



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διπλωματική Εργασία

**Ελαστοδυναμική Απόκριση Πλαισίου
λόγω Κίνησης της Βάσης του**

Σταμάτης Καπίρης

επιβλέπων: Χρήστος Ι. Γιούνης, επίκ.καθηγητής

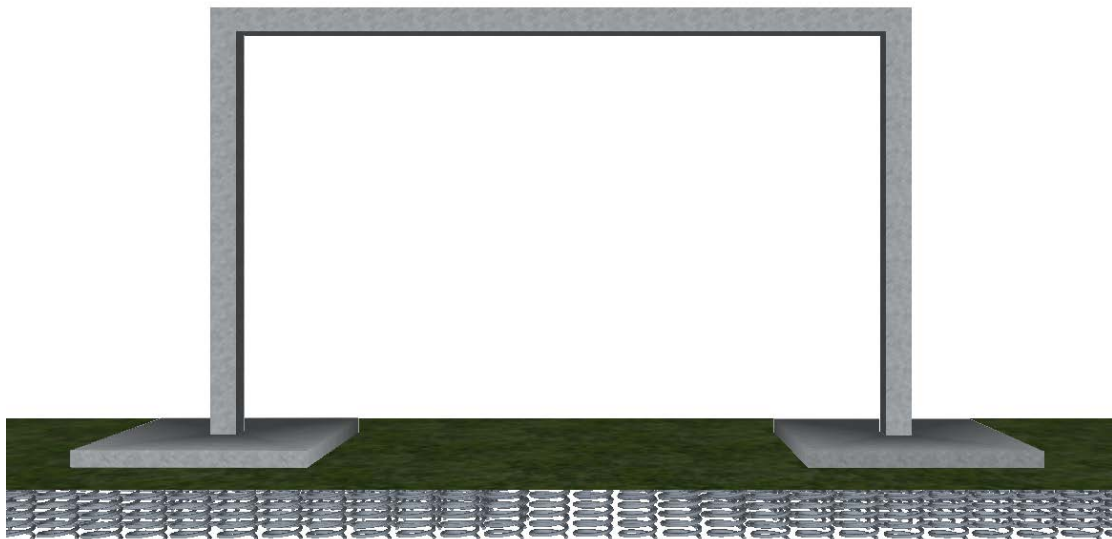
Τομέας Μηχανικής
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Αθήνα 2013



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διπλωματική Εργασία

**Ελαστοδυναμική Απόκριση Πλαισίου
λόγω Κίνησης της Βάσης του**



Σταμάτης Καπίρης

επιβλέπων: Χρήστος Ι. Γιούνης, επίκ.καθηγητής

Τομέας Μηχανικής
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Αθήνα 2013

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	9
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	10
Α' ΜΕΡΟΣ	12
Β' ΜΕΡΟΣ	91
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	151
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ	153
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	155

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της δυναμικής απόκρισης ενός σχετικά απλού πλαισίου, όταν η διέγερσή του οφείλεται σε δεδομένη κίνηση των στηρίξεών του.

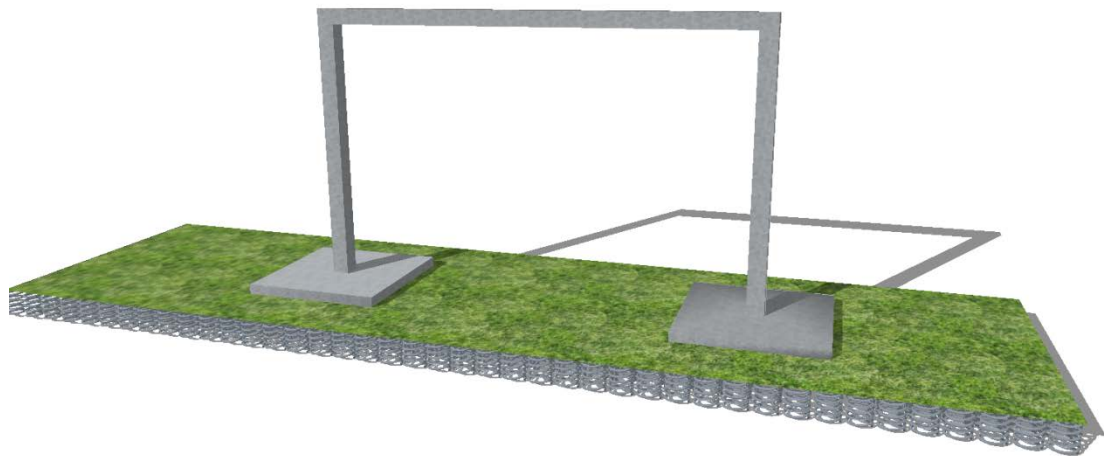
Πρόκειται για ένα επίπεδο, ορθογωνικό και συμμετρικό πλαίσιο ενός ανοίγματος που εδράζεται επί γραμμικά ελαστικού εδάφους. Το ζύγωμα και τα υποστυλώματα είναι πρισματικές ράβδοι με σταθερή ακαμψία και σταθερή κατανομή μάζας. Η ελαστική σύνδεση του καθενός από τους δύο κόμβους στήριξής του με τη βάση, προσομοιώνεται με ένα στρεπτικό ελατήριο και ένα κατακόρυφο αξονικό ελατήριο. Η βάση θεωρείται σαν ένας ενιαίος, στερεός (άκαμπτος) δίσκος που εκτελεί δεδομένη γενική επίπεδη κίνηση.

Η δυναμική συμπεριφορά του πλαισίου προσεγγίζεται με δύο μεθόδους, α) με τη προσεγγιστική - αναλυτική "Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών" και β) με τη "Δυναμική Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων" ή "Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας".

Στο Α'Μέρος παρουσιάζεται η μεθοδολογία της Μεθόδου των Υποθετικών Ιδιομορφών. Επιλέγονται ως γενικευμένες συντεταγμένες οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας (μετατοπίσεις και στροφές) των τεσσάρων κόμβων του και ως συναρτήσεις σχήματος, οι τέσσερις βασικές στατικές παραμορφώσεις του απλού στοιχείου δοκού. Με χρήση των εξισώσεων *Lagrange* καταστρώνονται οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης και οι επιδρώσες αδρανειακές δυνάμεις, που οφείλονται στην επιτάχυνση των στηρίξεων του πλαισίου. Με χρήση της *Ιδιομορφικής Ανάλυσης (Modal Analysis)* ευρίσκεται η απόκριση του πλαισίου για οποιαδήποτε κίνηση της βάσης.

Στο Β'Μέρος, με τη Δυναμική Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων ή Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας, υπολογίζονται αναλυτικά οι ακριβείς -και όχι προσεγγιστικές- ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης του πλαισίου. Ως συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται οι μορφές αρμονικής ταλάντωσης στοιχείου δοκού με σταθερή κατανομή μάζας και ακαμψίας, λόγω μοναδιαίας αρμονικής διέγερσης των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας του. Ευρίσκεται το τοπικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας του στοιχείου δοκού. Βάσει αυτού, καταστρώνεται το καθολικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας. Οι ιδιολύσεις του είναι οι ζητούμενες ακριβείς ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ελεύθερης ταλάντωσης. Με τη μέθοδο της *Ιδιομορφικής Ανάλυσης*, χρησιμοποιώντας τις ακριβείς ιδιολύσεις, είναι πλέον εφικτό να υπολογίσει κανείς την ακριβή απόκριση του πλαισίου για οποιαδήποτε δεδομένη εξωτερική διέγερση. Για τον

υπολογισμό της ακριβούς απόκρισης λόγω κίνησης της βάσης διεξάγεται η κατάστρωση του ακριβούς καθολικού μητρώου μάζας του πλαισίου. Στηριζόμενοι σε αυτό, προχωρούμε στον υπολογισμό των επιδρωσών αδρανειακών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας τις επιταχύνσεις των γενικευμένων συντεταγμένων, οι οποίες οφείλονται στη δεδομένη κίνηση των στηρίξεων. Κατά συνέπεια, είναι πλέον εφικτός ο υπολογισμός της απόκρισης του πλαισίου λόγω δεδομένης κίνησης της βάσης του.



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δυναμική συμπεριφορά μίας κατασκευής, η οποία διαθέτει συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη μάζα, ελαστική ακαμψία και εσωτερική ή/και εξωτερική απόσβεση, και η οποία διεγείρεται από μία δεδομένη εξωτερική φόρτιση, μεταβαλλόμενη με τον χρόνο, συνήθως περιγράφεται από ένα σύστημα συνήθων ή μερικών διαφορικών εξισώσεων, στο δεξί μέλος του οποίου αναγράφεται η δεδομένη εξωτερική διεγείρουσα δύναμη $F(x, t)$.

Το σύστημα αυτό εκφράζει τη δυναμική ισορροπία μεταξύ των αδρανειακών δυνάμεων, των δυνάμεων απόσβεσης και των ελαστικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στην κατασκευή αφ'ενός, και αφ'ετέρου, της εξωτερικά επιβαλλόμενης διέγερσης επί της κατασκευής.

Ένα άλλο είδος διέγερσης που έχει μεγάλη πρακτική σπουδαιότητα είναι η διέγερση λόγω μίας προκαθορισμένης κίνησης των στηρίξεων της κατασκευής, στην πορεία του χρόνου. Το πιο γνωστό και συνηθισμένο παράδειγμα αυτού του τύπου διέγερσης, είναι η επίδραση ενός σεισμού σε οποιαδήποτε κατασκευή που είναι θεμελιωμένη επί του εδάφους. Πέραν της σεισμικής δόνησης, υπάρχουν πολλά άλλα παραδείγματα τέτοιου είδους διέγερσης μίας κατασκευής, όπως π.χ. τα κινούμενα μηχανικά συστήματα ή οι κινούμενες κατασκευές, καθώς και οι μηχανικά προκαλούμενες ταλαντώσεις της βάσης, φερ'ειπείν λόγω ύπαρξης εκκεντρότητας σε περιστρεφόμενες μάζες.

Το βασικό βήμα για την κατάστρωση των εξισώσεων της δυναμικής συμπεριφοράς της κατασκευής από διέγερση, λόγω κίνησης των στηρίξεών της, είναι η έκφραση της απόλυτης κίνησής της σαν το άθροισμα:

- α) της κίνησης που θα είχε η κατασκευή αν η κίνηση των στηρίξεών της επιβαλλόταν στατικά (που είναι το ίδιο σα να μην αναπτύσσονταν αδρανειακές δυνάμεις και δυνάμεις απόσβεσης, δηλαδή σαν η κατασκευή να μην έχει μάζα και ιδιότητες απόσβεσης), και
- β) της επιπρόσθετης κίνησης της κατασκευής που οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις και τις δυνάμεις απόσβεσης.

Είναι σπάνιο να υπάρχει ακριβής, αναλυτική επίλυση και εύρεση κλειστών λύσεων στα διαφορικά προβλήματα οριακών τιμών και ιδιοτιμών, τα οποία περιγράφουν την απόκριση των δομικών ή μηχανικών συστημάτων με κατανεμημένες ιδιότητες μάζας, ακαμψίας και απόσβεσης. Γι'αυτό πολύ συχνά κάποιος καταφεύγει στη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων.

Η δυσκολία στην επίλυση των διαφορικών προβλημάτων οριακών τιμών και ιδιοτιμών, κυρίως έγκειται στην ύπαρξη της χωρικής μεταβλητής και γι'αυτό η προσπάθεια σε όλες τις προσεγγιστικές, αναλυτικές μεθόδους, είναι η

απαλοιφή της, δηλαδή η «χωρική διακριτοποίηση» αυτών των διαφορικών προβλημάτων. Οι δύο βασικές κατηγορίες χωρικής διακριτοποίησης είναι:

α) η διακριτοποίηση μέσω της αντικατάστασης των κατανεμημένων, με συγκεντρωμένα μεγέθη (lumping procedures) και

β) η διακριτοποίηση με χρήση λύσεων υπό μορφήν σειράς (series discretization). Στη δεύτερη περίπτωση, η προσεγγιστική λύση, έχει τη μορφή αθροίσματος, δηλαδή ενός γραμμικού συνδυασμού επιλεγμένων συναρτήσεων (δοκιμαστικές συναρτήσεις) της χωρικής μεταβλητής, πολλαπλασιασμένων με συντελεστές - συναρτήσεις του χρόνου, οι οποίες στη συνέχεια πρόκειται να υπολογιστούν. Και στις δύο περιπτώσεις, το αποτέλεσμα είναι ο μετασχηματισμός των διαφορικών προβλημάτων ιδιοτιμών σε αλγεβρικά προβλήματα ιδιοτιμών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύεται η δυναμική απόκριση ενός σχετικά απλού πλαισίου, του οποίου η διέγερση προέρχεται από δεδομένη κίνηση των στηριζιών του.

Πρόκειται για ένα επίπεδο, ορθογωνικό και συμμετρικό πλαίσιο ενός ανοίγματος που εδράζεται επί γραμμικά ελαστικού εδάφους τύπου Winkler. Το ζύγωμα και τα υποστυλώματα είναι πρισματικές ράβδοι με σταθερή ακαμψία και σταθερή κατανομή μάζας. Η ελαστική σύνδεση του καθενός από τους δύο κόμβους στήριξης του με τη βάση, προσομοιώνεται με ένα στρεπτικό ελατήριο και ένα κατακόρυφο αξονικό ελατήριο. Η βάση θεωρείται ένας ενιαίος, στερεός (άκαμπτος) δίσκος, που μπορεί να εκτελεί, κατά περίπτωση, μία προκαθορισμένη γενική επίπεδη κίνηση.

Η δυναμική ανάλυση του πλαισίου προσεγγίζεται με δύο μεθόδους,

α) με τη προσεγγιστική - αναλυτική "Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών" και β) με τη "Δυναμική Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων" ή "Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας".

Στο Α'Μέρος χρησιμοποιείται η προσεγγιστική - αναλυτική Μέθοδος των Υποθετικών Ιδιομορφών, η οποία είναι μία παραλλαγή της Μεθόδου Rayleigh-Ritz. Οι προσδιοριστέοι συντελεστές - συναρτήσεις του χρόνου είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες, οι οποίες καθορίζουν τη μορφή και την απόκριση του συστήματος. Ως γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνονται οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας (μετατοπίσεις και στροφές) των τεσσάρων κόμβων του πλαισίου και ως συναρτήσεις σχήματος, οι τέσσερις βασικές στατικές παραμορφώσεις του απλού στοιχείου δοκού. Υπολογίζονται οι εκφράσεις της Δυναμικής και Κινητικής ενέργειας του συστήματος και το δυνατό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων της θεωρηθείσης σειράς των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Σε αυτή τη διαδικασία προκύπτει η μορφή των συντελεστών των μητρικών μάζας, ακαμψίας, απόσβεσης και εξωτερικής φόρτισης του συστήματος και γίνεται η

απαλοιφή της χωρικής μεταβλητής. Με χρήση των εξισώσεων *Lagrange* καταστρώνονται οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης. Έτσι προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, η επίλυση του οποίου παρέχει τους ζητούμενους συντελεστές - συναρτήσεις του χρόνου. Με αυτόν το τρόπο είναι εφικτός ο υπολογισμός της θεωρηθείσης προσέγγισης της απόκρισης, συναρτήσει του χρόνου. Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Διεξάγεται λεπτομερής παραμετρική μελέτη των ιδιολύσεων για μεταβολή των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος.

Για τον υπολογισμό της απόκρισης λόγω δεδομένης τυχαίας κίνησης της βάσης, κατ'αρχήν υπολογίζεται η κίνηση του πλαισίου υποθέτοντας ότι δεν αναπτύσσονται αδρανειακές δυνάμεις και δυνάμεις απόσβεσης, όπως αναφέρθηκε στην αρχή της Εισαγωγής. Αυτή είναι μία κίνηση του πλαισίου ως στερεού σώματος. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι επιδρώσες αδρανειακές δυνάμεις, χρησιμοποιώντας τις επιταχύνσεις των γενικευμένων συντεταγμένων, οι οποίες αναπτύσσονται κατά την παραπάνω κίνηση του πλαισίου ως στερεού σώματος. Με χρήση της *Ιδιομορφικής Ανάλυσης (Modal Analysis)*, ευρίσκεται η απόκριση του πλαισίου για οποιαδήποτε κίνηση της βάσης του. Καταστρώνεται η διαδικασία υπολογισμού της μορφής του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης του πλαισίου στη σταθερή κατάσταση, λόγω οποιασδήποτε δεδομένης αρμονικής κίνησης της βάσης του.

Στο Β' Μέρος, χρησιμοποιώντας τη *Δυναμική Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων* ή *Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας*, υπολογίζονται αναλυτικά οι ακριβείς και όχι προσεγγιστικές ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης του πλαισίου. Ως γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνονται πάλι οι αδέσμευτοι βαθμοί ελευθερίας των τεσσάρων κόμβων του πλαισίου, όπως στο Α' Μέρος. Ως συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται οι μορφές αρμονικής ταλάντωσης στοιχείου δοκού με σταθερή κατανομή μάζας και ακαμψίας, λόγω μοναδιαίας αρμονικής διέγερσης των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας του. Ευρίσκεται το τοπικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας του στοιχείου δοκού. Βάσει αυτού, καταστρώνεται το καθολικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας. Οι ιδιολύσεις του είναι οι ζητούμενες ακριβείς ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές ελεύθερης ταλάντωσης. Διεξάγεται λεπτομερής παραμετρική μελέτη των ιδιολύσεων για μεταβολή των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος. Γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης των ιδιολύσεων του Α' Μέρους και διαπιστώνεται αξιοσημείωτη προσέγγιση. Με τη Μέθοδο της *Ιδιομορφικής Ανάλυσης*, χρησιμοποιώντας τις ακριβείς ιδιολύσεις, είναι πλέον εφικτό να υπολογίσει κανείς την ακριβή απόκριση του πλαισίου για οποιαδήποτε δεδομένη εξωτερική διέγερση.

Για τον υπολογισμό της ακριβούς απόκρισης, λόγω κίνησης της βάσης, διεξάγεται η κατάστρωση του ακριβούς καθολικού μητρώου μάζας του

πλαisiού. Βάσει αυτού, υπολογίζονται οι επιδρώσες αδρανειακές δυνάμεις, χρησιμοποιώντας τις επιταχύνσεις των γενικευμένων συντεταγμένων, οι οποίες οφείλονται στη δεδομένη κίνηση των στηρίξεων. Έτσι, είναι εφικτός ο υπολογισμός της απόκρισης του πλαisiού λόγω δεδομένης κίνησης της βάσης του. Καταστρώνεται η διαδικασία υπολογισμού της μορφής του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης του πλαisiού στη σταθερή κατάσταση, λόγω οποιασδήποτε δεδομένης αρμονικής κίνησης της βάσης του.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αυτή η διπλωματική εργασία δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς τη βοήθεια εκείνων, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς.

Τον καθηγητή κύριο Χρήστο Γιούνη για την επί της ουσίας επίβλεψη της εργασίας, τις πολύτιμες συμβουλές, την ουσιαστική καθοδήγησή του στο αντικείμενο, καθώς και για τον χρόνο που αφειδώλευτα αφιέρωσε στη διαδικασία εκπόνησης και στην αξιολόγηση.

Τον Τομέα Μηχανικής και τη Γραμματεία της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π. για τα διαδικαστικά.

Τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. για την εκτύπωση της εργασίας.

Τους συναδέλφους Κωνσταντίνο Τόλη και Κωνσταντίνο Κουτσομάρη για την πολύτιμη βοήθεια και τις τεχνικές συμβουλές.

Την Β.Μ. και την αδερφή μου Ε.Κ. για την ηθική στήριξη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για όλους τους κόπους και τις θυσίες που έχουν κάνει για μένα όλα αυτά τα χρόνια. Η εργασία τους αφιερώνεται.

Καπίρης Σταμάτης

Αθήνα, Μάρτιος 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Α' ΜΕΡΟΣ.....	12
Μελέτη της Ταλάντωσης Συνεχούς Συστήματος με την Αναλυτική - Προσεγγιστική Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.1 - Η Γενική Θεωρία.....	12
A.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ.....	12
A.1.2 ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ	12
A.1.3 ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΓΕΘΗ.....	14
A.1.4 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ	16
A.1.5 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ.....	21
A.1.6 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	23
A.1.6.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ, ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ	25
A.1.6.2 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	27
A.1.7 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ.....	29
A.1.8 ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (MODAL ANALYSIS).....	30
A.1.8.1 Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΦΟΡΕΑ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	31
A.1.8.2 Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ	34
A.1.8.2.1 ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ MODAL ANALYSIS.....	35
A.1.8.2.2 ΜΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ RUNGE-KUTTA.....	36
A.1.9 ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΛΟΓΩ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ.....	38
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.2 - Ταλάντωση του Συστήματος λόγω Κίνησης της Βάσης του...41	
A.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΑΣΗ	41
A.2.2 ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	44
A.2.3 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ.....	48
A.2.4 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	52
A.2.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ.....	53
A.2.6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ, ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ	63
A.2.7 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΤΥΧΑΙΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ	64
A.2.8 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ	65
A.2.9 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ.....	67
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.3 - Αποτελέσματα - Παραμετρική Μελέτη..... 75	
A.3.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ. ΒΙΝΤΕΟ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	75

A.3.2	ΒΙΝΤΕΟ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΛΟΓΩ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ	85
A.3.3	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΤΗ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.....	85
Β' ΜΕΡΟΣ.....		91
Μελέτη της Ταλάντωσης Συνεχούς Συστήματος με τη Μέθοδο της Δυναμικής Ακαμψίας		
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.1 - Η Γενική Θεωρία.....		91
B.1.1	ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ	91
B.1.2	ΤΟ ΙΔΙΟΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ	91
B.1.3	ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	93
B.1.4	Η ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ..	95
B.1.5	Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ Ή ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ	96
B.1.5.1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ	98
B.1.5.2	ΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ	103
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.2 - Ταλάντωση του Συστήματος λόγω Κίνησης της Βάσης του		108
B.2.1	ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	108
B.2.2	ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΔΟΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	109
B.2.3	ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.....	117
B.2.4	ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ	118
B.2.5	ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ	119
B.2.5.1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΜΑΖΑΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ.....	123
B.2.5.2	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ.....	125
B.2.6	ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ	127
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.3 - Αποτελέσματα - Παραμετρική Μελέτη.....		130
B.3.1	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ	130
B.3.2	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ	136
B.3.3	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ Α' & Β' ΜΕΡΟΥΣ.....	141
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....		151

A' ΜΕΡΟΣ

Μελέτη της Ταλάντωσης Συνεχούς Συστήματος με την Αναλυτική - Προσεγγιστική Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.1

Η Γενική Θεωρία

A.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Σκοπός της εργασίας μας είναι η μελέτη στοιχείων δυναμικής και συγκεκριμένα η δυναμική απόκριση φορέων, δηλαδή η συμπεριφορά, οι ιδιότητες, τα χαρακτηριστικά και τα αποτελέσματα της κίνησης και της έντασής τους, όταν σε αυτούς ασκείται δυναμική φόρτιση. Τυπικό γνώρισμα αυτής της φόρτισης είναι ότι μεταβάλλεται με τον χρόνο και στην τυπική της μορφή (δυναμική διέγερση), είναι εξωτερικά επιβαλλόμενη δράση (δύναμη ή ροπή), μεταβλητής έντασης και, εν γένει, εναλλασσόμενης φοράς.

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσης μελέτης είναι ότι έχουμε διέγερση του φορέα, που οφείλεται σε δεδομένη κίνηση των στηρίξεων ή της βάσης του. Με αναγωγή αυτού του είδους της δυναμικής διέγερσης στην τυπική δυναμική διέγερση, επιχειρούμε να αναλύσουμε μία περίπτωση της Δυναμικής των Κατασκευών, που βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη της απόκρισης κατασκευών λόγω σεισμικών δραστηριοτήτων.

Αυτή η αναγωγή έχει ως θεωρητική βάση την ιδέα ότι όλα τα σημεία του φορέα θα εκτελέσουν κάποιας μορφής ταλάντωση, δηλαδή μια παλινδρομική κίνηση γύρω από τη θέση στατικής ισορροπίας στην οποία βρίσκονταν προτού εφαρμοστεί στο φορέα η εκάστοτε διέγερση.

A.1.2 ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Ο φορέας που μελετάται σε καταπόνηση, χρειάζεται να χωριστεί σε μέλη και κόμβους για καλλίτερη μελέτη.

Κάθε κόμβος της ράβδου, εν γένει έχει τρεις δυνατότητες μετακίνησης στο επίπεδο ή αλλιώς τρεις βαθμούς ελευθερίας κίνησης, δύο δυνατότητες μετακίνησης κατά x και y και μία δυνατότητα στροφής φ .

Αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας των στηρίξεων του φορέα, ενδέχεται να μην είναι όλοι δεσμευμένοι, αναλόγως του είδους της στήριξης (κύλιση, άρθρωση, πάκτωση). Το άθροισμα όλων των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας όλων των κόμβων ενός φορέα ονομάζεται "βαθμός κινηματικής αοριστίας του φορέα" ή απλά "αριθμός των βαθμών ελευθερίας του φορέα" και τον συμβολίζουμε με n .

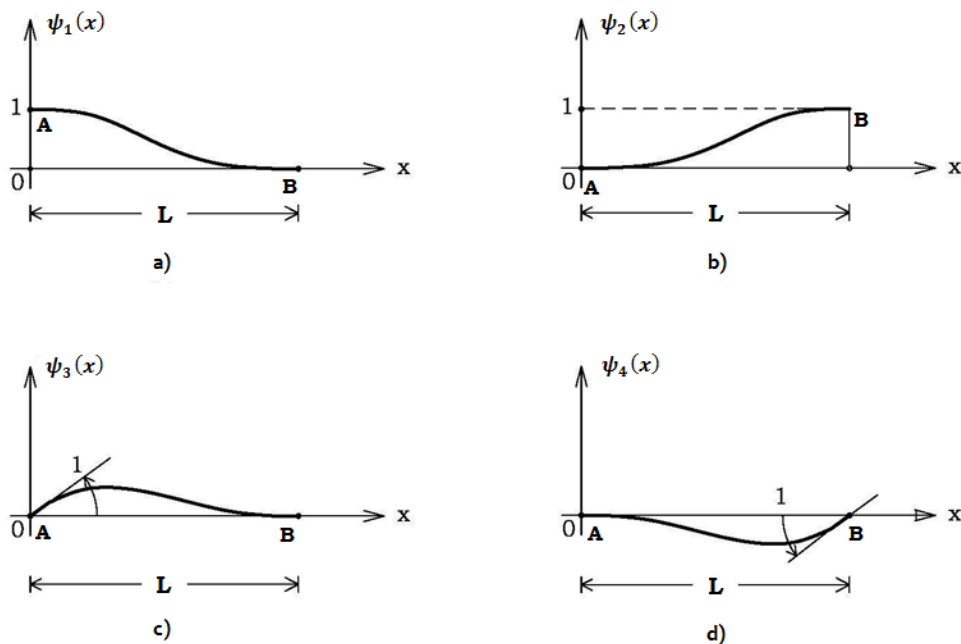
Όταν είναι γνωστές αυτές οι μετακινήσεις και στροφές των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας τότε ο φορέας δεν είναι πια κινηματικά αόριστος και μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την απόκριση του φορέα σε κατάσταση στατικής ισορροπίας με χρήση της εξίσωσης επαλληλίας:

$$u(x, t) = \delta_1(t)u_1(x) + \delta_2(t)u_2(x) + \dots + \delta_n(t)u_n(x) \quad (A.1.2.1)$$

όπου $\delta_i(t)$, $i=1,2,\dots, n$ είναι οι στατικές μετακινήσεις, συναρτήσεις του χρόνου t , (μετατοπίσεις ή στροφές) των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας των κόμβων του φορέα και οι συναρτήσεις $u_i(x)$ εκφράζουν την υποθετική ιδιομορφή του αντίστοιχου δεσμευμένου φορέα όταν $\delta_i = 1$ και $\delta_k = 0$, $k=1,2,\dots, i-1, i+1,\dots, n$.

Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε επιμέρους παραμορφώσεις του στοιχείου του φορέα που γειτνιάζει με τον κόμβο στον οποίο ανήκει ο βαθμός ελευθερίας i , και σαν τέτοιες λάβουμε συναρτήσεις $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ και $\psi_4(x)$, τότε στο Σχήμα 1|A.1.2, φαίνεται η ελαστική γραμμή αμφίπακτης ράβδου, σταθερής ακαμψίας EJ υπό:

- μοναδιαία εγκάρσια μετατόπιση $\delta_A = 1$ του αριστερού κόμβου A
- μοναδιαία εγκάρσια μετατόπιση $\delta_B = 1$ του δεξιού κόμβου B
- μοναδιαία στροφή $\varphi_A = 1$ του αριστερού κόμβου A
- μοναδιαία στροφή $\varphi_B = 1$ του δεξιού κόμβου B



Σχήμα 1|A.1.2

Αυτές, ονομάζονται και συναρτήσεις σχήματος στο πλαίσιο της Μεθόδου των Υποθετικών Ιδιομορφών (στη γενικότητά της, Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων), όπου η μορφή με την οποία θεωρείται ότι ταλαντώνεται το μεταξύ των κόμβων τμήμα της δοκού, έχει υποτεθεί εξ αρχής και δεν προκύπτει από την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης κίνησης συνεχούς μέσου. Οι αλγεβρικές εκφράσεις τους είναι:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \psi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 \bullet \quad \psi_2(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
 \bullet \quad \psi_3(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
 \bullet \quad \psi_4(x) &= \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)
 \end{aligned} \tag{A.1.2.2}$$

όπου L το μήκος της ράβδου.

A.1.3 ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΓΕΘΗ

Προκειμένου να εξάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης, με χρήση των εξισώσεων Lagrange, θα πρέπει αν περιγράψουμε τα διάφορα μεγέθη που υπεισέρχονται στο πρόβλημα.

Όπως προαναφέρθηκε στο εδάφιο A.1.2, οι μετακινήσεις των σημείων του στοιχείου του φορέα θα δίνονται, σύμφωνα με την εξίσωση A.1.2.1, από μια επαλληλία μετακινήσεων της μορφής:

$$u(x, t) = \delta_1(t)u_1(x) + \delta_2(t)u_2(x) + \dots + \delta_n(t)u_n(x) \tag{A.1.3.1}$$

όπου $\delta_i(t)$, $i=1,2,\dots, n$ είναι η μετακίνηση (μετατόπιση ή στρόφη) του αδέσμευτου βαθμού ελευθερίας i του φορέα, σαν συνάρτηση του χρόνου t , και οι συναρτήσεις $u_i(x)$ εκφράζουν τη στατική μετατόπιση του αντίστοιχου δεσμευμένου φορέα όταν λαμβάνει μοναδιαία μετακίνηση (μετατόπιση ή στρόφη) $\delta_i = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας μένουν παγωμένοι $\delta_k = 0, k=1,2,\dots, i-1, i+1,\dots, n$. Η $u_i(x)$ εκτείνεται μόνο σε εκείνο το μήκος (τα μήκη) του στοιχείου (των στοιχείων) που επηρεάζεται (επηρεάζονται) από τη μετακίνηση $\delta_i(t)$ του i βαθμού ελευθερίας, δηλαδή μόνο στα γειτονικά στοιχεία του φορέα που συντρέχουν στον κόμβο του i βαθμού ελευθερίας. Τα υπόλοιπα στοιχεία, εφόσον έχουν παγωμένους βαθμούς ελευθερίας, έχουν $\delta_i(t) = 0$, επομένως, η μετατόπιση του αντίστοιχου βαθμού ελευθερίας ισούται με $u_i(x) = 0$.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση A.1.3.1, μία φορά ως προς τον χρόνο, προκύπτει η ταχύτητα των σημείων των στοιχείων του φορέα:

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\delta}_1(t)u_1(x) + \dot{\delta}_2(t)u_2(x) + \dots + \dot{\delta}_n(t)u_n(x) \quad (A.1.3.2)$$

Με αυτή τη σχέση γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός εκάστου σημείου σε δεδομένη χρονική στιγμή.

Παραγωγίζοντας την ίδια σχέση δύο φορές ως προς x προκύπτει σχέση που εκφράζει την καμπυλότητα του φορέα σε δεδομένη χρονική στιγμή:

$$u''(x, t) = \delta_1(t)u_1''(x) + \delta_2(t)u_2''(x) + \dots + \delta_n(t)u_n''(x) \quad (A.1.3.3)$$

Αν αυτή παραγωγισθεί μία φορά ως προς t , τότε λαμβάνουμε το μέγεθος του ρυθμού μεταβολής της καμπυλότητας κατά το μήκος του άξονα του στοιχείου:

$$\dot{u}''(x, t) = \dot{\delta}_1(t)u_1''(x) + \dot{\delta}_2(t)u_2''(x) + \dots + \dot{\delta}_n(t)u_n''(x) \quad (A.1.3.4)$$

Η αναπτυσσόμενη ροπή κάμψης $M(x, t)$ κατά μήκος του άξονα του φορέα, δίνεται από την εξίσωση Euler-Bernoulli:

$$M(x, t) = EJ(x)u''(x, t) = \delta_1(t)EJ(x)u_1''(x) + \delta_2(t)EJ(x)u_2''(x) + \dots + \delta_n(t)EJ(x)u_n''(x) \quad (A.1.3.5)$$

όπου $EJ(x)$ η ακαμψία του φορέα και $u''(x, t)$ η δημιουργούμενη κατά την κίνησή του καμπυλότητα, κατά μήκος του άξονά του.

Λαμβάνουμε, επίσης υπ'όψιν, ότι το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένα τα στοιχεία του φορέα, έχει συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης (δηλαδή ιξώδες) c_{int} , που πολλαπλασιαζόμενος με το ρυθμό μεταβολής της καμπυλότητας, δίνουν τη σχέση:

$$M_D(x, t) = c_{int}J(x)\dot{u}''(x, t) = \dot{\delta}_1(t)c_{int}J(x)u_1''(x) + \dot{\delta}_2(t)c_{int}J(x)u_2''(x) + \dots + \dot{\delta}_n(t)c_{int}J(x)u_n''(x) \quad (A.1.3.6)$$

η οποία εκφράζει τη ροπή απόσβεσης που αναπτύσσεται εντός του υλικού των στοιχείων λόγω της εσωτερικής απόσβεσης του υλικού και αντιτίθεται στη μεταβολή της καμπυλότητας του στοιχείου. Εκφράζει δηλαδή, την αντίσταση του υλικού στην καμπύλωση του στοιχείου.

Η μάζα του στοιχείου θεωρείται κατανομημένη κατά μήκος του άξονα του στοιχείου και η κατανομή της συμβολίζεται με $m(x)$, ενώ οι συγκεντρωμένες μάζες επί των κόμβων, θα συμβολίζονται με M_i στον i βαθμό ελευθερίας.

A.1.4 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Για την εξαγωγή των διαφορικών εξισώσεων κίνησης, θα θεωρήσουμε ως αφετηρία μας την εξίσωση Lagrange και θα ληφθούν ως γενικευμένες συντεταγμένες οι μετακινήσεις (μετατοπίσεις ή στροφές) $\delta_i(t), i=1,2,\dots,n$, όπως παρουσιάστηκαν προωτέρω.

Γενικά, οι "n" συνήθεις διαφορικές εξισώσεις κίνησης κατά Lagrange δίνονται από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta_i} + \frac{\partial V}{\partial \delta_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.4.1})$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια του φορέα κατά τη χρονική στιγμή t , V η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσής του και Q_i η γενικευμένη, μη συντηρητική δύναμη που αντιστοιχεί στον i βαθμό ελευθερίας και περιλαμβάνει τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση (που στο πρόβλημά μας είναι μηδενική), καθώς και τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις εσωτερικής απόσβεσης.

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση A.1.3.2, που δίνει την ταχύτητα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \dot{u}^2(x, t) &= \left(\sum_{i=1}^n \dot{\delta}_i(t) u_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n \dot{\delta}_j(t) u_j(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) u_i(x) u_j(x) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4.2})$$

Συνεπώς, η κινητική ενέργεια του φορέα που ορίζεται

$$T = \frac{1}{2} \int_l m(x) \dot{u}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\delta}_i^2(t) \quad (\text{A.1.4.3})$$

με αντικατάσταση της A.1.4.2, γίνεται:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_l m(x) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) u_i(x) u_j(x) \right) dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\delta}_i^2(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) \int_l m(x) u_i(x) u_j(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\delta}_i(t) \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \dot{\delta}_j(t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) \int_l m(x) u_i(x) u_j(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) M_i \delta_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) \left(\int_l m(x) u_i(x) u_j(x) dx + M_i \delta_{ij} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{\delta}_i(t) \dot{\delta}_j(t) m_{ij} \tag{A.1.4.4}
\end{aligned}$$

όπου δ_{ij} το delta του Kronecker. Από τις πράξεις εξήχθη η σχέση που δίνει τους συντελεστές μάζας m_{ij} :

$$m_{ij} = M_i \delta_{ij} + \int_l m(x) u_i(x) u_j(x) dx \tag{A.1.4.5}$$

Αν παραγωγίσουμε μία φορά τη σχέση A.1.3.2 ως προς x και υψώσουμε στο τετράγωνο, προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned}
u''^2(x, t) &= \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(t) u_i''(x) \right) \left(\sum_{j=1}^n \delta_j(t) u_j''(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i(t) \delta_j(t) u_i''(x) u_j''(x) \tag{A.1.4.6}
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι, αν η ελαστική ενέργεια των αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων θεωρηθεί αμελητέα συγκριτικά με την ελαστική ενέργεια της ροπής κάμψης, τότε έχουμε την ακόλουθη έκφραση για τη συνολική ελαστική ενέργεια του συστήματος:

$$V = \frac{1}{2} \int_l EJ(x)u''^2(x, t)dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_i \delta_i^2(t) \quad (A. 1.4.7)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η ελαστική ενέργεια της καμπτικής παραμόρφωσης και ο δεύτερος όρος είναι η ελαστική ενέργεια των ελατηρίων που είναι συνδεδεμένα με τον αντίστοιχο βαθμό ελευθερίας. Εννοείται, δηλαδή, ότι η μετακίνηση του βαθμού ελευθερίας i δεσμεύεται επιπλέον και με ένα γραμμικό ελατήριο σταθεράς k_i .

Αντικαθιστώντας τη σχέση A.1.4.6 στη A.1.4.7, έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_l EJ(x) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i(t)\delta_j(t) u_i''(x)u_j''(x) \right) dx + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_i \delta_i^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i(t)\delta_j(t) \int_l EJ(x)u_i''(x)u_j''(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_i \delta_i(t)\delta_j(t)\delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i(t)\delta_j(t) \left[\int_l EJ(x)u_i''(x)u_j''(x) dx + k_i \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i(t)\delta_j(t) k_{ij} \end{aligned} \quad (A. 1.4.8)$$

όπου ο συντελεστής ακαμψίας προέκυψε από τις πράξεις και ορίζεται ως εξής:

$$k_{ij} = \int_l EJ(x)u_i''(x)u_j''(x) dx + k_i \delta_{ij} \quad (A. 1.4.9)$$

Το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους αντιπροσωπεύει την καμπτική ακαμψία των μελών του φορέα και ο όρος $k = k_i \delta_{ij}$ την ακαμψία των εξωτερικών ελατηρίων στο φορέα του i βαθμού ελευθερίας.

Οι συντελεστές εσωτερικής απόσβεσης υπολογίζονται από τη σχέση:

$$c_{ij} = \int_l c_{int} J(x)u_i''(x)u_j''(x)dx \quad (A. 1.4.10)$$

Για τις γενικευμένες δυνάμεις Q_i είναι γνωστό ότι ισούνται με το δυνατό έργο δW , πολλαπλασιαζόμενες με την εκάστοτε μετακίνηση $\delta \delta_i$ μόνο του

βαθμού ελευθερίας i , έχοντας όλους τους υπόλοιπους παγιωμένους $\delta\delta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Άρα, δίνονται από τη σχέση:

$$\delta W = Q_1 \delta\delta_1 + Q_2 \delta\delta_2 + \dots + Q_n \delta\delta_n \quad (A.1.4.11)$$

Αφού τυχούσα δυνατή μετακίνηση $\delta\delta_i$ του i βαθμού ελευθερίας εκτελεί επιμέρους έργο $Q_i \delta\delta_i$, τότε, σύμφωνα προς τη θεωρία, για μοναδιαία δυνατή μετακίνηση $\delta\delta_i = 1$, έχουμε δυνατό έργο Q_i δηλαδή, τη ζητούμενη γενικευμένη δύναμη. Στο δυνατό έργο δW υπεισέρχεται το δυνατό έργο των δεδομένων εξωτερικών δυνάμεων δW_p και το δυνατό έργο της εσωτερικής απόσβεσης $\delta W_{D\epsilon\sigma}$

$$\bullet \quad \delta W_p = P_i^*(t) + \int_l q(x, t) u_i(x) dx = P_i(t) \quad (A.1.4.12)$$

$$\bullet \quad \delta W_{D\epsilon\sigma} = - \sum_{j=1}^n \delta_j(t) \int_l c_{int} J(x) u_i''(x) u_j''(x) dx = - \sum_{j=1}^n c_{int,ij} \delta_j(t) \quad (A.1.4.13)$$

Συνεπώς, με βάση τις παραπάνω A.1.4.11 και A.1.4.12, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \delta W &= Q_i \delta\delta_i \stackrel{\delta\delta_i=1}{\iff} \\ Q_i &= \delta W_p + \delta W_{D\epsilon\sigma} \iff Q_i = P_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{int,ij} \delta_j(t) \end{aligned} \quad (A.1.4.14)$$

Με αυτά τα δεδομένα επαληθεύουμε την εξίσωση Lagrange A.1.4.1.

Αρχικά, παραγωγίζουμε την κινητική ενέργεια ως προς δ_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \delta_i} &= \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_j(t) \dot{\delta}_k(t) m_{jk} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} \left(\frac{\partial \delta_j(t)}{\partial \delta_i(t)} \dot{\delta}_k(t) + \delta_j(t) \frac{\partial \dot{\delta}_k(t)}{\partial \delta_i(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} (\delta_{ij} \dot{\delta}_k(t) + \delta_j(t) \delta_{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} \delta_{ij} \dot{\delta}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{jk} \delta_{ik} \delta_j(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_{ik} \dot{\delta}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ji} \delta_j(t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{\delta}_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ji} \dot{\delta}_j(t) \xrightarrow{m_{ij}=m_{ji}} \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{\delta}_j(t) \quad (\text{A.1.4.15})$$

Επομένως, παραγωγίζοντας την Α.1.4.15 ως προς τον χρόνο t

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{\delta}_j(t) \quad (\text{A.1.4.16})$$

Όσον αφορά στο δεύτερο όρο της εξίσωσης Lagrange, γνωρίζουμε ότι η κινητική ενέργεια δεν εξαρτάται από τις μετακινήσεις δ_i των βαθμών ελευθερίας, άρα:

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_i} = 0 \quad (\text{A.1.4.17})$$

Παρομοίως, υπολογίζουμε και το τρίτο όρο. Παραγωγίζουμε την ελαστική ενέργεια V (εξ.Α.1.4.8), ως προς τις μετακινήσεις δ_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \delta_i} &= \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_j(t) \delta_k(t) k_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{jk} \left(\frac{\partial \delta_j(t)}{\partial \delta_i(t)} \delta_k(t) + \delta_j(t) \frac{\partial \delta_k(t)}{\partial \delta_i(t)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{jk} (\delta_{ij} \delta_k(t) + \delta_j(t) \delta_{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{jk} \delta_{ij} \delta_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{jk} \delta_{ik} \delta_j(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \delta_k(t) k_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ij} \quad (\text{A.1.4.18}) \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δεδομένα Α.1.4.14, Α.1.4.16, Α.1.4.17 και Α.1.4.18, η εξίσωση Lagrange Α.1.4.1, λαμβάνει τη μορφή:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{\delta}_j(t) + \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ij} = P_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{int,ij} \dot{\delta}_j(t) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{\delta}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{int,ij} \dot{\delta}_j(t) + \sum_{j=1}^n \delta_j(t) k_{ij} = P_i(t) \quad (A.1.4.19)$$

A.1.5 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ

Εξυπηρετεί τη μελέτη μας να έχουμε την εξίσωση κίνησης A.1.4.19, που προέκυψε από την εξ. Lagrange A.1.4.1, σε μητρική μορφή, οπότε γίνεται:

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P(t)\} \quad (A.1.5.1)$$

ή αλλιώς, αναλύοντας τα επιμέρους μητρώα

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\delta}_n(t) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (A.1.5.2)$$

όπου:

- ❖ $[m]$ το "μητρώο μάζας" του φορέα, είναι της μορφής:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι διαστάσεων $n \times n$, με το m_{ij} "συντελεστή μάζας" ή "συντελεστή αδρανείας" να εκφράζει τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί έξωθεν στο βαθμό ελευθερίας i , όταν ο βαθμός ελευθερίας j έχει μοναδιαία επιτάχυνση $\ddot{\delta}_j(t) = 1$, ενώ συγχρόνως όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ έχουν μηδενική επιτάχυνση $\ddot{\delta}_k(t) = 0$.

- ❖ $[c]$ το "μητρώο απόσβεσης" του φορέα, της μορφής:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

είναι διαστάσεων $n \times n$, με το $c_{int,ij} \equiv c_{ij}$ "συντελεστή απόσβεσης" να εκφράζει τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί έξωθεν στο βαθμό ελευθερίας i , όταν ο βαθμός ελευθερίας j έχει μοναδιαία ταχύτητα $\dot{\delta}_j(t) = 1$, ενώ συγχρόνως όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ έχουν μηδενική ταχύτητα $\dot{\delta}_k(t) = 0$.

❖ $[k]$ το "μητρώο ακαμψίας" του φορέα, της μορφής:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

επίσης διαστάσεων $n \times n$, που τα στοιχεία του $k_{ij} = k_{ij}^* + k_i \delta_{ij}$ είναι οι "συντελεστές ακαμψίας". Ο κάθε συντελεστής ακαμψίας εκφράζει τη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί έξωθεν στο βαθμό ελευθερίας i , όταν ο βαθμός ελευθερίας j έχει μοναδιαία μετακίνηση $\delta_j(t) = 1$, ενώ συγχρόνως όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ έχουν μηδενική μετακίνηση $\delta_k(t) = 0$.

Σημειώνεται ότι και τα τρία αυτά μητρώα είναι συμμετρικά, συνεπώς ισχύει γενικά:

$$m_{ij} = m_{ji} \qquad c_{ij} = c_{ji} \qquad k_{ij} = k_{ji} \qquad (A.1.5.3)$$

ή αλλιώς, $[m] = [m]^T, [c] = [c]^T, [k] = [k]^T$, δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε και στους προηγούμενους υπολογισμούς.

❖ $\{\delta(t)\}$ το "μητρώο των μετακινήσεων των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας", διαστάσεων $n \times 1$, της μορφής:

$$\{\delta(t)\} = [\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t)]^T$$

ενώ, $\{\dot{\delta}(t)\}$ το "μητρώο των ταχυτήτων των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας" : $\{\dot{\delta}(t)\} = [\dot{\delta}_1(t), \dot{\delta}_2(t), \dots, \dot{\delta}_n(t)]^T$

και $\{\ddot{\delta}(t)\}$ το "μητρώο των επιταχύνσεων των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας" : $\{\ddot{\delta}(t)\} = [\ddot{\delta}_1(t), \ddot{\delta}_2(t), \dots, \ddot{\delta}_n(t)]^T$

- ❖ $\{P(t)\}$ το "μητρώο εξωτερικής φόρτισης" του φορέα, διαστάσεων $n \times 1$, περιλαμβάνει εξωτερικές φορτίσεις από κατανεμημένα φορτία $q(x, t)$ και συγκεντρωμένες δυνάμεις ασκούμενες στο φορέα. Έχει τη μορφή:

$$\{P(t)\} = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)]^T$$

με στοιχεία $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A.1.6 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της κίνησης ενός φορέα, πάνω στον οποίο δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις, καθώς και δεν αναπτύσσονται δυνάμεις απόσβεσης. Η κίνηση του φορέα οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στις αρχικές συνθήκες του συστήματος, που είναι δεδομένες. Συγκεκριμένα, οφείλεται σε δεδομένη αρχική μετατόπιση και ταχύτητα του φορέα, έχει παλινδρομικό χαρακτήρα και ονομάζεται "ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση". Είναι μία περιοδική κίνηση που συνεχίζεται επ'άπειρον, εφόσον λόγω έλλειψης απόσβεσης, δεν υφίσταται κανένας μηχανισμός που να επιφέρει μείωσή της έως την παύση της.

Αφού, όπως προαναφέραμε, δεν ασκείται καμμία εξωτερική φόρτιση θα ισχύει $\{P(t)\} = 0$ και επειδή επιπλέον δεν αναπτύσσονται καθόλου δυνάμεις απόσβεσης, θα ισχύει επίσης $[c] = 0$. Τελικά, η εξίσωση A.1.5.1, παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{\delta}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} \delta_j(t) = 0 \quad (\text{A.1.6.1a})$$

και σε μητρωϊκή μορφή

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1(t) \\ \ddot{\delta}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n(t) \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.6.1b})$$

Το προκύπτον σύστημα εξισώσεων A.1.6.1a,b, περιγράφει επ'ακριβώς την ελεύθερη ταλάντωση φορέα χωρίς απόσβεση.

Επόμενο βήμα μας είναι η αναζήτηση λύσης σε αυτό το σύστημα. Αναγκαία προϋπόθεση της λύσης, είναι να αποτελεί μορφή σύγχρονης κίνησης.

Με τον όρο "σύγχρονη κίνηση" χαρακτηρίζεται η κίνηση στην οποία όλοι οι βαθμοί ελευθερίας μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο συναρτήσει του χρόνου t , δηλαδή το σχήμα της δεν αλλάζει με το χρόνο, παρά μόνο το εύρος της που μεταβάλλεται περιοδικά. Προς τούτο, ο λόγος των μετακινήσεων $\delta_i(t)$ και $\delta_j(t)$ δύο οποιωνδήποτε βαθμών ελευθερίας κίνησης i και j , για $i \neq j$, σε κάθε χρονική στιγμή, παραμένει σταθερός $\left[\frac{\delta_i(t)}{\delta_j(t)} = \text{σταθ.} \right]$. Αποδεικνύεται, ότι για συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες έχουμε σύγχρονη κίνηση, όσες και οι βαθμοί ελευθερίας. Αυτή, μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$\delta_j(t) = u_j f(t), j = 1, 2, \dots, n \quad \text{ή} \quad \{\delta(t)\} = \{u\}f(t) \quad (\text{A. 1.6.2})$$

όπου το διάνυσμα $\{u\} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ περιλαμβάνει τα $u_j, j = 1, 2, \dots, n$ που εκφράζουν τα σταθερά πλάτη ταλάντωσης των βαθμών ελευθερίας. Η $f(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου, κοινή για όλους τους βαθμούς ελευθερίας και εφόσον ο φορέας εκτελεί ταλάντωση με πεπερασμένο πλάτος, πρέπει να είναι φραγμένη.

Η σχέση A.1.6.1a λόγω της A.1.6.2 γίνεται:

$$\ddot{f}(t) \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j + f(t) \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.6.3a})$$

Δημιουργούμε το κλάσμα:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} \equiv \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.6.3b})$$

όπου το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από το δείκτη i και το δεξιό από το χρόνο. Θέσαμε το κλάσμα ίσο με λ , προκειμένου να προχωρήσουμε στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Συνεπώς, η εξίσωση A.1.6.3b, παρέχει:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \lambda \Leftrightarrow \ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (\text{A. 1.6.4a})$$

και

$$\frac{\sum_{j=1}^n k_{ij}u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij}u_j} = \lambda \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \lambda m_{ij})u_j = 0 \quad (\text{A.1.6.4b})$$

Η πρώτη εξίσωση A.1.6.4a ισχύει για όλους τους βαθμούς ελευθερίας και έχει λύση την

$$f(t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} \quad (\text{A.1.6.5})$$

με ρίζες τις χαρακτηριστικής εξίσωσης $\rho^2 + \lambda = 0$, τις $\rho_1, \rho_2 = \pm\sqrt{-\lambda}$

Διερευνώντας τη λύση,

- για $\lambda > 0$ τότε $\rho_1 > 0$ και $\rho_2 < 0$, έχουμε εκθετική εξάρτηση με το χρόνο, άρα απορρίπτεται ως μη φραγμένη συνάρτηση.
- για $\lambda > 0$, θέτοντας $\lambda = \omega^2$, έχουμε λύσεις $\rho_1, \rho_2 = \pm i\omega$, δηλαδή προκύπτει:

$$f(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (\text{A.1.6.6})$$

η οποία γίνεται αποδεκτή επειδή είναι φραγμένη συνάρτηση, όπως άλλωστε απαιτείται. Είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου, με συχνότητα ω , άρα η σύγχρονη κίνηση του φορέα θα είναι αρμονική.

Υπολογίζοντας τα πλάτη $u_j, j = 1, 2, \dots, n$ της A.1.6.2, έχουμε επιλύσει πλήρως την A.1.6.3α.

Η δεύτερη εξίσωση A.1.6.4b υπολογίζεται αναλυτικά στο επόμενο εδάφιο.

A.1.6.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Το δεύτερο μέλος της ισότητας A.1.6.3b ή αλλιώς, η εξίσωση A.1.6.4b γράφθηκε:

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \lambda m_{ij})u_j = 0 \quad (\text{A.1.6.1.1a})$$

Θέτοντας $\lambda = \omega^2$, έχουμε

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij})u_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.1.1b})$$

το οποίο εκφράζεται σε μητρική μορφή:

$$[[k] - \omega^2 [m]]\{u\} = \{0\} \quad (\text{A.1.6.1.2})$$

Αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα ιδιοτιμών που χρειάζεται να επιλύσουμε. Καταλήξαμε σε ένα αλγεβρικό, ομογενές, γραμμικό σύστημα με παρά-

μετρο το ω^2 και αγνώστους τα διανύσματα $u_j, j = 1, 2, \dots, n$. Το σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις για " n " συγκεκριμένες τιμές του ω^2 , τις "ιδιοτιμές".

Αν θεωρήσουμε το ομογενές αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει από την παραπάνω έκφραση, και γνωρίζοντας ότι για να έχει μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν, απαιτούμε:

$$\det(\omega^2) = |[k] - \omega^2[m]| = 0 \quad (\text{A.1.6.1.3})$$

η οποία είναι εξίσωση n βαθμού ως προς ω^2 και είναι γνωστή ως "εξίσωση ιδιοσυχνότητων". Όταν τα μητρώα $[k]$ και $[m]$ είναι πραγματικά και θετικά ορισμένα, τότε από την εξίσωση αυτή, προκύπτουν n θετικές ρίζες.

Απο την επίλυσή του αναμένουμε τις n ιδιοτιμές $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, οι οποίες υπό τετραγωνική ρίζα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ εκφράζουν τις "ιδιοσυχνότητες" ή "φυσικές συχνότητες" του συστήματος. Αυτές, είναι ισάριθμες προς τους βαθμούς ελευθερίας κίνησης του συστήματος. Γράφοντας τις προκύπτουσες, εν γένει διαφορετικές μεταξύ τους, ιδιοσυχνότητες σε αύξουσα σειρά, ξεχωρίζουμε τη μικρότερη, έστω ω_1 που ονομάζεται "θμελιώδης ιδιοσυχνότητα" και παίζει σημαντικό ρόλο στην παραμετρική μελέτη που θα αναπτύξουμε παρακάτω διεξοδικότερα. Οι πολλαπλές ρίζες (ιδιοσυχνότητες) λαμβάνονται και αυτές υπ'όψιν στην ίδια αύξουσα σειρά με το σύμβολο της ισότητας.

Σε κάθε ιδιοσυχνότητα $\omega_r, r = 1, 2, \dots, n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα της μορφής $\{u_i\}_r = [u_{1r}, u_{2r}, \dots, u_{nr}]^T, i = 1, 2, \dots, n$ το οποίο αποτελεί λύση του προβλήματος ιδιοτιμών, δηλαδή ικανοποιεί το ομογενές γραμμικό αλγεβρικό σύστημα:

$$[[k] - \omega_r^2[m]]\{u_i\}_r = \{0\} \quad (\text{A.1.6.1.4})$$

του οποίου οι λύσεις $\{u_i\}_r$ μπορεί να παίρνουν διάφορες τιμές αλλά ο λόγος μεταξύ δύο οποιωνδήποτε στοιχείων $\{u_a\}_r, \{u_b\}_r$ είναι μοναδικά καθορισμένος. Έτσι, αν λάβουμε ως δεδομένο ένα στοιχείο και λύσουμε ως προς τα υπόλοιπα, θα προκύψει σύστημα με $n - 1$ εξισώσεων με $n - 1$ αγνώστους.

Εκτελούμε την παραπάνω διαδικασία υπολογίζοντας τα $\{u_i\}_r$ διανύσματα, που στο εξής φέρουν το όνομα "ιδιομορφές" ή "ιδιοδιανύσματα" της ελεύθερης ταλάντωσης του φορέα, για κάθε ιδιοσυχνότητα ω_r . Ο όρος "ιδιομορφή" δηλώνει ότι το $\{u_i\}_r$ είναι εν γένει ένα σχήμα, καθορισμένο κατά μοναδικό τρόπο, το εύρος του οποίου μπορεί να κυμαίνεται ανάλογα με τον αριθμό που πολλαπλασιάζεται με αυτό.

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

Στόχος της κανονικοποίησης είναι ο υπολογισμός αυτών των στοιχείων, των ιδιομορφών, έτσι ώστε εκτός από καθορισμένο σχήμα να έχουν και καθορισμένο, κατά μοναδικό τρόπο, εύρος.

Ο συνηθέστερος τρόπος κανονικοποίησης είναι αυτός που χρησιμοποιεί το μητρώο των κατανεμημένων μαζών $[m]$, ούτως ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα, για κάθε ιδιομορφή της μορφής $\{u\}_r$, $r = 1, 2, \dots, n$, οι εξής σχέσεις:

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_r = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.1.5})$$

και λόγω της A.1.6.1.4, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και από δεξιά με το ανάστροφο $\{u\}_r^T$:

$$[k]\{u\}_r - \omega_r^2 \{u\}_r = 0 \iff \{u\}_r^T [k] \{u\}_r = \omega_r^2, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.1.6})$$

Αρχικά, όπως προείπαμε, εκλέγουμε μία αυθαίρετη τιμή σε ένα από τα στοιχεία της $\{u\}_r$, επιλύουμε ως προς τα υπόλοιπα οπότε τώρα έχουμε μία μη κανονικοποιημένη ιδιομορφή, έστω $\{u'\}_r$. Το γινόμενο αυτής και μίας προσδιοριστέας σταθεράς a_r , δίνει επίσης ιδιομορφή. Έστω, ότι προκύπτει κανονικοποιημένη

$$\{u\}_r = a_r \{u'\}_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.1.7})$$

Αντικαθιστώντας την A.1.6.1.7 στην A.1.6.1.5 και με λίγες πράξεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} a_r \{u'\}_r^T [m] a_r \{u'\}_r = 1 &\iff a_r^2 \{u'\}_r^T [m] \{u'\}_r = 1 \iff \\ &\iff a_r = (\{u'\}_r^T [m] \{u'\}_r)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.6.1.8})$$

όπου όλα τα μεγέθη είναι γνωστά.

Βάσει αυτής της θεωρίας, θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια τις κανονικοποιημένες ιδιομορφές με χρήση κατάλληλου προγράμματος σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

A.1.6.2 ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Όπως αναφέραμε πρωτύτερα, οι εξισώσεις της σύγχρονης κίνησης A.1.6.2 $\{\delta(t)\} = \{u\}f(t)$, έχουν φραγμένες λύσεις της μορφής A.1.6.6 $f(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Συνεπώς, το σύστημα διαφορικών εξισώσεων της ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση A.1.6.1α, σε σύγχρονη κίνηση,

$$\{\delta(t)\}_r = \{u\}_r f_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.2.1})$$

επιδέχεται λύσεων της μορφής:

$$f_r(t) = c_{1r} \cos \omega_r t + c_{2r} \sin \omega_r t \quad (\text{A. 1.6.2.2})$$

όπου επίσης κάθε μία από αυτές αντιπροσωπεύει σύγχρονη κίνηση του φορέα με την ιδιομορφή $\{u\}_r$ να αντιστοιχεί σε ιδιοσυχνότητα ω_r .

Η γενική λύση της A.1.6.2 θα είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων, δηλαδή θα είναι

$$\{\delta(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\delta(t)\}_r = \sum_{r=1}^n \{u\}_r f_r(t) = [u]\{f(t)\} \quad (\text{A. 1.6.2.3})$$

με το μητρώο $[u]$ να ορίζεται ως

$$[u] = [\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Αυτό ονομάζεται "μητρώο των ιδιομορφών" και αν οι συντελεστές του έχουν υποστεί κανονικοποίηση, "μητρώο των κανονικοποιημένων ιδιομορφών". Οι στήλες του είναι οι (κανονικοποιημένες) ιδιομορφές. Το διάνυσμα $\{f(t)\}$ ορίζεται (λόγω της A.1.6.2.2) από τη σχέση $\{f(t)\} = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T$ και οι σταθερές $c_{1r}, c_{2r}, r = 1, 2, \dots, n$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα του φορέα.

ΣΥΝΘΗΚΗ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η ορθοκανονικότητα μεταξύ των ιδιομορφών $\{u\}_r, r = 1, 2, \dots, n$, είναι η βασική ιδιότητα στην οποία στηρίζεται η Μέθοδος της Ιδιομορφικής Ανάλυσης με την οποία θα υπολογίσουμε την απόκριση του φορέα.

Για ιδιοσυχνότητες διάφορες μεταξύ τους, $\omega_i \neq \omega_j$, έχουμε:

$$\{u\}_j^T [m] \{u\}_i = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.6.2.3})$$

που αποτελεί την "συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς το μητρώο μάζας $[m]$ " μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ιδιομορφών ελεύθερης ταλάντωσης ενός φορέα. Εάν θεωρήσουμε ότι οι ιδιομορφές είναι κανονικοποιημένες, κάνοντας χρήση των σχέσεων A.1.6.1.5 και A.1.6.2.3, έχουμε:

$$\begin{cases} \{u\}_i^T [m] \{u\}_i = 1 \\ \{u\}_j^T [m] \{u\}_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{u\}_j^T [m] \{u\}_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.6.2.4})$$

όπου δ_{ij} το delta του Kronecker. Πλέον, ονομάζονται "σχέσεις ορθοκανονικότητας των ιδιομορφών, ως προς στο μητρώο μάζας $[m]$ ".

Αντίστοιχα, για το μητρώο ακαμψίας, σύμφωνα με την "συνθήκη ορθογωνιότητας ως προς το μητρώο ακαμψίας $[k]$ " μεταξύ οποιωνδήποτε ιδιομορφών, ισχύει:

$$\{u\}_j^T [k] \{u\}_i = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.2.5})$$

Επειδή οι ιδιομορφές είναι κανονικοποιημένες ως προς το μητρώο μάζας $[m]$, αποδείχθηκε ότι ισχύει η σχέση A.1.6.1.6 και μαζί με την αμέσως προηγούμενη A.1.6.2.5, θα δίνουν:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u\}_i^T [k] \{u\}_i = \omega_i^2 \\ \{u\}_j^T [k] \{u\}_i = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{u\}_j^T [k] \{u\}_i = \delta_{ij} \omega_i^2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.1.6.2.6})$$

δηλαδή, τις "σχέσεις ορθοκανονικότητας των κανονικοποιημένων ιδιομορφών ως προς μητρώο ακαμψίας $[k]$ ".

Συμπερασματικά, έχουμε όλες τις σχέσεις ορθοκανονικότητας ως προς το μητρώο μάζας $[m]$, σε μητρική γραφή:

$$[u]^T [m] [u] = [I] \quad (\text{A.1.6.2.7})$$

με $[u]$ το μητρώο των κανονικοποιημένων ιδιομορφών, $[u]^T$ το ανάστροφό του και $[I]$ το μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων $n \times n$. Επιπλέον, όλες τις σχέσεις ορθοκανονικότητας ως προς το μητρώο ακαμψίας $[k]$, σε μητρική γραφή:

$$[u]^T [k] [u] = [\omega^2] \quad (\text{A.1.6.2.8})$$

με διαγώνιο μητρώο του τετραγώνου των ιδιοσυχνοτήτων, διαστάσεων $n \times n$,

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.6.2.9})$$

A.1.7 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΟΣ

Η ανάλυση της ταλάντωσης των μηχανικών και δομικών συστημάτων στηρίζεται στο "Θεώρημα του Αναπτύγματος" (expansion theorem). Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μετακίνηση δ του συστήματος εμφανίζεται σε γραμμικός συνδυασμός των ιδιομορφών $\{u\}_i$ του συστήματος:

$$\{\delta\} = c_1\{u\}_1 + c_2\{u\}_2 + \dots + c_n\{u\}_n \quad (\text{A. 1.7.1})$$

Οι συντελεστές c_i εκφράζουν το βαθμό συμμετοχής της κάθε ιδιομορφής στην κίνηση του φορέα. Αποδεικνύεται, με χρήση των συνθηκών ορθοκανονικότητας (εδ.Α.1.6.2), ότι οι συντελεστές αυτοί παρέχονται από την εξίσωση:

$$c_i = \{u\}_i^T [m] \{\delta\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.7.2})$$

A.1.8 ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (MODAL ANALYSIS)

Στο παρόν κεφάλαιο ασχολούμαστε με τη μελέτη της απόκρισης ενός ραβδωτού φορέα, στην περίπτωση που επιβάλλεται σε αυτόν εξαναγκασμένη ταλάντωση, για δύο περιπτώσεις απόσβεσης. Το ζητούμενο είναι η επίλυση του θεμελιώδους συστήματος διαφορικών εξισώσεων κίνησης Α.1.5.1, λόγω επιβαλλόμενης σε αυτό εξωτερικής φόρτισης $\{P(t)\}$, με χρήση του Θεωρήματος του Αναπτύγματος (εξ. Α.1.7.1 & Α.1.7.3), που όπως αναλύσαμε στηρίζεται στις ιδιομορφές και τις ιδιότητές τους. Αυτή η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε ονομάζεται "Ιδιομορφική Ανάλυση" (Modal Analysis).

Στη Modal Analysis, το θεμελιώδες σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων Α.1.5.1, μετασχηματίζεται έτσι ώστε να εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις που είναι ασύζευκτες ως προς κάποιες άλλες συντεταγμένες, τις "κανονικές συντεταγμένες" $\xi_i(t)$ με $i = 1, 2, \dots, n$. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι η επίλυση των προκύπτουσών ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων ως προς αυτές τις κανονικές συντεταγμένες, είναι απλούστερη και αμεσότερη, εν σχέσει με την χρήση των μετακινήσεων $\delta_i(t)$ των αδέσμευτων βαθμών ελευθερίας, που αναπτύχθηκε ενωρίτερα.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου είναι το μητρώο απόσβεσης $[c]$ στο σύστημα Α.1.5.1, όπου υπάρχει και απόσβεση, να είναι αναλογικό. Δηλαδή, να μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός του μητρώου μάζας και του μητρώου ακαμψίας. Ή έστω τα στοιχεία εκτός διαγωνίου του να είναι σχετικά μικροί αριθμοί, έτσι ώστε να θεωρηθεί ως τέτοιο.

Γενικά, οι διαφορικές εξισώσεις του εν λόγω διαφορικού συστήματος κίνησης είναι πεπλεγμένες και στην περίπτωση που το μητρώο δεν είναι αναλογικό, δεν μπορούμε να τις αποσυζεύξουμε με αυτή τη μέθοδο. Τότε, υποχρεωνόμαστε να καταφύγουμε στη γνωστή μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta, μέσω της οποίας θα προκύψει προσεγγιστική λύση.

A.1.8.1 Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΦΟΡΕΑ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στο θεμελιώδες διαφορικό σύστημα εξισώσεων κίνησης A.1.5.1, προκειμένου να εξετάσουμε την περίπτωση την εξαναγκασμένης ταλάντωσης φορέα χωρίς απόσβεση, διαγράφουμε τον όρο $[c]$ που την εκφράζει:

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.1})$$

Σε αυτό το σημείο, κάνουμε χρήση του θεωρήματος του αναπτύγματος του εδαφίου A.1.7, με τη διαφορά ότι οι συντελεστές c_i που θα επιλέξουμε δε θα είναι σταθεροί, αλλά θα είναι συναρτήσεις του χρόνου t , δηλαδή $c_i(t)$. Αυτό επιβάλλεται από την ίδια την κίνηση του φορέα επειδή το διάνυσμα των μετακινήσεων των βαθμών ελευθερίας είναι συνάρτηση του χρόνου $\{\delta(t)\}$. Έτσι, οι συντελεστές $c_i(t)$ που υπολογίζονται από την σχέση A.1.7.2 μπορούν να αντικατασταθούν με τις κανονικές συντεταγμένες $\xi_i(t)$. Συνεπώς, σύμφωνα με το θεώρημα του αναπτύγματος, το διάνυσμα $\{\delta(t)\}$, που εκφράζει τη στατική μετακίνηση των βαθμών ελευθερίας εξαρτώμενη από τον χρόνο, γίνεται:

$$\begin{aligned} \{\delta(t)\} &= \xi_1(t)\{u\}_1 + \xi_2(t)\{u\}_2 + \dots + \xi_n(t)\{u\}_n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{\delta(t)\} = [\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_n][\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)]^T \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{\delta(t)\} = [u]\{\xi(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A. 1.8.1.2})$$

που είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ των μετακινήσεων $\delta_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ των βαθμών ελευθερίας του φορέα και των $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ κανονικών συντεταγμένων, μέσω των κανονικοποιημένων ιδιομορφών $\{u\}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Οι κανονικές συντεταγμένες, ουσιαστικά εκφράζουν τη μεταβολή στο εύρος της κάθε κανονικοποιημένης ιδιομορφής. Το $[u]$ της τελευταίας ισοδυναμίας, δεν είναι άλλο από το μητρώο των κανονικοποιημένων ιδιομορφών, μητρώο ανεξάρτητο του χρόνου t .

Παραγωγίζοντας δύο φορές την A.1.8.1.2 ως προς τον χρόνο t , έχουμε τη σχέση:

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = [u]\{\ddot{\xi}(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.3})$$

και αντικαθιστώντας τις A.1.8.1.2 και A.1.8.1.3 στο θεμελιώδες μητρωϊκό σύστημα A.1.8.1.1, παίρνουμε:

$$[m][u]\{\ddot{\xi}(t)\} + [k][u]\{\xi(t)\} = \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.4})$$

Πολλαπλασιάζοντάς την από αριστερά με το ανάστροφο $[u]^T$, έχουμε:

$$[u]^T [m][u]\{\ddot{\xi}(t)\} + [u]^T [k][u]\{\xi(t)\} = [u]^T \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.5})$$

Οι συνθήκες ορθοκανονικότητας A.1.6.2.7, A.1.6.2.8, απλοποιούν τη σχέση σε:

$$\{\ddot{\xi}(t)\} + [\omega^2]\{\xi(t)\} = [u]^T \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.6})$$

Ορίζουμε το δεξί μέλος, που εκφράζει γενικευμένη φόρτιση, ως $\{N(t)\}$, με συντελεστές $N_i(t)$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και το ονομάζουμε διάνυσμα των "Γενικευμένων Φορτίων"

$$\{N(t)\} = [u]^T \{P(t)\} \Leftrightarrow \{N_i(t)\} = \{u\}_i^T \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.7})$$

όπου $[u]^T = [\{u\}_1^T, \{u\}_2^T, \dots, \{u\}_n^T]^T$ το ανάστροφο μητρώο των κανονικών ιδιομορφών. Βάσει αυτών των σχέσεων, η A.1.8.1.6 παίρνει τη μορφή:

$$\{\ddot{\xi}(t)\} + [\omega^2]\{\xi(t)\} = \{N(t)\} \quad (\text{A. 1.8.1.8})$$

Το μητρώο $[\omega^2]$, σύμφωνα με την A.1.6.2.9 είναι διαγώνιο μητρώο, που σημαίνει ότι οι n διαφορικές εξισώσεις του συστήματος είναι ασύζευκτες μεταξύ τους, της μορφής

$$\ddot{\xi}_i(t) + \omega_i^2 \xi_i(t) = N_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.1.9})$$

Αυτή η σχέση είναι η διαφορική εξίσωση απόκρισης μονοβάθμιου ταλαντωτή με μοναδιαία μάζα $m = 1$, φυσική ιδιοσυχνότητα ω_i και διεγείρουσα δύναμη $N_i(t)$. Διέπει την κανονική συντεταγμένη $\xi_i(t)$, δηλαδή τη μεταβολή του εύρους της κανονικοποιημένης ιδιομορφής $\{u\}_i$ που εκτελεί μία σύγχρονη κίνηση σαν μονοβάθμιος ταλαντωτής, συμμετέχοντας μαζί με τις υπόλοιπες κανονικοποιημένες ιδιομορφές, που εκτελούν τις δικές τους σύγχρονες κινήσεις, στη διαμόρφωση της κίνησης του φορέα, σύμφωνα με την εξίσωση A.1.8.1.1.

Η γενική λύση $\xi_i(t)$, της κάθε διαφορικής εξίσωσης είναι το άθροισμα της λύσης της ομογενούς

$$\xi_{i0}(t) = \xi_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\xi}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (\text{A. 1.8.1.10})$$

και μίας ειδικής λύσης, της

$$\xi_{ip}(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(t - \tau) \cdot \sin \omega_i \tau \cdot d\tau \quad (\text{A. 1.8.1.11})$$

που δίνεται με τη μορφή του ολοκληρώματος *Duhamel*.

Επομένως, η γενική λύση δίνεται:

$$\xi_i(t) = \xi_{i0}(t) + \xi_{ip}(t) \quad (\text{A.1.8.1.12})$$

Η ομογενής λύση A.1.8.1.10 εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες των κανονικών συντεταγμένων, την αρχική μετατόπιση $\xi_i(0)$ του εύρους της ιδιομορφής $\{u\}_i$ και την αρχική ταχύτητα $\dot{\xi}_i(0)$. Αυτές οι αρχικές συνθήκες $\xi_i(0)$ και $\dot{\xi}_i(0)$, εξαρτώνται με τη σειρά τους από τις αρχικές συνθήκες $\{\delta(0)\}$ και $\{\dot{\delta}(0)\}$ του φορέα, και συνδέονται με αυτές μέσω του μετασχηματισμού A.1.8.1.2. Αν σε αυτόν θέσουμε την αρχικά μηδενική τιμή του χρόνου t , έχουμε:

$$\{\delta(t)\} = [u]\{\xi(t)\} \stackrel{t=0}{\iff} \{\delta(0)\} = [u]\{\xi(0)\} \quad (\text{A.1.8.1.13})$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο και θέτοντας $t = 0$, γίνεται:

$$\{\dot{\delta}(0)\} = [u]\{\dot{\xi}(0)\}$$

Αν αυτές οι δύο σχέσεις πολλαπλασιαστούν από αριστερά με $[u]^T [m]$, έχουμε:

$$\begin{aligned} [u]^T [m]\{\delta(0)\} &= [u]^T [m][u]\{\xi(0)\} \\ [u]^T [m]\{\dot{\delta}(0)\} &= [u]^T [m][u]\{\dot{\xi}(0)\} \end{aligned}$$

όπου εφαρμόζοντας τις συνθήκες ορθογωνιότητας A.1.6.2.7, προκύπτουν οι ζητούμενες αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \{\xi(0)\} &= [u]^T [m]\{\delta(0)\} \\ \{\dot{\xi}(0)\} &= [u]^T [m]\{\dot{\delta}(0)\} \end{aligned} \quad (\text{A.1.8.1.14})$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel, είναι ένα ολοκλήρωμα συνέλιξης και γράφεται με τους δύο τρόπους που παραθέσαμε στην ισότητα A.1.8.1.11. Εφαρμόζεται σε μη ομογενές πρόβλημα που έχει ομογενείς αρχικές συνθήκες και παρέχει, στη γενική του μορφή, την απόκριση της κάθε κανονικοποιημένης ιδιομορφής $\{u\}_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$, θεωρούμενη ως μονοβάθμιου ταλαντωτή, που οφείλεται στη διέγερση από το αντίστοιχο γενικευμένο φορτίο $N_i(t)$ για $i = 1, 2, \dots, n$, ξεκινώντας από συνθήκες ηρεμίας.

Εν κατακλείδει, εφαρμόζοντας την Μέθοδο της Ιδιομορφικής Ανάλυσης, η απόκριση $\{\delta(t)\}$ ενός δοσμένου ραβδωτού φορέα, χωρίς ιδιότητες απόσβεσης, υπό την επενέργεια δοθείσης εξωτερικής φόρτισης $\{P(t)\}$, δίνεται από την A.1.8.1.2

$$\{\delta(t)\} = \xi_1(t)\{u\}_1 + \xi_2(t)\{u\}_2 + \dots + \xi_n(t)\{u\}_n \quad (\text{A.1.8.1.15})$$

Στη σχέση αυτή τα $\{u\}_i$ είναι οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης του φορέα και $\xi_i(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες, οι οποίες είναι οι γενικές λύσεις των εξισώσεων Α.1.8.1.9, που βάσει του αθροίσματος Α.1.8.1.12, παίρνουν την τελική μορφή:

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\xi}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t N_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.1.16})$$

Α.1.8.2 Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΦΟΡΕΑ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στην περίπτωση που η κίνηση του φορέα διέπεται και από δυνάμεις απόσβεσης, το μητρώο απόσβεσης $[c]$ είναι μη μηδενικό και το θεμελιώδες σύστημα διαφορικών εξισώσεων έχει τη πλήρη του μορφή Α.1.5.1:

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.2.1})$$

Προκειμένου να επιλύσουμε το σύστημα με τη μέθοδο της Ιδιομορφικής Ανάλυσης, χρειάζεται να αποσυζεύξουμε τις εξισώσεις, δηλαδή θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με το φορέα χωρίς απόσβεση.

Συνεπώς, παραγωγίζουμε τη σχέση Α.1.8.1.2 δύο φορές ως προς το χρόνο t

$$\{\delta(t)\} = [u]\{\xi(t)\} \quad \{\dot{\delta}(t)\} = [u]\{\dot{\xi}(t)\} \quad \{\ddot{\delta}(t)\} = [u]\{\ddot{\xi}(t)\} \quad (\text{A. 1.8.2.2})$$

Με αντικατάσταση αυτών στην Α.1.8.2.1 έχουμε:

$$[m][u]\{\ddot{\xi}(t)\} + [c][u]\{\dot{\xi}(t)\} + [k][u]\{\xi(t)\} = \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.2.3})$$

και αν την πολλαπλασιάσουμε από αριστερά με $[u]^T$

$$\xrightarrow{[u]^T x} [u]^T [m][u]\{\ddot{\xi}(t)\} + [u]^T [c][u]\{\dot{\xi}(t)\} + [u]^T [k][u]\{\xi(t)\} = [u]^T \{P(t)\} \quad (\text{A. 1.8.2.4})$$

Με χρήση των συνθηκών ορθοκανονικότητας Α.1.6.2.7, Α.1.6.2.8 και της Α.1.8.1.7 για τα γενικευμένα φορτία, προκύπτει:

$$\{\ddot{\xi}(t)\} + [C]\{\dot{\xi}(t)\} + [\omega^2]\{\xi(t)\} = \{N(t)\} \quad (\text{A. 1.8.2.5})$$

όπου το μητρώο $[C]$ ορίζεται από τη σχέση $[C] = [u]^T [c][u]$ και είναι ένα $n \times n$ συμμετρικό μητρώο, αλλά εν γένει, δεν είναι διαγώνιο. Αυτή η σχέση μας "αποκαλύπτει" αν το μητρώο $[C]$ είναι διαγώνιο. Για να προκύψει διαγώνιο το

μητρώο $[C]$, πρέπει το μητρώο $[c]$ να είναι αναλογικό. Επομένως, καταλήξαμε σε αδιέξοδο διότι οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος είναι συζευγμένες λόγω των μη διαγώνιων στοιχείων του $[C]$, και αυτό δυσκολεύει αρκετά τον υπολογισμό των κανονικών συντεταγμένων. Συνεπώς, η μέθοδος της Ιδιομορφικής Ανάλυσης δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ.

Σε ενδεχόμενη περίπτωση όπου το μητρώο απόσβεσης $[C]$ δεν είναι διαγώνιο αλλά τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του είναι αρκετά μικρά εν σχέση με τα διαγώνια στοιχεία του, τότε μπορούμε να τα αγνοήσουμε και να εφαρμόσουμε κανονικά Modal Analysis με αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Αυτό γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού η σύζευξη των διαφορικών εξισώσεων που οφείλεται στα μη διαγώνια, είναι πολύ ασθενής ως προς αυτή που οφείλεται στα επί της διαγωνίου στοιχεία, και αγνοείται ως επίδραση δευτέρας τάξεως.

A.1.8.2.1 ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΗ. ΕΦΑΡΜΟΓΗ MODAL ANALYSIS

Η άλλη επιλογή που έχουμε, προκειμένου να δημιουργηθούν οι προϋποθέσεις εφαρμογής της Μεθόδου της Ιδιομορφικής Ανάλυσης, είναι να θεωρήσουμε μία ειδική περίπτωση όπου το μητρώο $[c]$ είναι αναλογικό και μπορεί να γραφθεί ως γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας $[m]$ και ακαμψίας $[k]$. Δηλαδή,

$$[c] = a[m] + b[k] \quad (A.1.8.2.1.1)$$

με a, b κάποιες στεθερές. Με χρήση των συνθηκών ορθοκανονικότητας A.1.6.2.7 και A.1.6.2.8, υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} [C] &= [u]^T [c] [u] = a[u]^T [m] [u] + b[u]^T [k] [u] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [C] &= a[I] + b[\omega^2] \end{aligned} \quad (A.1.8.2.1.2)$$

δηλαδή διαγώνιο μητρώο, αφού το μητρώο $[\omega^2]$ είναι διαγώνιο (βλ. A.1.6.2.9), με στοιχεία $C_i = a + b\omega_i^2$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Αν θέσουμε $C_i = 2c_i\omega_i$, προκύπτει ο αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης

$$c_i = \frac{C_i}{2\omega_i} = \frac{a}{2\omega_i} + \frac{b\omega_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.1.8.2.1.3)$$

Χάρη στο ότι το μητρώο $[C]$ είναι διαγώνιο, ισχύει ότι οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος A.1.8.2.5 θα είναι ασύζευκτες μεταξύ τους. Δηλαδή, με βάση τα παραπάνω, θα έχουν τη μορφή:

$$\ddot{\xi}_i(t) + 2c_i\omega_i\dot{\xi}_i(t) + \omega_i^2\xi_i(t) = N_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.1.8.2.1.4)$$

που είναι η μορφή διαφορικής εξίσωσης μονοβάθμιου ταλαντωτή με μοναδιαία μάζα $m = 1$, φυσική ιδιοσυχνότητα ω_i , αδιάστατο συντελεστή απόσβεσης c_i και διεγείρουσα δύναμη $N_i(t)$.

Στην περίπτωση της υποκρίσιμης απόσβεσης ($c_i < 1$), η γενική λύση, που εμπεριέχει τη λύση της ομογενούς και την ειδική λύση με τη γενική μορφή ολοκληρώματος Duhamel, δίνεται:

$$\xi_i(t) = e^{-c_i\omega_i t} \left(\xi_i(0) \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{\xi}_i(0) + c_i\omega_i\xi_i(0)}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right) + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(\tau) e^{-c_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{di}(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.1.8.2.1.5)$$

με την ω_{di} να θεωρείται η "συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση" και υπολογίζεται από την $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - c_i^2}$. Οι αρχικές κανονικές συντεταγμένες υπολογίζονται από τις σχέσεις που παραθέσαμε ανωτέρω, A.1.8.1.14, βάσει των αρχικών συνθηκών του συστήματος. Το ολοκλήρωμα Duhamel δίνει την απόκριση του μονοβάθμιου ταλαντωτή, εκκινούμενου από συνθήκες ηρεμίας, λόγω διέγερσης από εξωτερική δύναμη $N_i(t)$ και εκφράζει τη μειωτική επίδραση της απόσβεσης στην κίνηση του φορέα.

Αντίστοιχες γενικές λύσεις που παρέχει η σχέση A.1.8.2.1.5, ισχύουν και στις περιπτώσεις κρίσιμης ($c_i = 1$) και υπερκρίσιμης απόσβεσης ($c_i > 1$).

Συμπερασματικά, η ζητούμενη απόκριση του φορέα με απόσβεση δίνεται, όπως και στην περίπτωση του φορέα χωρίς απόσβεση, από την επαλληλία A.1.8.1.15 του εδαφίου A.1.8.1.

A.1.8.2.2 ΜΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ RUNGE-KUTTA

Σε αυτή την περίπτωση, το μητρώο της απόσβεσης $[C]$ είναι ένα συμμετρικό εν γένει μη διαγώνιο μητρώο, του οποίου μη διαγώνια στοιχεία του είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τα διαγώνια. Γι'αυτό θα πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητική ολοκλήρωση του θεμελιώδους συστήματος A.1.5.1. Επιλέγουμε μία από τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται κατά κόρον για αυτού του είδους την εργασία, δηλαδή για την αριθμητική ολοκλήρωση προβλημάτων αρχικών

τιμών, τη μέθοδο Runge-Kutta. Πιο συγκεκριμένα, επειδή η μέθοδος Runge-Kutta έχει διάφορες παραλλαγές ως προς την ακρίβεια, θα χρησιμοποιήσουμε μία από αυτές, την μέθοδο τετάρτης τάξεως.

Η λογική της, είναι η εξής: Έστω ότι έχουμε n διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, της μορφής $y' = f(y, t)$ δηλαδή

$$\begin{cases} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{cases} = \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \vdots \\ f_3(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases} \quad (\text{A. 1.8.2.2.1})$$

και έστω ότι γνωρίζουμε τις $y_i(t)$ με $i = 1, 2, \dots, n$ για τη χρονική στιγμή t που είναι η αρχή κάποιου βήματος διάρκειας h . Η μέθοδος υπολογίζει τις $y_i(t)$ για $i = 1, 2, \dots, n$ στο πέρας του βήματος τη χρονική στιγμή $t + h$. Κατ' αρχήν, υπολογίζονται οι αυξήσεις k_{i1} των $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ στη διάρκεια του βήματος από τον τύπο:

$$k_{i1} = hf_i(y_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.2.2.2})$$

Μετάπειτα, θεωρώντας ότι την χρονική στιγμή $t + \frac{h}{2}$, δηλαδή στο μέσον του βήματος ολοκλήρωσης, οι $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχουν, σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση, την τιμή $y_i(t) + \frac{k_{i1}}{2}$, υπολογίζουμε τις αυξήσεις k_{i2} των $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ με βάση τον τύπο:

$$k_{i2} = hf_i\left(y_i + \frac{k_{i1}}{2}, t + \frac{h}{2}\right), i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.2.2.3})$$

Ύστερα, θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή $t + \frac{h}{2}$, δηλαδή στο μέσον του βήματος ολοκλήρωσης, οι $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχουν, σύμφωνα με την αμέσως προηγούμενη σχέση, την τιμή $y_i(t) + \frac{k_{i2}}{2}$, υπολογίζουμε τις αυξήσεις k_{i3} των $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ με βάση τον τύπο:

$$k_{i3} = hf_i\left(y_i + \frac{k_{i2}}{2}, t + \frac{h}{2}\right), i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.2.2.4})$$

Εν κατακλείδι, θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t + h$, δηλαδή στο πέρας του βήματος ολοκλήρωσης, οι $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχουν, σύμφωνα με την αμέσως προηγούμενη σχέση A.1.8.2.2.4, την τιμή $y_i(t) + k_{i3}$. Υπολογίζουμε τις αυξήσεις k_{i4} των $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ με βάση τον τύπο:

$$k_{i4} = hf_i(y_i + k_{i3}, t + h), i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A. 1.8.2.2.3})$$

Βάσει αυτών, η μέθοδος υπαγορεύει ότι οι ζητούμενες τιμές στο πέρας του βήματος $y_i(t + h)$, $i = 1, 2, \dots, n$, θα δίνονται από τη σχέση:

$$y_i(t + h) = y_i(t) + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}) \quad (\text{A. 1.8.2.2.3})$$

όπου $k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}$ οι μέσοι όροι, ενός βήματος h , όπως ορίστηκαν παραπάνω.

A.1.9 ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΛΟΓΩ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Το κύριο χαρακτηριστικό της εργασίας μας είναι η μελέτη της δυναμικής απόκρισης ενός φορέα, σε δεδομένη κίνηση των στηρίξεων του. Μία τέτοια διέγερση απορροφά ενέργεια από το σύστημα κατά τη διάρκεια της δυναμικής απόκρισης. Συνεπώς, το σύστημα που έχουμε ήδη περιγράψει, γίνεται πλήρες αν συμπεριλάβουμε ένα προκαθορισμένο ιστορικό μετατοπίσεων των στηρίξεων. Μια τέτοια προσθήκη στη μελέτη μας, βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στη φύση. Παραδείγματος χάριν, απαντάται στη δυναμική απόκριση μίας κατασκευής που στηρίζεται στο έδαφος, εξαιτίας ενός σεισμού. Η σεισμική δόνηση μπορεί να εκφραστεί στο εργαστήριο ως προκαθορισμένη κίνηση στις στηρίξεις μιας κατασκευής, εν είδει διέγερσης, της οποίας τα αποτελέσματα πάνω στο φορέα της κατασκευής ερευνούμε.

Το βασικό βήμα για να καταστρώσουμε τις εξισώσεις της συνολικής κίνησης του πλήρους συστήματος, προστιθέμενων των μετακινήσεων των στηρίξεων της βάσης, είναι να εκφράσουμε τη συνολική μετατόπιση $\delta^t(t)$ ⁱ του ραβδωτού φορέα, σαν το άθροισμα

- ❖ της μετατόπισης την οποία θα ελάμβανε στατικά, λόγω κίνησης της βάσης, πάρα πολύ αργά, χωρίς την ανάπτυξη αδρανειακών δυνάμεων. Την ονομάζουμε ψευδοστατική $\delta^s(t)$ ⁱⁱ
 - ❖ και της επιπρόσθετης μετατόπισης, που οφείλεται στα δυναμικά φαινόμενα, δηλαδή, στα αδρανειακά φαινόμενα και στις δυνάμεις απόσβεσης.
- Συνεπώς, την εκφράζουμε

$$\delta^t(t) = \delta^s(t) + \delta(t) \quad (A.1.9.1)$$

Βάσει αυτών, ξαναγράφουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης

$$[m]\{\ddot{\delta}^t(t)\} + [c]\{\dot{\delta}^t(t)\} + [k]\{\delta^t(t)\} = \{P(t)\} \quad (A.1.9.2a)$$

ή αναλυτικότερα

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1^t(t) \\ \ddot{\delta}_2^t(t) \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n^t(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1^t(t) \\ \dot{\delta}_2^t(t) \\ \vdots \\ \dot{\delta}_n^t(t) \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^t(t) \\ \delta_2^t(t) \\ \vdots \\ \delta_n^t(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

ⁱ t,σημ.total

ⁱⁱ s,σημ.static

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1^s(t) + \ddot{\delta}(t) \\ \ddot{\delta}_2^s(t) + \ddot{\delta}(t) \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n^s(t) + \ddot{\delta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1^s(t) + \dot{\delta}(t) \\ \dot{\delta}_2^s(t) + \dot{\delta}(t) \\ \vdots \\ \dot{\delta}_n^s(t) + \dot{\delta}(t) \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^s(t) + \delta(t) \\ \delta_2^s(t) + \delta(t) \\ \vdots \\ \delta_n^s(t) + \delta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} \quad (A.1.9.2b)$$

Συνεχίζουμε τις πράξεις στη σχέση A.1.9.2α λαμβάνοντας υπ'όψιν την A.1.9.1, και έχουμε:

$$\begin{aligned} [m]\{\ddot{\delta}^s(t) + \ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}^s(t) + \dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta^s(t) + \delta(t)\} &= \{P(t)\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [m]\{\ddot{\delta}^s(t)\} + [m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}^s(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + \\ + [k]\{\delta^s(t)\} + [k]\{\delta(t)\} &= \{P(t)\} \end{aligned} \quad (A.1.9.3)$$

- ❖ Ο όρος $[k]\{\delta^s(t)\}$ περιγράφει τις ελαστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους βαθμούς ελευθερίας του ραβδωτού φορέα κατά την ψευδοστατική μετακίνησή του, όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Επειδή όμως, η βάση κινείται ως στερεό σώμα, δεν υπάρχει σχετική κίνηση καμμιάς στήριξης ως προς τις υπόλοιπες και συνεπώς, ο ραβδωτός φορέας κινείται ως στερεό σώμα χωρίς καμμιά ελαστική παραμόρφωση. Επομένως, δεν αναπτύσσονται ελαστικές δυνάμεις και ο όρος αυτός μηδενίζεται.
- ❖ Ο όρος $[c]\{\dot{\delta}^s(t)\}$ περιγράφει τις ελαστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους βαθμούς ελευθερίας του ραβδωτού φορέα κατά την ψευδοστατική ταχύτητά του. Επειδή όμως, η βάση κινείται ως στερεό σώμα, δεν υπάρχει σχετική ταχύτητα καμμιάς στήριξης ως προς τις υπόλοιπες και συνεπώς, ο ραβδωτός φορέας κινείται ως στερεό σώμα χωρίς ρυθμό μεταβολής της ελαστικής παραμόρφωσής του. Επομένως, δεν αναπτύσσονται δυνάμεις λόγω εσωτερικής απόσβεσης και ο όρος αυτός μηδενίζεται.
- ❖ Ο όρος $\{P(t)\}$, έχουμε προαναφέρει ότι εκφράζει το μητρώο των εξωτερικών φορτίσεων. Εφόσον, δεν ασκείται καμμιά εξωτερική φόρτιση από κατανεμημένα φορτία επί του άξονα του ραβδωτού φορέα και εφόσον, δεν ασκείται καμμιά συγκεντρωμένη δύναμη ή ροπή στο φορέα, ο όρος αυτός, επίσης, μηδενίζεται.

Βάσει αυτών, η εξίσωση A.1.9.2α λαμβάνει τη μορφή:

$$[m]\{\ddot{\delta}^s(t)\} + [m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = -[m]\{\ddot{\delta}^s(t)\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (A.1.9.4)$$

όπου ονομάσαμε $\{P_{eff}(t)\}$ το μητρώο με τις επιδρώσες δυνάμεις, δηλαδή αυτές τις δυνάμεις που ασκούνται στο ραβδωτό φορέα λόγω της κίνησης του εδάφους και διέπουν την κίνηση του φορέα. Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι το $\{P_{eff}(t)\}$ εξαρτάται μόνον από τις δεδομένες επιταχύνσεις της βάσης. Εφόσον η βάση εκτελεί δεδομένη κίνηση στερεού σώματος, μπορούμε να εκφράσουμε τις μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας συναρτήσει αυτής. Το μητρώο των επιδρώσων δυνάμεων γράφεται αναλυτικά:

$$\{P_{eff}(t)\} = -[m]\{\ddot{\delta}^s(t)\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} P_{eff1}(t) \\ P_{eff2}(t) \\ \vdots \\ P_{effn}(t) \end{Bmatrix} = -[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1^s(t) \\ \ddot{\delta}_2^s(t) \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_n^s(t) \end{Bmatrix} \quad (A.1.9.5)$$

όπου $[m]$ είναι το μητρώο των κατανεμημένων μαζών και $\{\ddot{\delta}^s(t)\} = \{\ddot{\delta}_1^s(t) \ \ddot{\delta}_2^s(t) \ \dots \ \ddot{\delta}_n^s(t)\}^T$ το μητρώο των επιταχύνσεων της βάσης.

Συγκεντρωτικά, λοιπόν, έχουμε τα εξής συστήματα:

❖ Χωρίς Απόσβεση

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (A.1.9.6)$$

❖ Με Απόσβεση

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [c]\{\dot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (A.1.9.7)$$

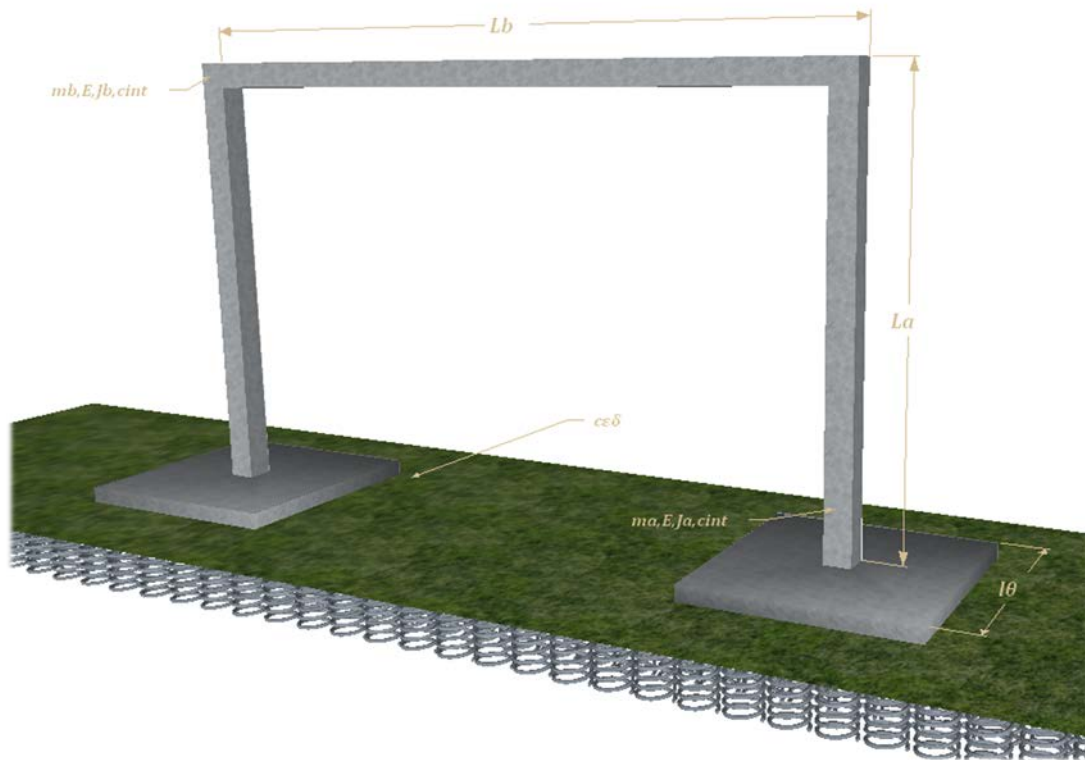
Για την επίλυση της πρώτης περίπτωσης ακολουθείται η διαδικασία που αναφέρεται στο εδάφιο A.1.8.1, ενώ για τη δεύτερη αυτή που αναφέρεται στο A.1.8.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.2 Ταλάντωση του Συστήματος λόγω Κίνησης της Βάσης του

Α.2.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΑΣΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την ελαστοδυναμική απόκριση πλαισιωτού φορέα, στηριζόμενου, μέσω ελατηρίων, πάνω σε άκαμπτη βάση, λόγω δεδομένης κίνησης της.

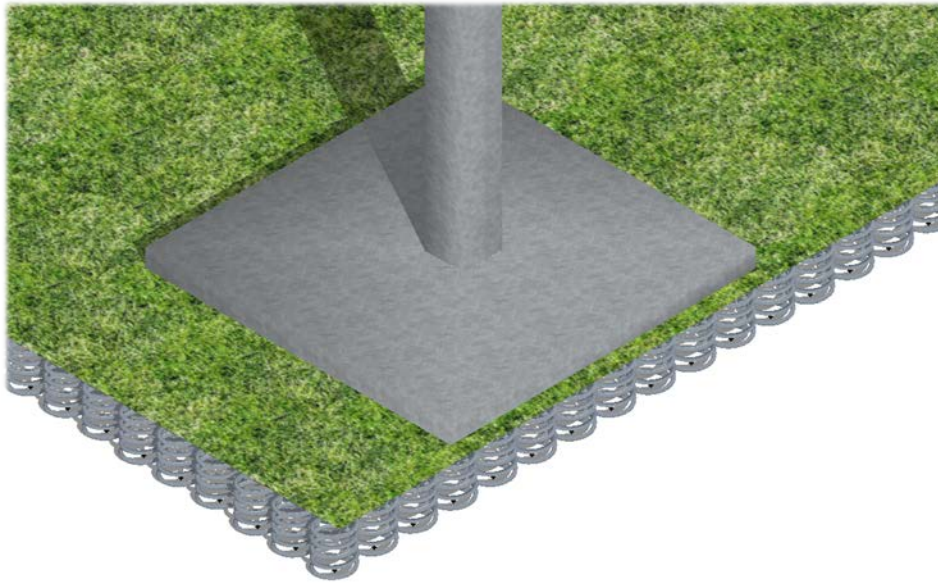
Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πλαισίου



Σχέδιο 1|Α.2.1

Η κατασκευή είναι ένας απλός συμμετρικός πλαισιωτός φορέας ενός ανοίγματος, όπως απεικονίζεται στο Σχέδιο 1|Α.2.1 Τα υποστυλώματα έχουν μήκος L_a , κατανεμημένη μάζα m_a και ροπή αδρανείας της διατομής J_a , ενώ το ζυγώμα έχει μήκος L_b , μάζα m_b και ροπή αδρανείας J_b . Η διατομή των υποστυλωμάτων είναι ίδια και ενδεχομένως μπορεί να διαφέρει από τη διατομή του ζυγώματος. Όλα τα στοιχεία έχουν ίσο μέτρο ελαστικότητας E και συντελεστή εσωτερικής απόσβεσης c_{int} . Οι στύλοι εδράζονται σε ελαστικό έδαφος τύπου Winkler, με δείκτη εδάφους $c_{εδ}$. Η σχέση που συνδέει την τάση σ με την υποχώρηση δ , είναι η εξής:

$$\sigma = c_{εδ} \cdot \delta \quad (A.2.1.1)$$

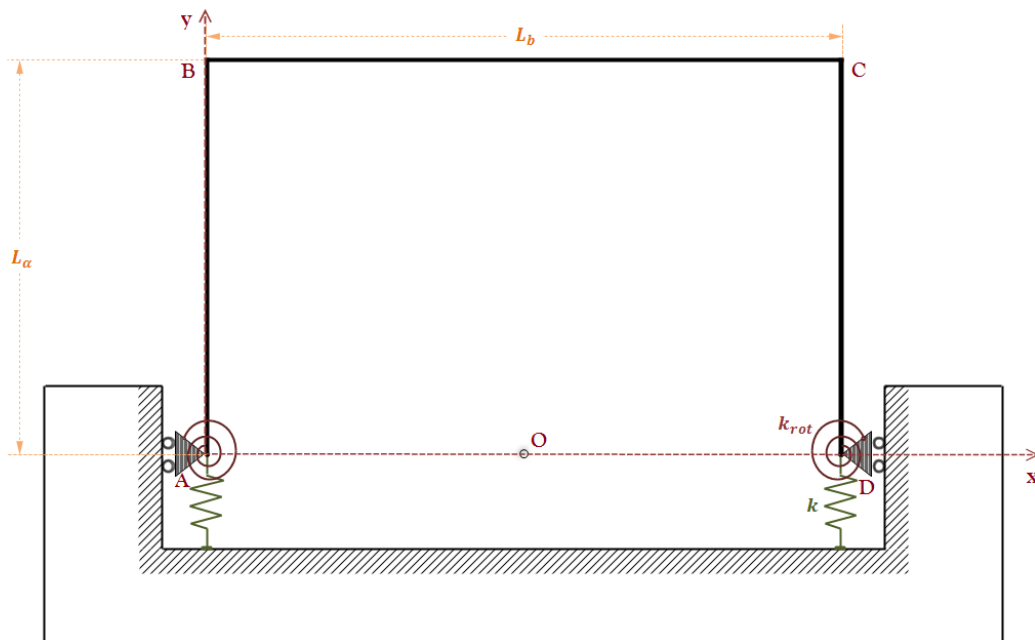


Σχέδιο 2|Α.2.1

Θα θεωρήσουμε ότι το θεμέλιο κάθε υποστυλώματος έχει τετραγωνική επιφάνεια έδρασης, όπως απεικονίζεται στο Σχέδιο 2|Α.2.1, με πλευρά l_{θ} που συνδέεται με το μήκος της δοκού μέσω της σχέσης

$$l_{\theta} = \zeta_{\theta} \cdot L_b \quad (A.2.1.2)$$

όπου ζ_{θ} μία παράμετρος.



Σχέδιο 3|Α.2.1

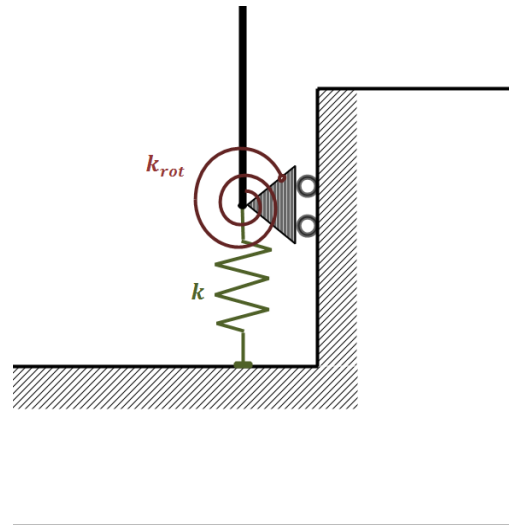
Το μηχανικό προσομοίωμα του μελετούμενου δομικού συστήματος είναι ισοδύναμο με το Σχέδιο 3|Α.2.1. Η σύνδεση καθενός υποστυλώματος με τη βάση γίνεται, αφ'ενός μέσω ενός αξονικού ελατηρίου, κάθετα παγωμένου στη βάση, με δυνατότητα κατακόρυφης κίνησης και αφ'ετέρου μέσω ενός στρεπτικού

ελατηρίου, παγωμένου σε κύλιση επί του κατακόρυφου τοιχώματος της βάσης (Σχέδιο 4|A.2.1).

Η συγκεκριμένη κύλιση δίνει στο φορέα δύο δυνατότητες κίνησης: μία κατακόρυφη, όπως υπαγορεύει η έκταση και η συστολή του αξονικού ελατηρίου, και μία δυνατότητα να στρέφεται.

Το αξονικό ελατήριο k , περιγράφεται από τη σχέση των ελατηρίων $k = c_{εδ} \cdot A_{\theta} \left[\frac{N}{m} \right]$, όπου $c_{εδ}$ ορίσαμε το δείκτη εδάφους και A_{θ} το εμβαδόν της επιφάνειας έδρασης. Το στρεπτικό ελατήριο k_{rot} , περιγράφεται από τη σχέση

$k_{rot} = c_{εδ} \cdot J_{\theta} [Nm]$, όπου $c_{εδ}$ ο δείκτης εδάφους και J_{θ} η ροπή αδράνειας της επιφάνειας έδρασης του θεμελίου. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται με τη πλευρά της βάσης και το μήκος του ζυγώματος, μέσω των σχέσεων:



Σχέδιο 4|A.2.1

$$k = c_{εδ} \cdot A_{\theta} = c_{εδ} l_{\theta}^2 = c_{εδ} \zeta_{\theta}^2 L_b^2 \quad (A.2.1.3)$$

$$k_{rot} = c_{εδ} \cdot J_{\theta} = c_{εδ} \frac{l_{\theta}^4}{12} = c_{εδ} \frac{\zeta_{\theta}^4 L_b^4}{12}$$

Η βάση του δομικού συστήματος είναι ενιαία, συμπαγής, άκαμπτη και απαραμόρφωτη, συμπεριφερόμενη σαν ένα απολύτως στερεό σώμα. Η κίνησή της καθορίζεται από την κίνηση του σημείου O (Σχέδιο 3|A.2.1), που είναι το μέσον του τμήματος AD , του οποίου οι δύο συνιστώσες της μετακίνησης είναι u^s, v^s και της στροφής φ^s . Η επιλογή γίνεται χωρίς απώλεια της γενικότητας. Έτσι, η οποιαδήποτε κίνηση που μπορεί να λάβει η βάση, περιγράφεται πλήρως από τις τρεις παραπάνω κατάλληλα επιλεγμένες παραμέτρους του σημείου O .

Η κίνηση της βάσης, όπως αυτή καθορίζεται από την κίνηση του σημείου O , μπορεί να είναι μόνον οριζόντια μεταφορική κίνηση ή μόνον κατακόρυφη ή περιστροφή, δηλαδή μια γενική επίπεδη κίνηση που φυσικά, μεταδίδεται στα σημεία έδρασης των ελατηρίων.

A.2.2 ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

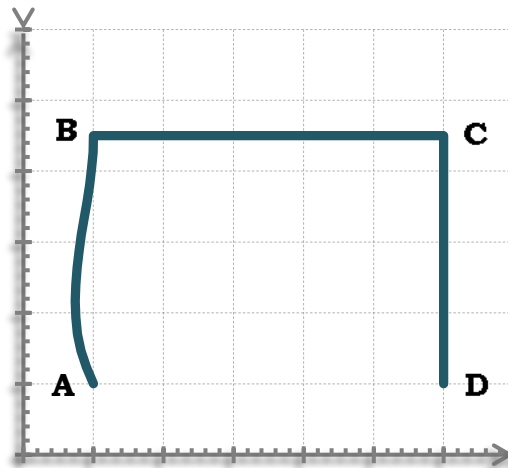
Κάθε μεμονωμένη ράβδος, όπως έχουμε αναπτύξει στο εδάφιο A.1.2, έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας στο σύνολο, δηλαδή δύο δυνατές μετακινήσεις ως προς άξονες x και y αντίστοιχα και μία δυνατότητα στροφής. Εμείς θα αμελήσουμε τη δυνατότητα οριζόντιας μετακίνησης των υποστυλωμάτων ως προς τη βάση, λαμβάνοντας υπ'όψιν μόνο την κατακόρυφη μετακίνηση και τη στροφή της. Επομένως, οι βαθμοί ελευθερίας περιορίζονται στους επτά και αποτελούν τους "αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας κίνησης του συστήματος". Αυτοί είναι οι εξής:

- $[\delta_1]$: Στροφή φ_A του κάτω κόμβου A του αριστερού υποστυλώματος.
- $[\delta_2]$: Στροφή φ_B του άνω κόμβου B του αριστερού υποστυλώματος.
- $[\delta_3]$: Στροφή φ_C του άνω κόμβου C του δεξιού υποστυλώματος.
- $[\delta_4]$: Στροφή φ_D του κάτω κόμβου D του δεξιού υποστυλώματος.
- $[\delta_5]$: Οριζόντια μετακίνηση του ζυγώματος. Η αξονική παραμόρφωση των ράβδων του πλαισίου αμελείται, γι'αυτό οι μετακινήσεις αριστερά δ_{Bx} και δεξιά δ_{Cx} της ράβδου, είναι ίσες.
- $[\delta_6]$: Κατακόρυφη μετακίνηση δ_{Ay} του κάτω κόμβου A , είναι ουσιαστικά ολόκληρη η μετακίνηση του αριστερού υποστυλώματος, εφόσον έχουμε αμελήσει την αξονική παραμόρφωση.
- $[\delta_7]$: Κατακόρυφη μετακίνηση δ_{Dy} του κάτω κόμβου D , είναι ουσιαστικά ολόκληρη η μετακίνηση του δεξιού υποστυλώματος, εφόσον έχουμε αμελήσει, και εδώ, την αξονική παραμόρφωση.

Σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί μία συνάρτηση σχήματος. Σε αυτή δίνεται μοναδιαία μετακίνηση του αντίστοιχου βαθμού ελευθερίας, με τις μετακινήσεις όλων των άλλων βαθμών ελευθερίας να είναι μηδέν.

Στο Σχήμα 2|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στο **πρώτο βαθμό ελευθερίας δ_1** . Η εξίσωση της παραμορφωμένης γραμμής του αριστερού στύλου AB , είναι:

$$[AB]: u_1 = -y \left(1 - \frac{y}{L_\alpha}\right)^2$$



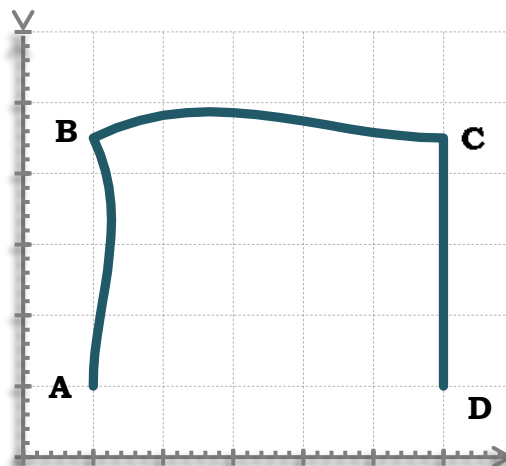
Σχήμα 2|A.2.2

Το ζυγώμα και ο δεξιός στύλος μένουν απαραμόρφωτα.

Στο Σχήμα 3|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στο **δεύτερο βαθμό ελευθερίας** δ_2 . Αντιστοίχως, η εξίσωση της παραμορφωμένης γραμμής του αριστερού στύλου AB και του ζυγώματος BC , είναι:

$$[AB]: u_2 = -\frac{y^2}{L_\alpha} \left(\frac{y}{L_\alpha} - 1\right)$$

$$[BC]: u_2 = x \left(1 - \frac{x}{L_b}\right)^2$$



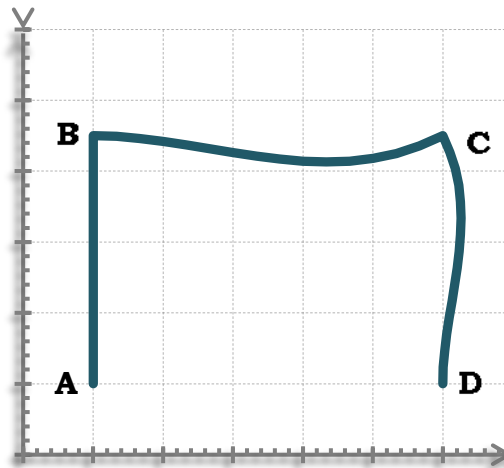
Σχήμα 3|A.2.2

Ο δεξιός στύλος μένει απαραμόρφωτος.

Στο Σχήμα 4|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στο **τρίτο βαθμό ελευθερίας** δ_3 . Αντίστοιχα, έχουμε:

$$[BC]: u_3 = \frac{x^2}{L_b} \left(\frac{x}{L_b} - 1 \right)$$

$$[CD]: u_3 = -\frac{y^2}{L_\alpha} \left(\frac{y}{L_\alpha} - 1 \right)$$

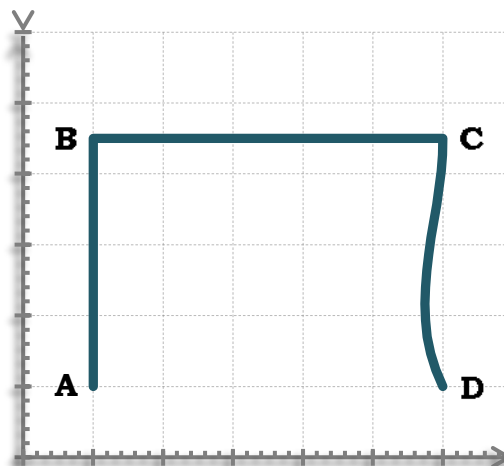


Σχήμα 4|A.2.2

Ο αριστερά στύλος μένει απαραμόρφωτος.

Στο Σχήμα 5|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στον τέταρτο βαθμό ελευθερίας δ_4 .

$$[CD]: u_4 = -y \left(1 - \frac{y}{L_\alpha} \right)^2$$



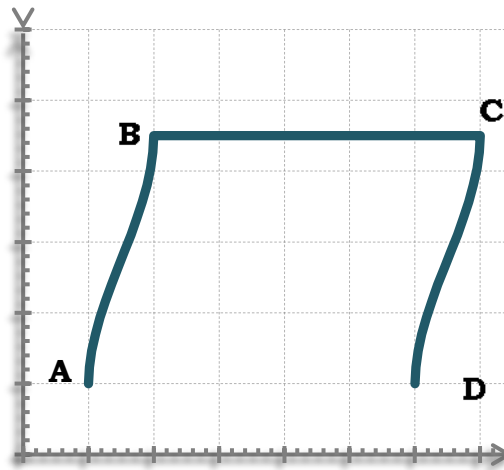
Σχήμα 5|A.2.2

Ο αριστερά στύλος και ο ζύγωμα μένουν απαραμόρφωτά.

Στο Σχήμα 6|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στον πέμπτο βαθμό ελευθερίας δ_5 .

$$[AB]: u_5 = 3 \left(\frac{y}{L_\alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{L_\alpha} \right)^3$$

$$[CD]: u_5 = 3 \left(\frac{y}{L_\alpha} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{L_\alpha} \right)^3$$

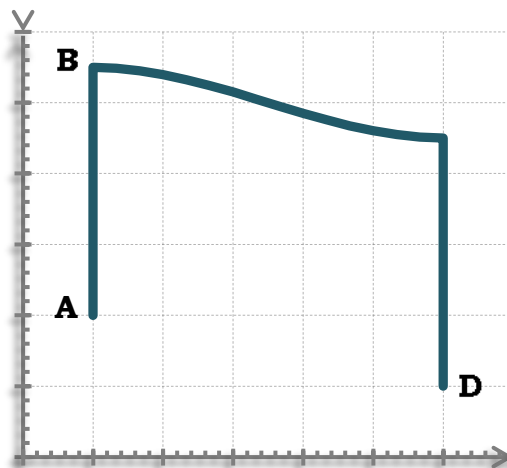


Σχήμα 6|A.2.2

Το ζύγωμα μετακινείται αυτούσιο οριζοντίως.

Στο Σχήμα 7|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στον έκτο βαθμό ελευθερίας δ_6 .

$$[BC]: u_6 = 1 - 3 \left(\frac{x}{L_b} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L_b} \right)^3$$

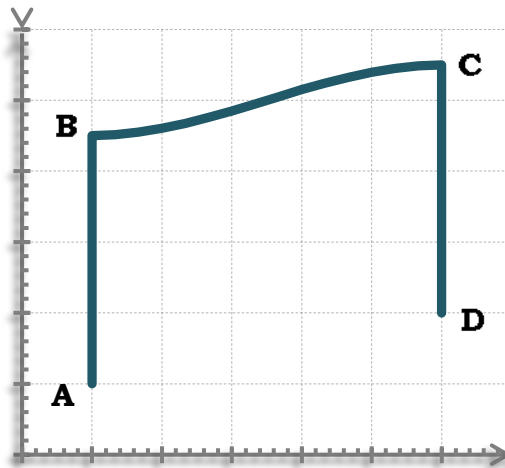


Σχήμα 7|A.2.2

Οι στύλοι λαμβάνουν κατακόρυφη μετακίνηση.

Στο Σχήμα 8|A.2.2 φαίνεται η συνάρτηση σχήματος που αντιστοιχεί στον έβδομο βαθμό ελευθερίας δ_7 .

$$[BC]: u_7 = 3 \left(\frac{x}{L_b} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L_b} \right)^3$$



Σχήμα 8|A.2.2

Οι στύλοι λαμβάνουν κατακόρυφη μετακίνηση.

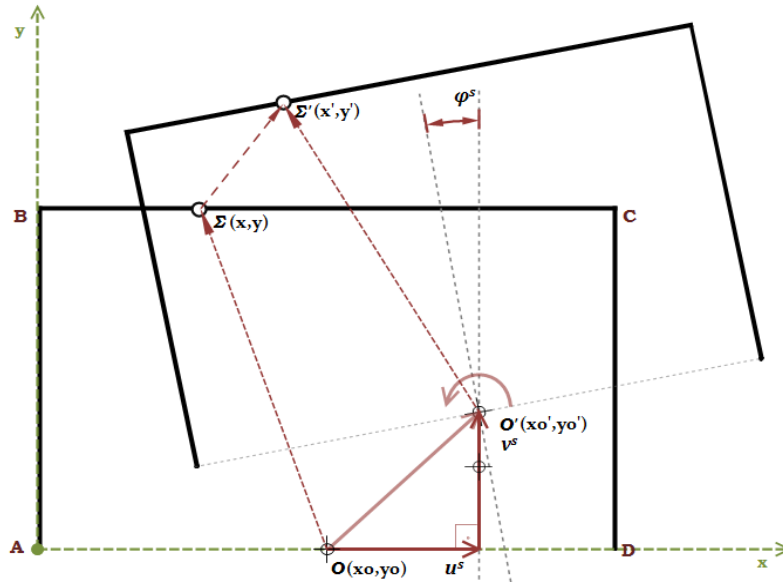
Η επαλληλία των συναρτήσεων σχήματος $u_i(s)$, πολλαπλασιασμένη με τη μετακίνηση του αντίστοιχου αδέσμευτου βαθμού ελευθερίας κίνησης $\delta_i(t)$, $i=1,2,\dots,7$ σε κάθε χρονική στιγμή t , περιγράφει την ελαστοδυναμική απόκριση $u(x,t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t , η οποία γράφεται:

$$u(s,t) = \delta_1(t)u_1(s) + \delta_2(t)u_2(s) + \delta_3(t)u_3(s) + \delta_4(t)u_4(s) + \delta_5(t)u_5(s) + \delta_6(t)u_6(s) + \delta_7(t)u_7(s) \quad (A.2.2.1)$$

όπου s είναι η θέση κατά μήκος του άξονα.

A.2.3 ΟΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Έστω ότι η βάση εκτελεί μία γενική επίπεδη κίνηση, η οποία μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις συνιστώσες $u^s(t)$, $v^s(t)$, $\varphi^s(t)$ της μετακίνησης του σημείου O , που όπως προαναφέρθηκε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, επιλέχθηκε να είναι μέσον του τμήματος AD . Θεωρήσαμε τις εξής: $u^s(t)$ την οριζόντια συνιστώσα της μετακίνησης του σημείου O , $v^s(t)$ την κατακόρυφη συνιστώσα της μετακίνησης και τη στροφή $\varphi^s(t)$ της βάσης, να είναι πολύ μικρές ποσότητες. Στο Σχέδιο 5|A.2.3 εμφανίζονται καθ' υπερβολήν μεγάλες για ευκολότερη κατανόηση.



Σχέδιο 5|A.2.3

Έστω τυχόν σημείο $\Sigma(x, y)$ του επιπέδου, το οποίο μετά τη μετακίνηση της βάσης, όπως καθορίζεται από την κίνηση του σημείου O , έρχεται στη θέση Σ' . Οι συνιστώσες $x' - x_0', y' - y_0'$ του ευθυγράμμου τμήματος $O'\Sigma'$, συνδέονται με τις συνιστώσες x_0, y_0 του ευθυγράμμου τμήματος $O\Sigma$, συμφώνως προς τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x' - x_0' \\ y' - y_0' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi^S & -\sin \varphi^S \\ \sin \varphi^S & \cos \varphi^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi^S & -\sin \varphi^S \\ \sin \varphi^S & \cos \varphi^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A. 2.3.1})$$

όπου η γωνία φ^S είναι η γωνία περιστροφής της βάσης.

Από τα παραπάνω προκύπτει η σχέση:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 + u^S \\ y_0 + v^S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi^S & -\sin \varphi^S \\ \sin \varphi^S & \cos \varphi^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 2.3.2})$$

όπου, προφανώς, τα x_0', y_0' , ισούνται με $x_0' = x_0 + u^S, y_0' = y_0 + v^S$.

Λογίζοντας πολύ μικρή γωνία $\varphi^S \ll 1$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε $\cos \varphi^S \simeq 1$ και $\sin \varphi^S \simeq \varphi^S$, οπότε έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 + u^S \\ y_0 + v^S \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\varphi^S \\ \varphi^S & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 2.3.3})$$

Εκτελώντας τις πράξεις, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} x' = x + u^S - \varphi^S(y - y_0) \\ y' = y + v^S + \varphi^S(x - x_0) \end{cases} \quad (\text{A. 2.3.4})$$

Στην περίπτωση που $y_0 = 0, x_0 = \frac{L_b}{2}$, τότε η μετακίνηση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου στο οποίο ανήκει η βάση, θα δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x' &= x + u^s - \varphi^s y \\ y' &= y + v^s + \varphi^s \left(x - \frac{L_b}{2}\right) \end{aligned} \quad (A.2.3.5)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά προκύπτει η ταχύτητα και η επιτάχυνση.

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{u}^s - \dot{\varphi}^s y \\ \dot{y}' = \dot{v}^s + \dot{\varphi}^s \left(x - \frac{L_b}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{u}^s - \ddot{\varphi}^s y \\ \ddot{y}' = \ddot{v}^s + \ddot{\varphi}^s \left(x - \frac{L_b}{2}\right) \end{cases}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο εδάφιο A.1.9 σχετικά με την ψευδοστατική μετατόπιση του πλαισίου και με βάση τις παραπάνω σχέσεις A.2.3.5, οι συντεταγμένες των σημείων $x'(t), y'(t)$ των μετακινημένων αξόνων των ράβδων του πλαισίου, λόγω της κίνησης της βάσης, δίνονται κατωτέρω:

❖ Για τον αριστερό στύλο AB [$x = 0, 0 \leq y \leq L_a$], θα ισχύει:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + u^s(t) - \varphi^s(t)y \\ y'(t) &= y + v^s(t) - \varphi^s(t)\frac{L_b}{2} \end{aligned} \quad (A.2.3.6)$$

❖ Για το ζύγωμα BC [$0 \leq x \leq L_b, y = 0$],

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + u^s(t) - \varphi^s(t)L_a \\ y'(t) &= y + v^s(t) - \varphi^s(t)\left(\frac{L_b}{2} - x\right) \end{aligned} \quad (A.2.3.7)$$

❖ Για το δεξιό στύλο CD [$x = L_b, 0 \leq y \leq L_a$],

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + u^s(t) - \varphi^s(t)y \\ y'(t) &= y + v^s(t) + \varphi^s(t)\frac{L_b}{2} \end{aligned} \quad (A.2.3.8)$$

όπου x, y οι συντεταγμένες των σημείων των αξόνων στην αρχική θέση ηρεμίας.

Οι ψευδοστατικές μετακινήσεις των επτά βαθμών ελευθερίας $\delta_i^s(t)$, με $i = 1, \dots, 7$, περιγράφονται ως εξής:

- Ο πρώτος, ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος βαθμός ελευθερίας, είναι οι στροφές των κόμβων A, B, C, D αντίστοιχα, οι οποίες λόγω της κίνησης της βάσης θα λάβουν την τιμή της στροφής της βάσης, δηλαδή θα ισχύουν:

$$\delta_1^s(t) = \varphi^s(t), \quad \delta_2^s(t) = \varphi^s(t), \quad \delta_3^s(t) = \varphi^s(t), \quad \delta_4^s(t) = \varphi^s(t)$$

- Ο πέμπτος βαθμός ελευθερίας είναι η οριζόντια μετακίνηση του ζυγώματος, η οποία λόγω της κίνησης της βάσης, δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_5^s(t) = u^s(t) - \varphi^s(t)L_a$$

- Ο έκτος βαθμός ελευθερίας θα είναι η κατακόρυφη μετακίνηση του αριστερού στύλου, η οποία λόγω της κίνησης της βάσης, δίνεται:

$$\delta_6^s(t) = v^s(t) - \varphi^s(t)\frac{L_b}{2}$$

- Ο έβδομος βαθμός ελευθερίας θα είναι η κατακόρυφη μετακίνηση του δεξιού στύλου, η οποία λόγω της κίνησης της βάσης, δίνεται:

$$\delta_7^s(t) = v^s(t) + \varphi^s(t)\frac{L_b}{2}$$

Παραγωγίζοντας αυτές τις σχέσεις διαδοχικά δύο φορές ως προς το χρόνο t , προκύπτει η ταχύτητα και η επιτάχυνση των βαθμών ελευθερίας.

$$\frac{d\delta_i^s(t)}{dt} : \begin{cases} \delta_1^s(t) = \delta_2^s(t) = \delta_3^s(t) = \delta_4^s(t) = \dot{\varphi}^s(t) \\ \delta_5^s(t) = \dot{u}^s(t) - \dot{\varphi}^s(t)L_a \\ \delta_6^s(t) = \dot{v}^s(t) - \dot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \\ \delta_7^s(t) = \dot{v}^s(t) + \dot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\delta_i^s(t)}{dt^2} : \begin{cases} \ddot{\delta}_1^s(t) = \ddot{\delta}_2^s(t) = \ddot{\delta}_3^s(t) = \ddot{\delta}_4^s(t) = \ddot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{\delta}_5^s(t) = \ddot{u}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)L_a \\ \ddot{\delta}_6^s(t) = \ddot{v}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \\ \ddot{\delta}_7^s(t) = \ddot{v}^s(t) + \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \end{cases}$$

Λόγω αυτών των σχέσεων, οι επιδρώσες δυνάμεις που υπολογίστηκαν στην εξίσωση A.1.9.5 του εδαφίου A.1.9, λαμβάνουν τη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} P_{eff1}(t) \\ P_{eff2}(t) \\ P_{eff3}(t) \\ P_{eff4}(t) \\ P_{eff5}(t) \\ P_{eff6}(t) \\ P_{eff7}(t) \end{Bmatrix} = -[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}^s(t) \\ \dot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{\varphi}^s(t) \\ \dot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{u}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)L_a \\ \ddot{v}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \\ \ddot{v}^s(t) + \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \end{Bmatrix} \quad (A.2.3.9)$$

Στην περίπτωση όπου η κίνηση της βάσης εκτελεί μόνο οριζόντια μεταφορική κίνηση, στις παραπάνω εξισώσεις A.2.3.9, θέτουμε $v^s = \dot{\varphi}^s = 0$.

Στην περίπτωση όπου η κίνηση της βάσης εκτελεί μόνο κατακόρυφη μεταφορική κίνηση, θέτουμε $u^s = \dot{\varphi}^s = 0$.

A.2.4 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Το διαφορικό σύστημα που περιγράφει την κίνηση του μελετούμενου πλαισίου λόγω της δεδομένης μετατόπισης των στηρίξεών του, προκύπτει από εφαρμογή της εξίσωσης A.1.9.4 του εδαφίου A.1.9 για το συγκεκριμένο πλαίσιο

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{71} & m_{72} & \cdots & m_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_7(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{71} & c_{72} & \cdots & c_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta}_1(t) \\ \dot{\delta}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\delta}_7(t) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{71} & k_{72} & \cdots & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_7(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{eff1}(t) \\ P_{eff2}(t) \\ \vdots \\ P_{eff7}(t) \end{Bmatrix} \quad (A.2.4.1) \end{aligned}$$

Το μητρώο των επιδρωσών δυνάμεων του δεξιά μέλους, αναφερόμενο στους επτά αδέσμευτους βαθμούς ελευθερίας, προκύπτει από εφαρμογή της εξίσωσης A.1.9.5, όπου οι ψευδοστατικές επιταχύνσεις έχουν υπολογιστεί από τις σχέσεις στο εδάφιο A.2.3 από τις σχέσεις A.2.3.9, συναρτήσεως των συνιστωσών $u^s(t)$, $v^s(t)$, $\varphi^s(t)$ της κίνησης της βάσης:

$$\begin{Bmatrix} P_{eff1}(t) \\ P_{eff2}(t) \\ P_{eff3}(t) \\ P_{eff4}(t) \\ P_{eff5}(t) \\ P_{eff6}(t) \\ P_{eff7}(t) \end{Bmatrix} = -[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1^s(t) \\ \ddot{\delta}_2^s(t) \\ \ddot{\delta}_3^s(t) \\ \ddot{\delta}_4^s(t) \\ \ddot{\delta}_5^s(t) \\ \ddot{\delta}_6^s(t) \\ \ddot{\delta}_7^s(t) \end{Bmatrix} = -[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{\varphi}^s(t) \\ \ddot{u}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)L_a \\ \ddot{v}^s(t) - \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \\ \ddot{v}^s(t) + \ddot{\varphi}^s(t)\frac{L_b}{2} \end{Bmatrix} \quad (A.2.4.2)$$

A.2.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΗΤΡΩΩΝ

ΜΗΤΡΩΟ ΜΑΖΑΣ

Με βάση τη σχέση A.1.4.5, υπολογίζονται οι συντελεστές του μητρώου μάζας $[m]$. Οι πράξεις αναλυτικά, έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_1(x) dx = \int_{ABCD} m(x) u_1(x)^2 dx \\ &= \int_{AB} m_a u_1(x)^2 dx = \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x)^2 dx = \frac{1}{105} L_a^3 m_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{21} &= \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_2(x) dx = \int_{AB} m_a u_1(x)u_2(x) dx \\ &= \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x)\psi_4(x) dx = -\frac{1}{140} L_a^3 m_a \end{aligned}$$

$$m_{13} = m_{31} = \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_3(x) dx = 0$$

$$m_{14} = m_{41} = \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_4(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} m_{15} = m_{51} &= \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_5(x) dx = \int_{AB} m_a u_1(x)u_5(x) dx \\ &= \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x)[- \psi_2(x)] dx = -\frac{13}{420} L_a^2 m_a \end{aligned}$$

$$m_{16} = m_{61} = \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_6(x) dx = 0$$

$$m_{17} = m_{71} = \int_{ABCD} m(x)u_1(x)u_7(x) dx = 0$$

$$m_{22} = \int_{ABCD} m(x)u_2(x)u_2(x) dx = \int_{ABCD} m(x) u_2(x)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{AB} m_a u_2(x)^2 dx + \int_{BC} m_b u_2(x)^2 dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_4(x)^2 dx + \int_0^{L_b} m_b \psi_3(x)^2 dx \\
&= \frac{1}{105} L_a^3 m_a + \frac{1}{105} L_b^3 m_b \\
m_{23} = m_{32} &= \int_{ABCD} m(x) u_2(x) u_3(x) dx = \int_{AB} m_a u_2(x) u_3(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x) [-\psi_2(x)] dx = -\frac{1}{140} L_b^3 m_b \\
m_{24} = m_{42} &= \int_{ABCD} m(x) u_2(x) u_4(x) dx = 0 \\
m_{25} = m_{52} &= \int_{ABCD} m(x) u_2(x) u_5(x) dx = \int_{AB} m_a u_2(x) u_5(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_4(x) [-\psi_2(x)] dx = -\left(-\frac{11}{210} L_a^2 m_a\right) = \frac{11}{210} L_a^2 m_a \\
m_{26} = m_{62} &= \int_{ABCD} m(x) u_2(x) u_6(x) dx = \int_{AB} m_b u_2(x) u_6(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_3(x) \psi_1(x) dx = \frac{11}{210} L_b^2 m_b \\
m_{27} = m_{72} &= \int_{ABCD} m(x) u_2(x) u_7(x) dx = \int_{AB} m_a u_2(x) u_7(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_3(x) \psi_2(x) dx = \frac{13}{420} L_b^2 m_b \\
m_{33} &= \int_{ABCD} m(x) u_3(x) u_3(x) dx = \int_{ABCD} m(x) u_3(x)^2 dx \\
&= \int_{AB} m_a u_3(x)^2 dx + \int_{BC} m_b u_3(x)^2 dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_4(x)^2 dx + \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x)^2 dx \\
&= \frac{1}{105} L_b^3 m_b + \frac{1}{105} L_a^3 m_a \\
m_{34} = m_{43} &= \int_{ABCD} m(x) u_3(x) u_4(x) dx = \int_{CD} m_a u_3(x) u_4(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x) \psi_4(x) dx = -\frac{1}{140} L_a^3 m_a \\
m_{35} = m_{53} &= \int_{ABCD} m(x) u_3(x) u_5(x) dx = \int_{CD} m_a u_3(x) u_5(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_3(x) \psi_1(x) dx = \frac{11}{210} L_a^2 m_a \\
m_{36} = m_{63} &= \int_{ABCD} m(x) u_3(x) u_6(x) dx = \int_{BC} m_b u_3(x) u_6(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_4(x) \psi_1(x) dx = -\frac{13}{420} L_b^2 m_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{37} = m_{73} &= \int_{ABCD} m(x)u_3(x)u_7(x) dx = \int_{BC} m_b u_3(x)u_7(x)dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_4(x)\psi_2(x) dx = -\frac{11}{210}L_b^2 m_b \\
m_{44} &= \int_{ABCD} m(x)u_4(x)u_4(x) dx = \int_{ABCD} m(x) u_4(x)^2 dx \\
&= \int_{CD} m_a u_4(x)^2 dx = \int_0^{L_a} m_a \psi_4(x)^2 dx = \frac{1}{105}L_a^3 m_a \\
m_{45} = m_{54} &= \int_{ABCD} m(x)u_4(x)u_5(x) dx = \int_{CD} m_a u_4(x)u_5(x)dx \\
&= \int_0^{L_a} m_a \psi_4(x)\psi_1(x) dx = -\frac{13}{420}L_a^2 m_a \\
m_{46} = m_{64} &= \int_{ABCD} m(x)u_4(x)u_6(x) dx = 0 \\
m_{47} = m_{74} &= \int_{ABCD} m(x)u_4(x)u_7(x) dx = 0 \\
m_{55} &= \int_{ABCD} m(x)u_5(x)u_5(x) dx + M_5\delta_{55} = \int_{ABCD} m(x) u_5(x)^2 dx + M_5\delta_{55} \\
&= \int_{AB} m_a u_5(x)^2 dx + \int_{CD} m_a u_5(x)^2 dx + M_5\delta_{55} \\
&= \int_0^{L_a} m_a [-\psi_2(x)^2] dx + \int_0^{L_a} m_a \psi_1(x)^2 dx \\
&= \frac{13}{35}L_a m_a + \frac{13}{35}L_a m_a + L_b m_b = \frac{26}{35}L_a m_a + L_b m_b \\
m_{56} = m_{65} &= \int_{ABCD} m(x)u_5(x)u_6(x) dx = 0 \\
m_{57} = m_{74} &= \int_{ABCD} m(x)u_5(x)u_7(x) dx = 0 \\
m_{66} &= \int_{ABCD} m(x)u_6(x)u_6(x) dx + M_6\delta_{66} = \int_{ABCD} m(x) u_6(x)^2 dx + M_6\delta_{66} \\
&= \int_{BC} m_b u_6(x)^2 dx + M_6\delta_{66} = \int_0^{L_b} m_b \psi_1(x)^2 dx + L_a m_a \\
&= \frac{13}{35}L_b m_b + L_a m_a \\
m_{67} = m_{76} &= \int_{ABCD} m(x)u_6(x)u_7(x) dx = \int_{BC} m_b u_6(x)u_7(x)dx \\
&= \int_0^{L_b} m_b \psi_1(x)\psi_2(x) dx = \frac{9}{70}L_b m_b \\
m_{77} &= \int_{ABCD} m(x)u_7(x)u_7(x) dx + M_7\delta_{77} = \int_{ABCD} m(x) u_7(x)^2 dx + M_7\delta_{77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{BC} m_b u_7(x)^2 dx + M_7 \delta_{77} = \int_0^{L_b} m_b \psi_2(x)^2 dx + L_a m_a \\
&= \frac{13}{35} L_b m_b + L_a m_a
\end{aligned}$$

Στην έκφραση των συντελεστών m_{55}, m_{66}, m_{77} , υπάρχουν οι όροι $M_5 \delta_{55} = L_b m_b, M_6 \delta_{66} = L_a m_a, M_7 \delta_{77} = L_a m_a$, που οφείλονται στην αξονική επιτάχυνση του ζυγώματος και των υποστυλωμάτων αντίστοιχα, ως συγκεντρωμένη μάζα.

Συνεπώς, το μητρώο μάζας είναι:

$$[m_{ij}] =$$

$\frac{1}{105} L_a^3 m_a$	$-\frac{1}{140} L_a^3 m_a$	ο	ο	$-\frac{13}{420} L_a^2 m_a$	ο	ο
$-\frac{1}{140} L_a^3 m_a$	$\frac{1}{105} L_a^3 m_a + \frac{1}{105} L_b^3 m_b$	$-\frac{1}{140} L_b^3 m_b$	ο	$\frac{11}{210} L_a^2 m_a$	$\frac{11}{210} L_b^2 m_b$	$\frac{13}{420} L_b^2 m_b$
ο	$-\frac{1}{140} L_b^3 m_b$	$\frac{1}{105} L_a^3 m_a + \frac{1}{105} L_b^3 m_b$	$-\frac{1}{140} L_a^3 m_a$	$\frac{11}{210} L_a^2 m_a$	$-\frac{13}{420} L_b^2 m_b$	$-\frac{11}{210} L_b^2 m_b$
ο	ο	$-\frac{1}{140} L_a^3 m_a$	$\frac{1}{105} L_a^3 m_a$	$-\frac{13}{420} L_a^2 m_a$	ο	ο
$-\frac{13}{420} L_a^2 m_a$	$\frac{11}{210} L_a^2 m_a$	$\frac{11}{210} L_a^2 m_a$	$-\frac{13}{420} L_a^2 m_a$	$\frac{26}{35} L_a m_a + L_b m_b$	ο	ο
ο	$\frac{11}{210} L_b^2 m_b$	$-\frac{13}{420} L_b^2 m_b$	ο	ο	$\frac{13}{35} L_b m_b + L_a m_a$	$\frac{9}{70} L_b m_b$
ο	$\frac{13}{420} L_b^2 m_b$	$-\frac{11}{210} L_b^2 m_b$	ο	ο	$\frac{9}{70} L_b m_b$	$\frac{13}{35} L_b m_b + L_a m_a$

ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Στη συνέχεια, υπολογίζονται αναλυτικά οι συντελεστές του μητρώου απόσβεσης με βάση την εξίσωση Α.1.4.10:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_1''(x) dx = \int_{ABCD} c_{int} J(x) [u_1''(x)]^2 dx \\
&= \int_{AB} c_{int} J_a [u_1''(x)]^2 dx = \int_0^{L_a} c_{int} J_a [\psi_3''(x)]^2 dx = \frac{4}{L_a} c_{int} J_a \\
c_{12} = c_{21} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_2''(x) dx = \int_{AB} c_{int} J_a u_3''(x) u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{int} J_a \psi_3''(x) \psi_2''(x) dx = \frac{2}{L_a} c_{int} J_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{13} = c_{31} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_3''(x) dx = 0 \\
c_{14} = c_{41} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_4''(x) dx = 0 \\
c_{15} = c_{51} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_5''(x) dx = \int_{AB} c_{int} J_a u_1''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{int} J_a \psi_3''(x) [-\psi_2''(x)] dx = - \left[-\frac{6}{L_a^2} c_{int} J_a \right] = \frac{6}{L_a^2} c_{int} J_a \\
c_{16} = c_{61} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_6''(x) dx = 0 \\
c_{17} = c_{71} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_1''(x) u_7''(x) dx = 0 \\
c_{22} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_2''(x) dx = \int_{ABCD} c_{int} J(x) [u_2''(x)]^2 dx \\
&= \int_{AB}^{L_a} c_{int} J_a (u_2'')^2 dx + \int_{BC}^{L_b} c_{int} J_b (u_2'')^2 dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{int} J_a [\psi_4''(x)]^2 dx + \int_0^{L_b} c_{int} J_b [\psi_3''(x)]^2 dx \\
&= \frac{4}{L_a} c_{int} J_a + \frac{4}{L_b} c_{int} J_b \\
c_{23} = c_{32} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_3''(x) dx = \int_{AB} c_{int} J_a u_3''(x) u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{int} J_b \psi_3''(x) \psi_4''(x) dx = \frac{2}{L_b} c_{int} J_b \\
c_{24} = c_{24} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_4''(x) dx = 0 \\
c_{25} = c_{52} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_5''(x) dx = \int_{AB} c_{int} J_a u_2''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{int} J_a \psi_4''(x) [-\psi_2''(x)] dx = - \left[-\frac{6}{L_a^2} c_{int} J_a \right] = \frac{6}{L_a^2} c_{int} J_a \\
c_{26} = c_{62} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_6''(x) dx = \int_{BC} c_{int} J_b u_2''(x) u_6''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{int} J_b \psi_3''(x) \psi_1''(x) dx = - \left[-\frac{6}{L_b^2} c_{int} J_b \right] = \frac{6}{L_b^2} c_{int} J_b \\
c_{27} = c_{72} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_2''(x) u_7''(x) dx = \int_{BC} c_{int} J_b u_2''(x) u_7''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{int} J_b \psi_3''(x) \psi_2''(x) dx = - \frac{6}{L_b^2} c_{int} J_b \\
c_{33} &= \int_{ABCD} c_{int} J(x) u_3''(x) u_3''(x) dx = \int_{ABCD} c_{int} J(x) [u_3''(x)]^2 dx \\
&= \int_{BC} c_{int} J_b (u_3'')^2 dx + \int_{CD} c_{int} J_a (u_3'')^2 dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{int} J_b [\psi_4''(x)]^2 dx + \int_0^{L_a} c_{int} J_a [\psi_3''(x)]^2 dx \\
&= \frac{4}{L_b} c_{int} J_b + \frac{4}{L_a} c_{int} J_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{34} = c_{43} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_3''(x) u_4''(x) dx = \int_{CD} c_{intJa} u_3''(x) u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{intJa} \psi_3''(x) \psi_4''(x) dx = \frac{2}{L_a} c_{intJa} \\
c_{35} = c_{53} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_3''(x) u_5''(x) dx = \int_{CD} c_{intJa} u_3''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{intJa} \psi_3''(x) \psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_a^2} c_{intJa} \\
c_{36} = c_{63} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_3''(x) u_6''(x) dx = \int_{BC} c_{intJb} u_3''(x) u_6''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{intJb} \psi_4''(x) \psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_b^2} c_{intJb} \\
c_{37} = c_{73} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_3''(x) u_7''(x) dx = \int_{BC} c_{intJb} u_3''(x) u_7''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{intJb} \psi_4''(x) \psi_2''(x) dx = -\frac{6}{L_b^2} c_{intJb} \\
c_{44} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_4''(x) u_4''(x) dx = \int_{ABCD} c_{intJ}(x) [u_4''(x)]^2 dx \\
&= \int_{CD} c_{intJa} (u_3'')^2 dx = \int_0^{L_a} c_{intJa} [\psi_4''(x)]^2 dx + k_{rot} = \frac{4}{L_a} c_{intJa} \\
c_{45} = c_{54} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_4''(x) u_5''(x) dx = \int_{CD} c_{intJb} u_4''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{intJa} \psi_4''(x) \psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_a^2} c_{intJa} \\
c_{46} = c_{64} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_4''(x) u_6''(x) dx = 0 \\
c_{47} = c_{74} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_4''(x) u_7''(x) dx = 0 \\
c_{55} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_5''(x) u_5''(x) dx = \int_{ABCD} c_{intJ}(x) [u_5''(x)]^2 dx \\
&= \int_{AB} c_{intJa} [u_5''(x)]^2 dx + \int_{CD} c_{intJa} [u_5''(x)]^2 dx \\
&= \int_0^{L_a} c_{intJa} [-\psi_2''(x)]^2 dx + \int_0^{L_a} c_{intJa} [\psi_1''(x)]^2 dx \\
&= \frac{12}{L_a^3} c_{intJa} + \frac{12}{L_a^3} c_{intJa} = \frac{24}{L_a^3} c_{intJa} \\
c_{56} = c_{65} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_5''(x) u_6''(x) dx = 0 \\
c_{57} = c_{75} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_5''(x) u_7''(x) dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{66} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_6''(x) u_6''(x) dx = \int_{ABCD} c_{intJ}(x) [u_6''(x)]^2 dx \\
&= \int_{BC} c_{intJb} [u_6''(x)]^2 dx = \int_0^{L_b} c_{intJb} [\psi_1''(x)]^2 dx = \frac{12}{L_b^3} c_{intJb} \\
c_{67} = c_{76} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_6''(x) u_7''(x) dx = \int_{BC} c_{intJb} u_6''(x) u_7''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} c_{intJb} \psi_1''(x) \psi_2''(x) dx = -\frac{12}{L_b^3} c_{intJb} \\
c_{77} &= \int_{ABCD} c_{intJ}(x) u_7''(x) u_7''(x) dx = \int_{ABCD} c_{intJ}(x) [u_7''(x)]^2 dx \\
&= \int_{BC} c_{intJb} [u_7''(x)]^2 dx = \int_0^{L_b} c_{intJb} [\psi_2''(x)]^2 dx = \frac{12}{L_b^3} c_{intJb}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει το μητρώο εσωτερικής απόσβεσης:

$$[c_{ij}] =$$

$\frac{4}{L_a} c_{intJa}$	$\frac{2}{L_a} c_{intJa}$	0	0	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	0	0
$\frac{2}{L_a} c_{intJa}$	$\frac{4}{L_a} c_{intJa} + \frac{4}{L_b} c_{intJb}$	$\frac{2}{L_b} c_{intJb}$	0	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	$-\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$
0	$\frac{2}{L_b} c_{intJb}$	$\frac{4}{L_a} c_{intJa} + \frac{4}{L_b} c_{intJb}$	$\frac{2}{L_a} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	$-\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$
0	0	$\frac{2}{L_a} c_{intJa}$	$\frac{4}{L_a} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	0	0
$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{6}{L_a^2} c_{intJa}$	$\frac{24}{L_a^3} c_{intJa}$	0	0
0	$\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	$\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	0	0	$\frac{12}{L_b^3} c_{intJb}$	$-\frac{12}{L_b^3} c_{intJb}$
0	$-\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	$-\frac{6}{L_b^2} c_{intJb}$	0	0	$-\frac{12}{L_b^3} c_{intJb}$	$\frac{12}{L_b^3} c_{intJb}$

ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Τέλος, υπολογίζονται αναλυτικά οι συντελεστές του μητρώου ακαμψίας με βάση την εξίσωση Α.1.4.9:

$$k_{11} = \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_1''(x) dx + k_{rot} = \int_{ABCD} EJ(x) [u_1''(x)]^2 dx + k_{rot}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{AB} EJ_a [u_1''(x)]^2 dx + k_{rot} = \int_0^{L_a} EJ_a [\psi_3''(x)]^2 dx = \frac{4}{L_a} EJ_a + k_{rot} \\
k_{12} = k_{21} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_2''(x) dx = \int_{AB} EJ_a u_3''(x) u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_3''(x) \psi_2''(x) dx = \frac{2}{L_a} EJ_a \\
k_{13} = k_{31} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_3''(x) dx = 0 \\
k_{14} = k_{41} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_4''(x) dx = 0 \\
k_{15} = k_{51} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_5''(x) dx = \int_{AB} EJ_a u_1''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_3''(x) [-\psi_2''(x)] dx = - \left[-\frac{6}{L_a^2} EJ_a \right] = \frac{6}{L_a^2} EJ_a \\
k_{16} = k_{61} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_6''(x) dx = 0 \\
k_{17} = k_{71} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_1''(x) u_7''(x) dx = 0 \\
k_{22} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_2''(x) dx = \int_{ABCD} EJ(x) [u_2''(x)]^2 dx \\
&= \int_{AB}^{L_a} EJ_a (u_2'')^2 dx + \int_{BC}^{L_b} EJ_b (u_2'')^2 dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a [\psi_4''(x)]^2 dx + \int_0^{L_b} EJ_b [\psi_3''(x)]^2 dx = \frac{4}{L_a} EJ_a + \frac{4}{L_b} EJ_b \\
k_{23} = k_{32} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_3''(x) dx = \int_{AB} EJ_a u_3''(x) u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b \psi_3''(x) \psi_4''(x) dx = \frac{2}{L_b} EJ_b \\
k_{24} = k_{24} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_4''(x) dx = 0 \\
k_{25} = k_{52} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_5''(x) dx = \int_{AB} EJ_a u_2''(x) u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_4''(x) [-\psi_2''(x)] dx = - \left[-\frac{6}{L_a^2} EJ_a \right] = \frac{6}{L_a^2} EJ_a \\
k_{26} = k_{62} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_6''(x) dx = \int_{BC} EJ_b u_2''(x) u_6''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b \psi_3''(x) \psi_1''(x) dx = - \left[-\frac{6}{L_a^2} EJ_a \right] = \frac{6}{L_b^2} EJ_b \\
k_{27} = k_{72} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_2''(x) u_7''(x) dx = \int_{BC} EJ_b u_2''(x) u_7''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b \psi_3''(x) \psi_2''(x) dx = -\frac{6}{L_b^2} EJ_b \\
k_{33} &= \int_{ABCD} EJ(x) u_3''(x) u_3''(x) dx = \int_{ABCD} EJ(x) [u_3''(x)]^2 dx \\
&= \int_{BC} EJ_b (u_3'')^2 dx + \int_{CD} EJ_a (u_3'')^2 dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b [\psi_4''(x)]^2 dx + \int_0^{L_a} EJ_a [\psi_3''(x)]^2 dx = \frac{4}{L_b} EJ_b + \frac{4}{L_a} EJ_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{34} = k_{43} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_3''(x) u_4''(x)dx = \int_{CD} EJ_a u_3''(x)u_4''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_3''(x)\psi_4''(x) dx = \frac{2}{L_a} EJ_a \\
k_{35} = k_{53} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_3''(x) u_5''(x)dx = \int_{CD} EJ_a u_3''(x)u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_3''(x)\psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_a^2} EJ_a \\
k_{36} = k_{63} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_3''(x) u_6''(x)dx = \int_{BC} EJ_b u_3''(x)u_6''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b \psi_4''(x)\psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_b^2} EJ_b \\
k_{37} = k_{73} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_3''(x) u_7''(x)dx = \int_{BC} EJ_b u_3''(x)u_7''(x) dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b \psi_4''(x)\psi_2''(x) dx = -\frac{6}{L_b^2} EJ_b \\
k_{44} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_4''(x) u_4''(x)dx + k_{rot} = \int_{ABCD} EJ(x) [u_4''(x)]^2 dx + k_{rot} \\
&= \int_{CD} EJ_a (u_3'')^2 dx + k_{rot} = \int_0^{L_a} EJ_a [\psi_4''(x)]^2 dx + k_{rot} \\
&= \frac{4}{L_a} EJ_a + k_{rot} \\
k_{45} = k_{54} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_4''(x) u_5''(x)dx = \int_{CD} EJ_b u_4''(x)u_5''(x) dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a \psi_4''(x)\psi_1''(x) dx = \frac{6}{L_a^2} EJ_a \\
k_{46} = k_{64} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_4''(x) u_6''(x)dx = 0 \\
k_{47} = k_{74} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_4''(x) u_7''(x)dx = 0 \\
k_{55} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_5''(x) u_5''(x)dx = \int_{ABCD} EJ(x) [u_5''(x)]^2 dx \\
&= \int_{AB} EJ_a [u_5''(x)]^2 dx + \int_{CD} EJ_a [u_5''(x)]^2 dx \\
&= \int_0^{L_a} EJ_a [-\psi_2''(x)]^2 dx + \int_0^{L_a} EJ_a [\psi_1''(x)]^2 dx \\
&= \frac{12}{L_a^3} EJ_a + \frac{12}{L_a^3} EJ_a = \frac{24}{L_a^3} EJ_a \\
k_{56} = k_{65} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_5''(x) u_6''(x)dx = 0 \\
k_{57} = k_{75} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_5''(x) u_7''(x)dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{66} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_6''(x)u_6''(x)dx + k = \int_{ABCD} EJ(x)[u_6''(x)]^2dx + k \\
&= \int_{BC} EJ_b[u_6''(x)]^2dx + k = \int_0^{L_b} EJ_b[\psi_1''(x)]^2dx + k = \frac{12}{L_b^3}EJ_b + k \\
k_{67} = k_{76} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_6''(x)u_7''(x)dx = \int_{BC} EJ_bu_6''(x)u_7''(x)dx \\
&= \int_0^{L_b} EJ_b\psi_1''(x)\psi_2''(x)dx = -\frac{12}{L_b^3}EJ_b \\
k_{77} &= \int_{ABCD} EJ(x)u_7''(x)u_7''(x)dx + k = \int_{ABCD} EJ(x)[u_7''(x)]^2dx + k \\
&= \int_{BC} EJ_b[u_7''(x)]^2dx + k = \int_0^{L_b} EJ_b[\psi_2''(x)]^2dx + k = \frac{12}{L_b^3}EJ_b + k
\end{aligned}$$

Στις περιπτώσεις των συντελεστών ακαμψίας k_{11}, k_{44} , έχει ληφθεί υπ'όψιν και η σταθερά του στρεπτικού ελατηρίου k_{rot} , σε συμφωνία με την εξίσωση Α.1.4.9, εφόσον οι συγκεκριμένοι βαθμοί ελευθερίας δεσμεύονται από την κίνηση του στρεπτικού ελατηρίου στο σημείο A και D αντίστοιχα (βλ.Σχέδιο 3|Α.2.1). Παρομοίως, στους συντελεστές k_{66}, k_{77} , έχει ληφθεί υπ'όψιν και σταθερά του αξονικού ελατηρίου k , εφόσον οι συγκεκριμένοι βαθμοί ελευθερίας δεσμεύονται από την κίνηση του αξονικού ελατηρίου, πάλι στα σημεία A και D .

Συνεπώς, προκύπτει το μητρώο ακαμψίας:

$$[k_{ij}] =$$

$\frac{4}{L_a}EJ_a + k_{rot}$	$\frac{2}{L_a}EJ_a$	0	0	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	0	0
$\frac{2}{L_a}EJ_a$	$\frac{4}{L_a}EJ_a + \frac{4}{L_b}EJ_b$	$\frac{2}{L_b}EJ_b$	0	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	$-\frac{6}{L_b^2}EJ_b$
0	$\frac{2}{L_b}EJ_b$	$\frac{4}{L_a}EJ_a + \frac{4}{L_b}EJ_b$	$\frac{2}{L_a}EJ_a$	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	$-\frac{6}{L_b^2}EJ_b$
0	0	$\frac{2}{L_a}EJ_a$	$\frac{4}{L_a}EJ_a + k_{rot}$	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	0	0
$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{6}{L_a^2}EJ_a$	$\frac{24}{L_a^3}EJ_a$	0	0
0	$\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	$\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	0	0	$\frac{12}{L_b^3}EJ_b + k$	$-\frac{12}{L_b^3}EJ_b$
0	$-\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	$-\frac{6}{L_b^2}EJ_b$	0	0	$-\frac{12}{L_b^3}EJ_b$	$\frac{12}{L_b^3}EJ_b + k$

A.2.6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Στην περίπτωση που το πλαίσιο, αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, είναι προφανές ότι δεν επιδρούν εξωτερικές δυνάμεις και επομένως, το δεξί μέλος του συστήματος εξισώσεων κίνησης A.2.4.1, είναι μηδέν. Με $\{P_{eff}(t)\} = 0$ και λόγω του ότι αμελούνται τα φαινόμενα απόσβεσης, η μητρική εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{0\} \quad (A.2.6.1)$$

Η ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση είναι μία σύγχρονη αρμονική κίνηση, όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο A.1.6 (εξ. A.1.6.2), δηλαδή της μορφής:

$$\delta_i(t) = u_i \sin \omega t \quad (A.2.6.2)$$

Παραγωγίζοντας διαδοχικά δύο φορές ως προς το χρόνο, έχουμε:

$$\ddot{\delta}_i(t) = -\omega^2 u_i \sin \omega t \quad (A.2.6.3)$$

Αντικαθιστώντας τις A.2.6.2., A.2.6.3 στο σύστημα A.2.6.1, προκύπτει:

$$[[k] - \omega^2 [m]]\{u_i\} = \{0\} \quad (A.2.6.4a)$$

που αποτελεί το πρόβλημα ιδιοτιμών. Αναλυτικότερα:

$$\left[\begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{27} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{71} & k_{72} & \cdots & k_{77} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{ccc} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{17} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{27} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{71} & m_{72} & \cdots & m_{77} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A.2.6.4b)$$

Οι σχέσεις A.2.6.4a,b εκφράζουν ένα ομογενές και γραμμικό αλγεβρικό σύστημα, με παράμετρο το τετράγωνο των ιδιοσυχνοτήτων, ω^2 , και αγνώστους τα διανύσματα των ιδιομορφών $u_i, i = 1, \dots, 7$. Για να έχει μη μηδενική λύση πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\det(\omega^2) = |[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad (A.2.6.5)$$

Η σχέση A.2.6.5 είναι η χαρακτηριστική εξίσωση ή εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων, η οποία έχει επτά μη μηδενικές λύσεις, τις ιδιοσυχνότητες, που θα υπολογιστούν με τη μέθοδο της διχοτόμησης (βλ.εδ. A.3.1).

Ο υπολογισμός των ιδιομορφών γίνεται αν αντικαταστήσουμε διαδοχικά τις υπολογισθείσες ιδιοσυχνότητες στο σύστημα αυτό (A.2.6.4b) και επιλύσουμε το προκύπτον απροσδιόριστο πρόβλημα. Κάθε ιδιομορφή κανονικοποιείται ως προς τη μάζα σύμφωνα με τη σχέση A.1.6.2.7. Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού των ιδιολύσεων και κανονικοποίησης, περιγράφονται λεπτομερέστερα στο εδάφιο A.1.6.1.

A.2.7 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΤΥΧΑΙΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Όταν στο σύστημα δεν αναπτύσσονται δυνάμεις απόσβεσης, δηλαδή το μητρώο $[c] = 0$, η εξίσωση κίνησης A.2.4.1, γίνεται:

$$[m]\{\ddot{\delta}(t)\} + [k]\{\delta(t)\} = \{P_{eff}(t)\} \quad (A.2.7.1)$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο εδάφιο A.1.8.1, δηλαδή στην Ιδιομορφική Ανάλυση, η κίνηση των βαθμών ελευθερίας θα έχει τη μορφή της A.1.8.1.2:

$$\{\delta(t)\} = [u]\{\xi(t)\} \quad (A.2.7.2)$$

όπου $\{u_i\}$ είναι το διάνυσμα των κανονικοποιημένων ιδιομορφών που υπολογίσαμε στο εδάφιο A.2.6 και $\{\xi_i(t)\}$ το διάνυσμα των κανονικών συντεταγμένων που παρέχονται από την εξίσωση A.1.8.2.1.5

$$\xi_i(t) = e^{-c_i\omega_i t} \left(\xi_i(0) \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{\xi}_i(0) + c_i\omega_i \xi_i(0)}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right) + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(\tau) e^{-c_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{di}(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.2.7.3)$$

με την συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης να δίνεται από την $\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - c_i^2}$ και όπου τα $\xi_i(0)$, $\dot{\xi}_i(0)$ δίνονται από την A.1.8.1.14 και αποτελούν τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Το διάνυσμα των γενικευμένων φορτίων $\{N_i(t)\}$ δίνεται από την σχέση A.1.8.1.7

$$\{N_i(t)\} = \{u\}_i^T \{P_{eff}(t)\}$$

συναρτήσει του διανύσματος των επιδρωσών δυνάμεων.

Στην περίπτωση που στο σύστημα αναπτύσσονται δυνάμεις απόσβεσης, θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις, α) που η αναπτυσσόμενη απόσβεση είναι αναλογική και β) που η αναπτυσσόμενη απόσβεση δεν είναι αναλογική.

α) Όταν το σύστημα έχει αναλογική απόσβεση, θα εφαρμοστεί η Ιδιομορφική Ανάλυση. Η κίνηση $\delta_i(t)$ των βαθμών ελευθερίας, θα δίνεται από τη πρώτη σχέση της Α.2.7.2 και οι κανονικές συντεταγμένες θα παρέχονται από την εξίσωση Α.2.7.3

β) Όταν το σύστημα δεν έχει αναλογική απόσβεση, τότε ολοκληρώνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Α.2.4.1 με την αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta (εδ.Α.1.8.2.2), προκειμένου να υπολογίσουμε τις μετακινήσεις $\delta_i(t)$ των βαθμών ελευθερίας.

Σε κάθε περίπτωση, η απόκριση του συστήματος παρέχεται από την εξίσωση Α.2.2.1 του εδαφίου Α.2.2

$$u(x, t) = \delta_1(t)u_1(x) + \delta_2(t)u_2(x) + \delta_3(t)u_3(x) + \delta_4(t)u_4(x) + \delta_5(t)u_5(x) + \delta_6(t)u_6(x) + \delta_7(t)u_7(x)$$

Οι αναπτυσσόμενες ροπές κάμψης, με βάση την εξίσωση Euler-Bernoulli (Α.1.3.5), $M(x, t) = EJ(x)u''(x, t)$, μπορούν να υπολογιστούν από την

$$M(x, t) = \delta_1(t)EJ(x)u_1''(x) + \dots + \delta_7(t)EJ(x)u_7''(x)$$

όπου τα $u_i(x)$ είναι οι γνωστές κανονικοποιημένες ιδιομορφές και τα $\delta_i(t)$ είναι οι γνωστές μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας.

Η τέμνουσα δύναμη, που αναπτύσσεται κατά μήκος του πλαισίου με βάση την εξίσωση $Q(x, t) = -\frac{\partial M(x, t)}{\partial x}$ μετατρέπεται, λόγω της Α.1.3.5, στη

$$Q(x, t) = -\delta_1(t)\frac{\partial}{\partial x}[EJ(x)u_1''(x)] - \dots - \delta_7(t)\frac{\partial}{\partial x}[EJ(x)u_7''(x)]$$

A.2.8 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Έστω ότι η βάση εκτελεί αρμονική κίνηση της μορφής:

$$\begin{cases} u^s(t) = u_0^s \sin \omega t \\ v^s(t) = v_0^s \sin \omega t \\ \varphi^s(t) = \varphi_0^s \sin \omega t \end{cases} \quad (A.2.8.1)$$

όπου ω είναι η συχνότητα της κίνησης και u_0^s, v_0^s το εύρος της οριζόντιας, της κατακόρυφης συνιστώσας αντίστοιχα, και φ_0^s το εύρος της στροφής.

Είναι προφανές ότι κατά τη ψευδοστατική κίνηση του πλαισίου (δηλαδή τη μετακίνηση του πλαισίου σαν στερεού σώματος λόγω κίνησης της βάσης

του), οι ψευδοστατικές μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας θα έχουν την αρμονική μορφή:

$$\delta_i^s(t) = \delta_{0i}^s \sin \omega t \quad (A.2.8.2)$$

Τα εύρη δ_{0i}^s αυτών των αρμονικών μετακινήσεων θα δίνονται, σύμφωνα με το εδάφιο A.2.3, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \delta_{01}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{02}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{03}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{04}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{05}^s &= u_0^s - \varphi_0^s L_a \\ \delta_{06}^s &= v_0^s - \varphi_0^s \frac{L_b}{2} \\ \delta_{07}^s &= v_0^s + \varphi_0^s \frac{L_b}{2} \end{aligned} \quad (A.2.8.3)$$

Παραγωγίζοντας A.2.8.2 διαδοχικά δύο φορές ως προς τον χρόνο, έχουμε:

$$\ddot{\delta}_i^s(t) = -\omega^2 \delta_{0i}^s \sin \omega t \quad (A.2.8.4)$$

Κατά συνέπεια, το διάνυσμα των επιδρωσών δυνάμεων, με βάση την A.2.4.2, θα γράφεται:

$$\{P_{eff}(t)\} = \begin{Bmatrix} P_{eff01} \\ P_{eff02} \\ \vdots \\ P_{eff07} \end{Bmatrix} \sin \omega t = -\omega^2 [m] \begin{Bmatrix} \delta_{01}^s \\ \delta_{02}^s \\ \vdots \\ \delta_{07}^s \end{Bmatrix} \sin \omega t \quad (A.2.8.5)$$

όπου $P_{eff0i}, i = 1, \dots, 7$ είναι τα εύρη των αρμονικά μεταβαλλόμενων επιδρωσών δυνάμεων.

Εάν υποθέσουμε ότι το σύστημα δεν έχει απόσβεση, τότε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης A.2.4.1, αφού $[c] = 0$ και με χρήση της A.2.8.5, αποκτά τη μορφή:

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_7 \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{eff01} \\ P_{eff02} \\ \vdots \\ P_{eff07} \end{Bmatrix} \sin \omega t = -\omega^2 [m] \begin{Bmatrix} \delta_{01}^s \\ \delta_{02}^s \\ \vdots \\ \delta_{07}^s \end{Bmatrix} \sin \omega t \quad (A.2.8.6)$$

Επειδή η απόκριση στη σταθερή κατάσταση είναι επίσης αρμονική κίνηση με την ίδια συχνότητα ω , οι μετακινήσεις $\delta_i(t)$ των βαθμών ελευθερίας ως προς το κινούμενο πλαίσιο (που παρέχονται από την A.1.9.1 του εδ.Α.1.9) στη σταθερή κατάσταση, θα είναι και αυτές αρμονικές με την ίδια συχνότητα ω . Δηλαδή, θα ισχύουν οι:

$$\delta_i(t) = \delta_{0i} \sin \omega t \quad \text{ή} \quad \begin{Bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_7(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \vdots \\ \delta_{07} \end{Bmatrix} \sin \omega t \quad (\text{A.2.8.7})$$

όπου $\delta_{0i}, i = 1, \dots, 7$ είναι το εύρος της αρμονικής κίνησης του κάθε βαθμού ελευθερίας και παραγωγίζοντας την δύο φορές διαδοχικά ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = -\omega^2 \{\delta_{0i}\} \sin \omega t \quad (\text{A.2.8.8})$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις A.2.8.7, A.2.8.8 στην εξίσωση A.2.8.6, προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} [m](-\omega^2) \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \vdots \\ \delta_{07} \end{Bmatrix} \sin \omega t + [k] \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \\ \vdots \\ \delta_{07} \end{Bmatrix} \sin \omega t &= \begin{Bmatrix} P_{eff01} \\ P_{eff02} \\ \vdots \\ P_{eff07} \end{Bmatrix} \sin \omega t \\ &= -\omega^2 [m] \begin{Bmatrix} \delta_{01}^s \\ \delta_{02}^s \\ \vdots \\ \delta_{07}^s \end{Bmatrix} \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{A.2.8.9})$$

Απλοποιώντας τα ημίτονα από τη παραπάνω σχέση, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$[[k] - \omega^2 [m]] \{\delta_0\} = \{P_{eff0}\} \quad (\text{A.2.8.10})$$

Με πράξεις, προκύπτει ισοδύναμα:

$$\{\delta_0\} = [[k] - \omega^2 [m]]^{-1} \{P_{eff0}\} \quad (\text{A.2.8.11})$$

από όπου μπορεί κάποιος να υπολογίσει τα εύρη της αρμονικής απόκρισης των βαθμών ελευθερίας (βλ.εδ.Α.3.3).

A.2.9 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Σε αυτό το εδάφιο θα αδιαστατοποιήσουμε τα μεγέθη που εμπλέκονται στους υπολογισμούς μας, για δική μας διευκόλυνση και προκειμένου, εν συνεχεία, να διεξαχθεί η παραμετρική μελέτη.

Ως βασικά μεγέθη για την αδιαστατοποίηση, επιλέγονται τα εξής:

- ∴ για την αδιαστοποίηση των μηκών θα χρησιμοποιηθεί το μήκος του ζυγώματος L_b [m]

- ∴ για την αδιαστατοποίηση των μαζών, η μάζα του ζυγώματος $m_b L_b [kgr = \frac{Nsec^2}{m}]$
- ∴ για την αδιαστατοποίηση των δυνάμεων, το μέγεθος $L_b m_b g [N]$

Τα παράγωγα μεγέθη, είναι:

- ∴ ο χρόνος $\sqrt{\frac{L_b}{g}} [sec]$
- ∴ η ταχύτητα $\frac{L_b}{\sqrt{L_b/g}} = \sqrt{L_b g} [\frac{m}{sec}]$
- ∴ η επιτάχυνση $\frac{L_b}{L_b/g} = g [\frac{m}{sec^2}]$

Αδιάστατες παράμετροι για την παραμετρική μελέτη

- λόγος μηκών των ράβδων $\frac{L_a}{L_b} = \lambda$
- λόγος κατανεμημένων μαζών των ράβδων $\frac{m_a}{m_b} = \mu$
- λόγος ροπών αδρανείας των ράβδων $\frac{J_a}{J_b} = i$
- λόγος πλευράς θεμελίου προς ζύγωμα $\frac{l_\theta}{L_b} = \zeta_\theta$
- λυγηρότητα ζυγώματος $\frac{L_b}{\alpha} = \mathbf{slend}$

όπου α^2 η επιφάνεια της διατομής του ζυγώματος.

Επιπλέον, χρησιμοποιείται η πυκνότητα του υλικού $\rho [\frac{kgr}{m^3}]$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Αναφέρουμε πρώτα τις διαστάσεις του εκάστοτε μεγέθους και εν συνεχεία, αδιαστατοποιούμε.

- ∴ Αδιάστατο μήκος ζυγώματος

$$[m]: \overline{L_b} = \frac{L_b}{L_b} = 1$$

- ∴ Αδιάστατο μήκος υποστηλώματος

$$[m]: \overline{L_a} = \frac{L_a}{L_b} = \lambda$$

- ∴ Αδιάστατος δείκτης εδάφους.

$$\left[\frac{N}{m^3}\right]: \overline{c_{\varepsilon\delta}} = \frac{c_{\varepsilon\delta}}{\frac{L_b m_b g}{L_b^3}} = \frac{c_{\varepsilon\delta}}{\frac{m_b g}{L_b^2}} = \frac{c_{\varepsilon\delta}}{\frac{L_b^2 \rho g}{slend^2 L_b^2}} = c_{\varepsilon\delta} \frac{slend^2}{\rho g}$$

- ∴ Αδιάστατη μάζα ζυγώματος

$$[kgr]: \overline{m_b} = \frac{m_b}{m_b} = 1$$

όπου $m_b = A\rho = \frac{\rho L_b^2}{slend^2}$ αφού το εμβαδόν επιφανείας είναι $A = \alpha^2$

$$\xrightarrow{\alpha=L_b/slend} A = \frac{L_b^2}{slend^2}$$

∴ Αδιάστατη μάζα υποστηλώματος

$$[kgr]: \overline{m_a} = \frac{m_a}{m_b} = \mu$$

∴ Αδιάστατος χρόνος

$$[sec]: \tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{L_b}{g}}}$$

∴ Αδιάστατη συχνότητα

$$[sec^{-1}]: w = \omega \sqrt{\frac{L_b}{g}}$$

∴ Αδιάστατο μέτρο ελαστικότητας υλικού

$$\left[\frac{N}{m^2}\right]: \overline{E} = \frac{E}{m_b g} = \frac{E}{\frac{L_b^2 \rho}{slend^2} \frac{g}{L_b}} = E \frac{slend^2}{\rho g L_b}$$

∴ Αδιάστατη ροπή αδρανείας

$$[m^4]: \overline{J_b} = \frac{J_b}{L_b^4} = \frac{L_b^4}{12 slend^4} \frac{1}{L_b^4} = \frac{1}{12 slend^4}$$

∴ Αδιάστατη σταθερά αξονικού ελατηρίου, λόγω των σχέσεων Α.2.1.3

$$\left[\frac{N}{m}\right]: \overline{k} = \frac{k}{m_b g} = \frac{c_{\varepsilon\delta} \zeta_{\theta}^2 L_b^2}{m_b g} = \zeta_{\theta}^2 \frac{c_{\varepsilon\delta}}{\frac{m_b g}{L_b^2}} = \zeta_{\theta}^2 \overline{c_{\varepsilon\delta}}$$

∴ Αδιάστατη σταθερά στρεπτικού ελατηρίου, λόγω των σχέσεων Α.2.1.3

$$[Nm]: \overline{k_{rot}} = \frac{k_{rot}}{L_b^2 m_b g} = \frac{\zeta_{\theta}^4 c_{\varepsilon\delta}}{12} \frac{L_b^4}{\frac{m_b g}{L_b^2}} = \frac{\zeta_{\theta}^4}{12} \overline{c_{\varepsilon\delta}}$$

∴ Αδιάστατη μετόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση των βαθμών ελευθερίας

$$[m]: \overline{\delta(\tau)} = \frac{\delta(\tau)}{L_b}$$

$$\left[\frac{m}{sec}\right]: \overline{\dot{\delta}(\tau)} = \frac{\dot{\delta}(\tau)}{\sqrt{L_b g}}$$

$$\left[\frac{m}{sec^2}\right]: \overline{\ddot{\delta}(\tau)} = \frac{\ddot{\delta}(\tau)}{g}$$

∴ Αδιάστατη στροφή, γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση των βαθμών ελευθερίας

$$[rad]: \overline{\delta(\tau)} = \delta(\tau)$$

$$\left[\frac{rad}{sec}\right]: \overline{\dot{\delta}(\tau)} = \frac{\dot{\delta}(\tau)}{\sqrt{g/L_b}}$$

$$\left[\frac{rad}{sec^2}\right]: \overline{\ddot{\delta}(\tau)} = \frac{\ddot{\delta}(\tau)}{g/L_b}$$

∴ Αδιάστατη επιτάχυνση της βάσης

$$\left[\frac{m}{\text{sec}^2} \right]: \overline{\delta^s(\tau)} = \frac{\delta^s(\tau)}{g}$$

∴ Αδιάστατη γωνιακή επιτάχυνση της βάσης

$$\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \right]: \overline{\delta^s(\tau)} = \frac{\delta^s(\tau)}{g/L_b}$$

Παραθέτουμε αναλυτικά, τις διαστάσεις όλων των συντελεστών που υπεισέρχονται στο θεμελιώδες σύστημα διαφορικών εξισώσεων κίνησης Α.2.4.1. Αυτό γίνεται για να έχουμε τη πλήρη εικόνα των διαστάσεων των μεγεθών, διότι αυτά αλλάζουν αναλόγως αν αναφέρονται σε μετατόπιση ή στροφή.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}^2}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & N\text{sec}^2 & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}^2}{\text{m}}
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \\
 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}} \\
 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}
 \end{array} \right] + \\
 & + \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{Nm\text{sec}}{\text{rad}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} \\
 N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & N\text{sec} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}} & \frac{N\text{sec}}{\text{m}}
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\
 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\
 \frac{\text{sec}}{\text{m}} \\
 \frac{\text{sec}}{\text{m}} \\
 \frac{\text{sec}}{\text{m}}
 \end{array} \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{N\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} & N & N \\ \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & N & N & N \\ \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & N & N & N \\ \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & \frac{Nm}{rad} & N & N & N \\ N & N & N & N & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} \\ N & N & N & N & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} \\ N & N & N & N & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} & \frac{N}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} rad \\ rad \\ rad \\ rad \\ m \\ m \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Nm \\ Nm \\ Nm \\ Nm \\ N \\ N \\ N \end{Bmatrix}$$

Ακολουθεί η εξαγωγή των αδιάστατων συντελεστών των μητρώων.

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Αδιαστατοποιούμε με $L_b^2 m_b g$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{Nm}{rad} \right]: \quad \overline{k_{11}} = \overline{k_{44}} &= \frac{\frac{4}{L_a^4} E J_a}{L_b^2 m_b g} + \frac{k_{rot}}{L_b^2 m_b g} = \frac{4E}{m_b g} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b}{L_a} + \frac{\zeta_\theta^4}{12} \overline{c_{\varepsilon\delta}} = 4\overline{E} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda} + \frac{\zeta_\theta^4}{12} \overline{c_{\varepsilon\delta}} \\
&= 4\overline{E} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda} \frac{\overline{J}_b}{\overline{J}_b} + \frac{\zeta_\theta^4}{12} \overline{c_{\varepsilon\delta}} = 4\overline{E} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda} + \frac{\zeta_\theta^4}{12} \overline{c_{\varepsilon\delta}}
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{Nm}{rad} \right]: \quad \overline{k_{12}} = \overline{k_{21}} = \overline{k_{34}} = \overline{k_{43}} = \frac{\frac{2}{L_a^2} E J_a}{L_b^2 m_b g} = \frac{2E}{m_b g} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b}{L_a} = 2\overline{E} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{Nm}{rad} \right]: \quad \overline{k_{22}} = \overline{k_{33}} &= \frac{\frac{4}{L_a^4} E J_a + \frac{4}{L_b^4} E J_b}{L_b^2 m_b g} = \frac{4E}{m_b g} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b}{L_a} + \frac{4E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b}{L_b} = 4\overline{E} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda} + 4\overline{E} \overline{J}_b \\
&= 4\overline{E} \overline{J}_b \left(\frac{i}{\lambda} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{Nm}{rad} \right]: \quad \overline{k_{23}} = \overline{k_{32}} = \frac{\frac{2}{L_b^2} E J_b}{L_b^2 m_b g} = \frac{2E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b}{L_b} = 2\overline{E} \overline{J}_b$$

Αδιαστατοποιούμε με $L_b m_b g$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{N\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} \right]: \quad \overline{k_{15}} = \overline{k_{51}} = \overline{k_{25}} = \overline{k_{52}} = \overline{k_{35}} = \overline{k_{53}} = \overline{k_{45}} = \overline{k_{54}} &= \frac{\frac{6}{L_a^2} E J_a}{L_b m_b g} = \frac{6E}{m_b g} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b^2}{L_a^2} \\
&= 6\overline{E} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda^2} = 6\overline{E} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda^2} \frac{\overline{J}_b}{\overline{J}_b} = 6\overline{E} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

$$[N]: \quad \overline{k_{26}} = \overline{k_{62}} = \overline{k_{36}} = \overline{k_{63}} = \frac{\frac{6}{L_b^2} E J_b}{L_b m_b g} = \frac{6E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b^2}{L_b^2} = 6\overline{E} \overline{J}_b$$

$$[N]: \bar{k}_{27} = \bar{k}_{72} = \bar{k}_{37} = \bar{k}_{73} = \frac{-\frac{6}{L_b^2} EJ_b}{L_b m_b g} = \frac{-6E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b} \frac{L_b^2}{L_b^2} = -6\bar{E}\bar{J}_b$$

Αδιαστατοποιούμε με $m_b g$

$$\left[\frac{N}{m}\right]: \bar{k}_{55} = \frac{\frac{24}{L_a^3} EJ_a}{m_b g} = \frac{24E}{m_b g} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_a^3} = 24\bar{E}\bar{J}_a \frac{1}{\lambda^3} = 24\bar{E}\bar{J}_a \frac{1}{\lambda^3} \frac{\bar{J}_b}{\bar{J}_b} = 24\bar{E}\bar{J}_b \frac{i}{\lambda^3}$$

$$\left[\frac{N}{m}\right]: \bar{k}_{66} = \bar{k}_{77} = \frac{\frac{12}{L_b^3} EJ_b}{m_b g} + \frac{k}{m_b g} = \frac{12E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_b^3} + \zeta_\theta^2 \bar{c}_{\varepsilon\delta} = 12\bar{E}\bar{J}_b + \zeta_\theta^2 \bar{c}_{\varepsilon\delta}$$

$$\left[\frac{N}{m}\right]: \bar{k}_{67} = \bar{k}_{76} = \frac{-\frac{12}{L_b^3} EJ_b}{m_b g} = \frac{-12E}{m_b g} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_b^3} = -12\bar{E}\bar{J}_b$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΜΑΖΑΣ

Αδιαστατοποιούμε με $L_b^3 m_b$

$$\left[\frac{Nmsec^2}{rad}\right]: \bar{m}_{11} = \bar{m}_{44} = \frac{\frac{1}{105} L_a^3 m_a}{L_b^3 m_b} = \frac{1}{105} \frac{L_a^3}{L_b^3} \frac{m_a}{m_b} = \frac{1}{105} \lambda^3 \mu$$

$$\left[\frac{Nmsec^2}{rad}\right]: \bar{m}_{21} = \bar{m}_{12} = \bar{m}_{34} = \bar{m}_{43} = \frac{-\frac{1}{140} L_a^3 m_a}{L_b^3 m_b} = -\frac{1}{140} \lambda^3 \mu$$

$$\left[\frac{Nmsec^2}{rad}\right]: \bar{m}_{23} = \bar{m}_{32} = \frac{-\frac{1}{140} L_b^3 m_b}{L_b^3 m_b} = -\frac{1}{140} \frac{L_b^3}{L_b^3} \frac{m_b}{m_b} = -\frac{1}{140}$$

$$\left[\frac{Nmsec^2}{rad}\right]: \bar{m}_{22} = \bar{m}_{33} = \frac{\frac{1}{105} L_a^3 m_a + \frac{1}{105} L_b^3 m_b}{L_b^3 m_b} = \frac{1}{105} \lambda^3 \mu + \frac{1}{105} = \frac{1}{105} (\lambda^3 \mu + 1)$$

Αδιαστατοποιούμε με $L_b^2 m_b$

$$\left[\frac{Nmsec^2}{\#}\right]: \bar{m}_{15} = \bar{m}_{51} = \bar{m}_{45} = \bar{m}_{54} = \frac{-\frac{13}{420} L_a^2 m_a}{L_b^2 m_b} = -\frac{13}{420} \frac{L_a^2}{L_b^2} \frac{m_a}{m_b} = -\frac{13}{420} \lambda^2 \mu$$

$$[Nsec^2]: \bar{m}_{25} = \bar{m}_{52} = \bar{m}_{35} = \bar{m}_{53} = \frac{\frac{11}{210} L_a^2 m_a}{L_b^2 m_b} = \frac{11}{210} \lambda^2 \mu$$

$$[Nsec^2]: \bar{m}_{26} = \bar{m}_{62} = \frac{\frac{11}{210} L_b^2 m_b}{L_b^2 m_b} = \frac{11}{210}$$

$$[Nsec^2]: \bar{m}_{27} = \bar{m}_{72} = \frac{\frac{13}{420} L_b^2 m_b}{L_b^2 m_b} = \frac{13}{420}$$

$$[Nsec^2]: \bar{m}_{36} = \bar{m}_{63} = \frac{-\frac{13}{420} L_b^2 m_b}{L_b^2 m_b} = -\frac{13}{420}$$

$$[Nsec^2]: \bar{m}_{37} = \bar{m}_{73} = \frac{-\frac{11}{210} L_b^2 m_b}{L_b^2 m_b} = -\frac{11}{210}$$

Αδιαστατοποιούμε με $L_b m_b$

$$\left[\frac{Nsec^2}{m}\right]: \overline{m}_{55} = \frac{26L_a m_a + L_b m_b}{L_b m_b} = \frac{26L_a m_a}{L_b m_b} + \frac{L_b m_b}{L_b m_b} = \frac{26}{35} \frac{L_a m_a}{L_b m_b} + 1 = \frac{26}{35} \lambda \mu + 1$$

$$\left[\frac{Nsec^2}{m}\right]: \overline{m}_{66} = \overline{m}_{77} = \frac{13L_b m_b + L_a m_a}{L_b m_b} = \frac{13L_b m_b}{L_b m_b} + \frac{L_a m_a}{L_b m_b} = \frac{13}{35} + \lambda \mu$$

$$\left[\frac{Nsec^2}{m}\right]: \overline{m}_{67} = \overline{m}_{76} = \frac{9L_b m_b}{L_b m_b} = \frac{9}{70}$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Αδιαστατοποιούμε με $L_b^2 m_b \sqrt{L_b g}$

$$\left[\frac{Nmsec}{rad}\right]: \overline{c}_{11} = \overline{c}_{44} = \frac{\frac{4}{L_a} c_{int} J_a}{L_b^2 m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{4c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_a L_b}{L_b^4 L_a} = 4\overline{c}_{int} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda} = 4\overline{c}_{int} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda} \frac{\overline{J}_b}{\overline{J}_b}$$

$$= 4\overline{c}_{int} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda}$$

$$\left[\frac{Nmsec}{rad}\right]: \overline{c}_{12} = \overline{c}_{21} = \overline{c}_{34} = \overline{c}_{43} = \frac{\frac{2}{L_a} c_{int} J_a}{L_b^2 m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{2c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_a L_b}{L_b^4 L_a} = 2\overline{c}_{int} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda}$$

$$= 2\overline{c}_{int} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda}$$

$$\left[\frac{Nmsec}{rad}\right]: \overline{c}_{22} = \overline{c}_{33} = \frac{\frac{4}{L_a} c_{int} J_a + \frac{4}{L_b} c_{int} J_b}{L_b^2 m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{4c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_a L_b}{L_b^4 L_a} + \frac{4c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b L_b}{L_b^4 L_b}$$

$$= 4\overline{c}_{int} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda} + 4\overline{c}_{int} \overline{J}_b = 4\overline{c}_{int} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda} + 4\overline{c}_{int} \overline{J}_b = 4\overline{c}_{int} \overline{J}_a \left(\frac{i}{\lambda} + 1\right)$$

$$\left[\frac{Nmsec}{rad}\right]: \overline{c}_{23} = \overline{c}_{32} = \frac{\frac{2}{L_b} c_{int} J_b}{L_b^2 m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{2c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b L_b}{L_b^4 L_b} = 2\overline{c}_{int} \overline{J}_b$$

Αδιαστατοποιούμε με $L_b m_b \sqrt{L_b g}$

$$\left[\frac{Nmsec}{m}\right]: \overline{c}_{15} = \overline{c}_{51} = \overline{c}_{25} = \overline{c}_{52} = \overline{c}_{35} = \overline{c}_{53} = \overline{c}_{45} = \overline{c}_{54} = \frac{\frac{6}{L_a^2} c_{int} J_a}{L_b m_b \sqrt{L_b g}}$$

$$= \frac{2c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_a L_b^2}{L_b^4 L_a^2} = 6\overline{c}_{int} \overline{J}_a \frac{1}{\lambda^2} = 6\overline{c}_{int} \overline{J}_b \frac{i}{\lambda^2}$$

$$[Nsec]: \overline{c}_{26} = \overline{c}_{62} = \overline{c}_{36} = \overline{c}_{63} = \frac{\frac{6}{L_b^2} c_{int} J_b}{L_b m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{6c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b L_b^2}{L_b^4 L_b^2} = 6\overline{c}_{int} \overline{J}_b$$

$$[Nsec]: \overline{c}_{27} = \overline{c}_{72} = \overline{c}_{37} = \overline{c}_{73} = \frac{-\frac{6}{L_b^2} c_{int} J_b}{L_b m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{-6c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b L_b^2}{L_b^4 L_b^2} = -6\overline{c}_{int} \overline{J}_b$$

Αδιαστατοποιούμε με $m_b\sqrt{L_b g}$

$$\left[\frac{Nsec}{m}\right]: \bar{c}_{55} = \frac{\frac{24}{L_b^3} c_{int} J_a}{m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{24 c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_a}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_a^3} = 24 \bar{c}_{int} \bar{J}_a \frac{1}{\lambda^3} = 24 \bar{c}_{int} \bar{J}_b \frac{i}{\lambda^3}$$

$$\left[\frac{Nsec}{m}\right]: \bar{c}_{66} = \bar{c}_{77} = \frac{\frac{12}{L_b^3} c_{int} J_b}{m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{12 c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_b^3} = 12 \bar{c}_{int} \bar{J}_b$$

$$\left[\frac{Nsec}{m}\right]: \bar{c}_{67} = \bar{c}_{76} = \frac{-\frac{12}{L_b^3} c_{int} J_b}{m_b \sqrt{L_b g}} = \frac{-12 c_{int}}{m_b \sqrt{L_b g}} \frac{J_b}{L_b^4} \frac{L_b^3}{L_b^3} = -12 \bar{c}_{int} \bar{J}_b$$

Συνεπώς, τα μητρώα λαμβάνουν τη μορφή:

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{105} \lambda^3 \mu & -\frac{1}{140} \lambda^3 \mu & 0 & 0 & \frac{-13}{420} \lambda^2 \mu & 0 & 0 \\ -\frac{1}{140} \lambda^3 \mu & \frac{(\lambda^3 \mu + 1)}{105} & -\frac{1}{140} & 0 & \frac{11}{210} \lambda^2 \mu & \frac{11}{210} & \frac{13}{420} \\ 0 & -\frac{1}{140} & \frac{(\lambda^3 \mu + 1)}{105} & -\frac{1}{140} \lambda^3 \mu & \frac{11}{210} \lambda^2 \mu & -\frac{13}{420} & -\frac{11}{210} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{140} \lambda^3 \mu & \frac{1}{105} \lambda^3 \mu & \frac{-13}{420} \lambda^2 \mu & 0 & 0 \\ \frac{-13}{420} \lambda^2 \mu & \frac{11}{210} \lambda^2 \mu & \frac{11}{210} \lambda^2 \mu & \frac{-13}{420} \lambda^2 \mu & \frac{26}{35} \lambda \mu + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{210} & -\frac{13}{420} & 0 & 0 & \frac{13}{35} + \lambda \mu & \frac{9}{70} \\ 0 & \frac{13}{420} & -\frac{11}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{35} + \lambda \mu \end{bmatrix} [\bar{m}_{ij}] =$$

$$[\bar{c}_{ij}] = \{\bar{c}_{int} \bar{J}_b\} \times \begin{bmatrix} 4 \frac{i}{\lambda} & 2 \frac{i}{\lambda} & 0 & 0 & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 2 \frac{i}{\lambda} & 4(\frac{i}{\lambda} + 1) & 2 & 0 & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 4(\frac{i}{\lambda} + 1) & 2 \frac{i}{\lambda} & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \frac{i}{\lambda} & 4 \frac{i}{\lambda} & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 6 \frac{i}{\lambda^2} & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 6 \frac{i}{\lambda^2} & 24 \frac{i}{\lambda^3} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_{ij}] = \{\bar{E} \bar{J}_b\} \times$$

$$\begin{bmatrix} 4\frac{i}{\lambda} + \frac{\zeta_{\theta}^4}{12\bar{E} \bar{J}_b} \bar{c}_{\varepsilon\delta} & 2\frac{i}{\lambda} & 0 & 0 & 6\frac{i}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 2\frac{i}{\lambda} & 4(\frac{i}{\lambda} + 1) & 2 & 0 & 6\frac{i}{\lambda^2} & 6 & -6 \\ 0 & 2 & 4(\frac{i}{\lambda} + 1) & 2\frac{i}{\lambda} & 6\frac{i}{\lambda^2} & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 2\frac{i}{\lambda} & 4\frac{i}{\lambda} + \frac{\zeta_{\theta}^4}{12\bar{E} \bar{J}_b} \bar{c}_{\varepsilon\delta} & 6\frac{i}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 6\frac{i}{\lambda^2} & 6\frac{i}{\lambda^2} & 6\frac{i}{\lambda^2} & 6\frac{i}{\lambda^2} & 24\frac{i}{\lambda^3} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 12 + \frac{\zeta_{\theta}^2}{\bar{E} \bar{J}_b} \bar{c}_{\varepsilon\delta} & -12 \\ 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & -12 & 12 + \frac{\zeta_{\theta}^2}{\bar{E} \bar{J}_b} \bar{c}_{\varepsilon\delta} \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.3 Αποτελέσματα - Παραμετρική Μελέτη

Α.3.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ.

ΒΙΝΤΕΟ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

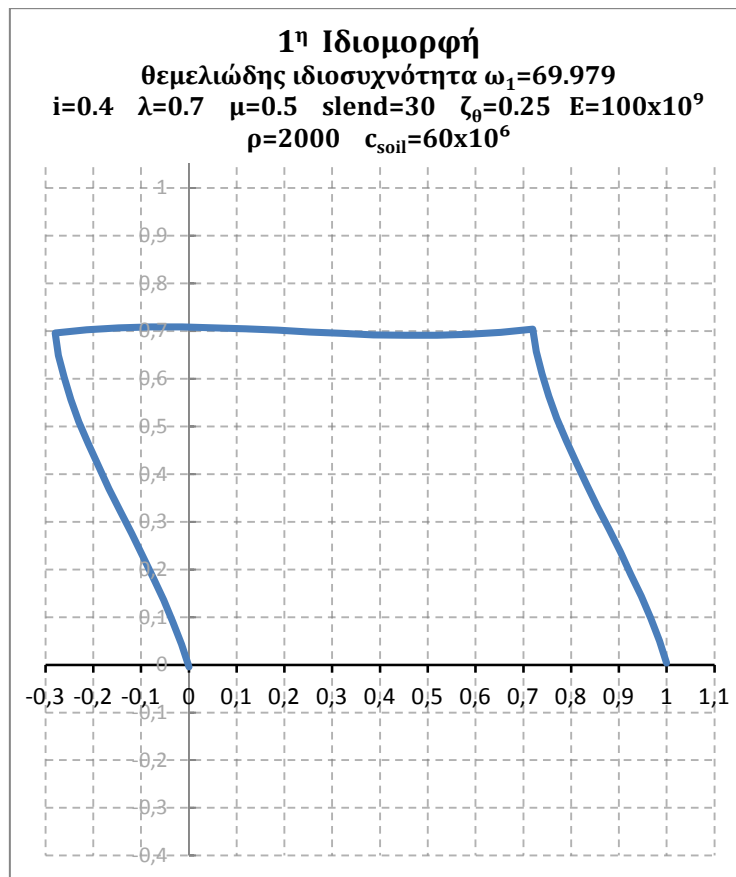
ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ & ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ

Επιλύσαμε με τη μέθοδο της διχοτόμησης, το προβλήμα ιδιοτιμών της ελεύθερης ταλάντωσης, όπως αυτό παρέχεται από τη σχέση Α.2.6.5 (γενικότερα στο εδάφιο Α.2.6) για τις σταθερές τιμές μεγεθών που φαίνονται στο πάνω μέρος του Πίνακα 1|Α.3.1. Η πρώτη στήλη του ίδιου πίνακα παρέχει τις επτά ιδιοσυχνότητες ω της ελεύθερης ταλάντωσης. Οι επόμενες επτά στήλες, v_1, \dots, v_7 , περιλαμβάνουν τις γενικευμένες συντεταγμένες, που αντιστοιχούν στην κάθε ιδιοσυχνότητα της αντίστοιχης ιδιομορφής της ελεύθερης ταλάντωσης.

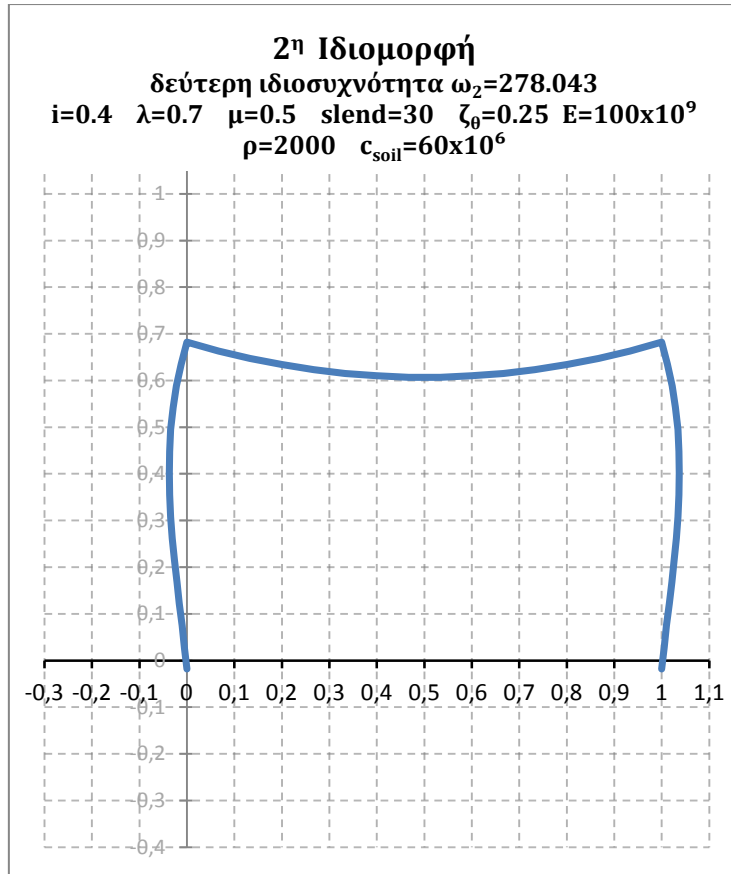
$\lambda=0,7$ $slend=30$ $i=0,4$ $\rho=2000$ $\mu=0,5$ $E=100 \times 10^9$ $c_{soil}=60 \times 10^6$ $\zeta_{\theta}=0,25$								
α/α	W	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
1	69,979	1	0,4178	0,4179	1	-0,9344	-0,0129	0,0123
2	278,043	0,343	-1	1	-0,343	0	-0,0606	-0,0606
3	555,482	0,2384	-0,4313	-0,4307	0,238	0,0097	-0,9999	1
4	651,770	0,8274	-1	1	-0,8274	0	0,1872	0,1872
5	828,193	1	-0,7802	-0,7801	0,9998	0,0296	0,0316	-0,0315
6	1231,551	1	0,2097	-0,2097	-0,9999	0	-0,0237	-0,0237
7	1740,729	1	0,7008	0,7008	1	-0,0002	-0,0257	0,0257

Πίνακας 1|Α.3.1

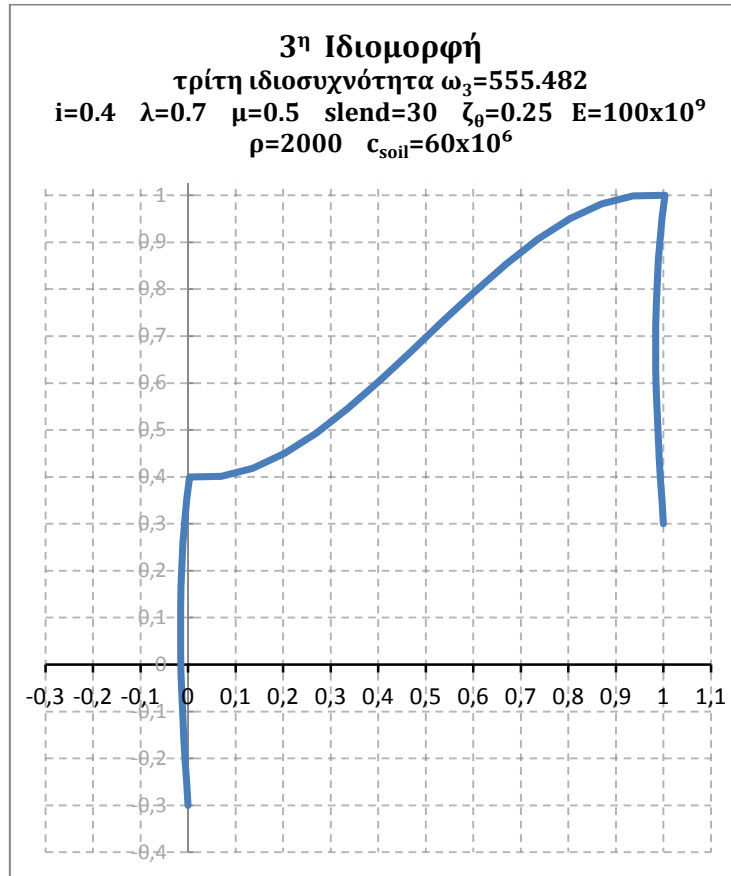
Παρακάτω δίνονται τα γραφήματα των επτά ιδιομορφών που υπολογίστηκαν με τη Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών. Στον τίτλο τους αναγράφονται οι σταθερές τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και η ιδιοσυχνότητα στην οποία αναφέρεται κάθε ιδιομορφή.



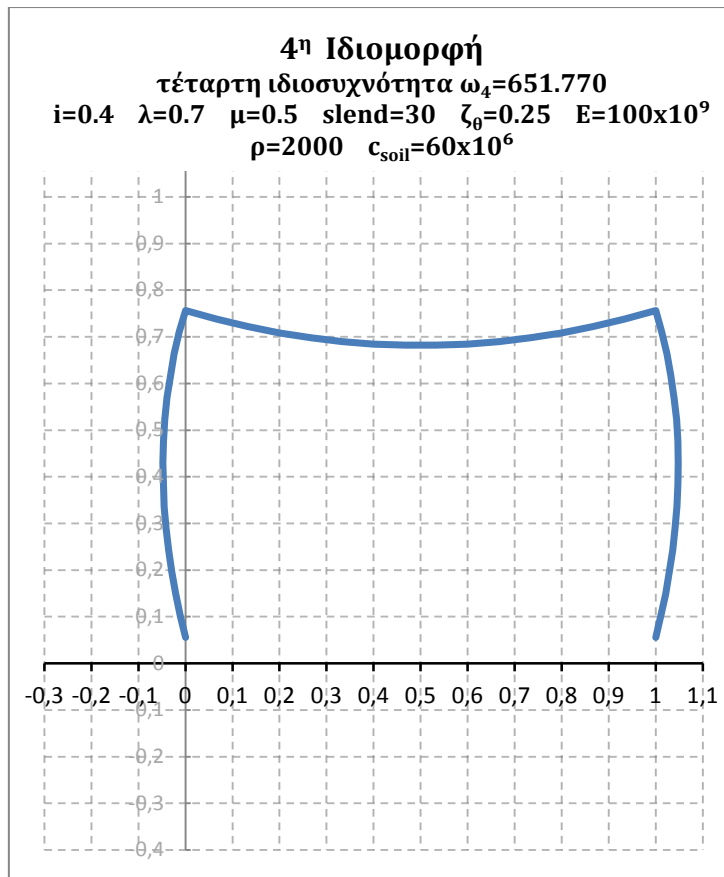
Γράφημα 1|Α.3.1



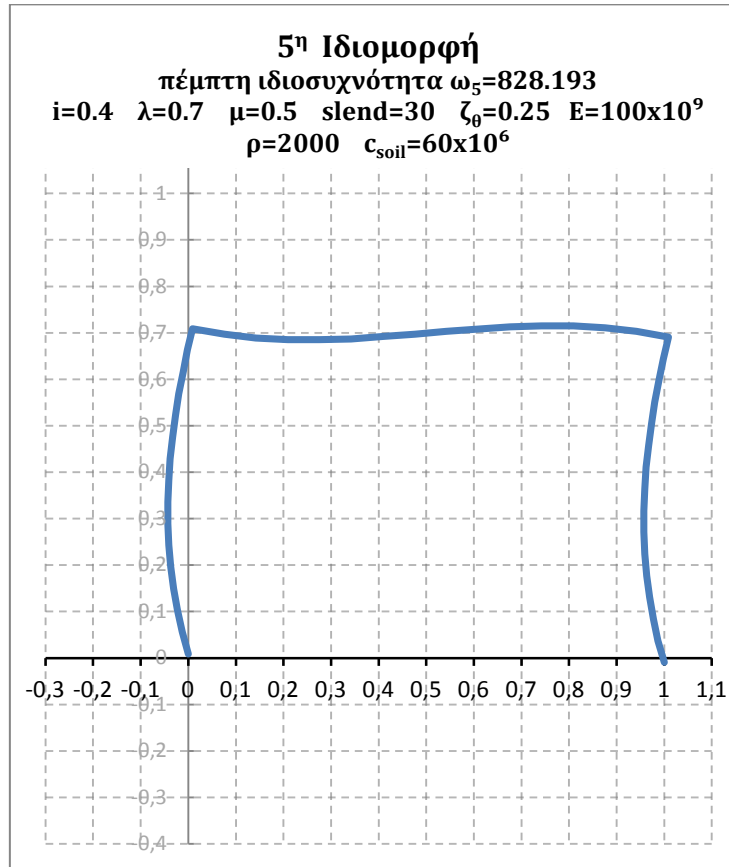
Γράφημα 2|Α.3.1



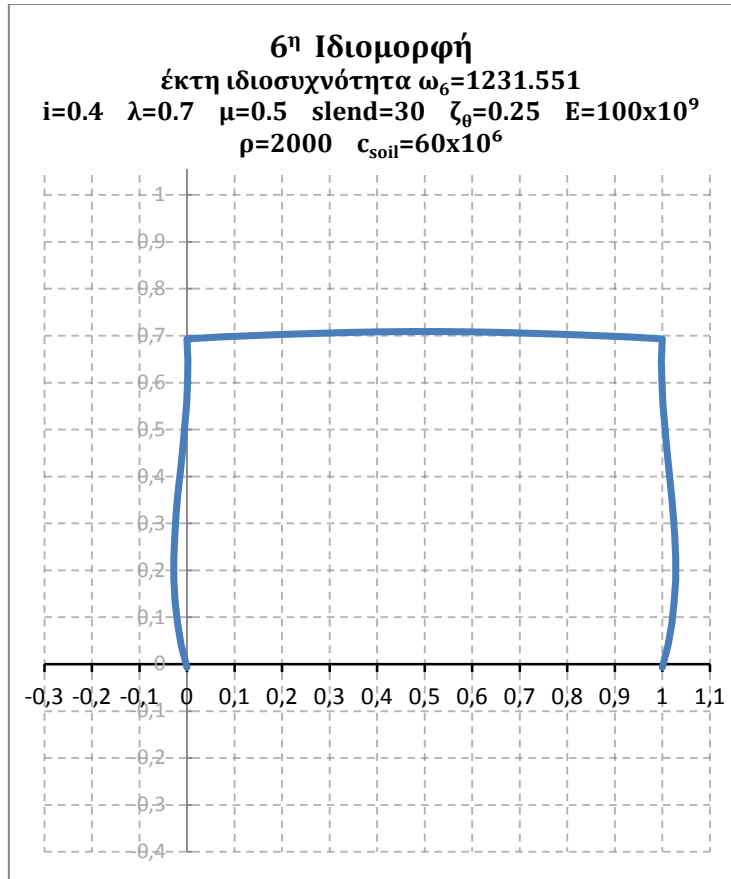
Γράφημα 3|Α.3.1



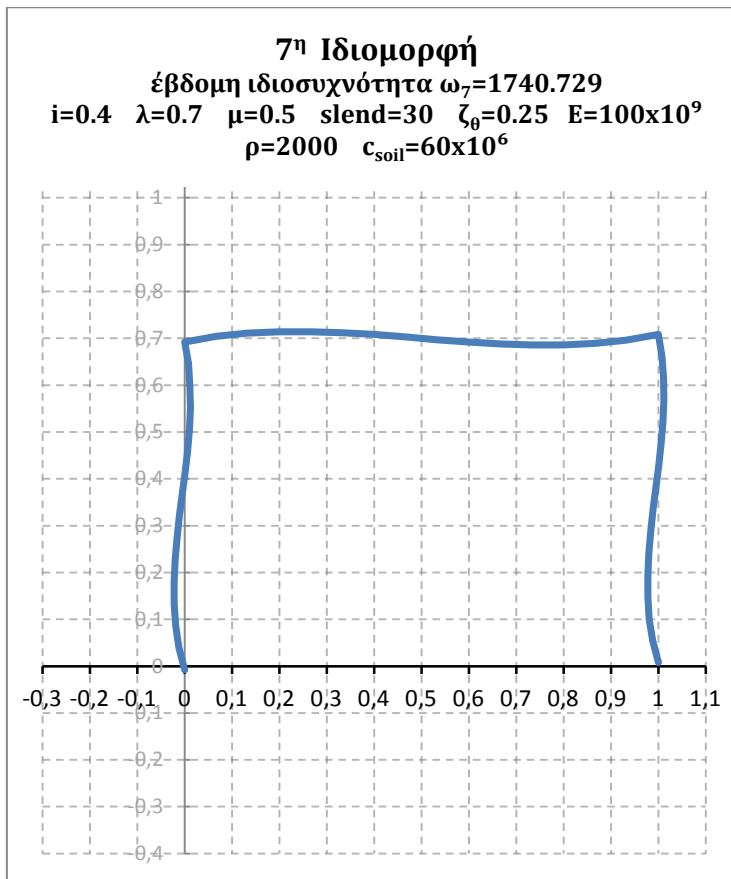
Γράφημα 4|Α.3.1



Γράφημα 5|Α.3.1



Γράφημα 6|Α.3.1



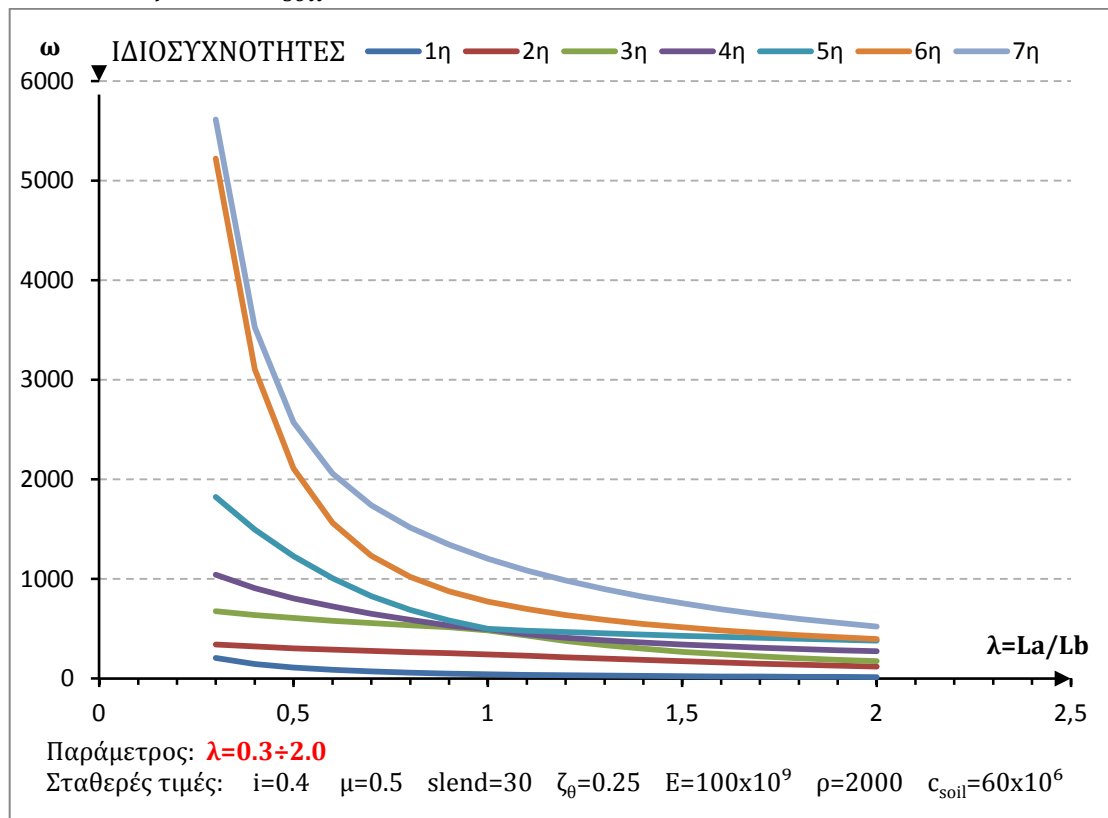
Γράφημα 7|Α.3.1

Σε αυτό το σημείο, επισυνάπτονται βίντεο ελεύθερης ταλάντωσης της κάθε μιας από τις επτά ιδιομορφές, με ονόματα αρχείων **freeVib1Id**, **freeVib2Id**, **freeVib3Id**, **freeVib4Id**, **freeVib5Id**, **freeVib6Id**, **freeVib7Id**, αντίστοιχα, και σταθερές (default) τιμές παραμέτρων, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $i=0.4$, $\rho=2000$, $\mu=0.5$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$, $\zeta_\theta=0.25$. Σε όλα, πίσω από το κινούμενο πλαίσιο με το κόκκινο χρώμα, απεικονίζεται το πλαίσιο με γκρι χρώμα, στη θέση ισορροπίας του.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Σε αυτό το εδάφιο επίσης, διεξάγεται η παραμετρική μελέτη, σύμφωνα με τις παραμέτρους που ορίσαμε στη σελ.68 του εδαφίου Α.2.9.

Στο **Γράφημα 8|Α.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου του μήκους του υποστυλώματος προς το μήκος του ζυγώματος, $\lambda = \frac{L_a}{L_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 2.0. Σε αυτή την παραμετρική παραμένουν σταθερά τα μεγέθη $i = 0.4$, $\mu = 0.5$, $slend = 30$, $\zeta_\theta = 0.25$, $E = 100 \times 10^9$, $\rho = 2000$, $c_{soil} = 60 \times 10^6$.

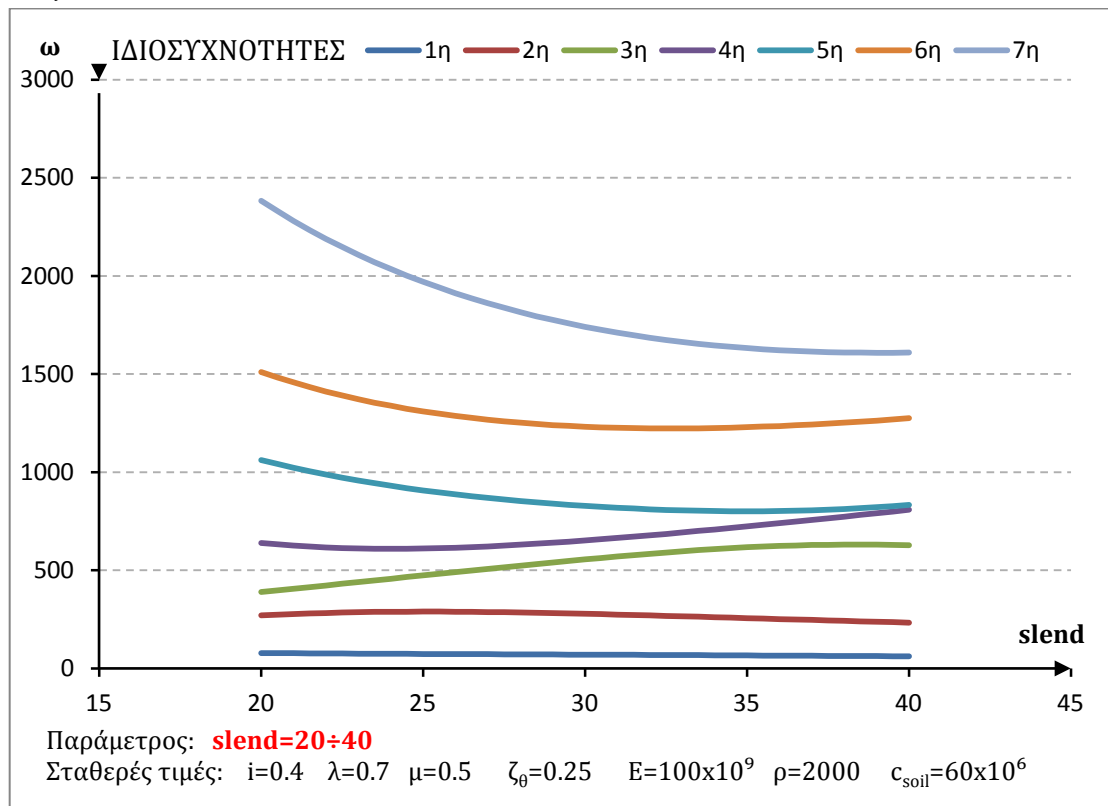


Γράφημα 8|Α.3.1

Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρά σε μήκος είναι τα υποστυλώματα του πλαισίου σε σχέση με το μήκος του ζυγώματος που είναι $L_b = 1$, τόσο πιο μεγάλη ακαμψία παρουσιάζει η κατασκευή. Αντιστρόφως, έχουμε μείωση της ακαμψίας όσο αυξάνει το λ . Στο κοντό πλαίσιο, οι υψηλές ιδιοσυχνότητες

λαμβάνουν μεγάλες τιμές, ενώ στο υψηλό πλαίσιο, υπάρχει ομοιόμορφη μεταβολή των ιδιοσυχνοτήτων. Για $\lambda = 1$, οι $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ είναι πολύ κοντά και ενδεχομένως να τέμνονται ή και να αλλάζει η διάταξή τους.

Στο **Γραφημα 9|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει της λυγηρότητας $slend = \frac{Lb}{a}$, με τιμές αυτής από 20 έως 40, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4, \mu=0.5, \lambda=0.7, \zeta_\theta=0.25, \rho=2000, E=100 \times 10^9, c_{soil}=60 \times 10^6$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει η γενική τάση, με την αύξηση της λυγηρότητας, να μειώνεται η ακαμψία του πλαισίου. Αυτό συμβαίνει σε όλες τις ιδιοσυχνότητες εκτός από τις ω_3, ω_4 , που αυξάνονται με την αύξηση της λυγηρότητας. Επίσης, επισημαίνεται ότι οι ω_4, ω_5 για $slend=40$, πλησιάζουν.

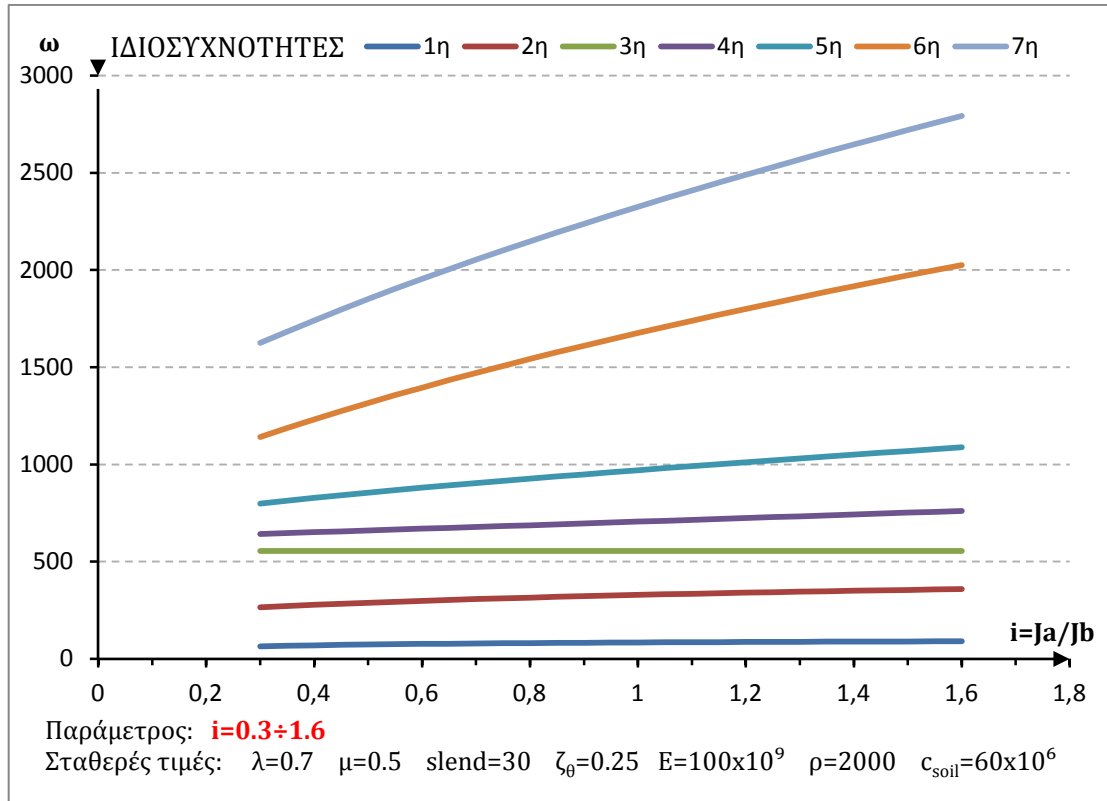


Γράφημα 9|A.3.1

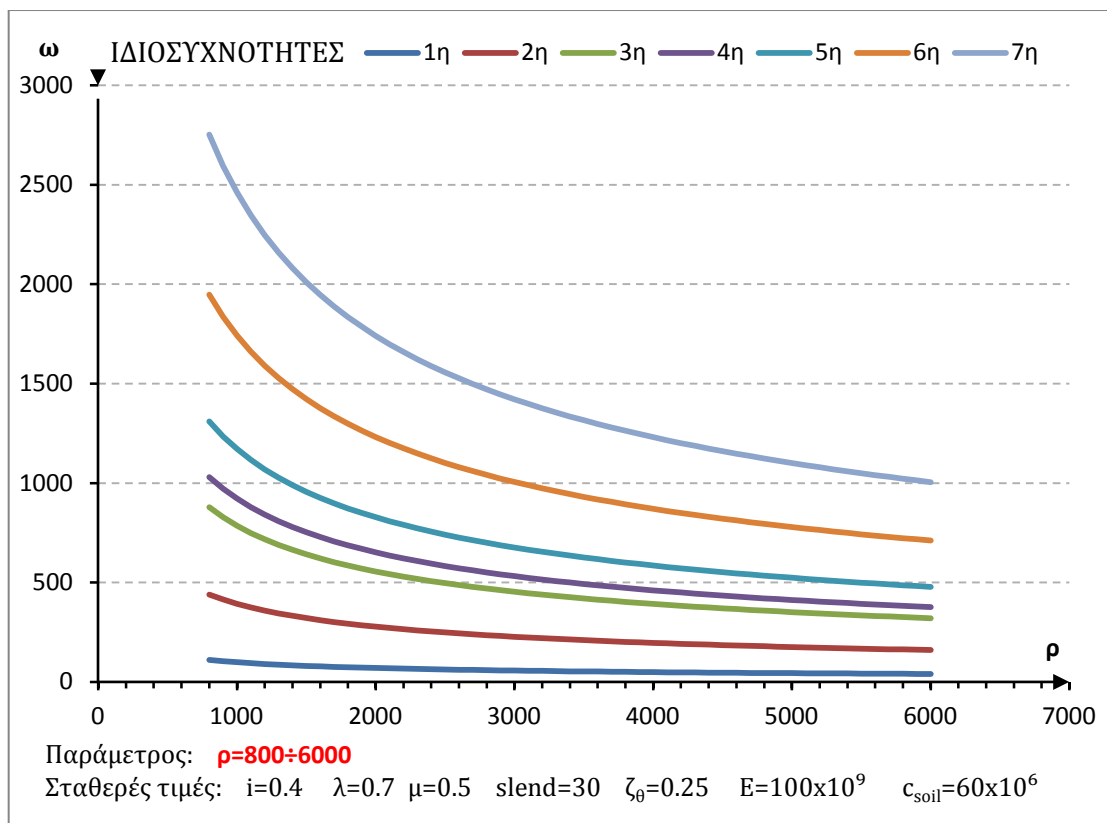
Στο **Γραφημα 10|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου της ροπής αδρανείας του υποστυλώματος προς τη ροπή αδρανείας του ζυγώματος, $i = \frac{J_a}{J_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 1.6, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $\lambda=0.7, \mu=0.5, slend=30, \zeta_\theta=0.25, E=100 \times 10^9, \rho=2000, c_{soil}=60 \times 10^6$. Παρατηρείται ότι με την αύξηση της ροπής αδρανείας, συνεπώς και της ακαμψίας, αυξάνουν και οι ιδιοσυχνότητες. Παρά ταύτα, η ω_3 παραμένει σταθερή και ανεπηρέαστη.

Στο **Γραφημα 11|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει της πυκνότητας υλικού ρ , με τιμές αυτής από 800 έως 6000, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4, \mu=0.5, \lambda=0.7,$

slend=30, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$. Γενικά ισχύει ότι η αύξηση της πυκνότητας του υλικού συνεπάγεται αύξηση της μάζας της κατασκευής, πράγμα το οποίο επιφέρει μείωση των ιδιοσυχνοτήτων. Η ω_3 και ω_4 , διαφέρουν λίγο.

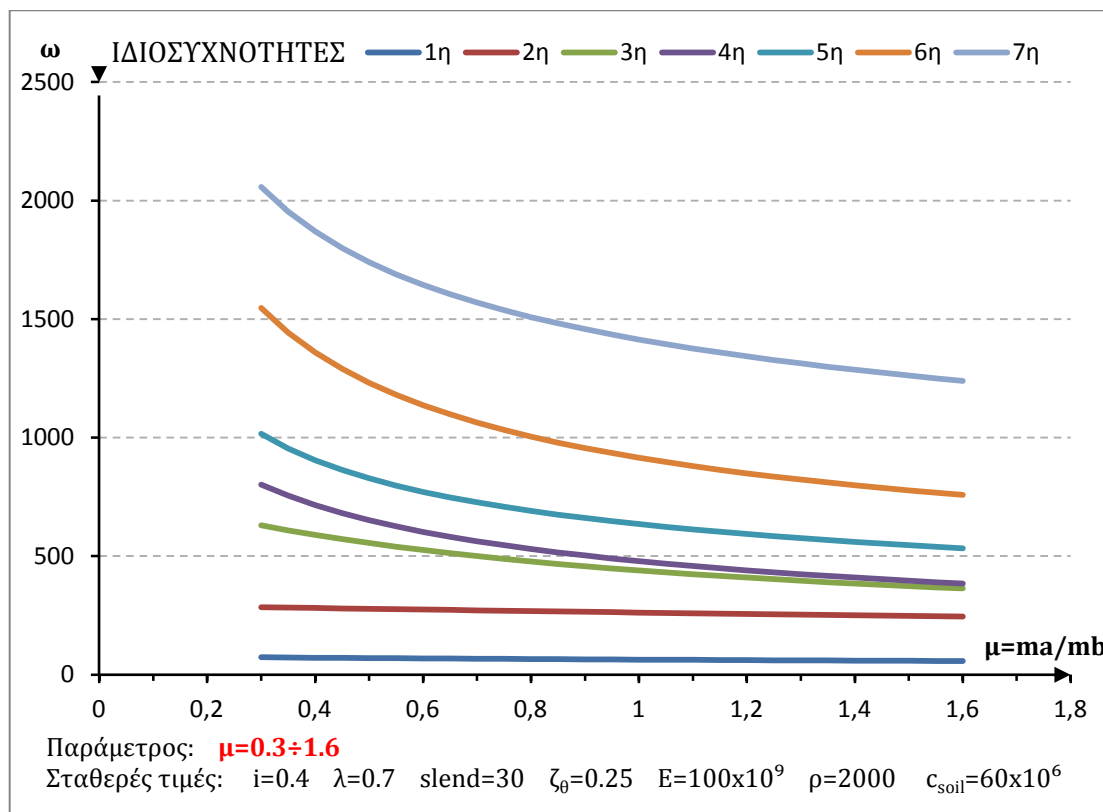


Γράφημα 10|Α.3.1



Γράφημα 11|Α.3.1

Στο **Γραφημα 12|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου της μάζας του υποστυλώματος προς τη μάζα του ζυγώματος, $\mu = \frac{m_a}{m_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 1.6, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$. Η αύξηση της μάζας των υποστυλωμάτων συνεπάγεται γενική αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων. Παρατηρείται ότι, οι ω_3, ω_4 διαφέρουν λίγο ενώ οι ω_1 και ω_2 παραμένουν σχεδόν σταθερές.



Γράφημα 12|A.3.1

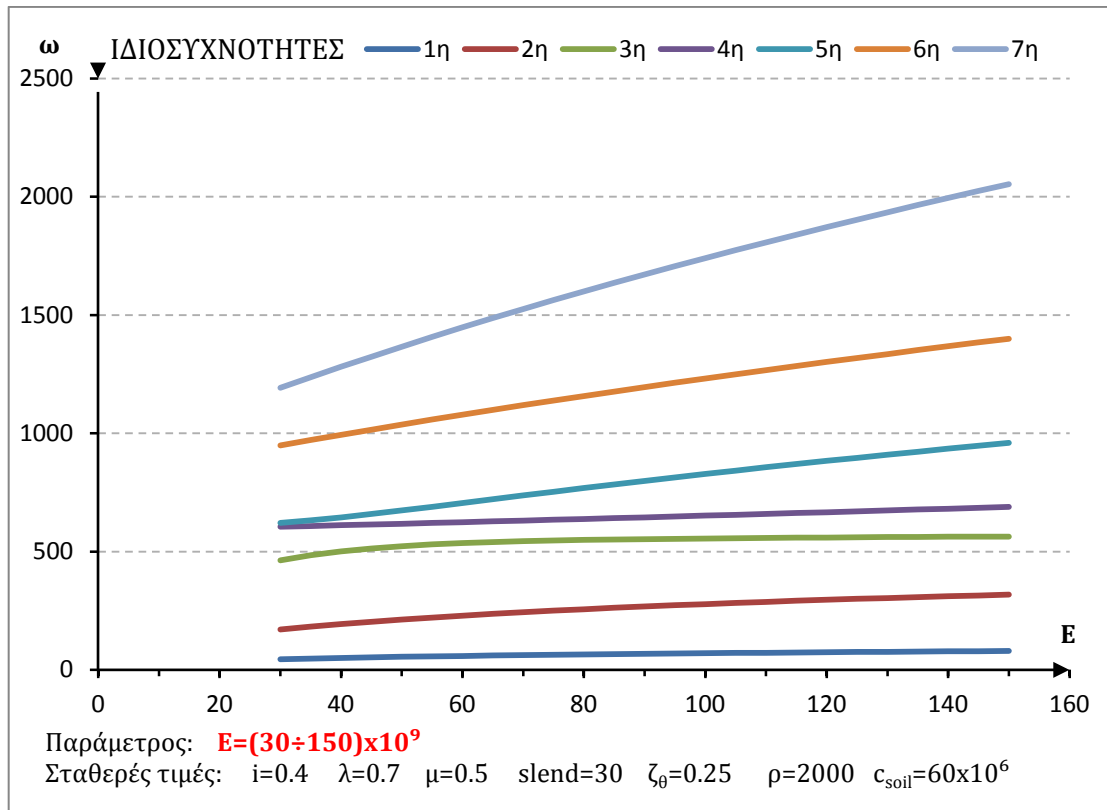
Στο **Γραφημα 13|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας των ράβδων E , με τιμές αυτού από 30×10^9 έως 150×10^9 , κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Γενικά, όταν έχουμε αύξηση του μέτρου ελαστικότητας, έχουμε αύξηση της ακαμψίας, που σημαίνει γενική αύξηση στις ιδιοσυχνότητες. Παρατηρούμε ότι η ω_4 και η ω_5 , πλησιάζουν πολύ για μικρά μέτρα ελαστικότητας.

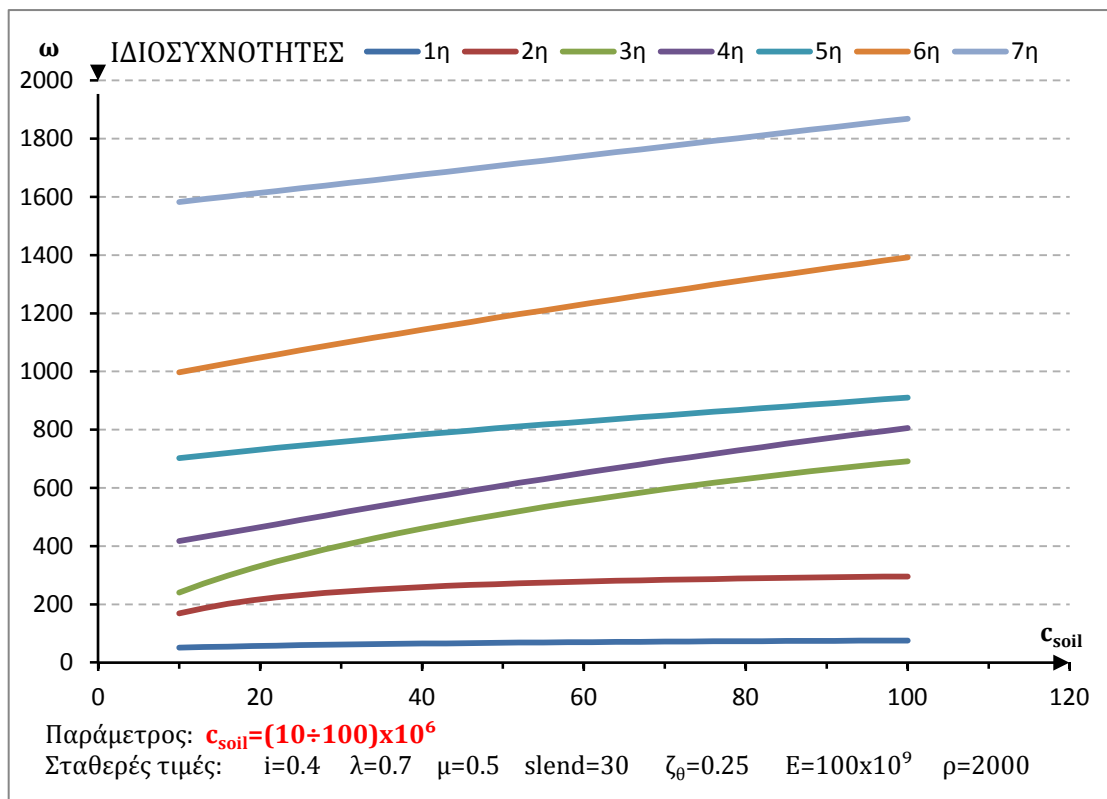
Στο **Γραφημα 14|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του δείκτη εδάφους c_{soil} , με τιμές αυτού από 10×10^6 έως 100×10^6 , κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$.

Γενικά με αύξηση της ακαμψίας των ελαστικών στηρίξεων, που εκφράζονται από το δείκτη εδάφους, συνεπάγεται αύξηση των ιδιοσυχνο-

τήτων. Παρατηρούμε ότι, για πολύ μεγάλες τιμές του c_{soil} , οι στηρίξεις με το έδαφος, τείνουν σε πλήρεις πακτώσεις.



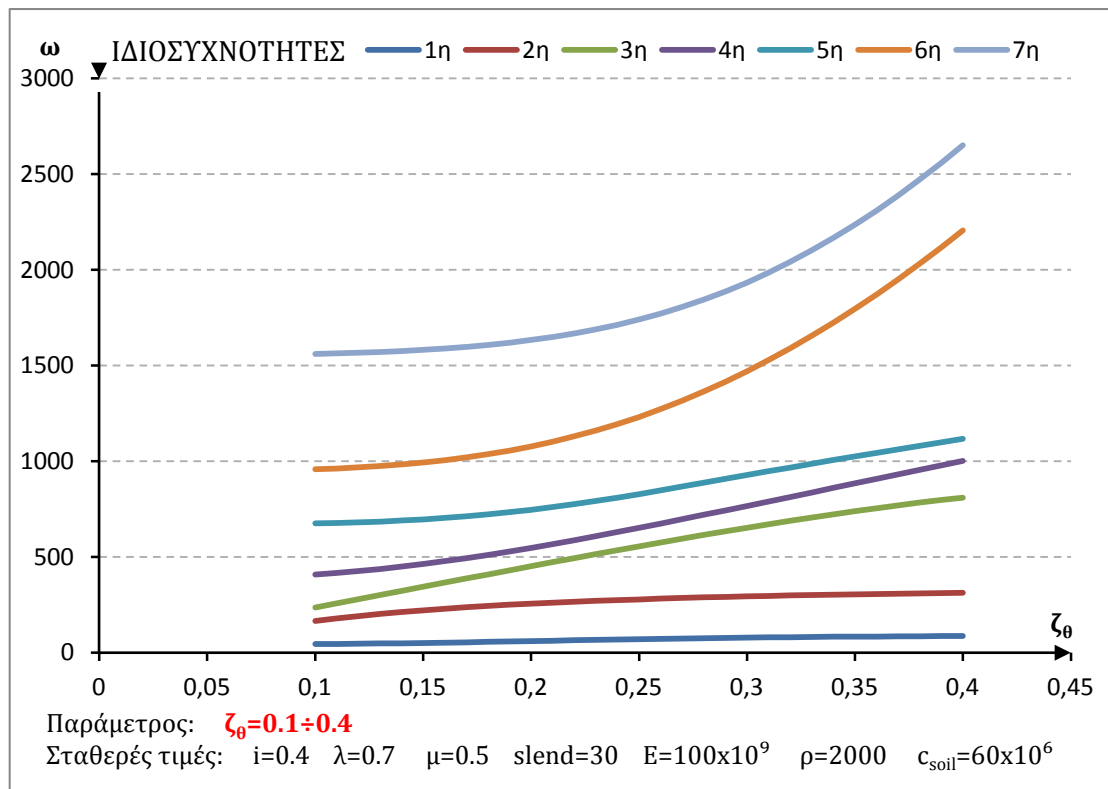
Γράφημα 13|Α.3.1



Γράφημα 14|Α.3.1

Στο **Γραφήμα 15|A.3.1** μελετούμε τη μεταβολή των επτά ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του πλάτους του θεμελίου $\zeta_\theta = \frac{l_\theta}{L_b}$, με τιμές αυτού από 0.1 έως 0.4, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\rho=2000$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Η γενική αύξηση των διαστάσεων του θεμελίου, συνεπάγεται αύξηση της ακαμψίας των ελατηρίων, άρα και αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων. Παρατηρείται ότι, για πολύ μεγάλο θεμέλιο, οι στηρίξεις τείνουν σε πλήρη πάκτωση.



Γράφημα 15|A.3.1

A.3.2 ΒΙΝΤΕΟ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΛΟΓΩ ΤΥΧΑΙΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Σε αυτό το εδάφιο επισυνάπτονται βίντεο απόκρισης λόγω δεδομένης τυχαίας κίνησης της βάσης, όπως ακριβώς περιγράφονται στον Πίνακα 2|A.3.2. Οι σταθερές παράμετροι είναι οι ίδιες default, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $i=0.4$, $\rho=2000$, $\mu=0.5$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$, $\zeta_\theta=0.25$. Η συχνότητα είναι πάντα ένα ποσοστό της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας. Παρομοίως, η διάρκεια της κίνησης sh της βάσης είναι ένα ποσοστό της συνολικής διάρκειας του βίντεο και κίνησης, που ορίσθηκε 10 περιόδους αρμονικής ταλάντωσης, $t^{tot} = 10T$.

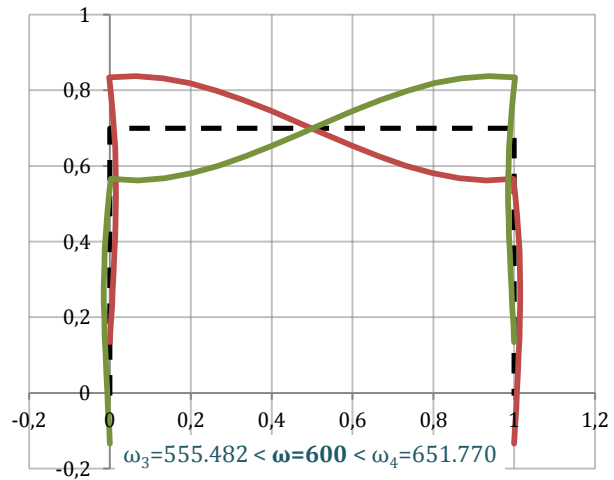
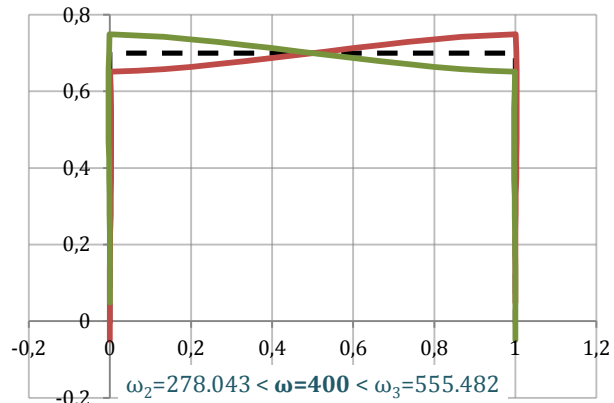
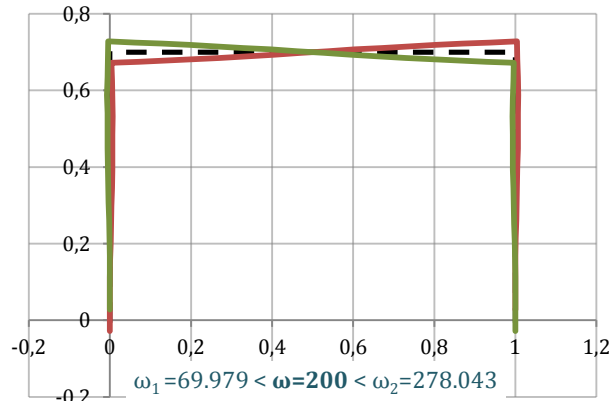
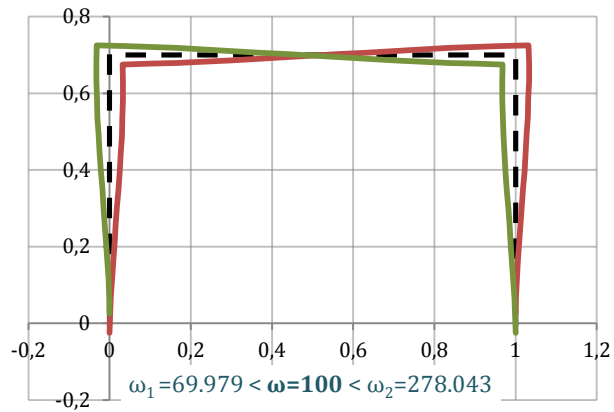
Βίντεο (.avi)	u_0^s	ω_u	v_0^s	ω_v	φ_0^s	ω_φ	sh
[Α] ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ							
respVid1K	0.05	$0.71 \cdot \omega_1 = 50$	0	0	0	0	$70\% \cdot t^{tot}$
respVid2K	0.05	$2.86 \cdot \omega_1 = 200$	0	0	0	0	$70\% \cdot t^{tot}$
[Β] ΚΥΚΛΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ							
respVid3K	0.10	$0.71 \cdot \omega_1 = 50$	0.05	$0.71 \cdot \omega_1 = 50$	0	0	$70\% \cdot t^{tot}$
respVid4K	0.05	$2.14 \cdot \omega_1 = 150$	0.05	$2.14 \cdot \omega_1 = 150$	0	0	$70\% \cdot t^{tot}$
[Γ] ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ							
respVid5K	0.10	$0.71 \cdot \omega_1 = 50$	0.05	$2.14 \cdot \omega_1 = 150$	0	0	$70\% \cdot t^{tot}$
[Δ] ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Ο							
respVid6K	0	0	0	0	0.05	$0.71 \cdot \omega_1 = 50$	$70\% \cdot t^{tot}$
respVid7K	0	0	0	0	0.05	$2.14 \cdot \omega_1 = 150$	$70\% \cdot t^{tot}$
[Ε] ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΤΩ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ Ο							
respVid8K	0.05	$1.43 \cdot \omega_1 = 100$	0	0	0.05	$1.43 \cdot \omega_1 = 100$	$70\% \cdot t^{tot}$
[Ζ] ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΠΕΡΙ ΤΥΧΑΙΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ							
respVid9K	0.05	$1.43 \cdot \omega_1 = 100$	0.05	$1.43 \cdot \omega_1 = 100$	0.05	$1.43 \cdot \omega_1 = 100$	$70\% \cdot t^{tot}$

Πίνακας 2|Α.3.2

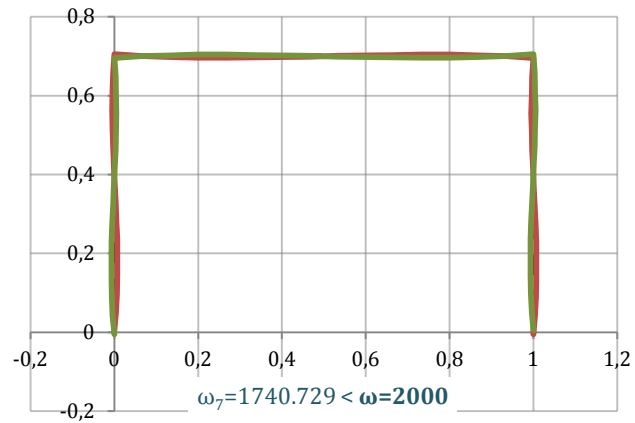
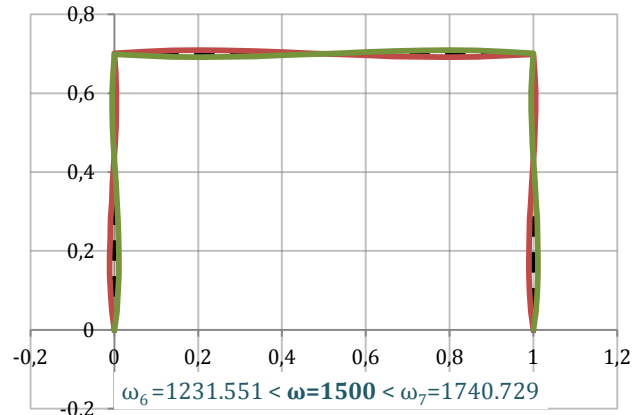
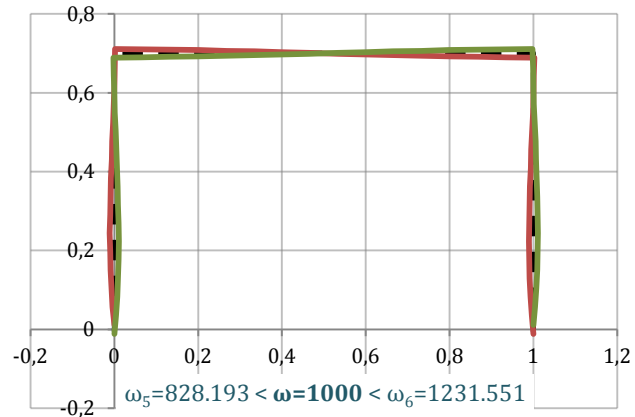
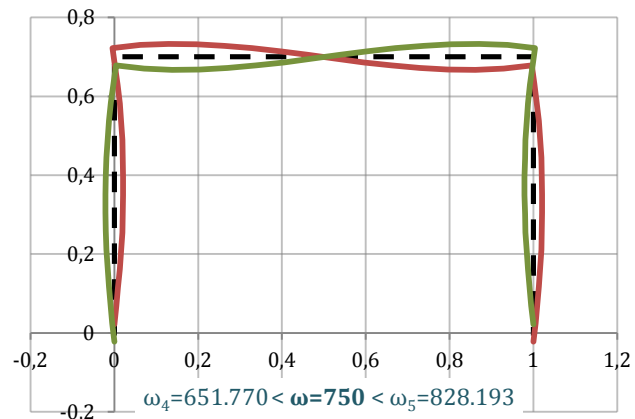
Α.3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΣΤΗ ΣΤΑΘΕΡΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Δόθηκε αρμονική κίνηση της βάσης στην περίπτωση που η βάση περιστρέφεται περί του μέσου Ο (περίπτωση [Δ] κίνησης, βλ. Πίνακα 2|Α.3.2). Με βάση τη θεωρία του εδαφίου Α.2.8, υπολογίστηκαν οι μορφές του εύρους της αρμονικής απόκρισης για 8 διαφορετικές τιμές της διεγείρουσας συχνότητας ω , εν σχέσει με τις ιδιοσυχνότητες που φαίνονται στον Πίνακα 1|Α.3.1 (ομάδες Γραφημάτων 16,17|Α.3.3).

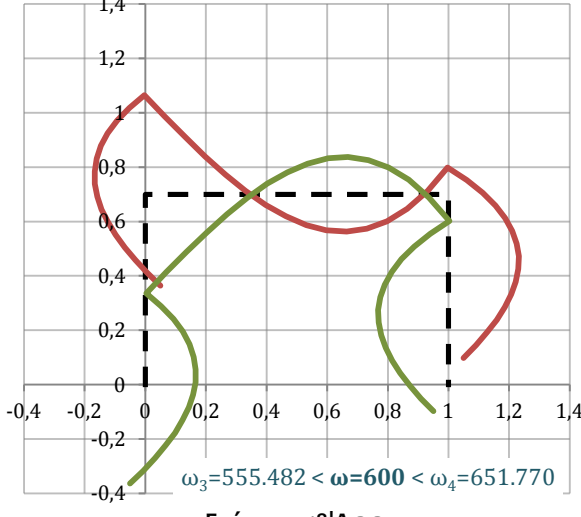
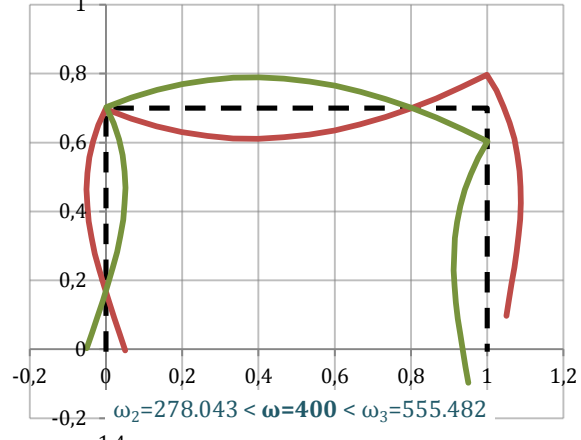
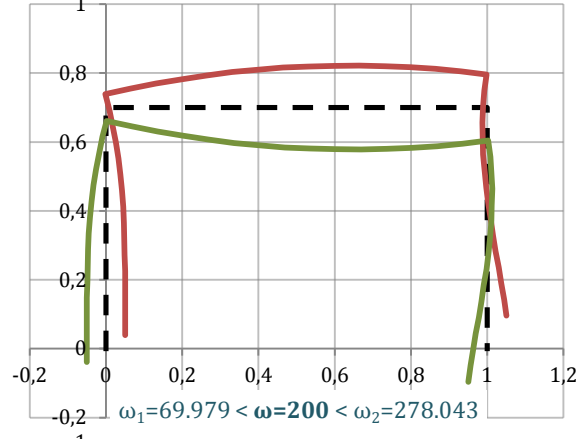
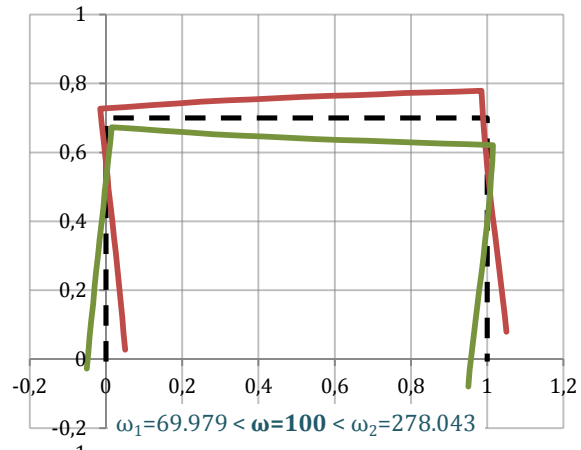
Δόθηκε, επίσης, αρμονική κίνηση της βάσης στην περίπτωση που η βάση περιστρέφεται ως προς οποιοδήποτε σημείο (περίπτωση [Ζ] κίνησης, βλ. Πίνακας 2|Α.3.2). Με βάση τη θεωρία του εδαφίου Α.2.8, υπολογίστηκαν οι μορφές του εύρους της αρμονικής απόκρισης για 8 διαφορετικές τιμές της διεγείρουσας συχνότητας ω , εν σχέσει με τις ιδιοσυχνότητες που φαίνονται στον Πίνακα 1|Α.3.1 (ομάδες Γραφημάτων 18,19|Α.3.3).



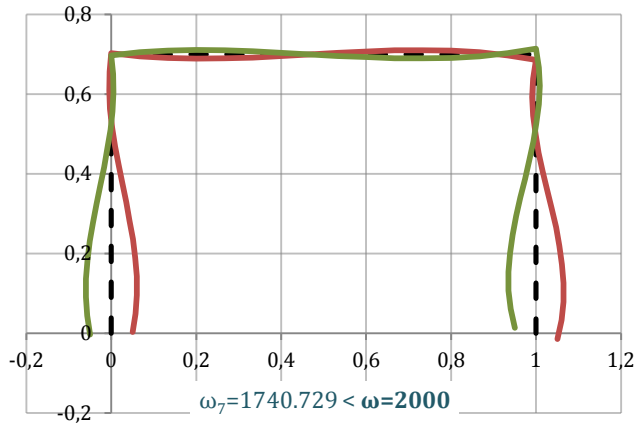
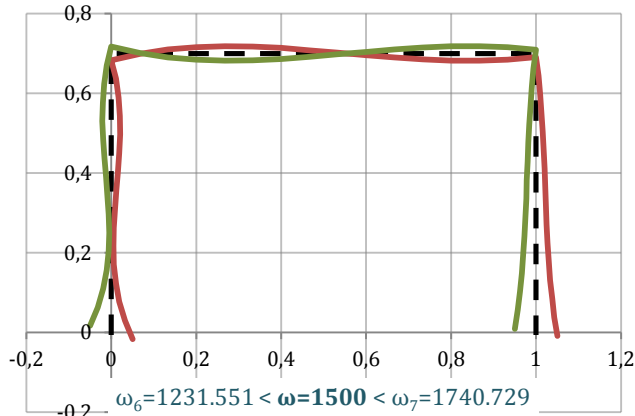
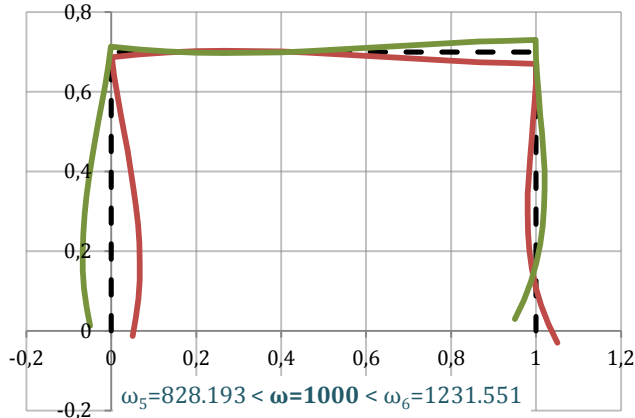
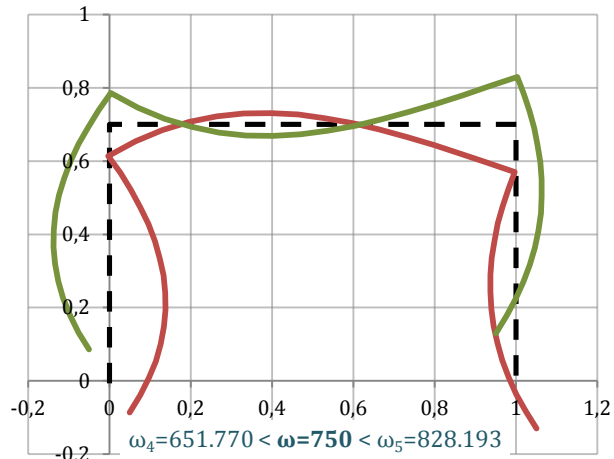
Γράφημα 16|Α.3.3



Γράφημα 17|Α.3.3



Γράφημα 18|Α.3.3



Γράφημα 19|Α.3.3

B' ΜΕΡΟΣ

Μελέτη της Ταλάντωσης Συνεχούς Συστήματος με τη Μέθοδο της Δυναμικής Ακαμψίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.1

Η Γενική Θεωρία

B.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η μελέτη της ταλάντωσης ενός πλαισίου ή ενός συστήματος ευθύγραμμων δοκών με κατανεμημένη μάζα, θεωρητικά δε διαφέρει από τη μελέτη της απλής δοκού με κατανεμημένη μάζα. Μετά τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών της ελεύθερης ταλάντωσης του πλαισίου, εφαρμόζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο η μέθοδος της Ιδιομορφικής Ανάλυσης και υπολογίζεται η απόκριση λόγω δοσμένης εξωτερικής διέγερσης.

Όμως, στην περίπτωση του πλαισίου, η κατάστρωση του ιδιοπροβλήματος ελεύθερης ταλάντωσης και η επίλυσή του (υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων και κανονικοποιημένων ιδιομορφών), είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και δύσκολη διαδικασία.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε πως, με τη κλασική Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων ή Μέθοδο Ακαμψίας της Στατικής Ανάλυσης, προσαρμοσμένη στη Δυναμική των Κατασκευών, είναι δυνατόν να καταστρωθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών της ελεύθερης ταλάντωσης του εξεταζόμενου πλαισίου. Θα υπολογισθούν οι ιδιολύσεις του προβλήματος των ιδιοτιμών και θα γίνει σύγκριση με τις ιδιολύσεις που υπολογίσθηκαν στο Α' Μέρος με τη Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών. Επίσης, θα υπολογισθούν οι μορφές αρμονικής απόκρισης λόγω αρμονικής κίνησης της βάσης του πλαισίου.

B.1.2 ΤΟ ΙΔΙΟΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Θεωρείται ότι ένα πλαίσιο (σύστημα ευθύγραμμων δοκών συνδεδεμένων με κόμβους) εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση. Ζητούμε να υπολογίσουμε τις ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές (ιδιολύσεις) της ελεύθερης ταλάντωσης.

Γνωρίζουμε ότι η ελεύθερη ταλάντωση ενός συστήματος είναι μία "σύγχρονη κίνηση" (βλ.εδ.Α.1.6) κατά την οποία, σε κάθε χρονική στιγμή t , η μετακίνηση του κάθε σημείου x του άξονα από τη θέση στατικής ισορροπίας, είναι μία αρμονική συνάρτηση του χρόνου, της μορφής:

$$v(x, t) = \varphi(x)\sin\omega t \quad (B.1.2.1)$$

όπου ω είναι η συχνότητα της σύγχρονης κίνησης και $\varphi(x)$ το εύρος της σύγχρονης κίνησης που εκτελεί το θεωρούμενο σημείο x στον άξονα της ταλάντωσης. Η $\varphi(x)$ ως συνάρτηση είναι το σχήμα της εκτελούμενης σύγχρονης κίνησης.

Κάθε ευθύγραμμη δοκός του πλαισίου, έστω η i , θα ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση ταλάντωσης της δοκού

$$-EI_i v_i^{IV}(x, t) + F_i(x, t) = m_i \ddot{v}_i(x, t) \quad (B.1.2.2)$$

Επειδή εξετάζεται η ελεύθερη ταλάντωση σε εξωτερική φόρτιση, $F_i(x, t) = 0$. Αντικαθιστώντας την B.1.2.1 στην B.1.2.2, προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση:

$$\varphi_i^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{c_i^4} \varphi_i(x) = 0 \quad (B.1.2.3)$$

η οποία έχει τη γενική λύση:

$$\varphi_i(x) = c_{1i} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c_i} x + c_{2i} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c_i} x + c_{3i} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c_i} x + c_{4i} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c_i} x \quad (B.1.2.4)$$

όπου $c_i^4 = \frac{EI_i}{m_i}$ και ω η συχνότητα της ελεύθερης ταλάντωσης.

Για τον προσδιορισμό των τεσσάρων σταθερών της γενικής λύσης B.1.2.4 κάθε δοκού του πλαισίου, απαιτούνται ισάριθμες οριακές συνθήκες (εδ.Β.1.5.1). Ο υπολογισμός των σταθερών των γενικών λύσεων όλων των ράβδων του πλαισίου οδηγεί στην κατάστρωση ενός ομογενούς αλγεβρικού συστήματος.

Για να έχουν οι σταθερές c_{ij} μη μηδενικές τιμές, ώστε να υφίσταται ταλάντωση, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών αυτού του συστήματος να είναι μηδέν. Η συνθήκη μηδενισμού της ορίζουσας είναι η "χαρακτηριστική εξίσωση" του ιδιοπροβλήματος της ελεύθερης ταλάντωσης του πλαισίου. Από την επίλυση της, προκύπτουν οι ρίζες της, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, r = 1, 2, \dots, \infty$, που αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του πλαισίου.

Για την κάθε ιδιοσυχνότητα ω_r , επιλύοντας το παραπάνω ομογενές αλγεβρικό σύστημα των οριακών συνθηκών, υπολογίζονται οι σταθερές c_{ij} των γενικών λύσεων των επιμέρους ράβδων, οπότε οι γενικές λύσεις της

εξίσωσης B.1.2.4, παρέχουν την ιδιομορφή $\varphi_{ir}(x)$ της κάθε ράβδου i , που αντιστοιχεί στη θεωρούμενη ιδιοσυχνότητα ω_r . Το σύνολο $\varphi_r(x)$ των ιδιομορφών $\varphi_{ir}(x)$ όλων των ράβδων i , είναι η ιδιομορφή του πλαισίου που αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_r .

Οι ιδιολύσεις της ελεύθερης ταλάντωσης είναι οι:

$$(\omega_1, \varphi_1(x)), (\omega_2, \varphi_2(x)), (\omega_3, \varphi_3(x)), \dots, (\omega_r, \varphi_r(x)), r = 1, 2, \dots, \infty \quad (B.1.2.5)$$

Η ελεύθερη ταλάντωση του πλαισίου με την r ιδιομορφή θα δίνεται από τη σχέση B.1.2.1:

$$v_r(x, t) = \varphi_r(x) \sin \omega t \quad (B.1.2.6)$$

Για τις ιδιομορφές $\varphi_r(x)$ ισχύουν οι σχέσεις ορθοκανονικότητας:

$$\begin{aligned} \int_l m(x) \varphi_r(x) \varphi_s(x) dx &= \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, \infty \\ \int_l [EI(x) \varphi_r''(x)]'' \varphi_s(x) dx &= \omega_r^2 \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, \infty \\ \int_l EI(x) \varphi_r''(x) \varphi_s''(x) dx &= \omega_r^2 \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, \infty \end{aligned}$$

B.1.3 ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η λύση οποιουδήποτε προβλήματος ταλάντωσης (εξαναγκασμένης ή ελεύθερης) του πλαισίου, μπορεί να βρεθεί με τη Μέθοδο της Ιδιομορφικής Ανάλυσης (Modal Analysis). Σύμφωνα με αυτήν, αναζητούνται λύσεις της μορφής:

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(x) \xi_r(t) \quad (B.1.3.1)$$

όπου $\varphi_r(x)$ είναι οι κανονικοποιημένες ιδιομορφές του πλαισίου και $\xi_r(t)$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες.

Η κάθε κανονική συντεταγμένη $\xi_r(t)$ καθορίζει το βαθμό συνεισφοράς της αντίστοιχης ιδιομορφής $\varphi_r(x)$ στην ταλάντωση $v(x, t)$ του πλαισίου. Κατά τη χρονική στιγμή t , οι κανονικές συντεταγμένες παρέχονται από την επίλυση των ασύζευκτων διαφορικών εξισώσεων:

$$\ddot{\xi}_r(t) + \omega_r^2 \xi_r(t) = N_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, \infty \quad (B.1.3.2)$$

Τα γενικευμένα φορτία $N_r(t)$ παρέχονται από τις:

$$N_r(t) = \int_l F(x, t) \varphi_r(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots, \infty \quad (B.1.3.3)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, η $F(x, t)$ είναι η εξωτερική φόρτιση που προκαλεί την μελετούμενη ταλάντωση του πλαισίου.

Οι αναπτυσσόμενες ροπές κάμψης υπολογίζονται με βάση την εξίσωση Euler-Bernoulli

$$M(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} EJ(x) \varphi_r''(x) \xi_r(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M(x, t) = EJ(x) \varphi_1''(x) \xi_1(t) + \dots + EJ(x) \varphi_n''(x) \xi_n(t)$$

όπου τα $\varphi_i(x)$ είναι οι γνωστές κανονικοποιημένες ιδιομορφές και τα $\xi_i(t)$ είναι οι γνωστές μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας.

Η τέμνουσα δύναμη, που αναπτύσσεται κατά μήκος του πλαισίου, παρέχεται από την εξίσωση

$$Q(x, t) = -\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -\sum_{r=1}^{\infty} \xi_r(t) \frac{\partial}{\partial x} [EJ(x) \varphi_r''(x)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q(x, t) = -\xi_1(t) \frac{\partial}{\partial x} [EJ(x) \varphi_1''(x)] - \dots - \xi_n(t) \frac{\partial}{\partial x} [EJ(x) \varphi_n''(x)]$$

Παραπάνω αναπτύχθηκε η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για την κατάστρωση των εξισώσεων των ιδιοσυχνοτήτων ω_r . Σε αυτή τη διαδικασία απαιτείται προηγουμένως να καταστρωθεί το αλγεβρικό ομογενές σύστημα υπολογισμού των συντελεστών c_{ij} των γενικών λύσεων $\varphi_i(x)$ των ράβδων i του πλαισίου.

Εν τούτοις, η κατάστρωση αυτού του ομογενούς συστήματος αποτελεί ένα σημαντικό πρακτικό πρόβλημα, αρκεί να σκεφθεί κανείς ότι για ένα απλό πλαίσιο δύο ανοιγμάτων και τριών στύλων, δηλαδή πέντε ράβδων, απαιτείται η κατάστρωση και η επίλυση ενός συστήματος $5 \times 4 = 20$ εξισώσεων και αγνώστων!

Η κατάστρωση της εξίσωσης των ιδιοσυχνοτήτων διευκολύνεται σημαντικά εάν η γενική λύση $\varphi_i(x)$ κάθε ράβδου του πλαισίου και οι ιδιότητές της, εκφραστούν συναρτήσει των τεσσάρων μετακινήσεων (2 εγκάρσιων και 2 στροφών) των δύο άκρων της, αντί των τεσσάρων συντελεστών c_{ij} . Τότε η ανάλυση του πλαισίου μπορεί να διεξαχθεί ακριβώς με το ίδιο τρόπο που εκφράζεται στη "Μέθοδο των Μετακινήσεων των Κόμβων" ή "Μέθοδο Ακαμψίας" της Στατικής, με τη μορφή της "Δυναμικής Μεθόδου των Μετακινήσεων των Κόμβων" ή "Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας".

Σε αυτήν υπολογίζονται οι συντελεστές δυναμικής ακαμψίας της κάθε ράβδου i του πλαισίου. Με βάση αυτούς, μπορεί να καταστρωθεί το καθολικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας του πλαισίου, το οποίο καθορίζει τη δυναμική

συμπεριφορά του. Ο τρόπος είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που γίνεται η κατάστρωση του μητρώου ακαμψίας ενός πλαισίου στη Στατική των Κατασκευών.

B.1.4 Η ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΙ Η ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο εδάφιο B.1.2, η ελεύθερη ταλάντωση ενός πλαισίου, με κάποια από τις ιδιοσυχνότητες της, έστω την ω_r , είναι αρμονική ταλάντωση με απόκριση B.1.2.6:

$$v_r(x, t) = \varphi_r(x) \sin \omega t \quad (B.1.4.1)$$

όπου $\varphi_r(x)$ είναι το σύνολο των αντίστοιχων ιδιομορφών που προκύπτουν από την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης B.1.2.3

$$\varphi_i^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{c_i^4} \varphi_i(x) = 0 \quad (B.1.4.2)$$

όλων των ράβδων i του πλαισίου. Αλλά και η εξαναγκασμένη ταλάντωση του πλαισίου στη σταθερή κατάσταση λόγω αρμονικής διέγερσης,

$$F(x, t) = F_0(x) \sin \omega t \quad (B.1.4.3)$$

με εύρος $F_0(x)$ και διεγείρουσα συχνότητα ω , είναι μία αρμονική ταλάντωση με απόκριση:

$$v_0(x, t) = \varphi_0(x) \sin \omega t \quad (B.1.4.4)$$

όπου $\varphi_0(x)$ είναι το συνολικό σχήμα της αρμονικής ταλάντωσης που προκύπτει από την ένωση των λύσεων των μη ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\varphi_i^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{c_i^4} \varphi_i(x) = F_{i0}(x) \quad (B.1.4.5)$$

όλων των ράβδων i του πλαισίου.

Οι δύο παραπάνω κινήσεις: α) η ιδιοταλάντωση με κάποια ιδιοσυχνότητα ω_r και β) η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με διεγείρουσα συχνότητα ω στη σταθερή κατάσταση, έχουν τις εξής χαρακτηριστικές ομοιότητες και διαφορές:

❖ Είναι και οι δύο αρμονικές ταλαντώσεις: i) η πρώτη με κάποια από τις ιδιοσυχνότητες $\omega_r, r = 1, 2, \dots, \infty$, που εξαρτώνται από τα μηχανικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συστήματος, και ii) η δεύτερη με τη δοσμένη διεγείρουσα συχνότητα ω .

❖ Οι μορφές - σχήματα αυτών των αρμονικών ταλαντώσεων υπολογίζονται: i) για τη πρώτη, από την επίλυση των ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων B.1.4.2 και το σχήμα τους είναι μεν καθορισμένο, αλλά το εύρος τους είναι απροσδιόριστο, και ii) για τη δεύτερη, την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση, υπολογίζονται από την επίλυση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης B.1.4.5 και το εύρος της είναι καθορισμένο και εξαρτάται από το εύρος της αρμονικής διέγερσης $F_0(x)$.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι η ιδιοταλάντωση με κάποια ιδιοσυχνότητα ω_r , είναι η ειδική περίπτωση μίας αρμονικής εξαναγκασμένης ταλάντωσης ω κατά την οποία η διεγείρουσα συχνότητα τείνει στην ιδιοσυχνότητα ω_r , δηλαδή $\omega \rightarrow \omega_r$, και το εύρος $F_0(x)$ της διεγείρουσας γίνεται πολύ μικρό, $F_0(x) \rightarrow 0$. Τότε, οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις B.1.4.2 και B.1.4.5 θα ταυτίζονται και οι λύσεις θα συμπίπτουν, δηλαδή $\varphi_0(x) \rightarrow \varphi_r(x)$.

Το παραπάνω σκεπτικό οδηγεί στην εξής μεθοδολογία υπολογισμού ιδιολύσεων ταλάντωσης πλαισίου. Υπολογίζουμε την αρμονική απόκριση του πλαισίου στη σταθερή κατάσταση $v_0(x, t) = \varphi_0(x)\sin\omega t$ (B.1.4.4) για τυχαία εξωτερική διέγερση $F(x, t) = F_0(x)\sin\omega t$ (B.1.4.3) με συχνότητα ω . Μεταβάλλουμε την ω , ώστε οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της B.1.4.5 να έχουν μη μηδενικές λύσεις για $F_0(x) \rightarrow 0$. Οι λύσεις αυτές θα είναι οι ζητούμενες ιδιομορφές του πλαισίου και οι τιμές που θα παίρνει η ω , θα είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες.

B.1.5 Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ Ή ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Θεωρείται ότι το ταλαντούμενο πλαίσιο (σύστημα συνδεδεμένων δοκών) που μελετάται, εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

$$v_0(x, t) = \varphi_0(x)\sin\omega t$$

στη σταθερή κατάσταση, λόγω αρμονικής εξωτερικής διέγερσης

$$F(x, t) = F_0(x)\sin\omega t$$

Η ταλάντωση αυτή είναι μία "σύγχρονη κίνηση" με την μορφή $\varphi_0(x)$ και με τη διεγείρουσα συχνότητα ω της αρμονικής διέγερσης, που έχει εύρος και κατανομή φορτίου $F_0(x)$.

Το πρόβλημα της ανάλυσης της αρμονικής εξαναγκασμένης ταλάντωσης του πλαισίου μπορεί να τεθεί ως εξής: «Υπό το δεδομένο εύρος και την αρμο-

νικά μεταβαλλόμενη κατανομή φορτίου $F_0(x)$, να ευρεθεί το αναπτυσσόμενο σχήμα $\varphi_0(x)$ του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης του πλαισίου».

Αυτή η διατύπωση της δυναμικής ανάλυσης του πλαισίου συμπίπτει με το αντικείμενο της Μεθόδου των Μετακινήσεων των Κόμβων (ή Μεθόδου Ακαμψίας) της Στατικής. Πράγματι, κατά τη Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας ακολουθούνται ακριβώς τα ίδια βήματα όπως και στη Στατική Μέθοδο Ακαμψίας:

① Επιλογή των βαθμών ελευθερίας που συνήθως είναι οι βαθμοί μεταθετότητας των κόμβων.

② Καθορισμός των συναρτήσεων σχήματος των στοιχείων που συνδέουν τους κόμβους - βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου δοκού, το οποίο όμως στη προκειμένη περίπτωση υποβάλλεται σε εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση λόγω αρμονικής κίνησης ενός από τους τέσσερις βαθμούς ελευθερίας του (εγκάρσια μετακίνηση και στροφή του κάθε άκρου του) με διεγείρουσα συχνότητα ω .

③ Υπολογισμός των ευρών των τεσσάρων αρμονικά μεταβαλλόμενων αντιδράσεων στα άκρα του -που ισούνται με τη ροπή κάμψης και την τέμνουσα σε κάθε άκρο του-, λόγω αρμονικής κίνησης του καθενός από τους παραπάνω τέσσερις βαθμούς ελευθερίας του. Τα εύρη των αντιδράσεων στα άκρα αποτελούν τα δεκαέξι (16) στοιχεία του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας στοιχείου δοκού, διαστάσεων 4×4 . Τα στοιχεία αυτά είναι συναρτήσεις της συχνότητας διεγερσης ω .

④ Κατάστρωση του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας k_{ij} του πλαισίου. Οι συντελεστές του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας είναι τα εύρη των αρμονικών δράσεων που πρέπει να ασκούνται σε κάθε βαθμό ελευθερίας i , όταν δίνεται αρμονική κίνηση με μοναδιαίο εύρος μόνον στον j βαθμό ελευθερίας. Τα k_{ij} υπολογίζονται με εξισώσεις ισορροπίας των βαθμών ελευθερίας, στις οποίες υπεισέρχονται οι αντιδράσεις στα άκρα των συντρεχουσών ράβδων, δηλαδή τα στοιχεία του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας κάθε ράβδου.

⑤ Κατάστρωση του μητρώου φόρτισης (επικόμβια φορτία) των βαθμών ελευθερίας.

Στην συνέχεια θα μελετηθούν οι ιδιότητες του στοιχείου δοκού υπό αρμονική ταλάντωση στη σταθερή κατάσταση και θα εξαχθούν τα στοιχεία του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας.

Η επιλογή των βαθμών ελευθερίας και η κατάστρωση του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας θα περιγραφούν στο επόμενο κεφάλαιο Β.2, μαζί με την δυναμική ανάλυση του μελετούμενου πλαισίου, λόγω κίνησης της βάσης του.

B.1.5.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ

Γνωρίζουμε ότι το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού δίνεται:

$$\varphi(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \quad (B.1.5.1.1)$$

όπου οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες. Παραγωγίζοντας μία φορά ως προς x , προκύπτει:

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{\omega}}{c} \left[-c_1 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_2 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \right] \quad (B.1.5.1.2)$$

❖ Όταν οι οριακές συνθήκες είναι

$$\begin{cases} x = 0 & \varphi(0) = \delta_{A0} \\ x = 0 & \varphi'(0) = 0 \\ x = L & \varphi(L) = 0 \\ x = L & \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (B.1.5.1.3)$$

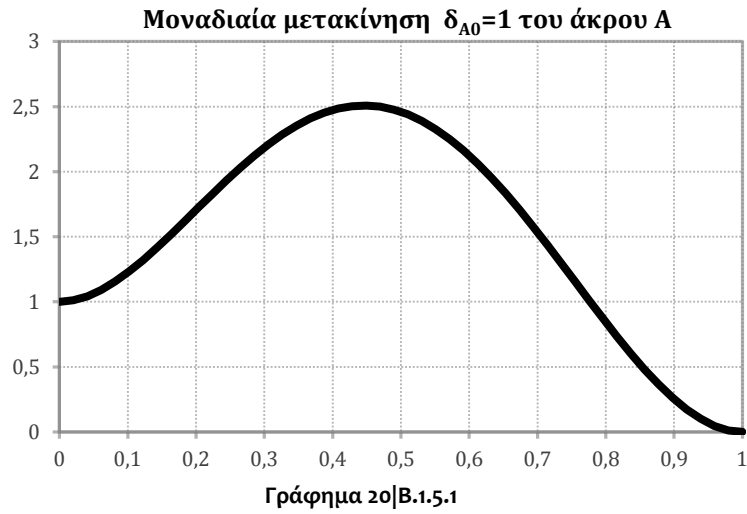
όπως φαίνεται στο Γράφημα 20|B.1.5.1, με αντικατάσταση στην παραπάνω γενική λύση B.1.5.1.1 και B.1.5.1.2, προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= c_1 + c_3 = \delta_{A0} \\ \varphi'(0) &= \frac{a}{L} (c_2 + c_4) = 0 \\ \varphi(L) &= c_1 \cos a + c_2 \sin a + c_3 \cosh a + c_4 \sinh a = 0 \\ \varphi'(L) &= \frac{a}{L} (-c_1 \sin a + c_2 \cos a + c_3 \sinh a + c_4 \cosh a) = 0 \end{aligned} \quad (B.1.5.1.4)$$

με επίλυση του οποίου προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τις σταθερές:

$$\begin{aligned} c_1 &= \delta_{A0} \cdot \frac{\sin a \sinh a - \cos a \cosh a + 1}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_2 &= \delta_{A0} \cdot \frac{-\cos a \sinh a - \sin a \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_3 &= \delta_{A0} \cdot \frac{1 - \sin a \sinh a - \cos a \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_4 &= \delta_{A0} \cdot \frac{\cos a \sinh a - \sin a \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \end{aligned} \quad (B.1.5.1.5)$$

Στο Γράφημα 20|B.1.5.1 φαίνεται το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού όταν $\delta_{A0} = 1$ και η τιμή του ορίσματος $a = 4.4$



❖ Όταν οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{cases} x = 0 & \varphi(0) = 0 \\ x = 0 & \varphi'(0) = 0 \\ x = L & \varphi(L) = \delta_{B0} \\ x = L & \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (B. 1.5.1.6)$$

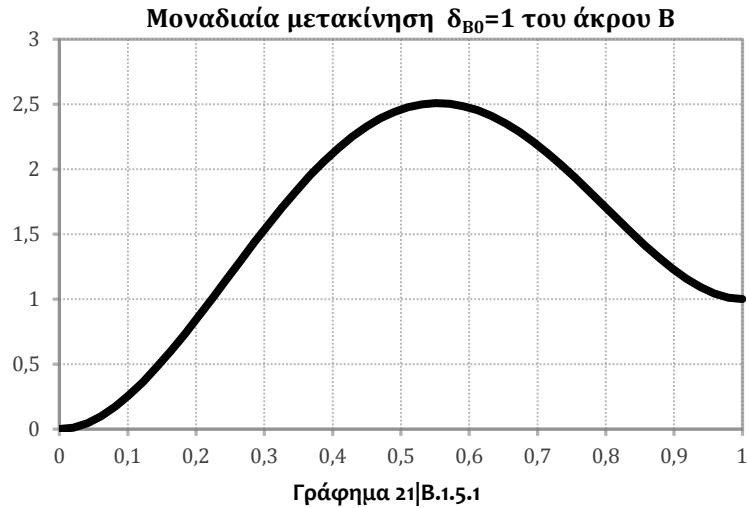
όπως φαίνεται στο Γράφημα 21|B.1.5.1, με αντικατάσταση στις B.1.5.1.1 και B.1.5.1.2, προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= c_1 + c_3 = 0 \\ \varphi'(0) &= \frac{a}{L}(c_2 + c_4) = 0 \\ \varphi(L) &= c_1 \cos a + c_2 \sin a + c_3 \cosh a + c_4 \sinh a = \delta_{B0} \\ \varphi'(L) &= \frac{a}{L}(-c_1 \sin a + c_2 \cos a + c_3 \sinh a + c_4 \cosh a) = 0 \end{aligned} \quad (B. 1.5.1.7)$$

με επίλυση του οποίου προκύπτουν οι σταθερές:

$$\begin{aligned} c_1 &= \delta_{B0} \cdot \frac{\cos a - \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_2 &= \delta_{B0} \cdot \frac{\sin a + \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_3 &= \delta_{B0} \cdot \frac{-\cos a + \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_4 &= \delta_{B0} \cdot \frac{-\sin a - \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \end{aligned} \quad (B. 1.5.1.8)$$

Στο Γράφημα 21|B.1.5.1 φαίνεται το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού όταν $\delta_{B0} = 1$ και η τιμή του ορίσματος $a = 4.4$



❖ Όταν οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{cases} x = 0 & \varphi(0) = 0 \\ x = 0 & \varphi'(0) = \theta_{A0} \\ x = L & \varphi(L) = 0 \\ x = L & \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (B.1.5.1.9)$$

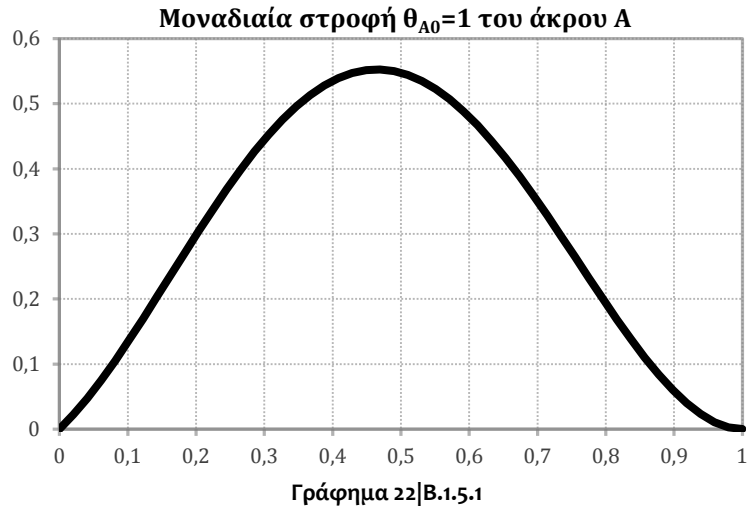
όπως φαίνεται στο Γράφημα 22|B.1.5.1, με αντικατάσταση στις B.1.5.1.1 και B.1.5.1.2, προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= c_1 + c_3 = 0 \\ \varphi'(0) &= \frac{a}{L}(c_2 + c_4) = \theta_{A0} \\ \varphi(L) &= c_1 \cos a + c_2 \sin a + c_3 \cosh a + c_4 \sinh a = 0 \\ \varphi'(L) &= \frac{a}{L}(-c_1 \sin a + c_2 \cos a + c_3 \sinh a + c_4 \cosh a) = 0 \end{aligned} \quad (B.1.5.1.10)$$

με επίλυση του οποίου προκύπτουν οι σταθερές:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\theta_{A0}L}{a} \cdot \frac{-\cos a \sinh a + \sin a \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_2 &= \frac{\theta_{A0}L}{a} \cdot \frac{1 - \cos a \cosh a - \sin a \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_3 &= \frac{\theta_{A0}L}{a} \cdot \frac{\cos a \sinh a - \sin a \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_4 &= \frac{\theta_{A0}L}{a} \cdot \frac{1 - \cos a \cosh a + \sin a \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \end{aligned} \quad (B.1.5.1.11)$$

Στο Γράφημα 22|B.1.5.1 φαίνεται το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού όταν $\theta_{A0} = 1$ και η τιμή του ορίσματος $a = 4.4$



❖ Όταν οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{cases} x = 0 & \varphi(0) = 0 \\ x = 0 & \varphi'(0) = 0 \\ x = L & \varphi(L) = 0 \\ x = L & \varphi'(L) = \theta_{B0} \end{cases} \quad (B. 1.5.1.12)$$

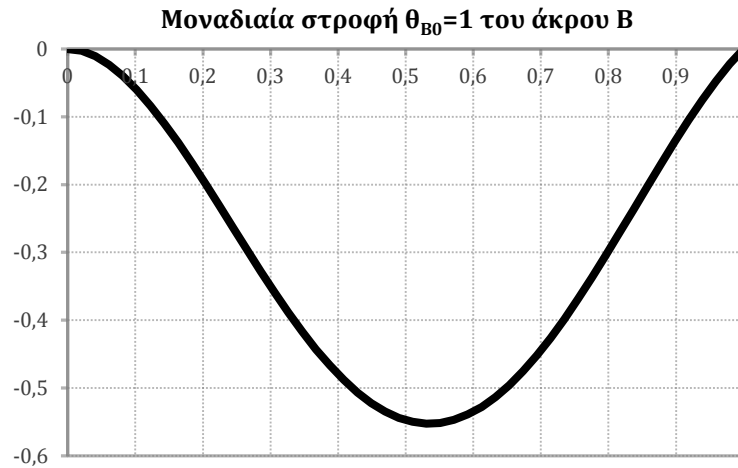
όπως φαίνεται στο Γράφημα 23|B.1.5.1, με αντικατάσταση στην στις B.1.5.1.1 και B.1.5.1.2, προκύπτει το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= c_1 + c_3 = 0 \\ \varphi'(0) &= \frac{a}{L}(c_2 + c_4) = 0 \\ \varphi(L) &= c_1 \cos a + c_2 \sin a + c_3 \cosh a + c_4 \sinh a = 0 \\ \varphi'(L) &= \frac{a}{L}(-c_1 \sin a + c_2 \cos a + c_3 \sinh a + c_4 \cosh a = \theta_{B0} \end{aligned} \quad (B. 1.5.1.13)$$

με επίλυση του οποίου προκύπτουν οι σταθερές:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\theta_{B0}L}{a} \cdot \frac{-\sin a + \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_2 &= \frac{\theta_{B0}L}{a} \cdot \frac{\cos a - \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_3 &= \frac{\theta_{B0}L}{a} \cdot \frac{\sin a - \sinh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \\ c_4 &= \frac{\theta_{B0}L}{a} \cdot \frac{1 - \cos a + \cosh a}{2(1 - \cos a \cosh a)} \end{aligned} \quad (B. 1.5.1.14)$$

Στο Γράφημα 23|B.1.5.1 φαίνεται το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού όταν $\theta_{B0} = 1$ και η τιμή του ορίσματος $a = 4.4$



Γράφημα 23|B.1.5.1

Τώρα, όταν οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{cases} x = 0 & \varphi(0) = \delta_{A0} \\ x = 0 & \varphi'(0) = \theta_{B0} \\ x = L & \varphi(L) = \delta_{A0} \\ x = L & \varphi'(L) = \theta_{B0} \end{cases} \quad (B.1.5.1.15)$$

τότε προφανώς, η μετακίνηση του στοιχείου δοκού θα είναι η επαλληλία των μετακινήσεων που υπολογίστηκαν ξεχωριστά σε κάθε μία από τις παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις, δηλαδή βάσει της B.1.5.1.1 και των άνωθι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & (c_{11}\delta_{A0} + c_{12}\delta_{B0} + c_{13}\theta_{A0} + c_{14}\theta_{B0}) \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ & + (c_{21}\delta_{A0} + c_{22}\delta_{B0} + c_{23}\theta_{A0} + c_{24}\theta_{B0}) \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ & + (c_{31}\delta_{A0} + c_{32}\delta_{B0} + c_{33}\theta_{A0} + c_{34}\theta_{B0}) \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ & + (c_{41}\delta_{A0} + c_{42}\delta_{B0} + c_{43}\theta_{A0} + c_{44}\theta_{B0}) \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \quad (B.1.5.1.16a) \end{aligned}$$

που όμως οι συντελεστές $c_{ij}, i, j = 1, \dots, 7$ αντιστοιχούν σε μοναδιαίες μετακινήσεις και στροφές του στοιχείου δοκού $\delta_{A0} = 1, \delta_{B0} = 1, \theta_{A0} = 1, \theta_{B0} = 1$ και δίνονται από τις σχέσεις B.1.5.1.3, B.1.5.1.6, B.1.5.1.9, B.1.5.1.12. Η παραπάνω εξίσωση B.1.5.1.16, αλλιώς γράφεται:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & [c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14}] \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + [c_{21} \ c_{22} \ c_{23} \ c_{24}] \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\
& + [c_{31} \ c_{32} \ c_{33} \ c_{34}] \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\
& + [c_{41} \ c_{42} \ c_{43} \ c_{44}] \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \quad (B.1.5.1.16b)
\end{aligned}$$

οπότε είναι προφανές ότι οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 της εξίσωσης B.1.5.1.16a,b, παρέχονται από τη μητρική εξίσωση

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \quad (B.1.5.1.17)$$

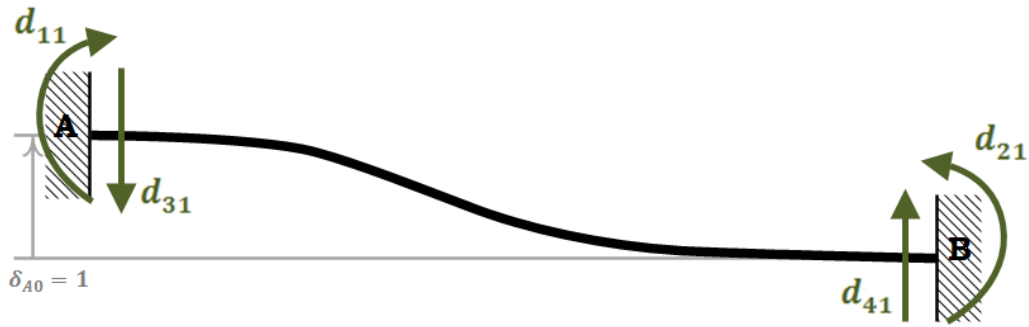
συναρτήσει των μετακινήσεων $\delta_{A0}, \delta_{B0}, \theta_{A0}, \theta_{B0}$ των άκρων του στοιχείου δοκού.

B.1.5.2 ΤΟ ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΔΟΚΟΥ

Το τοπικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας των στοιχείων δοκού ορίζεται από το σύστημα:

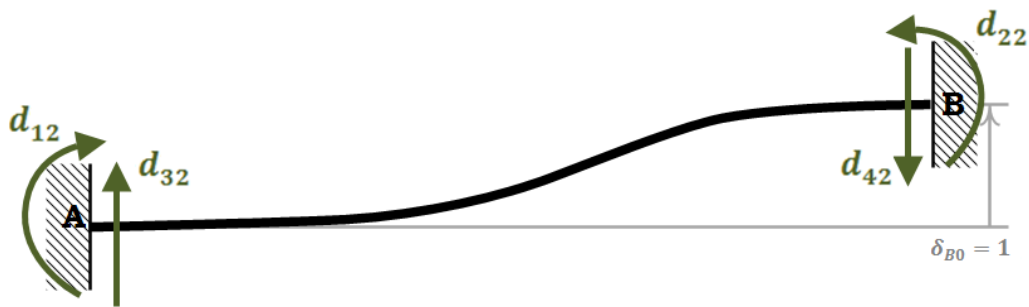
$$\begin{Bmatrix} M_{A0} \\ M_{B0} \\ V_{A0} \\ V_{B0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{A0} \\ \delta_{B0} \\ \theta_{A0} \\ \theta_{B0} \end{Bmatrix} \quad (B.1.5.2.1)$$

❖ Η πρώτη στήλη $\{d_{11} \ d_{21} \ d_{31} \ d_{41}\}^T$, παρέχει τα εύρη των αναπτυσσόμενων αντιδράσεων στα άκρα του στοιχείου, όταν το αριστερό άκρο εκτελεί αρμονική μετατόπιση με μοναδιαίο εύρος και συχνότητα ω , ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι ($\delta_{A0} = 1$ και $\delta_{B0} = \theta_{A0} = \theta_{B0} = 0$). Στο Σχήμα 9|B.1.5.2 παρουσιάζονται οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού, όταν $a = 0.10$, το οποίο μπορεί να συγκριθεί με το Γράφημα 20|B.1.5.1, όπου $a = 4.4$



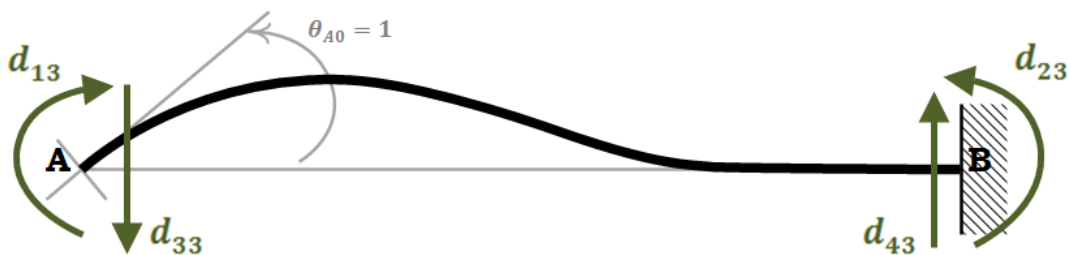
Σχήμα 9|B.1.5.2

❖ Παρομοίως, η δεύτερη στήλη του μητρώου $\{d_{12} \ d_{22} \ d_{32} \ d_{42}\}^T$, παρέχει τα εύρη των αναπτυσσόμενων αντιδράσεων στα άκρα του στοιχείου, όταν το δεξιό άκρο εκτελεί αρμονική μετατόπιση με μοναδιαίο εύρος και συχνότητα ω , ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι ($\delta_{B0} = 1$ και $\delta_{A0} = \theta_{A0} = \theta_{B0} = 0$). Στο Σχήμα 10|B.1.5.2 παρουσιάζονται οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού, όταν $a = 0.10$, το οποίο μπορεί να συγκριθεί με το Γράφημα 21|B.1.5.1, όπου $a = 4.4$



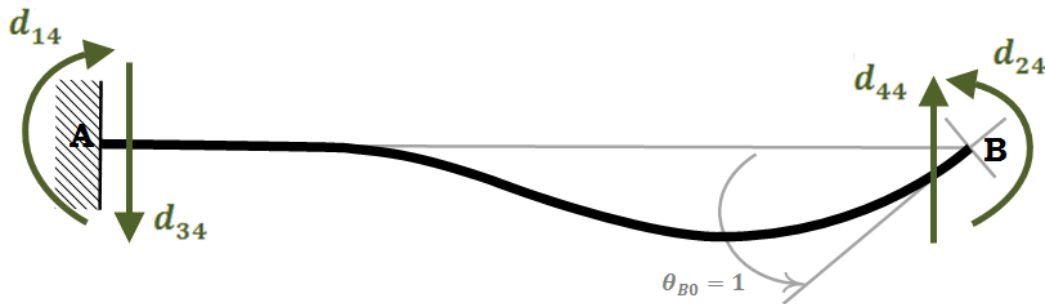
Σχήμα 10|B.1.5.2

❖ Η τρίτη στήλη $\{d_{13} \ d_{23} \ d_{33} \ d_{43}\}^T$, παρέχει τα εύρη των αναπτυσσόμενων αντιδράσεων στα άκρα του στοιχείου, όταν το αριστερό άκρο εκτελεί αρμονική στροφή με μοναδιαίο εύρος και συχνότητα ω , ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι ($\theta_{A0} = 1$ και $\delta_{A0} = \delta_{B0} = \theta_{B0} = 0$). Στο Σχήμα 11|B.1.5.2 παρουσιάζονται οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού, όταν $a = 0.10$, το οποίο μπορεί να συγκριθεί με το Γράφημα 22|B.1.5.1, όπου $a = 4.4$



Σχήμα 11|B.1.5.2

❖ Η τέταρτη στήλη $\{d_{14} \ d_{24} \ d_{34} \ d_{44}\}^T$, παρέχει τα εύρη των αναπτυσσό-
μενων αντιδράσεων στα άκρα του στοιχείου, όταν το δεξιό άκρο εκτελεί
αρμονική στροφή με μοναδιαίο εύρος και συχνότητα ω , ενώ όλοι οι υπόλοιποι
βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι ($\theta_{B0} = 1$ και $\delta_{A0} = \delta_{B0} = \theta_{A0} = 0$).
Στο Σχήμα 12|B.1.5.2 παρουσιάζονται οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού,
όταν $a = 0.10$, το οποίο μπορεί να συγκριθεί με το Γράφημα 23|B.1.5.1, όπου
 $a = 4.4$



Σχήμα 12|B.1.5.2

Για να υπολογίσουμε τους παραπάνω συντελεστές δυναμικής ακαμψίας
 d_{ij} , θα θεωρηθεί η μερική διαφορική εξίσωση ταλάντωσης του πρισματικού
στοιχείου δοκού

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (B.1.5.2.2)$$

όπου θεωρείται σταθερή κατανομή μάζας και ακαμψίας κατά μήκος του
στοιχείου, διότι κατά μήκος του στοιχείου δεν ασκείται κανένα εξωτερικό
φορτίο.

❖ Αρχίζοντας με τον υπολογισμό των στοιχείων της **πρώτης στήλης**, δίνε-
ται εγκάρσια αρμονική κίνηση του αριστερού άκρου A, της μορφής $\delta_A(t) =$
 $\delta_{A0} \sin \omega t$, με μοναδιαίο εύρος $\delta_{A0} = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευ-
θερίας παραμένουν ακίνητοι $\delta_{B0} = \theta_{A0} = \theta_{B0} = 0$. Η μετακίνηση κάθε σημείου
 x θα έχει τη μορφή $u(x, t) = \varphi(x) \sin \omega t$. Αντικαθιστώντας στη διαφορική
εξίσωση B.1.5.2.2 και απλοποιώντας προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \varphi^{IV}(x) \sin \omega t \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 \varphi(x) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{c^4} \varphi(x) = 0 \quad (B.1.5.2.3)$$

η οποία έχει γενική λύση την B.1.5.1.1:

$$\varphi(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x$$

Παραγωγίζοντας την B.1.5.1.1 δεύτερη και τρίτη φορά ως προς x , έχουμε:

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}\right)^2 \left[-c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x - c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \right] \\ \varphi'''(x) &= \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c}\right)^3 \left[c_1 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x - c_2 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_3 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_4 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \right]\end{aligned}\quad (B.1.5.2.4)$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι τα εύρη $M_{A0}, M_{B0}, V_{A0}, V_{B0}$ των αρμονικά μεταβαλλόμενων αντιδράσεων στα άκρα των στοιχείων δοκού της σχέσης B.1.5.2.1, παρέχονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}M_{A0} &= EI\varphi''(0) & V_{A0} &= -EI\varphi'''(0) \\ M_{B0} &= EI\varphi''(L) & V_{B0} &= -EI\varphi'''(L)\end{aligned}\quad (B.1.5.2.5)$$

Για τις εμφανιζόμενες, δεύτερες και τρίτες παραγώγους, βάσει των B.1.5.2.4, ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}\varphi''(0) &= \left(\frac{a}{L}\right)^2 (-c_1 + c_3) \\ \varphi'''(0) &= \left(\frac{a}{L}\right)^3 (-c_2 + c_4) \\ \varphi''(L) &= \left(\frac{a}{L}\right)^2 (-c_1 \cos a - c_2 \sin a + c_3 \cosh a + c_4 \sinh a) \\ \varphi'''(L) &= \left(\frac{a}{L}\right)^3 (c_1 \sin a - c_2 \cos a + c_3 \sinh a + c_4 \cosh a)\end{aligned}\quad (B.1.5.2.6)$$

$$\text{όπου } a = \frac{\sqrt{\omega}}{c} L \Rightarrow \frac{a}{L} = \frac{\sqrt{\omega}}{c}$$

Αντικαθιστώντας στη μητρική εξίσωση B.1.5.2.1 τα εύρη των αρμονικών μετακινήσεων, $\delta_{A0} = 1, \delta_{B0} = \theta_{A0} = \theta_{B0} = 0$, προκύπτει ότι:

$$d_{11} = M_{A0} \quad d_{21} = M_{B0} \quad d_{31} = V_{A0} \quad d_{41} = V_{B0}$$

όπου τα εύρη $M_{A0}, M_{B0}, V_{A0}, V_{B0}$, δίνονται από τις εξισώσεις B.1.5.2.5, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις B.1.5.2.6. Στις εξισώσεις B.1.5.2.6, οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 έχουν υπολογιστεί στο εδάφιο B.1.5.1 και συγκεκριμένα παρέχονται από τις B.1.5.1.5. Έτσι, υπολογίζονται τα ζητούμενα στοιχεία της πρώτης στήλης του μητρώου ακαμψίας:

$$\begin{aligned}d_{11} &= EI\varphi''(0) = EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\sin a \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{21} &= EI\varphi''(L) = EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\cos a + \cosh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{31} &= -EI\varphi'''(0) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^3 \frac{\cos a \sinh a + \sin a \cosh a}{1 - \cos a \cosh a}\end{aligned}$$

$$d_{41} = -EI\varphi'''(L) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^3 \frac{\sin a + \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \quad (B.1.5.2.7)$$

❖ Για τον υπολογισμό των στοιχείων της **δεύτερης στήλης**, δίνεται εγκάρσια αρμονική κίνηση του δεξιού άκρου B , της μορφής $\delta_B(t) = \delta_{B0} \sin \omega t$, με μοναδιαίο αρμονικό εύρος $\delta_{B0} = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι, $\delta_{A0} = \theta_{A0} = \theta_{B0} = 0$. Αντικαθιστώντας στη μητρική εξίσωση B.1.5.2.1 τα παραπάνω εύρη, έχουμε:

$$d_{12} = M_{A0} \quad d_{22} = M_{B0} \quad d_{32} = V_{A0} \quad d_{42} = V_{B0}$$

όπου τα εύρη $M_{A0}, M_{B0}, V_{A0}, V_{B0}$, δίνονται από τις εξισώσεις B.1.5.2.5, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις B.1.5.2.6. Στις εξισώσεις B.1.5.2.6, οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 , έχουν υπολογιστεί στο εδάφιο B.1.5.1 και συγκεκριμένα παρέχονται από τις B.1.5.1.8. Έτσι, προκύπτουν τα ζητούμενα στοιχεία της δεύτερης στήλης του μητρώου ακαμψίας:

$$\begin{aligned} d_{12} &= EI\varphi''(0) = EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\cos a + \cosh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{22} &= EI\varphi''(L) = EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\sin a \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{32} &= -EI\varphi'''(0) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^3 \frac{-\sin a - \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{42} &= -EI\varphi'''(L) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^3 \frac{-\cos a \sinh a - \sin a \cosh a}{1 - \cos a \cosh a} \quad (B.1.5.2.8) \end{aligned}$$

❖ Για τον υπολογισμό των στοιχείων της **τρίτης στήλης**, δίνεται αρμονική στροφή του αριστερού άκρου A της μορφής $\theta_A(t) = \theta_{A0} \sin \omega t$, με μοναδιαίο αρμονικό εύρος $\theta_{A0} = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι, $\delta_{A0} = \delta_{B0} = \theta_{B0} = 0$. Αντικαθιστώντας στη μητρική εξίσωση B.1.5.2.1 τα παραπάνω εύρη, έχουμε:

$$d_{13} = M_{A0} \quad d_{23} = M_{B0} \quad d_{33} = V_{A0} \quad d_{43} = V_{B0}$$

όπου τα εύρη $M_{A0}, M_{B0}, V_{A0}, V_{B0}$, δίνονται από τις εξισώσεις B.1.5.2.5, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις B.1.5.2.6, των οποίων οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 παρέχονται επ'ακριβώς από τις B.1.5.1.11. Έτσι, προκύπτουν τα ζητούμενα στοιχεία της τρίτης στήλης του μητρώου ακαμψίας:

$$\begin{aligned} d_{13} &= EI\varphi''(0) = EI \frac{\alpha \cos a \sinh a - \sin a \cosh a}{L (1 - \cos a \cosh a)} \\ d_{23} &= -EI\varphi'''(0) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{\sin a \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{33} &= EI\varphi''(L) = EI \frac{\alpha (-\sin a + \sinh a)}{L (1 - \cos a \cosh a)} \\ d_{43} &= -EI\varphi'''(L) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\cos a + \cosh a}{1 - \cos a \cosh a} \quad (B.1.5.2.9) \end{aligned}$$

❖ Τέλος, για τον υπολογισμό των στοιχείων της **τέταρτης στήλης**, δίνεται αρμονική στροφή του δεξιού άκρου B , της μορφής $\theta_B(t) = \theta_{B0} \sin \omega t$ με μοναδιαίο αρμονικό εύρος $\theta_{B0} = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν ακίνητοι, $\delta_{A0} = \delta_{B0} = \theta_{A0} = 0$. Αντικαθιστώντας στη μητρική εξίσωση Β.1.5.2.1 τα παραπάνω εύρη, έχουμε:

$$d_{14} = M_{A0} \quad d_{24} = M_{B0} \quad d_{34} = V_{A0} \quad d_{44} = V_{B0}$$

όπου τα εύρη $M_{A0}, M_{B0}, V_{A0}, V_{B0}$, δίνονται από τις εξισώσεις Β.1.5.2.5, σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Β.1.5.2.6, των οποίων οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 παρέχονται επ'ακριβώς από τις Β.1.5.1.14. Επομένως, τα ζητούμενα στοιχεία της τέταρτης στήλης του μητρώου ακαμψίας, είναι:

$$\begin{aligned} d_{14} &= EI\varphi''(0) = EI \frac{\alpha \sin a - \sinh a}{L (1 - \cos a \cosh a)} \\ d_{24} &= -EI\varphi'''(0) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{-\cos a + \cosh a}{1 - \cos a \cosh a} \\ d_{34} &= EI\varphi''(L) = EI \frac{\alpha \sin a \cosh a - \cos a \sinh a}{L (1 - \cos a \cosh a)} \\ d_{44} &= -EI\varphi'''(L) = -EI \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{\sin a \sinh a}{1 - \cos a \cosh a} \end{aligned} \quad (B.1.5.2.10)$$

Όταν το στοιχείο δοκού κινείται κατά μήκος του άξονά του, τότε η αξονική δύναμη που πρέπει να εφαρμόζεται για να πραγματοποιηθεί αυτή η μετατόπιση, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, είναι $F(t) = mL\ddot{\delta}(t)$, όπου $\delta(t)$ είναι η αξονική μετατόπιση του στοιχείου. Εάν αυτή είναι αρμονική, δηλαδή $\delta(t) = \delta_0 \sin \omega t$, τότε $\ddot{\delta}(t) = -\delta_0 \omega^2 \sin \omega t$ και επομένως η απαιτούμενη δύναμη γίνεται $F(t) = -mL\delta_0 \omega^2 \sin \omega t$, οπότε το εύρος της είναι $F_0 = -mL\delta_0 \omega^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.2 Ταλάντωση του Συστήματος λόγω Κίνησης της Βάσης του

Β.2.1 ΟΙ ΒΑΘΜΟΙ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Για την εφαρμογή της Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας στο μελετούμενο απλό πλαίσιο, ως βαθμοί ελευθερίας θα θεωρηθούν οι δυνατότητες μετακίνησης των τεσσάρων κόμβων A, B, C και D . Πιο συγκεκριμένα:

- $[\delta_{10}]$: το εύρος της αρμονικής στροφής του κόμβου A
- $[\delta_{20}]$: το εύρος της αρμονικής στροφής του κόμβου B
- $[\delta_{30}]$: το εύρος της αρμονικής στροφής του κόμβου C
- $[\delta_{40}]$: το εύρος της αρμονικής στροφής του κόμβου D
- $[\delta_{50}]$: το εύρος της αρμονικής μετατόπισης του ζυγώματος BC (δηλαδή η κοινή οριζόντια μετακίνηση των κόμβων B και C)
- $[\delta_{60}]$: το εύρος της αρμονικής μετατόπισης του υποστυλώματος AB (δηλαδή η κοινή κατακόρυφη μετακίνηση των κόμβων A και B)
- $[\delta_{70}]$: το εύρος της αρμονικής μετατόπισης του υποστυλώματος CD (δηλαδή η κοινή κατακόρυφη μετακίνηση των κόμβων C και D)

Υπενθυμίζεται ότι θεωρήθηκε ότι οι κόμβοι A και D , δεν μπορούν να έχουν οριζόντια μετακίνηση.

Τα εύρη των αρμονικών μετακινήσεων $\delta_{10}, \dots, \delta_{70}$, είναι τα άγνωστα μεγέθη που πρέπει να υπολογισθούν.

B.2.2 ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΚΑΘΟΛΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΤΟΥ ΔΟΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

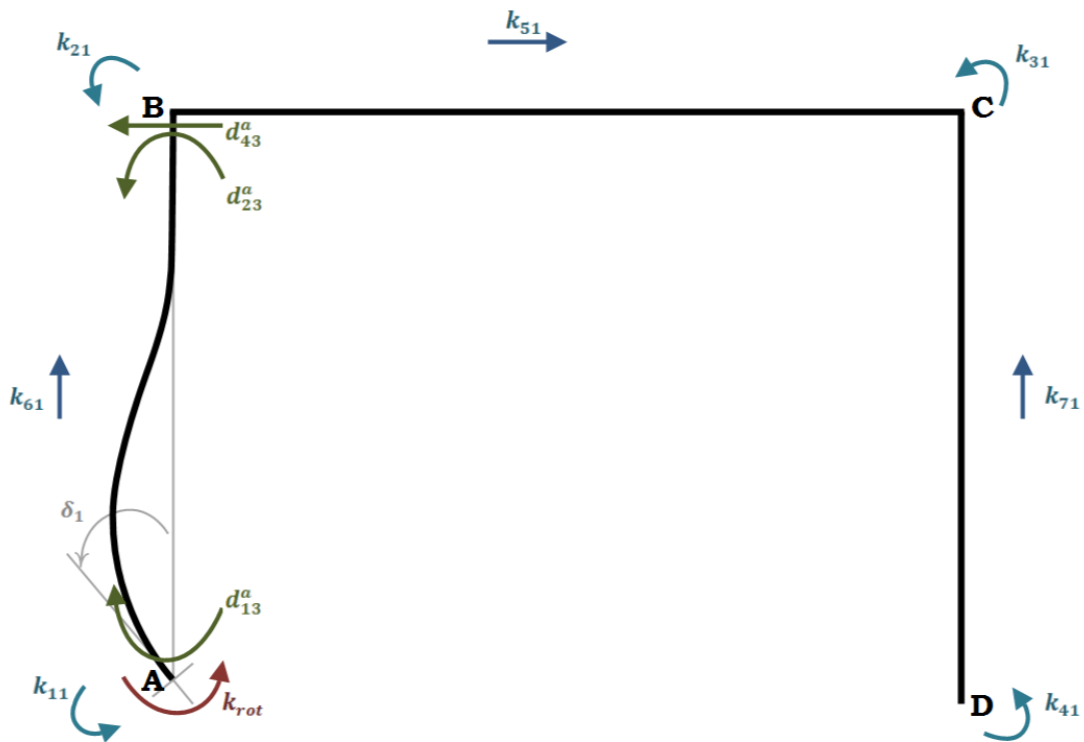
Επειδή το μελετούμενο δομικό σύστημα έχει επτά βαθμούς ελευθερίας, το καθολικό μητρώο δυναμικής ακαμψίας θα έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17} & \cdots & \cdots & k_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ \vdots \\ P_{70} \end{Bmatrix}$$

όπου οι συντελεστές $k_{ij} = k_{ij}(\omega)$, $i, j = 1, \dots, 7$ είναι συναρτήσεις της συχνότητας ταλάντωσης ω , τα δ_{i0} είναι τα εύρη αρμονικής ταλάντωσης των βαθμών ελευθερίας και τα P_{i0} είναι τα εύρη των αρμονικών διεγερουσών δυνάμεων με συχνότητα ω .

Με βάση τη γνωστή φυσική σημασία των συντελεστών ακαμψίας $k_{ij}(\omega)$, το στοιχείο k_{ij} της στήλης j , είναι το εύρος της αρμονικής δράσης που πρέπει να ασκείται έξωθεν στο βαθμό ελευθερίας i , ώστε ο βαθμός ελευθερίας j να εκτελεί αρμονική κίνηση με μοναδιαίο εύρος και όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας να παραμένουν ακινητοποιημένοι.

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i1} της **πρώτης στήλης**, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη στροφή με μοναδιαίο εύρος στο κάτω άκρο A του αριστερού υποστυλώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13|B.2.2.1.

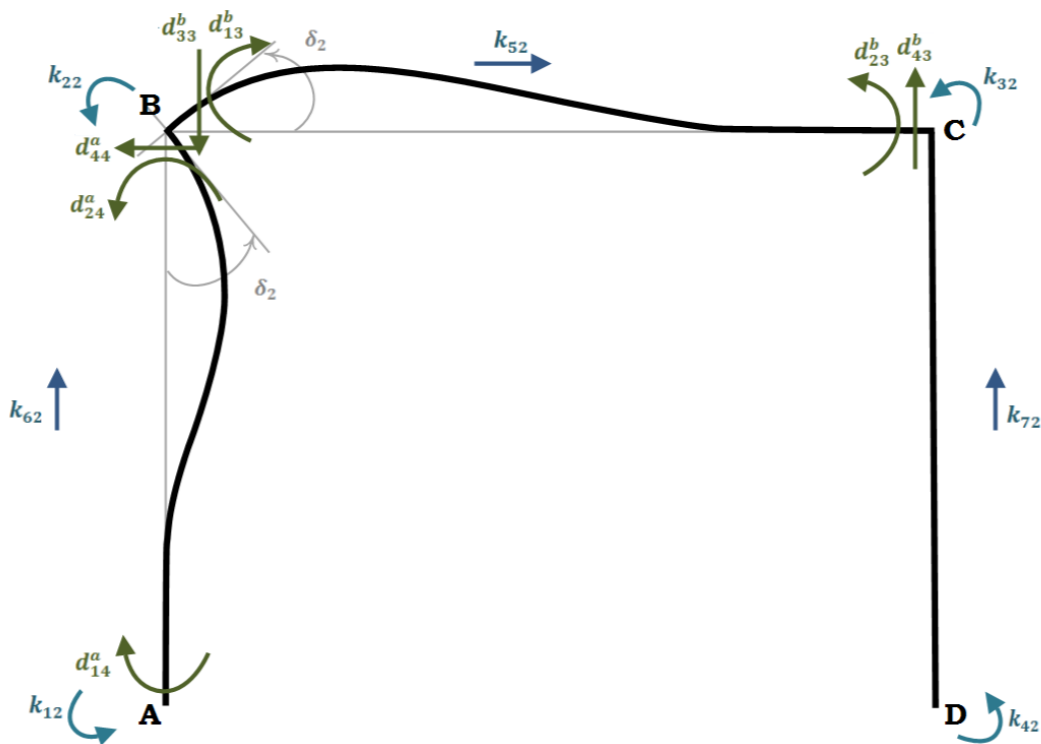


Σχήμα 13|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του υποστυλώματος AB είναι τα στοιχεία $\{d_{13}^a \ d_{23}^a \ d_{33}^a \ d_{43}^a\}$ της τρίτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του, καθώς επίσης και η ροπή k_{rot} του στρεπτικού ελατηρίου που ασκείται στο άκρο A . Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i1}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της πρώτης στήλης, $k_{i1}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{rot} - d_{13}^a \\
 k_{21} &= d_{23}^a \\
 k_{31} &= 0 \\
 k_{41} &= 0 \\
 k_{51} &= -d_{43}^a \\
 k_{61} &= 0 \\
 k_{71} &= 0
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i2} της **δεύτερης στήλης** του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη στροφή με μοναδιαίο εύρος στον κόμβο B του πλαισίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14|B.2.2.1.

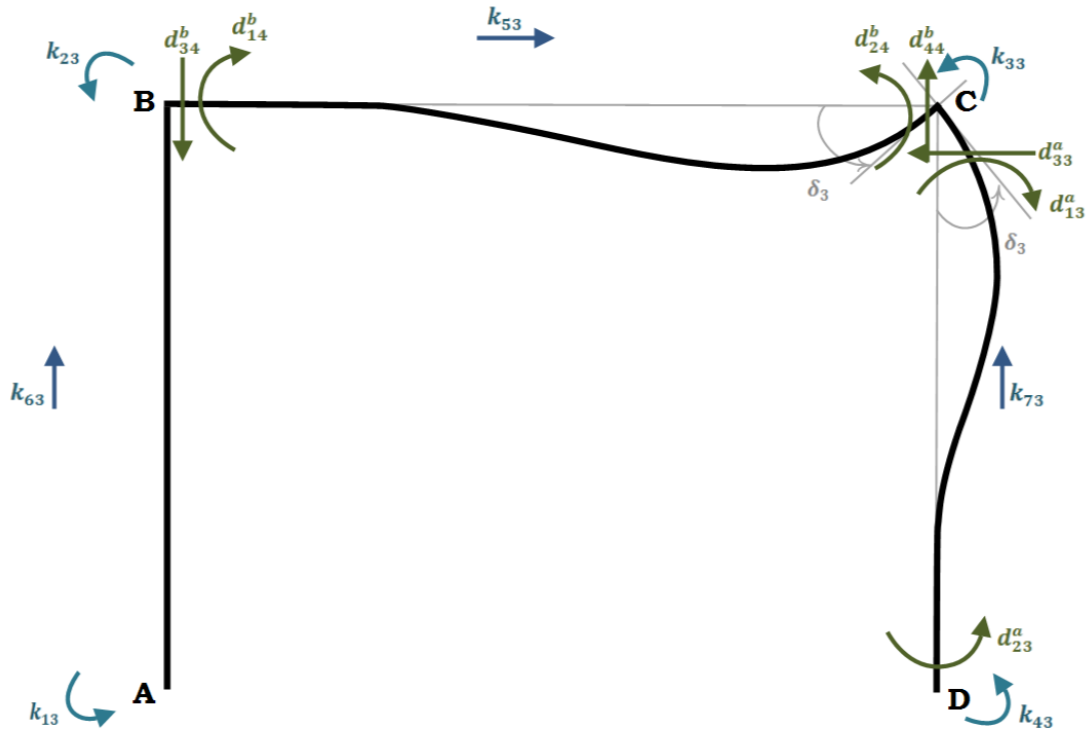


Σχήμα 14|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του υποστυλώματος AB είναι τα στοιχεία $\{d_{14}^a, d_{24}^a, d_{34}^a, d_{44}^a\}$ της τέταρτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του ζυγώματος BC είναι τα στοιχεία $\{d_{13}^b, d_{23}^b, d_{33}^b, d_{43}^b\}$ της τρίτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i2}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της δεύτερης στήλης $k_{i2}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= -d_{14}^a \\
 k_{22} &= d_{24}^a - d_{13}^b \\
 k_{32} &= d_{23}^b \\
 k_{42} &= 0 \\
 k_{52} &= -d_{44}^a \\
 k_{62} &= -d_{33}^b \\
 k_{72} &= d_{43}^b
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i3} της **τρίτης στήλης** του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη στροφή με μοναδιαίο εύρος στον κόμβο C του πλαισίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15|B.2.2.1.

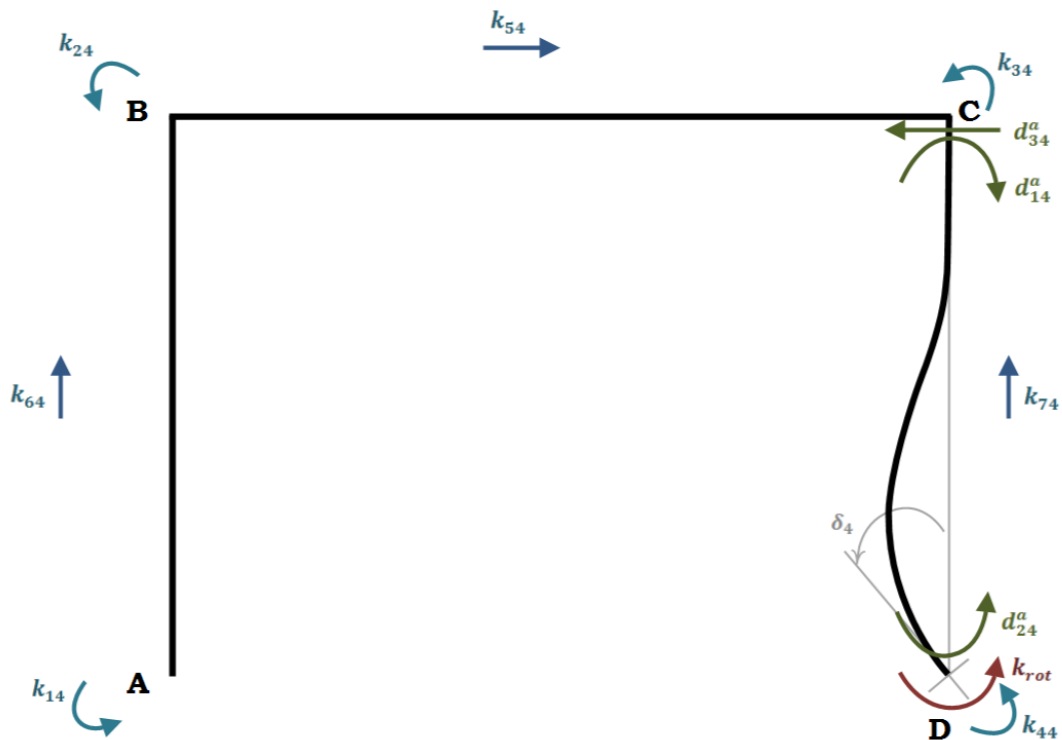


Σχήμα 15|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του ζυγώματος BC είναι τα στοιχεία $\{d_{14}^b \ d_{24}^b \ d_{34}^b \ d_{44}^b\}$ της τέταρτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του δεξιού υποστυλώματος CD είναι τα στοιχεία $\{d_{13}^a \ d_{23}^a \ d_{33}^a \ d_{43}^a\}$ της τρίτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i3}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της τρίτης στήλης $k_{i3}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{13} &= 0 \\
 k_{23} &= -d_{14}^b \\
 k_{33} &= d_{24}^b - d_{13}^a \\
 k_{43} &= d_{23}^a \\
 k_{53} &= -d_{33}^a \\
 k_{63} &= -d_{34}^b \\
 k_{73} &= d_{44}^b
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i4} της **τέταρτης στήλης**, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη στροφή με μοναδιαίο εύρος στο κάτω άκρο D του δεξιού υποστυλώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16|B.2.2.1.

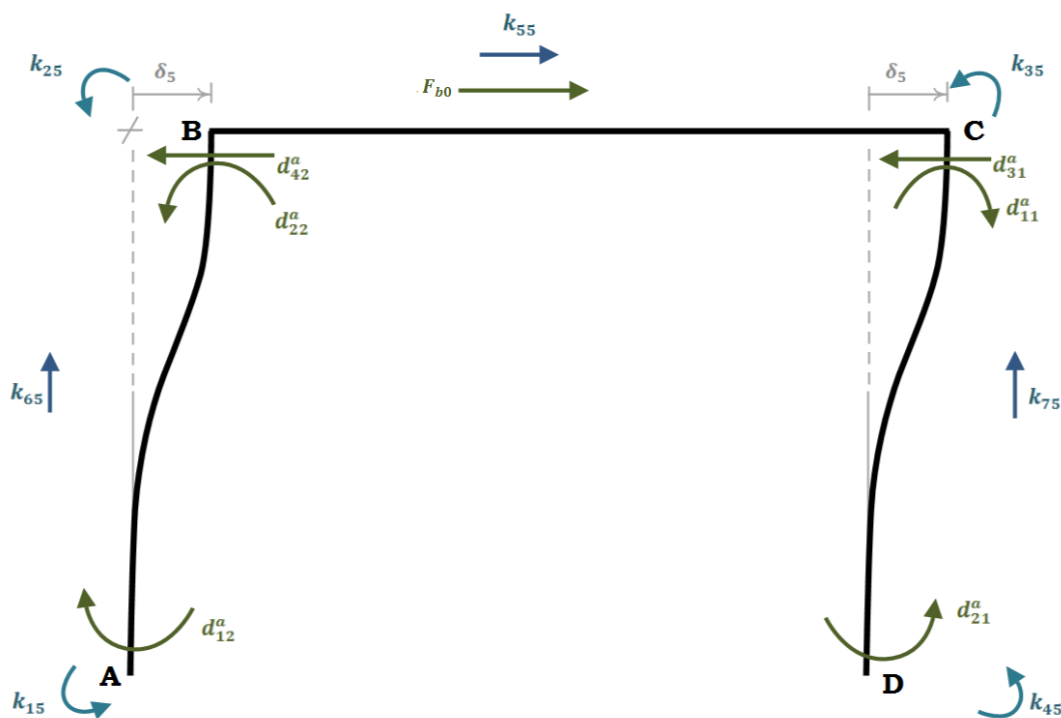


Σχήμα 16|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του υποστυλώματος CD είναι τα στοιχεία $\{d_{14}^a \ d_{24}^a \ d_{34}^a \ d_{44}^a\}$ της τέταρτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του, καθώς επίσης και η ροπή k_{rot} του στρεπτικού ελατηρίου που ασκείται στο κάτω άκρο του D . Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i4}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της τέταρτης στήλης $k_{i4}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{14} &= 0 \\
 k_{24} &= 0 \\
 k_{34} &= -d_{14}^a \\
 k_{44} &= k_{rot} + d_{24}^a \\
 k_{54} &= -d_{34}^a \\
 k_{64} &= 0 \\
 k_{74} &= 0
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i5} της **πέμπτης στήλης** του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη μετακίνηση με μοναδιαίο εύρος στο ζύγωμα BC , όπως φαίνεται στο Σχήμα 17|B.2.2.1.

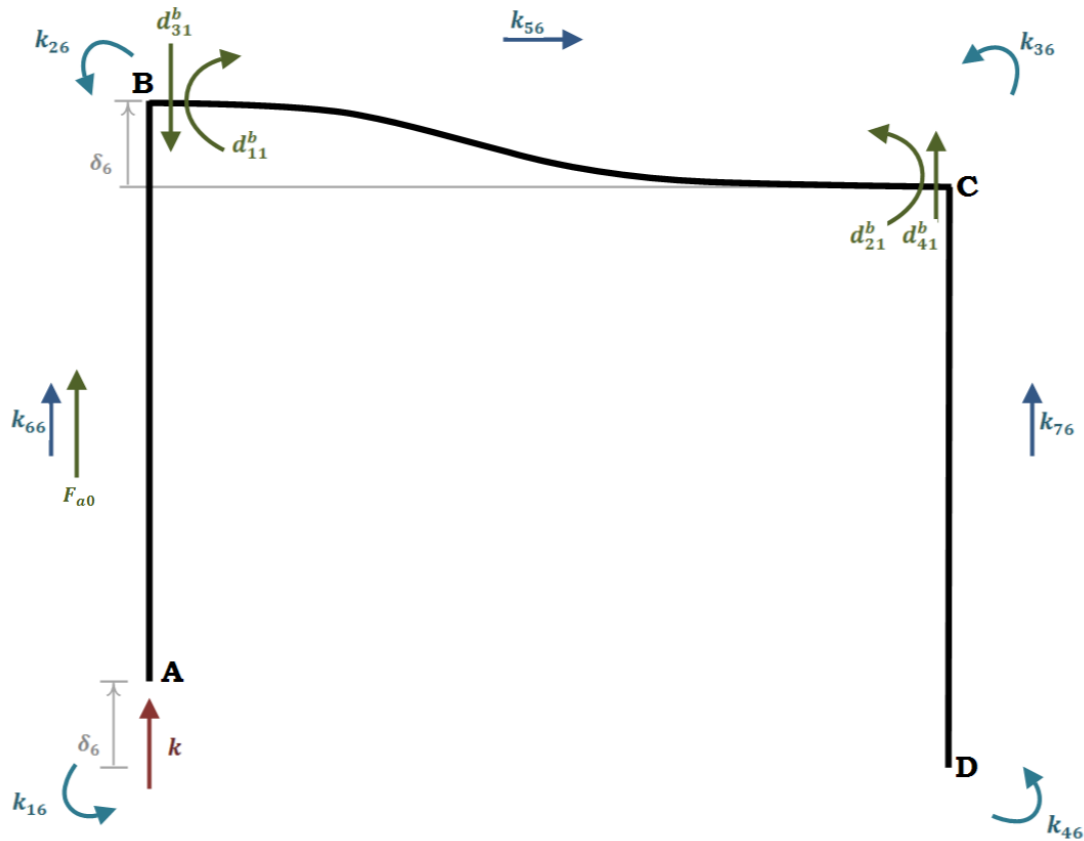


Σχήμα 17|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του υποστυλώματος AB είναι τα στοιχεία $\{d_{12}^a \ d_{22}^a \ d_{32}^a \ d_{42}^a\}$ της δεύτερης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του υποστυλώματος CD είναι τα στοιχεία $\{d_{11}^a \ d_{21}^a \ d_{31}^a \ d_{41}^a\}$ της πρώτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του. Επίσης, στο ζύγωμα ασκείται η οριζόντια αδρανειακή αρμονική δύναμη $F_b(t)$, με $F_b(t) = -\omega^2 m_b L_b \sin \omega t$, που οφείλεται στην επιτάχυνση της μάζας του. Κατά συνέπεια, το εύρος της είναι $F_{b0} = -\omega^2 m_b L_b$, όπως αναφέρθηκε στο τέλος του εδαφίου B.1.5.2. Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i5}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της πέμπτης στήλης $k_{i5}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{15} &= d_{12}^a \\
 k_{25} &= -d_{22}^a \\
 k_{35} &= -d_{11}^a \\
 k_{45} &= d_{21}^a \\
 k_{55} &= d_{42}^a - d_{31}^a + F_{b0} \\
 k_{65} &= 0 \\
 k_{75} &= 0
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i6} της έκτης στήλης του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη μετακίνηση με μοναδιαίο εύρος στο υποστυλόμετρο AB , όπως φαίνεται στο Σχήμα 18|B.2.2.1.



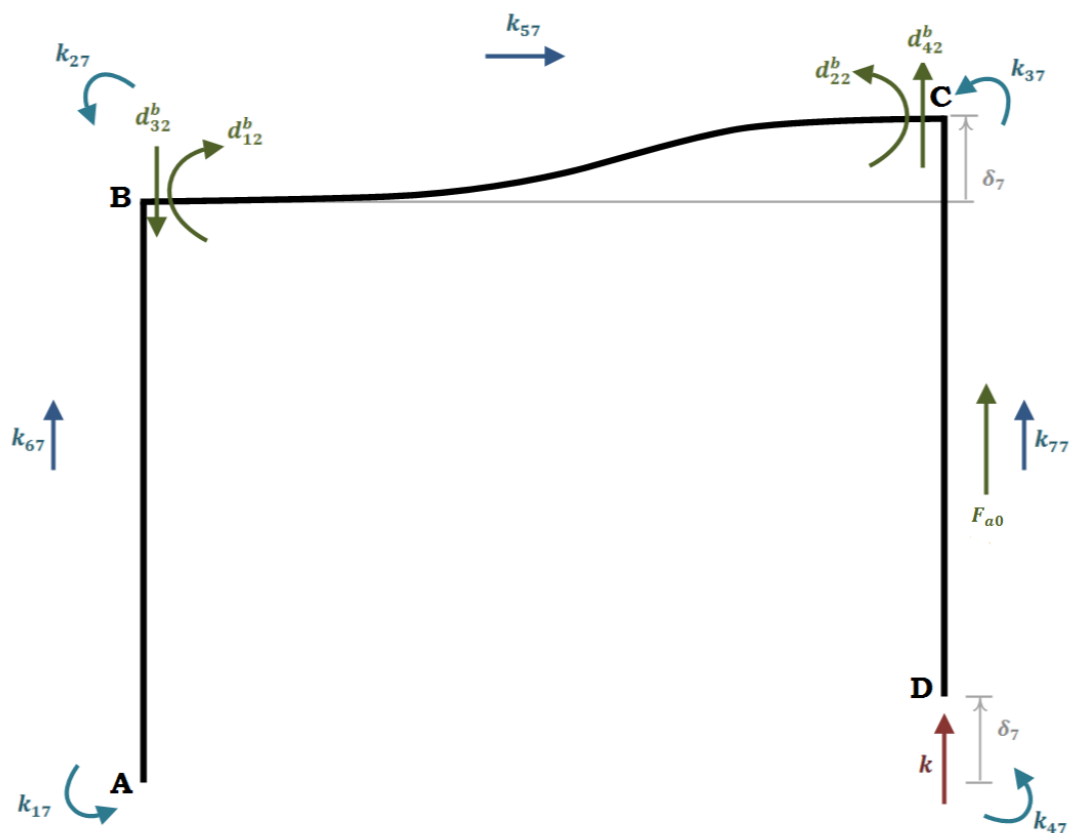
Σχήμα 18|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του ζυγώματος BC είναι τα στοιχεία $\{d_{11}^b \ d_{21}^b \ d_{31}^b \ d_{41}^b\}$ της πρώτης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του, καθώς επίσης και η δύναμη k του αξονικού ελατηρίου που ασκείται στο άκρο A . Επιπροσθέτως, στο υποστύλωμα AB ασκείται η κατακόρυφη αδρανειακή αρμονική δύναμη $F_a(t)$, με $F_a(t) = -\omega^2 m_a L_a \sin \omega t$, που οφείλεται στην επιτάχυνση της μάζας του. Συνεπώς, το εύρος της είναι $F_{a0} = -\omega^2 m_a L_a$, όπως αναφέρθηκε στο τέλος του εδαφίου B.1.5.2. Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i6}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της έκτης στήλης, $k_{i6}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{16} &= 0 \\
 k_{26} &= -d_{11}^b \\
 k_{36} &= d_{21}^b \\
 k_{46} &= 0 \\
 k_{56} &= 0 \\
 k_{66} &= k - d_{31}^b + F_{a0} \\
 k_{76} &= d_{41}^b
 \end{aligned}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό των στοιχείων k_{i7} της **έβδομης στήλης** του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας, δίνεται αρμονικά μεταβαλλόμενη

μετακίνηση με μοναδιαίο εύρος στο υποστύλωμα CD , όπως φαίνεται στο Σχήμα 19|B.2.2.1.



Σχήμα 19|B.2.2.1

Οι αναπτυσσόμενες αντιδράσεις στα άκρα του ζυγώματος BC είναι τα στοιχεία $\{d_{12}^b \ d_{22}^b \ d_{32}^b \ d_{42}^b\}$ της δεύτερης στήλης του τοπικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας του, καθώς επίσης και η δύναμη k του αξονικού ελατηρίου που ασκείται στο άκρο D . Επιπροσθέτως, στο υποστύλωμα CD ασκείται η κατακόρυφη αδρανειακή αρμονική δύναμη $F_a(t)$, με $F_a(t) = -\omega^2 m_a L_a \sin \omega t$, που οφείλεται στην επιτάχυνση της μάζας του. Συνεπώς, το εύρος της είναι $F_{a0} = -\omega^2 m_a L_a$, όπως αναφέρθηκε στο τέλος του εδαφίου B.1.5.2. Για να αναπτυχθούν οι παραπάνω αντιδράσεις απαιτείται να εφαρμοσθούν έξωθεν στους επτά βαθμούς ελευθερίας οι εικονιζόμενες δράσεις $k_{i7}, i = 1, \dots, 7$. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις ισοδυναμίας υπολογίζονται τα στοιχεία της έβδομης στήλης $k_{i7}, i = 1, \dots, 7$.

$$\begin{aligned}
 k_{17} &= 0 \\
 k_{27} &= -d_{12}^b \\
 k_{37} &= d_{22}^b \\
 k_{47} &= 0 \\
 k_{57} &= 0 \\
 k_{67} &= -d_{32}^b \\
 k_{77} &= k + d_{42}^b + F_{a0}
 \end{aligned}$$

B.2.3 ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Πριν την κατάστρωση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας των βαθμών ελευθερίας του πλαισίου, σύμφωνα με τη Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας, πρέπει να ευρεθεί το μητρώο της φόρτισης

$$\{\tilde{F}_0\} = [F_{10}, F_{20}, \dots, F_{70}]^T \quad (B.2.3.1)$$

Είναι γνωστό ότι για τον υπολογισμό των στοιχείων του μητρώου $\{\tilde{F}_0\}$ ακινητοποιούνται όλοι οι βαθμοί ελευθερίας και εφαρμόζεται η εκάστοτε δεδομένη αρμονική εξωτερική φόρτιση. Το στοιχείο $F_{i0}, i = 1, \dots, 7$, είναι το πλάτος της απαιτούμενης αρμονικής δράσης που πρέπει να ασκείται στο βαθμό ελευθερίας $i, i = 1, \dots, 7$, ώστε όλοι να παραμένουν ακινητοποιημένοι.

Επειδή στο μελετούμενο πρόβλημα δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση, θα θεωρηθεί ότι το μητρώο $\{\tilde{F}_0\}$ έχει υπολογιστεί ως εάν υπήρχε κάποια αρμονική εξωτερική φόρτιση.

Θεωρούμε την εξίσωση ισορροπίας του i βαθμού ελευθερίας. Η αναγκαία φόρτίσή του, δηλαδή λόγω της εξωτερικής φόρτισης και της μετακίνησης όλων των βαθμών ελευθερίας, θα θεωρηθεί ως η επαλληλία της φόρτισης λόγω της μετακίνησης μόνον του πρώτου βαθμού ελευθερίας, της μετακίνησης μόνο του δεύτερου βαθμού ελευθερίας, κ.ο.κ. και τέλος, λόγω της εξωτερικής φόρτισης με όλους τους βαθμούς ελευθερίας ακινητοποιημένους. Η συνολική φόρτιση πρέπει να ισούται με το άθροισμα,

$$k_{i1}(\omega)\delta_{10} + k_{i2}(\omega)\delta_{20} + \dots + k_{i7}(\omega)\delta_{70} + F_{i0} \quad (B.2.3.2)$$

των επιμέρους ασκούμενων δράσεων. Οι συντελεστές $k_{ij}(\omega)$ έχουν υπολογιστεί αναλυτικά στο εδάφιο B.2.2. Επειδή όμως στη πραγματικότητα δεν ασκούνται εξωτερικά φορτία στους βαθμούς ελευθερίας, θα ισχύει η εξίσωση:

$$k_{i1}(\omega)\delta_{10} + k_{i2}(\omega)\delta_{20} + \dots + k_{i7}(\omega)\delta_{70} + F_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (B.2.3.3a)$$

που σε μητρική μορφή γράφεται:

$$\begin{bmatrix} k_{11}(\omega) & k_{12}(\omega) & \dots & k_{17}(\omega) \\ k_{21}(\omega) & k_{22}(\omega) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{71}(\omega) & \dots & \dots & k_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ \vdots \\ F_{70} \end{Bmatrix} \quad (B.2.3.3b)$$

Αυτό αποτελεί το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας της Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας για το μελετούμενο πλαίσιο.

B.2.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΕΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Στο τέλος του εδαφίου B.1.4, περιγράφεται η μεθοδολογία, με την οποία μπορεί κάποιος, χρησιμοποιώντας το σύστημα B.2.3.3b της αρμονικής ταλάντωσης του πλαισίου, να υπολογίσει τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης. Προς τούτο, θεωρούμε ότι η εξωτερική φόρτιση $\{\tilde{F}_0\} \rightarrow \tilde{0}$, οπότε το B.2.3.3b, γράφεται:

$$\begin{bmatrix} k_{11}(\omega) & k_{12}(\omega) & \cdots & k_{17}(\omega) \\ k_{21}(\omega) & k_{22}(\omega) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega) & \cdots & \cdots & k_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (B.2.4.1)$$

Επειδή, όμως, επιθυμούμε να υπάρχει ταλάντωση, η ελεύθερη ταλάντωση, δηλαδή $\{\tilde{\delta}_{i0}\} \neq \tilde{0}$, θα πρέπει η συχνότητα ταλάντωσης ω να πάρει τέτοιες τιμές ώστε το προκύπτον σύστημα B.2.4.1, να έχει μη μηδενικές λύσεις. Αυτό συμβαίνει μόνον όταν η ορίζουσα των συντελεστών ακαμψίας είναι μηδέν, δηλαδή

$$\det \begin{vmatrix} k_{11}(\omega) & \cdots & k_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega) & \cdots & k_{77}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (B.2.4.2)$$

Όμως, η προκειμένη σχέση B.2.4.2 αποτελεί μία υπερβατική εξίσωση ως προς την συχνότητα ω . Οι ρίζες της $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, r = 1, 2, \dots, \infty$ είναι οι ιδιοσυχνότητες της ελεύθερης ταλάντωσης του πλαισίου και υπολογίζονται με αριθμητική μέθοδο.

Οι αντίστοιχες ιδιομορφές της $\{\tilde{\delta}_{i0}\}_r, r = 1, 2, \dots, \infty$, προκύπτουν από την επίλυση του ομογενούς απροσδιόριστου γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} k_{11}(\omega_r) & k_{12}(\omega_r) & \cdots & k_{17}(\omega_r) \\ k_{21}(\omega_r) & k_{22}(\omega_r) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega_r) & \cdots & \cdots & k_{77}(\omega_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1r} \\ \delta_{2r} \\ \vdots \\ \delta_{7r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (B.2.4.3)$$

που εξάγεται από το σύστημα B.2.4.1, θέτοντας $\omega = \omega_r, r = 1, 2, \dots, \infty$ (τα είναι ω_r γνωστά).

Στο κεφάλαιο B.3 διεξάγεται ο υπολογισμός των ιδιομορφών, οι οποίες φαίνονται στα Γραφήματα 24-33|B.3.1

B.2.5 ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΛΟΓΩ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Έστω $v^t(x, t)$ η απόκριση του πλαισίου λόγω κίνησης της βάσης του (των στηρίξεών του). Αυτή μπορεί να γραφθεί σαν:

$$v^t(x, t) = v(x, t) + v^s(x, t) \quad (B.2.5.1)$$

Σε αυτή τη σχέση:

- ❖ ο όρος $v(x, t)$ είναι η σχετική ταλάντωση του άξονα του πλαισίου ως προς το αρχικό απαραμόρφωτο ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο κινείται σαν ένα στερεό ορθογώνιο μαζί με τη βάση, εκτελώντας τη δεδομένη κίνηση της βάσης, ενώ
- ❖ ο όρος $v^s(x, t)$ είναι η κίνηση όλων των στοιχείων x του στερεού απαραμόρφωτου ορθογωνίου (που κινείται μαζί με τη βάση) ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς (ως προς το οποίο ορίζεται η κίνηση της βάσης - μετοχική κίνηση).

Η κίνηση $v^t(x, t)$ του πλαισίου μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις κινήσεις των επτά βαθμών ελευθερίας του $\delta_i^t(t), i = 1, \dots, 7$.

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στην εξίσωση B.2.5.1, κάθε κίνηση $\delta_i^t(t)$, μπορεί να γραφθεί

$$\delta_i^t(t) = \delta_i(t) + \delta_i^s(t) \quad (B.2.5.2)$$

όπου:

- ❖ ο όρος $\delta_i(t)$ είναι η σχετική μετακίνηση του i βαθμού ελευθερίας ως προς το αρχικό απαραμόρφωτο ορθογώνιο σχήμα του, που κινείται μαζί με τη βάση σαν ένα ενιαίο στερεό σώμα, ενώ
- ❖ ο όρος $\delta_i^s(t)$ είναι η μετακίνηση του i βαθμού ελευθερίας του στερεού απαραμόρφωτου ορθογωνίου, ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς (μετοχική κίνηση).

Θα υποθέσουμε ότι η βάση εκτελεί δεδομένη αρμονική κίνηση με συχνότητα διέγερσης ω . Τότε, το πλαίσιο στη σταθερή κατάσταση, θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με την ίδια συχνότητα ω , έτσι ώστε η εξίσωση B.2.5.2 να μπορεί να γραφθεί:

$$\delta_{i0}^t \sin \omega t = \delta_{i0} \sin \omega t + \delta_{i0}^s \sin \omega t \quad (B.2.5.3)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\delta_{i0}^t = \delta_{i0} + \delta_{i0}^s, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (B.2.5.4)$$

όπου:

- ❖ ο όρος δ_{i0} είναι το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης του i βαθμού ελευθερίας ως προς το απαραμόρφωτο πλαίσιο που κινείται σε στερεό σώμα μαζί με τη βάση, και
- ❖ ο όρος δ_{i0}^s είναι το εύρος της μετοχικής αρμονικής κίνησης του i βαθμού ελευθερίας του απαραμόρφωτου πλαισίου, ως προς το απόλυτο σύστημα αναφοράς.

Κατά την κίνηση αυτή, στους βαθμούς ελευθερίας ασκούνται δράσεις από τα άκρα των κινούμενων μελών τα οποία συντρέχουν σε αυτούς, οι οποίες δράσεις, σε κάθε χρονικό σημείο, βρίσκονται σε ισορροπία.

Οι δράσεις αυτές ανάγονται:

- ❖ σε δράσεις λόγω της σχετικής ταλάντωσης του πλαισίου εν σχέσει με το απαραμόρφωτο πλαίσιο που κινείται μαζί με τη βάση σαν ενιαίο στερεό σώμα, και
- ❖ σε επιπλέον δράσεις λόγω της μετοχικής κίνησης του απαραμόρφωτου πλαισίου ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Όμως, κατά την ανάλυση μίας απόλυτης κίνησης σε σχετική και μετοχική, η επιτάχυνση ενός σημείου ανάγεται σε σχετική επιτάχυνση, μετοχική επιτάχυνση και επιτάχυνση Coriolis. Η τελευταία υπολογίζεται από τη σχέση $\tilde{\gamma}_c = 2\tilde{\omega} \times \tilde{v}_{\sigma\chi}$, όπου $\tilde{\omega}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς (απαραμόρφωτο ορθογώνιο πλαίσιο που κινείται μαζί με τη βάση σαν ένα σώμα) και $\tilde{v}_{\sigma\chi}$ είναι η σχετική ταχύτητα του θεωρούμενου σημείου (του i βαθμού ελευθερίας), ως προς το κινούμενο σύστημα αναφοράς.

Όμως, στο μελετούμενο πρόβλημα, τόσο οι κινήσεις $u^s(t), v^s(t), \varphi^s(t)$ της βάσης (που προκαλούν τη γωνιακή ταχύτητα $\tilde{\omega}$), όσο και η σχετική ταλάντωση του πλαισίου ως προς το απαραμόρφωτο ορθογώνιο που κινείται σε στερεό σώμα μαζί με τη βάση (που παρέχει τη σχετική ταχύτητα $\tilde{v}_{\sigma\chi}$), είναι μικρά μεγέθη. Έτσι, η επιτάχυνση Coriolis, $\tilde{\gamma}_c = 2\tilde{\omega} \times \tilde{v}_{\sigma\chi}$, ως γινόμενο μικρών μεγεθών, μπορεί να θεωρηθεί συγκρίσιμη με τη σχετική επιτάχυνση και με τη μετοχική επιτάχυνση. Γι'αυτό το λόγο, κατά τον υπολογισμό των δράσεων που ασκούνται στους βαθμούς ελευθερίας, λαμβάνονται υπ'όψιν μόνο οι δράσεις που οφείλονται στη σχετική και στη μετοχική επιτάχυνση και αμελούνται οι δράσεις που οφείλονται στην επιτάχυνση Coriolis.

Για τον υπολογισμό των δράσεων, που οφείλονται στις ελαστικές και στις αδρανειακές δυνάμεις λόγω της σχετικής ταλάντωσης του πλαισίου, θα εφαρμοστεί η Δυναμική Μέθοδος Ακαμψίας. Σύμφωνα με αυτήν, για να διατηρηθεί η σχετική κίνηση, θα πρέπει να ασκείται στον i βαθμό ελευθερίας αρμονική δράση με εύρος:

$$k_{i1}(\omega)\delta_{i0} + k_{i2}(\omega)\delta_{i0} + \dots + k_{i7}(\omega)\delta_{i0}, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (B.2.5.5)$$

όπου $k_{ij}(\omega)$ οι συντελεστές ακαμψίας και δ_{i0} τα εύρη των σχετικών αρμονικών δράσεων των βαθμών ελευθερίας. Η τελευταία εξίσωση B.2.5.5, πιο συνοπτικά γράφεται:

$$[k_{i1}(\omega), k_{i2}(\omega), \dots, k_{i7}(\omega)][\delta_{10}, \delta_{20}, \dots, \delta_{70}]^T \quad (B. 2.5.6)$$

Για τον υπολογισμό των δράσεων λόγω της μετοχικής κίνησης του απαραμόρφωτου πλαισίου (που οφείλονται μόνο στις αδρανειακές δυνάμεις, ενώ δεν αναπτύσσονται ελαστικές δυνάμεις), θα γίνει χρήση των συντελεστών μάζας m_{ij} .

Ο συντελεστής μάζας m_{ij} , όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο A.1.4, είναι η δράση που πρέπει να ασκείται στον i βαθμό ελευθερίας, όπου ο βαθμός ελευθερίας j , λαμβάνει μοναδιαία επιτάχυνση, ενώ όλοι οι υπόλοιποι έχουν μηδενική επιτάχυνση. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για να διατηρείται η μετοχική κίνηση του απαραμόρφωτου πλαισίου, κατά την οποία τα εύρη των μετοχικών αρμονικών επιταχύνσεων των βαθμών ελευθερίας είναι $\delta_{i0}^s, i = 1, \dots, 7$, θα πρέπει στον i βαθμό ελευθερίας να ασκείται δράση:

$$m_{i1}(\omega)\delta_{10}^s + m_{i2}(\omega)\delta_{20}^s + \dots + m_{i7}(\omega)\delta_{70}^s \quad (B. 2.5.7)$$

Οι συντελεστές μάζας $m_{ij}(\omega)$ θα υπολογιστούν στο επόμενο εδάφιο B.2.5.1 χρησιμοποιώντας την εξίσωση A.1.4.5 του εδαφίου A.1.4. Σε αυτήν την εξίσωση υπεισέρχονται οι τέσσερις συναρτήσεις σχήματος των στοιχείων δοκού που περιγράφονται στο εδάφιο B.1.5.2. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές παρέχουν τη μορφή του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού για αρμονική κίνηση ενός εκ των τεσσάρων βαθμών ελευθερίας του και ότι είναι συναρτήσεις της συχνότητας ω της αρμονικής ταλάντωσης.

Για το εύρος της αρμονικής μετοχικής επιτάχυνσης των βαθμών ελευθερίας, προφανώς θα ισχύει η σχέση: $\delta_{i0}^s = -\omega^2 \delta_{i0}^s$ οπότε η εξίσωση B.2.5.7, μπορεί να γραφθεί πιο συνοπτικά:

$$-\omega^2 [m_{i1}(\omega), m_{i2}(\omega), \dots, m_{i7}(\omega)][\delta_{10}^s, \delta_{20}^s, \dots, \delta_{70}^s]^T \quad (B. 2.5.8)$$

Για να συντηρείται η συνολική αρμονική ταλάντωση του πλαισίου λόγω αρμονικής κίνησης της βάσης του, η συνολική δράση που πρέπει να ασκείται στον i βαθμό ελευθερίας, είναι το άθροισμα των δράσεων που δίνονται από τις εξισώσεις B.2.5.6 και B.2.5.8. Επειδή, όμως, στη πραγματικότητα δεν ασκούνται εξωτερικές δράσεις στους βαθμούς ελευθερίας, η συνολική δράση στον i βαθμό ελευθερίας, με $i = 1, \dots, 7$, θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Δηλαδή:

$$[k_{i1}(\omega), \dots, k_{i7}(\omega)][\delta_{10}, \dots, \delta_{70}]^T - \omega^2 [m_{i1}(\omega), \dots, m_{i7}(\omega)][\delta_{10}^s, \dots, \delta_{70}^s]^T = 0, \quad \forall i = 1, \dots, 7 \quad (B.2.5.9)$$

Οι παραπάνω σχέσεις B.2.5.9, υπό μητρική μορφή, γράφονται:

$$\begin{bmatrix} k_{11}(\omega) & \cdots & k_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega) & \cdots & k_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11}(\omega) & \cdots & m_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{17}(\omega) & \cdots & m_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10}^s \\ \vdots \\ \delta_{70}^s \end{Bmatrix} \quad (B.2.5.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των επιδρώσεων δυνάμεων $\{P_{eff}\}$ που αναφέρθηκε στο εδάφιο A.1.9, μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι, για το δεξί μέλος της σχέσης B.2.5.10, ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} P_{eff1} \\ \vdots \\ P_{eff7} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11}(\omega) & \cdots & m_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{17}(\omega) & \cdots & m_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10}^s \\ \vdots \\ \delta_{70}^s \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11}(\omega) & \cdots & m_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{17}(\omega) & \cdots & m_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10}^s \\ \vdots \\ \delta_{70}^s \end{Bmatrix} \quad (B.2.5.11)$$

Από αυτή τη σχέση υπολογίζονται οι επιδρώσεις δυνάμεις, όταν δίνεται η αρμονική κίνηση της βάσης

$$\begin{aligned} u^s(t) &= u_0^s \sin \omega t \\ v^s(t) &= v_0^s \sin \omega t \\ \varphi^s(t) &= \varphi_0^s \sin \omega t \end{aligned} \quad (B.2.5.12)$$

Πράγματι, όταν είναι δεδομένη η συχνότητα διέγερσης ω , το μητρώο μάζας υπολογίζεται όπως περιγράφεται στο εδάφιο B.2.5.1. Αφ'ετέρου, οι μετακινήσεις $\delta_i^s(t)$ των βαθμών ελευθερίας λόγω κίνησης του απαραμόρφωτου ορθογωνίου σε στερεού σώματος μαζί με τη βάση, παρέχονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \delta_1^s(t) &= \varphi^s(t) \\ \delta_2^s(t) &= \varphi^s(t) \\ \delta_3^s(t) &= \varphi^s(t) \\ \delta_4^s(t) &= \varphi^s(t) \\ \delta_5^s(t) &= u^s(t) - \varphi^s(t)L_a \\ \delta_6^s(t) &= v^s(t) - \varphi^s(t)\frac{L_b}{2} \\ \delta_7^s(t) &= v^s(t) + \varphi^s(t)\frac{L_b}{2} \end{aligned} \quad (B.2.5.13)$$

που έχουν εξαχθεί στο εδάφιο A.2.3 του Α'Μέρους.

Επειδή, όμως, οι $u^s(t), v^s(t), \varphi^s(t)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις με συχνότητα ω (βλ.εξ.Β.2.5.12), τότε και οι μετακινήσεις $\delta_i^s(t)$ θα είναι αρμονικές συναρτήσεις, της μορφής:

$$\delta_i^s(t) = \delta_{i0}^s \sin \omega t, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (B.2.5.14)$$

Αντικαθιστώντας την B.2.5.14 στις B.2.5.13, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \delta_{10}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{20}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{30}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{40}^s &= \varphi_0^s \\ \delta_{50}^s &= u_0^s - \varphi_0^s L_a \\ \delta_{60}^s &= v_0^s - \varphi_0^s \frac{L_b}{2} \\ \delta_{70}^s &= v_0^s + \varphi_0^s \frac{L_b}{2} \end{aligned} \quad (B.2.5.15)$$

που παρέχουν τις τιμές των ευρών $\delta_{i0}^s, i = 1, \dots, 7$.

Κατά συνέπεια, για δεδομένη αρμονική κίνηση της βάσης, όπως ορίζεται από τις εξισώσεις B.2.5.12, το μητρώο των επιδρωσών δυνάμεων $\{P_{eff}\}$ είναι γνωστό.

Τώρα, με βάση την B.2.5.11, το σύστημα B.2.5.10 γράφεται:

$$\begin{bmatrix} k_{11}(\omega) & \cdots & k_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega) & \cdots & k_{77}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{eff1} \\ \vdots \\ P_{eff7} \end{Bmatrix} \quad (B.2.5.16)$$

Επιλύοντας, προκύπτουν τα ζητούμενα εύρη $\delta_{i0}, i = 1, \dots, 7$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{70} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}(\omega) & \cdots & k_{17}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{17}(\omega) & \cdots & k_{77}(\omega) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P_{eff1} \\ \vdots \\ P_{eff7} \end{Bmatrix} \quad (B.2.5.17)$$

Τέλος, τα εύρη $\delta_{i0}^t, i = 1, \dots, 7$, της ολικής αρμονικής ταλάντωσης του πλαισίου (ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς), υπολογίζονται από τη προαναφερθείσα εξίσωση B.2.5.4.

$$\delta_{i0}^t = \delta_{i0} + \delta_{i0}^s, \quad i = 1, \dots, 7$$

B.2.5.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΚΡΙΒΟΥΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΜΑΖΑΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΗΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Οι συντελεστές μάζας m_{ij} του ταλαντούμενου πλαισίου ορίζονται από τη σχέση A.1.4.5 του κεφαλαίου A.1.4 του Α'Μέρους:

$$m_{ij} = M_i \delta_{ij} + \int_l m(x) u_i(x) v_j(x) dx \quad (A.1.4.5)$$

στην οποία, το $u_i(x)$ είναι η συνάρτηση σχήματος του πλαισίου όταν ο i βαθμός ελευθερίας του λαμβάνει μοναδιαία μετακίνηση $\delta_i = 1$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας είναι ακινητοποιημένοι και το M_i εκφράζει τυχούσα συγκεντρωμένη μάζα στον i βαθμό ελευθερίας.

Στην περίπτωση της αρμονικής ταλάντωσης, την οποία εκτελεί το πλαίσιο (η δική μας περίπτωση), σε κάθε συνάρτηση σχήματος οι διάφορες ράβδοι του πλαισίου που συμμετέχουν, λαμβάνουν τη μορφή $\varphi(x)$ του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού, μιας εκ των τεσσάρων περιπτώσεων ταλάντωσης που αναφέρθηκαν στο εδάφιο B.1.5.1.

Πιο συγκεκριμένα οι τέσσερις μορφές του εύρους, έχουν τις εξής εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= c_{11} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{21} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{31} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{41} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_2(x) &= c_{12} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{22} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{32} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{42} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_3(x) &= c_{13} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{23} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{33} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{43} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \\ \varphi_4(x) &= c_{14} \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{24} \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{34} \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x + c_{44} \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c} x \end{aligned} \quad (B.2.5.1.1)$$

όπου:

- η $\varphi_1(x)$ προκαλείται από την εγκάρσια αρμονική μετατόπιση του αριστερού άκρου A , έχοντας μοναδιαίο εύρος,
- η $\varphi_2(x)$ προκαλείται από τη μοναδιαία εγκάρσια αρμονική κίνηση του δεξιού άκρου B ,
- η $\varphi_3(x)$ προκαλείται από την μοναδιαία εγκάρσια αρμονική στροφή του αριστερού άκρου A , και
- η $\varphi_4(x)$ προκαλείται από τη μοναδιαία εγκάρσια αρμονική στροφή του δεξιού άκρου B , ενώ
- ω είναι η συχνότητα της αρμονικής κίνησης

Οι συντελεστές c_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, υπολογίσθηκαν στο εδάφιο B.1.5.1.

Οι συντελεστές μάζας $m_{ij}(\omega)$ προφανώς είναι συναρτήσεις της συχνότητας διέγερσης ω και υπολογίσθηκαν με αριθμητική ολοκλήρωση, σύμφωνα πάντα με την εξίσωση A.1.4.5

Οι επτά συναρτήσεις σχήματος $u_i(x)$, $i = 1, \dots, 7$, είναι οι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του καθολικού μητρώου δυναμικής ακαμψίας $k(\omega)$, στο εδάφιο B.2.2 και που παρουσιάσθηκαν στα Σχήματα 13-19|B.2.2.1

B.2.5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, είναι φανερό ότι το συνολικό εύρος $\varphi^t(x)$ της αρμονικής ταλάντωσης του πλαισίου, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varphi^t(x) = \varphi(x) + \varphi^s(x) \quad (\text{B.2.5.2.1})$$

όπου:

- ❖ ο όρος $\varphi(x)$ είναι το εύρος της σχετικής κίνησής του ως προς το απαραμόρφωτο ορθογώνιο που κινείται σε στερεό σώμα μαζί με τη βάση,
- ❖ και ο όρος $\varphi^s(x)$ είναι το εύρος της μετοχικής κίνησης που εκτελεί το απαραμόρφωτο ορθογώνιο, εν σχέσει με το ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Για τον υπολογισμό, κατ'αρχήν, της σχετικής κίνησης $\varphi_{AB}(x)$ του αριστερού υποστυλώματος AB, θα χρησιμοποιηθεί η εξίσωση B.1.5.1.1 του εδαφίου B.1.5:

$$\varphi_{AB}(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x \quad (\text{B.2.5.2.2})$$

Οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 , θα υπολογισθούν από τη μητρική εξίσωση B.1.5.1.17, συναρτήσει των δύο εγκάρσιων μετατοπίσεων δ_A, δ_B και των δύο στροφών φ_A, φ_B των δύο άκρων A και B. Είναι προφανές όμως, ότι οι τέσσερις αυτές μετακινήσεις, συνδέονται με τις μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας μέσω της σχέσης:

$$\begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2.5.2.3})$$

όπου, ως γνωστόν, δ_1 είναι η στροφή του κόμβου A, δ_2 η στροφή του κόμβου B, δ_5 η προς τα δεξιά μετατόπιση του ζυγώματος BC, ενώ δεν υφίσταται οριζόντια μετακίνηση του κάτω άκρου A. Αντικαθιστώντας αυτές τις μετακινήσεις των άκρων (σχ.B.2.5.2.3) στο δεξιά μέλος της μητρικής εξίσωσης B.1.5.1.17, υπολογίζονται οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 της ελαστικής γραμμής του υποστυλώματος AB, οπότε το εύρος $\varphi_{AB}(x)$ της σχετικής ταλάντωσης προκύπτει από την B.2.5.2.2.

Ομοίως, η σχετική κίνηση του ζυγώματος BC, θα δίνεται, με τη βοήθεια της B.1.5.1.1, από τη σχέση:

$$\varphi_{BC}(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} x \quad (\text{B.2.5.2.4})$$

Οι τέσσερις μετακινήσεις του ζυγώματος συνδέονται με τις μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας μέσω της σχέσης:

$$\begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 2.5.2.5})$$

όπου, δ_3 είναι η στροφή του κόμβου C , δ_6 η κατακόρυφη προς τα άνω μετατόπιση του υποστυλώματος AB και δ_7 η κατακόρυφη προς τα άνω μετατόπιση του υποστυλώματος CD . Αντικαθιστώντας αυτές τις μετακινήσεις των άκρων (σχ.Β.2.5.2.5) στο δεξιά μέλος της μητρωϊκής εξίσωσης Β.1.5.1.17, υπολογίζονται οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 της ελαστικής γραμμής του ζυγώματος BC , οπότε το εύρος $\varphi_{BC}(x)$ της σχετικής ταλάντωσης προκύπτει από την Β.2.5.2.3.

Τέλος, η σχετική κίνηση του δεξιού υποστυλώματος CD , θα παρέχεται από τη σχέση:

$$\varphi_{CD}(x) = c_1 \cos \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_3 \cosh \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x + c_4 \sinh \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} x \quad (\text{B. 2.5.2.6})$$

Οι τέσσερις μετακινήσεις του υποστυλώματος συνδέονται με τις μετακινήσεις των βαθμών ελευθερίας μέσω της σχέσης:

$$\begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_5 \\ 0 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 2.5.2.7})$$

όπου, δ_4 είναι η στροφή του κόμβου D , ενώ δεν υφίσταται οριζόντια μετακίνηση του κάτω άκρου D . Αντικαθιστώντας αυτές τις μετακινήσεις των άκρων (σχ.Β.2.5.2.7) στο δεξιά μέλος της μητρωϊκής εξίσωσης Β.1.5.1.17, υπολογίζονται οι συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 της ελαστικής γραμμής του υποστυλώματος CD , οπότε το εύρος $\varphi_{CD}(x)$ της σχετικής ταλάντωσης προκύπτει από την Β.2.5.2.5.

Για την εύρεση της μορφής $\varphi^t(x)$ του συνολικού εύρους της αρμονικής ταλάντωσης από την εξίσωση Β.2.5.2.1, απομένει να βρεθεί το εύρος $\varphi^s(x)$ της (μετοχικής) κίνησης που εκτελεί το απαραμόρφωτο ορθογώνιο σε στερεό σώμα μαζί με τη βάση. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει στο Α'Μέρος στο εδάφιο Α.2.3, όπου έχουν εξαχθεί οι σχέσεις Α.2.3.6 για το αριστερό υποστυλίσμα AB , οι σχέσεις Α.2.3.7 για το ζύγωμα BC και οι σχέσεις Α.2.3.8 για το δεξιό υποστυλίσμα CD .

B.2.6 ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Αδιαστατοποιούμε τα μεγέθη που εμπλέκονται στο πρόβλημα, όπως πράξαμε και στο Α' Μερους, προκειμένου να διευκολυνθούμε στη παραμετρική μελέτη. Οι βασικές παραδοχές για τα μεγέθη είναι ότι ισχύει:

- για το ζύγωμα

$$a_b = \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} L_b \Rightarrow \frac{a_b}{L_b} = \frac{\sqrt{\omega}}{c_b}$$

- για τα υποστυλώματα

$$a_a = \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} L_a = \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} L_b \lambda \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{4}} = a_b \lambda \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{4}}$$

και $\frac{a_b}{L_a} = \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} = \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{a_b}{L_b} \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{4}}$ αφού έχουμε θέσει $\frac{L_a}{L_b} = i \Rightarrow I_a = I_b i$

- γενικά, για τον συντελεστή c

$$\left[\frac{Nm^2}{Nsec^2} = \frac{m^4}{sec^2} \right]: c^4 = \frac{EI}{m} \Rightarrow c \left[\frac{m}{\sqrt{sec}} \right]$$

για τους συντελεστές c_a, c_b

$$\left[\frac{m^4}{sec^2} \right]: c_a^4 = \frac{EI_a}{m_a} = \frac{EI_b i}{m_b \mu} = c_b^4 \frac{i}{\mu} \Leftrightarrow c_a = c_b \sqrt[4]{\frac{i}{\mu}}$$

$$\left[\frac{m^4}{sec^2} \right]: c_b^4 = \frac{EI_b}{m_b} = \frac{EI_b}{A_b \rho} = \frac{EL_b^4}{\frac{\rho L_b^2}{slend^2}} = \frac{EL_b^2}{12\rho slend^2}$$

όπου $A_b = \frac{L_b^2}{slend^2}$

- για τα ορίσματα του τοπικού μητρώου ακαμψίας, ισχύει:

$$\left[\frac{Nm}{rad} = Nm \right]: EI_a \frac{a_a}{L_a} = EI_a \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} = EI_b i \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{4}} = EI_b \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \sqrt[4]{\mu i^3}$$

$$\left[\frac{Nm}{m} = N \right]: EI_a \left(\frac{a_a}{L_a}\right)^2 = EI_a \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_a}\right)^2 = EI_b i \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b}\right)^2 \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{1}{2}} = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b}\right)^2 \sqrt{\mu i}$$

$$\left[\frac{N}{m} \right]: EI_a \left(\frac{a_a}{L_a}\right)^3 = EI_a \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_a}\right)^3 = EI_b i \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b}\right)^3 \left(\frac{\mu}{i}\right)^{\frac{3}{4}} = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b}\right)^3 \sqrt[4]{\mu^3 i}$$

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

∴ των συντελεστών c_a, c_b των υποστυλωμάτων και του ζυγώματος αντιστοίχως

$$\left[\frac{m}{\sqrt{sec}} \right]: \bar{c}_a = \frac{c_a}{\frac{L_b}{\sqrt[4]{\frac{L_b}{g}}}} = \frac{c_a}{L_b} \sqrt[4]{\frac{L_b}{g}}$$

$$\left[\frac{m}{\sqrt{sec}} \right]: \bar{c}_b = \frac{c_b}{\frac{L_b}{\sqrt[4]{\frac{L_b}{g}}}} = \left(\frac{EL_b^2}{12pslend^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{\frac{L_b}{g}} \frac{1}{L_b}$$

∴ των ορισμάτων και των τριών συντελεστών του ζυγώματος

$$[Nm]: EI_b \frac{a_b}{L_b} = EI_b \frac{\sqrt{\omega}}{c_b}, \text{ διαιρούμε με } L_b^2 m_b g$$

$$\Rightarrow \frac{EI_b \frac{\sqrt{\omega}}{c_b}}{L_b^2 m_b g} = \frac{E}{\frac{m_b g}{L_b}} \frac{I_b}{L_b^4} \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} L_b \right) = \bar{E} \bar{I}_b \frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b}$$

$$[N]: EI_b \left(\frac{a_b}{L_b} \right)^2 = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^2, \text{ διαιρούμε με } L_b m_b g$$

$$\Rightarrow \frac{EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^2}{L_b m_b g} = \frac{E}{\frac{m_b g}{L_b}} \frac{I_b}{L_b^4} \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^2 L_b^2 = \bar{E} \bar{I}_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b} \right)^2$$

$$[N]: EI_b \left(\frac{a_b}{L_b} \right)^3 = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^3, \text{ διαιρούμε με } m_b g$$

$$\Rightarrow \frac{EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^3}{m_b g} = \frac{E}{\frac{m_b g}{L_b}} \frac{I_b}{L_b^4} \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^3 L_b^3 = \bar{E} \bar{I}_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b} \right)^3$$

∴ των ορισμάτων και των τριών συντελεστών των υποστυλωμάτων

$$[Nm]: EI_b \frac{a_a}{L_a} = EI_b \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} = EI_b \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \sqrt[4]{\mu i^3}$$

$$\Rightarrow \bar{E} \bar{I}_b \frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b} \sqrt[4]{\mu i^3}$$

$$[N]: EI_b \left(\frac{a_a}{L_a} \right)^2 = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_a} \right)^2 = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b} \right)^2 \sqrt{\mu i}$$

$$\Rightarrow \bar{E} \bar{I}_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b} \right)^2 \sqrt{\mu i}$$

$$[N]: EI_b \left(\frac{a_a}{L_a}\right)^3 = EI_a \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_a}\right)^3 = EI_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{c_b}\right)^3 \sqrt[4]{\mu^3 i}$$

$$\Rightarrow \bar{E} \bar{I}_b \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\bar{c}_b}\right)^3 \sqrt[4]{\mu^3 i}$$

Μας είναι αρκετά χρήσιμο να εκφράσουμε τα a_a, a_b συναρτήσει αδιάστατων μεγεθών:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_a &= \frac{c_a}{L_b} \Rightarrow c_a = \bar{c}_a L_b \sqrt[4]{\frac{g}{L_b}} \\ w &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{L_b}}} \Rightarrow \sqrt{\omega} = \sqrt{w} \sqrt[4]{\frac{g}{L_b}} \end{aligned} \right\} a_a = \frac{\sqrt{\omega}}{c_a} L_a = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}_a}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_b &= \frac{c_b}{L_b} \Rightarrow c_b = \bar{c}_b L_b \sqrt[4]{\frac{g}{L_b}} \\ w &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{g}{L_b}}} \Rightarrow \sqrt{\omega} = \sqrt{w} \sqrt[4]{\frac{g}{L_b}} \end{aligned} \right\} a_b = \frac{\sqrt{\omega}}{c_b} L_b = \frac{\sqrt{w}}{\bar{c}_b}$$

Για το εύρος της αδρανειακής δύναμης λόγω αξονικής μετακίνησης των ράβδων, ισχύει:

Ζύγωμα : διαιρούμε με $m_b g \left[\frac{kg}{sec^2} = \frac{N}{m}\right]$

$$F_{b0} = -\frac{\omega^2 m_b L_b}{m_b g} = -\omega^2 \left(\frac{L_b}{g}\right) = -w^2$$

Υποστυλώματα : διαιρούμε με $m_b g \left[\frac{kg}{sec^2} = \frac{N}{m}\right]$

$$F_{a0} = -\frac{\omega^2 m_a L_a}{m_b g} = -\omega^2 \mu \frac{L_a}{L_b} \frac{L_b}{g} = -\omega^2 \mu \lambda \frac{L_b}{g} = -w^2 \mu \lambda$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β.3 Αποτελέσματα - Παραμετρική Μελέτη

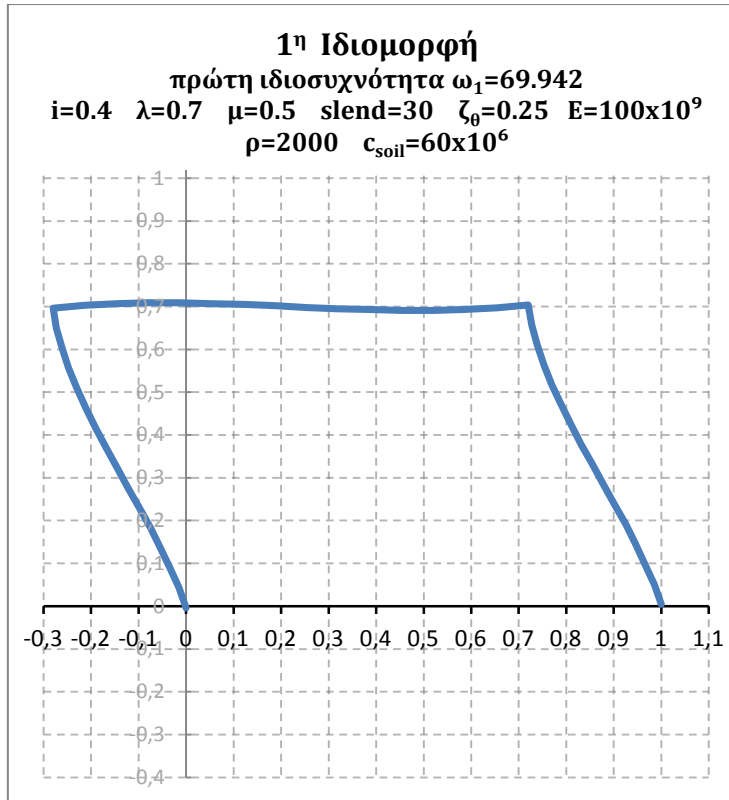
Β.3.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Επιλύσαμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών όπως αυτό παρουσιάστηκε αναλυτικά στο εδάφιο Β.1.2, απ'όπου προέκυψαν οι πρώτες δεκατρείς (από τις άπειρες) ιδιοσυχνότητες w της ελεύθερης ταλάντωσης, τις οποίες συγκεντρώσαμε στον Πίνακα 3|Β.3.1. Τα v_1, \dots, v_7 είναι οι επτά κανονικές συντεταγμένες της κάθε ιδιοσυχνότητας που καθορίζουν την κάθε ιδιομορφή.

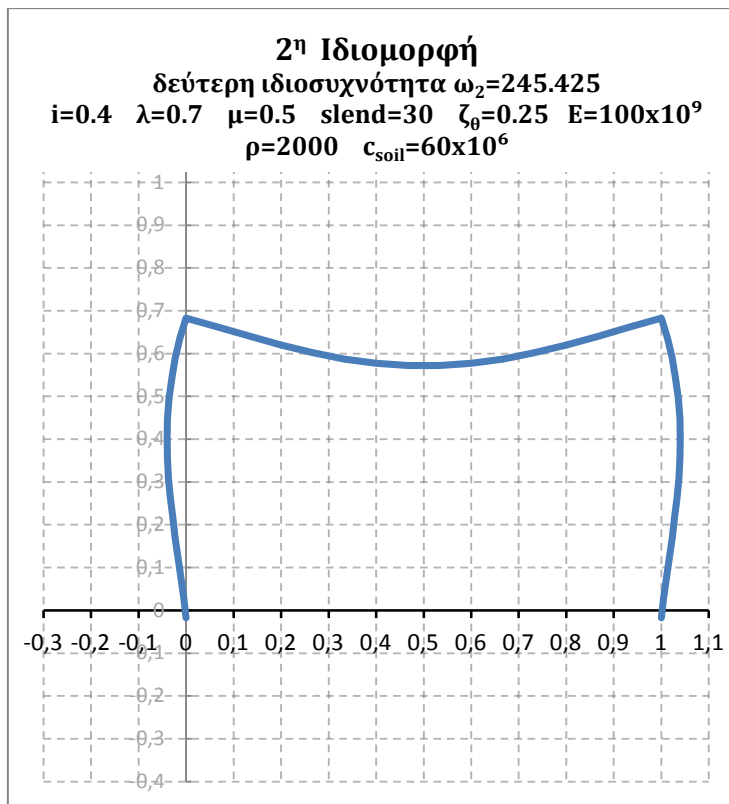
$\lambda=0,7 \quad slend=30 \quad i=0,4 \quad \rho=2000 \quad \mu=0,5 \quad E=100 \times 10^9 \quad c_{soil}=60 \times 10^6 \quad \zeta_0=0,25$								
α/α	W	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	69,942	1	0,4183	0,4183	1	-0,9344	-0,0129	0,013
2	245,425	-0,3316	1	-1	0,3316	0	0,0577	0,0577
3	541,982	-0,6817	0,9525	0,9533	-0,6824	-0,0375	1	-0,9998
4	594,326	1	-0,7335	0,7335	-1	0	0,1527	0,1527
5	638,778	1	-0,7244	-0,7244	0,9999	0,0519	0,0495	-0,0495
6	740,545	-1	-0,2249	0,2249	1	0	0,164	0,164
7	1169,825	0,5764	1	1	0,5764	0,0047	-0,0803	0,0803
8	1819,062	1	0,8446	-0,8445	-0,9999	0	-0,0156	-0,0156
9	2036,159	0,9998	0,314	0,3141	1	-0,0154	0,0078	-0,0078
10	2404,190	1	-0,9026	0,9026	-1	0	0,0417	0,0417
11	3588,726	-0,7507	1	1	-0,7507	-0,0042	-0,0156	0,0156
12	4048,412	-0,9996	0,4053	-0,4055	1	0	0,0014	0,0014
13	5725,024	0,6207	1	-1	-0,6207	0	-0,0128	-0,0128

Πίνακας 3|Β.3.1

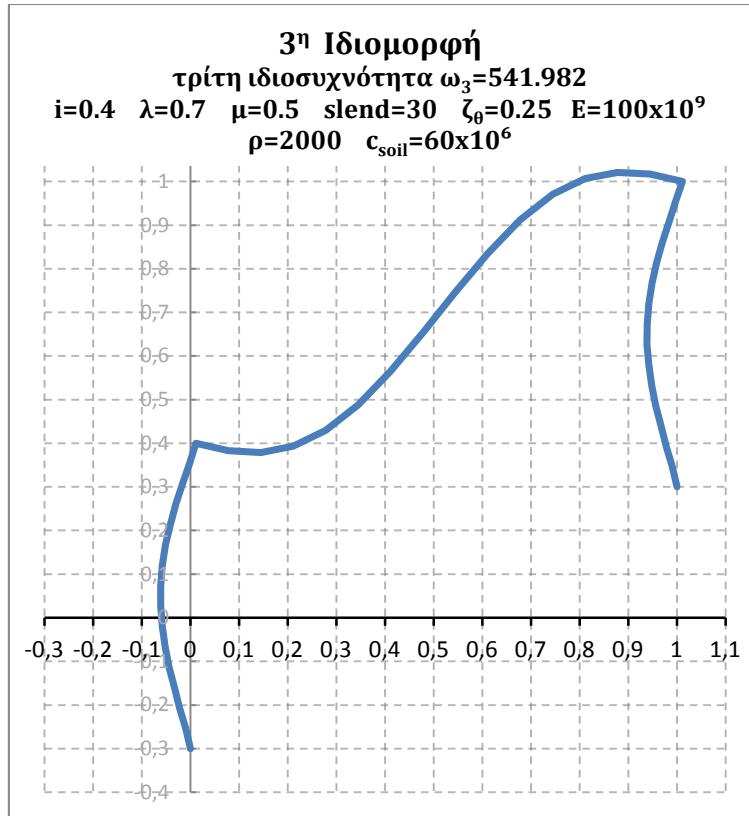
Παρακάτω δίνονται τα γραφήματα των δέκα πρώτων ιδιομορφών που υπολογίσθηκαν με τη Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας. Στον τίτλο τους αναγράφονται οι σταθερές τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και η ιδιοσυχνότητα στην οποία αναφέρεται κάθε ιδιομορφή.



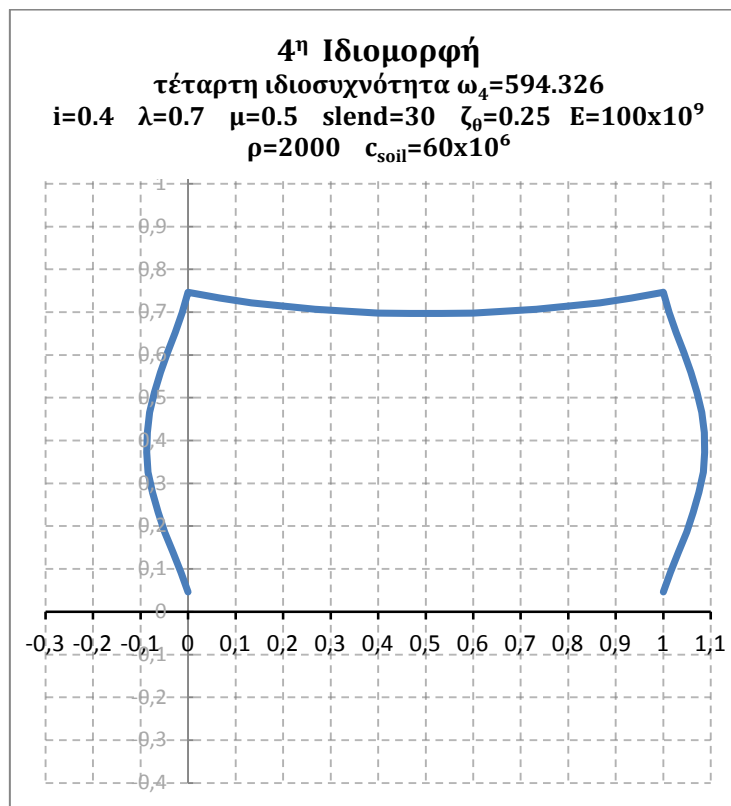
Γράφημα 24|B.3.1



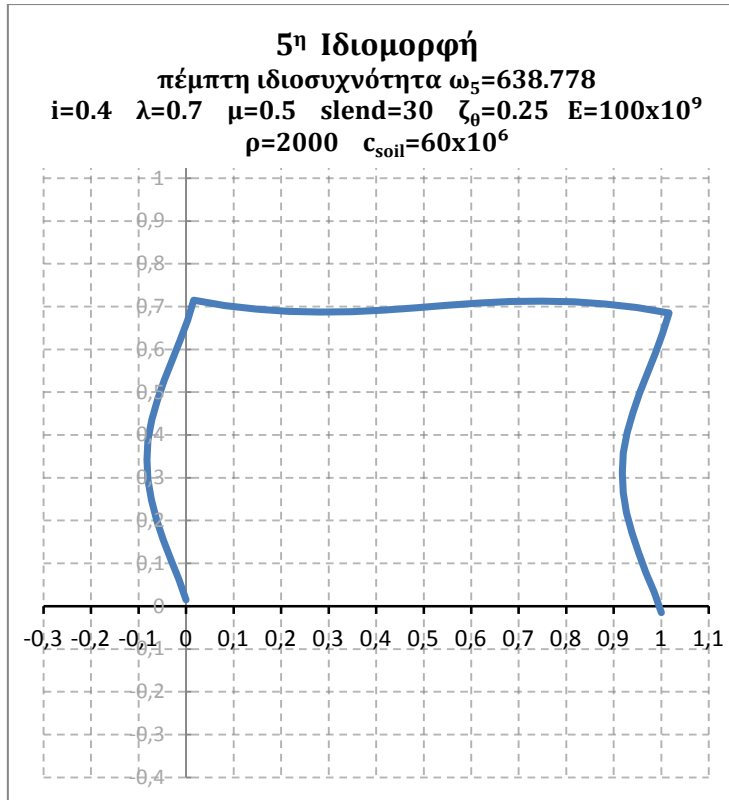
Γράφημα 25|B.3.1



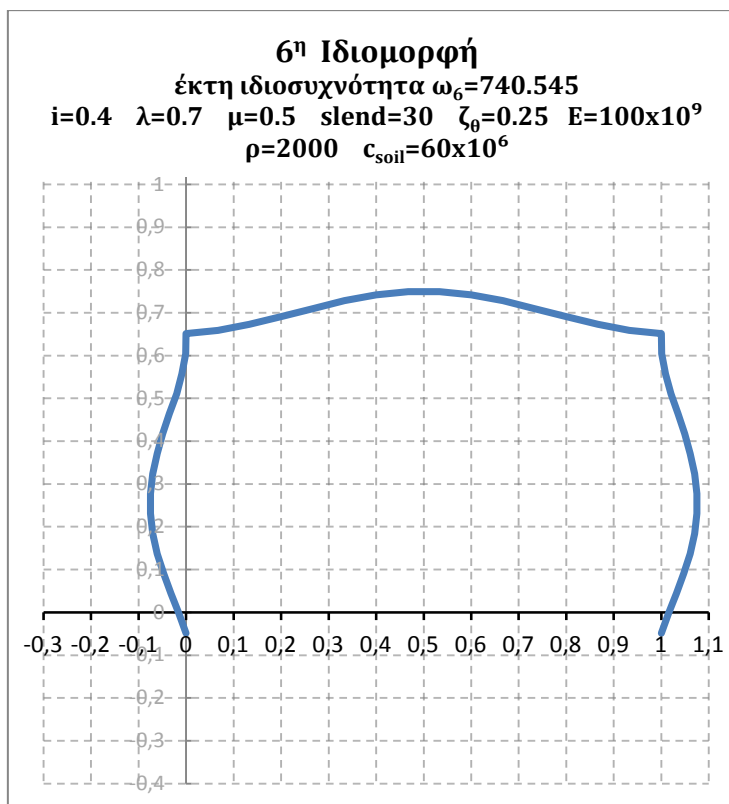
Γράφημα 26|B.3.1



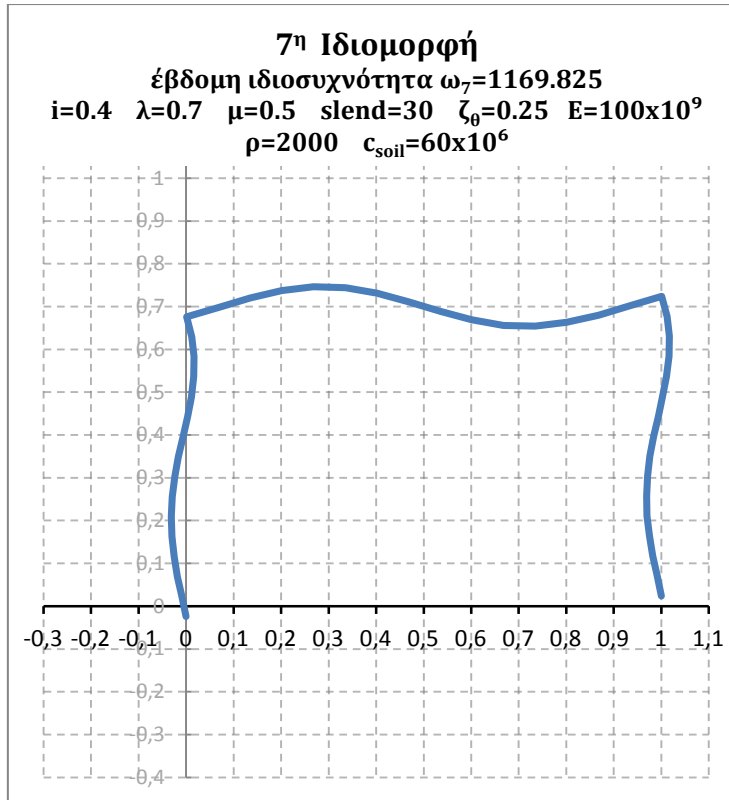
Γράφημα 27|B.3.1



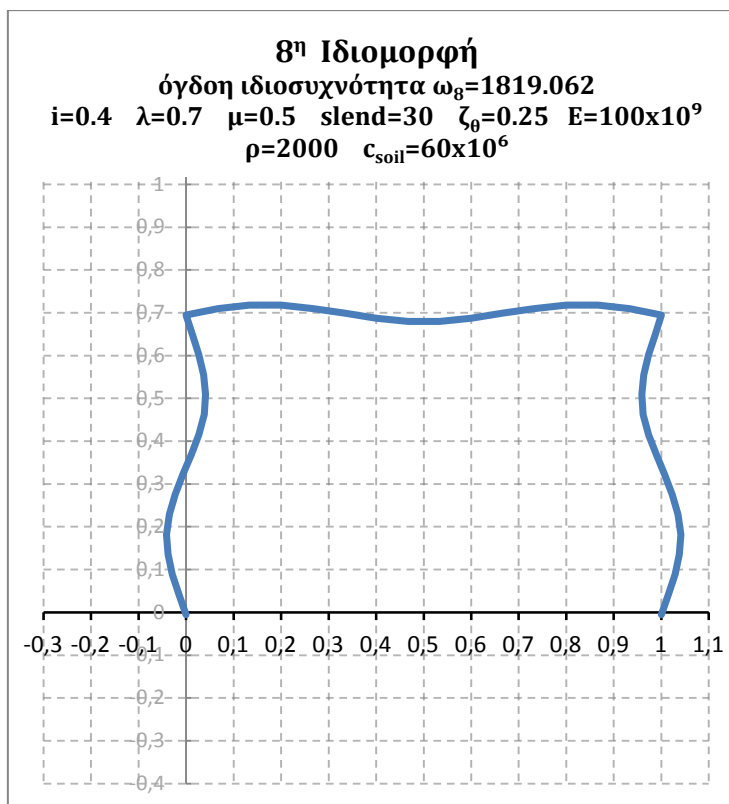
Γράφημα 28|B.3.1



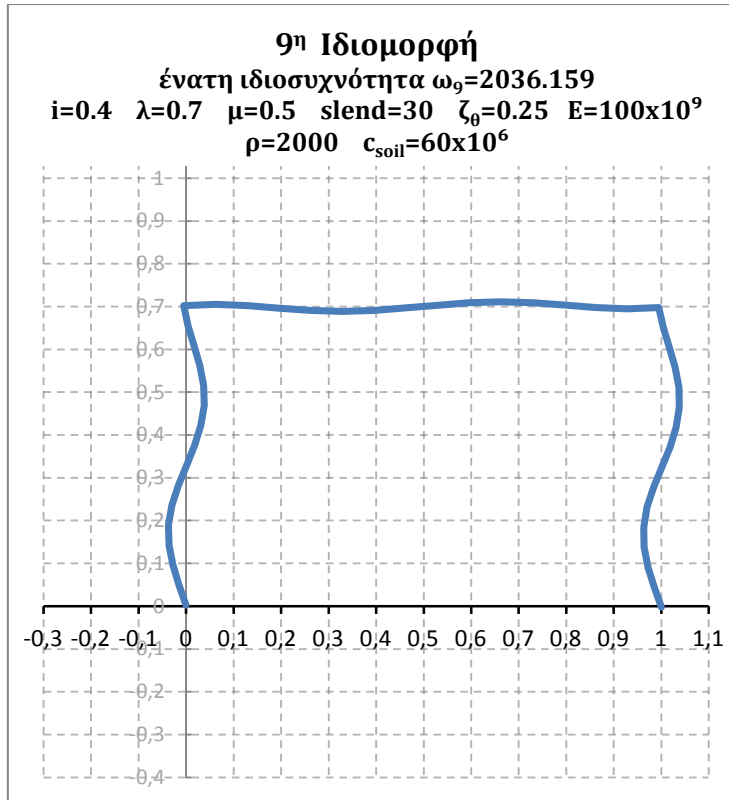
Γράφημα 29|B.3.1



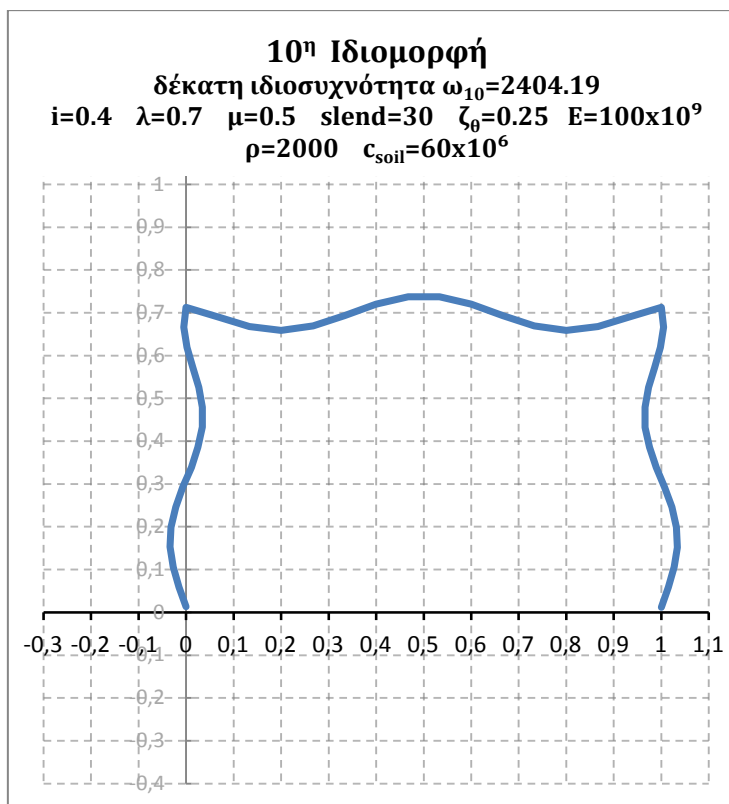
Γράφημα 30|B.3.1



Γράφημα 31|B.3.1



Γράφημα 32|B.3.1



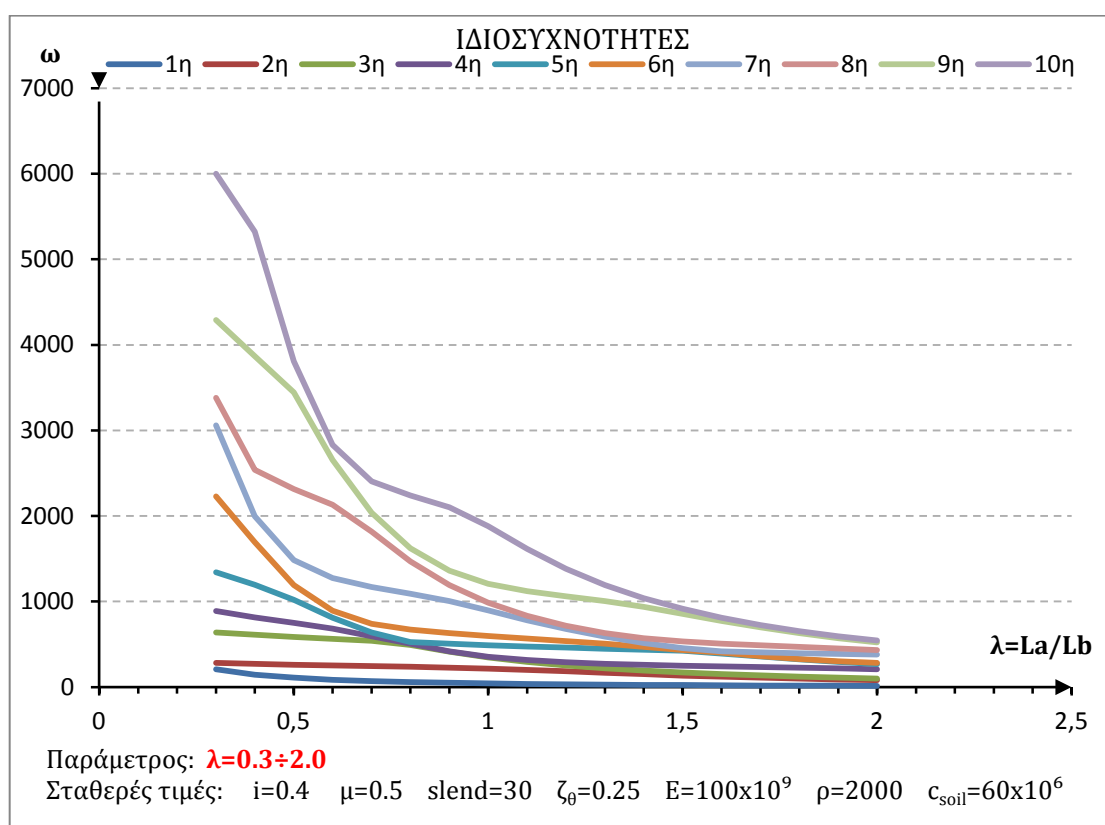
Γράφημα 33|B.3.1

B.3.2 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Σε αυτό το εδάφιο διεξάγεται η παραμετρική μελέτη, σύμφωνα με τις παραμέτρους που ορίσαμε στη σελ.68 του εδαφίου Α.2.9. Οι παρατηρήσεις μας είναι παρόμοιες με αυτές του εδαφίου Α.3.1, της αντίστοιχης παραμετρικής μελέτης για τη μέθοδο του Α'Μέρους.

Στο **Γράφημα 34|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου του μήκους του υποστυλώματος προς το μήκος του ζυγώματος, $\lambda = \frac{L_a}{L_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 2.0. Σε αυτή την παραμετρική παραμένουν σταθερά τα μεγέθη $i=0.4$, $\mu=0.5$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερος γίνεται ο λόγος λ , με $L_b = 1$, τόσο μικραίνει η ακαμψία της κατασκευής. Για κοντό πλαίσιο έχουμε μεγάλες ιδιοσυχνότητες, ενώ για μήκος υποστυλωμάτων διπλάσιο του μήκους ζυγώματος, έχουμε αρκετά μικρές τιμές ιδιοσυχνοτήτων. Οι ω_3 , ω_4 , ω_5 τέμνονται στην τιμή $\lambda \cong 0.8$

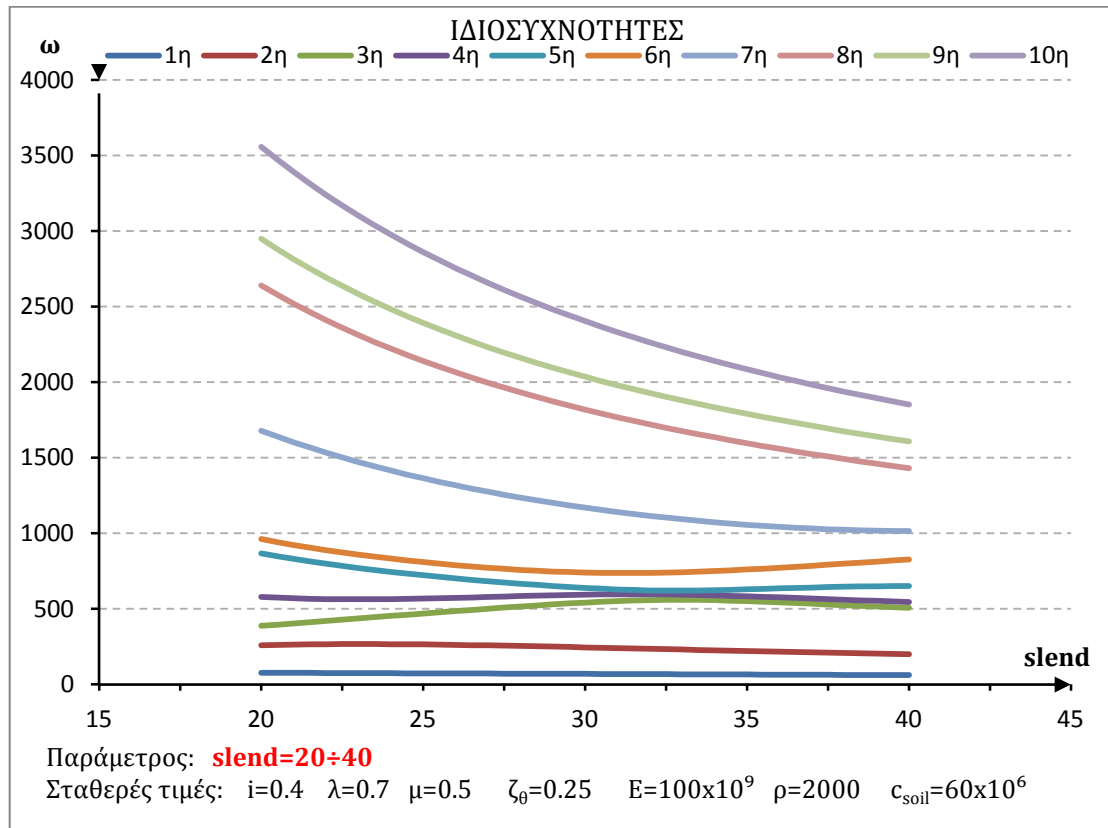


Γράφημα 34|B.3.2

Στο **Γράφημα 35|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει της λυγηρότητας $slend = \frac{L_b}{\alpha}$, με τιμές αυτής

από 20 έως 40, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $\zeta_{\theta}=0.25$, $\rho=2000$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Όσο η λυγηρότητα βαίνει αυξανόμενη, τόσο μικραίνουν οι ιδιοσυχνότητες. Η ω_3 , η ω_4 και η ω_5 ιδιοσυχνότητα πλησιάζουν πολύ για τιμή λυγηρότητας $slend \cong 3.2$



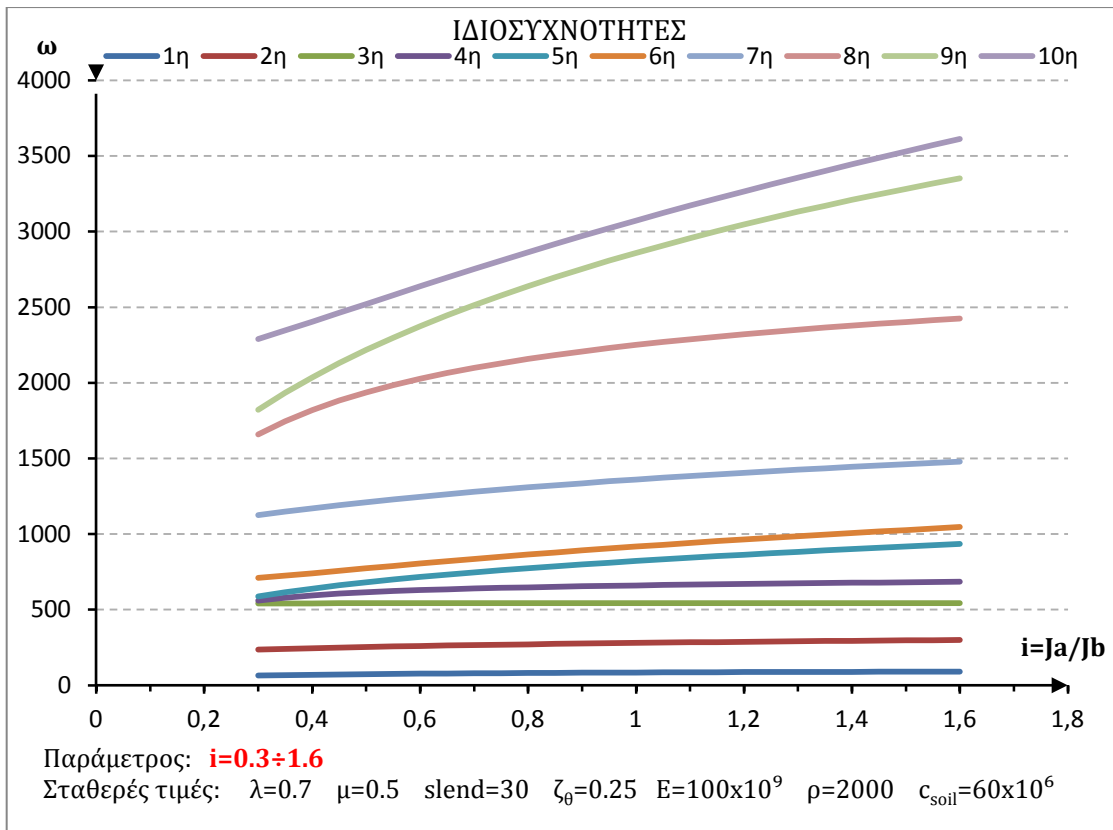
Γράφημα 35|B.3.2

Στο **Γράφημα 36|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου της ροπής αδρανείας του υποστυλώματος προς τη ροπή αδρανείας του ζυγώματος, $i = \frac{J_a}{J_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 1.6, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $\lambda=0.7$, $\mu=0.5$, $slend=30$, $\zeta_{\theta}=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

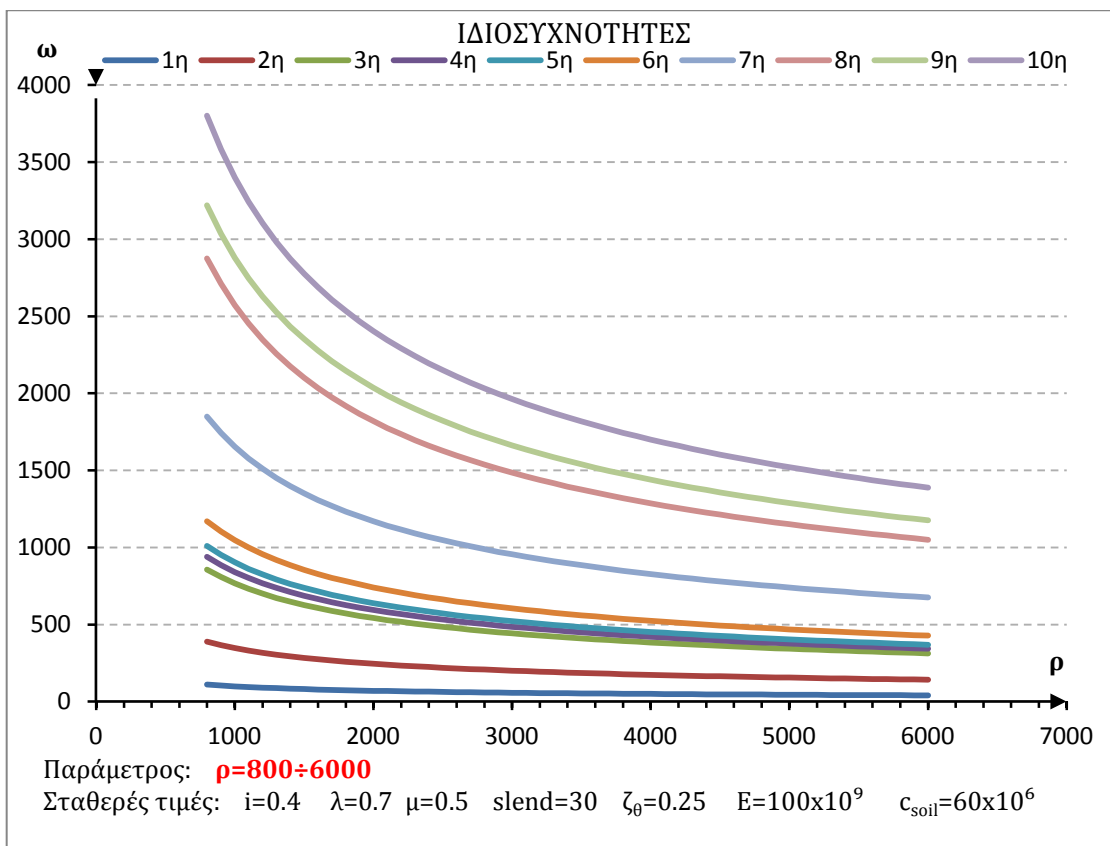
Με αύξηση του λόγου των ροπών αδρανείας, αυξάνονται και οι ιδιοσυχνότητες. Η τρίτη ιδιοσυχνότητα παραμένει σταθερή.

Στο **Γράφημα 37|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει της πυκνότητας υλικού ρ , με τιμές αυτής από 800 έως 6000, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_{\theta}=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Ενδεχόμενη αύξηση της μάζας της κατασκευής, επιφέρει μείωση στις ιδιοσυχνότητες.



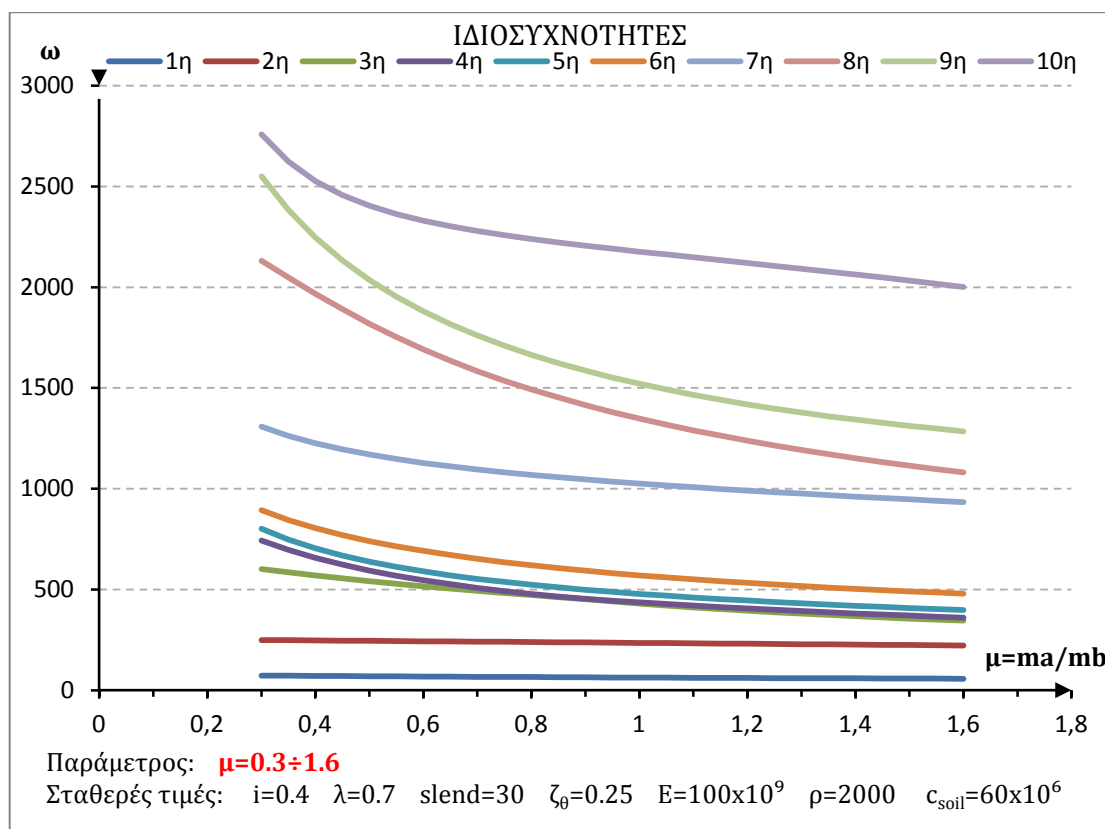
Γράφημα 36|B.3.2



Γράφημα 37|B.3.2

Στο **Γράφημα 38|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του λόγου της μάζας του υποστυλώματος προς τη μάζα του ζυγώματος, $\mu = \frac{m_a}{m_b}$, για τιμές αυτού από 0.3 έως 1.6, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Όταν αυξάνεται η μάζα των υποστυλωμάτων, περιμένουμε αύξηση στις ιδιοσυχνότητες. Παρατηρούμε ότι οι ω_1, ω_2 , μεταβάλλονται ελάχιστα και οι ω_3, ω_4 ταυτίζονται για μια περιοχή τιμών πάνω από $\mu = 0.7$



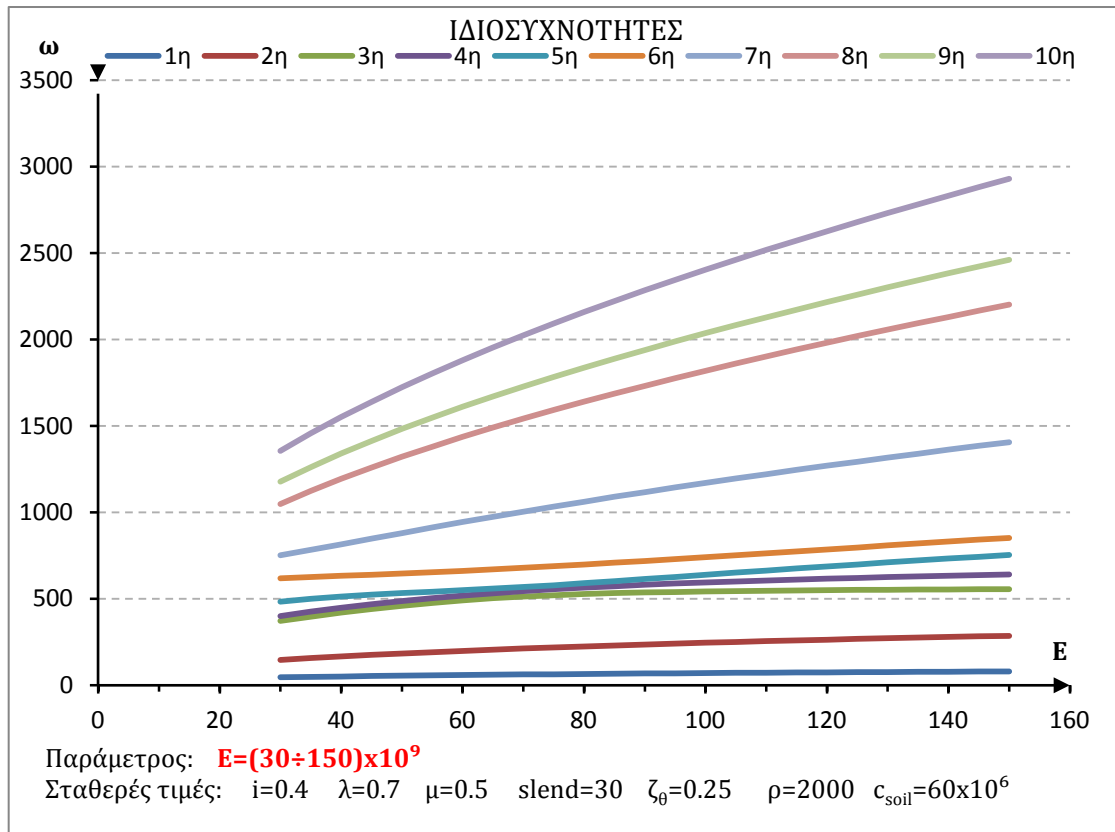
Γράφημα 38|B.3.2

Στο **Γραφημα 39|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας των ράβδων E , με τιμές αυτού από 30×10^9 έως 150×10^9 , κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $\rho=2000$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

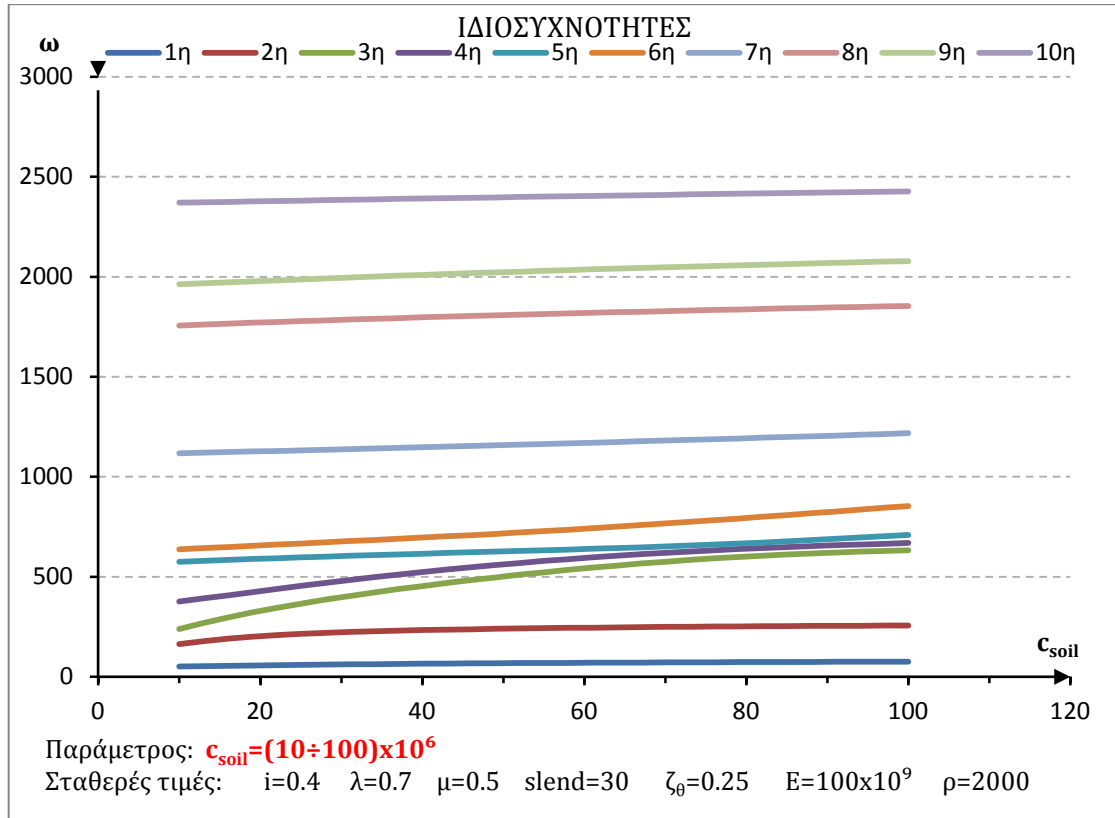
Παρατηρείται αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με αύξηση του μέτρου ελαστικότητας.

Στο **Γράφημα 40|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του δείκτη εδάφους c_{soil} , με τιμές αυτού από 10×10^6 έως 100×10^6 , κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\zeta_\theta=0.25$, $E=100 \times 10^9$, $\rho=2000$.

Ο δείκτης εδάφους εκφράζει την ακαμψία των στηρίξεων και με αύξηση αυτού, έχουμε αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων.



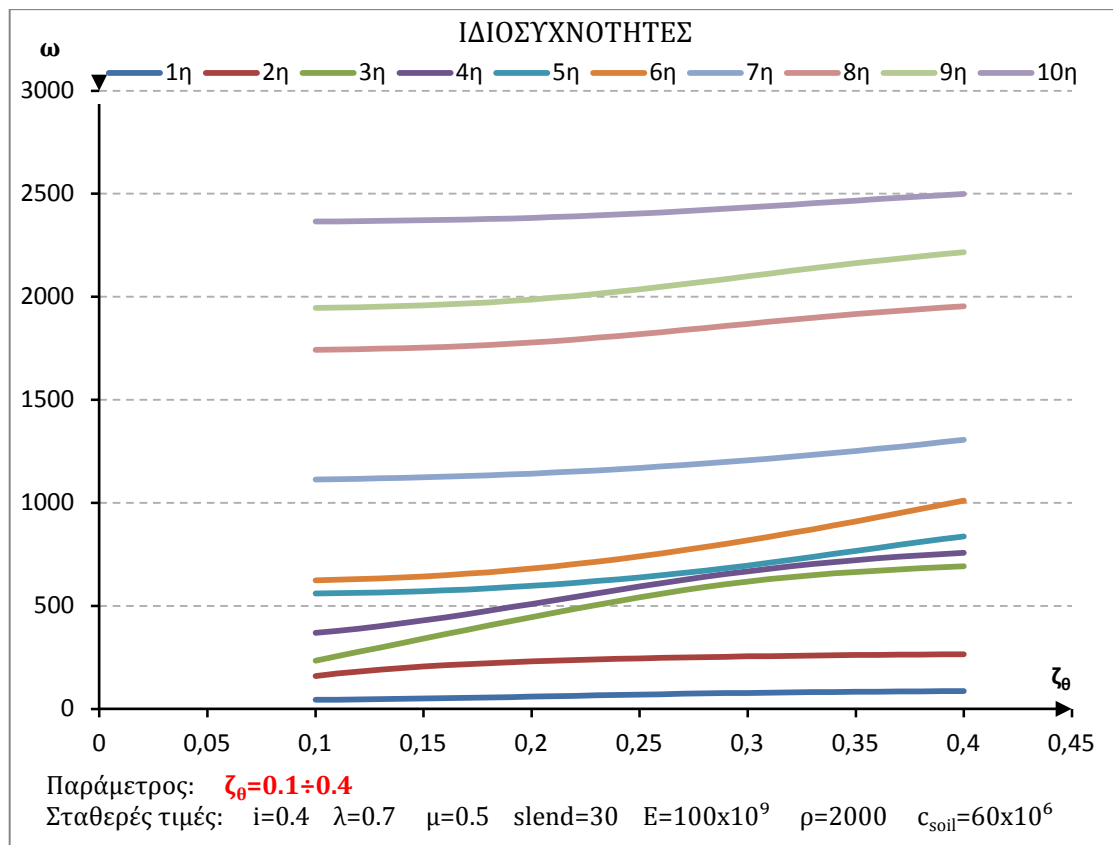
Γράφημα 39|B.3.2



Γράφημα 40|B.3.2

Στο **Γράφημα 41|B.3.2** μελετούμε τη μεταβολή των δέκα πρώτων ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης συναρτήσει του πλάτους του θεμελίου $\zeta_{\theta} = \frac{l_{\theta}}{L_b}$, με τιμές αυτού από 0.1 έως 0.4, κρατώντας σταθερές τις υπόλοιπες τιμές των $i=0.4$, $\mu=0.5$, $\lambda=0.7$, $slend=30$, $\rho=2000$, $E=100 \times 10^9$, $c_{soil}=60 \times 10^6$.

Όταν αυξάνουμε τις διαστάσεις του θεμελίου, δηλαδή την ακαμψία των ελατηρίων, περιμένουμε και αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων.



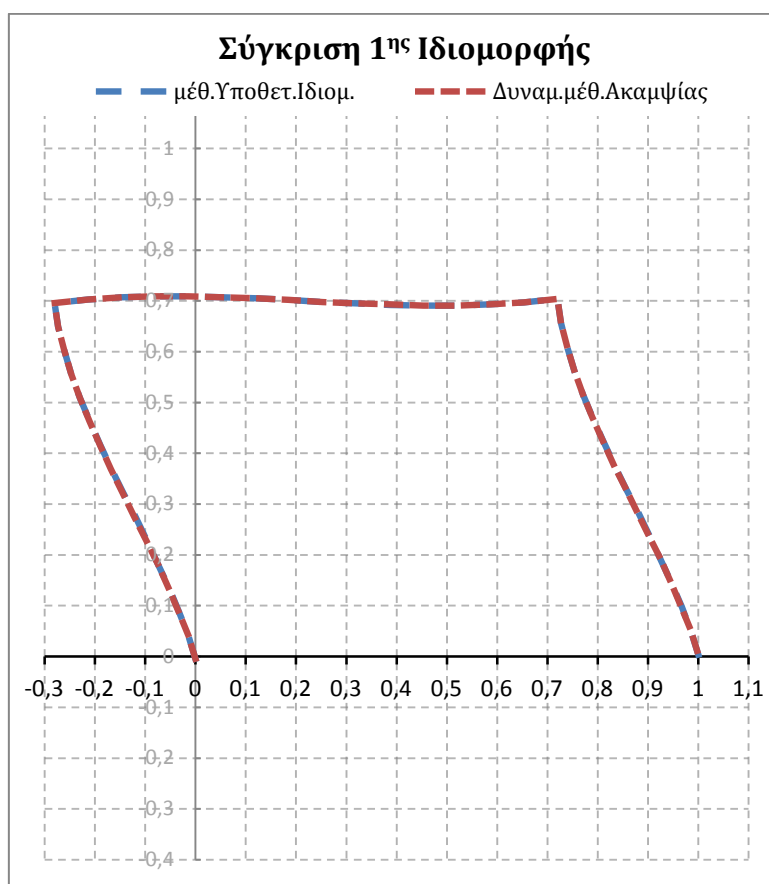
Γράφημα 41|B.3.2

B.3.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ Α' & Β' ΜΕΡΟΥΣ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Σε αυτό το εδάφιο επιχειρούμε να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους που αναπτύξαμε στα δύο μέρη της παρούσας εργασίας, ως προς τις ιδιομορφές. Αυτές, παρατέθηκαν αναλυτικά με σειρά διαγραμμάτων (Γραφήματα 1-7|A.3.1 και Γραφήματα 24-30|B.3.1) και εδώ παρουσιάζονται σε κοινά διαγράμματα προκειμένου να σχολιαστούν.

Παρατηρούμε ότι η πρώτη ιδιομορφή (Γράφημα 42|B.3.3) που υπολογίστηκε με τη προσεγγιστική Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών, σχεδόν ταυτίζεται με τη πρώτη της ακριβούς Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας

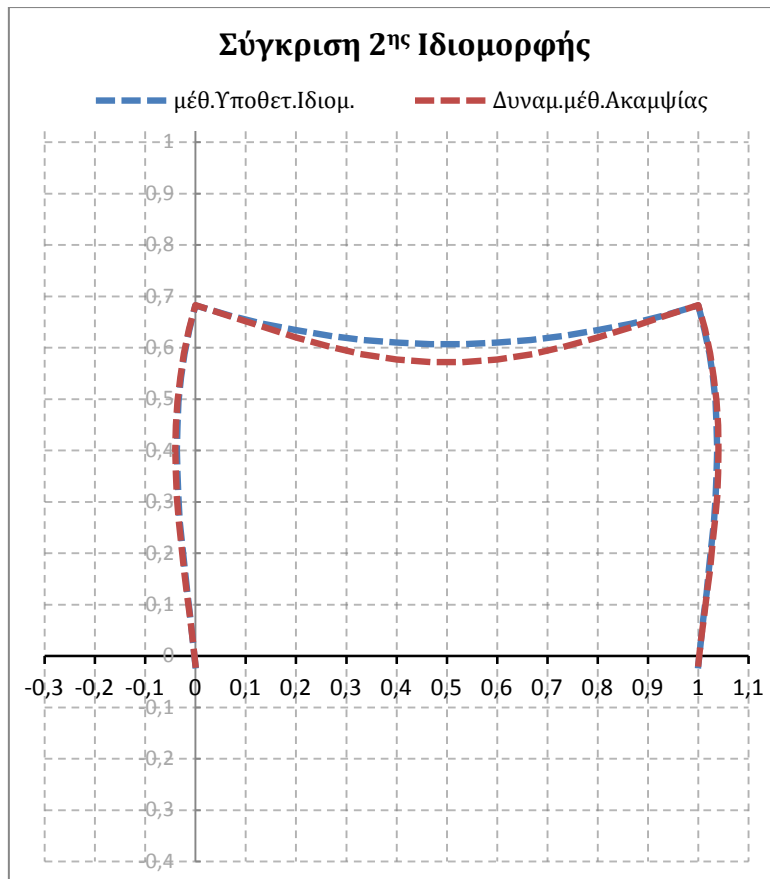


Γράφημα 42|B.3.3

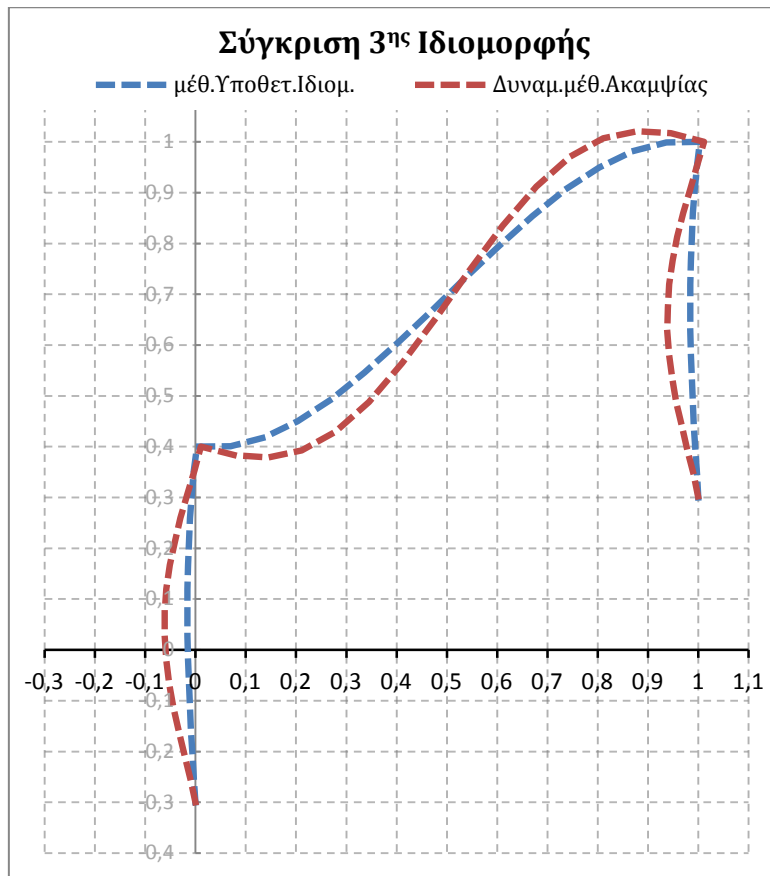
Βλέπουμε ότι οι δεύτερες και τρίτες ιδιοσυχνότητες (Γραφήματα 43,44|B.3.3) έχουν πολύ καλή και, αντίστοιχα, καλή προσέγγιση. Παρατηρείται μεγαλύτερο εύρος ταλάντωσης του ζυγώματος με τη δεύτερη-ακριβή μέθοδο, γεγονός που οφείλεται στην ακριβή επίδραση της μάζας του, η οποία δε λαμβάνεται υπ'όψιν στις υποθετικές μορφές ταλάντωσης της πρώτης - προσεγγιστικής μεθόδου.

Στις τέταρτες και πέμπτες ιδιομορφές (Γραφήματα 45,46|B.3.3), είναι προφανής η ακριβής επίδραση της κατανεμημένης μάζας των υποστυλωμάτων εν σχέσει με την επίδραση της προσεγγιστικής μεθόδου.

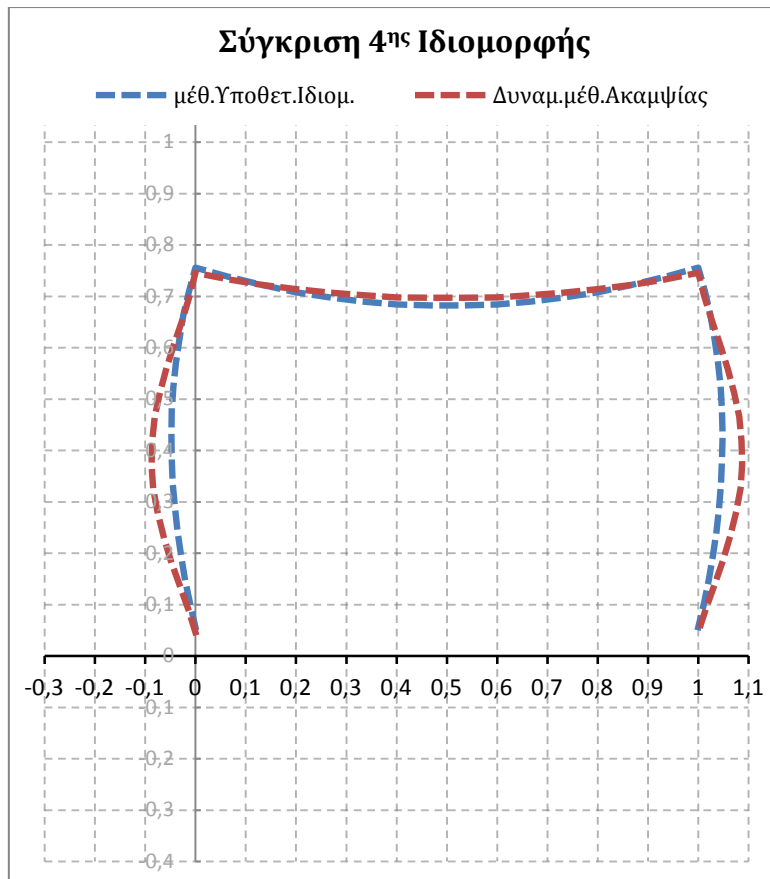
Στις έκτης ιδιομορφές (Γράφημα 47|B.3.3), παρατηρούμε μεγαλύτερη μετακίνηση ολόκληρου του πλαισίου της ακριβούς μεθόδου εν σχέσει με της προσεγγιστικής, για τον ίδιο λόγο, δηλαδή την ακριβή επίδραση της μάζας, ενώ στις έβδομες (Γράφημα 48|B.3.3) έχουμε το ίδιο φαινόμενο με αρκετά καλή προσέγγιση.



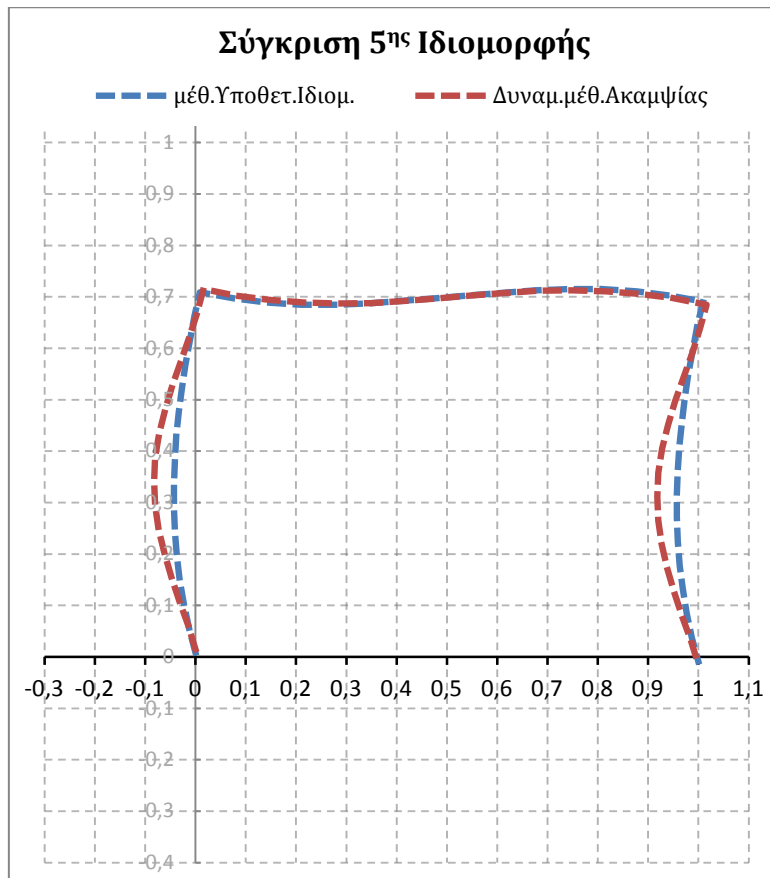
Γράφημα 43|B.3.3



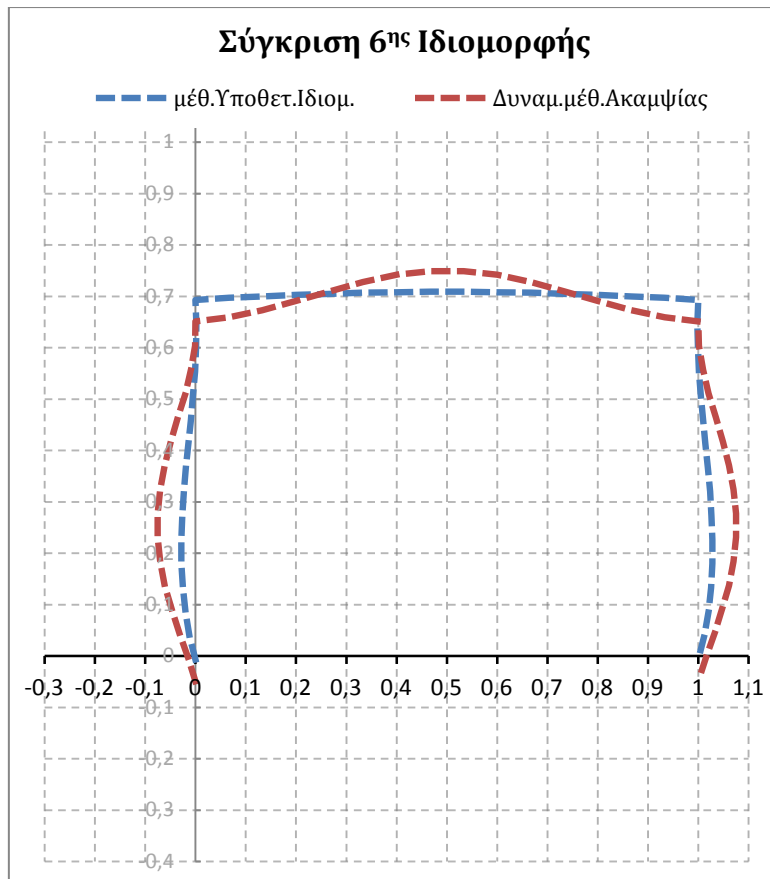
Γράφημα 44|B.3.3



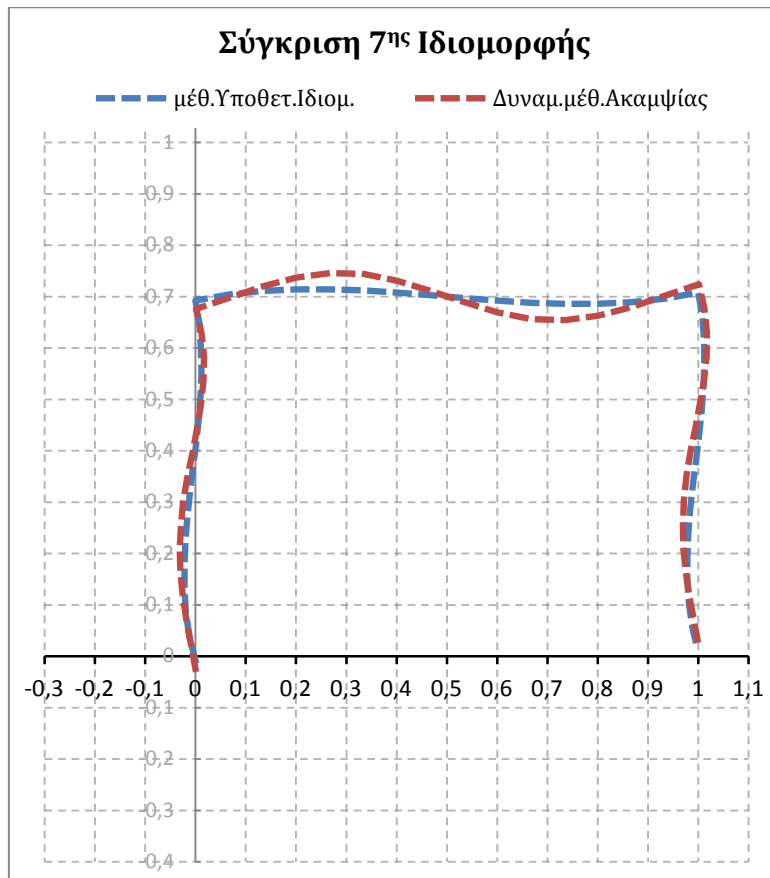
Γράφημα 45|B.3.3



Γράφημα 46|B.3.3



Γράφημα 47|B.3.3



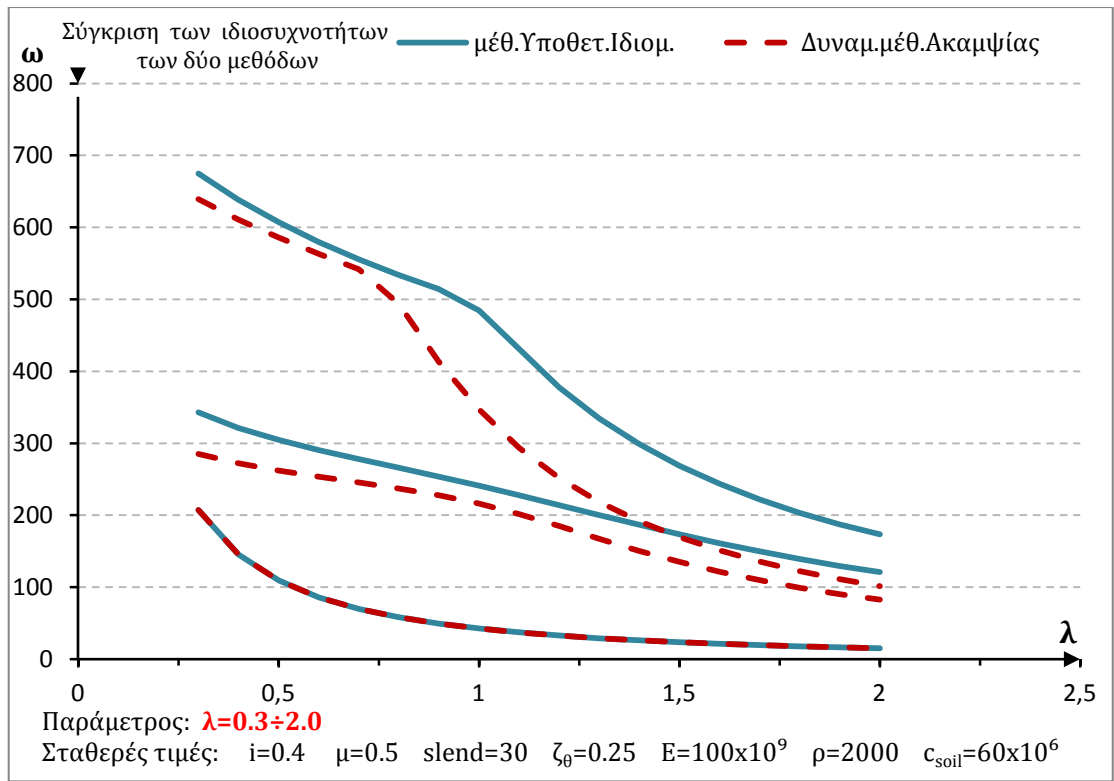
Γράφημα 48|B.3.3

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

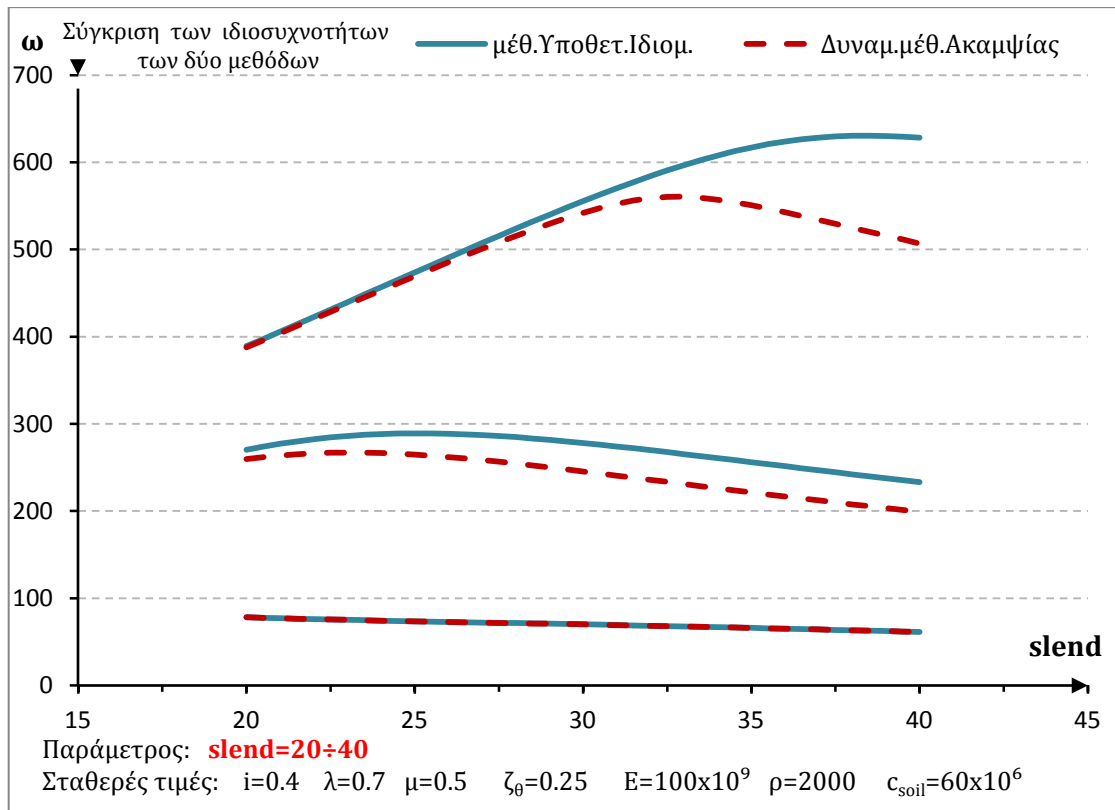
Επιπλέον, επιχειρούμε να συγκρίνουμε τις πρώτες, δεύτερες και τρίτες ιδιοσυχνότητες των δύο μεθόδων της εργασίας μας, σύμφωνα με την παραμετρική μελέτη που διεξήχθη στα εδάφια Α.3.2 και Β.3.2. Για αυτό τον σκοπό τις συγκεντρώσαμε σε κοινά διαγράμματα (πλήρη διαγράμματα βλ.Γραφήματα 8-15|Α.3.1 και Γραφήματα 34-41|Β.3.2)

Ως γενικό σχόλιο σε όλα τα γραφήματα, έχουμε να πούμε ότι υπάρχει αρκετά καλή προσέγγιση των ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων. Παρατηρούμε σε κάθε γράφημα, ότι η πρώτη ιδιοσυχνότητα, υπολογισθείσα με τη προσεγγιστική Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών, συμπίπτει, με εντυπωσιακά μεγάλη ακρίβεια, με την ιδιοσυχνότητα της ακριβούς Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας. Επιβεβαιώνεται η Αρχή του Rayleigh, που θέλει τη ακριβή θεμελειώδη ιδιοσυχνότητα να είναι το κάτω όριο όλων των προσεγγιστικών. Οι δεύτερες και τρίτες ιδιοσυχνότητες, όλων των γραφημάτων, έχουν καλή έως πολύ καλή προσέγγιση και σε όλες παρατηρείται το γεγονός ότι οι ακριβείς ιδιοσυχνότητες είναι μικρότερες από τις προσεγγιστικές.

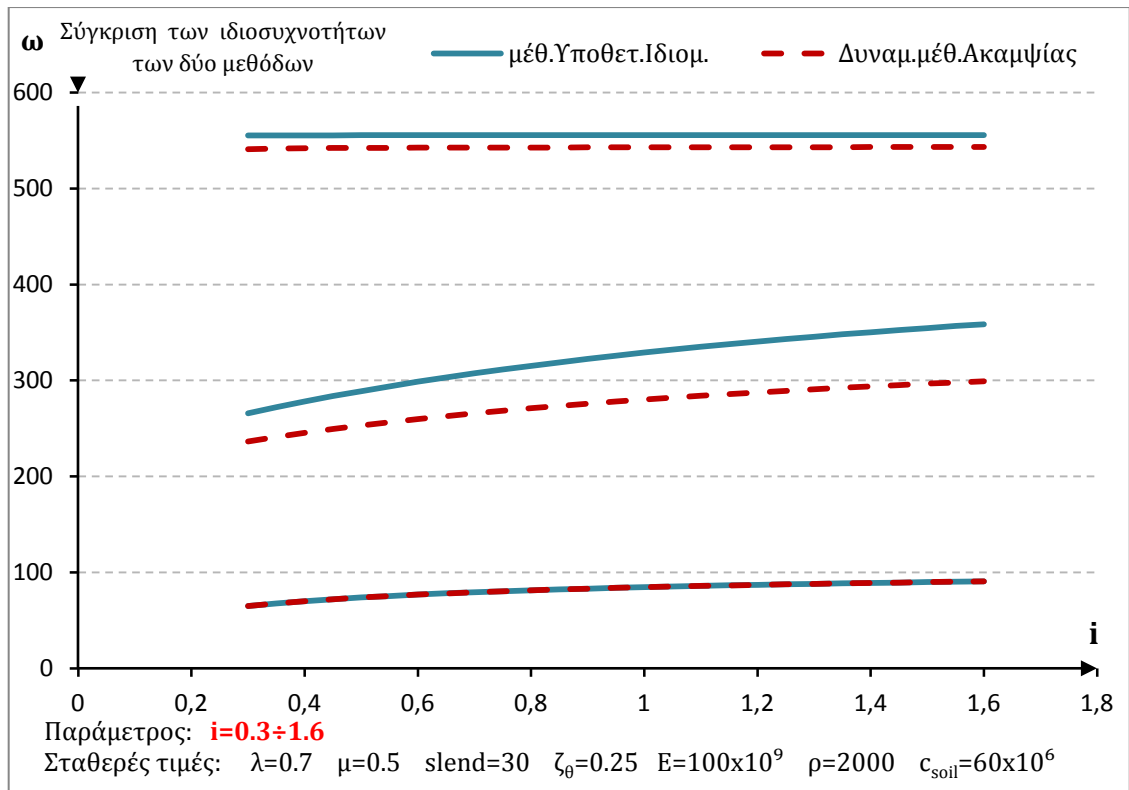
Ειδικά, παρατηρείται ότι στις παραμετρικές μελέτες ως προς c_{soil} , ζ_{θ} , λ , οι τρίτες ιδιοσυχνότητες έχουν μεγαλύτερη απόκλιση για μεγαλύτερες τιμές αυτών των παραμέτρων, ενώ στην τελευταία (παραμ.ως προς λ), η τρίτη ακριβής (από $\lambda = 1.4$ περίπου και έπειτα) έχει μικρότερες τιμές και από τη δεύτερη προσεγγιστική και σχεδόν πλησιάζει τη δεύτερη ακριβή. Στην παραμετρική μελέτη ως προς το μέτρο ελαστικότητας E , παρατηρείται απόκλιση σε αρχικό στάδιο μεταξύ της τρίτης ακριβούς και τρίτης προσεγγιστικής ιδιοσυχνότητας.



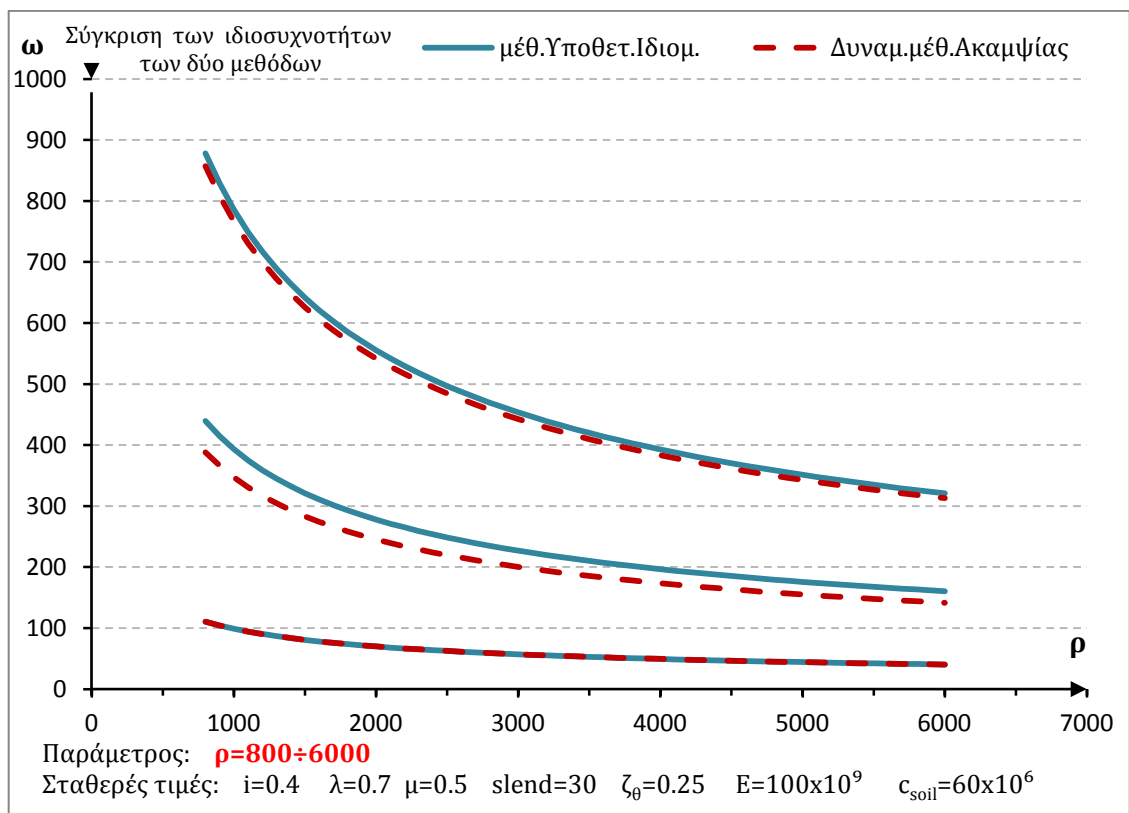
Γράφημα 49|B.3.3



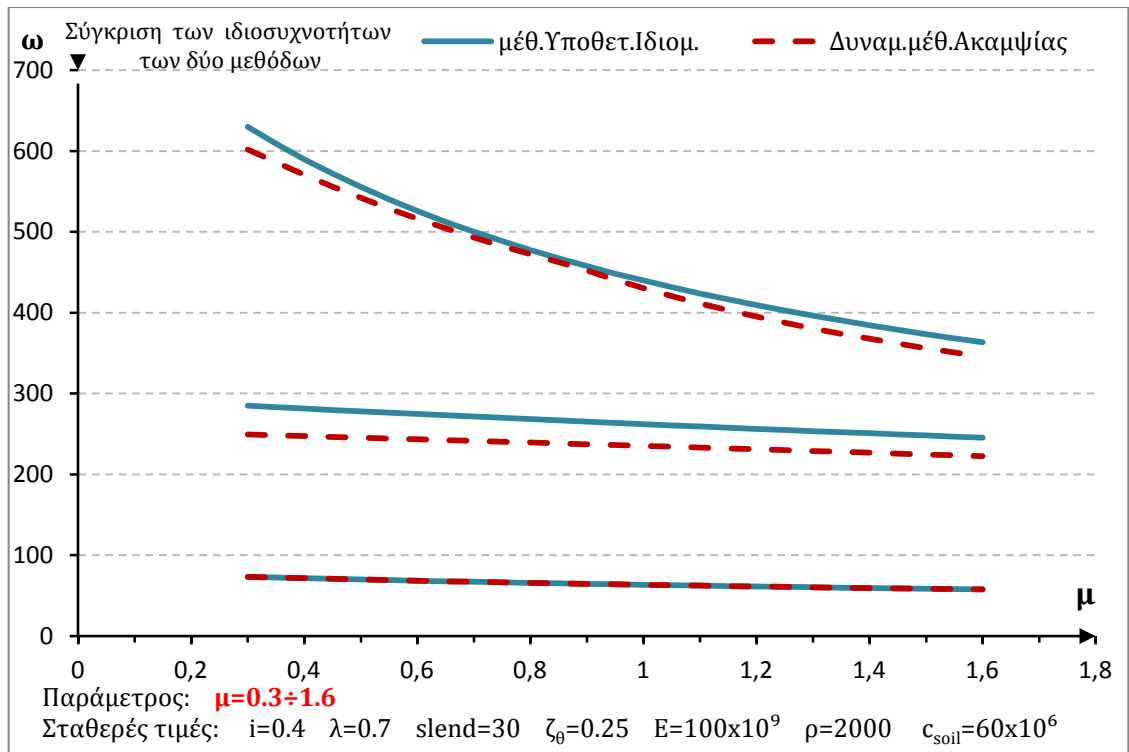
Γράφημα 50|B.3.3



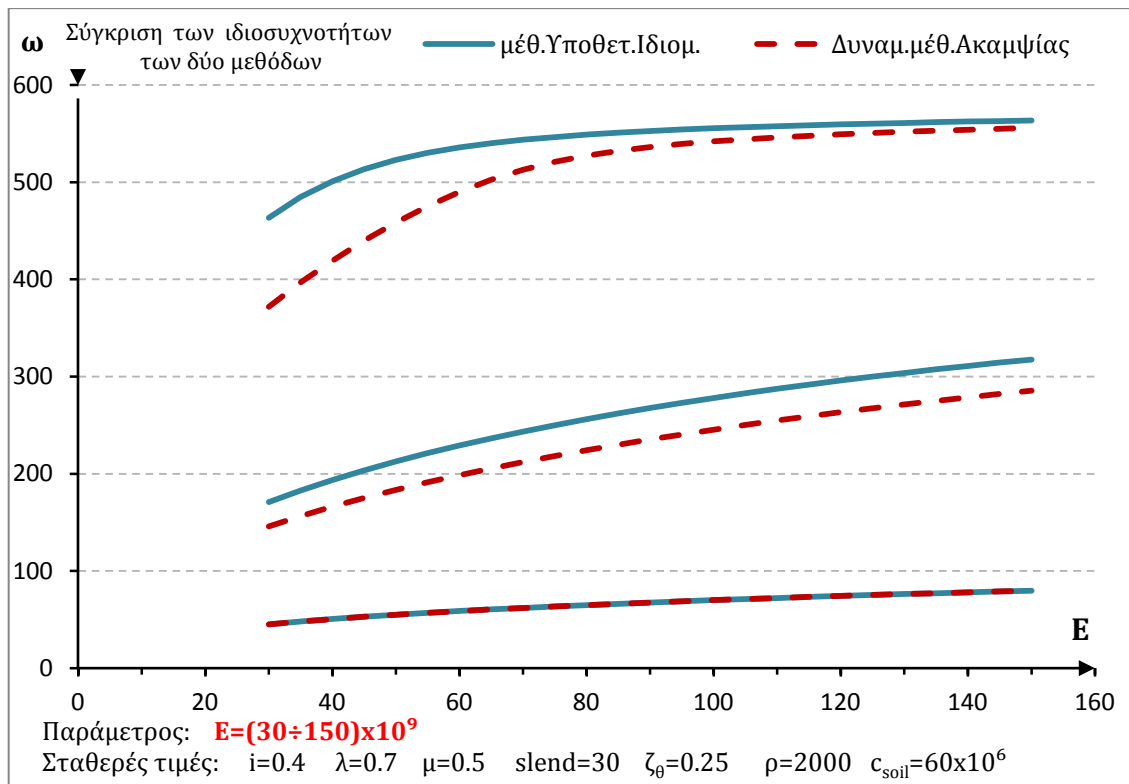
Γράφημα 51|B.3.3



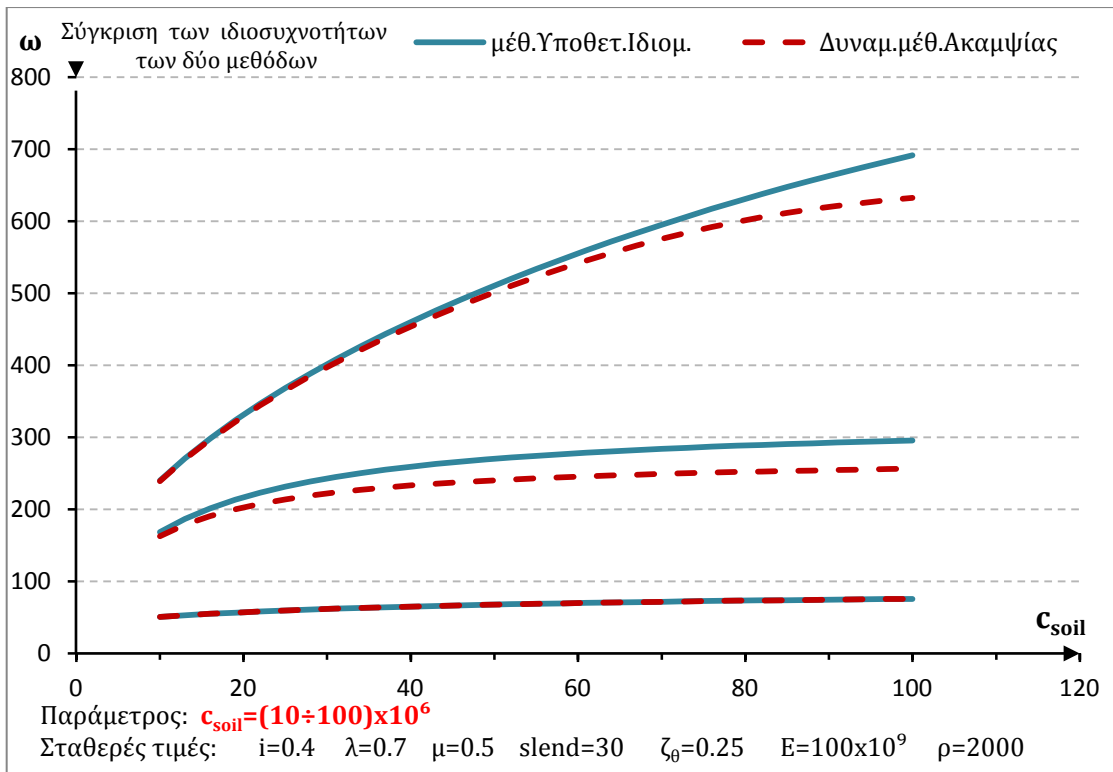
Γράφημα 52|B.3.3



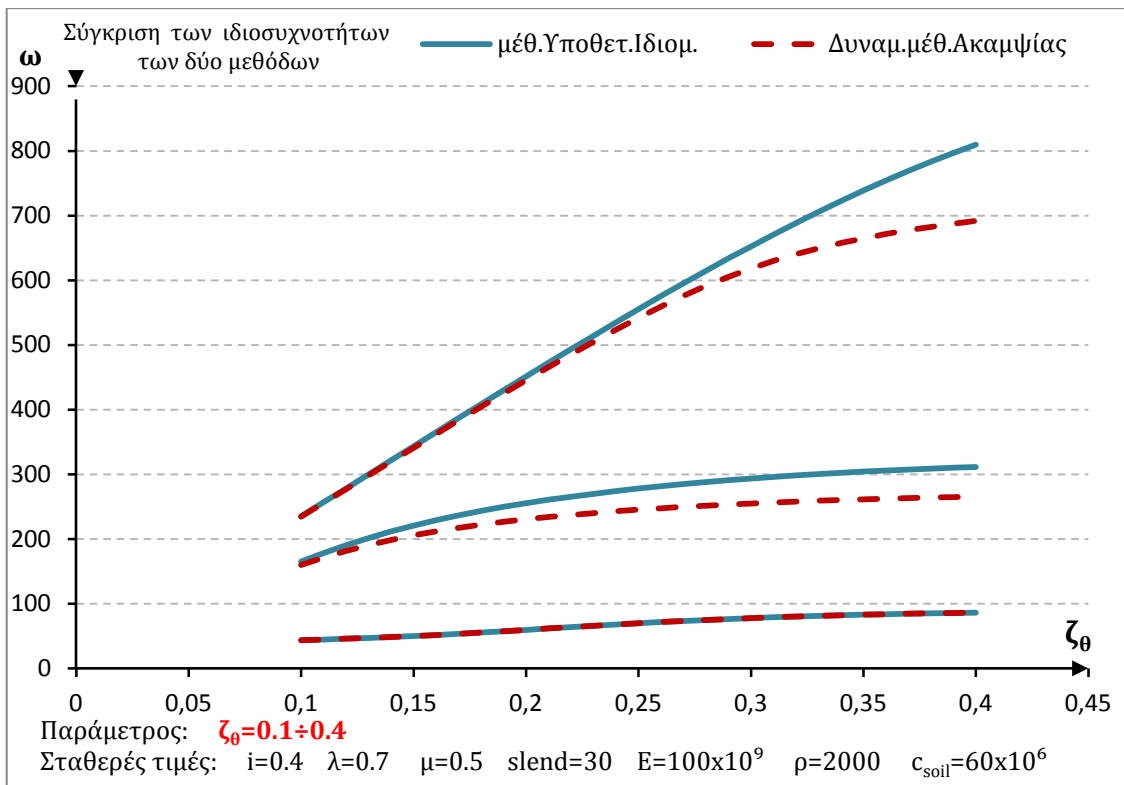
Γράφημα 53|B.3.3



Γράφημα 54|B.3.3



Γράφημα 55|B.3.3



Γράφημα 56|B.3.3

A) Από την παραμετρική μελέτη των ιδιοσυχνοτήτων του Α' και Β' Μέρους

Οι ιδιοσυχνότητες ακολουθούν την αναμενόμενη μεταβολή σε σχέση με την ακαμψία και τη μάζα του πλαισίου. Δηλαδή, αυξάνονται με την αύξηση της ακαμψίας και με τη μείωση της μάζας, ενώ μειώνονται με τη μείωση της ακαμψίας και την αύξηση της μάζας.

- Πράγματι, παρατηρείται αύξηση των ιδιοσυχνοτήτων με τη μείωση του ύψους του πλαισίου, με τη μείωση της λυγηρότητας των ράβδων, με την αύξηση της ροπής αδρανείας των ράβδων, με την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού και του δείκτη εδάφους, καθώς και με την αύξηση της επιφάνειας του θεμελίου.
- Αντιθέτως, παρατηρείται μείωση των ιδιοσυχνοτήτων με την αύξηση της πυκνότητας του υλικού κατασκευής και με την αύξηση της κατανεμημένης μάζας των ράβδων.
- Για κοντά πλαίσια, διαπιστώνεται μεγάλη αύξηση στις υψηλές ιδιοσυχνότητες.
- Για πλαίσια με $\lambda = \frac{L_a}{L_b} \approx 1$, οι ιδιοσυχνότητες $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ σχεδόν συμπίπτουν και εναλλάσσονται.
- Στις ιδιοσυχνότητες ω_3 και ω_4 , παρατηρείται αύξηση της τιμής τους με την αύξηση της λυγηρότητας.
- Οι ιδιοσυχνότητες ω_3 και ω_4 , λαμβάνουν παραπλήσιες τιμές σε σχέση με τις υπόλοιπες ιδιοσυχνότητες που οι τιμές τους διαφέρουν περισσότερο.

B) Από τη σύγκριση των ιδιοσυχνοτήτων του Α' και Β' Μέρους

- Η τιμή της πρώτης ιδιοσυχνότητας ω_1 που παρέχεται με τη Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών, προσεγγίζει εκ των άνω, σύμφωνα με την αρχή του Rayleigh, με πάρα πολύ μεγάλη ακρίβεια (~0,5%), την ακριβή τιμή που παρέχεται από τη Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας.
- Οι τιμές της δεύτερης ω_2 και ω_3 ιδιοσυχνότητας, που υπολογίσθηκαν με τη Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών, προσεγγίζουν όλες εκ των άνω με αρκετή έως πολύ ικανοποιητική ακρίβεια, τις αντίστοιχες τιμές αυτών που υπολογίσθηκαν με τη Δυναμική Μέθοδο Ακαμψίας.

Γ) Από τη σύγκριση των ιδιομορφών του Α' με τις ιδιομορφές του Β' Μέρους

- Οι ιδιομορφές που προκύπτουν με τη Μέθοδο των Υποθετικών Ιδιομορφών, ομοιάζουν πάρα πολύ με τις ακριβείς ιδιομορφές της Δυναμικής Μεθόδου Ακαμψίας.
- Στις ιδιομορφές της δεύτερης μεθόδου, είναι εμφανής, ως περισσότερο ελεύθερη η κίνηση λόγω των αδρανειακών δυνάμεων σε σύγκριση με τις ιδιομορφές της Μεθόδου των Υποθετικών Ιδιομορφών. Στις τελευταίες, η λίγο έως πολύ αυθαίρετη προεπιλογή των συναρτήσεων σχήματος, που συνεπάγεται επιβολή περισσότερων δεσμεύσεων στην κίνηση, οδηγεί σε μεγαλύτερη ακαμψία από την ακριβώς αναπτυσσόμενη.

Δ) Από τα σχήματα του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης

- Οι μορφές του εύρους της αρμονικής ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση, προσομοιάζουν με τις πλησιέστερες ιδιομορφές, των οποίων οι ιδιοσυχνότητες γειτνιάζουν προς τη συχνότητα της αρμονικής κίνησης της βάσης.
- Όταν η συχνότητα της αρμονικής κίνησης της βάσης πλησιάζει πολύ κάποια ιδιοσυχνότητα, είναι εμφανής η ανάπτυξη συντονισμού.
- Όσο η συχνότητα της διέγερσης της βάσης αυξάνεται (πέραν των τιμών των μεγαλύτερων ιδιοσυχνοτήτων), τόσο το εύρος της αρμονικής ταλάντωσης στη σταθερή κατάσταση μειώνεται.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1 A.1.2 • Οι 4 συναρτήσεις σχήματος του φορέα.....	13
Σχέδιο 1 A.2.1 • Το τρισδιάστατο πλαίσιο	41
Σχέδιο 2 A.2.1 • Το θεμέλιο της κατασκευής.....	42
Σχέδιο 3 A.2.1 • Το μηχανικό προσομοίωμα.....	42
Σχέδιο 4 A.2.1 • Η στήριξη του πλαισίου στη βάση.....	43
Σχήμα 2 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_1	45
Σχήμα 3 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_2	45
Σχήμα 4 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_3	46
Σχήμα 5 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_4	46
Σχήμα 6 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_5	47
Σχήμα 7 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_6	47
Σχήμα 8 A.2.2 • Η συνάρτηση σχήματος του δ_7	48
Σχέδιο 5 A.2.3 • Η γενική επίπεδη κίνηση του συστήματος.....	49
Πίνακας 1 A.3.1 • Οι 7 ιδιοσυχνότητες και οι γενικευμένες συντεταγμένες τους.....	76
Γράφημα 1 A.3.1 • Η πρώτη ιδιομορφή	76
Γράφημα 2 A.3.1 • Η δεύτερη ιδιομορφή	77
Γράφημα 3 A.3.1 • Η τρίτη ιδιομορφή	77
Γράφημα 4 A.3.1 • Η τέταρτη ιδιομορφή	78
Γράφημα 5 A.3.1 • Η πέμπτη ιδιομορφή.....	78
Γράφημα 6 A.3.1 • Η έκτη ιδιομορφή.....	79
Γράφημα 7 A.3.1 • Η έβδομη ιδιομορφή	79
Γράφημα 8 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς λ	80
Γράφημα 9 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς slend	81
Γράφημα 10 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς i	82
Γράφημα 11 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς ρ	82
Γράφημα 12 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς μ	83
Γράφημα 13 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς E	84
Γράφημα 14 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς c_{soil}	84
Γράφημα 15 A.3.1 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς ζ_{θ}	85
Πίνακας 2 A.3.2 • Βίντεο απόκρισης πλαισίου λόγω τυχαίας κίνησης της βάσης.....	86
Γράφημα 16 A.3.3 • Οι μορφές του εύρους αρμονικής $[\Delta]$ κίνησης της βάσης.....	87
Γράφημα 17 A.3.3 • Οι μορφές του εύρους αρμονικής $[\Delta]$ κίνησης της βάσης.....	88
Γράφημα 18 A.3.3 • Οι μορφές του εύρους αρμονικής $[Z]$ κίνησης της βάσης	89
Γράφημα 19 A.3.3 • Οι μορφές του εύρους αρμονικής $[Z]$ κίνησης της βάσης	90
Γράφημα 20 B.1.5.1 • Το εύρος αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού για $\delta_{A0}=1, \alpha=4.4$.	99
Γράφημα 21 B.1.5.1 • Το εύρος αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού για $\delta_{B0}=1, \alpha=4.4$	100
.....	100
Γράφημα 22 B.1.5.1 • Το εύρος αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού για $\theta_{A0}=1, \alpha=4.4$	101
.....	101
Γράφημα 23 B.1.5.1 • Το εύρος αρμονικής ταλάντωσης του στοιχείου δοκού για $\theta_{B0}=1, \alpha=4.4$	102
.....	102
Σχήμα 9 B.1.5.2 • Οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού για $\delta_{A0}=1, \alpha=0.1$	104
Σχήμα 10 B.1.5.2 • Οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού για $\delta_{B0}=1, \alpha=0.1$	104
Σχήμα 11 B.1.5.2 • Οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού για $\theta_{A0}=1, \alpha=0.1$	104
Σχήμα 12 B.1.5.2 • Οι αντιδράσεις επί του στοιχείου δοκού για $\theta_{B0}=1, \alpha=0.1$	105
Σχήμα 13 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της πρώτης στήλης του καθολικού μητρώου.....	110
Σχήμα 14 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της δεύτερης στήλης του καθολικού μητρώου.....	111
Σχήμα 15 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της τρίτης στήλης του καθολικού μητρώου.....	112

Σχήμα 16 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της τέταρτης στήλης του καθολικού μητρώου.....	113
Σχήμα 17 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της πέμπτης στήλης του καθολικού μητρώου	114
Σχήμα 18 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της έκτης στήλης του καθολικού μητρώου	115
Σχήμα 19 B.2.2.1 • Οι αντιδράσεις της έβδομης στήλης του καθολικού μητρώου.....	116
Πίνακας 3 B.3.1 • Οι πρώτες 13 ιδιοσυχνότητες και οι γενικευμένες συντεταγμένες τους.....	130
Γράφημα 24 B.3.1 • Η πρώτη ιδιομορφή	131
Γράφημα 25 B.3.1 • Η δεύτερη ιδιομορφή	131
Γράφημα 26 B.3.1 • Η τρίτη ιδιομορφή	132
Γράφημα 27 B.3.1 • Η τέταρτη ιδιομορφή	132
Γράφημα 28 B.3.1 • Η πέμπτη ιδιομορφή.....	133
Γράφημα 29 B.3.1 • Η πέκτη ιδιομορφή.....	133
Γράφημα 30 B.3.1 • Η έβδομη ιδιομορφή	134
Γράφημα 31 B.3.1 • Η όγδοη ιδιομορφή.....	134
Γράφημα 32 B.3.1 • Η ένατη ιδιομορφή	135
Γράφημα 33 B.3.1 • Η δέκατη ιδιομορφή	135
Γράφημα 34 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς λ.....	136
Γράφημα 35 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς slend.....	137
Γράφημα 36 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς i.....	138
Γράφημα 37 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς ρ.....	138
Γράφημα 38 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς μ	139
Γράφημα 39 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς E	140
Γράφημα 40 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς c_{soil}	140
Γράφημα 41 B.3.2 • Παραμετρική μελέτη ιδιοσυχνοτήτων ως προς ζ_{θ}	141
Γράφημα 42 B.3.3 • Σύγκριση των πρώτων ιδιομορφών των δύο μεθόδων	142
Γράφημα 43 B.3.3 • Σύγκριση των δεύτερων ιδιομορφών των δύο μεθόδων.....	143
Γράφημα 44 B.3.3 • Σύγκριση των τρίτων ιδιομορφών των δύο μεθόδων	143
Γράφημα 45 B.3.3 • Σύγκριση των τέταρτων ιδιομορφών των δύο μεθόδων	144
Γράφημα 46 B.3.3 • Σύγκριση των πέμπτων ιδιομορφών των δύο μεθόδων.....	144
Γράφημα 47 B.3.3 • Σύγκριση των έκτων ιδιομορφών των δύο μεθόδων.....	145
Γράφημα 48 B.3.3 • Σύγκριση των έβδομων ιδιομορφών των δύο μεθόδων	145
Γράφημα 49 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς λ.....	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 50 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς slend.....	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 51 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς i.....	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 52 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς ρ	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 53 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς μ	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 54 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς E	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 55 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς c_{soil}	Error! Bookmark not defined.
Γράφημα 56 B.3.3 • Σύγκριση των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων των δύο μεθόδων της παραμετρικής μελέτης ως προς ζ_{θ}	Error! Bookmark not defined.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Clough, R.W., Penzien J., *Dynamics of Structures*, 3rd ed., McGraw - Hill, Inc., 1986
- [2] Κατσικαδέλης, Ι.Θ., *Δυναμική των Κατασκευών*, Τόμος ΙΙ, εκδ.Συμμετρία, Αθήνα, 2002
- [3] Tuma, J.J. and Cheng, F.Y., *Dynamic Structural Analysis*, Shaum's Outline Series, McGraw - Hill, 1983
- [4] Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, 2rd ed., McGraw - Hill, Inc., 1986
- [5] Meirovitch, L., *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice Hall, 1997
- [6] Timoshenko, S., Young, D.H., Weaver, W.JR., *Vibration Problems in Engineering*, 4rd ed., John Wiley and Sons, 1974
- [7] Γιούνης, Χ.Ι., *Μηχανική των Ραβδωτών Φορέων*, εκδ.ΕΜΠ, Αθήνα, 2012
- [8] Τόλης, Κ., *Φάσματα Απόκρισης Πολυβάθμιων Ταλαντωτών για Πλήγματα Διαφόρων Μορφών*, διπλωμ. εργ., Τομέας Μηχανικής ΣΕΜΦΕ, εκδ.ΕΜΠ, Αθήνα, 2009
- [9] Burden, R.L., Faires, J.D., Reynolds, A.C., *Numerical Analysis*, 2rd ed., Prindle Weber & Schmidt, USA, 1981
- [10] Moler, C.B., *Numerical Computing with Matlab*, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004
- [11] Higham, D.J., Higham, N.J., *Matlab Guide*, 2rd ed., Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005