



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



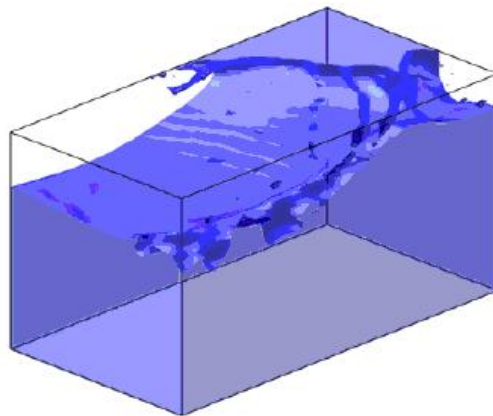
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΠΛΟΙΟΥ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ
ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ

ΜΕΛΕΤΗ SLOSHING ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΥΠΟ
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ



Επιμέλεια:
Απόστολος
Γραμματικόπουλος
Α.Μ.:08106040

Επιβλέπων:
Κωνσταντίνος Σπύρου,
Καθηγητής ΣΝΜΜ

ΑΘΗΝΑ 2012

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια συστηματική μελέτη της παραμετρικής αστάθειας της ελεύθερης επιφάνειας υγρού εντός ορθογωνικής διδιάστατης δεξαμενής, υποβαλλόμενης σε κατακόρυφη διέγερση. Οι παραδοχές που γίνονται για το υγρό είναι ότι είναι ασυμπίεστο, ιδανικό και αρχικά μη στροβιλώδες, ενώ για τη δεξαμενή ότι είναι λεία, μη ελαστική και στεγανή. Θεωρείται επιπλέον ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού και της οροφής της δεξαμενής. Η ανάλυση βασίζεται σε ένα απειροδιάστατο σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων το οποίο εξάγεται από τις αρχικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα υγρό – δεξαμενή με τη βοήθεια της τροπικής (modal) ανάλυσης. Θεωρώντας μικρού πλάτους εξωτερική διέγερση σε σχέση με το μήκος ή/και το πλάτος της δεξαμενής, το τροπικό (modal) σύστημα μπορεί να οδηγήσει με τη βοήθεια ασυμπτωτικών προσαρμοστικών μεθόδων σε ένα απειροδιάστατο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων με μη γραμμικούς όρους τρίτου βαθμού. Το σύστημα αυτό είναι το ίδιο με αυτό που περιγράφεται στην εργασία των Faltinsen και Timokha (2001) για τη διδιάστατη περίπτωση. Ακολουθώντας την προσαρμοστική ιεράρχηση των ιδιομορφών οδηγούμαστε σε ένα πεπερασμένης διάστασης σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Στη συνέχεια με τη χρήση αριθμητικών μη γραμμικών μεθόδων υπολογίζουμε τις περιοχές αστάθειας και ευστάθειας του συστήματος και οι υπολογιζόμενες περιοχές συγκρίνονται με αυτές που προβλέπει η γραμμική θεώρηση (γραμμική εξίσωση Mathieu με απόσβεση). Βασικό αποτέλεσμα της σύγκρισης είναι η ανάδειξη μιας περιοχής αστάθειας εξαρτώμενης από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος στην περιοχή που το γραμμικό μοντέλο προβλέπει ευστάθεια. Η ανάδειξη της περιοχής αυτής είναι αποτέλεσμα της άρσης του περιορισμού της μικρής αρχικής διαταραχής που ισχύει στη γραμμική περίπτωση. Η ύπαρξη της περιοχής αυτής αποδεικνύεται ότι είναι ανεξάρτητη του λόγου του βάθους του υγρού προς το μήκος της δεξαμενής, δηλαδή ενυπάρχει γενικώς στο σύστημα δεξαμενής-υγρού και δεν εξαρτάται από το ποσοστό πλήρωσης. Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται στις διάφορες καταστάσεις και παρουσιάζονται στιγμιότυπα αυτής για ουσιαστικότερη σύγκριση των καταστάσεων και ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Abstract

A systematic investigation on the prediction of nonlinear sloshing of an incompressible fluid with irrotational flow in a two dimension (2D) rectangular tank, under vertical excitation is described. Infinite tank roof height and no overturning waves are assumed. The analysis is based on an infinite-dimensional system of nonlinear differential equations coupling generalized coordinates of the free surface and fluid motion associated with the amplitude response of natural modes. This modal system is asymptotically reduced to an infinite-dimensional system of ordinary differential equations with third-order polynomial nonlinearity by assuming “sufficiently” small fluid motion relative to fluid depth and tank breadth. The system is equivalent to the adaptive model extracted by Faltinsen and Timokha (2001) for the two-dimensional case. Following adaptive mode ordering, we obtain to a finite-dimensional system of ODEs. The method of continuation of nonlinear dynamics is introduced in order to expedite the identification of the instability boundary and the prediction of steady amplitude of free surface oscillation. The results are combined with the predictions of the linear Mathieu type model. It is found that a new (initial condition dependend) area of instability can be added in the classical instability map. The existence of this area is confirmed as independent of the ratio of the liquid depth to the length of the tank and thus is a trait of the system itself and does not depend on the filling rate. The free surface’s form is calculated for the various conditions and snapshots of it are presented for clearer comparison between states and easier analysis of the results.

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της εργασίας ήταν η μελέτη της συμπεριφοράς του τριτοτάξιου μοντέλου περιγραφής των μη γραμμικών κυματισμών που σχηματίζονται σε μια διδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή υπό κατακόρυφη διέγερση. Η μελέτη αυτή αποτελεί συνέχεια της μελέτης των Spondonidis & Spyrou (2010,2011), οι οποίοι εξέτασαν τη συμπεριφορά μιας πιο απλοποιημένης μορφής του μοντέλου, ελαφρώς μη γραμμικής, και κρίθηκε αναγκαίο να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματά τους σε ένα πιο σύνθετο και ακριβέστερο μοντέλο. Για την πραγματοποίηση αυτού του σκοπού ακολουθήσαμε την παρακάτω πορεία. Στο κεφάλαιο 1 πραγματοποιείται μια ιστορική αναδρομή στη θεματολογία αυτή και μια κριτική ανασκόπηση των εργασιών που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν. Εξετάζονται τόσο οι εργασίες που αποτελούν προγόνους της παρούσας όσο και αυτές που επέλεξαν μια διαφορετική προσέγγιση για τη μελέτη του φαινομένου, ενώ συγκρίνονται οι διάφορες προσεγγίσεις για την περιγραφή του. Στο κεφάλαιο 2 τίθεται το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο, δηλαδή οι φυσικοί νόμοι και οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο αυτό, οι οποίες αποτελούν τμήμα της μηχανικής των ρευστών. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται οι διαφορετικές προσεγγίσεις μοντελοποίησης της ελεύθερης επιφάνειας, με τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της καθέμιας, ώστε να καταλήξουμε σε αυτή που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία. Αναλύονται τα βήματα που ακολουθούμε με αυτή τη μέθοδο ώστε στο τέλος του κεφαλαίου να παραχθεί ένα, γενικής μορφής, απειροδιάστατο σύστημα, για την περιγραφή της δυναμικής της ελεύθερης επιφάνειας. Από το σύστημα αυτό θα εξαχθεί, αρχικά, στο κεφάλαιο 4, ένα αρκετά απλοποιημένο, ελαφρώς μη γραμμικό και θα παρουσιαστεί η δυναμική του συμπεριφορά, όπως αυτή αναλύθηκε σε προηγούμενες εργασίες. Το πολυπλοκότερο μοντέλο 3ης τάξεως, που αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, θα παραχθεί στο κεφάλαιο 5, όπου θα αναλυθεί και η δυναμική του συμπεριφορά για διάφορους βαθμούς πλήρωσης της δεξαμενής. Στο κεφάλαιο 6 θα παρουσιαστούν στιγμιότυπα της ελεύθερης επιφάνειας στις διάφορες καταστάσεις που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 5 και σχολιασμός της μορφής τους. Το κεφάλαιο 7 αποτελεί τον επίλογο της εργασίας, όπου συνοψίζουμε τα ευρήματά μας και κάνουμε προτάσεις για μελλοντική μελέτη.

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Κριτική ανασκόπηση εργασιών | 1 |
| 1.1 | Ιστορικό της Σχετικής Έρευνας | 1 |
| 1.2 | Τρόποι Ανάλυσης | 3 |
| 1.2.1 | Εισαγωγή | 3 |
| 1.2.2 | Αριθμητική-Υπολογιστική Μέθοδος | 3 |
| 1.2.3 | Ημιαναλυτική Μέθοδος Τροπικής (Modal) Ανάλυσης | 4 |
| 1.2.4 | Παραμετρικό Sloshing | 6 |
| 2 | Θεωρητικό Υπόβαθρο | 9 |
| 2.1 | Το φαινόμενο του sloshing | 9 |
| 2.1.1 | Ορισμός | 9 |
| 2.1.2 | Περιοχές Ενδιαφέροντος | 9 |
| 2.1.3 | Εξάρτηση από τις Φυσικές Παραμέτρους | 12 |
| 2.2 | Παραδοχές | 14 |
| 2.3 | Μοντέλο Ροής | 15 |
| 2.3.1 | Εξισώσεις Laplace, Bernoulli | 15 |
| 2.3.2 | Οριακές Συνθήκες Σώματος και Ελεύθερης Επιφάνειας, Διατήρηση Όγκου | 15 |
| 2.3.3 | Αρχικές και Περιοδικές Συνθήκες | 16 |
| 2.4 | Γραμμικές Φυσικές Συχνότητες | 17 |
| 2.4.1 | Γενικά | 17 |
| 2.4.2 | Επίλυση του Γενικού Προβλήματος | 17 |
| 2.4.3 | Ειδικές Λύσεις για Ορθογωνικές Δεξαμενές | 18 |
| 3 | Μοντελοποίηση | 25 |
| 3.1 | Η Τροπική (Modal) Ανάλυση | 25 |
| 3.1.1 | Γραμμική Θεώρηση | 25 |
| 3.1.2 | Μη Γραμμική Θεώρηση | 27 |
| 3.2 | Το προσαρμοστικό (adaptive) μοντέλο | 30 |
| 3.2.1 | Το n-διάστατο σύστημα | 31 |
| 3.2.2 | Το διδιάστατο μοντέλο | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Μελέτη Απλοποιημένου Μοντέλου | 37 |
| 4.1 | Εξαγωγή του Μοντέλου | 37 |
| 4.1.1 | Το Μονοδιάστατο Μοντέλο | 37 |
| 4.1.2 | Το Αυτόνομο Μοντέλο | 38 |
| 4.1.3 | Επιλογή Φυσικών Παραμέτρων | 38 |
| 4.2 | Δυναμική Συμπεριφορά Συστήματος | 38 |
| 4.2.1 | Εξάρτηση από τη Συχνότητα και το Πλάτος Διέγερσης . | 38 |
| 4.2.2 | Εξάρτηση από τον Συντελεστή Απόσβεσης | 39 |
| 4.3 | Συμπεράσματα | 44 |
| 5 | Μελέτη Διδιάστατου Μοντέλου | 47 |
| 5.1 | Εξαγωγή του Μοντέλου | 47 |
| 5.1.1 | Το Αυτόνομο Μοντέλο | 47 |
| 5.1.2 | Επιλογή Φυσικών Παραμέτρων | 49 |
| 5.2 | Δυναμική Συμπεριφορά του Συστήματος | 50 |
| 5.2.1 | Γεωμετρικός λόγος 0.4 | 50 |
| 5.2.2 | Γεωμετρικός λόγος 0.3 | 55 |
| 5.2.3 | Γεωμετρικός λόγος 0.6 | 55 |
| 5.3 | Συμπεράσματα | 61 |
| 6 | Απεικόνιση Ελευθέρων Επιφανειών | 67 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 67 |
| 6.2 | Σύγκριση απλοποιημένου μοντέλου με το μοντέλο τρίτης τάξεως | 68 |
| 6.3 | Σύγκριση για Διάφορους Λόγους Βάθους | 68 |
| 6.4 | Σύγκριση για τις Διάφορες Καταστάσεις σε Κάθε Λόγο Βάθους | 70 |
| 7 | Επίλογος | 79 |
| 7.1 | Συμπεράσματα | 79 |
| 7.2 | Αντικείμενα για Μελλοντική Μελέτη | 80 |

Κεφάλαιο 1

Κριτική ανασκόπηση εργασιών

1.1 Ιστορικό της Σχετικής Έρευνας

Το φαινόμενο του sloshing είναι ένα θέμα που απασχολεί τον άνθρωπο για πολλά χρόνια, τόσο λόγω του ενδιαφέροντος που παρουσιάζει από πλευράς δυναμικής, όσο και για της καταστροφικές συνέπειες που μπορεί να έχει σε μια κατασκευή. Δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις που κατασκευές κατέρρευσαν μερικώς ή και πλήρως λόγω των σχετικά απρόβλεπτων φορτίων που προκαλεί αυτό το φαινόμενο. Δεδομένου, μάλιστα, ότι κινούμενες δεξαμενές εμφανίζονται σε μια πληθώρα εφαρμογών, σε κάποιες από τις οποίες, όπως την αεροδιαστημική, ένα ατύχημα μπορεί να έχει επιπτώσεις τεράστιων χρηματικών ποσών αλλά και ανθρωπίνων ζωών, οι μηχανισμοί αυτοί ήταν φανερό ότι έπρεπε να μελετηθούν ώστε να αποτελούν μια ελέγξιμη, πλέον, παράμετρο.

Οι παραπάνω λόγοι οδήγησαν μια σειρά από ερευνητές να ασχοληθούν με τη μελέτη του sloshing και την προσπάθεια για μαθηματική μοντελοποίηση και κατανόηση του. Ήδη από τα τέλη του 19ου αιώνα είχαμε πολλές δημοσιεύσεις, όπως αυτές των Hough (1895), Honda & Matsushita (1913), Jeffries (1924), Sen (1927), Goldborough (1930), Westergaard (1933), Binnie (1941,1955), K.W. Smith (1947,1956), C. Smith (1948), Taylor (1950, 1954), Luskin & Lapin (1952), Moiseev (1952, 1953, 1954, 1956), Senda & Nakagawa (1954), Nakagawa (1955, 1956), Birkhoff (1956), Narimanov (1956, 1957), Okhosimsky (1956), Heinrich & Kaufman (1955, 1956), Sretanskii (1956, 1957), Housner (1957) Krein & Moiseev (1957), Shved (1959). Οι παραπάνω ερευνητές ασχολήθηκαν κατά βάση με την συμπεριφορά της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού σε μια δεξαμενή που υποβάλλεται σε περιοδική διέγερση.

Η πειραματική μελέτη των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται σε κατακόρυφα κινούμενες δεξαμενές ξεκίνησε ακόμη νωρίτερα. Ο πρώτος που ασχολήθηκε με αυτή την έρευνα ήταν ο Faraday (1831). Ακολούθησαν οι Math-

iessen (1868, 1870) και Lord Rayleigh (1833, 1867). Θεωρητική Μελέτη του ίδιου προβλήματος πραγματοποιήθηκε από τους Lewis (1950), Taylor (1950), Benjamin & Ursell (1954), Konstantinov et al. (1978), Nevolin (1985), Feng & Sethna (1989), Simoneli & Gollub (1989), Henderson & Miles (1990), Nagata (1991), Miles (1994), Perlin & Schultz (2000).

Για την περιγραφή και πρόβλεψη του sloshing με αριθμητικές μεθόδους έκαναν προσπάθειες οι Su Tsung-Chow (1992), Buechmann (1996), Tanizawa (1996), Chen et al. (1997), Pawell (1997), Moan & Berge (1997). Προσομοιώσεις δεξαμενών πλοίου συγκεκριμένα εμφανίζονται σε δημοσιεύσεις όπως Arai et al (1992), Arai, Cheng & Inoue (1992, 1993), ISCC Report (1997), Faltinsen & Rognebakke (2000), Wu, Ma & Taylor (1998). Με τη διδιάστατη ανάλυση ασχολήθηκαν οι Celebi & Akyildiz (2002), Sames, Marcouly & Schellin (2002), Aliabadi, Johnson & Abedi (2003), Fransen (2004). Οι Telste (1985), Chen et al. (1996), Takizawa & Kondo (1995), Chen et al. (1999), Pawell (1997), Turnbull et al. (2003), Wu et al (1998, 2001, 2007), Fradnsen (2003), Y. Kim et al (2001, 2007) χρησιμοποίησαν αριθμητικές μεθόδους για την πρόβλεψη των φαινομένων παραμετρικής αστάθειας, οι οποίες όμως δεν έδωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα για προβλέψεις σε παρατεταμένα χρονικά διαστήματα.

Η πρώτη εμφάνιση της ημιαναλυτικής τροπικής ανάλυσης έγινε σε μια δημοσίευση του Narimanov (1957) και βελτιώθηκε στη συνέχεια από τους Dodge, Kana & Abramson (1965), Narimanov Dokuchaev & Lukovsky (1977) και Lukovsky (1990).

Περεταίρω μελέτες πάνω στο θέμα με βάση τη θεωρία κυρίαρχου κυματισμού παρουσιάστηκαν από τους Lukovsky 1976, Miles (1976, 1984), Shemer (1990), Tsai, Yue & Yip (1990), Funakoshi & Inoue (1991). Η πρώτη θεωρητική μελέτη για μη γραμμικό sloshing πραγματοποιήθηκε μάλλον από τον Stolbetsov (1967), ο οποίος βασίστηκε στην θεωρία του Narimanov (1957). Το θέμα αυτό μελετήθηκε πάλι με βάση τα κύματα Faraday από τους Nevolin (1984), Feng & Sethna (1989), Simonelli & Gollub (1989), Henderson & Miles (1990), Nagata (1991), Miles (1994), Perlin & Schultz (2000). Τα ελεύθερα κύματα στη δεξαμενή χρησιμοποίησαν οι Bridges (1985, 1987), Bryant & Stiassnie (1994, 1995).

Η πρώτη εμφάνιση μιας πρώιμης μορφής της πολυτροπικής ανάλυσης έγινε στην εργασία των Lukovsky & Timokha (1995) και Limarchenko & Yasinsky (1997), ενώ χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια κι από τους Ikeda & Nakagawa (1997) για ανάλυση σχετικά με την απόσβεση του πλάτους ταλάντωσης. Τελικά οι Faltinsen & Timokha (2001, 2002) παρουσίασαν την τελική μορφή της προσαρμοστικής τροπικής μοντελοποίησης.

Εκτεταμένες μελέτες στο θέμα του παραμετρικού slohing πραγματοποιήθηκαν από τους Spandonidis & Spyrou (2010,2011). Η έρευνα αυτή βρίσκεται

ακόμη σε εξέλιξη και η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος της.

1.2 Τρόποι Ανάλυσης

1.2.1 Εισαγωγή

Οι δυο βασικές προσεγγίσεις στην μοντελοποίηση του sloshing είναι η αριθμητική και η ημιαναλυτική. Από αυτές η δεύτερη βασίζεται στην θεωρία της τροπικής (modal) ανάλυσης και αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Τα βασικά χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων αυτών αναλύονται παρακάτω.

1.2.2 Αριθμητική-Υπολογιστική Μέθοδος

Η εφεύρεση των υπολογιστών έδωσε το έναυσμα για την ανάπτυξη της επιστήμης της αριθμητικής ανάλυσης. Η δυνατότητα των μηχανημάτων αυτών να εκτελούν διαρκώς επαναλαμβανόμενες διαδικασίες σε σχετικά μικρά χρονικά διαστήματα έδωσε τη δυνατότητα ανάπτυξης μεθόδων για βαθμιαία προσέγγιση της λύσης ακόμη κι αρκετά σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων. Για αυτό το λόγο αυτές οι μέθοδοι προτιμήθηκαν και προτιμούνται συχνά, σε περιπτώσεις όπου η εύρεση λύσης με αναλυτικό τρόπο είναι πολύ δύσκολη και υπέρμετρα χρονοβόρα ή ακόμη και αδύνατη.

Η προσομοιώσεις υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD) είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του παραπάνω προβλήματος, καθώς οι εξισώσεις Navier-Stokes που διέπουν την κινητική και δυναμική κατάσταση των ρευστών παραμένουν, ακόμη και σήμερα, χωρίς αναλυτική λύση (Ibrahim, 2005). Οι διάφορες μέθοδοι CFD εκμεταλλεύονται διαφορετικές ιδιότητες των ρευστών και βασίζονται η καθεμία στις δικές τις αξιωματικές απλοποιητικές υποθέσεις ώστε να προσεγγίσουν την λύση του προβλήματος στο χώρο με την πάροδο του χρόνου. Οι υποθέσεις που αφορούν την κάθε μέθοδο αποτελούν, στην πραγματικότητα, παραδοχές, οι οποίες θα ίσχυαν σε μια ιδανική, μόνο, κατάσταση, αλλά παρόλα αυτά θεωρείται ότι δεν επηρεάζουν σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα. Αυτό εξηγεί και την ύπαρξη τόσο μεγάλης ποικιλίας προσεγγίσεων, καθώς οι παραδοχές μιας μεθόδου την καθιστούν ικανή να περιγράψει φαινόμενα συγκεκριμένου τύπου, όπου ο ρόλος των συγκεκριμένων παραμέτρων είναι περιορισμένος.

Από τις αριθμητικές μεθόδους κάποιες χρησιμοποιούν όντως τις εξισώσεις Navier-Stokes και άλλες βασίζονται στην θεωρητική του δυναμικού της ροής. Υπάρχουν, βέβαια, και υβριδικές μέθοδοι οι οποίες, αναλόγως την περίπτωση, συνδυάζουν στοιχεία κι από τις δυο προσεγγίσεις και λειτουργούν με βελτιστοποιημένο τρόπο σχετικά με το αντικείμενο μελέτης (Faltinsen & Timokha,

2009).

Το βασικό μειονέκτημα της αριθμητικής προσέγγισης για τα φαινόμενα sloshing είναι ότι είναι αδύνατον να ληφθούν υπόψη όλες οι παράμετροι του συστήματος καθώς τα υπολογιστικά συστήματα που διαθέτουμε δεν θα επαρκούσαν για να χειριστούν τόσο πολύπλοκες σχέσεις. Κατά συνέπεια, οι φυσικές ιδιότητες των οποίων η επίδραση είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη (πχ η υδροελαστικότητα του ρευστού) να παραλείπονται και σε κάποιο βαθμό το σύστημα να αντιμετωπίζεται ως 'ιδανικό'. Εξίσου σημαντικά προβλήματα εμφανίζονται σε περιπτώσεις που τα φαινόμενα, για κάποιους λόγους, παίρνουν μορφή έντονα μη-γραμμική. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η προβλέψεις είναι αξιόπιστες για μικρό χρονικό διάστημα, καθώς η ανακρίβεια της μεθόδου δημιουργεί συσσώρευση υπολογιστικών σφαλμάτων.

1.2.3 Ημιαναλυτική Μέθοδος Τροπικής (Modal) Ανάλυσης

Τα σφάλματα που προκύπτουν από τις αριθμητικές μεθόδους σε συνδυασμό με την ανάπτυξη ολοένα και ισχυροτερων μαθηματικών εργαλείων, οδήγησε τους ερευνητές στην προτίμηση των αναλυτικών μεθόδων για την μελέτη του φαινομένου. Η τροπική ανάλυση αποτελεί μια ημιαναλυτική προσέγγιση η οποία προϋποθέτει, σε κατάσταση ηρεμίας, η ελεύθερη επιφάνεια να είναι κάθετη στα τοιχώματα της δεξαμενής. Αυτό συνεπάγεται ότι η μέθοδος προσφέρεται για τη μελέτη κυρίως ορθογωνικών ή κυλινδρικών δεξαμενών. Το σύστημα αξόνων που χρησιμοποιείται είναι το σωματοπαγές ως προς την δεξαμενή και η αρχή των αξόνων τοποθετείται στην θέση ηρεμίας της ελεύθερης επιφάνειας (Faltinsen & Timokha, 2009).

Ο χρόνος υπολογισμού αυτής της μεθόδου είναι αρκετά μειωμένος, καθώς υπάρχει η δυνατότητα, μέσω απλοποιήσεων που επηρεάζουν αμελητέα τα αποτελέσματα, να μετατρέψουμε το σύστημα από απειροδιάστατο μερικών διαφορικών εξισώσεων σε πεπερασμένων διαστάσεων και συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η καινοτομία της μεθόδου αυτής είναι, ουσιαστικά, ανάλυση της κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας στους φυσικούς κυματισμούς της με τη βοήθεια γενικευμένου μετασχηματισμού Fourier. Η θεωρία στην οποία βασίζεται η προσέγγιση αυτή είναι η θεωρία δυναμικού και η ανάλυση μας δίνει τελικά τις παρακάτω εξισώσεις για την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και το δυναμικό ταχύτητας:

$$\left. \begin{aligned} z &= f(x, y, z) = \sum \beta_i(t) s_i(x, y) \\ \phi(x, y, z, t) &= \sum R_i(t) d_i(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Οι μεταβλητές $s_i(x, y)$, $d_i(x, y, z)$ επιλέγεται, όπως προειπώθηκε, να είναι

οι φυσικοί κυματισμοί του συστήματος. Η μέθοδος αυτή βασίστηκε στην θεώρηση του κυρίαρχου κυματισμού και την ιεράρχηση των υπολοίπων φυσικών κυματισμών και, κατά συνέπεια, των γενικευμένων μεταβλητών $\beta_i(t), R_i(t)$. Η ταξινόμηση αυτή οδηγεί σε μια σειρά από ασυμπτωτικές θεωρήσεις για την ελεύθερη επιφάνεια, στις οποίες βασίζονται, στη συνέχεια, οι εξισώσεις του συστήματος (Faltinsen 1974). Η ιεράρχηση, όμως, αυτή, αδυνατεί να περιγράψει ικανοποιητικά περιπτώσεις όπου ο λόγος βάθους υγρού προς μήκος δεξαμενής είναι μικρότερος ή ίσος με την κρίσιμη τιμή του ή το πλάτος διέγερσης είναι μεγάλο. Για αυτό το λόγο, όπως θα δούμε και παρακάτω, η ταξινόμηση αυτή αντικαταστάθηκε με πολυωνυμική, η οποία ξεπερνά τις παραπάνω δυσκολίες.

Προσέγγιση με Θεώρηση Κυρίαρχου Κυματισμού (Single Dominant Method) Η θεώρηση αυτή προτάθηκε πρώτη φορά από τον Narimanov (1957) και βασιζόταν σε μια τεχνική διαταραχών. Από αυτή την προσέγγιση προέκυπτε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις γενικευμένες μεταβλητές. Σε συνδυασμό με την μέθοδο των προβολών (Hamilton-Ostrogradsky Projective Method) εξήχθησαν μοντέλα περιορισμένων (1-3) βαθμών ελευθερίας κίνησης και προέκυψαν σχέσεις για τον υπολογισμό των μέσων τιμών των γενικευμένων συντεταγμένων β_i , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\infty} ([\beta]i]_j^1(\tau) \sin(j\sigma\tau) + [\beta_i]_j^2(\tau) \cos(j\sigma\tau)) \quad (1.2)$$

όπου με σ συμβολίζεται η συχνότητα διέγερσης ενώ με τ η αργή διακύμανση του χρόνου (t). Οι μέσες τιμές στην περίπτωση ορθογωνικών δεξαμενών έχουν τη μορφή των εξισώσεων Duffing ενώ στην περίπτωση κατακόρυφων κυλινδρικών δεξαμενών αποτελούν τη λύση ενός συστήματος τεσσάρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (Lukovsky 1976, Miles (1976, 1984a; b).

Ο Stolbetsov (1967), μελετώντας φαινόμενα sloshing σε σχεδόν τετράγωνα δεξαμενές διεγείρομενες υπό οριζόντια διέγερση κοντά στην πρώτη φυσική συχνότητα, χρησιμοποίησε τη θεωρία διαταραχών ώστε να παράξει δυο τύπους λύσεων σταθερής κατάστασης. Ο πρώτος τύπος αφορά τα επίπεδα κύματα ενώ ο δεύτερος τα περιστροφικά κύματα για την περίπτωση ορθογωνικής γεωμετρίας. Δυστυχώς η εργασία του, όπως διαπιστώθηκε αρκετά μεταγενέστερα, περιείχε σημαντικά αριθμητικά λάθη. Από το 1990 και μετά έγιναν αρκετές θεωρητικές μελέτες σχετικά με τους μη γραμμικούς κυματισμούς σε περίπτωση βαθύς και ρηχού νερού, οι οποίες βασίζονταν στους κυματισμούς Faraday ή στα ελεύθερα κύματα.

Οι παραπάνω μελέτες κατέληξαν στην ανάλυση και ταξινόμηση των κυματισμών σε τρεις διακριτές κατηγορίες: τα επίπεδα στάσιμα κύματα Stokes, το

στατικό κύμα που δημιουργείται μεταξύ των απέναντι γωνιών της δεξαμενης (διαγώνιο κύμα) και τα περιστρεφόμενα κύματα (Bryant & Stiassnie 1994).

Αποδείχθηκε ότι τα κύματα που υπάγονται στην πρώτη κατηγορία και είναι διδιάστατα εμφανίζουν ασταθή συμπεριφορά σε τρισδιάστατες διεγέρσεις, ενώ τα τρισδιάστατα κύματα στην ίδια κατάσταση παραμένουν ευσταθή.

Η βασική αδυναμία της παραπάνω μεθόδου οφείλεται στην αβεβαιότητα που υπάρχει για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της σε περίπτωση μη περιοδικής διέγερσης. Σε πιο σύνθετες περιπτώσεις διεγέρσεων συνήθως προτιμάται, για αυτό το λόγο, η αριθμητική προσέγγιση ή η χρήση απλοποιημένων μηχανικών μοντέλων.

Πολυτροπική-Προσαρμοστική Μέθοδος (Multimodal-Adaptive Method) Η ευστάθεια του συστήματος κατά τη μετάβαση σε μικρό βάθος, όπου διεγείρονται και υψηλότερες ιδιομορφές ως συνέπεια του μη-γραμμικού συντονισμού, μελετήθηκε σε πρώτη φάση με χρήση της θεωρίας του κυρίαρχου κυματισμού (Faltinsen & Timokha, 2001, 2002). Οι περιορισμοί, παρόλα αυτά, της παραπάνω μεθόδου, οδήγησε στην ανάπτυξη ενός νέου συστήματος, με τη βοήθεια διάφορων ασυμπτωτικών παραδοχών για τις γενικευμένες συντεταγμένες. Η νέα μέθοδος, που είναι στη βάση της πολυωνυμική, συμπεριλαμβάνει, στη διδιάστατη περίπτωση, δυναμικές αλλαγές στους κυρίαρχους κυματισμούς. Διαθέτει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για αναλυτικές όσο και για αριθμητικές μελέτες (Limarchenko & Yasinsky (1997), Lukovsky & Timokha (1995)).

Ένας σημαντικός περιορισμός στη χρήση της μεθόδου είναι ότι δεν μπορεί να λάβει υπόψιν της πιθανή διαφυγή του υγρού από τις άκρες των τοιχωμάτων. Επιπροσθέτως, η μικρή ηλικία της μεθόδου συνεπάγεται ότι δεν έχουν μελετηθεί ακόμη εκτενώς η εφαρμογές της.

1.2.4 Παραμετρικό Sloshing

Μια από τις ιδιαιτερότητες του sloshing είναι ότι, κάτω από κάποιες συνθήκες, μπορεί να εμφανίσει παραμετρική αστάθεια. Η παραμετρική αστάθεια είναι μια υποπερίπτωση αστάθειας που προκαλείται από ένα χρονικά μεταβαλλόμενο στοιχείο στους συντελεστές που ορίζουν την κίνηση του συστήματος. Έτσι μπορεί να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο το μέτρο επαναφοράς, απόσβεσης ή αδρανείας και, κατά συνέπεια, η αντίστοιχη δύναμη να μην εξαρτάται αποκλειστικά από την κινητική κατάσταση του συστήματος.

Παραμετρική αστάθεια στο sloshing παρατηρείται κατά την κατακόρυφη διέγερση. Σε αυτή την περίπτωση, οι κατακόρυφες επιταχύνσεις της δεξαμενής προκαλούν μια φαινομενικά μεταβαλλόμενη βαρυτική επιτάχυνση. Για να

προκύψει παραμετρική αστάθεια θα πρέπει η δεξαμενή να μην είναι πλήρως γεμάτη, ούτως ώστε να υπάρχει περιθώριο για σημαντικά πλάτη κίνησης του υγρού (Faraday, 1831).

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Το φαινόμενο του sloshing

2.1.1 Ορισμός

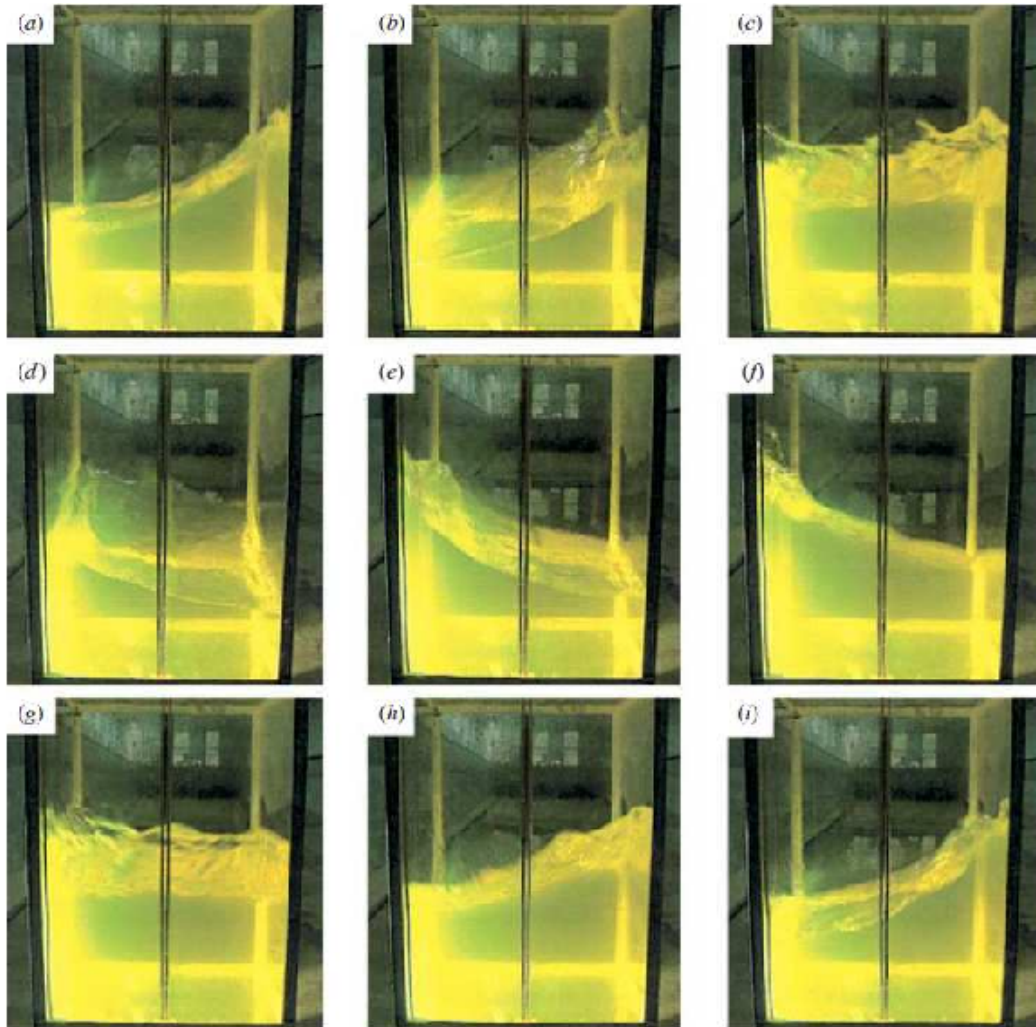
Ως sloshing ορίζεται οποιαδήποτε κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας ενός υγρού το οποίο περιέχεται σε δεξαμενή. Για να υπάρχει τέτοια κίνηση θα πρέπει η δεξαμενή να διεγείρεται από κάποια διαταραχή και, ταυτοχρόνως, να μην είναι πλήρως γεμάτη ουτωςώστε να επιτρέπεται η κίνηση του ρευστού. Η κίνηση της δεξαμενής μπορεί να είναι μεταφορική ή περιστροφική ή και συνδυασμός των δύο, ενώ η περιοδικότητά της δεν είναι αναγκαία (Ibrahim, 2005).

Το δυναμικό πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων της δεξαμενής μπορεί να γίνει ιδιαίτερος περίπλοκος, και οι συνέπειές του αρκετά επικίνδυνες. Για αυτό το λόγο η μελέτη αυτού του φαινομένου έχει μεγάλο ενδιαφέρον. Για να επιτύχουμε τη μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του δυναμικού αυτού συστήματος κάνουμε χρήση απλοποιημένων μοντέλων όπως το μηχανικό ανάλογο μάζας-ελατηρίου.

Σε περίπτωση επαφής της ελεύθερης επιφάνειας με την οροφή της δεξαμενής είναι πιθανόν να δημιουργηθούν προβλήματα μη σχετιζόμενα με την δυναμική του συστήματος, τα οποία αφορούν κυρίως την επαγόμενη πρόσμιξη αέρα στο υγρό της δεξαμενής. Οι επιπτώσεις αυτού είναι ποικίλες και εξαρτώνται από το είδος του φορτίου, αλλά έχουν να κάνουν σχεδόν πάντα με καταστροφή του, είτε αυτή είναι κατά τα άλλα ακίνδυνη για το όχημα (πχ γάλα) είτε επικίνδυνη (έκρηξη υγροποιημένου φυσικού αερίου σε πλοίο μεταφοράς του).

2.1.2 Περιοχές Ενδιαφέροντος

Όπως έγινε εμφανές από την παραπάνω παράγραφο, το πρόβλημα του sloshing είναι ορισμένο αρκετά γενικώς ώστε να αφορά ποικίλους τεχνολογικούς τομείς.



Σχήμα 2.1: Στιγμιότυπα από sloshing σε ορθογωνική δεξαμενή σε πειραματική διάταξη (Πηγή: “Sloshing”, Faltinsen & Timokha, 2009)



Σχήμα 2.2: Σε πλοία μεταφοράς υγροποιημένου φυσικού αερίου εμφανίζονται φαινόμενα sloshing(Πηγή: timriley.com)

Οπουδήποτε υπάρχει δεξαμενή υγρών που μπορεί να είναι μερικώς γεμάτη, ειδικά στην περίπτωση όπου αυτή βρίσκεται σε κάποιο κινούμενο όχημα, οφείλουμε να λάβουμε υπόψη μας τους κινδύνους του sloshing.

Στην Ναυπηγική οι δεξαμενές καυσίμων και νερού αλλά κυρίως οι δεξαμενές φορτίου των δεξαμενοπλοίων και των πλοίων μεταφοράς υγροποιημένου φυσικού αερίου είναι πιθανόν να εμφανίσουν sloshing. Έχουν σημειωθεί πολλάκις σημαντικές ζημίες, έως και κατάρρευση, στις εγκάρσιες φρακτές των δεξαμενών αυτών λόγω βίαιης κίνησης του περιέχοντος υγρού. Ειδικά στα πλοία μεταφοράς υγροποιημένου φυσικού αερίου η επικινδυνότητα του φορτίου μεγεθύνει τη σημασία των αρνητικών συνεπειών.

Στην Αεροναυπηγική η δυναμική ευστάθεια του σκάφους αποτελεί μάλλον το βασικότερο παράγοντα σχεδίασης. Παρότι τα φαινόμενα sloshing επηρεάζουν δευτερευόντως, συντονισμοί που μπορούν να δημιουργηθούν από απότομες επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις επηρεάζουν σημαντικά τη δυναμική αστάθεια.

Στη Διαστημική η σημαντικότερη επίδραση του sloshing εμφανίζεται σε περιπτώσεις κατακόρυφης διέγερσης, όπου παρατηρείται έντονη μη-γραμμική, έως και χαοτική, συμπεριφορά. Βεβαίως η μελέτη του προβλήματος φανερώνει



Σχήμα 2.3: Τόσο στην αεροναυπηγική όσο και στην αεροδιαστημική εμφανίζονται φαινόμενα sloshing (Πηγή: en.wikipedia.org)

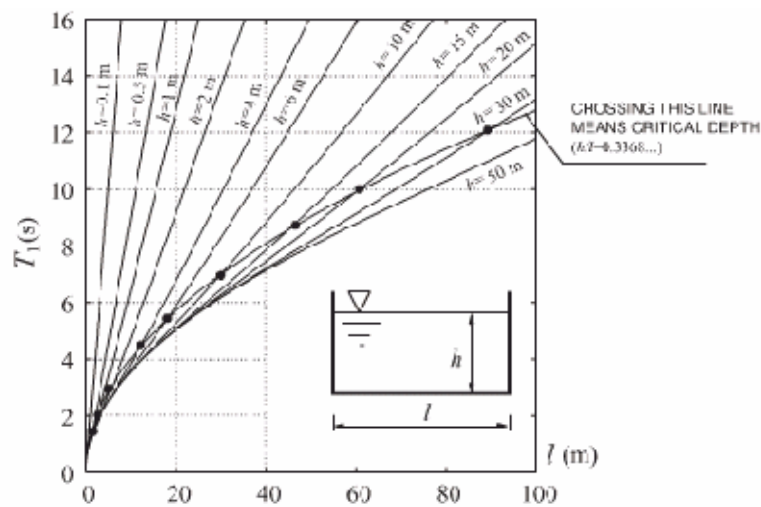
πολλές διαφοροποιήσεις στις συνθήκες, οι οποίες οφείλονται τόσο στους διαφορετικούς τρόπους κίνησης αυτών των σκαφών όσο και σε συνθήκες μικροβαρύτητας.

Στις Επίγειες Μεταφορές προβλήματα εμφανίζονται κυρίως στις απότομες επιταχύνσεις και επιβραδύνσεις, συμπεριλαμβανομένων των ξαφνικών ελιγμών. Σε αυτές τις περιπτώσεις συχνά δημιουργούνται στην επιφάνεια του ρευστού περιστροφικά κύματα. Όταν τα οχήματα που φέρουν τις δεξαμενές είναι σταθερής τροχιάς, οι αποσβέσεις τους είναι πολύ μικρές και οι κίνδυνοι πολλαπλασιάζονται.

2.1.3 Εξάρτηση από τις Φυσικές Παραμέτρους

Οι φυσικές συχνότητες και οι αντίστοιχοι φυσικοί κυματισμοί (modes) ενός υγρού μέσα σε δεξαμενή καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από τις γεωμετρικές διαστάσεις της δεξαμενής και ειδικότερα από το λόγο του βάρους του υγρού προς το μήκος της. Από τη στιγμή που οι πιο μεγάλες αποκρίσεις παρατηρούνται σε περιοχές συντονισμού και οι μεγαλύτερες εξ αυτών κοντά στις μικρότερες (κυρίαρχες) συχνότητες, το ερευνητικό ενδιαφέρον εντοπίζεται κυρίως στην μελέτη της περιοχής των πρώτων φυσικών συχνοτήτων.

Η παραμορφωσιμότητα των τοιχωμάτων της δεξαμενής επηρεάζει σημαντικά το φαινόμενο. Παραμορφώσιμα τοιχώματα ταλαντώνονται συγχρονισμένα με το εφαπτόμενο τμήμα του κύματος και το σύστημα αυτό συμπεριφέρεται ως συνεχές μέσο απείρων βαθμών ελευθερίας. Από τις ιδιομορφές που προκύπτουν έχουν σημασία κυρίως οι λίγες πρώτες, ενώ η επίδρασή τους περιορίζεται στην ωστική



Σχήμα 2.4: Η εξάρτηση της πρώτης φυσικής περιόδου ως συνάρτηση του μήκους της δεξαμενής, για διάφορες τιμές του βάθους. Στο διάγραμμα φαίνεται και η καμπύλη κρίσιμου βάθους. (Πηγή: “Sloshing”, Faltinsen & Timokha, 2009)

συνιστώσα της απόκρισης.

Κατά τη δημιουργία κυμάτων σε μη-περιορισμένο χώρο, μια βασική πηγή απόσβεσης είναι η διάδοσή τους. Κατά συνέπεια, ακόμη και απουσία συνεκτικότητας του υγρού (ιδανικό ρευστό) η ταλάντωση είναι αποσβενόμενη.

Στην περίπτωση δεξαμενών δεν υπάρχει προφανώς φαινόμενο διάδοσης κυμάτων. Στη μη-γραμμική περίπτωση του προβλήματος, η αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφόρων φυσικών κυματισμών λειτουργεί περιοριστικά αποσβαίνοντας, τελικά, το σύστημα. Στην γραμμική θεώρηση όμως, δεν υπάρχει καμία μορφή απόσβεσης, με αποτέλεσμα σε κατάσταση συντονισμού (δηλαδή για επαρκώς μεγάλη διέγερση κοντά στην φυσική συχνότητα), να δημιουργείται απόκριση σταθερής κατάστασης με επάπειρον αυξανόμενο πλάτος. Το στάσιμο κύμα που κυριαρχεί σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία έχει μήκος διπλάσιο από αυτό της δεξαμενής.

Η έννοια του κρίσιμου βάθους

Όταν το βάθος του υγρού είναι μεγάλο, δηλαδή μαθηματικά $h/l \geq 1$, η επίδραση μιας αλλαγής στη γεωμετρία στη φυσική συχνότητα του υγρού είναι περιορισμένη. Παρόλα αυτά δεν ισχύει το ίδιο για περιπτώσεις μικρότερου βάθους.

Το κρίσιμο βάθος του υγρού ορίζεται όταν ο παραπάνω λόγος παίρνει περίπου την τιμή $h/l = 0.3$. Σε εκείνη την περιοχή οι αλλαγές στη συμπεριφορά

που συμβαίνουν κοντά στην πρώτη φυσική συχνότητα είναι εντυπωσιακές. Η περιοχή βάθους κάτω από αυτό το όριο ορίζεται ως ρηχό υγρό ή πεπερασμένο βάθος, η ενδιάμεση περιοχή ως μεσαίο βάθος (Faltinsen & Timokha, 2009).

2.2 Παραδοχές

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, για να μελετήσουμε το περίπλοκο φαινόμενο του sloshing οφείλουμε να κάνουμε κάποιες απλοποιητικές παραδοχές. Αυτές εξασφαλίζουν ένα πιο περιορισμένο εύρος συμπεριφορών, στο οποίο περιλαμβάνονται κι αυτές που θέλουμε να μελετήσουμε. Είναι σαφές ότι επιλέγονται παραδοχές οι οποίες να μειώνουν τον όγκο των υπολογισμών χωρίς να αλλοιώνουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Οι παραδοχές στην παρούσα εργασία ήταν οι παρακάτω:

Παραδοχές για τη Δεξαμενή

Ανελαστική. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι η κινητική κατάσταση των τοιχωμάτων ταυτίζεται με αυτή της δεξαμενής ως σύνολο και κατά συνέπεια εξαρτάται μόνο από την εξωτερική διέγερση.

Στεγανή και Επαρκώς ψηλή. Αυτό σημαίνει ότι αποκλείεται όχι μόνο η διαρροή από την κορυφή αλλά και η οποιαδήποτε αλληλεπίδραση μεταξύ υγρού και οροφής, καθώς το ύψος της δεξαμενής είναι αρκετά μεγαλύτερο από το βάθος του υγρού. Έτσι εξασφαλίζουμε την διατήρηση του όγκου του υγρού στη δεξαμενή και αποκλείουμε φαινόμενα spray λόγω πρόσκρουσης στην οροφή.

Λεία. Η εξάλειψη τριβών από τα τοιχώματα της δεξαμενής μας δίνει τη δυνατότητα να περιορίσουμε τις αποσβέσεις στη συνεκτικότητα του υγρού και στην αλληλεπίδραση των μη-γραμμικών κυματισμών και να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία δυναμικού για να εξάγουμε το μαθηματικό μοντέλο.

Παραδοχές για το Υγρό

Αρχικά μη Στροβιλώδες Αυτό συνεπάγεται ότι είναι δυνατή η χρήση της θεωρίας δυναμικού για την εξαγωγή του μοντέλου.

Ασυμπίεστο και Ιδανικό Αυτή η θεώρηση καθιστά τα αποτελέσματα λιγότερο ακριβή, αλλά η εισαγωγή απόσβεσης μετά την τελική εξαγωγή του μοντέλου είναι εύκολη και δίνει ικανοποιητικά τελικά αποτελέσματα.

2.3 Μοντέλο Ροής

2.3.1 Εξισώσεις Laplace, Bernoulli

Η εξαγωγή των εξισώσεων ξεκινά στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων για λόγους απλότητας και στη συνέχεια μεταφέρεται στο μη αδρανειακό, που είναι αυτό που μας ενδιαφέρει, η αρχή των αξόνων του οποίου είναι σταθερή ως προς το κέντρο της δεξαμενής και άρα κινούμενη μαζί με αυτήν. Το μη γραμμικό μοντέλο που προκύπτει μας δίνει με την βοήθεια της αρχής ελαχίστου δράσης (με την οποία χειριζόμαστε τις κινητικές και δυναμικές αρχικές συνθήκες) μετατρέπεται στο τελικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα μελετήσουμε.

Για το αδρανειακό σύστημα, η παρακάτω εξίσωση εκφράζει ότι το δυναμικό ταχύτητας για ασυμπίεστο υγρό ικανοποιεί την τρισδιάστατη Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1)$$

ενώ η εξίσωση Bernoulli για την πίεση είναι:

$$p + \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + U_g \right] = C(t) \quad (2.2)$$

Για το μη αδρανειακό σύστημα, θεωρούμε ότι η δεξαμενή μας είναι κινούμενη και περιστρεφόμενη με μεταβολές στην ταχύτητα. Ο όγκος του υγρού $Q(t)$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και ορίζεται από τα βρεχόμενα τοιχώματα της δεξαμενής $S(t)$ και την ελεύθερη επιφάνεια $\Sigma(t)$.

Στο νέο αυτό σύστημα οι εξισώσεις Laplace και Bernoulli παίρνουν τη μορφή:

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \text{ στο } Q(t) \quad (2.3)$$

$$p - p_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla \Phi (\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + U_g \right] \quad (2.4)$$

2.3.2 Οριακές Συνθήκες Σώματος και Ελεύθερης Επιφάνειας, Διατήρηση Όγκου

Από τις παραδοχές για τη δεξαμενή θεωρούμε ότι δεν πραγματοποιείται υπερχειλίση υγρού. Κατά συνέπεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \cdot [\vec{r} \times \vec{n}] \quad (2.5)$$

Η παραπάνω συνθήκη ισχύει στην $S(t)$.

Ταυτόχρονα θα πρέπει η πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού από το υπερκείμενο αέριο θα πρέπει να ισούται με την πίεση του ίδιου του ρευστού στην ελεύθερη επιφάνεια, ούτως ώστε να επιτυγχάνεται ισορροπία. Η δυναμική αυτή συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας γράφεται:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla \Phi * (\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + U_g = 0 \quad (2.6)$$

Η παραπάνω συνθήκη ισχύει στην $\Sigma(t)$.

Τέλος, επιθυμούμε το υγρό να παραμένει σε ένα σώμα και να μην παρουσιάζεται αποκοπή σωματιδίων από την ελεύθερη επιφάνεια στο εσωτερικό του υπερκείμενου αερίου. Η παραπάνω κινηματική συνθήκη εκφράζεται, για κάθε σημείο της κινούμενης ελεύθερης επιφάνειας του υγρού, $Z(T)$, ως εξής:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{u}_0 * \vec{n} + \vec{\omega} * [\vec{r} \times \vec{n}] - \frac{\frac{\partial Z}{\partial t}}{|\nabla Z|} \quad (2.7)$$

Συμπλήρωμα της προηγούμενης συνθήκης είναι ότι η μάζα, και κατά συνέπεια ο όγκος (αφού θεωρούμε το υγρό ασυμπίεστο) του υγρού πρέπει να παραμένουν σταθερά. Κατά συνέπεια:

$$M_l = \int_{Q(t)} \rho dQ = \rho Vol = const \quad (2.8)$$

2.3.3 Αρχικές και Περιοδικές Συνθήκες

Το παραπάνω σύστημα ή, ακριβέστερα, ένα μέρος του, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, είναι κινούμενο. Αυτό συνεπάγεται ότι, για την λύση των εξισώσεων που το διέπουν, θα πρέπει να ορίσουμε αρχικές συνθήκες ή, στην περίπτωση περιοδικής διέγερσης, περιοδικές συνθήκες.

Οι αρχικές συνθήκες εκφράζονται ως:

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, t_0) &= Z_0(x, y, z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma(t_0)} &= V(x, y, z) \Big|_{\Sigma(t_0)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Αντιστοίχως, οι περιοδικές συνθήκες είναι:

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, t + T) &= Z(x, y, z, t) \\ \nabla \Phi(x, y, z, t + T) &= \nabla \Phi(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου T είναι η περίοδος διέγερσης, εκφράζοντας έτσι την περιοδικότητα της απόκρισης.

2.4 Γραμμικές Φυσικές Συχνότητες

2.4.1 Γενικά

Το μοντέλο ιδανικού ρευστού με τις παραδοχές που αναλύθηκαν παραπάνω οδηγεί σε ένα κλασικό πρόβλημα ιδιοτιμών, θεωρώντας ότι ο κυματισμός είναι επαρκώς μικρού πλάτους και υποθέτοντας ότι η λύση είναι αρμονική. Η επίλυση του προβλήματος περιλαμβάνει την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών του κυματισμού, οι οποίες στην περίπτωση κατακόρυφων κυλινδρικών και ορθογωνικών δεξαμενών μπορεί να γίνει αναλυτικά με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών. Οι κυματισμοί που προκύπτουν από τις διάφορες ιδιομορφές πληρούν μεταξύ τους τη συνθήκη ορθογωνιότητας.

2.4.2 Επίλυση του Γενικού Προβλήματος

Το μοντέλο που προκύπτει από τα προηγούμενα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &\equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \\ \zeta(x, y, t) &= -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \frac{\partial\zeta}{\partial t} \\ \int_{\Sigma_0} \zeta dx dy &= 0\end{aligned}\tag{2.11}$$

όπου λόγω περιοδικότητας των λύσεων αντικαθιστούμε:

$$\begin{aligned}\zeta(x, y, t) &= f(x, y)e^{i\sigma t} \\ \Phi(x, y, z, t) &= \frac{ig}{\sigma}\phi(x, y, z)e^{i\sigma t}\end{aligned}\tag{2.12}$$

και με την αντικατάσταση προκύπτει το, ανεξάρτητο του χρόνου, σύστημα:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= 0, Q_0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0, S_0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= \kappa\phi, \Sigma_0 (\kappa = \frac{\sigma^2}{g}) \\ \int_{\Sigma_0} \phi dx dy &= 0\end{aligned}\tag{2.13}$$

Η τελευταία εξίσωση μας εξασφαλίζει ότι για $\kappa=0$ η προκύπτουσα ιδιομορφή είναι υποχρεωτικά η αδιατάρακτη επιφάνεια του υγρού. Για τα υπόλοιπα κ και που αφορούν τις επόμενες ιδιομορφές του συστήματος, αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n \leq \dots, \kappa_n \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Η μη καθαρή ανισότητα σημαίνει ότι είναι πιθανόν σε μια ιδιοσυχνότητα να αντιστοιχούν πάνω από μια ιδιομορφές. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται εκφυλισμός και παρατηρείται, για παράδειγμα, σε ορθογωνικές δεξαμενές, όπου σε κάποιες περιπτώσεις μια ιδιοσυχνότητα διεγείρει ιδιομορφές και στις δυο οριζόντιες διευθύνσεις. Οι ιδιοσυναρτήσεις του παραπάνω συστήματος αποτελούν τους γραμμικούς φυσικούς κυματισμούς του (linear natural sloshing modes) ενώ οι φυσικές περίοδοι και συχνότητες του καθενός δίνονται, αντιστοίχως, από τις σχέσεις:

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{g\kappa_n}} \quad (2.15)$$

$$\sigma_n = \sqrt{g\kappa_n}$$

ενώ τα στάσιμα κύματα που δημιουργούνται στην ελεύθερη επιφάνεια δίδονται από τη σχέση:

$$f_n(x, y) = \phi_n(x, y, 0) = \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial z}(x, y, 0) \quad (2.16)$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη διατήρησης του όγκου μπορεί να περιγραφεί ως γραμμική συνισταμένη των στάσιμων αυτών κυμάτων. Κατά συνέπεια, τα κύματα αυτά αποτελούν μια βάση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Ως μέλη της βάσης, θα πρέπει να ικανοποιούν μεταξύ τους τη συνθήκη της ορθογωνιότητας και κατά συνέπεια:

$$\int_{\Sigma_0} f_i f_j dx dy = \int_{\Sigma_0} \phi_i(x, y, 0) \phi_j(x, y, 0) dx dy = 0, i \neq j \quad (2.17)$$

2.4.3 Ειδικές Λύσεις για Ορθογωνικές Δεξαμενές

Στις δεξαμενές αυτές το μοντέλο επιδέχεται τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών και λύνεται, κατά συνέπεια, με αναλυτικό τρόπο. Θα δούμε ποιες είναι οι ακριβείς λύσεις για διδιάστατες και τρισδιάστατες δεξαμενές (Faltinsen & Timokha, 2009).

Διδιάστατες Ορθογωνικές Δεξαμενές

Το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, Q_0 \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, y = \pm \frac{1}{2}l, -h \leq z \leq 0 \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, z = -h, |y| \leq \frac{1}{2}l \\
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(y, 0) dx dy &= 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών για τις μεταβλητές x, z δίνει εξίσωση της μορφής Laplace, της οποίας η λύση τελικά είναι:

$$\begin{aligned}
\kappa_i &= \frac{\pi i}{l} \tanh \left(\frac{\pi i}{l} h \right) \\
\phi_i(y, z) &= \cos \left(\frac{\pi i}{l} \left(y + \frac{1}{2}l \right) \right) \times \frac{\cosh \pi \frac{z+h}{l}}{\cosh \frac{\pi i h}{l}} \\
f_i(y) &= \phi_i(y, 0) = \cos \left(\pi i \frac{y + \frac{1}{2}l}{l} \right)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Για τις ιδιοσυναρτήσεις f_i ισχύει:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_i f_j dy &= \frac{1}{2} l \delta_{ij} \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

που είναι η συνθήκη της ορθογωνιότητας και, κατά συνέπεια, οι f_i αποτελούν ορθογώνια βάση στο οριζόντιο επίπεδο. Στην περίπτωση διδιάστατης δεξαμενής δεν παρατηρείται ο εκφυλισμός που αναφέρθηκε στη γενική λύση. Οι φυσικές συχνότητες και περίοδοι, υπολογίζονται, λοιπόν, από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= \sqrt{g \frac{\pi i}{l} \tanh \frac{\pi i}{l} h} \\
T_i &= \frac{2\pi l}{\sqrt{g \pi i \tanh \frac{\pi i h}{l}}}, i \in \mathbb{N}^*
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Εξάρτηση από το λόγο h/l Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η πρώτη φυσική συχνότητα της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού εξαρτάται από τον λόγο h/l (εικόνα 2.4). Η σχέση 2.21 μας δίνει μια μαθηματική εξήγηση για την παραπάνω εξάρτηση. Παρατηρούμε ότι στο όρισμα της υπερβολικής εφαπτομένης περιλαμβάνεται ο συντελεστής h/l , ο οποίος, αναλόγως την τιμή

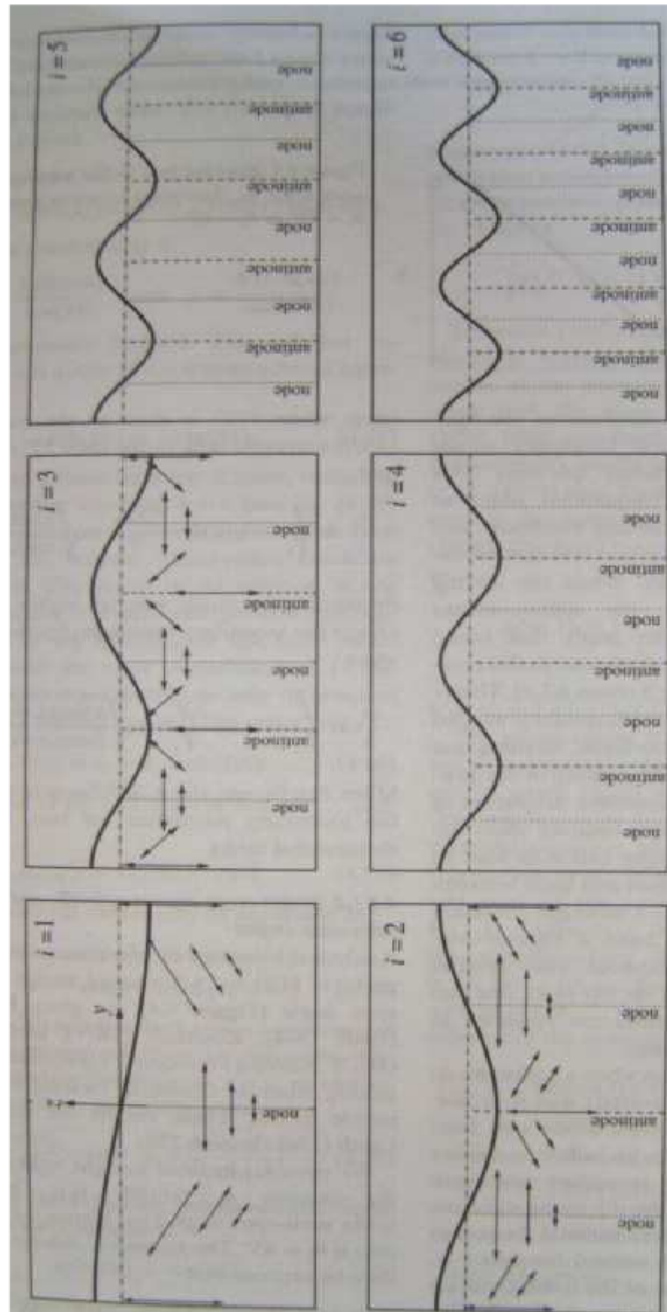
του, μπορεί να αλλάξει σημαντικά τις τιμές αυτού του τριγωνομετρικού αριθμού. Αναλόγως με τις τιμές του λόγου έχουμε διάφορες περιπτώσεις, για τις οποίες τα όρια λαμβάνονται προσεγγιστικά-εμπειρικά και είναι, κατά συνέπεια, σε κάποιο βαθμό αυθαίρετα. Η κατηγοριοποίηση φαίνεται παρακάτω:

- Μικρό βάθος ($h/l \leq 0.05 - 0.1$), όπου λόγω της πολύ μικρής τιμής του ορίσματος θεωρούμε ότι η τιμή της υπερβολικής εφαπτομένης ισούται με την τιμή αυτού. Η προσέγγιση αυτή δίνει καλά αποτελέσματα για ικανοποιητικό εύρος φυσικών συχνοτήτων.
- Ενδιάμεσο βάθος ($0.05 - 0.1 \leq h/l \leq 0.20.25$), όπου η παραπάνω παραδοχή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο για τις χαμηλότερες φυσικές συχνότητες (συνήθως όχι πάνω από την 5η).
- Πεπερασμένο βάθος ($0.2 - 0.25 \leq h/l \leq 1$), όπου η παραπάνω παραδοχή δεν είναι πλέον χρησιμοποιήσιμη αλλά η πρώτη φυσική συχνότητα εξακολουθεί να εξαρτάται από τον λόγο h/l .
- Άπειρο βάθος ($h/l \geq 1$), όπου πλέον η τιμή της υπερβολικής εφαπτομένης είναι περίπου ίση με 1 και, κατά συνέπεια, η πρώτη φυσική συχνότητα είναι ανεξάρτητη των γεωμετρικών διαστάσεων της δεξαμενής.

Φυσικοί Κυματισμοί Θεωρούμε φανταστική διαμέριση της δεξαμενής ανά ημιμήκος του κάθε φυσικού κυματισμού. Οι γραμμές διαμέρισης που προκύπτουν χαρακτηρίζονται εναλλάξ ως κομβικές (nodal) και αντικομβικές (antinodal) με τις πρώτες να βρίσκονται στους κόμβους και η δεύτερες στις κοιλίες του κύματος. Η συμπεριφορά ενός σωματιδίου του υγρού διαφοροποιείται αναλόγως το σημείο της ελεύθερης επιφάνειας στο οποίο βρίσκεται. Τα σωματίδια τείνουν να εγκαταλείψουν τις κοιλίες του κύματος και κατά συνέπεια στα σημεία τομής με τις αντικομβικές ευθείες η κίνηση είναι καθαρά οριζόντια. Αντιθέτως, τα σωματίδια τείνουν να παραμείνουν στους κόμβους του κύματος και κατά συνέπεια στα σημεία τομής με τις κομβικές ευθείες η κίνηση είναι καθαρά κατακόρυφη. Στα ενδιάμεσα σημεία η κίνηση αποτελείται τόσο από οριζόντια όσο και από κατακόρυφη συνιστώσα (εικόνα 2.5). Η συμμετρία ή αντισυμμετρία των κυματισμών (δεν υπάρχει τρίτη περίπτωση στους φυσικούς κυματισμούς του sloshing) παρατηρείται σε σχέση με τον άξονα z.

Τρισδιάστατες Ορθογωνικές Δεξαμενές

Στην περίπτωση τρισδιάστατης ορθογωνικής δεξαμενής μήκους l , η μέθοδος χωρισμού μεταβλητών είναι και πάλι χρησιμοποιήσιμη, επιλέγοντας ως μεταβλητές τις διευθύνσεις των τριών διαστάσεων της δεξαμενής και ως κέντρο του



Σχήμα 2.5: Οι φυσικοί κυματισμοί που εμφανίζονται σε διεγερόμενη διδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή. Ο αύξων αριθμός του κυματισμού ταυτίζεται και με τον αριθμό των κόμβων του. Σημειώνονται και οι κομβικές και αντικομβικές ευθείες. (Πηγή: “Sloshing”, Faltinsen & Timokha, 2009)

συστήματος αξόνων το κέντρο της ελεύθερης επιφάνειας σε κατάσταση ηρεμίας. Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι και πάλι τύπου Laplace και η λύση της φαίνεται παρακάτω:

$$f_i^{(1)}(x) = \cos \frac{i\pi(x+\frac{1}{2}L_1)}{L_1}$$

$$f_i^{(2)}(y) = \cos \frac{j\pi(y+\frac{1}{2}L_2)}{L_2}$$

$$\phi_{ij}(x, y, z) = f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y) \frac{\cosh k_{ij}(z+h)}{\cosh k_{ij}h} \quad (2.22)$$

$$\frac{\sigma_{ij}^2}{g} = \kappa_{ij} = k_{ij} \tanh k_{ij}h$$

$$k_{ij} = \pi \sqrt{\frac{i}{L_1} + \frac{j}{L_2}}, i + j \neq 0$$

και προφανώς για τους κυματισμούς ελεύθερης επιφάνειας θα ισχύει:

$$f_{i,j}(x, y) = \phi_{ij}(x, y, 0) = f_i^{(1)}(x)f_j^{(2)}(y) \quad (2.23)$$

Σημειώνεται ότι η μεταβλητή k_{ij} αποτελεί τον αριθμό κύματος του εκάστοτε φυσικού κυματισμού.

Επίπεδα Κύματα Όπως φαίνεται από την εξίσωση 2.22 και συγκεκριμένα από τον περιορισμό στο τέλος της, δεν γίνεται τα i, j να είναι ταυτοχρόνως μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι ο προκύπτων αριθμός κύματος k_{00} αντιστοιχεί σε κυματισμό που δεν ικανοποιεί τη συνθήκη διατήρησης όγκου. Παρόλα αυτά παρουσιάζει ενδιαφέρον η περίπτωση όπου ο ένας από αυτούς τους δείκτες είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή $ij = 0$.

Στην περίπτωση, λοιπόν, που το γινόμενο των δεικτών είναι ίσο με μηδέν, έχουμε αριθμό κύματος k_{i0} ή k_{0j} . Και στις δυο περιπτώσεις ο προκύπτων κυματισμός ονομάζεται κύμα Stokes, είναι παράλληλος στο ένα από τα δυο κατακόρυφα επίπεδα συμμετρίας της δεξαμενής και, κατά συνέπεια, ταυτίζεται με ένα κυματισμό διδιάστατης δεξαμενής. Τα κύματα αυτά χαρακτηρίζονται και ως επίπεδα κύματα.

Στροβιλισμός Αν το μόνο παρατηρούμενο φαινόμενο ήταν αυτό της προηγούμενης παραγράφου, το sloshing σε μια τρισδιάστατη δεξαμενή δεν θα είχε

ουσιαστικές διαφορές από αυτό σε μια διδιάστατη δεξαμενή. Αυτό όμως δεν είναι αληθές και αυτό οφείλεται κατά βάση σε μια δεύτερη μορφή κίνησης, το φαινόμενο του στροβιλισμού. Ο στροβιλισμός δεν είναι τίποτε παραπάνω από την επαγωγή δυο επιπέδων κυμάτων τα οποία εμφανίζουν μια διαφορά φάσης.

Διαγώνια Κύματα Η τρίτη βασική μορφή κίνησης αποτελεί τα λεγόμενα διαγώνια κύματα, τα οποία αποτελούν, κατά κάποιον τρόπο, μια οριακή κατάσταση ανάμεσα στις δυο παραπάνω. Η ιδιαιτερότητα αυτών των κυμάτων, που αποτελούν επαγωγή κυμάτων κατά τους δυο άξονες, είναι ότι οι δυο απέναντι κορυφές της ελεύθερης επιφάνειας (γωνίες της δεξαμενής) παραμένουν στάσιμες (κομβοί), ενώ οι δυο άλλες ταλαντώνονται με αντίθετη φάση (κοιλίες).

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση

3.1 Η Τροπική (Modal) Ανάλυση

Η τροπική ανάλυση έχει ως βάση της την χρήση γενικευμένων συντεταγμένων των κυματισμών για την περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας. Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών που έχουμε να λύσουμε σε ένα απειροδιάστατο πρόβλημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

3.1.1 Γραμμική Θεώρηση

Θεωρούμε τρισδιάστατη ορθογωνική δεξαμενή, μερικώς γεμισμένη με υγρό με τις παραδοχές που θέσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο να ικανοποιούνται. Θεωρώντας ότι τόσο το πλάτος διέγερσης όσο και η αρχική διαταραχή της ελεύθερης επιφάνειας είναι επαρκώς μικρά ώστε να μπορούμε να εξετάσουμε το πρόβλημα γραμμικά.

Η δεξαμενή έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να εκτελέσει μεταφορικές και περιστροφικές κινήσεις στους τρεις άξονες συμμετρίας της. Η ταχύτητα και η γωνιακή της ταχύτητα μπορούν περιγραφούν ως άθροισμα των συνιστωσών τους στους τρεις αυτούς άξονες. Σε μορφή εξισώσεων αυτό σημαίνει:

$$u_0(t) = u_{01}(t)e_1 + u_{02}(t)e_2 + u_{03}(t)e_3 = \dot{n}_1e_1 + \dot{n}_2e_2 + \dot{n}_3e_3 \quad (3.1)$$

$$\omega(t) = \omega_1(t)e_1 + \omega_2(t)e_2 + \omega_3(t)e_3 = \dot{n}_4e_1 + \dot{n}_5e_1 + \dot{n}_6e_1$$

όπου \vec{n} η δύναμη διέγερσης.

Το μοντέλο που περιγράφει την κίνηση της ελεύθερης επιφάνειας σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, Q_0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_0} &= \vec{u}_0 * \vec{n} + \vec{\omega} * [\vec{r} \times \vec{n}] \\
\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma_0} &= \vec{u}_0 * \vec{n} + \vec{\omega} * [\vec{r} \times \vec{n}] + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \times \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\Sigma_0} - g_1 x - g_2 y - g_3 z &= 0 \\
\int_{\Sigma_0} \zeta dx dy &= 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

του οποίου η λύση γράφεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier ως:

$$\zeta(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) \phi_i(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{inf ty} \beta_i(t) f_i(x, y) \tag{3.3}$$

$$\Phi(x, y, z, t) = u_0(t) * r + \omega(t) * \Omega_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} R_i(t) \phi_i(x, y, z)$$

Το σύστημα 3.3 ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του 3.2 εκτός από την τρίτη και την τέταρτη, που είναι κατάντιστοιχία η κινηματική και η δυναμική συνθήκη της ελεύθερης επιφάνειας. Οι φυσικές ιδιομορφές ταυτίζονται με τους φυσικούς κυματισμούς μιας μη διεγειρόμενης δεξαμενής, ενώ οι ιδιοσυναρτήσεις f_i αποτελούν πλήρη βάση της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Η μεταβλητή Ω_0 αποτελεί το δυναμικό που εμφανίζεται σε πλήρως γεμάτη δεξαμενή και για αυτό είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Το δυναμικό αυτό ονομάζεται δυναμικό Stokes-Joukowski και έχει τη μορφή:

$$\Omega_0(x, y, z) = (\Omega_{01}(x, y, z), \Omega_{02}(x, y, z), \Omega_{03}(x, y, z)) \tag{3.4}$$

Το δυναμικό αυτό αποτελεί τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Omega_0 &= 0, Q_0 \\
\frac{\partial \Omega_{01}}{\partial n} &= yn_3 - zn_2, S_0 \cup \Sigma_0 \\
\frac{\partial \Omega_{02}}{\partial n} &= yn_1 - zn_3, S_0 \cup \Sigma_0 \\
\frac{\partial \Omega_{03}}{\partial n} &= yn_2 - zn_1, S_0 \cup \Sigma_0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Εισάγοντας τις 3.3 στις 3.2 και εκμεταλλευόμενοι τη συνθήκη της ορθογωνιότητας μεταξύ των ιδιοσυναρτήσεων, καταλήγουμε τελικά στο ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων για την τροπική συνάρτηση β_m .

$$\mu_m(\ddot{\beta}_m + \sigma_m^2 \beta_m) + \lambda_{1m}(\ddot{n}_1 - gn_5) + \lambda_{2m}(\ddot{n}_2 + gn_4) + \sum_{k=4}^6 \ddot{n}_k \lambda_{0(k-3)m} = 0, m=1, 2, \dots \quad (3.6)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= g\kappa_m \\ \mu_m &= \frac{\rho}{\kappa_m} \int_{\Sigma_0} \phi_m^2 dx dy = \frac{\rho}{\kappa_m} \int_{\Sigma_0} f_m^2 dx dy \\ \lambda_{1m} &= \rho \int_{\Sigma_0} f_m x dx dy \\ \lambda_{2m} &= \rho \int_{\Sigma_0} f_m y dx dy \\ \lambda_{0km} &= \rho \int_{\Sigma_0} f_m \Omega_{0k} dx dy, k = 1, 2, 3, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

όπου σ_m και κ_m οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοτιμές του συστήματος αντιστοίχως. Η πυκνότητα εισήχθη στην εξίσωση όχι ως απαραίτητο στοιχείο για να καταλήξουμε σε αυτήν, αλλά για τη διευκόλυνση του υπολογισμού των δυνάμεων και των ροπών που προκύπτουν, κάτι ιδιαίτερος σημαντικό στη μελέτη του sloshing.

Γράφοντας την εξίσωση στη μορφή

$$\ddot{\beta}_m + \sigma_m^2 \beta_m = K_m(t) \quad (3.8)$$

έχουμε την εξίσωση ταλάντωσης με κατακόρυφη διέγερση. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει ο όρος n_3 πουθενά και κατά συνέπεια το πρόβλημα με κατακόρυφη διέγερση δεν μπορεί να αναλυθεί με τη γραμμική θεώρηση. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα αποτελέσματα της κατακόρυφης διέγερσης είναι μη γραμμικά.

3.1.2 Μη Γραμμική Θεώρηση

Διαφοροποίηση Από την Γραμμική Θεώρηση

Η ανάπτυξη του μοντέλου με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα στην μη γραμμική θεώρηση και το ίδιο ισχύει για την έκφραση του δυναμικού Stokes-Joukowski. Παρά την ίδια φαινομενικά μορφή τους, οι εξισώσεις έχουν κάποιες σημαντικές διαφοροποιήσεις. Το Q αποτελεί πλέον συνάρτηση του χρόνου και, κατά συνέπεια, αυτή η ιδιότητα επεκτείνεται και στο δυναμικό Ω . Ταυτοχρόνως οι ιδιοσυναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στα αναπτύγματα Fourier δεν αντιστοιχούν απαραίτητως στις

ιδιομορφές των κυματισμών, αποτελούν παρόλα αυτά, βάση της ελεύθερης επιφάνειας. Σε πρακτικές εφαρμογές όμως, συνηθίζεται τελικά να συσχετίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις αυτές με τους φυσικούς κυματισμούς. Η μελέτη μεταφέρεται, στη συνέχεια, γύρω από τη συμπεριφορά των γενικευμένων μεταβλητών β_i και R_n .

Η Αρχή Bateman-Luke

Οι Faltinsen και Timokha έδειξαν, το 2009, ότι οι ομαλές λύσεις του προβλήματος ελευθέρου ορίου που αποτελεί το sloshing σχετίζονται με τα ακρότατα της συνάρτησης της δράσης, η οποία ορίζεται ως:

$$S(\zeta) = \int_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.9)$$

όπου

$$L = \int_{Q(t)} (p - p_0) dQ \quad (3.10)$$

με $p - p_0$ τη διαφορά της εξίσωσης Bernoulli.

Η αρχή Bateman-Luke θεωρεί ότι οι συναρτήσεις Φ και ζ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και, κατά συνέπεια, δεν εκφράζουν απαραίτητα το δυναμικό και την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας, αντιστοίχως. Επίσης η διαφορά δεν εκφράζει πλέον, απαραίτητα, την πίεση του υγρού σε σχέση με την ατμοσφαιρική. Οι Bateman και Luke απέδειξαν ότι, αν ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση δράσης, εξάγονται όλες οι οριακές συνθήκες και μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν το sloshing και, συνεπώς, οι Φ και ζ αποκτούν και πάλι την αρχική τους σημασία.

Οι Τροπικές Εξισώσεις

Με αντικατάσταση των εκφράσεων των Φ, ζ στην Λαγκρανζιανή συνάρτηση και με χρήση τόσο της αρχής Bateman-Luke όσο και του θεωρήματος Gauss, προκύπτουν μετά από μετασχηματισμούς οι τροπικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \frac{\partial D_n}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \sum_k R_k D_{nk} = 0, n = 1, 2, \dots \\
& \sum_n \dot{R}_n \frac{\partial D_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_{n,k} R_n R_k \frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_1 \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_2 \frac{\partial l_{2\omega}}{\partial \beta_i} + \dot{\omega}_3 \frac{\partial l_{3\omega}}{\partial \beta_i} + \\
& + \omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i} - \frac{d}{dt} (\omega_1 \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_2 \frac{\partial l_{2\omega t}}{\partial \beta_i} + \omega_3 \frac{\partial l_{3\omega t}}{\partial \beta_i}) + \\
& + (\dot{u}_{01} - g_1 + \omega_2 u_{03} - \omega_3 u_{02} \frac{\partial l_1}{\partial \beta_i}) + (\dot{u}_{02} - g_2 + \omega_3 u_{01} - \omega_1 u_{03} \frac{\partial l_2}{\partial \beta_i}) + \\
& + (\dot{u}_{03} - g_3 + \omega_1 u_{02} - \omega_2 u_{01} \frac{\partial l_3}{\partial \beta_i}) - \\
& - \frac{1}{2} \omega_1^2 \frac{\partial J_{11}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_2^2 \frac{\partial J_{22}^1}{\partial \beta_i} - \frac{1}{2} \omega_3^2 \frac{\partial J_{33}^1}{\partial \beta_i} - \\
& - \omega_1 \omega_2 \frac{\partial J_{12}^1}{\partial \beta_i} - \omega_1 \omega_3 \frac{\partial J_{13}^1}{\partial \beta_i} - \omega_2 \omega_3 \frac{\partial J_{23}^1}{\partial \beta_i} = 0, i \geq 1 \\
& \text{όπου}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
D_n &= \rho \int_{Q(t)} \phi_n dQ \\
D_{nk} &= D_{kn} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla \phi_n * \nabla \phi_k) dQ \\
J_{11}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} dS \\
J_{22}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS \\
J_{33}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS \\
J_{12}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} dS \\
J_{13}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_1 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS \\
J_{23}^1 &= \rho \int_{S(t)+\Sigma(t)} \Omega_2 \frac{\partial \Omega_3}{\partial n} dS
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Σε ειδικές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση πεπερασμένου όγκου, το σύστημα μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων του R_k , της μορφής:

$$\sum_k R_k D_{nk}(\beta_i) = \frac{d}{dt} D_n \beta_i \tag{3.13}$$

Κριτική Της Τροπικής Ανάλυσης

Το σύστημα 3.11 συσχετίζει μη γραμμικά τις δυο γενικευμένες μεταβλητές μας κι έχει προκύψει χωρίς να κάνουμε παραδοχές για το μέγεθος των κυμάτων στην επιφάνεια και το βάθος της δεξαμενής. Κατά συνέπεια, με την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να περιγράψουμε μια πληθώρα καταστάσεων.

Η ανάλυση αυτή, παρόλα αυτά, απαιτεί κάποιους περιορισμούς για να παράξει αξιόπιστα αποτελέσματα.

Γεωμετρικά, καταρχάς, θα πρέπει να μην υπάρχει αλληλεπίδραση με την οροφή της δεξαμενής και overturning κύματα, ενώ, αντιθέτως, ο πυθμένας θα πρέπει πάντοτε να είναι βρεγμένος. Αν, επίσης, τα τοιχώματα της δεξαμενής δεν είναι κάθετα στην ελεύθερη επιφάνεια σε κατάσταση ηρεμίας, χρειάζεται διαφορετικού τύπου παραμετροποίηση για την επίλυση του προβλήματος.

Συναρτησιακά, είναι δύσκολο να βρεθεί μια βάση ιδιοσυναρτήσεων για την ελεύθερη επιφάνεια οι οποία να είναι πλήρης τόσο στην ελεύθερη επιφάνεια όσο και στον όγκο του υγρού. Η συνήθης λύση είναι η επιλογή των φυσικών κυματισμών ως βάση, λύση που όμως εισάγει σφάλμα στους υπολογισμούς μας, καθώς οι φυσικοί κυματισμοί παρατηρούνται, θεωρητικά μόνο στην αδιατάρακτη κατάσταση. Για την επιλογή των φυσικών κυματισμών ως βάση απαιτείται χρήση άλλων θεωριών από την τροπική ανάλυση.

Αριθμητικά, τόσο οι φυσικοί κυματισμοί όσο και οι φυσικές συχνότητες που αντιστοιχούν σε αυτούς υπολογίζονται συναρτήσεως της γεωμετρίας της δεξαμενής αριθμητικά. Η ακρίβεια των υπολογισμών αυτών καθώς και του αριθμητικού υπολογισμού των λύσεων των πολύπλοκων διαφορικών εξισώσεων που ορίζονται στην τροπική ανάλυση, επηρεάζουν το σφάλμα στις τελικές μας λύσεις.

3.2 Το προσαρμοστικό (adaptive) μοντέλο

Η τροπική (modal) ανάλυση για την περιγραφή του sloshing σε περιπτώσεις κρίσιμου βάθους, μεγάλου πλάτους διέγερσης ή δευτερεύοντος συντονισμού δεν δίνει αποτελέσματα. Για αυτό το λόγο ήταν απαραίτητο να αναπτυχθεί ένα μοντέλο που να καλύπτει και τις παραπάνω περιπτώσεις. Οι Faltinsen και Timokha παρουσίασαν το 2002 μια απειροδιάστατη τροπική μοντελοποίηση 'πολυωνυμικής κατασκευής' για τα $\beta_i(t), R_i(t)$ και τις χρονικές παραγώγους τους. Τα μοντέλα αυτά δίνουν αποτελέσματα τόσο για πεπερασμένο βάθος, όπου μας

έδινε αποτελέσματα και η τροπική προσέγγιση, όσο και για ενδιάμεσο ή μικρό βάθος, όπου η τελευταία μέθοδος δεν μπορούσε να εφαρμοστεί.

Σημαντικό προτέρημα της προσαρμοστικής προσέγγισης είναι, όπως δηλώνει και το όνομά της, η εύκολη προσαρμογή του μοντέλου αναλόγως με την κατάσταση που θέλουμε να μελετήσουμε. Η γενική μορφή του συστήματος είναι απειροδιάστατη και μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε την τάξη του συστήματος που θα χρησιμοποιήσουμε αναλόγως με το πλάτος διέγερσης, τη συχνότητα, το βάθος κτλ.

3.2.1 Το n-διάστατο σύστημα

Οι φυσικοί κυματισμοί, σε αδιαστατοποιημένη μορφή, αναπαρίστανται με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_n &= \bar{f}_n(y) \frac{\cosh(\pi * n(z + \bar{h}))}{\cosh(\pi * n * \bar{h})} \\ \bar{f}_n &= \cos(\pi * n(y + \frac{1}{2}))\end{aligned}\tag{3.14}$$

όπου $\bar{h} = h/l$ είναι το κανονικοποιημένο βάθος του υγρού.

Το τροπικό σύστημα εξισώσεων για διδιάστατη περίπτωση δεξαμενής υπό οριζόντια διέγερση προκύπτει ότι έχει τη μορφή (Faltinsen & Timokha, 2009):

$$\begin{aligned}\sum n \dot{R}_n \frac{\partial D_n}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum n, k \frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_i} R_n R_k + \dot{\omega} \frac{\partial l_{1\omega}}{\partial \beta_i} + \omega \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i} \\ - \frac{d}{dt} (\omega \frac{\partial l_{1\omega t}}{\partial \beta_i}) + (\dot{u}_{02} - g_2) \lambda_{2i} - g_3 \beta_i \lambda_{3i} = 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

Η εξαγωγή του πολυωνυμικού συστήματος βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor της κανονικοποιημένης ως προς το πλάτος και την πυκνότητα ολοκληρωμάτων D_n και D_{nk} αντιστοίχως.

$$D_n = \frac{1}{2} \left(\beta_n + \frac{1}{2} \tilde{E}_n \Lambda_{nij}^{(1)} \beta^i \beta^j + \frac{1}{3} C_{nn} \Lambda_{nijk}^{(2)} \beta^i \beta^j \beta^k \right)\tag{3.16}$$

όπου

$$\tilde{E}_n = \frac{1}{2} \pi * n \tanh(\pi * n \bar{h}) \ \& \ C_{nk} = \frac{1}{8} \pi^2 nk\tag{3.17}$$

και

$$\Lambda_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 2 & i = j = 0 \\ 1 & i = j \neq 0 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\Lambda_{nkj}^{(1)} = \Lambda_{ln-klj}^{(0)} + \Lambda_{ln+klj}^{(0)}$$

$$\Lambda_{nkjp}^{(2)} = \Lambda_{ln-kljp}^{(1)} + \Lambda_{ln+kljp}^{(1)}$$

Προκύπτει επίσης:

$$\dot{D}_n = \frac{1}{2} \left(\dot{\beta}_n + \tilde{E}_n \Lambda_{nij}^{(1)} \dot{\beta}^i \beta^j + C_{nn} \Lambda_{nijk}^{(2)} \dot{\beta}^i \beta^j \beta^k \right) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial D_n}{\partial \beta_m u} = \frac{1}{2} \left(\delta_m u + \tilde{E}_n \Lambda_{ni\mu}^{(1)} \beta^i + C_{nn} \Lambda_{ni\mu}^{(2)} \beta^i \beta^j \right) \quad (3.20)$$

Για το D_{nk} ισχύει

$$D_{nk} = \frac{1}{2} (\delta_{nk} 2\tilde{E}^k + \Pi_{nk,i}^{(1)} \beta^i + \Pi_{nk,ij} \beta^i \beta^j) \quad (3.21)$$

όπου το κόμμα χωρίζει συμμετρικά ζεύγη ακεραίων τιμών. Οι τελεστές Π δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Pi_{nk,i}^{(1)} = 4C_{nk} \Lambda_{nk,i}^{(-1)} + 2\tilde{E}_n \tilde{E}_k \Lambda_{nki}^{(1)} \quad (3.22)$$

$$\Pi_{nk,ij}^{(2)} = 2C_{nk} (\tilde{E}_n + \tilde{E}_k) \Lambda_{nk,ij}^{(-2)} + 2(C_{kk} \tilde{E}_n + C_{nn} \tilde{E}_k) \Lambda_{nkij}^{(2)}$$

Κατά τα γνωστά, ισχύει:

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,ij}^{(-1)} &= \Lambda_{ln-kli}^{(0)} - \Lambda_{ln+kli}^{(0)} \\ \Lambda_{nk,ij}^{(-2)} &= \Lambda_{ln-klj}^{(1)} - \Lambda_{ln+klj}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Οι μερικές παράγωγοι του D_{nk} ως προς το β_μ έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial D_{nk}}{\partial \beta_\mu} = \frac{1}{2} (\Pi_{nk,\mu}^{(1)} + 2\Pi_{nk,i\mu}^{(2)} \beta^i) \quad (3.24)$$

Θεωρώντας το σύστημα γραμμικό αλγεβρικό ισχύει:

$$D_{nk} R_k = \dot{D}_n \quad (3.25)$$

Στο ασυμπτωτικό όριο $\beta_i \rightarrow 0$, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $O(1)$ για πεπερασμένο βάθος:

$$D_{nn} = \tilde{E}_n = \frac{1}{2}\pi * n \tanh(\pi * n\bar{h}) \quad (3.26)$$

ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία τείνουν στο 0. Το γεγονός αυτό καθιστά δυνατή μια ασυμπτωτική λύση της γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης (1.12) ως προς το R^k , το οποίο τελικά δίδεται από την πολυωνυμική έκφραση:

$$R^k = \frac{\dot{\beta}^k}{2\tilde{E}_k} + V_{i,j}^{2,k} \dot{\beta}^i \beta^j + V_{i,j,p}^{3,k} \dot{\beta}^i \beta^j \beta^p \quad (3.27)$$

Οι τελεστές V δεν παρουσιάζουν συμμετρία μεταξύ i, j, p και το κόμμα ανάμεσα στους δείκτες χρησιμοποιείται για να εκφράσει ακριβώς αυτή την έλλειψη συμμετρίας. Οι παράγοντες αυτοί δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} V_{a,b}^{2,n} &= \frac{1}{2}\Lambda_{nab}^{(1)} - (4\tilde{E}_n \tilde{E}_a)^{-1} \Pi_{na,b}^{(1)} \\ V_{a,b,c}^{3,n} &= (2\tilde{E}_n)^{-1} C_{nn} \Lambda_{nabc}^{(2)} - (4\tilde{E}_n \tilde{E}_a)^{-1} \Pi_{na,bc}^{(2)} - (2\tilde{E}_n)^{-1} V_{a,b}^{2,k} \Pi_{nk,c}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Η παράγωγος του R^k ως προς το χρόνο είναι

$$\dot{R}^k = \frac{\ddot{\beta}^k}{2\tilde{E}_k} + \ddot{\beta}^i (V_{i,j}^{2,k} \beta^j + V_{i,j,p}^{3,k} \beta^j \beta^p) + \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j (\bar{V}_{i,j}^{2,k} + 2V_{i,j,p}^{3,k} \beta^p) \quad (3.29)$$

όπου

$$\bar{V}_{i,j,p}^{3,k} = \frac{1}{2}(V_{i,j,p}^{3,k} + V_{i,p,j}^{3,k}) \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην σχέση (1.2), παίρνουμε την τελική απειροδιάστατη μορφή για την πολυδιάστατη τροπική αναπαράσταση του sloshing στην περίπτωση δεξαμενής πεπερασμένου βάθους και οριζόντιας διέγερσης:

$$\ddot{\beta}^a (\delta_{a\mu} + d_{a,b}^{1,mu} \beta^b + d_{a,b,c}^{2,\mu} \beta^b \beta^c) + \dot{\beta}^a \dot{\beta}^b (t_{a,b}^{0,\mu} + t_{a,b,c}^{1,\mu} \beta^c) + \sigma_\mu^2 \beta_\mu = \tilde{K}_\mu, \mu > 1 \quad (3.31)$$

όπου οι άγνωστοι τελεστές δίδονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} d_{a,b}^{1,\mu} &= 2\tilde{E}_\mu (\frac{1}{2}\Lambda_{ab\mu}^{(1)} + V_{a,b}^{2,\mu}) \\ d_{a,b,c}^{2,\mu} &= 2\tilde{E}_\mu ((2\tilde{E}_a)^{-1} C_{aa} \Lambda_{abc\mu}^{(2)} + \tilde{E}_n \Lambda_{nc\mu}^{(1)} V_{a,b}^{2,n} + V_{a,b,c}^{3,\mu}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
t_{a,b}^{0,\mu} &= 2\tilde{E}_\mu(V_{a,b}^{2,\mu} + (8\tilde{E}_a\tilde{E}_b)^{-1}\Pi_{ab,\mu}^{(1)}) \\
t_{a,b,c}^{1,\mu} &= 2\tilde{E}_\mu(2V_{a,b,c}^{3,\mu} + V_{a,b}^{2,\mu}\tilde{E}_n\Lambda_{ncm} + (4\tilde{E}_a\tilde{E}_b)^{-1}\Pi_{ab,\mu c}^{(1)} + (2\tilde{E}_a)^{-1}V_{b,c}^{2,n}\Pi_{an,\mu}^{(1)})
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Το σύστημα 1.18 τροποποιήθηκε από τους Faltinsen και Timokha (2001) ώστε να μπορεί να περιγράψει διέγερση σε οποιαδήποτε διεύθυνση (και περιστροφικές κινήσεις). Το μη γραμμικό τροπικό σύστημα 5ης τάξης ως προς β_i για κατακόρυφη διέγερση, όπου είναι εμφανές πώς μπορεί να παρουσιαστεί παραμετρική αστάθεια:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\beta}^a(\delta_{a\mu} + d_{a,b}^{1,\mu} + d_{a,b,c}^{2,\mu}\beta^b\beta^c\beta^d + d_{a,b,c,d,f}^{4,\mu}\beta^b\beta^c\beta^d\beta^f + \\
&+ \dot{\beta}^a\dot{\beta}^b(t_{a,b}^{0,\mu} + t_{a,b,c}^{1,\mu}\beta^c + t_{a,b,c,d}^{2,\mu}\beta^c\beta^d + t_{a,b,c,d,f}^{3,\mu}\beta^c\beta^d\beta^f) + \\
&+ (\sigma_\mu^2 + \ddot{n}_3 l^{-1} \pi \mu \tanh(\pi \mu \bar{h}))\beta_\mu = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

3.2.2 Το διδιάστατο μοντέλο

Το μοντέλο που μελετήθηκε ήταν δυο βαθμών ελευθερίας. Αυτό σημαίνει ότι λάβαμε υπόψιν τους δυο πρώτους φυσικούς, μη-γραμμικούς κυματισμούς του μοντέλου. Εισάγοντας την απόσβεση κατευθείαν στην τελική μορφή του μοντέλου, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\beta}_1 + 2\xi_1\sigma_1\dot{\beta}_1 + \sigma_1^2\beta_1 + Q_1\ddot{n}_3\beta_1) + d_1(\ddot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2) + \\
&+ d_2(\ddot{\beta}_1\beta_1^2 + \dot{\beta}_1^2\beta_1) + d_3\ddot{\beta}_2\beta_1 + \bar{d}_1\ddot{\beta}_1\beta_2^2 + \bar{d}_2\ddot{\beta}_2\beta_2\beta_1 + \bar{d}_3\dot{\beta}_2^2\beta_1 + \bar{d}_4\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\beta_2 = 0 \\
&\ddot{\beta}_2 + 2\xi_2\sigma_2\dot{\beta}_2 + \sigma_2^2\beta_2 + d_4\ddot{\beta}_1\beta_1 + d_5\dot{\beta}_1^2 + \bar{d}_5\ddot{\beta}_1\beta_1\beta_2 + \bar{d}_6\ddot{\beta}_2\beta_1^2 + \\
&+ \bar{d}_7(\ddot{\beta}_2\beta_2^2 + \dot{\beta}_2^2\beta_2) + \bar{d}_8\dot{\beta}_1^2\beta_2 + \bar{d}_9\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\beta_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Υπολογισμός Συντελεστών Οι συντελεστές του μοντέλου μπορούν να υπολογισθούν ως εξής (Faltinsen & Timokha, 2001):

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_0 &= \frac{\pi^2}{8} d_1 = 2 \frac{E_0}{E_1} + E_1 \\
d_2 &= 2E_0 \left(-1 + \frac{4E_0}{\sqrt{\quad}} E_1 E_2 \right) \\
d_3 &= -2 \frac{E_0}{E_2} + E_1 \\
d_4 &= -4 \frac{E_0}{E_1} + 2E_2 \\
d_5 &= E_2 - 2 \frac{E_0 E_2}{E_1^2} - \frac{4E_0}{E_1} \tilde{E}_n = \frac{1}{2} \pi n \tanh(\pi n \bar{h}) \\
C_{nk} &= \frac{1}{8} \pi^2 n k \\
Q_1 &= 3E_3 - \frac{6E_0}{E_1}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Κεφάλαιο 4

Μελέτη Απλοποιημένου Μοντέλου

4.1 Εξαγωγή του Μοντέλου

4.1.1 Το Μονοδιάστατο Μοντέλο

Για να έχουμε μια αρχική εκτίμηση της σχέσης των αποτελεσμάτων της παραπάνω μοντελοποίησης με τα φαινόμενα που παρατηρούνται στην πραγματικότητα, ξεκινούμε τη μελέτη από ένα μοντέλο πιο απλοποιημένο από αυτό που παρουσιάσαμε παραπάνω. Για να επιτύχουμε αυτό το στόχο, θεωρούμε ότι η προκύπτουσα μορφή της ελεύθερης επιφάνειας οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στον πρώτο φυσικό κυματισμό της και κατά συνέπεια όλοι οι όροι που αφορούν το δεύτερο φυσικό κυματισμό μηδενίζονται (single dominant). Το μοντέλο που προκύπτει είναι, προφανώς, ενός βαθμού ελευθερίας κίνησης, αφού εξαρτάται από ένα και μόνο φυσικό κυματισμό, και έχει την παρακάτω μορφή:

$$\ddot{\beta}_1 + 2\xi_1\sigma_1\dot{\beta}_1 + \sigma_1^2\left(1 - \frac{n_{3\alpha}\sigma^2}{g}\cos\sigma t\right)\beta_1 + d_2(\ddot{\beta}_1\beta_1^2 + \dot{\beta}_1^2\beta_1) = 0 \quad (4.1)$$

Το μοντέλο αυτό δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στις χαμηλότερες περιοχές συχνοτήτων και είναι ευκολότερα επεξεργάσιμο, για αυτό ξεκινάμε τη μελέτη μας από αυτό πριν περάσουμε σε πιο σύνθετα. Η εξαγωγή και μελέτη αυτού του μοντέλου, που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο, πραγματοποιήθηκε από τους Spandonidis & Spyrou (2011).

4.1.2 Το Αυτόνομο Μοντέλο

Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη της γενικής συμπεριφοράς αλλά και των διακλαδώσεων του παραπάνω μοντέλου απαιτεί τα εισαγόμενα συστήματα να βρίσκονται σε αυτόνομη μορφή. Για να πετύχουμε αυτόν το στόχο θέσαμε μια μεταβλητή ϕ ίση με την πρώτη παράγωγο του β , καθώς και δυο μεταβλητές x και y ίσες με το ημίτονο και το συνημίτονο, αντιστοίχως, του ορίσματος σt . Προκύπτει:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \phi \\ \dot{\phi} &= \frac{-2\xi_1\sigma_1\phi - \sigma_1^2(1 - \frac{n_3\alpha\sigma^2}{g}y)\beta - \phi^2\beta}{1+d_2\beta^2} \\ \dot{x} &= x + \sigma y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x - \sigma y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{4.2}$$

4.1.3 Επιλογή Φυσικών Παραμέτρων

Η εστίαση της συγκεκριμένης μελέτης στα φαινόμενα του sloshing που εμφανίζονται στην ναυπηγική, απαιτεί η γεωμετρία του προβλήματος να βρίσκεται στην ίδια περιοχή με αυτή των παραπάνω εφαρμογών. Για αυτό το λόγο επιλέγουμε το λόγο βάρους προς μήκος ίσο με 0.4. Συμπτωματικά, ο λόγος αυτός είναι οριακά μεγαλύτερος από αυτόν του κρίσιμου βάρους. Η φυσική συχνότητα και φυσική περίοδος του συστήματος υπολογίζονται ίσες με 5.15 Hz και 1.2 sec αντιστοίχως. Οι παράμετροι που απομένουν ρυθμίσιμες είναι το πλάτος και η συχνότητα διέγερσης, καθώς και ο συντελεστής απόσβεσης. Ο τελευταίος επιλέγεται εν προκειμένω ίσος με 0.03.

4.2 Δυναμική Συμπεριφορά Συστήματος

4.2.1 Εξάρτηση από τη Συχνότητα και το Πλάτος Διέγερσης

Ξεκινάμε από μια τιμή του πλάτους διέγερσης ίση με 0.015 και παρατηρούμε την απόκριση για διάφορα εύρη συχνοτήτων καθώς και για μικρή ή μεγάλη αρχική μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι μέχρι τα 10 περίπου Hz η απόκριση που παίρνουμε είναι ευσταθής και, ανεξαρτήτως της αρχικής μετατόπισης, η ελεύθερη επιφάνεια καταλήγει στην ακινησία. Στην περιοχή γύρω από την φυσική συχνότητα, το σύστημα οδηγείται σε κατάσταση μόνιμης

απόκρισης, με τις αρχικές συνθήκες να επηρεάζουν αποκλειστικά την ταχύτητα μετάβασης σε αυτή την κατάσταση. Το μεγάλο ενδιαφέρον εμφανίζει η τρίτη περιοχή, όπου για μικρές αρχικές συνθήκες η απόκριση είναι ευσταθής, ενώ για μεγάλες έχουμε περιοδική κίνηση. Η τιμή της αρχικής διαταραχής στην οποία πραγματοποιείται η μετάβαση βρίσκεται μεταξύ 0.7 και 0.8.

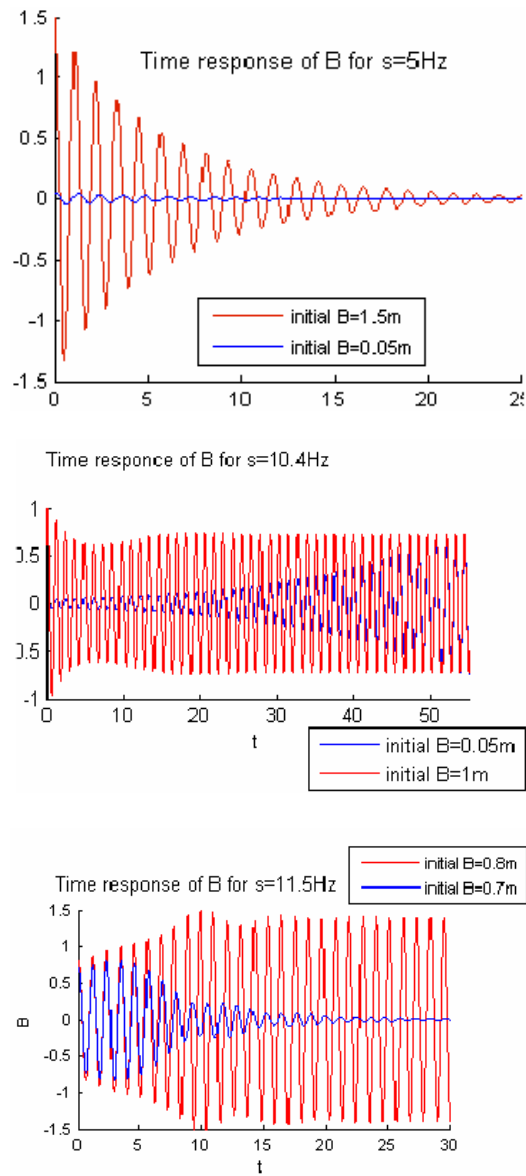
Στο σημείο αυτό μετάβασης υπάρχει μια διακλάδωση, λοιπόν, της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Θα ονομάσουμε την περιοχή περιοδικής κίνησης ασταθή, παρότι στην πραγματικότητα η προβλεψιμότητα της κίνησης αυτής την καθιστά τυπικά ευσταθή. Δίνουμε παρόλα αυτά, την ονομασία αυτή ώστε να είναι εμφανής η διαφοροποίηση των δυο συμπεριφορών.

Η διακλάδωση που παρατηρείται στο σύστημα αυτό είναι τύπου Hopf και η λογική της παρουσιάζεται στο σχήμα 4.2. Στην αρχική κατάσταση έχουμε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, περιβαλλόμενο από ένα ασταθή οριακό κύκλο, ο οποίος με τη σειρά του περιβάλλεται από έναν ευσταθή. Μεταβάλλοντας το εύρος των συχνοτήτων διέγερσης, η ακτίνα του ασταθούς κύκλου μειώνεται, μέχρι που αυτός συγκρούεται με το ευσταθές σημείο και το καθιστά ασταθές. Έχουμε, λοιπόν, ένα ασταθές σημείο και έναν ευσταθή οριακό κύκλο, και το σύστημά μας ωθείται σε μια περιοδική κίνηση. Το αντίστοιχο διάγραμμα φάσεων φαίνεται στο σχήμα 4.3

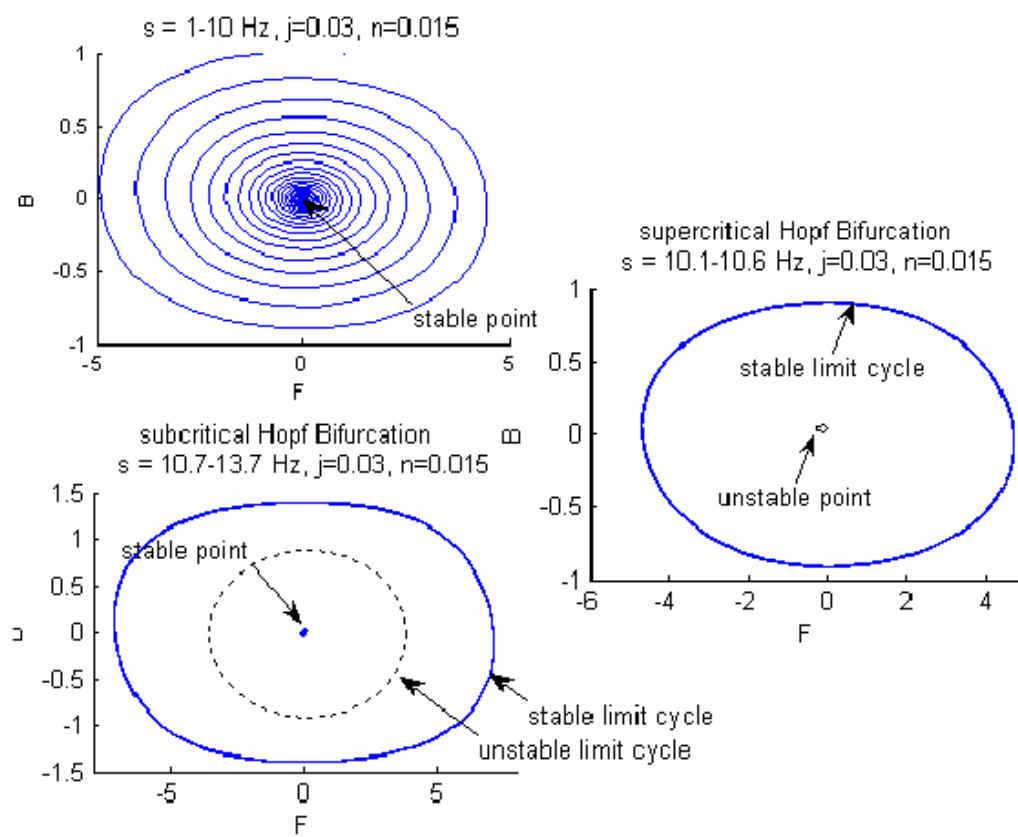
Διατηρώντας σταθερό το συντελεστή απόσβεσης και, διαδοχικά, το πλάτος και τη συχνότητα διέγερσης, μεταβάλλοντας κάθε φορά το άλλο, μελετήσαμε την επίδραση των δυο τελευταίων στο πλάτος της απόκρισης. Στο σχήμα 4.4 βλέπουμε την εξάρτηση από την συχνότητα διέγερσης. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον εμφανίζουν τα σχήματα 4.5 και 4.6, όπου είναι εμφανής τόσο η ύπαρξη ασταθούς οριακού κύκλου, όσο και η εξάρτηση του εύρους συχνοτήτων στα οποία εμφανίζεται ανάλογα με το πλάτος διέγερσης. Στο σχήμα 4.7 γίνεται εμφανέστερη η εξάρτηση αυτή από τη συχνότητα διέγερσης, καθώς και η μετάβαση από την υποκρίσιμη κατάσταση της διακλάδωσης στην υπερκρίσιμη. Είναι εμφανές ότι οι καμπύλες τύπου C περιγράφουν υποκρίσιμες καταστάσεις και ο κλάδος χαμηλότερα του σημείου καμπής αντιπροσωπεύει τον ασταθή οριακό κύκλο, ενώ ο άλλος κλάδος το ευσταθή.

4.2.2 Εξάρτηση από τον Συντελεστή Απόσβεσης

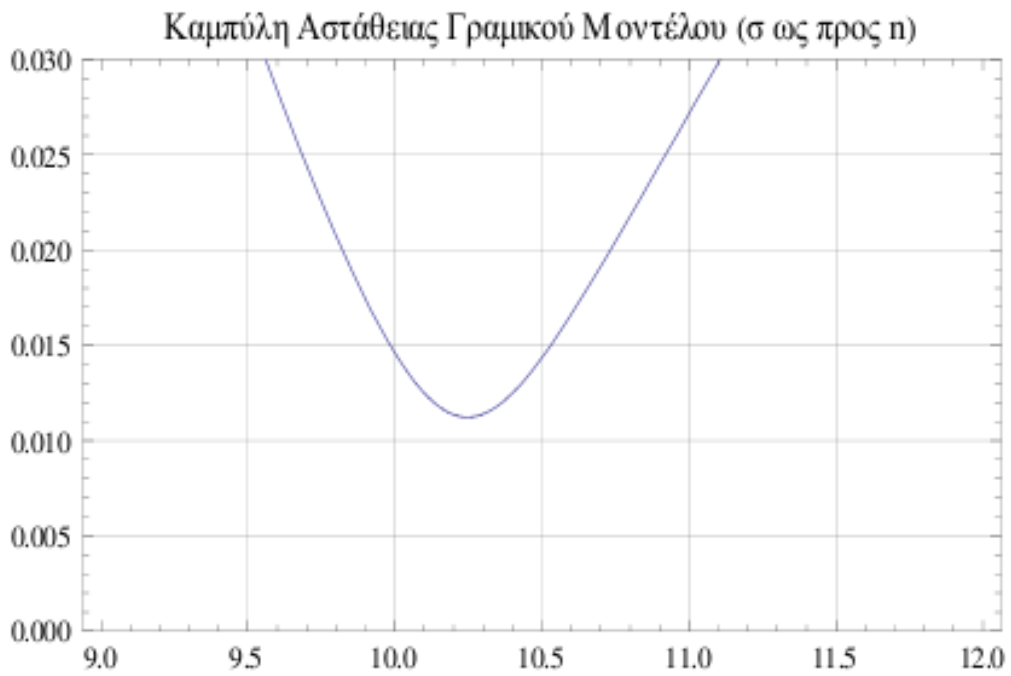
Διατηρώντας, αυτή τη φορά, σταθερό το πλάτος και τη συχνότητα διέγερσης και μεταβάλλοντας τον συντελεστή απόσβεσης, βλέπουμε την επίδραση που έχει αυτός στο πλάτος διέγερσης. Τα προκύπτοντα διαγράμματα φαίνονται στο σχήμα 4.8 για μικρότερα και μεγαλύτερα πλάτη διέγερσης. Για μια ακόμη φορά ο ασταθής οριακός κύκλος είναι ορατός στα διαγράμματά μας.



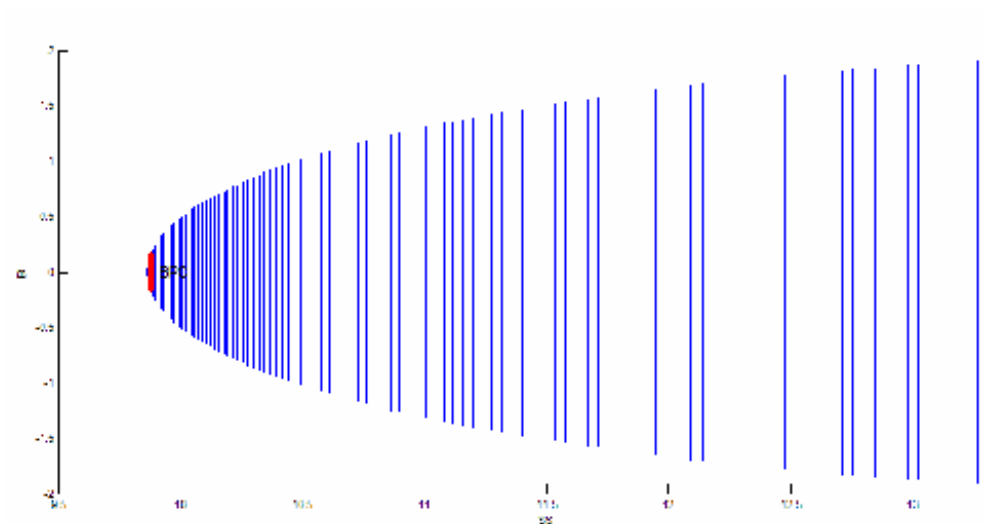
Σχήμα 4.1: Απόκριση του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με (α)5 Hz (β)10.4 Hz και (γ)11.5 Hz



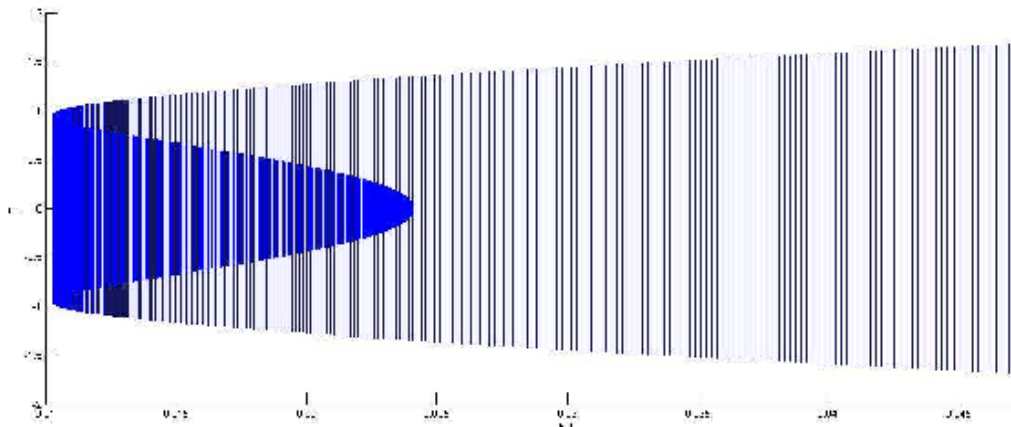
Σχήμα 4.2: Ποιοτική αναπαράσταση του phase plane μιας διακλάδωσης Hopf



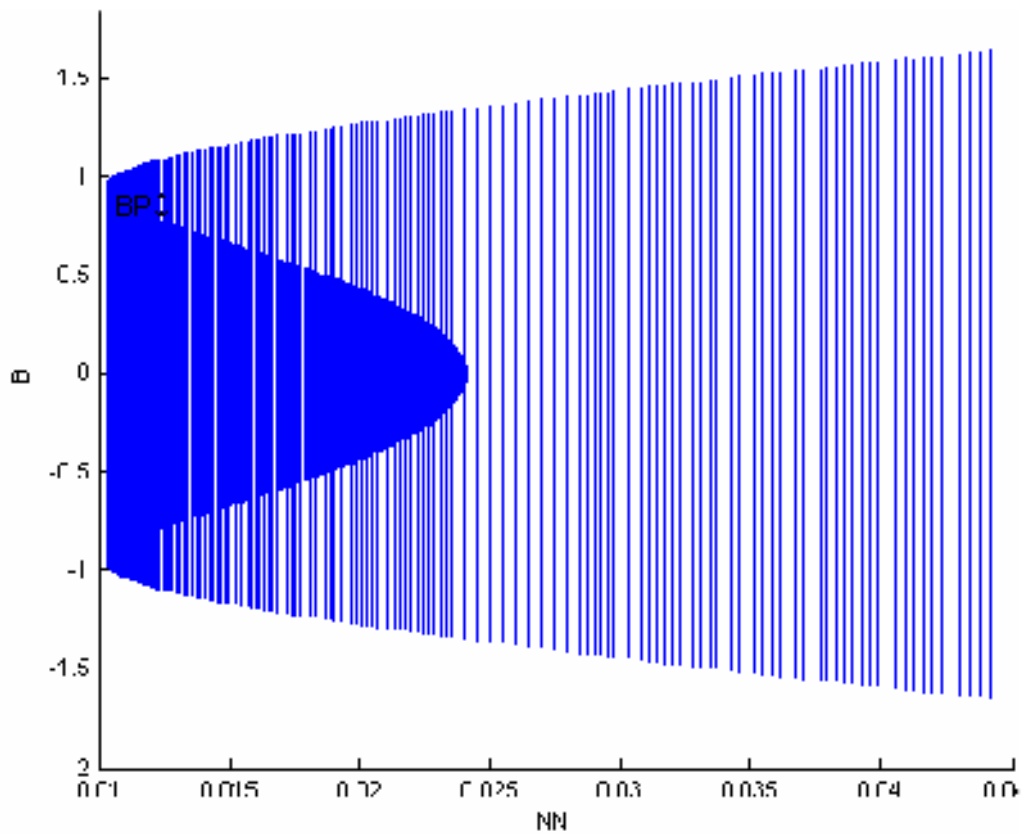
Σχήμα 4.3: Το διάγραμμα φάσεων του συστήματος για $\xi=0.03$



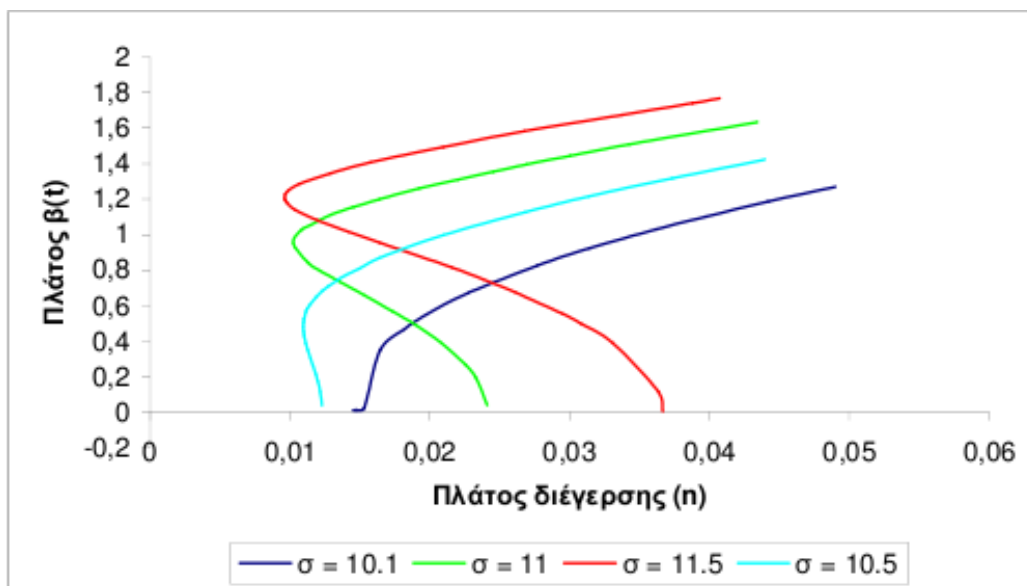
Σχήμα 4.4: Εξάρτηση του πλάτους απόκρισης από τη συχνότητα διέγερσης



Σχήμα 4.5: Εξάρτηση του πλάτους απόκρισης από το πλάτος διέγερσης για συχνότητα διέγερσης ίση με 11 Hz



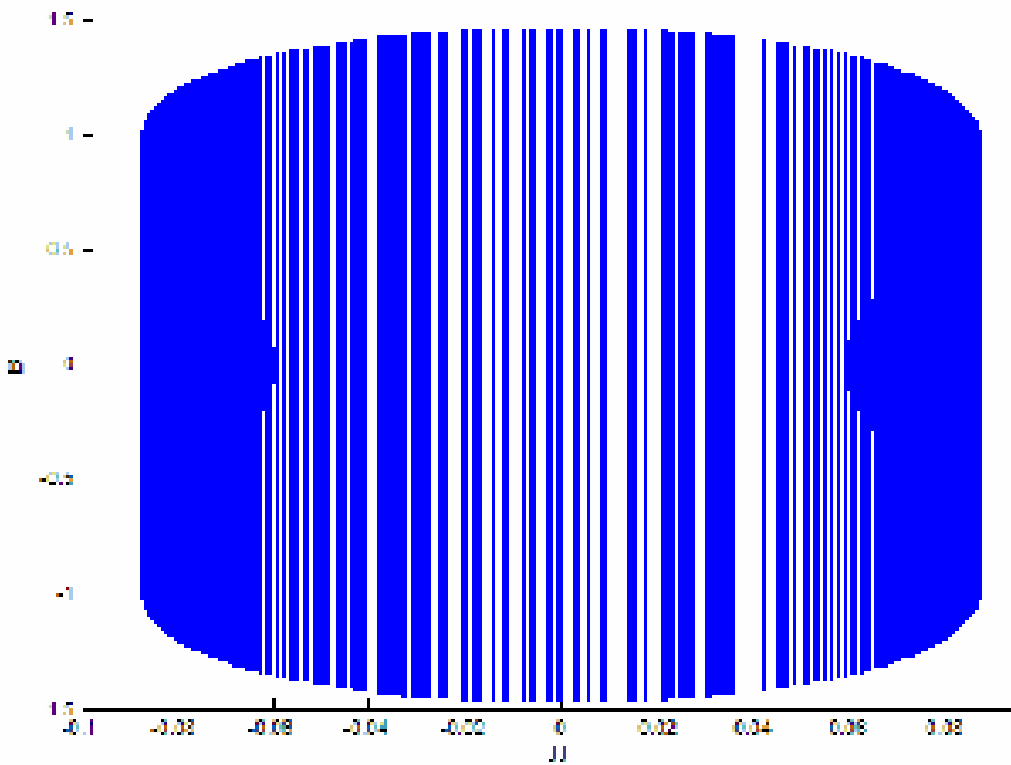
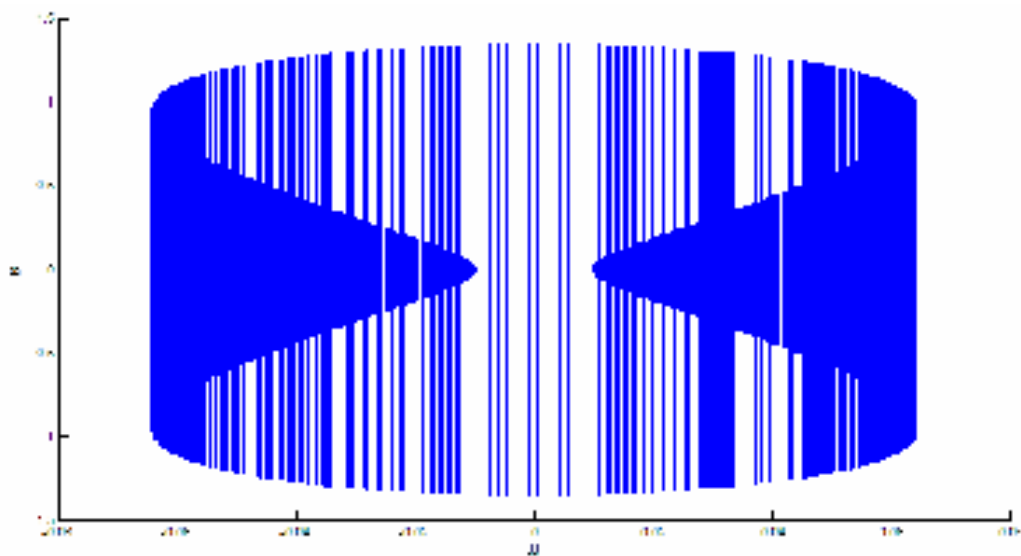
Σχήμα 4.6: Εξάρτηση του πλάτους απόκρισης από το πλάτος διέγερσης για συχνότητα διέγερσης ίση με 12 Hz



Σχήμα 4.7: Εξάρτηση του πλάτους απόκρισης από το πλάτος διέγερσης για διάφορες συχνότητες διέγερσης

4.3 Συμπεράσματα

Η μελέτη του απλοποιημένου μη γραμμικού μοντέλου μας έδωσε με ικανοποιητική ακρίβεια την ασταθή περιοχή της λύσης της εξίσωσης Mathieu. Το σημαντικότερο όμως, ήταν ότι μας εμφάνισε μια ενδιαμέση περιοχή, ανάμεσα στην ευσταθή και την ασταθή, στην οποία το σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές ή ασταθές, αναλόγως τις αρχικές συνθήκες που του δίνουμε. Η περιοχή αυτή είναι αρκετά ευρεία και η ύπαρξή της θα πρέπει να επαληθευθεί σε μη γραμμικά μοντέλα ανωτέρου βαθμού ώστε να επιβεβαιώσουμε ότι βρισκόμαστε στη σωστή κατεύθυνση για την περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς της ελεύθερης επιφάνειας με τη χρήση αυτού του μοντέλου.



Σχήμα 4.8: Εξάρτηση του πλάτους απόκρισης από τον συντελεστή απόσβεσης για πλάτος διέγερσης ίσο με (α)0.022 και (β)0.03. Η συχνότητα διέγερσης ήταν και στις δυο περιπτώσεις ίση με 11 Hz

Κεφάλαιο 5

Μελέτη Διδιάστατου Μοντέλου

5.1 Εξαγωγή του Μοντέλου

5.1.1 Το Αυτόνομο Μοντέλο

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, το μοντέλο που επιλέξαμε να μελετήσουμε έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta}_1 + 2\xi_1\sigma_1\dot{\beta}_1 + \sigma_1^2\beta_1 + Q_1\ddot{n}_3\beta_1 + d_1(\ddot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2) + \\ & + d_2(\ddot{\beta}_1\beta_1^2 + \dot{\beta}_1^2\beta_1) + d_3\ddot{\beta}_2\beta_1 + \bar{d}_1\dot{\beta}_1\beta_2^2 + \bar{d}_2\ddot{\beta}_2\beta_2\beta_1 + \bar{d}_3\dot{\beta}_2^2\beta_1 + \bar{d}_4\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\beta_2 = 0 \\ & \ddot{\beta}_2 + 2\xi_2\sigma_2\dot{\beta}_2 + \sigma_2^2\beta_2 + d_4\ddot{\beta}_1\beta_1 + d_5\dot{\beta}_1^2 + \bar{d}_5\dot{\beta}_1\beta_1\beta_2 + \bar{d}_6\ddot{\beta}_2\beta_1^2 + \\ & + \bar{d}_7(\ddot{\beta}_2\beta_2^2 + \dot{\beta}_2^2\beta_2) + \bar{d}_8\dot{\beta}_1^2\beta_2 + \bar{d}_9\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\beta_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Οι μεταβλητές πλέον είναι δύο, καθώς εκφράζουμε την ελεύθερη επιφάνεια με τη βοήθεια των δύο πρώτων φυσικών κυματισμών. Θεωρούμε ότι οι όροι τάξης ανώτερης της τρίτης δεν επηρεάζουν σημαντικά το αποτέλεσμα και κατά συνέπεια παραλείπονται. Το προκύπτον σύστημα είναι δυο βαθμών ελευθερίας κίνησης και, όπως παρατηρούμε εύκολα, έχει πάλι τη μορφή της εξίσωσης Mathieu.

Παρόλα αυτά, όπως και με το μονοδιάστατο μοντέλο, το λογισμικό μας απαιτεί το σύστημα να εισαχθεί σε αυτόνομη μορφή. Μετά από αντικαταστάσεις αντίστοιχες με αυτές που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σύστημα θα

απαρτίζεται απο τις εξισώσεις που φαίνονται παρακάτω.

Για τον πρώτο φυσικό κυματισμό:

$$\dot{\beta}_1 = \phi_1$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & (\beta_1 n_{3\alpha} \sigma^2 y Q_1 + \beta_1^3 \bar{d}_6 n_{3\alpha} \sigma^2 y Q_1 + \beta_1 \beta_2^2 \bar{d}_7 n_{3\alpha} \sigma^2 y Q_1 - 2\phi_1 \xi_1 \sigma_1 - \\ & - 2\beta_1^2 \phi_1 \xi_1 \bar{d}_6 \sigma_1 - 2\beta_2^2 \phi_1 \xi_1 \bar{d}_7 \sigma_1 - \beta_1 \sigma_1^2 - \beta_1^3 \bar{d}_6 \sigma_1^2 - \beta_1 \beta_2^2 \bar{d}_7 \sigma_1^2 + \\ & + 2\beta_1 d_3 \phi_2 \xi_2 \sigma_2 + 2\beta_1 \beta_2 \phi_2 \xi_2 \bar{d}_2 \sigma_2 + \beta_1 \beta_2 d_3 \sigma_2^2 + \beta_1 \beta_2^2 \bar{d}_2 \sigma_2^2 - \\ & - \beta_1 d_2 \phi_1^2 + \beta_1 d_3 d_5 \phi_1^2 - d_1 \phi_1 \phi_2 - \beta_1 \phi_2^2 \bar{d}_3 - \beta_2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_4 \\ & + \beta_1 \beta_2 d_5 \phi_1^2 \bar{d}_2 - \beta_1^2 d_1 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_6 - \beta_2^2 d_1 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_7 + \beta_1 \beta_2 d_3 \phi_2^2 \bar{d}_7 + \beta_1 \beta_2 d_3 \phi_1^2 \bar{d}_8 + \\ & + \beta_1^2 d_3 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_9 - \beta_1^3 d_2 \phi_1^2 \bar{d}_6 - \beta_1^3 \phi_2^2 \bar{d}_3 \bar{d}_6 - \beta_1^2 \beta_2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_4 \bar{d}_6 - \\ & - \beta_1 \beta_2^2 d_2 \phi_1^2 \bar{d}_7 + \beta_1 \beta_2^2 \phi_2^2 \bar{d}_2 \bar{d}_7 - \beta_1 \beta_2^2 \phi_2^2 \bar{d}_3 \bar{d}_7 - \beta_2^3 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_4 \bar{d}_7 + \\ & + \beta_1 \beta_2^2 \phi_1^2 \bar{d}_2 \bar{d}_8 + \beta_1^2 \beta_2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_2 \bar{d}_9) / (1 + \beta_2 d_1 + \beta_1^2 d_2 - \beta_1^2 d_3 d_4 + \beta_2^2 \bar{d}_1 - \\ & - \beta_1^2 \beta_2 d_4 \bar{d}_2 - \beta_1^2 \beta_2 d_3 \bar{d}_5 - \beta_1^2 \beta_2^2 \bar{d}_2 \bar{d}_5 + \beta_1^2 \bar{d}_6 + \beta_1^2 \beta_2 d_1 \bar{d}_6 + \\ & + \beta_1^4 d_2 \bar{d}_6 + \beta_1^2 \beta_2^2 \bar{d}_1 \bar{d}_6 + \beta_2^2 \bar{d}_7 + \beta_2^3 d_1 \bar{d}_7 + \beta_1^2 \beta_2^2 d_2 \bar{d}_7 + \beta_2^4 \bar{d}_1 \bar{d}_7) \end{aligned}$$

(5.2)

Για τον δεύτερο φυσικο κυματισμό:

$$\dot{\beta}_2 = \phi_2$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = & (-\beta_1^2 d_4 n_{3\alpha} \sigma^2 y Q_1 - \beta_1^2 \beta_2 \bar{d}_5 n_{3\alpha} \sigma^2 y Q_1 + 2\beta_1 d_4 \phi_1 J1 \sigma_1 + \\ & + 2\beta_1 \beta_2 \phi_1 J1 \bar{d}_5 \sigma_1 + \beta_1^2 d_4 \sigma_1^2 + \beta_1^2 \beta_2 \bar{d}_5 \sigma_1^2 - 2\phi_2 J2 \sigma_2 - \\ & - 2\beta_2 d_1 \phi_2 J2 \sigma_2 - 2\beta_1^2 d_2 \phi_2 J2 \sigma_2 - 2\beta_2^2 \phi_2 J2 \bar{d}_1 \sigma_2 - \beta_2 \sigma_2^2 - \beta_2^2 d_1 \sigma_2^2 - \\ & - \beta_1^2 \beta_2 d_2 \sigma_2^2 - \beta_2^3 \bar{d}_1 \sigma_2^2 - d_5 \phi_1^2 \\ & - \beta_2 d_1 d_5 \phi_1^2 + \beta_1 d_1 d_4 \phi_1 \phi_2 - \beta_2 \phi_2^2 \bar{d}_7 - \beta_2 \phi_1^2 \bar{d}_8 - \beta_1 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_9 + \beta_1^2 d_2 d_4 \phi_1^2 - \\ & - \beta_1^2 d_2 d_5 \phi_1^2 - \beta_2^2 d_5 \phi_1^2 \bar{d}_1 + \beta_1^2 d_4 \phi_2^2 \bar{d}_3 + \beta_1 \beta_2 d_4 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_4 + \beta_1 \beta_2 d_1 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_5 - \\ & - \beta_2^2 d_1 \phi_2^2 \bar{d}_7 - \beta_2^2 d_1 \phi_1^2 \bar{d}_8 - \beta_1 \beta_2 d_1 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_9 + \beta_1^2 \beta_2 d_2 \phi_1^2 \bar{d}_5 + \beta_1^2 \beta_2 \phi_2^2 \bar{d}_3 \bar{d}_5 + \\ & + \beta_1 \beta_2^2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_4 \bar{d}_5 - \beta_1^2 \beta_2 d_2 \phi_2^2 \bar{d}_7 - \beta_2^3 \phi_2^2 \bar{d}_1 \bar{d}_7 - \beta_1^2 \beta_2 d_2 \phi_1^2 \bar{d}_8 - \\ & - \beta_2^3 \phi_1^2 \bar{d}_1 \bar{d}_8 - \beta_1^3 d_2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_9 - \beta_1 \beta_2^2 \phi_1 \phi_2 \bar{d}_1 \bar{d}_9) / (1 + \beta_2 d_1 + \beta_1^2 d_2 - \beta_1^2 d_3 d_4 + \\ & + \beta_2^2 \bar{d}_1 - \beta_1^2 \beta_2 d_4 \bar{d}_2 - \beta_1^2 \beta_2 d_3 \bar{d}_5 - \beta_1^2 \beta_2^2 \bar{d}_2 \bar{d}_5 + \beta_1^2 \bar{d}_6 + \beta_1^2 \beta_2 d_1 \bar{d}_6 + \\ & + \beta_1^4 d_2 \bar{d}_6 + \beta_1^2 \beta_2^2 \bar{d}_1 \bar{d}_6 + \beta_2^2 \bar{d}_7 + \beta_2^3 d_1 \bar{d}_7 + \beta_1^2 \beta_2^2 d_2 \bar{d}_7 + \beta_2^4 \bar{d}_1 \bar{d}_7) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ενώ για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως και προηγουμένως:

$$\dot{x} = \sigma y - x + x(x^2 + y^2) \quad (5.4)$$

$$\dot{y} = -\sigma x + y - y(x^2 + y^2)$$

5.1.2 Επιλογή Φυσικών Παραμέτρων

Η απόσβεση επιλεχθηκε να διατηρηθεί ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Επειδή αυτή τη φορά ο συντελεστής απόσβεσης χωρίζεται σε δυο επιμέρους, έναν για τον κάθε κυματισμό, επιλέξαμε να διχοτομήσουμε τον προηγούμενο

και να θέσουμε τους δυο συντελεστές απόσβεσης ίσους με 0.015 τον καθένα. Αρχικά επιλέχθηκε λόγος διαστάσεων ίδιος με την προηγούμενη περίπτωση (0.4), αλλά στη συνέχεια μελετήθηκαν και περιπτώσεις με λόγο γεωμετρικών διαστάσεων ίσο με 0.3 και 0.6. Έτσι παίρνουμε αποτελέσματα και την περιοχή κρίσιμου βάρους, στην οποία το μονοδιάστατο μοντέλο αδυνατούσε να δώσει αποτελέσματα, καθώς και για μεγαλύτερα βάρη. Για την πρώτη περίπτωση, η δεύτερη φυσική συχνότητα των κυματισμών υπολογίζεται ίση με 7.8. Για τις άλλες δυο γεωμετρίες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{h} = 0.3 \\ \sigma_1 = 4.76 \\ \sigma_2 = 7.67 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \bar{h} = 0.6 \\ \sigma_1 = 5.42 \\ \sigma_2 = 7.84 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2 Δυναμική Συμπεριφορά του Συστήματος

5.2.1 Γεωμετρικός λόγος 0.4

Οι Τρεις Περιοχές

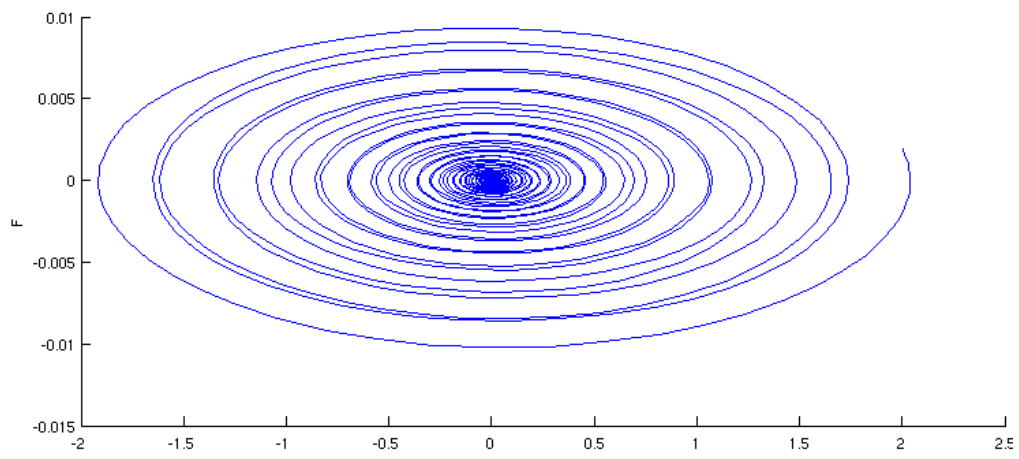
Σε χαμηλές συχνότητες διέγερσης το σύστημα είναι σαφέστατα ευσταθές, όπως είναι εμφανές στην εικόνα 5.1.

Μέσα ασταθή περιοχή, στην περιοχή της πρώτης φυσικής συχνότητας, το σύστημα ισορροπεί σε έναν ευσταθή limit cycle, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.2.

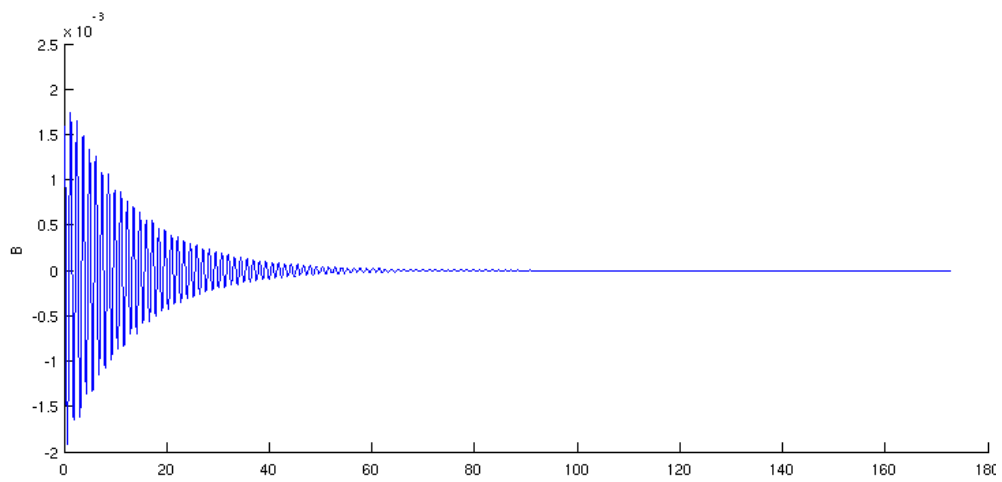
Η ενδιάμεση περιοχή εμφανίζεται κι αυτή κανονικά, καθώς σε αυτήν αναλόγως με τις αρχικές συνθήκες το σύστημα μπορεί να εμφανίζει ως ασταθή λύση το σημείο ισορροπίας ή έναν limit cycle. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται εμφανώς στις εικόνες 5.3 και 5.4.

Ο ασταθής limit cycle

Σε συχνότητες σχετικά μεγαλύτερες του διπλάσιου της πρώτης φυσικής αλλά πριν το διπλάσιο της δεύτερης φυσική και σε πλάτη διέγερσης αρκετά μεγάλα, παρατηρήθηκε η ύπαρξη ενός ασταθούς λιμιτ κςψλε σε περιοχή κατά τα άλλα ευσταθούς, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.5.

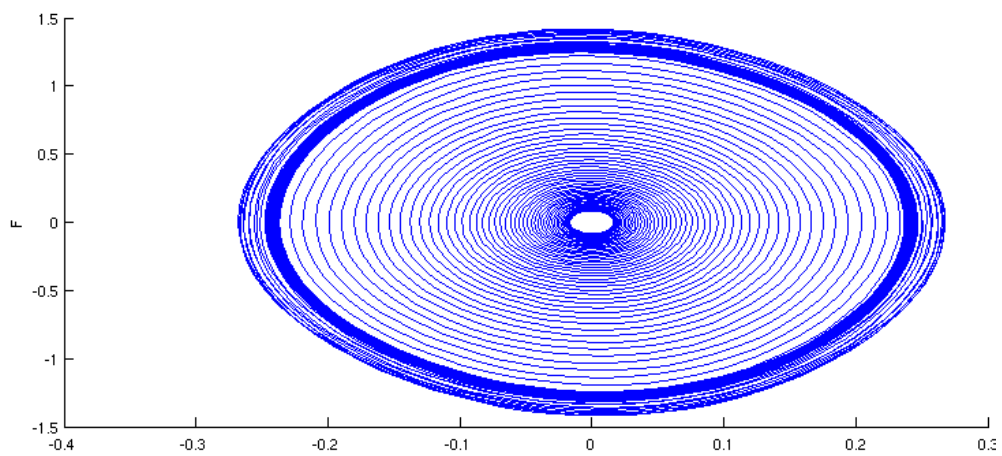


(α') Πορτραίτο Φάσης

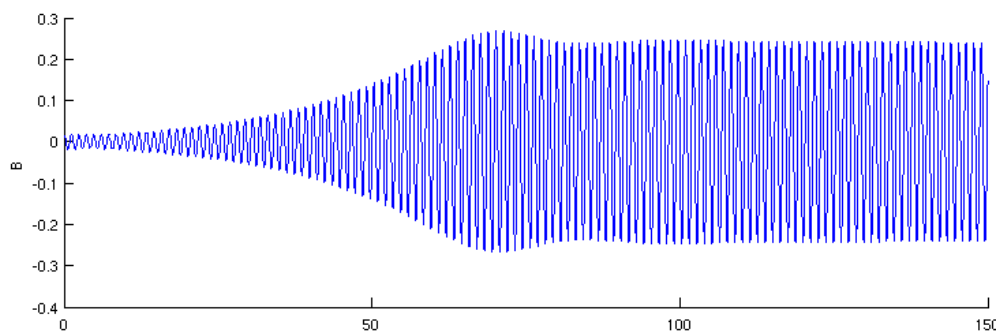


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.1: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 8 και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02

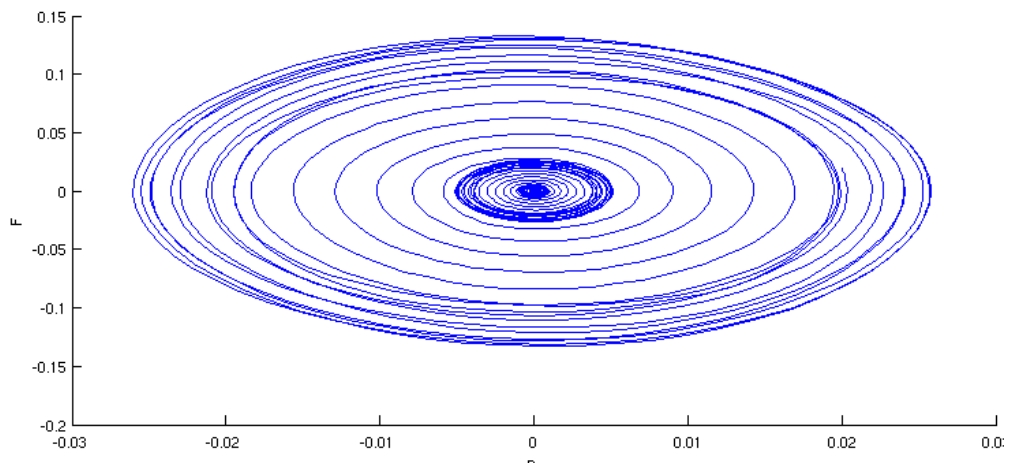


(α') Πορτραίτο Φάσης

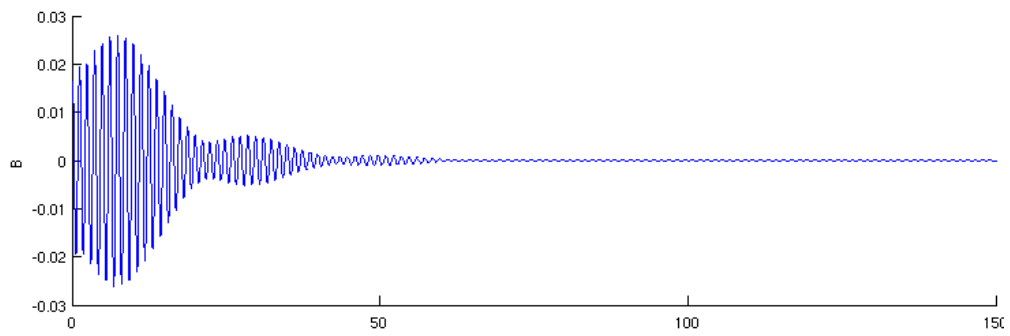


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.2: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 10.2 και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.03

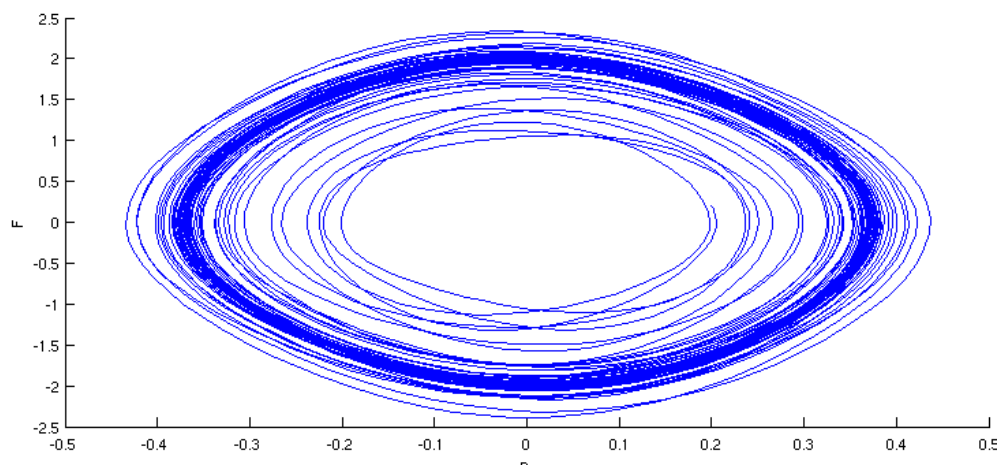


(α') Πορτραίτο Φάσης

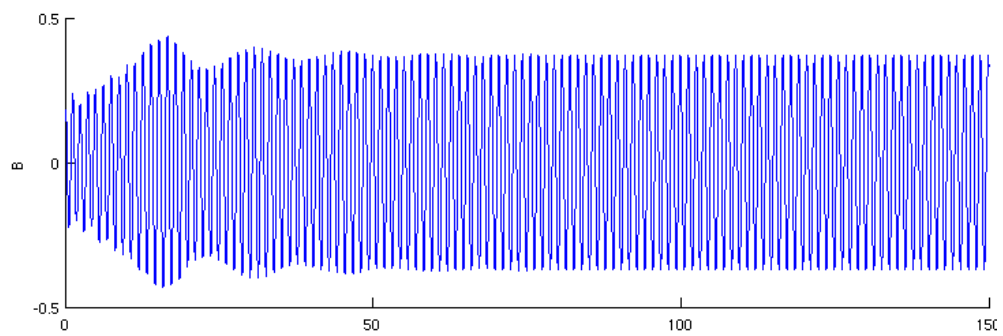


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.3: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9.8, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.04 και αρχική διαταραχή ίση με 0.02

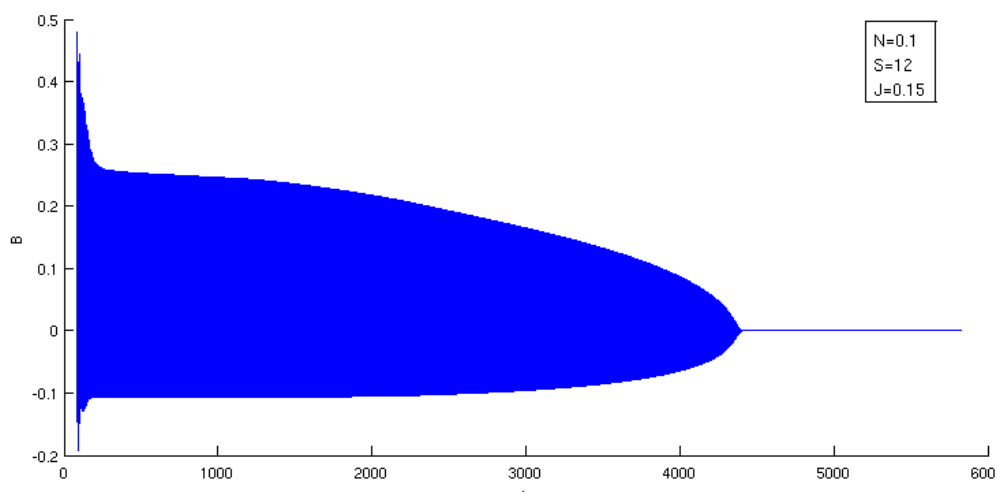


(α') Πορτραίτο Φάσης



(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.4: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9.8, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.04 και αρχική διαταραχή ίση με 0.2



Σχήμα 5.5: Ασταθής κύκλος που εμφανίζεται σε υψηλά πλάτη διέγερσης

5.2.2 Γεωμετρικός λόγος 0.3

Οι Τρεις Περιοχές

Οι τρεις περιοχές παρατηρούνται πάλι σαφώς. Η ευσταθής φαίνεται στην εικόνα 5.6, η ασταθής στην 5.7, ενώ η ενδιάμεση στις 5.8 και 5.9.

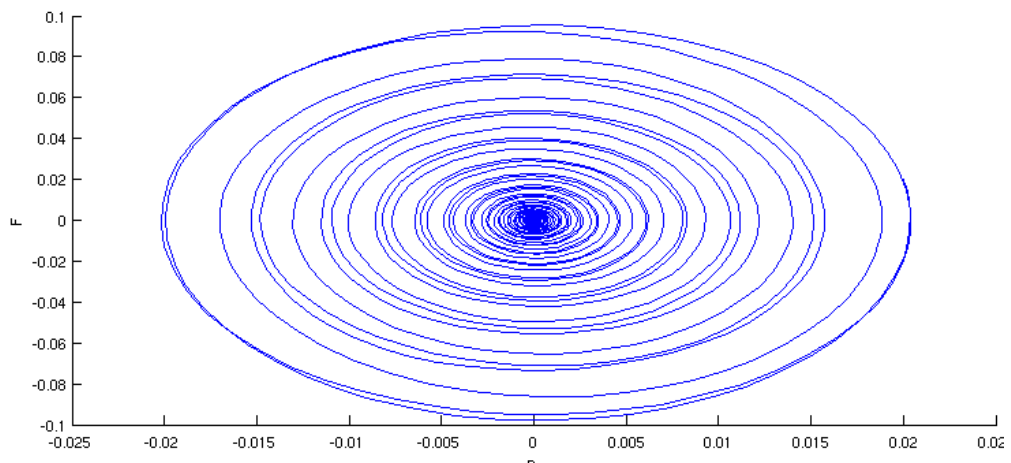
Ο Ευσταθής limit cycle

Αυτή τη φορά η συμπεριφορά που συναντούμε για μεγάλα πλάτη διέγερσης σε συχνότητες μεγαλύτερες από το διπλάσιο της πρώτης φυσικής (και εν προκειμένω περίπου στο διπλάσιο της δεύτερης φυσικής) είναι αρκετά διαφορετικές. Ο limit cycle είναι πλέον ευσταθής και παρατηρούμε ότι η μορφή του είναι αρκετά διαφορετική από αυτές που έχουμε συνηθίσει, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.10. Μειώνοντας την απόσβεση σε 0.025 ο κύκλος αυτός φαίνεται ξεκάθαρα. Ο κύκλος αυτός εμφανίζεται μόνο για μεγάλες αρχικές συνθήκες.

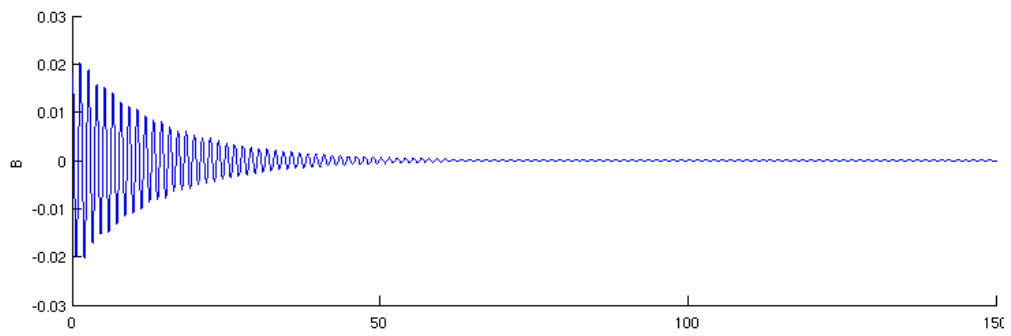
5.2.3 Γεωμετρικός λόγος 0.6

Οι Τρεις Περιοχές

Για άλλη μια φορά, οι τρεις περιοχές παρατηρούνται σαφώς. Η ευσταθής φαίνεται στην εικόνα 5.11, η ασταθής στην 5.12, ενώ η ενδιάμεση στις 5.13 και 5.9. Παρατηρούμε ότι η περιοχή αστάθειας και, συνεπώς και η ενδιάμεση περιοχή, έχουν μεταφερθεί σε αρκετά υψηλά πλάτη διέγερσης και για αυτό δεν είναι

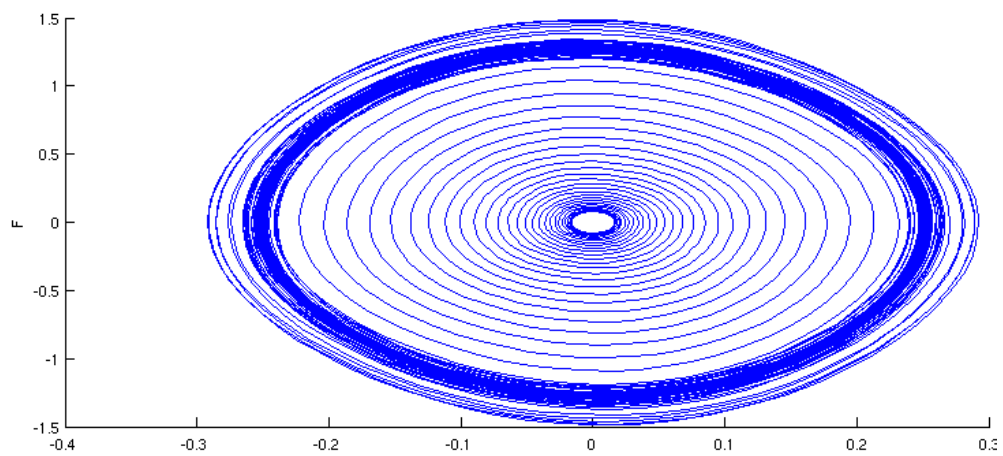


(α') Πορτραίτο Φάσης

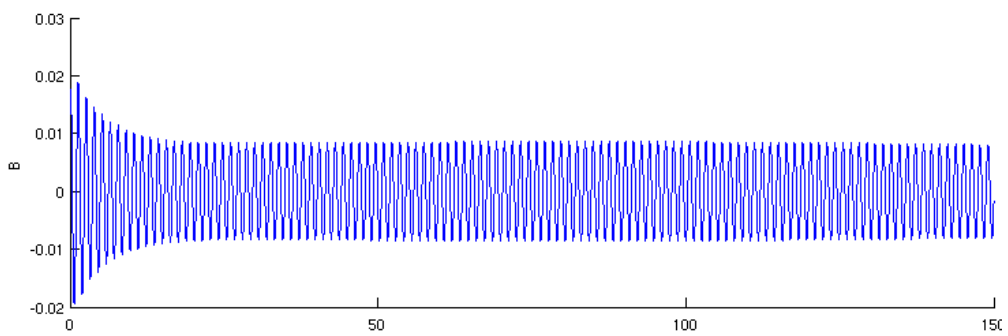


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.6: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 8 και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02

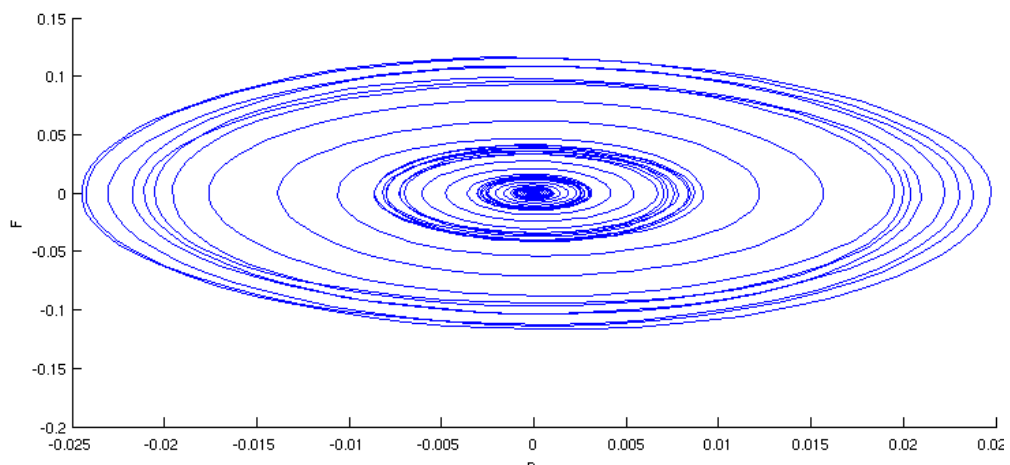


(α') Πορτραίτο Φάσης

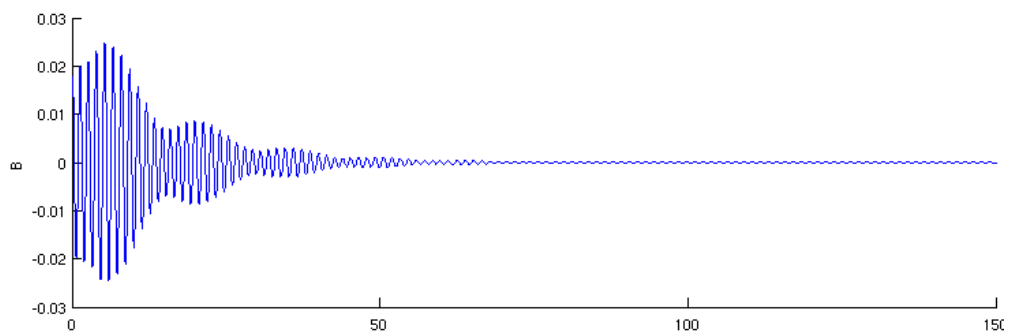


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.7: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9.6 και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02

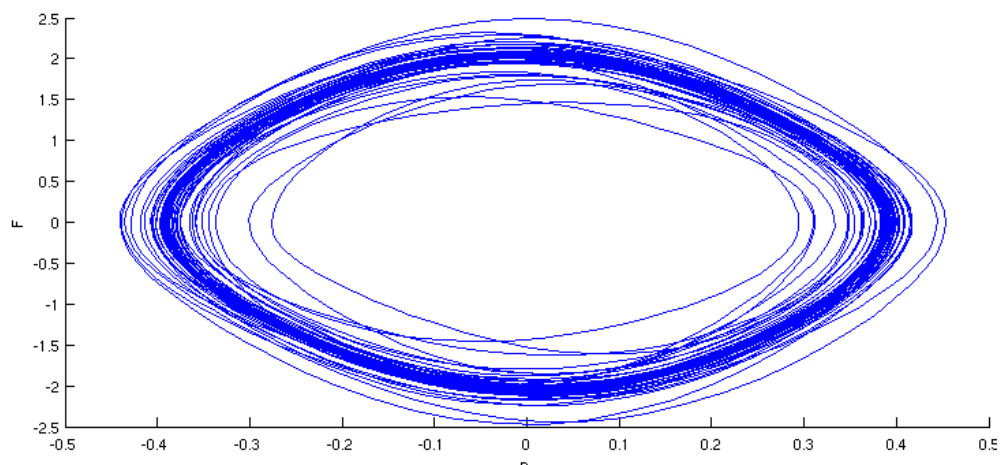


(α') Πορτραίτο Φάσης

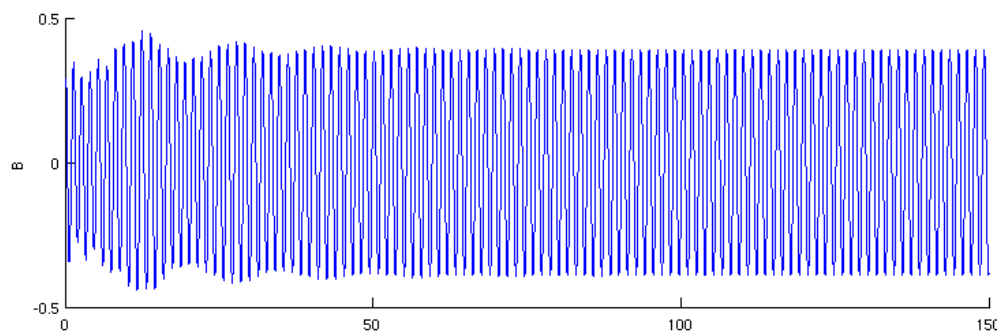


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.8: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02 και αρχική διαταραχή ίση με 0.02

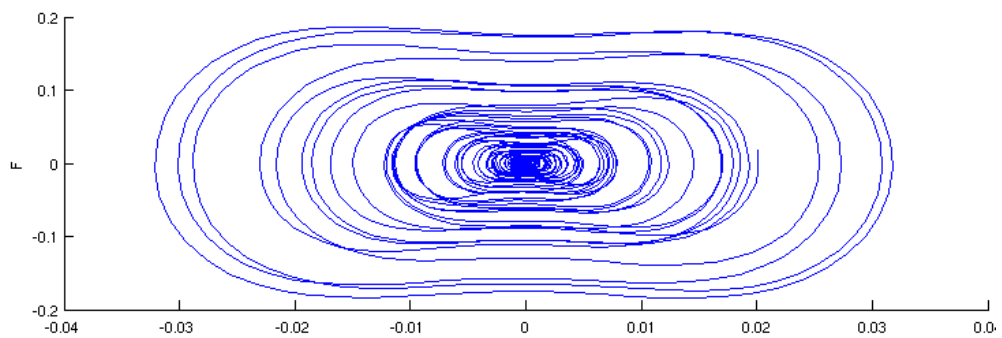


(α') Πορτραίτο Φάσης

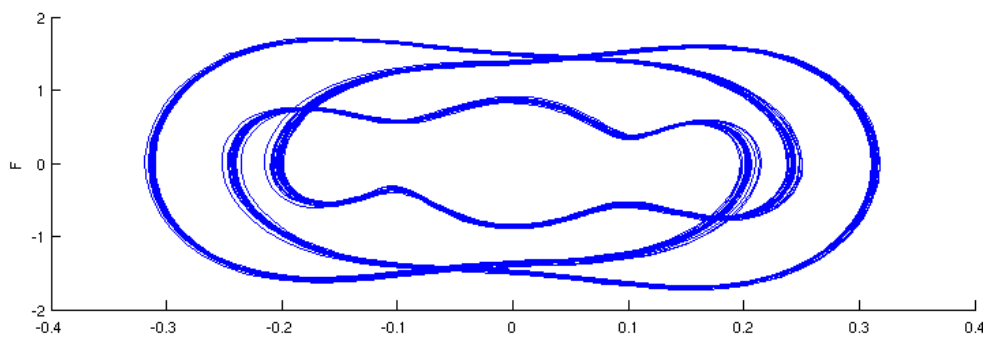


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.9: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02 και αρχική διαταραχή ίση με 0.3

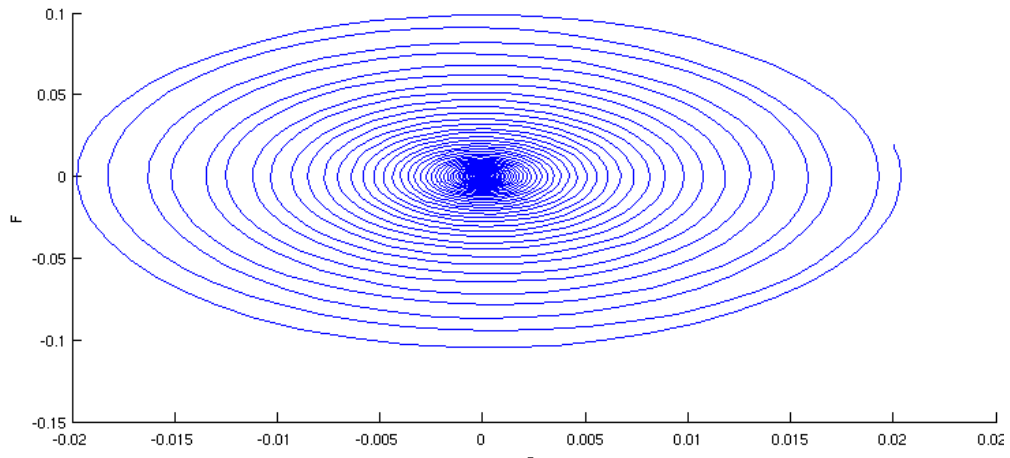


(α') Μικρές Αρχικές Συνθήκες

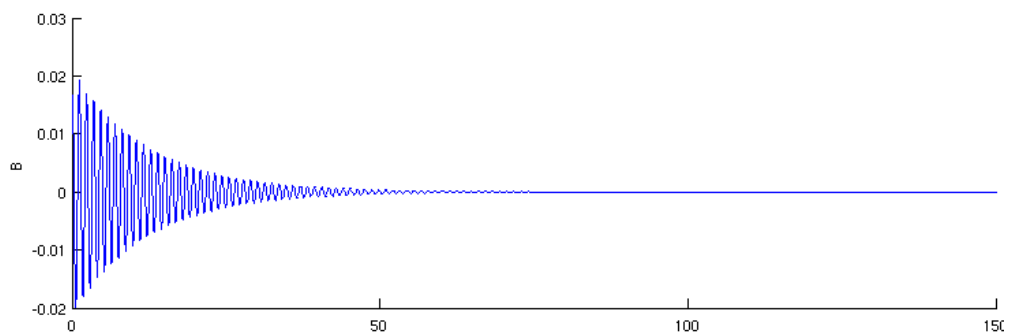


(β') Μεγάλες Αρχικές Συνθήκες

Σχήμα 5.10: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 14.3, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.15 και αρχική διαταραχή ίση με 0.02 και 0.2 αντίστοιχα. Στο δεύτερο διάγραμμα η απόσβεση έχει μειωθεί σε 0.025 ώστε να φαίνεται ξεκάθαρα ο κύκλος.



(α') Πορτραίτο Φάσης



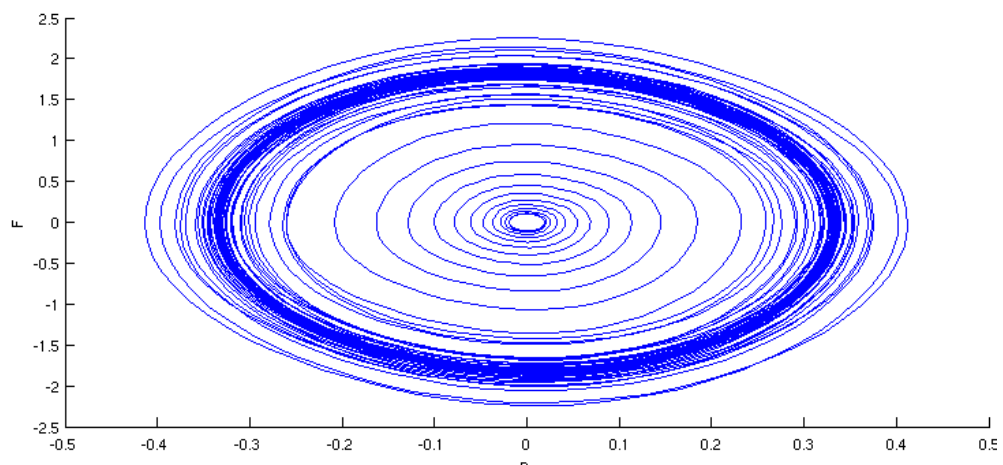
(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.11: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με δ και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.02

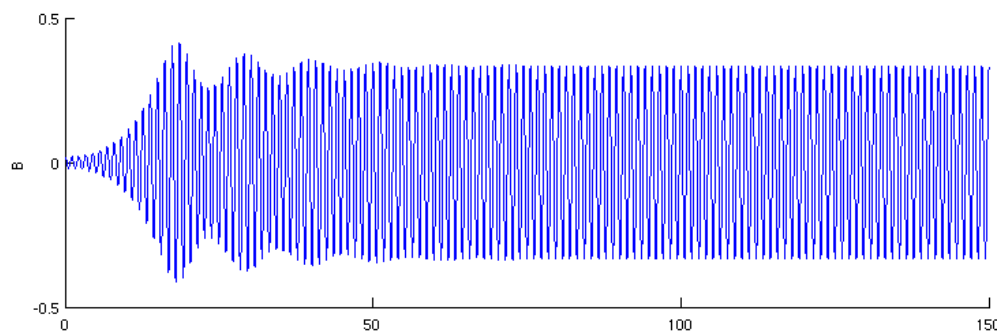
δυνατός ο εντοπισμός περιοχής ευσταθούς ή ασταθούς *limit cycle* σε συχνότητες ελαφρώς μεγαλύτερες του διπλάσιου της πρώτης φυσικής. Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή, εντοπίζουμε μόνο τις τρεις βασικές περιοχές.

5.3 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι το τριτοτάξιο μοντέλο εμφανίζει τα φαινόμενα παραμετρικής αστάθειας που περιμέναμε. Αυτό ήταν επακόλουθο της μορφής του συστήματός μας, η οποία εξακολουθεί να είναι αυτή της εξίσωσης Mathieu. Επιβεβαιώνεται, πέραν τούτου, η ύπαρξη της ενδιάμεσης περιοχής, που ήταν και ο βασικός στόχος αυτής της μελέτης. Η περιοχή αυτή εμφανίζει μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς η συμπεριφορά του συστήματος σε αυτή εξαρτάται

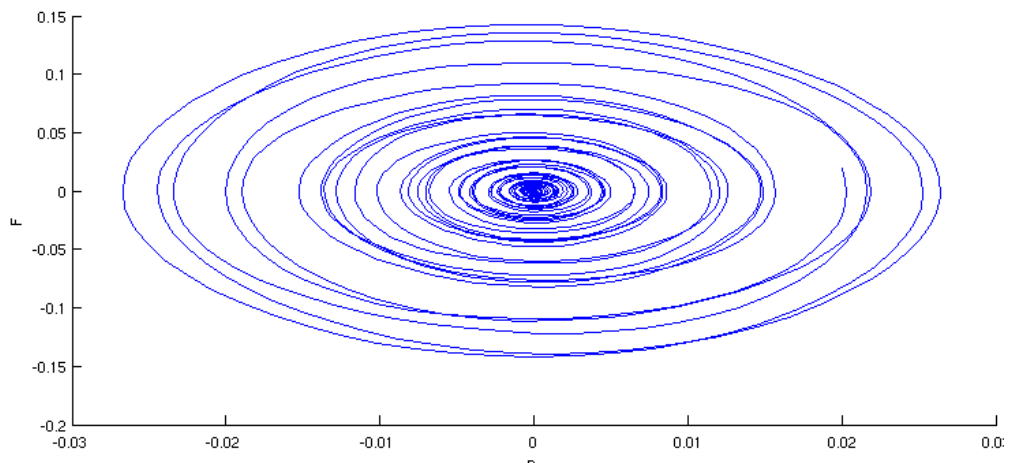


(α') Πορτραίτο Φάσης

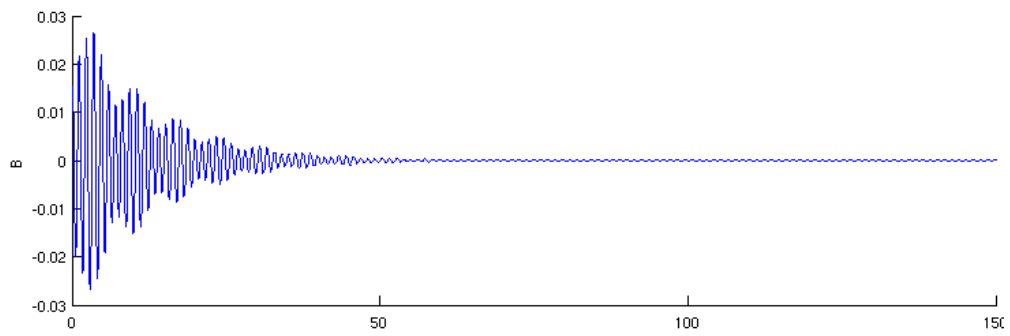


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.12: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 10.8 και πλάτος διέγερσης ίσο με 0.25

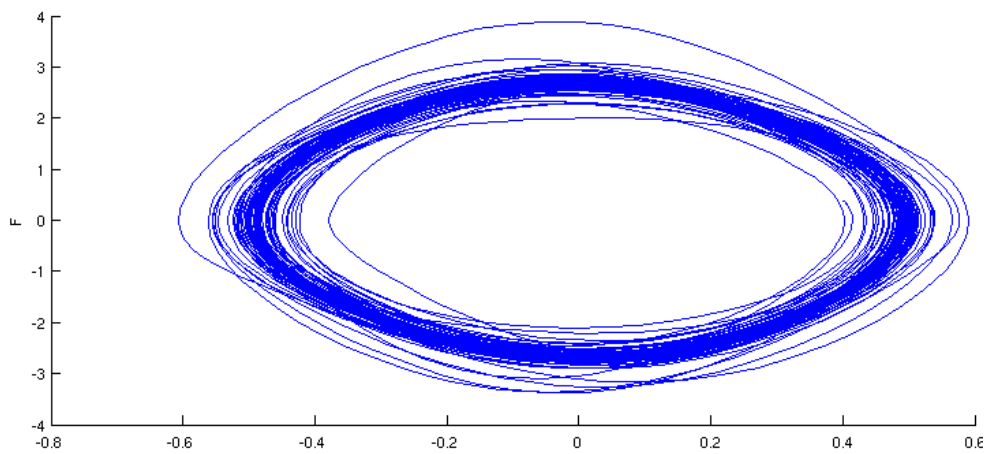


(α') Πορτραίτο Φάσης

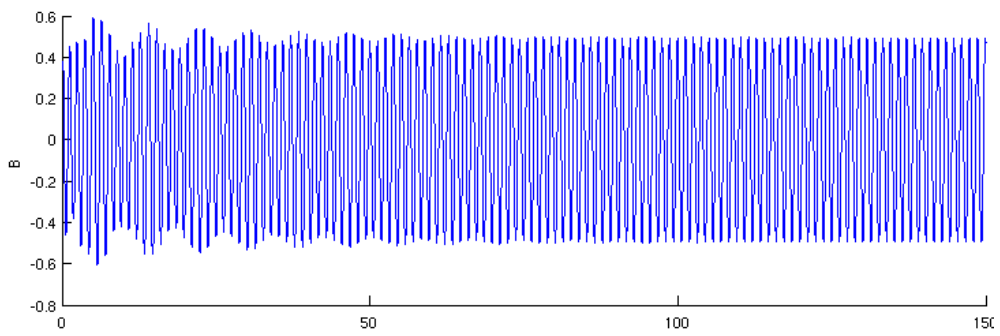


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.13: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9.8, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.25 και αρχική διαταραχή ίση με 0.02



(α') Πορτραίτο Φάσης

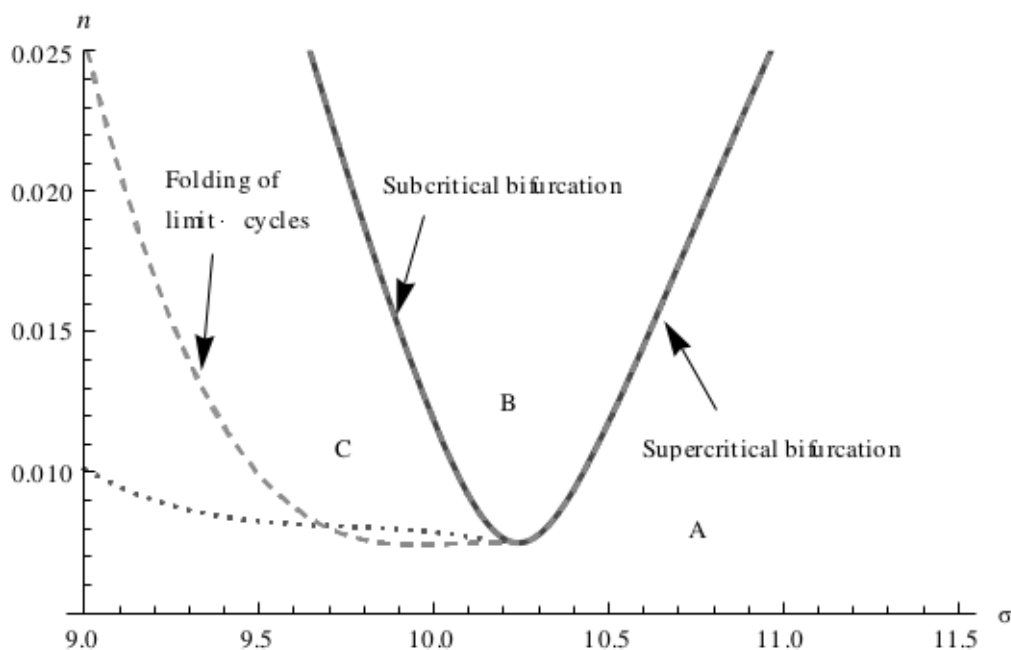


(β') Απόκριση στο χρόνο

Σχήμα 5.14: Συμπεριφορά του συστήματος για συχνότητα διέγερσης ίση με 9.8, πλάτος διέγερσης ίσο με 0.25 και αρχική διαταραχή ίση με 0.4

σημαντικά από τις αρχικές συνθήκες που δίνουμε σε αυτό.

Η συμπεριφορά του συστήματος σχετικά με τα παραπάνω παρατηρείται ανεξαρτήτως της γεωμετρίας της δεξαμενής, δηλαδή τόσο σε πεπερασμένο βάθος όσο και σε κρίσιμο και μεγαλύτερο. Αναλόγως με το βάθος, βεβαίως, οι περιοχές μετακινούνται, αλλά τα φαινόμενα παραμένουν ίδια ποιοτικά. Σε μεγάλα πλάτη διέγερσης και κοντά στην δεύτερη περιοχή αστάθειας -αυτή που αντιστοιχεί στη δεύτερη φυσική συχνότητα- εμφανίζονται limit cycles των οποίων η μορφή είναι αρκετά ενδιαφέρουσα. Οι κύκλοι αυτοί δεν αντιστοιχούν στην ασταθή περιοχή της δεύτερης φυσικής συχνότητας, αλλά στην ενδιάμεση περιοχή της. Αδυναμία του μοντέλου της τάξης που μελετούμε να φτάσει σε δώσει αποτελέσματα για αρκετά μεγάλα πλάτη και συχνότητες μας αποτρέπει από το να έχουμε σαφή εικόνα αυτών των περιοχών. Για τον ίδιο λόγο, σε λόγο βάρους προς μήκος ίσο με 0.6, όπου η περιοχή αστάθειας μετακινείται αρκετά προς τα πάνω, οι κύκλοι αυτοί δεν παρατηρούνται (πιθανώς βρίσκονται εκτός των ορίων του μοντέλου).



Σχήμα 5.15: Σύγκριση των περιοχών που προκύπτουν από το μοντέλο πρώτης τάξης (τελείες) και το μοντέλο τρίτης τάξης (διακεκομμένη γραμμή)

Κεφάλαιο 6

Απεικόνιση Ελευθέρων Επιφανειών

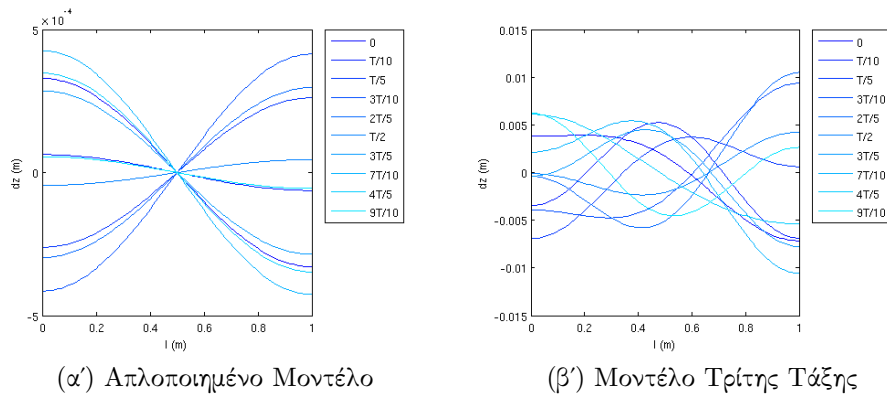
6.1 Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής μελετήσαμε τη δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου μας σε διάφορες συνθήκες φόρτισης και τη συγκρίναμε με αυτή του πιο απλοποιημένου μοντέλου. Είναι σημαντικό όμως, για την ολοκληρωμένη εποπτεία του θέματος, να εξετάσουμε και τη μορφή που παίρνει η ελεύθερη επιφάνεια στην κάθε περίπτωση.

Στο απλοποιημένο μοντέλο γίνεται χρήση μόνο του πρώτου φυσικού κυματισμού, ενώ στο υπό μελέτη η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας προκύπτει από υπέρθεση των δυο πρώτων κυματισμών. Είναι προφανές, λοιπόν, ότι και μόνο από αυτό το γεγονός, η επιφάνεια που θα προκύπτει με το νέο μοντέλο θα έχει μορφή πιο σύνθετη και κοντινότερη στην πραγματική. Στο σύνθετο μοντέλο μας δόθηκε η δυνατότητα να μελετήσουμε και περισσότερους λόγους βαθών, όπου παρουσιάζει ενδιαφέρον η παρατήρηση πιθανών διαφοροποιήσεων.

Υπάρχουν λοιπόν μια σειρά από συγκρίσεις που θα πρέπει να πραγματοποιηθούν. Η πρώτη είναι μεταξύ του απλοποιημένου μοντέλου και του νέου μοντέλου για λόγο βαθούς ίσο με 0.4, ενώ η δεύτερη είναι η σύγκριση των επιφανειών που δημιουργούνται στο νέο μοντέλο για διάφορους λόγους βαθών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η σύγκριση της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας σε κάθε ένα μοντέλο σε διαφορετικές καταστάσεις δυναμικής.

Για την οπτικοποίηση των επιφανειών πολλαπλασιάσαμε τις ιδιοσυναρτήσεις που υπολογίσαμε με τη βοήθεια του λογισμικού `matplotlib` με τις αντίστοιχες ιδιομορφές και (στην περίπτωση του σύνθετου μοντέλου) υπερθέσαμε τους δυο κυματισμούς για να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα.



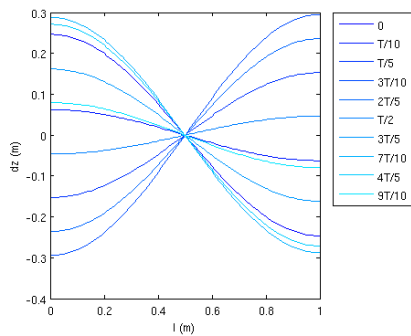
Σχήμα 6.1: Απόκριση στην ευσταθή περιοχή, στην περιοχή των 5 sec

6.2 Σύγκριση απλοποιημένου μοντέλου με το μοντέλο τρίτης τάξεως

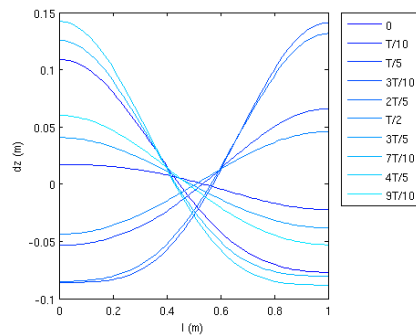
Στα σχήματα 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 βλέπουμε συγκριτικά τη συμπεριφορά των δυο συστημάτων, σε ίδιο λόγο βάρους (0.4) και σε ίδιες χρονικές στιγμές. Η σημαντικότερη διαφοροποίηση είναι ότι στο απλοποιημένο σύστημα ο κόμβος στο μέσο του μήκους της δεξαμενής είναι σταθερός με ανύψωση πάντα ίση με το μηδέν. Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς το απλοποιημένο μοντέλο, όπως είπαμε παραπάνω, χρησιμοποιεί μόνο τον πρώτο κυματισμό για την περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας. Στο δεύτερο μοντέλο βλέπουμε ότι η επίδραση του δευτέρου κυματισμού έχει εξαλείψει πλήρως την ύπαρξη του κόμβου αυτού. Είναι επίσης σημαντική η παρατήρηση ότι, στην ασταθή κατάσταση, η απόκριση του μοντέλου τρίτης τάξεως έχει περίπου το μισό πλάτος από ότι αυτή του απλοποιημένου. Αυτό πιθανόν είναι αποτέλεσμα φαινομένων απόσβεσης που προκύπτουν λόγω αλληλεπίδρασης των δύο κυματισμών μεταξύ τους, στο τρίτης τάξεως μοντέλο.

6.3 Σύγκριση για Διάφορους Λόγους Βάρους

Στα σχήματα 6.5 έως και 6.10 βλέπουμε πώς συμπεριφέρεται το σύστημα στις τρεις περιοχές για διαφορετικούς λόγους βάρους. Η σημαντικότερη διαφορά παρατηρείται στη συμπεριφορά σε λόγο βάρους 0.6. Το σύστημα σε αυτό το λόγο φαίνεται να βρίσκεται αρκετά κοντά στην κατάσταση σταθερού κόμβου στο μέσο, κάτι το οποίο γίνεται ξεκάθαρα εμφανές στην ασταθή περιοχή, όπου ο δεύτερος κυματισμός αποσβάνει τελείως και δεν συνεισφέρει στην μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. Μια σημαντική, επίσης, παρατήρηση για αυτό το

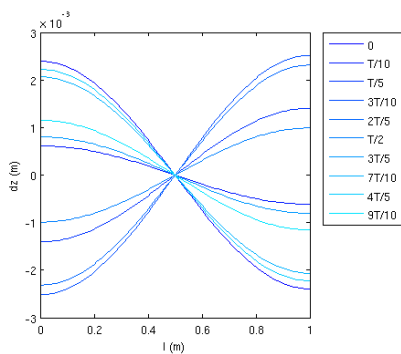


(α') Απλοποιημένο Μοντέλο

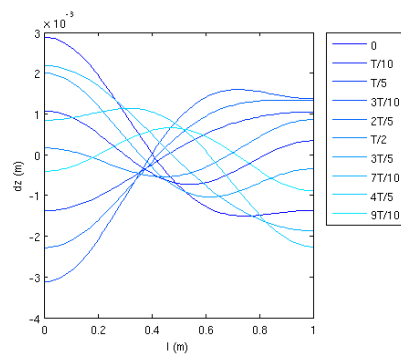


(β') Μοντέλο Τρίτης Τάξης

Σχήμα 6.2: Απόκριση στην ασταθή περιοχή, στην περιοχή των 80 sec

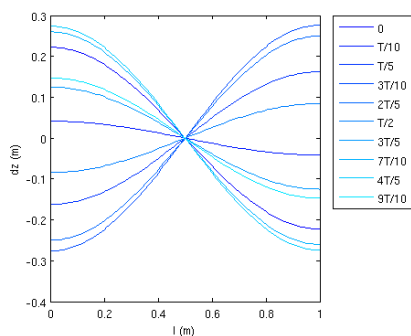


(α') Απλοποιημένο Μοντέλο

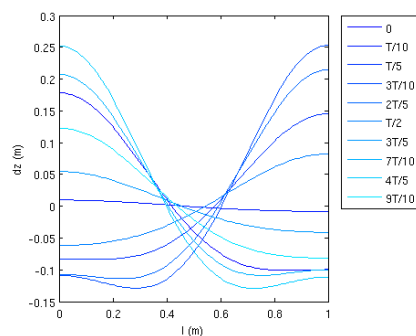


(β') Μοντέλο Τρίτης Τάξης

Σχήμα 6.3: Απόκριση στην ενδιάμεση περιοχή, με μικρες αρχικές συνθήκες, στην περιοχή των 20 sec

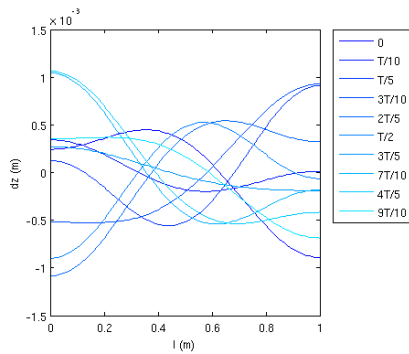


(α') Απλοποιημένο Μοντέλο

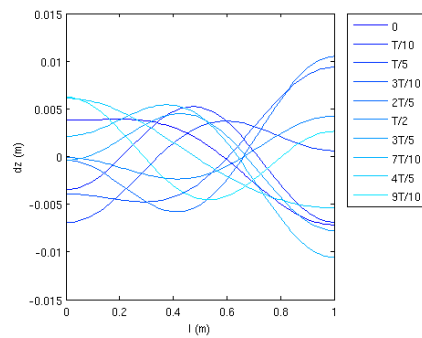


(β') Μοντέλο Τρίτης Τάξης

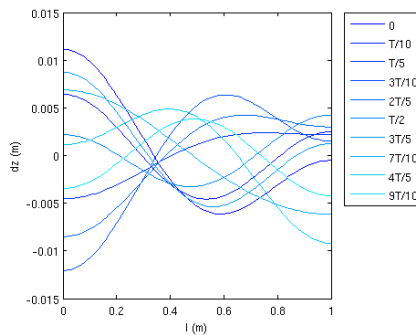
Σχήμα 6.4: Απόκριση στην ενδιάμεση περιοχή, με μεγάλες αρχικές συνθήκες, στην περιοχή των 80 sec



(α') Λόγος Βάθους 0.3



(β') Λόγος Βάθους 0.4



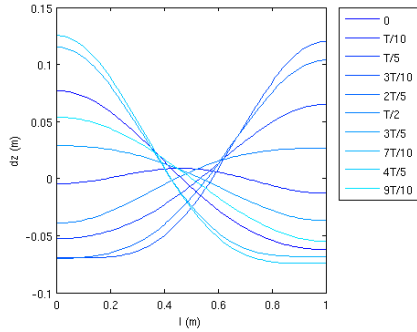
(γ') Λόγος Βάθους 0.6

Σχήμα 6.5: Απόκριση στην ευσταθή περιοχή, στην περιοχή των 5 sec

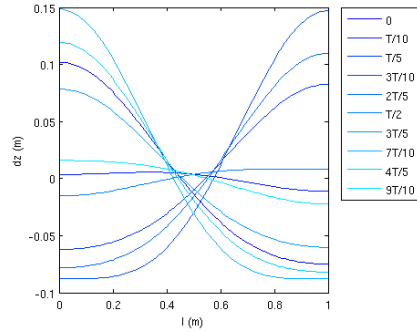
λόγο βάθους είναι η απουσία εμφανούς μεταβατικού σταδίου πριν την κατάσταση σταθερής απόκρισης στην ασταθή περιοχή, λόγω του οποίου παραλείψαμε τον λόγο αυτό στο αντίστοιχο σχήμα. Στην ενδιαμέση περιοχή το μεταβατικό στάδιο παρατηρείται κανονικά.

6.4 Σύγκριση για τις Διάφορες Καταστάσεις σε Κάθε Λόγο Βάθους

Παρατηρώντας συγκεντρωτικά τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στις διάφορες καταστάσεις δυναμικής συμπεριφοράς για τον εκάστοτε λόγο βάθους, διαπιστώνουμε ότι στην ευσταθή κατάσταση έχουμε σημαντικά διαφορετική μορφή. Συγκεκριμένα, λόγω των μειωμένων αποκρίσεων, είναι αισθητά πιο έντονη η συμβολή του δεύτερου κυματισμού. Στις υπόλοιπες καταστάσεις οι αποκρίσεις που προκύπτουν λόγω της διέγερσης του πρώτου κυματισμού είναι επαρκώς μεγάλες ώστε ο δεύτερος να προκαλεί απλώς μια μικρή διαφοροποίηση. Το φαι-

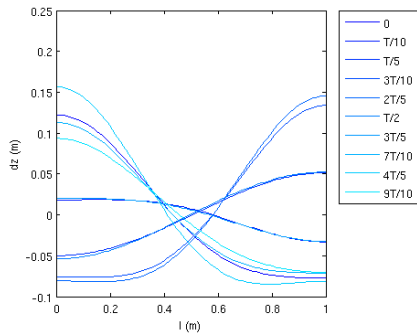


(α') Λόγος Βάθους 0.3

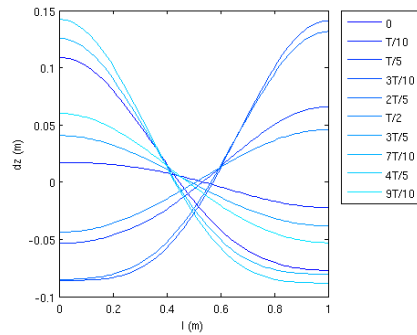


(β') Λόγος Βάθους 0.4

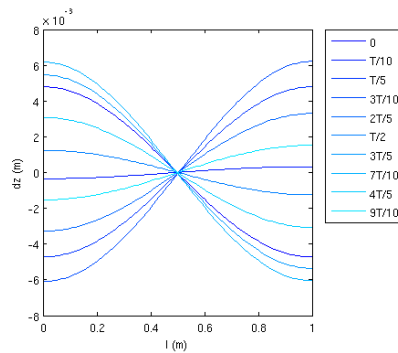
Σχήμα 6.6: Απόκριση στην ασταθή περιοχή, στην περιοχή των 20 sec



(α') Λόγος Βάθους 0.3

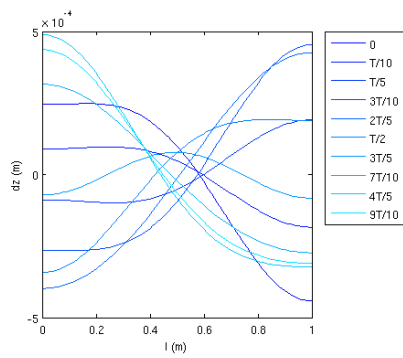


(β') Λόγος Βάθους 0.4

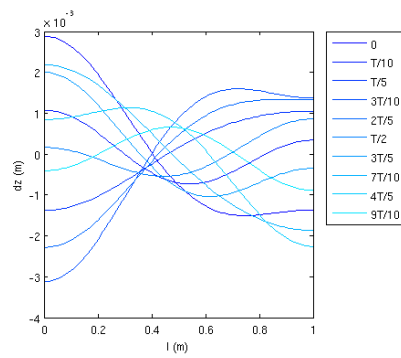


(γ') Λόγος Βάθους 0.6

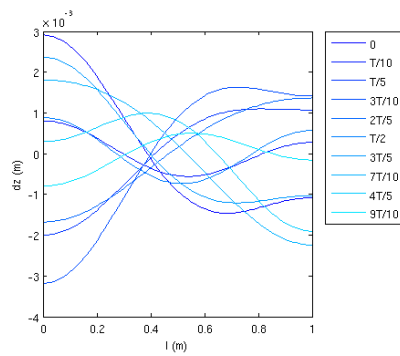
Σχήμα 6.7: Απόκριση στην ασταθή περιοχή, στην περιοχή των 80 sec



(α') Λόγος Βάθους 0.3

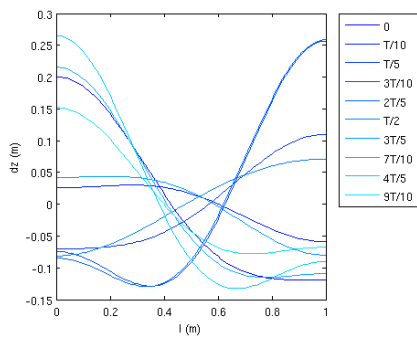


(β') Λόγος Βάθους 0.4

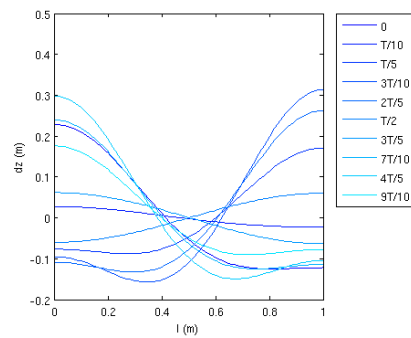


(γ') Λόγος Βάθους 0.6

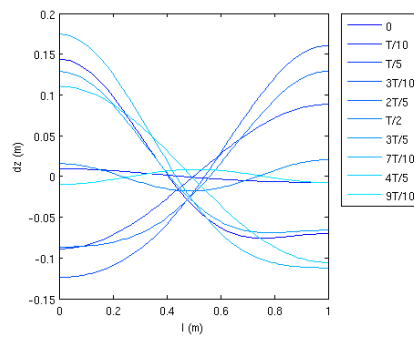
Σχήμα 6.8: Απόκριση στην ενδιάμεση περιοχή, με μικρές αρχικές συνθήκες, στην περιοχή των 20 sec



(α') Λόγος Βάθους 0.3

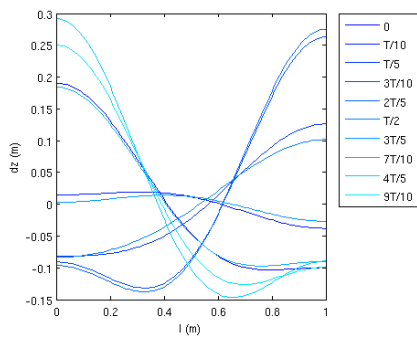


(β') Λόγος Βάθους 0.4

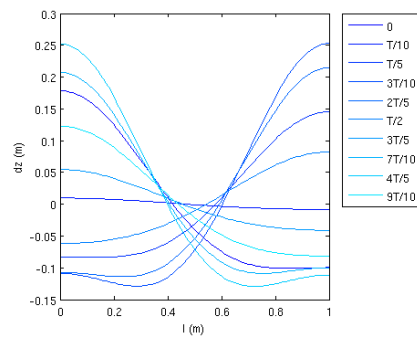


(γ') Λόγος Βάθους 0.6

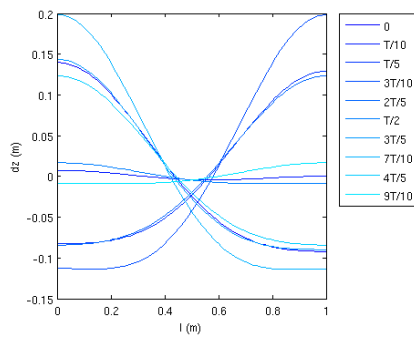
Σχήμα 6.9: Απόκριση στην ενδιαμέση περιοχή, με μεγάλες αρχικές συνθήκες, στην περιοχή των 20 sec



(α') Λόγος Βάθους 0.3



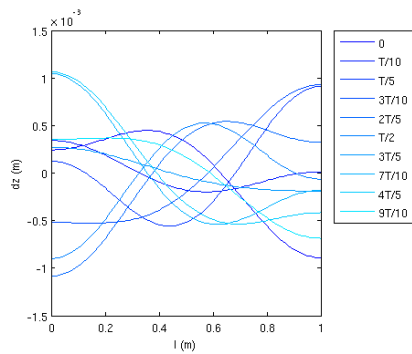
(β') Λόγος Βάθους 0.4



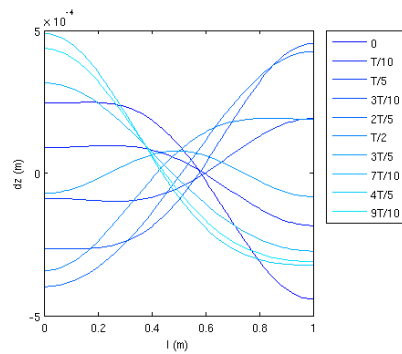
(γ') Λόγος Βάθους 0.6

Σχήμα 6.10: Απόκριση στην ενδιάμεση περιοχή, με μεγάλες αρχικές συνθήκες, στην περιοχή των 80 sec

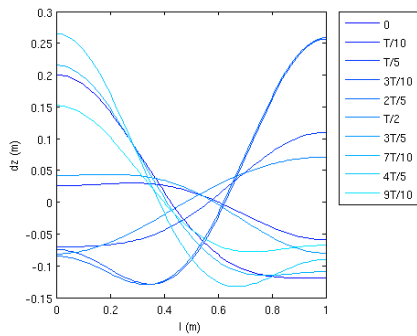
νόμενο αυτό, όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, γίνεται πιο έντονο όσο ο λόγος βάθους μεγαλώνει.



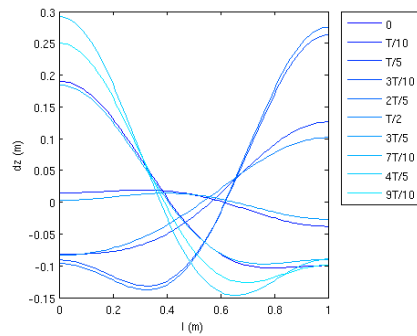
(α) Ευσταθής Περιοχή



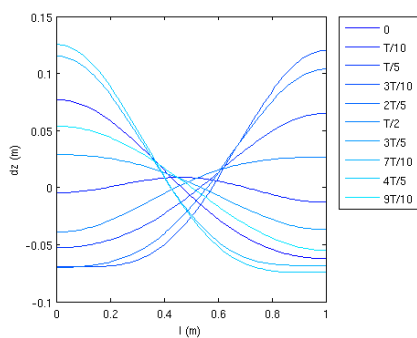
(β') Ενδιάμεση Ευσταθής Περιοχή



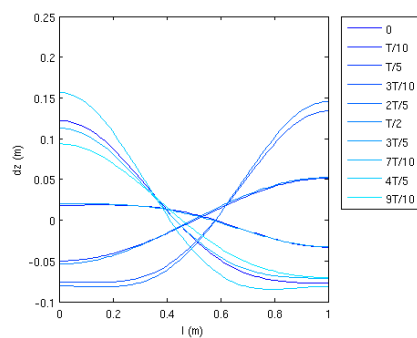
(γ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μεταβατική Κατάσταση)



(δ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)

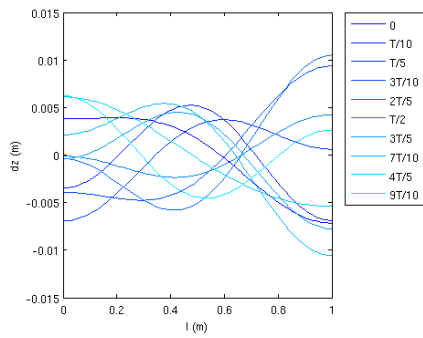


(ε') Ασταθής Περιοχή (Μεταβατική Κατάσταση)

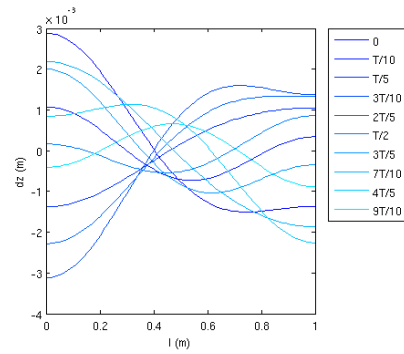


(ς') Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)

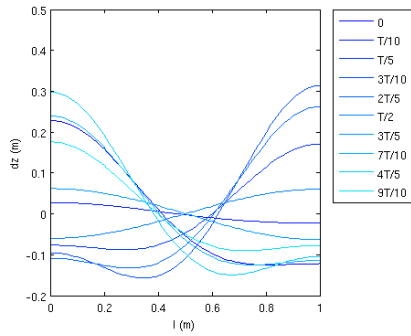
Σχήμα 6.11: Λόγος βάθους ίσος με 0.3



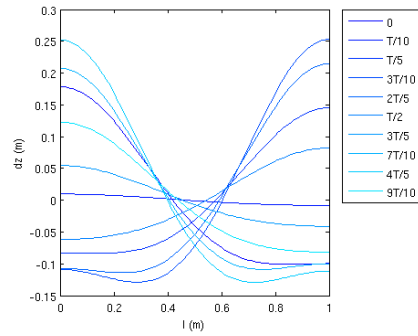
(α) Ευσταθής Περιοχή



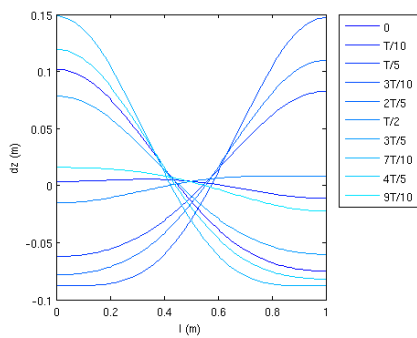
(β') Ενδιάμεση Ευσταθής Περιοχή



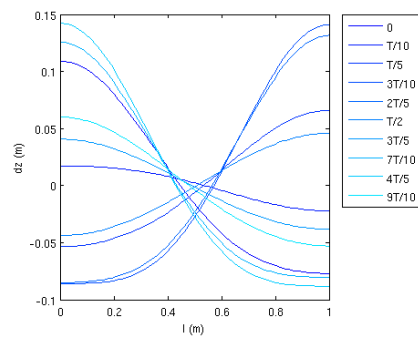
(γ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μεταβατική Κατάσταση)



(δ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)

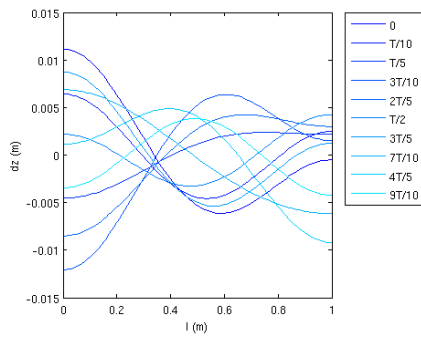


(ε') Ασταθής Περιοχή (Μεταβατική Κατάσταση)

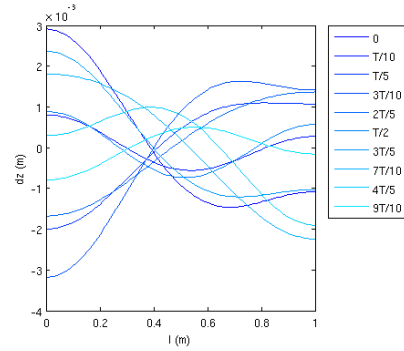


(ς') Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)

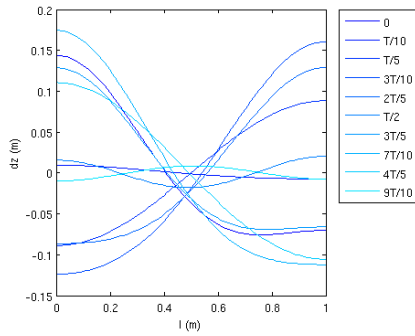
Σχήμα 6.12: Λόγος βάθους ίσος με 0.4



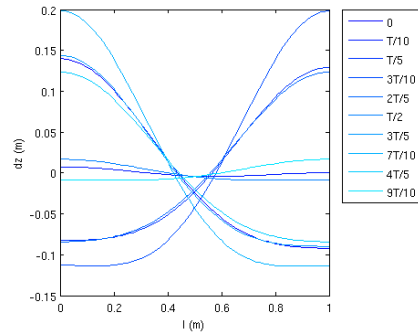
(α) Ευσταθής Περιοχή



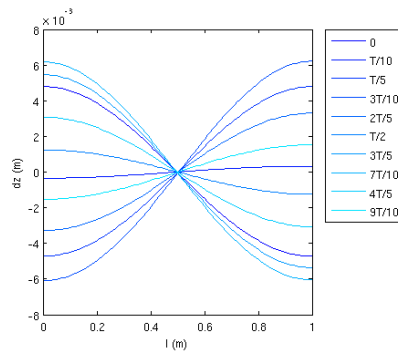
(β') Ενδιάμεση Ευσταθής Περιοχή



(γ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μεταβατική Κατάσταση)



(δ') Ενδιάμεση Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)



(ε') Ασταθής Περιοχή (Μόνιμη Κατάσταση)

Σχήμα 6.13: Λόγος βάθους ίσος με 0.6

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

7.1 Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της παραπάνω εργασίας, εξάγαμε, συγκεντρωτικά, τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Τα φαινόμενα παραμετρικής αστάθειας εμφανίζονται και στο τριτοτάξιο μοντέλο.
- Η ενδιάμεση ασταθής/ευσταθής περιοχή εμφανίζεται επίσης στο τριτοτάξιο μοντέλο.
- Η συμπεριφορά, ποιοτικά, του συστήματος είναι η ίδια ανεξαρτήτως από το λόγο βάρθους, με τις περιοχές να μετατοπίζονται προς τα πάνω και δεξιά όσο αυξάνεται ο λόγος βάρθους.
- Σε μεγάλα πλάτη διέγερσης και κοντά στη δεύτερη φυσική συχνότητα εμφανίζεται η ενδιάμεση ασταθής/ευσταθής περιοχή του δεύτερου κυματισμού (όχι σε μεγάλους λόγους βάρθους λόγω του περιορισμού του πλάτους διέγερσης).
- Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στο τριτοτάξιο μοντέλο είναι σημαντικά διαφορετική και ακριβέστερη σε σχέση με το απλοποιημένο. Η διαφοροποίηση αυτή γίνεται πιο έντονη σε μικρά πλάτη απόκρισης.
- Στο τριτοτάξιο μοντέλο παρατηρούνται φαινόμενα απόσβεσης μεταξύ των δυο κυματισμών, τα οποία οδηγούν σε αρκετά μικρότερα πλάτη αποκρίσεων σε σχέση με το απλοποιημένο μοντέλο
- Αύξηση του λόγου βάρθους μειώνει την επίδραση του δεύτερου κυματισμού.

7.2 Αντικείμενα για Μελλοντική Μελέτη

Όπως είδαμε, το τριτοτάξιο μοντέλο δυο βαθμών ελευθερίας κίνησης μπορεί να προβλέψει με μεγάλη ακρίβεια τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος σε μεγάλο εύρος βάθους. Έχει σημασία, παρόλα αυτά, να εξετάσουμε αν τα αποτελέσματά μας επαληθεύονται από μοντέλα μεγαλύτερες ακρίβειας. Επόμενα βήματα της παρούσας μελέτης θεωρούνται τα εξής:

1. Εξέταση του πεμπτοτάξιου μοντέλου δυο βαθμών ελευθερίας κίνησης για την επιβεβαίωση της ύπαρξης τόσο της ευσταθούς και ασταθούς περιοχής, καθώς και της ενδιάμεσης.
2. Μελέτη της συμπεριφοράς του παραπάνω μοντέλου σε μεγαλύτερα πλάτη και συχνότητες από αυτά που μελετήθηκαν στην παρούσα μελέτη. Εξέταση της παρουσίας δεύτερης περιοχής αστάθειας (στην περιοχή του διπλάσιου της δεύτερης φυσικής συχνότητας) και αντίστοιχης ενδιάμεσης περιοχής. Ερμηνεία της μορφής των limit cycle που εμφανίζονται σε αυτή την περιοχή.
3. Πειραματική επαλήθευση των αποτελεσμάτων, που είναι ο μοναδικός αξιόπιστος τρόπος επιβεβαίωσης των θεωρητικών.
4. Μελέτη του μοντέλου που χρησιμοποιεί και τον τρίτο φυσικό κυματισμό για την περιγραφή της ελεύθερης επιφάνειας, που αποτελεί και το πλέον γενικό μοντέλο σύμφωνα με τον Abramson (1996).
5. Γενίκευση στην περίπτωση τρισδιάστατης δεξαμενής, όπου μπορούν να μελετηθούν και τα φαινόμενα στροβιλισμού. Ένα τέτοιου τύπου μοντέλο δεν θα επιβαρύνει το πρόγραμμα πολύ περισσότερο από το διδιάστατο.
6. Μελέτη δεξαμενών κυλινδρικής ή άλλης διατομής
7. Προσπάθεια για μαθηματική απόδοση του κλάδου της καμπύλης που ορίζει την ενδιάμεση περιοχή, με συσχέτιση του κλάδου αυτού με τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος.

Βιβλιογραφία

- [1] Abramson, H. N. 1966 The dynamics of liquids in moving containers. NASA Rep. SP 106.
- [2] Abramson, H. N., Bass, R. L., Faltinsen, O.M. & Olsen, H. A. 1974 Liquid slosh in LNG Carriers. In Tenth Symp. on Naval Hydrodynamics, June 24–28, 1974, Cambridge, Massachusetts. ACR-204, pp. 371–388.
- [3] Aliabadi, S., Johnson, A. & Abedi, J. 2003 Comparison of finite element and pendulum models for simulation of sloshing. *Computers Fluids*. 23, 535–545.
- [4] Arai, M., Cheng, L. Y. & Inoue, Y. 1992a 3D numerical simulation of impact load due to liquid cargo sloshing. *J. Soc. Nav. Arch. Japan*. 171, 177–185.
- [5] Arai, M., Cheng, L. Y. & Inoue, Y. 1993 Numerical simulation of sloshing and swirling in cubic and cylindrical tank. *J. Kansai Soc. Nav. Arch. Japan*. 219, 97– 101.
- [6] Arai, M., Cheng, L. Y., Inoue, Y., Sasaki, H. & Yamagishi, N. 1992b Numerical analysis of liquid sloshing in tanks of FPSO. Proc. Second (1992) Intl Offshore and Polar Conf., San Francisco, USA, 14–19 June 1992, vol. 3, 383–390.
- [7] Bader, G. & Ascher, U. 1987 A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solver. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 8, 483–500.
- [8] Benjamin TB, Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in a vertical periodic motion. *Proc R Soc Lond Ser A* 1954;225:505–15.
- [9] Bredmose H, Brocchini M, Peregrine DH, Thais L. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J Fluid Mech* 2003;490:217–49.

- [10] Bridges, T. J. 1985 On secondary bifurcation of three dimensional standing waves. Tech. Summary Rep. Wisconsin Univ., Madison.
- [11] Bridges, T. J. 1986 On secondary bifurcation of three-dimensional standing waves. *SIAM J. Appl. Maths* 47, 40–59.
- [12] Bridges, T. J. 1987 Secondary bifurcation and change of type for three dimensional standing waves in finite depth. *J. Fluid Mech.* 179, 137–153.
- [13] Bridges, T. J. 1988 Strong internal resonance, $Z_1 Z_2$ symmetry, and multiple periodic solutions. *SIAM J. Math. Anal.* 19, 1015–1031.
- [14] Bryant, P. J. 1989 Nonlinear progressive waves in a circular basin. *J. Fluid Mech.* 205, 453–467.
- [15] Bryant, P. J. & Stiassnie, M. 1994 Different forms for nonlinear standing waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 272, 135–156.
- [16] Bryant, P. J. & Stiassnie, M. 1995 Water waves in a deep square basin. *J. Fluid Mech.* 302, 65–90.
- [17] Celebi, S. M. & Akyildiz, H. 2002 Nonlinear modelling of liquid sloshing in a moving rectangular tank. *Ocean Engng* 29, 1527–1553.
- [18] Chen, L. Y. & Arai, M. 1995 Liquid sloshing in a cubic and a cylindrical tank. Ninth Technical Exchange and Advisory Meeting, July 24–27, 1995, Hiroshima, Japan.
- [19] Faltinsen, O. M. 1974 A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks. *J. Ship. Res.* 18, 224–241.
- [20] Faltinsen, O. M. & Rognebakke, O. F. 2000 Sloshing. Keynote lecture. NAV 2000. Proc. Intl Conf. on Ship and Shipping Research, Venice, 19–22 September, 2000, Italy.
- [21] Faltinsen, O. M., Rognebakke, O. F., Lukovsky, I. A. & Timokha, A. N. 2000 Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth. *J. Fluid Mech.* 407, 201–234.
- [22] Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2001 Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank. *J. Fluid Mech.* 432, 167–200.
- [23] Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2002a Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth. *J. Fluid Mech.* 470, 319–357.

- [24] Faltinsen, O. M. & Timokha, A. N. 2002b Analytically-oriented approaches to two-dimensional fluid sloshing in a rectangular tank (survey). Proc. Insti. Maths Ukrainian Natl. Acad. Sci. "Problems of Analytical Mechanics and its Applications" 44, 321–345.
- [25] Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. Phil Trans R Soc Lond 1831;121:299–340.
- [26] Feng, Z. C. & Senthna, P. R. 1989 Symmetry-breaking bifurcations in resonant surface waves. J. Fluid Mech. 199, 495–518.
- [27] Fultz, D. 1962 An experimental note on finite-amplitude standing gravity waves. J. Fluid Mech. 13, 193–212.
- [28] Frandsen JB. Sloshing motions in the excited tanks. J Comput Phys 2004; 196:53– 87.
- [29] Gavriilyuk, I., Lukovsky, I. A. & Timokha, A. N. 2000 A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank. Hybrid Meth. Engng 2, 463–483.
- [30] Henderson, D. M. & Miles, J. W. 1990 Single-mode Faraday waves in small cylinder. J. Fluid Mech. 213, 95–109.
- [31] Hermann, M. & Ullrich, K. 1992 RWPKV: a software package for continuation and bifurcation problems in two-point boundary value problems. Appl. Math. Lett. 5, 57–61.
- [32] Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N. & Ikeda, T. 2001 Recent advances in liquid sloshing dynamics. Appl. Mech. Res. 54(2), 133–199.
- [33] ISSC 1997 Report of Committee I.2 "Loads". In Proc. 13th Intl Ship and Offshore Structures Congress (ed. T. Moan & S. Berge) Vol. 1, pp. 59–122. Pergamon.
- [34] La Rocca, M., Mele, P. & Armenio, V. 1997 Variational approach to the problem of sloshing in a moving container. J. Theor. Appl. Fluid Mech. 1(4), 280–310.
- [35] La Rocca, M., Sciortino, G. & Boniforti, M. A. 2000 A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container. Fluid Dyn. Res. 27, 23–52.

- [36] Lukovsky, I. A. 1990 Introduction to Nonlinear Dynamics of a Solid Body with a Cavity Including a Liquid. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
- [37] Mikishev, G. I. 1978 Experimental Methods in the Dynamics of Spacecraft. Moscow:Mashinostroenie (in Russian).
- [38] Miles, J. W. 1984a Internally resonant surface waves in circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 149, 1–14.
- [39] Miles, J. W. 1984b Resonantly forced surface waves in circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 149, 15–31.
- [40] Miles, J. W. 1994 Faraday waves: rolls versus squares. *J. Fluid Mech.* 269, 353–371.
- [41] Moiseyev, N. N. & Rumyantsev, V. V. 1968 Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Springer.
- [42] Nagata, M. 1991 Chaotic behaviour of parametrically excited surface waves in square geometry. *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 10, 61–66.
- [43] Narimanov, G. S. 1957 Movement of a tank partly filled by a fluid: the taking into account of non-smallness of amplitude. *Prikl. Mat. Mekh.* 21, 513–524 (in Russian).
- [44] Ockendon, J. R. & Ockendon, H. 1973 Resonant surface waves. *J. Fluid Mech.* 59, 397–413.
- [45] Ockendon, H., Ockendon, J. R. & Waterhouse, D. D. 1996 Multi-mode resonance in fluids. *J. Fluid Mech.* 315, 317–344.
- [46] Perlin, M. & Schultz, W. W. 2000 Capillary effects on surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32, 241–274. [47] Rognebakke, O. F. & Faltinsen, O. M. 2003 Coupling of sloshing and ship motions. *J. Ship Res.*
- [47] Royon, A., Gaudin, E., Cavellier, A. & Hopfinger, E. J. 2002 Sloshing and drop formation conditions in cylindrical liquid propellant tanks. 4th Intl Conf. on Launcher Technology “Space Launcher Liquid Propulsion”, Liege, Belgium, 3–6 December, 2002. Abstracts.
- [48] Sames, P. C., Marcouly, D. & Schellin, T. 2002 Sloshing in rectangular and cylindrical tank. *J. Ship Res.* 46, 186–200.

- [49] Shankar, P. N. & Kidambi, R. 2002 A modal method for finite amplitude, nonlinear sloshing. *Pramana – J. Phy.* 59, 631–651.
- [50] Simonelli, F. & Gollub, J. P. 1989 Surface wave mode interaction: effects of symmetry and degeneracy. *J. Fluid Mech.* 199, 471–494.
- [51] Solaas, F. 1995 Analytical and numerical studies of sloshing in tanks. PhD Thesis, The Norwegian Institute of Technology, Faculty of Marine Technology, Trondheim.
- [52] Spandonidis & Spyrou, Parametric sloshing in a rectangular liquid tank, studied by an adaptive mode ordering method, Master Thesis, National Technical University of Athens, Faculty on Naval Engineering
- [53] Spyrou et al, Prediction potential of the parametric rolling behaviour of a post- panamax containership, *J. Ocean Engineering* 2008; 1235-1244.
- [54] Stolbetsov, V. I. 1967 On oscillations of a fluid in the tank having the shape of rectangular parallelepiped. *Mech. Zhid. i Gaza (Fluid Dyn.)* N 1, 67–76 (in Russian).
- [55] Tomawa, S. & Sueoka, H. 1989 Experimental and numerical studies on sloshing in partially filled tank. *Proc. Fourth Intl Symp. on Practical Design of Ships and Mobile Units*, pp. 57.1–57.8.
- [56] Tsai, W.-T., Yue, D. K.-P. & Yip, K. M. K. 1990 Resonantly excited regular and chaotic motions in a rectangular wave tank. *J. Fluid Mech.* 216, 343–380.
- [57] Waterhouse, D. D. 1994 Resonant sloshing near a critical depth. *J. Fluid Mech.* 281, 313–318.
- [58] Waterhouse, D. D. 1995 Resonant oscillations of gases and liquids in three dimensions. Dphil thesis, Oxford University.
- [59] Wu, G. X., Ma, Q. W. & Taylor, R. E. 1998 Numerical simulation of sloshing waves in 3D tank based on a finite element method. *Appl. Ocean Res.* 20, 337–355.
- [60] Zakharov, V. E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2, 190–194.