**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

# ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΜΗ ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ
# ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ KURATOWSKI

ΔΑΡΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Χ. Κουκουβίνος καθηγητής Ε.Μ.Π.
Α. Παπαϊωάννου αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)
Π.Στεφανέας λέκτορας

Αθήνα, Φεβρουάριος 2013

**<u>ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ</u>**

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

# ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΜΗ ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ KURATOWSKI

ΔΑΡΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Χ. Κουκουβίνος     καθηγητής Ε.Μ.Π.
Α. Παπαϊωάννου    αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π. (επιβλέπων)
Π.Στεφανέας         λέκτορας

Αθήνα, Φεβρουάριος 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

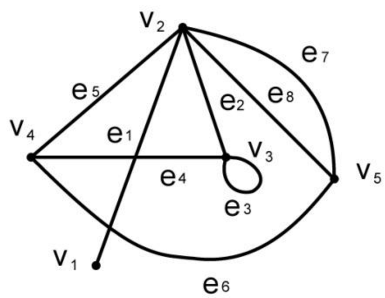
Τα γραφήματα είναι ένα βασικό αντικείμενο στα διακριτά μαθηματικά και η θεωρία γραφημάτων η επιστήμη που τα μελετάει. Η θεωρία γραφημάτων βρίσκει πολλές εφαρμογές στα εφαρμοσμένα μαθηματικά αλλά και στην επιστήμη των υπολογιστών.
Τα πρώτα στοιχεία σχετικά με τη θεωρία γραφημάτων κάνουν την εμφάνισή τους το 1736 στην εργασία του Euler: "Seven bridge of Konigsberg". Από τότε η θεωρία γραφημάτων άρχισε να εξελίσσεται αργά αλλά η ακμή της ξεκινάει τον προηγούμενο αιώνα κυρίως με την ανάπτυξη της Επιστήμης των Υπολογιστών.
Το 1930 ο Πολωνός Kazimierz Kuratowski, διάσημος μαθηματικός της εποχής του, απέδειξε το περίφημο θεώρημα χαρακτηρισμού ενός γραφήματος G ως επίπεδου ή μη επίπεδου. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται δύο αποδείξεις του θεωρήματος αυτού. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία παρουσίαση βασικών εννοιών της θεωρίας γραφημάτων, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα επίπεδα και μη επίπεδα γραφήματα και κάποιες ιδιότητες αυτών. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δύο αποδείξεις του θεωρήματος του Kuratowski, η μία με τη χρήση της έννοιας των γεφυρών, και η άλλη με στηριζόμενη στην έννοια του ομοιομορφισμού και της συστολής. Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιοι αλγόριθμοι επιπεδότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

## 1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq 0$ και E, όπου E είναι ένα υποσύνολο των μη διατεταγμένων ζευγών του V. Τα στοιχεία του συνόλου V ονομάζονται κορυφές του γραφήματος G και το σύνολό τους συμβολίζεται με V(G), ενώ τα στοιχεία του συνόλου E ονομάζονται πλευρές του γραφήματος G και το σύνολό τους συμβολίζεται με E(G). Το πλήθος του συνόλου V συμβολίζεται με $|V|$ ή $|V(G)|$και ονομάζεται τάξη του γραφήματος,. Αντίστοιχα, το πλήθος του συνόλου E συμβολίζεται με $|E|$ή$|E(G)|$και ονομάζεται μέγεθος του γραφήματος.

Η πλευρά e={u,v}λέμε ότι ενώνει τις κορυφές u και v. Αν η $e \in E(G)$τότε οι u και v ονομάζονται γειτονικές κορυφές και η πλευρά e(=uv, εναλλακτικός συμβολισμός) λέμε ότι προσπίπτει ή διέρχεται από τις κορυφές u και v που ονομάζονται άκρα της uv. Δύο πλευρές $e_1$ και $e_2$ ονομάζονται γειτονικές αν έχουν ένα κοινό άκρο, δηλαδή αν προσπίπτουν στην ίδια κορυφή.

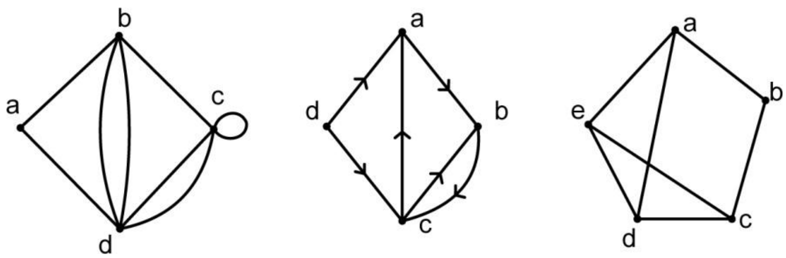



V(G)={$v_1$,$v_2$,$v_3$,$v_4$,$v_5$}
|V|=5
E(G)={$e_1$,$e_2$,$e_3$,$e_4$,$e_5$,$e_6$,$e_7$,$e_8$}
|E|=8

Σχήμα 1

Μία πλευρά που συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της ονομάζεται βρόχος. Επίσης δύο πλευρές με τα ίδια άκρα ονομάζονται παράλληλες. Αν ένα γράφημα περιέχει βρόχους ή παράλληλες πλευρές τότε ονομάζεται πολυγράφημα.

Αν σε ένα γράφημα τα στοιχεία του συνόλου E είναι διατεταγμένα ζεύγη κορυφών, π.χ. $\overrightarrow{uv}$,τότε ονομάζονται τόξα και όχι πλεύρες και το γράφημα καλείται κατευθυνόμενο ή διατεταγμένο.
Αν ένα γράφημα δεν περιέχει βρόχους ή παράλληλες πλευρές ονομάζεται απλό γράφημα.

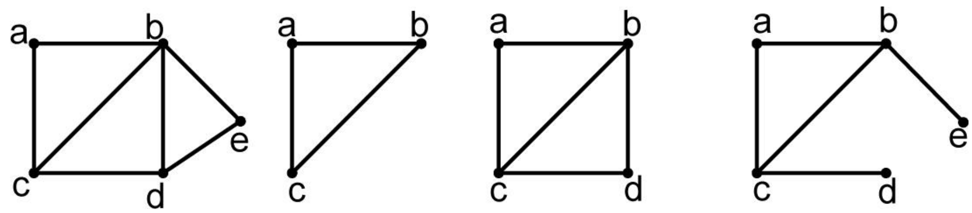



M H G

- Το γράφημα G είναι απλό
- Το γράφημα M έχει ένα βρόχο στην κορυφή c, δύο παράλληλες πλευρές bd και δύο παράλληλες πλευρές dc
- Το διατεταγμένο γράφημα H έχει 6 τόξα και 4 κορυφές

Σχήμα 2

Ένα γράφημα G'(V',E') ονομάζεται υπογράφημα του G(V,E) αν $V' \subseteq V$και $E' \subseteq E$. Αν τα δύο γραφήματα έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών( V'=V) τότε το G' ονομάζεται παράγον υπογράφημα του G. Επίσης αν το G' περιέχει όλες τις πλευρές του G που ενώνουν τις κορυφές του V' τότε ονομάζεται παραγόμενο υπογράφημα από το V' και συμβολίζεται με G[V'].




| G | G' | H | $G_1$ |
|---|---|---|---|
| | Υπογράφημα του G | Παραγόμενο υπογράφημα του G από τις κορυφές a,b,c,d | Παράγον υπογράφημα του G |

Σχήμα 3

Συμβολίζουμε με G(n) ένα αυθαίρετο γράφημα τάξης n και με G(n,m) ένα αυθαίρετο γράφημα τάξης n και μεγέθους m.

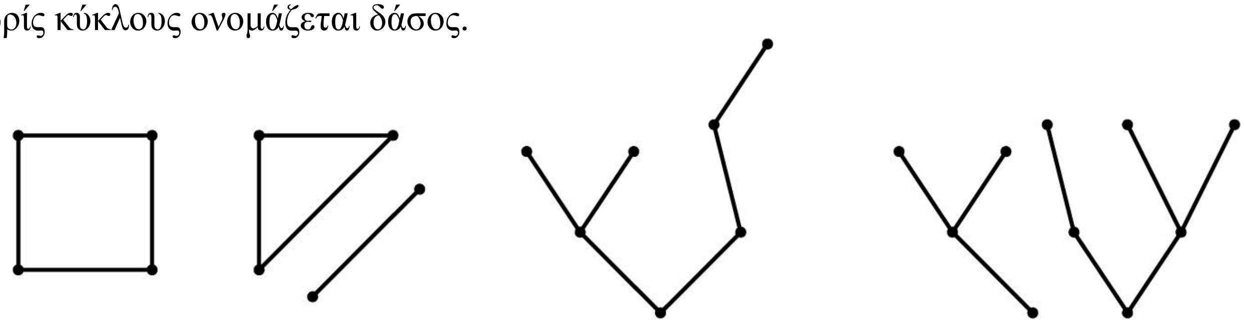
Ένα γράφημα τάξεως n με m=0 ονομάζεται κένο γράφημα και συμβολίζεται με $E_n$.
Ένα γράφημα τάξεως n όπου όλες οι κορυφές είναι γειτονικές ανά δύο ονομάζεται πλήρες και συμβολίζεται με $K_n$. Σε ένα πλήρες γράφημα ισχύει $m = \binom{n}{2}$.
Γενικά για κάθε γράφημα ισχύει $0 \leq m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
Ο βαθμός της κορυφής ενός γραφήματος συμβολίζεται με d(v) και είναι το πλήθος των πλευρών που διέρχονται από την κορυφή αυτή. Αν d(v)=0 τότε η κορυφή λέγεται μεμονωμένη. Ο μικρότερος(μεγαλύτερος) βαθμός από τους βαθμούς των κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με δ(G)=min$\{d(v): v \in V\}$ (Δ(G)=max$\{d(v): v \in V\}$).
Προφανώς $0 \leqslant d(v) \leqslant n-1 \ \ \forall v \in G.$

Ένα γράφημα για το οποίο ισχύει d(v)=k για όλες τις κορυφές του ονομάζεται k-κανονικό γράφημα.

**Θεώρημα 1**
Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος G ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των πλευρών του, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$.
**Απόδειξη:**
Εφόσον κάθε πλευρά προσπίπτει σε δύο κορυφές, θα προσφέρει δυό μονάδες στο άθροισμα των βαθμών, μία μονάδα για κάθε κορυφή που είναι άκρο της πλευράς αυτής.

Μία πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλασσονται κορυφές και πλευρές ενός γραφήματος, η οποία αρχίζει και τελειώνει σε κορυφή και κάθε της πλευρά προσπίπτει στην προηγούμενη και επόμενη κορυφή της ακολουθίας, ονομάζεται δρόμος. Π.χ. ο δρόμος $v_1, v_1v_2, v_2, ..., v_{n-1}v_n, v_n$ λέγεται $v_1 \rightarrow v_n$ δρόμος από τις ακραίες κορυφές του.
Αν σε ένα δρόμο κάθε πλευρά του δρόμου εμφανίζεται μόνο μια φορά τότε ο δρόμος λέγεται δρομίσκος.
Αν σε ένα δρόμο κάθε πλευρά και κάθε κορυφή του δρόμου εμφανίζονται μόνο μια φορά τότε ο δρόμος λέγεται μονοπάτι.
Ένας δρόμος ή ένας δρομίσκος που έχει την ίδια κορυφή ως άκρα ονομάζεται κλειστός δρόμος ή δρομίσκος. Αντίστοιχα, ένα μονοπάτι που έχει την ίδια κορυφή ως άκρα ονομάζεται κύκλος.
Το πλήθος των πλευρών ενός δρόμου ονομάζεται μήκος του δρόμου.

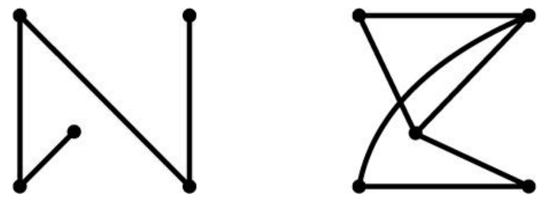
Ένα γράφημα G(V,E) λέγεται συνεκτικό αν $\forall u, v \in V$ υπάρχει μονοπάτι από το u στο v. Το $K_1$ θεωρούμε ότι είναι συνεκτικό. Ένα μη συνεκτικό γράφημα G αποτελείται από δύο ή περισσότερα συνεκτικά υπογράφηματα που ονομάζονται συνεκτικές συνιστώσες του G. Ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται δέντρο, ενώ ένα γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται δάσος.



Συνεκτικό γράφημα με κύκλους | Μη συνεκτικό γράφημα με κύκλους | Δέντρο (συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους) | Δάσος (μη συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους)

Σχήμα 4

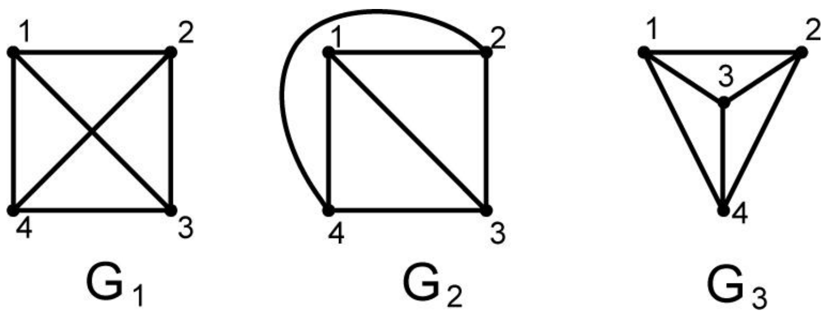
Ονομάζουμε συμπλήρωμα $\bar{G}$ ενός γραφήματος G ένα γράφημα με V(G) σύνολο κορυφών και στο οποίο δύο κορυφές είναι γειτονικές αν και μόνο αν δεν είναι γειτονικές στο G.



G $\bar{G}$

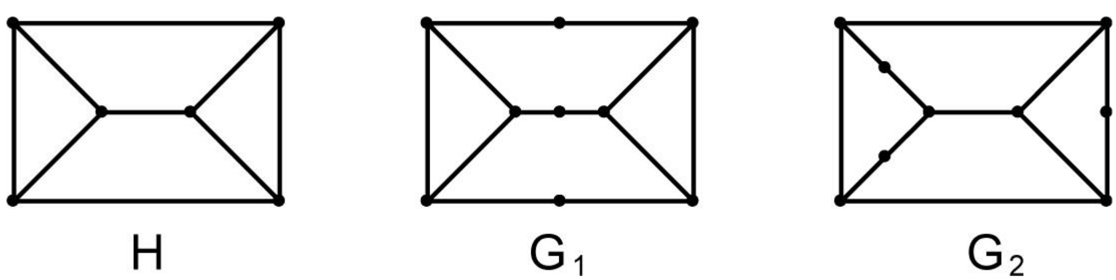
Σχήμα 5

Δύο γραφήματα $G_1$ και $G_2$ είναι ισόμορφα ( $G_1=G_2$) αν υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία f, που ονομάζεται ισομορφισμός, από το σύνολο $V(G_1)$ στο $V(G_2)$ τέτοια ώστε η f να διατηρεί τις γειτνιάσεις αλλά και τις μη γειτνιάσεις των κορυφών. Δηλαδή, $uv \in E(G_1)$ αν και μόνο αν $f(u)f(v) \in E(G_2)$.Προφανώς δύο ισόμορφα γραφήματα θα έχουν ίδια τάξη και ίδιο μέγεθος.




Σχήμα 6 $G_1=G_2=G_3$

Αν θεωρήσουμε ένα γράφημα G, μπορούμε να παράξουμε ένα καινούργιο γράφημα χωρίζοντας τις πλευρές του G με νέες κορυφές βαθμού 2. Προφανώς, το νέο γράφημα θα έχει περισσότερες πλευρές και κορυφές από το G και τα δύο αυτά γραφήματα θα ονομάζονται ομοιόμορφα. Γενικά δύο γραφήματα $G_1$ και $G_2$ λέγονται ομοιόμορφα αν μπορούν να προκύψουν με τη διαδικασία αυτή, είτε το ένα από το άλλο είτε και τα δύο από το ίδιο G.

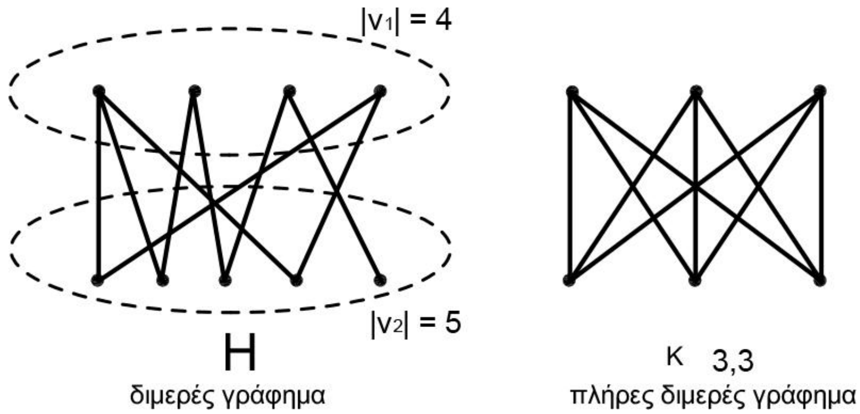



$G_1$,$G_2$ ομοιόμορφα με το H, άρα $G_1$ ομοιόμορφο με το $G_2$

Σχήμα 7

Ένα γράφημα λέγεται διμερές ή διαμερισμένο αν το σύνολο των κορυφών του V μπορεί να διαχωριστεί σε δύο ξένα μη κενά υποσύνολα $V_1$ και $V_2$, τέτοια ώστε κάθε πλευρά του G να ενώνει μία κορυφή του $V_1$ με μία κορυφή του $V_2$. Αν κάθε κορυφή του $V_1$

ενώνεται με κάθε κορυφή του $V_2$ τότε το γράφημα λέγεται πλήρες διμερές και συμβολίζεται με $K_{m,n}$ όπου $m = |V_1|, n = |V_2|$.




Σχήμα 8

**Θεώρημα 2 (θεώρημα Konig)**
Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος
**Απόδειξη:**
Έστω το διμερές γράφημα G και $V_1$, $V_2$ τα δύο ξένα,μη κενά υποσύνολα του V(G). Έστω $v_1,v_2,...,v_k,v_1$ ένας κύκλος του G με $v_1 \in V_1$. Τότε προφανώς $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1$κ.ο.κ. Άρα $v_i \in V_1$,αν και μόνο αν ο i είναι περιττός αριθμός. Αφού $v_k \in V_2$ έπεται ότι ο k είναι άρτιος αριθμός, άρα ο κύκλος έχει άρτιο μήκος.
Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα G του οποίου όλοι οι κύκλοι έχουν άρτιο μήκος είναι διαμερισμένο. Πράγματι, αν ένα γράφημα είναι διαμερισμένο, τότε και κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι διαμερισμένη και αντιστρόφως. Αν $v \in V(G)$, παριστάνουμε με $V_1$ το υποσύνολο του V(G) που αποτελείται από τη v και όλες τις κορυφές u του V(G) που ικανοποιούν τη σχέση: οποιοδήποτε συντομότερο u-v μονοπάτι του G έχει άρτιο μήκος. Θέτουμε $V_2=V(G)-V_1$. Θα δείξουμε ότι τα σύνολα $V_1$, $V_2$ αποτελούν μία διαμέριση του V(G).
Έστω $u,w \in V_1$ και έστω ότι $uw \in E(G)$.Τότε ούτε η u ούτε η w μπορεί να είναι η κορυφή v. Έστω το συντομότερο v-u μονοπάτι $v=u_1,u_2,...,u_{2n+1}=u$, $n \geq 1$ και το συντομότερο v-w μονοπάτι $v=w_1,w_2,...,w_{2m+1}=w$, $m \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η w' είναι η τελευταία κοινή κορυφή στα δύο αυτά μονοπάτια (όπου η w' μπορείνα συμπίπτει με τη v). Αφού τα δύο μονοπάτια είναι συντομότερα, έπεται ότι και το v-w' μονοπάτι που περιέχεται στο v-u μονοπάτι είναι συντομότερο v-w' μονοπάτι. Επίσης και το v-w' μονοπάτι που περιέχεται στο v-w μονοπάτι είναι συντομότερο μονοπάτι. Άρα, υπάρχει κάποιο i για το οποίο είναι $w'=u_i$ και $w'=w_i$. Αλλά τότε ο κύκλος $u_iu_{i+1},...,u_{2n+1},w_{2m+1},...,w_i=u_i$ είναι κύκλος με μήκος $(2n+1-i)+1+(2m+1-i)=2(n+m)+2-2i+1$ δηλαδή περιττό. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υποθεσή μας.
Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι δύο κορυφές του $V_2$ δεν μπορεί να είναι γειτονικές. Άρα κάθε πλευρά του G ενώνει μια κορυφή του $V_1$ με μία κορυφή του $V_2$ και το G είναι διμερές.

## 1.2 Δέντρα

Όπως ήδη αναφέρθηκε, ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους ονομάζεται δέντρο, ενώ αν δεν είναι συνεκτικό (και δεν περιέχει κύκλους) ονομάζεται δάσος και οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι δέντρα. Οι κορυφές βαθμού 1 ονομάζονται φύλλα και οι υπόλοιπες εσωτερικές κορυφές.
Κάθε δέντρο με 2 ή περισσότερες πλευρές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα. Επίσης, αν από ένα δέντρο αφαιρέσουμε ένα φύλλο και την προσπίπτουσα πλευρά προκύπτει πάλι δέντρο, αφού η αφαίρεση μίας πλευράς βαθμού 1 δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

**Θεώρημα 3**
Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές έχει τουλάχιστον n-1 πλευρές.
**Απόδειξη:** Για n=1 το θεώρημα ισχύει( το $K_1$ θεωρείται συνεκτικό). Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή ότι όλα τα συνεκτικά γραφήματα με n κορυφές έχουν τούλαχιστον n-1 πλευρές. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n+1. Έστω G συνεκτικό γράφημα με n+1 κορυφές και m πλευρές. Αν $m \geqslant n+1 \rightarrow m \geqslant n$, άρα αποδείχτηκε. Αν $m < n+1$, τότε το γράφημα περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 1.Πράγματι, αν $v_i, 1 \leqslant i \leqslant n+1$οι κορυφές του G και υποθέσουμε ότι $d(v_i) \geqslant 2\ \forall i$, τότε:

$$\sum_{i=1}^{n+1} d(v_i) \geqslant 2(n+1) \rightarrow 2\mathrm{m} \geqslant 2(n+1) \rightarrow m \geqslant n+1 \text{ ,άτοπο.}$$

Άρα το G περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή v με d(v)=1. Το γράφημα G-v είναι συνεκτικό με n κορυφές, άρα από την επαγωγική υπόθεση έχει τουλάχιστον n-1 πλευρές. Άρα το G, που έχει μία παραπάνω πλευρά από το G-v, θα έχει τουλάχιστον n πλευρές, δηλαδή $m \geqslant n$.

**Θεώρημα 4**
Για κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και m πλευρές, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Το γράφημα είναι δέντρο.
2. Κάθε τυχαίο ζεύγος κορυφών του G ενώνεται με μοναδικό μονοπάτι.
3. Αν αφαιρεθεί από το G μία πλευρά το γράφημα παύει να είναι συνεκτικό (ελαχιστοτικά συνεκτικό)
4. Το G είναι συνεκτικό και m=n-1.
5. Το G είναι άκυκλο και m=n-1.
6. Αν στο G προστεθεί μία νέα πλευρά το γράφημα αποκτά κύκλο.

**Απόδειξη**
**1→2:** Αφού το G είναι συνεκτικό, κάθε ζεύγος κορυφών θα ενώνεται με ένα μονοπάτι. Έστω ότι για ένα τυχαίο ζεύγος κορυφών υπάρχουν δύο μονοπάτια. Τότε, τα μονοπάτια κάπου θα ξεχωρίζουν, αφού έχουν κοινή αρχή, και κάπου θα συναντιούνται, αφού έχουν κοινό τέλος, δημιουργώντας έτσι κύκλο. Άτοπο, γιατί το G είναι δέντρο.
**2→3:** Το G είναι συνεκτικό και για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει μοναδικό μονοπάτι.

Άρα, αφαιρώντας μία πλευρά καταργούμε τη συνεκτικότητα μεταξύ των άκρων της πλευράς αυτής.
**3→4:** Το G είναι συνεκτικό. Για n=1 η ισότητα ισχύει. Έστω, ότι η ισότητα ισχύει για γραφήματα με αριθμό κορυφών μικρότερο ή ίσο του n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n+1. Αφαιρώντας μία πλευρά από το γράφημα αίρεται η συνεκτικότητά του και προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες. Η μία θα έχει k κορυφές και η άλλη n-k+1 κορυφές. Και οι δύο συνιστώσες είναι ελαχιστοτικά συνεκτικές, άρα από την επαγωγική υπόθεση θα έχουν k-1 και (n-k+1)-1 πλευρές αντίστοιχα. Άρα, το G, λαμβάνοντας υπόψη και την πλευρά που αφαιρέσαμε έχει συνολικά (k-1)+[(n-k+1)-1]+1=(n+1)-1 πλευρές.
**4→5:** Έστω ότι το γράφημα είναι συνεκτικό με m=n-1 πλευρές και περιέχει κύκλο. Αφαιρώντας μία πλευρά από τον κύκλο δεν επηρεάζεται η συνεκτικότητα του γραφήματος. Άρα, προκύπτει ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα, δηλαδή ένα δέντρο, με n κορυφές και m=n-2<n-1 πλευρές. Άτοπο, αφού στο 4 δείξαμε ότι θα έχει n-1 πλευρές.
**5→6:** Αρκεί να δείξουμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό, γιατί η προσθήκη μίας νέας πλευράς θα δημιουργεί κυκλο με το μονοπάτι που συνδέει τα άκρα της. Έστω k ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Θα δείξουμε ότι k=1 ,δηλαδή ότι το γράφημα είναι συνεκτικό. Αφού το γράφημα είναι άκυκλο, έιναι δάσος, άρα κάθε συνιστώσα θα είναι δέντρο.Έστω $n_i$ ο αριθμός των κορυφών της συνεκτικής συνιστώσας i,i=1,2, ... ,k και $m_i=n_i-1$ ο αριθμός των πλευρών.Άρα:

$$n-1=m=\sum_{i=1}^{k} m_i=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n-k \rightarrow k=1.$$

**6→1:** Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μεγιστοτικά άκυκλο γράφημα είναι συνεκτικό. Έστω ότι δεν είναι συνεκτικό και $G_1$ ,$G_2$ δύο συνεκτικές συνιστώσες του. Αν προσθέσουμε την πλευρά uv όπου $u \in G_1\ \mathit{και}\ v \in G_2$ δεν δημιουργείται κύκλος. Άτοπο, γιατί το γράφημα είναι μεγιστοτικά άκυκλο.

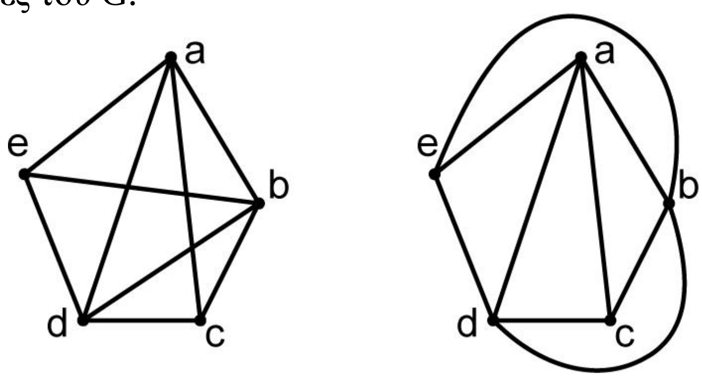
Μία χρήσιμη εφαρμογή των δέντρων είναι στο γνωστό πρόβλημα βελτιστοποίησης c*onnector problem*:

Έστω ένα γράφημα G(V,E) και μία συνάρτηση $f{:}E \rightarrow R^+$. Η συνάρτηση f, ορισμένη στις πλευρές του γραφήματος, λέγεται συνάρτηση κόστους και το γράφημα στο οποίο ορίζεται λέγεται δίκτυο. Ζητείται να βρεθεί ένα παράγον υπογράφημα G'(V,E') του G τέτοιο ώστε το άθροισμα $\sum_{uv\in E'} f(uv)$ να ελαχιστοποιείται. Προφανώς το ζητούμενο υπογράφημα θα είναι ένα από τα παράγοντα δέντρα του G. Πράγματι, αν το G' περιείχε κύκλο τότε αφαιρώντας μία πλευρά του κύκλου το γράφημα θα παρέμαινε συνεκτικό και το άθροισμα $\sum_{uv\in E'} f(uv)$ θα ήταν μικρότερο από το αρχικό, άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΕΠΙΠΕΔΑ-ΜΗ ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

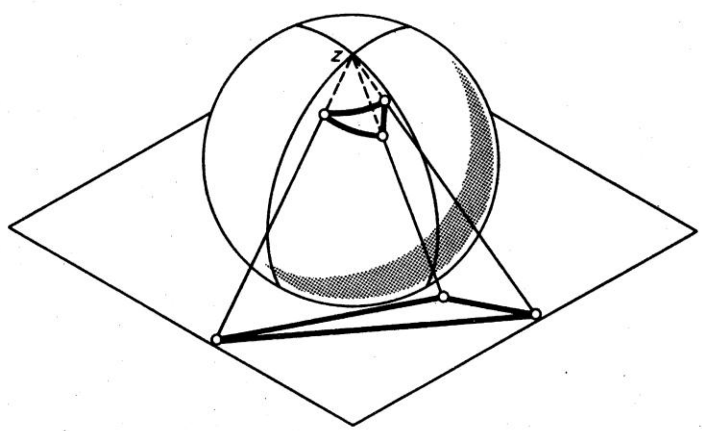
## 2.1 Επίπεδα γραφήματα

Ένα γράφημα G ονομάζεται επίπεδο ή εμφυτεύσιμο στην επιφάνεια S αν μπορεί να σχεδιαστεί στην επιφάνεια έτσι ώστε οι πλευρές του να μην τέμνονται. Μία τέτοια σχεδίαση ενός επίπεδου γραφήματος G ονομάζεται εμφύτευση του G στην επιφάνεια και είναι ένα γράφημα ισόμορφο με το G. Το σύνολο των κορυφών της εμφύτευσης G' είναι το σύνολο των σημείων στην επιφάνεια S που αναπαριστούν κορυφές του G και το σύνολο των πλευρών του G' είναι το σύνολο των γραμμών στην επιφάνεια που αναπαριστούν πλευρές του G.




Σχήμα 9

**Θεώρημα 5**
Τα επίπεδα γραφήματα είναι εμφυτεύσιμα στη σφαίρα, και αντίστροφα κάθε γράφημα εμφυτεύσιμο στη σφαίρα είναι επίπεδο.
**Απόδειξη:** Θεωρούμε μία σφαίρα S που είναι τοποθετημένη πάνω στο επίπεδο P. Έστω N(0,0,1) το αντιδιαμετρικό σημείο του σημείου επαφής της σφαίρας με το επίπεδο. Η απεικόνιση π: S-{N}→P που ορίζεται από τη σχέση π(S)=P, αν και μόνο αν τα σημεία N,S,P είναι συνευθειακά, λέγεται στερεογραφική προβολή.

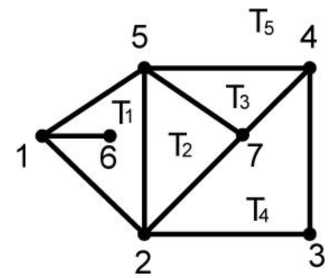


Σχήμα 10

Έστω ότι το γράφημα G έχει μία εμφύτευση G' στη σφαίρα. Η εικόνα π(G') μέσω της στερεογραφικής προβολής είναι μία εμφύτευση του G στο επίπεδο.

Αντίστροφα, έστω G' μία εμφύτευση του G στο επίπεδο. Η εικόνα $\pi^{-1}(G')$ είναι μία εμφύτευση του G στη σφαίρα.

Ένα επίπεδο γράφημα χωρίζει το επίπεδο σε περιοχές. Κάθε περιοχή έχει ως σύνορο ένα κύκλο ή ένα κλειστό δρόμο. Ο βαθμός d(τ) μίας περιοχής είναι το μήκος του κύκλου ή του κλειστού δρόμου που είναι σύνορο της περιοχής. Έτσι, αν μία περιοχή είναι βρόγχος τότε d(τ)=1, ενώ αν έχει ως σύνορο δύο παράλληλες πλευρές τότε d(τ)=2. 'Αρα, σε κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχουμε d(τ)≥3 για κάθε περιοχή τ. Σε κάθε επίπεδο γράφημα υπάρχει μία περιοχή μη φραγμένη που είναι το εξωτερικό του διαγράμματος.




$d(\tau_1)=5$
$d(\tau_2)=3$
$d(\tau_3)=3$
$d(\tau_4)=4$
$d(\tau_5)=5$

Σχήμα 11

G

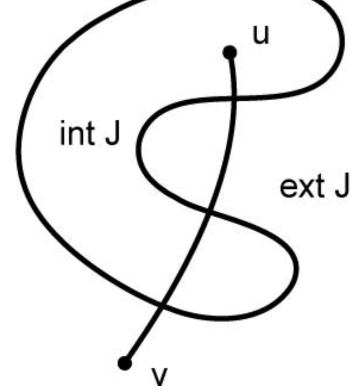
**Θεώρημα 6**
Το άθροισμα των βαθμών των περιοχών ενός συνεκτικού επίπεδου γραφήματος G ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των πλευρών: $\sum_{i=1}^{r} d(t_i) = 2\mathrm{e}$

**Απόδειξη:**
Κάθε πλευρά συνεισφέρει δύο μονάδες στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{r} d(t_i)$και συγκεκριμένα από μία μονάδα στις δύο περιοχές των οποίων η πλευρά αυτή είναι σύνορο. Αν η πλευρά κείται μέσα σε μία περιοχή, τότε συνεισφέρει πάλι 2 μονάδες στο βαθμό της περιοχής μέσα στην οποία κείται.

Έστω J μία καμπύλη Jordan στο επίπεδο (μία συνεχής κυρτή καμπύλη της οποίας η αρχή και το τέλος συμπίπτουν).Τότε το επίπεδο χωρίζεται σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα σημείων, που ονομάζονται εσωτερικό (intJ) και εξωτερικό (extJ) της καμπύλης J.

**Θεώρημα 7(θεώρημα Jordan)**
Κάθε γραμμή στο επίπεδο που ενώνει ένα εσωτερικό σημείο μίας καμπύλης Jordan με ένα εξωτερικό της τέμνει περιττό πλήθος φορών την καμπύλη.

Η uv-καμπύλη τέμνει
3 φορές την J καμπύλη

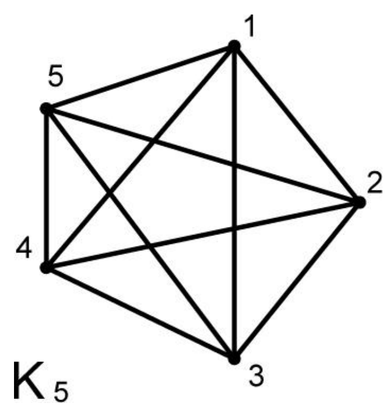



Σχήμα 12

**Θεώρημα 8**

Το $K_5$ δεν είναι επίπεδο.

**Απόδειξη:** Έστω ότι το $K_5$ είναι επίπεδο και έστω G μία εμφύτευση του $K_5$ στο επίπεδο. Ονομάζουμε τις κορυφές του G ως $v_{1,}v_{2,}v_{3,}v_{4,}v_5$. Αφού το G είναι πλήρες, κάθε ζεύγος κορυφών του θα ενώνεται από μία πλευρά. Ο κύκλος $C = v_1v_2v_3v_1$ είναι μία καμπύλη Jordan στο επίπεδο, και το σημείο $v_4$ θα ανήκει ή στο intC ή στο extC. Έστω ότι $v_4 \in intC$ (εργαζόμαστε αντίστοιχα για $v_4 \in extC$). Τότε οι πλευρές $v_4v_{1,}v_4v_{2,}v_4v_3$ χωρίζουν το intC σε τρεις περιοχές $intC_1, intC_2, intC_3$ . Άρα το $v_5$ πρέπει να ανήκει σε μία από τις τέσσερις περιοχές extC, $intC_1, intC_2, intC_3$ ,όπου $C_i = v_4v_jv_k$ , j,k≠i. Αν $v_5 \in extC$ τότε, αφού $v_4 \in intC$, σύμφωνα με το θ.Jordan η πλευρά $v_4v_5$ θα τέμνει τον κύκλο C σε κάποιο σημείο. Άτοπο γιατί το G είναι επίπεδο. Αντίστοιχα αν $v_5 \in intC_i, i = 1,2,3$, τότε η πλευρά $v_5v_i$ θα τέμνει τον κύκλο $C_i$ ,πάλι άτοπο γιατί το G είναι επίπεδο.




Σχήμα 13

**Θεώρημα 9 (τύπος του Euler)**

Αν G ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές m πλευρές και τ περιοχές τότε ισχύει ο τύπος: n-m+τ=2

**Απόδειξη:** Έστω G επίπεδο συνεκτικό γράφημα. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον αριθμό των περιοχών τ. Αν τ=1, τότε αφαιρώντας οποιαδήποτε πλευρά του G το γράφημα γίνεται μη συνεκτικό. Άρα αφου το G είναι ελαχιστοτικά συνεκτικό τότε από θ.2 το γράφημα θα είναι δέντρο με με m=n-1 και προφανώς το θεώρημα ισχύει. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με λιγότερες από k περιοχές, και έστω ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα G με $k \geq 2$ περιοχές. Επιλέγουμε μία πλευρά e του G τέτοια ώστε το G-e να παραμένει συνεκτικό. Το γράφημα G-e έχει k-1 περιοχές, αφού οι δύο περιοχές του G που χωρίζονταν από την πλευρά e σχηματίζουν μία περιοχή στο καινούργιο γράφημα. Από επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$n(G-e)-m(G-e)+\tau(G-e)=2$$

Επίσης, ισχύει $n(G-e)=n(G)$, $m(G-e)=m(G)-1$, $\tau(G-e)=\tau(G)-1$

Άρα, $n(G)-m(G)+\tau(G)=2$.

**Πόρισμα**

Σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές($n \geq 3$) και m πλευρές ισχύει $m \leq 3n-6$.

**Απόδειξη:** Αν τ ο αριθμός των περιοχών του γραφήματος, από τον τύπου του Euler έχουμε ότι $n-m+\tau=2$. Αφού το άθροισμα των βαθμών περιοχών είναι 2m και κάθε περιοχή έχει $d(\tau) \geq 3$ θα ισχύει $2m \geq 3\tau \rightarrow \tau \leq 2m/3$. Με αντικατάσταση στον τύπο του Euler έχουμε $2 = n - m + \tau \leqslant n - m + 2\mathrm{m}/3 \rightarrow m \leqslant 3\mathrm{n} - 6$.

Η ισότητα ισχύει όταν έχουμε μέγιστο επίπεδο γράφημα, δηλαδή αν για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u και ω του G, το γράφημα G+uv είναι μη επίπεδο.

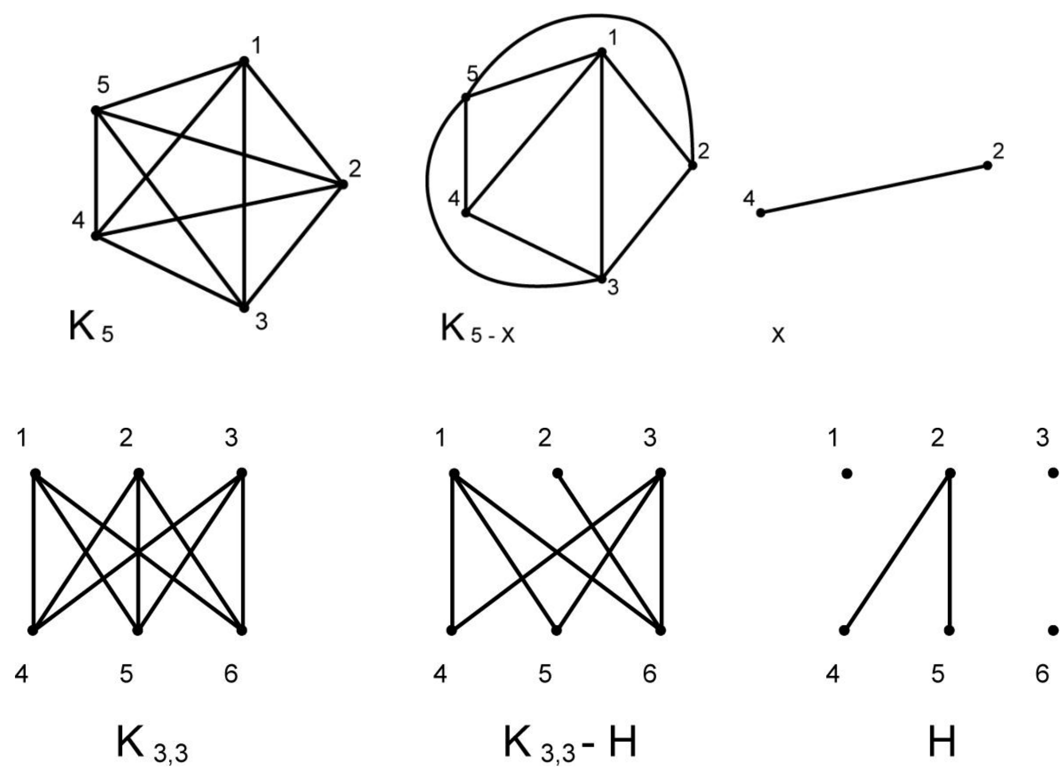
Με τη βοήθεια του τύπου του Euler καθώς και του παραπάνω πορίσματος μπορούμε να αποδείξουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο ή όχι.Θα αποδείξουμε ότι το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο:

Έστω ότι είναι επίπεδο γράφημα. Στο $K_{3,3}$ είναι $n=6$ και $m=9$. Από τον τύπο του Euler παίρνουμε ότι το $K_{3,3}$ έχει $\tau=5$ περιοχές.Επιπλέον, το $K_{3,3}$ είναι διμερές γράφημα, άρα όλοι οι κύκλοι του θα έχουν άρτιο μήκος, άρα ο βαθμός κάθε περιοχής θα είναι τουλάχιστον 4. Το άθροισμα των βαθμών των περιοχών του θα είναι τουλάχιστον $\sum d(\tau) \geqslant 4 \cdot 5 = 20$. Όμως από το θ.4 :$\sum d(\tau) = 2 \cdot 9 = 18$. Άρα το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

## 2.2 Μη επίπεδα γραφήματα

Ένα γράφημα G λέγεται μη επίπεδο όταν δεν είναι επίπεδο, δηλαδή όπως και να σχεδιαστεί στο επίπεδο θα υπάρχουν πάντα τουλάχιστον δύο τεμνόμενες πλευρές. Ένας απλός τρόπος για να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο ή όχι, είναι να δούμε εάν επαληθεύεται ο τύπος του Euler. Προφανώς, ένα μη επίπεδο γράφημα δεν είναι εμφυτεύσιμο σε απλές επιφάνειες όπως το επίπεδο ή η σφαίρα. Παρακάτω θα αναφέρουμε δύο στοιχεία που χαρακτηρίζουν τα μη επίπεδα γραφήματα.

*Πάχος* ***t(G)*** ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο πλήθος επίπεδων υπογραφημάτων του G των οποίων τα σύνολα πλευρών είναι μία διαμέριση του συνόλου E(G). Εάν τα υπερθέσουμε έτσι ώστε οι αντίστοιχες κορυφές να συμπέσουν, τότε παίρνουμε το G. Με άλλα λόγια, το πάχος είναι ένα μέτρο του πόσο μη επίπεδο είναι ένα γράφημα. Προφανώς, το πάχος ενός επίπεδου γραφήματος είναι 1, ενώ για τα $K_5$ και $K_{3,3}$ ισχύει $t(K_5)=t(K_{3,3})=2$.




Σχήμα 14

Αφού ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα έχει 3n-6 πλευρές, έπεται ότι το πάχος t(G) ενός γραφήματος G(n,m) θα έχει σαν κάτω φράγμα: $t(G) \geqslant \frac{m}{3n-6}$

Για πλήρη γραφήματα παίρνουμε:

$$t(K_n) \geqslant \left\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+7)}{6} \frac{(n-2)}{(n-2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+7)}{6} \right\rfloor.$$

O Beineke το 1967 απέδειξε ότι για n≠9,10 ισχύει:

$$t(K_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor \gamma\iota\alpha n \neq 9, n \neq 10 \\ \\ 3 \;\gamma\iota\alpha\; n = 9{,}10 \end{cases}.$$

O *αριθμός διασταυρώσεων* ***ν(G)*** ενός γραφήματος G είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων στις διάφορες σχεδιάσεις του G στο επίπεδο. Για τις σχεδιάσεις ενός γραφήματος στο επίπεδο υποθέτουμε ότι:

- οι γειτονικές πλευρές δεν τέμνονται.
- δύο μη γειτονικές πλευρές διασταυρώνονται το πολύ σε ένα σημείο.
- καμμία πλευρά δεν διασταυρώνεται με τον εαυτό της.
- σε ένα σημείο του επιπέδου διασταυρώνονται το πολύ δύο πλευρές.
- η καμπύλη του επιπέδου που αντιστοιχεί σε μία πλευρά του γραφήματος δεν περιέχει καμμία κορυφή του γραφήματος.

Προφανώς, ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν ν(G)=0. Ακόμα, αν Η είναι ένα υπογράφημα του G, τότε ν(H)≤ν(G), και αν το Η είναι ομοιόμορφο με το G τότε ν(G)=ν(Η). Για τον αριθμό διασταυρώσεων διάφορων κλάσεων γνωρίζουμε ελάχιστα. Για τα πλήρη γραφήματα αποδείχτηκε από τους Blazek και Korman ότι:

$v(K_n) \leqslant \frac{1}{4}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor$,και ο Guy κατέλειξε ότι η ισότητα ισχύει για 1≤n≤10.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ KURATOWSKI ΚΑΙ 2 ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΑΥΤΟΥ

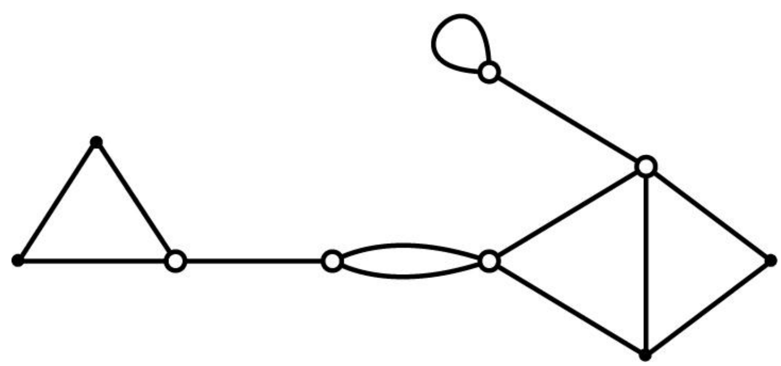
### 3.1 Το θεώρημα Kuratowski

Ένα μεγάλο ζήτημα στη θεωρία γραφημάτων ήταν ο χαρακτηρισμός και κατ' επέκταση ο διαχωρισμός των επίπεδων και μη επίπεδων γραφημάτων. Το θεώρημα του Kuratowski(1930), ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα στη θεωρία γραφημάτων, έδωσε ένα πολύ σαφή χαρακτηρισμό των επίπεδων γραφημάτων.

**Θεώρημα 10 (θεώρημα του Kuratowski)**
Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό ή ομοιόμορφο του $K_5$ ή του $K_{3,3}$.

Πρωτού προχωρήσουμε στην πρώτη απόδειξη του θεωρήματος θα αναφέρουμε μερικές έννοιες και θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν.

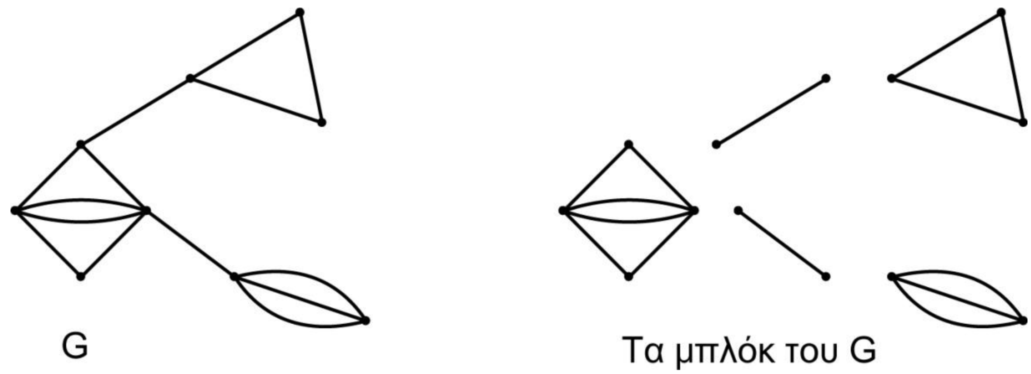
Μία κορυφή ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται χωρίζουσα κορυφή αν διαγράφοντάς την, το γράφημα παύει να είναι συνεκτικό.



Οι χωρίζουσες κορυφές του γραφήματος σημειώνονται με λευκές κουκίδες

Σχήμα 15

Ένα γράφημα χωρίς χωρίζουσες κορυφές λέγεται μπλοκ. Ένα μπλοκ λέγεται ελαχιστικό αν αφαιρώντας οποιαδήποτε κορυφή του ή πλευρά του παύει να είναι μπλοκ.
Μπλοκ ενός γραφήματος G ονομάζεται ένα υπογράφημα του G που είναι μεγιστικό μπλοκ. Κάθε γράφημα είναι η ένωση όλων των μπλοκ του.



Σχήμα 16

**Θεώρημα 11**
Ένα γράφημα G τάξης n≥3 είναι μπλοκ αν και μόνο αν κάθε δύο κορυφές του κείνται πάνω σε κάποιο κύκλο του G.

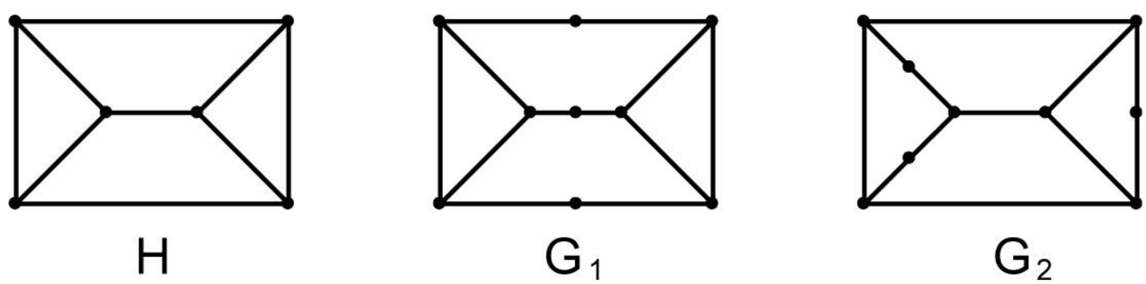
**Λήμμα 1**
Αν G είναι ένα ελάχιστικο μπλοκ τάξης τουλάχιστον 4, τότε το G περιέχει μία κορυφή βαθμού 2.

**Θεώρημα 12**
Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν τα μπλοκ του είναι επίπεδα.
**Απόδειξη:** Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα του είναι επίπεδη, οπότε ας υποθέσουμε ότι το G είναι συνεκτικό. Είναι προφανές ότι αν το G είναι επίπεδο τότε κάθε μπλοκ του θα ειναι επίπεδο. Αντίστροφα, δουλεύουμε επαγωγικά με τον αριθμό των μπλοκ του G. Αν το G έχει μόνο ένα μπλοκ και αυτό ειναι επίπεδο, τότε και το G θα είναι επίπεδο. 'Εστω ότι κάθε γράφημα με λιγότερα από n≥2 μποκ, κάθε ένα από τα οποία είναι επίπεδα, είναι επίπεδο γράφημα, και έστω ότι το G έχει n μπλοκ, τα οποία είναι όλα επίπεδα. Έστω B ένα ακριανό μπλοκ του G, και έστω v η χωρίζουσα κορυφή του G κοινή με το B. Διαγράφουμε από το G όλες τις κορυφές του B εκτός από την v, και το γράφημα που προκύπτει το ονομάζουμε G'. Από την επαγωγική υπόθεση το G' είναι επίπεδο γράφημα. Αφού το μπλοκ B είναι επίπεδο, μπορεί να εμφυτευθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε η v να βρίσκεται στην εξωτερική περιοχή. Σε κάθε περιοχή της επίπεδης εμφύτευσης του G' που περιέχει την v, το επίπεδο μπλοκ B μπορεί να τοποθετηθεί έτσι ώστε οι δύο κορυφές του G' και του B να ταυτιστούν στην v. Το αποτέλεσμα είναι το επίπεδο γράφημα G.

## 3.2 $1^{η}$ απόδειξη του θεωρήματος Kuratowski (ομοιομορφισμός και συστολή)

### 3.2.1 Ομοιομορφισμός

Μία βασική υποδιαίρεση ενός μη κενού γραφήματος G είναι ένα γράφημα που έχει δημιουργηθεί από το G αφαιρώντας μία πλευρά uv και προσθέτοντας μία νέα κορυφή w και τις πλευρές wu και wv. Μία υποδιαίρεση του G είναι ένα γράφημα που δημιουργείται από το G ύστερα από διαδοχικές βασικές υποδιαιρέσεις. Ένα γράφημα H είναι ομοιομορφικό από το G αν τα δύο γραφήματα είναι ισόμορφα ή αν το H είναι ισόμορφο με μία υποδιαίρεση του G. Ένα γράφημα $G_1$ είναι ομοιομορφικό με ένα γράφημα $G_2$ αν υπάρχει ένα γράφημα H τέτοιο ώστε, κάθε ένα από τα $G_1$ και $G_2$ να είναι ομοιομορφικό από το H. Στο σχήμα τα γραφήματα $G_1$ και $G_2$ είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους αφού καθένα από αυτά είναι ομοιομορφικό από το H. Όμως ούτε το $G_1$ ούτε το $G_2$ είναι ομοιομορφικό το ένα από το άλλο.




H σχέση "είναι ομοιομορφικό με" είναι μία σχέση ισοδυναμίας στα γραφήματα. Άρα το σύνολο των γραφημάτων μπορεί να ταξινομηθεί σε κλάσεις ισοδυναμίας, έτσι ώστε δύο γραφήματα να ανήκουν στην ίδια κλάση αν και μόνο αν είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.

**Θεώρημα 13**

Σε κάθε κλάση C ομοιομορφικών γραφημάτων, υπάρχει ένα μοναδικό γράφημα H τέτοιο ώστε $\forall G \in C$ το γράφημα G είναι ομοιομορφικό από το H.

**Απόδειξη :**

Έστω C μία κλάση ομοιομορφικών γραφημάτων και έστω H ένα στοιχείο της C με τον ελάχιστο αριθμό κορυφών. Αν $G \in C$, τότε τα G και H είναι ομοιομορφικά γραφήματα. Τότε υπάρχει ένα γράφημα $H_1$ τέτοιο ώστε κάθε ένα από τα H και G να είναι ομοιομορφικά από το $H_1$. Αφού το H είναι ομοιομορφικό από το $H_1$ τότε τα δύο γραφήματα θα είναι ισόμορφα ή το H θα είναι ισόμορφο με μία υποδιαίρεση του $H_1$. Αν το H είναι ισόμορφο με μία υποδιαίρεση του $H_1$, τότε το $H_1$ θα έχει λιγότερες κορυφές από το H. Αυτο όμως είναι άτοπο αφού $H_1 \in C$ και το H έχει τις λιγότερες κορυφές. Άρα τα γραφήματα H και $H_1$ είναι ισόμορφα και το G είναι ομοιομορφικό από το H.

Ένα γράφημα H είναι ομοιομορφικά ανάγωγο όταν ένα γράφημα G που είναι ομοιομορφικό με το H, είναι και ομοιομορφικό από το H. Από το προηγούμενο θεώρημα λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε τάξη ομοιομορφικών γραφημάτων περιέχει ένα ακριβώς ομοιομορφικά ανάγωγο γράφημα.

**Θεώρημα 14**
Ένα γράφημα H είναι ομοιομορφικά ανάγωγο αν και μόνο αν κάθε κορυφή βαθμού 2 είναι κορυφή τριγώνου του H.
**Απόδειξη :**
Αν ένα γράφημα H περιέχει μία κορυφή v βαθμού 2, γειτονική με τις κορυφές u και w, οι οποίες δεν είναι γειτονικές μεταξύ τους, τότε το H-v+uw είναι ομοιομορφικό με το H αλλά όχι ομοιομορφικό από το H. Άρα το H δεν είναι ομοιομορφικά ανάγωγο.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το H είναι ένα γράφημα στο οποίο καθε κορυφή του βαθμού 2 βρίσκεται σε ένα τρίγωνο και έστω ότι το H δεν είναι ομοιομορφικά ανάγωγο. Τότε θα υπάρχει ένα γράφημα G που θα είναι ομοιομορφικό με το H αλλά όχι από το H. Ακόμα, θα υπάρχει ένα γράφημα $H_1$ έτσι ώστε και τα δύο γραφήματα H και G να είναι ομοιομορφικά από το $H_1$. Αφού $H_1 \neq H$, το H είναι ισομορφικό με μία υποδιαίρεση του $H_1$ και το H μπορεί να δημιουργηθεί από το $H_1$ από μία ακολουθία βασικών υποδιαιρέσεων. Όμως κάθε νέα κορυφή που εισάγεται σε μία βασική υποδιαίρεση έχει βαθμό 2 και είναι γειτονική σε δύο μη γειτονικές μεταξύ τους κορυφές. Άτοπο λόγω της υπόθεσης. Άρα το H είναι ομοιομορφικά ανάγωγο.

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι αν ένα γράφημα H δεν περιέχει κορυφές βαθμού 2 τότε θα είναι ομοιομορφικά ανάγωγο.

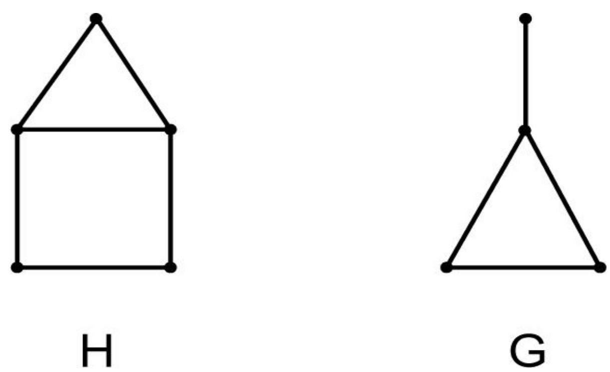
**Θεώρημα 15 (Kuratowski ευθύ)**
Αν ένα γράφημα G περιέχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$ τότε το G δεν είναι επίπεδο.

3.2.2 Συστολή

Για δύο γραφήματα $G_1$ και $G_2$ , μία απεικόνιση f από το $V(G_1)$ στο $V(G_2)$ λέγεται βασική συστολή αν υπάρχουν γειτονικές κορυφές u και v του $G_1$ τέτοιες ώστε:

1. αν f(u)=f(v) και $\{u_1,v_1\}\neq\{u,v\}\rightarrow f(u_1)\neq f(v_1)$
2. $\{u_1,v_1\}\cap\{u,v\}=\emptyset\rightarrow\{u_1,v_1\}\cap\{u,v\}=\emptyset\rightarrow u_1v_1\in E(G_1)\leftrightarrow f(u_1)f(v_1)\in E(G_2)$
3. για $w\in V(G_1)$,w≠u,v ,τότε $uw\in E(G_1)$ ή $vw\in E(G_1)\leftrightarrow f(u)f(w)\in E(G_2)$.

Το $G_2$ δημιουργήθηκε από το $G_1$ από την ταύτιση των γειτονικών κορυφών u και v. Η συστολή είναι μία απεικόνιση από το $V(G_1)$ στο $V(G_2)$ που είναι είτε ένας ισομορφισμός είτε μία ακολουθία από πεπερασμένα πολλές βασικές συστολές.
Αν υπάρχει συστολή από το $V(G_1)$ στο $V(G_2)$ τότε το $G_2$ είναι μία συστολή του $G_1$ και το $G_1$ συστέλεται ή είναι συσταλτό στο $G_2$. Μία υποσυστολή ενός γραφήματος G είναι μία συστολή ενός υπογραφήματος του G.
Στο σχήμα 17, το γράφημα G είναι συστολή του H, που δημιουργήθηκε από την ταύτιση της $v_2$ και της $v_5$. Μπορεί ακόμα να θεωρηθεί σαν η συστολή που παράγεται από την διαμέριση $V(H)=\{v_1\}\cup\{v_2,v_5\}\cup\{v_3\}\cup\{v_4\}$.




Σχήμα 17

**Θεώρημα 16**
Αν ένα γράφημα H είναι ομοιομορφικό από ένα γράφημα G, τότε το G είναι μία συστολή του H.
**Απόδειξη :**
Αν G≡H (το G είναι ισόμορφο με το H), τότε είναι προφανές ότι το G είναι μία συστολή του H. Έστω ότι το H δημιουργήθηκε από το H με μία ακολουθία βασικών υποδιαιρέσεων. Έστω G' μία βασική υποδιαίρεση του G. Τότε το G' δημιουργείται από το G αφαιρώντας μία πλευρά uv και προσθέτοντας μία κορυφή w και τις πλευρές uw και vw. Τότε το G' είναι συσταλτό στο G με μία βασική συστολή f, η οποία αφήνει σταθερό κάθε στοιχείο του V(G) και f(u)=f(w). Έτσι το G μπορεί να δημιουργηθεί από το H από μία απεικόνιση η οποία είναι μία σύνθεση από πολλές πεπερασμένες βασικές συστολές. Άρα, το G είναι μία συστολή του H.
**Λήμμα 2**
Αν ένα γράφημα H περιέχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό από ένα συνεκτικό μη τετριμμένο γράφημα G, τότε το G είναι υποσυστολή του H.

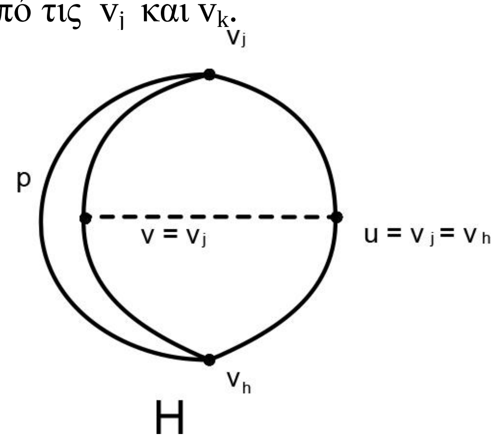
### 3.2.3 $1^{η}$ απόδειξη του θεωρήματος του Kuratowski

**Θεώρημα Kuratowski**
Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$.
**Απόδειξη :**
Η συνθήκη είναι αναγκαία από το θεωρ.11. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι και ικανή. Από το θεωρ.8 αρκεί να δείξουμε ότι αν ένα μπλοκ του γραφήματος δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$ ,τότε είναι επίπεδο. Υποθέτουμε με επαγωγή σε άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε από όλα τα μη επίπεδα μπλοκ που δεν περιέχουν υπογραφήματα ομοιομορφικά με το $K_5$ ή το $K_{3,3,}$ διαλέγουμε αυτό με το μικρότερο μέγεθος, έστω G.
Θα δείξουμε ότι δ(G)≥3. Αφού το G είναι μπλοκ, δεν έχει χωρίζουσες κορυφές, άρα δεν περιέχει κορυφές βαθμού 1. Υποθέτουμε ότι περιέχει μία κορυφή v με βαθμό 2, τέτοια ώστε η v να είναι γειτονική με τις w και u. Ελέγχουμε τις δύο πιθανότητες:

1. Αν $uw \in E(G)$. Τότε το G-v είναι επίσης μπλοκ. Αφού το G-v είναι υπογράφημα του G, ούτε αυτό περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$. Όμως το G έχει επιλεκτεί ως το μη επίπεδο μπλοκ ελάχιστου μεγέθους που έχει αυτή την ιδιότητα, άρα το G-v είναι επίπεδο. Όμως, σε κάθε εμφύτευση του G-v στο επίπεδο, η κορυφή v και οι πλευρές uv και vw μπορούν να εισαχθούν έτσι ώστε το τελικό γράφημα G να είναι επίπεδο, άτοπο γιατί το G είναι μη επίπεδο.
2. Αν $uw \notin E(G)$. Τότε το γράφημα G'=G-v+uw είναι μπλοκ μικρότερου μεγέθους από το G. Επίσης, το G' δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$. Διότι αν περιείχε ένα τέτοιο υπογράφημα F, αν το F δεν περιείχε την πλευρά uw, τότε το G θα περιείχε το F, πράγμα το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το F περιέχει την uw. Αν στο F-uw προσθέσουμε την κορυφή v και τις πλευρές uv και wv, το τελικό γράφημα F' θα είναι ομοιομορφικό από το F. Όμως το F' είναι υπογράφημα του G, που είναι αδύνατο. Άρα το G' είναι μπλοκ με μικρότερο μέγεθος από το G που δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$ . Επομένως, λόγω της επιλογής του G, το G' ειναι επίπεδο. Όμως, αφού το G είναι ομοιομορφικό από το G', το G είναι επίπεδο, άτοπο.

Άρα, ισχύει ότι δ(G)≥3.
Επομένως, αφού δ(G)≥3, λόγω προηγούμενου λήμματος, το G δεν είναι ελαχιστικό μπλοκ. Άρα, υπάρχει πλευρά e=uv, τέτοια ώστε το H=G-uv να είναι επίσης μπλοκ. Αφού το H δεν έχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$ και έχει λιγότερες πλευρές από το G, έπεται ότι το H είναι επίπεδο. Επίσης, από το θεωρ.11 υπάρχουν κύκλοι στο H που περιέχουν τα u και v. Επιλέγουμε ένα κύκλο C του H, που περιέχει τα u και v, τέτοιο ώστε ο αριθμός των περιοχών στο εσωτερικό του C να είναι ο μέγιστος δυνατός. Έστω $C{:}\, u = v_{0,}v_{1,}, \dots, v_i = v, \dots, v_n = u,\ όπου\ 1 < i < n-1.$
Όριζουμε δύο υπογραφήματα του H: Το εσωτερικό υπογράφημα του H είναι το υπογράφημα του G που ορίζεται από τις πλευρές που κείνται εσωτερικά του κύκλου C. Αντιστοιχα ορίζεται το εξωτερικό υπογράφημα του H. Αφού το G δεν είναι επίπεδο

υπάρχουν και τα δύο υπογραφήματα που ορίσαμε, γιατί αλλιώς η πλευρά e θα μπορούσε να προστεθεί στο H έτσι ώστε το γράφημα να παραμείνει επίπεδο. Επίσης, κανένα ζεύγος κορυφών που ανήκουν στο σύνολο $\{v_{0,}v_1, \dots, v_i\}$ ή $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ δεν ενώνεται με μονοπάτι στο εξωτερικό υπογράφημα του H, γιατί αυτό θα ήταν αντιφατικό με την επιλογή του C ως του μεγαλύτερου δυνατού κύκλου που περιέχει τις u και v. Ακόμα, το γεγονός ότι το H+e δεν είναι επίπεδο υποδηλώνει την ύπαρξη ενός $v_j$-$v_k$ μονοπατιού P, όπου 0<j<i<k<n, στο εξωτερικό υπογράφημα του H , τέτοιου ώστε καμμία κορυφή του P εκτός απο τις $v_j$,$v_k$ να ανήκει στον C (σχήμα 18). Επίσης, παρατηρούμε ότι καμμία άλλη κορυφή του P εκτός από τις $v_j$ και $v_k$ δεν ανήκει στον C, και ότι οποιοδήποτε μονοπάτι ενώνει μία κορυφή του P με μία κορυφή του C πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία από τις $v_j$ και $v_k$.




Σχήμα 18

'Εστω H' η συνιστώσα του H-{$v_m$ |0≤m<n, m≠j,k} που περιέχει το P. Λόγω της επιλογής του C, το υπογράφημα H' δεν μπορεί να εισαχθεί στο εσωτερικό του C με έναν επίπεδο τρόπο. Αυτή η διαπίστωση, σε συνδυασμό με το δεδομένο ότι το G είναι μη επίπεδο, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το εσωτερικό υπογράφημα του H πρέπει να περιέχει ένα από τα ακόλουθα:

I. ένα $v_r$-$v_s$ μονοπάτι, όπου 0<r<j, i<s<k (ή ισοδύναμα j<r<i και k<s<n), του οποίου καμμία άλλη κορυφή εκτός από τις $v_r$ και $v_s$ ανήκει στον C.

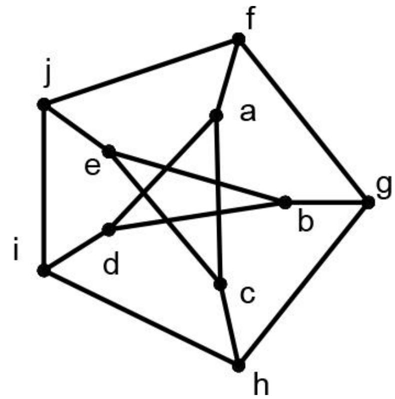
II. μία κορυφή $w \notin C$που συνδέεται με τον C με τρία μονοπάτια,ξένα μεταξύ τους εκτός από την w, τέτοια ώστε οι τελικές κορυφές των δύο μονοπατιών να είναι οι $v_r$ και $v_s$, όπου j≤r≤i και i<s≤k αλλά όχι συγχρόνως r=j και s=k, και η τελική κορυφή του τρίτου μονοπατιού να είναι μία από τις $v_0$ ή $v_i$ αν r=j ή s=k, και μία από τις $v_0$,$v_i$,$v_j$,$v_k$ αν r≠j και s≠k.

III. Μία κορυφή w, όχι στον C, που είναι συνδεδεμένη με τον C με τρία εσωτερικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια $P_1$,$P_2$ και $P_3$ έτσι ώστε οι τελικές κορυφές των μονοπατιών (εκτός από την w) να είναι τρεις από τις $v_0$,$v_i$,$v_j$,$v_k$, έστω οι $v_0$,$v_i$,$v_j$ μαζί με ένα ($v_t$-$v_k$) μονοπάτι $P_4$ ($v_t$≠ $v_0$,$v_i$,w) όπου η $v_t$ είναι στο $P_1$ ή στο $P_2$ και το $P_4$ είναι ξένο με τα $P_1$, $P_2$ και τον C εκτός από τις $v_t$ και $v_k$.

IV. Μία κορυφή w όχι στον C που συνδέεται με τις κορυφές $v_0$,$v_i$,$v_j$,$v_k$ με τέσσερα ξένα μεταξύ τους μονοπάτια.

Σε κάθε μία από τις τρεις πρώτες περιπτώσεις, το γράφημα G περιέχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_{3,3}$, ενώ στην τέταρτη περίπτωση, το G έχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$. Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα G, άρα το θεώρημα αποδείχτηκε.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Kuratowski θα αποδείξουμε ότι το γράφημα του Petersen (σχήμα 19) δεν είναι επίπεδο.




Σχήμα 19 Το γράφημα Petersen

Το γράφημα Petersen έχει n=10 και m=15 πλευρές. Θεωρούμε ένα παράγον υπογράφημά του H που προκύπτει αφαιρώντας τις πλευρές be και hi. Κατόπιν, θεωρούμε το ομοιομορφικό γράφημα H' του H που προκύπτει παραλείποντας όλες τις κορυφές βαθμού 2 από το H. Παρατηρούμε ότι το H' είναι ισόμορφο με το $K_{3,3}$ άρα δεν είναι επίπεδο. Άρα από το θεώρημα του Kuratowski προκύπτει ότι το γράφημα Petersen είναι μη επίπεδο.

Παρατηρούμε ότι παρά την ομοιότητά του με το $K_5$ το γράφημα Petersen δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$. Περιέχει όμως το $K_5$ σαν μία συστολή. Πράγματι, θεωρώντας την διαμέριση {a,f},{b,g},{c,h},{d,i},{e,j} προκύπτει το $K_5$. Η τελευταία παρατήρηση οδηγεί επίσης στο συμπέρασμα ότι το γράφημα Petersen είναι μη επίπεδο.

**Θεώρημα 17( θεώρημα του Wagner)**

Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν ούτε το $K_5$ ούτε το $K_{3,3}$ είναι μία υποσυστολή του G.

**Απόδειξη :**

Έστω G ένα μη επίπεδο γράφημα. Από το θεώρ.Kuratowski, το G θα περιέχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό με (ή ισοδύναμα εδώ, ομοιομοφικό από) το $K_5$ ή το $K_{3,3}$.Τότε το $K_5$ ή το $K_{3,3}$ είναι υποσυστολή του G.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, πρώτα υποθέτουμε ότι το G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε το $H=K_{3,3}$ να είναι υποσυστολή του G. Δείχνουμε σε αυτήν την περίπτωση, ότι το G δεν είναι επίπεδο. Ας συμβολίσουμε τις κορυφές του H ως $u_i$ και $u_i'$, $1 \leq i \leq 3$, έτσι ώστε κάθε πλευρά του H να είναι του τύπου $u_i u_j'$. Παίρνοντας τον εναλλακτικό ορισμό της συστολής, θεωρούμε το $G_i$, με $1 \leq i \leq 3$, το συνεκτικό υπογράφημα του G που αντιστοιχεί στο $u_i$ ,και το $G_i'$ που αντιστοιχεί στο $u_i'$. Αφού $u_i u_j' \in E(H)$για $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, στο γράφημα G υπάρχει μία κορυφή $v_{ij}$ του $G_i$ γειτονική με μία κορυφή $v_{ij}'$ του $G_j'$. Ανάμεσα

στις κορυφές $v_{i1},v_{i2},v_{i3}$ του $G_i$, δύο ή πιθανώς και οι τρεις μπορούν να αναπαριστούν την ίδια κορυφή. Αν $v_{i1}=v_{i2}=v_{i3}$, τότε θέτουμε κάθε $v_{ij}=v_i$. Αλλιώς ορίζουμε την $v_i$ να είναι κορυφή του $G_i$ που συνδέεται με τις κορυφές $v_{i1},v_{i2},v_{i3}$ με εσωτερικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια του $G_i$ (είναι πιθανό ότι $v_i=v_{ij}$ για κάποιο j). Συνεχίζουμε όπως πριν με τα υπογραφήματα $G_i'$ και παίρνουμε τις κορυφές $v_i'$. Το υπογράφημα G που επάγεται από τις 9 πλευρές $v_{ij}v_{ij}'$ μαζί με τις πλευρές ενός οποιουδήποτε αναγκαίου προαναφερθέντος μονοπατιού από μία κορυφή $v_i$ ή $v_i'$ είναι ομοιομορφικό με το $K_{3,3}$.
Έστω τώρα ότι το $H=K_5$ είναι μία υποσυστολή του G. Έστω $V(H)=\{u_i\ |1\leq i\leq 5\}$, και έστω $G_i$ το συνεκτικό υπογράφημα του G που αντιστοιχεί στην $u_i$. Όπως προηγουμένως, υπάρχει μία κορυφή $v_{ij}$ του $G_i$ γειτονική με την κορυφή $v_{ji}$ του $G_j, i\neq j$, $1\leq i, j\leq 5$. Για σταθερό i, $1\leq i\leq 5$, θεωρούμε τις κορυφές $v_{ij}$, $i\neq j$. Αν οι κορυφές $v_{ij}$ αναπαριστούν την ίδια κορυφή, ορίζουμε αυτήν την κορυφή $v_i$. Αν οι κορυφές $v_{ij}$ είναι διακριτές και υπάρχει μία κορυφή (πιθανόν κάποια $v_{ij}$) από την οποία υπάρχουν εσωτερικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια (κάποιο από τα οποία μπορεί να είναι τετριμμένο) στις $v_{ij}$, τότε ορίζουμε αυτήν την κορυφή ως $v_i$. Αν τρεις από τις κορυφές $v_{ij}$ είναι ίδιες ενώ οι άλλες δύο είναι διαφορετικές, τότε ορίζουμε τις δύο κορυφές που συμπίπτουν ως $v_i$, αν υπάρχουν ξένα μεταξύ τους μονοπάτια προς τις άλλες δύο κορυφές. Σε διάφορες περιπτώσεις έχουμε ορίσει μία κορυφή $v_i$ για $1\leq i\leq 5$. Αν το $v_i$ υπάρχει για κάθε i=1,2,...,5 τότε το G περιέχει ένα υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$.
Αλλιώς, για κάποιο i, θα υπάρχουν διακριτές κορυφές $w_i$ και $w_i'$ του $G_i$, κάθε μία από τις οποίες είναι συνδεδεμένες με δύο από τις $v_{ij}$ με εσωτερικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια του $G_i$, ενώ οι $w_i$ και $w_i'$ είναι συνδεδεμένες με ένα μονοπάτι του G, όπου καμία εσωτερική κορυφή του δεν έιναι οι κορυφές $v_{ij}$.
Αν δύο κορυφές $v_{ij}$ συμπίπτουν, τότε η κορυφή θα είναι η $w_i$. Αν οι δύο άλλες κορυφές $v_{ij}$ επίσης συμπίπτουν, τότε αυτή είναι η κορυφή $w_i'$. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι i=1 και ότι το $w_1$ συνδέεται με τις $v_{12}$ και $v_{13}$ ενώ η $w_1'$ συνδέεται με τις $v_{14}$ και $v_{15}$ όπως περιγράψαμε.
Ορίζουμε το σύνολο των πλευρών των πέντε μονοπατιών του $G_1$ ως $E_1$. Τώρα επιστρέφουμε στο $G_2$. Αν $v_{21}=v_{24}=v_{25}$, θέτουμε $E_2=\emptyset$. Αλλιώς, υπάρχει μία κορυφή $w_2$ του $G_2$ (που μπορεί να συμπίπτει με τις $v_{21},v_{24},v_{25}$) που ενώνεται με εσωτερικά ξένα μεταξύ τους μονοπάτια στο $G_2$ με τα διακριτά στοιχεία του $\{v_{21},v_{24},v_{25}\}$. Τότε ορίζουμε το $E_2$ ως το σύνολο πλευρών αυτών των μονοπατιών. Με ανάλογο τρόπο, ορίζουμε τα σύνολα $E_3$, $E_4$ και $E_5$ με την βοήθεια των συνόλων $\{v_{31},v_{34},v_{35}\}$,$\{v_{41},v_{42},v_{43}\}$ και $\{v_{51},v_{52},v_{53}\}$ αντίστοιχα. Το υπογράφημα που παράγεται από την ένωση των συνόλων $E_i$ και των πλευρών $v_{ij}v_{ji}$ περιέχει ένα υπογράφημα F ομοιομορφικό με το $K_{3,3}$ τέτοιο ώστε οι 3-κορυφές του F να είναι οι $w_1$, $w_1'$ και οι κορυφές $w_i$, i=2,3,4,5. Σε κάθε περίπτωση, το G δεν είναι επίπεδο.

3.3 2η απόδειξη του θερήματος Kuratowski (γέφυρες)

3.3.1 Γέφυρες

Στην μελέτη των επίπεδων γραφημάτων, ορισμένα υπογραφήματα, που ονομάζονται γέφυρες παίζουν σημαντικό ρόλο. Θα δούμε παρακάτω κάποιες ιδιότητες αυτών των υπογραφημάτων.

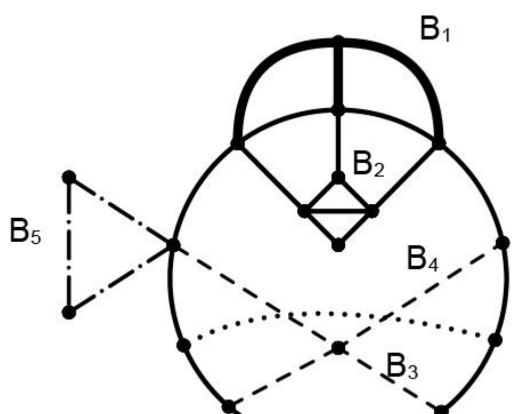
Έστω H ένα υπογράφημα του γραφήματος G. Ορίζουμε μία σχέση ~ στο E(G)\E(H) με την προϋπόθεση ότι $e_1 \sim e_2$ αν υπάρχει ένα μονοπάτι W τέτοιο ώστε:

**1.** η πρώτη και η τελευταία πλευρά του W να είναι οι $e_1$ και η $e_2$ αντίστοιχα

**2.** το W να είναι εσωτερικά ξένο με το H ( δηλαδή, καμμία εσωτερική κορυφή του W δεν είναι κορυφή του H)

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ~ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο E(G)\E(H) (δήλαδη στις πλευρές του G που δεν ανήκουν στο H). Ένα υπογράφημα του G-E(H) που δημιουργείται από μία κλάση ισοδυναμίας με τη σχέση ~ ονομάζεται γέφυρα του H στο G. Άμεση συνέπεια από τον ορισμό είναι ότι αν το B είναι μία γέφυρα του H, τότε το B είναι ένα συνεκτικό γράφημα και ότι κάθε ζεύγος κορυφών του B συνδέεται με ένα μονοπάτι εσωτερικά ξένο με το H. Επίσης, παρατηρούμε ότι δύο γέφυρες του H δεν έχουν κοινές κορυφές, εκτός, πιθανόν, από κορυφές του H. Για μία γέφυρα B του H, γράφουμε $V(B) \cap V(H) = V(B, H)$, και ονομάζουμε τις κορυφές σε αυτό το σύνολο, **συνδετικές κορυφές** του B στο H. Στο σχήμα 20 βλέπουμε διάφορες γέφυρες ενός κύκλου.

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε μόνο με τη μελέτη γεφυρών ένος κύκλου C. Έτσι, χάρην συντομίας, λέγοντας *γέφυρα* θα εννοούμε *γέφυρα του C*.




Σχήμα 20 Κάθε γέφυρα $B_i$ είναι σχεδιασμένη με διαφορετικό τύπο γραμμής

Σε ένα συνεκτικό γράφημα κάθε γέφυρα έχει τουλάχιστον μία συνδετική κορυφή, και σε ένα μπλοκ κάθε γέφυρα έχει τουλάχιστον δύο συνδετικές κορυφές. Μία γέφυρα με k συνδετικές κορυφές ονομάζεται k-γέφυρα. Δύο k-γέφυρες με τις ίδιες συνδετικές κορυφές είναι *ισοδύναμες* k-γέφυρες (π.χ. Στο σχήμα 20 οι γέφυρες $B_1$ και $B_2$ ).

Οι συνδετικές κορυφές μίας k-γέφυρας B με $k \geq 2$ διαμερίζουν τον κύκλο σε πλευρικά ανεξάρτητα μονοπάτια, που λέγονται **τμήματα** της B. Δύο γέφυρες **αποφεύγουν** η μία την άλλη αν όλες οι συνδετικές κορυφές της μίας βρίσκονται ακριβώς σε ένα τμήμα της άλλης. Αλλιώς, λέμε ότι **επικαλύπτονται** (στο σχήμα 20 οι $B_2$ και $B_3$ αποφεύγουν η μία την άλλη, ενώ οι $B_1$ και $B_2$ επικαλύπτονται). Δύο γέφυρες B και B' είναι **ασύμμετρες** αν υπάρχουν τέσσερις διακριτές κορυφές u,v,u',v' του C τέτοιες ώστε οι u και v να είναι συνδετικές κορυφές του B, οι u' και v' να είναι συνδετικές κορυφές του B', και οι τέσσερις κορυφές να εμφανίζονται σε κυκλική σειρά u,u',v,v' στον C (στο σχήμα 20 οι $B_3$ και $B_4$ είναι ασύμμετρες, ενώ οι $B_1$ και $B_2$ δεν είναι).

**Θεώρημα 18**

Αν δύο γέφυρες επικαλύπτονται, τότε είτε είναι ασύμμετρες είτε είναι ισοδύναμες 3-γέφυρες.

**Απόδειξη:**

Έστω ότι οι γέφυρες B και B' επικαλύπτονται. Τότε, κάθε μία πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο συνδετικές κορυφές. Αν τώρα, κάποια από τις δύο είναι 2-γέφυρα, επαληθεύεται ότι πρέπει να είναι ασύμμετρες. Υποθέτουμε λοιπόν και οι δύο έχουν τουλάχιστον 3 συνδετικές κορυφές. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

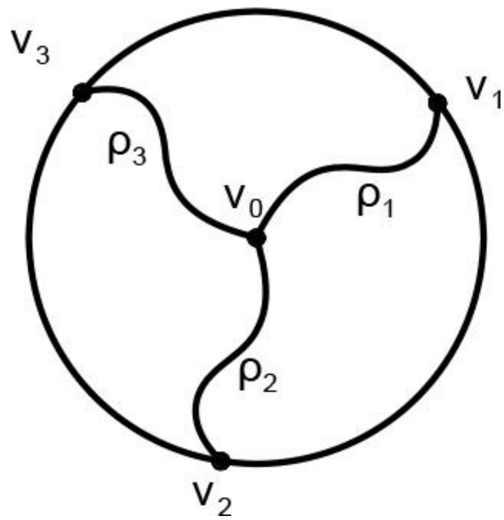
- Οι B και B' να μην είναι ισοδύναμες γέφυρες. Τότε, η B' θα έχει μία συνδετική κορυφή u' ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συνδετικές κορυφές u και v της B. Αφού οι B και B' επικαλύπτονται, καποια συνδετική κορυφή v' της B' δεν θα κείται στο τμήμα της B που συνδέει τις u και v. Άρα, οι B και B' είναι ασύμμετρες.
- Οι B και B' να είναι ισοδύναμες k-γέφυρες, $k \geq 3$. Αν $k \geq 4$, τότε οι B και B' είναι προφανώς ασσύμετρες. Αν k=3, τότε είναι ισοδύναμες 3-γέφυρες.

**Θεώρημα 19**

Αν μία γέφυρα B έχει τρεις συνδετικές κορυφές $v_1$,$v_2$ και $v_3$ ,τότε υπάρχει μία κορυφή $v_0$ στο V(B)\V(C) και τρία μονοπάτια $P_1$,$P_2$ και $P_3$ στο B που ενώνουν το $v_0$ με τα $v_1$,$v_2$ και $v_3$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε, για $i \neq j$, τα $P_i$ και $P_j$ να έχουν μόνο την κορυφή $v_0$ κοινή.

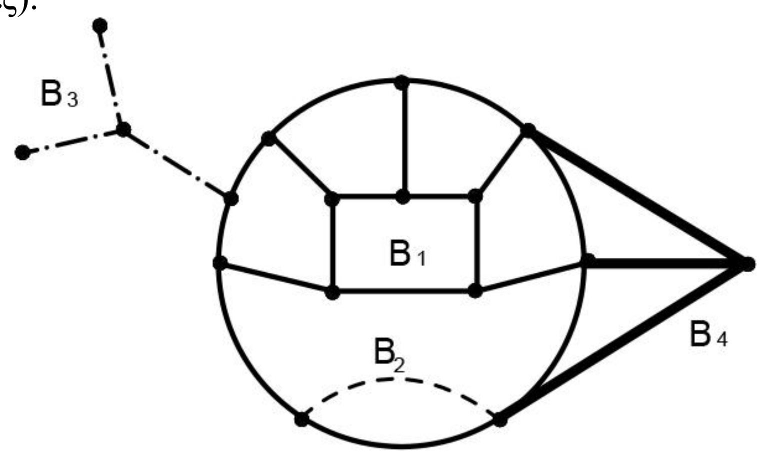
**Απόδειξη:**

Έστω P ένα ($v_1$,$v_2$)-μονοπάτι στο B, εσωτερικά αποσυνδεδεμένο από τον C. Το P πρέπει να έχει μία εσωτερική κορυφή v, ειδάλως η B θα ήταν απλά το P, και δε θα περιείχε μία τρίτη συνδετική κορυφή $v_3$. Έστω Q ένα ($v_3$,v)-μονοπάτι στη B, εσωτερικά αποσυνδεδεμένο από τον C, και έστω $v_0$ η πρώτη κορυφή του Q στο P. Ονομάζουμε $P_1$ το ($v_0$,$v_1$)-τμήμα του $P^{-1}$, $P_2$ το ($v_0$,$v_2$)-τμήμα του P, και $P_3$ το ($v_0$,$v_3$)-τμήμα του $Q^{-1}$. Προφανώς, τα $P_1$,$P_2$ και $P_3$ ικανοποιούν τις απαιτούμενες συνθήκες, όπως φαίνεται και στο σχήμα.




Σχήμα 21

Παρακάτω, θα εξετάσουμε γέφυρες σε επίπεδα γραφήματα. Υποθέτουμε ότι G είναι ένα επίπεδο γράφημα και ότι C είναι ένας κύκλος του G. Τότε ο C είναι μία καμπύλη Jordan στο επίπεδο, και κάθε πλευρά στο E(G)\E(C) περιέχεται σε μία από τις δύο περιοχές intC και extC. Προκύπτει ότι μία γέφυρα του C περιέχεται εξ'ολοκλήρου στο intC ή στο extC. Μία γέφυρα που περιέχεται στο intC (extC) ονομάζεται εσωτερική (εξωτερική) γέφυρα (στο σχήμα 22 οι $B_1$ και $B_2$ είναι εσωτερικές γέφυρες, και οι $B_3$ και $B_4$ εξωτερικές γέφυρες).




Σχήμα 22

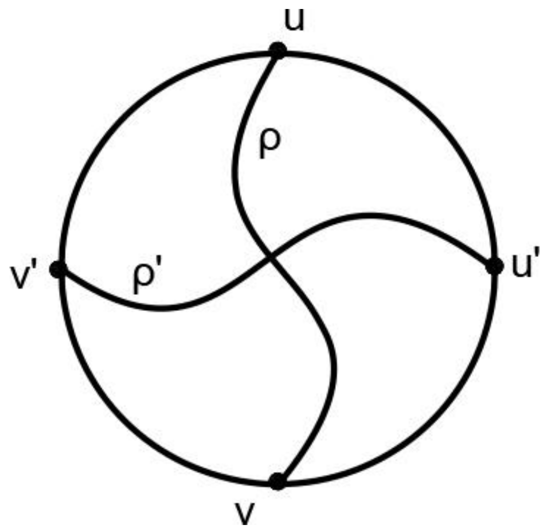
**Θεώρημα 20**

Οι εσωτερικές (εξωτερικές) γέφυρες αποφεύγουν η μία την άλλη.

**Απόδειξη:**

Με εις άτοπον επαγωγή. Έστω B και B' δύο εσωτερικές γέφυρες που επικαλύπτονται. Τότε, από θεώρ.14, θα πρέπει να είναι ασύμμετρες ή ισοδύναμες 3-γέφυρες.

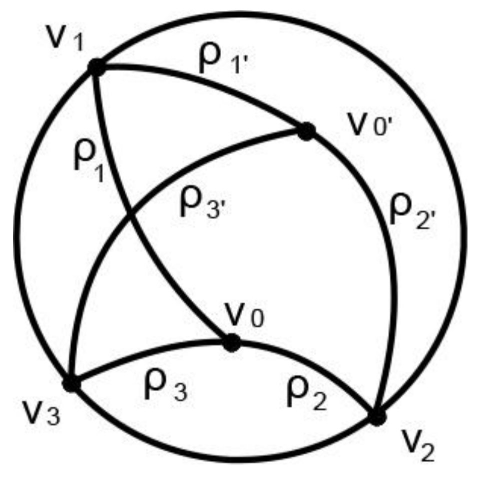
*1η περίπτωση:* Οι B και B' είναι ασύμμετρες. Εξ ορισμού, υπάρχουν διακριτές κορυφές u και v στη B, και u' και v' στη B', που εμφανίζονται με κυκλική σειρά u,u',v,v' στον C. Έστω P ένα (u,v)-μονοπάτι στη B και P' ένα (u',v')-μονοπάτι στη B', και τα δύο εσωτερικά αποσυνδεδεμένα από τον C. Τα δύο μονοπάτια P και P' δεν μπορούν να έχουν κοινή εσωτερική κορυφή γιατί ανήκουν σε διαφορετικές γέφυρες. Επίσης, τα P και P' πρέπει να ανήκουν στο intC γιατί είναι εσωτερικές γέφυρες. Όμως, από το θεωρ. Jordan, το G δεν μπορεί να είναι επίπεδο γράφημα. Άτοπο (σχήμα 23).




Σχήμα 23

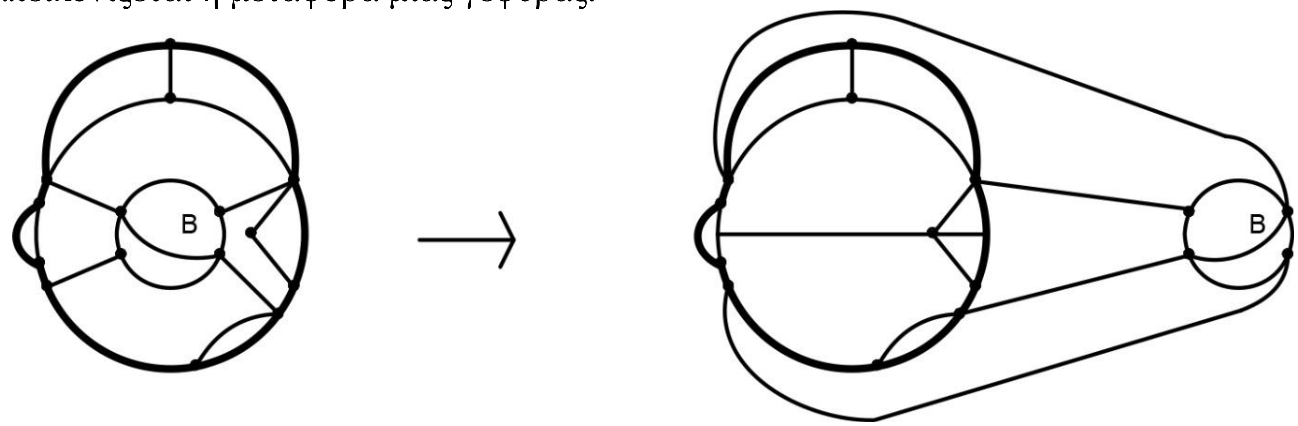
*2η περίπτωση:* Οι B και B' είναι ισοδύναμες 3-γέφυρες. Έστω $\{v_1,v_2,v_3\}$ το κοινό σύνολο συνδετικών κορυφών. Από το θεώρ.15, υπάρχει στη B μία κορυφή $v_0$ και τρία μονοπάτια $P_1,P_2$ και $P_3$ που ενώνουν τη $v_0$ με τις $v_1,v_2$ και $v_3$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε, για $i\neq j$, τα $P_i$ και $P_j$ να έχουν μόνο τη $v_0$ κοινή. Ομοίως, η B' έχει μία κορυφή $v_0'$ και τρία μονοπάτια $P_1',P_2'$ και $P_3'$ που ενώνουν τη $v_0'$ με τις $v_1',v_2'$ και $v_3'$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε, για $i\neq j$, τα $P_i'$ και $P_j'$ να έχουν μόνο τη $v_0'$ κοινή (σχήμα 24). Τα μονοπάτια $P_1,P_2$ και $P_3$ χωρίζουν το intC σε τρεις περιοχές, και το $v_0'$ πρέπει να είναι στο εσωτερικό μίας από αυτές τις περιοχές. Αφού μόνο δύο από τις κορυφές $v_1,v_2$ και $v_3$ μπορούν να βρίσκονται στο σύνορο της περιοχής που περιέχει τη $v_0'$, βάσει συμμετρίας, υποθέτουμε ότι η $v_3$ δεν ανήκει στο σύνορο αυτής της περιοχής. Από το θεώρ.Jordan, το μονοπάτι $P_3'$ πρέπει να τέμνει ένα από τα $P_1,P_2$ ή C. Όμως, αφού οι B και B' είναι διαφορετικές εσωτερικές γέφυρες, αυτό είναι αδύνατο.

Συμπεραίνουμε ότι οι εσωτερικές γέφυρες αποφεύγουν η μία την άλλη. Ομοίως για τις εξωτερικές.




Σχήμα 24

Έστω G ένα επίπεδο γράφημα. Μία εσωτερική γέφυρα B ενός κύκλου C του G είναι *μεταβιβάσιμη* αν υπάρχει μία εμφύτευση G' του G στο επίπεδο που είναι πανομοιότυπη με το G, εκτός του ότι η B είναι μία εξωτερική γέφυρα του C στο G'. Το επίπεδο γράφημα G' λέμε ότι προκύπτει από το G *μεταφέροντας* την B. Στο σχήμα 25 απεικονίζεται η μεταφορά μίας γέφυρας.




Σχήμα 25

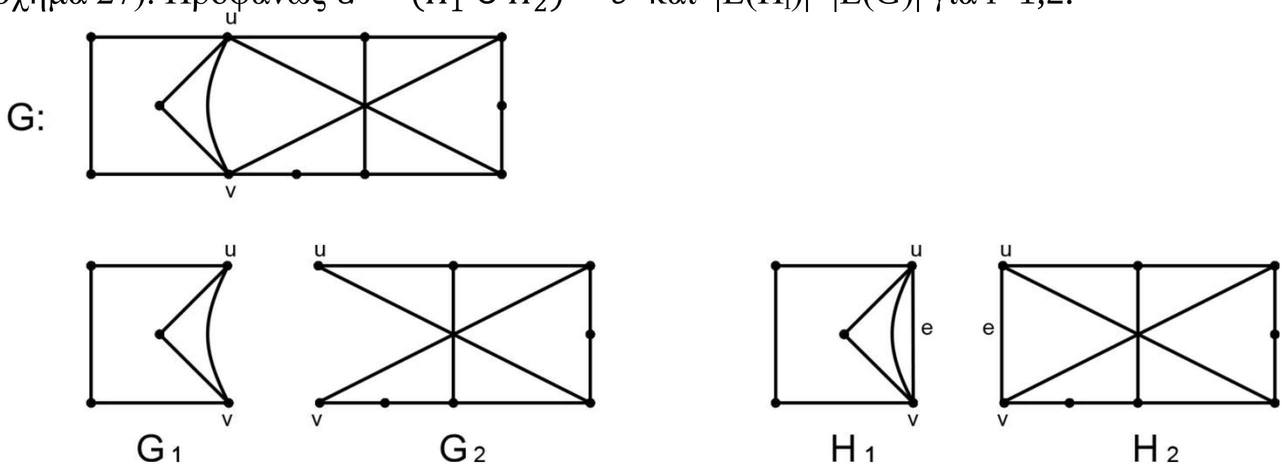
**Θεώρημα 21**
Μία εσωτερική γέφυρα που αποφεύγει κάθε εξωτερική γέφυρα είναι μεταβιβάσιμη.
**Απόδειξη:**
Έστω B μία εσωτερική γέφυρα που αποφεύγει κάθε εξωτερική γέφυρα. Τότε οι συνδετικές κορυφές της B στον C κείνται στο σύνορο μιας περιοχής του G που περιέχεται στο extC. Η B λοιπόν μπορεί να σχεδιαστεί μέσα σε αυτή την περιοχή. (σχήμα 25).

**Λήμμα 3**
Αν το G είναι μη επίπεδο γράφημα, τότε κάθε υποδιαίρεση του G είναι μη επίπεδο γράφημα.

Σχήμα 26 Μία υποδιαίρεση του $K_5$ και μία υποδιαίρεση του $K_{3,3}$

**Λήμμα 4**
Αν το G είναι επίπεδο γράφημα, τότε κάθε υπογράφημα του G είναι επίπεδο.

Έστω G ένα 2-συνεκτικό γράφημα και u,v δύο κορυφές που κάνουν το G-{u,v} μη συνεκτικό. Τότε υπάρχουν δύο υπογραφήματα $G_1$ και $G_2$ του G χωρίς κοινές πλευρές, τέτοια ώστε $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$ και $G_1 \cup G_2 = G$ . Και στα δύο γραφήματα ενώνουμε τις u και v με μία νέα πλευρά e και παίρνουμε τα γραφήματα $H_1$ και $H_2$ (σχήμα 27). Προφανώς $G = (H_1 \cup H_2) - e$ και $|E(H_i)|<|E(G)|$ για i=1,2.




Σχήμα 27

**Λήμμα 5**
Αν το G είναι μη επίπεδο γράφημα, τότε τουλάχιστον ένα από τα $H_1$ και $H_2$ είναι επίσης μη επίπεδο.
**Απόδειξη:**
Με εις άτοπον επαγωγή. Έστω ότι τα $H_1$ και $H_2$ είναι επίπεδα. Έστω $H_1'$ μία εμφύτευση του $H_1$ στο επίπεδο, και έστω f μία περιοχή του $H_1'$ που γειτονεύει με την e. Αν $H_2'$ είναι μία εμφύτευση του $H_2$ στο f, τέτοια ώστε τα $H_1'$ και $H_2'$ να έχουν μόνο τις κορυφές u και v και την πλευρά e κοινές, τότε το $(H_1 \cup H_2) - e$ είναι μία εμφύτευση του G στο επίπεδο. Άτοπο, γιατί το G είναι μη επίπεδο.

**Λήμμα 6**
Έστω G ένα μη επίπεδο συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει υποδιαίρεση των $K_5$ και $K_{3,3}$ και έχει όσο γίνεται λιγότερες πλευρές. Τότε το G είναι απλό και 3-συνεκτικό (πρέπει να αφαιρεθούν τουλάχιστον 3 κορυφές από το G για να πάψει να είναι συνεκτικό).
**Απόδειξη:**
Με επαγωγή εις άτοπον. Έστω γράφημα G που ικανοποιεί την υπόθεση του λήμματος. Τότε το G είναι προφανώς ένα ελάχιστο μη επίπεδο γράφημα και γι'αυτό πρέπει να μην έχει παράλληλες πλευρές. Αν το G δεν είναι 3-συνεκτικό, τότε έστω μία τομή του G στα υπογραφήματα $H_1$ και $H_2$ που ορίζεται από τις κορυφές u,v. Από το λήμμα 5, τουλάχιστον ένα από τα υπογραφήματα $H_1$ και $H_2$, έστω το $H_1$, πρέπει να είναι μη επίπεδο. Αφού $|E(H_1)|<|E(G)|$, το $H_1$ πρέπει να περιέχει ένα υπογράφημα K το οποίο να είναι υποδιαίρεση του $K_5$ ή του $K_{3,3}$. Ακόμα $K \nsubseteq G$, και άρα η πλευρά e ανήκει στο K. 'Εστω P ένα (u,v)-μονοπάτι στο $H_2$-e. Τότε το G περιέχει το υπογράφημα $(K \cup P) - e$, που είναι μία υποδιαίρεση του K και συνεπώς μία υποδιαίρεση του $K_5$ ή του $K_{3,3}$. Άτοπο.

### 3.3.2 $2^η$ απόδειξη του θεωρήματος του Kuratowski

Προτού περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος κάνουμε τους ακόλουθους χρήσιμους συμβολισμούς. Έστω C ένας κύκλος σε ένα επίπεδο γράφημα G. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε δύο πιθανούς προσανατολισμούς του C, δεξιόστροφα και αριστερόστροφα. Για δύο κορυφές u,v του C, ορίζουμε C[u,v] το (u,v)-μονοπάτι που ακολουθεί τον δεξιόστροφο προσανατολισμό. Ομοίως θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα C(u,v], C[u,v) και C(u,v) για να ορίσουμε τα μονοπάτια C[u,v]-u, C[u,v]-v, C[u,v]-{u,v}.

Με την τελευταία αυτή παρατήρηση μπορούμε να περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος. Η απόδειξη αυτή βασίζεται σε αυτή των Dirac και Schuster (1954).

**Θεώρημα Kuratowski**

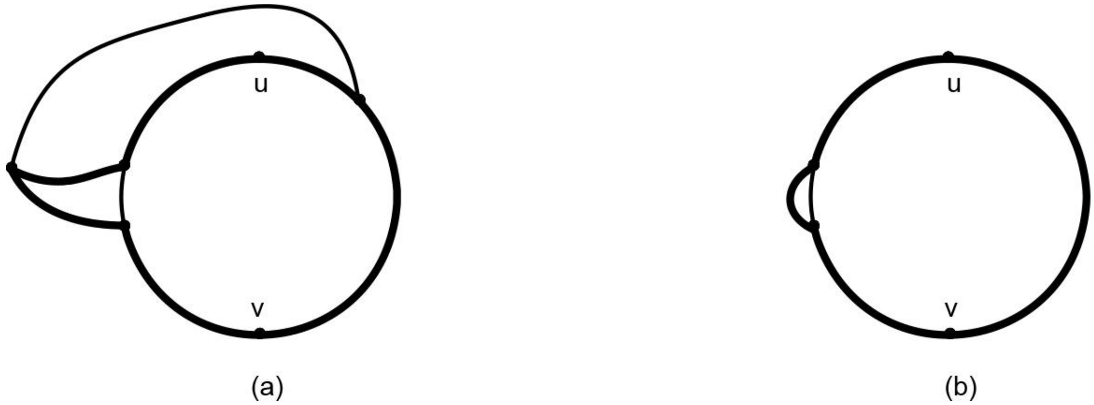
Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το $K_5$ ή το $K_{3,3}$.

**Απόδειξη:**

Από τα λήμματα 3 και 4, η συνθήκη είναι αναγκαία. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ικανή. Έστω ένα μη επίπεδο γράφημα G που δεν περιέχει υποδιαίρεση των $K_5$ και $K_{3,3}$ και έχει όσο το δυνατόν λιγότερες πλευρές. Από το λήμμα 6, έπεται ότι το G είναι απλό και 3-συνεκτικό. Επίσης, το G θα πρέπει να είναι ένα ελάχιστο μη επίπεδο γράφημα.

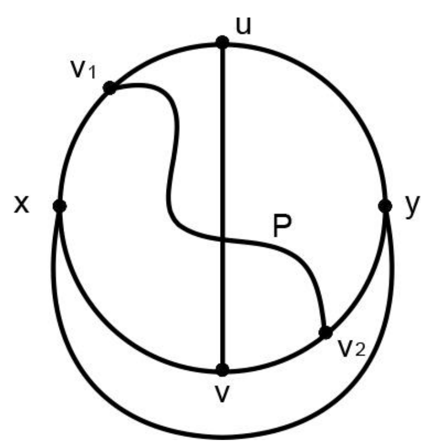
Έστω uv μία πλευρά του G, και έστω H μία εμφύτευση του G-uv στο επίπεδο. Αφού το G είναι 3-συνεκτικό, το H είναι 2-συνεκτικό και, από θεώρ.11, οι u και v κείνται σε έναν κύκλο του H. Έστω C ένας κύκλος του H που περιέχει τις u και v, τέτοιος ώστε το πλήθος των πλευρών που περιέχονται στο intC να είναι μέγιστο.

Αφού το H είναι απλό και 2-συνεκτικό, κάθε γέφυρα του C στο H πρέπει να έχει τούλαχιστον δύο συνδετικές κορυφές. Τώρα, όλες οι εξωτερικές γέφυρες του C πρέπει να έιναι 2-γέφυρες που επικαλύπτουν την uv επειδή, αν κάποια εξωτερική γέφυρα ήταν k-γέφυρα με k≥3 ή μία 2-γέφυρα που αποφεύγει την uv, τότε θα υπήρχε ένας κύκλος C' που θα περιείχε τις u και v με περισσότερες πλευρές στο εσωτερικό του από το C, που έρχεται σε αντίθεση με την επιλογή του C. Αυτές οι δύο περιπτώσεις φαίνονται στο σχήμα 28.



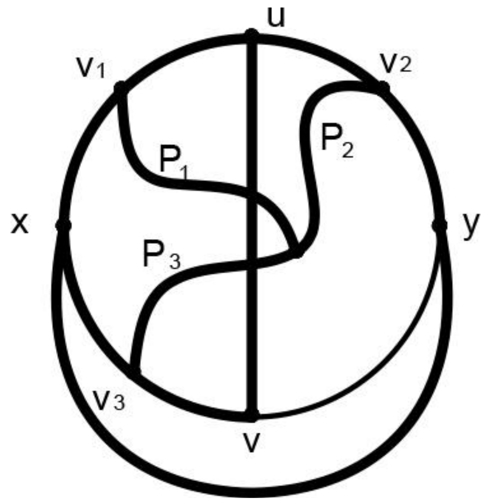

Σχήμα 28

Μάλιστα, όλες οι εξωτερικές γέφυρες του C στο H πρέπει να είναι πλευρές. Γιατί, αν μία 2-γέφυρα με συνδετικές πλευρές x και y είχε μία τρίτη πλευρά, το σύνολο {x,y} θα όριζε μία τομή του G, που έρχεται σε αντίθεση με το ότι το G είναι 3-συνεκτικό.
Από θεωρ.20 δύο εσωτερικές γέφυρες δεν επικαλύπτονται. Έτσι, κάποια εσωτερική γέφυρα ασύμμετρη στο uv πρέπει να επικαλύπτει κάποια εξωτερική γέφυρα. Γιατί αλλιώς, από το θεωρ.21, όλες αυτές οι γέφυρες θα μπορούσαν να μεταφερθούν, και τότε η πλευρά uv θα μπορούσε να σχεδιαστεί στο intC δημιουργώντας μία εμφύτευση του G στο επίπεδο. Αφού το G είναι μη επίπεδο, αυτό δεν είναι δυνατό. Έτσι, υπάρχει μία εσωτερική γέφυρα B που είναι ασύμμετρη και στο uv και σε μία εξωτερική γέφυρα xy.
Άρα, προκύπτουν δύο περιπτώσεις, αναλόγως αν η B έχει μια συνδετική πλευρά διαφορετική από τις u,v,x και y ή όχι.
*Περίπτωση 1:* η B έχει μία συνδετική κορυφή διαφορετική από τις u,v,x και y. Έστω ότι η B έχει μία συνδετική κορυφή $v_1$ στο C(x,u) (σχήμα #). Θεωρούμε δύο περιπτώσεις, αναλόγως αν η B έχει συνδετική κορυφή στο C(y,v) ή όχι.
*Υποπερίπτωση 1α:* η B έχει μία συνδετική κορυφή $v_2$ στο C(y,v). Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα $(v_1,v_2)$-μονοπάτι P στην B εσωτερικά ξένο από τον C. Όμως, τότε το $(C \cup P) + \{uv, xy\}$ είναι μία υποδιαίρεση του $K_{3,3}$ στο G. Άτοπο (σχήμα 29).




Σχήμα 29

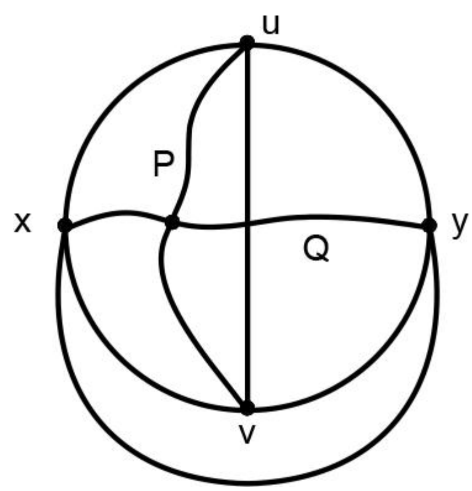
*Υποπερίπτωση 1β:* η B δεν έχει συνδετική κορυφή στο C(y,v). Αφού η B είναι ασύμμετρη στο uv και στο xy, η B πρέπει να έχει συνδετικές κορυφές $v_2$ στο C(u.y] και $v_3$ στο C[v,x). Άρα, η B έχει τρεις συνδετικές κορυφές $v_1$,$v_2$ και $v_3$. Από το θεώρ.19, υπάρχει μία κορυφή $v_0$ στο V(B)\V(C) και τρία μονοπάτια $P_1$,$P_2$ και $P_3$ στην B που ενώνουν την $v_0$ με τις $v_1$,$v_2$ και $v_3$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε, για i≠j, οι $P_i$ και $P_j$ να έχουν μόνο την κορυφή $v_0$ κοινή. Όμως, η $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) + \{uv, xy\}$ περιέχει μία υποδιαίρεση του $K_{3,3}$. 'Ατοπο (σχήμα 30,όπου το $K_{3,3}$ φαίνεται με έντονες γραμμές).




Σχήμα 30

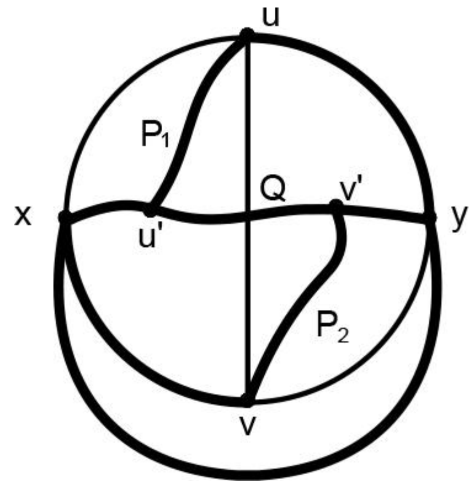
*Περίπτωση 2:* η B δεν έχει συνδετικές κορυφές άλλες από τις u,v,x και y. Αφού η B είναι ασύμμετρη με τις uv και xy, έπεται ότι οι u,v,x και y πρέπει να είναι όλες συνδετικές κορυφές της B. Άρα υπάρχει ένα (u,v)-μονοπάτι P και ένα (x,y)-μονοπάτι Q στην B τέτοια ώστε (α) τα P και Q να είναι εσωτερικά αποσυνδεδεμένα από τον C, και (β) $\mid V(P) \cap V(Q) \mid \geqslant 1$. Θεωρούμε δύο υποπεριπτώσεις, αναλόγως αν τα P και Q έχουν μία ή περισσότερες κοινές κορυφές.

*Υποπερίπτωση 2α:* $\mid V(P) \cap V(Q) \mid = 1$. Σε αυτή την περίπτωση το $(C \cup P \cup Q) + \{uv, xy\}$είναι μία υποδιαίρεση του $K_5$ στο G, άτοπο (σχήμα 31).




Σχήμα 31

*Υποπερίπτωση 2β:* $\mid V(P) \cap V(Q) \mid \geqslant 2$.Έστω u' και v' η πρώτη και τελευταία κορυφή του P στο Q αντίστοιχα, και έστω $P_1$ και $P_2$ τα (u,u') και (v,v') τμήματα του P. Τότε το $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup Q) + \{uv, xy\}$περιέχει μία υποδιαίρεση του $K_{3,3}$ στο G, άτοπο (σχήμα 32).




Σχήμα 32

Άρα, όλες οι πιθανές περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο,όποτε η απόδειξη είναι πλήρης.

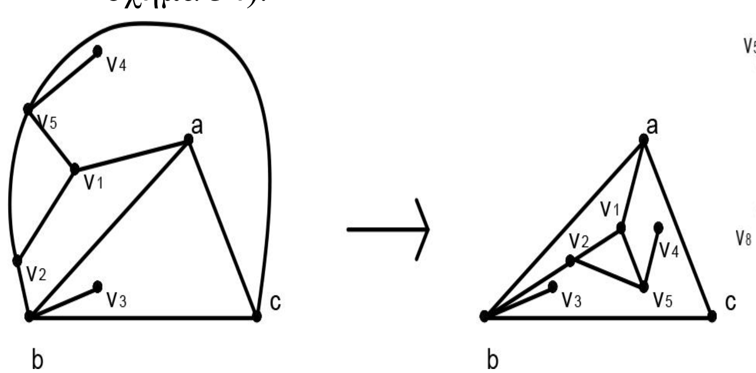
# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ

## 4.1 Γενικά στοιχεία

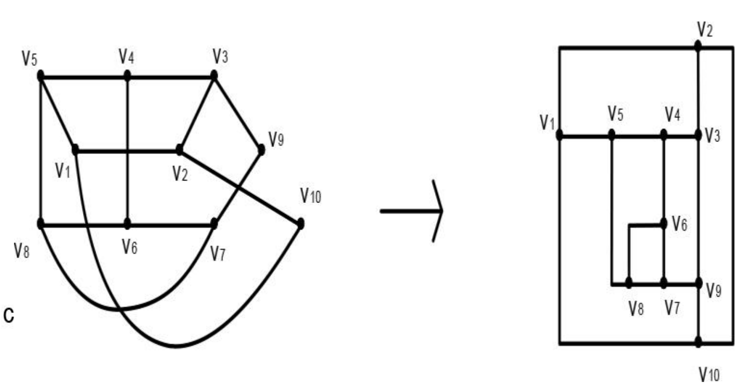
Τα επίπεδα γραφήματα έχουν πολλές και διαδεδομένες εφαρμογές σε διάφορους τομείς. 'Ετσι, σε πολλές περιπτώσεις, πρέπει να γνωρίζουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο και να μπορούμε να βρούμε μία εμφύτευσή του στο επίπεδο. Εφαρμογές τους συναντάμε στο τομέα των ηλεκτρονικών, της μηχανολογίας, αλλά και στο αντικείμενο των πολιτικών μηχανικών. Π.χ.:

- Σχεδιασμός VLSI. Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα VLSI είναι εξαιρετικά πολύπλοκα και πρέπει να κείνται πάνω σε μία επιφάνεια. Άρα, όσο λιγότερες διασταυρώσεις υπάρχουν, τόσο καλύτερος είναι ο σχεδιασμός τους.
- Σχεδιασμός δρόμων ταχείας κυκλοφορίας/σιδηροδρομικών δικτύων. Οι διασταυρώσεις είναι πάντα προβληματικές.
- Σχεδιασμός δικτύου αδρευτικών καναλιών. Σε αυτή την περίπτωση, οι διασταυρώσεις δεν είναι αποδεκτές.
- Τα περισσότερα προβλήματα εύκολου εντοπισμού σημείου σε χάρτες είναι στην ουσία προβλήματα επίπεδων γραφημάτων.

Στο πρόβλημα του ελέγχου επιπεδότητας ενός γραφήματος, απάντηση έδωσε η επιστήμη των υπολογιστών με αλγορίθμους. Έτσι, από τη δεκαετία του 60 και μετά ανακαλύφθηκαν πολλοί αλγόριθμοι επιπεδότητας, οι οποίοι στην αρχή τρέχαν σε πολυωνυμικό χρόνο $O(n^2)$, όμως πλέον όσοι χρησιμοποιούνται σήμερα τρέχουν σε γραμμικό χρόνο $O(n)$. Ακόμα, ύστερα από το θεώρημα του I.Fary, που έλεγε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι πλευρές του να είναι ευθύγραμμα τμήματα, αναπτύχθηκαν αλγόριθμοι που παρήγαγαν μία εμφύτευση ενός επίπεδου γραφήματος στο επίπεδο χρησιμοποιώντας μόνο ευθύγραμμα τμήματα (straight-line drawing, σχήμα 33). Στη συνέχεια, αναπτύχθηκαν ακόμα πιο εξειδικευμένοι αλγόριθμοι σχεδιασμού επίπεδων γραφημάτων, με περισσότερους περιορισμούς. Ειδικά στον σχεδιασμό κυκλωμάτων, απαιτείται οι πλευρές του γραφήματος να είναι κάθετα και παράλληλα ευθ. τμήματα(box-orthogonal drawing, σχήμα 34).




Σχήμα 33 Straight-line drawing

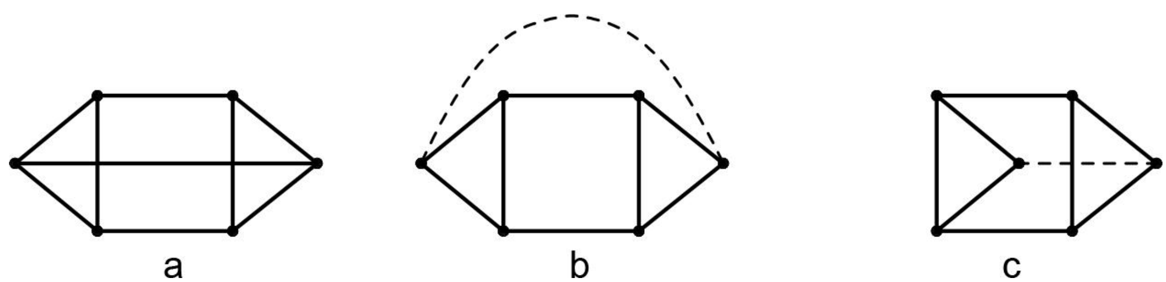



Σχήμα 34 Box-orthogonal drawing

## 4.2 Ο αλγόριθμος επιπεδότητας των Demoucron, Malgrange και Pertuiset

Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο επιπεδότητας των Demoucron, Malgrange και Pertuiset που αναπτύχθηκε το 1964. Από τότε έχουν αναπτυχθεί πιο αποδοτικοί, αλλά και σαφώς πιο απαιτητικοί ως προς την κατανοησή τους, αλγόριθμοι για το ίδιο πρόβλημα.

Έστω H ένα επίπεδο υπογράφημα του G και έστω $\widetilde{H}$ μια ενσωμάτωση του H στο επίπεδο. Λέμε ότι το $\widetilde{H}$ είναι G-αποδεκτό αν το G είναι επίπεδο και υπάρχει μία εμφύτευση $\widetilde{G}$ του G, τέτοια ώστε $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{G}$. Στο σχήμα 35, φαίνονται δύο ενσωματώσεις ενός επίπεδου υπογραφήματος του G. Η μία είναι G-αποδεκτή ενώ η άλλη όχι.



Σχήμα 35 (a) G (b) G-αποδεκτό (c) G-μη αποδεκτό

Αν B είναι μία οποιαδήποτε γέφυρα του H μέσα στο G, τότε λέγεται ότι η B είναι σχεδιάσιμη σε μία περιοχή f του $\widetilde{H}$ αν οι συνδετικές κορυφές της B στο H είναι στο σύνορο της f. Γράφουμε $F\left(B,\widetilde{H}\right)$ για το σύνολο των περιοχών του $\widetilde{H}$ στις οποίες η B είναι σχεδιάσιμη. Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μία αναγκαία συνθήκη για να είναι επίπεδο το G.

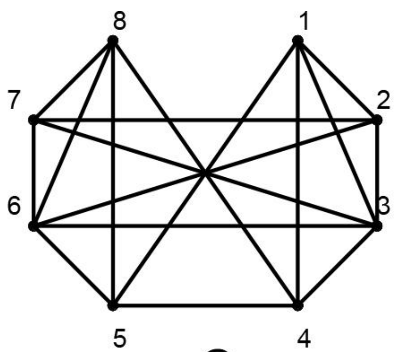
**Θεώρημα 22**
Αν το $\widetilde{H}$ είναι G-αποδεκτό τότε, για κάθε γέφυρα B του H, $F(B,\widetilde{H}) \neq 0$.
**Απόδειξη:**
Αν το $\widetilde{H}$ είναι G-αποδεκτό τότε, εξ ορισμού, υπάρχει μία εμφύτευση $\widetilde{G}$ του G στο επίπεδο τέτοια ώστε $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{G}$.Άρα, το υπογράφημα του $\widetilde{G}$ που αντιστοιχεί σε μία γέφυρα B του H πρέπει να περιέχεται σε μία περιοχή του $\widetilde{H}$. Συνεπώς, $F(B,\widetilde{H}) \neq 0$.

Αφού ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν κάθε μπλοκ του είναι επίπεδο, αρκεί να μελετήσουμε τα απλά μπλοκ. Δοθέντος ενός γραφήματος G, ο αλγόριθμος καθορίζει μία αύξουσα ακολουθία $G_1$,$G_2$,... επίπεδων υπογραφημάτων του G και τις αντίστοιχες επίπεδες εμφυτεύσεις τους $\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}, \ldots$. Αν το G είναι επίπεδο, τότε κάθε $\widetilde{G_\iota}$ είναι G-αποδεκτό και η ακολουθία $\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}, \ldots$ τερματίζει σε μία επίπεδη εμφύτευση του G. Σε κάθε βήμα, η αναγκαία συνθήκη του θεωρήματος 22 χρησιμοποιείται για να εξετάσει αν το G είναι επίπεδο ή όχι.

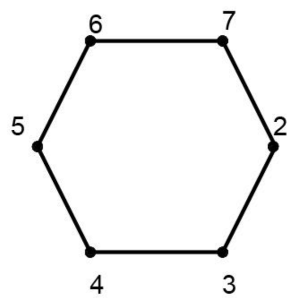
**Ο αλγόριθμος:**

1. Έστω $G_1$ ένας κύκλος του G. Βρες μία επίπεδη εμφύτευση $\widetilde{G_1}$του $G_1$. Θέσε i=1.
2. Αν $E(G)\setminus E(G_i)=\emptyset$, σταμάτα. Αλλιώς, βρες όλες τις γέφυρες του $G_i$ στο G. Για κάθε τέτοια γέφυρα B βρες το σύνολο $F(B,\widetilde{G_\iota})$.
3. Αν υπάρχει γέφυρα B τέτοια ώστε $F(B,\widetilde{G_\iota}) \neq \emptyset$,σταμάτα: από θεώρ.22 το G δεν είναι επίπεδο. Αν υπάρχει γέφυρα B τέτοια ώστε $| F(B,\widetilde{G_\iota}) |= 1$,τότε $\{f\} =| F(B,\widetilde{G_\iota}) |$. Αλλιώς, έστω B μία τυχαία γέφυρα και f μία οποιαδήποτε περιοχή ώστε $f \in F(B,\widetilde{G_\iota})$.
4. Διάλεξε ένα μονοπάτι $P_i \subseteq B$που ενώνει δύο συνδετικές κορυφές του B στο $G_i$. Θέσε $G_{i+1} = G_i \cup P_i$ και πάρε μία επίπεδη εμφύτευση $\widetilde{G_{\iota+1}}$ του $G_{i+1}$ σχεδιάζοντας το $P_i$ στην περιοχή f του $\widetilde{G_\iota}$. Αντικατέστησε το i με i+1 και πήγαινε στο βήμα 2.

Για να εξηγήσουμε αυτόν τον αλγόριθμο,θα πάρουμε το γράφημα G του σχήματος 36. Ξεκινάμε με τον κύκλο $\widetilde{G_1} = 2345672$ και μία λίστα από τις γέφυρες του (δίνονται σαν σύνολα πλευρών για συντομία).Σε κάθε βήμα, οι γέφυρες B για τις οποίες $| F(B,\widetilde{G_\iota}) |= 1$ απεικονίζονται με έντονα γράμματα. Σε αυτό το παράδειγμα, ο αλγόριθμος τερματίζει με μία επίπεδη εμφύτευση $\widetilde{G_9}$ του G. Άρα το G είναι επίπεδο.

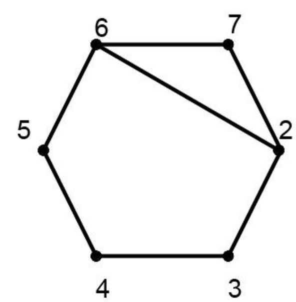



G



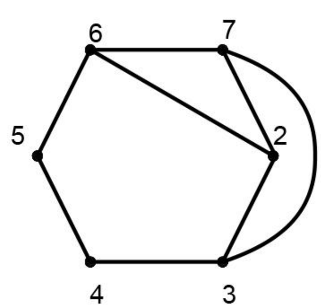

G 1

{12,13,14,15},{26}
{48,58,68,78},{37}



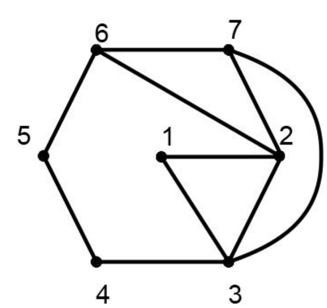

G 2

{12,13,14,15}
{48,58,68,78},{37}



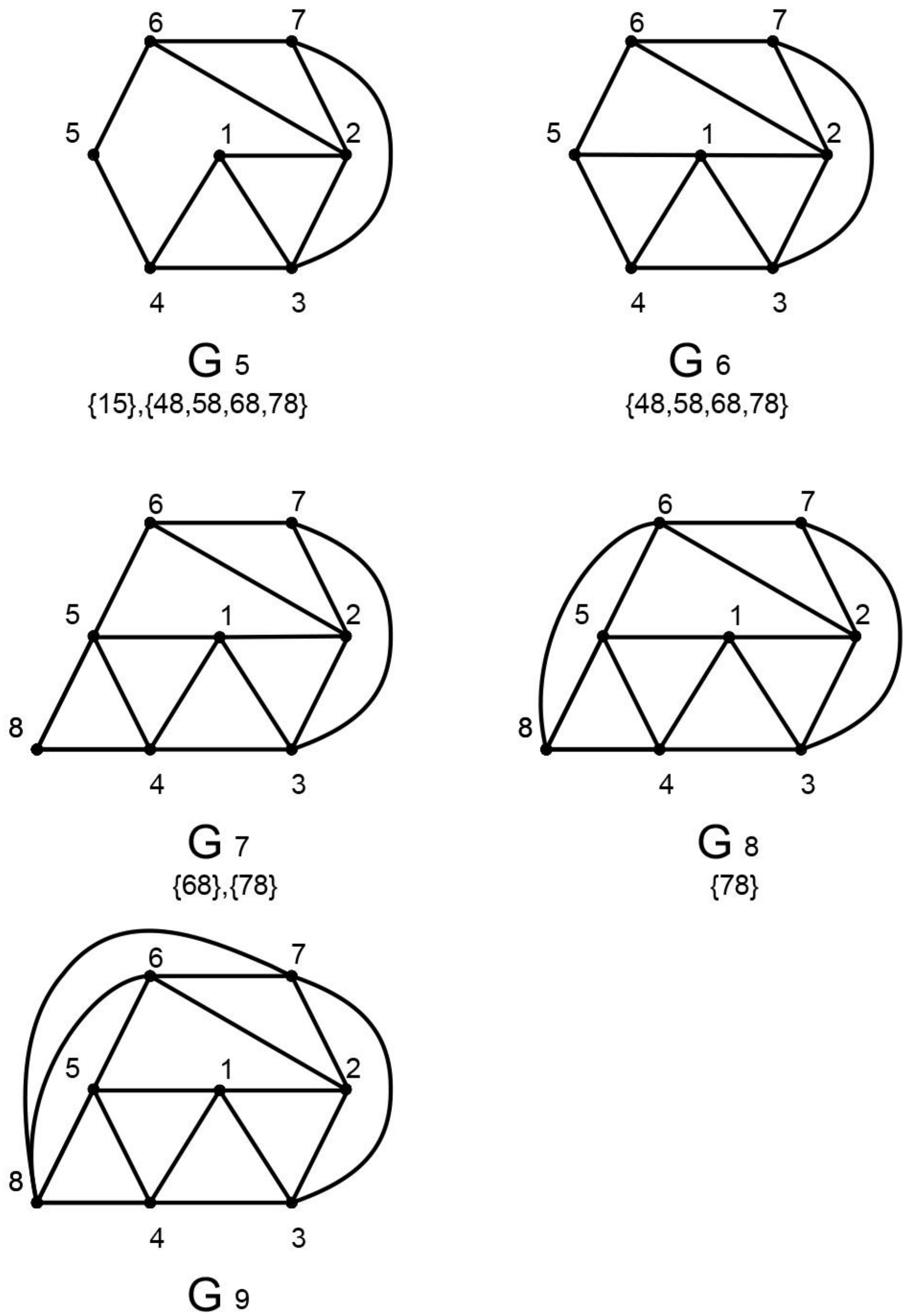

G 3

{12,13,14,15}
{48,58,68,78}



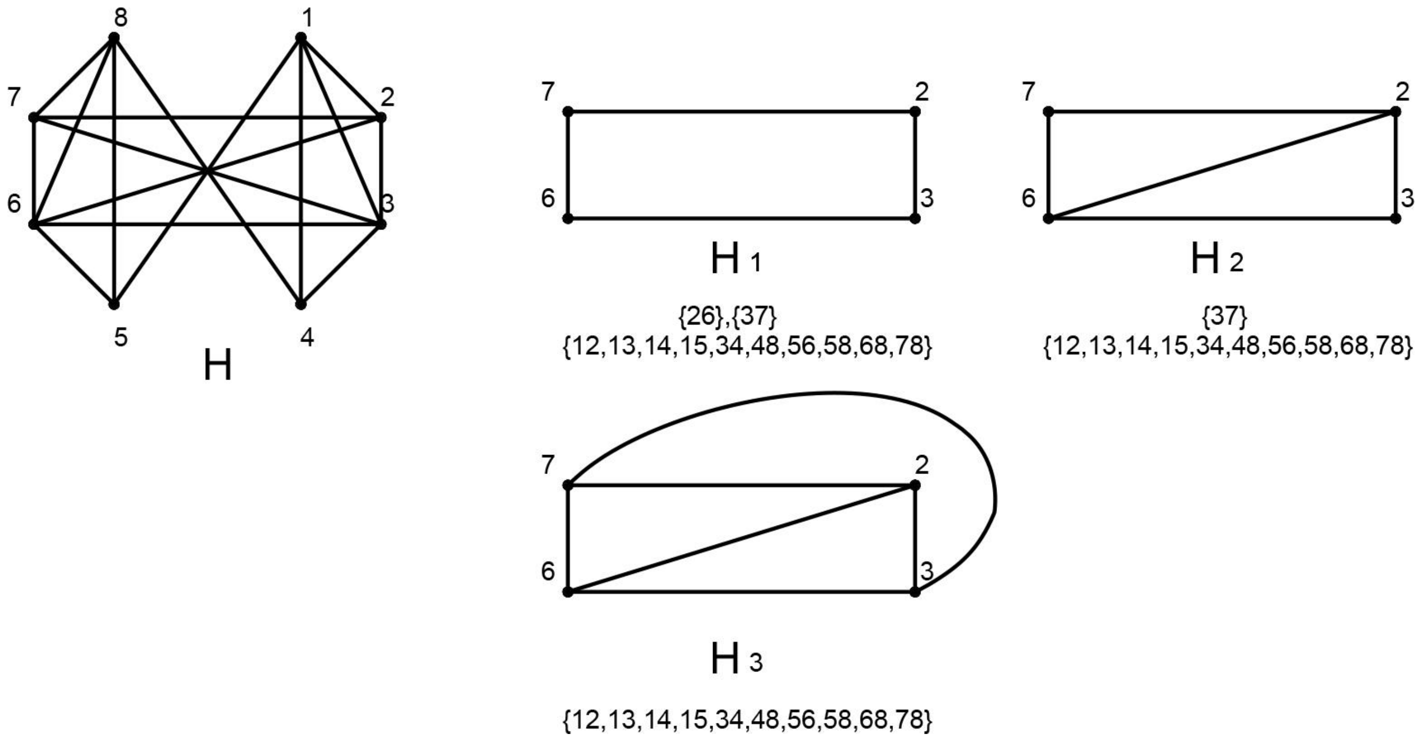

G 4

{14},{15},{48,58,68,78}




Σχήμα 36

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον αλγόριθμο στο γράφημα H που προκύπτει από το G διαγράφοντας την πλευρά 45 και προσθέτοντας την πλευρά 36(σχήμα 37). Ξεκινώντας με τον κύκλο 23672, τρέχουμε τον αλγόριθμο όπως φαίνεται στο σχήμα 37.

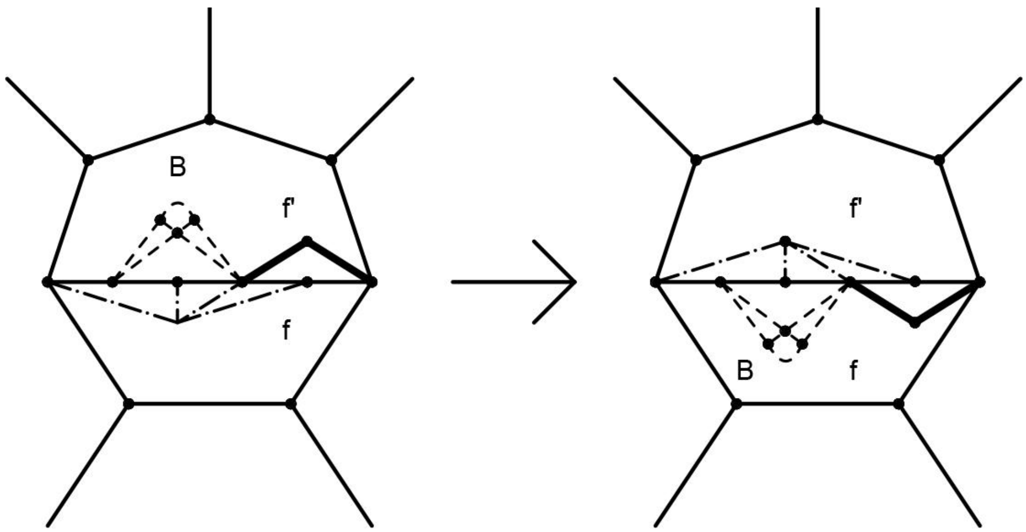



Σχήμα 37

Παρατηρούμε ότι έχοντας κατασκευάσει το $\widetilde{H_3}$ ,βρίσκουμε μία γέφυρα B={12,13,14,15,34,48,56,58,68,78} τέτοια ώστε $F(B,\widetilde{H_3}) \neq \emptyset$. Σε αυτό το σημείο ο αλγόριθμος σταματά, και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το H είναι μη επίπεδο.

Για να ελέγξουμε την εγκυρότητα του αλγορίθμου, πρέπει να δείξουμε ότι αν το G είναι επίπεδο, τότε κάθε όρος της ακολουθίας $\widetilde{G_1}, \widetilde{G_2}, \ldots, \widetilde{G_{\varepsilon-\nu+1}}$ είναι G-αποδεκτός. Οι Demoucron, Malgrange και Pertouiset το απέδειξαν με εις άτοπον επαγωγή. Παρακάτω, θα δώσουμε μια γενική περίληψη της απόδειξής τους.

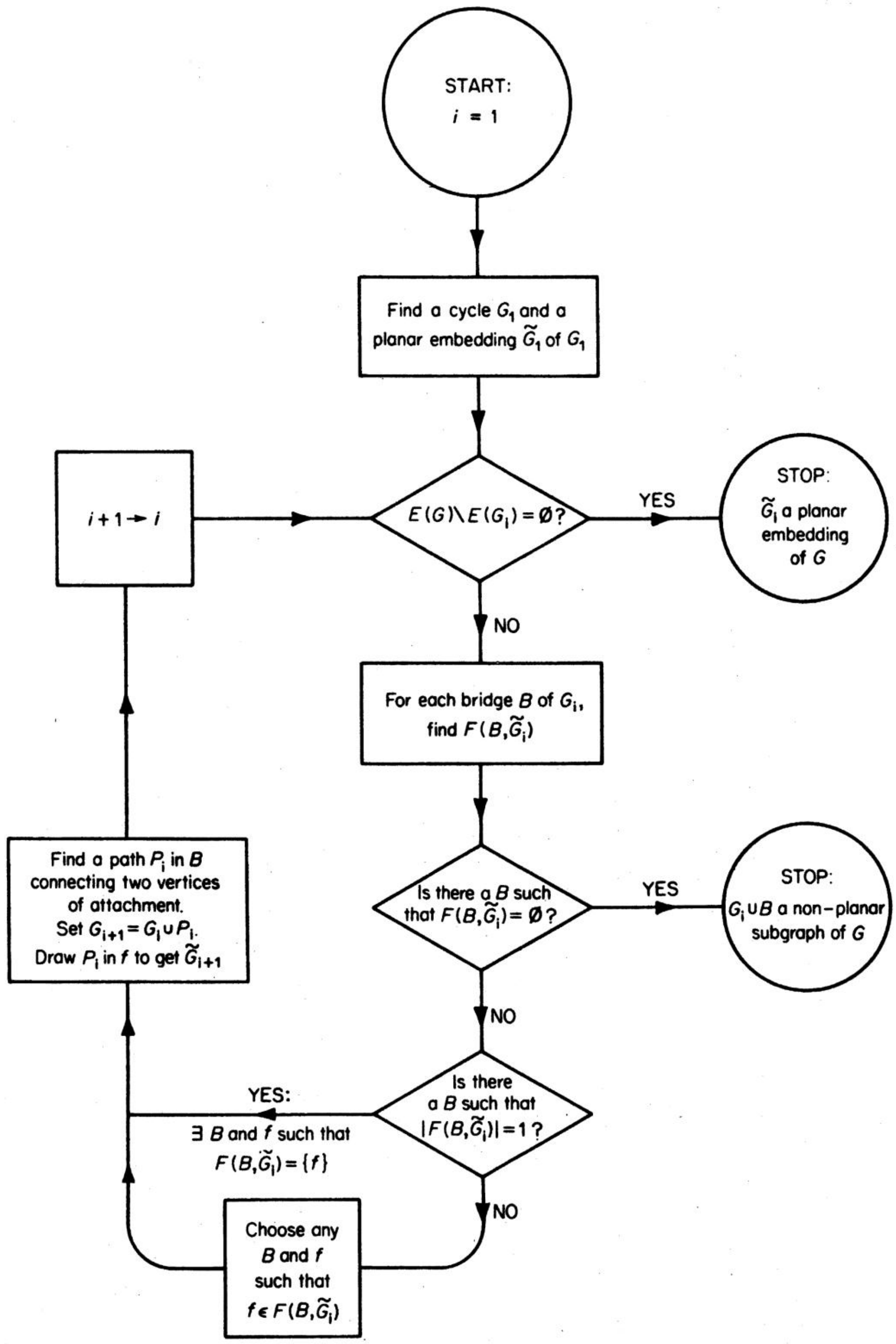
Υποθέτουμε ότι το G είναι επίπεδο. Προφανώς το $\widetilde{G_1}$ είναι G-αποδεκτό. Υποθέτουμε ότι το $\widetilde{G_\iota}$ είναι G-αποδεκτό για 1≤i≤k<ε-ν+1. Εξ ορισμού υπάρχει μία εμφύτευση $\tilde{G}$ του G στο επίπεδο τέτοια ώστε $\widetilde{G_k} \subset \tilde{G}$.Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\widetilde{G_k} + 1$είναι G-αποδεκτό. Έστω B και f όπως ορίστηκαν στο βήμα 3 του αλγορίθμου.Αν μέσα στο $\tilde{G}$η B σχεδιάζεται μέσα στην f, τότε το $\widetilde{G_k} + 1$ είναι προφανώς G-αποδεκτό. Άρα υποθέτουμε ότι καμμία γέφυρα του $G_k$ δεν μπορεί να σχεδιαστεί σε μόνο μία περιοχή του $\widetilde{G_k}$, και ότι, μέσα στο $\tilde{G}$, η B σχεδιάζεται και σε μία άλλη f' περιοχή. Αφού καμμία γέφυρα δεν μπορεί να σχεδιαστεί μόνο σε μία περιοχή, καμμία γέφυρα της οποίας οι συνδετικές κορυφές βρίσκονται στο κοινό σύνορο των f και f' μπορεί να επικαλύπτει μια γέφυρα που δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Έτσι, μπορούμε να ανταλλάξουμε γέφυρες εκατέρωθεν του κοινού ορίου των f και f' και να πάρουμε μία επίπεδη εμφύτευση του G στην οποία η B έχει σχεδιαστεί στην f (σχήμα 38). Άρα,πάλι το $\widetilde{G_k} + 1$ είναι G-αποδεκτό.



Σχήμα 38

Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε είναι ορθός και από το παρακάτω διάγραμμα μπορούμε να παρατηρήσουμε τις βασικές του διαδικασίες:

1. βρίσκουμε ένα κύκλο $G_1$ στο G
2. καθορίζουμε τις γέφυρες του $G_i$ στο G και τις συνδετικές τους κορυφές
3. καθορίζουμε το b(f) για κάθε περιοχή f του $\widetilde{G_i}$
4. καθορίζουμε το $F\left(B, \widetilde{G_i}\right)$ για κάθε γέφυρα B του $G_i$
5. βρίσκουμε ένα μονοπάτι $P_i$ σε κάποια γέφυρα B του $G_i$ μεταξύ των κορυφών του $V(B,G_i)$



START:
$i = 1$
Find a cycle $G_1$ and a planar embedding $\widetilde{G}_1$ of $G_1$
$E(G) \setminus E(G_i) = \emptyset$?
YES
STOP:
$\widetilde{G}_i$ a planar embedding of $G$
NO
For each bridge $B$ of $G_i$, find $F(B, \widetilde{G}_i)$
Is there a $B$ such that $F(B, \widetilde{G}_i) = \emptyset$?
YES
STOP:
$G_i \cup B$ a non-planar subgraph of $G$
NO
Is there a $B$ such that $|F(B, \widetilde{G}_i)| = 1$?
YES:
$\exists$ $B$ and $f$ such that $F(B, \widetilde{G}_i) = \{f\}$
NO
Choose any $B$ and $f$ such that $f \in F(B, \widetilde{G}_i)$
Find a path $P_i$ in $B$ connecting two vertices of attachment. Set $G_{i+1} = G_i \cup P_i$. Draw $P_i$ in $f$ to get $\widetilde{G}_{i+1}$
$i + 1 \rightarrow i$

## 4.3 Μία παραλλαγή του αλγορίθμου

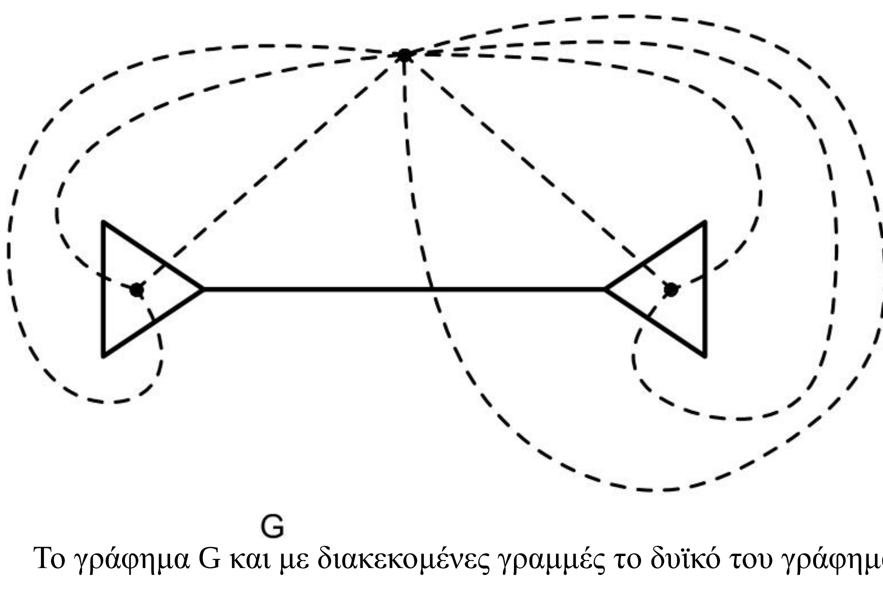
Πρωτού παρουσιάσουμε την παραλλαγή του αλγορίθμου θα χρειαστεί να εισάγουμε κάποιες ακόμα έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Ένα γράφημα G στο οποίο υπάρχει κύκλος που περνά από όλες τις κορυφές του G (όχι όμως υποχρεωτικά και από όλες τις πλευρές του) λέγεται **γράφημα Hamilton** και ο αντίστοιχος κύκλος **κύκλος Hamilton**.

**Χρωματισμός** των κορυφών ενός γραφήματος G είναι μία αντιστοιχία διάφορων χρωμάτων στις κορυφές του G, έτσι ώστε δύο γειτονικές κορυφές του G να έχουν διαφορετικό χρώμα. Ένα γράφημα G λέγεται n-χρωματικό αν υπάρχει χρωματισμός του με n χρώματα. Ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστεί ένα γράφημα G λέγεται **χρωματικός αριθμός** και συμβολίζεται με **x(G).**

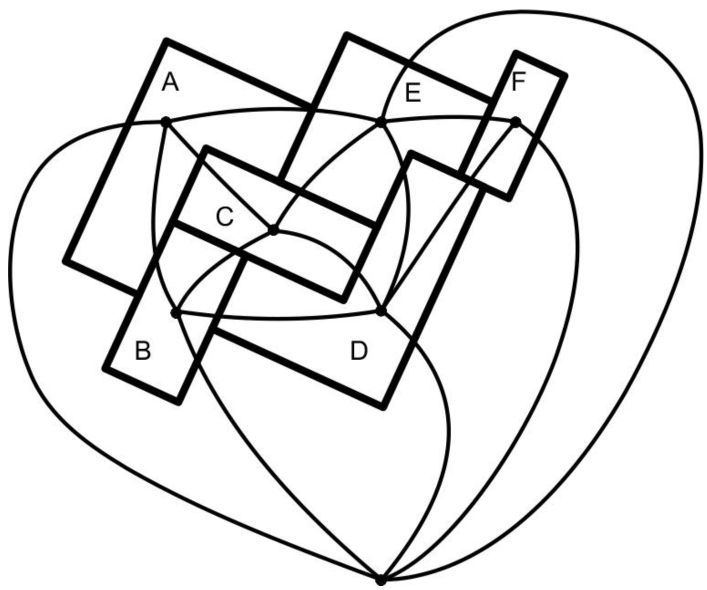
Δοθέντος ενός επίπεδου γραφήματος G, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα άλλο επίπεδο γράφημα G* το οποίο ονομάζεται **δυϊκό** του G. Η κατασκευή του G* γίνεται ως εξής:

1. Μέσα σε κάθε περιοχή $R_i$ του G διαλέγουμε ένα σημείο $v_i$.
2. Φέρουμε μία πλευρά e*, που αντιστοιχεί στην πλευρά e του G, η οποία τέμνει την e και συνδέει τις δύο κορυφές $v_i$ και $v_j$ του G* που βρίσκονται μέσα στις περιοχές $R_i$ και $R_j$ του G και οι οποίες περιοχές έχουν την πλευρά e ως σύνορό τους.




Σχήμα 39 Το γράφημα G και με διακεκομένες γραμμές το δυϊκό του γράφημα G*

Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο εφαρμόζοντας τον παράλληλα σε ένα πρόβλημα προαπαιτήσεων μιας κάτοψης.
Το πρόβλημα έχει ως εξής:
Έστω ότι η κάτοψη του τυπικού ορόφου ενός κτιρίου αποτελείται από n χώρους, και έστω ότι θέλουμε κάποιοι από από τους χώρους να επικοινωνούν μεταξύ τους. Οι m αυτές γειτνιάσεις και οι n χώροι μπορούν να θεωρηθούν ως οι m πλευρές και οι n κορυφές ενός γραφήματος G, που ονομάζεται γράφημα γειτνίασης της κάτοψης και είναι το δυϊκό γράφημα της κάτοψης. Ο αρχιτέκτονας θέτει ορισμένες προαπαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί η κάτοψη. Κυρίως ενδιαφέρεται για το πλήθος των χώρων και για τις γειτνιάσεις μεταξύ τους. Ορίζεται λοιπόν ένα άλλο γράφημα, το γράφημα προαπαιτήσεων, το οποίο έχει όλες τις κορυφές του γραφήματος γειτνίασης, αλλά λιγότερες πλευρές.




Σχήμα 40 το γράφημα προαπαιτήσεων μιας κάτοψης

Γνωρίζουμε ότι το δυϊκό γράφημα G* ενός γραφήματος G είναι επίσης επίπεδο γράφημα. Η κάτοψη είναι προφανώς επίπεδο γράφημα, άρα και το δυϊκό της( το γράφημα γειτνιάσεων) θα είναι επίσης επίπεδο γράφημα. Επομένως και ένα παράγον υπογράφημά του, που είναι το γράφημα προαπαιτήσεων, πρέπει και αυτό να είναι επίπεδο γράφημα. Αν λοιπόν οι προαπαιτήσεις είναι τέτοιες που το γράφημα προαπαιτήσεων δεν είναι επίπεδο, τότε προφανώς δεν μπορεί να κατασκευαστεί η αντίστοιχη κάτοψη. Άρα, κάποιες από τις προαπαιτήσεις πρέπει να καταργηθούν, ώστε το γράφημα προαπαιτήσεων να γίνει επίπεδο και η αντίστοιχη κάτοψη να κατασκευάζεται.
Αυτό επιτυχάνεται με τη βοήθεια του παρακάτω αλγορίθμου όπου G είναι το γράφημα προαπαιτήσεων:

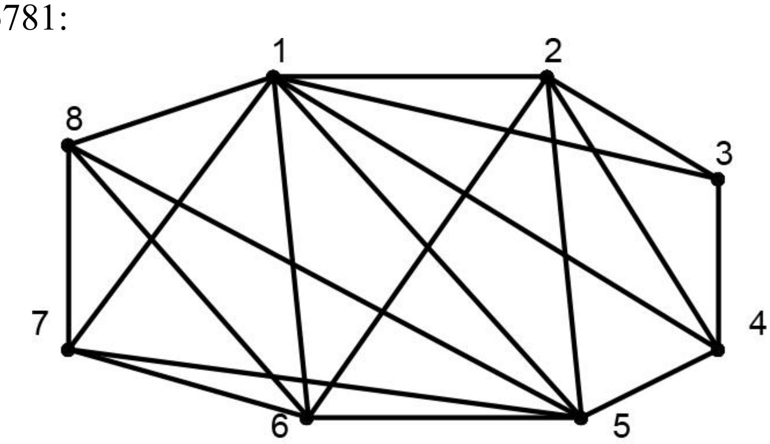
**Ο αλγόριθμος:**

1. Κατασκευάζουμε έναν κύκλο Hamilton C του G.

2. Κατασκευάζουμε το βοηθητικό γράφημα G’(C):
    a. Οι κορυφές του είναι οι πλευρές του G που δεν ανήκουν στον C.
    b. Οι πλευρές του είναι τα ζεύγη όλων των πλευρών του G που τέμνονται αν σχεδιαστούν στο εσωτερικό (ή στο εξωτερικό) του C.
3. Βρίσκουμε τους κύκλους του G’(C) με περιττό μήκος:
    a. Αν x(G’(C)=2, δεν υπάρχουν κύκλοι με περιττό μήκος.
    b. Αν x(G’(C)>2, υπάρχουν κύκλοι με περιττό μήκος.
4. Βρίσκουμε το ελάχιστο σύνολο κορυφών R του G’(C) η διαγραφή των οποίων καταστρέφει όλους τους περιττούς κύκλους( και όλες τις πλευρές του βοηθητικού γραφήματος που διέρχονται από κορυφή του R). Έτσι παίρνουμε κάποιο γράφημα G’’ που είναι 2-χρωματίσιμο.
5. Χρωματίζουμε τις κορυφές του G’’ με δύο χρώματα, έστω τα I και II.
6. Προσθέτουμε στο εσωτερικό του C τις πλευρές του G-C που αντιστοιχούν σε κορυφές του G’’ χρώματος I και στο εξωτερικό του C τις πλευρές του G-C που αντιστοιχούν σε κορυφές του G’’ χρώματος II. Έτσι, παίρνουμε το επίπεδο γράφημα $G_p$.
7. Η ζητούμενη κάτοψη είναι το δυϊκό γράφημα του $G_p$.

**Παράδειγμα:**
Το γράφημα προαπαιτήσεων μιας κάτοψης έχει τις 8 κορυφές 1,2,3,4,5,6,7,8 και τις 19 πλευρές 12,13,14,15,16,17,23,24,25,26,,34,45,56,57,58,67,68,78. Να εξετάσετε αν μία τέτοια κάτοψη κατασκευάζεται. Αν δεν κατασκευάζεται, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός προαπαιτήσεων που πρέπει να καταργηθούν ώστε η κάτοψη να κατασκευάζεται.

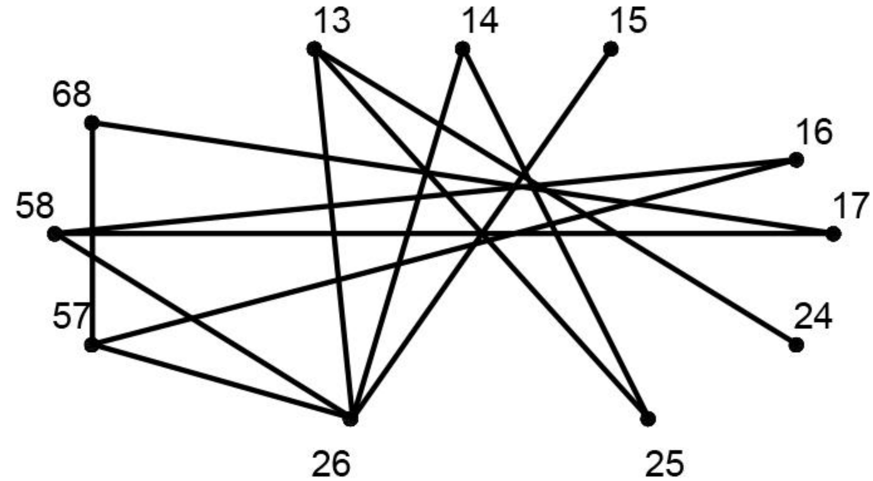
1. Σχεδιάζουμε το γράφημα προαπαιτήσεων και βρίσκουμε ένα κύκλο Hamilton, π.χ. τον 123456781:




G' (c )

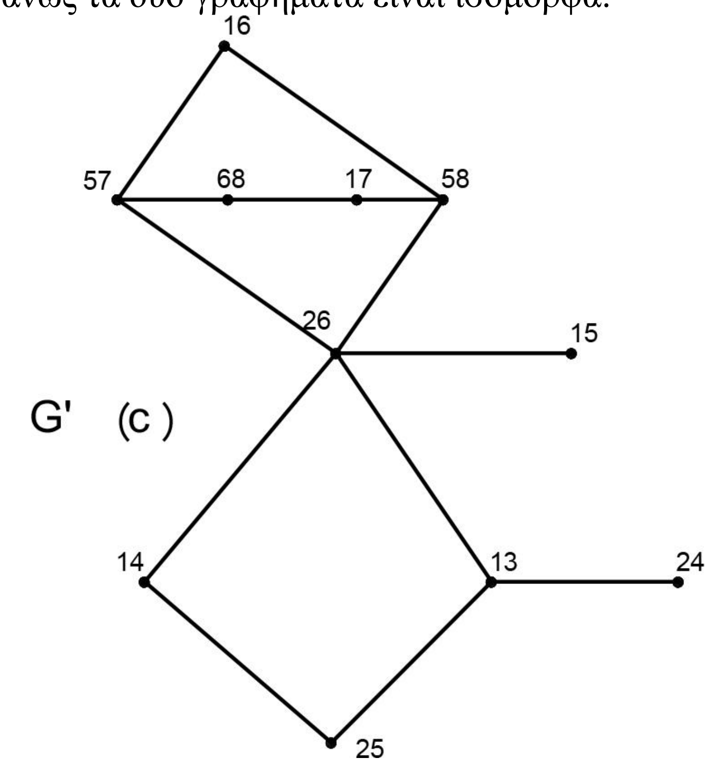
Το μέγιστο επίπεδο γράφημα με n=8 κορυφές έχει 3n-6=18 πλευρές. Άρα, το G αφού έχει 19>18 πλευρές, είναι μη επίπεδο. Άρα, τουλάχιστον μία πλευρά πρέπει να διαγραφεί.

2. Κατασκευάζουμε το βοηθητικό γράφημα με 19-8=11 κορυφές και 13 πλευρές, όσα τα ζεύγη ασυμβίβαστων πλευρών( και όσα τα σημεία τομής των πλευρών του G).




G

3. Σχεδιάζουμε το βοηθητικό γράφημα ώστε να φαίνονται καλύτερα οι κύκλοι που περιέχει. Προφανώς τα δύο γραφήματα είναι ισόμορφα.



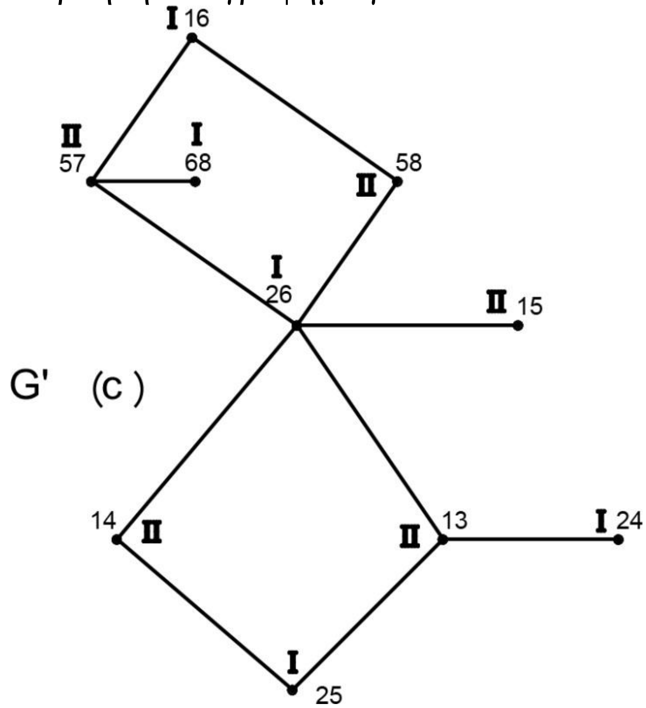

Το βοηθητικό γράφημα περιέχει λοιπόν δύο κύκλους με περιττό μήκος: τον 16,57,68,17,58,16, μήκους 5 και τον 26,57,68,17,58,26, μήκους επίσης 5.

4. Άρα, το αρχικό γράφημα δεν είναι επίπεδο και δεν υπάρχει κάτοψη που να

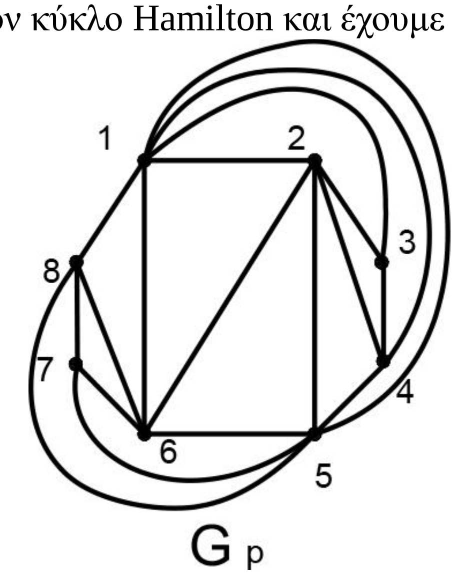
ικανοποιεί τις δοσμένες προαπαιτήσεις.

Αν όμως αφαιρέσουμε μία από τις 4 κορυφές 57 ή 68 ή 17 ή 58, το βοηθητικό γράφημα δεν θα έχει κύκλο περιττού μήκους, άρα θα είναι 2-χρωματίσιμο και το αρχικό γράφημα G θα είναι επίπεδο.

Αφαιρώντας την 17 το βοηθητικό γράφημα γίνεται:

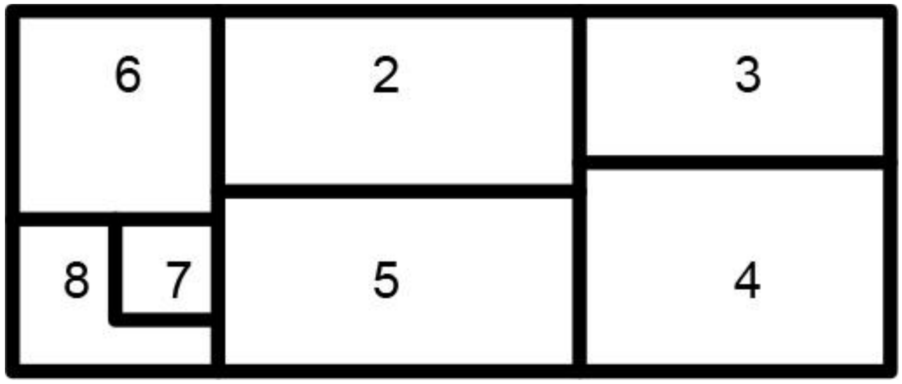



5. Διχρωματίζουμε τις κορυφές του G'' με δύο χρώματα, έστω I και II όπως φαίνεται παραπάνω.
6. Τοποθετούμε τις πλευρές που αντισοτιχούν στις κορυφές του G'' χρώματος I μέσα στιν κύκλο Hamilton 123456781 και τις πλευρές που αντισοτιχούν στις κορυφές χρώματος II έξω από τον κύκλο Hamilton και έχουμε το επίπεδο γράφημα $G_p$.




Το γράφημα προαπαιτήσεων G'=G-{17} έγινε επίπεδο και η αντίστοιχη κάτοψη μπορεί να κατασκευαστεί.

Μία δυνατή κάτοψη είναι η παρακάτω, όπου θέσαμε ως χώρο 1 τον εξωτερικό χώρο.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


- M. Behzad, G. Chartrand, L. lesniak-Foster, Graphs and Digraphs. Prindle, Weber and Schmidt, 1979.
- A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph theory with applications. Macmillan, 1976.
- B.Bollobas, Graph Theory. An Introdyctory Course Springer – Verlag, 1978.
- F. Harary, Graph Theory. Perseus Books, 1994.
- L.Beineke, R.J  Wilson, Selected topics in graph theory. Academic press, 1978.
- R. Deistel, Graph Theory. Springer – Verlag, 2000.
- Α. Παπαϊωάννου, Θεωρία Γραφημάτων. ΕΜΠ, 2004.
- Ε. Γαλανής, Πεπερασμένα  Μαθηματικά. Συμεών, 1993.
- Lucie Martinet, Drawing Planar Graphs.  November 29, 2010
- Planarity Testing and Embedding, Maurizio Patrignani. CRC press, 2004.
- Lecture Notes On Planarity Testing And Construction Of Planar Embedding
  http://www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch15.pdf
- Θεωρία Γραφημάτων
  http://www.aueb.gr/lessons/d5/epl114/grafimata/grafimata1.htm
- Θεωρια γραφων
  http://delab.csd.auth.gr/~manolopo/graph/
- http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html
- Jordan Curve Theorem
  http://britton.disted.camosun.bc.ca?jbjordan.htm
- Σύντομη εισαγωγή στη θεωρία γραφημάτων
  http://www.corelab.ntua.gr/courses/algorithms/uliko/graphs.pdf
- Βασικές έννοιες θεωρίας γραφημάτων
  http://www.corelab.ntua.gr/courses/algorithms/slides/Graphs.pdf