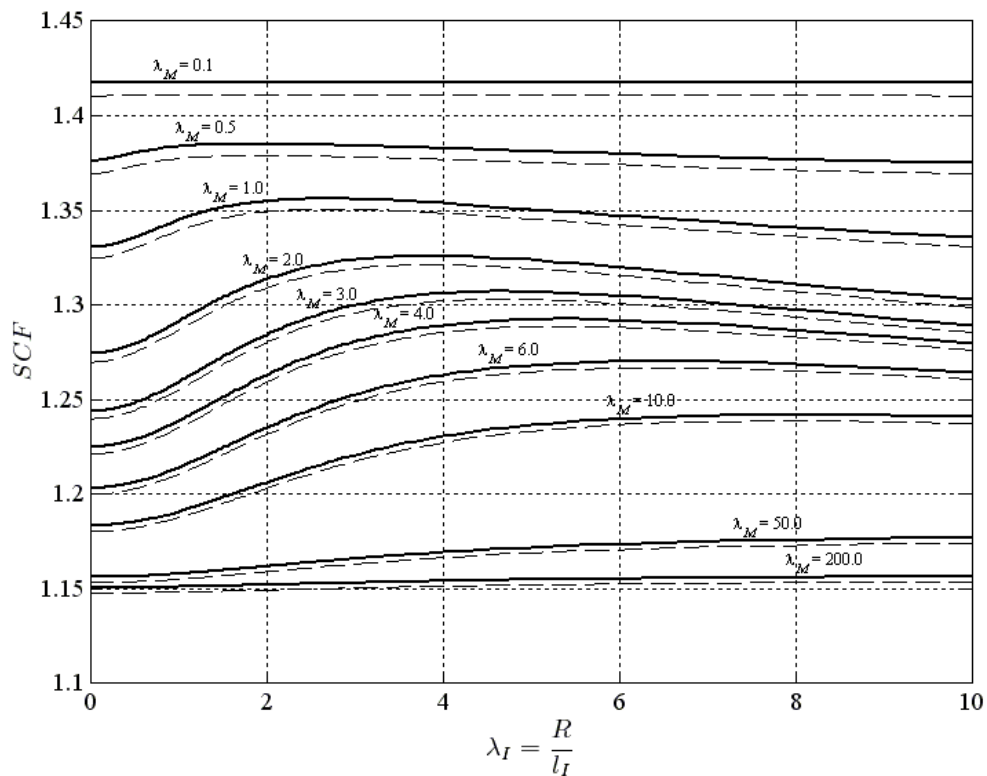
Πρώτα εξετάζεται η περίπτωση που $\mu_I/\mu_M = 0.5$. Στην περίπτωση αυτή, η μέγιστη εφαπτομενική τάση σ_θ αναπτύσσεται στην μήτρα, στη θέση $r = R$ και $\theta = \pi/2$.



Σχήμα 4.2 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης $SCF = \sigma_{\theta\theta}^M(\theta = \pm \pi/2, r = R)/\sigma_{xx}^\infty$ για τέλεια διεπιφάνεια (συνεχής καμπύλη) και ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομμένη καμπύλη)

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.2 παρουσιάζεται η μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων SCF, για όλες τις δυνατές τιμές των χαρακτηριστικών μηκών l_I , l_M , που περιγράφουν τη μικροδομή των δύο υλικών του συστήματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα του διαγράμματος αυτού έχουν υπολογισθεί για λόγους Poisson $\nu_I = 1/4$ και $\nu_M = 1/3$. Οι συνεχείς καμπύλες του διαγράμματος αντιστοιχούν σε τέλεια διεπιφάνεια του συστήματος ($N_r = N_\theta = N_\omega \rightarrow \infty$), ενώ οι διακεκομμένες καμπύλες, σε

διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου με παραμέτρους $N_r = N_\theta = N_\omega = 2.667 \mu_M / R$. Οι συνεχείς καμπύλες της τέλει διεπιφάνειας του διαγράμματος του Σχήματος 4.2 ταυτίζονται με αυτές που έχουν αποκτηθεί από τον Weitsman [31] για τις ίδιες παραμέτρους. Από το διάγραμμα του Σχήματος 4.2, συνάγεται ότι, ο σχηματισμός μιας διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου στο σύστημα αυξάνει πάντα τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων γύρω από την κυλινδρική ανομοιογένεια.



Σχήμα 4.3 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης ($SCF = \sigma_{\theta\theta}^I(\theta = \pm \pi/2, r = R) / \sigma_{xx}^\infty$) για τέλεια διεπιφάνεια (συνεχής καμπύλη) και ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομένη καμπύλη).

Όταν $\mu_I / \mu_M = 2$, η μέγιστη εφαπτομενική τάση σ_θ αναπτύσσεται στην ανομοιογένεια. Στο Σχήμα 4.3 παρουσιάζονται οι συντελεστές συγκέντρωσης των τάσεων για την περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τις ίδιες με προγούμενα παραμέτρους. Στην περίπτωση αυτή, τα αποκτώμενα διαγράμματα δείχνουν ότι η εμφάνιση μίας ελατηριακής διεπιφάνειας στο σύστημα μειώνει τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσης στην ανομοιογένεια.

4.3 Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια Cauchy και Μήτρα Cauchy/ανομοιογένεια Cosserat

Όταν η μήτρα είναι από υλικό Cosserat και η ανομοιογένεια από υλικό Cauchy ($l_I = 0$), η μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων δείχνεται στα διαγράμματα των Σχημάτων 4.4 και 4.5, για την περίπτωση που $\mu_I/\mu_M = 0.5$, και στο διάγραμμα των Σχημάτων 4.6 και 4.7, για την περίπτωση που $\mu_I/\mu_M = 2$. Τα διαγράμματα αυτά αντιστοιχούν στις παρακάτω τιμές των παραμέτρων

$$\nu_I = 1/4, \nu_M = 1/3,$$

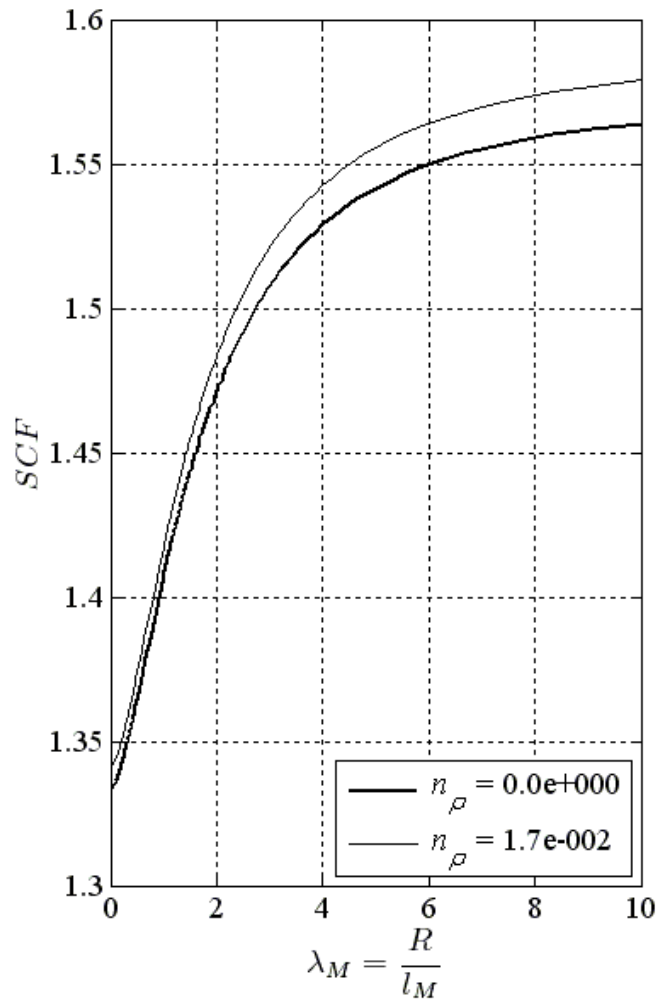
$$\mu_I/\mu_M = 2,$$

$$N_r = N_\theta = N_\omega = 2.67 \mu_M/R.$$

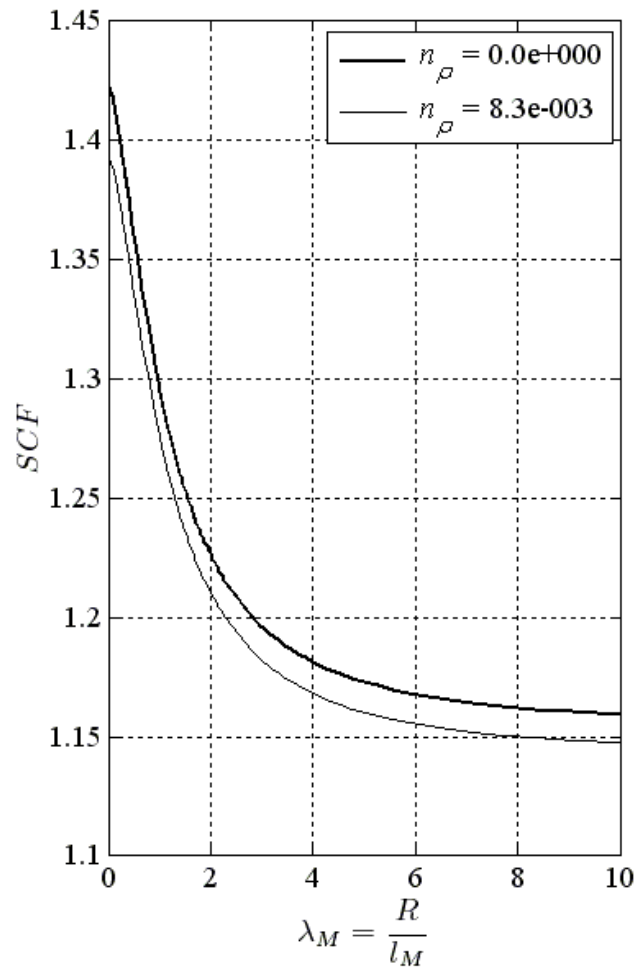
Όπως στον συνδυασμό μήτρας Cosserat/ανομοιογένειας Cauchy, η μέγιστη εφαπτομενική τάση εμφανίζεται στην μήτρα, όταν $\mu_I < \mu_M$, και στην ανομοιογένεια, όταν $\mu_I > \mu_M$. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν δείχνουν ότι οι παράμετροι της ελατηριακής διεπιφάνειας εξασκούν μια σημαντική επίδραση πάνω στον συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων. Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, για $\mu_I > \mu_M$ ο συντελεστής συγκέντρωσης των τάσεων μεώνεται, όταν η διεπιφάνεια της ανομοιογένειας-μήτρας υποβαθμιστεί σε μια ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια, ενώ το αντίθετο συμβαίνει όταν $\mu_I < \mu_M$.

Για την περίπτωση που η μήτρα είναι από υλικό Cauchy ($l_M = 0$) και η ανομοιογένεια από υλικό Cosserat, τα αντίστοιχα αποτελέσματα απεικονίζονται στα διαγράμματα 4.8-4.12.

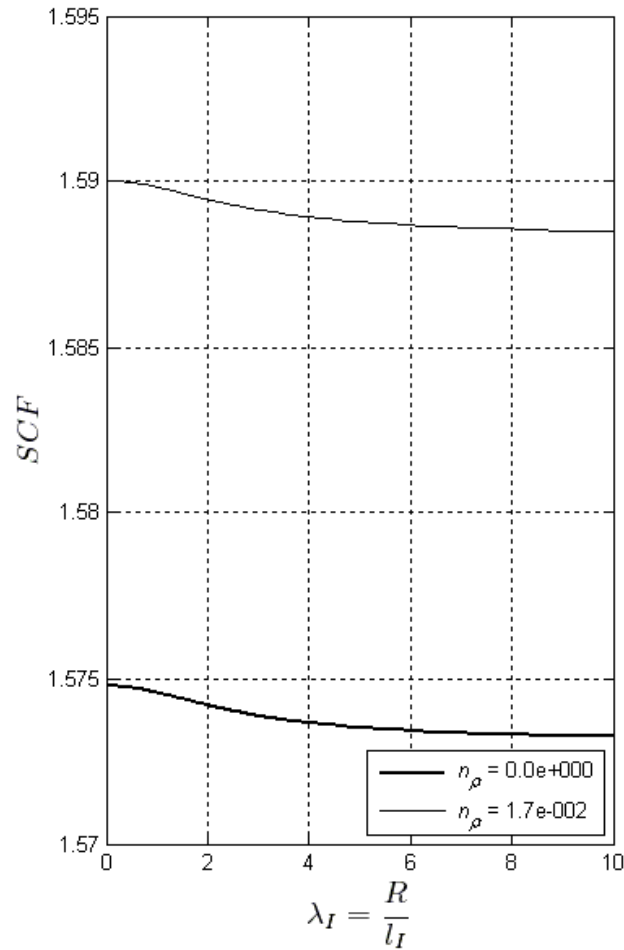
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και για τους δύο συνδυασμούς φάσεων, τα αποτελέσματα της περίπτωση $N_r = N_\theta = N_\omega \rightarrow \infty$ δείχνονται με έντονες γραμμές των διαγραμμάτων 4.4-4.7. Οι καμπύλες αυτές συμπίπτουν με αυτές που απαιτήθηκαν στην αναφορές [31-32] για τις ίδιες παραμέτρους.



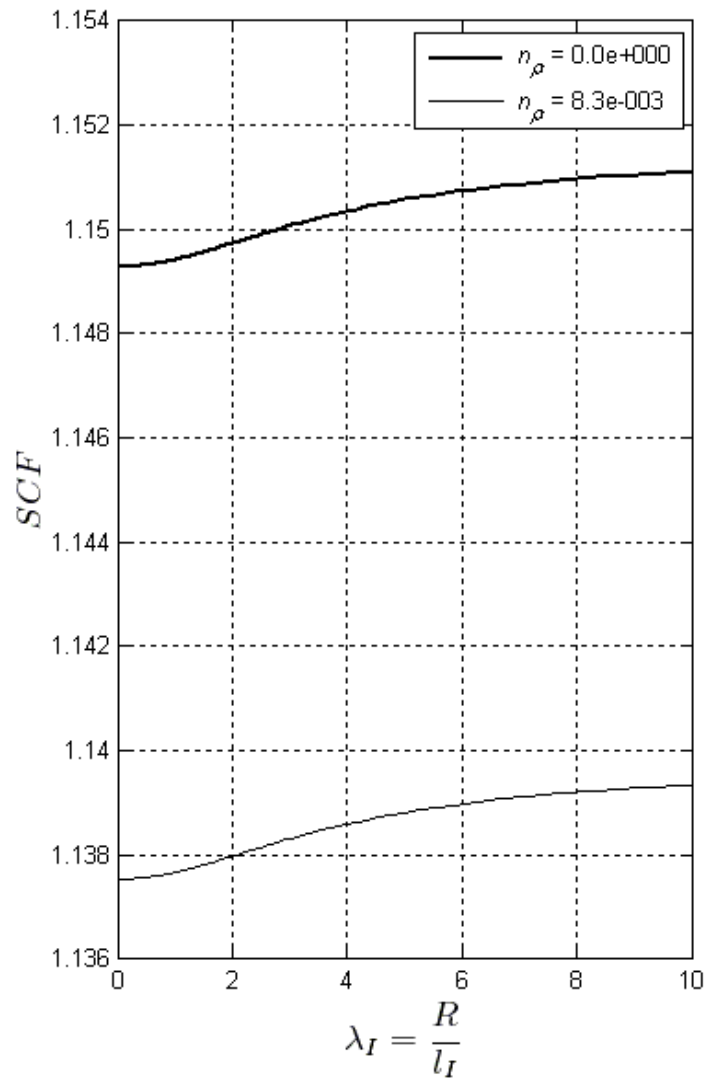
Σχήμα 4.4 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M(\theta = \pm \pi/2, r = R)/\sigma_{xx}^{\infty}$ για τέλεια (έντονη καμπύλη) και ελατηριακού τύπου (λεπτή καμπύλη) διεπιφάνεια, όταν η μήτρα περιγράφεται με την ελαστικότητα των Cosserat, ενώ η ανομοιογένεια με την ελαστικότητα του Cauchy.



Σχήμα 4.5 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I(\theta = \pm \pi/2, r = R) / \sigma_{xx}^{\infty}$ για τέλεια (έντονη καμπύλη) και ελατηριακού τύπου (λεπτή καμπύλη) διεπιφάνεια, όταν η μήτρα περιγράφεται με την ελαστικότητα των Cosserat, ενώ η ανομοιογένεια με την ελαστικότητα του Cauchy.



Σχήμα 4.6 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M(\theta = \pm \pi/2, r = R) / \sigma_{xx}^\infty$ για τέλεια (έντονη καμπύλη) και ελατηριακού τύπου (λεπτή καμπύλη) διεπιφάνεια, όταν η μήτρα περιγράφεται με την ελαστικότητα του Cauchy, ενώ η ανομοιογένεια με την ελαστικότητα των Cosserat.



Σχήμα 4.7 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I(\theta = \pm\pi/2, r = R)/\sigma_{xx}^\infty$ για τέλεια (έντονη καμπύλη) και ελατηριακού τύπου (λεπτή καμπύλη) διεπιφάνεια, όταν η μήτρα περιγράφεται με την ελαστικότητα του Cauchy, ενώ η ανομοιογένεια με την ελαστικότητα των Cosserat.

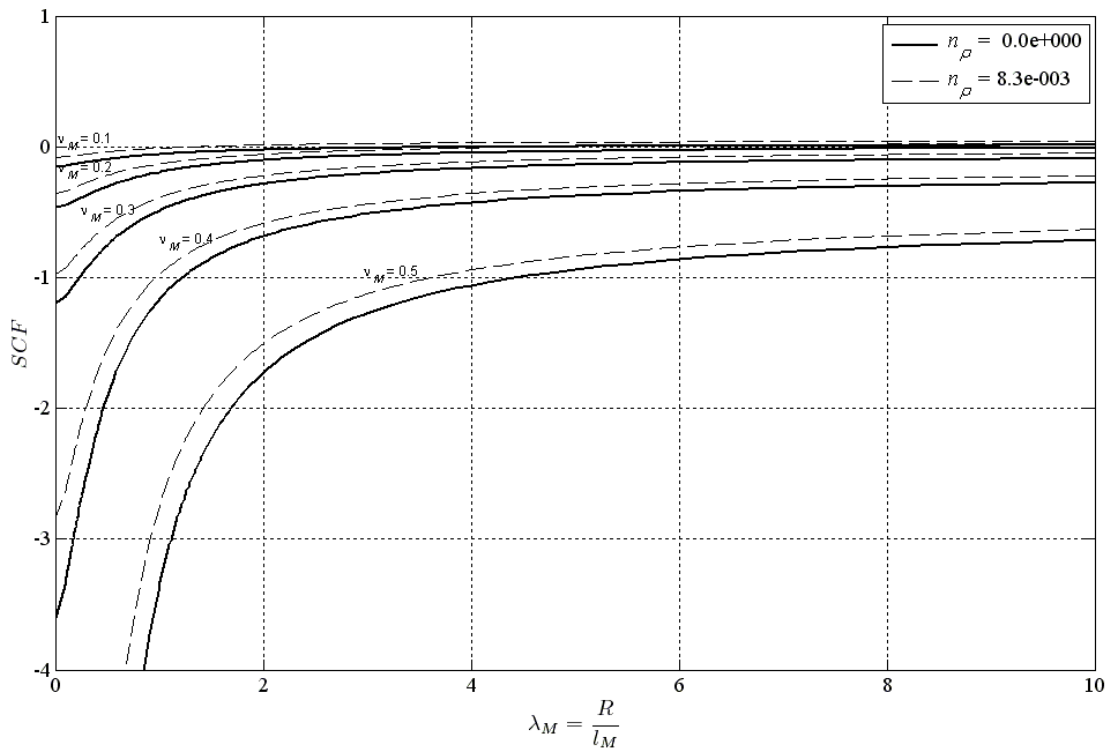
4.4 Μήτρα Cosserat/ανομοιογένεια άκαμπτη

Το Σχήμα 4.8 δείχνει την μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων για την περίπτωση που το μέτρο διάτμησης της μήτρας γίνεται άπειρο (απολύτως άκαμπτη ανομοιογένεια), για διάφορες τιμές του λόγου Poisson της μήτρας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα αντιστοιχούν στις παρακάτω παραμέτρους:

$$\mu_I = 1.5 \times 10^{11},$$

$$\nu_I = 1/4, l_M = 4 \times 10^8$$

$$N_r = N_\theta = N_\omega = 2.67 \mu_M / R.$$



Σχήμα 4.8 Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης ($SCF = \sigma_{\theta\theta}^M(\theta = \pm \pi/2, r = R) / \sigma_{xx}^\infty$) για τέλεια (διακεκομένη καμπύλη) και ελατηριακού τύπου (συνεχής καμπύλη) διεπιφάνεια, όταν το υλικό είναι άκαμπτο (rigid).

Η διακεκομένη καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση που η διεπιφάνεια του συστήματος γίνεται τέλεια ($N_r = N_\theta = N_\omega \rightarrow \infty$). Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στην περίπτωση αυτή συμπίπτουν με αυτά της αναφοράς [31].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, μια υποβαθμισμένη σύνδεση των επιμέρους φάσεων, σε ένα κοκκώδες σύνθετο υλικό, προσομοιώνεται με ελατήρια δύναμης και ελατήρια ροπής, αμελητέου πάχους, που είναι συνεχώς διανεμημένα πάνω στην διεπιφάνεια. Η μηχανική συμπεριφορά ενός ελατηρίου δύναμης περιγράφεται από μία διεπιφανειακή ασυνέχεια των μετατοπίσεων, της οποίας οι εφαπτομενικές και οι κάθετες διεπιφανειακές συνιστώσες είναι ανάλογες στις αντίστοιχες συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή από δύναμη. Στην προσομοίωση αυτή, ο ελκυστής από δύναμη είναι μια συνεχής συνάρτηση κατά μήκος της διεπιφάνειας των φάσεων του σύνθετου υλικού. Η μηχανική συμπεριφορά ενός ελατηρίου ροπής περιγράφεται από μία ασυνέχεια της περιστροφής, της οποίας η κάθετη και η εφαπτομενική διεπιφανειακή συνιστώσα είναι ανάλογες των αντίστοιχων συνιστωσών του διεπιφανειακού ελκυστή από ροπή. Επίσης, ο ελκυστής από ροπή είναι μια συνεχής συνάρτηση κατά μήκος της διεπιφάνειας.

Το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιείται για να διερευνηθεί η επίδραση μιας υποβαθμισμένης διεπιφάνειας ενός συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας πάνω στον συντελεστή συγκέντρωσης των τάσεων, όταν η μήτρα και η ανομοιογένεια είναι από υλικά Cosserat και στο σύστημα επενεργούν απομακρυσμένες ομοιόμορφες τάσεις από δύναμη. Τα ελαστικά πεδία του συστήματος εξάγονται χρησιμοποιώντας τασικές συναρτήσεις Mindlin. Αριθμητικά αποτελέσματα αποκτώνται για μια ομοιόμορφη μονοαξονική φόρτιση, για μία ομοιόμορφη διαξονική φόρτιση και για μία φόρτιση καθαρής διάτμησης στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Για όλες αυτές τις φορτίσεις, διερευνήθηκε η ειδική περίπτωση που ένα από τα δύο υλικά προσεγγίζει την συμπεριφορά υλικού Cauchy. Επίσης, διερευνήθηκε και η περίπτωση που η ανομοιογένεια προσεγγίζει την συμπεριφορά ενός απολύτως στερεού σώματος. Τα

αριθμητικά αποτελέσματα που αποκτώνται, παρουσιάζονται σε διαγραμματική μορφή. Από τα αριθμητικά αποτελέσματα που αποκτήθηκαν πρικόπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η μέγιστη εφαπτομενική τάση στη διεπιφάνεια εμφανίζεται στη μήτρα, όταν το μέτρο διάτμησης της ανομοιογένειας είναι μικρότερο από το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας, και στην ανομοιογένεια στην αντίθετη περίπτωση.
- Ο συντέλεστης συγκέντρωσης των τάσεων, για όλες τις περιπτώσεις φόρτισης, πάντα αυξάνει, όταν μία τέλεια διεπιφάνεια σε ένα σύστημα ανομοιογένειας-μήτρας μετασχηματίζεται σε διεπιφάνεια ελατηριακού τύπου και $\mu_I < \mu_M$. Το αντίθετο συμβαίνει όταν $\mu_I > \mu_M$.
- Τα ελαστικά πεδία εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά μήκη της μικροδομής των δύο φάσεων του συστήματος, καθώς και από τις παραμέτρους μήκους που εισάγονται από την ελατηριακή διεπιφάνεια.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Hashin, Z., (1983). Analysis of composites: a survey. *Journal of Applied Mechanics*. 50, 481–505.
2. Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Karihaloo, B.L., (2005). Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 53, 1574–1596.
3. Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J., (2007). A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part II: application and scaling laws. *Mechanics of Materials* 39, 94–103.
4. Xun, F., Hu, G.K., Huang, Z.P., (2004). Effective in-plane moduli of composites with a micropolar matrix and coated fibers. *International Journal of Solids and Structures*. 41, 247–265.
5. Kattis M., Karalis N., Gouti E., (2012). Energy changes in a stressed unbounded matrix containing an inhomogeneity due to formation of non-perfect interface. *Υπό δημοσίευση*.
6. Mindlin, R.D., (1963). Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp. Mech.* 3, 1–7.
7. Voigt, W., (1887). Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle. *Abhandl. Ges. Wiss. Göttingen* 34, 3–51.
8. Cosserat, E., Cosserat, F., (1909): *Théorie des corps déformables*. Herman et Fils, Paris.
9. Toupin, R.A., (1962): Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11, 385-414.
10. Toupin, R.A., (1964): Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 85–112.
11. Truesdell, C., (1964): Die Entwicklung des Drallsatzes. *ZAMM* 44(4/5), 149–158.
12. Truesdell, C., Noll, W., (1965): *The nonlinear field theories of mechanics*. In: Flügge, S. (ed.) *Handbuch der Physik*, vol. III/3, pp. 1–602. Springer, Berlin.

13. Truesdell, C., Toupin, R., (1960): *The classical field theories*. In: Flügge, S. (ed.) *Handbuch der Physik*, vol. III/1, pp. 226–793. Springer, Berlin.
14. Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. (1962): Effects of couple–stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 415–448.
15. Günther, W., (1958): Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweigschen Wissenschaftlichen Gesellschaft Göttingen* 10, 196–213.
16. Schaefer, H., (1967): Das Cosserat-Kontinuum. *ZAMM* 47(8), 485–498.
17. Neuber, H., (1964): *On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continua*, Int. Congress IUTAM, München.
18. Nowacki, W., (1986): *Theory of Asymmetric Elasticity*. Pergamon-Press, Oxford.
19. Kuvshinskii, E. V., Aero, A. L., (1963): Continuum theory of asymmetric elasticity, *Fizika Tverdogo Tela*, 5.
20. Aero, E.L., Kuvshinskii, E.V., (1961): Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Sov. Phys. Solid State* 2(7), 1272–1281.
21. Eringen, A.C., (1966): Linear theory of micropolar elasticity. *J. Math. Mech.* 15(6), 909–923.
22. Povstenko, Y.Z., (1993). Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1499–1514.
23. Vardoulakis, I., Aifantis, E. C. (1989): Gradient dependent dilatancy and its implication in shear banding and liquefaction. *Ing. Arch.* 59.
24. Vardoulakis, I., Georgiadis H.G., (1997): SH surface waves in a homogeneous gradient elastic half-space with surface energy. *J. Elasticity* 47, pp. 147–165
25. Georgiadis, H.G., Velgaki, E.G., (2003): High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and couple–stress effects. *Int. J. Solids Struct.* 40(10), 2501–2520.
26. Georgiadis H.G., Vardoulakis I., Velgaki E.G., (2004). Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *J. Elasticity*, 74 pp. 17–45.

-
27. Huan Chen, Gengkai Hu, Zhuping Huang, (2007). Effective moduli for micropolar composite with interface effectal. 44, 8106–8118.
 28. Benveniste, Y., Miloh, T., (2001). Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mechanic of Materials* 33, 309–323.
 29. Rubin M.B., Benveniste Y., (2004). A Cosserat shell model for interphases in elastic media. *J. Mech. Phys. Solids*. 52, 1023 – 1052.
 30. Timoshenko, S., and Goodier, J. N., (1951). *Theory of Elasticity*. McGrawHill Book Company, New York, 2nd Edition.
 31. Weitsman, Y., (1965). Couple-stress effects on stress concentration around a cylindrical inclusion in a field of uniaxial tension. *J. Appl. Mech.* 32, 424-428.
 32. Hartranft, R.J., Sih,G.C., (1965). The effect of couple stresses on the stress concentration of a circular inclusion. *J.Appl.Mech.* 32, 429–431.

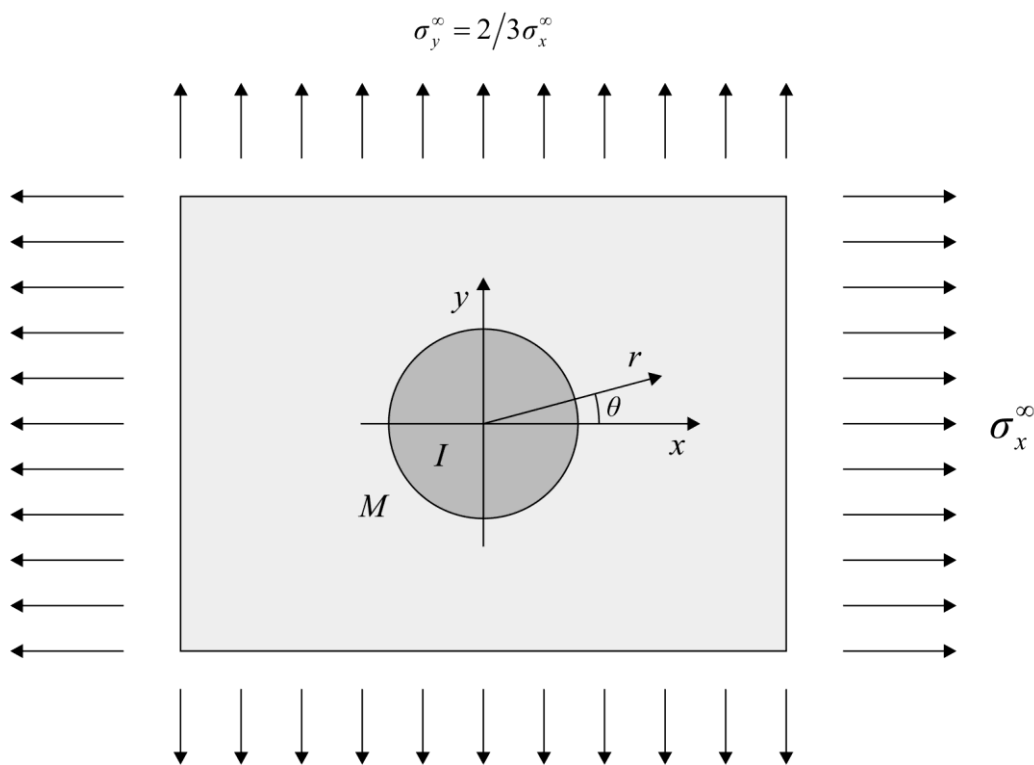
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Τα μητρώα A, B και x

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -48(1-\nu_1)l_1^2 & -\frac{2}{R^2} \left[\lambda_1 I_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) - 3I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] & 0 & \frac{6}{R^4} & \frac{4}{R} \left[1 - \frac{12}{\lambda_2^2} (1-\nu_2) \right] & - \left[\frac{2}{Rl_2} K_1 \left(\frac{R}{l_2} \right) + \frac{6}{R^2} K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \right] \\ 0 & 2 & 6 \left[R^2 + \frac{8}{\lambda_2^2} (1-\nu_1)l_1^2 \right] & -\frac{1}{R^2} \left[\lambda_1 I_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) - 6I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] & 0 & \frac{6}{R^4} & \frac{2}{R^2} \left[1 - \frac{24}{\lambda_2^2} (1-\nu_2) \right] & -\frac{1}{R} \left[\lambda_2 K_1 \left(\frac{R}{l_2} \right) + \frac{6}{R} K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \right] \\ 0 & 0 & 48(1-\nu_1) \frac{R^3}{\lambda_1^2} & \frac{1}{R} \left[\lambda_1 I_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) - 2I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] & 0 & 0 & \frac{16}{R\lambda_2^2} (1-\nu_2) & \frac{1}{R} \left[\lambda_2 K_1 \left(\frac{R}{l_2} \right) + 2K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \right] \\ 2(1-2\nu_1)R & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{2\mu_l}{R N_r} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2R & 4R[\nu_1 R^2 + 12(1-\nu_1)l_1^2] & \frac{2}{R} I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) & 0 & \frac{2}{R^3} \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{6\mu_l}{R N_r} \right) & \frac{4}{R} \left\{ (1-\nu_2) \left(1 - \frac{4}{\lambda_2^2} \right) \frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{2}{R} \left[1 - \frac{12}{\lambda_2^2} (1-\nu_2) \right] \frac{\mu_l}{N_r} \right\} & -\frac{1}{R} \left[\frac{4\mu_l}{N_r l_2} K_1 \left(\frac{R}{l_2} \right) + 2 \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{6\mu_l}{R N} \right) K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \right] \\ 0 & 2R & 2R(3-2\nu_1)R^2 + 24(1-\nu_1)l_1^2 & \frac{1}{R} \left[\lambda_1 I_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) - 2I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) \right] & 0 & -\frac{2}{R^3} \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{6\mu_l}{R N_\theta} \right) & \frac{2}{R} \left\{ \left[(1-2\nu_2) + \frac{8}{\lambda_2^2} (1-\nu_2) \right] \frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{2}{R} \left[-1 + \frac{24}{\lambda_2^2} (1-\nu_2) \right] \frac{\mu_l}{N_\theta} \right\} & \frac{1}{R} \left[\lambda_2 \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{2\mu_l}{R N_\theta} \right) K_1 \left(\frac{R}{l_2} \right) + 2 \left(\frac{\mu_l}{\mu_M} + \frac{6\mu_l}{R N} \right) K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \right] \\ 0 & 0 & -24(1-\nu_1)R^2 \left[1 + \frac{8}{\lambda_2^2} \frac{\mu_l}{N_\omega} \right] & -\frac{4}{l_1 N_\omega} I_1 \left(\frac{R}{l_1} \right) + \left(\frac{R^2}{\lambda_1^2} + \frac{8}{R N_\omega} \mu_l \right) I_2 \left(\frac{R}{l_1} \right) & 0 & 0 & \frac{8}{R^2} (1-\nu_2) \frac{\mu_l}{\mu_M} & \frac{1}{l_2} \frac{\mu_l}{\mu_M} K_2 \left(\frac{R}{l_2} \right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ \frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ -\frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ 0 \\ -\left[(2\nu_M - 1) \frac{\mu_I}{\mu_M} R + \frac{\mu_I}{N_r} \right] \frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ -\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} R - 2 \frac{\mu_I}{N_r} \right) \frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ -\left(\frac{\mu_I}{\mu_M} R - 2 \frac{\mu_I}{N_r} \right) \frac{\sigma_x^\infty}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ E_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Διαγράμματα διαξονικής φόρτισης

Για τη φόρτιση αυτή, τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν από την κατάλληλη επαλληλία δύο μονοαξονικών καταστάσεων, που αντιστοιχούν στις φορτίσεις σ_x^∞ και $\sigma_y^\infty \left(= \frac{2}{3} \sigma_x^\infty \right)$ στο άπειρο σύνορο της μήτρας, εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί στο κεφάλαιο 3, για την μονοαξονική κατάσταση του συστήματος. Η φόρτιση του συστήματος δείχνεται στο Σχήμα Β.1.

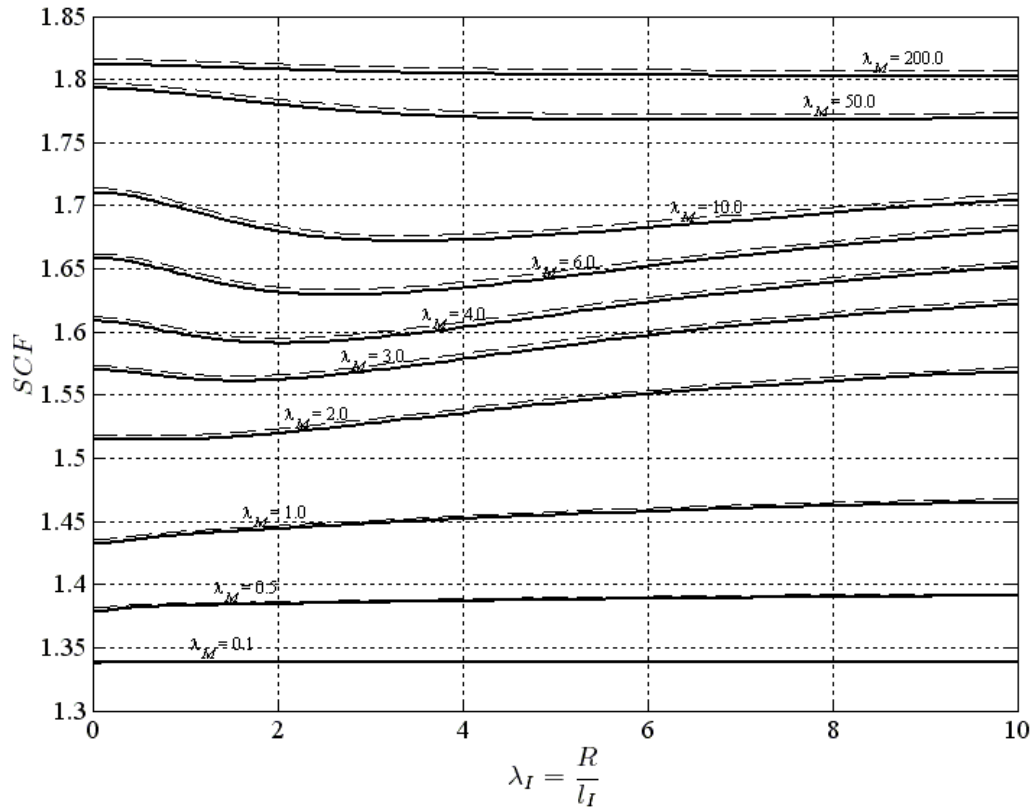


Σχήμα Β.1 Διαξονική φόρτιση κατά τους άξονες x και y .

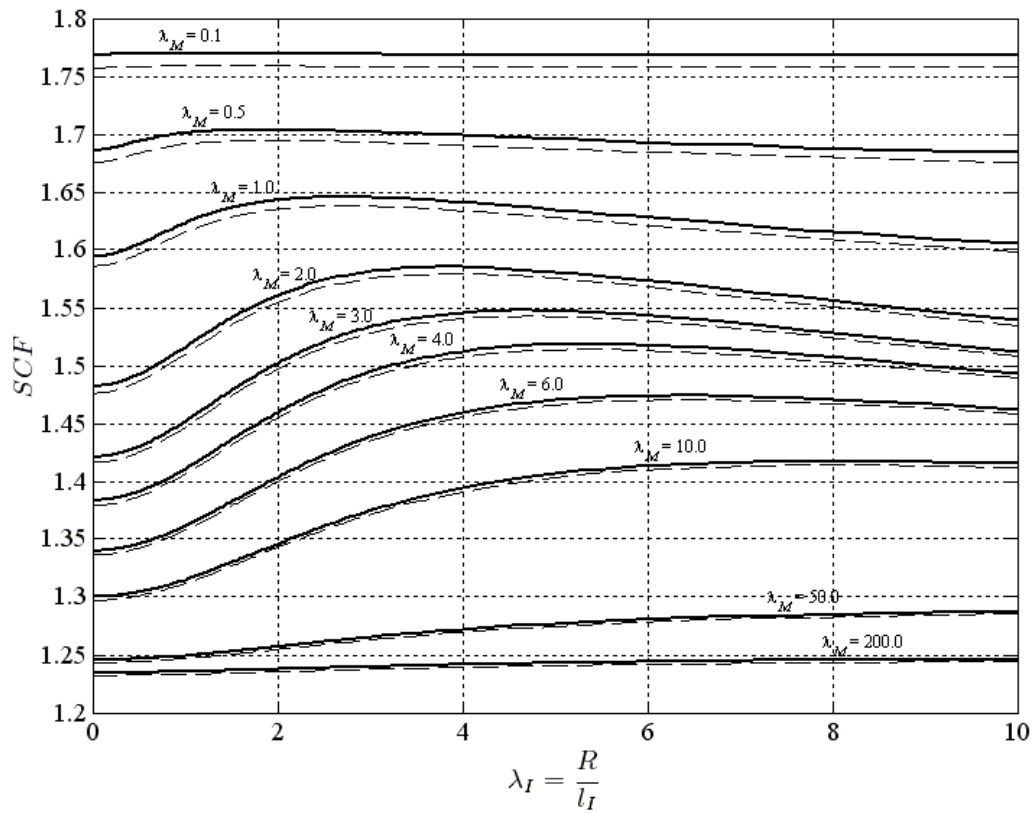
Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων SCF, που δείχνεται στα σχετικά διαγράμματα, παρέχεται από τη σχέση

$$SCF = \frac{\max \sigma_\theta}{\sigma_{xx}^\infty} \quad (B.1)$$

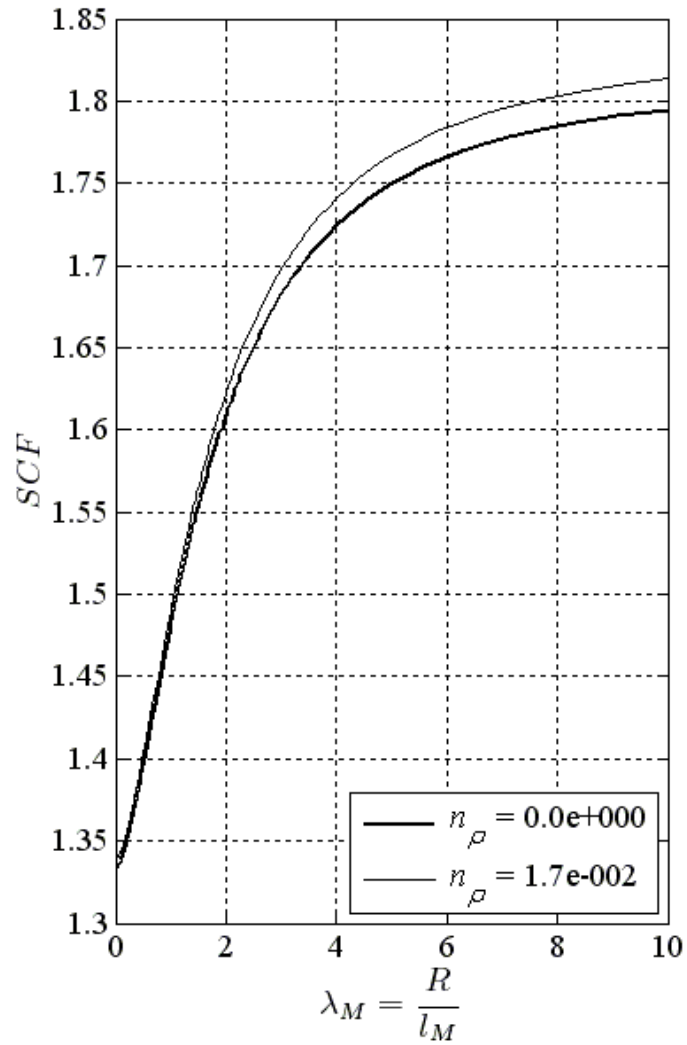
Όλα τα διαγράμματα του Παραρτήματος αυτού έχουν συνταχθεί για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων του συστήματος: $\nu_I = 1/4$, $\nu_M = 1/3$, $N_r = N_\theta = N_\omega = 9 \times 10^{12}$.



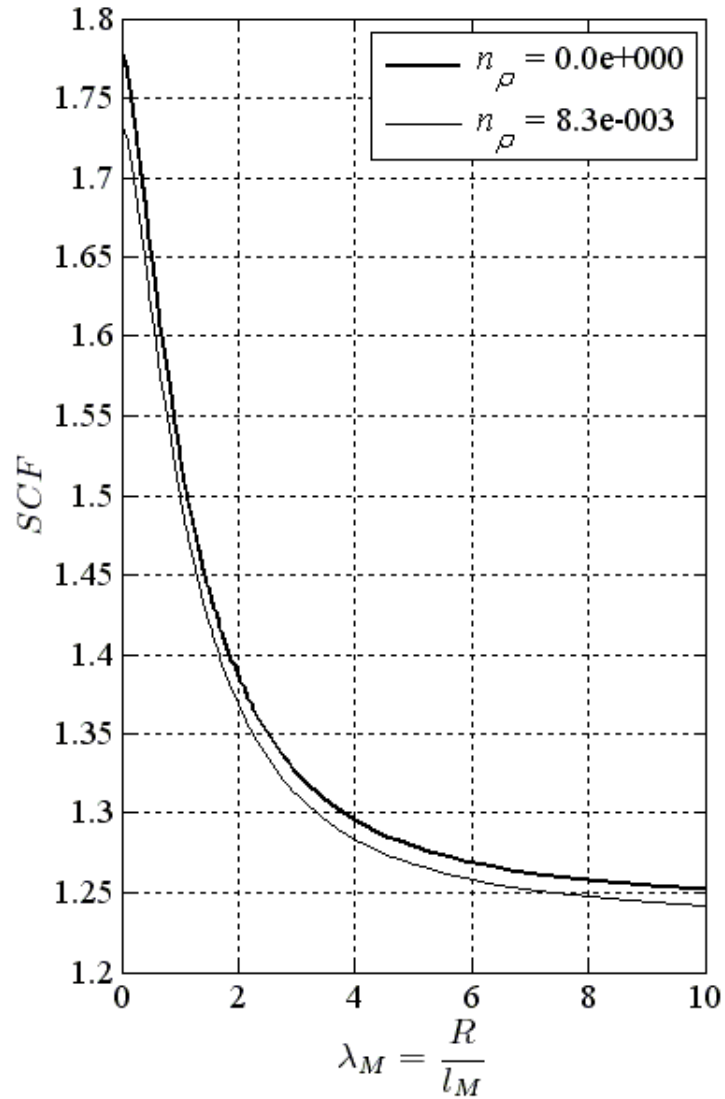
Σχήμα Β.2 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου επιφάνεια (διακεκομμένη καμπύλη) και για τέλεια (πλήρη καμπύλη).



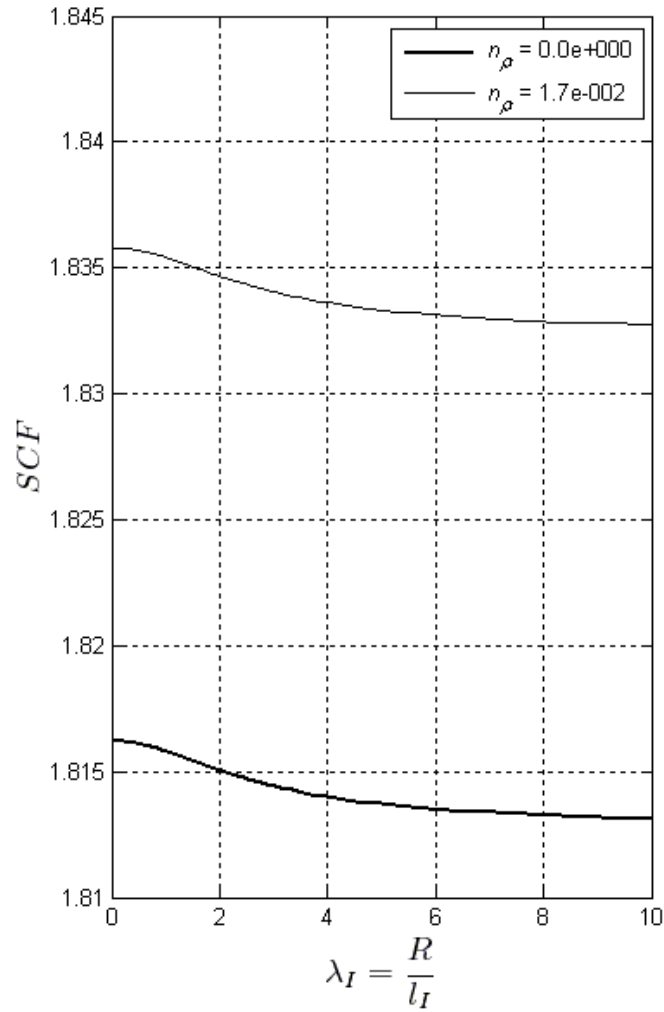
Σχήμα Β.3 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου επιφάνεια (διακεκομμένη καμπύλη) και για τέλεια (πλήρη καμπύλη).



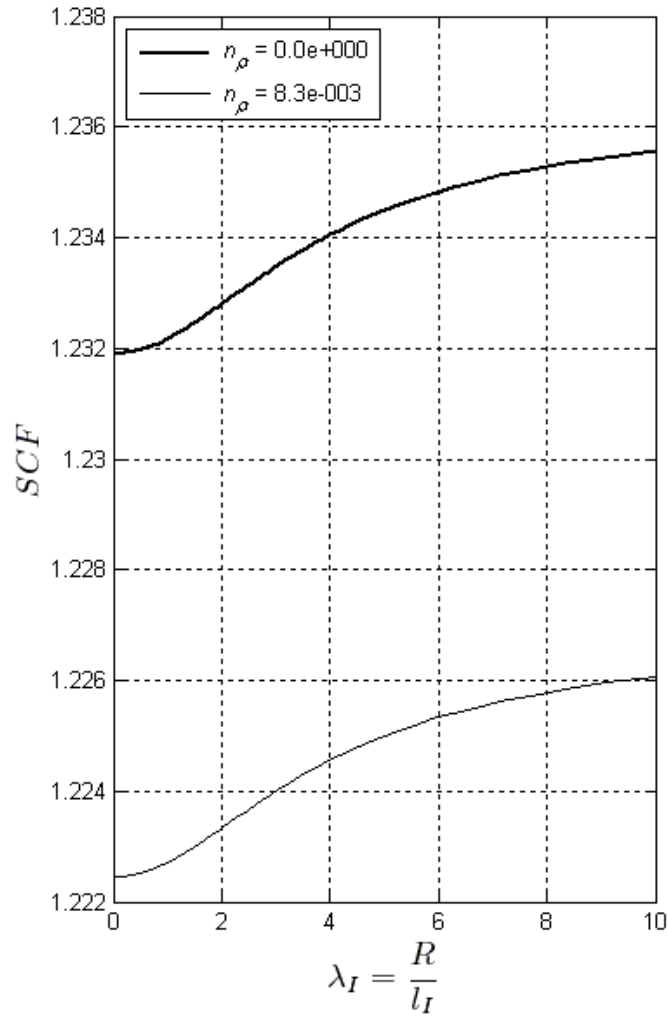
Σχήμα Β.4 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cauchy και $\mu_l/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



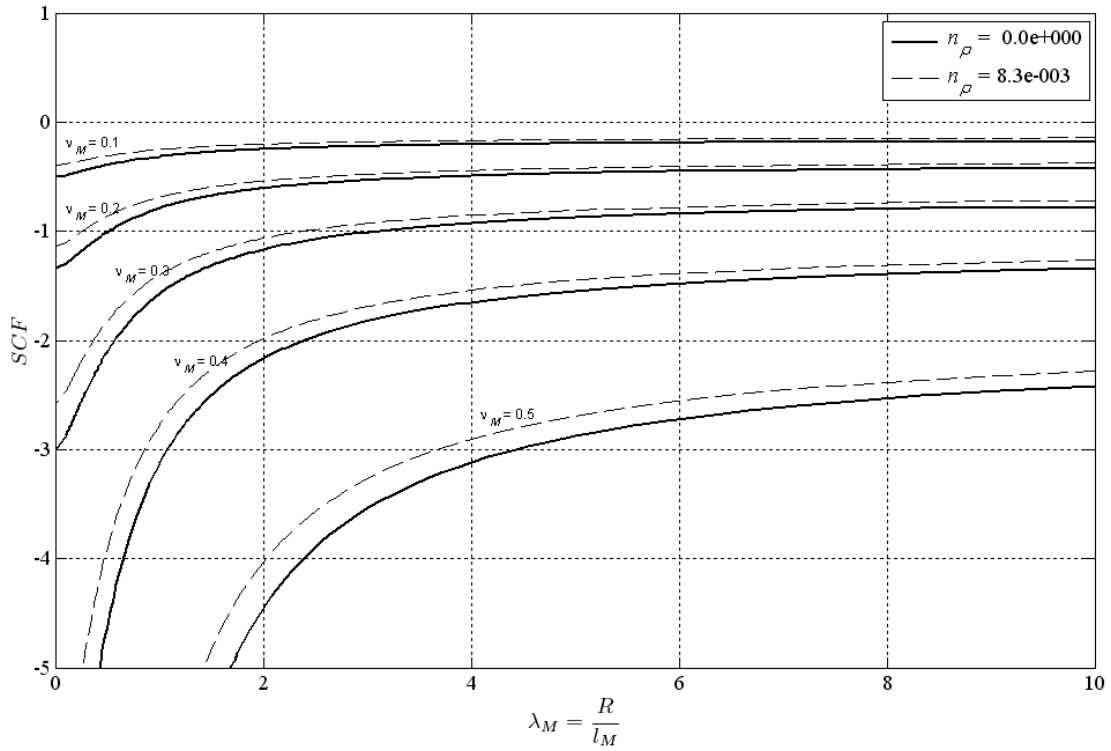
Σχήμα Β.5 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cauchy και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma'_{\theta\theta}/\sigma^\infty_{xx}$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



Σχήμα Β.6 Μήτρα από υλικό Cauchy/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (εντονη καμπύλη).



Σχήμα Β.7 Μήτρα από υλικό Cauchy/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου επιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια (έντονη καμπύλη).

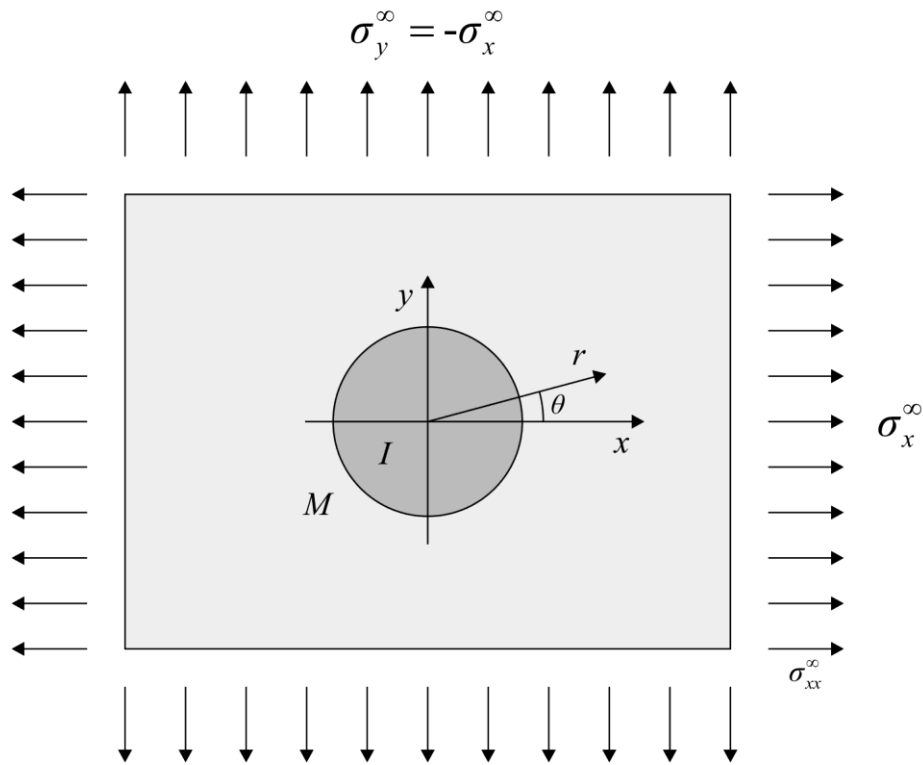


Σχήμα Β.8 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από άκαμπτο υλικό και $\mu_M = 0.75 \times 10^{11}$:

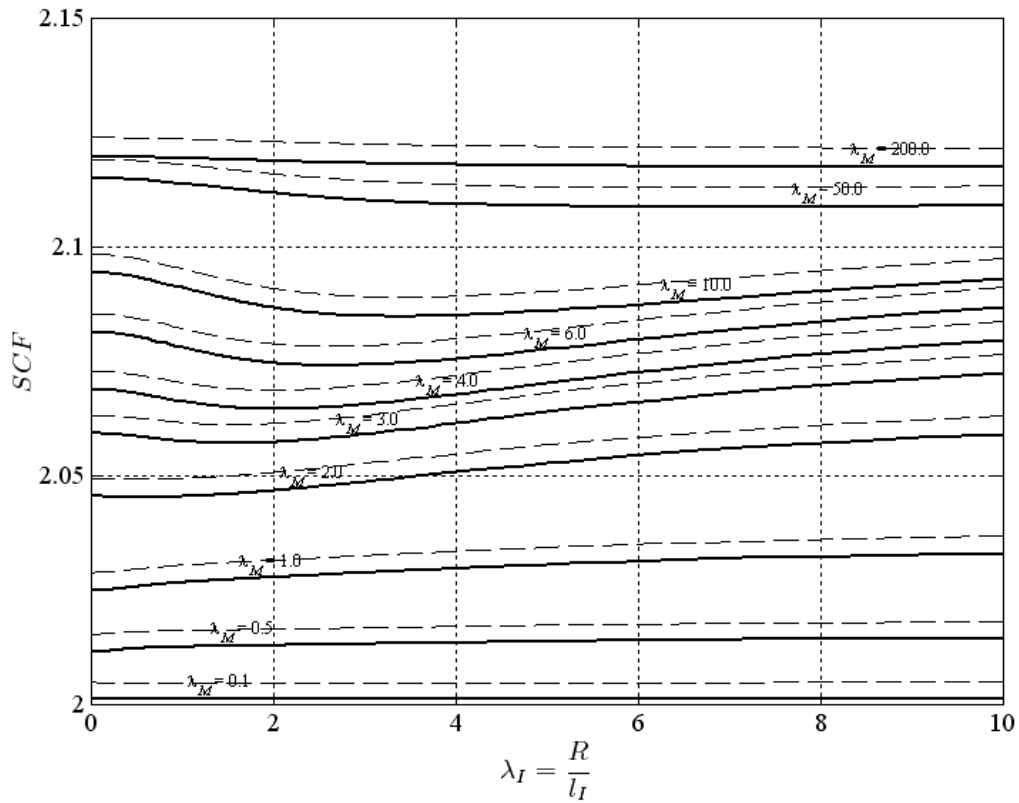
ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M / \sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομένη καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (πλήρη καμπύλη).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Διαγράμματα καθαρής κάμψης

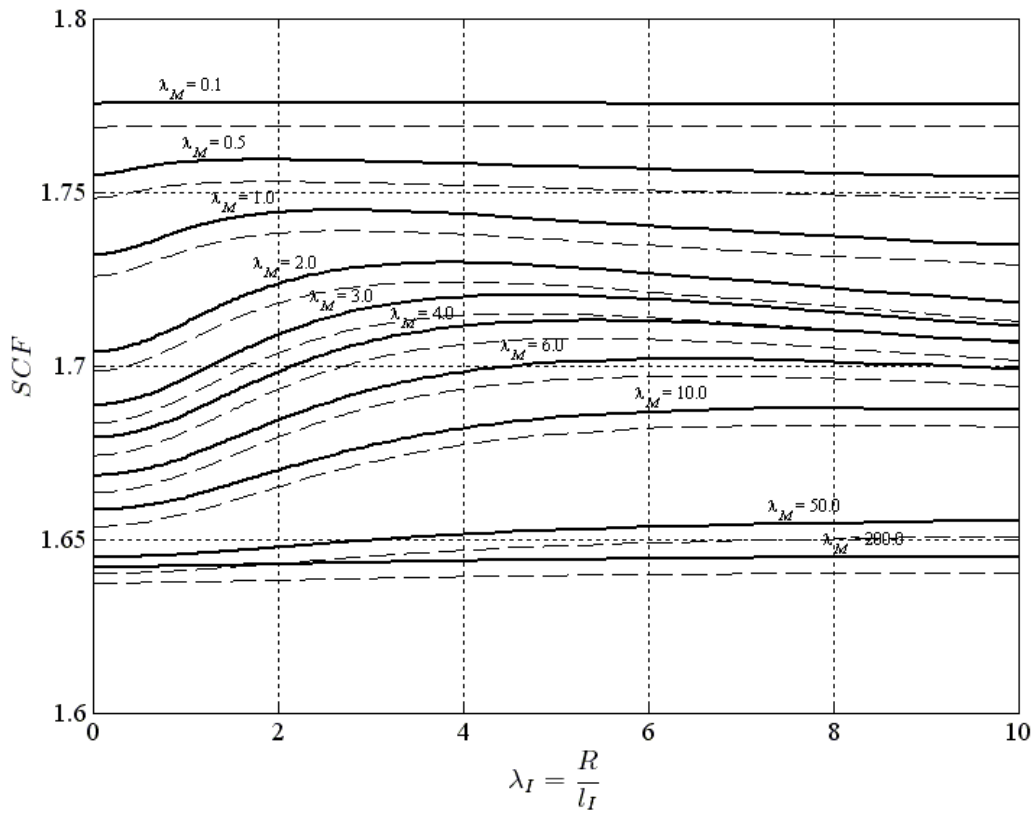
$(\sigma_y^\infty = -\sigma_x^\infty)$



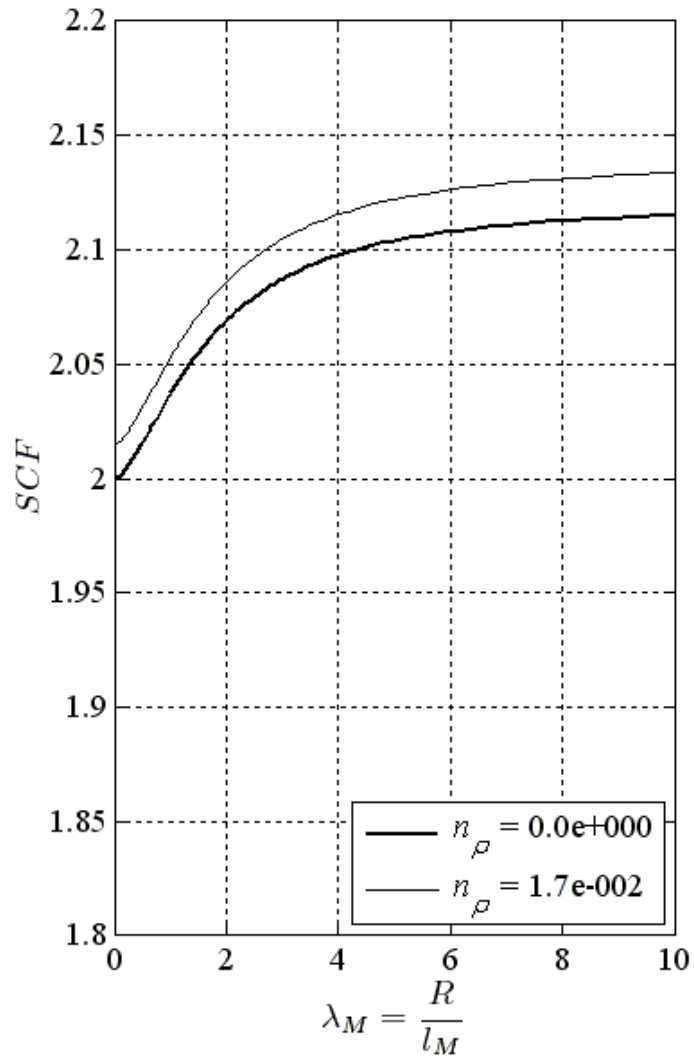
Σχήμα Γ.1 Το πρόβλημα της καθαρής κάμψης με διαξονικές φορτίσεις $\sigma_{xx}^\infty = -\sigma_{yy}^\infty = 1$.



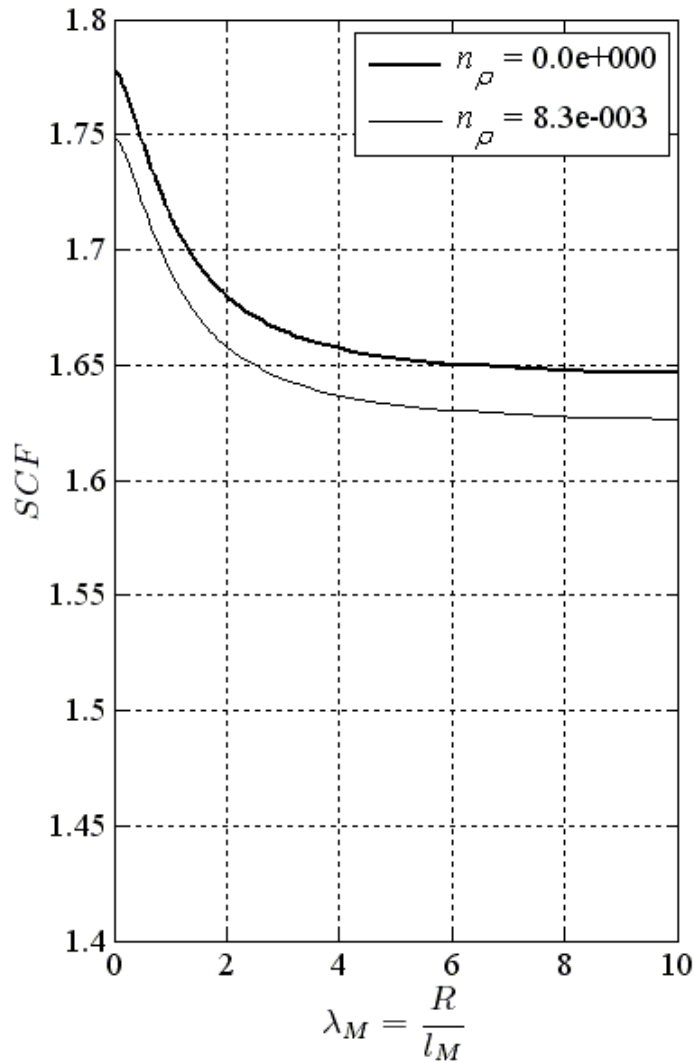
Σχήμα Γ.2 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομμένη καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (πλήρης καμπύλη).



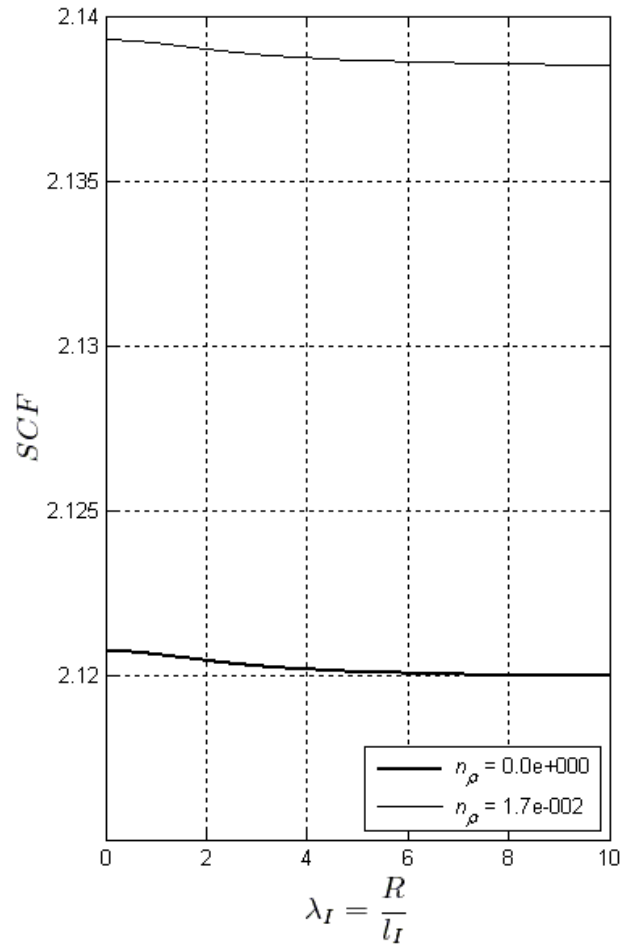
Σχήμα Γ.3 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομμένη καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (πλήρης καμπύλη).



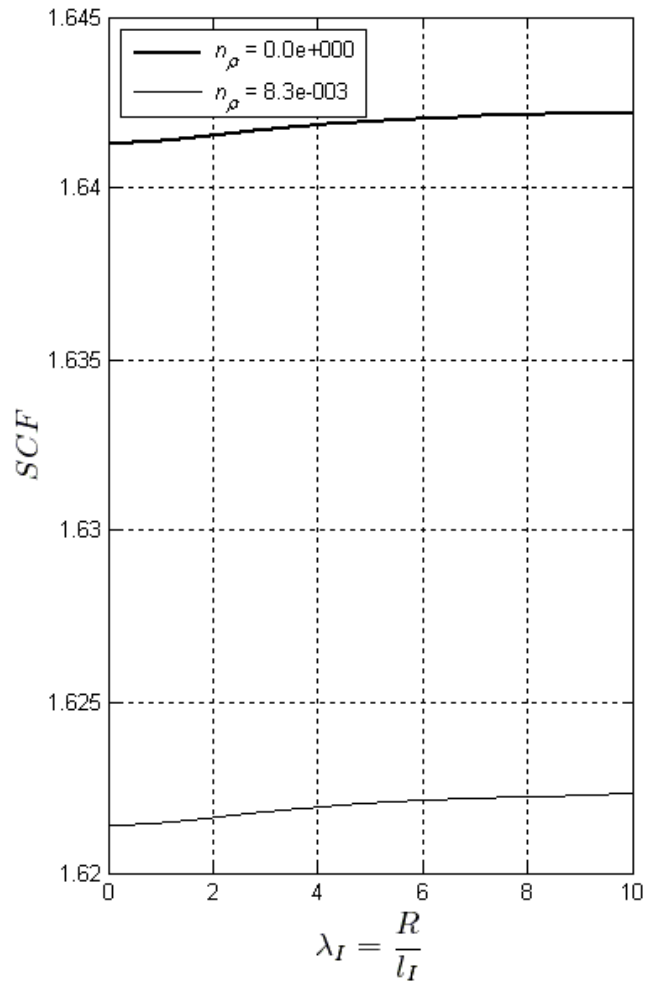
Σχήμα Γ.4 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cauchy και $\mu_l/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



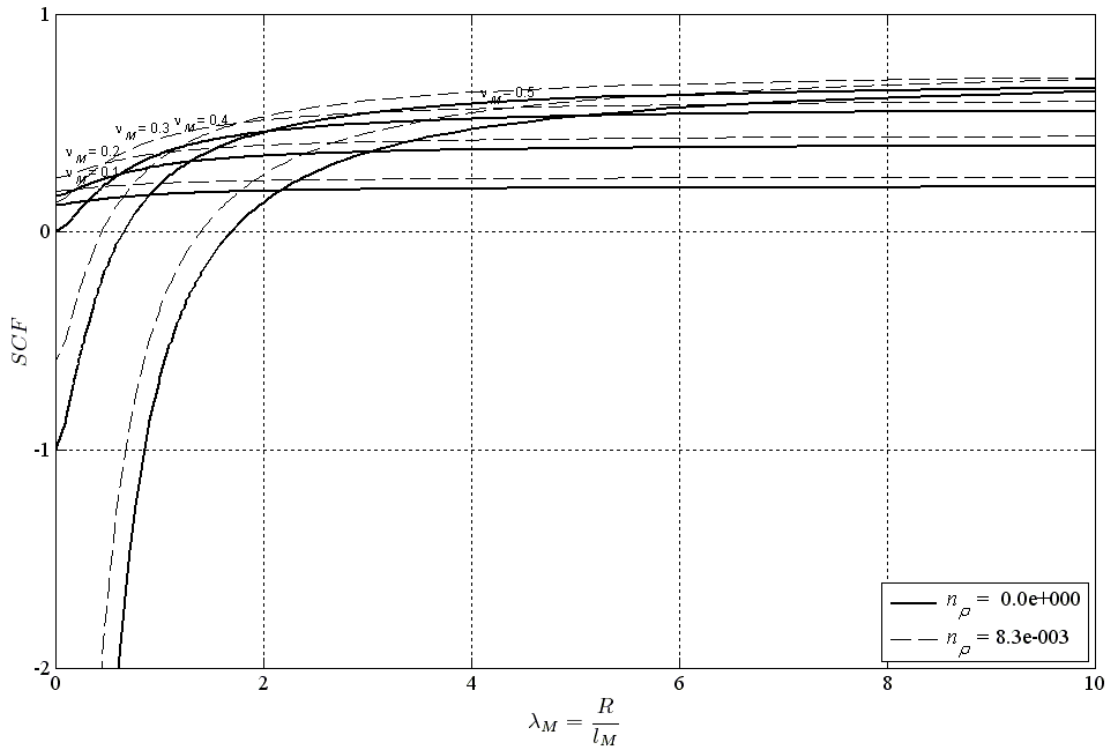
Σχήμα Γ.5 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από υλικό Cauchy και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^I/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



Σχήμα Γ.6 Μήτρα από υλικό Cauchy/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 0.5$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



Σχήμα Γ.7 Μήτρα από υλικό Cauchy/Ανομοιογένεια από υλικό Cosserat και $\mu_I/\mu_M = 2$: ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma'_{\theta\theta}/\sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (λεπτή καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (έντονη καμπύλη).



Σχήμα Γ.8 Μήτρα από υλικό Cosserat/Ανομοιογένεια από άκαμπτο υλικό και $\mu_M = 0.75 \times 10^{11}$:

ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης (SCF) = $\sigma_{\theta\theta}^M / \sigma_{xx}^\infty$ για ελατηριακού τύπου διεπιφάνεια (διακεκομένη καμπύλη) και για τέλεια διεπιφάνεια (πλήρη καμπύλη).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Το λογισμικό πρόγραμμα *COSSERAT-INH*

Σε αυτό το Παράρτημα παρουσιάζεται ο κώδικας που συντάχθηκε για την απαίτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

```
clear all
close all
clc

tic

%% Δεδομένα

R = 1;          % ακτίνα κύκλου [mm]
r_ = 0.01:0.01:5; % [mm]
th = 0:pi/100:2*pi;

% σταθερές ανομοιογένειας
mI = 4*10^11; % [Pa]
vI = 0.20;
l1 = 0.5;

% σταθερές μήτρας
mM = 4*10^11; % [Pa]
vM = 0.30;
l2 = 0.70;

% σταθερές ελατηρίων
Nr = 2*10^11; % [Pa]
Nth = 1*10^11; % [Pa]
Nw = 4*10^11; % [Pa]

% φόρτιση
P = 1; % [kN]

%% υπολογισμός βοηθητικών σταθερών

R1 = R/l1;
R2 = R/l2;
L1 = R/l1; % L1 = λ1
L2 = R/l2; % L2 = λ2

I1 = besseli(1,L1);
I2 = besseli(2,L1);

K1 = besserk(1,L2);
K2 = besserk(2,L2);
```

%% συντελεστές μητρώου A

```

a = 2;
b = -1 / R^2;

c = - 48 * ( 1-vI ) * I1^2;
d = - ( 2/R^2 )*( L1*I1-3*I2 );
e = 6 / R^4;
f = 4/R^2 * ( 1 - 12/L2^2*( 1-vM ) );
g = - ( 2/( R*I2 ) * K1 + 6/R^2 * K2 );

h = 6 * ( R^2 + 8/L1^2 * ( 1-vI ) );
ii = -1/R^2 * ( L1*I1 - 6*I2 );
jj = 2/R^2 * ( 1 - 24/L2^2 * ( 1-vM ) );
k = - 1/R * ( L2*K1 + 6/R * K2 );

l = 48 * ( 1-vI ) * R^3 / L1^2;
m = 1/R * ( L1*I1 - 2*I2 );
n = 16/( R*L2^2 ) * ( 1-vM );
o = 1/R * ( L2*K1 + 2*K2 );

p = 2 * ( 1 - 2*vI ) * R;
q = 1/R * mI/mM + 2/R^2 * mI/Nr;

r = 2*R;
s = 4*R^3 * ( vI + 12/L1^2 * ( 1-vI ) );
t = 2/R * I2;
u = 2/R^3 * ( mI/mM + 6/R * mI/Nr );
v = 4/R * ( (1-vM) * ( 1 - 4/L2^2 ) * mI/mM + ...
    2/R * ( 1 - 12/L2^2 * ( 1-vM ) ) * mI/Nr );
w = - 2/R * ( 2*mI / (Nr*I2) * K1 + ( mI/mM + 6/R * mI/Nr ) * K2 );

x = -2*R * ( ( 3-2*vI ) * R^2 + 24*I1^2 * ( 1-vI ) );
y = -1/R * ( L1*I1 - 2*I2 );
z = + 2/R^3 * ( mI/mM + 6/R * mI/Nth );
aa = 2/R * ( -( ( 1-2*vM ) + 8/L2^2 * ( 1-vM ) ) * mI/mM + ...
    2/R * ( 1-24/L2^2 * ( 1-vM ) ) * mI/Nth );
ab = -1/R * ( (L2 * mI/mM + 2/I2 * mI/Nth) * K1 + ...
    2 * ( mI/mM + 6/R * mI/Nth ) * K2 );

ac = - 12 * ( 1-vI ) * R^2 ;
ad = - 1/(2*I1^2) * I2;
ae = 4/R*(1-vM)*( 1/R*mI/mM + 8/L2^2 * mI/Nw );
af = ( 2/R*L2*mI/Nw * K1 + ( 1/(2*I2^2)*mI/mM + 4/R*mI/Nw ) * K2 );

```

%% επίλυση συστήματος

```

A = [a 0 0 0 b 0 0 0 ;
     0 -a c d 0 e f g ;
     0 a h ii 0 e jj k ;
     0 0 l m 0 0 n o ;
     p 0 0 0 q 0 0 0 ;
     0 r s t 0 u v w ;
     0 -r x y 0 z aa ab ;

```

```

0 0 ac ad 0 0 ae af ];

B = [P/2; P/2; -P/2; 0; (( 1/2-vM ) * ml/mM * R - ml/Nr ) * P; ...
    - ( ml/mM * R/2 - ml/Nr ) * P; ( ml/mM * R/2 - ml/Nth ) * P; 0];

X = A\B;

A1 = X(1,1); B1 = X(2,1); C1 = X(3,1); E1 = X(4,1);
A2 = X(5,1); B2 = X(6,1); C2 = X(7,1); E2 = X(8,1);

toc
tic
%% μηδενικοί πίνακες

ss = length( find( r_ <=R ) );

s_r_I = zeros( ss, length(th) ); s_th_I = zeros( ss, length(th) );
s_rth_I = zeros( ss, length(th) ); s_thr_I = zeros( ss, length(th) );
m_r_I = zeros( ss, length(th) ); m_th_I = zeros( ss, length(th) );
u_r_I = zeros( ss, length(th) ); u_th_I = zeros( ss, length(th) );
w_z_I = zeros( ss, length(th) );

s_r_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) ); s_th_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) );
s_rth_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) ); s_thr_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) );
m_r_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) ); m_th_M = zeros( length(r_)-ss+1, length(th) );
u_r_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) ); u_th_M = zeros( length(r_)-ss+1, length(th) );
w_z_M = zeros( ( length(r_)-ss+1 ), length(th) );

%% Υπολογισμός Τάσεων

I_1 = besseli(1,r_/11);
I_2 = besseli(2,r_/11);
K_1 =esselk(1,r_/12);
K_2 =esselk(2,r_/12);

for t = 1:length(th)
    for rr = 1:length(r_)

        if r_(rr) < R          %%% %%% %%% ανομοιογένεια %%% %%% %%%

            % taseis %%
            s_r_I(rr,t) = 2*A1 - 2*( B1 + 24*( 1-vI ) * I1^2 * C1 + ...
                1/r_(rr)^2 * E1 * ( L1 * I_1(rr) - 3 * I_2(rr) ) ) * cos( 2*th(t) );

            s_th_I(rr,t) = 2*A1 + ...
                2*( B1 + 6 * C1 * ( r_(rr)^2 + 4 * ( 1-vI ) * I1^2 ) ) + ...
                1/r_(rr)^2 * E1 * ( L1 * I_1(rr) - 3 * I_2(rr) ) ) * cos( 2*th(t) );

            s_rth_I(rr,t) = ( 2*B1 + 6*( r_(rr)^2 + 8*( 1-vI ) * I1^2 ) * C1 - ...
                1/r_(rr)^2 * E1 * ( L1 * I_1(rr) - 6 * I_2(rr) ) ) * sin( 2*th(t) );

            % μετατοπίσεις %%
            u_r_I(rr,t) = -1/(2*mI) * ( -2*(1-2*vI) * r_(rr) * A1 + ...
                2*( B1 * r_(rr) + 2 * r_(rr) * ( vI * r_(rr)^2 + 12 * (1-vI) * I1^2 ) * C1 + ...
                1/r_(rr) * E1 * I_2(rr) ) * cos( 2*th(t) ) );

            u_th_I(rr,t) = -1/(2*mI) * ( -2*B1 * r_(rr) - ...
                2 * r_(rr) * ( 3-2*vI ) * r_(rr)^2 + 24 * (1-vI) * I1^2 ) * C1 - ...
                1/r_(rr) * E1 * ( L1 * I_1(rr) - 2 * I_2(rr) ) * sin( 2*th(t) );
        end
    end
end

```

$$m_r_I(rr,t) = (48*(1-vI)*l1^2*r_ (rr)*C1 + ... \\ 1/r_ (rr)*(L1*I_1(rr)-2*I_2(rr)) *E1) *sin(2*th(t));$$

$$w_z_I(rr,t) = 1/(2*mI)*(12*r_ (rr)^2*(1-vI)*C1 + ... \\ 1/(2*l1^2)*I_2(rr)*E1) *sin(2*th(t));$$

elseif r_ (rr) == R %%%%%%% διεπιφάνεια %%%%%%%

% taseis %%

$$s_r_I(rr,t) = 2*A1 - 2*(B1 + 24*(1-vI) *l1^2 *C1 + ... \\ 1/r_ (rr)^2 *E1 * (L1*I_1(rr) - 3*I_2(rr))) * cos(2*th(t));$$

$$s_th_I(rr,t) = 2*A1 + ... \\ 2*(B1 + 6*C1*(r_ (rr)^2 + 4*(1-vI) *l1^2) + ... \\ 1/r_ (rr)^2 *E1*(L1*I_1(rr) - 3*I_2(rr))) * cos(2*th(t));$$

$$s_rth_I(rr,t) = (2*B1 + 6*(r_ (rr)^2 + 8*(1-vI) *l1^2) *C1 - ... \\ 1/r_ (rr)^2 *E1*(L1*I_1(rr) - 6*I_2(rr))) * sin(2*th(t));$$

% μετατοπίσεις %%

$$u_r_I(rr,t) = -1/(2*mI)*(-2*(1-2*vI)*r_ (rr)*A1 + ... \\ 2*(B1*r_ (rr) + 2*r_ (rr)*(vI*r_ (rr)^2 + 12*(1-vI)*l1^2) *C1 + ... \\ 1/r_ (rr)*E1 *I_2(rr)) *cos(2*th(t));$$

$$u_th_I(rr,t) = -1/(2*mI)*(-2*B1*r_ (rr) - ... \\ 2*r_ (rr)*(3-2*vI)*r_ (rr)^2 + 24*(1-vI)*l1^2) *C1 - ... \\ 1/r_ (rr)*E1*(L1*I_1(rr)-2*I_2(rr))) *sin(2*th(t));$$

$$m_r_I(rr,t) = (48*(1-vI)*l1^2*r_ (rr)*C1 + ... \\ 1/r_ (rr)*(L1*I_1(rr)-2*I_2(rr)) *E1) *sin(2*th(t));$$

$$w_z_I(rr,t) = 1/(2*mI)*(12*r_ (rr)^2*(1-vI)*C1 + ... \\ 1/(2*l1^2)*I_2(rr)*E1) *sin(2*th(t));$$

N = rr;

%%%%%%%%%% μήτρα %%%%%%%%%%

$$s_r_M(rr-N+1,t) = P/2 + 1/r_ (rr)^2 *A2 + ... \\ (P/2 - 6/r_ (rr)^4 *B2 - 4/r_ (rr)^2*(1 - 12/r_ (rr)^2*(1-vM) *R^2/L2^2) *C2 + ... \\ 2/r_ (rr) * (1/12*K_1(rr) + 3/r_ (rr)*K_2(rr)) *E2) * cos(2*th(t));$$

$$s_th_M(rr-N+1,t) = P/2 - 1/r_ (rr)^2 *A2 + ... \\ (-P/2 + 6/r_ (rr)^4 *B2 - ... \\ 48/r_ (rr)^4*(1-vM) *R^2/L2^2 *C2 - ... \\ 2/r_ (rr)*(1/12*K_1(rr) + 3/r_ (rr)*K_2(rr)) *E2) * cos(2*th(t));$$

$$s_rth_M(rr-N+1,t) = (-P/2 - 6/r_ (rr)^4 *B2 - ... \\ 2/r_ (rr)^2*(1-24/r_ (rr)^2*(1-vM)*R^2/L2^2) *C2 + ... \\ 1/r_ (rr)*(1/12*K_1(rr)+6/r_ (rr)*K_2(rr)) *E2) *sin(2*th(t));$$

% μετατοπίσεις

$$u_r_M(rr-N+1,t) = -1/(2*mM)*(-(1/2-vM) *r_ (rr) *P + ... \\ 1/r_ (rr) *A2 + (-P/2*r_ (rr) - 2/r_ (rr)^3 *B2 - ... \\ 4/r_ (rr)*(1-vM)*(1 - 4/r_ (rr)^2 *R^2/L2^2) *C2 + ... \\ 2/r_ (rr)*K_2(rr)*E2) *cos(2*th(t));$$

$$u_th_M(rr-N+1,t) = -1/(2*mM)*(P/2*r_ (rr) - 2/r_ (rr)^3 *B2 + ... \\ 2/r_ (rr) * ((1-2*vM) + 8/r_ (rr)^2*(1-vM)*R^2/L2^2) *C2 + ...$$

```

1/r_(rr)*( L2*K_1(rr) + 2*K_2(rr) )*E2 )*sin(2*th(t));

m_r_M(rr-N+1,t) = ( -16/r_(rr)^3*(1-vM)*R^2/L2^2*C2 - ...
1/r_(rr)*( L2*K_1(rr) + 2*K_2(rr) )*E2 )*sin(2*th(t));

w_z_M(rr-N+1,t) = 1/(2*mM)*( 4/r_(rr)^2*(1-vM)*C2 +...
1/(2*I2^2)*K_2(rr)*E2 )*sin( 2*th(t) );

else      %%%%%%% μήτρα %%%%%%%
% τάσεις %
s_r_M(rr-N+1,t) = P/2 + 1/r_(rr)^2*A2 + ...
( P/2 - 6/r_(rr)^4*B2 - 4/r_(rr)^2*( 1 - 12/r_(rr)^2*( 1-vM )*R^2/L2^2 )*C2 + ...
2/r_(rr) * ( 1/12*K_1(rr) + 3/r_(rr)*K_2(rr) )*E2 ) * cos( 2*th(t) );

s_th_M(rr-N+1,t) = P/2 - 1/r_(rr)^2*A2 + ...
( -P/2 + 6/r_(rr)^4*B2 - ...
48/r_(rr)^4*( 1-vM )*R^2/L2^2*C2 - ...
2/r_(rr)*( 1/12*K_1(rr) + 3/r_(rr)*K_2(rr) )*E2 ) * cos( 2*th(t) );

s_rth_M(rr-N+1,t) = ( -P/2 - 6/r_(rr)^4*B2 - ...
2/r_(rr)^2*( 1-24/r_(rr)^2*(1-vM)*R^2/L2^2 )*C2 + ...
1/r_(rr)*(1/12*K_1(rr)+6/r_(rr)*K_2(rr) )*E2 )*sin(2*th(t));

% μετατοπίσεις
u_r_M(rr-N+1,t) = -1/(2*mM)*(- ( 1/2-vM )*r_(rr)*P + ...
1/r_(rr)*A2 + ( -P/2*r_(rr) - 2/r_(rr)^3*B2 - ...
4/r_(rr)*( 1-vM )*( 1 - 4/r_(rr)^2*R^2/L2^2 )*C2 + ...
2/r_(rr)*K_2(rr)*E2 ) *cos( 2*th(t) ) );

u_th_M(rr-N+1,t) = -1/(2*mM)*( P/2*r_(rr) - 2/r_(rr)^3*B2 + ...
2/r_(rr) * ( (1-2*vM) + 8/r_(rr)^2*(1-vM)*R^2/L2^2 )*C2 + ...
1/r_(rr)*( L2*K_1(rr) + 2*K_2(rr) )*E2 )*sin(2*th(t));

m_r_M(rr-N+1,t) = ( -16/r_(rr)^3*(1-vM)*R^2/L2^2*C2 - ...
1/r_(rr)*( L2*K_1(rr) + 2*K_2(rr) )*E2 )*sin(2*th(t));

w_z_M(rr-N+1,t) = 1/(2*mM)*( 4/r_(rr)^2*(1-vM)*C2 +...
1/(2*I2^2)*K_2(rr)*E2 )*sin( 2*th(t) );

end
end
end

%% τασικά πεδία
% s_th( 1:N, : ) = s_th_I;
% s_th( (N+1):(length(r_)), : ) = s_th_M( 2:end,: ) ;

% s_rth( 1:N, : ) = s_rth_I;
% s_rth( (N+1):(length(r_)), : ) = s_rth_M( 2:end,: ) ;

%% plot
z = r_.*exp( 1i*th );

%% πεδίο των σθ ( 1η μορφή )
a = 1000; b = 500; % window size: a=>width, b=>height
figure('position',[(1280-a)/2 (768-b)/2 a b], 'paperpositionmode','auto', 'color','white','InvertHardcopy','off');

%% μεταβολή της σθ κατά μήκος του r και θ=0

TT = find( th == pi/2 );

```



```

plot( r_(1:N), u_th_I(:,50)*Nw, 'linewidth',2 )
hold on
plot( r_( N:end ), u_th_M(:,50)*Nw, 'r', 'linewidth',2 )
plot( r_(1:N), s_rth_I(:,50), 'g','linewidth',2 )
plot( r_( N:end ), s_rth_M(:,50), 'y', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )

% ylim([ -10 10 ])

%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, ( u_r_M(1,:) - u_r_I(end,:)) *Nr, 'rs', 'linewidth',2 )
hold on
% plot( th, ( u_r_I(end,:)) *Nr, 'b', 'linewidth',2 )
plot( th, s_r_M(1,:), 'cx', 'linewidth',2 )
% plot( th, s_r_I(end,:), 'm', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])
title('\Delta \it u_{\rho}')

%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, ( u_th_M(1,:) - u_th_I(end,:)) *Nth, 'rs', 'linewidth',2 )
hold on
plot( th, s_rth_M(1,:), 'gx', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])

title('\Delta u_{\theta}')
%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, ( w_z_M(1,:) - w_z_I(end,:)) *Nw, 'rs', 'linewidth',2 )
hold on
plot( th, m_r_M(1,:), 'mx', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])

title('\Delta \it \omega_{z}')
%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, s_r_I(end,:), 'rs', 'linewidth',2 )
hold on
plot( th, s_r_M(1,:), 'gx', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])
title('\it \sigma_{\rho}')
%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, s_rth_I(end,:), 'rs', 'linewidth',2 )
hold on

```

```
plot( th, s_rth_M(1,:), 'gx', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])
title('\it\sigma_{\rho\theta}')
%% έλεγχος στη διεπιφάνεια
figure

plot( th, m_r_I(end,:), 'rs', 'linewidth',2 )
hold on
plot( th, m_r_M(1,:), 'gx', 'linewidth',2 )
grid on
xlabel( '\it R', 'FontSize', 12, 'FontName', 'Times New Roman' )
xlim([ 0 2*pi ])
title('\it\mu_{\rho}')
toc
```